Теорема Виета и основные симметрические многочлены

Многочлен, не изменяющийся при любых перестановках своих переменных называется симметрическим. Зафиксируем натуральное число n и для каждого k от 1 до n построим многочлен σ_k от n переменных: x_1, x_2, $\ldots$, x_n, равный сумме всех произведений по k переменных. Эти многочлены называются основными (элементарными) симметрическими.

1. Докажите[1], что, если многочлен $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ имеет (с учётом кратности) n корней: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то для них справедливы равенства $\sigma_1 = -a_{n-1}/a_n$, $\sigma_2 = a_{n-2}/a_n$, $\ldots$, $\sigma_n = (-1)^n a_0/a_n$.

Лексикографический порядок

На множестве многочленов нескольких переменных можно ввести порядок (сравнивать старшинство одночленов) по-разному. Мы будем рассматривать лексикографический: одночлен $ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ старше одночлена $bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n}$, $a, b \neq 0$, если для некоторого номера k, $0 \leqslant k \leqslant n$, выполнено неравенство $\alpha_k > \beta_k$, а также $\alpha_s = \beta_s$ при всех $s < k$.

2. Одночлен $ax_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$ является старшим одночленом некоторого симметрического многочлена. Докажите, что $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$.
3. Возможно ли выписать бесконечную последовательность одночленов n переменных, в которой каждый следующий одночлен младше предыдущего?
4. Докажите[2], что любой симметрический многочлен представи́м в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.
5. Определите, является ли многочлен $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ симметрическим.
6. Выразите многочлен $(x_1x_2 + 1)(x_2x_3 + 1)(x_3x_1 + 1)$ через основные симметрические многочлены.

Ещё раз про факториальность кольца многочленов

Поле отношений целостного кольца $\mathcal{K}$ строится так же, как $\mathbb{Q}$ строилось из $\mathbb{Z}$. А именно, рассмотрим множество дробей $\frac{a}{b}$, где $a, b \in \mathcal{K}$, $b \neq 0$. При этом, дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ отождествим, если $ad = bc$, а действия с дробями определим привычным образом.

7. Докажите, что поле отношений, действительно, является полем.

Пусть $\mathcal{K}$ ещё и факториально. Одновременно с $\mathcal{K}[x]$ полезно рассматривать $\mathcal{L}[x]$, где $\mathcal{L}$ — поле отношений кольца K.

8. Объясните, почему:
   (a) Кольцо $\mathcal{L}[x]$ факториально.
   (b) Кольцо $\mathcal{K}[x]$ факториально.
   (c) Кольцо $\mathcal{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ факториально.
9. Докажите, факториальность кольца $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, для произвольного поля F.

Соображения типа теоремы Безу

Для разложения на множители многочленов нескольких переменных идея, похожая на теорему Безу, о том, что среди делителей многочлена нужно искать подстановки, зануляющие его, часто оказывается полезной.

10. Многочлен $p \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ зануляется во всех точках прямой $\ell(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0$. Докажите, что $p \,\vdots\, \ell$.
11. Разложите на множители многочлен $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.
12. Разложите на множители многочлен $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.
13. Разложите на множители многочлен $x^3 + 3xy + y^3 - 1$.

[1] Это утверждение называется **теоремой Виета**.

[2] Это утверждение называется **основной теоремой о симметрических многочленах**.

Упражнения

14. Определите, является ли многочлен $x_1(x_2-x_3)^2+x_2(x_3-x_1)^2+x_3(x_1-x_2)$ симметрическим.
15. Выразите многочлен $(x_1+x_2+1)(x_2+x_3+1)(x_3+x_1+1)$ через основные симметрические многочлены.
16. Вещественные числа a, b, c удовлетворяют равенству $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Докажите, что сумма каких-то двух из них равна нулю.
17. Вещественные числа a, b, c удовлетворяют равенству $a+b+c=a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3$. Найдите значение выражения $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c-2)$.
18. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют равенству $x+y+z=xy+yz+xz=-1$. Докажите, что $(xy-z^2)(yz-x^2)(zx-y^2)=xyz-1$.
19. Разложите на множители многочлен $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$.
20. Разложите на множители многочлен $x^2y^2-x^2+4xy-y^2+1$.
21. Разложите на множители симметрический многочлен $(x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4$.
22. Докажите, что число $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ рационально.
23. Докажите, что многочлен степени $2n$ или $2n+1$ с целыми коэффициентами, принимающий 1 или -1 в более чем $2n$ целых точках, неприводим над $\mathbb{Z}$.

Задачи

24. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — вещественные числа. Для каждого натурального m обозначим $S_m = x_1^m+\ldots+x_n^m$. При всех $m>n$ положим $\sigma_m=0$. Для всех $m>1$ докажите равенство[3] $S_m=\sigma_1 S_{m-1}-\sigma_2 S_{m-2}+\ldots+(-1)^m\sigma_{m-1}S_1+(-1)^{m+1}m\sigma_m$.
25. Многочлен $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+1$ с неотрицательными коэффициентами имеет n корней. Докажите , что $p(2)\geqslant 3^n$.
26. Многочлен $ax^n-ax^{n-1}+c_2x^{n-2}+\ldots+c_{n-2}x^2-n^2bx+b$ имеет ровно n положительных корней. Докажите, что все эти корни равны между собой.
27. Докажите, что при любом нечётном m многочлен $(a+b+c)^m-a^m-b^m-c^m$ делится на многочлен $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$.
28. Рассмотрим всевозможные тройки (x, y, z) вещественных чисел, удовлетворяющих равенству $x+y+z=-1$. Найдите наибольшее число C при котором для любой такой тройки верно неравенство $C\cdot|x^3+y^3+z^3+1|\leqslant|x^5+y^5+z^5+1|$.

[3] Эти равенства называются **тождествами Ньютона**.