SMD: Blatt 2

Sophie Bork
sophie.bork@udo.edu

Simon Schulte
simon.schulte@udo.edu

Michael Windau
michael.windau@udo.edu

2. November 2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

1 . Aufgabe

Die Ergebnisse sind in der anliegenden Datei aufgabe5.py implementiert. Die Aufgabenteile a) bis d) basieren auf der Transformation der Gleichverteilung: Dafür wird die normierte Wahrscheinlichkeitsdichte der Verteilungen aufgestellt, welche gleich der gleichverteilten Zufallsvariablen ist. Durch invertieren der Dichte wird auf die Zufallsvariable mit gewünschter Verteilung geschlossen.

a) Normierung:

$$1 = \mathrm{N} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$f(x)$ ist im Intervall x_{min} bis x_{max} gleich 1.

$$\mathrm{N} = \frac{1}{x_{\mathrm{max}} - x_{\mathrm{min}}}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte mit der gleichverteilten Zufallsvariablen u:

$$\mathrm{F}(x) = u = \int_{x_{\min}}^{x} \mathrm{N}\, f(x)\mathrm{d}x$$

$$u = \frac{x - x_{\mathrm{min}}}{x_{\mathrm{max}} - x_{\mathrm{min}}}$$

Invertieren:

$$x = u(x_{\mathrm{max}} - x_{\mathrm{min}}) + x_{\mathrm{min}}$$

b) Normierung:

$$1 = \mathrm{N} \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{N} = 1\,/\,\tau$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte mit der gleichverteilten Zufallsvariablen u:

$$\mathrm{F}(x) = u = \int_{0}^{t} \mathrm{N}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\,dt$$

$$u = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

Invertieren:

$$t = -\tau \ln(1 - u)$$

c) Normierung:

$$1 = \mathrm{N} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^{-\mathrm{n}} \,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{N} = \frac{1-\mathrm{n}}{x_{\max}^{1-\mathrm{n}} - x_{\min}^{1-\mathrm{n}}}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte mit der gleichverteilten Zufallsvariablen u:

$$\mathrm{F}(x) = u = \int_{x_{\min}}^{x} \mathrm{N}\, x^{-\mathrm{n}} \, dx$$
$$u = \frac{x^{1-\mathrm{n}} - x_{\min}^{1-\mathrm{n}}}{x_{\max}^{1-\mathrm{n}} - x_{\min}^{1-\mathrm{n}}}$$

Invertieren:

$$x = (u\,(x_{\max}^{1-\mathrm{n}} - x_{\min}^{1-\mathrm{n}}) \; + \; x_{\min}^{1-\mathrm{n}})^{(\frac{1}{1-\mathrm{n}})}$$

d) Normierung:

$$1 = \mathrm{N} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{N} = \frac{1}{\arctan x_{\max} - \arctan x_{\min}}$$

N ist gleich $1/\pi$ für $x_{\min} = -\infty$ und $x_{\max} = \infty$. Die Wahrscheinlichkeitsdichte mit der gleichverteilten Zufallsvariablen u:

$$\mathrm{F}(x) = u = \int_{x_{\min}}^{x} \mathrm{N}\, \frac{1}{1+x^2} \, dx$$
$$u = \frac{\arctan x - \arctan x_{\min}}{\arctan x_{\max} - \arctan x_{\min}}$$

Invertieren:

$$x = \tan\left(u(\arctan x_{\max} - \arctan x_{\min}) \; + \; \arctan x_{\min}\right)$$

d) In diesem Aufgabenteil ist es notwendig das Neumann'sche Rückweisungsverfahren zu verwenden. Ich habe es aber leider nicht geschafft die Aufgabe weiter zu bearbeiten :(.

