Informelle Kompetenzmessung
zur standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reife- und Diplomprüfung

BHS

Februar 2016

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 6)
Prüfungsaufgabensammlung

BM|BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Handreichung für die Bearbeitung der SRDP in Angewandter Mathematik

- Jede Berechnung ist mit einem nachvollziehbaren Rechenansatz und einer nachvollziehbaren Dokumentation des Technologieeinsatzes (die verwendeten Ausgangsparameter und die verwendete Technologiefunktion müssen angegeben werden) durchzuführen.
- Selbst gewählte Variablen sind zu erklären und gegebenenfalls mit Einheiten zu benennen.
- Ergebnisse sind eindeutig hervorzuheben.
- Ergebnisse sind mit entsprechenden Einheiten anzugeben.
- Werden Diagramme oder Skizzen als Lösungen erstellt, so sind die Achsen zu skalieren und zu beschriften.
- Werden geometrische Skizzen erstellt, so sind die lösungsrelevanten Teile zu beschriften.
- Vermeiden Sie frühzeitiges Runden.
- Legen Sie allfällige Computerausdrucke der Lösung mit Ihrem Namen beschriftet bei.
- Wird eine Aufgabe mehrfach gerechnet, so sind alle Lösungswege bis auf einen zu streichen.

Erläuterung der Antwortformate

Die Teilaufgaben haben *offene Antwortformate*, *halboffene Antwortformate* oder *Konstruktionsformate*.

Offenes Antwortformat: Hierbei kann die Bearbeitung der Aufgaben auf unterschiedliche Weise erfolgen, z. B. durch eine Berechnung, durch Erstellung einer Grafik etc.

Halboffenes Antwortformat: Ein Teil der Antwort ist vorgegeben, der fehlende Teil soll ergänzt werden (Formel, Funktion etc.).

Beispiel:

Gegeben ist ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A dieses Rechtecks.

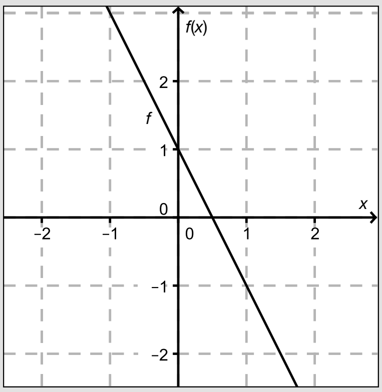
$A = a \cdot b$

Konstruktionsformat: Ein Diagramm oder eine Grafik ist vorgegeben. Die Aufgabenstellung erfordert die Ergänzung von Punkten und/oder Geraden und/oder Kurven und/oder Skalierungen bzw. Achsenbeschriftungen im Diagramm bzw. in der Grafik.

Beispiel:

Gegeben ist eine lineare Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$.

– Zeichnen Sie den Graphen einer linearen Funktion mit $k = -2$ und $d > 0$ im nachstehenden Koordinatensystem ein.



Viel Erfolg!

Aufgabe 1

Vergnügungspark

Ein kürzlich eröffneter Vergnügungspark ist ein beliebtes Ausflugsziel in der Region.

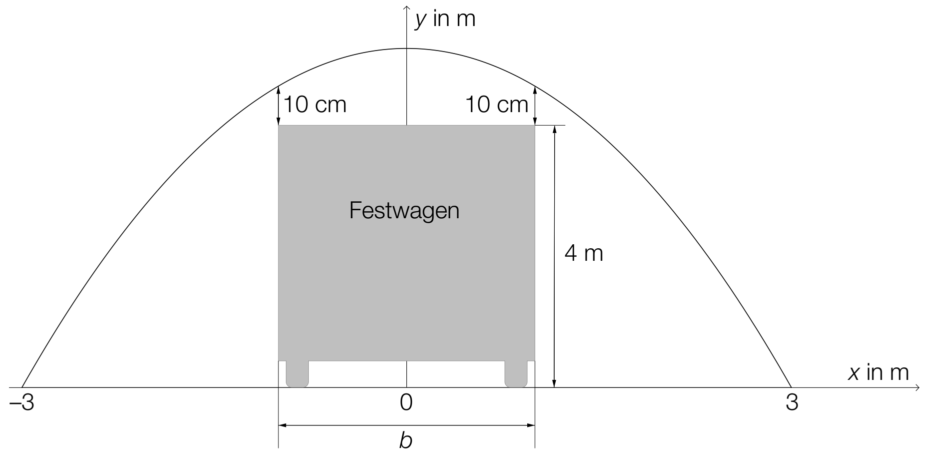
a) Beim Eingang zum Vergnügnungspark steht ein Torbogen. Dieser wird durch einen Teil des Graphen der Funktion mit folgender Gleichung beschrieben:

$y = 9 - x^2$

x, y ... Koordinaten in Metern (m)

Dabei wird der ebene Boden durch die x-Achse beschrieben.

Bei einer Parade muss ein 4 Meter hoher Festwagen durch den Torbogen geschoben werden. Nach oben hin muss ein senkrechter Minimalabstand von 10 cm eingehalten werden (siehe Skizze – nicht maßstabgetreu).

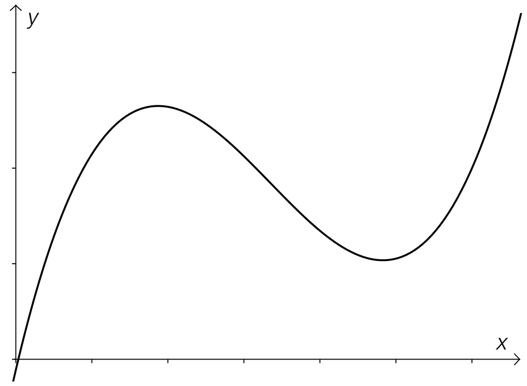


– Berechnen Sie, welche Breite b der Festwagen maximal haben darf. *[1 Punkt]*

Vor der Parade wird das Tor mit einer Folie verschlossen.

– Berechnen Sie den Flächeninhalt der dazu benötigten Folie. *[1 Punkt]*

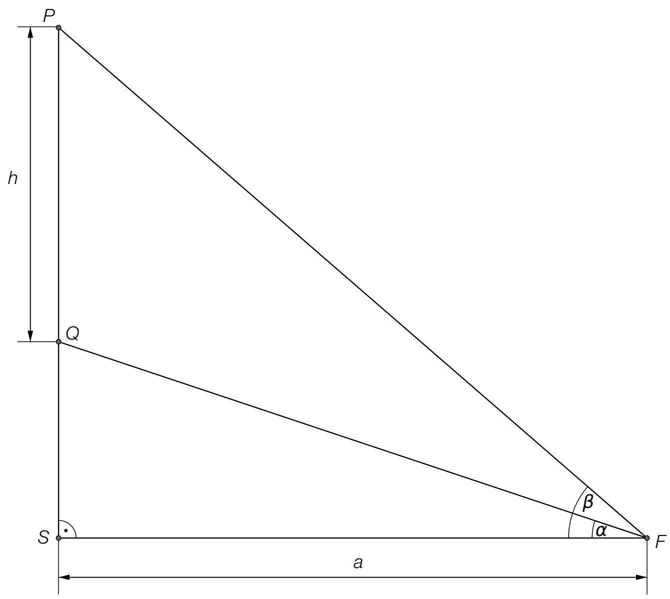
b) Eine der Hauptattraktionen ist die Hochschaubahn. Ein Teilstück kann durch die Polynomfunktion modelliert werden, deren Graph in der folgenden Abbildung zu sehen ist:



– Erklären Sie, welchen Grad diese Polynomfunktion mindestens haben muss. *[1 Punkt]*

c) Im Vergnügungspark gibt es ein Kino.

Fiona sitzt a Meter von der Leinwand entfernt (Punkt F). Der Höhenwinkel zum unteren Ende der Leinwand (Punkt Q) wird mit α bezeichnet, der Höhenwinkel zum oberen Ende der Leinwand (Punkt P) wird mit β bezeichnet.



– Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung der Höhe h der Leinwand aus a, α und β.

h = ____ *[1 Punkt]*

Aufgabe 2

Luftdruck – Höhenformel

Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe über dem Meeresspiegel (Seehöhe) ab. Der Zusammenhang kann durch Exponentialfunktionen oder näherungsweise durch lineare Funktionen beschrieben werden.

a) Ein Modell zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen der Höhe über dem Meeresspiegel und dem Luftdruck ist die *barometrische Höhenformel*:

$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7991}}$

h ... Höhe über dem Meeresspiegel in Metern (m)
$p(h)$ ... Luftdruck in der Höhe h in Hektopascal (hPa)

– Zeigen Sie, dass p_0 der Luftdruck auf der Höhe des Meeresspiegels ist. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie diejenige Seehöhe, bei der der Luftdruck genau die Hälfte von p_0 beträgt. *[2 Punkte]*

b) Ein vereinfachtes Modell des Zusammenhangs zwischen der Höhe über dem Meeresspiegel und dem Luftdruck nimmt eine konstante Abnahme des Luftdrucks um 10 hPa pro 100 Höhenmeter an. Der Luftdruck auf Höhe des Meeresspiegels beträgt rund 1013 hPa.

Verwenden Sie die folgenden Bezeichnungen:

h ... Höhe über dem Meeresspiegel in m
$f(h)$ ... Luftdruck in der Höhe h in hPa

– Stellen Sie die Gleichung der Funktion f auf, die diesen Zusammenhang im vereinfachten Modell beschreibt. *[1 Punkt]*

c) Zu Beginn des Jahres 2013 wurden im Schigebiet Kaprun-Kitzsteinhorn folgende Werte für den Luftdruck gemessen:

Seehöhe	Luftdruck
990 m	1040 hPa
1980 m	930 hPa

– Bestimmen Sie mithilfe eines linearen Modells aus diesen Daten den Luftdruck in einer Höhe von 1300 m über dem Meeresspiegel. *[2 Punkte]*

Aufgabe 3

Produktion von Rucksäcken

Bei der Produktion von Rucksäcken treten erfahrungsgemäß 3 verschiedene Fehlerarten unabhängig voneinander auf.

P(„Nahtfehler“) = 2 %

P(„Reißverschlussdefekt“) = 3 %

P(„Farbfehler“) = 1 %

a) Ein Rucksack wird zufällig ausgewählt und überprüft. Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E wird mit $P(E) = 0{,}02 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}99$ berechnet.

– Geben Sie ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit so berechnet wird. *[1 Punkt]*

b) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Rucksack mindestens 1 dieser 3 Fehlerarten aufweist. *[1 Punkt]*
– Erklären Sie, warum die Berechnung mittels Gegenwahrscheinlichkeit hier weniger aufwendig ist. *[1 Punkt]*

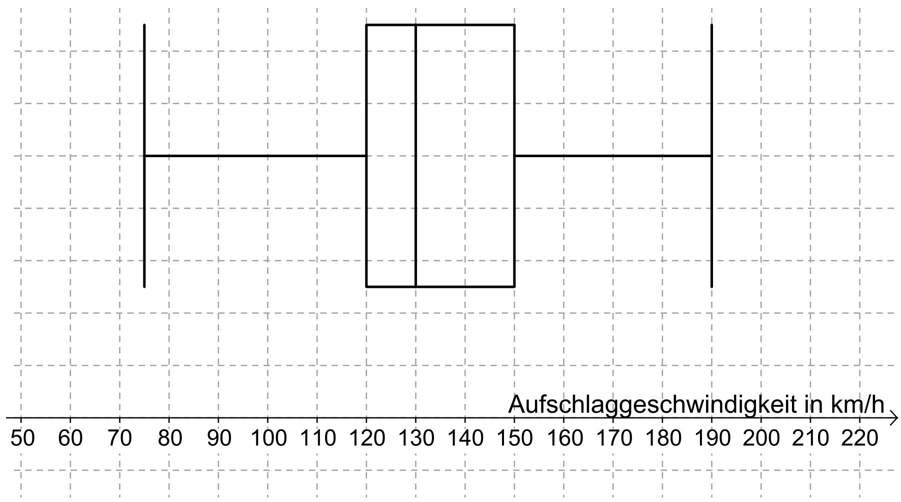
c) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Zufallsstichprobe von 100 Stück weniger als 3 Rucksäcke mit Reißverschlussdefekt vorhanden sind. *[2 Punkte]*

Aufgabe 4

Tennis

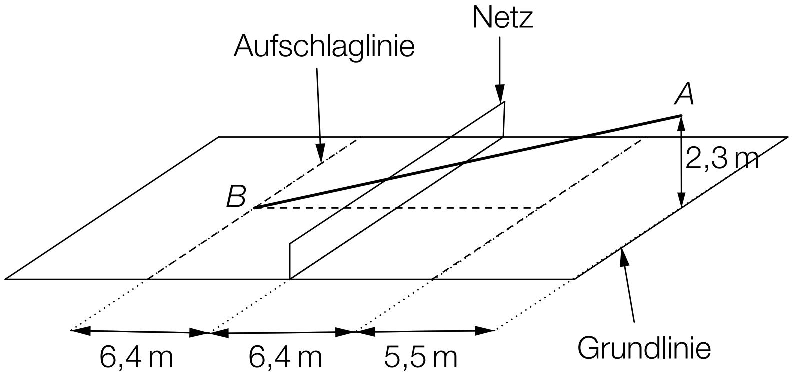
Im Rahmen der Nachwuchsförderung wurden die Leistungen der Teilnehmer eines Knaben-Tennisturniers genauer beobachtet.

a) Für die Auswertung der Daten der Aufschlaggeschwindigkeit der Teilnehmer wurde der nachstehende Boxplot erstellt.



– Lesen Sie diejenige Aufschlaggeschwindigkeit ab, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde. *[1 Punkt]*
– Lesen Sie den Quartilsabstand ab. *[1 Punkt]*

b) Ein Spieler trifft beim Aufschlag den Ball in einer Höhe von 2,3 m im Punkt *A* genau über der Mitte der Grundlinie. Er visiert den Punkt *B* (Mitte der Aufschlaglinie) an. Um nicht ins Netz zu gehen, muss der Ball das Netz in einer Höhe von mindestens 1 Meter (über dem Boden) überqueren.
Die Flugbahn des Tennisballes beim Aufschlag kann modellhaft mittels einer Gerade beschrieben werden.



– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Ball bei diesem Aufschlag über das Netz geht. *[1 Punkt]*

c) Mithilfe einer Videoanalyse wird ein Grundlinienschlag modelliert.
Die Flugbahn zwischen dem Abschlagpunkt und dem Punkt, in dem der Ball auf dem Boden aufkommt, kann durch die Funktion f beschrieben werden:

$$f(x) = -\frac{1}{50} \cdot x^2 + \frac{2}{5} \cdot x + \frac{21}{50} \text{ mit } x \geq 0$$

x ... horizontale Entfernung zum Abschlagpunkt in Metern (m)
$f(x)$ ... Höhe des Balles an der Stelle x über dem Boden in m

– Berechnen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn im Abschlagpunkt. *[1 Punkt]*
– Interpretieren Sie die Bedeutung der obigen Zahl $\frac{21}{50}$ für die Flugbahn. *[1 Punkt]*

Aufgabe 5

Leistung einer Solaranlage

a) Die Leistung einer Solaranlage lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion P beschreiben:

$$P(t) = \frac{7}{648} \cdot t^4 - \frac{7}{27} \cdot t^3 + a \cdot t^2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 12$$

t ... Zeit in Stunden (h), wobei $t = 0$ der Uhrzeit 7 Uhr entspricht
$P(t)$ ... Leistung zur Zeit t in Kilowatt (kW)

Die Leistung ist um 13 Uhr am höchsten.

– Berechnen Sie den Koeffizienten a. *[2 Punkte]*

b) Eine andere Solaranlage wird an einem bestimmten Tag von 7 Uhr bis 19 Uhr betrieben und ihre Leistung durch die Funktion P beschrieben, wobei gilt:

$$P(t) = 0{,}007 \cdot t^4 - 0{,}165 \cdot t^3 + 0{,}972 \cdot t^2 + 1{,}221 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 12$$

t ... Zeit in Stunden (h), wobei $t = 0$ der Uhrzeit 7 Uhr entspricht
$P(t)$ ... Leistung der Solaranlage zur Zeit t in kW

Die in einem Zeitintervall von der Solaranlage gelieferte Energie wird mithilfe des Integrals der Leistung in diesem Zeitintervall berechnet.

