# Tarea 2

Trinidad Hernández Norma Verónica
Vilchis Domínguez Miguel Alonso

## 1. Ejercicios

1. **Demostrar si las siguientes funciones son $\theta(n^2)$**

   **Nota 1.** Sea $f(n)$ una función por definición si $f(n) \in \theta(g(n))$ implica que $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ y $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $0 \leq c_1 * g(n) \leq f(n) \leq c_2 * g(n)$.

   *a)* $60n^2 + 5n + 1$
   Por demostrar que $60n^2 + 5n + 1 \in \theta(n^2)$. Por la **Nota 1** implica mostrar las constantes tales que la función queda acotada por $n^2$ al multiplicarla por dichas constantes. Es decir:

$$c_1 * n^2 \leq 60n^2 + 5n + 1 \leq c_2 * n^2 \tag{1}$$

Sii

$$c_1 \leq 60 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \leq c_2$$

Se propone $n_0 = 10$, $c_1 = 59$, $c_2 = 70$ Por lo que

$$59 \leq 60 + \frac{5}{10} + \frac{1}{100} = \frac{6051}{100} \leq 70$$

Con lo que se sigue cumpliendo la desigualdad. Para finalizar la demostración basta con mostrar que la desigualdad se sigue cumpliendo para $n > n_0$ con $n \in \mathbb{N}$.
En efecto, para hacer una buena aproximación de lo que ocurre con $n$ grandes, tomamos el $lim_{n\to\infty}$. Es decir:

$$lim_{n\to\infty}\left(60 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$
$$= lim_{n\to\infty}60 + lim_{n\to\infty}\frac{5}{n} + lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$$
$$= 60 + 0 + 0$$

Con lo que, se sigue cumpliendo la desigualdad (1)

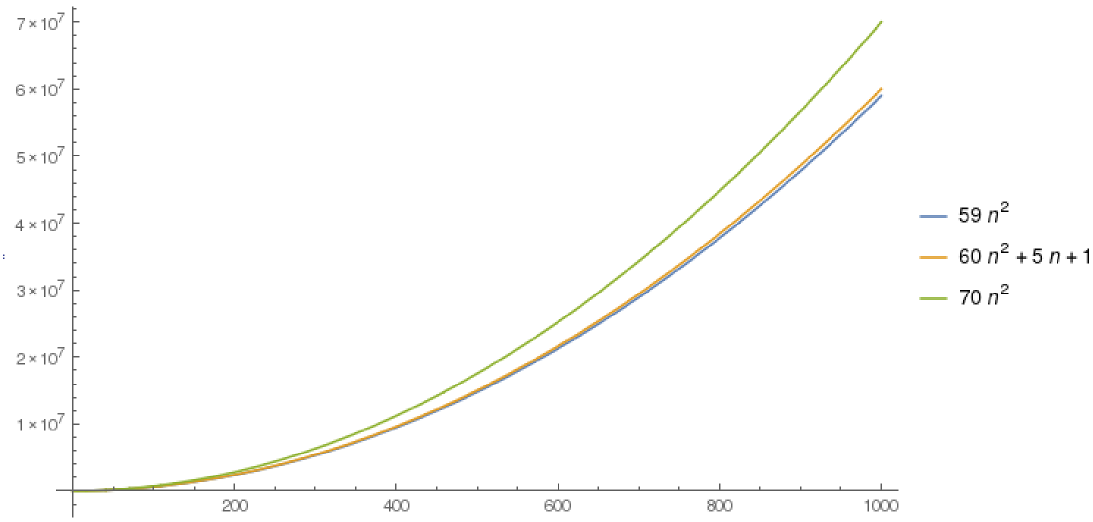


Figura 1: Gráfica que muestra la comparación entre las funciones

*b*) $2n^2 - 16n + 35$
Siguendo un procedimiento parecido al inciso a, lo que haremos para mostrar que $2n^2 - 16n + 35 \in \theta(n^2)$ será utilizar la definición que se dio en la **Nota 1**, por lo que:

$$c_1 * n^2 \leq 2n^2 - 16n + 35 \leq c_2 * n^2 \tag{2}$$

Sii

$$c_1 \leq 2 - \frac{16}{n} + \frac{35}{n^2} \leq c_2$$

Se propone $n_0 = 16$, $c_1 = 1$ y $c_2 = 3$ obteniendo:

$$1 \leq 2 - \frac{16}{10} + \frac{35}{256} = \frac{281}{256} \leq 3$$

Tomando el límite cuando $n$ tiende a infinito, para mostrar que la desigualdad se cumple para $n_0 < n \in \mathbb{N}$

$$lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{16}{n} + \frac{35}{n^2}\right)$$
$$= lim_{n\to\infty}2 - lim_{n\to\infty}\frac{16}{n} + lim_{n\to\infty}\frac{35}{n^2}$$
$$= 2 - 0 + 0$$

Con lo que se conserva la desigualdad (2)

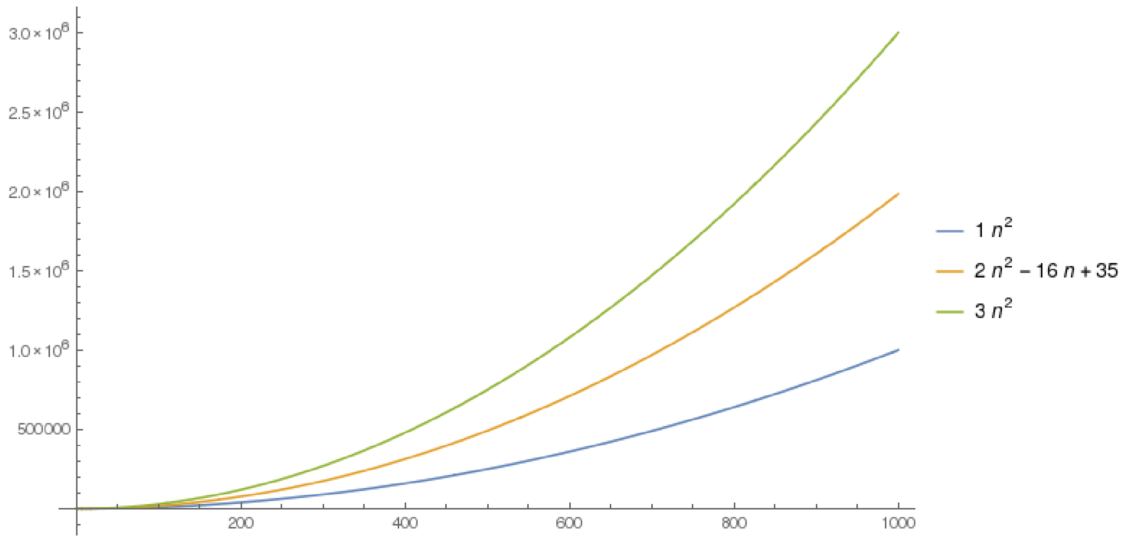


Figura 2: Gráfica que muestra la comparación entre las funciones

*c*) $3n^2 + 2 * n\ ln\ n$ Por demostrar que $3n^2 + 2 * n\ ln\ n \in \theta(n^2)$, en efecto:

$$c_1 * n^2 \leq 3n^2 + 2 * n\ ln\ n \leq c_2 * n^2 \tag{3}$$

Sii

$$c_1 \leq 3 + \frac{2 *\ ln\ n}{n} \leq c_2$$

Si proponemos $n_0 = 128$, $c_1 = 2$ y $c_2 = 4$ obtenemos:

$$2 \leq 3 + \frac{2 *\ ln\ 128}{128} = 3 + \frac{7}{64} = \frac{199}{64} \leq 4$$

Para demostrar que la desigualdad (3) se cumple para $n_0 < n \in \mathbb{N}$ tomamos $lim_{n\to\infty}$:

$$lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{2 *\ ln\ n}{n}\right)$$

$$= 3 + lim_{n\to\infty}\frac{2 *\ ln\ n}{n}$$

$$= 3 + 0$$

Con lo que la desigualdad (3) se conserva.

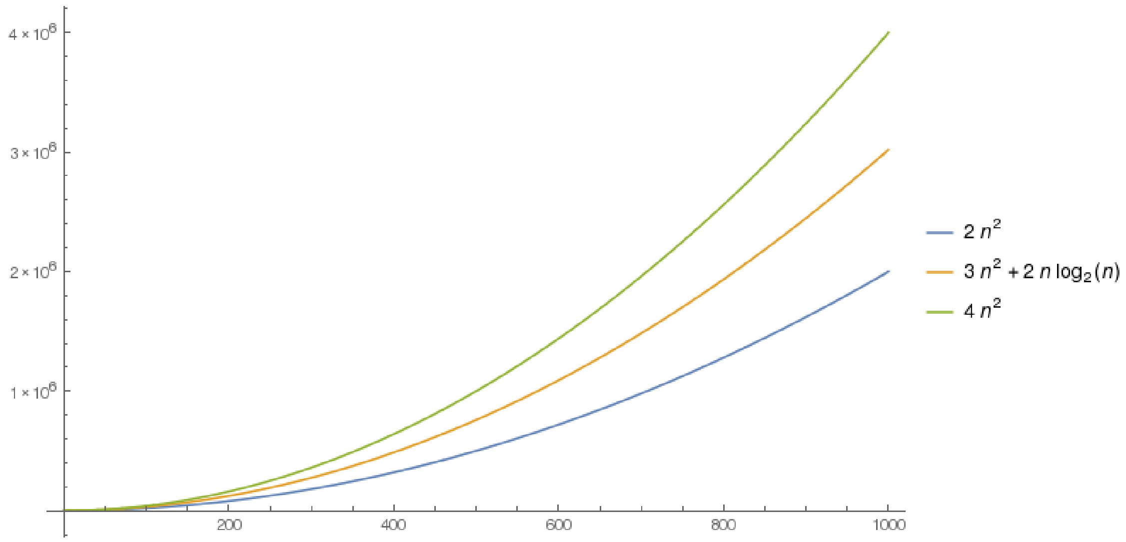


Figura 3: Gráfica que muestra la comparación entre las funciones

*d)* $2 + 4 + 6 + ... + 2m$ Si hacemos $n = \frac{m}{2}$ entonces podemos expresar la suma de la siguiente manera $2 * (1 + 2 + ... + n)$, lo cual es la suma de los primeros $n$ naturales, con lo que queda representado por

$$2 * \left( \frac{(n) * (n+1)}{2} \right) = n^2 + n$$

Por lo que el problema se reduce a demostrar que $n^2 + n \in \theta(n^2)$, es decir:

$$c_1 * n^2 \leq n^2 + n \leq c_2 * n^2 \tag{4}$$

Sii

$$c_1 \leq 1 + \frac{1}{n} \leq c_2$$

Si tomamos $n_0 = 10$, $c_1 = 1$ y $c_2 = 2$ con lo que:

$$1 \leq 1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10} \leq 2$$

Tomando el límite cuando $n$ tiende a infinito, para demostrar que la desigualdad se sigue cumpliendo para $n_0 < n \in \mathbb{N}$

$$lim_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{n}$$

$$= lim_{n \to \infty} 1 + lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}$$

$$= 1 + 0$$

Con lo que la desigualdad (4) se sigue conservando.

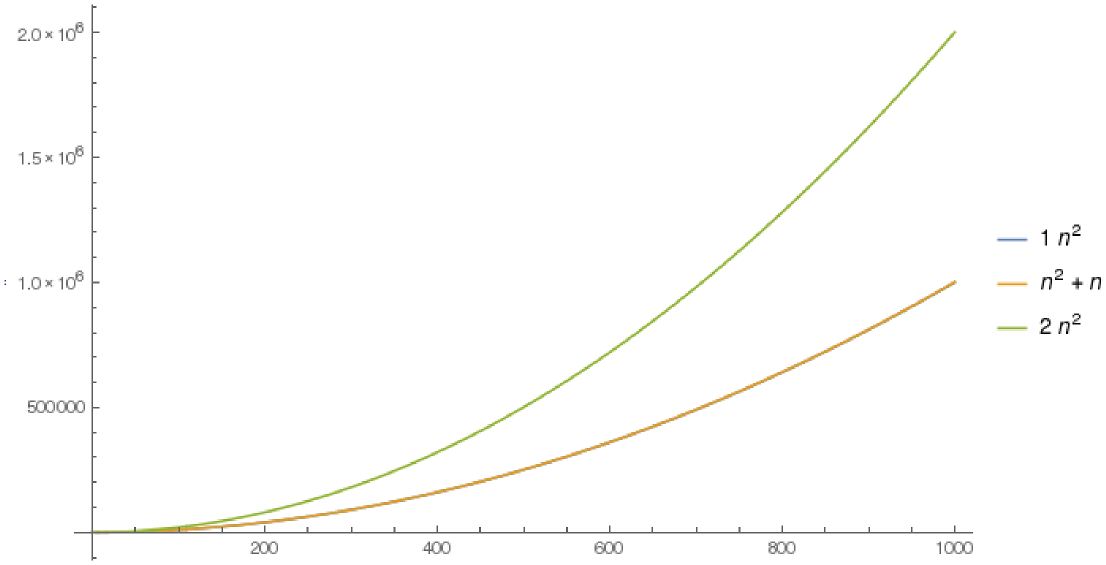


Figura 4: Gráfica que muestra la comparación entre las funciones

*e)* 1. $for\ i = 1\ to\ n$
2. $\quad for\ j = 1\ to\ i$
3. $\qquad for\ k = 1\ to\ i$
4. $\qquad\quad x = x + 1$

El análisis de complejidad del código de arriba puede realizarse de la siguiente manera: La línea 1 toma $c_1 * n$ operaciones, que son los incrementos de i y la comparación booleana, para alguna constante $c_1$, más las asignación inicial la cual es despreciable debido a que se trata de una constante.

En la línea 2, la cantidad de operaciones que se van a realizar son $\sum_{j=1}^{i} c_2 * j$ para alguna constante $c_2$, note que $c_2 * \sum_{j=1}^{i} j = c_2 * \left(\frac{n*(n+1)}{2}\right)$

Para la línea 3, lo que tenemos es $\sum_{k=1}^{i} c_3 * k^2$, para alguna constante $c_3$,debido al for de la línea 2 y al propio for de la línea 3, es decir, $c_3 \sum_{k=1}^{i} k^2 = c_3 * \left(\frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}\right)$

Básicamente para la línea 4, lo que tenemos es la misma complejidad que la línea 3, diferido por una constante. i.e. $c_4 * \left(\frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}\right)$

Por lo que la complejidad del código es:

$$c_1 * n + c_2 * \left(\frac{n * (n+1)}{2}\right) + c_3 * \left(\frac{n * (n+1) * (2n+1)}{6}\right) + c_4 * \left(\frac{n * (n+1) * (2n+1)}{6}\right)$$

Multiplicando por 12 y desarrollando obtenemos:

$$c_1' * n + c_2' * \left(n^2 + n)\right) + c_3' * \left(n + 3n^2 + 2n^3\right) = c_3' * 2n^3 + c_2' * n^2 + c_1' * n + c_0 * n$$

Basta notar que no se cumple $\theta(n^3) \notin \theta(n^2)$, supongamos que se cumple implica que $n < c_n$ para alguna constante $c_n$, sin embargo siempre se puede dar una n mayor a la constante establecida, y si consideramos la **Nota 1**, implicaría que no podemos encontrar el $n_0$ tal que $n_0 < n \in \mathbb{N}$ que cumpla con la proposición.

Por lo tanto, el código no se encuentra en el orden de $\theta(n^2)$