Определитель как ориентированный объём

Рассмотрим объём параллелепипеда, заданного n векторами в n-мерном пространстве. Как говорилось в предыдущем листке, он должен представлять собой полилинейную кососимметическую функцию векторов. Координаты векторов-аргументов принято записывать в столбы таблицы, такая таблица называется *матрицей*, а ориентированный объём, называется *определителем* этой матрицы. Определитель квадратной матрицы A обозначается через $\det A$. Элемент матрицы A, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, принято обозначать a_{ij}.

1. Выведите формулу объёма параллелепипеда в n-мерном векторном пространстве.

Свойства определителей

Логично предположить, что объём параллелепипеда в n-мерном векторном пространстве ненулевой, если и только если векторы, на которых он построен, не лежат в пространстве меньшей размерности, т. е. линейно независимы.

2. Докажите, что определитель набора линейно зависимых векторов равен нулю.
3. Докажите, что определитель не изменится, если к одному из векторов прибавить произвольную линейную комбинацию остальных.
4. Докажите, что определитель линейно независимого набора векторов ненулевой.

Для элемента a_{ij} квадратной $n \times n$ матрицы M его *алгебраическим дополнением* называется определитель матрицы, получаемой из M вычёркиванием i-й строки и j-го столбца, умноженный на $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} принято обозначать A_i^j.

5. Докажите равенство[1] $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_i^j = \det M$.
6. Докажите, что при $i \neq k$ верно равенство $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_k^j = 0$.

Нетрудно видеть, что определитель набора $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ равен скалярному произведению некоторого вектора $\vec{v}$ и $\vec{v}_3$. Вектор $\vec{v}$ называется *векторным произведением* векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ и обозначается $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.

7. Опишите геометрический смысл векторного произведения двух векторов.

Ранг матрицы

Строчным (столбцовым) рангом прямоугольной матрицы называется размерность линейного пространства, порождённого строками (столбцами). *Минором* матрицы называется определитель любой квадратной матрицы, полученной из заданной удалением некоторых строк и столбцов, а размер соответствующей квадратной матрицы называется *порядком* этого минора.

8. Докажите, что строчный и столбцовый ранги равны наибольшему порядку ненулевого минора.

Таким образом, строчный и столбцовый ранги любой матрицы совпадают, это число называется *рангом матрицы*, ранг матрицы M и обозначается $\operatorname{rank} M$. Для произвольной матрицы M размера $n \times n$ её *транспонированной матрицей* называется матрица M^T размера $n \times m$, определённая равенствами $M^T_{ij} = M_{ji}$. Из определения ранга видно, что $\operatorname{rank} M = \operatorname{rank} M^T$.

9. Для любой квадратной матрицы M докажите тождество $\det M = \det M^T$.
10. Докажите неравенство $\operatorname{rank}(A + B) \leqslant \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$ для любых двух матриц A и B одинакового размера.

---

[1] Эта формула называется **разложением определителя по строке**. Верна ли аналогичная формула разложения по столбцу?

Упражнения

11. Выведите формулу для нахождения объёма треугольной пирамиды с вершиной в начале координат и боковыми рёбрами — векторами $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$.
12. Рассмотрим систему из n линейных уравнений с m неизвестными. Докажите, что она имеет решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов не изменится, если к ней дописать столбец правых частей.
13. На плоскости нарисованы два выпуклых многоугольника P и Q. Для каждой стороны многоугольника P многоугольник Q можно зажать между двумя прямыми, параллельными этой стороне. Обозначим через h расстояние между этими прямыми, а через ℓ — длину стороны и вычислим произведение ℓh. Просуммировав такие произведения по всем сторонам P, получим величину (P, Q). Докажите, что $(P, Q) = (Q, P)$.
14. Пусть векторы $\vec{v}_i$, $i = \overline{1, n}$, имеют координаты $(1, x_i, x_i^2, \ldots, x_i^{n-1})$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — некоторые элементы поля. Найдите определитель набора $(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots, \vec{v}_n)$.[2]

[2] Такой определитель называется **определителем Вандермонда**.