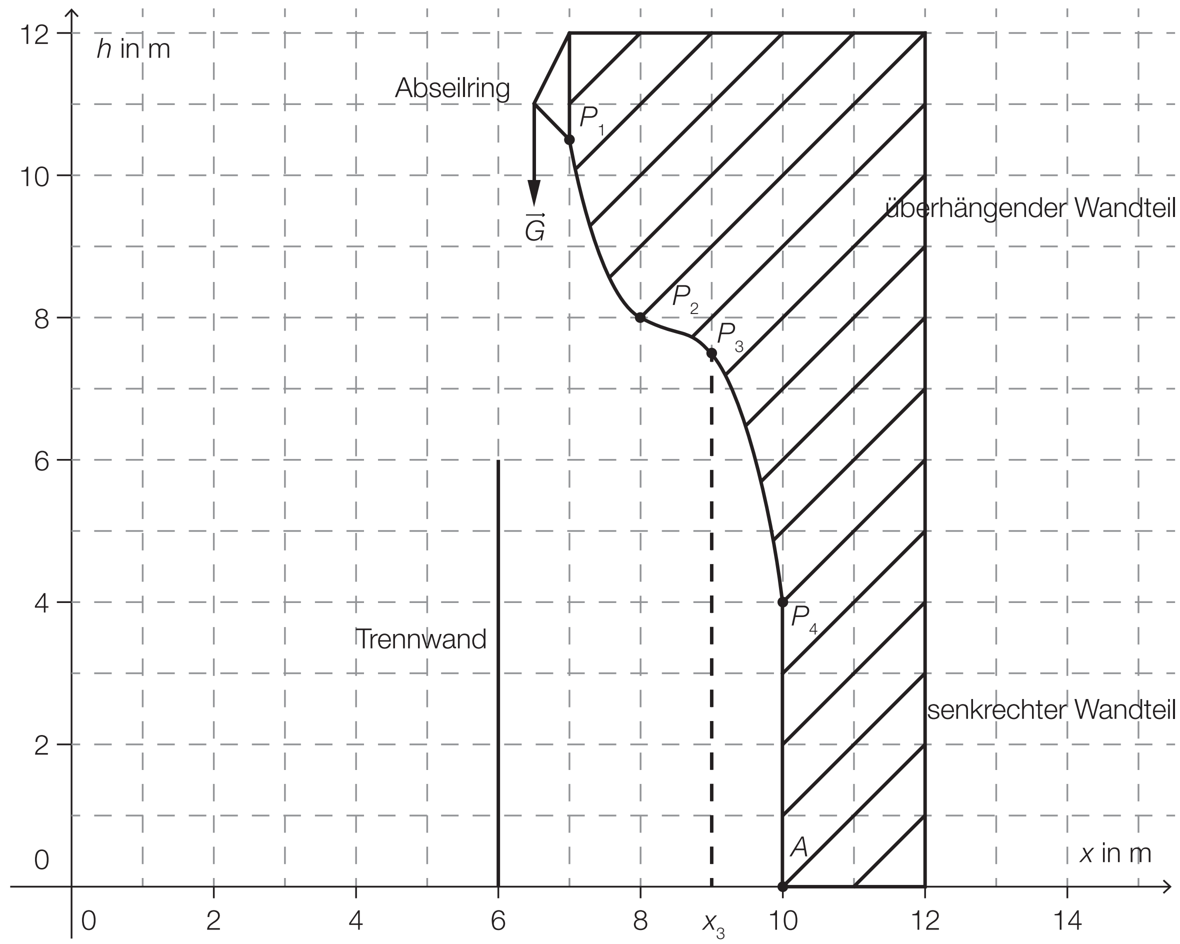
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Kletterwand (2)

Aufgabennummer: B_095

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die nachstehende Abbildung zeigt die Seitenansicht einer Kletterroute an einer Kletterwand.



a) Der Verlauf der Kletterroute im überhängenden Wandteil vom Punkt P_1 bis zum Punkt P_4 soll durch eine Polynomfunktion 3. Grades beschrieben werden.

- Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten der Polynomfunktion 3. Grades berechnet werden können. Wählen Sie einen anderen Ursprung des Koordinatensystems als in der Abbildung dargestellt.
- Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Polynomfunktion 3. Grades.

b) Um die ungefähre Neigung (= Steigung) der Kletterwand an der Stelle x_3 abzuschätzen, geht ein Kletterer folgendermaßen vor:

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} \approx \frac{7{,}5 - 6{,}5}{9 - 9{,}5} = -2$$

– Stellen Sie mithilfe des Differenzialquotienten eine Formel auf, mit der Sie den Winkel α der Neigung der Kletterwand zur Horizontalen an der Stelle x_3 bestimmen können, wenn der Verlauf des überhängenden Wandteils durch eine Funktion h in Abhängigkeit von x beschrieben wird.
– Erklären Sie, wie der angegebene Differenzenquotient und der Differenzialquotient zusammenhängen.

c) Zur Ausleuchtung der Kletterroute wird an der gegenüberliegenden Trennwand in einer Höhe von $h_L = 4$ m eine Lampe mit der Lichtstärke I_V angebracht. Der Punkt A soll möglichst gut beleuchtet werden. Für die Beleuchtungsstärke gilt folgende Formel:

$$E_V = I_V \cdot \frac{\cos(\varphi)}{r^2}$$

E_V … Beleuchtungsstärke in Lux (lx)
I_V … Lichtstärke in Candela (cd)
φ … Tiefenwinkel von der Lampe zum Punkt A
r … Länge des Lichtstrahls von der Lampe zum Punkt A in m

– Zeichnen Sie die Position der Lampe sowie r und φ in die obige Grafik ein.
– Stellen Sie die Beleuchtungsstärke E_V als Funktion abhängig von der Entfernung der Trennwand von der Kletterroute dar.

Um die Entfernung für die maximale Beleuchtungsstärke zu ermitteln, wurde folgende Berechnung durchgeführt. Sie enthält genau einen Fehler.

(1) $E_1(x) = \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^2 + h_L^2}$

(2) $E_1'(x) = \dfrac{\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(x^2 + h_L^2\right) - x^{\frac{2}{3}} \cdot (2 \cdot x + 2 \cdot h_L)}{\left(x^2 + h_L^2\right)^2}$

(3) $E_1'(x) = \dfrac{\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{3} \cdot h_L^2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - 2 \cdot x^{\frac{5}{3}} - 2 \cdot h_L \cdot x^{\frac{2}{3}}}{\left(x^2 + h_L^2\right)^2}$

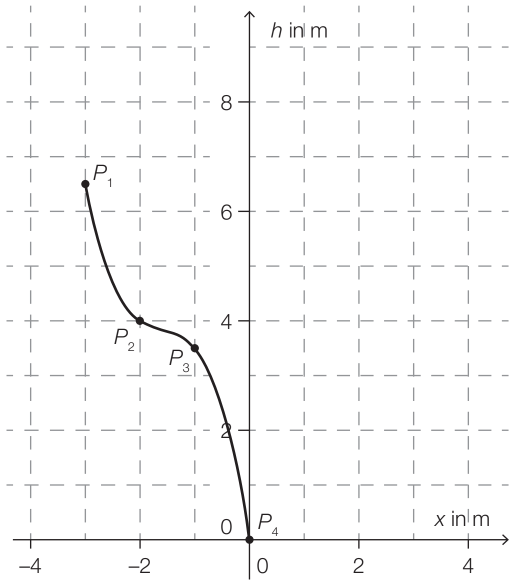
(4) $E_1'(x) = \dfrac{\frac{2}{3} \cdot h_L^2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{5}{3}} - 2 \cdot h_L \cdot x^{\frac{2}{3}}}{\left(x^2 + h_L^2\right)^2}$

– Kennzeichnen Sie den Fehler.
– Stellen Sie die Rechnung richtig.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Wahl des Ursprungs des Koordinatensystems: siehe Abbildung rechts



$P_1 = (-3|6{,}5)$, $P_2 = (-2|4)$, $P_3 = (-1|3{,}5)$, $P_4 = (0|0)$

$h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

I: $a \cdot (-3)^3 + b \cdot (-3)^2 + c \cdot (-3) + d = 6{,}5$
II: $a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) + d = 4$
III: $a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 3{,}5$
IV: $d = 0$

Die Funktion wird mit Technologieeinsatz bestimmt und lautet:

$h(x) = -\frac{5}{6} \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 - \frac{20}{3} \cdot x$ mit $-3 \leq x \leq 0$

Mit einer anderen Wahl des Ursprungs des Koordinatensystems sind weitere Funktionsgleichungen möglich.

b) Aufstellen der Formel zur Bestimmung des Winkels α der Neigung der Kletterwand zur Horizontalen an der Stelle x_3:

$\frac{dh}{dx} = h'(x_3)$
$\tan(\alpha) = h'(x_3)$
$\alpha = |\arctan(h'(x_3))|$

Unterschied bei der Berechnung der Neigung der Kletterwand mithilfe der Formel des Kletterers und des Differenzialquotienten:

$\frac{\Delta h}{\Delta x}$ … Steigung der Sekante, Differenzenquotient
$\frac{dh}{dx}$ … Steigung der Tangente, Differenzialquotient

Die Steigung der Tangente ist gegeben durch den Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta h}{\Delta x}$, wenn Δx gegen 0 geht.

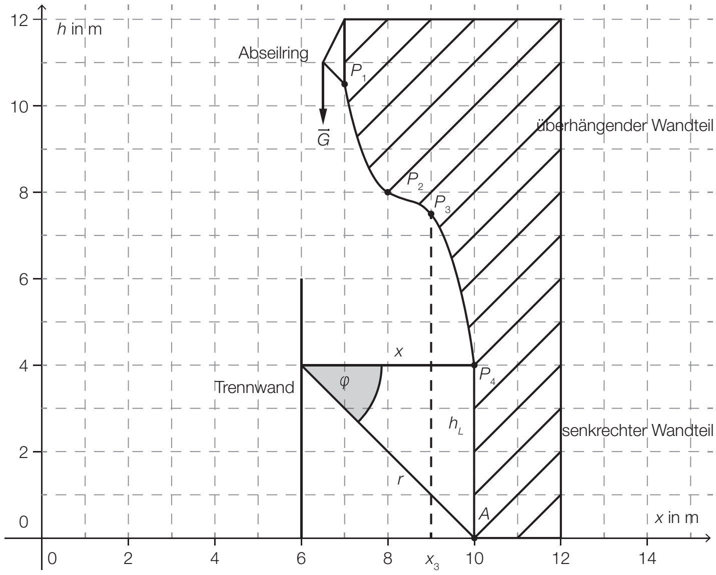
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{dh}{dx}$$

c) $E_V = I \cdot \frac{\cos(\varphi)}{r^2}$ Maximum

Nebenbedingungen:

$\cos(\varphi) = \frac{x}{r}$

$r^2 = x^2 + h_L^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + h_L^2}$



$E_V(x) = I_V \cdot \frac{\cos(\varphi)}{r^2} =$

$= I_V \cdot \frac{\frac{x}{r}}{r^2} = I_V \cdot \frac{x}{r^3} =$

$= I_V \cdot \frac{x}{\left(x^2 + h_L^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

Im Lösungsweg wurde in der 2. Zeile ein Fehler gemacht.

(1) $E_1(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^2 + h_L^2}$

(2) $E_1{}'(x) = \frac{\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(x^2 + h_L^2\right) - x^{\frac{2}{3}} \cdot 2 \cdot x}{\left(x^2 + h_L^2\right)^2}$

(3) $E_1{}'(x) = \frac{\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{3} \cdot h_L^2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - 2 \cdot x^{\frac{5}{3}}}{\left(x^2 + h_L^2\right)^2}$

(4) $E_1{}'(x) = \frac{\frac{2}{3} \cdot h_L^2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{5}{3}}}{\left(x^2 + h_L^2\right)^2}$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz, A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 4

Thema: Sport

Quellen: –