

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reife- und Diplomprüfung

Angewandte Mathematik

Korrekturheft

Probeklausur 2014

Teil A / Teil B – Cluster 8

Aufgabe 1

Impfstoff

Möglicher Lösungsweg

- a) 1. Möglichkeit: $K_1(x) = 25x + 10\,000\,000$
2. Möglichkeit: $K_2(x) = 50x$
- b) Ansatz: $120x = 250x - 750\,000$
 $x = 5\,769,23$
Ab 5 770 verkauften Packungen ist die Gewinnfunktion G_2 für das Unternehmen besser.

Lösungen wie „5 769,23“ oder „5 769“ sind als falsch zu werten.

- c) Bei ca. 165 und ca. 280 verkauften Packungen beträgt der Unterschied der Gewinnwerte € 10.000.

Toleranzintervall: [160; 170] bzw. [275; 285]

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A1 für das richtige Modellieren von Möglichkeit 1
1 × A2 für das richtige Modellieren von Möglichkeit 2
- b) 1 × A für das richtige Aufstellen der Gleichung
1 × B für die richtige Berechnung der Packungsanzahl und die exakte Angabe der verkauften Packungen
- c) 1 × C für das richtige Ablesen der beiden Werte mit Gewinnunterschied € 10.000

Aufgabe 2

Leistungskurve

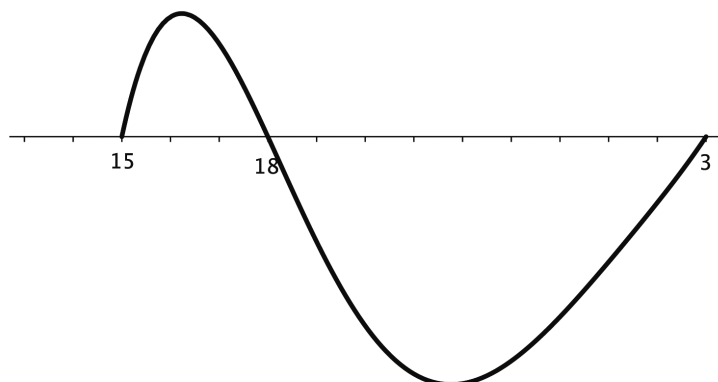
Möglicher Lösungsweg

- a) Eine Abnahme der Leistungsbereitschaft liegt im Zeitintervall von ca. 12 Uhr bis ca. 15 Uhr sowie im Zeitintervall von ca. 18 Uhr bis ca. 3 Uhr vor.

Toleranzintervall: $\pm 0,5$ h

- b) Jede Skizze, die für die Ableitungsfunktion die richtigen Nullstellen (bei 15 Uhr, bei ca. 18 bis 19 Uhr und bei 3 Uhr) und das richtige Vorzeichen zeigt, gilt als richtige Lösung. Auf das Einzeichnen von Einheiten auf der y-Achse darf verzichtet werden.

Zum Beispiel:



- c) mittlere Änderungsrate: $\frac{140 - 110}{12 - 9} = 10 \rightarrow +10$ % pro Stunde

Leistungsbereitschaft um 14 Uhr: $140 - 2 \cdot 12 = 116 \rightarrow 116$ %

- d) $f'(t) = \frac{20}{3} \cdot t - 20$

$$f'(2,5) = -\frac{10}{3} \approx -3,33$$

Die 1. Ableitung der Funktion zeigt die momentane Änderungsrate der Leistungsbereitschaft in Prozent pro Stunde an.

Diese momentane Änderungsrate um 2:30 Uhr beträgt $-3,33$ % (der Durchschnittsleistung) pro Stunde.

Lösungsschlüssel

- a) 1 \times C für das richtige Ablesen der Zeitintervalle
b) 1 \times A1 für die richtige Darstellung der Nullstellen der Ableitungsfunktion
1 \times A2 für die richtige Darstellung des Monotonieverhaltens
c) 1 \times B1 für die richtige Berechnung der mittleren Änderungsrate
1 \times B2 für die richtige Berechnung der Leistungsbereitschaft um 14 Uhr
d) 1 \times B für die richtige Berechnung der 1. Ableitung zur angegebenen Uhrzeit
1 \times D für die richtige Erklärung der Bedeutung der 1. Ableitung im Sachzusammenhang

