- Métodos computacionales:
  Alejandro Segura
  Taller 4
  Fecha de entrega: Viernes 28/05/2021, 11:00 pm

1 Derivada espectral

1. **(10 Puntos)** Demuestre que la transformada de Fourier del operador derivada está dado por:

$$\mathcal{F}(\frac{df(x)}{dx}) = i\omega\mathcal{F}(f(x)) \tag{1}$$

2. **(10 Puntos)** Usando este resultado encontrar la derivada de la función:

$$f(t) = e^{-t^2/25}\cos t, \tag{2}$$

en el intervalo $(-10 \leq t \leq 10)$. Compare su resultado con la definición de derivada dado por el método de diferencias finitas. Use $h = L/N = 0.4$, donde $N = 50$, $L = 20$ y $\omega_0 = 2\pi/L$. El array de frecuencias debe ser ordenado usando `np.fft.fftshift(w)`.

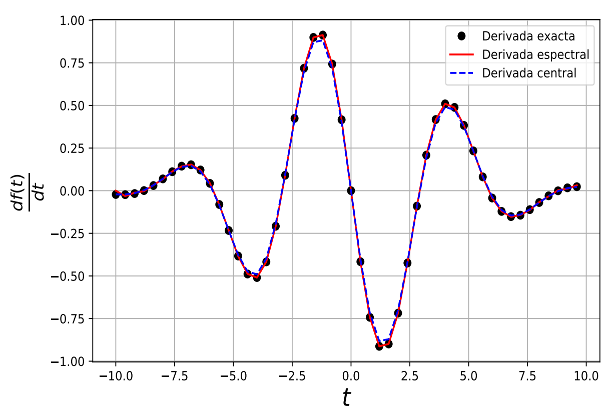

Figure 1: Comparación entre la derivada exacta, la derivada central y la derivada espectral. Note el grado de precisión de la derivación espectral con respecto al valor exacto.

3. **(10 Puntos)** Dada la secuencia $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-2]$ y la respuesta al impulso $h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$ calcule la convolución $y[n]$ de tamaño 4 de ambas secuencias. *Ambas secuencias deben tener la misma dimensión incluyendo ceros adecuadamente.*

   a) Hallando los valores analíticamente usando la definición.

   b) Usando `Python`.

2 Ecuación diferencial no lineal

1. **(10 Puntos)** Resolver analíticamente la ecuación diferencial no lineal:

$$\frac{du}{dt} = u^q,\ t \in [0, 10] \tag{3}$$

La solución exacta es: $u(t) = e^t$ para $q = 1$ y $u(t) = (t(1-q)+1)^{\frac{1}{1-q}}$ para $q > 1$ y $t(1-q)+1 > 0$.

2. **(10 Puntos)** Encontrar la solución numéricamente para algunos valores de $q > 1$.

3. **(10 Puntos)** Resolver analíticamente la ecuación diferencial de Riccati:

$$x^3 y' = x^4 y^2 - 2x^2 y - 1 \tag{4}$$

Una solución particular esta dada por: $y_1 = x^{-2}$. Encuentre numéricamente la solución usando alguno de los métodos vistos en clase con la condición inicial $y(\sqrt{2}) = 0$.

3 Soluciones oscilatorias

1. **(10 Puntos)** Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{du}{dt} = \alpha u, \;\; u(0) = u_0 \tag{5}$$

Muestre que aplicando iterativamente se obtiene:

$$u_k = (1 + \alpha \Delta t)^k u_0 \tag{6}$$

Para el caso donde $\alpha < 0$. Muestre que la solución numérica oscilará si $\Delta t > \frac{-1}{\alpha}$. Ajuste $\alpha = -1$ y muestre las soluciones oscilatorias para $\Delta t = 1.1, 1.5, 1.9 \; s$. Por otro lado, la solución exacta nunca oscila $u(t) = e^{\alpha t}$.

4 Análisis de estabilidad de sistemas dinámicos

1. **(10 Puntos)** Sea el sistema autónomo definido por:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= f(q,p) \\ \dot{p} &= g(q,p) \end{aligned} \tag{7}$$

Los puntos del espacio fase donde el flujo es estacionario se denominan *puntos fijos* tal que: $f(q_0, p_0) = 0$. Muestre que la estabilidad de los estados mecánicos definidos por esos puntos. Conduce a la siguiente ecuación matricial.

$$\frac{dE}{dt} = ME, \tag{8}$$

donde $\mathbf{M}$ se denomina matriz de estabilidad.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f(q_0,p_0)}{\partial q} & \frac{\partial f(q_0,p_0)}{\partial p} \\ \frac{\partial g(q_0,p_0)}{\partial q} & \frac{\partial g(q_0,p_0)}{\partial p} \end{pmatrix}$$

Los auto-vectores constituyen una base local del espacio de fases. Note que si los valores propios son imaginarios puros, la perturbación permanece acotada oscilando alrededor de los puntos fijos. De lo contrario, si los valores propios son reales, las soluciones crecerán o decrecerán con el tiempo.

a) Solucione numéricamente el sistema de ecuaciones.

b) Encuentre la matriz de estabilidad del sistema autónomo lineal:

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y \\ y' &= x + 2y \end{aligned} \tag{9}$$

c) Encuentre numéricamente los valores y vectores propios.

d) Dibuje la trayectoria sobre el espacio fase. ¿Cuál es el punto crítico?

5 Métodos multipaso

1. **(10 Puntos)** Demuestre la formula de iteración para el método de Adams-Bashforth de tres puntos.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}) \tag{10}$$

2. **(10 Puntos)** Demuestre la formula de iteración para el método de Adams-Moulton de tres puntos.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}) \tag{11}$$