# Usain Bolt

Aufgabennummer: B_007

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Bei den Olympischen Sommerspielen 2012 in London sprintete Usain Bolt im 100-Meter-Finallauf mit einer Zeit von 9,63 Sekunden (s) durch das Ziel.

Die bei diesem Lauf gemessenen Geschwindigkeiten in Kilometern pro Stunde (km/h) sind in folgender Tabelle festgehalten:

| Geschwindigkeit in km/h | 23,54 | 34,22 | 39,07 | 41,27 | 42,27 | 42,72 | 42,93 | 43,02 | 43,064 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zeit in s | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Die Laufgeschwindigkeit kann annähernd durch die Funktion $v$ beschrieben werden:

$$v(t) = 43{,}1 \cdot (1 - e^{b \cdot t})$$

$t$ ... Laufzeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit in km/h zum Zeitpunkt $t$

– Stellen Sie die Daten der Tabelle in einem kartesischen Koordinatensystem dar.
– Ermitteln Sie unter Zuhilfenahme eines beliebigen Messwertes der Tabelle den Parameter $b$ der Funktion $v$ (auf 2 Dezimalstellen gerundet).

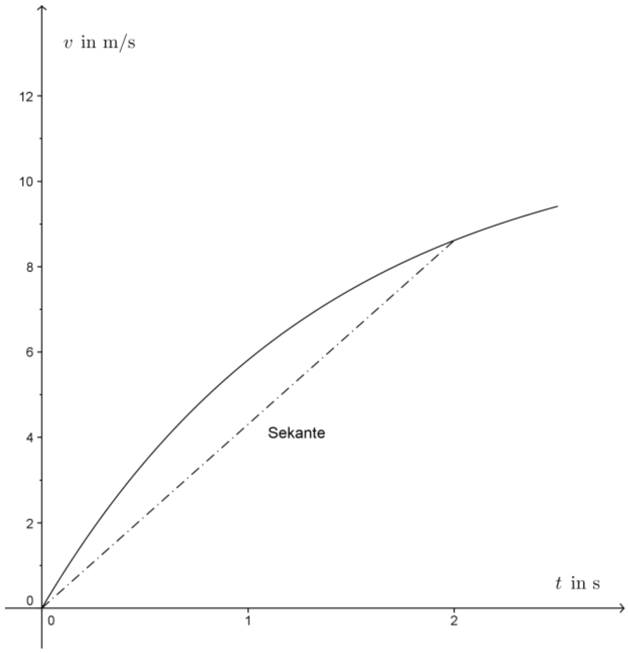
b) Die Geschwindigkeit, mit der Usain Bolt 2009 den Weltrekord über 200 m lief, lässt sich annähernd durch folgende Funktion $v$ beschreiben:

$$v(t) = \frac{101}{9} \cdot (1 - e^{-0{,}73 \cdot t})$$

$t$ ... Laufzeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit in m/s zum Zeitpunkt $t$

– Stellen Sie die Funktion des Weges $s$ in Abhängigkeit von der Zeit $t$ auf.
– Berechnen Sie, in welcher Zeit Usain Bolt die ersten 100 m zurücklegte (auf 2 Dezimalstellen gerundet).

c) Die Laufgeschwindigkeit während der ersten 2 Sekunden des Weltrekordlaufs über 200 m ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.




– Lesen Sie die Steigung der eingezeichneten Sekante ab.
– Interpretieren Sie diese Steigung physikalisch.

d) Zwei Läufer treten gegeneinander an.
Der vom ersten Läufer zurückgelegte Weg $s_1$ in Metern (m) kann durch die Funktion $s_1(t) = 15 \cdot e^{-0{,}72 \cdot t} + 11 \cdot t - 15$ beschrieben werden.
Der vom zweiten Läufer zurückgelegte Weg $s_2$ in Metern (m) kann durch die Funktion $s_2(t) = 16 \cdot e^{-0{,}72 \cdot t} + 11 \cdot t - 16$ beschrieben werden.

Mit der folgenden Gleichung wird diejenige Zeit $t$ berechnet, nach der der Abstand zwischen den beiden Läufern 95 cm beträgt.

(1) $15 \cdot e^{-0{,}72 \cdot t} + 11 \cdot t - 15 = 16 \cdot e^{-0{,}72 \cdot t} + 11 \cdot t - 16 + 0{,}95$
(2) $0{,}05 = 16 \cdot e^{-0{,}72 \cdot t} - 15 \cdot e^{-0{,}72 \cdot t}$
(3) $0{,}05 = e^{-0{,}72 \cdot t} \cdot (16 - 15)$
(4) $\ln(0{,}05) = 0{,}72 - t + \ln(1)$
(5) $\ln(0{,}05) - 0{,}72 = -t$
(6) $t \approx 3{,}7 \text{ s}$

In der Rechnung befindet sich ein Umformungsfehler.

– Bestimmen Sie diejenige Zeile, in der der Umformungsfehler passiert ist.
– Stellen Sie die Rechnung richtig.
– Erklären Sie, worin der Umformungsfehler besteht.

*Hinweis zur Aufgabe:*
*Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.*

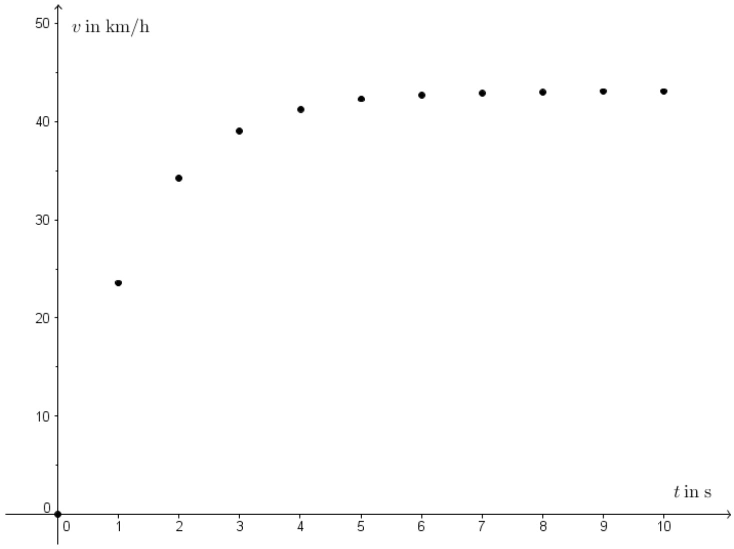
# Möglicher Lösungsweg

a) **Parameter *b*:**
Einsetzen eines Punktes
z. B. $(1|23{,}54)$

$23{,}54 = 43{,}1 \cdot (1 - e^{b \cdot 1})$

$\Rightarrow\ b \approx -0{,}79$

$v(t) = 43{,}1 \cdot (1 - e^{-0{,}79 \cdot t})$




b) Die Funktion *v* ist die Ableitung der Weg-Zeit-Funktion. Der zurückgelegte Weg wird daher mittels Integration der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion über den entsprechenden Zeitraum ermittelt:

$$s(t) = \int_0^t \frac{101}{9} \cdot \left(1 - e^{-0{,}73 \cdot x}\right) dx = \frac{101}{9} \cdot \left(x - \frac{e^{-0{,}73 \cdot x}}{-0{,}73}\right)\Big|_0^t = 15{,}3729 \cdot e^{-0{,}73 \cdot t} + \frac{101}{9} \cdot t - 15{,}3729$$

Lösen der Gleichung mit Technologieeinsatz:
$15{,}3729 \cdot e^{-0{,}73 \cdot t} + \frac{101}{9} \cdot t - 15{,}3729 = 100$

$\Rightarrow t \approx 10{,}28$ s

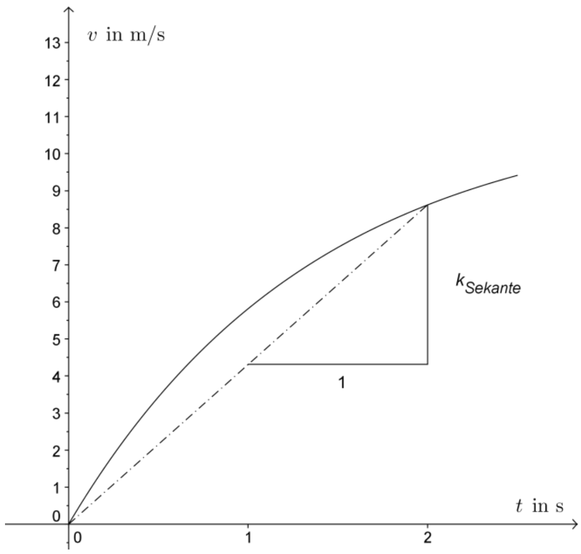
Die ersten 100 m lief Usain Bolt in 10,28 s.

c) Steigung der Sekante:

1. Art: $k_{\text{Sekante}} = 4{,}3$
2. Art: $k_{\text{Sekante}} = \frac{8{,}6}{2} = 4{,}3$

Die Steigung der Sekante gibt die mittlere Beschleunigung während der ersten 2 Sekunden an und beträgt 4,3 m/s².

*Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte wird toleriert.*



d) $\ln(x^y) = y \cdot \ln(x)$ Logarithmusfunktionen führen eine Potenz in ein Produkt über.
$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ Logarithmusfunktionen führen ein Produkt in eine Summe über.

(1) $15 \cdot e^{-0,72 \cdot t} + 11 \cdot t - 15 = 16 \cdot e^{-0,72 \cdot t} + 11 \cdot t - 16 + 0,95$
(2) $0,05 = 16 \cdot e^{-0,72 \cdot t} - 15 \cdot e^{-0,72 \cdot t}$
(3) $0,05 = e^{-0,72 \cdot t} \cdot (16 - 15)$
(4) $\ln(0,05) = 0,72 - t + \ln(1)$ $\ln(0,05) = -0,72 \cdot t \cdot \ln(e) + \ln(1)$
(5) $\ln(0,05) - 0,72 = -t$
(6) $t \approx 3,7$ s

# Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —
d) C Interpretieren und Dokumentieren, D Argumentieren und Kommunizieren

| Schwierigkeitsgrad: | Punkteanzahl: |
|---|---|
| a) mittel | a) 2 |
| b) schwer | b) 4 |
| c) mittel | c) 2 |
| d) leicht | d) 3 |

Thema: Sport

Quellen: —