

Tarea 2

Trinidad Hernández Norma Verónica
Vilchis Domínguez Miguel Alonso

1. Ejercicios

1. Demostrar si las siguientes funciones son $\theta(n^2)$

Nota 1. Sea $f(n)$ una función por definición si $f(n) \in \theta(g(n))$ implica que $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ y $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $0 \leq c_1 * g(n) \leq f(n) \leq c_2 * g(n)$.

a) $60n^2 + 5n + 1$

Por demostrar que $60n^2 + 5n + 1 \in \theta(n^2)$. Por la **Nota 1** implica mostrar las constantes tales que la función queda acotada por n^2 al multiplicarla por dichas constantes. Es decir:

$$c_1 * n^2 \leq 60n^2 + 5n + 1 \leq c_2 * n^2 \quad (1)$$

Sii

$$c_1 \leq 60 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \leq c_2$$

Se propone $n_0 = 10$, $c_1 = 59$, $c_2 = 70$ Por lo que

$$59 \leq 60 + \frac{5}{10} + \frac{1}{100} = \frac{6051}{100} \leq 70$$

Con lo que se sigue cumpliendo la desigualdad. Para finalizar la demostración basta con mostrar que la desigualdad se sigue cumpliendo para $n > n_0$ con $n \in \mathbb{N}$.

En efecto, para hacer una buena aproximación de lo que ocurre con n grandes, tomamos el $\lim_{n \rightarrow \infty}$. Es decir:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(60 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 60 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \\ &= 60 + 0 + 0 \end{aligned}$$

Con lo que, se sigue cumpliendo la desigualdad (1)

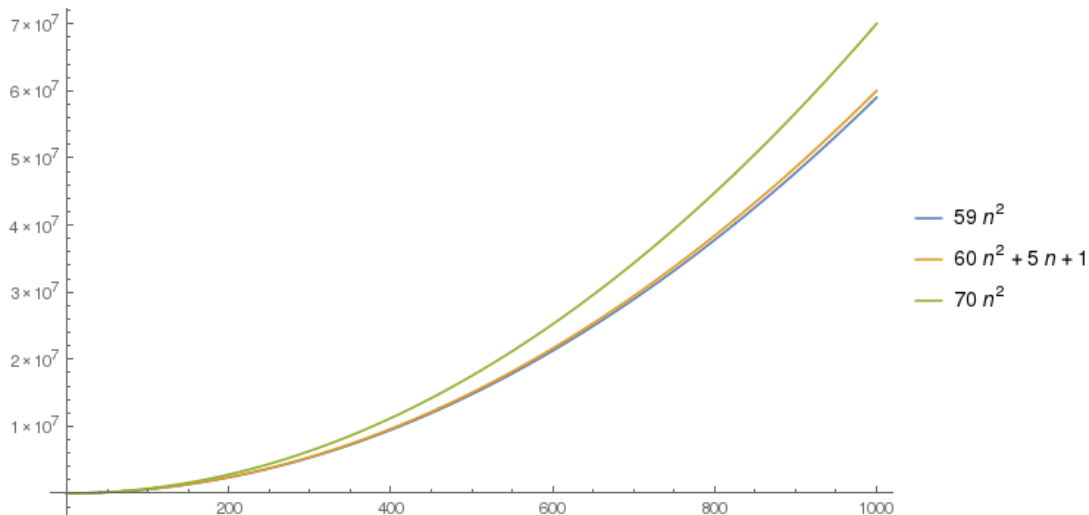


Figura 1: Gráfica que muestra la comparación entre las funciones

b) $2n^2 - 16n + 35$

Siguendo un procedimiento parecido al inciso a, lo que haremos para mostrar que $2n^2 - 16n + 35 \in \theta(n^2)$ será utilizar la definición que se dio en la **Nota 1**, por lo que:

$$c_1 * n^2 \leq 2n^2 - 16n + 35 \leq c_2 * n^2 \quad (2)$$

Sii

$$c_1 \leq 2 - \frac{16}{n} + \frac{35}{n^2} \leq c_2$$

Se propone $n_0 = 16$, $c_1 = 1$ y $c_2 = 3$ obteniendo:

$$1 \leq 2 - \frac{16}{10} + \frac{35}{256} = \frac{281}{256} \leq 3$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito, para mostrar que la desigualdad se cumple para $n_0 < n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{16}{n} + \frac{35}{n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{35}{n^2} \\ &= 2 - 0 + 0 \end{aligned}$$

Con lo que se conserva la desigualdad (2)

