1. Дано натуральное число n. Многочлен $f(x, y)$ степени не выше n таков, что при любых натуральных $x, y \leqslant n$, $x + y \leqslant n + 1$, выполняется равенство $f(x, y) = x/y$. Найдите все возможные значения $f(0, 0)$.
2. Задана конечная последовательность букв, среди которых не больше десяти попарно различных. Докажите, что буквы можно заменить цифрами так, что полученное число будет делиться на 9. (Разные буквы заменяются разными цифрами, а одинаковые — одинаковыми.)
3. Существуют ли многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами, степени не меньше 2019 каждый, удовлетворяющие равенству
$$P(Q(x)) - 3Q(P(x)) = 1$$
при всех вещественных x?
4. Пусть $n > 3$ — натуральное число. Вершину A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, выпуклого многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ назовём *Богемской*, если её отражение относительно середины диагонали $A_{i-1}A_{i+1}$ (где $A_0 = A_n$ и $A_{n+1} = A_1$) лежит внутри или на границе многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$. Для каждого n найдите наименьшее возможное количество Богемских вершин, которое может иметь выпуклый n-угольник.
5. Каждое ребро некоторого графа G окрашено в один из двух цветов. Для каждого из цветов все компоненты связности графа, образованного только рёбрами этого цвета, содержат не более $n > 1$ вершин. Докажите, что все вершины этого графа можно правильно покрасить в n цветов.
6. На плоскости дан выпуклый многоугольник с вершинами в целочисленных точках, содержащий внутри начало координат O. Пусть V_1 — множество всех векторов, идущих из O в вершины многоугольника, а V_2 — множество всех векторов, идущих из O в целочисленные точки, лежащие внутри или на границе O (таким образом, $V_1 \subset V_2$). Два кузнечика прыгают по целым точкам: первый своими прыжками может смещаться только на векторы из V_1, а второй — на векторы из V_2. Докажите, что для некоторого числа c верно следующее утверждение: если до некоторой точки оба кузнечика могут добраться из O, причём второму для этого понадобится n прыжков, то первый справится за не более, чем $n + c$ прыжков.
7. Докажите, что среди любых $2n - 1$ целого числа найдутся n с суммой, кратной n.
8. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Докажите, что число $1^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + (n-1)^{n-1} + 1$ делится на n тогда и только тогда, когда для каждого простого делителя p числа n число $(\frac{n}{p} - 1)$ делится на $p(p-1)$.
9. Найдите все простые числа p и q такие, что число $3p^{q-1} + 1$ делит число $11^p + 17^p$.
10. Докажите, что существует такое положительное число c, что при любом натуральном N среди любых N натуральных чисел, не превосходящих $2N$, найдутся два числа, наибольший общий делитель которых больше cN.
11. На плоскости даны точка A и прямая ℓ, не проходящая через A. У Эвана нет линейки, зато есть специальный прибор, который позволяет нарисовать окружность, проходящую через любые три заданные неколлинеарные точки (при этом прибор *не* отмечает центр окружности). Как обычно, Эван может отмечать произвольные точки плоскости и точки пересечения уже нарисованных объектов.
    - Может ли Эван за конечное количество операций гарантированно отметить точку, симметричную A относительно ℓ?
    - Может ли Эван за конечное количество операций гарантированно отметить основание перпендикуляра, опущенного из A на ℓ?