Herstellungskosten (2)

Aufgabennummer: B-C1_16

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für ein Produkt lautet die quadratische Kostenfunktion wie folgt:

$$K(x) = 0{,}1x^2 + 6x + 40$$

$K(x)$ … Gesamtkosten von x Mengeneinheiten in Geldeinheiten (GE)
x … erzeugte Menge in Mengeneinheiten (ME)

Der Betrieb erzeugt pro Tag höchstens 30 ME dieses Produkts.

a) – Interpretieren Sie die gegebene Kostenfunktion hinsichtlich der folgenden mathematischen Eigenschaften:
- sinnvoller Definitionsbereich
- Monotonie und Krümmungsverhalten
- Fixkosten

b) – Ermitteln Sie aus der gegebenen Gleichung, wie viele ME produziert wurden, wenn Kosten von 150 GE angefallen sind.
– Ermitteln Sie, wie hoch die Kosten für die Produktion von 10 ME sind.
– Stellen Sie die Kostenfunktion grafisch dar und zeichnen Sie die beiden berechneten Wertepaare ein.

c) – Stellen Sie die Stückkostenfunktion (= Durchschnittskostenfunktion) auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Halterungen für Glasfassaden

Aufgabennummer: B-C1_24

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Betrieb erzeugt Halterungen für Glasfassaden. Die monatlichen Produktionskosten für die Herstellung der Halterungen bis zu einer Grenze von $x = 5000$ Stück können durch folgende Funktion K beschrieben werden:

$$K(x) = 0{,}00001 \cdot x^3 - 0{,}025 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 3500$$

x … Stückzahl mit $0 \leq x \leq 5000$
$K(x)$ ... Produktionskosten in € für x Stück

a) Der Betrieb möchte die Produktionskosten pro Stück möglichst gering halten. Die Produktionskosten pro Stück bezeichnet man als Stückkosten.

– Stellen Sie die Stückkostenfunktion $\overline{K}$ auf.
– Bestimmen Sie den lokalen Extremwert der Stückkostenfunktion $\overline{K}$.
– Zeigen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass es sich bei diesem Extremum um ein lokales Minimum handelt.

b) Die Halterungen werden zu einem Preis von € 20 pro Stück verkauft.

– Stellen Sie die Gewinnfunktion G auf.
– Ermitteln Sie den Gewinnbereich.

c) Die Produktionskosten für ein anderes Produkt werden mit der Funktion K_1 beschrieben:

$$K_1(x) = 0{,}00001 \cdot x^3 - 0{,}055 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 3500 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 1000$$

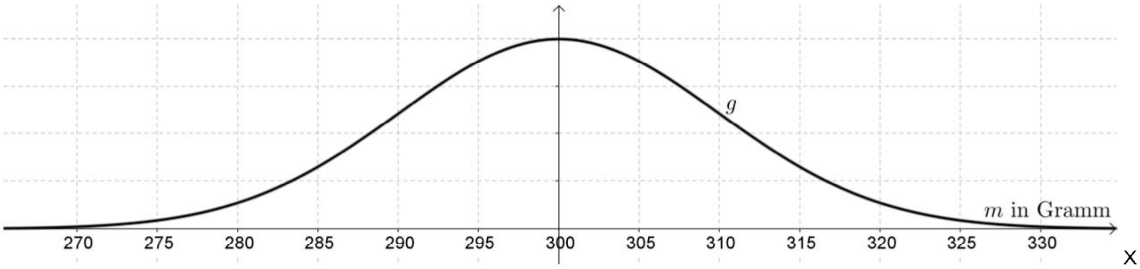
x … Stückzahl
$K_1(x)$ ... Produktionskosten in € für x Stück

– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion K_1.
– Argumentieren Sie, warum die Funktion K_1 als Kostenfunktion nicht in Frage kommt.

d) Ein Abnehmer bezieht die Halterung in sehr großer Stückzahl. Er nimmt die Lieferung an, wenn er bei einer Zufallsstichprobe von 50 Stück höchstens eine fehlerhafte Halterung findet. Die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Halterung in der gesamten Lieferung beträgt erfahrungsgemäß 2 %.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Lieferung.
– Begründen Sie die Verwendung der von Ihnen gewählten Wahrscheinlichkeitsverteilung.

e) Die Masse m der Halterung in Gramm ist annähernd normalverteilt. Die nachstehende Grafik stellt die Dichtefunktion g dar.



