1. प्रस्तावना

किसी समतल क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने की प्रक्रिया को **क्षेत्रकलन** कहते हैं इस अध्याय में हम निश्चित समाकल की सहायता से कुछ सरल समतलीय वक्रों द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे। क्षेत्रकलन के प्रश्नों को हल करने के लिए यदि संभव हो, तो सर्वप्रथम जिस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करना हो, उसका कच्चा लेखा चित्र बना लेना चाहिए।

2. वक्र अनुरेखण

फलन में हम कुछ प्रारंभिक सरल वक्रों के ग्राफ देख चुके हैं, यहाँ हम किसी वक्र को खींचने के लिए आवश्यक बिन्दुओं पर विचार करेंगे जिनकी सहायता से क्षेत्रफल निर्धारण का कार्य काफी सरल होगा।

(i) सममिति

वक्र $f(x, y) = 0$

- x–अक्ष के प्रति सममित है यदि y के सभी पद समघातीय हैं।
- y–अक्ष के प्रति सममित है यदि x के सभी पद समघातीय हैं।
- मूल बिन्दु के प्रति सममित है यदि $f(-x, -y) = f(x, y)$.

उदाहरणार्थ $y^2 = 4ax$,x– अक्ष के प्रति सममित है तथा $x^2 = 4ay$,y– अक्ष के प्रति सममित है तथा वक्र $y = x^3$ मूल बिन्दु के प्रति सममित है।

(ii) मूल बिन्दु

यदि वक्र के समीकरण में अचर पद नहीं हो तो वह मूल बिन्दु से गुजरता है।
उदाहरणार्थ $x^2 + y^2 + 2ax = 0$ मूल बिन्दु से गुजरता है।

(iii) अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिन्दु

यदि वक्र के समीकरण में $y = 0$ रखने पर हमें x के वास्तविक मान प्राप्त हों, तो इनसे हमें वे बिन्दु प्राप्त होंगे जहाँ वक्र x-अक्ष को काटता है। इसी प्रकार $x = 0$ रखने पर हम वक्र तथा y-अक्ष के प्रतिच्छेद बिन्दु प्राप्त कर सकते हैं।
उदाहरणार्थ–वक्र $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ निर्देशी अक्षों को $(\pm a, 0)$ तथा $(0, \pm b)$ बिन्दुओं पर काटता है।

(iv) क्षेत्र

वक्र की समीकरण को $y = f(x)$ रूप में लिख कर x के अधिकतम एवं न्यूनतम मान ज्ञात करेंगे जो वक्र का क्षेत्र निर्धारित करते हैं।
उदाहरणार्थ–वक्र $xy^2 = a^2(a - x)$ के लिए

$$y = a\sqrt{\frac{a\ \ x}{x}}$$

y वास्तविक होगा, यदि $0 < x \le a$,अतः वक्र का क्षेत्र $x = 0$ तथा $x = a$ के मध्य स्थित है।

3. वक्र द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल

(i) कार्तीय वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा कोटि $x = a$ तथा $x = b$ से परिबद्ध क्षेत्र का

$$\text{क्षेत्रफल} = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

उदाहरण वक्र द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल पर आधारित

उदा.1 वक्र $y = x^3$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = 1$ एवं $x = 2$ के मध्य क्षेत्रफल ज्ञात कीजिऐ।

हल अभीष्ट क्षेत्रफल = $\int_{x\ 1}^{2} y\,dx$

$$= \int_1^2 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{15}{4}$$ **उत्तर**

उदा.2 वक्र $y = \sec^2 x$, x-अक्ष तथा रेखा $x = \frac{}{4}$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिऐ।

हल अभीष्ट क्षेत्रफल = $\int_{x\ 0}^{/4} y\,dx$

$$= \int_0^{/4} \sec^2 x\,dx = [\tan x]_0^{/4} = 1$$ **उत्तर**

उदा.3 वक्र $y = mx$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = 1$ एवं $x = 2$ के मध्य क्षेत्रफल ज्ञात कीजिऐ।

