Задачи

1. В клетки таблицы размера $m \times n$ записаны вещественные числа так, что для каждого ряда (строки или столбца) сумма чисел, записанных в него целая. Докажите, что все числа можно округлить до ближайшего целого (вверх или вниз) так, что все суммы в рядах останутся прежними.
2. В множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ выбрали m различных подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$ таких, что для любых различных i и j от 1 до n мощность пересечения $A_i \cap A_j$ чётная. Найдите наибольшее возможное значение m, если
   (a) Мощность каждого подмножества A_i нечётна.
   (b) Мощность каждого подмножества A_i чётна.
3. В множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, где n — чётное натуральное число, выбрали n подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ чётной мощности. Докажите, что для некоторых i и j от 1 до n мощность пересечения $A_i \cap A_j$ чётная.
4. В простом графе на n вершинах любые две вершины имеют нечётное количество общих смежных вершин. Докажите, что n нечётно.
5. Дана симметричная матрица A, все элементы которой — нули и единицы. Известно, что все диагональные элементы — единицы. Докажите, что можно выбрать несколько строк таких, что все координаты их суммы будет нечётны.
6. В каждой вершине простого графа стоя́т лампочка и выключатель. Нажатие на выключатель меняет на противоположное состояние лампочек в этой вершине и всех смежных с ней. Изначально все лампочки были выключены. Докажите, что возможно их все включить.
7. Несколько (не менее трёх) семейных пар дружат между собой. У них стало доброй традицией, что на День святого Валентина каждый мужчина из этих пар дарит каждой женщине из этих пар (в том числе и своей жене) розы, не менее одной. Любая жена обидится на своего мужа, если он подарит ей роз меньше, чем общее количество роз, подаренных им всем остальным женщинам из этих семейных пар. В этом году, после того как розы были подарены, выяснилось, что всех мужчин из этих семейных пар можно разбить на две такие группы, что для каждой женщины общее количество роз, подаренных ей мужчинами первой группы, равно общему количеству роз, подаренных ей мужчинами второй группы. Докажите, что хотя бы одна из жён обидится на своего мужа.
8. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. У Элвина есть таблица $n \times n$, заполненная вещественными числами (в каждой клетке записано ровно одно число). Назовём *ладейным множеством* множество из n клеток, расположенных как в различных столбцах, так и в различных строках. Предположим, что сумма чисел в клетках любого ладейного множества неотрицательна. За ход Элвин выбирает строку, столбец, а также вещественное число a; к каждому числу в выбранной строке он прибавляет a, а из каждого числа в выбранном столбце — вычитает a (таким образом, число в пересечении строки и столбца не изменяется). Докажите, что Элвин может, сделав несколько ходов, добиться, чтобы все числа в таблице стали неотрицательными.
9. Для натурального числа $n \geqslant 3$ через A_n и B_n обозначим соответственно множества всех чётных и нечётных перестановок множества $\{1, \ldots, n\}$. Докажите равенство
$$\sum_{\sigma \in A_n} \sum_{i=1}^{n} |i - \sigma(i)| = \sum_{\sigma \in B_n} \sum_{i=1}^{n} |i - \sigma(i)|.$$
10. В множестве $\{1, \ldots, n\}$ выбрали $n + 1$ различное трёхэлементное подмножество. До-

кажите, что какие-то два из них пересекаются ровно по одному элементу.

11. Клетки таблицы $n \times n$ покрашены в два цвета: белый и красный. Известно, что есть непустой набор A строк такой, что каждый столбец таблицы содержит чётное количество белых клеток на пересечении с A. Докажите, что есть непустой набор B столбцов такой, что каждая строка таблицы содержит чётное количество белых клеток на пересечении с B.
12. Из элементов множества $S = \{1, \ldots, n\}$ составили набор A пар такой, что для любых не обязательно различных $i, j \in S$ существует ровно m индексов $k \in S$, при которых $(i, k), (k, j) \in A$. Найдите все возможные значения чисел m и n.
13. В множестве $\{1, \ldots, n\}$ выбрали $n+1$ различное подмножество $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Докажите, что среди них можно выбрать два непустых набора $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_p}\}$ и $\{Aj_1, \ldots, A_{j_q}\}$ так, что все числа i_s и j_ζ различны, а объединение подмножеств первого набора совпадает с объединением подмножеств второго набора.
14. Пусть S — конечное множество точек отрезка $[0, 1]$, содержащее 0 и 1 и такое, что любое расстояние между точками из S, кроме единицы, встречается по крайней мере два раза. Докажите, что все точки множества S имеют рациональные координаты.
15. Тридцать мальчиков и двадцать девочек участвовали в отборах на олимпиаду. Оказалось, что у каждой пары мальчиков есть чётное число общих знакомых девочек и всего есть ровно 9 мальчиков, у которых нечётное число знакомых девочек. Докажите, что можно выбрать группу из не менее 16 мальчиков так, что каждая девочка будет знакома с чётным числом выбранных мальчиков.