Упражнения к ОТА и многочленам

1. Опишите все неприводимые многочлены в $\mathbb{R}[x]$.
2. Докажите, что многочлен $x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$ делится на многочлен $x^4+x^3+x^2+x+1$.
3. Найдите все $n \in \mathbb{N}$, при которых многочлен $x^{2n} \pm x^n + 1$ делится на многочлен $x^2 \pm x + 1$.
4. Найдите все $n \in \mathbb{N}$, при которых многочлен $(x+1)^n + x^n + 1$ делится на многочлен **(a)** x^2+x+1; **(b)** $(x^2+x+1)^2$; **(c)** $(x^2+x+1)^3$.
5. Докажите, что, если $(x-1)|P(x^n)$ для некоторого многочлена P, то и $(x^n-1)|P(x^n)$.
6. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — вершины правильного n-угольника на комплексной плоскости, а z_0 — его центр. Докажите, что для любого многочлена $P \in \mathbb{C}[x]$ степени не выше $n-1$ верно равенство $P(z_1)+P(z_2)+\ldots+P(z_n) = nP(z_0)$.

Формула Эйлера

Функции $\cos x$, $\sin x$, и e^x комплексного аргумента определяются как суммы ряда Тейлора соответствующих функций вещественной переменной в точке нуль.

7. Докажите формулы: $\cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}$ и $\sin x = \frac{\mathrm{e}^{-ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i}$.
8. Проверьте в явном виде для степенных рядов, что с таким определением остаётся верным тождество $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$.
9. Пусть a и b — вещественные числа. Докажите равенство[1]: $\mathrm{e}^{a+bi} = \mathrm{e}^a(\cos b + i \sin b)$.
10. Вычислите $\mathrm{e}^{i\pi}$.
11. Решите уравнение $\cos x = 2$.
12. Найдите все периоды функции e^x.

Задачи

13. Найдите все многочлены $P(x)$, удовлетворяющие тождеству $P(x)P(2x^2) = P(2x^3+x)$.
14. Докажите, что все корни производной[2] многочлена $P \in \mathbb{C}[x]$ принадлежат выпуклой оболочке множества всех корней этого многочлена на комплексной плоскости[3].
15. Пусть $P(x)$ — непостоянный многочлен степени n с рациональными коэффициентами, который нельзя представить в виде произведения двух непостоянных многочленов с рациональными коэффициентами. Докажите, что количество многочленов $Q(x)$ с рациональными коэффициентами, степени, меньшей n, таких, что $P(Q(x))$ делится на $P(x)$, **(a)** конечно; **(b)** не превосходит n.
16. Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$ — корень неприводимого многочлена $p \in \mathbb{Z}[x]$ степени $n \geqslant 2$. Докажите[4], что существует вещественное число $c > 0$ такое, что для любого рационального числа $\dfrac{p}{q}$ выполняется неравенство $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{c}{q^n}$.
17. Придумайте вещественное число, не являющееся алгебраическим над $\mathbb{Q}$.
18. Докажите, что, если многочлен с вещественными коэффициентами принимает только неотрицательные значения, то его можно представить в виде суммы квадратов двух многочленов с вещественными коэффициентами.
19. Многочлен двух переменных с вещественными коэффициентами принимает только неотрицательные значения. Всегда ли его можно представить в виде суммы квадратов нескольких многочленов с вещественными коэффициентами?

---

[1] Это равенство называется **формулой Эйлера**.

[2] Определение производной функции $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такое же, как для функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, только приращение аргумента должно стремиться к нулю по модулю.

[3] Это утверждение называется **теоремой Гаусса–Люка**.

[4] Теорема Лиувилля