Der Tee ist zu heiß!

Aufgabennummer: B-C1_09

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

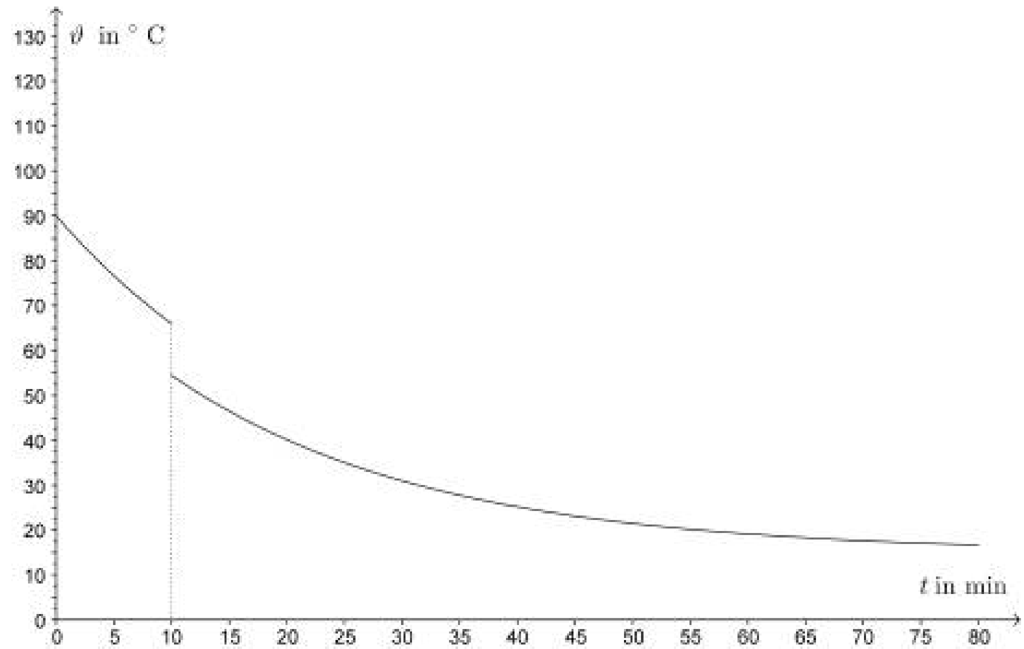
Susanne und Samuel trinken zum Frühstück aus zwei unterschiedlich geformten Tassen Tee. Die Temperatur des Tees in beiden Tassen beträgt um 6:00 Uhr 90 Grad Celsius (°C). Die Umgebungstemperatur beträgt 24 °C.

a) Die Abkühlung des Tees in der Tasse von Susanne kann näherungsweise durch eine exponentielle Abklingfunktion beschrieben werden. Die Temperatur des Tees nimmt nach 27 Minuten (min) um 50 % ab.

– Skizzieren Sie den Temperaturverlauf während der ersten 30 min in ein Koordinatensystem.
– Lesen Sie aus der Grafik ab, welche Temperatur der Tee von Susanne um 6:15 Uhr erreicht hat.

b) Susanne ist der Ansicht: „Der Tee ist zu heiß!" Ihre Mutter gießt um 6:10 Uhr kalten Apfelsaft in den Tee, aufgrund dessen die Temperatur um 11 °C fällt.

– Erklären Sie, warum die folgende Grafik diesen Temperaturverlauf nicht korrekt beschreibt.



c) Der Tee von Samuel kühlt in seiner Tasse in 15 min von 90 °C auf 50,5 °C ab. Dieser Abkühlungsvorgang lässt sich durch folgende Funktion beschreiben:

$$\vartheta(t) = (\vartheta_A - \vartheta_U) \cdot e^{-k \cdot t} + \vartheta_U$$

t … Zeit nach Beobachtungsbeginn in min
ϑ_A … Anfangstemperatur in °C
ϑ_U … Umgebungstemperatur in °C
k … Zeitkonstante des Abkühlungskörpers (Tasse) in min^{-1}
$\vartheta(t)$ … Temperatur des Tees in °C t min nach Beobachtungsbeginn

