Informelle Kompetenzmessung
zur standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reife- und Diplomprüfung

BHS

Februar 2016

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 7)

Korrekturheft

BMBF Bundesministerium für Bildung und Frauen
Bundesinstitut bifie

Aufgabe 1

Vergnügungspark

Möglicher Lösungsweg

a) $4{,}1 = 9 - x^2$
$x^2 = 4{,}9$
$x = \pm 2{,}213\ldots$

Der Festwagen darf rund 4,42 m breit sein.

$\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\,\mathrm{d}x = 36$

Der Flächeninhalt der benötigten Folie beträgt 36 m^2.

b) Diese Polynomfunktion hat im dargestellten Intervall 2 lokale Extremstellen. Somit muss die 1. Ableitung dieser Funktion 2 Nullstellen haben, also mindestens eine Polynomfunktion 2. Grades sein. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Eine Gerade parallel zur x-Achse hat 3 Schnittpunkte mit dem Graphen der Funktion. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Der Graph ist keine Gerade und keine Parabel. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

c) rechtwinkeliges Dreieck FPS: $\tan(\beta) = \frac{\overline{SP}}{a} \Rightarrow \overline{SP} = a \cdot \tan(\beta)$

rechtwinkeliges Dreieck FQS: $\tan(\alpha) = \frac{\overline{SQ}}{a} \Rightarrow \overline{SQ} = a \cdot \tan(\alpha)$

$h = \overline{SP} - \overline{SQ}$
$h = a \cdot \tan(\beta) - a \cdot \tan(\alpha) = a \cdot (\tan(\beta) - \tan(\alpha))$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Breite b
1 × B2: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts
b) 1 × D: für eine richtige Erklärung
c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

Aufgabe 2

Luftdruck – Höhenformel

Möglicher Lösungsweg

a) $p(0) = p_0 \cdot e^{-\frac{0}{7991}} = p_0 \cdot 1 = p_0$

$\frac{p_0}{2} = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7991}}$

$h = 7\,991 \cdot \ln(2) = 5\,538{,}9\ldots$

Bei einer Seehöhe von rund 5 539 m beträgt der Luftdruck genau die Hälfte von p_0.

b) $f(h) = 1\,013 - \frac{1}{10} \cdot h$

c) Modellierung durch eine lineare Funktion g mit $g(x) = a \cdot x + b$:
$1\,040 = a \cdot 990 + b$
$930 = a \cdot 1\,980 + b$

$g(x) = -\frac{1}{9} \cdot x + 1\,150$

$g(1\,300) = \frac{9\,050}{9} \approx 1\,006$

Der Luftdruck in einer Höhe von 1 300 m über dem Meeresspiegel beträgt rund 1 006 hPa.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für einen richtigen Nachweis
1 × A: für den richtigen Lösungsansatz zur Berechnung
1 × B: für die richtige Berechnung der Seehöhe
b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktion
c) 1 × A: für einen richtigen Ansatz (z. B. mithilfe einer linearen Funktion bzw. ähnlicher Dreiecke)
1 × B: für die richtige Bestimmung des Luftdrucks

Aufgabe 3

Produktion von Rucksäcken

Möglicher Lösungsweg

a) Es wird die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis berechnet, dass ein zufällig kontrollierter Rucksack Nahtfehler, aber keine der beiden anderen Fehlerarten aufweist.

b) $P(\text{„mindestens 1 Fehler“}) = 1 - P(\text{„kein Fehler“}) = 1 - 0{,}98 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}99 = 0{,}0589... \approx 5{,}9\,\%$

Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Rucksack mindestens 1 dieser 3 Fehler aufweist, muss bei der Verwendung der Gegenwahrscheinlichkeit nur 1 Ereignis, nämlich das Ereignis, dass kein Fehler auftritt, betrachtet werden.
Bei einer direkten Berechnung müssten die Wahrscheinlichkeiten für eine Vielzahl von Ereignissen berechnet und addiert werden.

