

Name:	
Klasse/Jahrgang:	



Standardisierte kompetenzorientierte  
schriftliche Reife- und Diplomprüfung

BHS

11. Mai 2015

# Angewandte Mathematik

Teil B (Cluster 2)



# Hinweise zur Aufgabenbearbeitung

Das vorliegende Aufgabenheft (Teil B) enthält drei Aufgaben mit unterschiedlich vielen Teilaufgaben. Die Teilaufgaben sind unabhängig voneinander bearbeitbar. Ihnen stehen insgesamt 270 Minuten an reiner Arbeitszeit für Teil A und Teil B zur Verfügung.

Verwenden Sie für die Bearbeitung einen nicht radierbaren, blau oder schwarz schreibenden Stift.

Verwenden Sie für die Bearbeitung ausschließlich das Aufgabenheft und die Ihnen zur Verfügung gestellten Antwortblätter. Schreiben Sie auf der ersten Seite des Aufgabenheftes Ihren Namen in das dafür vorgesehene Feld und auf jedes Antwortblatt Ihren Schülercode. Geben Sie bei der Beantwortung jeder Teilaufgabe deren Bezeichnung an.

In die Beurteilung wird alles einbezogen, was nicht durchgestrichen ist. Streichen Sie Notizen durch.

Die Verwendung eines durch die Schulbuchaktion approbierten Formelheftes und elektronischer Hilfsmittel (grafikfähige Taschenrechner oder andere entsprechende Technologie) ist erlaubt, sofern keine Kommunikation nach außen getragen werden kann und keine Eigendaten in die elektronischen Hilfsmittel implementiert sind. Handbücher zu den elektronischen Hilfsmitteln sind in der Original-Druckversion oder in im elektronischen Hilfsmittel integrierter Form zulässig.

Abzugeben sind das Aufgabenheft und alle von Ihnen verwendeten Antwortblätter.

Es gilt folgender Beurteilungsschlüssel:

42–47 Punkte	Sehr gut
36–41 Punkte	Gut
30–35 Punkte	Befriedigend
20–29 Punkte	Genügend
0–19 Punkte	Nicht genügend

Viel Erfolg!

# Aufgabe 6

## Schadstoffausbreitung

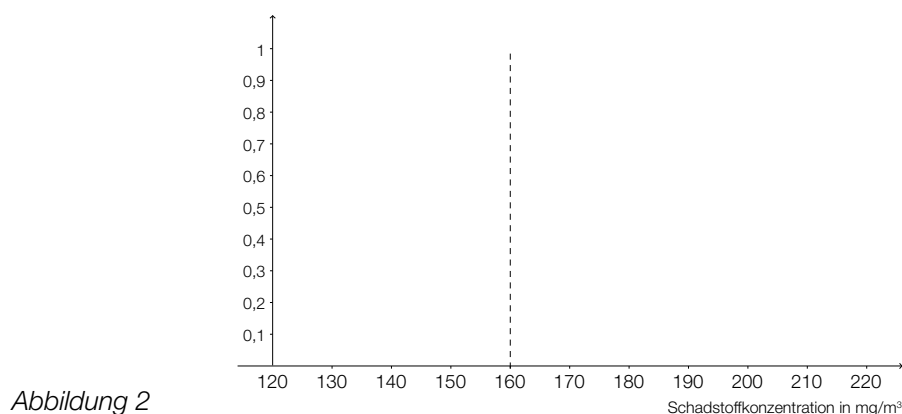
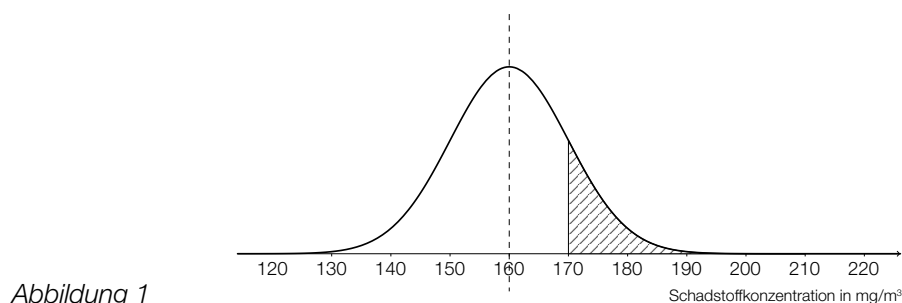
Eine Messstation registriert täglich zu einem bestimmten Zeitpunkt die Konzentration der von einer Fabrik emittierten Schadstoffe (in  $\text{mg}/\text{m}^3$ ). Es wird angenommen, dass diese Schadstoffkonzentrationen annähernd normalverteilt sind.

