## Künstliche Intelligenz kapieren und programmieren

Teil 6: Aus Fehlern lernen – Error Backpropagation

Michael Weigend Universität Münster



mw@creative-informatics.de www.creative-informatics.de 2024



Materialien bei GitHub:

https://github.com/mweigend/ki-workshop

## Tag 2

Zeit	Thema	Inhalte
9.00	Perzeptron	Neuron, Aktivierungsfunktion, Daten visualisieren mit Matplotlib, Rosenblatt-Perzeptron für logische Operationen
11.00	Aus Fehlern lernen	Error-Backpropagation, einfaches künstliches neuronales Netz (KNN) mit verborgenen Knoten
12.45	Mittagspause	
13.45	Ziffern erkennen	NumPy, KNN mit Array-Operationen, das Ziffern erkennen kann
15.00	Anwendung von KI	Verkehrsschilder erkennen, Gesichter erfassen, Experimente mit OpenCV
16.00	Ende	

## 6.1 Die Grenzen des Rosenblatt-Perzeptrons



#### Exklusives ODER (XOR)

a	Ъ	a XOR b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

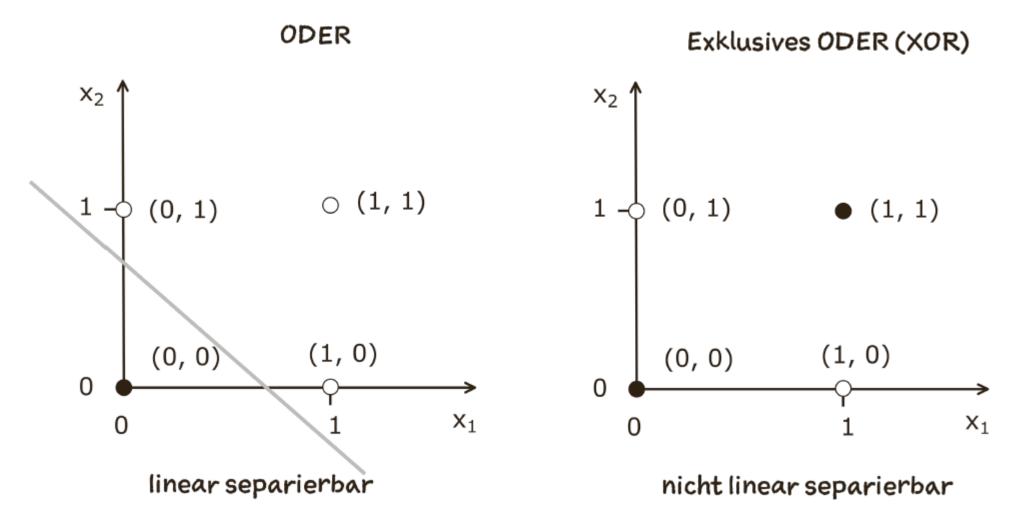
## Die Grenzen des Rosenblatt-Perzeptrons



Seymour Papert und Marvin Minsky (1969):

Ein Perzeptron, das nur aus Eingabe- und Ausgabeknoten besteht, kann nur solche Datenpunkte klassifizieren, die linear separierbar sind

#### Das XOR-Problem



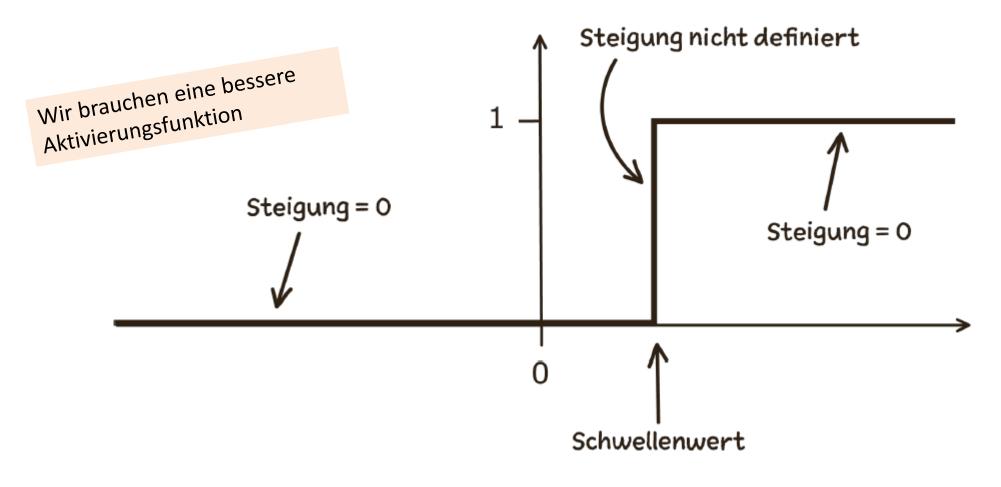
## 6.2 Error Backpropagation



- »Verborgene Knoten«, die zwischen Eingabe- und Ausgabeknoten liegen
- Error Backpropagation (auf Deutsch »Fehlerrückführung«), ein neuer Mechanismus für die Anpassung der Gewichte während des Trainings.

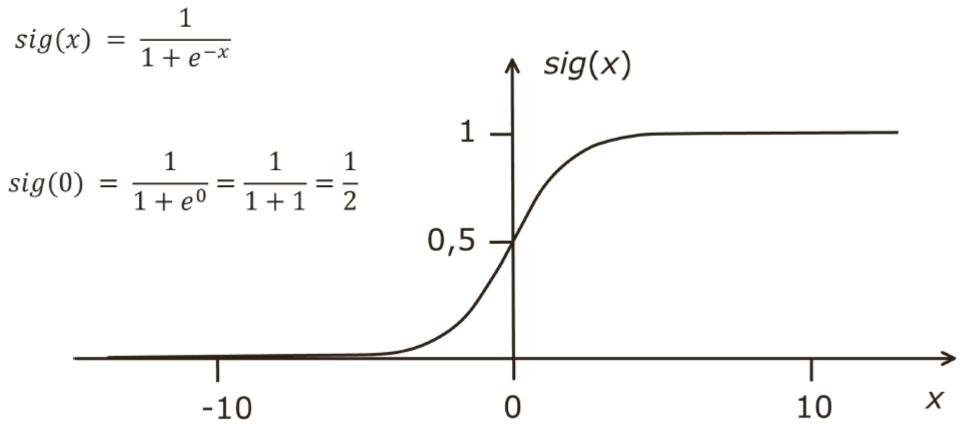
Learning representations by back-propagating errors (1987)

### Das Problem der Schwellenwertfunktion

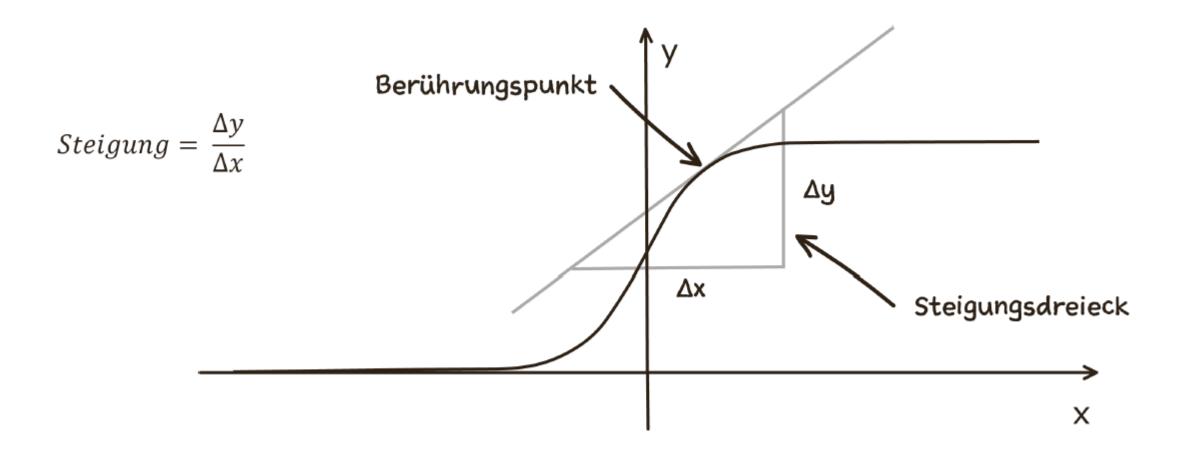


## Die Sigmoid-Funktion

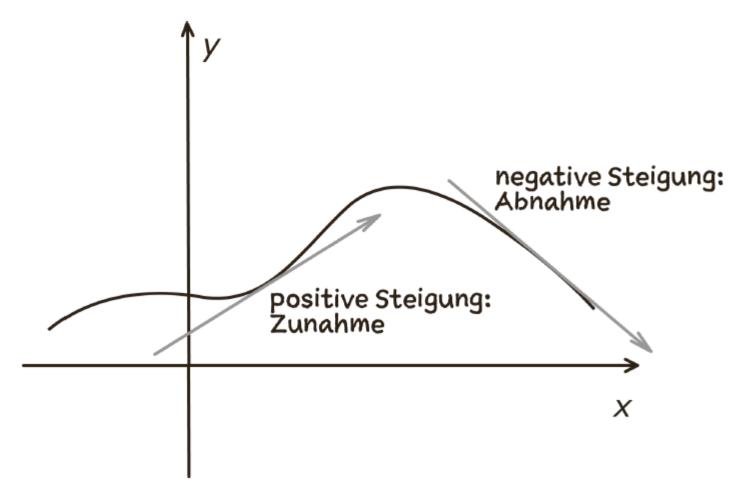
Eulersche Zahl e =2,7182818 ...



## Steigung

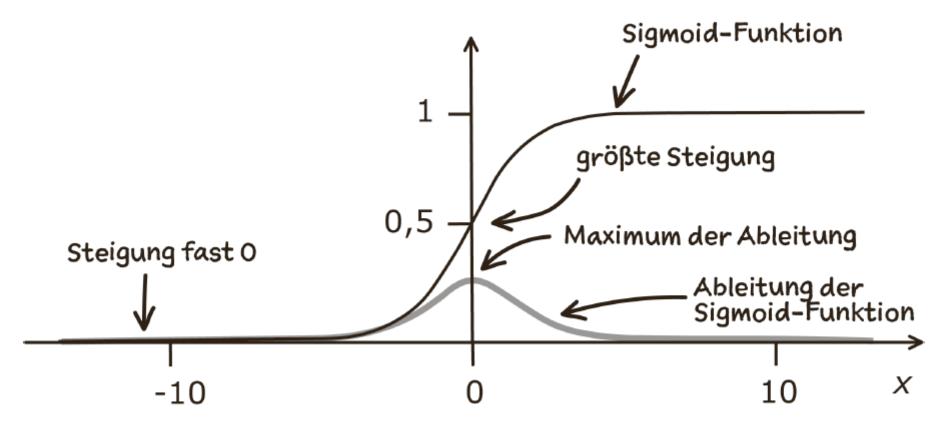


## Steigung im Alltag



## Ableitung der Sigmoid-Funktion

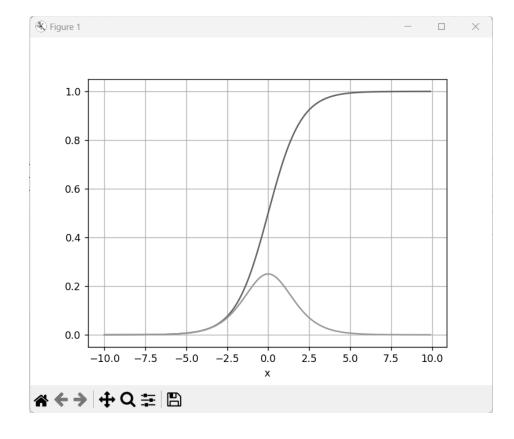
$$sig'(x) = \frac{d \ sig(x)}{dx} = sig(x) \cdot (1 - \ sig(x))$$



## Übung 6.1 (5-10 min)

Erweitern Sie das folgende Programm, so dass sig(x) und die Ableitungsfunktion dargestellt werden. Tipp: Zum Plotten der Ableitungsfunktion fügen Sie einen zweiten Aufruf von plot() ein.

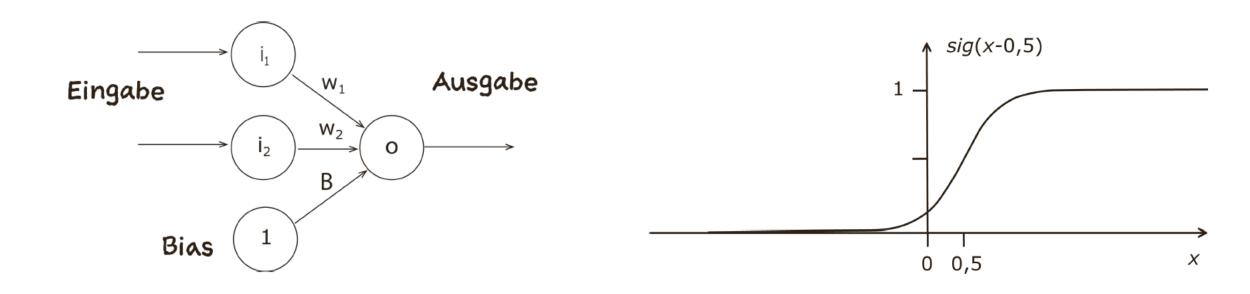
```
# sigmoid plot starter.py
from matplotlib.pyplot import *
from math import e
def sig(x):
    return 1 / (1 + e^{**}-x)
x = [x/10 \text{ for } x \text{ in range}(-100, 100)]
y 1 = [sig(x) for x in x]
plot(x, y 1)
xlabel('x')
grid()
show()
```



## Lösung 6.2

```
# sigmoid plot.py
from matplotlib.pyplot import *
from math import e
def sigmoid(x):
    return 1 / (1 + e^{**}-x)
def sigmoid ableitung(x):
    return sigmoid(x)*(1 - sigmoid(x))
x = [x/10 \text{ for } x \text{ in range}(-100, 100)]
y 1 = [sigmoid(x) for x in x]
y = [sigmoid ableitung(x) for x in x]
plot(x, y 1)
plot(x , y 2)
xlabel('x')
grid()
show()
```

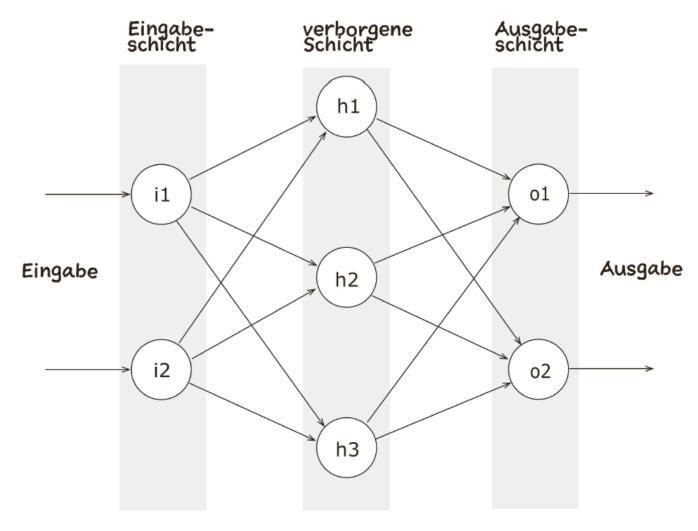
## Perzeptron mit Bias und Aktivierungsfunktion sig()



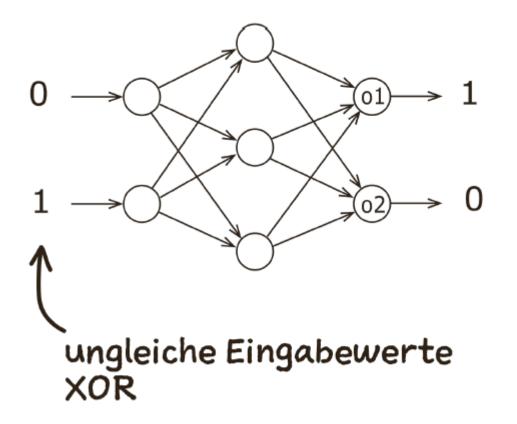
#### Gewichtete Eingabe:

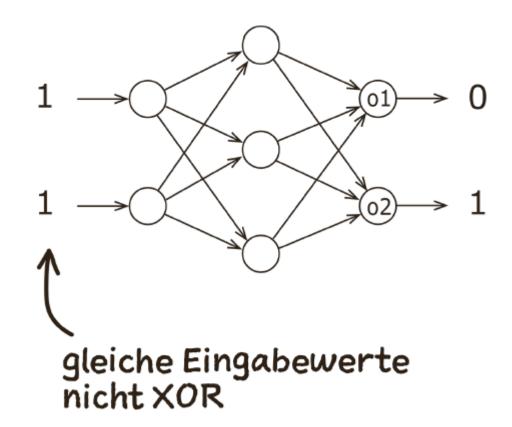
$$x = i_1 \cdot w_1 + i_2 \cdot w_2 + B$$

## Neuronales Netz mit verborgenen Knoten



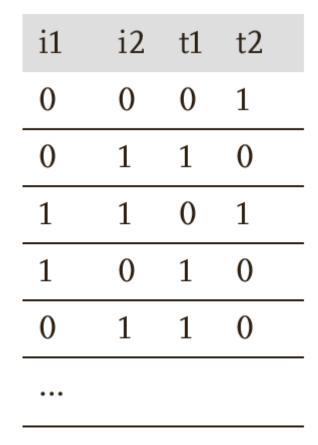
## XOR-Detektor (Unstimmigkeitsdetektor)





## Trainingsdaten

Zufällige Eingabedaten (Input)

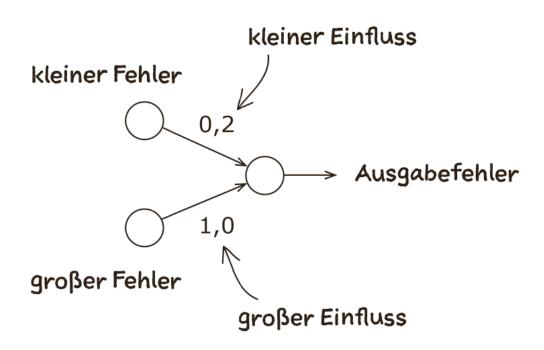


Erwartete Ausgabe (Target)

#### Die 4 Phasen eines Lernschritts

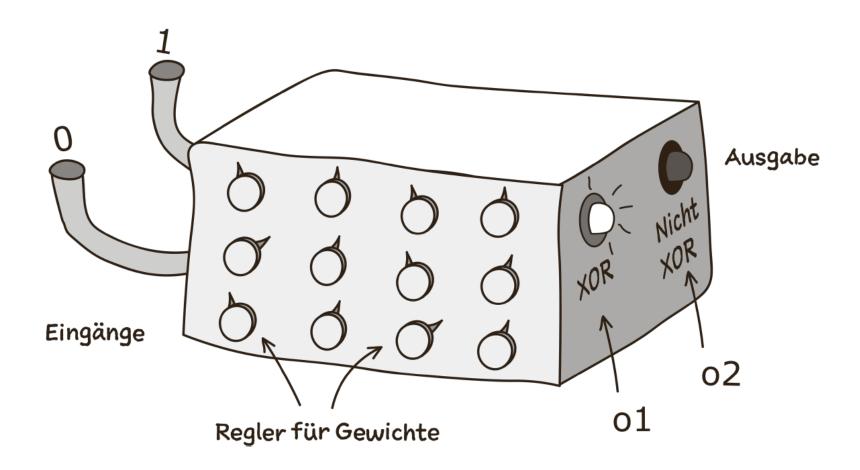
- Eingaben (i1 und i2) werden gelesen und im neuronalen Netz verarbeitet. Es entsteht eine Ausgabe o1 und eine Ausgabe o2.
- Die Ausgaben o1 und o2 werden mit der erwarteten Ausgabe t verglichen und es wird jeweils der Fehler an jedem Ausgabeknoten berechnet. Der Fehler ist die Differenz zwischen der tatsächlichen Ausgabe und der erwarteten Ausgabe (t).
- Auch für die anderen Knoten wird ein Ausgabefehler berechnet. Das ist die eigentliche Error Backpropagation.
- Aufgrund der Fehler werden die Gewichte zwischen den Knoten etwas geändert.

## Error Backpropagation (Fehlerrückführung)



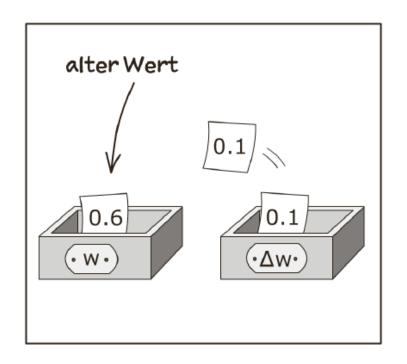
- Den inneren Knoten werden Fehler zugeordnet
- Das Gewicht bestimmt die Größe des Fehlers

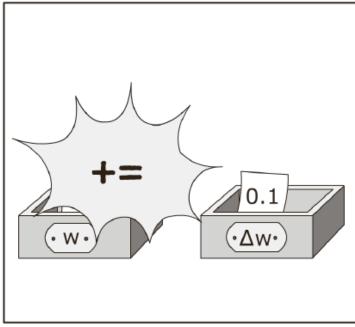
#### Lernen = Gewichte ändern

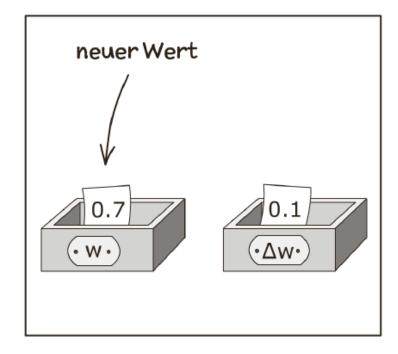


#### Ein Gewicht ändern

$$w += \Delta w$$



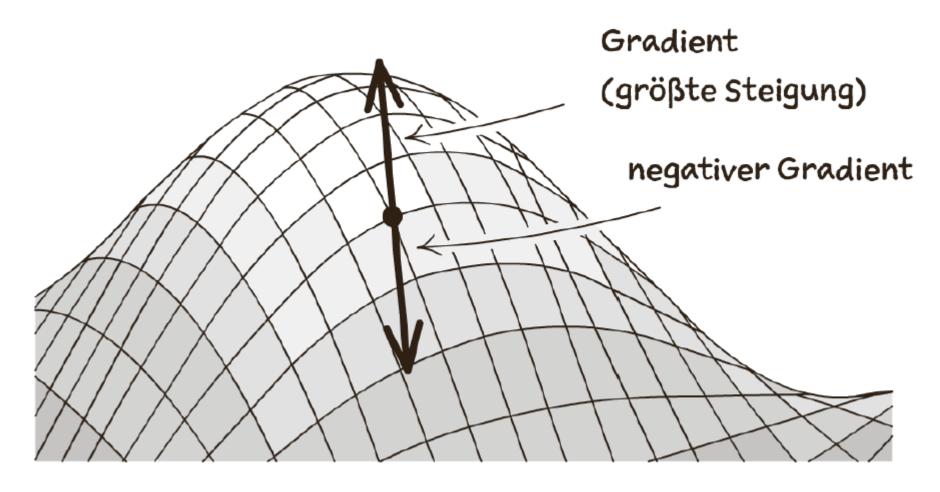




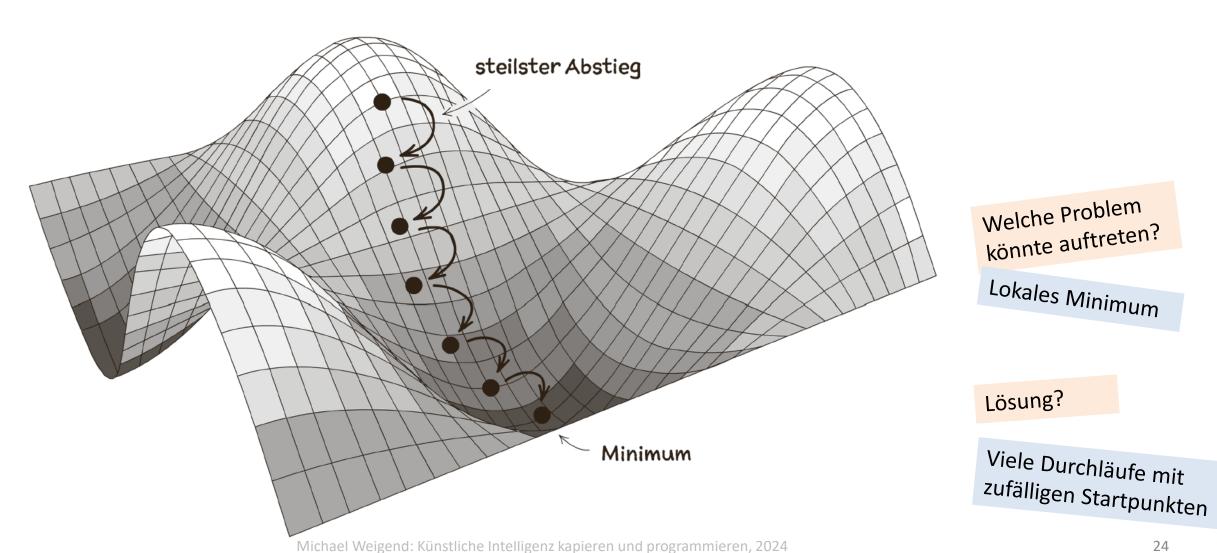
## Gradientenverfahren



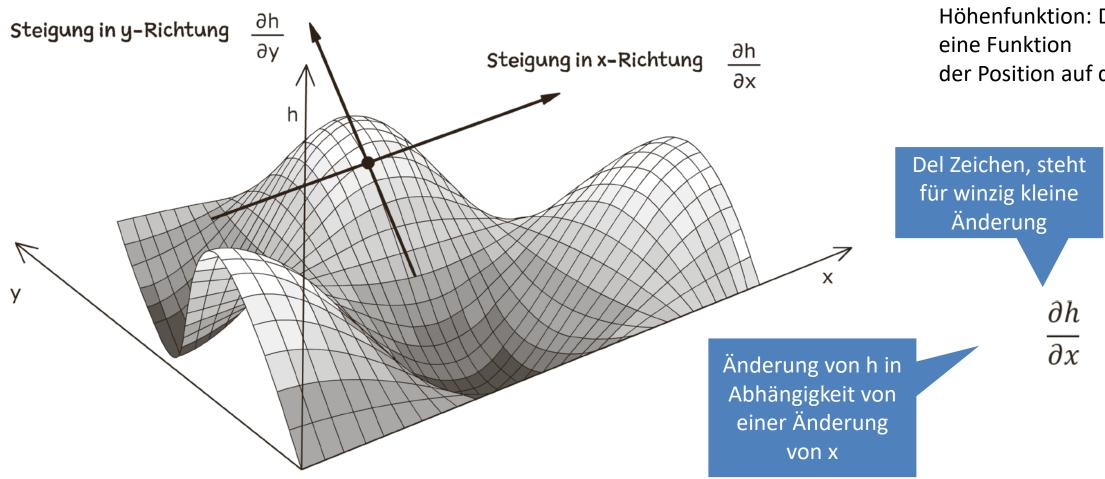
## Bewegungsrichtung



#### In mehreren Schritten zum tiefsten Punkt



## Partielle Ableitung

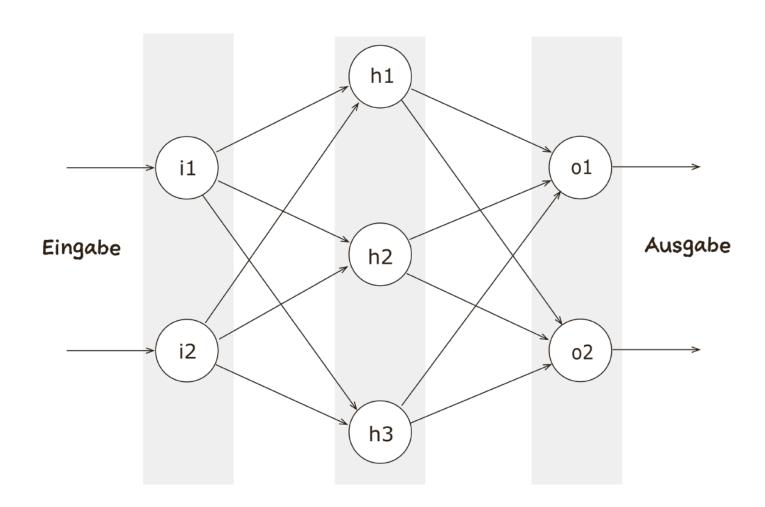


h = f(x, y)

Höhenfunktion: Die Höhe ist der Position auf der Karte.

25

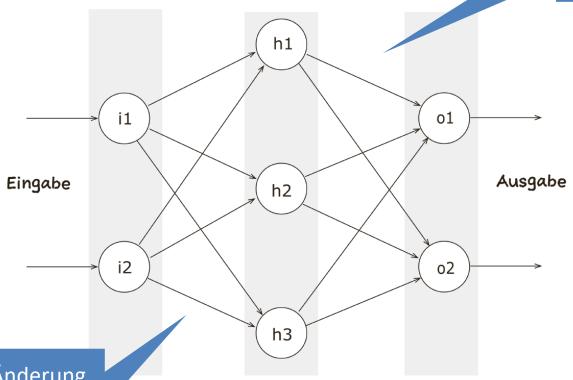
#### Zurück zum neuronalen Netz ...



Wie viele Gewichte?

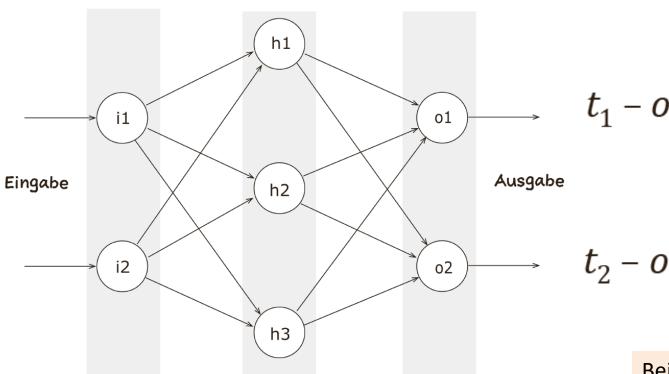
#### Das Ziel

Formeln für die Änderung der Gewichte zwischen verborgener Schicht und Ausgabeschicht



Formeln für die Änderung der Gewichte zwischen Engabeschicht und verborgener Schicht

#### Fehler



i1	i2	t1	t2		
0	0	0	1		
0	1	1	0		
1	1	0	1		
1	0	1	0		
0	1	1	0		

Beim Training werden die Gewichte geändert, so dass der Fehler minimal wird. Formel für den Fehler in der Ausgabe?

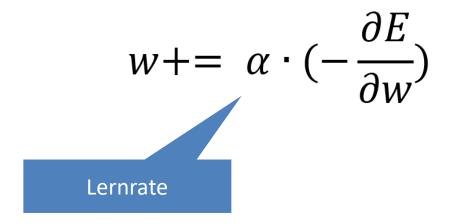
#### Fehlerfunktion

$$E = (t_1 - o_1)^2 + (t_2 - o_2)^2$$

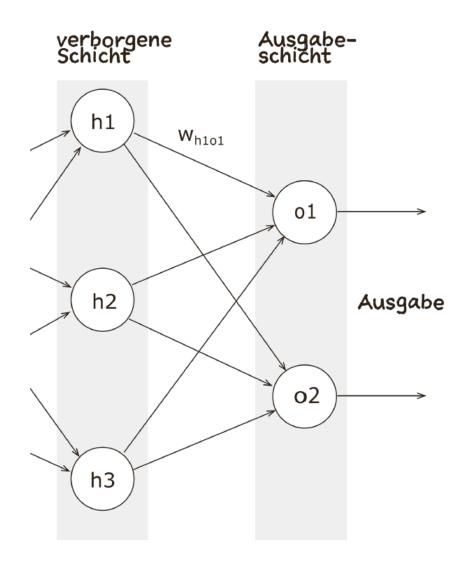
Warum nimmt man das Quadrat der Fehler?

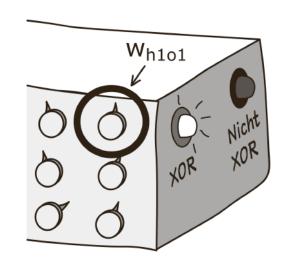
- 1. Fehler immer positiv
- 2. Ableitung leicht zu berechnen (sonst hätte man Fallunterscheidungen)
- 3. Wenn der Fehler klein ist, ist das Fehlerquadrat noch kleiner. Veränderungen in der Nähe des Minimums sind dann besonders vorsichtig.

# Änderung eines Gewichts in einem Trainingsschritt



## Änderung des Gewichts Whioi





$$\frac{\partial E}{\partial w_{h1o1}} = \frac{\partial ((t_1 - o_1)^2 + (t_2 - o_2)^2)}{\partial w_{h1o1}}$$

Änderung des Fehlers in Abhängigkeit von der Änderung des Gewichts W<sub>h101</sub>

$$\frac{\partial E}{\partial w_{h1o1}} = \frac{\partial ((t_1 - o_1)^2 + (t_2 - o_2)^2)}{\partial w_{h1o1}}$$

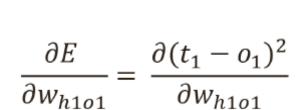
$$\frac{\partial E}{\partial w_{h1o1}} = \frac{\partial (t_1 - o_1)^2}{\partial w_{h1o1}} + \frac{\partial (t_2 - o_2)^2}{\partial w_{h1o1}}$$

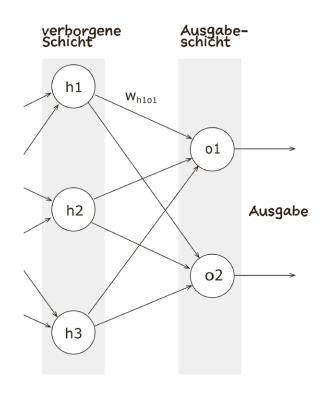


Änderung des Fehlerquadrats am Ausgabeknoten o1 bei Änderung von w<sub>Mo1</sub>



Änderung des Fehlersquadrats am Ausgabeknoten o2 bei Änderung von Who1





$$\frac{\partial E}{\partial w_{h1o1}} = \frac{\partial (t_1 - o_1)^2}{\partial w_{h1o1}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_{h1o1}} = \frac{\partial (t_1 - o_1)^2}{\partial o_1} \cdot \frac{\partial o_1}{\partial w_{h1o1}}$$
Gleichung 1

1. Faktor

2. Faktor

#### 1. Faktor

$$\frac{\partial (t_1-o_1)^2}{\partial o_1}$$

Änderung des Fehlerquadrats in Abhängigkeit von der Ausgabe

ist die Ableitung der Funktion

$$E = (t_1 - o_1)^2$$

Konstante

Variable

$$E = t_1^2 - 2 \cdot t_1 \cdot o_1 + o_1^2$$

$$\frac{\partial (t_1 - o_1)^2}{\partial o_1} = -2 \cdot (t_1 - o_1)$$

Ableitung nach den Ableitungsregeln für Polynome

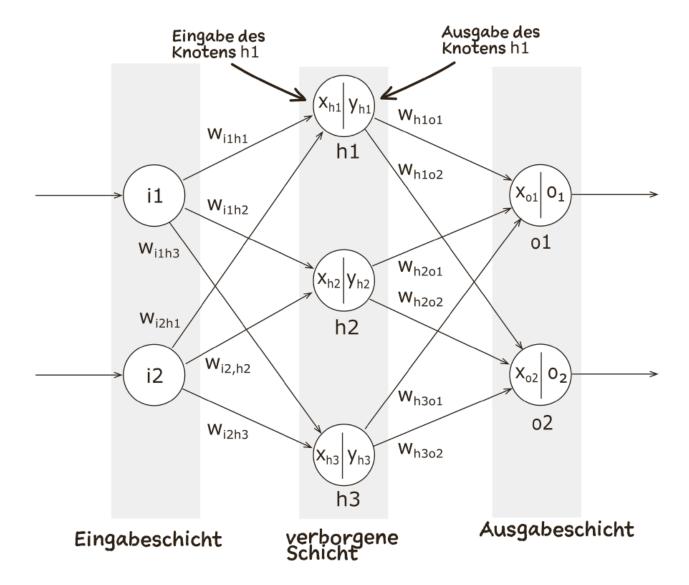
Gleichung 2

#### 2. Faktor

$$\frac{\partial o_1}{\partial w_{h1o1}}$$

Änderung der Ausgabe in Abhängigkeit von der Änderung des Gewichts

## Systematik der Variablennamen



## 2. Faktor $\frac{\partial o_1}{\partial w_{h_1o_1}}$

$$o_1 = sig(x_{o1})$$

$$\frac{\partial o_1}{\partial w_{h1o1}} = \frac{\partial sig(x_{o1})}{\partial w_{h1o1}}$$

$$\frac{\partial o_1}{\partial w_{h1o1}} = sig(x_{o1}) \cdot \left(1 - sig(x_{o1})\right) \cdot \frac{\partial x_{o1}}{\partial w_{h1o1}}$$

$$\uparrow$$
Ableitung von sig(x<sub>o1</sub>)
$$\ddot{a}u\beta\text{ere Ableitung} \quad \text{innere Ableitung}$$

