3. Yüksek Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler

Geçmiş konularda şu ana kadar ele alınan 1.mertebe-1.dereceden adi diferensiyel denklemler ancak 1.mertebe seviyesindeki belirli problemleri ifade edebilmektedir. Daha üst mertebeden değişkenliğe sahip daha karmaşık yapıdaki problemlerin ifade edilebilmesi için Yüksek Mertebeden Diferensiyel Denklemlere ihtiyaç duyulur. Bu diferensiyel denklemler Değişken Katsayılı ve Sabit Katsayılı olabilirler.

Değişken Katsayılı Adi Diferensiyel Denklemler

Katsayıları bağımsız(x) değişkene bağlı diferensiyel denklemlerdir. Genel ifadesi şöyledir.

$$a_n(x).y^n + a_{n-1}(x).y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x).y'' + a_1(x).y' + a_0(x).y = Q(x)$$

En az bir $a_n(x)$ katsayısı değişken olmalıdır.

Sabit Katsayılı Adi Diferensiyel Denklemler

Katsayıları bağımsız(x) değişkenine bağlı olmayan diferensiyel denklemlerdir. Genel ifadesi şöyledir.

$$a_n.y^{(n)} + a_{n-1}.y^{(n-1)} + \ldots + a_2.y'' + a_1.y' + a_0.y = Q(x)$$

a_n katsayılarının tamamı sabit olmalıdır.

Burada Sabit ve Değişken katsayılı Diferansiyel Denklemler karşılaştırıldığında değişken katsayılıların sabit katsayılılara göre çözümlerinin daha zor olduğu bilinmektedir. Bu nedenle sabit katsayılılar daha kolay çözülürken, değişken katsayılılar için daha özel çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Bu çerçevede öncelikle sabit katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümleri ele alınacaktır. Çünkü genellikle değişken katsayılı diferansiyel denklemleri çözerken de sabit katsayılı diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemlerinden yararlanılmaktadır. Daha sonra da değişken katsayılı yüksek mertebeden diferensiyel denklemler ve çözümleri için bazı örnekler verilecektir.

3.1. Sabit Katsayılı Yüksek Mertebeden Adî Diferansiyel Denklemler

Sabit Katsayılı Yüksek Mertebeden diferensiyel denkler kolay çözülebilmeleri için iki kısımda ele alınır. Eşitliğin sol tarafında yer alan kısım Homogen , sağ tarafında yer alan kısım ise Sağ taraf fonksiyonu olarak adlandırılır.

$$\underbrace{a_n.\, y^{(n)} + a_{n-1}.y^{(n-1)} + \ldots + a_2.y'' + a_1.y' + a_0.y}_{\text{Homojen kısım}} = \underbrace{Q(x)}_{\text{Sağ taraf fonksiyonu}}$$

Analitik çözümlerde Genel Çözümler elde edilirken homojen kısım ve sağ taraf fonksiyonu ayrı ayrı çözülür.

Böylece Genel çözümler için;
y_h……………Homojen Kısmın Çözümü
$y_1, y_2, \ldots, y_k$ …sağ taraf fonksiyonu ile ilgili özel çözümler ise

Genel Çözüm

$$y = \underbrace{y_h}_{\text{Homojen kısmın çözümü}} + \underbrace{y_1 + y_2 + \ldots + y_k}_{\text{Özel Çözümler}}$$

şeklinde elde edilir.

3.1.1. Sabit Katsayılı Yüksek Mertebeden Adî Diferansiyel Denklemlerin Homogen Kısmının Çözümleri

Homojen Çözümler….y_h ile gösterilmek üzere

$$\underbrace{a_n.y^{(n)} + a_{n-1}.y^{(n-1)} + \ldots + a_2.y'' + a_1.y' + a_0.y}_{\text{Homojen Kısım}} = 0$$

Çözümler için $y = e^{rx}$ fonksiyonunun uygun olduğunu kabul edelim.
r = sabit değerler olmak üzere $y = e^{rx}$ çözümü homojen kısmı sağlamalıdır. O halde

$$y = e^{rx} \to y' = r.e^{rx} \to y'' = r^2.e^{rx} \to \ldots \to y^{(n-1)} = r^{n-1}.e^{rx} \to y^n = r^n.e^{rx}$$

ifadeleri homojen kısımda konulursa;

$$\underbrace{e^{rx}}_{\neq 0\text{ 'dır.}}.\underbrace{[\, a_n.r^n + a_{n-1}.r^{n-1} + \ldots + a_2.r^2 + a_1.r + a_0 \,]}_{= 0 \text{ olmalıdır.}} = 0$$

(e^{rx} ancak rx=- sonsuz da 0 olabilir. Bu da belirsizliktir.)
Burada

$$f(r) = a_n.r^n + a_{n-1}.r^{n-1} + \ldots + a_2.r^2 + a_1.r + a_0 = 0$$

denklemine **Karakteristik Denklem** adı verilir. Bu denklem n. dereceden polinomial bir denklem olduğundan "f(r)'nin n tane sonlu kökü olmalıdır". Bu kökler

$$r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n$$

şeklindedir. O halde homojen çözüm;

$$y_h = c_1 . e^{r_1 x} + c_2 . e^{r_2 x} + \ldots + c_n . e^{r_n x}$$

şeklindedir. Burada $c_1, c_2, \cdots, c_n$ keyfi sabitlerdir ve Mertebe kadar keyfi sabit bulunmalıdır.

($r_1, r_2, \ldots, r_n$) Köklerine göre Karakteristik Denklemin Çözümleri:

a) $r_1, r_2, \ldots, r_n$ Kökleri REEL ve FARKLI ise;

$r_1 \neq r_2 \neq \ldots \neq r_n$ ve reel ise (karmaşık değil) Homogen kısmın çözümü
$y_h = C_1 . e^{r_1 x} + C_2 . e^{r_2 x} + \ldots + C_n . e^{r_n x}$

şeklindedir.

ÖRNEK:

$\underbrace{y''' - 3.y'' - 4.y'}$ $= 0 \rightarrow$ şeklinde verilen diferensiyel Denklemini çözelim;

Diferensiyel denklem yalnız Homojen kısımdan oluştuğundan
Karakteristik denklem; $f(r)=r^3 - 3.r^2 - 4.r = 0$ şeklindedir. Buradan kökler
$r(r^2 - 3.r - 4) = 0$
r -4
r +1 $r(r+1)(r-4) = 0$

$r_1 = 0, r_2 = -1, r_3 = 4 \rightarrow$ kökler farklı ve reeldir. O halde homojen kısmın çözümü
$y_h = C_1 . e^{r_1 x} + C_2 . e^{r_2 x} + C_3 . e^{r_3 x}$
$y_h = C_1 . e^{0.x} + C_2 . e^{-x} + C_3 . e^{4.x}$
$y_h = C_1 + C_2 . e^{-x} + C_3 . e^{4.x}$ olarak elde edilir. Diferensiyel denklemin sağ taraf fonksiyonu olmadığından bu çözüm aynı zamanda genel çözümdür.

b) $r_1, r_2, \ldots, r_n$ kökleri REEL ve ÇAKIŞIK (EŞİT) ise;

$r_1 = r_2 = r_k$ (reel eşit) $r_{k+1} =/= r_n$ (reel ve farklı)

$$y_h = \underbrace{C_1 .\mathbf{X^0}.e^{r_1 x} + C_2 .\mathbf{X^1}. e^{r_2 x} + C_3 .\mathbf{X^2}. e^{r_3 x} + \ldots + C_k . \mathbf{X^{k-1}}. e^{r_k .x}}_{\text{Reel ve Çakışık(eşit) kökler için çözüm}} + \underbrace{C_{k+1} . e^{r.x}{}_{k+1} + C_n . e^{r_n .x}}_{\text{Reel ve farklı kökler için çözüm}}$$

ÖRNEK:

$y''' - 4.y'' + 4.y' = 0$ homogen kısımdan oluşan dif.denklemini ele alalım.

Karakteristik denklem; $f(r) = r^3 - 4.r^2 + 4.r = 0 \rightarrow r(r^2 - 4.r + 4) = 0 \rightarrow r(r-2)^2 = 0$

$r_1 = r_2 = 2$ (reel çakışık, eşit) , $r_3 = 0$ (reel farklı) köklerine göre homogen kısmın çözümü

$y_h = (C_1 .x^0. e^{r_1 x} + C_2 .x^1. e^{r_2 x}) + C_3 . e^{r_3 x}$
$y_h = (C_1 . e^{2x} + C_2 . x. e^{2x}) + C_3 . e^{0.x}$
$y_h = C_1 . e^{2x} + C_2 . x. e^{2x} + C_3$ şeklinde ortaya çıkar.

c) $r_1, r_2, \dots, r_n$ kökleri KARMAŞIK (KOMPLEX) ise;

Karakteristik denklemin (f(r)) kökleri içerisinde karmaşık kök var ise bunlar mutlaka eşlenik çiftler şeklinde ortaya çıkar.

$r_1 = a_1 + i.\, b_1$ nin eşleniği $r_2 = a_1 - i.\, b_1$

$r_3 = a_2 + i.\, b_2$ nin eşleniği $r_4 = a_2 - i.\, b_2$ olur.

r_1, r_2, r_3, r_4 yerine konulduğunda;

$y_h = C_1 \cdot e^{(a1 + i.\, b1).X} + C_2 \cdot e^{(a1 - i.\, b1).X} + C_3 \cdot e^{(a2 + i.\, b2).X} + C_4 \cdot e^{(a2 - i.\, b2).X}$

olur. Karmaşık ifadeler yerine trigonometrik ifadeler yazılırsa

$$y_h = e^{a_1 .X} [C_1 .\cos b_1 x + C_2 .\sin b_1 x] + e^{a_2 .X} [C_3 .\cos b_2 x + C_4 .\sin b_2 x]$$

şeklinde daha kullanışlı hale gelir.

ÖRNEK: $y'' - 6.y' + 13.y = 0$ homogen kısımdan oluşan dif.denklemini ele alalım.

$f(r) = r^2 - 6.r + 13 = 0$ Karakteristik denkleminin kökleri

$$r_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} = \frac{6 \mp \sqrt{36 - 52}}{2} = 3 \mp 2.i$$

$r_1 = 3 + 2.i$ ve $r_2 = 3 - 2.i$

$\downarrow \ \downarrow \qquad \downarrow \ \downarrow$

$a_1 \ \ b_1 \qquad a_2 \ \ b_2$

şeklinde karmaşık kök olarak ortaya çıkar. O halde çözüm

$y_h = e^{a_1 .X} [C_1 .\cos b_1 x + C_2 .\sin b_1 x]$

$y_h = e^{3.X} [C_1 .\cos 2x + C_2 .\sin 2x]$ olur.

ÖRNEK:(uyg)

$y''' - y'' - 5.y' - 3.y = 0$ şeklinde verilen homogen kısmın çözümü için karakteristik denklem

$f(r) = r^3 - r^2 - 5.r - 3 = 0$ şeklinde 3.dereceden polinomial denklemdir. Buradan kökleri araştıralım;

$r = 1$ için $f(1) = 1-1+5-3 = -8 \neq 0$
$r = -1$ için $f(-1) = -1-1+5-3 = 0 = 0$ dan

denklemin bir kökü $r = -1 \rightarrow r + 1 = 0$ ise denklemin bir çarpanıdır. Bu durumda
f(r) denklemi (r+1)'e kalansız bölünebilir.

Bölme işlemini yaparsak

$$
\begin{array}{l|l}
r^3 - r^2 - 5.r - 3 & r + 1 \\ \cline{2-2}
r^3 + r^2 & r^2 - 2.r - 3 \\
\hline
= \\
-2r^2 - 5r - 3 & \\
-2r^2 - 2r & \\
\hline
= \\
\quad -3r - 3 & \\
\quad -3r - 3 & \\
\hline
\qquad 0 &
\end{array}
$$

$r^2 - 2.r - 3 = 0$
r -3
r +1 $(r+1)(r-3) = 0$

0 halde; $f(r) = \underbrace{(r+1)(r+1)}\ \underbrace{(r-3)} = 0$

Çakışık kökler/Farklı kök

Ve kökler $r_1 = r_{2} = -1$ Çakışık reel kökler , $r_3 = 3$ farklı kökler olarak bulunur. Buradan

$y_h = (C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 .X^1. e^{r_2 x}) + C_3 \cdot e^{r_3 x}$
$y_h = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 .X. e^{-x} + C_3 \cdot e^{3x}$
$y_h = e^{-x}(C_1 + C_2 .X) + C_3 \cdot e^{3x}$
çözümü elde edilir.

ÖRNEK: (öğr)Karmaşık kökler

$y'' - 2.y' + 2.y = 0$

Karakteristik denklem = $f(r)= r^2 - 2.y + 2 = 0$

$r_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} = \dfrac{2 \mp \sqrt{4 - 4.2}}{2} = 1 \mp i$

$r_1 = 1 + i \quad r_2 = 1 - i$

$\downarrow \ \downarrow$

$a_1 \ \ b_1$

$y_h = e^{a_1 .X} [C_1 .\cos b_1 x + C_2 .\sin b_1 x]$

$y_h = e^X [C_1 .\cos x + C_2 .\sin x]$

ÖRNEK: (öğr)Reel çakışık kökler

$y''' + y'' + \frac{1}{4}.y' = 0$

Karakteristik denklem = $f(r)= r^3 + r^2 + \frac{1}{4}.r = 0$

$r (r^2 + r + \frac{1}{4}) = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = -\frac{1}{2}$ (reel çakışık, eşit) , $r_3 = 0$ (reel farklı)

$y_h = C_1 . e^{-x/2} + C_2 .X. e^{-x/2} + C_3 . e^{0.x}$

$y_h = e^{-x/2} (C_1 + C_2 .X) + C_3$

ÖDEV: …….

3.1.2. Sağ Taraf Fonksiyonu İle İlgili Özel Çözümler

Yüksek mertebeden sabit katsayılı adi diferensiyel denklemlerin Q(x) sağ taraf fonksiyonu ile ilgili çözümler, bu fonksiyonun yapısına göre, özellikle düzgün olup olmamasına göre değişiklik göstermekte ve buna göre de çözüm yöntemleri değişmektedir. Bu kısımda Düzgün Fonksiyonlar için Belirsiz Katsayılar Yöntemi, düzgün olmayan fonksiyonlar için Lagrange Sabitlerin Değişimi Yöntemi örneklerle ele alınacaktır.

$$\underbrace{a_n.y^{(n)} + a_{n-1}.y^{(n-1)} + \dots + a_2.y'' + a_1.y' + a_0.y}_{\text{Homojen kısım}} = \underbrace{Q(x)}_{\text{sağ taraf fonksiyonu}}$$

Özel Çözümler

Belirsiz katsayılar yöntemi / Lagrange sabitlerinin değişimi yöntemi

(Düzgün Fonksiyonlar için kullanılır)/(düzgün olmayan Q(x) fonk. için kullanılır)

Belirsiz Katsayılar Metodu (düzgün fonksiyonlar için):

Aşağıdaki tabloda Belirsiz katsayılar yönteminin kullanılabileceği düzgün fonksiyonlar ve bu fonksiyonlarla ilgili Özel Çözümler verilmiştir.

	Q(x) -- sağ taraf fonksiyonu	**Özel Çözüm(y_1, y_2,..) fonksiyonu**
Trigonometrik	$\mp a.\sin\beta x \mp b.\cos\beta x$ (veya yalnız birisi)	$y_1 = A.\sin\beta x + B.\cos\beta x$
Üstel	$\mp a.e^{\alpha.x}$	$y_1 = A.\ e^{\alpha.x}$
Polinom	$\mp a_n.x^n \mp a_{n-1}.x^{n-1} \mp \dots$	$y_1 = A.x^n + B.x^{n-1} + \dots + K$
Sabit	$\mp a$	$y_1 = A$
Trig.* üstel	$(\mp a.\sin\beta x \mp b.\cos\beta x).(\mp c.e^{\alpha.x})$	$y_1 = e^{\alpha.x}[A.\sin\beta x + B.\cos\beta x]$
Trig.*polinom	$(\mp a.\sin\beta x \mp b.\cos\beta x).(\mp a_n.x^n \mp a_{n-1}.x^{n-1} \mp \dots)$	$y_1 = \sin\beta x[A.x^n + B.x^{n-1} + \dots + Z]$ $+\cos\beta x[A.x^n + B.x^{n-1} + \dots + L]$
Üstel * pol.	$(\mp a.e^{\alpha.x}).(\mp a_n.x^n \mp a_{n-1}.x^{n-1} \mp \dots)$	$y_1 = e^{\alpha.x}[A.x^n + B.x^{n-1} + .. + Z]$

Buradaki çarpımlarda terim sayısı fazla olan fonksiyonun katsayıları dikkate alınır. A,B,C,…,Z ifadelerine belirsiz katsayılar adı verilir. Bu katsayılar belirlenerek özel çözümler elde edilir.

Aşağıdaki tabloda bazı düzgün fonksiyonlar ve bunlara karşılık gelecek olan Özel Çözüm örnekleri verilmiştir.

$-5.\sin 2x$	$y_1 = A.\sin 2x + B.\cos 2x$
$2.\sin x - \cos x$	$y_1 = A.\sin x + B.\cos x$
$-\sin x + 2\cos 2x$	$y_1 = A.\sin x + B.\cos x \rightarrow$ ($-\sin x$ için), $y_2 = C.\sin 2x + D.\cos 2x \rightarrow$ ($2\cos 2x$ için)
$-5.\ e^{2x}$	$y_1 = A.e^{2x}$
$-7.x^3 + 2.x - 5$	$y_1 = A.x^3 + B.x^2 + C.x + D$
$-10.x^2$	$y_1 = A.x^2 + B.x + C$
-72	$y_1 = A$
$(-5.\sin 2x).\ e^{2x}$	$y_1 = e^{2x}[A.\sin 2x + B.\cos 2x]$
$(-\cos x).\ (-10.\ x^2)$	$y_1 = \sin x(A.x^2 + B.x + C) + \cos x\ (D.x^2 + E.x + F)$
$(-5.\ e^{2x}).(-5.x^2 + 7)$	$y_1 = e^{2x}[A.x^2 + B.x + C]$