Luftdruck (2)

Aufgabennummer: B_052

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Beziehung zwischen Luftdruck p und Höhe h lässt sich bei konstanter Temperatur mit der folgenden Gleichung beschreiben:

$$\frac{dp}{dh} = -k \cdot p, \quad k > 0$$

p … Luftdruck in Hektopascal (hPa)
h … Höhe in Metern (m)

a) – Erklären Sie, wie man diese Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennung der Variablen* zur allgemeinen Lösung $p(h) = C \cdot e^{-k \cdot h}$ führt.

b) Der Luftdruck wird am selben Tag zur selben Zeit an 2 verschiedenen Stationen gemessen:
- in Villach (500 m über dem Meeresspiegel) wird ein Druck p = 962 hPa gemessen,
- auf dem Dobratsch, einem Berg nahe Villach (2 167 m über dem Meeresspiegel), ergibt die Messung p = 790 hPa.

– Berechnen Sie mit diesen Angaben und anhand der in Teilaufgabe a angegebenen allgemeinen Lösung die spezielle Lösung für die Differenzialgleichung.

c) Messungen in der Atmosphäre haben ergeben, dass der Luftdruck bei einer Höhenzunahme von 5 500 m ziemlich genau auf jeweils den halben Wert sinkt.
– Geben Sie, ausgehend von $p(500)$ = 962 hPa, den Luftdruck für 6 000 m und für 11 500 m an.
– Erstellen Sie eine quadratische Funktion durch diese 3 Wertepaare.
– Vergleichen Sie den berechneten Wert der quadratischen Näherungsfunktion für h = 2 167 m mit dem Messwert für den Dobratsch.
– Geben Sie ungefähr an, in welchem Bereich die quadratische Näherung für die Beschreibung der Druckabhängigkeit von der Höhe sinnvoll ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{dp}{dh} = -k \cdot p$

Die Variablen p und h werden getrennt:

$\frac{dp}{p} = -k \cdot dh$

Beide Seiten werden integriert:

$\ln(p) = -k \cdot h + c$, c ist die Integrationskonstante des unbestimmten Integrals.

Man erhält mit der Definition der Konstanten $C = e^c$ die angegebene allgemeine Lösung der Differenzialgleichung:

$p(h) = C \cdot e^{-k \cdot h}$

b) $p(h) = C \cdot e^{-k \cdot h}$

$p(500) = 962$
$p(2\,167) = 790$

$962 = C \cdot e^{-500 \cdot k}$
$\underline{790 = C \cdot e^{-k \cdot 2\,167}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$k \approx 1{,}18 \cdot 10^{-4}$
$C \approx 1\,020{,}55$ (mit genauem Wert von k weitergerechnet, gerundet auf 2 Dezimalen)

$p(h) = 1\,020{,}55 \cdot e^{-0{,}000118 \cdot h}$

c)

h (m)	p (hPa)
500	962
6 000	481
11 500	240,5

$962 = 500^2 \cdot a + 500 \cdot b + c$
$481 = 6\,000^2 \cdot a + 6\,000 \cdot b + c$
$\underline{240{,}5 = 11\,500^2 \cdot a + 11\,500 \cdot b + c}$
Technologieeinsatz
$a = 4 \cdot 10^{-6}$ $b = -0{,}11329$ $c = 1\,017{,}65$

$p(h) = 4 \cdot 10^{-6} \cdot h^2 - 0{,}11329 \cdot h + 1\,017{,}65$

Vergleich mit dem Messwert auf dem Dobratsch:
$h = 2\,167$ m – berechneter Wert: $p = 790{,}93$ hPa; gemessen: 790 hPa. Die Näherung passt hier gut.

Die Näherungsfunktion versagt auf jeden Fall ab dem lokalen Minimum der quadratischen Funktion. Bei Höhenwerten, die größer als das Minimum (ab $h \approx 14\,230$ m) sind, würde der Druck mit zunehmender Höhe ansteigen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) –
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 4

Thema: Physik

Quellen: –