# Сигналы

*Сигналом* называется физический процесс, параметры которого изменяются в соответствии с передаваемым сообщением. Сигнал является материальным носителем информации. По способу представления сигналы разделяются на две группы – *случайные* и *детерминированные*. Их описывают математической моделью или функцией, характеризующей изменение параметров сигнала.

*Случайным* сигналом называют функцию времени, значения которой заранее неизвестны и могут быть предсказаны лишь с некоторой *вероятностью*. К основным характеристикам случайных сигналов относятся:

- закон распределения (относительное время пребывания значения сигнала в определенном интервале),
- спектральное распределение мощности.

*Детерминированные* сигналы описываются аналитической функцией (задаются аналитически), и их поведение полностью известно в любой момент времени. Детерминированные сигналы в свою очередь бывают *периодическими* и *непериодическими*. Непериодические сигналы, как правило, ограничены во времени.

*Периодический* сигнал - это сигнал, который повторяется во времени с определенным периодом, то есть для которого выполняется условие:

$s(t)=s(t+kT)$,

где $k$ – любое целое число, $T$ – период повторения.

Пример *периодического* сигнала – гармоническое колебание, описываемое следующим выражением:

$s(t)=A\cdot\cos(2\pi\cdot t/T+\phi)$,

где *A* – амплитуда колебания, φ – начальная фаза.

Известно, что любой сложный периодический сигнал может быть представлен в виде суммы гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте **ω = 2π/T**.

Цифровые сигналы

Все сигналы можно разделить на четыре группы:

- аналоговые,
- дискретные,
- квантованные,
- цифровые.

**Аналоговый** сигнал – описывается непрерывной функцией времени. Аналоговый сигнал обеспечивает передачу данных путем непрерывного изменения во времени амплитуды, частоты или фазы. Практически все физические процессы описываются непрерывными функциями времени, поэтому представляют собой аналоговые сигналы. Для аналогового сигнала область значений и определения описывается *непрерывным множеством*.

Для **дискретного** сигнала свойственно прерывистое (дискретное) изменение сигнала во времени. То есть изменения в сигнале происходят скачкообразно через некоторые промежутки времени, называемые интервалом дискретизации – Δt или Td. Дискретизация *аналогового сигнала* состоит в том, что сигнал представляется в виде последовательности значений, взятых в дискретные моменты времени, которые называются *отсчётами* (сэмплами).

Для правильного восстановления аналогового сигнала из цифрового без искажений и потерь используется теорема отсчетов, известная как **теорема Котельникова (Найквиста-Шеннона)**.

Любой непрерывный сигнал с ограниченным спектром может быть восстановлен однозначно и без потерь по своим дискретным отсчетам, взятым с частотой строго больше удвоенной верхней частоты спектра непрерывного сигнала.

Формула теоремы Котельникова:

$$F_s = \frac{1}{T_s} > 2F_a$$

где

- $F_s$ - частота дискретизации сигнала,
- $F_a$ - верхняя частота спектра аналогового сигнала.

Такое определение относится к функциям времени, которые состоят из частот от нуля до Fa.

В реальных задачах в радиотехнике спектр сигнала может лежать в любом диапазоне частот и начинаться и заканчиваться на любой частоте, в связи с этим определение Теоремы Котельникова правильно рассматривать относительно ширины спектра такого сигнала:

Любой непрерывный сигнал с ограниченным спектром может быть восстановлен однозначно и без потерь по своим дискретным отсчетам, взятым с частотой строго больше удвоенной ширины полосы частот, занимаемой спектром непрерывного сигнала.

