Разминка

1. На плоскости дан выпуклый четырёхугольник. Найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин наименьшая.
2. Внутри угла даны точки M и N. Найдите на сторонах угла точки A и B (по одной на каждой стороне), для которых периметр четырёхугольника с вершинами в точках M, A, B, N наименьший.
3. **Теорема Помпею.** Точка M лежит на меньшей дуге AB описанной около равностороннего треугольника ABC окружности. Докажите, что $MC = MA+MB$, а для всех остальных точек M плоскости выполнено неравенство $MC < MA + MB$.
4. **Задача Фаньяно-Торичелли-Штейнера.** На плоскости даны три точки A, B, C, не лежащие на одно прямой. Найдите точку T для которой сумма расстояний $AT + BT + CT$ наименьшая.
5. **(?!)** Четыре деревни расположены в вершинах квадрата со стороной 4км. Жители хотят соединить их системой дорог так, чтобы из каждой деревни можно было проехать в любую другую. Они собрали деньги на 11км дороги. Хватит ли этого?

Задача Штейнера: на плоскости дано n точек. Соединить их системой кривых наименьшей суммарной длины.

Интуитивно понятно, что 1) такая система кривых существует и 2) количество кривых в ней конечно. Чтобы строго доказать это, придётся использовать математический анализ, и мы не будем этого делать. Очевидно, что кратчайшая система кривых состоит из отрезков.

Рассмотрим граф, вершины которого — концы этих отрезков, а рёбра — сами отрезки. Вершины, которые совпадают с заданными точками будем называть настоящими, а остальные вершины — дополнительными. Докажите, что

6. Ребра, выходящие из одной вершины, образуют углы не менее 120°.
7. Из настоящей вершины может выходить одно, два или три ребра; если выходит два ребра, то угол между ними больше или равен 120°; если три, то они образуют между собой углы в 120°.
8. Из каждой дополнительной вершины выходят три ребра под углами 120°.

Планарный граф, обладающий этими свойствами, в котором настоящими вершинами являются заданные точки (и только они) называется *сетью Штейнера* этих точек. Таким образом, кратчайшая система кривых, соединяющая точки — это сеть Штейнера. В общем случае, сетей Штейнера может быть несколько (конечное число) и кратчайшей системой являются не обязательно все и не обязательно только одна из них. Докажите, что

9. В сети Штейнера есть либо настоящая вершина, степени 1, соединённая с настоящей вершиной, либо две настоящие вершины степени 1, соединённые с одной и той же дополнительной вершиной.
10. `Индуктивный переход.` Пусть $n \geqslant 3$ и для любых $n-1$ точек на плоскости существует лишь конечное число сетей Штейнера, тогда и для любых n точек на плоскости существует лишь конечное число сетей Штейнера.

Объединяя полученные результаты, получаем полное (алгоритмическое) решение задачи Штейнера (на самом деле, мы получаем решение задачи Штейнера только для плоскости, сама задача в общем виде ставится для пространства (в том числе и многомерного) и имеет аналогичное решение.

11. Решите задачу Штейнера для трёх точек (сравн. с п. 4).
12. Решите задачу Штейнера для вершин квадрата (сравн. с п. 5).
15. Решите задачу Штейнера для пространства.