

Informelle Kompetenzmessung
zur standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reife- und Diplomprüfung

BHS

Februar 2016

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 1)

Korrekturheft

Aufgabe 1

Vergnügungspark

Möglicher Lösungsweg

a) $4,1 = 9 - x^2$
 $x^2 = 4,9$
 $x = \pm 2,213...$

Der Festwagen darf rund 4,42 m breit sein.

$$\int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = 36$$

Der Flächeninhalt der benötigten Folie beträgt 36 m².

- b) Diese Polynomfunktion hat im dargestellten Intervall 2 lokale Extremstellen. Somit muss die 1. Ableitung dieser Funktion 2 Nullstellen haben, also mindestens eine Polynomfunktion 2. Grades sein. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Eine Gerade parallel zur x-Achse hat 3 Schnittpunkte mit dem Graphen der Funktion. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Der Graph ist keine Gerade und keine Parabel. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

c) rechtwinkeliges Dreieck FPS: $\tan(\beta) = \frac{\overline{SP}}{a} \Rightarrow \overline{SP} = a \cdot \tan(\beta)$

rechtwinkeliges Dreieck FQS: $\tan(\alpha) = \frac{\overline{SQ}}{a} \Rightarrow \overline{SQ} = a \cdot \tan(\alpha)$

$$h = \overline{SP} - \overline{SQ}$$

$$h = a \cdot \tan(\beta) - a \cdot \tan(\alpha) = a \cdot (\tan(\beta) - \tan(\alpha))$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Breite *b*
1 × B2: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts
b) 1 × D: für eine richtige Erklärung
c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

Aufgabe 2

Luftdruck – Höhenformel

Möglicher Lösungsweg

a) $p(0) = p_0 \cdot e^{-\frac{0}{7991}} = p_0 \cdot 1 = p_0$

$$\frac{p_0}{2} = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7991}}$$

$$h = 7991 \cdot \ln(2) = 5538,9\dots$$

Bei einer Seehöhe von rund 5539 m beträgt der Luftdruck genau die Hälfte von p_0 .

b) $f(h) = 1013 - \frac{1}{10} \cdot h$

c) Modellierung durch eine lineare Funktion g mit $g(x) = a \cdot x + b$:

$$1040 = a \cdot 990 + b$$

$$930 = a \cdot 1980 + b$$

$$g(x) = -\frac{1}{9} \cdot x + 1150$$

$$g(1300) = \frac{9050}{9} \approx 1006$$

Der Luftdruck in einer Höhe von 1300 m über dem Meeresspiegel beträgt rund 1006 hPa.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × D: für einen richtigen Nachweis
1 × A: für den richtigen Lösungsansatz zur Berechnung
1 × B: für die richtige Berechnung der Seehöhe
- b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktion
- c) 1 × A: für einen richtigen Ansatz (z. B. mithilfe einer linearen Funktion bzw. ähnlicher Dreiecke)
1 × B: für die richtige Bestimmung des Luftdrucks

Aufgabe 3

Produktion von Rucksäcken

Möglicher Lösungsweg

- a) Es wird die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis berechnet, dass ein zufällig kontrollierter Rucksack Nahtfehler, aber keine der beiden anderen Fehlerarten aufweist.
- b) $P(\text{„mindestens 1 Fehler“}) = 1 - P(\text{„kein Fehler“}) = 1 - 0,98 \cdot 0,97 \cdot 0,99 = 0,0589... \approx 5,9 \%$

Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Rucksack mindestens 1 dieser 3 Fehler aufweist, muss bei der Verwendung der Gegenwahrscheinlichkeit nur 1 Ereignis, nämlich das Ereignis, dass kein Fehler auftritt, betrachtet werden. Bei einer direkten Berechnung müssten die Wahrscheinlichkeiten für eine Vielzahl von Ereignissen berechnet und addiert werden.

