Абелева группа V называется *векторным пространством над полем F*, если определено произведение $\cdot : F \times V \to V$ и выполнены следующие условия[1]:

- для любого $\vec{a} \in V$ верно равенство $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
- для любых $x, y \in F$ и $\vec{a} \in V$ верно равенство $x \cdot (y \cdot \vec{a}) = xy \cdot \vec{a}$.
- для всех $x, y \in F$ и $\vec{a} \in V$ верно равенство $(x + y) \cdot \vec{a} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{a}$.
- для всех $x \in F$ и $\vec{a}, \vec{b} \in V$ верно равенство $x \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = x \cdot \vec{a} + x \cdot \vec{b}$.

Примеры

1. Рассмотрим обычные векторы на координатной плоскости: $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ с поэлементной суммой векторов и обычным умножением на число. Убедитесь, что это — векторное пространство[2] над $\mathbb{R}$.
2. Убедитесь, что $\mathbb{Q}[x]$ и $\mathbb{R}[x]$ — векторные пространства над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$, соответственно.
3. Что будет векторным пространством (умножение обычное): $\mathbb{Q}$ над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$?

Размерность

Пусть $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\} \in V$ — множество векторов в векторном пространстве[3] V. Их *линейной оболочкой* называется множество всех линейных комбинаций $a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots a_k\vec{u}_k$, $a_i \in \mathbb{R}$, и обозначается $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \rangle$. Векторы называются *линейно зависимыми*, если существуют такие (не все нулевые) числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, что $a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots a_k\vec{u}_k = \vec{0}$. Векторы образуют *базис*, если они линейно независимы и их линейная оболочка — всё V. *Размерностью* векторного пространства называется количество элементов базиса, если оно конечно. В противном случае говорят, что пространство *бесконечномерно*.

Примеры

4. Убедитесь, что любое поле является одномерным векторным пространством над самим собой (относительно произведения в этом поле).
5. Докажите, что в векторном пространстве $\mathbb{R}^2$ любой базис имеет размерность 2, т. е. $\mathbb{R}^2$ двумерно.
6. Найдите размерность векторного пространства $\mathbb{R}[x]$ над $\mathbb{R}$.
7. Докажите, что линейная оболочка любого набора векторов сама является векторным (под)пространством.
8. Докажите, что, если $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \rangle = V$, то у V есть базис, состоящий из $\vec{u}_i$.
9. В конечномерном[4] пространстве V дан набор $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ линейно независимых векторов. Докажите, что добавив к U несколько векторов можно получить базис пространства V.

Уравнения прямой в $\mathbb{R}^2$

Условие того, что точка $M(x, y)$ лежит на прямой, проходящей через точки $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$ равносильно параллельности векторов $\overrightarrow{QM}(x - x_2, y - y_2)$ и $\overrightarrow{QP}(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$. В зависимости от того, как это записать, получатся разные виды уравнения прямой:

• Уравнение $\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{y-y_2}{y_1-y_2}$ удобно для запоминания и вывода остальных уравнений. Равенство отношений в нём понимается в широком смысле (допускаются нулевые знаменатели).

• Уравнение $y = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}x + \frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}$ при $x_1 \neq x_2$ имеет вид $y = kx + b$, где коэффициент k называется *угловым коэффициентом*, он равен тангенсу угла наклона между прямой и

[1] Стрелка над буквой ставится, чтобы подчеркнуть, что она обозначает вектор, т. е. элемент V.

[2] В дальнейшем, мы будем обозначать это пространство как $\mathbb{R}^2$.

[3] В дальнейшем мы для простоты будем рассматривать пространства над $\mathbb{R}$. Постарайтесь следить за тем, какие из полученных свойств верны в случае произвольного поля, а какие — нет.

[4] Требование конечномерности можно опустить, если использовать аксиому выбора.

осью Ox и показывает скорость изменения функции $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

• Уравнение $(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$ имеет вид $Ax + By + C = 0$ и называется *общим (или каноническим) уравнением прямой.* Нетрудно видеть, что вектор $\overrightarrow{AB}(y_1 - y_2, x_2 - x_1)$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{QP}(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

• Система уравнений $\begin{cases} x = x_2 + (x_1 - x_2)t; \\ y = y_2 + (y_1 - y_2)t; \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, называется *параметрическим уравнением прямой.* При этом точка Q называется *начальной*, а вектор $\overrightarrow{QP}$ — *направляющим.*

Вообще говоря, любую точку прямой можно выбрать в качестве начальной, а любой вектор, параллельный прямой, является её направляющим вектором. Кроме того, любой вектор, перпендикулярный прямой, называется её *вектором нормали.*

10. Выведите все перечисленные выше виды уравнения прямой.
11. Докажите, что параллельность прямых с уравнениями $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ равносильна равенству $k_1 = k_2$, а их перпендикулярность — равенству $k_1 k_2 = -1$.
12. Выясните, что задаёт параметрическое уравнение прямой, если в нём добавить ограничение $t \in [0, 1]$ на параметр.

Парабола

Пусть на плоскости заданы точка F и прямая ℓ, не проходящая через F. ГМТ точек, равноудалённых от F и ℓ, называется *параболой с фокусом F и директрисой ℓ.*

13. Проверьте, что график функции $y = x^2$ является параболой с данным выше определением. Для этого найдите координаты фокуса и уравнение директрисы.
14. На параболе $y = x^2$ отметили четыре точки: A, B, C и D так, что $AB \parallel CD$. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AB и CD параллельна Oy.
15. Покажите, что все параболы гомотетичны друг другу и все геометрические свойства, инвариантные относительно движений и подобия, у всех парабол одинаковы.
16. Докажите, что график любой квадратичной функции $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, гомотетичен параболе $y = x^2$, т. е. все они — тоже параболы.

Упражнения

17. Докажите, что отношение $\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ в общем уравнении прямой равно расстоянию до этой прямой от начала координат.
18. Выведите формулу, выражающую расстояние между заданными точкой и прямой.
19. Покажите, что коэффициент C в общем уравнении прямой равен по модулю площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{(x_1, y_1)}$ и $\overrightarrow{(x_2, y_2)}$.

Задачи

20. Окружность с центром в точке O касается стороны AC треугольника ABC в точке D и проходит через середины сторон AB и BC. Известно, что $AD = 9$, $DC = 4$, а угол $\angle AOC$ прямой. Найдите длину отрезка OB.
21. Докажите, что определение размерности корректно, а именно: в конечномерном пространстве все базисы состоят из одинакового количества векторов.
22. Пусть F — конечное поле, а p — его характеристика. Докажите, что F состоит из p^k элементов, где k — некоторое натуральное число.