Hafta 2:
Olasılık Teorisinin Temel Kavramları

Ele Alınacak Ana Konular

- Rastlantı deneylerinin tanımlanması
- Olasılık aksiyomları
- Sayma yöntemleri kullanarak olasılık hesabı

Rastlantı Deneylerinin Tanımlanması

- Aynı koşullar altında tekrarlandığında, tahmin edilemeyen çıkışlar üreten deneylere RASTLANTI DENEYİ denir.

- Bir rastlantı deneyi, deneysel bir işlem ve bir veya daha fazla ölçüm (gözlem) tanımlanarak belirtilir.

- Aynı deneysel işleme ilişkin olmalarına rağmen, rastlantı deneylerinin çıkışları farklı olabilir.

- Rastlantı değişkenleri birden fazla ölçüm içerebilir ve ölçümler sürekli olabilir.

- Bir rastlantı deneyi, basit alt deneylerin tekrarlanmasından oluşabilir.

Rastlantı Deneylerinin Tanımlanması

ÖRNEK:

E_1={1'den 50'ye kadar numaralandırılmış özdeş toplar içeren bir vazodan bir top çekilmesi ve topun üzerinde yazan sayının kaydedilmesi}

E_2={1'den 4'ye kadar numaralandırılmış toplar içeren bir vazodan bir top çekilerek rengi ve numarasının kaydedilmesi. 1 ve 2 siyah, diğerleri beyaz renklidir}

E_3={Bozuk bir paranın arka arkaya üç kez atılarak yazı ve tura gelme sayısının kaydedilmesi}

E_4={Bozuk bir paranın arka arkaya üç kez atılarak tura sayısının kaydedilmesi}

E_5={10 ms sürede, N adet konuşmacıdan oluşan bir grup için sadece dinlemeye karşılık gelen ses paketlerinin sayılması}

E_6={Bir bilgi, alıcıya hatasız ulaşıncaya kadar gürültülü bir kanal üzerinden tekrar iletilmektedir. Gerekli iletim sayısının belirlenmesi}

Rastlantı Deneylerinin Tanımlanması

E_7={0 ile 1 arasında bir sayının rastgele seçilmesi}

E_8={Bir web sunucusunda sayfalara erişim arasında geçen sürenin ölçülmesi}

E_9={Belirli bir ortamda bir bilgisayar hafızasının (ram) çalışma ömrünün ölçülmesi}

E_{10}={Bir ses işaretinin değerinin t_1 anında belirlenmesi}

E_{11}={Bir ses işaretinin değerlerinin t_1 ve t_2 anlarında belirlenmesi}

E_{12}={0 ile 1 arasında iki sayının rastgele seçilmesi}

E_{13}={0 ile 1 arasında X, 0 ile X arasında Y ile belirtilen iki sayının rastgele seçilmesi}

E_{14}={Bir sisteme ilişkin bir cihaz $t = 0$ anında çalışmaya başlamıştır. $t \geq 0$ için, cihaz çalıştığı sürece $X(t) = 1$, aksi halde $X(t) = 0$ olan bir fonksiyon tanımlamsın. $t \geq 0$ için $X(t)$'nin değerinin belirlenmesi}

Rastlantı Deneylerinin Tanımlanması

Tanım: Bir rastlantı deneyi yapıldığında oluşan ve başka sonuçlara ayrıştırılamayan bir sonuca bir **ÇIKIŞ** denir.

Tanım: Mümkün tüm çıkışlar kümesine **ÖRNEK UZAY** denir.

- Bir rastlantı deneyi gerçekleştirildiğinde sadece bir çıkış oluşur.
- Örnek uzayı S, deneyin bir çıkışını ζ ile temsil edeceğiz. Yani, $\zeta \in S$.
- Örnek uzay, küme kullanılarak belirtilebilir. Bir küme iki şekilde tanımlanabilir:

1. Elemanlarını parantez içinde virgülle ayırarak belirtmek : $A=\{0,1,2,3\}$
2. Elemanarını tanımlayan bir kural vermek:

$$A=\{x: x,\ 0 \le x \le 3 \text{ olacak şekilde bir tamsayıdır}\}$$

Rastlantı Deneylerinin Tanımlanması

ÖRNEK: Önceki örnekteki 14 deneye ait örnek uzay, küme notasyonu kullanılarak aşağıda verilmiştir.

S_1={1,2,3,...,50}

S_2={(1,s), (2,s), (3,b), (4,b)}

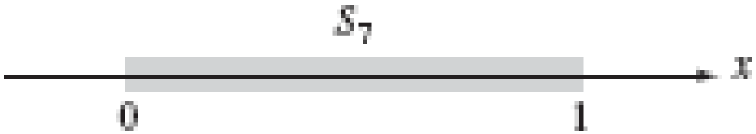
S_3={TTT, TTY, TYT, TYY, YYT, YTY, TYY, YYY}

