Линейные отображения векторных пространств

Пусть V и W — векторные пространства размерности n и m, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ — базис V, а f — некоторая линейная функция из V в W. Очевидно, что значения f на всём V однозначно определяются значениями на базисе V. Действительно, если $\vec{v} = \sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i$, то $f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^n x_i f(\vec{e}_i)$. Кроме того, сами значения $f(\vec{e}_i)$, $i = \overline{1,n}$, могут быть выбраны произвольным образом и тогда предыдущее равенство задаст некоторую линейную функцию. Поставим в соответствие функции f матрицу A, составленную из столбцов-координат векторов $f(\vec{e}_i)$, $i = \overline{1,n}$, в некотором фиксированном базисе W. Это соответствие является биекцией между множеством всех линейных функций из V в W и множеством матриц размера $m \times n$. Столбец Y координат вектора $f(\vec{v})$ называется *произведением* матрицы A на столбец X координат вектора $\vec{v}$ и записывается как $AX = Y$.

1. На множестве всех линейных функций из V в W естественным образом определены сумма $(f+g)(\vec{v}) = f(\vec{v})+g(\vec{v})$ и умножение на скаляр $(x \cdot f)(\vec{v}) = x \cdot f(x\vec{v})$. Проверьте, что это множество является векторным пространством, и найдите его размерность.
2. Запишие матрицу поворота вектора на угол α на плоскости $\mathbb{R}^2$.
3. Докажите, что образ пространства V при линейном отображении f является векторным подпространством W, а его размерность равна рангу соответствующей матрицы.

Умножение матриц

Пусть g — линейная функция из W в некоторое k-мерное векторное пространство U. Композиция $g \circ f$, очевидно, является линейной функцией из V в U. Если функции g соответствует матрица B, то матрица, соответствующая $g \circ f$, называется *произведением* матриц B и A и обозначается просто BA.

4. Сформулируйте правило умножения матриц в терминах их коэффициентов.
5. Запишите произведение матриц поворота в $\mathbb{R}^2$ в общем виде.
6. Докажите, что произведение матриц ассоциативно и дистрибутивно.
7. Приведите пример того, что умножение даже 2×2 матриц некоммутативно.
8. Докажите, что $\operatorname{rank} BA \leqslant \min(\operatorname{rank} B, \operatorname{rank} A)$.

Обратная матрица

В дальнейшем, если не оговорено иное, будем считать, что рассматриваемые матрицы являются квадратными матрицами размера $n \times n$. Пространство всех таких матриц обозначается через M_n.

9. Докажите, что M_n является кольцом. Определите нулевой и единичный элементы этого кольца.
10. Докажите, что условие $\det A \neq 0$ равносильно каждому из следующих трёх условий: 1) система уравнений $AX = Y$ разрешима для любого столбца правых частей Y; 2) система $AX = \mathbf{0}$ имеет только тривиальное решение $X = \mathbf{0}$; 3) система $AX = Y$ имеет единственное решение при некотором столбце правых частей Y.

Как показывает предыдущая задача, если $\det A \neq 0$, то можно говорить о матрице обратного отображения, эта матрица называется *обратной* к матрице A и обозначается A^{-1}.

Преобразования, не изменяющие ранга матрицы, которые мы рассматривали ранее: прибавление к столбцу (строке) линейной комбинации остальных столбцов (строк), умножение строки (столбца) на ненулевое число, называются *элементарными*.

11. Запишите элементарные преобразования в виде умножения на матрицу.
12. Обоснуйте следующий способ нахождения обратной матрицы: запишем пару матриц (A, E) и будем применять к ним одновременно элементарные операции до тех пор, пока первая матрица не станет единичной, тогда вторая матрица будет равна A^{-1}.

Упражнения

Следом квадратной матрицы A называется сумма её диагональных элементов, обозначение — $\operatorname{tr} A$. Симметричная относительно главной диагонали квадратная матрица A называется *неотрицательно определённой*, если для любого вектора X верно неравенство $X^{\mathrm{T}}AX \geqslant 0$. Если при этом равенство выполняется только для $X = \mathbf{0}$, то A называется *положительно определённой*.

13. Докажите равенство $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ для любых обратимых квадратных матриц.
14. Докажите равенство $\det BA = \det B \cdot \det A$ для любых $A, B \in M_n$.
15. Докажите равенство $\operatorname{tr} BA = \operatorname{tr} AB$ для любых $A, B \in M_n$.
16. Докажите равенство $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A_i^j)^{\mathrm{T}}$ для любой обратимой квадратной матрицы A.
17. Обозначим столбцы обратимой квадратной матрицы A как $A^1, A^2, \ldots, A^n$. Докажите[1], что для любого столбца B решение $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ уравнения $AX = B$ имеет вид $x_i = \det(A^1, \ldots, A^{i-1}, B, A^{i+1}, \ldots, A^n)$, $i = \overline{1, n}$.
18. Докажите, что определитель положительно определённой матрицы ненулевой.
19. Докажите, что матрица, состоящая только из единиц, неотрицательно определена.
20. Пусть для некоторого числа $t \geqslant 0$ все недиагональные элементы матрицы A равны t, а все диагональные элементы строго больше t. Докажите, что $\det A \neq 0$.

[1] Такой способ решения системы уравнений называется **методом** или **правилом Крамера**.