-MILAN VIKARSKI-

LEMMA 1

NECH a_n JE POSTUPNOSŤ REÁLNYCH ČÍSEL TAKÁ, ŽE $a_n \to A \in \mathbb{R}$ PRE $n \to \infty$. POTOM ĽUBOVOĽNÁ POSTUPNOSŤ Z NEJ VYBRANÁ MÁ TIEŽ LIMITU A.

DÔKAZ

NECH k_n JE NEJAKÁ RASTÚCA POSTUPNOSŤ PRIRODZENÝCH ČÍSEL. ZREJME PLATÍ

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad k_n \geq n$$

UVAŽUJME POSTUPNOSŤ REÁLNYCH ČÍSEL a_n S LIMITOU A; A Z NEJ VYBRANÚ POSTUPNOSŤ a_{k_n}. Z D~~EFINÍCIE LIM~~ITY VIEME, ŽE PRE KAŽDÉ $\varepsilon > 0$ EXISTUJE TAKÉ $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, ŽE

$$\forall n > n_0(\varepsilon): \quad A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

VIEME, ŽE $k_n \geq n$ PRE VŠETKY $n \in \mathbb{N}$, A TEDA PLATÍ AJ

$$\forall n > n_0: \quad A - \varepsilon < a_{k_n} < A + \varepsilon$$

A Z TOHO DOSTÁVAME

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = A$$

PRE ĽUBOVOĽNÚ VYBRANÚ POSTUPNOSŤ a_{k_n}.

DÔSLEDOK

MAJME POSTUPNOSŤ REÁLNYCH ČÍSEL a_n. PREDPOKLADAJME, ŽE MÁ NEJAKÚ LIMITU $A \in \mathbb{R}$. ĽUBOVOĽNÁ Z NEJ VYBRANÁ POSTUPNOSŤ MUSÍ MAŤ LIMITU A. AK NÁJDEME NEJAKÉ DVE VYBRANÉ POSTUPNOSTI a_{k_n}, $a_{k'_n}$ TAKÉ, ŽE

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} \neq \lim_{n\to\infty} a_{k'_n}$$

NÁŠ PREDPOKLAD BOL CHYBNÝ A POSTUPNOSŤ a_n NEMÁ ŽIADNU LIMITU.

PRÍKLAD 2.

UKÁŽEME, ŽE POSTUPNOSŤ

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

NEMÁ LIMITU. POLOŽÍME

$$k_n = 8n + 2, \qquad k'_n = 8n$$

DOSTÁVAME VYBRANÉ POSTUPNOSTI

$$a_{k_n} = \sin\left(\frac{(8n+2)\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\cancel{4}\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}{\cancel{4}}\right) =$$

$$= \sin\left(2n\pi + \frac{1}{2}\pi\right)$$

A KEĎŽE $\sin(x)$ JE PERIODICKÁ NA 2π A $n \in \{1, 2, \dots\}$ MÁME

$$a_{k_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

PODOBNE PRE DRUHÚ VYBRANÚ POSTUPNOSŤ

$$a_{k'_n} = \sin\left(\frac{8n\pi}{4}\right) = \sin(2n\pi) = \sin(0) = 0$$

PODĽA LEMMA 1 TEDA POSTUPNOSŤ a_n NEMÁ LIMITU, PRETOŽE SME NAŠLI DVE VYBRANÉ POSTUPNOSTI Z a_n, KTORÉ MAJÚ ODLIŠNÚ LIMITU.

POZNÁMKA: LEMMA 1 SOM NEDOKÁZAL PRE $a_n \to +\infty / -\infty$ PRE $n \to \infty$. ČO ALE NEJE NUTNÉ, PRETOŽE POSTUPNOSŤ a_n JE OBMEDZENÁ, KEĎŽE FUNKCIA $\sin(x)$ JE OBMEDZENÁ, A TEDA NEMÔŽE MAŤ LIMITU $A \in \{+\infty, -\infty\}$.

LEMMA 2

NECH a_n JE NEKLESAJÚCA POSTUPNOSŤ REÁLNYCH ČÍSEL. ĎALEJ, NECH a_n JE ZHORA OHRANIČENÁ ČÍSLOM $K \in \mathbb{R}$. POTOM PLATÍ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = K$$

DÔKAZ

NECH $\varepsilon > 0$ JE ĽUBOVOĽNÉ PEVNÉ. POTOM KU NEMU EXISTUJE $n_0 \in \mathbb{N}$ TAKÉ, ŽE

$$K - a_{n_0} < \varepsilon$$

TAKÉTO ČÍSLO MUSÍ EXISTOVAŤ (INAK BY a_n NEBOLA ZHORA OHRANIČENÁ ČÍSLOM K, ALE NEJAKÝM MENŠÍM ČÍSLOM). a_n JE NEKLESAJÚCA, TAKŽE PLATÍ

$$\forall n > n_0 : \quad K - a_{n} < \varepsilon$$

TAKŽE URČITE PLATÍ AJ

$$\forall n > n_0 \quad K - \varepsilon < a_n < K + \varepsilon$$

Z ČOHO MÁME

$$\lim_{n\to\infty} a_n = K$$

PRÍKLAD 1.

MAJME POSTUPNOSŤ ZADANÚ REKURENTNE

$$a_1 = 0$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - a_n\right)^2$$

NAJPRV UKÁŽEME, ŽE TÁTO POSTUPNOSŤ JE NEKLESAJÚCA. MUSÍ PLATIŤ

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq a_{n+1} \iff a_{n+1} - a_n \geq 0$$

MÁME

$$a_{n+1} - a_n = \cancel{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - a_n\right)^2 - \cancel{a_n}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - a_n\right)^2$$

CHCEME UKÁZAŤ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - a_n\right)^2 \geq 0 \iff \left(\frac{1}{3} - a_n\right)^2 \geq 0$$

ČO ZREJME PLATÍ, PRETOŽE $x^2 \geq 0$ PRE $\forall x \in \mathbb{R}$.

ĎALEJ UKÁŽEME, ŽE PLATÍ

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq \frac{1}{3}$$

BUDEME TO DOKAZOVAŤ INDUKCIOU. PRE $n=1$:

$$a_n = a_1 = 0 \leq \frac{1}{3}$$

PREDPOKLADAJME, ŽE SME TVRDENIE DOKÁZALI PRE NEJAKÉ $n \in \mathbb{N}$. CHCEME UKÁZAŤ, ŽE PLATÍ AJ PRE $n+1$.

MÁME

$$a_n \leq \frac{1}{3} \qquad / \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{a_n}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{3\sqrt{2}} \qquad /^2$$

$$\frac{a_n^2}{2} \leq \frac{1}{18} \qquad / + \frac{1}{18}$$

$$\frac{a_n^2}{2} + \frac{1}{18} \leq \frac{1}{9}$$

TERAZ KU ~~PRAVEJ~~ ĽAVEJ STRANE PRIRÁTAME $(2/3) \cdot a_n$. V ĽAVEJ STRANE TENTO ČLEN ODHADNEME HODNOTOU $2/9$, PRETOŽE

$$a_n \leq \frac{1}{3} \iff \frac{2}{3} a_n \leq \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 3} = \frac{2}{9}$$

DOSTÁVAME

$$\frac{1}{2}a_n^2 + \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{18} \leq \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$$

VÝRAZ STAČÍ UŽ LEN UPRAVIŤ

$$a_n + \frac{1}{2}a_n^2 - \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{18} \leq \frac{1}{3}$$

$$a_n + \frac{1}{2}\left(a_n^2 - \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{9}\right) \leq \frac{1}{3}$$

$$a_n + \frac{1}{2}\left(a_n^2 - 2\cdot\frac{1}{3}a_n + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) \leq \frac{1}{3}$$

$$a_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - a_n\right)^2 \leq \frac{1}{3}$$

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{3}$$

VIEME TEDA, ŽE POSTUPNOSŤ a_n JE NEKLESAJÚCA A ZHORA OHRANIČENÁ. PODĽA LEMMA 2. MÁ LIMITU $a \in \mathbb{R}$.

POSTUPNOSŤ

$$a_{n+1} = \{a_2, a_3, \dots, a_{n+1}, \dots\}$$

JE VYBRANÁ Z POSTUPNOSTI

$$a_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

A TEDA PODĽA LEMMA 1 PLATÍ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$$

MÁME TEDA

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - a_n\right)^2\right)$$

$$\cancel{\lim_{n\to\infty} a_n} = \cancel{\lim_{n\to\infty} a_n} + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - a_n\right)^2$$

$$0 = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - a_n\right)^2 \quad /\cdot 2$$

$$0 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - a_n\right)^2$$

$$0 = \left(\frac{1}{3} - \lim_{n\to\infty} a_n\right)^2$$

$$0 = \left(\frac{1}{3} - a\right)^2$$

$$\underline{\underline{a = \frac{1}{3}}}$$

LIMITA POSTUPNOSTI a_n JE 1/3.