-MILAN WIKARSKI-

ÚLOHA 2

MAJME 2 POSTUPNOSTI REÁLNYCH ČÍSEL a_n, b_n TAKÝCH, ŽE

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = B > 0$$

CHCEME UKÁZAŤ, ŽE

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = +\infty$$

ČASŤ 1

Z DEFINÍCIE LIMITY VIEME, ŽE PRE $\varepsilon>0$ PLATÍ, ŽE EXISTUJE $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ TAKÉ, ŽE

$$\forall n > n_0(\varepsilon): |b_n - B| < \varepsilon$$

ČO VLASTNE ZNAMENÁ

$$\forall n > n_0(\varepsilon): \quad B+\varepsilon > b_n > B-\varepsilon$$

ZOBERME SI NEJAKÉ ČÍSLO $p\in\mathbb{R}$ TAKÉ, ŽE $B > p > 0$.

POLOŽME $\bar{\varepsilon} = B-p$ (ZREJME $\bar{\varepsilon}>0$). DOSTANEME

$$\forall n > n_0(\bar{\varepsilon}): \quad 2B-p > b_n > p$$

OZNAČME $n_1(p) = n_0(\bar{\varepsilon})$. PLATÍ PREŇ

$$\forall n > n_1(p): b_n > p$$

ČASŤ 2

Z DEFINÍCIE NEVLASTNEJ LIMITY VIEME, ŽE EXISTUJE $n_2(p)\in\mathbb{N}$ TAKÉ, ŽE

$$\forall n > n_2(p): \quad a_n > p$$

POTOM URČITE PLATÍ

$$\forall n > \max(n_1(p), n_2(p)): \quad a_n \cdot b_n > b_n \cdot p$$

ČASŤ 3

Z DEFINÍCIE NEVLASTNEJ LIMITY VIEME, ŽE KU KAŽDÉMU K/p EXISTUJE $n_3(k) \in N$ TAKÉ, ŽE

$$\forall n > n_3(k): \; b_n > k/p$$

TO VIEME UPRAVIŤ NA

$$\forall n > n_3(k): \; b_n \cdot p > k$$

RIEŠENIE

OZNAČME SI $n_0 = \max(n_1(p), n_2(p), n_3(k))$. POTOM PLATÍ

$$\forall n > n_0: \; a_n \cdot b_n > b_n \cdot p > k$$

Z ČOHO DOSTÁVAME

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$$

ČO SME CHCELI DOKÁZAŤ.