

# Отчет о схеме Соколова А.Г.

Мещеряков Вадим  
группа 410

Москва, 2025

# Содержание

# 1 Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающую нестационарное одномерное движение вязкого баротропного газа:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f. \end{cases} \quad (1)$$

Где введены следующие обозначения:

- $\mu > 0$  - вязкость газа,
- $(t, x) \in [0, T] \times [0, X]$ ,
- $\rho = \rho(t, x)$  - функция плотности газа,
- $u = u(t, x)$  - функция скорости газа,
- $p = p(\rho)$  - функция давления газа и  $p = C_\rho \rho$  или  $p = \rho^\gamma$

С начальными условиями

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0)$$

и граничными условиями непротекания:

$$u(t, X_0) = u(t, X_1) = 0. \quad (2)$$

## 2 Разностная схема

На каждом шаге по  $n = 1, 2, 3, \dots, N$  нам надо будет решать две системы линейных уравнений вида  $Ax = d$ , где

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & a_3 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{M-2} & b_{M-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{M-1} & a_{M-1} & b_{M-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_M & a_M \end{pmatrix} \quad (3)$$

Рассматривается разностная схема А. Г. Соколова. Она имеет следующий вид.

$$\begin{cases} H_t + (\sigma\{\hat{H}, V\})_x = 0, & 0 \leq m < M, \\ \hat{H}_s V_t + \hat{H}_s \delta\{\hat{V}, V\} + \text{Gr}^h(\hat{H}) = \mu \hat{V}_{xx} + \hat{H}_s f, & \text{при } \hat{H}_s \neq 0, \\ \hat{V} = 0, & \text{при } \hat{H}_s = 0, \quad 0 < m < M, \\ \hat{V}_0 = \hat{V}_M = 0. \end{cases} \quad (4)$$

При этом  $\text{Gr}^h p(H) = \frac{\gamma}{\gamma-1} H_{\bar{s}}((H)^{\gamma-1})_{\bar{x}}$ , если  $p = \rho^\gamma$ , и  $\text{Gr}^h p(H) = p(H)_{\bar{x}}$ , если  $p = C\rho$ . По смыслу уравнений, первое уравнение находит плотность в следующий момент времени  $\hat{H}$ , а второе находит скорость распространения  $\hat{V}$ .

$H$  задано на сетке  $\omega_h^{\frac{1}{2}} = \{mh + \frac{h}{2}, 0 \leq m < M\}$ .

$V$  задано на сетке  $\omega_h = \{mh, 0 \leq m \leq M\}$ .

Значит сначала требуется найти из первого уравнения  $\hat{H}$ , а затем, зная их, найти  $\hat{V}$ .

$$\hat{H}_{\bar{s}} V_t + \hat{H}_{\bar{s}} \delta\{\hat{V}, V\} = \frac{H_m^{n+1} - H_{m-1}^{n+1}}{2} \cdot \left( \frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\tau} + \begin{cases} \frac{V_m^n (V_m^{n+1} - V_{m-1}^{n+1})}{h}, & \text{если } V_m^n \geq 0, \\ \frac{V_m^n (V_{m+1}^{n+1} - V_m^{n+1})}{h}, & \text{если } V_m^n < 0. \end{cases} \right)$$

$$\text{Для } p = \rho^\gamma : \quad \text{Gr}^h(\hat{H}) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{H_m^{n+1} + H_{m-1}^{n+1}}{2} \right) \cdot \left( \frac{(H_m^{n+1})^{\gamma-1} - (H_{m-1}^{n+1})^{\gamma-1}}{h} \right).$$

$$\text{Для } p = C\rho : \quad \text{Gr}^h(\hat{H}) = \frac{p(H_m^{n+1}) - p(H_{m-1}^{n+1})}{h} = \frac{C}{h} (H_m^{n+1} - H_{m-1}^{n+1}).$$

Распишем первое уравнение системы (закон сохранения массы):

$$\begin{aligned} & \frac{H_m^{n+1} - H_m^n}{\tau} + \\ & + \frac{1}{2h} ((V_m^n - |V_m^n|)H_{m+1}^{n+1} + (V_{m-1}^n + |V_{m-1}^n| - V_{m+1}^n + |V_{m+1}^n|)H_m^{n+1} - (V_m^n + |V_m^n|)H_{m-1}^{n+1}) = 0, \\ & 0 \leq m < M. \end{aligned}$$

Распишем второе уравнение системы:

- Для  $p = \rho^\gamma$  :

$$\begin{aligned} & \frac{H_m^{n+1} + H_{m-1}^{n+1}}{2} \cdot \left( \frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\tau} + V_m^n \cdot \begin{cases} \frac{V_m^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{h}, & V_m^n \geq 0 \\ \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_m^{n+1}}{h}, & V_m^n < 0 \end{cases} \right) + \\ & + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{H_m^{n+1} + H_{m-1}^{n+1}}{2} \right) \cdot \left( \frac{(H_m^{n+1})^{\gamma-1} - (H_{m-1}^{n+1})^{\gamma-1}}{h} \right) = \\ & = \mu \frac{V_{m+1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{H_m^{n+1} + H_{m-1}^{n+1}}{2} f_m^n, \\ & 0 < m < M, \text{ при } \hat{H}_{\bar{s}} \neq 0, \end{aligned}$$

$$V_m^{n+1} = 0$$

$$0 < m < M, \text{ при } \hat{H}_{\bar{s}} \neq 0,$$

$$V_0^{n+1} = V_M^{n+1} = 0.$$

- Для  $p = C\rho$  :

$$\begin{aligned} & \frac{H_m^{n+1} + H_{m-1}^{n+1}}{2} \cdot \left( \frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\tau} + V_m^n \cdot \begin{cases} \frac{V_m^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{h}, & V_m^n \geq 0 \\ \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_m^{n+1}}{h}, & V_m^n < 0 \end{cases} \right) + \\ & + \frac{C}{h} (H_m^{n+1} - H_{m-1}^{n+1}) = \mu \frac{V_{m+1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{H_m^{n+1} + H_{m-1}^{n+1}}{2} f_m^n, \\ & 0 < m < M, \text{ при } \hat{H}_{\bar{s}} \neq 0. \end{aligned}$$

$$V_m^{n+1} = 0$$

$$0 < m < M, \text{ при } \hat{H}_{\bar{s}} \neq 0,$$

$$V_0^{n+1} = V_M^{n+1} = 0.$$

Для  $m = 0$  первое уравнение системы имеет вид:

$$\frac{H_0^{n+1} - H_0^n}{\tau} + \frac{1}{2h} ((V_0^n - |V_0^n|)H_1^{n+1} + (-V_1^n + |V_1^n|)H_0^{n+1}) = 0.$$

Для  $m = M$  первое уравнение системы имеет вид:

$$\frac{H_M^{n+1} - H_M^n}{\tau} + \frac{1}{2h} ((V_{M-1}^n + |V_{M-1}^n|)H_M^{n+1} - (V_M^n + |V_M^n|)H_{M-1}^{n+1}) = 0.$$

## 2.1 Коэффициенты матрицы для плотности

Для матрицы  $A$  коэффициенты определяются формулами ниже:

**Главная диагональ:**

$$\begin{aligned} a_0 &= H_{\text{main}}[0] = 1 + \frac{\tau}{2h}(V_1 + |V_1|) \\ a_i &= H_{\text{main}}[i] = 1 + \frac{\tau}{2h}(V_{i+1} + |V_{i+1}| - V_i + |V_i|), \quad i = 1, \dots, M-2 \\ a_{M-1} &= H_{\text{main}}[M-1] = 1 + \frac{\tau}{2h}(-V_{M-1} + |V_{M-1}|) \end{aligned}$$

**Наддиагональ:**

$$\begin{aligned} b_0 &= H_{\text{above}}[0] = \frac{\tau}{2h}(V_1 - |V_1|) \\ b_i &= H_{\text{above}}[i] = \frac{\tau}{2h}(V_{i+1} - |V_{i+1}|), \quad i = 1, \dots, M-2 \\ b_{M-1} &= H_{\text{above}}[M-1] = 0 \end{aligned}$$

**Поддиагональ:**

$$\begin{aligned} c_0 &= H_{\text{under}}[0] = 0 \\ c_i &= H_{\text{under}}[i] = -\frac{\tau}{2h}(V_i + |V_i|), \quad i = 1, \dots, M-2 \\ c_{M-1} &= H_{\text{under}}[M-1] = -\frac{\tau}{2h}(V_{M-1} + |V_{M-1}|) \end{aligned}$$

**Правая часть:**

$$f[i] = H_{\text{prev}}[i] + \tau f_1 \left( t_{\text{step}}, \left( i + \frac{1}{2} \right) \cdot h \right)$$

## 2.2 Коэффициенты матрицы для скорости

**Главная диагональ:**

$$a_i = V_{\text{main}}[i] = \frac{1}{2}(H_i + H_{i-1}) \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h} |V_{\text{prev},i}| \right) + \frac{2\mu}{h^2}, \quad i = 1, \dots, M-1$$

**Наддиагональ:**

$$b_i = V_{\text{above}}[i] = \frac{1}{2}(H_i + H_{i-1}) \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{2}(V_{\text{prev},i} - |V_{\text{prev},i}|) - \frac{\mu}{h^2}, \quad i = 1, \dots, M-1$$

**Поддиагональ:**

$$c_i = V_{\text{under}}[i] = -\frac{1}{2}(H_i + H_{i-1}) \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{2}(V_{\text{prev},i} + |V_{\text{prev},i}|) - \frac{\mu}{h^2}, \quad i = 1, \dots, M-1$$

**Правая часть (два режима):**

**Режим 1** ( $\rho^\gamma$  степенной):

$$f[i] = \frac{1}{2}(H_i + H_{i-1}) \frac{V_{\text{prev},i}}{\tau} + \frac{1}{2}(H_i + H_{i-1}) f_2(t_{\text{step}}, ih) - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{2}(H_i + H_{i-1}) (H_i^{\gamma-1} - H_{i-1}^{\gamma-1})$$

**Режим 2** ( $C\rho$ ):

$$f[i] = \frac{1}{2}(H_i + H_{i-1}) \frac{V_{\text{prev},i}}{\tau} + \frac{1}{2}(H_i + H_{i-1}) f_2(t_{\text{step}}, ih) - C \frac{1}{h} (H_i - H_{i-1})$$

**Граничные условия:**

$$\begin{aligned} V_{\text{main}}[0] &= 1, & V_{\text{above}}[0] &= 0, & V_{\text{under}}[0] &= 0, & f[0] &= 0 \\ V_{\text{main}}[M] &= 1, & V_{\text{above}}[M] &= 0, & V_{\text{under}}[M] &= 0, & f[M] &= 0 \end{aligned}$$

### 3 Отладочный тест

Для отладочного теста будет использована система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = f_0, \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f. \end{cases}$$

Ниже представлены гладкие функции скорости и плотности —  $u(t, x)$  и  $\rho(t, x)$  соответственно. Они и будут использоваться для отладочного теста:

$$\begin{cases} u(t, x) = \cos(2\pi t) \cdot \sin(\pi x^2), \\ \rho(t, x) = e^t (\cos(\pi x) + 1.5). \end{cases}$$

Ими заданы функции  $f_0(t, x)$  и  $f(t, x, \mu)$ , с помощью системы.

При этом во втором уравнении функция  $f(t, x) = \begin{cases} f_{\text{exp}}, & \text{в случае, когда } p = \rho^\gamma, \\ f_{\text{lin}}, & \text{в случае, когда } p = C\rho, \end{cases}$  где

$$f_0(t, x) = e^t (\cos(\pi x) + 1.5) + e^t \cos(2\pi t) \cdot (2\pi x \cos(\pi x^2) (\cos(\pi x) + 1.5) - \pi \sin(\pi x) \sin(\pi x^2)),$$

$$\begin{aligned} f_{\text{exp}}(t, x, \mu) = & -2\pi \sin(2\pi t) \sin(\pi x^2) + \\ & + 2\pi x \cos^2(2\pi t) \sin(\pi x^2) \cos(\pi x^2) - \\ & - \frac{\gamma \pi (\cos(\pi x) + 1.5)^{\gamma-1} \sin(\pi x)}{e^{t(2-\gamma)}} - \\ & - \frac{\mu \cos(2\pi t) (2\pi \cos(\pi x^2) - 4\pi^2 x^2 \sin(\pi x^2))}{e^t (\cos(\pi x) + 1.5)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\text{lin}}(t, x, C) = & -2\pi \sin(2\pi t) \sin(\pi x^2) + 2\pi x \cos^2(2\pi t) \sin(\pi x^2) \cos(\pi x^2) - \\ & - \frac{C\pi \sin(\pi x)}{\cos(\pi x) + 1.5} - \frac{\mu \cos(2\pi t) (2\pi \cos(\pi x^2) - 4\pi^2 x^2 \sin(\pi x^2))}{e^t (\cos(\pi x) + 1.5)}. \end{aligned}$$

### 3.1 Результаты для линейного давления

Рассматривается приведенная выше система уравнений, для которой известно точное решение. Рассмотрим этот тест, чтобы установить правильность реализации схемы А. Г. Соколова. Для этого сравним точное решение и решение полученное по схеме. Очевидно, разница между точным и численным решением будет зависеть от  $C, \mu, h$  и  $\tau$ , а также от функции давления, поэтому рассмотрим все комбинации этих параметров и приведем нормы в виде таблиц для сравнения.

Приведенные ниже таблицы содержат 2 числа в каждой ячейке. Число слева — это норма в пространстве  $C[0, 1]$ , а число справа — это норма в пространстве  $L^2[0, 1]$ . Таблицы отображают правильность приближения в зависимости от параметров задачи: коэффициентов вязкости и сжимаемости, а так же шагов по пространству и по времени.

$$\|f\|_C = \max_m |f_m|, \quad \|f\|_{L^2_h} = \sqrt{h \sum_{m=0}^M f_m^2}$$

$\mu = 0.1, C = 1$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	7.447e-01, 3.491e-01	1.743e+00, 6.163e-01	3.011e+00, 6.705e-01	3.401e+00, 6.819e-01
0.01	1.218e-01, 7.149e-02	1.485e-01, 6.482e-02	1.751e-01, 7.795e-02	1.776e-01, 7.929e-02
0.001	2.076e-01, 1.108e-01	9.405e-03, 6.494e-03	1.629e-02, 6.849e-03	1.783e-02, 7.923e-03
0.0001	2.161e-01, 1.151e-01	2.110e-02, 1.211e-02	1.004e-03, 6.563e-04	1.644e-03, 6.886e-04

$\mu = 0.1, C = 10$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	1.671e+01, 6.119e+00	3.734e+02, 4.168e+00	3.638e+03, 1.152e+02	2.034e+04, 2.348e+02
0.01	4.999e-02, 2.711e-02	1.169e+01, 1.865e+00	2.714e+02, 1.032e+01	7.000e+02, 7.791e+00
0.001	2.175e-02, 1.341e-02	9.146e-03, 5.252e-03	5.048e-03, 2.695e-03	4.610e-03, 2.453e-03
0.0001	2.133e-02, 1.240e-02	5.088e-03, 3.394e-03	9.474e-04, 5.501e-04	5.044e-04, 2.698e-04

$\mu = 0.1, C = 100$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	8.965e+00, 4.550e+00	3.179e+02, 7.294e+00	4.016e+03, 4.483e+00	2.905e+04, 2.924e+02
0.01	2.563e-02, 1.454e-02	1.745e+02, 1.800e+01	4.018e+03, 1.271e+02	2.750e+03, 3.530e+01
0.001	2.231e-02, 1.133e-02	1.923e-03, 1.353e-03	4.549e+02, 1.480e+01	1.447e+04, 1.488e+02
0.0001	2.194e-02, 1.165e-02	8.359e-04, 4.169e-04	2.027e-04, 1.398e-04	2.237e-04, 1.469e-04

$\mu = 0.01, C = 1$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	1.081e+00, 3.412e-01	1.851e+02, 4.561e+00	2.083e+03, 1.673e+01	2.030e+04, 6.071e+01
0.01	1.643e-01, 1.071e-01	1.332e-01, 7.204e-02	4.613e+01, 3.948e+00	4.711e+01, 6.066e+00
0.001	2.265e-01, 1.343e-01	2.578e-02, 1.339e-02	1.605e-02, 7.619e-03	1.716e-02, 8.719e-03
0.0001	2.340e-01, 1.379e-01	4.170e-02, 1.757e-02	2.886e-03, 1.495e-03	1.646e-03, 7.663e-04

$\mu = 0.01, C = 10$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	1.892e+01, 6.560e+00	3.520e+02, 3.906e+00	3.677e+03, 4.175e+00	2.776e+04, 3.006e+02
0.01	4.109e-02, 2.656e-02	4.715e+01, 8.762e+00	2.602e+02, 1.172e+01	2.606e+04, 2.668e+02
0.001	3.508e-02, 1.948e-02	9.079e-03, 5.140e-03	4.590e+00, 1.731e+00	1.038e+03, 4.105e+01
0.0001	3.486e-02, 1.931e-02	6.534e-03, 3.871e-03	9.528e-04, 5.446e-04	5.677e-04, 2.712e-04

$\mu = 0.01, C = 100$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	3.262e+01, 3.828e+00	3.451e+02, 5.989e+00	3.951e+03, 1.250e+02	2.765e+04, 3.008e+02
0.01	2.545e-02, 1.649e-02	3.902e+02, 4.288e+00	2.309e+03, 8.547e+01	4.114e+04, 4.114e+02
0.001	2.332e-02, 1.272e-02	2.381e-03, 1.468e-03	2.291e+03, 4.869e+01	3.490e+01, 9.930e+00
0.0001	2.294e-02, 1.300e-02	1.881e-03, 8.460e-04	2.485e-04, 1.498e-04	1.773e+03, 3.214e+01

$\mu = 0.001, C = 1$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	1.115e+00, 3.466e-01	1.490e+02, 1.705e+01	1.730e+03, 1.930e+01	1.278e+04, 6.778e+01
0.01	1.686e-01, 1.134e-01	1.342e-01, 7.422e-02	3.114e+03, 9.941e+01	3.504e+04, 3.509e+02
0.001	2.402e-01, 1.389e-01	3.092e-02, 1.585e-02	1.785e-02, 7.904e-03	2.378e+03, 3.172e+01
0.0001	2.478e-01, 1.424e-01	4.693e-02, 1.948e-02	3.445e-03, 1.825e-03	1.842e-03, 7.958e-04

$\mu = 0.001, C = 10$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	1.231e+01, 5.541e+00	3.848e+02, 4.418e+00	3.511e+03, 1.111e+02	3.492e+04, 3.492e+02
0.01	4.161e-02, 2.732e-02	3.743e+02, 4.094e+00	2.331e+03, 7.551e+01	2.712e+04, 3.035e+02
0.001	3.836e-02, 2.123e-02	9.288e-03, 5.305e-03	1.446e+03, 5.110e+01	1.205e+04, 1.477e+02
0.0001	3.814e-02, 2.113e-02	6.841e-03, 4.176e-03	9.855e-04, 5.663e-04	2.106e+01, 2.776e+00

$\mu = 0.001, C = 100$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	3.264e+01, 3.830e+00	3.882e+02, 4.455e+00	3.460e+03, 1.109e+02	3.492e+04, 5.252e+01
0.01	2.550e-02, 1.701e-02	1.941e+02, 2.222e+01	4.200e+03, 1.329e+02	3.493e+04, 3.804e+01
0.001	2.338e-02, 1.288e-02	2.481e-03, 1.503e-03	2.261e+03, 7.767e+01	1.371e+04, 8.631e+01
0.0001	2.300e-02, 1.316e-02	2.044e-03, 9.163e-04	2.589e-04, 1.533e-04	8.495e+03, 6.531e+01

### 3.2 Результаты для нелинейного давления

$\mu = 0.1$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	6.435e-01, 3.776e-01	6.467e-01, 4.241e-01	6.467e-01, 4.285e-01	6.467e-01, 4.289e-01
0.01	6.729e-02, 3.948e-02	6.762e-02, 4.434e-02	6.762e-02, 4.480e-02	6.762e-02, 4.485e-02
0.001	6.759e-03, 3.966e-03	6.792e-03, 4.454e-03	6.792e-03, 4.500e-03	6.792e-03, 4.505e-03
0.0001	6.762e-04, 3.968e-04	6.795e-04, 4.456e-04	6.795e-04, 4.502e-04	6.795e-04, 4.507e-04

$\mu = 0.01$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	7.086e-01, 3.783e-01	8.383e-01, 5.462e-01	8.651e-01, 5.680e-01	8.681e-01, 5.703e-01
0.01	3.218e-01, 2.001e-01	2.277e-01, 6.652e-02	2.451e-01, 8.444e-02	2.458e-01, 8.656e-02
0.001	4.587e-01, 2.581e-01	4.516e-02, 2.660e-02	2.603e-02, 7.279e-03	2.623e-02, 8.794e-03
0.0001	4.782e-01, 2.643e-01	5.986e-02, 3.126e-02	4.618e-03, 2.767e-03	2.638e-03, 7.352e-04

$\mu = 0.001$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1	6.310e-01, 7.559e-01	6.423e-01, 8.920e-01	1.014e+00, 1.198e+00	2.211e+00, 1.107e+00
0.01	2.385e-01, 1.017e-01	1.032e-01, 6.414e-02	3.389e-01, 2.549e-01	3.389e-01, 1.248e+00
0.001	4.796e-01, 8.122e-02	5.570e-02, 2.240e-02	6.397e-02, 4.253e-02	6.447e-01, 3.672e-01
0.0001	3.394e-01, 5.122e-02	3.398e-02, 1.241e-02	1.468e-02, 3.364e-03	7.595e-02, 2.253e-02

### 3.3 Метод вложенных сеток

Метод вложенных сеток позволяет определить правильность реализации схемы и понять насколько быстро сходится схема при уменьшении шагов. С помощью метода вложенных сеток можно будет установить насколько точно сходится схема в зависимости от параметров  $\mu$  и  $C$ .

Так как значения необходимо сравнивать в одних и тех же точках на прямой, то вместо удвоения сеток, рассматривается вложенная сетка с утроенным количеством узлов. Эта необходимость обусловлена тем, что схема Соколова рассматривает плотность в точках вида  $x_k = (k + 1/2) \cdot h$ , где  $k \in \{0, 1, \dots, M - 1\}$ . К примеру, рассмотрим сетки  $\omega^0$  и  $\omega^1$  на отрезке  $[0, 1]$  из  $M$  и  $3M$  сегментов, соответственно. Нумерация сегментов ведется с левого конца отрезка начиная с 0. Середина сегмента с номером 0 на сетке  $\omega^0$  соответствует середине сегмента номер 1 на сетке  $\omega^1$ . Аналогично эта же точка будет иметь другой номер на вложенной сетке  $\omega^2$  с  $9M$  сегментами. Итак, на сетке  $\omega^0$  точки с номерами 0, 1, 2, 3, 4, ... соответствуют точкам с номерами 1, 4, 7, 10, 13, ... на сетке  $\omega^1$ , и эти же точки соответствуют точкам с номерами 4, 13, 22, 31, 40, ... на сетке  $\omega^2$ . Эти точки

являются одними и теми же точками на отрезке  $[0, 1]$ , но имеют разную нумерацию из-за разных шагов сетки.

В таблицах использованы нормы:

$$\|f\|_C = \max_m |f_m|, \quad \|f\|_{L_2^h} = \sqrt{h \sum_{m=0}^M f_m^2}, \quad \|f\|_{W_2^{1,h}} = \sqrt{\|f\|_{L_2^h}^2 + h \sum_{m=1}^M \left( \frac{f_m - f_{m-1}}{h} \right)^2}$$

### 3.3.1 Линейное давление

Для иллюстрации были взяты шаги  $M = N = 100$ , то есть  $h = \tau = 0.01$ .  $v^k$  — это численное решение полученное на сетке  $\omega^k$ ,  $v$  — это численное решение полученное на сетке  $\omega^0$ , а  $u$  — это точное решение.

	$C = 1, \mu = 0.1$		$C = 1, \mu = 0.01$		$C = 1, \mu = 0.001$
$v - v^1$	9.600600e-02 4.259744e-02 2.286887e-01	$v - v^1$	8.946900e-02 4.734013e-02 2.677085e-01	$v - v^1$	8.953000e-02 4.865043e-02 2.914612e-01
$v - v^2$	1.306490e-01 5.734384e-02 3.096443e-01	$v - v^2$	1.186820e-01 6.372459e-02 3.672175e-01	$v - v^2$	1.193000e-01 6.559127e-02 4.064939e-01
$v - v^3$	1.425090e-01 6.232188e-02 3.372273e-01	$v - v^3$	1.283740e-01 6.925911e-02 4.021761e-01	$v - v^3$	1.292430e-01 7.133024e-02 4.481194e-01
$v - u$	1.484980e-01 6.482281e-02 3.511351e-01	$v - u$	1.332100e-01 7.204049e-02 4.200448e-01	$v - u$	1.342110e-01 7.421791e-02 4.696637e-01

	$C = 10, \mu = 0.1$		$C = 10, \mu = 0.01$		$C = 10, \mu = 0.001$
$v - v^1$	6.016e-03 1.996e-03 4.679e-02	$v - v^1$	5.943e-03 1.946e-03 6.108e-02	$v - v^1$	6.058e-03 2.004e-03 6.520e-02
$v - v^2$	8.093e-03 1.550e-03 1.090e-01	$v - v^2$	8.022e-03 1.515e-03 1.429e-01	$v - v^2$	8.195e-03 1.562e-03 1.529e-01
$v - v^3$	8.794e-03 9.720e-04 2.052e-01	$v - v^3$	8.725e-03 9.508e-04 2.693e-01	$v - v^3$	8.922e-03 9.810e-04 2.885e-01
$v - u$	9.145e-03 5.252e-03 1.869e-02	$v - u$	9.079e-03 5.140e-03 3.046e-02	$v - u$	9.288e-03 5.305e-03 3.583e-02

	$C = 100, \mu = 0.1$		$C = 100, \mu = 0.01$		$C = 100, \mu = 0.001$
$v - v^1$	1.258e-03 5.159e-04 1.018e-02	$v - v^1$	1.563e-03 5.617e-04 9.489e-03	$v - v^1$	1.628e-03 5.756e-04 9.664e-03
$v - v^2$	1.699e-03 3.995e-04 2.232e-02	$v - v^2$	2.105e-03 4.340e-04 2.093e-02	$v - v^2$	2.193e-03 4.446e-04 2.133e-02
$v - v^3$	1.849e-03 2.504e-04 4.113e-02	$v - v^3$	2.289e-03 2.718e-04 3.867e-02	$v - v^3$	2.384e-03 2.784e-04 3.944e-02
$v - u$	1.924e-03 1.353e-03 2.737e-03	$v - u$	2.381e-03 1.468e-03 5.043e-03	$v - u$	2.480e-03 1.503e-03 5.526e-03

### 3.3.2 Нелинейное давление

	$p = \rho^\gamma, \mu = 0.1$		$p = \rho^\gamma, \mu = 0.01$		$p = \rho^\gamma, \mu = 0.001$
$v - v^1$	2.034e-02 4.561e-03 1.515e-01	$v - v^1$	2.415e-02 6.302e-03 4.631e-01	$v - v^1$	3.228e-02 8.072e-03 6.224e-01
$v - v^2$	2.750e-02 3.543e-03 3.557e-01	$v - v^2$	3.247e-02 4.922e-03 1.081e+00	$v - v^2$	4.301e-02 6.289e-03 1.443e+00
$v - v^3$	2.993e-02 2.223e-03 6.713e-01	$v - v^3$	3.526e-02 3.094e-03 2.036e+00	$v - v^3$	4.657e-02 3.950e-03 2.712e+00
$v - u$	1.071e+00 6.709e-01 3.824e+00	$v - u$	1.903e-01 1.145e-01 9.678e-01	$v - u$	5.930e-02 3.100e-02 3.403e-01

### 3.4 Выводы

При шагах сетки  $h < \tau$  схема плохо сходится. Это вызвано худшей обусловленностью матрицы и, как следствие, возникновению особенностей, которые не устраняются, из-за консервативности схемы. Следует стремиться уменьшить шаг по времени.

Наилучшие параметры для сходимости схемы это наименьшее  $C$  и наибольшее  $\mu$ .

Из анализа норм на вложенных сетках становится ясно, что реализованная схема работает правильно. Как и ожидается, чем мельче сетка, тем тем ближе численное решение будет к точному.

## 4 Негладкие начальные данные

Зададим на области  $Q = [0; T] \times [0; 10]$  две задачи:

$$\begin{aligned} \text{Первая задача:} \quad & \begin{cases} \rho_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 4.5 \text{ или } x > 5.5 \\ 2, & x \in [4.5; 5.5] \end{cases} \\ u_0(x) \equiv 0, \\ u(t, 0) = u(t, 10) = 0, \\ f \equiv 0 \end{cases} & \begin{matrix} x \in [0; 10] \\ t \in [0; T] \end{matrix} \\ \\ \text{Вторая задача:} \quad & \begin{cases} u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 4.5 \text{ или } x > 5.5 \\ 1, & x \in [4.5; 5.5] \end{cases} \\ \rho_0(x) \equiv 1, \\ u(t, 0) = u(t, 10) = 0, \\ f \equiv 0 \end{cases} & \begin{matrix} x \in [0; 10] \\ t \in [0; T] \end{matrix} \end{aligned}$$

Ниже приведены таблицы, содержащие времена стабилизации  $T_{st}$  решений первой системы и величины:

$$\left\| (H^{n_{st}}, V^{n_{st}}) - (\tilde{H}, \tilde{V}) \right\|_{C_h}$$

Функции  $\tilde{H}$  и  $\tilde{V}$  считаются постоянными и равны  $\frac{1}{M} \sum_{m \in \omega_h^{1/2}} H_m^{n_{st}}$  и нулю соответственно, где  $M$  это количество точек в сетке  $\omega_h^{\frac{1}{2}}$ . То есть в первой задаче  $(\tilde{H}, \tilde{V}) = (1.1, \dots, 1.1, 0, \dots, 0)$ , а во второй  $(\tilde{H}, \tilde{V}) = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ .

При различных входных параметрах (строки таблицы) на разных временных слоях (столбцы таблицы). Также приведены таблицы, содержащие величины на разных временных слоях (столбцы таблицы) при различных входных параметрах (строки таблицы):

$$\Delta_m(n) = \frac{\sum_{m \in \omega_h} H_m^n - \sum_{m \in \omega_h} H_m^0}{\sum_{m \in \omega_h} H_m^0}$$

В большинстве проведенных численных экспериментов рассматривается  $\varepsilon = 0.001$ . Это оптимальное число для нахождения времени стабилизации и достаточное, чтобы увидеть как зависит решение от параметров задачи.

В качестве основных результатов представлены таблицы: первая таблица задает таблицу невязок в зависимости от времени стабилизации (в столбце  $n_{st}$  можно понять каким был взят  $\varepsilon$ ), вторая таблица показывает массу на всем отрезке на соответствующем времени, которая необходима, чтобы показать закон сохранения массы.

## 4.1 Первая задача

1.  $C = 1, \mu = 0.1$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	9.516e-02	5.305e-02	1.740e-02	9.854e-03	77.0500
0.1, 0.025	8.427e-02	4.164e-02	2.134e-02	9.980e-03	72.0000
0.1, 0.0125	9.044e-02	5.022e-02	1.988e-02	9.967e-03	71.9500

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	2.878e-14	3.276e-14	3.402e-14	3.460e-14
0.1, 0.025	8.446e-15	1.677e-14	8.343e-15	9.723e-15
0.1, 0.0125	6.303e-15	8.453e-15	9.524e-15	1.005e-15

2.  $C = 1, \mu = 0.01$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	1.270e-01	6.405e-02	4.962e-02	9.916e-03	341.7500
0.1, 0.025	2.705e-01	2.974e-02	3.087e-02	9.991e-03	351.5500
0.1, 0.0125	3.306e-02	2.327e-02	1.730e-02	9.997e-03	346.4375

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	5.048e-14	3.683e-14	8.152e-15	4.297e-14
0.1, 0.025	4.437e-14	7.689e-14	7.875e-14	8.278e-14
0.1, 0.0125	8.534e-14	8.913e-14	8.919e-14	9.138e-14

3.  $C = 1, \mu = 0.001$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	3.773e-01	8.388e-02	4.968e-02	9.923e-03	2280.4430
0.1, 0.025	5.505e-01	8.773e-02	5.096e-02	1.000e-02	2257.5250
0.1, 0.0125	6.598e-01	8.833e-02	5.081e-02	9.995e-03	2187.3125

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	1.988e-14	3.042e-14	2.624e-14	2.782e-14
0.1, 0.025	-6.097e-15	-7.958e-15	-8.044e-15	-8.075e-15
0.1, 0.0125	-8.174e-15	-5.239e-15	-7.498e-15	-9.450e-15

4.  $C = 10, \mu = 0.1$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	3.055e-01	8.490e-02	3.398e-02	9.931e-03	50.4500
0.1, 0.025	3.759e-01	8.567e-02	3.562e-02	9.899e-03	49.6000
0.1, 0.0125	3.418e-01	8.385e-02	3.459e-02	9.996e-03	49.5375

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	-2.894e-15	-3.299e-15	-3.448e-15	-3.509e-15
0.1, 0.025	-2.571e-15	-4.826e-15	-6.091e-15	-2.927e-15
0.1, 0.0125	-4.153e-15	-4.217e-15	-4.927e-15	-5.255e-15

5.  $C = 10$ ,  $\mu = 0.01$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	9.426e-02	5.507e-02	2.663e-02	9.998e-03	283.8960
0.1, 0.025	4.755e-02	4.327e-02	2.242e-02	9.986e-03	281.3250
0.1, 0.0125	3.442e-02	4.964e-02	2.382e-02	1.000e-02	280.5125

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	-4.437e-15	-4.533e-15	-4.569e-15	-4.585e-15
0.1, 0.025	-2.557e-14	-2.769e-14	-2.875e-14	-2.948e-14
0.1, 0.0125	-1.177e-14	-1.660e-14	-2.002e-14	-2.274e-14

6.  $C = 10$ ,  $\mu = 0.001$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	2.506e-01	9.475e-02	6.556e-02	9.995e-03	678.1095
0.1, 0.025	3.077e-01	1.115e-01	8.026e-02	9.997e-03	662.1500
0.1, 0.0125	1.992e-01	1.394e-01	7.121e-02	9.994e-03	637.8375

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	-3.655e-15	-8.937e-15	-7.038e-15	-5.638e-15
0.1, 0.025	-6.316e-14	-5.351e-14	-8.367e-14	-6.379e-14
0.1, 0.0125	-9.581e-14	-8.112e-14	-6.806e-14	-9.268e-14

7.  $C = 100$ ,  $\mu = 0.1$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.05, 0.005	1.896e-01	8.329e-02	4.465e-02	9.973e-03	23.6600
0.05, 0.0025	1.558e-01	9.272e-02	4.836e-02	9.845e-03	22.1350
0.05, 0.00125	9.427e-02	7.448e-02	4.176e-02	1.000e-02	22.1212

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.05, 0.005	-4.084e-14	-4.208e-14	-7.263e-14	-5.286e-14
0.05, 0.0025	-2.569e-14	-2.844e-14	-2.965e-14	-3.081e-14
0.05, 0.00125	-2.421e-14	-3.201e-14	-3.571e-14	-3.769e-14

8.  $C = 100$ ,  $\mu = 0.01$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.05, 0.005	3.542e-01	2.700e-01	1.301e-02	9.998e-03	87.7750
0.05, 0.0025	5.811e-01	3.914e-01	2.211e-02	9.983e-03	119.2225
0.05, 0.00125	2.467e-01	1.543e-01	1.124e-02	9.994e-03	134.1962

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.05, 0.005	-8.399e-14	-8.415e-14	-8.428e-14	-8.431e-14
0.05, 0.0025	-7.235e-14	-7.280e-14	-7.295e-14	-7.302e-14
0.05, 0.00125	-2.779e-14	-3.081e-14	-3.111e-14	-3.158e-14

9.  $C = 100$ ,  $\mu = 0.001$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.05, 0.005	3.927e-01	1.930e-01	1.652e-02	9.997e-03	259.4300
0.05, 0.0025	2.394e-01	2.103e-01	1.329e-02	9.977e-03	315.3300
0.05, 0.00125	2.684e-01	2.111e-01	1.993e-02	9.991e-03	370.7850

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.05, 0.005	-4.105e-14	-4.162e-14	-4.194e-14	-4.210e-14
0.05, 0.0025	-3.954e-14	-2.495e-14	-2.584e-14	-2.335e-14
0.05, 0.00125	-4.003e-14	-3.489e-14	-3.484e-14	-4.471e-14

10.  $\gamma = 1.4$ ,  $\mu = 0.1$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	1.488e-01	7.137e-02	3.208e-02	9.989e-03	67.9000
0.1, 0.025	1.081e-01	7.6155e-02	3.125e-02	9.990e-03	67.8250
0.1, 0.0125	7.882e-02	4.349e-02	2.309e-02	9.997e-03	63.6250

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	-4.803e-14	-4.587e-14	-4.813e-14	-3.452e-14
0.1, 0.025	-1.349e-15	-1.355e-15	-1.355e-14	-1.355e-14
0.1, 0.0125	-7.285e-15	-9.570e-15	-1.058e-14	-1.108e-14

11.  $\gamma = 1.4$ ,  $\mu = 0.01$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	9.412e-02	1.772e-02	1.385e-02	9.990e-03	303.4000
0.1, 0.025	9.819e-02	4.873e-02	2.611e-02	9.998e-03	312.2250
0.1, 0.0125	6.862e-02	2.844e-02	1.597e-02	9.979e-03	312.1125

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	-8.273e-15	-8.275e-15	-7.578e-15	-7.154e-15
0.1, 0.025	-6.087e-14	-7.066e-15	-7.510e-15	-7.759e-15
0.1, 0.0125	-5.577e-14	-5.587e-14	-5.590e-14	-5.592e-14

12.  $\gamma = 1.4$ ,  $\mu = 0.001$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	3.841e-01	1.362e-01	2.201e-02	9.996e-03	1383.0000
0.1, 0.025	3.079e-01	1.442e-01	2.173e-02	9.995e-03	1577.5500
0.1, 0.0125	4.073e-01	1.329e-01	2.567e-02	9.993e-03	1834.5375

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	-7.415e-15	-7.959e-15	-8.039e-15	-8.057e-15
0.1, 0.025	-4.149e-14	-4.667e-14	-4.696e-14	-4.716e-14
0.1, 0.0125	-2.670e-13	-5.033e-13	-5.826e-13	-6.131e-13

## 4.2 Вторая задача

1.  $C = 1, \mu = 0.1$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	4.240e-01	7.926e-02	3.560e-02	9.990e-03	129.9000
0.1, 0.025	4.634e-01	8.406e-02	2.039e-02	9.994e-03	139.7000
0.1, 0.0125	3.997e-01	9.378e-02	3.115e-02	9.982e-03	149.6000

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	-3.188e-14	-3.393e-14	-3.432e-14	-3.443e-14
0.1, 0.025	-9.427e-15	-9.608e-15	-9.620e-15	-9.620e-15
0.1, 0.0125	-8.733e-15	-9.626e-15	-9.917e-15	-1.002e-14

2.  $C = 1, \mu = 0.01$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	6.016e-02	4.545e-02	2.405e-02	9.973e-03	763.0500
0.1, 0.025	1.476e-01	3.562e-02	4.169e-02	9.999e-03	711.0250
0.1, 0.0125	1.348e-01	7.861e-02	3.904e-02	9.993e-03	698.7500

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	-3.657e-14	-3.758e-14	-3.813e-14	-3.840e-14
0.1, 0.025	-7.855e-15	-7.927e-15	-7.942e-15	-7.947e-15
0.1, 0.0125	-2.590e-15	-5.641e-15	-6.694e-15	-7.169e-15

3.  $C = 1, \mu = 0.001$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	3.939e-01	9.490e-02	1.204e-02	9.999e-03	3247.7000
0.1, 0.025	4.482e-01	9.577e-02	1.324e-02	9.998e-03	3576.0250
0.1, 0.0125	4.866e-01	9.676e-02	1.489e-02	9.999e-03	3685.2375

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	-4.119e-14	-7.533e-15	-7.759e-14	-7.830e-14
0.1, 0.025	-2.018e-14	-2.545e-14	-3.370e-14	-4.811e-14
0.1, 0.0125	-4.506e-14	-5.645e-14	-5.845e-14	-5.911e-14

4.  $C = 10, \mu = 0.1$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	2.478e-01	1.978e-02	2.240e-02	9.969e-03	61.6500
0.1, 0.025	1.225e-01	2.116e-02	1.915e-02	9.993e-03	57.0000
0.1, 0.0125	1.304e-01	2.164e-02	2.450e-02	9.996e-03	50.9625

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	-1.299e-14	-1.565e-14	-1.701e-14	-1.808e-14
0.1, 0.025	-3.722e-14	-3.778e-14	-3.805e-14	-3.823e-14
0.1, 0.0125	-4.720e-15	-7.215e-15	-8.229e-15	-8.799e-15

5.  $C = 10$ ,  $\mu = 0.01$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	8.293e-01	2.116e-01	4.091e-02	9.984e-03	433.415
0.1, 0.025	6.475e-01	2.402e-01	3.342e-02	9.995e-03	421.7000
0.1, 0.0125	7.966e-01	2.398e-01	1.548e-02	9.989e-03	403.0375

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	-9.367e-15	-9.378e-15	-4.381e-15	-8.321e-15
0.1, 0.025	-5.998e-14	-6.013e-14	-6.023e-14	-6.032e-14
0.1, 0.0125	-1.623e-14	-1.799e-14	-1.914e-14	-2.007e-14

6.  $C = 10$ ,  $\mu = 0.001$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	2.579e-01	7.760e-02	2.071e-02	9.990e-03	1542.4500
0.1, 0.025	2.405e-01	7.236e-02	2.385e-02	9.995e-03	1617.3000
0.1, 0.0125	2.295e-01	7.683e-02	2.307e-02	9.936e-03	1678.1500

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	-1.798e-14	-2.108e-14	-2.256e-14	-2.343e-13
0.1, 0.025	-1.693e-14	-2.403e-14	-2.043e-14	-1.939e-14
0.1, 0.0125	-1.605e-14	-1.466e-14	-1.055e-14	-1.909e-13

7.  $C = 100$ ,  $\mu = 0.1$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	6.820e-02	5.212e-02	2.006e-02	9.987e-03	30.0100
0.1, 0.025	1.705e-01	6.334e-02	1.986e-02	9.675e-03	10.0075
0.1, 0.0125	3.141e-01	8.016e-02	2.093e-02	9.994e-03	5.0025

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	-7.972e-15	-7.980e-15	-7.985e-15	-7.988e-15
0.1, 0.025	-3.443e-14	-3.494e-14	-3.518e-14	-3.572e-14
0.1, 0.0125	-9.908e-15	-1.712e-14	-2.196e-14	-2.684e-14

8.  $C = 100$ ,  $\mu = 0.01$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	3.540e-01	2.302e-02	2.295e-02	9.967e-03	205.4300
0.1, 0.025	2.184e-01	1.949e-02	1.728e-02	9.954e-03	255.2450
0.1, 0.0125	1.928e-01	1.749e-02	1.492e-02	9.902e-03	36.0175

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	-3.410e-14	-3.484e-14	-3.517e-14	-3.535e-14
0.1, 0.025	-1.395e-14	-2.403e-14	-2.103e-14	-1.249e-14
0.1, 0.0125	-1.234e-14	-1.339e-14	-1.293e-14	-1.111e-14

9.  $C = 100$ ,  $\mu = 0.001$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	2.585e-01	7.255e-02	2.485e-02	9.245e-03	502.8200
0.1, 0.025	2.445e-01	7.802e-02	2.585e-02	9.995e-03	511.6075
0.1, 0.0125	2.485e-01	8.533e-02	1.049e-02	9.999e-03	517.5063

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	-1.394e-14	-2.294e-14	-2.294e-14	-2.295e-14
0.1, 0.025	-3.293e-14	-1.239e-14	-1.395e-14	-8.294e-15
0.1, 0.0125	-1.293e-14	-1.120e-14	-9.938e-14	-6.764e-14

10.  $\gamma = 1.4$ ,  $\mu = 0.1$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	1.670e-01	5.063e-02	2.587e-02	9.932e-03	128.2500
0.1, 0.025	2.175e-01	6.250e-02	2.862e-02	9.981e-03	134.9500
0.1, 0.0125	2.389e-01	7.778e-02	3.787e-02	9.966e-03	143.2875

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	-3.476e-14	-3.485e-14	-3.488e-14	-3.497e-14
0.1, 0.025	-9.636e-15	-1.042e-14	-1.067e-14	-1.077e-14
0.1, 0.0125	-9.308e-15	-1.011e-14	-1.038e-14	-1.049e-14

11.  $\gamma = 1.4$ ,  $\mu = 0.01$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	6.161e-02	2.348e-02	1.655e-02	9.970e-03	497.9000
0.1, 0.025	5.500e-02	2.242e-02	1.536e-02	9.997e-03	518.3250
0.1, 0.0125	6.304e-02	2.850e-02	1.748e-02	9.998e-03	525.2750

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	-7.940e-14	-7.962e-14	-7.968e-14	-7.970e-14
0.1, 0.025	-4.454e-14	-4.491e-14	-4.529e-14	-4.550e-14
0.1, 0.0125	-7.528e-14	-7.597e-14	-7.651e-14	-7.679e-14

12.  $\gamma = 1.4$ ,  $\mu = 0.001$

h, $\tau$	$n_{st}/4$	$n_{st}/2$	$3n_{st}/4$	$n_{st}$	$T_{st}$
0.1, 0.05	5.632e-01	3.318e-01	2.946e-02	9.997e-03	2842.5000
0.1, 0.025	5.659e-01	3.775e-01	2.741e-02	9.999e-03	2912.8250
0.1, 0.0125	4.057e-01	2.019e-01	2.823e-02	9.993e-03	2996.5750

h, $\tau$	$\Delta_m(n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st}/2)$	$\Delta_m(3n_{st}/4)$	$\Delta_m(n_{st})$
0.1, 0.05	-7.891e-14	-7.921e-14	-7.934e-14	-7.941e-14
0.1, 0.025	-4.030e-14	-7.212e-14	-7.379e-14	-7.591e-14
0.1, 0.0125	-3.617e-14	-4.172e-14	-4.210e-14	-4.239e-14

### 4.3 Графики

Иллюстрации для задачи с плотностью  $p = C\rho$ . Графики представлены так, чтобы можно было соотнести скорость стабилизации, относительно параметров  $C$  и  $\mu$ .

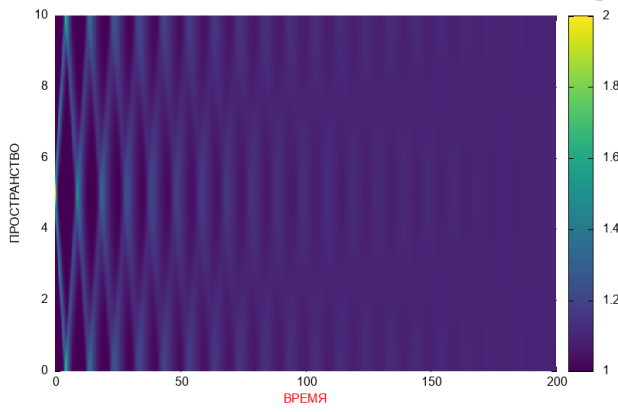
Иллюстрации для задачи с плотностью  $p = \rho^\gamma$ .

### 4.4 Выводы

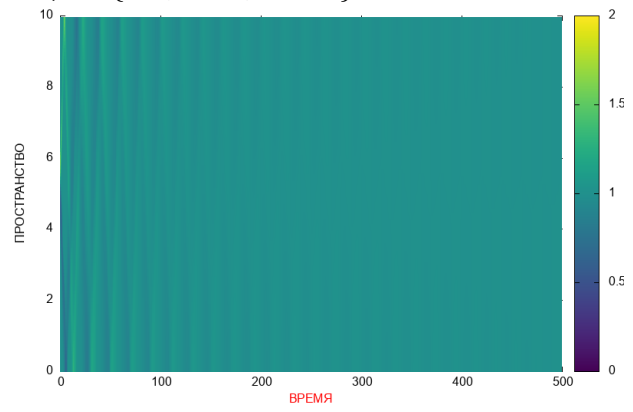
При увеличении  $C$  время стабилизации уменьшается, при уменьшении  $\mu$  время стабилизации увеличивается. Решение иногда не стабилизируется, если  $h < \tau$ , ибо алгоритм расходится в этих случаях.

1. Таблицы показывают, что время выхода на стационар зависит больше от параметра  $\mu$ . С уменьшением  $\mu$  время стабилизации увеличивается
2. Период колебаний почти не зависит от  $\mu$ , а зависимость от  $C$  явно прослеживается.
3. Явно выполняется закон сохранения масс, в виду того, что схема консервативная. Данный факт свидетельствует о правильности первого уравнения разностной схемы.

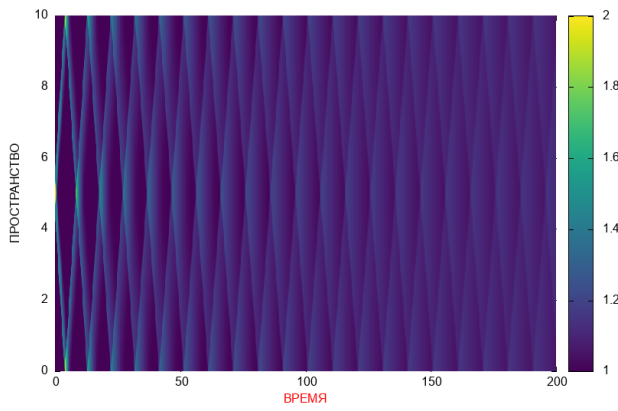
Описание для  $C = 1$  и разных  $\mu \in \{0.1; 0.01; 0.001\}$ .



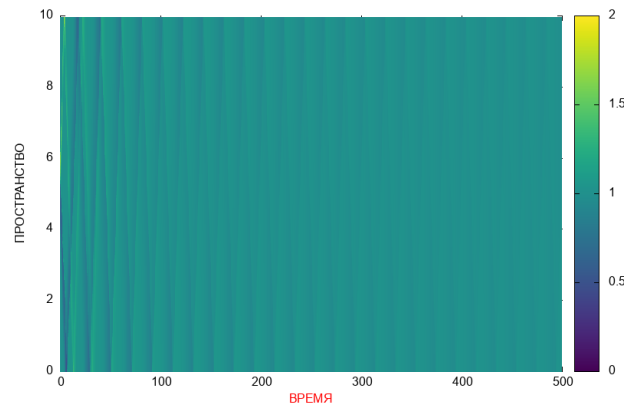
$C = 1, \mu = 0.1$



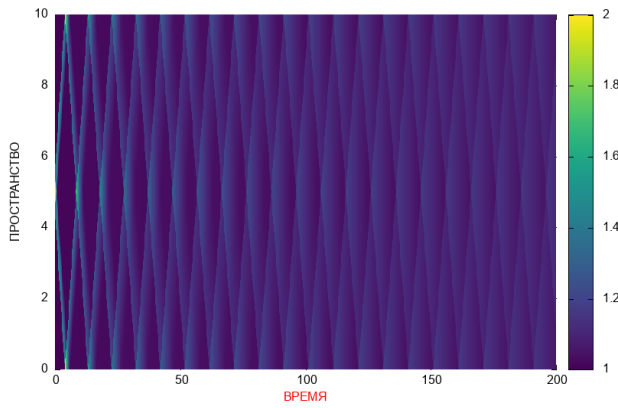
$C = 1, \mu = 0.1$



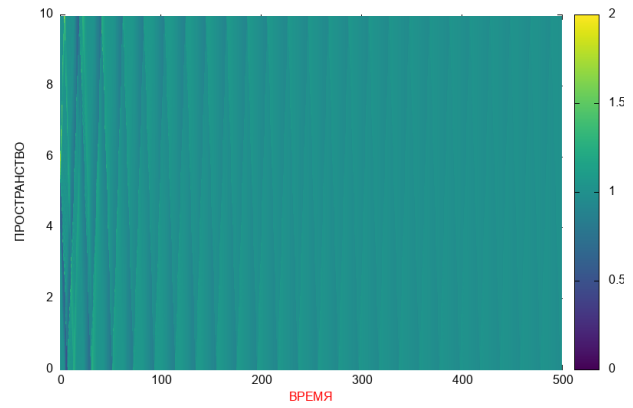
$C = 1, \mu = 0.01$



$C = 1, \mu = 0.01$

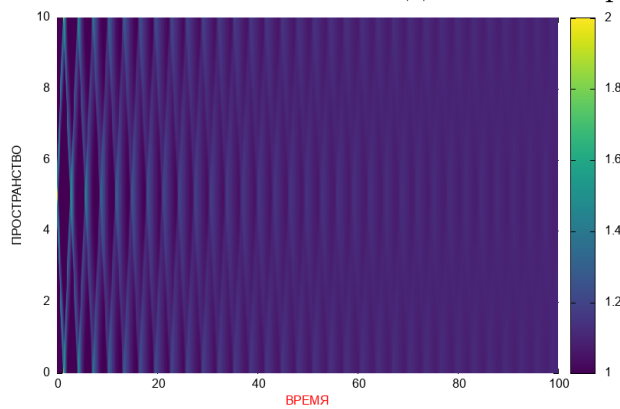


$C = 1, \mu = 0.001$

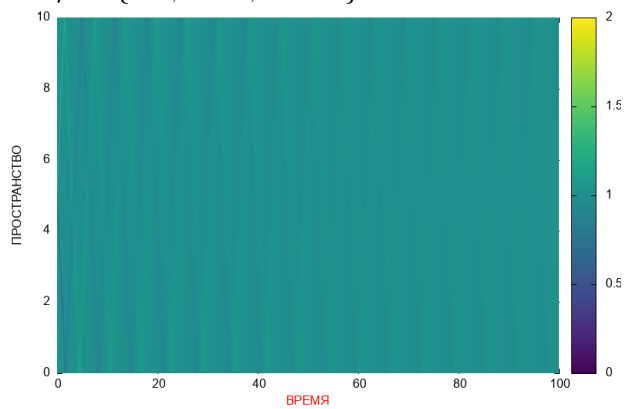


$C = 1, \mu = 0.001$

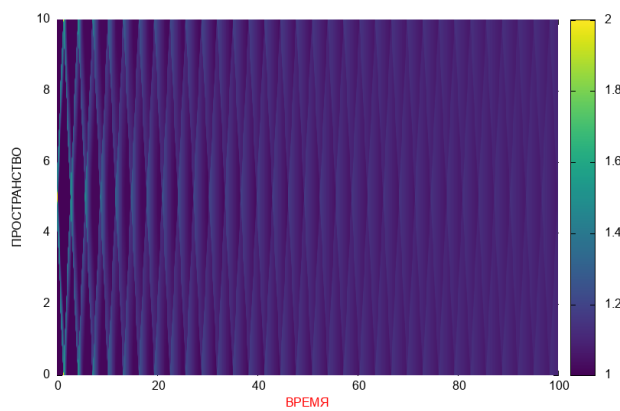
Описание для  $C = 10$  и разных  $\mu \in \{0.1; 0.01; 0.001\}$ .



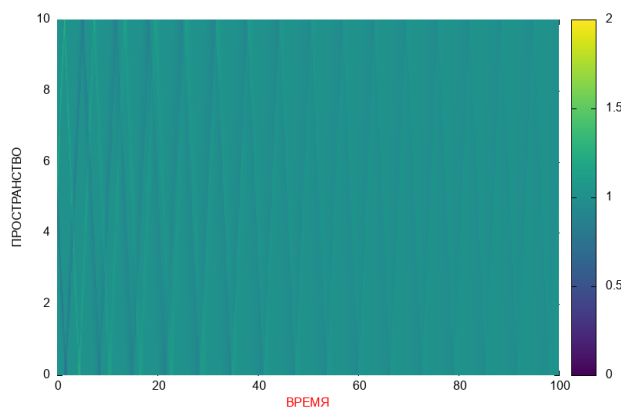
$C = 10, \mu = 0.1$



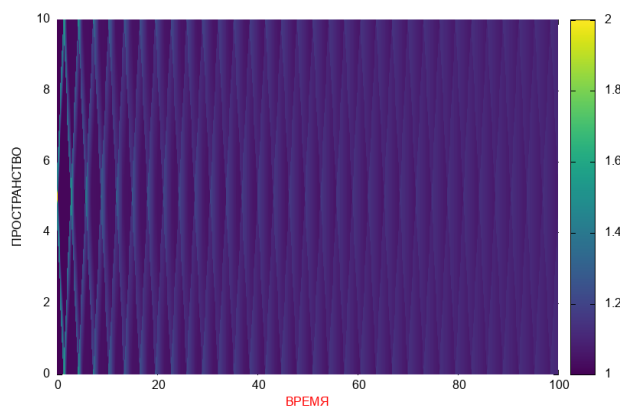
$C = 10, \mu = 0.1$



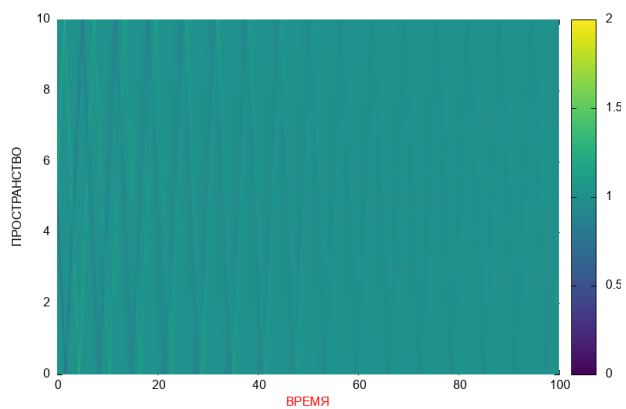
$C = 10, \mu = 0.01$



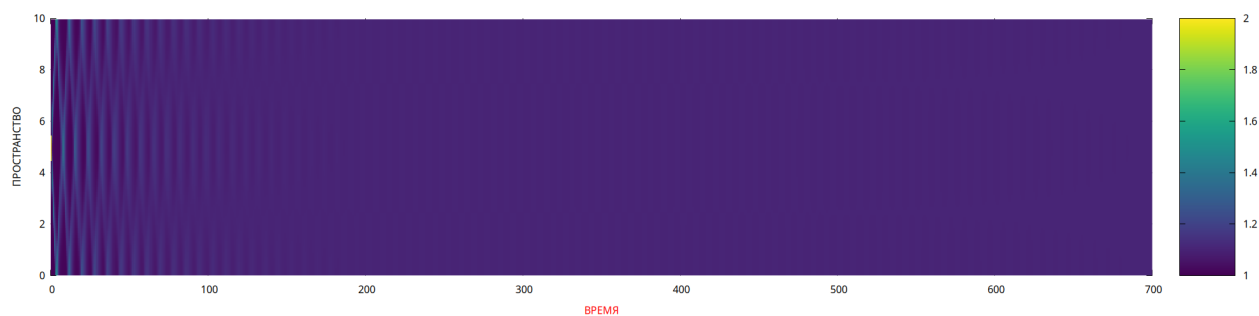
$C = 10, \mu = 0.01$



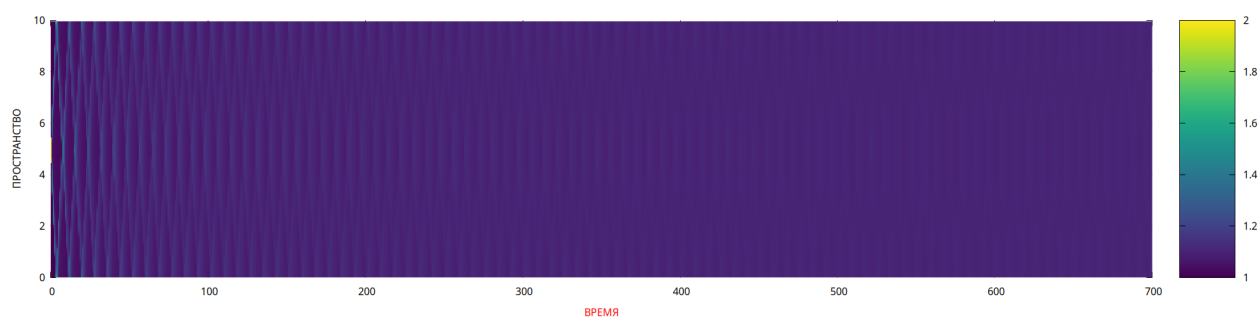
$C = 10, \mu = 0.001$



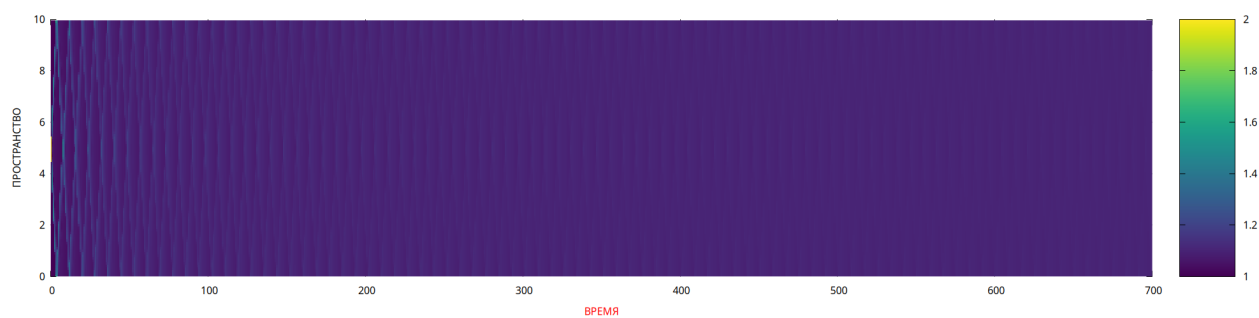
$C = 10, \mu = 0.001$



$\mu = 0.1$

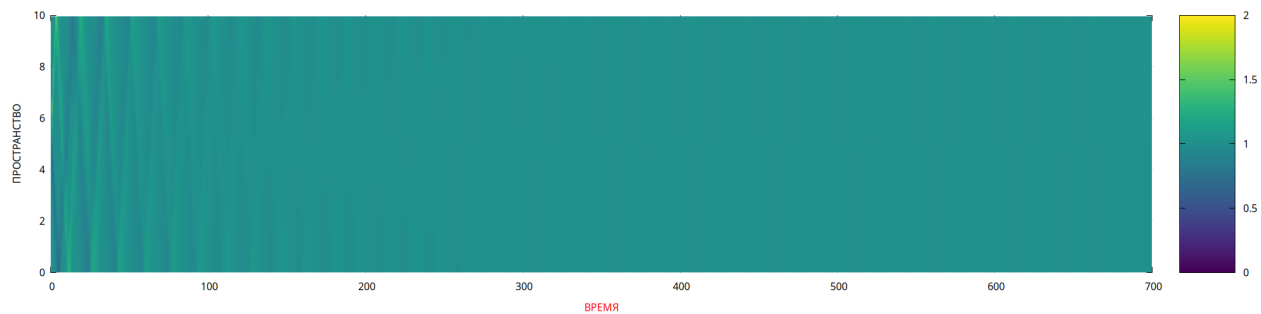


$\mu = 0.01$

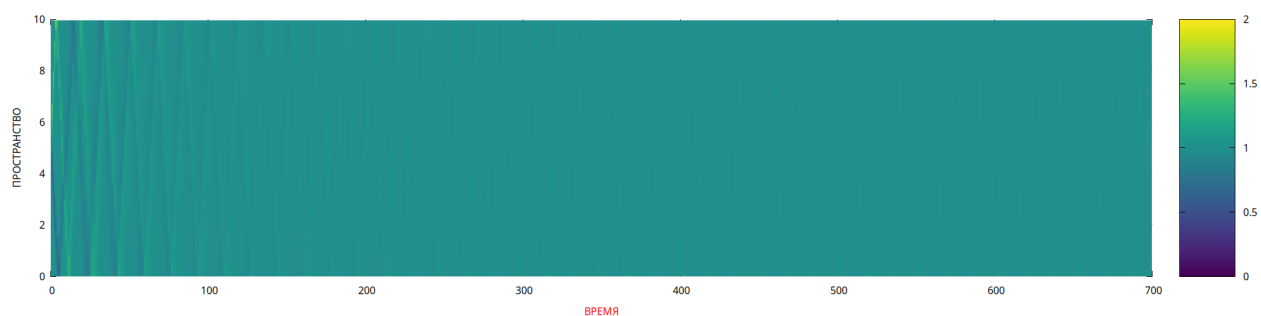


$\mu = 0.001$

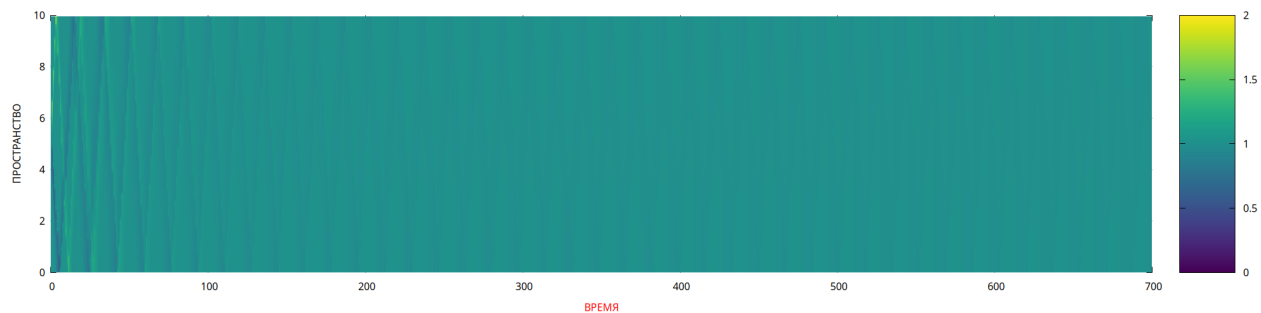
Рис. 1: Это иллюстрации для первой системы. Мы видим, что решение дольше стабилизируется при меньшем параметре вязкости. Это ожидаемо, так как с каждой итерацией решение сглаживается сильнее при большем коэффициенте  $\mu$ . При меньших  $\mu$  решение стабилизируется гораздо дольше.



$\mu = 0.1$



$\mu = 0.01$



$\mu = 0.001$

Рис. 2: Это иллюстрации для второй системы. Можно наблюдать похожие результаты, как и для графиков выше. Решение при  $\mu = 0.1$  сглаживается за  $T_{st} = 143.191$ , а при  $\mu = 0.001$  сглаживается за  $T_{st} = 2995.819$ . Графики показывают только время  $T = 700$  для большей наглядности, так как на большем временном отрезке график будет нечитаемым из-за осцилляций.

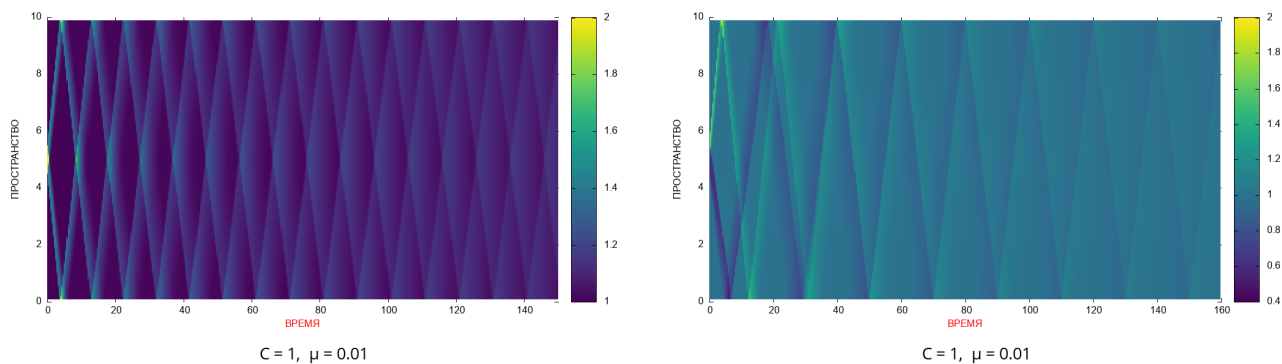


Рис. 3: Параметры  $C = 1, \mu = 0.01$

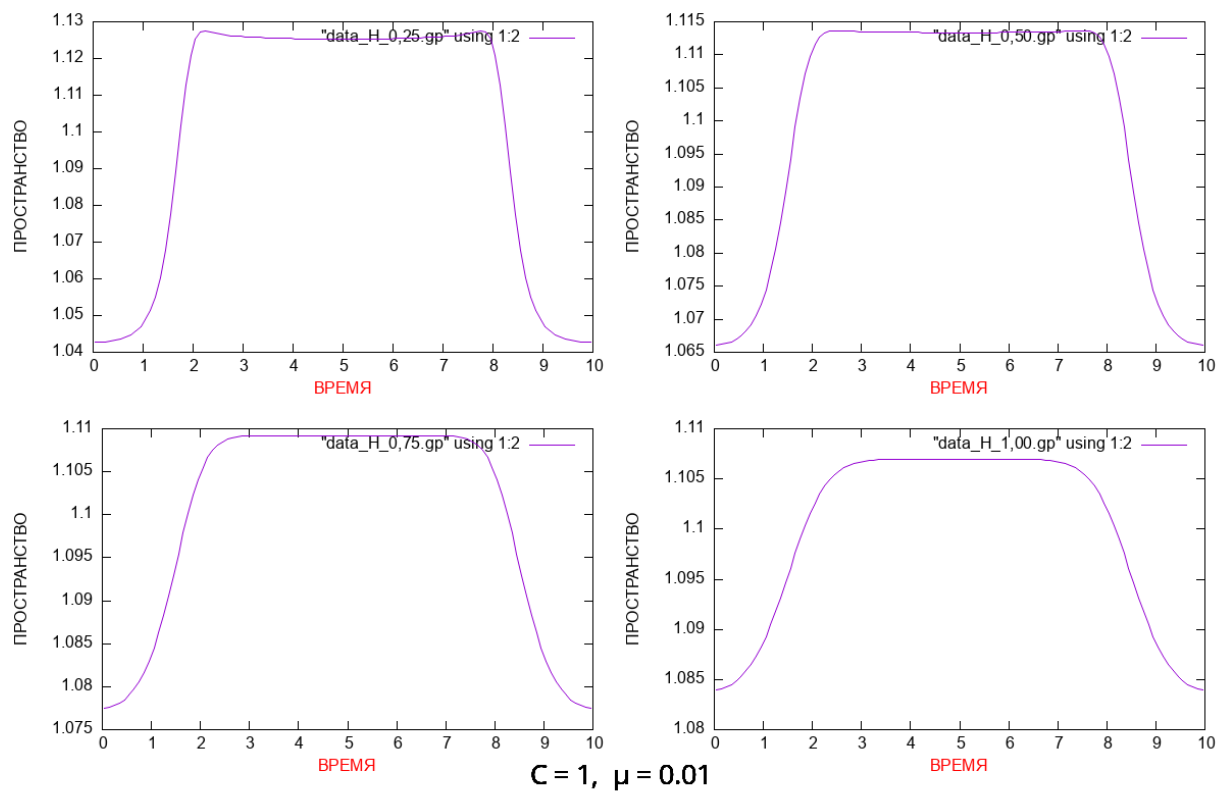


Рис. 4: Графики стабилизации решения

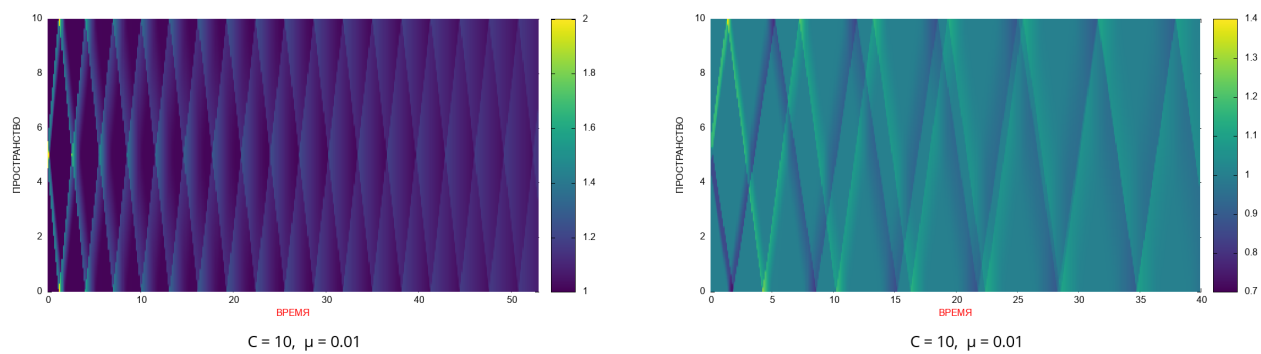


Рис. 5: Параметры  $C = 10, \mu = 0.01$

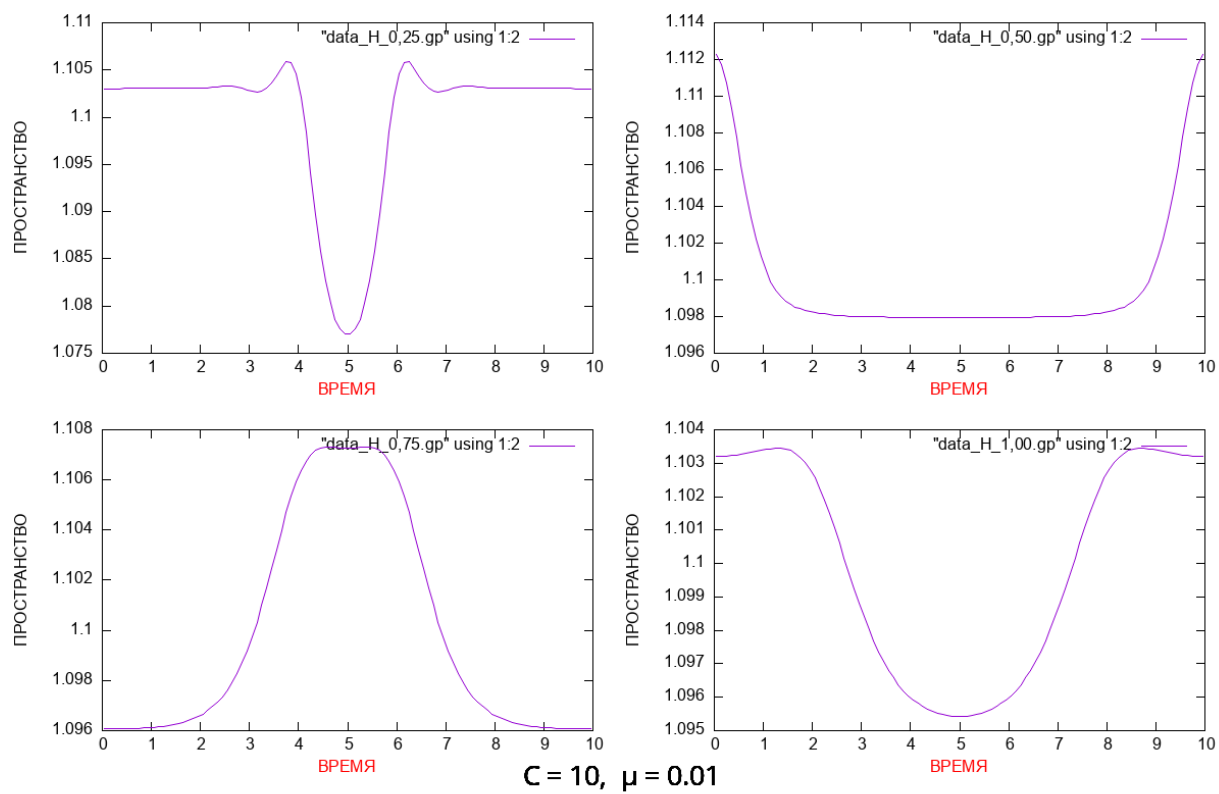


Рис. 6: Графики стабилизации решения

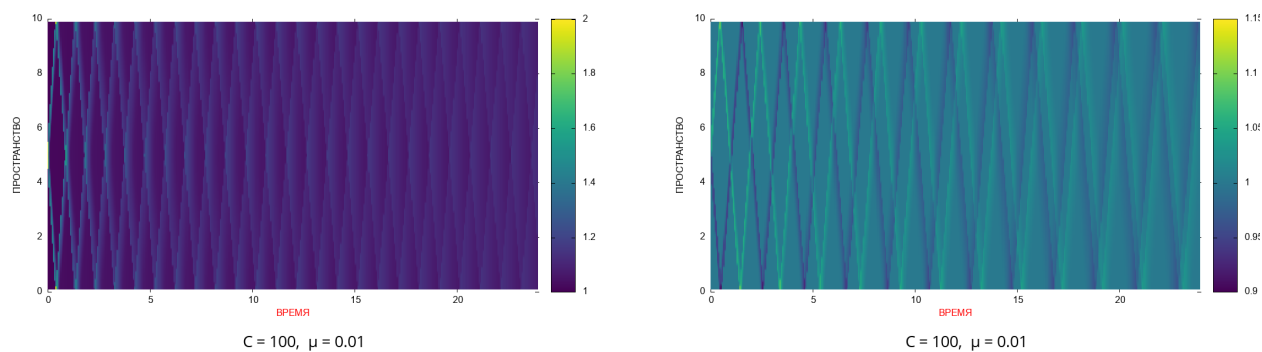


Рис. 7: Параметры  $C = 100, \mu = 0.01$

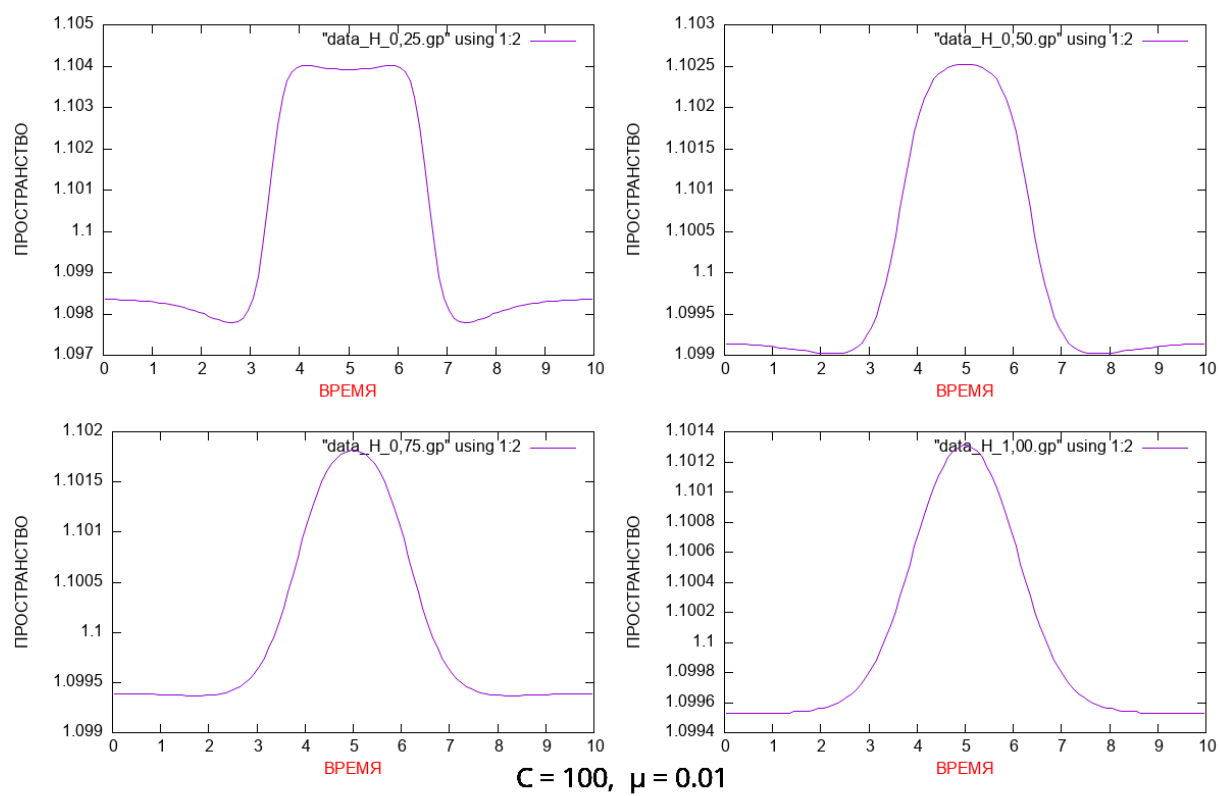


Рис. 8: Графики стабилизации решения

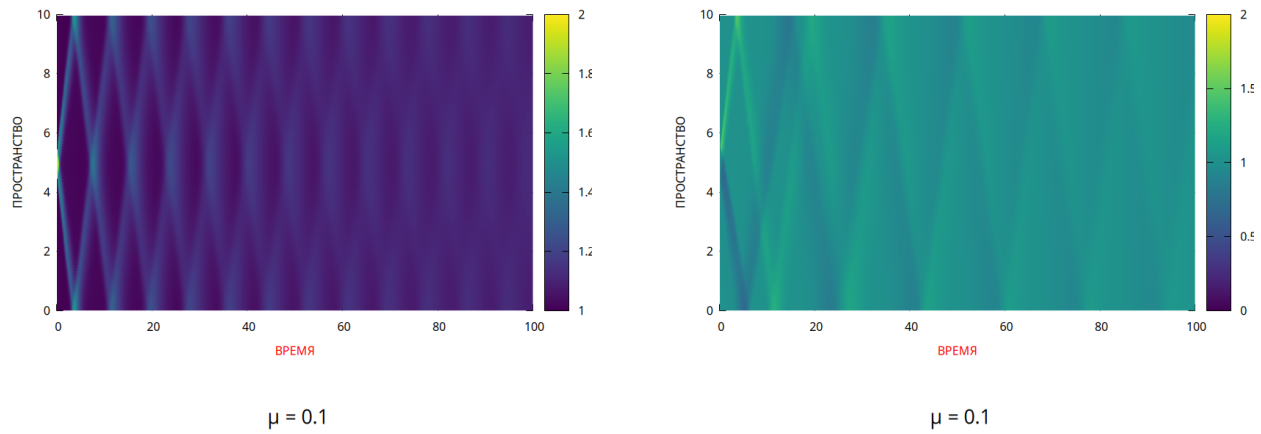


Рис. 9: Параметры  $\mu = 0.1$

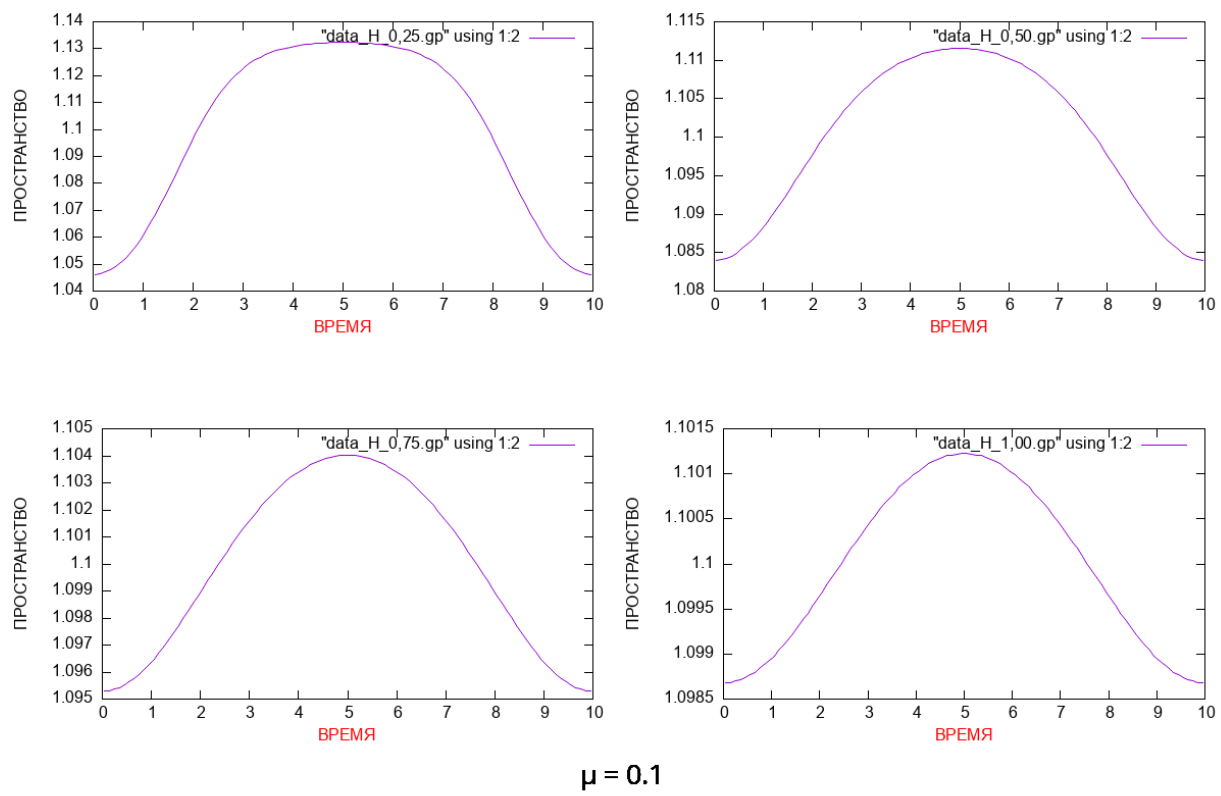


Рис. 10: Графики стабилизации решения

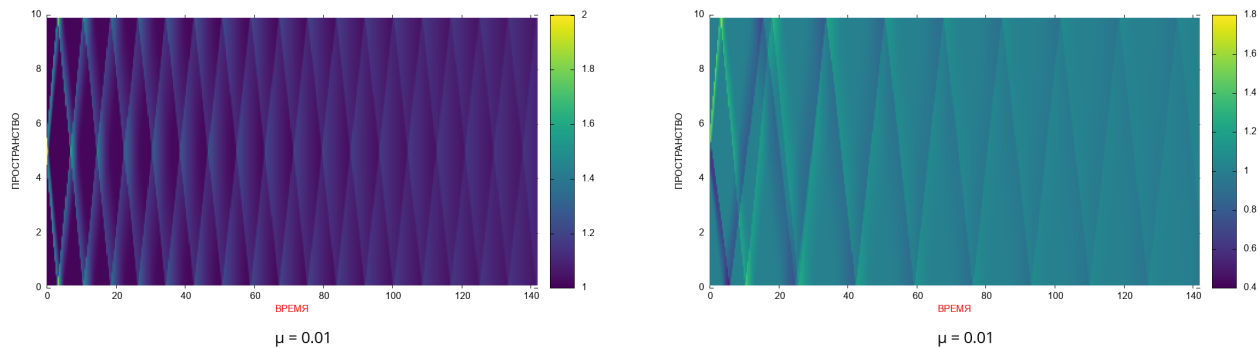


Рис. 11: Параметры  $\mu = 0.01$

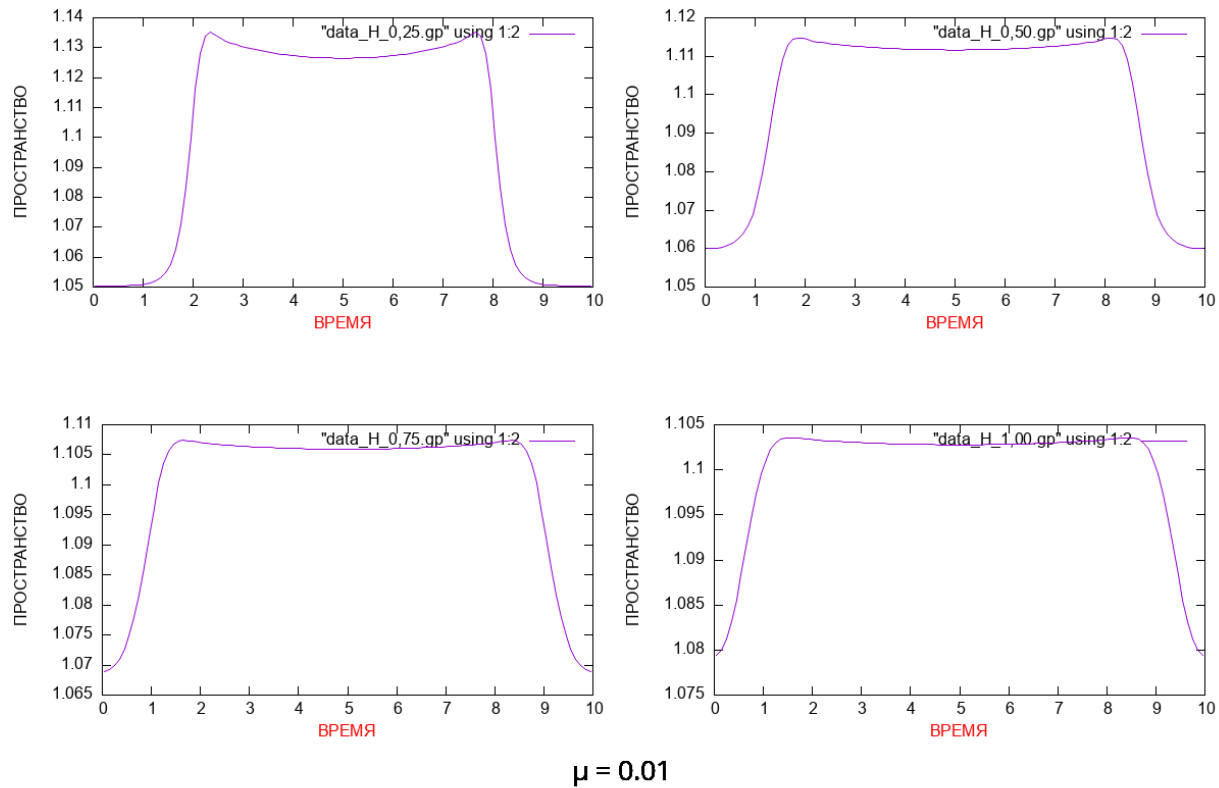


Рис. 12: Графики стабилизации решения

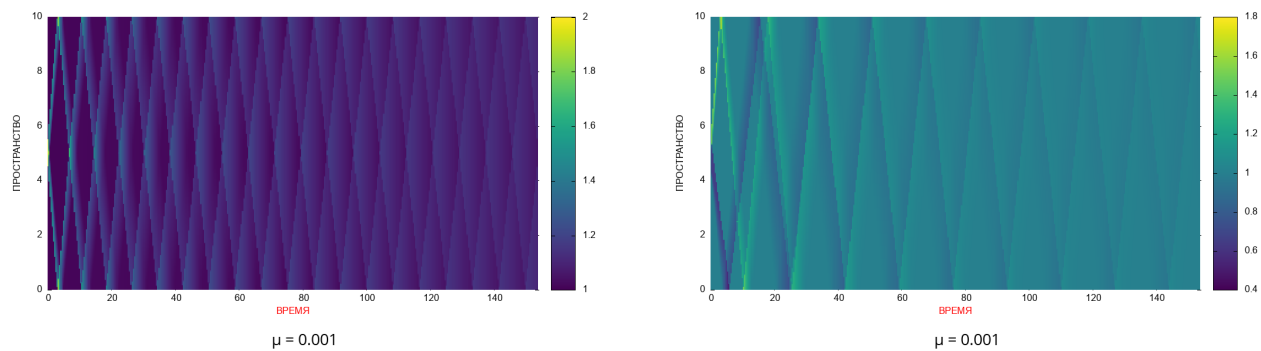


Рис. 13: Параметры  $\mu = 0.001$

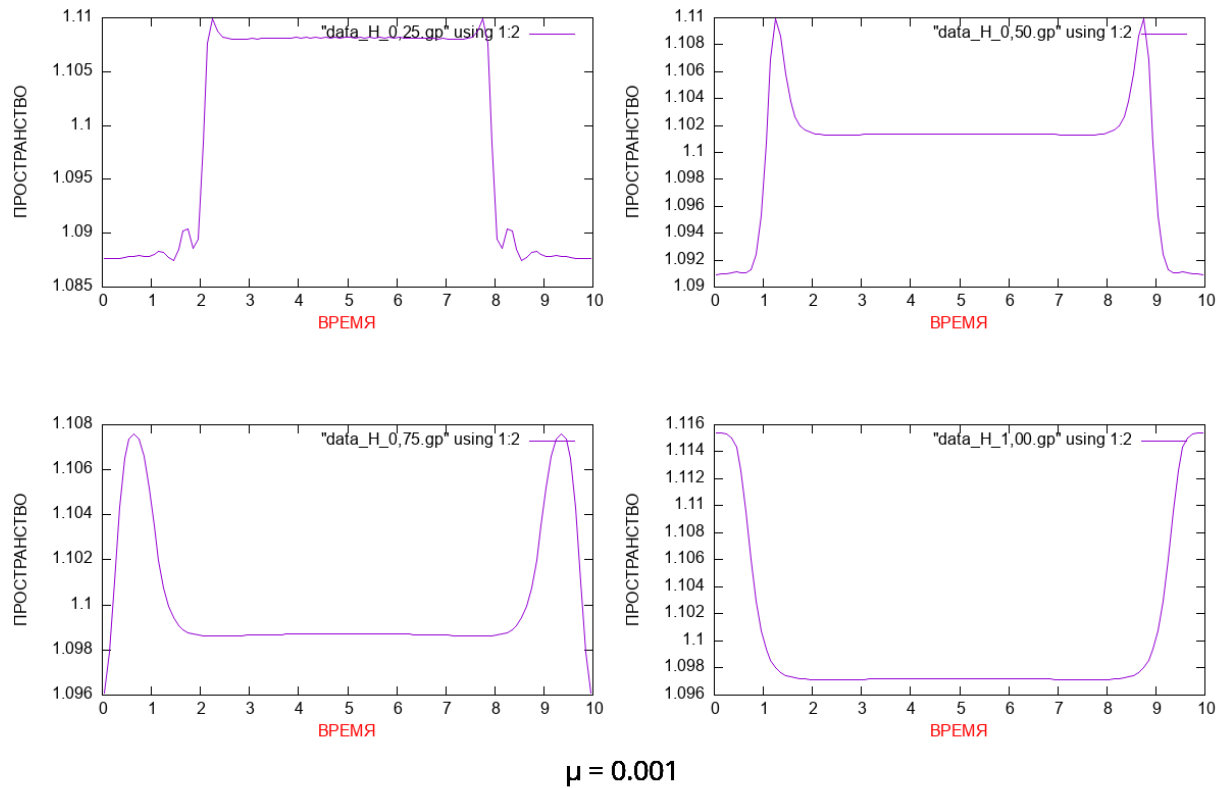


Рис. 14: Графики стабилизации решения

## 5 Стабилизация осциллирующей функции

Для системы (1) на области  $Q = [0; T] \times [0, 1]$  зададим две задачи со следующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{cases} \rho_0(x) = 2 + \sin(k\pi x), & x \in [0; 1], \\ u_0(x) \equiv 0, & x \in [0; 1], \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & t \in [0; T], \\ f \equiv 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_0(x) \equiv 1, & x \in [0; 1], \\ u_0(x) = \sin(k\pi x), & x \in [0; 1], \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & t \in [0; T], \\ f \equiv 0. \end{cases}$$

Число  $k$ , задающее число колебаний начальной функции, является натуральным и для численного эксперимента выбирается из диапазона от 1 до  $M/10$ , где  $Mh = 1$ .

## 5.1 Результаты для первой системы

### 5.1.1 Таблицы для линейного давления

$C = 1, \mu = 0.1$			
k	$\tau = 0.002$ $h = 0.002$	$\tau = 0.001$ $h = 0.001$	$\tau = 0.0005$ $h = 0.0005$
1	2.018000	1.512000	1.005500
2	8.026000	6.998000	5.944500
3	2.540000	2.032000	1.526000
4	5.008000	3.978000	2.007000
5	1.502000	1.001000	0.987500
6	3.986000	1.998000	1.012500
7	1.000000	0.987000	0.502000
8	2.982000	1.959000	0.978500
9	0.996000	0.503000	0.492000
10	1.994000	1.004000	0.951000
$10 + M/10$	0.648000	0.316000	0.262000
$10 + 2M/10$	0.560000	0.292000	0.252000
$10 + 3M/10$	0.348000	0.282000	0.243000
$10 + 4M/10$	0.328000	0.274000	0.236000
$10 + 5M/10$	0.316000	0.268000	0.230000
$10 + 6M/10$	0.306000	0.262000	0.224500
$10 + 7M/10$	0.300000	0.257000	0.220000
$10 + 8M/10$	0.296000	0.253000	0.217000
$10 + 9M/10$	0.292000	0.250000	0.213500

$C = 1, \mu = 0.01$			
k	$\tau = 0.002$ $h = 0.002$	$\tau = 0.001$ $h = 0.001$	$\tau = 0.0005$ $h = 0.0005$
1	25.522000	21.011000	16.974500
2	57.948000	45.845000	34.981500
3	23.068000	19.055000	15.521500
4	45.934000	35.776000	26.220000
5	20.458000	16.942000	12.916000
6	43.916000	32.798000	23.729500
7	16.938000	13.421000	9.372500
8	41.912000	30.797000	21.717000
9	14.438000	10.418000	5.915500
10	38.932000	28.769000	6.765000
$10 + M/10$	4.000000	0.997000	0.383500
$10 + 2M/10$	1.996000	0.774000	0.202000
$10 + 3M/10$	1.002000	0.552000	0.140000
$10 + 4M/10$	0.998000	0.421000	0.109500
$10 + 5M/10$	0.994000	0.353000	0.091500
$10 + 6M/10$	0.992000	0.311000	0.081000
$10 + 7M/10$	0.988000	0.284000	0.074000
$10 + 8M/10$	0.988000	0.267000	0.069500
$10 + 9M/10$	0.986000	0.257000	0.067000

$C = 1, \mu = 0.001$			
k	$\tau = 0.002$ $h = 0.002$	$\tau = 0.001$ $h = 0.001$	$\tau = 0.0005$ $h = 0.0005$
1	136.532000	104.616000	78.131500
2	240.998000	178.088000	130.024000
3	115.626000	89.048000	66.957000
4	181.364000	130.306000	95.683000
5	111.494000	85.921000	64.525500
6	159.380000	116.319000	84.366500
7	109.904000	84.816000	63.762500
8	153.382000	109.322000	79.322000
9	108.856000	83.805000	62.884000
10	148.384000	106.345000	76.369000
$10 + M/10$	130.328000	15.063000	4.189000
$10 + 2M/10$	27.104000	8.556000	1.999500
$10 + 3M/10$	20.604000	5.553000	1.000500
$10 + 4M/10$	15.620000	4.002000	0.997500
$10 + 5M/10$	13.586000	3.001000	0.890000
$10 + 6M/10$	11.606000	2.998000	0.777500
$10 + 7M/10$	10.602000	2.002000	0.707500
$10 + 8M/10$	10.574000	2.001000	0.654500
$10 + 9M/10$	10.008000	2.000000	0.638000

$C = 10, \mu = 0.1$			
k	$\tau = 0.002$ $h = 0.002$	$\tau = 0.001$ $h = 0.001$	$\tau = 0.0005$ $h = 0.0005$
1	3.330000	3.010000	2.376000
2	10.132000	8.546000	7.272500
3	3.344000	2.865000	2.544500
4	8.230000	6.958000	5.684500
5	2.372000	2.052000	1.575500
6	7.278000	5.694000	4.422500
7	2.054000	1.576000	0.940000
8	6.330000	5.058000	3.474500
9	1.738000	1.102000	0.467500
10	5.696000	4.111000	2.839500
$10 + M/10$	0.636000	0.313000	0.127500
$10 + 2M/10$	0.320000	0.304000	0.067000
$10 + 3M/10$	0.318000	0.186000	0.049000
$10 + 4M/10$	0.316000	0.180000	0.042000
$10 + 5M/10$	0.314000	0.116000	0.039500
$10 + 6M/10$	0.312000	0.103000	0.038000
$10 + 7M/10$	0.312000	0.094000	0.036500
$10 + 8M/10$	0.312000	0.089000	0.036000
$10 + 9M/10$	0.310000	0.086000	0.035500

$C = 10, \mu = 0.01$			
k	$\tau = 0.002$ $h = 0.002$	$\tau = 0.001$ $h = 0.001$	$\tau = 0.0005$ $h = 0.0005$
1	$\infty$	0.414000	18.503000
2	$\infty$	46.183000	35.689000
3	$\infty$	50.525000	15.988000
4	$\infty$	35.982000	26.635000
5	$\infty$	18.811000	15.473000
6	$\infty$	33.458000	24.426000
7	$\infty$	18.316000	14.980500
8	$\infty$	32.514000	23.639500
9	$\infty$	17.517000	14.182500
10	$\infty$	32.194000	23.318500
$10 + M/10$	$\infty$	4.746000	0.948500
$10 + 2M/10$	$\infty$	1.583000	0.316500
$10 + 3M/10$	$\infty$	0.950000	0.315500
$10 + 4M/10$	$\infty$	0.634000	0.314000
$10 + 5M/10$	$\infty$	0.633000	0.280500
$10 + 6M/10$	$\infty$	0.632000	0.246000
$10 + 7M/10$	$\infty$	0.317000	0.224000
$10 + 8M/10$	$\infty$	0.317000	0.210500
$10 + 9M/10$	$\infty$	0.317000	0.203000

$C = 100, \mu = 0.1$			
k	$\tau = 0.002$ $h = 0.002$	$\tau = 0.001$ $h = 0.001$	$\tau = 0.0005$ $h = 0.0005$
1	$\infty$	$\infty$	3.204000
2	$\infty$	8.120000	7.507000
3	$\infty$	$\infty$	2.810000
4	$\infty$	7.607000	6.203000
5	$\infty$	$\infty$	2.597500
6	$\infty$	7.304000	6.001000
7	$\infty$	$\infty$	2.245000
8	$\infty$	7.103000	
9	$\infty$	$\infty$	2.044500
10	$\infty$	$\infty$	
$10 + M/10$	$\infty$	0.701000	0.101000
$10 + 2M/10$	$\infty$	0.301000	0.100500
$10 + 3M/10$	$\infty$	0.300000	0.099500
$10 + 4M/10$	$\infty$	0.299000	0.099000
$10 + 5M/10$	$\infty$	0.298000	0.098500
$10 + 6M/10$	$\infty$	0.298000	0.080000
$10 + 7M/10$	$\infty$	0.298000	0.073000
$10 + 8M/10$	$\infty$	0.299000	0.068500
$10 + 9M/10$	$\infty$	0.360000	0.059000

Решение при 10 и 0.001 не работает нихрена при 100 и 0.01 и 0.001.

### 5.1.2 Таблицы для нелинейного давления

Выбраны  $\epsilon = 0.0001$

$\mu = 0.1$			
k	$\tau = 0.002$ $h = 0.002$	$\tau = 0.001$ $h = 0.001$	$\tau = 0.0005$ $h = 0.0005$
1	2.796000	2.098000	1.741500
2	8.842000	8.076000	6.580000
3	2.918000	2.195000	1.828500
4	6.620000	5.136000	3.647000
5	1.090000	1.081000	1.072000
6	5.146000	3.661000	2.180000
7	0.728000	0.722000	0.714000
8	3.680000	2.205000	1.451000
9	0.726000	0.371000	0.363000
10	2.942000	1.477000	0.743000
10+M/10	0.710000	0.235000	0.166000
10+2M/10	0.464000	0.189000	0.157000
10+3M/10	0.436000	0.178000	0.151500
10+4M/10	0.250000	0.171000	0.146500
10+5M/10	0.226000	0.166000	0.142500
10+6M/10	0.214000	0.163000	0.140500
10+7M/10	0.204000	0.159000	0.138000
10+8M/10	0.198000	0.157000	0.136500
10+9M/10	0.198000	0.155000	0.133500

$\mu = 0.01$			
k	$\tau = 0.002$ $h = 0.002$	$\tau = 0.001$ $h = 0.001$	$\tau = 0.0005$ $h = 0.0005$
1	25.434000	20.897000	17.026500
2	54.422000	43.274000	32.938500
3	22.048000	18.425000	15.134000
4	43.340000	32.965000	24.436000
5	21.042000	17.395000	14.087500
6	41.124000	30.751000	22.582000
7	19.264000	15.605000	12.278500
8	40.368000	29.997000	21.499500
9	17.108000	13.804000	10.110000
10	39.626000	29.261000	20.758000
10+M/10	7.360000	1.471000	0.519000
10+2M/10	2.944000	0.733000	0.270500
10+3M/10	1.474000	0.727000	0.187000
10+4M/10	1.470000	0.570000	0.146500
10+5M/10	0.740000	0.477000	0.122500
10+6M/10	0.738000	0.406000	0.107500
10+7M/10	0.738000	0.399000	0.097500
10+8M/10	0.736000	0.397000	0.092000
10+9M/10	0.736000	0.396000	0.089000

$\mu = 0.001$			
k	$\tau = 0.002$ $h = 0.002$	$\tau = 0.001$ $h = 0.001$	$\tau = 0.0005$ $h = 0.0005$
1	$\infty$	0.264000	73.055500
2	$\infty$	0.425000	119.776000
3	$\infty$	0.331000	62.012000
4	$\infty$	164.866000	88.488000
5	$\infty$	0.197000	59.840000
6	$\infty$	0.074000	77.745000
7	0.048000	172.812000	58.905000
8	0.046000	98.198000	73.075500
9	0.048000	77.939000	58.312000
10	0.046000	159.900000	70.171500
10+M/10	0.628000	20.688000	5.564500
10+2M/10	0.736000	10.355000	3.016500
10+3M/10	0.798000	7.768000	1.866500
10+4M/10	0.434000	5.563000	1.470500
10+5M/10	0.382000	4.818000	1.242500
10+6M/10	0.546000	4.086000	0.736500
10+7M/10	0.824000	3.681000	0.735500
10+8M/10	0.548000	3.680000	0.735500
10+9M/10	0.624000	3.343000	0.735000

## 5.2 Результаты для второй системы

### 5.2.1 Таблицы для линейного давления

$C = 1, \mu = 0.1$			
k	$\tau = 0.002$ $h = 0.002$	$\tau = 0.001$ $h = 0.001$	$\tau = 0.0005$ $h = 0.0005$
1	4.416000	3.405000	3.297000
2	1.240000	1.219000	1.187000
3	0.502000	0.492000	0.483000
4	0.412000	0.402000	0.388500
5	0.382000	0.366000	0.343000
6	0.400000	0.363000	0.324000
7	0.416000	0.365000	0.313500
8	0.418000	0.361000	0.303500
9	0.414000	0.354000	0.292500
10	0.408000	0.346000	0.282500
$10 + M/10$	0.242000	0.112000	0.005500
$10 + 2M/10$	0.184000	0.048000	0.005500
$10 + 3M/10$	0.146000	0.011000	0.005500
$10 + 4M/10$	0.124000	0.011000	0.005500
$10 + 5M/10$	0.106000	0.011000	0.005500
$10 + 6M/10$	0.094000	0.011000	0.005500
$10 + 7M/10$	0.084000	0.011000	0.005500
$10 + 8M/10$	0.078000	0.011000	0.005500
$10 + 9M/10$	0.074000	0.011000	0.005500

$C = 1, \mu = 0.01$			
k	$\tau = 0.002$ $h = 0.002$	$\tau = 0.001$ $h = 0.001$	$\tau = 0.0005$ $h = 0.0005$
1	28.314000	22.347000	17.174000
2	10.198000	8.672000	7.119500
3	5.472000	4.791000	4.107000
4	3.360000	2.852000	2.590500
5	2.292000	2.083000	1.874500
6	1.746000	1.571000	1.398000
7	1.356000	1.206000	1.058500
8	1.064000	0.933000	0.803500
9	0.836000	0.720000	0.605500
10	0.654000	0.649000	0.545000
$10 + M/10$	0.066000	0.054000	0.043500
$10 + 2M/10$	0.060000	0.050000	0.037500
$10 + 3M/10$	0.058000	0.047000	0.033500
$10 + 4M/10$	0.056000	0.045000	0.031000
$10 + 5M/10$	0.056000	0.043000	0.029500
$10 + 6M/10$	0.054000	0.042000	0.028000
$10 + 7M/10$	0.054000	0.040000	0.026500
$10 + 8M/10$	0.052000	0.040000	0.026500
$10 + 9M/10$	0.052000	0.040000	0.026000

$C = 1, \mu = 0.001$			
k	$\tau = 0.002$ $h = 0.002$	$\tau = 0.001$ $h = 0.001$	$\tau = 0.0005$ $h = 0.0005$
1	120.336000	88.700000	64.593500
2	52.240000	40.162000	30.111000
3	30.518000	24.442000	18.741000
4	20.398000	16.605000	13.082000
5	14.722000	12.291000	9.857500
6	11.104000	9.415000	7.721500
7	8.948000	7.500000	6.198000
8	7.080000	6.064000	5.175500
9	5.960000	5.058000	4.379500
10	5.064000	4.352000	3.742500
$10 + M/10$	0.302000	0.101000	0.029000
$10 + 2M/10$	0.134000	0.042000	0.012000
$10 + 3M/10$	0.096000	0.024000	0.010000
$10 + 4M/10$	0.070000	0.029000	0.007500
$10 + 5M/10$	0.096000	0.019000	0.007000
$10 + 6M/10$	0.112000	0.030000	0.009000
$10 + 7M/10$	0.086000	0.021000	0.007500
$10 + 8M/10$	0.072000	0.030000	0.008000
$10 + 9M/10$	0.126000	0.029000	0.009000

$C = 10, \mu = 0.1$			
k	$\tau = 0.002$ $h = 0.002$	$\tau = 0.001$ $h = 0.001$	$\tau = 0.0005$ $h = 0.0005$
1	4.266000	3.625000	2.981500
2	1.190000	1.027000	0.864500
3	0.586000	0.476000	0.367500
4	0.362000	0.279000	0.275500
5	0.228000	0.160000	0.158000
6	0.194000	0.135000	0.132500
7	0.120000	0.117000	0.114500
8	0.108000	0.104000	0.060000
9	0.098000	0.094000	0.054000
10	0.090000	0.051000	0.049500
$10 + M/10$	0.048000	0.035000	0.021500
$10 + 2M/10$	0.044000	0.029000	0.015000
$10 + 3M/10$	0.040000	0.026000	0.011500
$10 + 4M/10$	0.038000	0.024000	0.009000
$10 + 5M/10$	0.036000	0.022000	0.007000
$10 + 6M/10$	0.036000	0.021000	0.006000
$10 + 7M/10$	0.034000	0.020000	0.005500
$10 + 8M/10$	0.034000	0.019000	0.005500
$10 + 9M/10$	0.034000	0.019000	0.005500

$C = 10, \mu = 0.01$			
k	$\tau = 0.002$ $h = 0.002$	$\tau = 0.001$ $h = 0.001$	$\tau = 0.0005$ $h = 0.0005$
1	28.316000	22.565000	17.208500
2	10.210000	8.616000	7.019500
3	5.332000	4.587000	3.844500
4	3.368000	2.888000	2.489000
5	2.316000	1.995000	1.739000
6	1.720000	1.452000	1.291500
7	1.294000	1.155000	0.972000
8	1.054000	0.892000	0.771500
9	0.832000	0.723000	0.651000
10	0.686000	0.588000	0.523000
$10 + M/10$	0.054000	0.018000	0.007500
$10 + 2M/10$	0.044000	0.011000	0.005500
$10 + 3M/10$	0.046000	0.011000	0.005500
$10 + 4M/10$	0.042000	0.011000	0.005500
$10 + 5M/10$	0.038000	0.011000	0.005500
$10 + 6M/10$	0.046000	0.011000	0.005500
$10 + 7M/10$	0.056000	0.011000	0.005500
$10 + 8M/10$	0.062000	0.011000	0.005500
$10 + 9M/10$	0.066000	0.011000	0.005500

$C = 100, \mu = 0.1$			
k	$\tau = 0.002$ $h = 0.002$	$\tau = 0.001$ $h = 0.001$	$\tau = 0.0005$ $h = 0.0005$
1	4.354000	3.551000	2.848000
2	1.180000	0.977000	0.825500
3	0.588000	0.486000	0.384000
4	0.368000	0.290000	0.213500
5	0.276000	0.213000	0.131000
6	0.214000	0.161000	0.109500
7	0.112000	0.110000	0.094000
8	0.150000	0.084000	0.070000
9	0.112000	0.075000	0.062500
10	0.102000	0.068000	0.056500
$10 + M/10$	0.122000	0.011000	0.005500
$10 + 2M/10$	0.212000	0.011000	0.005500
$10 + 3M/10$	0.236000	0.011000	0.005500
$10 + 4M/10$	0.240000	0.011000	0.005500
$10 + 5M/10$	0.280000	0.011000	0.005500
$10 + 6M/10$	0.342000	0.011000	0.005500
$10 + 7M/10$	0.400000	0.011000	0.005500
$10 + 8M/10$	0.440000	0.011000	0.005500
$10 + 9M/10$	0.458000	0.011000	0.005500

Таблицы для параметров ( $C = 100, \mu = 0.01$ ) и ( $C = 100, \mu = 0.001$ ), и при ( $C = 10, \mu = 0.001$ ) не приводятся из-за расходимости большинства значений ячеек таблицы.

### 5.2.2 Таблицы для нелинейного давления

$\mu = 0.1$			
k	$\tau = 0.002$ $h = 0.002$	$\tau = 0.001$ $h = 0.001$	$\tau = 0.0005$ $h = 0.0005$
1	4.570000	3.704000	2.832500
2	1.468000	1.034000	1.010500
3	0.714000	0.413000	0.404000
4	0.330000	0.324000	0.317000
5	0.464000	0.282000	0.272000
6	0.278000	0.266000	0.249500
7	0.292000	0.268000	0.240500
8	0.306000	0.272000	0.236000
9	0.310000	0.271000	0.231000
10	0.310000	0.268000	0.225000
$10 + M/10$	0.198000	0.104000	0.008500
$10 + 2M/10$	0.156000	0.059000	0.005500
$10 + 3M/10$	0.130000	0.033000	0.005500
$10 + 4M/10$	0.114000	0.015000	0.005500
$10 + 5M/10$	0.100000	0.011000	0.005500
$10 + 6M/10$	0.092000	0.011000	0.005500
$10 + 7M/10$	0.084000	0.011000	0.005500
$10 + 8M/10$	0.082000	0.011000	0.005500
$10 + 9M/10$	0.078000	0.011000	0.005500

$\mu = 0.01$			
k	$\tau = 0.002$ $h = 0.002$	$\tau = 0.001$ $h = 0.001$	$\tau = 0.0005$ $h = 0.0005$
1	27.270000	21.288000	16.165000
2	9.894000	8.182000	6.839500
3	5.194000	4.616000	3.761000
4	3.266000	2.834000	2.405000
5	2.276000	1.932000	1.756000
6	1.618000	1.471000	1.324000
7	1.268000	1.141000	1.016000
8	1.006000	0.894000	0.785000
9	0.896000	0.795000	0.697500
10	0.724000	0.633000	0.545000
$10 + M/10$	0.052000	0.040000	0.033500
$10 + 2M/10$	0.042000	0.038000	0.029000
$10 + 3M/10$	0.042000	0.036000	0.026500
$10 + 4M/10$	0.042000	0.035000	0.024500
$10 + 5M/10$	0.042000	0.033000	0.023500
$10 + 6M/10$	0.040000	0.032000	0.022500
$10 + 7M/10$	0.040000	0.031000	0.021500
$10 + 8M/10$	0.040000	0.031000	0.021500
$10 + 9M/10$	0.040000	0.031000	0.021000

$\mu = 0.001$			
k	$\tau = 0.002$ $h = 0.002$	$\tau = 0.001$ $h = 0.001$	$\tau = 0.0005$ $h = 0.0005$
1	111.186000	82.137000	59.540000
2	49.210000	37.365000	27.958000
3	29.178000	22.921000	17.525000
4	19.360000	15.726000	12.313500
5	13.972000	11.576000	9.343500
6	11.082000	8.948000	7.240000
7	8.656000	7.188000	5.849500
8	6.834000	5.868000	4.904500
9	6.638000	4.936000	4.173000
10	4.792000	4.189000	3.504000
$10 + M/10$	0.298000	0.077000	0.024500
$10 + 2M/10$	0.138000	0.040000	0.012500
$10 + 3M/10$	0.102000	0.030000	0.010000
$10 + 4M/10$	0.078000	0.025000	0.007500
$10 + 5M/10$	0.102000	0.033000	0.005500
$10 + 6M/10$	0.170000	0.036000	0.007500
$10 + 7M/10$	0.106000	0.052000	0.010500
$10 + 8M/10$	0.148000	0.026000	0.007500
$10 + 9M/10$	0.096000	0.029000	0.007500

### 5.3 Выводы

На вложенных сетках решение стабилизируется несколько быстрее. При более частых осцилляциях решение быстрее сглаживается, так как масса быстрее и равномернее перераспределяется между узлами.

1. **Зависимость от  $k$ :** при увеличении параметра  $k$  время стабилизации уменьшается. Также можно наблюдать эффекты связанные с нечетностью функции при малых  $k$  для первой системы. Можно наблюдать, что время стабилизации увеличивается при  $k = i$ , относительно  $k = i - 1$ , и снова уменьшается при  $k = i + 1$ . Прослеживается закономерность, как будто это две разные строго убывающие последовательности, которые объединены методом «гребенки». Можно сделать вывод о том, что сама задача может дать существенно отличающиеся результаты из-за нечетности осциллирующей функции. Во второй системе данная закономерность не выражена, или же выражена слабо.

2. **Зависимость от  $\mu$  и  $C$ :** при уменьшении параметра  $\mu$  решение стабилизируется дольше. Однако, при больших значениях  $k$  с уменьшением  $\mu$  время стабилизации может уменьшаться. Как и ранее несжимаемость газа ускоряет стабилизацию, таким образом при большом  $C$  и небольшом

Слишком маленькая вязкость и несжимаемость, например при  $C = 100$  и  $\mu = 0.001$ , мешают сходимости схемы.

## 6 Задача «протекания»

Рассмотрим задачу «протекания» на отрезке  $[0, X]$  учитывая, что  $X = 10$ , заданную соотношениями ниже.

$$\begin{aligned} \rho_0(x) &= 1, & u_0(x) &= 0, & x &\in [0; X], \\ u(t, 0) &= \tilde{v}, & \rho(t, 0) &= \tilde{\rho}, & \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=X} &= 0, & t &\in [0; T]. \end{aligned}$$

Функция правой части  $f \equiv 0$ .

Основная часть разностной схемы, реализованной ранее, остается прежней, но отличается первыми и последними уравнениями в системе. Для поиска скорости  $\hat{V}$  качестве последнего уравнения системы вместо уравнения  $V[M] = 0$ , добавляется уравнение

$$V[M - 1] = V[M].$$

Также вместо первых уравнений системы добавляются уравнения вида

$$H[0] = \tilde{\rho}, \quad V[0] = \tilde{v}, \quad \text{для всех временных слоев.}$$

Далее рассматривается данная задача и определяется зависимость времени стабилизации решения от различных параметров задачи (помимо основных параметров, на время стабилизации также влияют параметры  $\tilde{\rho}$  и  $\tilde{v}$ ).

Критерием выхода на стационар, как и ранее, считается условие

$$\left\| (H^{n_{st}}, V^{n_{st}}) - (\tilde{H}, \tilde{V}) \right\|_{C_h} < \varepsilon.$$

### 6.1 Для линейного давления

Для таблиц возьмем значения:  $h = 0.001$ ,  $\tau = 0.0001$  (то есть  $M = 1000$ ,  $N = 10000$ ). Во всех таблицах ниже используется  $\varepsilon = 0.001$ .

$C = 1, \mu = 0.01$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	20.6172	26.7662	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
2	21.9892	31.3898	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
3	23.1994	34.0640	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
4	24.1906	36.1162	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
5	25.0222	37.8946	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
6	25.7612	39.5240	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
7	26.4334	41.0690	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

$C = 1, \mu = 0.001$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	20.4584	30.6206	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
2	22.3038	34.3964	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
3	23.6612	36.6342	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
4	24.7254	38.4734	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
5	25.5760	40.0728	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
6	26.3114	41.4814	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
7	26.9772	42.9486	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

$C = 10, \mu = 0.1$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	0.8262	6.4660	7.5682	13.0070	20.1968	21.4356	28.8494
2	6.5334	6.6684	6.9140	7.3812	8.6404	9.8762	18.5260
3	6.6992	6.9602	7.7116	8.5960	9.6124	11.1124	14.1650
4	6.9406	7.7092	8.5266	9.3482	10.5312	13.1156	15.0876
5	7.4598	8.3454	9.0822	10.0130	12.2494	13.6512	15.8364
6	8.0140	8.8278	9.6004	10.6508	12.6060	14.1036	16.4634
7	8.4896	9.2504	10.0946	11.8980	12.9164	14.4980	17.0024

$C = 10, \mu = 0.01$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	3.0098	6.7202	6.9050	7.0472	7.6848	9.2140	11.7088
2	7.0034	7.1384	7.4750	8.0856	9.2832	11.1834	14.3224
3	7.4196	7.7328	8.1948	8.9956	10.3844	12.5884	16.4662
4	7.9002	8.2860	8.8384	9.7560	11.3384	14.1544	17.1400
5	8.3550	8.7942	9.4076	10.4550	12.7384	14.5994	17.6674
6	8.7800	9.2572	9.9476	11.8678	13.0704	14.9722	18.4050
7	9.1756	9.6948	10.4630	12.1326	13.3590	15.2974	18.9934

$C = 10, \mu = 0.001$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	0.0246	3.1014	6.8696	7.1088	7.9068	9.7354	13.0350
2	7.1316	7.2572	7.5868	8.2234	9.5146	11.6520	16.0160
3	7.5864	7.8744	8.3214	9.1400	10.5908	13.7930	16.8368
4	8.0688	8.4274	8.9664	9.9012	11.5472	14.3166	17.4282
5	8.5210	8.9300	9.5364	10.6004	12.8284	14.7332	17.9036
6	8.9442	9.3996	10.0702	11.9290	13.1478	15.0862	18.6544
7	9.3458	9.8440	10.5816	12.1874	13.4270	15.3964	19.1888

$C = 100, \mu = 0.1$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	0.9648	0.9540	2.0298	2.0348	2.2124	2.5288	2.9012
2	2.8416	3.0430	3.0646	3.0848	3.1060	3.1284	3.1648
3	3.1104	3.1592	4.0020	4.2854	4.3392	5.1316	6.8462
4	3.9958	4.2748	4.3246	4.3798	5.1636	6.9584	7.3482
5	4.2940	4.3430	4.3968	4.4564	6.8464	7.3558	8.0284
6	4.3498	4.4008	4.4566	6.6506	7.2150	7.6216	8.2182
7	4.3966	4.4480	4.5044	6.9106	7.5878	8.0202	12.3972

$C = 100, \mu = 0.01$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	0.0022	0.0152	0.0568	0.2124	2.0002	2.0034	2.1446
2	2.4826	2.5110	2.5420	2.5766	2.6158	2.6612	2.7130
3	2.8170	2.8582	2.9060	2.9546	3.0166	3.0806	3.1556
4	3.1358	3.1906	3.4740	3.5124	3.5514	3.5926	3.6370
5	3.4738	3.5236	3.5762	3.6302	3.6836	3.7356	3.7868
6	3.6008	3.6412	3.6868	3.7358	3.7868	3.8422	3.9008
7	3.8788	3.9280	3.9818	4.0422	4.1058	4.1590	4.1710

$C = 100, \mu = 0.001$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	0.0022	0.0022	0.0022	0.0022	0.0022	0.0022	0.0088
2	2.5272	2.5522	2.5804	2.6124	2.6512	2.6942	2.7466
3	2.8694	2.9042	2.9468	3.0004	3.0688	3.1392	3.2106
4	3.2050	3.4602	3.4958	3.5312	3.5680	3.6070	3.6498
5	3.5012	3.5508	3.6024	3.6538	3.7034	3.7514	3.8000
6	3.6266	3.6652	3.7058	3.7514	3.7978	3.8576	3.9176
7	3.9026	3.9488	3.9982	4.0524	4.1132	4.1604	4.1714

## 6.2 Для нелинейного давления

Для таблиц возьмем значения:  $h = 0.001$ ,  $\tau = 0.00001$  (то есть  $M = 1000$ ,  $N = 100000$ ).  
Во всех таблицах ниже используется  $\varepsilon = 0.001$ .

$\mu = 0.1$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	0.0490	1.4169	28.7883	19.7010	59.9882	71.1568	98.4407
2	0.3166	25.7894	25.4718	27.8459	29.7055	41.9335	56.2809
3	14.3412	13.8233	14.6478	16.7671	28.2927	32.1405	46.0831
4	13.9737	13.5182	14.3079	16.0680	18.7971	24.3961	36.6491
5	13.6476	13.4705	14.1104	15.7327	18.3201	23.3447	27.7485
6	13.4488	13.3989	13.9682	15.5406	18.0678	22.5628	26.4941
7	13.3884	13.3194	13.8748	15.4310	17.9259	21.9187	25.4832

$\mu = 0.01$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	0.2876	15.2863	17.5949	22.4223	30.7638	47.5776	74.0345
2	14.8166	14.6860	16.3518	19.4822	24.3693	35.5518	47.2371
3	14.3700	14.2244	15.5341	18.0515	21.8764	29.7781	39.4579
4	14.1139	13.9091	15.0176	17.2228	20.5412	26.7820	34.8000
5	13.9364	13.6925	14.6796	16.7062	19.7383	24.9748	31.3765
6	13.7950	13.5438	14.4555	16.3779	19.2321	23.7262	28.8905
7	13.6809	13.4436	14.3098	16.1774	20.0755	22.7978	27.0942

$\mu = 0.001$							
$\rho \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7
1	0.0060	15.6322	18.9362	24.5148	37.4329	52.7040	76.0457
2	15.0546	14.9509	16.8859	20.3235	27.9819	37.7078	49.5538
3	14.6086	14.4394	15.8623	18.5651	24.6046	30.5856	40.4756
4	14.3376	14.0938	15.2698	17.6232	22.7567	27.0661	35.5228
5	14.1436	13.8761	14.9154	17.1587	21.6036	25.1397	31.8832
6	13.9854	13.7817	14.7258	17.2518	20.7932	23.8422	29.2051
7	13.8478	13.5966	14.5740	16.8233	20.1678	22.8875	27.2878

### 6.3 Графики

### 6.4 Выводы

С увеличением параметров  $u$  и  $\rho$  время стабилизации решения задачи «протекния» увеличивается. Чем больше  $u$  и  $\rho$  (точнее, в случае когда  $u$  намного больше  $\rho$ ), тем дольше стабилизируется решение. Увеличение набегающей плотности существенно увеличивает время выхода на стационар.

В отличие от указанного ранее, в данной задаче протекания, чем больше  $C$  и чем меньше  $\mu$ , тем быстрее стабилизируется решение. И наоборот, если  $\mu$  маленькое, то схема сходится несколько дольше, хотя параметр вязкости в данном случае оказывает слабое влияние. Наибольшая зависимость времени стабилизации наблюдается относительно параметра  $C$ , который характеризует сжимаемость, например, при  $C = 1$  схема очень часто расходится, и чем больше  $C$ , тем быстрее задача «протекания» выходит на стационар.

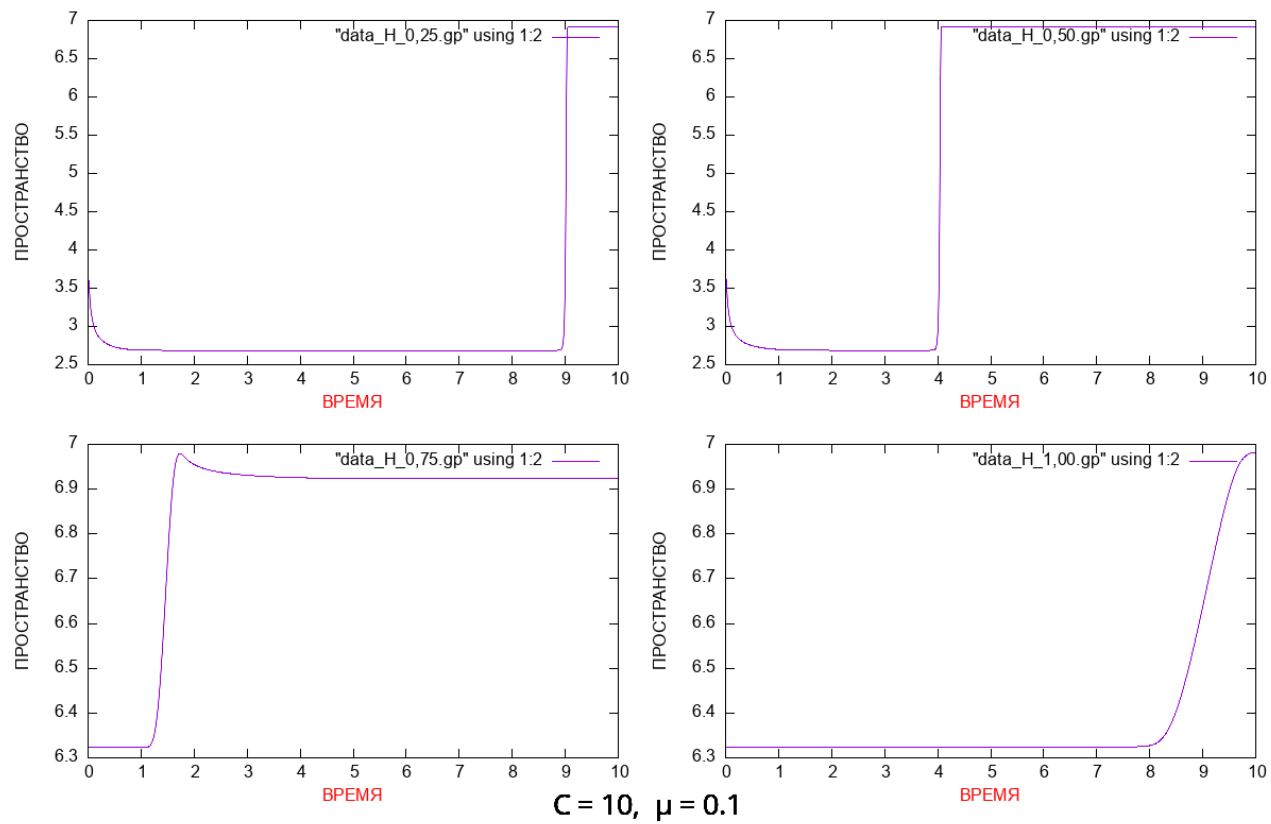


Рис. 15: Это для  $\tilde{u} = 2$  и  $\tilde{\rho} = 4$ .

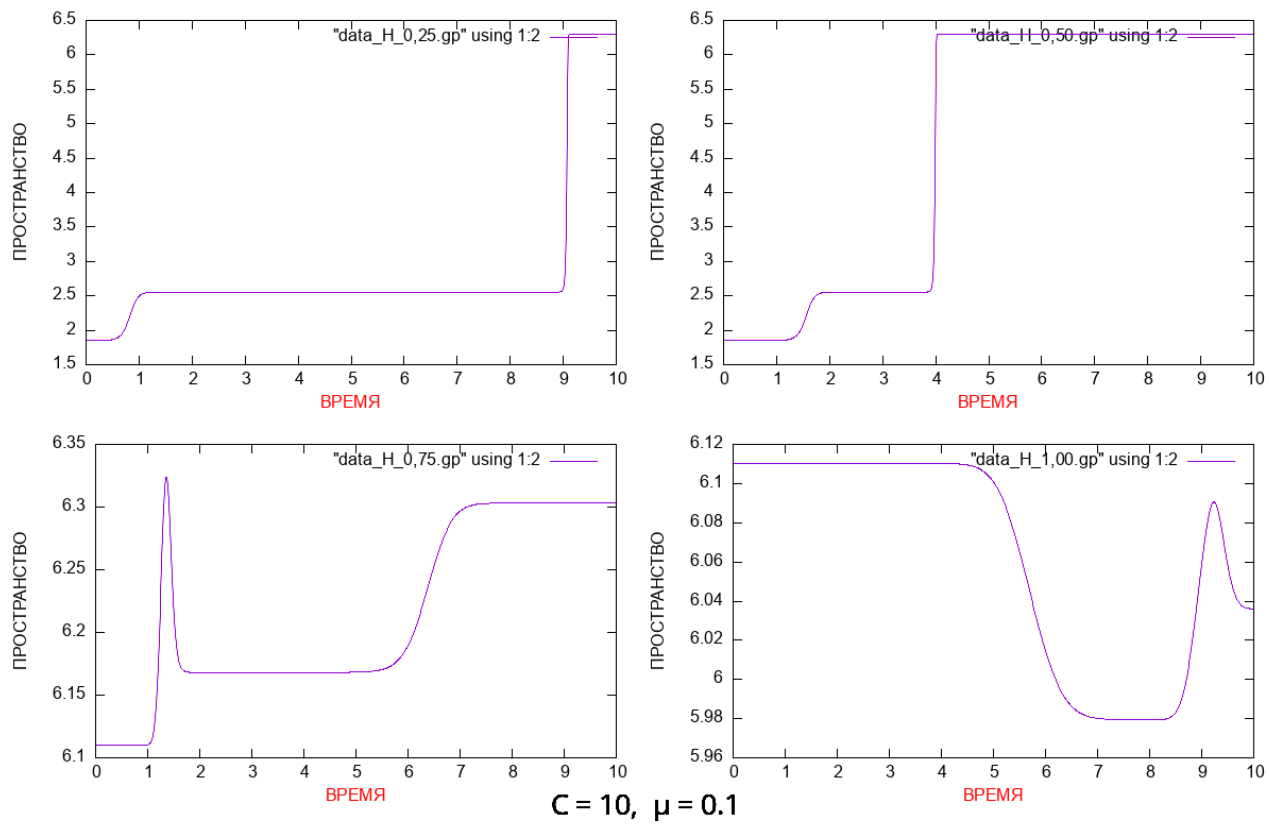


Рис. 16: Это для  $\tilde{u} = 4$  и  $\tilde{\rho} = 2$ .

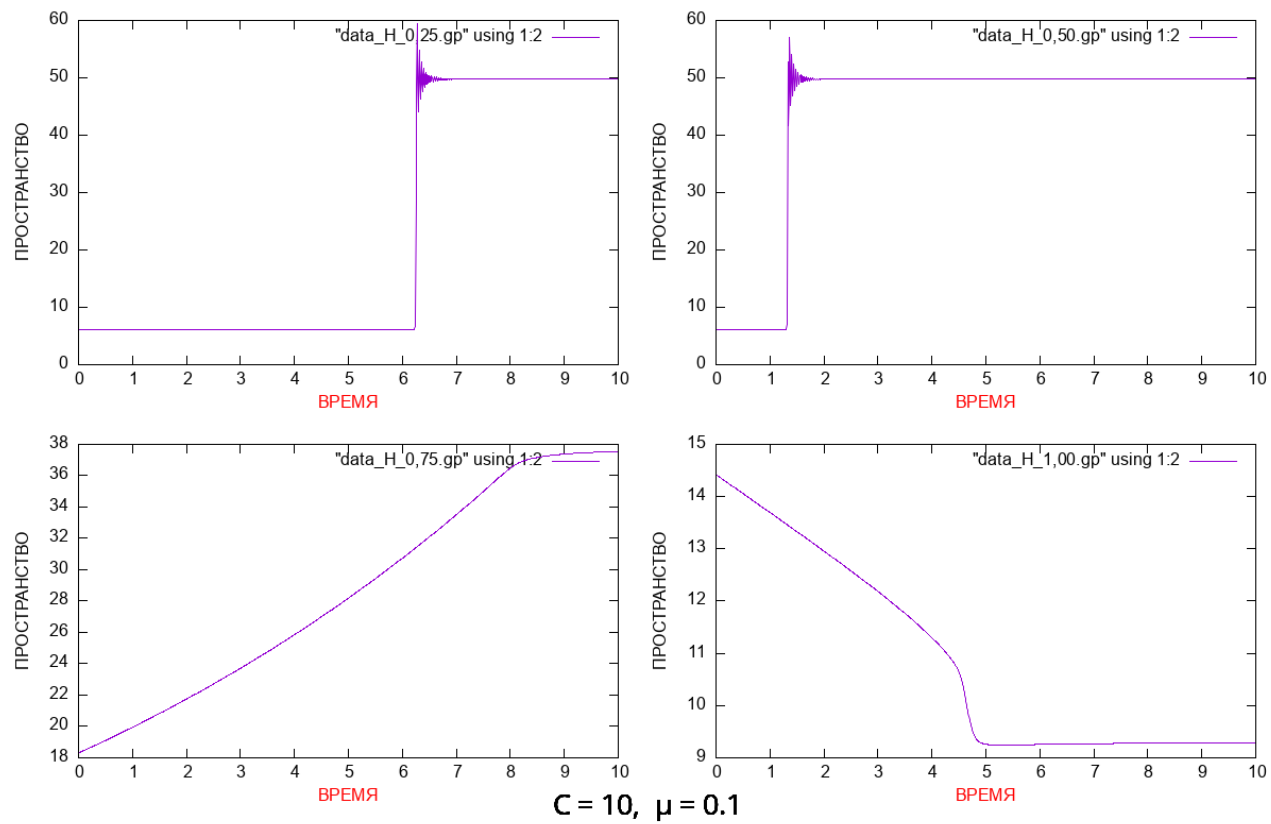


Рис. 17: Это для  $\tilde{u} = 7$  и  $\tilde{\rho} = 7$ .