Informelle Kompetenzmessung
zur standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reife- und Diplomprüfung

BHS

Jänner 2015

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 8)

Korrekturheft

BMBF Bundesministerium für Bildung und Frauen
Bundesinstitut bifie

Aufgabe 1

Bevölkerungswachstum und -abnahme

Möglicher Lösungsweg

a) Das negative Vorzeichen der Hochzahl hat zur Folge, dass das Modell eine Abnahme der Einwohnerzahl beschreibt.

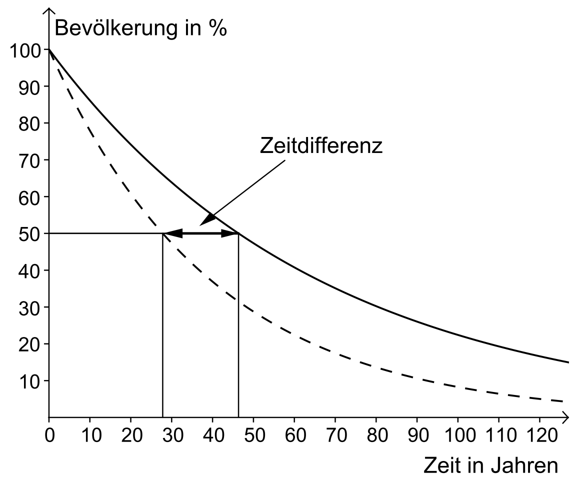
b) $A(t) = 8{,}402 \cdot 1{,}003^t$

t ... Anzahl der vergangenen Jahre seit dem 1. Jänner 2011
$A(t)$ ... Einwohnerzahl nach t Jahren in Millionen

$8{,}402 \cdot 1{,}003^t = 10$
$t \approx 58{,}13$

Für das Jahr 2069 prognostiziert das Modell erstmals eine Bevölkerungszahl von mehr als 10 Millionen.

c)



d) $\ln(N) = \ln(8) + t \cdot \ln(1{,}02)$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Interpretation
b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × B: für die richtige Berechnung des Kalenderjahrs
c) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen der Zeitdifferenz
d) 1 × B: für das Richtigstellen der logarithmierten Gleichung (2)

Aufgabe 2

Die Streif

Möglicher Lösungsweg

a) Mit diesem Quotienten wird die mittlere Geschwindigkeit im Abschnitt von *Gschöss* bis *Alte Schneise* berechnet.

b) Zwischen der Gesamtstrecke $\Delta s = 3312$ m, dem dabei überwundenen Höhenunterschied $\Delta h = 860$ m und dem Neigungswinkel α besteht folgender Zusammenhang:

$\sin(\alpha) = \frac{860}{3312}$

Daraus wird der Neigungswinkel $\alpha \approx 15{,}05°$ berechnet.

c) $v'(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$

$-0{,}09 \cdot t + 6{,}594 = 0$

$t \approx 73{,}27$

Nach 73,27 Sekunden ist die Geschwindigkeit maximal.

Formel für den zurückgelegten Weg: $s = \int_{60}^{90} v(t)\,\mathrm{d}t$

d) Die Weg-Zeit-Funktion muss nach der Zeit differenziert werden, um die Funktion der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit zu erhalten. Durch Einsetzen eines bestimmten Zeitpunktes t erhält man die Momentangeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Beschreibung
b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Neigungswinkels
c) 1 × B: für das richtige Bestimmen des Zeitpunktes mit maximaler Geschwindigkeit
1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel
d) 1 × C: für die richtige Beschreibung zur Ermittlung der Momentangeschwindigkeit

Aufgabe 3

Planeten

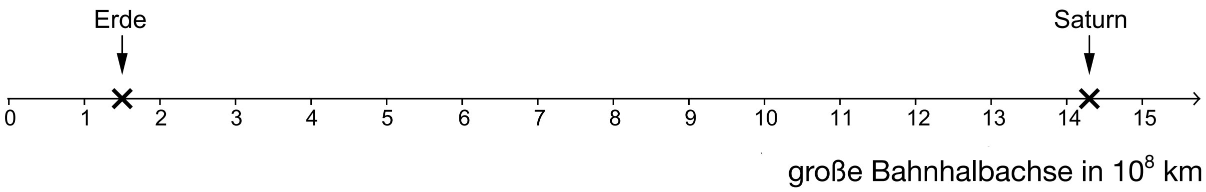
Möglicher Lösungsweg

a) Das Verhältnis der mittleren Äquatorradien von Jupiter und Mars (71 490 : 3 400) entspricht etwa dem Verhältnis der Kugelradien der Modelle (42 : 2).

b) $149\,597\,890^3 : 4\,498\,252\,900^3 = 1 : u_2^2$
$u_2 \approx 165$

Die Umlaufzeit des Planeten Neptun beträgt ca. 165 Jahre.

c) Erde: 149 597 890 km ≙ 1,49597890 cm ≈ 1,5 cm
Saturn: 1 426 725 400 km ≙ 14,26725400 cm ≈ 14,3 cm



Hinweis: Die Skalierung des Zahlenstrahls kann im vorliegenden Korrekturheft durch eine unpassende Druckeinstellung gering abweichen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Erklärung
b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Umlaufzeit
c) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen beider Planeten auf dem Zahlenstrahl im korrekten Maßstab inklusive richtiger Beschriftung

Aufgabe 4

Diabetes

Möglicher Lösungsweg

a) $8{,}5 \cdot 0{,}046 = 0{,}391$

In Österreich gab es im Jahr 2014 in etwa 391 000 Personen mit Diabetes.

b) Ansatz zur Berechnung mithilfe der Binomialverteilung: $n = 30$, $p = 0{,}046$
$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 0{,}40433... \approx 40{,}43\ \%$

c) $\frac{70}{120}$: Wahrscheinlichkeit, eine Person, die das Medikament bekommen hat, aus der Gesamtheit von 120 Personen zu wählen

$\frac{50}{119}$: Wahrscheinlichkeit, eine Person, die das Placebo bekommen hat, aus der restlichen Gesamtheit von 119 Personen zu wählen

Der Faktor 2 rührt daher, dass es egal ist, ob die erste oder die zweite ausgewählte Person das Placebo bekommen hat.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung
b) 1 × A: für das Erkennen des richtigen Wahrscheinlichkeitsmodells (Binomialverteilung)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
c) 1 × D: für die richtige Erklärung der Bedeutung der beiden Brüche
1 × D: für die richtige Erklärung des Faktors 2

Aufgabe 5

Schwimmbad

Möglicher Lösungsweg

a) Ansatz zur Berechnung der Länge $\overline{AC}$:

$\sin(20°) = \frac{\overline{AC}}{3}$

$\overline{AC} \approx 1{,}03$ m

Berechnung der Länge der Leiter mithilfe des Lehrsatzes von Pythagoras:

$\overline{AE} = \sqrt{(0{,}5^2 + \overline{AC}^{\,2})} = 1{,}141... \approx 1{,}14$

Die Leiter ist 1,14 m lang.

b) Volumen des Prismas: $V = \frac{(2{,}3 + 1{,}1) \cdot 50}{2} \cdot 25 = 2\,125$

Das vollständig befüllte Schwimmbecken fasst 2 125 m³.

