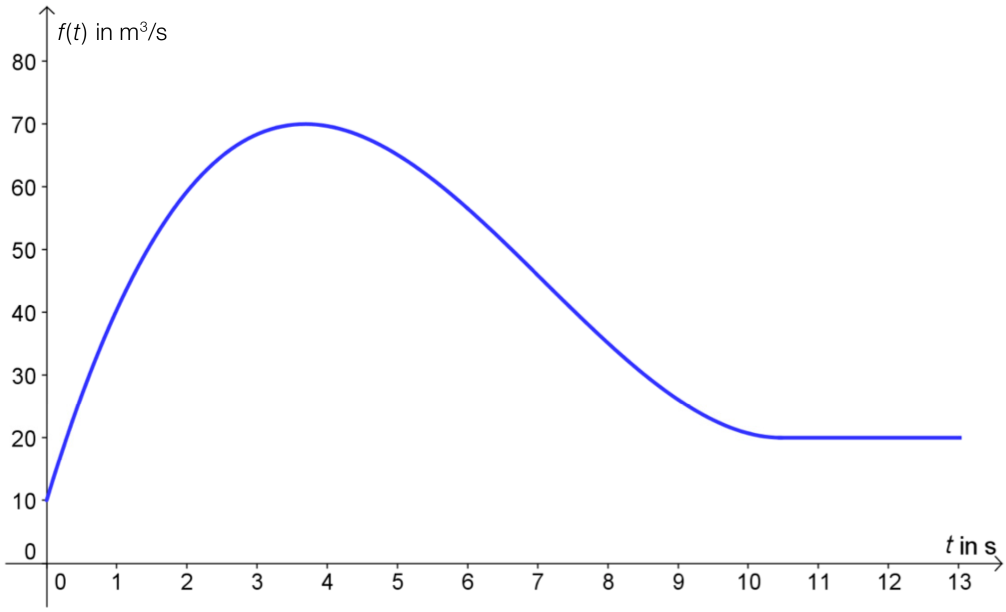
Volumenstrom

Aufgabennummer: A_049

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Wasser an einer Staustufe wird über Kanäle in einen Fluss abgelassen.
Das Wasservolumen, das pro Zeiteinheit an einer Messstelle in einem Kanal vorbeifließt, bezeichnet man als Volumenstrom.
Dieser geht nach dem Öffnen des Tores nach einem Schwall allmählich in einen konstanten Volumenstrom über.

a) Der nachstehende Graph stellt die Entwicklung des Volumenstroms f im 1. Kanal in den ersten 13 Sekunden nach Öffnen des Tores dar.



– Geben Sie an, wann der Volumenstrom am stärksten ist.
– Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 1$ s und zum Zeitpunkt $t = 6{,}5$ s.

b) Der Verlauf des Volumenstroms im 2. Kanal folgt annähernd folgender Funktion:

$f(t) = 0{,}32t^3 - 6{,}76t^2 + 36{,}85t + 10$ im Zeitintervall $0 \text{ s} \leq t \leq 10{,}4$ s,
$f(t) = 22{,}03$; für $t > 10{,}4$ s

t … Zeit in Sekunden (s)
$f(t)$ … Volumenstrom in m³/s nach t Sekunden

– Berechnen Sie das gesamte Wasservolumen V, das in den ersten 13 Sekunden durch den 2. Kanal geflossen ist. Es gilt der Zusammenhang $V = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
Runden Sie das Ergebnis auf 2 Nachkommastellen.

c) Der Volumenstrom im 3. Kanal beträgt zu Beginn 12 m^3/s. Der höchste Wert wird nach 4 Sekunden erreicht und beträgt 80 m^3/s. Nach 11 Sekunden geht am Minimum der Funktion der Schwall in einen konstanten Strom über.

– Erstellen Sie das Gleichungssystem, mit dessen Hilfe man eine Polynomfunktion 3. Grades

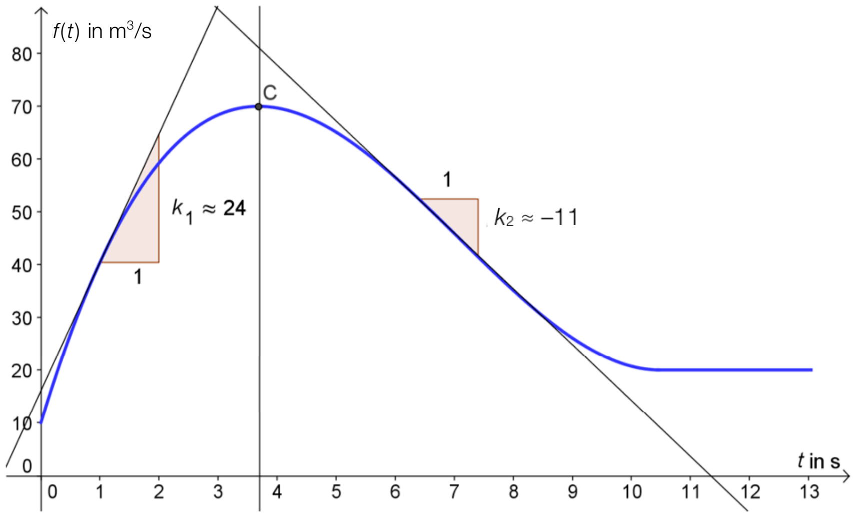
$$g(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$$

berechnen kann, die den Verlauf des Volumenstroms in den ersten 11 Sekunden beschreibt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Der Volumenstrom f im Kanal erreicht nach ungefähr 3,7 s den höchsten Wert von ca. 70 m³/s.
Einzeichnen der Tangenten bei $t = 1$ und bei $t = 6{,}5$
Der Anstieg der Kurve (= momentane Änderungsrate) beträgt bei 1 s ca. 24 m³/s²,
bei 6,5 s ca. –11 m³/s².
(Das bedeutet, dass der Schwall rasch ansteigt, aber langsamer abnimmt.)

Alle Beschreibungen, die die wichtigsten hier erfassten Daten enthalten, sind zulässig.
Die Ablesungen können bei dieser Aufgabe wegen des Einzeichnens der Tangenten bei Bearbeitung per Hand ungenau ausfallen. Das ist zu tolerieren.

b) $V(13) = \int_0^{10{,}4} (0{,}32t^3 - 6{,}76t^2 + 36{,}85t + 10)\,\mathrm{d}t + 22{,}03 \cdot (13 - 10{,}4)$

$V(13) = 498{,}041\ldots + 57{,}278 \approx 555{,}32$

In 13 Sekunden fließen insgesamt rund 555,32 m³ Wasser durch den Kanal.

c) $t = 0$; $g(0) = 12 \rightarrow d = 12$
$t = 4$; $g(4) = 80 \rightarrow 64a + 16b + 4c + d = 80$
$t = 4$; $g'(4) = 0 \rightarrow 48a + 8b + c = 0$ … Maximum $\qquad (g'(t) = 3a \cdot t^2 + 2b \cdot t + c)$
$t = 11$; $g'(11) = 0 \rightarrow 363a + 22b + c = 0$ … Minimum

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) A Modellieren und Transferieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Technik

Quellen: –