Каждому комплексному числу $z = x + yi$ ставится в соответствие точка с координатами $(x; y)$ и угол, отложенный на плоскости Oxy от оси Ox к вектору (x, y). Этот угол называется аргументом, обозначается $\arg z$ и определён с точностью до 2π. Когда речь идёт о комплексной плоскости, оси абсцисс и ординат принято обозначать через Re и Im соответственно. Если $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$, то, как нетрудно проверить, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, такое представление называется тригонометрической записью комплексного числа. Принято отождествлять комплексное число z, точку $(x; y)$ и радиус-вектор $\overrightarrow{(x, y)}$ этой точки.

1. Представьте в тригонометрической форме числа:

   (a) 1; (b) i; (c) $1 + i$; (d) $2 + \sqrt{3} + i$; (e) $1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$; (f) $\dfrac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi}$.

2. Дайте геометрическую интерпретацию следующих неравенств:

   (a) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$; (b) $|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$; (c) $|z - 1| \leqslant |\arg z|$, при $|z| = 1$.

3. Докажите, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Корни n-й степени

Для аналитического доказательства основной теоремы алгебры нам понадобится знать, как решать уравнения вида $z^n = a$. Эти решения удобно представлять в тригонометрической форме.

4. Пусть $a = r(\cos\psi + i\sin\psi) \neq 0$, докажите, что существует ровно n корней n-ой степени из a (т. е. корней уравнения $z^n = a$) и выпишите их в явном виде.
5. Докажите, что корни n-й степени из комплексного числа лежат в вершинах правильного n-угольника. Найдите радиус его описанной окружности.
6. Докажите, что все корни уравнения $z^n = 1$ можно записать как $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$. Сколькими способами можно выбрать число ε?

Упражнения

7. Какие множества на комплексной плоскости описываются условиями:

   (a) $|z - i| \leqslant 1$; (b) $|z| = z$; (c) $\mathrm{Re}(z^2) \leqslant 1$; (d) $|iz + 1| = 3$; (e) $|z - i| + |z + i| = 2$?

8. Докажите, что при любых вещественных чисел a_i, b_i, $i = \overline{1, n}$ выполняется неравенство $\sqrt{(a_1 + \ldots + a_n)^2 + (b_1 + \ldots + b_n)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.
9. Для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ докажите равенство $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$. Дайте геометрическую интерпретацию.
10. Пусть $k \neq 1$ — положительное вещественное число, а a и b — произвольные комплексные числа. Докажите, что равенство $|z - a| = k|z - b|$ задаёт окружность, центр которой лежит на прямой, проходящей через точки a и b. Дайте геометрическую интерпретацию[1].
11. Докажите равенства:

    (a) $\cos\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \dfrac{\sin(n\varphi/2)\cos((n+1)\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$;

    (b) $\sin\varphi + \ldots + \sin n\varphi = \dfrac{\sin(n\varphi/2)\sin((n+1)\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$;

    (c) $\dfrac{\sin\varphi + \sin 3\varphi + \ldots + \sin(2n-1)\varphi}{\cos\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos(2n-1)\varphi} = \mathrm{tg}\, n\varphi$.

[1] Эта окружность называется **окружностью Аполлония**.

Задачи

12. Найдите суммы:

(a) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots$; (b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots$; (c) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots$;
(d) $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots$; (e) $C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots$.

13. Докажите равенство: $\mathrm{C}_n^1 - \dfrac{1}{3}\mathrm{C}_n^3 + \dfrac{1}{9}\mathrm{C}_n^5 - \ldots = \dfrac{2^n}{3^{(n-1)/2}} \sin \dfrac{n\pi}{6}$.

14. Вычислите:
    (a) $\cos^2 \varphi + \cos^2 2\varphi + \ldots + \cos^2 2n\varphi$;
    (b) $\sin^2 \varphi + \sin^2 2\varphi + \ldots + \sin^2 2n\varphi$.

15. Правильный n-угольник вписан в окружность радиуса 1. Докажите, что:
    (a) сумма квадратов длин всех сторон и всех диагоналей равна n^2;
    (b) сумма длин всех сторон и всех диагоналей равна $n \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$;
    (c) произведение длин всех сторон и всех диагоналей равно $n^{n/2}$.

16. Решите уравнение $(z-1)^n = (z+1)^n$ и выпишите сумму квадратов всех его корней.

17. Докажите, что при всех нечётных $n > 1$ верно равенство $\displaystyle\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi m}{n}} = \frac{n^2-1}{3}$.

18. Докажите, что для любого нечётного $n > 1$ существует число $\theta(n) \in (0,1)$, такое что выполняется равенство $\displaystyle\sum_{m=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2n} \cdot \theta(n)$, и вычислите $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.