MO – Projekt

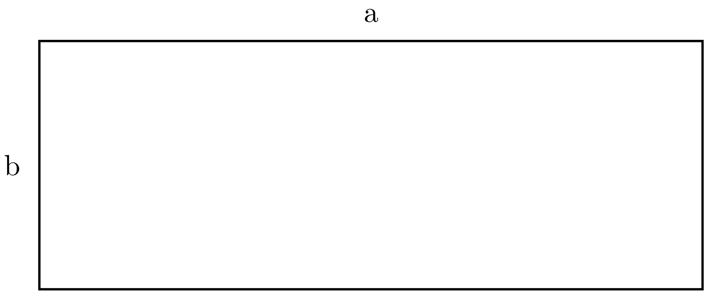
Zbrojenie

Maksymilian Skibiński, Paweł Kaźmieruk

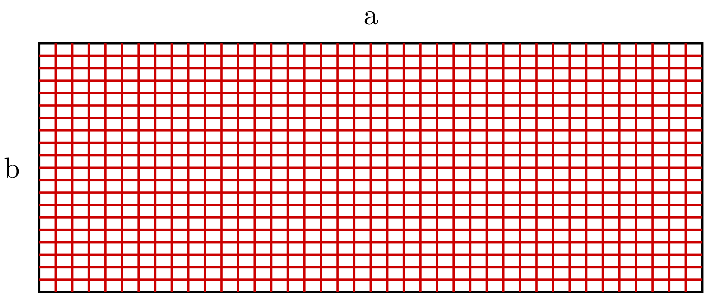
13 czerwca 2021 r.

Zadanie

Prostokątny fundament

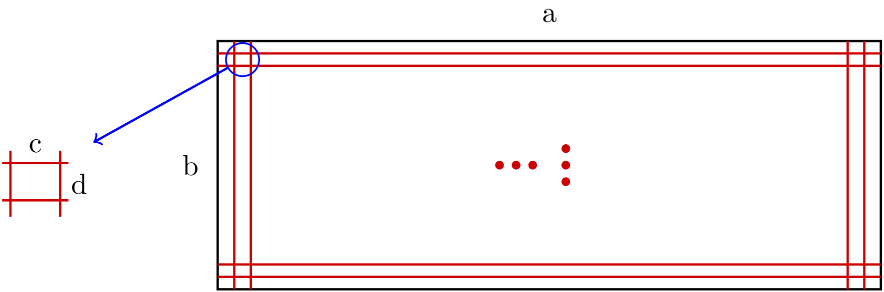


Zadanie
Zbrojenie



Zadanie

Zbrojenie – uproszczenie



Zadanie
Sklep

Oferta sklepu:

- możemy kupować druty o rozmiarze e [m],

Zadanie

Sklep

Oferta sklepu:

- możemy kupować druty o rozmiarze e [m],
- możemy je także ciąć dowolną ilość razy w dowolnych miejscach.

Zadanie

Sklep

Oferta sklepu:

- możemy kupować druty o rozmiarze e [m],
- możemy je także ciąć dowolną ilość razy w dowolnych miejscach.

Wszystko oczywiście kosztuje:

cena za metr pręta: g [zł],

cena za jedno cięcie: h [zł].

Zadanie
Pozostałe informacje

- Transport prętów wymaga, by wszystkie pręty były niedłuższe niż f [m],

Zadanie
Pozostałe informacje

- Transport prętów wymaga, by wszystkie pręty były niedłuższe niż f [m],
- Jeśli do budowy jednego pręta na siatce fundamentowej użyjemy więcej niż jednego pręta, to należy zastosować „zakładkę” o minimalnej długości i [m].

Wszystkie parametry:

- a x b [m] – wymiary fundamentu,

Wszystkie parametry:

- a x b [m] – wymiary fundamentu,
- c x d [m] – wymiary „oczka” siatki,

Zadanie
Podsumowanie

Wszystkie parametry:

- a x b [m] – wymiary fundamentu,
- c x d [m] – wymiary „oczka” siatki,
- e – rozmiar sprzedawanych prętów,

Zadanie
Podsumowanie

Wszystkie parametry:

- a x b [m] – wymiary fundamentu,
- c x d [m] – wymiary „oczka” siatki,
- e – rozmiar sprzedawanych prętów,

- g – koszt jednego metra pręta,

Wszystkie parametry:

- a x b [m] – wymiary fundamentu,
- c x d [m] – wymiary „oczka” siatki,
- e – rozmiar sprzedawanych prętów,

- g – koszt jednego metra pręta,
- h – koszt jednego cięcia,

Wszystkie parametry:

- a x b [m] – wymiary fundamentu,
- c x d [m] – wymiary „oczka” siatki,
- e – rozmiar sprzedawanych prętów,
- f – ograniczenie transportowe,
- g – koszt jednego metra pręta,
- h – koszt jednego cięcia,

Wszystkie parametry:

- a x b [m] – wymiary fundamentu,
- c x d [m] – wymiary „oczka” siatki,
- e – rozmiar sprzedawanych prętów,
- f – ograniczenie transportowe,
- g – koszt jednego metra pręta,
- h – koszt jednego cięcia,
- i – długość minimalnej zakładki.

Zadanie

Podsumowanie

Dostaliśmy także pewne przykładowe wartości tych parametrów:

a x b = 8 m x 8 m,

c x d = 0.2 m x 0.15 m,

e = 6 m,

f = 4 m,

g = 2.08 zł,

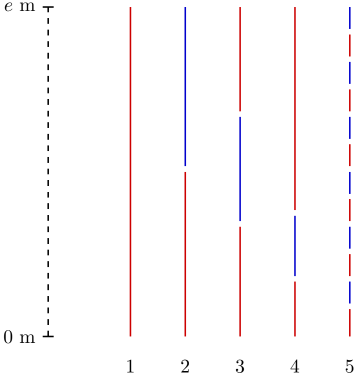
h = 0.2 zł,

i = 0.3 m.

Opis matematyczny

Pręty
Kupno

- Możemy kupować pręty *e* metrowe,
- ale możemy je także ciąć w dowolnych miejscach dowolną ilość razy.



Pręty

Zapis wektorowy

W ten sposób, wszystkie pręty, które posiadamy możemy opisywać w postaci wektorów:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \left[p_{11}\ p_{12}\ \cdots\ p_{1i}\ \cdots\ p_{1Y_1}\right] \\
\mathbf{p}_2 &= \left[p_{21}\ p_{22}\ \cdots\ p_{2i}\ \cdots\ p_{2Y_2}\right] \\
&\vdots \\
\mathbf{p}_j &= \left[p_{j1}\ p_{j2}\ \cdots\ p_{ji}\ \cdots\ p_{jY_j}\right] \\
&\vdots \\
\mathbf{p}_U &= \left[p_{U1}\ p_{U2}\ \cdots\ p_{Ui}\ \cdots\ p_{UY_U}\right]
\end{aligned}
$$

Pręty

Zapis wektorowy

W ten sposób, wszystkie pręty, które posiadamy możemy opisywać w postaci wektorów:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \; p_{12} & \cdots & p_{1i} & \cdots & p_{1Y_1} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} p_{21} \; p_{22} & \cdots & p_{2i} & \cdots & p_{2Y_2} \end{bmatrix}$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{p}_j = \begin{bmatrix} p_{j1} \; p_{j2} & \cdots & p_{ji} & \cdots & p_{jY_j} \end{bmatrix}$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{p}_U = \begin{bmatrix} p_{U1} \; p_{U2} & \cdots & p_{Ui} & \cdots & p_{UY_U} \end{bmatrix}$$

- Jest w sumie U prętów,

Pręty

Zapis wektorowy

W ten sposób, wszystkie pręty, które posiadamy możemy opisywać w postaci wektorów:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \; p_{12} & \cdots & p_{1i} & \cdots & p_{1Y_1} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} p_{21} \; p_{22} & \cdots & p_{2i} & \cdots & p_{2Y_2} \end{bmatrix}$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{p}_j = \begin{bmatrix} p_{j1} \; p_{j2} & \cdots & p_{ji} & \cdots & p_{jY_j} \end{bmatrix}$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{p}_U = \begin{bmatrix} p_{U1} \; p_{U2} & \cdots & p_{Ui} & \cdots & p_{UY_U} \end{bmatrix}$$

- Jest w sumie U prętów,
- Każdy pręt p_j składa się z Y_j części.

Pręty
Zapis macierzowy

Ewentualnie, można też zapisać wszystko w postaci jednej większej macierzy:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1i} & \cdots & p_{1Y} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2i} & \cdots & p_{2Y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{j1} & p_{j2} & \cdots & p_{ji} & \cdots & p_{jY} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{U1} & p_{U2} & \cdots & p_{Ui} & \cdots & p_{UY} \end{bmatrix}$$

Pręty
Zapis macierzowy

Ewentualnie, można też zapisać wszystko w postaci jednej większej macierzy:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1i} & \cdots & p_{1Y} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2i} & \cdots & p_{2Y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{j1} & p_{j2} & \cdots & p_{ji} & \cdots & p_{jY} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{U1} & p_{U2} & \cdots & p_{Ui} & \cdots & p_{UY} \end{bmatrix}$$

Ale, tym razem musiałby być ustalony pewien stały wymiar Y.

Pręty
Ograniczenia

Na pręty oraz ich części („podpręty”) nałożone są ograniczenia:

- Długość całego pręta to *e* m, ze względu na sklep, zatem jego składowe muszą w sumie dawać *e* m:

$$\forall_{k \in \{1,2,\ldots,U\}} \quad \sum_{j=1}^{Y_k} p_{kj} = e$$

Pręty
Ograniczenia

Na pręty oraz ich części („podpręty”) nałożone są ograniczenia:

- Długość całego pręta to e m, ze względu na sklep, zatem jego składowe muszą w sumie dawać e m:

$$\forall_{k \in \{1,2,\ldots,U\}} \quad \sum_{j=1}^{Y_k} p_{kj} = e$$

- Każda składowa każdego prętu musi być krótsza niż f m, ze względu na transport:

$$\forall_{k \in \{1,2,\ldots,U\}} \forall_{j \in \{1,2,\ldots,Y_k\}} \quad p_{kj} \leq f$$

Funkcja celu

Zatem, jako że chcemy minimalizować wydane pieniądze:

$$\min \leftarrow J = U \cdot e \cdot g + \sum_{j=1}^{U} (Y_j - 1) \cdot h$$

gdzie:

U – liczba prętów,

Y_j – liczba „podprętów”,

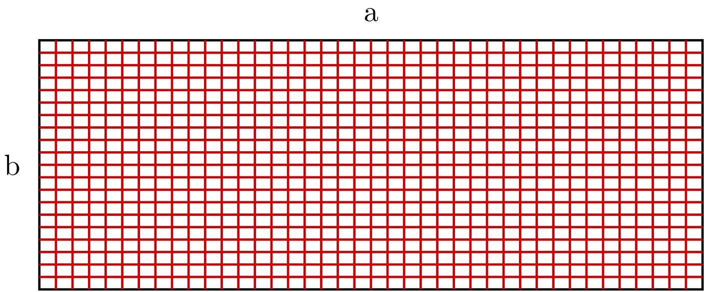
e – długość sprzedawanych prętów,

g – cena za metr pręta,

h – cena za jedno przecięcie.

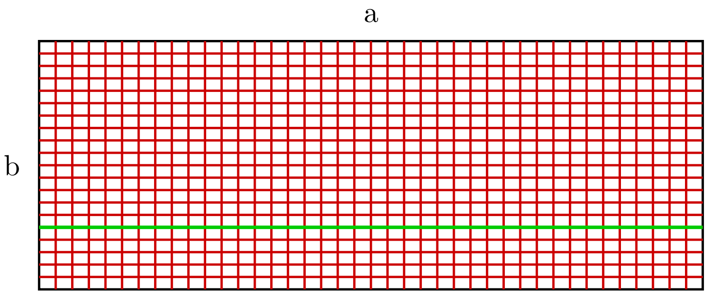
Siatka

Cała siatka składa się z wielu prętów i wygląda mniej więcej tak:



Siatka

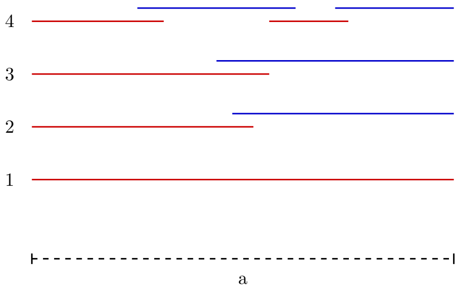
Cała siatka składa się z wielu prętów i wygląda mniej więcej tak:



Weźmy pod uwagę jeden pręt.

Siatka

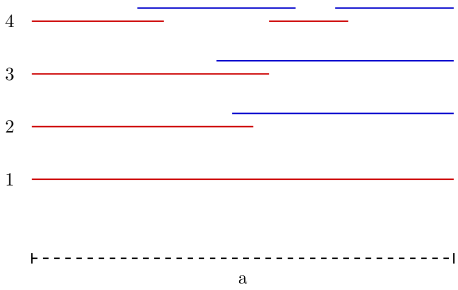
Zakładki



- Jeśli mamy jeden pręt... to OK,

Siatka

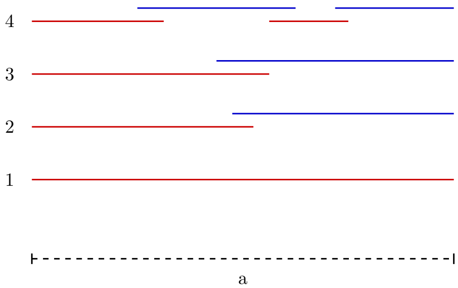
Zakładki



- Jeśli mamy jeden pręt... to OK,
- Jeśli kładziemy więcej niż jeden pręt stosujemy zakładkę o pewnej minimalnej długości,

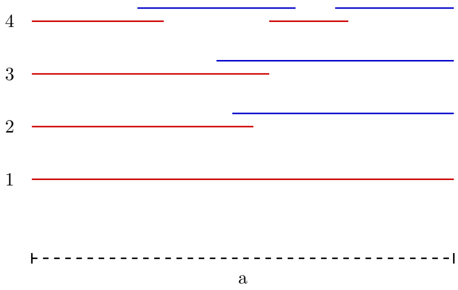
Siatka

Zakładki



- Jeśli mamy jeden pręt... to OK,
- Jeśli kładziemy więcej niż jeden pręt stosujemy zakładkę o pewnej minimalnej długości,
- równie dobrze zakładka może być dłuższa,

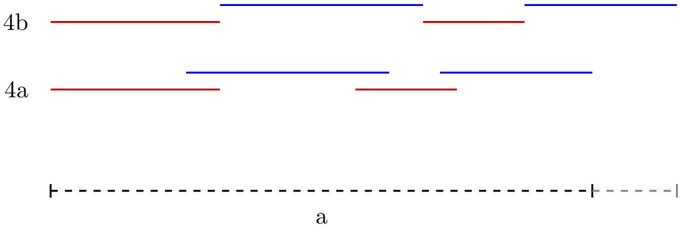
Siatka
Zakładki



- Jeśli mamy jeden pręt... to OK,
- Jeśli kładziemy więcej niż jeden pręt stosujemy zakładkę o pewnej minimalnej długości,
- równie dobrze zakładka może być dłuższa,
- więcej pretów to więcej zakładek.

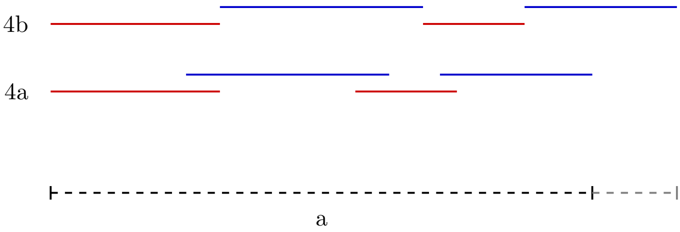
Siatka
Zakładki

Spójrzmy na zakładkę od innej strony – rozsuńmy pręty:



Siatka
Zakładki

Spójrzmy na zakładkę od innej strony – rozsuńmy pręty:



Czym więcej prętów, tym ich wspólna długość musi być większa.

Siatka
Równanie stanu

Jeden pręt na siatce możemy opisać poprzez równanie stanu.

Siatka
Równanie stanu

Jeden pręt na siatce możemy opisać poprzez równanie stanu.

$$x_{n+1} = x_n + u_n$$

$$x_0 = 0$$
$$x_N \geq a + (N-1) \cdot 2 \cdot i$$
$$i \leq u_n \leq f$$

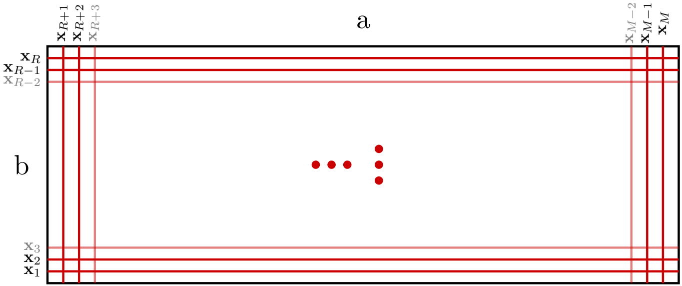
gdzie:

- a – to długość wymiaru siatki,
- N – to liczba prętów na długości,
- i – to długość minimalnej zakładki,
- f – to ograniczenie transportowe.

Siatka

Równania stanu

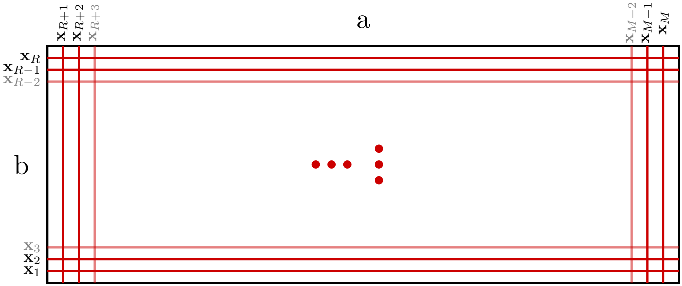
Każdy pręt z siatki jest opisanie przez swój stan i sterowania:



Siatka

Równania stanu

Każdy pręt z siatki jest opisanie przez swój stan i sterowania:



Jest w sumie M prętów:

- R poziomych,
- $M - R$ pionowych.

Siatka

Sterowania

Wektory sterowań dla każdego prętu siatki:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \begin{bmatrix} u_{10} \; u_{11} & \cdots & u_{1K_1} \end{bmatrix} \\
\mathbf{u}_2 &= \begin{bmatrix} u_{20} \; u_{21} & \cdots & u_{2K_2} \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
\mathbf{u}_i &= \begin{bmatrix} u_{i0} \; u_{i1} & \cdots & u_{iK_i} \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
\mathbf{u}_M &= \begin{bmatrix} u_{M0} \; u_{M1} & \cdots & u_{MK_M} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Siatka
Sterowania

Wektory sterowań dla każdego prętu siatki:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \begin{bmatrix} u_{10} \; u_{11} & \cdots & u_{1K_1} \end{bmatrix} \\
\mathbf{u}_2 &= \begin{bmatrix} u_{20} \; u_{21} & \cdots & u_{2K_2} \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
\mathbf{u}_i &= \begin{bmatrix} u_{i0} \; u_{i1} & \cdots & u_{iK_i} \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
\mathbf{u}_M &= \begin{bmatrix} u_{M0} \; u_{M1} & \cdots & u_{MK_M} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Analogicznie do prętów zakupionych (p) te zapisy też możemy sprowadzić do jednej macierzy **U**.

Siatka
Podsumowanie

Równanie stanu:

$$x_{in+1} = x_{in} + u_{in}$$

Równanie stanu:

$$x_{in+1} = x_{in} + u_{in}$$

Ograniczenia na stan:

$$x_{i0} = 0 \qquad x_{iN_i} \geq \begin{cases} a + (N_i - 1) \cdot 2 \cdot i & \text{dla } i \in \{1, 2, \ldots, R\} \\ b + (N_i - 1) \cdot 2 \cdot i & \text{dla } i \in \{R+1, R+2, \ldots, M\} \end{cases}$$

Siatka
Podsumowanie

Równanie stanu:

$$x_{in+1} = x_{in} + u_{in}$$

Ograniczenia na stan:

$$x_{i0} = 0 \qquad x_{iN_i} \geq \begin{cases} a + (N_i - 1) \cdot 2 \cdot i & \text{dla } i \in \{1, 2, \ldots, R\} \\ b + (N_i - 1) \cdot 2 \cdot i & \text{dla } i \in \{R+1, R+2, \ldots, M\} \end{cases}$$

Ograniczenie na sterowania to:

$$i \leq u_{in} \leq f,$$

czyli pręty muszą być dłuższe niż minimalna zakładka (i), ale krótsze niż ograniczenie transportowe (f).

Powiązanie

Zaproponowaliśmy opisy dwóch zagadnień:

- prętów zakupionych (wektory p),
- prętów na siatce (wektory u).

Powiązanie

Zaproponowaliśmy opisy dwóch zagadnień:

- prętów zakupionych (wektory p),
- prętów na siatce (wektory u).

Jak to powiązać?

Powiązanie

Zasada:

$$\forall_{p_{ij}}\ \exists!_{u_{mk}}\ p_{ij} = u_{mk} \qquad \wedge \qquad \forall_{u_{mk}}\ \exists!_{p_{ij}}\ u_{mk} = p_{ij}$$

Dla każdego pręta p_{ij} (zakupionego) istnieje dokładnie jeden pręt u_{mk} (zbrojeniowy) i vice versa.

Powiązanie

Zakładając macierzowy zapis **P** i **U**:

$$
\overset{\mathbf{P}}{\begin{bmatrix}
p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1i} & \cdots & p_{1Y} \\
p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2i} & \cdots & p_{2Y} \\
p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3i} & \cdots & p_{3Y} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
p_{j1} & p_{j2} & p_{j3} & \cdots & p_{ji} & \cdots & p_{jY} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
p_{U1} & p_{U2} & p_{U3} & \cdots & p_{Ui} & \cdots & p_{UY}
\end{bmatrix}}
\quad
\overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1k} & \cdots & u_{1K} \\
u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2k} & \cdots & u_{2K} \\
u_{31} & u_{32} & u_{33} & \cdots & u_{3k} & \cdots & u_{3K} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
u_{m1} & u_{m2} & u_{m3} & \cdots & u_{mk} & \cdots & u_{mK} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
u_{M1} & u_{M2} & u_{M3} & \cdots & u_{Mk} & \cdots & u_{MK}
\end{bmatrix}}
$$

Niestety, sposób w jaki opisaliśmy problem utrudnił nam znalezienie rozwiązania...

Koniec