Στην περίπτωση αυτή από την Εξίσωση (3-11) θα λάβουμε

$$s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)dw = \frac{2}{L-1}\int_0^r wdw = \frac{r^2}{L-1}$$

Υποθέστε στη συνέχεια πως κατασκευάζουμε μία νέα εικόνα με τιμές έντασης που περιγράφονται από τη μεταβλητή s, η οποία έχει προκύψει δια της χρήσεως του παραπάνω μετασχηματισμού· με άλλα λόγια, οι τιμές του s προκύπτουν υψώνοντας στο τετράγωνο της αντίστοιχες τιμές έντασης r της εικόνας εισόδου και διαιρώντας τες στη συνέχεια με το $(L-1)$. Θεωρήστε για παράδειγμα μια εικόνα για την οποία είναι $L = 10$ και υποθέστε πως κάποιο εικονοστοιχείο που βρίσκεται σε μία αυθαίρετη θέση (x, y) της εικόνας εισόδου αντιστοιχεί σε τιμή έντασης $r = 3$. Στην περίπτωση αυτή η τιμή του αντίστοιχου εικονοστοιχείου στην εικόνα εξόδου θα είναι η $s = T(r) = r^2/9 = 1$. Μπορούμε να επαληθεύσουμε πως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των εντάσεων στη νέα εικόνα θα είναι ομοιόμορφη, αντικαθιστώντας απλά τη συνάρτηση $p_r(r)$ στην Εξίσωση (3.3-6) και χρησιμοποιώντας το γεγονός πως $s = r^2/(L-1)$· θα είναι τότε

$$p_s(s) = p_r(r)\left|\frac{dr}{ds}\right| = \frac{2r}{(L-1)^2}\left|\left[\frac{ds}{dr}\right]^{-1}\right| = \frac{2r}{(L-1)^2}\left|\left[\frac{d}{dr}\frac{r^2}{L-1}\right]^{-1}\right| = \frac{2r}{(L-1)^2}\left|\frac{(L-1)}{2r}\right| = \frac{1}{L-1}$$

με το τελευταίο βήμα να προκύπτει από το γεγονός πως η τιμή του r είναι μη αρνητική ενώ έχουμε υποθέσει πως $L > 1$. Όπως αναμέναμε, το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε εκφράζει μία ομοιόμορφη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Στην περίπτωση κατά τις οποίες οι τιμές που πραγματευόμαστε δεν είναι συνεχείς αλλά διακριτές, καταφεύγουμε στη χρήση πιθανοτήτων (δηλαδή τιμών ιστογράμματος) και αθροισμάτων αντί για συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας και ολοκληρώματα (ας σημειωθεί ωστόσο, πως η συνθήκη της μονοτονίας που διατυπώθηκε προηγουμένως εξακολουθεί να ισχύει). Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, η πιθανότητα εμφάνισης του επιπέδου έντασης r_k σε μία ψηφιακή εικόνα, δίδεται από την εξίσωση

$$p_k(r_k) = \frac{n_k}{MN} \qquad (3.14)$$

όπου MN είναι το συνολικό πλήθος των εικονοστοιχείων της εικόνας, n_k είναι το πλήθος των εικονοστοιχείων με τιμή έντασης r_k, ενώ η παράμετρος L εκφράζει όπως και προηγουμένως τον αριθμό των δυνατών επιπέδων έντασης στην εικόνα (για παράδειγμα η τιμή αυτού του πεδίου για μια εικόνα των 8 bits είναι ίση με 256). Όπως επισημάναμε και στην αρχή αυτής της ενότητας, το γράφημα της συνάρτησης $p_k(r_k)$ συναρτήσει της μεταβλητής r_k, πολύ συχνά αναφέρεται ως *ιστόγραμμα*.

Η διακριτή έκδοση του μετασχηματισμού που δίδεται από την Εξίσωση (3-11) έχει τη μορφή

$$s_k = T(r_k) = (L-1)\sum_{j=0}^{k} p_r(r_j) = \frac{(L-1)}{MN}\sum_{j=0}^{k} n_j, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, L-1 \qquad (3.15)$$