S_4={0, 1, 2, 3}

S_5={0,1,2,..., N}

S_6={1,2,3,4,...}

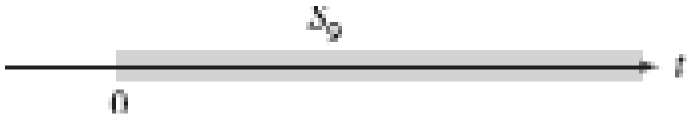
$S_7=\{x: 0 \leq x \leq\} = [0,1]$



Rastlantı Deneylerinin Tanımlanması

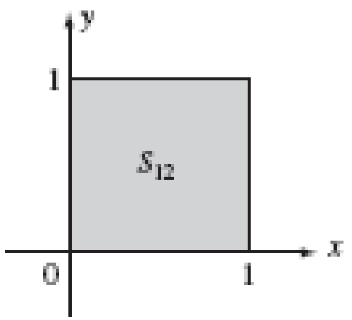
$S_8 = \{t: t \geq 0\} = [0, \infty)$

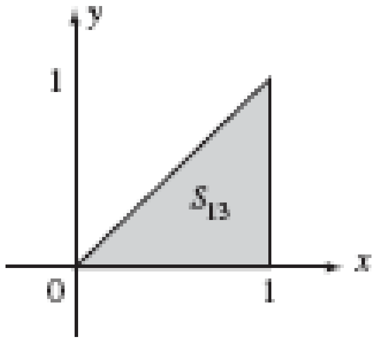
$S_9 = \{t: t \geq 0\} = [0, \infty)$



$S_{10} = \{v: -\infty < v < \infty\} = (-\infty, \infty)$

$S_{11} = \{ (v_1, v_2): -\infty < v_1 < \infty, -\infty < v_2 < \infty\}$





$S_{12} = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \}$

$S_{13} = \{(x,y): 0 \leq y \leq x \leq 1\}$

$S_{14} = t_0 > 0$ cihazın bozulması için geçen süre olmak üzere, $0 < t \leq t_0$ için $X(t) = 1$, $t > t_0$ için $X(t) = 0$ olan fonksiyonlar kümesi

Rastlantı Deneylerinin Tanımlanması

- Örnek uzaydaki çıkışların toplam sayısı için iki durum vardır.

- Sayılabilir bir örnek uzaya **AYRIK ÖRNEK UZAY** denir. Ayrık örnek uzaylar sonlu veya sayılabilir sonsuz elemana sahip olabilir. (E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 sonlu ayrık örnek uzaya; E_6,sayılabilir sonsuz ayrık örnek uzaya sahiptir)

- Sayılamaz örnek uzaylara **SÜREKLİ ÖRNEK UZAY** denir. (E_7- E_{13}, aralığındaki deneyler sürekli örnek uzaya sahiptir)

- Bir deneyin çıkışında birden fazla ölçüm olabileceğinden örnek uzay çok boyutlu olabilir. Örneğin, E_2, E_{11}, E_{12}, E_{13} deneylerine ilişkin çıkışlar 2 boyutlu; E_3 deneyindeki çıkışlar ise 3 boyutludur.

- Bazı durumlarda, örnek uzay diğer kümelerin kartezyen çarpımı olarak yazılabilir. Örneğin, $S_{11} = R \text{ x } R$, $S_{11} = S \text{ x } S \text{ x } S$, $S = \{Y, T\}$

Rastlantı Deneylerinin Tanımlanması

Tanım: Örnek uzayın alt kümelerine **OLAY** denir.

Tanım: Tüm çıkıları içeren ve her zaman meydana gelen olaya **KESİN OLAY** denir.

Tanım: Hiçbir çıkış içermeyen ve asla meydana gelmeyen olaya **BOŞ (İMKANSIZ) OLAY** denir.

- Kesin olayı S, boş olayı $\varnothing$ temsil edeceğiz.
- Bir olay tek bir çıkıştan da oluşabilir. Ayrık bir örnek uzayın tek bir çıkışından oluşan olaya **TEMEL OLAY** denir.

Rastlantı Deneylerinin Tanımlanması

ÖRNEK: Aşağıda, önceki örnekteki 14 deneye ilişkin 14 olay A_k ile belirtilmiştir.

E_1= "Üzerinde çift sayı olan bir top çekilir", A_1= {2,4,...,48,50}

E_2= "Top beyazdır ve üzerinde çift sayı yazılıdır", A_2= {(4,b)}

E_3= "Üç atış aynı çıkışı verir", A_3= {YYY, TTT}

E_4= "Yazı gelme saysısı tura gelme sayısına eşittir", A_4= $\varnothing$

E_5= "Hiç aktif paket üretilmez", A_5= {0}

E_6= "10'dan az iletim gereklidir", A_6= {1,2,...,9}

E_7= "Seçilen sayı negatif değildir", A_7= S_7

Rastlantı Deneylerinin Tanımlanması

E_8= "Sayfalara erişim arasında t_0'dan az saniye geçer", $A_8 = \{t: 0 \leq t < t_0\} = [0, t_0)$

E_9= "Cihaz 1000 saatten fazla 1500 saatten az dayanır", $A_9 = \{t: 1000 \leq t < 1500\}$

E_{10}= "Gerilimin mutlak değeri 1 voltdan küçüktür", $A_{10} = \{v: -1 \leq v < 1\} = (-1,1)$

E_{11}= "İki gerilimin işareti farklıdır", $A_{11}=\{(v_1, v_2): (v_1 < 0, v_2 > 0), (v_1 < 0, v_2 > 0)\}$

E_{12}= "İki sayı arasındaki fark 1/10'dan küçüktür", $A_{12}=\{(x,y): (x,y)\in S_{12}, |x - y| \leq 1/10\}$

E_{13}= "İki sayı arasındaki fark 1/10'dan küçüktür", $A_{13}=\{(x,y): (x,y)\in S_{13}, |x - y| \leq 1/10\}$

E_{14}= "t_1 anında sistem çalışmaktadır", $A_{14}= X(t_1) =1$ olacak şekilde S_{14}'ün alt kümesi

Rastlantı Deneylerinin Tanımlanması

Tanım: Bir nesneler topluluğuna **KÜME** denir.

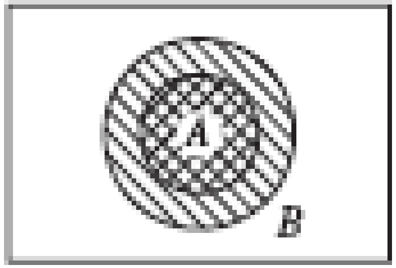
Tanım: Verilen bir uygulamada mümkün tüm nesnelere içeren kümeye **EVRENSEL KÜME** denir.

- Evrensel kümeyi U ile temsil edeceğiz.
- Bir A kümesi, U'daki bir nesneler topluluğudur. Nesnelere A'nın **elemanları** denir.
- "x, A'nın bir elemanıdır" ve "x, A'nın bir elemanı değildir" ifadelerini kısaca belirtmek için sırasıyla $x \in A$ ve $x \notin A$ notasyonlarını kullanacağız.
- Kümeleri tartışırken Venn diyagramları kullanacağız. U, bir dikdörtgen içindeki tüm elemanlarla belirtilir. Bir küme, dikdörtgende belirtilen bölge içindeki noktalar kümesidir.

Rastlantı Deneylerinin Tanımlanması

Tanım: A kümesinin her elemanı B kümesinin de bir elemanı ise, yani $x \in A$ olması $x \in B$ anlamına geliyorsa A'ya B'nin bir **ALT KÜMESİ** denir.

- A'nın B'nin bir alt kümesi olduğunu belirtmek için $A \subset B$ notasyonu kullanılır.



$A \subset B$

Tanım: Hiç eleman içermeyen kümeye **BOŞ KÜME** ($\varnothing$) denir.

- $\varnothing$, tüm kümelerin bir alt kümesidir. Yani, herhangi bir A kümesi için $\varnothing \subset A$.

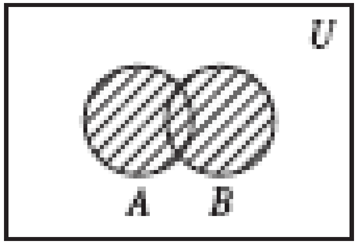
Rastlantı Deneylerinin Tanımlanması

Tanım: Aynı elemanları içeriyorlarsa, iki kümeye **EŞDEĞER** denir.

- İki kümenin eşdeğerliği $A = B$ ile gösterilir.
- $A = B$ olsun. A'nın her elemanı B'nin bir elemanı olduğundan $A \subset B$. Benzer şekilde, B'nın her elemanı A'nin bir elemanı olduğundan $B \subset A$.
- O halde, $A = B$ olması için gerek ve yeter koşul $A \subset B$ ve $B \subset A$'dır.

Tanım: A veya B kümesinin elemanlarından oluşan kümeye A ve B kümelerinin **BİRLEŞİMİ** denir ve $A \cup B$ ile gösterilir.

$$A \cup B = \{x\text{: } x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

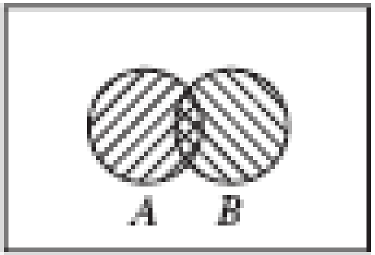


$A \cup B$

Rastlantı Deneylerinin Tanımlanması

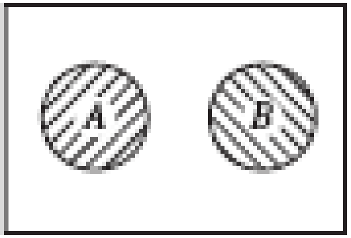
Tanım: A ve B kümelerinin elemanlarından oluşan kümeye A ve B kümelerinin **KESİŞİMİ** denir ve $A \cap B$ ile gösterilir.

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ ve } x \in B\}$$



$A \cap B$

Tanım: Kesişimleri boş küme olan iki kümeye **ayrık** (**karşılıklı kesişmeyen**) denir.

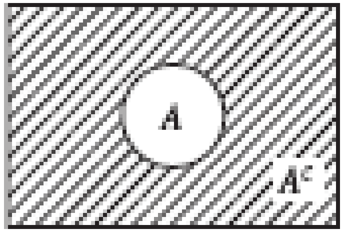


$A \cap B = \varnothing$

Rastlantı Deneylerinin Tanımlanması

Tanım: Bir küme içinde bulunmayan tüm elemanlardan oluşan kümeye, kümenin **TÜMLEYENİ** denir ve A^C ile gösterilir.

