Свéдения из 5–7 классов.

Следующие понятия считаются известными: *делимое, делитель, частное, деление с остатком, неполное частное, остаток, делúться, делить, простые и составные числа.*

Наибольший общий делитель

Что такое „наибольший общий делитель” натуральных чисел a и b понятно из названия — это наибольшее число, на которое они оба делятся; обозначения: НОД(a, b) или $\gcd(a, b)$. Следующая задачасодержит простое, но полезное в очень многих задачах утверждение:

1. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b у пар (a, b) и $(a \pm b, b)$ совпадают наборы общих делителей. В частности, докажите, что НОД$(a, b) =$ НОД$(a \pm b, b)$.

Алгоритм Евклида

Алгоритм, позволяющий находить НОД двух чисел, который получается в результате многократного применения задачи 1, называется алгоритмом Евклида.

2. Запишите алгоритм Евклида, заменяя многократное повторение одинаковых действий из задачи 1 делением с остатком.
3. При помощи алгоритма Евклида найдите НОД$(2021, 7755)$.

Важное свойство алгоритма Евклида состоит в том, что по числам a и b он позволяет находить целые коэффициенты x и y в линейном представлении их НОД: $xa + yb =$ НОД(a, b) и, в частности, доказывает, что такое представление существует[1].

4. Пользуясь действиями, проделанными в задаче 3 найдите целые числа x и y такие, что $2021x + 7755y =$ НОД$(2021, 7755)$. Опишите алгоритм нахождения коэффициентов x и y в общем случае.

Альтернативные определения

В общем случае (не целых чисел), определение НОД принято формулировать так: наибольший общий делитель двух чисел — это такой их общий делитель, который делится на любой другой их общий делитель. Это определение равносильно предыдущему, но не требует возможности сравнения элементов.

Для любых натуральных чисел a и b через $\mathfrak{L}(a, b)$ обозначим множество всевозможных положительных значений их линейных комбинаций с целыми коэффициентами, т. е. $\mathfrak{L}(a, b) = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}, ax + by > 0\}$.

5. Не используя алгоритмом Евклида докажите, что $\min(\mathfrak{L}(a, b)) =$ НОД(a, b) в смысле определения, данного только что.

Натуральные числа a и b называются взаимно простыми, если НОД$(a, b) = 1$.

6. Докажите, что, если числа a и b взаимно просты, то для любого числа c верно равенство НОД$(ac, b) =$ НОД(c, b).
7. Докажите, что, если числа a и b взаимно просты, то числа $a, 2a, 3a, \ldots, ba$ дают все возможные остатки при делении на b.

[1]Это утверждение иногда называют **леммой Безу**.

Упражнения

8. От клетчатого листа бумаги размера $a \times b$ отрезают квадрат максимальной площади, содержащий угловую клетку, после чего продолжают ту же операцию с оставшейся частью. Так делают, пока не получится квадрат. Выразите его сторону через a и b.
9. Докажите, что дроби $\frac{2n+13}{n+7}$ и $\frac{2n^2-1}{n+1}$ несократимы при всех натуральных n.
10. Найдите все целые числа n, при которых число $\frac{n^4+1}{n^2+n+1}$ также целое.
11. Докажите равенство $\text{НОД}(a^n-1, a^m-1) = a^{\text{НОД}(m,n)}-1$ при всех натуральных m, n и $a > 1$.

Задачи

12. На доске записаны два различных натуральных числа: a и b. Каждую секунду меньшее из записанных чисел стирается и вместо него записывается число $\frac{ab}{|a-b|}$. Этот процесс продолжается, пока на доске не будут записаны два равных числа. Докажите, что процесс когда-нибудь завершится. Чему будут равны числа в этот момент?
13. Четвёрку (a, b, c, d) целых чисел назовём *хорошей*, если $ad - bc = 2018$. Две хорошие четвёрки назовём *непохожими*, если их нельзя получить друг из друга при помощи нескольких операций следующих трёх видов:
$$(a, b, c, d) \longrightarrow (-c, -d, a, b)$$
$$(a, b, c, d) \longrightarrow (a, b, c+a, d+b)$$
$$(a, b, c, d) \longrightarrow (a, b, c-a, d-b).$$
Докажите, что существует не более 3030 попарно непохожих хороших четвёрок.