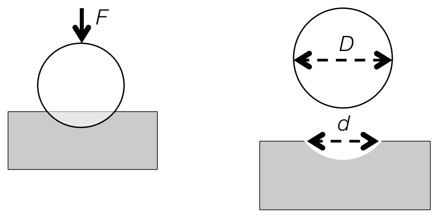
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Härte nach Brinell

Aufgabennummer: B_101

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei der Härtemessung von Metallen nach Brinell wird eine Hartmetallkugel mit dem Durchmesser *D* mit einer bestimmten Kraft in das Metall eingedrückt.



a) Der Durchmesser des Abdrucks *d* wird gemessen und die Oberfläche des Abdrucks (eine Kugelkalotte) mittels Rechnung bestimmt. Die Angabe der Härte erfolgt durch das Verhältnis der eingesetzten Kraft zur Oberfläche der Kugelkalotte:

$$f(F,\ D,\ d) = \frac{0{,}102 \cdot F}{\frac{\pi \cdot D \cdot \left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)}{2}}$$

$f(F,\ D,\ d)$ … Härte in HBW (Härte nach Brinell mit Wolframkarbidkugel)
F … Kraft in Newton (N)
D … Durchmesser der Kugel in Millimetern (mm)
d … Durchmesser des abschließenden Kreises des Abdrucks in mm

– Zeigen Sie, dass der Nenner der obigen Formel der Fläche einer Kugelkalotte mit der Formel

$A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$

R … Radius der Kugel in mm
h … Tiefe des Abdrucks oder Höhe der Kugelkalotte in mm

entspricht.

b) Nach der Messung hinterlässt die Kugel mit dem Radius *R* einen Abdruck in Form einer Kugelkalotte mit der Tiefe *h*.

– Erstellen Sie mithilfe der Integralrechnung eine Formel für das Volumen des verdrängten Metalls in Abhängigkeit von *R* und *h*.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Einsetzen mit: $D = 2R$ und $d = 2r$

$$A = \frac{\pi \cdot D \cdot (D - \sqrt{D^2 - d^2})}{2} = \frac{\pi \cdot 2R \cdot (2R - \sqrt{4R^2 - 4r^2})}{2}$$
$$= \frac{\pi \cdot \cancel{2}R \cdot (2R - 2\sqrt{R^2 - r^2})}{\cancel{2}}$$

Mit $\sqrt{R^2 - r^2} = R - h$ folgt

$$A = \pi \cdot R \cdot (2R - 2R + 2h)$$

$$A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$$

Die Gleichheit kann auch ausgehend von der Formel $A = D \cdot \pi \cdot h$ mit anschließender Berechnung von h gezeigt werden.

b) Berechnung des Volumens durch Rotation eines Kreises um die vertikale Achse zwischen den Grenzen $y_1 = R - h$ und $y_2 = R$:

$x^2 + y^2 = R^2$
$x^2 = R^2 - y^2$

$$V = \pi \cdot \int_{R-h}^{R} (R^2 - y^2)\mathrm{d}y = \pi \cdot \left(R^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{R-h}^{R}$$
$$V = \pi \cdot \left(R \cdot h^2 - \frac{h^3}{3}\right)$$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3

Thema: Chemie

Quellen: –