Spiegelung an einer Geraden

Aufgabennummer: B_084

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Es soll ein Applet zur Spiegelung eines Punktes an einer Geraden für eine Übungswebsite programmiert werden.

a) Das einfachste Grundproblem beim Spiegeln von Objekten ist die Spiegelung eines Punktes an einem anderen Punkt.
- Erklären Sie anhand einer Skizze ohne zu rechnen die Vorgangsweise, wie man die Koordinaten des gespiegelten Punktes A' erhält, wenn ein beliebiger gegebener Punkt A an einem ebenfalls gegebenen Punkt S gespiegelt wird.
- Stellen Sie eine allgemeine Formel für die Berechnung der Koordinaten von A' auf.

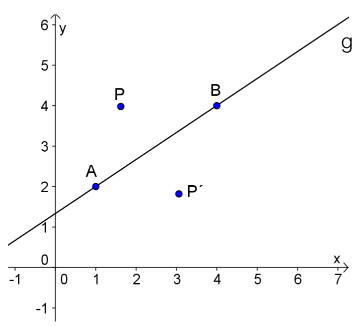
b) Ein Punkt $A = (x|y)$ soll an der Gerade $y = -x + 2$ gespiegelt werden.
- Stellen Sie diejenige Matrix auf, mit der man die Koordinaten des gespiegelten Punktes (= Bildpunktes) berechnen kann. (Verwenden Sie homogene Koordinaten.)

c) Die Spiegelung an der Geraden $y = x + 1$ kann unter Verwendung von homogenen Koordinaten durch folgende Matrix beschrieben werden:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie mithilfe der gegebenen Matrix die Bildpunkte zu den Punkten $A = (2{,}6|3{,}6)$; $B = (-1{,}6|1{,}9)$; $C = (-5|4{,}8)$; $D = (-4{,}6|0{,}3)$; $E = (-8{,}4|-2)$; $F = (-4|-3)$.
- Stellen Sie alle Punkte und Bildpunkte in einem Koordinatensystem grafisch dar.
- Verbinden Sie die Punkte in der Reihenfolge $ABCDEFE_1D_1C_1B_1A_1$.
- Beschreiben Sie die entstehende geometrische Figur in Worten.

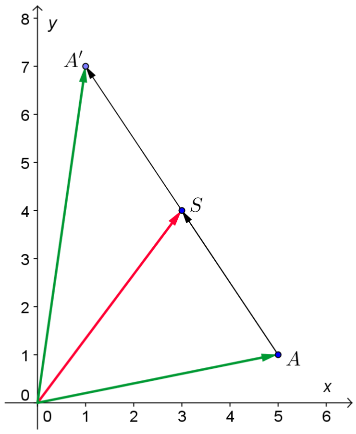
d) Ein Punkt $P = (2|4)$ wurde an der durch $A = (1|2)$ und $B = (4|4)$ verlaufenden Geraden g gespiegelt. Dabei ist der Punkt $P' = (3{,}23|2{,}15)$ entstanden.
- Geben Sie eine Formel an, mit der der Winkel $\angle PAP'$ mithilfe der Vektorrechnung berechnet werden kann.
- Ermitteln Sie den Winkel $\angle PAP'$.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Um die Arbeitsschritte erklären zu können, zeichnet man am besten eine Handskizze (nicht unbedingt notwendig).



Arbeitsschritte:
1. Ortsvektor des Spiegelpunktes S und des Punktes A ermitteln.
2. Der Ortsvektor für A' erlaubt die Bestimmung der Koordinaten des gespiegelten Punktes: $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AS}$.

b) Vorgangsweise:
1. Schritt = verschieben des Koordinatensystems, so dass die Spiegelungsachse durch den Koordinatenursprung geht
2. Schritt = Drehung um den Winkel arctan(–1) = $-\frac{\pi}{4}$, so dass die Spiegelungsachse mit der x-Achse zusammenfällt
3. Schritt = Spiegelung an der x-Achse
4. Schritt = zurückdrehen, so dass die Spiegelungsachse den ursprünglichen Winkel hat
5. Schritt = zurückverschieben, so dass die Spiegelungsachse an der ursprünglichen Stelle liegt

Zugehörige Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation der obigen Matrizen liefert die gesuchte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

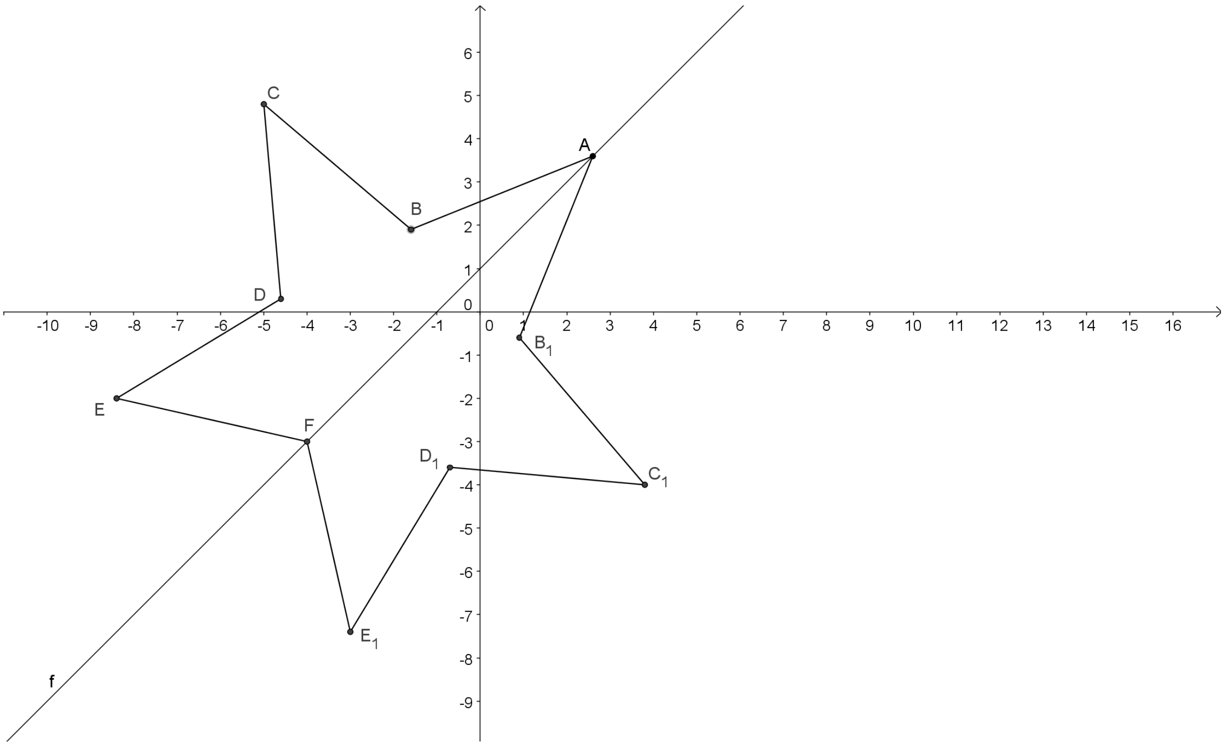
c) Man muss die Matrix mit den gegebenen Punkten multiplizieren. Dazu muss man die Punkte mithilfe von homogenen Koordinaten darstellen (letzte Koordinate ist immer eine 1).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1,6 \\ 1,9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \\ -0,6 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_1 = (0,9 \mid -0,6)$$

Ebenso verfährt man mit allen anderen Punkten:

$A_1 = (2,6|3,6)$
$C_1 = (3,8|-4)$
$D_1 = (-0,7|-3,6)$
$E_1 = (-3|-7,4)$
$F_1 = (-4|-3)$

Zeichnet man diese nun in ein Koordinatensystem ein und verbindet die verlangten Punkte, so entsteht ein Stern:



d) Zur Berechnung des Winkels wird die Formel $\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'}}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AP'}|}$ verwendet.

$\overrightarrow{AP} = \binom{1}{2}, \overrightarrow{AP'} = \binom{2,23}{0,15} \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\binom{1}{2} \cdot \binom{2,23}{0,15}}{\sqrt{5} \cdot 2,236} \Rightarrow \varphi \approx 59,49°$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 4
d) 2

Thema: Informatik

Quellen: —