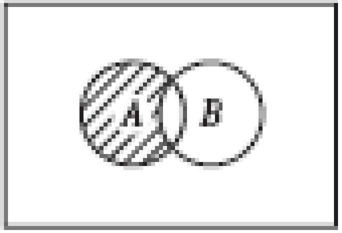
$$A^C = \{x : x \notin A\}$$
$$S^C = \varnothing,$$
$$\varnothing^C = S$$



A^c

Tanım: A kümesinde mevcut olup B kümesinde mevcut olmayan elemanlardan oluşan kümeye A ve B'nin **FARKI (BAĞIL TÜMLEYENİ)** denir.

$$A - B = A \cap B^C$$
$$B^C = S - B$$



$A - B$

Rastlantı Deneylerinin Tanımlanması

- Birleşme, kesişme ve tümleyen küme işlemleri kullanılarak diğer kümeler oluşturulabilir. Ayrıca, küme işlemleri aşağıda verilen özelliklere sahiptir

- Değişme özelliği:

$$\boxed{\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned}}$$

- Birleşme özelliği:

$$\boxed{\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \end{aligned}}$$

- Dağılma özelliği:

$$\boxed{\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}}$$

- De Morgan Kuralı:

$$\boxed{\begin{aligned} (A \cup B)^C &= A^C \cap B^C \\ (A \cap B)^C &= A^C \cup B^C \end{aligned}}$$

Rastlantı Deneylerinin Tanımlanması

ÖRNEK: Küme eşdeğerliğini göstererek De Morgan kuralını ispatlayalım.

ÇÖZÜM: Birinci eşitliğin doğru olabilmesi için, sol ve sağ taraftaki kümeler birbirlerinin alt kümesi olmalıdır. Yani,

$$\boxed{(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C \text{ ve } A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C}$$

$x \in (A \cup B)^C$ ($x \notin A \cup B$) olsun. $x \notin A$ olduğundan $x \in A^C$. Benzer şekilde, $x \notin B$ olduğundan $x \in B^C$. x, A^C ve B^C kümelerinin bir elemanı olup $x \in A^C \cap B^C$. Diğer bir deyişle, $(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$.

$x \in A^C \cap B^C$ olsun. $x \in A^C$ olduğundan $x \notin A$. $x \in B^C$ olduğundan $x \notin B$. x, A veya B kümelerinin bir elemanı olmayıp $x \notin (A \cup B)$ veya $x \in (A \cup B)^C$. Diğer bir deyişle, $A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C$ olup ispat tamamlanmış olur.

Not: İkinci eşitliği bulmak için, birinci eşitlik A^C ve B^C kümelerine uygulanıp sonucun tümleyeni alınır.

Rastlantı Deneylerinin Tanımlanması

- Birleşme ve kesişme işlemleri ikiden fazla sayıda küme için de geçerlidir.

- n kümenin birleşimi, en az bir kümede bulunan tüm elemanlardan oluşan kümedir. Tanım, sonsuz sayıda küme için de geçerlidir.

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

- n kümenin kesişimi, tüm kümelerde mevcut elemanlardan oluşan kümedir. Tanım, sonsuz sayıda küme için de geçerlidir.

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

Olasılık Aksiyomları

Tanım: *E*, örnek uzayı *S* olan bir rastlantı deneyi olsun. *E* için bir **OLASILIK,** aşağıdaki önermeleri sağlayan ve herhangi bir *A* olayına *A*'nin olasılığı denen ve $P[A]$ ile gösterilen bir sayı atayan bir kuraldır:

Aksiyom I $0 \leq P[A]$

Aksiyom II $P[A] = 1$.

Aksiyom III $A \cap B = \varnothing$ ise, $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$

Aksiyom III' $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \varnothing$ olmak üzere $A_1, A_2, A_3, \ldots,$ olayları için

$$P\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} P\left[A_k\right]$$

Not: Sonlu örnek uzaya sahip deneyler için I, II ve III nolu aksiyomlar yeterlidir. Sonsuz örnek uzaylarla ilgili deneyler için Aksiyom III' gereklidir.

Olasılık Aksiyomları

Önerme 1: $\boxed{P[A^C] = 1- P[A].}$

İspat: Bir olay ile tümleyeninin kesişimi boş kümedir: $A \cap A^C = \varnothing$. Aksiyom III'den

$$P[A \cup A^C] = P[A] + P[A^C]$$

$S = A \cup A^C$ olup Aksiyom II'den $1 = P[S] = P[A] + P[A^C] \Rightarrow P[A^C] = 1 - P[A]$

Önerme 2: $\boxed{P[A] \leq 1.}$

İspat: Önerme 1'den $P[A] = 1- P[A^C]$. $P[A^C] \geq 0$ olduğundan, $P[A] \leq 1$.

Önerme 3: $\boxed{P[\varnothing] = 0.}$

İspat: Önerme 1'de $A = S$ ($A^C = \varnothing$) alınırsa, $P[\varnothing] = 1-P[S] = 1-1 = 0$.

Olasılık Aksiyomları

Önerme 4: $A_1, ..., A_n$ ikili olarak kesişmeyen olaylar olsun.

$$\boxed{P\left[\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right] = \sum_{k=1}^{n} P(A_k), \quad n \geq 2}$$

İspat: Tümevarım yöntemini kullanalım. Aksiyom III, sonucun n = 2 için doğru olduğunu söylemektedir. Sonucun herhangi bir n için doğru olduğunu kabul ederek, ifadenin n +1 için de geçerli olacağını göstermeliyiz.

Sonuç, herhangi bir n için doğru olsun:

$$P\left[\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right] = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

İfade n+1 için yazılırsa

$$P\left[\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right] = P\left[\left\{\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right\} \cup A_{n+1}\right]$$

Olasılık Aksiyomları

Son ifadede, parantez içindeki iki olayın kesişimi boş kümedir çünkü

$$\left\{\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right\} \cap A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n} \{A_k \cap A_{n+1}\} = \bigcup_{k=1}^{n} \Phi = \Phi$$

O halde,

$$P\left[\left\{\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right\} \cup A_{n+1}\right] = P\left[\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right] + P[A_{n+1}]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P[A_k] + P[A_{n+1}]$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} P[A_k]$$

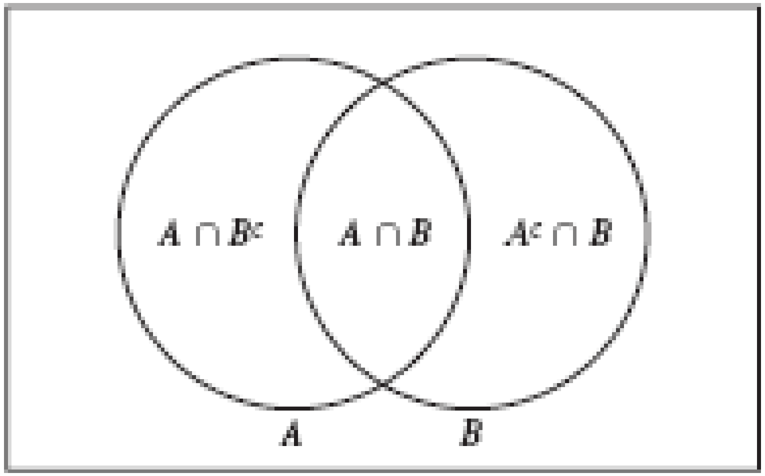
Olasılık Aksiyomları

Önerme 5: $\boxed{P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]}$

İspat:

$$P[A \cup B] = P[A \cap B^C] + P[A \cap B] + P[A^C \cap B]$$
$$P[A] = P[A \cap B^C] + P[A \cap B] \Rightarrow P[A \cap B^C] = P[A] - \mathrm{P}[A \cap B]$$
$$P[B] = P[B \cap A^C] + P[A \cap B] \Rightarrow P[B \cap A^C] = P[B] - \mathrm{P}[A \cap B]$$

$$P[A \cup B] = P[A] - \mathrm{P}[A \cap B] + P[A \cap B] + P[B] - \mathrm{P}[A \cap B]$$
$$= P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$



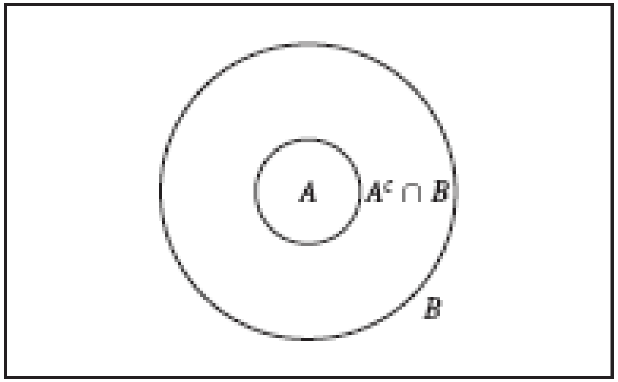
Olasılık Aksiyomları

Önerme 6: $$P\left[\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right] = \sum_{j=1}^{n} P[A_j] - \sum_{j<k} P[A_j \cap A_k] + \cdots + (-1)^{n+1} P[A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n]$$

İspat, matematiksel tümevarım ile yapılabilir.

Önerme 7: $A \subset B$ ise, $P[A] \leq P[B]$

İspat: $P[B] = P[B \cap A^C] + P[A]$. $P[A^C \cap B] \geq 0$ olduğundan $P[A] \leq P[B]$.



Olasılık Aksiyomları

- Sayılabilir örnek uzaya sahip bir rastlantı deneyine ilişkin olasılık fonksiyonu, temel olayların olasılıkları verilerek belirtilebilir.

- Tüm çıkışlar eşit olasılıklı ise, olaydaki çıkış sayısının örnek uzaydaki toplam çıkış sayısına oranı, olayın olasılığını verir.

- Örneğin, örnek uzay n elemanlı olsun $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Eşit olasılıklı çıkışlar durumunda temel olayların olasılıkları $1/n$'dir.

$$P[\{a_1\}] = P[\{a_2\}] = ... = P[\{a_n\}] = 1/n$$

- O halde, k çıkış içeren bir $B = \{a_1', a_2', ..., a_k'\}$ olayının olasılığı k/n olacaktır:

$$P[B] = P[a_1'] + P[a_2'] + ... + P[a_n'] = k/n$$

- Kavramlar, sayılabilir sonsuz örnek uzay durumunda da geçerlidir.

Olasılık Aksiyomları

ÖRNEK: Bir vazoda 0’dan 9’a kadar numaralandırılmış özdeş 10 top vardır. Vazodan rastgele bir top çekilmekte ve üzerinde yazan rakam kaydedilmektedir. Aşağıdaki olayların olasılıklarını bulunuz:

A = “Topun üzerindeki rakam tek sayıdır”
B = “Topun üzerindeki rakam 3’ün katıdır”
C = “Topun üzerindeki rakam 5’den küçüktür”

Ayrıca, $A \cup B$ ve $A \cup B \cup C$ olaylarının olasılıklarını belirleyiniz.

ÇÖZÜM:

$S=\{0,1,2,\ldots,9\}$, $A=\{1,3,5,7,9\}$, $B=\{3,6,9\}$, $C=\{0,1,2,3,4\}$
$P[A] = P[\{1\}] + P[\{3\}]\,] + P[\{5\}] + P[\{7\}] + P[\{9\}] = 5/10$
$P[B] = P[\{3\}] + P[\{6\}]\,] + P[\{9\}] = 3/10$
$P[C] = P[\{0\}] + P[\{1\}]\,] + P[\{2\}] + P[\{3\}] + P[\{4\}] = 5/10$

Olasılık Aksiyomları

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

$A \cap B = \{3,9\}$ olduğundan $P[A \cap B] = 2/10$

$P[A \cup B] = 5/10+3/10-2/10 = 6/10$

$P[A \cup B \cup C] = P[\mathrm{A}] + P[\mathrm{B}] + P[\mathrm{C}] - P[A \cap B] - P[A \cap C] - P[B \cap C] + P[A \cap \mathrm{B} \cap C]$

$= 5/10+ 3/10 + 5/10 - 2/10 – 2/10 – 1/10 + 1/10$

$= 9/10$

Olasılık Aksiyomları

ÖRNEK: Tura gelinceye kadar bir bozuk para atılmaktadır. Deneyin çıkışı, tura gözükünceye kadar yapılan atış sayısı olsun. Bir deney için bir olasılık kuralı bulunuz.

ÇÖZÜM:

- Deneye ilişkin örnek uzay $S=\{0,1,2,\ldots\}$şeklindedir.
- Deney n kez tekrarlansın. Turanın ilk kez j. denemede gözüktüğü deneme sayısı N_j olsun. n çok büyük değerler aldığında, N_1'in yaklaşık $n/2$ olmasını bekleriz.
- İkinci bir deneme yaklaşık n- $N_1 \approx n/2$ kez gereklidir. Bu denemelerin yarısında ($n/4$) tura gelmesini bekleriz.
- Bağıl frekanslar $f_j \approx \dfrac{N_j}{n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^j, \quad j = 1,2,3\cdots$
- P[ilk tura gelinceye kadar j atış] $= \left(\dfrac{1}{2}\right)^j$

Olasılık Aksiyomları

- Sürekli örnek uzaya sahip rastlantı deneyleri durumunda, gerçel eksenin aralıklarına sayılar atanarak olasılık tanımlanır.

ÖRNEK: 0 ile 1 arasında rastgele bir sayı seçilmesi olayını ele alalım.

- Örnek uzay, S=[0,1]'dir. "Çıkışın S'nin bir alt kümesinde bulunma olasılığı, aralığın boyuna eşittir, yani $P[(a,b)] = (b-a)$, $0 \leq a \leq b \leq 1$" olasılık kuralının geçerli olup olmadığını araştıralım.

- $b \geq a \geq 0$ olduğundan, aksiyom 1 sağlanmaktadır. $b = 1$, $a = 0$ alınırsa aksiyom 2 geçerli olur. Aksiyom 3'ün de sağlandığı açıktır ve P geçerli bir kuraldır.

- Bu tanımdan yola çıkarak çeşitli olayların olasılıklarını hesaplayabiliriz

$$P[[0,0.5]] = 0.5 - 0 = 0.5, \quad P[[0.5,1]] = 1 - 0.5 = 0.5$$
$$P[\{1/2\}] = P[[1/2,1/2]] = 1/2 - 1/2 = 0.$$

Olasılık Aksiyomları

ÖRNEK: Bir cihazın çalışma süresi incelendiğinde *t*'den fazla süre çalışan cihaz sayısının üstel olarak azaldığı görülüyor. Geçerli bir olasılık kuralı belirleyelim.

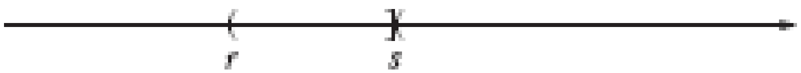
- Örnek uzay: $S = (0,\infty)$. İfadeyi, " bir cihazın çalışma süresinin *t*'den fazla olma olasılığı, zaman sabiti α olan azalan bir üstel fonksiyondur" şeklinde yorumlarsak

$$P[(t,\infty)] = e^{-\alpha t}, \quad t > 0$$

- $t > 0$ için üstel ifade 0 ile 1 arasında değer aldığından aksiyom 1 geçerlidir. Aksiyom 2'de geçerlidir çünkü $P[S] = P[(0,\infty)] = 1$. P geçerli bir kuraldır.

- S'deki bir aralığın olasılığını hesaplamak mümkündür

$$P[(r,\infty)] = P[(r,s]] + P[(s,\infty)]$$
$$\Rightarrow P[(r,s]] = P[(r,\infty)] - P[(s,\infty)] = e^{-\alpha r} - e^{-\alpha s}$$



Sayma Yöntemleri Kullanarak Olasılık Hesabı

- Tüm çıkışlar eşit olasılıklı ise, bir olaydaki çıkış sayısının örnek uzaydaki toplam çıkış sayısına oranının olayın olasılığı olduğunu görmüştük. O halde, bir olayın olasılığını hesaplamak için olaydaki çıkış sayısını saymamız gereklidir.

- Örneğin, çoktan seçmeli bir testte k soru ve herhangi bir soru $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ için seçenek saysı n_i olsun. Testi yanıtlamanın kaç yolu vardır?

- Soru şu şekilde de ifade edilebilir. x_{i}, n_i elemanlı bir kümenin bir elemanı olmak üzere k-elemanlı $(x_1,\ldots,x_{\mathrm{k}})$ vektörlerinden farklı kaç adet vardır?

- Her bileşen x_{i} , n_i değer aldığından farklı vektör sayısı n_1 x n_2 x … x n_k'dir.

Sayma Yöntemleri Kullanarak Olasılık Hesabı

- Çoğu sayma problemi, ***n*** nesneden ***k*** tanesinin kaç şekilde seçilebileceğine eşdeğerdir.

- Herhangi bir nesnenin seçildikten sonra yığına geri konulup konulmamasına ve seçilen nesnelerin diziliş sırasının önemli olup olmamasına göre 4 durum vardır:

Durum 1: Seçilen nesne yerine geri konulur ve diziliş sırası önemlidir
Durum 2: Seçilen nesne yerine geri konulmaz ancak diziliş sırası önemlidir
Durum 3: Seçilen nesne yerine geri konulmaz ancak diziliş sırası önemli değildir
Durum 4: Seçilen nesne yerine geri konulur ancak diziliş sırası önemli değildir

Sayma Yöntemleri Kullanarak Olasılık Hesabı

Durum 1: *n* adet nesneden *k* tanesi her çekilişten sonra nesne yığına geri konularak seçilsin. Her çekilişte *n* nesne olup, sıralı mümkün tüm çıkışların sayısı şöyledir:

$$\underbrace{n \, x \, n \, x \cdots x \, n}_{k \text{ adet}} = n^k$$

Örnek: Bir vazoda 1'den 5'e kadar numaralandırılmış toplar olsun. Her çekilişten sonra yerine koymak şartıyla vazodan iki top çektiğimizi varsayalım. Çıkış topların üzerinde yazan sayı çifti olsun. Mümkün tüm çıkışların sayısı nedir? İki çekimin aynı sayı oluşturma olasılığı nedir?

Çözüm: Çıkışların sayısı $5 \text{ x } 5 = 5^2 = 25$'dir. Aynı sayı veren çıkışlar (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) ve (5,5) olup 5 adet olduğundan iki çekimin aynı sayı oluşturma olasılığı

$$\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

olarak bulunur.

Sayma Yöntemleri Kullanarak Olasılık Hesabı

- **Durum 2:** n adet nesneden k tane seçiliyor, her çekilişten sonra nesne yığına geri konuluyor ve seçilen nesnelerin diziliş sırası önemlidir.

- Birinci çekilişte n, ikinci çekilişte (n-1) ve bu şekilde devam edilerek k. çekilişte (n-k+1) seçenek olduğundan sıralı mümkün tüm çıkışların sayısı şöyledir:

$$\underbrace{n\,x\,(n-1)\,x\cdots x\,(n-k+1)}_{k\text{ adet}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Bu sayıya, ***n*'nin *k*'lı permütasyonu** denir ve P_k^n notasyonu ile gösterilir:

$$\boxed{P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Sayma Yöntemleri Kullanarak Olasılık Hesabı

Örnek:

Bir vazoda 1’den 5’e kadar numaralandırılmış toplar olsun. Her çekilişten sonra yerine geri koymadan vazodan iki top çektiğimizi varsayalım. Çıkış topların üzerinde yazan sayı çifti olsun. Mümkün tüm çıkışların sayısı nedir? Birinci top üzerindeki rakamın ikinci top üzerindekinden büyük olma olasılığı nedir?

Çözüm:

Mümkün çıkışların sayısı $P_2^5 = \dfrac{5!}{(5-2)!} = 5 \text{ x } 4 = 20$

Birinci top üzerindeki rakamın ikinci top üzerindekinden büyük olduğu çıkışlar

(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)

olup 10 adet olduğundan olayın olasılığı 10/20=1/2’dir.

Sayma Yöntemleri Kullanarak Olasılık Hesabı

- İkinci durumda, $k = n$ (yani, nesnelerin tamamı seçilsin) olsun.

- Bu durum, n adet nesnenin kendi arasında değişik kaç şekilde dizilebileceği anlamına gelmektedir.

- Önceki tartışmadan, ***n* adet nesnenin farklı diziliş sayısı**

$$\boxed{n \, x \, (n-1) \, x \cdots x \, (2) \, x \, (1) = n!}$$

olarak elde edilir.

- n büyük değerler aldığında, faktöryel hesabı zorlaştığından hesaplamaları kolaylaştıran Stirling formülü tercih edilmelidir

$$\boxed{n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}}$$

Sayma Yöntemleri Kullanarak Olasılık Hesabı

Örnek:

12 topun 12 hücreye rastgele yerleştirildiğini varsayalım. Bir hücreye birden fazla top girebilir. Tüm hücrelerin dolu olma olasılığı nedir?

Çözüm:

Mümkün tüm çıkışların sayısı 12^{12}'dir. Tüm hücrelerin dolu olması için her hücrede bir top olmalıdır. 12 top kendi arasında 12! farklı şekilde dizilebileceğinden tüm hücrelerin dolu olma olasılığı

$$\frac{12!}{12^{12}} = \left(\frac{12}{12}\right)\left(\frac{11}{12}\right)\cdots\left(\frac{1}{12}\right) = 5.37 \times 10^{-5}$$

Sayma Yöntemleri Kullanarak Olasılık Hesabı

- **Durum 3:** n adet nesneden k tane seçiliyor, her çekilişten sonra nesne yığına geri konulmuyor ve seçilen nesnelerin diziliş sırası önemli değildir.

- Sıra önemli iken, nesneler $P_k^n = n!/(n-k)!$ değişik şekilde seçiliyordu.

- Seçilenlerin kendi aralarındaki farklı diziliş sayısı $k!$ olup, sıra önemli değilken

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

  değişik şekilde seçim yapılabilir.

- Bu sayıya, ***n*'nin *k*'lı kombinasyonu** denir ve C_k^n notasyonu ile gösterilir:

$$\boxed{C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}}$$

Sayma Yöntemleri Kullanarak Olasılık Hesabı

Örnek: Bir yığında bulunan 50 cihazdan 10 tanesi arızalıdır. Yığından rastgele seçilen 10 cihazdan 5 tanesinin arızalı olma olasılığı nedir?

Çözüm: 50 cihazdan 10 tanesi,

$$\binom{50}{10} = \frac{50!}{10!40!}$$

şekilde seçilebilir. Bunlardan 5 tanesinin arızalı, 5 tanesinin sağlam olması isteniyor. 10 arızalı cihazdan 5 tanesini ve 40 sağlam cihazdan 5'nin seçme sayısı, sırasıyla C_5^{10} ve C_5^{40}'dir. O halde, istenilen olasılık şöyle olacaktır:

$$\frac{\binom{10}{5}\binom{40}{5}}{\binom{50}{10}} = \frac{10!\,40!\,10!\,40!}{5!\,5!\,35!\,5!\,50!} = 0.016$$

Sayma Yöntemleri Kullanarak Olasılık Hesabı

- **Durum 4:** *n* adet nesneden *k* tane seçiliyor, her çekilişten sonra nesne yığına geri konuluyor ve seçilen nesnelerin diziliş sırası önemli değildir.

- Bu durumu göstermek için, sütunları birbirinden **/** işareti ile ayrılan ve her sütunu yığındaki bir nesneye karşılık gelen bir satırlı bir tablo oluşturabiliriz. Bir çekimde hangi nesne seçilmişşe, o nesneye karşılık gelen sütuna bir **x** işareti koyabiliriz.

- Örneğin, farklı 3 nesneden yerine geri konularak 4 nesnenin seçilmesini ele alalım. Mümkün bir çıkış şöyledir:

Nesne 1		Nesne 2		Nesne 3
xx	/		/	xx

- Yani, Nesne 2 hiç seçilmemiş, diğer iki nesne ikişer kez seçilmiştir. Bu durumu kısaca xx//xx şeklinde gösterebiliriz

Sayma Yöntemleri Kullanarak Olasılık Hesabı

- Genel durumda, gösterilimde n-1 adet / ve k adet x olacaktır.

- Problem, n-1+k nesneden k (x dikkate alınırsa) veya n-1 (/ dikkate alınırsa) tanesinin diziliş sırası önemli değilken kaç şekilde seçilebileceğine indirgenir.

- Önceki tartışmamızdan sonucun kombinasyon ile hesaplanabileceğini biliyoruz. Özetçe, her çekilişten sonra nesne yığına geri konulmak koşuluyla, n adet nesneden k tanesi diziliş sırası önemli olmadan

$$\boxed{\binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1}}$$

şekilde seçilebilir.

Sayma Yöntemleri Kullanarak Olasılık Hesabı

- n nesneden k tanesini yerine geri koymadan ve sıra önemli olmadan seçme, nesneleri B={seçilen nesneler} ve B^C kümelerine ayırmaya eşdeğerdir:

- İki kümeye ayırmadan dolayı, n'nin k'lı kombinasyonuna iki terimli katsayı denir.

- n nesneden $B_1, B_2, \ldots, B_L$ şeklinde belirtilen L küme oluşacak şekilde, yerine geri koymadan ve sıra önemli olmadan n nesne seçildiğini varsayalım. $1 \leq i \leq L$ olmak üzere, B_i kümesinin içindeki eleman sayısı k_i olsun. Oluşturulabilecek küme sayısının

$$\frac{n!}{k_1!\,k_1!\cdots k_L!}, \qquad k_1 + k_2 + \cdots + k_L = n$$

olduğu gösterilebilir. İkiden fazla kümeye ayırmadan dolayı, yukarıdaki sayıya çok terimli katsayı denir.

Sayma Yöntemleri Kullanarak Olasılık Hesabı

Örnek:

Bir zar 12 kez atılmaktadır. Çıkış, gözüken 12 rakam olsun. Kaç adet çıkışta rakamların hepsi iki kez görünür? Böyle bir çıkışın olasılığı nedir?

Çözüm:

Rakamların ikişer kez gözükmesi, 12 elemanlı bir kümeyi her biri 2 elemanlı 6 kümeye bölmeye eşdeğerdir. Böyle kümelerin sayısı çok terimli katsayıdan

$$\frac{12!}{2!\,2!\,2!\,2!\,2!\,2!} = \frac{12!}{2^6} = 7{,}484{,}400$$

olarak bulunur. 12 atıştaki mümkün çıkış sayısı 6^{12} olduğundan, rakamların hepsinin ikişer kez gözükme olasılığı, çıkışların eşit olasılıklı olduğu varsayılırsa şöyledir:

$$\frac{7{,}484{,}400}{6^{12}} \cong 3.4(10^{-3})$$