ÚLOHA 5

-MILAN WIKARSKI-

LEMMA 1

CHCEME NÁJSŤ DERIVÁCIU FUNKCIE arctan. ZAČNEME TAK, ŽE SI OZNAČÍME

$$y(x) = \arctan(x)$$

POTOM MUSÍ PLATIŤ

$$\tan(y(x)) = x$$

$$\frac{d}{dx}\Big(\tan(y(x))\Big) = \frac{d}{dx}(x)$$

OZNAČÍME SI $u = y(x)$. DOSTANEME

$$\frac{d\tan(u)}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x)$$

$$\sec^2(u) \cdot \frac{d}{dx}\Big(y(x)\Big) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$\sec^2\Big(y(x)\Big) \cdot \frac{d}{dx}\Big(y(x)\Big) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$\sec^2\Big(y(x)\Big) \cdot \frac{d}{dx}\Big(y(x)\Big) = 1$$

TERAZ OBE STRANY PREDELÍME $\sec^2(y(x))$ A DOSTANEME

$$\frac{d}{dx}\left(y(x)\right) = \frac{1}{\sec^2(y(x))}$$

VRÁTIME SA K SUBSTITÚCII

$$\frac{d}{dx}\left(\arctan(x)\right) = \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\arctan(x)\right) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))}$$

$$\underline{\underline{\frac{d}{dx}\left(\arctan(x)\right) = \frac{1}{1+x^2}}}$$

ÚLOHA 5 — MILAN WIKARSKI —

PRÍKLAD 1

MÁME FUNKCIU

$$f(x) = \ln\left(\arctan(\sqrt{x})\right)$$

NAJPRV URČÍME JEJ DEFINIČNÝ OBOR. POZRIME SA NA JEJ ČASTI

$$\sqrt{x} : \quad [0, \infty) \to [0, \infty)$$
$$\arctan : \quad \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Z TOHO MÁME

$$\arctan \circ \sqrt{\ } : \quad [0, \infty) \to [0, \infty) \cap \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\arctan \circ \sqrt{\ } : \quad [0, \infty) \to [0, \infty) \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

KEĎŽE

$$\arctan(\sqrt{0}) = \arctan(0) = 0$$

A KEĎŽE $\ln(x)$ JE DEFINOVANÁ NA $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, STAČÍ ZABEZPEČIŤ $\arctan(\sqrt{x}) \neq 0$, MÁME TEDA

$$D(f(x)) = \cancel{[0, \infty)} \ (0, \infty)$$

TERAZ NÁJDEME DERIVÁCIU $f(x)$. OZNAČÍME SI

$$u = \arctan(\sqrt{x})$$

$$v = \ln(u)$$

Z TOHO MÁME

$$\frac{d}{dx} f = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d\ln(u)}{u} \cdot \frac{du}{dx} =$$

$$= \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\arctan(\sqrt{x})\right)}{\arctan(\sqrt{x})}$$

TERAZ SI OZNAČÍME

$$u = \sqrt{x}$$

$$v = \arctan(u)$$

Z TOHO MÁME

$$\frac{\frac{d}{dx}\left(\arctan(\sqrt{x})\right)}{\arctan(\sqrt{x})} = \frac{\frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}}{\arctan(\sqrt{x})} =$$

$$= \frac{\frac{d\arctan(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}}{\arctan(\sqrt{x})} = \frac{\frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}}{\arctan(\sqrt{x})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)}{\arctan(\sqrt{x})} = \frac{\frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)}{1+x}}{\arctan(\sqrt{x})} =$$

$$= \frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)}{(1+x)\arctan(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{(1+x)\arctan(\sqrt{x})} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x} \cdot (1+x) \cdot \arctan(\sqrt{x})}}}$$

ÚLOHA 5 — MILAN WIKARSKI —

PRÍKLAD 2

MAJME FUNKCIU

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) / x & \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 & \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

NAJPRV NÁJDEME DEFINIČNÝ OBOR. $\sin(x)$ JE DEFINOVANÁ NA $\mathbb{R}$. STAČÍ TEDA ZABEZBEČIŤ $x \neq 0$. TO NÁM ALE ZABEZPEČUJE DEFINÍCIA. PRETO JE AJ f DEFINOVANÁ NA $\mathbb{R}$.

TERAZ NÁJDEME DEFNÁCIE

I. AK $x = 0$, POTOM

$$f(x) = 1; \quad \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} 1 = \underline{\underline{0}}$$

II. AK $x \neq 0$, POTOM

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}; \quad \frac{d}{dx} f(x) =$$

$$= \frac{x\left(\frac{d}{dx}\sin(x)\right) - \left(\frac{d}{dx}x\right)\sin(x)}{x^2} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^2}}}$$

ÚLOHA 5 -MILAN WIKARSKI-

PRÍKLAD 1

CHCEME SPOČÍTAŤ LIMITU

$$\lim_{x\to 0} f(x) \qquad f(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2}$$

ZAČNEME ÚPRAVOU

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x+1}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - x\ln(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(x+1)} \cdot \frac{x - x\ln(x+1) - \ln(x+1)}{x^2}$$

TERAZ SI VYTIAHNEME LIMITU FUNKCIE $1/(x+1)$, KTORÁ JE SPOJITÁ

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{(x+1)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x - x\ln(x+1) - \ln(x+1)}{x^2} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x - x\ln(x+1) - \ln(x+1)}{x^2}$$

ĎALEJ ROZLOŽÍME VÝRAZ NA SÚČET

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x - \ln(x+1)}{x^2} - \frac{x \ln(x+1)}{x^2} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} - \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$$

POTREBUJEME TEDA SPOČÍTAŤ LIMITY DVOCH FUNKCIÍ

$$g(x) = \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}, \qquad h(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$$

I. ZAČNEME S $h(x)$. POUŽIJEME L'HOPPITALOVO PRAVIDLO

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx} \ln(x+1)}{\frac{d}{dx} x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x+1}{1}$$

[redacted] TO, ČO NÁM OSTALO JE SPOJITÁ FUNKCIA, A TEDA

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \frac{0+1}{1} = 1$$

II. OSTÁVA NÁM $g(x)$. OPÄŤ ZAČNEME POUŽITÍM L'HOPPITALOVHO PRAVIDLA

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(x+1)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left(x-\ln(x+1)\right)}{\frac{d}{dx}x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}x - \frac{d}{dx}\ln(x+1)}{\frac{d}{dx}x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{x+1}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x+1-1}{x+1}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2(x+1)}$$

A OPÄŤ ZO SPOJITOSTI MÁME

$$= \frac{1}{2(0+1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{2}$$

VRÁTIME SA KU PÔVODNEJ ÚLOHE

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) - \lim_{x\to 0} h(x)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} - 1 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$