Преобразуем выражения и оцениваем делители

1. Наибольший собственный делитель натурального числа n равен d. Может ли наибольший собственный делитель числа $n+2$ быть равен $d+2$?
2. Найдите все пары (n, d) натуральных чисел, таких что $d \mid n$ и $nd+1 \mid n^2+d^2$.
3. Пусть n и d — натуральные числа, такие что $d > n > 1$ и $d \mid n^2+1$. Докажите, что $d > n+\sqrt{n}$.
4. Натуральные числа $a > b > 1$ таковы, что $b^2+a-1 \mid a^2+b-1$. Докажите, что b^2+a-1 не представимо в виде степени простого числа.
5. Найдите все простые числа $p > 2$, такие что оба числа $\frac{p+1}{2}$ и $\frac{p^2+1}{2}$ являются полными квадратами.
6. Натуральное число a таково, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ у числа n^2a-1 есть делитель вида $nx+1$, $x \in \mathbb{N}$. Докажите, что число a является полны квадратом.
7. Натуральное число n называется *совершенным*, если $\sigma(n) = 2n$. Докажите, что чётные совершенные числа представимы в виде $2^{k-1}(2^k-1)$, где число 2^k-1 простое.
8. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ через $f(n)$ обозначим наименьшее натуральное число m, такое что $\tau(m) = n$. Докажите, что для любого $k \in \mathbb{N}$ число $f(2^k)$ делит $f(2^{k+1})$.
9. Найдите все пары (x, y) различных рациональных чисел, таких что $x^y = y^x$.
10. Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, таких что $mn-1 \mid n^3+1$.
11. Найдите все целые числа x и y, такие что $x^2+x = y^3+y^2+y$.
12. Найдите все натуральные числа n и k, такие что $(n-1)!+1 = n^k$.
13. О натуральных числах m и n известно, что $m > n^{n-1}$ и все числа $m+1$, $m+2$, $\ldots$, $m+n$ составные. Докажите, что существуют такие попарно различные простые числа p_1, p_2, $\ldots$, p_n, что $p_k \mid m+k$ для всех $k = \overline{1, n}$.
14. Даны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $a > 1$ такие, что a делится на произведение $a_1a_2\ldots a_n$. Докажите, что $a^{n+1}+a-1$ не делится на $(a+a_1-1)(a+a_2-1)\ldots(a+a_n-1)$.
15. Натуральные числа x и y таковы, что $2x^2-1 = y^{15}$. Докажите, что, если $x > 1$, то x делится на 5.
16. Найдите все такие нечётные натуральные $n > 1$, что для любых взаимно простых делителей a и b числа n число $a+b-1$ также является делителем n.
17. Натуральные числа $x > 2$, $y > 1$ и z таковы, что $x^y+1 = z^2$. Обозначим через p количество различных простых делителей числа x, а через q — количество различных простых делителей числа y. Докажите, что $p \geqslant q+2$.
18. Найдите все такие составные числа n, что для любого разложения $n = xy$ на два натуральных множителя x и y сумма $x+y$ является степенью двойки.