όπου, όπως και πριν, η παράμετρος L εκφράζει το πλήθος των δυνατών επιπέδων έντασης σε μία εικόνα (δηλαδή 256 επίπεδα, για μία εικόνα των 8 bit). Επομένως, η επεξεργασμένη εικόνα (δηλαδή η εικόνα εξόδου) κατασκευάζεται, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (3-15), με απεικόνιση του κάθε εικονοστοιχείου της εικόνας εισόδου με τιμή έντασης r_k, σε ένα αντίστοιχο εικονοστοιχείο με επίπεδο έντασης s_k στην εικόνα εξόδου. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται μετασχηματισμός *εξίσωσης* ή *γραμμικοποίησης* ιστογράμματος. Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε (για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε το Πρόβλημα 3.9) πως αυτός ο μετασχηματισμός ικανοποιεί τις συνθήκες (α) και (β) που διατυπώσαμε προηγουμένως σε αυτή την ενότητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3-5 **Επίδειξη της μηχανικής της εξίσωσης ιστογράμματος.**

Πριν συνεχίσουμε, θα είναι χρήσιμο να μελετήσουμε ένα απλό παράδειγμα. Θεωρήστε μία εικόνα που κωδικοποιείται με 3 bits (από όπου προκύπτει η τιμή $L = 8$) και έχει μέγεθος 64×64 εικονοστοιχεία (και επομένως θα είναι $MN = 4096$) η οποία περιγράφεται από την κατανομή έντασης του Πίνακα 3.1, με τις τιμές έντασης να είναι ακέραιες τιμές στο διάστημα $[0, L-1] = [0, 7]$. Το ιστόγραμμα αυτής της εικόνας παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.19(α), ενώ οι τιμές του μετασχηματισμού ισοστάθμισης του ιστογράμματος μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (3-15)· για παράδειγμα, θα έχουμε

$$s_0 = T(r_0) = 7\sum_{j=0}^{0} p_r(r_j) = 7p_r(r_0) = 1.33$$

Με παρόμοιο τρόπο θα είναι

$$s_1 = T(r_1) = 7\sum_{j=0}^{1} p_r(r_j) = 7p_r(r_0) + 7p_r(r_1) = 3.08$$

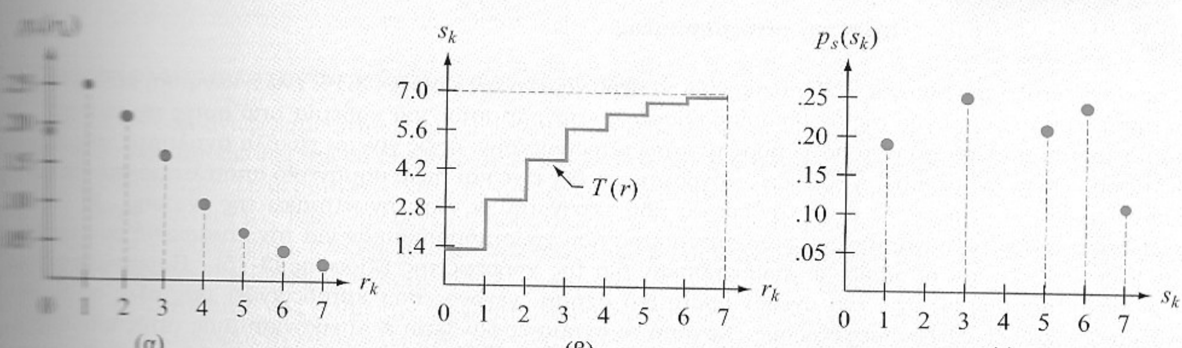
και μετά από παρόμοιες πράξεις βρίσκουμε ότι

$$s_2 = 4.55 \quad s_3 = 5.67 \quad s_4 = 6.23 \quad s_5 = 6.65 \quad s_6 = 6.86 \quad s_7 = 7.00$$

Αυτή η συνάρτηση μετασχηματισμού έχει σχήμα σκάλας όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 3.19(β).

Πίνακας 3.1 Κατανομή έντασης και τιμές ιστογραμμάτων για ψηφιακή εικόνα των 3 bits διαστάσεων 64 × 64.

r_k	n_k	$p_r(r_k) = n_k > MN$
$r_0 = 0$	790	0.19
$r_1 = 1$	1023	0.25
$r_2 = 2$	850	0.21
$r_3 = 3$	656	0.16
$r_4 = 4$	329	0.08
$r_5 = 5$	245	0.06
$r_6 = 6$	122	0.03
$r_7 = 7$	81	0.02



Σχήμα 3.19 (Επίδειξη της διαδικασίας ισοστάθμισης ιστογράμματος. Από αριστερά προς τα δεξιά: (α) Το αυθεντικό ιστόγραμμα, (β) η συνάρτηση του μετασχηματισμού και (γ) το ισοσταθμισμένο ιστόγραμμα.

