10.01.04 Повторение: диофантовы уравнения и сравнения по модулю

Линейные диофантовы уравнения

Линейными диофантовыми называются уравнения вида $ax+by=c$, где a,b,c — заданные целые коэффициенты, а x,y — целочисленные переменные. Ясно, что, если c не делится на НОД(a,b), то уравнение $ax+by=c$ не имеет целых решений, поэтому, в дальнейшем будем считать, что НОД$(a,b)=1$. Разберём два способа их решения.

1. **Решаем явно:**
   (a) Рассмотрим для примера уравнение $5x+3y=7$. Понятно, что оно сводится к поиску всех целых чисел x, для которых число $7-5x$ делится на 3. Опишите все такие значения x и запишите все решения уравнения.
   (b) Докажите, что так получится решить любое уравнение вида $ax+by=c$, где НОД$(a,b)=1$, и опишите, как будет выглядеть решение в общем виде.
2. **Используем линейность:**
   (a) Пусть пара (x_0,y_0) является решением уравнения $ax+by=c$. Докажите, что пара (x_1,y_1) тоже является решением тогда и только тогда, когда $x_1-x_0=kb$ и $y_1-y_0=-ka$, где k — некоторое целое число.
   (b) Опишите, как найти одно (частное) решение (x_0,y_0) уравнения $ax+by=c$.

Сравнения по модулю

Действия с остатками удобно записывать на языке сравнений по модулю. Вместо „числа a и b дают одинаковые остатки при делении на число n” пишут кратко: „$a\equiv b \pmod n$” (читается как „a сравнимо с b по модулю n”). Сравнение $a\equiv b \pmod n$ равносильно $a-b \,\vdots\, n$.

3. Пусть заданы целые числа a,b,x,y,n,m такие, что $a\equiv b \pmod n$ и $x\equiv y \pmod n$. Докажите следующие свойства сравнений:
   (a) $a\pm x\equiv b\pm y \pmod n$;
   (b) $ma\equiv mb \pmod n$ и, даже, $ma\equiv mb \pmod{mn}$;
   (c) если $a\cdot m\equiv x\cdot m \pmod{nm}$, то $a\equiv x \pmod n$;
   (d) $a\cdot x\equiv b\cdot y \pmod n$;
   (e) если НОД$(m,n)=1$, то из $ma\equiv mx \pmod n$ следует $a\equiv x \pmod n$, причём в общем случае условие НОД$(m,n)=1$ нельзя опустить.

Из предыдущих задач можно сделать вывод: операция взятия по модулю перестановочна с операциями сложения, вычитания, умножения и возведения в степень — этим удобно пользоваться, поскольку остатки всегда меньше самих чисел.

Признаки делимости

4. Признаки делимости, связанные с цифрами, зависят от системы счисления. Докажите следующие признаки делимости десятичной системы счисления:
   (a) число даёт тот же остаток при делении на 3, что и сумма его цифр;
   (b) число даёт тот же остаток при делении на 9, что и сумма его цифр;
   (c) число даёт тот же остаток при делении на 2^n, что и число, записанное его последними n цифрами.
   (d) число даёт тот же остаток при делении на 11, что и разность между суммой цифр, стоящих на нечётных местах, и суммой цифр, стоящих на чётных местах (разряды нумеруются справа налево).

Упражнения

5. Докажите, что степень двойки не может оканчиваться четырьмя равными цифрами.
6. Докажите, что число $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.
7. Найдите последнюю цифру числа $2017^{2017^{2017}}$.
8. Из числа 20182018 вычитают учетверённую сумму цифр, с результатом проводят такую же операцию, потом снова и т. д., пока не получится отрицательное число или нуль. Найдите последнее положительное число.
9. Придумайте 100-значное число без нулевых цифр, делящееся на сумму своих цифр.
10. Докажите, что уравнения $x^2 - 2y^2 = 3$ и $5x^2 - 7 = 11y$ не имеют решений в целых числах x и y.
11. Верно ли, что все числа вида $p_1p_2 \ldots p_n + 1$, где $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ — первые n простых чисел, простые?
12. В прямоугольнике $a \times b$ на клетчатой плоскости провели одну из главных диагоналей. Сколько клеток она пересекла?
13. Числа a и b взаимно просты. Докажите, что для каждого натурального числа c существует ровно одна пара (x, y) целых чисел такая, что $0 \leqslant x \leqslant b - 1$ и $c = ax + by$.

Задачи

14. Докажите, что не существует бесконечной арифметической прогрессии, состоящей из степеней (больше первой) натуральных чисел.
15.[1] Докажите, что число для любых взаимно простых натуральных чисел a и b число $c = ab - a - b$ является наибольшим, для которого уравнение $ax + by = c$ не имеет решений в целых неотрицательных x, y.
16. На числовой прямой красным цветом отметили все точки вида $81x + 100y$, где x и y — натуральные числа. Остальные целочисленные точки отметили синим цветом. Докажите, что на прямой есть точка такая, что любые симметричные относительно неё целочисленные точки отмечены разным цветом.
17. Последовательность $a_0, a_1, \ldots$ натуральных чисел задана при всех $n \geqslant 0$ условиями

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{если число } \sqrt{a_n} \text{ целое;} \\ a_n + 3, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найдите все значения $a_0 > 1$ при которых найдётся число a такое, что $a_n = a$ для бесконечного количества n.

[1] Это утверждение называется **теоремой Сильвестра**.