$2\,125$ m³ $= 2\,125\,000$ L

Masse des Desinfektionsmittels:

$0{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot 2\,125\,000 = 0{,}6375$

Es müssen 0,6375 kg Desinfektionsmittel zugefügt werden.

c) $f(t) = 2\,000\,000 - 5\,000 \cdot t$

t ... Zeit in Minuten (min)

$f(t)$ ... vorhandene Wassermenge zum Zeitpunkt t in Litern (L)

Berechnung der Nullstelle dieser Funktion:

$2\,000\,000 - 5\,000 \cdot t = 0$

$t = 400$

Es dauert 400 Minuten, bis die gesamte Wassermenge abgepumpt ist.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für den richtigen trigonometrischen Ansatz
1 × B: für die richtige Berechnung der Länge der Leiter

b) 1 × A: für den richtigen Ansatz (Modell für die Berechnung des Volumens)
1 × B: für die richtige Berechnung der Masse des Desinfektionsmittels

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × B: für die richtige Berechnung der Zeitdauer

Aufgabe 6 (Teil B)

Kreditrückzahlung

Möglicher Lösungsweg

a) Die Höhe der ursprünglichen Schuld kann durch direktes Rückrechnen im Tilgungsplan erfolgen.

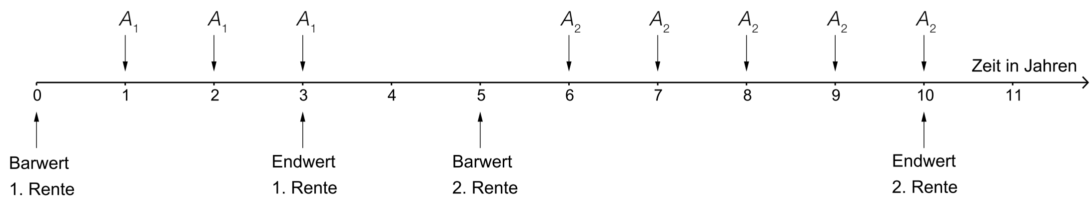
Restschuld des 2. Jahres = € 109.556,81 + € 13.881,45 = € 123.438,26

Zinssatz: $i = \frac{3703,15}{123438,26} = 0,030... \approx 3\ \%$

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 150.000,00
1	€ 4.500,00	€ 13.084,60	€ 17.584,60	€ 136.915,40
2	€ 4.107,46	€ 13.477,14	€ 17.584,60	€ 123.438,26
3	€ 3.703,15	€ 13.881,45	€ 17.584,60	€ 109.556,81

Die ursprüngliche Schuld kann auch direkt mithilfe der Rentenrechnung bestimmt werden.

b) Herr Maier bezahlt 3 Jahre lang nachschüssig Annuitäten in Höhe von A_1.
Im 4. und 5. Jahr leistet er keine Zahlungen, dafür bezahlt er ab dem 6. Jahr nachschüssig 5 Annuitäten in Höhe von A_2.



c) Da im 4. und 5. Jahr keine Rückzahlung erfolgt, erhöht sich die Restschuld des 3. Jahres um die Zinsen des 4. und 5. Jahres.

d) Die Rückzahlung entspricht in diesem Fall einer nachschüssigen Rente mit Annuitäten in Höhe von € 17.584,60. Der Barwert der Rente beträgt € 116.228,82, ihr Endwert € 11.077,75.
Bei einem Jahreszinssatz von 3,5 % ergibt sich die Laufzeit 7 Jahre.
Die angegebene Zeile des Tilgungsplans ist daher jene für das Jahr 12.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
12	€ 969,26	€ 16.615,34	€ 17.584,60	€ 11.077,75
13	€ 387,72	€ 11.077,75	€ 11.465,47	€ 0

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Zinssatzes
   1 × B2: für die richtige Berechnung der Anfangsschuld
b) 1 × A: für das richtige Übersetzen des dargestellten Zahlungsflusses
   1 × C1: für das richtige Markieren des Barwerts und des Endwerts der 1. Rente
   1 × C2: für das richtige Markieren des Barwerts und des Endwerts der 2. Rente
c) 1 × D: für eine richtige Begründung
d) 1 × B1: für die richtige Bestimmung des Jahres
   1 × B2: für das richtige Ermitteln der letzten Zeile des Tilgungsplans

Aufgabe 7 (Teil B)

Straßenverkehr in Tirol

Möglicher Lösungsweg

a) 129,3 bedeutet, dass der Verkehr im Jahr 1990 gegenüber dem Jahr 1985 um 29,3 % zugenommen hat.

