Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

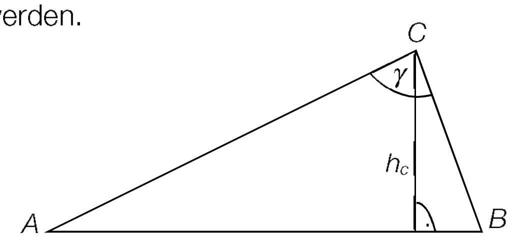
Dachfenster (1)

Aufgabennummer: B-C3_15

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein 3-eckiges Dachfenster soll neu verglast werden.

$\gamma = 81°$
$\overline{AB} = 1{,}60$ m
$\overline{BC} = 0{,}70$ m



a) – Berechnen Sie die Fläche des skizzierten Dreiecks, das die Fensteröffnung darstellt.

b) Das oben angegebene Dreieck wird in ein Koordinatensystem gezeichnet, die Koordinaten der 3 Eckpunkte sind bekannt.

– Beschreiben Sie, welche Überlegung bei der folgenden Vorgangsweise für die Berechnung der Dreiecksfläche nicht korrekt ist:

$c = |\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

$h_c = |\overrightarrow{MC}|$

$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$

– Beschreiben Sie, wie man die Koordinaten des Fußpunktes der Höhe h_c ermittelt.
– Stellen Sie die dazu nötigen Geraden in allgemeiner Form auf.

c) In einer Glaserei werden 3-eckige Fensterscheiben zugeschnitten. In folgender Tabelle sind die Flächeninhalte einer Produktionsserie bestimmter Fensterscheiben angegeben:

Fläche in m²	Anzahl der Scheiben
1,91 – 1,95	1
1,96 – 2,00	5
2,01 – 2,05	22
2,06 – 2,10	48
2,11 – 2,15	52
2,16 – 2,20	29
2,21 – 2,25	0
2,26 – 2,30	1

– Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung der angegebenen Flächeninhalte. Verwenden Sie dazu die Klassenmitten.

– Beschreiben Sie, welche Wahrscheinlichkeit bezogen auf die Fensterproduktion durch den nachstehenden Rechenausdruck ermittelt wird ($\bar{x}$ und s der vorhergehenden Rechnung sollen als Schätzung für μ und σ verwendet werden).

$$P = 1 - [0{,}932 - 0{,}082] = 0{,}150\ldots \approx 15\ \%$$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Spiegelung an einer Geraden

Aufgabennummer: B-C4_01

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Es soll ein Applet zur Spiegelung eines Punktes an einer Geraden für eine Übungswebsite programmiert werden.

a) Das einfachste Grundproblem beim Spiegeln von Objekten ist die Spiegelung eines Punktes an einem anderen Punkt.
- Erklären Sie anhand einer Skizze ohne zu rechnen die Vorgangsweise, wie man die Koordinaten des gespiegelten Punktes A' erhält, wenn ein beliebiger gegebener Punkt A an einem ebenfalls gegebenen Punkt S gespiegelt wird.
- Stellen Sie eine allgemeine Formel für die Berechnung der Koordinaten von A' auf.

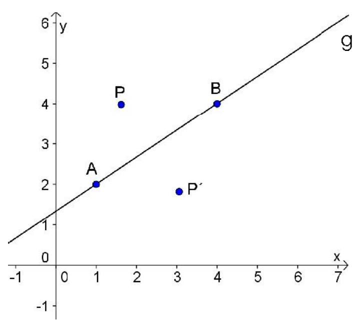
b) Ein Punkt $A = (x|y)$ soll an der Gerade $y = -x + 2$ gespiegelt werden.
- Stellen Sie diejenige Matrix auf, mit der man die Koordinaten des gespiegelten Punktes (= Bildpunktes) berechnen kann. (Verwenden Sie homogene Koordinaten.)

c) Die Spiegelung an der Geraden $y = x + 1$ kann unter Verwendung von homogenen Koordinaten durch folgende Matrix beschrieben werden:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie mithilfe der gegebenen Matrix die Bildpunkte zu den Punkten $A = (2{,}6|3{,}6)$; $B = (-1{,}6|1{,}9)$; $C = (-5|4{,}8)$; $D = (-4{,}6|0{,}3)$; $E = (-8{,}4|-2)$; $F = (-4|-3)$.
- Stellen Sie alle Punkte und Bildpunkte in einem Koordinatensystem grafisch dar.
- Verbinden Sie die Punkte in der Reihenfolge $ABCDEFE_1D_1C_1B_1A_1$.
- Beschreiben Sie die entstehende geometrische Figur in Worten.

d) Ein Punkt $P = (2|4)$ wurde an der durch $A = (1|2)$ und $B = (4|4)$ verlaufenden Geraden g gespiegelt. Dabei ist der Punkt $P' = (3|2)$ entstanden.
- Geben Sie eine Formel an, mit der der Winkel $\angle PAP'$ mithilfe der Vektorrechnung berechnet werden kann.
- Ermitteln Sie den Winkel $\angle PAP'$.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

RGB-Farbmodell

Aufgabennummer: B-C4_03

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für die Darstellung von Farben im Fernsehen, bei Monitoren usw. werden Transformationen in die einzelnen Farbräume durchgeführt. Ein solcherart verwendeter Farbraum ist z. B. der *RGB*-Farbraum, wobei *R* für den Rotanteil, *G* für den Grünanteil und *B* für den Blauanteil einer dargestellten Farbe steht. Es handelt sich hierbei um einen additiven Farbraum, der die einzelnen Farben durch das additive Mischen der 3 Grundfarben Rot, Grün und Blau nachbildet. Jede Farbe wird als Vektor durch ein Zahlentripel (R, G, B) dargestellt, wobei die klassische Darstellung als Wertebereich Werte zwischen 0 und 1 zulässt.

a) Die Transformationen von einem Farbraum in einen anderen lassen sich mithilfe von Matrizenmultiplikationen durchführen.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

– Erklären Sie anhand der beiden angeführten Matrizen A und B, wie Matrizen multipliziert werden.
– Geben Sie an, welche Voraussetzungen bei der Multiplikation von 2 Matrizen erfüllt sein müssen.
– Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass das Kommutativgesetz für die Multiplikation von Matrizen nicht gilt.

b) Die Umrechnung vom *RGB*-Farbmodell in das standardisierte *XYZ*-Farbmodell erfolgt mittels der gegebenen Transformation:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4125 & 0{,}3576 & 0{,}1804 \\ 0{,}2127 & 0{,}7152 & 0{,}0722 \\ 0{,}0193 & 0{,}1192 & 0{,}9503 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

– Geben Sie die Matrix für die Transformation vom *XYZ*-Farbmodell in das *RGB*-Farbmodell an.

c) Farbenblindheit ist ein geschlechtsspezifisches Merkmal. Studien haben gezeigt, dass 8 % der Männer in Europa farbenblind sind und nicht zwischen den Farben Rot und Grün unterscheiden können.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Schulklasse mit 28 Schülern mindestens 1 Schüler farbenblind ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

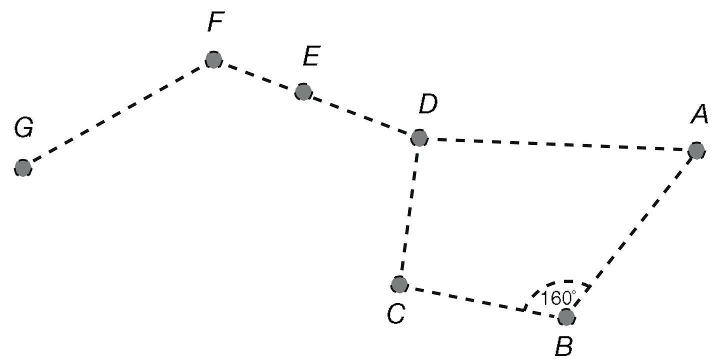
Navigation mit Sternbildern

Aufgabennummer: B-C4_04

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

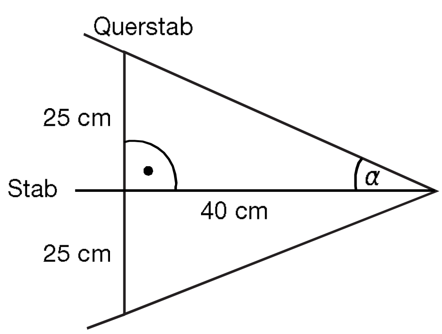
In der Geschichte der Seefahrt wurden schon sehr früh Sterne und Sternbilder als Orientierungspunkte verwendet.

a) Ein auf der nördlichen Hemisphäre gut zu sehendes Sternbild ist der Große Wagen. In einer historischen Sternenkarte sind die Hauptsterne *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* und *G* eingezeichnet. Die Sterne liegen annähernd in einer Ebene.



– Dokumentieren Sie einen Lösungsweg, um den Flächeninhalt des von den 4 Sternen *A*, *B*, *C* und *D* in der Sternenkarte aufgespannten Vierecks zu berechnen.

b) Lange bevor es die heutigen Navigationssysteme gab, wurde der Jakobsstab zur Höhen- und Entfernungsmessung eingesetzt. Sehr oft wurde der Höhenwinkel der Sonne oder eines Fixsterns über dem Meeresspiegel ermittelt. Der Jakobsstab wurde in Richtung des Gestirns und des Meeresspiegels ausgerichtet und anschließend wurde der Querstab so verschoben, dass sein oberes Ende mit dem Stern und sein unteres mit dem Meeresspiegel übereinstimmt. Auf einer Skala wurde dann der Winkel abgelesen.



– Ermitteln Sie den Höhenwinkel 2α eines Sterns über dem Horizont mithilfe der obigen Skizze. Runden Sie auf 2 Nachkommastellen.

c) Für Linsenfernrohre gilt folgende Linsengleichung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$$

f … Brennweite in Zentimetern
b … Bildweite in Zentimetern
g … Gegenstandsweite in Zentimetern

– Ermitteln Sie eine Formel für die Bildweite b in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite g und der Brennweite f.
– Erklären Sie, welche Bildweite sich in den folgenden Fällen ergibt:

i) $g \to$ „∞" Die Gegenstandsweite ist unendlich groß.
ii) $g = f$ Die Gegenstandsweite ist gleich der Brennweite.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Donauüberquerung

Aufgabennummer: B-C9_04

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Motorfähre verkehrt zwischen den sich an der Donau genau gegenüberliegenden Anlegestellen in Dürnstein und in Rossatz. An dieser Stelle ist die Donau etwa 200 Meter breit und hat eine gleichmäßige Strömungsgeschwindigkeit v_s von ca. 1,6 Metern pro Sekunde (m/s). (Reibungseinflüsse sollen vernachlässigt werden.)

a) Die Vektorgrafiken Abb. 1 und Abb. 2 stellen ein Boot dar, das einen Fluss überquert.
– Interpretieren Sie, welche Aussagen die Grafiken vermitteln.

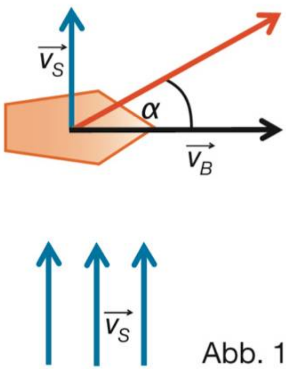


Abb. 1

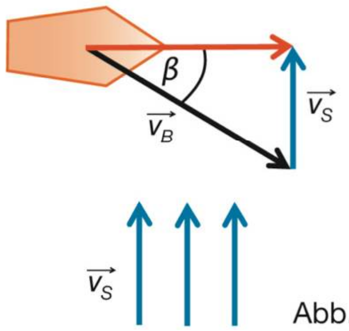


Abb. 2

$\vec{v_S}$ … Strömungsgeschwindigkeit
$\vec{v_B}$ … Geschwindigkeit des Boots

b) Die Motorfähre auf der Donau bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Es gilt:

$$s = v \cdot t$$

s … Weg in Metern (m)
v … Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s)
t … Zeit in Sekunden (s)

– Berechnen Sie, in welchem Winkel der Steuermann gegen die Strömung steuern muss, wenn das Boot eine Geschwindigkeit v_B relativ zum Wasser von durchschnittlich 3 m/s hat und es von Rossatz aus genau in Dürnstein landen soll.
– Ermitteln Sie auch die Dauer der Überfahrt in Minuten.

c) Ein geübter Schwimmer, der beim Schwimmen in ruhendem Gewässer eine Geschwindigkeit von 1,2 m/s erreicht, möchte auf der Bootsroute von Rossatz nach Dürnstein die Donau überqueren.
– Argumentieren Sie mithilfe von Vektordiagrammen, ob der Schwimmer eine Chance hat, die Anlegestelle in Dürnstein auf kürzestem Weg zu erreichen.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Radfahren

Aufgabennummer: B-C9_12

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Fährt man mit dem Fahrrad bei Windstille auf ebener Strecke mit konstanter Geschwindigkeit, so muss man den Rollwiderstand der Reifen und den Luftwiderstand überwinden.

v … gefahrene Geschwindigkeit in km/h
$P_L(v)$ … Leistung in Watt (W) zum Überwinden des Luftwiderstands
$P_R(v)$ … Leistung in W zum Überwinden des Rollwiderstands

– Interpretieren Sie die Funktionsgraphen in Abb. 1 in Bezug auf den Funktionstyp.
– Ermitteln Sie grafisch die Gesamtleistung, die bei einer gefahrenen Geschwindigkeit von 30 km/h erforderlich ist, um Roll- und Luftwiderstand zu überwinden.
– Stellen Sie eine Funktion für die Leistung zur Überwindung des Rollwiderstands auf.

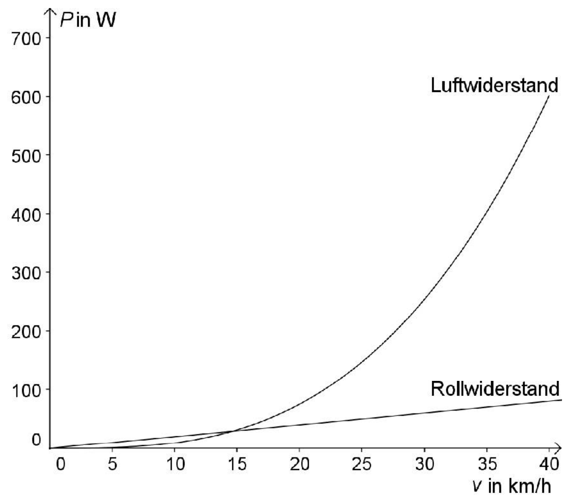


Abb. 1

b) Sobald es spürbar bergauf geht, muss der Fahrer in erster Linie die Hangabtriebskraft $\vec{F}_H$ überwinden.
Die Grafik (Abb. 2) zeigt die Zerlegung der Gewichtskraft $\vec{F}_G$ in eine Normalkomponente $\vec{F}_N$ und die Hangabtriebskraft $\vec{F}_H$ (Roll- und Luftwiderstand werden nicht berücksichtigt).

– Berechnen Sie den Steigungswinkel α für eine Steigung von 15 %.
– Berechnen Sie für diese Steigung die Hangabtriebskraft $\vec{F}_H$ in Newton (N), wenn Fahrer und Fahrrad zusammen eine Gewichtskraft von 932 N haben.

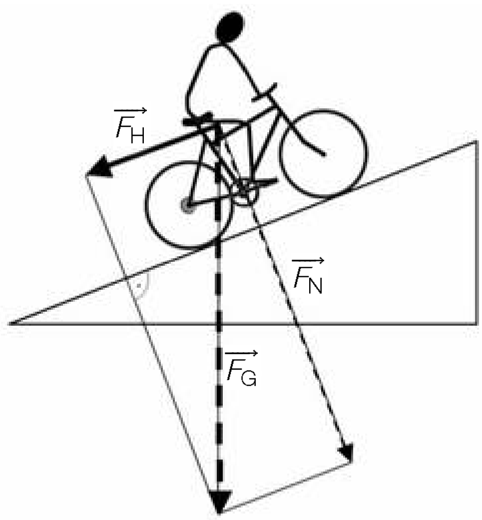
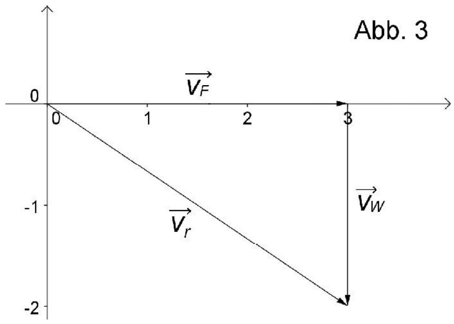


Abb. 2

c) Meistens ist es nicht windstill.
Die Vektorgrafik (Abb. 3) zeigt das Zusammenwirken von Windgeschwindigkeit und Fahrtgeschwindigkeit. (Eine Einheit entspricht einer Geschwindigkeit von 10 km/h.)



$\vec{v}_F$ … Fahrtgeschwindigkeit
$\vec{v}_W$ … Windgeschwindigkeit
$\vec{v}_r$ … resultierende Geschwindigkeit

– Lesen Sie die Koordinaten der dargestellten Geschwindigkeiten $\vec{v}_F$ und $\vec{v}_W$ ab.
– Berechnen Sie mit diesen Vektoren die resultierende Geschwindigkeit $\vec{v}_r$ und ihren Betrag v_r in km/h.
– Berechnen Sie den Winkel zwischen Fahrtrichtung und resultierender Geschwindigkeit in Grad (°).

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

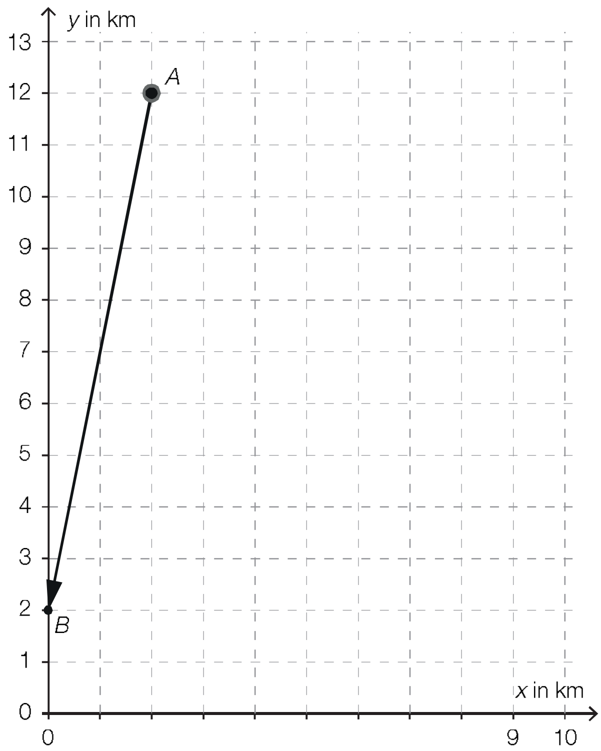
Fahrradrennen

Aufgabennummer: B-C9_26

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Es findet ein Fahrradrennen statt.

a) Die Rennstrecke führt geradlinig von A über B nach C. C hat die Koordinaten $(8\,|\,y_0)$. Die Richtung von B nach C ist durch den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ gegeben.



– Berechnen Sie die Länge des Weges von A nach B.
– Zeichnen Sie den Punkt C in die nebenstehende Grafik ein.
– Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $-\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$ berechnet wird.

b) Auf der Rennstrecke befindet sich ein gerades Straßenstück mit 10 % Gefälle.

– Erklären Sie mithilfe des Steigungsbegriffes, was „10 % Gefälle" bedeutet.
– Berechnen Sie den Neigungswinkel des Straßenstücks.

c) Der zurückgelegte Weg einer Rennfahrerin wird bei einem Bremsmanöver gemessen.

t in s	1	3	5
s in m	10,17	23,73	28,25

t ... Zeit in Sekunden (s)
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg zum Zeitpunkt t in Metern (m)

Der zurückgelegte Weg kann durch eine quadratische Funktion s mit
$s(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben werden.

- Erstellen Sie mithilfe der gegebenen Messwerte ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b und c.
- Lösen Sie dieses Gleichungssystem.
- Berechnen Sie mithilfe der Funktion s die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall [2; 4].
- Erklären Sie, welche Größe mit der 1. Ableitung der Funktion s zum Zeitpunkt $t = 3$ berechnet werden kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.