1 Aufgabe 1

1.1 Aufgabe 1a

Es werden zunächst 10^5 Zufallszahlenpaare in einem Kasten erzeugt, welcher in x-Richtung die Grenzen 0 und 20 hat und in y-Richtung von 0 und y_{max} begrenzt wird.
y_{max} ist der maximale y-Wert der Verteilung lässt sich berechnen, indem von

$$f'(x) = \frac{Nx^2}{e^x - 1}\left(3 - \frac{xe^x}{e^x - 1}\right)$$

(also der Ableitung der Planck-Verteilung) die Nullstelle mit scipy.optimize.brentq berechnet wird. Der zur Nullstelle gehörige y-Wert ist dann y_{max} und liegt hier bei etwa 0.22.
Aus diesen Zufallszahlenpaaren werden diejenigen ausgewählt, die unter der Planck-Kurve liegen. Der Rest wird zurückgegeben. Es werden so viele neue Zufallszahlenpaare erzeugt, wie alte zurückgegeben wurden. Mit diesen wird das Verfahren wiederholt. Insgesamt wird das Verfahren so lange fortgeführt, bis alle 10^5 Zufallszahlenpaare unter der Planck-Kurve liegen.
Plottet man diese Paare, entsteht ein Bild wie in Abb. 1, in welchem die Fläche unter der Planck-Kurve nahezu vollständig von Punkten ausgefüllt ist und die restliche Fläche frei ist.

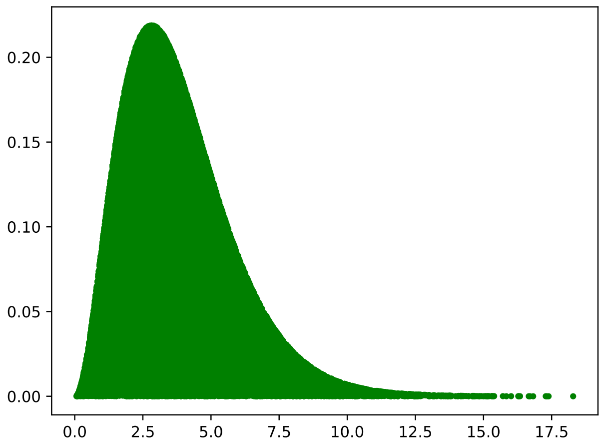

Abbildung 1: Normale Rückweisungsmethode für die Planck-Funktion.

1.2 Aufgabe 1b

Hier soll ebenfalls das Rückweisungsverfahren angewendet werden. Allerdings wird nicht einfach ein Kasten um die Funktion gelegt wie in der Aufgabe 1a. Stattdessen wird nur um die Funktion im Intervall 0 bis x_s ein Kasten mit oberer Grenze y_{max} gelegt. Im zweiten

Funktionsintervall von x_s bis 20 wird die vorläufige $y-$Koordinate der Zufallszahlenpaare durch die obere Grenze

$$g(x) = 200Nx^{-0.1}\exp(-x^{0.9})$$

beschränkt.
Um den Schnittpunkt zwischen den beiden Majoranten zu berechnen, welcher gleichzeitig x_s ist, setzt man die beiden Majorantenfunktionen gleich an der Stelle x_s und berechnet somit (wieder mit scipy.optimize.brentq) die Nullstelle von

$$200Nx_s^{-0.1}\exp(-x_s^{0.9}) - y_{max} \quad .$$

N kann aus der Normierung von $g(x)$ gewonnen werden:

$$\int_{x_s}^{\infty} g(x)dx = 1 = \left[-\frac{2000}{9}Ne^{-x^{9/10}}\right]_{x_s}^{\infty}$$
$$\iff N = \frac{9}{2000}e^{x_s^{9/10}}$$

x_s liegt ungefähr bei 5.68.

Im Prinzip können mit der Kenntnis von x_s beide Intervalle einzeln behandelt und im Anschluss zusammengefügt werden.
Um eine einheitliche Dichte der Punkte zu gewährleisten, muss zunächst überprüft werden, auf welches Intervall wie viel Prozent der zur Verfügung stehenden Fläche entfallen.
Gesamtfläche:

$$\int_0^{x_s} y_{max}\,dx + \int_{x_s}^{20} g(x)\,dx$$
$$= x_s y_{max} + 1$$

Anteil von N_1: $\frac{x_s y_{max}}{1+x_s y_{max}} \implies 80\%$
Anteil von N_2: $1 - \frac{x_s y_{max}}{1+x_s y_{max}} \implies 20\%$
Somit werden 80% der 10^5 Punkte im linken Intervall verteilt und 20% im rechten.
Nun ist es noch nötig, die Wahrscheinlichkeitsdichte von $g(x)$ zu bilden und diese zu invertieren, um eine gleichmäßige Verteilung unter dem Exponentialteil zu erhalten:

$$\int_{x_s}^{x} g(x)dx = -e^{x_s^{9/10}}e^{-x^{9/10}} + 1 = u$$
$$\iff x = \left(x_s^{9/10} - \ln(1-u)\right)^{10/9}$$

Mithilfe dessen lassen sich die 10^5 Punkte nun plotten, was ein Bild ergibt wie in Abb. 2. Der Plot unterscheidet sich optisch nicht vom Plot in Aufgabe 1a.

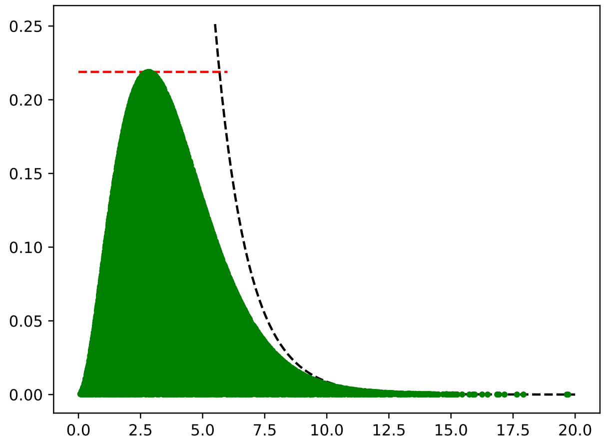

Abbildung 2: Rückweisungsmethode mit gestückelter Majorante.

1.3 Aufgabe 1c

Die beiden Verfahren werden nun verglichen.
Die erste Methode benötigt eine Rechenzeit von 0,071069 s und muss während der Ausführung 337794 Werte zurückgeben, was ineffizient ist.
Im Vergleich dazu benötigt die zweite Methode nur 0,027877 s und muss nur 53390 Werte zurückgeben.
Es ist natürlich logisch, dass die zweite Methode effizienter ist. Die Menge von Zufallszahlen, die zunächst erlaubt sind, aber nicht unter der Funktion liegen, ist beim ersten Verfahren wesentlich größer als beim zweiten.