– Berechnen Sie die an diesem Tag von der Solaranlage gelieferte Energie. *[1 Punkt]*

c) – Begründen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, warum eine Polynomfunktion 3. Grades genau 1 Wendestelle hat. *[1 Punkt]*

Aufgabe 6 (Teil B)

LED-Lampen

Traditionelle Glühlampen wurden wegen ihrer geringen Energieeffizienz in der EU schrittweise verboten. Als Alternative zu den Glühlampen bieten Hersteller LED-Lampen an.

a) LED-Lampen sind derzeit wesentlich teurer als Glühlampen, zeichnen sich aber durch eine höhere Lebensdauer und durch eine höhere Energieeffizienz aus.

Für eine Lampe, die 1000 Stunden pro Jahr in Betrieb ist, kann als Leuchtmittel eine Glühlampe oder eine LED-Lampe verwendet werden. Um die dabei anfallenden Kosten zu vergleichen, werden die folgenden Daten benötigt:

	Glühlampe	LED-Lampe
Preis pro Stück	€ 0,75	€ 15,00
Lebensdauer	1 Jahr	25 Jahre
Energiekosten pro Jahr	€ 5	€ 0,60

– Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle für diesen Kostenvergleich. *[1 Punkt]*

Verwendungsdauer in Jahren	insgesamt angefallene Kosten bei der Verwendung …	
	von Glühlampen	einer LED-Lampe
1		
2		
3		
4		
5		

– Lesen Sie aus dieser Tabelle ab, nach wie vielen ganzen Jahren die insgesamt angefallenen Kosten bei der Verwendung einer LED-Lampe erstmals geringer sind als bei der Verwendung von Glühlampen. *[1 Punkt]*

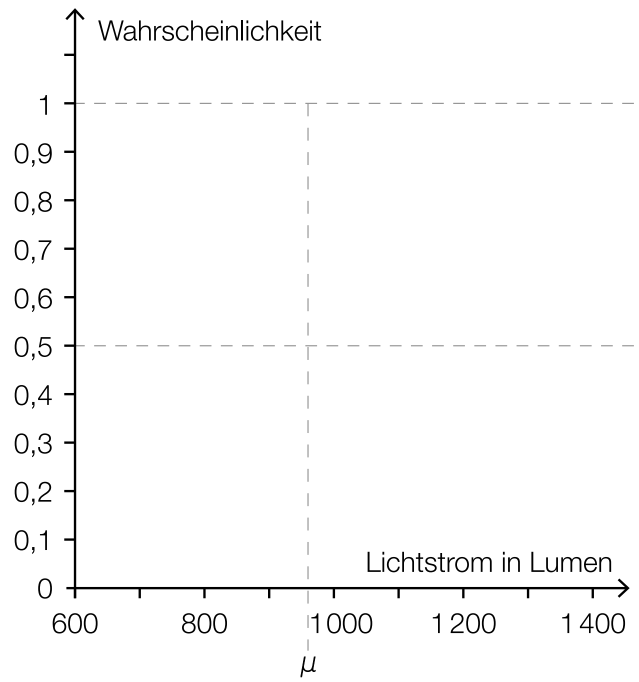
b) Die Helligkeit einer LED-Lampe kann mithilfe des Lichtstroms beschrieben werden.
In der nachstehenden Tabelle ist für LED-Lampen mit verschiedenem Lichtstrom der jeweilige Preis angegeben.

Lichtstrom in Lumen	136	300	400	600	800
Preis in Euro/Stück	6,00	9,90	9,99	16,50	23,40

– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. (Der Preis soll in Abhängigkeit vom Lichtstrom beschrieben werden.) *[1 Punkt]*
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser linearen Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion denjenigen Preis, der für eine LED-Lampe mit einem Lichtstrom von 500 Lumen zu erwarten ist. *[1 Punkt]*

c) Laut einem Ratgeber für LED-Lampen kann der Lichtstrom von 12-Watt-LED-Lampen als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 960$ Lumen und der Standardabweichung $\sigma = 92$ Lumen angenommen werden.

