

Von Labyrinthen zu Algorithmen

Teil 2

Gerald Futschek

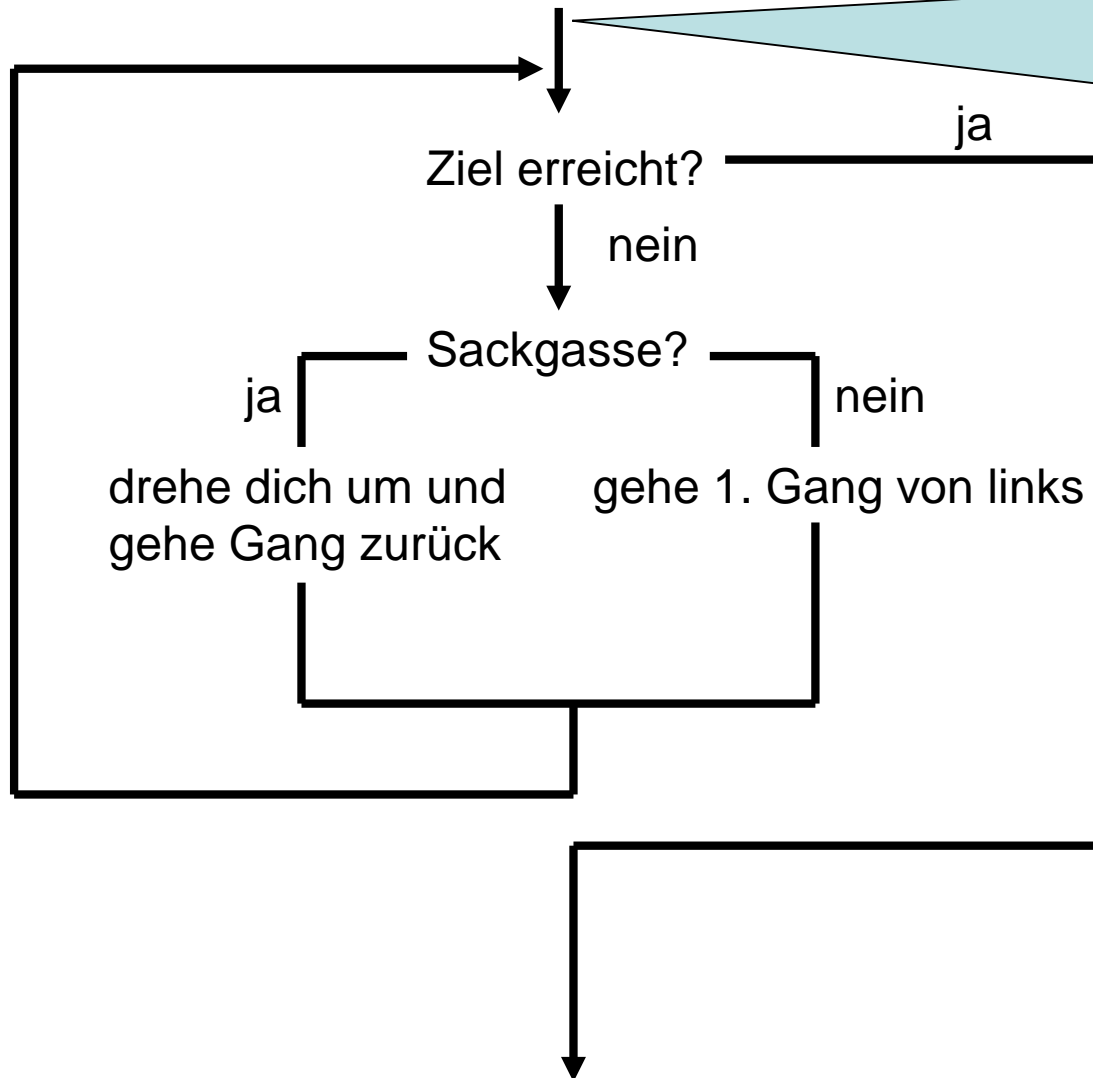
Linke Wand entlang

- Wie formuliert man den Algorithmus mit den Grundoperationen?
- Es gibt ja in der Abstraktion (Graph) keine Wände, sondern nur mehr Kanten!

Algorithmus mit den 4 Grundoperationen:

solange Ziel nicht erreicht
 falls Sackgasse
 drehe dich um und gehe Gang zurück
 sonst
 gehe 1. Gang von links

Flussdiagramm



**Welche
Anfangsbedin-
gungen müssen
erfüllt sein, damit
dieser
Algorithmus
terminiert?**

Precondition eines Algorithmus

- **Precondition** (Vorbedingung, Anfangsbedingung)
muss vor dem Algorithmus erfüllt sein, damit er terminiert und die gewünschten Ergebnisse liefert

Precondition

Algorithmus

Precondition für Linke Wand Algorithmus:

-
-

solange Ziel **nicht** erreicht
falls Sackgasse
 drehe dich um
 und gehe Gang zurück
sonst
 gehe 1. Gang von links

Postcondition eines Algorithmus

- **Postcondition**

(Nachbedingung,
Endbedingung)

beschreibt den gewünschten
Endzustand des Algorithmus

Algorithmus

Postcondition

Postcondition des Linke Wand Algorithmus:

-

solange Ziel nicht erreicht
 falls Sackgasse
 drehe dich um
 und gehe Gang zurück
 sonst
 gehe 1. Gang von links

Bedeutung der Precondition

- **Precondition ist erfüllt:**

Algorithmus terminiert sicher
und nachher ist die
Postcondition erfüllt

Precondition

Algorithmus

- **Precondition ist *nicht* erfüllt:**

Es ist nicht garantiert, dass der
Algorithmus terminiert oder nachher
die Postcondition erfüllt ist.

Postcondition

In diesem Fall soll der Algorithmus gar
nicht ausgeführt werden!

Grundoperationen für Labyrinth

2

Minimale Anzahl an Operationen:

Man kommt stets von einem Gang an eine Kreuzung:

- Abfrage: Anzahl weiterer Gänge bei dieser Kreuzung? (Null bedeutet Sackgasse)
- Aktion: Wähle den i -ten Gang von links und gehe in diesem Gang bis zur nächsten Kreuzung
- ~~Aktion: Drehe dich um und gehe den Gang, den du gekommen bist, bis zur letzten Kreuzung zurück~~
- Abfrage: Knoten x erreicht? Ja/Nein

Kann man mit diesen Grundoperationen einen Weg von A nach B im Labyrinth finden? Wie?

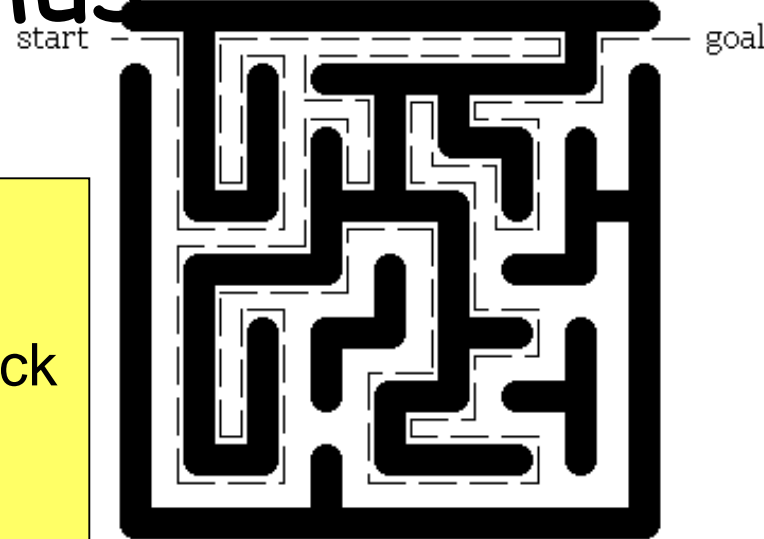
Vereinfachung des Linke Wand Algorithmus

statt

solange Ziel nicht erreicht
 falls Sackgasse
 drehe dich um und gehe Gang zurück
 sonst
 gehe 1. Gang von links

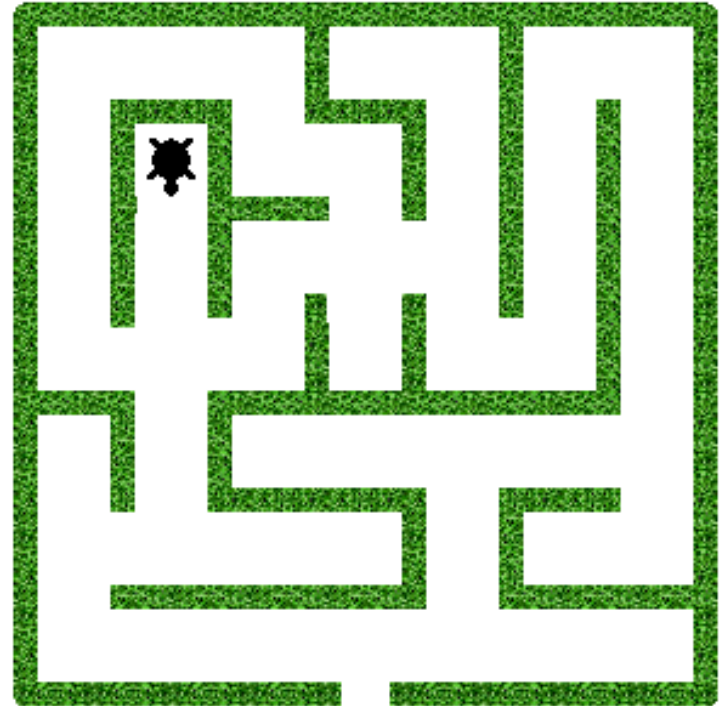
in einer Sackgasse ist der erste Gang
von links der Weg zurück:

solange Ziel nicht erreicht
 gehe 1. Gang von links



Problem der Zyklen

- Die Strategie „Linke Wand entlang“ funktioniert leider nicht bei allen Labyrinthen, wenn man von A nach B will!
- Möglicherweise gibt es Zyklen, sodass es auch unendlich lange Pfade gibt (das Verfahren terminiert nicht!)
- **Gibt es trotzdem Strategien, zum Ziel zu kommen?**



Ariadne, die erste Informatikerin

- Theseus ist wild entschlossen, Minotaurus in seinem Labyrinth umzubringen
- Ariadne hilft ihm dabei mit einer genialen Idee, den Minotaurus zu finden und das Labyrinth auf schnellstem Weg zu verlassen



Der Ariadne-Faden

- Theseus durchsucht systematisch das gesamte Labyrinth: Er spult dabei einen Faden ab, geht an Kreuzungen immer den Gang ganz links.
- Bei Sackgassen und an Kreuzungen, bei denen der Ariadnefaden quert (Zyklus!) muss er umkehren (back tracking) und den Faden zurückverfolgen und aufwickeln, um dann den nächsten Gang bei einer bereits besuchten Kreuzung einzuschlagen.
- Mit dieser Technik sucht Theseus systematisch die Gänge und Kreuzungen ab.
- Um schließlich zum Eingang zurückzukehren, muss er zuletzt nur den Faden zurückverfolgen



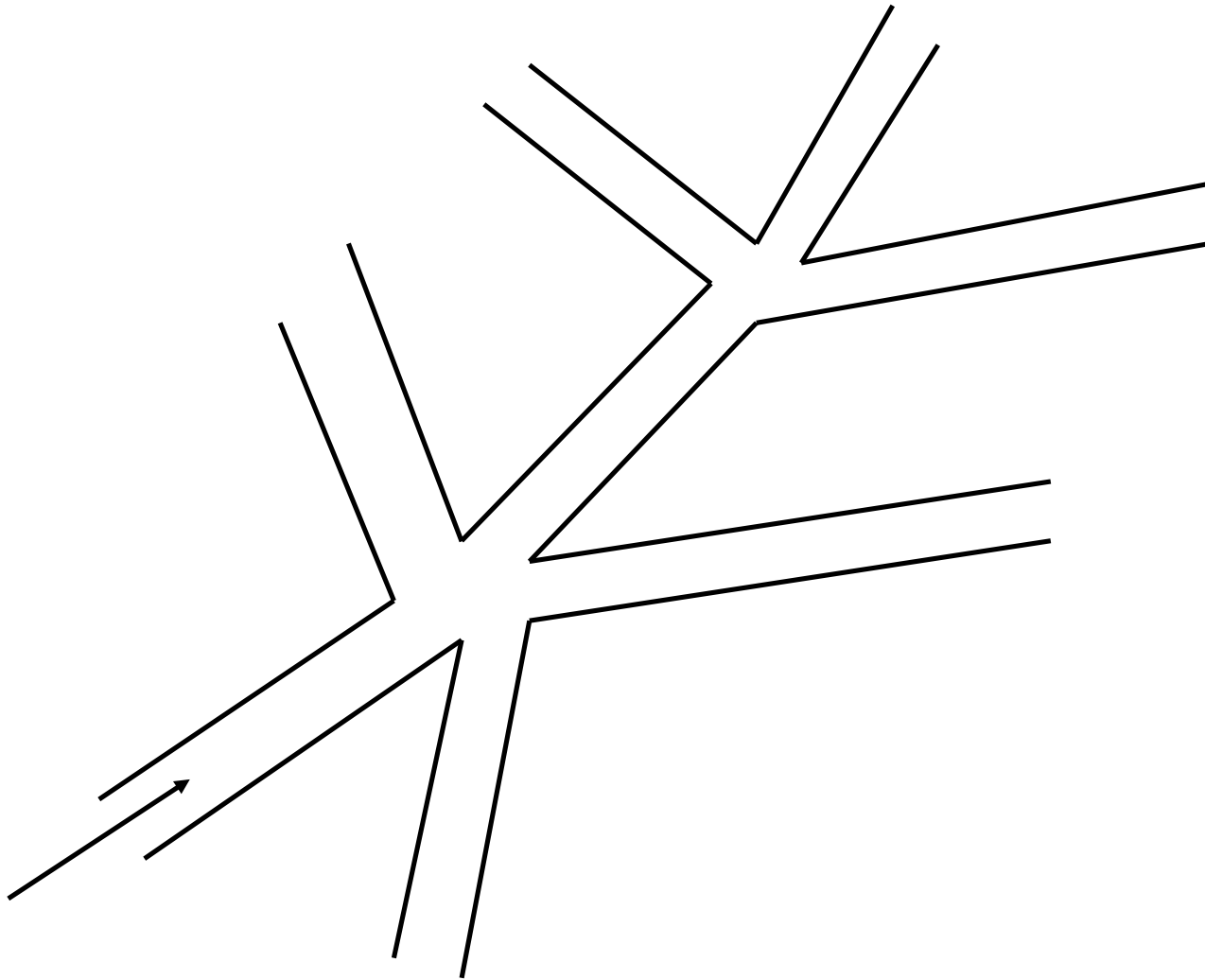
Fragen zum Ariadne-Faden

- Welchen Vorteil bringt der Ariadne-Faden?
- Warum wickelt man den Faden beim Zurückgehen wieder auf?
- Wie lang muss der Faden sein?



Theseus tötet den Minotaurus
(schwarzfigurige Amphore)

Ariadne-Algorithmus im Detail



Fragen zum Ariadne-Algorithmus

- Wie erkennt Theseus, dass sich Minotaurus nicht im Labyrinth aufhält?
- Geht Theseus den kürzesten Weg aus dem Labyrinth hinaus?
- Kann es vorkommen, dass der Algorithmus „ewig“ dauert?
- Welche Pre- und Postonditions gelten?

Aufwand des Ariadne-Algorithmus

- Wie groß ist der Aufwand des Algorithmus?
 - Wie misst man den Aufwand?
 - Anzahl Einzelschritte
 - = Anzahl besuchter Kreuzungen?
 - = Anzahl durchwanderter Gänge?

Aufwand entspricht der Anzahl verschiedener Wege von A nach B

Abhängig von Problemgröße n

n = Anzahl der Kreuzungen (Knoten)

Wenn maximal 3 weitere Gänge weggehen:
Aufwand maximal 3^n (verschiedene Wege) (exponentiell!)
- Wie kann man den Ariadne Algorithmus beschleunigen?

Der Ariadne-Faden

- Theseus durchsucht systematisch das gesamte Labyrinth: Er spult dabei einen Faden ab, geht an Kreuzungen immer den Gang ganz links.
- Bei Sackgassen und an Kreuzungen, bei denen der Ariadnefaden quert (Zyklus!) muss er umkehren (back tracking) und den Faden zurückverfolgen und aufwickeln, um dann den nächsten Gang bei einer bereits besuchten Kreuzung einzuschlagen.
- Mit dieser Technik sucht Theseus systematisch die Gänge und Kreuzungen ab.
- Um schließlich zum Eingang zurückzukehren, muss er zuletzt nur den Faden zurückverfolgen



Ariadne-Faden Algorithmus

Modifizierte Grundoperationen:

Aktionen: Beim Gehen in Gängen zusätzlich Faden abspulen bzw. aufwickeln

zusätzliche Abfrage: Quert ein Faden die Kreuzung?

Ariadne Algorithmus mit den Grundoperationen:

solange Ziel nicht erreicht

falls Sackgasse **oder** Ariadnefaden quert Kreuzung
 drehe dich um und gehe Gang zurück (und wickle auf)

sonst

 gehe 1. Gang von links (falls Ariadnefaden im Gang, dann aufwickeln sonst abspulen)

Es wird ein „Baum“ von allen möglichen Wegen durchsucht, dabei stets versucht zuerst möglichst tief zu kommen: **Tiefensuche!**

Aufwand des Ariadne Algorithmus

- Im schlimmsten Fall (worst case):
 - exponentiell !!!
 - $O(2^n)$ (n ... Problemgröße)
- Was bedeutet das in der Praxis?

Größere Labyrinth können manchmal nicht gelöst werden!

Beschleunigung des Ariadne-Algorithmus

Zusätzliche Grundoperationen:

Aktionen: Alle Stellen im Labyrinth, die schon besucht wurden, werden markiert.

zusätzliche Abfrage: War ich schon einmal an der Stelle, die ich gerade betreten möchte?

Beschleunigter Ariadne Algorithmus:

solange Ziel nicht erreicht

falls Sackgasse **oder** Ariadnefaden quert Kreuzung **oder** Stelle
im Labyrinth schon besucht

drehe dich um und gehe Gang zurück (und wickle auf)

sonst

gehe 1. Gang von links (falls Ariadnefaden im Gang, dann aufwickeln sonst abspulen)

Aufwand des beschleunigten Ariadne-Algorithmus

- Worst case:
 - Wieviele Schritte maximal?
- Proportional zu Anzahl Gänge
 - Linearer Aufwand
 - $O(n)$