Pinboard

Aufgabennummer: A_037

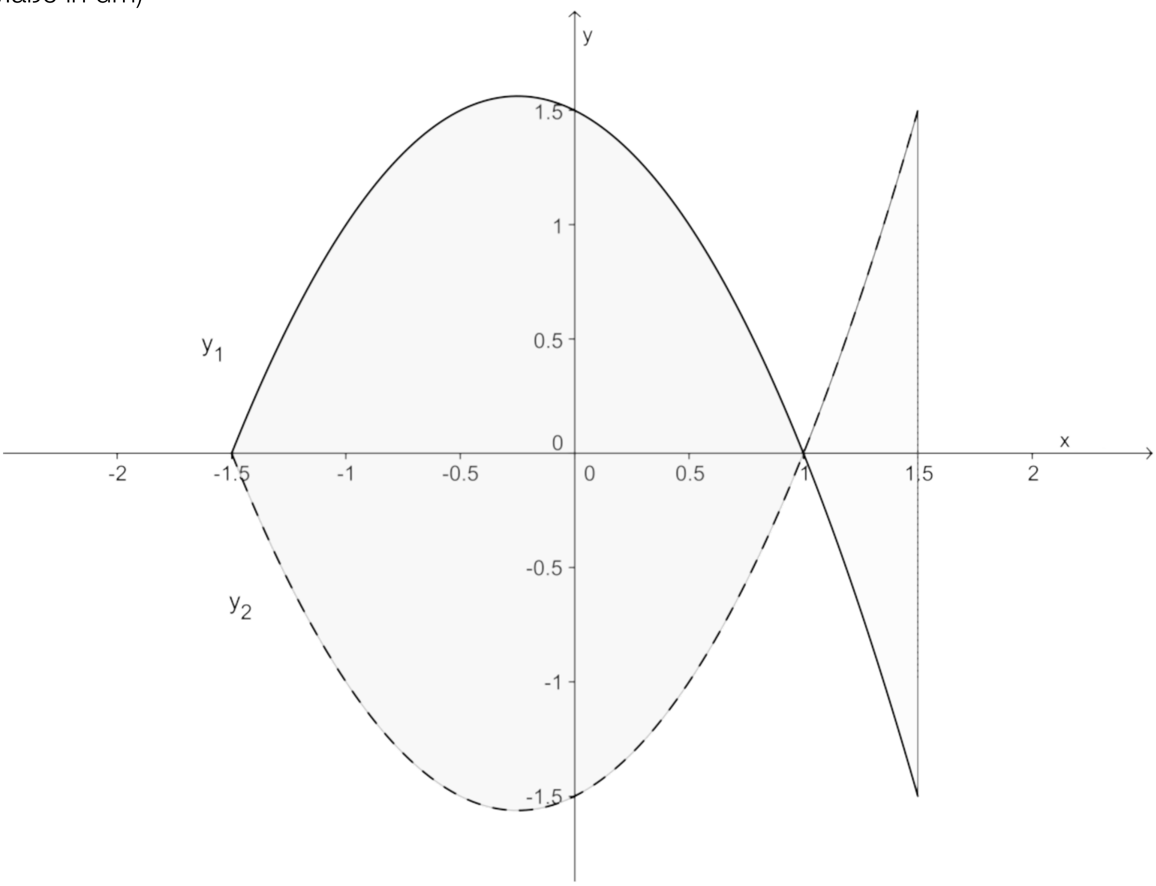
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Es sollen Pinboards in der Form eines Fisches angefertigt werden.

$$y_2(x) = x^2 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{3}{2} \qquad -1{,}5 \leq x \leq 1{,}5$$

Die Funktionsgraphen von y_1 und y_2 schließen die im Diagramm dargestellte Fläche ein. Die Funktionen y_1 und y_2 sind symmetrisch bezüglich der x-Achse.

(Maße in dm)



a) – Berechnen Sie den im Diagramm dargestellten Flächeninhalt des Fisches.

b) Ein anderes Pinboard wird durch eine quadratische Funktion, die durch die Punkte $P_1 = (-1{,}5|0)$, $P_2 = (0|1)$ und $P_3 = (1|0)$ verläuft, begrenzt.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion 2. Grades auf.
– Berechnen Sie die entsprechende quadratische Funktionsgleichung.

c) – Argumentieren Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass die Funktion y_2 nur eine lokale Extremstelle und keine Wendestelle hat – ohne die Betrachtung der Randstellen des Intervalls.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $y_2(x) = x^2 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{3}{2}$

$A_1 = \int_{-1,5}^{1} y_2(x)\,\mathrm{d}x$ $\qquad A_1 = -2{,}6042$

$A_2 = \int_{1}^{1,5} y_2(x)\,\mathrm{d}x$ $\qquad A_2 = 0{,}3542$

$2(|A_1| + A_2) = 5{,}9167$

Die Fläche des Fisches beträgt $A \approx 5{,}92\ \mathrm{dm}^2$.

b) Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lcccccccc}
(1) & \frac{9}{4} \cdot b_0 & - & \frac{3}{2} \cdot b_1 & + & b_2 & = & 0 \\
(2) & & & & & b_2 & = & 1 \\
(3) & b_0 & + & b_1 & + & b_2 & = & 0
\end{array}$$

Koeffizienten:
$b_0 = -\frac{2}{3}$, $b_1 = -\frac{1}{3}$, $b_2 = 1$

quadratische Funktion:
$f(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x + 1$

c) y_2 ist eine Polynomfunktion 2. Grades. An der Stelle $x_S = -\frac{1}{4}$ ist der kleinstmögliche Funktionswert, nämlich $y_2(x_S) = -\frac{25}{16}$. Für alle $x < x_S$ ist die Funktion streng monoton fallend und für alle $x > x_S$ streng monoton steigend. Die 2. Ableitung ergibt eine konstante Funktion, nämlich $y''_2(x) = 2$, daher besitzt y_2 keinen Wendepunkt. Die Funktion hat daher genau den einen lokalen Extrempunkt $S = (x_S|y_S)$.

Auch andere Argumentationen sind möglich:
Die 2. Ableitung ergibt eine konstante Funktion, nämlich $y''_2(x) = 2 > 0$, daher besitzt y_2 keinen Wendepunkt und ist links gekrümmt. Die Nullstelle der 1. Ableitungsfunktion ergibt $x_S = -\frac{1}{4}$, deren y-Koordinate $y_S = -\frac{25}{16}$ beträgt. Daher ist $S = (x_S|y_S)$ der einzige lokale Extrempunkt.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) A Modellieren und Transferieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Alltag

Quellen: –