

RGB-Farbmodell

Aufgabennummer: B_086

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

Für die Darstellung von Farben im Fernsehen, bei Monitoren usw. werden Transformationen in die einzelnen Farbräume durchgeführt. Ein solcherart verwendeter Farbraum ist z. B. der *RGB*-Farbraum, wobei *R* für den Rotanteil, *G* für den Grünanteil und *B* für den Blauanteil einer dargestellten Farbe steht. Es handelt sich hierbei um einen additiven Farbraum, der die einzelnen Farben durch das additive Mischen der 3 Grundfarben Rot, Grün und Blau nachbildet. Jede Farbe wird als Vektor durch ein Zahlentripel (*R*, *G*, *B*) dargestellt, wobei die klassische Darstellung als Wertebereich Werte zwischen 0 und 1 zulässt.

- a) Die Transformationen von einem Farbraum in einen anderen lassen sich mithilfe von Matrizenmultiplikationen durchführen.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Erklären Sie anhand der beiden angeführten Matrizen *A* und *B*, wie Matrizen multipliziert werden.
- Geben Sie an, welche Voraussetzungen bei der Multiplikation von 2 Matrizen erfüllt sein müssen.
- Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass das Kommutativgesetz für die Multiplikation von Matrizen nicht gilt.

- b) Die Umrechnung vom *RGB*-Farbmodell in das standardisierte *XYZ*-Farbmodell erfolgt mittels der gegebenen Transformation:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4125 & 0,3576 & 0,1804 \\ 0,2127 & 0,7152 & 0,0722 \\ 0,0193 & 0,1192 & 0,9503 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

- Geben Sie die Matrix für die Transformation vom *XYZ*-Farbmodell in das *RGB*-Farbmodell an.

- c) Farbenblindheit ist ein geschlechtsspezifisches Merkmal. Studien haben gezeigt, dass 8 % der Männer in Europa farbenblind sind und nicht zwischen den Farben Rot und Grün unterscheiden können.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Schulklasse mit 28 Schülern mindestens 1 Schüler farbenblind ist.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

$$\text{a) } \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z \\ d \cdot x + e \cdot y + f \cdot z \\ g \cdot x + h \cdot y + k \cdot z \end{pmatrix}$$

Matrizen können nur miteinander multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl der 1. Matrix mit der Zeilenanzahl der 2. Matrix übereinstimmt.

$$\text{Bsp.: } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 12 & 27 \\ 26 & 33 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 26 & 32 \\ 25 & 19 \end{pmatrix}$$

- b) Eine Farbe im XYZ-Modell kann mithilfe der inversen Matrix zurück ins RGB-Farbmodell gerechnet werden.

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\text{Berechnung von } A^{-1} \text{ mittels Technologieeinsatz: } \begin{pmatrix} 3,2401 & -1,5370 & -0,4983 \\ -0,9692 & 1,8759 & 0,0415 \\ 0,0558 & -0,2041 & 1,0572 \end{pmatrix}$$

- c) Die Wahrscheinlichkeit kann mithilfe der Binomialverteilung berechnet werden.
mindestens 1 Farbenblinder: $P(x \geq 1)$

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x < 1) = 1 - P(x = 0)$$

$$P(x = 0) = \binom{28}{0} \cdot 0,08^0 \cdot 0,92^{28} = 0,09684...$$

$$1 - 0,09684... = 0,90315... \approx 90,32 \%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 90,32 % sitzt 1 Schüler mit einer Rot-Grün-Sehchwäche in der Klasse.

Klassifikation

☐ Teil A

☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) leicht
- c) leicht

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 2
- c) 2

Thema: Technik

Quellen: —