***MOWNIT - Zestaw 5B* Pierwiastki równań nieliniowych**

*Opracował: Mateusz Woś*

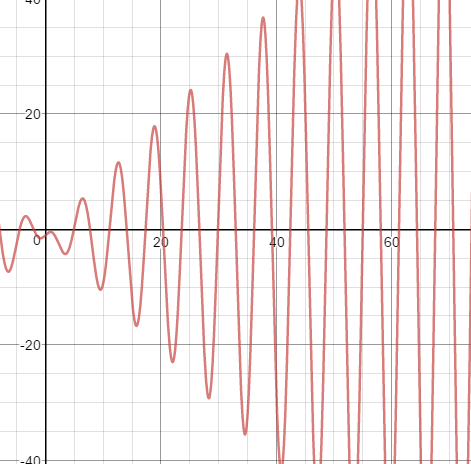
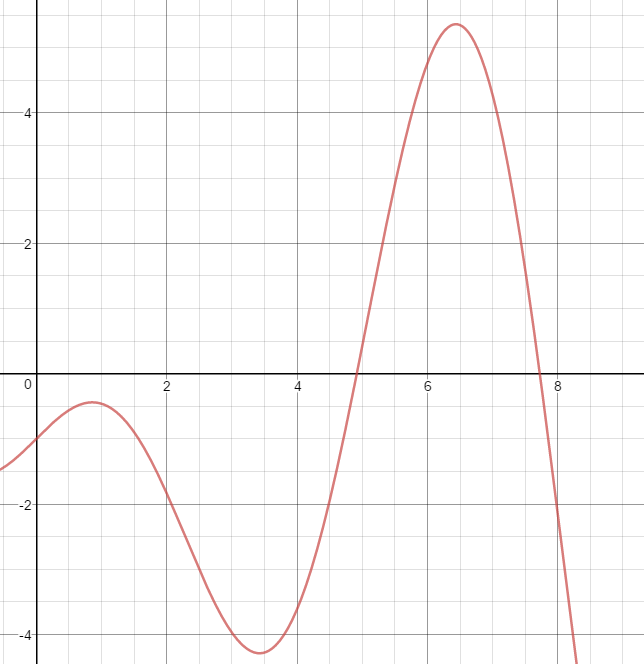
Zadania:

**1.** Napisz iteracje wg metody Newtona do rozwiązywania każdego z następujących równań nieliniowych:

1. x cos(x) =1;
2. x3 - 5x - 6 = 0;
3. e-x = x­­2-1

**Ad. a) x cos(x) =1**

Wygenerowałem wykres funkcji, aby w przybliżeniu określić granicę przedziału, w którym znajduję się dany pierwiastek.

Widać, iż funkcja jest okresowa i ma nieskończenie wiele pierwiastków. Dla tego zadania obliczę dwa pierwsze pierwiastki na dodatniej części osi OX. Pierwiastki mieszczą się w przedziale [4,5] i [7,8]

Warunek f(x)f(b) < 0:

Warunki są spełnione, więc funkcja ma miejsca zerowe w tych przedziałach.

Licząc pierwiastki za pomocą metody Newtona Raphsona:

Należy sprawdzić znak wyrażenia f’(x)\*f’’(x) dla punktów brzegowych:

Dla x=4 =>

Dla x=5 =>

Dla x=7 =>

Dla x=8 =>

Dla obu przedziałów wartości są dodatnie.

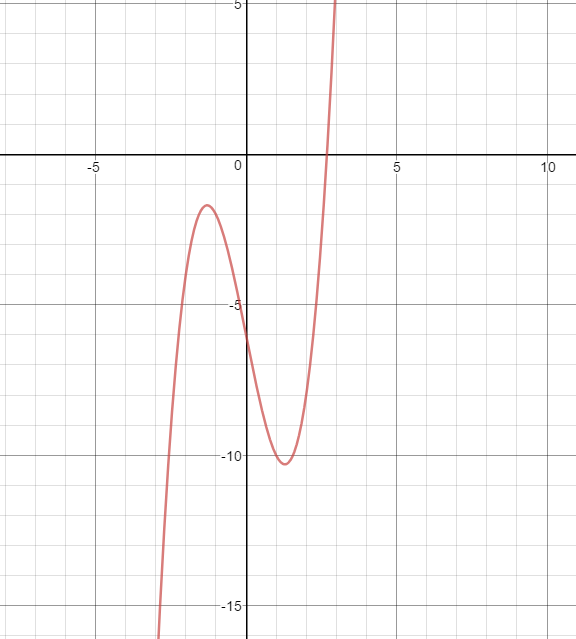
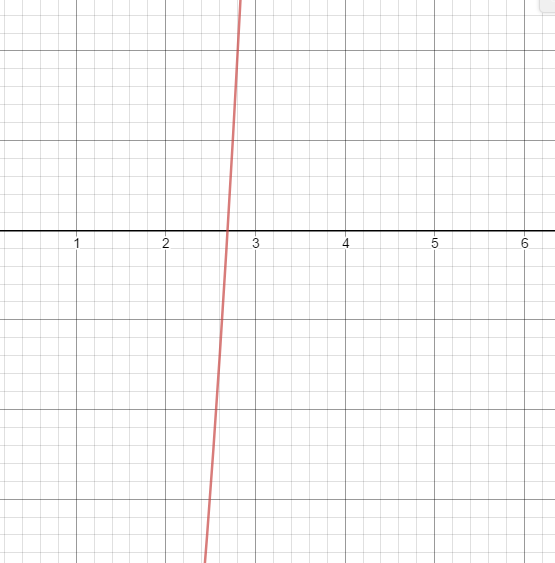
Z tego wynika:

dla przedziału [4,5]: x0 = b = 5; [7,8]: x0 = b = 8

Za dokładność obliczeń przyjmiemy ε = 10-5

Warunki spełnione dla obu przedziałów. Otrzymaliśmy miejsca zerowe:

**Ad. b) x3 - 5x - 6 = 0;**

Wygenerowałem wykres funkcji, aby w przybliżeniu określić granicę przedziału, w którym znajduję się dany pierwiastek.

Z wykresu możemy wywnioskować, iż pierwiastek będzie znajdował się w przedziale [2,3].

Warunek f(a)f(b) < 0:

Warunki są spełnione, więc funkcja ma miejsca zerowe w tych przedziale.

Licząc pierwiastek za pomocą metody Newtona Raphsona:

Należy sprawdzić znak wyrażenia f’(x)\*f’’(x) dla punktów brzegowych:

Dla x=2 =>

Dla x=3 =>

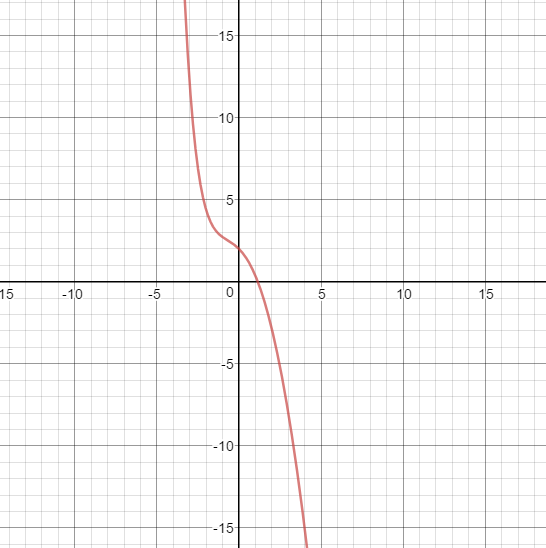
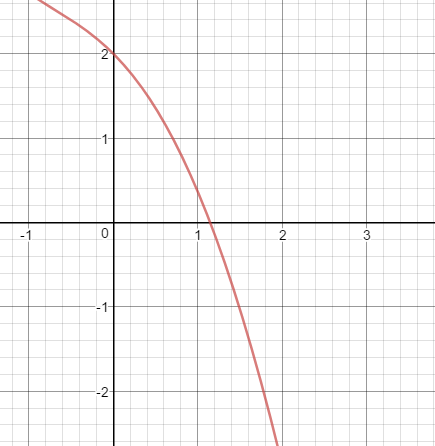
Znak wyrażenia zawsze jest dodatni, czyli przyjmujemy x0 = b = 3

Za dokładność obliczeń przyjmiemy ε = 10-5

Sprawdzam warunek zbieżności dla x=3

Warunek spełniony dla przedziału. Otrzymaliśmy miejsce zerowe:

**Ad. c) e-x = x2-1**

Wygenerowałem wykres funkcji, aby w przybliżeniu określić granicę przedziału, w którym znajduję się dany pierwiastek.

Z wykresu możemy wywnioskować, iż pierwiastek będzie znajdował się w przedziale [1,2].

Warunek f(a)f(b) < 0:

Warunki są spełnione, więc funkcja ma miejsca zerowe w tych przedziale.

Licząc pierwiastek za pomocą metody Newtona Raphsona:

Należy sprawdzić znak wyrażenia f’(x)\*f’’(x) dla punktów brzegowych:

Dla x=1 =>

Dla x=2 =>

Znak wyrażenia zawsze jest dodatni, czyli przyjmujemy x0 = b = 2

Za dokładność obliczeń przyjmiemy ε = 10-5

Sprawdzam warunek zbieżności dla x=3

Warunek spełniony dla przedziału. Otrzymaliśmy miejsce zerowe:

**2.**(a) Pokaż, że iteracyjna metoda xk+1 = (xk-1f(xk) - xkf(xk-1))/(f(xk) - f(xk-1)) matematycznie jest równoważna z metodą siecznych przy rozwiązywaniu skalarnego nieliniowego równania f (x) = 0.  
(b) Jeśli zrealizujemy obliczenia w  arytmetyce zmiennoprzecinkowej o skończonej precyzji, jakie zalety i wady ma wzór podany w podpunkcie (a), w porównaniu ze wzorem dla metody siecznych podanym poniżej?  
xk+ 1 = xk - (f (xk) (xk - xk-1) / (f (xk) - f (xk-1))

**Ad.b)**

*Metoda siecznych:*

Zalety:

* Po wykonaniu interpolacji za jej pomocą niepotrzebna jest znajomość pochodnej funkcji
* Bardziej efektywna, ponieważ iteracja wymaga jedynie wyznaczenia wartości funkcji

Wady:

* Redukcja cyfr przy odejmowaniu
* Metoda może nie być zbieżna do pierwiastka
* Przybliżenie może być błędne jeśli ciąg przybliżeń nie jest malejący

*Metoda iteracyjna:*

Zalety:

* Im bliżej rozwiązania wystartujemy tym mniejsza ilość obliczeń musimy wykonać aby otrzymać poprawny wynik
* Zmniejszona ilość operacji
* Brak odejmowania, redukcji. Dokładny wynik nawet przy skomplikowanych funkcjach.

Wady:

* Pomimo mniejszej ilość iteracji, może być wolniejsza ze względu na złożoność

**3.** Zapisz iteracje Newtona do rozwiązywania następującego układu równań nieliniowych.

(dla ułatwienia przyjąłem x1 = x; x2 = y)

Metoda Newtona dla funkcji wielu zmiennych jest uogólnieniem metody dla funkcji jednej zmiennej.

Dla funkcji wielu zmiennych gdy możemy funkcje przybliżyć równaniem afinicznym:

Gdzie :

Załóżmy, że x = xo, wtedy:

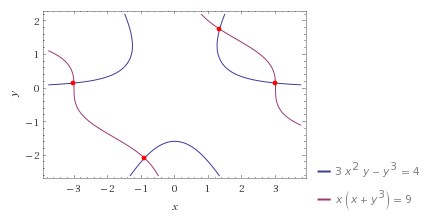
Gdy jest odwracalne to:

Ogólnie można zapisać:

Otrzymujemy więc rekurencyjne rozwiązanie:

W naszym przypadku otrzymujemy równania:

Aby zacząć obliczać musimy znać w przybliżeniu przedziały, w których znajdują się dane pierwiastki.



Wykres wygenerowany przez wolframalpga.com.

Z wykresu możemy wywnioskować, iż pierwiastki będą mieścić się w przedziałach:

Obliczenia zostały wykonane przez program komputerowy.

**Ad.1)**

**Ad.2)**

**Ad.3)**

**Ad. 4)**

Za dokładność przyjąłem czterokrotne obliczenie wartości, bez przyjmowania warunku stopu. Dla ułatwienia obliczeń.