ÚLOHA 1 -MILAN WIKARSKI-

LEMMA 1

MAJME FUNKCIU e^{-x}. UKÁŽEME, ŽE

$$(e^{-x})' = -e^{-x}$$

DÔKAZ

OZNAČME SI

$$f(x) = e^{x}$$
$$g(x) = -x$$

POTOM

$$f(g(x)) = e^{-x}$$

DERIVÁCIA $f \circ g$ JE

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) =$$

$$= e^{-x} \cdot (-1) = \underline{\underline{-e^{-x}}}$$

ÚLOHA 1 -MILAN WIKARSKI-

LEMMA 2

MAJME FUNKCIU $-e^{-x}$. UKÁŽEME, ŽE

$$(-e^{-x})' = e^{-x}$$

DÔKAZ

$$(-e^{-x})' = \left[(-1) \cdot e^{-x}\right]' =$$

$$= (-1)' \cdot e^{-x} + (e^{-x})' \cdot (-1) =$$

$$= 0 \cdot e^{-x} + (-e^{-x}) \cdot (-1) =$$

$$= e^{-x}$$

ÚLOHA 1 — MILAN WIKARSKI —

MAJME FUNKCIU

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

DEFINIČNÝ OBOR, OBOR HODNÔT

$$x^2: \quad \mathbb{R} \to [0, +\infty)$$

$$e^{-x}: \quad \mathbb{R} \to (0, +\infty)$$

Z ČOHO MÁME

$$x^2 \cdot e^{-x}: \quad \mathbb{R} \to [0, +\infty)$$

A TEDA

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$H(f) = [0, +\infty)$$

PRIESEČNÍK S y

DOSTANEME DOSADENÍM $x=0$:

$$f(0) = 0^2 \cdot e^{-0} = 0 \cdot 1 = \underline{\underline{0}}$$

PRIESEČNÍK S y JE BOD

$$P_y = [0, 0]$$

PRIESEČNÍK S X

DOSTANEME VYRIEŠENÍM $f(x)=0$:

$$f(x)=0 \iff x^2 \cdot e^{-x}=0$$

ČO SA DÁ ROZOBRAŤ NA

$$x^2=0 \lor e^{-x}=0$$

$$\text{I}: \; x^2=0 \iff \underline{\underline{x=0}}$$

$$\text{II}: \; e^{-x}=0 \iff \text{NIKDY} \quad (\nexists\, x \in \mathbb{R}: \; e^{-x}=0)$$

A TEDA PRIESEČNÍK S X JE

$$P_x = [0, 0]$$

LIMITA V $+\infty$

HĽADÁME

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}$$

PODĽA L'HOPPITALOVHO PRAVIDLA

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x}$$

A EŠTE RAZ L'HOPPITALOVO PRAVIDLO

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \underline{\underline{0}}$$

LIMITA V $-\infty$

HĽADÁME

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x}$$

ZREJME PLATÍ

$$e^{-x} \geq 1 \text{ PRE } x \in [0, -\infty)$$

A TEDA AJ

$$x^2 e^{-x} \geq x^2 \quad \text{PRE } x \in [0, -\infty)$$

A KEĎŽE

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

TAK AJ

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$$

PRVÁ DERIVÁCIA, DRUHÁ DERIVÁCIA

HĽADÁME $f'(x)$:

$$f'(x) = 2x e^{-x} + x^2(-e^{-x})$$

$$f'(x) = x(2e^{-x} - xe^{-x})$$

$$f'(x) = xe^{-x}(2 - x)$$

HĽADÁME $f''(x)$:

$$f''(x) = (2xe^{-x})' - (x^2e^{-x})'$$
$$f''(x) = (2e^{-x} - 2xe^{-x}) - (2xe^{-x} - x^2e^{-x})$$
$$f''(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x}$$
$$f''(x) = 2e^{-x} - 4xe^{-x} + x^2e^{-x}$$
$$f''(x) = e^{-x}(2 - 4x + x^2)$$

LOKÁLNE A GLOBÁLNE MAXIMA A MINIMA

BUDEME HĽADAŤ $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = xe^{-x}(2-x)$$

$$f'(x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ e^{-x} = 0 & \leftarrow \nexists x \in \mathbb{R}: e^{-x} = 0 \\ 2 - x = 0 & \iff x = 2 \end{cases}$$

DOSTÁVAME

$$f'(x) = 0 \iff x \in \{0, 2\}$$

DOSADENÍM DO $f''(x)$ A $f(x)$

$$f''(0) = e^{-0}(2 - 4\cdot 0 + 0^2) = 1(2 - 0 + 0) = \underline{\underline{2}}$$
$$f(0) = 0^2 \cdot e^{-0} = 0 \cdot 1 = \underline{\underline{0}}$$

Z TOHO VIEME, ŽE BOD $[0, f(0) = 0]$ JE MINIMUM (KEĎŽE $f''(0) > 0$). ~~[VIEME TAKISTO, ŽE TO JE GLOBÁLNE]~~

$$f''(2) = e^{-2}(2 - 4 \cdot 2 + 2^2)$$

$$f''(2) = e^{-2}(2 - 8 + 4)$$

$$f''(2) = e^{-2} \cdot (-2)$$

A KEĎŽE $e^{-2} > 0$, TAK $f''(2) < 0$.

$$f(2) = 2^2 \cdot e^{-2}$$

$$f(2) = \frac{4}{e^2}$$

Z TOHO VIEME, ŽE BOD $\left[2,\ f(2) = \frac{4}{e^2}\right]$ JE MAXIMUM.

ZREJME IDE O LOKÁLNE MAXIMUM, KEĎŽE $H(f) = [0, +\infty)$.

O $f(x)$ TEDA VIEME POVEDAŤ, ŽE NA

$(-\infty, 0)$ KLESÁ,

$(0, 2)$ RASTIE

$(2, +\infty)$ KLESÁ

Z TOHOTO HNEĎ VIEME, ŽE BOD $[0,\ f(0) = 0]$ JE GLOBÁLNE MAXIMUM.

ASYMPTOTY

KEĎŽE $D(f) = \mathbb{R}$, ŽIADNA VERTIKÁLNA ASYMPTOTA $f(x)$ NIE JE.

KEĎŽE $H(f) = [0, +\infty)$ A $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ MÁME, ŽE PRIAMKA $p: y = 0$ JE HORIZONTÁLNA ASYMPTOTA.

KONVEXITA

FUNKCIA $f(x)$ JE KONVEXNÁ PRÁVE, KEĎ $f''(x) \geq 0$

$$f''(x) = e^{-x}\left(x^2 - 4x + 2\right) \leq 0$$

KEĎŽE $e^{-x} > 0$ PRE $x \in \mathbb{R}$, MÁME

$$f''(x) \leq 0 \iff x^2 - 4x + 2 \leq 0$$

ČO JE KVADRATICKÁ FUNKCIA. VYPOČÍTAME NAJPRV JEJ KORENE:

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\cancel{2}(2 \pm \sqrt{2})}{\cancel{2}} = \underline{\underline{2 \pm \sqrt{2}}}$$

A TEDA

$$f''(x) \leq 0 \iff x \in \left[2 - \sqrt{2},\ 2 + \sqrt{2}\right]$$

Z ČOHO VIEME, ŽE $f(x)$ JE KONVE~~X~~NÁ NA INTERVALOCH

$$\left(-\infty,\ 2 - \sqrt{2}\right],\quad \left[2 + \sqrt{2},\ +\infty\right)$$