1. Внутренняя точка M выпуклого четырёхугольника $ABCD$ такова, что треугольники AMB и CMD — равнобедренные с углом величиной 120° при вершине M. Докажите существование такой точки N, что треугольники BNC и DNA — правильные.
2. На сторонах AC и BC треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты $ACMN$ и $BCPQ$. Докажите, что медиана CK треугольника MCP перпендикулярна отрезку AB и вдвое его короче.
3. На сторонах выпуклого четырёхугольника внешним образом построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны и перпендикулярны.
4. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.
5. Сторона квадрата $ABCD$ равна 1. На сторонах AB и AD выбраны точки P и Q, причём периметр треугольника APQ равен 2. Докажите, что $\angle PCQ = 45^\circ$.
6. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Внутри угла ACB взята точка X. Докажите, что $XA + XB \geqslant \sqrt{2}XC$ и найдите ГМТ точек X, для которых выполняется равенство.
7. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N так, что $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC.
8. На дуге AC описанной окружности правильного треугольника ABC взята точка M, отличная от C, а точка P — середина этой дуги. N — середина хорды BM, точка K — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на MC. Докажите, что треугольник ANK правильный.
9. В треугольнике ABC проведены медиана CM и высота CH. Прямые, проведенные через точку P перпендикулярно CA, CM и CB, пересекают прямую CH в точках A_1, M_1 и B_1. Докажите, что $A_1M_1 = B_1M_1$.
10. Дан выпуклый четырёхугольник $ABMC$, в котором $AB = BC$, $\angle BAM = 30^\circ$, $\angle ACM = 150^\circ$. Докажите, что AM — биссектриса угла BMC.
11. Точки P и Q движутся с одинаковой постоянной скоростью по двум прямым, пересекающимся в точке O. Докажите, что на плоскости существует неподвижная точка A, расстояния от которой до точек P и Q в любой момент времени равны.
12. Дана окружность и хорда AB, отличная от диаметра. По большей дуге AB движется точка C. Окружность, проходящая через A, C и точку H пересечения высот треугольника ABC, повторно пересекает прямую BC в точке P. Докажите, что прямая PH проходит через фиксированную точку, не зависящую от положения точки C.
13. Пусть AB — основание трапеции $ABCD$, в которой $AC+BC = AD+BD$. Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.
14. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C, а вторую — в точке D. Пусть M и N — середины дуг BC и BD, не содержащих точку A, а K — середина отрезка CD. Докажите, что угол MKN прямой.
15. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно. Пусть P — произвольная точка на большей дуге DE окружности ω, точка F симметрична точке A относительно прямой DP, а M — середина отрезка DE. Докажите, что угол FMP прямой.
16. Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник, O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Пусть окружности, описанные около треугольников ABO и COD, пересекаются в точке K. Точка L такова, что треугольник BLC подобен треугольнику

AKD. Докажите, что, если четырёхугольник $BLCK$ выпуклый, то он описанный.

17. Точка M — середина стороны AB треугольника ABC, а ω_1 и ω_2 — описанные окружности треугольников AMC и BMC соответственно. Касательная к ω_1, проходящая через A пересекает касательную к ω_2, проходящую через B, в точке X. Окружность ω_3 касается прямой AB в точке B и проходит через X. Прямая MX пересекает окружность ω_3 в точках X и Y. Докажите, что $CY \perp AB$.
18. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка K такая, что $AK = 2KC$ и $\angle ABK = 2\angle KBC$. Точка F — середина стороны AC, а точка L — проекция точки A на BK. Докажите, что прямые FL и BC перпендикулярны
19. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. Продолжения высот треугольника, проведённых из вершин A и C, пересекают окружность в точках E и F соответственно, D произвольная точка на (меньшей) дуге AC, K — точка пересечения DF и AB, L — точка пересечения DE и BC. Докажите, что прямая KL проходит через ортоцентр треугольника ABC.
20. (a) В треугольнике ABC угол A равен $120°$, докажите, что центр описанной окружности и ортоцентр симметричны относительно биссектрисы внешнего угла A.
    (b) В треугольнике ABC угол A равен $60°$; O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, I — центр вписанной окружности, а I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Докажите, что $IO = IH$ и $I_aO = I_aH$.
21. У плоской фигуры ровно две оси симметрии. Докажите, что они перпендикулярны.
22. От каждой стороны квадрата осталось по одной точке. Восстановите квадрат.
23. Постройте выпуклый пятиугольник по серединам его сторон.
24. Даны три прямые a, b, c. Докажите, что композиция симметрий $S_c \circ S_b \circ S_a$ является симметрией относительно некоторой прямой тогда и только тогда, когда данные прямые пересекаются в одной точке.
25. Дана прямая ℓ и две точки A и B по одну сторону от нее. Найдите на прямой ℓ точку X так, чтобы длина ломаной AXB была минимальна.
26. Даны прямая и две точки A и B по одну сторону от неё. Найдите на прямой такую точку M, чтобы сумма $MA + MB$ равнялась заданному отрезку.
27. Даны две пересекающиеся окружности. Проведите прямую через точку их пересечения так, чтобы длины высекаемых ею хорд были равны.
28. Бумажная прямоугольная полоска помещается внутри данного круга. Полоску согнули (не обязательно пополам). Докажите, что после сгибания полоску можно также разместить в этом круге.
29. Даны два отрезка с общей вершиной. Внутри получившегося угла, отражаясь от его сторон, *путешествует* луч света. Докажите, что когда-то луч выйдет из угла.
30. Можно ли намотать бесконечную нерастяжимую ленту на бесконечный конус так, чтобы сделать вокруг его оси бесконечно много оборотов? (Ленту нельзя наматывать на вершину конуса, а также разрезать и перекручивать.)
31. В правильном 21-угольнике шесть вершин покрашены в красный цвет, а семь вершин – в синий. Обязательно ли найдутся два равных треугольника, один из которых с красными вершинами, а другой — с синими?
32. Вершины правильного n-угольника окрашены в несколько цветов так, что точки каждого цвета служат вершинами правильного многоугольника. Докажите, что среди этих многоугольников найдутся два равных.
33. На арене круглого цирка радиуса 10 метров бегает лев. Двигаясь по ломаной линии, он пробежал 30 километров. Доказать, что сумма всех углов, на которые лев поворачивал, не меньше 2998 радиан.