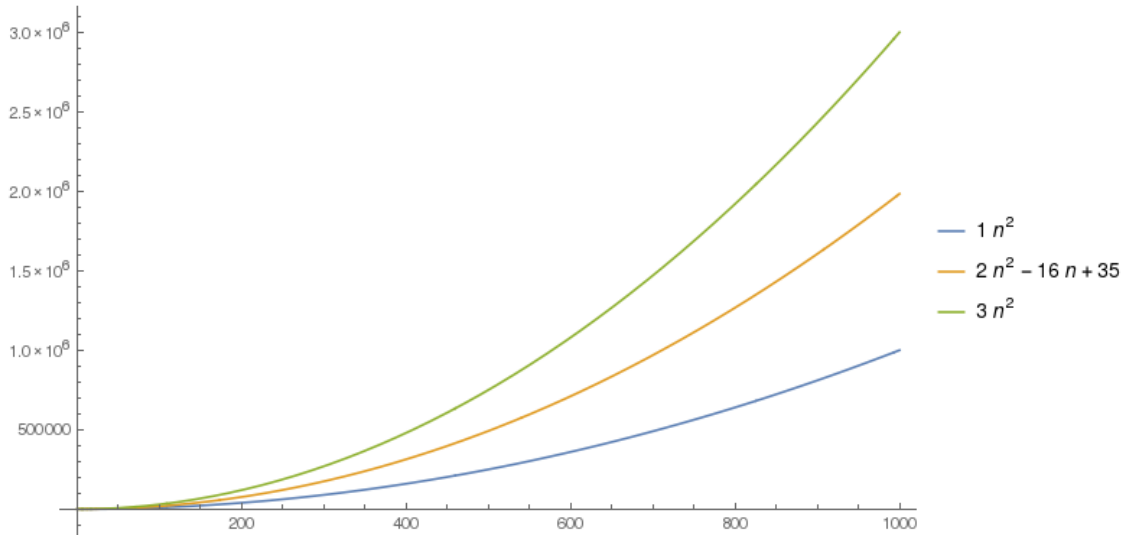


Figura 2: Gráfica que muestra la comparación entre las funciones

c) $3n^2 + 2 * n \ln n$ Por demostrar que $3n^2 + 2 * n \ln n \in \theta(n^2)$, en efecto:

$$c_1 * n^2 \leq 3n^2 + 2 * n \ln n \leq c_2 * n^2 \quad (3)$$

Sii

$$c_1 \leq 3 + \frac{2 * \ln n}{n} \leq c_2$$

Si proponemos $n_0 = 128$, $c_1 = 2$ y $c_2 = 4$ obtenemos:

$$2 \leq 3 + \frac{2 * \ln 128}{128} = 3 + \frac{7}{64} = \frac{199}{64} \leq 4$$

Para demostrar que la desigualdad (3) se cumple para $n_0 < n \in \mathbb{N}$ tomamos $\lim_{n \rightarrow \infty}$:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2 * \ln n}{n} \right) \\ &= 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 * \ln n}{n} \end{aligned}$$

$$= 3 + 0$$

Con lo que la desigualdad (3) se conserva.

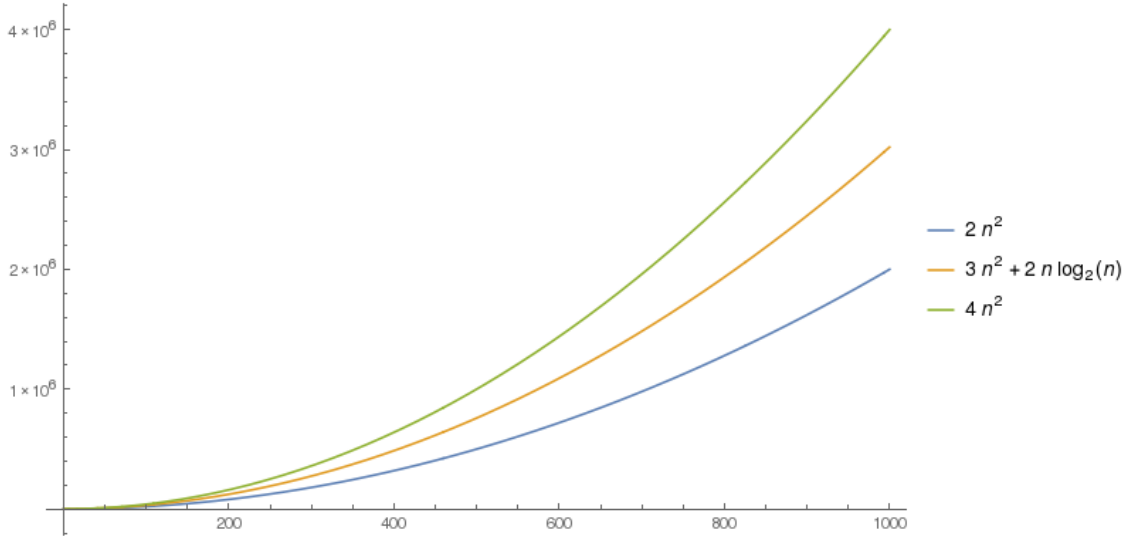


Figura 3: Gráfica que muestra la comparación entre las funciones

- d) $2 + 4 + 6 + \dots + 2m$ Si hacemos $n = \frac{m}{2}$ entonces podemos expresar la suma de la siguiente manera $2 * (1 + 2 + \dots + n)$, lo cual es la suma de los primeros n naturales, con lo que queda representado por

$$2 * \left(\frac{(n) * (n + 1)}{2} \right) = n^2 + n$$

Por lo que el problema se reduce a demostrar que $n^2 + n \in \theta(n^2)$, es decir:

$$c_1 * n^2 \leq n^2 + n \leq c_2 * n^2 \quad (4)$$

Sii

$$c_1 \leq 1 + \frac{1}{n} \leq c_2$$

Si tomamos $n_0 = 10$, $c_1 = 1$ y $c_2 = 2$ con lo que:

$$1 \leq 1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10} \leq 2$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito, para demostrar que la desigualdad se sigue cumpliendo para $n_0 < n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &= 1 + 0 \end{aligned}$$

Con lo que la desigualdad (4) se sigue conservando.

