Ещё немного интерполяции

Рассмотрим на координатной плоскости множество точек вида (i, j), $0 \leqslant i, j, i+j \leqslant n$, и $n(n+1)/2$ вещественных чисел $w_{i,j}$. Нас будут интересовать многочлен $f \in \mathbb{R}[x, y]$ степени не выше n, удовлетворяющего равенствам $f(i, j) = w_{i,j}$ при всех (i, j), $0 \leqslant i, j, i+j \leqslant n$.

1. Докажите, что существует не более одного такого многочлена.
2. Предположим, что $w_{i,j} = 0$ при всех $(i, j) < n$. Докажите, что искомый многочлен имеет вид $\sum\limits_{i,j \geqslant 0, i+j=n} w_{i,j} \binom{x}{i}\binom{y}{j}$.
3. Докажите, приведя явную формулу, что искомый многочлен всегда существует.

Пусть теперь заданы два произвольных множества $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ и набор из $n(n+1)/2$ вещественных чисел $w_{i,j}$, где $0 \leqslant i, j, i+j \leqslant n$. Нас интересует многочлен $f \in \mathbb{R}[x, y]$ степени не выше n, удовлетворяющий равенствам $f(x_i, y_j) = w_{i,j}$ при всех (i, j), $0 \leqslant i, j, i+j \leqslant n$. Очевидно, что доказательство его единственности аналогично доказательству задачи 1.

4. Предположим, что $w_{i,j} = 0$ при всех $(i, j) < n$. Докажите, приведя явную формулу, что искомый многочлен существует.
5. Докажите, что искомый многочлен всегда существует.

Ясно, что аналогичная интерполяция возможна для многочленов любого количества переменных.

Немного делимостей

6. Пусть $P(x, x^3) = 0$ для всех вещественных x. Обязательно ли $P(x, y) \,\vdots\, (x^3 - y)$?
7. Многочлен $P \in \mathbb{R}[x, y]$ зануляется во всех точках единичной окружности. Обязательно ли $P(x, y) \,\vdots\, (x^2 + y^2 - 1)$?
8. Многочлен $P \in \mathbb{R}[x, y]$ зануляется во всех точках гиперболы $y = \frac{1}{x}$. Обязательно ли $P(x, y) \,\vdots\, (xy - 1)$?
9. Два многочлена $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$ имеют бесконечно много общих корней. Следует ли из этого, что у них есть общий непостоянных множитель?
10. Существует ли многочлен $P \in \mathbb{R}[x, y]$ такой, что $P(x, y)^2 + 1$ делится на $x^2 + y^2 + 1$?

Однородные многочлены

11. Пусть однородный многочлен $P \in \mathbb{R}[x, y]$ зануляется хотя бы в одной точке прямой $ax + by = 0$. Докажите, что $P(x, y) \,\vdots\, (ax + by)$.
12. Известно, что многочлен $P \in \mathbb{R}[x, y]$ делит однородный многочлен $Q \in \mathbb{R}[x, y]$. Докажите, что P тоже однородный.
13. Найдите все вещественные числа a, для которых найдётся такой ненулевой многочлен $P \in \mathbb{R}[x, y]$, что многочлен $P(x^2 + y^2, axy)$ делит многочлен $P(x, y)^2$.
14. Многочлены $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ таковы, что $P(x) - P(y)$ делится на $Q(x) - Q(y)$. Докажите, что существует многочлен $S(x)$ такой, что $P(x) = S(Q(x))$.

Задачи с многочленами

15. Существует ли многочлен $P \in \mathbb{R}[x, y]$ такой, что $P(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}_{>0}$?
16. Существует ли многочлен $P \in \mathbb{R}[x, y]$ такой, что множества $\{(x, y) \mid P(x, y) > 0\}$ и $\{(x, y) \mid x, y > 0\}$ совпадают?
17. Про многочлен $P \in \mathbb{R}[x, y]$ известно, что для любого неотрицательного целого числа n каждый из многочленов $P(n, y)$ и $P(x, n)$ имеет степень не выше n. Докажите, что

степень многочлена $P(x,x)$ чётна.

18. Докажите, что для любого чётного числа $n \geqslant 2$ найдётся многочлен степени n, удовлетворяющий условию предыдущей задачи.
19. Существует ли функция $g\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ такая, что для любого рационального числа t функции $g(t,y)$ и $g(x,t)$ совпадают с некоторыми многочленами одной переменной на всём $\mathbb{Q}$, но сама g не является многочленом?
20. Существует ли функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такая, что для любого вещественного числа t функции $f(t,y)$ и $f(x,t)$ совпадают с некоторыми многочленами одной переменной на всём $\mathbb{R}$, но сама f не является многочленом?
21. Дано натуральное число d. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такие, что для любых вещественных чисел A, B, C, D функция $f(At+B, Ct+D)$ на всём $\mathbb{R}$ совпадает с некоторым многочленом степени не выше d.

Несколько переменных и целые точки

22. Даны n пар (a_1,b_1), (a_2,b_2), $\ldots$, (a_n,b_n) взаимно простых целых чисел. Докажите, что существует однородный многочлен $P \in \mathbb{Z}[x,y]$ такой, что при всех $i=\overline{1,n}$ верны равенства $P(a_i,b_i)=1$.
23. Рассмотрим все многочлены $P \in \mathbb{Z}[x,y,z]$, для которых условия $P(a,b,c)=0$ и $a=b=c$ равносильны. Найдите наибольшее целое число r такое, что для любого такого многочлена и целых чисел m,n число $P(n,n+m,n+2m)$ кратно m^r.

1. Предположим, что есть два такие многочлена и обозначим через $g(x,y)$ их разность. Многочлен $g(x,0)$ имеет $n+1$ корень, т. е. он тождественно равен нулю. Значит, $g(x,y)$ кратно y, т. е. $g(x,y)=yg_1(x,y)$. Аналогично, рассматриваем $g_1(x,1)$ и получаем, что $g(x,y)$ кратно $y-1$ и т. д. В итоге получим, что $g(x,y)$ кратен $y(y-1)\dots(y-n)$, что очевидно неверно.
2. Легко проверить непосредственной подстановкой.
3. Подходит многочлен $\sum\limits_{i,j\geqslant 0, i+j=n} w_{i,j}\binom{x}{i}\binom{y}{j}\binom{n-x-y}{n-i-j}$.
4. Подходит многочлен $\sum\limits_{i,j\geqslant 0, i+j=n} w_{i,j}\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})}\cdot\frac{(y-y_0)(y-y_1)\dots(y-y_{j-1})}{(y_j-y_0)(y_j-y_1)\dots(y_j-y_{j-1})}$.
5. Воспользуйтесь результатом предыдущего пункта и предположением индукции.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13. Предположим, что при некотором $a\in\mathbb{R}$ многочлен $P\in\mathbb{R}[x,y]$ удовлетворяет условию. Пусть $P(x,y)=\sum_{i=0}^{d}Q_i(x,y)$, где каждый Q_i, $i=\overline{0,d}$, — однородный многочлен степени i, а $Q_d(x,y)$ ещё и ненулевой многочлен. Однородная часть наибольшей степени многочлена $P(x^2+y^2,axy)$ равна $Q_d(x^2+y^2,axy)$, а у многочлена $P(x,y)^2$ она равна $Q_d(x,y)^2$. Так как их степени совпадают, то $P(x,y)^2=kP(x^2+y^2,axy)$. Заменив многочлен $P(x,y)$ на $k^{-1}P(x,y)$, получим многочлен, который удовлетворяет равенству $P(x,y)^2=P(x^2+y^2,axy)$. Рассмотрим ненулевой однородный многочлен $Q_i(x,y)$ наибольшей степени $i<d$, если такой существует. Тогда у многочлена $P(x,y)^2$ есть однородная часть $2Q_d(x,y)Q_i(x,y)$ степени $d+i$, а у многочлена $P(x^2+y^2,axy)$ нет однородной части со степенью между $2i$ и $2d$. Полученное противоречие говорит о том, что $P(x,y)=Q_d(x,y)$. Обозначим $P(x,y)=y^dQ(\frac{x}{y})$, где $Q\in\mathbb{R}[t]$. При такой замене получим тождество $a^d(\frac{x}{y})^dQ(\frac{x^2+y^2}{axy})=Q^2(\frac{x}{y})$. Пусть $t_1,t_2,\dots,t_s$ — все различные комплексные корни многочлена Q, а $k_1,k_2,\dots,k_s$ — их соответствующие кратности. Тогда тождество для многочлена Q примет вид $\prod_{i=1}^{s}(t-t_i)^{2k_i}=a^d\prod_{i=1}^{s}(\frac{t^2}{a}-t_it+\frac{1}{a})^{k_i}=\prod_{i=1}^{s}(t^2-at_it+1)^{k_i}$. Очевидно, что каждое t_i может занулить только один множитель t^2-at_it+1, поэтому, сравнивая корни обеих частей, заключаем, что каждый такой множитель является полным квадратом. Значит для каждого корня t_j верно равенство $a^2t_j^2=4$, но корни многочленов $t^2\mp 2t+1$ равны ±1, следовательно $a^2=4$ и $a=\pm2$. При $a=2$ корень $t_1=1$ зануляет „свою" скобку t^2-2t+1 и корень $t_2=-1$ зануляет „свою" скобку t^2+2t+1, следовательно, мы получим верное тождество для любого выбора степеней k_1 и k_2 с суммой d. Соответственно, под условие задачи будет подходить любой многочлен $P(x,y)=b(x-y)^{k_1}(x+y)^{k_2}$, $b\in\mathbb{R}$. В случае $a=-2$ корень $t_1=1$ зануляет „чужую" скобку $t^2-at_2t+1=t^2-2t+1$ и корень $t_2=-1$ зануляет „чужую" скобку $t^2-at_1t+1=t^2+2t+1$, следовательно, получится верное тождество только при $k_1=k_2$. Соответственно, под условие задачи будет подходить любой многочлен $P(x,y)=b(x-y)^k(x+y)^k=b(x^2-y^2)^k$, $b\in\mathbb{R}$.
14. Предположим, что для некоторых многочленов $P,Q\in\mathbb{R}[x]$ выполняется условие

$P(x)-P(y)=R(x,y)(Q(x)-Q(y))$. Обозначим $\deg P=p$, $\deg Q=q$ и запишем $R(x,y)=\sum_{i=0}^{p-q}R_i(x,y)$, где каждый R_i, $i=\overline{0,p-q}$, — однородный многочлен степени i, а $Q_{p-q}(x,y)$ ещё и ненулевой многочлен. Тогда верно равенство $x^p-y^p=Q_{p-q}(x,y)(x^q-y^q)$, откуда следует, что $x^q-y^q\mid x^p-y^p$. Это возможно, если и только если $q\mid p$, поскольку $x^n-y^n=\prod_{i=0}^{n}(x-\xi^i y)$, где ξ — корень n-й степени из единицы с наименьшим ненулевым аргументом. Пусть a и b — старшие коэффициенты многочленов P и Q соответственно. Тогда пара многочленов $(P-ab^{-\frac{p}{q}}Q^{\frac{p}{q}},Q)$ также удовлетворяет условиям задачи, причём степень первого многочлена уменьшилась. Продолжая этот процесс далее, в некоторый момент придём к нулевому многочлену. Требуемое представление $P(x)$ в виде $S(Q(x))$ легко восстанавливается по действиям, проведённым с первым многочленом.

15. Например, $P(x,y)=x^2+(xy-1)^2$ всегда положителен и $P(x,\frac{1}{x})=x^2$ сюрьективна на $\mathbb{R}>0$.
16. **Нет.** Что-то простое.
17. Не ограничивая общности, пусть $\deg P_x(x,y)=a\leqslant b=\deg P_y(x,y)$. Тогда можно записать равенство $P(x,y)=P_b(x)y^b+P_{b-1}y^{b-1}+\ldots+P_0(x)$, где $P_i\in\mathbb{R}[x]$, $i=\overline{0,b}$. Подставляя вместо x целые числа от 0 до $b-1$, получим, что у ненулевого многочлена $P_b(x)$ степени не выше a есть по крайней мере $b\geqslant a$ корней. Это возможно только при $\deg P_b=b=a$, т. е. в многочлене P присутствует одночлен x^ay^b максимальной степени $2b$ и других одночленов такой степени нету. Значит, $\deg P(x,x)=2b$ — чётное число.
18. **Navid** утверждает, что все многочлены, удовлетворяющие условию задачи, задаются формулой $a_0+xy(a_1+(x-1)(y-1)(a_2+\ldots+(a_{n-1}+(x-n+1)(y-n+1)a_n)\ldots)))$.
19. **Существует.** Занумеруем все рациональные числа в произвольном порядке: $r_1,r_2,\ldots$ и рассмотрим функцию $Q(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{i}(x-r_j)(y-r_j)$. Для любого рационального числа r_k функции $Q(r_k,y)$ и $Q(x,r_k)$ представляют собой многочлены степени $k-1$. При этом, очевидно, что $Q(x,y)$ не является многочленом, поскольку степень $k-1$ многочлена одной переменной, с которым она может совпадать, не ограничена.
20. **Нет.** Предположим, что функция f удовлетворяет условиям задачи. Так как множество $\mathbb{R}$ несчётно, то найдутся неотрицательное целое число n и несчётное подмножество $B\subset\mathbb{R}$, такие что $\deg f(x,y)=n$ при всех $y\in B$. Значит, для каждого фиксированного $y\in B$ можно записать равенство $f(x,y)=\sum_{i=0}^{n}a_n(y)x^n$ для всех $x\in\mathbb{R}$. Выберем $n+1$ точку $x_0,x_1,\ldots,x_n$ и решим систему уравнений $f(x_i,y)=\sum_{i=0}^{n}a_n(y)x_i^n$ относительно $a_n(y)$, получим (т. к. определитель Вандермонда ненулевой) равенства $a_k(y)=\sum_{j=0}^{n}c_{kj}f(x_j,y)$ для некоторых вещественных чисел c_{kj}, $0\leqslant k,j\leqslant n$. Рассмотрим функцию $g(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}c_{kj}f(x_j,y)x^k$. Каждый множитель $f(x_j,y)$ — многочлен степени не выше n, следовательно, вся функция — многочлен степени не выше $2n$. Кроме того, при каждом фиксированном x функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ являются многочленами переменной y и совпадают на всём B, т. е. они совпадают везде. Следовательно, $f(x,y)=g(x,y)$ на всём $\mathbb{R}^2$.
21.
22.
23.