Представимость многочлена в виде суммы квадратов

Рассмотрим несколько примеров многочленов от нескольких переменных с вещественными коэффициентами таких, что все их значения неотрицательны, но сами многочлены нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов.

1. Рассмотрим многочлен[1] $F(x,y) = x^2y^2(x^2+y^2-3)+1$.
   (a) Докажите, что $F(x,y) \geqslant 0$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$.
   (b) Предположим, что $F(x,y) = \sum f_j^2(x,y)$. Докажите, что каждый $f_j(x,y)$ имеет вид $f_j(x,y) = c_j + xyh_j(x,y)$, где $c_j \in \mathbb{R}$, а $h_j(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$.
   (c) Покажите, что два предыдущих пункта противоречат друг другу.
2. Рассмотрим многочлен[2] $S(x,y) = x^2(x^2-1)^2+y^2(y^2-1)^2-(x^2-1)(y^2-1)(x^2+y^2-1)$.
   (a) Докажите, что $S(x,y) \geqslant 0$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$.
   (b) Предположим, что $S(x,y) = \sum f_j^2(x,y)$. Докажите, что каждый $f_j(x,y)$ имеет степень не выше третьей и обращается в нуль в следующих восьми точках: $(\pm1;\pm1)$, $(\pm1;0)$, $(0;\pm1)$.
   (c) Пусть $f \in \mathbb{R}[x,y]$ и $\deg f \leqslant 3$. Присвоим точкам $(\pm1;\pm1)$ вес 1, точкам $(\pm1;0)$ и $(0;\pm1)$ вес -2, а точке $(0;0)$ — вес 4. Докажите, что взвешенная сумма значений многочлена f по всем этим точкам равна нулю.
   (d) Покажите, что из предыдущего пункта следует неверное равенство $S(0,0)=0$.

Теорема о девяти точках на кубике

Рассмотрим общее утверждение, частный случай которого мы доказали в задаче 2. *Кубической кривой* (сокращённо, *кубикой*) называется множество точек на плоскости, заданное равенством $P(x,y)=0$, где $P \in \mathbb{R}[x,y]$ и $\deg P \leqslant 3$. Теорема, которую мы сейчас докажем гласит: *„Если кубика проходит через восемь из девяти точек, образованных пересечением двух троек прямых, то она проходит и через девятую точку.”*

3. Пусть многочлен $P(x,y)$ зануляется в бесконечном количестве точек прямой, заданной уравнением $ax+by+c=0$. Докажите, что $P(x,y)$ делится на $ax+by+c$.
4. Пусть кубики $P(x,y)=0$ и $Q(x,y)=0$ пересекаются в трёх точках на прямой, заданной уравнением $ax+by+c=0$, причём Q не делится на $ax+by+c$. Докажите, что $P(x,y)-tQ(x,y)$ делится на $ax+by+c$ при некотором $t \in \mathbb{R}$.
5. Докажите теорему о девяти точках на кубике, рассмотрев следующие три кубики: кубику данную в условии и две кубики, образованные тройками прямых.
6. Докажите, что, если вершины замкнутой шестизвенной ломанной лежат на конике[3], то точки пересечения прямых, содержащих противоположные звенья, лежат на одной прямой[4,5].

---

[1]Пример привёл T. S. Motzkin в 1967 г.

[2]Пример привёл R. M. Robinson в 1973 г.

[3]Кривой второго порядка.

[4]Это утверждение называется **теоремой Паскаля**.

[5]Попробуйте доказать вырожденные случаи теоремы Паскаля в явном виде, используя понятие кратности, а не апеллируя к предельным переходам.