a) Es werden Messungen an 10 Tagen vorgenommen:

Schadstoffkonzentration in $\text{mg}/\text{m}^3$	152	166	149	153	172	147	157	164	157	168
--	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$ . [1 Punkt]
- Ermitteln Sie das 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert  $\mu$ , wenn bekannt ist, dass die Standardabweichung  $\sigma = 8,5 \text{ mg}/\text{m}^3$  beträgt. [2 Punkte]

b) Die Verteilung der Schadstoffkonzentration kann sowohl mithilfe der Dichtefunktion als auch mithilfe der Verteilungsfunktion der Normalverteilung beschrieben werden. In der nachstehenden Abbildung 1 ist der Graph der Dichtefunktion dargestellt.



- Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion in Abbildung 2 ein. [1 Punkt]
- Veranschaulichen Sie die in Abbildung 1 schraffiert dargestellte Wahrscheinlichkeit in Abbildung 2. [1 Punkt]
- Erklären Sie den mathematischen Zusammenhang zwischen diesen beiden Funktionen. [1 Punkt]

- c) Die Fabriksleitung geht vom Erwartungswert  $\mu = 160 \text{ mg/m}^3$  und von der Standardabweichung  $\sigma = 10 \text{ mg/m}^3$  aus.
- Ermitteln Sie den symmetrisch um  $\mu$  gelegenen Bereich, in den erwartungsgemäß 99 % aller Messwerte fallen (99-%-Zufallsstrebereich). *[1 Punkt]*
  - Geben Sie an, wie sich die Breite dieses Zufallsstrebereichs verändert, wenn anstelle von 99 % nur noch 95 % aller Messwerte in diesen Bereich fallen sollen. *[1 Punkt]*

# Aufgabe 7

## Bakterienkultur

- a) Eine Bakterienkultur mit 50 Bakterien wird zu einem Zeitpunkt  $t = 0$  angelegt. Nach 100 Minuten werden bereits 750 Bakterien gezählt. Die Funktion  $N$  beschreibt das Wachstum der Bakterienkultur:  $N(t)$  ist die Anzahl der Bakterien nach  $t$  Minuten. Die 1. Ableitung der Funktion  $N$  ist proportional zu  $N$ . Die entsprechende Proportionalitätskonstante bezeichnet man als *Wachstumsrate*.

- Stellen Sie die zugehörige Differenzialgleichung für  $N$  auf. [1 Punkt]
- Lösen Sie die Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*. [1 Punkt]
- Berechnen Sie, wie viele Bakterien nach 3 Stunden vorhanden sind. [1 Punkt]
- Geben Sie an, wie sich das Wachstumsverhalten ändert, wenn die Bakterienkultur eine größere Wachstumsrate hat. [1 Punkt]

- b) Die Beobachtung einer Bakterienkultur ergab folgende Daten:

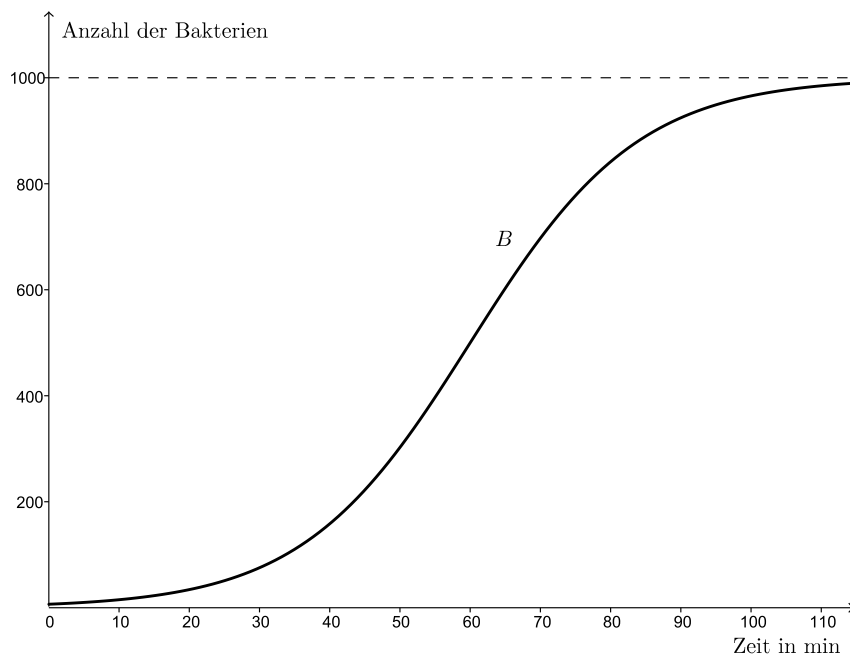
Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Anzahl der Bakterien	110	120	156	185	190	245	274	340	360	430

- Ermitteln Sie die Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion, die die Bakterienanzahl in Abhängigkeit von der Zeit nach Beginn der Beobachtung näherungsweise beschreibt. [1 Punkt]
- Berechnen Sie mithilfe der Ausgleichsfunktion, wie viele Minuten nach Beginn der Beobachtung 1 000 Bakterien zu erwarten sind. [1 Punkt]

- c) Die Funktion  $B$  beschreibt näherungsweise, wie viele Bakterien sich zu jedem Zeitpunkt in einer Petrischale befinden. Der zugehörige Funktionsgraph ist im nachstehenden Diagramm dargestellt.

$t$  ... Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten

$B(t)$  ... Anzahl der Bakterien zur Zeit  $t$



- Lesen Sie aus dem Diagramm ab, wie viele Minuten nach Beginn der Beobachtung das Wachstum der Bakterienkultur am größten ist. [1 Punkt]

Die entsprechende Differenzialgleichung zur Beschreibung dieses Bakterienwachstums lautet:

$$\frac{dB}{dt} = 8,35 \cdot 10^{-5} \cdot B \cdot (1\,000 - B) \text{ mit } B > 0$$

- Argumentieren Sie anhand der Differenzialgleichung, für welche Werte von  $B$  die Bakterienanzahl zunimmt. [1 Punkt]

# Aufgabe 8

## Thermistor

Ein *Thermistor* oder *Heißleiter* ist ein Halbleiter, dessen elektrischer Widerstand mit zunehmender Temperatur  $T$  abnimmt. Die Funktion  $R$  beschreibt diesen Zusammenhang:

$$R(T) = a \cdot e^{\frac{b}{T}}$$

$T$  ... Temperatur in Kelvin (K)

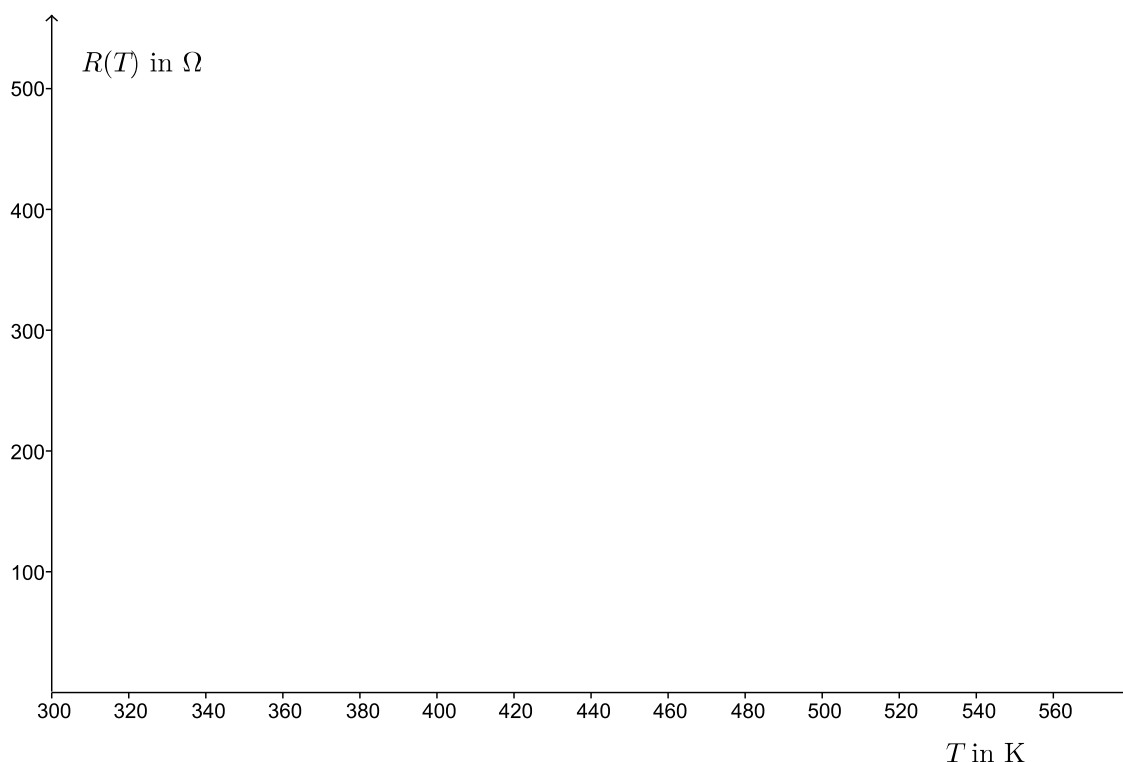
$R(T)$  ... elektrischer Widerstand bei der Temperatur  $T$  in Ohm ( $\Omega$ )

