Lista 1 - Ponto Flutuante/Sistemas Lineares
Cálculo Numérico - SME0140

Cynthia de Oliveira Lage Ferreira

2020

1 Parte Teórica

Ponto Flutuante

1) Avalie se os itens são verdadeiros ou falsos e justifique caso sejam falsos:

a) Se dois números reais são exatamente representados como pontos flutuantes, então o resultado de uma operação aritmética real entre eles também será representável como ponto flutuante.

b) Pontos flutuantes são igualmente distribuídos dentro de seu intervalo de representação.

c) A operação de adição entre dois pontos flutuantes é associativa, porém não comutativa.

2) Para um dado sistema de ponto flutuante, descreva a distribuição de seus elementos ao longo da reta real.

3) Quais quantidades determinam o erro máximo relativo ao representar um dado número real em um sistema de ponto flutuante?

4) Considerando um sistema de ponto flutuante, o produto de dois números dentro deste sistema é representável neste sistema?

5) Um sistema de ponto flutuante é caracterizado por quatro inteiros: a base β, a precisão p e os limites inferior e superior L e U respectivamente. Se $\beta = 10$, quais são os menores valores de p e L tais que 2365.27 e 0.0000512 sejam representados exatamente em um sistema de ponto flutuante normalizado?

6) Seja um sistema de ponto flutuante em que $p = 6$ dígitos decimais, considerando os números $x = 1.23456$ e $y = 1.23579$, quantos dígitos significativos o resultado de $y - x$ possui?

Sistemas Lineares

Métodos Diretos

1) Avalie se os itens são verdadeiros ou falsos e justifique caso sejam falsos:

a) Se uma matriz A é não singular, então o número de soluções do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ depende da escolha do lado direito do sistema (o vetor $\mathbf{b}$).

b) Se a matriz tem um determinante muito próximo de zero, então ela é considerada quase singular.

c) Ao permitir permutar colunas de uma matriz, a fatoração LU sempre será existirá, independente se esta matriz é singular.

d) Se um sistema linear é bem condicionado, então o pivoteamento é desnecessário na eliminação de Gauss.

e) Se a matriz é singular, então ela não possui fatoração LU.

f) Uma vez que a fatoração LU é feita para uma dada matriz para resolução de um sistema linear, outros sistemas com a mesma matriz, porém lados direitos diferentes, podem ser resolvidos sem a necessidade de fatorar a matriz novamente.

2) Seja a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \\ 0 & -10 & -3 \end{bmatrix},$$

cuja fatoração LU é feita usando a eliminação de Gauss, qual será o pivô inicial caso:

a) Nenhum pivoteamento for usado.

b) Pivoteamento parcial for usado.

3) Dada uma matriz não singular $A_{n\times n}$ e uma outra $B_{n\times n}$, qual é o melhor modo de calcular a matriz $A^{-1}B$?

4) Escreva (mostrando passo a passo) a fatoração LU da seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exiba as matrizes finais L e U obtidas.

5) Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ não tem fatoração LU.

6) Seja

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determine as matrizes M_1, M_2 e M_3 tais que $M_3M_2M_1A = U$ e $M_1^{-1}M_2^{-1}M_3^{-1} = L$ de modo que U e L são as matrizes da decomposição LU de A, isto é, $A = LU$.

Métodos Iterativos

1) Liste duas vantagens e duas desvantagens dos métodos iterativos quando comparados com os métodos diretos para resolução de sistemas lineares com várias incógnitas e esparsos.

2) Qual é a principal limitação dos métodos diretos baseados em fatoração de matrizes ao resolver sistemas lineares grandes e esparsos?

3) Considere o sistema linear

$$\begin{cases} -8x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & 5y & + & z & = & 16 \\ x & + & y & - & 4z & = & 7 \end{cases}.$$

Um método iterativo pode ser escrito na forma

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \ k \geq 0.$$

Escreva as matrizes de iteração B_J e B_{GS} e os vetores c_J e c_{GS} dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, respectivamente.

4) Ao resolver um sistema linear não singular $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$, que propriedade faria o método de Gauss-Jacobi falhar? E para o método de Gauss-Seidel ?

5) Responda:

a) Descreva a diferença entre o método de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel para resolver um sistema linear.

b) Qual método converge com mais rapidez?

c) Qual método requer menos espaço de armazenamento para as sucessivas aproximações?

6) Mostre que o método iterativo de Gauss-Jacobi para resolver o sistema linear $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ converge se a matriz A é diagonal dominante por linhas. (*Dica*: Use a norma infinita).

2 Parte Prática

Sistemas

Métodos Diretos

1) Escreva um programa que calcule a decomposição LU de uma matriz e em seguida calcule o determinante da mesma. Verifique seu código comparando o resultado obtido usando funções fornecidas por bibliotecas *Python* para as seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

2) Com as decomposições obtidas no exercício anterior, escreva um código que resolva os seguintes sistemas lineares:

a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ em que $b = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix}$

b) $BX = Z$ em que $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3) Escreva um código para resolver o sistema dado usando pivoteamento parcial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Resolva o mesmo sistema com o código elaborado no exercício 2 (sem pivoteamento parcial) e compare os resultados.

4) Usando o código já elaborado para decomposição LU com pivoteamento, escreva outro código para inverter uma matriz qualquer. Aplique seu código para calcular a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 & 1.0 \\ -0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.6 & -1.0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Métodos Iterativos

1) Escreva dois códigos: um que resolva um sistema linear qualquer utilizando o método de Gauss-Jacobi e outro utilizando Gauss-Seidel. Escolha algum dos sistemas da seção anterior e resolva-o utilizando os dois métodos, compare os resultados obtidos com o método direto.

2) Dada a matriz esparsa

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

resolva o sistema $Ax = b$, em que $\mathbf{b} = [10, -8, 10, 10, -8, 10]^T$ utilizando algum dos códigos elaborados no exercício anterior. Em seguida, resolva este mesmo sistema utilizando algum código com decomposição LU. Qual código foi mais rápido? Compare os resultados obtidos.