Задача об освобождении от иррациональности

Предположим, что нам задана дробь, в которой числитель и знаменатель можно представить в виде многочленов с рациональными коэффициентами от некоторого алгебраического числа. Всегда ли можно избавиться от иррациональности в знаменателе? Формализуем этот вопрос: пусть многочлен $p \in \mathbb{Q}[x]$ неприводим над $\mathbb{Q}$, число $\alpha \in \mathbb{R}$ — его корень, а многочлены $f(x)$ и $g(x)$ из $\mathbb{Q}[x]$ удовлетворяют условию $g(\alpha) \neq 0$.

1. Докажите, что существует многочлен многочлен $h \in \mathbb{Q}[x]$ такой, что $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = h(\alpha)$.

КТО для многочленов

Оба доказательства Китайской Теоремы об Остатках, которые мы рассматривали в листках, существенно использовали дискретную структуру множеств целых (и натуральных) чисел, поэтому, они не применимы напрямую для колец $\mathbb{R}[x]$ и $\mathbb{Q}[x]$. Сформулируем КТО для этих множеств многочленов: *пусть $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ — попарно взаимно простые, а $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ — произвольные многочлены, тогда существует ровно один многочлен $p(x)$ такой, что $p(x) - a_i(x)$ делится на $p_i(x)$ при всех $i = \overline{1, n}$ и $\deg p < \deg p_1 + \ldots + \deg p_n$.*

2. Докажите КТО для многочленов.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — попарно различные, а $y_0, y_1, \ldots, y_n$ — произвольные вещественные числа. Рассмотрим следующий вопрос: существует ли многочлен p степени не выше n такой, что $p(x_i) = y_i$ при всех i от 0 до n.

3. Докажите, что найдётся не больше одного такого многочлена p.
4. Придумайте формулу, в явном виде дающую искомый многочлен p.
5. На плоскости нарисованы 2019 точек так, что любые четыре из них лежат на некоторой параболе. Докажите, что они все лежат на одной и той же параболе.
6. Верно ли предыдущее утверждение, если слово «парабола» заменить на «график кубического многочлена»?

Упражнения

7. Решите уравнение $c^2 \cdot \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + b^2 \cdot \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + a^2 \cdot \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = x^2$, где a, b, c — заданные различные вещественные числа.
8. Многочлен $P(x)$ степени n удовлетворяет равенствам $P(k) = \frac{1}{C_{n+1}^k}$, $k = \overline{0, n}$. Найдите значение $P(n+1)$.
9. Пусть множество $M \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}[x]$ и $\deg p < n < |M|$. Для каждого элемента $a \in M$ положим $\varphi(a) = \prod\limits_{M \ni b \neq a} (a - b)$. Докажите равенство $\sum\limits_{a \in M} \frac{p(a)}{\varphi(a_i)} = 0$.

Задачи

10. Заданы целые числа $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Докажите, что среди значений многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, найдётся число, по модулю не меньшее $n!/2^n$.
11. Учитель загадал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщает ученикам k целых чисел $n_1, \ldots, n_k$ и значение выражения $P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot \ldots \cdot P(n_k)$. При каком наименьшем k можно подобрать многочлен P и числа n_i так, что дети однозначно определят задуманный многочлен.
12. Многочлен $P(x)$ имеет степень, не большую $2n$. Известно, что для каждого целого $k \in [-n, n]$ выполнено неравенство $|P(k)| \leqslant 1$. Докажите, что для всех $x \in [-n, n]$ верно неравенство $|P(x)| \leqslant 2^{2n}$.

13. Многочлен $P(x)$ степени n удовлетворяет $P(k) = k/(k+1)$ при всех $k = \overline{0, n}$. Найдите значение $P(n+1)$.
14. Дана функция $f(x)$ значение которой при любом целом x целое. Известно, что для любого простого числа p существует такой многочлен $Q_p(x)$ степени, не превышающей 2017, с целыми коэффициентами, что $f(n) - Q_p(n)$ делится на p при любом целом n. Верно ли, что существует многочлен $g(x)$ с вещественными коэффициентами такой, что $g(n) = f(n)$ для любого целого n?
15. Фокусница готовится показать трюк. Она называет аудитории натуральное число n и $2n$ вещественных чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n}$. После этого случайный зритель загадывает многочлен $p(x)$ степени n с вещественными коэффициентами, вычисляет $2n$ значений: $p(x_1), \ldots, p(x_{2n})$, и записывает полученные $2n$ значений на доску в порядке неубывания. Глядя на числа, записанные на доске, фокусница должна назвать многочлен, задуманный зрителем. Может ли фокусница придумать стратегию, гарантирующую ей успешное выполнение трюка?