$a$  ... Konstante in  $\Omega$  ( $a > 0$ )

$b$  ... Konstante in K ( $b > 0$ )

a) – Begründen Sie mathematisch, warum die Funktion  $R$  monoton fallend ist. [1 Punkt]

– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion  $R$  im Bereich  $300 \text{ K} \leq T \leq 550 \text{ K}$  für  $a = 0,1 \text{ } \Omega$  und  $b = 2500 \text{ K}$  im nachstehenden Koordinatensystem. [1 Punkt]



b) Verwenden Sie  $a = 0,1 \text{ } \Omega$  und  $b = 2500 \text{ K}$ .

– Linearisieren Sie die Funktion  $R$  an der Stelle  $T_0 = 373,15 \text{ K}$ , d. h., bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von  $R$  im Punkt  $(T_0 | R(T_0))$ . [2 Punkte]

– Ermitteln Sie den Betrag des relativen Fehlers, wenn man an der Stelle  $T = 390 \text{ K}$  den Widerstand mit der linearisierten Funktion anstatt mit der Funktion  $R$  berechnet. [1 Punkt]

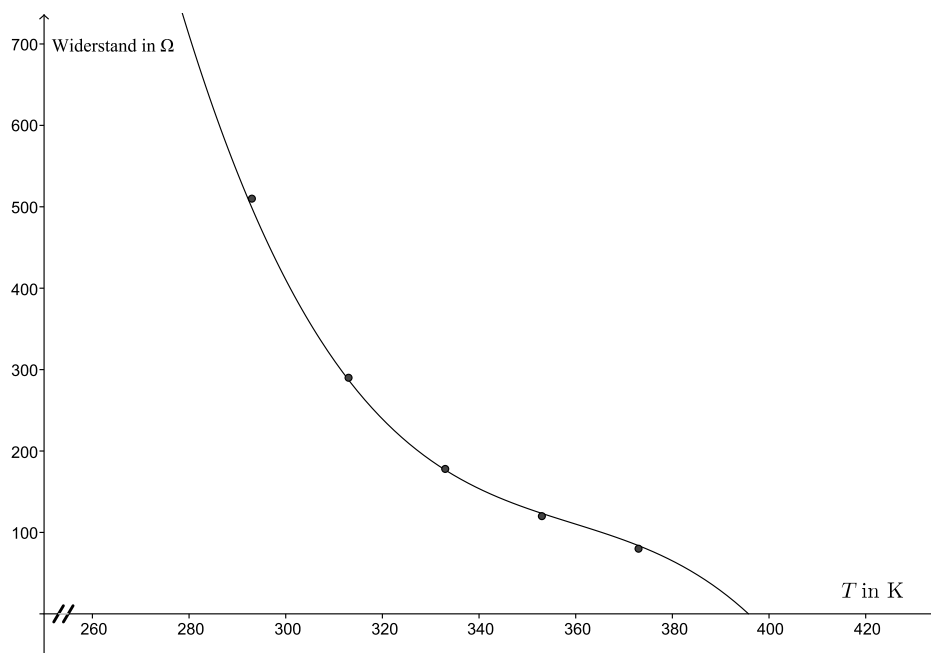
c) Für einen bestimmten Heißleiter wurden folgende Werte gemessen:

$T$ in K	$R$ in $\Omega$
293	510
313	290
333	178
353	120
373	80

Zur weiteren Auswertung wird eine Polynomfunktion 3. Grades als Ausgleichsfunktion verwendet.

– Ermitteln Sie diese Ausgleichsfunktion. [1 Punkt]

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zu ermittelnden Ausgleichsfunktion  $P$  bereits eingezeichnet.



– Erklären Sie ausgehend von der obigen Abbildung, warum die 1. Ableitung dieser Polynomfunktion 3. Grades keine reellen Nullstellen hat. [1 Punkt]