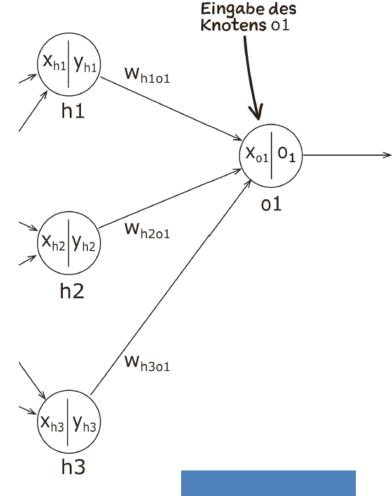
Darum kümmern wir uns als nächstes

$$x_{o1} = y_{h1} \cdot w_{h1o1} + y_{h2} \cdot w_{h2o1} + y_{h3} \cdot w_{h3o1}$$

$$\frac{\partial x_{o1}}{\partial w_{h1o1}} = \frac{\partial (w_{h1o1} \cdot y_{h1} + w_{h2o1} \cdot y_{h2} + w_{h3o1} \cdot y_{h3})}{\partial w_{h1o1}}$$

$$\frac{\partial x_{o1}}{\partial w_{h1o1}} = \frac{\partial (w_{h1o1} \cdot y_{h1})}{\partial w_{h1o1}} + \frac{\partial (w_{h2o1} \cdot y_{h2})}{\partial w_{h1o1}} + \frac{\partial (w_{h3o1} \cdot y_{h3})}{\partial w_{h1o1}} + \frac{\partial (w_{h3o1} \cdot y_{h3})}{\partial w_{h1o1}}$$

$$\uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$



$$\frac{\partial x_{o1}}{\partial w_{h1o1}} = \frac{\partial (w_{h1o1} \cdot y_{h1})}{\partial w_{h1o1}}$$

$$\frac{\partial x_{o1}}{\partial w_{h1o1}} = y_{h1}$$

Einsetzen in Gleichung 3

$$\frac{\partial o_1}{\partial w_{h1o1}} = sig(x_{o1}) \cdot \left(1 - sig(x_{o1})\right) \cdot \frac{\partial x_{o1}}{\partial w_{h1o1}}$$

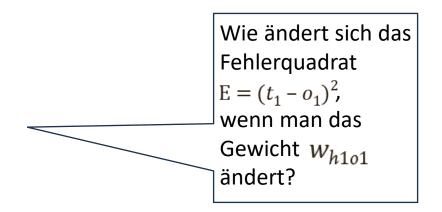
$$\frac{\partial o_1}{\partial w_{h1o1}} = sig(x_{o1}) \cdot \left(1 - sig(x_{o1})\right) \cdot y_{h1}$$

$$\frac{\partial o_1}{\partial w_{h1o1}} = o_1 \cdot (1 - o_1) \cdot y_{h1}$$

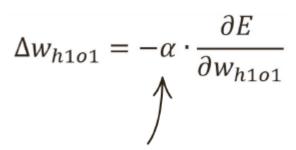
Gleichung 4

$$o_1 = sig(x_{o1})$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_{h1o1}} = -2 \cdot (t_1 - o_1) \cdot o_1 \cdot (1 - o_1) \cdot y_{h1}$$



# Berechnung der Änderung des Gewichts beim Training



Lernrate (Zahl zwischen 0 und 1)

$$\frac{\partial E}{\partial w_{h1o1}} = -2 \cdot (t_1 - o_1) \cdot o_1 \cdot (1 - o_1) \cdot y_{h1}$$

$$\Delta w_{h1o1} = -\alpha \cdot (-2) \cdot (t_1 - o_1) \cdot o_1 \cdot (1 - o_1) \cdot y_{h1}$$

$$\Delta w_{h1o1} = \alpha \cdot 2 \cdot (t_1 - o_1) \cdot o_1 \cdot (1 - o_1) \cdot y_{h1}$$

## Berechnung der Änderung des Gewichts beim Training

$$\Delta w_{h1o1} = \alpha \cdot 2 \cdot (t_1 - o_1) \cdot o_1 \cdot (1 - o_1) \cdot y_{h1}$$
weglassen

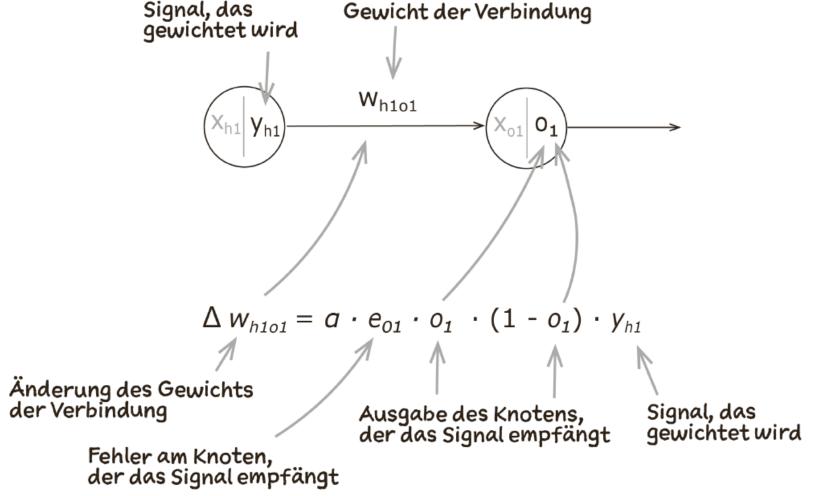
$$e_{o1} = t_1 - o_1$$

$$\Delta w_{h1o1} = \alpha \cdot e_{o1} \cdot o_1 \cdot (1 - o_1) \cdot y_{h1}$$

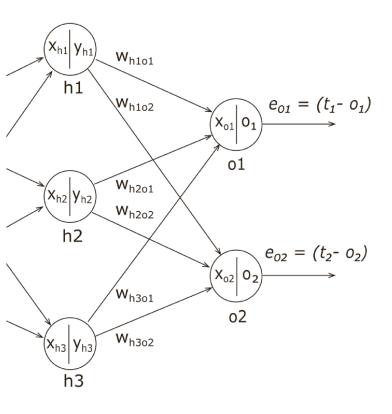


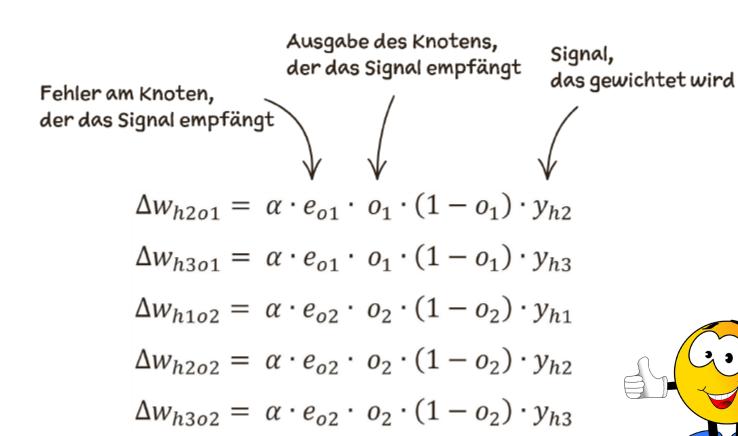
## Aktualisierung der übrigen Gewichte

Zuerst: Analyse der Berechnungsformel

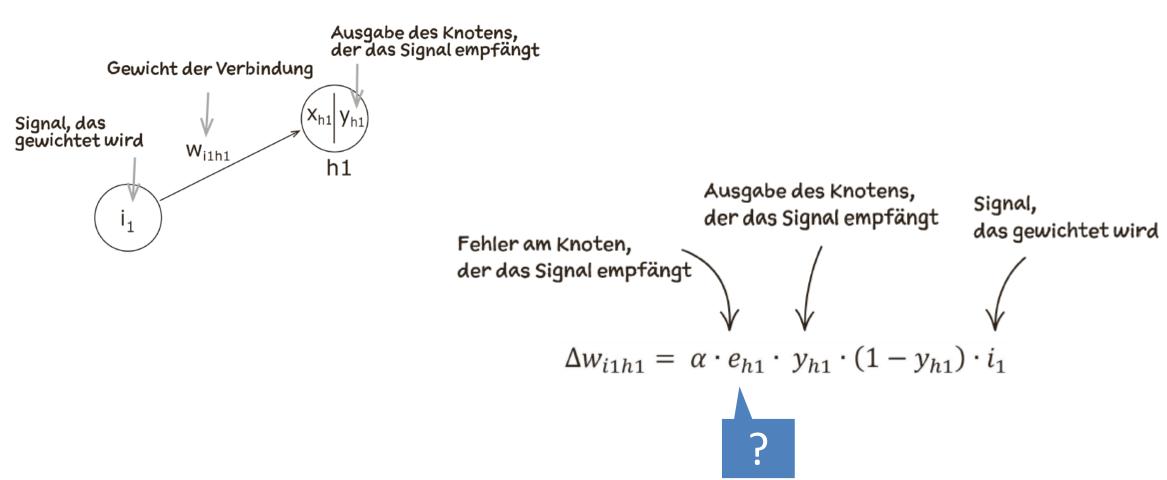


## Aktualisierung der übrigen Gewichte



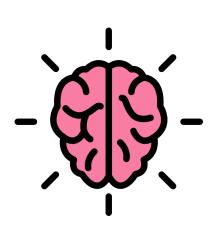


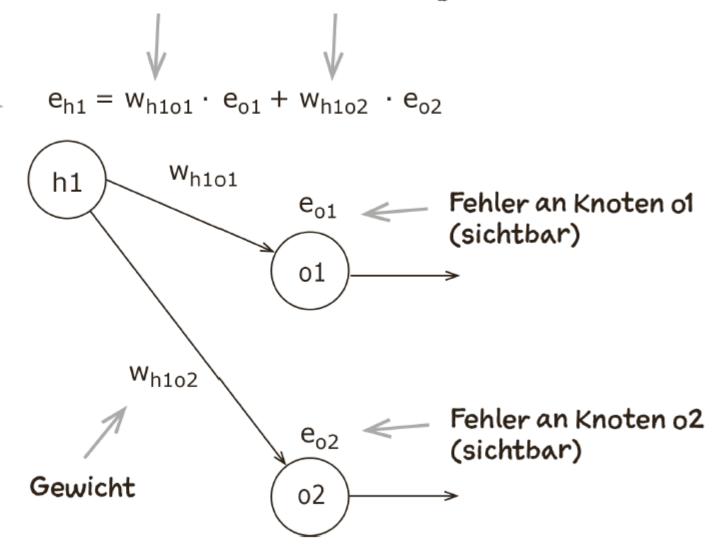
# Gewichte zwischen Eingabeschicht und verborgener Schicht



#### Gewichte werden in Rückwärtsrichtung verwendet

Fehler an ->
verborgenem Knoten h1
(unsichtbar)





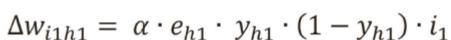
## Aktualisierung der Gewichte

 $e_{h1} = w_{h1o1} \cdot e_{o1} + w_{h1o2} \cdot e_{o2}$   $e_{h2} = w_{h2o1} \cdot e_{o1} + w_{h2o2} \cdot e_{o2}$   $e_{h3} = w_{h3o1} \cdot e_{o1} + w_{h3o2} \cdot e_{o2}$ 

Ausgabe des Knotens, der das Signal empfängt







$$\Delta w_{i1h2} = \alpha \cdot e_{h2} \cdot y_{h2} \cdot (1 - y_{h2}) \cdot i_1$$

$$\Delta w_{i1h3} = \alpha \cdot e_{h3} \cdot y_{h3} \cdot (1 - y_{h3}) \cdot i_1$$

$$\Delta w_{i2h1} = \alpha \cdot e_{h1} \cdot y_{h1} \cdot (1 - y_{h1}) \cdot i_2$$

$$\Delta w_{i2h2} = \alpha \cdot e_{h2} \cdot y_{h2} \cdot (1 - y_{h2}) \cdot i_2$$

$$\Delta w_{i2h3} = \alpha \cdot e_{h3} \cdot y_{h3} \cdot (1 - y_{h3}) \cdot i_2$$



Fehler am Knoten,

der das Signal empfängt `

Zufallszahlen (float) zwischen –W und + W

```
from random import uniform, shuffle
from math import e
W = 0.5 # obere Grenze für Anfangswerte der Gewichte
I_1R = 0.2
# Initialisierung der Gewichte
wilh1 = uniform(-W, W)
wi2h1 = uniform(-W, W)
wilh2 = uniform(-W, W)
wi2h2 = uniform(-W, W)
wilh3 = uniform(-W, W)
wi2h3 = uniform(-W, W)
wh1o1 = uniform(-W, W)
wh2o1 = uniform(-W, W)
wh3o1 = uniform(-W, W)
wh1o2 = uniform(-W, W)
wh2o2 = uniform(-W, W)
wh3o2 = uniform(-W, W)
def siq(x):
    return 1.0 / (1.0 + e^{**-x})
```

Das neuronale Netz arbeitet: Aus der Eingabe wird die Ausgabe berechnet

```
def vorhersagen(i1,i2):
    xh1 = wilh1 * i1 + wi2h1 * i2
    xh2 = wilh2 * i1 + wi2h2 * i2
    xh3 = wilh3 * i1 + wi2h3 * i2
    yh1 = sig(xh1)
    yh2 = sig(xh2)
    yh3 = sig(xh3)
    xo1 = yh1 * wh1o1 + yh2 * wh2o1 + yh3 * wh3o1
    xo2 = yh1 * wh1o2 + yh2 * wh2o2 + yh3 * wh3o2
    o1 = sig(xo1)
    o2 = sig(xo2)
    return o1, o2
```

## Globale Variablen für die Gewichte

```
def trainieren(i1, i2, t1, t2):
    global wilh1, wi2h1, wi1h2, wi2h2, wi1h3, wi2h3
    global wh1o1, wh2o1, wh3o1, wh1o2, wh2o2, wh3o2
# Berechnung der Ausgabe (Vorhersage)
    xh1 = wi1h1 * i1 + wi2h1 * i2
    xh2 = wi1h2 * i1 + wi2h2 * i2
    xh3 = wi1h3 * i1 + wi2h3 * i2
    yh1 = sig(xh1)
    yh2 = sig(xh2)
    yh3 = sig(xh3)
    xo1 = yh1 * wh1o1 + yh2 * wh2o1 + yh3 * wh3o1
    xo2 = yh1 * wh1o2 + yh2 * wh2o2 + yh3 * wh3o2
    o1 = sig(xo1)
    o2 = sig(xo2)
```

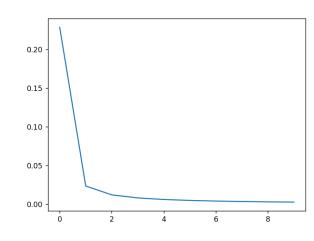
```
# Aktualisierung der Gewichte
# Verborgene Schicht - Ausgabeschicht
eo1 = t1 - o1
eo2 = t2 - o2
wh1o1 += LR * eo1 * o1*(1-o1)*vh1
wh2o1 += LR * eo1 * o1*(1-o1)*yh2
wh3o1 += LR * eo1 * o1*(1-o1)*yh3
wh1o2 += LR * eo2 * o2*(1-o2)*vh1
wh2o2 += LR * eo2 * o2*(1-o2)*yh2
wh3o2 += LR * eo2 * o2*(1-o2)*yh3
# Eingabeschicht - verborgene Schicht
eh1 = wh1o1 * eo1 + wh1o2 * eo2
eh2 = wh2o1 * eo1 + wh2o2 * eo2
eh3 = wh3o1 * eo1 + wh3o2 * eo2
wilh1 += LR * eh1 * yh1*(1-yh1)*i1
wi2h1 += LR * eh1 * yh1*(1-yh1)*i2
wi1h2 += LR * eh2 * yh2*(1-yh2)*i1
wi2h2 += LR * eh2 * yh2*(1-yh2)*i2
wilh3 += LR * eh3 * yh3*(1-yh3)*i1
wi2h3 += LR * eh3 * yh3*(1-yh3)*i2
return eol, eo2
```

Liste mit 8000 Tupeln

```
# Zufällige Trainingsdaten erzeugen
d = [(0, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1)]
daten = 2000 * d
shuffle (daten)
# Training
for ep in range (10):
    summeFehlerQuadrate = 0
    for i1, i2, t1, t2 in daten:
        eo1, eo2 = trainieren(i1, i2, t1, t2)
        summeFehlerOuadrate += eo1**2 + eo2**2
    mFehlerQuadrate = summeFehlerQuadrate / len(daten)
    print('Epoche:',ep, 'mittlere Fehlerquadratsumme:',
          mFehlerOuadrate)
# Testen
for i1, i2, t1, t2 in d:
    o1, o2 = vorhersagen(i1, i2)
    print('Eingabe:', i1, i2, 'Vorhersage: ,,
           round(o1, 4), round(o2, 4),
          'Target:', t1, t2)
```

## Übung 6.2 XOR-Detektor (10 min)

- 1. Testen Sie das Starterprojekt xor.detektor.py.
- 2. Experimentieren Sie mit dem Programm. Ändern Sie das Programm ab, beobachten Sie die Auswirkung und versuchen Sie die Auswirkungen zu erklären:
  - Lernrate auf 0,1 setzen
  - W verkleinern, sodass die zufälligen Anfangswerte für die Gewichte aus einem kleineren Intervall kommen, z.B. (-0.2, +0.2).
  - Anfangswerte für die Gewichte auf 0 setzen (W=0).
- 3. Ändern Sie die Trainingsdaten ab, sodass das Programm ODER erkennt.
- 4. Ändern Sie das Programm ab, dass es eine Lernkurve zeigt.
- 5. Überlegen Sie sich Ideen für weitere Aktivitäten mit dem Starterprojekt (Google Docs).



https://docs.google.com/document/d/140lNslEWA\_AwUwtpVMCZqtH7\_eOkU8rmvfrgWqE5M3E/edit?usp=sharing

## Lösungen 6.2

- 1. Testen Sie das Starterprojekt xor.detektor.py.
  - Die Ausgabe sind keine ganzen Zahlen, sondern Kommazahlen nahe 0 und nahe 1.
- 2. Experimentieren Sie mit dem Programm. Ändern Sie das Programm ab, beobachten Sie die Auswirkung und versuchen Sie die Auswirkungen zu erklären:
  - Lernrate auf 0,1 setzen
     Lernen verlangsamt sich
  - W verändern, sodass die zufälligen Anfangswerte für die Gewichte aus einem anderen Intervall kommen, z.B. (-0.2, +0.2).
    - Unterschiedliche Effekte
  - Anfangswerte für die Gewichte auf 0 setzen (W=0).
     Funktioniert nicht
- 3. Ändern Sie die Trainingsdaten ab, so dass das Programm ODER erkennt.

```
d = [(0, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0)]
```

## Give your brain a hand - Visualisieren mit Lego

- Alles ist richtig!
- Wenn Ihnen nichts einfällt, beginnen Sie einfach und bauen Sie irgendetwas!



## Übung 6.3 Visualisieren mit Lego

Dreier- oder Vierergruppe (ca. 10 min)

- Neuron
- Synapse
- Ausgabefehler (Unterschied zwischen tatsächlichem Wert und erwartetem Wert)
- Fehler an einem verborgenen Knoten
- Aktivierung eines Neurons
- Feuern eines Neurons
- Erregungspotenzial eines Neurons
- Eingabeknoten
- Ausgabeknoten
- Gewicht einer Verbindung
- Training
- Lernrate

#### Spielregeln:

- 1. Jede Person wählt einen Begriff aus der Liste. Verraten Sie nicht, was Sie gewählt haben.
- Bauen Sie eine Lego-Skulptur, die diesen Begriff in irgendeiner Form darstellt. (5 min)
- 3. Reihum stellt jede Person ihre Skulptur vor:
  - 1. Zuerst raten die anderen, was es ist.
  - 2. Dann wird die Skulptur erklärt.

### Rückblick

- Nur ein neuronales Netz mit einer verborgenen Schicht kann Punktmengen erkennen, die nicht linear separierbar sind (z.B. XOR).
- Als Aktivierungsfunktion verwendet man eine Sigmoid-Funktion. Sie liefert Werte zwischen 0 und
   Sie ist glatt und überall differenzierbar.
- Beim **Gradientenverfahren** verwendet man als Fehlerfunktion die Summe der Fehlerquadrate. Der Funktionswert ist immer positiv und wird bei kleinen Fehlerwerten besonders klein.
- Beim **Training** eines neuronalen Netzes ändert man die Gewichte der Verbindungen zwischen den Knoten. Man ändert ein Gewicht so, dass der Fehler, soweit seine Änderung durch das Ändern des Gewichts beeinflusst wird, kleiner wird. Das ist die Grundidee des **Gradientenverfahrens**. Es ist vergleichbar mit einem Bergwanderer, der immer bergab geht, um ins Tal zu kommen.
- Direkt beobachten kann man nur die Ausgabefehler des neuronalen Netzes (Differenz zwischen erwartetem Wert t und berechnetem Wert o).
- Durch Error Backpropagation (Fehlerrückführung) kann man auch den verborgenen Knoten Fehler zuordnen.