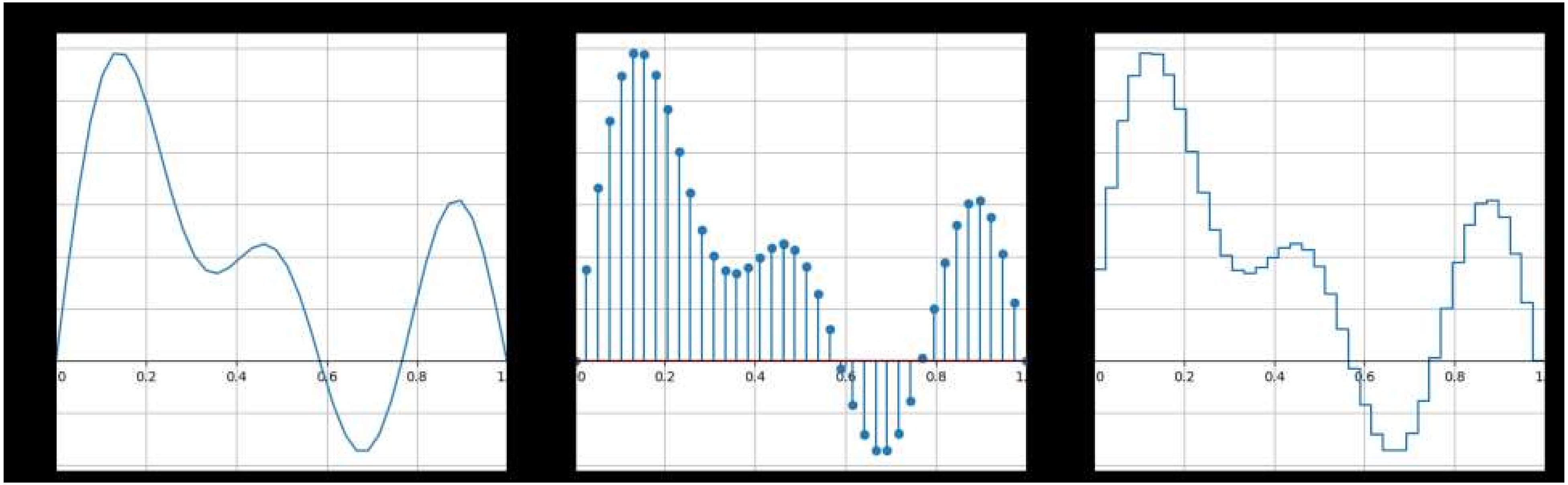
$$F_s = \frac{1}{T_s} > 2\Delta f$$
, где

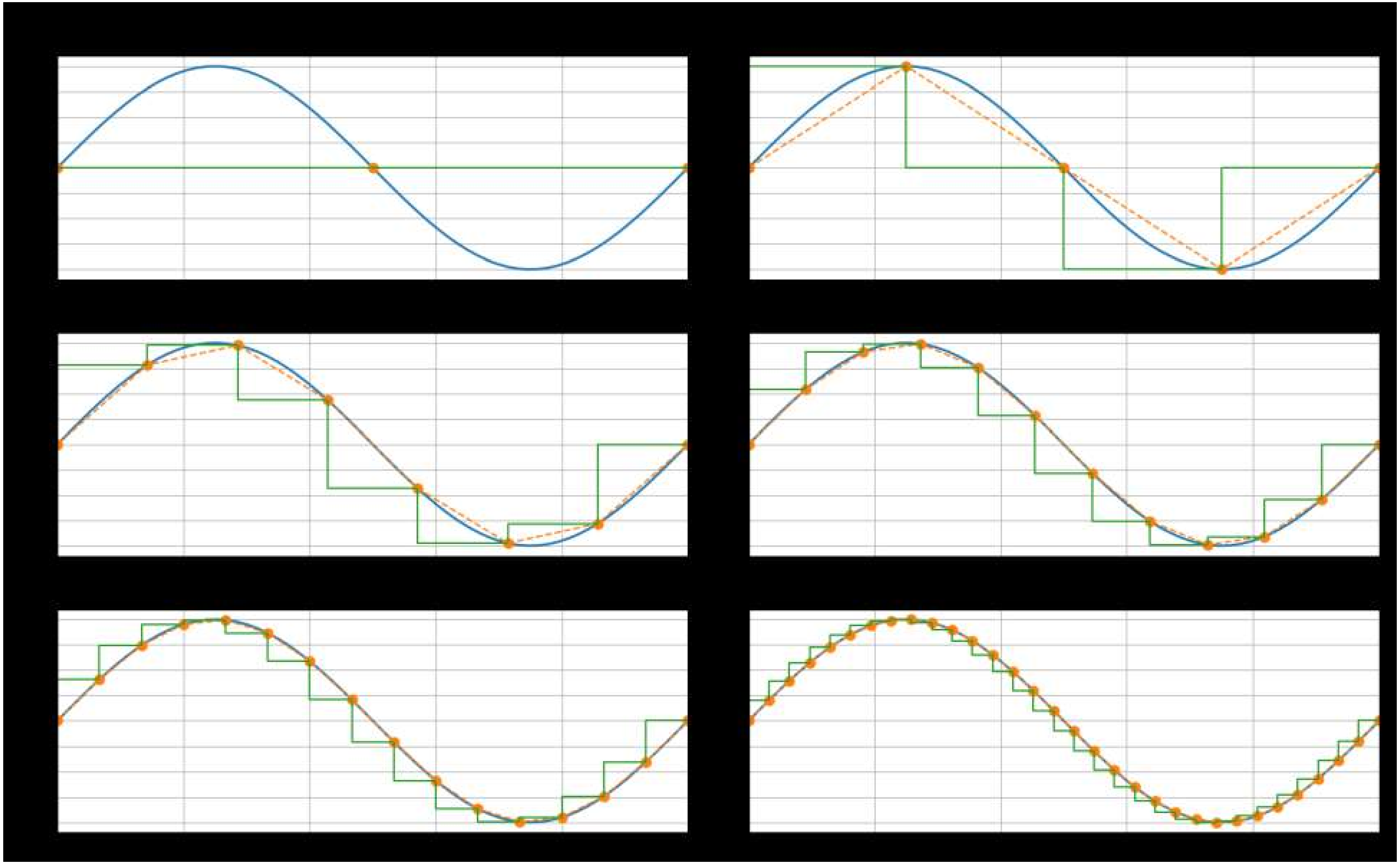
- $\Delta f$ - ширина спектра непрерывного сигнала.

