Вещественные числа

При строгом определении множества $\mathbb{R}$ вещественных чисел, как пополнения множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел (десятичные дроби, сечения Дедекинда, пополнение метрического пространства), хотя бы одно из следующих утверждений будет частью определения (схемы построения) вещественных чисел, как пределов некоторых последовательностей рациональных чисел, после чего соответствующее утверждение придётся передоказать для полученных объектов. Мы не будем заниматься этой рутинной работой, однако будем пользоваться всеми тремя свойствами. Докажите импликации $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$, чтобы убедиться, что они все равносильны.

1. У каждого ограниченного подмножества $M \subset \mathbb{R}$ есть супремум (и инфимум).
2. В любая последовательности вложенных отрезков числовой прямой, такой что их длины стремятся к нулю, у всех отрезков есть, и притом ровно одна, общая точка.
3. Если последовательность $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условию
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : |a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall m, n \geqslant N,$$
то у неё есть предел.

Последовательности, удовлетворяющие условию утверждения 3 называются *фундаментальными последовательностями*, а метрическое пространство, в котором это свойство выполняется называется *полным*. Оказывается, что любое полное пространство, содержащее $\mathbb{Q}$, содержит и $\mathbb{R}$.

Мощность множества

У бесконечных множеств (как $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$) мы не можем посчитать количество элементов. Оставим то же самое название „мощность” и обозначение „$|A|$”, но пока не будем давать строгого определения, а введём некоторые условия, которые будут описывать свойства этого понятия. Вместо того, чтобы пытаться указать число элементов множества, будем сравнивать множества друг с другом. Если между множествами A и B можно установить взаимно-однозначное соответствие, то такие множества будем называть *равномощными*. Другими словами, $|A| = |B|$ по определению означает, что существует биекция $A \to B$.

4. Докажите, что отрезки $[0, 1]$ и $[0, 2]$ числовой прямой равномощны.
5. Докажите, что интервал $(0, 1)$ равномощен $\mathbb{R}$.
6. Докажите, что мощность множества натуральных чисел равна мощности множества чётных натуральных чисел.
7. Докажите, что множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно множеству подмножеств натурального ряда.

Счётные множества

Множество A называется счётным, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел. При этом часто бывает полезным вместо рассмотрения биекции $f : \mathbb{N} \to A$ считать, что множество A занумеровано натуральными числами, т. е. писать $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, имея в виду, что $a_n = f(n)$.

8. Докажите счётность множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$.

В некотором смысле, $\mathbb{N}$ — „самое маленькое” бесконечное множество, а именно:

9. Докажите, что любое подмножество счётного множества конечно или счётно.
10. Докажите, что любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.
11. Докажите, что объединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств конечно или счётно.

НЕравенство мощностей

Из определения равномощных множеств легко получить определение неравномощных множеств: два множества будем называть *неравномощными*, если между ними нельзя установить взаимно-однозначное соответствие. Если множество A равномощно подмножеству множества B, то будем говорить, что мощность множества A меньше либо равна мощности множества B и обозначать $|A| \leqslant |B|$, если при этом, множества A и B неравномощны, то будем говорить, что мощность множества A меньше мощности множества B ($|A| < |B|$).

12. Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей, состоящих из нулей и единиц несчётно.
13. **Теорема Кантора.** Докажите неравенство $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.
14. **Теорема Кантора-Бернштейна.** Докажите, что, если $|A| \leqslant |B|$ и $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Упражнения

Подпоследовательностью последовательности $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется любая последовательность $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, которая получается из (a_n), если выбрана возрастающая последовательность номеров $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

15. Докажите, что у любой ограниченной числовой последовательности есть сходящаяся подпоследовательность.
16. Докажите, что у любой числовой последовательности есть монотонная подпоследовательность.
17. Докажите, что существуют такие угол α и множество $A \neq \varnothing$ точек на окружности, что при повороте на угол α множество A перейдёт в подмножество $A_1 \subset A$, $A_1 \neq A$.
18. Докажите, что любые два интервала числовой прямой (считая полубесконечные и бесконечные) равномощны.
19. Докажите, что каждое из перечисленных множеств счётно:
    (a) Множество алгебраических чисел.
    (b) Бесконечное множество непересекающихся интервалов числовой прямой.
    (c) Множество точек, в которых происходит скачок монотонной функции.
20. Докажите, что множества всех прямых на плоскости равномощно множеству всех точек плоскости.
21. Докажите, что квадрат (со внутренностью) равномощен отрезку.
22. Докажите, что n-мерное пространство $\mathbb{R}$ равномощно прямой $\mathbb{R}$.
23. Докажите, что множество бесконечных последовательностей вещественных чисел равномощно $\mathbb{R}$.
24. Докажите, что, если отрезок разбит на две части, то хотя бы одна из них равномощна отрезку.

Задачи

25. Докажите, что мощность любого множества A меньше мощности множества всех его подмножеств.
26. Докажите, что множество точек строгого локального максимума функции вещественного аргумента счётно.
27. *Средней третью* отрезка $[a, b]$ назовём интервал $\left(\frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}\right)$. Из отрезка $[0, 1]$ вырезали среднюю треть, затем у каждого из двух оставшихся отрезков вырезали среднюю треть, потом у каждого из оставшихся четырёх отрезков вырезали среднюю треть и так до бесконечности. Выясните, счётно или нет множество всех невырезанных точек.