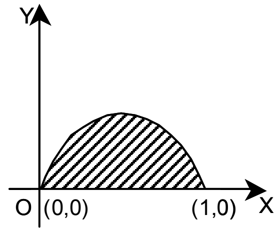
हल अभीष्ट क्षेत्रफल = $\int_1^2 y\,dx$.

$$= \int_1^2 mx\,dx = \left[\frac{mx^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \frac{m}{2}(4 - 1) = \left(\frac{3}{2}\right)m$$ **उत्तर**

उदा.4 वक्र $y = x(1 - x)^2$ तथा x- अक्ष के मध्य क्षेत्रफल ज्ञात कीजिऐ।

हल स्पष्टतः वक्र x-अक्ष को बिन्दु (0,0) तथा (1,0) पर मिलता है तथा x = 0 से 1 के लिऐ , y धनात्मक है, अतः अभीष्ट क्षेत्रफल-



$$= \int_0^1 x(1-x)^2\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(x - 2x^2 + x^3\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

उत्तर

(ii) कार्तीय वक्र x = f(y), y-अक्ष तथा भुज y = c एवं y = d से परिबद्ध क्षेत्र का

$$\text{क्षेत्रफल} = \int_c^d x\,dy = \int_c^d f(y)\,dy$$

उदा.5 वक्र $x^2 = \frac{1}{4}y$, y-अक्ष तथा रेखाओं y = 1 तथा y = 4 के मध्य क्षेत्रफल ज्ञात कीजिऐ।

हल $$\text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_1^4 x\,dy$$

$$= \int_1^4 \frac{1}{2}\sqrt{y}\,dy = \frac{1}{3}\left[y^{3/2}\right]_1^4$$

$$= \frac{1}{3}(8 - 1) = 7/3$$ **उत्तर**

उदा.6 वक्र y = log x ; x-अक्ष तथा रेखा y = 2 द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल

हल $$\text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_0^2 x\,dy$$

$$= \int_0^2 e^y\,dy$$

$$= \left(e^y\right)_0^2 = e^2 - 1$$ **उत्तर**

उदा.7 वक्र $y^2 = 2y - x$ तथा y-अक्ष के मध्य क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दिए गए वक्र $x = 2y - y^2$ तथा y-अक्ष के मध्य क्षेत्रफल चित्रानुसार होगा।

$$\text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_0^2 \left(2y - y^2\right)dy$$

$$= \left[y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

(iii) यदि वक्र का समीकरण प्राचलिक रूप में हो, जैसे x = f(t) , y = g(t), तो क्षेत्रफल

$$= \int_a^b y\,dx = \int_{t_1}^{t_2} g(t)f'(t)\,dt.$$

जहाँ x के a तथा b मानों के संगत t के मान t_1 तथा t_2 हैं।

उदा.8 वक्र x = a cos t, y = b sin t द्वारा प्रथम चतुर्थांश में परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल स्पष्टतः दी गई समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ दीर्घ वत की प्राचलिक समीकरण है। वक्र x-अक्ष से प्रथम चतुर्थांश में (a, 0) पर मिलता है।

$$\text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_0^a y\,dx$$

$$= \int_{\pi/2}^0 (b\sin t)(-a\sin t)\,dt$$

$(\because x = 0$ पर, $t = \pi/2$ तथा $x = a, t = 0)$

$$= ab\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt = \left(\frac{\pi ab}{4}\right)$$ **उत्तर**

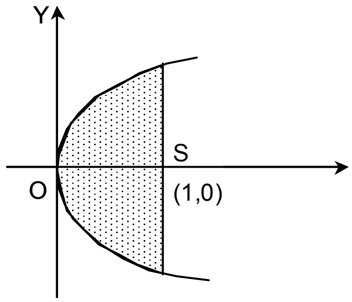
4. सममित क्षेत्रफल

यदि वक्र एक निर्देशी अक्ष के (या एक रेखा या मूल बिन्दु), सापेक्ष सममित हो तो ऐसी स्थिति में किसी एक सममित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करके उसको सममित भागों की कुल संख्या से गुणा करके अभीष्ट क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।

उदाहरण **सममित क्षेत्रफल पर आधारित**

उदा.9 परवलय $y^2 = 4x$ तथा इसकी नाभि लम्ब द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल चूँकि वक्र x- अक्ष के प्रति सममित है इसलिए अभीष्ट क्षेत्रफल



$$= 2\int_0^1 y\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{4x}\,dx$$

$$= 4.\frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^1 = 8/3$$ **उत्तर**

उदा.10 वत $x^2 + y^2 = a^2$ का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल अभीष्ट क्षेत्रफल दोनों अक्षों के प्रति सममित है

अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2 \quad x^2}\,dx$$

$$= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 \quad x^2} \quad \frac{a^2}{2}\sin^{\ 1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= 4.\left[\frac{\pi}{2}\times\frac{a^2}{2}\right] = \quad a^2$$ **उत्तर**

उदा.11 वक्र $xy^2 = a^2(a - x)$ तथा x-अक्ष द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल $xy^2 = a^2(a - x)$ $\quad y^2 = a^2(a - x)/x$

या $y = a\sqrt{\frac{a \quad x}{x}}$ ...(1)

यहाँ y की घात सम है इसलिए वक्र x-अक्ष के प्रति सममित है। समीकरण (1) में x = a रखने पर y = 0 तथा x = 0 पर y = ∞

अभीष्ट क्षेत्रफल

$A = A_1 + A_2 = 2A_1$

$$A = 2\int_{x\ 0}^{x\ a} y\,dx$$

$$= 2\int_0^a a\sqrt{\frac{a \quad x}{x}}\,dx$$

(समीकरण (1) से)

$x = a\sin^2$ रखने पर

$dx = 2a\sin \quad \cos \quad d$

जब x = 0 $\quad = 0 \quad$ x = a $\quad = \frac{}{2}$

क्षेत्रफल$=2\int_0^{/2} a \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.\ 2a\cos \quad \sin \quad d$

$$= 4a^2\int_0^{/2}\cos^2 \quad d = 4a^2.\frac{1}{2}.\frac{}{2} = \quad a^2$$ **उत्तर**

5. धनात्मक एवं ऋणात्मक क्षेत्रफल

क्षेत्रफल सदैव धनात्मक लिया जाता है यदि क्षेत्रफल का कुछ भाग धनात्मक ओर (x-अक्ष के ऊपर)तथा कुछ भाग ऋणात्मक ओर (x-अक्ष के नीचे) स्थित हो , तो दोनों भागों के क्षेत्रफल की अलग अलग गणना कर के उनके संख्यात्मक मानों का योग करने पर अभीष्ट क्षेत्रफल प्राप्त होता है।

उदाहरण **धनात्मक एवं ऋणात्मक क्षेत्रफल पर आधारित**

उदा.12 वक्र y = cos x तथा x-अक्ष, जब $/4 < x <$, के मध्य क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ अभीष्ट क्षेत्रफल का कुछ भाग x-अक्ष के ऊपर तथा कुछ भाग x-अक्ष के नीचे स्थित है, जैसा कि चित्र से स्पष्ट है।

अभीष्ट क्षेत्रफल = $\int_{/4}^{/2}\cos x\,dx + \left|\int_{/2}\cos x\,dx\right|$

$$= [\sin x]_{/4}^{/2} + \left|[\sin x]_{/2}\right|$$

$$= (1 - 1/\sqrt{2}) + |0 - 1| = \frac{2\sqrt{2} \quad 1}{\sqrt{2}}$$ **उत्तर**

उदा.13 वक्र $y = x(x-1)(x-2)$ तथा x-अक्ष के मध्य क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_0^1 x(x-1)(x-2)\,dx + \left|\int_1^2 x(x-1)(x-2)\,dx\right|$$

$$= \frac{1}{4}\left(x^4 - 4x^3 - 4x^2\right)_0^1 + \frac{1}{4}\left|\left(x^4 - 4x^3 - 4x^2\right)_1^2\right|$$

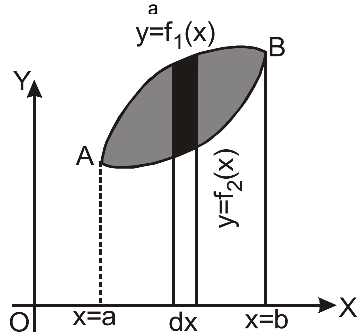
$$= \frac{1}{4}[1 + |(16 - 32 + 16) - (1 - 4 + 4)|] = \frac{1}{2}$$

