

Zeit	Raum	Abgabe im Moodle; Mails mit Betreff: [SMD1819]
Di. 10-12	CP-03-150	tobias.hoinka@udo.edu, felix.geyer@udo.edu und jan.soedingrekso@udo.edu
Di. 16-18	CP-03-150	simone.mender@udo.edu und alicia.fattorini@udo.edu
Mi. 10-12	CP-03-150	mirco.huennefeld@udo.edu und kevin3.schmidt@udo.edu

Aufgabe 5: *Gleichverteilung*

5 P.

Gegeben sei ein Zufallszahlengenerator, der gleichverteilte Zahlen z von 0 bis 1 liefert. Geben Sie **effiziente Algorithmen** an, und implementieren Sie diese, mit denen Sie Zufallszahlen erzeugen können, die den folgenden Verteilungen gehorchen:

- a) Eine Gleichverteilung in den Grenzen x_{\min} bis x_{\max}
- b) Exponentialgesetz: $f(t) = Ne^{-t/\tau}$ in den Grenzen 0 bis ∞ (N = Normierungskonstante)
- c) Potenzgesetz: $f(x) = Nx^{-n}$ in den Grenzen x_{\min} bis x_{\max} ($n \geq 2$, N = Normierungskonstante)
- d) Cauchy-Verteilung:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

in den Grenzen $-\infty$ bis ∞

- e) Die durch das (im Moodle unter *empirisches_histogramm.csv* zu findene) Histogramm gegebene empirische Verteilung. Die Datei enthält Binzentren (*binmid*) und die Höhen (*counts*). Das Histogramm besteht aus 50 Bins zwischen 0,0 und 1,0.

Aufgabe 6: *Zufallszahlengeneratoren*

5 P.

Linear-kongruente Zufallszahlengeneratoren erzeugen eine neue ganzzahlige Zufallszahl aus der vorhergehenden durch die Vorschrift

$$x_n = (a \cdot x_{n-1} + b) \mod m.$$

Division durch m ergibt dann eine zwischen 0 und 1 gleichverteilte reelle Zufallszahl.

- a) Programmieren Sie einen solchen Zufallszahlengenerator mit $b = 3$ und $m = 1024$. Bestimmen Sie die Periodenlänge in Abhängigkeit des Parameters a , indem Sie für a Werte aus einem angemessenen Bereich verwenden. Stellen Sie den Zusammenhang von Periodenlänge und a in einem Plot dar. Wie groß ist die maximale

Periodenlänge? Für welche Werte von a ist die Periodenlänge maximal? Lassen sich die erhaltenen Werte mit den Regeln für *gute* linear-kongruente Generatoren erklären? Hinweis: In dieser Aufgabe sollte der Startwert x_0 unverändert bleiben.

Verwenden Sie für die folgenden Aufgaben einen linear-kongruenten Zufallszahlengenerator mit den Parametern $a = 1601$, $b = 3456$ und $m = 10\,000$.

- b) Erzeugen Sie so 10 000 Zufallszahlen und stellen Sie diese als Histogramm dar. Entspricht das Ergebnis den Anforderungen an einen guten Zufallszahlengenerator? Hängt es vom Startwert x_0 ab, und wenn ja, wie?
- c) Stellen Sie Paare bzw. Triplets aufeinanderfolgender Zufallszahlen als zweidimensionales bzw. dreidimensionales Streudiagramm (engl. scatter plot) dar. Entspricht das Ergebnis den Anforderungen an einen guten Zufallszahlengenerator?
- d) Erstellen Sie Histogramme wie in c) und d) auch mit `numpy.random.uniform()`.
- e) Wie oft liefert der Zufallsgenerator aus Aufgabenteil **a)** den exakten Wert $\frac{1}{2}$? Hängt diese Anzahl vom Startwert ab? Geben Sie einen möglichen Startwert an, sodass der Generator $\frac{1}{2}$ erzeugen kann.

Beispiel für ein dreidimensionales Streudiagramm in `matplotlib`:

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
4
5 x, y, z = np.random.normal(size=(3, 1000))
6
7 fig = plt.figure()
8 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
9
10 ax.init_view(45, 30) # Elevation, Rotation
11 ax.scatter(
12     x, y, z,
13     lw=0, # no lines around points
14     s=5, # smaller points
15 )
16
17 plt.show()
```

Aufgabe 7: *Zweidimensionale Gaußverteilung*

10 P.

Eine zweidimensionale Gaußverteilung sei durch folgende Parameter gekennzeichnet:

$$\mu_x = 4, \quad \mu_y = 2, \quad \sigma_x = 3,5, \quad \sigma_y = 1,5 \quad \text{und} \quad \text{Cov}(x, y) = 4,2$$

- a) Wie groß ist der Korrelationskoeffizient?
- b) Zeigen Sie, dass die Kurven konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte Ellipsen sind.
- c) Zeichnen Sie die Ellipse, bei der $f(x, y)$ auf das $1/\sqrt{e}$ -fache des Maximums abgefallen ist. Zeichnen Sie die Werte μ_x , μ_y , $\mu_x \pm \sigma_x$ und $\mu_y \pm \sigma_y$ in Ihrer Zeichnung ein.
- d) Geben Sie eine Rotationsmatrix \mathbf{M} an, so dass die Variablen $(x', y')^\top = \mathbf{M}(x, y)^\top$ unkorreliert sind. Wie groß sind $\sigma_{x'}$ und $\sigma_{y'}$? Wie lang sind die Hauptachsen der Ellipse und welchen Winkel bilden sie mit den Koordinatenachsen? Zeigen sie hierfür unter anderem, dass

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left(-\frac{2 \cdot \text{Cov}(x, y)}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \right)$$

gilt. Zeichnen Sie $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$, und die Hauptachsen in die Zeichnung ein.

- e) Wie lauten die bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten $f(x | y)$ und $f(y | x)$? Zeichnen Sie diese Werte in die Zeichnung ein.
- f) Wo liegen die bedingten Mittelwerte $E(x | y)$ und $E(y | x)$? Zeichnen Sie diese Werte in die Zeichnung ein.