Σε αυτό το σημείο, οι τιμές του s μικτοί αριθμοί (δηλαδή περιέχουν κλάσματα) αφού υπολογίστηκαν από αθροίσματα τιμών πιθανότητας και επομένως θα πρέπει να τις στρογγυλοποιήσουμε προς την πλησιέστερη ως προς αυτές ακέραια τιμή στην περιοχή τιμών $[0, 7]$. Θα είναι λοιπόν

$$s_0 = 1.33 \to 1 \quad s_4 = 6.23 \to 6 \quad s_1 = 3.08 \to 3 \quad s_5 = 6.65 \to 7$$

$$s_2 = 4.55 \to 5 \quad s_6 = 6.86 \to 7 \quad s_3 = 5.67 \to 6 \quad s_7 = 7.00 \to 7$$

Αυτές είναι οι τιμές του προκύπτοντος ιστογράμματος. Παρατηρήστε πως ο μετασχηματισμό έδωσε μόνο πέντε διακριτά επίπεδα έντασης. Επειδή η τιμή $r_0 = 0$ είχε απεικονιστεί στην τιμή $s_0 = 1$, υπάρχουν 790 εικονοστοιχεία στην εικόνα που σχετίζεται με το ισοσταθμισμένο ιστόγραμμα, τα οποία θα έχουν αυτή την τιμή (δείτε τον Πίνακα 3.1). Επιπλέον, στην εικόνα υπάρχουν 1023 εικονοστοιχεία με τιμή $s_1 = 3$ και 850 τέτοια στοιχεία με τιμή $s_2 = 5$. Ωστόσο, τόσο το r_3 όσο και το r_4 έχουν απεικονιστεί στην ίδια τιμή - στην τιμή 6 - και επομένως θα υπάρχουν (656+329)=985 εικονοστοιχεία στην εικόνα που θα χαρακτηρίζονται από αυτή την τιμή έντασης. Προχωρώντας στη διαίρεση αυτών των αριθμών με την τιμή MN = 4096, λαμβάνουμε το ιστόγραμμα που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.19(γ).

Επειδή ένα ιστόγραμμα δεν αποτελεί παρά μία προσέγγιση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, ενώ δεν υπάρχουν νέα επιτρεπτά επίπεδα έντασης που να δημιουργούνται ως το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας, τα ιστογράμματα που είναι τελείως επίπεδα, χρησιμοποιούνται πολύ σπάνια στις πρακτικές εφαρμογές εξίσωσης ιστογράμματος, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους που μόλις σχολιάσαμε. Επομένως και σε αντίθεση με το συνεχές ανάλογο αυτής της περίπτωσης, δεν μπορεί (γενικά) να αποδειχθεί πως η διακριτή εξίσωση ιστογράμματος οδηγεί σε ένα ομοιόμορφο ιστόγραμμα. Ωστόσο, όπως θα δούμε σύντομα, η χρήση της Εξίσωσης (3-15) έχει γενικά την τάση να διασκορπίζει το ιστόγραμμα της εικόνας εισόδου έτσι ώστε τα επίπεδα έντασης της προκύπτουσας εικόνας να εκτείνονται σε μία ευρύτερη περιοχή της κλίμακας της έντασης. Το τελικό αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι η βελτίωση της αντίθεσης της εικόνας.

Νωρίτερα σε αυτή την ενότητα συζητήσαμε τα πολλά πλεονεκτήματα που προκύπτουν από τη διασπορά των τιμώ έντασης σε όλο το εύρος της κλίμακας του γκρι. Η μέθοδος που μόλις περιγράψαμε παράγει τιμές έντασης πο χαρακτηρίζονται από αυτήν την τάση και επιπλέον, έχει το πλεονέκτημα πως είναι πλήρως αυτοματοποιημένη. Μ άλλα λόγια, δοθείσας μιας εικόνας, η επεξεργασία του ιστογράμματος, συνίσταται εξ ολοκλήρου στην υλοποίηση τη Εξίσωσης (3-15) η οποία με τη σειρά της στηρίζεται στην πληροφορία που μπορεί άμεσα να εξαχθεί από τη δοθείσ εικόνα και χωρίς την ανάγκη να προχωρήσουμε στον καθορισμό πρόσθετων παραμέτρων. Αυτό το χαρακτηριστικ της αυτοματοποίησης, είναι ιδιαίτερα σημαντικό.