- c) Berechnung mittels Binomialverteilung: $n = 100$ und $p = 0,03$
 $P(X < 3) = 0,41977... \approx 41,98 \%$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C: für die richtige Angabe des Ereignisses (es muss auch klar erkennbar sein, dass die beiden anderen Fehlerarten nicht auftreten)
- b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × D: für die richtige Erklärung zur Gegenwahrscheinlichkeit
- c) 1 × A: für das Erkennen des richtigen Wahrscheinlichkeitsmodells (Binomialverteilung)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 4

Tennis

Möglicher Lösungsweg

- a) Aufschlaggeschwindigkeit, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde: 120 km/h

Quartilsabstand: 30 km/h

- b) ähnliche Dreiecke:

$$\frac{2,3}{6,4 + 6,4 + 5,5} = \frac{h}{6,4}$$

$$h = 0,80... \text{ m} \approx 0,8 \text{ m}$$

Der Ball ist beim Netz in einer Höhe von rund 0,8 m.
Somit geht der Ball ins Netz.

- c) $f'(0) = \frac{2}{5}$

$$\arctan\left(\frac{2}{5}\right) = 21,801...^\circ \approx 21,80^\circ$$

Der Ball befindet sich im Abschlagpunkt in einer Höhe von $\frac{21}{50}$ Metern.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C1: für das richtige Ablesen der Aufschlaggeschwindigkeit
1 × C2: für das richtige Ablesen des Quartilsabstands
b) 1 × D: für die richtige Überprüfung
c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Steigungswinkels
1 × C: für die richtige Interpretation der Zahl $\frac{21}{50}$

Aufgabe 5

Leistung einer Solaranlage

Möglicher Lösungsweg

a) $P'(6) = 0$

$$0 = \frac{7}{162} \cdot 6^3 - \frac{7}{9} \cdot 6^2 + 2 \cdot a \cdot 6$$

$$a = \frac{14}{9}$$

b) $\int_0^{12} (0,007 \cdot t^4 - 0,165 \cdot t^3 + 0,972 \cdot t^2 + 1,221) dt = 67,5288$

Die Solaranlage liefert an diesem Tag rund 67,53 kWh Energie.

c) An der Wendestelle x_0 einer Funktion f gilt stets: $f''(x_0) = 0$.

Die 2. Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades ist eine lineare Funktion, die genau 1 Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat. Daher hat die Polynomfunktion 3. Grades genau 1 Wendestelle.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung des Koeffizienten a
1 × B: für die richtige Berechnung des Koeffizienten a
- b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Integrals
- c) 1 × D: für eine richtige Begründung

Aufgabe 6 (Teil B)

Stromversorgung einer Baustelle

Möglicher Lösungsweg

a) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
 $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten:

Punkt A: $5 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$

Punkt B: $12 = a \cdot 15^2 + b \cdot 15 + c$

Tangentensteigung im Punkt A: $-0,0875 = 2 \cdot a \cdot (-1) + b$

Lösen des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

$$a = \frac{21}{640} \approx 0,0328$$

$$b = -\frac{7}{320} \approx -0,0219$$

$$c = \frac{633}{128} \approx 4,95$$

b) Berechnen des lokalen Minimums von h :

$$h'(x) = \frac{3}{25} \cdot x - \frac{14}{5}$$

$$0 = \frac{3}{25} \cdot x - \frac{14}{5} \Rightarrow x_{\min} = \frac{70}{3} \quad (\text{nach oben offene Parabel})$$

$$h(x_{\min}) = \frac{47}{6} \approx 7,83...$$

Die minimale Höhe ist größer als 7 m, damit ist die Bedingung erfüllt.

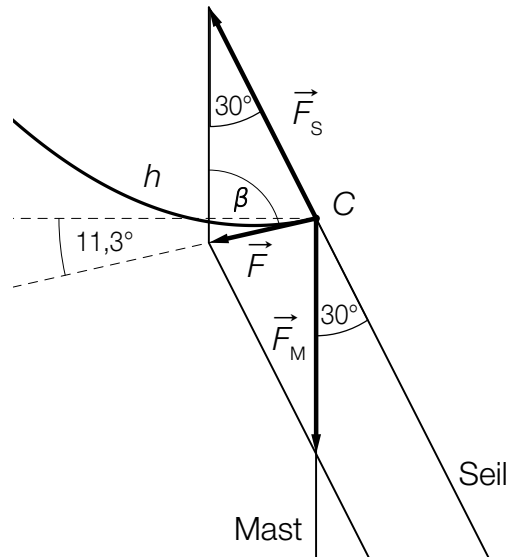
s ... Länge des Seils in m

$$h(25) = 8$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{8}{s}$$

$$s = 9,237... \text{ m} \approx 9,24 \text{ m}$$

c) $\beta = 90^\circ - 11,3^\circ = 78,7^\circ$



$$|\vec{F}_s| = \frac{1000 \cdot \sin(78,7^\circ)}{\sin(30^\circ)} = 1961,2\dots$$

$$|\vec{F}_s| \approx 1961 \text{ N}$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte A und B
- 1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichung unter Berücksichtigung der Tangentensteigung
- 1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten
- b) 1 × D: für die richtige Überprüfung
- 1 × B: für die richtige Berechnung der Länge des Seils
- c) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Zerlegung der Kraft in die beiden Richtungen Mast und Seil (Kräfte-dreieck oder Kräfteparallelogramm)
- 1 × B: für die richtige Berechnung des Betrags der Kraft, die in Seilrichtung wirkt

Aufgabe 7 (Teil B)

Länge eines Werkstücks

Möglicher Lösungsweg

- a) Die Parameter sind: $\mu_{\bar{x}} = 72,3 \text{ mm}$ und $\sigma_{\bar{x}} = \frac{0,5}{\sqrt{7}} \text{ mm}$.

Zweiseitigen 95-%-Zufallsstrebereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$$\mu \pm u_{0,975} \cdot \sigma_{\bar{x}}$$

$$u_{0,975} = 1,959 \dots$$

Daraus ergibt sich folgender Zufallsstrebereich in mm: $[71,9; 72,7]$.

Eine Halbierung der Breite erfordert die Vervierfachung des Stichprobenumfangs.

Die Standardabweichung der Stichprobe ist umso kleiner, je größer der Stichprobenumfang n ist. Daher ist der Graph der Dichtefunktion für $n = 7$ schmaler als für $n = 5$. Da der gesamte Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion immer 1 beträgt, muss das Maximum für $n = 7$ größer sein als für $n = 5$.

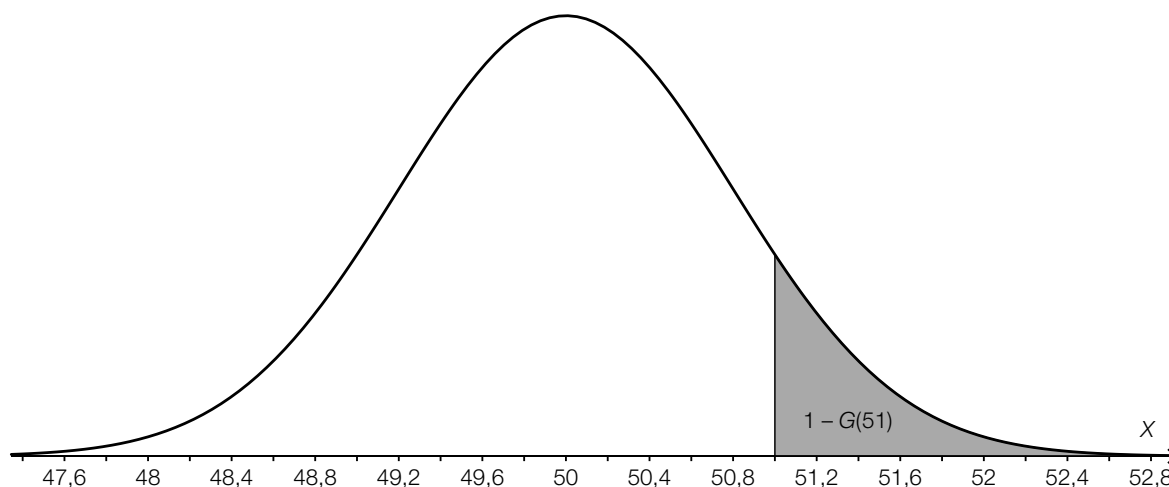
- b) $P(\text{„Werkstück wird aussortiert“}) = 1 - P(71,4 \leq X \leq 73,2) = 0,0718 \dots \approx 7,2 \%$

$$\sigma = \frac{x_{\text{ob}} - \mu}{u_{0,99}} = \frac{73,2 - 72,3}{2,326 \dots} = 0,38 \dots \approx 0,4$$

Damit der Ausschussanteil 2 % beträgt, müsste die Standardabweichung rund 0,4 mm sein.

