Частичный порядок

Пусть M — произвольное множество. Говорят, что оно частично упорядочено, если между некоторыми его элементами установлено отношение порядка (используем привычное обозначение „$\leqslant$”), обладающее следующими тремя свойствами: рефлексивность) $x \leqslant x$ для всех $x \in M$, транзитивность) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$ и антисимметричность) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$. При этом, некоторые элементы могут оказаться несравнимыми друг с другом.

1. Проверьте, что множество натуральных чисел частично упорядочено с порядком „$|$” (делимость).
2. Проверьте, что множество, все элементы которого — множества, частично упорядочено с порядком „$\subset$” (вложенность).
3. Докажите, что в частично упорядоченном множестве, содержащем $mn+1$ элемент, найдётся либо $m+1$ попарно несравнимых элементов, либо возрастающая последовательность из $n+1$ элементов.
4. В строку выписаны 101 число. Докажите, что из них можно вычеркнуть 90 так, что оставшиеся будут располагаться по возрастанию или убыванию.

Биекция $f\colon A \to B$ между частично упорядоченными множествами называется их *изоморфизмом*, если она сохраняет порядок, т. е., неравенство $x \leqslant y$ для $x, y \in A$ равносильно неравенству $f(x) \leqslant f(y)$ для $f(x), f(y) \in B$. Частично упорядоченное множество A вкладывается в частично упорядоченное множество B, если существует изоморфизм между A и подмножеством множества B.

5. Докажите, что любое частично упорядоченное множество вкладывается в множество своих подмножеств.

Элемент x частично упорядоченного множества M называется минимальным элементом, если нет ни одного элемента y такого, что $y \neq x$ и $y \leqslant x$.

6. Найдите все минимальные элементы в $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ с отношением порядка $|$.
7. Докажите, что для любого частично упорядоченного множества M следующие три условия равносильны:
   (a) В любом непустом подмножестве $N \subset M$ есть хотя бы один минимальный элемент (минимальный в N, а не во всём M).
   (b) Любая убывающая последовательность $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots$ элементов множества M стабилизируется, т. е. начиная с некоторого номера m все элементы становятся равны: $a_m = a_{m+1} = \ldots$
   (c) Если 1) некоторому условию $\mathfrak{P}$ удовлетворяют все минимальные элементы и 2) из справедливости свойства $\mathfrak{P}$ для всех элементов, меньших произвольного элемента a следует справедливость свойства $\mathfrak{P}$ для элемента a; то все элементы множества M обладают свойством $\mathfrak{P}$.

Условия (a)–(c) называются, соответственно, условием минимальности, условием обрыва убывающих цепей и условием индуктивности.

Теоремы, равносильные аксиоме выбора

Напомним аксиому выбора, которая существенно используется в этом листке:

$\mathbf{ZF_8}$(**аксиома выбора**) *Пусть* A *— непустое множество, а* $P^*(A)$ *— множество его непустых подмножеств. Тогда существует отображение* $\varphi\colon P^*(A) \to A$ *такое, что* $\varphi(B) \in B$ *для каждого* $B \in P^*(A)$.

Ещё два важных понятия, которые нам понадобятся: верхняя/нижняя грани и максимальные цепи. Пусть задано частично упорядоченное множество M, тогда 1) *верхней гранью* подмножества $N \subset M$ называется такой элемент $a \in M$, что $x \leqslant a$ для всех $x \in N$; *нижняя грань* определяется аналогично, с заменой неравенства на $a \leqslant x$; и 2) *цепь* (возрастающая последовательность элементов M) называется *максимальной*, если она является максимальным элементом в частично упорядоченном по включению множестве всех цепей из элементов M.

8. Пусть множество $M = \mathbb{N}$ частично упорядоченно с порядком „$|$", а подмножество N состоит из двух чисел: a и b. a) Опишите множество всех верхних граней N и найдите в нём есть наименьший элемент. b) Опишите множество всех нижних граней N и найдите в нём есть наибольший элемент.
9. Пусть множество A конечно и состоит из n элементов. Рассмотрим множество $M = P(A)$ всех подмножеств множества A и частичный порядок „$\subset$" на нём. Опишите все максимальные цепи в M.

Мы уже приблизились к тому, чтобы доказать, что любые две мощности можно сравнить. Для этого вначале покажем, что на любом множестве можно задать хороший порядок (вполне упорядочить). После чего покажем, что можно сравнить мощности любых двух вполне упорядоченных множеств.

Частично упорядоченное множество называется *линейно упорядоченным*, если любые два элемента сравнимы. Линейно упорядоченное множество, удовлетворяющее условию минимальности называется *вполне упорядоченным*. Сформулируем три важные теоремы, каждая из которых эквивалентна аксиоме выбора:

Z(**Теорема Цермело**) *Любое множество можно вполне упорядочить.*

H(**Теорема Хаусдорфа**) *Любая цепь частично упорядоченного множества содержится в некоторой максимальной цепи.*

KZ(**Теорема Куратовского–Цорна**) *Если любая цепь частично упорядоченного множества* M *имеет верхнюю грань, то любой элемент меньше либо равен какого-то максимального элемента.*

10. Докажите импликацию $ZF_8 \Rightarrow Z$.
11. Докажите импликацию $Z \Rightarrow H$.
12. Докажите импликацию $H \Rightarrow KZ$.
13. Докажите импликацию $KZ \Rightarrow ZF_8$.