Лекция 7, 18.11.11

Предложение 1. *Пусть* $a \in \Sigma$, $u, v \in \Sigma^*$. *Если* $uav \sim_{2n-1} uv$, *то либо* $ua \sim_n u$, *либо* $av \sim_n v$.

Доказательство. Пусть $ua \nsim_n u$ и $av \nsim_n v$. Тогда в ua есть подслово xa длины $\leq n$, которого нет в u, и аналогично, в av есть подслово ay длины $\leq n$, которого нет в v. Рассмотрим xay, его длина $\leq 2n-1$. Оно есть в uav, но его нет в uv. Противоречие. □

Обозначим через $c(w)$ содержание слова w, т.е. множество букв слова w.

Предложение 2. *Пусть* $uv \in \Sigma^*$ *и* $n > 0$. *Тогда* $u \sim_n vu$ *в том и только в том случае, когда найдутся такие слова* $u_1, \ldots, u_n \in \Sigma^*$, *что* $u = u_1 \ldots u_n$ *и* $c(v) \subseteq c(u_1) \subseteq c(u_2) \subseteq \ldots \subseteq c(u_n)$.

Доказательство. Необходимость. Индукция по n. База индукции. $n = 1$. Если $u \sim_1 vu$, то $c(v) \subseteq c(u)$ и $u_1 = u$.

Шаг индукции. Пусть $u \sim_{n+1} vu$. Обозначим через u_{n+1} наикратчайший суффикс слова u такой, что $c(u_{n+1}) = c(u)$. Если записать $u_{n+1} = au'$, где $a \in \Sigma$, то ясно по построению, что a не встречается в u'. Если w таково, что $u = wu_{n+1}$, то для доказательства достаточно доказать, что $w \sim_n vw$, так как тогда к слову w можно будет применить предположение индукции. Пусть x – какое-то подслово длины $\leq n$ в vw. Тогда xa подслово длины $\leq n+1$ в $vu = vwau'$. Из условия $u \sim_{n+1} vu$ следует, что xa есть подслово в u, но $u = wau'$ и a не появляется в u'. Поэтому x является подсловом в w.

Достаточность. База индукции. $u = u_1$ и $c(v) \subseteq c(u_1)$. Тогда понятно, что $c(vu) = c(u)$, т.е. $vu \sim_1 u$.

Шаг индукции. Допустим, что $u = u_1 \ldots u_{n+1}$ и при этом $c(v) \subseteq c(u_1) \subseteq c(u_2) \subseteq \ldots \subseteq c(u_{n+1})$. Надо доказать, что тогда $u \sim_{n+1} vu$. По предположению индукции $u_1 u_2 \ldots u_n \sim_n vu_1 u_2 \ldots u_n$. Теперь возьмем произвольное подслово x длины $\leq n+1$ в слове vu. Обозначим через x' наидлиннейший суффикс слова x, который является подсловом в u_{n+1} и пусть $x = x''x'$. Поскольку $c(u_{n+1}) = c(vu)$, по крайней мере последняя буква слова x попадает в x'. Тогда x'' имеет длину $\leq n$ и является подсловом в $vu_1 \ldots u_n$. По предположению индукции x'' является подсловом в $u_1 \ldots u_n$. А тогда x является подсловом в $u_1 \ldots u_{n+1} = u$. □

Следствие 1. *Для любых слов* $u, v \in \Sigma^*$ *имеем* $(uv)^n \sim_n v(uv)^n \sim_n (uv)^n u$.

Доказательство. Достаточно представить $(uv)^n$ как $\underbrace{(uv)(uv)\ldots(uv)}_{n \text{ раз}}$. □

Раз, $\sim_n$ – конгруэнция конечного индекса, то $\Sigma^*/\sim_n$ – конечный моноид. Из следствия вытекает, что это $\mathscr{J}$-тривиальный моноид. Допустим, что $\bar{a} \mathscr{R} \bar{b}$

(через $\bar{a}$ обозначаем образ слова a в $\Sigma^*/\sim_n$), $\bar{a} = \bar{b}p$ и $\bar{b} = \bar{a}q$. Тогда $\bar{a} = \bar{a}qp = \bar{a}(qp)^n$. Пусть $q = \bar{u}$, $p = \bar{v}$, имеем

$$(\bar{u}\bar{v})^n = \overline{(uv)^n} = \overline{(uv)^n u} = (\bar{u}\bar{v})^n\bar{u} = (qp)^n q.$$

Значит, $\bar{a}(qp)^n = \bar{a}(qp)^n q = \bar{a}q = \bar{b}$.

Аналогично, если $\bar{a}\mathscr{L}\bar{b}$, то $\bar{a} = \bar{b}$.

Пусть M – конечный моноид. Говорят, что язык $L \subseteq \Sigma^*$ распознается моноидом M, если существуют гомоморфизм $\varphi\colon \Sigma^* \to M$ и подмножество $P \subseteq M$ такие, что $u \in L \iff \varphi(u) \in P$.

Предложение 3. *Если $f \sim_n g$, то существует такое слово h, что и f и g являются подсловами в h и $f \sim_n h \sim_n g$.*

Пример 1. $f = bcaca\,cadca\,babab\,dacba$

$g = bacca\,dcabb\,cbcab\,cdabc$

$f \sim_3 g$ (Различающее слово $dccc$)

В качестве h можно взять слово $bcacc\,acadc\,abbcb\,cabab\,dacbca$.