Касательная через кратность.

Попробуем найти формулы касательной к графикам некоторых функций по аналогии с касательной к окружности. Под *касательной* к графику функции будем понимать наклонную прямую, которая имеет с графиком ровно одну общую точку.

1. Найдите уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке $(2, 4)$.
2. Найдите уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в произвольной точке (x_0, x_0^2).
3. Найдите уравнение касательной к гиперболе $y = 1/x$ в произвольной точке $(x_0, 1/x_0)$.
4. Найдите уравнение касательной[1] к графику функции $y = x^3$ в точке $(2, 8)$.

Касательная как предельное положение хорды.

На примере касательной к $y = x^3$ видно, что даже к степенной функции степени больше двух сложно найти касательную в произвольной точке. Кроме того, хочется иметь определение, которое позволит находить касательную для функций, которые устроены сложнее, чем степенная.

Зафиксируем на графике функции $y = f(x)$ точку $(x_0, f(x_0))$ и дадим аргументу x приращение (изменение) $\Delta x = h$, т. е. рассмотрим точку с абсциссой $x_0 + h$. Тогда приращение функции равно $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ показывает скорость изменения функции на отрезке $[x_0, x_0 + h]$ и равно угловому коэффициенту прямой, проходящей через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Естественно предположить, что при приближении Δx к нулю отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ должно приближаться к угловому коэффициенту касательной.

5. Проделайте это для функции $f(x) = x^2$ и точки $x_0 = 2$. К чему приближается $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при приближении Δx к нулю?
6. Проделайте это для функции $f(x) = x^n$ и произвольной точки (x_0, x_0^n).

Производная функции в точке

Угловой коэффициент касательной в том виде, который мы только что рассматривали называется производной функции f в точке x_0. Строго говоря:

Производной функции f в точке x_0 называется предел $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, если он существует. Если сопоставить каждой точке x производную функции f в точке x, то получим новую функцию $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, которая называется производной функции f.

Касательная в точке x_0 к графику функции f — это прямая, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$.

7. Запишите в общем виде уравнение касательной в точке x_0 к графику функции f.

В приведённых выше определениях слово *предел* заменило наивное понятие *приближается*, которое мы использовали до этого.

Предел функции в точке

Дадим строгое определение понятия *„предел функции f в точке x_0 равен A"*:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \overset{\text{опр}}{\iff} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Если добавить слов, то получится: *какое бы малое число $\varepsilon > 0$ ни было задано, найдётся такая окрестность (интервал) $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, что значения функции f во всех точках этой окрестности (кроме x_0) отличаются от A меньше, чем на ε.*

Вообще говоря, „окрестностью" точки x_0 на числовой прямой называется любое множество, содержащее точку x_0 и интервал, которому она принадлежит. Не ограничивая общности, можно сразу считать её интервалом с центром в x_0.

[1] В этом пункте наше определение касательной не подходит. Необходимо уточнить, что касательная — локальное понятие, т. е. она должна иметь ровно одну общую точку только на некотором промежутке.

8. Пользуясь определением докажите, что $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1} = 2$.
9. Вычислите a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2-5}{2x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{4-x^2}$; c)$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{8x}-2x}{x^2-1}$.
10. Докажите[2], что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
11. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$, в то время как $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не определён.

Свойства предела

Предположим, что заданы функции f и g, имеющие предел в точке x_0, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. Рассмотрим следующие основные свойства пределов:

12. Докажите, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = C \Rightarrow C = A$, т. е. предел в точке может быть только один.
13. Докажите, что $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$.
14. Докажите, что $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$.
15. Докажите, что, если $B > 0$, то $g(x) > 0$ для всех x из некоторой окрестности точки x_0.
16. Докажите, что, если $B \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.
17. Докажите, что, если $f(x) \leqslant g(x)$ для всех x из некоторой окрестности x_0, то $A \leqslant B$.
18. Докажите, что, если $A = B$ и для некоторой функции $h(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 выполнено двойное неравенство[3] $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$.

Предел функции на бесконечности

Помимо стремления аргумента к точке, нетрудно дать естественное определение стремления аргумента к бесконечности.

19. Пусть задана функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Сделаем замену $x = \operatorname{tg}(y)$, тогда для функции $g(y) = f(\operatorname{tg} y)\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ корректно определено понятие $\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}} g(y)$. Выясните, чему в этом определении соответствуют окрестности точки $y_0 = \frac{\pi}{2}$ для переменной x.

Соответствующее определение имеет вид:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \overset{\text{опр}}{\Longleftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{R} : x > N \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

20. Пользуясь определением докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$.
21. По аналогии с $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ дайте определения для $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.
22. Пользуясь определением докажите, что $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{5-2x} = +\infty$.
23. Сформулируйте по аналогии определения, в которых вместо A стоит $+\infty$, $-\infty$ и ∞.
24. Любая числовая последовательность $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ является функцией $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, заданной по правилу $n \mapsto a_n$. Сформулируйте определение предела последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

---

[2]Этот предел называется **(первым замечательным пределом)**.

[3]Это утверждение называется **леммой о двух милиционерах**.