ÚLOHA 2

- MILAN WIKARSKI -

LEMMA 1

MAJME FUNKCIU

$$f(x) = a \cdot x^n \quad \text{KDE } n \in \mathbb{N}, \; a \in \mathbb{R} / \{0\}$$

OZNAČME $f^{(i)}(x)$ i-TÚ DERIVÁCIU $f(x)$. POTOM AK $i \leq n$, PLATÍ

$$f^{(i)}(x) = \frac{n!}{(n-i)!} \cdot x^{n-i} \cdot a$$

DÔKAZ

INDUKCIOU PODĽA i. PRE $i=1$ MÁME

$$f'(x) = n a x^{n-1}$$

PREDPOKLADAJME, ŽE TVRDENIE PLATÍ PRE $i-1$. PRE i MÁME

$$f^{(i)}(x) = \left(f^{(i-1)}(x)\right)'$$

$$f^{(i)}(x) = \left(\frac{n!}{(n-i+1)!} \cdot x^{n-i+1}\right)'$$

A KEĎŽE $n! / (n-i+1)!$ JE KONŠTANTA, DOSTÁVAME

$$f^{(i)}(x) = \frac{n! \cdot \cancel{(n-i+1)} \cdot x^{n-i}}{\cancel{(n-i+1)} \cdot (n-i)!} = \frac{n!}{(n-i)!} \cdot x^{n-i}$$

$\square$

Z TOHO VYPLÝVAJÚ NASLEDUJÚCE TVRDENIA

DÔSLEDOK 1

AK $i < n$, POTOM $f^{(i)}(x)$ NIE JE KONŠTANTA; TJ.

HODNOTA $f^{(i)}(x)$ ZÁVISÍ OD HODNOTY x.

(PRETOŽE $n - i > 0$)

DÔSLEDOK 2

AK $i = n$, POTOM

$$f^{(i)}(x) = i! \cdot a$$

DOSADENÍM:

$$f^{(i)}(x) = f^{(n)}(x) = \frac{an!}{(n-n)!} \cdot x^{n-n} = \frac{an!}{0!} \cdot 1 = \underline{\underline{an!}}$$

ÚLOHA 2 — MILAN WIKARSKI —

LEMMA 2

MAJME FUNKCIU

$$f(x) = a \cdot x^n \quad \text{KDE } n \in \mathbb{N} \quad a \in \mathbb{R} / \{0\}$$

OZNAČME $f^{(i)}(x)$ i-TÚ DERIVÁCIU $f(x)$. POTOM AK

$i > n$, PLATÍ

$$f^{(i)}(x) = 0$$

DÔKAZ

PRE $i = n+1$ MÁME

$$f^{(i)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'$$

PODĽA LEMMA 1

$$f^{(i)}(x) = (i!)'$$

A KEDŽE $i!$ JE KONŠTANTA, DOSTÁVAME

$$f^{(i)}(x) = 0$$

PRE $i > n+1$ BY SME DERIVOVALI NULU, ČO JE OPÄŤ NULA.

TÝM SME TVRDENIE DOKÁZALI. □

LEMMA 3

MAJME FUNKCIU

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0$$

KDE

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \neq 0 \qquad n \in \mathbb{N}$$

UKÁŽEME, ŽE

$$f^{(i)}(0) = i!$$

DÔKAZ

$$f^{(i)}(0) = \left(a_n x^n\right)^{(i)}(0) + \left(a_{n-1} x^{n-1}\right)^{(i)} + \dots +$$

$$+ \left(a_1 x_1\right)^{(i)} + \left(a_0\right)^{(i)}$$

PODĽA LEMMA 2 PRE ČLENY $a_j x^j$ KDE $j < i$ PLATÍ

$$\left(a_j x^j\right)^{(i)}(0) = \underline{\underline{0}}$$

PODĽA LEMMA 1 PRE ČLENY $a_j x^j$ KDE $j > i$ PLATÍ,

$$\left(a_j x^j\right)^{(i)}(0) = \frac{j!}{(j-i)!} \cdot x^{j-i} \cdot a_j =$$

$$= \frac{j!}{(j-i)!} \cdot 0 \cdot a_j = \underline{\underline{0}}$$

CELÝ VÝRAZ TEDA VIEME ZREDUKOVAŤ NA

$$f^{(i)}(0) = \left(a_i \cdot x^i\right)^{(i)}(0)$$

ČO PODĽA LEMMA 1 JE

$$f^{(i)}(0) = a_i \cdot i! \quad \square$$

MAJME FUNKCIU

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

CHCEME UKÁZAŤ, ŽE PLATÍ

$$T_k^{f,0}(x) = f(x)$$

PRE $k \geq n$.

NAJPRV UVAŽUJME $k > n$. MÁME

$$T_k^{f,0}(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{k} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} (x-0)^i$$

PRE $i \in \{n+1, n+2, \dots, k\}$ JE $f^{(i)}(0)$ ROVNÉ NULE (PODĽA LEMMA 2). A TEDA AJ

$$\frac{f^{(i)}(0)}{i!} (x-0)^i = 0$$

Z TOHO MÁME

$$T_k^{f,0}(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f^{(i)}(0)}{i!} (x-0)^i \right) + \sum_{i=n+1}^{k} 0 =$$

$$= f(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} (x-0)^i = T_n^{f,0}$$

STAČÍ SA TEDA POZRIEŤ NA PRÍPAD $k=n$.

$$T_n^{f,0}(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i$$

POUŽITÍM LEMMA 3 DOSTÁVAME

$$T_n^{f,0}(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{i! \cdot a_i}{i!} \cdot x^i$$

$$T_n^{f,0}(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x^i$$

$$T_n^{f,0}(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

$$\underline{\underline{T_n^{f,0}(x) = f(x)}}$$