

효율적 포트폴리오 곡선의 도출과 재해석

김덕형*

< 요약 >

라그랑즈 승수의 적분을 통해 얻는 효율적 포트폴리오 곡선의 형태는 기대수익률 E_P 에 따라

첫째, 위험증권으로만 이루어진 포트폴리오 P 에 대해,

$$\sigma_P = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{|H|}} \sqrt{|C_{N+1,N+1}|E_P^2 + 2E_P|C_{N+1,N+2}| + |C_{N+2,N+2}|}$$

둘째, 포트폴리오 P 와 무위험자산을 보유한 포트폴리오 B 에 대해

$$\sigma_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{|H|}}{\sqrt{|B_H|}} (E_B - \mu_f) \quad \text{또는} \quad \sigma_B = \frac{\sigma_T}{E_T - \mu_f} (E_B - \mu_f)$$

또한 효율적 포트폴리오 P 와 T 의 공분산 함수는,

$$\sigma_{P,T} = \frac{1}{2} \frac{1}{|H|} (E_P E_T |C_{N+1,N+1}| + (E_P + E_T) |C_{N+1,N+2}| + |C_{N+2,N+2}|)$$

을 얻을 수 있다. 이에 따라 시장조건이 일정하다면 두 포트폴리오 간의 공분산은 기대수익률에 일정함을 이론적으로 확인할 수 있다. 그리고 단순표기방식의 포트폴리오 형태를 통해서 상관계수가 1인 두 자산은 사실상 독립된 자산이 아닌 동일한 하나의 자산으로 간주해야 한다는 헤리의 역설을 발견하였다.

따라서 시장 또는 산업 전체에 대한 투자행위 분석은 상관관계가 극히 밀접한 자산들끼리 묶어서 그 중 대표적인 자산만을 선택하여 분석할 수 있으므로 필요한 정보량의 수를 절약할 수 있게 되었다.

* 김덕형, 건국대학교 경제학과 2005. 2 석사졸업

I. 효율적 포트폴리오 곡선도출의 새로운 접근방법

1. 위험자산으로만 이루어진 경우

효율적 포트폴리오 곡선(Efficient frontier)을 구하는 방법은 여러가지가 있겠으나¹⁾ 라그랑즈 승수의 적분 및 크래머 법칙을 통해서 직접적으로 구해보기로 한다. 라그랑즈 승수의 적분을 위해서는 투자비율의 새로운 정의가 선행되어야 한다.

1). 라그랑즈 승수의 적분을 통한 도출

식(1)과 같이 N 개의 자산에 총 투자금액 I_p 을 각각 I_i 만큼 나누어 투자하여 구성하는 포트폴리오 P 가 있다고 하자. 포트폴리오 전체에 대한 총 투자금액 I_p 이 $I_p = I_p^0, \dots, I_p^t$ 로 변화해도 개별자산에 대한 투자비율의 합은 항상 1이 된다. 개별투자금액을 총 투자금액으로 나누는 식(2)를 통해 투자비율(x_i)이 정의되기 때문이다.

$$I_p = I_1 + \dots + I_N, \quad \text{식(1)}$$

$$1 = \frac{I_1}{I_p} + \dots + \frac{I_N}{I_p} = \sum_i^N x_i \quad \text{식(2)}$$

그러나 식 (1)을 특정기준점의 총 투자금액 가령, I_p^0 으로 나누면,

$$\frac{I_p}{I_p^0} = \frac{I_1}{I_p^0} + \dots + \frac{I_N}{I_p^0} = \sum_i^N x_i = m \quad \text{식(3)}$$

이 되어 투자비율의 합은 m 이 되며 이때 m 의 의미는 기준시점의 총 투자금액 I_p^0 보다 현재의 총 투자금액 I_p 가 몇 배 변화했는가 그 배수임 나타내고 있다.

식(3)에 의해 정의된 투자비율을 더미투자비율²⁾이라고 할 때 더미

1) 구분열 외1, 『현대재무론』, 비봉출판사, pp218

2) 오직 $m = 1$ 인 경우에만 더미투자비율이 기존이론의 투자비율과 그 값이 일치하므로

투자비율로 계산된 각 더미 기대수익률에서 얻을 수 있는 최소분산의 경로는 다음에서 찾을 수 있으며 이를 더미 라그랑즈 함수라고 가칭(假稱)하기로 한다.

$$L = \sigma_P^2 + \lambda_E(E_P - \sum_{i=1}^N x_i \mu_i) + \lambda_m(m - \sum_{i=1}^N x_i) \quad \text{식(4)}$$

λ_E , λ_m , N 개의 x_i 등으로 식(4)를 미분하여 일계조건을 구한 후 행렬로 표기하면 식(5)와 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & \dots & 2\sigma_{1N} & -\mu_1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2\sigma_{N1} & \dots & 2\sigma_{NN} & -\mu_N & -1 \\ \mu_1 & \dots & \mu_N & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_N \\ \lambda_E \\ \lambda_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ E_P \\ m \end{bmatrix} \quad \text{식(5)}$$

위 행렬들을 차례대로 \overline{H} , X , d 로 표기하면 식(6)을 얻는다.

$$\overline{H} \cdot X = d \quad \text{식(6)}$$

$|C_{i,j}|$ 을 \overline{H} 의 i 행 j 열의 원소에서 얻는 여인자 행렬식⁴⁾이라고 정의한 후 크래머 법칙을 이용하여 최적해를 구해보면,

$$x_i = \frac{|\overline{H}_i|}{|\overline{H}|} \quad \text{5)} = \frac{1}{|\overline{H}|} (|C_{N+1,i}| E_P^+ |C_{N+2,i}| m), \quad \text{식(7)}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{E_P} &= \frac{dL}{dE_P} = \frac{d\sigma_P^2}{dE_P} \\ &= \frac{|\overline{H}_{N+1}|}{|\overline{H}|} = \frac{1}{|\overline{H}|} (|C_{N+1,N+1}| E_P^+ |C_{N+2,N+1}| m) \end{aligned} \quad \text{식(8)}$$

‘더미(dummy)’란 표현을 임의적으로 붙이기로 한다.

3) \overline{H} 의 bar ' - '은, 제약 행과 열이 존재하는 유테(有테, 테를 두른) 헤시안 행렬(borded Hessian determinant)임을 나타내기 위함이다.

\overline{H} 행렬은 $(N+2) \times (N+2)$ 정방행렬이다.

4) A.C. Chiang, 『경제수학입문』, 진영사, pp 137, $|C_{i,j}|$ 은 부호가 포함된 개념이다.

5) $|\overline{H}_i|$ 은 크래머의 법칙에 따라 $|\overline{H}|$ 의 i 열에 식(6)의 열벡터 d 를 대입하여 얻은 행렬식을 의미한다. 우하첨자에 i 놓는 것으로 나타내기로 한다.

$$\lambda_m = \frac{|\overline{H_{N+2}}|}{|\overline{H}|} = \frac{1}{|\overline{H}|} (|C_{N+1, N+2}| E_P + |C_{N+2, N+2}| m) \quad (9)$$

기존의 투자비율로 효율적 포트폴리오 곡선을 구하는 라그랑주 함수식에서는 투자비율의 합이 항상 1이 되어 상수 1에 ‘대하여’ 적분⁷⁾ 즉, 두 번째 승수의 적분은 정의될 수 없다. 그러나 더미 투자비율을 사용한 라그랑주 함수 식(4)에서는 두 번째 제약인 더미 투자비율의 합이 상수 1이 아닌 변수 m 이 되어 적분이 가능하게 되며 따라서 두 제약변수 E_P, m 의 적분을 통해 σ_P^2 의 형태를 구할 수 있게 되었다. 제약변수의 변화에 따른 더미모형의 최적경로 σ_P^2 는 $\sigma_P^2 = \sigma_P^2(E_P, m)$ 의 형태가 되는데 특히 $m = 1$ 인 경우 $\sigma_P^2 = \sigma_P^2(E_P, 1)$ 또는 $\sigma_P^2 = \sigma_P^2(E_P)$ 이 되어 효율적 포트폴리오 곡선 그 자체가 됨을 알 수 있다. 결국 더미투자비율의 사용은 두 번째 라그랑주 승수의 적분을 가능케 하기 위함이었음을 알 수 있다.

각 제약변수를 적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int \lambda_E dE_P &= \int \left(\frac{d\sigma_P^2}{dE_P} \right) dE_P = \int d\sigma_P^2 \\ &= \int \frac{1}{|\overline{H}|} (|C_{N+1, N+1}| E_P + |C_{N+2, N+1}| m) dE_P \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{|\overline{H}|} (|C_{N+1, N+1}| E_P^2 + 2 |C_{N+2, N+1}| E_P m) + A \quad (10) \end{aligned}$$

같은 방법으로

$$\int \lambda_m dm = \frac{1}{2} \frac{1}{|\overline{H}|} (2 |C_{N+1, N+2}| E_P m + |C_{N+2, N+2}| m^2) + B \quad (11)$$

6) 개별 자산들의 공분산의 성질에 따라 $|C_{N+2, N+1}| = |C_{N+1, N+2}|$ 이 성립한다.

7) 상수를 미분함은 $\int 1 dx = x + C$ (C : 적분상수)이 되나 상수에 대하여 미분함은 $\int A d1$ 이 되어 그 어떤 A 에 대하여도 $d1$ 은 성립하지 않는다. 1은 상수이지 변수가 아니기 때문에 1의 미분값(d)은 정의가 되지 않는 것이다.

상수 A, B를 감안하여 정리하면⁸⁾,

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{|H|} (|C_{N+1,N+1}| E_P^2 + 2|C_{N+2,N+1}| E_P m + |C_{N+2,N+2}| m^2) \quad \text{식(12)}$$

식(12)에서 $m = 1$ 로 놓으면 효율적 포트폴리오 곡선을 σ_P^2 E_P 의 공간에서 식(13)을 통하여 그릴 수 있다.

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{|H|} (|C_{N+1,N+1}| E_P^2 + 2|C_{N+2,N+1}| E_P + |C_{N+2,N+2}|) \quad \text{식(13)}$$

식(13)는 여러 가지 형태로 달리 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{|H|} [|C_{N+1,N+1}| (E_P + \frac{|C_{N+2,N+1}|}{|C_{N+1,N+1}|})^2 - \frac{(|C_{N+2,N+1}|)^2}{|C_{N+1,N+1}|} + |C_{N+2,N+2}|] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{|H|} |C_{N+1,N+1}| (E_P + \frac{|C_{N+2,N+1}|}{|C_{N+1,N+1}|})^2 + V^O \end{aligned} \quad \text{식(14)}$$

$$\text{단, } V^O = \frac{1}{2} \frac{1}{|H|} [|C_{N+2,N+2}| - \frac{(|C_{N+2,N+1}|)^2}{|C_{N+1,N+1}|}]$$

즉, $E_P = E^O = -\frac{|C_{N+2,N+1}|}{|C_{N+1,N+1}|}$ 일 때 효율적 포트폴리오 곡선상의 최소의 분산 V^O 을 달성할 수 있다는 것이다.

또한 식(13)은 식(15)로 바꿀 수도 있다.

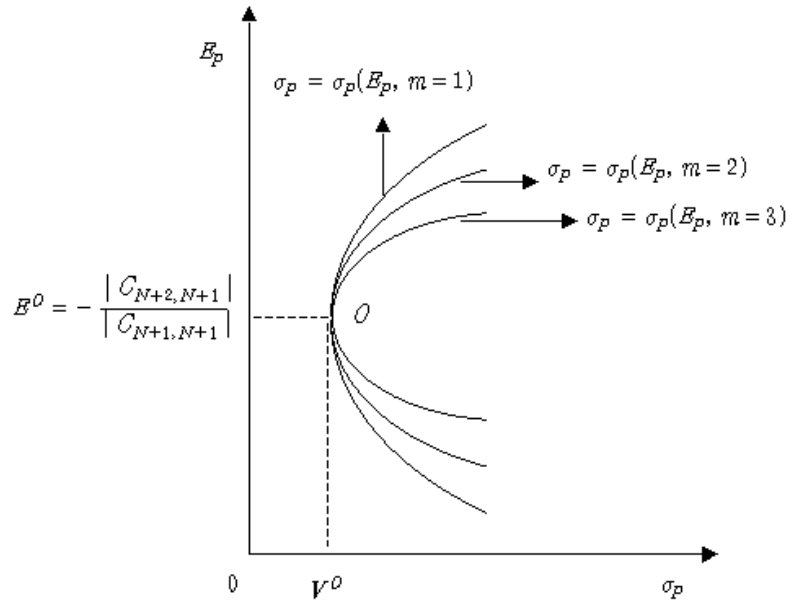
$$\sigma_P^2 = \frac{1}{2} \lambda_E (E_P + \frac{\lambda_m}{\lambda_E}) \quad \text{식(15)}$$

σ_P 와 E_P 의 공간에서 다양한 m 에 따른 최적경로는 식(16)을 이용하여 그리면 <그림 1>과 같다.

$$\sigma_P = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{|H|}} \sqrt{|C_{N+1,N+1}| E_P^2 + 2|C_{N+2,N+1}| E_P + |C_{N+2,N+2}|} \quad \text{식(16)}$$

8) 적분상수 A, B 속에는 각각 m 과 E_P 의 함수꼴이며 $E_P = m = 0$ 일 때 각각 수(number)로 된 상수항은 존재하지 않음을 이용하면 최적의 σ_P^2 값을 얻을 수 있다.

<그림 1> 다양한 m 값에 따른 최적경로 $\sigma_P(E_P)$



전술한 바와 같이 $m = 1$ 인 경우의 최적경로 $\sigma_P(E_P)$ 가 효율적 포트폴리오 곡선이 된다. 기대수익률 E^O 에서 각 투자비율 $^O x_i$ 은, $^O x_i = (\sum_j C_{ij}^O) / (\sum_i \sum_j C_{ij}^O)$ 로서 더미 최적화모형에서 m 에 대하여 독립적인 값을 가지므로 m 의 변화⁹⁾에 대해서도 항상 일정한 좌표 O 의 위치값을 갖는 것으로 그릴 수 있다.

2). 크래머 법칙을 통한 도출

N 개의 위험자산으로 구성된 효율적 포트폴리오 곡선상의 포트폴리오 P 에서 자산 i 의 투자비율은 다음으로 표기할 수 있다.

9) m 값의 변화로 포트폴리오의 표준편차, 기대수익률은 각 m 배수만큼 증가한다. 곡선 자체의 변화가 선형배수라는 것이지 기대수익률에 의한 최소분산의 궤적이 선형이라는 것은 아니다. 그러나 개별자산의 공분산들은 m 에 대해 독립적이다.

$$^Px_i = \frac{1}{|\overline{H}|}(|C_{N+1,i}|E_P + |C_{N+2,i}|) \quad \text{식(17)}$$

포트폴리오의 분산 정의에 식(17)을 대입하면, σ_P^2 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= \sum_i^N \sum_j^N {}^Px_i {}^Px_j \sigma_{ij} = \\ &= \sum_i^N \sum_j^N \frac{1}{(|\overline{H}|)^2} (|C_{N+1,i}|E_P + |C_{N+2,i}|)(|C_{N+1,j}|E_P + |C_{N+2,j}|) \quad \text{식(18)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(|\overline{H}|)^2} \cdot E_P^2 \cdot \sum_i^N \sum_j^N (|C_{N+1,i}| |C_{N+1,j}| \sigma_{ij}) \quad \text{식(19)}$$

$$+ \frac{1}{(|\overline{H}|)^2} \cdot E_P \cdot \sum_i^N \sum_j^N (|C_{N+1,i}| |C_{N+2,j}| \sigma_{ij}) \quad \text{식(20)}$$

$$+ \frac{1}{(|\overline{H}|)^2} \cdot E_P \cdot \sum_i^N \sum_j^N (|C_{N+2,i}| |C_{N+1,j}| \sigma_{ij}) \quad \text{식(21)}$$

$$+ \frac{1}{(|\overline{H}|)^2} \cdot 1 \cdot \sum_i^N \sum_j^N (|C_{N+2,i}| |C_{N+2,j}| \sigma_{ij}) \quad \text{식(22)}$$

식(19)~식(22)의 맨 우측항인 $\sum_i^N \sum_j^N (\cdot)$ 등을 행렬로 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} &\sum_i^N \sum_j^N (|C_{N+1,i}| |C_{N+1,j}| \sigma_{ij}) \\ &= \begin{bmatrix} |C_{N+1,1}| & \dots & |C_{N+1,N}| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{N1} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |C_{N+1,1}| \\ \dots \\ |C_{N+1,N}| \end{bmatrix}, \quad \text{식(23)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_i^N \sum_j^N (|C_{N+1,i}| |C_{N+2,j}| \sigma_{ij}) \\ &= \begin{bmatrix} |C_{N+1,1}| & \dots & |C_{N+1,N}| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{N1} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |C_{N+2,1}| \\ \dots \\ |C_{N+2,N}| \end{bmatrix}, \quad \text{식(24)} \end{aligned}$$

$$\sum_i^N \sum_j^N (|C_{N+2,i}||C_{N+1,j}|\sigma_{ij})$$

$$= \left[|C_{N+2,1}| \dots |C_{N+2,N}| \right] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{N1} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |C_{N+1,1}| \\ \dots \\ |C_{N+1,N}| \end{bmatrix}, \text{ 식(25)}$$

$$\sum_i^N \sum_j^N (|C_{N+2,i}||C_{N+2,j}|\sigma_{ij})$$

$$= \left[|C_{N+2,1}| \dots |C_{N+2,N}| \right] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{N1} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |C_{N+2,1}| \\ \dots \\ |C_{N+2,N}| \end{bmatrix}, \text{ 식(26)}$$

우선 식 (5)의 행렬 \overline{H} 의 행렬식 전개를 살펴보자.

\overline{H} 을 $N+1$ 행에서 그 원소에 대하여 전개하면 정의상 행렬식 $|\overline{H}|$ 을 얻는다. 이를 수식으로 나타내면,

$$|\overline{H}| = \sum_j^N \mu_j |C_{N+1,j}| + 0 \cdot |C_{N+1,N+1}| + 0 \cdot |C_{N+1,N+2}|^{10)}$$

또는 $N+1$ 열에서 전개해도 유사한 형태를 얻는다.

$$|\overline{H}| = \sum_i^N \mu_i |C_{i,N+1}| + 0 \cdot |C_{N+1,N+1}| + 0 \cdot |C_{N+2,N+1}|$$

이를 간단히 줄이면,

$$|\overline{H}| = \sum_j^N \mu_j |C_{N+1,j}| \text{ 또는 } |\overline{H}| = \sum_i^N \mu_i |C_{i,N+1}| \quad \text{식(27)}$$

또한 $|\overline{H}|$ 의 $N+2$ 행의 원소들 $(1, \dots, 1, 0, 0)$ 을 $|\overline{H}|$ 의 $N+1$ 행에 대입한 후 전개하면 그 행렬식 값은 0이 된다.

