## Основные теоремы о дифференцируемых функциях

Точка $x_0$ из области определения функции называется точкой локального максимума (минимума), если существует такой интервал, содержащий эту точку, что для всех $x \neq x_0$ из этого интервала верно неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ ($f(x) \geqslant f(x_0)$). Точки максимума и минимума называются точками (локального) экстремума.

1. **Теорема Ферма.** Докажите, что, если функция $f$ дифференцируема в точке экстремума $x_0$, то $f'(x_0) = 0$.

Следующие теоремы позволяют делать вывод о значениях производной, имея информацию о значениях само́й функции. Докажите их самостоятельно.

2. **Теорема Ролля.** Если функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале $(a, b)$ и $f(a) = f(b)$, то найдётся точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.
3. **Теорема Лагранжа.** Если функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале $(a, b)$, то найдётся точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
4. **Теорема Коши.** Если функции $f$ и $g$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на $(a, b)$, производные $f'$ и $g'$ не обращаются в нуль одновременно ни в одной точке интервала $(a, b)$ и $g(a) \neq g(b)$, то найдётся точка $c \in (a, b)$ такая, что $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

## Монотонность и критические точки функции

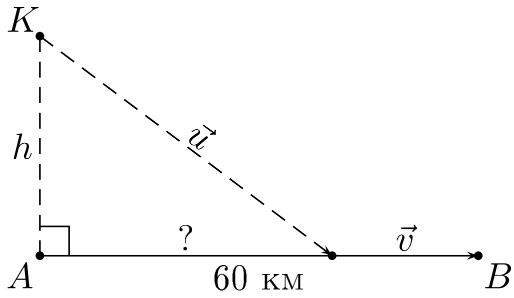
Поскольку производная показывает скорость изменения функции в точке, то её значения в точке (или на промежутке) характеризуют поведение функции.

5. Функция $f$, дифференцируемая на промежутке $(a, b)$, возрастает на этом промежутке. Докажите, что для всех $x \in (a, b)$ верно неравенство $f'(x) \geqslant 0$.
6. Функция $f$, дифференцируемая на промежутке $(a, b)$, такова, что для всех $x \in (a, b)$ верно неравенство $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) > 0$). Докажите, что $f$ возрастает (строго возрастает) на этом промежутке.
7. Сформулируйте аналогичный критерий убывания на промежутке.
8. Функция $f$ дифференцируема на промежутке $(a, b)$ и $x_0 \in (a, b)$. Докажите, что:
   (a) Если $f'(x) \geqslant 0$ на $(a, x_0)$ и $f'(x) \leqslant 0$ на $(x_0, b)$, то точка $x_0$ является точкой максимума функции $f$ на $(a, b)$;
   (b) Если $f'(x) \leqslant 0$ на $(a, x_0)$ и $f'(x) \geqslant 0$ на $(x_0, b)$, то точка $x_0$ является точкой минимума функции $f$ на $(a, b)$.

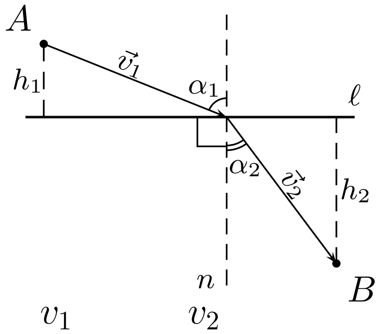
## Упражнения

9. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f$ на отрезке $[a, b]$:
   (a) $f(x) = 6x^3 - 3x^2 - 12x + 7$, $[a, b] = [-1, 2]$;
   (b) $f(x) = x^2\sqrt{3 - x}$, $[a, b] = [1, 3]$;
   (c) $f(x) = 15 - 3\cos x + \cos 3x$, $[a, b] = [0, \pi/2]$;
   (d) $f(x) = |x^2 - x - 6| - x^3$, $[a, b] = [-4, 4]$.
10. Докажите, что, если $a$ — корень многочлена $p(x)$ кратности $k$, то $a$ является корнем производной $p'(x)$ кратности $k - 1$.
11. Найдите количество вещественных корней многочлена $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$.
12. По двум перпендикулярным дорогам к перекрёстку движутся две автомашины со скоростями 40 км/ч и 50 км/ч. В данный момент они находятся от перекрёстка на расстоянии 20 км и 30 км, соответственно. Через какое время расстояние между ними будет минимальным?

13. Корабль расположен в точке $K$, находящейся на расстоянии $h = 3$ км от ближайшей точки берега — точки $A$ (см. рис.). С корабля отправлен гонец с донесением в штаб $B$, расположенный от точки $A$ на расстоянии 60 км по берегу ($\angle BAK = 90^\circ$). Лодка движется прямолинейно со скоростью $u = 5$ км/ч, а гонец, выйдя из лодки, бежит со скоростью $v = 13$ км/ч. На каком расстоянии от точки $A$ вдоль берега должна пристать лодка, чтобы донесение в штаб было доставлено в кратчайшее время?




14. **Закон преломления света.** Луч света вышел из точки $A$ одной среды, преломился на границе $\ell$ и пришёл в точку $B$ другой среды. Расстояния от точек $A$ и $B$ до границы равны $h_1$ и $h_2$ соответственно. Считаем, что обе среды изотропны, так что, свет в них распространяется прямолинейно с постоянными скоростями $v_1$ и $v_2$. Пусть $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — углы падения и преломления света (т. е. углы между лучом и нормалью $n$ к границе). Зная, что свет проходит по пути, по которому он затратит наименьшее возможное время, докажите равенство $\dfrac{v_1}{\sin\alpha_1} = \dfrac{v_2}{\sin\alpha_2}$.




## Задачи

15. Дан многочлен $P(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \ldots + a_1x + a_0$ нечётной степени с положительными коэффициентами. Докажите, что существует такая перестановка его коэффициентов (может быть, тождественная), что у полученного многочлена есть ровно один вещественный корень.

16. Найдите все дифференцируемые функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f \circ f \equiv f$.