

1. Найдите все пары (p, q) простых чисел, удовлетворяющих уравнению $(p+q)^2 = p^3 - q^5$.
2. Найдите все пары (p, q) простых чисел таких, что $p^3 + p^2 + 2 = q^2 - q$.
3. Найдите все натуральные числа n и простые числа p такие, что $p^8 - p^4 = n^5 - n$.
4. Найдите все натуральные числа n и простые числа p такие, что $\frac{1}{2}p(p-1) = n^3 + 1$.
5. Найдите все возможные значения произведения pqr трёх попарно различных простых чисел p, q, r , удовлетворяющих равенству $rp^3 + p^2 + p = 2rq^2 + q^2 + q$.
6. Докажите, что существует не более конечного числа таких простых чисел p , что уравнение $a^3 + b^3 = 2016pab$ имеет решение в натуральных числах a, b , не кратных p .
7. Опишите все целые решения уравнения $x^2 + y^2 = z^2$.
8. Опишите все натуральные решения уравнения $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$.
9. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + 2xy - mx - my - m - 1 = 0$, где m — натуральное число, имеет ровно m решений в натуральных числах.
10. Решите уравнение $x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3$ в целых числах x .
11. Решите уравнение $x^3 - y^3 = xy + 61$ в натуральных числах.
12. Докажите, что уравнение $p^2 + q^2 = r^2 + s^2 + t^2$ не имеет решений в простых числах p, q, r, s, t .
13. Докажите, что уравнение $15x^2 - 7y^2 = 9$ не имеет решений в целых числах.
14. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ не имеет решений в ненулевых целых числах.
15. Докажите, что для каждого целого числа n уравнение $n = x^2 + y^2 - z^2$ имеет бесконечно много решений в целых числах x, y, z , больших 1.
16. Решите $y^2 - x(x+1)(x+2)(x+3) = 1$ в натуральных x и y .
17. Решите систему уравнений $x + y + z = 3$ и $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ в целых x, y, z .
18. Решите в натуральных числах уравнение $2^x - 3^y = 1$.
19. Решите в натуральных числах уравнение $3^x - 2^y = 1$.
20. Решите в натуральных числах уравнение $9^m - 7^m = 2^n$.
21. Найдите все тройки неотрицательных целых чисел (x, y, z) таких, что $3^x + 7^y = 4^z$.
22. Решите в натуральных числах уравнение $a! + 2001 \cdot b! = c!$.
23. Докажите, что для любых целых чисел a и b найдутся такие целые x и y , что выполняется равенство $x^2 + xy + y^2 = 3a^2 + b^2$.
24. Решите уравнение $y^2(x^2 + y^2 - 2xy - x - y) = (x+y)^2(x-y)$ в целых числах.
25. Решите уравнение $abc + ab + c = a^3$ в натуральных числах.
26. Решите уравнение $x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3$ в натуральных числах.
27. Решите уравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y$ в целых числах.
28. Решите в простых числах уравнение $p(p+1) + q(q+1) = r(r+1)$.
29. Докажите, что уравнение $x(x+1) = 4y(y+1)$ не имеет решений в натуральных числах x и y , но имеет бесконечно много решений в положительных рациональных числах.
30. Найдите все пары натуральных чисел $a, b, a > b$, при которых $(a-b)^{ab} = a^b \cdot b^a$.