### Операции с множествами

Если задана функция $f\colon U \to V$, то образом элемента $u \in U$ называется элемент $f(u) \in V$, а прообразом элемента $v \in V$ называется <u>любой</u> элемент $u \in U$, такой что $f(u) = v$. Аналогично образом подмножества $A \subset U$ называется множество всех образов элементов множества $A$ (обозначается $f(A)$), а прообразом подмножества $B \subset V$ называется множество всех прообразов всех элементов множества $B$ (обозначается $f^{-1}(B)$).

1. Докажите следующие тождества:
   $a)\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; $b)\ f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
   $c)\ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$; $d)\ f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Характеристической функцией подмножества $A \subset U$ называют функцию $\chi_A$, которая равна 1 на элементах $A$ и равна 0 на остальных элементах $U$.

2. Для подмножеств $A_1, \ldots, A_n \subset U$ и элемента $u \in U$ докажите равенства:
   $a)\ \chi_{\overline{A_1}}(u) = 1 - \chi_{A_1}(u)$; $c)\ \chi_{A_1 \cap \ldots \cap A_n}(u) = \chi_{A_1}(u) \ldots \chi_{A_n}(u)$;
   $b)\ |A_1| = \sum\limits_{u \in U} \chi_{A_1}(u)$; $d)\ \chi_{A_1 \cup \ldots \cup A_n}(u) = 1 - (1 - \chi_{A_1}(u)) \ldots (1 - \chi_{A_n}(u))$.
3. Докажите тождество[1] $|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum\limits_i |A_i| - \sum\limits_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum\limits_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$

*Симметрической разностью* множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат ровно одному из $A$ и $B$; обозначение: $A \triangle B$.

4. Докажите, что для любых множеств $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_n$ справедливо включение $(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap \ldots \cap B_n) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup \ldots \cup (A_n \triangle B_n)$.
5. Докажите тождество $|A_1 \triangle \ldots \triangle A_n| = \sum\limits_i |A_i| - 2\sum\limits_{i<j} |A_i \cap A_j| + 4\sum\limits_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$

### Прогулки по плоскости

На клетчатой плоскости рассмотрим пути, соединяющие узлы сетки и состоящие из «шагов» двух видов: $(x, y) \mapsto (x+1, y)$ и $(x, y) \mapsto (x+1, y+1)$. Для любых неотрицательных целых чисел $n$ и $k$ *биномиальным коэффициентом* $C_n^k$ называется количество всевозможных путей из точки $(0,0)$ в точку $(n, k)$.

6. Докажите тождество $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.
7. Докажите, что число $C_n^k$ равно количеству способов выбрать два $k$ элементов в $n$-элементном подмножестве.
8. Докажите тождество[2] $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$.
9. Очевидно, что $C_n^n = C_n^0 = 1$ для любого $n$ и $C_n^k = 0$ при всех $k > n$. Докажите, что этих соотношений и тождества из задачи 6 достаточно, чтобы однозначно определить значения всех биномиальных коэффициентов.[3].
10. Докажите равенство $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, где, как обычно, $0! = 1$.
11. Докажите следующие равенства, используя как можно больше разных точек зрения на биномиальные коэффициенты:
    (a) $C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k}$;
    (b) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$;
    (c) $C_n^0 + C_n^2 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots$;
    (d) $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^i C_m^{k-i} + \ldots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k$;
    (e) $0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \ldots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$.

---

[1] **Формула включений и исключений**

[2] **Бином Ньютона**

[3] Да, мы нарисовали треугольник Паскаля в несколько другом виде

## Пути Дика и числа Каталана

На клетчатой плоскости рассмотрим пути, соединяющие узлы сетки и состоящие из «шагов» двух видов: $(x,y) \mapsto (x+1, y+1)$ и $(x,y) \mapsto (x+1, y-1)$. По определению *$n$-ое число Каталана* $C_n$ равно количеству путей из точки $(0,0)$ в точку $(2n, 0)$, не опускающихся ниже оси абсцисс (назовём такие пути правильными). Кроме того, $C_0 = 1$.

12. Найдите формулу для количества всевозможных путей из точки $(a,b)$ в точку $(c,d)$.
13. **Принцип отражений.** Докажите, что количество неправильных путей из точки $(0,a)$ в точку $(c,b)$, где $a, b \geqslant 0$, равно количеству всех путей из $(0, -2-a)$ в $(c,b)$.
14. Найдите явную формулу для $C_n$. Вычислите отношение $C_{n+1} : C_n$.
15. Докажите, что числа Каталана при $n \geqslant 2$ удовлетворяют рекуррентному соотношению $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$.

## Равносильные определения

Все следующие определения описывают числа Каталана. Докажите это прямым подсчётом, указав явную биекцию, или при помощи рекуррентной формулы.

16. Количество способов расставить $n$ открывающих и $n$ закрывающих скобок так, что в любом начальном отрезке количество открывающих скобок было не меньше количества закрывающих.
17. Количество способов задать порядок вычисления $n$ действий в произведении $n+1$ сомножителей при помощи расстановки $n-1$ пар скобок.
18. Количество неубывающих последовательностей $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ натуральных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a_i \leqslant i$ при всех $i = \overline{1,n}$.
19. Количество возрастающих последовательностей $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1}$ натуральных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a_i \leqslant 2i$ при всех $i = \overline{1, n-1}$.
20. Количество неизоморфных упорядоченных корневых деревьев с $n+1$ вершинами.
21. Количество неизоморфных упорядоченных полных бинарных корневых деревьев с $n+1$ листьями.
22. Количество способов соединить $2n$ точек на окружности непересекающимися хордами (хорды разбивают точки на $n$ пар) .
23. Количество разбиений множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, таких что, если $a, b$ — элементы одного подмножества, а $c, d$ — другого, то неравенства $a < c < b < d$ невозможны.
24. Количество триангуляций $(n+2)$-угольника непересекающимися диагоналями.

## Задачи

25. Докажите следующие пять тождеств для любого натурального $n$:
    (a) $C_n^0 C_n^m - C_n^1 C_{n-1}^{m-1} + C_n^2 C_{n-2}^{m-2} - \ldots + (-1)^m C_n^m C_{n-m}^0 = 0$ при $1 \leqslant m \leqslant n$;
    (b) $C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \frac{1}{4} C_n^3 + \ldots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$;
    (c) $C_n^0 - \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 - \frac{1}{4} C_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1} C_n^n = \frac{1}{n+1}$;
    (d) $C_n^0 n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot 1^m = 0$ при $m < n$;
    (e) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{m+1}^k C_{m+n-k}^{n-k} = 0$ при $m > 1$.
26. Какое наибольшее число различных множеств можно получить при помощи операций $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\triangle$, если вначале можно выбрать произвольные $n$ множеств?
27. Даны натуральное число $n$ и $2n$ точек на окружности. Найдите количество способов соединить пары точек $n$ стрелками так, чтобы выполнялись все следующие условия: 1) каждая из $2n$ точек является началом или концом стрелки; 2) никакие две стрелки не пересекаются; и 3) не существует таких стрелок $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, что точки $A, B, C$ и $D$ идут по часовой стрелке (не обязательно подряд).