Informelle Kompetenzmessung
zur standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reife- und Diplomprüfung

BHS

Februar 2016

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 8)

Korrekturheft

BMBF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Aufgabe 1

Vergnügungspark

Möglicher Lösungsweg

a) $4{,}1 = 9 - x^2$
$x^2 = 4{,}9$
$x = \pm 2{,}213\ldots$

Der Festwagen darf rund 4,42 m breit sein.

$\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\,\mathrm{d}x = 36$

Der Flächeninhalt der benötigten Folie beträgt 36 m^2.

b) Diese Polynomfunktion hat im dargestellten Intervall 2 lokale Extremstellen. Somit muss die 1. Ableitung dieser Funktion 2 Nullstellen haben, also mindestens eine Polynomfunktion 2. Grades sein. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Eine Gerade parallel zur x-Achse hat 3 Schnittpunkte mit dem Graphen der Funktion. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Der Graph ist keine Gerade und keine Parabel. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

c) rechtwinkeliges Dreieck FPS: $\tan(\beta) = \frac{\overline{SP}}{a} \Rightarrow \overline{SP} = a \cdot \tan(\beta)$

rechtwinkeliges Dreieck FQS: $\tan(\alpha) = \frac{\overline{SQ}}{a} \Rightarrow \overline{SQ} = a \cdot \tan(\alpha)$

$h = \overline{SP} - \overline{SQ}$
$h = a \cdot \tan(\beta) - a \cdot \tan(\alpha) = a \cdot (\tan(\beta) - \tan(\alpha))$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Breite b
1 × B2: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts
b) 1 × D: für eine richtige Erklärung
c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

Aufgabe 2

Luftdruck – Höhenformel

Möglicher Lösungsweg

a) $p(0) = p_0 \cdot e^{-\frac{0}{7\,991}} = p_0 \cdot 1 = p_0$

$\frac{p_0}{2} = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7\,991}}$

$h = 7\,991 \cdot \ln(2) = 5\,538{,}9\ldots$

Bei einer Seehöhe von rund 5 539 m beträgt der Luftdruck genau die Hälfte von p_0.

b) $f(h) = 1\,013 - \frac{1}{10} \cdot h$

c) Modellierung durch eine lineare Funktion g mit $g(x) = a \cdot x + b$:
$1\,040 = a \cdot 990 + b$
$930 = a \cdot 1\,980 + b$

$g(x) = -\frac{1}{9} \cdot x + 1\,150$

$g(1\,300) = \frac{9\,050}{9} \approx 1\,006$

Der Luftdruck in einer Höhe von 1 300 m über dem Meeresspiegel beträgt rund 1 006 hPa.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für einen richtigen Nachweis
1 × A: für den richtigen Lösungsansatz zur Berechnung
1 × B: für die richtige Berechnung der Seehöhe
b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktion
c) 1 × A: für einen richtigen Ansatz (z. B. mithilfe einer linearen Funktion bzw. ähnlicher Dreiecke)
1 × B: für die richtige Bestimmung des Luftdrucks

Aufgabe 3

Produktion von Rucksäcken

Möglicher Lösungsweg

a) Es wird die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis berechnet, dass ein zufällig kontrollierter Rucksack Nahtfehler, aber keine der beiden anderen Fehlerarten aufweist.

b) $P(\text{„mindestens 1 Fehler"}) = 1 - P(\text{„kein Fehler"}) = 1 - 0{,}98 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}99 = 0{,}0589... \approx 5{,}9\,\%$

Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Rucksack mindestens 1 dieser 3 Fehler aufweist, muss bei der Verwendung der Gegenwahrscheinlichkeit nur 1 Ereignis, nämlich das Ereignis, dass kein Fehler auftritt, betrachtet werden.
Bei einer direkten Berechnung müssten die Wahrscheinlichkeiten für eine Vielzahl von Ereignissen berechnet und addiert werden.

c) Berechnung mittels Binomialverteilung: $n = 100$ und $p = 0{,}03$
$P(X < 3) = 0{,}41977... \approx 41{,}98\,\%$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Angabe des Ereignisses (es muss auch klar erkennbar sein, dass die beiden anderen Fehlerarten nicht auftreten)
b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × D: für die richtige Erklärung zur Gegenwahrscheinlichkeit
c) 1 × A: für das Erkennen des richtigen Wahrscheinlichkeitsmodells (Binomialverteilung)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 4

Tennis

Möglicher Lösungsweg

a) Aufschlaggeschwindigkeit, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde: 120 km/h

Quartilsabstand: 30 km/h

b) ähnliche Dreiecke:

$$\frac{2{,}3}{6{,}4 + 6{,}4 + 5{,}5} = \frac{h}{6{,}4}$$

$h = 0{,}80\ldots\text{ m} \approx 0{,}8\text{ m}$

Der Ball ist beim Netz in einer Höhe von rund 0,8 m.
Somit geht der Ball ins Netz.

c) $f'(0) = \frac{2}{5}$

$\arctan\left(\frac{2}{5}\right) = 21{,}801\ldots° \approx 21{,}80°$

Der Ball befindet sich im Abschlagpunkt in einer Höhe von $\frac{21}{50}$ Metern.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für das richtige Ablesen der Aufschlaggeschwindigkeit
1 × C2: für das richtige Ablesen des Quartilsabstands
b) 1 × D: für die richtige Überprüfung
c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Steigungswinkels
1 × C: für die richtige Interpretation der Zahl $\frac{21}{50}$

Aufgabe 5

Leistung einer Solaranlage

Möglicher Lösungsweg

a) $P'(6) = 0$

$$0 = \frac{7}{162} \cdot 6^3 - \frac{7}{9} \cdot 6^2 + 2 \cdot a \cdot 6$$

$$a = \frac{14}{9}$$

b) $\int_0^{12} (0{,}007 \cdot t^4 - 0{,}165 \cdot t^3 + 0{,}972 \cdot t^2 + 1{,}221)\,\mathrm{d}t = 67{,}5288$

Die Solaranlage liefert an diesem Tag rund 67,53 kWh Energie.

c) An der Wendestelle x_0 einer Funktion f gilt stets: $f''(x_0) = 0$.
Die 2. Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades ist eine lineare Funktion, die genau 1 Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat. Daher hat die Polynomfunktion 3. Grades genau 1 Wendestelle.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung des Koeffizienten *a*
1 × B: für die richtige Berechnung des Koeffizienten *a*
b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Integrals
c) 1 × D: für eine richtige Begründung

Aufgabe 6 (Teil B)

Leihwagen

Möglicher Lösungsweg

a) $1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$
Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Modell nicht verliehen ist, beträgt 0,65.

b)

	A	nicht *A*	Summe
B	0,35	0,05	0,40
nicht *B*	0,27	0,33	0,60
Summe	0,62	0,38	

Die hervorgehobenen Werte in der oben stehenden Tabelle sind diejenigen, die aus der Angabe übertragen wurden.

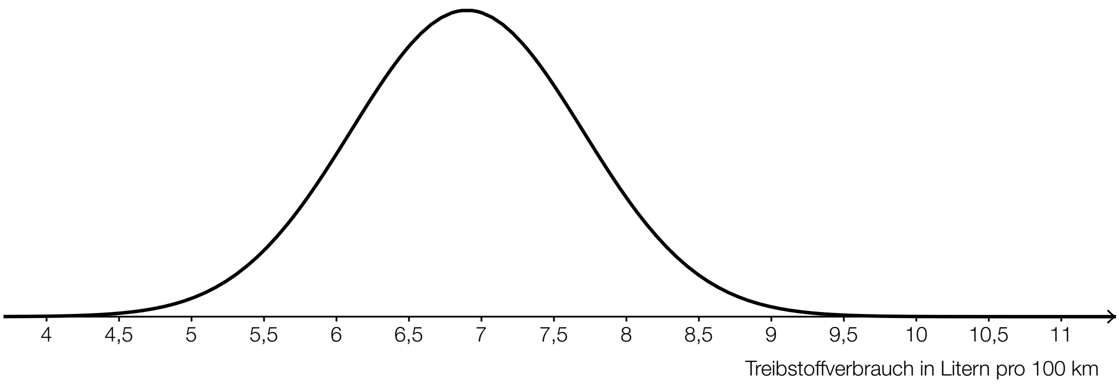
Die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer der beiden Leihwagen verliehen ist, beträgt $0{,}27 + 0{,}05 = 0{,}32$.

c) Sind zwei Ereignisse voneinander unabhängig, so gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
$P(A) \cdot P(B) = 0{,}62 \cdot 0{,}4 = 0{,}248$
$P(A \cap B) = 0{,}35$
Die beiden Ereignisse sind also nicht voneinander unabhängig: $0{,}35 \neq 0{,}248$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Modell 1 verliehen ist, wenn man weiß, dass Modell 2 verliehen ist, beträgt 0,875.

d) $P(5{,}6 \leq X \leq 8{,}2) = 0{,}90$
Aufgrund der Symmetrie gilt: $P(X \leq 8{,}2) = 0{,}95$.
$\phi(z) = 0{,}95 \;\Rightarrow\; z = 1{,}644\ldots$
$\sigma = \frac{8{,}2 - 6{,}9}{z} = 0{,}79\ldots \approx 0{,}8$

Die Standardabweichung beträgt rund 0,8 Liter pro 100 km.



Bei einer kleineren Standardabweichung wäre die Gauß'sche Glockenkurve schmäler und höher.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
b) 1 × A: für das richtige Übertragen der Werte in die Vierfeldertafel
   1 × B1: für das richtige Ermitteln der fehlenden Werte
   1 × B2: für das richtige Bestimmen der Wahrscheinlichkeit
c) 1 × D: für den richtigen Nachweis der Unabhängigkeit der Ereignisse
   1 × C: für die richtige Beschreibung
d) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Standardabweichung
   1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Dichtefunktion (Glockenkurve mit Maximum an der Stelle μ und Wendepunkten an den Stellen $\mu \pm \sigma$ erkennbar)
   1 × C: für die richtige Beschreibung

Aufgabe 7 (Teil B)

Kosten

Möglicher Lösungsweg

a) Stückkostenfunktion: $\overline{K}(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + \frac{d}{x}$

(1) $K(0) = 4$: $\quad d = 4$
(2) $K(10) = 2\,124$: $\quad 2\,124 = 1\,000a + 100b + 10c + d$
(3) $\overline{K}'(2) = 0$: $\quad 0 = 4a + b - \frac{d}{4}$
(4) $\overline{K}(2) = 14$: $\quad 14 = 4a + 2b + c + \frac{d}{2}$

b) Die x-Koordinate des Berührpunktes T ist das Betriebsoptimum.
Die Steigung dieser Tangente ist die langfristige Preisuntergrenze.

c) $K''(x) = 0$: $0{,}6x - 1{,}2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$
Die Kostenkehre liegt bei 2 ME.

Der Kostenverlauf ist für $x < 2$ ME degressiv.
Der Kostenverlauf ist für $x > 2$ ME progressiv.

d) Der gegebene Funktionsgraph kann keine Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion beschreiben, weil eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion streng monoton wachsend ist und daher die Grenzkostenfunktion keine negativen Funktionswerte hat.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen von Gleichung (1) und (2)
1 × A2: für das richtige Aufstellen von Gleichung (3)
1 × A3: für das richtige Aufstellen von Gleichung (4)

b) 1 × C: für die richtige Interpretation der x-Koordinate und der Steigung im Sachzusammenhang

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Kostenkehre
1 × C: für die Angabe der richtigen degressiven und progressiven Bereiche

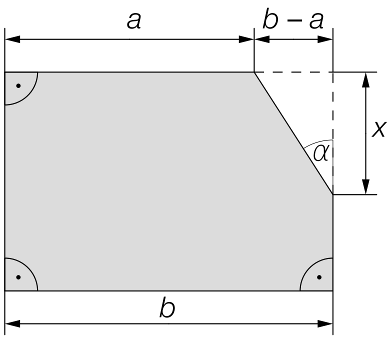
d) 1 × D: für die richtige Begründung

Aufgabe 8 (Teil B)

Produktionserweiterung

Möglicher Lösungsweg

a)



$\tan(\alpha) = \frac{b-a}{x}$

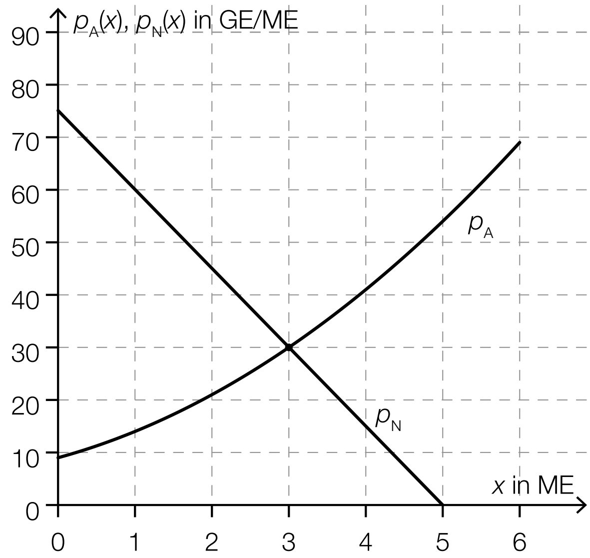
Flächeninhalt des rechtwinkeligen Dreiecks: $A = \frac{(b-a) \cdot x}{2} = \frac{(b-a) \cdot (b-a)}{2 \cdot \tan(\alpha)} = \frac{(b-a)^2}{2 \cdot \tan(\alpha)}$

b) Der Zinsanteil eines Jahres berechnet sich stets basierend auf der verbleibenden Restschuld des Vorjahres. Im 5. Jahr erfolgt eine positive Tilgung. Damit ist die Restschuld am Ende des Jahres 5 geringer als am Ende Jahres 4. Trotzdem ist der Zinsanteil im Jahr 5 geringer als jener im Jahr 6. Der Zinssatz i' muss daher größer als der Zinssatz i sein.

Restschuld im Jahr 11: $3\,705{,}01 + 9\,472{,}88 = 13\,177{,}89$
Zinssatz i': $527{,}12 = 13\,177{,}89 \cdot i' \quad \Rightarrow \quad i' = 0{,}0400\ldots \approx 4{,}0\ \%$

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
13	$3\,705{,}01 \cdot i'$ **€ 148,20**	**€ 3.705,01**	$148{,}20 + 3\,705{,}01$ **€ 3.853,21**	**€ 0**

c)



Modellierung der Preisfunktion der Nachfrage p_N mithilfe der gegebenen Punkte oder durch Ablesen aus dem Funktionsgraphen: $p_N(x) = -15 \cdot x + 75$

Wenn der Preis um 1 % steigt, sinkt die Nachfrage um $\frac{2}{3}$ %.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
b) 1 × C: für die richtige Beschreibung
1 × B1: für die richtige Berechnung des Zinssatzes i'
1 × B2: für das richtige Berechnen der letzten Zeile des Tilgungsplans
c) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen der Preisfunktion der Nachfrage
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × C: für die richtige Interpretation des Werts der Punktelastizität der Nachfrage bezüglich des Preises