Алгебраическое доказательство

Мы готовы доказать основную теорему алгебры: *Многочлен степени $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней с учётом кратности.* Напомним, что из теоремы Безу следует, что достаточно доказывать существование по крайней мере одного корня у многочлена ненулевой степени, что мы и будем делать.

Выделим основные детали, которые нам известны: 1) любой многочлен $p \in \mathbb{R}[x]$ нечётной степени имеет вещественный корень; 2) любой многочлен $p \in [x]$ имеет два корня с учётом кратности в $\mathbb{C}$; 3) для каждого многочлена многочлен $p \in \mathbb{R}[x]$ существует расширение $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset K$, в котором p раскладывается на множители первой степени; более того, 4) каждый симметрический многочлен от всех корней p в K принадлежит $\mathbb{R}[x]$.

1. Индукцией по $v_2(\deg p)$ докажите, что любой многочлен $p \in \mathbb{R}[x]$ имеет хотя бы один комплексный корень.
2. Докажите, что любой многочлен $p \in \mathbb{C}[x]$ имеет хотя бы один комплексный корень.

Аналитическое доказательство

Воспользуемся двумя утверждениями из школьного курса анализа, которые дословно переносятся и на комплексный случай: во-первых, многочлен является непрерывной функцией (между точками на комплексной плоскости определены расстояния); во-вторых, любая непрерывная функции на ограниченном замкнутом множестве (нам достаточно будет круга) достигает максимума и минимума (это множество, как и отрезок можно делить на части меньшего диаметра).

Предположим, что многочлен $P \in \mathbb{C}[x]$ не имеет корней, тогда модуль его значения всегда ненулевой, а значит, положительный. Мы докажем, что существует минимум модулей его значений, но он не может быть больше нуля, что приведёт к противоречию.

3. Докажите, что у $|P(z)|$ есть минимум на всём $\mathbb{C}$.
4. Покажите, что можно считать, что $\min\limits_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = 1$ и он достигается в точке $z = 0$.
5. Покажите, что можно считать, что $P(z) = 1 - z^k + b_{k+1}z^{k+1} + \ldots + b_n z^n$.
6. Докажите, что значения последнего многочлена бывают меньше единицы по модулю.

„Дама с собачкой”

Рассмотрим ещё одно доказательство основной теоремы алгебры, которое, в отличие от предыдущего, будет не до конца обоснованным, но, зато, очень наглядным и красивым. Как и раньше предположим, что у многочлена $P(z)$ нет корней. Пусть точка z движется по окружности радиуса R с центром в нуле: $z(\varphi, R) = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in [0; 2\pi]$. Исследуйте траекторию точки $P(z(\varphi, R))$ на комплексной плоскости:

7. Покажите, что, если R достаточно мало́, то точка $P(z(\varphi, R))$ „гуляет” вокруг точки $a_0 \neq 0$ и не делает ни одного оборота относительно начала координат.
8. Покажите, что, если R достаточно велико́, то точка $P(z(\varphi, R))$ делает n оборотов вокруг начала координат.

Из этого следует, что при непрерывном изменении R, в какой-то момент количество оборотов траектории вокруг начала координат должно измениться. Поскольку траектория изменяется непрерывно вместе с радиусом R, то в некоторый момент она должна пройти через начало координат, т. е. у многочлена P должен существовать корень.

Упражнения

9. Докажите, что для всех $n \in \mathbb{N}$ существуют ненулевые $P, Q \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, удовлетворяющие тождеству $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$.
10. Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}$ — расширение полей, в котором элементы $a, b \in \mathcal{K}$ алгебраичны над $\mathcal{F}$. Докажите, что $a + b$ и ab также алгебраичны над F.
11. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — натуральные числа. Докажите, что $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n}$ — натуральное число, только если каждое a_i является полным квадратом.

Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}$ — расширение полей и $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{K}$, через $\mathcal{F}(a_1, \ldots, a_m)$ будем обозначать наименьшее по включению поле, содержащее $\mathcal{F}$ и $a_1, \ldots, a_m$. Кроме того, через $[\mathcal{K} \colon \mathcal{F}]$ обозначим размерность векторного пространства $\mathcal{K}$ над $\mathcal{F}$. Если эта размерность конечна, то будем говорить, что $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}$ — конечное расширение.

12. Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}$ и $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ — конечные расширения. Докажите, что $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$ — конечное расширение и $[\mathcal{L} \colon \mathcal{F}] = [\mathcal{L} \colon \mathcal{K}] \cdot [\mathcal{K} \colon \mathcal{F}]$.
13. Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}$ — конечное расширение. Докажите, что каждый элемент $a \in \mathcal{K}$ алгебраичен над F.
14. Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}$ — расширение полей и элемент $a \in \mathcal{K}$ алгебраичен над F. Докажите, что $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(a)$ — конечное расширение.
15. Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}$ — расширение полей и элементы $a, b \in \mathcal{K}$ алгебраичны над F. Докажите, что $\mathcal{F}(a)(b) = \mathcal{F}(a, b)$ и выведите отсюда утверждение задачи 10.