....../....../201......

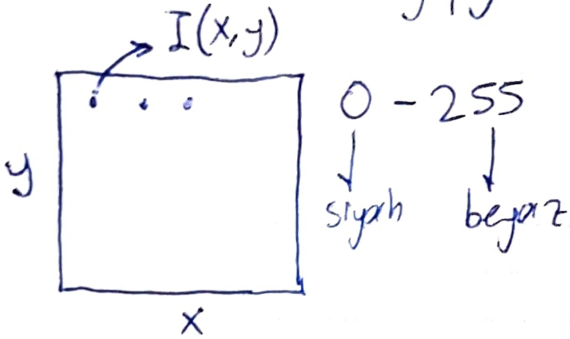
Dolar

Euro

İşaret işleme Toolbox

EEG Signals

Girdi neresi - Çıktı neresi - Kod ne yapıyor - sonda ne görmemiz gerekiyor.

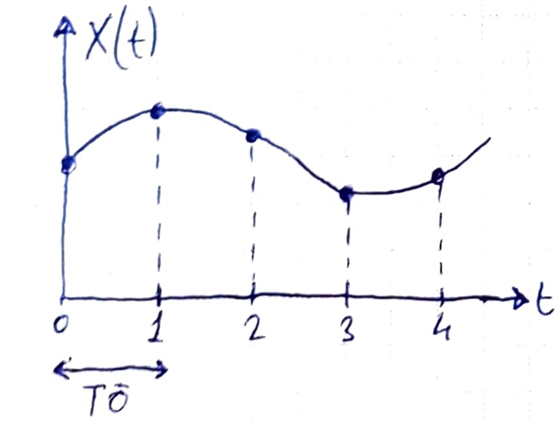


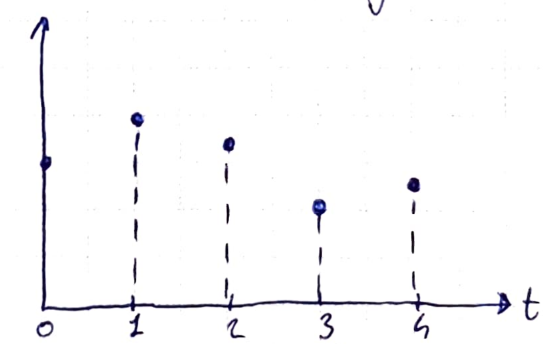
$$I(x,y) = \begin{bmatrix} r(x,y) \\ g(x,y) \\ b(x,y) \end{bmatrix} \rightarrow \text{renkli görüntü}$$

$I(x,y,t) \rightarrow$ Video (siyah beyaz ise 1 kanallı, renkli ise 3 kanallı)

Sayısal İşaret → Ayrık Genlik / Ayrık bağımsız değişken

Analog İşaret → Sürekli Genlik / sürekli bağımsız değişken





Örneklenmiş İşaret (Genlikler Sürekli, Bağımsız değişken ayrık) → Quantalama

Adaptif Quantalama

Filtre

$$\bullet \quad x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = \sum x[k]\, h[n-k] \quad , \quad y(t) = \int h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

Yeni Sanayi Sitesi 19 Ağustos Cad. No:78 Merkez/BALIKESİR
Tel: 0 266 246 23 24 Faks: 0 266 246 38 98

GİMTAŞ

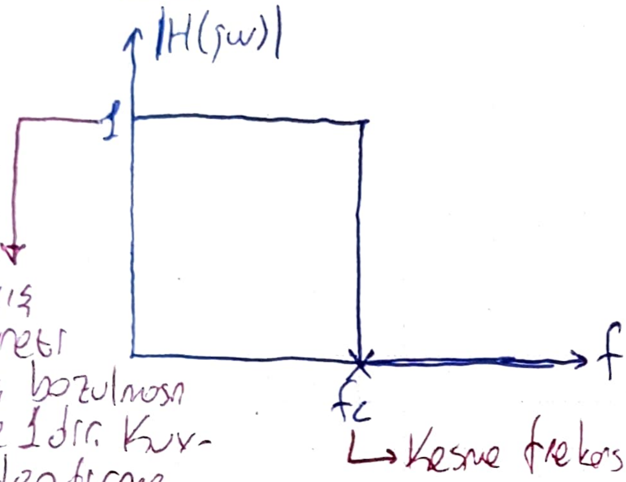
$\Omega \rightarrow$ Analog frekans
$w \rightarrow$ Sayısal frekans

........./........../201........

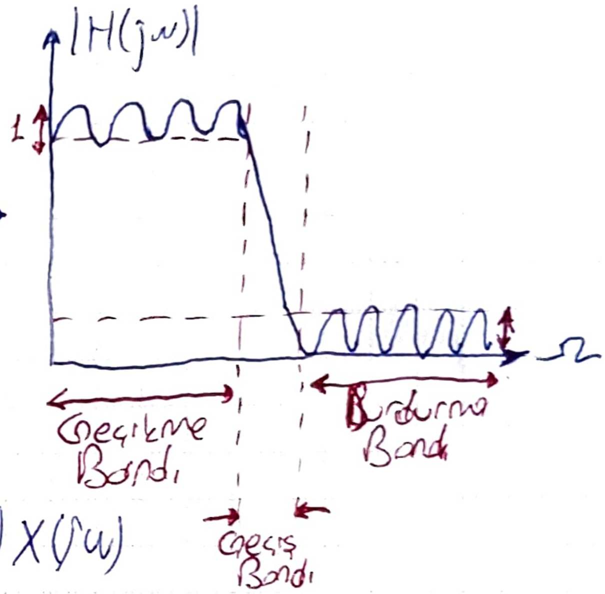
Dolar

Euro

Alçak Geçiren Filtre



Çıkış işareti hiç bozulmasın diye 1 dir. Kuvvetlendirme için 1'den büyük ya da küçük olabilir.



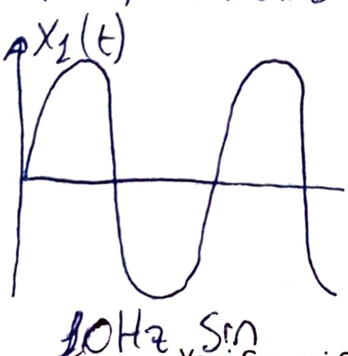
$$Y(jw) = H(jw)\,X(jw)$$

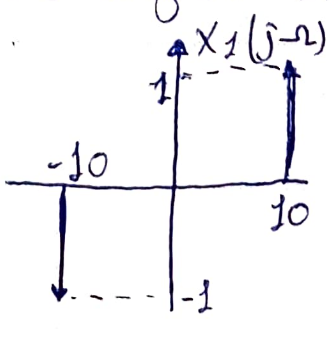
- Filtreleme önce frekans eksenine taşınıp ($X(jw)$) filtreler zaten frekans ekseninde çalışıyor ($H(jw)$) konvolüsyon ile $Y(jw)$ elde edilir. Tekrar zamana dönüşmesi için ters dönüşüm yapılmalıdır.

- Geçirme bandı ve durdurma bandındaki genlik miktarına bak. Filtre çıkışında hiçbir zaman sıfır gözükmez. (ideal olmadığından)

- Filtre tasarımında hep pozitif frekansa bakılır.

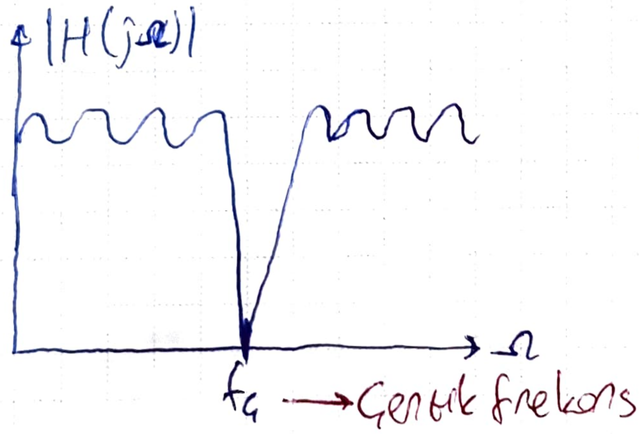
- Geçiş bandında frekans değeri sızıntı ile geçer.





Çentik Filtre

Bazı durumlarda işaretı bozan gürültü tek bir frekans bileşenine sahip sinüsoidal bir işarettir. Örneğin; elektrik ve manyetik alan yayan güç hatlarının ürettiği gürültü 60Hz'lik sinüsoidal bir işarettir. Bu durumda çentik frekansı 60Hz olan çentik filtre ile gürültü temizleme işi gerçekleştirilir. Tek bir frekans bileşenini bastıran filtreye çentik filtre denir.



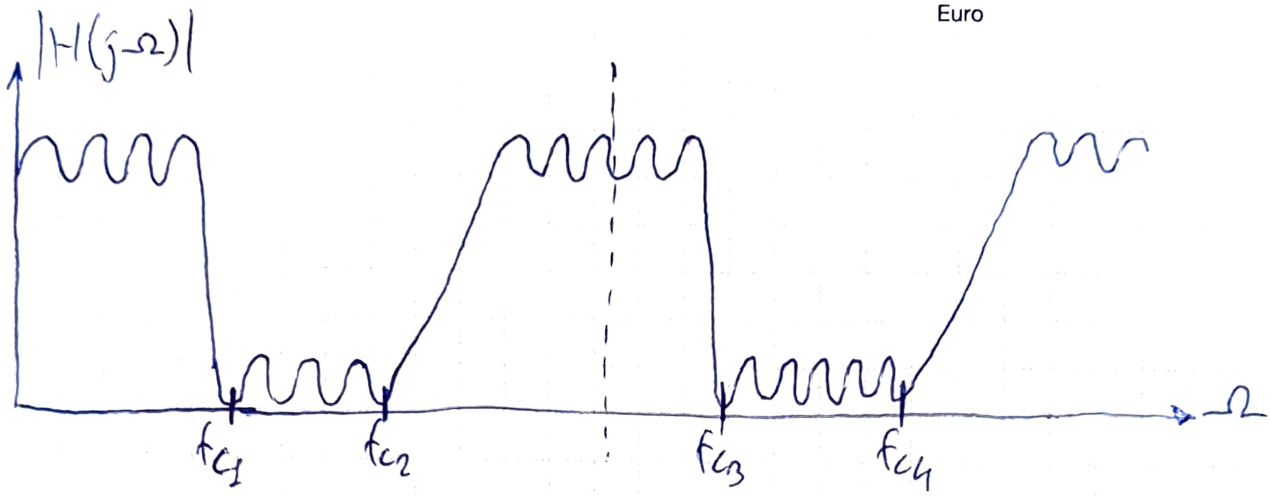
İmpuls olarak sinüs dalgasını atıyor.

Çok Bandlı Filtre

Bazı uygulamalarda istenmeyen bileşenleri temizlemek için birden fazla geçirme bandı ve söndürme bandı gerekir böyle uygulamalarda çok bandlı filtreler kullanılır.

Yeni Sanayi Sitesi 19 Ağustos Cad. No:78 Merkez/BALIKESİR
Tel: 0 266 246 23 24 Faks: 0 266 246 38 98

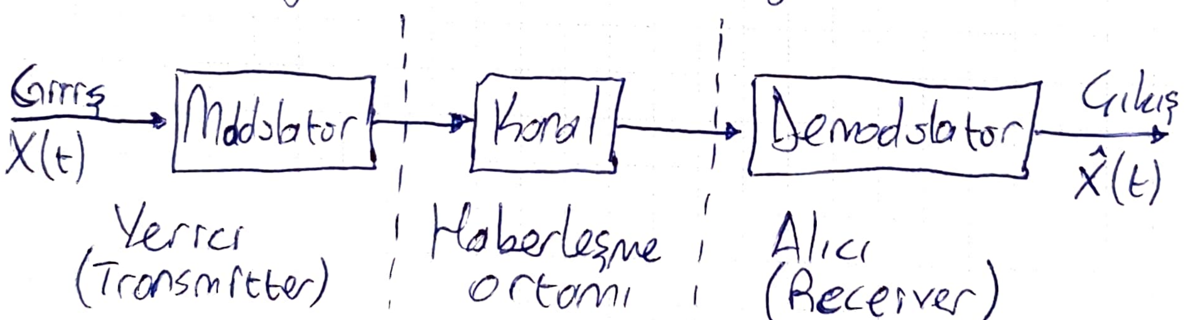
Hilbert Dönüştürücü → Slayt

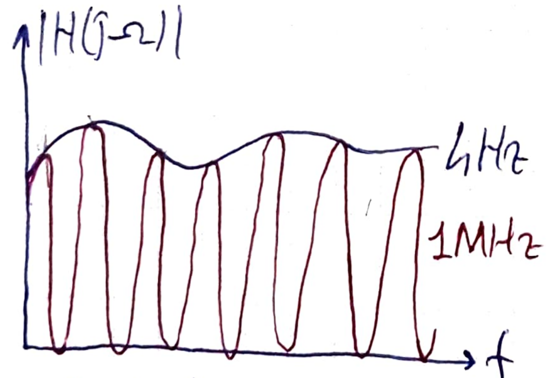


Tarak Filtre

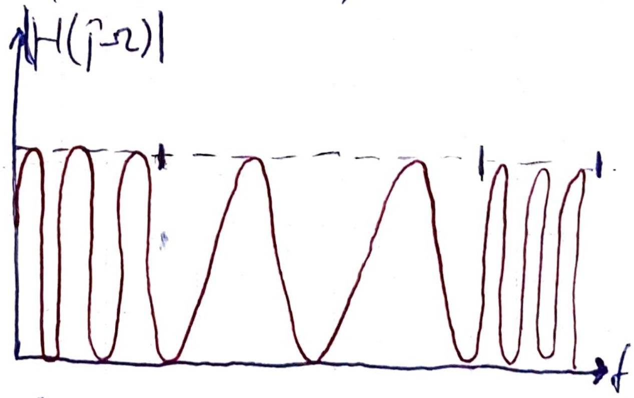
Düşük bir frekansın tam sayı katlarını bastıran filtreye tarak filtre denir.

Modülasyon ve DeModülasyon





Genlik Değişken
AM→ Genlik Modülasyon



Genlik Sbt, frekans değişken
FM→ frekans Modülasyon

- Anten boyutu 1/f oranı ile küçülür. Tüm sistemler tersinir olmalıdır. Telefonlarda 300Hz ile 4KHz arası iletişim

Modülasyon

Analog Modülasyon
- Genlik Mod. (AM)
- Frekans Mod. (FM)
- Faz Mod. (PM)
- Darbe Genlik Mod. (PAM)

Sayısal Modülasyon
- Darbe Kod Mod. (PCM)
- Darbe Genişlik Mod. (PWM)

⋮

Genlik Modülasyon

$X(t) = A\cos(\Omega_0 t) \longrightarrow$ mesaj, bilgi işareti

$t(t) = A\cos(\Omega_c t) \longrightarrow$ taşıyıcı

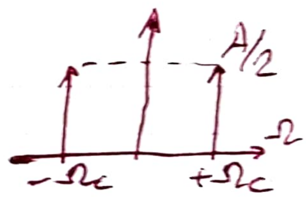
$\Omega_c \gg \Omega_0$

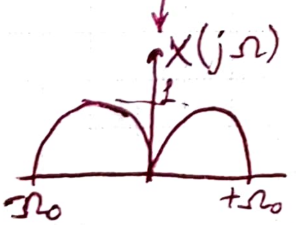
- Modülasyon için en kolay yol;

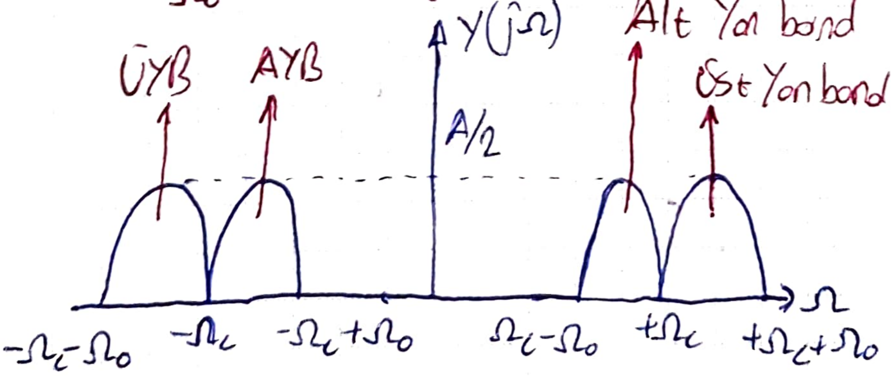
$y(t) = x(t)\,t(t) = x(t)\,A\cos(\Omega_c t)$

$Y(j\Omega) = X(j\Omega) * T(j\Omega)$

$\hookrightarrow \frac{A}{2}\left\{\delta(\Omega-\Omega_c) + \delta(\Omega+\Omega_c)\right\}$



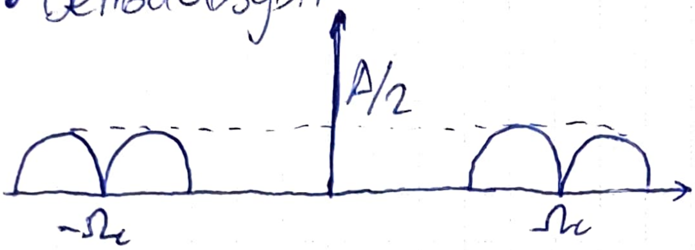


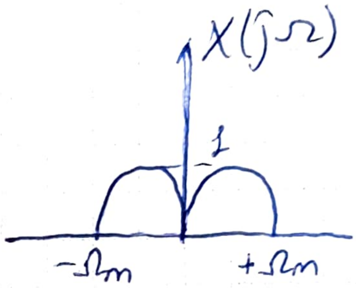


Bastırılmış taşıyıcılı Genlik Mod.

$A\cos(\Omega_c t)\left[1 + x(t)\right]$ olsaydı taşıyıcı dahil olur. Band genişliği küçültülerek tek yan band ve artık yan band elde edilir. (Simetrik işaretler için geçerli)

• Demodülasyon

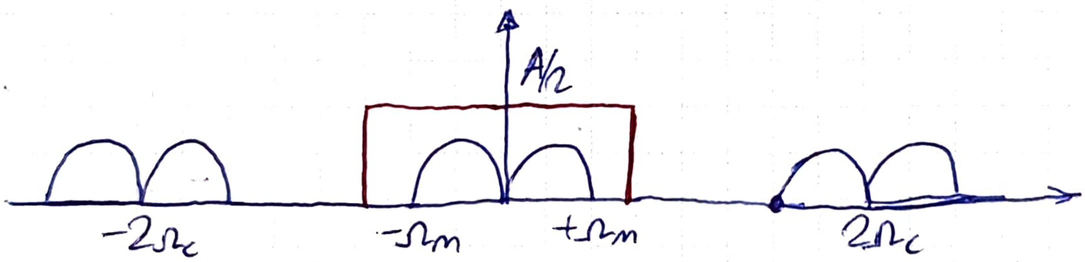




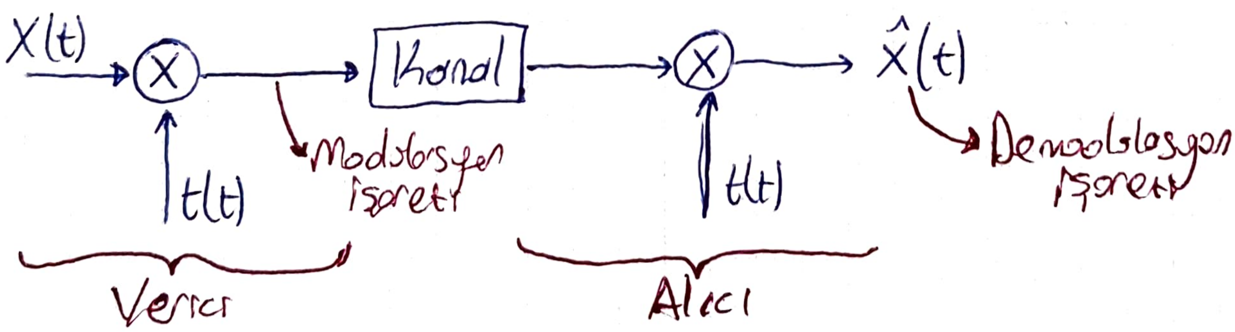
$A\cos(\Omega_c t)\,x(t)$ yi $\cos(\Omega_c t)$ ile çarparsak;

$$= A\underbrace{\cos^2(\Omega_c t)}_{\frac{1+\cos(2\Omega_c t)}{2}}x(t)$$

$$= \frac{A}{2}x(t) + \frac{A}{2}\cos(2\Omega_c t)\,x(t)$$



Alçak Geçiren Filtre { Kazancı 2 olsun; Kesim frekansı $\Omega_m < f_c < 2\Omega_c - \Omega_m$



• Faz kenetlemeli çevrim devreleri taşıyıcı senkronizasyon problemini çözer.

Toplanabilir Beyaz Gauss Gürültüsü
Tüm frekanslarda eşit etkili

......../......../201......
Dolar
Euro

- M noktalı kayan ortalama alıcı

$$X[n]=\{0\ 1\ 1\ 2\ 3\ 5\ 1\}\ 0\ 0 \qquad M=3$$

$n=0$

$$X[n]=\left\{\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{6}{3},\frac{10}{3},\frac{9}{3},\frac{6}{3},\frac{1}{3}\right\}$$

Zaman uzayında işaretteki gürültüyü bir miktar kaldırmasını sağlar.

- $y[n]=\frac{1}{M}\left\{\sum_{k=0}^{M-1} x[n-k] \mp x[n-M]\right\}$

$$y[n]=\frac{1}{M}\left\{\sum_{k=1}^{M} x[n-k]+x[n]-\cancel{x[n-M]}+\cancel{x[n-M]}-x[n-M]\right\}$$

$$y[n]=y[n-1]+\left\{\frac{x[n]-x[n-M]}{M}\right\}$$ 2 toplam, 1 bölme

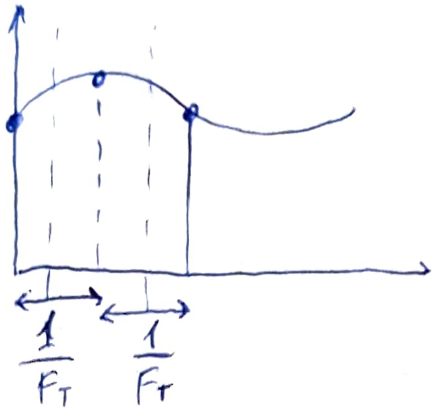
- Üstel Ağırlıklı Kayan ortalama filtre, önceki değerler daha etkisiz.

Doğrusal Ara Değerleme (Bilinear Interpolation)

Verilen bir dizinin örnekleme hızını arttırarak veya azaltarak yeni bir dizi üretmek için kullanılır. $X[n]$ dizisinin örnekleme frekansı F_T, yeni dizinin örnekleme frekansı ise F_T' olsun. Örnekleme hızı değişim oranı $R=\frac{F_T'}{F_T}$ ile ifade edilir. Eğer $R>1$ ise işlem interpolasyon (ara değerleme), $R<1$ ise desimasyon (seyreltme) olarak adlandırılır.

Kaotik işaretler
Fourier analizi 0,2sn için
↓
pencereleme

üst örnekleme → interpolasyon
alt örnekleme → desimasyon
Ör. Dijital Kameralarda zoom



$F_T \rightarrow \frac{1}{F_T}$ sn

• Doğrusal ara değerleme olmayan ara örnek değerlerini tahmin etmede kullanılır. Ara değerleme işlemi iki adımdan oluşur. İlk olarak $x[n]$ üst örnekleyiciden geçirilerek $x_u[n]$ dizisi elde edilir. Daha sonra interpolasyon ifadesi uygulanır. En basit uygulamalarından biri sayısal bir görüntüye zoom yapmaktır. Görüntüde boyutu iki katına çıkarmak için önce yatayda sonra dikeyde sıfır değerli pixeller yerleştirilir ve ara değerleme ifadesi uygulanır.

• Medyan (Ortanca) Filtre sıralama yapılıp ortadaki seçilir böylece en büyük genlikli sinyal yok olur. (Zaman ekseninde)

• Örnek: Toplayıcı devre doğrusal mıdır?

$$y[n] = y[-1] + \sum_{\ell=0}^{n} x_1[\ell]$$

$$\alpha x_1[n] \longrightarrow y_1[n] = y_1[-1] + \sum_{l=0}^{n} \alpha x_1[l]$$

$$\beta x_2[n] \longrightarrow y_2[n] = y_2[-1] + \sum_{l=0}^{n} \beta x_2[l]$$

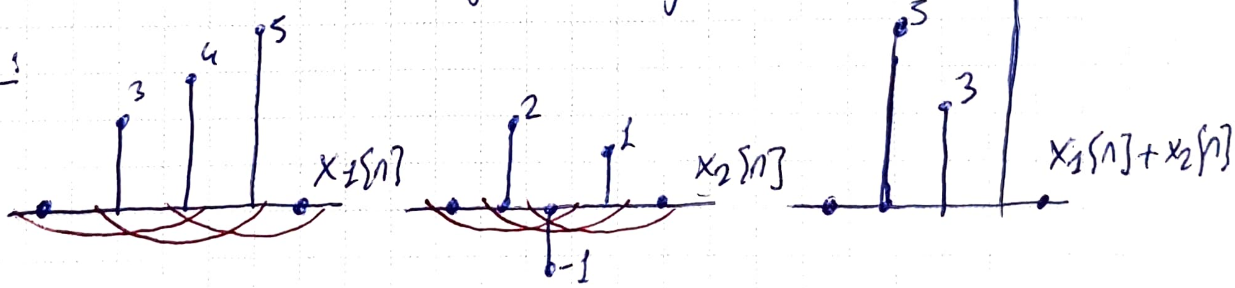
$$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \overset{?}{=} y_1[n] + y_2[n]$$

$$y[-1] + \sum_{l=0}^{n} \{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} \overset{?}{=} y_1[-1] + \sum_{l=0}^{n} \alpha x_1[n] + y_2[-1] + \sum_{l=0}^{n} \beta x_2[n]$$

$$y[-1] \overset{?}{=} y_1[-1] + y_2[-1]$$

NOT: Toplayıcı devrenin başlangıç koşulları sıfır ise doğrusaldır. Aksi halde doğrusal değildir.

Örnek:



M=3 için medyan filtre doğrusal mıdır?

$y_1[n] = \{3, 4, 4\}$

$y_2[n] = \{0, 1, 0\}$

$y_3[n] = \{3, 5, 3\}$

$y_3[n] \overset{?}{=} y_1[n] + y_2[n]$

$\{3, 5, 3\} \neq \{3, 5, 4\}$ doğrusal değil

"Önce sinyalleri elde edip sonra medyan filtrele"

• Örnek: $y[n] = x_u[n] + \frac{1}{2}(x_u[n-1] + x_u[n+1])$

ikli ile ara değerleme denklemi nedensel midir?

$n = n-1$ yazarsak;

$y[n-1] = x_u[n-1] + \frac{1}{2}\{x_u[n-2] + x_u[n]\}$

1 örnek tut (sample) yapılarak ötelenmiş old.

NOT: Nedensel olmayan bir sistem uygun miktarda gecikme sağlanarak nedensel bir sisteme dönüştürülebilir.

• Örnek: M nokta kayan ortalama alıcı filtre kararlı mıdır?

$$y[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

$|x[n]| < B_x \longrightarrow |y[n]| < B_y$

$$\left|\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]\right| \leq \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} \underbrace{|x[n-k]|}_{B_x} \leq \frac{1}{\cancel{M}}\cancel{M}B_x$$

$|y[n]| \leq B_x$

$|y[n]| \leq B_y$ olduğundan kararlı

Yeni Sanayi Sitesi 19 Ağustos Cad. No:78 Merkez/BALIKESİR
Tel: 0 266 246 23 24 Faks: 0 266 246 38 98

GİMTAŞ

$F_s = 10kHz$

Medyan filtre gecikme ile olabilir

........../........../201........

Dolar

Euro

Pasif ve Kayıpsız Sistemler

Tanım: Sonlu enerjiye sahip tüm girişler için çıkışın enerjisi en fazla girişin enerjisine eşit olan sistemlere pasif sistemler denir.

Tanım: Sonlu enerjiye sahip tüm girişler için çıkışın enerjisi girişin enerjisine eşit olan sistemlere kayıpsız sistem denir.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \quad \text{Pasif}$$

$=$ ise kayıpsız

Kullanılan yerler; dosya sıkıştırma işlemleri (zip) **Ö1**

Sürekli Zaman İşaretlerin Ayrık İşlenmesi

$x_a(t) \rightarrow$ [İdeal örnekleyici] $\xrightarrow{x[n]}$ [Ayrık zaman işlemci] $\xrightarrow{y[n]}$ [İdeal d/a değerlere] $\rightarrow y_a(t)$

— Basitleştirilmiş —

$x_a(t) \rightarrow$ [Örtüşme önleyici filtre] $\rightarrow$ [S/H] $\rightarrow$ [A/D] $\rightarrow$ [Sayısal işlemci] $\rightarrow$ [D/A] $\rightarrow$ [Yeniden oluşturma filtresi] $\rightarrow y_a(t)$

— Genel —

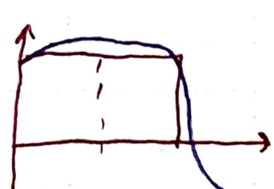
Analog Alçak Geçiren filtre

sample Hold (örnekle tut)

$x[n] = 0,78 \rightarrow$ 4. aralık

11

2 tane +5V



Yumuşatma

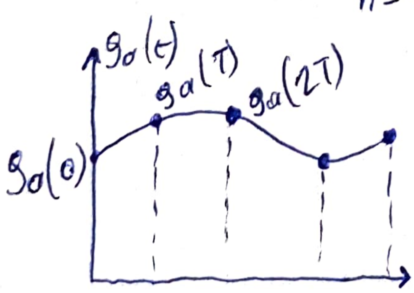
Yeni Sanayi Sitesi 19 Ağustos Cad. No:78 Merkez/BALIKESİR
Tel: 0 266 246 23 24 Faks: 0 266 246 38 98

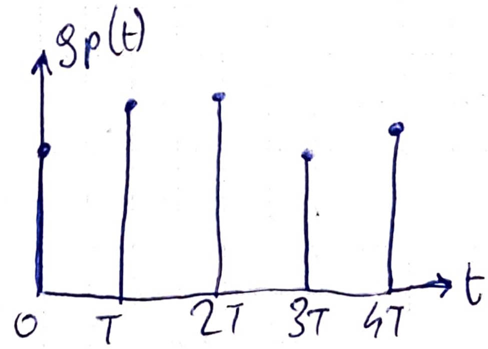
Örnekleme Teoremi

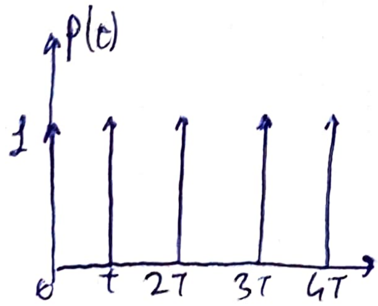
$g_a(t)$, $t=n.T$ anlarında örneklenip $g[n]=g_a(nT)$ dizisi oluşturulsun. Burada T örnekleme periyodu $F_T = \frac{1}{T}$ ise örnekleme frekansıdır. Amacımız örneklenmiş işaretin frekans uzayı gösterimi ile orijinal analog işaretin frekans uzayı gösterimi arasındaki ilişkinin bulunmasıdır. Bu amaçla analog işaret $g_a(t)$ ile periyodik impuls dizisi $p(t)$ çarpılır.

$$\begin{tikzcd} g_a(t) \arrow[r] & \otimes \arrow[r] & g_p(t) \\ & p(t) \arrow[u] & \end{tikzcd} \qquad p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

$$g_p(t) = g_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$







T'ler nasıl seçilmeli ki zaman uzayında

......../......../201......

Dolar

Euro

Örneklemenin Frekans Uzayındaki Etkisi

$$g_p(t) = g_a(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_a(nT)\,\delta(t-nT)$$

$G_p(j\Omega)$ için iki eşdeğer ifade vardır.

1. $$G_p(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_a(nT)e^{-j\Omega nT} = FD\{g_p(t)\}$$

2. Poisson Formülü

1. $$FD\{\delta(t-nT)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(t-nT)}_{t=nT} e^{-j\Omega t}\,dt = e^{-j\Omega nT}$$

2. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(t+nT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(jk\Omega_T)e^{jk\Omega_T t}$$

Analog İşaret

$\phi(t)$'nin F.D.

$t=0$ için; $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(nT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(jk\Omega_T)$$

$g_p(t)$ FD

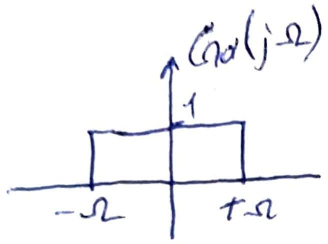
$\phi(t) = g_a(t)e^{-j\Omega t}$ olsun.

Frekansta kayma $e^{-j\Omega nT}$

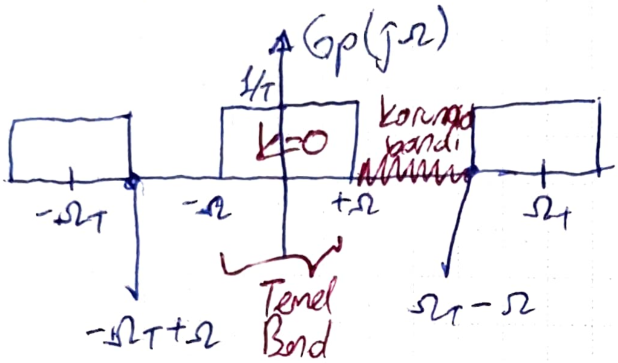
$G_p(j\Omega)$ $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_a(nT)e^{-j\Omega nT} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_a(jk\Omega_T + j\Omega)$$

$+\infty$ dan $-\infty$ işaret incelendiğinde + veya − olması önemli değil

$$\boxed{G_p(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_a(j(k\Omega_T + \Omega))}$$ * * *

- 

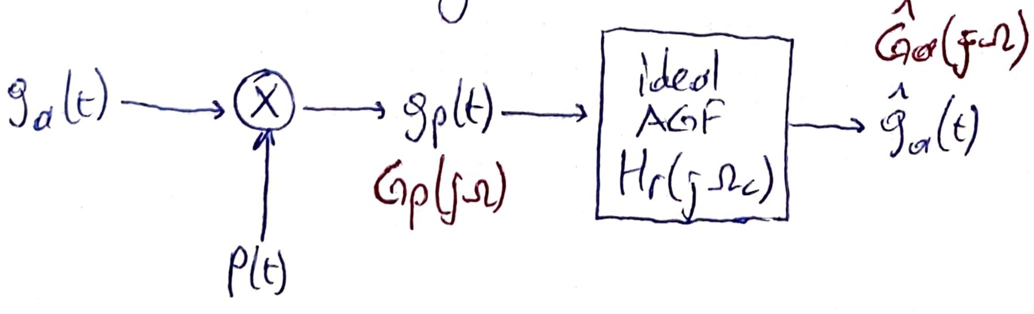
$\Rightarrow G_p(j\Omega)$'yı çiz

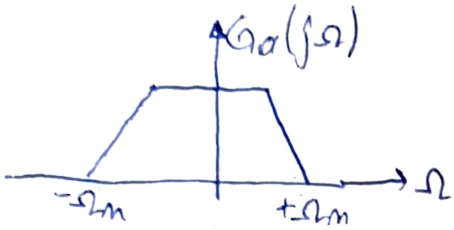


$\Omega_T = 2\Omega$ minimum filtre için gerekli fakat filtrenin de bir miktar alan kaplar. Bu yüzden $\Omega_T > 2\Omega$ seçilir. (Nyquist şartı) Örtüşme önleyici filtre kullanılır.

<u>NOT</u>: $G_p(j\Omega)$'nın ifadesinden görüldüğü gibi bu işaret periyodik bir fonksiyondur. $G_a(j\Omega)$'nın Ω_T'nin tamsayı katları ötelenmiş ve $1/T$ ile ölçeklenmiş kopyalarının toplamı $G_p(j\Omega)$'yı oluşturur.

$\Omega_T > 2\Omega$ ise, örneklenmiş işaret $g_p(t)$, T kazançlı $\boxed{\Omega < \Omega_c < \Omega_T - \Omega}$ 'yı sağlayan Ω_c kesim frekanslı alçak geçiren filtreden geçirilerek analog işaret $g_a(t)$ hatasız bir şekilde geri elde edilebilir.

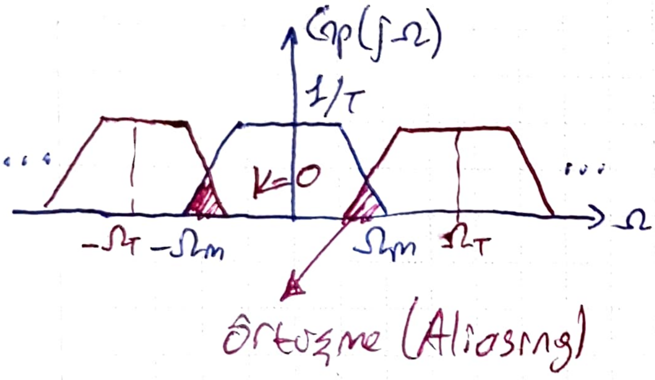




Analog $g_a(t)$ işaretinin spektrumu şekilde gösterilmiştir. Bu işareti $\Omega_T<2\Omega_m$ ve $\Omega_T>2\Omega_m$ olacak şekilde örnekleyiniz. Her bir durum için analog işareti geri elde edebilecek filtreleri varsa belirleyiniz.

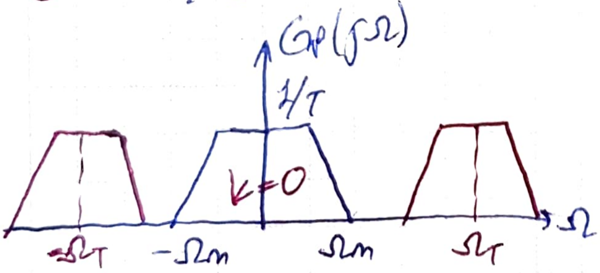
$$G_p(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_a(j(\Omega+k\Omega_T))$$

① $\Omega_T<2\Omega_m$



$H_r(j\Omega_c)$ yok

② $\Omega_T>2\Omega_m$



$$H_r(j\Omega_c)=\begin{cases} T & \text{kazançlı} \\ \Omega_c, & \Omega_m<\Omega_c<\Omega_T-\Omega_m \end{cases}$$

★ Örnekleme Teoremi ★

$g_a(t)$ sürekli zaman fourier dönüşümü $|\Omega|>|\Omega_m|$ için sıfır olan ($G_a(j\Omega)=0$) band sınırlı bir işaret olsun. $\Omega_T=\frac{2\pi}{T}$ olmak üzere $\Omega_T>2\Omega_m$ ise $g_a(t)$ örnek değerleri olan $g_a(nT)$ 'den tek olarak belirlene bilir. $g_a(nT)$ belirlendiğinde

$$g_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_a(nT)\,\delta(t-nT)$$

ifadesi kullanılarak $g_p(t)$ elde edilir. T kazançlı $\Omega_m < \Omega_c < \Omega_T - \Omega_m$ kesim frekanslı ideal bir alçak geçiren filtre $H_r(j\Omega)$ ile $g_a(t)$ hatasız bir şekilde yeniden oluşturula bilir. Bu teoreme Nyquist Teoremi denir.

Yorumlar:

1- $\Omega_T > 2\Omega_m$ koşuluna Nyquist Koşulu denir.

2- $\Omega_T/2$ frekansına katlama frekansı denir.

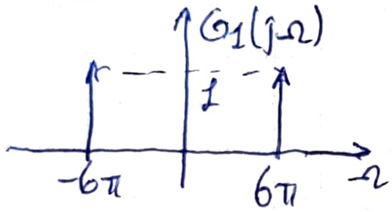
3- $g_a(t)$ 'de minimum örnekleme frekansını belirleyen maximum frekansa Nyquist Frekansı denir.

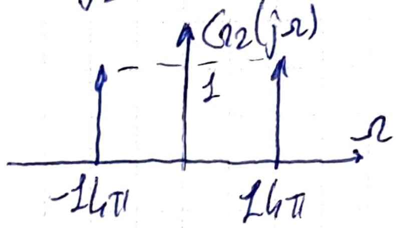
4- $2\Omega_m$ frekansına Nyquist Hızı denir.

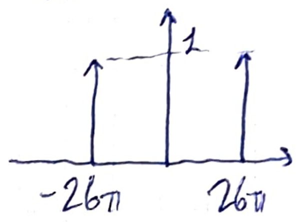
• ÖRNEK: Aşağıda 3 farklı sinüsoidal işaretin zaman uzayı ifadeleri verilmiştir. Bu işaretler $\Omega_T = 20\pi$ rad/sn frekansı ile örneklenmektedir. Örneklenmiş işaretlerin frekans spektrumlarını çizerek hatasız elde edilebilecekleri filtreyi varsa bulunuz.

$\Omega_T = \frac{2\pi}{T}$, $T = \frac{2\pi}{\Omega_T} = \frac{2\pi}{20\pi} = 0{,}1$ sn

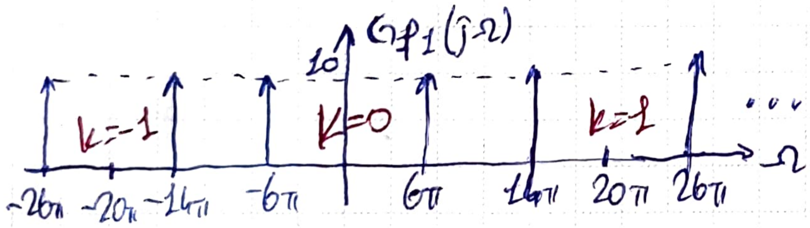
$g_1(t) = \cos(6\pi t)$; $g_2(t) = \cos(14\pi t)$; $g_3(t) = \cos(26\pi t)$



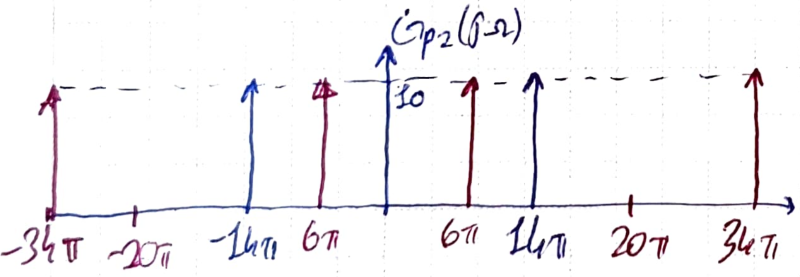




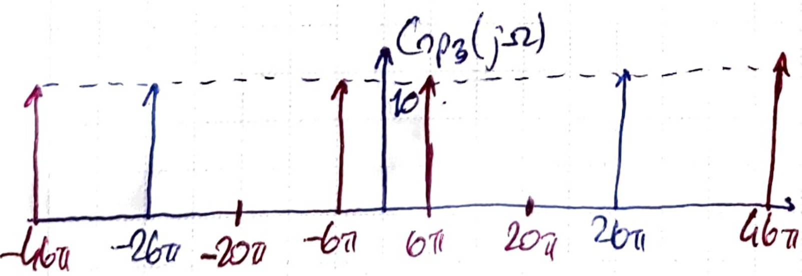
$$G_p(j\Omega) = \frac{1}{0{,}1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_a\left(j(\Omega + k\Omega_T)\right)$$



$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{kazançlı} \\ 6\pi < \Omega < 14\pi & \end{cases} \quad \text{AGF}$$



$$\to \boxed{\begin{matrix}\text{AGF} \\ 16\pi\end{matrix}} \to \cos(\cancel{6\pi t}) + \cos(14\pi t)$$



$\Omega_T > 52\pi$ olsaydı tum işaretlerin filtrelemesi olurdu.
Böyle olursa band genişliği boş kullanılmış olur. (Boş alan fazla)
Süresi kısalır [En yüksek frekansın 2 katı]

H_r → reconstruction

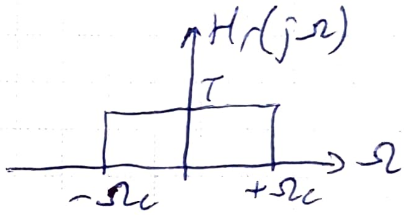
Analog İşaretin Yeniden Oluşturulması

Bu kısımda frekans cevabı $H_r(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$

şeklinde verilen yeniden oluşturma filtresinin çıkışını bulalım. Çıkış filtrenin impuls cevabı ile girişin konvolüsyonuna eşittir.

$$g_p[t] \longrightarrow \boxed{H_r(j\Omega)} \longrightarrow ?$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g[nT]\,\delta(\underbrace{t-nT}_{t=nT})$$



$$h_r(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_r(j\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$$

$$h_r(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} T e^{j\Omega t}\, d\Omega$$

$$h_r(t) = \frac{T}{2\pi}\,\frac{1}{jt}\,(\underbrace{e^{j\Omega_c t} - e^{-j\Omega_c t}}_{2j\sin(\Omega_c t)})$$

$$h_r(t) = \frac{T}{\pi t}\sin(\Omega_c t) \qquad \Omega_T = 2\Omega_c,\ \Omega_T = \frac{2\pi}{T},\ \Omega_c = \frac{\pi}{T}$$

$$\boxed{h_r(t) = \frac{T\sin(\pi t/T)}{\pi t}} \longrightarrow \text{sinc fonksiyonu}$$

$$g_p(t) * h_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[nT]\,\frac{T\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)}$$

......../......../201......

Dolar

Euro

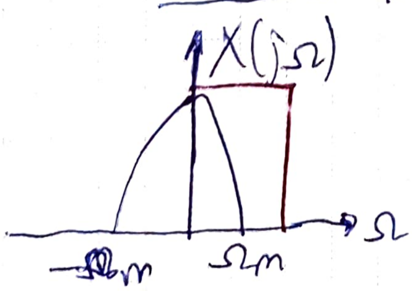
• NOT: Elde edilen denklem band sınırlı bir aradeğerleme denklemidir ve sinüsoidal işaretlerin analog işareti nasıl oluşturduğunu ifade eder.

$h_r(t)$ denklemi ile verilen ideal analog alçak geçiren filtre sonsuz impuls cevaplı kararsız ve nedensel olmayan bir filtredir. Dolayısıyla gerçekleştirilemez.

Analog bir alçak geçiren filtre örnekleme işleminden önce girişteki sürekli zaman işareti band sınırlamalıdır.

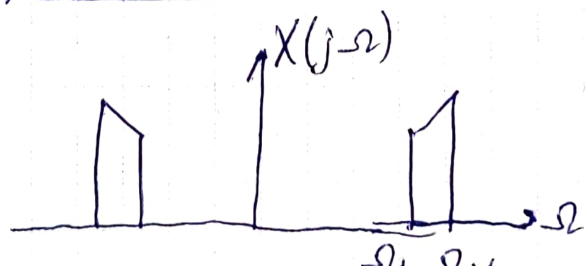
Hem örtüşme önleyici filtre hem de analog yeniden oluşturma filtresinin genlik cevabı filtre kararlı ve nedensel olacak şekilde modifiye edilmelidir.

Band Geçiren İşaretlerin Örneklenmesi



Alçak geçiren filtre

$\Omega_T > 2\Omega_m$



Band geçiren filtre

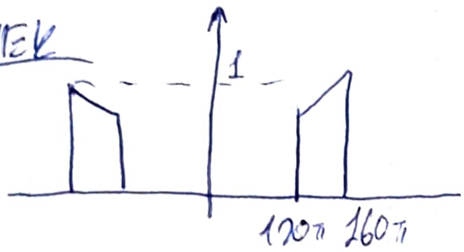
$M = \frac{\Omega_H}{\Delta\Omega}$

$\Delta\Omega = \Omega_H - \Omega_L$

$\Omega_H = M\Delta\Omega$ (M tamsayı)

$\boxed{\Omega_T = 2\Delta\Omega}$

• ÖRNEK

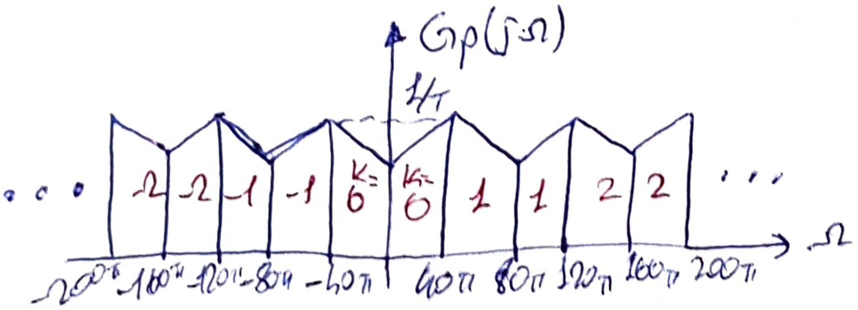


$\Delta\Omega = 160\pi - 120\pi = 40\pi$

$160\pi = M\,40\pi$ $M=4$ (tamsayı)

$M=3{,}8$ olsaydı M'i 3 alırdık

$\Omega_T = 2.40\pi = 80\pi$



$$G_p(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_a\left(j(\Omega - k\Omega_T)\right)$$

M=4 olduğu için 120π ile 160π arasındakilere kadar toplandı 4 tane (kendisi dahil) işaret verdi.

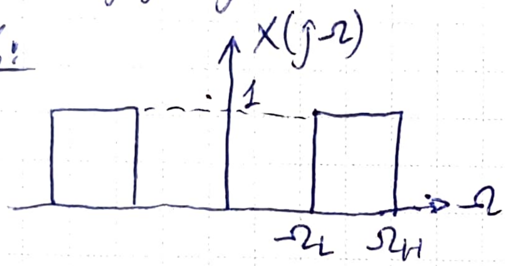
......../......../201......

Dolar

Euro

• **NOT:** Band geçiren işaretlerin örneklenmesi durumunda temel band işareti elde etmek için T kazançlı $\Omega_L < |\Omega| < \Omega_H$ kesim frekanslı band geçiren filtre kullanılır. M'in tam sayı olmadığı durumlarda bir alt tam sayıya yuvarlanarak düzenlemeler yapılır.

ÖRNEK:



a) $\Omega_L = 100\pi \qquad \Omega_H = 150\pi$

b) $\Omega_L = 110\pi \qquad \Omega_H = 150\pi$

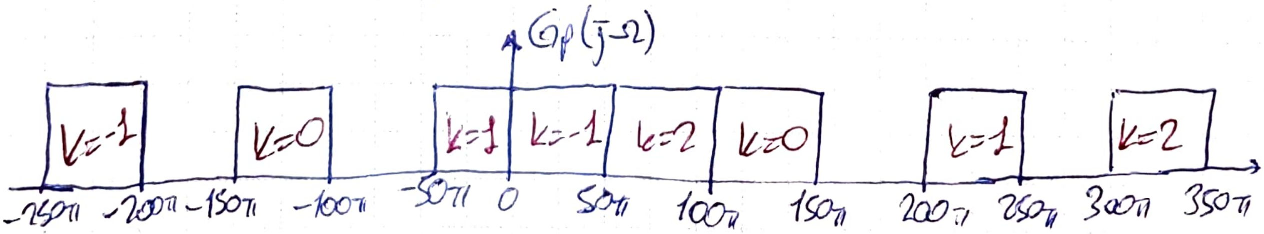
Yukarıda verilen iki durum için band geçiren işareti en optimum şekilde örnekleyiniz?

a) $\Delta\Omega = \Omega_H - \Omega_L = 50\pi$

$\Omega_H = M\Delta\Omega \Rightarrow 150\pi = M\,50\pi \qquad M = 3$

$\Omega_T = 2\Delta\Omega = 100\pi$

$$G_p(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_a(j(\Omega - k\Omega_T))$$



twiddle factor

$\lfloor M \rfloor \rightarrow$ alt tam sayı

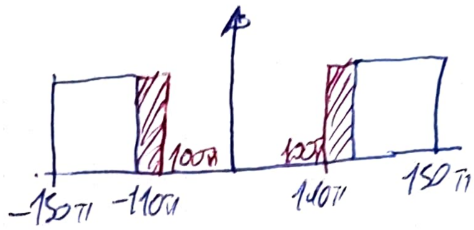
$\lceil M \rceil \rightarrow$ üst tam sayı

b) $\Delta\Omega = 40\pi$

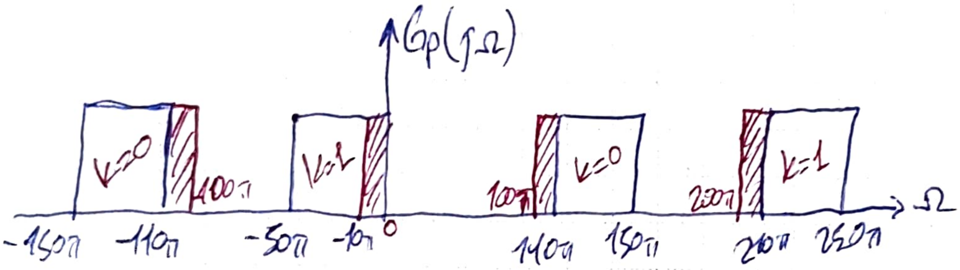
$\Omega_H = M \Delta\Omega$

$150\pi = M . 40\pi$

$M \cong 3$



$-\Omega_T = 100\pi$



Ö2

<u>Sürekli Zaman Fourier Dönüşümü</u>

$$X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(t)}_{\text{reel}} e^{-j\Omega t} dt \qquad -\pi < \Omega < \pi \qquad \text{CTFT}$$

$\rightarrow \cos(\Omega t) - j\sin(\Omega t)$

$$X_a(j\Omega) = |X_a(j\Omega)| e^{j\angle(X_a j\Omega)}$$

θ

Abs
Angle

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \qquad \text{ICTFT}$$

- <u>Tanım:</u> Sürekli zaman $X_a(t)$ işaretinin toplam enerjisi E_x şu şekilde tanımlanır.

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(t) X_a^*(t) dt \qquad (\text{zaman})$$

parseval teoremine göre bir işaretin enerjisi zaman

Yeni Sanayi Sitesi 19 Ağustos Cad. No:78 Merkez/BALIKESİR
Tel: 0 266 246 23 24 Faks: 0 266 246 38 98

Otokorelasyon → işaretin kendisi ile ilişkisi

ekseninde ve frekans ekseninde eşittir. Buna göre

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X_a(j\Omega)|^2 d\Omega \qquad \text{(frekans)}$$

Tanım: Enerji Yoğunluk Spektrumu

$|X_a(j\Omega)|^2$, $X_a(t)$'nin enerji yoğunluk spektrumu olarak adlandırılır. Ve $S_{xx}(\Omega)$ ile gösterilir.

$S_{xx}(\Omega) \rightarrow$ otokorelasyon fonksiyonunun fourier dönüşümü

$$S_{xx}(\Omega) = |X_a(j\Omega)|^2$$

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_a}^{\Omega_b} S_{xx}(\Omega)\, d\Omega$$

$\Omega_a = 25\pi$

$\Omega_b = 50\pi$

Tanım: Band Sınırlı İşaret

Sürekli zaman sonlu enerjili tüm band bir işaretin spektrumu $-\infty < \Omega < \infty$ ile verilen tüm frekans aralığında bileşenlere sahiptir. Sürekli zaman band sınırlı bir işaret ise bu aralıktan sadece belirli bir bölümde frekans bileşenine sahiptir.

Band sınırlı işaretler spektrumlarının yoğunlaştığı frekans aralığına göre sınıflandırılırlar.

....../....../201......

Dolar

Euro

1- Alçak Geçiren İşaret

Spektrumu $|\Omega| \leq \Omega_p < \infty$ aralığında sıfırdan farklıdır. Bu işaretin band genişliği Ω_p kadardır.

2- Yüksek Geçiren İşaret

Sepektrumu $0 < \Omega_p \leq |\Omega| < \infty$ aralığında sıfırdan farklıdır. Band genişliği Ω_p 'den sonsuza kadar uzanır.

3- Band Geçiren İşaret

Spektrumu $0 < \Omega_L \leq |\Omega| \leq \Omega_H < \infty$ aralığında sıfırdan farklıdır. Band genişliği $\Omega_H - \Omega_L$ kadardır.

Ayrık zaman işaretler durumunda yukarıdaki sınıflandırma Ω yerine w kullanılarak aynen geçerlidir.

Ayrık Zaman Fourier Dönüşümü

Ayrık zaman bir $x[n]$ dizisinin fourier dönüşümü şu şekilde hesaplanır.

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jwn} \quad , -\pi < w < \pi \quad (\text{DTFT})$$

$$= \underbrace{x[-1]\, e^{jw}}_{n=-1} + \underbrace{x[0]}_{n=0} + \underbrace{x[1]\, e^{-jw}}_{n=1} + \dots$$

Sürekli işaret

farklı genlikli üstel ifadeleri topluyoruz

GİMTAŞ

....../....../201......

Dolar

Euro

θ

$$X(e^{jw}) = \underbrace{|X(e^{jw})|}_{\text{Çift fonksiyon}}\, e^{j\angle X(e^{jw})}$$

tek fonksiyon

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})\, e^{jwn}\, dw \qquad \text{(Ters DTFT)}$$

<u>NOT:</u> Ayrık zaman $x[n]$ dizisinin fourier dönüşümü $X(e^{jw})$ sürekli bir fonksiyondur ve 2π ile periyodiktir. Bazı dizilerin ayrık zaman fourier dönüşümlerinin faz spektrumları 2π süreksizlikleri içerir. Bu süreksizlikler kaldırılarak elde edilen, faz spektrumu $\theta_c(w)$ ile gösterilir.

<u>NOT:</u> Ayrık zaman bir işaretin fourier dönüşümünün hesaplanabilmesi için dizinin mutlak toplanabilir olması gerekir. Ancak bazı durumlarda dizi mutlak toplanabilir olmamasına rağmen sonlu enerjili olabilir. Bu durumda da fourier dönüşümü hesaplanır.

Mutlak toplanabilir olmayan sonlu enerjili bir dizinin ayrık zaman fourier dönüşümünü hesaplamak için <u>ortalama karesel yakınsaklık</u> kullanılır.

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jwn}$$

$$X_k(e^{jw}) = \sum_{n=-k}^{k} x[n] e^{-jwn}$$

olmak üzere $X(e^{jw})$ ile $X_k(e^{jw})$ arasındaki farkın enerjisi tüm w değerleri için k sonsuza giderken sıfıra yaklaşmalıdır.

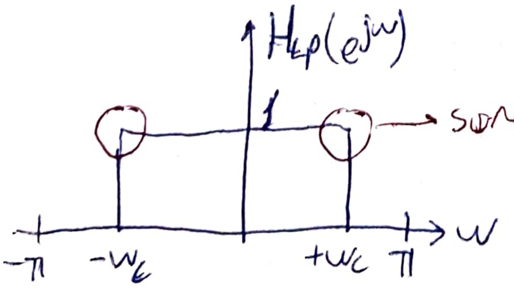
$k \to \infty$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{jw}) - X_k(e^{jw})|^2 \, dw \longrightarrow$$ Ortalama Karesel Hata
Mean Square Error (MSE)

k değeri arttıkça yakınsama sağlanamıyorsa bu işaretin fourier dönüşümü hesaplanamaz.

• <u>ÖRNEK:</u> Aşağıda matematiksel ifadesi verilen işaretin fourier dönüşümünü hesaplayalım.

$$H_{LP}(e^{jw}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |w| \leq w_c \\ 0, & \text{diğer.} \end{cases}$$



→ süreksizlikler Gibbs'e göre hesaplanamaz.

....../....../201......

Dolar

Euro

$$h_{LP}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{LP}(e^{jw})e^{jwn}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-w_c}^{w_c} 1\, e^{jwn}\,dw = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{jn}\big(\underbrace{e^{jw_c n} - e^{-jw_c n}}_{2j\sin(w_c n)}\big)$$

$$h_{LP}[n] = \frac{\sin(w_c n)}{\pi n} \Rightarrow \begin{cases} n=0, & \frac{w_c}{\pi} \quad \text{(L'Hospital ile) (n'e göre türev)} \\ n\neq 0, & \underbrace{\frac{\sin(w_c n)}{\pi n}}_{\text{sinc}} \end{cases}$$

mutlak toplanabilir değil

Sonsuz tane sinc fonksiyonu toplanıyor

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_{LP}[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H_{LP}(e^{jw})|^2\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-w_c}^{w_c} 1^2\,dw = \frac{w_c}{\pi} \quad \text{(enerjisi sonlu)}$$

- Gibbs Olayı; "DSP-3 slaytı sayfa 20"

$$H_{LP,K} = \sum_{n=-k}^{k} h_{LP,K}[n]\,e^{-jwn}$$

NOT: k'nın değerinden bağımsız olarak $H_{LP,K}(e^{jw})$ $w = w_c$ (ani geçişlerde) noktalarında dalgalanmalar içerir. k'nın değeri büyüdükçe dalgacıkların sayısı artar ancak maksimum dalgacık genliği k'dan bağımsız

Yeni Sanayi Sitesi 19 Ağustos Cad. No:78 Merkez/BALIKESİR
Tel: 0 266 246 23 24 Faks: 0 266 246 38 98

olarak sabit kalır. Bu salınımlı davranış Gibbs olayı olarak adlandırılır. Geçiş frekansı azalır.

• ÖRNEK: $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$

fourier dönüşümü verilen işaretin zaman uzayındaki gösterimini elde ediniz.

$$x[n] = \frac{1}{\cancel{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \cancel{2\pi}\, \underbrace{\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)}_{\omega=\omega_0-2\pi k} \right] e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$= e^{j(\omega_0-2\pi k)n} = e^{j\omega_0 n}\, e^{-j2\pi k n} \rightarrow \underbrace{\cos(2\pi k n)}_{1} - j\underbrace{\sin(2\pi k n)}_{0}$$

$$\boxed{x[n] = e^{j\omega_0 n}}$$

NOT: Ayrık zaman fourier dönüşümü ne mutlak ne de karesel toplanabilir olmayan bazı diziler için de tanımlanabilir. Birim basamak dizisi ($u[n]$), sinüsoidal dizi ($\cos(\omega_0 n+\theta)$), üstel dizi (Ae^{an}) bu dizilere örnek olarak verilebilir.

Böyle diziler için δ fonksiyonu tanımlanarak fourier dönüşümü hesaplanır.

"DSP-3 slaytı sayfa 24"

$$FD\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underset{n=0}{\delta[n]} e^{-jwn} = 1$$

ÖRNEK: $d_0 \cdot v[n] + d_1 v[n-1] = p_0 \delta[n] + p_1 \delta[n-1]$

fark denklemde verilen $v[n]$ işaretinin fourier dönüşümünü hesapla.

$$d_0 V(e^{jw}) + d_1 V(e^{jw}) e^{-jw} = p_0 \cdot 1 + p_1 e^{-jw}$$

$$V(e^{jw}) \left[d_0 + d_1 e^{-jw} \right] = p_0 + p_1 e^{-jw}$$

$$\boxed{V(e^{jw}) = \frac{p_0 + p_1 e^{-jw}}{d_0 + d_1 e^{-jw}}}$$

Enerji Yoğunluk Spektrumu;

Ayrık zaman $g[n]$ dizisinin toplam enerjisi

$$E_g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g[n]|^2$$

ile hesaplanır. Enerji yoğunluk spektrumu ise

$$S_{gg}(w) = |G(e^{jw})|^2$$

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|G(e^{jw})|^2}_{S_{gg}(w)} dw$$

0–1000 800–1800

%20

(Sınır 2sn)
fourier dönüşümü kısa sürelidir.
10sn izin olmaz

Matlab kullanarak ayrık zaman fourier dönüşüm hesabı;

$$X(e^{jw}) = \frac{p_0 + p_1 e^{-jw} + \dots + p_M e^{-jwM}}{d_0 + d_1 e^{-jw} + \dots + d_N e^{-jwN}}$$

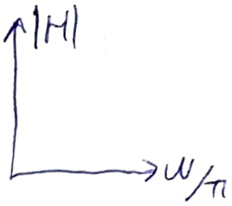
şeklinde verilen ayrık zaman fourier dönüşümü 'freqz' komutu kullanılarak istenilen frekans noktalarında hesaplanabilir. H = freqz(num, den, w) komutu pay ve payda katsayılarını verilen fourier dönüşümünü H vektörüne atar.

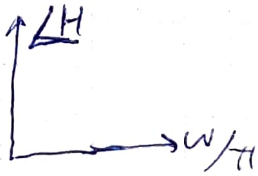
num = [p_0 p_1 ... p_M]

den = [d_0 d_1 ... d_N]

w = 0 : π/8 : 2π

Abs(H) genliği verir, Angle(H) fazı verir.





$-\pi : \frac{\pi}{4} : \pi$

$w \rightarrow 0 : \frac{\pi}{4} : \pi$

$\frac{w}{\pi} \rightarrow 0 : \frac{1}{4} : 1$

"DSP-3 slayt sayfa 36-37"

unwrap komutu frekans cevabındaki ani bir pik oluşum düzenler.

GİMTAŞ

....../....../201......

Dolar

Euro

Frekans Yanıtı: Pratikte karşılaşılan ayrık zaman işaretlerin çoğu farklı açısal frekanslı çok ve ya sonsuz sayıda ayrık zaman sinüsoidal işaretin toplamı olarak yazılabilir. O halde LTI bir sistemin sinüsoidal bir işarete cevabı bilinirse sistemin daha daha karmaşık girişlere cevabı bulunabilir. Öz fonksiyonlar LTI bir sistemin önemli bir özelliğidir. Öz fonksiyon sistemin girişine uygulandığında çıkışta karmaşık bir sabit ile çarpılarak aynen görülür.

ÖRNEK: $x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k]$$

$x[n] = e^{jw_0 n}$ olsun. Öz fonksiyon mu?

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, \underbrace{e^{jw_0(n-k)}}_{e^{jw_0 n}\, e^{-jw_0 k}}$$

$$y[n] = e^{jw_0 n} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-jw_0 k}}_{H(e^{jw})}$$

$H(e^{jw}) \rightarrow FD\{h[n]\}$ – impuls cevabı

$$y[n] = e^{jw_0 n}\, H(e^{jw})$$

öz fonksiyon – frekans cevabı

......../......../201.......

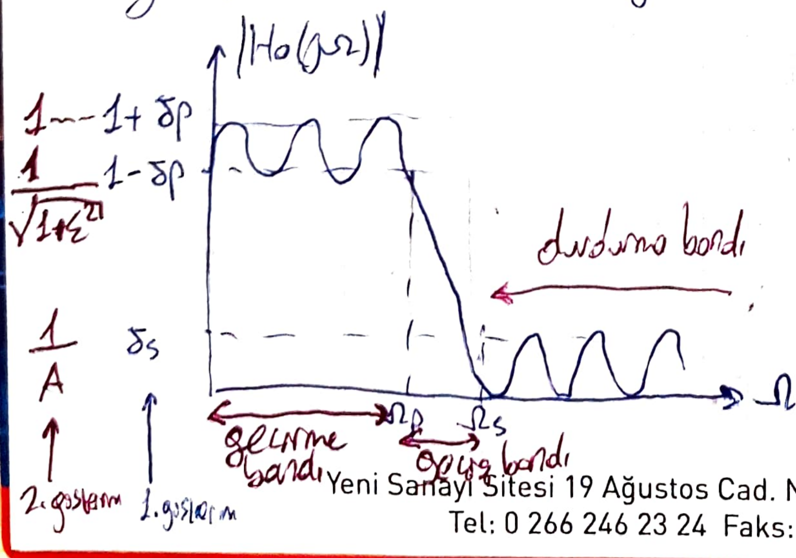
Dolar

Euro

NOT: $|H(e^{jw})|$ fonksiyonuna genlik yanıtı denir. Bazı durumlarda genlik yanıtı dB cinsinden $G(w) = 20\log_{10}|H(e^{jw})|$ dB şeklinde ifade edilir. $G(w)$'ya kazanç fonksiyonu denir. Negatif işaretlisine zayıflama ya da kayıp fonksiyonu denir. $A(w) = -G(w)$ kayıp

Analog Alçak Geçiren Filtre Karakteristikleri

Geçen ders blok diyagramda verilen örtüşme önleyici filtre ve yeniden oluşturma filtresi analog Alçak Geçiren Filtredir. Bu filtrelerin ideal genlik frekans cevapları elde edildi. Ancak Pratikte geçirme bandı ve durdurma bandındaki genlik cevabı karakteristikleri sabit değildir ve bazı kabul edilebilir toleranslarda tutulmalıdır. Ayrıca geçirme bandı ve durdurma bandı arasındaki geçiş belirlenmelidir. (eğimi)



Ω_p = geçirme bandı karar frekansı,

Ω_s = durdurma bandı karar frekansı,

δ_p = geçirme bandı max dalgalanması

δ_s = durdurma bandı min zayıflaması

......../......../201.......

