Basics

A संख्या निकाय (NUMBER SYSTEM) :

(i) प्राकृत संख्याएँ(natural Numbers) : -

संख्याएँ 1, 2, 3, 4,.......... आदि प्राकृत संख्याएँ कहलाती है।
प्राकृत संख्याएँ के समुच्चय को N से प्रदर्षित करते है।
N को I^+ या Z^+ से भी प्रदर्षित किया जा सकता है।

N={1, 2, 3, 4,….}

(ii) पूर्ण संख्याएँ (Whole Numbers) : -

प्राकृत संख्याओं में यदि शून्य को मिला दिया जाए तो ये सभी संख्याएँ मिलकर पूर्ण संख्याएँ कहलाती है।
पूर्ण संख्याओं के समुच्चय को W से प्रदर्षित करते है।

W={0, 1, 2,….}

(iii) पूर्णाक (Integers) : -

संख्याएँ .... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ….. पूर्णाक कहलाती हैं। इनके समुच्चय को I या Z से प्रदर्षित करते है।
I (या Z)={.. -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …..}

(a) ऋणात्मक पूर्णांको के समुच्चय को I^- से प्रदर्षित करते है।
I^-={…., -3, -2, -1}
(b) अऋणात्मक पूर्णांको के समुच्चय को W से प्रदर्षित करते है।
(c) अधनात्मक पूर्णांकों के समुच्चय में {…., -3, -2, -1, 0} आते हैं।

नोट : शून्य न तो धनात्मक पूर्णांक है और न ही ऋणात्मक पूर्णांक।

(iv) सम पूर्णांक (Even Inteters) : -

ऐसे पूर्णांक जो 2 से भाज्य होते हे, सम पूर्णाक कहलाते हैं।
जैसे $0, \pm 2, \pm 4, \ldots\ldots$

(v) विषम पूर्णांक (Odd Integers) : -

ऐसे पूर्णांक जो 2 से अभाज्य होते, विषम पूर्णांक कहलाते हैं।
जैसे $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \ldots$

(vi) अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers) : -

ऐसे प्राकृत संख्याएँ जो केवल स्वंय अथवा 1 से ही भाज्य हो, अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं
उदाहरण 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,19, 23, 29, 31 ....

(vii) संयुक्त संख्याएँ (Composite Number) : -

ऐसी प्राकृत संख्याएँ (1 को छोड़कर) जो अभाज्य नहीं है, संयुक्त संख्याएँ कहलाती हैं।

नोट :
(a) '1' न तो अभाज्य संख्या है न ही संयुक्त संख्या है।
(b) '2' ही केवल ऐसी सम संख्या है जो अभाज्य है।
(c) '4' ही सबसे छोटी संयुक्त संख्या है।

(viii) सह–अभाज्य संख्याएँ (Co-prime Numbers) : -

दो प्राकृत संख्याएँ (यह जरूरी नहीं है कि वह अभाज्य ही हों) सह–अभाज्य कहालाती है, यदि उनका म.स.प. इकाई हो।

उदाहरण : (4, 9), (3, 4), (3, 10), (3, 8), (5, 6), (7, 8) आदि।

नोट : (a) दो भिन्न –भिन्न अभाज्य संख्याएँ हमेष ही सह–अभाज्य होती है लेकिन इसका विपरित सत्य नहीं है।

(b) दो क्रमागत प्राकृत संख्याएँ हमेषा सह–अभाज्य होती है।

(ix) युगत अभाज्य संख्याएँ (Twin Prime) :-

यदि दो अभाज्य संख्याओं के मध्य अन्तर दो है तो वे युगल अभाज्य संख्याएँ कहलाती है।

उदाहरण : (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31)

(x) परिमेय संख्याएँ (Rational Numbers) : -

ऐसी संख्याएँ जिन्हे p/q रूप में लिख सकते है, जहाँ p एवं q पूर्णाक है एवं $q \neq 0$, परिमेय संख्याएँ कहलाती है एवं इनके समुच्चय को Q से प्रदर्षित करते है।

अतः $Q = \{\frac{p}{q} : p, q \in I \text{ and } q \neq 0\}$

उदाहरण : $\frac{1}{2}, 2, 0, -5, \frac{22}{7}, 2.5, 0.3333......$ आदि।

नोट : (i) प्रत्येक पूर्णांक संख्या परिमेय संख्या होती है क्योंकि इन्हे p/1 के रूप में लिखा जा सकता है।

(ii) परिमेय ससंख्याओं का दषमलव भाग या तो परिमित होता है या उसकी पुनरावृत्ति होती है।

(xi) अपरिमेय संख्याएँ (Irrational Numbers) : -

ऐसी वास्तविक संख्याएँ जिन्हें p/q रूप में नहीं लिखा जा सके, अपरिमेय संख्या कहलाती है। उनके समुच्चय को Q^c या $\overline{Q}$ द्वारा प्रदर्षित करते है।

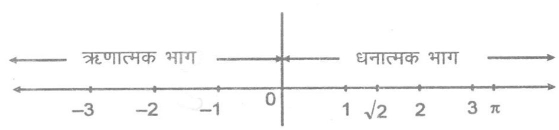
उदाहरण : $\sqrt{2}, 1+\sqrt{3}, e, \pi$ आदि।

(xii) वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers) : -

सभी परिमेय तथा अपरिमेय संख्याएँ, वास्तविक संख्याएँ कहलाती हैं। इनके समुच्चय को R से प्रदर्षित करते है।

अतः $R = Q \cup Q^c$

प्रत्येक वास्तविक संख्या के संगत, संख्या रेखा पर एक बिन्दु होता है। इस संख्या रेखा को वास्तविक रेखा भी कहते है। दूसरे शब्दों में, वास्तविक रेखा का प्रत्येक बिन्दु एक वास्तविक संख्या को दर्षाता है।



वास्तविक रेखा या संख्या रेखा

इस प्रकारर परिभाषित सभी वास्तविक संख्याएँ क्रम गुणधर्म का पालन करती है अर्थात् a और b दो भिन्न–भिन्न वास्तविक संख्याएँ हो, तो a<b या a>b.

नोट :– (a) सभी पूर्णाक परिमेय संख्या होती है परन्तु इसका विपरित सत्य नहीं है।

(b) अपरिमेय संख्या का ऋणात्मक भी अपरिमेय संख्या होती है।

(c) एक परिमेय और एक अपरिमेय संख्या का योग या व्यवकलन सदैव एक अपरिमेय संख्या होती है।
उदाहरण : $2+\sqrt{3}, 3-\sqrt{5}$

(d) एक अषून्य परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल या भागफल सदैव एक अपरिमेय संख्या होती है।

(e) यदि $a \in Q$ एवं $b \in Q$ हो, तो गुणा ab एक परिमेय संख्या होगा केवल यदि a=0

(f) दो अपरिमेय संख्याओं का योग, व्यवकलन, गुणनफल और भागफल एक परिमेय या अपरिमेय संख्या हो सकती है।

(xiii) सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Numbers) : -

वे सभी संख्याओं जो a+ib के रूप में निरूपित की जा सकती है, सम्मिश्र संख्याएँ कहलाती हैं। जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ एवं $i=\sqrt{-1}$ है। सम्मिश्र संख्या को सामान्यतः z से प्रदर्षित किया जाता है और सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय को C से निरूपित करते है।

नोट : $N \subset W \subset I \subset Q \subset R \subset C$.

(a) **संयुग्मी सम्मिश्र संख्या** : यदि z=a+ib, जहाँ $a,b \in R$, एक सम्मिश्र संख्या हो, तो z की संयुग्मी सम्मिश्र संख्या को $\overline{z}$ से प्रदर्षित करते हैं तथा $\overline{z}=a-ib$

B. कुछ महत्त्वपूर्ण सूत्र :

(i) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad =(a-b)^2+4ab$

(ii) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \qquad =(a+b)^2-4ab$

(iii) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(iv) $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

(v) $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

(vi) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=(a+b)(a^2+b^2-ab)$

(vii) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)=(a-b)(a^2+b^2+ab)$

(viii) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$$=a^2+b^2+c^2+2abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

(ix) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\psi\,[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

(x) $a^2+b^2+c^2-3abc=(a+b+c)(\,a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$$=\psi(a+b+c)\,[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

(xi) $a^4-b^4=(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$

(xii) $a^4+a^2+1=(a^2+1)^2-a^2=(1+a+a^2)\,(1-a+a^2)$

C. भजकता के नियत (Divisibility Test) : -

(i) कोई संख्या 2 से भाज्य कहलाती है यदि और केवल यदि उसका इकाई का अंक 2 से विभाजित हो।

(ii) कोई संख्या 3 से भाज्य कहलाती है यदि और केवल यदि उसके सभी अंको का योग 3 से विभाजित हो।

(iii) कोई संख्या 4 से भाज्य कहलाती है यदि और केवल यदि उसके अन्तिम दो अंक 4 ये विभाजित हो।

