Производная

1. $P(x)$ — многочлен третьей степени. Докажите, что существует такое $k \in \mathbb{N}$, что многочлен $P(x)+P(x+1)+\ldots+P(x+k)$ имеет ровно один вещественный корень.
2. Дан ненулевой многочлен $Q(x)$. Докажите, что для всех натуральных n многочлен $P(x)=(x-1)^nQ(x)$ имеет не менее $n+1$ ненулевых коэффициентов.
3. Для произвольного многочлена $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ докажите неравенство $(P'(x))^2 \geqslant P(x)P''(x)$
4. **(Ньютон)**Докажите, что если все корни многочлена $P(x)=a_0x^n+\ldots+a_n$ вещественны и различны, то $a_i^2 > \dfrac{n-i+1}{n-i}\cdot\dfrac{i+1}{i}a_{i-1}a_{i+1}$, $i=\overline{1,n-1}$.
5. Через Σ_k обозначим симметрический многочлен σ_k/C_n^k. Докажите, что значения Σ_k, вычисленное для корней многочлена и его производной совпадают.
6. **(Неравенства Маклорена)**Для положительных $x_1,\ldots,x_n$ докажите цепочку неравенств $\Sigma_1 \geqslant \sqrt{\Sigma_2} \geqslant \sqrt[3]{\Sigma_3} \geqslant \ldots \geqslant \sqrt[n]{\Sigma_n}$.
7. **(Неравенства Ньютона)**Для всех $k=\overline{1,n-1}$ докажите неравенство $\Sigma_k^2 \geqslant \Sigma_{k-1}\Sigma_{k+1}$.

Теорема о среднем значении

Теорема Коши. Если функции f и g непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы на (a,b), производные f' и g' не обращаются в нуль одновременно ни в одной точке интервала (a,b) и $g(a)\neq g(b)$, то найдётся точка $c\in(a,b)$ такая, что $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Формула Тейлора. Пусть функция $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ по крайней мере n раз непрерывно дифференцируема на интервале (a,b), тогда между любыми $x,y\in(a,b)$ найдётся точка c такая, что $f(y)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(y-x)+\frac{f''(y)}{2!}(y-x)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(y)}{(n)!}(y-x)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{(n)!}(y-x)^n$.

Задачи

8. Существуют ли непостоянные многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с вещественными коэффициентами, удовлетворяющие равенству $P(x)^{10}+P(x)^9=Q(x)^{21}+Q(x)^{20}$?
9. Докажите, что многочлен $P(x)(P(x)+1)$ имеет по крайней мере $n+1$ различных комплексных корней, где $n=\deg P$. Выведите утверждение предыдущей задачи.
10. Докажите, что для любого натурального числа n найдутся положительные вещественные числа $a_0,a_1,\ldots,a_n$ такие, что при любом выборе знаков многочлен $\pm a_nx^n\pm a_{n-1}x^{n-1}\pm\ldots\pm a_1x\pm a_0$ имеет n различных вещественных корней.
11. Два многочлена $f,g\in\mathbb{R}[x]$ одинаковой степени таковы, что при любом $x\in\mathbb{R}$ из $f(x)\in\mathbb{Z}$ следует, что $g(x)\in\mathbb{Z}$. Докажите, что найдутся целые числа m и n такие, что $g(x)=mf(x)+n$ для всех $x\in\mathbb{R}$.
12. Даны вещественные числа $A\neq\pm1$ и B. Найдите все многочлены степени d такие, что $A^dP(x)=P(Ax+B)$.
13. Найдите все многочлены $P\in\mathbb{R}[x]$, при которых существует число $a\in(1,+\infty)$ такое, что для любого целого x найдётся целое z с условием $aP(x)=P(z)$.
14. Найдите все приведённые многочлены $f\in\mathbb{Z}[x]$ такие, что множество $f(\mathbb{Z})$ замкнуто относительно умножения (произведение двух элементов $f(\mathbb{Z})$ тоже элемент $f(\mathbb{Z})$).
15. Найдите все приведённые многочлены $P\in\mathbb{Z}[x]$ при которых, что для любого натурального m найдётся натуральное n такое, что $P(m)P(m+1)=P(n)$.