

Informelle Kompetenzmessung
zur standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reife- und Diplomprüfung

BHS

Februar 2016

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 2)

Korrekturheft

Aufgabe 1

Vergnügungspark

Möglicher Lösungsweg

a) $4,1 = 9 - x^2$
 $x^2 = 4,9$
 $x = \pm 2,213...$

Der Festwagen darf rund 4,42 m breit sein.

$$\int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = 36$$

Der Flächeninhalt der benötigten Folie beträgt 36 m².

- b) Diese Polynomfunktion hat im dargestellten Intervall 2 lokale Extremstellen. Somit muss die 1. Ableitung dieser Funktion 2 Nullstellen haben, also mindestens eine Polynomfunktion 2. Grades sein. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Eine Gerade parallel zur x-Achse hat 3 Schnittpunkte mit dem Graphen der Funktion. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Der Graph ist keine Gerade und keine Parabel. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

c) rechtwinkeliges Dreieck FPS: $\tan(\beta) = \frac{\overline{SP}}{a} \Rightarrow \overline{SP} = a \cdot \tan(\beta)$

rechtwinkeliges Dreieck FQS: $\tan(\alpha) = \frac{\overline{SQ}}{a} \Rightarrow \overline{SQ} = a \cdot \tan(\alpha)$

$$h = \overline{SP} - \overline{SQ}$$

$$h = a \cdot \tan(\beta) - a \cdot \tan(\alpha) = a \cdot (\tan(\beta) - \tan(\alpha))$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Breite *b*
1 × B2: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts
b) 1 × D: für eine richtige Erklärung
c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

Aufgabe 2

Luftdruck – Höhenformel

Möglicher Lösungsweg

a) $p(0) = p_0 \cdot e^{-\frac{0}{7991}} = p_0 \cdot 1 = p_0$

$$\frac{p_0}{2} = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7991}}$$

$$h = 7991 \cdot \ln(2) = 5538,9\dots$$

Bei einer Seehöhe von rund 5539 m beträgt der Luftdruck genau die Hälfte von p_0 .

b) $f(h) = 1013 - \frac{1}{10} \cdot h$

c) Modellierung durch eine lineare Funktion g mit $g(x) = a \cdot x + b$:

$$1040 = a \cdot 990 + b$$

$$930 = a \cdot 1980 + b$$

$$g(x) = -\frac{1}{9} \cdot x + 1150$$

$$g(1300) = \frac{9050}{9} \approx 1006$$

Der Luftdruck in einer Höhe von 1300 m über dem Meeresspiegel beträgt rund 1006 hPa.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × D: für einen richtigen Nachweis
1 × A: für den richtigen Lösungsansatz zur Berechnung
1 × B: für die richtige Berechnung der Seehöhe
- b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktion
- c) 1 × A: für einen richtigen Ansatz (z. B. mithilfe einer linearen Funktion bzw. ähnlicher Dreiecke)
1 × B: für die richtige Bestimmung des Luftdrucks

Aufgabe 3

Produktion von Rucksäcken

Möglicher Lösungsweg

- a) Es wird die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis berechnet, dass ein zufällig kontrollierter Rucksack Nahtfehler, aber keine der beiden anderen Fehlerarten aufweist.
- b) $P(\text{„mindestens 1 Fehler“}) = 1 - P(\text{„kein Fehler“}) = 1 - 0,98 \cdot 0,97 \cdot 0,99 = 0,0589... \approx 5,9 \%$

Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Rucksack mindestens 1 dieser 3 Fehler aufweist, muss bei der Verwendung der Gegenwahrscheinlichkeit nur 1 Ereignis, nämlich das Ereignis, dass kein Fehler auftritt, betrachtet werden. Bei einer direkten Berechnung müssten die Wahrscheinlichkeiten für eine Vielzahl von Ereignissen berechnet und addiert werden.

- c) Berechnung mittels Binomialverteilung: $n = 100$ und $p = 0,03$
 $P(X < 3) = 0,41977... \approx 41,98 \%$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C: für die richtige Angabe des Ereignisses (es muss auch klar erkennbar sein, dass die beiden anderen Fehlerarten nicht auftreten)
- b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × D: für die richtige Erklärung zur Gegenwahrscheinlichkeit
- c) 1 × A: für das Erkennen des richtigen Wahrscheinlichkeitsmodells (Binomialverteilung)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 4

Tennis

Möglicher Lösungsweg

- a) Aufschlaggeschwindigkeit, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde: 120 km/h

Quartilsabstand: 30 km/h

- b) ähnliche Dreiecke:

$$\frac{2,3}{6,4 + 6,4 + 5,5} = \frac{h}{6,4}$$

$$h = 0,80... \text{ m} \approx 0,8 \text{ m}$$

Der Ball ist beim Netz in einer Höhe von rund 0,8 m.
Somit geht der Ball ins Netz.