(iv) कोई संख्या 5 से भाज्य कहलाती है यदि और केवल यदि उसका इकाई का अंक 0 या 5 हो।

(v) कोई संख्या 6 से भाज्य कहलाती है यदि और केवल यदि वह संख्या 2 और 3 दोनों से भाज्य हो।

(vi) कोई संख्या 8 से भाज्य कहलाती है यदि और केवल यदि उसके अन्तिम 3 अंक 8 से विभाजित हो।

(vii) कोई संख्या 9 से भाज्य कहलाती ह यदि और केवल यदि उसके सभी अंको का योग 9 से विभाजित हो।

(viii) कोई संख्या 10 से भाज्य कहलाती है यदि और केवल यदि उसका इकाई का अंक 0 हो।

(ix) कोई संख्या 11 से भाज्य कहलाती है यदि और केवल यदि सम स्थानों पर आने वाले अंको के योग और विषम स्थानों पर आने वाले अंको के योग का अन्तर 11 का गुणज हो।
उदाहरणतः **1298, 1221, 123321, 12344321, 1234554321, 123456654321**

D. **घातांक (Indices) : -**

यदि a कोई अशून्य वास्तविक या काल्पनिक संख्या हो और m घनात्मक पूर्णाक है, तो a^m=a.a.a. ……a(m बार)
यहाँ 'a' को आधार और 'm' को घात कहते है।

(1) **घातांक नियत (Law of indices) :**

(i) $a^0=1$, $(a\neq 0)$

(ii) $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$, $(a\neq 0)$

(iii) $a^{m+n}=a^m.a^n$, जहाँ m एवं n वास्तविक संख्याएँ है।

(iv) $a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}$, जहाँ m एवं n वास्तविक संख्याएँ है, $(a\neq 0)$

(v) $(a^m)^n=a^{mn}$

(vi) $a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$

E. **(1) अनुपात (Ratio)**

(i) यदि A और B समान प्रकार की दो राषियाँ है तो उनका अनुपात A : B होता है, जिसे $\frac{A}{B}$ से भी प्रदर्षित किया जाता है।

(ii) एक अनुपात को कई तरीकों से प्रदर्षित किया जा सकता है जेस $\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}=\frac{na}{nb}=$...... m,n,…. अषून्य संख्याएँ हैं।

(iii) दो या दो से अधिक अनुपातों की तुलना करने के लिए उनके हर को समान बनाया जाता है।

(2) **समानुपात (Proportion) : -**

जब दो अनुपात a : b और c : d समान हो, तो चारों राषियाँ a,b,c,d समानुपाती कहलाती है। यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ हो, तो a:b=c:d या a:b::c:d

(i) a और d को बाह्य पद कहते हैं तथा b और c मध्य पद कहलाते हैं।

(ii) समानुपात का महत्त्वपूर्ण गुण :– बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

(iii) यदि a : b=c : d हो, तो
b : a=d : c (प्रतिलोमानुपात)

(iv) यदि a : b =c : d हो, तो
a : c =b : d (एकान्तरानुपात)

(v) यदि a : b =c : d हो, तो
$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (योगानुपात)

(vi) यदि a : b =c : d हो, तो
$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (अन्तरानुपात)

(vii) यदि a : b =c : d हो, तो
$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (योगान्तरानुपात)

F. बहुपद (Polynomial) : -

यदि एक व्यंजक $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots..+a_{n-1}x+a_n$ द्वारा परिभाषित है, जहॉ n अऋणात्मक पूर्णांक तथा $a_0,a_1,a_2,\ldots\ldots.a_n$ वास्तविक संख्याएँ एवं $a_0\neq0$ हो, तब f(x), n घात का बहुपद कहलाता है।

(i) शेषफल प्रमेय (Remainder Theorem)

माना कि P(x) कोई एक या एक से अधिक घात का बहुपद है और a कोई वास्तविक संख्या है। यदि P(x) को (x-a) से विभाजित किया जाये तो शेषफल P(a) के बराबर होता है।

(ii) गुणनखण्ड प्रमेय (Factor Theorem)

माना P(x) कोई एक या एक से अधिक घात का बहुपद है और a कोई वास्तविक संख्या इस प्रकार है कि P(a)=0, तो (x-a), P(x) का एक गुणनखण्ड होता है। विलोमतः यदि (x-a), P(x) का एक गुणनखण्ड है तो P(a)=0

G. अन्तराल (Intervals) :

अन्तराल मूलतः R के उपसमुच्चय होते है और सामान्यतया इनका उपयोग असमिकाओं को हल करने या प्रान्त ज्ञात करने में किया जाता है। यदि a और b दो वास्तविक संख्याएँ इस प्रकार है कि a<b है तो हम तीन प्रकार के अन्तराल निम्नानुसार परिभाषित कर सकते है:

			प्रयुक्त प्रतीक
(i)	खुला (विवृत्त) अन्तराल	: $(a,b)=\{x:a<x<b\}$	() या] [
(ii)	बन्द (संवृत्त) अन्तराल	:$[a,b]=\{x:a\leq x\leq b\}$	[ ]
(iii)	अर्द्ध–खुला या अर्द्ध–बन्द अन्तराल	:$(a,b]=\{x:a<x\leq b\}$	( ] या]]
		या $[a,b)=\{x:a\leq x<b\}$	[ ) या [[

अनन्त अन्तराल निम्नानुसार परिभाषित किये जाते है :

(i) $(a,\infty)=\{x:x>a\}$

(ii) $[a,\infty)=\{x:x\geq a\}$

(iii) $(-\infty,b)=\{x:x<b\}$

(iv) $(-\infty,b]=\{x:x\leq b\}$

(v) $(-\infty,\infty)=\{x:x\in R\}$

नोट : (a) x के कुछ विषेष मानों के लिए हम {} चिन्ह का उपयोग करते है। उदाहरणर्थः यदि x=1, 2 हो, तो इसे $x\in\{1,2\}$ द्वारा लिखा जाता है।

(b) यदि x का कोइ मान नहीं हो, तो करते हैं कि $x\in\phi$ (षून्य समुच्चय)

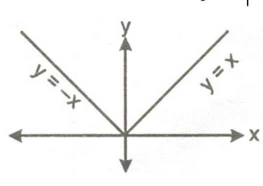
H. फलनों के विभिन्न प्रकार (Various Types of Functions) :

(i) परिमेय फलन (Rational Function) :

$y=f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$, रूप का फलन परिमेय होता हे, जहॉ g(x) एवं h(x) बहुपद फलन है।

(ii) निरेपेक्ष मान फलन/मापांक फलन (Absolute Value Function / Modulus Function) :

मपांक फलन का प्रतीक f(x)=|x| है तथा इसे $y=|x|=\begin{cases}x & \text{if} \quad x\geq0\\ -x & \text{if} \quad x<0\end{cases}$ द्वारा परिभाषित करते है।



y=|x|

(iii) महत्तम पूर्णांक फलन या सेढ़ी फलन (Greatest Integer Function or Step Up Function) :

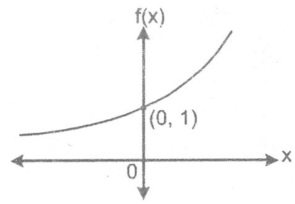
फलन y=f(x)=[x] महत्तम पूर्णांक फलन कहलाता हे, जहॉ [x] उस महत्तम पूर्णांक के बराबर होता है जो या तो x के बराबर है या उससे छोटा है।

उदाहरण : **[0.8]=0, [1.5]=1, [7.8]=7, [-1.2]= -2** आदि।

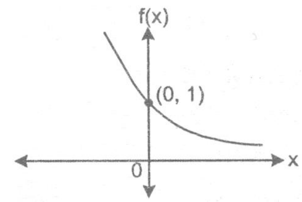
(iv) **चरघातंतीय फलन (Exponential Function) :**

फलन $f(x)=a^x=e^{x \text{ in } a}(a>0, a\neq 1, x\in R)$ चरघातांकीय फलन कहलाता है, चरघातांकीय फलनों के आरेख निम्न प्रकार के हो सकते है –

स्थति -f
a>1 के लिए



स्थति -ff
0<a<1 के लिए



f. **लघुगणक**

(i) **संख्याओं का लघुगणक :**

किसी संख्या N का आधार a पर लघुगणक, उस घातांक को निरूपित करता है, जिसको a पर लगाने से संख्या N प्राप्त होती है, इस संख्या को $\log_a N$ से प्रदर्शित करते है।

$$\mathbf{Log_aN=x \text{ ę } a^x=N,\ a>0,\ a\div 1\ \&\ N>0}$$

यदि a=10 हो, तो $\log_{10}b$ की बजाय logb लिखते हैं।
यदि a=e हो, तो $\log_e b$ की बजाय ℓnb लिखते है, यहाँ e नेपियर आधार हैं, जिसका संख्यात्मक मान 2.7182 होता है।

याद रखें :

$\log_{10}2\approx 0.3010$; $\log_{10}3\approx 0.4771$
$\ell n2\approx 0.693$; $\ell n10\approx 2.303$

