1. В пространстве отметили $n \geqslant 5$ плоскостей общего положения.
   (a) На сколько частей они разбиваю пространство?
   (b) Докажите, что среди этих частей есть хотя бы $(2n-3)/4$ тетраэдра.
2. На плоскости даны $2n$ точек общего положения. Некоторые n из них назовём *фермами*, а оставшиеся n — *колодцами*. Докажите, что все точки можно разбить на n пар вида „(ферма, колодец)” так, что отрезки, проведённые между точками одной пары, не пересекаются.
3. Докажите, что в полном ориентированном графе найдётся вершина, до которой можно добраться из любой другой вершины либо напрямую, либо с одной пересадкой.
4. Найдите наименьшее возможное количество „трёхмерных ладей”, которое можно расставить в кубе $n \times n \times n$ так, чтобы любую свободную клетки била хотя бы одна ладья.
5. Можно ли выбрать 1983 попарно различных натуральных чисел, не превышающих 100000, так, чтобы ни одно из них не было равно полусумме двух других?
6. Докажите, что существует такое натуральное число n, для которого можно выбрать n^9 попарно различных чисел, меньших n^{10}, так, чтобы ни одно из них не было равно полусумме двух других.
7. Найдите все замкнутые и ограниченные фигуры Φ на плоскости такие, что любые две точки Φ можно соединить полуокружностью, целиком лежащей в Φ.
8. В пространстве расположены несколько сферических планет единичного радиуса. *Теневой стороной* планеты назовём множество всех точек этой планеты, из которых не видна ни одна точка никакой другой планеты. Докажите, что сумма площадей теневых сторон всех планет равна площади поверхности одной планеты.
9. На плоскости нарисованы 2022 вектора. Два игрока по очереди выбирают по одному вектору, пока у них не окажется по 1011 вектору. После этого они сравнивают длины сумм своих векторов. Игрок, у которого длина окажется меньше, проиграет. Может ли начинающий игрок гарантировать себе, что он не проиграет, как бы ни действовал второй игрок?
10. Докажите, что среди любых 15 попарно взаимно простых чисел, бóльших 1 и не превышающих 1992, есть хотя бы одно простое число.
11. Сумма нескольких неотрицательных вещественных чисел равна 3, а сумма их квадратов больше 1. Докажите, что сумма каких-то трёх из этих чисел больше 1.
12. В каждой из трёх школ учится по n учеников. Известно, что каждый ученик знакóм ровно с $n+1$ учеником из двух школ, в которых он не учится. Докажите, что можно выбрать по одному ученику из каждой школы так, чтобы они друг друга знали.
13. Школьник готовился к олимпиаде 77 дней подряд. Каждый день он решал по крайней мере одну задачу, но суммарно решил не больше 132 задач. Докажите, что найдутся несколько последовательных дней, в которые он решил ровно 21 задачу.
14. Докажите, что для любого натурального n в последовательности Фибоначчи найдётся число, оканчивающееся n нулями.
15. Даны 20 попарно различных натуральных чисел, меньших 70. Докажите, что среди их попарных разностей какая-то повторяется не меньше 4 раз.
16. В круге радиуса 16 отметили 650 точек. Докажите, что найдётся кольцо внутреннего радиуса 2 и внешнего радиуса 3, которое накрывает хотя бы 10 отмеченных точек.
17. (a) Докажите, что существуют целые числа a, b, c, не все из которых нули и каждое из них по модулю меньше миллиона такие, что $|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}$.
    (b) Даны целые числа a, b, c, не все из которых нули и каждое из них по модулю меньше миллиона. Докажите, что $|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| > 10^{-21}$.

Немного Рамсея и Шура

18. Рёбра полного графа на 17 вершинах окрашены в три цвета. Докажите, что найдётся одноцветный треугольник.
19. Множество $\{1, 2, \ldots, 1957\}$ разбили на шесть подмножеств. Докажите, что хотя бы в одном из них найдётся три числа такие, что большее равно сумме двух меньших.

Число Рамсея $R_n(3)$ равно наименьшему натуральному числу, для которого для любой раскраски в n цветов рёбер полного графа на $R_n(3)$ вершинах обязательно найдётся одноцветный треугольник. Функция Шура $f(n)$ выдаёт наибольшее натуральное число, для которого множество $\{1, 2, \ldots, f(n)\}$ можно разбить на n свободных от сумм подмножеств (ни в одном из них нет тройки чисел, в которой большее число равно сумме двух меньших).

20. Докажите, что $R_n(3) \leqslant [en!] + 1$.
21. Докажите, что $R_n(3) \geqslant f(n) + 2$.
22. Докажите, что $f(n) \geqslant \frac{3^n-1}{2}$.