Вторая производная

Поскольку по определению ускорение выражает скорость изменения скорости, то ей соответствует производная производной, что приводит нас к понятию второй производной. Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ сама является дифференцируемой, то её производная $(f'(x))'$ называется производной второго порядка или просто второй производной функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$.

1. Найдите вторую производную функции **a)** $\frac{x}{x^2+1}$; **b)** $(1+x^2)\operatorname{arctg} x$.
2. Докажите, что функция $y = \frac{x-3}{x+4}$ удовлетворяет равенству $3(y')^2 = (y-1)y''$.
3. Точка движется вдоль координатной оси по закону $x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$. Найдите её скорость и ускорение в произвольный момент времени t.
4. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x) = 0$ для всех точек $x \in [a,b]$. Докажите, что функция f постоянная.
5. Докажите, что существует единственная дважды дифференцируемая функция $x(t)$, удовлетворяющая равенствам: $x(0) = x_0$ (начальное положение), $x'(0) = v_0$ (начальная скорость) и тождеству $x''(t) = a$ при всех $t \geqslant 0$.

Выпуклость функции

Множество на плоскости называется *выпуклым*, если любой отрезок, соединяющий две точки множества, целиком содержится в это множестве. Функция f называется *выпуклой* (или *выпуклой вниз*), если её надграфик (множество точек, координаты (x,y) которых удовлетворяют неравенству $y \geqslant f(x)$) — выпуклое множество. Для определения выпуклости функции достаточно выбирать точки, лежащие на самом графике, а именно: функция f называется выпуклой на промежутке (a,b), если для любых двух точек $x_1, x_2 \in (a,b)$ и чисел $m_1, m_2 > 0$ верно неравенство $\frac{m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2)}{m_1+m_2} \geqslant f(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2})$.

Аналогично определяются *выпуклые вверх* функции: их подграфики — выпуклые множества. Все последующие свойства верны и для выпуклых вверх функций, необходимо только поменять знак в неравенстве.

6. Докажите, что функция $f(x) = x^2$ выпукла на всей числовой прямой.
7. Докажите, что, если функция f дважды дифференцируема на интервале (a,b) и во всех точках интервала выполнено неравенство $f''(x) \geqslant 0$, то она выпукла на (a,b).
8. Функция f дважды дифференцируема и выпукла на интервале (a,b). Верно ли, что во всех точках этого интервала выполнено неравенство $f''(x) \geqslant 0$?

Точка x_0 называется *точкой перегиба* функции f, если f непрерывна в x_0 и существуют промежутки (x_1, x_0) и (x_0, x_2), на которых направления выпуклости противоположны. Понятно, что, если в точке перегиба есть вторая производная, то она равна нулю.

9. Верно ли, что в точке перегиба производная функции всегда равна нулю?

Асимптоты графика функции

Асимптота графика — это прямая, к которой график „бесконечно приближается”. Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции f, если хотя бы один из пределов $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ равен ∞. Прямая $y = kx+b$ называется наклонной асимптотой графика функции f при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (kx+b) = 0$. Очевидно, что это равенство равносильно выполнению двух равенств: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - kx = b$, что даёт способ нахождения наклонных асимптот. Наклонная асимптота графика функции при $x \to -\infty$ определяется аналогично с заменой $+\infty$ на $-\infty$.

10. Может ли непрерывная непостоянная функция, определённая на всей числовой оси, пересекать свою асимптоту бесконечное количество раз?
11. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема на всём $\mathbb{R}$ и существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = k$. Обязательно ли эта функция имеет наклонную асимптоту при $x \to +\infty$?

Неравенства с выпуклыми функциями.

12. **Неравенство Йенсена.** Пусть функция $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ выпукла на интервале (a,b). Докажите, что для любых наборов чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b)$ и коэффициентов $m_1, m_2, \ldots, m_n \in (0,+\infty)$ верно неравенство
$$\frac{m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \ldots + m_n f(x_n)}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \geqslant f\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}\right).$$
13. **Неравенство Караматы.** Пусть функция $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ выпукла на интервале (a,b). Два набора $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ и $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$ точек интервала (a,b) таковы, что выполнена система
$$\begin{gathered} x_1 \geqslant y_1, \\ x_1 + x_2 \geqslant y_1 + y_2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant y_1 + y_2 + y_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \geqslant y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n. \end{gathered}$$
Докажите, что верно неравенство
$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geqslant f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n).$$

Про наборы $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$, удовлетворяющие условиям предыдущей задачи, говорят, что набор $\{x_i\}$ *мажорирует* набор $\{y_i\}$ и пишут $\{x_i\} \succ \{y_i\}$.

14. **Взвешенное неравенство Караматы.** Пусть функция $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ выпукла на интервале (a,b). Два набора $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ и $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$ точек интервала (a,b) и набор коэффициентов $m_1, m_2, \ldots, m_n \in (0,+\infty)$ таковы, что набор $\{m_i x_i\}$ мажорирует набор $\{m_i y_i\}$. Докажите, что верно неравенство
$$m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \ldots + m_n f(x_n) \geqslant m_1 f(y_1) + m_2 f(y_2) + \ldots + m_n f(y_n).$$