Линейные отображения векторных пространств

Пусть V и W — векторные пространства размерности n и m, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ — базис V, а f — некоторая линейная функция из V в W. Очевидно, что значения f на всём V однозначно определяются значениями на базисе V. Действительно, если $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$, то $f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\vec{e}_i)$. Кроме того, сами значения $f(\vec{e}_i)$, $i = \overline{1,n}$, могут быть выбраны произвольным образом и тогда предыдущее равенство задаст некоторую линейную функцию. Поставим в соответствие функции f матрицу A, составленную из столбцов-координат векторов $f(\vec{e}_i)$, $i = \overline{1,n}$, в некотором фиксированном базисе W. Это соответствие является биекцией между множеством всех линейных функций из V в W и множеством матриц размера $m \times n$. Столбец Y координат вектора $f(\vec{v})$ называется *произведением* матрицы A на столбец X координат вектора $\vec{v}$ и записывается как $AX = Y$.

1. На множестве всех линейных функций из V в W естественным образом определены сумма $(f+g)(\vec{v}) = f(\vec{v})+g(\vec{v})$ и умножение на скаляр $(x \cdot f)(\vec{v}) = x \cdot f(x\vec{v})$. Проверьте, что это множество является векторным пространством, и найдите его размерность.
2. Запишите матрицу поворота вектора на угол α на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Образом линейного пространства V при линейном отображении f называется множество $Im\, f = \{f(v) : v \in V\}$, а его *ядром* — множество $Ker\, f = \{v \in V : f(v) = \vec{0}\}$.

3. Докажите, что $\mathrm{Im}\, f$ является векторным подпространством W.
4. Докажите, что $\dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rank}\, A$, где A — матрица f.
5. Докажите, что $\ker f$ является векторным подпространством V.
6. Докажите, что $\dim \ker f = \dim V - \dim \mathrm{Im}\, f$.

Связь с системами уравнений

7. Докажите, что условие $\det A \neq 0$ равносильно каждому из следующих трёх условий:
   (a) система уравнений $AX = Y$ разрешима для любого столбца правых частей Y;
   (b) система $AX = \mathbf{0}$ имеет только тривиальное решение $X = \mathbf{0}$;
   (c) система $AX = Y$ имеет единственное решение при некотором столбце правых частей Y.

Как показывает предыдущая задача, если $\det A \neq 0$, то можно говорить о матрице обратного отображения (которое, очевидно, тоже линейно), эта матрица называется *обратной* к матрице A и обозначается A^{-1}.

Собственные векторы и значения

Пусть задано линейное отображение $f\colon V \to V$. Вектор $v \in V$, для которого $f(v) = \lambda v$, где λ — скаляр, называется *собственным вектором* отображения f, а скаляр λ — *собственным значением*, соответствующим этому собственному вектору.

8. Докажите, что f имеет не больше $\dim V$ различных собственных значений.
9. Пусть λ — собственное значение f. Докажите, что множество $\{v \in V : f(v) = \lambda v\}$ является подпространством V.

10.[1] В летнем лагере отдыхают n детей. За завтраком они расселись за круглым столом и перед каждым стояла тарелка с манной кашей (количество каши может не совпадать). По команде вожатого каждый ребёнок запускает руки в тарелки своих соседей, зачерпывает половину содержащейся там каши и перекладывает всё, что зачерпнул в свою тарелку (все действуют одновременно). Определите все n, при которых через достаточно большое количество команд количество каши у всех детей будет сколь угодно близко к среднему.

[1] **Задача о манной каше** (фольклор).