..../..../....

OLASILIK VE İSTATİSTİK

Sakarya Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Türker Fedai Çavuş

MUSAB UĞUR
150100037

BÖLÜM:1 TANIMLAR

Olasılığa ait yaklaşımların iki tanesi önemlidir. Bunlar bağıl frekans yaklaşımı ve aksiyom yaklaşımıdır. Bağıl frekans yaklaşımı fiziksel olaylarla olasılık kavramı arasında bağ kurar. Böylece olasılıkla gerçek yaşam arasındaki ilişki ortaya çıkar. Aksiyom yaklaşımı ise bir olayın olasılığını belirli postulatları sağlayan bir sayı olarak ele alır. "Postulat" ispatsız kabul edilen önermedir. (Örnek: Kirchhoff Yasaları)

• Bernoulli, olasılığı gelecekteki bir olay için bireylerin beklentilerinin kuvvetinin bir ölçüsü olarak tanımlarken klasik tanım aşağıdaki şekilde verilir:

$$P(A) = \frac{M}{N}$$

M → İlgilenilen sonuç sayısı
N → Karşılaşılabilir sonuç sayısı

1.1 Bağıl Frekans Yaklaşımı

Bağıl frekans yaklaşımı her hangi bir olayın ortaya çıkış sıklığı ile yakından ilgilidir. Olay yapılan bir deneyin olası bütün sonuçlarından herbiri ve onların kombinasyonudur. Örneğin bir madeni para deneyinde sonuç yazı veya turadır. (Yazı gelmesi bir olay, tura gelmesi bir olay, yazı-tura gelmesi bir olaydır.)

Deney	Olası Oluşlar
– Tek zar atılması	→ 1, 2, 3, 4, 5, 6
– İskambil destesinden tek kart seçilmesi	→ 52 karttan biri
– Bir gerilimin gözlemesi	→ 0'dan büyük, 0'dan küçük V'den büyük, V'den küçük V_1, V_2 arasında, V_1, V_2 arasında değil

Yukarıdaki tabloda verilen deneylerin oluş sayıları sonludur ve "ayrık olasılık" halini belirtir. Birçok durumda sonsuz sayıda oluş karşımıza çıkabilir ve gözlenecek muhtemel değerler sürekli olabilir. Bu tip olasılıklara "Sürekli olasılık" adı verilir.

Ayrık olasılık için var olan bütün yöntemler ve terimler sürekli olasılık için de geçerlidir.

Eğer bir deneyin sonucu, deney sonuçlanmadan belirsiz ise olası oluşlar rastgele olaylardır. (Rassal) Bu olayların herbirine bu olayın olasılığı denilen bir sayı vermek gerekir. Genel olarak bu sayılar varsayımlardır. Varsayılan değer de deney hakkındaki sezgilerimize bağlıdır. (Örnek: Y-T, 6-4, 48-52, 503-497)

N kez yapılmış ve beklenen A olayı N_A kez gerçekleşmişse A olayının olasılığı; $P(A) = \frac{N_A}{N}$ olduğunu varsayılır. N deney içinde A olayının N_A kez olması gerekmez. Ancak deney hakkında önyargımız bu sayıyı kabul etmemizi sağlamıştır.

N_A ve N pozitif gerçel sayılar olduğundan $\frac{N_A}{N}$ 0 ile 1 aralığında yani;

Bir deneyde oluşların A, B, C ..., M olduğunu varsayalım. Bu deney sonuçlarından sadece biri olayımız olsun. Bir deneyde olası oluşlardan sadece biri meydana gelebiliyorsa bu tip deneylerdeki bütün olaylara her biri "karşılıklı seçkin olaylar" adını alır. Örneğin; zar deneyini düşünelim. Her atışta ancak bir yüzünü görebiliriz. İki yüzünde üsten görmek imkânsızdır. N deney içinde A olayı N_A. B olayı N_B. C olayı N_C, M olayı N_M kez meydana gelsin.

$$N_A + N_B + N_C + \dots + N_M = N$$ olur.

$$\frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} + \frac{N_C}{N} + \dots + \frac{N_M}{N} = 1$$

• Karşılıklı seçkin olaylarda toplam olasılık 1'e eşittir.

$$P(A) + P(B) + P(C) + \dots + P(M) = 1$$

⇒ İçinde farklı değerlerde direnç bulunan bir kutu varsayalım. Bu kutuda 100 tane 1 Ω'luk, 500 tane 10 Ω'luk, 150 tane 100 Ω'luk ve 250 tane 1000 Ω'luk direnç olsun.

$N = 1000$ → Olası oluş sayısı

$$\left.\begin{aligned}
P(1\,\Omega) &= \frac{100}{1000} = 0{,}1 \\
P(10\,\Omega) &= \frac{500}{1000} = 0{,}5 \\
P(100\,\Omega) &= \frac{150}{1000} = 0{,}15 \\
P(1000\,\Omega) &= \frac{250}{1000} = 0{,}25
\end{aligned}\right\} \sum P = 1$$

Çoğu kez ilgilenen birden fazla oluşun olduğu durumlardır.

Bir madeni para iki kez atıldığında ikisinde de tura gelmesi hesaplanması istenebilir. Bu tip bir olasılık "bileşik olasılık" adını alır. Bileşik olasılık $P(A,B)$ notasyonuyla gösterilir.

⇒ Bir kutuda direnglerimiz olsun ve bu direngler aşağıdaki tabloda verilen özelliklere sahip olsunlar

	1Ω	10Ω	100Ω	1000Ω	Toplam
1W	50	300	90	0	440
2W	50	50	0	100	200
5W	0	150	60	150	360
Toplam	100	500	150	250	1000

$P(1W) = \frac{440}{1000} = 0{,}44$

$P(2W) = \frac{200}{1000} = 0{,}2$

$P(5W) = \frac{360}{1000} = 0{,}36$

$P(5W, 10\Omega) = \frac{150}{1000} = 0{,}15$ → Toplam direnç sayısı

$P(5W) \cdot P(10\Omega) = \frac{360}{1000} \cdot \frac{500}{1000} = 0{,}18 \neq 0{,}15$ X

X Bu işlem yapılamaz. Sadece karşılıklı seçilen durumlarda yapılabilir.

Bu eşitlik olayı olmadığından yeni bir kavrama ihtiyaç vardır.

• Koşullu olasılık

Koşullu olasılık sonuçlanmış bir B olayına göre A olayının olasılığıdır. Aşağıdaki şekilde gösterilir.

$P(A \backslash B)$ → B koşuluna göre A'nın olasılığıdır.

Örnek; 5W gücünde olma koşulu ile 10Ω'luk direnç gelme olasılığı nedir?

$P(10\Omega \backslash 5W) = \frac{150}{360} = 0{,}417$

$P(10\Omega \backslash 5W) \cdot P(5W) = 0{,}417 \cdot 0{,}36 = 0{,}15$

• $P(A \backslash B) \cdot P(B) = P(A, B)$
$P(B \backslash A) \cdot P(A) = P(A, B)$

• $P(T, T) = P(T) \cdot P(T)$ → Eğer iki olay birbirinden bağımsız ise bunu yazabiliriz.

• Eğer iki olay birbirinden bağımsızsa;

$P(A \backslash B) = P(A)$ ve $P(B \backslash A) = P(B)$ ise

$P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$ yazılabilir.

1.2 Aksiyom Yaklaşımı

Aksiyom yaklaşımında küme teorisinden yararlanırız. Olası tüm oluşların kümesine olasılık uzayı denir. Olasılık uzayında A olayının olasılığı P(A) ile gösterilir. Verilen bu sayısal değer aşağıdaki üç koşulu (aksiyomu) sağlamalıdır.

i) $P(A) \geq 0$

ii) $P(S) = 1$

iii) $A \cap B = \emptyset$ olmak koşuluyla, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Olasılıkla ilgili çok sayıda önermenin sonuçları bu üç aksiyomla çıkarılabilir.

• $S \cap \emptyset = \emptyset$, $S \cup \emptyset = S$, $P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset)$

$$P(S) = P(S) + P(\emptyset)$$
$$P(\emptyset) = P(S) - P(S) = 0$$

• $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $A \cup \bar{A} = S$

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$
$$P(S) = P(A) + P(\bar{A})$$
$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Eğer A ve B olayları karşılıklı seçkin değillerse ($A \cap B \neq \emptyset$)

$$P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$$
$$A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$$
$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$
$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$
$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

⇒ Bir zar deneyinde olasılık uzayı $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ dır. Bu deneyde tüm olası olaylar karşılıklı seçkindirler. Herhangi bir sayının gelme olasılığı kaçtır?

$P(\alpha_i) = 1/6 \quad \alpha_i = 1,2,\ldots,6$

A olayı $A = \{1,3\}$, B olayı $B = \{1,4\}$

$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $\qquad P(A \cap B) = \{1\}$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$ $\qquad A \cup B = \{1,3,4\}$

$= \frac{1}{2}$

1.3 Koşullu Olasılık

Aksiyom yaklaşımında koşullu olasılık tanımlanmış bir niceliktir. Eğer bir B olayı sıfırdan farklı bir değere sahipse B'ye göre A'nın koşullu olasılığı;

$$\left[P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}, \; P(B)>0\right]$$

A olayı B olayının alt kümesi ise $A\cap B = A$ olur. Bu durumda;

$$\left[P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)\right]$$

$A\cap B$ ise; $\left[P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1\right]$

Şimdiye kadar koşullu olasılığı temel aksiyomları sağlayacak şekilde tanımladık. Ancak bunların bağımsız olarak olasılıklarının geçerliliklerini göstermek gerekir.

i) $P(A/B) \geq 0$
ii) $P(S/A) = 1$
iii) $A\cap C = \emptyset$ olan bir C olayı düşünelim.

$P((A\cup C)\cap B) = P((A\cap B)\cup(B\cap C))$ olarak yazabiliriz.
$= P(A\cap B) + P(B\cap C)$

$$P((A\cup C)/B) = \frac{P((A\cup C)\cap B)}{P(B)}$$

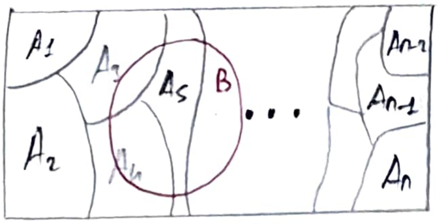
$$= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} + \frac{P(B\cap C)}{P(B)}$$

$$P((A\cup C)/B) = P(A/B) + P(C/B)$$

⇒ Bir zar deneyinde A olayı 1 ve ya 2, B olayı $B = \{2,4,6\}$ olsun. $P(A/B) = ?$

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} \qquad A\cap B = \{2\}$$

- Koşullu olasılığın en önemli uygulama alanlarından biri toplam olasılık hesaplamalarıdır. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gibi karşılıklı seçkin olaylar ile B keyfi olayını göz önüne alalım.



A_i ve A_j $(i \neq j)$ olmak koşuluyla karşılıklı seçkindirler. Bu durumda $(A_i \cap B)$ ile $(A_j \cap B)$ de karşılıklı seçkindirler.

B kümesini $B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n)$

$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$

$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + \ldots + P(B \cap A_n)$

$P(B \cap A_i) = P(B/A_i) \cdot P(A_i) \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$

$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \cdot P(A_i)$$

*⇒ 6 gözlü içi direnç dolu bir kutu düşünelim kutudaki dirençler aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. Gözlerden herhangi biri rastgele seçilerek içinden bir direnç alındığında bu direncin 10Ω olma olasılığı kaçtır?

	1	2	3	4	5	6	Toplam
10Ω	500	0	200	800	1200	1000	3700
100Ω	300	400	600	200	800	0	2300
100Ω	200	600	200	600	0	1000	2600
Toplam	1000	1000	1000	1600	2000	2000	8600

$P(A_i) = 1/6$

$P(B/A_1) = \frac{500}{1000} = 1/2$

$P(B/A_2) = 0$

$P(B/A_3) = \frac{200}{1000} = 1/5$

$P(B/A_4) = \frac{800}{1600} = 1/2$

$P(B/A_5) = \frac{1200}{2000} = 3/5$

$P(B/A_6) = \frac{1000}{2000} = 1/2$

$P(B) = 1/6 \cdot \left(1/2 + 0 + 1/5 + 1/2 + 3/5 + 1/2\right)$

$= 23/60$

$= 0{,}38\overline{3}$

⇒ Kusursuz bir para 3 kez atılmıştır. A olayı en az iki yazı gelme, B olayı ise ilk atışın yazı gelme olaylarıdır. B koşuluna göre A'nın olasılığını hesaplayınız?

$A = \{YYY, YYT, YTY, TYY\}$

$B = \{YYY, YYT, YTY, YTT\}$

$A \cap B = \{YYY, YYT, YTY\}$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3/8}{4/8} = 3/4$$

• Bayes Kuralı

$A_1, A_2, \dots, A_k$ olasılık uzayında (S) karşılıklı seçkin (ayrık) ve bütüne tamamlayan olaylar olsun. E aynı örnek uzayında bir olay iken E koşuluna göre A_j'nin olasılığı;

$$P(A_j/E) = \frac{P(A_j) \cdot P(E/A_j)}{\sum_{i}^{k} P(A_i) \cdot P(E/A_i)}$$

⇒ Bir atölyede belirli bir ürün T_1, T_2 ve T_3 tezgahlarında üretilmektedir. Üretimin %20'si T_1'de, %30'u T_2'de, %50'si T_3'de üretilmektedir. T_1 tezgahından üretilen ürünlerin %8'i kusurlu, T_2 tezgahından üretilen ürünlerin %6'sı kusurlu, T_3 tezgahından üretilen ürünlerin %3'ü kusurludur. Bir ürün seçtik ve kusurlu olduğu görülüyor. Bu kusurlu ürünün T_2 tezgahından üretilmiş olma olasılığı kaçtır?

	T_1	T_2	T_3
	%20	%30	%50
Kusur	%8	%6	%3

$P(T_1) = 0,2$ $\quad P(K/T_1) = 0,08$

$P(T_2) = 0,3$ $\quad P(K/T_2) = 0,06$

$P(T_3) = 0,5$ $\quad P(K/T_3) = 0,03$

$P(T_2/K) = ?$

$$P(T_2/K) = \frac{P(T_2) \cdot P(K/T_2)}{P(T_1) \cdot P(K/T_1) + P(T_2) \cdot P(K/T_2) + P(T_3) \cdot P(K/T_3)}$$

$$= \frac{0,3 \cdot 0,06}{0,2 \cdot 0,08 + 0,3 \cdot 0,06 + 0,8 \cdot 0,03} = \frac{18}{49} = 0,367347$$

II

1000 → 200 — 16

1000 → 300 — 18

1000 → 500 — 15

$16 + 18 + 15 = 49$

$18/49$

1.4 Bağımsızlık

A ve B, S'de iki olay iken bunlardan birinin ortaya çıkması diğerini etkilemiyorsa A ve B olaylarına bağımsız olay denir. Bu durumda $P(A/B) = P(A)$ ve $P(B/A) = P(B)$ olur.

$$P(A \cap B) = P(A) . P(B) \longrightarrow \text{Bağımsızlık koşulu}$$

⇒ Kusursuz bir para 3 kez atılmış ve A, B, C olayları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

A = {ilk iki atış yazı}
B = {üçüncü atışın tura}
C = {üç atışta iki tura}

a) A ve B olaylarının bağımsız olup olmadığını gösteriniz?
b) B ve C olaylarının bağımsız olup olmadığını gösteriniz?

$S = \{YYY, YYT, YTY, YTT, TYY, TYT, TTY, TTT\}$

$A = \{YYY, YYT\}$
$B = \{YYT, YTT, TYT, TTT\}$
$C = \{YTT, TYT, TTY\}$

$P(A) = \frac{2}{8}$, $P(B) = \frac{4}{8}$, $P(C) = \frac{3}{8}$

$A \cap B = \{YYT\}$
$B \cap C = \{YTT, TYT\}$

$$\left.\begin{aligned} P(A\cap B) &\overset{?}{=} P(A).P(B) \\ 1/8 &\overset{?}{=} \frac{1}{4}.\frac{1}{2} \\ 1/8 &= 1/8 \end{aligned}\right\} \text{A ve B Bağımsız}$$

$$\left.\begin{aligned} P(B\cap C) &\overset{?}{=} P(B).P(C) \\ 1/4 &\overset{?}{=} \frac{3}{8}.\frac{1}{2} \\ 1/4 &\neq 3/16 \end{aligned}\right\} \text{B ve C Bağımsız değil}$$

Eğer birden çok olay karşılıklı bağımsız iseler;

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_n) = P(A_1).P(A_2).P(A_3).\dots.P(A_n)$$

A ve B olayları bağımsız iseler; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ve $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B)$ olur

1.5 Birleştirilmiş Deneyler

Birlikte ele alınan iki deneye birleşik deney denir. Bu deneylerin uzayı S_1 ve S_2 olsun. S_1 uzayı $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$, S_2 uzayı ise $S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_m\}$ olarak verilsin. Bu durumda kartezyen çarpım uzayı; $S = S_1 \times S_2 = \{(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_i, \beta_j), \dots, (\alpha_n, \beta_m)\}$

Örneğin S_1 uzayı $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $S_2 = \{Y, T\}$, S kartezyen uzayı ise;

$$S = S_1 \times S_2 = \{(1,Y), (1,T), (2,Y), (2,T), \dots\}$$

A_1 olayı S_1 uzayında tanımlanmış bir olay, A_2 olayı da S_2 uzayında tanımlanmış bir olay olsun. $A = A_1 \times A_2$ ise S uzayında olur.

$$P(A) = P(A_1 \times A_2) = P(A_1).P(A_2)$$

1.6 Bernoulli Denemeleri

Bernoulli denemelerinde n defa tekrarlanan bir deneyde, k defa olması istenen özel bir olayın olasılığı bulmak istenir. Olasılığı bir deney içinde p olan bir A olayı düşünelim. Bu A olayının olmama olasılığı q ile gösterilsin.

$$P(A)=p \qquad P(\bar{A})=q \qquad p+q=1$$

Deneyi n kez tekrarlayalım ve her tekrarın birbirinden bağımsız olduğunu kabul edelim. A olayının k kez meydana gelme olasılığını hesaplamaya çalışalım. k herhangi bir özel sırada örneğin ilk kez denemeyi belirtsin, bu durumda olasılık;

$$\underbrace{P(A).P(A).\ldots.P(A)}_{k}.\underbrace{P(\bar{A}).P(\bar{A}).\ldots.P(\bar{A})}_{n-k}=p^k.q^{n-k}$$

NOT= Farklı sıraların sayısı n elemanlı bir küme içerisinde k elemanı seçilmesiyle elde edilebilir. Bu sayı kombinasyon teorisine göre binom katsayıları adını alır.

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

```
      1        1
    1 2 1      2
   1 3 3 1     3
  1 4 6 4 1    4
```

$$\binom{4}{0}=\frac{4!}{4!\,0!}=1 \qquad \binom{4}{3}=\frac{4!}{3!\,2!}=4$$

$$\binom{4}{1}=\frac{4!}{3!\,1!}=4 \qquad \binom{4}{4}=\frac{4!}{0!\,4!}=1$$

$$\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!\,2!}=6$$

Bu durumda $P_n(k)$ nın olasılığı $\binom{n}{k}.p^k.q^{n-k}$ olarak bulunur.

⇒ Bir madeni para 4 kez atılmış ise;

a) en az üç tura gelme olasılığını hesaplayınız?

$$P_4(3)+P_4(4)=\binom{4}{3}.\left(\tfrac{1}{2}\right)^3.\left(\tfrac{1}{2}\right)^{4-3}+\binom{4}{4}.\left(\tfrac{1}{2}\right)^4.\left(\tfrac{1}{2}\right)^{4-4}$$

$$=4.\frac{1}{8}.\frac{1}{2}+1.\frac{1}{16}.1$$

$$=\frac{4}{16}+\frac{1}{16}$$

$$=\frac{5}{16}$$

b) en fazla iki tura gelme olasılığını hesaplayınız?

$$P_4(2)+P_4(1)+P_4(0)=\binom{4}{2}.\left(\tfrac{1}{2}\right)^2.\left(\tfrac{1}{2}\right)^{4-2}+\binom{4}{1}.\left(\tfrac{1}{2}\right)^1.\left(\tfrac{1}{2}\right)^{4-1}+\binom{4}{0}.\left(\tfrac{1}{2}\right)^0.\left(\tfrac{1}{2}\right)^4$$

$$=\frac{1}{16}+4.\frac{1}{16}+6.\frac{1}{16}$$

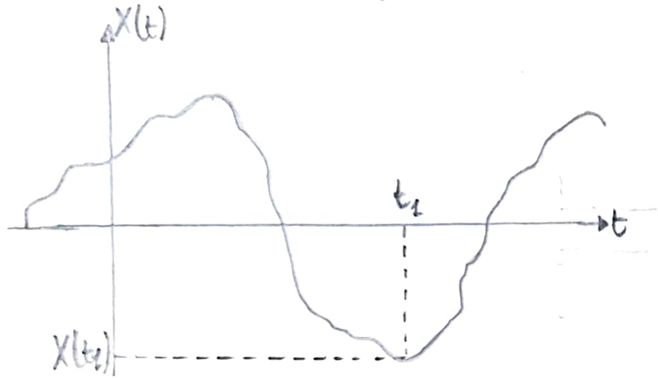
$$=\frac{11}{16}$$

$$\underbrace{P_4(0)+P_4(1)+P_4(2)}_{b}+\underbrace{P_4(3)+P_4(4)}_{a}=1$$

Bir deney yada gözlemin şansa bağlı sonucu, aldığı değerler olarak düşünülürse böyle bir değişkene rassal değişken denir.

Her biri 100 Ω olarak etiketlenmiş bir kutu direnç düşünelim. Toleransları nedeniyle her bir direncin değeri diğerinden farklıdır. Dirençlerin 99,99 Ω ile 100,01 Ω aralığında olduğu bilinse bile bu aralıkta sonsuz sayıda oluş vardır. Yani kutuda tam 100 Ω luk direnç olma olasılığı sıfırdır. Diğer yandan değeri 99,999 Ω ile 100,001 Ω aralığında direnç olma olasılığı sıfırdan farklıdır.

- Rassal (raslantı) değişkenleri zaman fonksiyonları gibi göstere biliriz. Şekilde tipik bir zaman fonksiyonu gösterilmiştir;



t_1 anında fonksiyon $X(t_1)=X_1$ değerini alır ki bu bir rassal değişkendir.

2.1 Rassal Değişken

Örnek uzay S'yi gerçel sayılar kümesine görüntüleyen fonksiyona rassal değişken denir. $X: S \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}$ burada A kümesi, X fonksiyonunun değer kümesidir. X'e bağlı olarak tanımlanan olasılık modellerinde A ilgili olasılık ya da yoğunluk fonksiyonunun tanım kümesidir. Genel olarak rassal değişkenlerin X, Y, Z gibi ve bu değişkenlerin aldığı değişkenler ise x, y, z ile gösterilir. Eğer bir x rassal değişkeninin $\mathbb{R}$ deki görüntüsü; A ayrık küme ise ayrık rassal değişken, bir aralık ya da aralıkların birleşimi ise X'e sürekli rassal değişken denir.

$A=\{x_i \mid i=1,2,3,\ldots\}$ Ayrık

$A=\{x \mid a \leq x \leq b\}$ Sürekli

⇒ Kusursuz bir para 3 kez atılmış ve X yazı gelme olasılığı olarak tanımlanmıştır. X'in ayrık rassal değişken olduğunu gösteriniz?

S	Olasılık	X
YYY	1/8	3
YYT	1/8	2
YTY	1/8	2
TYY	1/8	2
YTT	1/8	1
TYT	1/8	1
TTY	1/8	1
TTT	1/8	0

$\underbrace{A=\{0,1,2,3\}}$

Ayrık olduğundan X ayrık rassal değişkendir.

⇒ Gerçel sayılar ekseninde [0,10] aralığını göz önüne alalım. X değişkeni verilen aralıktan rasgele seçilen bir A sayısının 10 noktasına olan uzaklığını göstersin, X'in sürekli rassal değişken olduğunu gösteriniz?

$X(a) = 10 - a \qquad S = \{a \mid 0 \leq a \leq 10\}$

$A = \{X(a) \mid 0 \leq X(a) \leq 10\} \longrightarrow$ Sürekli olduğundan X sürekli rassal değişkendir.

2.2 Ayrık Rassal Değişkenlerin Dağılımı ve Olasılık Fonksiyonları

X ayrık rassal değişken ve X'in değer kümesi $A = \{x_i \mid i = 1, 2, 3, \ldots N\}$ iken $F(x) = P(X \leq x_i)$ $i \in \{1, 2, \ldots N\}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. $F(x)$, X'in verilen bir x_i değerinden daha küçük ya da eşit olma olasılığını verir. Ve F'ye dağılım fonksiyonu denir. $F(x) \rightarrow$ dağılım fonksiyonu

Eğer $x_i = x_N$ ise $F(x_N)$, 1'e eşit olur mu? $F(x_N) = P(X \leq x_N) = 1$

$1 \leq j < i \leq N$ olmak üzere, $x_j < x_i$ durumunu göz önüne alırsak;

$$\begin{aligned} F(x_i) - F(x_j) &= P(X \leq x_i) - P(X \leq x_j) \\ &= P(X \leq x_j) + P(x_j < X \leq x_i) - P(X \leq x_j) \\ &= P(x_j < X \leq x_i) \\ &= P(x_{j+1} \leq X \leq x_i) \end{aligned}$$

$$F(x_i) - F(x_j) = \sum_{k=j+1}^{i} P(x_k) \quad --- \text{ I}$$

$j = 0$ ise $F(x_j) = 0$ dır.

$$F(x_i) = \sum_{k=1}^{i} P(x_k) \quad --- \text{ II}$$

Genel olarak X ayrık rassal değişken iken X'in dağılım fonksiyonu;

$$\boxed{F(x) = \sum_{x_k \in A} P(x_k)}$$

I nolu eşitlikte $j = i - 1$ alınırsa $P(x_{i-1+1} \leq X \leq x_i) = \sum_{k=i}^{i} P(x_k) = P(x_i)$ olur.

$P(x)$'e ayrık rassal değişkenin olasılık dağılımı ya da kısaca olasılık fonksiyonu denir. Olasılık fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) $P(x_i) \geq 0$

ii) $\sum_{x_i \in A} P(x_i) = 1$

⇒ X rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$P(x)=\begin{cases}\binom{4}{x}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x} & , x=0,1,2,3,4\\ 0 & , \text{diğer durumlar}\end{cases}$$

a) $P(x=2)=?$ $=8/27$

b) $P(x\leq 2)=?$ $P(x=1)+P(x=2)+P(x=0)$ $=8/9$

c) $P(x>2)=?$ $1-P(x\leq 2)$ $=1/9$

d) $P(1<x\leq 3)=?$ $P(x=2)+P(x=3)$ $=32/81$

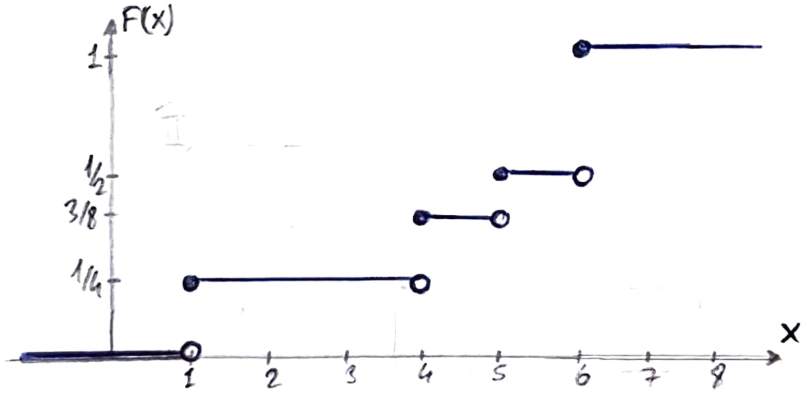
⇒ Hileli bir zar atılmıştır ve bu zarda üste gelen yüzün 1,2,3,4,5,6 olma olasılıkları sırasıyla 1/4, 0, 0, 1/8, 1/8, 1/2 dir. Dağılım fonksiyonunu elde ederek grafiğini çiziniz?

$P(x=1)=1/4$
$P(x=2)=0$
$P(x=3)=0$
$P(x=4)=1/8$
$P(x=5)=1/8$
$P(x=6)=1/2$

$P(x<1)=0$
$P(x\leq 1)=1/4$
$P(x<2)=1/4$
$P(x\leq 2)=1/4+0$
$P(x<3)=1/4$
$P(x\leq 3)=1/4+0+0$

$P(x<4)=1/4$
$P(x\leq 4)=1/4+1/8=3/8$
$P(x<5)=3/8$
$P(x\leq 5)=1/4+1/8+1/8=1/2$
$P(x<6)=1/2$
$P(x\leq 6)=1/4+1/8+1/8+1/2=1$
$P(x<7)=1$
$P(x\leq 1000)=1$

$$F(x)=\begin{cases}0 & , x<1\\ 1/4 & , 1\leq x<4\\ 3/8 & , 4\leq x<5\\ 1/2 & , 5\leq x<6\\ 1 & , x\geq 6\end{cases}$$

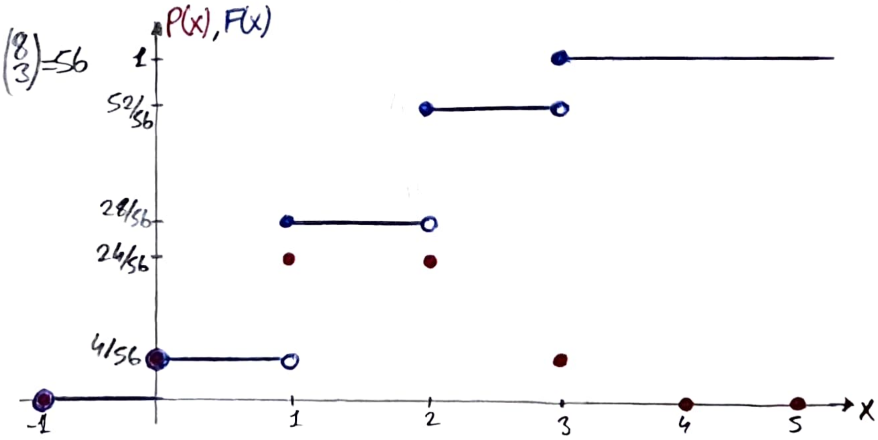


⇒ Bir iş yerinde 4 kadın, 4 erkek işçi arasından 3 işçi seçilecektir. X seçimdeki erkek işçi sayısı olduğuna göre X'in olasılık fonksiyonunu elde ediniz ve grafiğini çiziniz?

$$\binom{4}{0}\cdot\binom{4}{3}+\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{2}+\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}+\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{0}=\binom{8}{3}=56$$

$$P(x)=\begin{cases}\dfrac{\binom{4}{x}\cdot\binom{4}{3-x}}{\binom{8}{3}} & , x=0,1,2,3\\ 0 & , \text{diğer değerler}\end{cases}$$

X	P(x)
0	4/56
1	24/56
2	24/56
3	+ 4/56
	1



2.3 Sürekli Rassal Değişkenlerinin Dağılımı ve Yoğunluk Fonksiyonları

X değer kümesi gerçel sayılar olmak üzere sürekli bir rassal değişken iken $F(x)=P(X\leq x)$ fonksiyonu göz önüne alınsın burada $F(x)$ dağılım fonksiyonudur ve X'in verilen bir değere eşit ya da küçük olma olasılığını verir. x sonsuz büyütüldüğünde $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$ olur. x sonsuz küçültüğünde ise $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$ olur.

a<b olacak şekilde iki gerçel sayı seçelim. Bu durumda;

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= P(x\leq b)-P(x\leq a) \quad \text{olur} \\ &= P(x\leq a)+P(a<x\leq b)-P(x\leq a) \\ &= P(a<x\leq b) \end{aligned}$$

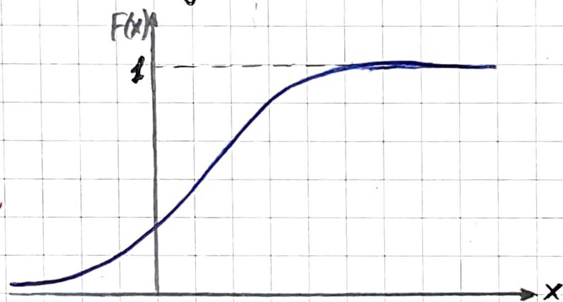
Burada $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ olacaktır. $F(x)-F(a)=\int_a^x f(t)\,dt$

$$\lim_{a\to-\infty}\left(F(x)-F(a)\right)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Burada $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu adı alır. Kısaca yoğunluk fonksiyonu denir.

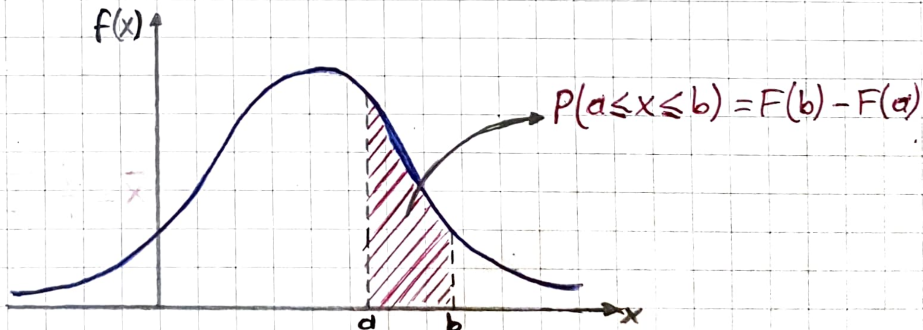
$$\underbrace{F(x)}_{\text{Dağılım Fonksiyonu}}=\int_{-\infty}^{x} \underbrace{f(t)}_{\text{Yoğunluk Fonksiyonu}}\,dt$$



Eğer $F(x)$ türevlene bilir bir fonksiyon ise $f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$$

$$\begin{aligned} F(+\infty)-F(-\infty)&=1 \\ 1 \quad - \quad 0 \quad &=1 \end{aligned}$$



Sürekli olasılıkta herhangi bir noktanın olasılığı sıfıra eşittir. Aralığın olasılığı ise sıfırdan farklıdır.

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{22}(x+10) & , 0<x<2 \\ 0 & , \text{Diğer Durumlar} \end{cases}$ olarak verilmiştir. f(x)'in yoğunluk fonksiyonu olduğunu gösteriniz?

i) $f(x) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$0 + \int_0^2 \frac{1}{22}(x+10)dx + 0 = 1$$

$$\frac{1}{22}\left(\frac{x^2}{2} + 10x\right)\Big|_0^2 = 1$$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} k(4-x) & , 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & , \text{Diğer Durumlar} \end{cases}$ f(x) fonksiyonunun yoğunluk fonksiyonu olması için $k=?$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ olmalı $\quad k\int_0^4 (4-x)dx = 1 \Rightarrow k\left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4 = 1$

$$k\left(\left(16 - \frac{16}{2}\right) - (0-0)\right) = 1 \qquad k = 1/8$$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & , x>0 \\ 0 & , \text{Diğer Durumlar} \end{cases}$

a) $P(x<4) = ?$
b) $P(x>10) = ?$
c) $P(1<x\leq 10) = ?$

a) $\int_0^4 2e^{-2x}dx = 2\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^4 = 1 - e^{-8}$

b) $P(x>10) = \int_{10}^{\infty}(2e^{-2x})dx = e^{-20}$

c) $\int_1^{10} 2e^{-2x}dx = e^{-2} - e^{-20}$

2.4 Beklenen Değer ve Momentler

Beklenen değer ve momentler bir rassal değişkenin sayısal olarak yorumlanmasını sağlayan kavramlardır.

2.4.1 Aritmetik Ortalama, Med ve Medyan

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ X rassal değişkenine ilişkin gözlenen değerler iken X'e ilişkin aritmetik ortalama $\bar{X}$ ile gösterilir. Ve $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ile hesaplanır. $\bar{X}$ sınırlı sayıdaki gözlemin ortalamasıdır.

Ana kütle ortalaması genellikle μ ile gösterilir. Uygulamalarda μ ilgili ana kütleden alınacak uygun bir örnek yardımıyla kestirilir. (Tahmin edilir) Eğer gözlem değerleri arasında önem derecesine göre farklar varsa ağırlıklı ortalama hesaplanır.

$$\bar{X}_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$$

Ağırlıklı Ortalama

X rassal değişkenine ilişkin gözlem değerleri arasında en çok tekrarlanan gözlem değerine mod adı verilir. Mod_x ya da Mod(X) ile gösterilir. Bir yoğunluk fonksiyonunun modu bu fonksiyonu maximum yapan x değeridir.

Gözlem değeri büyüklük sırasına konulduğunda bu değerleri tam eşit iki kısma bölen değere Medyan (ortanca) denir. Med_x ya da Med(X) olarak gösterilir. n gözlemden oluşan bir seride $\frac{n+1}{2}$ inci gözlem değeri medyandır. n çift sayı ise arasına düştüğü iki değerin ortalaması medyandır.

Bir olasılık dağılımında medyan aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \ , \quad \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \quad \text{yani} \quad \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx = \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = 1/2 \quad \text{yapan } c$$

değeri medyandır.

Eğer X aykırı rassal değişken ise medyan $\sum_{-\infty}^{c} P(x) = 1/2$ eşitliğini sağlayan c değeridir.

Eğer böyle bir c değeri yoksa; medyan $\sum_{-\infty}^{c} P(x) < 1/2$ ve $\sum_{-\infty}^{c+1} P(x) > 1/2$ durumunu sağlayan c ile c+1 arasındadır.

2.4.2 Varyans

Yaygın olarak kullanılan değişkenlik ölçüsüdür. Sonlu sayıdaki gözlem değerlerine ilişkin varyans aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Ana kütle varyansı σ_x^2 ile gösterilir. Ya da Var(x) ile gösterilir. Kısaca varyans bir sıklık dağılımında (frekans dağılımında) gözlem değerlerinin ortalama etrafında saçılışının bir ölçüsüdür.

$$\left.\begin{matrix} 70 \\ 60 \\ 50 \\ 40 \\ 30 \end{matrix}\right\} 50 \qquad \left.\begin{matrix} 100 \\ 80 \\ 50 \\ 20 \\ 0 \end{matrix}\right\} 50$$

Varyansın karekökü standart sapmayı verir. Ve σ (ana kütle) ile gösterilir.

$S_x \longrightarrow$ Belirli sayıdaki gözlemin standart sapması

2.4.3 Asimetri Ölçüleri

Sıkça kullanılan asimetri ölçüsü aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$As_x = \frac{\bar{x} - Mod(x)}{S_x}$$

ya da

$$As_x = \frac{3(\bar{x} - Med(x))}{S_x}$$

⇒ X rassal değişkeninin yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x)=\begin{cases}6x(1-x) & , 0<x<1\\ 0 & , \text{diğer durumlar}\end{cases}$$

olarak verilmiştir. Bu yoğunluk fonksiyonunun modunu hesaplayınız?

$f'(x)=6-12x=0 \quad x=1/2$

$f''(x)=-12<0$ olduğundan $x=1/2$ de maximumdur. Yani $Mod(x)=1/2$ dir.

⇒ X rassal değişkeninin yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x)=\begin{cases}3x^2 & , 0<x<1\\ 0 & , \text{diğer durumlar}\end{cases}$$

olarak verildiğine göre bu fonksiyonun medyanını bulunuz?

$$Med(x)=\int_{-\infty}^{c} f(x)dx = 1/2$$

$$=\int_{0}^{c} f(x)dx = 1/2$$

$$=\int_{0}^{c} 3x^2dx = 1/2 \Rightarrow x^3\Big|_0^c = 1/2 \Rightarrow Med(x)=c=\sqrt[3]{1/2}$$

⇒ Hileli bir zar atılmıştır. Bu zarda sırasıyla 1, 2, 3, 4, 5, 6 gelme olasılıkları $1/6$, $1/6$, $1/6$, $1/3$, $1/6$, 0 dır. Medyan kaçtır?

$$\sum_{0}^{3} P(x) \overset{?}{=} 1/2 \qquad 1/6+1/6+1/6 \overset{?}{=} 1/2$$

$$3/6 \overset{?}{=} 1/2 \qquad Med(x)=3$$

$$1/2 = 1/2$$

2.4.4 Beklenen Değer

X ayrık rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu $P(x)$ olsun. Eğer $\sum_i x_i P(x_i)$ serisi mutlak yakınsaksa bu toplama X ayrık rassal değişkeninin beklenen değeri denir. Ve $E(x)$ ile gösterilir. X ortalamaya eşittir.

Benzer olarak X sürekli rassal değişken ve $f(x)$ bu değişkenin yoğunluk fonksiyonu iken X değişkeninin beklenen değeri; $E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$ olur.

Gerçekte beklenen değer kuramsal bir ortalamadır. Buna bağlı olarak $E(x)=\mu$ yazılabilir. Ancak X'in ortalama değeri $(\bar{x})$ deney sayısı yeterince ise μ'ye yani beklenen değere yaklaşır.

⇒ X ayrık rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıdaki şekilde verildiğine göre beklenen değeri bulunuz?

$$P(x) = \begin{cases} \binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} & , x = 0,1,2,3 \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

X	0	1	2	3
P(x)	1/8	3/8	3/8	1/8

$$E(x) = \sum x \cdot P(x)$$
$$= 0 \cdot 1/8 + 1 \cdot 3/8 + 2 \cdot 3/8 + 3 \cdot 1/8$$
$$E(x) = 3/2$$

• X sürekli ya da ayrık rassal değişken iken dağılım fonksiyonu kullanılarak beklenen değer hesaplana bilir.

$$E(x) = -\int_{-\infty}^{0} F(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} (1-F(x))\,dx$$

⇒ X sürekli rassal değişken fonksiyonu aşağıdaki gibi verildiğine göre beklenen değeri hesaplayınız?

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < -1 \\ 3/8\left(\frac{x^3}{3} + x + \frac{4}{3}\right) & , -1 \le x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

$$E(x) = -\int_{-\infty}^{0} F(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} (1-F(x))\,dx$$
$$= -\int_{-1}^{0} \frac{3}{8}\left(\frac{x^3}{3} + x + \frac{4}{3}\right)dx + \int_{0}^{1}\left(1 - \frac{3}{8}\left(\frac{x^3}{3} + x + \frac{4}{3}\right)\right)dx$$
$$= -\frac{9}{32} + \frac{32}{32} - \frac{23}{32} = 0$$

Teorem: g(x), x rassal değişkeninin bir fonksiyonu iken, g(x)'in beklenen değeri

$$E(g(x)) = \begin{cases} \sum g(x) \cdot P(x) & , \text{Ayrık} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\,dx & , \text{Sürekli} \end{cases}$$

Teorem: c = sabit ise c'nin beklenen değeri c olur.

$$E(c) = c$$

Teorem: $g(x)$, x rassal değişkeninin bir fonksiyonu ve c sabit iken $E(c.g(x))$'in beklenen değeri

$$E(c.g(x)) = c\,E(g(x))$$

Teorem: X rassal değişkeninin varyansı

$$\begin{aligned} Var(x) &= E((x-\mu)^2) \\ &= E(x^2 - 2x\mu + \mu^2) \\ &= E(x^2) - 2\mu E(x) + E(\mu^2) \\ &= E(x^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \end{aligned}$$

$$Var(x) = E(x^2) - \mu^2$$

⇒ X sürekli rassal değişkeninin yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde verildiğine göre X rassal değişkeninin beklenen değerini ve standart sapmasını bulunuz?

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; x > 0,\ \lambda > 0 \\ 0 & ; \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$E(x) = ?$ $\sigma = ?$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x}\, dx \qquad (dv = e\,dx \text{ ve } u = x)$$

$$E(x) = \lambda\left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} x \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\, dx\right]$$

$$\boxed{E(x) = \frac{1}{\lambda} = \mu}$$

$$\begin{aligned} Var(x) &= E((x-\mu)^2) \\ &= E\left(\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 f(x)\, dx \\ &= \int_{0}^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 . \lambda e^{-\lambda x}\, dx \end{aligned}$$

$$Var(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma = \sqrt{Var(x)}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{\lambda}}$$

• Chebychev Eşitsizliği

X sonlu bir varyansa sahip sürekli ya da ayrık bir değişken. X'in beklenen değeri eşit μ. k pozitif bir sabit olmak üzere

$$E(x)=\mu \quad , \quad k=\text{sabit}(+) \quad P(|x-\mu|\geq k\sigma)\leq \frac{1}{k^2} \quad \text{ya da} \quad P(|x-\mu|<k\sigma)\geq 1-\frac{1}{k^2}$$

Amaç integrali zor alınan fonksiyonların yaklaşık olarak olasılığını bulmamıza sağlar.

⇒ X sürekli rassal değişkenin yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir. Gerçek olasılıklarla Chebychew eşitsizliğindeki olasılıklarla karşılaştırın?

$$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; x>0 \ , \lambda>0 \\ 0 & ; \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$$E(x)=\frac{1}{\lambda} \quad , \quad \sigma=\frac{1}{\lambda}$$

$$P\left(\left|x-\frac{1}{\lambda}\right|<\frac{k}{\lambda}\right)=P\left(\frac{1-k}{\lambda}<x<\frac{1+k}{\lambda}\right)$$

$$=\int_{\frac{1-k}{\lambda}}^{\frac{1+k}{\lambda}} \lambda . e^{-\lambda x}\,dx$$

$$=-e^{-(1+k)}+e^{-(1-k)} \quad , \quad 0<k\leq 1$$

$$=1-e^{-(1+k)} \quad , \quad k\geq 1$$

k	Gerçek	Chebychew
1,00	0,86466	0
1,50	0,91752	0,55556
2,00	0,95021	0,75000
2,50	0,96980	0,84000
3,00	0,98168	0,88890
4,00	0,99362	0,93750
⋮	⋮	⋮
10,00	0,99998	0,99000

2.4.5 Momentler ve Moment Üreten Fonksiyonlar

Momentler verilen bir dağılıma ilişkin rassal değişkenin kuvvetlerinin beklenen değeridir. X ayrık ya da sürekli bir rassal değişken, $r \geq 0$ ve bir tam sayı iken a etrafında r ninci moment beklenen değer $E[(x-a)^r]$ olarak tanımlanır.

$$E((x-a)^r) = \begin{cases} \sum_x (x-a)^r P(x) & \rightarrow x \text{ ayrık} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^r f(x)\,dx & \rightarrow x \text{ sürekli} \end{cases}$$

$a=0$ alınırsa başlangıç noktasındaki r ninci moment hesaplanır.

$$M_r = E[(x)^r]$$

$$M_0 = 1$$

$$M_1 = \mu$$

Eğer a yerine ilgili değişkenin aritmetik ortalaması konulursa ortalama etrafındaki (merkezi) r ninci moment elde edilir.

$$\mu_r = E[(x-\mu)^r]$$

$$\mu_0 = 1 \qquad \mu_2 = Var(x) = M_2 - M_1^2$$

$$\mu_1 = 0 \qquad\qquad = M_2 - \mu^2$$

2.4.5.1 Moment Üreten Fonksiyonlar

Eğer sıfırı içeren bir aralıkta t nin her değeri için $M_x(t) = E[e^{tx}]$ fonksiyon bulunabiliyorsa $M_x(t)$ fonksiyonuna X in sıfır etrafında moment üreten fonksiyonu denir.

$$M_x(t) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} P(x), & x - \text{ayrık} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx, & x - \text{sürekli} \end{cases}$$

- Mc Lauren Serisi

$$M_x(t) = M_x(0) + M_x' t + \frac{M''_x(0)}{2!} t^2 + \dots + \frac{M_x^{(n)}(0)}{n!} t^n + \dots$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{M_x^{(r)}(0)}{r!} t^r \quad --- \text{(I)}$$

e^{tx} McLauren Serisine açılımı;

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(tx)^r}{r!} \right] f(x)\,dx$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(tx)^r}{r!} f(x)\,dx \right]$$

$$M_x(t)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r}{r!}\int_{-\infty}^{\infty}x^r f(x)\,dx \quad ---\ \text{II}$$

I ve II nolu fonksiyonları kullanarak;

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{M_x^{(r)}(0)}{r!}t^r=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r}{r!}\int_{-\infty}^{\infty}x^r f(x)\,dx$$

$$M_x^{(r)}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}x^r f(x)\,dx=M_r$$

Moment üreten fonksiyonda r ninci türev alınır ve t yerine sıfır yazarak sıfır etrafındaki r ninci momenti bulunur;

$$M_r=M_x^{(r)}(0)$$

$M(t)=E(e^{t(x-\mu)})$ fonksiyonuna merkezi moment üreten fonksiyon denir. Merkezi moment üreten fonksiyon ayrık ve sürekli değişkenler için aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$M(t)=\begin{cases}\sum_x e^{t(x-\mu)}p(x) & , \text{ Ayrık}\\ \int_{-\infty}^{\infty}e^{t(x-\mu)}f(x)\,dx & , \text{ Sürekli}\end{cases}$$

$$M(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{(x-\mu)}f(x)\,dx$$

$$\boxed{M(t)=\sum_{r=0}^{\infty}\left[\frac{t^r}{r!}\mu_r\right]}$$

$$M_x(t)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r}{r!}M_r$$

$$\mu_r=r!\sum_{j=0}^{r}\frac{M_{r-j}\,(M_1)^j}{(r-j)!\,j!}$$

$$\boxed{\mu_r=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}M_{r-j}\,(-M_1)^j}$$

- Merkezi momentlerle sıfır etrafındaki momentler arasındaki ilişkiye bakılır.

$\mu_0=M_0=1 \qquad \mu_1=0$

$\mu_2=M_2-M_1^2=M_2-\mu^2$

$\mu_3=M_3-3M_1M_2+2M_1^3$

$\mu_4=M_4-4M_1M_3+6M_2M_1^2-3M_1^4$

2.4.5.2 Asimetri ve Basıklık

Asimetri

K. Pearson'a göre asimetri;

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

R.A. Fisher'a göre asimetri;

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

β_1 ya da $\gamma_1 < 0$ sola eğik
β_1 ya da $\gamma_1 > 0$ sağa eğik
$\beta_1 = 0$ ya da $\gamma_1 = 0$ simetrik

Basıklık

K. Pearson'a göre basıklık;

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

R.A. Fisher'a göre basıklık;

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

BÖLÜM: 3 AYRIK DAĞILIMLAR

3.1 Binom Dağılımı

Aynı koşullar altında tekrarlanan bir rassal deney ya da gözlemin sonuçları başarılı, başarısız, olumlu, olumsuz gibi iki grubda toplana biliyorsa X rassal değişkeni binom dağılmış bir rassal değişkendir.

Binom dağılmış bir rassal değişkenin olasılık fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir.

$$P(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & , x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$X \sim b(n,p)$

⇒ Kusursuz bir para deneyi aynı koşullarda 3 kez tekrarlanmıştır. X yazı gelme sayısı olarak tanımlanmıştır. X'in binom dağılmış bir rassal değişken olduğunu göstererek olasılık fonksiyonunu yazınız?

$S = \{YYY, YYT, YTY, YTT, TYY, TYT, TTY, TTT\}$

$Y_i \rightarrow$ i. atışta yazı
$T_i \rightarrow$ i. atışta tura

$Y_1 = \{YYY, YYT, YTY, YTT\}$ $T_1 = \{TYY, TYT, TTY, TTT\}$

$Y_2 = \{YYY, YYT, TYY, TYT\}$ $T_2 = \{YTY, YTT, TTY, TTT\}$

$Y_3 = \{YYY, YTY, TYY, TTY\}$ $T_3 = \{YYT, YTT, TYT, TTT\}$

$P(Y_i) = p$ $\quad \{YYY\} = Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3$ $\quad P(YYT) = p^2q \quad P(YTT) = pq^2$

$P(T_i) = q$ $\quad P(YYY) = P(Y_1).P(Y_2).P(Y_3)$ $\quad P(YTY) = p^2q \quad P(TYT) = pq^2$

$= p.p.p$ $\quad P(TYY) = p^2q \quad P(TTY) = pq^2$

$= p^3$ $\quad P(TTT) = q^3$

$$P(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & , x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & , \text{diger durumlar} \end{cases}$$

$p = 1/2 \quad q = 1 - 1/2 = 1/2$

$$P(x) = \begin{cases} \binom{3}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} & , x = 0,1,2,3 \\ 0 & , \text{diger durumlar} \end{cases}$$

⇒ Bir kutuda 5 kırmızı, 10 tane mavi top vardır. Kutudan çekilen top geri konulmamak şartıyla üç top çekilmiştir.

a) Çekilen toplardan birinin kırmızı
b) Çekilen toplardan ikisinin kırmızı
c) Çekilen toplardan üçünün kırmızı
d) Çekilen topların en çok ikisinin kırmızı olma olasılığı kaçtır?

$p = 1/3 \quad q = 2/3$

$$P(x) = \begin{cases} \binom{3}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x . \left(\frac{2}{3}\right)^{3-x} & , x = 0,1,2,3 \\ 0 & , \text{diger durumlar} \end{cases}$$

a) $P(1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 4/9$
b) $P(2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 . \left(2/3\right)^1 = 2/9$
c) $P(3) = \binom{3}{3} \left(1/3\right)^3 . \left(2/3\right)^0 = 1/27$
d) $P(x \leq 2) = 1 - P(3) = 1 - 1/27 = 26/27$

3.1.1 Binom Dagılımının Ortalaması ve Varyansı

$$\mu = E(x) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x . q^{n-x}$$

$\boxed{\mu = n.p}$ ⟶ Ortalama ve beklenen deger

$$Var(x) = E(x^2) - \mu^2$$

$$Var(x) = npq$$

3.1.2 Moment Üreten Fonksiyon ve Momentler

$$M_x(t) = E(e^{xt}) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} e^{tx} p^x q^{n-x}$$

$$M_x(t) = (q + pe^t)^n$$

$$M_1 = M_x^{(1)}(t=0) = \underbrace{n.(q+pe^t)^{n-1}.pe^t}_{} = n.p$$

$M_2 =$ bir daha türevini al $= np + n(n-1)p^2$

$$M_3 = np + 3n(n-1)p^2 + n(n-1)(n-2)p^3$$

$$M_4 = np + 7n(n-1)p^2 + 6n(n-1)(n-2)p^3 + n(n-1)(n-2)(n-3)p^4$$

$$\mu_2 = Var(x) = npq$$

$$\mu_3 = M_3 - 3M_2M_1 + 2M_1^3 = npq(q-p)$$

$$\mu_4 = 3(npq)^2 + npq(1-6pq)$$

Eğiklik $\rightarrow$ $\gamma_1 = \dfrac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \dfrac{q-p}{\sqrt{npq}}$ $\quad$ $p = q = 1/2$ ise simetriktir.

Basıklık $\rightarrow$ $\gamma_2 = \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \dfrac{1-6pq}{npq}$

$\Rightarrow$ Belirli bir bölgede A tipi lamba kullanan mesken oranı 3/8 olarak ön görülmektedir. Her anketör rassal olarak seçilen 5 mesken ile görüşmek üzere 200 anketör kullanarak bir araştırma yapmıştır. 18 anketör meskenlerin hiç birinde, 57 anketör sadece 1 meskende, 69 anketör 2 meskende, 42 anketör 3 meskende, 11 anketör 4 meskende ve 3 anketör 5 meskende A tipi lamba kullanıldığını tespit etmiştir. Elde edilen sonuçların binom dağılımına uyup uymadığını araştırınız?

x	f	xf	x^2f	x^3f	x^4f
0	18	0	0	0	0
1	57	57	57	57	57
2	69	138	276	552	1104
3	42	126	378	1134	3402
4	11	44	176	704	2816
5	+ 3	+ 15	+ 75	+ 375	+ 1872
	N=200	380	962	2822	9254

$M_1 = \frac{380}{200} = 1{,}90$

$M_2 = \frac{962}{200} = 4{,}81$

$M_3 = \frac{2822}{200} = 14{,}11$

$M_4 = \frac{9254}{200} = 46{,}27$

$\mu_2 = M_2 - M_1^2 = 1{,}2$

$\mu_3 = M_3 - 2M_2M_1 + 2M_1^3 = 0{,}411$

$\mu_4 = 4{,}1223$

$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = 0{,}3127$ (sola yatık)

$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = -0{,}1373$ (Basık)

Kuramsal Momentler;

1 $\mu = np = 5 \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{8} = 1{,}875$

2 $Var(x) = npq = 5 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = 1{,}1719$

3 $\gamma_1 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}} = 0{,}2309$

4 $\gamma_2 = \frac{1-6pq}{npq} = -0{,}3466$

$$P(x) = \begin{cases} \binom{5}{x}\left(\frac{3}{8}\right)^x\left(\frac{5}{8}\right)^{5-x} & , x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

X	f	$P(x)$	$f_k = N.P(x)$		
0	18	0,0954	19,08	≅	19
1	57	0,2861	57,22	≅	57
2	69	0,3433	68,66	≅	69
3	42	0,2060	41,20	≅	41
4	11	0,0618	12,36	≅	12
5	+ 3	0,0074	1,48	≅	+ 2
	N=200				200

3.2 Geometrik Dağılım

Arka arkaya n kez tekrarlanan bir bernoilli deneyinde istenen sonucun ilk kez elde edilinceye kadar yapılan deney sayısı olan X'e geometrik rassal değişken denir. Bu değişkenin dağılımı geometrik dağılım adı alır.

Olasılık fonksiyonu;

$$P(x) = \begin{cases} q^{x-1} \cdot p & , x = 1,2,3,\ldots \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} P(x) = \sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} \cdot p = p \frac{1}{1-q} = 1$$

Geometrik dağılımın moment üreten fonksiyonu;

$$M_x(t) = \frac{pe^t}{1-e^t q}$$ ⟶ Türevini alırsak $E(x)$ oluşur.

$$E(x) = \mu = \frac{1}{p}$$

$$\mu_2 = Var(x) = \frac{q}{p^2}$$

⇒ Bir atıcının her atışta hedefi vurma olasılığı aynı ve $2/3$ olduğu bilinmektedir. Arka arka atışlar sonucu hedefi ilk kez vurması için gereken atış sayısı X olduğuna göre;

a) X'in olasılık fonksiyonu nedir?
b) Hedefi ilk kez ikinci atışta vurma olasılığı kaçtır?
c) Hedefi ilk kez en çok 3. atışta vurma olasılığı kaçtır?
d) Hedefi ilk kez vuruncaya kadar ortalama kaç atış gerekir. X'in varyansı kaçtır?

a) $$P(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) & , x = 1,2,3,\ldots \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

b) $$P(x=2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

c) $$P(x \leq 3) = P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = 0{,}96$$

d) $$E(x) = \frac{1}{p} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$Var(x) = \frac{q}{p^2} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 0{,}75$$

⇒ Bir kutuda 6 kusurlu, 9 kusursuz parça vardır. Parçalar ardışık olarak yerine tekrar iade edilerek çekilmektedir.

a) İlk kusursuz parçayı seçinceye kadar ortalama kaç parça çekmek gerekir.

b) İlk kusurlu parçayı seçinceye kadar ortalama kaç parça çekmek gerekir.

a) $p = \frac{9}{15} \Rightarrow E(x) = \frac{1}{p} = \frac{15}{9} = 1,67$

b) $q = \frac{6}{15} \Rightarrow E(x) = \frac{1}{q} = \frac{15}{6} = 2,5$

3.3 Hipergeometrik Dağılım

N elemanın N_1 tanesi A türünden, N_2 tanesi B türünden olsun yerine iade etmeden n tane eleman çekilsin. Çıkan A türünden elemanların sayısı olan X'e hipergeometrik rassal değişken denir. Bu değişkenin sahip olduğu dağılım hipergeometrik dağılım adını alır. Bu dağılımın olasılık fonksiyonu;

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & x = 0,1,2,\dots,N \\ & x \leq N_1 < N \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Hipergeometrik dağılımın beklenen değeri $E(x) = \mu = np$ dır. Varyansı ise $\mu_2 = Var(x) = pqn\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ dır. Binom dağılımı ile beklenen değeri aynı, varyansı farklı

⇒ İçinde 12 parça çikolata bulunan bir kutuda çikolatalardan 3 tanesinin fıstıklı olduğu bilinmektedir. Kutudan geri iade edilmeksizin arka arkaya 5 parça çikolata çekiliyor. X çıkan fıstıklı çikolataların sayısını gösterdiğine göre;

a) X in olasılık fonksiyonunu yazınız?

b) Çekilen çikolatalarda birinin fıstıklı olma olasılığını bulunuz?

c) Çekilen çikolatalardan en az ikisinin fıstıklı olma olasılığı kaçtır?

d) Çekilen çikolatalarda hepsinin fıstıksız olma olasılığı kaçtır?

e) Beş parça çikolata çekiliyorsa kaçının fıstıklı olması beklenir?

f) X'in varyansı nedir?

$N = 12$
$N_1 = 3$
$N_2 = 9$
$n = 5$

a) $P(x) = \dfrac{\binom{3}{x}\binom{9}{5-x}}{\binom{12}{5}}, \quad x = 0,1,2,3$

b) $P(x=1) = \dfrac{\binom{3}{1}\binom{9}{4}}{\binom{12}{5}} = 0,47$

c) $P(x \geq 2) = P(x=2) + P(x=3) = 0{,}36$

d)

$$P(x=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{9}{5}}{\binom{12}{5}} = 0{,}16$$

e) $E(x) = np = 5 \cdot \frac{3}{12} = 1{,}25$

f) $Var(x) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 5\left(\frac{3}{12}\right)\left(\frac{9}{12}\right)\left(\frac{12-5}{12-1}\right) = 0{,}60$

⇒ Bir kart dizgi atölyesinde saatte 10 adet kart üretilmektedir ve üretilen kartlardan 3 tanesi kontrol edilmektedir. Önceki tecrübelerden hatalı kart çıkma olasılığının 2/5 olduğu tahmin edilmektedir. 30 iş saati kontrol sonunda 6 saat hatalı kart bulunmamış, 15 saatte 1 tane hatalı kart bulunmuş, 8 saatte 2 hatalı kart ve 1 saatte 3 hatalı kart bulunmuştur. Bu sonuçların tahmini doğrulayıp doğrulamadığını hesaplayın?

X	f	xf	x^2f	$F_k = NP(x)$
0	6	0	0	5,001
1	15	15	15	15
2	8	16	32	9
3	+1	+3	+9	+1
	30	34	56	30,001

$M_1 = \frac{34}{30} = 1{,}1333$

$M_2 = \frac{56}{30} = 1{,}8667$

$\mu = M_1 = 1{,}1333$

$\mu_2 = M_2 = M_1^2 = 0{,}5824$

Kuramsal Değerler;

$\mu = np = 3 \cdot \frac{2}{5} = 1{,}2$

$\mu_2 = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 0{,}56$

$$P(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{6}{3-x}}{\binom{10}{3}}$$

$P(x=0) = 0{,}1667$
$P(x=1) = 0{,}5000$
$P(x=2) = 0{,}3000$
$P(x=3) = 0{,}0333$

NOT: N yeterince büyük olursa hipergeometrik dağılım yerine binom dağılımı da kullanılabilir.

