Обратные функции

Для того, чтобы решать уравнения вместе с действиями (сложение, умножение) и функциями (степенная) необходимо иметь и обратные к ним: вычитание, деление, извлечение корней (та же степень). Пусть задана функция $f\colon A \to B$, функция $g\colon f(A) \to A$ называется обратной к f, если для любого $x \in A$ выполнено равенство $g(f(x)) = x$. Функция f называется инъективной, если $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

1. Найдите функцию, обратную к функции $f(x) = 3x - 1$.
2. Найдите функцию, обратную к функции $f(x) = (x-1)^2 - 2$, заданной на $(-\infty, 1]$.
3. Найдите функцию, обратную к функции $f(x) = 5 + \sqrt{4-x}$.
4. Докажите, что у функции f есть обратная, если и только если она инъективна[1].

Обратные тригонометрические функции

Из утверждения последней задачи следует, что для того, чтобы определить обратную функцию, необходимо, чтобы исходная была инъективна, для этого рассматривают сужение исходной функций на подмножество, на котором она принимает все значения по разу.

5. Исследуйте (как в предыдущем листке) функцию arcsin — обратную к функции $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$.
6. Определите аналогично и исследуйте функции arccos, arctg и arcctg.
7. Вычислите a) $\arccos \frac{-1}{\sqrt{2}}$; b) $\arcsin(-1)$; c) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$; d) $\operatorname{arcctg} 0$.

Так как сужения cos и sin соответственно на $[0, \pi]$ и $[-\pi/2, \pi/2]$ являются обратными для arccos и arcsin, то равенства $\cos(\arccos x) = x$, $\sin(\arcsin x) = x$ верны по определению. Но, поскольку функции cos и sin не инъективны, переставить местами функции нельзя.

8. Вычислите a) $\arccos(\cos \frac{11\pi}{3})$; b) $\arcsin(\sin \frac{11\pi}{3})$.

Те же соображения касаются равенств $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ и $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$.

9. Вычислите a) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \frac{11\pi}{4})$; b) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 2\pi)$.

Решение простейших уравнений

После введения обратных функций простейшие тригонометрические уравнения решаются стандартно: считаем обратную функцию и не забываем про повторяющиеся значения внутри периода и периодичность.

10. Решите уравнения: a) $\cos x = 1/2$; b) $\sin x = -1/\sqrt{2}$; c) $\operatorname{tg} x = 2$; d) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.
11. Опишите алгоритм решения и запишите ответы для простейших тригонометрических уравнений $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ в зависимости от значений a.

Решение простейших неравенств

Тригонометрические неравенства решаются почти так же, как и уравнения, но для того, чтобы правильно находить требуемые промежутки нужно либо хорошо помнить свойства тригонометрических функций, либо почаще пользоваться геометрической интерпретацией (точки на единичной окружности, либо графике).

12. Решите неравенства: a) $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$; b) $\sin x < -\frac{1}{2}$; c) $\operatorname{tg} x > 1$; d) $\operatorname{ctg} x \leqslant -\sqrt{3}$; e) $\arccos x > \frac{\pi}{3}$; g) $\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{3}$.
13. Запишите в общем виде решение простейших тригонометрических неравенств в зависимости от функции, стоящей в левой части и от правой части.

---

[1] Иногда даётся следующее определение обратной функции: $g\colon B \to A$ называется обратной к функции f, если для любого $x \in A$ выполнено равенство $g(f(x)) = x$ и для любого $y \in B$ выполнено равенство $f(g(y)) = y$. Это определение требует, чтобы $f(A) = B$, такие функции называются сюрьективными. При таком определении утверждение задачи следует формулировать так: у функции f есть обратная тогда и только тогда, когда она биективна (т. е. инъективна и сюрьективна).

Поворот

Каждой точке $A(x, y)$ соответствует её радиус-вектор $\overrightarrow{OA}(x, y)$. Для краткости точки иногда отождествляют с их радиус-векторами, например, суммой $A + B$ точек A и B называют точку с радиус-вектором, равным $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

14. Для точки $A(2, 3)$ найдите координаты её образа $R_O^{\frac{\pi}{2}}(A)$ при повороте на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно начала координат. Придумайте и докажите формулу для нахождения образа произвольной точки $A(x, y)$.
15. Убедитесь, что для любых точек A, B, числа $k \in \mathbb{R}$ и угла α верны равенства[2] $R_O^\alpha(kA) = kR_O^\alpha(A)$ и $R_O^\alpha(A + B) = R_O^\alpha(A) + R_O^\alpha(B)$.
16. Выведите формулу для определения координат образа $R_O^\alpha(A)$ точки $A(x, y)$ при повороте на угол α.

Формулы сложения

Формулами сложения называются формулы, выражающие $\cos(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha+\beta)$ через значения $\cos$ и $\sin$ в точках α и β.

17. Выведите формулы сложения пользуясь равенством $R_O^{\alpha+\beta}(A) = R_O^\alpha(R_O^\beta(A))$.
18. Выведите формулы для $\cos(\alpha - \beta)$ и $\sin(\alpha - \beta)$.

Упражнения

19. Решите уравнения: a) $\cos x = -\sqrt{3}$; b) $2\sin(2x-1) - 1 = 0$; b) $\cos^2 2x + \cos 2x - 6 = 0$.
20. Решите уравнения: a) $\sin x + \cos x = 0$; b) $\cos^2 x = 1$; c) $\sqrt{5 - 2\sin x} = 6\sin x - 1$.
21. Докажите тождество $\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.
22. Найдите численное значение выражения $\cos(\arcsin \frac{3}{5} - \arccos \frac{5}{13})$.
23. Решите неравенства: a) $\frac{-\sqrt{3}}{2} < \sin x \leqslant \frac{1}{2}$; b) $\frac{-1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2} > |\sin x| > \frac{1}{2}$.
24. Решите неравенства: a) $\sin x < \cos x$; b) $\sin x - \cos x \geqslant -1$.
25. Решите неравенства: a) $2\cos^2 x - 7\sin x < 5$; b) $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x < 0$.
26. Решите уравнение $\sin^{2021} x + \cos^{2022} x = 1$.
27. Найдите численное значение выражения $\frac{3\cos 50^\circ - 4\sin 140^\circ}{\cos 130^\circ}$.
28. При условии, что α, β, γ — углы произвольного треугольника, докажите тождества $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$ и $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

[2] **Линейность** поворота как преобразования.