

Drechseln

Aufgabennummer: B_003

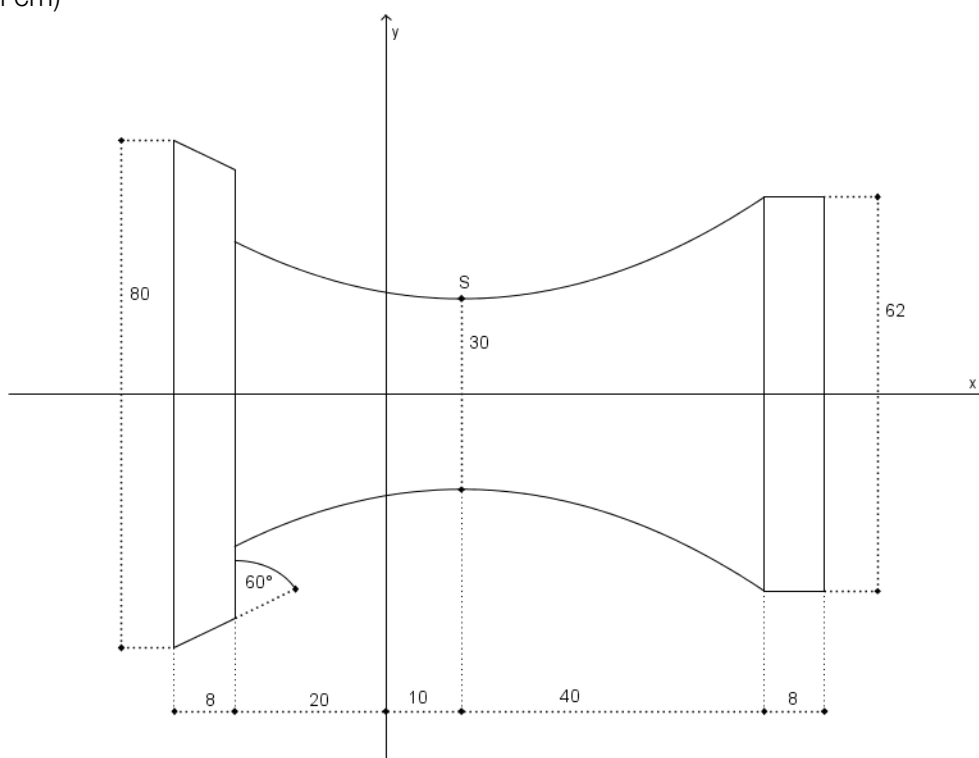
Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

Die folgende Abbildung zeigt den Längsschnitt eines rotationssymmetrischen Körpers, der durch eine um die x-Achse drehende Parabel mit einem aufgesetzten Drehkegelstumpf und einem Drehzylinder entsteht. Die Formgebung erfolgt durch Drechseln eines Holzzylinders.

(Maße in cm)



- a) – Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der Parabel. Wählen Sie einen anderen Ursprung des Koordinatensystems als in der Abbildung dargestellt.
- b) – Berechnen Sie die Bogenlänge der oben dargestellten Parabel, die durch die Funktion $y(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0,2 \cdot x + 16$ beschrieben wird.

$$\text{Bogenlänge: } s = \int_a^b \sqrt{1 - (y'(x))^2} \, dx$$

- c) – Berechnen Sie den Abfall in Prozent, der bei der Herstellung des Drehteils anfällt, wenn der Rohling einen Durchmesser $d = 8,5 \text{ dm}$ hat und die Parabel durch die Funktion $y(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0,2 \cdot x + 16$ beschrieben wird.

d) Gegeben sind folgende Funktionen:

$$f(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0,2 \cdot x + 16 \quad \text{und} \quad g(x) = -\frac{9}{490} \cdot x^2 + \frac{319}{490} \cdot x + \frac{2.174}{49}$$

Bei Rotation von Flächenstücken um die x-Achse entstehen Rotationskörper, deren Volumina durch folgende Formeln berechnet werden können:

$$V_1 = \pi \cdot \int_{-20}^{50} (g(x) - f(x))^2 dx$$

$$V_2 = \pi \cdot \int_{-20}^{50} [(g(x))^2 - (f(x))^2] dx$$

– Stellen Sie für jede der beiden Volumsformeln das rotierende Flächenstück grafisch dar.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

- a) Wahl des Ursprungs des Koordinatensystems – siehe Abbildung rechts

$$S = (0|15), \quad h(x) = a \cdot x^2 + n$$

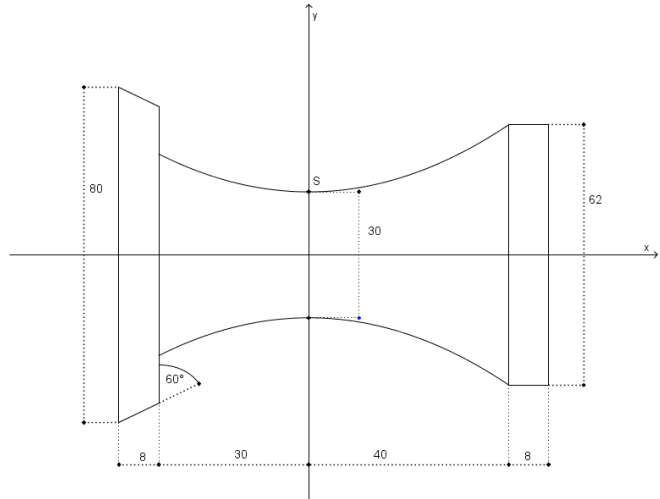
$$n = 15$$

$$P = (40|31)$$

$$31 = a \cdot 40^2 + 15 \Rightarrow a = \frac{1}{100}$$

$$h(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 + 15$$

Mit einer anderen Wahl des Ursprungs des Koordinatensystems sind weitere Funktionsgleichungen der Parabel möglich.



- b) $y(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0,2 \cdot x + 16$; $y'(x) = \frac{1}{50} \cdot x - 0,2$
 $s = \int_{-20}^{50} \sqrt{1 + y'^2} \approx 75,64 \text{ cm}$

Die Bogenlänge der Parabel beträgt 75,64 cm.

- c) Drehkegelstumpf:

$$\tan 30 = \frac{r_1 - r_2}{8} \Rightarrow r_1 - r_2 = 4,618... \approx 4,62 \text{ cm}$$

$$V_{\text{Drehkegelstumpf}} = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$$

$$V_{\text{Drehkegelstumpf}} \approx 35,75 \text{ dm}^3$$

Drehzylinder:

$$V_{\text{Drehzylinder}} = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V_{\text{Drehzylinder}} = 24\,152,56... \text{ cm}^3 \approx 24,15 \text{ dm}^3$$

Parabel:

$$y(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0,2 \cdot x + 16$$

$$V_{\text{Parabel}} = \pi \cdot \int_{-20}^{50} (y(x))^2 dx$$

$$V_{\text{Parabel}} = \pi \cdot 27\,384 = 86\,029,37... \text{ cm}^3 \approx 86,03 \text{ dm}^3$$

$$V = V_{\text{Drehkegelstumpf}} + V_{\text{Drehzylinder}} + V_{\text{Parabel}} \approx 145,93 \text{ dm}^3$$

Rohling:

$$V_{\text{Rohling}} = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot h$$

$$V_{\text{Rohling}} = 488\,007,14... \text{ cm}^3 \approx 488,01 \text{ dm}^3$$

Abfall in Prozent:

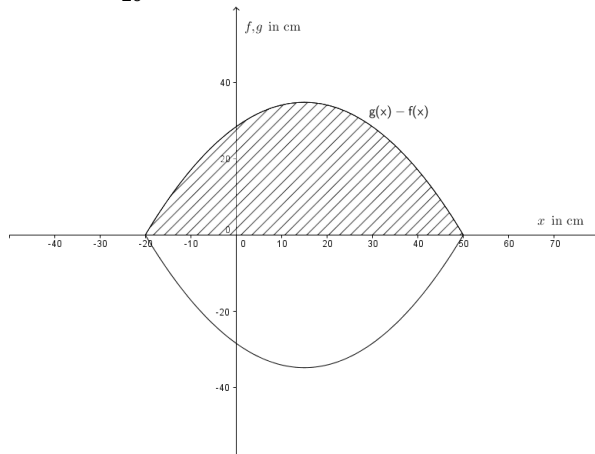
$$1 - \frac{145,932}{488,01} = 0,7009 \approx 70,1 \%$$

Bei der Herstellung des Drehteils fallen 70,1 % Abfall an.

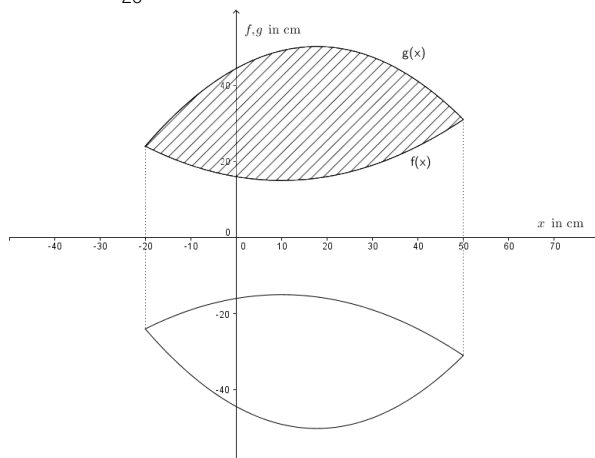
d) Die Volumensformeln ergeben die folgenden schraffierten Flächenstücke, die um die x-Achse rotieren:

$$f(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0,2 \cdot x + 16 \quad \text{und} \quad g(x) = -\frac{9}{490} \cdot x^2 + \frac{319}{490} \cdot x + \frac{2\,174}{49}$$

$$V_1 = \pi \cdot \int_{-20}^{50} (g(x) - f(x))^2 dx$$



$$V_2 = \pi \cdot \int_{-20}^{50} [(g(x))^2 - (f(x))^2] dx$$



Klassifikation

☐ Teil A

☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 4 Analysis
- d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) 4 Analysis
- c) 1 Zahlen und Maße
- d) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) B Operieren und Technologieeinsatz
- d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) —
- c) A Modellieren und Transferieren
- d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel
- d) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 2
- c) 4
- d) 4

Thema: Maschinenbau

Quellen: —