10) i 행에서의 전개는 i 행의 $N+2$ 개의 원소들에 대하여 전개하므로 j 에 대하여 \sum_j^{N+2} 로,

j 열에서의 전개는 반대로 \sum_i^{N+2} 가 된다. $|\overline{H}|$ 행과 열의 수는 각 $N+2$ 이다.

$$0 = \sum_j^N 1 \cdot |C_{N+1,j}| + 0 \cdot |C_{N+1,N+1}| + 0 \cdot |C_{N+2,N+1}|,$$

$$\text{따라서 } \sum_j^N |C_{N+1,j}| = 0 \quad \text{식(28)}$$

또한 $|\overline{H}|$ 의 $i(i < N+1)$ 행의 원소들 $(2\sigma_{i1}, \dots, 2\sigma_{iN}, -\mu_i, -1)$ 을 $|\overline{H}|$ 의 $N+1, N+2$ 행에 각각 대입한 후 열에 대하여 전개하면 그 값이 0이 되는 행렬식의 성질에 따라 식(29), 식(30)가 도출된다.

$$0 = \sum_j^N 2\sigma_{ij} |C_{N+1,j}| - \mu_i |C_{N+1,N+1}| - 1 \cdot |C_{N+1,N+2}| \quad \text{11) } \text{식(29)}$$

$$0 = \sum_j^N 2\sigma_{ij} |C_{N+2,j}| - \mu_i |C_{N+2,N+1}| - 1 \cdot |C_{N+2,N+2}| \quad \text{식(30)}$$

다시 정리하면 각 식(31)과 식(32)를 얻는다.

$$\sum_j^N \sigma_{ij} |C_{N+1,j}| = \frac{1}{2} (\mu_i |C_{N+1,N+1}| + |C_{N+1,N+2}|) = \frac{1}{2} A_i \quad \text{식(31)}$$

$$\sum_j^N \sigma_{ij} |C_{N+2,j}| = \frac{1}{2} (\mu_i |C_{N+2,N+1}| + |C_{N+2,N+2}|) = \frac{1}{2} B_i \quad \text{식(32)}$$

식(23)의 우변의 첫째와 둘째 항의 전개를 살펴보자.

$$\left[|C_{N+1,1}| \dots |C_{N+1,N}| \right] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{N1} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [A_1 \dots A_N] \quad \text{식(33)}$$

식(33)를 식(23)에 대입하면,

$$\begin{aligned} & \sum_i^N \sum_j^N (|C_{N+1,i}| |C_{N+1,j}| \sigma_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} [A_1 \dots A_N] \begin{bmatrix} |C_{N+1,1}| \\ \dots \\ |C_{N+1,N}| \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_i^N A_i |C_{N+1,i}| \end{aligned}$$

11) j 열에 대하여 전개하는 것이므로 \sum 의 하첨자는 i 가 아닌 j 이 된다.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\sum_i^N \mu_i |C_{N+1, N+1}| |C_{N+1, i}| + \sum_i^N |C_{N+1, N+2}| |C_{N+1, i}| \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(|C_{N+1, N+1}| \sum_i^N \mu_i |C_{N+1, i}| + |C_{N+1, N+2}| \sum_i^N |C_{N+1, i}| \right) \quad \text{식(34)}
\end{aligned}$$

식(27) 또는 식(28), 그리고 식(31) 또는 식(32)를 이용하면 식(34) 또는 식(23)은 다음과 같이 간단히 줄일 수 있다.

$$\sum_i^N \sum_j^N (|C_{N+1, i}| |C_{N+1, j}| \sigma_{ij}) = \frac{1}{2} |C_{N+1, N+1}| \cdot |\overline{H}| \quad \text{식(35)}$$

같은 방법으로 식(24), 식(25), 식(26)을 정리해 보자.

$$\begin{aligned}
&\text{식(24)의 } \sum_i^N \sum_j^N (|C_{N+1, i}| |C_{N+2, j}| \sigma_{ij}) \\
&= \frac{1}{2} [A_1 \dots A_N] \begin{bmatrix} |C_{N+2, 1}| \\ \dots \\ |C_{N+2, N}| \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_i^N A_i |C_{N+2, i}| = \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_i^N \mu_i |C_{N+1, N+1}| |C_{N+2, i}| + \sum_i^N |C_{N+1, N+2}| |C_{N+2, i}| \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(|C_{N+1, N+1}| \sum_i^N \mu_i |C_{N+2, i}| + |C_{N+1, N+2}| \sum_i^N |C_{N+2, i}| \right) \\
&= \frac{1}{2} |C_{N+1, N+2}| |\overline{H}| \quad \text{식(36)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{식(25)의 } \sum_i^N \sum_j^N (|C_{N+2, i}| |C_{N+1, j}| \sigma_{ij}) \\
&= \frac{1}{2} [B_1 \dots B_N] \begin{bmatrix} |C_{N+1, 1}| \\ \dots \\ |C_{N+1, N}| \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \left(|C_{N+2, N+1}| \sum_i^N \mu_i |C_{N+1, i}| + |C_{N+2, N+2}| \sum_i^N |C_{N+1, i}| \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} | C_{N+2, N+1} | | \overline{H} | \quad \text{식(37)}$$

$$\begin{aligned} \text{식(26)의 } & \sum_i^N \sum_j^N (| C_{N+2, i} | | C_{N+2, j} | \sigma_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} [B_1 \dots B_N] \begin{bmatrix} | C_{N+2, 1} | \\ \dots \\ | C_{N+2, N} | \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (| C_{N+2, N+1} | \sum_i^N \mu_i | C_{N+2, i} | + | C_{N+2, N+2} | \sum_i^N | C_{N+2, i} |) \\ &= \frac{1}{2} | C_{N+2, N+2} | | \overline{H} | \quad \text{식(38)} \end{aligned}$$

식(35)~식(38)을 각각 식(19)~식(21)에 대입하면 정리하면,

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= \frac{1}{(|\overline{H}|)^2} (\frac{1}{2} \cdot E_P^2 \cdot | C_{N+1, N+1} | \cdot | \overline{H} |) \\ &+ \frac{1}{(|\overline{H}|)^2} (E_P \cdot \frac{1}{2} \cdot | C_{N+1, N+2} | \cdot | \overline{H} |) \\ &+ \frac{1}{(|\overline{H}|)^2} (E_P \cdot \frac{1}{2} \cdot | C_{N+2, N+1} | \cdot | \overline{H} |) \\ &+ \frac{1}{(|\overline{H}|)^2} (\frac{1}{2} \cdot | C_{N+2, N+2} | \cdot | \overline{H} |) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{|\overline{H}|} (E_P^2 | C_{N+1, N+1} | + 2 E_P | C_{N+2, N+1} | + | C_{N+2, N+2} |) \end{aligned}$$

이 됨을 알 수 있다. 이는 식(13)과 정확히 일치함을 알 수 있다.

3) 기존의 분석 및 선행연구와 비교

Roll¹²⁾ 에 의하면 위험포트폴리오 형태를 다음과 같다.

12) 구본열 외 1, 『현대재무론』 pp218 3판 비봉출판사 2001. 7.

Richard Roll, " A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests; Part 1. On Past and Potential Testability of The Theory", Journal of Financial Economics, 4, March 1977.

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{D}(CE_P^2 - 2BE_P + A) \quad \text{식(39)}$$

이때 각 행렬식들은 다음과 같이 정의하고 있다.

$D = CA - B^2$, $|V|$ 는 V 의 행렬식이라 정의할 때,

$$\begin{aligned} V &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{N1} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{|V|} [1 \dots 1] \begin{bmatrix} |C_{11}^O| & \dots & |C_{N1}^O| \\ \dots & \dots & \dots \\ |C_{1N}^O| & \dots & |C_{NN}^O| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}, \\ B &= \frac{1}{|V|} [1 \dots 1] \begin{bmatrix} |C_{11}^O| & \dots & |C_{N1}^O| \\ \dots & \dots & \dots \\ |C_{1N}^O| & \dots & |C_{NN}^O| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \dots \\ \mu_N \end{bmatrix}, \\ A &= \frac{1}{|V|} [\mu_1 \dots \mu_N] \begin{bmatrix} |C_{11}^O| & \dots & |C_{N1}^O| \\ \dots & \dots & \dots \\ |C_{1N}^O| & \dots & |C_{NN}^O| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \dots \\ \mu_N \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad \text{식(40)}$$

식(13)을 이루는 각 행렬식들은 A, B, C, D 의 일정한 비례적 값임을 확인할 수 있다. 증명을 위해 우선, $\Omega_{11}, \Omega_{21}, \Omega_{22}, |\overline{H^O}|$ 등을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1N} & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{N1} & \dots & \sigma_{NN} & -1 \\ 1 & \dots & 1 & \dots \end{vmatrix},^{14)} \quad \Omega_{21} = (-1)^{(2+1)} \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1N} & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{N1} & \dots & \sigma_{NN} & -1 \\ \mu_1 & \dots & \mu_N & \dots \end{vmatrix}, \\ \Omega_{22} &= (-1)^{(2+2)} \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1N} & -\mu_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{N1} & \dots & \sigma_{NN} & -\mu_N \\ \mu_1 & \dots & \mu_N & \dots \end{vmatrix}, \quad |\overline{H^O}| = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1N} & -\mu_1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{N1} & \dots & \sigma_{NN} & -\mu_N & -1 \\ \mu_1 & \dots & \mu_N & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad \text{식(41)}$$

행렬식의 성질을 이용하면 식(42)의 관계를 얻을 수 있으며

13) 각 $|C_{ij}^O|$ 은 공분산 행렬 V 를 i 행과 j 열에서 전개한 여인자 행렬식으로서, $|\overline{H}|$ 의 i 행과 j 열에서 전개한 여인자 행렬식 $|C_{ij}|$ 와 구분하기 위해 우상첨자 'o'를 두었다. $|C_{ij}|$ 은 제약행과 열이 포함되며 각 공분산에 2가 곱해진 행렬식이다.

