

Простые явные стратегии

1. На доске записано число 2022!. Два игрока ходят по очереди. Игрок в свой ход вычитает из написанного на доске числа какое-нибудь натуральное число, которое делится на не более, чем 20 различных простых чисел (так, чтобы разность была неотрицательна), записывает на доску эту разность, а старое число стирает. Выигрывает тот, кто получит 0/ Кто из играющих имеет выигрышную стратегию?
2. На доске записано натуральное число N . Два игрока ходят по очереди. За ход разрешается либо заменить число на доске на один из его делителей (отличных от единицы и самого числа), либо уменьшить число на единицу (если при этом число остается положительным). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Для каждого N определите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.
3. Андрей и Борис играют в следующую игру. Изначально на числовой прямой в точке x стоит робот. Сначала Андрей говорит расстояние, на которое должен сместиться робот. Потом Борис выбирает направление, в котором робот смещается на это расстояние, и т. д. При каких x Андрей может добиться того, что за конечное число ходов робот попадет в одну из точек 0 или 1 вне зависимости от действий Бориса?
4. У Васи есть 100 банковских карточек. Вася знает, что на одной из карточек лежит 1 рубль, на другой – 2 рубля, и так далее, на последней – 100 рублей, но не знает, на какой из карточек сколько денег. Вася может вставить карточку в банкомат и запросить некоторую сумму. Банкомат выдает требуемую сумму, если она на карточке есть, не выдает ничего, если таких денег на карточке нет, а карточку съедает в любом случае. При этом банкомат не показывает, сколько денег было на карточке. Какую наибольшую сумму Вася может гарантированно получить?

Подсчёт информации

5. Детектив Ниро Вульф расследует преступление. В деле замешаны 2022 человека, среди которых один — преступник, а ещё один — свидетель преступления (но неизвестно, кто это). Каждый день детектив может пригласить к себе одного или нескольких из этих 80 человек и, если среди приглашённых есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. Определите, за какое минимальное количество дней детектив может гарантированно раскрыть дело.
6. Команда из n школьников участвует в игре: на каждого из них надевают шапку одного из k заранее известных цветов, а затем по свистку все школьники одновременно выбирают себе по одному шарфу. Команда получает столько очков, у скольких её участников цвет шапки совпал с цветом шарфа (шарфов и шапок любого цвета имеется достаточное количество; во время игры каждый участник не видит своей шапки, зато видит шапки всех остальных, но не имеет права выдавать до свистка никакую информацию). Для каждой пары натуральных чисел $k \leq n$ найдите, какое наибольшее число очков команда, заранее наметив план действий каждого её члена, может гарантированно получить.
7. Фокуснику завязывают глаза, а зритель выкладывает в ряд N одинаковых монет, сам выбирая, какие — орлом вверх, а какие — решкой. Ассистент фокусника просит зрителя написать на листе бумаги любое целое число от 1 до N и показать его всем присутствующим. Увидев число, ассистент указывает зрителю на одну из монет ряда и просит перевернуть её. Затем фокуснику развязывают глаза, он смотрит на ряд монет и безошибочно определяет написанное зрителем число. Найдите все значения N , для которых у фокусника с ассистентом есть такой способ.

Графы

8. У повара в подчинении десять поварят, некоторые из которых дружат между собой. Каждый рабочий день повар назначает одного или нескольких поварят на дежурство, а каждый из дежурных поварят уносит с работы по одному пирожному каждому своему недежурящему другу. В конце дня повар узнает количество пропавших пирожных. Сможет ли он за 45 рабочих дней понять, кто из поварят дружит между собой, а кто нет?
9. Две фирмы по очереди нанимают программистов, среди которых есть 4 гения. Первого программиста каждая фирма выбирает произвольно, а каждый следующий должен быть знаком с кем-то из ранее нанятых данной фирмой. Если фирма не может нанять программиста по этим правилам, она прекращает приём, а другая может продолжать. Список программистов и их знакомств заранее известен. Могут ли знакомства быть устроены так, что фирма, вступающая в игру второй, сможет нанять по крайней мере 3 гениев, как бы ни действовала первая фирма?
10. На окружности отмечены вершины правильного n -угольника. Двое по очереди соединяют их отрезками. За ход можно выбрать вершину и соединить её либо с соседней вершиной, либо с центром окружности. Побеждает тот, после чьего хода можно добраться по отрезкам из любой вершины в любую другую. Для каждого натурального $n \geq 3$ определите, кто победит при правильной игре.

Комбогеома

11. Аня и Борис играют в игру на бесконечной клетчатой плоскости, делая ходы по очереди. За один ход разрешается выбрать единичный отрезок сетки, который пока не был ориентирован, и указать на нём ориентацию. Борис выбирает, кто будет ходить первым и он выиграет, если в некоторый момент образуется ориентированный цикл. Может ли Борис гарантировать себе победу?
12. Боря и Женя играют в следующую игру: они по очереди отмечают по одной точке окружности, при этом Боря ходит первым и красит свои точки в белый цвет, а Женя — в чёрный (никакую точку нельзя отметить дважды). После того, как каждый из них отметит по n точек, каждая из остальных точек окружности автоматически окрашивается в цвет ближайшей к ней отмеченной точки, если такая есть; в противном случае она остаётся неокрашенной. Затем Боря и Женя вычисляют сумму длин дуг, окрашенных в белый и чёрный цвета соответственно. Выигрывает тот игрок, чья сумма окажется большей. Для всех натуральных $n > 2$ определите, может ли кто-то из мальчиков гарантировать себе победу независимо от действий другого. Если да, то кто?
13. Игрок на компьютере управляет лисой, охотящейся за двумя зайцами. В вершине A квадрата $ABCD$ находится нора: если в нее, в отсутствие лисы, попадает хотя бы один заяц, то игра проиграна. Лиса ловит зайца, как только оказывается с ним в одной точке (возможно, в точке A). Вначале лиса сидит в точке C , а зайцы — в точках B и D . Лиса бежит повсюду со скоростью не больше v , а зайцы — по лучам AB и AD со скоростью не больше 1. При каких значениях v лиса сможет поймать обоих зайцев?