Основная теорема арифметики

Следующее утверждение называется *основной теоремой арифметики.*

1. Докажите, что каждое натуральное число, большее единицы, раскладывается в произведение степеней различных простых множителей однозначно с точностью до порядка следования множителей.

Для того, чтобы было удобно сравнивать разложения различных чисел, отсутствующие простые делители иногда дописывают с нулевыми степенями. Например, числа $18 = 2^1 \cdot 3^2$ и $50 = 2^1 \cdot 5^2$ можно записать как $18 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^0$ и $50 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^2$.

Простые числа

Вспомним некоторые базовые факты о простых числах.

2. Докажите, что при любом $n \geqslant 2$ для первых $n+1$ простого числа $p_1 < p_2 < \ldots < p_{n+1}$ верно неравенство $p_{n+1} \leqslant p_1 p_2 \ldots p_n - 1$.
3. Докажите, что простых чисел бесконечно много
4. Докажите, что простых чисел вида $4k - 1$ бесконечно много.

Степень вхождения

Показатели $a_1, a_2, \ldots a_k$ в разложении $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$ называются степенями вхождения простых чисел $p_1, \ldots, p_k$ в число n. Степень вхождения простого числа p в n обозначается как $v_p(n)$ или $\|n\|_p$. Из основной теоремы арифметики следует, что равенство $a = b$ равносильно тому, что $v_p(a) = v_p(b)$ для каждого простого числа p.

5. Докажите, что $v_p(a+b) \geqslant \min(v_p(a), v_p(b))$, причём, если $v_p(a) \neq v_p(b)$, то это неравенство является равенством (но обратное утверждение неверно).

Целой частью вещественного числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x, обозначения: $\lfloor x \rfloor$ или $[x]$. Например, $\lfloor 2.7 \rfloor = 2$, $\lfloor 1 \rfloor = 1$ и $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$.

6. Докажите тождество[1] $v_p(n!) = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^3} \rfloor + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$.

Наименьшее общее кратное

Наименьшее общее кратное натуральных чисел a и b — это наименьшее число делящееся и на a, и на b; обозначения: $\text{НОК}(a, b)$ или $\text{lcm}(a, b)$.

7. Чему равны $\text{НОД}(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}, p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots p_k^{b_k})$ и $\text{НОК}(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}, p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots p_k^{b_k})$?
8. Докажите тождество $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = a \cdot b$.
9. Докажите, что для любых натуральных чисел a, b и c верно следующее равенство: $\text{НОД}(\text{НОК}(a, b), \text{НОК}(b, c), \text{НОК}(c, a)) = \text{НОК}(\text{НОД}(a, b), \text{НОД}(b, c), \text{НОД}(c, a))$.

[1] Это равенство называется **формулой Лежандра.**

Упражнения

10. Докажите, что при всех натуральных n верно неравенство $p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$.
11. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся n последовательных чисел, среди которых: **а)** все — составные; **б)** ровно одно — простое.
12. Существует ли арифметическая прогрессия, состоящая только из простых чисел?
13. Для всех натуральных чисел a, b докажите неравенство $\text{НОК}(a,b)+\text{НОД}(a,b) \geqslant a+b$ и определите, когда выполняется равенство.
14. Докажите тождество $v_p(n!) = \frac{n-s_p(n)}{p-1}$, где через s_p обозначена сумма цифр числа n в p-ичной записи.

Задачи

15. Числа $x, y, z \in \mathbb{N}$ таковы, что сумма $\frac{xy^2}{z} + \frac{y^3z^4}{x} + \frac{z^5x^6}{y}$ — натуральное число. Докажите, что каждое слагаемое является натуральным числом.
16. Докажите, что $\text{НОК}(a,b) \neq \text{НОК}(a+c, b+c)$ при любых натуральных a, b, c.
17. Для натурального числа $n \geqslant 3$ через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ обозначим последовательность степеней в разложении числа $n! = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ — простые числа. Найдите все натуральные числа $n \geqslant 3$, для которых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — геометрическая прогрессия.
18. Даны натуральные числа a, b, c и d такие, что $ad \neq bc$ и $\text{НОД}(a,b,c,d) = 1$. Множество S состоит из всех значений, которые принимает $\text{НОД}(an+b, cn+d)$, когда n пробегает множество всех натуральных чисел. Докажите, что множество S совпадает с множеством всех делителей некоторого натурального числа.