Китайская Теорема об Остатках.

Следующий результат[1] полезен, когда необходимо находить числа с заданными остатками: *Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — попарно взаимно простые числа, а $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — произвольные целые числа. Тогда существует, и притом единственное, решение системы*

$$\begin{cases} x \equiv x_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv x_2 \pmod{n_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv x_k \pmod{n_k}, \end{cases}$$

с условием $x \in \{1, 2, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_k\}$. Понятно, что числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ можно заменить их остатками при делении на $n_1, n_2, \ldots, n_k$ и тогда получится, что теорема утверждает, что для любого набора остатков найдётся ровно одно число от 1 до $N = n_1 n_2 \ldots n_k$, которое даёт в точности заданные остатки при делении на $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

1. Двойной подсчёт. Докажите, что такое число x (если оно существует) однозначно с точностью до кратного N задаётся набором $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ остатков, а различных наборов остатков существует столько же, сколько чисел от 1 до N.

Приведённое доказательство не даёт информации, как искать такое число. Поэтому рассмотрим ещё одно доказательство, содержащее алгоритм нахождения решения.

2. Интерполяция. Докажите, что все решения системы сравнимы по модулю N, а решение без ограничения $1 \leqslant x \leqslant N$ можно найти в виде $x = a_1 \cdot \frac{N}{n_1} + a_2 \cdot \frac{N}{n_2} + \ldots + a_k \cdot \frac{N}{n_k}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — некоторые целые числа.

Упражнения

3. Найдите остаток от деления 19^{20} на 66.
4. В лицейской библиотеке лежат книги. Известно, что, если их связывать в пачки по 5 или 11 книг, то будут оставаться 4 и 6 книг, соответственно, а если их связывать в пачки по 6 или 7 книг, то в обоих случаях останутся 3 книги. Найдите наименьшее возможное количество книг в библиотеке.
5. Генерал хочет построить для парада своих солдат в одинаковые квадратные колонны (один солдат — не колонна), но он не знает, сколько солдат от (1 до 37) находится в лазарете. Докажите, что у генерала может быть такое количество солдат, что независимо от заполненности лазарета он сумеет выполнить своё намерение.
6. Даны натуральное число c и последовательность (a_n) натуральных чисел, при всех $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяющая двойному неравенству $a_n < a_{n+1} < a_n + c$. Докажите, что множество $\mathfrak{P}$ простых чисел, не делящих ни один из членов последовательности (a_n), конечно и найдите наибольшее возможное количество элементов $\mathfrak{P}$.
7. Существуют ли натуральные числа a, b, c, и d такие, что числа $a^2 < b^3 < c^4 < d^5$ образуют арифметическую прогрессию?
8. Существуют ли 17 последовательных натуральных чисел таких, что любое из этих чисел не взаимно просто с хотя бы одним из остальных?

[1] Он называется **Китайская Теорема обо Остатках**.

Задачи

9. Докажите, что для любого натурального числа n найдутся n последовательных натуральных чисел, ни одно из которых не является степенью простого числа.
10. Докажите, что для любого натурального числа n найдутся попарно взаимно простые натуральные числа $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_n$, большие единицы, такие, что число $k_0k_1\ldots k_n - 1$ представимо в виде произведения двух взаимно простых чисел.
11. Назовём множество, состоящее из натуральных чисел, *хрупким*, если оно состоит не менее, чем из двух элементов, и каждый его элемент имеет общий простой делитель хотя бы с одним из остальных элементов этого множества. Пусть $P(n) = n^2 + n + 1$. Найдите наименьшее натуральное число b, для которого найдётся неотрицательное целое число a, такое, что множество $\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$ хрупкое.
12. Найдите все натуральные числа $n > 1$, для которых найдутся натуральные числа b_1, b_2, $\ldots$, b_n (некоторые из них могут быть равны между собой, но не все) такие, что при всех $k \in \mathbb{N}$ произведение $(b_1+k)(b_2+k)\ldots(b_n+k)$ является степенью натурального числа. (Основание и показатель степени зависят от k и превышают 1.)
13. Значения многочлена $P \in \mathbb{Z}[n]$ при всех $n \in \mathbb{N}$ кратны хотя бы одному из чисел множества $\{a_1, \ldots, a_m\}$. Докажите, что найдётся i такой, что $P(n) \vdots a_i$ при всех $n \in \mathbb{N}$.