Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Pumpenproduktion

Aufgabennummer: B_169

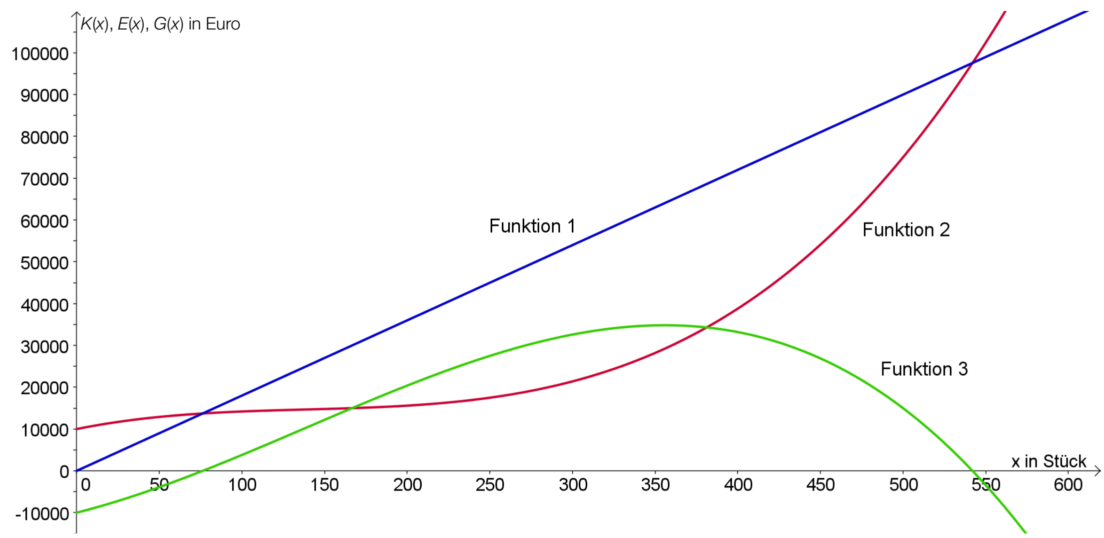
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei der Produktion von Schmutzwasserpumpen wird ein bestimmtes Modell hergestellt. Für die Kostenfunktion K bei der Herstellung dieses Modells gilt:

$$K(x) = 0{,}0012 \cdot x^3 - 0{,}5 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 10\,000$$

x … Stückzahl produzierter Schmutzwasserpumpen
$K(x)$ … Kosten bei der Produktion von x Schmutzwasserpumpen in Euro (€)

a) Die unten stehende Abbildung zeigt die Funktionsgraphen
- der Kostenfunktion K
- der Erlösfunktion E
- der Gewinnfunktion G



– Begründen Sie, warum der Graph von Funktion 3 den Verlauf der Gewinnfunktion beschreibt.

b) – Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Kosten, wenn die Produktion von 100 auf 101 Stück erhöht wird.
– Berechnen Sie die Grenzkosten für 100 Stück mithilfe der Grenzkostenfunktion.
– Begründen Sie, warum die Ergebnisse dieser Berechnungen unterschiedlich sind.

c) Die Schmutzwasserpumpen werden zu einem Preis von € 200 pro Stück verkauft.

– Stellen Sie die Funktionsgleichung der Gewinnfunktion G auf.
– Berechnen Sie, bei wie vielen verkauften Schmutzwasserpumpen der Gewinn maximal ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Funktion 3 stellt die Gewinnfunktion dar.
Der Funktionsgraph der Gewinnfunktion schneidet die vertikale Achse bei € –10.000 (Fixkosten).
Die Nullstellen der Gewinnfunktion liegen direkt unterhalb der Schnittpunkte der Kosten- und der Erlösfunktion.
Zwischen den Gewinngrenzen ist der Gewinn positiv, weil dort der Graph der Erlösfunktion oberhalb des Graphen der Kostenfunktion verläuft.

Alle richtigen Begründungen, die eine klare Entscheidung ermöglichen, sind zu akzeptieren.

b) $\frac{K(101) - K(100)}{1} = 15{,}861 \approx 15{,}86$

Die mittlere Änderungsrate beträgt rund € 15,86/Stück.

$K'(x) = 0{,}0036 \cdot x^2 - x + 80 \;\Rightarrow\; K'(100) = 16$

Die Grenzkosten bei 100 Stück betragen € 16/Stück.

Die Ergebnisse sind unterschiedlich, weil der Differenzenquotient die exakte Kostensteigerung angibt, während hingegen der Differenzialquotient einen Näherungswert für die Änderung der Kosten bei der Steigerung um ein Stück angibt.

c) Gewinn = Erlös – Kosten
$G(x) = 200 \cdot x - (0{,}0012 \cdot x^3 - 0{,}5 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 10\,000)$
$G(x) = -0{,}0012 \cdot x^3 + 0{,}5 \cdot x^2 + 120 \cdot x - 10\,000$
$G'(x) = -0{,}0036 \cdot x^2 + x + 120$
$-0{,}0036 \cdot x^2 + x + 120 = 0$ Berechnung mittels Technologieeinsatz: $x \approx 368{,}29$
Der maximale Gewinn wird bei 368 Stück erzielt.

Auch andere korrekte Berechnungswege sind als richtig zu werten.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 3
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: –