Гомотетия и поворотная гомотетия

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Рассмотрим всевозможные параллелограммы $BCEF$ такие, что 1) $AB = CE$ и 2) параллелограммы $ABCD$ и $BCEF$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC. Докажите, что всевозможные точки пересечения отрезков AE и DF лежат на одной окружности.
2. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Точки B_1 и D_1 симметричны A относительно середин сторон BC и CD соответственно. Описанная окружность треугольника CB_1D_1 пересекает ω в точках C и G. Докажите, что AG — диаметр окружности ω.
3. Пусть A_1 — середина стороны BC, а G — точка пересечения медиан треугольника ABC. Через $GBKL$ и $GCMN$ обозначены квадраты, лежащие слева относительно лучей GB и GC соответственно. Пусть A_2 — середина отрезка, соединяющего центры квадратов $GBKL$ и $GCMN$. Найдите отношение $AG : A_1A_2$.
4. Пусть A_1 — середина стороны BC, а G — точка пересечения медиан неравнобедренного треугольника ABC. Через $GBKL$ и $GCMN$ обозначены квадраты, лежащие слева относительно лучей GB и GC соответственно. Пусть A_2 — середина отрезка, соединяющего центры квадратов $GBKL$ и $GCMN$. Описанная окружность треугольника A_1A_2G пересекает BC в точках A_1 и X. Найдите отношение $A_1X : XH$, где H — основание высоты AH треугольника ABC.
5. Окружности ω_1 и ω_2 одинакового радиуса пересекаются в точках X_1 и X_2. Окружность ω касается окружности ω_1 внешним образом в точке T_1 и окружности ω_2 внутренним образом в точке T_2. Докажите, что прямые X_1T_1 и X_2T_2 пересекаются на окружности ω.
6. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором углы $\angle DAB$ и $\angle BCD$ прямые и $\angle ABC > \angle CDA$. Пусть Q и R — точки пересечения некоторой прямой с отрезками BC и CD соответственно, а P и S — точки пересечения этой прямой с прямыми AB и AD соответственно. Известно, что $PQ = RS$. Обозначим середину отрезка BD через M, а середину отрезка QR через N. Докажите, что точки M, N, A и C лежат на одной окружности.

Степень точки и радикальная ось

Степенью точки P относительно окружности $\omega(O, R)$ называется число $OP^2 - R^2$. Если точка лежит вне окружности, то её степень равна квадрату касательной, проведённой из этой точки, и произведению отрезков любой секущей, проходящей через эту точку. Если точка лежит внутри окружности, то её степень отрицательна и равна минус произведению отрезков любой хорды, проходящей через эту точку.

Множество точек, имеющих равные степени относительно двух фиксированных окружностей — это прямая (радикальная ось), перпендикулярная линии центров (докажите это утверждение). Если окружности пересекаются, то эта прямая содержит их общую хорду.

7. $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Окружность Γ_1 проходит через точки A и B и касается стороны CD в точке E; окружность Γ_2 проходит через точки B и C и касается стороны DA в точке F; окружность Γ_3 проходит через точки C и D и касается стороны AB в точке G; окружность Γ_4 проходит через точки D и A и касается стороны BC в точке H. Докажите, что $EG \perp FH$.
8. Точка M — точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), у которой $AD > BC$. Окружность Γ_1 проходит через точку M и касается основания

AD в точке A. Окружность Γ_2 проходит через точку M и касается основания AD в точке D. Точка S — точка пересечения прямых AB и DC, X — точка пересечения Γ_1 и прямой AS, Y — точка пересечения Γ_2 и прямой DS, O — центр окружности, описанной около треугольника ASD. Докажите, что $SO \perp XY$.

9. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Описанная вокруг треугольника ABD окружность пересекает отрезки BC и CD в точках K и L соответственно. Описанная вокруг треугольника BCD окружность пересекает отрезки AB и AD в точках M и N соответственно. Описанные около треугольников MBK и NDL окружности пересекаются в точках E и F. Докажите, что точки E и F лежат на прямой AC.
10. На медианах AA' и BB' треугольника ABC построены в сторону вершины C ду́ги с одинаковой градусной мерой. Докажите, что общая хорда окружностей, содержащих эти дуги, проходит через C.
11. В четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C прямые. На сторонах AB и CD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках X и Y. Докажите, что прямая XY проходит через середину диагонали AC.
12. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, а A_1, B_1, C_1 — основания высот. На прямых OA_1, OB_1 и OC_1 нашли такие точки A', B' и C', соответственно, что четырёхугольники $AOBC'$, $BOCA'$ и $COAB'$ вписанные. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AA_1A', BB_1B' и CC_1C', имеют общую точку.
13. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Окружности с диаметрами AB и CD пересекаются в точках X_1 и Y_1. Окружности с диаметрами BC и AD пересекаются в точках X_2 и Y_2. Окружности с диаметрами AC и BD пересекаются в точках X_3 и Y_3. Докажите, что прямые X_1Y_1, X_2Y_2 и X_3Y_3 пересекаются в одной точке.