Schadstoffausbreitung (2)*

Aufgabennummer: B_048

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Messstation registriert täglich zu einem bestimmten Zeitpunkt die Konzentration der von einer Fabrik emittierten Schadstoffe (in mg/m³). Es wird angenommen, dass diese Schadstoffkonzentrationen annähernd normalverteilt sind.

a) Es werden Messungen an 10 Tagen vorgenommen:

Schadstoffkonzentration in mg/m³	152	166	149	153	172	147	157	164	157	168

– Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\overline{x}$.
– Ermitteln Sie das 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ, wenn bekannt ist, dass die Standardabweichung σ = 8,5 mg/m³ beträgt.

b) Die Verteilung der Schadstoffkonzentration kann sowohl mithilfe der Dichtefunktion als auch mithilfe der Verteilungsfunktion der Normalverteilung beschrieben werden. In der nachstehenden Abbildung 1 ist der Graph der Dichtefunktion dargestellt.

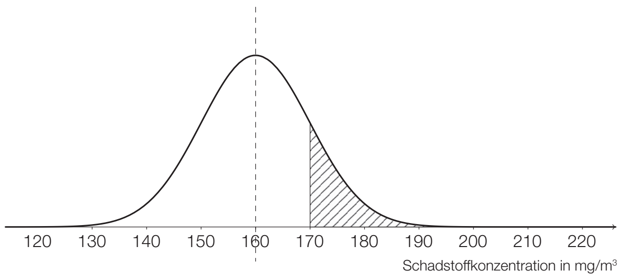


Abbildung 1

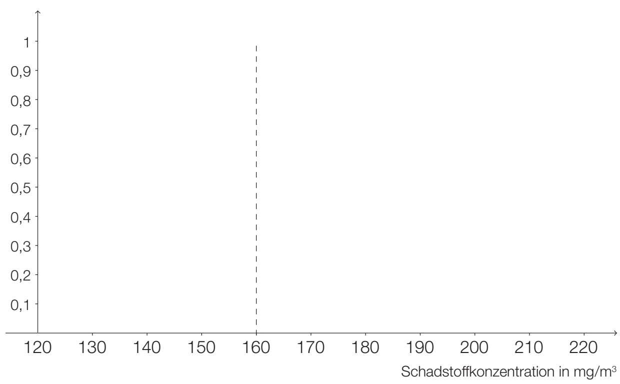


Abbildung 2

– Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion in Abbildung 2 ein.
– Veranschaulichen Sie die in Abbildung 1 schraffiert dargestellte Wahrscheinlichkeit in Abbildung 2.
– Erklären Sie den mathematischen Zusammenhang zwischen diesen beiden Funktionen.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Fabriksleitung geht vom Erwartungswert μ = 160 mg/m³ und von der Standardabweichung σ = 10 mg/m³ aus.

– Ermitteln Sie den symmetrisch um μ gelegenen Bereich, in den erwartungsgemäß 99 % aller Messwerte fallen (99-%-Zufallsstreubereich).
– Geben Sie an, wie sich die Breite dieses Zufallsstreubereichs verändert, wenn anstelle von 99 % nur noch 95 % aller Messwerte in diesen Bereich fallen sollen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\bar{x} = 158{,}5$ mg/m³

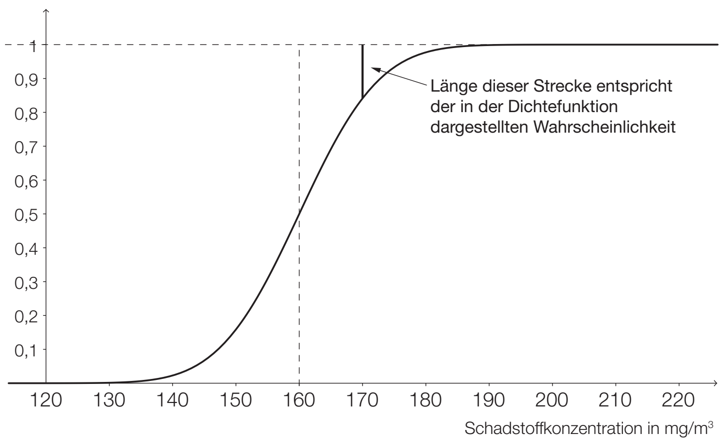
Zweiseitiges 95-%-Konfidenzintervall mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$\bar{x} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$n = 10$
$\alpha = 5\ \%$
$u_{0{,}975} = 1{,}959...$

Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall in mg/m³: $153{,}2 \leq \mu \leq 163{,}8$.

b)



Der Wert der Verteilungsfunktion an einer Stelle x ist das Integral der Dichtefunktion von $-\infty$ bis x.
Oder umgekehrt: Die Dichtefunktion ist die Ableitung der Verteilungsfunktion.

c) 99-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$\mu \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$
$\alpha = 1\ \%$
$u_{0{,}995} = 2{,}575...$

Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich in mg/m³: [134,2; 185,8].

Der 95-%-Zufallsstreubereich ist schmäler als der entsprechende 99-%-Zufallsstreubereich.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Stichprobenmittelwerts $\overline{x}$
   1 × A: für die Verwendung des richtigen Modells (Konfidenzintervall mithilfe der Normalverteilung)
   1 × B2: für die richtige Ermittlung des Konfidenzintervalls

b) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Verteilungsfunktion (eine qualitative Beschriftung der Ordinatenachse ist nicht notwendig)
   1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in Abbildung 2
   1 × D: für das richtige Erklären des mathematischen Zusammenhangs zwischen Dichtefunktion und Verteilungsfunktion

c) 1 × B: für die richtige Ermittlung des Zufallsstreubereichs
   1 × C: für die richtige Beschreibung der Veränderung der Breite des Zufallsstreubereichs