Баяны (или их вариации)

1. Внутри выпуклого $2n$-угольника отмечена точка P, не лежащая ни на одной из диагоналей. Докажите, что точка P принадлежит чётному числу треугольников с вершинами в вершинах $2n$-угольника.
2. В течение дня в библиотеке побывало n читателей. Оказалось, что в тот день из любых трёх читателей двое в библиотеке встретились. Докажите, что сотрудник библиотеки мог сделать важное объявление в такие два момента времени, чтобы все n человек его услышали. (Каждый читатель побывал в библиотеке только один раз.)
3. На плоскости провели конечное количество попарно непараллельных прямых двух цветов: белого и красного. Через точку пересечения любых двух прямых одинакового цвета проходит по крайней мере одна прямая другого цвета. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.
4.[1] Вершины треугольника окрашены в три цвета: 0, 1 и 2. Треугольник разбит на несколько треугольников так, что никакая вершина одного треугольника не лежит на стороне другого. Дополнительные вершины покрасили теми же цветами, таким образом, что ни на одной из сторон исходного треугольника не встречаются все три цвета. Докажите, что существует треугольник разбиения с вершинами трёх различных цветов.
5. Во всех узлах целочисленной решётки, кроме одного, в котором сидит охотник, растут деревья, стволы которых имеют радиус r. Докажите, что охотник не сможет увидеть зайца, находящегося от него на расстоянии больше $1/r$.
6. На плоскости нарисованы $n \in \mathbb{N}$ выпуклых фигур. Любые две фигуры имеют общую точку. Докажите, что через любую точку плоскости можно провести прямую, пересекающую все нарисованные фигуры.
7.[2] На плоскости нарисованы $n \geqslant 4$ выпуклых фигур, любые три из которых имеют общую точку. Докажите, что все четыре фигуры имеют общую точку[3].
8. Плоскость освещена прожекторами, освещающими полуплоскости. Докажите, что можно выбрать три, освещающие всю плоскость.
9. На плоскости дано выпуклое множество A. Докажите, что внутри A найдётся точка O такая, что для любого отрезка XY, проходящего через O, с концами X и Y, лежащими на границе A, верно неравенство $\frac{1}{2} \leqslant \frac{OX}{OY} \leqslant 2$.
10.[4] На плоскости отмечены n точек. Все попарные расстояния между точками не превосходят 1. Докажите, что все точки можно покрыть кругом радиуса $\sqrt{\frac{1}{3}}$.
11. На плоскости нарисованы $n \in \mathbb{N}$ вертикальных отрезков. Любые три из них можно перечеркнуть прямой. Докажите, что можно зачеркнуть сразу все отрезки одной прямой.
12.[5] Докажите, что любые два непересекающихся выпуклых множества на плоскости можно отделить прямой.

---

[1] **Лемма Шпернера**

[2] **Теорема Хелли.**

[3] Эта теорема также верна для любого количества компактов. Приведите пример бесконечного набора выпуклых множеств, для которых утверждение теоремы Хелли неверно.

[4] **Теорема Юнга.**

[5] Следствие **теоремы Хана-Банаха**.

Задачи

13. При каких $n > 3$ правильный n-угольник можно разрезать диагоналями (возможно, пересекающимися внутри него) на равные треугольники?
14. На плоскости даны $n \geqslant 4$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Все точки попарно соединили отрезками. Найдите наибольшее возможное количество отрезков, которые не пересечены во внутренних точках.
15. Дано целое число $n \geqslant 2$. Команда, состоящая из $n(n+1)$ футболистов различного роста построена в ряд. Сэр Алекс хочет удалить из ряда $n(n-1)$ игроков так, чтобы для оставшегося ряда из $2n$ игроков выполнялись следующие n условий:
    - никто не стоит между двумя самыми высокими игроками,
    - никто не стоит между третьим и четвёртым по росту игроками,

      ....
    - никто не стоит между двумя самыми низкими игроками.

    Докажите, что это всегда возможно.
16. Диагональ правильного 2006-угольника P называется *хорошей*, если её концы делят границу P на две части, каждая из которых содержит нечётное число сторон. Стороны P также называются хорошими. Пусть P разбивается на треугольники 2003 диагоналями, никакие две из которых не имеют общих точек внутри P. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников, каждый из которых имеет две хорошие стороны, может иметь такое разбиение?
17. На плоскости расположено $n \geqslant 2$ отрезков так, что любые два из них пересекаются по внутренней точке, а никакие три из них не имеют общей точки. Иван выбирает один из концов каждого отрезка и сажает в него лягушку лицом к другому концу этого отрезка. Затем он $n-1$ раз хлопает в ладоши. При каждом хлопке каждая из лягушек немедленно прыгает вперёд в следующую точку пересечения на её отрезке. Лягушки никогда не меняют направления своих прыжков. Иван хочет изначально рассадить лягушек так, чтобы никакие две из них никогда не оказались в одной точке пересечения одновременно. Докажите, что Иван всегда может добиться желаемого, если n нечётно и никогда не сможет достичь желаемого, если n чётно.
18. Многоугольник на координатной плоскости назовём *целочисленным*, если у каждой из его вершин обе координаты целые. Выпуклый целочисленный 14-угольник разрезали на целочисленные параллелограммы, площадь каждого из которых не более C. При каком наименьшем C такое могло произойти?
19. Комната представляет собой многоугольник. Любые три стены комнаты можно осветить точечным источником света. Докажите, что всю комнату можно осветить точечным источником света.
20. На плоскости дано множество S, состоящее из чётного числа точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что S можно разбить на два множества X и Y так, что их выпуклые оболочки будут иметь поровну вершин.
21. Пусть $n \geqslant 3$ — целое число. Последовательность $P_1, P_2, \ldots, P_n$ различных точек на плоскости называется *хорошей*, если никакие три из них не лежат на одной прямой, ломаная $P_1P_2\ldots P_n$ является несамопересекающейся, и треугольник $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ ориентирован против часовой стрелки для всех $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Для каждого целого $n \geqslant 3$ найдите наибольшее целое число k со следующим свойством: на плоскости найдутся n различных точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, для которых существуют k различных перестановок σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ таких, что последовательность $A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}\ldots A_{\sigma_n}$ хорошая.