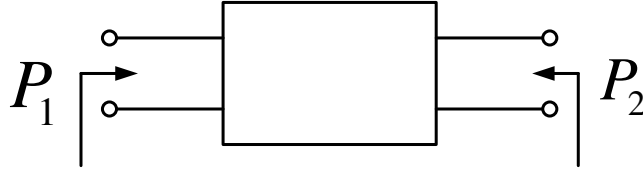


İKİ-KAPILI DEVRELERDE KAZANÇ VE ZAYIFLATMA

Şek. deki iki-kapılı bir devreyi göz önüne alalım. $V_1(j\omega)$ ve $V_2(j\omega)$ sinüzoidal sürekli halde (SSH) giriş ve çıkış gerilim fazörlerini, P_1 ve P_2 ise giriş ve çıkışa ilişkin ortalama güçleri gösterebilir. Her iki gücün aynı dirençte harcandığını varsaymak üzere

$$A(\omega) = 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 10 \log \frac{|V_2(j\omega)|^2 / R}{|V_1(j\omega)|^2 / R} = 20 \log \frac{|V_2|}{|V_1|} = 20 \log |H(j\omega)| \text{ dB (desibel)} \quad ()$$

şeklinde tanımlanan büyüklüğe **Gerilim Kazancı (Voltage Gain)**, ya da yalnızca **Kazanç (Gain)** denir.



Şek

$$\alpha(\omega) = 10 \log \frac{P_1}{P_2} = 20 \log \frac{|V_1|}{|V_2|} = 20 \log \frac{1}{|H(j\omega)|} = -20 \log |H(j\omega)| \text{ dB} \quad ()$$

şeklinde tanımlanan büyüklüğe ise **Gerilim Zayıflatması (Voltage Attenuation)**, ya da yalnızca **Zayıflatma (Attenuation)** denir. Burada

$$\alpha(\omega) = -A(\omega)$$

olduğu açıktır. Yani

$$\alpha(\omega) \text{ dB (zayıflatma)} = -A(\omega) \text{ dB (kazanç)}$$

$$A(\omega) \text{ dB (kazanç)} = -\alpha(\omega) \text{ dB (zayıflatma)}$$

yazılabilir. Kuvvetlendirici tasarımcılarının uzun yıllardan beri kuvvetlendiricinin kazancını (+) değerli desibel ile gösterdikleri, süzgeç tasarımcılarının ise süzgecin zayıflatmasını (+) değerli desibel ile gösterdikleri bilinmektedir.

ALÇAK GEÇİREN SÜZGEÇLER

Alçak Geçiren Süzgeç tasarımında erişilmek istenen hedef **İdeal Alçak Geçiren Süzgeç** tir. Böyle bir hedefe varmanın olanaksız olduğu bilinmekle birlikte tasarımı yaparken neyin hedeflenip neyle yetinildiğinin bilinmesi varılan hedefin ideale daha yakın olmasını sağlamak açısından yararlı olup bu nedenle de ideal alçak geçiren süzgecin tanımının bilinmesi gereklidir.

İdeal Alçak Geçiren Süzgeç

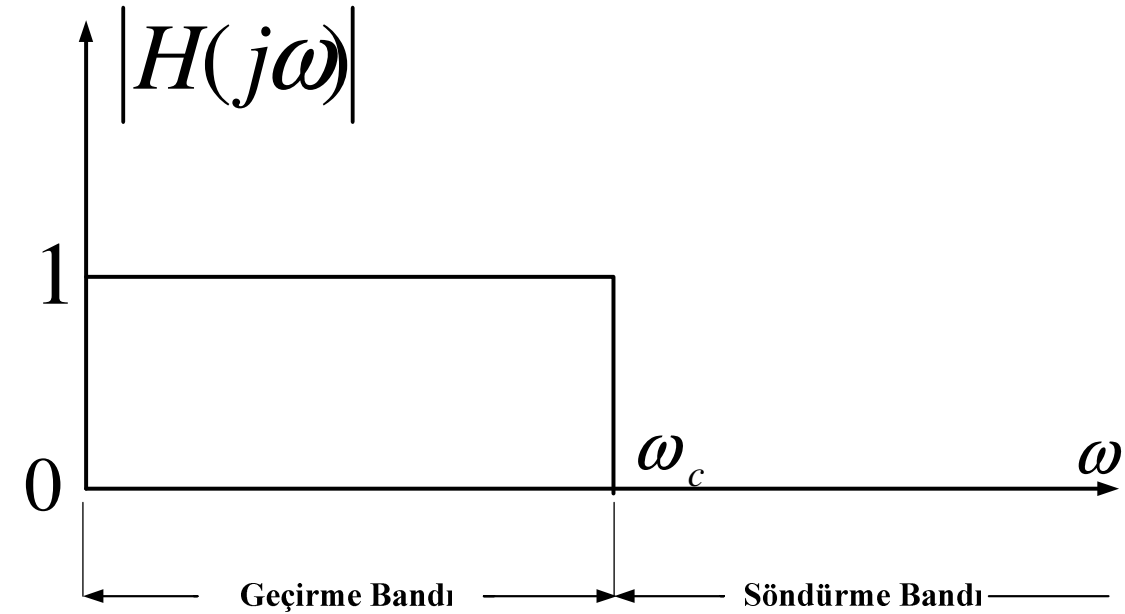
*İdeal Alçak Geçiren Süzgeç*ten beklenen, girişine uygulanan işareti alçak frekanslarda olduğu gibi yani hiç zayıflatmadan geçirmesi, yüksek frekanslarda ise hiç geçirmemesidir. Geçirme bandını

$$0 \leq \omega \leq \omega_c$$

olarak tanımlarsak ideal alçak geçiren süzgeç matematiksel olarak

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_c & \text{Geçirme Bandı} \\ 0 & \omega > \omega_c & \text{Söndürme Bandı} \end{cases} \quad ()$$

şeklinde tanımlanır ve bu tanıma göre de $|H(j\omega)|$ 'nin ω 'ya göre değişiminin Şek. deki gibi olacağı açıktır. $0 \leq \omega \leq \omega_c$ frekans aralığına süzgecin **Geçirme Bandı**, $\omega > \omega_c$ frekans bölgesine **Söndürme (Durdurma) Bandı** ω_c 'ye ideal AG süzgecin **Kesim Frekansı (Cutoff Frequency)** denir.

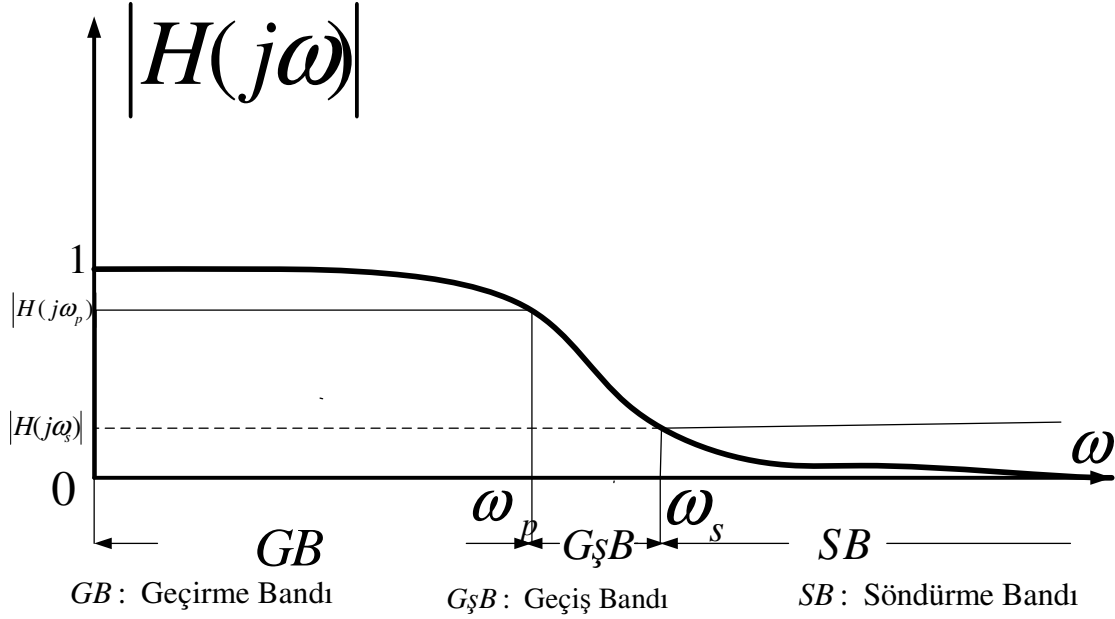


Şek.

İdeal Olmayan Alçak Geçiren Süzgeç

() ile tanımlanan ve frekans özellikleri Şek. de verilen ideal bir süzgecin gerçekleştirilebilmesi fiziksel olarak olanaksızdır. Başka bir deyişle fiziksel olarak gerçekleştirilebilen bir süzgeç için geçirme bandındaki tüm frekanslarda $|H(j\omega)| = 1$, söndürme bandındaki tüm frekanslarda da $|H(j\omega)| = 0$ olması sağlanamaz. Bunun nedeni

süzgeç yapımında kullandığımız her hangi bir devrenin giriş-çıkış matematiksel modeli olan diferansiyel denklemin Laplace dönüşümünden elde edilen transfer fonksiyonu $H(s)$ 'in s 'nin sürekli fonksiyonu olması, dolayısıyla da $|H(j\omega)|$ 'nın ω 'nın sürekli bir fonksiyonu olmasıdır. Bunun sonucu olarak da fiziksel olarak gerçekleştirilebilen bir süzgeç için $|H(j\omega)|$ Şek. deki gibi ω 'nın bir süreksiz fonksiyonu değil, örneğin Şek. deki gibi sürekli bir fonksiyonudur. Böyle bir fonksiyonda ise artık yalnızca geçirme ve söndürme bantlarından söz etmek olanaksızdır. Bu iki bantın arasında birinden ötekine geçişi gösteren bir **Geçiş Bandı** da ortaya çıkacaktır.



Şek. İDEAL ALÇAK GEÇİREN SÜZGEÇİN KAZANÇ VE ZAYIFLATMASI

İdeal alçak geçiren süzgecin

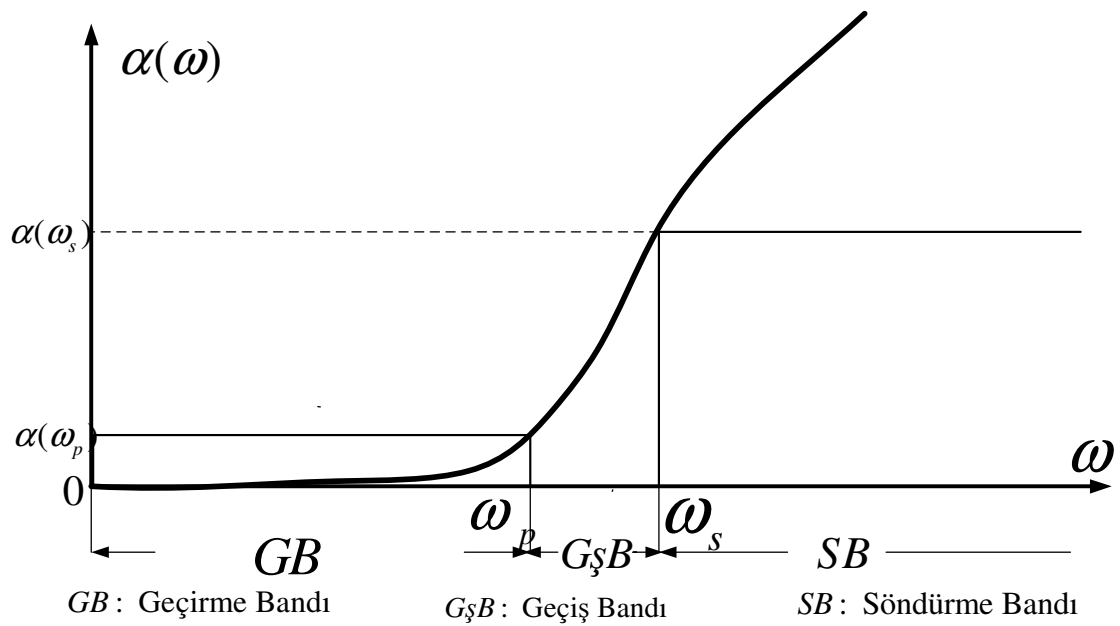
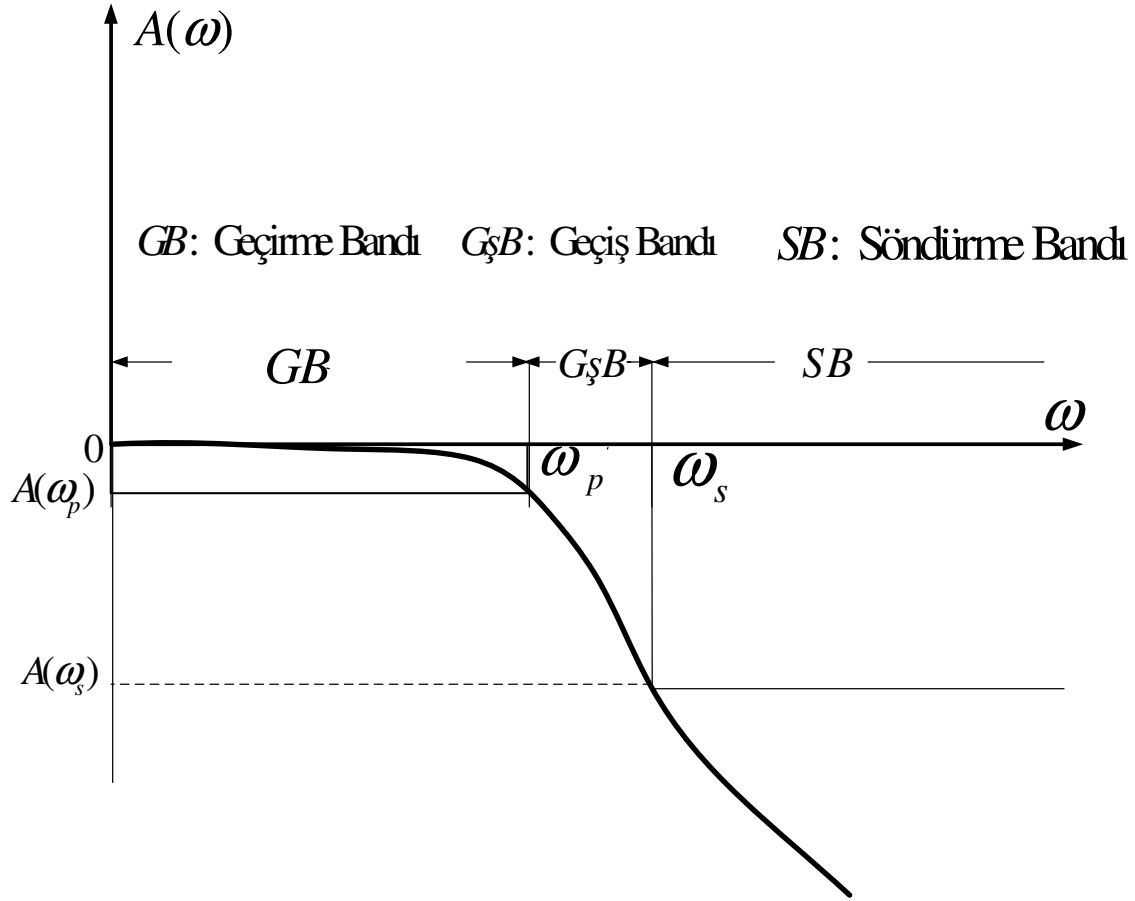
$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega > \omega_c \end{cases} \quad ()$$

şeklinde tanımlandığını gördük. Öyleyse kazanç ve zayıflatmanın yukarıdaki tanımlarına göre

$$A(\omega) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \omega \leq \omega_c \text{ (geçirme bandı)} \\ -\infty & \omega > \omega_c \text{ (söndürme bandı)} \end{cases} \text{ veya } \alpha(\omega) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \omega \leq \omega_c \text{ (geçirme bandı)} \\ \infty & \omega > \omega_c \text{ (söndürme bandı)} \end{cases}$$

yazılabilir.

İdeal olmayan süzgeç için $|H(j\omega)|$ 'nın Şek. de verilen eğrisine karşışüsen $A(\omega)$ kazanç eğrisi Şek. de , $\alpha(\omega)$ zayıflatma eğrisi ise Şek. de verilmiştir.



İDEAL OLMAYAN ALÇAK GEÇİREN SÜZGECİN FREKANS ÖZELLİKLERİ: GEÇİRME VE SÖNDÜRME BANDINDA İZİN VERİLEN ZAYIFLATMA MİKTARLARI

İdeal olmayan bir süzgecin zayıflatması geçirme bandının tümünde sıfır, söndürme bandının tümünde de sonsuz değerli yapılamayacağı bilindiğine göre süzgeç tasarımında geçirme bandındaki zayıflatmanın belli bir değerden küçük kalması, söndürme bandındaki zayıflatmanın ise belli bir değerden büyük olması şart koşulur. $\alpha(\omega)$ 'nın geçirme bandında alabileceği en büyük değer α_{\max} , söndürme bandında alabileceği en küçük değere de α_{\min} ile gösterilirse (Şek.)

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &\leq \alpha_{\max} & 0 \leq \omega \leq \omega_p & \text{(geçirme bandı)} \\ \alpha(\omega_p) &\leq \alpha(\omega) \leq \alpha(\omega_s) & \omega_p \leq \omega \leq \omega_s & \text{(geçiş bandı)} \\ \alpha(\omega) &\geq \alpha_{\min} & \omega \geq \omega_s & \text{(söndürme bandı)} \end{aligned} \quad ()$$

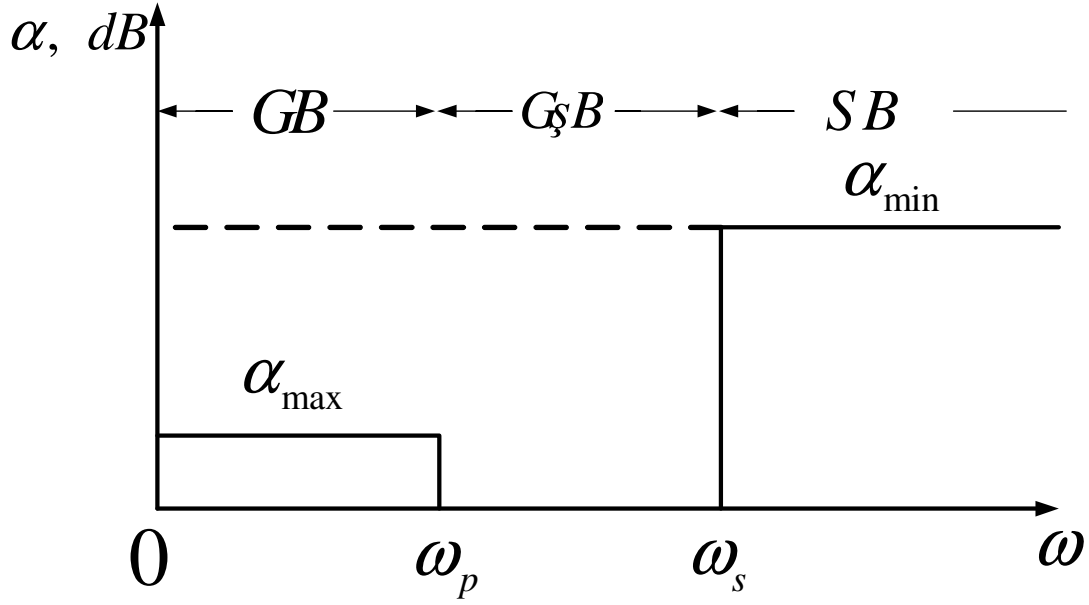
yazılabilir. Genellikle $\alpha_{\max} < 3dB$, $\alpha_{\min} > 3dB$ olduğundan $3dB$ kesim frekansı ω_0 için

$$\omega_p \leq \omega_0 \leq \omega_s$$

olup ω_0 geçiş bandındadır ve

$$\alpha(\omega_p) \leq \alpha(\omega_0) \leq \alpha(\omega_s)$$

sağlanır.



GB : Geçirme Bandı

$GşB$: Geçiş Bandı

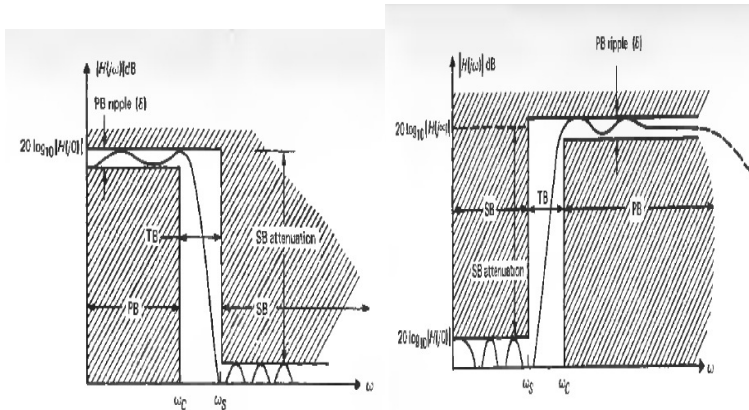
SB : Söndürme Bandı

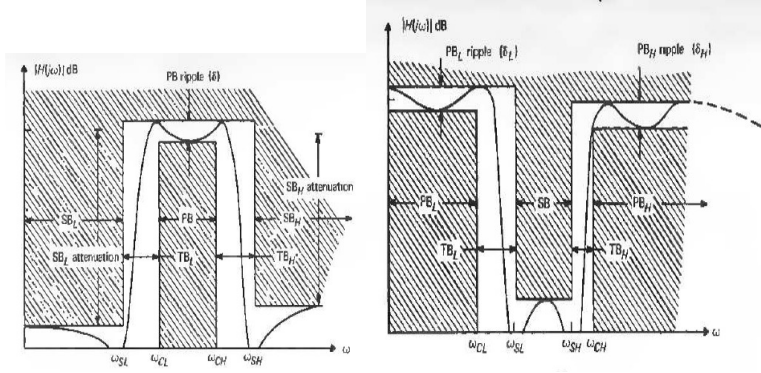
Şek.

() veya Şek. ile verilen özelliklere *Alçak Geçiren Süzgecin Frekans Özellikleri* denir

SÜZGEÇ TASARIMINDA YAKLAŞIKLIK PROBLEMİ

Süzgeç kullanıcısının süzgeçte bulunmasını gerekli gördüğü özellikler süzgeç tasarımında başlangıç noktası olarak alınır. Frekans seçici süzgeçlerde bu özellikler, süzgeç kazancının belli frekans aralıklarında içinde kalması istenen sınır değerleridir. Şek. de alçak geçiren (AG), yüksek geçiren (YG), bant geçiren (BG) ve bant söndüren (BS) süzgeç türleri için söz konusu sınır değerleri frekansa bağlı olarak logaritmik olarak verilmiştir.





Frekans özellikleri verilen bir süzgeç için bu özelliklere bir $|H(j\omega)|$ eğrisinin uydurulmasına (curve fitting) süzgeç tasarımında **Yaklaşıklık Problemi** denir.

ALÇAK GEÇİREN TÜRDEEN BUTTERWORTH TRANSFER FONKSİYONLARI

İdeal olmayan alçak geçiren süzgece ilişkin $|H(j\omega)|$ 'nın Sek. de verilen ω 'ya göre değişiminden görüleceği üzere bu eğrinin ideal alçak geçiren süzgecinkine yaklaşması için $|H(j\omega)|$ 'nın, ω 'nın küçük değerlerinde hemen hemen sabit, belli bir ω değerinden sonra da hızlı bir düşme gösteren bir fonksiyon olması gerekmektedir. Bu düşüş ne kadar sert olursa bu eğriye karşılık süzgeç de ideal alçak geçiren süzgece o denli yaklaşmış olur. Böyle bir fonksiyon Butterworth tarafından

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}}$$

veya

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}}$$

şeklinde önerilmiştir. Bu aşamada sorulması gereken $|H(j\omega)|^2$ 'ye karşılık bir $H(s)$ fonksiyonunun bulunması ve $H(s)$ 'nin gerçekleştirilebilen bir devrenin transfer fonksiyonu olmasıdır. Butterworth bunun da mümkün olduğunu göstermiştir.

Önce $|H(j\omega)|^2$ 'ye karşılık bir $H(s)$ fonksiyonunun bulunabileceğini gösterelim.

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega) = H(j\omega)\bar{H}(j\omega)$$

yazabiliriz. Bu ifade

$$H(j\omega) = H(s)_{s=j\omega}$$

$$H(-j\omega) = H(-s)_{s=j\omega}$$

$$H(j\omega) \Big|_{\omega=\frac{s}{j}} = H(s)$$

$$H(-j\omega) \Big|_{\omega=\frac{s}{j}} = H(-s)$$

kullanılırsa

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega) = H(s)H(-s) \Big|_{s=j\omega}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\omega^{2n} = \left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = \left(\left(\frac{1}{j}\right)^2\right)^n s^{2n} = (-1)^n s^{2n}$$

eşitliğinden de yararlanarak

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}}$$

elde edilir. Bu ifadenin kutupları

$$1 + (-1)^n s^{2n} = 0 \quad ()$$

denkleminin kökleri olup

$$(-1)^n s^{2n} = -1 \Rightarrow \begin{cases} n \text{ tek} & s^{2n} = 1 = e^{j2k\pi} \Rightarrow s = e^{j\frac{k\pi}{n}} \\ n \text{ çift} & s^{2n} = -1 = e^{j(2k+1)\pi} \Rightarrow s = e^{j\frac{(2k+1)\pi}{2n}} \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

Bu eşitliklerden görüldüğü üzere:

1. () polinomunun $2n$ adet kökü, dolayısıyla da $H(s)$ 'nin n adet kutbu vardır.
2. s 'nin tek ve çift değerleri için $|s|=1$ dir. Öyleyse () polinomunun tüm kökleri s -düzleminde birim çemberin üzerindedir.
3. () polinomunun s -düzleminde sanal eksen üzerinde kökü yoktur.
4. $H(s)$ 'nin kutupları sol-yarı s -düzleminde, $H(-s)$ 'nin kutupları sağ-yarı s -düzleminde seçilebilir. Böylece oluşturulacak olan $H(s)$ transfer fonksiyonu kararlı bir devreye karşıdüşer.
5. Reel katsayılı bir polinomun karmaşık değerli kökü varsa eşleniği de köktür. Öyleyse oluşturulan $H(s)$ 'nin karmaşık değerli bir kutbu varsa eşleniği de kutuptur. Dolayısıyla da $H(s)$ reel katsayılıdır.

6. n tekse $H(s)$ 'nin reel eksen üzerinde bir adet kutbu vardır. Bu kutup $s = -1$ dir. n çiftse $H(s)$ 'nin reel eksen üzerinde kutbu yoktur. Tüm kutuplar karmaşık değerlidir.

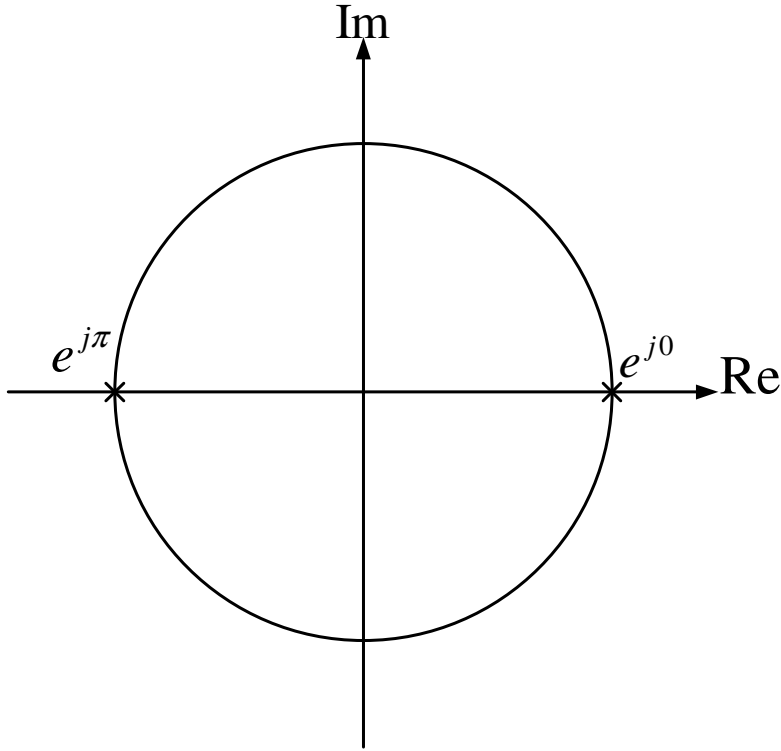
Öte yandan

Örnek:

1) $n=1$

$$s = e^{j\frac{k\pi}{n}} \Rightarrow s = e^{jk\pi} \Rightarrow$$

$$s_1 = e^{j0} = 1, \quad s_2 = e^{j\pi} = -1$$



$$H(s)H(-s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)}$$

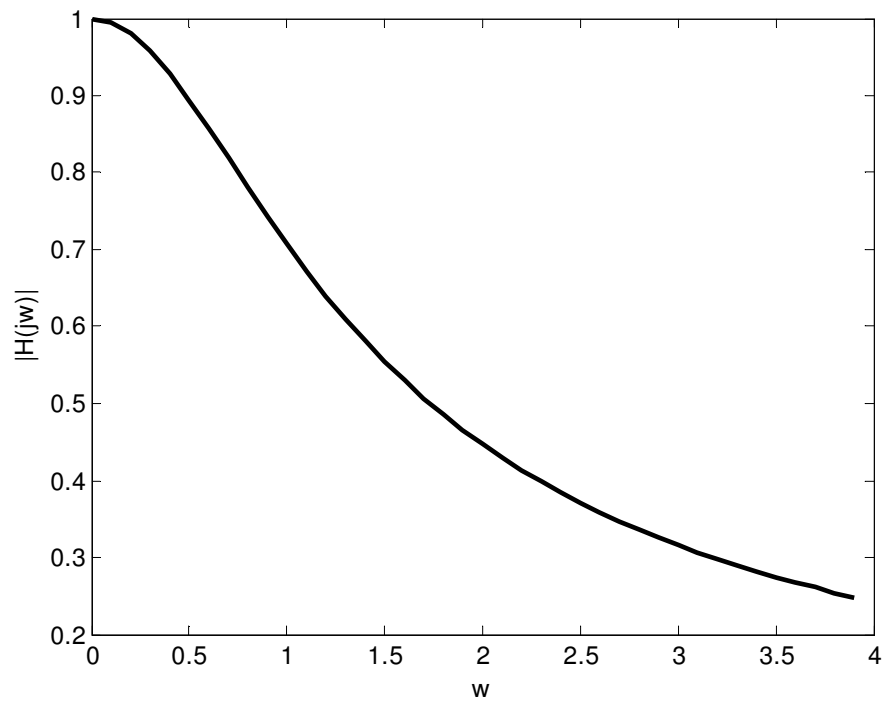
$H(s)$ 'in kutbu

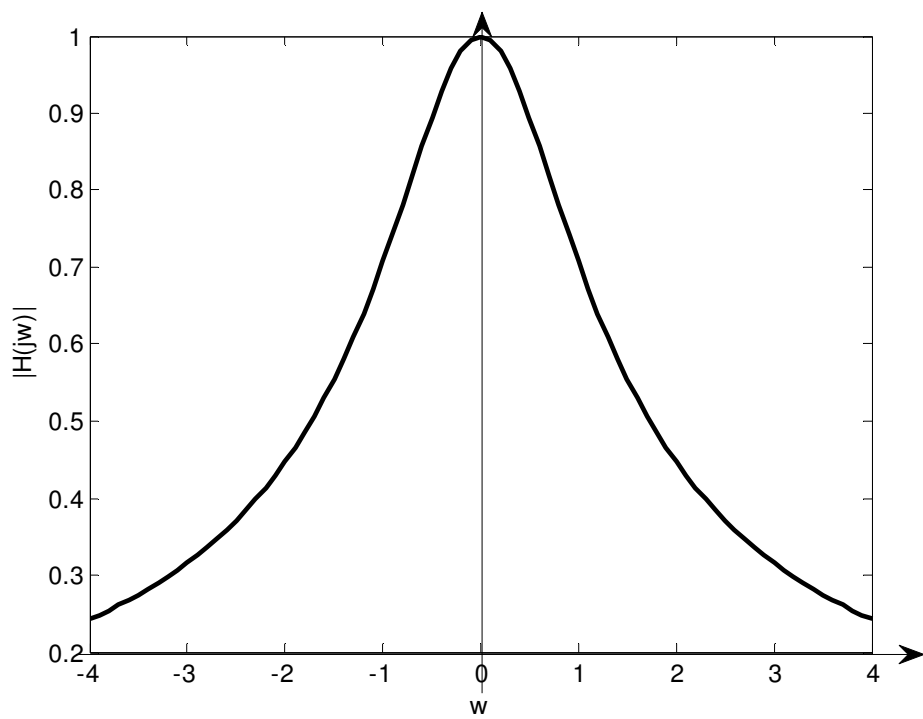
$$s_1 = -1$$

Öyleyse

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

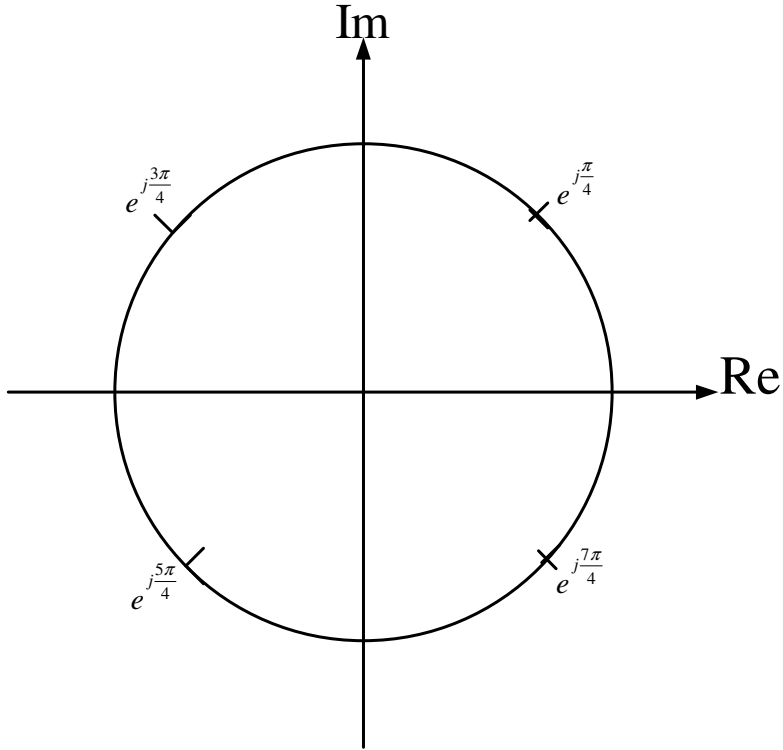




2) $n = 2$

$$s = e^{j \frac{(2k+1)\pi}{2n}} \Rightarrow s = e^{j \frac{(2k+1)\pi}{4}} \Rightarrow$$

$$s_1 = e^{j \frac{\pi}{4}}, \quad s_2 = e^{j \frac{3\pi}{4}}, \quad s_3 = e^{j \frac{5\pi}{4}}, \quad s_4 = e^{j \frac{7\pi}{4}}$$



$$H(s)H(-s) = \frac{1}{(s - e^{j\frac{\pi}{4}})(s - e^{j\frac{3\pi}{4}})(s - e^{j\frac{5\pi}{4}})(s - e^{j\frac{7\pi}{4}})}$$

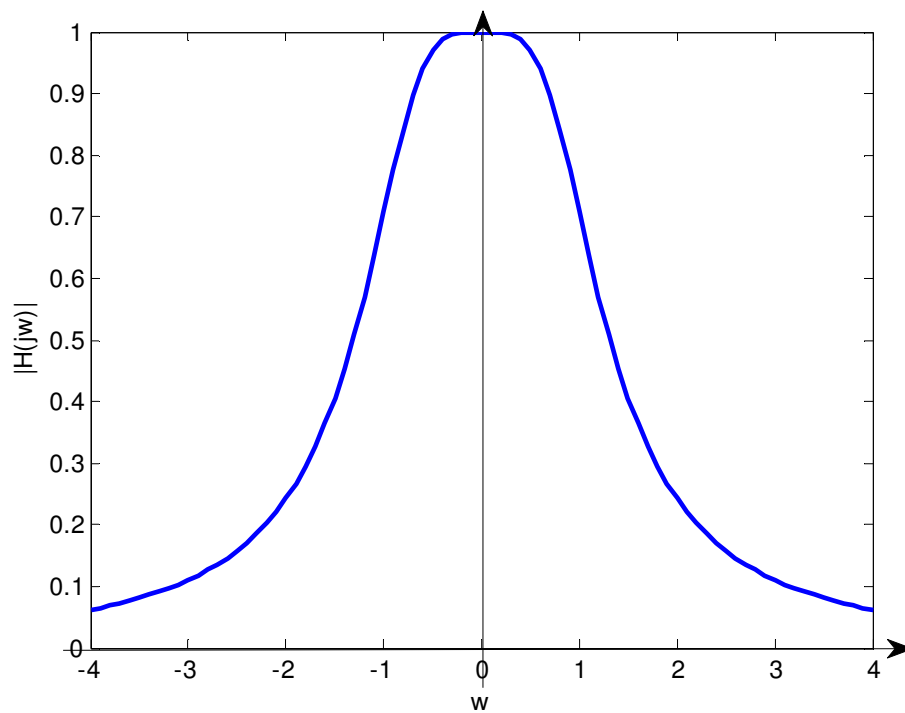
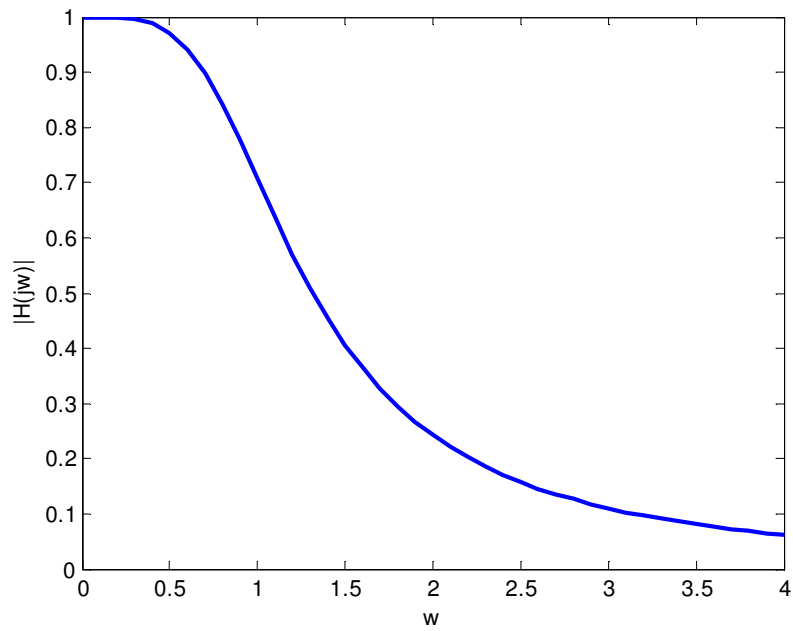
$H(s)$ 'in kutupları

$$s_2 = e^{j\frac{3\pi}{4}}, \quad s_3 = e^{j\frac{5\pi}{4}} = e^{-j\frac{3\pi}{4}} = \overline{s_2}$$

Öyleyse

$$H(s) = \frac{1}{(s - e^{j\frac{3\pi}{4}})(s - e^{-j\frac{3\pi}{4}})} = \frac{1}{(s + 0,707 + j0,707)(s + 0,707 - j0,707)}$$

$$= \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

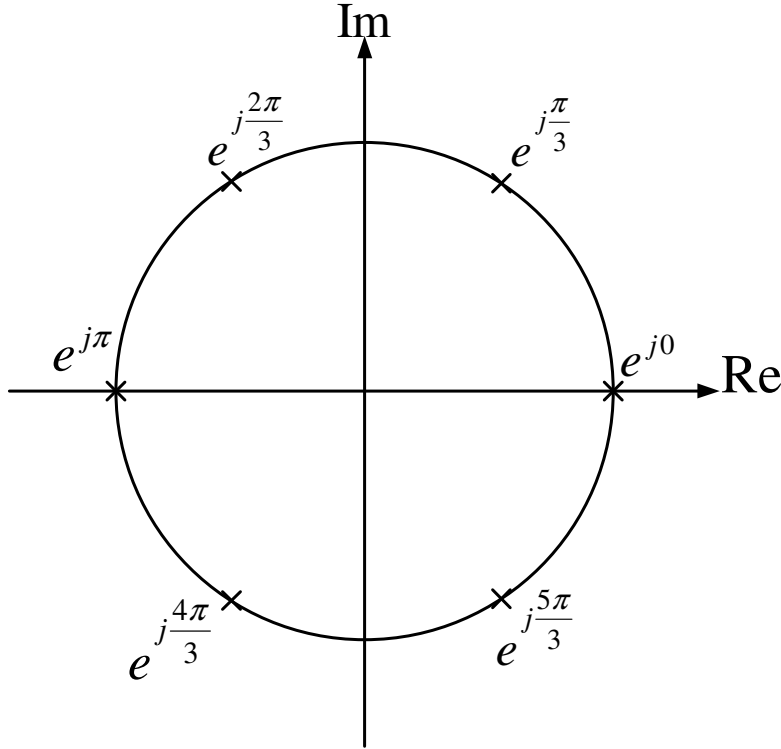


2) $n=3$

$$s = e^{j\frac{k\pi}{n}} \Rightarrow s = e^{j\frac{k\pi}{3}} \Rightarrow$$

$$s_1 = e^{j0} = 1, \quad s_2 = e^{j\frac{\pi}{3}}, \quad s_3 = e^{j\frac{2\pi}{3}},$$

$$s_4 = e^{j\pi} = -1, \quad s_5 = e^{j\frac{4\pi}{3}}, \quad s_6 = e^{j\frac{5\pi}{3}}$$



$$H(s)H(-s) = \frac{1}{(s-1)(s-e^{j\frac{\pi}{3}})(s-e^{j\frac{2\pi}{3}})(s+1)(s-e^{j\frac{4\pi}{3}})(s-e^{j\frac{5\pi}{3}})}$$

Bu ifadedeki kutuplardan üçünün $H(s)$ 'in, diğer üçünün de $H(-s)$ 'in kutupları olduğu açıktır. Bu kutupların hangilerinin $H(s)$ 'in kutupları olarak seçileceği $H(s)$ 'in iki özelliği tarafından belirlenecektir: a) $H(s)$ kararlı bir devrenin transfer fonksiyonudur yani kutupları sol yarı karmaşık sayılar düzleminde. b) $H(s)$ reel katsayılı polinomlardan oluşan bir rasyonel fonksiyondur. Öyleyse: a) Kutuplar sol yarı karmaşık sayılar düzleminde. b) Kutuplardan biri karmaşık değerli ise bunun eşleniği de kutuptur. Sonuç olarak $H(s)$ 'in kutupları

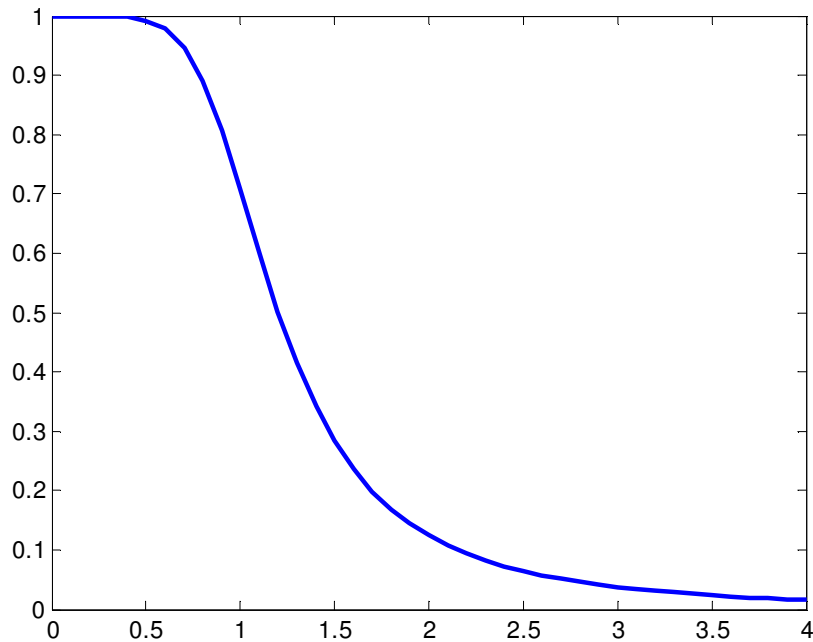
$$s_3 = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -0,5 + j0,866, \quad s_4 = e^{j\pi} = -1$$

$$s_5 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -0,5 - j0,866 = \bar{s}_3$$

dir. Öyleyse

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{(s - e^{j\frac{2\pi}{3}})(s+1)(s - e^{j\frac{4\pi}{3}})} = \frac{1}{(s+1)(s+0,5-j0,866)(s+0,5+j0,866)} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1} \end{aligned}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^6}}$$



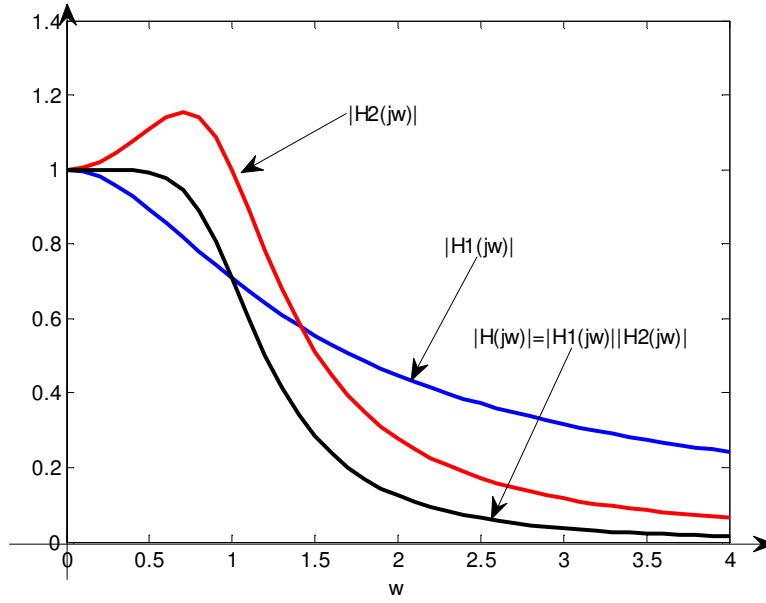
Şimdi

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{ve} \quad H_2(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

tanımlayalım. Öyleyse

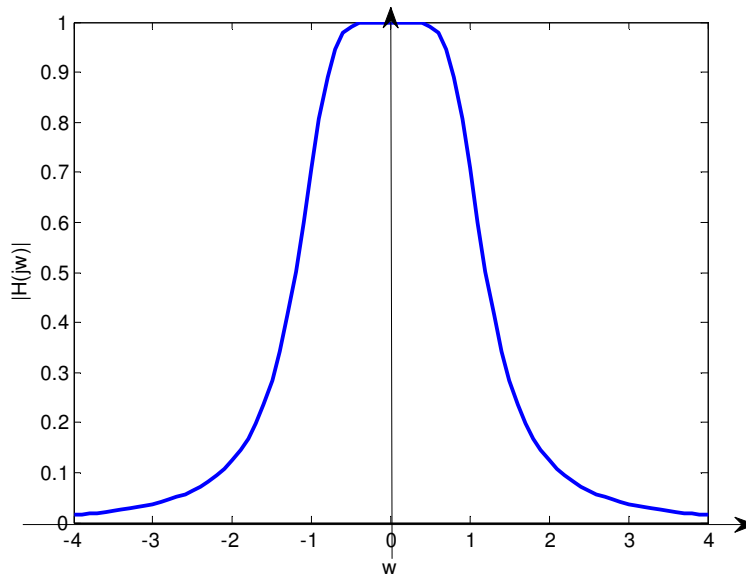
$$H(s) = H_1(s)H_2(s)$$

yazılabilir. $|H(j\omega)|$, $|H_1(j\omega)|$ ve $|H_2(j\omega)|$ 'yi $0 \leq \omega \leq \infty$ aralığında çizelim (Şek.). Bu aralıkta $|H(j\omega)| \leq 1$ ve $|H_1(j\omega)| \leq 1$ olmasına karşın bu aralıktaki bazı frekanslar için $|H_2(j\omega)| > 1$ olmaktadır.



Şek.

Şek. de $-\infty \leq \omega \leq \infty$ aralığında çizilmiştir.



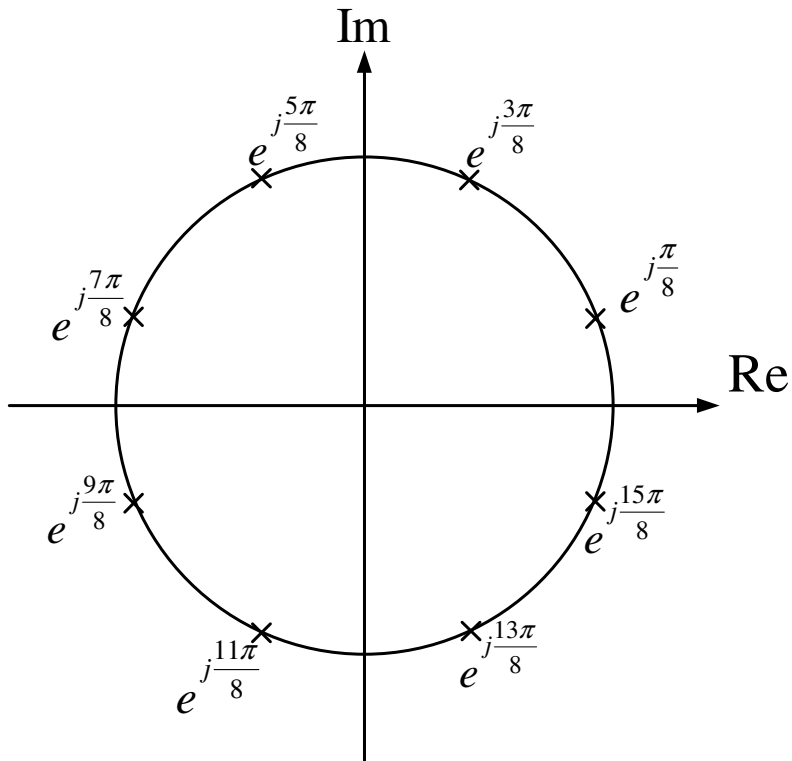
Şek.

2) $n=4$

$$s = e^{j\frac{(2k+1)\pi}{2n}} \Rightarrow s = e^{j\frac{(2k+1)\pi}{8}} \Rightarrow$$

$$s_1 = e^{j\frac{\pi}{8}}, \quad s_2 = e^{j\frac{3\pi}{8}}, \quad s_3 = e^{j\frac{5\pi}{8}}, \quad s_4 = e^{j\frac{7\pi}{8}},$$

$$s_5 = e^{j\frac{9\pi}{8}}, \quad s_6 = e^{j\frac{11\pi}{8}}, \quad s_7 = e^{j\frac{13\pi}{8}}, \quad s_8 = e^{j\frac{15\pi}{8}}$$



$$H(s)H(-s) = \frac{1}{(s - e^{j\frac{\pi}{8}})(s - e^{j\frac{3\pi}{8}})(s - e^{j\frac{5\pi}{8}})(s - e^{j\frac{7\pi}{8}})(s - e^{j\frac{9\pi}{8}})(s - e^{j\frac{11\pi}{8}})(s - e^{j\frac{13\pi}{8}})(s - e^{j\frac{15\pi}{8}})}$$

Bu durumda $H(s)$ 'in kutupları

$$s_3 = e^{j\frac{5\pi}{8}} = -0.3827 + j 0.9239$$

$$s_4 = e^{j\frac{7\pi}{8}} = -0.9239 + j 0.3827$$

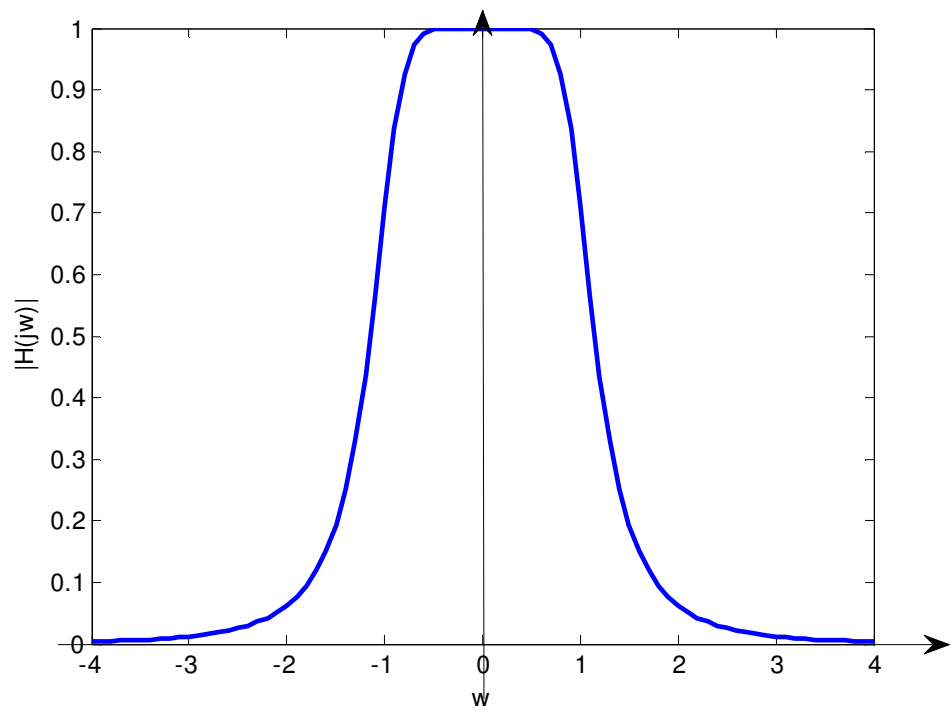
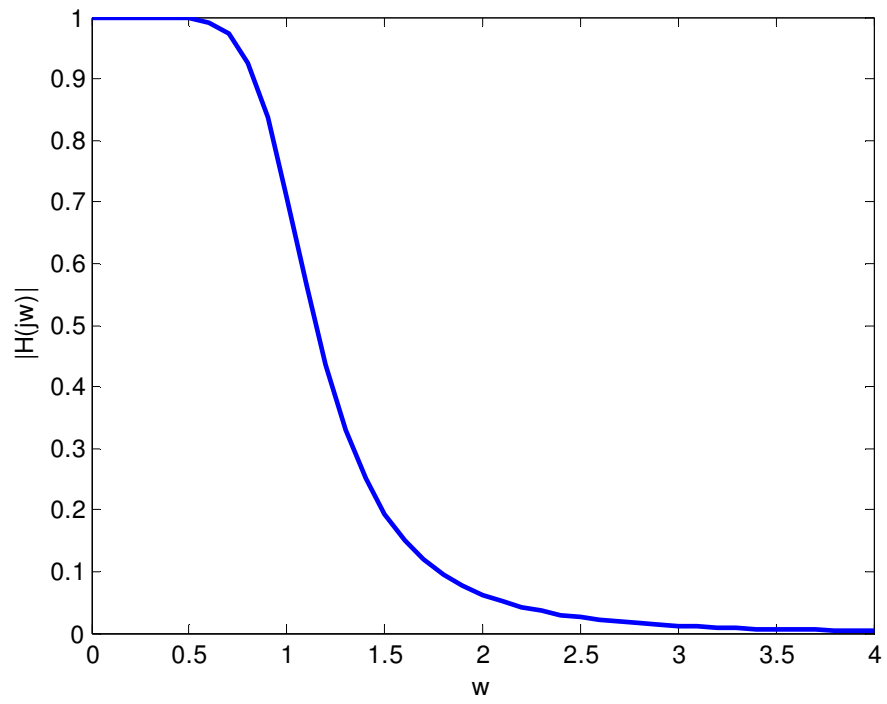
$$s_5 = e^{j\frac{9\pi}{8}} = e^{-j\frac{7\pi}{8}} = \bar{s}_4 = -0.9239 - j 0.3827$$

$$s_6 = e^{j\frac{11\pi}{8}} = e^{-j\frac{5\pi}{8}} = \bar{s}_3 = -0.3827 - j 0.9239$$

olur. Öyleyse

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{(s - e^{j\frac{5\pi}{8}})(s - e^{j\frac{7\pi}{8}})(s - e^{j\frac{9\pi}{8}})(s - e^{j\frac{11\pi}{8}})} \\ &= \frac{1}{(s + 0,924 - j0,383)(s + 0,924 + j0,383)(s + 0,383 - j0,924)(s + 0,383 + j0,924)} \\ &= \frac{1}{(s^2 + 0,766s + 1)(s^2 + 1,848s + 1)} = \frac{1}{s^4 + 2,613s^3 + 3,414s^2 + 2,613s + 1} \end{aligned}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^8}}$$



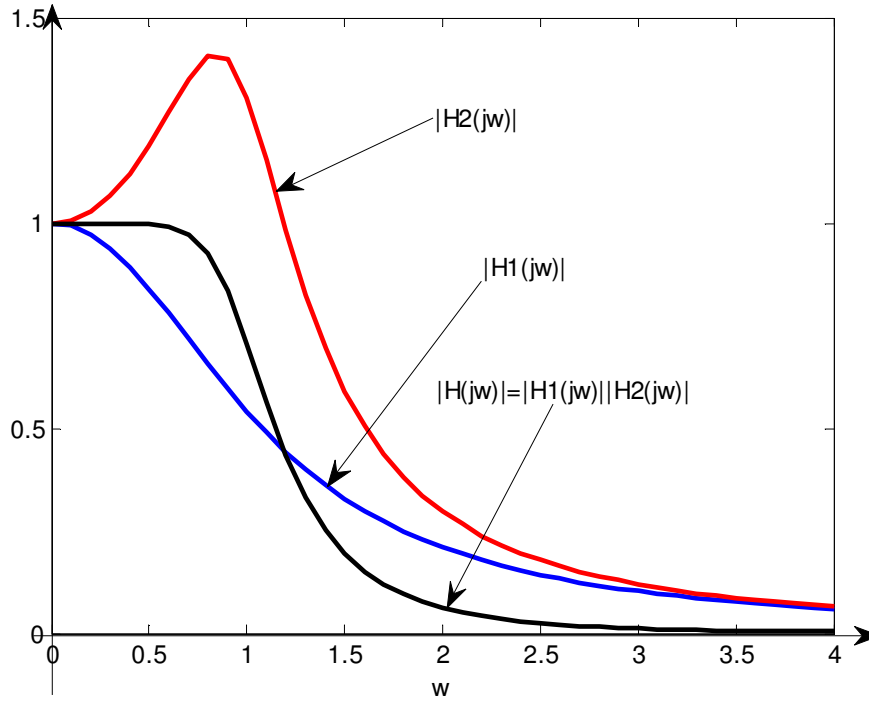
Şimdi

$$H_1(s) = \frac{1}{s^2 + 1,848s + 1} \quad \text{ve} \quad H_2(s) = \frac{1}{s^2 + 0,766s + 1}$$

tanımlayalım.

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)$$

yazılabilir. Şimdi $|H(j\omega)|$, $|H_1(j\omega)|$ ve $|H_2(j\omega)|$ 'yı $0 \leq \omega \leq \infty$ aralığında çizelim (Şek.). Bu aralıkta $|H(j\omega)| \leq 1$ ve $|H_1(j\omega)| \leq 1$ olmasına karşın bu aralıktaki bazı frekanslar için $|H_2(j\omega)| > 1$ olmaktadır.

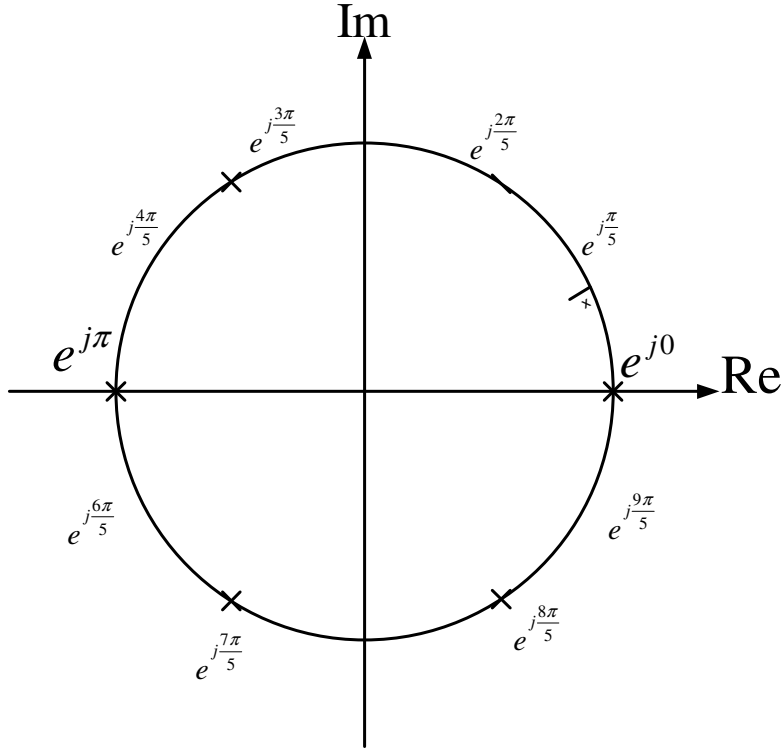


3) $n=5$

$$s = e^{j\frac{k\pi}{n}} \Rightarrow s = e^{j\frac{k\pi}{5}} \Rightarrow$$

$$s_1 = e^{j0} = 1, \quad s_2 = e^{j\frac{\pi}{5}}, \quad s_3 = e^{j\frac{2\pi}{5}}, \quad s_4 = e^{j\frac{3\pi}{5}}, \quad s_5 = e^{j\frac{4\pi}{5}},$$

$$s_6 = e^{j\pi} = -1, \quad s_7 = e^{j\frac{6\pi}{5}}, \quad s_8 = e^{j\frac{7\pi}{5}}, \quad s_9 = e^{j\frac{8\pi}{5}}, \quad s_{10} = e^{j\frac{9\pi}{5}}$$



$$H(s)H(-s) = \frac{1}{(s-1)(s-e^{j\frac{\pi}{5}})(s-e^{j\frac{2\pi}{5}})(s-e^{j\frac{3\pi}{5}})(s-e^{j\frac{4\pi}{5}})(s+1)(s-e^{j\frac{6\pi}{5}})(s-e^{j\frac{7\pi}{5}})(s-e^{j\frac{8\pi}{5}})(s-e^{j\frac{9\pi}{5}})}$$

Bu durumda $H(s)$ 'in kutupları

$$s_4 = e^{j\frac{3\pi}{5}}, \quad s_5 = e^{j\frac{4\pi}{5}}, \quad s_6 = e^{j\pi} = -1, \quad s_7 = e^{j\frac{6\pi}{5}} = e^{-j\frac{4\pi}{5}} = \bar{s}_5, \quad s_8 = e^{j\frac{7\pi}{5}} = e^{-j\frac{3\pi}{5}} = \bar{s}_4$$

olur. Öyleyse

$$H(s) = \frac{1}{(s-e^{j\frac{3\pi}{5}})(s-e^{j\frac{4\pi}{5}})(s+1)(s-e^{j\frac{6\pi}{5}})(s-e^{j\frac{7\pi}{5}})}$$

$$s_8 = e^{j\frac{7\pi}{5}} = e^{-j\frac{3\pi}{5}} = \bar{s}_4, \quad s_7 = e^{j\frac{6\pi}{5}} = e^{-j\frac{4\pi}{5}} = \bar{s}_5$$

olduğundan $H(s)$ 'i

$$H(s) = \frac{1}{(s - e^{j\frac{3\pi}{5}})(s - e^{j\frac{4\pi}{5}})(s + 1)(s - e^{-j\frac{4\pi}{5}})(s - e^{-j\frac{3\pi}{5}})}$$

şeklinde de yazabiliriz. Öte yandan

$$e^{j\frac{3\pi}{5}} = -0.3090 + j0.9511$$

$$e^{j\frac{4\pi}{5}} = -0.8090 + j0.5878$$

$$e^{j\frac{6\pi}{5}} = -0.8090 - j0.5878$$

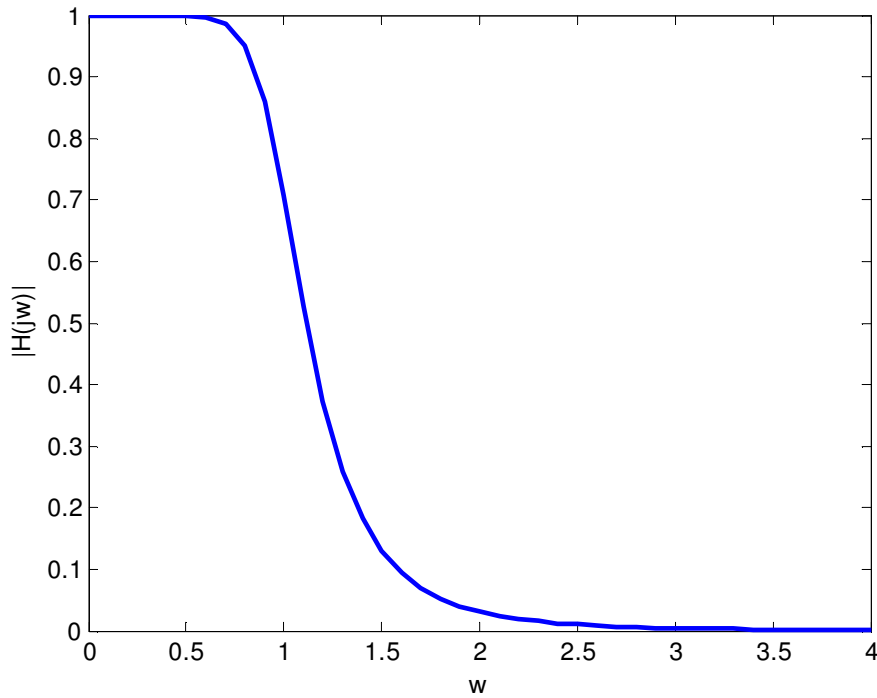
$$e^{j\frac{7\pi}{5}} = -0.3090 - j0.9511$$

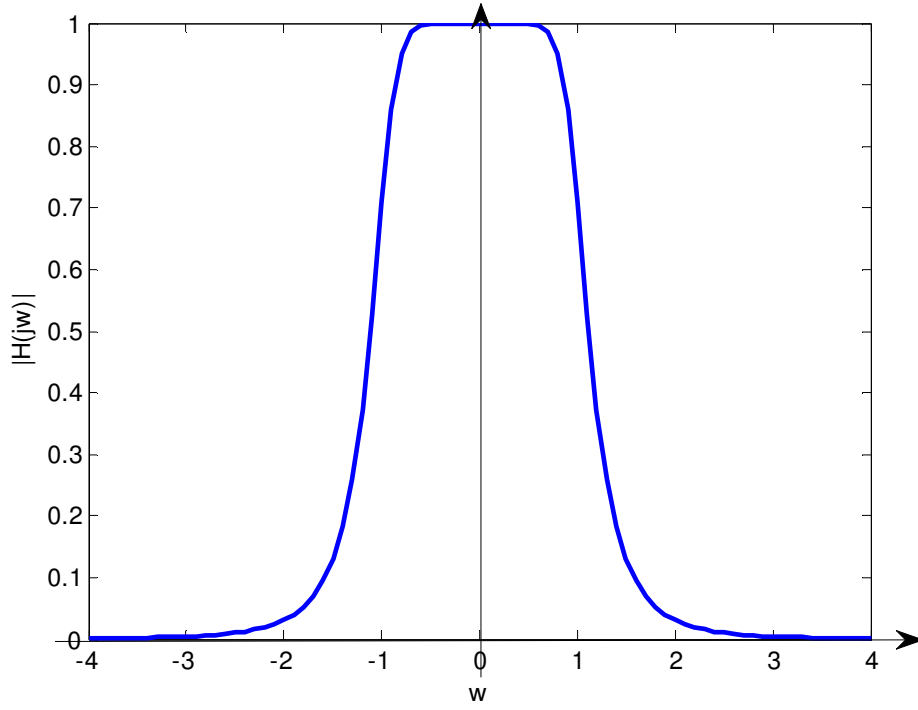
eşitliklerini de kullanarak

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + 0,618s + 1)(s + 1)(s^2 + 1,618s + 1)} = \frac{1}{s^5 + 3,2361s^4 + 5,2361s^3 + 5,2361s^2 + 3,2361s + 1}$$

elde edilir.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{10}}}$$





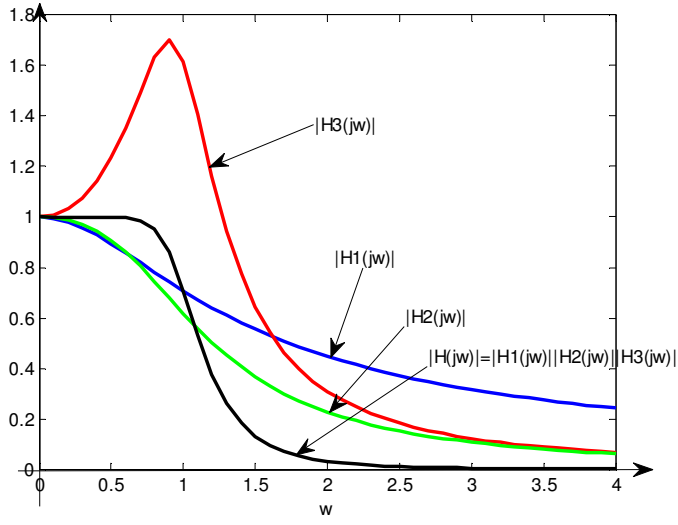
Şimdi

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad H_2(s) = \frac{1}{s^2 + 1,618s + 1} \quad \text{ve} \quad H_3(s) = \frac{1}{s^2 + 0,618s + 1}$$

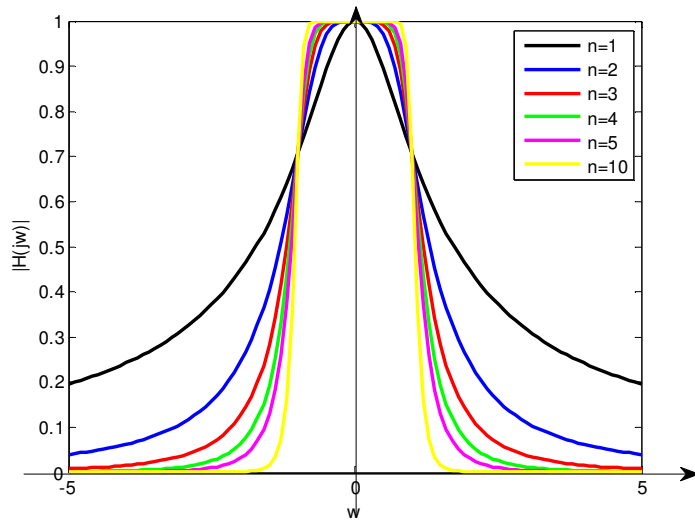
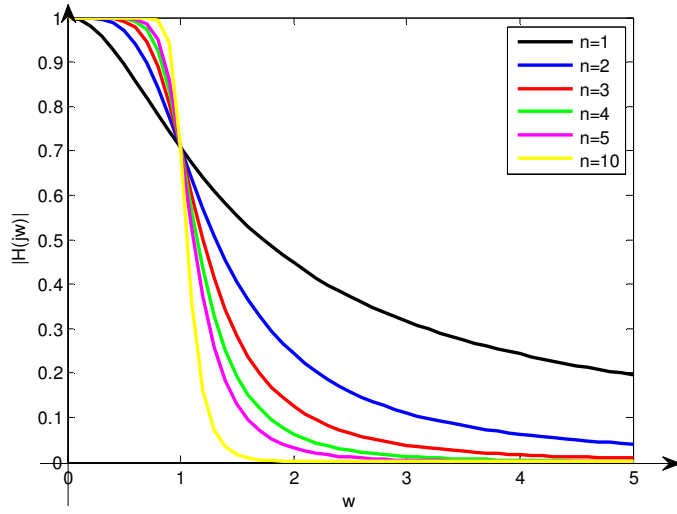
tanımlayalım.

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)H_3(s)$$

yazılabilir. Şimdi $|H(j\omega)|, |H_1(j\omega)|, |H_2(j\omega)|$ ve $|H_3(j\omega)|$ 'yı $0 \leq \omega \leq \infty$ aralığında çizelim (Şek.). Bu aralıkta $|H(j\omega)| \leq 1$, $|H_1(j\omega)| \leq 1$ ve $|H_2(j\omega)| \leq 1$ olmasına karşın bu aralıktaki bazı frekanslar için $|H_3(j\omega)| > 1$ olmaktadır.



Şek. ve de $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ve 10 için Butterworth genlik karakteristikleri bir arada çizilmiştir.



Tablo 1 de 10. dereceye kadar tüm Butterworth polinomları verilmiştir. Tablo 2 de ise aynı polinomlar çarpanları olan polinomlar cinsinden ifade edilmiştir.

Derece	Butterworth Polinomu
1	$s + 1$
2	$s^2 + 1.4142s + 1$
3	$s^3 + 2s^2 + 2s + 1$
4	$s^4 + 2.6131s^3 + 3.4142s^2 + 2.6131s + 1$
5	$s^5 + 3.2360s^4 + 5.2360s^3 + 5.2360s^2 + 3.2360s + 1$
6	$s^6 + 3.8637s^5 + 7.4641s^4 + 9.1416s^3 + 7.4641s^2 + 3.8637s + 1$
7	$s^7 + 4.4939s^6 + 10.0978s^5 + 14.5917s^4 + 14.5917s^3 + 10.0978s^2 + 4.4939s + 1$
8	$s^8 + 5.1258s^7 + 13.1370s^6 + 21.8461s^5 + 25.6883s^4 + 21.8461s^3 + 13.1370s^2 + 5.1258s + 1$
9	$s^9 + 5.7587s^8 + 16.5817s^7 + 31.1634s^6 + 41.9863s^5 + 41.9863s^4 + 31.1634s^3 + 16.5817s^2 + 5.7587s + 1$
10	$s^{10} + 6.3924s^9 + 20.4317s^8 + 42.8020s^7 + 64.8823s^6 + 74.2334s^5 + 64.8823s^4 + 42.8020s^3 + 20.4317s^2 + 6.3924s + 1$

Tablo 1

Derece	Butterworth Polinomu
1	$s + 1$
2	$(s^2 + 1.4142s + 1)$
3	$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 1.848s + 1)(s^2 + 0.7654s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 1.618s + 1)(s^2 + 0.6180s + 1)$
6	$(s^2 + 1.932s + 1)(s^2 + 1.4142s + 1)(s^2 + 0.5176s + 1)$
7	$(s + 1)(s^2 + 1.802s + 1)(s^2 + 1.247s + 1)(s^2 + 0.4450s + 1)$
8	$(s^2 + 1.962s + 1)(s^2 + 1.663s + 1)(s^2 + 1.111s + 1)(s^2 + 0.3902s + 1)$
9	$(s + 1)(s^2 + 0.347s + 1)(s^2 + s + 1)(s^2 + 1.532s + 1)(s^2 + 1.879s + 1)$
10	$(s^2 + 0.313s + 1)(s^2 + 0.908s + 1)(s^2 + 1.414s + 1)(s^2 + 1.782s + 1)(s^2 + 1.975s + 1)$

Tablo 2

Tablo 2 den görüleceği üzere derecesi tek tam sayı ile verilen Butterworth polinomlarının çarpanları birinci ve ikinci dereceden polinomlardır. Derecesi çift tam sayı ile verilen Butterworth polinomlarının çarpanları ise ikinci dereceden polinomlardır. Öte yandan çarpan polinomlarının tümünün sabitleri birim değerindedir. Bunun nedeni ise Butterworth polinomlarının sıfırlarının birim çemberin üzerinde olması dolayısıyla da çarpan polinomlarının sıfırlarının da birim çemberin üzerinde olmasıdır. Gerçekten, eğer sözkonusu ikinci derece polinomlarından her hangi birinin sıfırlarını

$$s_i = -\alpha_i \pm j\omega_i; \quad \alpha_i, \omega_i > 0$$

ile gösterirsek ikinci dereceden polinom

$$\begin{aligned} (s - s_i)(s - \bar{s}_i) &= (s - (-\alpha_i - j\omega_i))(s - (-\alpha_i + j\omega_i)) \\ &= (s + \alpha_i + j\omega_i)(s + \alpha_i - j\omega_i) = s^2 + 2\alpha_i s + \alpha_i^2 + \omega_i^2 \end{aligned}$$

Polinomların sıfırları birim çember üzerinde olduğundan

$$\alpha_i^2 + \omega_i^2 = 1$$

bulunur. Öyleyse

$$(s - s_i)(s - \bar{s}_i) = s^2 + 2\alpha_i s + 1$$

ALÇAK GEÇİREN SÜZGEÇ İÇİN BUTTERWORTH YAKLAŞIKLIĞI

Uydurulan $|H(j\omega)|$ eğrisi bir Butterworth transfer fonksiyonu $H(s)$ 'e karşı düşüyorsa, yani $|H(j\omega)| = H(s) \big|_{s=j\omega}$ şeklinde elde ediliyorsa bu tür yaklaşıklığa **Butterworth Yaklaşıklığı** (*Butterworth Approximation*) denir.

BUTTERWORTH TRANSFER FONKSİYONU İÇİN KAZANÇ VE ZAYIFLATMANIN FREKANS GÖRE DEĞİŞİMİ

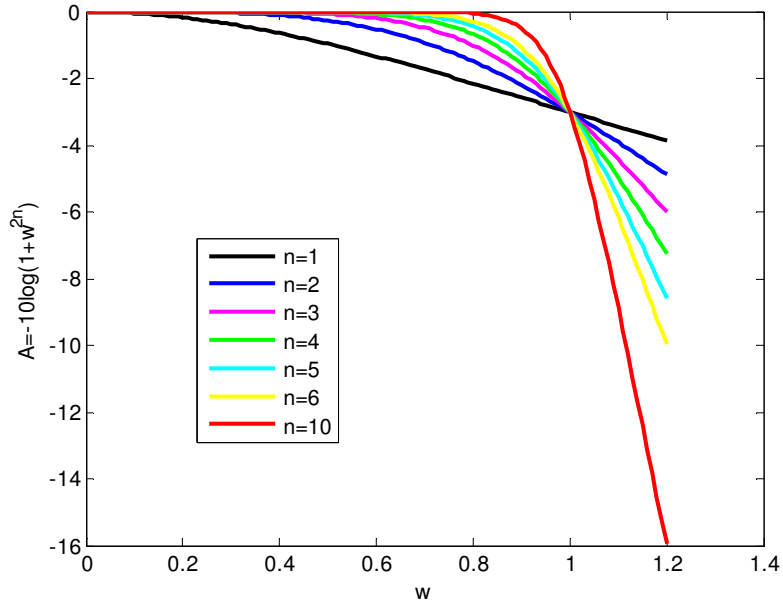
Kesim frekansı ω_0 olan bir Butterworth transfer fonksiyonunu elde etmek için normalize Butterworth transfer fonksiyonlarında $H(s)$ 'de s yerine $\frac{s}{\omega_0}$ koyulursa

$$\left| H\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}}$$

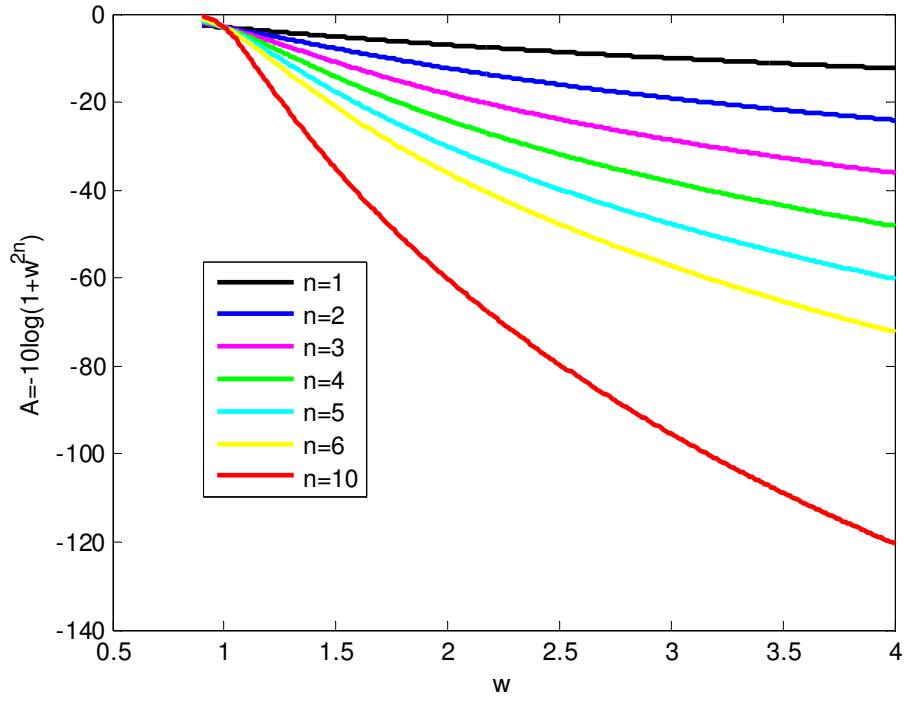
bulunur. Kazanç ifadesi ise

$$A = 20 \log \left| H\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) \right| dB = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}} = -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}} = -10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n} \right)$$

şeklinde elde edilir. Kazancın frekansa göre değişimi Şek. de normalize transfer fonksiyonu için ($\omega_0 = 1 \text{ r/s}$) geçirme bandında, Şek. de ise söndürme bandında çeşitli n değerleri için çizilmiştir.



Şek.

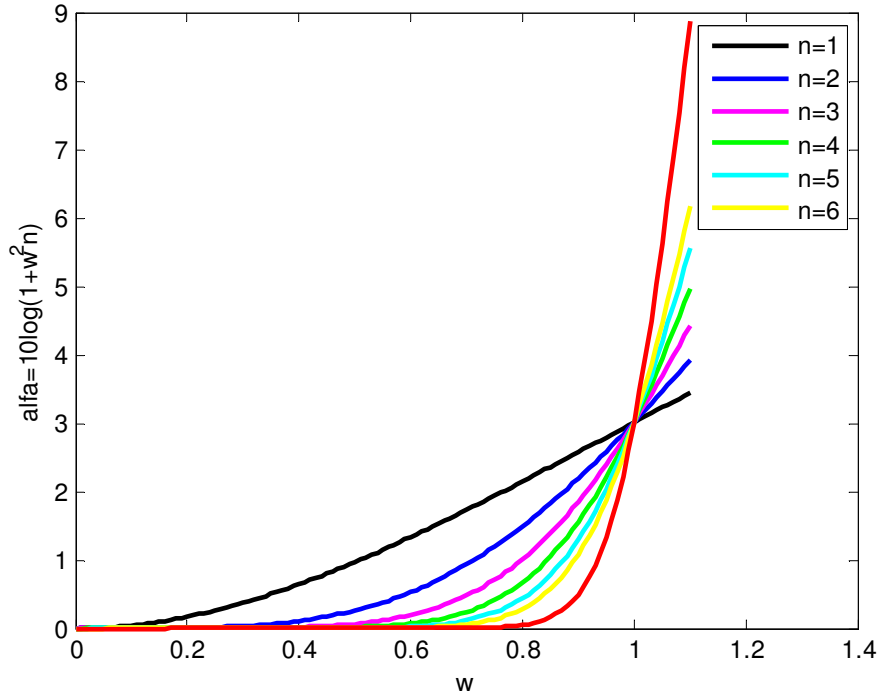


Şek.

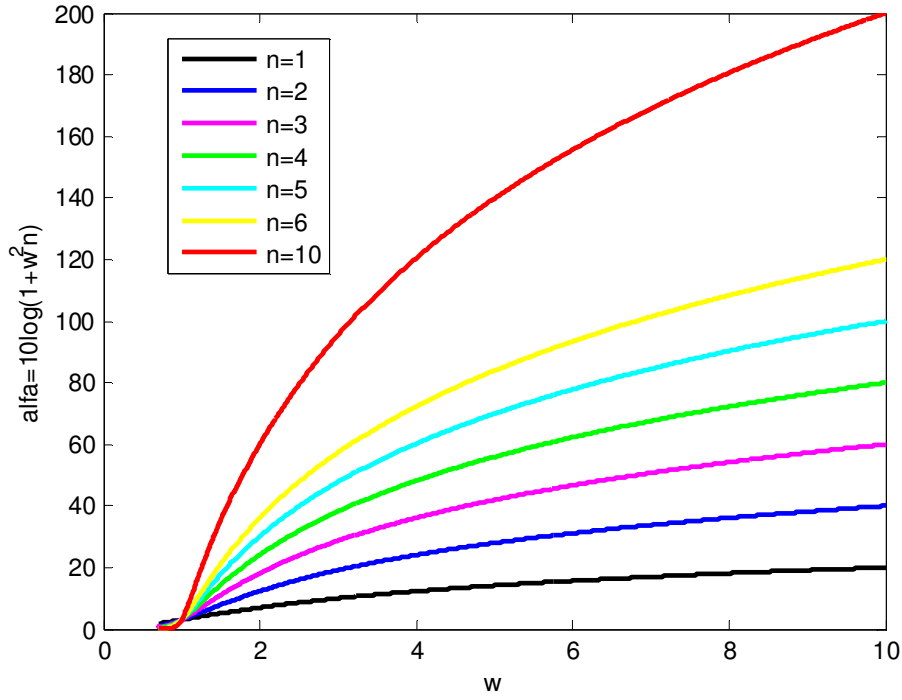
Zayıflatma ise

$$\alpha = 10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2n} \right] dB$$

şeklindedir. Zayıflatmanın frekansa göre değişimi Şek. de normalize transfer fonksiyonu için ($\omega_0 = 1r/s$) geçirme bandında, Şek. de ise söndürme bandında çeşitli n değerleri için çizilmiştir.



Şek.



Şek.

BUTTERWORTH TÜRÜ YAKLAŞIKLIKTA TRANSFER FONKSİYONUN DERECESİNİN VE SÜZGECİN KESİM FREKANSININ SAPTANMASI

Frekans özellikleri verilen bir süzgecin Butterworth yaklaşıklığı kullanılarak gerçekleştirilmesinin istendiğini düşünelim. n . dereceden ve kesim frekansı ω_0 olan Butterworth transfer fonksiyonu için zayıflatma fonksiyonu

$$\alpha(\omega) = 10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2n} \right]$$

Şeklindedir. Buradan

$$10^{\alpha/10} = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2n}$$

ve

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\left[10^{\alpha/10} - 1\right]^{1/2n}}$$

bulunur. Şek. den

$$\omega_p \Rightarrow \alpha_{\max} \quad \omega_s \Rightarrow \alpha_{\min}$$

olduğundan

$$\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^{2n} = 10^{\alpha_{\max}/10} - 1 \quad ()$$

ve

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)^{2n} = 10^{\alpha_{\min}/10} - 1 \quad ()$$

yazılabilir. Bu iki eşitlikten

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^{2n} = \frac{10^{\alpha_{\min}/10} - 1}{10^{\alpha_{\max}/10} - 1}$$

ve buradan

$$n = \frac{\log \left[(10^{\alpha_{\min}/10} - 1) / (10^{\alpha_{\max}/10} - 1) \right]}{2 \log (\omega_s / \omega_p)} \quad ()$$

elde edilir. Buradan n 'nin değeri saptanır. n 'nin değeri tanım gereği tam sayıdır. Fakat yukarıdaki ifadeden tam sayı bulunamayabilir. Bu durumda bulunan değer kendisinden büyük olan en yakın tam sayıya yuvarlatılır. n 'nin bulunması ile normalize Butterworth transfer fonksiyonu belirlenmiş olur. Şimdi kesim frekansı ω_0 'ın saptanması gerekir. ω_0 , () veya () dan bulunabilir. () den

$$\omega_0 = \frac{\omega_p}{\left[10^{\alpha_{\max}/10} - 1\right]^{1/2n}}, \quad ()$$

() den ise

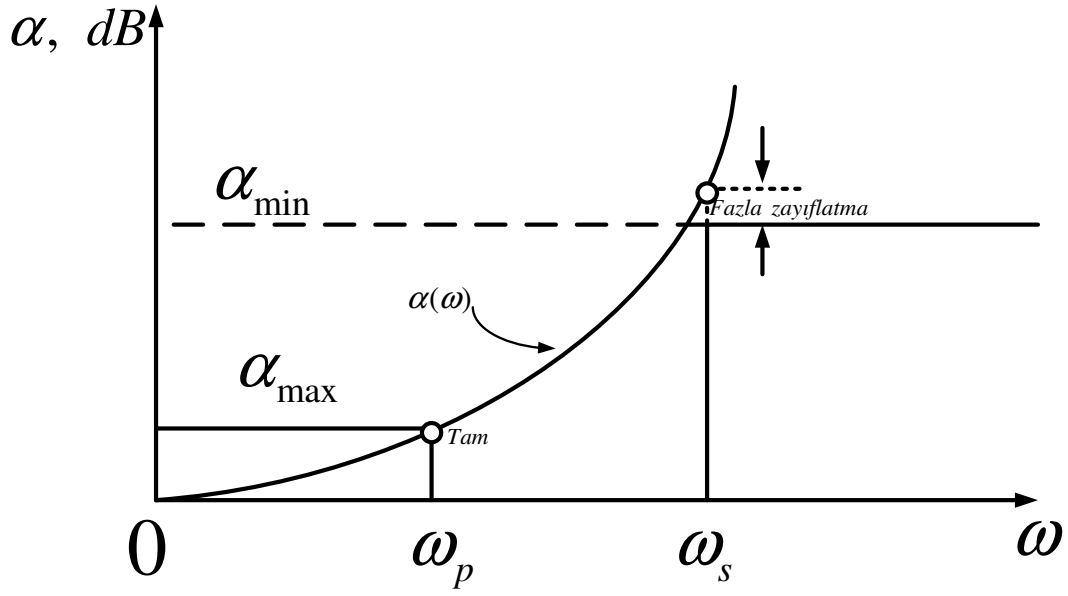
$$\omega_0 = \frac{\omega_s}{\left[10^{\alpha_{\min}/10} - 1\right]^{1/2n}} \quad ()$$

elde edilir. () den bulunursa yaklaşıklık ω_p 'de tam değer verir. Yani

$$\alpha(\omega_p) = \alpha_{\max}$$

olur. Bu durumda ω_s 'de, yani söndürme bandında α_{\min} 'den fazla zayıflatma olacaktır (n 'nin değeri daha büyük seçildiği için):

$$\alpha(\omega_s) > \alpha_{\min}$$

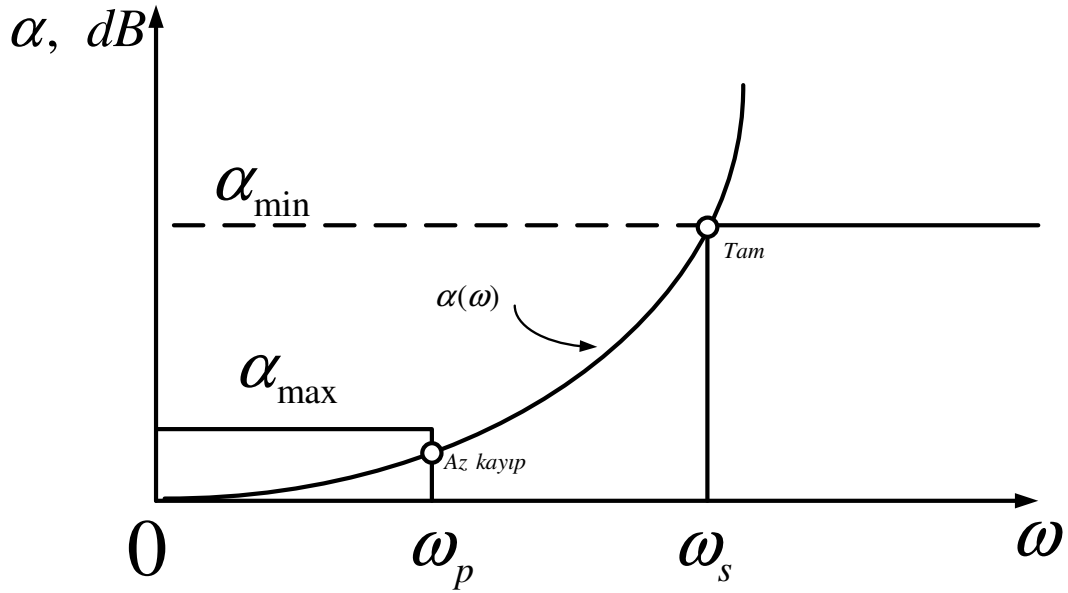


ω_0 , (2) den bulunursa yaklaşık ω_s 'de tam değer verir. Yani

$$\alpha(\omega_s) = \alpha_{\min}.$$

Bu durumda ω_p 'de (geçirme bandında) α_{\max} 'dan daha az zayıflatma olacaktır (n 'nin değeri daha büyük seçildiği için):

$$\alpha(\omega_p) < \alpha_{\max}$$



Örnek:

$$\alpha_{\max} = 0,5 \text{ dB}, \quad \alpha_{\min} = 20 \text{ dB}, \quad \omega_p = 1000 \text{ rad / s}, \quad \omega_s = 2000 \text{ rad / s}$$

için $n = 4.83209 \cong 5$ olarak hesaplanır.

Şimdi ω_0 ,

$$\omega_0 = \frac{\omega_s}{\left[10^{\alpha_{\min}/10} - 1\right]^{1/2n}} \quad \text{dan hesaplanırsa} \quad \omega_0 = 1263,2 \text{ rad / s} \quad \text{bulunur.}$$

$$\omega_0 = \frac{\omega_p}{\left[10^{\alpha_{\max}/10} - 1\right]^{1/2n}} \quad \text{dan hesaplanırsa} \quad \omega_0 = 1234 \text{ rad / s} \quad \text{bulunur.}$$

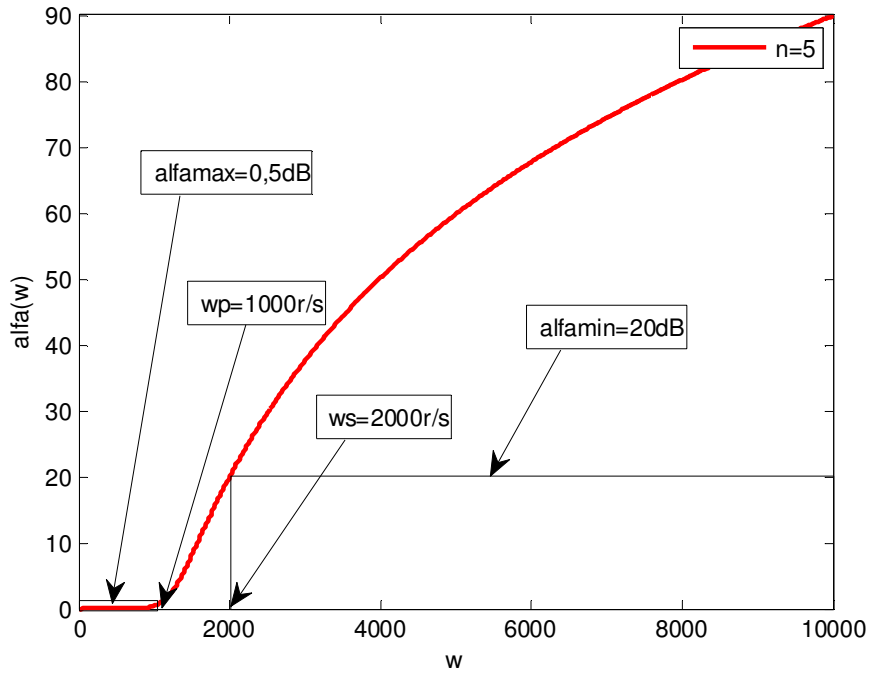
$\omega_0 = 1263,2 \text{ rad / s}$ değerini alalım. Buna göre

$$\omega = \omega_p = 1000 \text{ r / s} \quad \text{için} \quad \alpha(1000) = 10 \log \left[1 + \left(\frac{1000}{1263.2} \right)^{10} \right] = 0,4007 \text{ dB}$$

$$\omega = \omega_0 = 1263,2 \text{ r / s} \quad \text{için} \quad \alpha(1263.2) = 10 \log \left[1 + \left(\frac{1263.2}{1263.2} \right)^{10} \right] = 3.0103 \text{ dB} \cong 3 \text{ dB}$$

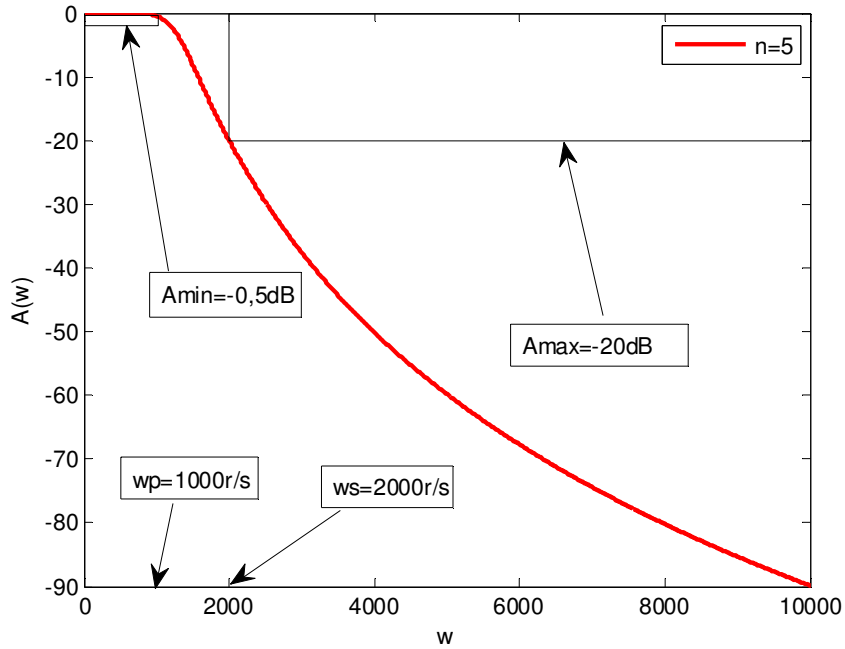
$$\omega = \omega_s = 2000 \text{ r / s} \quad \text{için} \quad \alpha(2000) = 10 \log \left[1 + \left(\frac{2000}{1263.2} \right)^{10} \right] = 19.9994 \text{ dB} \cong 20 \text{ dB}$$

bulunur. Şek. de $n=5$ için zayıflatma $\alpha(\omega)$ 'nın ω 'ya göre değişimi verilmiştir. ω_0 (2) eşitliğinden bulunduğu için $\alpha(\omega)$, $\omega = \omega_s$ için α_{\min} değerini alır yani $\alpha(\omega_s) = \alpha_{\min}$ olur. $n = 5$ değeri () eşitliğinden bulunan 4.83209 değerinden büyük olduğu için $\alpha(\omega)$, $\omega = \omega_p = 1000 \text{ r / s}$ için α_{\max} değerini alamaz, daha küçük bir değer alır, yani $\omega = \omega_p$ 'deki zayıflatma α_{\max} 'dan azdır.



Şek.

Şek. de $n=5$ için kazanç $A(\omega)$ 'nın ω 'ya göre değişimi verilmiştir. Yukarıda zayıflatma için verilen şartlar kazanç uyarlanması gerekir. Geçirme bandındaki kazancın belli bir değerden küçük olmaması, söndürme bandındaki kazancın ise belli bir değerden büyük olmaması şart koşulur. Geçirme bandındaki en küçük değer A_{\min} , söndürme bandındaki en büyük değer de A_{\max} ile gösterilir.



Şek.

TRANSFER FONKSİYONUNU GERÇEKLEYEN DEVRENİN BULUNMASI

Alçak geçiren Butterworth transfer fonksiyonlarının payları bir sabitten ibaret olduklarından devre ile gerçekleştirme problemine ilk önce bu türden olan transfer fonksiyonlarının gerçekleştirilmesi ile başlayacağız.

PAYI SABİT OLAN TRANSFER FONKSİYONLARININ BİR DEVRE İLE GERÇEKLENMESİ

Bir transfer fonksiyonunun çeşitli devre gerçeklemeleri yapılabilir. Biz burada biçimsel olarak ve eleman sayısı bakımından belli kurallara uyan devreler ile gerçeklemeleri ele alacağız. Bundan dolayı da bu tür devrelere **Kanonik Devreler** diyeceğiz. Kanonik olarak nitelendirilen devrelerin de değişik türleri vardır. Transfer fonksiyonundan devreye giderken tutulan yol biçimsel olarak devrenin uyacağı kuralı ve dolayısıyla da devrenin türünü belirler.

BİRİNCİ TÜRDE KANONİK DEVRE

Alçak geçiren 5. dereceden Butterworth transfer fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$H(s) = \frac{1}{s^5 + 3,2361s^4 + 5,2361s^3 + 5,2361s^2 + 3,2361s + 1} = \frac{1}{s^5 + a_1s^4 + a_2s^3 + a_3s^2 + a_4s + a_5} = \frac{Y(s)}{E(s)}$$

Buradan

$$(s^5 + a_1s^4 + a_2s^3 + a_3s^2 + a_4s + a_5)Y(s) = E(s) \quad ()$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanının ters Laplace dönüşümü alınarak

$$\frac{d^5 y(t)}{dt^5} + a_1 \frac{d^4 y(t)}{dt^4} + a_2 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + a_3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_4 \frac{dy(t)}{dt} + a_5 y(t) = e(t)$$

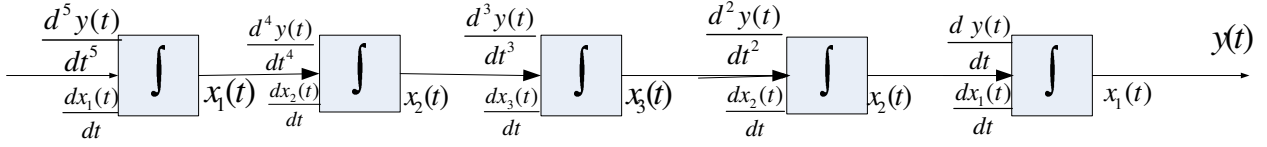
bulunur. **Devre Sentezi Problemi** bu diferansiyel denklemi ya da $H(s)$ transfer fonksiyonunu sağlayan bir devrenin bulunmasıdır. Bu diferansiyel denklemi dolayısıyla da transfer fonksiyonunu sağlayan sonsuz sayıda devre bulunabilir. Fakat bu denklemi

$$\frac{d^5 y(t)}{dt^5} = - \left[a_1 \frac{d^4 y(t)}{dt^4} + a_2 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + a_3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_4 \frac{dy(t)}{dt} + a_5 y(t) - e(t) \right] \quad ()$$

şeklinde yazar, devrenin yapacağı işi: “Yalnızca bir toplama noktası kullanarak bu noktada $\frac{d^4 y(t)}{dt^4}, \frac{d^3 y(t)}{dt^3}, \frac{d^2 y(t)}{dt^2}, \frac{dy(t)}{dt}$ ve $-e(t)$ ’nin toplanması, bu toplamın ters işaretlisinin sistemde $\frac{d^5 y(t)}{dt^5}$ ’yi vermesidir” şeklinde tanımlarsak bu işlevi gören devre bir kanonik devre olacaktır.

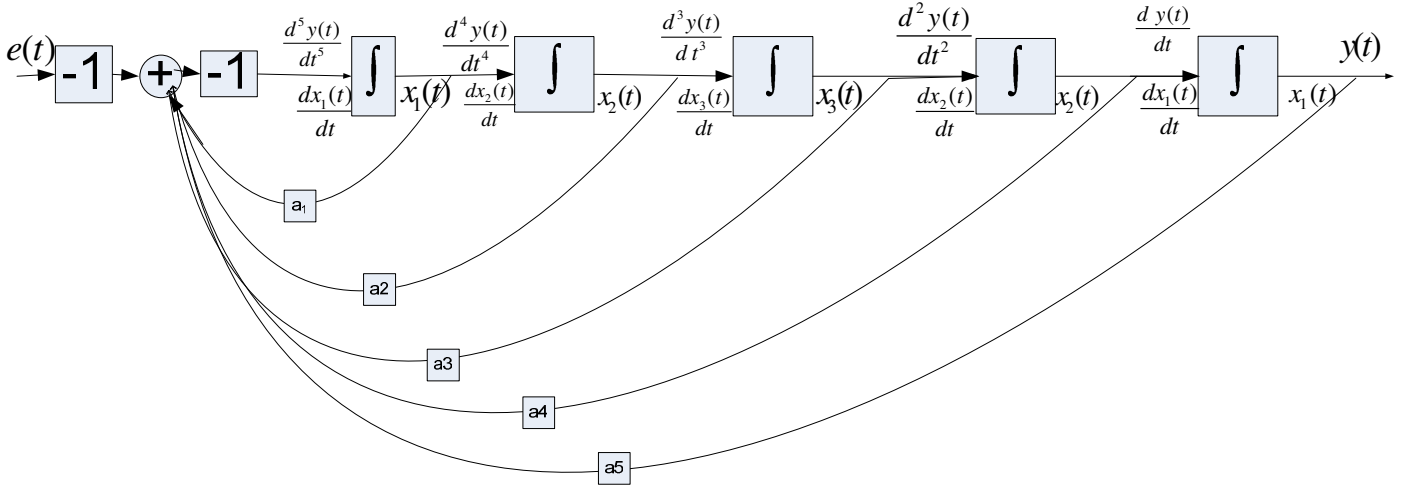
() denklemi ile () denkleminin $s^5 Y(s) = - \left[(a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + a_5) Y(s) - E(s) \right]$ şeklinde yazılması ile eşdeğer olduğu açıktır. Burada devrenin işlevsel olarak uyduğu kural

() denklemini gerçekleştirmektir. Şimdi bu kanonik devreyi oluşturmaya çalışalım. Bu amaçla beş adet entegral alıcıyı ardarda bağlayarak Şek. deki düzenleşimi oluşturalım.



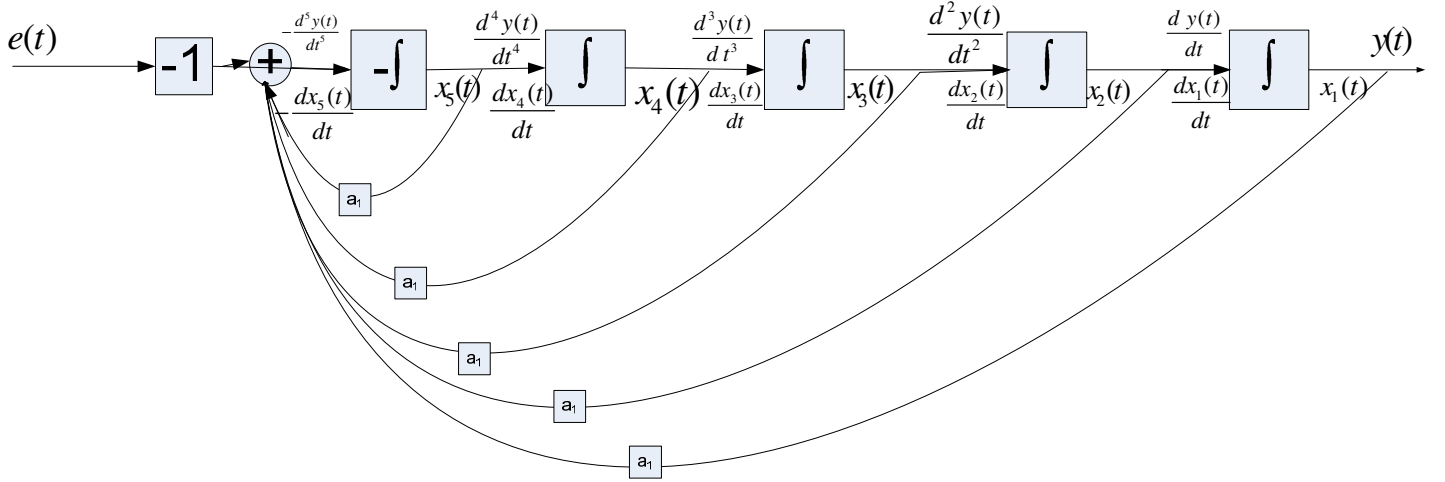
Şek.

Bu düzenleşimi kullanarak yukarıdaki diferansiyel denklemini gerçekleyen bir sistemin oluşturulması için yapılacak iş yalnızca bir toplama noktası kullanarak bu noktada $\frac{d^4 y(t)}{dt^4}, \frac{d^3 y(t)}{dt^3}, \frac{d^2 y(t)}{dt^2}, \frac{dy(t)}{dt}$ ve $-e(t)$ 'nin toplanması, bu toplamın ters işaretlisinin sistemde $\frac{d^5 y(t)}{dt^5}$ 'yi vermesidir. Bu işlevi yerin getiren sistem Şek. de gösterilmiştir.



Şek.

Şek. deki toplama noktasının sağındaki (-1) bloğu önündeki entegral alıcının içine sokularak Şek deki blok diyagramı elde edilir.



Şek.

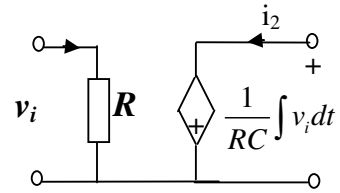
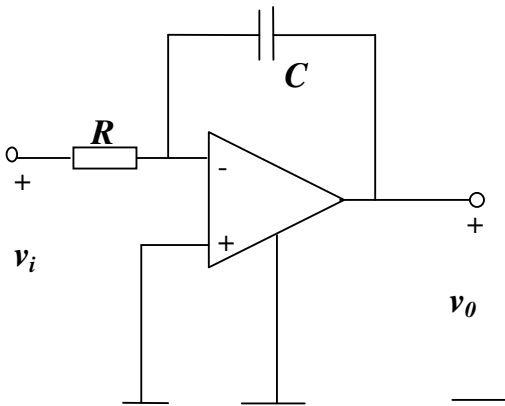
Bu dönüşüm () denkleminin her iki yanının -1 ile çarpılarak

$$-\frac{d^5 y(t)}{dt^5} = a_1 \frac{d^4 y(t)}{dt^4} + a_2 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + a_3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_4 \frac{dy(t)}{dt} + a_5 y(t) - e(t)$$

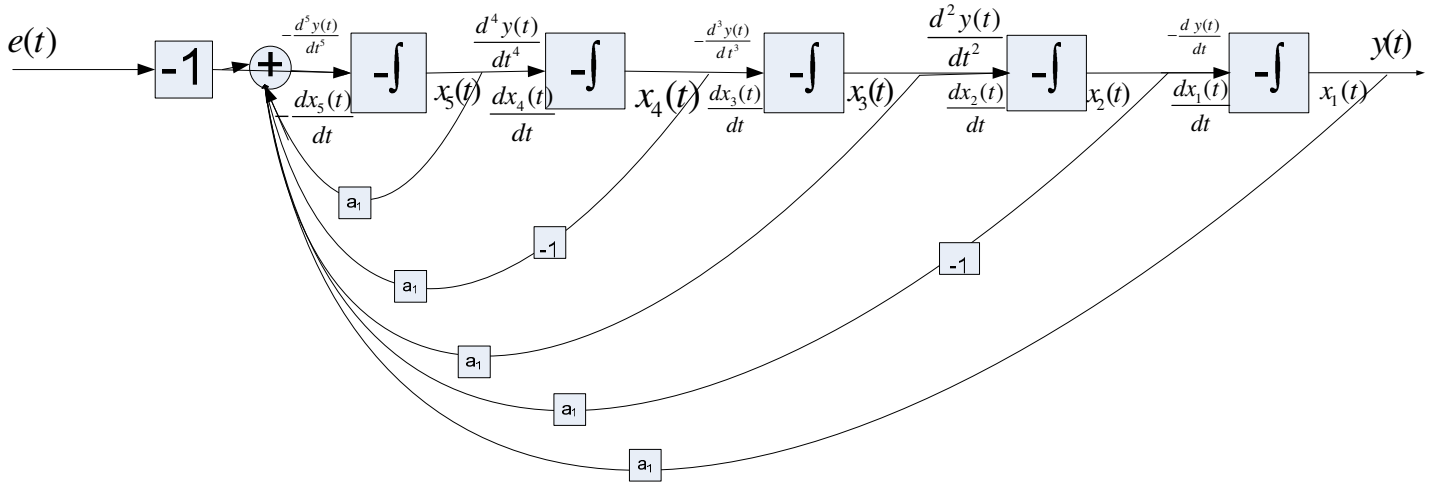
şeklinde yazılmasına eşdeğerdir.

Devre sentezinin son aşaması Şek. deki düzenleşimin bir devre ile gerçekleştirilmesidir. Bunun için Şek. deki entegral alıcının devre ile gerçekleştirilmesi gerekir. Şek. .a da bir entegral alıcı devre Şek. .b de ise bu devrenin eşdeğer devresi görülmektedir. Bu devreden

$\frac{dv_0}{dt} = -\frac{1}{RC} v_i$ bulunur. $RC = 1s$ alınırsa $v_0 = -\int v_i dt$ elde edilir. Demek ki, entegral alıcı devre, girişin entegralini almakla kalmayıp (-) ile de çarpmaktadır.



Öyleyse Şek. deki entegral alıcıların yerine $-\int$ koyulursa ileri yoldaki tek mertebeli türevler (-) ile çarpılacağından () denkleminin değişmezliğinin sağlanması amacıyla bu türevlerden çıkan geribesleme yollarına (-1) bloklarının yerleştirilmesi gerekir (Şek.).

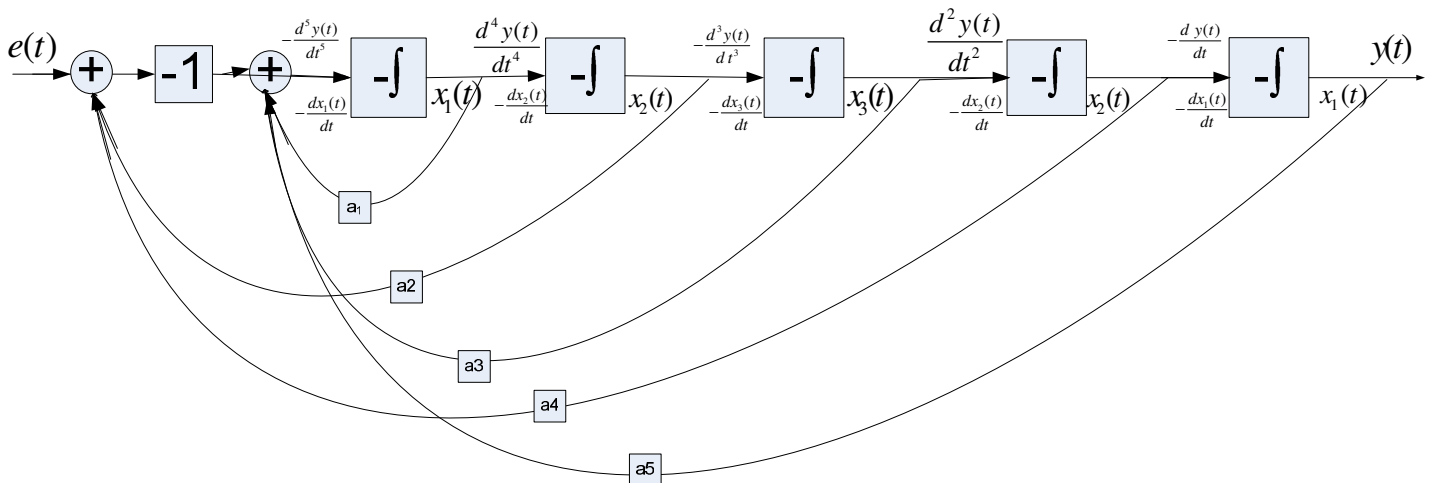


Şek.

Şek. in anlamı () eşitliğinin

$$-\frac{d^5 y(t)}{dt^5} = a_1 \frac{d^4 y(t)}{dt^{N-1}} + a_3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_5 y(t) - \left\{ a_2 \left(-\frac{d^3 y(t)}{dt^3} \right) + a_4 \left(-\frac{dy(t)}{dt} \right) + e(t) \right\}$$

şeklinde düzenlenmesinden başka bir şey değildir. Öte yandan Şek. deki blok diyagram yerine Şek. deki alınırsa () eşitliğinde bir değişme olmaz.



Şek.

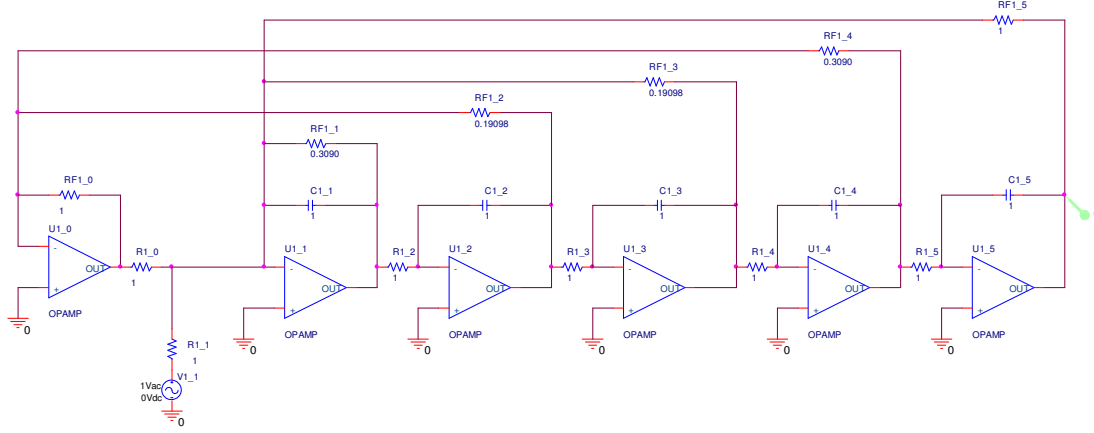
Şek. deki blok diyagramı bir devre ile gerçekleştirilebilir hale gelmiştir. Şek. deki devre bu blok diyagramını dolaysız olarak gerçekleştirir. Burada transfer fonksiyonunun katsayıları

$$a_1 = 3,2361, a_2 = 5,2361, a_3 = 5,2361, a_4 = 3,2361, a_5 = 1$$

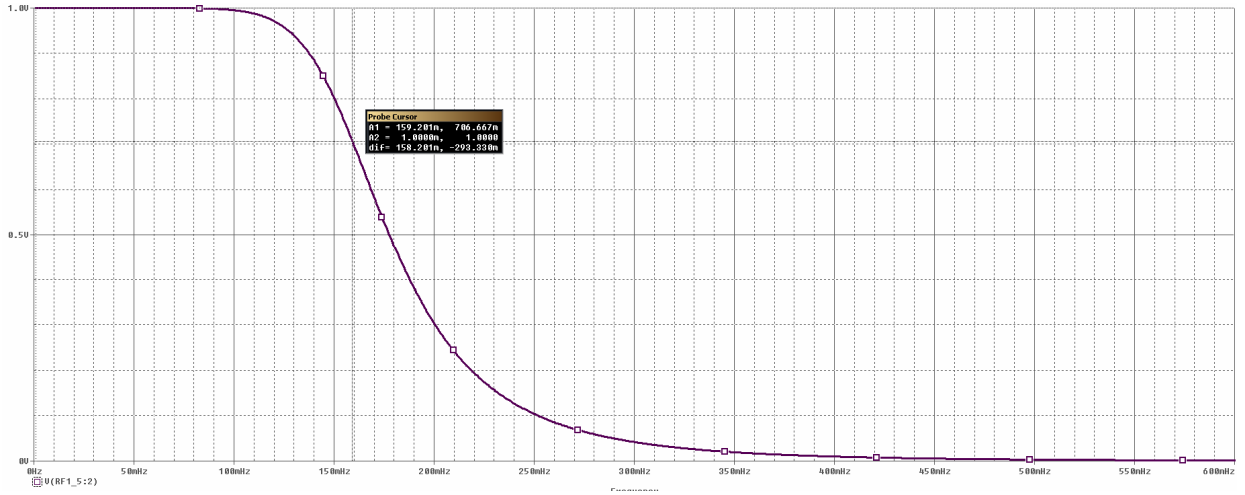
olmak üzere direnç değerleri

$$R_{F1-5} = \frac{1}{a_5}, R_{F1-4} = \frac{1}{a_4}, R_{F1-3} = \frac{1}{a_3}, R_{F1-2} = \frac{1}{a_2}, R_{F1-1} = \frac{1}{a_1}$$

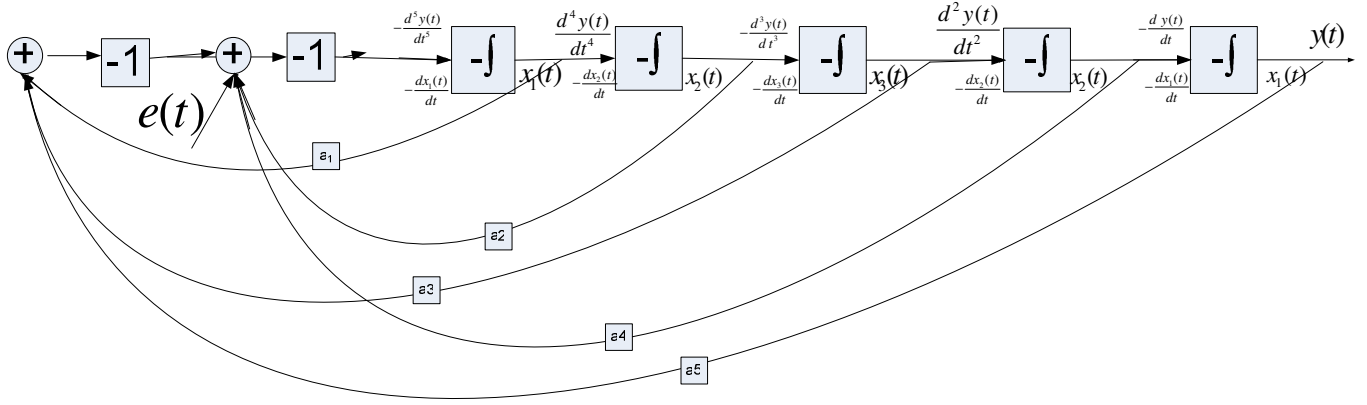
şeklinde bulunur. Şek. deki devreye **Birinci Türden Kanonik Devre** diyoruz. $|H(j\omega)|$ 'nın ω 'ya göre değişimi Şek. de verilmiştir.



Şek.

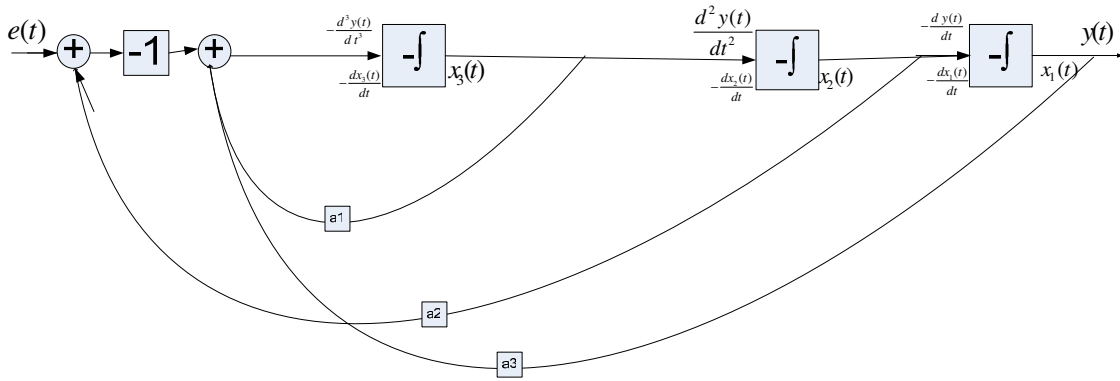


Şek. deki blok diyagramda soldan ilk sıradaki entegral alıcı ile toplama elemanının görevini devrede tek bir entegral alıcı yapar. Hal böyle iken entegral alıcı ile toplama elemanını ayırarak ikisinin arasından işaret çıkışı yapmak olanaksız olur. Böyle bir işaretin gerektiği durumlar için blok diyagramını Şek. deki biçime dönüştürmek gereklidir.



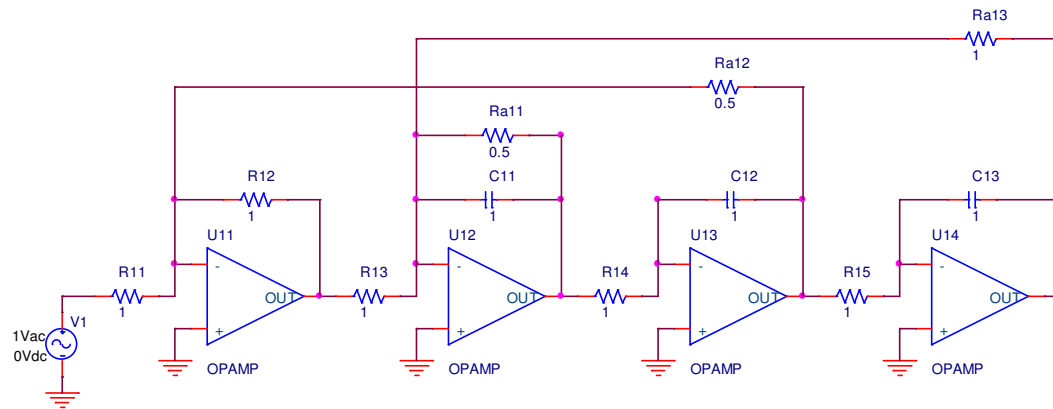
Şek.

$n=3$ için transfer fonksiyonundan elde edilen blok diyagramı Şek. de,

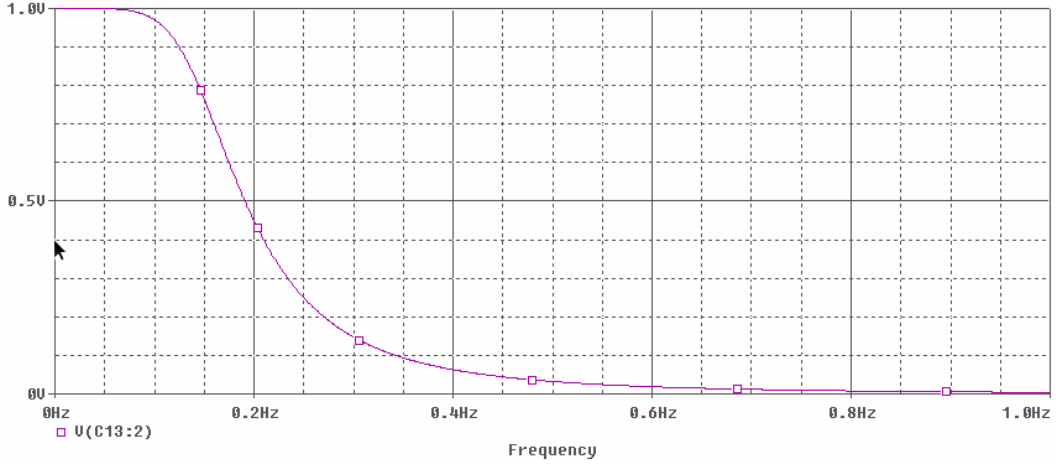


Şek.

ve bu blok diyagramından elde edilen devre de Şek. de verilmiştir.

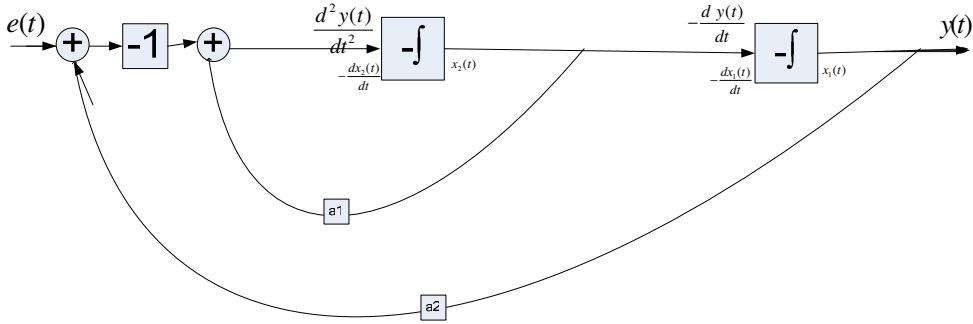


Şek.

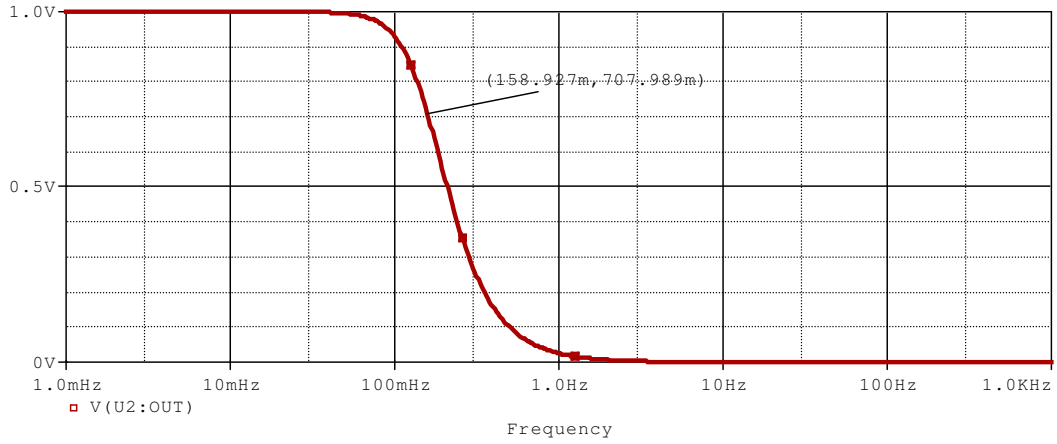
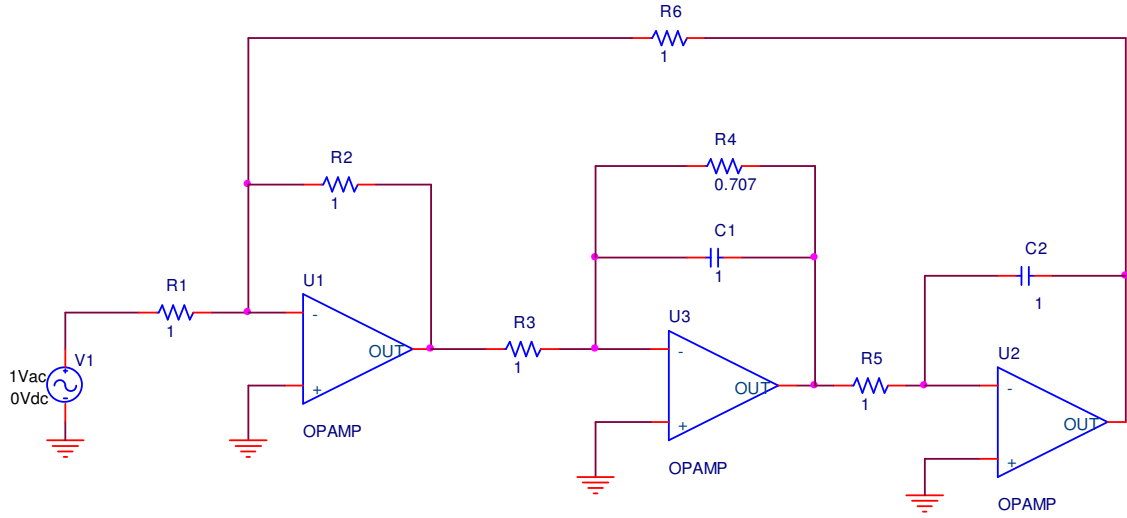


Şek.

$n=2$ için transfer fonksiyonundan elde edilen blok diyagramı Şek. de,



ve bu blok diyagramından elde edilen devre de Şek. de verilmiştir.



İKİNCİ TÜRDE KANONİK DEVRE

Bu kez

$$(s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + a_5)Y(s) = E(s)$$

denklemini

$$Y(s) = \frac{1}{s^5} (-a_5 Y(s) + E(s)) - a_4 \frac{1}{s^4} Y(s) - a_3 \frac{1}{s^3} Y(s) - a_2 \frac{1}{s^2} Y(s) - a_1 \frac{1}{s} Y(s)$$

şeklinde yazalım ve her iki yanın ters Laplace dönüşümünü alalım:

$$y(t) = \int \int \int \int \int (-a_5 y(t) + e(t)) dt dt dt dt dt - \int \int \int \int a_4 y(t) dt dt dt dt - \int \int \int a_3 y(t) dt dt dt - \int \int a_2 y(t) dt dt - \int a_1 y(t) dt$$

elde edilir. Şimdi bu denklemi

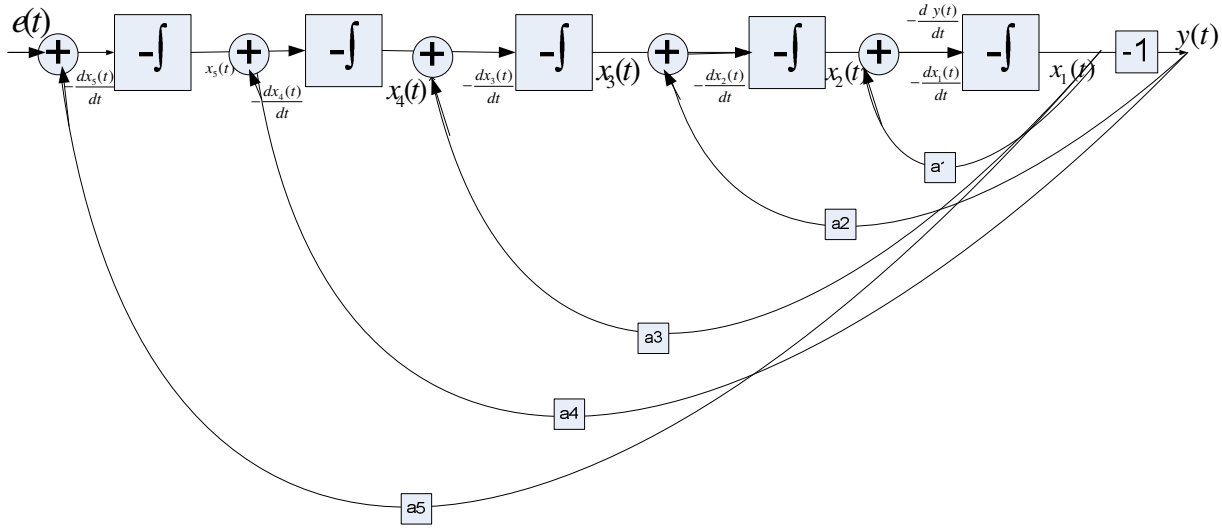
$$y(t) = -\int \int \int \int \int (a_5 y(t) - e(t)) dt dt dt dt dt + \int \int \int \int a_4 y(t) dt dt dt dt - \int \int \int a_3 y(t) dt dt dt + \int \int a_2 y(t) dt dt - \int a_1 y(t) dt$$

şeklinde yazalım. Bu denklem Şek. deki blok diyagram ile gerçekleştirilebilir. Bu blok diyagramı ise Şek. deki devre ile gerçekleştirilebilir. Bu devrede

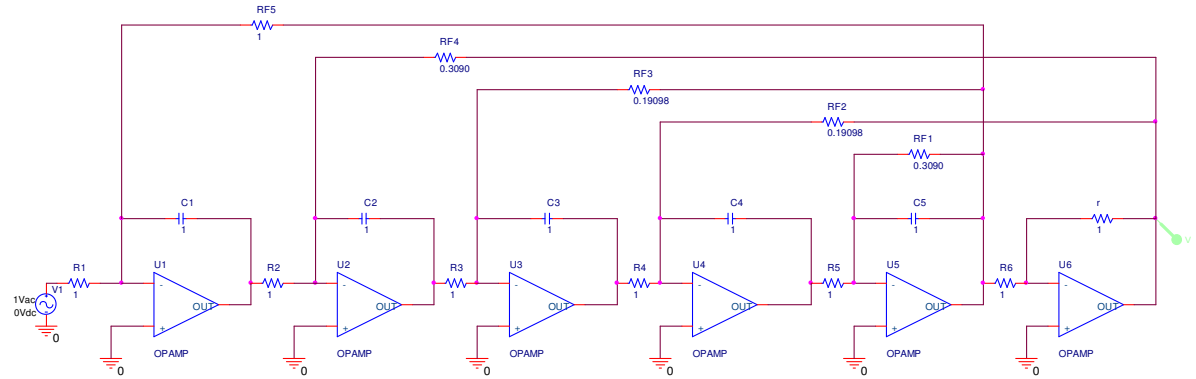
$$R_{F_5} = \frac{1}{a_5}, R_{F_4} = \frac{1}{a_4}, R_{F_3} = \frac{1}{a_3}, R_{F_2} = \frac{1}{a_2}, R_{F_1} = \frac{1}{a_1}$$

Şek. deki devreye **İkinci Tülden Kanonik Devre** diyoruz. $|H(j\omega)|$ 'nin ω 'ya göre değişimi Şek. de verilmiştir.

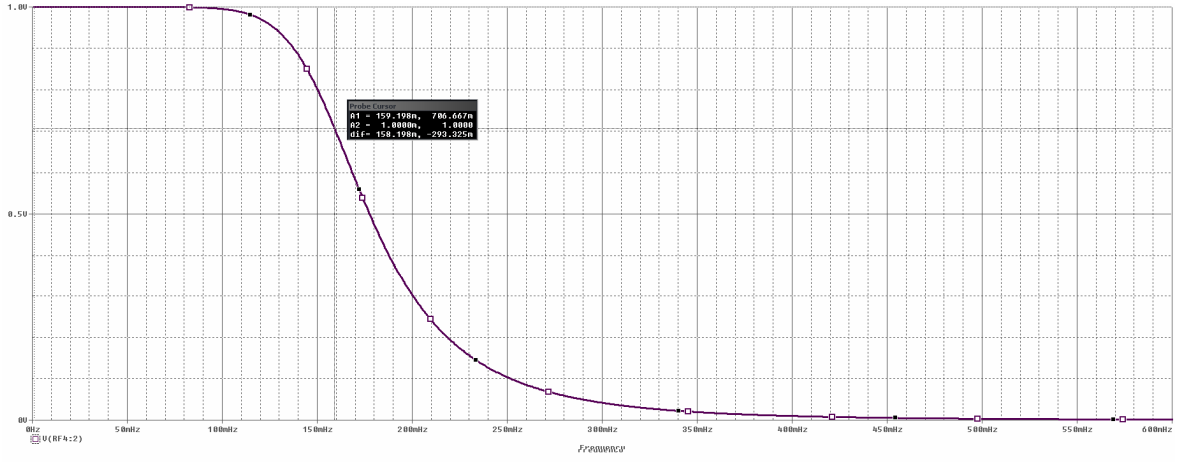
$$y(t) = -\int \int \int \int \int (a_5 y(t) - e(t)) dt dt dt dt dt + \int \int \int \int -a_4 y(t) dt dt dt dt - \int \int \int a_3 y(t) dt dt dt + \int \int -a_2 y(t) dt dt - \int a_1 y(t) dt$$



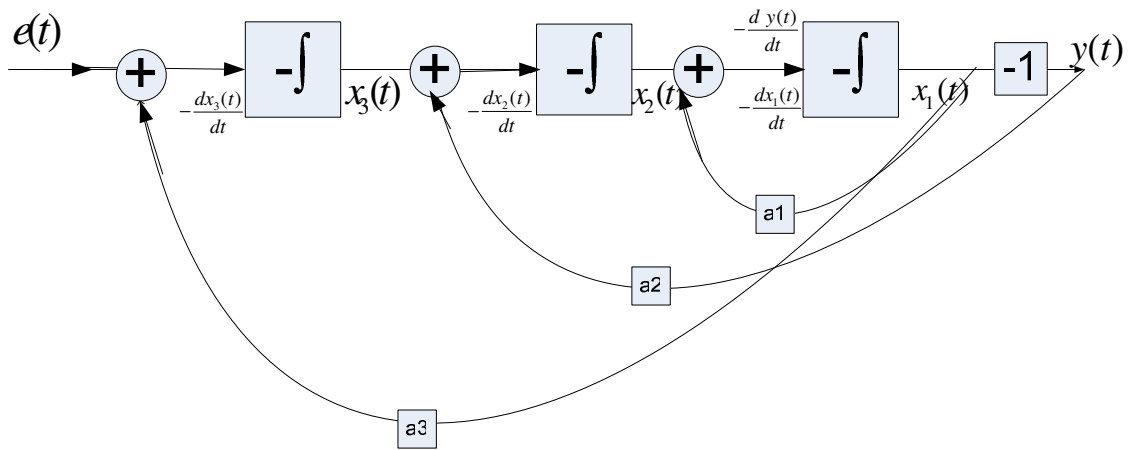
Şek.



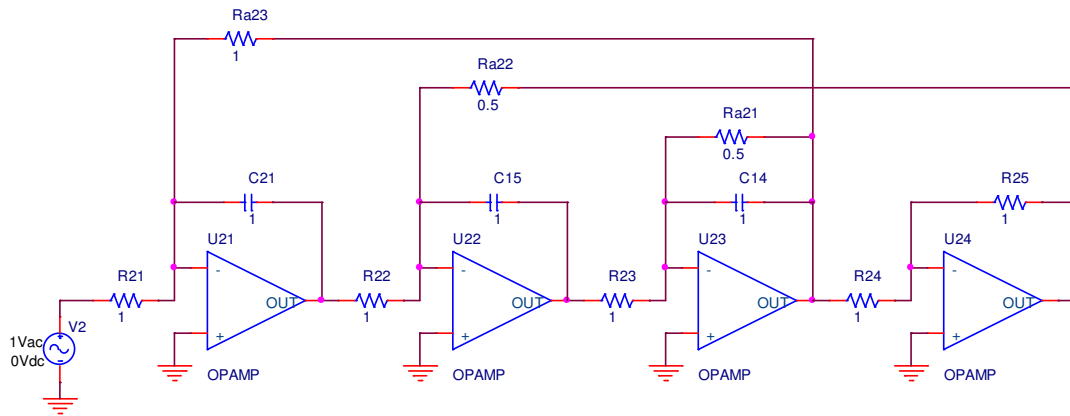
Şek.



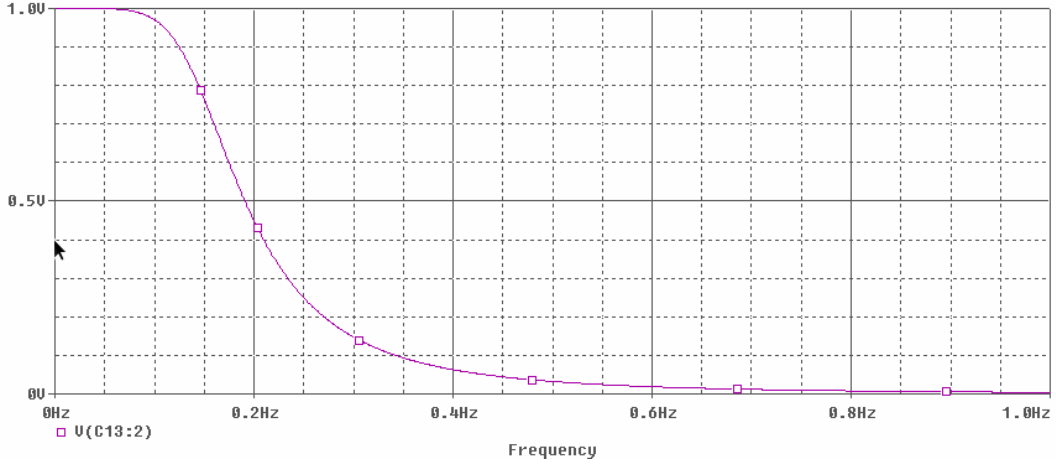
$n=2$ için blok diyagramı Şek. de,



ve bu blok diyagramından elde edilen devre de Şek. de verilmiştir.

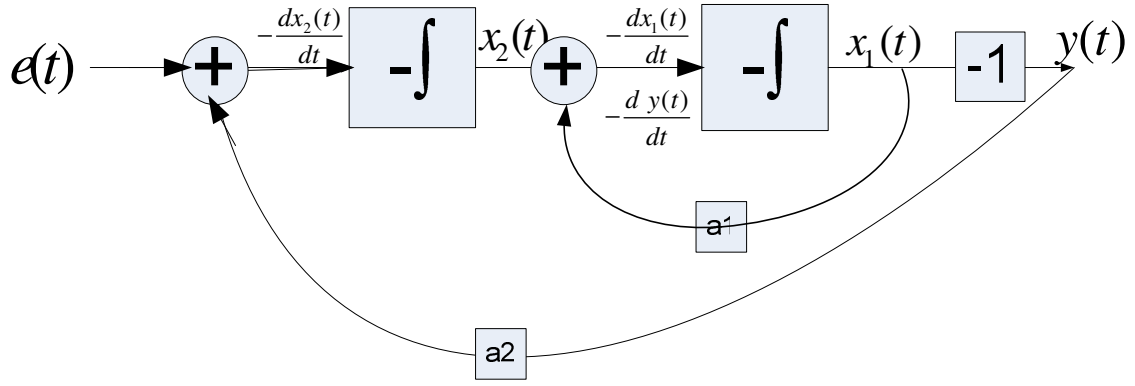


Bu devrenin genlik karakteristiği Şek. de gösterilmiştir.



Şek.

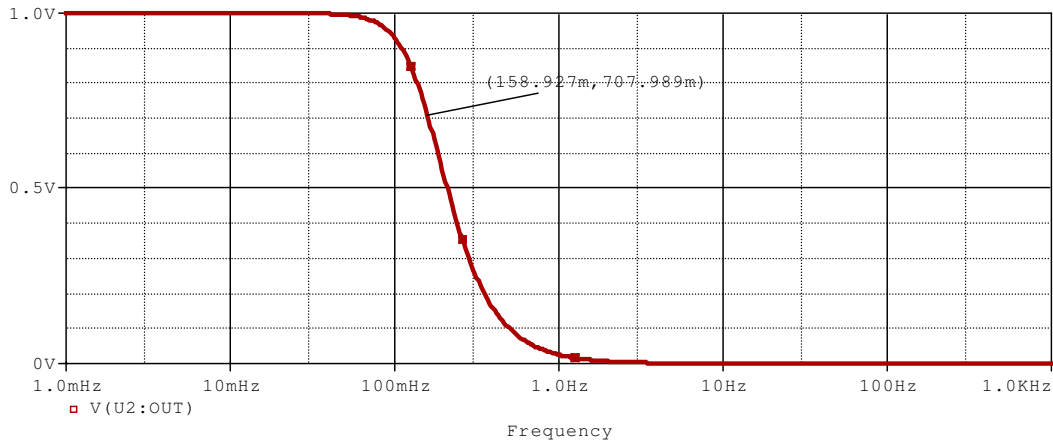
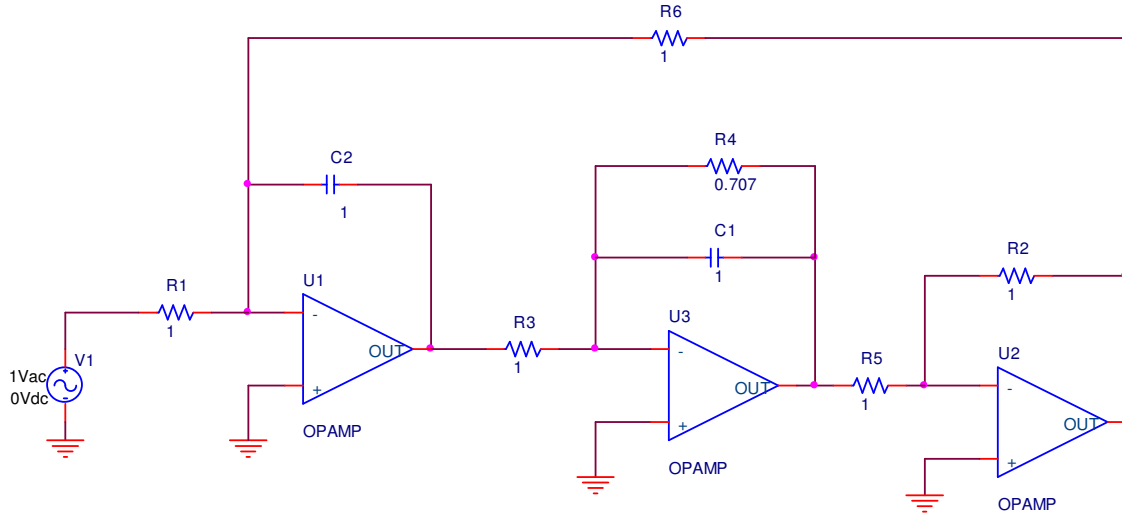
$n=2$ için blok diyagramı Şek. de,



Şek.

ve bu blok diyagramından elde edilen devre de Şek. de verilmiştir.

Şek.



GENEL BİÇİMDEN TRANSFER FONKSİYONUNUN BİR DEVRE İLE GERÇEKLENMESİ

Payı sabit olan transfer fonksiyonlarının iki türden kanonik devre ile gerçeklemeleri yukarıda yapıldı. Paydaki sabitin birim değerinde olmasına karşılık gelen giriş-çıkış diferansiyel denkleminin

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + a_{N-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_N y(t) = e(t)$$

şeklinde olduğunu gördük. Şimdi de

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + a_{N-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_N y(t) = b_0 \frac{d^N e(t)}{dt^N} + b_1 \frac{d^{N-1} e(t)}{dt^{N-1}} + \dots + b_{N-1} \frac{de(t)}{dt} + b_N e(t) \quad ()$$

şeklindeki en genel biçimden bir giriş-çıkış diferansiyel denkleminin iki türden kanonik devreyle gerçekleştirilmesini inceleyeceğiz.

BİRİNCİ TÜRDE KANONİK DEVRE

Şimdi payı sabit olan transfer fonksiyonları durumunda yazılan diferansiyel denklemdeki $y(t)$ yerine $w(t)$ olarak aynı denklemi yazalım:

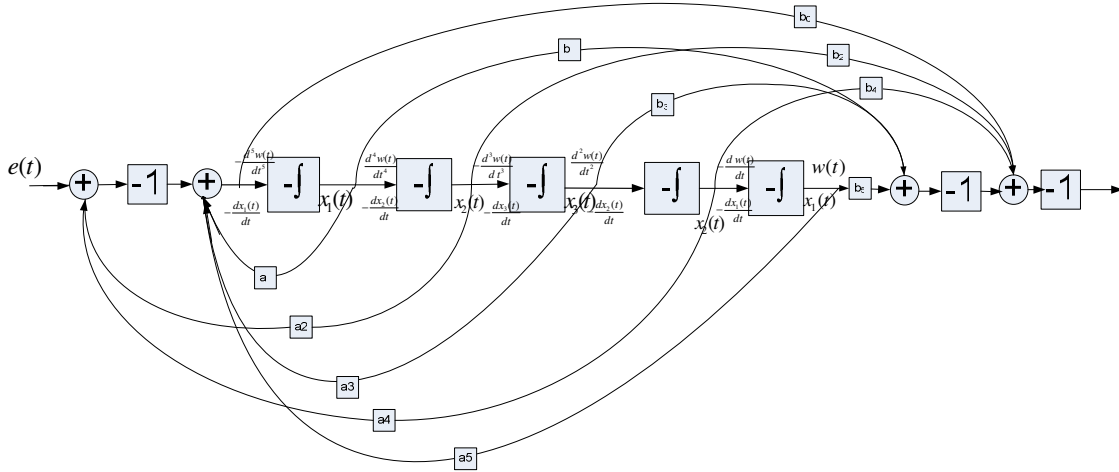
$$\frac{d^5 w(t)}{dt^5} + a_1 \frac{d^4 w(t)}{dt^4} + a_2 \frac{d^3 w(t)}{dt^3} + a_3 \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + a_4 \frac{dw(t)}{dt} + a_5 w(t) = e(t) \quad ()$$

() ile () karşılaştırılması ve denklemlerin lineer olduğu da göz önüne alındığında

$$y(t) = b_0 \frac{d^N w(t)}{dt^N} + b_1 \frac{d^{N-1} w(t)}{dt^{N-1}} + \dots + b_{N-1} \frac{dw(t)}{dt} + b_N w(t) \quad ()$$

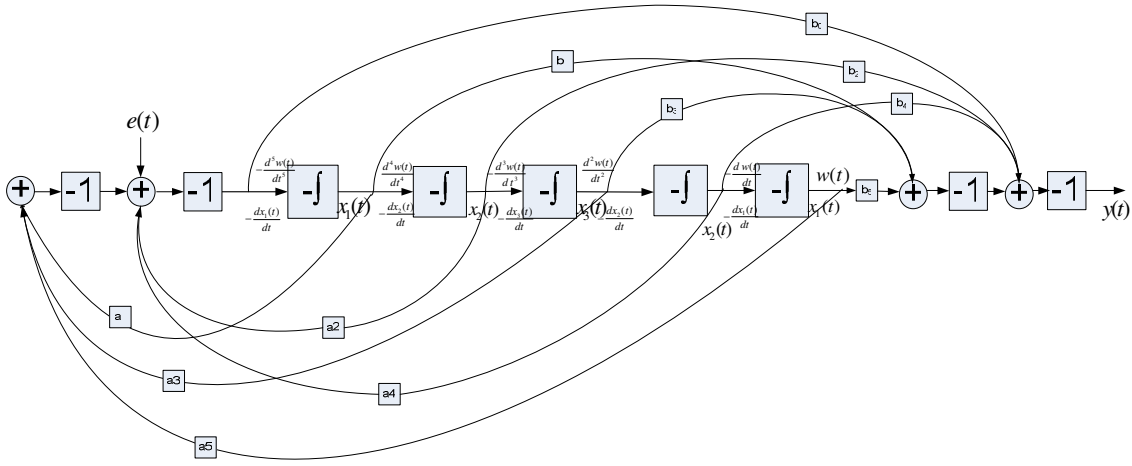
sonucunu verir. Şimdi Şek. de $y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \frac{d^2 y(t)}{dt^2}, \dots, \frac{d^N y(t)}{dt^N}$ yerine, sırasıyla,

$w(t), \frac{dw(t)}{dt}, \frac{d^2 w(t)}{dt^2}, \dots, \frac{d^N w(t)}{dt^N}$ alalım ve her birinin işaretini göz önüne alarak () eşitliğini uygularsak Şek. deki blok diyagramını elde ederiz.



Şek.

Şek. den görüldüğü üzere blok diyagramda soldan ilk sıradaki entegral alıcı ile toplama elemanının arasındaki $-\frac{d^5 w(t)}{dt^5}$ işaretinden bir çıkış alınması gerekmektedir. Dolayısıyla devrenin sentezi için yukarıda gerekçeleri verilmiş olan Şek. deki blok diyagramının kullanılması gerekli olacaktır.

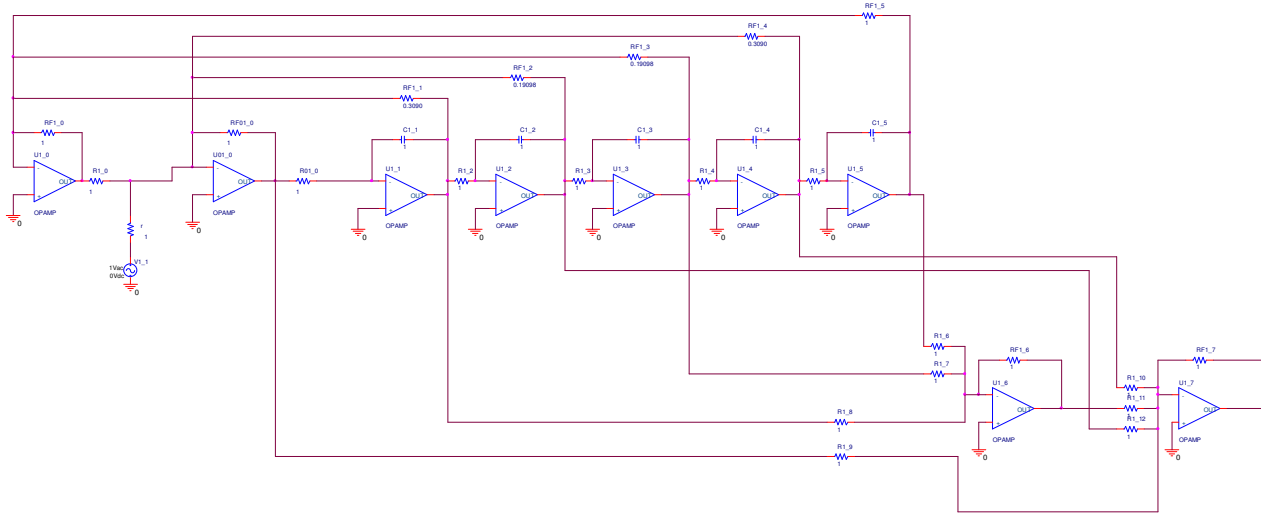


Şek.

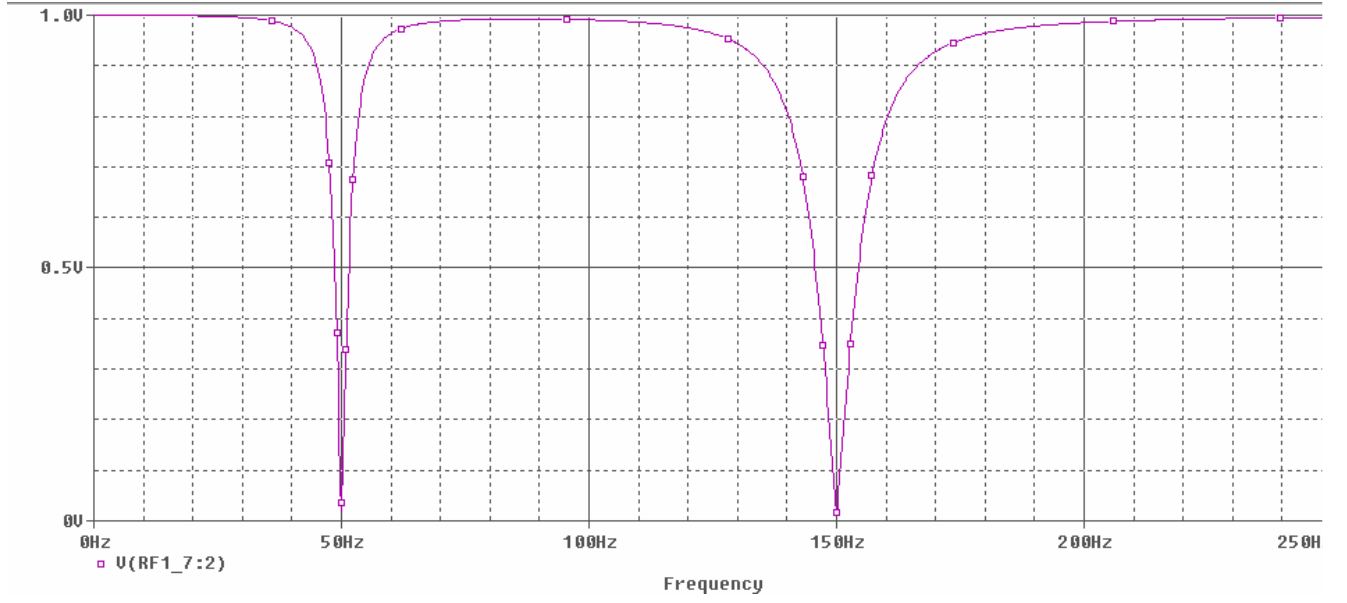
Şek. de $H(s) = \frac{s^5 + s^4 + s^3 + s^2 + s + 1}{s^5 + 3,2361s^4 + 5,2361s^3 + 5,2361s^2 + 3,2361s + 1}$ transfer fonksiyonunu gerçekleyen birinci türden kanonik devre, Şek. de ise bu devrenin genlik frekans karakteristiği verilmiştir. Bu devrede

$$R_{a_5} = \frac{1}{a_5}, R_{a_4} = \frac{1}{a_4}, R_{a_3} = \frac{1}{a_3}, R_{a_2} = \frac{1}{a_2}, R_{a_1} = \frac{1}{a_1}$$

$$R_{b_5} = \frac{1}{b_5}, R_{b_4} = \frac{1}{b_4}, R_{b_3} = \frac{1}{b_3}, R_{b_2} = \frac{1}{b_2}, R_{b_1} = \frac{1}{b_1}, R_{b_0} = \frac{1}{b_0}$$



Şek.



Şek.

İKİNCİ TÜRDEN KANONİK DEVRE

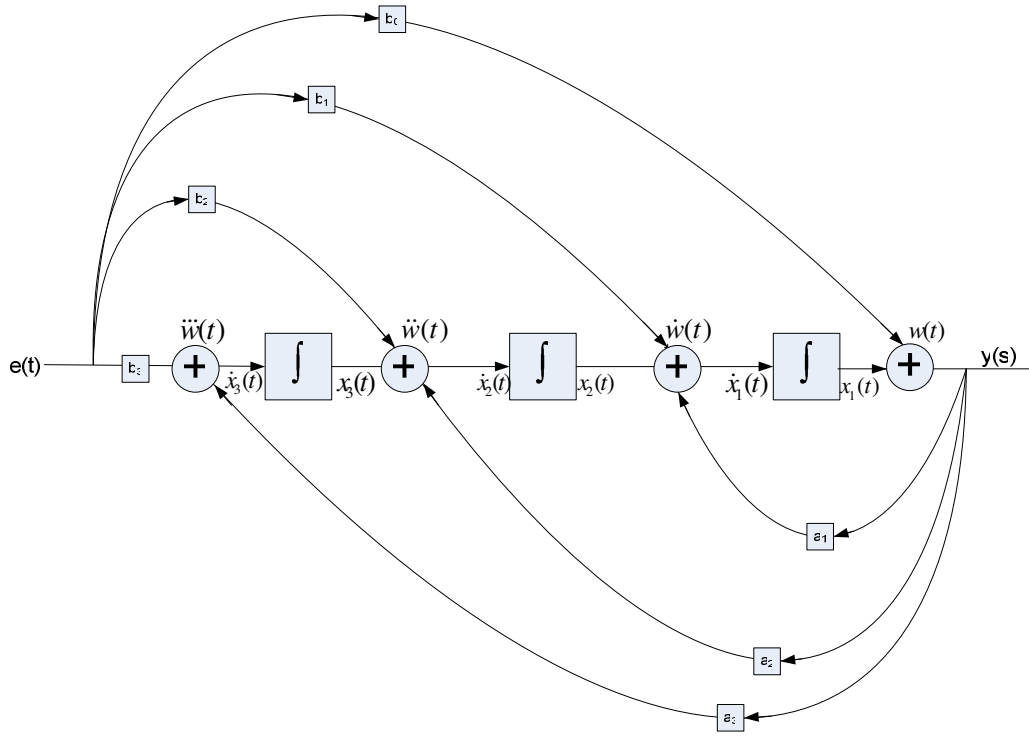
() deki diferansiyel denklemi $N=5$ için yazalım:

$$\frac{d^5 y(t)}{dt^5} = -a_1 \frac{d^4 y(t)}{dt^4} - \dots - a_4 \frac{dy(t)}{dt} - a_5 y(t) + b_0 \frac{d^5 e(t)}{dt^5} + b_1 \frac{d^4 e(t)}{dt^{N-1}} + \dots + b_4 \frac{de(t)}{dt} + b_5 e(t)$$

şeklinde yazalım. Bu denklemin her iki yanının 5 katlı integralini alalım:

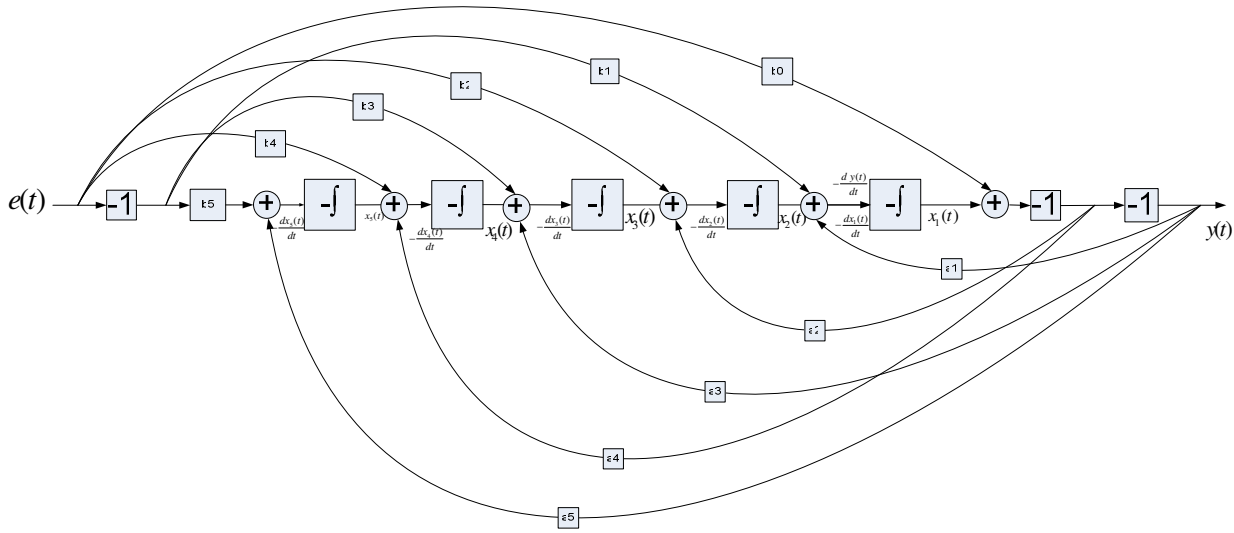
$$y(t) = \int \int \int \int \int \{-a_5 y(t) + b_5 e(t)\} dt dt dt dt dt + \int \int \int \int \{-a_4 y(t) + b_4 e(t)\} dt dt dt dt + \int \int \int \{-a_3 y(t) + b_3 e(t)\} dt dt dt dt + \int \int \{-a_2 y(t) + b_2 e(t)\} dt dt + \int \{-a_1 y(t) + b_1 e(t)\} dt + b_0 e(t)$$

Bu eşitliğin blok diagramı gerçekleştirilmesi $n=3$ için Şek. de gösterilmiştir.



Şek.

Şek. deki entegral alıcıların yerine $-\int$ koyulursa bu değişikliğin gerektirdiği öteki değişiklikler de yapılarak Şek. deki blok diyagramı elde edilir.



Şek.

Şek. de

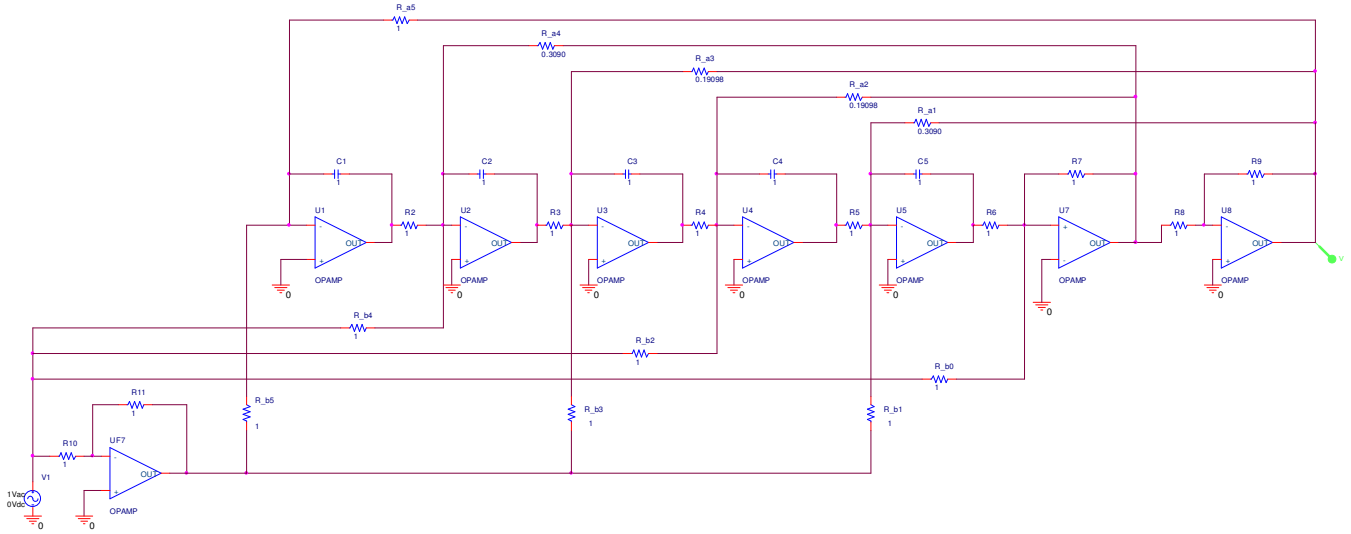
$$H(s) = \frac{s^5 + s^4 + s^3 + s^2 + s + 1}{s^5 + 3,2361s^4 + 5,2361s^3 + 5,2361s^2 + 3,2361s + 1}$$

transfer fonksiyonunu gerçekleyen ikinci türden kanonik devre ,Şek. de ise bu devrenin genlik frekans karakteristiği verilmiştir. Bu devrede devre elemanlarının değerleri

$$R_{a_5} = \frac{1}{a_5} = 1\Omega, R_{a_4} = \frac{1}{a_4} = 0,3090\Omega, R_{a_3} = \frac{1}{a_3} = 0,19098\Omega, R_{a_2} = \frac{1}{a_2} = 0,19098\Omega, R_{a_1} = \frac{1}{a_1} = 0,3090\Omega$$

$$R_{b_5} = \frac{1}{b_5} = 1\Omega, R_{b_4} = \frac{1}{b_4} = 1\Omega, R_{b_3} = \frac{1}{b_3} = 1\Omega, R_{b_2} = \frac{1}{b_2} = 1\Omega, R_{b_1} = \frac{1}{b_1} = 1\Omega, R_{b_0} = \frac{1}{b_0} = 1\Omega$$

şeklinde bulunur.



Örnek:

$$H(s) = \frac{(s^2 + \omega_{0_1}^2)(s^2 + \omega_{0_2}^2)}{\left(s^2 + \frac{\omega_{0_1}}{Q_1}s + \omega_{0_1}^2\right)\left(s^2 + \frac{\omega_{0_2}}{Q_2}s + \omega_{0_2}^2\right)} = \frac{[s^2 + (2\pi 50)^2][s^2 + (2\pi 150)^2]}{\left(s^2 + \frac{2\pi 50}{10}s + (2\pi 50)^2\right)\left(s^2 + \frac{2\pi 150}{10}s + (2\pi 150)^2\right)}$$

$$= \frac{s^4 + 10^5 \pi^2 s^2 + 9 \pi^4 10^8}{s^4 + \frac{2\pi 200}{10} s^3 + \left(10^5 \pi^2 + \frac{4 \pi^2 7500}{100}\right) s^2 + 12\pi^3 10^5 s + 9 \pi^4 10^8}$$

$$= \frac{s^4 + 986965,06 s^2 + 87669001958,8575}{s^4 + 125,664 s^3 + 989925,951 s^2 + 37207793,039 s + 87669001958,8575}$$

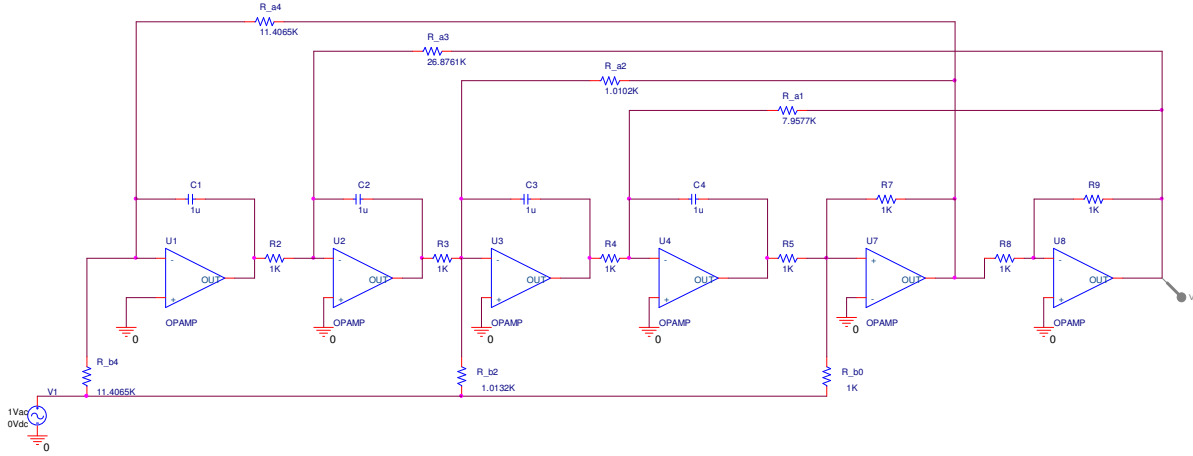
$f_1 = 50 \text{ Hz}$, $f_2 = 150 \text{ Hz}$ de sıfırları olan bir çentik süzgecinin (notch filter) transfer fonksiyonudur.

Devre elemanlarının değerleri

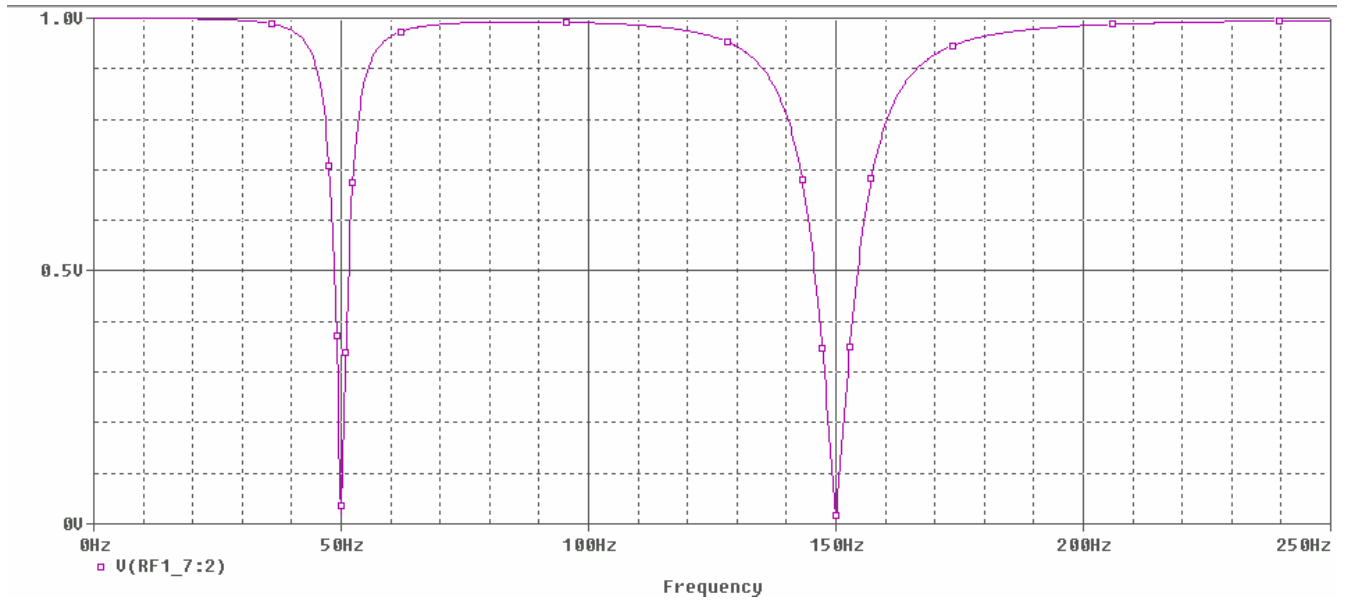
$$R_{a_4} = \frac{1}{a_4}, R_{a_3} = \frac{1}{a_3}, R_{a_2} = \frac{1}{a_2}, R_{a_1} = \frac{1}{a_1}$$

$$R_{b_4} = \frac{1}{b_4}, R_{b_3} = \infty, R_{b_2} = \frac{1}{b_2}, R_{b_1} = \infty, R_{b_0} = \frac{1}{b_0}$$

Bu elemen değerlerine göre elde edilen devre Şek. de, bu devrenin genlik karakteristiği ise Şek. de verilmiştir.



Şek.



Şek.

FREKANS DÖNÜŞÜMLERİ

Süzgeçlerin transfer fonksiyonlarının seçicilik bölgelerini değiştirmek amacıyla frekans değişkeni ω 'nın belli bir fonksiyona göre yeni bir frekans değişkenine dönüştürülmesi işlemine **Frekans Dönüşümü** denir. Örneğin, $H(j\omega)$ 'nın ω değişkenine göre frekans seçicilik aralığı

$$a_1 \leq \omega \leq a_2$$

olsun.

$$\omega = f(\hat{\omega}) \quad ()$$

şeklinde bir dönüşüm fonksiyonu ile yeni bir $\hat{\omega}$ değişkeni tanımlayalım. Bu fonksiyona göre $a_1 \leq \omega \leq a_2$ aralığına $b_1 \leq \hat{\omega} \leq b_2$ aralığı karşı düşecektir. Öyleyse $H(j\omega)$ 'nın $a_1 \leq \omega \leq a_2$ aralığında aldığı değerleri

$$H(j\omega)_{\omega=f(\hat{\omega})} = H(jf(\hat{\omega}))$$

şeklinde elde edilen $H(jf(\hat{\omega}))$ $b_1 \leq \hat{\omega} \leq b_2$ aralığında alacaktır.

$$H(jf(\hat{\omega})) = \hat{H}(j\hat{\omega})$$

yazılabildiğinden

$$H(j\omega)_{\omega=f(\hat{\omega})} = \hat{H}(j\hat{\omega})$$

şeklinde elde edilen $\hat{H}(j\hat{\omega})$ fonksiyonu frekans seçicilik bölgesi $b_1 \leq \hat{\omega} \leq b_2$ olan yeni bir fonksiyon olmaktadır. $s = j\omega$ ve $\hat{s} = j\hat{\omega}$ bağıntılarını da göz önüne alarak

$$H(s)_{s=j\omega} = H(j\omega)_{\omega=f(\hat{\omega})} = H(jf(\hat{\omega})) = \hat{H}(j\hat{\omega})_{\hat{\omega}=\frac{\hat{s}}{j}} = \hat{H}(\hat{s}) \quad ()$$

elde edilir. () dönüşümü

$$\frac{s}{j} = f\left(\frac{\hat{s}}{j}\right) \text{ veya } s = jf\left(-j\hat{s}\right) = g(\hat{s})$$

şeklinde de yazılabilir. Bu dönüşümü kullanarak () eşitliği

$$H(s)_{s=g(\hat{s})} = \hat{H}(\hat{s})$$

şeklinde de yazılabilir.

ALÇAK GEÇİREN (AG)- ALÇAK GEÇİREN (AG) FREKANS DÖNÜŞÜMÜ

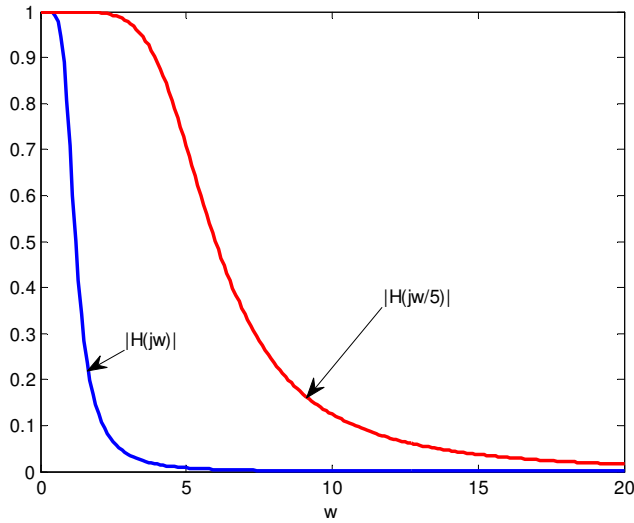
Bu dönüşümün işlevi frekans bölgesinin içindeki bir frekansı belli bir oranda değiştirmek yani belli bir sayı ile çarpmaktır. Bu ölçeklendirmede 0 ve $\pm\infty$ frekansları aynı kalır. Söz konusu işlev

$$\begin{array}{l} \omega = 0 \Rightarrow \hat{\omega} = 0 \\ \omega = \pm\infty \Rightarrow \hat{\omega} = \pm\infty \\ \omega = 1 \Rightarrow \hat{\omega} = \omega_c \end{array}$$

şeklinde özetlenebilir. AG-AG dönüşümü fonksiyon olarak

$$\omega = f(\hat{\omega}) = \frac{\hat{\omega}}{\omega_c}$$

şeklinde verilebilir. Demek ki, böyle bir dönüşümü uygulamak için $H(j\omega)$ 'da, ω yerine $\frac{\hat{\omega}}{\omega_c}$ koymak gerekir. Böylece $H(j\omega)$ 'dan $\hat{H}(j\hat{\omega})$ elde edilmiş olur. Şek. de $n=3$ için Butterworth karakteristiği $|H(j\omega)|$ ve $\omega_c = 5$ için $\left|H(j\frac{\omega}{\omega_c})\right|$ yani $\left|H(j\frac{\omega}{5})\right|$ çizdirilmiştir.



Şek.

s ve \hat{s} arasındaki dönüşüm

$$s = \frac{\hat{s}}{\omega_c}$$

şeklinde verilir.

Bu dönüşümü n inci dereceden AG Butterworth transfer fonksiyonuna uygulayalım. n inci deceden alçak geçiren Butterworth transfer fonksiyonunun

$$H_{LP}(s) = \frac{1}{B_n(s)}$$

şeklinde verildiğini gördük. Burada $B_n(s)$ n inci dereceden Butterworth polinomudur. Bu polinomda AG-AG frekans dönüşümü yapılırsa

$$B_n\left(\frac{\hat{s}}{\omega_0}\right) = \left(\frac{\hat{s}}{\omega_0}\right)^n + a_1\left(\frac{\hat{s}}{\omega_0}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1}\left(\frac{\hat{s}}{\omega_0}\right) + a_n =$$

$$= \frac{1}{\omega_0^n} (\hat{s}^n + a_1\omega_0 \hat{s}^{n-1} + a_2\omega_0^2 \hat{s}^{n-2} + \dots + a_{n-1}\omega_0^{n-1} \hat{s} + a_n\omega_0^n)$$

elde edilir. Öyleyse

$$H_{LP}\left(\frac{\hat{s}}{\omega_0}\right) = \frac{\omega_0^n}{\hat{s}^n + a_1\omega_0 \hat{s}^{n-1} + a_2\omega_0^2 \hat{s}^{n-2} + \dots + a_{n-1}\omega_0^{n-1} \hat{s} + a_n\omega_0^n} = \hat{H}_{LP}(\hat{s})$$

elde edilir.

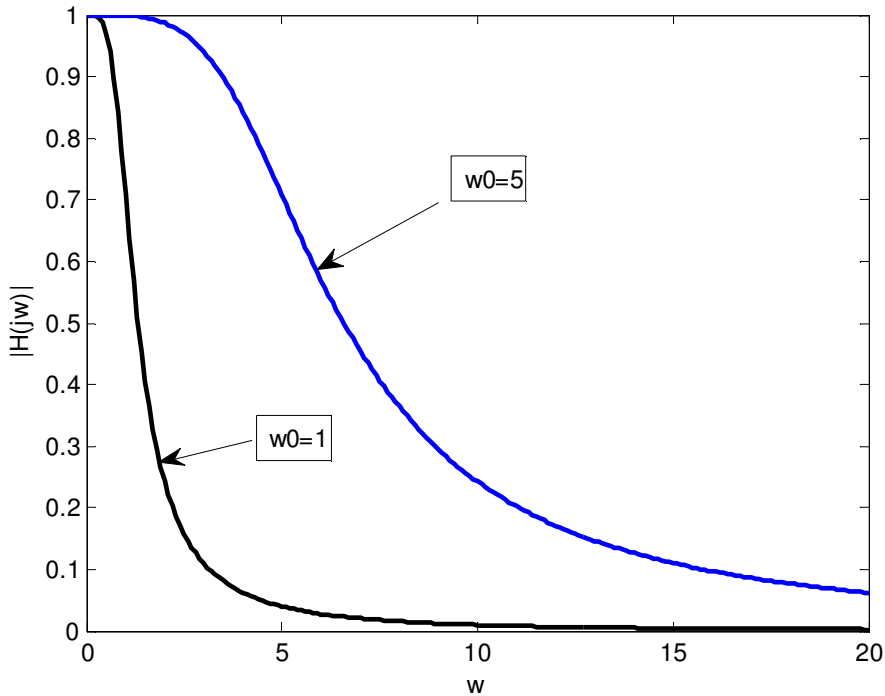
İkinci dereceden Butterworth polinomu bu dönüşümle

$$s^2 + 2\alpha_i s + 1 \Big|_{s=\frac{\hat{s}}{\omega_0}} = \frac{1}{\omega_0^2} (\hat{s}^2 + 2\alpha_i\omega_0 \hat{s} + \omega_0^2)$$

şekline dönüşür. İkinci dereceden transfer fonksiyonu ise

$$\hat{H}_i(\hat{s}) = \frac{\omega_0^2}{\hat{s}^2 + 2\alpha_i\omega_0 \hat{s} + \omega_0^2}$$

şeklini alır. Şek. de $\omega_0 = 1 \text{ r/s}$ ve $\omega_0 = 5 \text{ r/s}$ genlik karakteristikleri çizdirilmiştir.



ALÇAK GEÇİREN (AG)-YÜKSEK GEÇİREN (YG) FREKANS DÖNÜŞÜMÜ

Bu frekans dönüşümünün

$$\begin{aligned} \omega = 0^{\pm} &\Rightarrow \hat{\omega} = \mp\infty \\ \omega = \pm\infty &\Rightarrow \hat{\omega} = 0^{\mp} \end{aligned}$$

değerlerini sağlaması gerekir.

Böyle bir dönüşüm

$$\omega = f(\hat{\omega}) = \frac{1}{-\hat{\omega}}$$

şeklinde verilebilir. s ve \hat{s} arasındaki dönüşüm ise

$$\frac{s}{j} = \frac{1}{-\frac{\hat{s}}{j}}$$

den

$$s = \frac{1}{\hat{s}}$$

şeklinde bulunur.

n inci deceden alçak geçiren Butterworth transfer fonksiyonunun

$$H_{LP}(s) = \frac{1}{B_n(s)}$$

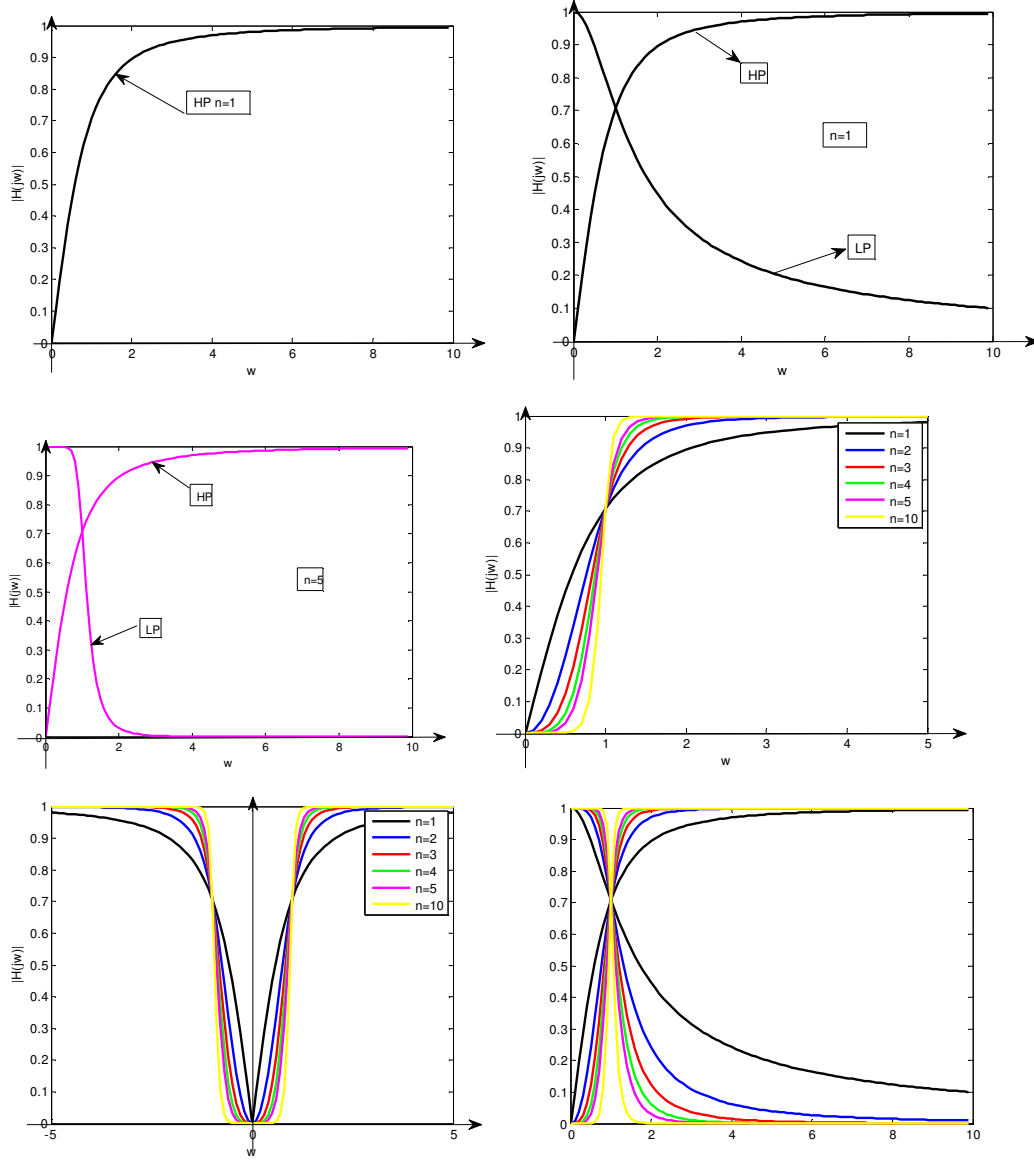
şeklinde verildiğini gördük. Burada $B_n(s)$ n inci dereceden Butterworth polinomudur. Bu polinomda AG-YG frekans dönüşümü yapılırsa katsayılarıdaki simetriden dolayı

$$B_n\left(\frac{1}{\hat{s}}\right) = \frac{B_n(\hat{s})}{\hat{s}^n}$$

elde edileceği açıktır. Öyleyse

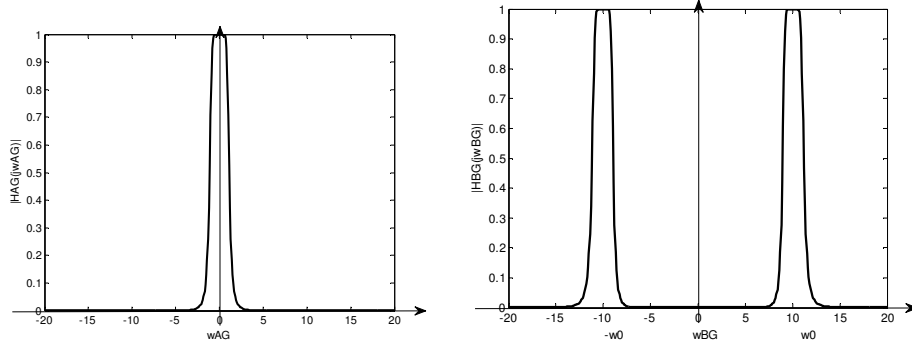
$$H_{LP}\left(\frac{1}{\hat{s}}\right) = \frac{1}{B_n\left(\frac{1}{\hat{s}}\right)} = \frac{\hat{s}^n}{B_n(\hat{s})} = H_{HP}(\hat{s})$$

elde edilir. Şek. de $n=1$ için YG genlik frekans karakteristiği; Şek. de $n=1$ için, Şek. de ise $n=5$ için AG ve YG Butterworth genlik frekans karakteristikleri verilmiştir. Şek. de çeşitli n değerleri için YG Butterworth genlik frekans karakteristikleri verilmiştir.



ALÇAK GEÇİREN (AG)-BANT GEÇİREN (BG) FREKANS DÖNÜŞÜMÜ

Şek. de AG Şek. de ise BG genlik frekans karakteristikleri verilmiştir. Karakteristiklerdeki frekansların



Şek.

$$\omega_{AG} = \omega \text{ ve } \omega_{BG} = \hat{\omega}$$

olduğu göz önüne alınarak ve Şek. deki frekans karakteristiklerinin karşılaştırılırsa AG-BG frekans dönüşümünün

$$\begin{aligned} \omega = 0 &\Rightarrow \hat{\omega} = \pm \omega_0 \\ \omega = -\infty &\Rightarrow \hat{\omega} = 0^+ \\ \omega = 0^+ &\Rightarrow \hat{\omega} = 0^- \\ \omega = +\infty &\Rightarrow \hat{\omega} = +\infty \\ \omega = -\infty &\Rightarrow \hat{\omega} = -\infty \\ \omega > 0 &\Rightarrow \hat{\omega} > \omega_0 \text{ ve } -\omega_0 > \hat{\omega} > 0 \\ \omega < 0 &\Rightarrow \hat{\omega} < -\omega_0 \text{ ve } 0 < \hat{\omega} < \omega_0 \end{aligned}$$

değerlerini sağlaması gerektiği kolayca görülür. Bu değerlerden böyle bir dönüşümün

$$\omega = f(\hat{\omega}) = \frac{\hat{\omega}^2 - \omega_0^2}{\hat{\omega}}$$

şeklinde verilebileceği görülebilir. Bu dönüşüm $K > 0$ olmak üzere

$$\omega = f(\hat{\omega}) = K \frac{\hat{\omega}^2 - \omega_0^2}{\hat{\omega}}$$

şeklinde de verilebilir. Şimdi bu dönüşüme göre ω_1 ve $-\omega_1$ frekanslarına sırasıyla $\hat{\omega}_1$ ve $\hat{\omega}_2$ frekanslarının karşılıştığını varsayalım. Öyleyse

$$\omega_1 = K \frac{\hat{\omega}_1^2 - \omega_0^2}{\hat{\omega}_1} \text{ ve } -\omega_1 = K \frac{\hat{\omega}_2^2 - \omega_0^2}{\hat{\omega}_2} \quad ()$$

yazabiliriz. Bu denklemlerden

$$\frac{\hat{\omega}_1^2 - \omega_0^2}{\hat{\omega}_1} = -\frac{\hat{\omega}_2^2 - \omega_0^2}{\hat{\omega}_2}$$

$$\hat{\omega}_1^2 \hat{\omega}_2 - \omega_0^2 \hat{\omega}_2 = -(\hat{\omega}_1 \hat{\omega}_2^2 - \omega_0^2 \hat{\omega}_1)$$

elde edilir. Bu denklem

$$\hat{\omega}_1 \hat{\omega}_2 (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2) = \omega_0^2 (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2)$$

şeklinde yazılarak buradan

$$\omega_0^2 = \hat{\omega}_1 \hat{\omega}_2$$

bulunur. Şimdi bu eşitlik () de yerine koyularak

$$K = \frac{\omega_1}{\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2}$$

bulunur. Bant geçiren süzgecin bant genişliğini $\Delta\hat{\omega}$ ile gösterirsek

$$\Delta\hat{\omega} = \hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2$$

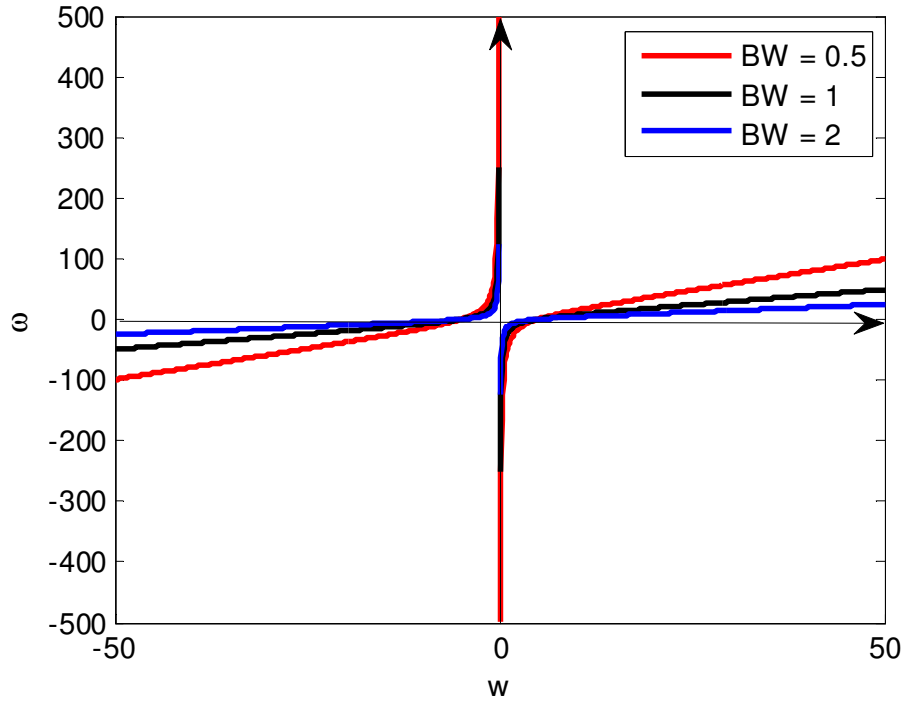
ve

$$K = \frac{\omega_1}{\Delta\hat{\omega}}$$

bulunur. Bu eşitlik () de yerine koyularak

$$\omega = \frac{\omega_1}{\Delta\hat{\omega}} \frac{\hat{\omega}^2 - \omega_0^2}{\hat{\omega}} \quad ()$$

elde edilir. $\omega_1 = 1 \text{ r/s}$ alınarak bu fonksiyon $BW = \Delta\hat{\omega}$ 'nın üç değişik değeri Şek. de



çizilmiştir.

Alçak geçiren süzgeç transfer fonksiyonu normalize transfer fonksiyonu ise $\omega_1 = 1 \text{ r/s}$ olduğundan dönüşüm

$$\omega = \frac{1}{\Delta\hat{\omega}} \frac{\hat{\omega}^2 - \omega_0^2}{\hat{\omega}}$$

şeklini alır. $\omega_1 = 1 \text{ r/s}$ ve $\Delta\hat{\omega} = 1 \text{ r/s}$ ise dönüşüm

$$\omega = \frac{\hat{\omega}^2 - \omega_0^2}{\hat{\omega}}$$

şeklini alır.

Tekrar genel duruma geri dönülürse () eşitliğinde $\omega = \frac{s}{j}$, $\hat{\omega} = \frac{\hat{s}}{j}$ yazılarak s ve \hat{s} arasındaki dönüşüm

$$s = \frac{\omega_1}{\Delta \hat{\omega}} \frac{\hat{s}^2 + \omega_0^2}{\hat{s}}$$

şeklinde elde edilir. Burada

- ω_1 , AG süzgecin herhangi bir frekansı olduğuna göre $|H_{AG}(j\omega)|$ çift fonksiyon olduğundan $\omega = \omega_1$ ve $\omega = -\omega_1$ için $|H_{AG}(-j\omega_1)| = |H_{AG}(j\omega_1)|$;
- $\hat{\omega}_1$ ve $\hat{\omega}_2$

$$\omega = \frac{\omega_1}{\Delta \hat{\omega}} \frac{\hat{\omega}^2 - \omega_0^2}{\hat{\omega}}$$

dönüşümü ile $-\omega_1$ ve ω_1 'e karşılığın. Bunun sonucunda

$$|H_{BG}(j\hat{\omega}_1)| = |H_{BG}(j\hat{\omega}_2)| = |H_{AG}(j\omega_1)| = |H_{AG}(-j\omega_1)|; \text{ ve}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\hat{\omega}_1 \hat{\omega}_2} \text{ ve } \Delta \hat{\omega} = \hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2$$

elde edilir. $\omega_1 = 1/r$ alınırsa

$$\omega = \frac{1}{\Delta \hat{\omega}} \frac{\hat{\omega}^2 - \omega_0^2}{\hat{\omega}}$$

bulunur. Burada $\omega = 1/r$ alınırsa

$$\hat{\omega}^2 - \Delta \hat{\omega} \hat{\omega} - \omega_0^2 = 0$$

bulunur. Bu denklemin kökleri

$$\hat{\omega}_{1,2} = \frac{\Delta \hat{\omega}}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta \hat{\omega}^2}{4} + \omega_0^2}$$

Bu iki değerden pozitif değerli olan

$$\hat{\omega}_1 = \frac{\Delta \hat{\omega}}{2} + \sqrt{\frac{\Delta \hat{\omega}^2}{4} + \omega_0^2}$$

alınabilir. Öte yandan $\omega = -1/r$ alınırsa

$$\hat{\omega}^2 + \Delta \hat{\omega} \hat{\omega} - \omega_0^2 = 0$$

bulunur. Bu denklemin kökleri

$$\hat{\omega}_{1,2} = -\frac{\Delta \hat{\omega}}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta \hat{\omega}^2}{4} + \omega_0^2}$$

Bu iki değerden pozitif değerli olan

$$\hat{\omega}_2 = -\frac{\Delta\hat{\omega}}{2} + \sqrt{\frac{\Delta\hat{\omega}^2}{4} + \omega_0^2}$$

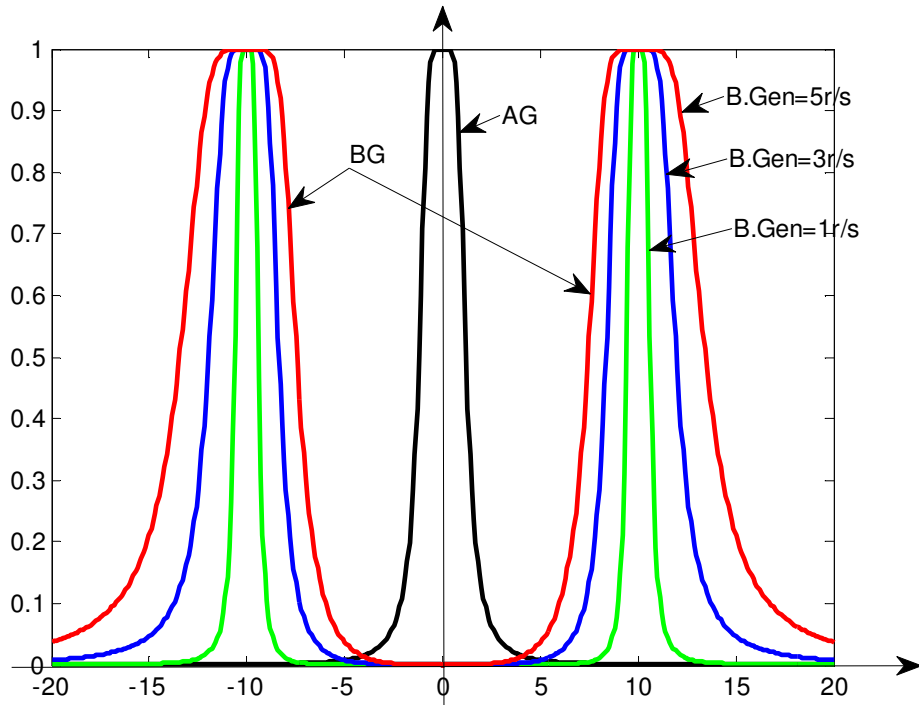
alınabilir.

- s AG süzgecin transfer fonksiyonu $H_{LP}(s)$ 'in Laplace değişkenidir.
- \hat{s} BG süzgecin transfer fonksiyonu $H_{BG}(s)$ 'in Laplace değişkenidir.

Şek. de 3. dereceden normalize ($\omega_1 = 1 \text{ r/s}$) AG Butterworth transfer fonksiyonuna sırasıyla

$$S = \frac{\hat{s}^2 + 10^2}{\hat{s}}, \quad S = \frac{1}{3} \frac{\hat{s}^2 + 10^2}{\hat{s}}, \quad S = \frac{1}{5} \frac{\hat{s}^2 + 10^2}{\hat{s}}$$

dönüşümleri uygulanarak elde edilen merkez frekansı $\omega_0 = 10 \text{ r/s}$, bant genişliği sırasıyla $\Delta\hat{\omega}=1 \text{ r/s}$, 3 r/s ve 5 r/s olan üç band geçiren süzgecin ve AG Butterworth sügecin genlik frekans karakteristikleri birlikte verilmiştir.



Şek.

ALÇAK GEÇİREN (AG)-BANT SÖNDÜREN (BS) FREKANS DÖNÜŞÜMÜ

Bu frekans dönüşümü AG-BG dönüşümünün ters özelliklerine sahip olacaktır. Dolayısıyla böyle bir dönüşüm

$$\omega = f(w) = K \frac{w}{w^2 - w_0^2} \quad ()$$

şeklinde verilebilir. $w = w_1$ ve $w = -w_1$ koyularak

$$\omega_1 = K \frac{w_1}{w_1^2 - w_0^2} \quad ()$$

ve

$$-\omega_1 = K \frac{w_2}{w_2^2 - w_0^2}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{w_1}{w_1^2 - w_0^2} = -\frac{w_2}{w_2^2 - w_0^2}$$

ve

$$\omega_0^2 = w_1 w_2$$

bulunur. Bu eşitlik () yerine koyularak

$$K = \omega_1 (w_1 - w_2)$$

elde edilir.

$$w_1 - w_2 = \Delta w$$

olarak tanımlanırsa

$$K = \omega_1 \Delta w$$

Bu eşitlik () de yerine koyularak

$$\omega = \frac{\omega_1 w}{w^2 - w_0^2} \Delta w$$

Alçak geçiren süzgeç transfer fonksiyonu normalize transfer fonksiyonu ise

$$\omega_1 = 1 r / s$$

olduğundan dönüşüm

$$\omega = \frac{w}{w^2 - w_0^2} \Delta w$$

şeklini alır. $\omega_1 = 1 r/s$ ve $\Delta\omega = 1 r/s$ alınırsa

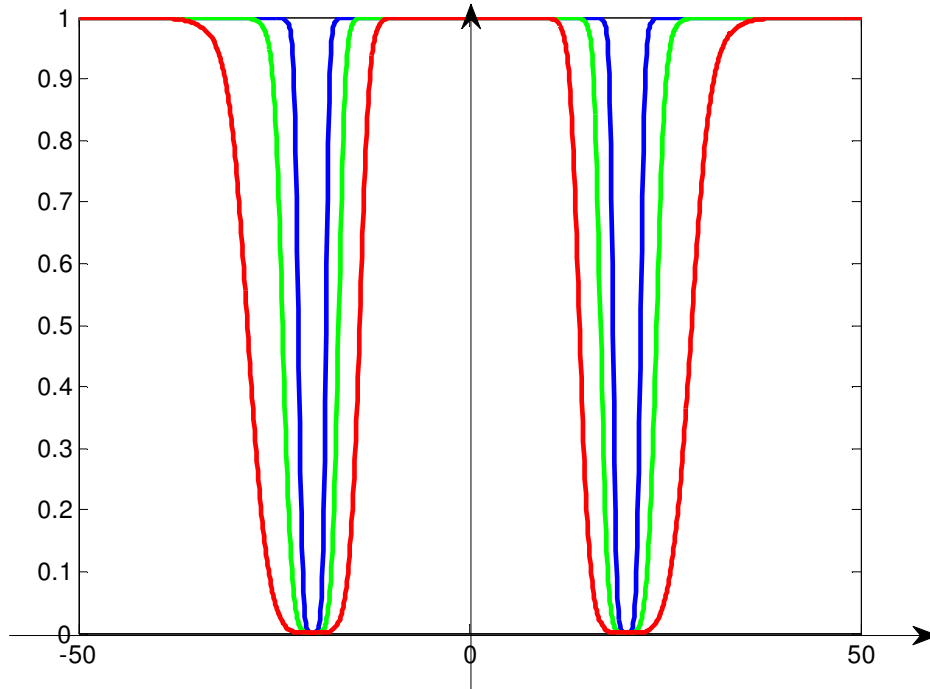
$$\omega = \frac{w}{w^2 - w_0^2}$$

elde edilir.

Tekrar genel duruma geri dönülürse () eşitliğinde $\omega = \frac{s}{j}$, $\hat{\omega} = \frac{\hat{s}}{j}$ yazılarak s ve \hat{s} arasındaki dönüşüm

$$s = \omega_1 \Delta\omega \frac{\hat{s}}{\hat{s}^2 + \hat{\omega}_0^2}$$

şeklinde verilir. Şek. de merkez frekansı $\omega_0 = 20 r/s$, bant genişliği sırasıyla $\Delta\hat{\omega} = 4 r/s$, $8 r/s$ ve $16 r/s$ olan üç süzgecin genlik frekans karakteristikleri verilmiştir.



Örnek:

Aşağıda verilen frekans özelliklerini sağlayan bir bant söndüren süzgeç tasarlanacaktır.

- $\hat{\omega}_2 = 1000 \text{ rad/s}$ ve $\hat{\omega}_1 = 3000 \text{ rad/s}$ frekanslarındaki zayıflatması 3 dB.
- $\hat{\omega}_4 = 1500 \text{ rad/s}$ ile $\hat{\omega}_3 = 2000 \text{ rad/s}$ frekansları arasındaki zayıflatması en az 30 dB;

- (a) Bant söndüren süzgecin transfer fonksiyonunun alçak geçiren normalize Butterworth transfer fonksiyonundan (AGNBTF) AG-BS dönüşümü ile elde edildiği varsayıldığına göre verilen özellikleri AGNBTF'nun derecesi n 'yi,

$n=1-10$ değerleri için AGNBTF'nun Şek. de verilen $\alpha(\omega)$ zayıflatma eğrilerini kullanarak belirleyiniz. Bulduğunuz n değerine karşılık gelen AGNBTF'ü yazınız.

(b) AG-BS dönüşümü AGNBTF'na uygulayarak istenilen BS süzgecin transfer fonksiyonunu elde ediniz.

(c) $|H_{BS}(j0)|, |H_{BS}(j2000)|, |H_{BS}(j3200)|, |H_{BS}(j4000)|, |H_{BS}(j5000)|, |H_{BS}(j8000)|, |H_{BS}(j\infty)|$ değerlerini kullanarak $|H_{BS}(j\omega)|$ 'yi kabaca çiziniz.

Çözüm:

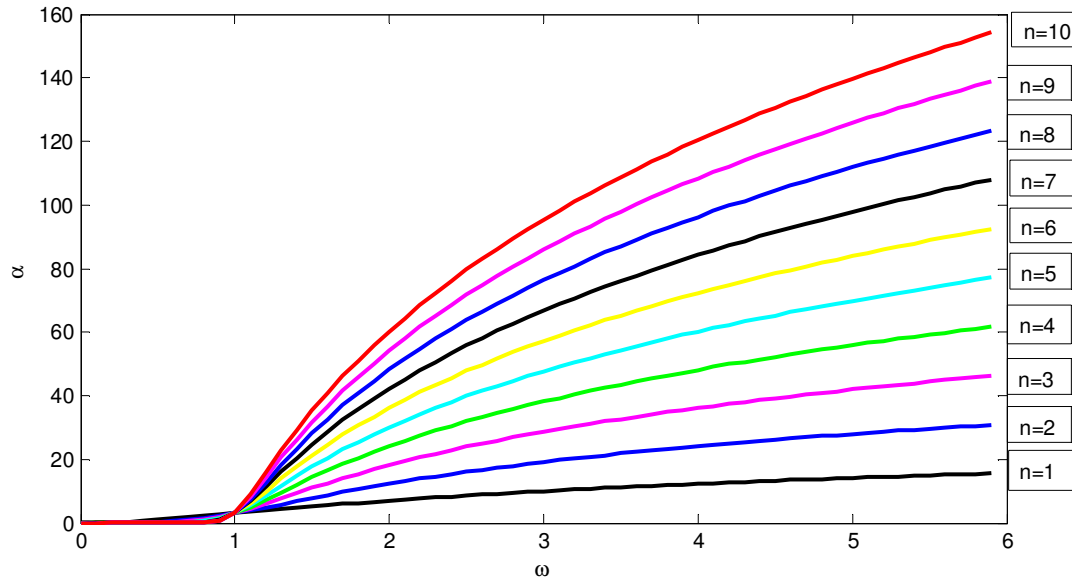
BS süzgecin bant genişliği:

$$\Delta\hat{\omega} = \hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2 = 3000 - 1000 = 2000 \text{ } r / s$$

BS süzgecin $\hat{\omega}_3$ frekansına AGNBTF da karşılık gelen frekans:

$$\omega_3 = \frac{\Delta\hat{\omega}}{\hat{\omega}_3^2 - \hat{\omega}_0^2} \hat{\omega}_3 = \frac{2000}{2000^2 - 1000 \times 3000} 2000 = 4 \text{ } r / s$$

Şek. deki zayıflatma eğrilerinden $n=3$ bulunur.



3. dereceden AGNBTF

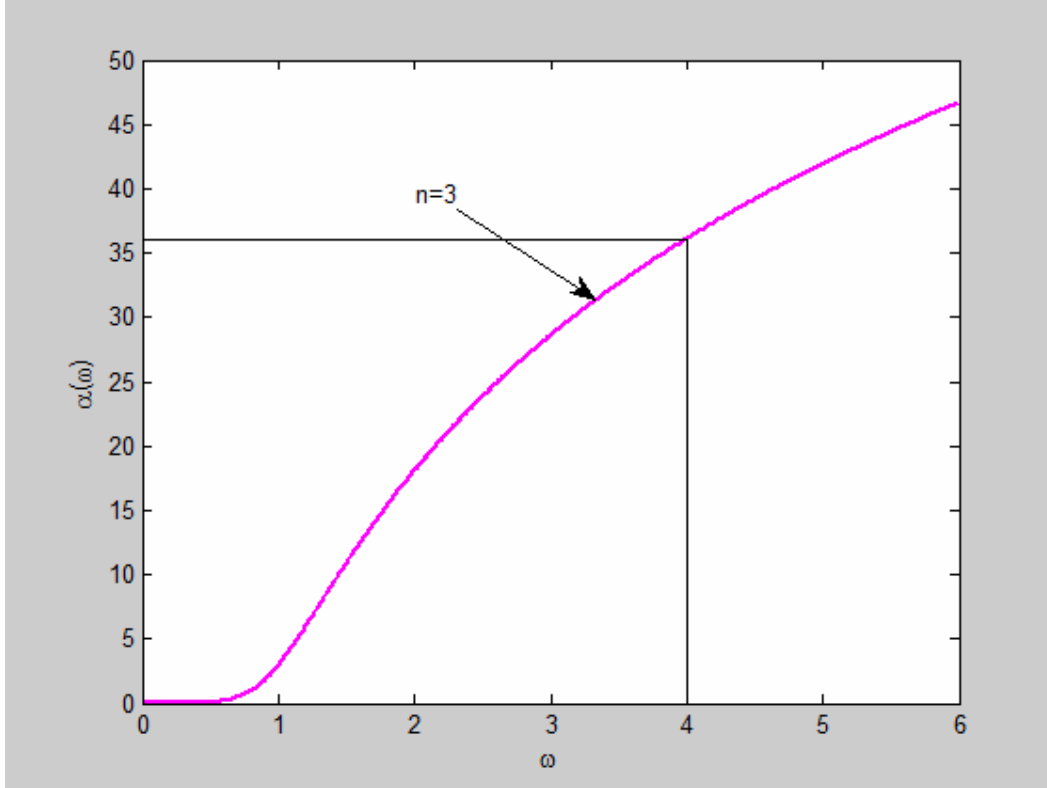
$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

şeklindedir. Şimdi $\alpha(\omega) = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$ 'yi çizelim. Bu eğrinin üstünde bir kez daha $\omega = 4 \text{ } r / s$ için $\alpha(4) \cong 36 \text{ dB}$ olduğunu görebiliriz. Şimdi de $H(s)$ 'de

$$s = \Delta\omega \frac{\hat{s}}{\hat{s}^2 + \hat{\omega}_0^2}$$

ve $\hat{s} = j\hat{\omega}$ koyularak; yani $s = \Delta\omega \frac{j\hat{\omega}}{\hat{s}^2 + \hat{\omega}_0^2}$

$$H(s) \Big|_{s=\Delta\omega \frac{\hat{s}}{\hat{s}^2 + \hat{\omega}_0^2}} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \Big|_{s=\Delta\omega \frac{\hat{s}}{\hat{s}^2 + \hat{\omega}_0^2}}$$



$$H(s)$$

ve

$$\hat{s} = j\hat{\omega}$$

koyularak

Örnek:

Aşağıda verilen frekans özelliklerini sağlayan bir bant söndüren süzgeç için yukarıdaki örnekte yapılanları tekrarlayınız.

- $\hat{\omega}_2 = 2000 \text{ rad/s}$ ve $\hat{\omega}_1 = 8000 \text{ rad/s}$ frekanslarındaki zayıflatması 3 dB.
- $\hat{\omega}_4 = 3200 \text{ rad/s}$ ile $\hat{\omega}_3 = 5000 \text{ rad/s}$ frekansları arasındaki zayıflatması en az 20 dB

Çözüm:

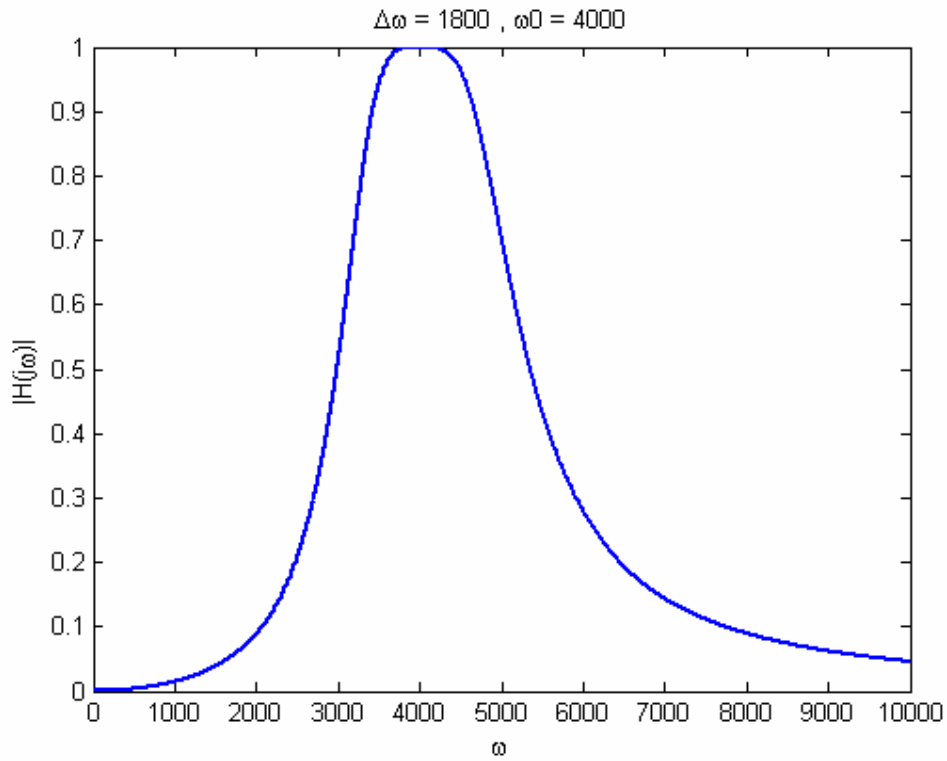
BS süzgecin bant genişliği:

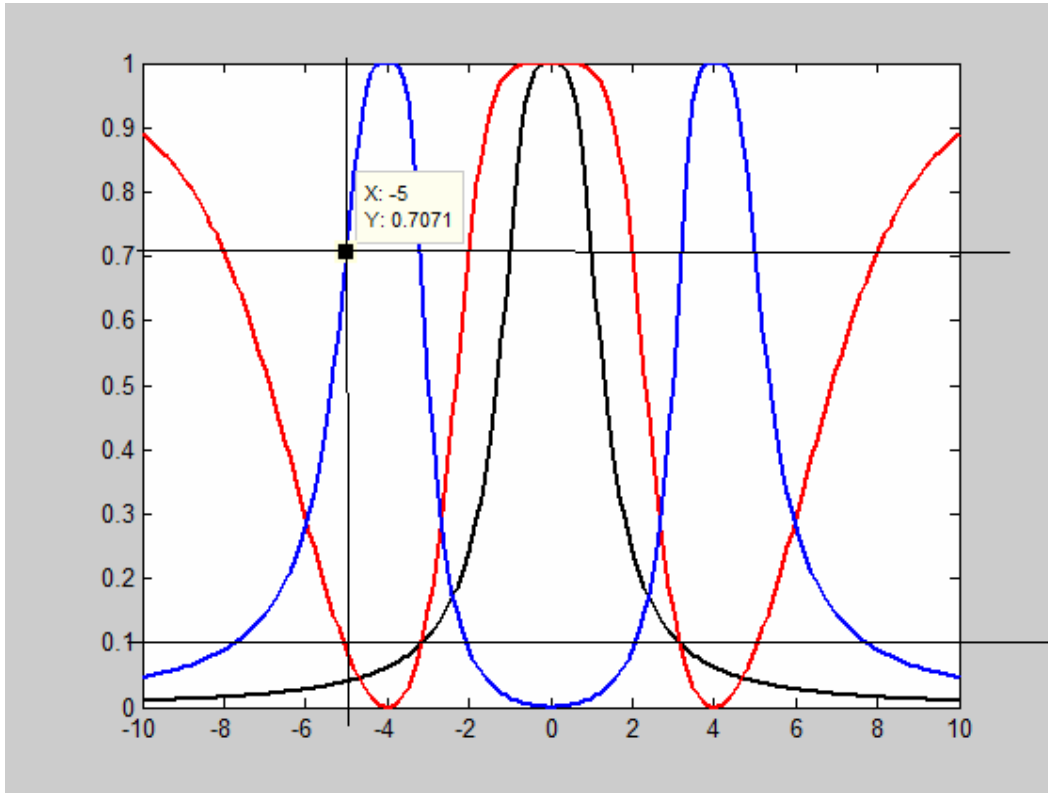
$$\Delta \hat{\omega} = \hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2 = 8000 - 2000 = 6000 \text{ } r / s$$

BS süzgecin $\hat{\omega}_3$ frekansına AGNBTF da karşılık gelen frekans:

$$\omega_3 = \frac{\Delta \hat{\omega}}{\hat{\omega}_3^2 - \omega_0^2} \hat{\omega}_3 = \frac{6000}{5000^2 - 2000 \times 8000} 5000 = 3,3 \text{ } r / s$$

Zayıflatma eğrilerinden $n=2$ bulunur.





İKİNCİ DERECE DEN DEVRE FONKSİYONLARI

İkinci derece polinomlarından her hangi birinin sıfırlarını

$$p = -\alpha \pm j\beta; \quad \alpha, \beta > 0$$

ile gösterirsek ikinci dereceden polinom

$$\begin{aligned} D(s) &= (s - p)(s - \bar{p}_i) = (s - (-\alpha - j\beta))(s - (-\alpha + j\beta)) \\ &= (s + \alpha + j\beta)(s + \alpha - j\beta) = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned}$$

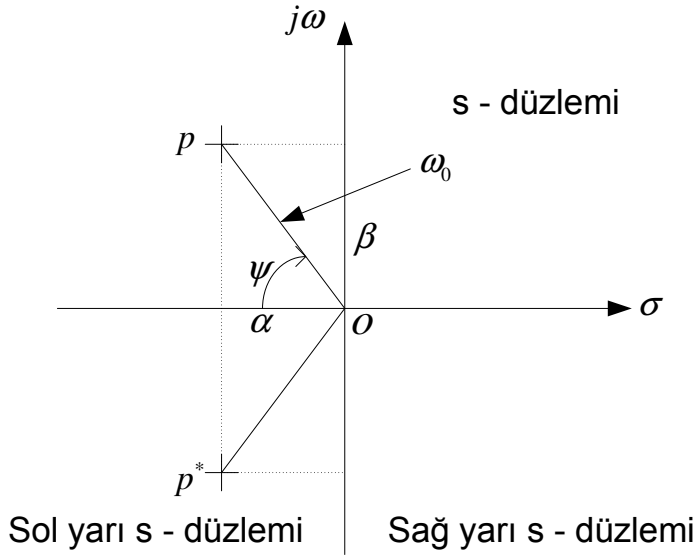
şeklinde yazılabilir. Bu polinomun kökleri

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

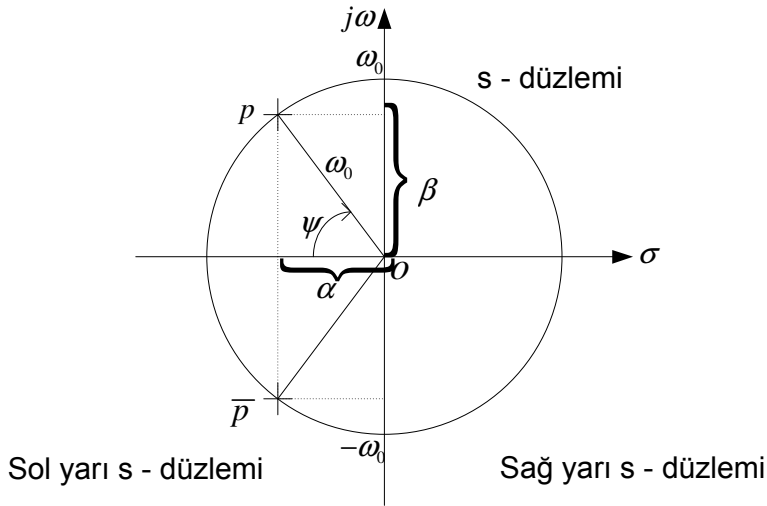
şeklinde tanımlayalım.

$$\alpha = \omega_0 \cos \psi$$

olduğundan



Şek.



$$D(s) = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2 = s^2 + 2\omega_0 \cos \psi s + \omega_0^2 = s^2 + \frac{\omega_0}{\frac{1}{2 \cos \psi}} s + \omega_0^2$$

yazılabilir. Burada

$$Q = \frac{1}{2 \cos \psi}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$D(s) = s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2$$

elde edilir. Demek ki, burada yapılan α, β çiftine, Q, ω_0 çiftini karşı düşürmektir. Öte yandan

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{ve} \quad \beta = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

İKİNCİ DERECEDEN AG,YG,BG,BS,TG (LP,HP,BP,BS,AP) FONKSİYONLAR

$$H_{AG}(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

$$H_{YG}(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

$$H_{BG}(s) = \frac{\frac{\omega_0}{Q}s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

$$H_{BS}(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

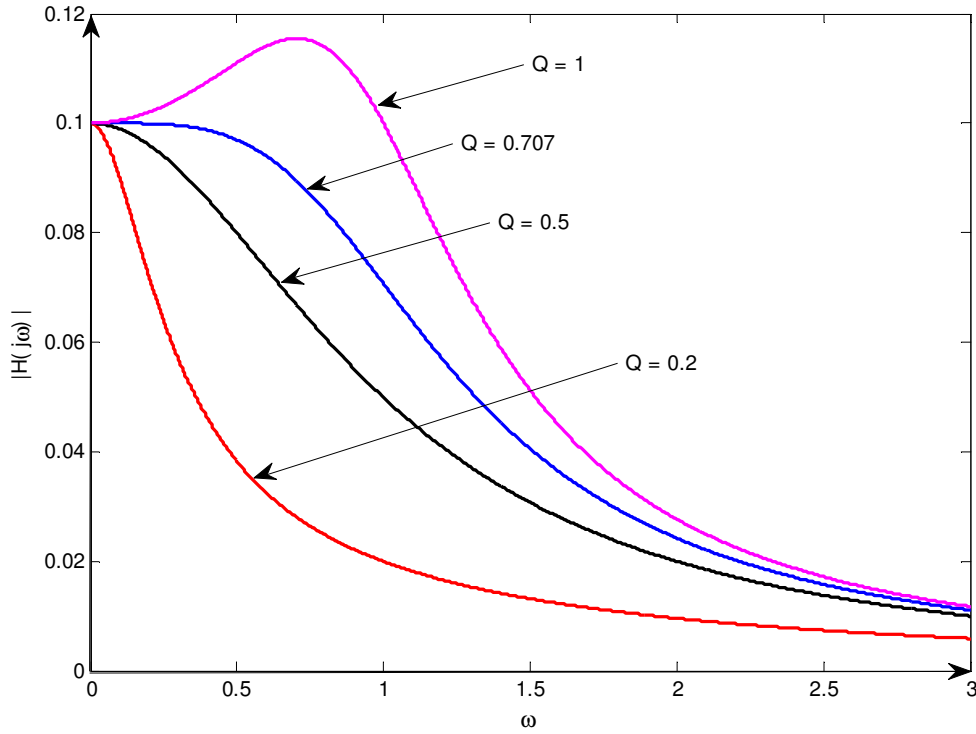
$$H_{TG}(s) = \frac{s^2 - \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

YÜKSEK GEÇİREN TRANSFER FONKSİYONU

İkinci dereceden transfer fonksiyonu

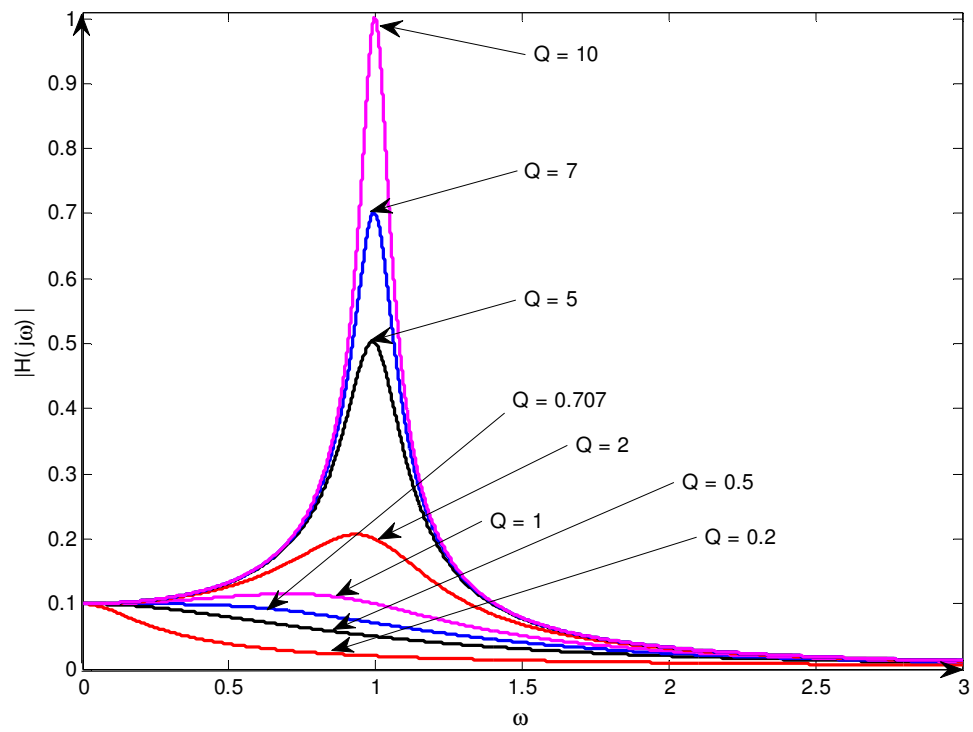
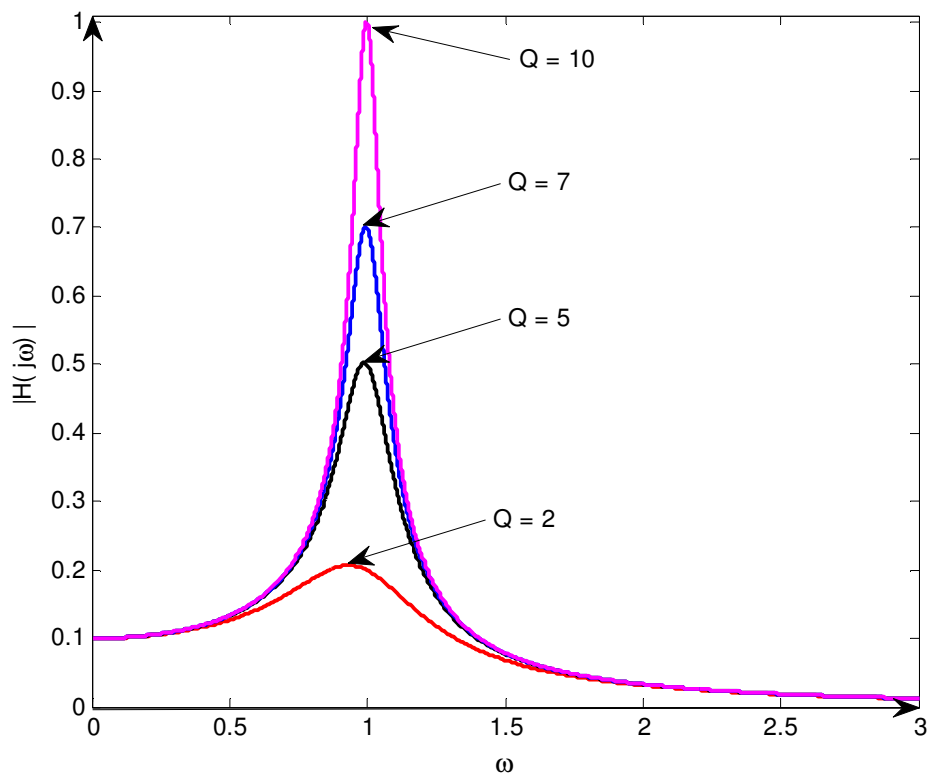
$$H_{AG}(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

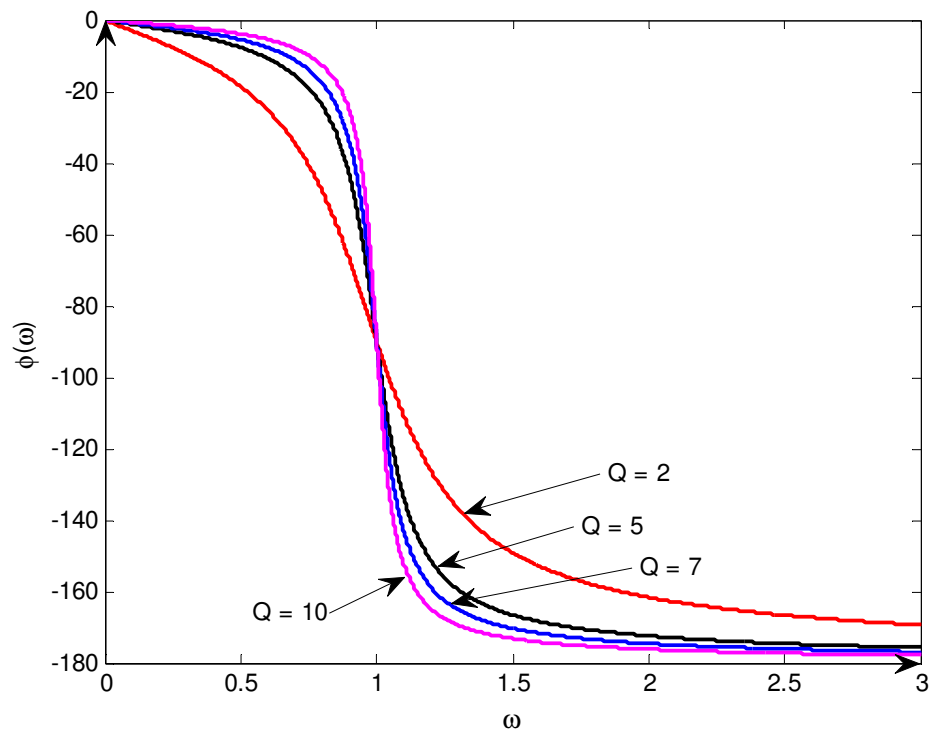
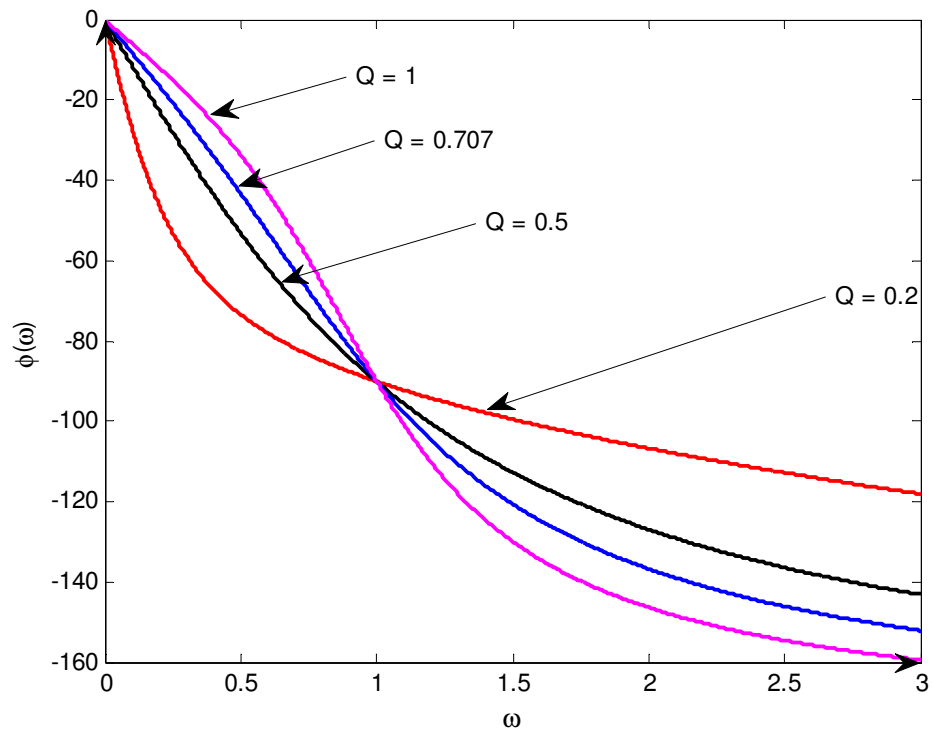
şeklinde olduğu zaman Q parametresinin değerine bağlı olmak üzere **Yüksek Geçiren Transfer Fonksiyonu** olarak kullanılabilir.



GENLİK KARAKTERİSTİĞİ

() ile verilen transfer fonksiyonunun genlik karakteristikleri çeşitli değerleri için Şek. de çizilmiştir. Bu karakteristiklerden görüldüğü üzere Q parametresinin büyük değerleri için bu transfer fonksiyonu bant-geçiren transfer fonksiyonu haline gelmektedir. Yalnız burada dikkat edilmesi gereken husus bu tür karakteristiğin sıfır frekansında ($\omega=0$)sıfır değerli olamayacağıdır. Yani bu tür transfer fonksiyonuna sahip olan süzgeçler işaretteki DC bileşenini de geçirirler





YÜKSEK GEÇİREN TRANSFER FONKSİYONU

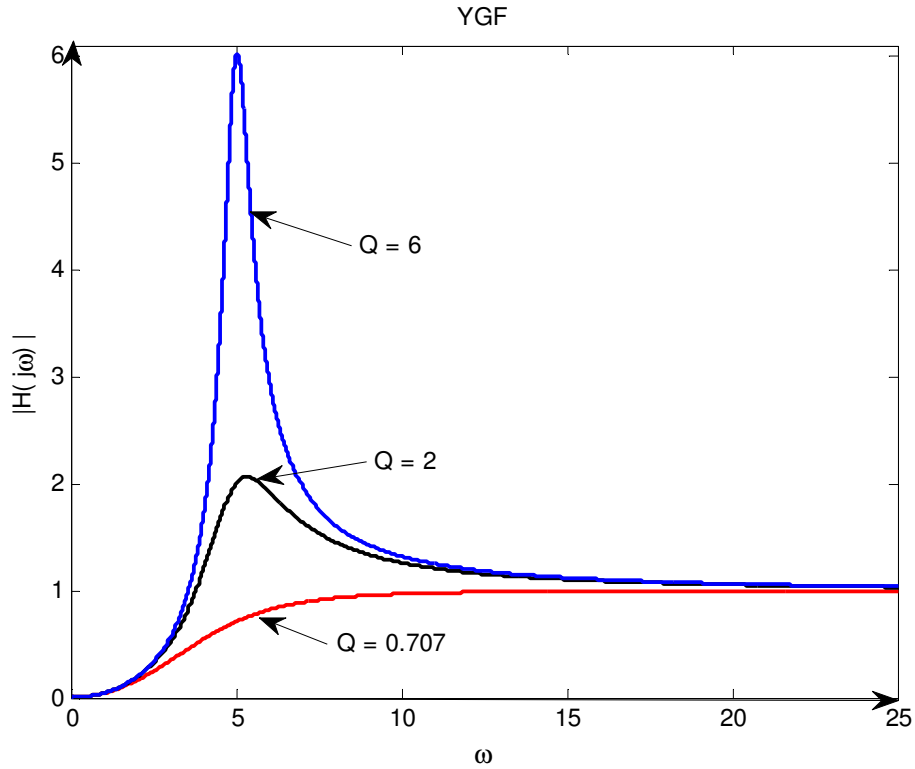
İkinci dereceden transfer fonksiyonu

$$H_{YG}(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad ()$$

şeklinde olduğu zaman Q parametresinin değerine bağlı olmak üzere *Yüksek Geçiren Transfer Fonksiyonu* olarak kullanılabilir.

GENLİK KARAKTERİSTİĞİ

() ile verilen transfer fonksiyonunun genlik karakteristikleri çeşitli değerleri için Şek. de çizilmiştir. Bu karakteristiklerden görüldüğü üzere Q parametresinin büyük değerleri için bu transfer fonksiyonu bant-geçiren transfer fonksiyonu haline gelmektedir. Yalnız burada dikkat edilmesi gereken husus bu tür karakteristiğin sonsuz frekansında ($\omega = \infty$)sıfır değerli olamayacağıdır.



BAND GEÇİREN TRANSFER FONKSİYONU

İkinci dereceden *Bant Geçiren Transfer Fonksiyonu*

$$H_{BG}(s) = \frac{\frac{\omega_0}{Q}s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

şeklindedir.

Bu transfer fonksiyonlarının verdiği frekans karakteristiklerini hesaplayalım.

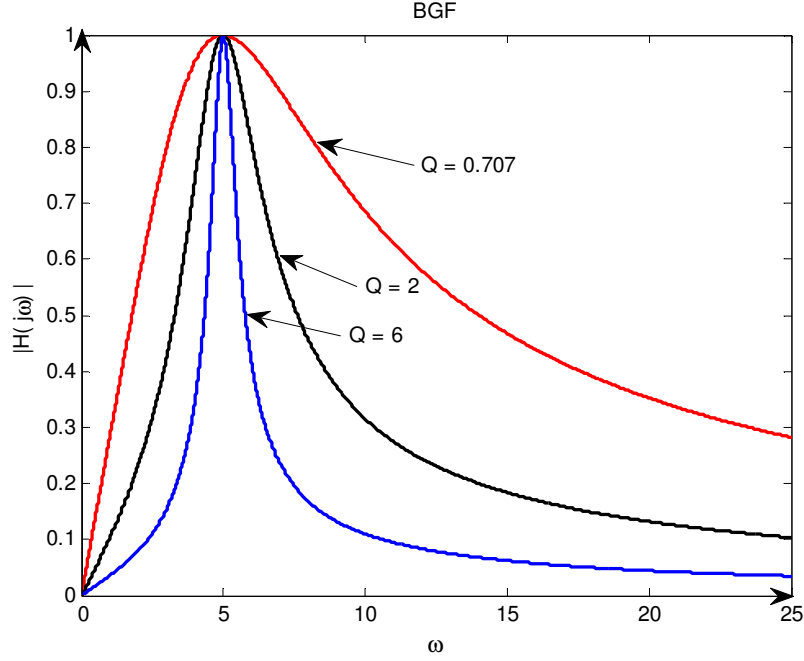
GENİK KARAKTERİSTİĞİ

$$H_{BG}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega_0}{Q}\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega}$$

Pay ve payda $j\frac{\omega_0}{Q}\omega$ ile bölünerek

$$H_{BG}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{Q}{\omega_0\omega}(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{1}{1 - jQ\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$
$$|H_{BG}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

For $\omega_0 = 5 \text{ r / s}$



Şek.

Şek. den görüldüğü üzere bu tür karakteristiğin sıfır frekansında ($\omega=0$) sıfır değerli olduğudur. Yani bu tür transer fonksiyonuna sahip olan süzgeçler işaretteki DC bileşenini geçirmezler. () ile verilen transfer fonksiyonundan bu fonksiyonun bant geçiren süzgeç bakımından en önemli farkı budur.

BANDGEÇİREN SÜZGEÇİN BAND GENİŞLİĞİ

$|H_{BG}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ için $Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 1$ olmalıdır. Buradan $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \pm \frac{1}{Q}$ ve

$$\omega^2 \mp \frac{\omega_0}{Q} \omega - \omega_0^2 = 0$$

Bu denklemin dört çözümü vardır ve

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left(\pm \frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2Q} \right)^2 + 1} \right)$$

şeklinde elde edilir. Bunlardan pozitif değerli olan iki tanesidir ve bunlar

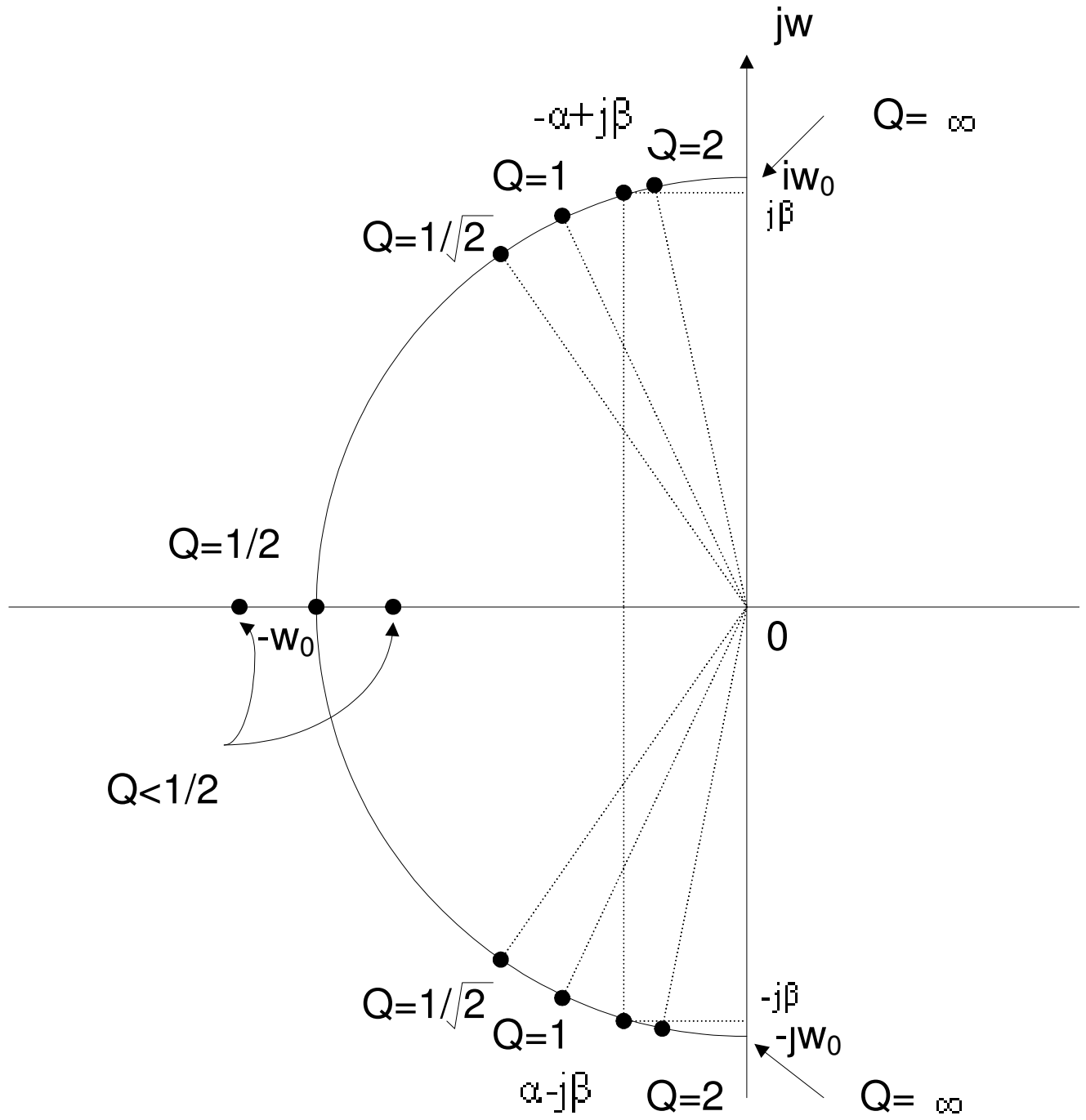
$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left(\pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q} \right)^2 + 1} \right)$$

Bu değerlerden

$$\boxed{\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2} \quad , \quad \boxed{\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{\omega_0}{Q}} \quad \text{ve} \quad \boxed{\frac{\Delta \omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}}$$

Burada ω_0 *Merkez Frekansı*, $\Delta\omega$ $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ *3-dB Bant Genişliği*, $\boxed{\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}}$ ise *Bağıl (relatif) Bant Genişliği*dir.

Şimdi de, ω_0 'ı sabit tutarak Q ' nun değiştirilmesi durumunda $H(s)$ ' in kutuplarının s-düzleminde nerelerde bulunacağını görelim. Şek. den görüleceği üzere Q büyüdükçe β, ω_0 yaklaşmakta dolayısıyla



öz çözümün titreşim frekansı, ω_0 merkez frekansına yaklaşmaktadır. $Q < \frac{1}{2}$ değerleri ise reel kutuplara karşı düşmektedir.

FAZ KARAKTERİSTİĞİ

$H_{BG}(j\omega)$ karmaşık sayısının açısı olan

$$\varphi_{BG}(\omega) = \angle H_{BG}(j\omega) = \arctan \frac{\text{Im}\{H_{BG}(j\omega)\}}{\text{Re}\{H_{BG}(j\omega)\}}$$

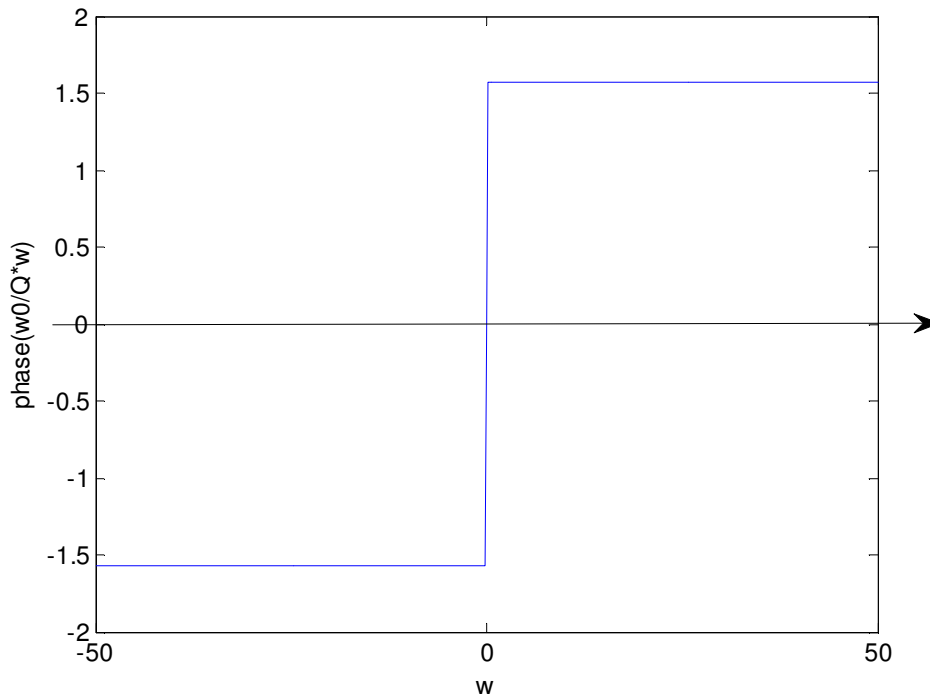
büyükliğünün ω 'ya göre değişimine **Faz Karakteristiği** dendiğini biliyoruz. () ile verilen bant geçiren transfer fonksiyonu için bu fonksiyon

$$\varphi_{BG}(\omega) = \angle H_{BG}(j\omega) = \angle \left(j \frac{\omega_0}{Q} \omega \right) - \angle (\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0}{Q} \omega)$$

şeklinde hesaplanır. Şimdi bu fonksiyonun pay ve paydasını ayrı ayrı ele alalım. Payı için

$$\angle \left(j \frac{\omega_0}{Q} \omega \right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{for } \omega \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{for } \omega \leq 0 \end{cases},$$

yazabiliriz. Bunun ω 'ya göre değişimi Şek. deki gibidir.

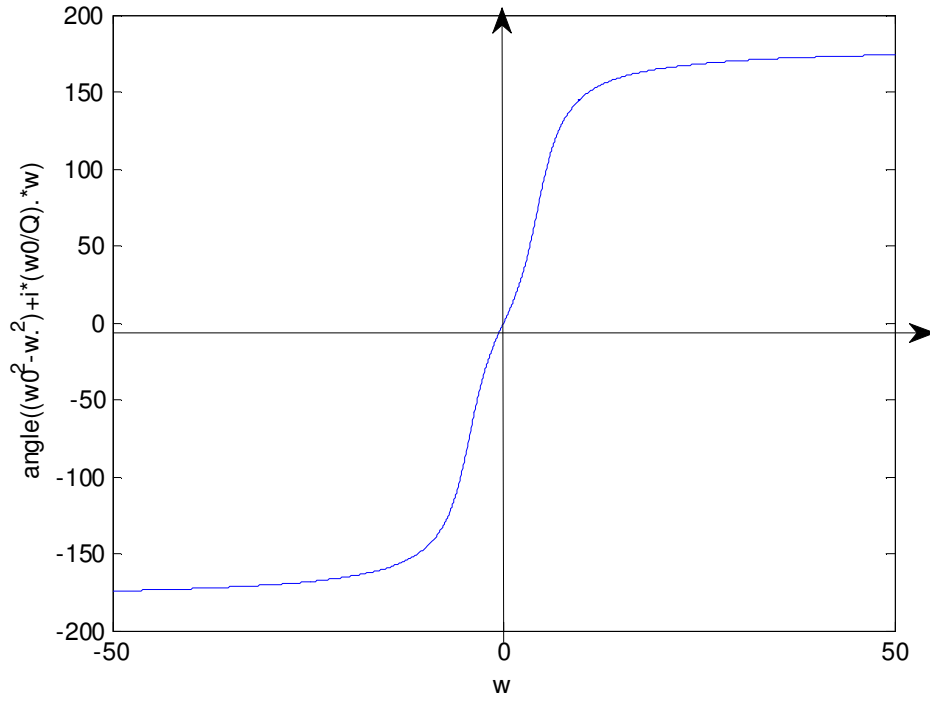


Şek.

paydası için ise

$$\angle (\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0}{Q} \omega) = \arctan \frac{\frac{\omega_0}{Q} \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

yazılabilir. Bu ifadenin ω 'ya göre değişimi Şek. deki gibidir.

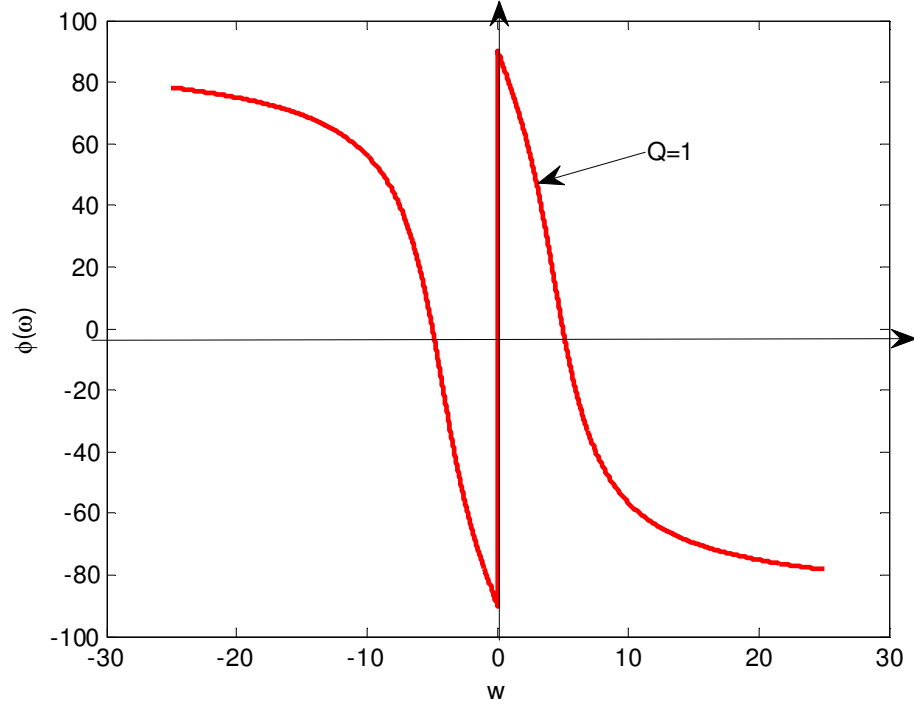


Şek.

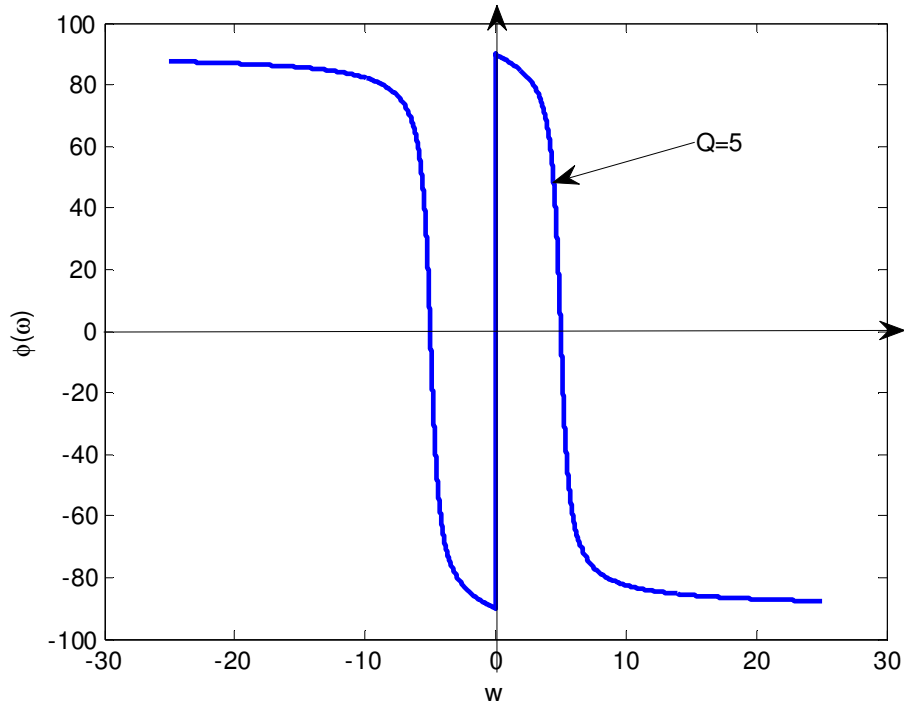
Öyleyse

$$\varphi_{BG}(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\frac{\omega_0}{Q} \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} & \text{for } \omega \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\frac{\omega_0}{Q} \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} & \text{for } \omega \leq 0 \end{cases}$$

$H_{BG}(j\omega)$ 'nın faz karakteristiği Şek. deki gibidir.



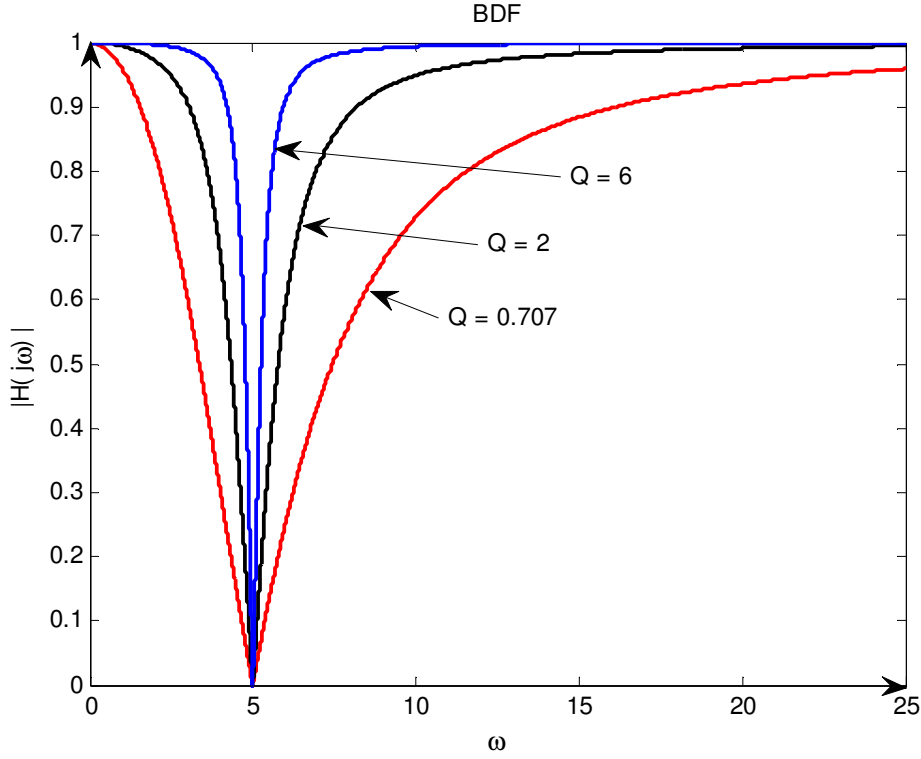
Şek.



Şek.

BAND SÖNDÜREN TRANSFER FONKSİYONU

$$H_{BS}(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

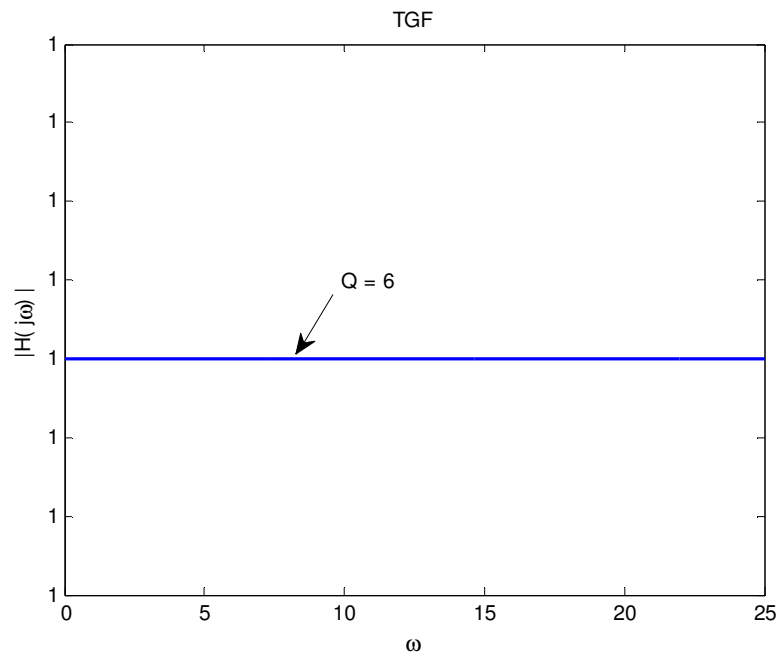
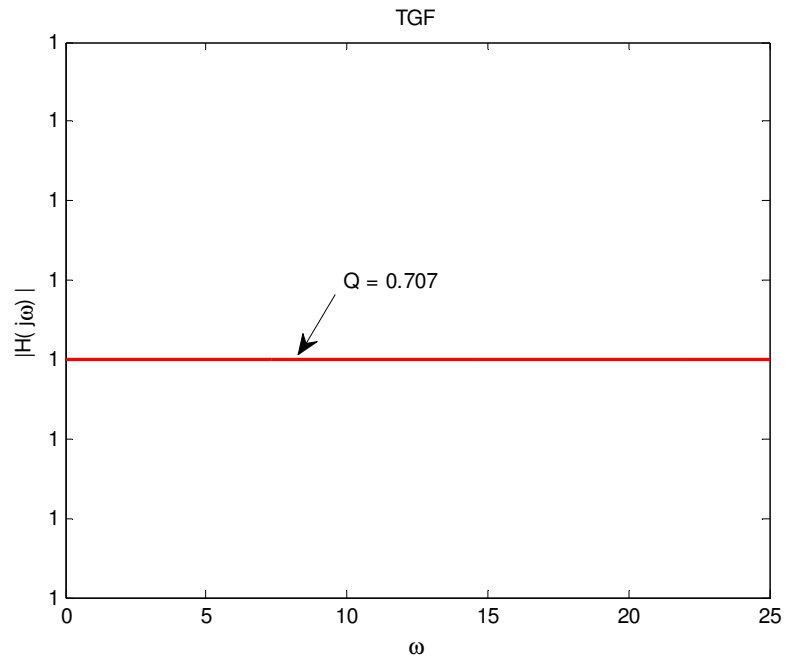


TÜM GEÇİREN TRANSFER FONKSİYONU

Transfer fonksiyonunun tüm geçiren olması genlik karakteristiğinin tüm frekanslarda aynı değerde olması anlamına gelir. Bunun sağlanması için transfer fonksiyonunun

$$H_{TG}(s) = \frac{s^2 - \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

biçiminde olması gerekir. Bu durumda genlik karakteristiği Şek. de verilmiştir.



Example:

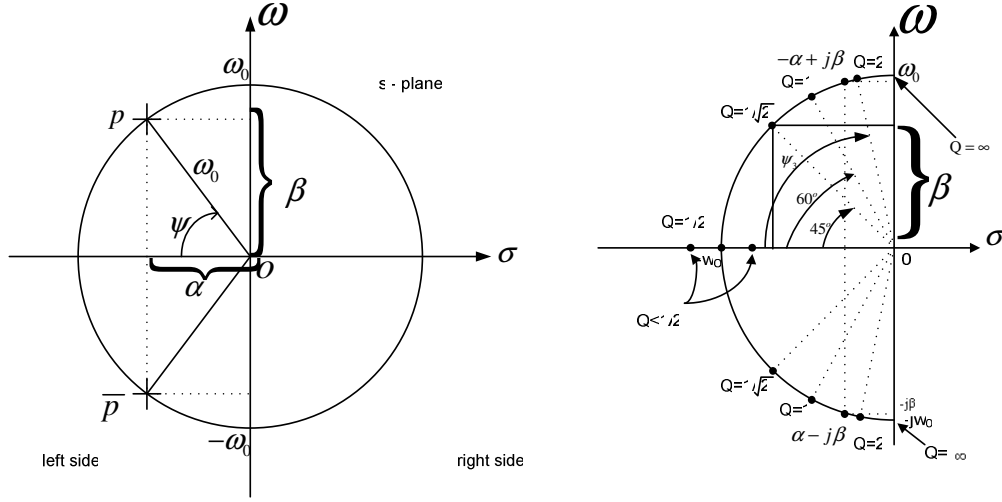


Fig.1

The denominator polynomial of a second-order transfer function is given as

$$\begin{aligned} D(s) &= (s - p)(s - \bar{p}) = (s - (-\alpha - j\beta))(s - (-\alpha + j\beta)) \\ &= (s + \alpha + j\beta)(s + \alpha - j\beta) = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned}$$

where p and \bar{p} are the complex-valued poles of the transfer function.

- (a) Use Fig.1 and calculate $\alpha, \beta, p, \bar{p}, D(s)$ for $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, Q_2 = 1, Q_3 = \infty, \omega_0 = 1 \text{ r/s}$.
- (b) If the transfer function is given as

$$H_{LP}(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}.$$

where $\omega_0 = 5 \text{ r/s}, Q = 2$, plot $|H_{LP}(j\omega)|$ using $|H_{LP}(j0)|, |H_{LP}(j\omega_0)|$ and $|H_{LP}(j\infty)|$.

- (c) Consider the transfer function

$$H_{BP}(s) = \frac{\frac{\omega_0}{Q}s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}.$$

Show that $|H_{BP}(j\omega_0)| = \max(|H_{BP}(j\omega)|)$. Show also that

$$\omega_1 = \omega_0 \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right), \quad \omega_2 = \omega_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right)$$

are the 3-dB cutoff frequencies of $|H_{BP}(j\omega)|$ and $\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$.

Evaluate the 3-dB bandwidth and the 3-dB relative bandwidth of $H_{BP}(s)$.

Solution:

(a)

$$\cos \psi_1 = \frac{1}{2Q_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha_1 = \omega_0 \cos \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta_1 = \omega_0 \sin \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p_1 = \alpha_1 + j\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \bar{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow D_1(s) = s^2 + \sqrt{2}s + 1$$

$$\cos \psi_2 = \frac{1}{2Q_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_2 = \omega_0 \cos \psi_2 = \frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \omega_0 \sin \psi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_2 = \alpha_2 + j\beta_2 = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \bar{p}_2 = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow D_2(s) = s^2 + s + 1$$

$$\cos \psi_3 = \frac{1}{2Q_3} = \frac{1}{\infty} \Rightarrow \alpha_3 = \omega_0 \cos \psi_3 = 0, \quad \beta_3 = \omega_0 \sin \psi_3 = 1, \quad p_3 = j, \quad \bar{p}_3 = -j \Rightarrow D_3(s) = s^2 + 1$$

(b) Since

$$|H_{LP}(j\omega)| = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 \omega^2}} = \frac{25}{\sqrt{(25 - \omega^2)^2 + \frac{25}{4}\omega^2}}$$

then

$$|H_{LP}(j0)| = 1, \quad |H_{LP}(j\omega_0)| = Q \Rightarrow |H_{LP}(j5)| = 2, \quad |H_{LP}(\infty)| = 0.$$

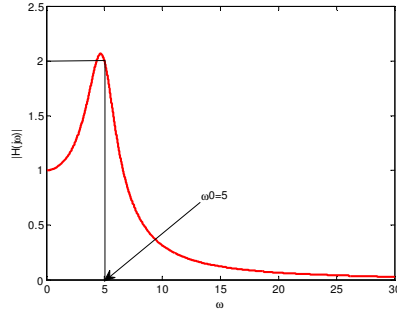


Fig.1

(c)

$$H_{BG}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega_0}{Q}\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega} = \frac{1}{1 + \frac{Q}{\omega_0\omega}(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{1}{1 - jQ\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)} \Rightarrow |H_{BG}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

For $\omega = \omega_0$ the denominator of $|H_{BG}(j\omega)|$ takes its minimum value since both terms under the square root are positive $\forall \omega$. Therefore for $\omega = \omega_0$ $|H_{BG}(j\omega)|$ takes its minimum value.

For 3-dB cutoff we should have $|H_{BP}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ which requires $Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1$ and

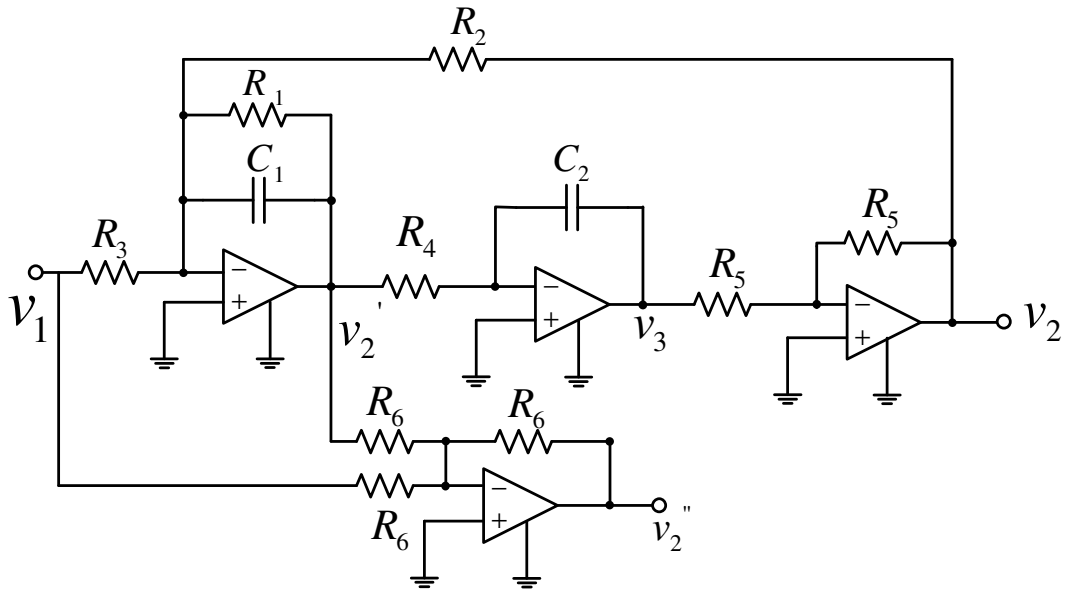
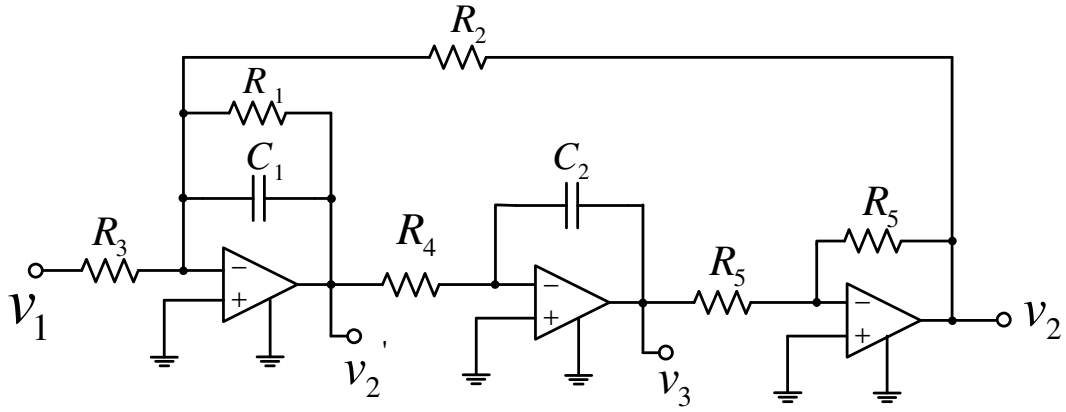
$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \pm \frac{1}{Q}, \text{ i.e., } \omega^2 \mp \frac{\omega_0}{Q}\omega - \omega_0^2 = 0. \text{ This equation has four roots: two for the (+) sign}$$

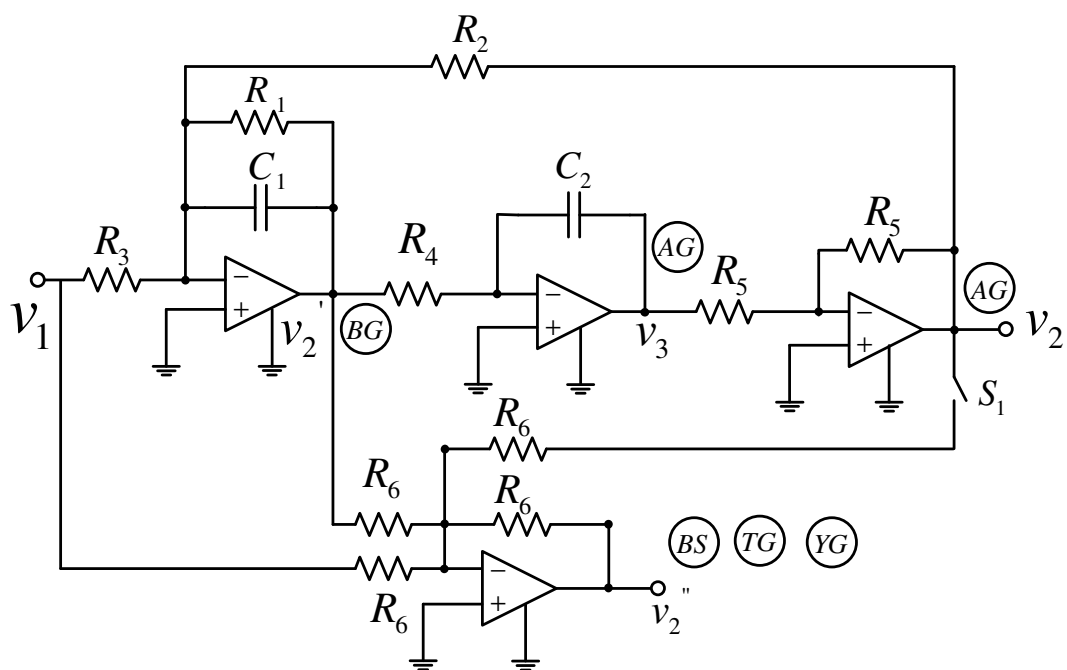
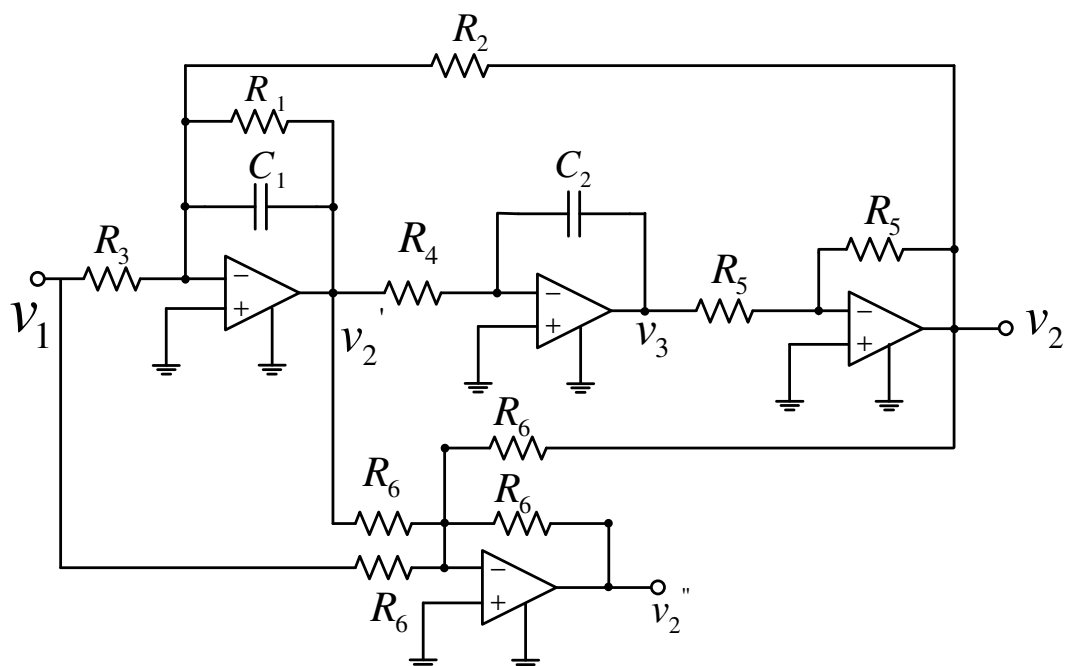
and two for the (-) sign: $\omega_{1,2,3,4} = \omega_0 \left(\pm \frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right)$. Those with positive values are the

cutoff frequencies:

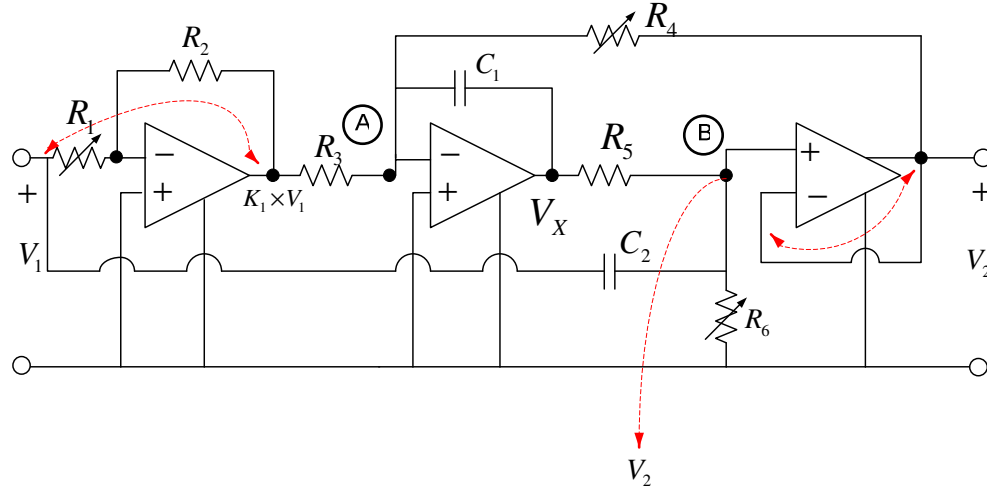
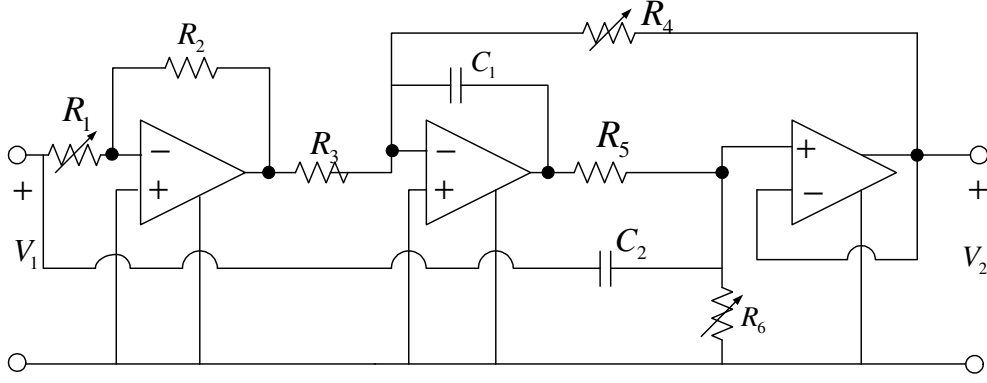
$$\omega_1 = \omega_0 \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right), \quad \omega_2 = \omega_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right), \text{ which yield } \omega_1 \omega_2 = \omega_0^2. \text{ Q.E.D.}$$

İKİNCİ DERECE DEN SÜZGEÇ DEVRELERİ





ÇENTİK SÜZGEÇİ



$$K_1 = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$A \text{ düğümü : } K_1 V_1 \frac{1}{R_3} - V_2 \frac{1}{R_4} - V_x s C_1 = 0 \Rightarrow V_x = V_1 \frac{K_1}{s C_1 R_3} - V_2 \frac{1}{s C_1 R_4}$$

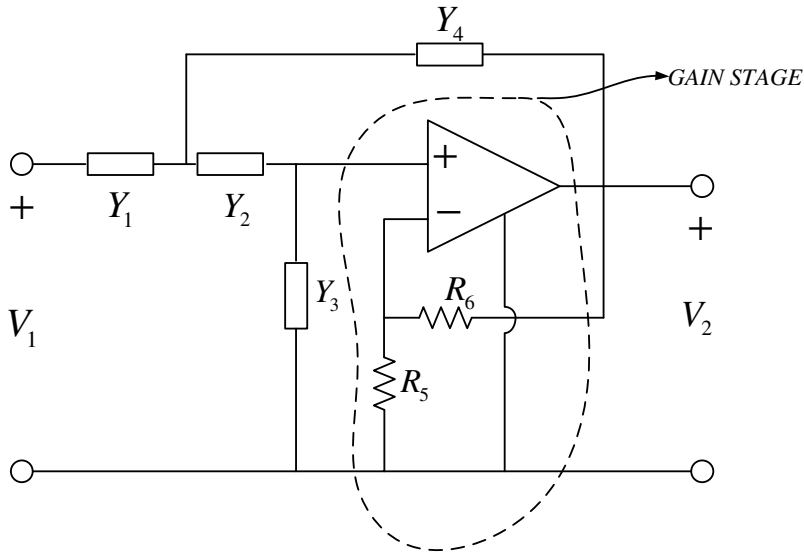
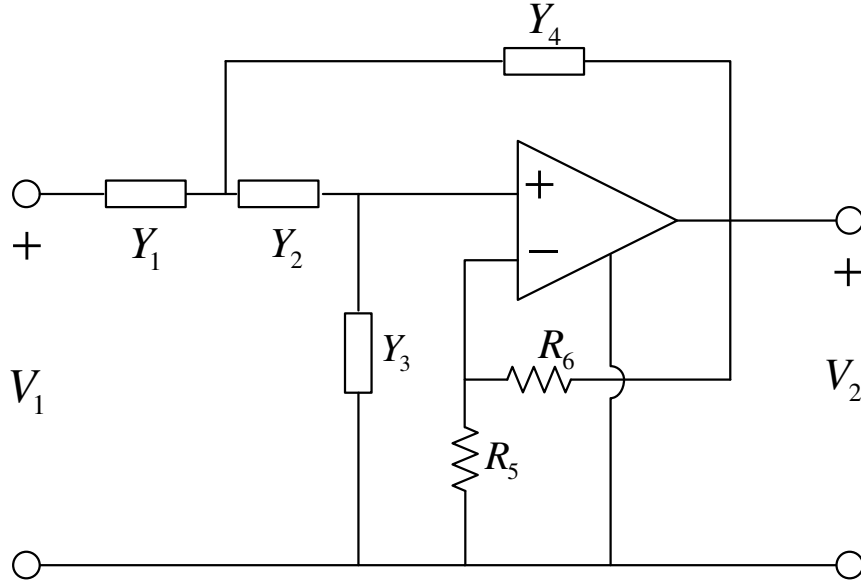
$$B \text{ düğümü : } V_2 \frac{1}{R_6} - (V_1 - V_2) s C_2 - (V_x - V_2) \frac{1}{R_5} = 0 \Rightarrow$$

$$V_2 \frac{1}{R_6} - (V_1 - V_2) s C_2 - \left(\left(V_1 \frac{K_1}{s C_1 R_3} - V_2 \frac{1}{s C_1 R_4} \right) - V_2 \right) \frac{1}{R_5} = 0$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{s^2 C_1 C_2 R_3 R_4 R_5 + K_1 R_4}{s^2 C_1 C_2 R_4 R_3 R_5 + s (C_1 R_3 R_4 + C_1 R_3 R_4 R_5) + R_3 R_6}$$

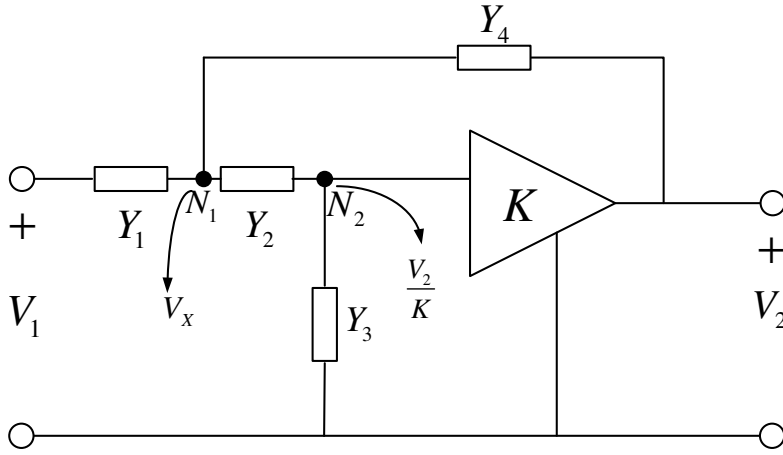
$$\text{Node B: } \frac{V_2}{V_1} = \frac{s^2 + \frac{K_1}{C_1 C_2 R_3 R_5}}{s^2 + s \left(\frac{1}{C_2 R_5} + \frac{1}{C_2} \right) + \frac{R_6}{C_1 C_2 R_4 R_5}}$$

SALLEN-KEY TÜRÜ DEVRELER



KAZANÇ (GAIN)

$$\text{Kazanç} = K = \frac{R_5 + R_6}{R_5} = 1 + \frac{R_6}{R_5}$$



$$N_1: -(V_1 - V_x)Y_1 + \left(V_x - \frac{V_2}{K}\right)Y_2 + (V_x - V_2)Y_4 = 0$$

$$N_2: \frac{V_2}{K}Y_3 - \left(V_x - \frac{V_2}{K}\right)Y_2 = 0$$

$$V_x = V_2 \left(\frac{1}{K} \frac{Y_3}{Y_2} + \frac{1}{K} \right)$$

Birinci düğümde yerine koyarsak;

$$-\left(V_1 - V_2 \left(\frac{1}{K} \frac{Y_3}{Y_2} + \frac{1}{K} \right)\right)Y_1 + \left(V_2 \left(\frac{1}{K} \frac{Y_3}{Y_2} + \frac{1}{K} \right) - \frac{V_2}{K}\right)Y_2 + \left(V_2 \left(\frac{1}{K} \frac{Y_3}{Y_2} + \frac{1}{K} \right) - V_2\right)Y_4 = 0$$

$$\left(-V_1Y_1 + V_2 \left(\frac{1}{K} \frac{Y_3Y_1}{Y_2} + \frac{Y_1}{K} \right)\right) + V_2 \frac{Y_3}{K} + V_2 \left(\frac{1}{K} \frac{Y_3Y_4}{Y_2} + \frac{Y_4}{K} - Y_4 \right) = 0$$

$$V_2 \left(\frac{1}{K} \frac{Y_3Y_1}{Y_2} + \frac{Y_1}{K} + \frac{Y_3}{K} + \frac{1}{K} \frac{Y_3Y_4}{Y_2} + \frac{Y_4}{K} - Y_4 \right) = V_1Y_1$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Y_1}{\left(\frac{1}{K} \frac{Y_3Y_1}{Y_2} + \frac{Y_1}{K} + \frac{Y_3}{K} + \frac{1}{K} \frac{Y_3Y_4}{Y_2} + \frac{Y_4}{K} - Y_4 \right)}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{KY_2Y_1}{Y_3Y_1 + Y_2Y_1 + Y_3Y_2 + Y_3Y_4 + Y_4Y_2 - KY_4Y_2}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{K}{\frac{Y_3}{Y_2} + \frac{Y_3}{Y_1} + \frac{Y_3Y_4}{Y_2Y_1} + 1 + (1-K)\frac{Y_4}{Y_1}}$$

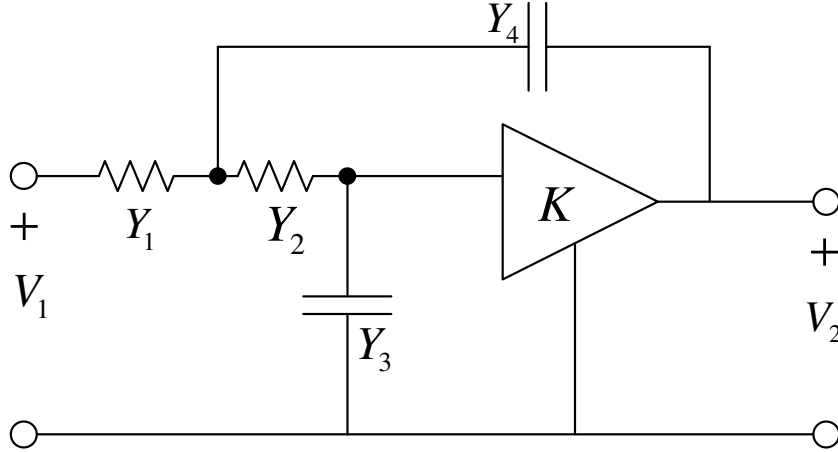
ALÇAK GEÇİREN SÜZGEÇ

$$Y_1 \rightarrow 1/R_1$$

$$Y_2 \rightarrow 1/R_2$$

$$Y_3 \rightarrow sC_2$$

$$Y_4 \rightarrow sC_1$$



$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{K}{\frac{sC_2}{1/R_2} + \frac{sC_2}{1/R_1} + \frac{sC_2 sC_1}{(1/R_2)(1/R_1)} + 1 + (1-K)\frac{sC_1}{1/R_1}}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{K}{sC_2R_2 + sC_2R_1 + s^2C_1C_2R_1R_2 + 1 + (1-K)sC_1R_1}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{K}{C_1C_2R_1R_2}}{s^2 + \left(\frac{1}{C_1R_1} + \frac{1}{C_1R_2} + (1-K)\frac{1}{C_2R_2} \right)s + \frac{1}{C_1C_2R_1R_2}}$$

Şimdi

$$C_1 = C_2 = C$$

$$R_1 = R_2 = R$$

alınırsa

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\left(\frac{1}{CR} \right)^2 K}{s^2 + \frac{3-K}{CR}s + \left(\frac{1}{CR} \right)^2}$$

bulunur. Şimdi de

$$\frac{1}{CR} = \omega_0, \quad \frac{1}{3-K} = Q$$

alınarak

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\omega_0^2 K}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

elde edilir.

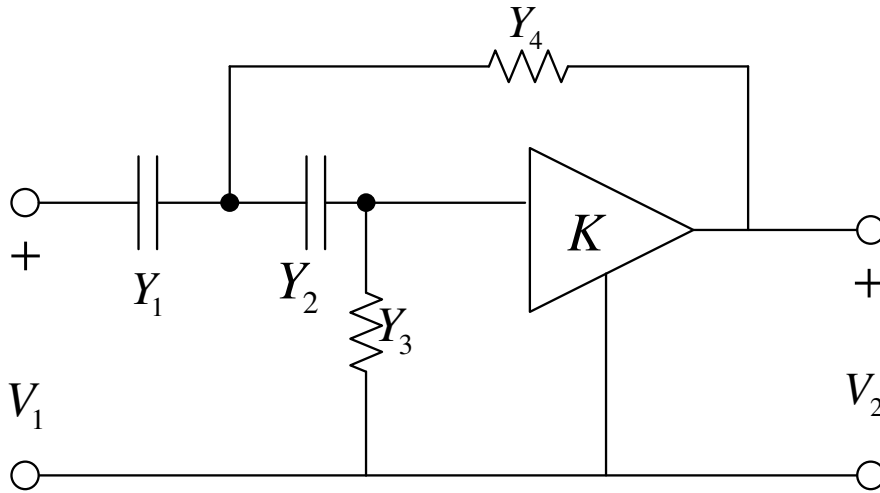
YÜKSEK GEÇİREN SÜZGEÇ

$$Y_1 \rightarrow sC_1$$

$$Y_2 \rightarrow sC_2$$

$$Y_3 \rightarrow 1/R_2$$

$$Y_4 \rightarrow 1/R_1$$



$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{K}{\frac{1/R_2}{sC_2} + \frac{1/R_2}{sC_1} + \frac{1/R_2 \cdot 1/R_1}{sC_2 sC_1} + 1 + (1-K) \frac{1/R_1}{sC_1}}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{K s^2}{s^2 + \left(\frac{1}{C_2 R_2} + \frac{1}{C_1 R_2} + (1-K) \frac{1}{C_1 R_1} \right) s + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}}$$

Şimdi

$$C_1 = C_2 = C$$

$$R_1 = R_2 = R$$

alınırsa

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Ks^2}{s^2 + \frac{3-K}{CR}s + \left(\frac{1}{CR}\right)^2}$$

Bulunur. Şimdi de

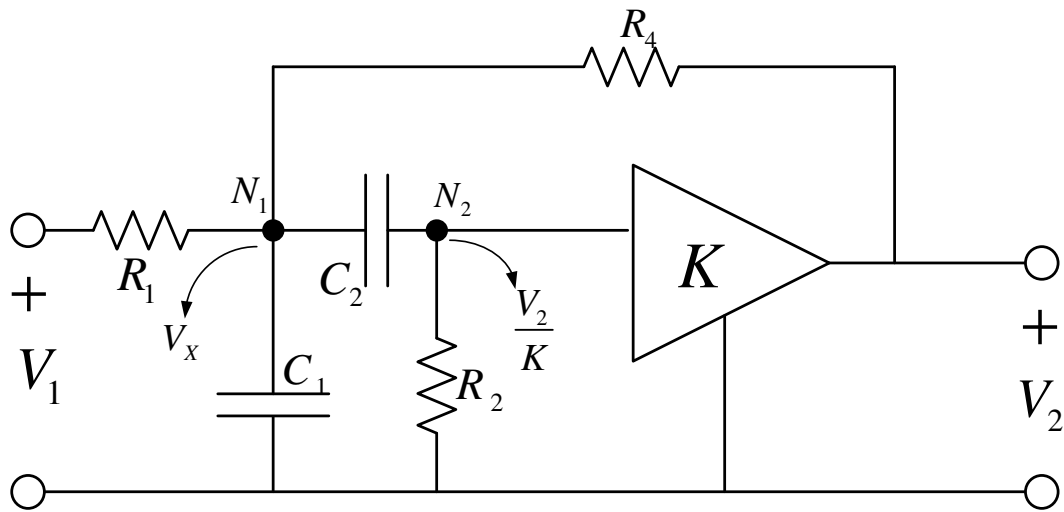
$$\frac{1}{CR} = \omega_0, \quad \frac{1}{3-K} = Q$$

alınarak

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Ks^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

elde edilir.

BAND-GEÇİREN SÜZGEÇ



$$N_1 : -(V_1 - V_x) \frac{1}{R_1} + \left(V_x - \frac{V_2}{K} \right) sC_2 + (V_x - V_2) \frac{1}{R_4} + V_x sC_1 = 0$$

$$N_2 :- \left(V_x - \frac{V_2}{K} \right) s C_2 + \frac{V_2}{K} \frac{1}{R_2} = 0$$

Bu denklemleri matrisel biçimde yazarsak

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + (C_1 + C_2)s & -sC_2 - \frac{K}{R_4} \\ -sC_2 & \frac{1}{R_2} + sC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ \frac{V_2}{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} V_1$$

$$\begin{bmatrix} V_x \\ \frac{V_2}{K} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} + sC_2 & sC_2 \frac{K}{R_4} \\ sC_2 & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + (C_1 + C_2)s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} V_1$$

$$\Delta = C_1 C_2 s^2 + \left(\frac{C_1}{R_2} + \frac{C_2}{R_2} + \frac{C_2}{R_1} + \frac{C_2}{R_4} (1 - K) \right) s + \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} \right)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{K}{R_1 C_1} s}{s^2 + s \left(\frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} + \frac{1}{C_2 R_2} + (1 - K) \frac{1}{C_1 R_4} \right) s + \frac{R_1 + R_4}{C_1 C_2 R_1 R_2 R_4}}$$

bulunur.

Şimdi

$$C_1 = C_2 = C$$

$$R_1 = R_4 = R$$

$$R_2 = 2R$$

alalım. Bu değerler transfer fonksiyonunda yerlerine koyularak

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{K}{CR} s}{s^2 + \frac{3 - K}{CR} s + \left(\frac{1}{CR} \right)^2}$$

bulunur. Şimdi de

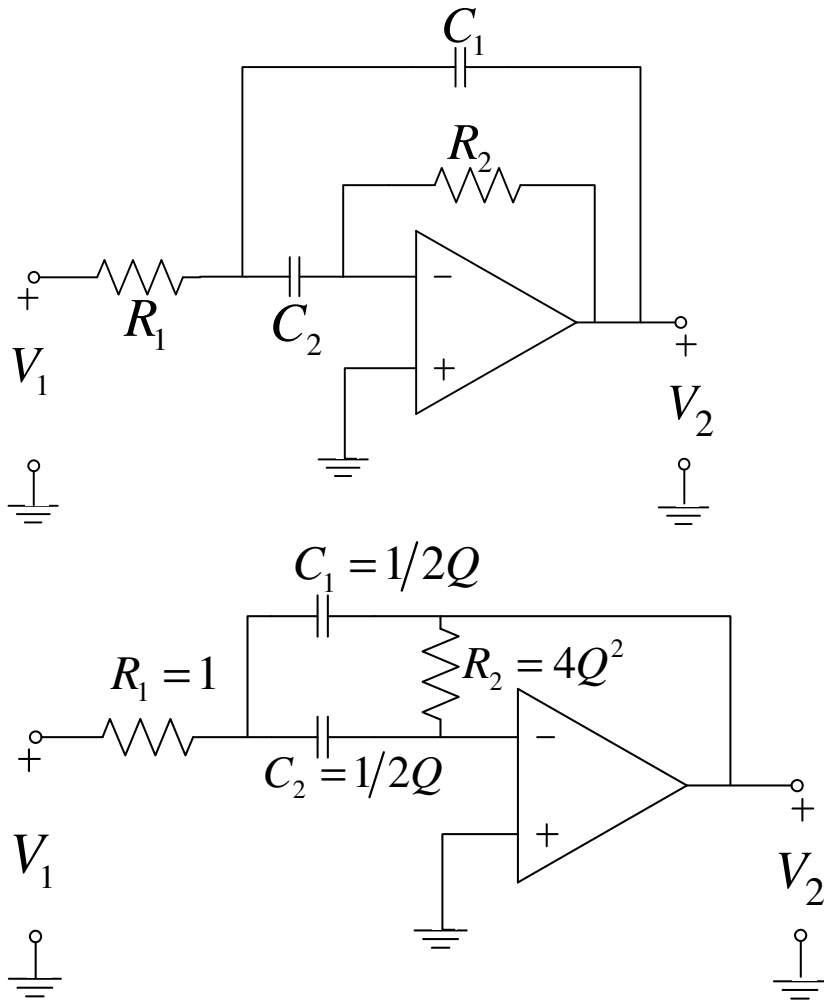
$$\frac{1}{CR} = \omega_0, \quad \frac{1}{3-K} = Q$$

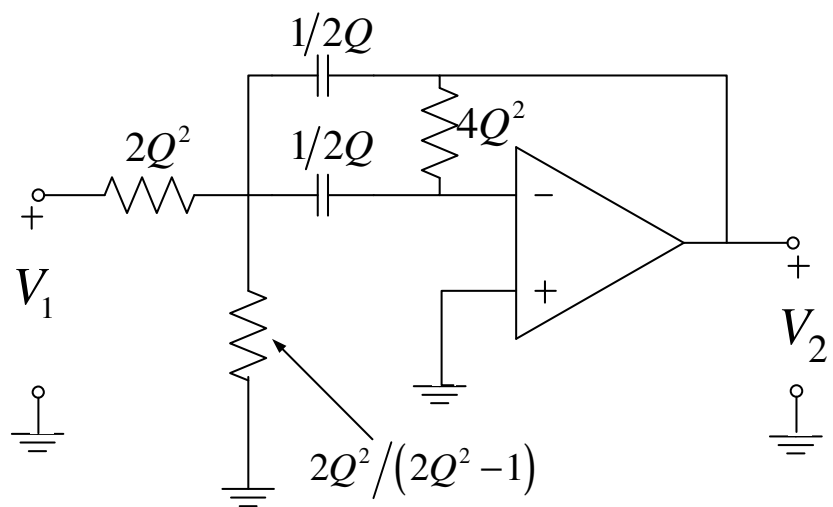
alınırsa

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{K\omega_0 s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

elde edilir.

DELYANNIS-FRIEND DEVRESİ





SÜZGEÇLERİN ARDARDA BAĞLANMASI İLE DAHA YÜKSEK DERECEDEDEN SÜZGEÇLERİN OLUŞTURULMASI

Transfer fonksiyonları $H_1(s)$ ve $H_2(s)$ olan iki süzgecin ardarda bağlanmaları durumunda elde edilen süzgecin transfer fonksiyonunun $H(s) = H_1(s)H_2(s)$ olacağını biliyoruz. Burada hemen belirtmek gerekir ki, bu çarpımın yapılabilmesi için ardarda bağlamanın $H_1(s)$ 'i veren süzgecin transfer fonksiyonunu etkilememesi gerekir. Bazı durumlarda bu koşulu sağlayabilmek için iki süzgeç arasına bir tampon (buffer) devrenin koyulması gerekir.

YÜKSEK DERECEDEDEN ALÇAK GEÇİREN BUTTERWORTH TRANSFER FONKSİYONLARININ GERÇEKLENMESİ

Üçüncü dereceden Butterworth transfer fonksiyonu

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

şeklindedir. Bu fonksiyon

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2 + s + 1)}$$

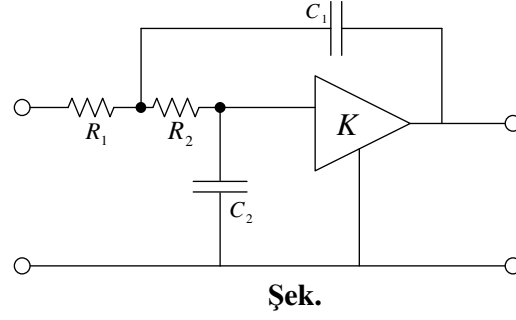
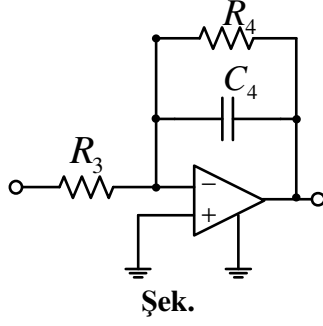
şeklinde yazılabileceğinden

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{ve} \quad H_2(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

tanımlarını yaparak

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)$$

yazabiliriz. Bu ifade transfer fonksiyonu $H(s)$ olan bir süzgecin 1. ve 2. dereceden iki süzgecin ardarda bağlanarak gerçekleştirilebileceğini göstermektedir. Öyleyse bu gerçeklemeyi Şek. () deki birinci dereceden süzgeç devresi ile Şek. () deki ikinci dereceden Sallen-Key süzgeçlerini ardarda bağlayarak yapalım.



Bu devrelerin transfer fonksiyonları

$$H_1(s) = -\frac{\frac{1}{R_3 C_4}}{s + \frac{1}{R_4 C_4}} \quad \text{ve} \quad H_2(s) = \frac{\frac{K}{C_1 C_2 R_1 R_2}}{s^2 + \left(\frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} + (1-K) \frac{1}{C_2 R_2} \right) s + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}}$$

şeklindedir. Şimdi

$$C_1 = C_2 = C = 1F$$

$$R_1 = R_2 = R = 1\Omega$$

alınırsa

$$H_2(s) = \frac{K}{s^2 + (3-K)s + 1}$$

bulunur. Burada da $K = 2$ alınarak

$$H_2(s) = \frac{2}{s^2 + s + 1}$$

elde edilir. Öyleyse transfer fonksiyonları $H_1(s)$ ve $H_2(s)$ olan süzgeçlerin ardarda bağlanmaları

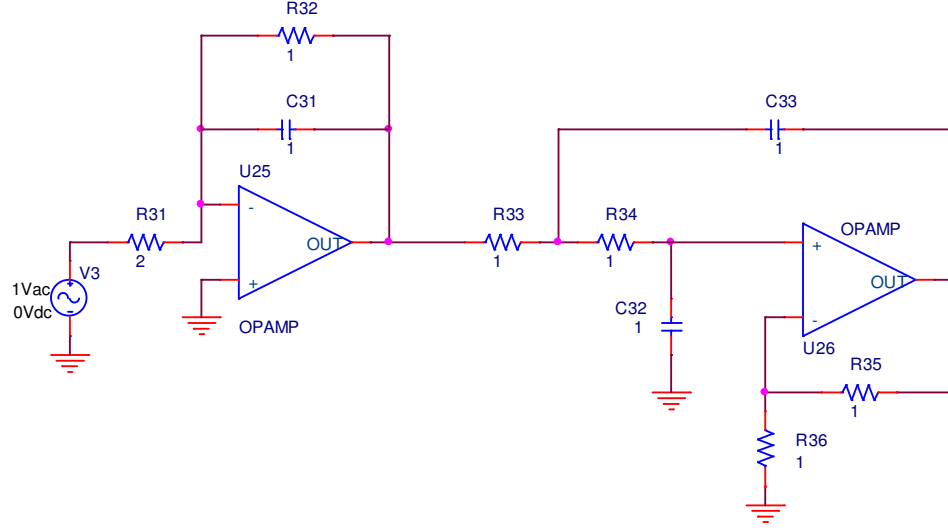
$$H(s) = \frac{-2}{(s+1)(s^2 + s + 1)}$$

transfer fonksiyonunu verecektir. -2 katsayısı süzgeç niteliği bakımından önemli olmayıp bir çarpıcının süzgeç devresinin önüne bağlanması ile istenilen katsayı elde edilebilir. Şek. de devrenin tümünün SPICE simülasyonunda çizilmiş olan şeması, Şek. de ise $|H_1(j\omega)|$, $|H_2(j\omega)|$ ve $|H(j\omega)|$ 'nin bu simülasyon sonucunda elde edilen ω 'ya göre

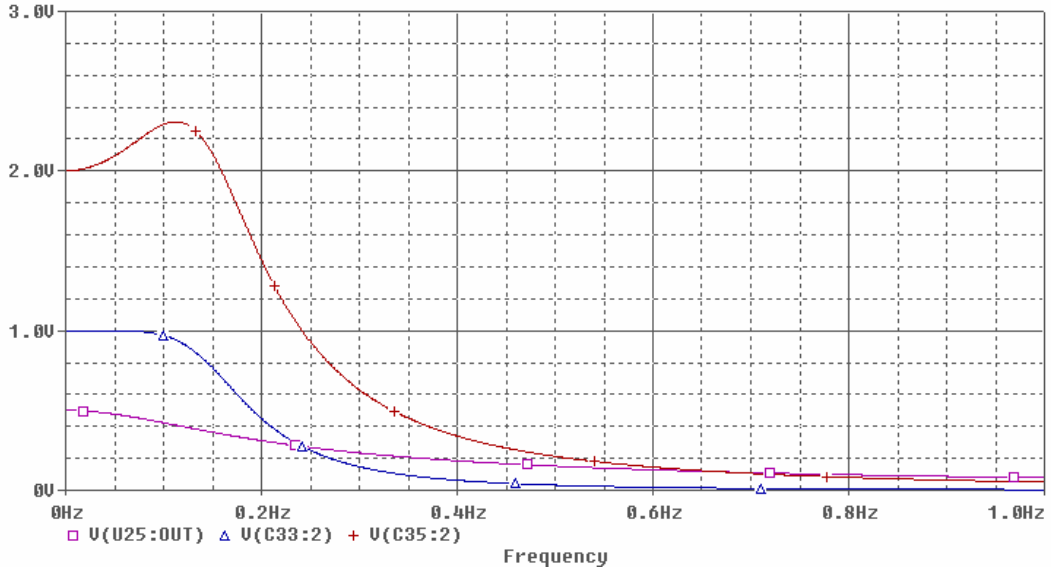
değişimleri verilmiştir. Burada $K = 1 + \frac{R_{35}}{R_{36}}$ olduğundan $R_{35} = R_{36}$ alınarak $K = 2$ değeri

sağlanır. Öte yandan ardarda bağlamanın $H_1(s)$ 'i etkilememe koşulu burada sağlanmaktadır. Bunu şöyle gösterebiliriz: $H_1(s)$, işlemsel kuvvetlendiricinin evirici ucunda KAY

denkleminin yazılmasıyla elde edildiğine ve ardarda bağladıktan sonra da bu denklem aynı kaldığına göre $H_1(s)$ 'in bu bağlanmadan etkilenmediği görülmüş olur.



Şek.



Şek.

Şimdi de beşinci dereceden Butterworth transfer fonksiyonu

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1.618s+1)(s^2+0.6180s+1)}$$

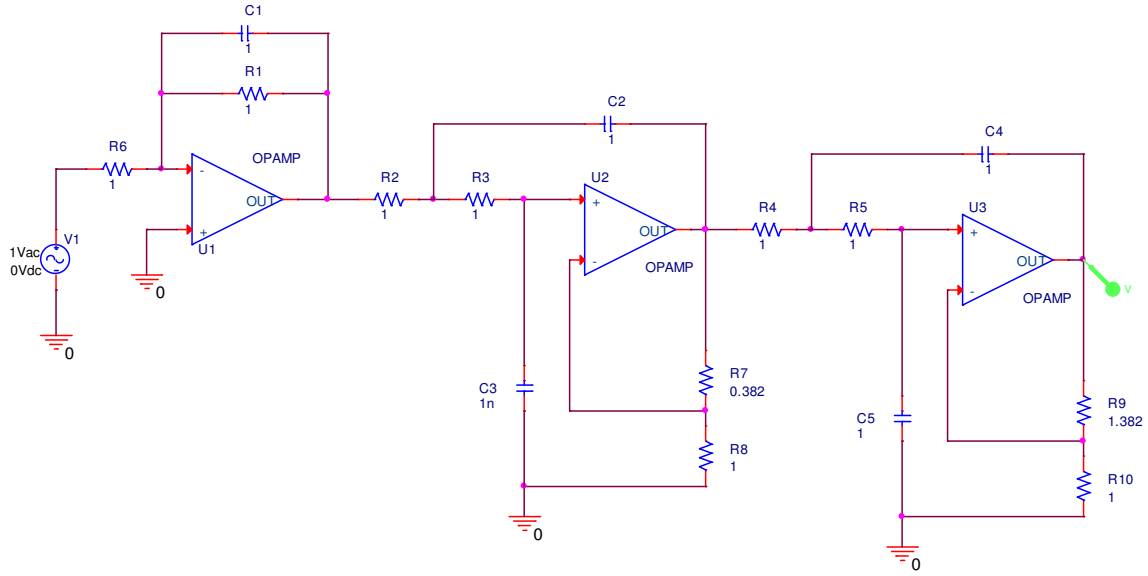
gerçekleyelim.

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad H_2(s) = \frac{1}{s^2+1.618s+1} \quad \text{ve} \quad H_3(s) = \frac{1}{s^2+0.6180s+1}$$

tanımlarını yaparak

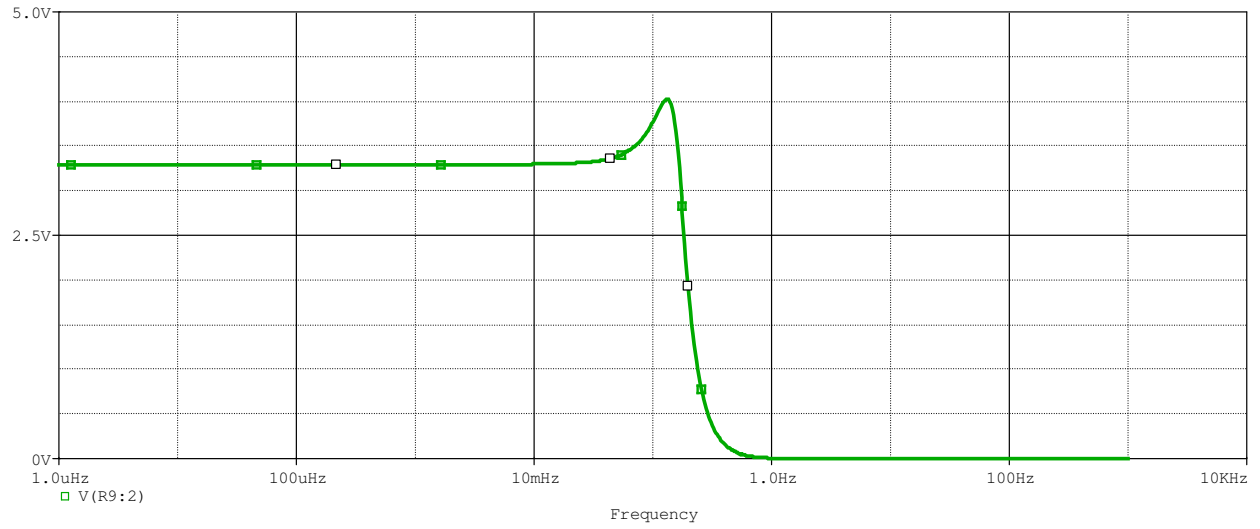
$$H(s) = H_1(s)H_2(s)H_3(s)$$

yazabiliriz. $H_1(s)$, Şek. deki devre ile; $H_2(s)$ ve $H_3(s)$ ise birer Sallen-Key devresiyle gerçekleştirilerek Şek. de SPICE simülasyonunda çizilmiş olan devre elde edilir. Bu devrelerdeki işlemsel kuvvetlendirici kazançlarını değerleri sırasıyla K_1 ve K_2 ile gösterirsek $K_1 = 1,382$ ve $K_2 = 2,382$ bulunur.



Şek.

Şek. de ise süzgeç devresinin tümünün frekans karakteristiği $|H(j\omega)|$ 'nın SPICE simülasyonunda elde edilmiş olan ω 'ya göre değişimi verilmiştir



Şek.

Example:

Fig.2 shows the plots of the magnitude frequency characteristic $|H_{BP_1}(j\omega)|$, $|H_{BP_2}(j\omega)|$ and $|H_{BP_3}(j\omega)|$ obtained from the band pass transfer functions $H_{BP_1}(s)$, $H_{BP_2}(s)$, $H_{BP_3}(s)$, with $\omega_{0_1} = 3000 \text{ rad/s}$, $Q_1 = 2$; $\omega_{0_2} = 4500 \text{ rad/s}$, $Q_2 = 1$; $\omega_{0_3} = 7000 \text{ rad/s}$, $Q_3 = 2$, respectively. In Fig.3 $|H(j\omega)| = |H_{BP_1}(j\omega)| \times |H_{BP_2}(j\omega)| \times |H_{BP_3}(j\omega)|$ is plotted.

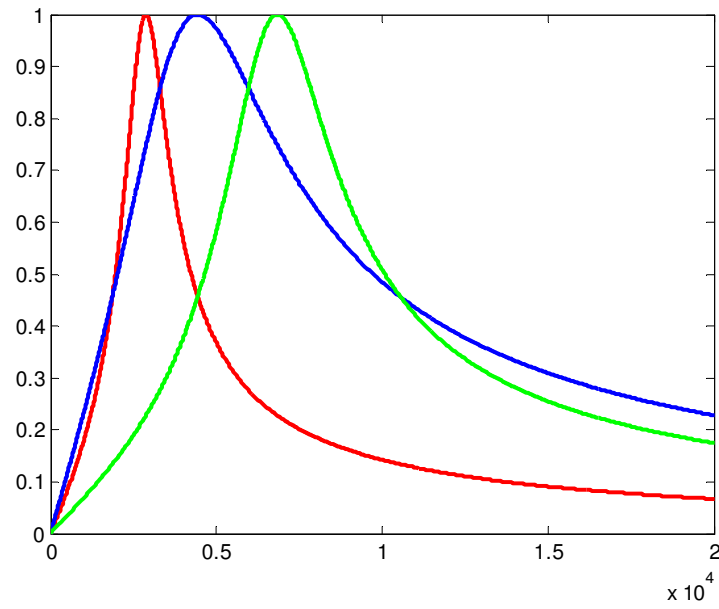


Fig.2

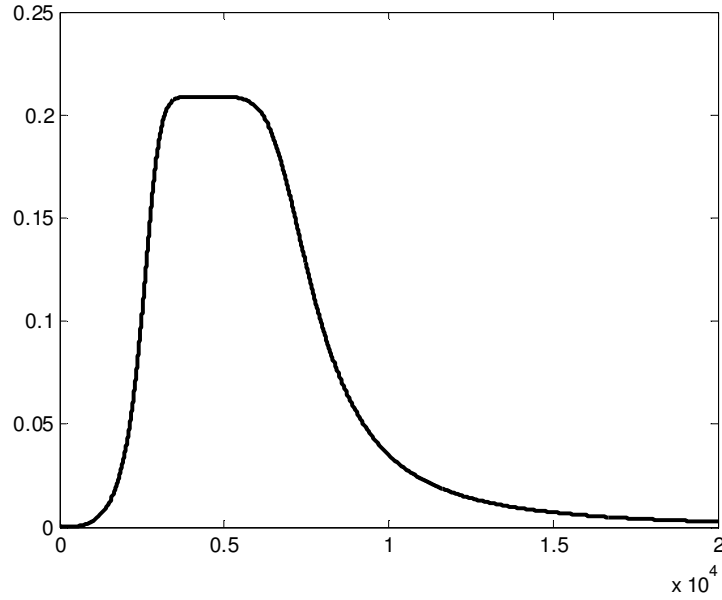


Fig.3

- (a) Write down $H_{BP_1}(s)$, $H_{BP_2}(s)$ and $H_{BP_3}(s)$.
- (b) Using Fig.3 determine the 3-dB cutoff frequencies ω_1 and ω_2 ; the center frequency $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$, the 3-dB bandwidth and the 3-dB relative bandwidth of the transfer function $H(s)$.

Considering that $H_{BP_1}(s)$, $H_{BP_2}(s)$ and $H_{BP_3}(s)$ are realized using the Sallen-Key filter given in Fig.4, calculate the element values of each filter circuit. Note that if the element values of the Sallen-Key circuit in Fig.4 are chosen as $C_1 = C_2 = C$, $R_1 = R_4 = R$, $R_2 = 2R$ then the transfer function is:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{K}{CR}s}{s^2 + \frac{3-K}{CR}s + \left(\frac{1}{CR}\right)^2}$$

- (c) Draw the complete circuit diagram.

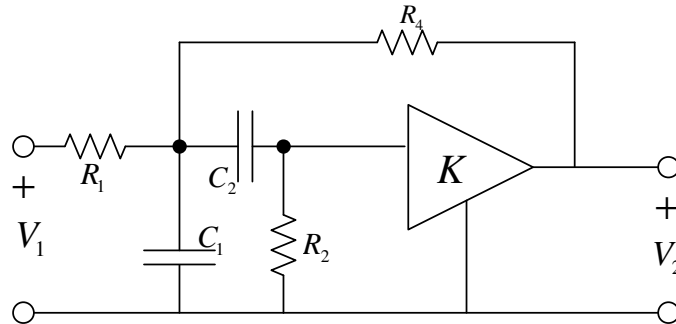


Fig.4

Solution:

(a) $\omega_0 = 3000r/s$, $Q_1 = 2$; $\omega_0 = 4500r/s$, $Q_2 = 1$; $\omega_0 = 7000r/s$, $Q_3 = 2$,

$$H_{BP}(s) = \frac{\frac{\omega_0}{Q}s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \Rightarrow H_{BP_1}(s) = \frac{1500s}{s^2 + 1500s + 9 \times 10^6}, H_{BP_2}(s) = \frac{4500s}{s^2 + 4500s + 2025 \times 10^4}, H_{BP_3}(s) = \frac{3500s}{s^2 + 3500s + 49 \times 10^6}$$

(b) Now using Fig.3 in Q.2;

- First we find the maximum value of $|H(j\omega)|$: $|H(j\omega)|_{\max} = 0.2261$ (see Fig.1 below).
- Then we calculate $\frac{1}{\sqrt{2}}|H(j\omega)|_{\max} = 0.16$.
- Next we draw a horizontal line from the point $|H(j\omega)| = 0.16$ on the vertical axis. The frequency values corresponding the intersection points of the line with the $\omega - |H(j\omega)|$ curve are the 3-dB cutoff frequencies which work out to be $\omega_1 = 2660r/s$ and $\omega_2 = 7310r/s$ (Fig.1).
- Finally we work out the center frequency $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \cong 4410r/s$, the 3-dB bandwidth $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 4650r/s$, the relative 3-dB bandwidth $\Delta\omega / \omega_0 = 4650 / 4410 = 1.054$.

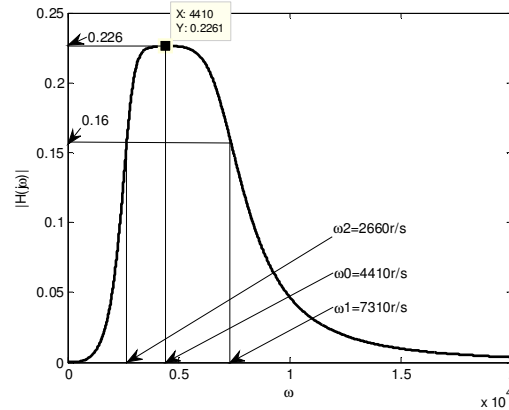


Fig.2

:

In order to draw the complete circuit diagram we first draw the individual filter circuits:
The filter circuits realizing $H_{BP_1}(s)$, $H_{BP_2}(s)$ and $H_{BP_3}(s)$ are given in Figs.3,5 and 7; and the plots of $|H_{BP_1}(j\omega)|$, $|H_{BP_2}(j\omega)|$ and $|H_{BP_3}(j\omega)|$ versus ω are given in Figs.4,6 and 8, respectively.

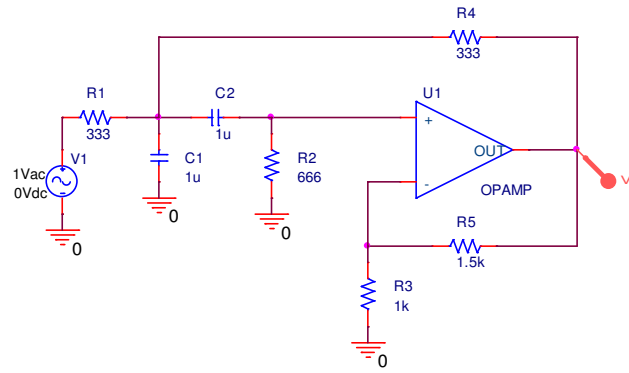


Fig.3

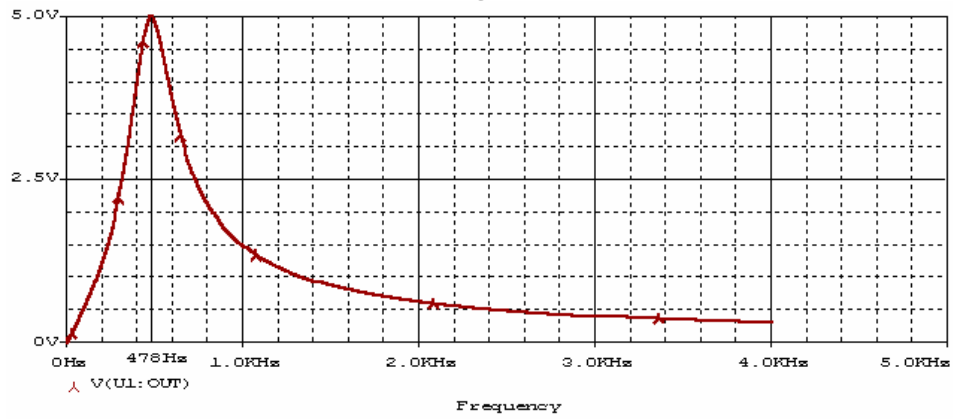


Fig.4

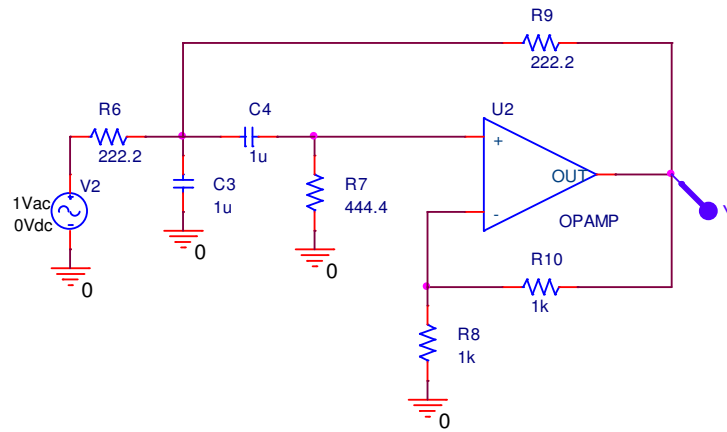


Fig.5

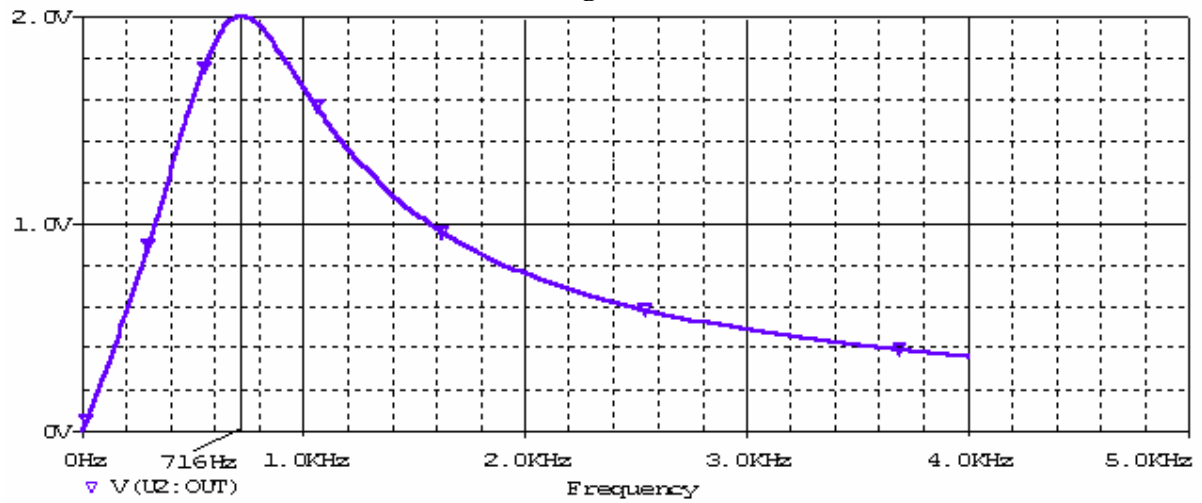


Fig.6

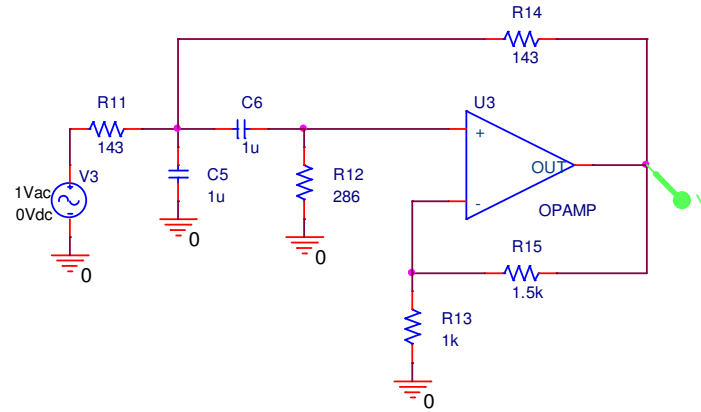


Fig.7

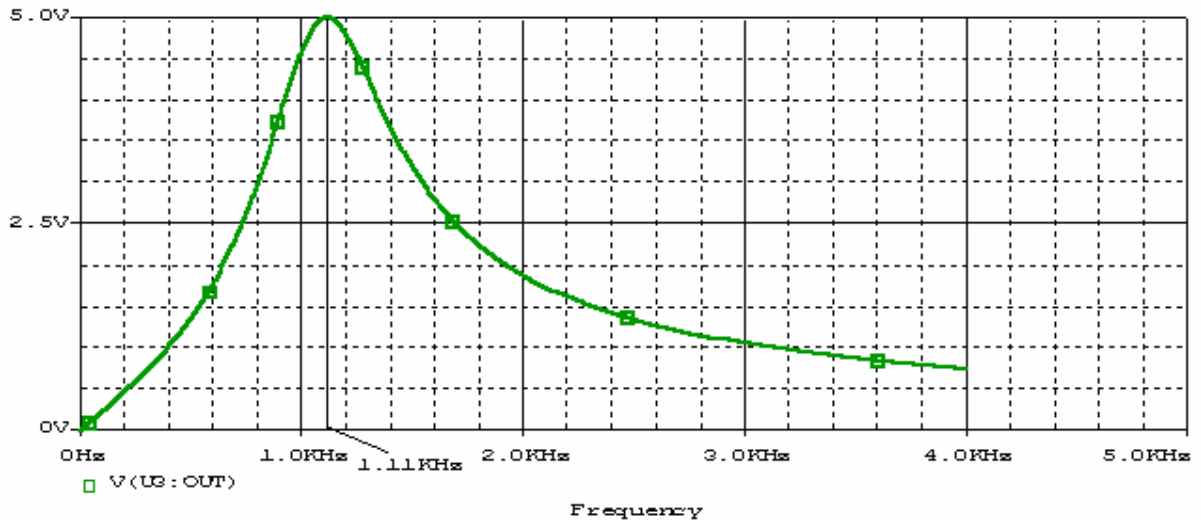


Fig.8

The numerical values for K and R of the Sallen-Key filters are found as follows:

$$C_1 R_1 = \frac{1}{3000} s, \quad K_1 = 2.5;$$

$$C_1 R_6 = \frac{1}{4500} s, \quad K_2 = 2;$$

$$C_1 R_{11} = \frac{1}{7000} s, \quad K_3 = 2.5.$$

Setting $C_1 = C_2 = 1\mu F$, we get

$$\begin{aligned}
 R_1 = R_4 = 333\Omega, \quad R_2 = 2R_1 = 666\Omega; \\
 R_6 = R_9 = 222.2\Omega, \quad R_7 = 2R_6 = 444.4\Omega; \\
 R_{11} = R_{14} = 143\Omega, \quad R_{12} = 2R_{11} = 286\Omega;
 \end{aligned}$$

In Fig.9 the three plots are shown on the same graph and the complete circuit diagram is shown in Fig. 10.

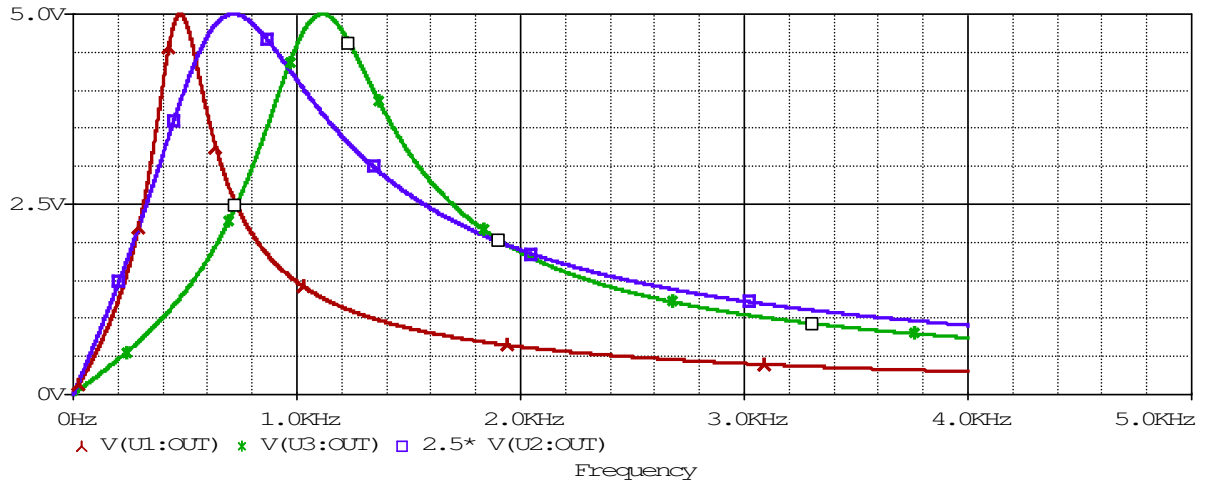


Fig.9

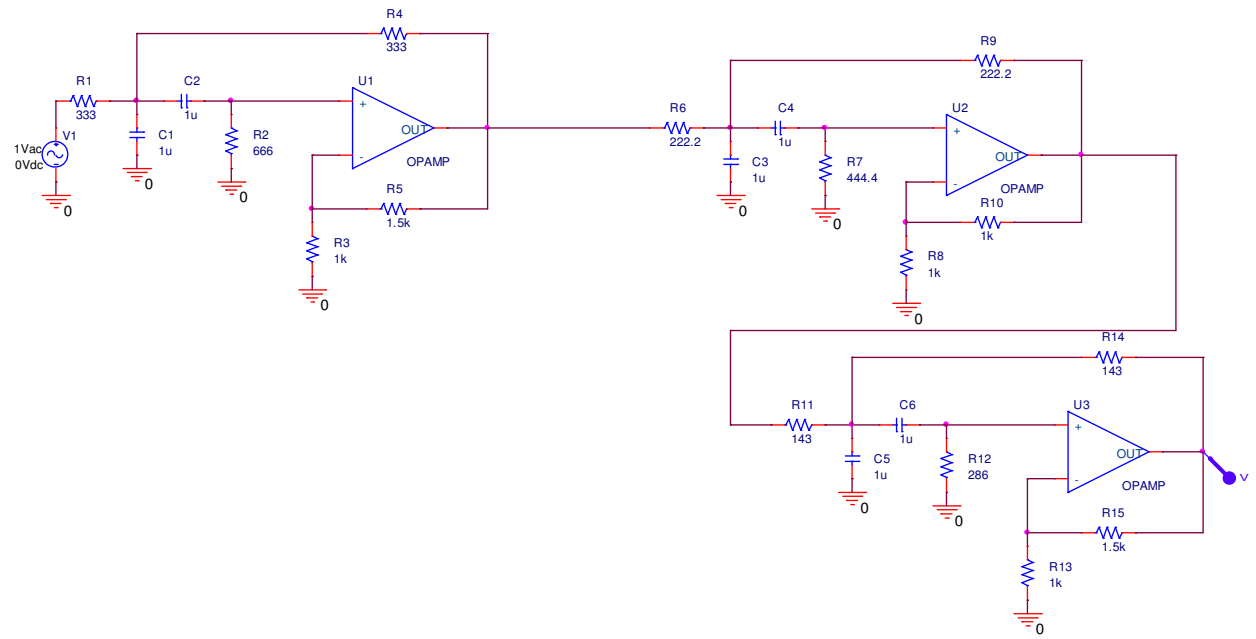


Fig.10

Fig. 11 shows the plot of $|H(j\omega)| = |H_{BP_1}(j\omega)| \times |H_{BP_2}(j\omega)| \times |H_{BP_3}(j\omega)|$ versus ω .

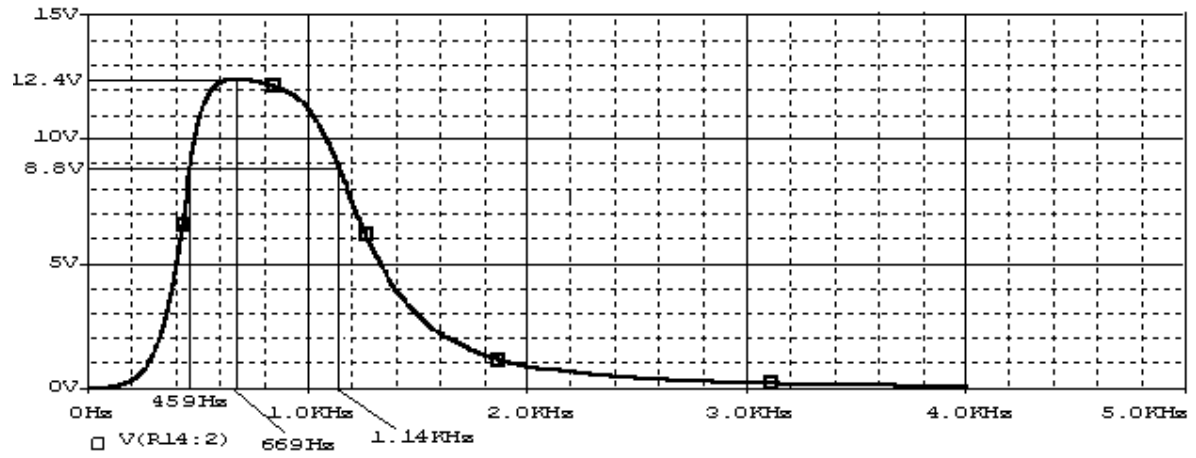


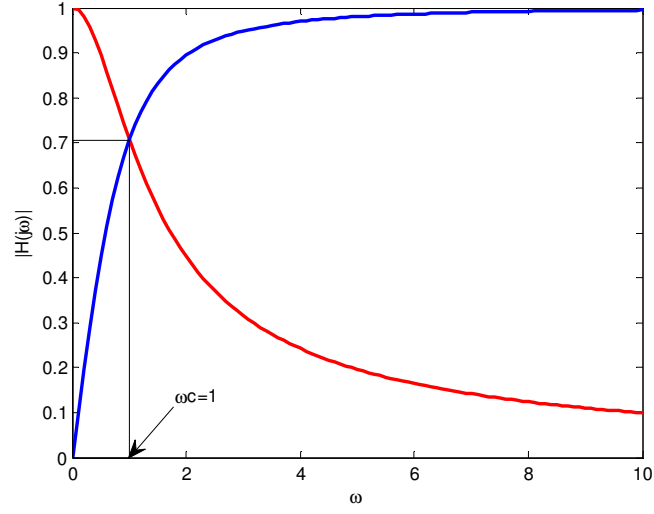
Fig.11

ALÇAK VE YÜKSEK GEÇİREN SÜZGEÇLERİN ARDARDA BAĞLANMASI İLE BANT GEÇİREN SÜZGEÇ OLUŞTURULMASI

Transfer fonksiyonları

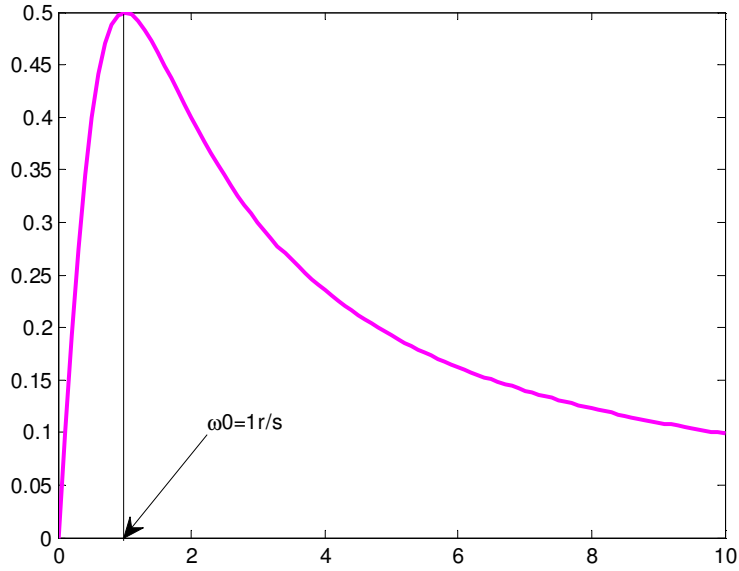
$$H_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{ve} \quad H_2(s) = \frac{s}{s+1}$$

olan süzgeçleri göz önüne alalım. Burada $H_1(s)$ birinci dereceden AG normalize Butterworth transfer fonksiyonu, $H_2(s) = H_1(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{1}{s}}$ şeklinde elde edilmiş olan YG normalize transfer fonksiyonu olup her iki fonksiyonun kesim frekansları $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$ dir. Şek. de $|H_1(j\omega)|$ ve $|H_2(j\omega)|$ 'nın ω 'ya göre değişimleri verilmiştir.



Şek.

Transfer fonksiyonları $H_1(s)$ ve $H_2(s)$ olan süzgeçler ardarda bağlanırsa transfer fonksiyonu $H(s) = H_1(s)H_2(s)$ bir süzgeç elde edilir. Şek. de $|H(j\omega)|$ 'nın ω 'ya göre değişimi verilmiştir.



Şek.

Şimdi $H_1(s)$ de s yerine $s/9$ ve $H_2(s)$ 'de de s yerine $s/4$ AG-AG dönüşümleri yapılarak

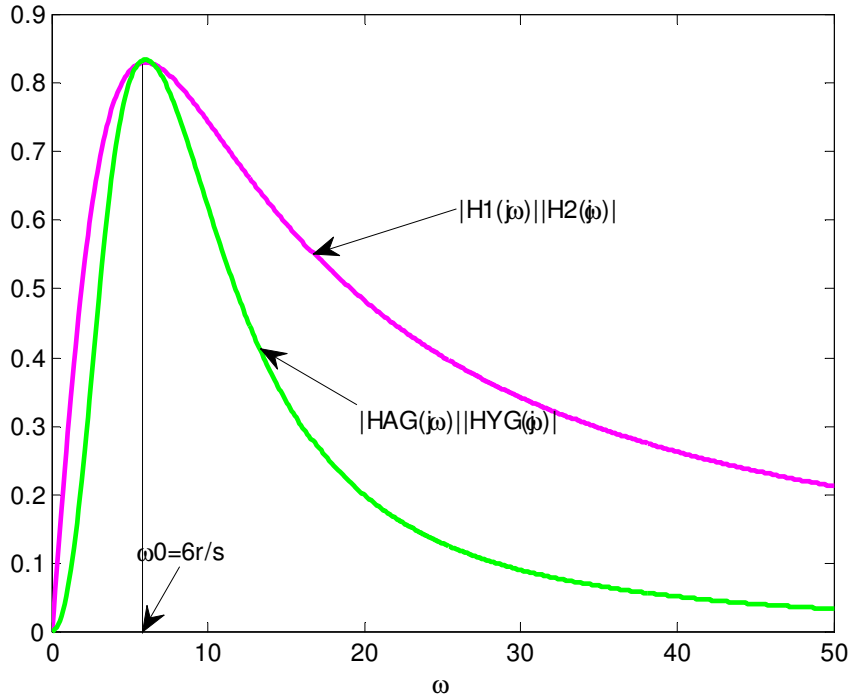
$$\hat{H}_1(s) = \frac{9}{s+4} \quad \text{ve} \quad \hat{H}_2(s) = \frac{s}{s+4}$$

kesim frekansları $9r/s$ ve $4r/s$ transfer fonksiyonları elde edilir.

Şimdi de transfer fonksiyonları

$$H_{AG}(s) = \frac{\omega_{0_1}^2}{s^2 + \frac{\omega_{0_1}}{Q}s + \omega_{0_1}^2} \quad \text{ve} \quad H_{YG}(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_{0_2}}{Q}s + \omega_{0_2}^2}$$

olan ikinci dereceden AG ve YG süzgeçleri göz önüne alalım ve kesim frekansları olarak $\omega_{0_1} = 9 \text{ r/s}$, $\omega_{0_2} = 4 \text{ r/s}$ seçelim. Şimdi de $|H_1(j\omega)| \times |H_2(j\omega)|$ ve $Q = 1/\sqrt{2}$ için $|H_{AG}(j\omega)| \times |H_{YG}(j\omega)|$ eğrilerinin maksimum değerleri eşit olacak şekilde normalize ederek üst üste çizip karşılaştıralım. Bu karşılaştırma her ikisinin maksimumlarının aynı $\omega_0 = 6 \text{ r/s}$ frekansında oluştuğunu ve $|H_{AG}(j\omega)| \times |H_{YG}(j\omega)|$ 'nın $|H_1(j\omega)| \times |H_2(j\omega)|$ 'ya göre daha dar bantlı ve dolayısıyla da frekans seçiciliği daha yüksek bir bant geçiren süzgeç özelliğinde olduğunu ortaya çıkartmaktadır.

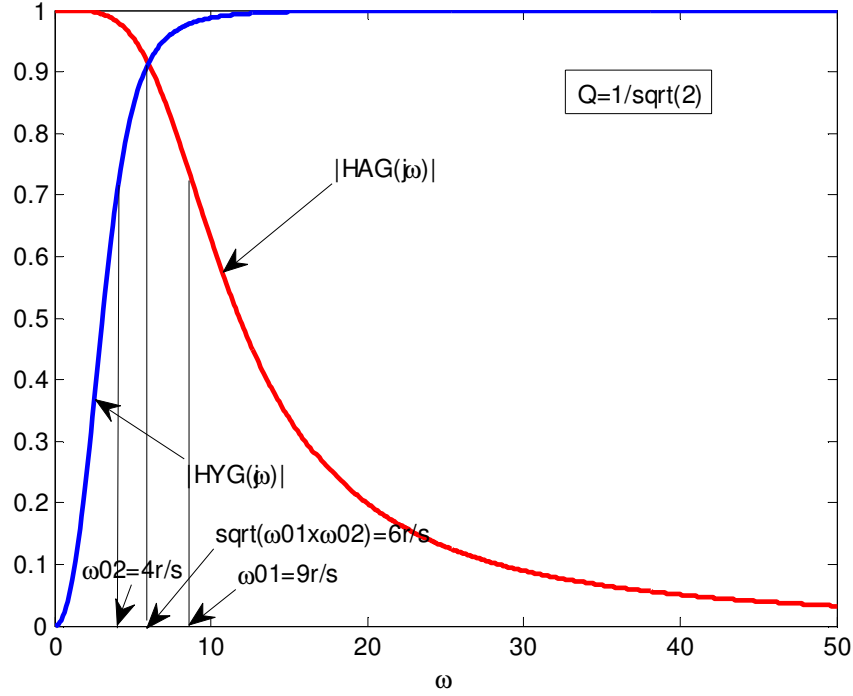


Şek.

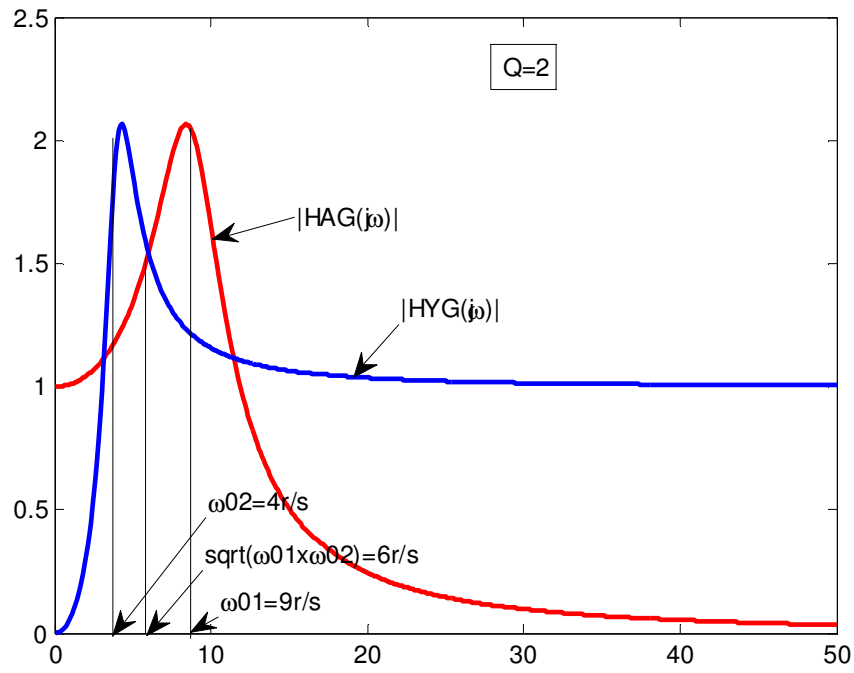
İki değişik Q değeri için $|H_{AG}(j\omega)|$, $|H_{YG}(j\omega)|$ ve $|H_{AG}(j\omega)| \times |H_{YG}(j\omega)|$ 'nın ω 'ya göre değişimlerini $\omega > 0$ için inceleyelim. Şek. de $Q = 1/\sqrt{2}$ için, Şek. de ise $Q = 2$ için $|H_{AG}(j\omega)|$ ve $|H_{YG}(j\omega)|$; Şek. ve de ise $Q = 1/\sqrt{2}$ ve $Q = 2$ için $|H_{AG}(j\omega)| \times |H_{YG}(j\omega)|$ 'nın ω 'ya göre değişimleri $\omega > 0$ için verilmiştir. Q 'nun belli bir değerden küçük olduğu durumlarda (örneğin $Q = 1/\sqrt{2}$) $|H_{AG}(j\omega)|$ ve $|H_{YG}(j\omega)|$ düz biçimlidir. Bu durumda $|H_{AG}(j\omega)| \times |H_{YG}(j\omega)|$ 'nın bir tek ekstremumu olup bu da bir

maksimumdur (Şek.). Q bu değerden büyükse eğrinin extremum sayısı üçe çıkmakta bunlardan ortadaki minimum, öteki ikisi ise maksimum olmaktadır (Şek.)

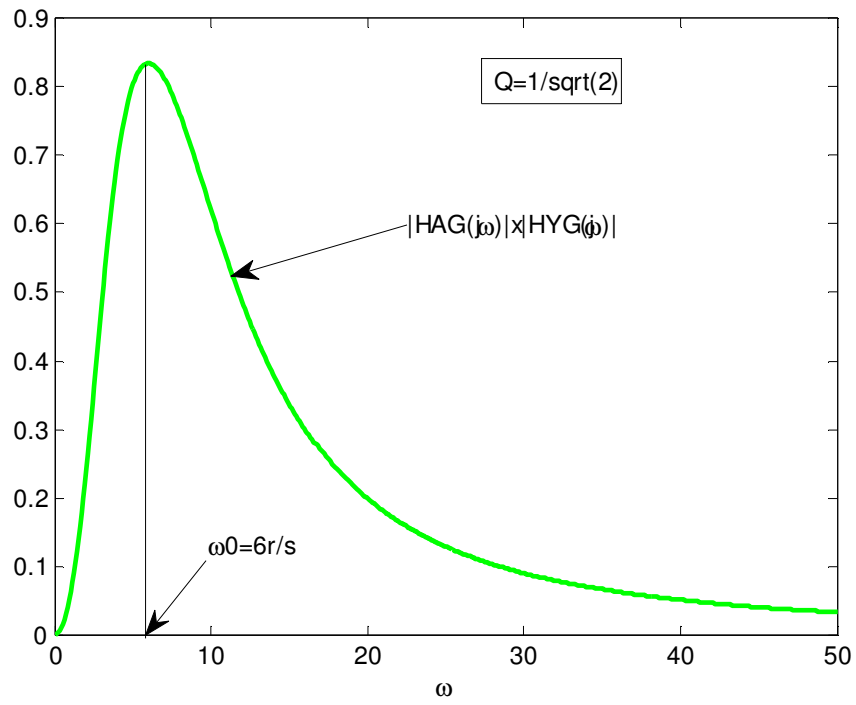
Her iki Q değeri için de $|H_{AG}(j\omega)| \times |H_{YG}(j\omega)|$ 'nın bant geçiren özelliğinde olduğu bu eğriden açık olarak görülmektedir. Biz burada tek extremumlu durumu inceleyeceğiz.



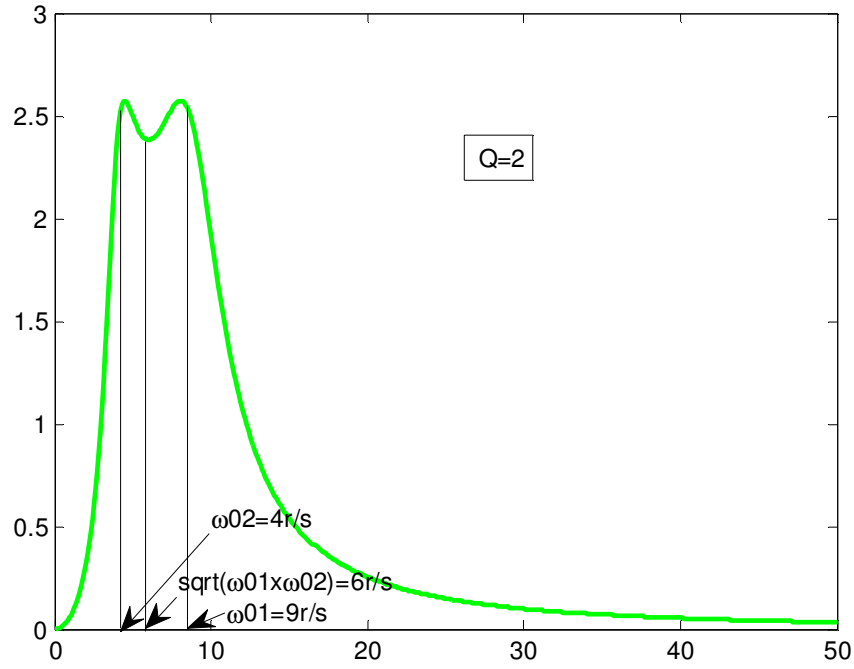
Şek.



Şek.



Şek.



Şek.

$|H_{AG}(j\omega)| \times |H_{YG}(j\omega)|$ 'yı hesaplayalım. Bunun için önce

$$H_{AG}(s) H_{YG}(s)$$

çarpımını oluşturalım.

$$H_{AG}(s) H_{YG}(s) = \omega_{01}^2 \frac{s}{s^2 + \frac{\omega_{01}}{Q}s + \omega_{01}^2} \frac{s}{s^2 + \frac{\omega_{02}}{Q}s + \omega_{02}^2} = \omega_{01}^2 H_{BG1}(s) H_{BG2}(s)$$

Bu ifadeden görüldüğü üzere kesim frekansı ω_{01} olan alçak geçiren $H_{AG}(s)$ ile kesim frekansı ω_{02} olan $H_{YG}(s)$ 'nin çarpımı merkez frekansları ω_{01} ve ω_{02} olan bant geçiren iki transfer fonksiyonunun çarpımına denktir.

$$H_{AG}(j\omega) = \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{01}^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_{01}}{Q} \omega}, \quad H_{YG}(j\omega) = \frac{-\omega^2}{\omega_{02}^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_{02}}{Q} \omega}$$

Buradan

$$\begin{aligned} |H_{AG}(j\omega)| \times |H_{YG}(j\omega)| &= \frac{\omega_{0_1}^2 \omega^2}{\left((\omega_{0_1}^2 - \omega^2)^2 + \frac{1}{Q^2} (\omega_{0_1} \omega)^2 \right)^{1/2} \left((\omega_{0_2}^2 - \omega^2)^2 + \frac{1}{Q^2} (\omega_{0_2} \omega)^2 \right)^{1/2}} \\ &= \frac{\frac{\omega_{0_1}}{\omega_{0_2}} Q^2}{\left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_1}} - \frac{\omega_{0_1}}{\omega} \right)^2 \right)^{1/2} \left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_2}} - \frac{\omega_{0_2}}{\omega} \right)^2 \right)^{1/2}} \end{aligned}$$

Bu ifadeyi

$$|H_{AG}(j\omega)| \times |H_{YG}(j\omega)| = \frac{A}{\sqrt{(1 + X^2(\omega))(1 + Y^2(\omega))}}$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi bu fonksiyonun ω 'ya göre maksimumlarını bulalım. $0 \leq \omega \leq \infty$ için tek bir maksimumu var ise $|H_{AG}(j\omega)| \times |H_{YG}(j\omega)|$, merkez frekansı söz konusu maksimumu veren ω değerine eşit olan bir bant geçiren süzgecin frekans karakteristiği olacaktır. $|H_{AG}(j\omega)| \times |H_{YG}(j\omega)|$ 'nın maksimumları ile

$$f(\omega) = \frac{1}{(1 + X^2(\omega))(1 + Y^2(\omega))}$$

ifadesinin maksimumları aynı olduğundan $f(\omega)$ 'nın ω 'ya türevini alalım:

$$\frac{df(\omega)}{d\omega} = \frac{2Y(\omega) \frac{dY(\omega)}{d\omega} (1 + X^2(\omega)) + 2X(\omega) \frac{dX(\omega)}{d\omega} (1 + Y^2(\omega))}{(1 + X^2(\omega))^2 (1 + Y^2(\omega))^2} \quad ()$$

Bu ifadenin $\omega = \sqrt{\omega_{0_1} \omega_{0_2}}$ için $\frac{df(\omega)}{d\omega} = 0$ olduğunu gösterelim.

$$\omega = \sqrt{\omega_{0_1} \omega_{0_2}} \text{ için } \begin{cases} X(\sqrt{\omega_{0_1} \omega_{0_2}}) = -Y(\sqrt{\omega_{0_1} \omega_{0_2}}) = Q \left(\sqrt{\frac{\omega_{0_2}}{\omega_{0_1}}} - \sqrt{\frac{\omega_{0_1}}{\omega_{0_2}}} \right) \\ \frac{dX(\sqrt{\omega_{0_1} \omega_{0_2}})}{d\omega} = \frac{dY(\sqrt{\omega_{0_1} \omega_{0_2}})}{d\omega} = Q \left(\frac{1}{\omega_{0_1}} + \frac{1}{\omega_{0_2}} \right) \end{cases}$$

elde edilir. Bu değerler () de yerine koyularak

$\frac{df(\sqrt{\omega_{0_1} \omega_{0_2}})}{d\omega} = 0$ bulunur. Q 'nun belli bir değerden küçük olduğu durumlarda (örneğin

$Q = 1/\sqrt{2}$) $\omega = \sqrt{\omega_{0_1} \omega_{0_2}}$ 'ın bir maksimum verdiği açık olarak bellidir.

$\frac{df(\omega)}{d\omega} = 0$ ifadesi açıkça yazılırsa

$$\frac{2Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_2}} - \frac{\omega_{0_2}}{\omega} \right) \left(\frac{1}{\omega_{0_2}} + \frac{\omega_{0_2}}{\omega^2} \right) \left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_1}} - \frac{\omega_{0_1}}{\omega} \right)^2 \right) + 2Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_1}} - \frac{\omega_{0_1}}{\omega} \right) \left(\frac{1}{\omega_{0_1}} + \frac{\omega_{0_1}}{\omega^2} \right) \left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_2}} - \frac{\omega_{0_2}}{\omega} \right)^2 \right)}{\left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_1}} - \frac{\omega_{0_1}}{\omega} \right)^2 \right)^2 \left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_2}} - \frac{\omega_{0_2}}{\omega} \right)^2 \right)^2} = 0$$

şeklinde olduğu görülmektedir.

Bu ifade MATLAB sembolik araç kutusunda düzenlendiğinde

$$\frac{-2Q^2 \omega_{0_1}^6 \omega_{0_2}^6 (\omega^2 - \omega_{0_1} \omega_{0_2}) (\omega^2 + \omega_{0_1} \omega_{0_2}) (2Q^2 \omega^4 + (1 - 2Q^2) (\omega_{0_1}^2 + \omega_{0_2}^2) \omega^2 + 2Q^2 \omega_{0_1}^2 \omega_{0_2}^2) \omega^{11}}{(Q^2 \omega^4 + \omega_{0_1}^2 (1 - 2Q^2) \omega^2 + Q^2 \omega_{0_1}^4)^4 (Q^2 \omega^4 + \omega_{0_2}^2 (1 - 2Q^2) \omega^2 + Q^2 \omega_{0_2}^4)^4} = 0$$

elde edilir.

Buradan denklemin köklerini bulmak amacıyla pay kısmı sıfıra eşitlendiğinde 5 tanesinin

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{\omega_{0_1} \omega_{0_2}}, \omega_{3,4} = \pm j \sqrt{\omega_{0_1} \omega_{0_2}}, \omega_5 = 0 \text{ (11 katlı)}$$

olduğu açık olarak görülmektedir.

Diğer dört kök ise

$$(2Q^2 \omega^4 + (1 - 2Q^2) (\omega_{0_1}^2 + \omega_{0_2}^2) \omega^2 + 2Q^2 \omega_{0_1}^2 \omega_{0_2}^2) = 0$$

$$\left((\omega^2)^2 + \omega_{0_1}^2 \left(\frac{1}{2Q^2} - 1 \right) (\omega_{0_1}^2 + \omega_{0_2}^2) \omega^2 + \omega_{0_1}^2 \omega_{0_2}^2 \right) = 0$$

dördüncü dereceden denklemi ikinci dereceden denklem gibi çözülerek

$$\omega_{3,4}^2 = \frac{(\omega_{0_1}^2 + \omega_{0_2}^2) \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right) \pm \sqrt{(\omega_{0_1}^2 + \omega_{0_2}^2)^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right)^2 - 4\omega_{0_1}^2 \omega_{0_2}^2}}{2}$$

$$\omega_{6,7,8,9} = \pm \sqrt{\frac{(\omega_{0_1}^2 + \omega_{0_2}^2)}{2} \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right) \pm \sqrt{\frac{(\omega_{0_1}^2 + \omega_{0_2}^2)^2}{4} \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right)^2 - \omega_{0_1}^2 \omega_{0_2}^2}}$$

bulunur.

Örnek olarak $Q = 2$, $\omega_{0_1} = 9\text{rad/s}$, $\omega_{0_2} = 4\text{rad/s}$ alınırsa denklem

$$(\omega^2 - 36)(\omega^2 + 36) \left(\omega^4 - \frac{54999}{8} \omega^2 + 7857 \right) = 0$$

kökleri ise

$$\omega_{1,2} = \pm 6 \text{ rad/s}, \omega_{3,4} = \pm j 6 \text{ rad/s}, \omega_5 = 0, \omega_{6,7,8,9} = \pm 4.47 \text{ rad/s}, \pm 8.06 \text{ rad/s}$$

elde edilir.

$Q = 5$, $\omega_{0_1} = 9\text{rad/s}$, $\omega_{0_2} = 4\text{rad/s}$ alınırsa denklemin kökleri ilk beşi aynı olmak üzere

$$\omega_{6,7,8,9} = \pm 4.06 \text{ rad/s}, \pm 8.86 \text{ rad/s}$$

elde edilir.

$Q = \sqrt{2}$, $\omega_{0_1} = 9\text{rad/s}$, $\omega_{0_2} = 4\text{rad/s}$ alınırsa denklemin kökleri ilk beşi aynı olmak üzere

$$\omega_{6,7,8,9} = \pm 5.58 \text{ rad/s}, \pm 6.45 \text{ rad/s}$$

elde edilir.

$Q = \sqrt{1.94}$, $\omega_{0_1} = 9\text{rad/s}$, $\omega_{0_2} = 4\text{rad/s}$ alınırsa denklemin kökleri ilk beşi aynı olmak üzere

$$\omega_{6,7,8,9} = 6 \text{ rad/s}(2 \text{ katlı}), -6 \text{ rad/s}(2 \text{ katlı})$$

elde edilir.

$Q = 1$, $\omega_{0_1} = 9\text{rad/s}$, $\omega_{0_2} = 4\text{rad/s}$ alınırsa denklemin kökleri ilk beşi aynı olmak üzere

$$\omega_{6,7,8,9} = \pm (5.49 - 2.42j) \text{ rad/s}, \pm (5.49 + 2.42j) \text{ rad/s}$$

elde edilir.

$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\omega_{0_1} = 9\text{rad/s}$, $\omega_{0_2} = 4\text{rad/s}$ alınırsa denklemin kökleri ilk beşi aynı olmak üzere

$$\omega_{6,7,8,9} = \pm (4.24 - 4.24j) \text{ rad/s}, \pm (4.24 + 4.24j) \text{ rad/s}$$

elde edilir.

Bu sonuçlardan $Q < 1.94$ için geriye kalan 4 kökün kompleks çıktığı görülmektedir.

Örnek:

- 3-dB kesim frekansı $\omega_{0_1} = 9 \text{ rad/s}$, $Q_1 = 1/\sqrt{2}$ olan 2. dereceden bir AG süzgecin $H_{AG}(s)$ ile gösterilen transfer fonksiyonu ile, $\omega_{0_2} = 4 \text{ rad/s}$, $Q_2 = Q_1 = 1/\sqrt{2}$ olan 2. dereceden bir YG süzgecin $H_{YG}(s)$ transfer fonksiyonunu; $|H_{AG}(j\omega)|$ ve $|H_{YG}(j\omega)|$ genlik fonksiyonlarını hesaplayınız ve bunları ω 'ya göre çiziniz. 3-dB kesim frekanslarını ve bu frekanslardaki genlikleri hesaplayınız ve çizdiğiniz eğriler üzerinde gösteriniz.
- Bu iki süzgecin ardarda bağlanması ile oluşan 4. dereceden süzgecin $H(s)$ transfer fonksiyonunu hesaplayınız. Bu fonksiyon ne tür bir süzgeç verir? Neden?
- $|H(j\omega)|$ genlik fonksiyonunu hesaplayınız ve ω 'ya göre çiziniz. Çizdiğiniz egride merkez frekansı hangi noktaya karşılık düşer? İşaretleyiniz. Merkez frekansı ω_0 'ı hesaplayınız. Bu süzgecin yeni 3-dB kesim frekansları ω_1 ve ω_2 $H_{AG}(s)$ ve $H_{YG}(s)$ 'nin 3-dB kesim frekanslarına göre ne şekilde bir değişim gösterir? ω -

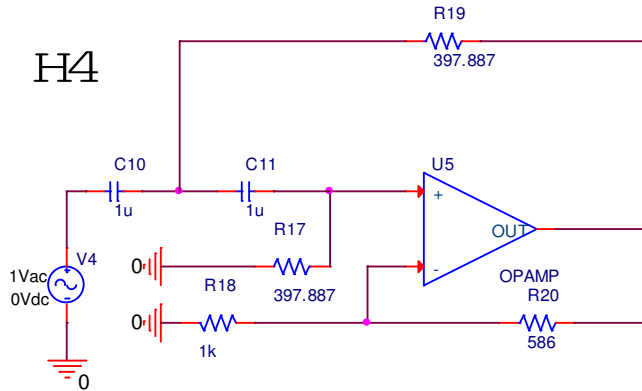
ekseninde $\omega_{0_1}, \omega_1, \omega_0, \omega_2$ ve ω_{0_1} frekanslarını işaretleyiniz. Bu frekanslara karşılık gelen genlikleri çizdiğiniz eğri üzerinde gösteriniz.

- $H_{AG}(s)$ ve $H_{YG}(s)$ 'yi Sallen-Key türü devrelerle gerçekleştiriniz.

Aşağıdaki örnekte $f_{0_1} = 400 \text{ Hz}$, $f_{0_2} = 5000 \text{ Hz}$, $Q_1 = Q_2 = 1/\sqrt{2}$ alınmış, $H_{AG}(s)$ ve $H_{YG}(s)$ Sallen-Key türü devrelerle gerçekleştirilmiştir.

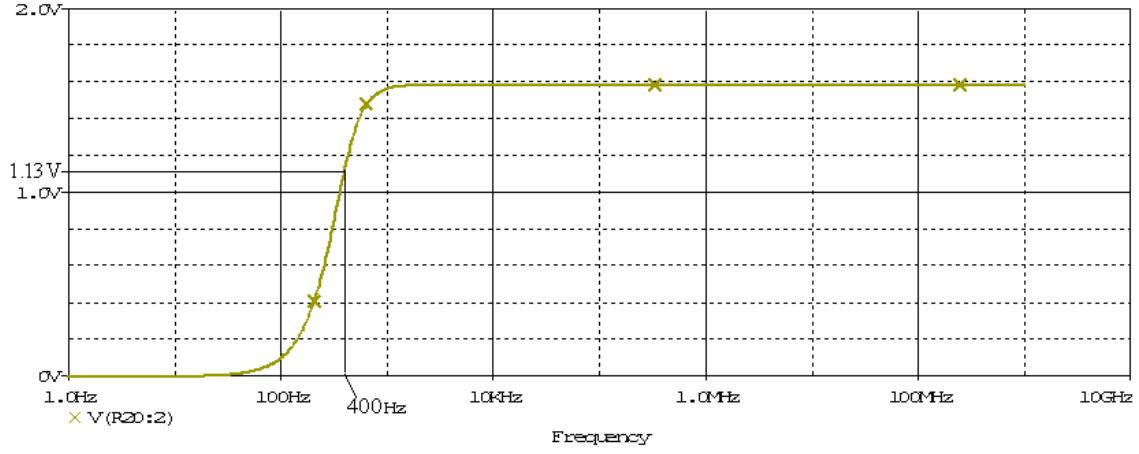
$f_{0_2} = 400 \text{ Hz}$, $Q_2 = 1/\sqrt{2}$ OLAN YG SALLEN-KEY SÜZGEÇİ

$$H_{YG_{400}}(s) = \frac{K s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2} = \frac{K s^2}{s^2 + 800\sqrt{2}\pi s + 64 \times 10^4 \pi^2}$$



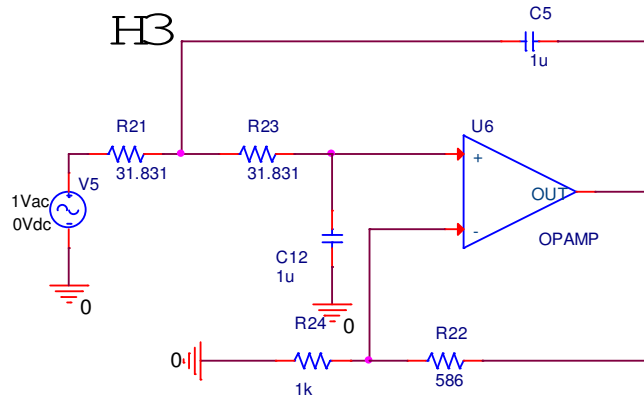
Şek.

Bu transfer fonksiyonunu gerçekleyen YG Sallen-Key Devresi Şek. de gösterilmiştir. Şek. de de $|H_{AG_{400}}(j\omega)|$ 'nın $\log_{10}\omega$ 'ya göre çizimi verilmiştir.

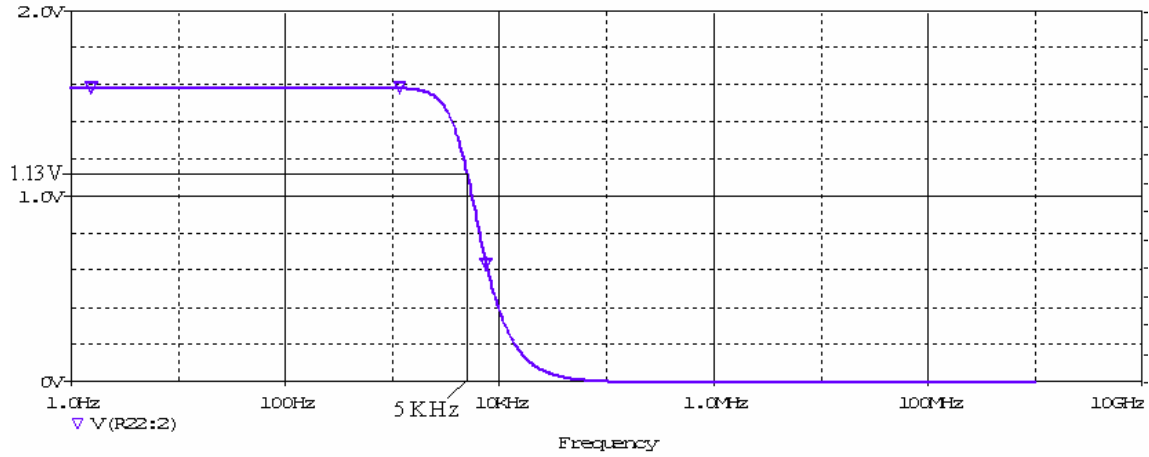


$f_{0_1} = 5000Hz$, $Q_1 = 1/\sqrt{2}$ OLAN AG Sallen-Key SÜZGEÇİ

$$H_{AG_{5000}}(s) = \frac{\omega_0^2 K}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} = \frac{10^8 \pi^2 K}{s^2 + 10000\sqrt{2} \pi s + 10^8 \pi^2}$$



Bu transfer fonksiyonunu gerçekleyen AG Sallen-Key Devresi Şek. de gösterilmiştir. Şek. de de $|H_{AG_{400}}(j\omega)|$ 'nın $\log_{10} \omega$ 'ya göre çizimi verilmiştir.



Şek.

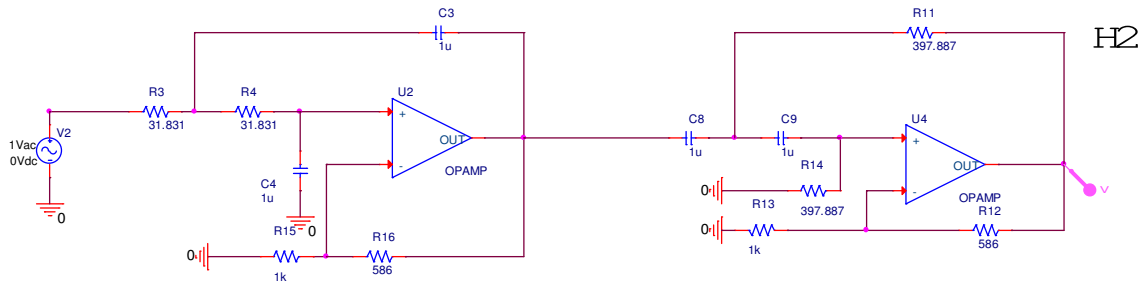
AG VE YG SALLEN-KEY SÜZGEÇLERİNİN ARDARDA BAĞLANMASI İLE BG SÜZGEÇ OLUŞTURULMASI

$$H_{BG_{\sqrt{400 \times 5000}}}(s) = H_{YG_{400}}(s)H_{AG_{5000}}(s) = \frac{K s^2}{s^2 + \frac{\omega_{0_2}}{Q} s + \omega_{0_2}^2} \frac{\omega_{0_1}^2 K}{s^2 + \frac{\omega_{0_1}}{Q} s + \omega_{0_1}^2}$$

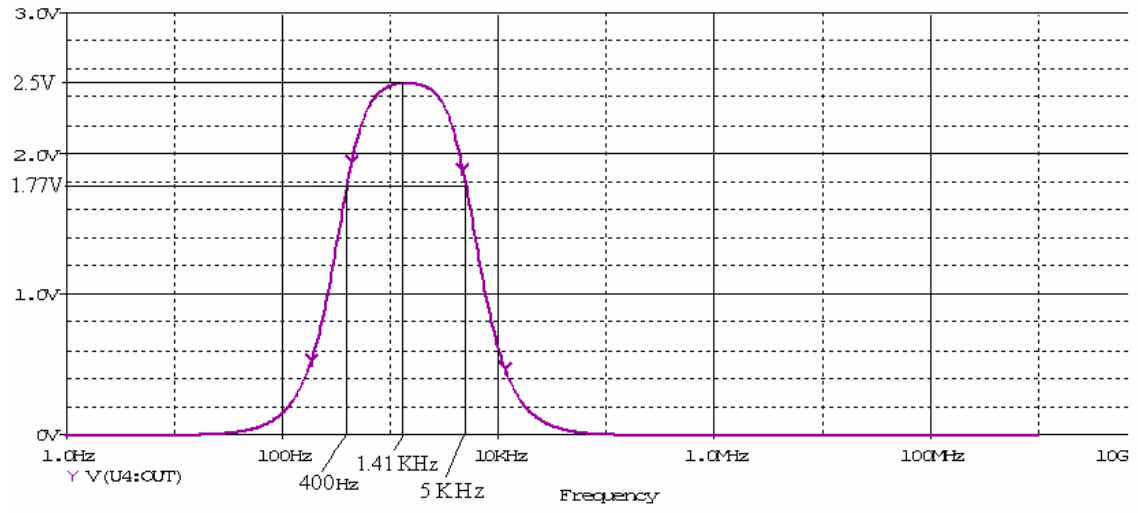
$$= \frac{K s^2}{s^2 + 800\sqrt{2} \pi s + 64 \times 10^4 \pi^2} \frac{10^8 \pi^2 K}{s^2 + 10000\sqrt{2} \pi s + 10^8 \pi^2}$$

Bu transfer fonksiyonunu gerçekleyen YG Sallen-Key Devresi Şek. de gösterilmiştir. Şek. de de $|H_{AG_{400}}(j\omega)|$ 'nin $\log_{10}\omega$ 'ya göre çizimi verilmiştir.

Merkez frekans= Merkez frekans: $\omega_0 = \sqrt{400 \times 5000} = 1414,2 \text{ r/s}$



Şek.



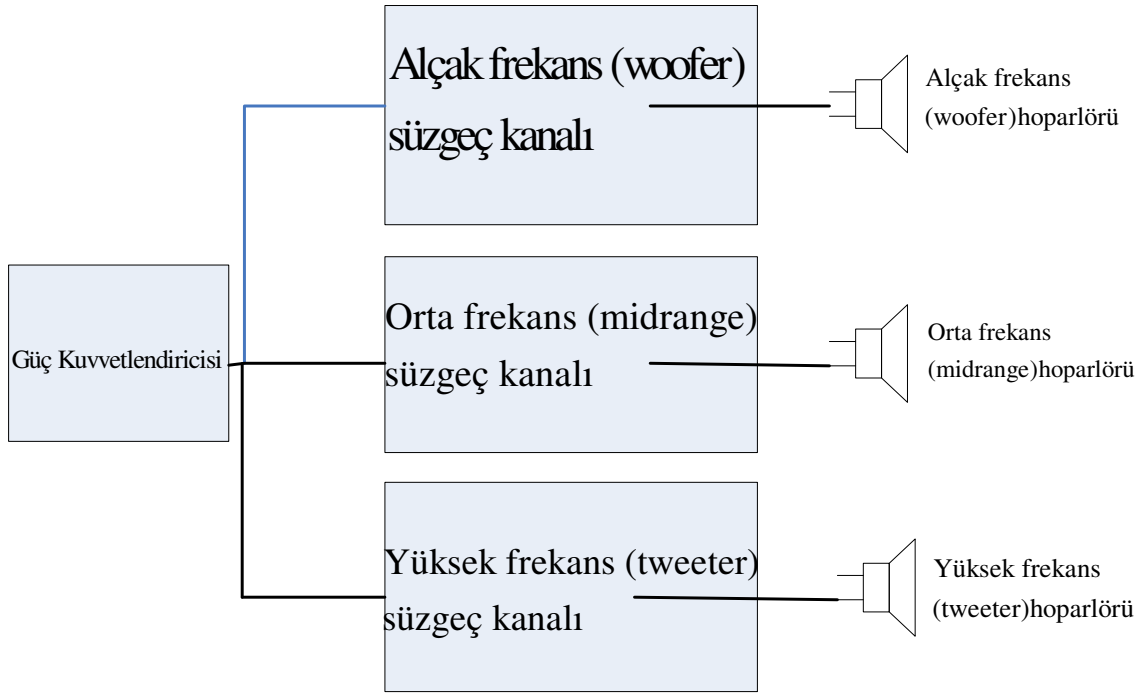
Şek.

CROSSOVER SİSTEMLERİ

(http://en.wikipedia.org/wiki/Audio_crossover#Second_order)

Crossover sistemleri kaliteli ses üretiminde kullanılmak amacıyla tasarlanan elektronik süzgeç devrelerinden oluşan düzenlerdir. Hoparlörlerin çoğu ses frekans bandının tümünü kapsayacak kadar geniş bandlı yapılamazlar. Dolayısıyla da hi-fi hoparlör sistemleri, her biri frekans bendının değişik bölgesinde çalışan hoparlörlerden oluşurlar. Crossover süzgeç sistemi ses frekans bandını alçak ve yüksek, veya alçak, orta ve yüksek olmak üzere bantlara ayırarak bu frekans bantları için optimize edilmiş hoparlörlere gönderir (Şek.). Bu şekilde sistemden maksimum verim ve kalite alınması sağlanmış olur. Alçak, orta ve yüksek frekans bölgeleri için özel olarak yapılmış hoparlörlere İngilizce literatürde, sırasıyla, 'Woofer Speaker', 'Midrange Speaker' ve 'Tweeter Speaker' denir.

Crossover Sisteminin Blok Diyagramı



Şek.

3-dB KESİM FREKANSI $f_{01} = 400 \text{ Hz}$ OLAN AG (WOOFER) KANALI

AG kanalı 3-dB kesim $f_{01} = 400 \text{ Hz}$ olan bir AG süzgecinden oluşur. Bu süzgeci Sallen-Key AG süzgeç topolojisi ile gerçekleştirsek

$$CR = \frac{1}{\omega_{0_1}} \text{ ve } K = 3 - \frac{1}{Q}$$

şeklindedir. $|H(j\omega)|$ 'nın ω 'ya göre düz olması için Butterworth transfer fonksiyonunu tercih edecek olursak ikinci dereceden Butterworth polinomu için $Q = 1/\sqrt{2}$ almamız gerektiği açıktır. Öyleyse $f_{0_1} = 400\text{Hz}$ için

$$R = \frac{1}{10^{-6} \times 2\pi \times 400} = 397.887 \Omega \text{ ve } K = 1.586$$

elde edilir. AG Sallen-Key süzgecinin transfer fonksiyonu

$$H_{AG}(s) = \frac{(1/CR)^2 K}{s^2 + [(3-K)/CR]s + (1/CR)^2} = \frac{\omega_{0_1}^2 K}{s^2 + \frac{\omega_{0_1}}{Q}s + \omega_{0_1}^2} ; CR = \frac{1}{\omega_{0_1}}, K = 3 - \frac{1}{Q}$$

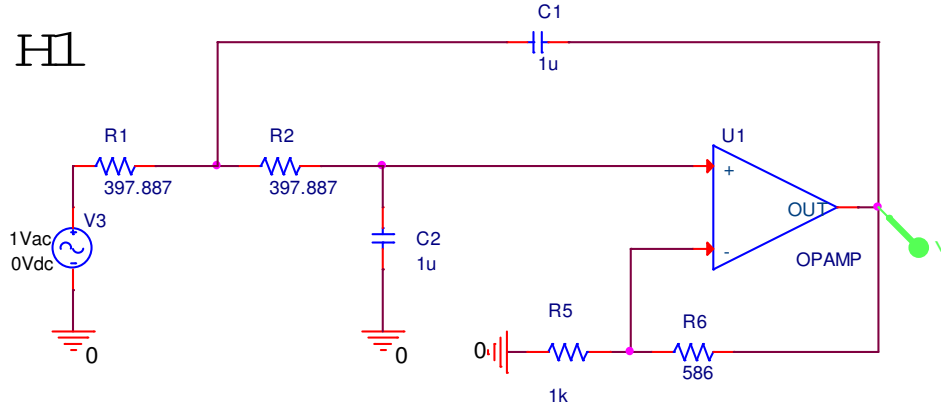
şeklinde olduğundan

$$H_{AG_{400}}(s) = \frac{64 \times 10^4 \pi^2 K}{s^2 + 800\sqrt{2} \pi s + 64 \times 10^4 \pi^2} = \frac{64 \times 10^4 (3 - \sqrt{2}) \pi^2}{s^2 + 800\sqrt{2} \pi s + 64 \times 10^4 \pi^2}$$

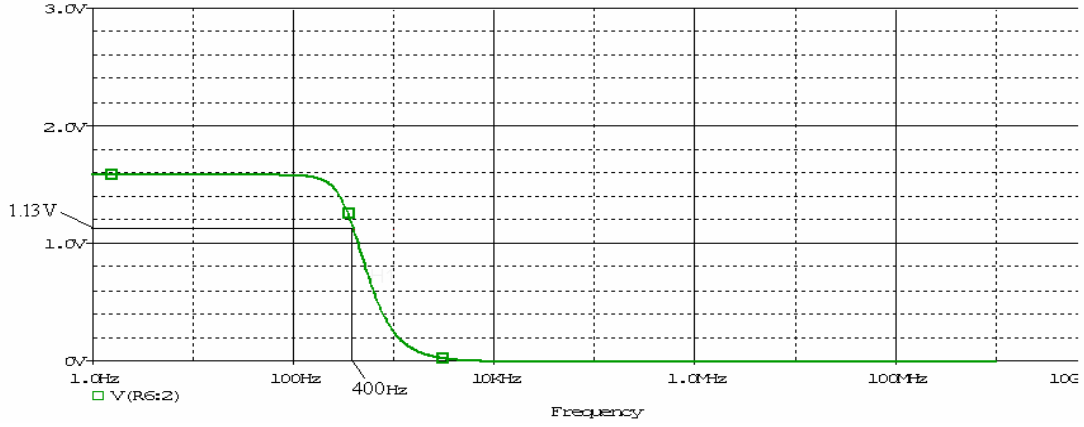
$$\cong \frac{10^7}{s^2 + 3554 s + 632 \times 10^4}$$

bulunur. Bu transfer fonksiyonunu gerçekleyen AG Sallen-Key devresi Şek. de gösterilmiştir.

Şek. de de $|H_{AG_{400}}(j\omega)|$ 'nın $\log_{10} \omega$ 'ya göre çizimi verilmiştir.



Şek.



Şek.

3-dB KESİM FREKANSLARI $f_{0_1} = 400 \text{ Hz}$ ve $f_{0_2} = 5000 \text{ Hz}$ OLAN ORTA FREKANS (MIDRANGE) KANALI

Orta frekans (midrange) süzgeci, ardarda bağlanmış iki süzgeçten oluşur: 3-dB kesim frekansı 400Hz olan YG ve 3-dB kesim frekansı 5000Hz olan AG süzgeç.

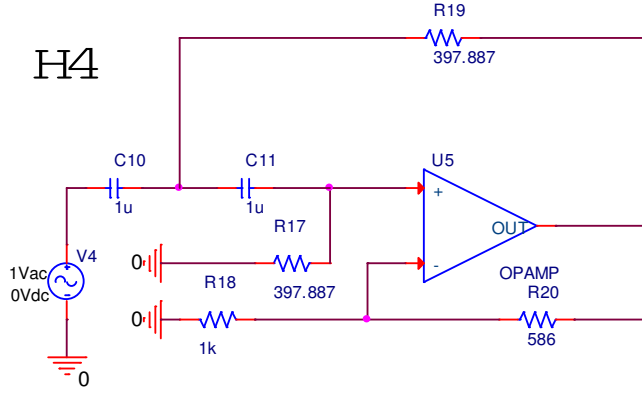
Bu kanaldaki YG süzgecinin 3-dB kesim frekansı AG (woofer) süzgecinin kesim frekansı ile aynıdır. $|H(j\omega)|$ 'nın ω 'ya göre düz olması için Butterworth transfer fonksiyonunu tercih edecek olursak ikinci dereceden Butterworth polinomu için $Q = 1/\sqrt{2}$ almamız gerektiği açıktır. Dolayısıyla da YG süzgecinin Sallen-Key devresindeki R direncinin ve K kazancının değerleri AG (woofer) süzgecinin Sallen-Key devresinin R direnci ve K kazancının değerleri ile aynı şekilde hesaplanır ve aynı değerler elde edilir:

$$R = \frac{1}{10^{-6} \times 2\pi \times 400} = 397.887 \Omega, K = 1.586.$$

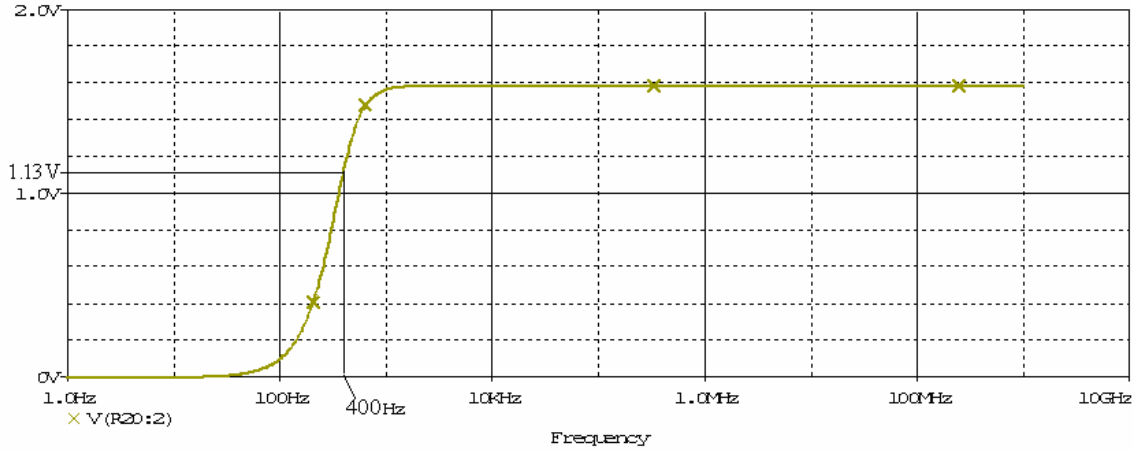
YG Sallen-Key süzgecinin transfer fonksiyonu

$$H_{YG_{400}}(s) = \frac{K s^2}{s^2 + \frac{\omega_{0_1}}{Q} s + \omega_{0_1}^2} = \frac{(3 - \sqrt{2})s^2}{s^2 + 800\sqrt{2}\pi s + 64 \times 10^4 \pi^2} \cong \frac{1.586 s^2}{s^2 + 3554 s + 632 \times 10^4}$$

şeklinde. Bu transfer fonksiyonunu gerçekleyen YG Sallen-Key Devresi Şek. de gösterilmiştir. Şek. de de $|H_{AG_{400}}(j\omega)|$ 'nın $\log_{10} \omega$ 'ya göre çizimi verilmiştir.



Şek.



Şek.

Şimdi bu kanaldaki AG süzgecin R ve K değerlerini hesaplayalım. Bu süzgeci Sallen-Key AG süzgeç topolojisi ile gerçekleştirsek

$$CR = \frac{1}{\omega_0} \text{ ve } K = 3 - \frac{1}{Q}$$

şeklindedir. $|H(j\omega)|$ 'nın ω 'ya göre düz olması için Butterworth transfer fonksiyonunu tercih edecek olursak ikinci dereceden Butterworth polinomu için $Q = 1/\sqrt{2}$ almamız gerektiği açıktır. Öyleyse $f_{0_2} = 5000\text{Hz}$ için

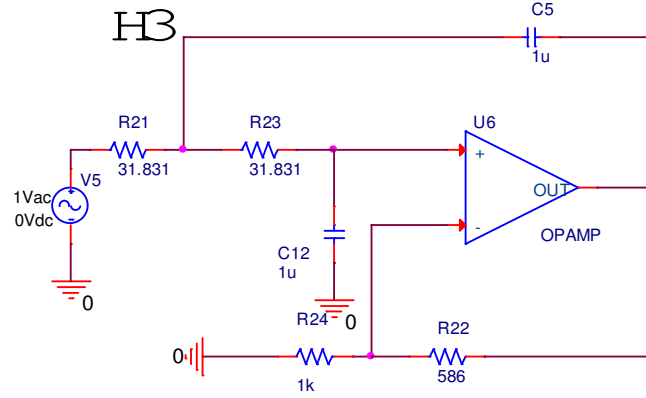
$$R = \frac{1}{10^{-6} \times 2\pi \times 5000} = 31.831 \Omega \text{ ve } K = 1.586$$

bulunur. Bu süzgecin transfer fonksiyonu

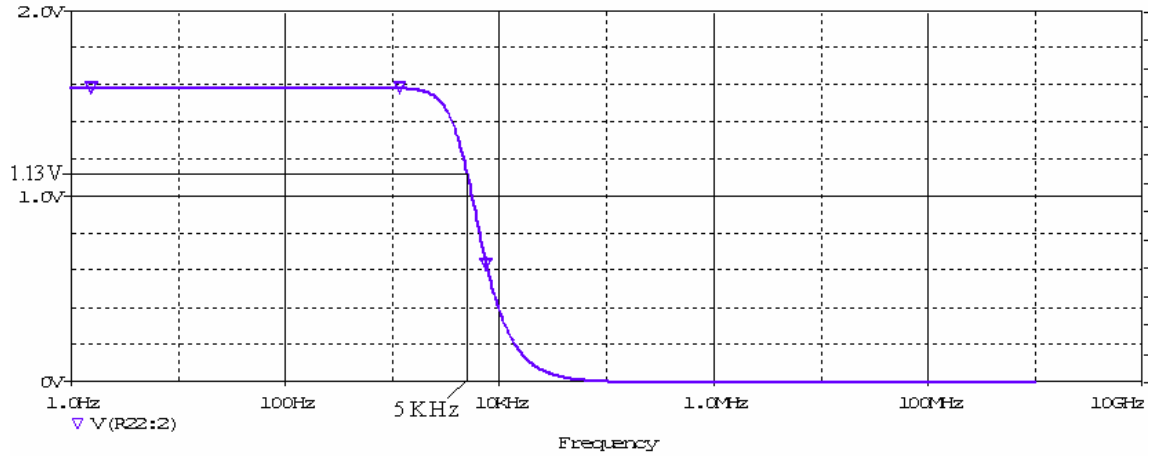
$$H_{AG_{5000}}(s) = \frac{(1/CR)^2 K}{s^2 + [(3-K)/CR]s + (1/CR)^2} = \frac{\omega_0^2 K}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} = \frac{10^8 \pi^2 K}{s^2 + 10000\sqrt{2}\pi s + 10^8 \pi^2}$$

$$= \frac{10^8 \pi^2 (3-\sqrt{2})}{s^2 + 10000\sqrt{2}\pi s + 10^8 \pi^2} = \frac{1565 \times 10^6}{s^2 + 44429 s + 9.87 \times 10^8}$$

Bu transfer fonksiyonunu gerçekleyen AG Sallen-Key Devresi Şek. de gösterilmiştir. Şek. de dde $|H_{AG_{400}}(j\omega)|$ 'nın $\log_{10}\omega$ 'ya göre çizimi verilmiştir.

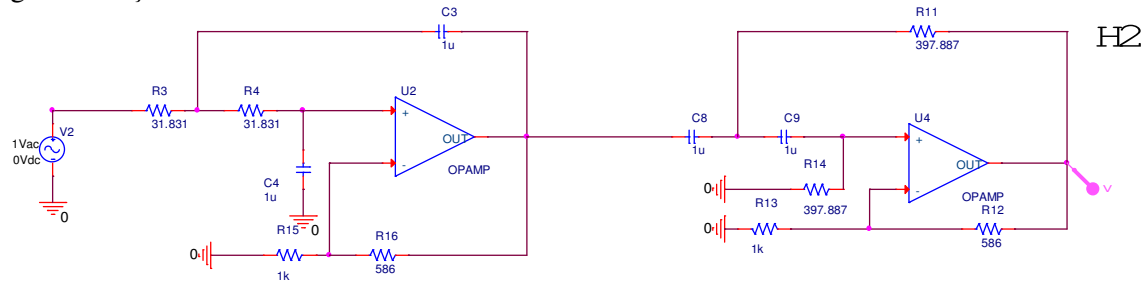


Şek.



Şek.

Bu YG ve AG süzgeçlerinin ardarda bağlanması ile elde edilen süzgeç devresi Şek. de gösterilmiştir.



Şek.

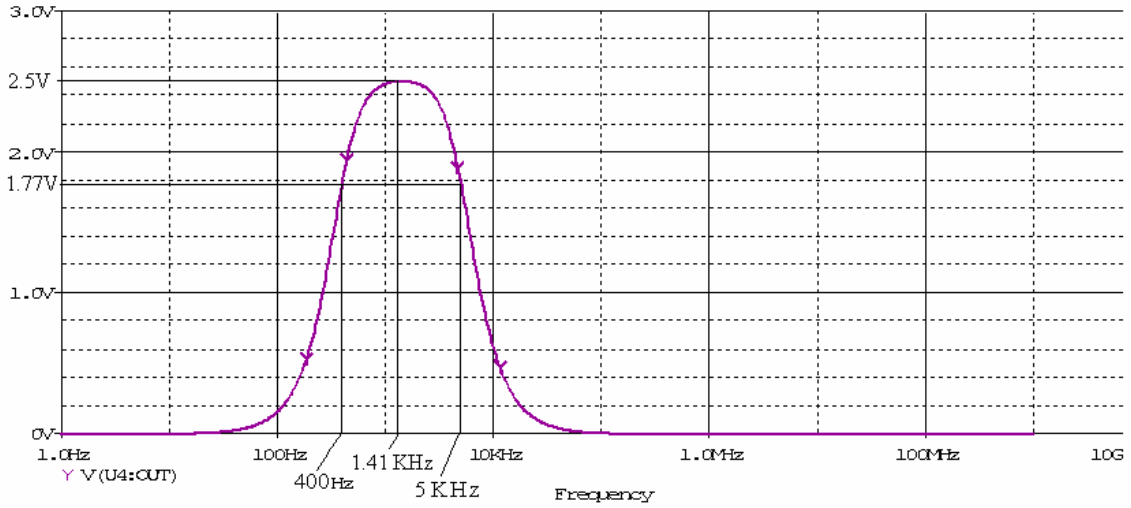
Bu devrenin transfer fonksiyonu

$$H_{\text{orta fr.}}(s) = H_{BG_{\sqrt{400 \times 5000}}}(s) = H_{YG_{400}}(s)H_{AG_{5000}}(s) = \frac{K s^2}{s^2 + \frac{\omega_{0_2}}{Q}s + \omega_{0_2}^2} \frac{\omega_{0_1}^2 K}{s^2 + \frac{\omega_{0_1}}{Q}s + \omega_{0_1}^2}$$

$$= \frac{1.586 s^2}{s^2 + 3554 s + 632 \times 10^4} \times \frac{1565 \times 10^6}{s^2 + 44429 s + 9.87 \times 10^8}$$

$$= \frac{2482 \times 10^6 s^2}{(s^2 + 3554 s + 632 \times 10^4)(s^2 + 44429 s + 9.87 \times 10^8)}$$

şeklinde bulunur. Şek. de de $|H_{\text{orta fr.}}(j\omega)|$ 'nin $\log_{10} \omega$ 'ya göre çizimi verilmiştir.



Şek.

Merkez frekans: $\omega_0 = \sqrt{400 \times 5000} = 1414,2 \text{ r/s}$

Şek.

Şek.

YÜKSEK FREKANS (TWEETER) KANALI

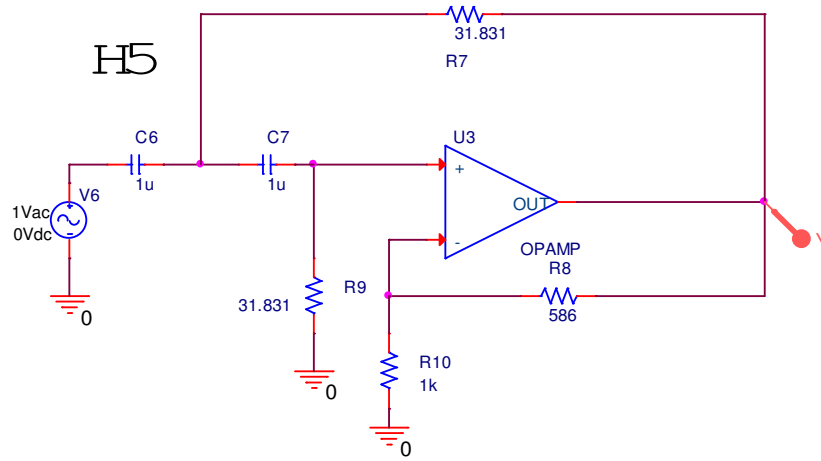
AG kanalı 3-dB kesim $f_{0_1} = 400 \text{ Hz}$ olan bir AG süzgecinden oluşur. Bu süzgeci Sallen-Key AG süzgeç topolojisi ile gerçekleştirebilirsek

The tweeter channel consists of a HP filter with a cutoff frequency of 5000Hz.

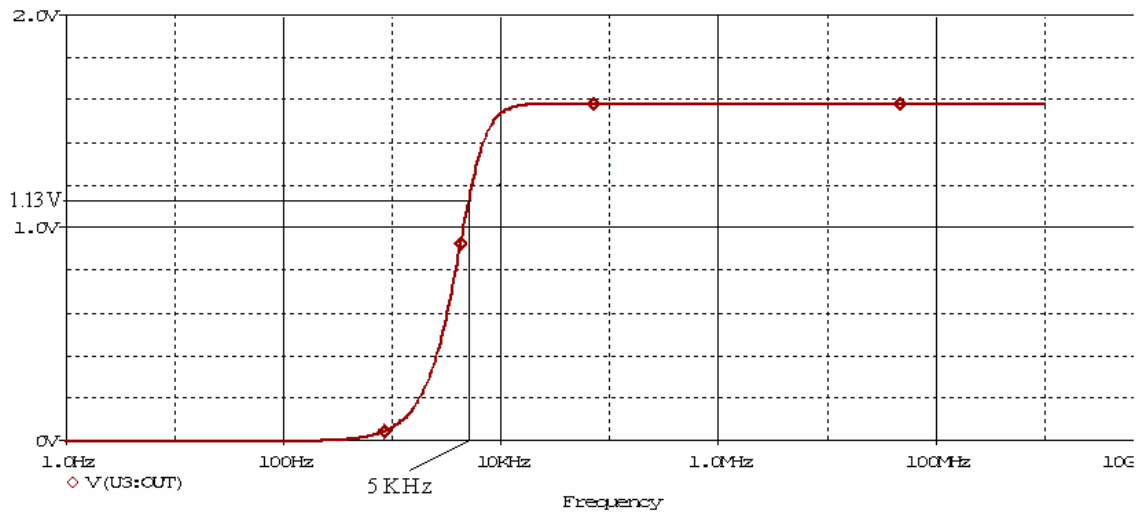
The HP filter in this channel has the same cutoff frequency as that of the LP filter of the midrange channel. Therefore the value of the resistor R and the gain K in this circuit are calculated in the same way as those of the LP filter of the midrange channel. Therefore we get $R = 31.831\Omega$ and $K = 1.586$.

$$H_{YG_{5000}}(s) = \frac{K s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2} = \frac{K s^2}{s^2 + 10000\sqrt{2}\pi s + 10^8\pi^2}$$

Bu transfer fonksiyonunu gerçekleyen YG Sallen-Key Devresi Şek. de gösterilmiştir. Şek. de de $|H_{AG_{400}}(j\omega)|$ 'nın $\log_{10}\omega$ 'ya göre çizimi verilmiştir.

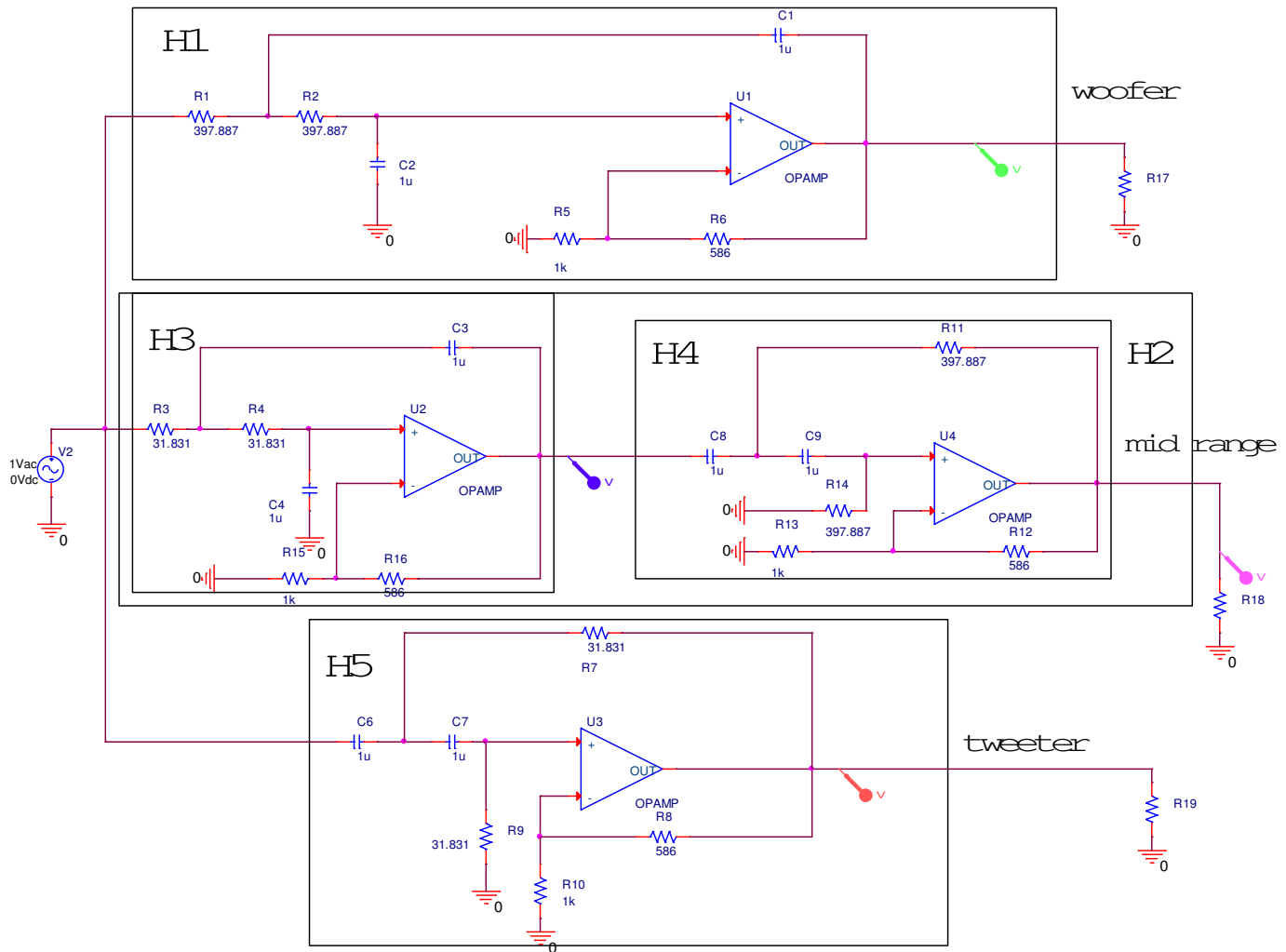


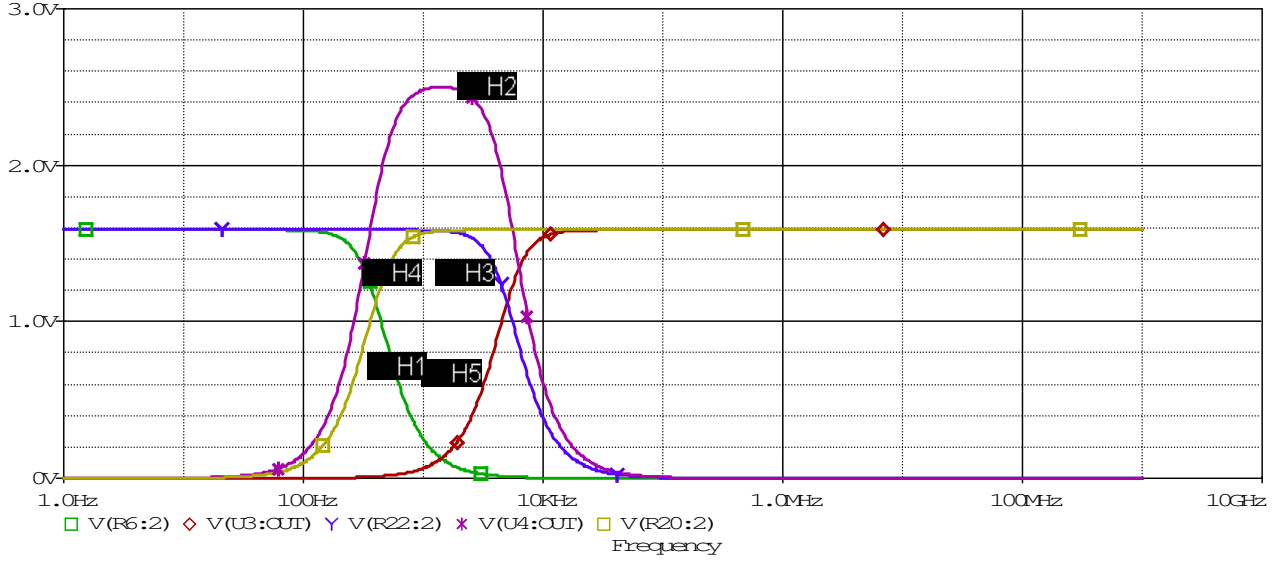
Şek.



Şek.

CROSSOVER SİSTEMİ





Şimdi de $|H_{AG}(j\omega)|$ ile $|H_{YG}(j\omega)|$ eğrilerinin kesişme noktalarını bulalım. Bunun için

$$|H_{AG}(j\omega)| = |H_{YG}(j\omega)|$$

denkleminin verdiği ω değerini bulmamız gerekir. Bu denklem

$$\frac{\frac{\omega_{0_1}}{\omega}}{\left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_1}} - \frac{\omega_{0_1}}{\omega}\right)^2\right)^{1/2}} = \frac{\frac{\omega}{\omega_{0_2}}}{\left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_2}} - \frac{\omega_{0_2}}{\omega}\right)^2\right)^{1/2}}$$

şeklinde yazılabilir. Her iki yanın karesi alınarak

$$\frac{\omega^4}{\omega_{0_1}^2 \omega_{0_2}^2} = \frac{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_2}} - \frac{\omega_{0_2}}{\omega}\right)^2}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_1}} - \frac{\omega_{0_1}}{\omega}\right)^2}$$

elde edilir. Sekizinci dereceden olan bu denklemi sağlayan sekiz adet ω değeri vardır. Bu değerlerden birinin $\omega = \sqrt{\omega_{0_1} \omega_{0_2}}$ olduğu açık olarak görülmektedir. Bu denklemi çözmek için öncelikle her iki yanın karesi alınmış ifade bir önceki forma getirilirse

$$\frac{\frac{\omega_{0_1}^2}{\omega^2}}{\left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_1}} - \frac{\omega_{0_1}}{\omega}\right)^2\right)} = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_{0_2}^2}}{\left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_2}} - \frac{\omega_{0_2}}{\omega}\right)^2\right)}$$

Çapraz çarpımlar yapılarak ifade sıfıra eşitlenirse

$$\frac{\omega^2}{\omega_{0_2}^2} \left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_1}} - \frac{\omega_{0_1}}{\omega} \right)^2 \right) - \frac{\omega_{0_1}^2}{\omega^2} \left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_2}} - \frac{\omega_{0_2}}{\omega} \right)^2 \right) = 0$$

olduğu görülür. Paydada ω değişkeni bırakmamak amacıyla ifade ω^4 ile çarpılırsa

$$\frac{\omega^6}{\omega_{0_2}^2} \left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_1}} - \frac{\omega_{0_1}}{\omega} \right)^2 \right) - (\omega_{0_1}^2 \omega^2) \left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_2}} - \frac{\omega_{0_2}}{\omega} \right)^2 \right) = 0$$

$$\frac{\omega^6}{\omega_{0_2}^2} + Q^2 \frac{\omega^6}{\omega_{0_2}^2} \left(\frac{\omega}{\omega_{0_1}} - \frac{\omega_{0_1}}{\omega} \right)^2 - \omega_{0_1}^2 \omega^2 - Q^2 \omega_{0_1}^2 \omega^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_2}} - \frac{\omega_{0_2}}{\omega} \right)^2 = 0$$

haline gelir. Bu ifade MATLAB sembolik araç kutusunda çarpanlarına ayrıldığında

$$\left(\omega^2 - \omega_{0_1} \omega_{0_2} \right) \left(\omega^2 + \omega_{0_1} \omega_{0_2} \right) \left(\omega^4 + \omega_{0_1}^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 2 \right) \omega^2 + \omega_{0_1}^2 \omega_{0_2}^2 \right) = 0$$

elde edilir.

Buradan denklemin dört kökünün

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{\omega_{0_1} \omega_{0_2}}, \omega_{3,4} = \pm j \sqrt{\omega_{0_1} \omega_{0_2}}$$

olduğu açık olarak görülmektedir.

Diğer dört kök ise

$$\left(\left(\omega^2 \right)^2 + \omega_{0_1}^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 2 \right) \omega^2 + \omega_{0_1}^2 \omega_{0_2}^2 \right)$$

dördüncü dereceden denklemi ikinci dereceden denklem gibi çözülerek

$$\omega_{3,4}^2 = \omega_{0_1}^2 \left(\left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right)^2 - \left(\frac{\omega_{0_2}}{\omega_{0_1}} \right)^2} \right)$$

$$\omega_{5,6,7,8} = \pm \omega_{0_1} \left(\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right)} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right)^2 - \left(\frac{\omega_{0_2}}{\omega_{0_1}} \right)^2} \right)$$

bulunur.

Örnek olarak $Q = 2$, $\omega_{0_1} = 9\text{rad/s}$, $\omega_{0_2} = 4\text{rad/s}$ alınırsa denklem

$$\left(\omega^2 - 36 \right) \left(\omega^2 + 36 \right) \left(\omega^4 - \frac{567}{4} \omega^2 + 1296 \right) = 0$$

kökleri ise

$$\omega_{1,2} = \pm 6\text{rad/s}, \omega_{3,4} = \pm j6\text{rad/s}, \omega_{5,6,7,8} = \pm 3.13\text{rad/s}, \pm 11.49\text{rad/s}$$

elde edilir.

$Q = 5$, $\omega_{0_1} = 9\text{rad/s}$, $\omega_{0_2} = 4\text{rad/s}$ alınırsa denklemin kökleri ilk beşi aynı olmak üzere

$$\omega_{6,7,8,9} = \pm 2.94 \text{ rad/s}, \pm 12.25 \text{ rad/s}$$

elde edilir.

$Q = \sqrt{2}$, $\omega_{0_1} = 9\text{rad/s}$, $\omega_{0_2} = 4\text{rad/s}$ alınırsa denklemin kökleri ilk beşi aynı olmak üzere

$$\omega_{6,7,8,9} = \pm 10.47 \text{ rad/s}, \pm 3.44 \text{ rad/s}$$

elde edilir.

$Q = 0.9487$, $\omega_{0_1} = 9 \text{ rad/s}$, $\omega_{0_2} = 4 \text{ rad/s}$ alınırsa denklemin kökleri ilk beşi aynı olmak üzere

$$\omega_{6,7,8,9} = 6 \text{ rad/s (2 katlı)}, -6 \text{ rad/s (2 katlı)}$$

elde edilir.

$Q = 1$, $\omega_{0_1} = 9 \text{ rad/s}$, $\omega_{0_2} = 4 \text{ rad/s}$ alınırsa denklemin kökleri ilk beşi aynı olmak üzere

$$\omega_{6,7,8,9} = \pm 4.68 \text{ rad/s}, \pm 7.68 \text{ rad/s}$$

elde edilir.

$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\omega_{0_1} = 9 \text{ rad/s}$, $\omega_{0_2} = 4 \text{ rad/s}$ alınırsa denklemin kökleri ilk beşi aynı olmak üzere

$$\omega_{6,7,8,9} = \pm (4.24 - 4.24j) \text{ rad/s}, \pm (4.24 + 4.24j) \text{ rad/s}$$

elde edilir.

Bu sonuçlardan $Q < 0.9487$ için geriye kalan 4 kökün kompleks çıktığı görülmektedir.