

Геометрические преобразования

В геометрии, как и во всей математике, изучаются общие свойства фигур, где под общностью понимается их сохранение при некоторых преобразованиях. Пока не появится уточнений, под преобразованием плоскости будем понимать взаимно однозначное отображение плоскости в себя.

Движение

Движением называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояния между точками. Докажите следующие свойства движения:

1. Движение переводит: а) прямую в прямую; б) угол в равный ему угол; в) окружность в окружность равного радиуса; г) треугольник в равный ему треугольник.

Рассмотрим множество всех движений. Если сделать сначала одно движение g_1 , а потом второе g_2 , то, как нетрудно видеть, получится движение¹, оно обозначается $g_2 \circ g_1$. Очевидно, что $g_3 \circ (g_2 \circ g_1) = (g_3 \circ g_2) \circ g_1$ для любых движений g_1 , g_2 и g_3 .

Исследуем, какие вообще бывают движения.

Параллельный перенос

Параллельным переносом на вектор \vec{n} называется преобразование плоскости, которое каждую точку A переводит в такую точку A' , что $\overrightarrow{AA'} = \vec{n}$. Очевидно, что любой параллельный перенос сохраняет векторы, поэтому является движением.

2. Постройте трапецию по заданным длинам оснований и а) боковых сторон; б) диагоналей.
3. Даны две пересекающиеся прямые a , b и отрезок CD . Постройте параллелограмм $ABCD$, вершины A и B которого лежат соответственно на a и b .
4. Докажите, что среди всех четырёхугольников с заданными диагоналями и углом между ними наименьший периметр имеет параллелограмм.
5. В каком месте следует построить мост через реку, разделяющую деревни A и B , чтобы путь между ними был кратчайшим? Берега реки — параллельные прямые, а мост им перпендикулярен.
6. Даны две окружности и отрезок. Постройте параллелограмм $ABCD$, вершины A и B которого лежат на одной окружности, вершины C и D — на другой, а отрезок BC равен по длине и параллелен заданному.
7. Даны две параллельные прямые и точка между ними. Постройте окружность, касающуюся данных прямых и проходящую через данную точку.

Поворот

Поворотом вокруг точки O на угол φ называется преобразование плоскости, которое каждую точку A переводит в такую точку A' , что $OA = OA'$ и ориентированный угол² между лучами OA и OA' равен φ . Очевидно, что любой поворот является движением. *Центральной симметрией* с центром O называется поворот вокруг точки O на 180° .

8. Дан угол и точка O внутри него. Проведите через O прямую так, чтобы отрезок, отсекаемый на ней сторонами угла, делился точкой O пополам.
9. Две точки окружности соединены ломанной, делящей площадь круга пополам. Докажите, что её длина не меньше диаметра круга.
10. Даны прямые a , b и точка O . Постройте равносторонний треугольник OAB , вершины A и B которого лежат соответственно на a и b .

¹Это движение называется **композицией** g_2 и g_1 .

²Угол, на который надо повернуть в положительном направлении (против часовой стрелки) луч OA , чтобы он совпал с лучом OA' .

11. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята точка P . Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на A_2P , из A_2 — перпендикуляр на A_3P , из A_3 — на A_4P , из A_4 — на A_1P . Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.
12. Внутри прямоугольного треугольника построили две равные окружности так, что первая касается одного из катетов и гипотенузы, вторая касается другого катета и гипотенузы, а ещё эти окружности касаются друг друга. Пусть M и N — точки касания окружностей с гипотенузой. Докажите, что середина отрезка MN лежит на биссектрисе прямого угла треугольника.

Симметрия

Симметрией относительно прямой ℓ называется преобразование плоскости, которое каждую точку A переводит в такую точку A' , что прямая ℓ перпендикулярна прямой AA' и проходит через его середину. Симметрия отличается от переноса и поворота тем, что оно меняет ориентацию, т.е. при симметрии треугольник ABC переходит в равный ему треугольник $A'B'C'$ такой, что вершины треугольников следуют друг за другом противоположном порядке (по/против часовой стрелки). Ясно, что симметрия является движением.

13. Найдите композицию симметрий относительно а) двух пересекающихся прямых; б) двух параллельных прямых.
14. Дорога AB пересекает реку BC под острым углом. Гонимец находится в точке P внутри угла ABC . Гонимцу надо напоить коня и выехать на дорогу. Найдите кратчайший путь.
15. На сторонах BC , CA , AB остроугольного треугольника ABC найдите точки A' , B' , C' , так, чтобы периметр треугольника $A'B'C'$ был наименьшим.
16. В треугольнике известны одна сторона и сумма двух других. Найдите среди всех таких треугольников треугольник наибольшей площади.
17. Докажите, что в группе движений не выполнен перестановочный закон, т.е. существуют такие движения g_1 и g_2 , что $g_1 \circ g_2 \neq g_2 \circ g_1$.

Классификация движений

Покажем, что рассмотренными примерами движений и их композициями (не более, чем по два) исчерпывается всё множество движений. Для этого изучим инварианты преобразований, а также минимальные сведения, однозначно определяющие движение (в этом состоит общий подход к изучению групп преобразований).

18. Даны две пары точек A, B и A', B' , причём $AB = A'B' > 0$. Докажите, что существуют ровно два движения, переводящие A в A' , а B в B' , одно из которых сохраняет ориентацию, а другое меняет.

Полную классификацию движений даёт **теорема Шаля**: *Любое движение является либо параллельным переносом, либо поворотом, либо симметрией, либо композицией симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный оси симметрии.*

19. Докажите теорему Шаля по следующей схеме: Пусть g — движение, отличное от тождественного, тогда найдётся точка A , не совпадающая со своим образом; обозначим $g(A) = B$ и $g(B) = C$, рассмотрите следующие три возможности:
 - (а) точки A, B, C не лежат на одной прямой;
 - (б) точка C лежит на прямой AB и не совпадает с A ;
 - (с) точки A и C совпадают.
20. Найдите композицию поворота на угол φ и параллельного переноса.
21. Найдите композицию двух поворотов с различными центрами.
22. Докажите, что любое движение можно представить в виде композиции не более, чем трёх симметрий.