Две простые задачи

1. Рёбра полного графа на 17 вершинах окрашены в три цвета. Докажите, что найдётся одноцветный треугольник.
2. Множество $\{1, 2, \ldots, 1957\}$ разбили на шесть подмножеств. Докажите, что хотя бы в одном из них найдутся три числа такие, что большее равно сумме двух меньших.

Числа Рамсея и Шура

Функция Шура $f(n)$ выдаёт наибольшее натуральное число, для которого множество $\{1, 2, \ldots, f(n)\}$ можно разбить на n свободных от сумм подмножеств (ни в одном из них нет чисел $x \leqslant y < z$, для которых $x+y = z$). Число Рамсея $R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ равно наименьшему натуральному числу, для которого для любой раскраски в n цветов рёбер полного графа на $R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ вершинах обязательно найдётся число i и подграф K_{a_i}, все рёбра которого окрашены в цвет i. Иногда используют сокращение $R_n(3) = R(\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{n \text{ троек}})$.

3. Докажите, что число $R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ существует для любого набора $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ натуральных чисел.
4. Докажите неравенство[1] $R(r, s) \leqslant R(r-1, s) + R(r, s-1)$.
5. Докажите, что, если оба числа $R(r-1, s)$ и $R(r, s-1)$ чётные, то в предыдущем пункте верно строгое неравенство.
6. Докажите неравенство[2] $R(r, s) \leqslant \binom{r+s-2}{r-1}$.
7. Докажите, что $R_n(3) \leqslant [en!] + 1$.
8. Докажите, что $f(n) + 2 \leqslant R_n(3)$.
9. Докажите, что $\frac{3^n-1}{2} \leqslant f(n)$.

Конкретные значения

10. Вычислите $R(3, 4)$.
11. Вычислите $R(3, 5)$.
12. Вычислите $R(4, 4)$.
13. Вычислите $f(2)$ и $f(3)$.
14. Для множества $\{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ определите максимальный возможный размер свободного от сумм подмножества.

Числа Стирлинга

Число Стирлинга второго рода $S(n, k)$ определяется как число разбиений n-элементного множества на k непустых подмножеств без учёта порядка следования подмножеств, например, $S(4, 2) = 7$.

15. Докажите равенство $S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$ при всех $0 < k \leqslant n$.
16. Докажите равенство $S(n, k) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} S(j, k-1)$, где $S(0, 0) = 1$ и $S(j, k-1) = 0$ при $k - 1 > j$.
17. Докажите равенство $S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j} \binom{k}{j} j^n$.
18. В забеге участвовало n участников. Найдите количество вариантов того, как они могли финишировать.
19. Докажите равенство $1^k + 2^k + \ldots + n^k = \sum_{i=1}^{k} S(k, i) \binom{n+1}{i+1} i!$.

---

[1] **Теорема Эрдёша.**

[2] Тоже **теорема Эрдёша.**