Уравнения Пелля

Пусть дано натуральное число m, не являющееся полным квадратом. *Уравнением Пелля* называется уравнение $x^2 - my^2 = 1$. Решения $(\pm 1, 0)$ называются *тривиальными*, мы их не будем рассматривать, кроме того, очевидно, что достаточно решать это уравнение в $x, y \in \mathbb{N}$, такие решения будем называть *положительными*. Мы будем использовать геометрическую и алгебраическую интерпретации: паре $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ будет соответствовать точка на плоскости $\mathbb{R}^2$ и число $x + \sqrt{m}y \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$. Нормой числа $x + \sqrt{m}y$ как обычно будем называть число $N(x + \sqrt{m}y) = x^2 - my^2$. Нетрудно убедиться, что норма произведения чисел равна произведению их норм.

Решение уравнения Пелля

Для каждого целого числа n рассмотрим фигуру ℓ_n, заданную уравнением $x^2 - my^2 = n$. Нетрудно видеть, что все ℓ_n, $n \neq 0$, являются гиперболами, а ℓ_0 — пара общих асимптот всех этих гипербол. Гиперболы ℓ_n и ℓ_{-n} называются *сопряжёнными*.

1. Докажите, что каждая целая точка, кроме начала координат, лежит ровно на одной гиперболе ℓ_n, $n \neq 0$, а начало координат лежит на ℓ_0, причём других целых точек на ℓ_0 нету.
2. Докажите, что, если выбрать на одной гиперболе пару симметричных относительно начала координат точек, то на сопряжённой гиперболе можно выбрать такую пару симметричных относительно начала координат точек, что все четыре выбранные точки будут вершинами параллелограмма со сторонами, параллельными асимптотам.
3. Докажите, что площадь параллелограмма, построенного в предыдущем пункте зависит только от гиперболы и не зависит от выбора точек.
4. Пусть точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) лежат на ℓ_a и ℓ_b. Выясните, где лежит их произведение.
5. Опишите геометрически, как на гиперболе ℓ_n, $n \neq 0$, действует умножение на положительное решение.
6. Ответьте на тот же вопрос для пары асимптот ℓ_0.
7. Докажите, что все положительные решения (если они существуют) получаются многократным умножением некоторого положительного решения на себя.
8. Выясните, когда возможно деление чисел в $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$.
9. Для двух чисел $x_1 + \sqrt{m}y_1, x_2 + \sqrt{m}y_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ известно, что $n = N(x_2 + \sqrt{m}y_2)$, $x_1 \equiv x_2 \pmod{n}$ и $y_1 \equiv y_2 \pmod{n}$. Докажите, что $x_1 + \sqrt{m}y_1$ делится на $x_2 + \sqrt{m}y_2$.
10. Пусть на гиперболе ℓ_n лежат хотя бы $|n|^2 + 1$ целых точек. Докажите, что уравнение Пелля имеет решение.
11. **Лемма Минковского.** Докажите, что симметричная относительно начала координат выпуклая фигура площади больше 4 содержит хотя бы три целые точки.
12. Докажите, что по крайней мере на одной гиперболе ℓ_n лежит бесконечно целых точек.

Упражнения

13. Решите уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$.
14. Докажите, что числа $x, y \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ удовлетворяют уравнению $x^2 - nxy + y^2 = 1$, $n \in \mathbb{Z}$, тогда и только тогда, когда x и y — соседние числа последовательности, заданной соотношениями $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и $a_{k+1} = ma_k - a_{k-1}$.
15. Пусть S — множество всех натуральных чисел n таких, что n^4 делится хотя бы на одно из чисел $n^2 + 1, n^2 + 2, \ldots, n^2 + 2n$. Докажите, что среди элементов множества S бесконечно много чисел каждого из видов $7m$, $7m + 1$, $7m + 2$, $7m + 5$, $7m + 6$ и нет ни одного числа вида $7m + 3$ и $7m + 4$, где m — целое.

Лемма Туэ

16. **Лемма Туэ.** Даны взаимно простые натуральные числа $n > 1$ и a. Докажите, что найдутся такие натуральные числа $x, y \leqslant \sqrt{n}$, что $ay \equiv \pm x \pmod{n}$.
17. **Рождественская теорема Ферма.** Найдите все натуральные числа, представимые в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.
18. Докажите, что каждое простое число вида $4k+1$ представляется в виде суммы двух квадратов единственным образом.
19. Докажите, что каждое простое число вида $4k+3$ является простым в $\mathbb{Z}[i]$.
20. Докажите, что каждое простое число вида $4k+1$ единственным образом раскладывается в произведение двух простых чисел в $\mathbb{Z}[i]$.
21. Натуральное число n представимо в виде суммы двух квадратов. Выразите количество различных таких представлений через каноническое разложение n в $\mathbb{N}$
22. Докажите, что любое простое число вида $8k+2\pm 1$ представимо в виде x^2+2y^2.
23. Найдите все натуральные числа, представимые в виде x^2+xy+y^2, $x, y \in \mathbb{N}$.
24. Докажите, что для любых целых чисел a и b найдутся такие целые x и y, что выполняется равенство $x^2+xy+y^2 = 3a^2+b^2$.
25. Назовём натуральное число *хорошим*, если оно представляется в виде $ax^2+bxy+cy^2$, где a, b, c, x, y – целые числа и $b^2-4ac = -20$. Докажите, что произведение двух хороших чисел – хорошее число.