Теорема Чебышёва

1. Для простого p и натурального n докажите неравенство $v_p(C_{2n}^n) \leqslant \max\{r\colon p^r \leqslant 2n\}$.
2. Докажите, что простые числа p такие, что $\sqrt{2n} < p \leqslant \frac{2}{3}n$ входят в разложение C_{2n}^n не более одного раза, а такие, что $\frac{2}{3}n < p \leqslant n$ вообще не являются делителями C_{2n}^n.
3. Докажите, что число C_n^k не делится на простое число p тогда и только тогда, когда в каждом разряде p-ичной записи цифра числа n не меньше цифры числа k.
4. Для натурального числа $n \geqslant 2$ найдите наибольший делитель чисел $C_{2n}^1, C_{2n}^3, \ldots, C_{2n}^{2n-1}$.
5. Докажите, что произведение простых чисел из $(m+1, 2m+1]$ не превосходит C_{2m+1}^m.
6. Докажите неравенство $C_{2m+1}^m \leqslant 2^{2m}$.
7. Докажите, что произведение всех простых чисел от 2 до n не превосходит 4^{n-1}.
8. Докажите неравенство $C_{2n}^n \geqslant \frac{4^n}{2n}$.
9. Докажите неравенство $C_n^k \leqslant \frac{n^k}{2^{k-1}}$.
10. Пусть в промежутке $(n, 2n]$ нет простых чисел, докажите, что $4^n \leqslant (2n)^{1+\sqrt{2n}} \cdot 4^{\frac{2}{3}n}$.
11. Докажите, что при всех достаточно больших n в интервале $(n, 2n)$ есть простое число.
12. Докажите теорему Чебышёва: *для каждого натурального числа n существует такое простое число p, что $n < p \leqslant 2n$.*
13. Для натурального числа $n \geqslant 3$ через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ обозначим последовательность степеней в разложении числа $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ — простые числа. Найдите все натуральные числа $n \geqslant 3$, для которых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — геометрическая прогрессия.
14. Докажите, что при $n \geqslant 4000$ в промежутке между n и $2n$ находится не менее $\frac{1}{30} \cdot \frac{n}{\log_2 n+1}$ простых чисел, и что это число неограниченно растёт с ростом n.
15. Докажите, что для любого натурального числа s при всех достаточно больших натуральных n между n и $2n$ содержится по крайней мере одно число, являющееся произведением s различных простых чисел.

Задачи-шутки

16. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy$.
17. Функция $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ удовлетворяет равенству $f(f(x)) + x = f(2x)$ для всякого $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Докажите, что $f(x) \geqslant x$ при всех $x \in \mathbb{R}_{>0}$.
18. Функция $f\colon \mathbb{Q}_{\geqslant 1} \to \mathbb{R}$ для любых рациональных $x, y \geqslant 1$ удовлетворяет неравенству $|f(x+y) - f(x) - f(y)| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое действительное число. Докажите, что существует рациональное число q такое, что при всех $x \in \mathbb{Q}_{\geqslant 1}$ справедливо неравенство $|\frac{f(x)}{x} - q| < 2\varepsilon$.
19. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, для которых при всех $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ выполнено равенство $f(x + f(xy)) = xf(1 + f(y))$.
20. Найдите все функции $g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ такие, что для любых $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ верно равенство $xg(x + g(y)) = g(g(xy) + 1)$.
21. Существует ли функция $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, для которых при всех $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ выполнено неравенство $f(x+y) > yf(x) + f(f(x))$?
22. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие при всех $x, y \in \mathbb{R}$ равенству $f(f(x) + f(y)) = (x+y)f(x+y)$.
23. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, для которых при всех $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ выполнено равенство $xf(x^2)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)\left(f(f(x^2)) + f(f(y^2))\right)$.
24. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, для которых при всех $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ выполнено равенство $f(x + f(xy)) + y = f(x) + f(y) + 1$.