1. В банке открыты счета 2023 вкладчиков (количество денег — целое число рублей). Некоторые из вкладчиков дружат между собой и время от времени один из них переводит со своего счёта на счета всех своих друзей по одному рублю. Оказалось, что при помощи таких операций вкладчики могут устроить любое перераспределение средств между счетами. Найдите все возможные количества пар друзей-вкладчиков.
2. Дан простой двудольный граф G. Все его рёбра ориентируют в некотором направлении так, чтобы не существовало ни одного ориентированного цикла. Докажите, что количество способов, которыми это можно сделать не кратно трём.
3. Вася задумал двузначное число a, а Петя пытается его угадать. Он произносит натуральное число k, а Вася сообщает Пете сумму цифр числа ka. За какое наименьшее количество вопросов Петя заведомо сможет определить задуманное число?
4. Последовательность $N \geqslant 3$ подряд идущих натуральных чисел назовём *хорошим блоком*, если произведение каких-то двух из них делится на сумму остальных. Найдите все N, для которых существует бесконечно много хороших блоков.
5. Рассмотрим несколько различных параллелограммов единичной площади, у каждого из которых одна из вершин лежит в начале координат O, а координаты остальных трёх вершин — неотрицательные целые числа. Для каждого такого параллелограмма $OABC$ вычислим величину $OA + OC - OB$. Докажите, что сумма этих величин не больше 2.
6. В окружность вписано несколько правильных многоугольников. Федя повернул их так, чтобы они все имели общую вершину. Докажите, что от этого количество различных вершин на рисунке не увеличилось.
7. В окружность вписано $3n$ треугольников, все их $3n$ вершин различны. Докажите, что можно в каждом треугольнике покрасить одну вершину в белый цвет, а другую — в красный так, чтобы белые и красные вершины на окружности чередовались.
8. Выпуклый многогранник M с треугольными гранями разрезан на тетраэдры; все вершины тетраэдров являются вершинами многогранника, и любые два тетраэдра либо не пересекаются, либо пересекаются по общей вершине, общему ребру или общей грани. Докажите, что не может оказаться, что у каждого тетраэдра ровно одна грань лежит на поверхности M.
9. На окружности выбрали 10^{100} точек и расставили в них числа от 1 до 10^{100} в некотором порядке. Докажите, что можно выбрать 100 попарно непересекающихся хорд с концами в выбранных точках, суммы чисел на концах которых равны.
10. Дан многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$. Положим $d(a,k) = |\underbrace{f(f(\ldots(f}_{k \text{ букв } f}(a))\ldots)) - a|$. Известно, что $d(a,k) > 0$ при всех $a \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что $d(a,k) \geqslant k/3$ при всех $a \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$.
11. Дана бесконечная последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ положительных вещественных чисел такая, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{n+1}^2}{n+1}}$. Докажите, что данная последовательность постоянна.
12. Пусть p — нечётное простое число. Докажите, что для по крайней мере $(p+1)/2$ чисел n из множества $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ сумма $\sum_{k=0}^{p-1} k!n^k$ не делится на p. (В этой задаче число 0^0 принимайте равным 1.)