ÚLOHA 3

-MILAN WIKARSKI-

LEMMA 1

MAJME POSTUPNOSŤ REÁLNYCH ČÍSEL a_n TAKÚ, ŽE

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$$

POTOM PRE ČÍSLA $p, q \in \mathbb{R}$; $p < a < q$ PLATÍ, ŽE EXISTUJE $n_0(p,q) \in \mathbb{N}$ TAKÉ, ŽE

$$\forall n > n_0(p,q) \qquad p < a_n < q$$

DÔKAZ

POLOŽÍME $\varepsilon_p = a - p$ (ZREJME $\varepsilon_p > 0$); POTOM Z DEFINÍCIE LIMITY EXISTUJE $n_1(p) \in \mathbb{N}$ TAKÉ, ŽE

$$\forall n > n_1(p) \qquad a - (a - p) = p < a_n$$

ĎALEJ POLOŽÍME $\varepsilon_q = q - a$ (ZREJME $\varepsilon_q > 0$); POTOM Z DEFINÍCIE LIMITY EXISTUJE $n_2(q) \in \mathbb{N}$ TAKÉ, ŽE

$$\forall n > n_2(q) \qquad a_n < a + (q - a) = q$$

PRE $n_0(p,q) = \max(n_1(p), n_2(q))$ PLATIA TIETO DVE PODMIENKY SÚČASNE, A TEDA

$$\forall n > n_0(p,q) \qquad p < a_n < q$$

ÚLOHA 3 -MILAN WIKARSKI-

LEMMA 2

MAJME 2 POSTUPNOSTI REÁLNYCH ČÍSEL a_n, b_n TAKÉ, ŽE

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq b_n$$

POTOM PLATÍ

$$\lim_{n \to \infty} a_n \leq \lim_{n \to \infty} b_n$$

DôKAZ (SPOROM)

PRE SPOR UVAŽUJME, ŽE PLATÍ

$$\lim_{n \to \infty} a_n > \lim_{n \to \infty} b_n$$

POTOM EXISTUJE $q \in \mathbb{R}^*$ TAKÉ, ŽE

$$\lim_{n \to \infty} a_n > q > \lim_{n \to \infty} b_n$$

Z LEMMA 1 MÁME, ŽE PRE n DOSŤ VEĽKÉ JE

$$a_n > q > b_n$$

ČO JE SPOR S PREDPOKLADOM $a_n \leq b_n$.

ÚLOHA 3 — MILAN WIKARSKI —

LEMMA 3

MAJME 2 RADY

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

TAKÉ, ŽE PLATÍ

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a_n \leq b_n$$

POTOM PLATÍ, ŽE AK RAD $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ KONVERGUJE, TAK AJ RAD $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGUJE

DÔKAZ

ZOBERME SI POSTUPNOSTI ČIASTOČNÝCH SÚČTOV TÝCHTO RADOV

$$s_n^a = \cancel{s_1^a + s_2^a + \dots + s_n^a + \dots} \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$s_n^b = \cancel{s_1^b + s_2^b + \dots + s_n^b + \dots} \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

ZREJME PLATÍ (KEĎŽE $0 \leq a_n \leq b_n$)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n^a \leq s_n^b$$

PREDPOKLADAJME, ŽE RAD $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ KONVERGUJE. POTOM PLATÍ

$$\lim_{n \to \infty} s_n^b = b \in \mathbb{R}$$

A PODĽA LEMMA 2 MÁME

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n^a \leq s_n^b \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} s_n^a \leq \lim_{n \to \infty} s_n^b$$

PODMIENKA $0 \leq a_n$ NÁM ZAISŤUJE, ŽE PLATÍ

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n^a \geq 0$$

A TEDA LIMITA S_n^a URČITE NEMÔŽE BYŤ $-\infty$, Z ČOHO DOSTÁVAME

$$\lim_{n \to \infty} S_n^a = a \in \mathbb{R}$$

A TEDA RAD $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGUJE.

POZNÁMKA: V SKUTOČNOSTI STAČÍ, ABY VŠETKY PODMIENKY PLATILI PRE NEKONEČNE VEĽA INDEXOV n, ČIŽE PRE n „DOSTATOČNE VEĽKÉ".

ÚLOHA 3

–MILAN WIKARSKI–

PRÍKLAD 1

MAJME RAD

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \qquad a_n = \frac{n}{2^n n^2 + 15}$$

CHCEME UKÁZAŤ, ŽE TENTO RAD KONVERGUJE (A TEDA $a \in \mathbb{R}$).

ZREJME PLATÍ

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq 0$$

PRETOŽE

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 0 \wedge 2^n \geq 0 \wedge n^2 \geq 0$$

POSTUPNOSŤ a_n BUDEME POSTUPNE UPRAVOVAŤ A TVORIŤ Z NEJ NOVÉ POSTUPNOSTI

$$a'_n = \frac{n}{2^n \cdot n^2} = \frac{1}{2^n \cdot n}$$

ZREJME PLATÍ

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a'_n \geq a_n$$

PRETOŽE SME ZMENŠILI MENOVATEĽA. ĎALEJ

$$a''_n = \frac{1}{2^n}$$

OPÄŤ PLATÍ

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a''_n \geq a'_n \geq a_n$$

PRETOŽE $n \geq 1$ PRE VŠETKY PRIRODZENÉ ČÍSLA.

MÁME TEDA RAD

$$\sum_{n=1}^{\infty} a''_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

ZOBERME SI POSTUPNOSŤ ČIASTOČNÝCH SÚČTOV

$$s''_n = a''_1 + a''_2 + \dots + a''_n$$

INDUKCIOU DOKÁŽEME, ŽE PLATÍ

$$s''_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

PRE $n=1$ MÁME

$$s''_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = a''_1$$

PREDPOKLADAJME, ŽE TVRDENIE PLATÍ PRE $n-1$. PRE n

$$s''_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n = s''_{n-1} + a_n = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} =$$

$$= 1 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{-2+1}{2^n} = \underline{\underline{1 - \frac{1}{2^n}}}$$

TO ZNAMENÁ, ŽE

$$\lim_{n\to\infty} s''_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - 0 = \underline{1}$$

TO ZNAMENÁ, ŽE RAD $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ KONVERGUJE A PODĽA LEMMA 3 AJ RAD $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGUJE, KEĎŽE

$$\forall a''_n \geq a'_n \geq a_n$$

ÚLOHA 3 -MILAN WIKARSKI-

PRÍKLAD 2

MAJME RAD

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad a_n = \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{n^2+nk} \qquad \text{PRE } k \in \mathbb{Z}$$

CHCEME UKÁZAŤ, ŽE TENTO RAD KONVERGUJE. VEZMIME SI $k \in \mathbb{Z}$ ĽUBOVOĽNÉ PEVNÉ. ZOBERME SI POSTUPNOSŤ ČIASTOČNÝCH SÚČTOV

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

TÚ SI VIEME ROZPÍSAŤ

$$S_n = \sum_{i=1}^{-k} a_i + \sum_{i=\max(-k,1)}^{n} a_i$$

KDE, SAMOZREJME, SÚČET $\sum_{i=1}^{-k} a_i$ MÔŽE BYŤ AJ PRÁZDNY, AK $k \geq 0$. KEĎŽE $k \in \mathbb{Z}$, PLATÍ ŽE

$$\sum_{i=1}^{-k} a_i = \overrightarrow{S} \in \mathbb{R}$$

JE NEJAKÉ REÁLNE ČÍSLO. PODMIENKA KONVERGENCIE TEDA PLNE ZÁVISÍ OD RADU

$$\sum_{i=\max(-k,1)}^{\infty} a_i$$

POZRIME SA NA n-TÝ ČLEN

$$a_n = \frac{1}{n^2 + nk}$$

KEĎŽE $n > \max(-k, 1)$, URČITE PLATÍ $nk \geq 0$. DEFINUJME SI POSTUPNOSŤ

$$a'_n = \frac{1}{n^2}$$

ZREJME PLATÍ

$$\forall n > \max(-k, 1) \quad a'_n \geq a_n$$

PRETOŽE SME ZMENŠILI MENOVATEĽA. ~~POSTUPNOSŤ~~ RAD

$$\sum_{n=\max(-k,1)}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

KONVERGUJE, A TEDA PODĽA LEMMY 3 AJ RAD

$$\sum_{n=\max(-k,1)}^{\infty} \frac{1}{n^2+nk} = \hat{S} \in \mathbb{R}$$

KONVERGUJE. DOKOPY TEDA MÁME

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{-k} a_n + \sum_{n=\max(-k,1)}^{\infty} = \overline{S} + \hat{S} = S \in \mathbb{R}$$

A TEDA RAD KONVERGUJE.