– Berechnen Sie k.
– Erstellen Sie diejenige Funktionsgleichung, die die Temperatur des Tees in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
– Erklären Sie die Bedeutung des Differenzialquotienten $\frac{d\vartheta(t)}{dt}$ in Bezug auf die Abkühlung.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Infrarotheizung

Aufgabennummer: B-C1_30

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

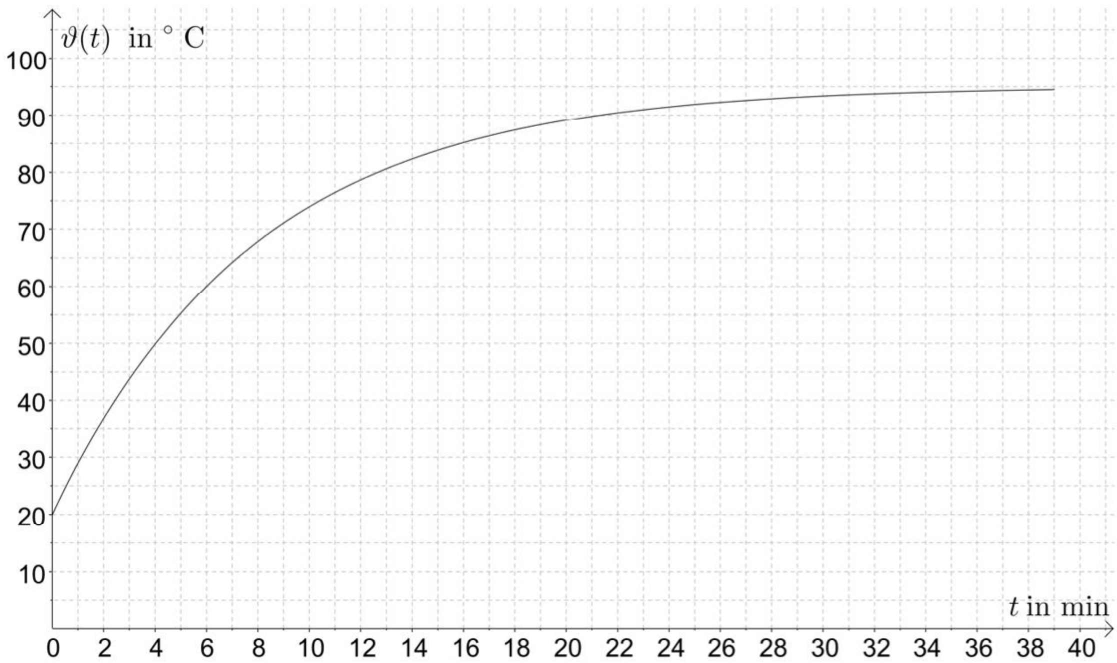
Heutzutage werden immer häufiger Infrarotheizungen in Wohnräumen eingesetzt.

a) Der Erwärmungsvorgang des Heizleiters der Infrarotheizung lässt sich durch die Funktion ϑ näherungsweise beschreiben:

$$\vartheta(t) = c \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t}) + b$$

t … Zeit nach Beobachtungsbeginn in Minuten (min)
λ … Zeitkonstante der Infrarotheizung in min^{-1}
$\vartheta(t)$ … Temperatur des Heizleiters der Infrarotheizung zur Zeit t in °C

– Ermitteln Sie mithilfe der nachstehenden Grafik die Parameter b, c und λ der Funktion ϑ.



– Begründen Sie anhand der Funktion ϑ, warum die Temperatur nie über $(c + b)$ °C ansteigen kann.

b) Der Erwärmungsvorgang der Vorderwand der Infrarotheizung lässt sich durch folgende Funktion ϑ_1 beschreiben:

$\vartheta_1(t) = 20 \cdot (1 - e^{-0{,}07 \cdot t}) + 20$

t … Zeit nach Beobachtungsbeginn in min
λ … Zeitkonstante der Infrarotheizung in min^{-1}
$\vartheta(t)$ … Temperatur des Heizleiters der Infrarotheizung zur Zeit t in °C