- c) $f'(0) = \frac{2}{5}$

$$\arctan\left(\frac{2}{5}\right) = 21,801...^\circ \approx 21,80^\circ$$

Der Ball befindet sich im Abschlagpunkt in einer Höhe von $\frac{21}{50}$ Metern.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C1: für das richtige Ablesen der Aufschlaggeschwindigkeit
1 × C2: für das richtige Ablesen des Quartilsabstands
b) 1 × D: für die richtige Überprüfung
c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Steigungswinkels
1 × C: für die richtige Interpretation der Zahl $\frac{21}{50}$

Aufgabe 5

Leistung einer Solaranlage

Möglicher Lösungsweg

a) $P'(6) = 0$

$$0 = \frac{7}{162} \cdot 6^3 - \frac{7}{9} \cdot 6^2 + 2 \cdot a \cdot 6$$

$$a = \frac{14}{9}$$

b) $\int_0^{12} (0,007 \cdot t^4 - 0,165 \cdot t^3 + 0,972 \cdot t^2 + 1,221) dt = 67,5288$

Die Solaranlage liefert an diesem Tag rund 67,53 kWh Energie.

c) An der Wendestelle x_0 einer Funktion f gilt stets: $f''(x_0) = 0$.

Die 2. Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades ist eine lineare Funktion, die genau 1 Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat. Daher hat die Polynomfunktion 3. Grades genau 1 Wendestelle.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung des Koeffizienten a
1 × B: für die richtige Berechnung des Koeffizienten a
- b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Integrals
- c) 1 × D: für eine richtige Begründung

Aufgabe 6 (Teil B)

Riesenräder

Möglicher Lösungsweg

- a) Durchmesser: $d = 121 \text{ m}$

Aus der Periodendauer $T = 30 \text{ min}$ ergibt sich:

$$\omega = \frac{2\pi}{30} \text{ min}^{-1} \approx 0,21 \text{ min}^{-1}$$

Verschiebung nach oben: $c = 74,5 \text{ m}$

- b) $60 = 30,48 \cdot \sin(0,02464 \cdot t) + 34,27$

$$t_1 = 40,78 \dots \text{ s} \approx 41 \text{ s}$$

$$t_2 = 86,71 \dots \text{ s} \approx 87 \text{ s}$$

$$t_2 - t_1 \approx 46 \text{ s}$$

Die Gondel erreicht nach etwa 41 Sekunden erstmals 60 Meter und befindet sich rund 46 Sekunden lang in einer Höhe von mindestens 60 Metern.

- c) Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ erhält man für die Zeitdauer einer Umdrehung: $T = 120 \text{ s}$.

Umfang des Kreises: $u = 30\pi \text{ m}$

$$v = \frac{30\pi}{120} \text{ m/s} \approx 0,785 \text{ m/s} \approx 2,827 \text{ km/h}$$

Da es 12 gleichmäßig verteilte Gondeln gibt, beträgt der Winkel zwischen je 2 benachbarten Gondeln 30° . φ wird gegen den Uhrzeigersinn von der „rechten horizontalen Lage“ aus gemessen. Der Winkel beträgt daher -30° bzw. 330° , im Bogenmaß also $-\frac{\pi}{6}$ bzw. $\frac{11\pi}{6}$.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C: für das richtige Ablesen des Durchmessers
1 × B1: für die richtige Ermittlung der Winkelgeschwindigkeit
1 × B2: für die richtige Ermittlung des Parameters c
- b) 1 × B1: für die richtige Ermittlung des Zeitpunkts
1 × B2: für die richtige Bestimmung der Zeitdauer
- c) 1 × A: für eine richtige Modellbildung zur Berechnung der Geschwindigkeit
1 × B: für die richtige Berechnung der Geschwindigkeit in km/h
1 × C: für die richtige Dokumentation zur Ermittlung des Parameters φ
(auch eine Beschreibung mit einem Winkel in Grad ist als richtig zu werten)

Aufgabe 7 (Teil B)

Länge eines Werkstücks

Möglicher Lösungsweg

- a) Die Parameter sind: $\mu_{\bar{x}} = 72,3 \text{ mm}$ und $\sigma_{\bar{x}} = \frac{0,5}{\sqrt{7}} \text{ mm}$.

Zweiseitigen 95-%-Zufallsstrebereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$$\mu \pm u_{0,975} \cdot \sigma_{\bar{x}}$$

$$u_{0,975} = 1,959 \dots$$

Daraus ergibt sich folgender Zufallsstrebereich in mm: $[71,9; 72,7]$.

Eine Halbierung der Breite erfordert die Vervierfachung des Stichprobenumfangs.

Die Standardabweichung der Stichprobe ist umso kleiner, je größer der Stichprobenumfang n ist. Daher ist der Graph der Dichtefunktion für $n = 7$ schmaler als für $n = 5$. Da der gesamte Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion immer 1 beträgt, muss das Maximum für $n = 7$ größer sein als für $n = 5$.

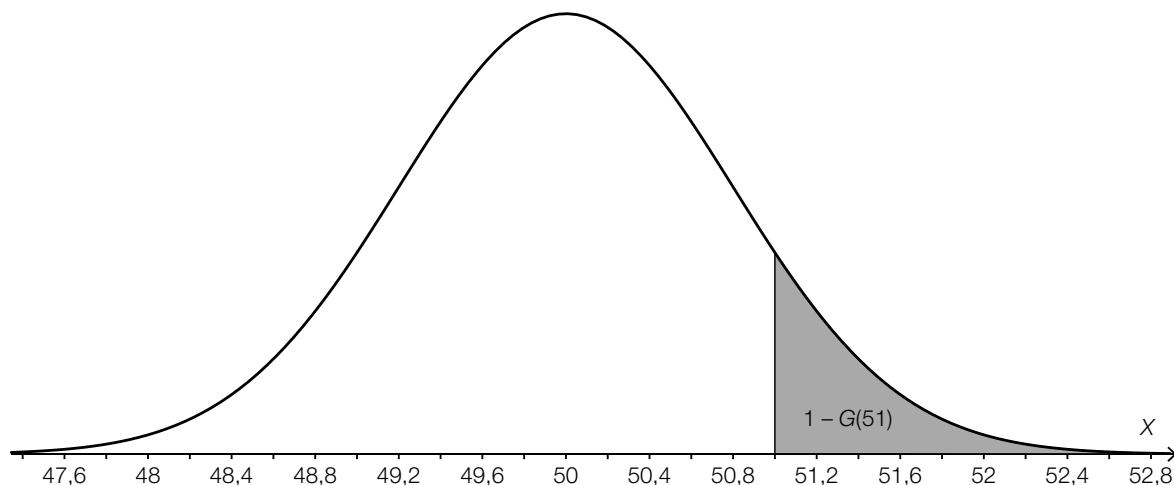
- b) $P(\text{„Werkstück wird aussortiert“}) = 1 - P(71,4 \leq X \leq 73,2) = 0,0718 \dots \approx 7,2 \%$

$$\sigma = \frac{x_{\text{ob}} - \mu}{u_{0,99}} = \frac{73,2 - 72,3}{2,326 \dots} = 0,38 \dots \approx 0,4$$

Damit der Ausschussanteil 2 % beträgt, müsste die Standardabweichung rund 0,4 mm sein.

- c) Der gesamte Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion beträgt 1. Der Graph der Dichtefunktion ist symmetrisch bezüglich des Erwartungswerts μ .

$$\text{Daher gilt: } G(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} g(x) dx = 0,5.$$



$$\sigma = 0,8 \text{ mm}$$

Toleranzbereich: $[0,6; 1,0]$

Lösungsschlüssel

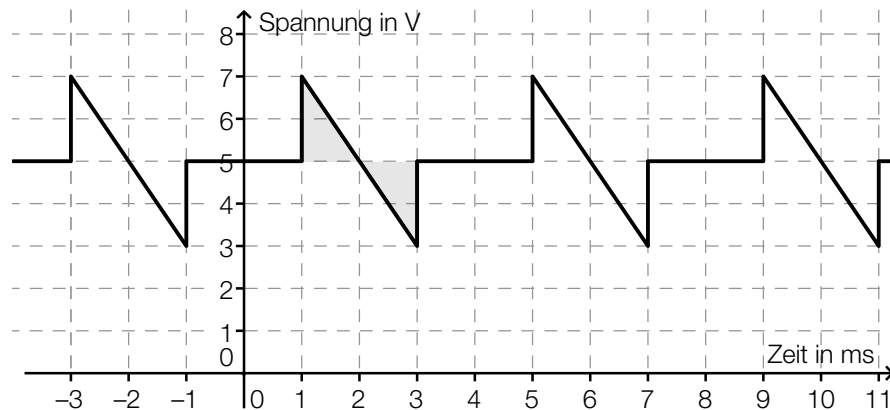
- a) 1 × A: für die richtige Angabe der Parameter
1 × B: für die richtige Berechnung des Zufallsstrebereichs
1 × C: für eine richtige Beschreibung
1 × D: für eine richtige Begründung
- b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × B2: für die richtige Berechnung der Standardabweichung
- c) 1 × D: für eine richtige Begründung
1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit als Fläche
1 × C: für das richtige Ablesen der Standardabweichung im Toleranzbereich $[0,6; 1,0]$

Aufgabe 8 (Teil B)

Periodische Spannungen

Möglicher Lösungsweg

- a) Die beiden grau unterlegten Flächeninhalte sind gleich groß, d. h., über eine Periodendauer beträgt die Höhe des flächengleichen Rechtecks 5 V.



Die gegebene periodische Funktion unterscheidet sich von einer ungeraden Funktion nur um eine Verschiebung entlang der senkrechten Achse. Die Fourier-Reihe der skizzierten Funktion enthält daher, wie eine ungerade Funktion, keine Cosinusanteile.

- b) Der Spannungsverlauf kann im Intervall $[0; 8]$ durch eine stückweise lineare Funktion beschrieben werden:

$$u(t) = \frac{5}{2} \cdot t \quad \text{für } 0 \leq t < 2$$

$$u(t) = \frac{40 - 5t}{6} \quad \text{für } 2 \leq t < 8$$

t ... Zeit in ms

$u(t)$... Spannung zur Zeit t in V

Mit $T = 8$ und $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$ ergibt sich für a_3 :

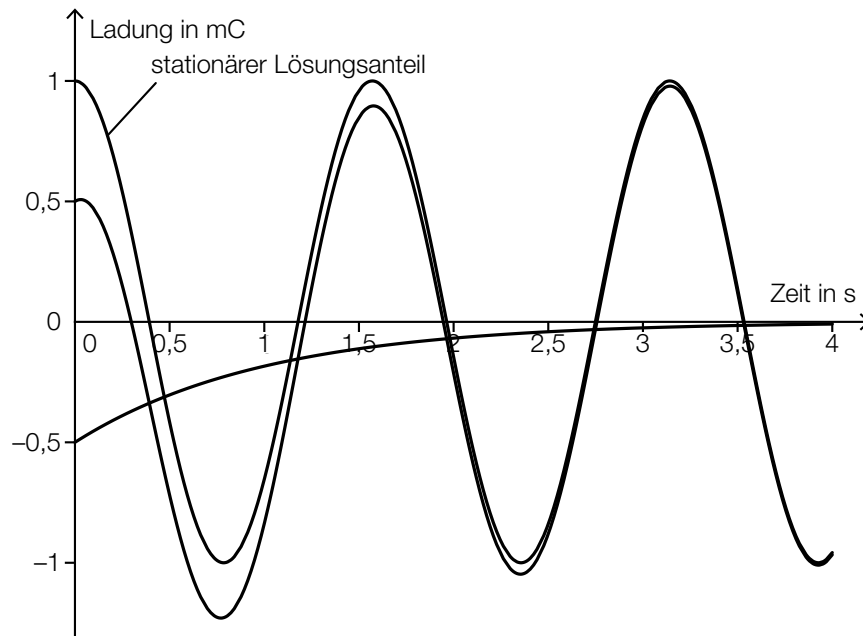
$$a_3 = \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^2 \frac{5}{2} \cdot t \cdot \cos(3 \cdot \omega \cdot t) dt + \int_2^8 \left(\frac{40 - 5t}{6} \right) \cdot \cos(3 \cdot \omega \cdot t) dt \right) = -0,1501...$$

c) homogene Differenzialgleichung: $R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot dt$$

$$\ln|q(t)| = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot t + K_1$$

$$q(t) = K \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$$



$$q_0 = 0,5 \text{ mC}$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × D1: für eine richtige Begründung, warum der Gleichanteil der dargestellten Spannung 5 V beträgt
- 1 × D2: für eine richtige Argumentation bezüglich Symmetrie und Verschiebung
- b) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung für $0 \leq t < 2$
- 1 × A2: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung für $2 \leq t < 8$
- 1 × A3: für den richtigen Ansatz zur Berechnung von a_3 (Aufstellen der richtigen Formel)
- 1 × B: für die richtige Berechnung von a_3
- c) 1 × B: für das richtige Lösen der homogenen Differenzialgleichung
- 1 × C1: für das richtige Kennzeichnen des stationären Lösungsanteils
- 1 × C2: für das richtige Ablesen des Anfangswertes