

# POLITECHNIKA ŚLĄSKA WYDZIAŁ AUTOMATYKI, ELEKTRONIKI I INFORMATYKI

Laboratorium Identyfikacji Procesów

Ćw. nr 7:

Modele sygnałów stochastycznych.

Sprawozdanie

Data laboratorium: 21.01.2022 r.

AiR S2-I/Rob

Sekcja 2, podsekcja 1:

Klaudia Bończyk

Paweł Kaźmieruk

Maksymilian Skibiński

# Wstęp

Celem ćwiczeń była identyfikacja modeli ciągów czasowych. Szczególna uwaga została zwrócona na wpływ wartości i liczby parametrów modeli AR, MA i ARMA na przebiegi czasowe, funkcję autokowariancji oraz korelację cząstkową. Zbadany został także wpływ różnicowania na ciąg czasowy.

Na końcu sprawozdania zamieszczony został kod, a przynajmniej jego fragmenty w jakiś sposób udowadniające, że wykonaliśmy ćwiczenie.

# Zadanie 1

Wygenerowana została odpowiedź dla ciągu AR(1):

$$y(i) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1}} e(i)$$

dla różnych wartości parametru  $a_1$ . Otrzymane przebiegi czasowe zostały zamieszczone na rys. 1.

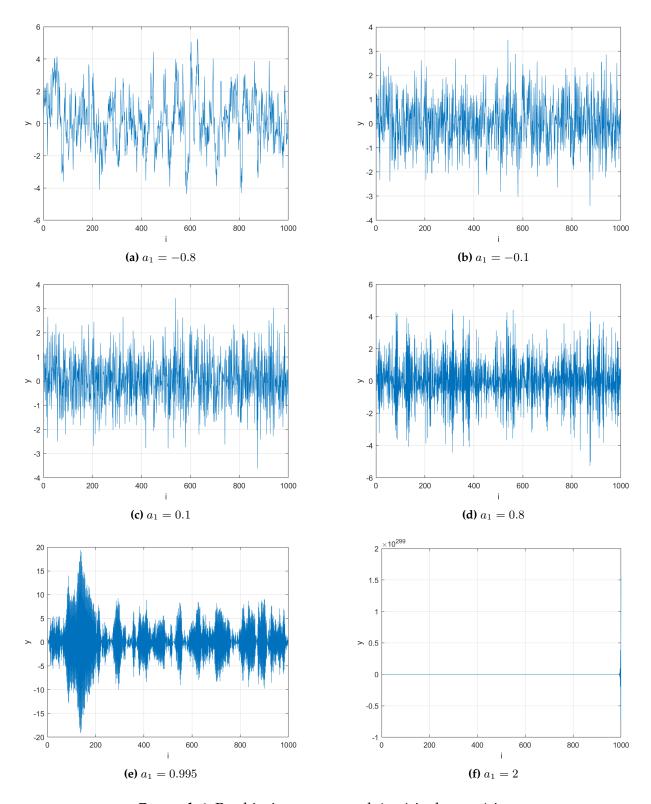
## Obserwacje

- Wraz ze wzrostem wartości bezwzględnej parametru  $a_1$  wzrasta ogółem amplituda sygnału wyjściowego zarejstrowane wartości ekstremalne będą coraz większe.
- Wraz ze wzrostem wartości bezwzględnej parametru  $a_1$  wzrasta także wariancja sygnału.
- Gdy  $|a_1| > 1$  model jest niestabilny odpowiedź układu nieprzerwanie rośnie.

Ciekawiej jest z wpływem znaku parametru  $a_1$  na otrzymywaną odpowiedź. Porównując tak "na oko" przebiegi otrzymywane dla wartości parametru  $a_1$  rózniących się tylko znakiem, można zauważyć, że sygnał dla wartości  $a_1$  ze znakiem dodatnim podlega dużo większym chwilowym zmianom. By zbadać zjawisko pod lupą możemy przekształcić równanie opisujące wyjście y(i) tak, by zawierało same wartości pobudzenia e(i). Kilka pierwszych takich przekształceń zostało zamieszczonych w tabeli poniżej.

| i | $y(i), [a_1 = 0.9]$  | $y(i)$ , $[a_1 = -0.9]$                         |
|---|--|---|
| 0 | $e_0$  | $e_0$   |
| 1 | $\begin{aligned} e_1 &- 0.9e_0 \\ e_2 &- 0.9e_1 + 0.81e_2 \\ e_3 &- 0.9e_2 + 0.81e_1 - 0.729e_0 \\ e_4 &- 0.9e_3 + 0.81e_2 - 0.729e_1 + 0.6561e_0 \end{aligned}$ | $e_1 + 0.9e_0$                                  |
| 2 | $e_2 - 0.9e_1 + 0.81e_2$   | $e_2 + 0.9e_1 + 0.81e_2$                        |
| 3 | $e_3 - 0.9e_2 + 0.81e_1 - 0.729e_0$  | $e_3 + 0.9e_2 + 0.81e_1 + 0.729e_0$             |
| 4 | $e_4 - 0.9e_3 + 0.81e_2 - 0.729e_1 + 0.6561e_0$  | $e_4 + 0.9e_3 + 0.81e_2 + 0.729e_1 + 0.6561e_0$ |
| ÷ | <b>:</b>   | :   |

**Tabela 1:** Zależność y(i) od e(i) w chwilach przeszłych

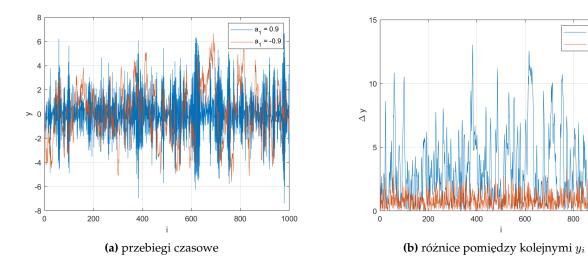


**Rysunek 1:** Przebiegi czasowe w zależności od wartości  $a_1$ 

W zależności od znaku  $a_1$  równania różnią się tylko znakami przy kolejnych  $e_i$ : dla ujemnego  $a_1$  wszystkie znaki to plusy, natomiast dla  $a_1$  dodatniego znaki zmieniają się na przemian i co więcej dla kolejnych  $y_i$  te same wartości  $e_i$  z przeszłości są brane ze znakami na przemian.

Jeśli takie modele pobudzimy skokami jednostkowymi zobaczymy, że model dla ujemnego  $a_1$  zwróci odpowiedź aperiodyczną, a model dla dodatniego  $a_1$  odpowiedź oscylacyjną.

Na rysunku poniżej widnieje porównanie przebiegów otrzymanych dla  $a_1=\pm 0.9$  oraz wykres przedstawiający róznice pomiędzy kolejnymi wartościami  $y_i$  w wartościach bezwględnych, czyli:  $\Delta y(i)=|y(i)-y(i-1)|$ .



**Rysunek 2:** Porównanie przebiegów czasowych dla  $a_1=\pm 0.9$ 

# Zadanie 2

Zgodnie z poleceniem przyjmijmy, że  $a_1=0.8$  i wyznaczmy wariancję otrzymanego sygnału oraz pierwszych kilka wartości funkcji autokorelacji. Przekształcenia prowadzące do otrzymania kolejnych wyrazów funkcji autokowariancji znajdują się w skrypcie. Dla modelu AR(1) otrzymujemy:

$$\gamma_i = \begin{cases} \frac{\lambda^2}{1-a_1^2} & \text{dla } i = 1\\ -a_1 \; \gamma_{i-1} & \text{dla } i > 1 \end{cases}$$

Wzór pozwalający obliczyć wariancję to:

$$var[X] = E[(X - \mu)^2]$$

Zgodnie z przekształceniami w skrypcie:  $\mu=0$ , a zatem wzór uprości się do postaci takiej samej co przy obliczaniu wartości funkcji autokowariancji dla k=0. Wariancja zatem wynosi:

$$\operatorname{var}[y(i)] = \frac{\lambda^2}{1 - a_1^2}$$

Na rys. 3 zostało zamieszczone porównanie wartości wyznaczonych analitycznie z wartościami obliczonymi przy pomocy polecenia xcorr na podstawie wygenerowanego sygnału.

W tabeli 2 porównane zostały wartości wariancji obliczonej analitycznie z wyznaczoną poleceniem var na podstawie wygenerowanych danych.

| N      | var <sub>xcorr</sub> | $var_{analitycznie}$ |
|--------|----------------------|----------------------|
| 1000   | 3.3279               | 2.7778               |
| 10000  | 2.8311               | 2.7778               |
| 100000 | 2.7754               | 2.7778               |

**Tabela 2:** Wariancja w zależności od liczby próbek N

Wniosek jest właściwie jeden: czym więcej próbek tym lepiej obliczenia wykonane na danych pomiarowych będą pokrywały się z wartościami wyznaczonymi w sposób analityczny.

## Zadanie 3

Poprzednie dwa zadania zostały wykonane dla modelu MA(1):

$$y(i) = (1 + c_1 z^{-1}) e(i)$$

Na rys. 4 przedstawiony został wpływ wartości  $c_1$  na przebiegi czasowe y(i).

## Obserwacje

Wraz ze wzrostem modułu wartości  $c_1$  wzrasta wariancja oraz wartości ekstremalne zarejstrowane w danych.

## Funkcja autokowariancji

Wyprowadźmy wartości funkcji autokowariancji dla modelu MA(1). Model ciągu w postaci równania różnicowego to:

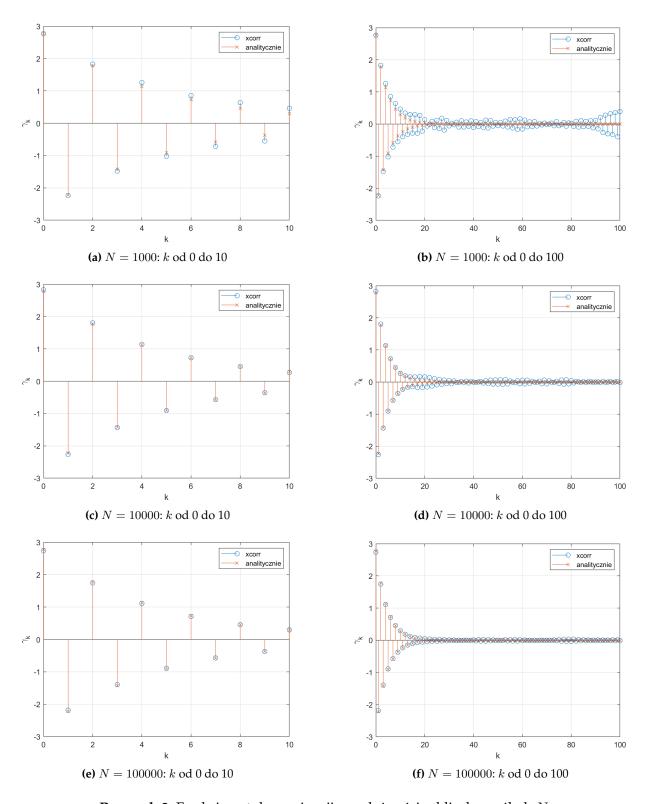
$$y(i) = e(i) + c_1 e(i-1)$$

Wartość średnia  $\bar{y}$ :

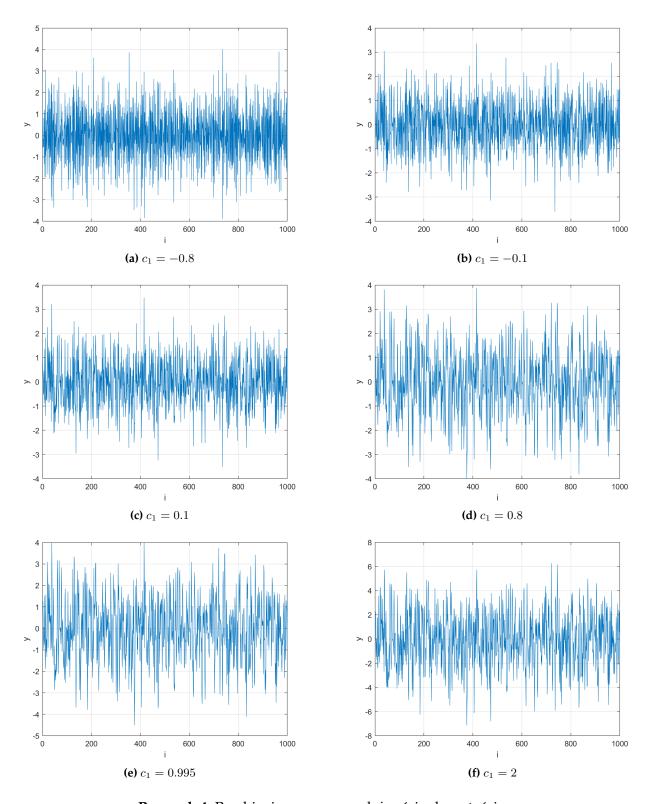
$$\bar{y} = E[y(i)] = E[e(i)] + c_1 E[e(i-1)]$$
  
 $E[y(i)] = 0 + c_1 \cdot 0 = 0$ 

Zatem, tak jak w przypadku modelu AR(1), wzór na funkcję autokowariancji się skraca do postaci:

$$\Gamma(y,k) = \mathrm{E}[y(i)y(i-k)]$$



**Rysunek 3:** Funkcja autokowariancji w zależności od liczby próbek N



**Rysunek 4:** Przebiegi czasowe w zależności od wartości  $c_1$ 

k = 0:

$$\gamma_0 = \mathbf{E}[y^2(i)] = \mathbf{E}[e^2(i)] + 2c_1\mathbf{E}[e(i)e(i-1)] + c_1^2\mathbf{E}[e^2(i-1)]$$
  
$$\gamma_0 = \lambda^2 + 0 + c_1^2\lambda^2 = (1 + c_1^2)\lambda^2$$

k = 1:

$$\gamma_1 = \mathbf{E}[y(i)y(i-1)] = \mathbf{E}[e(i)y(i-1)] + c_1\mathbf{E}[e(i-1)y(i-1)]$$

$$\gamma_1 = 0 + c_1\left(\mathbf{E}[e^2(i-1)] + c_1\mathbf{E}[e(i-1)e(i-2)]\right)$$

$$\gamma_1 = 0 + c_1\left(\lambda^2 + 0\right) = c_1\lambda^2$$

k = 2:

$$\gamma_2 = \mathbf{E}[y(i)y(i-2)] = \mathbf{E}[e(i)y(i-2)] + c_1\mathbf{E}[e(i-1)y(i-2)]$$
  
$$\gamma_2 = 0 + 0 = 0$$

k = 3:

$$\gamma_3 = \mathbf{E}[y(i)y(i-3)] = \mathbf{E}[e(i)y(i-3)] + c_1\mathbf{E}[e(i-1)y(i-3)]$$
  
$$\gamma_3 = 0 + 0 = 0$$

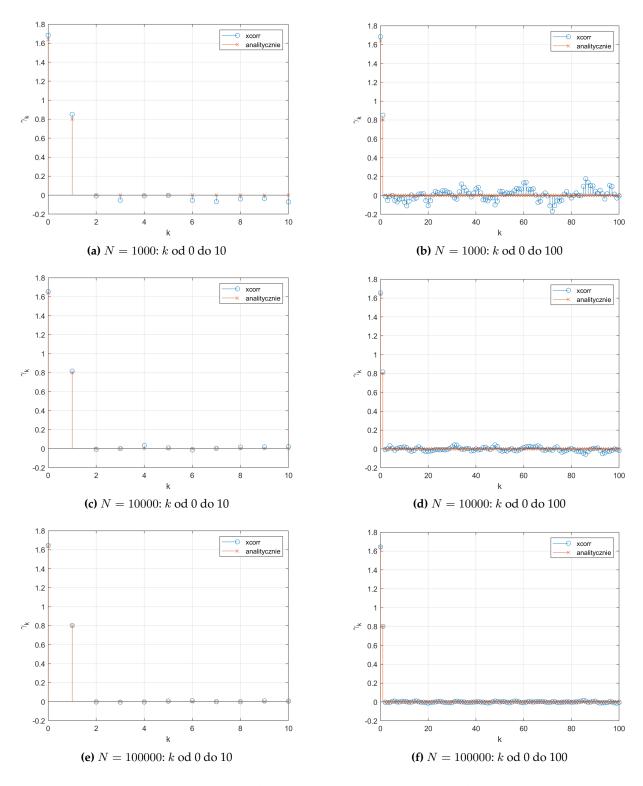
Zatem:

$$\gamma_i = egin{cases} (1+c_1^2)\lambda^2 & ext{dla } i=0 \ c_1\lambda^2 & ext{dla } i=1 \ 0 & ext{dla } i \geqslant 2 \end{cases}$$

Przyjmijmy, że  $c_1=0.8$ . Porównanie wartości wyznaczonych analitycznie z wartościami otrzymanymi przy pomocy polecenia xcorr dla wygenerowanych danych zostały zamieszczone na rys. 5. W tabeli 3 porównane zostały wariancje: wyznaczona analitycznie i wyznaczona na podstawie danych przy użyciu var.

| N      | var <sub>xcorr</sub> | $\mathrm{var}_{analitycznie}$ |
|--------|----------------------|-------------------------------|
| 1000   | 1.6838               | 1.6400                        |
| 10000  | 1.6541               | 1.6400                        |
| 100000 | 1.6434               | 1.6400                        |

**Tabela 3:** Wariancja w zależności od liczby próbek N



**Rysunek 5:** Funkcja autokowariancji w zależności od liczby próbek N

#### Obserwacje

Wniosek jest taki sam jak poprzednio: czym więcej próbek N danych pomiarowych tym mniejsza różnica pomiędzy wartościami wyznaczonymi na podstawie danych z tymi uzyskanymi analitycznie.

# Różnica pomiędzy modelami AR, a MA

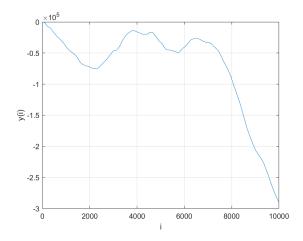
Jak łatwo można zauważyć, modele AR i MA różnią się funkcjami autokorelacji. Dla modelu MA, dla przesunięcia:  $k \geqslant nC$ , gdzie przez nC rozumiemy stopień modelu MA(nC), autokorelacja przyjmuje wartości zerowe – całkowicie zerowe. W przypadku modelu AR wartości dążą do zera, ale nie ma wyraźnego skoku do wartości zerowej.

#### Zadanie 4

Dany jest ciąg y(i):

$$y(i) = \frac{1}{1 - 2.5z^{-1} + 2z^{-2} - 0.5z^{-3}} e(i)$$

Po pobudzeniu modelu otrzymujemy przebieg widoczny na rys. 6.



Rysunek 6: Przebieg czasowy

Przebieg ten różni się znacznie od poprzednio obserwowanych. Jego wartość średnia ulega zmianom. Poza tym, poprzednio łatwo zauważalne było, że model pobudzany był losowymi wartościami (białym szumem), widać było jakim mocnym zmianom ulegało wyjście y(i) z próbki na próbkę, a teraz tej losowości tak łatwo nie widać.

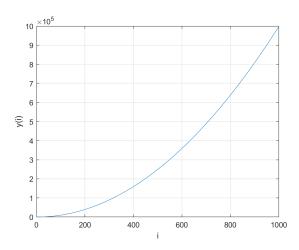
Wielomian  $A(z^{-1})$  zapisany w postaci iloczynowej to:

$$A(z^{-1}) = -0.5(x-2)(x-1)^2$$

Pierwiastki równania  $A(z^{-1}) = 0$  to:

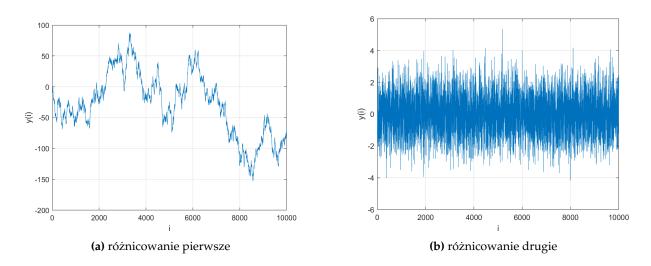
$$p_1 = 2, \quad p_2 = p_3 = 1,$$

więc model jest niestabilny, gdyż pierwiastki  $p_2$ ,  $p_3$  leżą na okręgu jednostkowym.<sup>1</sup> Niestabilność można łatwo zauważyć, jeśli model pobudzimy skokiem jednostkowym, co zamieszczamy na rys. 7.



Rysunek 7: Pobudzenie skokiem jednostkowym

Na rys. 8 widać przebiegi czasowe (otrzymane w wyniku pobudzenia białym szumem) po różnicowaniu ciągu.

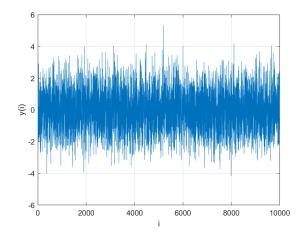


Rysunek 8: Różnicowanie ciągu

Różnicowanie ciągu pozwoliło usunąć zmiany wartości średniej. Po drugim zróżnicowaniu przebieg czasowy już przypomina te, które widzieliśmy w poprzednich zadaniach.

To co uzyskaliśmy w wyniku różnicowania ciągu można także uzyskać korzystając z modelu ARMA lub uproszczonego modelu AR, gdyż różnicowanie usunęło te bieguny, które czynił układ niestabilnym.

 $<sup>^1</sup>$ Dla modelu stabilnego pierwiastki równania  $A(z^{-1})=0$  leżą na zewnątrz okręgu jednostkowego, ale pierwiastki równania A(z)=0 leżą wewnątrz tego okręgu. Jest to tylko kwestia pewnych przekształceń.



Rysunek 9: Użycie modelu analogicznego

Jeśli użyjemy modelu:

$$y(i) = \frac{(1-z^{-1})^2}{-0.5(z^{-1}-2)(z^{-1}-1)^2} e(i) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} e(i)$$

to w rezultacie po pobudzeniu tego modelu tym samym pobudzeniem otrzymamy te same przebiegi co widać na rys. 9.

#### Zadanie 5

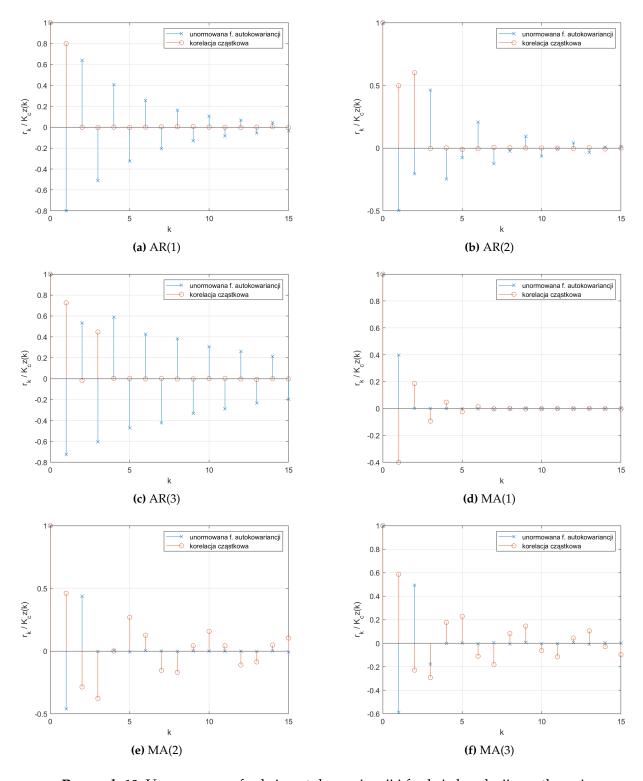
Dla ciągów danych wygenerowanych dla kilku różnych modeli na jednym wykresie przedstawione zostały: unormowana funkcja autokowariancji oraz funkcja korelacji cząstkowej. Funkcja korelacji cząstkowej była wyliczana poprzez identyfikację modeli AR(k) o coraz większym stopniu k. Korelacja cząstkowa dla k to  $a_k$ .

Na rysunkach 10 i 11 zamieszczone zostały wartości wspomnianych funkcji

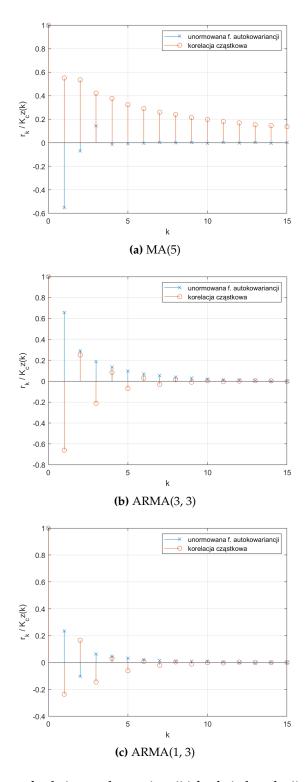
#### Obserwacje

- Dla ciągów modeli AR(nA) funkcja korelacji cząstkowej  $K_{cz}(k)$  zeruje się dla k > nA. Natomiast funkcja autokowariancji dąży do zera, ale nigdy nie spada do niego gwałtownie.
- Ciągi MA(nC) zachowują się odwrotnie: funkcja autokowariancji zeruje się dla k > nC, ale funkcja korelacji cząstkowej dąży do zera wraz ze wzrostem k, ale nigdy nie spada do niego skokowo.
- Modele ARMA mają własności będące połączeniem tych dwóch wymienionych wyżej,
   ale w najgorszym wariancie: żadna z funkcji nie zeruje się dla konkretnego przesunięcia
   k, natomiast wartości te spokojnie spadają do zera.

Trzeba jednak pamiętać, że to jak dobrze będzie widać te własności zależy od ilości danych pomiarowych jak i od samych wartości parametrów modeli.



Rysunek 10: Unormowana funkcja autokowariancji i funkcja korelacji cząstkowej



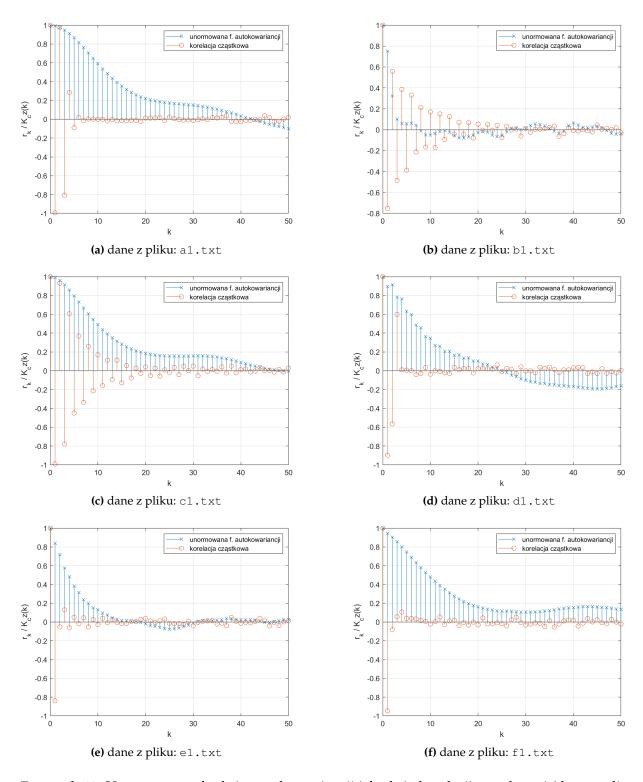
Rysunek 11: Unormowana funkcja autokowariancji i funkcja korelacji cząstkowej (ciąg dalszy)

Ostatnie zadanie jest sprawdzeniem wcześniej wysnutych wniosków w zadaniu praktycznym – mamy dane pomiarowe, a poza tym nic nie wiemy o ich "rodzicach". Na podstawie autokowariancji i korelacji cząstkowej staramy się poznać ich tożsamość.

## Obserwacje

- a) Autokowariancja raczej łagodnie zmierza do zera, natomiast dla korelacji cząstkowej widoczny jest gwałtowny spadek. Naszym zdaniem model to AR(5).
- b) Korelacja cząstkowa łagodnie dąży do zera, więc na pewno nie jest to model AR. Z autokowariancją nie jest tak łatwo z jednej strony widać gwałtwony spadek gdzieś dla k=3, ale wartości te później wciąż oscylują ze znaczącym wartościami wokół zera. Danych było raczej niewiele (ok. 2000) w porównaniu do naszych poprzednich badań, więc być może z tego powodu granice nie są tak ostre. Model to MA(3) lub ARMA. Raczej stawiamy nasze pieniądze na MA(3).
- c) Obie funkcje wyraźne łagodnie dążą do zera. Model to ARMA.
- d) Korelacja cząstkowa wyraźne i gwałtownie staje się zerowa. Model to AR(4).
- e) Znów gwałtowny spadek korelacji cząstkowej, przy łagodnym spadku autokowariancji. Pomimo tego spadku, korelacja cząstkowa nie osiąga tak zerowych wartości jak byśmy tego chcieli. Może to wynikać z niedużej liczby danych. Mimo wszystko uważamy, że model to AR(2).
- f) Sytuacja analogiczna do poprzedniej AR(2).

Jak widać zdobyta wiedza pozwoliła nam do pewnego stopnia zaproponować modele zdolne do opisu danych, ale mimo wszystko nie są to metody perfekcyjne. Po pierwsze w przypadku modeli ARMA trudniej jest określić stopnie (być może to my nie zauważyliśmy po prostu jakichś prawidłowości). Po drugie w przypadku niezbyt dużej liczby danych wszystko się trochę "rozmywa" i trudniej jest ujrzeć gwałtowne spadki i wartości prawie-zerowe istotne przy określaniu stopni.



**Rysunek 12:** Unormowana funkcja autokowariancji i funkcja korelacji cząstkowej (dane z plików zamieszczonych na platformie PZE)

# Kod

Do realizacji zadań wyrzeźbiliśmy ogromne ilości kodu. Tutaj zamieścimy niektóre z nich, pozwalające uzyskać część z zamieszczonych wyników. Pozostałe można uzyskać przy drobnych modyfikacjach.

#### Zadanie 1

```
clear all; close all; clc;
1
2
  a_arr = sort([-0.1, -0.8, 0.8, 0.1, 0.995, 2]);
3
   e = randn(1000, 1);
4
5
   for a = a_arr
       y = filter([1], [1, a], e);
7
       figure;
8
       plot(y);
9
       grid on;
10
       xlabel('i'); ylabel('y');
11
       [a, var(y)]
12
       filename = ['zdl_ar_a_', num2str(a), '.png'];
13
       exportgraphics(gcf, filename, 'Resolution', 200);
14
  end
15
```

#### Zadanie 2

```
clear all; close all; clc;
1
2
   a = 0.8;
3
   n = 100000;
4
   e = randn(n, 1);
   y = filter([1], [1, a], e);
7
   [xc, lags] = xcorr(y, 'biased');
10
   gamma = [];
11
12
   i_end = 100;
13
   gamma = 1 / (1 - a^2);
14
   for i = 1 : i\_end
15
       gamma(end + 1) = -a * gamma(end);
16
   end
17
18
```

```
k = 0 : i_end;
19
20
   figure;
21
  stem(lags, xc, 'o');
  hold on;
23
   stem(k, gamma, 'x');
24
  hold off; grid on;
25
  xlabel('k'); ylabel('\gamma_k');
26
  xlim([0, 10]);
27
   legend('xcorr', 'analitycznie');
28
29
   filename = ['zd1_ar_gamma_n_', num2str(n), '_img1.png'];
30
   % exportgraphics(gcf, filename, 'Resolution', 200);
31
32
  xlim([0, 100]);
33
  filename = ['zd1_ar_gamma_n_', num2str(n), '_img2.png'];
34
  % exportgraphics(gcf, filename, 'Resolution', 200);
```

Zadanie 3 to wykonanie zadań 1 i 2 dla modelu MA(1). By to zrobić potrzebujemy dokonać drobnych modyfikacji.

#### Zadanie 4

```
clear all; close all; clc;
1
2
   % generacja sygnału
3
  A = [1 -2.5 2 -0.5];
  e = randn(10000, 1);
  y = filter(1, A, e);
7
  figure; plot(y);
  grid on; xlabel('i'); ylabel('y(i)');
9
   % pierwsze różnicowanie
11
  y_1d = filter([1 -1], [1], y);
12
13
14
  figure; plot(y_1d);
  grid on; xlabel('i'); ylabel('y(i)');
15
16
  % drugie różnicowanie
17
  y_2d = filter([1 -1], [1], y_1d);
18
19
```

```
figure; plot(y_2d);
20
   grid on; xlabel('i'); ylabel('y(i)');
21
22
   % ten sam efekt daje użycie modelu ARMA, lub skrócenie biegunów
23
   y_v2 = filter([1 -2 1], A, e);
24
25
   y_v3 = filter(1, [1 - 0.5], e);
26
  figure; plot(y_v2);
27
   grid on; xlabel('i'); ylabel('y(i)');
28
29
  figure; plot(y_v3);
30
  grid on; xlabel('i'); ylabel('y(i)');
31
32
  % figure(1); exportgraphics(gcf, 'zd4_y.png', 'Resolution', 200);
33
  % figure(2); exportgraphics(gcf, 'zd4_y_1d.png', 'Resolution', 200);
34
  % figure(3); exportgraphics(gcf, 'zd4_y_2d.png', 'Resolution', 200);
35
  % figure(4); exportgraphics(gcf, 'zd4_y_v2.png', 'Resolution', 200);
  % figure(5); exportgraphics(gcf, 'zd4_y_v3.png', 'Resolution', 200);
37
```

```
clear all; close all; clc;
2
3
  % A = [1 \ 0.8]; C = [1];
  % A = [1 0.8 0.6]; C = [1];
4
  % A = [1 \ 0.7 \ 0.3 \ 0.45]; C = [1];
5
  % A = [1]; C = [1 0.5];
   % A = [1]; C = [1 -0.5 0.9];
7
  % A = [1]; C = [1 -0.5 0.9 -0.4];
  % A = [1]; C = [1 -2 0.7525 0.4998 -0.2004 -0.0505];
  % A = [1 -1.3 \ 0.5 -0.056]; C = [1 -0.4 -0.34 \ 0.156];
  A = [1 -0.7]; C = [1 -0.4 -0.34 0.156];
11
12
  e = randn(100000, 1);
13
  y = filter(C, A, e);
14
15
   [xc, lags] = xcorr(y, 'biased');
16
  xc = xc . / xc(find(lags == 0));
17
18
  K_cz = [];
19
  k = 0 : 15;
20
  for i = k
21
       i;
22
    sys = armax(y, [i 0]);
```

```
K_cz(end + 1) = sys.A(end);
24
   end
25
26
  figure;
27
  stem(lags, xc, 'x');
28
29
  hold on;
  stem(k, K_cz, 'o');
30
  hold off;
31
  xlim([0, 15]); xlabel('k'); ylabel('r_k / K_cz(k)');
33
  legend('unormowana f. autokowariancji', 'korelacja cząstkowa');
35
  filename = ['zd5_a', num2str(length(A) - 1), ...
36
       '_c_', num2str(length(C) - 1), '.png'];
37
  exportgraphics(gcf, filename, 'Resolution', 200);
```

Zadanie 6 to wykonanie tego samego co w zadaniu 5, ale dla danych odczytywanych z plików.