Корневые векторы и подпространства

Пусть даны векторное пространство V над полем F и линейное отображение $A\colon V \to V$. Вектор $v \in V$ называется *корневым вектором, отвечающим числу* λ, если для некоторого натурального числа m верно равенство $(A - \lambda Id)^m v = 0$. Наименьшее такое m называется *высотой* корневого вектора v. Нулевой вектор также будем считать корневым вектором высоты 0, отвечающим любому λ.

1. Числу λ отвечает корневой вектор натуральной высоты. Докажите, что λ — собственное значение.
2. Докажите, что корневые векторы, отвечающие одному собственному значению, образуют подпространство.

Пусть λ — собственное значение. Подпространство, образованное корневыми векторам, отвечающими λ, называется *корневым подпространством* и обозначается $V^\lambda(A)$.

3. Докажите, что пространство $V^\lambda(A)$ инвариантно относительно A.
4. Пусть ограничение A на $V^\lambda(A)$ записывается матрицей B. Выберем в $V^\lambda(A)$ произвольный базис и дополним его до базиса пространства V. Докажите, что в этом базисе матрица отображения A имеет вид $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$.
5. Докажите, что $V^\lambda(A)$ — объединение цепочки $\ker\,(A - \lambda Id) \subset \ker\,(A - \lambda Id)^2 \subset \dots$

Пусть пространство V конечномерно, тогда цепочка пространств из предыдущего пункта стабилизируется, т. е. $V^\lambda(A) = \ker\,(A - \lambda Id)^m$. Пройдём по этой цепочке слева направо, вначале выбрав произвольный базис $\mathfrak{b}$, а потом каждый раз будем дополнять его до базиса следующего подпространства. Полученный базис пространства $V^\lambda(A)$ обозначим через $\mathfrak{b}$.

6. Докажите, что в базисе $\mathfrak{b}$ матрица отображения $A - \lambda Id$ имеет верхнетреугольный вид с нулями на диагонали.
7. Докажите, что характеристический многочлен ограничения отображения A на $V^\lambda(A)$ равен $(x - \lambda)^{\dim V^\lambda(A)}$.
8. Докажите, что при $\mu \neq \lambda$ отображение $A - \mu Id$ невырождено на $V^\lambda(A)$.
9. Докажите, что характеристический многочлен не зависит от выбранного базиса.
10. Докажите, что размерность корневого подпространства равна кратности соответствующего корня характеристического многочлена.
11. Докажите, что векторы, взятые из различных корневых подпространств, линейно независимы.
12. Если поле F алгебраически замкнуто, то V раскладывается в прямую сумму корневых подпространств $V^\lambda(A)$ по всем характеристическим корням λ.

Нильпотентные отображения

Линейное отображение $N\colon V \to V$ называется *нильпотентным*, если существует натуральное число m, для которого $N^m = 0$, наименьшее такое m называется *высотой* N. *Высотой вектора* v *относительно* N называется наименьшее h, для которого $N^h v = 0$.

13. Пусть v — вектор высоты h. Докажите, что векторы $v, Nv, \dots, N^{h-1}v$ линейно независимы.

Линейная оболочка векторов $L = \langle v, Nv, \dots, N^{h-1}v \rangle$ называется *циклическим подпространством* отображения N, порождённым вектором v.

14. Докажите, что циклическое пространство инвариантно относительно N.
15. Запишите матрицу ограничения N на L в базисе $v, Nv, \dots, N^{h-1}v$.
16. Докажите, что пространство V может быть разложено в прямую сумму $\dim\ker N$ циклических подпространств отображения N.