Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reife- und Diplomprüfung

Angewandte Mathematik

Probeklausur März 2013

Teil-A-Aufgaben

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung
des österreichischen Schulwesens

Bearbeitungshinweise

Im vorliegenden Aufgabenheft befinden sich insgesamt fünf Aufgaben, die aus unterschiedlich vielen Unteraufgaben bestehen.

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen ausschließlich auf die dafür vorgesehenen karierten Seiten.

Alle Unteraufgaben sind unabhängig voneinander lösbar, sodass Sie sich mit jeder einzelnen Unteraufgabe separat beschäftigen können.

Für die Bearbeitung der Aufgaben sind eine für Ihren Schultyp approbierte Formelsammlung sowie jeglicher Taschenrechner bzw. jegliches Mathematikprogramm ohne Internetanbindung zugelassen.

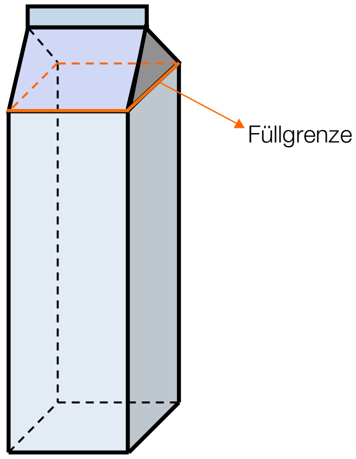
Sie haben insgesamt 150 Minuten für die Bearbeitung der Aufgaben Zeit.

Viel Erfolg!

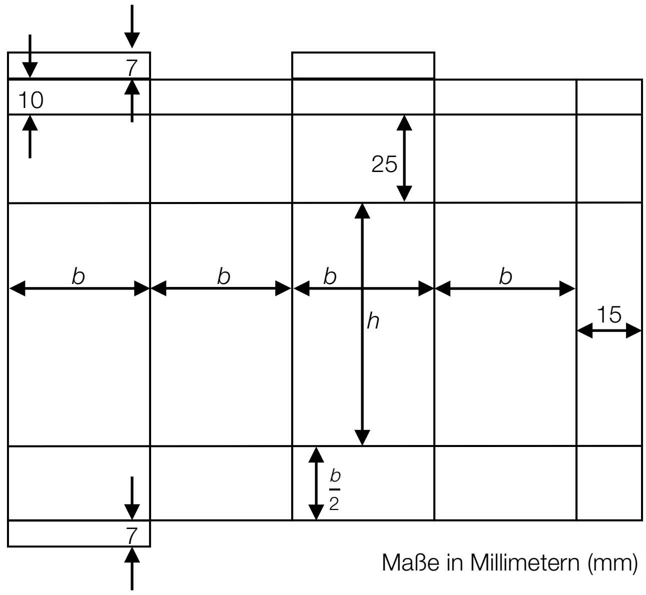
Aufgabe 1

Milchverpackung

Milch wird in verschiedenen Verpackungen angeboten. Eine Möglichkeit ist ein quaderförmiger Getränkekarton mit Giebel (siehe Abb.). Das Fassungsvermögen bis zur Füllgrenze beträgt genau 1 Liter (L).

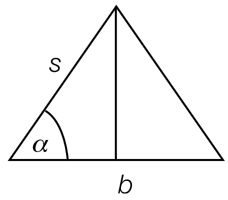


a) Der Getränkekarton wird aus folgendem Schnittmuster hergestellt:



– Erstellen Sie anhand des Schnittmusters und der angegebenen Füllmenge eine Formel für den Materialverbrauch (ohne Verschnitt) eines Getränkekartons in Abhängigkeit von b. *[2 Punkte]*

b) Der Materialverbrauch für den Giebel hängt von der Steilheit des Giebels ab.



