Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Licenciatura en Computación

Métodos Numéricos - 2016

PRACTICA N° 4: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Los ejercicios propuestos por sección corresponden al CAPITULO 4 del libro **Análisis Numérico, Las matemáticas del cálculo científico**, David Kincaid y Ward Cheney, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, S. A. (1994), Wilmington, Delaware, E. U. A.

1. **Sección 4.2:** 1, 5, 8, 23 y 36.

2. Construir un algoritmo para resolver sistemas mediante la factorización LU de Doolittle y utilizarlo para resolver el sistema $Ax = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{pmatrix}.$$

3. Construir un algoritmo para obtener la factorización de Cholesky de una matriz A y factorizar las siguientes matrices usando el algoritmo diseñado. Comparar los resultados con la implementación de Scilab de la factorización $chol()$.

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -12 & 8 & -16 \\ -12 & 18 & 6 & 9 \\ 8 & -6 & 5 & -10 \\ -16 & 9 & -10 & 46 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{pmatrix}.$$

4. Construir un algoritmo para implementar el método de Gauss en los siguientes casos:

$$a) \quad a_{kk}^{(k)} \neq 0, \qquad b) \text{ con pivoteo parcial.}$$

Aplicarlo para resolver los siguientes sistemas $Ax = b$

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

5. Modificar el algoritmo del método de Gauss para no realizar operaciones inecesarias al resolver el problema $Ax = b$, siendo A una matriz tridiagonal y contar la cantidad de operaciones que se realizan en este caso.

6. **Sección 4.3:** 20, 22 y 53.

7. **Sección 4.4:** 2, 7, 11, 15, 21, 40 y 49.

8. **Sección 4.6:** 2, 4, 7, 22, 24, 27 y 35.

9. Considerar los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_2+4x_3 & = & 0 \\ x_1-x_2-x_3 & = & 0.375 \\ x_1-x_2+2x_3 & =0 & \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} x_1-x_1 & =0 \\ -x_1+2x_2-x_3 & =1 \\ -x_2+1.1x_3 & =0 \end{array}\right.$$

   (a) Si se aplicara el método iterativo de Jacobi para resolver cada uno de los sistemas anteriores, podrá asegurarse la convergencia?

   (b) Idem a) para el método de Gauss-Seidel.

   (c) Resolver los sistemas anteriores con una tolerancia de 10^{-2} a partir de $x^{(0)}=0$.

10. Encontrar la forma explćita para la matriz de iteración del método de Gauss-Seidel para un sistema $Ax=b$ cuya matriz es

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & ... & ... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & ... & 0 \\ : & : & : & & & : \\ 0 & ... & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Considerar el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 & -1 \\ 4 & -3 & -5 & -1 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ -27 \\ 14 \\ -17 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

   tomando $x^{(0)}=0$, aproximar su solución usando los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel. Notar que la matriz de coeficientes es simétrica y defnida positiva, pero no diagonal estrictamente dominante.

12. **Sección 4.7:** 1 y 3.

13. Programar el algoritmo correspondiente al método del descenso rápido y aproximar una solución de los sistemas dados en los ejercicios 2 y 4.

14. (a) Usar el teorema de Gerschgorin para determinar cotas de los autovalores de las siguientes matrices:

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (b)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 2 \end{pmatrix} \quad (c)\ \begin{pmatrix} 4.75 & 2.25 & -0.25 \\ 2.25 & 4.75 & 1.25 \\ -0.25 & 1.25 & 4.75 \end{pmatrix}$$

   (b) Hallar los autovalores de las matrices anteriores usando el comando ya implementado en SCILAB.

15. Aplicar el método de la potencia a las matrices de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel en los ejercicios 10 y 12 y sacar conclusione sobre la convergencia de dichos métodos.

16. Explicar brevemente el método de la potencia inversa y utilizarlo para estimar el autovalor más pequeõde la matriz del ejercicio 14(a).