– Lesen Sie die Parameter μ und σ aus der gegebenen Grafik ab.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Schotterwerk (2)

Aufgabennummer: B-C3_21

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

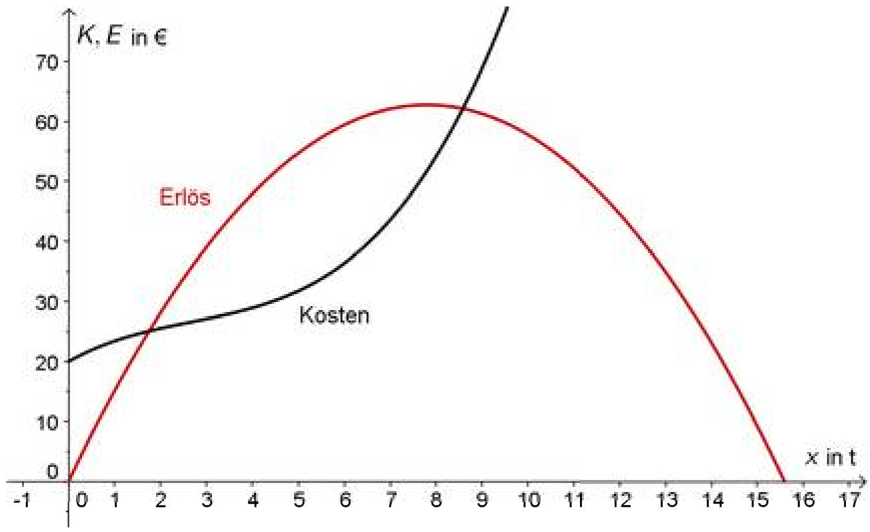
Ein Schotterwerk untersucht die Nachfrage nach Schotter sowie den möglichen Gewinn bei Schotter und Kies.

a) Die Nachfrage nach Schotter steigt durch Preissenkung nach der folgenden Tabelle:

x … Preisfunktion der Nachfrage in Tonnen (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_N … Preis in Euro/Tonne (€/t)	14,2	12,9	12,5	11,6	9,8	9	8,2	6,9	6,1	5,7

– Ermitteln Sie mithilfe der linearen Regression die Preisfunktion der Nachfrage, die den Preis p_N in Abhängigkeit von der nachgefragten Menge x angibt.
– Runden Sie die Parameter auf ganze Zahlen.

b) – Erstellen Sie anhand der Grafik aus den Informationen über Erlös E und Kosten K den Verlauf der Gewinnfunktion G für Schotter.
– Lesen Sie die ungefähren Werte für die Gewinngrenze und den maximalen Gewinn ab.



c) Die Nachfragefunktion für Kies lautet: $p_N(x) = -0{,}07x^2 + 16$.

$p_N(x)$ ... Nachfragepreis bei x Mengeneinheiten in Geldeinheiten (GE) bezogen auf eine Mengeneinheit (ME)
x ... nachgefragte Menge in Mengeneinheit (ME)

– Berechnen Sie die Erlösgrenzen und das Erlösmaximum. Runden Sie die Ergebnisse auf 2 Dezimalstellen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Sektkellerei (1)

Aufgabennummer: B-C6_15

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Sektkellerei erzeugt und vertreibt Sekt unterschiedlicher Marken.

x … Anzahl der produzierten oder verkauften Flaschen pro Tag
$K(x)$ … Gesamtkosten bei x Flaschen pro Tag in Euro (€)

a) Man ermittelt die gesamt anfallenden Produktionskosten in Abhängigkeit von den pro Tag abgefüllten Flaschen der Marke *Dom*.

x	0	100	200	300	400	500	600
$K(x)$	10000	12800	14800	16000	18000	19000	21600

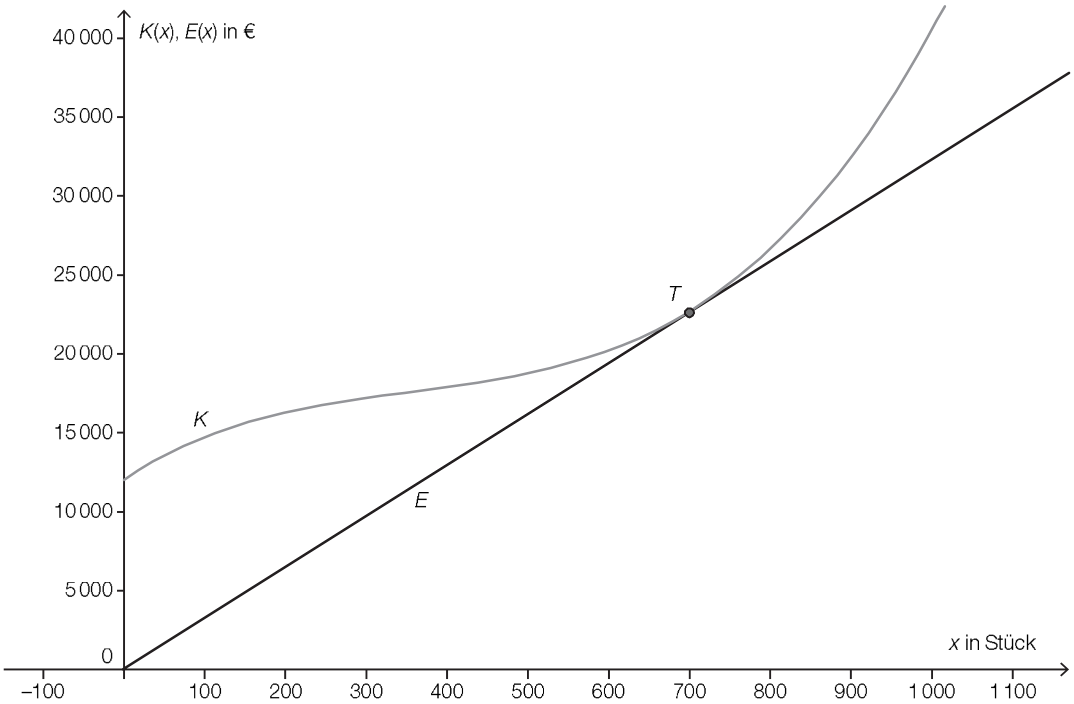
– Bestimmen Sie für diese Gesamtkosten mithilfe von Regression eine passende Polynomfunktion 3. Grades.
– Zeichnen Sie die gegebenen Punkte und den Graphen der Regressionslinie.
– Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung die Kostenkehre berechnen kann.

b) Die Kellerei verkauft täglich die Tagesproduktion der Sektmarke *Gold* zu € 40 pro Flasche. Die Kostenfunktion für diese Marke lautet:

$$K(x) = 7 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 0{,}07 \cdot x^2 + 30 \cdot x + 12000$$

– Berechnen Sie, wie viele Flaschen mindestens und wie viele höchstens pro Tag verkauft werden sollen, damit die Kellerei einen Gewinn macht.

c) Interpretieren Sie in der nachstehenden Grafik die Tangente an die Kostenfunktion K als lineare Erlösfunktion E.



– Lesen Sie den Anstieg der Tangente und die Koordinaten des Berührpunktes T ab.
– Interpretieren Sie die Aussage der Koordinaten von T und des abgelesenen Tangentenanstiegs im Sachzusammenhang.
– Argumentieren Sie, welche Informationen diese Grafik über den möglichen Gewinn enthält.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Pumpenproduktion

Aufgabennummer: B-C7_05

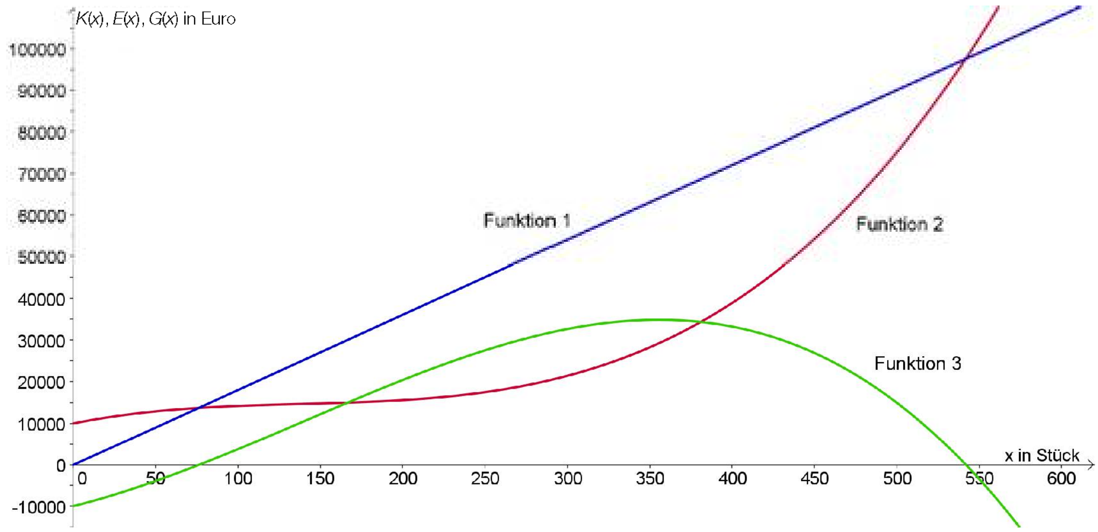
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei der Produktion von Schmutzwasserpumpen wird ein bestimmtes Modell hergestellt. Für die Kostenfunktion K bei der Herstellung dieses Modells gilt:

$$K(x) = 0{,}0012 \cdot x^3 - 0{,}5 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 10\,000$$

x … Stückzahl produzierter Schmutzwasserpumpen
$K(x)$ … Kosten bei der Produktion von x Schmutzwasserpumpen in Euro (€)

a) Die untenstehende Abbildung zeigt die Funktionsgraphen
- der Kostenfunktion K
- der Erlösfunktion E
- der Gewinnfunktion G



– Begründen Sie, warum der Graph von Funktion 3 den Verlauf der Gewinnfunktion beschreibt.

b) – Berechnen Sie den Kostenanstieg, wenn die Produktion von 100 auf 101 Stück erhöht wird.
– Berechnen Sie die Grenzkosten für 100 Stück mithilfe der Grenzkostenfunktion.
– Begründen Sie, warum die Ergebnisse dieser Berechnungen unterschiedlich sind.

c) Die Schmutzwasserpumpe werden zu einem Preis von € 200 pro Stück verkauft.

– Stellen Sie die Funktionsgleichung der Gewinnfunktion G auf.
– Berechnen Sie, bei wie vielen verkauften Schmutzwasserpumpen der Gewinn maximal ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.