**Квантованные** сигналы принимают ряд конечных значений из диапазона непрерывных или дискретных величин. Как правило, сигналы квантуются по уровню, то есть по амплитуде.

**Цифровые** сигналы получаются из аналоговых с помощью операций **дискретизации** и **квантования** по уровню. Значениям цифрового сигнала присваивается кодовое слово или набор символов (зачастую двоичных).

Устройства, осуществляющие дискретизацию по времени и квантование по уровню, называются **аналого-цифровыми преобразователями (АЦП)**. Устройства, переводящие цифровой сигнал в аналоговый называются **цифро-аналоговыми преобразователями (ЦАП)**.


0 0.2 0.4 0.6 0.8 1
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1



## Преобразования Фурье

Преобразование Фурье позволяет разложить исходный сигнал на гармонические составляющие, что потребуется для выделения шумов.

Запишем определение:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2\pi i f t} dt.$$

Здесь **g(t)** – это исходный сигнал (в нашем случае запись друга). В контексте преобразования Фурье его называют оригиналом. **G(f)** – изображение по Фурье, а параметром **f** выступает частота.

**Дискретное преобразование Фурье** (в англоязычной литературе DFT, Discrete Fourier Transform) — это одно из преобразований Фурье, широко применяемых в алгоритмах цифровой обработки сигналов (его модификации применяются в сжатии звука в MP3, сжатии изображений в JPEG и др.), а также в других областях, связанных с анализом частот в дискретном (к примеру, оцифрованном аналоговом) сигнале. Дискретное преобразование Фурье требует в качестве входа дискретную функцию. Такие функции часто создаются путём дискретизации (выборки значений из непрерывных функций). Дискретные преобразования Фурье помогают решать дифференциальные уравнения в частных производных и выполнять такие операции, как свёртки. Дискретные преобразования Фурье также активно используются в статистике, при анализе временных рядов. Существуют многомерные дискретные преобразования Фурье

Прямое

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot [\cos(2\pi kn/N) - i \cdot \sin(2\pi kn/N)], \qquad (k = 0, \dots, N-1).$$

Обратное

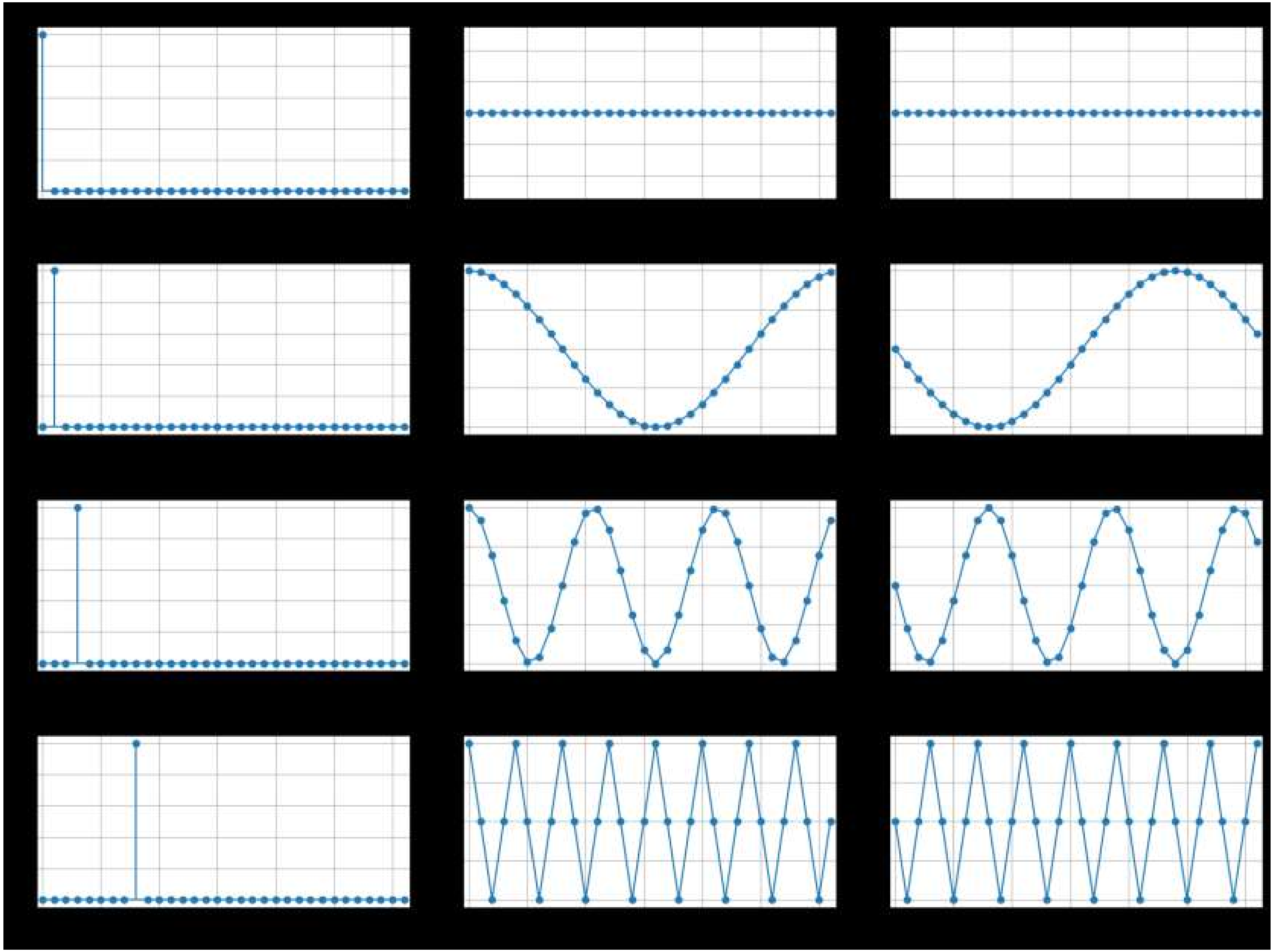
$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2\pi i}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot [\cos(2\pi kn/N) + i \cdot \sin(2\pi kn/N)], \qquad (n = 0, \dots, N-1).$$

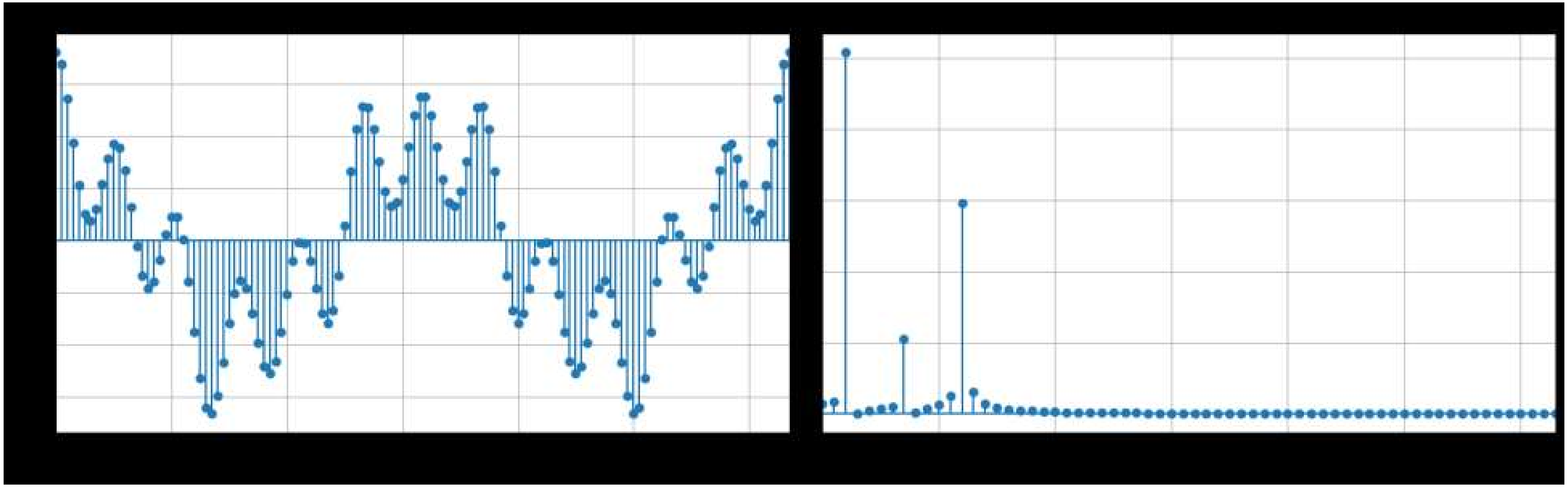
- $N$ — количество значений сигнала, измеренных за период, а также количество компонент разложения;
- $x_n, \quad n = 0, \dots, N-1,$ — измеренные значения сигнала (в дискретных временных точках с номерами ), которые являются входными данными для прямого преобразования и выходными для обратного;
- $X_k, \quad k = 0, \dots, N-1, — N$ — комплексных амплитуд синусоидальных сигналов, слагающих исходный сигнал; являются выходными данными для прямого преобразования и входными для обратного; поскольку амплитуды комплексные, то по ним можно вычислить одновременно и амплитуду, и фазу;
- $\frac{|X_k|}{N}$ — обычная (вещественная) амплитуда ***k*-**го синусоидального сигнала;

- $\arg(X_k)$ — фаза ***k***-го синусоидального сигнала (аргумент комплексного числа);

- k — индекс частоты. Частота k-го сигнала равна k/T, где T — период времени, в течение которого брались входные данные.

Из последнего видно, что преобразование раскладывает сигнал на синусоидальные составляющие (которые называются гармониками) с частотами от N колебаний за период до одного колебания за период. Поскольку частота дискретизации сама по себе равна N отсчётов за период, то высокочастотные составляющие не могут быть корректно отображены — возникает муаровый эффект. Это приводит к тому, что вторая половина из N комплексных амплитуд, фактически, является зеркальным отображением первой и не несёт дополнительной информации.





**Переход от ДПФ к БПФ**

Преобразование Фурье лежит в основе методов свертки и проектировании цифровых корреляторов, активно применяется при спектральном анализе, используется при работе с длинными числами. Однако до появления компьютеров ДПФ использовалось редко, поскольку вычисление ДПФ даже для 64 отсчетов требует 4096 операции комплексного умножения и практически столько же операций сложения, что вручную считать довольно долго и трудоемко. Для N = 1024 потребуется около миллиона операций комплексного умножения и миллион операций комплексного умножения. Чем больше точек вычисления (чем больше длина ДПФ), тем больше времени затрачивается на вычисления в связи с увеличением количества операций.

Вычисление преобразования Фурье по стандартной формуле предполагает выполнение *большого числа операций сложения и умножения*. Очевидно, что возникает необходимость разработать алгоритмы, которые уменьшают число математических действий при расчёте ДПФ.

