ÚLOHA 1 -MILAN WIKARSKI-

LEMMA 1

NECH $f(x)$ JE NEKLESAJÚCA NA INTERVALE

$$[a, b] \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

POTOM EXISTUJÚ

$$\lim_{x \to a+} f(x), \qquad \lim_{x \to b-} f(x)$$

A PLATÍ

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

DÔKAZ I

NECH PLATÍ

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) = g \in \mathbb{R}$$

POTOM KU KAŽDÉMU $\varepsilon > 0$ EXISTUJE x_ε TAKÉ, ŽE

$$g \leq f(x_\varepsilon) < g + \varepsilon$$

KEĎŽE $f(x)$ JE NEKLESAJÚCA, PLATÍ

$$\forall x \in (a, x_\varepsilon) \qquad g \leq f(x) \leq f(x_\varepsilon) < g + \varepsilon$$

TAKŽE NA REDUKOVANOM OKOLÍ $U^{*+}(a) = (a, x_\varepsilon)$ PLATÍ

$$\forall x \in U^{*+}(a) \qquad g - \varepsilon < f(x) < g + \varepsilon$$

Z ČOHO MÁME

$$\lim_{x \to a+} f(x) = g = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

DÔKAZ II

NECH PLATÍ

$$\sup_{x \in [a,b]} f(x) = g \in \mathbb{R}$$

POTOM KU KAŽDÉMU $\varepsilon > 0$ EXISTUJE x_ε TAKÉ, ŽE

$$g - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq g$$

KEĎŽE $f(x)$ JE NEKLESAJÚCA, PLATÍ

$$\forall x \in (x_\varepsilon, b) \qquad g - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq g < g + \varepsilon$$

PODOBNOU ÚVAHOU, AKO V DÔKAZE I DOSTÁVAME

$$\lim_{x \to b-} f(x) = g = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

ÚLOHA 1

-MILAN WIKARSKI-

LEMMA 2

NECH $f(x)$ JE NEKLESAJÚCA NA INTERVALE

$$[a, b] \quad a,b \in \mathbb{R}$$

POTOM, AK JE DEFINOVANÁ V BODE a, PLATÍ

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = f(a)$$

AK JE DEFINOVANÁ V BODE b, PLATÍ

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(b)$$

DÔKAZ I

OZNAČME SI

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = g \in \mathbb{R}$$

ZREJME NEMÔŽE PLATIŤ $g > f(a)$, INAK BY g NEBOLO INFIMUM. PRE SPOR UVAŽUJME $g < f(a)$. POTOM MUSÍ EXISTOVAŤ x_g TAKÉ, ŽE

$$f(x_g) = g \qquad x_g \neq a \Rightarrow x_g > a$$

Z TOHO MÁME

$$x_g > a \quad \wedge \quad f(x_g) < f(a)$$

ČO JE SPOR S PREDPOKLADOM, ŽE $f(x)$ JE NEKLESAJÚCA.

DÔKAZ II

OZNAČME SI

$$\sup_{x \in [a,b]} f(x) = g \in \mathbb{R}$$

ZREJME NEMÔŽE PLATIŤ $g < f(b)$, INAK BY g NEBOLO SUPREMUM. PRE SPOR UVAŽUJME $g > f(b)$. POTOM MUSÍ EXISTOVAŤ x_g TAKÉ, ŽE

$$f(x_g) = g \qquad x_g \neq b \Rightarrow x_g < b$$

Z TOHO MÁME

$$x_g < b \quad \wedge \quad f(x_g) > f(b)$$

ČO JE SPOR S PREDPOKLADOM, ŽE $f(x)$ JE NEKLESAJÚCA.

CHCELI BY SME UKÁZAŤ, ŽE FUNKCIA $f(x) = \sqrt{x}$ JE SPOJITÁ V KAŽDOM $x \in [0, \infty)$. MUSÍ TEDA PLATIŤ

$$\forall a \in [0, \infty) \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a) = \sqrt{a}$$

NECH $a \in [0, \infty)$ JE ĽUBOVOĽNÉ PEVNÉ. DEFINUJEME INTERVALY

$$I_1 = [a, a+1]$$

$$I_2 = [\max(0, a-1), a]$$

NA OBOCH INTERVALOCH JE $f(x)$ NEKLESAJÚCA. Z LEMMA 1 ~~MÁME~~ A LEMMA 2 MÁME

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \inf_{x \in I_1} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \sup_{x \in I_2} f(x) = f(a)$$

DOKOPY TEDA MÁME

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

PRE ĽUBOVOĽNÉ $a \in [0, \infty)$.

ÚLOHA 2 -MILAN WIKARSKI-

PRÍKLAD 1

CHCEME UKÁZAŤ

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{3}{2} \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x}}$$

ZAČNEME VYUŽITÍM L'HOPITALOVHO PRAVIDLA

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{1-x}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}\right)}{\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x}\right)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}}\right) =$$

TERAZ BUDEME UPRAVOVAŤ VÝRAZ

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{2\sqrt{x+1}+2\sqrt{1-x}}{2\sqrt{x+1}\cdot 2\cdot\sqrt{1-x}}}{\frac{3\sqrt[3]{(x+1)^2}+3\sqrt[3]{(1-x)^2}}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{(1-x)^2}}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\cancel{2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}{\cancel{2}\cdot 2\cdot\sqrt{(x+1)(1-x)}}}{\frac{\cancel{3}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}{\cancel{3}\cdot 3\sqrt[3]{(x+1)^2\cdot(1-x)^2}}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)\cdot 3\sqrt[3]{(x+1)^2\cdot(1-x)^2}}{2\sqrt{(x+1)(1-x)}\cdot\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}\right) \cdot \left((x+1)(1-x)\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 3}{2\left((x+1)(x-1)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}\right)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}\right)\left((x+1)(1-x)\right)^{\frac{1}{6}} \cdot 3}{2\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}\right)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}\right)\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{6}} \cdot 3}{2\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}\right)} \right) =$$

TERAZ VYUŽIJEME PRAVIDLÁ PRE ARITMETIKU LIMÍT

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}\right) \cdot \lim\limits_{x \to 0} \left(\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{6}}\right) \cdot \lim\limits_{x \to 0} 3}{\lim\limits_{x \to 0} 2 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x+1} + \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{1-x}\right) \cdot \lim\limits_{x \to 0} \left(\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{6}}\right) \cdot \lim\limits_{x \to 0} 3}{\lim\limits_{x \to 0} 2 \cdot \left(\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{(x+1)^2} + \lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}$$

POČÍTAME LIMITY SPOJITÝCH FUNKCIÍ V BODE 0. VŠETKY FUNKCIE SÚ V BODE 0 DEFINOVANÉ. MÔŽEME TEDA DOSADIŤ $x=0$ A DOPOČÍTAŤ

$$= \frac{\left(\sqrt{0+1} + \sqrt{1-0}\right) \cdot \left(1-0^2\right)^{\frac{1}{6}} \cdot 3}{2 \cdot \left(\sqrt[3]{(0+1)^2} + \sqrt[3]{(1-0)^2}\right)} =$$

$$= \frac{(1+1) \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot \left(\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1}\right)} = \frac{\cancel{2} \cdot 3}{\cancel{2}(1+1)} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{1-x}} \right) = \frac{1}{2}$$

ÚLOHA 2

-MILAN WIKARSKI-

LEMMA 1

NECH $f(x)$ JE REÁLNA FUNKCIA TAKÉ, ŽE

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$$

V NEJAKOM BODE $a \in \mathbb{R}^*$. POTOM PRE ČÍSLA $p, q \in \mathbb{R}$; $p < A < q$, PLATÍ, ŽE EXISTUJE REDUKOVANÉ OKOLIE $U_0^*(a)$ BODU a TAKÉ, ŽE

$$\forall x \in U_0^*(a) \qquad p < f(x) < q$$

DÔKAZ

POLOŽÍME

$$\varepsilon_p = A - p \quad (\varepsilon_p > 0)$$

$$\varepsilon_q = q - A \quad (\varepsilon_q > 0)$$

Z DEFINÍCIE LIMITY VIEME, ŽE EXISTUJÚ REDUKOVANÉ OKOLIA $U_1^*(a)$, $U_2^*(a)$ TAKÉ, ŽE

$$\forall x \in U_1^*(a) \qquad A - \varepsilon_p = A - (A - p) = p < f(x) < A + \varepsilon_p$$

$$\forall x \in U_2^*(a) \qquad A - \varepsilon_q < f(x) < A + \varepsilon_p = A + q - A = q$$

TAKŽE V REDUKOVANOM OKOLÍ $U_0^*(a) = U_1^*(a) \cap U_2^*(a)$ PLATÍ

$$\forall x \in U_0^*(a) \qquad p < f(x) < q$$

ÚLOHA 2 — MILAN LWIKARSKI —

LEMMA 2

MAJME REÁLNE FUNKCIE $f(x), g(x), h(x)$ TAKÉ, ŽE V NEJAKOM REDUKOVANOM OKOLÍ $U_0^*(a)$ BODU $a \in \mathbb{R}^*$ PLATÍ

$$\forall x \in U_0^*(a) \qquad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

POTOM, AK FUNKCIE $g(x), h(x)$ MAJÚ LIMITU $A \in \mathbb{R}$ MÁ AJ FUNKCIA $f(x)$ LIMITU A V BODE a.

DÔKAZ

NECH $\varepsilon > 0$ JE ĽUBOVOĽNÉ PEVNÉ. POTOM Z DEFINÍCIE LIMITY VIEME, ŽE EXISTUJÚ REDUKOVANÉ OKOLIA $U_1^*(a)$, $U_2^*(a)$ TAKÉ, ŽE

$$\forall x \in U_1^*(a) \qquad A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon$$

$$\forall x \in U_2^*(a) \qquad A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon$$

POTOM ALE PRE $U^*(a) = U_0^*(a) \cap U_1^*(a) \cap U_2^*(a)$ PLATÍ

$$\forall x \in U^*(a) \qquad A - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < A + \varepsilon$$

Z ČOHO MÁME

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

ÚLOHA 2

-MILAN WIKARSKI-

LEMMA 3

PLATÍ

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt[a]{x}} = 0 \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt[a]{x}}$$

PRE $a \in \{2, 3, \dots\}$

DŌKAZ

NECH $\varepsilon > 0$ JE ĽUBOVOĽNÉ PEVNÉ. CHCELI BY SME UKÁZAŤ, ŽE EXISTUJE $\delta(x) \in \mathbb{R}$ TAKÉ, ŽE

$$\forall x > \delta(x) \qquad f(x) < \varepsilon$$

MUSÍ TEDA PLATIŤ

$$\frac{1}{\sqrt[a]{x}} < \varepsilon \quad \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \quad \sqrt[a]{x} > 1/\varepsilon \quad \overset{\wedge a}{\Leftrightarrow} \quad x > 1/\varepsilon^a$$

VOLÍME TEDA

$$\delta(x) > 1/\varepsilon^a$$

TAKÉTO ČÍSLO MUSÍ EXISTOVAŤ, INAK BY $\mathbb{R}$ BOLA ZHORA OBMEDZENÁ.

ÚLOHA 2 -MILAN WIKARSKI-

LEMMA 4

PLATÍ

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}$$

DŐKAZ

NAJPR UKÁŽEME, ŽE PRE $x>0$ PLATÍ

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} \geq \frac{\sqrt{x}}{x} \qquad / \cdot x$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} \qquad / \wedge 2$$

$$x+\sqrt{x} \geq x \qquad / -x$$

$$\sqrt{x} \geq 0$$

POTOM ZREJME PLATÍ

$$\forall x>0 \qquad 0 \leq \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} \leq \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

ZREJME

$$\lim_{x\to\infty} 0 = 0$$

Z LEMMA 3

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

A TEDA Z LEMMA 2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} = 0$$

ÚLOHA 2 -MILAN WIKARSKI-

LEMMA 5

PLATÍ

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}}$$

DÔKAZ

NAJPRV UKÁŽEME, ŽE PRE $x>0$ PLATÍ

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}} \leqslant \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} \qquad \Big/ \; {}^{-1}$$

$$\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} \geqslant \frac{x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} \qquad \Big/ \cdot \sqrt{x+\sqrt{x}}$$

$$x+\sqrt{x} \geqslant x \qquad / - x$$

$$\sqrt{x} \geqslant 0$$

TAKŽE PLATÍ

$$\forall x>0 \qquad 0 \leqslant \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}} \leqslant \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}$$

PODOBNE, AKO V LEMMA 4, TEDA PLATÍ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}} = 0$$

ÚLOHA 2 -MILAN WIKARSKI-

LEMMA 6

PLATÍ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+\sqrt{x}} = 1$$

DÔKAZ

POUŽIJEME PRAVIDLÁ PRE LIMITU SÚČTU A PODIELU

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+\sqrt{x}}\cdot\frac{x^{-1}}{x^{-1}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) =$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 1}{\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{1+0} = \underline{\underline{1}}$$

PODĽA LEMMA 3.

ÚLOHA 2 — MILAN WIKARSKI —

PRÍKLAD 2

CHCEME UKÁZAŤ, ŽE PLATÍ

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = 1$$

NAJPRV DOKÁŽEME PRE $x>0$ NEROVNOSŤ

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} \geq \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} \quad / \cdot \sqrt{x+\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \geq \sqrt{x+\sqrt{x}} \quad / \wedge 2$$

$$x+\sqrt{x+\sqrt{x}} \geq x+\sqrt{x} \quad / -x$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} \quad / \wedge 2$$

$$x+\sqrt{x} \geq x \quad / -x$$

$$\sqrt{x} \geq 0$$

Z TOHO ALE MÁME, ŽE PLATÍ

$$\forall x>0 \quad \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} \geq 1$$

KEĎŽE

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = 1$$

ZREJME PLATÍ

$$\forall x \geq 1 \quad x^2 \geq x$$

Z TOHO MÁME

$$\left(\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)^2 \geq \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} \geq 1$$

$$\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}} \geq \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} \geq 1$$

TERAZ UKÁŽEME, ŽE PLATÍ

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+\sqrt{x}}\right) + \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}}\right)$$

POUŽITÍM LEMMA 5 A LEMMA 6 DOSTÁVEME

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}}\right) = 1+0 = \underline{\underline{1}}$$

A Z LEMMA 2 MÁME

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \underline{\underline{1}}$$