Würfel (1)

Aufgabennummer: B_078

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Würfel werden im Kasino und bei vielen Gesellschaftsspielen verwendet.

a) Die Mathematiker Blaise Pascal und Pierre de Fermat beschäftigten sich in einem Briefwechsel mit der folgenden Frage: „Was ist wahrscheinlicher: Bei 4 Würfen mit einem Würfel mindestens einen Sechser zu werfen oder bei 24 Würfen mit 2 Würfeln mindestens einen Doppelsechser?“ Dabei wird mit einem herkömmlichen Spielwürfel gewürfelt, wobei die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten.

– Überprüfen Sie die Fragestellung durch Berechnung der jeweiligen Wahrscheinlichkeiten.

b) Ein Betrieb plant, eine spezielle Art von Würfeln für Gesellschaftsspiele auf den Markt zu bringen. Der monatliche Absatz von Würfeln ist annähernd normalverteilt. Ein Marktforschungsinstitut ermittelt aus dem monatlichen Absatz der Würfel an n verschiedenen Standorten ein zweiseitiges 95-%-Konfidenzintervall, um den durchschnittlichen monatlichen Absatz zu schätzen.

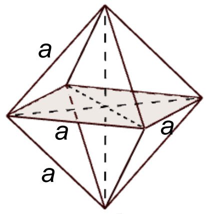
– Dokumentieren Sie in einzelnen Schritten, wie dieses zweiseitige Konfidenzintervall ermittelt wird.
– Interpretieren Sie die Bedeutung des zweiseitigen Konfidenzintervalls.

c) Bei einem Spiel wird mit zwei 6-seitigen Würfeln gewürfelt, wobei die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Die Zufallsvariable X ist die Summe der gewürfelten Augenzahlen.

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Die Wahrscheinlichkeit, die Augensumme 8 zu werfen, ist am größten.	☐
$P(X = 6) = P(X = 9)$	☐
$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 5)$	☐
Die Wahrscheinlichkeit, die Augensumme 2 zu werfen, ist $\frac{2}{36}$.	☐
$P(X = 3) = P(X = 11)$	☐

d) Ein 8-seitiger Würfel hat die Form eines regelmäßigen Oktaeders.



– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens V des Oktaeders in Abhängigkeit von seiner Kantenlänge a.

Der abgebildete Oktaeder hat eine Kantenlänge a = 15 mm und eine Masse m = 2,4 g.

– Berechnen Sie seine Dichte in g/cm³.

– Erklären Sie, was eine Verdoppelung der Kantenlänge a für das Volumen des Oktaeders bedeutet.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) X ... Anzahl der Sechser

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}5177... \approx 51{,}8\ \%$

X ... Anzahl der Doppelsechser

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}4914... \approx 49{,}1\ \%$

Es ist wahrscheinlicher, bei 4 Würfen mit 1 Würfel mindestens 1 Sechser zu würfeln als bei 24 Würfen mit 2 Würfeln mindestens 1 Doppelsechser.

b) Es werden zuerst der Mittelwert $\bar{x}$ und die Standardabweichung s der Stichprobe ermittelt. Mithilfe der Tabelle der t-Verteilung oder mittels Technologieeinsatz ermittelt man $t_{\left(1-\frac{\alpha}{2};n-1\right)} = t_{(0{,}975;n-1)}$, wobei n die Anzahl der Werte in der Stichprobe ist.

Die Grenzen des Konfidenzintervalls für μ sind dann $\bar{x} \pm t_{\left(1-\frac{\alpha}{2};n-1\right)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$.

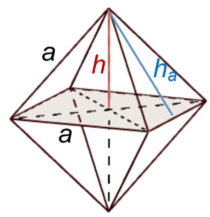
Führt man die Ermittlung des Konfidenzintervalls mit unterschiedlichen Stichproben sehr oft durch, enthalten im Mittel 95 % der Konfidenzintervalle den wahren Erwartungswert, also den durchschnittlichen monatlichen Absatz an Würfeln.

Ebenfalls zulässig:
Die Wahrscheinlichkeit, dass der tatsächliche Erwartungswert für den monatlichen Absatz der Würfel im ermittelten Konfidenzintervall liegt, beträgt 95 %.

c)

$P(X = 3) = P(X = 11)$	☒

d) $h_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$



$h = \sqrt{h_a{}^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3 \cdot a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}$

(Die beiden obigen Formeln können auch dem Formelheft entnommen werden.)

$V = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot h}{3} = \frac{2a^2 \cdot a\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

$V = \frac{15^3 \cdot \sqrt{2}}{3} = 1590{,}9902\ldots \text{ mm}^3 = 1{,}5909\ldots \text{ cm}^3$

$\rho = \frac{\text{m}}{\text{V}} = \frac{2{,}4}{1{,}59099\ldots} = 1{,}5084\ldots \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 1{,}51 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

Bei einer Verdoppelung von *a* wird das Volumen des Oktaeders 8-mal so groß.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) —
d) B Operieren und Technologieeinsatz, D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 1
d) 4

Thema: Alltag

Quelle: http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/wkeit/lernpfad/01_Historisch.html