Мультипликативные функции

Функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ называется мультипликативной функцией теории чисел, если из НОД$(m,n) = 1$ следует $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$. Исследование таких функций сводится к исследованию их значений для степеней простых чисел. Пусть $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$.

1. Выведите формулу для функция $\tau(n)$, которая вычисляет количество всех натуральных делителей числа n.
2. Выведите формулу для функция $\sigma(n)$, которая вычисляет сумму всех натуральных делителей числа n.

Функция Эйлера.

Функция Эйлера $\varphi(n)$ находит количество чисел от 1 до n, взаимно простых с n.

3. Найдите формулы для $\varphi(p)$ и $\varphi(p^k)$, где p — простое число.
4. Докажите, мультипликативность функции φ пользуясь определением.
5. Выведите формулу для $\varphi(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k})$, пользуясь мультипликативностью φ.
6. Пусть функция f мультипликативна. Докажите, что и $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ — тоже.
7. Докажите равенство $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Теоремы Ферма, Эйлера и Вильсона

Как мы уже видели, если числа a и n взаимно просты, а числа $\{m_1, m_2, \dots, m_{\varphi(n)}\}$ дают по одному разу все возможные взаимно простые с n остатки при делении на n, то числа $\{am_1, am_2, \dots, am_{\varphi(n)}\}$ также дают по одному разу все возможные взаимно простые с n остатки. Из этого наблюдения легко получаются следующие три классические теоремы.

8.[1] Докажите, что n является простым, если и только если $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$.

9.[2] Докажите, что $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ для простого n, $n \nmid a$.

10.[3] Докажите, что $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ при всех a, n, НОД$(a,n) = 1$.

Порядки

Как мы знаем, если НОД$(a,n) = 1$, то остатки при делении на n чисел $a, a^2, a^3, \dots$ повторяются, образуя цикл. Длина этого цикла равна наименьшему натуральному числу d такому, что $a^d \equiv 1 \pmod{n}$. Это число называется порядком числа a по модулю n и обозначается $\mathrm{ord}_n(a)$. Очевидно, что, если $a^d \equiv 1 \pmod{n}$, то d делится на порядок $\mathrm{ord}_n(a)$. В частности, из теоремы Эйлера следует, что показатель числа по модулю n является делителем числа $\varphi(n)$.

11. Найдите порядки a) $\mathrm{ord}_3(5)$; b) $\mathrm{ord}_2(7)$; c) $\mathrm{ord}_6(7)$; d) $\mathrm{ord}_5(8)$; e) $\mathrm{ord}_7(30)$.

LTE lemma (лемма об уточнении показателя).

Пусть $p > 2$ — простое число, числа a и b таковы, что $p \mid a - b$, но p не делит ab, а n — произвольное натуральное число.

12. Пусть число k не кратно p. Докажите равенство $v_p(a^{kn} - b^{kn}) = v_p(a^k - b^k)$.

13. Докажите равенство $v_p(a^{pn} - b^{pn}) = v_p(a^n - b^n) + 1$.

14.[4] Докажите равенство $v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(n)$.

15. Пусть числа a, b и n нечётны. Докажите, что $v_2(a^n - b^n) = v_2(a - b)$.

16.[5] Пусть числа a и b нечётны, а n чётно. Докажите, что $v_2(a^n - b^n) = v_2(a^2 - b^2) + v_2(n) - 1$.

---

[1] **Теорема Вильсона.**

[2] **Малая теорема Ферма.**

[3] **Теорема Эйлера.**

[4] **LTE lemma** случай нечётного p.

[5] **LTE lemma** случай $p = 2$.

Упражнения

17. Докажите, что любое нечётное натуральное число n является делителем числа $2^{n!}-1$.
18. Для произвольного натурального n докажите двойное неравенство $\sqrt{n} \leqslant \frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \leqslant \frac{n+1}{2}$.
19. Найдите наибольшее значение постоянной C такое, что неравенство $C\sqrt{n} \leqslant \frac{\sigma(n)}{\tau(n)}$ выполняется для всех натуральных $n > 1$.
20. Найдите все натуральные числа k для которых найдутся натуральные числа a и b такие, что $k = \tau(a) = \tau(b) = \tau(2a+3b)$.

Задачи

21. Найдите все натуральные числа n такие, которых найдутся простые p и q, $p+2=q$, такие, что числа 2^n+p и 2^n+q простые.
22. Аня и Боря играют в игру, делая ходы по очереди: за ход разрешается выбрать номер $i \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, не выбранный ранее никем, и цифру a_i ($p > 2$ — простое число). Игра заканчивается, когда все номера выбраны. Аня ходит первой и она хочет, чтобы число $M = a_0 + 10 \cdot a_1 + 10^2 \cdot a_2 + \ldots + 10^{p-1}a_{p-1}$ делилось на p, а Боря пытается ей помешать. Докажите, что Аня может добиться своего независимо от действий Бори.
23. Найдите все натуральные числа n, при которых дробь $\frac{n^{3n-2}-3n+1}{3n-2}$ — целое число.
24. Докажите, что не существует натурального числа $n > 1$ такого, что $n \mid 2^n - 1$.
25. Число $n \in \mathbb{N}$ называется совершенным, если $\sigma(n) = 2n$. Докажите, что чётное число совершенно тогда и только тогда, когда оно представимо в виде $2^{p-1}(2^p-1)$, где числа p и 2^p-1 просты.
26. Найдите все пары $(k; n) \in \mathbb{N}^2$ такие, что $k! = (2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\ldots(2^n-2^{n-1})$.
27. Найдите все тройки a, b, p натуральных чисел такие, что число p простое и $a^p = b!+p$.