Dolar

Euro

Önemli Notlar:

• 1- Alçak geçiren filtrenin genliği $|H_a(j\Omega)|$ geçirme bandında, $1-\delta_p<|H_a(j\Omega)|<1+\delta_p$, $|\Omega|<\Omega_p$ (geçirme bandı) böyle olmalıdır. Yani $\mp\delta_p$ hata ile genlik 1'e yakınsamalıdır. Durdurma bandında $\Omega_s\leq|\Omega|<\infty$, $|H_a(j\Omega)|\leq\delta_s$ olmalıdır. Yani durdurma bandında genlik δ_s hata ile 0'a yakınsamalıdır.

• 2- Dalgalanmalar tasarımlarda genellikle dB cinsinden verilir.

$$\alpha_p=-20\log_{10}(1-\delta_p)\ \text{dB}$$

$$\alpha_s=-20\log_{10}(\delta_s)\ \text{dB}$$

tasarım için kullanılacak bilgisayar programında da dalgalanmalar dB cinsinden yazılır.

• 3- Filtre karakteristikler genellikle kayıp fonksiyon ya da zayıflatma fonksiyonuna göre belirlenir. Kayıp fonksiyonu dB cinsinden şu şekilde ifade edilir.

$$\text{Kayıp Fonk}=-20\log_{10}(|H_a(j\Omega)|)$$

• 4- Filtre tasarımında verilenlere ek olarak iki önemli parametre daha vardır. Bunlar geçiş oranı $k=\frac{\Omega_p}{\Omega_s}$ ve ayırt edicilik parametresi $k_1=\frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-1}}$

idealde $k=1$, $k_1<<1$

filtrenin derecesi büyük olursa geçirme bandı çok küçük geçirmebandı geniş

Analog alçak geçiren filtre başarımında 4 temel yaklaşım vardır;

1-Butterworth Yaklaşımı

N. dereceden analog butterworth alçak geçiren filtrenin genlik cevabının karesi aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

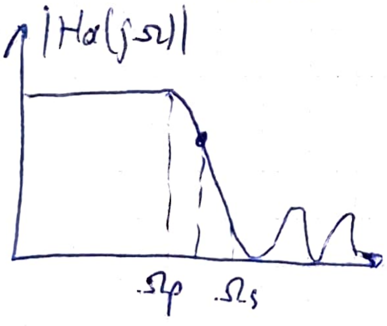
$2N$ → filtrenin derecesi

Ω_c → 3dB kesim frekansı

dB cinsinden kazanç ise;

$$G(\Omega) = 10\log_{10}|H_a(j\Omega)|^2$$

ilk 2N-1 türevde $\Omega=0$ için $\underbrace{\frac{d}{d\Omega}|H_a(j\Omega)|^2}_{2N-1}\Big|_{\Omega=0}=0$



$\Omega=\Omega_c$ ise $|H_a(j\Omega)|^2 = 1/2$

$$G(\Omega) = 10\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) \cong 3dB$$

Önemli NOT:

Butterworth alçak geçiren filtreyi tanımlayan iki önemli parametre filtrenin derecesi N ve 3dB kesim frekansı Ω_c dir. Bu değerleri bulmak için aşağıdaki yol izlenir.

$$|H_a(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega_p/\Omega_c)^{2N}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right)^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2}$$ Geçirme bandındaki koşul

$$|H_a(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega_s/\Omega_c)^{2N}} = \left(\frac{1}{A}\right)^2 = \frac{1}{A^2}$$ Durdurma bandındaki koşul

ε, A biliniyor $\rightarrow$ Ω_p ve Ω_c hesaplanır.

Bu iki denklem Ω_c ve N değerlerini bilinmeyenleri için çözülürse filtrenin derecesi şu şekilde elde edilir.

$$\boxed{N = \frac{\log_{10}(1/k_1)}{\log_{10}(1/k)}}$$

NOT: Derece tam sayı olduğundan hesaplanan N değeri tam sayı çıkmadığında en yakın üst tam sayıya yuvarlanır. N değeri herhangi bir denklemde yerine konularak 3dB kesim frekansı Ω_c elde edilir. Analog butterworth alçak geçiren filtrenin transfer fonksiyonu şu şekilde hesaplanır.

$\Omega_c \to sbt$

........../........../201........

Dolar

Euro

$$H_a(s) = \frac{C}{D_N(s)} = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{l=1}^{N}(s-p_l)}$$

$N=3$ için

$$= \frac{\Omega_c^3}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$

$$p_l = \Omega_c \exp\left(j\left[\pi(N+2l-1)/2N\right]\right) \qquad 1 \leq l \leq N$$

ÖRNEK: 1dB kesim frekansı 1kHz'de ve 5kHz deki zayıflatması 40dB olan butterworth filtrenin en küçük derecesini belirleyiniz?

$\Omega_s = 5\,kHz \qquad \alpha_s = 40\,dB$

$\Omega_p = 1\,kHz$

$$|H_a(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2} \Rightarrow -1\,dB$$

Geçirme bandında kazanç değil kayıp olduğundan

$$|H_a(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{A^2} \Rightarrow -40\,dB$$

$$10\log_{10}|H_a(j\Omega_p)|^2 = -1 \longrightarrow \frac{1}{1+\varepsilon^2} = 10^{-0,1} \longrightarrow \varepsilon^2 = 0,25$$

$$10\log_{10}|H_a(j\Omega_s)|^2 = -40 \longrightarrow \frac{1}{A^2} = 10^{-4} \longrightarrow A = 100$$

........../........../201.......

Dolar

Euro

$$N = \frac{\log_{10}(1/k_1)}{\log_{10}(1/k)} \qquad k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = 0,2$$

$$k_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-1}} = \frac{1}{196}$$

$$N = 3,28 \cong 4$$

2- Chebyshev Yaklaşıklığı (1 ve 2)

Bu yaklaşıklıkta ideal karakteristik ile gerçek cevab arasındaki fark olarak tanımlanan yaklaşıklık hatası belirtilen frekans bandı üzerinde minimum yapılır. Genlik hatası eş tepeciklidir (equaripple) İki tür chebyshev taransfer fonksiyonu vardır. 1. tür yaklaşıklıkta geçirme bandı genlik karakteristiği dalgalı iken durdurma bandı monotondur. 2. tür yaklaşıklıkta ise genlik cevabı geçirme bandında monoton, durdurma bandında dalgalıdır. Chebyshev filtre aynı dereceye sahip butterworth filtreye göre daha dik kesme sahiptir. Ancak geçirme bandı dalgalı

"DSP-5 slayt sayfa 9"

Yeni Sanayi Sitesi 19 Ağustos Cad. No:78 Merkez/BALIKESİR
Tel: 0 266 246 23 24 Faks: 0 266 246 38 98

3- Elliptik Yaklaşıklığı

Hem geçirme hem durdurma bandında dalgalanmaları vardır. Elliptik filtrelerin transfer fonksiyonları gereken karakteristikleri en küçük derece ile sağlar.

"DSP-5 slayt sayfa 15"

Bazı Matlab Komutları

% Butterworth filtresi;

[z, p, k] = buttap (N); % butt yerine cheby1, cheby2 ellip yazılabilir

zp2tf = (z, p, k); % $k = \Omega_c^N$, z = sıfır

[num, den] = butter(N, w_n, 's'); 's' → analog (laplace); w_n → 3dB kesim frekansı; default Alçak geçiren

[num, den] = butter(N, w_n, 'type', 's'); type → high, bandpass, bandstop

buttord (w_p, w_s, R_p, R_s, 's');

buttord → order %Butterworth'un derecesi

R_p, R_s → dalgalanmalar

Analog YG, BG, BD Filtre Tasarımları

Adım 1: Uygun bir frekans dönüşümü kullanılarak istenilen filtre transfer fonksiyonu $H_D(\hat{s})$ prototip bir alçak geçiren transfer fonksiyonu $H_{LP}(s)$'e dönüştürülür.

GİMTAŞ

1 $H_D(\hat{s}) \xrightarrow{F} H_{LP}(s)$
2 AGF Tasarla
3 $H_{LP}(s) \xrightarrow{F^{-1}} H_D(\hat{s})$

......./......./201......

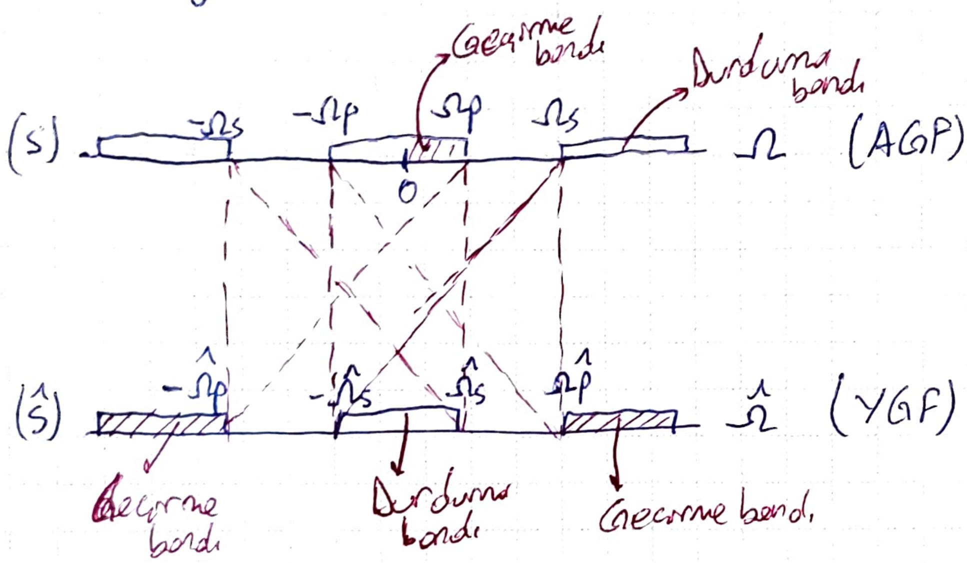
Dolar

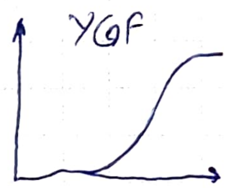
Euro

Adım 2: Prototip alçak geçiren filtre tasarlanır.

Adım 3: 1. adımda kullanılan frekans dönüşümünün tersi $H_{LP}(s)$'e uygulanarak $H_D(\hat{s})$ elde edilir.

- Analog Yüksek Geçiren Filtre Tasarımı





Gerekli spektral dönüşüm $H_{LP}(s)$'in geçirme bandı kenar frekansı Ω_p. $H_D(\hat{s})$ ya da $H_{HP}(\hat{s})$'nın geçirme bandı kenar frekansı $\hat{\Omega}_p$ olmak üzere

$$s = \frac{\Omega_p \hat{\Omega}_p}{\hat{s}} \quad ; \quad \Omega_s = -\frac{\Omega_p \hat{\Omega}_p}{\hat{\Omega}_s}$$

prototip $\Omega_p = 1$ (başlangıç)

Transfer fonksiyonu gerekli. Transfer fonksiyonunda s yerine eşitliği yaz

GİMTAŞ

....../....../201......

Dolar

Euro

ÖRNEK: Aşağıdaki karakteristikleri sahip butterworth yüksek geçiren filtreyi tasarlayınız?

$\hat{F}_p = 4000\,Hz$ $\quad \alpha_p = 0{,}1\,dB$

$\hat{F}_s = 1000\,Hz$ $\quad \alpha_s = 40\,dB$ $\longrightarrow H_{HP}(\hat{s})$

$\alpha \to$ dalgalanma

$\Omega_p = 1$

$$\Omega_s = \frac{\Omega_p \cdot \hat{\Omega}_p}{\hat{\Omega}_s}$$

(-) işaretin ne tarafta olduğunu gösterir

$$\Omega_s = \frac{1 \cdot 2\pi 4000}{2\pi 1000} = 4$$

1. adım (Prototip AGF) $\Omega_p = 1$, $\Omega_s = 4$, $\alpha_p = 0{,}1\,dB$, $\alpha_s = 40\,dB$

matlab kodları:

derece, 3dB

2. adım
```
[N,wn] = buttord(1,4,0.1,40,'s');
```
paybu, paydaBw
```
[B,A] = butter(N,wn,'s');
```
3. adım
```
[num,den] = lp2hp(B,A,2*pi*4000);
```
Pay YG, Payda YG, Ω_p

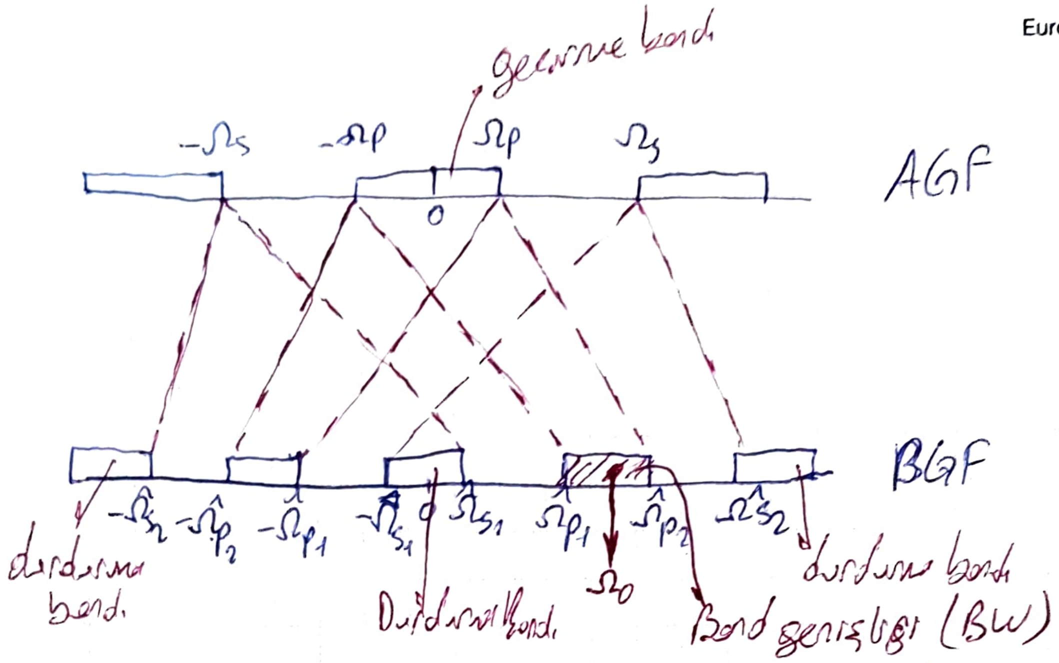
- Analog Band Geçiren Filtre Tasarımı

GİMTAŞ

....../....../201......

Dolar

Euro



Gerekli spektral dönüşüm $H_{LP}(s)$'in geçirme bandı kenar frekansı Ω_p. $H_{BP}(\hat{s})$'nın geçirme bandı kenar frekansları $\hat{\Omega}_{p_1}$ ve $\hat{\Omega}_{p_2}$ olmak üzere

$$s = \Omega_p \frac{\hat{s}^2 + \hat{\Omega}_0^2}{\hat{s}\underbrace{(\hat{\Omega}_{p_2} - \hat{\Omega}_{p_1})}_{BW}} \quad ; \quad \Omega = -\Omega_p \frac{\hat{\Omega}_0^2 - \hat{\Omega}^2}{\hat{\Omega} BW}$$

Transfer fonksiyonu gerekli

$s = j\Omega \qquad \hat{s} = j\hat{\Omega}$

$\Omega \to \Omega_{s_1}$ yada Ω_{s_2} yazarak yerine belirlersin

★ <u>Önemli NOT:</u> Band geçiren ve bandı durduran filtre tasarımına başlamadan önce aşağıdaki koşul mutlaka sağlanmalıdır.

$$\hat{\Omega}_0^2 = \hat{\Omega}_{p_1}\hat{\Omega}_{p_2} = \hat{\Omega}_{s_1}\hat{\Omega}_{s_2}$$

Bu koşul sağlanmıyorsa uygun frekanslardan biri değiştirilerek koşul sağlanır.

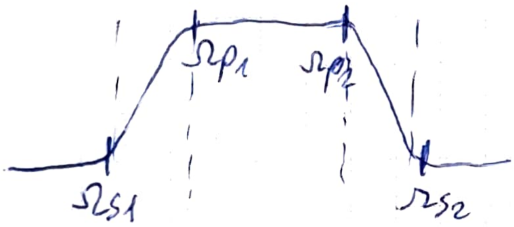
GİMTAŞ

........./........./201........

Dolar

Euro

Durum1 $\underbrace{\hat{\Omega}_{p1}\,\hat{\Omega}_{p2}}_{\uparrow} < \underbrace{\hat{\Omega}_{s1}\,\hat{\Omega}_{s2}}_{\downarrow}$



* $\hat{\Omega}_{p1}\,\hat{\Omega}_{p2}\uparrow$ $\cancel{\Omega_{p1}\uparrow}$ $\Omega_{p2}\uparrow$

* $\hat{\Omega}_{s1}\,\hat{\Omega}_{s2}\downarrow$ $\cancel{\hat{\Omega}_{s1}\downarrow}$ $\hat{\Omega}_{s2}\downarrow$

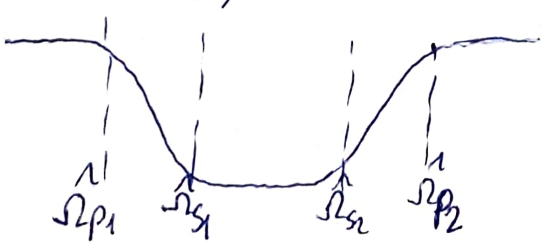
Durum 2 $\hat{\Omega}_{p1}\,\hat{\Omega}_{p2} > \hat{\Omega}_{s1}\,\hat{\Omega}_{s2}$

* $\hat{\Omega}_{p1}\,\hat{\Omega}_{p2}\downarrow$ $\hat{\Omega}_{p1}\downarrow$ $\cancel{\hat{\Omega}_{p2}\downarrow}$

* $\hat{\Omega}_{s1}\,\hat{\Omega}_{s2}\uparrow$ $\hat{\Omega}_{s1}\uparrow$ $\cancel{\hat{\Omega}_{s2}\uparrow}$

• **NOT:** Geçirme bandı ve durdurma bandı kenar frekansları ayarlanırken geçirme bandı ve durdurma bandı kesinlikle daralmamalıdır. Geçiş bandı daralabilir.

Band durduran için;



* $\underbrace{\hat{\Omega}_{p1}\,\hat{\Omega}_{p2}}_{\downarrow} > \underbrace{\hat{\Omega}_{s1}\,\hat{\Omega}_{s2}}_{\uparrow}$ $\hat{\Omega}_{p2}\downarrow$ $\hat{\Omega}_{s2}\uparrow$

......../......../201......

Dolar

Euro

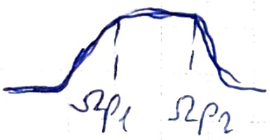
ÖRNEK: Karakteristikleri aşağıda verilen analog elliptik band geçiren filtreyi tasarlayınız?

$\hat{F}_{p1} = 4kHz$ $\quad \hat{F}_{s1} = 3kHz$ $\quad \alpha_p = 1dB$

$\hat{F}_{p2} = 7kHz$ $\quad \hat{F}_{s2} = 8kHz$ $\quad \alpha_s = 22dB$

$$\hat{\Omega}_0^2 = \underbrace{\hat{F}_{p1}\hat{F}_{p2}}_{28} \neq \underbrace{\hat{F}_{s1}\hat{F}_{s2}}_{24}$$

(Birimler eşit olduğundan Ω'ya çevrilmedi)



$\Omega_{p1} \rightarrow$ kaydırılmalı

$$\downarrow \hat{F}_{p1} = \frac{\hat{F}_{s1}\hat{F}_{s2}}{\hat{F}_{p2}} = \frac{24}{7}$$

Artık 4kHz yerine $\frac{24}{7}$ kHz kullanılacak

$$\Omega_{s1} = \overset{1}{\Omega_p} \frac{\hat{\Omega}_0^2 - \hat{\Omega}_{s1}^2}{\Omega_{s1}(\hat{\Omega}_{p2} - \hat{\Omega}_{p1})}$$

$$\Omega_{s1} = \frac{24 - 9}{3\left(7 - \frac{24}{7}\right)} = 1{,}4$$

Prototip AGF $\rightarrow$ $\Omega_p = 1$ $\quad \Omega_s = 1{,}4$ $\quad \alpha_p = 1dB$ $\quad \alpha_s = 22dB$

Matlab kodu;

$BW = \hat{\Omega}_{p2} - \hat{\Omega}_{p1} = 7 - \frac{24}{7} = \frac{25}{7}$

```
[N,wn]=ellipord(1, 1.4, 1, 22, 's');
[B,A]=ellip(N, 1, 22, wn, 's');
[num,den]=lp2bp(B,A,2*pi*4,89, 2*pi*25/7);
```

$\underbrace{4{,}89}_{\sqrt{24} = \Omega_0}$ $\quad \underbrace{25/7}_{\text{Band genişliği (BW)}}$

......../......../201......

Dolar

Euro

• Analog Band Durduran Filtre Tasarımı

$H_{LP}(s)$ 'in durdurma bandı kenar frekansı Ω_s birden istenilen band durduran filtrenin durdurma bandı kenar frekansları $H_{BS}(\hat{s}) \rightarrow \hat{\Omega}_{s1}$ ve $\hat{\Omega}_{s2}$ olmak üzere gerekli spektral dönüşüm.

$$s = \underbrace{\Omega_s}_{\text{default olarak } 1} \frac{\hat{s}(\hat{\Omega}_{s2} - \hat{\Omega}_{s1})}{\hat{s}^2 + \hat{\Omega}_0^2} \; ; \; \Omega = \underbrace{\Omega_s}_{1} \frac{\hat{\Omega} \overbrace{(BW)}^{\hat{\Omega}_{s2} - \hat{\Omega}_{s1}}}{\hat{\Omega}_0^2 - \hat{\Omega}^2}$$

$$\hat{\Omega}_0^2 = \hat{\Omega}_{s1} \hat{\Omega}_{s2} = \hat{\Omega}_{p1} \hat{\Omega}_{p2}$$ (Tasarıma başlama şartı)

Vize Sonrası

Ayrık Fourier Dönüşümü (DFT)

$$X(e^{jw}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk \overbrace{\left(\frac{2\pi}{N}\right)}^{w_0} n}$$

[Algoritma olarak fft algoritması kullanılır]

$$\underbrace{X(e^{jw})}_{DTFT}\Big|_{w = \frac{2\pi k}{N}} = X[k] \qquad 0 \leq k \leq N-1$$

*** Tanım: $0 \leq n \leq N-1$ aralığında tanımlı N uzunluklu bir $x[n]$ dizisinin ayrık fourier dönüşümü (DFT), ayrık zaman fourier dönüşümü $X(e^{jw})$ 'nun $0 \leq w \leq 2\pi$ aralığında $w_k = \frac{2\pi k}{N}$, $0 \leq k \leq N-1$ noktalarında örneklenmesi ile elde edilir.

$$\underbrace{X[k]}_{\substack{\text{DFT}\\ \text{katsayıları}}} = \underbrace{X(e^{jw})}_{\text{DTFT}}\Big|_{w=\frac{2\pi k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} \quad , 0 \leq k \leq N-1$$

İşlemci kolay çalıştırabilsin diye;

$$\boxed{e^{-j\frac{2\pi}{N}} = W_N} \quad \text{twiddle factor}$$

DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{kn} \quad , 0 \leq k \leq N-1$$

Direkt çizdirilemez abs & angle

reel

komplex çıkabilir. [sin$\left(\frac{2\pi}{N}\right)$ değerine bağlı]

IDFT

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, W_N^{-kn}$$

[W_N^{-kn} ile W_N^{kn} birbiri ile ortogonal olmalıdır.]

DFT'nin Vektor-Matris Notasyonu

$$X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n].1 = x[0] + x[1] + \dots + x[N-1] \quad , k=0$$

$$X[1] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{n} = x[0] + x[1]W_N + x[2]W_N^2 + \dots + x[N-1]W_N^{N-1} \quad , k=1$$

$$X[2] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{2n} = x[0] + x[1]W_N^2 + x[2]W_N^4 + \dots + x[N-1]W_N^{2(N-1)} \quad , k=2$$

$\vdots$

$X[N-1] =$

$$\underline{X[k]} = \underline{X} = \left[X[0] \quad X[1] \quad \dots \quad X[N-1]\right]^T$$

......../......../201.......

Dolar

Euro

$$\underline{X[k]} = \overbrace{\underline{X}}^{\text{DFT vektörü}} = \left[X[0] \;\; X[1] \;\; \dots \;\; X[N-1]\right]^T$$

$$\underline{x} = \left[x[0] \;\; x[1] \;\; \dots \;\; x[N-1]\right]^T$$

$$\underset{N\times 1}{\underline{X}} = \underbrace{\overset{\text{DFT matrisi}}{D_N}}_{N\times N} \; \underset{N\times 1}{\underline{x}}$$

$$D_N^{-1} = \frac{1}{N} D_N^{*}$$
└ eşlenik

$$\underline{x} = \underbrace{\frac{1}{N} D_N^{*}}_{D_N^{-1}} \underline{X}$$

$$D_N = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_N & w_N^2 & \dots & w_N^{N-1} \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w_N^{(N-1)} & w_N^{2(N-1)} & \dots & w_N^{(N-1)^2} \end{array}\right]_{N\times N} \\ \downarrow \;\; \downarrow \;\; \downarrow \\ k=0 \;\; k=1 \;\; k=2 \end{array} \begin{array}{l} \to n=0 \\ \to n=1 \\ \to n=2 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

D_N^* matrisi ise D_N deki üslerin negatif değeri

DTFT'nin örneklenmesi;

Ayrık zaman fourier dönüşümü (DTFT)'si $X(e^{jw})$ olan $x[n]$ dizisini ele alalım $X(e^{jw})$'yi düzgün aralıklarda $w=\frac{2\pi k}{N}$, $0 \le k \le N-1$ anlarında örnekleyerek N adet frekans örneği elde ederiz. Bu N adet frekans örneğinin ters DFT'si bize N uzunluklu bir $y[n]$ dizisi verir. Amacımız $y[n]$ dizisi ile $x[n]$ dizisi arasındaki ilişkiyi bulmaktır.

GİMTAŞ

....../....../201......

Dolar

Euro

$$x[n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} \Rightarrow X[k] \xrightarrow{IDFT} y[n]$$

$$Y[k] \xleftarrow{DFT} y[n]$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] e^{-j\omega l} \quad \text{(DTFT)}$$

$$Y[k] = X(e^{j\omega_k}) = X(e^{j2\pi k/N}) =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N}kl}}_{\omega_N} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] \omega_N^{kl}$$

Y[k]'ya IDFT uygularsak;

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y[k] \omega_N^{-kn}$$

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] \omega_N^{kl} \right) \omega_N^{-kn}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\omega_N^{k(l-n)N}}_{l=n \text{ için } 1}$$

$$\boxed{y[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n + l * N]}$$

Yeni Sanayi Sitesi 19 Ağustos Cad. No:78 Merkez/BALIKESİR
Tel: 0 266 246 23 24 Faks: 0 266 246 38 98

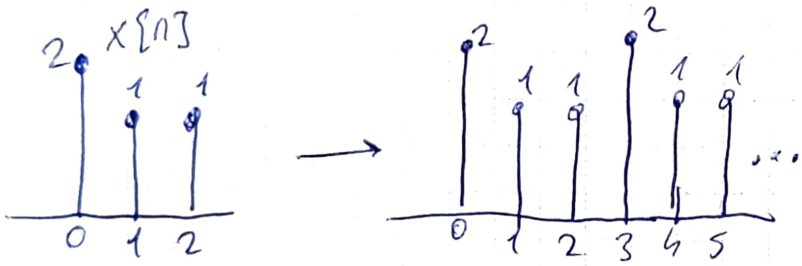
radix-2 fft algoritm

..../..../201....

Dolar

Euro

Buradan görüldüğü gibi frekans ekseninde örneklenme zaman ekseninde sonsuz kopya düşümü ile sonuçlanır. N, DFT'nin nokta sayısı; M 'de x[n] dizisinin uzunluğu olsun.



dft → fft

fft(x, N)

500 Dizinin uzunluğu

512 (2'nin katı) radix-2 (3'ün katı olsaydı radix-3)

Zaman ekseninde örtüşme olmaması için x[n] dizisinin uzunluğu DFT'nin nokta sayısından küçük ya da eşit olmalıdır. ($M \leq N$)

• ÖRNEK: 6 uzunluklu $x[n]=\{0,1,2,3,4,5\}$ dizisi için

a- $X(e^{j\omega})$'nın 8 eşit aralıkla örneklendiğini var sayalım frekans örneklerine ters DFT uygulayarak y[n] dizisini elde edelim

b- Aynı işlemi 4 frekans örneği olarak gerçekleştirelim.

Her iki durum için orijinal x[n] dizisi y[n]

GİMTAŞ

....../....../201.......

Dolar

Euro

dizisinden hatasız bir şekilde geri elde edilebilir mi?

a) $N=8$

$$y[n]=\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n+lN] \quad N=8$$

$y[0]=\dots+x[0-8]+x[0]+x[0+8]+\dots=x[0]=0$

$y[1]=\dots+x[-7]+x[1]+x[9]+\dots=x[1]=1$

$y[2]=\dots+x[-6]+x[2]+x[10]+\dots=x[2]=2$

$\vdots$

$y[5]=\dots+x[-3]+x[5]+x[13]+\dots=x[5]=5$

b) $y[n]=\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n+l4]$

$y[0]=\dots+x[0-4]+x[0]+x[4]+\dots=0+4=4$

$y[1]=\dots+x[-3]+x[1]+x[5]+\dots=1+5=6$

$\vdots$

$y[5]=\dots+x[1]+x[5]+x[9]+\dots=1+5=6$

Yeni Sanayi Sitesi 19 Ağustos Cad. No:78 Merkez/BALIKESİR
Tel: 0 266 246 23 24 Faks: 0 266 246 38 98

• ÖRNEK: $g[n] = \cos(2\pi r n/N)$, $0 \leq r \leq N-1$ işaretin DFT sini hesaplayınız?

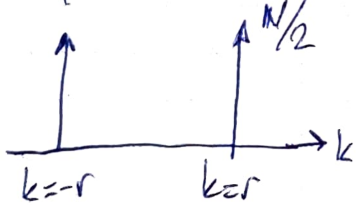
$$G[k] = \sum_{n=0}^{N-1} g[n] W_N^{kn} \quad , 0 \leq k \leq N-1$$

$$G[k] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \Big(\underbrace{e^{j\frac{2\pi r n}{N}}}_{W^{-rn}} + \underbrace{e^{-j\frac{2\pi r n}{N}}}_{W^{rn}} \Big) W_N^{kn} \qquad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$G[k] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} W^{n(k-r)} + W^{n(k+r)}$$

- $k = r$ → $\frac{N}{2}$
- $k = -r + N$ (mod) → $\frac{N}{2}$
- diğer → 0

$|G[k]|$ → reel sayı olduğundan mutlağı eşit



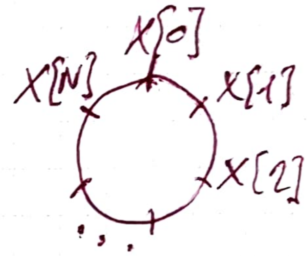
Sonlu Uzunluklu Diziler ile İlgili İşlemler

Ayrık zaman fourier dönüşümü gibi DFT nın de işaret işleme uygulamalarında faydalı birçok özelliği vardır. Bunlardan bazıları DTFT ile aynı iken bazıları farklılık gösterir. İkisi temel işlem öteleme ve konvolüsyon DFT'de dairesel olarak yapılır.

Normal ötelemede dizinin tanım aralığı değişiyor. Burada tanım aralığı ~~değişmez~~

• **Bir dizinin dairesel ötelenmesi**

$0 \le n \le N-1$ aralığında tanımlı N uzunluklu bir $x[n]$ dizisi olsun bu dizi doğrusal olarak ötelendiğinde tanım aralığı değişir. Tanım aralığı değişmeyecek şekilde yapılan ve mod operatörü kullanan ötelemeye dairesel öteleme denir. Ve şu şekilde gösterilir.

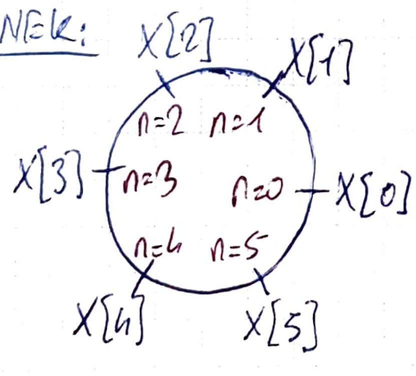


$$x_c[n] = \begin{cases} x[\langle n-n_0\rangle_N], & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

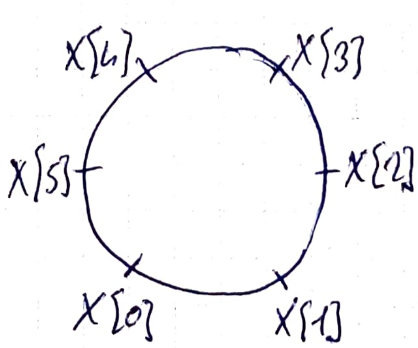
$n_0 > 0$ ise sağa öteleme (ters saat yönünde dön) (+)

$n_0 < 0$ ise sola öteleme (saat yönünde dön) (−)

ÖRNEK:

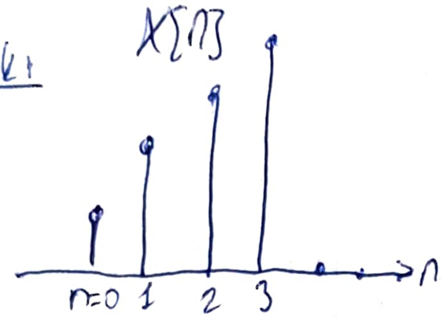


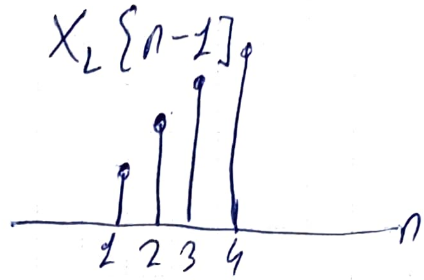
$$x[\langle n-4\rangle_6] = x[\langle n+2\rangle_6]$$

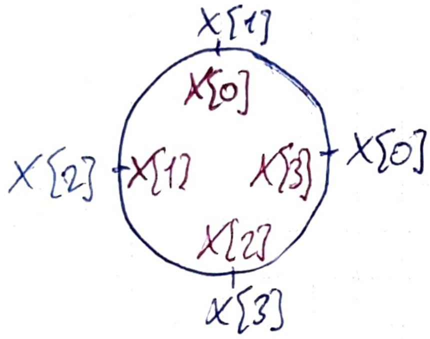


Mod(6)'ya göre 4 birim ters saat yönünde öteleneceğine, 2 birim saat yönünde döndürsede aynı sonuç çıkar

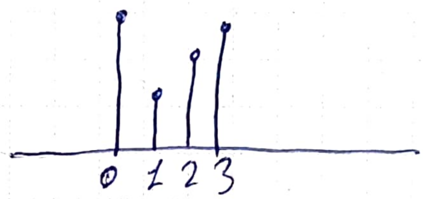
ÖRNEK:







$x[\langle n-1\rangle_4] = x[\langle n+3\rangle_4]$



• Bir dizinin dairesel konvolosyonu

N uzunluklu g[n] ve h[n] dizilerini ele alalım. Bu iki dizinin doğrusal konvolosyonu 2N-1 uzunlukludur. Ve şu şekilde gösterilir.

$$y_L[n] = \sum_{k=0}^{N-1} g[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]g[n-k], \quad 0 \le n \le 2N-2$$

N uzunluklu bir dizi veren ve dairesel öteleme kullanan konvolosyon işlemine dairesel konvolosyon denir. Şu şekilde gösterilir.

$$y_c[n] = \sum_{k=0}^{N-1} g[k]\,h[\langle n-k\rangle_N], \quad 0 \le n \le N-1$$

$$y[n] = g[n] \; N \; h[n]$$

mod(N) ve dairesel

Amaç: Dizi uzunluğu değişerek hızı arttırmak

ÖRNEK: $g[n]=\{1\ 2\ 0\ 1\}$, $h[n]=\{2\ 2\ 1\ 1\}$
iki dizinin dairesel konvolosyonunu hesaplayınız?

$$y_c[n]=g[n] \circledast_4 h[n]=\sum_{k=0}^{3} g[k]h[\langle n-k\rangle_4]$$

$$y_c[0]=\sum_{k=0}^{3} g[k]h[\langle -k\rangle_4]=g[0]h[0]+g[1]h[3]+g[2]h[2]+g[3]h[1]$$

İndisler toplamı $=0$ mod(4) $=6$

$$y_c[1]=\sum_{k=0}^{3} g[k]h[\langle 1-k\rangle_4]=g[0]h[1]+g[1]h[0]+g[2]h[3]+g[3]h[2]=7$$

$$y_c[2]=g[0]h[2]+g[1]h[1]+g[2]h[0]+g[3]h[3]=6$$

$$y_c[3]=g[0]h[3]+g[1]h[2]+g[2]h[1]+g[3]h[0]=5$$

ÖRNEK: Aynı örneği DFT kullanarak çözelim

$$y_c[n]=g[n] \circledast_4 h[n] \xleftrightarrow{DFT} Y_c[k]=G[k]H[k]$$

$$y[n]=g[n]*h[n] \xrightarrow{DTFT} Y[e^{jw}]=G[e^{jw}]H[e^{jw}]$$

$$x[n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{jw}) \xrightarrow{w=\frac{2\pi k}{N}} X[k] \xrightarrow{\text{Ters DFT}} y[n]$$

Analog filtre tasarımı için ara değerleme gerekir.

$$G[k]=\sum_{n=0}^{N-1} g[n]e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}=\sum_{n=0}^{N-1} g[n]W_N^{kn} \qquad e^{-j\frac{2\pi}{N}}=W_N$$

$$\underline{X}=D_N\underline{x} \quad , \quad \underline{x}=D_N^{-1}\underline{X}$$

$$D_N^{-1} \longrightarrow \frac{1}{N}D_N^{*}$$

$$D_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_N & w_N^2 & w_N^3 \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & w_N^6 \\ 1 & w_N^3 & w_N^6 & w_N^9 \end{bmatrix}$$

$$w_N = e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -j$$

$$D_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}_{4x4}$$

$$G[k] = D_N\, g$$

$$G[k] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1-j & -2 & 1+j \end{bmatrix}^T$$

$$H[k] = D_N\, h$$

$$H[k] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1-j & 0 & 1+j \end{bmatrix}^T$$

$$Y_c[k] = \begin{bmatrix} 24 & -2j & 0 & 2j \end{bmatrix}^T$$ //Matlabda nokta çarpımı ile elde edilir.

$$D_N^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4}$$

Yeni Sanayi Sitesi 19 Ağustos Cad. No:78 Merkez/BALIKESİR
Tel: 0 266 246 23 24 Faks: 0 266 246 38 98

$$Y_c[n] = D_N^{-1} Y_c[k]$$

$$Y_c[n] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 24 \\ -2j \\ 0 \\ 2j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}^T$$

NOT: Dairesel Konvolüsyon ile Doğrusal Konvolüsyonun İlişkisi;

$g[n]$, $0 \leq n \leq N-1$

$h[n]$, $0 \leq n \leq N-1$

$Y_L[n] \Rightarrow 0 \leq n \leq 2N-2$

$Y_c[n] \Rightarrow 0 \leq n \leq N-1$

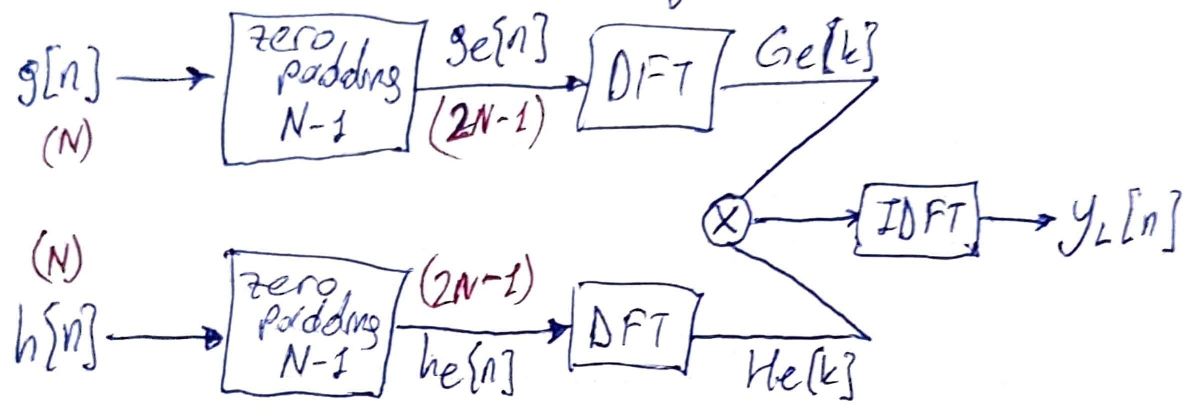
Genişletilmiş Dizi;

$$g_e[n] = \begin{cases} g[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq 2N-2 \end{cases}$$ (zero-padding)

$$h_e[n] = \begin{cases} h[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq 2N-2 \end{cases}$$ e → expended

$$g_e[n] * h_e[n] = g_e[n] \; 2N-1 \; h_e[n]$$

NOT: DFT ile doğrusal Konvolüsyon hesabı;



Konvolüsyonda Tablo Yöntemi (mod 4 'e göre)

g[n]	0	1	2	3	4	5	6	7
h[n]	0	1	2	3	4	5	6	7
$y_L[n]$	g[0]h[0]	g[1]h[0] g[0]h[1]	g[0]h[2] g[1]h[1] g[2]h[0]	g[0]h[3] g[1]h[2] g[2]h[1] g[3]h[0]	g[0]h[4]=0 g[1]h[3] g[2]h[2] g[3]h[1] g[4]h[0]=0	g[2]h[3] g[3]h[2]	g[3]h[3]	∅
$y_C[n]$	g[0]h[0]	g[1]h[0] g[0]h[1]	//	//				

mod(4)⇒0

mod(4)⇒1

mod(4)=2

$$y_C[n] = \sum_{k=0}^{N-1} g[k]\, h[\langle n-k \rangle_N] \quad , 0 \leq n \leq N-1$$

$$g[n] = \{ g[0] \quad g[1] \quad g[2] \quad g[3] \} \qquad g[4] = 0 \quad mod(4)$$

GİMTAŞ

........./........../201......

Dolar

Euro

Genel Dizilerin DFT Hesabı

g[n] ve h[n], N uzunluklu iki dizi olsun. DFT'nin simetri özelliklerinden faydalanarak iki dizinin N nokta DFT'sini tek bir N nokta DFT ile hesaplayabiliriz.

$$v[n] = g[n] + j\,h[n]$$

$$\mathrm{Re}\{v[n]\} = g[n]$$

$$\mathrm{Im}\{v[n]\} = h[n]$$

$$v[n] \xrightarrow{DFT} V[k]$$

$$G[k] = \frac{1}{2}\left\{V[k] + V^*[\langle -k\rangle_N]\right\}$$

$$H[k] = \frac{1}{2j}\left\{V[k] - V^*[\langle -k\rangle_N]\right\}$$

ÖRNEK: $g[n] = \{1 \;\; 2 \;\; 0 \;\; 1\}$, $h[n] = \{2 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 1\}$

$$v[n] = \{1+2j,\; 2+2j,\; j,\; 1+j\}$$

$$V[k] = D_N\, v[n]$$

$$V[k] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2j \\ 2+2j \\ j \\ 1+j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+6j \\ 2 \\ -2 \\ 2j \end{bmatrix}$$

........../........../201.......

Dolar

Euro

$$\begin{array}{ccccc} & k=0 & k=1 & k=2 & k=3 \\ V^*[k]=\{ & 4-6j, & 2, & -2, & -2j\} \end{array}$$

$V^*[\langle -k\rangle_4]=\{4-6j,\ -2j,\ -2,\ 2\}$ ← k değerlerini yazıp mod(4)'e göre değerlerini yerine yazız.

$G[k]=\frac{1}{2}\{V[k]+V^*[\langle -k\rangle_N]\}$

$G[k]=\{4,\ 1-j,\ -2,\ 1+j\}$

$H[k]=\frac{1}{2j}\{V[k]-V^*[\langle -k\rangle_N]\}$

$H[k]=\{6,\ \frac{2+2j}{2j},\ 0,\ \frac{2j-2}{2j}\}=\{6,\ 1-j,\ 0,\ 1+j\}$

Genel Bir Dizinin 2N nokta DFT'sinin N nokta DFT ile Hesabı

2N uzunluklu $v[n]$ dizisinin DFT'sini hesaplamak istiyor.

Bu amaçla 2 adet N uzunluklu dizi oluşturalım

$g[n]=v[2n]\quad,\quad h[n]=v[2n+1]\quad,\quad 0\leq n\leq N$

Bu durumda;

$v[k]=G[\langle k\rangle_N]+W_{2N}^{k}H[\langle k\rangle_N]\qquad 0\leq k\leq 2N-1$

$W_{2N}^{k}=e^{j\frac{2\pi}{2N}k}$

ÖRNEK: $v[n] = \{1\ 2\ 2\ 2\ 0\ 1\ 1\ 1\}$

Yukarıda verilen 8 uzunluklu v[n] dizisinin DFT'sini 4 uzunluklu DFT'ler ile hesaplayınız?

$g[n] = \{1, 2, 0, 1\}$ çiftler

$h[n] = \{2, 2, 1, 1\}$ tekler

$G[k] = \{4, 1-j, -2, 1+j\}$

$H[k] = \{6, 1-j, 0, 1+j\}$

$V[k] = G[\langle k \rangle_N] + W_{2N}^{k} H[\langle k \rangle_N], \quad 0 \leq k \leq 2N-1$

$k=0 \longrightarrow V[0] = 4 + W_8^0 (6)$

$k=1 \longrightarrow V[1] = (1-j) + W_8^1 (1-j)$

$k=2 \longrightarrow V[2] = -2 + W_8^2 \cdot 0$

$k=3 \longrightarrow V[3] = (1+j) + W_8^3 (1+j)$

$k=4 \longrightarrow V[4] = 4 + W_8^4 (6)$

$k=5 \longrightarrow V[5] = (1-j) + W_8^5 (1-j)$

$k=6 \longrightarrow V[6] = -2 + W_8^6 \cdot 0$

$k=7 \longrightarrow V[7] = (1+j) + W_8^7 (1+j)$

4'e göre mod

$$W_8^1 = e^{-j\frac{2\pi}{8}1} = e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

// Dizi tek elemanlı olsaydı sonuna sıfır eklenir

Yeni Sanayi Sitesi 19 Ağustos Cad. No:78 Merkez/BALIKESİR
Tel: 0 266 246 23 24 Faks: 0 266 246 38 98

Sayısal Filtre Tasarımı

$$H(j\Omega) \longrightarrow G(e^{jw}) \longrightarrow G(z)$$

$$G(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{p_0 + p_1 z^{-1} + \dots}{d_0 + d_1 z^{-1} + \dots}$$ → FIR, IIR

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, x[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \, y[n-k]$$

- $M=0$ ise

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, x[n-k] = b_0 \, y[n]$$

$$y[n] = \frac{1}{b_0} \sum_{k=0}^{N} a_k \, x[n-k]$$

$$x[n] = \delta[n]$$

$$y[n] = h[n] = \frac{1}{b_0} \sum_{k=0}^{N} a_k \, \delta\underbrace{[n-k]}_{n=k} = \frac{a_n}{b_0}$$

(FIR)
geri beslemesiz filtre
yinelemesiz filtre.

- $M \neq 0$ ise

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, x[n-k] = b_0 \, y[n] + \sum_{k=1}^{M} b_k \, y[n-k]$$

$$y[n] = \Big\{ \sum_{k=0}^{N} \underbrace{a_k\, x[n-k]}_{a_k z^{-k} X(z)} - \sum_{k=1}^{M} \underbrace{b_k\, y[n-k]}_{b_k z^{-k} y(z)} \Big\} \frac{1}{b_0} \qquad (IIR)$$

$$y[n] = \Big\{ \sum_{k=0}^{N} a_k\, \delta[n-k] - \sum_{k=1}^{M} b_k\, y[n-k] \Big\} \frac{1}{b_0} = h[n]$$

$$y[0] = a_0 / b_0$$

$$y[1] = \Big\{ a_1 - (a_0/b_0)\, b_1 \Big\} \frac{1}{b_0} \Rightarrow y[1] = a_1 - b_1 y[0] - \cancel{b_2 y[-1]} - \cancel{b_3 y[-2]} \ldots$$

nedensel sistem

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

IIR filtre için pay ve payda var
FIR filtre için sadece pay var (Payda = 1)

Filtre Karakteristiklerinin Belirlenmesi;

$$w_p = \frac{2\pi F_p}{F_T}\ \Omega_p \quad ; \quad w_s = \frac{2\pi F_s}{F_T}\ \Omega_s$$

$$|Y(e^{jw})| = |X(e^{jw})|\, |G(e^{jw})| \longrightarrow$$ Kompleks olursa genlik ve faz için ayrı işlem ayrıştırılmaları yapılır.

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N} h[n]\, z^{-n} = h[0] + h[1]\, z^{-1} + h[2]\, z^{-2} + \ldots \qquad (FIR)$$

$$\boxed{h[n] = \mp h[N-n]} \longrightarrow$$ Doğrusal Faz

Pencereleme Fourier Serileri $\longrightarrow$ Rectangular
Hanning
Hamming
Kaiser
Blackman

GİMTAŞ

....../....../201......

Dolar

Euro

AGF Analog

$w_p \longrightarrow \Omega_p$

$w_s \longrightarrow \Omega_s$

$\alpha_p \longrightarrow \alpha_p$

$\alpha_s \longrightarrow \alpha_s$

$$w_p = \frac{\Omega_p}{F_T} \qquad \Omega_p \rightarrow 2\pi f_p$$

$$H(\Omega) \xrightarrow[\text{Bilineer Tarsi}]{\text{Çift Doğrusal Dönüşüm}} H(z)$$

$H(\Omega) \rightarrow s$, $H(z) \rightarrow z$

Sayısal Filtre Tasarımında Temel Yaklaşımlar

Sayısal IIR filtre tasarımında aşağıdaki adımlar izlenir;

1- Sayısal filtre karakteristikleri belirtilen genlik cevabının sağlayacak şekilde prototip bir analog alçak geçiren filtre karakteristiğine dönüştürülür.

2- Analog alçak geçiren transfer fonksiyonu $H_a(s)$ belirlenir.

3- $H_a(s)$ gerekli sayısal transfer fonksiyonu $G(z)$'e dönüştürülür.

IIR Filtre Tasarımında Çift Doğrusal Dönüşüm (Bilineer Transform, BLT)

Çift doğrusal dönüşüm s uzayındaki bir noktayı z uzayındaki bir noktaya dönüştürür ve aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

Genlikte bir etki olmaması için $T=2$ seçilir.

$$G(z) = H_a(s)\Big|_{s=\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)}$$

Genel olarak sayısal IIR filtre tasarlarken aşağıdaki 3 adım takip edilmelidir.

1- $G(z)$'in karakteristiklerine Ters çift doğrusal dönüşüm uygulanarak $H_a(s)$'in karakteristikleri elde edilir.

2- $H_a(s)$ tasarlanır (bulunur)

3- $H_a(s)$'e çift doğrusal dönüşüm (BLT) uygulanarak $G(z)$ sayısal karşılığı elde edilir.

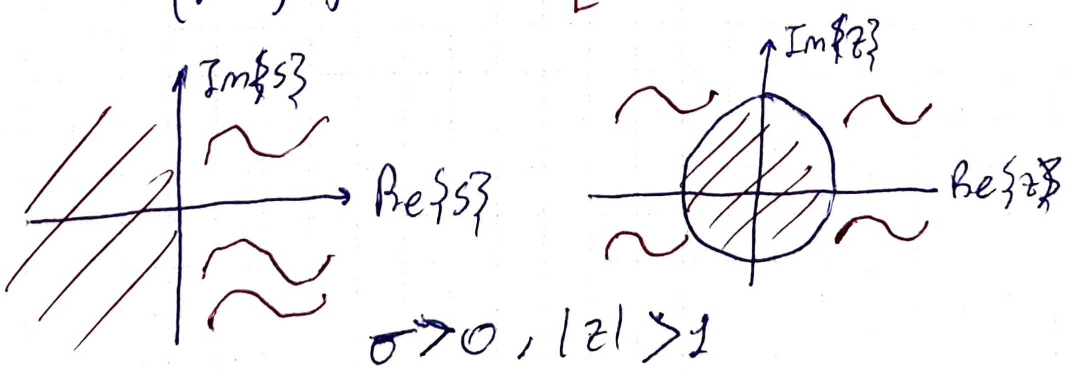
$$z = \frac{1+s}{1-s} \quad (T=2 \text{ için})$$

$$s = \sigma + j\Omega_0$$

$$z = \frac{(1+\sigma)+j\Omega_0}{(1-\sigma)-j\Omega_0}$$

$\sigma = 0$ ise

$$|z|^2 = \frac{(1+\sigma)^2+(\Omega_0^2)}{(1-\sigma)^2+(\Omega_0^2)}, \quad |z| = 1$$



$\sigma > 0, \ |z| > 1$

$\sigma < 0, \ |z| < 1$

........./........../201......

Dolar

Euro

NOT: Çift Doğrusal dönüşüm (BLT) kararlı bir analog transfer fonksiyonunu, kararlı bir sayısal transfer fonksiyonuna dönüştürür.

- Şimdi analog frekans Ω ile sayısal frekans w arasındaki ilişkiyi inceleyelim

$$s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$s = j\Omega \qquad z = e^{jw}$$

$$j\Omega = \frac{1-e^{-jw}}{1+e^{-jw}} = \frac{\cancel{e^{-jw/2}}\left(e^{jw/2} - e^{-jw/2}\right)}{\cancel{e^{-jw/2}}\left(e^{jw/2} + e^{-jw/2}\right)}$$

$$\cancel{j}\Omega = \frac{\cancel{2j}\sin(w/2)}{\cancel{2}\cos(w/2)}$$

$$\boxed{\Omega = \tan(w/2)}$$

ön bükme
frekans bükmesi (Ters BLT)

$\Omega_p \qquad w_p$

Yeni Sanayi Sitesi 19 Ağustos Cad. No:78 Merkez/BALIKESİR
Tel: 0 266 246 23 24 Faks: 0 266 246 38 98

Tüm geçiren filtrede de örneklerin hepsinin aynı geçirme olmasını sağlamak

......../......../201......

Dolar

Euro

IIR Filtre Tasarımı

ÖRNEK: Aşağıda verilen karakteristiklere sahip alçak geçiren butterworth filtreyi tasarlayınız?

$w_p = 0{,}25\pi \qquad \alpha_p = 0{,}5\,dB$

$w_s = 0{,}55\pi \qquad \alpha_s = 15\,dB$

1- $\Omega_p = \tan(w_p/2)$

$\Omega_s = \tan(w_s/2)$

$$\left.\begin{aligned} 10\log\left(\frac{1}{1+\varepsilon^2}\right) &= -0{,}5 \\ 10\log\left(\frac{1}{A^2}\right) &= -15 \end{aligned}\right\} \varepsilon = \qquad A =$$

$$\frac{1}{k} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = 2{,}826$$

$$\frac{1}{k_1} = \frac{\sqrt{A^2-1}}{\varepsilon} = 15{,}841$$

$$N = \frac{\log_{10}(1/k_1)}{\log_{10}(1/k)} = 2{,}65 \cong 3$$

$$|H_a(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega_p/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1+\varepsilon^2} \longrightarrow \text{kesim frekansı gelir}$$

$\Omega_c = 0{,}588$

$$H(s) = \frac{\Omega_c^{M}}{\prod_{l=1}^{3} (s - p_l)}$$

$$H_{an}(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} \quad , \Omega_c = 1$$

normalize edilmiş Ω_c

$$H_a(s) = H_{an}(s) \Big|_{s = \frac{s}{0,588}}$$

$0,588 \rightarrow \Omega_c$

$$G(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$ (Çift Doğrusal Dönüşüm)

Yüksek Geçiren, Band Geçiren ve Band Durduran IIR Filtre Tasarımı

Bu amaç için kullanılan iki yaklaşım vardır.

1. Yaklaşım

Adım 1: Gerekli sayısal filtre $G_D(z)$'in frekans karakteristiklerine ön bükme işlemi uygulanarak aynı tür analog filtre $H_D(s)$'in frekans karakteristikleri elde edilir.

Adım 2: $H_D(s)$'in karakteristikleri uygun bir frekans dönüşümü ile prototip alçak geçiren filtre $H_{LP}(s)$ karakteristiklerine dönüştürülür.

....../....../201......

Dolar

Euro

Adım 3: Prototip alçak geçiren filtre tasarlanır.

Adım 4: İkinci adımda kullanılan frekans dönüşümünün tersi kullanarak analog yüksek geçiren filtre $H_D(s)$ elde edilir.

Adım 5: Çift doğrusal dönüşüm kullanılarak $H_D(s)$ istenilen sayısal transfer fonksiyonu $G_D(z)$'e dönüştürülür.

2. Yaklaşım

İlk üç adım birinci yaklaşımdaki adımlarla aynıdır.

Adım 4: $H_{LP}(s)$'e çift doğrusal dönüşüm uygulanarak prototip sayısal alçak geçiren filtre $G_{LP}(z)$ elde edilir.

Adım 5: Sayısal uzayda uygun bir frekans dönüşümü kullanarak $G_{LP}(z)$ istenilen sayısal transfer fonksiyonu $G_D(z)$'e dönüştürülür.

ÖRNEK: Birinci yaklaşımı kullanarak aşağıdaki karakteristiklere sahip birinci tür Chebyshev yüksek geçiren IIR filtreyi tasarlayınız.

$F_p = 700\,Hz$ $\quad \alpha_p = 1\,dB$ $\quad F_T = 2\,kHz$

$F_s = 500\,Hz$ $\quad \alpha_s = 32\,dB$

GİMTAŞ

....../....../201......

Dolar

Euro

(1) $\omega_p = \dfrac{2\pi F_p}{F_T} = \dfrac{2\pi 700}{2000} = 0{,}7\pi$

$\omega_s = \dfrac{2\pi F_s}{F_T} = \dfrac{2\pi 500}{2000} = 0{,}5\pi$

$\hat{\Omega}_p = \tan(\omega_p/2) = 1{,}962$

$\hat{\Omega}_s = \tan(\omega_s/2) = 1$

(2) $\Omega_s = \dfrac{1\, \Omega_p \, \hat{\Omega}_p}{\hat{\Omega}_s}$ $\qquad \Omega_s = \dfrac{1 \times 1{,}962}{1} = 1{,}962$

$\Omega_p = 1$

(3) [N, wn] = cheb1ord(1, 1.962, 1, 32, 's')

[B, A] = cheby1(N, 1, wn, 's')

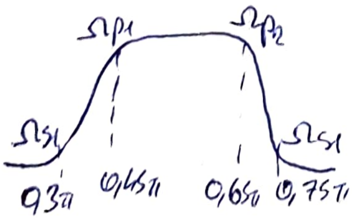
(4) [BT, AT] = lp2hp(B, A, 1.962)

(5) [num, den] = bilinear(BT, AT, 0.5) → 0,5 ⇒ $\frac{2}{T}$ $\quad T = 4$ için

↳ Çift doğrusal dönüşüm

ÖRNEK: $\omega_{p1} = 0{,}45\pi \qquad \omega_{s1} = 0{,}3\pi \qquad \alpha_p = 1dB$

$\omega_{p2} = 0{,}65\pi \qquad \omega_{s2} = 0{,}75\pi \qquad \alpha_s = 40dB$



Yukarıdaki karakteristiklere sahip butterworth IIR sayısal band geçiren filtreyi tasarlayalım

........../........../201......

Dolar

Euro

(1) $\Omega = \tan(w/2)$ $\quad \hat{\Omega}_{p_1} = 0{,}854 \quad \hat{\Omega}_{p_2} = 1{,}631$

$\hat{\Omega}_{s_1} = 0{,}509 \quad \hat{\Omega}_{s_2} = 2{,}414$

(2) $\hat{\Omega}_{p_1}\hat{\Omega}_{p_2} \overset{?}{=} \hat{\Omega}_{s_1}\hat{\Omega}_{s_2} = \hat{\Omega}_0^2$

$1{,}393 \neq 1{,}230$

$\uparrow \hat{\Omega}_{s_1} = \dfrac{\hat{\Omega}_{p_1}\hat{\Omega}_{p_2}}{\hat{\Omega}_{s_2}} = \dfrac{1{,}393}{\cancel{0{,}509}\ 2{,}414} = 0{,}577$

$\hat{\Omega}_0^2 = 1{,}393$

$BW = \hat{\Omega}_{p_2} - \hat{\Omega}_{p_1} = 0{,}777$ band durduran için $\hat{\Omega}_{s_2} - \hat{\Omega}_{s_1}$

$\Omega_s = \overset{1}{\Omega_p} \dfrac{\hat{\Omega}_0^2 - \hat{\Omega}_{s_1}^2}{\hat{\Omega}_{s_1} BW}$

$\Omega_s = 1 \dfrac{1{,}393 - (0{,}577)^2}{0{,}577 \cdot 0{,}777} = 2{,}361$

$\left[\begin{array}{ll} \Omega_p = 1 & \alpha_p = 1 \\ \Omega_s = 2{,}361 & \alpha_s = 40 \end{array}\right]$ prototip AGF

(3) [N, wn] = buttord(1, 2.361, 1, 40, 's')

[B, A] = butter(N, 1, wn, 's')

(4) [BT, AT] = lp2bp(B, A, ~~1~~, 2.361)

$1{,}1805 = \sqrt{\hat{\Omega}_0^2} = \hat{\Omega}_0$

$0{,}777 = BW$

(5) [num, den] = bilinear(BT, AT, 0,5)

IIR Sayısal Filtrelerin Spektral Dönüşümleri

Amaç verilen bir alçak geçiren sayısal transfer fonksiyonu $G_L(z)$'i alçak, yüksek, band geçirene ve band durduran bir filtreye karşılık gelen sayısal transfer fonksiyonu $G_D(\hat{z})$'ye dönüştürmektir. Karışıklığı önlemek amacıyla prototip alçak geçiren filtre transfer fonksiyonunda z istenilen transfer fonksiyonunda $\hat{z}$ kullanılır.

$z = F(\hat{z})$ ilişkisinden $|z| = |F(\hat{z})|$ elde edilir.

$$|F(\hat{z})| = \begin{cases} |z|<1 \ , & |F(\hat{z})|<1 \\ |z|=1 \ , & |F(\hat{z})|=1 \\ |z|>1 \ , & |F(\hat{z})|>1 \end{cases}$$

Kararlılık şartı sağlanıyor

O halde $\frac{1}{F(\hat{z})}$ genel şekli aşağıda verilen tüm geçiren kararlı bir transfer fonksiyonu olmalıdır

$$z^{-1} = \frac{1}{F(\hat{z})} = \mp \prod_{\ell=1}^{L} \left(\frac{1-\alpha_\ell^* \hat{z}}{\hat{z}-\alpha_\ell} \right) , \quad |\alpha_\ell|<1$$

z^{-1} de pay ve payda yer değişir

1) Alçak Geçiren - Alçak Geçiren Spektral Dönüşüm

w_c kesim frekansı alçak geçiren filtre $G_L(z)$'i $\hat{w}_c$ kesim frekanslı $G_L(\hat{z})$ alçak geçiren filtresine dönüştürmek için aşağıdaki dönüşüm kullanılır

$$z^{-1} = \frac{1}{F(\hat{z})} = \frac{1-\alpha\hat{z}}{\hat{z}-\alpha}$$

$$\alpha = \frac{\sin((w_c-\hat{w}_c)/2)}{\sin((w_c+\hat{w}_c)/2)}$$

$w_c = 0,25\pi$

$\hat{w}_c = 0,35\pi$

$$\alpha = \frac{\sin(0,05\pi)}{\sin(0,3\pi)}$$

$$G_L(z)\Big|_{z=\frac{\hat{z}-\alpha}{1-\alpha\hat{z}}} = G_L(\hat{z})$$

NOT: Alçak geçirenden alçak geçirene spektral dönüşüm yüksek geçirenden yüksek geçirene ve band geçirenden - band geçirene, band durdurandan - band durdurana dönüşümler için de uygulanabilir.

Yeni Sanayi Sitesi 19 Ağustos Cad. No:78 Merkez/BALIKESİR
Tel: 0 266 246 23 24 Faks: 0 266 246 38 98

GİMTAŞ

........../........../201........

Dolar

Euro

Bazı Matlab Komutları

kesim frekansları

[tgpay, tgpayda] = allpasslp2hp(wag, wyg)   AG-YG

[tgpay, tgpayda] = allpasslp2bp(wag, wbg)   AG-BG

[tgpay, tgpayda] = allpasslp2bs(wag, wbs)   AG-BS

[pay, payda] = iirlp2hp(payag, paydaag, wag, wyg)

[pay, payda] = iirlp2bp(payag, paydaag, wag, wbg)   vektör olmalı (2 tane olduğu için)

[pay, payda] = iirlp2bs(payag, paydaag, wag, wbs)

Sayısal IIR Filtrelerin Grub Gecikme Denkleştirmesi

Bir işaretin verilen frekans aralığında sayısal bir filtreden bozunumsuz iletimi için filtrenin transfer fonksiyonu birim genlik yanıtına ve doğrusal faz cevabına yani ilgili frekans aralığında sabit grub gecikmesine sahip olması istenir. Şimdiye kadar tartışılan IIR filtre tasarım yöntemleri doğrusal olmayan faz cevabı ile sonuçlanır. O halde sabit grub gecikmeli sayısal IIR filtre elde etmek için pratik çözümlerden biri istenilen genlik cevabını sağlayan IIR filtreye grub gecikmesi sabit olacak şekilde tüm geçiren bir filtreyi seri olarak bağlamaktır.

GİMTAŞ

........../........../201.......

Dolar

Euro

Tüm geçiren filtre tasarımında optimizasyon yöntemleri kullanıldığından bu tasarım kod olarak verilecektir.

Yeni Sanayi Sitesi 19 Ağustos Cad. No:78 Merkez/BALIKESİR
Tel: 0 266 246 23 24 Faks: 0 266 246 38 98