– Geben Sie die Abhängigkeit der Schenkellänge s von der Länge der Seite b an, wenn α konstant ist. *[1 Punkt]*
– Zeichnen Sie die Funktion s in Abhängigkeit von b für $\alpha = 35°$. *[1 Punkt]*

c) Die Milchverpackungen werden maschinell ausgestanzt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Maschine eine Milchverpackung korrekt ausstanzt, beträgt laut Hersteller 96 %. Bei einer Qualitätsprüfung der Produktion werden 4 zufällig ausgewählte Milchverpackungen kontrolliert.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den kontrollierten Milchverpackungen mindestens 1 Milchverpackung fehlerhaft ist. *[2 Punkte]*

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Lösungen bitte hier:

Aufgabe 2

Energieverbrauch und Joggen

Der Energieverbrauch in Kilojoule (kJ) pro Minute (min) beim Joggen ist unter anderem abhängig von der Körpermasse in Kilogramm (kg). Der Verbrauch bei einer bestimmten Geschwindigkeit durch ebenes Gelände wird durch die folgende Tabelle beschrieben:

Körpermasse in kg	50	60	70	80	90	100
Energieverbrauch in kJ pro min	58	66	73	82	90	98

a) – Berechnen Sie aus den Werten der obigen Tabelle die mittlere Änderungsrate zwischen 50 kg und 100 kg des Energieverbrauchs pro Kilogramm Körpermasse. *[1 Punkt]*
– Erklären Sie die mathematische Bedeutung der mittleren Änderungsrate in einem linearen Modell. *[1 Punkt]*

b) Eine Person mit 70 kg Körpergewicht beginnt mit einer bestimmten Geschwindigkeit zu joggen und wird aufgrund von Erschöpfung langsamer. Damit sinkt ihr Energieverbrauch pro Minute um 0,5 %.

– Geben Sie eine Funktion der Zeit an, die den sinkenden Energieverbrauch dieser Person beschreibt. *[2 Punkte]*

c) Eine Joggerin mit einer Körpermasse von 60 kg joggt bergauf. Dabei bleibt der Energieverbrauch pro Minute nicht konstant und kann näherungsweise durch die folgende quadratische Funktionsgleichung beschrieben werden:

$$f(t) = -0{,}05t^2 + 3t + 66 \qquad 0 \text{ min} \leq t \leq 30 \text{ min}$$

t … Zeit in Minuten (min)
$f(t)$ … Energieverbrauch in Kilojoule pro Minute (kJ/min) zum Zeitpunkt t

Der Gesamtenergieverbrauch E während des Trainings lässt sich über diejenige Fläche berechnen, die der Graph der Funktion f mit der Zeitachse im Intervall [0 min; t min] einschließt.

– Geben Sie diejenige Gleichung an, aus der man die Zeitdauer berechnen kann, die die Joggerin bergauf laufen müsste, um die gleiche Menge an Energie zu verbrauchen, die sie für 30 min Joggen in der Ebene benötigt. *[2 Punkte]*

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Lösungen bitte hier:

Aufgabe 3

Geländewagen

Ein Geländewagen fährt auf einer Bergstraße. Die Messwerte für ein Bergstraßenprofil sind in folgender Tabelle festgehalten:

x in km	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$g(x)$ in km	0	0,04	0,09	0,15	0,2	0,23

x … horizontale Entfernung vom Ausgangspunkt in Kilometern (km)
$g(x)$ … Höhenunterschied zum Ausgangspunkt an der Stelle x in Kilometern (km)

a) – Ermitteln Sie anhand der gegebenen Daten die durchschnittlichen Steigungen der einzelnen Abschnitte. *[1 Punkt]*
– Erläutern Sie, welche Bedingungen gegeben sein müssen, damit ein Geländewagen, der eine Steigung von bis zu 30 % schafft, den Berg hinaufkommt. *[1 Punkt]*

b) Das Bergstraßenprofil wird im Intervall [0 km; 1 km] durch die Funktion f modelliert.

$$f(x) = -0{,}35x^3 + 0{,}45x^2 + 0{,}075x + 0{,}0075$$

x … horizontale Entfernung vom Ausgangspunkt in km
$f(x)$ … Höhenunterschied zum Ausgangspunkt an der Stelle x in km

– Stellen Sie die Daten der obigen Tabelle und den Graphen der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem dar. *[1 Punkt]*
– Prüfen Sie anhand der Grafik, ob das Funktionsmodell zu den in der obigen Tabelle gegebenen Daten passt. *[1 Punkt]*

c) Das Bergstraßenprofil kann im Intervall [0 km; 1 km] sehr gut durch folgende Funktion modelliert werden:

$$f(x) = -0{,}3x^3 + 0{,}45x^2 + 0{,}075x + 0{,}0075$$

x … horizontale Entfernung vom Ausgangspunkt in km
$f(x)$ … Höhenunterschied zum Ausgangspunkt an der Stelle x in km

