Informelle Kompetenzmessung
zur standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reife- und Diplomprüfung

BHS

Februar 2016

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 1)
Prüfungsaufgabensammlung

BMBF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Handreichung für die Bearbeitung der SRDP in Angewandter Mathematik

- Jede Berechnung ist mit einem nachvollziehbaren Rechenansatz und einer nachvollziehbaren Dokumentation des Technologieeinsatzes (die verwendeten Ausgangsparameter und die verwendete Technologiefunktion müssen angegeben werden) durchzuführen.
- Selbst gewählte Variablen sind zu erklären und gegebenenfalls mit Einheiten zu benennen.
- Ergebnisse sind eindeutig hervorzuheben.
- Ergebnisse sind mit entsprechenden Einheiten anzugeben.
- Werden Diagramme oder Skizzen als Lösungen erstellt, so sind die Achsen zu skalieren und zu beschriften.
- Werden geometrische Skizzen erstellt, so sind die lösungsrelevanten Teile zu beschriften.
- Vermeiden Sie frühzeitiges Runden.
- Legen Sie allfällige Computerausdrucke der Lösung mit Ihrem Namen beschriftet bei.
- Wird eine Aufgabe mehrfach gerechnet, so sind alle Lösungswege bis auf einen zu streichen.

Erläuterung der Antwortformate

Die Teilaufgaben haben *offene Antwortformate*, *halboffene Antwortformate* oder *Konstruktionsformate*.

Offenes Antwortformat: Hierbei kann die Bearbeitung der Aufgaben auf unterschiedliche Weise erfolgen, z. B. durch eine Berechnung, durch Erstellung einer Grafik etc.

Halboffenes Antwortformat: Ein Teil der Antwort ist vorgegeben, der fehlende Teil soll ergänzt werden (Formel, Funktion etc.).

Beispiel:

Gegeben ist ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A dieses Rechtecks.

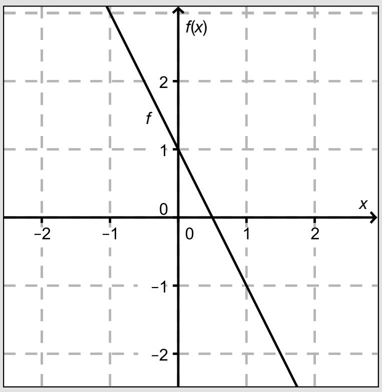
$A = a \cdot b$

Konstruktionsformat: Ein Diagramm oder eine Grafik ist vorgegeben. Die Aufgabenstellung erfordert die Ergänzung von Punkten und/oder Geraden und/oder Kurven und/oder Skalierungen bzw. Achsenbeschriftungen im Diagramm bzw. in der Grafik.

Beispiel:

Gegeben ist eine lineare Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$.

– Zeichnen Sie den Graphen einer linearen Funktion mit $k = -2$ und $d > 0$ im nachstehenden Koordinatensystem ein.



Viel Erfolg!

Aufgabe 1

Vergnügungspark

Ein kürzlich eröffneter Vergnügungspark ist ein beliebtes Ausflugsziel in der Region.

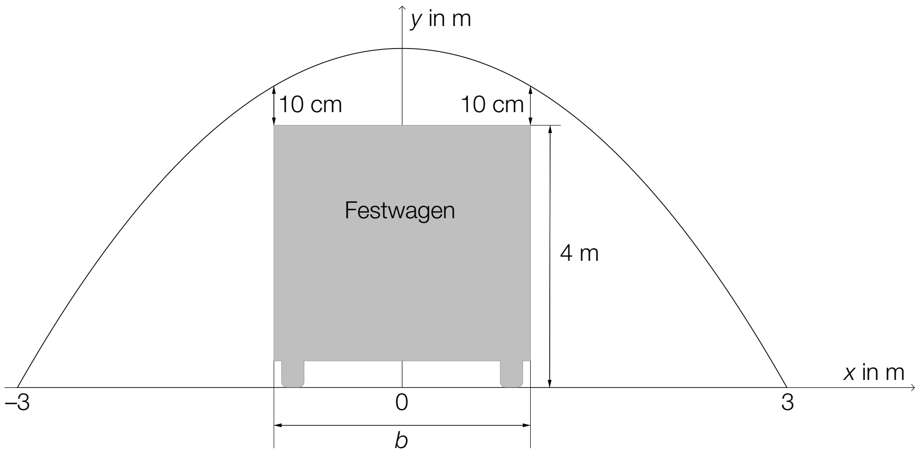
a) Beim Eingang zum Vergnügnungspark steht ein Torbogen. Dieser wird durch einen Teil des Graphen der Funktion mit folgender Gleichung beschrieben:

$y = 9 - x^2$

x, y ... Koordinaten in Metern (m)

Dabei wird der ebene Boden durch die x-Achse beschrieben.

Bei einer Parade muss ein 4 Meter hoher Festwagen durch den Torbogen geschoben werden. Nach oben hin muss ein senkrechter Minimalabstand von 10 cm eingehalten werden (siehe Skizze – nicht maßstabgetreu).

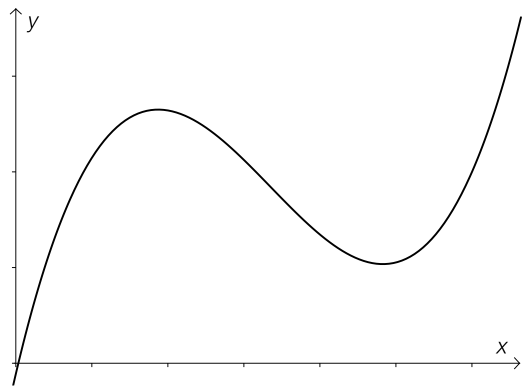


– Berechnen Sie, welche Breite b der Festwagen maximal haben darf. *[1 Punkt]*

Vor der Parade wird das Tor mit einer Folie verschlossen.

– Berechnen Sie den Flächeninhalt der dazu benötigten Folie. *[1 Punkt]*

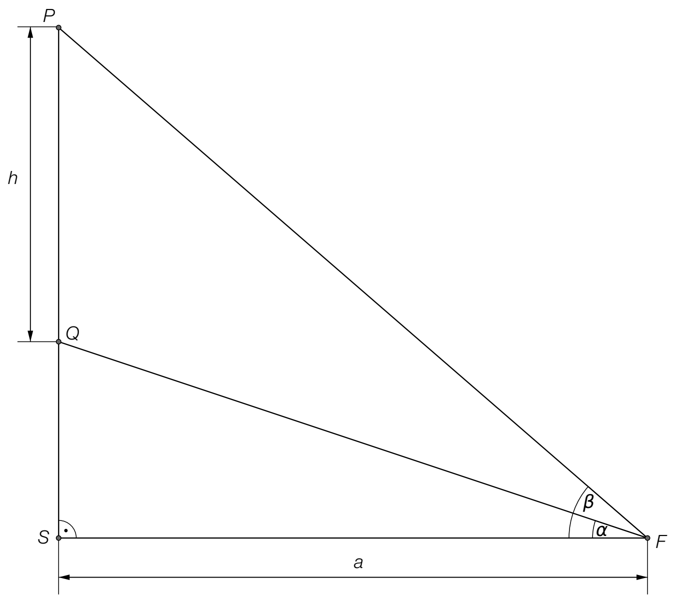
b) Eine der Hauptattraktionen ist die Hochschaubahn. Ein Teilstück kann durch die Polynomfunktion modelliert werden, deren Graph in der folgenden Abbildung zu sehen ist:



– Erklären Sie, welchen Grad diese Polynomfunktion mindestens haben muss. *[1 Punkt]*

c) Im Vergnügungspark gibt es ein Kino.

Fiona sitzt a Meter von der Leinwand entfernt (Punkt F). Der Höhenwinkel zum unteren Ende der Leinwand (Punkt Q) wird mit α bezeichnet, der Höhenwinkel zum oberen Ende der Leinwand (Punkt P) wird mit β bezeichnet.



– Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung der Höhe h der Leinwand aus a, α und β.

h = ____________________ *[1 Punkt]*

Aufgabe 2

Luftdruck – Höhenformel

Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe über dem Meeresspiegel (Seehöhe) ab. Der Zusammenhang kann durch Exponentialfunktionen oder näherungsweise durch lineare Funktionen beschrieben werden.

a) Ein Modell zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen der Höhe über dem Meeresspiegel und dem Luftdruck ist die *barometrische Höhenformel*:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7\,991}}$$

h ... Höhe über dem Meeresspiegel in Metern (m)
$p(h)$ ... Luftdruck in der Höhe h in Hektopascal (hPa)

– Zeigen Sie, dass p_0 der Luftdruck auf der Höhe des Meeresspiegels ist. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie diejenige Seehöhe, bei der der Luftdruck genau die Hälfte von p_0 beträgt. *[2 Punkte]*

b) Ein vereinfachtes Modell des Zusammenhangs zwischen der Höhe über dem Meeresspiegel und dem Luftdruck nimmt eine konstante Abnahme des Luftdrucks um 10 hPa pro 100 Höhenmeter an. Der Luftdruck auf Höhe des Meeresspiegels beträgt rund 1013 hPa.

Verwenden Sie die folgenden Bezeichnungen:

h ... Höhe über dem Meeresspiegel in m
$f(h)$ ... Luftdruck in der Höhe h in hPa

– Stellen Sie die Gleichung der Funktion f auf, die diesen Zusammenhang im vereinfachten Modell beschreibt. *[1 Punkt]*

c) Zu Beginn des Jahres 2013 wurden im Schigebiet Kaprun-Kitzsteinhorn folgende Werte für den Luftdruck gemessen:

Seehöhe	Luftdruck
990 m	1040 hPa
1980 m	930 hPa

– Bestimmen Sie mithilfe eines linearen Modells aus diesen Daten den Luftdruck in einer Höhe von 1300 m über dem Meeresspiegel. *[2 Punkte]*

Aufgabe 3

Produktion von Rucksäcken

Bei der Produktion von Rucksäcken treten erfahrungsgemäß 3 verschiedene Fehlerarten unabhängig voneinander auf.

P(„Nahtfehler“) = 2 %

P(„Reißverschlussdefekt“) = 3 %

P(„Farbfehler“) = 1 %

a) Ein Rucksack wird zufällig ausgewählt und überprüft. Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E wird mit $P(E) = 0{,}02 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}99$ berechnet.

– Geben Sie ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit so berechnet wird. *[1 Punkt]*

b) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Rucksack mindestens 1 dieser 3 Fehlerarten aufweist. *[1 Punkt]*
– Erklären Sie, warum die Berechnung mittels Gegenwahrscheinlichkeit hier weniger aufwendig ist. *[1 Punkt]*

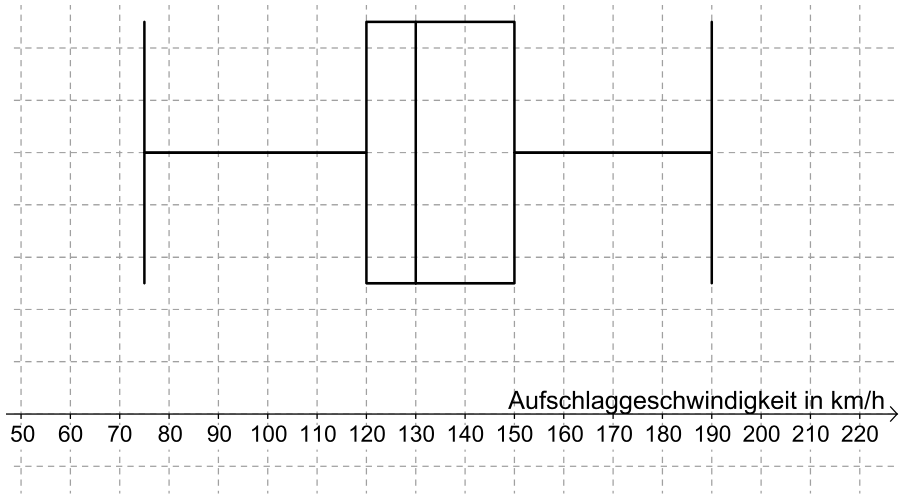
c) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Zufallsstichprobe von 100 Stück weniger als 3 Rucksäcke mit Reißverschlussdefekt vorhanden sind. *[2 Punkte]*