Aufgabe 3

Leuchtmittel

Möglicher Lösungsweg

- a) Es gibt genau 2 Möglichkeiten des Ausgangs: „fehlerhaft“ oder „nicht fehlerhaft“.
Die Versuche sind voneinander unabhängig.
Die Wahrscheinlichkeiten bleiben konstant.
- b) $P(X = 6) + P(X = 7) = 0,1500 + 0,1060 = 0,2560$
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt 25,60 %.
- c) Durch diesen Ausdruck kann man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass in der Stichprobe genau 4 fehlerhafte Leuchtmittel gefunden werden.
- d) Nach dem Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $0,18 \cdot 0,18 = 0,0324 \approx 3,24 \%$.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × D für die richtigen Erklärungen zur Verwendung der Binomialverteilung
- b) 1 × B für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
- c) 1 × C für die richtige Beschreibung zur berechneten Wahrscheinlichkeit
- d) 1 × B für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 4

Skipiste

Möglicher Lösungsweg

a) $118,62 \text{ s} = 0,03295 \text{ h}$

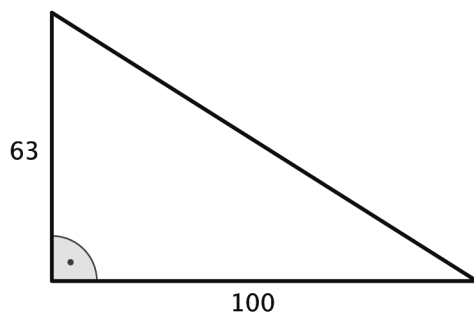
$$v = \frac{s}{t} = \frac{3,186}{0,03295} = 96,69$$

Die durchschnittliche Geschwindigkeit beträgt 96,69 km/h.

b) Fahrer A: $s_A(t) = 20t$
Fahrer B: $s_B(t) = 25 \cdot (t - 30)$
Ansatz: $20t = 25 \cdot (t - 30)$
 $t = 150 \rightarrow s = 3\,000$

Gesamtstrecke: 3 186 m, daher folgt:
Fahrer B holt Fahrer A 186 Meter vor dem Ziel ein.

c) Skizze:



Das Verhältnis von vertikalem zu horizontalem Abstand zwischen 2 Punkten auf der Strecke beträgt $\frac{63}{100}$.

Steigungswinkel: $\tan^{-1}\left(\frac{63}{100}\right) = 32,21^\circ$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B für die richtige Berechnung der durchschnittlichen Geschwindigkeit
- b) 1 × A für den richtigen Ansatz
1 × B für die richtige Berechnung der Entfernung
- c) 1 × D für die richtige Erklärung der Steigung anhand einer Skizze
1 × B für die richtige Berechnung des Winkels

Aufgabe 5

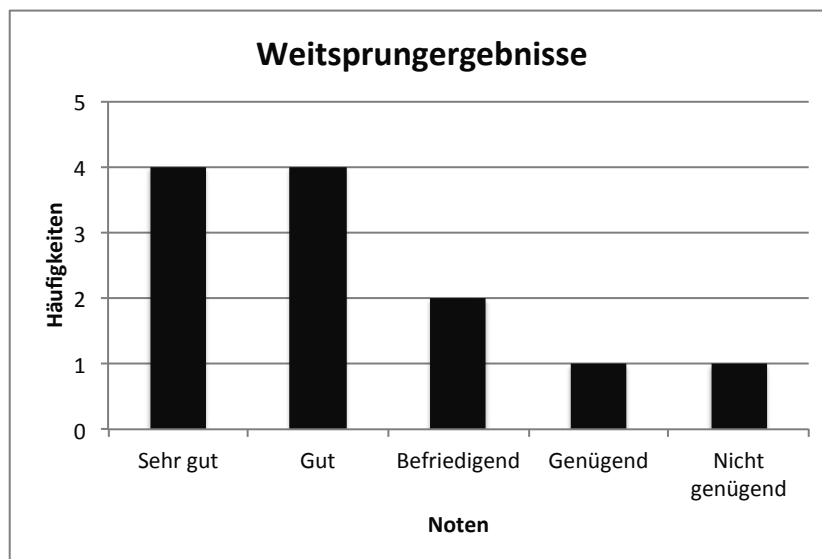
Weitsprung

Möglicher Lösungsweg

- a) Lösung mithilfe von Technologie:
arithmetischer Mittelwert: 3,61 Meter
Standardabweichung: 0,73 Meter

Gemäß Kompetenzkatalog Teil A, Kommentar 5.2 gilt auch die Berechnung der empirischen Standardabweichung (hier: $s = 0,76$ m) als richtige Lösung.

b)



- c) Median: 3,7 m Toleranzbereich: [3,6; 3,8]
1. Quartil: 3,15 m Toleranzbereich: [3,1; 3,3]

Median: 50 % aller Werte liegen rechts bzw. links vom Median.

1. Quartil: 25 % aller Werte liegen links vom 1. Quartil.

- d) Die Streuung der Sprungweiten innerhalb der Gruppe der Mädchen ist größer als die Streuung innerhalb der Gruppe der Burschen.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B für die richtige Berechnung des arithmetischen Mittelwertes und der Standardabweichung
b) 1 × A für die richtige Erstellung des Säulen- oder Balkendiagramms
c) 1 × C für das richtige Ablesen von Median und 1. Quartil
1 × D für die richtige Erklärung zur Bedeutung von Median und 1. Quartil
d) 1 × D für die richtige Erklärung zum Vergleich der Standardabweichungen

Aufgabe 6 (Teil B)

Pumpenproduktion

Möglicher Lösungsweg

- a) Funktion 3 stellt die Gewinnfunktion dar.
Der Funktionsgraph der Gewinnfunktion schneidet die vertikale Achse bei € –10.000 (→ Fixkosten).
Die Nullstellen der Gewinnfunktion liegen direkt unterhalb der Schnittpunkte der Kosten- und der Erlösfunktion.
Zwischen den Gewinngrenzen ist der Gewinn positiv, weil dort der Graph der Erlösfunktion oberhalb des Graphen der Kostenfunktion verläuft.

- b) $K(100) = 14\,200$ und $K(101) \approx 14\,215,86$
Der Kostenanstieg von 100 auf 101 Stück beträgt ungefähr € 15,86/Stück.

$$K'(x) = 0,0036x^2 - x + 80 \rightarrow K'(100) = 16$$

Die Grenzkosten bei 100 Stück betragen € 16/Stück.

Die Ergebnisse sind unterschiedlich, weil der Differenzenquotient die exakte Kostensteigerung angibt, während hingegen der Differenzialquotient einen Näherungswert für die Änderung der Kosten bei der Steigerung um ein Stück angibt.

- c) Gewinn = Erlös – Kosten
 $G(x) = 200x - (0,0012x^3 - 0,5x^2 + 80x + 10\,000)$
 $G(x) = -0,0012x^3 + 0,5x^2 + 120x - 10\,000$
 $G'(x) = -0,0036x^2 + x + 120$
Berechnung mithilfe von Technologie: $x \approx 368,29$
Der maximale Gewinn wird bei 368 Stück erzielt.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × D für eine richtige Begründung
b) 1 × B1 für die richtige Berechnung des Kostenanstiegs
1 × B2 für die richtige Berechnung der Grenzkosten für 100 Stück
1 × D für die richtige Begründung
c) 1 × A für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung der Gewinnfunktion
1 × B für die richtige Berechnung der Anzahl mit maximalem Gewinn

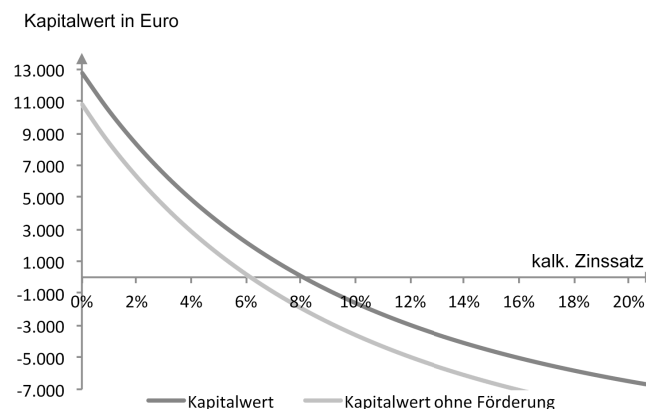
Aufgabe 7 (Teil B)

Photovoltaik

Möglicher Lösungsweg

- a) Die geförderte Photovoltaikanlage ist für kalkulatorische Zinssätze bis 8 % rentabel.

Toleranzbereich: [7,5 %; 8,5 %]



- b) Gebühren: 3 % von € 12.560 → € 376,80
Auszahlungsbetrag: € 12.183,20

$$\text{Äquivalenzgleichung: } 12\,183,20 = 98 \cdot \frac{1 - (1 + i_{12})^{-180}}{i_{12}}$$

Mithilfe von Technologie erhält man: $i_{12} = 0,44 \%$

$$i_{\text{eff}} = (1 + i_{12})^{12} - 1 \approx 5,39 \%$$

- c) t ... Zeit in Jahren
 $K(t)$... Strompreis in Euro pro Kilowattstunde (€/kWh) nach t Jahren
 $K(t) = 0,16 \cdot 1,04^t$

$$K(13) = 0,16 \cdot 1,04^{13} = 0,2664 < 0,38$$

Der Strompreis wird nach 13 Jahren unter dem garantierten Tarif liegen.

Lösungsschlüssel

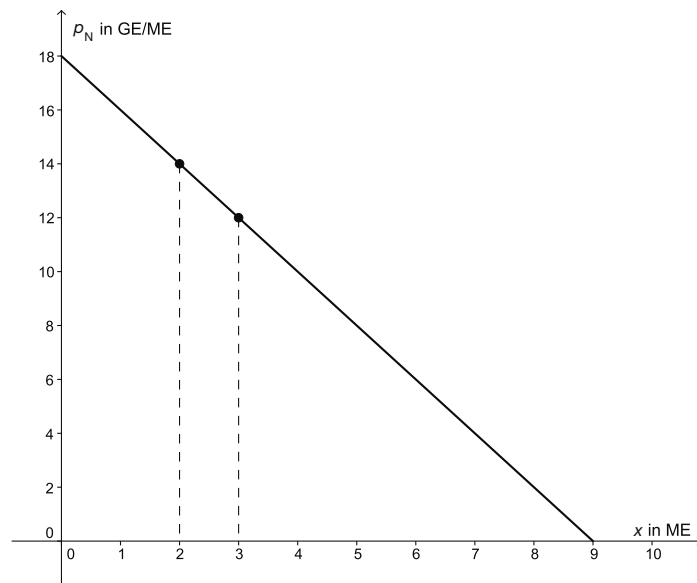
- a) 1 × C für das richtige Ablesen des kalkulatorischen Zinssatzes
1 × A für die richtige Skizze: Verschieben des Graphen des Kapitalwertes
- b) 1 × B1 für die richtige Berechnung des Auszahlungsbetrages
1 × A für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des Effektivzinssatzes
1 × B2 für die richtige Berechnung des jährlichen Effektivzinssatzes
- c) 1 × A für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
1 × B für die richtige Berechnung des Strompreises nach 13 Jahren

Aufgabe 8 (Teil B)

Zeitschrift

Möglicher Lösungsweg

a)



Bei einem Preis von 14 GE/ME können 2 ME verkauft werden. Der Erlös beträgt 28 GE.
Bei einem Preis von 12 GE/ME können 3 ME verkauft werden. Der Erlös beträgt 36 GE.
Die Preissenkung führt zu einer Erlössteigerung von 8 GE.

b) Aus der Grafik kann man ablesen: $p_N(x) = -2x + 18$.

Im Marktgleichgewicht gilt: $p_A(x) = p_N(x)$.

$$1 + 4,5\sqrt{x} = 18 - 2x$$

Mithilfe von Technologie erhält man: $x = 4$.

$$p_N(4) = 10$$

Der zugehörige Gleichgewichtspreis beträgt 10 GE/ME.

c) Die Elastizität der Nachfrage ist für diejenige Menge gleich -1 , für die der Erlös maximal ist.
Man kann also weder durch eine Preissenkung noch durch eine Preiserhöhung eine Steigerung des Erlöses erwarten.

d) Elastizität = relative Mengenänderung : relative Preisänderung
relative Mengenänderung = Elastizität \times relative Preisänderung = $-0,6 \cdot (-10 \%) = 6 \%$
Die absetzbare Menge nimmt um 6 % zu.

Erlös vor der Preissenkung: $8 \cdot 3 = 24$ GE

Erlös nach der Preissenkung:

absetzbare Menge: $3 \cdot 1,06 = 3,18$ ME

neuer Preis: $8 \cdot 0,9 = 7,2$ GE/ME

Erlös: $3,18 \cdot 7,2 = 22,896 \approx 22,9$ GE

Der Erlös nimmt um ca. 1,1 GE ab.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C für das richtige Kennzeichnen in der Abbildung
1 × B für die richtige Berechnung der Erlösänderung
- b) 1 × A1 für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von p_N
1 × A2 für den richtigen Ansatz beim Marktgleichgewicht: $p_A = p_N$
1 × B1 für die richtige Berechnung der Gleichgewichtsmenge
1 × B2 für die richtige Berechnung des Gleichgewichtspreises
- c) 1 × D für die richtige Begründung
- d) 1 × C für die richtige Interpretation der Elastizität hinsichtlich der relativen Mengenänderung
1 × B für die richtige Berechnung der Erlösänderung