(ii) **प्रान्त :**

स्ंख्या $\text{Log}_a N$ के अस्तित्व एवं अद्वितीयता को प्रतिबन्धों a>0, a≠1 एवं N>0 की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है। लघुगणक का आधार 'a', इकाई के बराबर नहीं होना चाहिए अन्याथ इकाई के अलावा अन्य संख्याओं के लघुगणक नहीं होगें तथा प्रत्येक संख्या इकाई का लघुगणक होगी।

(iii) **आधारभूत लघुगणकीय सर्वसमिका :**

$${}_a\log_a N=N, a>0,\ a\neq 1 \text{ एवं } N>0$$

J. **लघुगणक के मुख्य गुणर्धम :**

मानाकि M और N स्वेच्छ धनात्मक संख्याएँ a>0, a≠1,b>0,b≠1 तथा α,β कोई वास्तविक संख्याएँहॅ, तो –

(i) $\log_a(M.N)=\log_a M+\log_a N$; व्यापक रूप में $\log_a(x_1 x_2 \ldots ..x_n)=\log_a x_1+\log_a x_2+\ldots\ldots+\log_a x_n$

(ii) $\log_a(M/N)=\log_a M-\log_a N$

(iii) $\log_a M^{\alpha}=\alpha.\log_a M$

(iv) $\log_{a^{\beta}} M=\dfrac{1}{\beta}\log_a M$

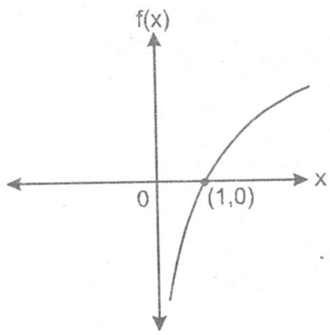
(v) $\log_b M=\dfrac{\log_a M}{\log_a b}$ (आधार परिवर्तन प्रमेय)

नोट :

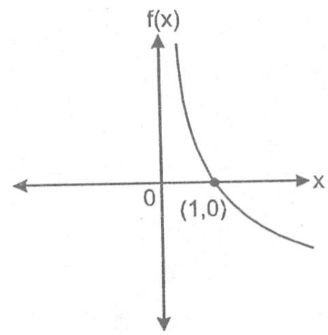
- $\text{Log}_a 1=0$
- $\log_a a=1$
- $\text{Log}_{1/a}a=-1$
- $\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}$
- $a^x=e^{x\ell na}$
- $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$

K. **लघुगणतीय फलनों के ग्राफ ($y=\log_a x$) :**

स्थिति-f
a>1के लिए



स्थिति -ff
0<a<1 के लिए



नोट : (i) यदि संख्या और आधार इकाई के एक ही ओर स्थित हो, तो लघुगणक का मान धनात्मक होता है।
(ii) यदि संख्या और आधार इकाई के विपरीत ओर स्थित हो, तो लघुगणक का मान ऋणात्मक होता है।

L. **लघुगणकीय समीकरण**

समीकरण $\text{Log}_a x=\log_a y$ संभव है यदि और केवल यदि x=y अर्थात्

$\log_a x=\log_a y$ ę x=y

सदैव दी गई समीकरण की वैधता ज्ञात करनी चाहिए अर्थात $x>0, y>0, a>0, a\neq1$ होने चाहिए।

Exercise – 1 Objective Questions

भाग-A : केवल एक सही विकल्प

1. यदि A व B दो परिमेय संख्याएँ है तथा AB, A+B,A-B परिमेय संख्याएँ हो, तो A/B
(A) सदेव परिमेय (B) कभी भी परिमेय नहीं
(C) परिमेय जब $B\neq0$ (D) परिमेय जब $A\neq0$

2. सभी अपरिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर व्यक्त किया जा सकता है। यह कथन है –
(A) सदैव सत्य (B) असत्य
(C) कुछ परिस्थितियों में सत्य (D) इनमें से कोई नहीं

3. एक परिमेय संख्या 'x' तथा एक अपरिमेय संख्या 'y' का गुणा –
(A) सदैव परिमेय होता है। (B) परिमेय होता है, जबकि $y=\pi$ न हो।
(C) सदैव अपरिमेय होता है। (D) अपरिमेय होता है, जबकि x=0 न हो।

4. यदि x,y परिमेय संख्याएँ इस प्रकार है कि $(x+y)+(x-2y)\sqrt{2}=2x-y+(x-y-1)\sqrt{6}$, तो
(A) x=1, y=1 (B) x=2, y=1
(C) x=5,y=1 (D) x एवं y के अनन्त मान हो सकते है।

