Что-то похожее на уравнения Пелля

1. Даны целые числа x и $y = 2 + 2\sqrt{28x^2 + 1}$. Докажите, что y — полный квадрат.
2. Натуральное число n таково, что оба числа: $3n + 1$ и $4n + 1$ — полные квадраты. Докажите, что n делится на 56.
3. Целые числа x, y, n и удовлетворяют равенству $x^2 - (n^2 - 1)y^2 = a$, где $0 < a \leqslant 2n+1$. Докажите, что число a является полным квадратом.
4. Найдите все натуральные числа d, для которых уравнение Пелля $x^2 - dy^2 = 1$ есть решение (x, y) такое, что $x - y = d$.
5. Докажите, что для любого простого числа $p \equiv 1 \pmod 4$ у уравнения $x^2 - py^2 = -1$ есть решения в натуральных числах.

Задачи к предыдущим темам

6. Докажите, что число $N = 2^{2^n - 1} - 2^n - 1$ является составным при всех $n \geqslant 3$.
7. Докажите, что существует нечётное натуральное число a такое, что $2^n + a$ является составным при всех натуральных n. (В этой задаче разрешено пользоваться онлайн-калькуляторами.)
8. Найдите все пары (x, y) неотрицательных целых чисел такие, что $2^x = 5^y + 3$.
9. Дано натуральное число n. Докажите, что для любого нечётного x найдётся y такой, что $y^y \equiv x \pmod{2^n}$.
10. Найдите все натуральные числа x, y и простые p такие, что оба числа: $x^{p-1} + y$ и $x + y^{p-1}$ являются степенями числа p.
11. Найдите все тройки (a, b, k), $k \geqslant 2$, натуральных чисел такие, что число $(a^k+b)(b^k+a)$ является степенью двойки.
12. Докажите, что для каждого простого числа $p > 13$ сравнение $x^3 + y^3 \equiv z^3 \pmod p$ имеет решение в целых числах x, y, z.