Tarea 2

Trinidad Hernández Norma Verónica
Vilchis Domínguez Miguel Alonso

1. Ejercicios

1. **Demostrar si las siguientes funciones son $\theta(n^2)$**

Nota 1. Sea $f(n)$ una función por definición si $f(n) \in \theta(g(n))$ implica que $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ y $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $0 \leq c_1 * g(n) \leq f(n) \leq c_2 * g(n)$.

a) $60n^2 + 5n + 1$
Por demostrar que $60n^2 + 5n + 1 \in \theta(n^2)$. Por la **Nota 1** implica mostrar las constantes tales que la función queda acotada por n^2 al multiplicarla por dichas constantes. Es decir:

$$c_1 * n^2 \leq 60n^2 + 5n + 1 \leq c_2 * n^2 \tag{1}$$

Sii

$$c_1 \leq 60 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \leq c_2$$

Se propone $n_0 = 10$, $c_1 = 59$, $c_2 = 70$ Por lo que

$$59 \leq 60 + \frac{5}{10} + \frac{1}{100} = \frac{6051}{100} \leq 70$$

Con lo que se sigue cumpliendo la desigualdad. Para finalizar la demostración basta con mostrar que la desigualdad se sigue cumpliendo para $n > n_0$ con $n \in \mathbb{N}$.
En efecto, para hacer una buena aproximación de lo que ocurre con n grandes, tomamos el $lim_{n\to\infty}$. Es decir:

$$lim_{n\to\infty}(60 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2})$$
$$= lim_{n\to\infty}60 + lim_{n\to\infty}\frac{5}{n} + lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$$
$$= 60 + 0 + 0$$

Con lo que, se sigue cumpliendo la desigualdad (1)

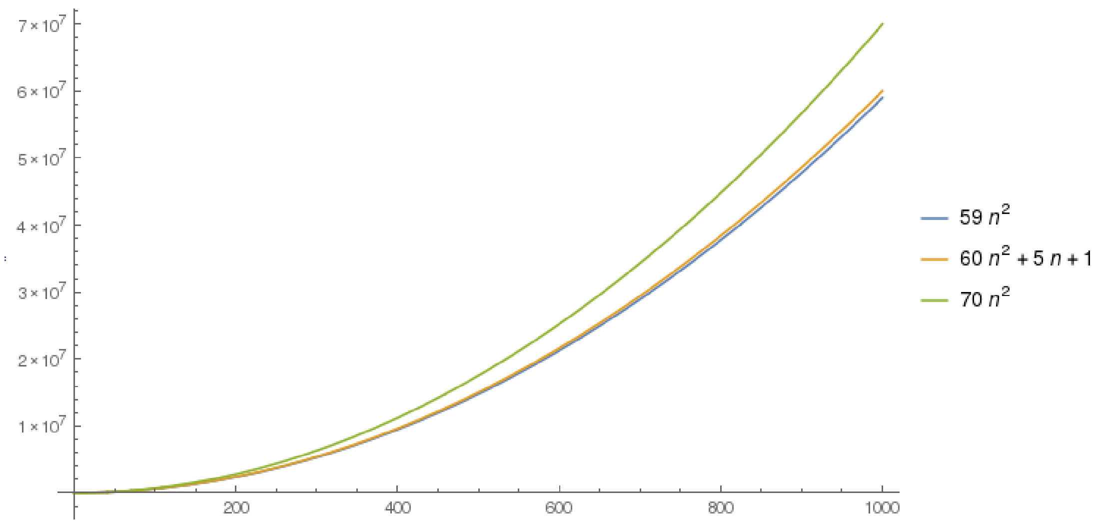

Figura 1: Gráfica que muestra la comparación entre las funciones

b) $2n^2 - 16n + 35$
Siguendo un procedimiento parecido al inciso a, lo que haremos para mostrar que $2n^2 - 16n + 35 \in \theta(n^2)$ será utilizar la definición que se dio en la **Nota 1**, por lo que:

$$c_1 * n^2 \leq 2n^2 - 16n + 35 \leq c_2 * n^2 \tag{2}$$

Sii

$$c_1 \leq 2 - \frac{16}{n} + \frac{35}{n^2} \leq c_2$$

Se propone $n_0 = 16$, $c_1 = 1$ y $c_2 = 3$ obteniendo:x

$$1 \leq 2 - \frac{16}{10} + \frac{35}{256} = \frac{281}{256} \leq 3$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito, para mostrar que la desigualdad se cumple para $n_0 < n \in \mathbb{N}$

$$lim_{n\to\infty} 2 - \frac{16}{n} + \frac{35}{n^2}$$
$$= lim_{n\to\infty} 2 - lim_{n\to\infty}\frac{16}{n} + lim_{n\to\infty}\frac{35}{n^2}$$
$$= 2 - 0 + 0$$

Con lo que se conserva la desigualdad (2)

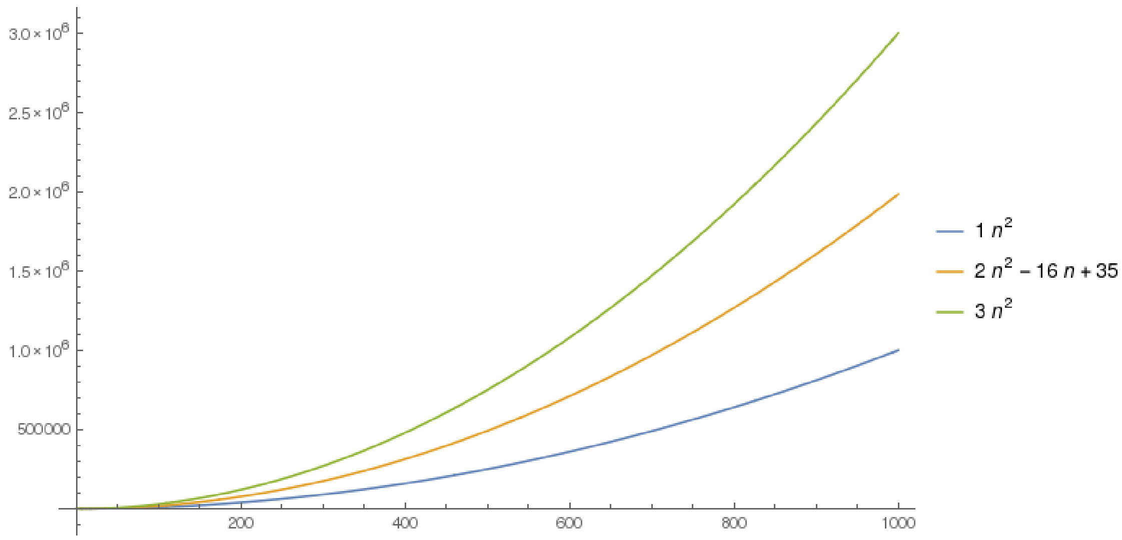

Figura 2: Gráfica que muestra la comparación entre las funciones

c) $3n^2 + 2 * n\ ln\ n$ Por demostrar que $3n^2 + 2 * n\ ln\ n \in \theta(n^2)$, en efecto:

$$c_1 * n^2 \leq 3n^2 + 2 * n\ ln\ n \leq c_2 * n^2 \tag{3}$$

Sii

$$c_1 \leq 3 + \frac{2 * \ ln\ n}{n} \leq c_2$$

Si proponemos $n_0 = 128$, $c_1 = 2$ y $c_2 = 4$ obtenemos:

$$2 \leq 3 + \frac{2 * \ ln\ 128}{128} = 3 + \frac{7}{64} = \frac{199}{64} \leq 4$$

Para demostrar que la desigualdad (3) se cumple para $n_0 < n \in \mathbb{N}$ tomamos $lim_{n\to\infty}$:

$$lim_{n\to\infty} 3 + \frac{2 * \ ln\ n}{n}$$

$$= 3 + lim_{n\to\infty}\frac{2 * \ ln\ n}{n}$$

$$= 3 + 0$$

Con lo que la desigualdad (3) se conserva.

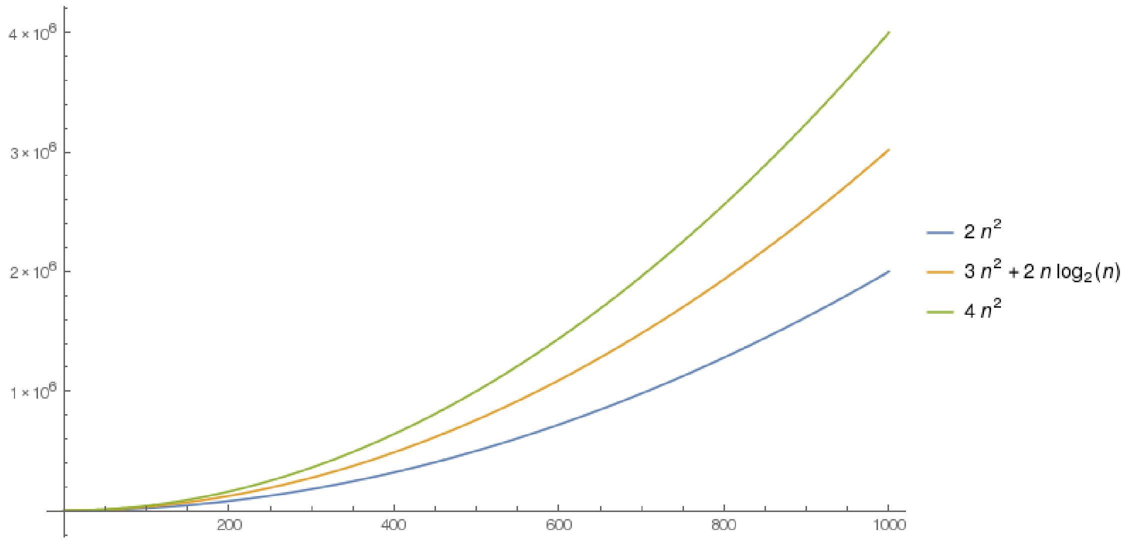

Figura 3: Gráfica que muestra la comparación entre las funciones

d) $2 + 4 + 6 + ... + 2n$

e) $For\ i = 1\ to\ n$

$.\quad For\ j = 1 to i$

$.\qquad For\ x = 1 to i$

$.\qquad\quad x = x + 1$