उत्तर

6. दो वक्रों के मध्य क्षेत्रफल

I. जब दो वक्र दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा उनका उभयनिष्ठ क्षेत्रफल इन बिन्दुओं के मध्य स्थित हो : यदि $y = f_1(x)$ तथा $y = f_2(x)$ दो वक्र हों जहाँ $f_1(x) > f_2(x)$ जो कि दो बिन्दुओं A (x = a) तथा B (x = b) पर काटते हों तथा उनका उभयनिष्ठ क्षेत्रफल A तथा B के मध्य स्थित हो , तो उनका

उभयनिष्ठ क्षेत्रफल $= \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx$



$$= \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$$

उदाहरण **दो वक्रों के मध्य क्षेत्रफल पर आधारित**

उदा.14 दो वक्रों $y = x^3$ तथा $y = 4x$ के मध्य प्रथम चतुर्थांश में क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दी गई समीकरण को हल करने पर x = 0 तथा x = 2 प्राप्त होता है, परन्तु हमें केवल प्रथम चतुर्थांश में ही क्षेत्रफल ज्ञात करना है इसलिए

अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_0^2 \left(4x - x^3\right) dx$$

$$= \left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right)_0^2 = 4 \text{ इकाई}$$

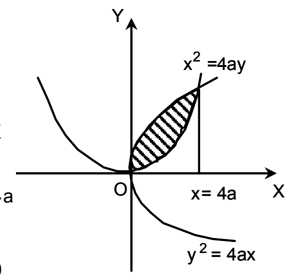
उत्तर

उदा.15 दो वक्रों $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4ay$ के मध्य क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दोनों वक्रों की समीकरण $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4ay$ को हल करने पर

x = 4a

अतः अभीष्ट क्षेत्र



$$= \int_0^{4a}\left(\sqrt{4ax} - \frac{x^2}{4a}\right) dx$$

$$= \left[2\sqrt{a}.\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{12a}\right]_0^{4a}$$

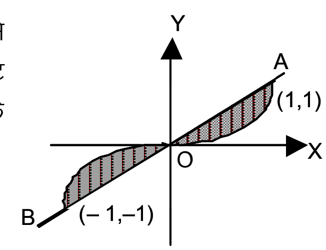
$$= \frac{4\sqrt{a}}{3}(4a)^{3/2} - \frac{64a^3}{12a} = \frac{16}{3}a^2$$

उत्तर

उदा.16 वक्र $y = x^3$ तथा रेखा $y = x$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल यह दिए गए चित्र से स्पष्ट है कि अभीष्ट क्षेत्रफल मूल बिन्दु के सापेक्ष सममित है

अभीष्ट क्षेत्रफल



$$= 2\int_0^1 \left(x - x^3\right)dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right] = 1/2$$

उत्तर

II. जब दो वक्र एक बिन्दु पर काटते हों तथा उनके बीच का क्षेत्रफल x-अक्ष से परिबद्ध है:
यदि $y = f_1(x)$ तथा $y = f_2(x)$ दो वक्र बिन्दु P (α, β) पर काटते हों तथा x-अक्ष को क्रमशः A (a,0), B (b, 0) पर मिलते हों, तो इन वक्रों तथा x-अक्ष से परिबद्ध

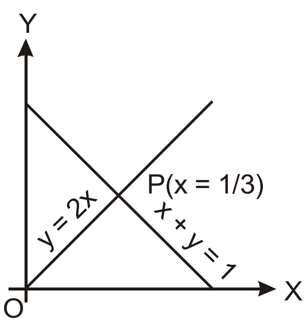
$$\text{क्षेत्रफल} = \int_a f_1(x)dx + \int^b f_2(x)dx$$

उदा.17 वक्रों $y = 2x$, $x + y = 1$ तथा x-अक्ष द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दो वक्र बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करते हैं जहाँ $x = 1/3$ तथा वे x-अक्ष को O पर मिलते हैं तथा A $(x = 1)$ इसलिए