– Argumentieren Sie, warum die momentane Erwärmungsgeschwindigkeit theoretisch nie null wird.
– Berechnen Sie den Zeitpunkt nach Beobachtungsbeginn, zu dem die momentane Erwärmungsgeschwindigkeit 0,35 $\frac{°C}{\text{min}}$ beträgt.

c) Der Zusammenhang zwischen Temperatur und mittlerer Geschwindigkeit der Luftteilchen wird durch folgende Formel beschrieben:

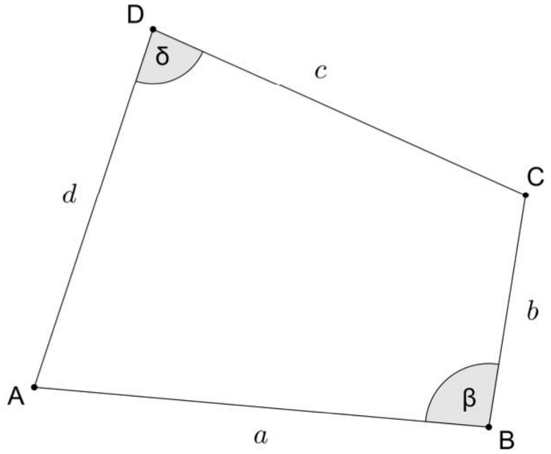
$T = \frac{m \cdot \bar{v}^2}{3 \cdot k_B}$

m … Masse der Luftteilchen in Kilogramm (kg)
$\bar{v}$ … mittlere Geschwindigkeit der Luftteilchen in Metern pro Sekunde (m/s)
k_B … Boltzmann-Konstante in Joule/Kelvin (J/K)
T … Temperatur in Kelvin (K)

– Erläutern Sie anhand der Formel für T, welche Änderung der Teilchengeschwindigkeit einer Verdoppelung der Temperatur entspricht.

d) Die Fläche an der Vorderseite der Infrarotheizung hat die Form eines Vierecks mit den Seitenlängen a = 71,4 cm, b = 36,9 m und d = 59,1 cm. Die Winkel sind β = 94° und δ = 84,3°.

– Berechnen Sie mithilfe der nebenstehenden Skizze den Flächeninhalt des Vierecks.
– Berechnen Sie mithilfe der Skizze den Umfang des Vierecks.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Fotografie

Aufgabennummer: B-C2_07

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

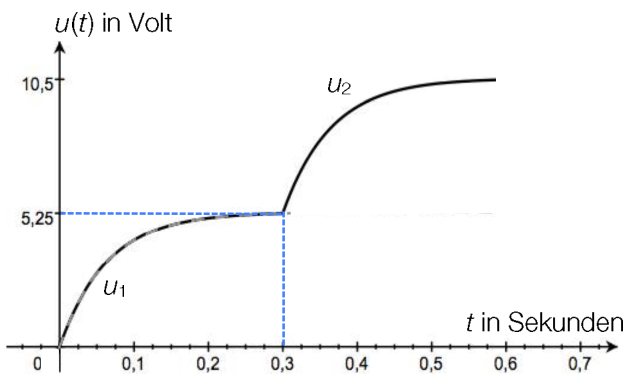
1924 wurden erstmals Kleinbildkameras in Serie gefertigt. Die Automatisierung der bis dahin überwiegend mechanisch funktionierenden Fotoapparate startete in den 1960er Jahren.

a) Die Batterien in einem Blitzgerät liefern eine Spannung von 6 Volt. Die zur Auslösung des Blitzes erforderliche höhere Spannung wird durch das sukzessive Aufladen von Kondensatoren erzielt.

Für die Spannung $u_1(t)$ gilt:

$u_1(t) = 5{,}3\text{ V} \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t})$ mit $0\text{ s} \leq t \leq 0{,}3\text{ s}$

t ... Zeit nach Beginn des Aufladevorgangs in Sekunden (s)
$u_1(t)$ ... Spannung in Volt (V), abhängig von der Aufladezeit t
λ ... Konstante in s^{-1}



Nach 0,3 Sekunden ist der Kondensator auf eine Spannung von 5,25 V aufgeladen.

– Zeigen Sie, dass gilt: $\lambda = 15{,}545\text{ s}^{-1}$.

Der zweite Ladevorgang startet nach 0,3 Sekunden bei einer Anfangsladung von 5,25 V. Der Graph von u_2 wurde durch eine entsprechende Verschiebung von u_1 ermittelt.

– Stellen Sie die Funktionsgleichung für u_2 in Abhängigkeit von t auf.

b) Unter der Schärfentiefe T versteht man die Entfernung von g_{nah} bis g_{fern}, wobei Motive zwischen g_{nah} und g_{fern} scharf abgebildet werden. Wird die Kamera auf ein Motiv in der Entfernung g scharf eingestellt, so gelten für Kleinbildkameras folgende Formeln:

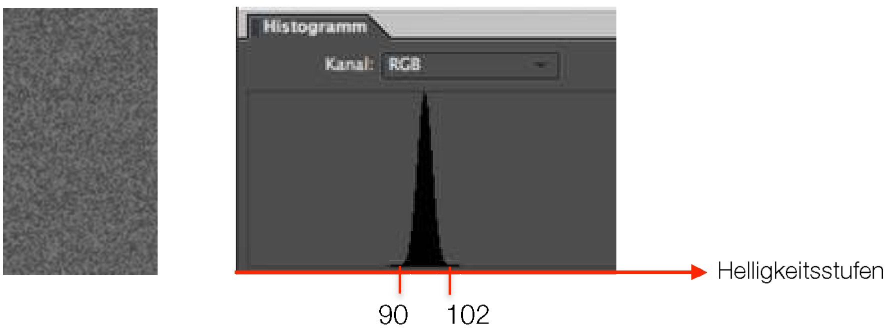
$$g_{\text{nah}} = \frac{f^2 \cdot g}{f^2 + k \cdot 0{,}03 \cdot (g - f)} \quad \text{und} \quad g_{\text{fern}} = \frac{f^2 \cdot g}{f^2 - k \cdot 0{,}03 \cdot (g - f)}$$

g_{nah} ... in mm
g_{fern} ... in mm
f ... Brennweite des Objektivs in mm, $f > 0$
g ... Entfernung des fokussierten Motivs in mm, $g > f$
k ... Blendenzahl, $k > 0$

Die Formel für g_{fern} gilt nur für $g_{\text{fern}} > 0$, andernfalls gilt: $g_{\text{fern}} = \infty$.

– Ermitteln Sie die Bedingung, die g erfüllen muss, damit $g_{\text{fern}} > 0$.
– Begründen Sie anhand der angegebenen Formeln, warum die Schärfentiefe $T = g_{\text{fern}} - g_{\text{nah}}$ größer wird, wenn die Blendenzahl k größer wird.
– Stellen Sie den Verlauf von g_{nah} für $f = 80$ mm und $k = 5{,}6$ abhängig von g grafisch dar.
– Schätzen Sie den maximalen Wert von g_{nah} mithilfe der Grafik oder der gegebenen Formel ab.

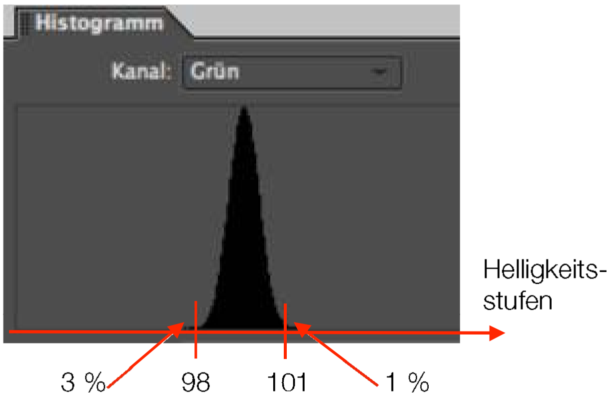
c) Die Helligkeitsverteilung eines Bildes kann in einem Histogramm dargestellt werden. Ein einfärbig graues Bild wird theoretisch durch eine einzige Spektrallinie dargestellt. Durch die elektronische Verstärkung der Kamera kommt es jedoch zum sogenannten Rauschen und die Helligkeitswerte sind annähernd normalverteilt.



– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Helligkeitswerte im Intervall [90; 102] liegen, wenn die Normalverteilung folgende Parameter hat: $\mu = 96$, $\sigma = 3$.

d) Da das menschliche Auge grün-sensibel ist, haben Sensoren von Digitalkameras mehr grün-sensible Rezeptoren und der Rauscheffekt ist bei der Farbe grün geringer.

– Interpretieren Sie die nebenstehende Grafik: Beschreiben Sie, was die Werte „3 %“ und „1 %“ bedeuten.
(Die Beschreibung kann entweder über mathematische Ausdrücke oder in Worten erfolgen.)



Anhand der in der Grafik dargestellten Werte kann bei bekanntem Sigma der Erwartungswert μ berechnet werden.

– Erstellen Sie die dazu benötigte Gleichung mit $\sigma = 0{,}72$.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Wasserstand in einem Hafenbecken

Aufgabennummer: B-C4_02

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Höhe H des Wasserstandes in einem Hafenbecken an der Ostsee lässt sich aufgrund der Gezeiten annähernd durch folgende Funktion $H(t)$ beschreiben:

$$H(t) = 4 + 1{,}5 \cdot \cos(0{,}507 \cdot t)$$

$H(t)$ … Höhe des Wasserstandes in Metern (m) zum Zeitpunkt t
t … Zeit in Stunden (h) nach Mitternacht am 12. März, $0\text{ h} \leq t \leq 24\text{ h}$

a) – Berechnen Sie die Wassertiefe im Hafenbecken am Morgen des 12. März um 8:15 Uhr.

b) – Zeichnen Sie den Graphen der Funktion H.
– Ermitteln Sie aus der Grafik, zu welchen Zeitpunkten am 12. März der Wasserstand am höchsten und wann er am niedrigsten ist.
– Geben Sie jeweils die Höhe des Wasserstandes zu diesen Zeitpunkten an.

c) Die Funktion für die Höhe des Wasserstandes in Abhängigkeit von der Zeit t lautet allgemein:

$$H(t) = d + a \cdot \cos(b \cdot t)$$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der einzelnen Parameter im angegebenen Zusammenhang.

d) An einem bestimmten Tag beträgt der Wasserstand im Hafenbecken um 3:06 Uhr 9,5 m und jener um 9:18 Uhr 2,5 m.
– Berechnen Sie die Größe der Parameter a und b, wenn der Wasserstand durch folgende Funktion beschrieben wird:

$$H_1(t) = a + b \cdot \sin(0{,}507 \cdot t)$$

$H_1(t)$ … Höhe des Wasserstandes in Metern (m) zum Zeitpunkt t
t … Zeit in Stunden (h) nach Mitternacht, $0\text{ h} \leq t \leq 24\text{ h}$

– Ermitteln Sie, ob ein Schiff mit einem Tiefgang (Distanz von der Wasserlinie bis zum tiefsten Punkt eines Schiffs) von 5,5 m um 18:00 Uhr noch im Hafen anlegen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

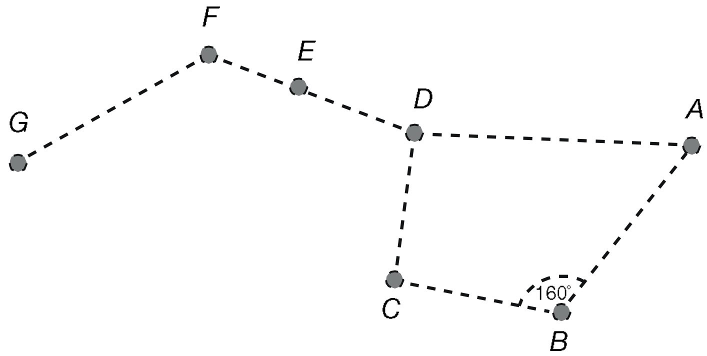
Navigation mit Sternbildern

Aufgabennummer: B-C4_04

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

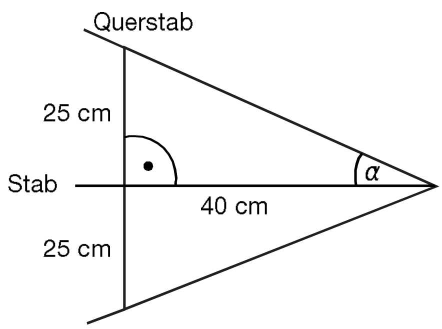
In der Geschichte der Seefahrt wurden schon sehr früh Sterne und Sternbilder als Orientierungspunkte verwendet.

a) Ein auf der nördlichen Hemisphäre gut zu sehendes Sternbild ist der Große Wagen. In einer historischen Sternenkarte sind die Hauptsterne *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* und *G* eingezeichnet. Die Sterne liegen annähernd in einer Ebene.



