

# Zadanie Numeryczne 04

Mateusz Wojtyna

## 1. Wstęp

Należało sprowadzić macierz symetryczną

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{19}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & -\frac{17}{12} \\ \frac{13}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{11}{12} & \frac{13}{12} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{13}{12} & -\frac{11}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & \frac{13}{12} \\ -\frac{17}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & \frac{19}{12} \end{bmatrix}$$

do postaci trójdagonalnej, a następnie znaleźć jej wartości własne.

## 2. Opis

### 2.1. Transformacja Householdera

Macierz symetryczna  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  zostaje przekształcona do macierzy trójdagonalnej  $\mathbf{T}$  za pomocą transformacji Householdera:

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T$$

Krok  $k$  algorytmu iteracyjnego wygląda następująco ( $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$ ):

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_k[k+1:n, k] \quad (\text{elementy kolumny pod diagonalą})$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} + \text{sgn}(\mathbf{x}[1]) \cdot \|\mathbf{x}\| \cdot \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{H}_k = \mathbb{I} - 2 \frac{\mathbf{u} \mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^2} \quad (\text{macierz Householdera})$$

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} \mathbb{I}^{k \times k} & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{Q}_k \mathbf{A}_k \mathbf{Q}_k^T$$

Po  $n-2$  krokach otrzymujemy macierz trójdagonalną:

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}_{n-1} = \mathbf{Q}_{n-2} \mathbf{A}_{n-2} \mathbf{Q}_{n-2}^T = \mathbf{Q}_{n-2} \dots \mathbf{Q}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_1^T \dots \mathbf{Q}_{n-2}^T = \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T$$

## 2.2. Algorytm QR

Jeżeli macierz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  posiada faktoryzację QR, to macierz  $\mathbf{A}' = \mathbf{R}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}$  jest ortogonalną transformacją podobieństwa macierzy  $\mathbf{A}$ .

Iterując, algorytm wygląda następująco ( $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$ ):

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{R}_1 \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{A}_3 &= \mathbf{R}_2 \mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_3 \mathbf{R}_3 \\ &\vdots\end{aligned}$$

Iteracja zbiega się do macierzy trójkątnej górnej, w której na diagonali znajdują się wartości własne. W kodzie zatrzymujemy iterację jeżeli  $\|\text{diag}(\mathbf{A}_{k+1}) - \text{diag}(\mathbf{A}_k)\| \leq \epsilon$ .

Dla macierzy trójdiagonalnych symetrycznych faktoryzację QR występującą w każdym kroku algorytmu można zoptymalizować do czasu liniowego za pomocą obrotów Givensa:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{R}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} = \mathbf{G}_{n-1} \dots \mathbf{G}_1 \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{G}_1^T \dots \mathbf{G}_{n-1}^T$$

## 3. Kod

Program napisano w Pythonie z użyciem pakietu *NumPy*.

```
# pyright: reportConstantRedefinition=false

import numpy as np
from numpy.typing import NDArray

# Dla przejrzystości kodu
array = NDArray[np.float64]
vector = NDArray[np.float64]
matrix = NDArray[np.float64]

def householder_vector(x: vector) -> vector:
    u = x.copy()
    u[0] = x[0] + np.sign(x[0]) * np.linalg.norm(x)
    return u

def householder_tridiagonalize(A: matrix) -> matrix:
    n = len(A[0])
    T = A.copy()

    for k in range(n - 2):
        x = T[k + 1 :, k]
        u = householder_vector(x)
        H = np.eye(n - k - 1) - 2.0 * (np.outer(u, u) / (np.linalg.norm(u) ** 2))

    Q = np.eye(n)
```

```

Q[k + 1 :, k + 1 :] = H

T = Q @ T @ Q.transpose()

return T

# Działa in place
def givens_row(T: matrix, i: int, c: float, s: float):
    n = len(T[0])
    left = max(0, i - 1)
    right = min(n - 1, i + 2)

    for col in range(left, right + 1):
        # Należy zapisać te elementy wcześniej, ponieważ się zmieniają
        A_i_j = T[i, col]
        A_ip1_j = T[i + 1, col]

        T[i, col] = c * A_i_j + s * A_ip1_j
        T[i + 1, col] = -s * A_i_j + c * A_ip1_j

# Działa in place
def givens_col(T: matrix, i: int, c: float, s: float):
    n = len(T[0])

    top = max(0, i - 1)
    bottom = min(n - 1, i + 2)

    for row in range(top, bottom + 1):
        # Należy zapisać te elementy wcześniej, ponieważ się zmieniają
        A_i_j = T[row, i]
        A_i_jp1 = T[row, i + 1]

        T[row, i] = c * A_i_j + s * A_i_jp1
        T[row, i + 1] = -s * A_i_j + c * A_i_jp1

def qr_algorithm(T: matrix, limit: int, eps: float) -> tuple[array, int]:
    n = len(T[0])
    diag = np.diag(T)
    T = T.copy()

    for k in range(limit):
        diag_old = np.diag(T).copy()
        for i in range(n - 1):
            # Należy obliczyć te elementy wcześniej, bo givens_row() je
            # zmienia
            # a givens_col() musi mieć takie same jak givens_row()
            a = T[i, i]
            b = T[i + 1, i]
            r = np.hypot(a, b)
            c = a / r
            s = b / r

```

```

        givens_row(T, i, c, s)
        givens_col(T, i, c, s)
    diag = np.diag(T)

    if np.linalg.norm(diag - diag_old) <= eps:
        return diag, k + 1

    return diag, limit

def main():
    np.set_printoptions(linewidth=np.inf)    # pyright: ignore[
        reportArgumentType]
    np.set_printoptions(suppress=True)

    A = np.array(
        [
            [19 / 12, 13 / 12, 5 / 6, 5 / 6, 13 / 12, -17 / 12],
            [13 / 12, 13 / 12, 5 / 6, 5 / 6, -11 / 12, 13 / 12],
            [5 / 6, 5 / 6, 5 / 6, -1 / 6, 5 / 6, 5 / 6],
            [5 / 6, 5 / 6, -1 / 6, 5 / 6, 5 / 6, 5 / 6],
            [13 / 12, -11 / 12, 5 / 6, 5 / 6, 13 / 12, 13 / 12],
            [-17 / 12, 13 / 12, 5 / 6, 5 / 6, 13 / 12, 19 / 12],
        ],
        dtype=np.float64,
    )

    T = householder_tridiagonalize(A)
    eigenvalues, steps = qr_algorithm(T, limit=1000, eps=1e-12)

    # Sortujemy malejąco, żeby łatwo można było porównać
    eigenvalues = -np.sort(-eigenvalues)
    expected = -np.sort(-np.linalg.eig(A).eigenvalues)
    print(f"Result after {steps} steps:", eigenvalues)
    print("Expected:", expected)
    print(
        "Error:",
        np.linalg.norm(expected - eigenvalues),
    )

if __name__ == "__main__":
    main()

```

## 4. Wyniki

Po 74 krokach otrzymano zbieżność ( $\epsilon = 10^{-12}$ ):

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 1, \lambda_5 = -1, \lambda_6 = -2$$

## 5. Podsumowanie

- Zastosowano transformację Householdera aby sprowadzić macierz symetryczną do postaci trójdiamondalnej w czasie  $\mathcal{O}(n^3)$ .
- Zoptymalizowano algorytm QR dzięki postaci trójdiamondalnej macierzy używając obrotów Givensa, dzięki czemu jeden krok algorytmu QR wykonuje się w czasie  $\mathcal{O}(n)$ .