Nome: Michelle Wingter da Silva
nUSP: 10783243

SCC0250 - Computação Gráfica
Prof. Ricardo M. Marcacini

Lista de Exercícios 1 - Transformações Geométricas 2D

Configuração da Lista de Exercícios:
Variável D = 09
Variável M = 10

1) O que são e por qual motivo utilizar coordenadas homogêneas para especificar transformações geométricas em CG?

Coordenadas homogêneas são sistemas de coordenadas utilizados no lugar dos sistemas de coordenadas cartesianos pela vantagem de ter um tratamento algébrico de pontos no infinito.

Além disso, são utilizadas em Computação Gráfica pois as transformações essenciais, como translação, rotação e escala, podem ser realizadas de uma forma muito mais simples em formato matricial, pois dessa forma podemos representar elementos impossíveis no sistema cartesiano, como o conceito de infinito e é útil para representar objetos 3D em nossos monitores que são 2D.

2) Apresente a matriz que representa uma transformação consistindo de uma translação seguida de uma rotação.

- <u>Translação seguida de rotação:</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X + TxZ \\ Y + TyZ \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X + TxZ \\ Y + TyZ \\ Z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (X + TxZ)cos\theta - (Y + TyZ)sin\theta \\ (X + TxZ)sin\theta + (Y + TyZ)sin\theta \\ Z \end{bmatrix}$$

3) Apresente a matriz que representa uma transformação consistindo de uma translação tx=M e ty=D seguida de uma escala uniforme s=2.

tx = 10, ty = 9

- <u>Translação seguida de escala</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X + TxZ \\ Y + TyZ \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X + 10Z \\ Y + 9Z \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X + 10Z \\ Y + 9Z \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X + 10Z \\ Y + 9Z \\ Z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(X + 10Z) \\ 2(Y + 9Z) \\ Z \end{bmatrix}$$

4) Verifique se R(M+D) irá obter a mesma matriz de transformação do que R(M)*R(D).

R(M+D) = R(10+9) $= \begin{bmatrix} cos(10+9) & -sin(10+9) & 0 \\ sin(10+9) & cos(10+9) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(19) & -sin(19) & 0 \\ sin(19) & cos(19) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

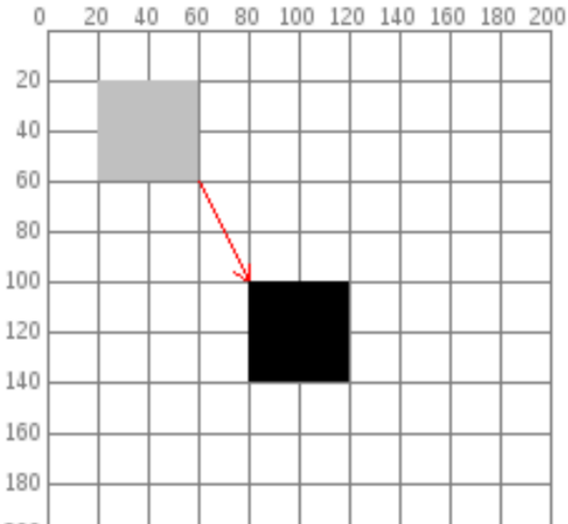
R(M)*R(D) = R(10)*R(9) = $\begin{bmatrix} cos(10) & -sin(10) & 0 \\ sin(10) & cos(10) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(9) & -sin(9) & 0 \\ sin(9) & cos(9) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} cos(10) * cos(9) - sin(10) * sin(9) & -(cos(10) * sin(9) - sin(10) * cos(9)) & 0 \\ sin(10) * cos(9) + cos(10) * sin(9) & -sin(10) * sin(9) - cos(10) * cos(9) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos(10+9) & -sin(10+9) & 0 \\ sin(10+9) & cos(10+9) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(19) & -sin(19) & 0 \\ sin(19) & cos(19) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, R(M+D) = R(M)*R(D)

5) Forneça a matriz de transformação que realiza a transformação abaixo (a seta indica o objeto inicial e o final após a transformação). Em seguida, apresente as coordenadas do objeto para uma escala uniforme s=M.



M = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 80 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+60 \\ y+80 \\ z \end{bmatrix}$

6) Abaixo é apresentada a matriz resultante de quatro transformações. Aplique esta transformação em triângulo ABC (A=(0,0), B=(1,0), C=(0,1)) e mostre o resultado (novos vértices e o desenho). Em seguida, faça uma translação tx=M/10 e ty=M/10.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Translation by } (3,-2)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Rotation through } 53^\circ.13} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Scaling by } 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Shearing by } 0.5} = \begin{bmatrix} 1.2 & -1 & 3 \\ 1.6 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a transformação:

7) Mostre que a ordem das transformações pode modificar a matriz de transformação resultante (problema da comutatividade). OBS: É suficiente fornecer um exemplo.

Exemplo: Rotação seguida de translação VS Translação seguida de rotação

- <u>Translação seguida de rotação:</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X + TxZ \\ Y + TyZ \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X + TxZ \\ Y + TyZ \\ Z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (X+TxZ)cos\theta - (Y+TyZ)sin\theta \\ (X+TxZ)sin\theta + (Y+TyZ)sin\theta \\ Z \end{bmatrix}$$

- Rotação seguida de translação:

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Xcos\theta - Ysin\theta \\ Xsin\theta + Ycos\theta \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xcos\theta - Ysin\theta \\ Xsin\theta + Ycos\theta \\ Z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Xcos\theta - Ysin\theta + TxZ \\ Xsin\theta + Ycos\theta + TyZ \\ Z \end{bmatrix}$$

Assim, vemos que:

$$\begin{bmatrix} (X+TxZ)cos\theta - (Y+TyZ)sin\theta \\ (X+TxZ)sin\theta + (Y+TyZ)sin\theta \\ Z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} Xcos\theta - Ysin\theta + TxZ \\ Xsin\theta + Ycos\theta + TyZ \\ Z \end{bmatrix}$$

Portanto, a ordem das transformações pode modificar a matriz de transformação resultante.

8) As transformações de rotação e escala são comutativas entre si? OBS: a ordem da multiplicação dessas transformações altera a matriz de transformação resultante?

- Escala **não** uniforme seguida de rotação:

$$\begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SxX \\ SyY \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SxX \\ SyY \\ Z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (SxX)cos\theta - (SyY)sin\theta \\ (SxX)sin\theta + (SyY)cos\theta \\ Z \end{bmatrix}$$

- Rotação seguida de escala **não** uniforme:

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X cos\theta - Y sin\theta \\ X sin\theta + Y cos\theta \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X cos\theta - Y sin\theta \\ X sin\theta + Y cos\theta \\ Z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (SxX)cos\theta - (SxY)sin\theta \\ (SyX)sin\theta + (SyY)cos\theta \\ Z \end{bmatrix}$$

- Escala uniforme seguida de rotação:

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SX \\ SY \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SX \\ SY \\ Z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (SX)cos\theta - (SY)sin\theta \\ (SX)sin\theta + (SY)cos\theta \\ Z \end{bmatrix}$$

- Rotação seguida de escala uniforme:

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X cos\theta - Y sin\theta \\ X sin\theta + Y cos\theta \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X cos\theta - Y sin\theta \\ X sin\theta + Y cos\theta \\ Z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (SX)cos\theta - (SY)sin\theta \\ (SX)sin\theta + (SY)cos\theta \\ Z \end{bmatrix}$$

Assim, se a escala for uniforme, a ordem da multiplicação das matrizes não altera a matriz de transformação resultante. No entanto, se a escala não for uniforme, a matriz de transformação resultante será diferente dependendo da ordem de multiplicação.

9) As transformações de translação e escala são comutativas entre si? E entre translação e rotação?