Der gegebene Rechenausdruck gibt an, um wie viel Prozent das KFZ-Verkehrsaufkommen durchschnittlich jeweils von einem zum nächsten Jahr im Zeitraum 1990 bis 2000 zugenommen hat.

quadratische Regression: $r(t) = -0{,}09 \cdot t^2 + 6{,}11 \cdot t + 99{,}93$
2013 entspricht $t = 28$: $r(28) = 197{,}50... \approx 197{,}5$.

Die Regressionsfunktion prognostiziert ein KFZ-Verkehrsaufkommen von rund 197,5 % bezogen auf das KFZ-Verkehrsaufkommen im Jahr 1985.

b) 617 entspricht der jährlichen Zunahme der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten auf der Brennerautobahn.

c) $a = 1\,700\,000$

$b = \sqrt[8]{\frac{2\,006\,000}{1\,700\,000}} = 1{,}0209... \approx 1{,}021$

$y(t) = 1\,700\,000 \cdot 1{,}021^t$

Bei einem linearen Modell ist die absolute Änderung pro Zeiteinheit konstant. Bei einem exponentiellen Modell ändert sich die Größe in jeweils gleichen Zeitschritten immer um denselben Faktor.

Lösungsschlüssel

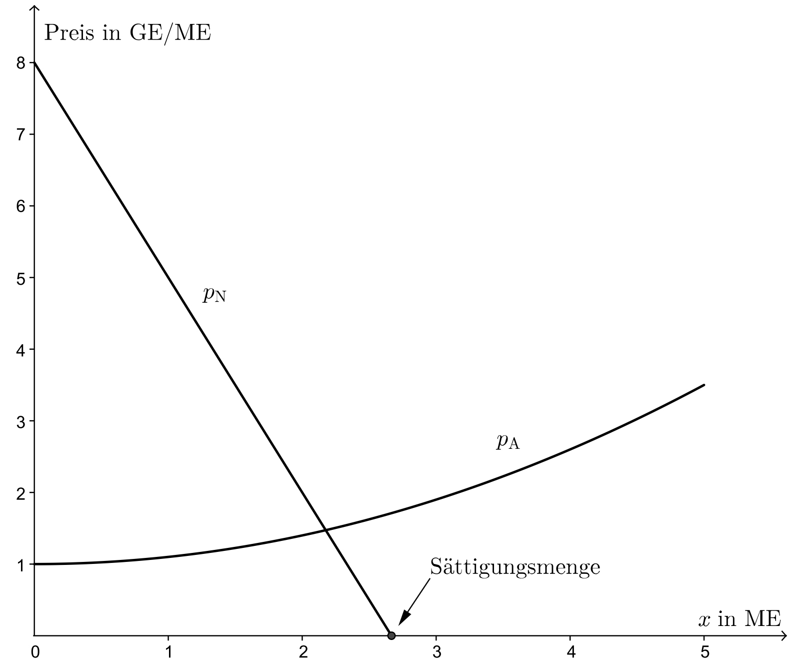
a) 1 × C1: für die richtige Interpretation der markierten Zahl
1 × C2: für die richtige Interpretation des Rechenausdrucks
1 × A: für das richtige Erstellen der Regressionsfunktion
1 × B: für das richtige Ermitteln der Prognose für das Jahr 2013
b) 1 × C: für die richtige Interpretation des Koeffizienten
c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × D: für die richtige Erklärung

Aufgabe 8 (Teil B)

Junggunternehmerin

Möglicher Lösungsweg

a)



Der y-Achsenabschnitt der Preisfunktion des Angebots liegt bei 1 GE/ME. Dies ist derjenige Preis, zu dem kein Produzent bereit ist, das Produkt anzubieten.

