MC-202
Árvores B

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-08-02 10:42

Introdução

Um problema: Trabalhamos com $1.000.000$ de registros e cada um pode ser muito grande (uma foto, por exemplo). Portanto, não podemos guardá-los todos na memória. Toda vez que executamos um programa, temos que executar cerca de 1000 consultas nesse banco de dados.

- Onde armazenar os dados?
- Qual estrutura de dados?

Tentativa: usar uma árvore binária de busca balanceada no disco

Verificando nossa tentativa

Quanto tempo vai levar para realizar as 1000 consultas?

- ler um nó no disco pode demorar 5 ms
- a árvore tem $1.000.000$ de nós
- a altura é de $\log_2(1.000.000) \approx 20$ nós

$$\text{TEMPO } = 1000 \text{ buscas} \times 20 \text{ nós/busca} \times 5 \text{ ms/nó} = 100 \text{ s}$$

Solução: diminuir a altura da árvore para diminuir número de leituras no disco

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)
  - Memória permanente, onde gravamos arquivos
  - Chamada de memória secundária
- RAM (*Random-Access Memory*)
  - Onde são armazenados os programas em execução
    - e a memória alocada pelos mesmos
  - Memória volátil, é apagada se o computador é desligado
- Memória Cache
  - Muito próxima do processador para ter acesso rápido
  - A informação é copiada da RAM para a Cache

Comparação entre Memórias

	Velocidade	Tamanho	US$ por GB
HDD	até 200 MB/s	até 4TB	0,05
SSD	200 a 2500 MB/s	até 512 GB	0,3
RAM	2 a 20 GB/s	até 64 GB	7,5
Cache	32 a 64 GB/s[1]	até 25 MB	não é vendida

[1] em um processador 2GHz

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

- A informação não cabe na memória principal
  - ou queremos que a informação seja permanente
- A memória secundária é dividida em páginas
  - usualmente de 2MB a 16MB
- Se a página está na memória, podemos acessá-la
- Se não está, precisamos lê-la na memória secundária
- O acesso a memória secundária é muito mais lento
  - queremos ler o menor número de páginas possível
  - acessar páginas que estão na memória é rápido

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo
- Não há preocupação com detalhes de implementação
  - são agnósticos em relação a linguagem de programação
- É uma forma mais abstrata de falar de algoritmos
- Precisamos tomar o cuidado de:
  - Deixar o algoritmo explicito
  - E que cada passo possa ser feito pelo computador

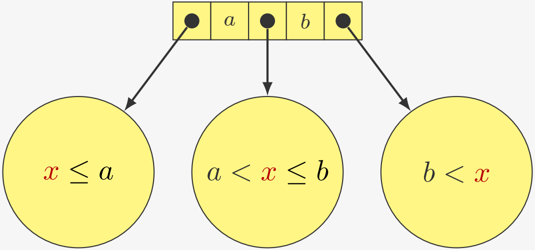
Se x é ponteiro para um objeto na memória secundária

- LeDoDisco(x): lê x da memória secundária
- EscreveNoDisco(x): grava x na memória secundária

Árvores M-árias de Busca

Podemos generalizar árvores binárias de busca

- Ex: árvores ternárias de busca
  - Nó pode ter 0, 1, 2 ou 3 filhos



Como fazer busca?

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada
  - $x.chave[1] < x.chave[2] < \cdots < x.chave[x.n]$
- $x.folha$ indica se x é uma folha ou não

Cada nó interno x contém $x.n + 1$ ponteiros

- $x.c[i]$ é o ponteiro para o i-ésimo filho
- se a chave k está na subárvore $x.c[i]$, então
  - $k < x.chave[1]$ se $i = 1$
  - $x.chave[x.n] < k$ se $i = x.n + 1$
  - $x.chave[i\text{-}1] < k < x.chave[i]$ caso contrário

O $T.raiz$ indica o nó que é a raiz da árvore

Propriedades das Árvores B

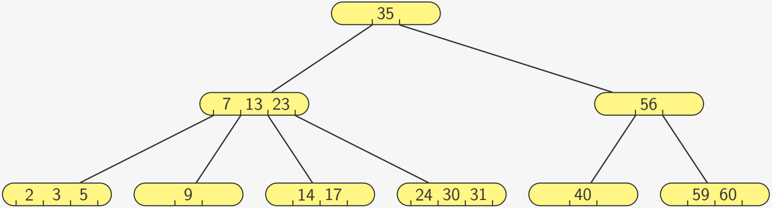
Toda folha está à mesma distância h da raiz

- h é a altura da árvore

Existe uma constante t que é o grau mínimo da árvore

- Todo nó exceto a raiz precisa ter pelo menos $t - 1$ chaves
  - ou seja, cada nó interno tem pelo menos t filhos
- Todo nó tem no máximo $2t - 1$ chaves
  - ou seja, cada nó interno tem no máximo $2t$ filhos

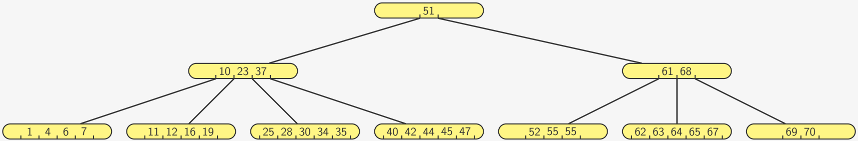
Exemplo



Para $t = 2$:

- cada nó não raiz tem pelo menos 1 registro
- cada nó tem no máximo 3 registros

Outro exemplo



Para $t = 3$:

- cada nó não raiz tem pelo menos 2 registros
- cada nó tem no máximo 5 registros

Altura de uma Árvore B

Uma árvore B com n chaves tem altura $h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$

- a raiz tem pelo menos 2 filhos
- esses filhos têm pelo menos $2t$ filhos
- que têm pelo menos $2t^2$ filhos
- e assim por diante

A árvore é muito larga e muito baixa!

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo tal que $2t - 1$ chaves caibam na página

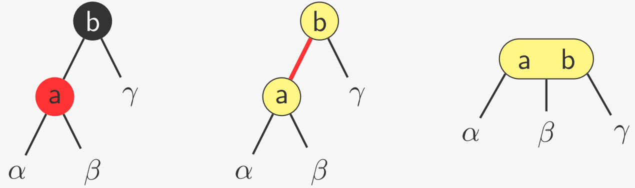
- Se $t = 1001$ e $h = 2$, armazenamos até 10^9 chaves
- i.e., fazemos dois acessos ao disco

Consideramos que o registro está junto com a chave

- Ou então temos um ponteiro para o registro

Quando $t = 2$, temos as Árvores $2 - 3 - 4$

- Equivalentes às árvores **rubro-negras**



Busca na Árvore B

Para procurar a chave k no nó x

- Basta verificar se a chave está em x
- Se não estiver, basta buscar no filho correto

```
Busca(x, k)
i = 1
enquanto i ≤ x.n e k > x.chave[i]
    i = i + 1
se i ≤ x.n e k == x.chave[i]
    retorne (x, i)
senão se x.folha
    retorne NIL
senão
    LeDoDisco(x.c[i])
    retorne Busca(x.c[i], k)
```

Criando uma Árvore B

Criamos uma árvore vazia

- Basta alocar o nó e definir os campos

Inicia(T)

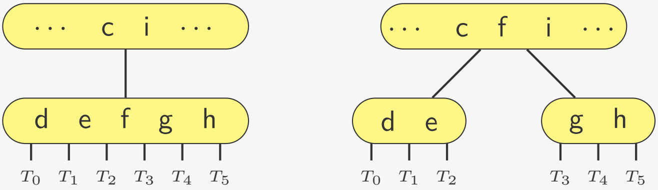
$x = \text{Aloca}()$
$x.folha = \text{Verdadeiro}$
$x.n = 0$
$\text{EscreveNoDisco}(x)$
$T.raiz = x$

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

- porém, o nó folha pode estar cheio ($x.n == 2t - 1$)
- dividimos o nó na chave mediana ($x.chave[t]$)
  - em dois nós com $t - 1$ chaves
  - inserimos $x.chave[t]$ no pai para representar a quebra
  - mas o pai poderia estar cheio...
- dividimos todo nó cheio no caminho a inserção
  - assim, o pai nunca estará cheio

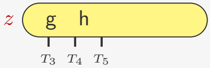
Exemplo: $t = 3$



Dividindo um nó

$\textsc{DivideFilho}(x, i)$

$z = \textsc{Aloca}()$
$y = x.c[i]$
$z.folha = y.folha$
$z.n = t - 1$
para $j = 1$ **até** $t - 1$
    $z.chave[j] = y.chave[j + t]$
se não $y.folha$
    para $j = 1$ **até** t
        $z.c[j] = y.c[j + t]$
$y.n = t - 1$
para $j = x.n + 1$ **decrescendo até** $i + 1$
    $x.c[j + 1] = x.c[j]$
$x.c[i + 1] = z$
para $j = x.n$ **decrescendo até** i
    $x.chave[j + 1] = x.chave[j]$
$x.chave[i] = y.chave[t]$
$x.n = x.n + 1$
$\textsc{EscreveNoDisco}(y)$
$\textsc{EscreveNoDisco}(z)$
$\textsc{EscreveNoDisco}(x)$



Inserindo

Vamos inserir a chave k na árvore T

- verificamos se não é necessário dividir a raiz

$\textsc{Insere}(T, k)$

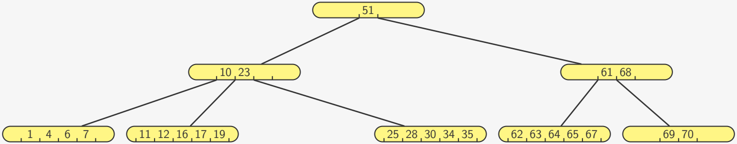
$r = T.raiz$
se $r.n == 2t - 1$
    $s = \textsc{Aloca}()$
    $T.raiz = s$
    $s.folha = \textsc{Falso}$
    $s.n = 0$
    $s.c[1] = r$
    $\textsc{DivideFilho}(s, 1)$
    $\textsc{InsereNãoCheio}(s, k)$
senão
    $\textsc{InsereNãoCheio}(r, k)$

Inserindo chave k em um nó não-cheio x

```
InsereNãoCheio(x, k)
i = x.n
se x.folha
    enquanto i ≥ 1 e k < x.chave[i]
        x.chave[i + 1] = x.chave[i]
        i = i − 1
    x.chave[i + 1] = k
    x.n = x.n + 1
    EscreveNoDisco(x)
senão
    enquanto i ≥ 1 e k < x.chave[i]
        i = i − 1
    i = i + 1
    LeDoDisco(x.c[i])
    se x.c[i].n == 2t − 1
        DivideFilho(x, i)
        se k > x.chave[i]
            i = i + 1
    InsereNãoCheio(x.c[i], k)
```

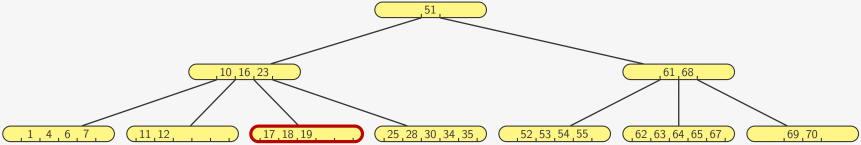
Exemplo: inserindo em nó não cheio

Inserindo 53



Exemplo: inserindo em nó cheio

Inserindo 18



Remoção

A remoção é mais complicada que a inserção

- Ela pode ocorrer em qualquer lugar da árvore
- Cada nó precisa continuar com pelo menos $t - 1$ chaves
  - exceto a raiz que tem que ter pelo menos 1 chave

Para resolver esse problema, garantimos que os nós no caminho da remoção têm pelo menos t chaves

- nesse caso não há problema em remover
- se não houver, tentamos mover uma chave de um vizinho
- nem sempre conseguimos
  - quando cada um dos dois vizinhos tiver apenas $t - 1$ chaves
  - juntamos os nós formando um nó com $2t - 1$ chaves

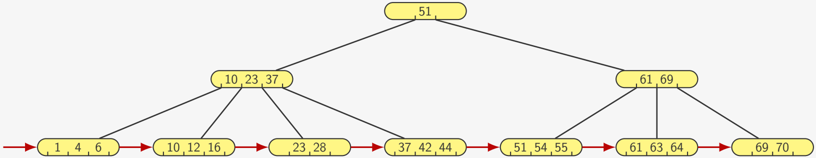
Variantes

Árvores B^*:

- Nós não raiz precisam ficar pelo menos $2/3$ cheios

Árvores B^+:

- Mantêm cópias das chaves nos nós internos, mas as chaves e os registros são armazenados nas folhas
- Permite acesso sequencial dos dados



Exercício

Qual a árvore obtida após inserirmos sequencialmente os números 13 e 33 na árvore seguinte?