अभीष्ट क्षेत्रफल = $\int_{0}^{1/3} 2x\,dx + \int_{1/3}^{1} (1 \quad x)\,dx$

$= \left[x^2\right]_0^{1/3} + \left[x \quad \frac{x^2}{2}\right]_{1/3}^{1}$



$= \frac{1}{9} + \left[\frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{18}\right)\right] = \frac{1}{3}$ **उत्तर**

दष्टान्तीय उदाहरण

उदा.1 वक्र y = 3/x^{2}, x-अक्ष तथा रेखाओं x = 1 तथा x = 2 द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल है-

(A) 3/2 (B) 1/2
(C) 2 (D) 1

हल क्षेत्रफल = $\int_1^2 y\,dx = \int_1^2 \frac{3}{x^2}\,dx$

$$= -\left[\frac{3}{x}\right]_1^2 = -3\left(\frac{1}{2} \quad 1\right)$$

= 3/2 **उत्तर [A]**

उदा.2 वक्र y = sin^{2} x, x-अक्ष तथा कोटियों x = 0 तथा x = $\frac{}{2}$ के मध्य क्षेत्रफल है -

(A) (B) /2
(C) /4 (D) /8

हल अभीष्ट क्षेत्रफल = $\int_0^{/2} \sin^2 x\,dx$

$$= \int_0^{/2} \frac{1 \quad \cos 2x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x \quad \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{/2} = \frac{}{4}$$

उत्तर [C]

उदा.3 वक्र y = 4 + 3x – x^{2} तथा x-अक्ष के मध्य क्षेत्रफल है-

(A) 125/6 (B) 125/3
(C) 125/2 (D) इनमें से कोई नहीं

हल y = 0, रखने पर

$x^2 - 3x - 4 = 0$
$(x - 4)(x + 1) = 0$
x = – 1 या x = 4

अभीष्ट क्षेत्रफल = $\int_1^4 \left(4 \quad 3x \quad x^2\right) dx$

$$= \left(4x \quad \frac{3x^2}{2} \quad \frac{x^3}{3}\right)_1^4 = \frac{125}{6}$$ **उत्तर [A]**

उदा.4 वक्र y^{2} = 4x, y-अक्ष तथा y = 3 के मध्य क्षेत्रफल है-

(A) 2 इकाई (B) 9/4 इकाई
(C) 7/3 इकाई (D) 3 इकाई

हल क्षेत्रफल = $\int_0^3 x\,dy = \int_0^3 \frac{y^2}{4}\,dy$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{12}(27 - 0)$$

= 9/4 इकाई **उत्तर [B]**

उदा.5 वक्र x = a cos^{3} t, y = a sin^{3} t, द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल है -

(A) $\frac{a^2}{8}$ (B) $\frac{a^2}{4}$

(C) $\frac{3 \quad a^2}{8}$ (D) $\frac{2 \quad a^2}{3}$

हल दिए गए वक्र $\left(\frac{x}{a}\right)^{1/3}$ = cos t, $\left(\frac{y}{a}\right)^{1/3}$ = sin t हैं

वर्ग कर के जोड़ने पर $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

स्पष्टतः यह दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित है, अतः सम्पूर्ण क्षेत्रफल

$$= 4\int_0^a y\,dx$$

$$= 4\int_{/2}^0 a\sin^3 t.\,3a\cos^2 t\,(-\sin t)\,dt$$

दी गई समीकरण से x = 0 पर ; t = $\frac{}{2}$, x = a पर ; t = 0

$$= 12a^2\int_0^{/2} \sin^4 t\cos^2 t\,dt$$

$$= 12a^2\,\frac{3.1.1}{6.4.2}\cdot\frac{}{2} = \frac{3 \quad a^2}{8}$$ **उत्तर [C]**

उदा.6 वक्र y = sech x तथा x-अक्ष के मध्य क्षेत्रफल है-

(A) (B)
(C) 2 (D) /2

हल दिया गया वक्र y-अक्ष के सापेक्ष सममित है

अभीष्ट क्षेत्रफल = $2\int_0 \text{sech}\,x\,dx$

$$= 2\int_0 \frac{2}{e^{x}\quad e^{\;x}}\,dx = 4\int_0 \frac{e^{x}}{e^{2x}\quad 1}\,dx$$

$$= 4\left[\tan^{\;1}\left(e^{x}\right)\right]_0 = 4\left[\frac{}{2}\quad\frac{}{4}\right] =$$

उत्तर [B]

उदा.7 वत $x^2 + y^2 = 1$ तथा वक्र $|x| + |y| = 1$ के मध्य क्षेत्रफल है -

(A) $\quad - 2$ (B) $\quad - 2\sqrt{2}$

(C) $2(\quad - 2\sqrt{2})$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल x को – x तथा y को – y से परिवर्तित करने पर, दोनों समीकरणें समान रहती हैं अतः अभीष्ट क्षेत्रफल दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित होगा जो कि चित्र से स्पष्ट है, अतः क्षेत्रफल

$$= 4\int_0^1\left[\sqrt{1\quad x^2}\quad(1\quad x)\right]dx$$

$$= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{1\quad x^2}\quad\frac{1}{2}\sin^{\;1}x\quad x\quad\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= 4\left[0\quad\frac{1}{2}\cdot\frac{}{2}\quad 1\quad\frac{1}{2}\right] = \quad - 2$$

उत्तर.[A]

उदा.8 वक्र y = sin x, x = 0 तथा x = 2   के मध्य क्षेत्रफल है -

(A) 4 इकाई (B) 0 इकाई

(C) 4   इकाई (D) 2 इकाई

हल $f(x) = y = \sin x$

जब x   [0,], sin x 0

तथा जब x   [,2], sin x 0

$$\text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_0 y\,dx + \int^{2}(\quad y)\,dx$$

$$= \int_0 \sin x\,dx + \int_\pi^{2\pi}(-\sin x)\,dx$$

$$= [-\cos x]_0 + [\cos x]^2$$

$$= (-\cos\quad + \cos 0) + (\cos 2\quad - \cos\quad)$$

$$= (1 + 1) + (1 + 1)$$

= 4 इकाई **उत्तर [A]**

उदा.9 वक्रों $y = \sqrt{x}$ तथा y = x के मध्य क्षेत्रफल है-

(A) 1/3 (B) 1/6

(C) 2/3 (D) 1

हल वक्रों के प्रतिच्छेद बिन्दु x = 0 तथा x = 1 हैं।

$$\text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_0^1\left(\sqrt{x}\quad x\right)dx$$

$$= \left[\frac{2x^{3/2}}{3}\quad\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$ **उत्तर [B]**

उदा.10 परवलय $x^2 = 4y$ तथा रेखा $x = 4y - 2$ के मध्य क्षेत्रफल है-

(A) 9/4 (B) 9/8

(C) 9/2 (D) 9

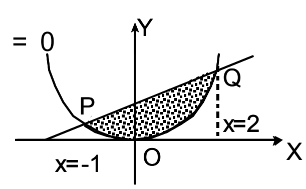
हल x के लिए वक्रों की समीकरण को हल करने पर

$x^2 = x + 2$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = -1, 2$

So, reqd. area



$$= \int_{1}^{2}\left[\frac{x\quad 2}{4}\quad\frac{x^2}{4}\right]dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\quad 2x\quad\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{4}[(2 + 4 - 8/3) - (1/2 - 2 + 1/3)] = 9/8$$

उत्तर [B]

उदा.11 वक्र $y = \cos^2 x$, x- अक्ष तथा कोटियों $x = 0$ तथा x = के मध्य अन्तराल (0,) में क्षेत्रफल है-

(A) (B) /4

(C) /2 (D) 2

हल अभीष्ट क्षेत्रफल = $\int_0 \cos^2 x\, dx$

$= \int_0^{/2} \cos^2 x\, dx + \int_{/2} \cos^2 x\, dx$

$= \frac{1}{2} \times \frac{}{2} + \frac{1}{2} \int_{/2} (1 \quad \cos 2x)\, dx$

$= \frac{}{4} + \frac{1}{2}\left[x \quad \frac{\sin 2x}{2}\right]_{/2} = \frac{}{4} + \frac{1}{2}\left[\left(\quad \frac{}{2}\right)\right]$

$= \frac{}{4} + \frac{}{4} = \frac{}{2}$ **उत्तर [C]**

उदा.12 वक्रों $y = \tan x$, $y = \cot x$ तथा x-अक्ष के मध्य अन्तराल [0, /2] में क्षेत्रफल है-

(A) log 2 (B) log 3

(C) $\log \sqrt{2}$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल चित्रानुसार स्पष्ट है कि

$= \int_0^{/4} \tan x\, dx \_ \int_{/4}^{/2} \cot x\, dx$

$= [\log \sec x]_0^{/4} + [\log \sin x]_{/4}^{/2}$

$= \log \sqrt{2} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} = \log 2$ **उत्तर [A]**

उदा.13 वक्रों $y = \cos x$ तथा रेखा $y = x + 1$ द्वारा द्वितीय चतुर्थांश में परिबद्ध क्षेत्रफल है-

(A) 1 (B) 2

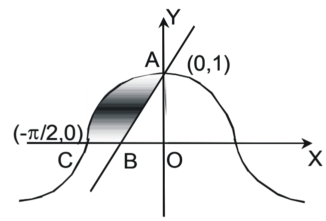
(C) 3/2 (D) 1/2

हल माना कि रेखा $y = x + 1$, x- अक्ष को बिन्दु A(0,1) पर मिलती है तथा वक्र $y = \cos x$,x- अक्ष को तथा y- अक्ष को क्रमशः C तथा A पर मिलती है, चित्र से स्पष्ट है कि

अभीष्ट क्षेत्रफल = ABC का क्षेत्रफल

=OAC का क्षेत्रफल – OAB का क्षेत्रफल

$= \int_{/2}^{0} \cos x\, dx - \frac{1}{2} \times OB \times OA$



$= [\sin x]^{0}_{/2} - \frac{1}{2} \times 1 \times 1$

$= 1 - (1/2) = (1/2).$ **उत्तर [D]**

उदा.14 वक्रों $y = \sin x$, $y = \cos x$ तथा y–अक्ष के मध्य प्रथम चतुर्थांश में क्षेत्रफल है-

(A) $\sqrt{2} - 1$ (B) $\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{2} + 1$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल प्रथम चतुर्थांश में sin x तथा cos x , x = /4 पर मिलते हैं इसलिए चित्रानुसार

अभीष्ट क्षेत्रफल = $\int_0^{/4} (\cos x \quad \sin x)\, dx$

$= [\sin x + \cos x]_0^{/4}$

$= \left(1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}\right) - (0 + 1)$

$= \sqrt{2} - 1$ **उत्तर [A]**

उदा.15 वक्र y = |x – 1| तथा y = 1 के मध्य क्षेत्रफल है -

(A) 1 (B) 2

(C) 1/2 (D) इनमें से कोई नहीं

हल $y = |x - 1| = \begin{cases} x-1, & x \ge 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$

y = x – 1 तथा y = 1 के मध्य प्रतिच्छेद बिन्दु (2, 1) है।

y = 1 – x तथा y = 1 के मध्य प्रतिच्छेद बिन्दु (0,1) है।

अभीष्ट क्षेत्रफल = PQR का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\ (PQ)\ .\ (RT)$$

$$= \frac{1}{2}.\ 2.1 = 1$$

उत्तर [A]

उदा.16 यदि कोई क्षेत्र वक्र $y = 8x^2 - x^5$ द्वारा परिबद्ध है। तथा कोटियाँ x = 1, x = k, $\frac{16}{3}$ है तब k =

(A) 2 (B) $[8 - \sqrt{17}\,]^{1/3}$

(C) $[\sqrt{17} - 8]^{1/3}$ (D) –1

हल $\int_1^k (8x^2 \quad x^5)\,dx = \frac{16}{3}$

$$\left[\frac{8x^3}{3} \quad \frac{x^6}{6}\right]_1^k = \frac{16}{3}$$

$$\frac{8}{3}(k^3 - 1) - \left(\frac{k^6 \quad 1}{6}\right) = \frac{16}{3}$$

$$16\,k^3 - k^6 - 15 = 32$$

$$k^6 - 16k^3 + 47 = 0$$

$$k^3 = 8 \pm \sqrt{17}$$

$$k = (8 \pm \sqrt{17}\,)^{1/3}$$

उत्तर [B]

उदा.17 वक्र y = ex log x तथा y = $\frac{\log x}{ex}$ के मध्य क्षेत्रफल है-

(A) $\frac{e^2 - 5}{4}$ (B) $\frac{e^2 \quad 5}{4e}$

(C) $\frac{e}{4} - \frac{5}{4e}$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल वक्रों की समीकरण को हल करने पर

$$ex \log x = \frac{\log x}{ex}$$

$$\log x \left(ex \quad \frac{1}{ex}\right) = 0$$

$$x = 1,\ 1/e$$

अभीष्ट क्षेत्रफल = $\int_{1/e}^{1}\left(\frac{\log x}{ex} \quad ex \log x\right)dx$

$$= \left[\frac{1}{e}\frac{(\log x)^2}{2} \quad e\left((\log x).\frac{x^2}{2} \quad \frac{x^2}{4}\right)\right]_{1/e}^{1}$$

$$= \frac{1}{2e}\,[0 - (-1)^2] - e\left[0 \quad \frac{1}{4} \quad \left(\quad \frac{1}{2e^2} \quad \frac{1}{4e^2}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2e} - \frac{1}{2e} + \frac{e}{4} - \frac{1}{4e} = \frac{e}{4} - \frac{5}{4e}$$

उत्तर [C]

उदा.18 यदि 0 ≤ x ≤ ; तो वक्र y = x तथा y = x + sin x के मध्य क्षेत्रफल है-

(A) 2 (B) 4

(C) 2 (D) 4

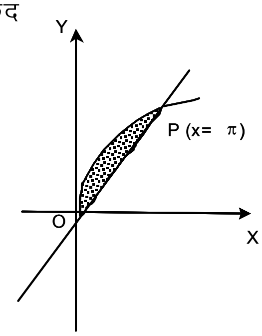
हल दिए गए वक्रों के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के लिए

x = x + sin x

sin x = 0

x = 0,

अभीष्ट क्षेत्रफल



$$= \int_0 [(x \quad \sin x) \quad x]\,dx$$

$$= \int_0 \sin x\,dx = -\ [\cos x]_0 = 2$$

उत्तर [A]

उदा.19 वक्रों $3x^2 + 5y = 32$ तथा $y = |x - 2|$ के मध्य क्षेत्रफल है-

(A) 25 (B) 17/2

(C) 33/2 (D) 33

हल यहाँ प्रथम वक्र निम्न रूप में लिखा जा सकता है

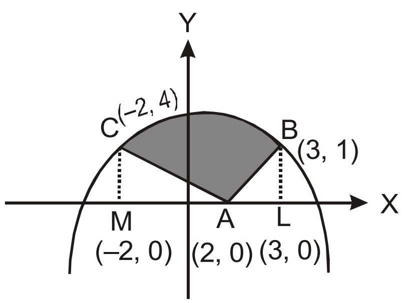
$$x^2 = -\frac{5}{3}\left(y \quad \frac{32}{5}\right)$$

जो कि एक परवलय है जिसका शीर्ष y-अक्ष पर है

पुनः द्वितीय वक्र

$$y = \begin{cases} x \quad 2\ , & x \quad 2 \\ \quad (x \quad 2), & x \quad 2 \end{cases}$$

जो दो लम्बवत रेखाओं AB तथा AC को रखती है।



ये रेखाऐं परवलय पर B(3,1) तथा C(–2,4)पर मिलती हैं।

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल A

$$A = \int_{2}^{3} y\,dx \qquad ABL \qquad ACM$$

$$= \int_{2}^{3} \frac{1}{5}(32 \quad 3x^2)\,dx - \frac{1}{2}\,.\ 1.1 - \frac{1}{2}(4\ .\ 4)$$

$$= \frac{1}{5}\left[32x \quad x^3\right]_{2}^{3} - \frac{17}{2}$$

$$= \frac{1}{5}[69 + 56] - \frac{17}{2} = \frac{33}{2}$$

उत्तर [C]