– Dokumentieren Sie einen Lösungsweg, um den Flächeninhalt des von den 4 Sternen *A*, *B*, *C* und *D* in der Sternenkarte aufgespannten Vierecks zu berechnen.

b) Lange bevor es die heutigen Navigationssysteme gab, wurde der Jakobsstab zur Höhen- und Entfernungsmessung eingesetzt. Sehr oft wurde der Höhenwinkel der Sonne oder eines Fixsterns über dem Meeresspiegel ermittelt. Der Jakobsstab wurde in Richtung des Gestirns und des Meeresspiegels ausgerichtet und anschließend wurde der Querstab so verschoben, dass sein oberes Ende mit dem Stern und sein unteres mit dem Meeresspiegel übereinstimmt. Auf einer Skala wurde dann der Winkel abgelesen.



– Ermitteln Sie den Höhenwinkel 2α eines Sterns über dem Horizont mithilfe der obigen Skizze. Runden Sie auf 2 Nachkommastellen.

c) Für Linsenfernrohre gilt folgende Linsengleichung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$$

f … Brennweite in Zentimetern
b … Bildweite in Zentimetern
g … Gegenstandsweite in Zentimetern

– Ermitteln Sie eine Formel für die Bildweite b in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite g und der Brennweite f.
– Erklären Sie, welche Bildweite sich in den folgenden Fällen ergibt:

i) $g \rightarrow$ „∞" Die Gegenstandsweite ist unendlich groß.
ii) $g = f$ Die Gegenstandsweite ist gleich der Brennweite.

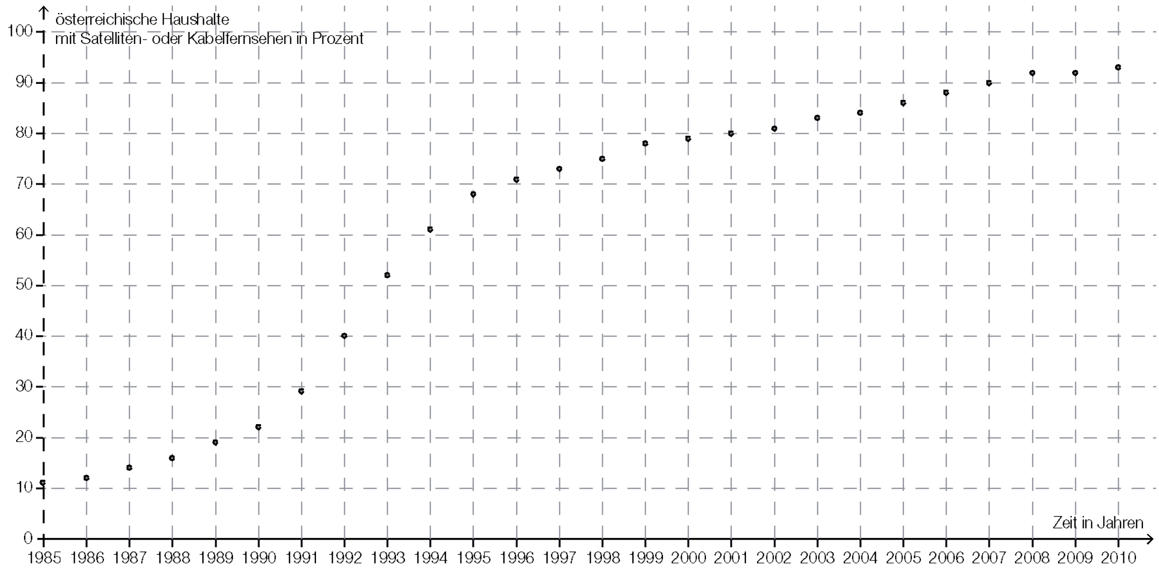
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Medien und Technologie

Aufgabennummer: B-C7_11

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die nachstehende Grafik stellt die Entwicklung der Nutzung von Satelliten- oder Kabelfernsehen österreichischer Haushalte in den Jahren 1985 bis 2010 dar.



