Непрерывность функции в точке

Напомним, что производной функции f в точке x_0 называется предел $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, если он существует. Поскольку знаменатель стремится к нулю, то для существования предела числитель тоже должен стремиться к нулю, т. е. при приближении аргумента x к x_0, значения функции $f(x)$ приближаются к значению в этой точке, т. е. к числу $f(x_0)$. Равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ определяет понятие „функция f непрерывна в точке x_0".

Из соответствующих свойств предела функции следует, что сумма, разность, произведение и отношение (если знаменатель в точке не обращается в нуль) непрерывных функций является непрерывной функцией.

1. Докажите, что дробно-рациональная функция (отношение многочленов) непрерывна во всех точках, не являющихся корнями знаменателя.
2. Докажите, что f непрерывна в точке x_0 если и только если из равенства $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ следует равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Свойства непрерывных функций

Функция, непрерывная в каждой точке области $D \subset \mathbb{R}$, называется непрерывной на D, функция непрерывная на всей области определения называется непрерывной.

3. Докажите, что, если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $g(x)$ непрерывна в точке $f(x_0)$, то их композиция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.
4. Докажите, что непрерывная на отрезке функция ограничена на нём.
5. Докажите, что непрерывная на отрезке функция достигает на нём наибольшее и наименьшее значения.
6. Докажите, что непрерывная функция принимает все свои промежуточные значения, иными словами, если $f(x_1) = A$ и $f(x_2) = B$, то для любого числа C между A и B найдётся точка x между a и b такая, что $f(x) = C$.
7. Докажите, что непрерывная инъективная функция является монотонной.
8. Докажите, что, если функция $f(x)\colon [x_1, x_2] \to [A, B]$ непрерывна и строго монотонна, причём $[A, B]$ — её множество значений, то у f существует непрерывная обратная функция $f^{-1}\colon [A, B] \to [a, b]$

Непрерывные функции

Почти все функции, изучаемые в школе непрерывны на своей области определения.

9. Докажите, что функция $\sqrt[n]{x}$ непрерывна на $(0, +\infty)$ при всех $n \in \mathbb{N}$.
10. Докажите, что степенная функция x^n непрерывна $(0, +\infty)$ при всех $n \in \mathbb{Q}$.
11. Докажите непрерывность функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arccos x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ во всех точках их определения.

Равномерная непрерывность

Функция f называется *равномерно непрерывной* на отрезке $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : (x_1, x_2 \in [a, b])\ \&\ (|x_1 - x_2| < \delta) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

12. Докажите, что равномерно непрерывная на отрезке функция непрерывна на нём.
13. Приведите пример непрерывной на интервале $(0, 1)$ функции, которая не является равномерно непрерывной на нём.
14. Докажите, что непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нём.

Модулем непрерывности функции f на отрезке $[a,b]$ называется функция $\omega_f(\delta)$ аргумента $\delta \in (0, b-a]$, заданная равенством

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : (x_1, x_2 \in [a,b]) \ \& \ (|x_1 - x_2| < \delta)\}.$$

15. Докажите, что $\omega_f(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \omega_f(\delta_1) + \omega_f(\delta_2)$ для всех $\delta_1, \delta_2 \in (0, b-a]$, $\delta_1 + \delta_2 \leqslant b - a$.
16. Приведите пример функции, для которой неравенство из предыдущей задачи является строгим при всех допустимых δ_1 и δ_2.
17. Докажите равенство $\lim\limits_{\delta\to+0} \omega_f(\delta) = 0$ для любой непрерывной на отрезке функции f.

Упражнения

18. Вычислите пределы: **a)** $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 10x}{\sin 2x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos 4x}{x \sin 3x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{x-\pi}{\operatorname{tg} 2x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.
19. Известно, что последовательности $a_n = x_n + y_n$ и $b_n = x_n \cdot y_n$ сходятся. Обязательно ли последовательности (x_n) и (y_n) тоже сходятся?
20. Дана последовательность (x_n) такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Обязательно ли последовательность (x_n) имеет предел?
21. Докажите, что для любых непрерывных на $[0,1]$ функций f и g, удовлетворяющих неравенствам $f(0) < g(0)$ и $f(1) > g(1)$, есть такое число $a \in [0,1]$, что $f(a) = g(a)$.
22. Докажите, что у любой непрерывной функции $f\colon [0,1] \to [0,1]$ есть неподвижная точка, т. е. такое число $a \in [0,1]$, что $f(a) = a$.

Задачи

23. Приведите пример функции $[0,1] \to [0,1]$, разрывной в каждой точке отрезка $[0;1]$.
24. Приведите пример функции $[0,1] \to [0,1]$, непрерывной во всех иррациональных точках и разрывной во всех рациональных точках этого отрезка[1].

[1] Оказывается, в этом примере нельзя поменять местами множества рациональных и иррациональных чисел, однако, мы пока не готовы это доказать.