

| Bakterienkultur* | | | | | | | | | | | | |
|--|--|----|-----------|----|----|----|----------------|----|----|----|----|--|
| Aufgabennummer: B_049 | | | | | | | | | | | | |
| Technologieeinsatz: | | r | möglich □ | | | | erforderlich 🗵 | | | | | |
| a) Eine Bakterienkultur mit 50 Bakterien wird zu einem Zeitpunkt t = 0 angelegt. Nach 100 Minuten werden bereits 750 Bakterien gezählt. Die Funktion N beschreibt das Wachstum der Bakterienkultur: N(t) ist die Anzahl der Bakterien nach t Minuten. Die 1. Ableitung der Funktion N ist proportional zu N. Die entsprechende Proportionalitätskonstante bezeichnet man als Wachstumsrate. Stellen Sie die zugehörige Differenzialgleichung für N auf. Lösen Sie die Differenzialgleichung mithilfe der Methode Trennen der Variablen. Berechnen Sie, wie viele Bakterien nach 3 Stunden vorhanden sind. Geben Sie an, wie sich das Wachstumsverhalten ändert, wenn die Bakterienkultur eine größere Wachstumsrate hat. | | | | | | | | | | | | |
| b) | b) Die Beobachtung einer Bakterienkultur ergab folgende Daten: | | | | | | | | | | | |
| | Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | |

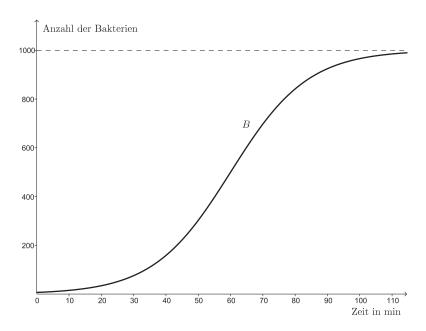
 Ermitteln Sie die Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion, die die Bakterienanzahl in Abhängigkeit von der Zeit nach Beginn der Beobachtung n\u00e4herungsweise beschreibt.

Berechnen Sie mithilfe der Ausgleichsfunktion, wie viele Minuten nach Beginn der Beobachtung 1 000 Bakterien zu erwarten sind.

Anzahl der Bakterien

Bakterienkultur 2

- c) Die Funktion *B* beschreibt näherungsweise, wie viele Bakterien sich zu jedem Zeitpunkt in einer Petrischale befinden. Der zugehörige Funktionsgraph ist im nachstehenden Diagramm dargestellt.
 - $t \dots Z$ eit nach Beginn der Beobachtung in Minuten
 - B(t) ... Anzahl der Bakterien zur Zeit t



 Lesen Sie aus dem Diagramm ab, wie viele Minuten nach Beginn der Beobachtung das Wachstum der Bakterienkultur am größten ist.

Die entsprechende Differenzialgleichung zur Beschreibung dieses Bakterienwachstums lautet:

$$\frac{dB}{dt} = 8,35 \cdot 10^{-5} \cdot B \cdot (1000 - B)$$
 mit $B > 0$

– Argumentieren Sie anhand der Differenzialgleichung, für welche Werte von *B* die Bakterienanzahl zunimmt.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Bakterienkultur 3

Möglicher Lösungsweg

a)
$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N$$

$$\int \frac{1}{N} dN = \int k dt$$

$$\ln|N| = k \cdot t + c$$

allgemeine Lösung der Differenzialgleichung: N mit $N(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$ N(0) = 50 und N(100) = 750 liefert: C = 50 und k = 0,0270...

 $N(180) = 6545,3... \approx 6545$

Nach 3 Stunden sind rund 6545 Bakterien vorhanden.

Wenn die Wachstumsrate der Bakterienkultur größer ist, dann bedeutet das, dass die Anzahl der Bakterien schneller wächst.

b) Ermittlung der exponentiellen Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$$f(t) = 69,43 \cdot e^{0,03065 \cdot t}$$

 $t \dots$ Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten

f(t) ... Bakterienanzahl zur Zeit t

Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Koeffizienten bei der Ermittlung der Ausgleichsfunktion erhalten.

Lösen der Gleichung f(t) = 1000 mittels Technologieeinsatz: $t \approx 87.0$

Rund 87 Minuten nach Beginn der Beobachtung sind 1000 Bakterien zu erwarten.

c) Ablesen der Wendestelle der Funktion B: t = 60 min

Toleranzbereich: [55; 65]

Rund 60 Minuten nach Beginn der Beobachtung ist das Wachstum der Bakterienkultur am größten.

Für $B < 1\,000$ ist jeder Faktor auf der rechten Seite der Differenzialgleichung positiv, also $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} > 0$. Daher nimmt die Bakterienzahl für diese Werte zu.

Bakterienkultur 4

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung
 - 1 × B1: für die richtige allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
 - 1 × B2: für die richtige Berechnung der Bakterienanzahl nach 3 Stunden
 - 1 × C: für die richtige Beschreibung der Veränderung des Wachstumsverhaltens
- b) 1 × B1: für die richtige Ermittlung der Ausgleichsfunktion
 - 1 x B2: für die richtige Berechnung, nach welcher Zeit 1000 Bakterien zu erwarten sind
- c) 1 × C: für das richtige Ablesen im Toleranzbereich [55; 65]
 - 1 × D: für eine richtige Argumentation anhand der Differenzialgleichung