– Berechnen Sie dasjenige symmetrische Intervall um μ, in dem der Lichtstrom einer zufällig ausgewählten 12-Watt-LED-Lampe mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt. *[1 Punkt]*
– Skizzieren Sie den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion in der nachstehenden Abbildung. *[1 Punkt]*



– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte 12-Watt-LED-Lampe einen Lichtstrom von bis zu 900 Lumen hat. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Grenzkosten

Ein Betrieb erhebt die Grenzkosten für unterschiedliche Produkte.

a) Für eine quadratische Grenzkostenfunktion K' mit $K'(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ergeben sich folgende Zusammenhänge:

Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)	20	50	60
Grenzkosten in Geldeinheiten/Mengeneinheit (GE/ME)	1060	7120	10340

– Interpretieren Sie den Grenzkostenwert 1060 im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*
– Stellen Sie die Funktionsgleichung dieser Grenzkostenfunktion auf. *[1 Punkt]*

b) Für die Grenzkostenfunktion K' eines anderen Produkts gilt:

$K'(x) = 0{,}3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 15$

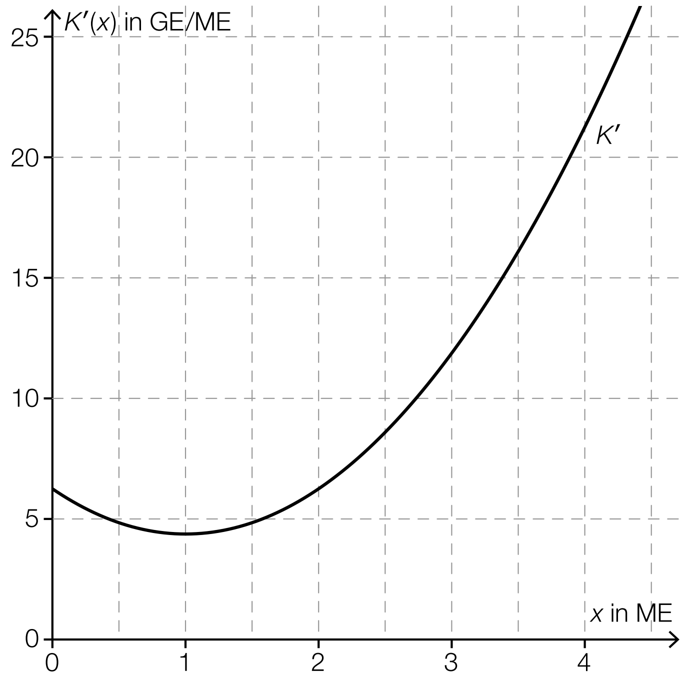
x … Anzahl der produzierten ME
$K'(x)$ … Grenzkosten bei x ME in GE/ME

– Berechnen Sie die Kostenkehre. *[1 Punkt]*

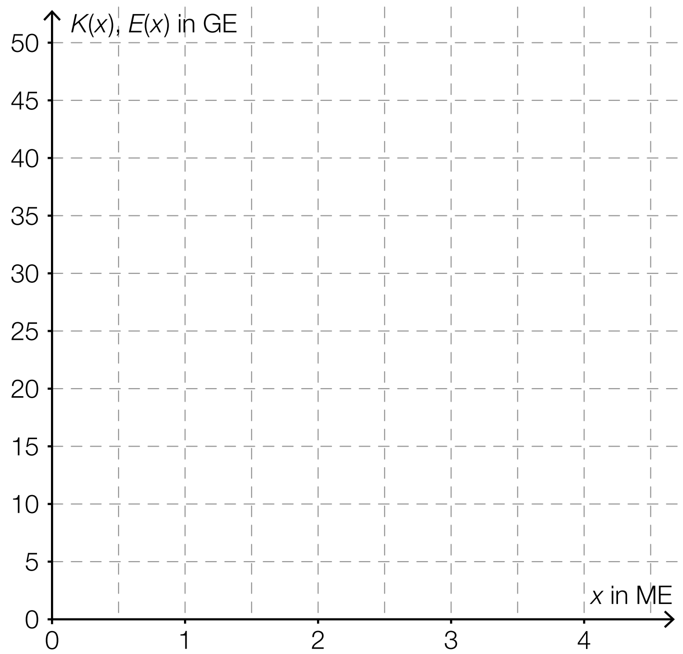
Bei einer Produktionsmenge von 35 ME betragen die Gesamtkosten 2372,50 GE.

– Berechnen Sie die zugehörige Kostenfunktion K. *[2 Punkte]*

c) Ein Produkt wird zu einem konstanten Preis von 10 GE/ME abgesetzt. Die Fixkosten betragen 5 GE. Die obere Gewinngrenze beträgt 4 ME.
Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der quadratischen Grenzkostenfunktion K' dieses Produkts.



– Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der zugehörigen Erlösfunktion E im Intervall [0; 4] in der unten stehenden Abbildung ein. *[1 Punkt]*
– Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der zugehörigen Kostenfunktion K im Intervall [0; 4] in der unten stehenden Abbildung ein. *[2 Punkte]*



Aufgabe 8 (Teil B)

Konditorei

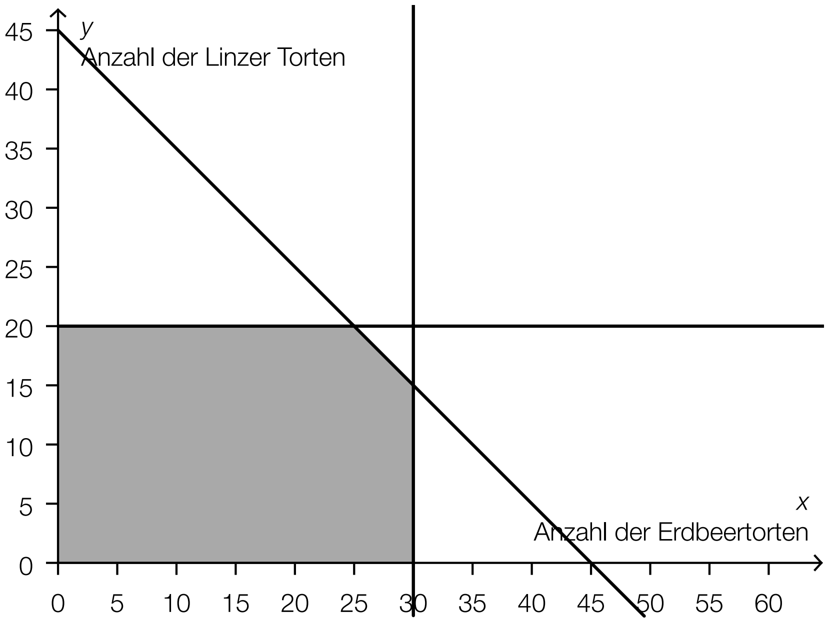
a) In einer Konditorei können täglich höchstens 10 Sachertorten und höchstens 25 Topfentorten hergestellt werden. Es werden täglich mindestens doppelt so viele Topfentorten wie Sachertorten hergestellt.

– Übertragen Sie diesen Sachverhalt in ein lineares Ungleichungssystem. *[2 Punkte]*

b) Die Fertigungskosten für eine Sachertorte betragen € 10,50, jene für eine Topfentorte € 8,00. Der Verkaufspreis für eine Sachertorte beträgt € 34,00, jener für eine Topfentorte € 26,00. Es werden x Sachertorten und y Topfentorten verkauft.

– Stellen Sie die Gleichung der Zielfunktion zur Beschreibung des Gewinns auf. *[1 Punkt]*

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die tägliche Produktion von Erdbeertorten und Linzer Torten dargestellt.



– Lesen Sie aus der obigen Abbildung die 5 Ungleichungen ab, die den Lösungsbereich beschreiben. *[2 Punkte]*

Die Zielfunktion Z beschreibt den täglichen Gewinn beim Verkauf von x Erdbeertorten und y Linzer Torten in Euro:

$Z(x, y) = 25 \cdot x + 20 \cdot y$

x ... Anzahl der verkauften Erdbeertorten
y ... Anzahl der verkauften Linzer Torten

– Zeichnen Sie diejenige Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in der obigen Abbildung ein. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie den maximalen Gewinn. *[1 Punkt]*