Доказательство от противного

Можно выделить несколько основных приёмов доказательства утверждений. Некоторые утверждения получается вывести напрямую из имеющихся истинных утверждений в качестве следствия либо при помощи равносильных переходов. Если это не удаётся, часто прибегают к приёму „доказательство от противного": предполагают, что требуемое утверждение неверно, и приходят к противоречию. Для того, чтобы что-то выводить, нужно отталкиваться от истинных утверждений, т. е. отрицание данного утверждение $\mathcal{Y}$ необходимо сформулировать в виде самостоятельного утверждения. Утверждение $\overline{\mathcal{Y}}$ называется отрицанием $\mathcal{Y}$, если в любом предположении одно из $\mathcal{Y}$ и $\overline{\mathcal{Y}}$ верно, а другое — ложно.

1. Выведите правило, как по утверждению, записанному при помощи знаков $\forall$ и $\exists$, записывать его отрицание.

Принцип крайнего

При решении задач часто полезно начать исследование с какого-нибудь «крайнего» объекта, т. е. объекта, с каким-нибудь особенным свойством: наименьшего (наибольшего) числа, самого дальнего (ближнего) объекта и т. д.

2. В каждой клетке шахматной доски записано число. Оказалось, что любое число равно среднему арифметическому (сумме, делённой на количество) чисел, записанных в соседних клетках. Докажите, что все числа равны.

Принцип Дирихле

Следующие несколько схожих утверждений принято называть принципом Дирихле: 1) „Среди $n+1$ объекта n видов обязательно найдутся два одного вида"; 2) „Среди $n \cdot k+1$ предметов n видов обязательно найдутся $k+1$ одного вида"; 3) „Если сумма n чисел равна S, то среди них есть как число, не большее S/n, так и число, не меньшее S/n".

3. В классе учится 22 ученика. Докажите, что хотя бы у четырёх из них день рождения приходится на один и тот же день недели.

Метод Математической Индукции

Этот метод используется для доказательства справедливости утверждения, которое зависит от натурального параметра: 1) доказываем утверждение для нескольких начальных значений (база индукции); 2) предполагаем, что утверждение уже доказано для всех номеров не превосходящих k (предположение индукции); 3) доказываем, что верно и утверждение с номером $k+1$ (шаг индукции (вместе с п. 2)). Если третий пункт удался, то утверждение доказано по ММИ[1].

4. Докажите тождество $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.
5. Докажите тождество $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

[1]Этот метод по сути — то же, что предположить обратное, выбрать наименьшее значение, при котором утверждение неверно и получить противоречие с тем, что оно верно при всех меньших значениях параметра (если меньших нет, то мы доказываем базу индукции).

Упражнения

6. Докажите, что из 11 различных бесконечных десятичных дробей можно выбрать две такие, которые совпадают в бесконечном числе разрядов.
7. В бригаде 7 человек и их суммарный возраст — 332 года. Докажите, что среди них есть трое, сумма возрастов которых не меньше 144 лет.
8. На плоскости дано 2021 точек, причем среди любых трёх из них найдутся две на расстоянии меньше 1. Докажите, что существует круг радиуса 1, содержащий не меньше 1011 из этих точек.
9. На каждой из 2021 планет, попарные расстояния между которыми различны, находится по астроному, который наблюдает за ближайшей к нему планетой. Докажите, что за некоторой планетой не наблюдает никто.
10. Докажите, что неравенство[2] $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ верно при всех натуральных n и вещественных $x \geqslant -1$.
11. Рассмотрим всевозможные дроби с числителем 1 и натуральным знаменателем: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, … (такие дроби называются *аликвотными*). Докажите, что для любого $n \geqslant 3$ единицу можно представить в виде суммы n различных аликвотных дробей.
12. Докажите, что существуют арифметические прогрессии любой наперёд заданной конечной длины, состоящие из степеней (больше первой) натуральных чисел.
13. Известно, что $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = 2x_n + 1$. Найдите явную формулу для вычисления элементов последовательности (x_n).

Задачи

14. Дано 2021 натуральное число, не превосходящее 4040. Докажите, что среди них найдутся два, одно из которых делится на другое.
15. Докажите неравенство $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{17}{10}$.
16. Докажите, что для любых неотрицательных вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ верно неравенство[3]
$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$
17. Числовая последовательность $A_1, A_2, \ldots$ определена равенствами $A_1 = 1$, $A_2 = -1$, а для всех $n \geqslant 3$: $A_n = -A_{n-1} - 2A_{n-2}$. Докажите, что при всех $n \geqslant 1$ число $2^{n+2} - 7A_n^2$ является полным квадратом.

---

[2] Это утверждение называется **неравенством Бернулли**.

[3] Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.