3.4 Poisson Dağılımı

X binom dağılmış bir rassal değişken iken n büyürken ya da p küçülürken ilgili olasılıkları hesaplamak zorlaşır. Bu tür olasılıkların hesaplanmasında n.p sabit olmak koşulu ile n sonsuza giderken ve p sıfıra giderken binom dağılımının limiti araştırılırsa poisson dağılımına ulaşılır.

$$n.p=\lambda \Rightarrow p=\frac{\lambda}{n}$$

$$P(x)=\binom{n}{x}p^x \cdot q^{n-x}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(x)=\binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$P(x)=\frac{1}{x!}\lambda^x \cdot e^{-\lambda} \qquad x=0,1,2,\ldots$$

$$\boxed{P(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} & , x=0,1,2,\ldots \\ 0 & , \text{diğer durumlar}\end{cases}}$$

$$M_x(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$$

$\mu=\lambda \quad \mu_2=\lambda$

$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \qquad \gamma_2=\frac{1}{\lambda}$

// Poisson dağılımı nadiren rastlanan olaylarda kullanılır.

⇒ X rassal değişkeni yandaki şekilde verilmiştir. $X \sim b(3000, 0.005)$ ise $P(X=20)=?$

Binom

$$P(x=20)=\binom{3000}{20}(0{,}005)^{20}(0{,}995)^{2980}=0{,}04177$$

poisson

$$\lambda=n.p=3000.0{,}005=15$$

$$P(x=20)=\frac{1}{20!}\cdot 15^{20}\cdot e^{-15}=0{,}04181$$

⇒ Bir enerji iletim hattına 500 günde düşen yıldırım sayıları aşağıdaki gibidir.

x	f	xf	x^2f	x^3f	x^4f
0	236	0	0	0	0
1	177	177	177	177	177
2	65	130	260	520	1040
3	18	54	162	486	1458
4	3	12	48	192	768
≥ 5	1	5	25	125	625
	500	378	672	1500	4068

Dağılımın poisson dağılımına uyup uymadığını araştırın?

Sıfır etrafındaki momentler

$$\begin{cases} M_1 = \mu = \frac{378}{500} = 0,756 \\ M_2 = \frac{672}{500} = 1,344 \\ M_3 = \frac{1500}{500} = 3 \\ M_4 = \frac{4068}{500} = 8,136 \end{cases}$$

$$\mu_2 = M_2 - M_1^2 = 0,7725$$

$$\mu_3 = M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3 = 0,816$$

$$\mu_4 = 2,6328$$

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = 1,2018$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = 1,5124$$

Kuramsal Momentler;

$\mu = \lambda = 0,756$

$\mu_2 = \lambda = 0,756$

$\mu_3 = \lambda$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{0,756}} = 1,1501$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,756} = 1,3228$$

$$P(X) = \begin{cases} \frac{(0,756)^x \cdot e^{-0,756}}{x!} & , \ x = 0,1,2,\dots \\ 0 & , \ \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$$P(X=0) = \frac{(0,756)^0 \cdot e^{-0,756}}{0!} = 0,4695$$

x	f	xf	x^2f	x^3f	x^4f	$P(x)$	$f_k = P(x)N$	
0	236	0	0	0	0	0,4695	$500 \cdot 0,4695 = 234,75$	$\cong 235$
1	177	177	177	177	177	0,3549	$500 \cdot 0,3548 = 177,45$	$\cong 177$
2	65	130	260	520	1040	0,1349	$500 \cdot 0,1349 = 67,10$	$\cong 67$
3	18	54	162	486	1458	0,0338	$500 \cdot 0,0338 = 16,90$	$\cong 17$
4	3	12	48	192	768	0,0064	$500 \cdot 0,0064 = 3,20$	$\cong 3$
$x \geq 5$	1	5	25	125	625	0,0001	$500 \cdot 0,0001 = 0,05$	$\cong 1$

BÖLÜM: 4 SÜREKLİ DAĞILIMLAR

4.1 Normal Dağılımlar

Normal dağılım ilk uygulamalarda doğal olaylara oldukça başarılı bir şekilde uyum sağlamıştır. Ancak zamanla uygulama alanı genişledikçe yeterli gelmemeye başlamıştır. Bununla birlikte bazı değişkenlerin uygun dönüşümüyle (örneğin; $\log x = z$, $\sqrt{x} = z$, $x^2 = z$ gibi) ya da limit şekillerin normale yaklaşması gibi nedenlerle normal dağılım günümüzde de önemini korumaktadır.

X sürekli bir rassal değişken iken X'in yoğunluk fonksiyonu;

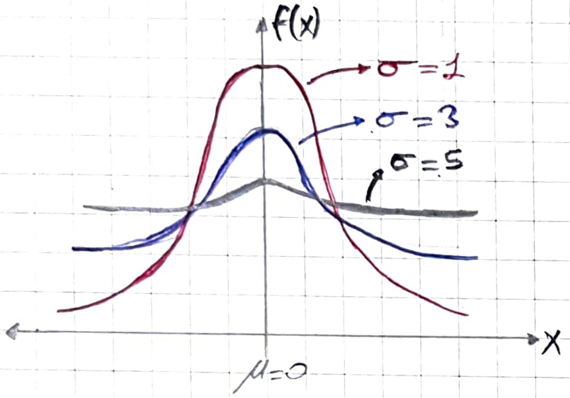
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , \ -\infty < x < \infty$$

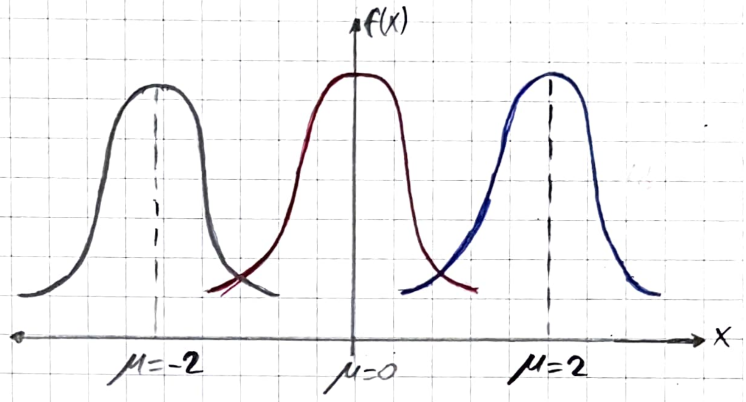
$f(x)$'e normal dağılım, X'e de normal dağılmış rassal değişken denir. Dağılımın σ^2 ve μ gibi iki parametresi vardır. X normal dağılmış bir rassal değişken ise kısaca aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$X \sim n(\mu, \sigma^2)$$

Rassal değişken → X; Normal Dağılım → n

Normal dağılımda standart sapmanın değeri küçüldükçe ortalama etrafında bir daralma olur. Aritmetik ortalama ise dağılımın konumunu belirler.





X normal dağılmış bir rassal değişken iken X'in moment üreten fonksiyonu;

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$ (t'ye göre türev al ve sıfır koy)

$M_1 = \mu$
$M_2 = \sigma^2 + \mu^2$
$M_3 = \mu(3\sigma^2 + \mu^2)$
$M_4 = 3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4$

$\mu_2 = \sigma^2$
$\mu_3 = 0$
$\mu_4 = 3\sigma^4$

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = 0$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = 0$$

$Mod(x) = \mu$
$Med(x) = \mu$

$X = \mu \mp \sigma$ için iki dönüm noktası vardır. Maximum değerinin ordinatı;

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$ dır.

4.1.2 Standart Normal Dağılım

Uygulamada ihtiyaç duyulan olasılıkların hesaplanabilmesi için dağılımın $\mu = 0$ ve $\sigma = 1$ özel değeri için oluşturulan tablodan yararlanılır. X normal dağılmış bir rassal değişken iken ($X \sim n(\mu, \sigma^2)$), $z = (x - \mu)/\sigma$ dönüşümü yapılırsa;

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad -\infty < z < \infty$$ haline gelir.

⇒ $z \sim n(0,1)$ normal dağılım olarak verildiğine göre (ortalaması sıfır, varyansı bir olarak verilen bir dağılım)

a) $P(0<z<1)=?$

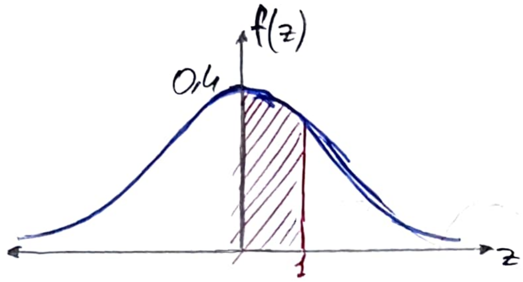
b) $P(-2<z<1,5)=?$

c) $P(0,5<z<2,75)=?$

d) $P(z>1,53)=?$

a) $P(0<z<1)=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$

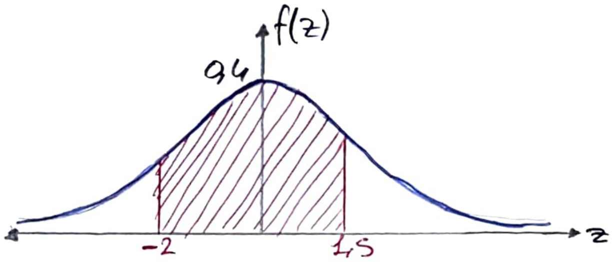
$=0,341345$



b) $P(-2<z<1,5)=P(0<z<2)+P(0<z<1,5)$

$=0,477250+0,433193$

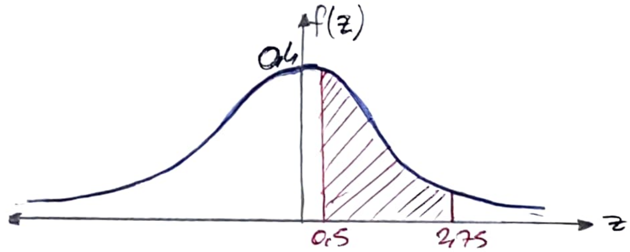
$=0,910423$



c) $P(0,5<z<2,75)=P(0<z<2,75)-P(0<z<0,5)$

$=0,497020-0,191462$

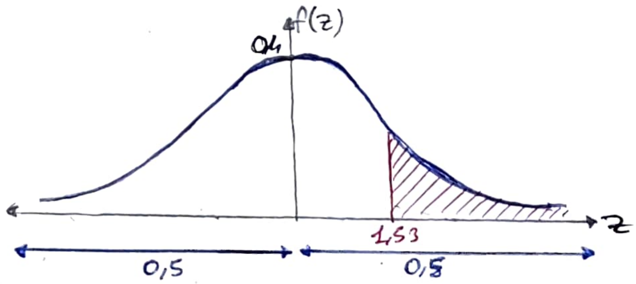
$=0,305558$



d) $P(z>1,53)=P(0<z<\infty)-P(0<z<1,53)$

$=0,5-0,437$

$=0,063$



⇒ Olasılık dersinin yıl sonu ortalaması 42 ve varyansı 400 dür. Olasılık dersini alan öğrenci sayısı 180 olduğuna göre notu 90 ile 100 arası, notu 80 ile 90 arası ve notu 0 ile 40 arasında olan öğrenci sayılarını bulunuz?

