Informelle Kompetenzmessung
zur standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reife- und Diplomprüfung

BHS

Februar 2016

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 3)

Korrekturheft

BMBF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Aufgabe 1

Vergnügungspark

Möglicher Lösungsweg

a) $4{,}1 = 9 - x^2$
$x^2 = 4{,}9$
$x = \pm 2{,}213\ldots$

Der Festwagen darf rund 4,42 m breit sein.

$\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\mathrm{d}x = 36$

Der Flächeninhalt der benötigten Folie beträgt 36 m².

b) Diese Polynomfunktion hat im dargestellten Intervall 2 lokale Extremstellen. Somit muss die 1. Ableitung dieser Funktion 2 Nullstellen haben, also mindestens eine Polynomfunktion 2. Grades sein. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Eine Gerade parallel zur *x*-Achse hat 3 Schnittpunkte mit dem Graphen der Funktion. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Der Graph ist keine Gerade und keine Parabel. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

c) rechtwinkeliges Dreieck *FPS*: $\tan(\beta) = \frac{\overline{SP}}{a} \Rightarrow \overline{SP} = a \cdot \tan(\beta)$

rechtwinkeliges Dreieck *FQS*: $\tan(\alpha) = \frac{\overline{SQ}}{a} \Rightarrow \overline{SQ} = a \cdot \tan(\alpha)$

$h = \overline{SP} - \overline{SQ}$
$h = a \cdot \tan(\beta) - a \cdot \tan(\alpha) = a \cdot (\tan(\beta) - \tan(\alpha))$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Breite *b*
1 × B2: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts
b) 1 × D: für eine richtige Erklärung
c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

Aufgabe 2

Luftdruck – Höhenformel

Möglicher Lösungsweg

a) $p(0) = p_0 \cdot e^{-\frac{0}{7\,991}} = p_0 \cdot 1 = p_0$

$\frac{p_0}{2} = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7\,991}}$

$h = 7\,991 \cdot \ln(2) = 5\,538{,}9\ldots$

Bei einer Seehöhe von rund 5 539 m beträgt der Luftdruck genau die Hälfte von p_0.

b) $f(h) = 1\,013 - \frac{1}{10} \cdot h$

c) Modellierung durch eine lineare Funktion g mit $g(x) = a \cdot x + b$:
$1\,040 = a \cdot 990 + b$
$930 = a \cdot 1\,980 + b$

$g(x) = -\frac{1}{9} \cdot x + 1\,150$

$g(1\,300) = \frac{9\,050}{9} \approx 1\,006$

Der Luftdruck in einer Höhe von 1 300 m über dem Meeresspiegel beträgt rund 1 006 hPa.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für einen richtigen Nachweis
1 × A: für den richtigen Lösungsansatz zur Berechnung
1 × B: für die richtige Berechnung der Seehöhe
b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktion
c) 1 × A: für einen richtigen Ansatz (z. B. mithilfe einer linearen Funktion bzw. ähnlicher Dreiecke)
1 × B: für die richtige Bestimmung des Luftdrucks

Aufgabe 3

Produktion von Rucksäcken

Möglicher Lösungsweg

a) Es wird die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis berechnet, dass ein zufällig kontrollierter Rucksack Nahtfehler, aber keine der beiden anderen Fehlerarten aufweist.

b) P(„mindestens 1 Fehler“) = 1 – P(„kein Fehler“) = $1 - 0{,}98 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}99 = 0{,}0589... \approx 5{,}9\,\%$

Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Rucksack mindestens 1 dieser 3 Fehler aufweist, muss bei der Verwendung der Gegenwahrscheinlichkeit nur 1 Ereignis, nämlich das Ereignis, dass kein Fehler auftritt, betrachtet werden.
Bei einer direkten Berechnung müssten die Wahrscheinlichkeiten für eine Vielzahl von Ereignissen berechnet und addiert werden.

c) Berechnung mittels Binomialverteilung: $n = 100$ und $p = 0{,}03$
$P(X < 3) = 0{,}41977\ldots \approx 41{,}98\,\%$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Angabe des Ereignisses (es muss auch klar erkennbar sein, dass die beiden anderen Fehlerarten nicht auftreten)
b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × D: für die richtige Erklärung zur Gegenwahrscheinlichkeit
c) 1 × A: für das Erkennen des richtigen Wahrscheinlichkeitsmodells (Binomialverteilung)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 4

Tennis

Möglicher Lösungsweg

a) Aufschlaggeschwindigkeit, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde: 120 km/h

Quartilsabstand: 30 km/h

b) ähnliche Dreiecke:

$$\frac{2{,}3}{6{,}4 + 6{,}4 + 5{,}5} = \frac{h}{6{,}4}$$

$h = 0{,}80\ldots \text{ m} \approx 0{,}8 \text{ m}$

Der Ball ist beim Netz in einer Höhe von rund 0,8 m.
Somit geht der Ball ins Netz.

c) $f'(0) = \frac{2}{5}$

$\arctan\left(\frac{2}{5}\right) = 21{,}801\ldots° \approx 21{,}80°$

Der Ball befindet sich im Abschlagpunkt in einer Höhe von $\frac{21}{50}$ Metern.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für das richtige Ablesen der Aufschlaggeschwindigkeit
1 × C2: für das richtige Ablesen des Quartilsabstands
b) 1 × D: für die richtige Überprüfung
c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Steigungswinkels
1 × C: für die richtige Interpretation der Zahl $\frac{21}{50}$

Aufgabe 5

Leistung einer Solaranlage

Möglicher Lösungsweg

a) $P'(6) = 0$

$$0 = \frac{7}{162} \cdot 6^3 - \frac{7}{9} \cdot 6^2 + 2 \cdot a \cdot 6$$

$$a = \frac{14}{9}$$

b) $\int_0^{12} (0{,}007 \cdot t^4 - 0{,}165 \cdot t^3 + 0{,}972 \cdot t^2 + 1{,}221)\,\mathrm{d}t = 67{,}5288$

Die Solaranlage liefert an diesem Tag rund 67,53 kWh Energie.

c) An der Wendestelle x_0 einer Funktion f gilt stets: $f''(x_0) = 0$.
Die 2. Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades ist eine lineare Funktion, die genau 1 Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat. Daher hat die Polynomfunktion 3. Grades genau 1 Wendestelle.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung des Koeffizienten *a*
1 × B: für die richtige Berechnung des Koeffizienten *a*
b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Integrals
c) 1 × D: für eine richtige Begründung

Aufgabe 6 (Teil B)

Riesenräder

Möglicher Lösungsweg

a) Durchmesser: $d = 121$ m

Aus der Periodendauer $T = 30$ min ergibt sich:
$\omega = \frac{2\pi}{30}\ \text{min}^{-1} \approx 0{,}21\ \text{min}^{-1}$

Verschiebung nach oben: $c = 74{,}5$ m

b) $60 = 30{,}48 \cdot \sin(0{,}02464 \cdot t) + 34{,}27$

$t_1 = 40{,}78\ldots\ \text{s} \approx 41\ \text{s}$
$t_2 = 86{,}71\ldots\ \text{s} \approx 87\ \text{s}$

$t_2 - t_1 \approx 46$ s

Die Gondel erreicht nach etwa 41 Sekunden erstmals 60 Meter und befindet sich rund 46 Sekunden lang in einer Höhe von mindestens 60 Metern.

c) Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ erhält man für die Zeitdauer einer Umdrehung: $T = 120$ s.
Umfang des Kreises: $u = 30\pi$ m

$v = \frac{30\pi}{120}\ \text{m/s} \approx 0{,}785\ \text{m/s} \approx 2{,}827\ \text{km/h}$

Da es 12 gleichmäßig verteilte Gondeln gibt, beträgt der Winkel zwischen je 2 benachbarten Gondeln 30°. φ wird gegen den Uhrzeigersinn von der „rechten horizontalen Lage“ aus gemessen. Der Winkel beträgt daher –30° bzw. 330°, im Bogenmaß also $-\frac{\pi}{6}$ bzw. $\frac{11\pi}{6}$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen des Durchmessers
1 × B1: für die richtige Ermittlung der Winkelgeschwindigkeit
1 × B2: für die richtige Ermittlung des Parameters c
b) 1 × B1: für die richtige Ermittlung des Zeitpunkts
1 × B2: für die richtige Bestimmung der Zeitdauer
c) 1 × A: für eine richtige Modellbildung zur Berechnung der Geschwindigkeit
1 × B: für die richtige Berechnung der Geschwindigkeit in km/h
1 × C: für die richtige Dokumentation zur Ermittlung des Parameters φ
(auch eine Beschreibung mit einem Winkel in Grad ist als richtig zu werten)

Aufgabe 7 (Teil B)

Länge eines Werkstücks

Möglicher Lösungsweg

a) Die Parameter sind: $\mu_{\bar{X}} = 72{,}3$ mm und $\sigma_{\bar{X}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{7}}$ mm.

Zweiseitigen 95-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:
$\mu \pm u_{0{,}975} \cdot \sigma_{\bar{X}}$
$u_{0{,}975} = 1{,}959\ldots$
Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich in mm: [71,9; 72,7].

Eine Halbierung der Breite erfordert die Vervierfachung des Stichprobenumfangs.

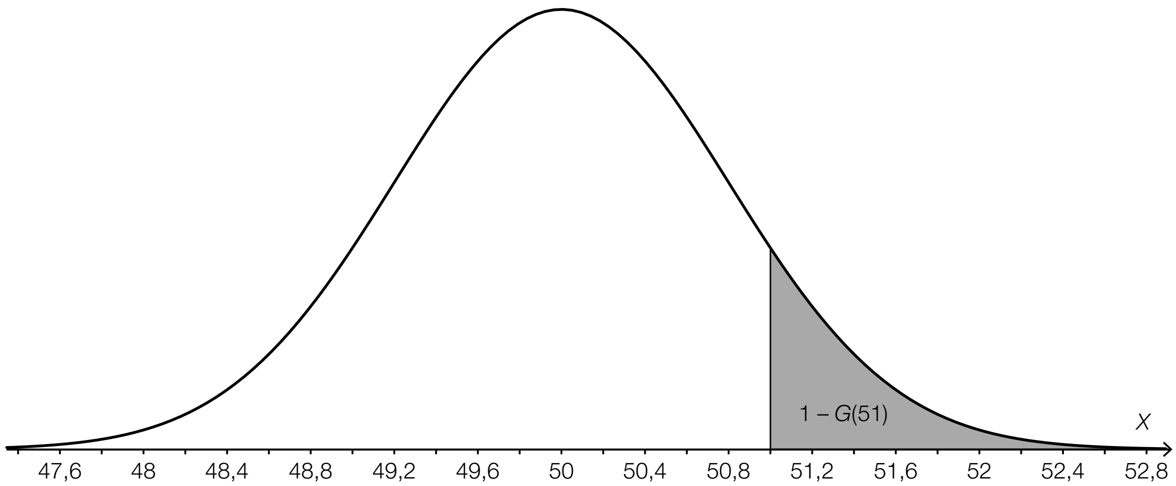
Die Standardabweichung der Stichprobe ist umso kleiner, je größer der Stichprobenumfang n ist. Daher ist der Graph der Dichtefunktion für $n = 7$ schmäler als für $n = 5$. Da der gesamte Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion immer 1 beträgt, muss das Maximum für $n = 7$ größer sein als für $n = 5$.

b) P(„Werkstück wird aussortiert“) $= 1 - P(71{,}4 \leq X \leq 73{,}2) = 0{,}0718\ldots \approx 7{,}2\ \%$

$\sigma = \frac{x_{\text{ob}} - \mu}{u_{0{,}99}} = \frac{73{,}2 - 72{,}3}{2{,}326\ldots} = 0{,}38\ldots \approx 0{,}4$
Damit der Ausschussanteil 2 % beträgt, müsste die Standardabweichung rund 0,4 mm sein.

c) Der gesamte Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion beträgt 1. Der Graph der Dichtefunktion ist symmetrisch bezüglich des Erwartungswerts μ.

Daher gilt: $G(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} g(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}5$.



$\sigma = 0{,}8$ mm
Toleranzbereich: [0,6; 1,0]

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die richtige Angabe der Parameter
   1 × B: für die richtige Berechnung des Zufallsstreubereichs
   1 × C: für eine richtige Beschreibung
   1 × D: für eine richtige Begründung
b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
   1 × B2: für die richtige Berechnung der Standardabweichung
c) 1 × D: für eine richtige Begründung
   1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit als Fläche
   1 × C: für das richtige Ablesen der Standardabweichung im Toleranzbereich [0,6; 1,0]

Aufgabe 8 (Teil B)

Wassergefäße

Möglicher Lösungsweg

a) Da der Punkt (0|0) auf dem Funktionsgraphen liegt, ist $c = 0$. Da der Graph symmetrisch bezüglich der y-Achse ist, muss $b = 0$ sein.

$$a \cdot 25^4 = 60 \;\Rightarrow\; a = \frac{12}{78\,125} = 0{,}0001536$$

b) Höhe des Gefäßes: $H = 0{,}0001421 \cdot 30^4 = 115{,}101$

$$V = \int_0^H \pi \cdot x^2 \,\mathrm{d}y = \int_0^H \pi \cdot \sqrt[2]{\frac{y}{0{,}0001421}} \,\mathrm{d}y = 216\,960{,}\ldots$$

$V \approx 216\,960 \text{ cm}^3 \approx 217$ Liter

Lösungsschlüssel

a) 1 × D1: für die richtige Begründung, warum $c = 0$ ist
1 × D2: für die richtige Begründung, warum $b = 0$ ist
1 × B: für die richtige Berechnung des Koeffizienten a

b) 1 × A1: für den richtigen Ansatz zur Berechnung des Volumens
1 × A2: für das richtige Angeben der Integralgrenzen
1 × B: für die richtige Berechnung des Volumens in Litern