1. Ученик загадал многочлен $p \in \mathbb{C}[x]$ и сообщил учителю степень этого многочлена. После этого учитель называет набор арифметических операций, состоящий из сложения, вычитания и умножения, которые необходимо проделать с коэффициентами, а ученик сообщает результат выполнения этих операций. Может ли учитель гарантированно узнать, имеет ли многочлен p кратный корень?
2. Рассмотрим множество $A = \{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc : a, b, c \in \mathbb{Z}\}$. Докажите, что, если $x, y \in A$, то и $xy \in A$.
3. Целые числа a, b, c взаимно просты в совокупности. Докажите, что найдутся целые числа x, y, z, u, v, w такие, что $a(yw - zv) + b(zu - xw) + c(xv - yu) = 1$.
4. Докажите, что $\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \dfrac{a_j - a_i}{j - i} \in \mathbb{Z}$ для любых целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
5. Последовательность $(x_n)_{n \geqslant 0}$ задана равенствами $x_0 = 4$, $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 3$ и рекуррентными соотношениями $x_{n+4} = x_{n+1} + x_n$, $n \geqslant 0$. Докажите, что число x_p кратно p для каждого простого числа p.
6. Дана последовательность (a_n) различных натуральных чисел таких, что $a_n \leqslant 4.999n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Докажите, что существует бесконечно номеров n, при которых сумма цифр числа a_n не кратна 5.
   (b) Останется ли верным это утверждение, если ослабить оценку до $a_n \leqslant 5n$?
7. Даны простое число $p > 2$ и множество $A = \{1, 2, \ldots, 2p\}$. Найдите количество подмножеств множества A, которые состоят из p элементов с суммой кратной p.
8. Через $f(n)$ обозначим количество непустых подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ с суммой, кратной n. Докажите равенство $f(x) = 1 + \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{2 \nmid d \mid n} \varphi(d) 2^{\frac{n}{d}}$.
9. Даны натуральные числа $n > 1$ и $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Через $f(k)$ обозначим количество m-ок $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ таких, что $1 \leqslant c_i \leqslant a_i$, $i = \overline{1, m}$, и $c_1 + c_2 + \ldots + c_m \equiv k \pmod n$. Докажите, что равенства $f(0) = f(1) = \ldots = f(n-1)$ равносильны тому, что какое-то из a_i кратно n.
10. Клетчатый прямоугольник можно разбить на плитки двух видов: $1 \times m$ и $n \times 1$ (плитки нельзя поворачивать). Докажите, что хватит и плиток одного из видов.
11. Прямоугольник размера 8×9 замощают плитками двух видов: 3×1 и „дырявой” 1×3 (в дырявой плитке отсутствует центральная клетка, плитки нельзя поворачивать). Докажите, что можно указать на 18 клеток так, что, если плитками замостить 70 клеток прямоугольника, то две оставшиеся обязательно будут среди указанных.
12. Даны натуральные числа $m, n > 1$ и $a_1, a_2, \ldots, a_n$, где никакое из a_i не кратно m^{n-1}. Докажите, что существует ненулевой набор целых чисел $e_1, e_2, \ldots, e_n$, меньших m по модулю, такой, что $m^n \mid e_1a_1 + e_2a_2 + \ldots + e_na_n$.
13. 17 рабочих выстроились в ряд. Любые несколько (не менее двух) стоящих подряд рабочих образуют *бригаду*. Начальник хочет в каждой бригаде назначить *старшего* (одного из членов бригады) так, чтобы для каждого рабочего количество бригад, в которых он является старшим (возможно, нуль), делилось на 4. Докажите, что количество способов так назначить старших делится на 17.
14. Десятичная запись простого числа имеет вид $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$, где $n > 1$ и $a_n > 1$. Докажите, что многочлен $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ неприводим над $\mathbb{Z}$.
15. На окружности выбрали 100 точек и для каждой перемножили расстояния до остальных. Могли ли получиться числа от 1 до 100 (в некотором порядке)?