Schadstoffausbreitung (1)*

Aufgabennummer: B-C1_38

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Messstation registriert täglich zu einem bestimmten Zeitpunkt die Konzentration der von einer Fabrik emittierten Schadstoffe (in mg/m³). Es wird angenommen, dass diese Schadstoffkonzentrationen annähernd normalverteilt sind.

a) Es werden Messungen an 10 Tagen vorgenommen:

Schadstoffkonzentration in mg/m³	152	166	149	153	172	147	157	164	157	168

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel und den Median.
– Erklären Sie den Unterschied dieser Mittelwerte hinsichtlich des Einflusses von Ausreißerwerten.

b) Die Verteilung der Schadstoffkonzentration kann sowohl mithilfe der Dichtefunktion als auch mithilfe der Verteilungsfunktion der Normalverteilung beschrieben werden. In der nachstehenden Abbildung 1 ist der Graph der Dichtefunktion dargestellt.

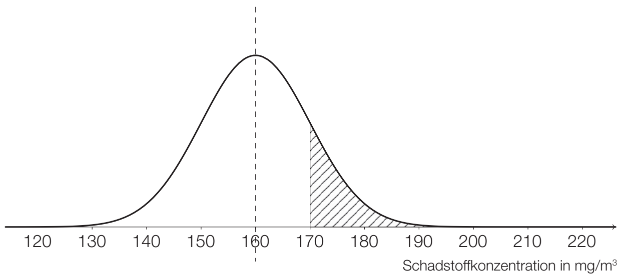


Abbildung 1

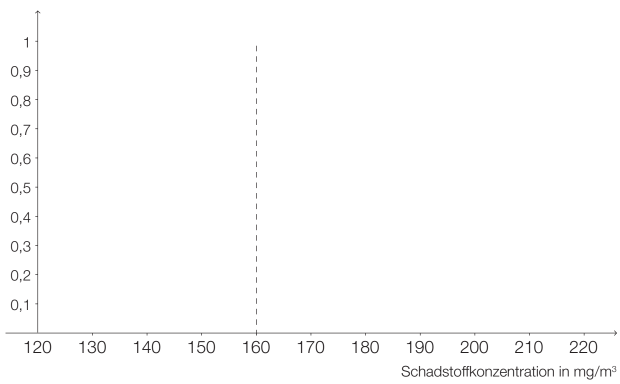


Abbildung 2

– Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion in Abbildung 2 ein.
– Veranschaulichen Sie die in Abbildung 1 schraffiert dargestellte Wahrscheinlichkeit in Abbildung 2.
– Erklären Sie den mathematischen Zusammenhang zwischen diesen beiden Funktionen.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Fabriksleitung geht vom Erwartungswert μ = 160 mg/m³ und von der Standardabweichung σ = 10 mg/m³ aus.

– Ermitteln Sie den symmetrisch um μ gelegenen Bereich, in den erwartungsgemäß 99 % aller Messwerte fallen (99-%-Zufallsstreubereich).
– Geben Sie an, wie sich die Breite dieses Zufallsstreubereichs verändert, wenn anstelle von 99 % nur noch 95 % aller Messwerte in diesen Bereich fallen sollen.

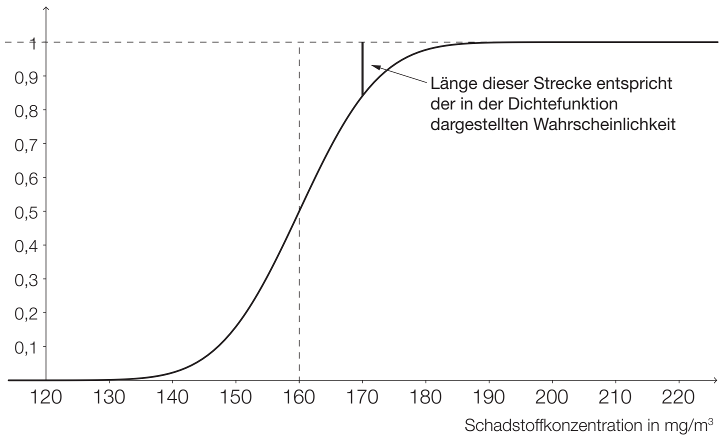
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
arithmetisches Mittel: 158,5 mg/m³
Median: 157 mg/m³

Das arithmetische Mittel reagiert sehr empfindlich auf Ausreißerwerte. Der Median erweist sich gegenüber Ausreißern als robust.

b)



Der Wert der Verteilungsfunktion an einer Stelle x ist das Integral der Dichtefunktion von $-\infty$ bis x.
Oder umgekehrt: Die Dichtefunktion ist die Ableitung der Verteilungsfunktion.

c) 99-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$\mu \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$

$\alpha = 1~\%$

$u_{0,995} = 2{,}575...$

Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich in mg/m³: [134,2; 185,8].

Der 95-%-Zufallsstreubereich ist schmäler als der entsprechende 99-%-Zufallsstreubereich.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des arithmetischen Mittels und des Medians
   1 × D: für die richtige Erklärung des Einflusses von Ausreißerwerten

b) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Verteilungsfunktion (eine qualitative Beschriftung der Ordinatenachse ist nicht notwendig)
   1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in Abbildung 2
   1 × D: für das richtige Erklären des mathematischen Zusammenhangs zwischen Dichtefunktion und Verteilungsfunktion

c) 1 × B: für die richtige Ermittlung des Zufallsstreubereichs
   1 × C: für die richtige Beschreibung der Veränderung der Breite des Zufallsstreubereichs