1. На биссектрисе угла A треугольника ABC отмечены точки B_1 и C_1 так, что BB_1 и CC_1 перпендикулярны сторонам AB и AC соответственно. Докажите, что середина отрезка B_1C_1 равноудалена от вершин B и C.
2. В треугольнике ABC высота AK и медиана BM пересекаются в точке Q, $AK = BM$ и прямая QC — биссектриса угла MQK. Найдите углы треугольника ABC.
3. В треугольнике ABC к стороне AC проведена биссектриса BK. Найдите углы треугольника ABC, если $AK = 1$, а $BK = KC = 2$.
4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ угол $\angle ADC = 30^\circ$ и $BD = AB+ +BC + AC$. Докажите, что диагональ BD делит угол $\angle ABC$ пополам.
5. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, точка L расположена на диагонали AC, причём $AL : LC = 3 : 1$. Найдите угол KLD.
6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны, причём $AC = KL = 2$, где K и L — середины сторон AB и CD соответственно. Найдите длину диагонали BD и угол между прямыми BD и KL.
7. Для углов $\angle ADB$ и $\angle DBC$ трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) справедливо равенство $\angle ADB + \angle DBC = 180^\circ$. Докажите, что $AB \cdot BC = AD \cdot DC$.
8. В треугольнике ABC углы при вершинах B и C равны 40°, BD — биссектриса угла B. Докажите, что $BD + DA = BC$.
9. В треугольнике ABC угол B равен 20°, угол C равен 40°. Биссектриса AD равна 2. Найдите разность сторон BC и AB.
10. Дан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $\angle BAC = \angle BCA = 15^\circ$, $\angle CAD = 45^\circ$, $\angle ACD = 30^\circ$. Найдите величину угла $\angle DBC$.
11. На сторонах AC и AB треугольника ABC отмечены точки D и F так, что $AD = AB$ и середина отрезка CF лежит на BD. Докажите, что $BF = CD$.
12. В дугу AB окружности вписана ломаная AMB ($AM > MB$). Докажите, что основание перпендикуляра KH, опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM, делит ломаную пополам, т.е. $AH = HM + MB$.
13. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины сторон AB и CD, равен 1. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD.
14. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $\angle DAC = \angle AEB + \angle ABE$, $AE = AD$ и $AC = AB$. Докажите, что DC в два раза больше медианы AK треугольника ABE.
15. Про выпуклый пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $AB + CD = BC$, $AE = ED$ и $\angle BAE + \angle CDE = 180^\circ$. Докажите, что $\angle BEC = \frac{1}{2}\angle AED$.
16. Докажите, что, если в треугольнике один угол равен 120°, то треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.
17. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая из вершины, вдвое меньше другой биссектрисы. Найдите углы треугольника.
18. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ длина стороны AB равна длине стороны BC, а длина стороны CD равна длине стороны DE; $\angle ABC = 150^\circ$, $\angle CDE = 30^\circ$, $BD = 2$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.
19. Четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC$ и $AD = 3DC$, вписан в окружность. На диагонали BD отмечена точка R так, что $DR = 2RB$, а на отрезке AR отмечена точка Q так, что $\angle ADQ = \angle BDQ$. Оказалось, что $\angle ABQ + \angle CBD = \angle QBD$. Пусть P — точка пересечения отрезка AB и прямой DQ. Найдите угол APD.
20. Даны треугольник ABC и точки D и E такие, что $\angle ADB = \angle BEC = 90^\circ$. Докажите, что длина отрезка DE не превосходит полупериметра треугольника ABC.

21. **(Теорема о бабочке)** Через середину C произвольной хорды AB окружности проведены две хорды KL и MN (точки K и M лежат по одну сторону от AB). Отрезки KN и ML пересекают AB в точках Q и P. Докажите, что $PC = QC$.
22. В треугольнике ABC точки D и E — середины сторон AC и BC, соответственно, а точка K — середина отрезка AD. Докажите, что периметр треугольника BEK меньше периметра треугольника ABD.
23. На основании AC равнобедренного треугольника ABC выбрали точку D, а на его продолжении за вершину C — точку E, причём $AD = CE$. Докажите неравенство $BD + BE > AB + BC$.
24. M и N — точки пересечения диагоналей и средних линий, а O — центр описанной окружности вписанного четырёхугольника. Докажите, что $OM \geqslant ON$.
25. Докажите, что для любого выпуклого четырёхугольника одна из его средних линий (соединяющих середины противоположных сторон) разбивает его на две части, площадь каждой из которых не меньше $3/8$ площади всего четырёхугольника. Можно ли число $3/8$ заменить меньшим?
26. Пусть K, L, M, N — соответственно середины сторон AB, BC, CD, DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Отрезки NL и KM пересекаются в точке T. Пусть x — площадь четырёхугольника $DNTM$, а S — площадь четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $\frac{8}{3}x < S < 8x$.
27. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. O_1, O_2, O_3 и O_4 — центры описанных окружностей треугольников AOB, BOC, COD и DOA соответственно. Докажите, что $2S_{O_1O_2O_3O_4} \geqslant S_{ABCD}$.
28. Диагонали AD, BE, и CF выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точке O. Какую наименьшую площадь может иметь этот шестиугольник, если площади треугольников AOB, COD, EOF равны 1, 3, 9 соответственно?
29. На сторонах AB, BC и CA произвольного треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Обозначим через S_1, S_2 и S_3 площади треугольников AB_1C_1, BA_1C_1 и CA_1B_1 соответственно. Докажите, что $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{S_{ABC}}$.
30. На сторонах AB, BC, CD и DA произвольного четырёхугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M и N соответственно. Пусть S_1, S_2, S_3 и S_4 — площади треугольников AKN, BKL, CLM и DMN. Докажите, что $\sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2} + \sqrt[3]{S_3} + \sqrt[3]{S_4} \leqslant 2\sqrt[3]{S_{ABCD}}$.
31. Даны два подобных треугольника, причём высоты одного из них равны сторонам другого. Какое наибольшее значение может принимать коэффициент их подобия?
32. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность и $AB \cdot BC = 2AD \cdot DC$. Докажите неравенство $8BD^2 \leqslant 9AC^2$.
33. Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O. Докажите, что: **a)** сумма диаметров окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC, COD и DOA не превосходит $(2-\sqrt{2})(AC+BD)$; **b)** если O_1, O_2, O_3 и O_4 — центры окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC, COD и DOA, то $O_1O_2 + O_2O_3 + O_3O_4 + O_4O_1 < 2(\sqrt{2} - 1)(AC + BD)$.
34. Внутри прямоугольного треугольника ABC, $\angle C = 90^\circ$, отмечена точка X такая, что $\angle XAB = \angle XBC$. Докажите неравенство $AC \cdot BC^2 \leqslant AC \cdot CX^2 + CX \cdot AB^2$.
35. Про длины a, b, c сторон некоторого треугольника ABC известно, что, какую бы из них ни увеличить на 1, полученная тройка чисел будет выражать длины сторон некоторого **a)** треугольника; **b)** остроугольного треугольника. Для каждого из случаев определите, какие значения может принимать величина площади треугольника ABC.
36. Внутри равностороннего треугольника ABC площади S отметили произвольную точку P. Докажите неравенство $S \leqslant \frac{\sqrt{3}}{8}(AP^2 + BP^2 + CP^2) + \frac{3}{4}AP \cdot BP$.