Hafta 3:
Olasılık Teorisinin Temel Kavramları

Ele Alınacak Ana Konular

- Koşullu olasılık
- Bağımsız olaylar
- Tekrarlanan deneyler
- Rastgele sayı üreticileri

Koşullu Olasılık

- Bir olayın meydana geldiğinin bilinmesi başka bir olayın meydana gelme olasılığını etkileyebilir. Olaylar ilişkisizse, birinin meydana gelmesi diğerinin oluşmasını etkilemeyecektir.

- Bir B olayının meydana geldiği biliniyorsa, A olayının meydana gelme olasılığına B altında A'nın koşullu olasılığı denir, $P[A|B]$ şeklinde gösterilir ve

$$P[A \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}, \qquad P[B] > 0.$$

eşitliğiyle tanımlanır.

- B olayının meydana geldiği biliniyorsa, A olayının meydana gelmesi için A olayına ilişkin bir çıkış $A \cap B$ kümesinin bir elemanı olmalıdır.

- Koşullu olasılığın, olasılık aksiyomlarını sağladığı kolayca gösterilebilir.

Koşullu Olasılık

ÖRNEK:

Üzerinde 1 ve 2 yazan 2 siyah; 3 ve 4 yazan 2 beyaz top içeren bir vazodan bir top çekilmektedir. Deneyin çıkışı topun rengi ve üzerindeki rakam olsun. A, B ve C olayları

A = "siyah bir top çekilir"

B = "üzerinde çift sayı yazan bir top seçilir"

C = "topun üzerinde yazan rakam 2'den büyüktür"

şeklinde tanımlansın. $P[A|B]$ ve $P[A|C]$ koşullu olasılıklarını hesaplayınız.

Koşullu Olasılık

ÇÖZÜM:

Deneye ilişkin örnek uzay, S = {(1,s), (2,s), (3,b), (4,b)} şeklindedir. A, B ve C olayları örnek uzayın alt kümeleri olup şöyle yazılabilir:

A = {(1,s), (2,s)}

B = {(2,s), (4,b)}

C = {(3,b), (4,b)}

O halde, $A \cap B = \{(2,s)\}$, $A \cap C = \varnothing$. Tüm çıkışlar eşit olasılıklı olsun.

$$P[A \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{1}{2} = 0.25$$

$$P[A \mid C] = \frac{P[A \cap C]}{P[C]} = \frac{0}{2} = 0.$$

Koşullu Olasılık

- Ortak olasılık, koşullu olasılık cinsinden yazılabilir:

$$P[A \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \Rightarrow P[A \cap B] = P[A \mid B]P[B]$$

- Benzer şekilde:

$$P[B \mid A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]} \Rightarrow P[A \cap B] = P[B \mid A]P[A]$$

- Özetle,

$$\boxed{P[A \cap B] = P[A \mid B]P[B] = P[B \mid A]P[A]}$$

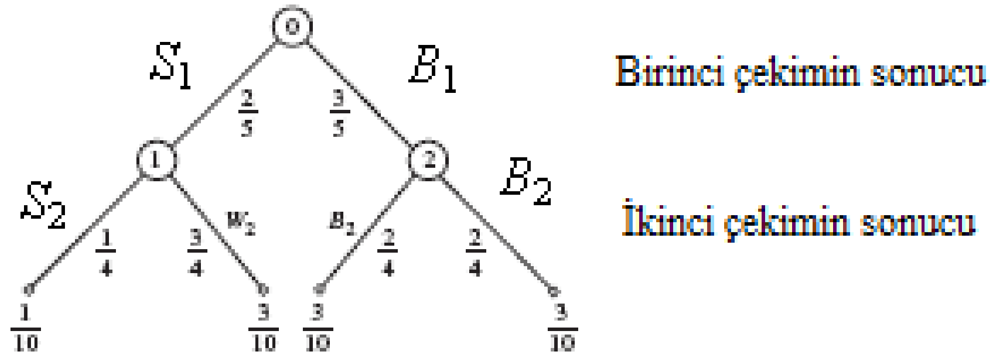
Koşullu Olasılık

ÖRNEK:

Bir vazoda özdeş 2 siyah ve 3 beyaz top bulunmaktadır. Vazodan, yerine geri koyulmadan arka arkaya iki top çekiliyor. Deneyin çıkışı, gözlemlenen renkler olsun. İki rengin de siyah olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

Bu deney, alt iki deneyden oluşmaktadır.



Koşullu Olasılık

Birinci çekimde hangi düğüme ulaşıldığı biliniyorsa, ikinci çekimdeki olasılıklar kolayca belirlenebilir. S_1 ve S_2 olayları aşağıdaki şekilde tanımlansın:

S_1 = "Birinci çekimdeki renk siyahtır"
S_2 = "İkinci çekimdeki renk siyahtır"

Sorudaki olay $S_1 \cap S_2$ olup, $P[S_1 \cap S_2] = P[S_2 | S_1]\, P[S_1]$.

$P[S_1]$ ve $P[S_2 | S_1]$, ağaç diyagramında sırasıyla 1 numaralı düğüme ve 1 numaralı duğumden alttaki en sol düğüme ulaşma olasılıklarına karşı gelmekedir. O halde,

$$P[S_1 \cap S_2] = P[S_2 \mid S_1] P[S_1]$$
$$= \frac{1}{4}\frac{2}{5} = \frac{1}{10}.$$

Koşullu Olasılık

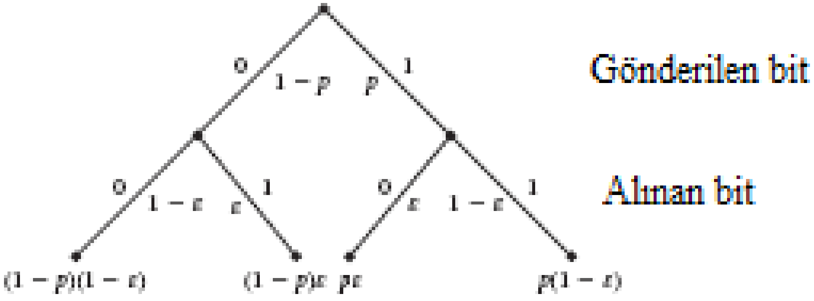
ÖRNEK: Bir haberleşme sisteminde, verici kanal üzerinden alıcıya **1-*p*** olasılığıyla **0** ve ***p*** olasılığıyla **1** biti gödermeketdir. Alıcı, gönderilen bitin ne olduğuna karar verirken **ε** olasılığıyla hata yapabilmektedir. $i \in \{0,1\}$ olmak üzere, A_i ve B_i olayları aşağıdaki şekilde tanımlansın:

A_i = "Vericinin gönderdiği bit *i*'dir"
B_i = "Alıcının karar verdiği bit *i*'dir"

$P[A_i \cap B_j]$ olasılıklarını bulunuz.

ÇÖZÜM: Olasılıklar ağaç diyagramından kolayca belirlenir.

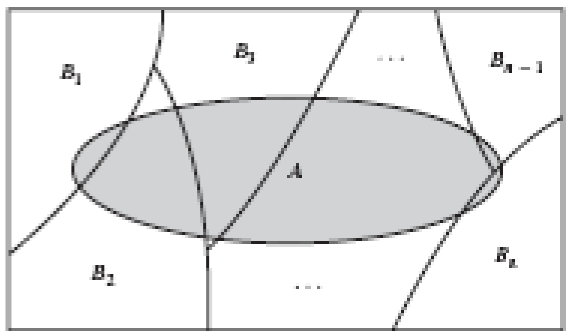
$$P[A_0 \cap B_0] = (1-p)(1-\varepsilon)$$
$$P[A_0 \cap B_1] = (1-p)\varepsilon$$
$$P[A_1 \cap B_0] = p\varepsilon$$
$$P[A_1 \cap B_1] = p(1-\varepsilon)$$



Koşullu Olasılık

- Örnek uzay içindeki bir olay, koşullu olasılıkların toplamı olarak yazılabilir.

- Karşılıklı kesişmeyen B_1, B_2, ..., B_n olaylarının birleşimi örnek uzay olsun.



$$S = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$$
$$i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \Phi$$

- Örnek uzay içinde koyu bölge ile belirtilen bir A olayı şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} A &= A \cap S = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) \\ &= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n) \end{aligned}$$

Koşullu Olasılık

- $i \neq j \Rightarrow (A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \Phi$ olduğundan

$$P[A] = P[A \cap B_1] + P[A \cap B_2] + \cdots + P[A \cap B_n]$$

- Eşitliğin sağ tarafındaki olasılıklar, koşullu olasılıklar cinsinden yazılırsa

$$\boxed{P[A] = P[A \mid B_1]P[B_1] + P[A \mid B_2]P[B_2] + \cdots + P[A \mid B_n]P[B_n]}$$

- Yukardaki ifadeye TOPLAM OLASILIK FORMÜLÜ denir.

- Toplam olasılık formülü, alt deneylerin tekrarlanması şeklinde ifade edilebilen deneylere ilişkin olayların olasılıklarının hesaplanmasında faydalıdır.

Koşullu Olasılık

ÖRNEK:

Bir vazoda özdeş 2 siyah ve 3 beyaz top bulunmaktadır. Vazodan, yerine geri koyulmadan arka arkaya iki top çekiliyor. Deneyin çıkışı, gözlemlenen renkler olsun. İkinci rengin beyaz olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

Deneye ilişkin örnek uzay, $S = \{(s,s), (s,b), (b,s), (b,b)\}$ şeklindedir. Karşılıklı kesişmeyen $B_1 = \{(s,s), (s,b)\}$ ve $B_2 = \{(b,s), (b,b)\}$ olaylarının birleşimi örnek uzaydır. İstenilen olay $A = \{(s,b), (b,b)\}$ olup

$$P[A] = P[A \mid B_1]P[B_1] + P[A \mid B_2]P[B_2]$$
$$= \frac{3}{4}\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

Koşullu Olasılık

ÖRNEK: Bir üreticinin ürettiği cihazlar, **1-*p*** olasılığıyla kusursuz, ***p*** olasılığıyla arızalıdır. Kusursuz ve arızalı cihazların sorunsuz çalışma sürelerinin olasılığı sırasıyla **α** ve **1000α** katsayılı azalan üstel işarettir. *A* olayı, "Rastgele seçilen bir cihaz *t* saniye geçtikten sonra çalışmaktadır" olsun. $P[A]$ nedir?

ÇÖZÜM: B_1 ve B_1 olayları

B_1 = "Seçilen cihaz kusursuzdur"
B_2 = "Seçilen cihaz arızalıdır"

şeklinde tanımlansın. O halde,

$$
\begin{aligned}
P[A] &= P[A \mid B_1]P[B_1] + P[A \mid B_2]P[B_2] \\
&= (1-p)e^{-\alpha t} + pe^{-1000\alpha t}
\end{aligned}
$$

Koşullu Olasılık

- Karşılıklı kesişmeyen B_1, B_2, ..., B_n olaylarının birleşimi örnek uzay olsun.
- Örnek uzay içinde bir A olayı meydana gelsin. $P[B_j|A]$, $j=1,2,\ldots,n$ koşullu olasılığı

$$P[B_j|A] = \frac{P[A \cap B_j]}{P[A]} = \frac{P[A|B_j]P[B_j]}{\sum_{k=1}^{n} P[A|B_k]P[B_k]}$$

  şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğe BAYES KURALI denir.

- $P[B_j]$, deney meydana gelmeden önce $B_1,B_2,\ldots,B_n$ olaylarının olasılığı olup ÖNSEL OLASILIK olarak adlandırılır.
- $P[B_j|A]$, deney gerçekleştirilip A olayının meydana geldiği biliniyorsa, $B_1,\ldots,B_n$ olaylarının olasılığı olup SONSAL OLASILIK olarak adlandırılır.

Koşullu Olasılık

ÖRNEK:

Bir haberleşme sisteminde, verici kanal üzerinden alıcıya eşit olasılıkla **0** veya **1** biti gödermeketdir. Alıcı, gönderilen bitin ne olduğuna karar verirken **ε** olasılığıyla hata yapabilmektedir. $i \in \{0,1\}$ olmak üzere, A_i ve B_i olayları aşağıdaki şekilde tanımlansın:

A_i = "Vericinin gönderdiği bit i'dir"
B_i = "Alıcının karar verdiği bit i'dir"

Alıcının gönderilen bitin 1 olduğuna karar vermesi koşulu altında, iletilen hangi bitin daha yüksek olasılığa sahip olduğunu bulunuz.

Koşullu Olasılık

ÇÖZÜM:

Meydana geldiği bilinen olay B_1'dir. P[A_0|B_1] ve P[A_1|B_1] sonsal olasılıklarından hangisinin büyük olduğu sorulmaktadır. İlk önce P[B_1] belirlenir.

$$P[B_1] = P[B_1|A_0]P[A_0] + P[B_1|A_1]P[A_1]$$

$$= \varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) + (1-\varepsilon)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Bayes kuralı kullanılarak sonsal olasılıklar hesaplanır.

$$P[A_0|B_1] = \frac{P[B_1|A_0]P[A_0]}{P[B_1]} = \frac{\varepsilon/2}{1/2} = \varepsilon$$

$$P[A_1|B_1] = \frac{P[B_1|A_1]P[A_1]}{P[B_1]} = \frac{(1-\varepsilon)/2}{1/2} = 1-\varepsilon$$

Sonuç: ε < 1/2 ise "1", aksi halde "0" bitinin iletilmiş olması daha muhtemeldir.

Koşullu Olasılık

ÖRNEK: Bir üreticinin ürettiği cihazlar, **1-*p*** olasılığıyla kusursuz, ***p*** olasılığıyla arızalıdır. Kusursuz ve arızalı cihazların sorunsuz çalışma sürelerinin olasılığı sırasıyla ***α*** ve **1000*α*** katsayılı azalan üstel işarettir. Üretilen bir cihaz, piyasaya sürülmeden önce ***t*** saniye boyunca test edilmekte, testi geçemeyen cihazlar piyasaya sürülmemektedir. Piyasa sürülen cihazların % 99'nun kusursuz olması için gerekli ***t*** değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: *A*, *B* ve *C* olayları şöyle tanımlansın.

A= "Seçilen cihaz kusursuzdur"
B = "Seçilen cihaz arızalıdır"
C ="Seçilen bir cihaz t saniye sonra bozulmamıştır"

Soruda $P[A|C] = 0.99$ eşitliğini sağlayan t değeri sorulmaktadır.

Koşullu Olasılık

Bayes kuralı kullanılarak $P[A|C]$ belirlenebilir:

$$P[A|C] = \frac{P[C|A]P[A]}{P[C|A]P[A] + P[C|B]P[B]} = \frac{(1-p)e^{-\alpha t}}{(1-p)e^{-\alpha t} + pe^{-1000\alpha t}}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{pe^{-1000\alpha t}}{(1-p)e^{-\alpha t}}} = 0.99$$

Yukarıdaki eşitlik t için çözülürse: $t = \dfrac{1}{999\alpha} \ln\left(\dfrac{99p}{1-p}\right)$

Örneğin, $1/\alpha = 20000$ saat ve $p = 0.1$ ise, $t = 48$ saat.

Bağımsız Olaylar

Tanım: $P[A \cap B] = P[A]\,P[B]$ ise A ve B olayları bağımsızdır.

Not:

1. A ve B bağımsız ise, koşullu olasılığın tanımından

$$P[A|B] = P[A]$$
$$P[B|A] = P[B]$$

Yani, A olayının oluştuğunun bilinmesi B olayının olasılığını etkilememektedir.

2. Sıfırdan farklı olasılığa sahip ve karşılıklı kesişmeyen iki olay bağımsız olamaz. $P[A] > 0$, $P[B] > 0$ ve $P[A \cap B] = \varnothing$ olsun. A ve B bağımsız ise

$$P[A \cap B] = P[\Phi] = 0 = P[A]P[B]$$

Eşitliğin geçerli olabilmesi için olaylardan birinin olasılığı sıfır olmalıdır ve başta yapılan varsayımla çelişmektedir.

Bağımsız Olaylar

ÖRNEK:

Üzerinde 1 ve 2 yazan 2 siyah; 3 ve 4 yazan 2 beyaz top içeren bir vazodan bir top çekilmektedir. Deneyin çıkışı topun rengi ve üzerindeki rakam olsun. A, B ve C olayları

A = "siyah bir top çekilir"

B = "üzerinde çift sayı yazan bir top seçilir"

C = "topun üzerinde yazan rakam 2'den büyüktür"

şeklinde tanımlansın. A ve B bağımsız mıdır? A ve C bağımsız mıdır?

Bağımsız Olaylar

ÇÖZÜM: Deneye ilişkin örnek uzay, $S = \{(1,s), (2,s), (3,b), (4,b)\}$ şeklindedir. A, B ve C olayları şöyle yazılabilir:

$$A = \{(1,s), (2,s)\}, \quad B = \{(2,s), (4,b)\}, \; C = \{(3,b), (4,b)\}.$$

$$P[A] = P[B] = P[C] = 1/2,$$
$$P[A \cap B] = P\,[\{(2,s)\}] = 1/\,4,$$
$$P[A \cap C] = P\,[\varnothing] = 0.$$

Dolayısıyla,

$P[A \cap B] = 1/4 = P[A]P[B]$. A ve B bağımsızdır.

$P[A \cap C] = 0 \neq P[A]P[C]$. A ve C bağımsız değildir.

Bağımsız Olaylar

ÖRNEK:

0 ile 1 aralığında rastgele seçilen iki sayı x ve y ile belirtilsin. A, B ve C olayları aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$A = \{x > 0.5\},$$

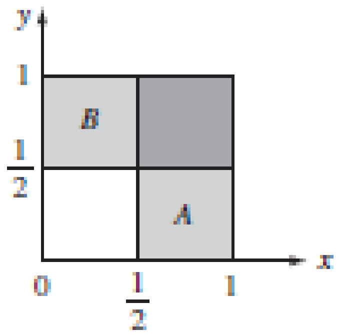
$$B = \{y > 0.5\},$$

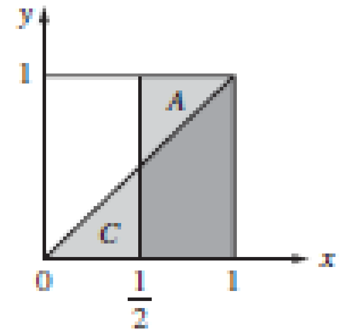
$$C = \{x > y\}.$$

A ve B bağımsız mıdır? A ve C bağımsız mıdır?

Bağımsız Olaylar

ÇÖZÜM: $P[A] = P[B] = P[C] = 1/2$ olduğu açıktır. Şekillerdeki koyu bölgeler $A \cap B$ $A \cap C$ kümelerine karşı gelmektedir.





$P[A \cap B] = 1/4$ $P[A \cap C] = 3/8.$

$P[A \cap B] = 1/4 = P[A]P[B]$. A ve B bağımsızdır.

$P[A \cap C] = 3/8 \neq P[A]P[C]$. A ve C bağımsız değildir.

Bağımsız Olaylar

- Bağımsızlık, ikiden fazla olaya genelleştirilebilir. 3 olay durumunu ele alalım. A, B ve C olaylarının bağımsız olabilmeleri için ikişerli bağımsız olmalıdırlar:

$$\boxed{P[A\cap B] = P[A]P[B],\ P[A\cap C] = P[A]P[C] \text{ ve } P[B\cap C] = P[B]P[C]}$$

- Ayrıca, herhangi iki olayın birlikte meydana geldiğinin bilinmesi diğer olayın olasılığını etkilememelidir. Örneğin, $P[C|A\cap B] = P[C]$

- Yukarıdaki ifade, koşullu olasılıktan şöyle de yazılabilir:

$$\boxed{P[A\cap B\cap C] = P[A\cap B]P[C] = P[A]P[B]P[C]}$$

- Özetle, üç olayın bağımsız olabilmesi için ikişerli ve üçerli kesişimlerinin olasılığı, olasılıklarının çarpımına eşit olmalıdır.

Bağımsız Olaylar

ÖRNEK:

0 ile 1 aralığında rastgele seçilen iki sayı x ve y ile belirtilsin. B, D ve F olayları aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$B = \{y > 0.5\}$$

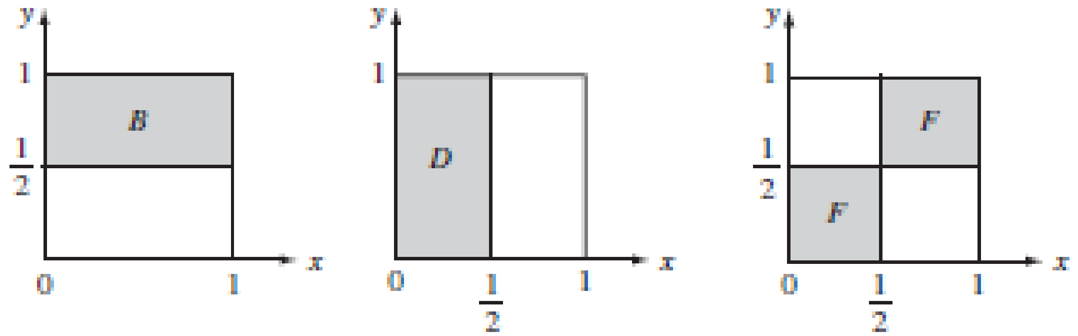
$$D = \{x < 0.5\}$$

$$F = \{x < 0.5 \text{ ve } y < 0.5\} \, U \, \{x > 0.5 \text{ ve } y > 0.5\}.$$

B , D ve F bağımsız mıdır?

Bağımsız Olaylar

ÇÖZÜM: $P[B] = P[D] = P[F] = 1/2$.



$P[B \cap D] = 1/4$, $P[B \cap F] = 1/4$, $P[D \cap F] = 1/4$ ve $P[B \cap D \cap F] = 0$.

$$P[B \cap D] = 1/4 = P[B]P[D]$$
$$P[B \cap F] = 1/4 = P[B]P[F]$$
$$P[D \cap F] = 1/4 = P[D]P[F]$$
$$P[B \cap D \cap F] = 0 \neq P[B]P[D]P[F]$$

B , D ve F bağımsız değildir.

Bağımsız Olaylar

Tanım: $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ olmak üzere, k =2,…, n için

$$P[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}] = P[A_{i_1}]P[A_{i_2}]\cdots P[A_{i_k}]$$

ise, A_1, A_2, ..., A_n olayları bağımsızdır.

Not:

1. n olayın bağımsızlığını belirlemek için $2^n - n - 1$ koşul test edilmelidir. n büyüdükçe, koşul sayısı hızlı bir şekilde artmaktadır.
2. Bu nedenle, hesaplamaları kolaylaştıran "bir deney her tekrarlandığında meydana gelen olaylar bağımsızdır" varsayımı yapılır.
3. Bu varsayımın geçerli olduğu deneylere BAĞIMSIZ DENEYLER denir.

Bağımsız Olaylar

ÖRNEK: Bozuk bir para arka arkaya üç kez atılmaktadır. Deneye ilişkin tüm çıkışların olasılığını hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Örnek uzay S ={YYY,YYT, YTY, TYY, TTY, TYT, YTT,TTT}. Her atışta tura ve yazı gelme olasılığı eşittir. Yani, $P[T] = P[Y] = 1/2$. Atışlarda meydana gelen çıkışların bağımsız olduğunu varsayarsak

$$P[\{YYY\}] = P[\{Y\}]\, P[\{Y\}]\, P[\{Y\}] = 1/8$$
$$P[\{YYT\}] = P[\{Y\}]\, P[\{Y\}]\, P[\{T\}] = 1/8$$
$$P[\{YTY\}] = P[\{Y\}]\, P[\{T\}]\, P[\{Y\}] = 1/8$$
$$P[\{TYY\}] = P[\{T\}]\, P[\{Y\}]\, P[\{Y\}] = 1/8$$
$$P[\{TTY\}] = P[\{T\}]\, P[\{T\}]\, P[\{Y\}] = 1/8$$
$$P[\{TYT\}] = P[\{T\}]\, P[\{Y\}]\, P[\{T\}] = 1/8$$
$$P[\{YTT\}] = P[\{Y\}]\, P[\{T\}]\, P[\{T\}] = 1/8$$
$$P[\{TTT\}] = P[\{T\}]\, P[\{T\}]\, P[\{T\}] = 1/8$$

Bağımsız Olaylar

ÖRNEK: Bir sistem, bir denetleyici ve 3 çevre biriminden oluşmaktadır. Denetleyici ve çevre birimlerinden en az ikisi çalışıyorsa sistem hizmet vermekte, aksi halde arızalıdır. Bileşenlerin bozulmasının bağımsız olduğunu varsayarak, **"herhangi bir anda sistem hizmet vermektedir"** olayının olasılığını hesaplayınız. Denetleyicinin ve herhangi bir çevre biriminin bozulma olasılığını sırasıyla p ve a alınız.

ÇÖZÜM: A ve B_i ($i = 1,2,3$) olayları şöyle tanımlansın.

A = "Denetleyici çalışmaktadır"
B_i = "i. çevre birimi çalışmaktadır"
F= "İki veya daha fazla çevre birimi çalışmaktadır"

Soruda $P[A \cap F] = P[A]P[F]$ istenmektedir.

Bağımsız Olaylar

$$F = (B_1 \cap B_2 \cap B_3^c) \cup (B_1 \cap B_2^c \cap B_3) \cup (B_1^c \cap B_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3)$$

Yukarıdaki birleşimde, parantez içindeki olaylar karşılıklı kesişmeyen olduğundan

$$\begin{aligned} P[F] &= P[B_1 \cap B_2 \cap B_3^c] + P[B_1 \cap B_2^c \cap B_3] + P[B_1^c \cap B_2 \cap B_3] + P[B_1 \cap B_2 \cap B_3] \\ &= 3(1-a)^2 a + (1-a)^3 \end{aligned}$$

O halde,

$$\begin{aligned} P[A \cap F] &= P[A]P[F] \\ &= (1-p)P[F] \\ &= (1-p)\{3(1-a)^2 a + (1-a)^3\} \end{aligned}$$