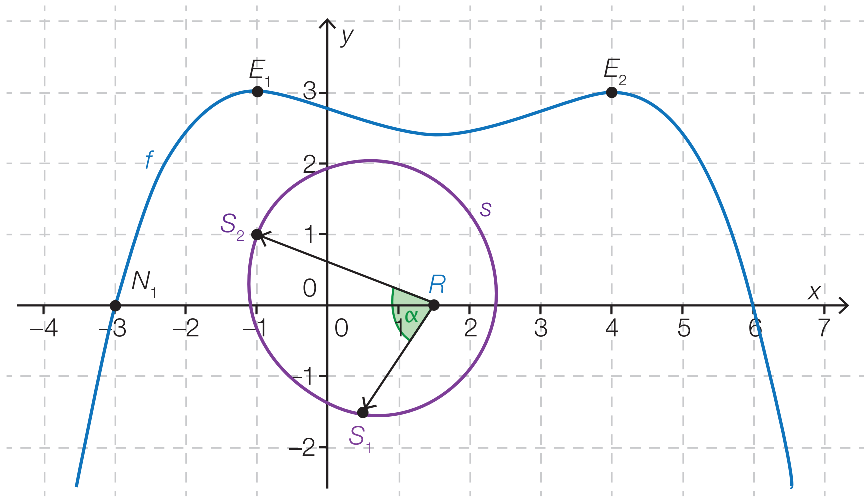
Armageddon (1)

Aufgabennummer: B_129

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Zur Programmierung eines Weltraum-Computerspiels werden einige geometrische Überlegungen benötigt.

Die nachstehende Abbildung zeigt die Flugbahn s zweier Patrouillenschiffe S_1 und S_2 um eine Raumstation R. Die Flugbahn eines feindlichen Raumschiffs wird durch den Graphen der Funktion f beschrieben. (In der Abbildung sind die Nullstelle N_1 sowie die Extrempunkte E_1 und E_2 des Funktionsgraphen von f eingezeichnet.)



a) – Erklären Sie, warum die Flugbahn s kein Graph einer Funktion ist.

Die Funktion f ist eine Polynomfunktion vierten Grades mit $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Funktion f ermittelt werden können.

b) Für die Funktion f gilt:

$$f(x) = -\frac{3}{196}x^4 + \frac{9}{98}x^3 - \frac{3}{196}x^2 - \frac{18}{49}x + \frac{135}{49}$$

Während des Spielverlaufs schießt das feindliche Raumschiff am Wendepunkt der Funktion f in der Nähe von E_2 einen Laserstrahl tangential in Richtung S_2.

– Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Tangente, die den Laserstrahl beschreibt.
– Überprüfen Sie rechnerisch, ob das Raumschiff S_2 vom Laserstrahl getroffen wird.

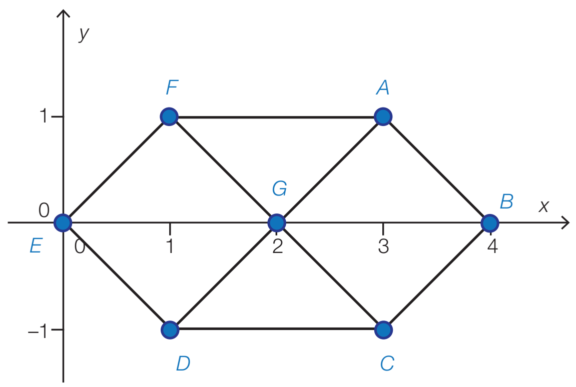
c) Zu einem bestimmten Zeitpunkt hat die Raumstation die Koordinaten $R = (1{,}5\,|\,0)$ und das erste Patrouillenschiff die Koordinaten $S_1 = (0{,}5\,|\,y > 0)$.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der fehlenden *y*-Koordinate des Patrouillenschiffs, wenn der Abstand vom Patrouillenschiff S_1 zur Raumstation *R* genau *d* Einheiten beträgt.

$y =$ ______________________________

– Ermitteln Sie den Winkel α, den die beiden Vektoren $\overrightarrow{RS_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{RS_2} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ einschließen.

d) Im letzten Level dieses Spiels erscheint ein großes Raumschiff auf dem Bildschirm. Die Umrisse dieses Raumschiffs sind gegeben durch die Punkte *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*.



Das Raumschiff soll sich auf dem Bildschirm um 45° um den Punkt *G* gegen den Uhrzeigersinn drehen.

– Stellen Sie die Transformationsmatrix für diese Drehung auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Bei der Flugbahn s handelt es sich um keinen Graphen einer Funktion, weil es x-Werte gibt, denen mehr als ein y-Wert zugeordnet wird.

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

Nullstelle: $N_1 = (-3|0)$
Extrempunkte: $E_1 = (-1|3)$ $E_2 = (4|3)$

$f(-3) = 0$: I: $81a - 27b + 9c - 3d + e = 0$
$f(-1) = 3$: II: $a - b + c - d + e = 3$
$f'(-1) = 0$: III: $-4a + 3b - 2c + d = 0$
$f(4) = 3$: IV: $256a + 64b + 16c + 4d + e = 3$
$f'(4) = 0$: V: $256a + 48b + 8c + d = 0$

b) Berechnung des Wendepunktes:
$f''(x) = -\frac{9}{49}x^2 + \frac{27}{49}x - \frac{3}{98}$
$-\frac{9}{49}x^2 + \frac{27}{49}x - \frac{3}{98} = 0$
$x_1 = 2{,}943\ldots \approx 2{,}94$
$(x_2 = 0{,}056\ldots)$
$f(2{,}943\ldots) = 2{,}734\ldots$
$W = (2{,}94|2{,}73)$

Aufstellen der Funktionsgleichung der Tangente:
$y = kx + d$
$k = f'(2{,}943\ldots) = 0{,}36820\ldots$, $d = y - kx = 1{,}65049\ldots$
$y = 0{,}3682x + 1{,}6505$

Einsetzen der Koordinaten von S_2 in die Tangentengleichung:
$1 = 0{,}3682 \cdot (-1) + 1{,}6505$
$1 = 1{,}2822$
Der Laserstrahl trifft nicht das Raumschiff S_2.

c) $\overrightarrow{RS_1} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ y \end{pmatrix}$

$(-1)^2 + y^2 = d^2$

$y = \sqrt{d^2 - 1}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-1)^2 + (-1{,}5)^2} \cdot \sqrt{(-2{,}5)^2 + 1^2}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3{,}25} \cdot \sqrt{7{,}25}}$$

$\alpha \approx 78{,}11°$

d) 1. Schiebung von G in den Koordinatenursprung: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Drehung um 45°: $\begin{pmatrix} \cos(45°) & -\sin(45°) & 0 \\ \sin(45°) & \cos(45°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Zurückschieben: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Transformationsmatrix: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(45°) & -\sin(45°) & 0 \\ \sin(45°) & \cos(45°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \cos(45°) & -\sin(45°) & 0{,}59 \\ \sin(45°) & \cos(45°) & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0{,}59 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 3
b) mittel	b) 3
c) leicht	c) 2
d) mittel	d) 3

Thema: Informatik

Quellen: –