Бесконечные множества

Наша ближайшая цель — разобраться с тем, что заменит число элементов для бесконечных множеств. Оставим то же самое название (мощность) и обозначение ($|A|$), но пока не будем давать строгого определения, а введём некоторые условия, которые будут описывать свойства этого понятия. Основная идея: вместо того, чтобы пытаться указать число элементов множества, будем сравнивать множества друг с другом.

Равная мощность

Если между множествами A и B можно установить взаимно-однозначное соответствие, то такие множества будем называть *равномощными*. Другими словами, $|A| = |B|$ по определению означает, что существует биекция $A \to B$.

1. Докажите, что отрезки $[0, 1]$ и $[0, 2]$ числовой прямой равномощны.
2. Докажите, что мощность множества натуральных чисел равна мощности множества чётных натуральных чисел.
3. Докажите, что любые два интервала числовой прямой (считая полубесконечные и бесконечные) равномощны.
4. Докажите, что множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно множеству подмножеств натурального ряда.
5. Докажите, что множество бесконечных последовательностей цифр 0,1,2,3 равномощно множеству бесконечных последовательностей цифр 0 и 1.
6. Докажите, что множество бесконечных последовательностей цифр 0,1,2 равномощно множеству бесконечных последовательностей цифр 0 и 1.

Счётные множества

Множество A называется счётным, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел. При этом часто бывает полезным вместо рассмотрения биекции $f\colon \mathbb{N} \to A$ считать, что множество A занумеровано натуральными числами, т. е. писать $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, имея в виду, что $a_n = f(n)$.

7. Докажите счётность множества a) $\mathbb{Z}$; b) $\mathbb{Q}$.

В некотором смысле, $\mathbb{N}$ — „самое маленькое” бесконечное множество, а именно:

8. Докажите, что любое подмножество счётного множества конечно или счётно.
9. Докажите, что множество любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.
10. Докажите, что объединение конечного или счётного числа (как это понимать?) конечных или счётных множеств конечно или счётно.

Ещё немного счётных множеств

Докажите, что каждое из перечисленных множеств счётно:

11. Множество алгебраических чисел (вещественное число называется алгебраическим, если оно является корнем ненулевого многочлена с целыми коэффициентами).
12. Бесконечное множество непересекающихся интервалов числовой прямой.
13. Множество точек строгого локального максимума функции вещественного аргумента.
14. Множество точек, в которых происходит скачок монотонной функции.

НЕравенство мощностей

Из определения равномощных множеств легко получить определение неравномощных множеств: два множества будем называть *неравномощными*, если между ними нельзя установить взаимно-однозначное соответствие.

15. Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей, состоящих из нулей и единиц несчётно.

Как видно из предыдущей задачи, неравномощные множества существуют. Естественно, следующий шаг — определить отношение порядка (по мощности) на множествах. Если множество A равномощно подмножеству множества B, то будем говорить, что мощность множества A меньше либо равна мощности множества B и обозначать $|A| \leqslant |B|$, если при этом, множества A и B неравномощны, то будем говорить, что мощность множества A меньше мощности множества B ($|A| < |B|$).

16. **Теорема Кантора.** Докажите неравенство $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.
17. Докажите, что мощность любого множества A меньше мощности $P(A)$ множества его подмножеств.
18. **Теорема Кантора-Бернштейна.** Докажите, что из неравенств $|A| \leqslant |B|$ и $|B| \leqslant |A|$ следует равенство $|A| = |B|$.
19. Докажите, что, если квадрат разбит на две части, то хотя бы одна из них равномощна квадрату.
20. Докажите, что, если отрезок разбит на две части, то хотя бы одна из них равномощна отрезку.

При сравнении мощностей геометрическая интерпретация, как видно из следующих задач, не всегда помогает:

21. Докажите, что множества всех прямых на плоскости равномощно множеству всех точек плоскости.
22. Докажите, что квадрат (со внутренностью) равномощен отрезку.
23. Докажите, что n-мерное пространство $\mathbb{R}$ равномощно прямой $\mathbb{R}$.
24. Докажите, что множество бесконечных последовательностей вещественных чисел равномощно $\mathbb{R}$.
25. Найдите мощность множества $\mathrm{C}[0,1]$ непрерывных функций, заданных на отрезке $[0,1]$.