Линейные рекуррентные последовательности

Пусть линейная рекуррентная последовательность $(x_n)_{n\geqslant 0}$ порядка k задана соотношением $x_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x_{n+i}$. Рассмотрим последовательность векторов, составленных из k подряд идущих членов: $v_n = (x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1})^{\mathrm{T}}$. В частности, вектор v_0 состоит заданных начальных членов последовательности (x_n).

1. Придумайте матрицу $A \in M_k$ такую, что $Av_n = v_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$.

Предположим, что у матрицы A есть k различных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

2. Докажите, что существует базис, состоящий из k собственных векторов матрицы A.
3. Опишите, как получить явную формулу n-го члена последовательности (x_n).
4. Проделайте все описанные выше шаги для последовательности чисел Фибоначчи: $f_0 = f_1 = 1$ и $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

К сожалению, утверждение задачи 2 верно не для любой матрицы. Для решения задачи в общем случае нужно понятие Жордановой нормальной формы, которое мы рассмотрим позже.

Упражнения[1]

5. Для произвольных $m \times s$-матрицы A и $s \times n$-матрицы B докажите неравенство $\operatorname{rank} AB \geqslant \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - s$.
6. В множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ выбрали m различных собственных (непустых отличных от всего множества) подмножеств $S_1, S_2, \ldots, S_m$ так, что для каждой пары различных чисел (k_1, k_2) от 1 до n существует единственное подмножество S_i, которое содержит оба эти элемента. Докажите, что $m \geqslant n$.
7. В множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ выбрали различные подмножества $S_1, S_2, \ldots, S_m$ так, что пересечение $S_i \cap S_j$, $i \neq j$, любых двух из них содержит одно и то же количество элементов. Докажите неравенство $m \leqslant n$.
8. В таблице размером $m \times n$ записаны числа так, что для каждых двух строк и каждых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стёрли, но по оставшимся можно восстановить стёртые. Докажите, что осталось не меньше чем $(n + m - 1)$ чисел.
9. Дан набор из нескольких гирек, на каждой написана масса. Известно, что набор масс и набор надписей одинаковы, но возможно некоторые надписи перепутаны. Весы представляют из себя горизонтальный отрезок, закрепленный за середину. При взвешивании гирьки прикрепляются в произвольные точки отрезка, после чего весы остаются в равновесии либо отклоняются в ту или иную сторону. Всегда ли удастся за одно взвешивание проверить, все надписи верны или нет?[2]
10. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ невозможно покрыть конечным количеством аффинных подпространств меньшей размерности.[3]
11. В каждой клетке таблицы размером 4×4 стоит знак $+$ или $-$. Разрешено одновременно менять знаки на противоположные в любой клетке и во всех клетках, имеющих с ней общую сторону. Сколько разных таблиц можно получить, многократно применяя такие операции?

---

[1] Задания этой секции непреднамеренно расположены в случайном порядке.

[2] Решите эту задачу двумя способами: при помощи линейной алгебры и без неё.

[3] Аффинным пространством в $\mathbb{R}^n$ называется множество $a + V = \{a + \vec{v} : \vec{v} \in V\}$, где a — фиксированная точка, а V — линейное подпространство. Размерность такого пространства полагается равной $\dim V$.

12. Докажите, что множество вершин любого графа можно разбить на два (не обязательно непустых) подмножества так, что в каждом из подграфов, порождённых этими подмножествами, степени всех вершин будут чётными.[4]
13. На отрезке $[0, 1]$ отмечено несколько различных точек. При этом каждая отмеченная точка расположена либо ровно посередине между двумя другими отмеченными точками (не обязательно соседними с ней), либо ровно посередине между отмеченной точкой и концом отрезка. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.
14. Докажите, что множество вершин любого графа можно разбить на два (не обязательно непустых) подмножества так, что в одном из подграфов, порождённых этими подмножествами, степени всех вершин были чётными, а в другом — нечётными.[5]
10. Докажите, что количество способов разбить множество вершин любого графа на два (не обязательно непустых) подмножества так, что в каждом из подграфов, порождённых этими подмножествами, степени всех вершин чётны, является степенью двойки.
11. Функции $f_1, f_2, f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таковы, что функция $a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является монотонной для любой тройки $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Докажите, что существуют вещественные числа c_1, c_2 и c_3, не все нулевые, такие что равенство $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+c_3f_f(x) = 0$ верно при всех $x \in \mathbb{R}$.
12. Вещественнозначная функция f ставит каждой точке A плоскости в соответствие число $f(A)$ так, что, если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $f(M) = f(A) + f(B) + f(C)$. Найдите все такие функции f.
13. Функция f каждому вектору v линейного n-мерного пространства ставит в соответствие число $f(v)$, причём для любых векторов u, v и любых чисел α, β значение $f(\alpha u + \beta v)$ не превосходит хотя бы одного из чисел $f(u)$ или $f(v)$. Какое наибольшее количество значений может принимать такая функция?
14. Известно, что в тетраэдре две пары скрещивающихся ребер перепндикулярны. Докажите, что и третья пара скрещивающихся ребер обладает этим свойством.

[4] Для решения этой задачи линейная алгебра не нужна.

[5] Тем более не нужна.