## Ориентированная площадь параллелограмма

Определим функцию $S\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, которая по двум векторам $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ плоскости вычисляет площадь $S(\vec{u}, \vec{v})$ параллелограмма, построенного на них. Во-первых, эта функция должна быть *линейной* по обоим аргументам[1]: $S(x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2, \vec{v}) = xS(\vec{u}_1, \vec{v}) + yS(\vec{u}_2, \vec{v})$ и $S(\vec{u}, x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2) = xS(\vec{u}, \vec{v}_1) + yS(\vec{u}, \vec{v}_2)$ для любых вещественных $x$ и $y$. Во-вторых, площадь вырожденного параллелограмма должна равняться нулю: $S(\vec{u}, \vec{u}) = 0$. Наконец, чтобы с чего-то начать, мы должны определить единичную площадь: $S(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$, где, как обычно, $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — единичные векторы, параллельные осям $Ox$ и $Oy$ соответственно.

1. Докажите равенства $S(\vec{u}, \vec{0}) = S(\vec{0}, \vec{v}) = 0$.
2. Докажите, что такая функция должна быть кососимметрической: $S(\vec{v}, \vec{u}) = -S(\vec{u}, \vec{v})$, т. е. мы хотим определить *ориентированную* площадь.
3. Выразите значение функции $S$ через координаты векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Проверьте, что она удовлетворяет всем условиям.

Ориентированный объём в произвольном $n$-мерном пространстве, очевидно, должен быть полилинейной кососимметрической функцией, которую мы положим равной единице на наборе единичных векторов, идущих вдоль координатных осей.

4. Выведите формулу объёма параллелепипеда в $\mathbb{R}^3$.

## Перестановки

Произвольная биекция $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ называется *перестановкой* на $n$ элементах. Нетрудно видеть, что множество всех перестановок на $n$ элементах образуют группу[2] с операцией „композиция" и единичным элементом — тождественной перестановкой $Id$, эту группу принято обозначать $S_n$. Если существует последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k$ различных элементов такая, что $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(a_2) = a_3$, $\ldots$, $\sigma(a_{k-1}) = a_k$ и $\sigma(a_k) = a_1$, а на всех остальных элементах $\sigma$ тождественна, то $\sigma$ называется *циклом* длины $k$. Циклы длины 2 называются *транспозициями*.

5. Докажите, что любую перестановку единственным образом можно представить в виде произведения нескольких циклов, не имеющих общих элементов[3].
6. Докажите, что цикл длины $k$ представи́м виде произведения $k-1$ транспозиций.
7. Докажите, что меньшим количеством транспозиций обойтись нельзя.

## Чётность перестановки

*Инверсией* в перестановке $\sigma$ называется произвольная пара $(i, j)$ индексов такая, что $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$. Если в перестановке $\sigma$ количество всех инверсий равно $p$, то чётностью $\sigma$ называется чётность числа $p$, для этого есть удобное обозначение $(-1)^\sigma \overset{\text{опр}}{=} (-1)^p$.

8. Пусть $\sigma$ — произвольная перестановка, а $\tau$ — транспозиция. Докажите равенство $(-1)^{\tau\sigma} = -(-1)^\sigma$ и выведите отсюда, что всякая транспозиция нечётна.
9. Найдите чётность произвольного цикла длины $k$.
10. Докажите, что для любых перестановок $\sigma$ и $\tau$ верно равенство $(-1)^{\tau\sigma} = (-1)^\tau \cdot (-1)^\sigma$.
11. На двух параллельных прямых отметили по $n$ точек и занумеровали их числами от 1 до $n$ в одинаковом направлении. После этого соединили отрезками все пары точек с номерами $i$ на первой прямой и $\sigma(i)$ на второй прямой. Докажите, что количество пар пересекающихся отрезков равно числу инверсий перестановки $\sigma$.

---

[1] Функции, линейные по всем своим (нескольким) аргументам называются **полилинейными**.

[2] Эта группа называется **симметрической группой**.

[3] Такие циклы называются независимыми, а разложение **каноническим**.

## Упражнения и задачи

12. Докажите, что для любого $k \leqslant n$ в группе $S_n$ есть ровно $n!/k$ перестановок, у которых число инверсий кратно $k$.
13. Пусть $S = \{1, \ldots, n\}$. Для произвольной биекции $f\colon S \to S$ через $c(f)$ обозначим количество различных обит $f$. Для любого набора $f_1, \ldots, f_k$, состоящего из $k$ биекций из $S$ в себя, докажите неравенство $c(f_1) + \cdots + c(f_k) \leqslant n(k-1) + c(f_1 \circ \cdots \circ f_k)$.
14. Определите количество $!n$ перестановок $n$ элементов без неподвижных точек[4].
15. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{!n}{n!}$, т. е. предел вероятности того, что случайно выбранная перестановка является беспорядком (при $n$ стремящемся к бесконечности).
16. Докажите, что любая группа $G$, состоящая из $n$ элементов изоморфна некоторой подгруппе[5] группы $S_n$.
17. Элементы $a$ и $b$ группы $G$ называются *сопряжёнными*, если существует элемент $c$ такой, что $ac = cb$. Докажите, что две перестановки из $S_n$ сопряжены между собой, если и только если наборы длин циклов (с учётом кратности) в их каноническом разложении совпадают.

## Лемма Бёрнсайда

Пусть $H$ — подгруппа группы $G$. Для элемента $g \in G$ множество $gH = \{gh : h \in H\}$ называется его *левым смежным классом по* $H$ (сокращённо просто *смежный класс*, если остальное ясно из контекста).

18. Докажите, что $gH = H$, если и только если $g \in H$.
19. Докажите, что отношение „принадлежать одному смежному классу” — отношение эквивалентности.
20. Докажите, что конечная группа $G$ разбивается на $|G| : |H|$ смежных классов мощности $|H|$.

В частности, число $|G| : |H|$ всегда целое[6], оно называется *индексом* подгруппы $H$ и обозначается $[G : H]$.

Пусть $G$ — подгруппа $S_n$. Для произвольного числа $k$ от 1 до $n$ множество $\{g(k) : g \in G\}$ называется его *орбитой*, а множество перестановок $\{g \in G : g(k) = k\}$ называется его *орбитой*.

21. Покажите, что стабилизатор любого элемента является подгруппой в $G$ и найдите её индекс.
22. Докажите, что количество орбит группы $G$ равно среднему количеству неподвижных точек элементов $G$.

[4]Это количество называется **числом беспорядков**.

[5]Часто допускают вольность речи и говорят, что $G$ — подгруппа $S_n$.

[6]Это утверждение называется **теоремой Лагранжа**.