

Во всём листке, если не оговорено иное, под словом *граф* подразумевается простой конечный граф на v вершинах, содержащий e рёбер. Через $d(a)$ будет обозначаться степень вершины a . Через K_n будет обозначаться полный граф на n вершинах.

Теорема Турана

При исследовании экстремальных графов можно попытаться заменить одну или несколько вершин другими (новыми или копиями старых). Пусть v и n , $v \geq n \geq 2$, — натуральные числа и деление с остатком v на $n - 1$ имеет вид $v = m(n - 1) + r$. Графом Турана $T_n(v)$ называется полный $(n - 1)$ -дольный граф на v вершинах, в котором r долей содержат по $m + 1$ вершине и $(n - 1) - r$ долей содержат по m вершин.

1. Рассмотрим все графы на v вершинах, не содержащие подграфа, изоморфного K_n . Пусть G содержит наибольшее возможное количество рёбер. Докажите, что свойство вершин „быть несмежными” транзитивно.

2¹ Докажите, что граф G из предыдущей задачи — это граф Турана $T_n(v)$.

Множество вершин называется *независимым*, если они попарно несмежны. Размер $\alpha(G)$ наибольшего независимого множества графа G называется его *числом независимости*. Очевидно, что любая вершина, не входящая в независимое множество размера $\alpha(G)$, смежна с хотя бы одной вершиной этого множества.

3² Зафиксируем число v . Пусть для некоторого натурального числа $n \geq 2$ деление с остатком v на $n - 1$ имеет вид $v = m(n - 1) + r$. Докажите, что среди всех графов на v вершинах, имеющих число независимости меньше n , наименьшее количество рёбер содержит граф, состоящий из $n - 1$ компоненты связности, в котором r компонент изоморфны K_{m+1} и $(n - 1) - r$ компонент изоморфны K_m .

Упражнения

- На плоскости отметили n точек, попарные расстояния между которыми не больше 1. Докажите, что найдётся не более $\frac{n^2}{3}$ пар точек на расстоянии больше $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Даны n различных натуральных чисел, среди которых нет ни одного полного куба (т.е. ни одно из них не равно кубу целого числа). Найдите наибольшее возможное количество полных кубов среди попарных произведений этих чисел.
- Граф G содержит v вершин и e рёбер. Докажите, что в графе G не менее $\frac{e(4e-v^2)}{3v}$ циклов длины 3.
- В Академии Наук Швамбрании 100 ученых и некоторые пары ученых обсуждают друг с другом физику или химию (каждая пара ученых обсуждает не более одной науки), причем никакие трое ученых не обсуждают попарно одну и ту же науку. Каково наибольшее возможное число пар ученых, говорящих друг с другом о какой-нибудь из двух наук?
- Есть m батареек ($m > 2$). Известно, что среди них есть $n + 1$ хороших, но какие именно батарейки хорошие, а какие плохие, неизвестно. В фонарик вставляются две батарейки, при этом он светит, только если обе — хорошие. За какое наименьшее число таких попыток можно гарантированно добиться, чтобы фонарик светил?

¹Теорема Турана.

²Теорема Турана.

Задачи.

9. На плоскости отметили $4n$ точек, после чего соединили отрезками все пары точек, расстояние между которыми равно 1 см. Оказалось, что среди любых $n + 1$ точек обязательно есть две, соединённые отрезком. Докажите, что всего проведено не менее, чем $7n$ отрезков.
10. В компании, состоящей из 2021 человек, ровно 1400 являются диверсантами. Шерлоку необходимо определить хотя бы одного диверсанта. Для этого он может назначить несколько спецопераций, каждая из которых задействует ровно трёх участников компании. Спецоперация проваливается, если по крайней мере один её из участников является диверсантом! За одну попытку Шерлок выбирает трёх человек, отправляет их на спецоперацию и смотрит, провалится она или нет. Найдите наименьшее возможное количество операций, за которое Шерлок может достичь желаемого.
11. В конкурсе самодеятельности участвуют 120 артистов, некоторые из которых знакомы между собой. Произвольную четверку участников назовем *слабым* квартетом, если среди них имеется ровно одна пара знакомых. Какое максимальное возможное количество слабых квартетов можно образовать из участников конкурса?