

GRUNDLAGEN DER DIFFERENTIALRECHNUNG

1 ABSOLUTE ÄNDERUNG UND MITTLERE ÄNDERUNGSRATE

- 01** Die Tabelle zeigt die Anzahl der Nächtigungen $N(t)$ (in Millionen) im Jahr t in Österreich.
- a)** Es wird behauptet, dass die Anzahl der Nächtigungen von 2005 bis 2010 schneller angestiegen sei, als von 2010 bis 2012. Beurteilen Sie diese Aussage.
- b)** In welchem der folgenden Zeitintervalle änderten sich die Nächtigungszahlen am schnellsten?
[2005; 2007], [2007; 2010], [2008; 2012]
- c)** Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Änderung der Nächtigungszahlen im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ auf.
- d)** Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der durchschnittlichen jährlichen Änderung der Nächtigungszahlen im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ auf.

t	$N(t)$
2005	29,3
2006	30,1
2007	31,1
2008	32,6
2009	32,3
2010	33,4
2011	34,6
2012	36,2

Definition. Ist f eine reelle Funktion, dann heißt die Zahl ...
 ... $f(z) - f(x)$ **absolute Änderung** von f im Intervall $[x; z]$.
 ... $\frac{f(z) - f(x)}{z - x}$ **mittlere Änderungsrate** oder **Differenzenquotient** von f im Intervall $[x; z]$.

Differenzen werden in der Mathematik oft mit dem griechischen Großbuchstaben **Delta** Δ bezeichnet. Die folgende alternative Schreibweise wird manchmal für den Differenzenquotient einer Funktion f im Intervall $[x; x + \Delta x]$ verwendet:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Differenz von Funktionswerten
Differenz von Argumenten

- 02** Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion f im angegebenen Intervall:
a) $f(x) = x^2$, $[1; 4]$ **b)** $f(x) = 3x - 2$, $[0; 5]$ **c)** $f(x) = -x^2 + x + 1$, $[3; 9]$ **d)** $f(x) = \frac{1}{x}$, $[-3; -1]$
- 03** Geben Sie den Differenzenquotienten der folgenden Funktion im angegebenen Intervall an:
a) $x \mapsto f(x)$, $[a; a + h]$ **b)** $r \mapsto A(r)$, $[r_1; r_2]$ **c)** $x \mapsto p(x)$, $[x; x + 1]$ **d)** $t \mapsto N(t)$, $[0; t_0]$
- 04** Ein Auto kostet € 23.000, nach 3 Jahren ist es € 13.800 und nach weiteren 3 Jahren € 8.280 wert.
a) Berechnen Sie den Wertverlust im Zeitintervall $[0; 3]$ bzw. $[3; 6]$ (Intervallgrenzen in Jahren). In welchem Zeitintervall ist der Wertverlust größer?
b) Wie groß ist der mittlere Wertverlust im Zeitintervall $[0; 3]$ bzw. $[3; 6]$ bzw. $[t_1; t_2]$?
- 05** Ein kugelförmiger Ballon von Radius r hat das Volumen $V(r) = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$ (r in dm; V in dm³). Der Ballon wird aufgeblasen.
a) Berechnen Sie die Volumenzunahme in den Radiusintervallen $[1; 2]$ und $[2; 3]$.
b) Berechnen Sie die mittlere Volumenzunahmerate im Radiusintervall $[1; 3]$.
c) Stellen Sie eine Formel für die mittlere Volumenzunahmerate im Radiusintervall $[r; z]$ auf.

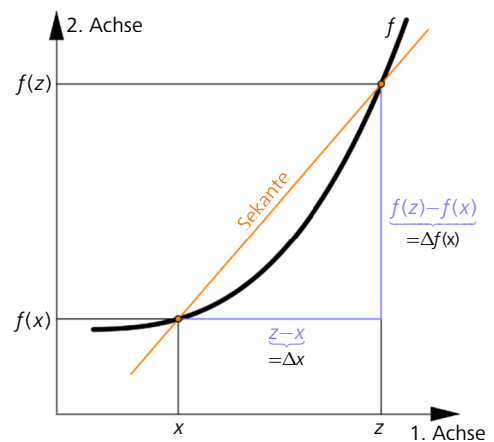
- 06** Am Armaturenbrett eines Autos lassen sich der Füllstand f des Tanks (in Litern) und der Kilometerstand k (in km) ablesen. Interpretieren Sie den Zusammenhang dieser Größen als Funktion:
- a)** Was ist die unabhängige, was die abhängige Variable?
- b)** Was bedeuten die Ausdrücke Δf , Δk und $\frac{\Delta f}{\Delta k}$ und welche Einheiten besitzen Sie jeweils?

1.1 Geometrische Deutung des Differenzenquotienten

- 07** Berechnen Sie den Differenzenquotienten der linearen Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$ im Intervall $[x; z]$. Erklären Sie die Vorgehensweise und das Ergebnis anhand einer Skizze.

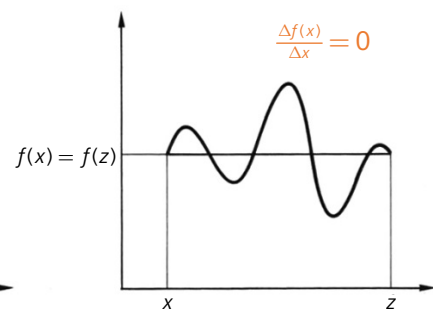
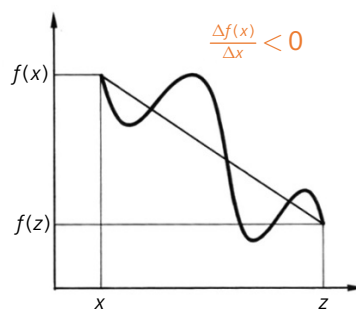
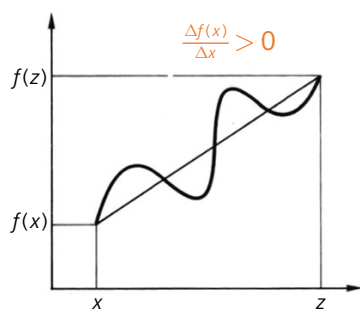
Auch für jede nichtlineare Funktion f gibt der Differenzenquotient im Intervall $[x; z]$ die Steigung der Geraden durch die Punkte $(x | f(x))$ und $(z | f(z))$ an. Diese Gerade bezeichnet man als **Sekante** (lateinisch: *secare* = „schneiden“).

Der **Differenzenquotient** einer Funktion f in einem Intervall $[x; z]$ ist gleich der **Steigung** der entsprechenden **Sekante**.



MITTLERE STEIGUNG EINER FUNKTION

Wie die folgenden Abbildungen zeigen, kann aus dem Wert des Differenzenquotienten nur abgelesen werden, ob eine Funktion im Intervall $[x; z]$ *im Mittel* steigt, *im Mittel* fällt oder *im Mittel* weder steigt noch fällt.



- 08** Die Tabelle stellt die Messwerte für das Höhenprofil einer Bergstraße dar.

x in km	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$h(x)$ in km	0	0,04	0,09	0,15	0,2	0,23

x ... horizontale Entfernung vom Ausgangspunkt in Kilometern (km)

$h(x)$... Höhenunterschied zum Ausgangspunkt an der Stelle x in Kilometern (km)

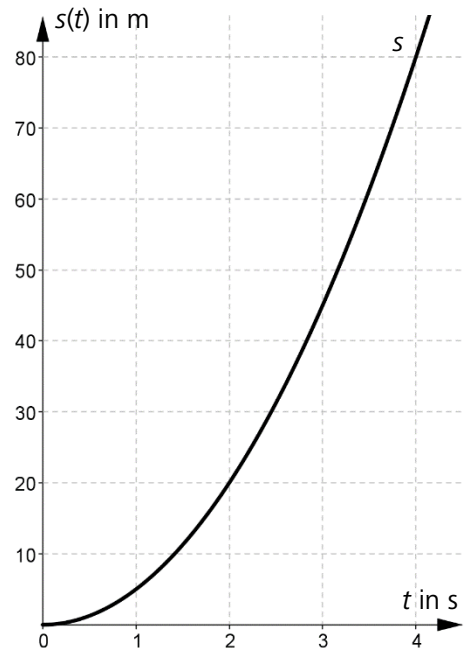
- a)** Berechnen Sie die durchschnittlichen Steigungen der einzelnen Abschnitte.
- b)** Kann man Anhand dieser durchschnittlichen Steigungen erkennen, ob ein Geländewagen, der eine Steigung von bis zu 30 % schafft, die Straße befahren kann? Warum (nicht)?

2 (MOMENTANE) ÄNDERUNGSRATE

09 Beim Bungee-Jumping befindet sich der Springer im freien Fall, wenn man vom Luftwiderstand absieht. Für den Weg $s(t)$ (in Metern) den ein Körper beim freien Fall in den ersten t Sekunden zurücklegt, gilt näherungsweise $s(t) = 5t^2$. Der Graph der Funktion $t \mapsto s(t)$ ist rechts abgebildet.

- Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Springers im Zeitintervall $[0; 1]$.
- Stellen Sie eine Formel für die mittlere Geschwindigkeit des Springers im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ auf.
- Wie groß ist die Momentangeschwindigkeit des Springers nach 3 Sekunden?
Vervollständigen Sie die Tabelle und zeichnen Sie einige der dazugehörigen Sekanten im nebenstehenden Graphen ein:

Zeitintervall	mittlere Geschwindigkeit
$[0; 3]$	
$[1; 3]$	
$[2; 3]$	
$[2,9; 3]$	
$[2,99; 3]$	



GeoGebra-Arbeitsblatt
zu Beispiel 09 :
<http://goo.gl/9Rdh88>



Definition. Ist f eine reelle Funktion, dann heißt der Grenzwert $f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$ **Änderungsrate** oder **Differentialquotient** von f an der Stelle x .

Erklärung der Schreibweise: „lim“ steht für Limes (Grenzwert).

Sprechweise für $f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$: „f Strich von x ist der Grenzwert von $\frac{f(z) - f(x)}{z - x}$ für z gegen x.“

Diese Schreibweise bedeutet, dass man den Wert des Terms $\frac{f(z) - f(x)}{z - x}$ berechnet, wenn sich z unbegrenzt der Zahl x nähert.

Also: Die Änderungsrate ist der Grenzwert von mittleren Änderungsraten.

Oder: Der Differentialquotient ist der Grenzwert von Differenzenquotienten.

Man kann sich unter dem Differentialquotienten an der Stelle x näherungsweise einen Differenzenquotienten in einer sehr kleinen Umgebung von x vorstellen.

Mit der Δ -Schreibweise sieht die obige Definition so aus: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ oder $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Manchmal schreibt man statt $f'(x)$ auch $\frac{dy}{dx}$ (sprich: „dy nach dx“).

Diese sogenannte LEIBNIZ'sche Schreibweise erinnert daran, dass der Differentialquotient der Grenzwert des Differenzenquotienten ist: $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Vgl. das Symbol $\frac{d}{dx} \langle \dots \rangle \big|_{x=\dots}$ am Taschenrechner.



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716),
deutscher Mathematiker, Physiker und Philosoph



- 10** (Fortsetzung von **09**) Wie groß ist die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers **a**) nach 4 Sekunden, **b**) nach t Sekunden?

Löse Aufgabe **a**) händisch und mithilfe des Taschenrechners.

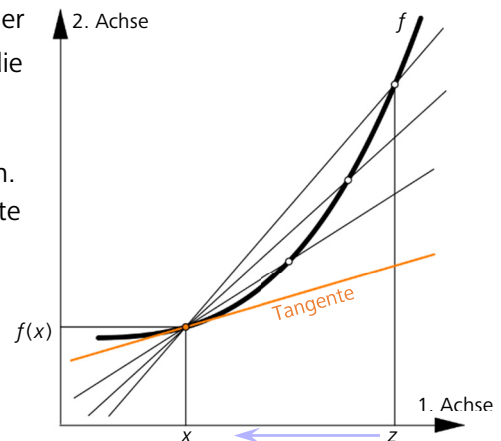
$$\frac{d}{dx}(5x^2) \big|_{x=4}$$

2.1 Geometrische Deutung des Differentialquotienten

Der Differenzenquotient $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ einer Funktion f entspricht in der geometrischen Deutung der Steigung einer Sekante durch die Punkte $(x | f(x))$ und $(z | f(z))$.

Für $z \rightarrow x$ nähert sich der 2. Punkt dem 1. Punkt unbegrenzt an. Die Sekante geht dadurch in eine „Grenzgerade“, die sogenannte **Tangente**, über (lateinisch: *tangere* = „berühren“).

Der **Differentialquotient** $f'(x)$ einer Funktion f an der Stelle x ist gleich der **Steigung der Tangente** an den Graphen von f im Punkt $(x | f(x))$.

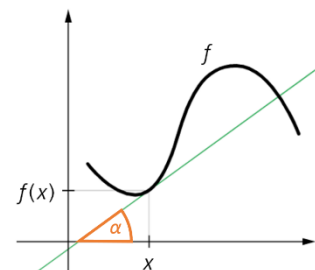


Die Steigung dieser Tangente bezeichnen wir auch als **Steigung der Funktion f** an der Stelle x .

Die Steigung einer Tangente kann auch mithilfe des Winkels angegeben werden, den die Tangente mit der 1. Achse (x -Achse) einschließt.

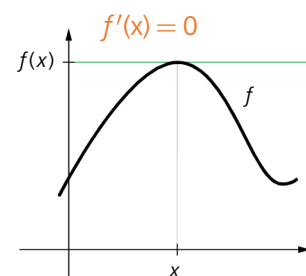
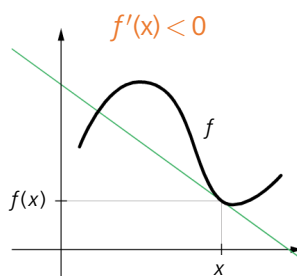
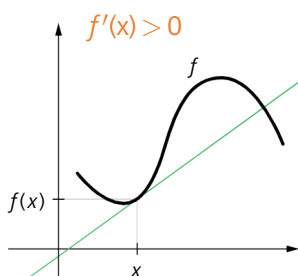
Ist k die Steigung und α der Neigungswinkel der Tangente an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x , so gilt:

$$f'(x) = k = \tan(\alpha)$$



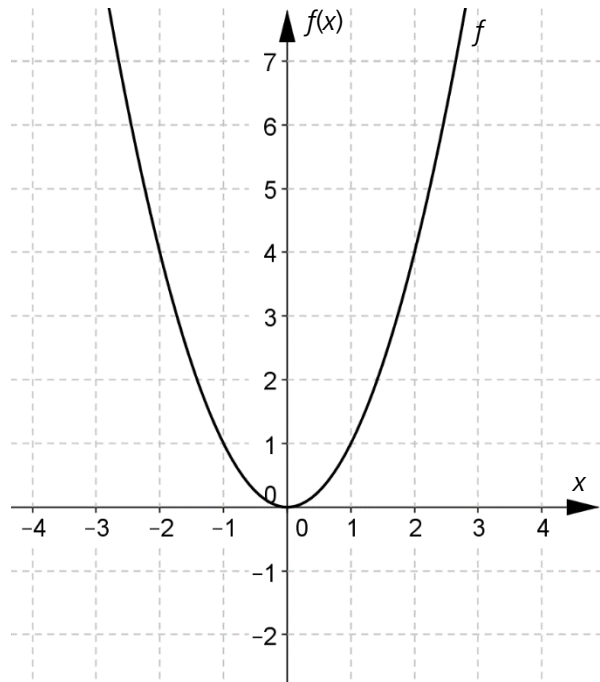
STEIGUNG EINER FUNKTION

Wie die folgenden Abbildungen zeigen, kann aus dem Wert des Differentialquotienten $f'(x)$ abgelesen werden, ob eine Funktion *an der Stelle x* steigt, fällt oder die Steigung 0 besitzt.



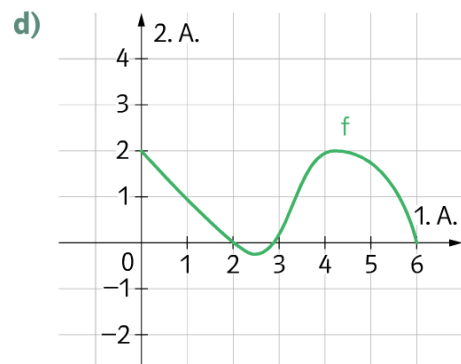
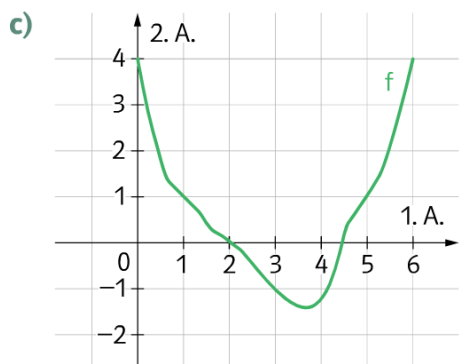
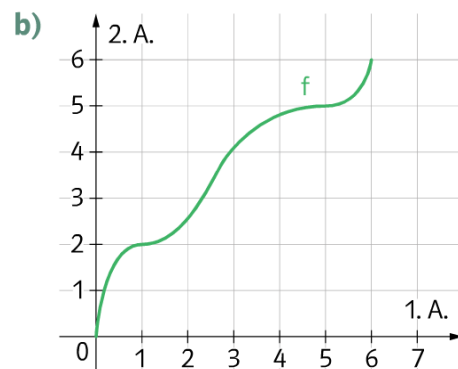
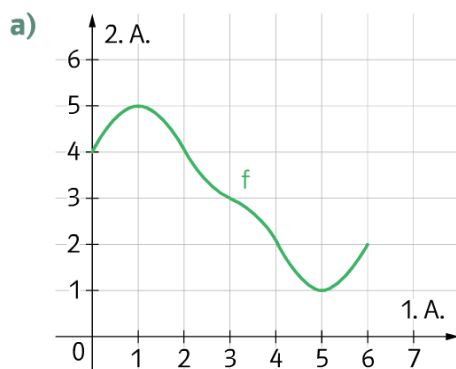
11 Löse die folgenden Aufgaben zuerst näherungsweise grafisch mithilfe des abgebildeten Graphen und danach rechnerisch:

- a) Bestimme die Steigungen der Funktion f mit $f(x) = x^2$ an den Stellen -2 und 1 .
b) Ermittle den Neigungswinkel der zugehörigen Tangenten.



12 Gib an, welche der folgenden Eigenschaften die unten dargestellte Funktion f besitzt.

- (1) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0; 6]$
- (2) $f(x) < 0$ für alle $x \in [3; 4]$
- (3) $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [0; 6]$
- (4) $f'(x) < 0$ für alle $x \in]1; 5[$
- (5) $f(1) = f(5)$
- (6) $f'(1) = f'(5)$
- (7) Die mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[0; 6]$ beträgt 0 .
- (8) Die Steigung der Sekante von f im Intervall $[1; 5]$ beträgt -1 .
- (9) Die Änderungsrate von f an der Stelle 3 ist positiv.
- (10) Die Steigung von f an der Stelle 0 ist negativ.



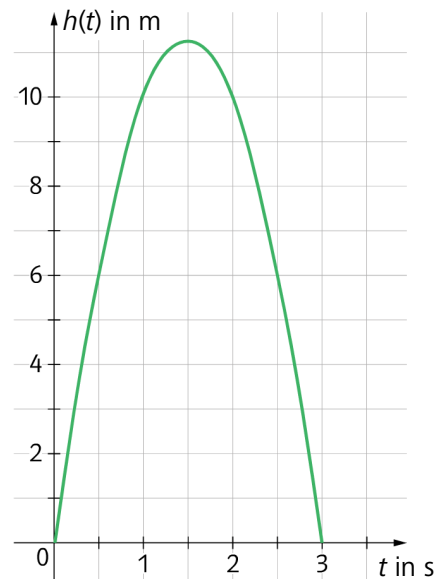
3 ANWENDUNGEN

- 13** In der Abbildung ist die Höhe eines senkrecht nach oben geworfenen Steins in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt.

t ... Zeit in Sekunden (s)

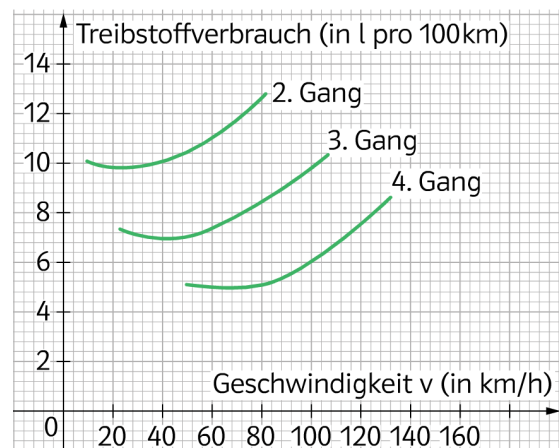
$h(t)$... Höhe in Metern (m) nach t Sekunden

- Interpretiere die Steigung der Funktion an einer Stelle t im Sachzusammenhang.
- Lies ab, wann der Betrag der Geschwindigkeit am größten bzw. wann am kleinsten ist.
- Bestimmen näherungsweise die Geschwindigkeit nach 1 bzw. 2 Sekunden.
- In welchem Bereich ist die Geschwindigkeit positiv, in welchem negativ, wann gleich null?



- 14** Die Abbildung zeigt den Treibstoffverbrauch eines bestimmten PKW in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit.

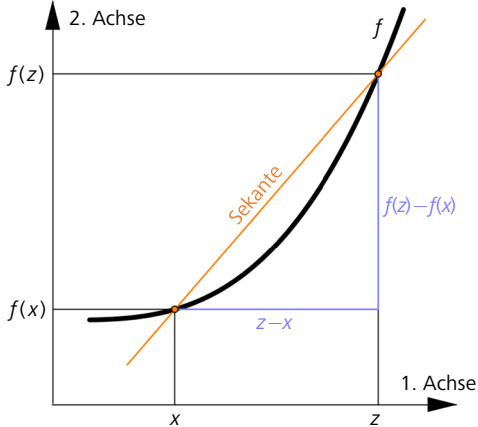
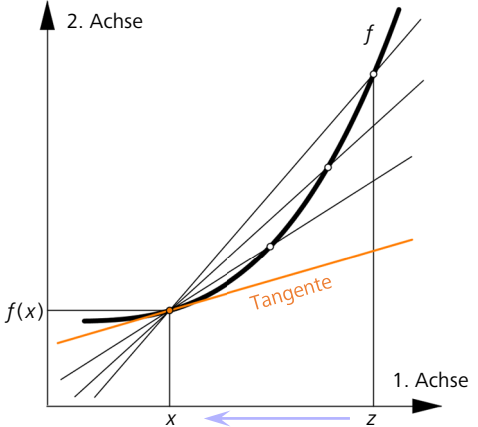
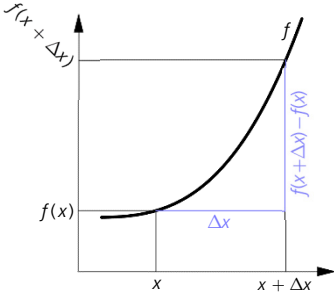
- Bei welcher Geschwindigkeit ist der Treibstoffverbrauch im 2. Gang am niedrigsten?
- Interpretiere die Steigung der Graphen an einer Stelle v im Sachzusammenhang.
- Man fährt im 3. Gang. In welchem Geschwindigkeitsintervall ist die Änderungsrate des Treibstoffverbrauchs negativ, in welchem positiv? Wann ist sie gleich 0?
- Man fährt im 4. Gang. In welchem Geschwindigkeitsintervall nimmt der Treibstoffverbrauch fast linear zu?
- Man fährt im 4. Gang. Bewirkt eine Geschwindigkeitserhöhung von 70 auf 71 km/h eine größere Änderung des Treibstoffverbrauchs als eine Erhöhung von 100 auf 10 km/h? Begründe.



15 Ergänze die Tabelle:

Gegeben ist die Funktion $x \mapsto f(x)$, wobei ...	Die mittlere Änderungsrate $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ gibt an:	Die momentane Änderungsrate $f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ gibt an:
x ... Zeit in Stunden (h) $f(x)$... zurückgelegter Weg in km nach x Stunden		
x ... Zeit in Sekunden (s) $f(x)$... Geschwindigkeit in m/s nach x Sekunden		
x ... zurückgelegter Weg in km $f(x)$... verbrauchte Benzinmenge in Litern nach x km		
x ... Produktionsmenge einer Ware in Stück $f(x)$... Kosten in € für die Produktion von x Stück		
x ... Zeit in Tagen (d) $f(x)$... Anzahl von an Grippe erkrankten Personen x Tage nach Beginn einer Epidemie		
x ... Seehöhe in m $f(x)$... Luftdruck in x Metern Höhe in Hektopascal (hPa)		
x ... Zeit in Sekunden (s) $f(x)$... Wassermenge in m^3 , die nach x Sekunden durch einen Kanal geflossen ist		
x ... Zeit in Stunden (h) $f(x)$... Temperatur in $^{\circ}\text{C}$ zum Zeitpunkt x		
x ... Fahrtstrecke in km $f(x)$... Bahntarif in € für x km Fahrtstrecke		