- Escala seguida de translação:

$$\begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SxX \\ SyY \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SxX \\ SyY \\ Z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} SxX + TxZ \\ SyY + TyZ \\ Z \end{bmatrix}$$

- Translação seguida de escala

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X + TxZ \\ Y + TyZ \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X + TxZ \\ Y + TyZ \\ Z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Sx(X + TxZ) \\ Sy(Y + TyZ) \\ Z \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} SxX + TxZ \\ SyY + TyZ \\ Z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} Sx(X + TxZ) \\ Sy(Y + TyZ) \\ Z \end{bmatrix}$$

Portanto, as transformações de translação e escala não são comutativas entre si.

- Translação seguida de rotação:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X + TxZ \\ Y + TyZ \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X + TxZ \\ Y + TyZ \\ Z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (X + TxZ)cos\theta - (Y + TyZ)sin\theta \\ (X + TxZ)sin\theta + (Y + TyZ)sin\theta \\ Z \end{bmatrix}$$

- <u>Rotação seguida de translação</u>:

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Xcos\theta - Ysin\theta \\ Xsin\theta + Ycos\theta \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xcos\theta - Ysin\theta \\ Xsin\theta + Ycos\theta \\ Z \end{bmatrix}$$

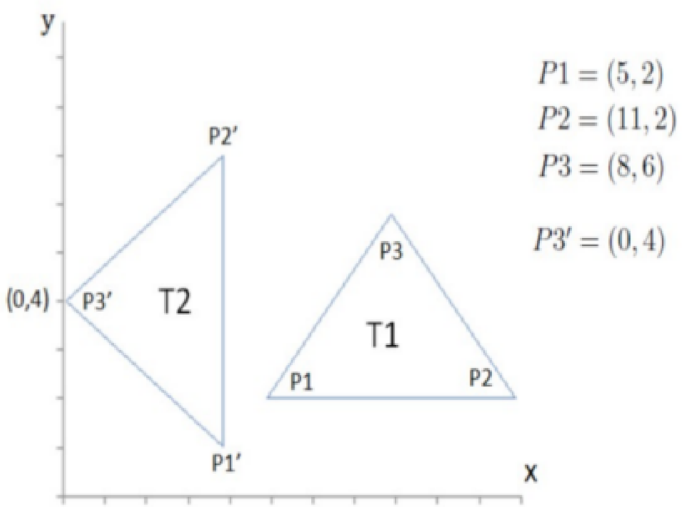
$$= \begin{bmatrix} Xcos\theta - Ysin\theta + TxZ \\ Xsin\theta + Ycos\theta + TyZ \\ Z \end{bmatrix}$$

Assim, vemos que:

$$\begin{bmatrix} (X + TxZ)cos\theta - (Y + TyZ)sin\theta \\ (X + TxZ)sin\theta + (Y + TyZ)sin\theta \\ Z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} Xcos\theta - Ysin\theta + TxZ \\ Xsin\theta + Ycos\theta + TyZ \\ Z \end{bmatrix}$$

Portanto, a ordem das transformações pode modificar a matriz de transformação resultante.

10) Forneça a sequência de transformações que leva o triângulo T1 ao triângulo T2 e dê a matriz resultante.



Rotação de 90º:

$$\begin{bmatrix} cos(90) & -sin(90) & 1 \\ sin(90) & cos(90) & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Y \\ X \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translação de (6,-4) em (x,y):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Y \\ X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Y+6 \\ X-4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

11) Seja um quadrado de lado L=5, inicialmente posicionado em x=M e y=D. Calcule e apresente a matriz de transformação que faça o quadrado rotacionar 45 graus em relação ao seu próprio centro. Apresente os vértices iniciais e finais do quadrado.

12) Dado um vértice/ponto posicionado em x=D e y=M, apresente as matrizes de transformação para (1) espelhar esse vértice em relação ao eixo X e (2) espelhar esse vértice em relação ao eixo Y.