Ο *αντίστροφος* μετασχηματισμός από το s πίσω στο r συμβολίζεται ως

$$r_k = T^{-1}(s_k) \tag{3.16}$$

Μπορεί να αποδειχθεί (για λεπτομέρειες δείτε το Πρόβλημα 3.9) πως αυτός ο αντίστροφος μετασχηματισμός ικα νοποιεί τις συνθήκες (α΄) και (β), *μόνο* εάν όλα τα επίπεδα r_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, L-1)$ εμφανίζονται στην εικόν εισόδου· αυτή η συνθήκη με τη σειρά της υπονοεί πως δεν υπάρχουν συνιστώσες στο ιστόγραμμα της εικόνα εισόδου οι οποίες να έχουν τιμή ίση με το μηδέν. Αν και ο αντίστροφος μετασχηματισμός δεν χρησιμοποιείται στη ισοστάθμιση ιστογράμματος, ωστόσο, κατέχει κεντρικό ρόλο στο σχήμα του ταιριάσματος ιστογράμματος που θ αναπτύξουμε μετά το επόμενο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3-6 **Εξίσωση ιστογράμματος.**

Η αριστερή στήλη της Εικόνας 3.20 απεικονίζει τα περιεχόμενα της Εικόνας 3.16, ενώ η κεντρική στήλη δείχνει το αποτέλεσμα εφαρμογής της διαδικασίας εξίσωσης ιστογράμματος για καθεμία από αυτές τις εικόνες. Τα πρώτα τρία αποτελέσματα από πάνω προς τα κάτω παρουσιάζουν, όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, σημαντική βελτίωση. Όπως αναμέναμε, η εξίσωση ιστογράμματος δεν είχε και πολύ σημαντικό αποτέλεσμα στην τέταρτη εικόνα επειδή οι εντάσεις σε αυτή την εικόνα ήδη εκτεινόταν σε όλη την κλίμακα της έντασης. Η Εικόνα 3.21 παρουσιάζει τις συναρτήσεις μετασχηματισμού που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των εικόνων της Εικόνας 3.20 και οι οποίες δημιουργήθηκαν δια της χρήσεως της Εξίσωσης (3-15). Παρατηρήστε πως ο μετασχηματισμός (4) έχει ένα σχεδόν γραμμικό σχήμα, γεγονός που καταδεικνύει πως όλες οι είσοδοι απεικονίστηκαν σε σχεδόν ίσες εξόδους. Σε αυτό το σχήμα εμφανίζεται η απεικόνιση μιας τιμής εισόδου r_k, στην αντίστοιχη τιμή εξόδου s_k. Σε αυτή την περίπτωση, η απεικόνιση ήταν για την εικόνα 1 (η οποία βρίσκεται επάνω αριστερά στην Εικόνα 3.21) και καταδεικνύει πως μία σκοτεινή τιμή είχε απεικονιστεί σε μία πολύ πιο φωτεινή τιμή, συνεισφέροντας με τον τρόπο αυτό, στη φωτεινότητα της εικόνας εξόδου.

Η τρίτη στήλη στην Εικόνα 3.20, απεικονίζει με διαγραμματικό τρόπο τα ιστογράμματα των προκυπτουσών εικόνων. Είναι ενδιαφέρον να επισημάνουμε, πως ενώ όλα αυτά τα ιστογράμματα είναι διαφορετικά, ωστόσο, οι εικόνες που προκύπτουν από τις ισοσταθμισμένες εκδόσεις τους, μοιάζουν πάρα πολύ μεταξύ τους. Ας σημειωθεί πως στην πραγματικότητα, κάτι τέτοιο είναι αναμενόμενο, αφού η βασική διαφορά ανάμεσα στις εικόνες της αριστερής στήλης δεν αφορά στο περιεχόμενο αλλά την αντίθεσή τους. Με άλλα λόγια, επειδή αυτές οι εικόνες έχουν το ίδιο περιεχόμενο, η αύξηση της αντίθεσης που προκύπτει από αυτή την ισοστάθμιση ιστογράμματος, είναι αρκετή ώστε να καταστήσει οπτικά μη διακρίσιμες μεταξύ τους τις οποιεσδήποτε διαφορές έντασης υφίστανται στην εικόνα. Λαμβάνοντας υπόψη τις σημαντικές διαφορές στην αντίθεση που χαρακτηρίζει τις αρχικές εικόνες, αυτό το παράδειγμα επιδεικνύει με τον πλέον παραστατικό τρόπο, τη μεγάλη ισχύ της μεθόδου εξίσωσης ιστογράμματος ως ένα εργαλείο προσαρμοζόμενης ενίσχυσης της αντίθεσης σε μία εικόνα.