Marktgleichgewicht:

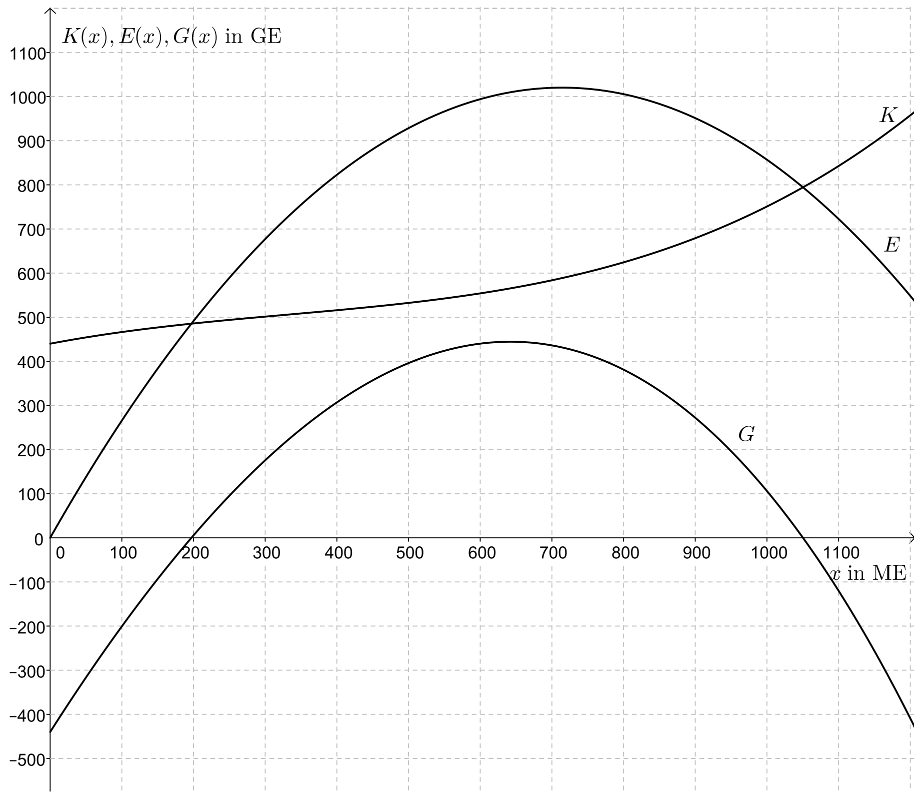
$-3 \cdot x + 8 = \frac{x^2}{10} + 1$

$x = 2{,}175...$

$p_\mathrm{N}(2{,}175...) = 1{,}473... \approx 1{,}47$

Der Marktgleichgewichtspreis beträgt 1,47 GE/ME.

b) Der Gewinnbereich liegt ca. zwischen 200 ME und 1 050 ME.
Ableseungenauigkeiten ± 50 ME sind zu tolerieren.



c) $K(x) = \int K'(x)\mathrm{d}x = 2 \cdot x^3 - 19 \cdot x^2 + 64 \cdot x + c$
$K(2) = 72 \rightarrow 2 \cdot 2^3 - 19 \cdot 2^2 + 64 \cdot 2 + c = 72$

$c = 4$

$K(x) = 2 \cdot x^3 - 19 \cdot x^2 + 64 \cdot x + 4$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Zeichnen der beiden Funktionsgraphen
1 × C1: für das richtige Markieren der Sättigungsmenge
1 × C2: für die richtige Interpretation des y-Achsenabschnitts
1 × B2: für die richtige Bestimmung des Marktgleichgewichtspreises
b) 1 × C: für das richtige Ablesen des Gewinnbereichs mit Ableseungenauigkeiten von ± 50 ME
1 × A: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen der Gewinnfunktion (Achsenabschnitt, Nullstellen)
c) 1 × A: für den richtigen Ansatz zum Aufstellen der Funktionsgleichung der Gesamtkostenfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung der Integrationskonstanten