Единичная окружность

Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Каждому числу $\alpha \in \mathbb{R}$ поставим в соответствие точку $A(\alpha)$, которая получается из точки $(0, 1)$ после поворота на угол $|\alpha^\circ|$ вокруг начала координат (направление поворота выбирается в соответствии со зна́ком числа α, положительным принято считать направление против часовой стрелки). Косинусом и синусом угла α° называются, соответственно, абсцисса и ордината точки $A(\alpha)$.

1. Найдите значения косинуса и синуса следующих углов: а) 0°; б) 90°; в) 120°; г) 135°; д) 150°; е) 180°; ж) 225°; з) 240°; и) 270°; к) 300°; л) 360°; м) -120°; н) -30255°.
2. Выберите произвольный острый угол α°. Отметьте на координатной плоскости точки а) $A(\alpha)$, б) $A(90-\alpha)$, в) $A(180-\alpha)$, г) $A(-\alpha)$, д) $A(90+\alpha)$, е) $A(180+\alpha)$ и запишите, как связаны косинус и синус соответствующих углов с $\cos\alpha^\circ$ и $\sin\alpha^\circ$.
3. Для каждого из соотношений, полученных в предыдущей задаче, проверьте его справедливость в случае, когда $A(\alpha)$ лежит в какой-то другой координатной четверти.

Формулы, полученные в задаче 2 и 3, верны для любого угла и называются формулами приведения. Их необходимо либо выучить, либо уметь мгновенно выводить. Для быстрого вывода формул приведения удобно пользоваться рассмотренными ранее точками $A(\alpha)$, в этом случае окружность, на которой лежат эти точки, называют единичной.

Тангенс и котангенс произвольного угла определяются, соответственно, равенствами $\operatorname{tg}\alpha^\circ = \frac{\sin\alpha^\circ}{\cos\alpha^\circ}$ и $\operatorname{ctg}\alpha^\circ = \frac{\cos\alpha^\circ}{\sin\alpha^\circ}$, если знаменатель не обращается в нуль.

4. Запишите формулы приведения для тангенса и котангенса.

Радианная мера угла

Вместо градусной меры углов мы обычно будем использовать радианную меру. Напомним, что развёрнутому углу в 180° соответствует мера π радиан. В дальнейшем, если отдельно не указано градусное обозначение, считаем, что все углы заданы в радианах. В частности, если речь идёт о функциях $\cos, \sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то углы всегда считаются в радианах, а для градусной меры обозначение „$^\circ$” обязательно.

5. Пользуясь формулами длины окружности и её площади выведите формулы для нахождения длины дуги и площади сектора, ограниченных углом α.

Графики тригонометрических функций

6. Исследуйте следующие основные свойства функций $\cos$, $\sin$, tg и ctg:
   (a) Область определения (она же ОДЗ, она же ЕОО).
   (b) Нули функции и точки пресечения с координатными осями.
   (c) Промежутки монотонности (возрастания и убывания) и знакопостоянства.
   (d) Точки (локальных) максимума и минимума.
   (e) Множество значений.
7. Пользуясь полученными сведениями, максимально правдоподобно постройте графики функций $\cos$, $\sin$, tg и ctg.

Чётность

Из определения функций $\cos$ и $\sin$ видно, что при всех вещественных x верны равенства $\cos(-x) = \cos x$ и $\sin(-x) = -\sin x$. Такие функции называются соответственно чётными ($f(-x) \equiv f(x)$) и нечётными ($f(-x) \equiv -f(x)$), естественно предполагается, что область определения чётной/нечётной функции симметрична относительно нуля.

8. Определите чётность функций tg и ctg.
9. Функция f нечётна. Чему может быть равно $f(0)$?

Периодичность

Из определения функций cos и sin также видно, что при всех вещественных x верны равенства $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$ и $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$, т. е. их значения не изменяются при изменении аргумента на фиксированное число 2π. Такие функции называются периодическими. Строго говоря, функция $f\colon X \to Y$ называется периодической с периодом $T \neq 0$, если для любого $x \in X$ элементы $x \pm T$ принадлежат области определения и $f(x \pm T) = f(x)$. Для функций, определённых на (упорядоченных) числовых множествах принято рассматривать только положительные периоды.

10. Докажите, что, если T — период функции f, то и kT — тоже период при всех $k \in \mathbb{N}$.
11. Докажите, что, если T — период функции $f(x)$, то для любого $a > 0$ у функции $g(x) = f(ax + b)$ есть период T/a.
12. Найдите все периоды функций a) $\cos x$; b) $\sin x$; c) $\operatorname{tg} x$; d) $\operatorname{ctg} x$; e) $\{x\}$.
13. Докажите, что функция $f(x) = x^2$ не является периодической.
14. Предположим, что у функции f существует наименьший положительный период t. Докажите, что, все периоды функции f имеют вид kt, $k \in \mathbb{N}$.

Числа $x, y \in \mathbb{R}$ называются соизмеримыми, если их отношение — рациональное число.

15. Докажите, что сумма двух периодических функций с соизмеримыми периодами является периодической.
16. Приведите пример того, что для двух периодических функций с соизмеримыми периодами НОК их минимальных периодов может быть не минимальным периодом суммы этих функций.

Упражнения

17. Докажите, что любую функцию можно представить в виде суммы чётной и нечётной функций, причём такое представление единственно.
18. Докажите, что многочлен является чётной (нечётной) функцией тогда и только тогда, когда он содержит члены только в чётной (нечётной) степени.
19. Докажите, что функция $f(x) = \cos\sqrt{x}$ не является периодической.
20. Найдите наименьший период функции a) $5\cos(0.25\pi x - 2)$; b) $\sin^2 x$; c) $\sin\frac{\pi x}{6} + \operatorname{tg}\frac{\pi x}{10}$; d) $\frac{\cos x}{1+\sin x}$.
21. Каким координатам каких точек равны tg и ctg заданного угла?
22. Для произвольного угла $\alpha \in (0, \pi/2)$ докажите неравенство $0 < \sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$.
23. Решите уравнение $(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}) + 3x(2+\sqrt{9x^2+3}) = 0$.

Задачи

24. Приведите пример периодических суммы и произведения непериодических функций.
25. Приведите пример периодической функции, у которой нет минимального положительного периода.
26. Приведите пример непериодической суммы двух периодических функций с несоизмеримыми минимальными положительными периодами периодами.
27. Приведите пример периодической суммы двух периодических функций с несоизмеримыми минимальными положительными периодами.