Рациональные и иррациональные числа

Напомним, что число называется рациональным, если оно представимо в виде дроби p/q, где числа p и q целые и $q \neq 0$. Множество рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$, таким образом, справедлива цепочка $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ включений. Вещественные числа (сделаем вид, что мы знаем, что это такое), которые не являются рациональными, называются иррациональными.

1. Докажите иррациональность числа $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
2. Докажите, что каждое рациональное число p/q представимо в виде конечной либо бесконечной периодической десятичной дроби, причём длина периода меньше q.
3. Докажите, что всякая бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом и опишите алгоритм, по которому его можно представить в виде обыкновенной дроби.

Сопряжённые числа

Пусть числа a и b рациональные, а d — натуральное число, не являющееся полным квадратом. Числом, сопряжённым к числу $a+b\sqrt{d}$ называется число $a-b\sqrt{d}$. Сопряжённые числа ужé ранее использовались вами при избавлении от иррациональности в знаменателе.

4. Докажите, что число вида $a + b\sqrt{d}$ однозначно определяет коэффициенты a и b (т. е. такое представление единственно).
5. Докажите, что, если $(a + b\sqrt{d})^n = A + B\sqrt{d}$, то $(a - b\sqrt{d})^n = A - B\sqrt{d}$.

Упражнения

6. Докажите иррациональность числа $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.
7. Докажите иррациональность числа $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.
8. Докажите, что равенство $(x + y\sqrt{2})^2 + (z + t\sqrt{2})^2 = 5 + 4\sqrt{2}$ не может выполняться ни при каких рациональных x, y, z и t.
9. Докажите, что равенство $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$ не может выполняться ни при каких натуральных m и n .
10. Найдите 1008-ую цифру после запятой числа $(2 + \sqrt{3})^{2019}$.

Задачи

11. Докажите[1], что для любых вещественного числа x и натурального числа n существуют такие целые числа a и b, $1 \leqslant b \leqslant n$, что $|x - \frac{a}{b}| < \frac{1}{bn}$.
12. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$. Докажите[2], что существуют числа $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant b \leqslant n^m$ такие, что $|x_1 - \frac{a_1}{b}| < \frac{1}{bn}$, $|x_2 - \frac{a_2}{b}| < \frac{1}{bn}$, …, $|x_m - \frac{a_m}{b}| < \frac{1}{bn}$.
13. В файле записаны два числа: $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ и $1 + 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}$. Даник написал компьютерную программу, которая может выполнять три действия: 1) стереть записанное число x и записать вместо него $-2x$; 2) стереть любое записанное число x и записать вместо него $x + \sqrt[3]{2}$; 3) стереть записанные числа x и y и записать вместо них числа $x + y$ и $x - y$ (Даник сам выбирает, какое из чисел принять за x, а какое — за y). Может ли Даник за несколько таких операций добиться того, чтобы одно из записанных в файл чисел равнялось нулю?
14. Пусть α и β — положительные вещественные числа. Докажите, что каждое натуральное число ровно один раз встречается среди чисел $\lfloor\alpha\rfloor$, $\lfloor\beta\rfloor$, $\lfloor 2\alpha\rfloor$, $\lfloor 2\beta\rfloor$, $\lfloor 3\alpha\rfloor$, $\lfloor 3\beta\rfloor$, …, если и только если $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ и $\alpha, \beta \notin \mathbb{Q}$.
15. Докажите, что для любых натуральных чисел m и n найдётся натуральное число k такое, что $(\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^n = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$.
16. Докажите, что $v_2(\lfloor(1 + \sqrt{3})^{2n+1}\rfloor) = n + 1$ для любого натурального числа n.
17. Многочлен $P(x)$ удовлетворяет равенствам $(P(x))^2 = 1 + x + x^{100}Q(x)$, где Q — некоторый многочлен; и $P(0) = 1$. Найдите коэффициент при x^{99} в многочлене $(P(x) + 1)^{100}$.

---

[1] **Теорема Дирихле** или **теорема о рациональных приближениях**.

[2] **Теорема о совместных приближениях**.