Folgende Berechnung wird durchgeführt:

$f(x) = -0{,}3x^3 + 0{,}45x^2 + 0{,}075x + 0{,}0075$
$f'(x) = -0{,}9x^2 + 0{,}9x + 0{,}075$
$f''(x) = -1{,}8x + 0{,}9$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0{,}5$
$f'(x_1) = 0{,}3$

– Erläutern Sie die durchgeführten Rechenschritte. *[1 Punkt]*
– Erklären Sie, was mithilfe dieser Rechnung in Bezug auf einen bergauf fahrenden Geländewagen ermittelt wird. *[1 Punkt]*

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Lösungen bitte hier:

Aufgabe 4

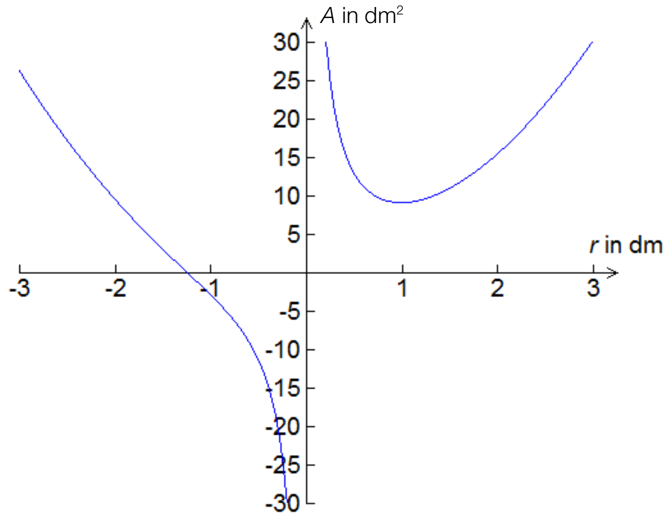
Zylindrische Gefäße

Die Außenfläche eines zylindrischen, oben offenen Gefäßes (gerader Drehzylinder) lässt sich mit folgender Funktion beschreiben:

$$A(r) = r^2 \cdot \pi + \frac{2 \cdot V}{r} \text{ mit } V = \text{konstant}$$

r … Radius in Dezimetern (dm)
A … Außenfläche in dm²
V … Fassungsvermögen (Volumen) des Gefäßes in Litern (L)

Die nebenstehende Grafik zeigt eine Darstellung der Abhängigkeit der Außenfläche A vom Radius r für ein Gefäß mit einem Fassungsvermögen von 3 Litern, wie sie von einer Mathematiksoftware ausgegeben wird.



a) – Beschreiben Sie das Verhalten der Funktion, wenn r gegen 0 strebt. *[1 Punkt]*
– Geben Sie unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Funktion A eine Außenfläche beschreiben soll, einen mathematisch sinnvollen Definitionsbereich für r an. *[1 Punkt]*

b) – Entnehmen Sie dem Graphen die möglichen Radien für eine Außenfläche von 25 dm². *[1 Punkt]*
– Begründen Sie, warum es sich nicht um eine Funktion handelt, wenn man den Radius r in Abhängigkeit von A darstellt. *[1 Punkt]*

c) – Berechnen Sie mithilfe der Differenzialrechnung jenen Radius r, für den die Außenfläche eines oben offenen Zylinders mit Fassungsvermögen V = 5 L am geringsten ist. Runden Sie Ihr Ergebnis auf 1 Nachkommastelle. *[2 Punkte]*

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Lösungen bitte hier:

Aufgabe 5

Torten

In einer Konditorei werden zylinderförmige Torten (gerader Drehzylinder) mit dem Radius *r* und der Höhe *h* mit einer Schicht aus Creme oder Gelee versehen.

a) Die Cremeschicht wird auf der Torte seitlich und oben gleichmäßig dick aufgetragen. Der Bedarf an Creme wird in Litern (L) angegeben. Das Volumen der Cremeschicht kann mithilfe der folgenden Formel berechnet werden:

$$V = [(r + d)^2 \cdot \pi + (2 \cdot r + d) \cdot \pi \cdot h] \cdot d$$

V … Volumen der Creme in L
r … Radius der Torte
h … Höhe der Torte
d … Dicke der Cremeschicht oder Geleeschicht

In einer der folgenden Abbildungen wird die Abhängigkeit des Cremevolumens V vom Radius r der Torte, in der anderen Abbildung jene von der Tortenhöhe h dargestellt. Die Dicke der Cremeschicht und die jeweils andere Unbekannte sind dabei konstant.

