-MILAN WIKARSKI-

ÚLOHA 1

URČITE MNOŽINU

$$M = \{a \in \mathbb{R};\ (\forall x \in \mathbb{R})(|x-2| \leq 1 \Rightarrow x^2 - ax > 5)\}$$

ROZOBERME SI NAJPRV VÝRAZ $|x-2| \leq 1$. TEN SA DÁ PREPÍSAŤ NA VÝRAZ $3 \leq x \leq 1 \iff x \in \langle 1, 3 \rangle$. MÁME TEDA

$$M = \{a \in \mathbb{R};\ (x \in \langle 1, 3 \rangle)(x^2 - ax > 5)\}$$

URČUJEME TEDA MNOŽINU TAKÝCH REÁLNYCH ČÍSEL a, PRE KTORÉ PLATÍ $x^2 - ax > 5$ ZA PREDPOKLADU, ŽE $x \in \langle 1, 3 \rangle$. ROZOBERME SI PROBLÉM NA 3 PRÍPADY; KTORÉ VYPRODUKUJÚ 3 MNOŽINY M_1, M_2, M_3

1.) $a < 0$ - M_1

2.) $a = 0$ - M_2

3.) $a > 0$ - M_3

POTOM $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = M$ BUDE RIEŠENÍM.

1.) $a < 0$

AK $a < 0$, POTOM $-ax > 0$. ZVOĽME $x = 3$, DOSTÁVAME

$$9 - ax > 5 \iff -ax > -4 > 0$$

MÔŽEME VOLIŤ ĽUBOVOĽNÉ $a < 0$ A TVRDENIE BUDE PLATIŤ. MÁME TEDA

$$M_1 = (-\infty, 0)$$

2./ $a = 0$

OPÄŤ VOLÍME $x = 3$, DOSTÁVAME $0 > -4$, A TEDA $M_2 = \{0\}$

3./ $a > 0$

(~~POZOROVANIE: PRE $x \in \langle 1, 3 \rangle$ PLATÍ $x^2 > x$~~. NEPOTREBNÉ)

PRE $a > 0$ JE $-ax < 0$. AK TROCHU POPREHADZUJEME VÝRAZ $x^2 - ax > 5$ DOSTANEME

$$x^2 - 5 > ax$$

KDE PRE $a > 0$ JE $ax > 0$. OBE STRANY VYDELÍME x:

$$x - \frac{5}{x} > a$$

ZREJME $x > x/5$ PRE $x > 0$, A TEDA MÁ ZMYSEL SA DÍVAŤ IBA NA ČO NAJVÄČŠIE x. ZVOĽME $x = 3$

$$3 - \frac{5}{3} > a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9-5}{3} > a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{3} > a$$

Z TOHO MÁME $M_3 = (0, 4/3)$.

RIEŠENÍM JE $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = (-\infty, 4/3)$.