2 . Aufgabe

2.1 Aufgabe 2a

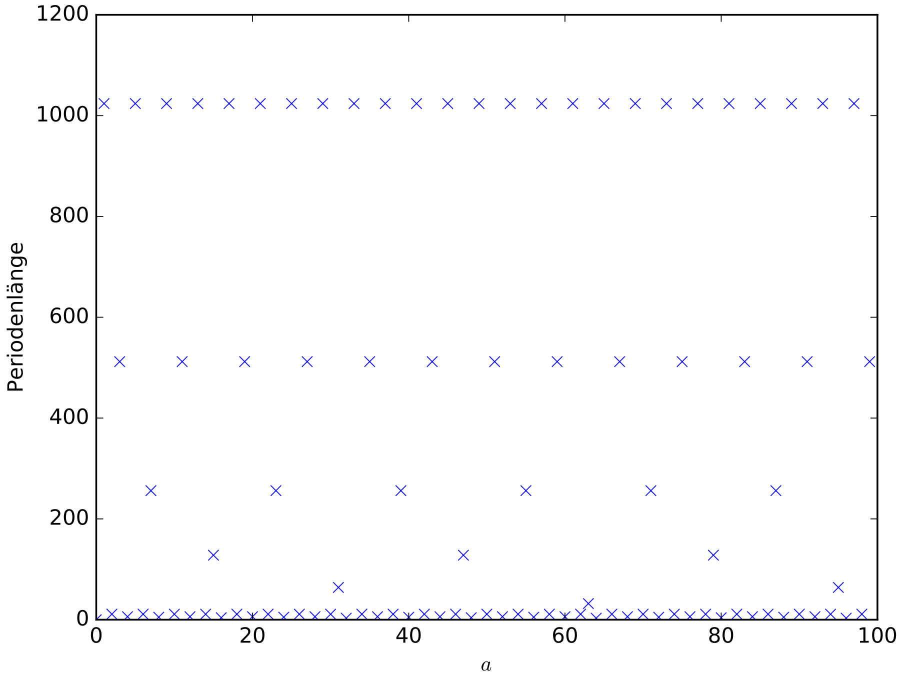
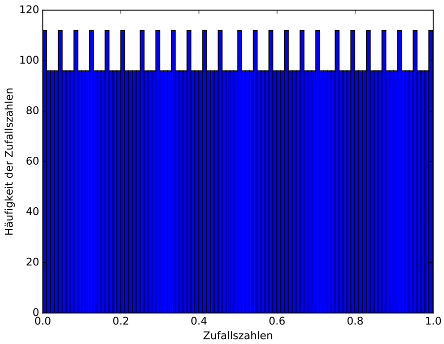


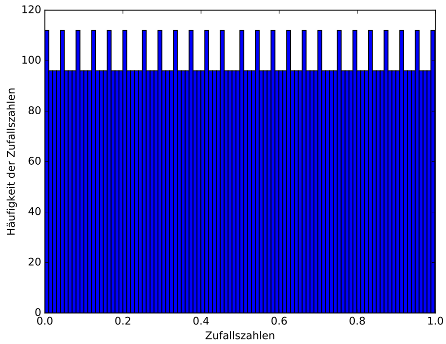
Abbildung 1: Periodenlänge des Zufallszahlgenerators in Abhängigkeit von a.

Die maximale Periodenlänge ist 1024(=m.) Die Periodenlänge ist für alle $4k+1$ ($k \in \mathbb{N}_0$) maximal. Dies liegt daran, dass für diese Zahlen alle Kriterien für eine maximale Periodenlänge erfüllt sind:
1) b ist nicht 0.
2) 1024 ist nicht durch 3 teilbar. Somit sind b und m teilerfremd.
3) 2 ist der einzige Primfaktor von 1024. $4k+1-1$ ist immer eine gerade Zahl und somit durch 2 teilbar.
4) 1024 ist durch 4 teilbar und $4k+1-1$ auch.

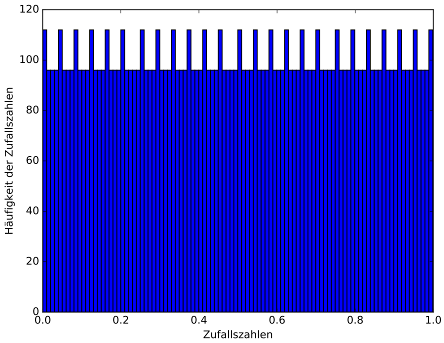
2.2 Aufgabe 2b



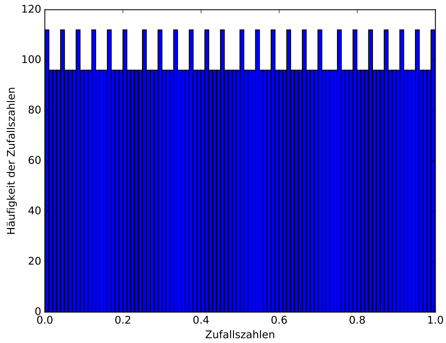
(a) Zufallszahlen für den Startwert 0.



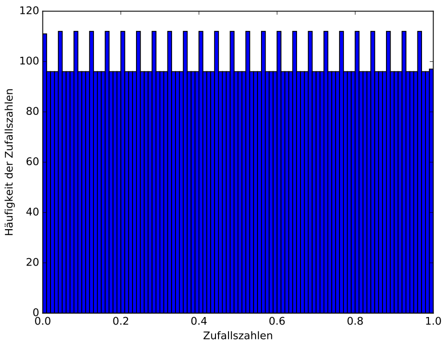
(b) Zufallszahlen für den Startwert 1.



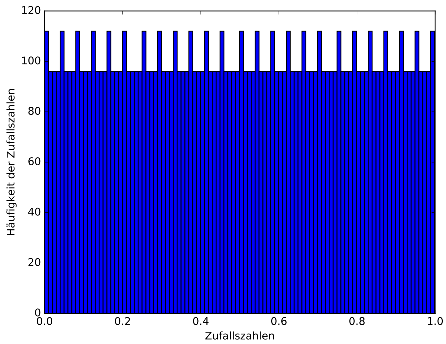
(c) Zufallszahlen für den Startwert 2.



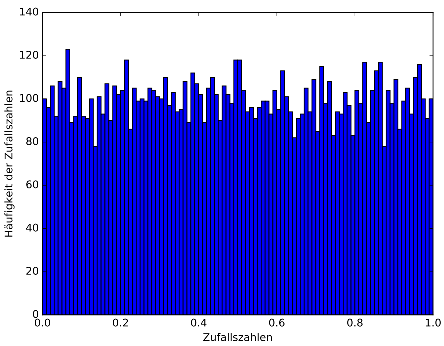
(d) Zufallszahlen für den Startwert 100.



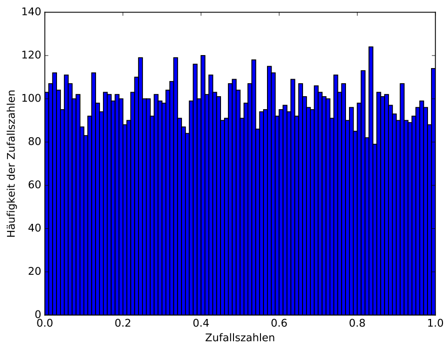
(e) Zufallszahlen für den Startwert 10000.



(f) Zufallszahlen für den Startwert 0,5.



(g) Zufallszahlen für den Startwert Pi.



(h) Zufallszahlen für den Startwert 3/7.

Abbildung 2: Histogramme von Zufallszahlen für unterschiedliche Startwerte.

Es fällt auf, dass es bei ganzzahligen Werten keine Rolle für die Verteilung spielt, welcher Startwert ihr zugrunde liegt. Endliche Komma-Zahlen führen ebenfalls zur gleichen Verteilung. Nur bei Zahlen, die periodisch oder irrational sind, entsteht ein anderes Bild. Vielleicht ist dies aber auch auf Rundungen zurückzuführen.
Es liegt kein guter Zufallsgenerator vor, da eine Periodizität zu erkennen ist.

2.3 Aufgabe 2c

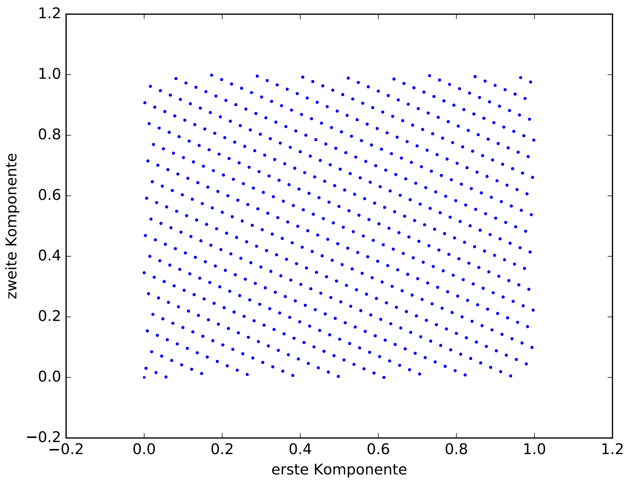


Abbildung 3: Streudiagramm von Paaren aufeinanderfolgender Zufallszahlen (mit selbst programmiertem Generator erstellt).

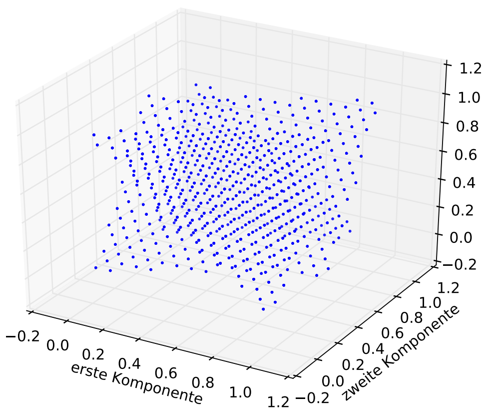


Abbildung 4: Streudiagramm von Tripletts aufeinanderfolgender Zufallszahlen (mit selbst programmiertem Generator erstellt).

Auch hier ist leider eine gewisse Periodizität zu erkennen (Gitterform), weshalb sichtbar wird, dass der selbstprogrammierte Zufallsgenerator nicht den Anforderungen an einen guten Zufallsgenerator genügt.

2.4 Aufgabe 2d

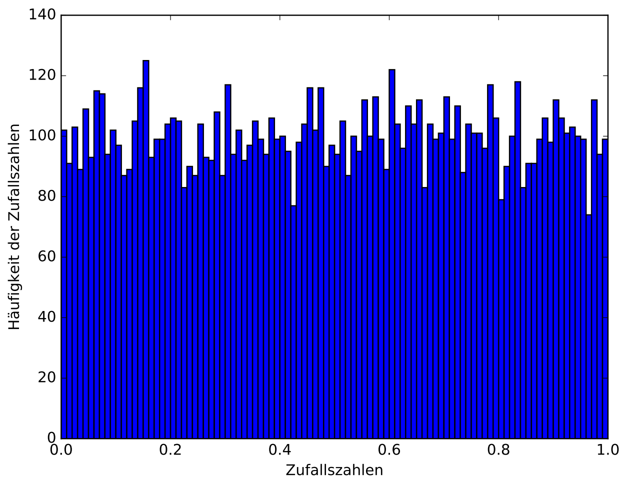


Abbildung 5: Histogramm von Zufallszahlen (von numpy erstellt).

Im Historgramm ist keine Periodizität mehr erkennbar.

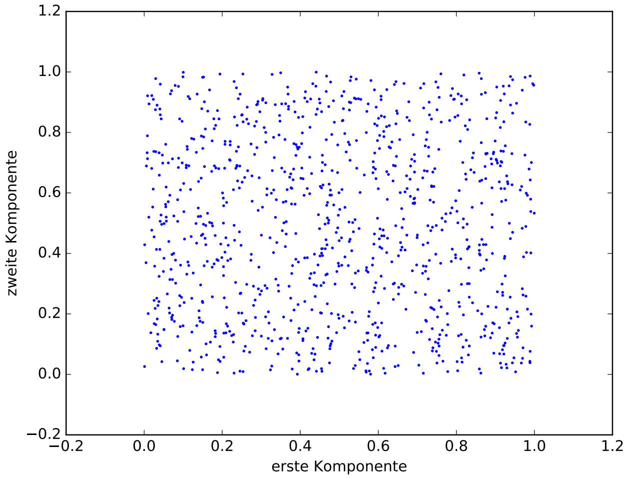


Abbildung 6: Streudiagramm von Paaren aufeinanderfolgender Zufallszahlen (von numpy erstellt).

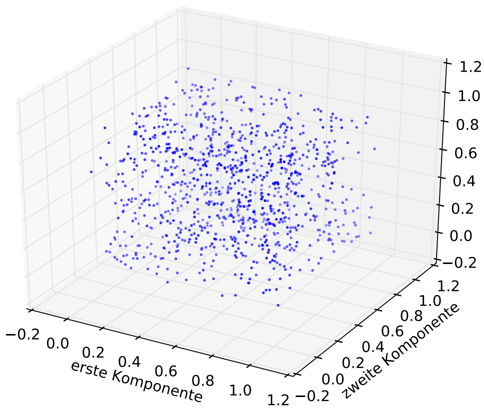


Abbildung 7: Streudiagramm von Tripletts aufeinanderfolgender Zufallszahlen (von numpy erstellt).

Die von numpy generierten Zufallszahlen sind nicht mehr auf klar erkennbaren Gitterzweigen, wie die des selbstprogrammierten Generators.

2.5 Aufgabe 2e

Parameter:
$a = 3$

$b = 3$
$m = 1024$

Wie oft unter den 1024 Zahlen die Zahl $\frac{1}{2}$ zu finden ist, hängt vom Startwert ab. Bei einigen Startwerten (wie zum Beispiel 2) ist der Generator gar nicht in der Lage, die Zahl überhaupt zu erstellen.
Für den Startwert 348672 kommt $\frac{1}{2}$ jedoch einmal vor, und für den Startwert 511 ist die Zufallszahl gleich zweimal inerhalb der Werte zu finden.

3 . Aufgabe

A 7

a) $\rho(x,y) = \dfrac{cov(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$

$\sigma_x = 3{,}5$, $\sigma_y = 1{,}5$, $cov(x,y) = 4{,}2$

$\Rightarrow \rho(x,y) = 0{,}8$ //

b) aus a) folgt: x und y korreliert.

Verwende standardisierte Var.

$u_i = \dfrac{x_i - a_i}{\sigma_i}$

hier: $a_i \hat{=} \mu_i$

$\phi(u_1,u_2) = k \cdot e^{-\frac{1}{2}\vec{u}^T B \vec{u}} = k \cdot e^{-\frac{1}{2} g(\vec{u})}$

mit $B = \dfrac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \\ \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$$g(\vec{u}) = \vec{u}^T \cdot B \cdot \vec{u} = (u_1,u_2)\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1-\rho^2}$$

$$= (u_1,u_2)\begin{pmatrix} u_1 - \rho u_2 \\ -\rho u_1 + u_2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1-\rho^2}$$

$$= \left(u_1^2 - \rho u_1 u_2 - \rho u_1 u_2 + u_2^2\right) \cdot \frac{1}{1-\rho^2}$$

Linien gl. Wahrscheinlichkeit:

$\phi(u_1,u_2) = const. \Rightarrow -\frac{1}{2} g(\vec{u}) = const.$

betrachte $g(\vec{u}) = 1$

$\Rightarrow 1-\rho^2 = u_1^2 + u_2^2 - 2u_1u_2\rho$

~~Einsetzen:~~

$$\cancel{1-\rho^2 = \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma}\right.}$$

Einsetzen:

$$1-\rho^2 = \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)$$

$\Rightarrow$ <u>Ellipse</u>

c) $g(\vec{u}) = 1$

$$\Rightarrow \phi(u_1, u_2) = k \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{k}{\sqrt{e}} \qquad \text{mit } k = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}$$

$\Rightarrow$ Zeichnung für $g(\vec{u}) = 1$ nach der Gleichung aus b)

d) $$C = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & cov(x,y) \\ cov(x,y) & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

C' soll Form $C' = \begin{pmatrix} \sigma_{x'}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{y'}^2 \end{pmatrix}$ haben.

