Считаем показатели и порядки

1. Даны последовательности (a_n) натуральных чисел и (p_n) простых чисел такие, что для каждого $n \geqslant 1$ выполнены условия: $p_n | a_n$ и $a_{n+1} = \frac{a_n}{p_n}(p_n^{1009} - 1)$. Докажите, что в последовательности a_n найдётся число, кратное 2018.
2. Докажите, что число C_{k+n}^n можно представить в виде произведения попарно взаимно простых сомножителей: $C_{k+n}^n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, где a_j — делитель числа $k+j$ при всех $j = 1, 2, \ldots, n$.
3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что по крайней мере одно из чисел $2^{2^n} + 1$ и $2018^{2^n} + 1$ является составным.
4. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ натуральных чисел определена по следующим правилам: $a_1 = 1$ и $a_n = 5a_{n-1} + 3^{n-1}$ при всех $n \geqslant 2$. Найдите наибольшую степень двойки, на которую делится $a_{2^{2019}}$.
5. Существует ли натуральное число $n > 1$ такое, что $2^{n-1} + 1$ делится на n?
6. Пусть $a \neq 0$, $b \geqslant 2$ и $c \neq 0$ — целые числа. Докажите, что у чисел $ab + c$, $ab^2 + c$, $ab^3 + c$, $\ldots$ бесконечно много различных простых делителей.
7. Пусть $x_n = a^n + b^{n+1}$, где a и b — различные натуральные числа. Докажите, что множество простых чисел, делящих хотя бы один из элементов последовательности (x_n), бесконечно.
8. Дан многочлен $P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_0$, $d \geqslant 2$, с натуральными коэффициентами. Последовательность (b_n) целых чисел задана рекуррентно равенствами
$$b_1 = a_0 \quad \text{и} \quad b_{n+1} = P(b_n) \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$
Докажите, что для каждого натурального $n \geqslant 2$ существует простой делитель числа b_n взаимно простой с произведением $b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$.

N–C, примеры

9. Для произвольного натурального числа n через $\mathfrak{p}(n)$ обозначим количество простых делителей числа n. Докажите, что для любого натурального числа n найдутся натуральные числа k и m такие, что $k - m = n$ и $\mathfrak{p}(k) - \mathfrak{p}(m) = 1$.
10. В определениях предыдущей задачи, выясните, конечно или бесконечно количество пар (a, b) различных натуральных чисел таких, что $\mathfrak{p}(a) + \mathfrak{p}(b) = \mathfrak{p}(a+b) > 2022$.
11. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что $2^n + 1$ делится на n.
12. Бесконечное множество $S \subset \mathbb{N}$ назовём *хорошим*, если для любых трёх попарно различных элементов a, b и c множества S все натуральные делители числа $\frac{a^c - b^c}{a - b}$ принадлежат S. Докажите, что для каждого натурального числа $n > 1$ существует хорошее множество, не содержащее n.
13. Докажите, что для любого натурального m можно найти m последовательных натуральных чисел n таких, что число $(1^3 + 2018^3) \cdot (2^3 + 2018^3) \cdot \ldots \cdot (n^3 + 2018^3)$ не является степенью (выше первой) натурального числа.
14. Даны два натуральных числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что число $n^b + 1$ **не** делит $a^n + 1$.
15. Докажите, что для любой пары (a, b) натуральных чисел найдётся натуральное число n такое, что $n^2 + an + b$ имеет хотя бы 2021 различный простой делитель.
16. Докажите, что для каждой пары (m, n), состоящей из нечётной цифры $m \neq 5$ и натурального числа n найдётся натуральное число N такое, что последние n цифр десятичной записи N^3 равны m.