1. Множество X состоит из n элементов. Для каждых двух подмножеств $A, B \in X$ нашли мощность $|A \cap B|$. Чему равна сумма всех найденных чисел?
2. Множество $\mathcal{M}$, состоящее из 2^{2023}, элементов разбили на несколько попарно непересекающихся подмножеств. За один ход можно выбрать два из имеющихся подмножеств A и B таких, что $|A| \geqslant |B|$, и переместить некоторые $|B|$ элементов из подмножества A в подмножество B (эти элементы окажутся в B, но перестанут лежать в A). Докажите, что за конечное число таких ходов можно получить подмножество, совпадающее с $\mathcal{M}$.
3. Множество $\mathcal{M}$ разбито на попарно непересекающиеся подмножества двумя не обязательно различными способами: $\mathcal{M} = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n$ и $\mathcal{M} = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_n$ так, что объединение любых двух непересекающихся подмножеств A_i и B_j содержит не менее n элементов. Докажите, что $|\mathcal{M}| \geqslant n^2/2$.
4. В n-элементном множестве A выбрали $[\sqrt{2n}] + 2$ подмножества таким образом, что объединение любых трёх из них равно A. Докажите, что объединение каких-то двух из них равно A.
5. В школе учатся $2n$ учеников ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$). Каждую неделю n учеников отправляются в поездку. После нескольких поездок оказалось, что любые два ученика хотя бы раз поучаствовали вместе в одной поездке. Найдите наименьшее возможное количество поездок.
6. Найдите наибольшее возможное число множеств, удовлетворяющих одновременно следующим условиям:
   (i) каждое множество состоит из 4 элементов;
   (ii) любые два различных множества имеют ровно два общих элемента;
   (iii) никакие два элемента не принадлежат одновременно всем множествам.
7. В множестве из 20 элементов выбраны $2k + 1$ различное семиэлементное подмножество, каждое из которых пересекается ровно с k другими выбранными подмножествами. При каком наибольшем k это возможно?
8. В цирке есть n клоунов, которые одеваются и гримируются путём выбора из 12 различных имеющихся цветов. При этом каждому клоуну необходимо использовать не менее 5 различных цветов. Однажды директор цирка потребовал, чтобы никакие два клоуна не использовали одинаковый набор цветов и никакие более чем 20 клоунов не могли использовать любой из цветов одновременно. Найдите наибольшее возможное n, при котором удастся выполнить требования директора.
9. В парламенте n депутатов. Какое наибольшее число k попарно различны комиссий можно составить из этих депутатов так, чтобы выполнялось следующее условие: какие бы несколько комиссий (не менее одной, но, быть может, и все), найдётся депутат, входящий в нечётное число выбранный комиссий?
10. Таблицу $n \times n$ назовём *хорошей*, если её клетки можно покрасить в три цвета так, чтобы для любых двух различных строк и любых двух различных столбцов четыре клетки, стоящие на их пересечении, не были покрашены в один цвет.
    (a) Покажите, что существует хорошая таблица размера 9×9.
    (b) Докажите, что $n < 11$ для всякой хорошей таблицы $n \times n$.
    (c) Существует ли хорошая таблица размера 10×10?
11. Дано конечное семейство конечных множеств такое, что всякие два элемента принадлежат одновременно не более, чем двум множествам. Докажите, что, если любые 10 элементов покрываются объединением некоторых двух множеств, то все элементы

покрываются объединением некоторых двух множеств.

12. Положим $A = \{(a_1, a_2, \dots, a_8) : a_i \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant a_i \leqslant i+1\}$. Назовём подмножество $X \subset A$ *разреженным*, если для любых двух различных элементов $(a_1, a_2, \dots, a_8)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_8)$ из X существуют хотя бы три индекса i, при которых $a_i \neq b_i$. Найдите наибольшее возможное количество элементов в разреженном подмножестве $X \subset A$.
13. Дано конечное семейство F, состоящее из конечных множеств и удовлетворяющее следующим условиям:
    (i) если $A, B \in F$, то и $A \cup B \in F$;
    (ii) если $A \in F$, то $|A|$ не делится на 3.
    Докажите, что можно указать не более двух элементов таких, что каждое множество семейства F содержит по крайней мере один из них.
14. Дан набор $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ подмножеств n-элементного множества S, такой что $2 \leqslant |A_i| < n$, $i = \overline{1, k}$. Найдите наибольшее значение k, при котором гарантированно возможно выписать все элементы S в таком порядке, что никакое подмножество A_i из данного набора не состоит из подряд идущих элементов.
15. Даны два натуральных числа $n \geqslant k$ и семейство $\mathcal{F}$ конечных множеств, такие, что
    (i) $\mathcal{F}$ содержит по крайней мере $C_n^k + 1$ различных множеств, состоящих ровно из k элементов;
    (ii) для любых двух множеств $A, B \in \mathcal{F}$ их объединение $A \cup B \in \mathcal{F}$.
    Докажите, что $\mathcal{F}$ содержит по крайней мере три множества, состоящие из не менее, чем n элементов.
16. Дано множество F, состоящее из попарно пересекающихся конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$.
    (a) Можно ли утверждать, что существует конечное множество $Y \subset \mathbb{N}$ такое, что для любых подмножеств $A, B \in F$ пересечение $A \cap B \cap Y$ непусто?
    (b) Предположим, что нам известно, что все элементы F имеют одинаковую мощность. Изменит ли это ответ на предыдущий вопрос?
17. Дан набор $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ конечных множеств. Известно, что для любых различных натуральных i и j выполнены неравенства $|A_i| \geqslant i^3$ и $|A_i \cap A_j| \leqslant \min(i, j)$. Докажите, что существует такое множество B, что $|B \cap A_i| = i$ при всех $i \in \mathbb{N}$.
18. Найдите наибольшее вещественное число k, для которого существуют множество X и его подмножества $Y_1, Y_2, \dots, Y_{31}$, удовлетворяющие следующим двум условиям:
    (i) для любых двух элементов множества X найдётся подмножество Y_i, не содержащее ни одного их них;
    (ii) при любом сопоставлении подмножествам Y_i неотрицательных чисел α_i с суммой 1 найдётся такой элемент из X, что сумма чисел α_i, сопоставленных всем содержащим его подмножествам Y_i, не меньше k.