also: $C' = M \cdot C$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{x'}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{y'}^2 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & cov(x,y) \\ cov(x,y) & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{x'}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{y'}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cdot\sigma_x^2 - \sin(\alpha)\cdot cov(x,y) & cov(x,y)\cdot\cos(\alpha) - \sigma_y^2\cdot\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cdot\sigma_x^2 + cov(x,y)\cdot\cos(\alpha) & cov(x,y)\cdot\sin(\alpha) + \sigma_y^2\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\Rightarrow \sigma_x^2 \sin(\alpha) + cov(x,y)\cdot\cos(\alpha) \stackrel{!}{=} 0 \stackrel{!}{=} cov(x,y)\cdot\cos(\alpha) - \sigma_y^2 \sin(\alpha) \quad |:\cos(\alpha)}$$

$$\cancel{\Leftrightarrow \sigma_x^2 \tan(\alpha) + cov(x,y) = cov(x,y) - \sigma_y^2 \tan(\alpha)}$$

$\Rightarrow$ weiteres Umformen führt nicht zu

$$0 \overset{!}{=} \sin(\alpha) \cdot \sigma_x^2 + cov(x,y) \cos(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{cov(x,y)}{\sigma_x^2} = \tan(\alpha_1)$$

und

$$0 \overset{!}{=} cov(x,y) \cos(\alpha) - \sigma_y^2 \sin(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \frac{cov(x,y)}{\sigma_y^2} = \tan(\alpha_2)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \arctan\left(-\frac{cov(x,y)}{\sigma_x^2}\right)$$

$$\wedge \quad \alpha_2 = \arctan\left(\frac{cov(x,y)}{\sigma_y^2}\right)$$

erfüllen jeweils
die Gleichung
aber nicht
die Andere
also $\alpha_1 \neq \alpha_2$. ?

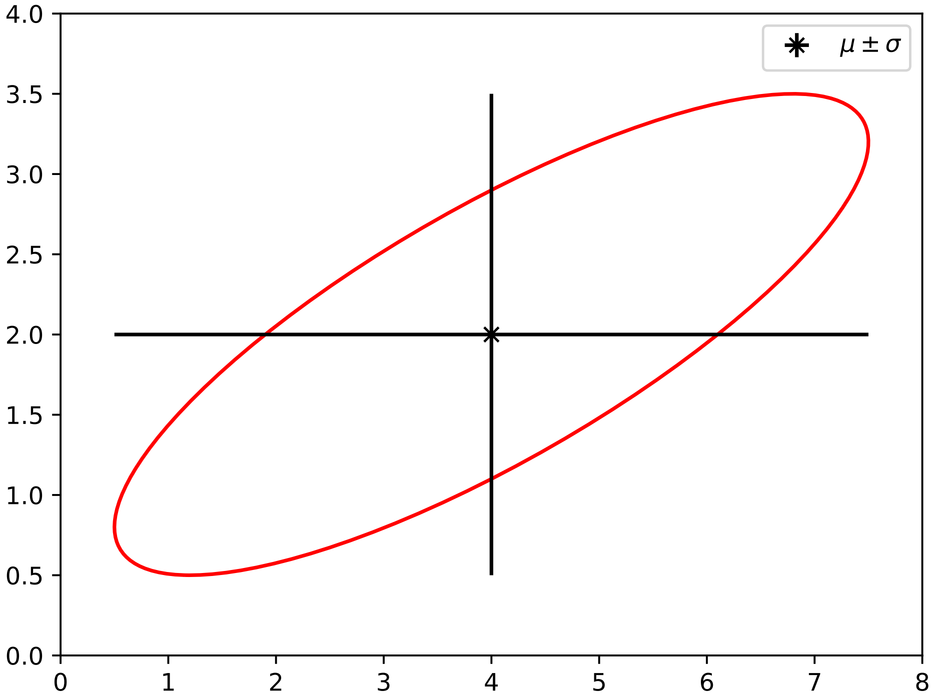


Abbildung 8: .

Für die Zeichnung wurde die Gleichung

$$\frac{9}{25} = \frac{(x-4)^2}{12.25} - 1.6\,\frac{x-4}{3.5}\,\frac{y-2}{1.5} + \frac{(y-2)^2}{2.25} \tag{1}$$

verwendet.