

V14

# **Tomographie mit Gamma-Strahlung**

Sophie Bork	Michael Windau
sophie.bork@gmx.de	michael.windau@tu-dortmund.de

Durchführung: 14.02.20

Abgabe: 16.02.20

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Wechselwirkung von $\gamma$ -Quanten mit Materie . . . . .	3
2.1.1	Photoeffekt . . . . .	4
2.1.2	Comptoneffekt . . . . .	4
2.1.3	Paarbildung . . . . .	4
2.2	Szintillatoren . . . . .	4
2.3	Tomographie . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Aufbau</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Durchführung</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Auswertung</b>	<b>7</b>
5.1	Messung der Eingangsintensität . . . . .	7
5.2	Tomographie an homogenen Würfeln . . . . .	7
5.3	Tomographie am zusammengesetzten Würfel . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Diskussion</b>	<b>11</b>
	<b>Literatur</b>	<b>11</b>

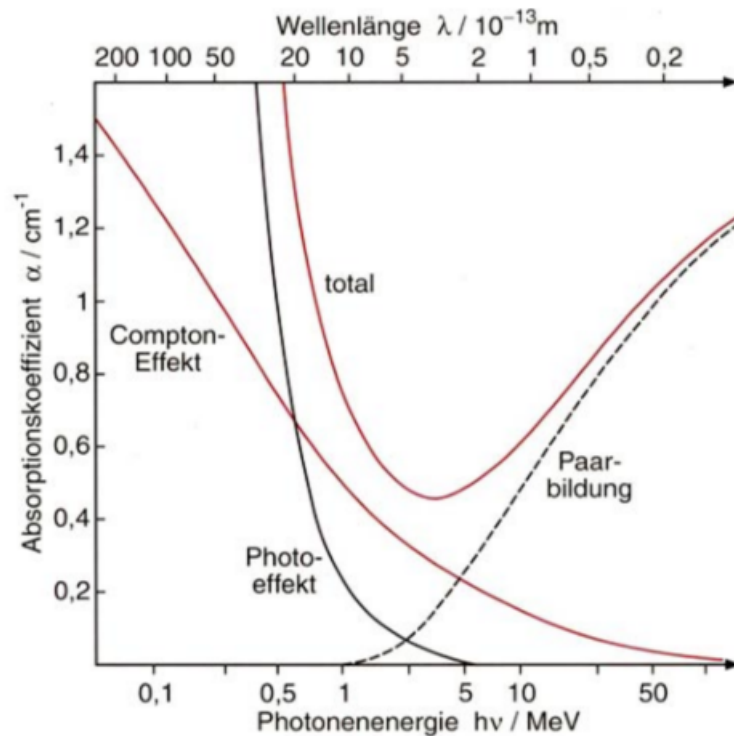
# 1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird die Methode der Tomographie an verschiedenen Würfeln getestet, die aus unterschiedlichen Materialien zusammengesetzt sind. Durch die Messung mehrerer Projektionen kann eine Aussage über die in die Würfel eingebauten Materialien getroffen werden.

## 2 Theorie

### 2.1 Wechselwirkung von $\gamma$ -Quanten mit Materie

Trifft ein  $\gamma$ -Quant auf Materie, treten im Wesentlichen drei Arten von Wechselwirkung auf: Photoeffekt, Comptoneffekt und Paarbildung. Die Absorptionskoeffizienten der einzelnen Wechselwirkungen sind stark von der Photonenenergie abhängig, sodass in unterschiedlichen Energiebereichen unterschiedliche Effekte dominieren. Dies wird in Abb. 1 am Beispiel von Blei gezeigt, in welcher die einzelnen Absorptionskoeffizienten eingezeichnet sind und auch der resultierende totale Absorptionskoeffizient zu sehen ist.



**Abbildung 1:** Absorptionskoeffizienten von Blei für die drei wesentlichen Wechselwirkungen von  $\gamma$ -Quanten mit Materie mit eingezeichnetem resultierendem absoluten Absorptionskoeffizienten [1].

### 2.1.1 Photoeffekt

Trifft ein  $\gamma$ -Quant auf ein Hüllenelektron und ist seine Energie größer als dessen Bindungsenergie, wird das Elektron aus der Schale herausgelöst. Der Quant wird dabei vernichtet, da die übrige Energie des Quants in kinetische Energie des Elektrons umgewandelt wird. Elektronen, welche zurückfallen, um die Löcher in den Schalen zu schließen, senden ihrerseits  $\gamma$ -Quanten aus, welche in der Regel im Absorber verbleiben. Der Photoeffekt ist bei kleinen Photonenergien der dominierende Wechselwirkungseffekt, bei Blei dominiert er z.B. bis zu Energien von etwa 1 MeV.

### 2.1.2 Comptoneffekt

Beim Compton-Effekt wird der Quant an einem quasi-ruhenden Elektron gestreut und überträgt ihm einen Teil seiner Energie. Der  $\gamma$ -Quant ändert dabei seine Richtung und vergrößert seine Wellenlänge. Er kann bei diesem Vorgang nie vollständig vernichtet werden. Der Comptoneffekt tritt bereits für kleine Photonenergien auf, ist aber erst dann der dominierende Effekt, wenn der Einfluss des Photoeffekts sinkt. Dies ist bei Blei zwischen etwa 1 und 5 MeV der Fall.

### 2.1.3 Paarbildung

Paarbildung wird erst ab sehr hohen Quantenergien ( $>5$  MeV) relevant. Die Energie muss dabei größer sein als die doppelte Ruhemasse des Elektrons. Unter diesen Umständen ist es möglich, dass sich der Quant in ein Elektron und ein Positron umwandelt. Im Experiment ist der Prozess der Paarbildung jedoch nicht von Bedeutung, da der hierzu erforderliche Energiebereich nicht betrachtet wird.

## 2.2 Szintillatoren

Mithilfe von Szintillatoren können radioaktive Teilchen und Strahlungen nachgewiesen werden. In diesem Versuch wird ein NaJ-Szintillator zum Nachweis von Gammaquanten verwendet, welche durch Anregung des Szintillatormaterials die Entstehung von Lichtblitzen verursachen. Diese Lichtblitze werden in Photomultipliern in elektronische Signale umgewandelt und verstärkt, wobei die Signalhöhe linear mit der Quantenenergie zusammenhängt. Es gibt zwei Typen von Szintillatormaterialien: Organische und Anorganische. Organische Szintillatormaterialien haben den Vorteil einer schnellen Zerfallszeit, welche im Bereich von Nanosekunden liegt. Anorganische Szintillatoren, zu denen auch der im Versuch verwendete zählt, haben eine deutlich langsamere Zerfallszeit im Bereich von einigen hundert Nanosekunden. Vorteilhaft an dieser Szintillatorart ist ihre hohe Dichte und Ordnungszahl, da dadurch mehr Gammaquanten detektiert werden können und somit die Energieauflösung erhöht wird.

## 2.3 Tomographie

In der Tomographie wird  $\gamma$ -Strahlung durch einen Körper oder Gegenstand geleitet. Anhand der Abschwächung können Rückschlüsse auf das Material getroffen werden.

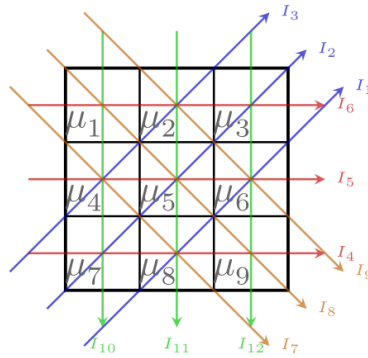
Durchläuft der Strahl hintereinander mehrere Materialien, ergibt sich die Endintensität zu

$$N = I_0 e^{-\sum \mu_i d_i}.$$

Dabei bezeichnet  $I_0$  die Eingangsintensität,  $\mu_i$  und  $d_i$  sind Absorptionskoeffizient bzw. Dicke des  $i$ -ten Materials. Aus der  $j$ -ten Endintensität  $N_j$  und der Eingangsintensität kann die  $j$ -te Projektion  $I_j$  berechnet werden durch

$$I_j = \ln \left( \frac{I_0}{N_j} \right).$$

Für eine  $3 \times 3$ -Würfelschicht, welche im Experiment untersucht wird, müssen mindestens neun Projektionen aufgenommen werden, um ein Gleichungssystem aufstellen zu können, dessen Lösung die neun Materialien der neun Elementarwürfel darstellt. Da Überbestim-



**Abbildung 2:** Richtungen der zwölf aufgenommenen Projektionen [3].

mung die Genauigkeit des Ergebnisses verbessert, werden für diese Schicht 12 Projektionen aufgenommen (siehe Abb. 2), sodass folgendes überbestimmtes Gleichungssystem entsteht:

$$d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \\ \mu_7 \\ \mu_8 \\ \mu_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \\ I_{11} \\ I_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \vec{\mu} \quad (1)$$

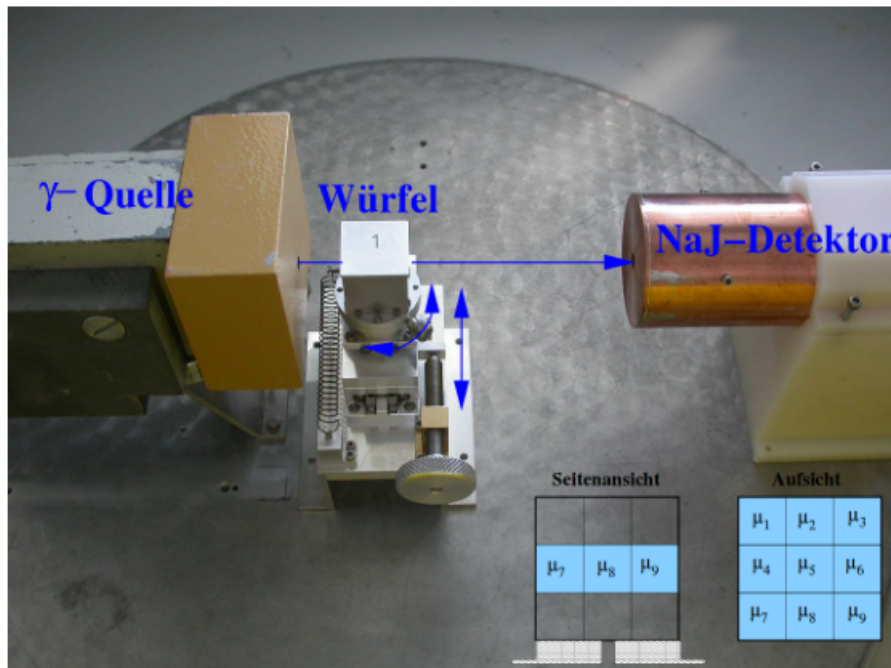
Mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate kann die Gleichung umgeschrieben werden zu

$$\vec{\mu} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \vec{I}.$$

Für den Fall gleicher Unsicherheiten ergeben sich die Varianzen zu

$$\sigma_i^2 = \sigma_I^2 \text{diag}[(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}].$$

### 3 Aufbau



**Abbildung 3:** Foto des Versuchsaufbaus [2].

Ein Bild des Versuchsaufbaus ist in Abb. 3 zu sehen. Die Quelle der  $\gamma$ -Strahlung ist eine  $^{137}\text{Cs}$ -Quelle. Der Strahl wird kollimiert und auf einen  $3 \times 3 \times 3 \text{ cm}$ -Würfel gegeben. Im Experiment werden vier verschiedene Würfel untersucht. Von diesen Würfeln ist einer mit Luft gefüllt und von einer 1 mm dicken Aluminiumwand umgeben. Würfel zwei und drei bestehen nur aus je einem Material, welches durch den Versuch ermittelt wird, und werden ebenfalls von einer Aluminiumwand umrahmt. Der vierte Würfel, welcher die Kennzeichnung "5" trägt, besteht aus 27  $1 \times 1$ -Würfeln, die aus unbekannten Materialien zusammengesetzt sind. Für die mittlere Ebene des Würfels, welche aus 9 kleinen Einzelwürfeln besteht, soll die genaue Zusammensetzung ermittelt werden. Auch um diesen Würfel ist eine Aluminiumwand.

## 4 Durchführung

Die Messdauer beträgt bei jeder Einzelmessung 300 s, um nach der Poissonverteilung sicher eine statistische Unsicherheit von unter 3 % zu erhalten. Zunächst wird eine Leermessung ohne Würfel durchgeführt und der Inhalt des Vollenergiepeaks bestimmt. Danach werden der erste, zweite und dritte Würfel für verschiedene Projektionen vermessen. Hier werden allerdings nur die Projektionen 2, 5 und 9 aufgenommen (siehe Abb. 2), da die Würfel homogen sind und somit theoretisch bereits eine Messung zur Bestimmung des Materials ausreichend wäre. Für den letzten Würfel, der aus 9 Elementarwürfeln besteht, wird der Inhalt des Vollenergiepeaks für alle in Abb. 2 dargestellten Projektionen bestimmt.

## 5 Auswertung

Im folgenden Kapitel werden die aufgenommenen Messdaten ausgewertet. Dafür wird die *Python*-Version 3.7.6 verwendet. Auftretende Fehlerrechnungen werden mit dem Paket *Uncertainties* durchgeführt.

### 5.1 Messung der Eingangsintensität

Als erstes wird die gemessene Eingangsintensität  $I_0$  ermittelt. In Abbildung 4 ist das aufgenommene Spektrum dargestellt. Wie zu erkennen stellen die ersten Maxima des Spektrums die Rückstreulinie, Compton-Kontinuum und Compton-Kante dar. Die fürs Experiment relevante Strahlung entspricht dem Vollenergiepeak bei einer Energie von 661 keV. Diese entspricht der Energie der abgestrahlten Photonen. Die Eingangsintensität ergibt sich nun aus dem Verhältniss von gemessenen Counts  $N$  und gemessener Zeit  $\Delta t$ . Der poissonverteilte Fehler der Zählrate wird vom Messprogramm MAESTRO des Multichannelanalyzers bestimmt. Durch die gemessene Anzahl von 35819 Counts ergibt sich bei einer Zeit von 300 Sekunden:

$$I_0 = (119,4 \pm 0,8) \text{ Bq}$$

### 5.2 Tomographie an homogenen Würfeln

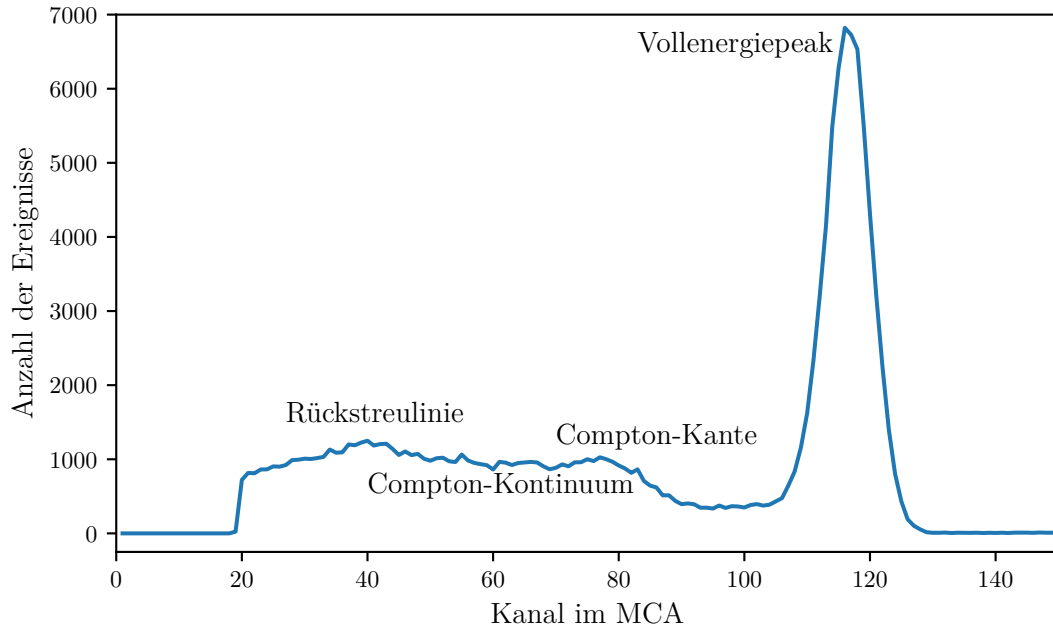
Zuerst wurde der leere Würfel aus Aluminium vermessen. Der Grund dafür liegt in der Verwendung seiner abgeschwächten Intensität als Eingangsintensität für die Auswertung der anderen Würfel. Die ermittelten Intensitäten für die Projektionen 2, 5 und 9 ergeben sich zu

$$I_{P5} = (113,5 \pm 0,8) \text{ Bq}$$

$$I_{P2} = (114,13 \pm 0,80) \text{ Bq}$$

$$I_{P9} = (112,7 \pm 0,8) \text{ Bq}$$

Als nächstes wird der zweite Würfel vermessen, welcher homogen aus einem Material besteht und von einer Aluminiumhülle umschloßen ist. Der Absorptionskoeffizient ergibt



**Abbildung 4:** Das gemessene Spektrum der verwendeten Quelle. Dargestellt ist die Anzahl der Ereignisse über den Kanälen des MCA.

sich dabei über folgende Gleichung:

$$\mu = \frac{1}{d} \cdot \ln \left( \frac{I_0}{I_i} \right), \quad (2)$$

mit der Ausgangsintensität  $I_2$  und  $I_3$  des zweiten und dritten Würfels, sowie der Strecke  $d$  die der Strahl je nach Projektion durchqueren muss. Diese Strecke beträgt für die zweite Projektion  $3\sqrt{2}\text{cm}$ , für die fünfte Projektion  $3\text{cm}$  und für die neunte Projektion  $2\sqrt{2}\text{cm}$ . Als Wert für den Absorptionskoeffizienten wird der Mittelwert genommen. Es ergibt sich ein Absorptionskoeffizienten des zweiten und dritten Würfels von

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_2 &= (0,568 \pm 0,003) \frac{1}{\text{cm}} \\ \bar{\mu}_3 &= (0,085 \pm 0,002) \frac{1}{\text{cm}} \end{aligned}$$

Die gemessenen Counts und ermittelten Intensitäten für Würfel 2 und 3 sind in Tabelle 1 aufgelistet. In Tabelle 2 befinden sich die berechneten Absorptionskoeffizienten der einzelnen Projektionen.

Ein Vergleich mit Theoriewerten [4] zeigt dass es sich beim zweiten Würfel um Eisen handelt, da der Theoriewert von  $0,57/\text{cm}$  innerhalb des Fehlerintervalls liegt und damit



**Tabelle 1:** Counts und Intensitäten für Würfel 2 und 3.

$N_1$	$I_1/(1/s)$	$N_2$	$I_2/(1/s)$	$N_3$	$I_3/(1/s)$
$34\,239 \pm 241$	$114,13 \pm 0,80$	$5794 \pm 98$	$19,31 \pm 0,33$	$26\,690 \pm 208$	$88,97 \pm 0,69$
$34\,058 \pm 239$	$113,53 \pm 0,80$	$3591 \pm 78$	$11,97 \pm 0,26$	$23\,663 \pm 199$	$78,88 \pm 0,66$
$33\,801 \pm 239$	$112,67 \pm 0,80$	$6528 \pm 103$	$21,76 \pm 0,34$	$26\,429 \pm 211$	$88,10 \pm 0,70$

**Tabelle 2:** Ermittelte Absorptionskoeffizienten von Würfel 2 und 3.

Proj.	$\mu_2//\text{cm}$	$\mu_3//\text{cm}$
5	$0,592 \pm 0,006$	$0,083 \pm 0,004$
2	$0,530 \pm 0,005$	$0,086 \pm 0,003$
9	$0,581 \pm 0,006$	$0,087 \pm 0,004$

keine Abweichung zeigt. Der geringe Absorptionskoeffizient des dritten Würfels lässt auf ein leichtes Material wie Delrin schließen ( $\mu_{\text{Delrin}} = 0,11/\text{cm}$ ). Dies entspricht einer Abweichung beim Delrin von 23%.

### 5.3 Tomographie am zusammengesetzten Würfel

Für den zusammengesetzten Würfel werden alle 12 Projektionen ausgewertet. Dies geschieht über die Verwendung eines überbestimmten Gleichungssystems, wie in Kapitel 2 dargestellt. Die 9 Elementarwürfel bestehen dabei jeweils aus dem Material des ersten oder zweiten homogenen Würfels. Die gemessenen Counts und daraus ergebenden Intensitäten der 12 Projektionen sind in Tabelle 3 aufgelistet. In Tabelle 4 befinden sich die ermittelten Absorptionskoeffizienten, sowie die jeweilige vermutete Zuordnung des Würfels zu Eisen oder Delrin und dessen Theoriewerte [4] und Abweichungen.

**Tabelle 3:** Counts und Intensitäten des vierten Würfels.

$N_4$	$I_4/(1/s)$
$13\,734 \pm 151$	$45,78 \pm 0,50$
$11\,957 \pm 140$	$39,86 \pm 0,47$
$12\,648 \pm 146$	$42,16 \pm 0,49$
$5828 \pm 102$	$19,43 \pm 0,34$
$11\,528 \pm 138$	$38,43 \pm 0,46$
$16\,669 \pm 167$	$55,56 \pm 0,56$
$8713 \pm 121$	$29,04 \pm 0,40$
$6749 \pm 105$	$22,50 \pm 0,35$
$19\,400 \pm 180$	$64,67 \pm 0,60$
$6572 \pm 106$	$21,91 \pm 0,35$
$16\,789 \pm 168$	$55,96 \pm 0,56$
$15\,888 \pm 164$	$52,96 \pm 0,55$

**Tabelle 4:** Vergleich zwischen den ermittelten Absorptionskoeffizienten und Theoriewerten.

$j$	$\mu_2//\text{cm}$	Material	$\mu_{\text{theorie}}$	Abweichung
1	$0,464 \pm 0,009$	Eisen	0,57	18%
2	$0,166 \pm 0,006$	Delrin	0,11	50%
3	$-0,020 \pm 0,008$	Delrin	0,11	118%
4	$0,562 \pm 0,007$	Eisen	0,57	1%
5	$0,132 \pm 0,007$	Delrin	0,11	20%
6	$0,250 \pm 0,006$	Delrin	0,11	127%
7	$0,664 \pm 0,010$	Eisen	0,57	16%
8	$0,420 \pm 0,007$	Eisen	0,57	26%
9	$0,578 \pm 0,010$	Eisen	0,57	1%

## 6 Diskussion

Die Vermessung des zweiten Würfels ergibt für den Absorptionskoeffizienten eine sehr gute Übereinstimmung mit Eisen. Der ermittelte Absorptionskoeffizient des dritten Würfels hat einen sehr geringen Wert der auf ein leichtes Material vermuten lässt. Das Gewicht des Würfels während der Messung, schließt dies jedoch aus und passt eher zu einem Metall.

Ein Grund für die hohe Abweichung des Absorptionskoeffizienten vom dritten Würfel zu seinem wahren Theoriewert, liegt in dem Strahlenweg durch die geschweißten Ecken des Würfels. Zusätzlich existiert der lange Strahlenweg außerhalb des Würfels, da die Reduzierung der Intensität durch Luft nicht weiter betrachtet wird. Die daraus folgende Abweichung wird jedoch als nicht sehr hoch eingestuft. Andere Gründe liegen in der Aluminiumhülle der Würfel und der Ausdehnung des Strahlenganges. Während versucht wird dem Effekt der Hülle durch Anpassung der Eingangsintensität entgegenzuwirken, kann die Ausdehnung des Strahles und damit das durchdringen von benachbarten Elementarwürfeln nicht verhindert werden. Zuletzt entstehen Abweichungen durch die Ausrichtung der Würfel im Strahl, die per Augenmaß durchgeführt wurde. Dies führt zum Teil zu falschen Projektionsachsen, die eine andere Dicke des Materials durchqueren als angenommen.

## Literatur

- [1] Prof. Dr. Helmut Winter et al. *Absorption von Strahlung*. URL: <http://pgd5.physik.hu-berlin.de/pgd/absorpt.htm>.
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch Nr.14 Tomographie mittels Gammastrahlung*. 2020.
- [3] Joshua Luckey. *tikz-Projektionen.pdf*. URL: [https://github.com/LuckyJosh/PhysikFP2015/blob/master/01\\_TomographieGamma%5C%5BX%5C%5D/Grafiken/Tikz/tikz-Projektionen.pdf](https://github.com/LuckyJosh/PhysikFP2015/blob/master/01_TomographieGamma%5C%5BX%5C%5D/Grafiken/Tikz/tikz-Projektionen.pdf).
- [4] „NIST: Element/Compound/Mixture Selection“. In: (). URL: <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Xcom/html/xcom1.html>.