ZUSAMMENFASSUNG

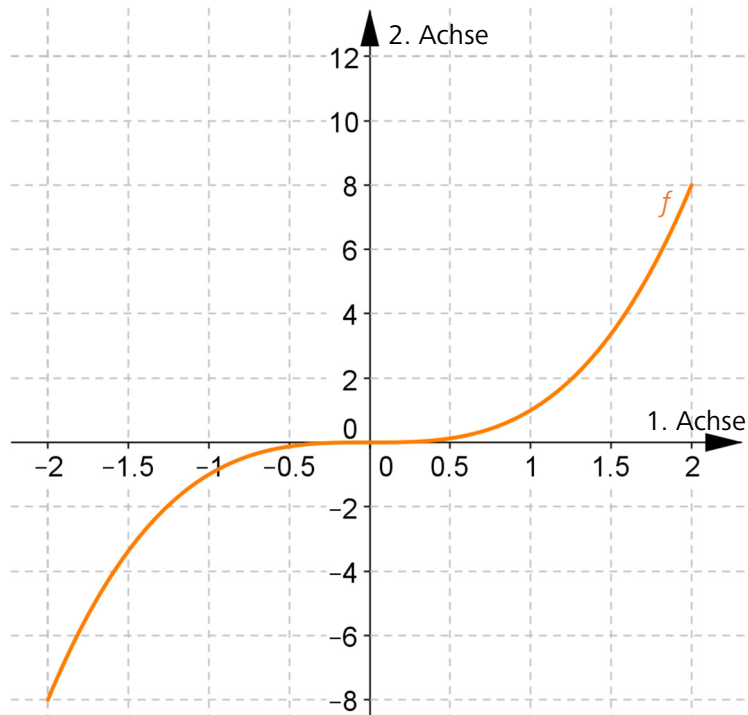
	Differenzenquotient = mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[x; z]$	Differentialquotient = Änderungsrate von f an der Stelle x
Definition	$\frac{f(z) - f(x)}{z - x}$	$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$
grafische Deutung	<p>Steigung der Sekante</p> 	<p>Steigung der Tangente</p> 
alternative Schreibweisen	$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ $= \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ $= \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 	$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $= \frac{dy}{dx}$ <p>vgl. Taschenrechner: $\frac{d}{dx}(\text{Funktionsterm}) \big _{x=\text{Stelle}}$</p> <div style="display: flex; justify-content: center; gap: 20px;"> <div style="text-align: center;"> $\frac{d}{dx}$ Funktionsterm </div> <div style="text-align: center;"> $\big _{x=}$ Stelle </div> </div>

4 ABLEITUNG(SFUNKTION) UND ABLEITUNGSREGELN

- 16** Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3$ im Intervall $[-2; 2]$.

- a) Welche Aussagen kannst du ohne Rechnung über den Differentialquotient von f an verschiedenen Stellen treffen?
- b) Fülle die folgende Tabelle aus:

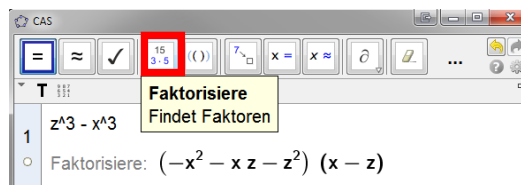
x	$f'(x)$
-2	
-1,5	
-1	
-0,5	
0	
0,5	
1	
1,5	
2	



- c) Trage die Wertepaare aus der Tabelle als Punkte in das Koordinatensystem ein. Verbinde die Punkte zu einem durchgehenden Funktionsgraphen. Interpretiere den Zusammenhang der Funktionsgraphen von f und f' .
- d) Gib eine Gleichung der Funktion f' : $x \mapsto f'(x)$ an.

Anleitung: $f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{z^3 - x^3}{z - x} = \dots$

Damit man im nächsten Schritt kürzen kann, muss der Zähler in ein Produkt zerlegt (faktoriert) werden:



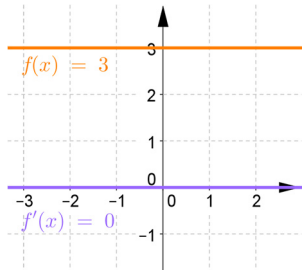
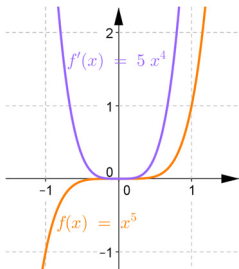
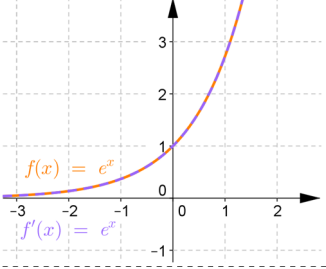
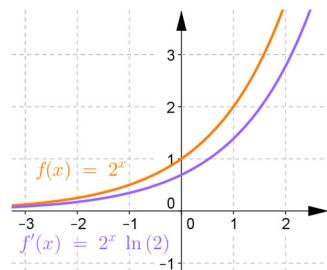
Definition. Die Funktion $f': x \mapsto f'(x)$ heißt **Ableitungsfunktion von f** oder **Ableitung von f** . Das Berechnen der Ableitungsfunktion nennt man **Ableiten** oder **Differenzieren**.

- 17** Grafisch Ableiten – Domino:

<http://aol-verlag.de/uploads/media/Mathe-Domino-Grafisch-ableiten.pdf>



Ableitung spezieller Funktionen

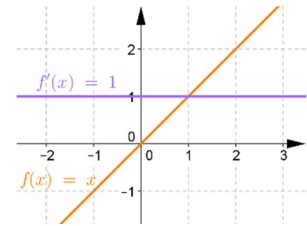
	Funktion	Ableitung	Beispiel
konstante Funktion	$f(x) = c$ (mit $c \in \mathbb{R}$)	$f'(x) = 0$	$f(x) = 3$ $f'(x) = 0$ 
Potenz-funktionen	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^5$ $f'(x) = 5 \cdot x^4$ 
Exponential-funktionen	$f(x) = e^x$ (eulersche Zahl $e = 2,71828\dots$)	$f'(x) = e^x$	
	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$	$f(x) = 2^x$ $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2) \approx 0,6931 \cdot 2^x$ 

Als Spezialfälle der Potenzfunktionen, können wir auch die folgenden Funktionstypen ableiten:

Identische Funktion:

$$f(x) = x = x^1$$

$$f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$$



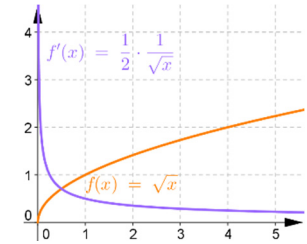
Wurzelfunktion:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

Wiederholung:

$$\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$$



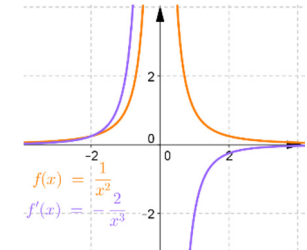
Potenzfunktionen mit negativen Exponenten:

z. B.: $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$$f'(x) = -2 \cdot x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

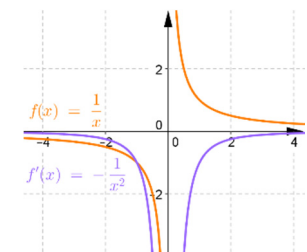
Wiederholung:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$



insbesondere: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$



Grundlegende Ableitungsregeln

Faktorregel: $f(x) = c \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$ (mit $c \in \mathbb{R}$)
Konstante Faktoren bleiben beim Differenzieren erhalten.

Beispiele: $f(x) = 7 \cdot x^5 \Rightarrow f'(x) = 7 \cdot 5 \cdot x^4 = 35 \cdot x^4$

$$f(x) = 3 \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot e^x$$

$$f(x) = \frac{6}{x} \Rightarrow f'(x) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{6}{x^2}$$

Summenregel: $f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$
Eine Summe kann gliedweise differenziert werden.

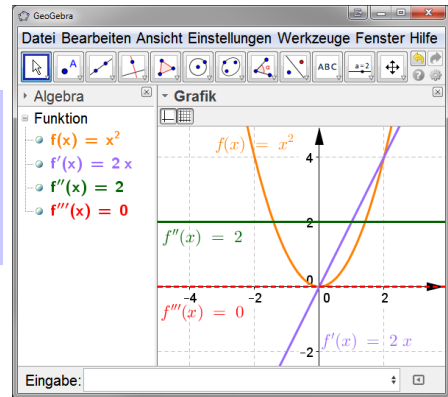
Beispiel: $f(x) = 5 \cdot x^3 + \frac{1}{3} \cdot x^2 - x + 6$

$$f'(x) = 5 \cdot 3 \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot x - 1 + 0 = 15 \cdot x^2 + \frac{2}{3} \cdot x - 1$$

Höhere Ableitungen

Definition. Ist f eine reelle Funktion, dann bezeichnet man ...
 ... die Funktion f' als **erste Ableitung von f** .
 ... die Funktion $f'' = (f')'$ als **zweite Ableitung von f** .
 ... die Funktion $f''' = (f'')'$ als **dritte Ableitung von f** .

Die Ableitungsfunktionen erhält man in GeoGebra ganz einfach. Wenn man die Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x)$ bereits gezeichnet hat, erhält man die Ableitungen durch Eingabe von $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$.



Für **Bewegungsvorgänge** gilt mit diesen Bezeichnungen:

$$v(t) = s'(t)$$

Geschwindigkeit = erste Ableitung des Weges

Die Geschwindigkeit gibt an, wie schnell sich der Ort zu einem bestimmten Zeitpunkt ändert.

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Beschleunigung = erste Ableitung der Geschwindigkeit = zweite Ableitung des Weges

Die Beschleunigung gibt an, wie schnell sich die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt ändert.

- 18** Berechne die Geschwindigkeit $v(10)$ und die Beschleunigung $a(10)$ für die Zeit-Ort-Funktion s mit $s(t) = 4t^3 + t - 1$. (t in Sekunden, $s(t)$ in Metern)

- 19** Für den zurückgelegten Weg beim freien Fall gilt (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands):

$$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

t ... Zeit in Sekunden (s), $s(t)$... Weg in Metern (m), $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$... Erdbeschleunigung

Stelle eine Formel für die Geschwindigkeit $v(t)$ zum Zeitpunkt t , sowie eine Formel für die Beschleunigung $a(t)$ zum Zeitpunkt t auf.

- 20** Die italienische Polizei hat seit einigen Jahren extrem schnelle Autos in Verwendung, um vor allem die Gegend südlich von Rom besser und sicherer überwachen zu können. Nur wenige Personen mit Spezialausbildung dürfen mit dem Lamborghini Gallardo fahren. In medizinischen Notfällen werden auch Organtransporte durchgeführt.



Ein Raser fährt auf der Autobahn im Baustellenbereich statt 30 km/h sogar 126 km/h (= 35 m/s). Die Polizei nimmt die Verfolgung auf.

Für den zurückgelegten Weg gilt:

$$\text{Raser: } s_R(t) = 35t + 150 \quad \text{Polizei: } s_P(t) = 2,3t^2 \quad (\text{Weg } s(t) \text{ in Metern, Zeit } t \text{ in Sekunden})$$

- Skizziere die dazugehörigen Graphen. Welchen Vorsprung hatte der Raser zu Beginn?
- Berechne, wo und nach welcher Zeit die Polizei den Raser eingeholt hat.
Wie hoch war dabei die Geschwindigkeit von Raser und Polizei?
- Wann hatten Verfolger und Raser die gleiche Geschwindigkeit? Wie ist dies graphisch erkennbar?
- Berechne die mittlere Geschwindigkeit der Polizei und des Rasers in den ersten 10 Sekunden.
- Was kann man über die Beschleunigung des Rasers und der Polizei aussagen?

5 FUNKTIONSUNTERSUCHUNG MIT HILFE DER DIFFERENTIALRECHNUNG

Für den **Verlauf des Graphen** einer beliebigen Funktion f kann man mithilfe der Ableitungen von f folgende Aussagen treffen:

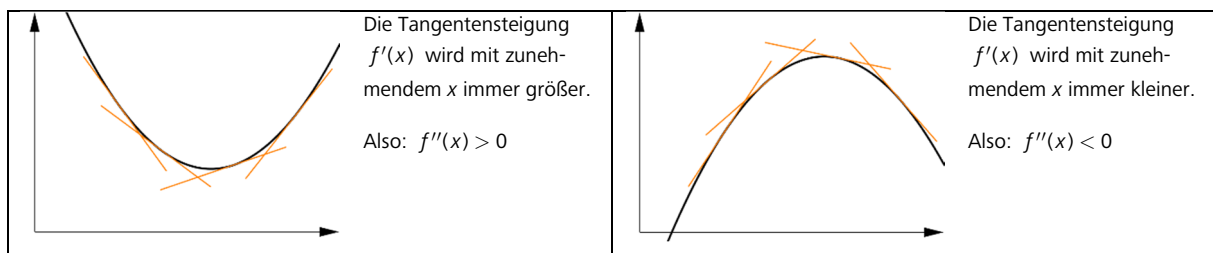
Monotonie

$f'(x)$ gibt die **Steigung** von f an der Stelle x an:

- $f'(x) > 0$: Die Funktion ist an der Stelle x **streng monoton steigend**.
- $f'(x) < 0$: Die Funktion ist an der Stelle x **streng monoton fallend**.
- $f'(x) = 0$: Die **Steigung** der Funktion an der Stelle x ist **0**.

Krümmung

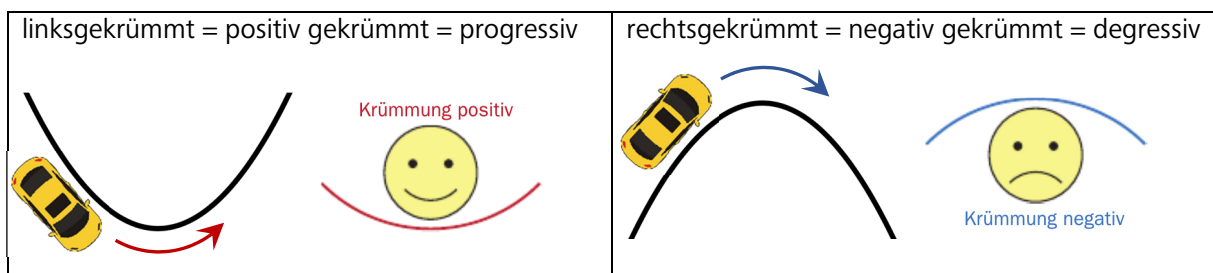
$f''(x)$ gibt Auskunft darüber, wie sich die Steigung von f an der Stelle x ändert:



$f''(x)$ gibt die **Krümmung** von f an der Stelle x an:

- $f''(x) > 0$: Die Funktion ist an der Stelle x **linksgekrümmt**.
- $f''(x) < 0$: Die Funktion ist an der Stelle x **rechtsgekrümmt**.
- $f''(x) = 0$: Die **Krümmung** der Funktion an der Stelle x ist **0**.

VERSCHIEDENE BEZEICHNUNGEN FÜR DIE KRÜMMUNG:



Überblick für Kurvenuntersuchungen

Nullstelle	<p>x ist Nullstelle, wenn gilt:</p> $f(x) = 0$	
lokale Minimumstelle	<p>x ist lokale Minimumstelle, wenn gilt:</p> $f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) > 0$ <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid orange; padding: 2px; text-align: center;"> waagrechte Tangente </div> <div style="border: 1px solid orange; padding: 2px; text-align: center;"> links- gekrümmt </div> </div>	
lokale Maximumstelle	<p>x ist lokale Maximumstelle, wenn gilt:</p> $f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) < 0$ <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid orange; padding: 2px; text-align: center;"> waagrechte Tangente </div> <div style="border: 1px solid orange; padding: 2px; text-align: center;"> rechts- gekrümmt </div> </div>	
Terrassenstelle = Sattelstelle	<p>x ist Terrassenstelle, wenn gilt:</p> $f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) = 0$ <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid orange; padding: 2px; text-align: center;"> waagrechte Tangente </div> <div style="border: 1px solid orange; padding: 2px; text-align: center;"> Krümmung = 0 </div> </div>	
Wendestelle	<p>x ist Wendestelle, wenn gilt:</p> $f''(x) = 0 \text{ und } f'''(x) \neq 0$ <div style="border: 1px solid orange; padding: 2px; text-align: center; margin-top: 10px;"> Krümmung = 0 </div>	