- c) Der gesamte Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion beträgt 1. Der Graph der Dichtefunktion ist symmetrisch bezüglich des Erwartungswerts μ .

$$\text{Daher gilt: } G(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} g(x) dx = 0,5.$$



$$\sigma = 0,8 \text{ mm}$$

Toleranzbereich: $[0,6; 1,0]$

Lösungsschlüssel

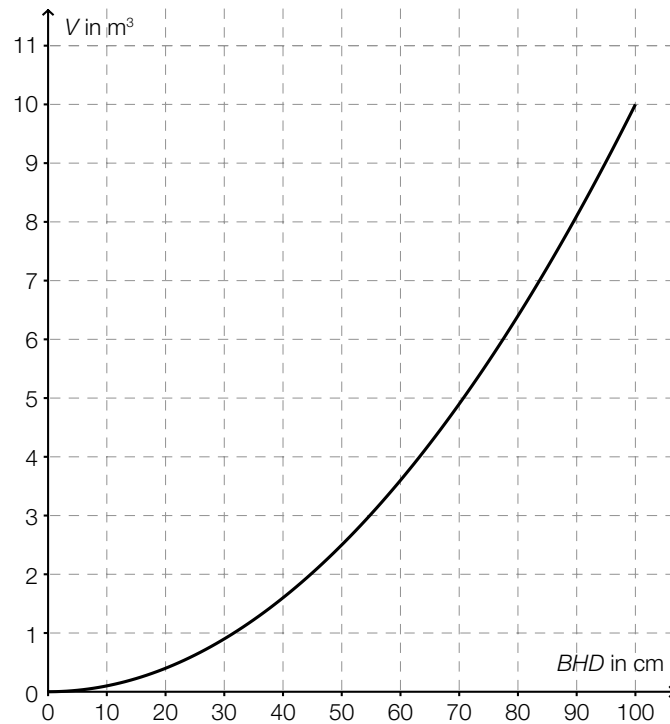
- a) 1 × A: für die richtige Angabe der Parameter
1 × B: für die richtige Berechnung des Zufallsstreuereichs
1 × C: für eine richtige Beschreibung
1 × D: für eine richtige Begründung
- b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × B2: für die richtige Berechnung der Standardabweichung
- c) 1 × D: für eine richtige Begründung
1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit als Fläche
1 × C: für das richtige Ablesen der Standardabweichung im Toleranzbereich $[0,6; 1,0]$

Aufgabe 8 (Teil B)

Volumen eines Baums

Möglicher Lösungsweg

a) $V = \frac{BHD^2}{1000}$



b) $V = \frac{50^2}{1000} \cdot \frac{3 \cdot 30 + 25}{100} = 2,875$

Betrag des relativen Fehlers: $\left| \frac{2,875 - 3,05}{3,05} \right| = 0,0573... \approx 5,7 \%$

c) $\frac{1800}{22} = \frac{x}{22,2} \Rightarrow x = 1816,36...$

$x - 1800 = 16,36... \approx 16,4$

Der Höhenzuwachs des Baums in diesem Jahr beträgt rund 16,4 cm.

Eine Verdoppelung des Kegeldurchmessers bringt auch eine Verdoppelung der Höhe mit sich:

$$V_{\text{neu}} = \frac{1}{3} \cdot (2r)^2 \cdot \pi \cdot 2h = \frac{1}{3} \cdot 4r^2 \cdot \pi \cdot 2h = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = 8 \cdot V_{\text{alt}}$$

d) $V = \pi \cdot \int_0^{32} (f(x))^2 dx$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Formel
1 × A2: für die sinngemäß richtige Darstellung des Graphen (Parabel mit Tiefpunkt im Koordinatenursprung)
1 × A3: für eine geeignete Skalierung der vertikalen Achse
- b) 1 × B1: für das richtige Ermitteln des Volumens mithilfe der erweiterten Formel von Denzin
1 × B2: für das richtige Ermitteln des Betrags des relativen Fehlers
- c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Höhenwachstums in diesem Jahr
1 × D: für einen richtigen Nachweis
- d) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel