Angewandte Mathematik

Skriptum des Schuljahres 2017/18

3AHIT

2. Januar 2020

Bewertung:		Version:	1.0
Betreuer:	Michael Günthör	Begonnen:	6. Juni 2018
		Beendet:	10. Juni 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen und Reihen

1.1 Grundidee

Ein Baggersee mit 1500m^2 Fläche er wird so ausgehoben, dass er jede Woche um 200m^2 wächst.
Jedoch breiten sich Algen aus.
Am Beginn: 1m^2 ->Verdreifacht sich wöchentlich

(n)Wochen	0	1	2	3	4...	8
See Fläche	1500	1700	1900	2500	2300...	3100
Algen Fläche	1	3	9	27	81...	6561

Gesetz:
Seefläche: $1500 + 200n$
Algenfläche: $i \cdot 3^n$
$n\epsilon\mathbb{N}_0$

1.2 Definition

Eine Folge ist eine Abbildung:
f: $\mathbb{N}$ -> $\mathbb{R}$ bzw. f: $\mathbb{N}$ -> $\mathbb{C}$
($\mathbb{N}$ manchmal)

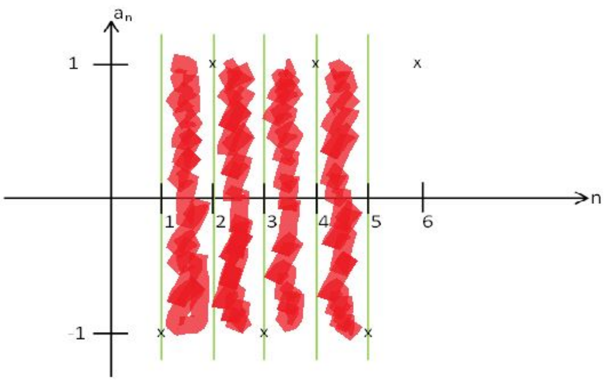


Abbildung 1: Darstellung einer Folge

1.3 Schreibweise:

$a_n = ...$ (ähnlich zu $a(n)$)
Erzeugender Term: $a_n = \frac{n^2}{n+1}$
Bedeutet so viel wie das Folgeglied an der Stelle n
zB: $a_8 \ldots$ Folgeglied an der Stelle 8.
Allerdings is das Folgelied an der Stelle 8 nicht zwangsweise das 8. Folgeglied!

Beispiele:

$a_n =< 1, 1, 1, 1, 1, 1, ... >$
$b_n =< 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, ... >$
$c_n = 2 + \frac{1}{n} =< 3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, ... >$
$d_{n+1} = d_n + d_{n-1}, d_0 = 1, d_1 = 1 \Longleftrightarrow < 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... >$

1.4 Folgentypen:

(a) $a_n = c$ heißt konstante Folge

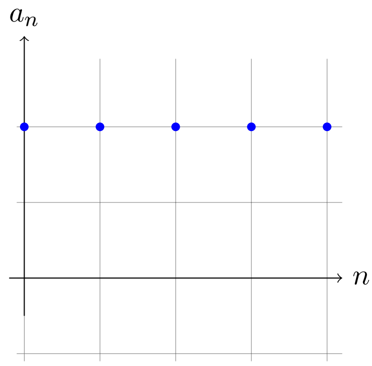


Abbildung 2: Darstellung einer konstanten Folge

(b) $a_n = c \cdot (-1)^n$ heißt alternierende Folge

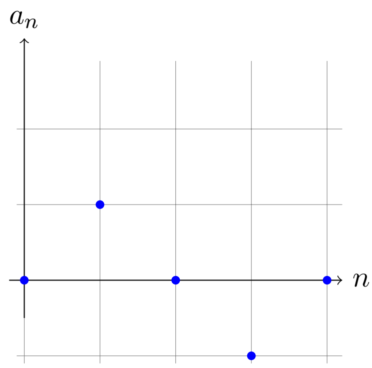


Abbildung 3: Darstellung einer alternierenden Folge

(c) $a_n = a_0 + d \cdot n$ heißt arithmetische Folge, wobei d für die Differenz steht

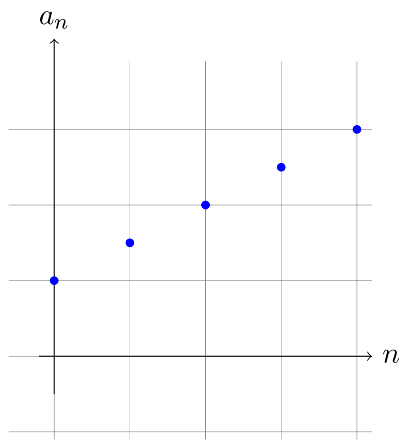


Abbildung 4: Darstellung einer arithmetischen Folge

(d) $a_n = b_0 \cdot q^n$ heißt geometrische Folge, wobei q für den Quotienten steht.

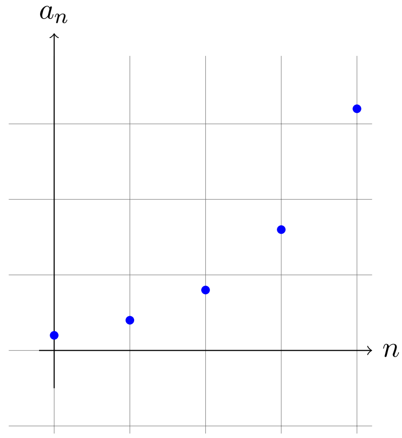


Abbildung 5: Darstellung einer geometrischen Folge

1.5 Beschränktheit

Sei a$_n$ eine reelle Folge, dann
i) heißt a_n nach oben beschränkt, falls ein M $\in \mathbb{R}$ existiert, sodass $a_n \leq M \forall n \in \mathbb{N}$ gibt.
ii) heißt a$_n$ nach unten beschränkt, falls ein m$\in \mathbb{R}$ existiert, sodass a$_n \geq$ M $\forall$n$\in \mathbb{N}$ gibt.
iii) heißt a_n beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

1.5.1 Beschränktheit in C

$\mathbb{C}$ sind nicht wohldefiniert.
Das heißt eine sortierung von komplexen Zahlen mit $<$ oder $>$ existiert nicht.
Betrachtet die Folgeglieder der Beträge.

1.6 Monotonie

1.6.1 Definition

Sei a$_n$ eine reelle Folge.
a$_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$...streng monoton wachsend
a$_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$...monoton wachsend
a$_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$...monoton fallend
a$_n > a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$...streng monoton fallend

Beispiel:

i) a$_n = \frac{1}{n}$ ...streng monoton fallend

ii) a$_n = 1$ ...monoton fallend und wachsend

iii) $a_n = q^n$
$q > 1$... streng monoton wachsend
$0 < q < 1$... streng monoton fallend

1.7 Konvergenz / Divergenz

1.7.1 Definition

Eine Folge a_n heißt konvergent, falls eine Zahl a existiert, so dass die folgende Bedingung erfüllt ist: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass ab diesem Folgeglied alle Folgeglieder innerhalb der ϵ-Umgebung um a liegen.
D.h.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |a_n - a| < \epsilon$$

a heißt Grenzwert von a_n
Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
Ist a_n nicht konvergent, dann heißt a_n divergent.

1.7.2 Erklärung

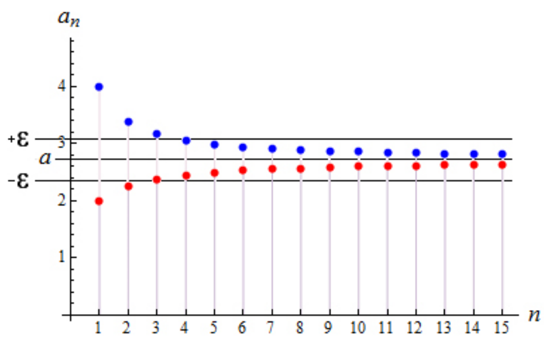


Abbildung 6: Darstellung anhand eines Graphen

Wichtigster Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Wie viele Grenzwerte kann eine Folge besitzen? $\Rightarrow$ Es kann nur einen Grenzwert geben!

1.8 Grenzwertsätze

1.8.1 Definition

Seien a_n und b_n Folgen, sowie $\lambda \in \mathbb{R}$

i) Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.

ii) Jede Folge, die konvergiert, ist notwendigerweise beschränkt.

iii) Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda a$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(d) Falls $b \neq 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$

iv) Ist a_n konvergent gegen a und $a_n \geqslant c \forall n \in \mathbb{N}$, dann ist auch $a \geqslant c$.
Analog für $a_n \leqslant c$

1.9 Sandwich-Lemma:

Sein a_n und b_n zwei reelle konvergente Folgen mit dem selben Grenzwert a
(also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$)
so gilt: $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$, dass $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$

Beispiel:

$a_n = \sqrt[n]{4^n + 7^n}$
sicher kleiner: $\sqrt[n]{7^n}$
sicher größer: $\sqrt[n]{7^n + 7^n}$

$\underbrace{\sqrt[n]{7^n}}_{7} \geqslant \sqrt[n]{4^n + 7^n} \geqslant \underbrace{\sqrt[n]{7^n + 7^n}}_{7\cdot \sqrt[n]{2} = 7}$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + 7^n} = 7$

1.10 Euler-Zahl:

$$e := \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \cdot \frac{1}{k!}$$

1.11 Fakultät:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots 2 \cdot 1$$

wobei gilt: $(0! = 1)$

Beispiel

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 * 1 = 720$$

Gesprochen: n-Fakultät oder n-Faktoriell

1.12 Häufungswert

1.12.1 Definition

Eine Folge besitze einen Häufungswert a genau dann, wenn in der ϵ-Umgebung um a unendlich viele Folgeglieder liegen.

1.12.2 Beispiel

$$a_n = (-1)^n \dots a_n = \langle +1, -1, +1, -1 + 1 \dots \rangle$$

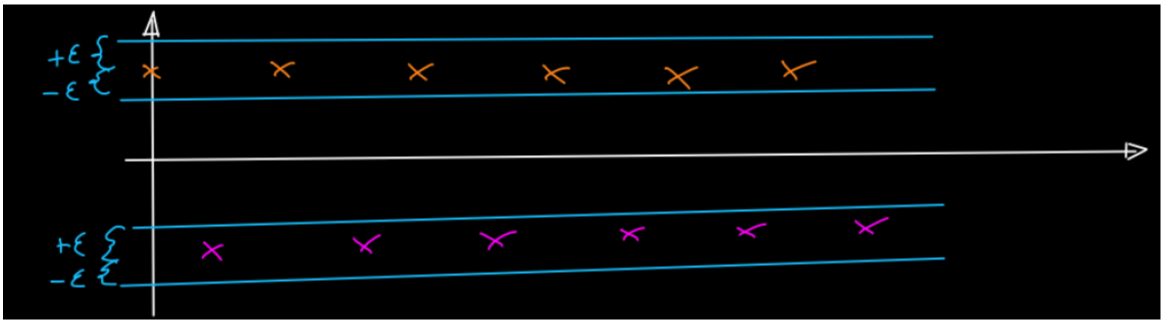


Abbildung 7: Darstellung der Epsilonumgebung

1.12.3 Folgerung

Grenzwert $\Rightarrow$Häufungswert
Häufungswert $\nRightarrow$ Grenzwert

1.13 Satz von Bolzano-Weierstraß:

Sei a_n eine beschränkte Folge.
Dann existiert ein Häufungswert, d.h. eine konvergente Teilfolge.
Folgerung: a_n ist beschränkte folge
a_n konvergent $\Leftrightarrow$ a_n genau einen Häufungswert

1.14 Rekursive Folge:

1.14.1 Fibonacci-Folge

$f =< 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... >$
$f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$
Rekursion: Auf vorhergehende Glieder zugreifend

2 Reihen

Beispiel

Betrachte: 3,12345...
$3, 12345... = 3 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \dots$

2.1 Definition

Sei a_k eine reele Folge, Folge $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ heißt Folge der Partialsumme oder endliche Reihe

2.2 Konvergenz / Divergenz

Eine Reihe heißt konvergent, wenn $\lim_{n\to\infty} s_n$ = S gilt.
(d.h. eine Summe S existiert)
Eine Reihe heißt divergent, wenn die Folge der Partialsumme divergent ist.

2.3 Wichtige Reihen

Geometrische Reihe: $\sum_{k=1}^{n} q^k$

Harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

2.4 Unendliche Reihe

Falls $n = \infty$, dann heißt die Reihe unendliche Reihe.

2.5 Absolute Konvergenz

2.5.1 Definition

Eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt genau dann absolut konvergent, wenn die zugehörige Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiel

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$$

$a_k = -\frac{1}{2k-1} <-$ ungeraden
$b_k = \frac{1}{2k} <-$ geraden

b_k ist harmonische Reihe

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = \infty$$

$$a_k : a_k = -\frac{1}{2k-1}$$

$$M := 1 + \left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{k}\right|$$

Umsortieren der Glieder von a_k und b_k. Anfang aller Glieder von b_k kommen bis die Summe größer als $M+1$ ist, dann das nächste a_k wählen, so ist die nächste Partialsumme größer als M. Da b_k gegen ∞ strebt (divergiert), kann man dies unendlich oft machen. Daher ist der Grenzwert immer größer als M, falls er existiert.
Daher hat die umsortierte Reihe ein anderes Grenzwertverhalten, deren Grenzwert immer um 1 kleiner ist.

2.6 Konvergenzkriterien

2.6.1 Majoranten- / Minorantenkriterium

Gegeben sei eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

(a) Falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, eine konstante $M > 0$ sowie eine konvergente Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ gibt, so dass für alle $k \geq n_0$ gilt: $|a_k| \leq M_{c_k}$ dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ heißt Majorante von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

(b) Falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, eine Konstante $M > 0$ sowie eine divergente Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ gibt, so dass für alle $k \geq n_0$ gilt: $|a_k| \geq M_{d_k} \geq 0$ dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ebenfalls divergent. Das heißt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist nicht absolut konvergent.
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ heißt Minorante von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beispiel:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$
Konvergenz? Majorante?
$k^2 \geq k(k-1)$
$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$
$\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k-1)} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
$= 1 - \frac{1}{(n-1)+1} \Leftarrow$ Grenzwert 1
Majorante konvergiert $\Rightarrow$ Reihe konvergiert

2.6.2 Quotientenkriterium

Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$
$r := \lim\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}|$
r existiert
$a)r < 1$: Reihe a_k absolut konvergent
$b)r > 1$: Reihe a_k divergent

Beispiel

$$a)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = a_k$$

Mühsam: konvergent

$$QT : r := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k!}{(k+1)!} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\cancel{k!}}{(k+1) * \cancel{k!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0$$

$0 < 1 \Rightarrow$ Reihe absolut konvergent

$$b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}$$

$$QT: r := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{k+1}}{k+1}}{\frac{2^k}{k}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{\cancel{2^k}*2}{k+1}}{\frac{\cancel{2^k}}{k}} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{2k}{k+1} \right| = 2 > 1 \Rightarrow \underline{\underline{divergent}}$$

2.6.3 Wurzelkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe, $r := \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ r existiert.

(a) $r < 1:$

(b) $r > 1:$

Beispiel

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{2}{k})^k$$

$$WT: r = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{(\frac{2}{k})^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{4} = 0$$

$0 < 1 \Longrightarrow$ Reihe absolut konvergent.

2.6.4 Leibniz-Kriterium

Ist $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ (unendliche Folge) eine monoton fallende Nullfolge (Grenzwert 0), dann ist die (alternierende) Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \, a_k$ konvergent.

Beispiel

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \, \frac{k+7}{k^2}$$

$$\frac{k+7}{k^2} = a_k \longrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

Lk$\surd \Longrightarrow$ Reihe konvergiert

Monotonie

$a_k = \frac{k+7}{k^2}$

$a_{k+1} = \frac{k+8}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)+7}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)\cdot(1+\frac{7}{k+1})}{(k+1)^2}$

$= \frac{1+\frac{7}{k+1}}{k+1} \leq \frac{1+\frac{7}{k}}{k+1} \leq \frac{1+\frac{7}{k}}{k}$

$= \frac{k+7}{k^2} = a_k$

$a_{k+1} \leq a_k$

3 Wiederholung relevanter Themen

Folge: Abbildung f:$\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$)
Erzeugender Term: $a_n = \dots$
z.B $a_n = \frac{n^2}{n+1}$
Darstellung: $\langle 1, 1, 1, 1, 1 \dots \rangle$
Rekursive Folge: z.B $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$
arithmetische: $a_n = a_0 + n \cdot d$
geometrische: $b_n = b_0 \cdot q^n$
$(b_n = b_1 \cdot q^{n-1})$

Reihe: Summe der Partialfolgen
arithmetische: $s_n = \frac{n}{2}(a_0 + a_n)$
geometrische: Endlich: $s_n = b_0 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$
Unendlich: $s_n = b_0 \cdot \frac{1}{q-1}$

Monotonie: $a_n < a_{n+1}$ ... Str. mon. w.
$a_n \leq a_{n+1}$ ... mon. w.
Analog

Beispiel: $a_n = \frac{8n^2+5}{7n}$ Monontonie?

Vermutung: str. mon. wachsend

$a_n < a_{n+1}$

$\frac{8n^2+5}{7n} < \frac{8(n+1)^2+5}{7(n+1)}$

$\frac{8n^2+5}{7n} < \frac{8n^2+16n+13}{7(n+1)}$

$8n^2 + 5 < \frac{(8n^2+16n+13)\cdot 7n}{7(n+1)}$

$(8n^2 + 5) \cdot (n + 1) < (8n^2 + 16n + 13)n$

$8n^3 + 8n^2 + 5n + 5 < 8n^3 + 16n^2 + 13n$

$$0 < 8n^2 + 8n - 5$$

$\nexists\, a_0$ dann w. A. $\Rightarrow$ Str. mon. wachsend

3.1 Grenzwert

3.1.1 Definiton:

Es gibt um einen reellen Wert a, eine ϵ-Umgebung mit $\epsilon > 0$, sodass ab einem Folgenglied n_0 alle folgenden Werte innerhalb der ϵ-Umgebung liegen.
Es gilt $|a_n - a| < \epsilon$

3.2 Horner-Schema

$f(x) = x^4 - x^3 - 16x^2 + 4x + 48$

	1	-1	-16	4	48
1	1	0	-16	-12	$\neq 0$
-1	1	-2	-14	18	$\neq 0$
2	1	1	-14	-24	$0 \leftarrow N_1$
2	1	3	-8	$\neq 0$	
-2	1	-1	-12	$0 \leftarrow N_1$	

$$x^2 - x - 12 \rightarrow x_{3,4} = \tfrac{1}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{48}{4}}}_{\frac{7}{2}}$$

$N_3 = 4; N_4 = -3$

3.3 Fundamentalsatz der Algebra

i) Eine reelle Funktion n-ten Grades besitzt immer genau n Nullstellen. Achtung: komplexe!

ii) Linearisierung
$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

Siehe Beispiel: $f(x) = x^4 - x^3 - 16x^2 + 4x + 48$
$f(x) = (x-2)(x+2)(x+3)(x-4)$

Beispiel: $a_n = \frac{6+8n-n^3}{n+2n^2-8+3n^3}$

i) Grenzwert für $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{3}$$

ii) Wie viele Glieder liegen außerhalb der ϵ-Umgebung?

$\epsilon > \frac{1}{100}$

$|a_n - a| < \frac{1}{100}$

$|\frac{6+8n-n^3}{n+2n^2-8+3n^3} + \frac{1}{3}| < \frac{1}{100}$

$|\frac{10+25n+2n^2}{3n+6n^2-24+9n^3} + \frac{1}{3}| < \frac{1}{100}$

$\to$ n=0; n=1

ii) Fallunterscheidung:

1.Fall: $n \geq 2$

$|\frac{10+25n+2n^2}{3n+6n^2-24+9n^3} + \frac{1}{3}| < \frac{1}{100}$

$100 + 2500n + 200n^2 < 3n + 6n^2 - 24 + 9n^3$

$0 < 9n^3 - 194n^2 - 2497n - 1024$

Beispiel

$a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{3}{7n^2+3}$
$\epsilon = \frac{1}{40}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = ?$

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n + 1 \cdot \frac{3}{7n^2+3} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n + 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{3}{7n^2+3} = 0$

$|a_n - a| < \epsilon$

$\left|(-1)^{n+1} \cdot \frac{3}{7n^2+3}\right|$

Fall Unterscheidung:
1.Fall: n ... grade
$\left|-\frac{3}{7n^2+3}\right| < \frac{1}{40}$

$120 < 7n^2 + 3$
$117 < 7n^2$
$\frac{117}{7} < n^2$
$n > \sqrt{\frac{117}{7}}$

Antwort: Für n gerade sind bis zum 7ten Glied alle Folfeflierder ausßerhalb der ϵ-Umgebung.
2.Fall: n ... ungerade

$\left|\frac{3}{7n^2+3}\right| < \frac{1}{40}$ wie oben

4 Differenzengleichung

Beispiel:

Ein Wald wächst jährlichg um 12% und hat momentan 12 000 Bäume. Jährlich werden 500 Bäume geschlägert.
$B_0 = 12000$
$B_1 = 12000 \cdot 1,12 - 500$
$B_2 = B_1 \cdot 1,12 - 500 = 1200 \cdot 1,12^2 - 500 \cdot 1,12 - 500$
...
Wird angewandt bei beschänktem und logistischem Wachstum.

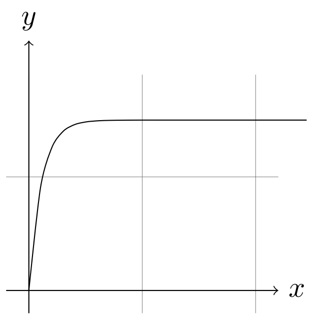


Abbildung 8: Darstellung von begrenztem Wachstum

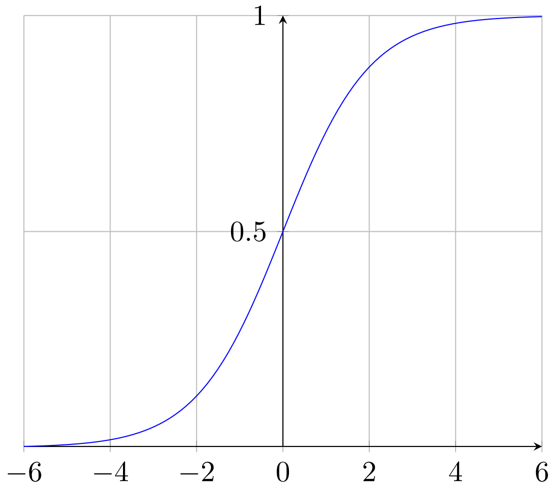


Abbildung 9: Darstellung von logistischem Wachstum

5 Differenzialrechnung

Idee/Problem : Tangentenproblem
Wiederholung:

5.1 Differenzenquotient

:
$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x_1 < x_2)$

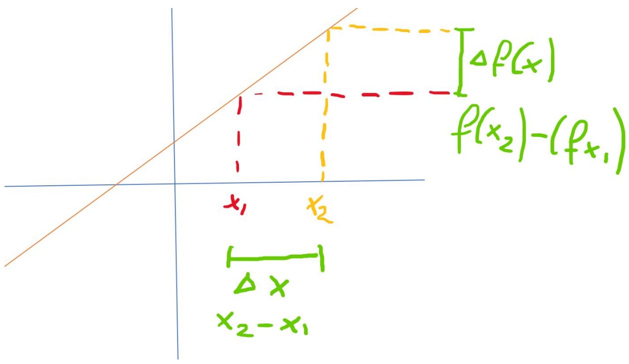


Abbildung 10: Darstellung des Differenzenquotients

Differenzenquotient... Durchschnittliche oder Mittlere Änderungsrate

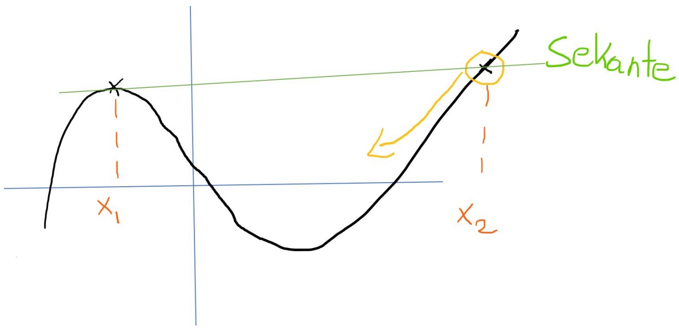


Abbildung 11: Steigung zwischen zwei Punkten

Steigung in x_1 möchte ?
Verschiebungvon x_2 in Richtung x_1
Problem: $x_2 - > x_1 : \frac{\Delta f(x)}{x_2 - x_1}$
Division durch 0
Lösung: $\lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ oder $\lim\limits_{x_2 \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

5.2 Differentialquotient:

Der Grenzwort des Differenzenquotienten für Δ x gegen 0
$\rightarrow$ Drückt eine momentane Änderung aus

5.3 Berechnung des Differentialquotient

Beispiel:

Funktion für dieses Beispiel: $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$
Steigung von $f(x)$ an der Stelle 2

Differentialquotienten: $k = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x)}{\triangle x} \Rightarrow \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$

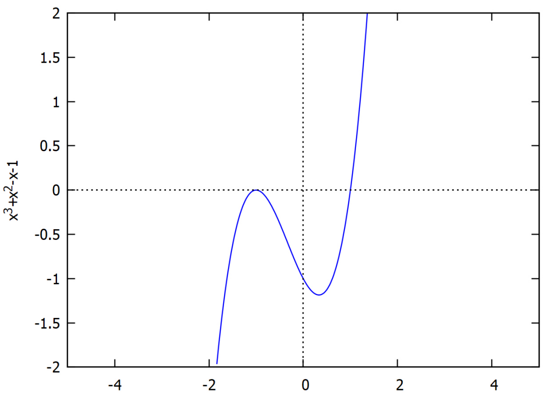


Abbildung 12: Darstellung der Funktion

$$\Rightarrow \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(x+\triangle x)^3 + (x+\triangle x)^2 - (x+\triangle x) - 1 - (x^3 + x^2 - x - 1)}{\triangle x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\triangle x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 \cdot \triangle x + 3x \cdot (\triangle x)^2 + (\triangle x)^3 + x^2 + 2x \cdot \triangle x + (\triangle x)^2 - x - \triangle x - 1 - x^3 - x^2 + x + 1}{\triangle x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\triangle x \to 0} \frac{3x^2 \cdot \triangle x + 3x \cdot (\triangle x)^2 + (\triangle x)^3 + 2x \cdot \triangle x + (\triangle x)^2 - \triangle x}{\triangle x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x \cdot (3x^2 + 3x \cdot \triangle x + (\triangle x)^2 + 2x + \triangle x - 1)}{\triangle x}$$

$\Rightarrow k = 3x^2 + 2x - 1 \Rightarrow k$ an $2 \Rightarrow 12 + 4 - 1 = 15$

5.4 Differenzierbarkeit

Eine Funktion heißt differenzierbar, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x)}{\triangle x}$ existiert.

Dieser Grenzwert heißt erste Ableitung. $f'(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx}$

Bemerkung:

i) $f'(x_0)$ heißt erste Ableitung an der Stelle x_0

ii) Eine differenzierbar Funktion ist dort im Intervall stetig. Das heißt eine stetige Funktion kann differenzierbar sein, muss es aber nicht.

5.5 Tabelle wichtiger 1. Ableitungen

f(x) =	f'(x) =
c	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
sin x	cos x
cos x	-sin x
e^x	e^x
a^x	$log(a) \cdot a^x$
log a	$\frac{1}{x}$
$log_a x$	$\frac{1}{log(a) \cdot x}$

5.6 Ableitungsregeln: (!!!)

5.6.1 Faktorregel

f(x) = $c \cdot g(x) \qquad (c \in \mathbb{R})$
f'(x) = $c \cdot g'(x)$
Konstanter Faktor darf vorgezogen werden
Beispiel:
f(x) = $2x^2$
f'(x) = $(2x^2)'$ = $2 \cdot 2x$ = 4x

5.6.2 Summenregel

f(x) = g(x) + h(x) $\Rightarrow$ f'(x)= g'(x) + h'(x)
Beispiel:
f(x) = $x^3 + x^2 - x - 1 \leftarrow$ fällt weg ($-1 \cdot x^0 \rightarrow 0 \cdot (-1) \cdot x^{-1}$)
f'(x) = $3x^2 + 2x - 1$

5.6.3 Produktregel

f(x) = g(x) · h(x) $\Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
Beispiel:
f(x) = $x \cdot sin(x)$
f'(x) = $1 \cdot sin(x) + x \cos(x)$

5.6.4 Quotientenregel

$f(x) = \frac{z(x)}{n(x)} => f'(x) = \frac{z'(x) \cdot n(x) - n'(x) \cdot z(x)}{n(x)^2}$
Beispiel: $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} => f'(x) = \frac{(x^2-1)' \cdot (x+1) - (x+1)' \cdot (x-1)}{(x+1)^2}$

$=> f'(x) = \frac{2x(x+1)-(x^2-1)}{(x+1)^2}$

5.6.5 Kettenregel

$f(x) =$ä$(i(x)) => f'(x) =$ä$(i(x)) \cdot i'(x)$
Äußßere Mal Innere Ableitung
$f(x) = (3x-4)^8$
ä=i^8
i(x)=3x-4

$f'(x) = 8(3x-4)^7 \cdot 3$

$f(x) = e^{4x^2-3x+2}$
ä(i)=e^i
i(x)=$4^2 - 3x + 2$
$f'(x) = e^{4x^2-3x+2} \cdot (8x-3)$

Beispiel: f(x)=$\sqrt{x^3+x^2+1}$
ä(i)=$\sqrt{i}$
i(x)=$x^3 + x^2 + 1$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3+x^2+1}} \cdot (3x^2 + 2x)$

Beispiel: $f(x) = 10 \cdot log(1+x^2)$
ä(i)=$log(i)$
i(x)=$1 + x^2$

$f'(x) = 10 \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{20x}{1+x^2}$

5.7 Physikalische Zusammenhänge

$$\begin{array}{lll} s(t)-> & s'(t)-> & s''(t) \\ & \Updownarrow & \Updownarrow \\ & v(t)-> & v'(t) \\ & & \Updownarrow \\ & & a(t) \end{array}$$

5.8 Logarithmisches Differenzieren

$f(x) = x^x$ für $x > 0$
Problem: keine bisherige Regel greift
$logf(x) = log(x^x)$

Substitueiren $f(x) = p$
$log\, p = xlog(x)$

Differenzieren beider Seiten
$\frac{1}{p}p' = 1 + log(x)$

$\Rightarrow \frac{p'}{p} = 1 + log(x)$
$\Rightarrow p' = p(1 + log(x))$
$\Rightarrow f'(x) = f(x)(1 + log(x))$
$\Rightarrow f'(x) = x^x(1 + log(x))$

Punktableitung

$s'(t) = \dot{s}(t)$ Punktableitung ist Ableitung nach der Zeit

Beispiel:

a) $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ Freier Fall
$\dot{s}(t) = gt = v(t)$
$\ddot{s}(t) = g = a(t)$

b) $y(t) = A \cdot sin(\omega t + \phi)$
$v(t) =?$
$a(t) =?$

c) $y(t) = (A + Bt)e^{-\delta t}$
$v(t) =?$
$a(t) =?$

6 Kurvendiskussion (extended)

6.1 Ablauf

Gegeben: f(x)

1) Definitionsmenge (+ Polstelllen/Lücken)
2) Nullstellen: $f(x) = 0$
3) Extremstellen:
   - Notwendige: $f'(x) = 0$
   - Hinreichende: $f''(x) \neq 0$
     $f''(x) > 0 => Minimum$
     $f''(x) < 0 => Maximum$

4) Monotonieverhalten (tabellarisch)

5) Wendestellen: $f''(x) = 0 \land f'''(x) \neq 0$

6) Krümmungsverhalten (tabelarisch)

7) Wendetangenten : $t(x) = kx + d$

8) Graph

9) Symmetrie

10) Periodizität

6.2 Beispiel

$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

1) Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$

2) Nullstellen: $f(x) = 0$
   $N = +1, -1, -1$

3) Extremstellen:

   - Notwendige:
     $f'(x) = 0$
     $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$
     $f'(x) = 0 => 0 = 3x^2 + 2x - 1$
     ${}_1x_2 = \frac{-2^+_-\sqrt{4-(-12)}}{6}\ x_1 = \dfrac{1}{3}\ x_2 = -1$
   - Hinreichende:
     $f''(x) = 6x + 2$
     $f''(\dfrac{1}{3}) = 6 \cdot \frac{1}{3} + 2 > 0 => Minimum$
     $f''(-1) = 6 \cdot (-1) + 2 < 0 => Maximum$

4) Monotonieverhalten

$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}), +\infty)$
$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$

5) Wendestellen: $f''(x) = 0 \land f'''(x) \neq 0$
   $f''(x) = 6x + 2$
   $f''(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}\ f'''(x) \neq 0$

6) Krümmungsverhalten:

$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}, +\infty)$
$-$	w	$+$

7) Wendetangente: $t(x) = kx + d$
   $\rightarrow$ An Wendestelle: $-\frac{1}{3} = w_x$

   $w_y = (-\frac{1}{3})^3 + (-\frac{1}{3})^2 - (-\frac{1}{3}) - 1$

   $w_y = -\frac{1}{27} + \frac{3}{27} + \frac{9}{27} - \frac{27}{27} \Rightarrow -\frac{16}{27}$

   $k = f'(w_x) \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

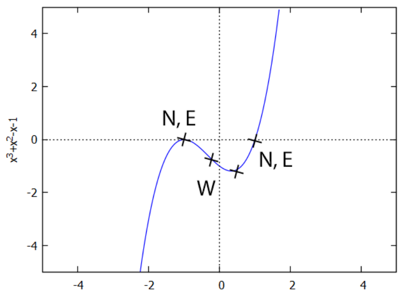
   $f'(-\frac{1}{3}) = 3 \cdot \frac{1}{9} - \frac{2}{3} - 1$
   $= -\frac{4}{3}$
   $t(x) = kx + d \Rightarrow -\frac{16}{27} = -\frac{4}{3} + d$

   $d = -\frac{16}{27} - \frac{4}{9} \Rightarrow -\frac{28}{27}$

   $t(x) = -\frac{4}{3}x - \frac{28}{27}$

8) Graph:
   Wertetabelle:
   Muss folgende Punkte enthalten:

   - $\rightarrow$ Nullstellen
   - $\rightarrow$ Extremstellen
   - $\rightarrow$ Wendestellen



6.3 Umgekehrte Kurvendiskussion

Beispiel:

Sei $f(x)$ eine Polynomfunktion fünften Grades, die den Punkt (3/2) durchläuft, ein Maximum in (1/7) und einen Wendepunkt mit Steigung 4 bei (-5/7).

Lösung:

$f(x) = a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6$

$f(3) = 2 \Rightarrow 2 = a_1 3^5 + a_2 3^4 + a_3 3^3 + a_4 3^2 + a_5 3 + a_6$

$f(1) = 7 \Rightarrow 7 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$
$f(1)\prime = 0 \Rightarrow 0 = 5a_1 + 4a_2 + 3a_3 + 2a_4 + a_5$

$f(-5) = 7 \Rightarrow 7 = a_1 \cdot (-5)^5 + a_2 \cdot 5^4 + a_3 \cdot (-5)^3 + a_4 \cdot 5^2 + a_5 \cdot (-5) + a_6$ $f(-5)\prime\prime = 0 \Rightarrow$
$0 = 20a_1 \cdot (-5)^3 + 12a_2 \cdot (-5)^2 + 6a_3 \cdot (-5) + 2a_4$
$\Rightarrow 0 = 10a_1 \cdot (-5)^3 + 6a_2 \cdot 5^2 - 15a_3 + a_4$

$f(-5)\prime = 4 \Rightarrow 4 = 5a_1 \cdot 5^4 + 4a_2 \cdot (-5)^3 + 3a_3 \cdot 5^2 + 2a_4 \cdot (-5) + a_5$

LGS mit 6 Variablen $\Rightarrow Maxima$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x) = ...$$

9)/10) keine Symmetrie, keine Periodizität

$$f(x) = \frac{-5x^2 + 5}{x^3} \Bigg| f(t) = 3e^{\frac{1}{-10}t} \cos(t)$$

Bemerkung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) = 0$
$\hookrightarrow$ Sattelpunkt (Terassenpunkt)

6.4 Erweitertes Beispiel umgekehrte Kurvendiskussion

Beispiel

Der Graph einer Polynomfunktion f vom Grad 4 hat einen Hochpunkt im Ursprung. Im Wendepunkt $\binom{-1}{1}$ ist die Tangente parallel zur ersten Achse. Ermittle die Termdarstellung von f.
Lösung: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Hochpunkt: $\binom{0}{0} \Rightarrow \substack{f(0)=0 \\ f'(0)=0}$

Wendepunkt:$\binom{-1}{1} \Rightarrow \substack{f(-1)=1 \\ f''(-1)=0}$

Tangente $\Rightarrow f'(-1) = 0$

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$
$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

$f(0) = 0 = e$
$f(-1) = 1 = a - b + c$
$f'(0) = 0 = d$
$f''(-1) = 0 = 12a - 6b + 2c$
$\Rightarrow 0 = 6a - 3b + c$
$f'(-1) = 0 = -4a + 3b - 2c$

$I : e - b + c = 1$
$II : 6a - 3b + c = 0$
$III : -4a + 3b - 2c = 0$

In III: $2a - 2b + 2c = 2\underline{-4a + 3b - 2c = 0} - 2a + b = 2$

In II: $a - b2c = 1\underline{6a - 3b + c = 0} - 5a + 2b = 1 - 4a + 2b = 4\underline{-5a + 2b = 1}a = 3 \Rightarrow$ $b = 8 \qquad \Rightarrow c = 6$
$f(x) = 3x^4 + 8x3 + 6x2$

Lösen über Matritzen $Matrizen : Ax = b$

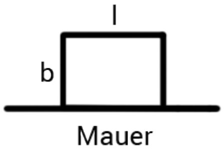
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -6 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$f(x) = 3x^4 + 8x3 + 6x2$

7 Extremwertaufgaben

7.1 Ablauf

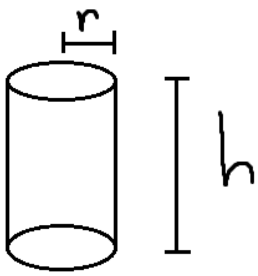
Beispiel	Theorie
An eine Mauer soll mit 20m Maschendrahtzaun ein rechteckiges Areal begrenzt werden, sodass das Areal möglichst Flächengroß ist. Wie sind die Maße zu wählen?	<u>Angabe</u>
	<u>Skizze</u>
$A \rightarrow Max$ $A(l,b) = b \cdot l$	Hauptbedingung aufstellen(HB)
$2b + l = 20$	Nebenbedingung aufstellen (NB)
$l = 20 - 2b$ $A(b) = b(20 - 2b)$ $A(b) = 20b - 2b^2$	Nebenbedingung in Hauptbedingung einsetzen (NB $\rightarrow$ HB)
$A'(b) = 20 - 4b$ $A''(b) = -4$	Ableiten
$A'(b) = 0$ $0 = 20 - 4b$ $\implies b = 5$ $A''(b) < 0$ $\implies b = 5$ Maximum	Extremstellen bestimmen
$l = 20 - 2 \cdot 5 = 10$	Andere Variable berechnen
/	Randwerte betrachten
Das ideal an die Mauer angelehnte Areal besitzt die Maße 10x5.	Antwort

7.2 Beispiel

7.2.1 Angabe

Getränkehersteller neues Produkt mit einer Füllmenge von 0,33l. Diese soll möglichst wenig Material verbrauchen.

7.2.2 Skizze:



7.2.3 Hauptbedingung:

$O \rightarrow Min$
$O\left(r,h\right) = 2r^2\pi + 2r\pi h$
$O\left(r,h\right) = 2\pi\left(r^2 + rh\right)$

7.2.4 Nebenbedingung:

$V = 0,33dm^3 \rightarrow V = 330cm^3$
$V = r^2\pi h$

7.2.5 Nebenbedingung → Hauptbedingung:

$h = \frac{330}{r^2\pi}$
$O\left(r\right) = 2\pi\left(r^2 + \frac{330r^{-1}}{\pi}\right)$

7.2.6 Ableiten:

$O'\left(r\right) = 2\pi\left(2r - \frac{330}{\pi}r^{-2}\right)$
$O''\left(r\right) = 2\pi\left(2 - \frac{660}{\pi}r^{-3}\right)$
$O'\left(r\right) = 4\pi\left(r - \frac{165}{r^2\pi}\right)$
$O''\left(r\right) = 4\pi + \frac{1320}{r^3}$

7.2.7 Minimum oder Maximum?

$O'\left(r\right) = 0$
$0 = r - \frac{165}{r^2\pi} \quad / \left(r^2\pi\right)$
$0 = r^3\pi - 165 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$
$O''\left(\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}\right) = 4\pi + \frac{1320}{\frac{165}{\pi}} > 0$
$\rightarrow Minimum$

7.2.8 Lösen

$h = \frac{330}{\sqrt[3]{\frac{165^2}{\pi^2}}\pi}$

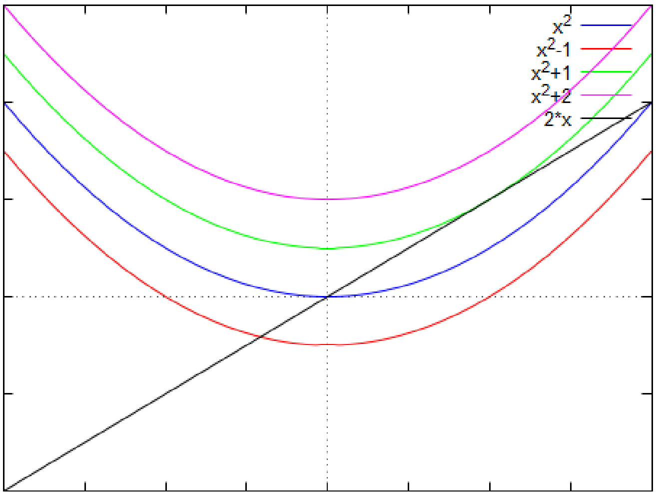
8 Integration

Es gibt einen Algebraischen und einen Analytischen ansatz. Hier wird nur der Algebraische erklärt.

$$f(x) \underset{\text{Integrieren}}{\overset{\text{Differenzieren}}{\rightleftarrows}} f'(x)$$

Beispiel

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2 + C$$



Sei $f'(x)$ eine Funktion, so ist $f(x)$ dessen Stammfunktion.

8.1 Eigenschaften einer Stammfunktion:

- Zu jeder stetigen Funktion $f(x)$ gibt es unendlich viele Stammfunktionen
- Zwei beliebige Stammfunktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ von $f'(x)$ unterscheiden sich durch die additive Konstante: $f_2(x) - f_1(x) = c$

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

wobei:
a Untergrenze
b Obergrenze
$\int$ Integralzeichen
$f(x)$ Funktion
dx Integralausdruck

$f'(x)$	$f(x)$
0	c
1	$x + c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$log\|x\| + c$
e^x	$e^x + c$
a^x	$\frac{a^x}{log(a)} + c$
$sin(x)$	$-cos(x)$
$cos(x)$	$sin(x)$

Tabelle 1: Stammintegrale

8.2 Rechenregeln:

8.2.1 Fundeamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

$$I(x) = \int_a^b f(x)dx \quad \Rightarrow \quad I'(x) = f(x)$$

$$I(x) = \int_a^b f(x)dx \quad \Rightarrow \quad I(x) = f(b) - f(a)$$

8.2.2 Elementare Integralrechnung

8.2.2.1 Faktorregel

$$\int (c \cdot f(x))dx = c \cdot \int f(x)dx$$

Beispiel:

$$\int (2 \cdot sin(x))dx = 2 \cdot \int sin(x)dx = 2 \cdot -cos(x)$$

8.2.2.2 Summenregel

$$\int (\sum_{i=1}^{n} f_i(x))dx = \sum_{i=1}^{n} \cdot \int (f_i(x))dx$$

Beispiel:

$$\int (x^2 + x + 1)dx = \int x^2 dx + \int x dx + \int 1 dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$$

8.2.2.3 Vertauschungsregel

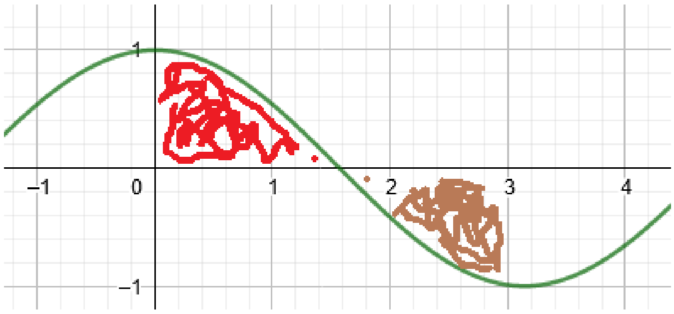
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

8.2.2.4 Zerlegung

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

sofern $a < c < b$
Beispiel:

$$\int_0^{2\pi} cos(x)dx = [sin(x) + c]_0^{2\pi} = (sin(2 \cdot \pi) + c) - (sin(0) + c) = 0$$



Die makierten Flächen sind Deckungsgleich, ihre gemeinsame Fläche ist allerdings nicht 0, daher:

$$\int_0^{\pi} cos(x)dx + |\int_{\pi}^{2\pi} cos(x)dx| = [sin(x) + c]_0^{\pi}|[sin(x) + c]_{\pi}^{2\pi}| = ...$$

8.3 Integrationsmethoden

8.3.1 Partielle Integration

Umkehrung der Produktregel: $(p \cdot q)' = p' \cdot q + p \cdot q'$

$$\int (p \cdot q)' = \int p' \cdot q + \int p \cdot q'$$

Beispiel:

$$\int (x \cdot e^x)dx$$

Hier muss man sich entscheiden welcher Faktor einfacher zu Integrieren bzw. Differenzieren ist.
Unklug:

$$\int p' \cdot q = p \cdot q - \int p \cdot q'$$

$p' = x$
$q = e^x$

$$\frac{x^2}{2} \cdot e^x - \int (\frac{x^2}{2} \cdot e^x) dx + C$$

Das Integral wieder partiell Integrieren:

$$\int \frac{x^2}{2} \cdot e^x dx = \frac{1}{2} \int x^2 \cdot e^x$$

$\Longrightarrow$ Endlosschleife
Klug:
$x = q$
$p' = ex$

$$\int (x \cdot e^x) dx = e^x \cdot x - \int (e^x \cdot 1) dx = e^x \cdot (x - 1) + C$$

8.3.2 Substitutionsregel

Umkehrung der Produktregel: $(p \cdot q)' = p' \cdot q + p \cdot q'$

$$\int (p \cdot q)' = \int p' \cdot q + \int p \cdot q'$$

Beispiel:

$$\int x \cdot e^x dx$$

8.3.3 Substitutionsregel

Umkehrung der Kettenregel
Beispiel:

$$\int x^3 \cdot cos(x^4) dx$$

$u = x^4$
$u' = 4 \cdot x^3$
$u' = \frac{du}{dx}$
$dx = \frac{du}{u'}$

$$\int (x^3 \cdot cos(u) \cdot \frac{1}{4 \cdot x^3}) du = \frac{1}{4} \int cos(u) du = \frac{sin(x^4)}{4} + C$$

8.3.4 Paritalbruchzerlergung

Umkehrung der Quotientenregel, wobei $f'(x)$ eine echt gebrochene Funktion sein muss

1. Schritt: $Z(x) < n(x)$ Gradweise! Sonst Polynomdivision durchführen!

2. Schritt: $n(x) = 0$ setzen. Achtung: Vielfachkeit der Nullstellen beachten!
3. Schritt: Spalten in Partialbrüche
4. Schritt: $f(x)$ als Summe von Partialbrüchen angeben
5. Schritt: Partialbruch koeffizienten bestimmen (LGS Lösen, koeffizienten vergleichen)

Bsp

$$\int \frac{2x^3 - 14x^2 + 14x + 30}{x^2 - 4} dx$$

Zählergrad > Nennergrad $\Rightarrow$ Polynomdivision

$(2x^3 - 14x^2 + 14x + 30) : (x^2 - 4) = 2x - 14$

$\underline{2x^3 \quad\quad - 8x}$

$\quad - 14x^2 + 22x + 30$

$\quad - 14x^2 \quad\quad + 56$

$\quad\quad 22x - 26$ Rest

$$\Rightarrow \frac{2x^3 - 14x^2 + 14x + 30}{x^2 - 4} = 2x - 14 + \frac{22x - 26}{x^2 - 4}$$

Nullstellen des Nenners finden:

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$ Nullstellen: $x = \pm 2$

$$\frac{22x - 26}{x^2 - 4} = \frac{22x - 26}{(x-2) \cdot (x+2)}$$

Spalten in Partialbrüche:

$$\frac{22x - 26}{(x-2) \cdot (x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

Nun müssen die Partialbrüche auf den selben Nenner gebracht werden.

$$\Rightarrow \frac{22x - 26}{(x-2) \cdot (x+2)} = \frac{A \cdot (x+2) + B \cdot (x-2)}{(x-2) \cdot (x+2)}$$

Koefizientenvergleich:

$$\underbrace{Ax + 2A + Bx - 2B}_{22x - 26} \Rightarrow x \underbrace{(A + B)}_{22} + \underbrace{(2A - 2B)}_{-26}$$

Lineares Gleichungssystem zum lösen der Koeffizienten aufstellen:

$$22 = A + B$$
$$-26 = 2A - 2B$$
$$\Rightarrow \underline{-13 = A - B}$$

$$9 = 2A \Rightarrow A = \frac{9}{2}$$
$$\Rightarrow B = \frac{35}{2}$$

Einsetzen:

$$\frac{22x - 26}{x^2 - 4} = \frac{\frac{9}{2}}{x-2} + \frac{\frac{35}{2}}{x+2}$$

Nun können wir statt $\int \frac{2x^3-14x^2+14x+30}{x^2-4} dx$ folgenden Ausdruck integrieren:

$$\int \left(2x - 14 + \frac{9}{2(x-2)} + \frac{35}{2(x+2)}\right) dx$$
$$= \underbrace{\int 2x dx}_{x^2} - \underbrace{\int 14 dx}_{14x} + \underbrace{\int \frac{9}{2(x-2)} dx}_{\frac{9}{2}\cdot\log|x-2|} + \underbrace{\int \frac{35}{2(x+2)} dx}_{\frac{35}{2}\cdot\log|x+2|}$$

$$\int \frac{2x^3 - 14x^2 + 14x + 30}{x^2 - 4} dx = x^2 - 14x + \frac{9}{2} \cdot \log|x-2| + \frac{35}{2} \cdot \log|x+2| + C$$

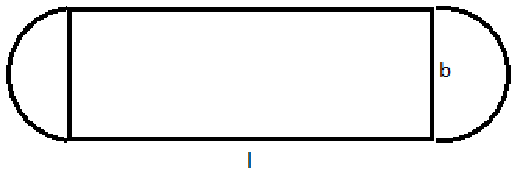
9 Anwendung der Differential und Integralrechnung

9.1 Extremwertaufgaben

1. Skizze
2. Hauptbedingung (HB) aufstellen
3. Nebenbedingung(en) (NB) aufstellen
4. Nebenbedingung in Hauptbedingung einsetzen
5. 2 mal ableiten
6. Extremstellen berechnen
7. Einsetzen
8. Randwerte beachten
9. Antwort schreiben

Beispiel: Ein Fußballfeld muss laut FIFA-Regeln zwischen 95m und 120m bzw.45 und 90m lang und breit sein. Um einen Sportplatz soll eine Laufbahn gebaut werden. Diese soll eine Innenlaufbahnlänge von 500m aufweisen. Die Laufbahn verläuft an der Länge der Rasenfläche und an der Breite werden Halbkreise angelegt. Kann das Feld noch FIFA konform gemacht werden?

9.1.1 Skizze



9.1.2 Hauptbedingung aufstellen

In der HB tendiert meist ein Wert gegen ein Maximum (zB maximale Fläche von etwas) oder gegen ein Minimum (möglichst wenig von xy soll verbraucht werden). In diesem Fall ist die Fläche des Fußballfeldes dynamisch, sprich sie muss gegen ein Minimum/Maximum tendieren. Da hier nicht festgelegt wird, dass die Fläche minimal $95m \cdot 45m$ sein kann wäre das Minimum der Fläche folglich $0m^2$. Deswegen sagen wir, dass die Fläche ein Maximum sein muss, wir ignorieren,dass logisch gesehen die Fläche kein Maximum sein muss:

$$A \rightarrow Max$$

$$A(l, b) = l \cdot b$$

9.1.3 Nebenbedingung(en) aufstellen

In der NB wird eine Gleichung aufgestellt, mithilfe einer bereits gegebenen Wert. In diesem Fall ist das die Länge der Laufbahn:

$$500 = 2 \cdot l + 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot l + b \cdot \pi$$

9.1.4 Nebenbedingung in Hauptbedingung einsetzen

NB auf eine Variable umformen und diese in die HB einsetzen:

$$l = 250 - \frac{b \cdot \pi}{2} \Rightarrow A(b) = 250 \cdot b - \frac{b^2 \cdot \pi}{2}$$

9.1.5 Ableiten

Wiederholung: Maximum: $f'(x) = 0 f''(x) < 0$

$$A'(b) = 250 - b \cdot \pi$$

$$A''(b) = -\pi \Rightarrow -\pi < 0 \Rightarrow Maximum$$

9.1.6 Extremstellen berechnen Einsetzen

$$A'(b) = 0 \Rightarrow b \cdot \pi = 250 \Rightarrow b = \frac{250}{\pi} \Rightarrow l = 125$$

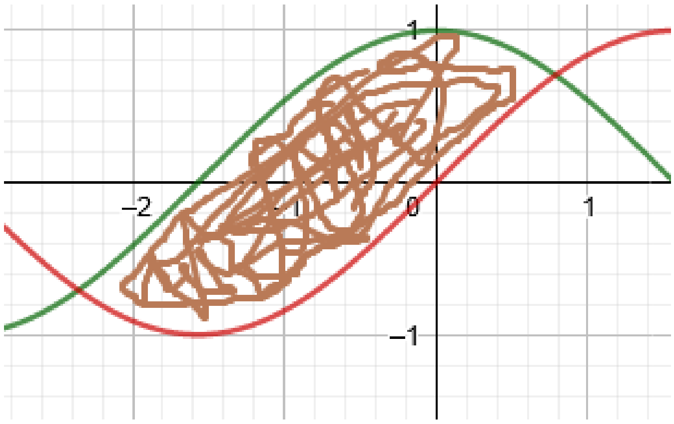
9.1.7 Randwerte beachten

Dies ist Stoff der 4. Oberstufe

9.1.8 Antwort

Das Feld ist nicht Fifakonform (das Feld ist zu lang)

9.2 Fläche zwischen zwei Funktionen



$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx = \int_a^b (g(x) - h(x))dx$$

Beispiel: Fläche zwischen $g(x)$ und $h(x)$
$g(x) = 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 3$
$h(x) = -4 \cdot x + 1$

$$g(x) = h(x) \Rightarrow 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 3 = -4 \cdot x + 1$$

$$2 \cdot x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (\frac{-8}{4})}$$

$$x_1 = 1$$

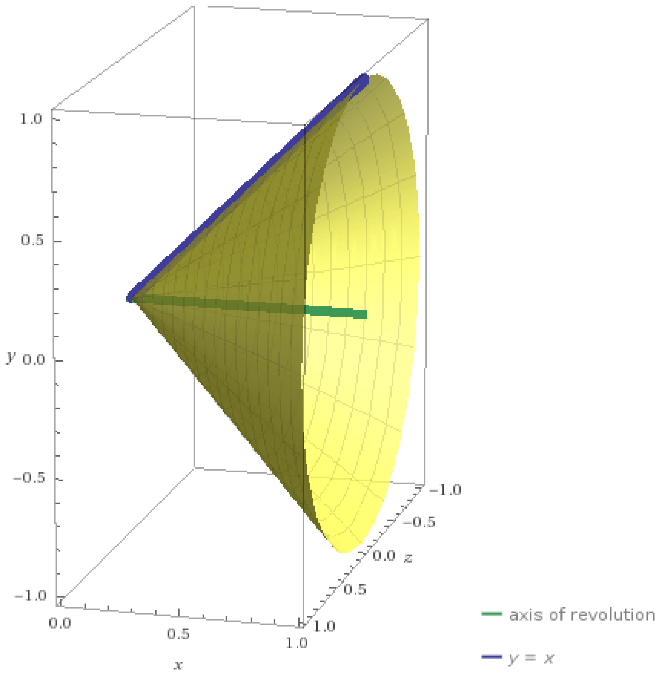
$$x_2 = 2$$

$$\int_{-2}^{1} (g(x) - h(x))dx = \int_{-2}^{1} (2 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 4)dx = [\frac{2 \cdot x^3}{3} + x^2 - 4 \cdot x]_{-2}^{1} = -11$$

Die Fläche ist immer positiv, daher $+11$

9.3 Rotationskörper

Ein Funktion kann entweder um die x-Achse oder um die y-Achse gedreht werden



Rotation um x-Achse: $\pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$ Rotation um y-Achse: $\pi \cdot \int_a^b (f(y))^2 dy$ Von $f(x)$ auf $f(y)$ kommt man indem man indem man $f(x)$ auf x umformt, $f(y)$ wird Umkehrfunktion genannt
Beispiel: Rotation um die x-Achse
$f(x) = \sqrt{r^2 + x^2}$ mit den Grenzen $-r$ bis $+r$

$$V_x = \pi \cdot \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx$$

$$V_x = \pi \cdot [r^2 \cdot x - \frac{-x^3}{3}]_{-r}^{r}$$

$$V_x = \frac{9 \cdot r^3 \cdot pi}{3}$$

9.4 Bogenlänge

Die Bogenlänge S in einem Invervall von a bis b ist:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f('(x))^2} dx$$

9.5 Physische Größen

9.5.1 Weg-Zeit-Geschwindigkeit-Beschleunigung

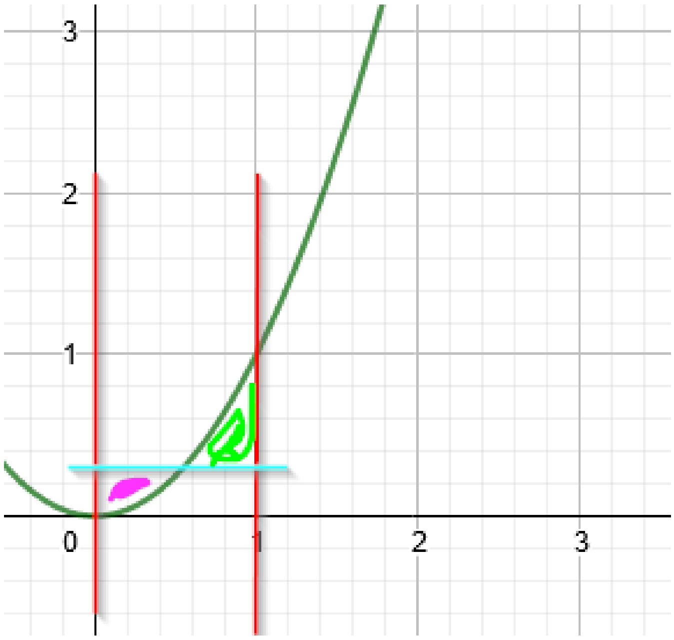
Die Funktionen in die in derselben Spalte stehen, sind ident

$$\begin{array}{ccc} s(t) & s'(t) & s''(t) \\ & v(t) & v'(t) \\ & & a(t) \end{array}$$

9.6 Mittelwerte

$\bar{x}$ ist der Mittelwert der Funktion $f(x)$ im Intervall a bis b.

9.6.1 Linearer Mittelwert



Die makierten Flächen sind gleich groß

$$\bar{x} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

9.6.2 Quadratischer Mittelwert

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx}$$

Invertiert alle negativen Werte der Funktion, welches für viele Anwendungen (vorallem iun der Elektrotechnik) nützlich ist. Dafür ist er nicht so genau und große Werte haben einen größeren Einfluss als beim linearen Mittelwert

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis