Desinfektion mit UV-Licht

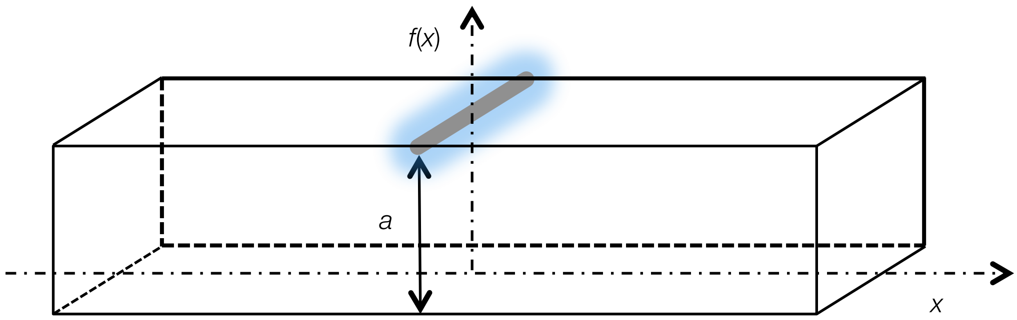
Aufgabennummer: B_098

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine zum Verkauf von Lebensmitteln verwendete Vitrine ist 2 Meter (m) lang. Sie wird zur Desinfektion einmal am Tag nach Verkaufsschluss mit einer eingebauten UV-Lampe bestrahlt.
Die Funktion *f* gibt an, wie sich die Beleuchtungsstärke auf einer geraden Fläche verteilt, wenn sich die Lampe im Abstand *a* von der Fläche befindet.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2}$$

Die Lampe befindet sich in der Mitte der Vitrine genau 0,70 m über der Präsentationsfläche.
Die Grafik zeigt die Vitrine inklusive gedachtem Koordinatensystem für die Verteilungsfunktion.



a … Normalabstand der Lampe über der Präsentationsfläche in Metern (m)
x … Abstand vom Fußpunkt des Lots der Lampe auf die Präsentationsfläche in Metern (m)

a) – Zeichnen Sie die Funktion *f* im Bereich [–1; 1].
– Zeigen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass sich das Maximum der Strahlungsintensität direkt unter der Lampe befindet.

b) Die Funktion *f* entspricht der Dichtefunktion der Beleuchtungsstärke. Die Fläche unter dem Graphen der Funktion *f* in einem bestimmten Intervall ist daher proportional zu der in diesem Bereich auftreffenden Strahlungsmenge.

– Berechnen Sie den prozentuellen Anteil der Strahlung, die auf die Präsentationsfläche trifft.

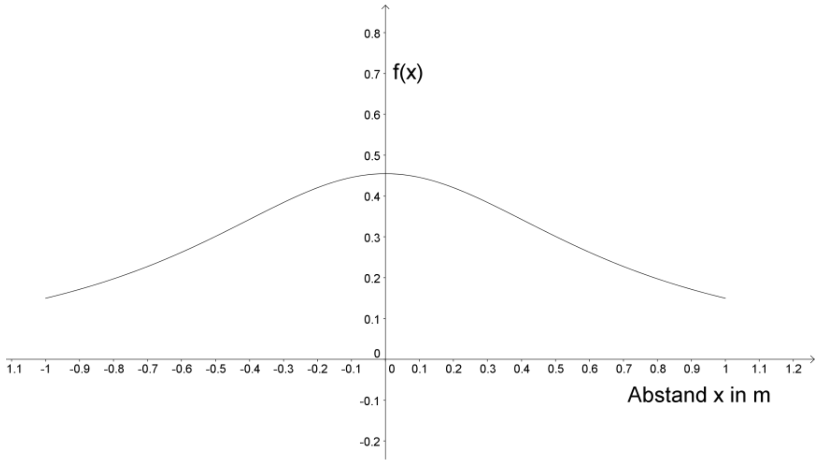
c) Nach einer Versuchsreihe stellt sich heraus, dass für die Abtötung der Keime am Rand der Vitrine, also für $x = 1$ m, die Beleuchtungsstärke nicht ausreicht.

– Ermitteln Sie die Funktion für *f* in Abhängigkeit von *a*, die die Beleuchtungsstärke für $x = 1$ bei veränderlicher Lampenhöhe *a* beschreibt.
– Stellen Sie die Funktion grafisch dar und schätzen Sie ab, bei welcher Höhe *a* die beste keimtötende Wirkung an der Stelle $x = 1$ vorhanden wäre.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Grafik zeigt die Funktion f im Bereich [–1; 1].



Ermittlung des Maximums $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = -\frac{a}{\pi} \cdot \frac{2x}{(a^2 + x^2)^2}$$

$$0 = -\frac{a}{\pi} \cdot \frac{2x}{(a^2 + x^2)^2}$$

$$x = 0$$

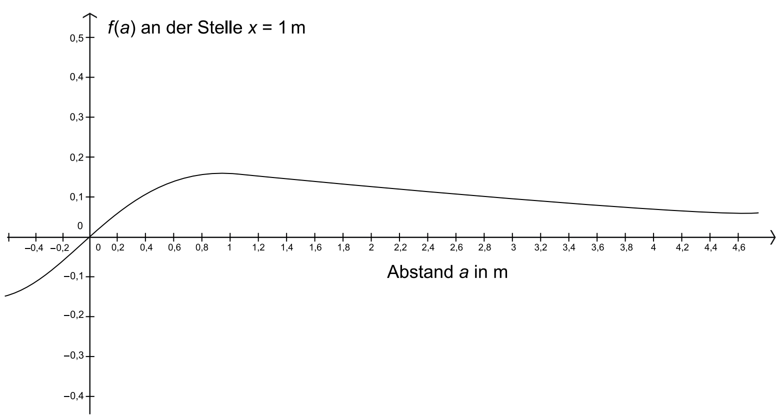
b) Der Flächeninhalt unter der Kurve wird mithilfe des bestimmten Integrals ermittelt. Die Gesamtfläche unter der Dichtefunktion beträgt 1.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2} \mathrm{d}x = 0{,}611$$

61,1 % der Strahlung treffen auf die Präsentationsfläche auf.

c) Für $x = 1$ m und a als Variable erhält man die Funktion $f(a)$.

$$f(a) = \frac{a}{\pi \cdot (a^2 + 1)}$$



Eine grafische Darstellung der Funktion im Bereich [0; 1] zeigt, dass die Strahlungsintensität an der Stelle $a = 1$ m ein Maximum hat.
Die maximale Strahlungsintensität am Rand der Vitrine erhält man für eine Lampenhöhe von 1 m.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 5 Stochastik
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 3

Thema: Physik

Quellen: –