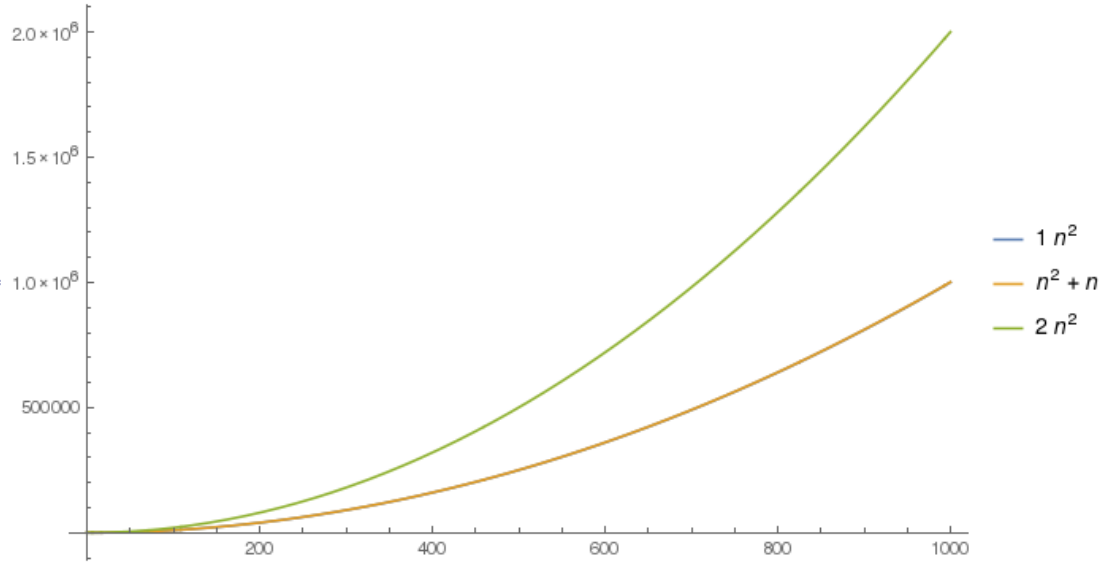


Figura 4: Gráfica que muestra la comparación entre las funciones

- e) 1. *for* $i = 1$ *to* n
 2. *for* $j = 1$ *to* i
 3. *for* $k = 1$ *to* i
 4. $x = x + 1$

El análisis de complejidad del código de arriba puede realizarse de la siguiente manera: La línea 1 toma $c_1 * n$ operaciones, que son los incrementos de i y la comparación booleana, para alguna constante c_1 , más las asignación inicial la cual es despreciable debido a que se trata de una constante.

En la línea 2, la cantidad de operaciones que se van a realizar son $\sum_{j=1}^i c_2 * j$ para alguna constante c_2 , note que $c_2 * \sum_{j=1}^i j = c_2 * \left(\frac{n*(n+1)}{2} \right)$

Para la línea 3, lo que tenemos es $\sum_{k=1}^i c_3 * k^2$, para alguna constante c_3 , debido al *for* de la línea 2 y al propio *for* de la línea 3, es decir, $c_3 \sum_{k=1}^i k^2 = c_3 * \left(\frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6} \right)$

Básicamente para la línea 4, lo que tenemos es la misma complejidad que la línea 3, diferido por una constante. i.e. $c_4 * \left(\frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6} \right)$

Por lo que la complejidad del código es:

$$c_1 * n + c_2 * \left(\frac{n * (n + 1)}{2} \right) + c_3 * \left(\frac{n * (n + 1) * (2n + 1)}{6} \right) + c_4 * \left(\frac{n * (n + 1) * (2n + 1)}{6} \right)$$

Multiplicando por 12 y desarrollando obtenemos:

$$c'_1 * n + c'_2 * (n^2 + n) + c'_3 * (n + 3n^2 + 2n^3) = c'_3 * 2n^3 + c'_2 * n^2 + c'_1 * n + c_0 * n$$

Basta notar que no se cumple $\theta(n^3) \notin \theta(n^2)$, supongamos que se cumple implica que $n < c_n$ para alguna constante c_n , sin embargo siempre se puede dar una n mayor a la constante establecida, y si consideramos la **Nota 1**, implicaría que no podemos encontrar el n_0 tal que $n_0 < n \in \mathbb{N}$ que cumpla con la proposición.

Por lo tanto, el código no se encuentra en el orden de $\theta(n^2)$

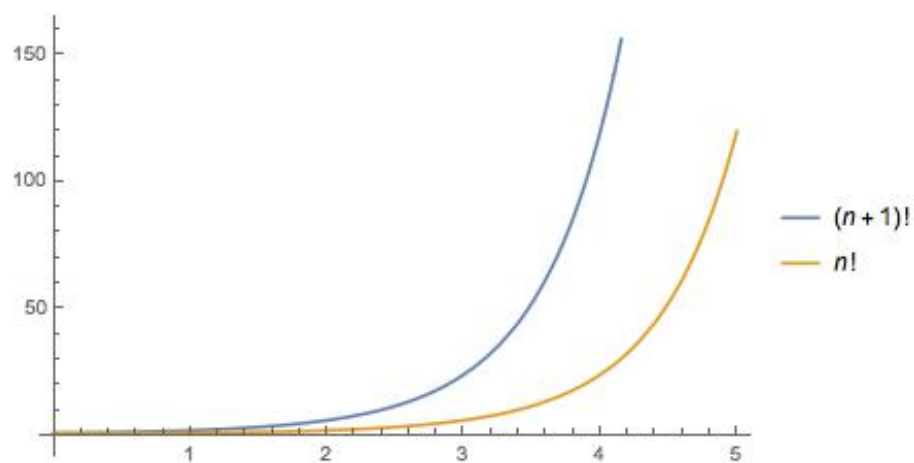
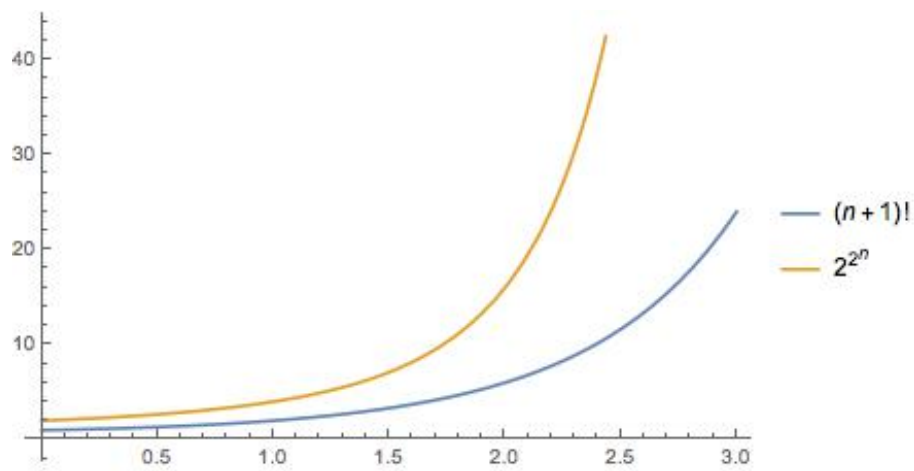
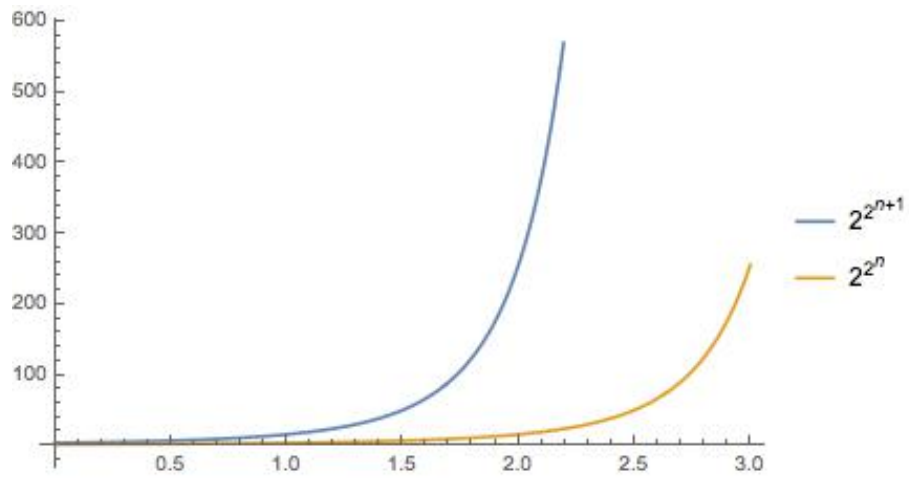
2.- Ordenar funciones por ordenamiento asintótico

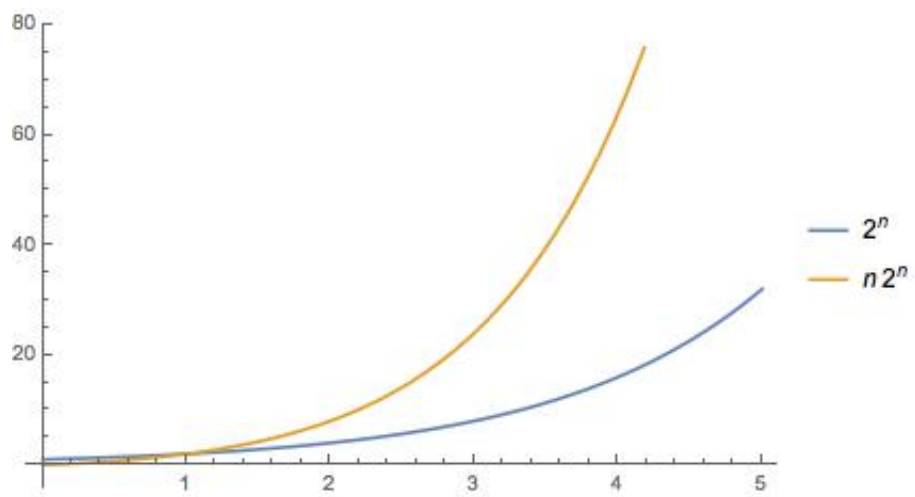
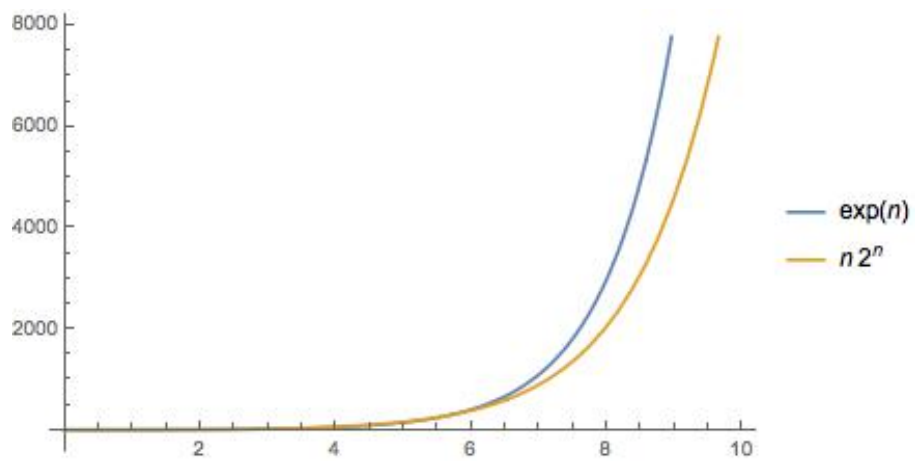
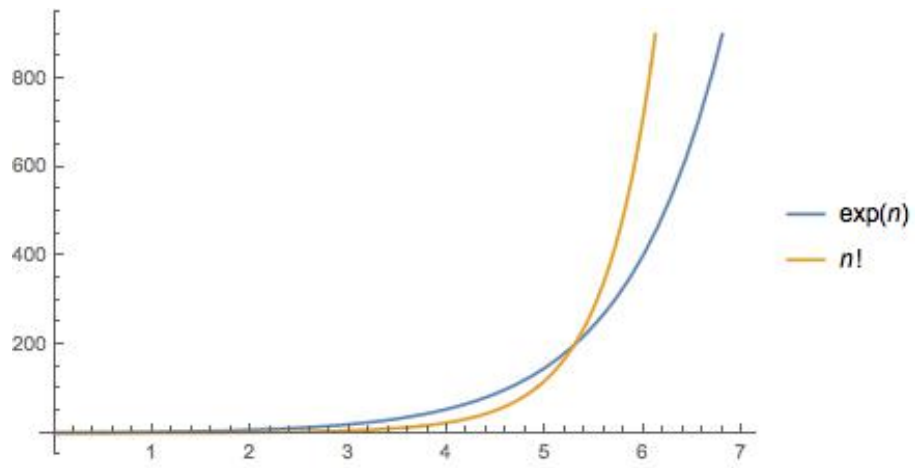
El orden que encontramos fue el siguiente:

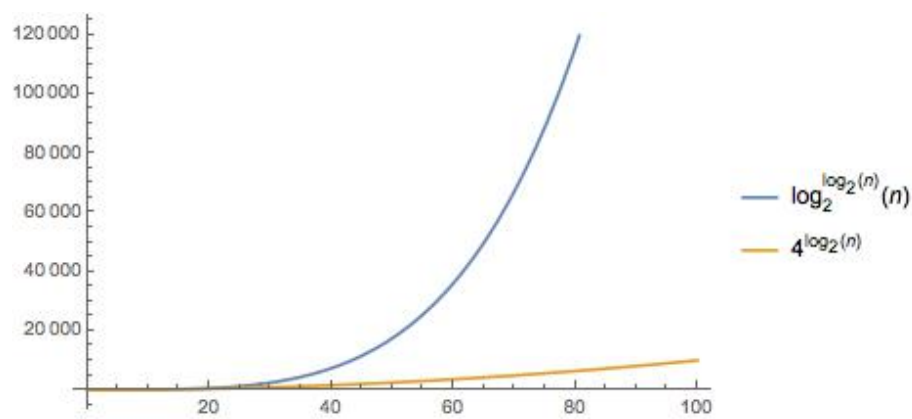
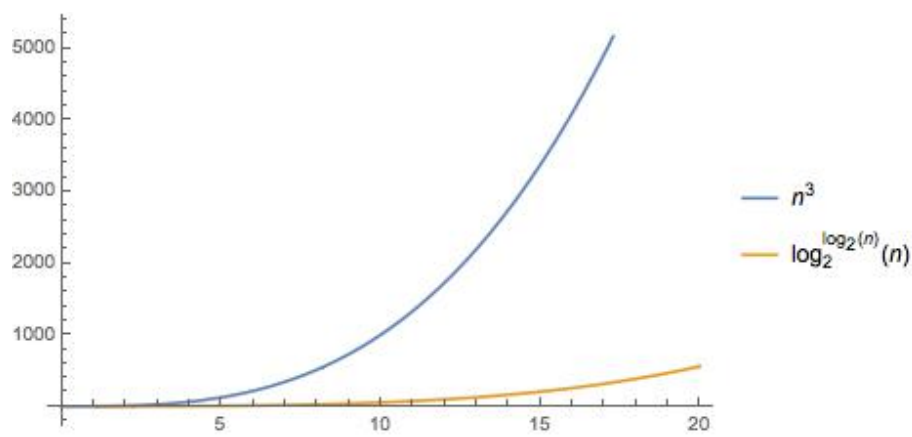
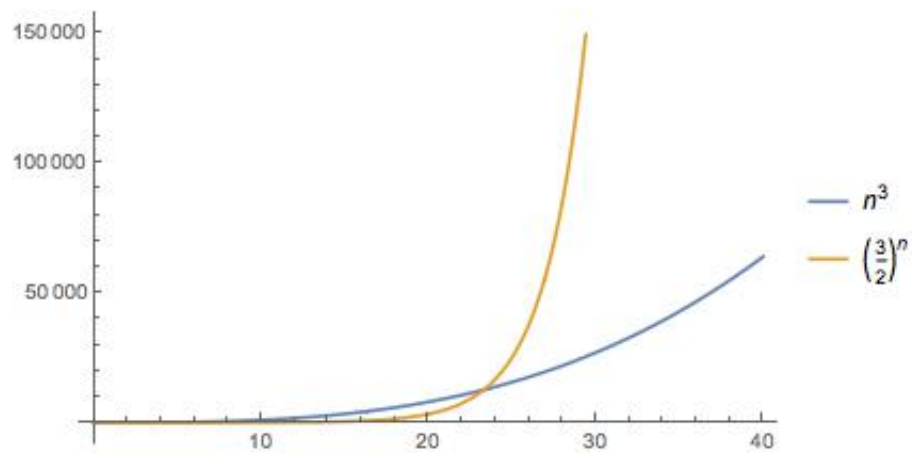
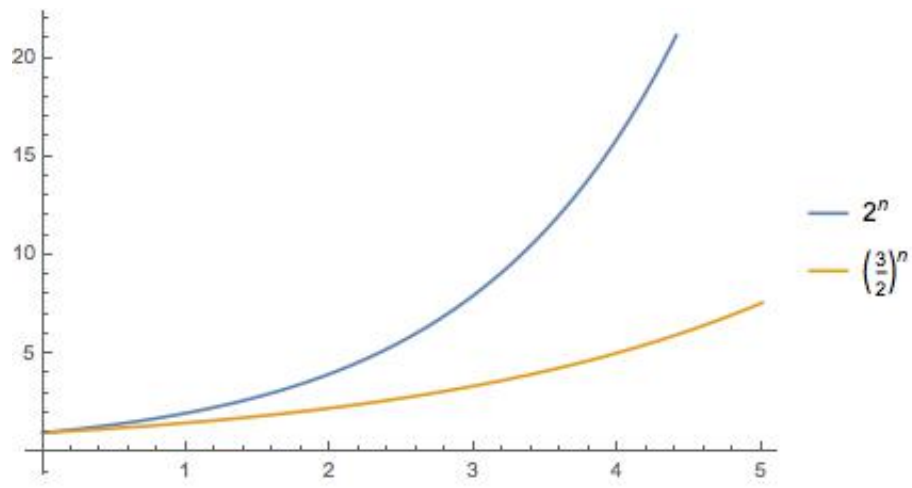
$$2^{2^{n+1}} > 2^{2^n} > (n+1)! > n! > e^n > n2^n > 2^n > \left(\frac{3}{2} \right) > n^3 \\ > \log(n^{\log(n)}) = n^{\log(\log(n))} > 4^{\log(n)} = n^2 > (\log(n))! > n \log(n)$$

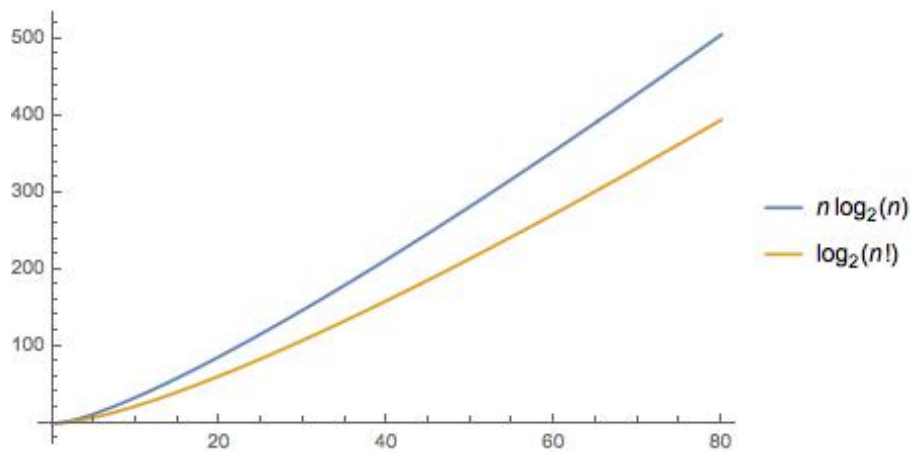
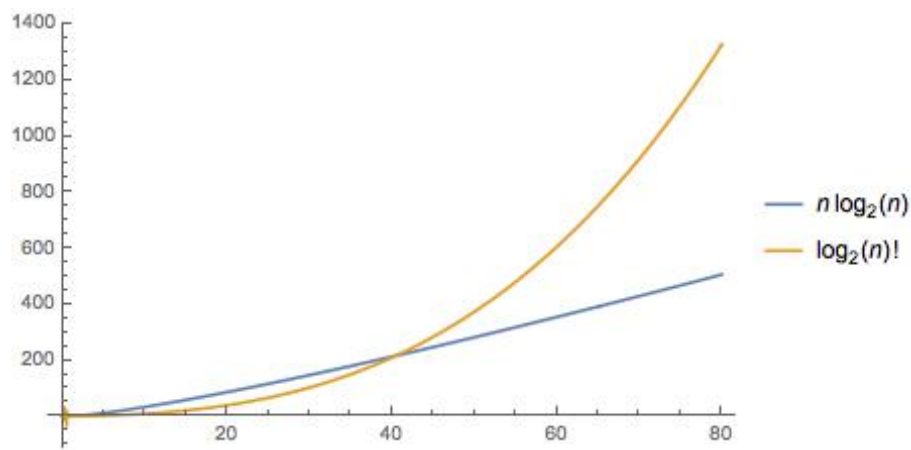
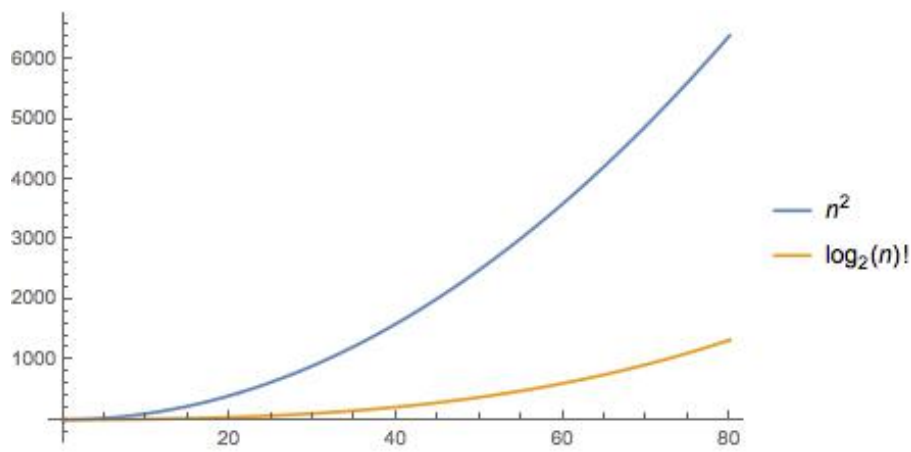
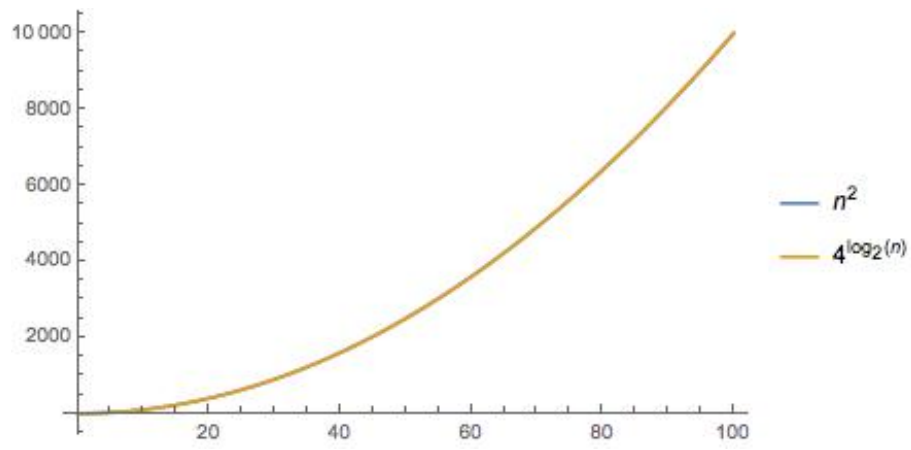
$$\begin{aligned}
& > \log(n!) > 2^{\log(n)} = n > \log^2(n) > \sqrt{2^{\log_2(n)}} > 2\sqrt{2\log(n)} \\
& > \log(n) > 2^{\log^*(n)} > \sqrt{\log_2(n)} > \log^*(n) > \ln(\ln(n)) > \log(\log^*(n)) > n^{\frac{1}{\log(n)}} = 1
\end{aligned}$$

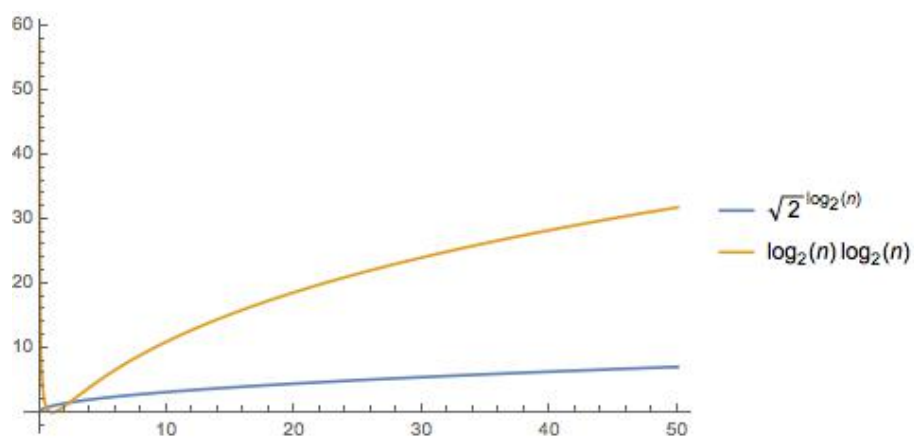
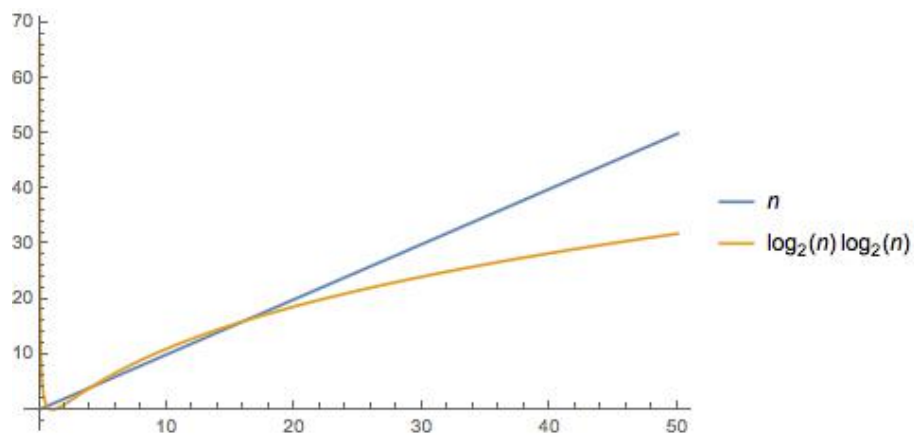
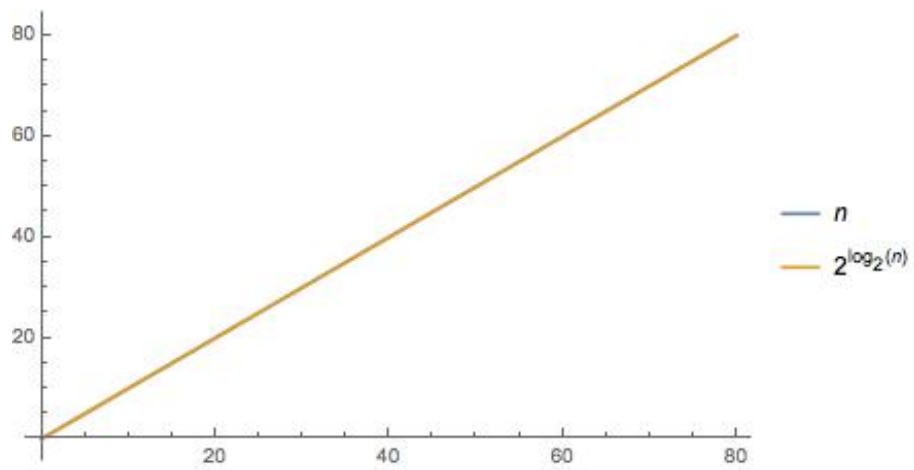
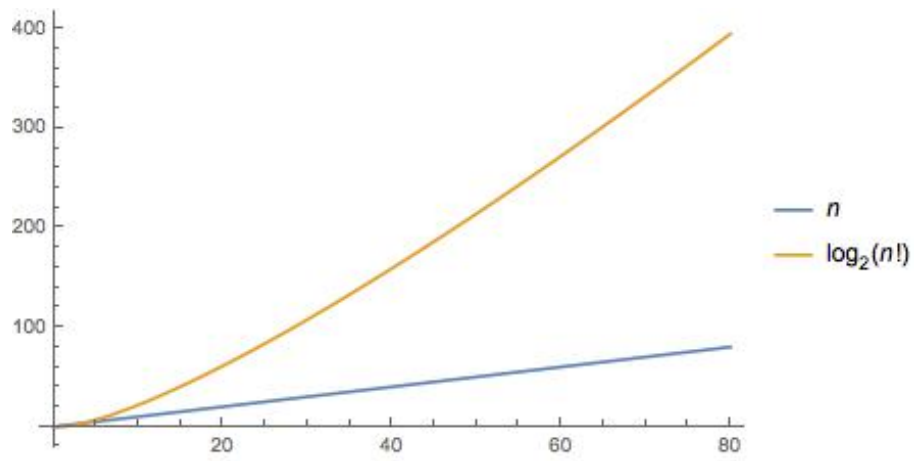
El orden lo obtuvimos por medio de graficación, las gráficas son las siguientes:

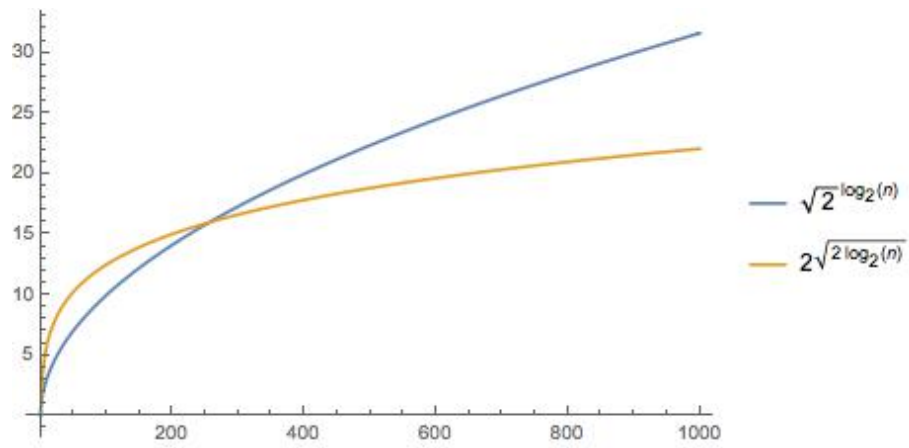












Mostrando las gráficas en conjunto:

