İNTEGRAL

150216 U

$(x^2)' = 2x'(x') = 2x$ $\qquad \int 2x\,dx = \frac{2x^{1+1}}{1+1} = x^2 + c$

$\int f(x)\,dx = F(x)$

İntegral — İntegral değişken — f(x)'in önce Türevi

• Türevini aldığında aynı değer çıkıyorsa bunlar aynı sınıftadır.

- $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
- $\int e^x\,dx = e^x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
- $a \in \mathbb{R}$ $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$

Özellikler

• $a \in \mathbb{R}$ $\int a f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$

• $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

$\Rightarrow \int (6x^2 - 4x + 3) = ?$

$\Rightarrow \int \left(2\sin x + 10\sqrt{x^3} + \frac{5}{x}\right) dx = ?$

A-Değişken Değiştirme Yöntemi

$\Rightarrow \int (1-4x)^6\,dx = ?$ $\qquad \Rightarrow \int \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x}\,dx = ?$ $\qquad \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = ?$

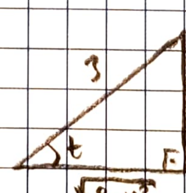
$\Rightarrow \int \frac{(4+\ln x)^5}{x}\,dx = ?$ $\qquad \Rightarrow \int \frac{dx}{a^2+x^2} = ?$ $\qquad \Rightarrow \int x^2\sqrt{x-2}\,dx = ?$

160216 T

① $\sqrt{a^2-x^2}$ den başka köklü ifade içermeyen fonksiyonların integralinde; $x = a\sin t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ değişken dönüşümü yapılır.

$\Rightarrow \int \frac{x+8}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = ?$ $\qquad \left(\begin{array}{l} x = 3\sin t \\ dx = 3\cos t\,dt \end{array} \right)$

$\int \frac{(3\sin t + 8) \cdot 3\cos t\,dt}{3\underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\cos^2 t}}$



$\sin t = \frac{x}{3}$

$\cos t = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$

$\int (3\sin t + 8)\,dt = -3\cos t + 8t + c$

$-3\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + 8\arcsin\frac{x}{3} + c$

② $\sqrt{x^2-a^2}$ den başka köklü ifade içermeyen fonksiyonların integralinde;

$x = a\sec t$, $0 < t < \pi/2$ ya da $\pi < t < 3\pi/2$ değişken dönüşümü yapılır.

$$\left[\sec^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t\right]$$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = ?$ $\left(\begin{array}{l} x = 3\sec t \\ dx = 3\tan t \sec t\, dt \end{array}\right)$

$$\int \frac{3\tan t \cdot \sec t\, dt}{3\sec t \cdot \underbrace{\sqrt{9\sec^2 t - 9}}_{3\tan t}} \rightarrow \frac{1}{3}\int dt = \frac{1}{3}t + c$$

$$\left[\frac{x}{3} = \frac{1}{\cos t} \quad \cos t = \frac{3}{x} \quad t = \arccos\frac{3}{x}\right]$$

$$\frac{1}{3}\arccos\frac{3}{x} + c$$

③ $\sqrt{a^2+x^2}$ den başka köklü ifade içermeyen fonksiyonların integralinde;

$x = a\tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ değişken dönüşümü yapılır.

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = ?$ $\left(\begin{array}{l} x = 2\tan t \\ dx = 2\sec^2 t\, dt \end{array}\right)$

$$\int \frac{2(\sec^2 t)\,dt}{4\tan^2 t\sqrt{4(\tan^2 t + 1)}} = \int \frac{2\sec^2 t\, dt}{4\tan^2 t \cdot 2\sec t} = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$$

$\left(\begin{array}{l} \sin t = u \\ \cos t\, dt = du \end{array}\right)$ $\displaystyle = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} + c$

④ $\sqrt[n_i]{ax+b}$ biçimindeki ifadeleri bulunduran fonksiyonların integralinde;
n_i kök derecelerinin en küçük ortak katı p ise $ax+b = t^p$ değişken dönüştürmesi yapılır.

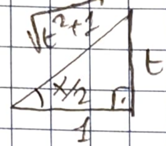
$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x+1} + 1}{\sqrt[6]{x+1}}\,dx$ $\left(\begin{array}{l} x+1 = t^{12} \\ dx = 12t^{11}dt \end{array}\right)$

$$12\int \frac{\sqrt[4]{t^{12}} + 1}{\sqrt[6]{t^{12}}} \cdot t^{11}dt = 12\int \frac{t^3+1}{t^2} \cdot t^{11}dt = 12\int (t^{12} + t^9)\,dt$$

$$= 12\left(\frac{\sqrt[12]{(x+1)^{13}}}{13} + \frac{\sqrt[12]{(x+1)^{10}}}{10}\right) + c$$

⑤ Eğer integrant trigonometrik fonksiyonların rasyonel ifadesi şeklinde ise yarım açı yöntemi uygulanır. Şöyleki;

$\tan\frac{x}{2} = t$



$\sin\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, $\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$

$\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\cos x = 2\cos^2 x/2 - 1 = \frac{2}{t^2+1} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\left(\begin{array}{l} \tan\frac{x}{2} = t \\ x = 2\arctan t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}dx = ?$

$$= \int \frac{1+\frac{2t}{t^2+1}}{\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2t}{t^2+1}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} \qquad \tan\frac{x}{2} = t$$

$$= \int \frac{\frac{t^2+2t+1}{(t^2+1)^2}}{\frac{(1+t^2+1-t^2)\cdot t}{(t^2+1)^2}}dt$$

$$= 1/2\int \frac{t^2+2t+1}{t}dt$$

$$= 1/2\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)dt = \frac{t^2}{4} + t + 1/2\ln|t| + c$$

$$= \frac{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4} + \tan\frac{x}{2} + 1/2\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = ?$ $\left(\begin{array}{l} e^x - 1 = t^2 \\ e^x = t^2+1 \\ x = \ln(t^2+1) \end{array}\right)$ $dx = \frac{2t}{t^2+1}dt$

$$= \int \frac{\frac{2t\,dt}{t^2+1}}{\sqrt{e^{\ln(t^2+1)}-1}} = 2\int\frac{dt}{t^2+1} = 2\arctan t + c = 2\arctan\sqrt{e^x-1} + c$$

B- Kısmi İntegrasyon Yöntemi

u ve v , x değişkeninin iki farklı fonksiyonu olsun.

$$d(uv) = du\,v + u\,dv$$

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int du\,v$$
$$= uv - \int v\,du$$

① Eğer integrant bir polinom ile bir üstel fonksiyonun çarpımı ise; polinoma u, üstel fonksiyona dv denir.

$$\Rightarrow \int x e^{3x} dx = ? \qquad \left(\begin{matrix} x = u \\ dx = du \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \int e^{3x} dx = \int dv \\ \frac{e^{3x}}{3} = v \end{matrix} \right)$$

$$= x\frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x} dx = x\frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + c$$

② İntegrant bir polinom ile bir trigonometrik fonksiyonun çarpımı ise; polinoma u, trigonometrik fonksiyona dv denir.

$$\Rightarrow \int x \sin 2x \, dx = ? \qquad \left(\begin{matrix} x = u \\ dx = du \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \int \sin 2x \, dx = \int dv \\ -\frac{\cos 2x}{2} = v \end{matrix} \right)$$

③ Eğer integrant bir polinom ile bir logaritmik fonksiyonun çarpımı ise; logaritmaya u, polinoma dv denir.

$$\Rightarrow \int x^5 \ln x \, dx = ? \qquad \left(\begin{matrix} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \int x^5 dx = \int dv \\ \frac{x^6}{6} = v \end{matrix} \right)$$

$$\Rightarrow \int \ln x \, dx = ? \qquad \left(\begin{matrix} \int dx = \int dv \\ x = v \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{matrix} \right)$$

$$= x\ln x - \int dx$$

$$= x\ln x - x + c$$

$$= x(\ln x - 1) + c$$

④ Eğer integrant bir fonksiyondan ibaret ise bu fonksiyona u ve $dx = dv$ denir.

$$\Rightarrow \int \arctan x \, dx = ? \qquad \left(\begin{matrix} u = \arctan x \\ du = \frac{1}{1+x^2} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} dv = dx \\ v = x \end{matrix} \right)$$

$$= \arctan x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$$

- Bazı durumlarda integralini almamız istenen ifade tekrar karşımıza çıkabilir.

$\Rightarrow \int e^{ax}.\cos bx\,dx = ?$ $\left(\begin{array}{ll} e^{ax}=u & \cos bx\,dx = dv \\ ae^{ax}dx = du & \frac{\sin bx}{b} = v \end{array}\right)$

$I = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx$ $\left(\begin{array}{ll} e^{ax}=u & \sin bx\,dx = dv \\ ae^{ax}dx = du & -\frac{\cos bx}{b} = v \end{array}\right)$

$I = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\left[-\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}I\right]$

$I = \frac{b}{a^2+b^2}\left(e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b}\cos bx\right)$

$\Rightarrow \int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = ?$ $\left(\begin{array}{ll} xe^x = u & \frac{dx}{(x+1)^2} = dv \\ (e^x + xe^x)dx = du & -\frac{1}{(x+1)} = v \\ (x+1).e^x dx = du & \end{array}\right)$

$= -\frac{xe^x}{(x+1)} + \int \frac{(x+1)e^x dx}{(x+1)}$

$= e^x\left(\frac{-x}{x+1} + 1\right) + c = \frac{e^x}{x+1} + c$

$\Rightarrow \int \sqrt{x^2+m}\,dx = ?$ $\left(\begin{array}{ll} u = \sqrt{x^2+m} & dx = dv \\ du = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+m}}dx & x = v \end{array}\right)$

$I = x\sqrt{x^2+m} - \int \frac{x^2+m-m}{\sqrt{x^2+m}}dx$

$= x\sqrt{x^2+m} - I + m\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}$

$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+m} + m\ln\left|x + \sqrt{x^2+m}\right|\right) + c$

$\Rightarrow \int x^2 e^{-x}dx = ?$ $\left(\begin{array}{ll} x^2 = u & e^{-x}dx = dv \\ 2xdx = du & -e^{-x} = v \end{array}\right)$

230216 U

$\Rightarrow \int \left(\sin bx + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{x}\right)dx$

$\Rightarrow \int \left(2e^x + 3.5^x + \frac{2}{1+x^2}\right)dx$

$\Rightarrow \int (x^3+x).(3x^2+1)dx$

$\Rightarrow \int x^2\sqrt{x-7}\,dx$

$\Rightarrow \int \cos x.\sin^n x\,dx$

$\Rightarrow \int \frac{x}{x^2+a^2}dx$

$\Rightarrow \int \frac{xdx}{x^2+x+1}$

$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$\Rightarrow \int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

$\Rightarrow \int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{4-\cos^4 x}}$

$\Rightarrow \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$

$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}dx$

$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$

$\Rightarrow \int \frac{\sqrt[3]{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}}dx$

$\Rightarrow \int \frac{\sqrt[3]{x-1}+1}{\sqrt[4]{x-1}}dx$

C- İndirgeme Bağıntıları

Yüksek dereceden kuvvetleri olan rasyonel ve ya trigonometrik fonksiyonların integralini kolay almamızı sağlar.

★ $n \in \mathbb{N}$ için $\int \cos^n x\,dx = ?$

$$I_n = \int \cos^{n-1}x \cdot \cos x\,dx \qquad \left(\begin{array}{ll} \cos^{n-1}x = u & \cos x\,dx = dv \\ -(n-1).\cos^{n-2}\sin x\,dx = du & \sin x = v \end{array} \right)$$

$$= \sin x.\cos^{n-1}x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\,\underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x}\,dx$$

$$= \sin x.\cos^{n-1}x + (n-1)\underbrace{\int \cos^{n-2}x\,dx}_{I_{n-2}} - (n-1)\underbrace{\int \cos^n x\,dx}_{I_n}$$

$$I_n = \sin x\cos^{n-1}x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x + \left(\frac{n-1}{n}\right)\int \cos^{n-2}x\,dx$$

$$\Rightarrow \int \cos^5 x\,dx = \frac{1}{5}\sin x\cos^4 x + \frac{4}{5}\int \cos^3 x\,dx$$

$$\int \cos^3 x = \frac{1}{3}\sin x.\cos^2 x + \frac{2}{3}\underbrace{\int \cos x\,dx}_{\sin x} + c$$

$$\int \cos^5 x = \frac{1}{5}\sin x\cos^4 x + \frac{4}{15}\sin x\cos^2 x + \frac{8}{15}\sin x + c$$

★ $n \in \mathbb{N}$ için $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x} = ?$

• $n=1$ için $\int \frac{dx}{\sin x}$

I/ $$\int \frac{\operatorname{cosec}x - \cot x}{(\operatorname{cosec}x - \cot x)}.\operatorname{cosec}x\,dx = \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x - \cot x\operatorname{cosec}x}{\operatorname{cosec}x - \cot x}\,dx = \ln|\operatorname{cosec}x - \cot x| + c$$

II/ $$\left(\begin{array}{ll} x = \tan\frac{t}{2} & \sin x = \frac{t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} & \end{array} \right)$$

$$\int \frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{\frac{t}{t^2+1}} = 2\int \frac{dt}{t} = 2\ln|t| + c = \ln|2\arctan x| + c$$

III) $n=1$ için $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x}dx$

• $n>1$ için $I_n = \int \frac{1}{\sin^{n-2}x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}$

$$\left(\begin{array}{ll} u=\sin^{-(n-2)}x & dx/\sin^2 x = dv \\ du = -(n-2)\cdot\sin^{-(n-1)}x\cos x\,dx & -\cot x = v \end{array}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sin^{n-2}x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x} - (n-2)\cdot\int\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} - (n-2)\cdot\underbrace{\int\frac{dx}{\sin^n x}}_{I_n} + (n-2)\cdot\underbrace{\int\frac{dx}{\sin^{n-2}x}}_{I_{n-2}}$$

$$I_n = -\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} - (n-2)\cdot I_n + (n-2)I_{n-2}$$

$$(n-1)I_n = -\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + (n-2)I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{-1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{(n-2)}{(n-1)}I_{n-2}$$

Sonuç Olarak: $\int\frac{dx}{\sin^n x} = \frac{-1}{(n-1)}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{(n-2)}{(n-1)}\int\frac{dx}{\sin^{n-2}x}$

$\Rightarrow \int\frac{dx}{\sin^4 x} = \frac{-\cos x}{3\sin^3 x} + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{\sin^2 x}$

$$= \frac{-\cos x}{3\sin^3 x} - \frac{2}{3}\cot x + c$$

$\Rightarrow \int\tan^n x\,dx = \int\tan^{n-2}x\cdot(\tan^2 x+1-1)\,dx = \int\tan^{n-2}x(\tan^2 x+1)dx - \int\tan^{n-2}x\,dx$

$I = \int\tan^{n-2}x(\tan^2 x+1)dx \quad \left(\begin{array}{l}\tan x = u\\ (\tan^2 x+1)dx = du\end{array}\right)$

$= \int u^{n-2}du$

$= \frac{u^{n-1}}{n-1} + c$

$= \frac{1}{(n-1)}\cdot\tan^{n-1}x + c$

$$I_n = \frac{1}{(n-1)}\tan^{n-1}x - I_{n-2}$$

• $n=1$ için

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} \Rightarrow -\int \frac{du}{u} = -\ln|u|+c = -\ln|\cos x|+c \qquad \left(\begin{array}{l}\cos x = u\\ -\sin x\,dx = du\end{array}\right)$$

⇒ $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ için bir indirgeme bağıntısı bulunuz?

• $n=1$ için

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$$

• $n\in\mathbb{N}$, $n>1$ için

$$\left(\begin{array}{ll}(a^2+x^2)^{-n}=u & dv=dx\\ -n(a^2+x^2)^{-(n+1)}2x\,dx=du & v=x\end{array}\right)$$

$$I_n = \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n\int\frac{(x^2+a^2-a^2)\,dx}{(a^2+x^2)^{n+1}}$$

$$I_n = \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n\underbrace{\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}}_{I_n} - 2na^2\underbrace{\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{n+1}}}_{I_{n+1}}$$

$$2na^2 I_{n+1} = \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + (2n-1)I_n$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(a^2+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n$$

010316

⇒ $\int \ln x\,dx = ?$

⇒ $\int x.\sin x\,dx = ?$

⇒ $\int \arcsin x\,dx = ?$

⇒ $\int e^{2x}\sin 3x\,dx = ?$

⇒ $\int \sin(\ln x)\,dx = ?$

⇒ $\int x^{1/2}.e^{x^{1/2}}\,dx = ?$

⇒ $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ için bir indirgeme bağıntısı bulunuz?

⇒ $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ için bir indirgeme bağıntısı bulunuz?

⇒ $n\in\mathbb{N}$ için

$$\int x^n e^{ax}\,dx = ?$$

⇒ $n=3$ için

$$\int x^3 e^{ax}\,dx = ?$$

⇒ $\int \cot^n x\,dx$ için bir indirgeme bağıntısı bulunuz?

D- Basit Kesirlere Ayırma Yöntemi

$P(x)$ ve $Q(x)$, x'in polinomları olmak üzere; $\frac{P(x)}{Q(x)} = K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ Burada $K(x)$ ve $R(x)$, x'in birer polinomu olup $R(x)$'in derecesi $Q(x)$'in derecesinden daha küçüktür. Ayrıca $Q(x)$ için $\Delta < 0$ ise aşağıdaki tipte integraller söz konusu olur.

- $\int K(x)\,dx$
- $\int \frac{dx}{px+q}$
- $\int \frac{dx}{(px+q)^n}$
- $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$
- $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$
- $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$

⇒ $\int \frac{dx}{3x+2} = \frac{1}{3}\int \frac{3dx}{3x+2} = \frac{1}{3}\ln|3x+2| + c$

⇒ $\int \frac{dx}{(5x+1)^3} = ?$ $\left(\begin{array}{c} 5x+1=u \\ 5dx=du \\ dx=\frac{du}{5} \end{array}\right)$ $= \frac{1}{5}\int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{10u^2} + c = -\frac{1}{(5x+1)^2} + c$

⇒ $\int \frac{2x+5}{x^2+4x+13}\,dx = \int \frac{(2x+4)\,dx}{x^2+4x+13} + \int \frac{dx}{(x+2)^2+3^2}$ $\left(\begin{array}{c} x^2+4x+13=u \\ (2x+4)\,dx=du \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c} x+2=t \\ dx=dt \end{array}\right)$

$$= \int \frac{du}{u} + \int \frac{dt}{t^2+3^2}$$

$$= \ln|u| + \frac{1}{3}\arctan\frac{t}{3} + c$$

$$= \ln|x^2+4x+3| + \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+2}{3}\right) + c$$

⇒ $\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = ?$ $\int \frac{dx}{(x+4)}$ $\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{(x+4)}=u & dx=dv \\ -\frac{2x}{(x^2+4)^2}dx=du & x=v \end{array}\right)$

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)} = \frac{x}{x^2+4} + 2\int \frac{x^2+4-4}{(x^2+4)^2}\,dx$$

$$\tfrac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} = \frac{x}{x^2+4} + 2\int \frac{x^2+4}{(x^2+4)^2}\,dx - 8\int \frac{dx}{(x^2+4)^2}$$

$$8\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{x}{x^2+4} - \tfrac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + 2\int \frac{dx}{(x^2+4)}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{8}\,\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2} + c$$

⇒ $\int \frac{4dx}{x^2-4} = ?$ $\frac{4}{(x-2).(x+2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)}$

$$\frac{4}{(x-2).(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx-2B}{(x-2).(x+2)}$$

$A+B=0$
$2(A-B)=4$
$A=1 \quad B=-1$

$$\int \frac{4dx}{x^2-4} = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x+2| + c = \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{(2x+1)\,dx}{(x-1)^2} = ?$$

I/ $$I = \int \frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x+1} + \int \frac{3\,dx}{(x-1)^2}$$
$$= \ln|x^2-2x+1| - \frac{3}{(x-1)} + c$$

II/ $$\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

$2x+1 = Ax - A + B$

$A=2 \quad B=3$

$$= 2\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$
$$= 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + c$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{-2x+4}{(1+x^2).(x-1)^2}\,dx = ?$$

$$\frac{-2x+4}{(1+x^2).(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$-2x+4 = Ax^3 - Ax^2 + Ax - A + Bx^2 + B + Cx^3 - 2Cx^2 + Cx + Dx^2 - 2Dx + D$$
$$= (A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (A+C-2D)x + (-A+B+D)$$

$A+C=0$

$-A+B-2C+D=0$

$A+C-2D=-2$

$-A+B+D=4$

$A=-2, B=1, C=2, D=1$

$$I = -2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{dx}{x^2+1}$$
$$= -2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln|x^2+1| + \operatorname{arctg} x + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x^4-6x^3+7x^2-2x-2}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx = ?$$
$$= \int \frac{2x^4-6x^3+6x^2-2x \quad + x^2-2}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx$$
$$= \int \left(2x + \frac{x^2-2}{(x-1)^3}\right)dx$$
$$= 2\int x\,dx + \int \frac{x^2-2}{(x-1)^3}\,dx$$

$$\frac{x^2-2}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

$x^2-2 = Ax^2 - 2Ax + A + Bx - B + C$

$A=1$

$B=2$

$C=-1$

$$2\int x\,dx + \int \frac{x^2-2}{(x-1)^3}\,dx = 2\int x\,dx + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{dx}{(x-1)^3}$$
$$= x^2 + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} + c$$

NOT: Payda $(x-a)^n$ iken; $\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+\dots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$

080316 U

$\Rightarrow \int \frac{e^x dx}{e^{2x}-2e^x-3}=?$ $\Rightarrow \int \frac{dx}{x^3-x}=?$ $\Rightarrow \int \frac{x\,dx}{(x-1).(x^2+4)}=?$

$\Rightarrow \int \frac{(3x^2-2)dx}{(x-1).(x+1)^2}=?$ $\Rightarrow \int \frac{x^3}{x^3-3x+2}dx=?$ $\Rightarrow \int \frac{x^3}{x^2-1}dx=?$ $\Rightarrow \int \frac{(x+2)dx}{(x+1).(x^2+x+1)^2}=?$

140316 T

E-Trigonometrik İntegraller

- $\int \sin ax.\sin bx\,dx$, $\int \sin ax.\cos bx\,dx$, $\int \cos ax.\cos bx\,dx$ tipindeki integraller

$$\sin ax.\sin bx = \tfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right]$$
$$\sin ax.\cos bx = \tfrac{1}{2}\left[\sin(a-b)x+\sin(a+b)x\right]$$
$$\cos ax.\cos bx = \tfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)x+\cos(a+b)x\right]$$

$\Rightarrow \int \sin 4x.\sin 7x\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos 3x-\cos 11x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 11x}{11}\right]+c$

- $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$ $(m,n\in\mathbb{N})$ tipindeki integraller

1- m tek ise $\cos x=t$ denir.
$-\sin x dx=dt$

$$\Rightarrow \int \sin^5 x\cos^2 x\,dx = \int \sin^4 x.\cos^2 x\sin x\,dx \qquad \left(\begin{matrix}\cos x=t\\-\sin x dx=dt\end{matrix}\right)$$
$$= \int (1-\cos^2 x)^2\cos^2 x\sin x\,dx$$
$$= -\int (1-t^2)^2 t^2 dt$$
$$= -\int (t^2-2t^4+t^6)dt$$
$$= -\left(\frac{t^3}{3}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^7}{7}\right)+c$$

2- n tek ise $\sin x=t$ denir.
$\cos x dx=dt$

$$\Rightarrow \int \sin^4 x\cos^3 x\,dx = \int \sin^4 x\cos^2 x\cos x\,dx \qquad \left(\begin{matrix}\sin x=t\\\cos x dx=dt\end{matrix}\right)$$

3- Eğer hem m hem de n tek ise $\sin x=t$ ya da $\cos x=t$ denile bilir.
4- m çift ve n çift ise $\cos^2 x=\frac{1}{2}(\cos 2x+1)$, $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ dönüşümleri yardımıyla kuvvetler düşürülür.

$$\Rightarrow \int \sin^4 x\cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2.\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{8}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x).(1+\cos 2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{8}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x+\cos 2x-2\cos^2 2x+\cos^3 2x)\,dx$$
$$A = \frac{1}{8}\int(1-\cos 2x-\cos^2 2x+\cos^3 2x)\,dx$$

$$\int \cos^3 2x\,dx = \int \cos^2 2x \cdot \cos 2x\,dx$$
$$= \int (1-\sin^2 2x)\cdot \cos 2x\,dx \qquad \begin{pmatrix} \sin 2x = t \\ 2\cos 2x\,dx = dt \end{pmatrix}$$
$$= \tfrac{1}{2}\int (1-t^2)\,dt$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(t - \frac{t^3}{3}\right) + c$$
$$= \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 2x}{6} + c$$

$$\int \cos^2 2x\,dx = \tfrac{1}{2}\int (\cos 4x + 1)\,dx = \tfrac{1}{8}\sin 4x + \frac{x}{2} + c$$

$$A = \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 2x}{6}\right) + c$$

$$\Rightarrow \int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\,dx \qquad \begin{pmatrix} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{pmatrix}$$
$$= \int (1-t^2)^2\,dt$$

- $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ tipindeki integrallerde

$$\left(d(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x\right)$$

1- n çift ise $\tan x = u$ denir. $\sec^2 x\,dx = du$

$$\Rightarrow \int \tan^6 x \sec^4 x\,dx = \int \tan^6 x \sec^2 x \sec^2 x\,dx$$
$$= \int \tan^6 x (1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx$$
$$= \int u^6 (1+u^2)\,du$$
$$= \int (u^6 + u^8)\,du = \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + c = \frac{\tan^7 x}{7} + \frac{\tan^9 x}{9} + c$$

2- m tek ise $\sec x = u$ dönüşümü yapılır. $(\sec x \cdot \tan x\,dx = du \;/\; \tan^2 x = 1 - \sec^2 x)$

$$\Rightarrow \int \tan^5 x \sec^3 x\,dx = \int \tan^4 x \sec^2 x \tan x \sec x\,dx$$
$$= \int (1-\sec^2 x)^2 \sec^2 x \tan x \sec x\,dx \qquad \begin{pmatrix} \sec x = u \\ \sec \cdot \tan x\,dx = du \end{pmatrix}$$
$$= \int (1-u^2)^2 \cdot u^2\,du$$

$$\Rightarrow \int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\,dx$$
$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\tan x + \sec x}\,dx \qquad \begin{pmatrix} \tan x + \sec x = u \\ (\sec^2 x + \sec x \tan x)\,dx = du \end{pmatrix}$$
$$= \int \frac{du}{u} = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

II. $\int \frac{dx}{\cos x}$ $\begin{pmatrix} \tan \frac{x}{2} = t \\ \cos \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{pmatrix}$

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\frac{2}{1+t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t}$$
$$2 = A + At + B - Bt$$
$$A + B = 2$$
$$A - B = 0$$

$$= \int \frac{dt}{1-t} + \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1-t| + \ln|1+t| + c$$

• $\int \cot^m x \sec^n x \, dx$ tipindeki integraller $(1+\cot^2 x) = \operatorname{cosec}^2 x$, $d(\operatorname{cosec} x) = -\cot x \operatorname{cosec} x$

$d(\cot x) = -(1+\cot^2 x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

$\left(\begin{array}{l} \cot x = u \\ -\operatorname{cosec}^2 x\, dx = du \end{array}\right)$

$\Rightarrow \int \cot^3 x \operatorname{cosec}^4 x \, dx$ $\left(\begin{array}{l} \cot x = u \\ -\operatorname{cosec}^2 x\, dx = du \end{array}\right)$

I. $I = \int \cot^3 x \operatorname{cosec}^2 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$

$= \int \cot^3 x (1+\cot^2 x) \operatorname{cosec}^2 x \, dx$

$= -\int u^3 (1+u^2) du$

$= -\int (u^3 + u^5) du = -\left(\frac{\cot^4 x}{4} + \frac{\cot^6 x}{6}\right) + c$

II. $\left(\begin{array}{l} \operatorname{cosec} x = u \\ -\operatorname{cosec} x \cot x\, dx = du \end{array}\right)$

$I = \int \cot^2 x \operatorname{cosec}^3 x \cot x \operatorname{cosec} x \, dx$

$= \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \operatorname{cosec}^3 x \cot x \operatorname{cosec} x \, dx$

$= -\int (u^2 - 1) u^3 du$

$= -\left(\frac{u^6}{6} - \frac{u^4}{4}\right) + c$

1• $\int R(\sin x, \cos x)$ tipindeki integraller

a) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ ise tektir. $\cos x = t$ dönüşümü yapılır.

b) Yarım açı formüllerinden yararlanılabilir.

$\Rightarrow \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \sin x \, dx$ $\left(\begin{array}{l} \cos x = u \\ -\sin x\, dx = du \end{array}\right)$

$= -\int \frac{1-u^2}{u^2} du$

$= -\int \left(\frac{1}{u^2} - 1\right) du = \frac{1}{u} + u + c = \sec x + \cos x + c$

$\Rightarrow \int \cos^3 x \tan^5 x \, dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} dx$

2• $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ hem cosinüs hem sinüsün kuvveti tek ya da çift ise ya $\tan x = t$ ya da $\cot x = t$ dönüşümü yapılır.

$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{(1+t^2)} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^2}}$

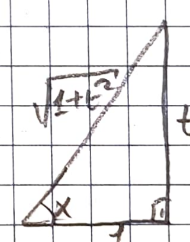
$= \int \frac{(1+t^2)^2}{t^2} dt$

$= \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^2} dt$

$= \int \left(\frac{1}{t^2} + 2 + t^2\right) dt = -\frac{1}{t} + 2t + \frac{t^3}{3} + c$

$= -\cot x + 2\tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + c$

$\left[\begin{array}{l} \tan x = t \\ (1+\tan^2 x) dx = dt \\ (1+t^2) dx = dt \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{array}\right]$



$\Rightarrow \int \sqrt{1-\cos 4x}\, dx = \int \sqrt{1-1+2\sin^2 2x}\, dx = \sqrt{2} \int \sin 2x \, dx = \sqrt{2}\, \frac{\cos^3 x}{2} + c$

F- İrrasyonel Fonksiyonların İntegrali

① $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ integralinin hesabı

- $a<0,\ b^2-4ac>0$ $\quad ax^2+bx+c \rightarrow k^2-u^2$ ye benzetiriz.

$$u = x+\frac{b}{a}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{k^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{k}+c$$

- $a>0$
  - $b^2-4ac>0 \longrightarrow \displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-p}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2-p}\right)+c$
  - $b^2-4ac<0 \longrightarrow \displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2+p}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2+p}\right)+c$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(-(x^2-2x+1)+4)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-1)^2+4}} \quad \begin{pmatrix} x-1=u \\ dx=du \end{pmatrix}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{-u^2+4}} = \arcsin\frac{u}{2}+c = \arcsin\frac{x-1}{2}+c$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+1+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+2}} \quad \begin{pmatrix} 2x+1=u \\ 2dx=du \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+2}} = \frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+2}\right)+c = \frac{1}{2}\ln\left(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}\right)+c$$

② $\displaystyle\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \quad \begin{pmatrix} ax^2+bx+c=u \\ (2ax+b)dx=du \end{pmatrix}$

$$= \frac{m}{2a}\int \frac{\left(2ax+b+2a\frac{n}{m}-b\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$= \frac{m}{2a}\int \frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{m}{2a}\left(\frac{2an}{m}-b\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

① tipinde integral

$$\left(\int u^{-1/2}\,du = 2u^{1/2}+c\right)$$

$$= \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(n-\frac{bm}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Paydadaki polinomun türevini çeşitli sayılarla çarpıp bölerek paya benzetmek.

$$\Rightarrow \int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4+\frac{4}{3}-4}{\sqrt{x^2+4x+1}}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+4)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+1}} - 4\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-3}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \bullet \displaystyle\int \frac{(2x+4)}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx = \int \frac{dt}{t^{1/2}} = \int t^{-1/2}dt = \frac{t^{1/2}}{1/2}+c = 2\sqrt{t}+c = 2\sqrt{x^2+4x+1}+c \\ \qquad\qquad \begin{pmatrix} x^2+4x+1=t \\ (2x+4)dx=dt \end{pmatrix} \\ \bullet \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-3}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2-3}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2-3}\right)+c = \ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right)+c \\ \qquad\qquad \begin{pmatrix} x+2=u \\ dx=du \end{pmatrix} \end{array}\right]$$

$$= 3\sqrt{x^2+4x+1} - 4\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right)+c$$

③ $\displaystyle\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ integralının hesabı $\frac{1}{px+q}=t$ değişken dönüşturmesi ile ① ya da ② tipinde integraller elde edilir.

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+3}} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{x-1}=t \\ x-1=1/t \\ dx=-\frac{dt}{t^2} \end{pmatrix} \qquad \left[\begin{array}{l} x=\frac{1+t}{t} \\ x^2+3=\frac{1+2t+t^2}{t^2}+\frac{3t^2}{t^2} \\ \qquad =\frac{4t^2+2t+1}{t^2} \end{array}\right]$$

$$= -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{4t^2+2t+1}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2+2t+1/4+3/4}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(2t+1/2)^2+3/4}}$$

$$\begin{pmatrix} 2t+1/2=u \\ 2dt=du \end{pmatrix} \qquad I = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+3/4}} = -\frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+3/4}\right)+c = -\frac{1}{2}\ln\left(2t+3/4+\sqrt{4t^2+2t+1}\right)+c$$

$$I = -1/2\ln\left(\frac{2}{x-1}+\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{4+2(x-1)+(x-1)^2}{(x-1)^2}}\right)+c$$

$$= -1/2\ln\left(\frac{2+3(x-1)+\sqrt{x^2+3}}{(x-1)}\right)+c$$

④ $\displaystyle\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ tipindeki integrallerde; Bu integrantta $P_n(x)$ n. dereceden bir polinom olmak üzere $Q_{n-1}(x)$, (n-1) inci dereceden polinom λ reel sayısı için;

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad \text{yazılır.}$$

Eşitliğin her iki tarafının türevi alınır. Polinomun eşitliği ilkesi ile λ ve Q_{n-1} tespit edilir.

$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{1-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{A\sqrt{1-x^2}}{(\sqrt{1-x^2})} - \frac{(Ax+B)x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$x^2 = A(1-x^2) - (Ax+B)x + \lambda$$

$$A = -1/2 \quad B = 0 \quad \lambda = 1/2$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{-x\sqrt{1-x^2}}{2} + 1/2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + 1/2 \arcsin x + c$$

⑤ $\int \frac{dx}{(x-p)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ integralinin hesabında $\frac{1}{x-p} = t$ denirse ④ tipinde bir integral elde edilir. (paya gel)

$$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+2x-2}} \qquad \left(\frac{1}{x-1} = t \quad x-1 = \frac{1}{t} \quad dx = -\frac{dt}{t^2} \right)$$

$$x^2+2x-2 = \left(\frac{t+1}{t}\right)^2 + 2\left(\frac{t+1}{t}\right) - 2$$

$$= \frac{t^2+2t+1+2t^2+2t-2t^2}{t^2}$$

$$I = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{t^2+4t+1}{t^2}}} = -\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+4t+1}}$$

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+4t+1}} = A\sqrt{t^2+4t+1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4t+1}}$$

$$\frac{t}{\sqrt{t^2+4t+1}} = \frac{A(t+2)}{\sqrt{t^2+4t+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{t^2+4t+1}}$$

$$t = -At - 2A + \lambda$$

$$A = -1 \quad \lambda = -2$$

$$= -\sqrt{t^2+4t+1} - 2\int \frac{dt}{\sqrt{(t+2)^2-3}}$$

$$= -\sqrt{t^2+4t+1} - 2\ln\left((t+2) + \sqrt{t^2+4t+1}\right) + c$$

$$= \sqrt{t^2+4t+1} + 2\ln\left(t+2+\sqrt{t^2+4t+1}\right) + c$$

⑥ $\int x^r(a+bx^p)^q\,dx$ tipindeki integraller binom integralidir. $a,b\in\mathbb{R}$
$r,p,q\in\mathbb{Q}$

a- $q\in\mathbb{Z}$ ise r ile p nin paydasının en küçük ortak katı k olmak üzere $x=t^k$ dönüşümü yapılır.

b- $q\notin\mathbb{Z}$ ve $\frac{r+1}{p}\in\mathbb{Z}$ ise q nun paydası m olmak üzere $a+bx^p=u^m$ dönüşümü yapılır.

c- $q\notin\mathbb{Z}$, $\frac{r+1}{p}\notin\mathbb{Z}$ ve $\frac{r+1}{p}+q\in\mathbb{Z}$ ise $ax^{-p}+b=u^m$ dönüşümü yapılır.

$\Rightarrow \int \sqrt[3]{x}\,(1+\sqrt{x})^3\,dx \qquad x=t^6$

$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{1/2}\,dx$

220316 U

$\Rightarrow \int \sin^6x\cos^5x\,dx=?$

$\Rightarrow \int \sin^3x\cos^3x\,dx=?$

$\Rightarrow \int \sin^2x\cos^2x\,dx=?$

$\Rightarrow \int \sin^5x\cos^7x\,dx=?$

$\Rightarrow \int \sin\frac{x}{2}\cdot\cos3x\,dx=?$

$\Rightarrow \int \tan^3x\sec^4x\,dx=?$

$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+3x+4}}=?$

$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+1}}=?$

$\Rightarrow \int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=?$

$\Rightarrow \int x^{-1/2}(1+x^{-1/3})^{-2}\,dx=?$

280316 T

BELİRLİ İNTEGRAL

İntegral hesabının temel teoremi: f, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $\forall x\in[a,b]$ için $F'(x)=f(x)$ olacak şekilde $F,[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu varsa

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \text{ dır.}$$ (Newton-Leibnitz formülü)

İntegrallenebilen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için;

- $\int_a^a f(x)\,dx=0$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- İntegralin değeri integrasyon değişkeninden bağımsızdır.
  $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(z)\,dz$
- $c\in(a,b)$ için;
  $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 1/3 - \frac{0}{3} = 1/3$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos^{3/2}x\sin x\,dx=?$

$\cancel{\text{I}}\ \left(\begin{array}{l}\cos x=u\\ -\sin x\,dx=du\end{array}\right)$

$\int \cos^{3/2}x\sin x\,dx = -\int u^{3/2}\,du = -\frac{2u^{5/2}}{5}+c$

$\int_0^{\pi/2} \cos^{3/2}x\sin x\,dx = -\frac{2}{5}\cos^{5/2}x\Big|_0^{\pi/2} = 5/2$

IV- $\left[\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \quad \begin{pmatrix} g(x)=u \\ g'(x)dx=du \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x=a \rightarrow u=g(a) \\ x=b \rightarrow u=g(b) \end{matrix}\right]$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{3/2}x \sin x\,dx = -\int_1^0 u^{3/2}\,du = \int_0^1 u^{3/2}\,du = \frac{2}{5}u^{5/2}\Big|_0^1 = 2/5$$

$\begin{pmatrix} \cos x = u \\ -\sin x dx = du \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} x=0 \rightarrow u=1 \\ x=\pi/2 \rightarrow u=0 \end{bmatrix}$

- Eğer integral kısmi integrasyon yolu ile hesaplanacaksa

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x).v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x)$$

$\Rightarrow \int_0^{\pi} x\cos x\,dx \qquad \begin{pmatrix} x=u & \cos x dx = dv \\ dx=du & \sin x = v \end{pmatrix}$

$$= x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\,dx = 0-0-\left(-\cos\Big|_0^{\pi}\right) = -(-(-1-1)) = -2$$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx \qquad \begin{pmatrix} \sin x = u \\ \cos x dx = du \end{pmatrix}$

$$= \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \arctan u\Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \pi/4 - 0 = \pi/4$$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x\,dx = \int_0^{\pi/4} \tan x \sec x \sec x\,dx \qquad \begin{pmatrix} \sec x = u \\ \sec x \tan x\,dx = du \end{pmatrix}$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} u\,du = \frac{u^2}{2}\Big|_1^{\sqrt{2}} = 1 - 1/2 = 1/2 \qquad \begin{bmatrix} x=0 \rightarrow u=1 \\ x=\pi/4 \rightarrow u=\frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Teorem: f, $[a,b]$ integrallenebilen bir fonksiyon olsun

1- $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x) \geq 0$ dır.

2- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$

- $f: [-a,a] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun

a- f fonksiyonu tek ise $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \qquad (f(-x) = -f(x))$

b- f fonksiyonu çift ise $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx \qquad (f(-x) = f(x))$

$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^3\cos x}{1+\sin^{10}x}\,dx \qquad f(-x) = \frac{(-x)^3\cos(-x)}{1+\sin^{10}(-x)} = \frac{-x^3\cos x}{1+\sin^{10}x} = -f(x)$ Tek fonksiyon

$= 0$

$$\Rightarrow \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{9-(4-4x+x^2)}} = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{3^2-(x-2)^2}} = \int_0^3 \frac{du}{\sqrt{3^2-u^2}}$$

$$\begin{pmatrix} x-2=u \\ dx=du \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x=2 \to u=0 \\ x=5 \to u=3 \end{bmatrix}$$

$$= \arcsin\frac{u}{3}\Big|_0^3 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \pi/2$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx = ?$$ $(1-\sin^2 x)$ olsaydı işte kolay olurdu. $\begin{pmatrix} x=\pi-t \\ dx=-dt \end{pmatrix}$

$$I = -\int_\pi^0 \frac{(\pi-t)\sin t\,dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_0^\pi \frac{\pi\sin t\,dt}{\sqrt{1+\sin^2 t}} - \int_0^\pi \frac{t\sin t\,dt}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$$

$$I = \pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{\sqrt{1+\sin^2 t}}\,dt - I$$

$$\begin{pmatrix} \cos t = u \\ -\sin t\,dt = du \\ t=0 \to u=1 \\ t=\pi \to u=-1 \end{pmatrix}$$

$$2I = -\pi\int_1^{-1} \frac{du}{\sqrt{2-u^2}} = \pi\int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{2-u^2}} = \pi\arcsin\frac{u}{\sqrt{2}}\Big|_{-1}^1 = \frac{\pi^2}{4}$$

İntegralin Türevleri

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ eşitliği ile tanımlanan F fonksiyonu f'in sürekli olduğu her noktada türevli olup $F'(x)=f(x)$ dir.

$\Rightarrow F(x)=\int_0^x e^{t^2}\,dt$ olduğuna göre $F'(x)=e$ denkleminin köklerini bulunuz?

$$F'(x)=e^{x^2}=e^1 \longrightarrow x^2=1 \longrightarrow \{-1,1\}$$

- Leibnitz Formülü

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt\right] = f(u(x))\cdot u'(x) - f(v(x))\,v'(x)$$

$\Rightarrow F(x)=\int_x^{x^2} \sin(t^2)\,dt \qquad F'(x)=2x\sin(x^4)-1\cdot\sin x^2$

290316

$\Rightarrow \int x^{1/3}(1+x^{4/3})^{-1/2}\,dx=?$

$\Rightarrow \int x^{-3/4}(1+x^{5/4})^{-1/3}\,dx=?$

$\Rightarrow \int_1^4 (3+2x-x^2)\,dx=?$

$\Rightarrow \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx=?$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos x\cdot\sin^3 x\,dx=?$

$\Rightarrow \int_0^2 \left(\frac{x}{1+x^2}+e^{x/2}-x^2\right)dx=?$

$\Rightarrow \int_0^1 x\ln(x+3)\,dx=?$

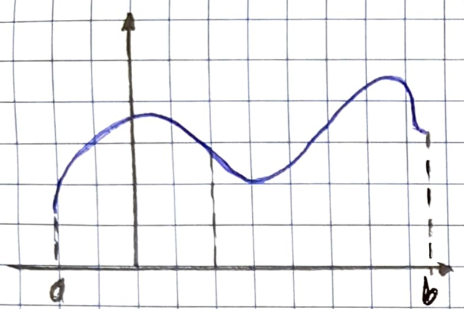
$\Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{\sin x\,dx}{1+x^2}=?$

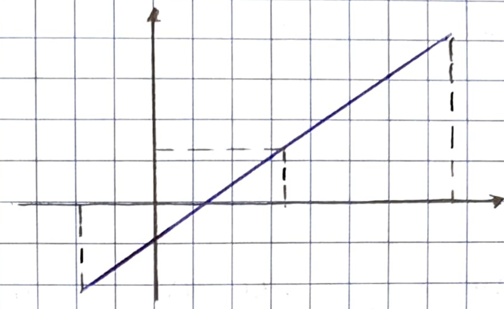
$\Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx=?$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/6} 2^{\sin x}\cos x\,dx=?$

$\Rightarrow \int_0^2 x|1-x^2|\,dx=?$

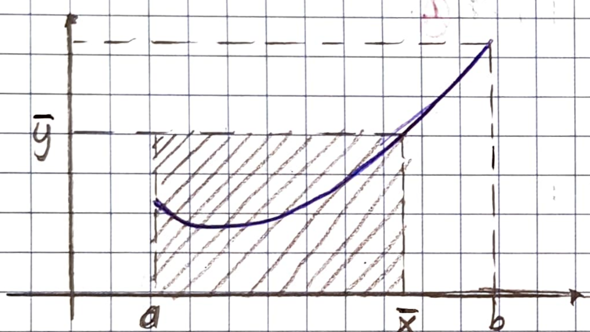
Ortalama Değer Problemleri





Tanım: f, fonksiyonu $[a,b]$ integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $y=f(x)$ in $[a,b]$ aralığındaki ortalaması;

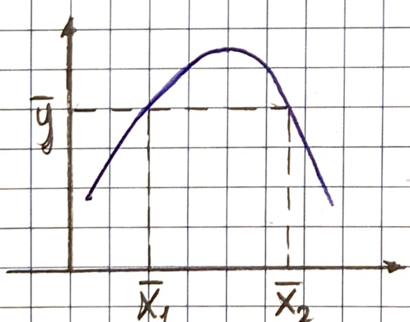
$$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{sayısıdır.}$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,\bar{y}$$

⇒ $y=x^3$ eğrisinin $[0,3]$ aralığındaki ortalama değerini hesaplayınız?

NOT: $f(\bar{x}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ olacak şekilde en az bir $\bar{x} \in [a,b]$ vardır.



⇒ $f(x)=mx+n$ fonksiyonunun $[a,b]$ kapalı aralığındaki ortalama değerini bulunuz. Bu ortalama değeri $[a,b]$ kapalı aralığının hangi noktalarında alır?

⇒ Taban yarıçapı 3br ve yüksekliği 12br olan bir dairesel dik koni tepesinden y br uzaklıkta tabana paralel bir düzlemle kesiliyor. Elde edilen dairesel kesitin ortalama alanı kaçtır?

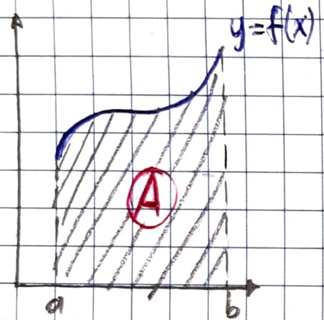
Teorem: f ve g, [a,b] kapalı aralığında aynı işaretli ve sürekli fonksiyonlar olsunlar [a,b] aralığında

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

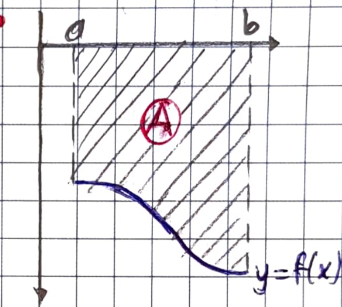
olacak şekilde bir $c \in [a,b]$ sayısı vardır.

⇒ $0 < \int_0^1 \frac{x^4}{(1+x^4)^2}\,dx < \frac{1}{8}$ olduğunu gösteriniz?

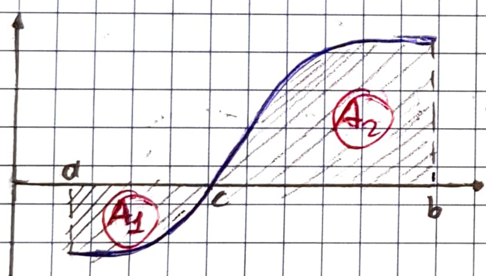
İntegrallerin Uygulamaları



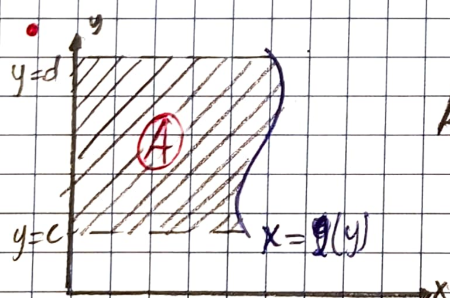
$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$



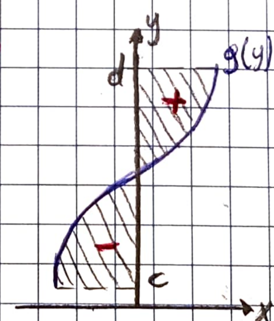
$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$



$$A = A_1 + A_2$$
$$= -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx$$



$$A = \int_c^d |g(y)|\,dy$$



$$A = \int_c^d |g(y)|\,dy$$

⇒ $y=x^2$ eğrisi $x=3$ ve $x=6$ doğruları ile Ox-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı kaçtır?

⇒ $y=x^2-4x+3$ eğrisi $x=2$ ile $x=4$ doğruları ve Ox-ekseni arasında kalan bölgenin alanı kaçtır?

⇒ $y=x^3$ eğrisi $y=1$ ile $y=8$ doğruları ve Oy-ekseni arasında kalan bölgenin alanı kaçtır?

⇒ Dördüncü bölgede $y=x^3-3x$ eğrisi ile Ox ekseni arasında kalan bölgenin alanı kaçtır?

050416

Çıkmış Sorular (Vize)

1- $\int \frac{dx}{(\cos^2 x+4\sin x-5)\cos x} = ?$

2- $n\geq 1$ olmak üzere $\int \ln^n x\,dx$ için bir indirgeme bağıntısı bulunuz?

3- $f(x)=\ln x$ $g(x)=e^{\sin x}$ fonksiyonuna göre $\int f(x).d(g^{-1}(x)) = ?$

4- $\int_{-\pi}^{\pi} |\cos^3 x+\sin^3 x|\,dx = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ olduğunu gösteriniz

5- $x=\pi-t$ dönüşümü ile $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx = \frac{\pi^2}{4}$ olduğunu gösteriniz?

6- $F(x)=\int_{\sin x}^{2x} \cos t\,dt$ için $F'(x)=?$

⇒ $F(x)=\int_x^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$ için $F'(x)=?$

⇒ $\int_0^{\pi/6}\left[\frac{d}{dt}\left(\int_0^t \cos 3x\,dx\right)\right]dt = ?$

⇒ $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^{10}}$ integrali hangi aralıkta değer alabilir?

⇒ $\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}dx$ integrali hangi aralıkta değer alabilir?

⇒ $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+x^3}$ integrali hangi aralıkta değer alabilir?

⇒ $F(x)=\int_1^{-x} t\cos t^4\,dt$ ise $F'(x)=?$

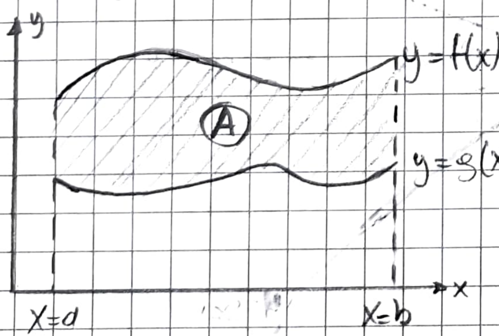
⇒ $F(x)=\int_0^x t(1+t^2)^{20}\,dt$ ise $F'(x)=?$

⇒ $\int_0^{\pi/6}\sin^{3/2}x\,dx$ hangi aralıkta değer alabilir?

⇒ $y=1-|x|$ eğrisi ile $x=-2$ ve $x=2$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı kaçtır?

190416

İki Eğri Arasında Kalan Bölgenin Alanının Hesabı



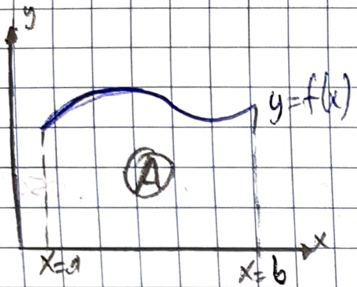
$A_1=\int_a^b f(x)dx$

$A_2=\int_a^b g(x)dx$

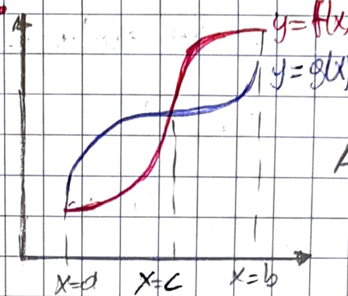
$A=A_1-A_2$

$=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x)-g(x))dx$

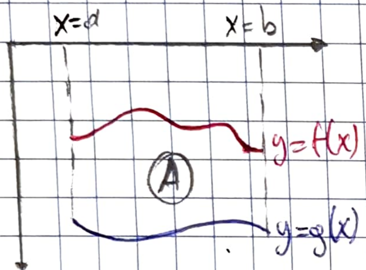
$A=-\int_a^b (g(x)-f(x))dx$



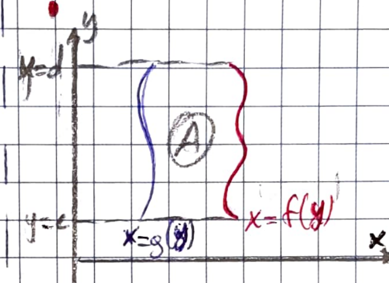
$$A=\int_a^b (f(x)-0)\,dx$$



$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$
$$=\int_a^c (g(x)-f(x))\,dx-\int_c^b (f(x)-g(x))\,dx$$



$$A=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$



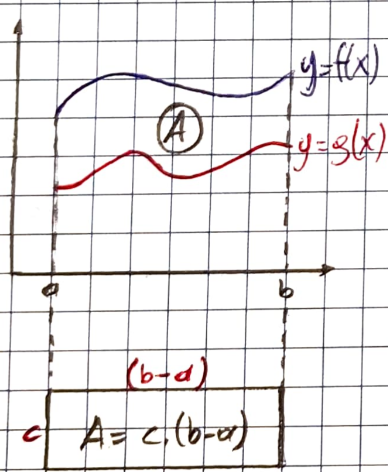
$$A=\int_c^d (f(y)-g(y))\,dy$$

⇒ $y=x^2+2$, $y=2x-x^2$ parabolleri, Oy-ekseni ve $x=3$ doğruları ile sınırlandırılan bölgenin alanını bulunuz?

⇒ $y=x^2$ ve $x=y^2$ parabolleri ile sınırlı bölgenin alanı kaçtır?

⇒ $y=3x-x^3$ eğrisi ile $y=x$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını bulunuz?

⇒ $x=2y$ doğrusu ile $x=8-y^2$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz?



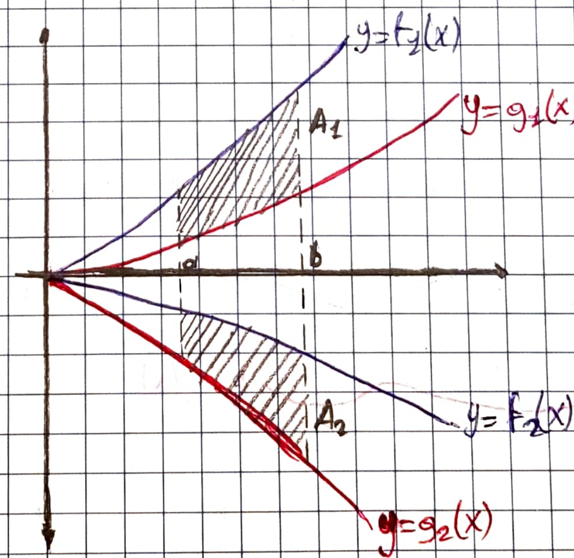
$\forall x \in [a,b]$ için

$f(x)-g(x)=c>0$

olsun

$$A=\int_a^b \underbrace{(f(x)-g(x))}_{c}\,dx$$
$$=c(x)\Big|_a^b$$
$$=c(b-a)$$

• Cavalieri Prensibi



$\forall x \in [a,b]$

$$f_1(x)-g_1(x)=f_2(x)-g_2(x)$$
$$A_1=A_2$$

Parametrik Denklemleri Verilen Eğrilerin Sınırladığı Bölgenin Alanı

g ve h türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere

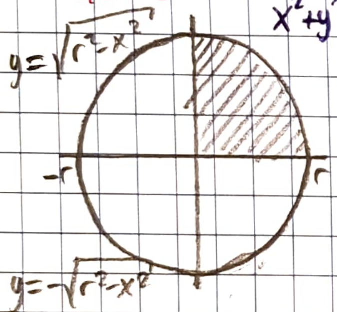
$$x = g(t) \longrightarrow dx = g'(t)\,dt$$
$$y = h(t)$$

parametrik denklemi ile verilen c eğrisi $x=a$, $x=b$ doğruları ve Ox ekseni ile sınırlanan bölgenin alanı;

$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b |y|\,dx = \int_{t_1}^{t_2} |h(t)| . g'(t)\,dt$$

$$A = \int_c^d |x|\,dy = \int_{t_1}^{t_2} |g(t)|\, h'(t)\,dt$$

• Çember

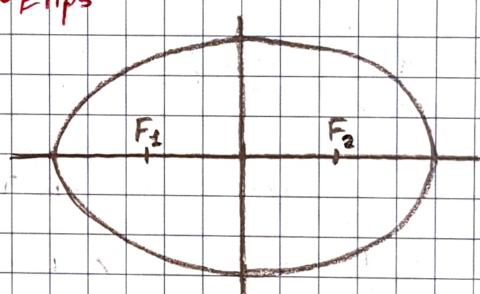


$$x^2+y^2=r^2$$

$$x = r\cos t$$
$$y = r\sin t$$
$$dx = -r\sin t\,dt$$

$$A = 4\int_0^{\pi/2} r^2 \sin^2 t\,dt$$
$$= 4r^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt$$
$$= 2r^2\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}$$
$$= \pi r^2$$

• Elips



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

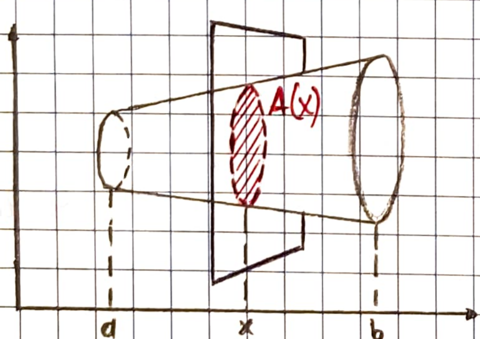
$$x = a\sin t$$
$$y = b\sin t$$

$$A = \pi a b$$

190416

HACİM HESABI

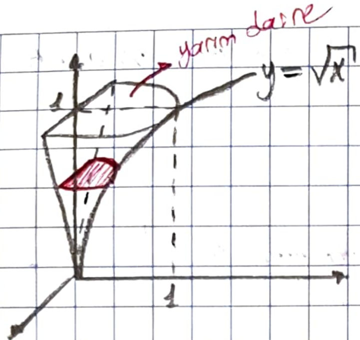
A- Kesit Yöntemi

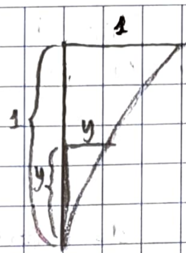


$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

⇒ Tabanının bir kenarı b birim ve yüksekliği h birim olan kare piramidin hacmini?

⇒ r yarıçaplı kürenin hacmini bulunuz?



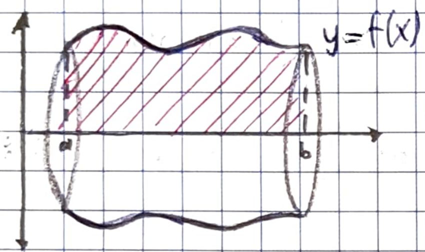


$$A(y)=\frac{\pi y^2}{2}$$

$$V=\frac{\pi}{2}\int_0^1 y^2\,dy=\frac{\pi}{6}\ \text{br}^3$$

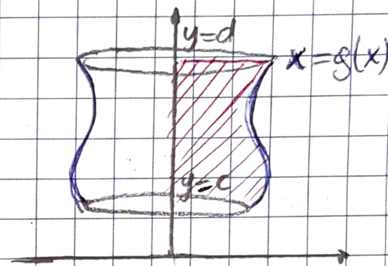
B- Disk Yöntemi

$y=f(x)$ eğrisi $x=a$, $x=b$ doğruları ve Ox ekseni ile sınırlandırılan bölgenin Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi;



$$A(x)=\pi f^2(x)$$

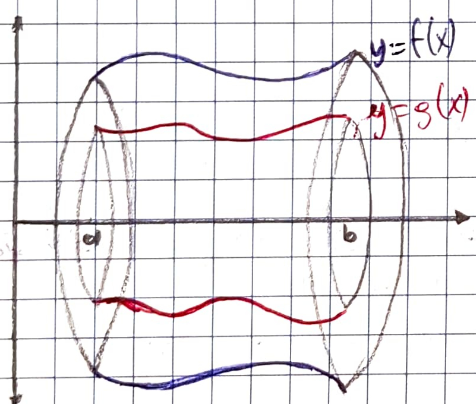
$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$



$$V=\pi\int_c^d g^2(x)\,dx$$

⇒ $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ eğrisi $x=1$, $x=e$ doğruları ve Ox ekseni arasında kalan bölge Ox ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen döner cismin hacmi=?

⇒ $y=\ln x$ eğrisi Ox ekseni, Oy ekseni ve $y=1$ doğruları arasında kalan bölgenin Oy ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan döner cismin hacmi=?



$$V_1=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

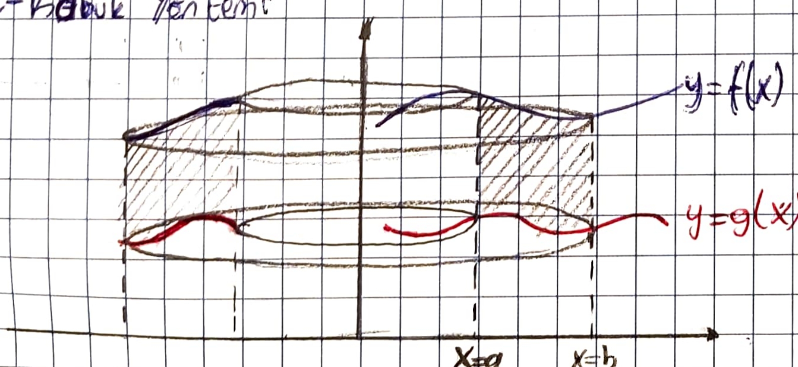
$$V_2=\pi\int_a^b g^2(x)\,dx$$

$$V=\pi\int_a^b \left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx$$

⇒ $y=2\sqrt{x}$, $y=x^2$ eğrileri ile $x=1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi=?

250416

C- Kabuk Yöntemi



$y=f(x)$ ve $y=g(x)$ eğrileri ve $x=a$, $x=b$ doğruları ile sınırlanan bölgenin Oy ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi;

$$V=2\pi\int_a^b |x(f(x)-g(x))|\,dx$$

$x=u(y)$ ve $x=v(y)$ eğrileri ve $y=c$, $y=d$ doğruları etrafında sınırlanan bölgenin Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi;

$$V=2\pi\int_c^d |y(f(y)-g(y))|\,dy$$

⇒ $y=-x^2+4x-3$ parabolü ile $y=x-3$ doğrusu arasında kalan bölgenin Oy ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi?

⇒ $y=\ln x$, Ox ekseni, Oy ekseni ve $y=1$ doğrusu etrafında sınırlanan bölgenin Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi?

⇒ $y=3-x^2$ parabolü $y=3x-1$ doğrusu ve Oy ekseni tarafından sınırlanan bölge Oy ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen hacmin kesit, disk ve kabuk yöntemleriyle bulunuz?

- Eğer Ox ekseni etrafında döndürülen bölgenin sınır eğrisi parametreler formda verilmiş ise;

$$x=u(t) \longrightarrow dx=u'(t)dt \qquad t_1\le t\le t_2$$
$$y=v(t)$$

biçiminde parametrik olarak verilmiş olsun.

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx$$

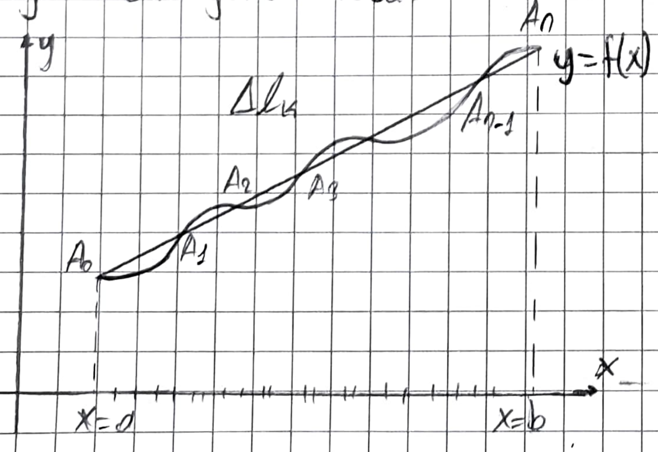
$$O_x\to V=\pi\int_{t_1}^{t_2} v^2(t)u'(t)\,dt \qquad O_y\to V=\pi\int_{t_1}^{t_2} u^2(t)v'(t)\,dt$$

⇒ Parametrik denklemi $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$ olan fonksiyonun 0'dan 2π'ye kadar Ox ekseni etrafında dönen cismin hacmi?

⇒ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsi tarafından sınırlanan bölgenin Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan elipsoidin hacmini bulunuz?

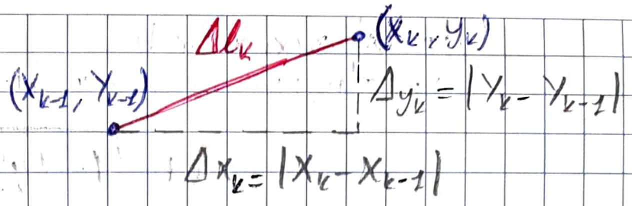
260416

Eğri Uzunluğunun Hesabı



$y=f(x)$ eşitliği ile verilen f fonksiyonu her noktada türevlenebilir olsun.

$$\Delta l_k = |A_{k-1}A_k| = \sqrt{\Delta^2 x_k + \Delta^2 y_k}$$



$$l \cong \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta^2 x_k + \Delta^2 y_k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\,\Delta x_k$$

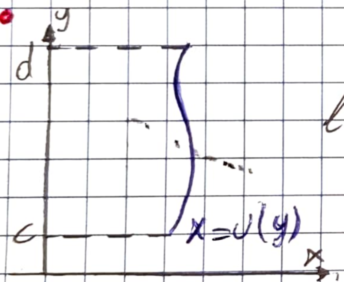
$$l = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\,\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

⇒ r yarıçaplı çemberin uzunluğunu bulunuz?

⇒ $y=4-x^2$ parabolünün x ekseninin üst kısmında kalan yayın uzunluğunu hesaplayınız?

⇒ $x=\frac{y^2}{4}-\ln\sqrt{y}$ denklemli eğrinin $y=2$ ve $y=7$ ordinatlı noktalar arasındaki uzunluğu bulunuz?



$$l = \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

$x=u(t)$
$y=v(t)$ $\quad t_1 \le t \le t_2$ ise

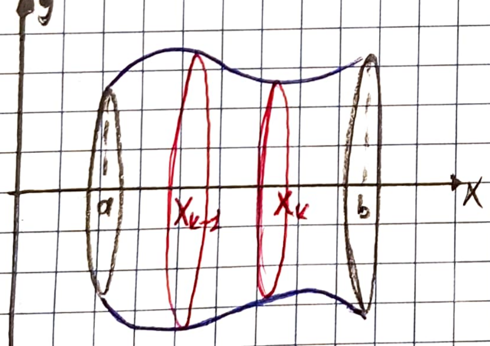
$$\left.\begin{aligned} dx &= u'(t)\,dt \\ dy &= v'(t)\,dt \end{aligned}\right\} \; l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(u'(t))^2+(v'(t))^2}\,dt$$

⇒ Cycloid eğrisinin 0 ile 2π arasındaki uzunluğu=?

[$\dot{x}$ → parametrik türev
$\frac{dx}{dt}=\dot{x}$ $\quad \frac{dx}{dy}=x'$ $\quad \frac{dy}{dx}=y'$]

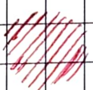
020516

Dönel Yüzeyin Alanı

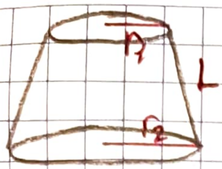


Dönel yüzey, bir eğri ya da eğri parçasının bir eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeydir. Küre, koni, silindir birer dönel yüzeydir.

 → Kapalı Yuvar

 → Açık Yuvar

 → Küre



$y=f(x)$ eğrisinin $a\le x\le b$ aralığında Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı;

$$S=2\pi\int_a^b |y|\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$S=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

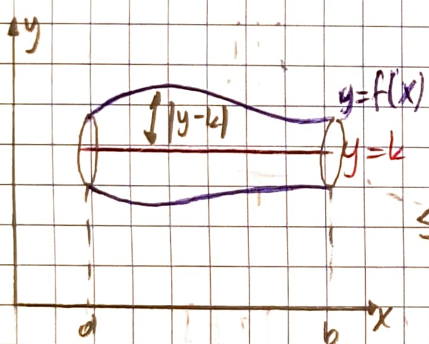
⇒ r yarıçaplı bir kürenin yüzey alanını bulunuz?

• Eğer $x=g(y)$ eğrisi $c\le y\le d$ aralığında Oy ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı;

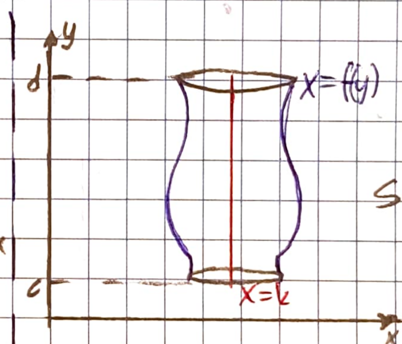
$$S=2\pi\int_c^d |x|\sqrt{1+(x')^2}\,dy$$

⇒ Bir doğrunun orjin ve (2,3) noktaları arasında kalan parçası Oy ekseni etrafında döndürülüyor.

• $y=f(x)$ eğrisi, $a\le x\le b$ denklemli eğri parçası $y=k$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanı



$$S=2\pi\int_a^b |y-k|\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$



$$S=2\pi\int_c^d |x-k|\sqrt{1+(x')^2}\,dy$$

⇒ $x^2+(y-1)^2=1$ çemberinin $y=-1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanı=?

⇒ $y=\sin x$ eğrisinin $x=0$ ve $x=\pi$ doğruları arasındaki eğri parçası x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanı=?

⇒ $y^2=8x$ parabolünün $x=1$ ve $x=3$ doğruları arasında kalan parçası x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanı=?

• $y=f(x)$, $a\le x\le b$

$$l=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

Yüzey alanı;

$$S=2\pi\int_a^b |y|\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_a^b |y|\,dl$$

• $x=g(y)$, $c\le y\le d$

$$S=2\pi\int_c^d |x|\sqrt{1+(x')^2}\,dy$$

$$=2\pi\int_c^d |x|\,dl$$

- $\left.\begin{array}{l} x=u(t) \\ y=v(t) \end{array}\right\}$ $t_1 \leq t \leq t_2$ parametrik denklemi ile verilen eğri parçası Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanı

$$S=2\pi\int_{t_1}^{t_2}|v(t)|\sqrt{(u'(t))^2+(v'(t))^2}\,dt$$

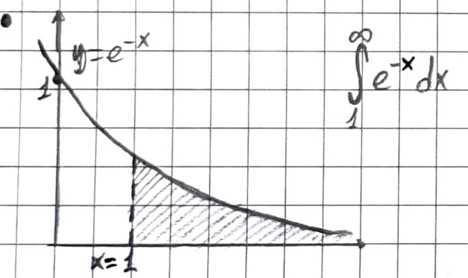
$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2}\,dt \longrightarrow \text{eğri uzunluğu}$$

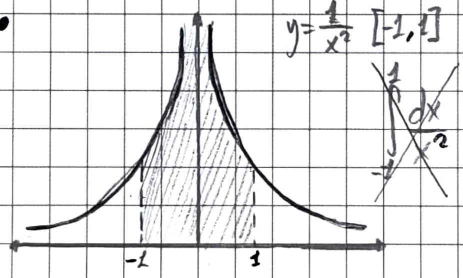
Oy ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanı;

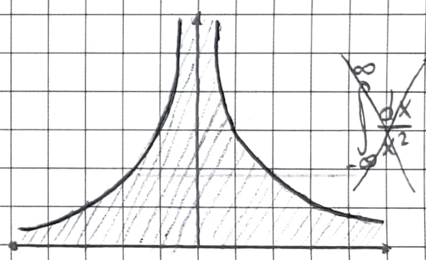
$$S=2\pi\int_{t_1}^{t_2}|u(t)|\sqrt{(u'(t))^2+(v'(t))^2}\,dt$$

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{array}\right\}$ formülü verilen cycloid'in $0 \leq t \leq 2\pi$ arasında Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanı?

Genelleştirilmiş İntegraller







I. Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller

Tanım: a bir reel sayı olsun ve f fonksiyonu her bir $t \geq a$ için $[a,t]$ aralığında integrallenebilir olsun. $\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$ --- (*) ifadesine f nin $[a,\infty)$ aralığındaki birinci çeşit genelleştirilmiş integral denir. (*) ifadesinin limiti varsa bu integrale yakınsak aksi halde ıraksak denir. $\lim_{s\to-\infty}\int_s^b f(x)dx$ ifadesine f nin $(-\infty,b]$ üzerindeki birinci çeşit genelleştirilmiş integralidir.

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$

$= \lim_{s\to-\infty}\int_s^c f(x)dx + \lim_{t\to\infty}\int_c^t f(x)dx$

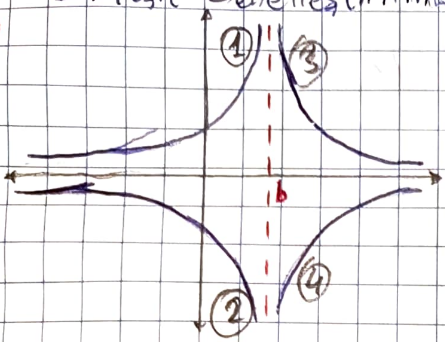
Eğer her iki limit değeri de varsa bu integrale yakınsak aksi halde ıraksak denir.

$\Rightarrow$ $y=\frac{1}{1+x^2}$ eğrisi ile Ox ekseni arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız?

$\Rightarrow$ $\int_0^{\infty} x^2 dx = ?$

$\Rightarrow$ $a>0$ için $\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ integralinin karakterini inceleyiniz?

II. Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller



1- $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$

2- $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$

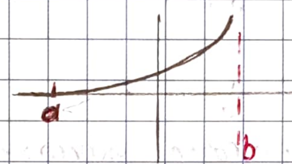
3- $\lim_{x\to b^+} f(x) = +\infty$

4- $\lim_{x\to b^+} f(x) = -\infty$

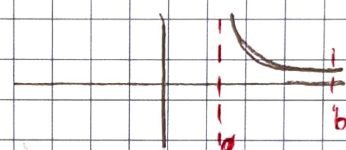
Tanım: f fonksiyonu [a,b) aralığının üzerinde integrallenebilir $\lim_{t\to b^-} f(x) = +\infty$ (veya $-\infty$) olsun. $\int_a^b f(x)dx$ integraline ikinci çeşit genelleştirilmiş integral denir.

b noktasına singüler nokta denir.

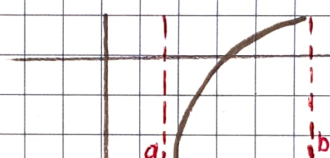
$$\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$



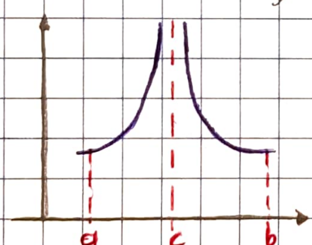
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \text{ (veya } -\infty)$$



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^a f(x)dx$$



Eğer [a,b] aralığındaki singüler nokta [a,b] aralığının bir iç noktası ise



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx + \lim_{s\to c^+}\int_s^b f(x)dx$$

Her iki limit değeri de varsa integral yakınsaktır.

⇒ $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = ?$ ⇒ $\int_0^{\pi}\tan x\,dx = ?$

III. Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller

Tanım: Bir integral hem I. çeşit hem de II. çeşit genelleştirilmiş (hoş olmayan) integral ise bu integrale III. çeşit genelleştirilmiş integral denir.

⇒ $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2} = ?$ (Sıfır singüler / sürekli değil / tanımsızlık var)

⇒ $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{x^2}dx = ?$ (I. çeşit genelleştirilmiş integral)

⇒ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = ?$ (II. çeşit genelleştirilmiş integral)

I. Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller için Yakınsaklık Testleri

Karşılaştırma Testleri

$[a,+\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonları $0 \leq f(x) \leq g(x)$ eşitliğini sağlasın.

1- $\int_a^\infty g(x)dx$ integrali yakınsak ise $\int_a^\infty f(x)dx$ yakınsaktır.

2- $\int_a^\infty f(x)dx$ integrali ıraksak ise $\int_a^\infty g(x)dx$ ıraksaktır.

$\Rightarrow \int_1^\infty e^{-x^2}dx = ?$

Karşılaşma Testinin Limit Formu

Pozitif tanımlı bir f fonksiyonu için; $\left(\int_a^\infty f(x)dx\right)$

$\lim_{x\to\infty} x^p f(x)dx = c$ olsun.

1- $0 \leq c < \infty$ ve $p > 1$ ise $\int_a^\infty f(x)dx$ yakınsaktır.

2- $0 \leq c \leq \infty$ ve $p \leq 1$ ise $\int_a^\infty f(x)dx$ ıraksaktır.

- $\int_{-\infty} f(x)dx$ şeklindeki integralin yakınsaklık durumunu incelerken $x=-t$ değişken dönüşümü yardımıyla;

$\int_{-\infty}^{\infty} f(-t)dx$ bu integralin yakınsaklığı verilen testler yardımıyla bulunur.

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{9x^4+1}} = ?$

$\Rightarrow \int_{-\infty} x^5 e^x dx = ?$

1) $\displaystyle\int \frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$ integralini bulunuz.

2) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx$ " "

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a>b)$ elipsinin sınırlı bölgesinin alanı?

4) a) yarıçapı R hacim küre

b) $a^2 + (y-b)^2 = R^2$ oluşan x ekseninde döndürülen oluşan şeklin hacmi

5) a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x}{\sqrt{x}}\,dx$