c) Berechnung mittels Binomialverteilung: $n = 100$ und $p = 0{,}03$
$P(X < 3) = 0{,}41977\ldots \approx 41{,}98\,\%$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Angabe des Ereignisses (es muss auch klar erkennbar sein, dass die beiden anderen Fehlerarten nicht auftreten)
b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × D: für die richtige Erklärung zur Gegenwahrscheinlichkeit
c) 1 × A: für das Erkennen des richtigen Wahrscheinlichkeitsmodells (Binomialverteilung)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 4

Tennis

Möglicher Lösungsweg

a) Aufschlaggeschwindigkeit, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde: 120 km/h

Quartilsabstand: 30 km/h

b) ähnliche Dreiecke:

$$\frac{2{,}3}{6{,}4 + 6{,}4 + 5{,}5} = \frac{h}{6{,}4}$$

$h = 0{,}80\ldots\text{ m} \approx 0{,}8\text{ m}$

Der Ball ist beim Netz in einer Höhe von rund 0,8 m.
Somit geht der Ball ins Netz.

c) $f'(0) = \frac{2}{5}$

$\arctan\left(\frac{2}{5}\right) = 21{,}801\ldots° \approx 21{,}80°$

Der Ball befindet sich im Abschlagpunkt in einer Höhe von $\frac{21}{50}$ Metern.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für das richtige Ablesen der Aufschlaggeschwindigkeit
1 × C2: für das richtige Ablesen des Quartilsabstands
b) 1 × D: für die richtige Überprüfung
c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Steigungswinkels
1 × C: für die richtige Interpretation der Zahl $\frac{21}{50}$

Aufgabe 5

Leistung einer Solaranlage

Möglicher Lösungsweg

a) $P'(6) = 0$

$$0 = \frac{7}{162} \cdot 6^3 - \frac{7}{9} \cdot 6^2 + 2 \cdot a \cdot 6$$

$$a = \frac{14}{9}$$

b) $\int_0^{12} (0{,}007 \cdot t^4 - 0{,}165 \cdot t^3 + 0{,}972 \cdot t^2 + 1{,}221)\,\mathrm{d}t = 67{,}5288$

Die Solaranlage liefert an diesem Tag rund 67,53 kWh Energie.

c) An der Wendestelle x_0 einer Funktion f gilt stets: $f''(x_0) = 0$.
Die 2. Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades ist eine lineare Funktion, die genau 1 Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat. Daher hat die Polynomfunktion 3. Grades genau 1 Wendestelle.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung des Koeffizienten *a*
1 × B: für die richtige Berechnung des Koeffizienten *a*
b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Integrals
c) 1 × D: für eine richtige Begründung

Aufgabe 6 (Teil B)

LED-Lampen

Möglicher Lösungsweg

a)

Verwendungsdauer in Jahren	insgesamt angefallene Kosten bei der Verwendung …	
	von Glühlampen	einer LED-Lampe
1	€ 5,75	€ 15,60
2	€ 11,50	€ 16,20
3	€ 17,25	€ 16,80
4	€ 23,00	€ 17,40
5	€ 28,75	€ 18,00

Nach 3 Jahren sind die insgesamt angefallenen Kosten bei der Verwendung einer LED-Lampe erstmals geringer als bei der Verwendung von Glühlampen.

b) Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = 0{,}026 \cdot x + 1{,}534$

x … Lichtstrom in Lumen
$f(x)$ … Preis bei einem Lichtstrom x in Euro/Stück

Die Steigung 0,026 besagt, dass pro zusätzlichem Lumen Lichtstrom der Preis um € 0,026 steigt.

$f(500) \approx 14{,}53$
Für eine LED-Lampe mit 500 Lumen ist ein Preis von € 14,53 pro Stück zu erwarten.

c) $\mu = \frac{780 + 1\,140}{2} = 960$

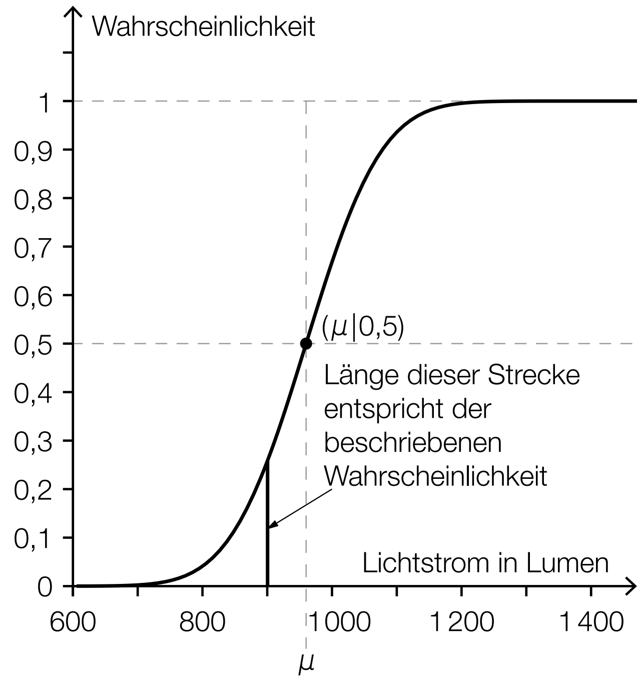
Der Erwartungswert beträgt 960 Lumen.

Aufgrund der Symmetrie gilt: $P(X \leq 1\,140) = 0{,}975$

$\phi(z) = 0{,}975 \;\Rightarrow\; z = 1{,}959\ldots$

$\sigma = \frac{1\,140 - 960}{1{,}959\ldots} = 91{,}8\ldots$

Die Standardabweichung beträgt rund 92 Lumen.



Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Tabelle
1 × C: für das richtige Ablesen aus der Tabelle

b) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion
1 × C: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B2: für die richtige Berechnung des Preises pro Stück

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Erwartungswerts
1 × B2: für die richtige Berechnung der Standardabweichung
1 × A1: für das richtige Skizzieren des Graphen der Verteilungsfunktion (charakteristischer Funktionsverlauf und Funktionswert an der Stelle μ richtig eingezeichnet)
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in der Abbildung

Aufgabe 7 (Teil B)

Grenzkosten

Möglicher Lösungsweg

a) Der Grenzkostenwert 1060 GE/ME bedeutet, dass bei einer Produktionsmenge von 20 ME eine Steigerung der Produktion um 1 ME zu einer Kostensteigerung von näherungsweise 1060 GE führen wird.

$K'(20) = 1060$
$K'(50) = 7120$
$K'(60) = 10340$

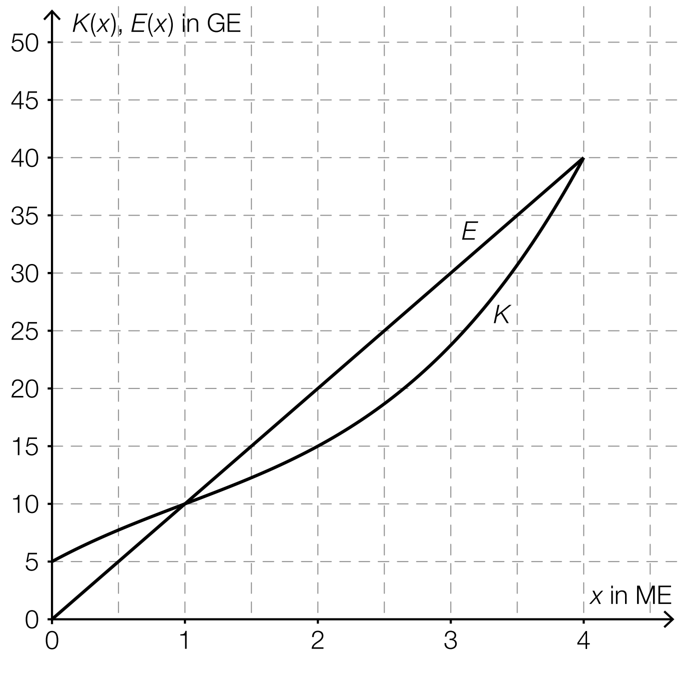
Lösen dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$K'(x) = 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 20$

b) $K''(x) = 0{,}6 \cdot x - 4$
$0 = 0{,}6 \cdot x - 4 \;\Rightarrow\; x = \frac{20}{3} \approx 6{,}7$
Die Kostenkehre liegt bei rund 6,7 ME.

$\int (0{,}3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 15)\,\mathrm{d}x = 0{,}1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 15 \cdot x + C$
$K(35) = 2\,372{,}50$:
$0{,}1 \cdot 35^3 - 2 \cdot 35^2 + 15 \cdot 35 + C = 2372{,}50 \;\Rightarrow\; C = 10$

$K(x) = 0{,}1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 15 \cdot x + 10$

c)



Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Interpretation der Grenzkosten im gegebenen Sachzusammenhang
   1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
b) 1 x B1: für die richtige Berechnung der Kostenkehre
   1 x A: für den richtigen Ansatz zum Aufstellen der Funktionsgleichung der Kostenfunktion K
   1 x B2: für die richtige Berechnung der Integrationskonstanten
c) 1 x A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen von E im Intervall [0; 4]
   1 x A2: für das richtige Einzeichnen des Graphen von K im Intervall [0; 4] als ertragsgesetzliche Kostenfunktion mit Fixkosten 5 GE und oberer Gewinngrenze 4 ME
   1 x A3: für die richtige Darstellung der Extremstelle der Grenzkostenfunktion als Wendepunkt des Graphen der Kostenfunktion an der Stelle $x = 1$

Aufgabe 8 (Teil B)

Konditorei

Möglicher Lösungsweg

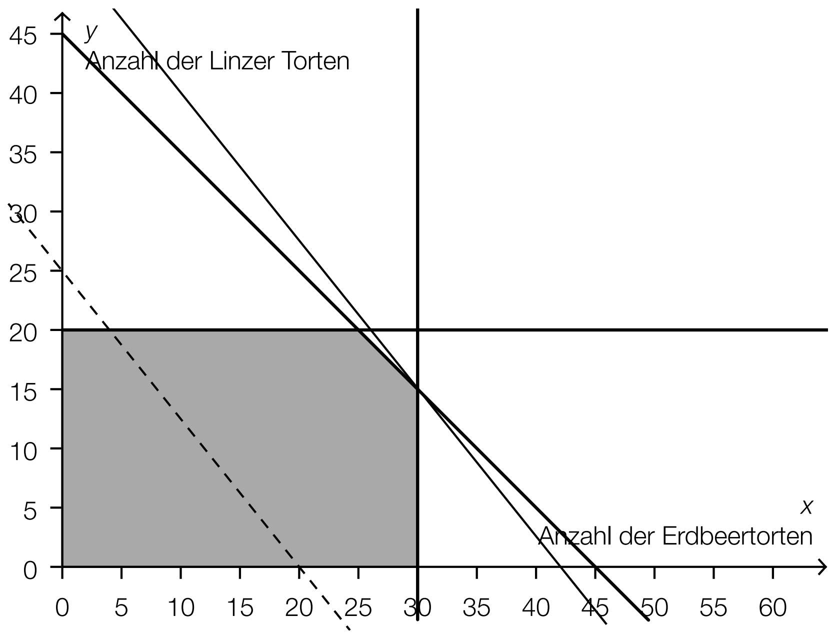
a) x … Anzahl der Sachertorten
y … Anzahl der Topfentorten

(1) $x \leq 10$
(2) $y \leq 25$
(3) $y \geq 2 \cdot x$

Nichtnegativitätsbedingungen: $x \geq 0$, $y \geq 0$
Es ist nicht gefordert, die Nichtnegativitätsbedingungen anzugeben.

b) $Z(x, y) = 23{,}5 \cdot x + 18 \cdot y$

c) (1) $x \geq 0$
(2) $y \geq 0$
(3) $x \leq 30$
(4) $y \leq 20$
(5) $x + y \leq 45$



gewinnmaximierende Menge: (30|15)

$25 \cdot 30 + 20 \cdot 15 = 1\,050$
Der maximale Gewinn beträgt € 1.050 pro Tag.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der beiden Ungleichungen (1) und (2)
   1 × A2: für das richtige Aufstellen der Ungleichung (3)
   Die Angabe der Nichtnegativitätsbedingungen ist nicht erforderlich.

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Zielfunktion zur Beschreibung des Gewinns

c) 1 × C1: für das richtige Ablesen der 4 Ungleichungen (1) bis (4)
   1 × C2: für das richtige Ablesen von Ungleichung (5)
   1 × B1: für das richtige Einzeichnen der Geraden, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird
   1 × B2: für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns