ÚLOHA 1 —MILAN WIKARSKI—

LEMMA 1

NECH a_n JE POSTUPNOSŤ REÁLNYCH ČÍSEL TAKÁ, ŽE

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$$

POTOM ČÍSLO a JE JEJ HROMADNÝM BODOM.

DÔKAZ

Z DEFINÍCIE LIMITY VIEME, ŽE KU KAŽDÉMU $\varepsilon>0$ EXISTUJE $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ TAKÉ, ŽE

$$\forall n > n_0(\varepsilon) \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

A TEDA NEROVNOSŤ $|a_n - a| < \varepsilon$ JE URČITE SPLNENÁ PRE NEKONEČNE VEĽA INDEXOV n (POŽIADAVKA Z DEFINÍCIE HROMADNÉHO BODU).

ÚLOHA 1 — MILAN WIKARSKI —

LEMMA 2

NECH a_n JE POSTUPNOSŤ REÁLNYCH ČÍSEL S LIMITOU $a \in \mathbb{R}$, POTOM MÁ PRÁVE JEDEN HROMADNÝ BOD ROVNÝ a. Z LEMMA 1 VIEME, ŽE MÁ HROMADNÝ BOD ROVNÝ a. CHCELI BY SME UKÁZAŤ, ŽE UŽ ŽIADEN HROMADNÝ BOD NEMÁ.

PRE SPOR UVAŽUJME, ŽE POSTUPNOSŤ a_n MÁ HROMADNÝ BOD $b \in \mathbb{R}$ (BUNO: $b > a$). POLOŽÍME $\varepsilon = |b-a|/2$. Z DEFINÍCIE LIMITY VIEME, ŽE EXISTUJE $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ TAKÉ, ŽE

$$\forall n > n_0(\varepsilon) \qquad |a_n - a| < \varepsilon$$

Z DEFINÍCIE HROMADNÉHO BODU VIEME, ŽE NEROVNOSŤ

$$|a_n - b| < \varepsilon$$

PLATÍ PRE NEKONEČNE VEĽA INDEXOV n. OZNAČME SI B MNOŽINU TÝCHTO INDEXOV. POTOM PRE

$$\forall n \in \{n_0(\varepsilon)+1,\ n_0(\varepsilon)+2,\ \dots\} \cap A$$

PLATIA OBE PODMIENKY NARAZ A DOSTÁVAME

$$|b-a| = |b - a_n + a_n - a| \leq |b-a_n| + |a_n - a| =$$

$$= |a_n - b| + |a_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |b-a|$$

DOSTALI SME

$$|b-a| < |b-a|$$

ČO JE SPOR.

ÚLOHA 1 -MILAN WIKARSKI-

LEMMA 3

NECH a_n JE POSTUPNOSŤ REÁLNYCH ČÍSEL; a_{k_n} JE NEJAKÁ Z NEJ VYBRANÁ POSTUPNOSŤ. ĎALEJ, NECH a_{k_n} MÁ HROMADNÝ BOD $b \in \mathbb{R}^*$. POTOM AJ POSTUPNOSŤ a_n MÁ HROMADNÝ BOD b.

DÔKAZ

UVAŽUJME $b \in \mathbb{R}$. POTOM KU KAŽDÉMU $\varepsilon > 0$ OBSAHUJE POSTUPNOSŤ a_{k_n} NEKONEČNE VEĽA PRVKOV V INTERVALE $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, A TEDA AJ POSTUPNOSŤ a_n OBSAHUJE NEKONEČNE VEĽA PRVKOV V TOMTO INTERVALE.

PRE $b = +\infty$ $(-\infty)$ MÁME KU KAŽDÉMU $A \in \mathbb{R}$ NEKONEČNE VEĽA PRVKOV POSTUPNOSTI a_{k_n}, PRE KTORÉ

$$a_{k_n} > A \qquad (a_{k_n} < A)$$

A TO ISTÉ TEDA PLATÍ AJ PRE POSTUPNOSŤ a_n.

ÚLOHA 1 -MILAN WIKARSKI-

LEMMA 4

KAŽDÁ POSTUPNOSŤ REÁLNYCH ČÍSEL a_n MÁ ASPOŇ JEDNU HROMADNÚ HODNOTU.

DÔKAZ

UVAŽUJME DVA PRÍPADY

1.) POSTUPNOSŤ a_n NIE JE OBMEDZENÁ

2.) POSTUPNOSŤ a_n JE OBMEDZENÁ

1.) NECH POSTUPNOSŤ a_n NIE JE OBMEDZENÁ ZHORA (ZDOLA). VYBERIEME Z NEJ VYBRANÚ POSTUPNOSŤ a_{k_n} TAK, ŽE

$$a_{k_n} > n \qquad (a_{k_n} < -n)$$

Z DEFINÍCIE VIEME, ŽE EXISTUJE $k_1 \in \mathbb{N}$ TAKÉ, ŽE

$$a_{k_1} > 1 \qquad (a_{k_1} < -1)$$

NECH JE VYBRANÁ POSTUPNOSŤ DEFINOVANÁ PRE $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ A NECH PLATÍ $k_1 < k_2 < \dots < k_{n-1}$. POTOM URČITE EXISTUJE $k_n \in \mathbb{N}$ TAKÉ, ŽE $k_n > k_{n-1}$ A ŽE $a_{k_n} > n$ $(a_{k_n} < -n)$ INAK BY POSTUPNOSŤ BOLA ZHORA (ZDOLA) OBMEDZENÁ ČÍSLOM

$$\max(a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_{n-1}})$$

$$\left(\min(a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_{n-1}})\right)$$

Z TOHO MÁME

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = +\infty \quad (-\infty)$$

A TEDA MÁ POSTUPNOSŤ HROMADNÝ BOD $+\infty(-\infty)$ (LEMMA 1)

A AJ POSTUPNOSŤ a_n MÁ HROMADNÝ BOD $+\infty$ $(-\infty)$ (LEMMA 3).

2.) DÔKAZ JE ROVNAKÝ, AKURÁT UVAŽUJEME, ŽE Z KAŽDEJ OBMEDZENEJ POSTUPNOSTI REÁLNYCH ČÍSEL VIEME VYBRAŤ VYBRANÚ POSTUPNOSŤ S LIMITOU $a \in \mathbb{R}$. (WEIERSTRASSOVA VETA; BEZ DÔKAZU).

ÚLOHA 1 -MILAN WIKARSKI-

LEMMA 5

KU KAŽDEJ POSTUPNOSTI REÁLNYCH ČÍSEL a_n EXISTUJE PRÁVE JEDNO ČÍSLO $\alpha \in \mathbb{R}^*$, KTORÉ MÁ TIETO VLASTNOSTI

1.) AK $\alpha' > \alpha$, POTOM EXISTUJE LEN KONEČNÝ POČET (ALEBO ROVNÝ NULE) INDEXOV n, PRE KTORÉ

$$a_n > \alpha'$$

2.) AK $\alpha'' < \alpha$, POTOM EXISTUJE NEKONEČNE VEĽA INDEXOV n, PRE KTORÉ

$$a_n > \alpha''$$

ČÍSLO α JE PRÁVE $\limsup a_n$

DÔKAZ I (SPOROM)

UVAŽUJME PRE SPOR, ŽE TAKÉTO ČÍSLA SÚ DVE α_1, α_2 $(\alpha_1 < \alpha_2)$. POTOM EXISTUJE $\beta \in \mathbb{R}^*$ TAKÁ, ŽE $\alpha_1 < \beta < \alpha_2$.

1.) Z PODMIENKY 1. ČÍSLA α_1 $(\beta > \alpha_1)$ VIEME, ŽE EXISTUJE IBA KONEČNÉ MNOŽSTVO INDEXOV n TAKÝCH, ŽE

$$a_n > \beta$$

2.) Z PODMIENKY 2. ČÍSLA α_2 $(\beta < \alpha_2)$ VIEME, ŽE EXISTUJE NEKONEČNE VEĽA INDEXOV n TAKÝCH, ŽE

$$a_n > \beta$$

ČO JE SPOR.

DŌKAZ II

POLOŽME $\alpha = \lim\sup a_n$. STAČÍ UKÁZAŤ, ŽE α MÁ POŽADOVANÉ VLASTNOSTI.

1.) NECH $\alpha' > \alpha$. PRE SPOR UVAŽUJME, ŽE EXISTUJE NEKONEČNE VEĽA INDEXOV n, PRE KTORÉ PLATÍ

$$a_n > \alpha' > \alpha$$

TIETO PRVKY a_n BY TVORILI VYBRANÚ POSTUPNOSŤ a_{k_n} Z POSTUPNOSTI a_n, KTORÁ BY MALA ASPOŇ JEDEN HROMADNÝ BOD β (LEMMA 4). KEĎŽE PLATÍ

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad a_{k_n} > \alpha'$$

BOLO BY AJ

$$\beta \geq \alpha' > \alpha$$

ALE β BY BOLA AJ HROMADNOU HODNOTOU CELEJ POSTUPNOSTI (LEMMA 3), ČO JE SPOR, KEĎŽE α JE NAJVÄČŠIA HROMADNÁ HODNOTA.

2.) NECH $\alpha'' < \alpha$. KEĎŽE α JE NAJVÄČŠOU HROMADNOU HODNOTOU, ZREJME PLATÍ

$$a_n > \alpha''$$

PRE NEKONEČNE VEĽA INDEXOV n.

ĎALEJ ZREJME PLATÍ

$$\lim\sup(-a_n) = -\lim\inf a_n$$

$$\lim\inf(-a_n) = -\lim\sup a_n$$

Z ČOHO DOSTÁVAME, ŽE KU KAŽDEJ POSTUPNOSTI REÁLNYCH ČÍSEL a_n EXISTUJE PRÁVE JEDNO $\beta \in \mathbb{R}^*$, KTORÉ MÁ TIETO VLASTNOSTI

1.) AK $\beta' > \beta$, POTOM EXISTUJE NEKONEČNE VEĽA INDEXOV n, PRE KTORÉ

$$a_n < \beta'$$

2.) AK $\beta'' < \beta$, POTOM EXISTUJE LEN KONEČNÉ MNOŽSTVO (ALEBO ŽIADNE) INDEXOV n, PRE KTORÉ

$$a_n < \beta''$$

ČÍSLO β JE PRÁVE $\liminf a_n$.

INÁ INTERPRETÁCIA TÝCHTO TVRDENÍ JE, ŽE

1.) KU KAŽDÉMU $\alpha' > \alpha = \limsup a_n$ EXISTUJE $n_1 \in \mathbb{N}$ TAKÉ, ŽE

$$\forall n > n_1 \quad a_n < \alpha'$$

2.) KU KAŽDÉMU $\beta' < \beta = \liminf a_n$ EXISTUJE $n_2 \in \mathbb{N}$ TAKÉ, ŽE

$$\forall n > n_2 \quad a_n > \beta'$$

ÚLOHA 1

POSTUPNOSŤ REÁLNYCH ČÍSEL a_n MÁ VLASTNÚ LIMITU $a \in \mathbb{R}$ PRÁVE VTEDY A LEN VTEDY, AK PLATÍ

$$\limsup a_n = \liminf a_n = a$$

DÔKAZ $\Rightarrow$

UVAŽUJME, ŽE POSTUPNOSŤ a_n MÁ LIMITU a. PODĽA LEMMA 2. MÁ PRÁVE JEDNU HROMADNÚ HODNOTU ROVNÚ a.
$\limsup a_n$ JE NAJVÄČŠIA HROMADNÁ HODNOTA, $\liminf a_n$ JE NAJMENŠIA HROMADNÁ HODNOTA, A TEDA ZREJME PLATÍ

$$\limsup a_n = \liminf a_n = a$$

DÔKAZ $\Leftarrow$

NECH $\limsup a_n = \liminf a_n = \alpha$. Z LEMMA 5 MÁME

1.) KU KAŽDÉMU $\alpha' > \alpha$ EXISTUJE $n_1 \in \mathbb{N}$ TAKÉ, ŽE
$$\forall n > n_1 \quad a_n < \alpha'$$

2.) KU KAŽDÉMU $\alpha'' < \alpha$ EXISTUJE $n_2 \in \mathbb{N}$ TAKÉ, ŽE
$$\forall n > n_2 \quad a_n > \alpha''$$

PRE $n_0 = \max(n_1, n_2)$ PLATIA OBE PODMIENKY SÚČASNE. AK POLOŽÍME $\alpha' = \alpha + \varepsilon$, $\alpha'' = \alpha - \varepsilon$ PRE ĽUBOVOĽNÉ $\varepsilon > 0$ DOSTÁVAME

$$\forall n > n_0 \quad \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$$

Z ČOHO MÁME $\limsup a_n = \liminf a_n = \alpha = \lim_{n \to \infty} a_n = a$.