5. श्रेणी $\frac{1}{(1\times2)}+\frac{1}{(2\times3)}+\frac{1}{(3\times4)}+......+\frac{1}{(100\times101)}$ का योगफल बराबर है –
(A) 99/100 (B) 1/100 (C) 100/101 (D) 101/102

6. यदि $x+\frac{1}{x}=2$ हो, तो $x^2+\frac{1}{x^2}$ का मान है –
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

7. समीकरण $(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2=0$ के वास्तविक हलों की संख्या है –
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

8. यदि a,b,c वास्तविक हो, तो $a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)=0$ होगा केवल यदि –
(A) $a+b+c=0$ (B) $a=b=c$
(C) $a=b$ or $b=c$ or $c=a$ (D) $a-b-c=0$

9. यदि a,b,c भिन्न–भिन्न व वास्तविक संख्याऍं हो, तो $\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ का मान है –
(A) 1 (B) abc (C) 2 (D) 3

10. यदि x-a व्यंजक x^3-a^2x+x+2 का एक गुणनखण्ड हो, तो a का मान है –
(A) 0 (B) 2 (C) -2 (D) 1

11. यदि $P(x)=kx^3+3x^2-3$ एवं $Q(x)=2x^3-5x+k$ को (x-4) से विभाजित करने पर समान शेषफल बचता है, तो k का मान है –
(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1

12. यदि $2x^3-5x^2+x+2=(x-2)(ax^2-bx-1)$ हो, तो a व b के मान क्रमषः है –
(A) 2,1 (B) 2,-1 (C) 1,2 (D) -1,1/2

13. समीकरण $|4x+3|+|3x-4|=12$ का हल है –
(A) $x=-\frac{7}{3},\frac{3}{7}$ (B) $x=-\frac{5}{2},\frac{2}{5}$ (C) $x=-\frac{11}{7},\frac{13}{7}$ (D) $x=-\frac{3}{7},\frac{7}{5}$

14. समीकरण $|x|^2-3|x|+2=0$ के वास्तविक हलों की संख्या है –
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

15. $[e]-[-\pi]$ का मान है, जहॉं [.] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्षित करता है।
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

16. $\frac{1}{\log_{\sqrt{bc}} abc}+\frac{1}{\log_{\sqrt{ca}} abc}+\frac{1}{\log_{\sqrt{ab}} abc}$ का मान है –
(A) 1/2 (B) 1 (C) 2 (D) 4

17. $\log_2 15.\log_{1/6} 2.\log 1/6$ के बराबर या इससे छोट महत्तम पूर्णांक है –
(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

18. यदि $\log_x \log_{18}(\sqrt{2}+\sqrt{8})=\frac{1}{3}$ हो, तो 1000 x का मान है –
(A) 8 (B) 1/8 (C) 1/125 (D) 125

19. अनुपात $\frac{2^{\log_{2^{1/4}} a}-3^{\log_{27}(a^2+1)^3}-2a}{7^{4\log_{49} a}-a-1}$ के सरलीकरण से प्राप्त होता है –
(A) a^2-a-1 (B) a^2+a-1 (C) a^2-a+1 (D) a^2+a+1

20. $\frac{1}{1+\log_b a+\log_b c}+\frac{1}{1+\log_c a+\log_c b}+\frac{1}{1+\log_a b+\log_a c}$ का मान है –
(A) abc (B) $\frac{1}{abc}$ (C) 0 (D) 1

21. यदि $3^{2\log_3 x} - 2x - 3 = 0$ हो, तो x के कितने मान समीकरण को सन्तुष्ट करते है –
(A) शून्य (B) 1 (C) 2 (D) 2 से अधिक

22. समीकरण $\sqrt{\log_{10}(-x)} = \log_{10}\sqrt{x^2}$ के वास्तविक हलों की संख्या है –
(A) शून्य (B) केवल एक (C) केवल दो (D) 4

23. समीकरण $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1$ के वास्तविक हलों की संख्या है –
(A) केवल चार (B) केवल तीन (C) केवल दो (D) केवल एक

24. $\log_2 7$ का मान है –
(A) एक पूर्णांक (B) एक परिमेय संख्या (C) एक अपरिमेय सख्या (D) एक अभाज्य संख्या

25. 0.75 का आधार 16 पर प्रतिलघुगणक का मान है –
(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12

भाग -(B) : एक या एक से अधिक सही विकल्प

26. यदि x व y वास्तविक संख्याएँ है एवं $\frac{y}{x} = x$ हो, तो y का मान नही हो सकता –
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

27. यदि $N = \frac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$ हो, तो N है –
(A) एक प्राकृत संख्या (B) एक अभाज्य संख्या (C) एक परिमेय संख्या (D) एक पूर्णांक

28. समीकरण निकाय $\log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 2$ एवं $\log_{27}(x+y) = \frac{2}{3}$ के हलों का समुच्चय है –
(A) (6,3) (B) (3,6) (C) (6,12) (D) (12,6)

29. समीकरण $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$ रखती है –
(A) एक अपरिमेय हल (B) कोई अभाज्य हल नहीं (C) दो वास्तविक हल (D) एक पूर्णांक हल

30. समीकरण $x^{\left[(\log_3 x)^2 - \frac{9}{2}\log_3 x + 5\right]} = 3\sqrt{3}$ रखती है –
(A) ठीक तीन वास्तविक हल (B) कम से कम एक वास्तविक हल
(C) एक एक अपरिमेय हल (D) सम्मिश्र मूल

Exercise – 2 Subjective Questions

1. निम्न को भिन्नात्मक रूप में लिखिए (p/q, जहाँ $p,q \in I$ तथा $q \neq 0$)

(i) 2.35 (ii) $1.1\overline{4}$ (iii) $3.3\overline{79}$ (iv) $\sqrt{12}$

2. निम्न में से कौन बड़ा है –

(i) $\frac{7}{8}, \frac{6}{7}$ (ii) $\sqrt{13} - \sqrt{12}, \sqrt{14} - \sqrt{13}$ (iii) $\frac{9}{\sqrt{11} - \sqrt{2}}, \frac{6}{3\sqrt{3}}$

3. सिद्ध कीजिए कि दो भिन्न विषम प्राकृत संख्याओं के वर्गो का अन्तर हमेषा 8 का गुणज होता है।

4. हर में उपस्थित अपरिमेय पदों को विलुप्त कीजिए।

(i) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$ (ii) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

5. निम्न के गुणनखण्ड कीजिए

(i) $(x-y)^3 - y^3$ (ii) $a^3 - \dfrac{1}{a^3} + 4$

(iii) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ (iv) $x^3 - 9x - 10$

(v) $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$

6. गुणनखण्ड कीजिए –

(i) $1+x^4+x^8$ (ii) x^4+4

7. यदि $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f}$ हो, तो $\dfrac{2a^4b^4 + 3a^2c^2 - 5e^4f}{2b^6 + 3b^2d^2 - 5f^5}$ का मान a व b के पदों में ज्ञात कीजिए।

8. निम्न फलनों के आरेख खींचिए –

(i) $y=|4x+5|$ (ii) $y=|2x-3|$

9. यदि यह ज्ञात है कि $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots\ldots + |a_n| = 0$ तो संख्याओं $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ के बारे में क्या कहा जा सकता है ?

10. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए –

(i) $|x|+2=3$ (ii) $|x|-2x+5=0$

(iii) $x|x|=4$ (iv) $||x-1|-2|=1$

(v) $|x|^2-|x|+4=2x^2-3|x|+1$

(vi) $|x-3|+2|x+1|=4$

(vii) $||x-1|-2|=|x-3|$

11. समीकरण निकाय $|x+2|+y=5, x-|y|=1$ को हल कीजिए।

12. $7^{\log_3 5} + 3^{\log_5 7} - 5^{\log_3 7} - 7^{\log_5 3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

13. यदि $4^A+9^B=10^C$, जहाँ $A=\log_{16}4$, $B=\log_3 9$ & $C=\log_x 83$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

14. यदि $\log_b a \cdot \log_c a + \log_a b \cdot \log_c b + \log_a c \cdot \log_b c = 3$ (जहाँ a, b, c भिन्न–भिन्न धनात्मक वास्तविक संख्याएं $\neq 1$ है) , हो तो, abc का मान ज्ञात कीजिए ।

15. यदि $a=\log_{12}18$ एवं $b=\log_{24}54$ हो, तो प्रदर्षित कीजिए कि $ab+5(a-b)$ का मान ज्ञात कीजिए।

16. यदि $\dfrac{\log a}{b-c} = \dfrac{\log b}{c-a} = \dfrac{\log c}{a-b}$ हो, तो प्रदर्षित कीजिए कि $a^a.b^b.c^c=1$.

17. निम्न में कौन बड़ा है –

(a) $\log_2 3$ या $\log_{1/2} 5$ (b) $\log_7 11$ या $\log_8 5$

निम्न **(18-27)** को **x** के लिए हल कीजिए :

18. $\log_{10}(x^2-12x+36)=2$ 19. $\log_4\log_3\log_2 x=0$

20. $\log_3\left(\log_9 x+\frac{1}{2}+9^x\right)=2x$ 21. $2\log_4(4-x)=4-\log_2(-2-x)$

22. $\log_{10}^2 x+\log_{10} x^2=\log_{10}^2 2-1$ 23. $x^{\frac{\log x+5}{3}}=10^{5+\log x}$

24. $\log_5^2 x+\log_{5x}\left(\frac{5}{x}\right)=1$ 25. $\log_4(\log_2 x)+\log_2(\log_4 x)=2$

26. $\left|\log_{\sqrt{3}} x-2\right|-\left|\log_3 x-2\right|=2$ 27. $5^x.\sqrt[x]{8^{x-1}}500$

28. यदि $\log_{10}2=0.3010$ एवं $\log_{10}3=0.4771$ हो, तो ज्ञात कीजिए –

(a) 6^{15} में अकों की संख्या

(b) 3^{-100} में दषमलव के ठीक बाद आने वाले शून्यों की संख्या

29. समीकरणों $\log_{100}|x+y|=1/2, \log_{10}y-\log_{10}|x|=\log_{100}4$ को x एवं y के लिए हल कीजिए। **[REE-1996]**

30. समीकरण $|x-1|^A=(x-1)^7$ जहॉ $A=\log_3 x^2-2\log_x 9$, को सन्तुष्ट करने वाले x के मान ज्ञात कीजिए। **[REE-1990]**

31. x के वे सभी वास्तविक मान ज्ञात कीजिए जो समीकरण $2\log_2\log_2 x+\log_{1/2}\log_2(2\sqrt{2}x)=1$ को सन्तुष्ट करते है। **[REE-1999,6]**

32. समीकरण $\log_{3/4}\log_8(x^2+7)+\log_{1/2}\log_{1/4}(x^2+7)^{-1}=-2$ हो हल कीजिए। **[REE-2000,5]**

Answers

EXERCISE – 1

1. C 2. A 3. D 4. B 5. C 6. C 7. A

8. B 9. D 10. C 11. B 12. A 13. C 14. D

15. B 16. B 17. C 18. D 19. D 20. D 21. B

22. C 23. B 24. C 25. C 26. AB 27. ABCD

28. AB 29. ABCD 30. ABCD

EXERCISE – 2

1. (i) $\frac{47}{20}$ (ii) $\frac{103}{90}$ (iii) $\frac{1673}{495}$ (iv) not possible

2. (i) $\frac{7}{8}$ (ii) $\sqrt{13}-\sqrt{12}$ (iii) $\frac{9}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}$

4. (i) $\sqrt{2}-1$ (ii) $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

5. (i) $(x-2y)\,(x^2+y^2-xy)$

(ii) $\left(a-\frac{1}{a}+1\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}-a+\frac{1}{a}+2\right)$

(iii) $(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$

(iv) $(x+2)\,(x^2-2x-5)$

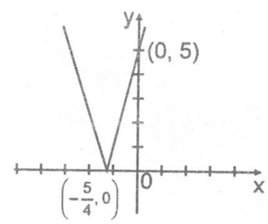
(v) $-(a-b)\,(b-c)\,(c-a)$

6. (i) $(x^4-x^2+1)\,(x^2+x+1)\,(x^2-x+1)$

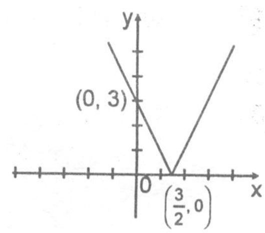
(ii) $(x^2-2x+2)\,(x^2+2x+2)$

7. $\frac{a^4}{b^4}$

8. (i)



(ii)



9. $a_1=a_2=a_3=\ldots\ldots\ldots=a_n=0$

10.

(i) $x=\pm 1$ (ii) $x=5$

(iii) $x=2$ (iv) $x=-2, 0, 2, 4$

(v) $x=-3, 3$ (vi) $x=-1$

(vii) $x\in[1, \infty)$

11. $x=2, y=1$ 12. 0 13. $x=10$ 14. $abc=1$

15. 1 17. (a) $\log_2 3$ (b) $\log_7 11$

18. $x=16$ or $x=-4$ 19. 8 20. {1/3}

21. {-4} 22. $\frac{1}{20}, \frac{1}{5}$ 23. $\{10^{-5}, 10^{3}\}$

24. $\left\{1, 5, \frac{1}{25}\right\}$ 25. $x=16$ 26. 1/9,9

27. $x=3$ 28. (a) 12 (b) 47

29. $x=10/3, y=20/3$ & $x=-10, y=20$

30. $x=2$ or 81 31. $x=8$ 32. $x=3$ or -3