**Алгоритмы БПФ**

Существует два основных метода вычисления БПФ по основанию 2: с прореживанием (или децимацией) по **частоте** и по **времени**.

**Python библиотека БПФ**

Python библиотека scipy для вычисления различных преобразований Фурье (синусное, косинусное, прямое, обратное, многомерное, вещественное) содержит одноименный пакет **fftpack**. Для импорта пакета в проект необходимо выполнить команду:

```
from scipy.fftpack import *

# or

from scipy.fftpack import fft, ifft, fftshift
```

Список функций из пакета fftpack: **Быстрое преобразование Фурье**

| **Function** | **Description** |
|---|---|
| **fft(x[, n, axis, overwrite_x])** | Прямое БПФ |
| **ifft(x[, n, axis, overwrite_x])** | Обратное БПФ |
| **fft2(x[, shape, axes, overwrite_x])** | Двумерное прямое БПФ |
| **ifft2(x[, shape, axes, overwrite_x])** | Двумерное обратное БПФ |
| **fft2(x[, shape, axes, overwrite_x])** | Многомерное прямое БПФ |
| **ifft2(x[, shape, axes, overwrite_x])** | Многомерное обратное БПФ |
| **dstn(x[, type, shape, axes, norm, overwrite_x])** | Многомерное прямое синусное ПФ |
| **idstn(x[, type, shape, axes, norm, overwrite_x])** | Многомерное обратное синусное БПФ |

**Свертка и корреляция**

В реальных задачах часто ставится вопрос о степени похожести одного процесса на другого или же о независимости одного процесса от другого. Иными словами, требуется определить взаимосвязь между сигналами, то есть найти корреляцию.

Методы корреляции используются в широком диапазоне задач: поиск сигналов, компьютерное зрение и обработка изображений, в задачах радиолокации для определения характеристик целей и определения расстояния до объекта. Кроме того, с помощью корреляции производится поиск слабых сигналов в шумах.

В разделе фильтрация сигналов вводилось понятие импульсной характеристики фильтра. Напомним, что **импульсной характеристикой** $h(n)h(n)$ называется реакция цепи на входное воздействие в виде функции Дирака (δ-функции). Она отражает влияние цепи на сигнал.

В задачах прохождения сигналов через различные цифровые узлы происходит свертка сигнала с импульсной характеристикой фильтра.

*Корреляцию* между двумя сигналами можно вычислить как сумму произведений пар отсчетов исследуемых сигналов.

Если взять две абсолютно независимые случайные последовательности, то их сумма произведений стремится к нулю. Говорят, что такие сигналы обладают нулевой корреляцией. Причем, чем длиннее последовательности, тем сильнее результат стремится к нулевому значению.

Корреляция бывает **положительной** и **отрицательной**. Положительная корреляция - большие значения одного сигнала связаны с большими значениями другого сигнала (увеличение одной переменной взаимосвязано с увеличением другой переменной). Отрицательную корреляцию проще всего понимать так: увеличение одной переменной связано с уменьшением другой переменной.

$$C(t,t') = \langle X(t)Y(t')\rangle$$

**Автокорреляционная функция**

Автокорреляционная функция (АКФ) - показывает зависимость между сигналом и его копией, сдвинутой по времени.

АКФ находит применение в кодировании информации. Выбор кодирующей последовательности по параметрам длины, частоты и формы во многом обусловлен корреляционными свойствами этой последовательности. Наилучшая кодовая последовательность обладает наименьшим значением вероятности ложного обнаружения или срабатывания (для детектирования сигналов, для пороговых устройств) или ложной синхронизации (для передачи и приема кодовых последовательностей).

Автокорреляционная функция помогает находить повторяющиеся участки во временной последовательности, с помощью АКФ можно находить несущую частоту сигнала.

Поскольку АКФ есть произведение сигнала и его копии, то физический смысл АКФ - энергия сигнала. В частности, в нулевой момент времени ($n = 0$) АКФ равна энергии сигнала.

$$C_{auto}(t,t') = \langle X(t)X(t')\rangle.$$

В numpy нет встроенной функции автокорреляции, но её несложно написать самому на базе функции `correlate()`.