Aufgabe 4

Tennis

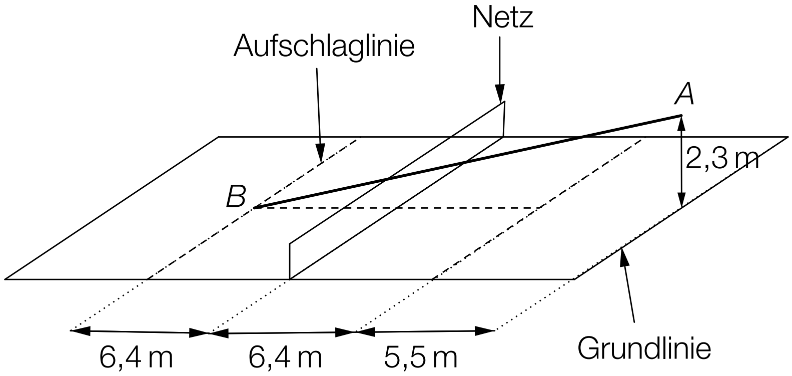
Im Rahmen der Nachwuchsförderung wurden die Leistungen der Teilnehmer eines Knaben-Tennisturniers genauer beobachtet.

a) Für die Auswertung der Daten der Aufschlaggeschwindigkeit der Teilnehmer wurde der nachstehende Boxplot erstellt.



– Lesen Sie diejenige Aufschlaggeschwindigkeit ab, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde. *[1 Punkt]*
– Lesen Sie den Quartilsabstand ab. *[1 Punkt]*

b) Ein Spieler trifft beim Aufschlag den Ball in einer Höhe von 2,3 m im Punkt *A* genau über der Mitte der Grundlinie. Er visiert den Punkt *B* (Mitte der Aufschlaglinie) an. Um nicht ins Netz zu gehen, muss der Ball das Netz in einer Höhe von mindestens 1 Meter (über dem Boden) überqueren.
Die Flugbahn des Tennisballes beim Aufschlag kann modellhaft mittels einer Gerade beschrieben werden.



– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Ball bei diesem Aufschlag über das Netz geht. *[1 Punkt]*

c) Mithilfe einer Videoanalyse wird ein Grundlinienschlag modelliert.
Die Flugbahn zwischen dem Abschlagpunkt und dem Punkt, in dem der Ball auf dem Boden aufkommt, kann durch die Funktion f beschrieben werden:

$$f(x) = -\frac{1}{50} \cdot x^2 + \frac{2}{5} \cdot x + \frac{21}{50} \text{ mit } x \geq 0$$

x ... horizontale Entfernung zum Abschlagpunkt in Metern (m)
$f(x)$ ... Höhe des Balles an der Stelle x über dem Boden in m

– Berechnen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn im Abschlagpunkt. *[1 Punkt]*
– Interpretieren Sie die Bedeutung der obigen Zahl $\frac{21}{50}$ für die Flugbahn. *[1 Punkt]*

Aufgabe 5

Leistung einer Solaranlage

a) Die Leistung einer Solaranlage lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion P beschreiben:

$$P(t) = \frac{7}{648} \cdot t^4 - \frac{7}{27} \cdot t^3 + a \cdot t^2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 12$$

t ... Zeit in Stunden (h), wobei $t = 0$ der Uhrzeit 7 Uhr entspricht
$P(t)$ ... Leistung zur Zeit t in Kilowatt (kW)

Die Leistung ist um 13 Uhr am höchsten.

– Berechnen Sie den Koeffizienten a. *[2 Punkte]*

b) Eine andere Solaranlage wird an einem bestimmten Tag von 7 Uhr bis 19 Uhr betrieben und ihre Leistung durch die Funktion P beschrieben, wobei gilt:

$$P(t) = 0{,}007 \cdot t^4 - 0{,}165 \cdot t^3 + 0{,}972 \cdot t^2 + 1{,}221 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 12$$

t ... Zeit in Stunden (h), wobei $t = 0$ der Uhrzeit 7 Uhr entspricht
$P(t)$ ... Leistung der Solaranlage zur Zeit t in kW

Die in einem Zeitintervall von der Solaranlage gelieferte Energie wird mithilfe des Integrals der Leistung in diesem Zeitintervall berechnet.

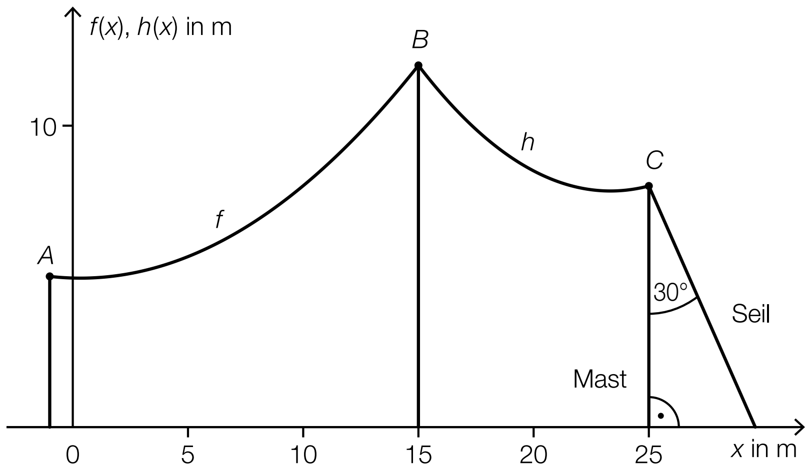
– Berechnen Sie die an diesem Tag von der Solaranlage gelieferte Energie. *[1 Punkt]*

c) – Begründen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, warum eine Polynomfunktion 3. Grades genau 1 Wendestelle hat. *[1 Punkt]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Stromversorgung einer Baustelle

Eine Stromleitung zur Versorgung einer Baustelle soll, wie in der nachstehenden Skizze dargestellt, durch die 3 Punkte *A*, *B* und *C* führen. Die zwischen den einzelnen Masten liegenden Teile der Stromleitung können näherungsweise durch Graphen von Polynomfunktionen 2. Grades durch die Punkte *A* und *B* bzw. *B* und *C* beschrieben werden.
Alle Längen sind in Metern angegeben.



a) Der erste Teil der Leitung verläuft zwischen den Punkten $A = (-1|5)$ und $B = (15|12)$.

Eine Gleichung der Tangente im Punkt *A* an den Graphen der Polynomfunktion *f* lautet:

$y = 4{,}913 - 0{,}0875 \cdot x$

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion 2. Grades auf. *[2 Punkte]*
– Berechnen Sie diese Koeffizienten. *[1 Punkt]*

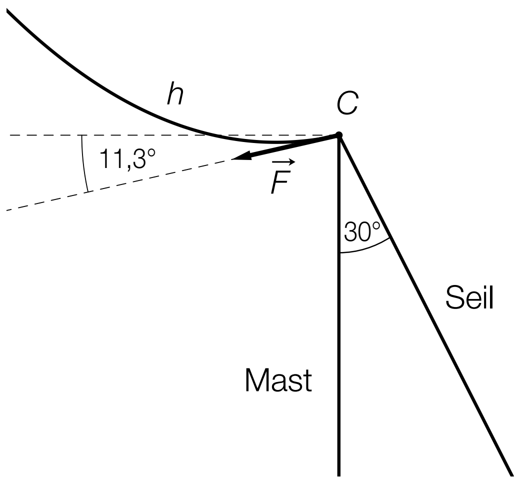
b) Zwischen den Punkten *B* und *C* kann die Stromleitung durch den Graphen der folgenden Funktion *h* beschrieben werden:

$h(x) = \frac{3}{50} \cdot x^2 - \frac{14}{5} \cdot x + \frac{81}{2}$ mit $15 \leq x \leq 25$

Die Stromleitung soll in diesem Bereich in einer Höhe von mindestens 7 m verlaufen.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Bedingung erfüllt ist. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie die Länge desjenigen Seils, das vom Punkt *C* zum Boden gespannt ist. *[1 Punkt]*

c) Wie in der nachstehenden nicht maßstabgetreuen Skizze dargestellt, ist im Punkt *C* ein Seil unter einem Winkel von 30° zum Mast gespannt.
Auf der anderen Seite wirkt durch die Stromleitung auf den Befestigungspunkt *C* eine Kraft $\vec{F}$ von 1000 Newton unter einem Winkel von 11,3° zur Waagrechten. Diese Kraft kann in zwei Kräfte aufgeteilt werden, eine in Seilrichtung und eine in Mastrichtung.



– Berechnen Sie den Betrag derjenigen Kraft, die in Seilrichtung wirkt. *[2 Punkte]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Länge eines Werkstücks

In einer Fertigungsanlage werden Werkstücke erzeugt, deren Längen erfahrungsgemäß normalverteilt sind.

a) Die Länge eines Werkstücks ist normalverteilt mit $\mu = 72{,}3$ mm und $\sigma = 0{,}5$ mm.
Im Rahmen der Qualitätssicherung werden Stichproben vom Umfang $n = 7$ entnommen.

Für jede Stichprobe wird der Mittelwert der Längen bestimmt.

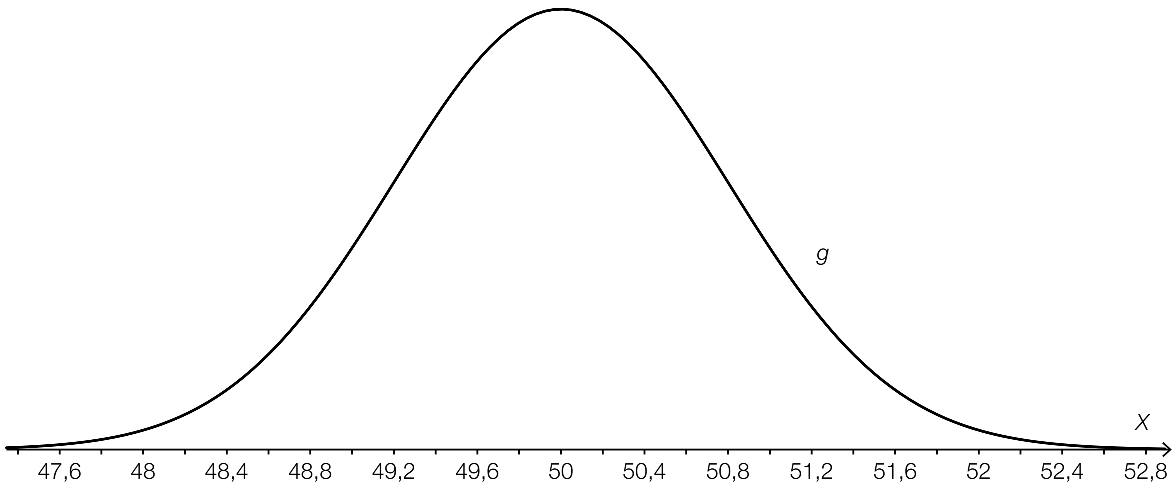
– Geben Sie die Parameter der Verteilung der Stichprobenmittelwerte $\overline{X}$ an. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 95 % aller Stichprobenmittelwerte liegen. *[1 Punkt]*
– Beschreiben Sie, wie sich der Stichprobenumfang ändern muss, damit sich die Breite dieses 95-%-Zufallsstreubereichs halbiert. *[1 Punkt]*
– Begründen Sie, warum das Maximum der Dichtefunktion der Stichprobenmittelwerte $\overline{X}$ für $n = 7$ größer ist als jenes für $n = 5$. *[1 Punkt]*

b) Die Länge eines Werkstücks ist normalverteilt mit $\mu = 72{,}3$ mm.
Werkstücke, die zu lang oder zu kurz sind, sind Ausschuss und werden aussortiert.
Abweichungen von bis zu $\pm 0{,}9$ mm vom Erwartungswert werden toleriert.

– Berechnen Sie für eine Standardabweichung von $\sigma = 0{,}5$ mm die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Werkstück aussortiert wird. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie, wie groß die Standardabweichung sein müsste, damit der Ausschussanteil 2 % beträgt. *[1 Punkt]*

c) In der unten stehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion g einer normalverteilten Zufallsvariablen X dargestellt.

– Begründen Sie mithilfe der Dichtefunktion, warum für die zugehörige Verteilungsfunktion G gilt: $G(\mu) = 0{,}5$. *[1 Punkt]*
– Veranschaulichen Sie die Wahrscheinlichkeit $1 - G(51)$ in der unten stehenden Abbildung. *[1 Punkt]*
– Lesen Sie aus dem Graphen der Dichtefunktion die Standardabweichung σ ab. *[1 Punkt]*



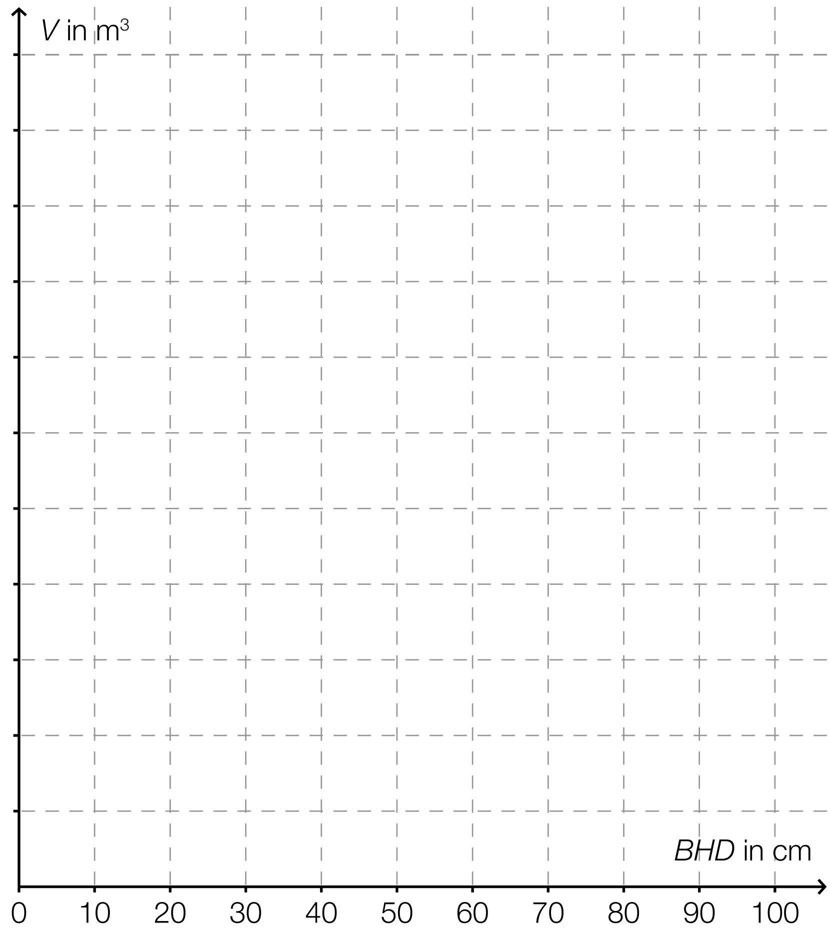
Aufgabe 8 (Teil B)

Volumen eines Baums

Die Ermittlung des Volumens eines Baumstamms kann auf verschiedene Weisen erfolgen.

a) Näherungsweise kann das Volumen eines stehenden Baums folgendermaßen ermittelt werden: „Man misst den Brusthöhendurchmesser in cm (= Durchmesser des Baums in 1,3 m Höhe), multipliziert diese Zahl mit sich selbst und teilt das Ergebnis durch 1 000. Die Maßzahl des Ergebnisses ist die Maßzahl des Volumens eines Baums in m³.“

- Übertragen Sie diesen Zusammenhang in eine Formel. Benutzen Sie dazu die Bezeichnungen *BHD* (Brusthöhendurchmesser) und *V* (Volumen). *[1 Punkt]*
- Stellen Sie das Volumen *V* eines Baums in Abhängigkeit von seinem Brusthöhendurchmesser *BHD* im Intervall [0; 100] im unten stehenden Diagramm dar. Verwenden Sie eine geeignete Skalierung der senkrechten Achse. *[2 Punkte]*



b) Die *erweiterte Formel von Denzin* bietet eine Möglichkeit, das Volumen eines Baums näherungsweise zu berechnen. Als Formel angeschrieben lautet sie (für eine bestimmte Baumart):

$$V = \frac{BHD^2}{1\,000} \cdot \frac{3 \cdot h + 25}{100}$$

BHD ... Durchmesser in 1,3 Metern Höhe („Brusthöhendurchmesser“) in Zentimetern (cm)
h ... Höhe des Baums in Metern (m)
V ... Volumen des Baums in Kubikmetern (m^3)

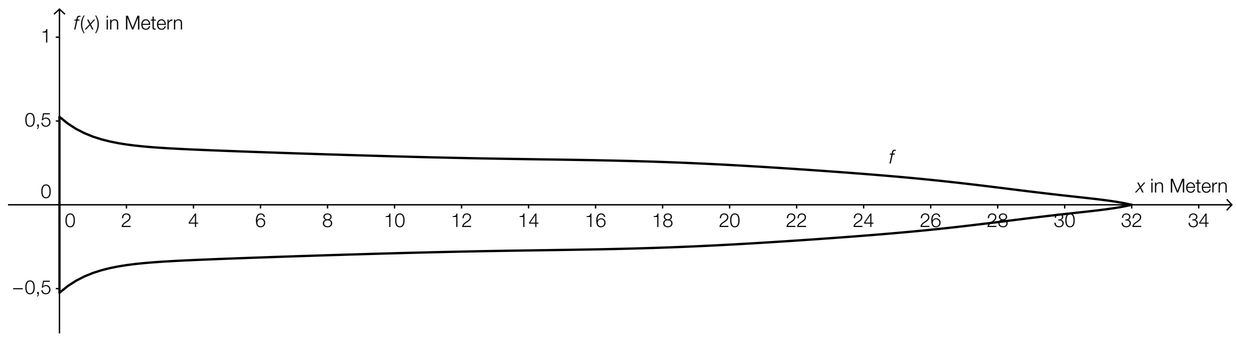
Ein 30 m hoher Baum hat einen Brusthöhendurchmesser von 50 cm. Für diesen Baum soll das Volumen mit der erweiterten Formel von Denzin ermittelt werden. Das tatsächliche Volumen dieses Baums beträgt 3,05 m^3.

– Ermitteln Sie den Betrag des relativen Fehlers, wenn man das Volumen mit der erweiterten Formel von Denzin berechnet. *[2 Punkte]*

c) Zur Berechnung seines Volumens kann ein Baumstamm näherungsweise als Kegel angesehen werden. Man geht in diesem Modell davon aus, dass das Verhältnis von Höhe zu Durchmesser stets gleich bleibt. Das Modell für einen bestimmten Baumstamm ist ein Drehkegel mit einem Durchmesser von 22 cm und einer Höhe von 18 m. In einem bestimmten Jahr vergrößert sich der Durchmesser um 2 mm.

– Berechnen Sie mithilfe dieses Modells das Höhenwachstum des Baums in diesem Jahr. *[1 Punkt]*
– Zeigen Sie, dass eine Verdoppelung des Kegeldurchmessers zu einer Verachtfachung des Volumens führt. *[1 Punkt]*

d) Die Form eines gefällten Baumstamms kann näherungsweise durch Rotation des Graphen einer Funktion *f* um die *x*-Achse beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



– Erstellen Sie eine Formel, mit der das Volumen *V* des Baumstamms berechnet werden kann.

$V =$ ______________________________ *[1 Punkt]*