

Farben (1)

Aufgabennummer: B_025

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

Ein Unternehmen stellt unterschiedliche Farbprodukte für den Malerbedarf her.

- a) Textilmalfarbe wird an Großkunden nur in ganzen Paletten verkauft. In diesem Fall wird je nach Abnahme ein Mengenrabatt gewährt. Der Preis pro Palette p_1 nimmt mit steigender Anzahl der Paletten exponentiell ab, wobei das Preislimit pro Palette nach unten begrenzt ist. Es wird folgendes Abnahmemodell angenommen:

$$p_1(x) = 10\,000 + a \cdot e^{-b \cdot x}$$

x ... Palettenanzahl

$p_1(x)$... Preis pro Palette für eine Abnahme von x Paletten in €

a, b ... Parameter des Preisabnahmemodells

Bei Abnahme von nur 1 Palette kostet dies aktuell € 15.000, bei Abnahme von 2 Paletten muss man nur mehr € 14.000 pro Palette zahlen.

- Ermitteln Sie die Parameter a und b der Preisfunktion p_1 in Abhängigkeit von der Anzahl x der Paletten.
- Erklären Sie, warum bei diesem Preismodell das Preislimit von € 10.000 nicht unterschritten werden kann.
- Stellen Sie die dazugehörige Erlösfunktion E in Abhängigkeit von der Anzahl x der Paletten auf.

- b) Die Nachfragefunktion ist die Umkehrfunktion zur Preisfunktion.

- Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Nachfragefunktion n_2 als Umkehrfunktion der folgenden Preisfunktion p_2 :

$$p_2(x) = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot x}\right)$$

x ... Palettenanzahl

$p_2(x)$... Preis für x Paletten in €

- Erklären Sie den grafischen Zusammenhang zwischen den Graphen der Nachfragefunktion und der Preisfunktion.

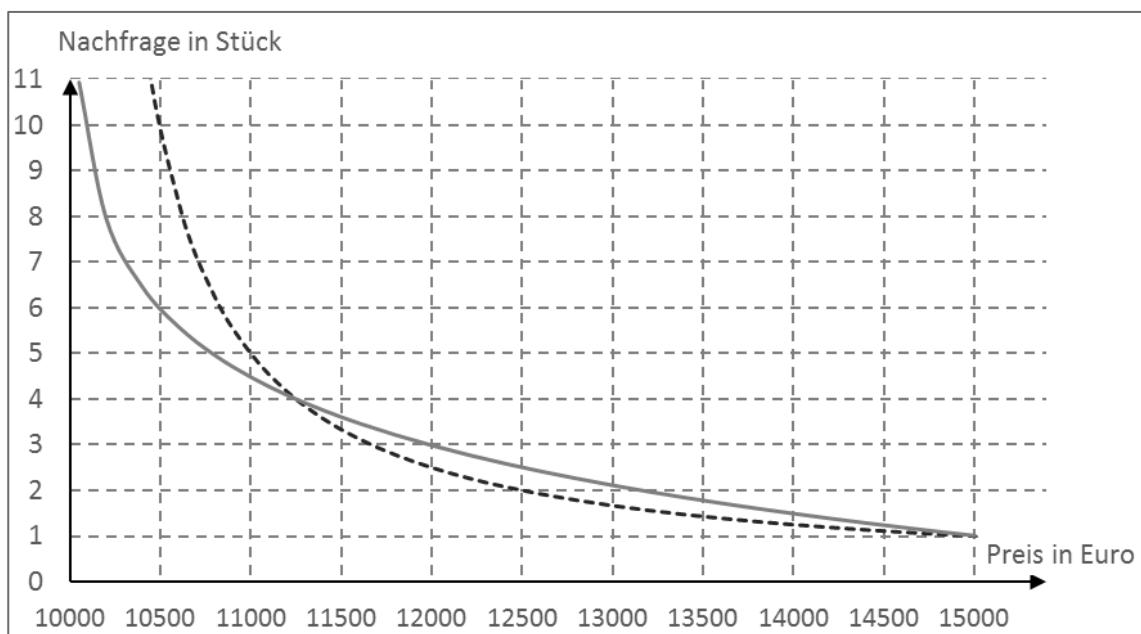
In der nachstehenden Abbildung sind folgende Funktionen grafisch dargestellt:

- die Nachfragefunktion n_2
- eine zweite Nachfragefunktion n_1 basierend auf dem Preisabnahmevermodell p_1 mit

$$p_1(x) = 10\,000 + 8\,000 \cdot e^{-0,464 \cdot x}$$

x ... Palettenanzahl

$p_1(x)$... Preis pro Palette für eine Abnahme von x Paletten in €



– Kennzeichnen Sie in der Grafik die beiden Nachfragefunktionen n_1 und n_2 .

- c) Die Produktionskosten für eine Abdeckfarbe sollen ermittelt werden. Die Produktionskosten pro Palette lassen sich mithilfe einer Polynomfunktion 3. Grades beschreiben, wobei gilt:

Die Kostenkehre (Wendestelle der Funktion) wird bei 24 Paletten erreicht.

Die Fixkosten betragen € 4.000.

Die Produktionskosten für 10 Paletten liegen bei € 9.311, für 20 Paletten bei € 13.688.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion auf.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) bei Abnahme von 1 Palette ... € 15.000 pro Palette: $p_1(1) = 15\,000$
 bei Abnahme von 2 Paletten ... € 14.000 pro Palette: $p_1(2) = 14\,000$

$$\Rightarrow 5\,000 = a \cdot e^{-b \cdot 1}$$

$$4\,000 = a \cdot e^{-b \cdot 2}$$

Lösen mittels Technologieeinsatz:

$$a = 6\,250$$

$$b = \ln\left(\frac{5}{4}\right) = 0,22314$$

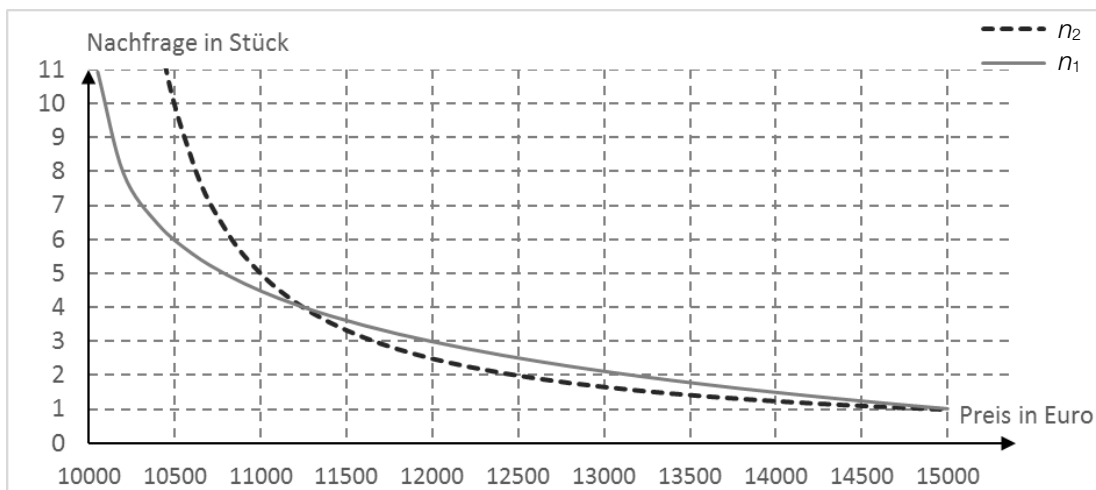
Der Ausdruck $a \cdot e^{-b \cdot x}$ strebt für wachsendes x gegen null, somit strebt der Preis

$$p_1(x) = 10\,000 + a \cdot e^{-b \cdot x} \text{ gegen } € 10.000.$$

$$E(x) = p_1(x) \cdot x = 10\,000 \cdot x + a \cdot x \cdot e^{-b \cdot x}$$

b) $n_2(p) = \frac{1}{\frac{p}{5000} - 2} = \frac{5\,000}{p - 10\,000}$

Der Graph der Umkehrfunktion n_2 ist die Spiegelung des Graphen der Funktion p_2 an der 1. Mediane.



- c) Ermittlung der Ableitungen:

$$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$$K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$$

$$K''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$$

Gleichungssystem:

Kostenkehre bei 24 Stück $K''(24) = 0$

Fixkosten € 4.000 $K(0) = 4\,000$

10 Stück Paletten kosten € 9.311. $K(10) = 9\,311$

20 Stück Paletten kosten € 13.688. $K(20) = 13\,688$

Klassifikation

☐ Teil A

☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) —
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren, A Modellieren und Transferieren
- b) C Interpretieren und Dokumentieren, B Operieren und Technologieeinsatz
- c) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 3
- c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —