-MILAN WIKARSKI-

ÚLOHA 3

LEMMA 1:

NECH $a_n = \frac{1}{n}$. POTOM

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

DÔKAZ:

ZREJME PLATÍ

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \iff |n| > \frac{1}{\varepsilon}$$

KU KAŽDÉMU $\varepsilon > 0$ VOLÍME TAKÉ $n_0(\varepsilon)$, ŽE $n_0(\varepsilon) > 1/\varepsilon$.
A TEDA PLATÍ

$$\forall n > n_0(\varepsilon): \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

LEMMA 2:

NECH $a_n = 1/n^k$, $k \in \mathbb{N}$. POTOM

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

DÔKAZ:
PRE $k \in \mathbb{N}$ PLATÍ

$$\left|\frac{1}{n^k}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right|$$

Z LEMMA 1 POTOM MÁME PRE $\varepsilon > 0$ TAKÉ $n_0(\varepsilon)$, ŽE

$$\forall n > n_0(\varepsilon): \left|\frac{1}{n^k}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

LEMMA 3:

MAJME POSTUPNOSŤ

$$a_n = \left(a + \frac{b}{n}\right)^k \qquad k \in \mathbb{N},\quad a, b \in \mathbb{R}$$

POTOM PLATÍ

$$\lim_{n \to \infty} \left(a + \frac{b}{n}\right)^k = a^k$$

DôKAZ:

NAJPRV POUŽIJEME BINOMICKÚ VETU

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^i \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^{k-i} \right)$$

VYBERIEME ZO SÚČTU PRÍPAD $i = k$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\binom{k}{k} a^k + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} a^i \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^{k-i} \right) =$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(a^k + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\binom{k}{i} \cdot a^i \cdot b^{k-i}}{n^{k-i}} \right) =$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(a^k + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} a^i \cdot b^{k-i} \cdot \frac{1}{n^{k-i}} \right)$$

TERAZ VYUŽIJEME PRAVIDLÁ PRE LIMITU SÚČTU A SÚČINU POSTUPNOSTÍ

$$\lim_{n\to\infty} a^k + \sum_{i=0}^{k-1}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\binom{k}{i}a^i \cdot b^{k-i}\right) \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{k-i}}\right)\right)$$

TERAZ JE POTREBNÉ SI UVEDOMIŤ, ŽE PRE $i \leq k-1$ JE

$$k-i \geqslant k-(k-1) = 1 \geqslant 1$$

TÝM PÁDOM MÔŽEME POUŽIŤ LEMMA 2, Z KTOREJ MÁME

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{k-i}}\right) = 0$$

A TEDA DOSTÁVAME

$$\lim_{n\to\infty} a^k + \sum_{i=0}^{k-1}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\binom{k}{i}a^i \cdot b^{k-i}\right) \cdot 0\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} a^k = \underline{\underline{a^k}}$$

PRETOŽE LIMITA POSTUPNOSTI $a_n = c \in \mathbb{R}$ JE c.

DÔLEŽITÉ EŠTE JE, ŽE

$$\lim_{n\to\infty}\left(\binom{k}{i}a^i \cdot b^{k-i}\right) \neq \infty$$ JE NEJAKÉ REÁLNE ČÍSLO

ÚLOHA 1:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(4n-10)^{80}\cdot(3n+15)^{10}}{(4n-16)^{90}} = \lim_{n\to\infty} \frac{[n(4-10/n)]^{80}\cdot[n(3+15/n)]^{10}}{[n(4-16/n)]^{90}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^{80}}(4-10/n)^{80}\cdot \cancel{n^{10}}\cdot(3+15/n)^{10}}{\cancel{n^{90}}(4-16/n)^{90}} =$$

POUŽIJEME PRAVIDLÁ PRE LIMITU SÚČINU A PODIELU POSTUPNOSTÍ

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(4-10/n)^{80}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(3+15/n)^{10}}{\lim\limits_{n\to\infty}(4-16/n)^{90}} =$$

POUŽIJEME LEMMA 3 A DOSTANEME

$$= \frac{4^{80}\cdot 3^{10}}{4^{90}} = \underline{\underline{\frac{3^{10}}{4^{10}} \approx 0{,}0563}}$$

ÚLOHA 2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+\sqrt{n}}{(4n-16)^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n^{0,5}}{n^5(4-16/n)^5}\cdot\frac{n^{-2}}{n^{-2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3+n^{-1,5}}{n^3(4-16/n)^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n}}{n^3(4-16/n)^5}$$

POUŽIJEME PRAVIDLÁ PRE LIMITU SÚČINU A PODIELU POSTUPNOSTÍ

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[7]{n}}\right) \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} n^3 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(4 - 16/n\right)^5}$$

POUŽIJEME LEMMA 1 A 3

*VIZ. POZNÁMKA 1 NA STRANE 7

$$= \frac{3 + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[7]{n}}\right) \cdot 0}{\lim\limits_{n\to\infty} n^3 \cdot 4^5} = \frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty} n^3 \cdot 4^5} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^3 \cdot 4^5 \cdot 3^{-1}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^3} \cdot \frac{1}{4^5 \cdot 3^{-1}} =$$

A NAKONIEC PODĽA LEMMA 2 MÁME

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right) \cdot \frac{1}{4^5 \cdot 3^{-1}} = 0 \cdot \frac{1}{4^5 \cdot 3^{-1}} = \underline{\underline{0}}$$

ÚLOHA 3

POZOROVANIE 1: PRE $n \in \mathbb{N}$ JE

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{AK } n \bmod 2 = 0 \\ -1 & \text{AK } n \bmod 2 = 1 \end{cases}$$

Z TOHO MÁME

$$(-1)^n + 1 = \begin{cases} 2 & \text{AK } n \bmod 2 = 0 \\ 0 & \text{AK } n \bmod 2 = 1 \end{cases}$$

ČIŽE PLATÍ

$$(-1)^n + 1 \geq 0 \quad \text{PRE } \forall n \in \mathbb{N}$$

AK OBE STRANY PRENÁSOBÍME 10, DOSTANEME

$$10 \cdot (-1)^n + 10 \geq 0 \quad \text{PRE } \forall n \in \mathbb{N}$$

TVRDENIE:

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^n \cdot 10 + n = +\infty$$

DÔKAZ:

NECH

$$a_n = (-1)^n \cdot 10 + n$$

Z POZOROVANIA 1 MÁME

$$a_n + 10 \geq n \iff a_n \geq n - 10$$

KU KAŽDÉMU $k \in \mathbb{R}$ IDEME VOLIŤ TAKÉ $n_0(k)$, ŽE

$$n_0(k) > k + 10$$

POTOM BUDE PLATIŤ

$$\forall n > n_0(k) : a_n + 10 \geq n > k + 10$$

A TEDA

$$\forall n > n_0(k) : a_n + 10 > k + 10 \implies a_n > k$$

POZNÁMKA(1): AŽ PO DOKONČENÍ ÚLOH SOM SI UVEDOMIL, ŽE TVRDENIE

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 0 = 0$$

DÁVA ZMYSEL, IBA AK

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = a \in \mathbb{R} \neq \infty$$

VIEM, ŽE

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

ALE NEVIEM, ČI TO MÔŽEM UVÁDZAŤ BEZ DÔKAZU. KAŽDOPÁDNE, ALE POSTUPNOSŤ $a_n = 1/\sqrt{n}$ JE KLESAJÚCA, ZHORA OBMEDZENÁ 1, ZDOLA OBMEDZENÁ 0, TAKŽE MÁ NEJAKÚ LIMITU $a \in \mathbb{R}$.