– Beurteilen Sie anhand der Grafik, welche Funktion diese Entwicklung näherungsweise beschreiben kann.
– Begründen Sie Ihre Wahl mithilfe der Grafik im Sachzusammenhang.

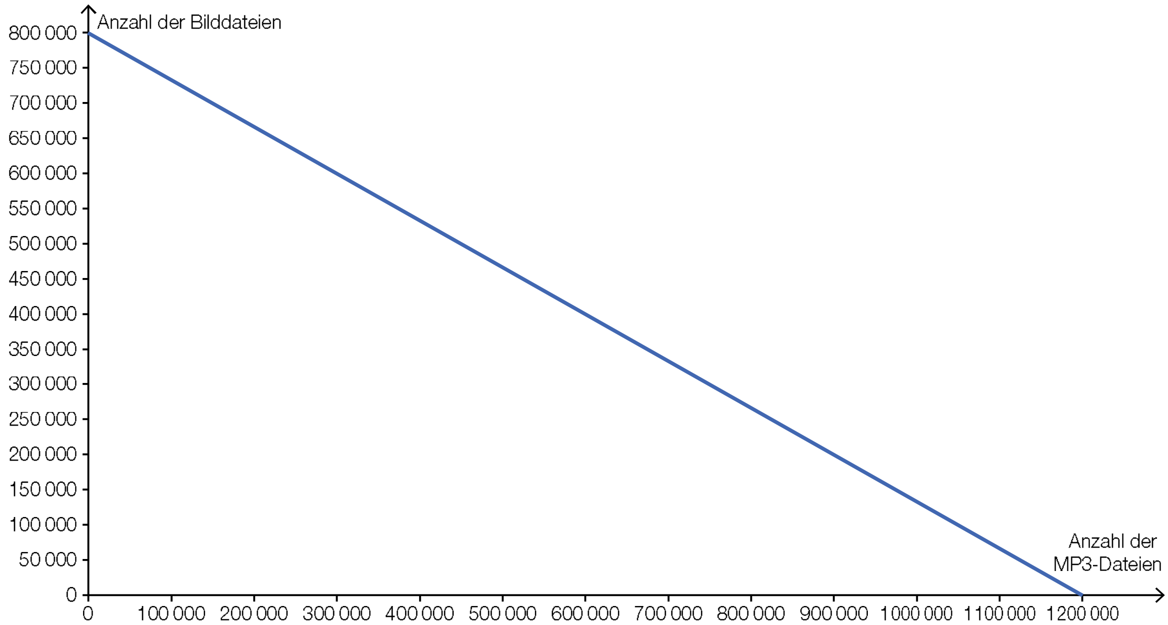
b) Es werden Musikdateien im MP3-Format mit einer durchschnittlichen Größe von 3,5 Megabyte (MB) und Bilddateien, die auf eine durchschnittliche Größe von 600 Kilobyte (kB) komprimiert sind, auf einer Festplatte von 2 Terabyte (TB) gespeichert.

– Modellieren Sie eine Gleichung, mit der sich berechnen lässt, wie viele MP3-Dateien und Bilddateien auf der Festplatte Platz finden.

Zu jeder MP3-Datei wird genau eine Bilddatei zugeordnet sein.

– Berechnen Sie, wie viele Bilddateien und MP3-Dateien auf der Festplatte Platz finden.

c) In der nachstehenden Grafik ist dargestellt, wie viele MP3-Dateien und wie viele Bilddateien zugleich auf einer Festplatte gespeichert sein können.



– Interpretieren Sie die Schnittpunkte mit den Achsen.
– Modellieren Sie eine Funktion, die den in der Grafik dargestellten Zusammenhang beschreibt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.