14) $|C_{N+1, N+1}|$ 와 비교해 보면 각 공분산들에 곱하기 2가 제거되었음을 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} |C_{N+1, N+1}| &= 2^{N-1} \Omega_{11}, & |C_{N+2, N+1}| &= 2^{N-1} \Omega_{21} \\ |C_{N+2, N+2}| &= 2^{N-1} \Omega_{22}, & |\overline{{}_N H}| &= 2^{N-2} |\overline{H^O}| \quad 15) \end{aligned} \quad \text{식(42)}$$

이에 따라 식(13)은 식(43)로 바꾸어 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{2^{N-2}} \frac{1}{|\overline{H^O}|} 2^{N-1} (\Omega_{11} E_P^2 + 2\Omega_{21} E_P + \Omega_{22}) \\ &= \frac{1}{|\overline{H^O}|} (\Omega_{11} E_P^2 + 2\Omega_{21} E_P + \Omega_{22}) \quad \text{또는,} \\ \sigma_P^2 &= \frac{1}{|\overline{H^O}|} \left[\Omega_{11} (E_P - \frac{\Omega_{21}}{\Omega_{11}})^2 - \frac{\Omega_{21}^2}{\Omega_{11}} + \Omega_{22} \right] \end{aligned} \quad \text{식(43)}$$

또한 $\Omega_{11}, \Omega_{21}, \Omega_{22}$ 다음의 관계를 가지므로,

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= [1 \dots 1] \begin{bmatrix} |C_{11}^O| \dots |C_{N1}^O| \\ \dots \dots \dots \\ |C_{1N}^O| \dots |C_{NN}^O| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} 16) = |V| C, \\ \Omega_{21} &= -|V| B, \quad \Omega_{22} = |V| A, \quad (\Omega_{11} \Omega_{22} - \Omega_{21}^2) = (|V|)^2 D \end{aligned} \quad \text{식(44)}$$

$$\text{그렇다면, } C = \frac{1}{|V|} \Omega_{11}, \text{ 같은 방법으로, } B = -\frac{1}{|V|} \Omega_{21},$$

$$A = \frac{1}{|V|} \Omega_{22}, \quad D = \frac{1}{(|V|)^2} (\Omega_{11} \Omega_{22} - \Omega_{21}^2) \quad \text{식(45)}$$

식(45)을 이용하면 식(39)를 다시 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= \frac{(|V|)^2}{\Omega_{11} \Omega_{22} - \Omega_{12}^2} \frac{1}{|V|} (\Omega_{11} E_P^2 + 2\Omega_{21} E_P + \Omega_{22}) \\ &= \frac{|V|}{\Omega_{11} \Omega_{22} - \Omega_{12}^2} (\Omega_{11} E_P^2 + 2\Omega_{21} E_P + \Omega_{22}) \end{aligned} \quad \text{식(46)}$$

식(46)는 식(43)과 동일한 분산을 나타내므로

$$|\overline{H^O}| = \frac{\Omega_{11} \Omega_{22} - \Omega_{12}^2}{|V|}, \quad |\overline{H}| = 2^{N-2} \cdot \frac{\Omega_{11} \Omega_{22} - \Omega_{12}^2}{|V|} \quad \text{식(47)}$$

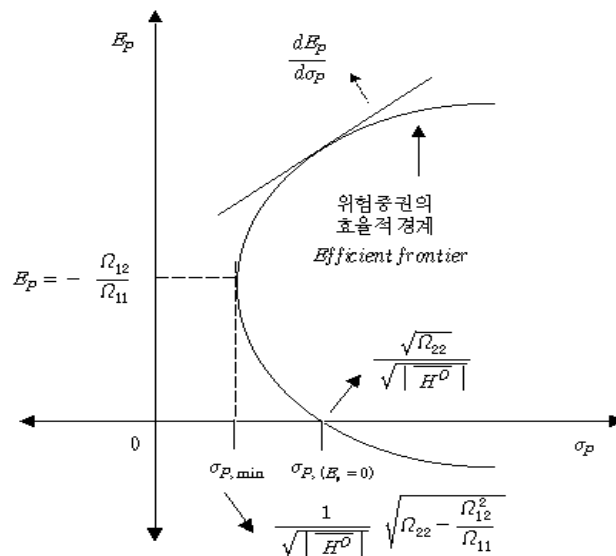
15) 제약 행과 열이 2개씩임을 유의할 것.

16) 식(41)의 각 행렬식 $\Omega_{11}, \Omega_{21}, \Omega_{22}$ 을 제약행과 제약열의 원소들에 대하여 전개한 후 다시 행렬의 곱으로 정리하면 구할 수 있다.

효율적 포트폴리오 곡선의 형태를 나타내는 Roll의 식(39)가 본 연구의 식(13)과 다른 점은, 식(39)를 사용하는 경우에는 만일 $|V|$ 값이 0이 된다면 σ_P^2 의 분석은 시작조차 할 수 없다는 것이다.

식(43)으로 효율적 포트폴리오 곡선을 그리면 <그림 2>과 같다.

<그림 2> 효율적 포트폴리오 곡선의 형태



2. 위험자산 및 무위험자산이 포함된 경우

1) 단순 및 복합표현 방식

효율적 포트폴리오 곡선상의 두 포트폴리오 T, f 의 각 투자비율들을 선형결합한 투자비율들로 또 하나의 포트폴리오 B 를 얻을 수 있는데 이것 역시 효율적 포트폴리오 선상에 존재한다고 할 수 있다.¹⁷⁾ 즉, 포트폴리오 B 를 여러 개의 포트폴리오로 이루어진 전체

17) 구분열 『현대재무론』, 비봉출판사, pp232

포트폴리오로서 표현(복합표현방식)하거나, 개별자산을 직접적으로 일일이 나열하여 B 를 표현(단순표현방식)할 수 있는 것이다.

이는 포트폴리오 B 가 N 개의 위험자산과 무위험자산 1개 등 총 $N + 1$ 개로 이루어졌다면, 제약 하의 B 의 최소분산을 얻기 위해 다음 두 종류의 최적화모형을 사용할 수 있다는 것이다.

우선 무위험자산의 수익률 및 분산은 각 μ_f, σ_f 그에 따른 최적 포트폴리오 T 로 표시하자.¹⁸⁾

A. 복합표현방식의 효율적 포트폴리오 최적화 모형

$$\begin{aligned} \text{Minimise } \sigma_B^2 &^{19)} = {}^B x_T {}^B x_T \sigma_T^2 + 2 {}^B x_T {}^B x_f \sigma_{Tf} + {}^B x_f {}^B x_f \sigma_f^2 \quad ^{20)} \\ \text{s.t. } E_B &= {}^B x_T E_T + {}^B x_f \mu_f, \quad 1 = {}^B x_T + {}^B x_f, \end{aligned} \quad \text{식(48)}$$

B-1. 단순표현방식의 효율적 포트폴리오 최적화 모형

$$\begin{aligned} \text{Minimise } \sigma_B^2 &= \sum_i^{N+1} \sum_j^{N+1} x_i x_j \sigma_{ij}, \\ \text{s.t. } E_B &= \sum_i^{N+1} x_i \mu_i, \quad 1 = \sum_i^{N+1} x_i \end{aligned} \quad \text{식(49)}$$

단순표현의 경우 표기의 편의를 위해 무위험자산의 항을 따로 꺼집어 내어 놓으면,

B-2. 단순표현방식의 효율적 포트폴리오 최적화 모형²¹⁾

$$\text{Minimise } \sigma_B^2 = \sum_i^{N+1} \sum_j^{N+1} x_i x_j \sigma_{ij} \quad \text{식(50)}$$

18) μ_f 는 무위험자산의 기대수익률, σ_f 는 무위험자산의 분산 즉, 정의상 0을 의미한다.

19) 특별히 분산의 하첨자로 B 를 둔 것은 포트폴리오에 무위험자산이 포함되었음을 알리는 의도에서이다.

20) ${}^B x_P$ 를 포트폴리오 B 내에서 차지하는 포트폴리오 P 의 투자비율로, ${}^B x_i$ 를 포트폴리오 B 내에서 증권 i 의 차지하는 투자비율로, σ_f 를 '리스크 free'를 나타내는 무위험자산의 표준편차로 등으로 읽기로 하자.

21) 무위험자산의 경우 위험자산과 구분하기 위해 하첨자에 수(number)가 매겨지는 자산으로 표시하지 않기 위해서이다. 하첨자는 'risk free'를 의미하는 f 로 한다.

$$= x_f x_f \sigma_f^2 + \sum_{j=1}^N x_f x_j \sigma_{fj} + \sum_{i=1}^N x_i x_f \sigma_{if} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} \quad (22)$$

$$s.t. \quad E_B = x_f \mu_f + \sum_{i=1}^N x_i \mu_i, \quad 1 = x_f + \sum_{i=1}^N x_i$$

$$L = \sigma_B^2 + {}^B\lambda_E (E_B - x_f \mu_f - \sum_i x_i \mu_i) + {}^B\lambda_1 (1 - x_f - \sum_i x_i) \quad (23) \quad \text{식 (51)}$$

이제 단순 표현방식인 식(49), 식(50)에서, x_f , x_i , ${}^B\lambda_E$, ${}^B\lambda_1$ 에 대한 일계조건들의 행렬화는 식(52)가 되며,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\mu_f & -1 \\ 0 & 2\sigma_{11} & \dots & 2\sigma_{1N} & -\mu_1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 2\sigma_{N1} & \dots & 2\sigma_{NN} & -\mu_N & -1 \\ \mu_f & \mu_1 & \dots & \mu_N & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f \\ x_1 \\ \dots \\ x_N \\ {}^B\lambda_E \\ {}^B\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ E_B \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{식 (52)}$$

식(52)의 각 행렬들을 $\overline{{}^B H}$, ${}^B X$, ${}^B d$ 로 놓으면 식(53)를 얻는다.

$$\overline{{}^B H} \cdot {}^B X = {}^B d \quad (24) \quad \text{식 (53)}$$

$$|H| = \begin{vmatrix} 2\sigma_{11} & \dots & 2\sigma_{N1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 2\sigma_{N1} & \dots & 2\sigma_{NN} \end{vmatrix} \text{으로 정의할 때} \quad \text{식 (54)}$$

각 여인자 행렬식들은 다음의 값들을 갖는다.

$$|C_{N+1, N+1}| = \mu_f |H|^{(25)}, \quad |C_{N+2, N+1}| = -\mu_f |H|$$

22) 무위험자산의 성질로 인해 $\sigma_{ff} = \sigma_{fj} = \sigma_{if} = 0$ 이 된다.

23) 무위험자산이 포함된 경우이므로 B 를 ${}^B\lambda_E$, ${}^B\lambda_1$ 와 같이 각 라그랑주 승수의 좌상첨자로 붙이기로 하며, 효율적 포트폴리오 곡선은 특히 더미 라그랑주 함수에서 $m = 1$ 인 경우임을 나타내기 위해 ${}^B\lambda_1$ 와 같이 우하첨자를 '1'로 바꾸었다.

24) $\overline{{}^B H}$ 은 식(5)와 식(6)의 행렬 \overline{H} 에 비해 각 원소가 0인 무위험자산의 공분산행과 열이 포함되었으며 제약의 원소 개수도 하나씩 늘었음을 알 수 있다. ${}^B X$, ${}^B d$ 제약의 원소 개수도 하나씩 늘었음을 알 수 있다. 이렇게 무위험자산이 추가로 포함된 경우를 구분하기 위해 행렬과 행렬식의 ' H '의 좌상첨자로 B 를 쓰기로 한다.

25) $|H|$ 는 무(無)제약 하 헤시안 행렬식과 비슷한 형태이므로 H 를 사용하고 있다. 그러나

$$|C_{N+2, N+1}| = -\mu_f |H|, \quad |C_{N+2, N+2}| = \mu_f^2 |H| \quad \text{식(55)}$$

이들을 식(13)에 이들을 대입하면 식 (56) 와 식(57)을 얻는다.

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{2} \frac{|H|}{|\overline{B_H}|} (E_B - \mu_f)^2 \quad \text{식(56)}$$

$$\sigma_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{|H|}}{\sqrt{|\overline{B_H}|}} (E_B - \mu_f) \quad \text{식(57)}$$

이는 단순표현방식인 최적화 모형 식(50)을 통하여 보면, 무위험 자산과 위험자산으로 이루어진 포트폴리오 B 는 기대수익률 E_B 에 대해서 선형임 보여준다.

한편 잘 알려진 대로 복합표현방식인 식(58)은, 포트폴리오 B 의 직선의 효율적 경계(Efficient frontier)를 나타내고 있다.

$$\sigma_B = \frac{\sigma_T}{E_T - \mu_f} (E_B - \mu_f) \quad \text{식(58)}$$

식(57)과 식(58)은 같은 효율적 포트폴리오 곡선(직선)이므로

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{|H|}}{\sqrt{|\overline{B_H}|}} = \frac{\sigma_T}{E_P - \mu_f} \quad \text{이 됨을 알 수 있다.} \quad \text{식(59)}$$

2) 최적포트폴리오의 조건

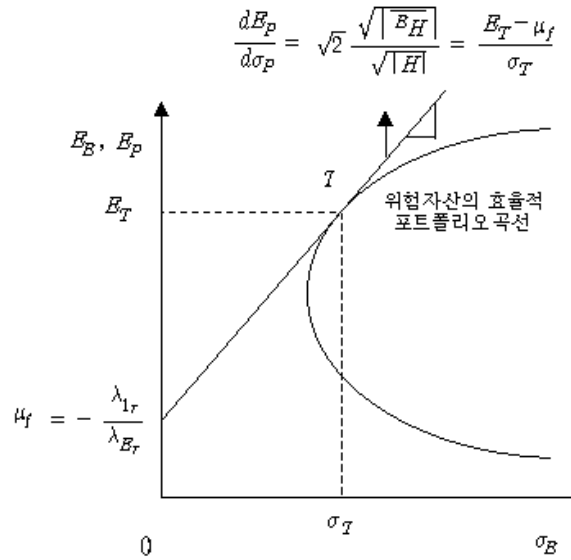
최적의 포트폴리오에 대한 그림은 <그림 3>과 같다.

위험자산으로만 이루어진 효율적 포트폴리오 곡선상에서 포트폴리오 T 에서의 접선의 기울기로서 식(60)과 같이 구해진다.

각 자산의 공분산들에는 2가 곱하여진 행렬식임을 유의해야 할 것이다.

26) σ_B 와 E_B 의 하첨자 B 는 무위험자산이 포함된 경우의 표준편차, 기대수익률을 나타내기 위한 것이다. B 는 대표적인 자산인 채권(Bond)를 나타내기 위함이다. 전술된 σ_P 와 E_P 는 임의의 포트폴리오 P 에 관한 개념이다. 따라서 앞으로 하첨자가 B 이면 채권이 포함된 경우이며, 하첨자가 P 이면 위험자산으로만 이루어진 포트폴리오와 관련된 개념으로 정리하면 될 것이다.

<그림 3> 최적포트폴리오 T



$G = (|C_{N+1,N+1}|E_T^2 + 2E_T|C_{N+2,N+1}| + |C_{N+2,N+1}|)$ 이라고 할 때,

$$\frac{d\sigma_P}{dE_P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{|H|}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{G}} 2(|C_{N+1,N+1}|E_T + |C_{N+2,N+1}|) \quad \text{식(60)}$$

또한 T 를 최적 포트폴리오가 되게 해주는 무위험자산과 T 로 이루어진 포트폴리오 B 의 효율적 포트폴리오 곡선상에서의 점 T 에서의 포트폴리오 B 의 식(59)가 보여주듯 $\frac{\sigma_T}{E_P - \mu_f}$ 가 될 것이다.

포트폴리오 T 가 최적이라면 식(59)와 식(60)은 일치할 것이다. σ_T 는 식(16)에 따라 식(61)과 같이 표기될 때,

$$\sigma_T = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{|H|}} \sqrt{|C_{N+1,N+1}|E_T^2 + 2|C_{N+1,N+2}|E_T + |C_{N+2,N+2}|} \quad \text{식(61)}$$

식(59)와 식(60)은 같은 값이어야 하므로 식(61)을 이용하면, T 가 최적포트폴리오이기 위해서는 무위험자산의 기대수익률 μ_f 은 식

(62)의 조건을 만족해야함을 알 수 있다.

$$\mu_f = - \frac{|C_{N+2, N+1}|E_p + |C_{N+2, +2}|}{|C_{N+1, N+1}|E_p + |C_{N+1, N+1}|} = - \frac{\lambda_{1_T}}{\lambda_{E_T}} \quad \text{식(62)}$$

식(62)는 임의의 포트폴리오 T 가 최적의 포트폴리오가 되기 위해서는 시장의 무위험자산의 기대수익률이 T 의 제로베타 포트폴리오의 기대수익률과 값이 같아야 함을 의미하기도 한다. 27)

3) 복합 및 단순표현 방식의 실제적 검증

(1) 단순포트폴리오 방식

간단한 자료의 계산으로 복합 및 단순 표현의 효율적 포트폴리오 선상의 분산값이 일치함을 살펴보자. 모형의 수리적 검증문제이므로 적은 수의 자료로도 충분할 것이다. 부록의 자료는 『현대투자론』의 제 6장의 부록의 자료를 그대로 인용하였다. 이를 통하여 공분산행렬 V 및 기대수익률²⁸⁾은 다음으로 정리할 수 있다.

$$V = \begin{bmatrix} 0.026.. & 0.003.. & 0.002.. & -0.002.. \\ 0.003.. & 0.020.. & 0.015.. & 0.023.. \\ 0.002.. & 0.015.. & 0.035.. & 0.019.. \\ -0.002.. & 0.023.. & 0.019.. & 0.062.. \end{bmatrix}^{29)}, \quad E(R) \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.041 \\ 0.018 \\ 0.034 \\ 0.006 \end{bmatrix} \quad \text{식(63)}$$

계산기를 이용하여 식(42)의 중요행렬식은 다음과 같이 구하였다.

$$|H| = \begin{vmatrix} 0.053 & 0.006 & 0.004 & -0.004 \\ 0.006 & 0.040 & 0.031 & 0.046 \\ 0.004 & 0.031 & 0.071 & 0.038 \\ -0.004 & 0.046 & 0.038 & 0.123 \end{vmatrix} = 0.0000063369.....$$

$$\sqrt{|H|} = 0.00251.....$$

$$|C_{N+1, N+1}| = 0.000254....., \quad |C_{N+2, N+1}| = -0.00000745.....,$$

$$|C_{N+2, N+2}| = 0.000000296.....,$$

27) 구본열, 『현대재무론』, 비봉출판사, pp222

28) 장영광(2004), 『현대투자론』, 신영사, p197~210, 각 공분산 및 기대수익률은 장영광 교수의 계산결과를 그대로 인용하였다. 자료는 본문 뒤의 부록에 인용한다.

29) 각 공분산들은 소수점이하 수는 ‘.’를 덧붙여서 표기를 간단히 줄이기로 한다.

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0.053 & 0.006 & 0.004 & -0.004 & -0.041 & -1 \\ 0.006 & 0.040 & 0.031 & 0.046 & -0.018 & -1 \\ 0.004 & 0.031 & 0.071 & 0.038 & -0.034 & -1 \\ -0.004 & 0.046 & 0.038 & 0.123 & -0.006 & -1 \\ 0.041 & 0.018 & 0.034 & 0.006 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad 30) = 0.00000313.....$$

최적의 포트폴리오 T 의 기대수익률이 $E_T = 0.5$ 일 때.

$$\mu_f = \frac{(-0.00000745.....)0.5 + (0.000000296.....)}{(0.000254.....)0.5 + (-0.00000745)} = 0.0287..$$

$$|\overline{B_H}| = 0.0000000783.....$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0287 & -1 \\ 0 & 0.053 & 0.006 & 0.004 & -0.004 & -0.041 & -1 \\ 0 & 0.006 & 0.040 & 0.031 & 0.046 & -0.018 & -1 \\ 0 & 0.004 & 0.031 & 0.071 & 0.038 & -0.034 & -1 \\ 0 & -0.004 & 0.046 & 0.038 & 0.123 & -0.006 & -1 \\ 0.0287 & 0.041 & 0.018 & 0.034 & 0.006 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\sqrt{|\overline{B_H}|} = 0.000279.....,$$

따라서 단순표현방식으로 얻는 $\sigma_B \frac{dE_P}{d\sigma_P}$ 은 다음의 값을 갖는다.

$$\sigma_B = (0.707..,)(\frac{0.00251.....}{0.000279.....})(0.5 - 0.0287..) = 2.998..... \quad \text{식(64)}$$

$$\frac{dE_B}{d\sigma_B}(E_B = E_T \text{일 때 기울기}) = \sqrt{2} \cdot \frac{0.000279.....}{0.00251.....} = 0.157.. \quad \text{식(65)}$$

(2) 복합포트폴리오 방식

무위험자산이 포함된 포트폴리오 B 에서 $E_B = E_T$ 일 때의 표준편차는 모든 투자를 위험자산 포트폴리오만을 투자한 경우를 의미한다. 즉, $E_B = E_T$ 일 때의 식(57)에서 $\sigma_B = \sigma_T$ 인 경우를 의미한다.

$$\sigma_B = (0.101...)0.5^2 - (0.00595..)0.5 + (0.000118..) = 2.998.. \quad \text{식(66)}$$

30) 위험자산의 각 공분산들에 각 2가 곱하여 얻어진 행렬식을 의미한다.

각 공분산들의 값들이 정확히 표기되지 않으나 ‘.’의 표기를 생략하기로 한다.

$$\frac{dE_B}{d\sigma_B}(\text{단, } E_P = E_T) = \frac{E_T - \mu_f}{\sigma_T} = \frac{0.5 - 0.0287\dots}{2.998\dots} = 0.157\dots \quad \text{식(67)}$$

두 표현방식 모두 특정 좌표값($E_B = E_T$, $\sigma_B = \sigma_T$)과 기울기가 같다는 식(64)~ 식(67)의 확인을 통해서 N 개의 위험자산과 무위험자산 1개로 이루어진 포트폴리오 B 의 경우 복합 및 단순표현방식은 같은 결과를 의미함을 확인할 수 있다.

그런데 이렇게 복합 및 단순이라는 명칭까지 부여하면서 굳이 포트폴리오의 표현방식을 구분하는 이유는 특정한 상황의 경우 특정 방식을 사용하면 유용한 해석을 얻을 수도 있기 때문이다.

II. 헤리(慧理)³¹⁾의 역설

1. 상관계수가 1인 경우의 효율적 포트폴리오 곡선

서로의 상관계수가 1인 두 개의 위험자산만을 보유한 위험포트폴리오의 효율적 경계(Efficient frontier)의 기울기는 아래가 된다.

$$\frac{dE_P}{d\sigma_P} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_2} \quad \text{32)} > 0 \quad \text{식(68)}$$

서로의 상관계수가 1인 두 개의 위험자산에 무위험자산이 포함된 B 의 효율적 경계(Efficient frontier)의 기울기는 다음이 된다.

$$\text{복합식 표현 : } \frac{d\sigma_P}{dE_P} = \frac{\sigma_T}{E_T - \mu_f} \quad \text{33)} \quad \text{식(69)}$$

$$\text{단순식 표현 : } \frac{d\sigma_P}{dE_P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{|H|}}{\sqrt{|{}^B H|}} \quad \text{식(70)}$$

그런데 두 위험자산간 상관계수가 1이 됨은 식(71)을 의미한다.

31) 가칭(假稱)한 명칭으로서 역설적 상황에 대해 '지혜'로운 인식을 하여야 함을 의미함

32) 수평축은 표준편차이다, William F. Sharpe, 『Portfolio theory and capital markets』

33) 최적 포트폴리오가 T 인 경우

$$2^2 |V| = |H| = 0 \quad (34) \quad \text{식(71)}$$

따라서 포트폴리오 B 의 효율적 포트폴리오 곡선의 기울기에 관해서 식(69)으로는 어떤 특성을 알 수 없지만 식(70)으로 표현하면

$$\frac{d\sigma_B}{dE_B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{0}{\sqrt{|\overline{B_H}|}} = 0 \quad \text{식(72)}$$

이 됨을 알 수 있다. 그에 따라 모든 기대수익률에 대하여 포트폴리오 B 의 최소분산은 항상 0 됨을 알 수 있다.

$$\sigma_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{0}{\sqrt{|\overline{B_H}|}} (E_P - \mu_f) = 0 \quad \text{식(73)}$$

포트폴리오 B 의 효율적 경계선이, “주어진 기대수익률에서 최소의 분산”을 가져다주는 유일한 투자비용의 해벡터로 이루어졌다고 해석하기 위해서는 식(74)가 모두 성립해야 한다.(이는 모든 N 에 대해 식(73)을 만족하는 전체 포트폴리오가 존재한다면, 몇 개의 자산으로만 이루어진 부분 포트폴리오도 효율적이라는 의미이다.)

$$|\overline{B_1 H}| > 0, \dots, |\overline{B_N H}| > 0 \quad (35) \quad \text{식(74)}$$

그런데 식(74)의 부분인 식(75)의 조건은 헤시안 행렬식인 $|H|$ 의 조건식인 식(71)에 의해서 항상 결정되는 것은 아니다.

$$|\overline{B_1 H}| > 0, \dots, |\overline{B_N H}| > 0 \quad \text{식(75)}$$

따라서 두 위험자산의 상관계수가 1이어도 무위험자산까지 포함

$$34) |_2 H| = 4\sigma_{11}\sigma_{22} - 4\sigma_{12}^2 = 0 \text{ 즉, } \sigma_{11}\sigma_{22} = \sigma_{12}^2, \text{ 이는 } 1 = \frac{\sigma_{12}^2}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}}$$

제곱근을 하면, $1 = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} = \rho_{12}$ 이 됨을 확인할 수 있다.

35) A.C Chiang, 정기준, 이성순 공역주, 『경제수학입문』, 진영사, pp 499

현재 제약은 두 개다. 따라서 모든 $|\overline{B_1 H}|$ 의 부호는 제약식의 개수 m 에 대해 $(-1)^m$ 의 부호(즉 $(-1)^2 = 1$)의 부호가 되어야 한다.
좌하첨자는 두 개의 제약행과 열외에 자산(위험+무위험)의 개수를 의미한다.

된 포트폴리오 B 는 효율적 포트폴리오 경계(Efficient frontier)가 존재할 수 있으며 그 형태는 식(73)을 통해 수직축 자체가 됨을 확인할 수 있다. 반면, Roll의 분석에서는 무위험자산이 포함된 경우 최소분산의 궤적을 다음으로 나타내고 있다.

$$\sigma_P^2 = X' V X^{36)} \quad \text{식(76)}$$

$$\text{단, } X = V^{-1}[E(R) - R_f \cdot 1] \frac{E(R_T) - R_f}{H}, \quad 1' = [1 \dots 1],$$

$$H = [E(R) - R_f \cdot 1]' \cdot V^{-1} \cdot [E(R) - R_f \cdot 1], \quad E(R)' = [\mu_1 \dots \mu_N]$$

$R_f, E(R_T)$: 각각 무위험자산, 포트폴리오 T 의 기대수익률 식(77)
위 식(77)에서는 식(74)의 조건이라면 행렬 V, H, X 등이 정의되지 않는다. 따라서 σ_P^2 의 형태에 대해서 알아볼 방법이 없다.

이는 위험자산 포트폴리오에서 식(39), (40)의 A, B, C, D 가 정의되지 않음을 의미한다. 그에 따라 일련의 과정인 식(44)~식(47)의 치환전개가 성립할 수 없음을 의미한다. 즉, 상관계수가 1인 경우에 있어서는 식(39)의 방식으로는 효율적 포트폴리오 곡선의 형태에 대한 어떠한 정보도 얻을 수 없다.

2. 수리(數理)적 검증

예로써 1, 2 증권 및 무위험자산 f 로 이루어진 포트폴리오 B 를 식(78), 그와 관련된 행렬식들은 식(79)와 같다고 가정하자.

$$|H| = \begin{vmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{식(78)}$$

$$|\overline{BH}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.1 & -1 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & -0.2 & -1 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & -0.4 & -1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.02. \quad \text{식(79)}$$

36) 구본열, 『현대재무론』, 비봉출판사, pp 267

이때 B 의 기대수익률의³⁷⁾ 변화에 따른 투자비율과 표준편차는 여러 단계를 거쳐 <표 1>과 같이 얻을 수 있다.

<표 1> 상관계수가 1일 때 B 의 총 표준편차의 변화추이

투자비율 / 기대수익률	$E_P = 0.3$	$E_P = 0.4$	$E_P = 0.5$	총 표준편차
x_f	3.0	4.0	5.0	0
x_1	-4.0	-6.0	-8.0	0
x_2	2.0	3.0	4.0	0

위에서 볼 수 있듯이 기대수익률이 변화해도 총 위험은 변함없이 “0”이 된다. 역시 효율적 경계는 수직축 자체가 되는 것이다. 총 위험이 ‘0’이라고 해서 위험자산을 전혀 보유하지 않는 것은 아니다.

가령, 위 <표 1>에 따라 $E_P = 0.3$ 일 때, σ_B^2 을 계산하고 E_P 을 다시 검증하면 다음과 같이 확인할 수 있다.

$$\sigma_B^2 = (4.0)^2(0.05) + 2(-4.0)(2.0)(0.1) + (2.0)^2(0.2) = 0$$

$$E_P = (3.0)(0.1) + (-4.0)(0.2) + (2.0)(0.4) = 0.3$$

3. 헤리(慧理)의 역설

위험자산 1, 2로만 이루어진 포트폴리오의 경우 우상향의 직선의 기울기를 갖고 있음이 확인된다. 그러나 무위험자산의 추가보유하면 그 즉시 효율적 포트폴리오 곡선은 수직축 자체가 되어, 그 어떠한 기대수익률도 ‘0’의 위험으로 달성할 수 있다는 “놀랄 만한” 결론에 다다르게 되는 것이다. 완전한 무위험자산이 현실적으로 존재하지는 않으나 이론적으로는 채권이나 현금통화를 무위험자산³⁸⁾ 이라고 한다면, 누구나 상관계수가 1인 위험자산의 적절한 배

37) 최적상태의 포트폴리오의 기대수익률이 변화함을 의미하는 것이 아니다. 위험자산의 상관계수가 1이라는 사실 때문에 우상향의 위험포트폴리오 직선이 존재하며 따라서 어느 특징점이 최적의 위험포트폴리오라고 할 수 없다.

38) 이론적 차원에서 현금통화에 대한 물가상승률로 인한 시간에 가치하락이 없다는 등의

분보유³⁹⁾를 통해 ‘확실하게 무한대의 수익률’을 달성할 수 있다는 해석이 가능해보인다. 그러면 이런 비현실적인 결과는 어떻게 해석해 하는 것일까?

이는 최적화 모형에서 위험자산인 증권 1과 2가 “수학적”으로는 독립적인 증권이 아니라고 인정해야 할 것이다. (<표 1>에서 보듯이 $(x_1/x_2) = -2$ 로 자산별 투자구조가 자동적으로 정해졌음을 알 수 있다.)

또한 그 상관계수가 1인 위험자산들로만 효율적 포트폴리오를 구성했다고 하더라도 그것은 현실성을 의심받게 된다. 무위험자산 시장의 존재를 인식하는 순간 비현실적인 ‘착각-판단’에 빠져들 수 있기 때문이다. 결국, 자유로운 채권시장의 존재가 투자자의 머릿속에서 상관계수가 1인 자산들로 이루어진 효율적 포트폴리오조차 부정하게 되는데 그 인식 과정은 <그림 4>, <그림 5>와 같이 보일 수 있다.

상관계수가 1이라는 위험자산들로는 극히 밀접하게 연관된 업종의 자산들을 들 수 있다. 원유개발과 정제산업, 건설업과 건설자재업 등은 비록 독립된 업체나 산업으로 보일지라도 투자행위에 있어서는 ‘하나의 동일한’ 업체 또는 산업이므로 투자행위에 대한 실제적 검증작업을 하는 경우에는 반드시 이런 역설이 발생하지 않도록 상관계수의 추정단계가 선행되어야 할 것이다.

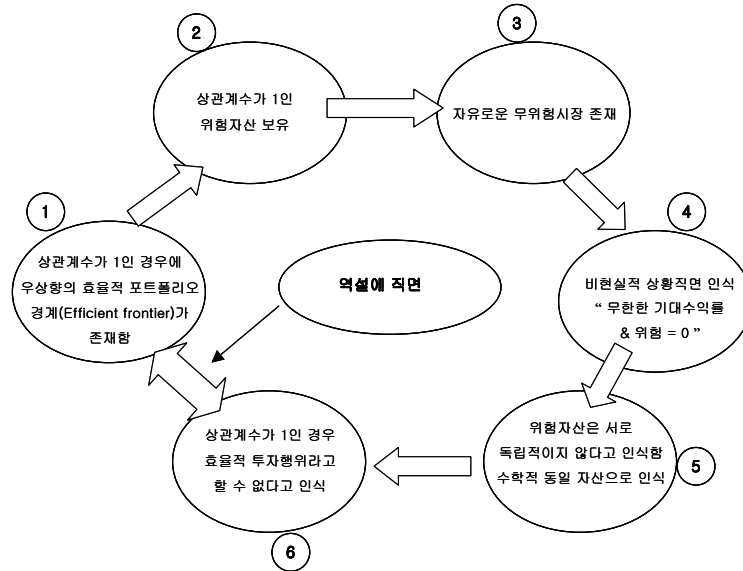
즉, 상관계수가 극히 밀접한 경우들의 자산들을 카테고리 묶어서 하나의 자산으로 처리하는 작업 등이 들 수 있다. ⁴⁰⁾

가정을 하는 경우 ‘0’의 수익률을 갖는 무위험자산이라고 말할 수 있다.

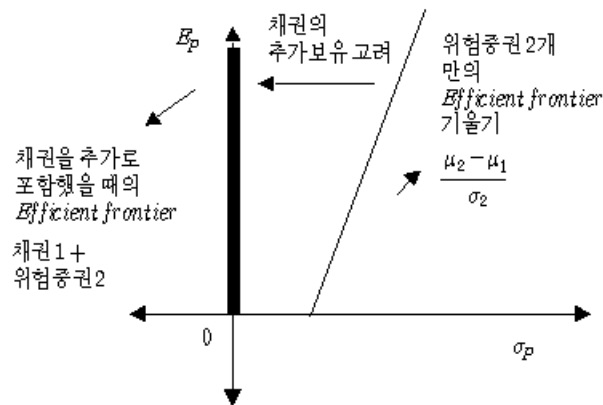
39) 위험과 기대수익률을 적절히 고려하여 공매하는 경우를 말할 수 있다. 물론, 이론적 차원에서 그 어떤 충분한 양의 위험자산도 공매(Short sales)가 가능하다는 전제가 필요하다.

40) 각 산업별 기업들의 기업행위 대상들이 극히 서로 연관되어 있다면 시장전체의 포트폴리오 분석은 결국 산업별 수익률들의 분석과 연관된다고도 할 수 있을 것이다.

<그림 4> 혜리(慧理)의 역설⁴¹⁾



<그림 5> 역설적인 효율적 포트폴리오 직선



41) 이런 역설적 상황에서는 투자자산에 대한 정확한 인식이 필요하다는 의미에서 “혜리(慧理)”의 역설이라고 가칭(假稱)하였다.

III. 두 개의 효율적 포트폴리오의 공분산

N 개의 위험자산으로 구성된 효율적 포트폴리오 곡선상의 두 포트폴리오 P 와 T 에서 자산 i 의 투자비율은 각각 다음과 같다.

$$x_i^P = \frac{1}{|H|}(|C_{N+1,i}|E_P + |C_{N+2,i}|) \quad \text{식(80)}$$

$$x_i^T = \frac{1}{|H|}(|C_{N+1,i}|E_T + |C_{N+2,i}|) \quad \text{식(81)}$$

두 포트폴리오의 공분산 정의에 위 식들을 대입하여 표기하면,

$$\sigma_{P,T} = \sum_i^N \sum_j^N x_i^P x_j^T \sigma_{ij} \quad \text{식(82)}$$

식(82)의 전개를 식(18)에서 식(38)을 준용하면,

$$\sigma_{P,T} = \frac{1}{2} \frac{1}{|H|} (E_P E_T |C_{N+1,N+1}| + (E_P + E_T) |C_{N+2,N+1}| + |C_{N+2,N+2}|) \quad \text{또는,}$$

$$\sigma_{P,T} = \frac{1}{2} \lambda_{E_T} (E_P + \frac{\lambda_{1_T}}{\lambda_{E_T}}) \quad \text{식(83)}$$

위 식(83)은 특정한 효율적 포트폴리오 T 를 기준으로 했을 때, 임의의 효율적 포트폴리오 P 의 기대수익률에 대하여 공분산 곡선의 기울기가 직선임(λ_{E_T})⁴²⁾을 보여준다. E_P 가 다음값들을 가질 때,

$$\text{첫째 } E_P = E^O = - \frac{|C_{N+2,N+1}|}{|C_{N+1,N+1}|} \quad \text{일 때}$$

$$\sigma_{P,T} = \frac{1}{2} \frac{1}{|H|} (|C_{N+2,N+2}| - \frac{(|C_{N+2,N+1}|)^2}{|C_{N+1,N+1}|}) = V^O \quad \text{식(84)}$$

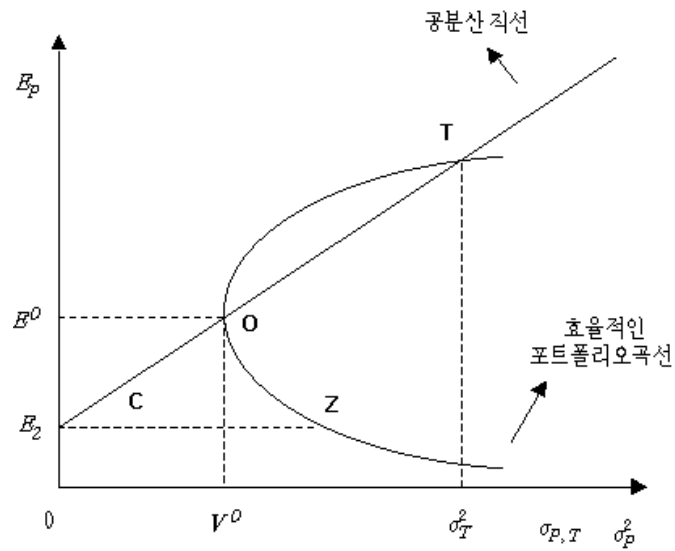
42) λ_{E_T} , $(\lambda_{E_T}/\lambda_{E_T})$ 등은 포트폴리오 P 가 아닌 T 의 기대수익률 E_T 에서 구해진 값들이므로 하첨자에 특별히 T 를 붙였다. 왜냐하면 라그랑주 승수는 그 자체가 제약값 E_T 의 함수이기 때문이다. 그려질 공간은 표준편차의 공간이 아닌 분산 및 공분산의 공간을 유의해야 할 것이다.

$$\text{둘째 } E_P = - \frac{\lambda_{1_T}}{\lambda_{E_T}} \text{ 일 때 } \sigma_{P,T} = 0 \quad \text{식(85)}$$

$$\text{셋째 } E_P = E_T \text{ 일 때 } \sigma_{P,T} = \sigma_T^2 \quad \text{식(86)}$$

등의 특징을 갖게 됨을 확인할 수 있다.

<그림 6> 공분산 곡선(직선)의 형태



IV. 결론

효율적 포트폴리오 곡선이란 개념은 그 전제조건이 본문에서 증명한 바와 같이 수많은 $|\overline{H}|$ 의 값이 모두 0보다 커야 한다는 조건을 요구하고 있다. 그 조건만 만족시키고 있음을 확인할 수 있으면 시장에서의 효율적 포트폴리오 곡선이 존재한다고 할 수 있고, 따라서 개인들의 소규모 포트폴리오도 자체적으로도 최소의 위험

을 보장할 수 있는 투자행위가 존재한다는 할 수 있다.

물론 현실적으로는 정보량의 문제에 직면하게 되지만 이론적으로는 적어도, 시장포트폴리오가 효율적이라면 몇 개 안되는 자산만으로도 이루어진 소규모의 포트폴리오도 식(73)의 부분 조건식으로서 효율적인 투자곡선이 존재할 수 있다는 것을 의미한다.

또한 ‘헤리의 역설’은, 상관계수가 1이 되는 특이한 경우에 있어서는 실증적 검증을 할 때 사전적으로 걸러내야 한다는 경고를 보여주고 있다. 계란을 한 바구니에 담지 말라는 격언이 역시 성립하고 있는 것이다.(우린 항상 채권, 저축 또는 화폐를 보유하고 있으므로 헤리의 역설이 성립할 여지는 충분하다.)

따라서 특정산업을 대상으로 하는 소규모 포트폴리오 분석의 경우라면 상관관계가 밀접한 자산들을 분류하여 그 분류별 대표기업을 선정한 후 그 기업들의 수익률 변화의 정보로서, 산업 전체에 대한 포트폴리오의 분석을 대신할 수 있는 가능성을 얻었다. 또한 그에 따라 요구되는 정보의 양도 많이 절약할 수 있을 것이다.

공분산 함수의 수학적, 기하학적 형태는 CAPM 등 투자행위에 대한 추가적인 이론적 확장에 있어서 유용하게 쓰일 수 있다. 특히 특정 포트폴리오(시장 포트폴리오)에 대한 현재 보유 포트폴리오들 간의 횡단면적 분석 등에 유용할 것으로 판단된다.

< 참고문헌 >

- 구본열 외 1(2001), 『현대재무론』, 비봉출판사, 212~245
- 장영광(2004), 『현대투자론』, 신영사, 178~209
- A.C. Chiang 원저(2002), 정기준 이성순 공역주
『경제수학입문』, 진영사, 479~517
- Avi Bick(2004), "The mathematics of the portfolio frontier; a
geometry-based approach",
The quarterly review of Economics and finance vol 4
- J Tobin(1958) "*Liquidity preference as Behavior toward Risk*",
Review of Economic studies
- Harry M. Markowitz(1990), *Portfolio selection*, Blackwell
- Howard Raiffa(1968), *Decision analysis introductory Lectures
on Choices under Uncertainty*,
Addison-Wesley publishing company
- William F. Sharpe, *Portfolio theory and capital market*
McGraw Hill Book Company
- Richard Roll "*A Critique of The Asset Pricing Theory's
Tests Part 1: On Past and Potential Testability of the
theory*" *Journal of Financial Economics* 4(March 1977)

부 록

<표 2> 4개 증권(日)의 36개일(日)에 대한 자료

날짜	하이트맥주	POSCO	삼성전자	대신증권	KOSPI
1999.01.29	0.534	-0.068	0.137	-0.103	0.016
1999.02.26	-0.150	-0.115	-0.071	-0.111	-0.094
1999.03.31	0.197	0.239	0.097	0.182	0.174
1999.04.30	0.250	0.238	-0.039	0.481	0.195
1999.05.31	0.086	0.099	-0.085	-0.258	-0.022
1999.06.30	0.275	0.361	0.414	-0.072	0.182
1999.07.30	-0.030	0.077	0.398	-0.044	0.094
1999.08.31	-0.055	0.065	0.170	0.093	-0.033
1999.09.30	0.088	-0.146	-0.128	0.025	-0.115
1999.10.29	0.041	0.053	0.015	-0.049	-0.003
1999.11.30	-0.241	0.067	0.182	0.232	0.179
1999.12.28	0.164	-0.209	0.103	-0.334	0.031
2000.01.31	-0.154	0.075	0.055	0.117	-0.085
2000.02.29	-0.175	-0.189	-0.093	0.027	-0.131
2000.03.31	-0.125	-0.046	0.269	-0.137	0.039
2000.04.28	0.243	-0.205	-0.110	-0.603	-0.171
2000.05.31	0.147	-0.021	0.026	0.017	0.009
2000.06.30	0.295	0.112	0.182	0.170	0.115
2000.07.31	-0.023	-0.078	-0.225	0.114	-0.151
2000.08.31	-0.008	-0.071	-0.076	0.013	-0.025
2000.09.29	-0.055	0.012	-0.303	-0.118	-0.116
2000.10.31	0.124	-0.228	-0.349	-0.468	-0.176
2000.11.30	-0.292	0.097	0.128	0.057	-0.010
2000.12.26	-0.054	0.050	-0.025	-0.100	-0.009
2001.01.31	0.077	0.263	0.345	0.796	0.203
2001.02.28	0.134	0.015	-0.176	0.022	-0.067
2001.03.30	-0.011	-0.115	0.106	-0.263	-0.100
2001.04.30	0.016	0.085	0.096	0.303	0.098
2001.05.31	0.112	0.064	-0.077	0.011	0.059
2001.06.29	-0.130	-0.005	-0.099	-0.188	-0.028
2001.07.31	-0.032	-0.165	-0.013	-0.048	-0.094
2001.08.31	0.076	0.026	0.003	0.068	0.007
2001.09.28	0.014	-0.115	-0.305	-0.137	-0.128
2001.10.31	0.011	0.098	0.215	0.099	0.114
2001.11.30	0.091	0.184	0.228	0.348	0.180
2001.12.28	0.044	0.131	0.247	0.076	0.075