1. Дано бинарное слово W. За один ход можно выбрать любое бинарное слово X и вставить XXX на любую позицию в W, приписать его с любой стороны к слову W или удалить его (если оно там встречается) из W. Можно ли за конечное количество операций получить из слова 10 слово 01?
2. В последовательности $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ каждый член, начиная с седьмого, равен остатку то деления суммы предыдущих шести чисел на 10. Докажите, что в этой последовательности нет подпоследовательности $0, 1, 0, 1, 0, 1$.
3. Все вершины правильного n-угольника помечены попарно различными целыми числами. За ход число в каждой вершине заменяется на полусумму этого его и числа, записанного в соседней по часовой стрелке вершине (все числа на одном ходу заменяются одновременно). Докажите, что через несколько часов среди чисел, записанных в вершинах, появятся дробные.
4. Каждую вершину правильного пятиугольника пометили целыми числом так, что сумма меток всех вершин ненулевая. Для любых трёх последовательных вершин, отмеченных числами x, y, z, такими что $y < 0$, можно заменить их метки (x, y, z) на метки $(x + y, -y, y + z)$. Этот процесс можно повторять, пока будет оставаться хотя бы одна вершина с отрицательной меткой. Всегда ли данный процесс конечен?
5. По набору $S = (a, b, c, d)$ натуральных чисел строится последовательность (S_n), заданная правилами $S_1 = T(S) = (|a - b|, b - c|, |c - d|, |d - a|)$ и $S_{n+1} = T(S_n)$, $n \geqslant 1$.
   (a) Всегда ли начиная с некоторого момента все члены последовательности будут иметь вид $(0, 0, 0, 0)$?
   (b) Ответьте на предыдущий вопрос в случае, когда числа могут быть произвольными вещественными.
6. Узлы $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ и $(0, 2)$ назовём *особенными*. В некоторых целочисленных узлах изначально лежит по одной фишке, а остальные узлы пустые. За один ход разрешается выбрать узел (x, y) такой, что в нём лежит фишка, а в узлах $(x+1, y)$ и $(x, y+1)$ — нет, убрать фишку из (x, y) и положить по одной фишке в $(x+1, y)$ и $(x, y+1)$. Цель — за несколько ходов сделать так, чтобы во всех особенных узлах не лежало ни одной фишки.
   (a) Можно ли добиться цели, если вначале в каждом особенном узле лежало по фишке, а остальные клетки были пустыми?
   (b) Можно ли добиться цели, если вначале была только одна фишка, которая лежала в $(0, 0)$?
7. В некотором конечном количестве целочисленных узлов, расположенных на оси OX или ниже её, лежит по одной фишке, а остальные узлы пустые. Фишки могут *прыгать* друг через друга в вертикальном и горизонтальном направлениях (например, если клетки (x, y) и $(x + 1, y)$ заняты, а $(x + 2, y)$ — свободна, то можно переместить фишку из (x, y) в $(x + 2, y)$ и убрать фишку из $(x + 1, y)$). Существует ли такая начальная расстановка фишек, при которой в результате нескольких прыжков клетка $(0, 5)$ окажется занятой?
8. Дана бесконечная в обе стороны клетчатая полоса, клетки которой занумерованы слева направо целыми числами (как числовая прямая). В некоторый клетках лежат фишки, клетки могут содержать и боле одной фишки. Разрешены ходы двух типов: 1) убрать по одной фишке из клеток с номерами n и $n + 1$ и положить одну фишку в клетку с номером $n + 2$; 2) убрать две фишки из клетки с номером n и положить по одной фишке в клетки с номерами $n + 1$ и $n - 2$.

(a) Докажите, что количество ходов ограничено.
(b) Докажите, что количество фишек, которое останется в тот момент, когда нельзя сделать ход, зависит только от начального расположения фишек и не зависит от проделанных ходов.

9. Все n участников олимпиады занумерованы числами от 1 до n. После тура олимпиады они пошли в столовую, причём Жюри выстраивает их в очередь по своему усмотрению. После этого каждые несколько секунд Жюри выбирает число i от 1 до n и предлагает участнику с номером i продвинуться в очереди на i позиций вперёд. Если i-й участник может это сделать, он, конечно, соглашается и перемещается вперёд, заплатив Жюри копейку. Если же он не может этого сделать, то процесс останавливается и столовая открывается.
(a) Докажите, что столовая обязательно откроется.
(b) Найдите, какое наибольшее количество денег может заработать Жюри.

10. В каждой клетке квадрата $n \times n$, выделенного на бесконечной клетчатой плоскости, лежит по одной фишке, а остальные клетки плоскости пустые. Фишки могут *прыгать* друг через друга в вертикальном и горизонтальном направлениях, как в предыдущей задаче. Найдите все n, при которых в результате нескольких прыжков на плоскости может остаться ровно одна фишка.

11. Изначально на доске записаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$. За один ход можно выбрать любые два многочлена, записанные на доске, и выписать на доску их сумму, разность или произведение. Цель — за несколько ходов добиться того, что на доске появится многочлен $h(x) = x$.
(a) Можно ли добиться цели, если $f(x) = x^2 + x$ и $g(x) = x^2 + 2$?
(b) Можно ли добиться цели, если $f(x) = 2x^2 + x$ и $g(x) = 2x$?
(c) Можно ли добиться цели, если $f(x) = x^2 + x$ и $g(x) = x^2 - 2$?

12. Рассмотрим два типа операций, которые можно проводить с многочленами третьей степени (старшему коэффициенту разрешим быть нулевым): 1) переставить коэффициенты в обратном порядке (учитываем все нулевые коэффициенты) и 2) заменить многочлен $P(x)$ на многочлен $P(x+1)$. Возможно ли за несколько операций получить из многочлена $x^3 - 2$ многочлен $x^3 - 3x^2 + 3x - 3$?

13. Вначале были даны три стопки фишек, содержащие a, b и c фишек каждая. За ход разрешается переложить одну фишку из одной стопки (пусть в ней было x фишек) в другую (в которой было y фишек). При этом вычисляется величина $d = y - x + 1$, если $d > 0$, банк выплачивает игроку d рублей, а, если $d < 0$, то игрок выплачивает банку d рублей. Сделав некоторое количество ходов, игрок обнаружил, что стопки снова содержат по a, b и c фишек каждая в некотором порядке. При заданных a, b и c определите, на какое наибольшее количество рублей к этому моменту мог заработать игрок (считается суммарный заработок, т. е. все выигрыши складываются, а все проигрыши вычитаются).

14. На координатной плоскости задана точка (a, b) такая, что $0 < a < b$. По ней строится последовательность точек (x_n, y_n), согласно правилам: $x_0 = a$, $y_0 = b$, $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ и $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_{n+1}}$. Докажите, что эта последовательность точек сходится и найдите её предел.

15. На координатной плоскости задана точка (a, b) такая, что $0 < b < a$. По ней строится последовательность точек (x_n, y_n), согласно правилам: $x_0 = a$, $y_0 = b$, $x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$ и $y_{n+1} = \frac{2x_{n+1} y_n}{x_{n+1} + y_n}$. Докажите, что эта последовательность сходится и найдите её предел.