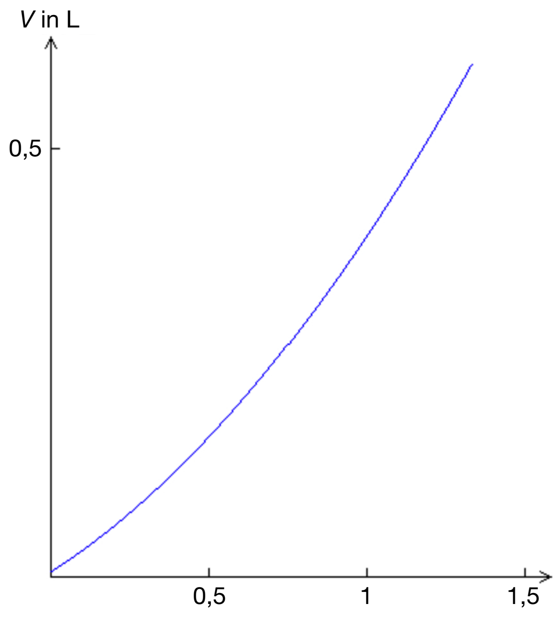


Abbildung 1

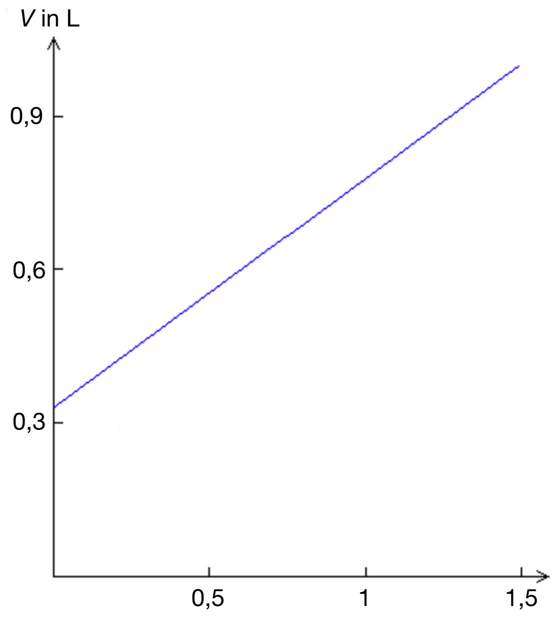


Abbildung 2

– Beschriften Sie die waagrechte Achse mit der jeweils richtigen Größe und deren Einheit. *[1 Punkt]*
– Begründen Sie Ihre Entscheidung. *[1 Punkt]*

b) 15 Torten mit einem Durchmesser von 28 cm sollen nur an ihrer Oberseite mit einer 5 mm dicken Geleeschicht überzogen werden.

– Berechnen Sie, wie viel Liter Gelee dazu benötigt werden. *[2 Punkte]*

c) Für eine Tortencreme benötigt man halb so viel Schlagobers wie Joghurt. Insgesamt machen Schlagobers und Joghurt gemeinsam $\frac{3}{4}$ des Gesamtvolumens der Creme aus.

– Erstellen Sie ein passendes Gleichungssystem für die Berechnung, wie viel Liter Schlagobers und Joghurt zur Herstellung von V Litern Creme benötigt werden. *[2 Punkte]*

d) Das zur Verzierung von Torten benötigte Schlagobers wird häufig mit einem Schlagobers-Bereiter aufgeschlagen. Dazu werden mit Lachgas gefüllte Kapseln verwendet. Aufgrund eines Abfüllfehlers sind 0,1 % der in Schachteln zu 8 Stück verpackten Kapseln leer.

– Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit in einer Schachtel genau 1 Kapsel leer ist. *[2 Punkte]*

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Lösungen bitte hier: