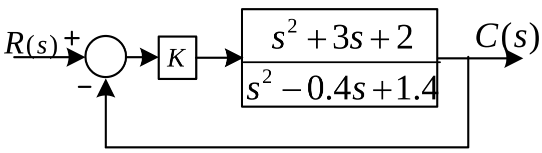
15.06.2015

OTOMATİK KONTROL BÜTÜNLEME SINAVI CEVAPLARI

S1)



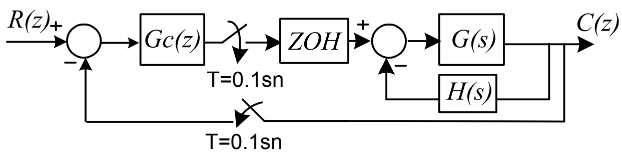
Yanda verilen kontrol sistemi için;

a) Kök-yer eğrisini çiziniz. (kutuplar, sıfırlar, kutup-sıfır dağılımı, asimtodlar, kopma noktaları, imajiner ekseni kesme noktalarını, kompleks kutuptan çıkış açısını bulunuz)

b) Kararlılık analizini yapınız

c) $s_{1,2} = -1.3 \pm 0.5j$ kapalı çevrim kutupları olması için kazancı yer eğrisinden hesaplayınız.

S2)



Yanda kapalı çevrim kontrol blok diyagramı verilen sisteminde ; $G_c(z) = K$

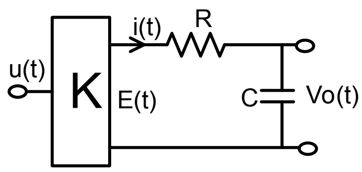
$G(s) = \dfrac{1}{s+0.2}$; $H(s) = 0.8$; $T = 0.1sn$ olmak üzere;

a) $\dfrac{C(z)}{R(z)}$ kapalı çevrim transfer fonksiyonunu elde ediniz.

b) Kararlılık analizi yapınız

c) $R(z)$ birim basamak giriş ve K=15 olduğuna göre $C(k) = ?$ elde ediniz.

S3)

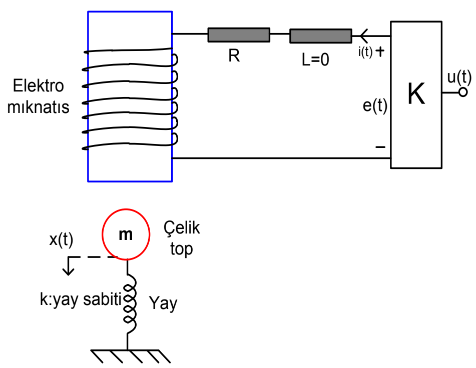


Yanda belirtilen sistem sayısal işlemci ile kontrol edilecektir.

a) Sistemi tanımlayan dinamik denklemleri yazınız. $G(s) = \dfrac{V_o(s)}{U(s)}$ kapalı çevrim transfer fonksiyonunu elde ediniz.

b) $D(z)$ ayrık zaman kontrolcü olmak üzere kapalı çevrim kontrol blok diyagramını çiziniz. (Her bloğa ait transfer fonksiyonu yazınız)

S4)



Şekilde çelik top bir elektro mıknatıs yardımı ile $x(t)$ pozisyonunda asılı olarak tutulmak istenmektedir. **<u>SİSTEM DENGEDE</u>** ($F(t) = \dfrac{K_e i^2(t)}{x^2(t)}$ *elektro mıknatıs kuvvet,* <u>Elektromıknatısa ait endüktans ihmal edilecektir</u>.

K_e :elektro mıknatıs katsayısı, k :yay sabiti olmak üzere,

a) Sisteme ait dinamik denklemleri yazınız

b) $x(t) = x_0(t)$ çalışma noktası etrafında sistemi doğrusallaştırarak

$\Delta \dot{x}(t) = A^* \Delta x(t) + B^* \Delta u(t)$ vektör matris formunda elde ediniz.

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_0, r_0} \qquad B^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r_1} & \frac{\partial f_1}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial r_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r_1} & \frac{\partial f_2}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial r_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial r_1} & \frac{\partial f_n}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial r_n} \end{bmatrix}_{x_0, r_0}$$

$$x(k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_i)^m X(z) z^{k-1} \right]_{z=z_i}$$

$$X(z) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[(s-s_i)^m X(s) \frac{z}{z-e^{sT}} \right] \right\}$$

Başarılar, Süre 90 dk

Prof. Dr. Ayhan ÖZDEMİR, Yrd. Doç. Dr. Zekiye ERDEM

CEVAPLAR

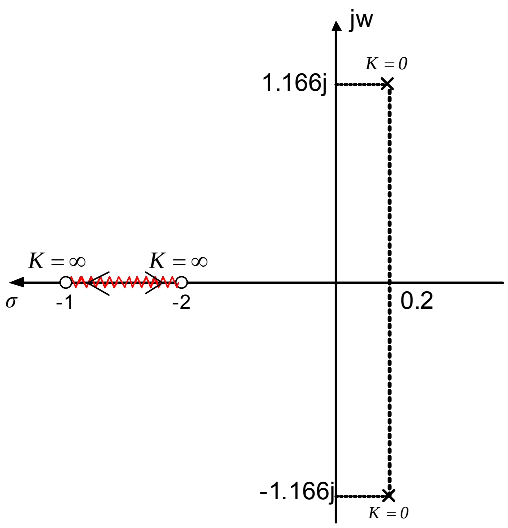
C1. a)

1. $A.Ç.T.F. = \dfrac{K\left(s^2+3s+2\right)}{s^2-0.4s+1.4}$

Açık çevrim transfer fonksiyonuna ait:

Kutuplar	Sıfırlar
$p_1 = 0.2+1.166j$	$s_1 = -1$
$p_2 = 0.2-1.166j$	$s_2 = -2$
---------------------	-----------------------
$n=2$ Kutup sayısı.	$m=2$ Sıfır sayısı.

2. Kutup sıfır dağılımı



- ✓ iki Sıfır arası kök-yer eğrisine dahil olduğundan bir adet girdi olarak kopma noktası olacaktır.

3. Asimtodlar

n-m=0, Kutup sayısı = Sıfır sayısı olduğundan kök-yer eğrisinin sonsuza giden kolu dolayısıyla asimtodu yoktur.

4.Kopma noktaları;

$\dfrac{dG(s)H(s)}{ds}=0$ ifadesinden hesaplanır. $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{K\left(s^2+3s+2\right)}{s^2-0.4s+1.4}\right)=0$ dan

$$\Rightarrow K\left[\frac{(2s+3)(s^2-0.4s+1.4)-(2s-0.4)(s^2+3s+2)}{(s^2-0.4s+1.4)^2}\right]=0 \text{ dan}$$

$$-3.4s^2-1.2s+5=0 \rightarrow \boxed{s_1=-1.4019};\ s_2=-1.049$$

- ✓ iki sıfır arası kök-yer eğrisine dahil olduğundan bir adet girdi olarak kopma noktası olacaktır. Dahil olan bölge göz önünde bulundurulduğunda (-1 ve -2 noktaları arası);
- ✓ **<u>Girdi olarak kopma noktası=-1.4019 noktasıdır.</u>**

5. Imajiner ekseni kesme noktaları

Imajiner ekseni kesme noktaları 2 yol ile hesaplanabilinir.

I. YOL:

Yer eğrisinin imajiner ekseni kesme noktaları karakteristik denklem köklerinin kritik (sınır) kazanç değeri için K_s hesaplanması ile de elde edilebilir.

karakteristik denklem:

$$F(s)=1+G(s)H(s)=1+\frac{K\left(s^2+3s+2\right)}{s^2-0.4s+1.4}=0 \quad\Rightarrow\quad F(s)=(1+K)s^2+(3K-0.4)s+2K+1.4=0$$

Routh tablosu oluşturulur.

s^2	$1+K$	$2K+1.4$
s^1	$3K-0.4$	0
s^0	$2K+1.4$	0

1. sütunda bulunan katsayıların tümü pozitif olmalıdır.

$1+K>0$ ise $K>-1$ dır.

$3K-0.4>0$ ise $K>0.133$ dür.

$2K+1.4>0$ $K>-0.7$ dir.

Her üç koşul $K>0.133$ için sağlanmaktadır.

$0.133<K<\infty$ aralığında olmalıdır. Sınır kazanç **Ks=0.133** dür.

K=0.133 için sistem marjinal kararlı davranır. Sınır kazanç değeri için karakteristik denklem ile kök yer eğrisinin sanal ekseni kestiği nokta elde edilir.

Tabloda s^2 terimden denklem yazılır ve K yerine Ks (sınır kazanç) koyulur.

$(1+K)s^2+(2K+1.4)=0$ denkleminde K=0.133 yazılır.

$F(s)=1.133s^2+1.666=0 \rightarrow \boxed{s_{1,2}=\pm j1,2126}$ olarak elde edilir.

II. YOL: Karakteristik denklemde s yerine jw koyularak

$$F(s)=1+G(s)H(s)=1+\frac{K\left(s^2+3s+2\right)}{s^2-0.4s+1.4}=0 \quad\Rightarrow\quad F(s)=(1+K)s^2+(3K-0.4)s+2K+1.4=0$$

İmajiner eksende kompleks köklerin reel kısımları , $\sigma=0$ *dır.*

$s\rightarrow jw$ *koyulur ve* $F(jw)=(1+K)(jw)^2+(3K-0.4)(jw)+2K+1.4=0$ yazılır.

$F(s) = -(1+K)w^2 + (3K-0.4)\,jw + 2K + 1.4 = 0$

$-(1+K)w^2 + 2K + 1.4 + jw(3K-0.4) = 0$ reel ve imajiner kısımlar ayrı ayrı sıfıra eşitlen ir.

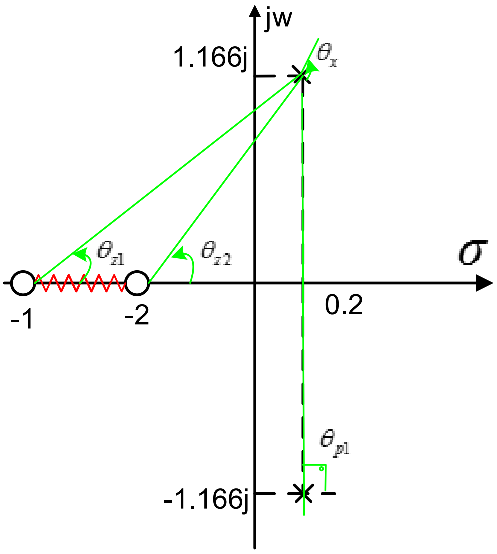
$3K - 0.4 = 0 \;\rightarrow K = \dfrac{0.4}{3}$ $\boxed{K = K_s = 0.133}$ sınır kazanç elde edilir. Bu sınır kazanç değeri

$-(1+K)w^2 + 2K + 1.4 = 0$ ifadesinde yerine koyulur.

$-(1+0.133)w^2 + 2*0.133 + 1.4 = 0$ ise $w^2 = -\dfrac{1.666}{1.133} \;\rightarrow\; w^2 = 1.471$

$\boxed{w = \pm 1.2126}$ $s_{1,2} = \mp jw \;\rightarrow\; s_{1,2} = \mp j1.2126\,j$ imajiner ekseni kesme noktaları elde edilir.

5. Imajiner Kutuptan çıkış açısı: Kutuplardan çıkış açıları faz koşulundan bulunur.



$\theta_{z1} = 180 - \tan^{-1}\dfrac{1.166}{1.2}$ $\theta_{z1} = 44.17^0$

$\theta_{z2} = 180 - \tan^{-1} 2.2$ $\theta_{z1} = 27.92^0$

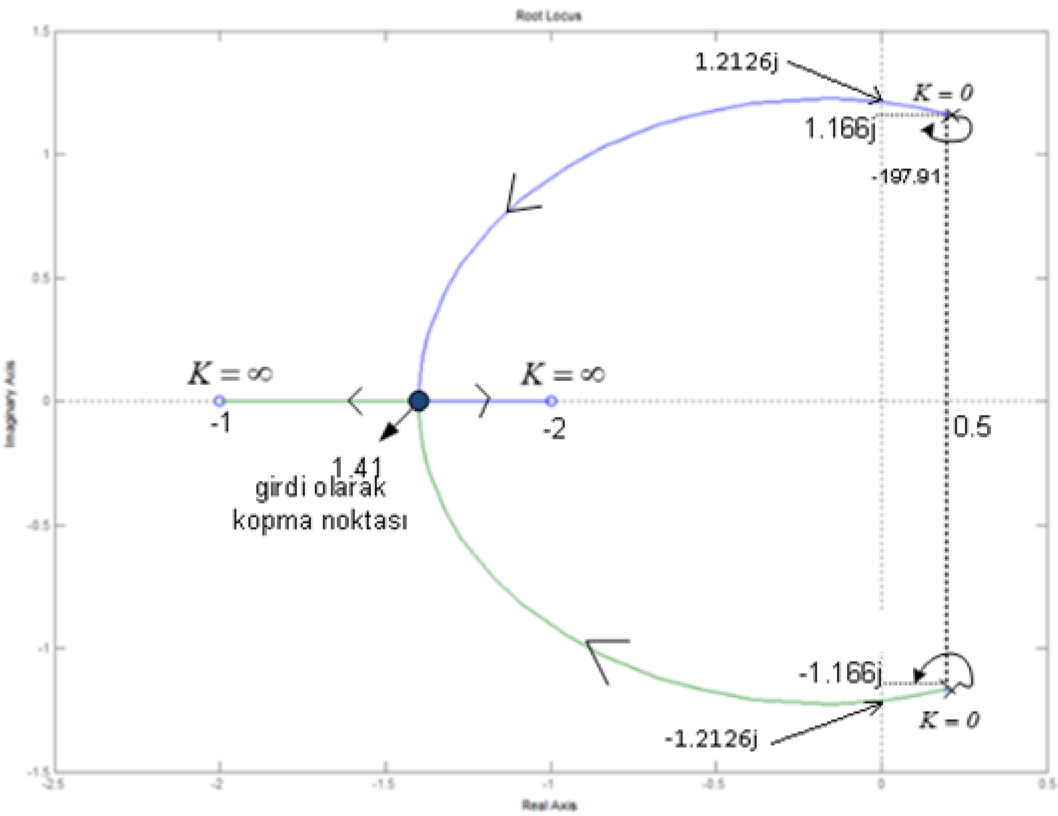
$\theta_{p1} = 90^\circ$

$(\theta_{z1} + \theta_{z2}) - (\theta_{p1} + \theta_x) = 180^\circ$

$-\theta_x = 180^\circ - 44.17^\circ - 27.92^\circ + 90^\circ$

$\theta_x = -197.91^\circ$

Tüm hesaplamalardan sonra incelenen sistem için kök-yer eğrisi aşağıda çizdirilmiştir.



NOT: Kök yer eğrisi reel eksene göre simetriktir.

b) Kararlılık analizi

karakteristik denklem:

$$F(s)=1+G(s)H(s)=1+\frac{K\left(s^2+3s+2\right)}{s^2-0.4s+1.4}=0 \quad \Rightarrow \quad F(s)=(1+K)s^2+(3K-0.4)s+2K+1.4=0$$

Routh-Hurwitz kararlılık kriteri ile sistemin kararlılık analizi için önce 2 gerek koşula bakılmalıdır.

Ön bilgi:

1-) karakteristik polinom katsayılarının tümü aynı işaretli olmalıdır.

2-) karakteristik polinom katsayılarının hiçbiri ‘0’ olmamalıdır.

Karakteristik denklem K’ya bağlı olduğundan yeter koşuldan elde edilecek olan “K “ aralığı her iki gerek koşulu sağlayacaktır.

1. sütunda bulunan katsayıların tümü pozitif olmalıdır.

$1+K>0$ ise $K>-1$ dır.

$3K-0.4>0$ ise $K>0.133$ dür.

$2K+1.4>0$ $K>-0.7$ dir.

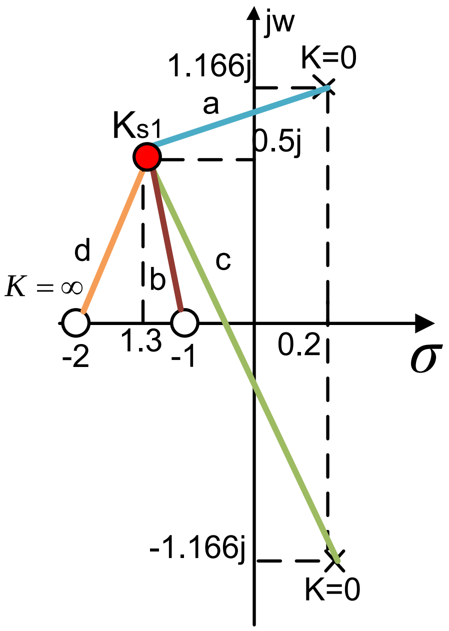
Her üç koşul $K>0.133$ için sağlanmaktadır.

$0.133<K<\infty$ aralığında olmalıdır.

Yeter koşul için Routh tablosu oluşturulur

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1+K & 2K+1.4 \\ s^1 & 3K-0.4 & 0 \\ s^0 & 2K+1.4 & 0 \end{array}$$

c) $s_{1,2} = -1.3 \pm 0.5j$ **noktasındaki kazancın bulunması**



$$a = \sqrt{(0.666^2) + (1.5^2)} = 1.6412;$$

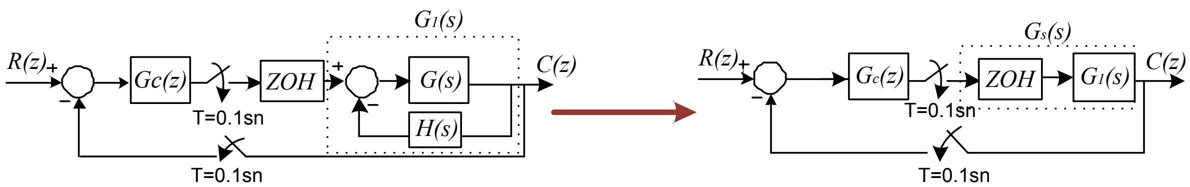
$$b = \sqrt{(0.3^2) + (0.5^2)} = 0.5831;$$

$$c = \sqrt{(1.666^2) + (1.5^2)} = 2.2418;$$

$$d = \sqrt{(0.7^2) + (0.5^2)} = 0.8602$$

$$K_{s1} = \frac{a*c}{b*d} = \frac{1.64112*2.2418}{0.5831*0.8602} = 7.31$$

C.2)



a) $\dfrac{C(z)}{R(z)} = \dfrac{G_c(z)G_s(z)}{1+G_c(z)G_s(z)}$

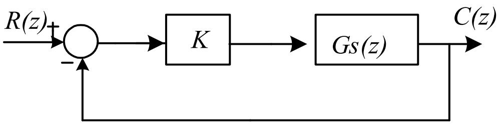
$$G_1(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{1/s+0.2}{1+\dfrac{1}{s+0.2}0.8} = \frac{1}{s+1}$$

$$G_s(z) = z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}G_1(s)\right\}$$

$$G_s(z) = z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{s+1}\right\}_{T=0.1} = (1-z^{-1})z\left\{\frac{1}{(s+1)}\frac{1}{s}\right\}_{T=0.1}$$

$$= \frac{z-1}{z}\left\{ s\frac{1}{s(s+1)}\frac{z}{z-e^{sT}}\bigg|_{s=0} + (s+1)\frac{1}{s(s+1)}\frac{z}{z-e^{sT}}\bigg|_{s=-1} \right\}\Bigg|_{T=0.1} = \frac{z-1}{z}\left\{\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.9048}\right\}$$

$$G_s(z) = \frac{0.0952}{z-0.9048}$$



$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{KG_s(z)}{1+KG_s(z)} = \frac{K\dfrac{0.0952}{z-0.9048}}{1+K\dfrac{0.0952}{z-0.9048}} = \frac{0.0952K}{z-0.9048+0.0952K}$$

b) Jury Kararlılık analizi

$$F(z) = 1+G(z)H(z) = 1+\frac{0.0952K}{z-0.9048} = 0$$

$$F(z) = z-0.9048+0.0952K = 0$$

<u>Yeter Koşullar:</u>

i) $F(1)>0 \quad \rightarrow \quad F(1)=1-0.9048+0.0952K>0 \quad \Rightarrow \quad K>-1$

ii) $(-1)F(1)>0 \quad \rightarrow \quad (-1)F(-1)=-(-1-0.9048+0.0952K)>0 \quad \Rightarrow \quad K>2$

<u>Gerek Koşul:</u>

$|a_n|>|a_0| \quad \rightarrow \quad |1|>|0.0952K-0.9048| \qquad 1.9048>0.0952K \Rightarrow \quad K<20$

<u>Kararlılık aralığı:</u> $\boxed{0<K<20}$ olarak bulunur.

<u>c) K=15 için;</u>

$$R(s)=\frac{1}{s} \quad ise \quad R(z)=\frac{z}{z-1} \quad olur.$$

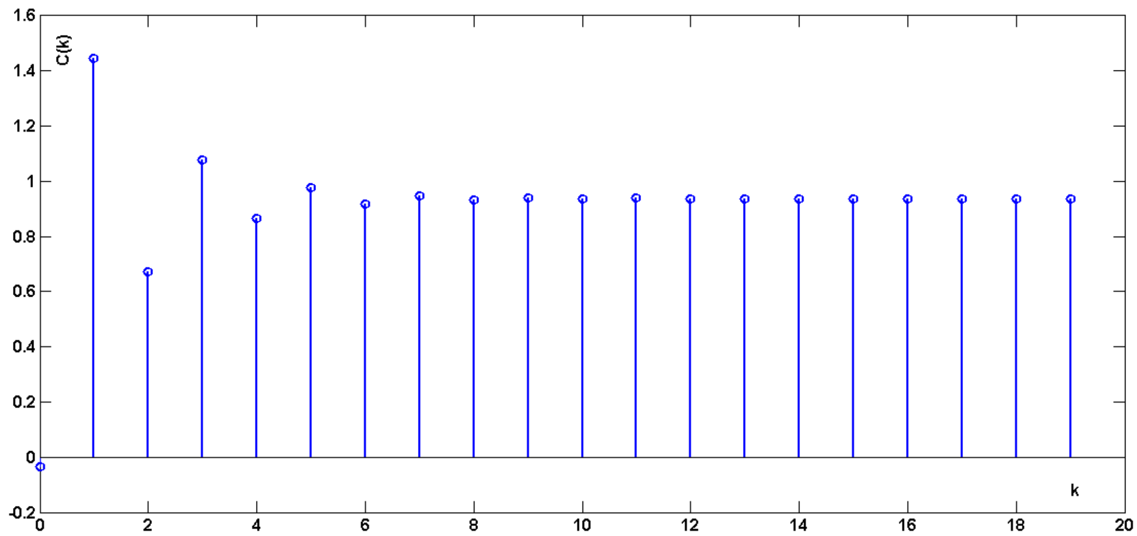
$$C(z) = \frac{0.0952\times 15}{z-0.9048+0.0952x15}\frac{z}{z-1}$$

$$C(z) = \frac{1.428}{z+0.5232}\frac{z}{z-1}$$

$$c(k) = \cancel{(z-1)}\,\frac{1.428\,\cancel{z}}{\cancel{(z-1)}\,(z+0.5232)}\,z^{k\cancel{-1}}\Bigg|_{z=1} + \cancel{(z+0.5232)}\,\frac{1.428\,\cancel{z}}{(z-1)(z+0.5232)}\,z^{k\cancel{-1}}\Bigg|_{z=-0.5232}$$

$$c(k) = 0.9375\;(1)^k - 0.9732\;(-0.523)^k$$

Ek BİLGİ: C(k) nın k'ya göre aldığı değerlerin grafik gösterimi.



C3.

a) **t domein** **t domein**

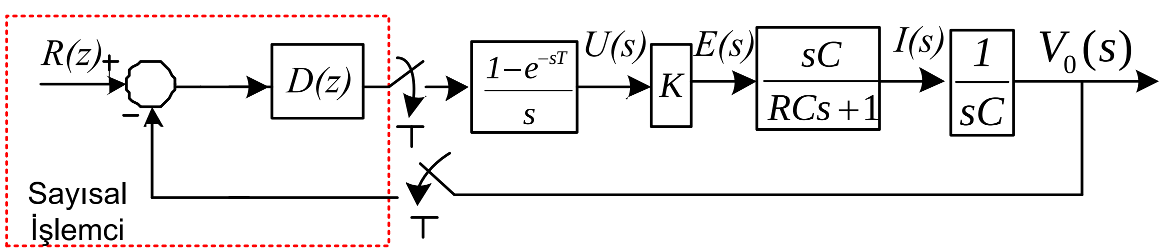
$$E(t) = u(t)K \qquad\qquad E(s) = U(s)K$$

$$E(t) = i(t)R + \underbrace{\frac{1}{C}\int i(t)dt}_{V_0(t)} \qquad\qquad E(s) = I(s)R + \frac{I(s)}{sC}$$

$$E(s) = \frac{RCs+1}{sC}\;I(s) \;\rightarrow\; I(s) = \frac{sC}{RCs+1}E(s)$$

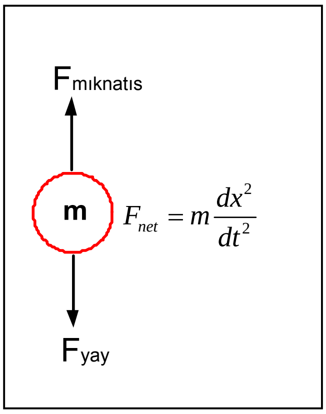
$$i(t) = C\frac{dV_0(t)}{dt} \qquad\qquad I(s) = sCV_0(s) \;\rightarrow\; V_0(s) = \frac{I(s)}{sC}$$

b) **Kapalı çevrim kontrol blok diyagramı**



C4.

a. sistemi tanımlayan diferansiyel denklemler



$$e(t) = Ri(t) + \underset{0}{L}\frac{d\,i(t)}{dt} \rightarrow \quad e(t) = Ri(t) \qquad i(t) = \frac{e(t)}{R}$$

$F_{mıknatıs} = F(t) = \frac{K_e\, i^2(t)}{x^2(t)}$ olarak verildi.

$$F_{mıknatıs} = F_{yay} + F_{net}$$

$F_{mıknatıs} = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} - k\,x(t)$ yazılır ve sistemi tanımlayan diferansiyel denklemler elde edilir.

$\frac{K_e\, i^2(t)}{x^2(t)} = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} - k\,x(t)$ ifadesi düzenlenir ise, $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{K_e\, i^2(t)}{m\,x^2(t)} + \frac{k}{m}x(t)$ elde edilir.

$i(t)$ ifadesi denklemde yerine yazılır, $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{K_e(\frac{e(t)}{R})^2}{m\,x^2(t)} + \frac{k}{m}x(t)$ verilen sistemi tanımlayan diferansiyel denklem

$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{k}{m}x(t) + \frac{K_e\; e(t)^2}{m\,R^2\; x^2(t)}}$ olarak elde edilir.

b. Çalışma noktası etrafında doğrusallaştırma: Önce durum değişkenleri tanımlanır,

$$x(t) = x_1(t) \quad olsun\,,$$

$\frac{dx(t)}{dt} = x_2(t) \quad olsun. \qquad Burdan \qquad \boxed{\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)}$ <u>**1. Durum denklemi.**</u>

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dx_2(t)}{dt} \qquad yazılır\ ve \quad tanımlanmış\ olan\ değişkenler\ \frac{d^2x(t)}{dt^2}\text{'}de \quad yerine\ koyulur$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{k}{m}x(t) + \frac{K_e\; e(t)^2}{m\,R^2\; x^2(t)}$$

$\boxed{\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{k}{m}x_1(t) + K_e\frac{e(t)^2}{m\,R^2\; x_1(t)^2}}$ <u>**2. Durum denklemi.**</u>

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{k}{m} & 0 \end{bmatrix}}_{f(.)} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{K_e}{m R^2 \; x_1(t)^2} \end{bmatrix}}_{g(.)} e(t)^2$$

Verilen sistem için 1 adet giriş $r_1 = e(t)$ vardır.

$$A^* = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x_0, e_0} \qquad B^* = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial r_1} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial r_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial e} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial e} \end{bmatrix}_{x_0, e_0}$$

$$f_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$f_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{k}{m} x_1(t) + K_e \frac{e(t)^2}{m R^2 \; x_1(t)^2}$$

$\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0$ ve $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$

$\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} = \dfrac{k}{m} - K_e \dfrac{e(t)^2 \, 2 m R^2 \; x_1(t)}{m^2 \, R^4 \; x_1(t)^4}\Bigg|_{x_0, e_0} \rightarrow \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} = \dfrac{k}{m} - 2K_e \dfrac{e_0(t)^2}{m R^2 \; x_{10}(t)^3}$ ve $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$ dır

$\dfrac{\partial f_1}{\partial e} = 0$ ve $\dfrac{\partial f_2}{\partial e} = 2K_e \dfrac{e_0(t)}{m R^2 \; x_{10}(t)^2}$ dir.

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{k}{m} - 2K_e \dfrac{e_0(t)^2}{m R^2 \; x_{10}(t)^3} & 0 \end{bmatrix} \qquad B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 2K_e \dfrac{e_0(t)}{m R^2 \; x_{10}(t)^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\Delta x_1(t)}{\Delta t} \\ \dfrac{\Delta x_2(t)}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{k}{m} - 2K_e \dfrac{e_0(t)^2}{m R^2 \; x_{10}(t)^3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2K_e \dfrac{e_0(t)}{m R^2 \; x_{10}(t)^2} \end{bmatrix} \Delta e(t)$$