Ещё немного интерполяции

Рассмотрим на координатной плоскости множество точек вида (i,j), $0 \leqslant i,j,i+j \leqslant n$, и $n(n+1)/2$ вещественных чисел $w_{i,j}$. Нас будут интересовать многочлен $f \in \mathbb{R}[x,y]$ степени не выше n, удовлетворяющего равенствам $f(i,j) = w_{i,j}$ при всех (i,j), $0 \leqslant i,j,i+j \leqslant n$.

1. Докажите, что существует не более одного такого многочлена.
2. Предположим, что $w_{i,j} = 0$ при всех $(i,j) < n$. Докажите, что искомый многочлен имеет вид $\sum\limits_{i,j\geqslant 0, i+j=n} w_{i,j}\binom{x}{i}\binom{y}{j}$.
3. Докажите, приведя явную формулу, что искомый многочлен всегда существует.

Пусть теперь заданы два произвольных множества $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ и набор из $n(n+1)/2$ вещественных чисел $w_{i,j}$, где $0 \leqslant i,j,i+j \leqslant n$. Нас интересует многочлен $f \in \mathbb{R}[x,y]$ степени не выше n, удовлетворяющий равенствам $f(x_i,y_j) = w_{i,j}$ при всех (i,j), $0 \leqslant i,j,i+j \leqslant n$. Очевидно, что доказательство его единственности аналогично доказательству задачи **??**.

4. Предположим, что $w_{i,j} = 0$ при всех $(i,j) < n$. Докажите, приведя явную формулу, что искомый многочлен существует.
5. Докажите, что искомый многочлен всегда существует.

Ясно, что аналогичная интерполяция возможна для многочленов любого количества переменных.

Немного делимостей

6. Пусть $P(x,x^3) = 0$ для всех вещественных x. Обязательно ли $P(x,y) \,\vdots\, (x^3 - y)$?
7. Многочлен $P \in \mathbb{R}[x,y]$ зануляется во всех точках единичной окружности. Обязательно ли $P(x,y) \,\vdots\, (x^2+y^2-1)$?
8. Многочлен $P \in \mathbb{R}[x,y]$ зануляется во всех точках гиперболы $y = \frac{1}{x}$. Обязательно ли $P(x,y) \,\vdots\, (xy-1)$?
9. Два многочлена $P, Q \in \mathbb{R}[x,y]$ имеют бесконечно много общих корней. Следует ли из этого, что у них есть общий непостоянных множитель?
10. Существует ли многочлен $P \in \mathbb{R}[x,y]$ такой, что $P(x,y)^2 + 1$ делится на x^2+y^2+1?

Однородные многочлены

11. Пусть однородный многочлен $P \in \mathbb{R}[x,y]$ зануляется хотя бы в одной точке прямой $ax+by=0$. Докажите, что $P(x,y) \,\vdots\, (ax+by)$.
12. Известно, что многочлен $P \in \mathbb{R}[x,y]$ делит однородный многочлен $Q \in \mathbb{R}[x,y]$. Докажите, что P тоже однородный.
13. Найдите все вещественные числа a, для которых найдётся такой ненулевой многочлен $P \in \mathbb{R}[x,y]$, что многочлен $P(x^2+y^2, axy)$ делит многочлен $P(x,y)^2$.
14. Многочлены $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ таковы, что $P(x) - P(y)$ делится на $Q(x) - Q(y)$. Докажите, что существует многочлен $S(x)$ такой, что $P(x) = S(Q(x))$.

Задачи с многочленами

15. Существует ли многочлен $P \in \mathbb{R}[x,y]$ такой, что $P(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}_{>0}$?
16. Существует ли многочлен $P \in \mathbb{R}[x,y]$ такой, что множества $\{(x,y) \mid P(x,y) > 0\}$ и $\{(x,y) \mid x,y > 0\}$ совпадают?
17. Про многочлен $P \in \mathbb{R}[x,y]$ известно, что для любого неотрицательного целого числа n каждый из многочленов $P(n,y)$ и $P(x,n)$ имеет степень не выше n. Докажите, что

степень многочлена $P(x, x)$ чётна.

18. Докажите, что для любого чётного числа $n \geqslant 2$ найдётся многочлен степени n, удовлетворяющий условию предыдущей задачи.
19. Существует ли функция $g\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ такая, что для любого рационального числа t функции $g(t, y)$ и $g(x, t)$ совпадают с некоторыми многочленами одной переменной на всём $\mathbb{Q}$, но сама g не является многочленом?
20. Существует ли функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такая, что для любого вещественного числа t функции $f(t, y)$ и $f(x, t)$ совпадают с некоторыми многочленами одной переменной на всём $\mathbb{R}$, но сама f не является многочленом?
21. Дано натуральное число d. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такие, что для любых вещественных чисел A, B, C, D функция $f(At + B, Ct + D)$ на всём $\mathbb{R}$ совпадает с некоторым многочленом степени не выше d.

Несколько переменных и целые точки

22. Даны n пар (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$, (a_n, b_n) взаимно простых целых чисел. Докажите, что существует однородный многочлен $P \in \mathbb{Z}[x, y]$ такой, что при всех $i = \overline{1, n}$ верны равенства $P(a_i, b_i) = 1$.
23. Рассмотрим все многочлены $P \in \mathbb{Z}[x, y, z]$, для которых условия $P(a, b, c) = 0$ и $a = b = c$ равносильны. Найдите наибольшее целое число r такое, что для любого такого многочлена и целых чисел m, n число $P(n, n + m, n + 2m)$ кратно m^r.