Рассмотрим множество $\mathbb{C}$, состоящее из формальных выражений вида $z = x + yi$, где x и y — вещественные числа (вещественная и мнимая части, соответственно), а i — вспомогательный символ (мнимая единица). Стандартное обозначение: $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$. Элементы $\mathbb{C}$ называются комплéксными числами и для них вводятся арифметические операции как для многочленов переменной i с одним дополнительным условием: $i^2 = -1$. Для числа z его сопряжённым называется число $\overline{z} = x - yi$, а модулем — число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Числа $x + yi$ и $x_1 + y_1 i$ считаются равными, если и только если $x_1 = x$ и $y_1 = y$.

1. Выполните действия **a)** $(2 + 3i) + (3 - 2i)$; **b)** $(0 + 1i) \cdot (0 + 1i)$; **c)** $(2 + 3i) \cdot (1 - i)$.
2. Докажите, что для любого комплексного числа $x + yi \neq 0 + 0i$ существует единственное обратное комплексное число $x' + y'i$ такое, что $(x + yi)(x' + y'i) = 1 + 0i$.

Результат предыдущей задачи показывает, как для комплексных чисел определить деление: это просто умножение на обратное. При этом $\mathbb{C}$ становится полем, содержащим $\mathbb{R}$, если отождествить каждое вещественное число $x \in \mathbb{R}$ с числом $x + 0i$.

3. Проверьте очевидные равенства:
$$\textbf{a)}\,\overline{(\overline{z})} = z;\ \ \textbf{b)}\,z \cdot \overline{z} = |z|^2;\ \ \textbf{c)}\,\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2;\ \ \textbf{d)}\,\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2;\ \ \textbf{e)}\,\overline{z_1/z_2} = \overline{z}_1/\overline{z}_2.$$
4. Проверьте очевидные импликации:
$$\textbf{a)}\operatorname{Im} z = 0 \iff z = \overline{z};\ \ \textbf{b)}\operatorname{Re} z = 0 \iff z = -\overline{z};\ \ \textbf{c)}\ z_1/z_2 \in \mathbb{R} \iff z_1\overline{z}_2 = \overline{z}_1 z_2.$$
5. Докажите, что если $(a + bi)^n = x + yi$, то $(a^2 + b^2)^n = x^2 + y^2$.

Решение квадратных уравнений

Оказывается[1], что в $\mathbb{C}$ любой многочлен степени n имеет ровно n корней с учётом кратности. Это утверждение мы вскоре докажем, а пока убедимся в его справедливости для многочленов второй степени. Во-первых, в $\mathbb{C}$ любое квадратное уравнение с вещественными коэффициентами имеет решение:

6. Решите уравнение $x^2 + 1 = 0$.
7. Докажите, что в $\mathbb{C}$ любое квадратное уравнение с вещественными коэффициентами имеет ровно два корня с учётом кратности.

Во-вторых, в $\mathbb{C}$ решаются квадратные уравнение с комплексными коэффициентами:

8. Вычислите: **a)**$\sqrt{3 - 4i}$; **b)**$\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$; **c)**$\sqrt[4]{-1}$; **d)**$\sqrt[3]{1}$.
9. Выведите явную формулу квадратного корня из комплексного числа.
10. Докажите, что в $\mathbb{C}$ любое квадратное уравнение с комплексными коэффициентами имеет ровно два корня с учётом кратности.
11. Решите уравнение $z^2 - (3 + 2i)z + 6i = 0$.

Немного про расширения

Мы построили поле $\mathbb{C}$ как минимальное подполе, содержащее $\mathbb{R}$, в котором многочлен x^2+1 имеет корень. Опишем эту конструкцию в общем виде. Пусть $\mathcal{F}$ — поле характеристики нуль, а $p \in \mathcal{F}[x]$ — неприводимый многочлен степени n. Рассмотрим множество $\mathcal{K}$, состоящее из формальных выражений вида $z = a_0 + a_1 i + \ldots + a_{n-1} i^{n-1}$, где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathcal{F}$, а i — вспомогательный символ. Выражения будем складывать и умножать как многочлены от i, причём после умножения будем заменять результат на его остаток от деления на многочлен p. Очевидно, что $\mathcal{K}$ — кольцо.

12. Докажите, что $\mathcal{K}$ — поле.
13. Отождествим каждый элемент $a \in \mathcal{F}$ с элементом $a + 0i + \ldots + 0i^{n-1}$. Докажите, что $\mathcal{K}$ — такое расширение поля $\mathcal{F}$, в котором многочлен p имеет корень.

[1] Это утверждение называется **основной теоремой алгебры**.

Упражнения

14. Докажите, что число, являющееся произведением нескольких сумм квадратов пар целых чисел, представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел.
15. Докажите, что, если комплексное число z является корнем многочлена с вещественными коэффициентами, то и число $\overline{z}$ тоже является его корнем.
16. Решите уравнения: **a)** $z^4 + (z-2)^4 = 32$; **b)** $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0$.

Задачи

Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}$ — расширение полей. Элемент $a \in \mathcal{K}$ называется *алгебраическим*, если он является корнем некоторого ненулевого многочлена $p \in \mathcal{F}[x]$. *Минимальным многочленом* алгебраического числа a называется приведённый многочлен $p \in \mathbb{F}[x]$ наименьшей степени, такой что $p(a) = 0$, а $\deg p$ называется *степенью* числа a.

17. Докажите, что минимальный многочлен алгебраического числа неприводим над $\mathcal{F}$.
18. Докажите, что, если число алгебраическое число $a \in \mathcal{K}$ является корнем многочлена $q \in \mathbb{F}[x]$, то q делится на минимальный многочлен числа a.
19. Пусть[2] $\mathcal{F} = \mathbb{Q}$, а $\mathcal{K} = \mathbb{R}$. Докажите, что минимальный многочлен алгебраического числа не имеет кратных корней в $\mathcal{K}$.

[2] На самом деле, это уточнение несущественно для полей характеристики нуль.