$X \sim n(42,400)$

$\mu=42$

$\sigma=\sqrt{400}=20$

a) $P(90<x<100)=?$

$z_1=\frac{100-42}{20}=\frac{58}{20}=2,9$

$z_2=\frac{90-42}{20}=\frac{48}{20}=2,4$

$P(2,4<z<2,9)=0,498134-0,491802$

$=0,006332$

$n_a=90\sim100$ arası öğrenci sayısı $=180\times0,006332$

$=1,1397$

b) $P(80 < x < 90) = ?$

$$z_3 = \frac{80-42}{20} = \frac{38}{20} = 1{,}9$$

$$P(1{,}9 < z < 2{,}4) = 0{,}491802 - 0{,}471284$$
$$= 0{,}020518$$

$$n_b = 180 \times 0{,}020518$$
$$= 3{,}69 \cong 4$$

c) $P(0 < x < 40) = ?$

$$z_4 = \frac{40-42}{20} = -0{,}1$$

$$z_5 = \frac{0-42}{20} = -2{,}1$$

$$P(-2{,}1 < z < -0{,}1) = P(0{,}1 < z < 2{,}1)$$
$$= 0{,}482136 - 0{,}039823$$
$$= 0{,}442313$$

$$n_c = 180 \times 0{,}442313$$
$$= 79{,}61 \cong 80$$

4.2 Gamma Dağılımı

4.2.1 Gamma Fonksiyonu

Gama fonksiyonu e'nin bir fonksiyonudur. Gama fonksiyonunun üstel dağılımı elektronik aletlerin kullanım süreleri (ömürleri)ni bulmaya yardımcı olur.

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} . x^{n-1} dx$$

$n = 1$ ise $\Gamma(1) = 1$

$n-1 > 0$ olmak şartıyla; $\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1) = (n-1)!$

Gama fonksiyonları ayrıca kesirli diferansiyel denklemlerde kullanılır.

$n = r + \delta$, r tam sayı ve $0 < \delta < 1$ ise

$$\Gamma(n) = \Gamma(r+\delta) = (r+\delta-1).(r+\delta-2). \ldots . (\delta).\Gamma(\delta)$$

$\Gamma(\delta) \longrightarrow$ Tabloda bulunur ya da integralde yerine yazılır.

$\Gamma \longrightarrow$ Gama
$\delta \longrightarrow$ Delta

4.2.2 Gama Yoğunluk Fonksiyonu

$\alpha>0$, $\beta>0$ ve $\Gamma(\alpha)>0$ olmak koşulu ile

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha).\beta^{\alpha}}.x^{\alpha-1}.e^{-\frac{x}{\beta}} & , 0<x<\infty \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

4.2.3 Gama Dağılımının Moment Üreten Fonksiyonu ve Momentleri

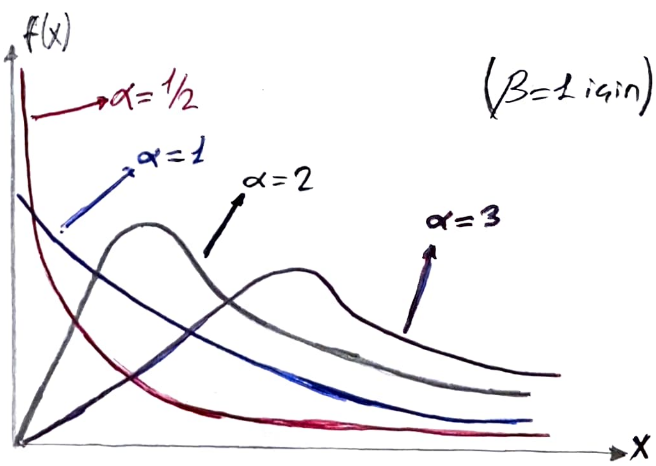
Gama dağılımının moment üreten fonksiyonu;

$$M_X(t)=\left(\frac{1}{1-\beta t}\right)^{\alpha} \quad , 0<t<\frac{1}{\beta}$$

$$M_1=M_X^{(1)}(0)=\alpha\beta$$
$$M_2=\alpha(\alpha+1)\beta^2$$
$$M_3=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta^3$$
$$M_4=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\beta^4$$
$$\mu_2=M_2-M_1^2=\alpha\beta^2 \quad \text{(Varyans)}$$
$$\mu_3=2\alpha\beta^3$$
$$\mu_4=\alpha\beta^4(3\alpha-6)$$

$$\gamma_1=\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\gamma_2=\frac{3(\alpha+2)}{\alpha}-3$$



Yoğunluk fonksiyonunun altında kalan alan bire eşittir.

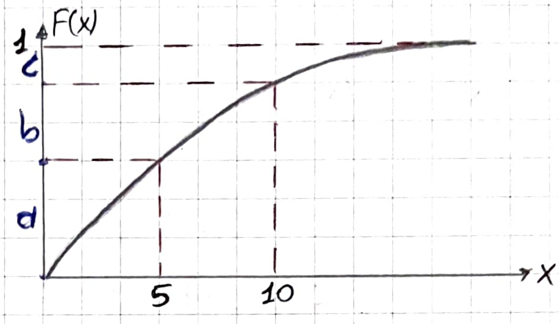
4.3 Üstel Dağılım

Üstel dağılım $\alpha=1$ için gamma dağılımının özel bir halidir. Yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}} & , x>0 \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases} 0 & , x<0 \\ 1-e^{-\frac{x}{\beta}} & , x>0 \\ 1 & , x\to\infty \end{cases}$$

⇒ X, $\beta=0{,}5$ olan üstel dağılmış bir rassal değişkendir. Buna göre aşağıdaki olasılıkları hesaplayınız? ($\beta \rightarrow$ arıza oranı)

a) $P(X<5)=?$
b) $P(5<X<10)=?$
c) $P(X>10)=?$



a) $1-e^{-10}$
b) $e^{-10}-e^{-20}$
c) $1-(1-e^{-20})=e^{-20}$

Üstel dağılımın moment üreten fonksiyonu aşağıdaki şekilde gibidir.

$$M_X(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t} \qquad \lambda=\frac{1}{\beta}$$

4.4 Ki Kare (X^2) Dağılımı

Ki kare dağılımı gamma dağılımının özel halidir. r pozitif bir tam sayı olmak üzere $\alpha=r/2$ ve $\beta=2$ için;

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})\,2^{r/2}}\cdot x^{\frac{r}{2}-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}} & , 0<x<\infty \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

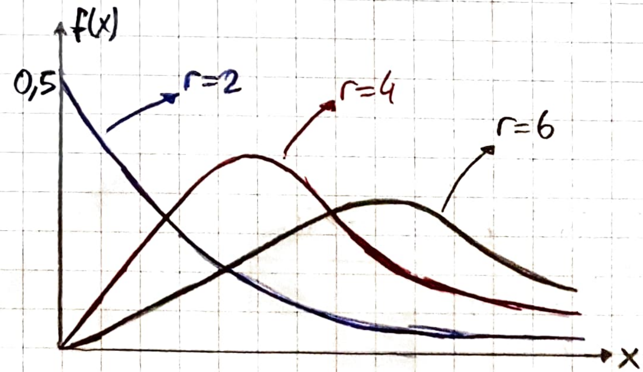
Ki kare dağılımı hipotez testlerinde ve homojenlik testlerinde kullanılır. Ki kare dağılımı aşağıdaki şekilde gösterilir ve r'ye serbestlik derecesi denir.

$X \sim X^2_r \longrightarrow$ serbestlik derecesi

Ki kare dağılımının moment üreten fonksiyonu;

$$M_X(t)=(1-2t)^{-r/2} \quad , 0<t<1/2$$

$M_1=\mu=r$ (Ortalama)
$\mu_2=2r$ (Varyans)



BÖLÜM:5 BİLEŞİK OLASILIK DAĞILIM VE YOĞUNLUK FONKSİYONU

Bir olasılık uzayında birden çok rassal değişken tanımlanabilir. Bileşik olasılık dağılım fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$F_{xy}(X,Y)=P(X\leq x,\ Y\leq y)$$

$F_{xy}(X,Y)\geq 0$ olmak zorunda

$F_{xy}(\infty,\infty)=P(X\leq\infty,\ Y\leq\infty)=1$ (Toplam Olasılık)

Öte yandan $\{X\leq x,\ Y\leq\infty\}=\{X\leq x\}$ olacağından $F_{xy}(x,\infty)=F_x(x)$ ve $\{X\leq\infty,\ Y\leq y\}=\{Y\leq y\}$ olacağından $F_{xy}(\infty,Y)=F_y(Y)$ olur.

Eğer $F_{xy}(X,Y)$ sürekli ve türevi alınabilen bir fonksiyon olarak tanımlanmışsa bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$f_{xy}(X,Y)=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}F_{xy}(X,Y)$$

i) $f_{xy}(X,Y)\geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(X,Y)\,dx\,dy=1$

⇒ Bir kutuda 3 tane mavi, 2 tane kırmızı ve 3 tane de beyaz bilye vardır. Bu kutudan rasgele 2 bilye seçilecektir. Mavi bilyeler X, kırmızı bilyeler Y rassal değişkeni ile temsil edildiğine göre;

a) Olasılık fonksiyonunu yazınız? (Ayrık Olasılık)

b) $P((X,Y)\mid x+y\leq 1)=?$

a) (X,Y)

M	K	B
3	2	3

2 tane seç

$$\binom{8}{2}=\frac{8!}{6!.2!}=28$$

$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(0,2)$

$f(0,1)\longrightarrow\binom{2}{1}=2\longrightarrow$ kırmızı

$\binom{3}{1}=3\longrightarrow$ beyaz

$$f(0,1)=\frac{3.2}{28}=\frac{3}{14}$$

X

f(x,y)	0	1	2	Toplam
Y 0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
1	$\frac{6}{28}$	$\frac{6}{28}$	–	$\frac{12}{28}$
2	$\frac{1}{28}$	–	–	$\frac{1}{28}$
Toplam	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

K

$\boxed{2\times 3}$

K_1B_1	1
K_1B_2	2
K_1B_3	3
K_2B_1	4
K_2B_2	5
K_2B_3	6 $\longrightarrow 2\times 3$

$$f(x,y) = P(x,y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{\binom{8}{2}}$$

$x = 0,1,2$, $y = 0,1,2$ ve $0 \leq x+y \leq 2$

b) $P(x+y \leq 1) = P(0,0) + P(0,1) + P(1,0)$

$$= \frac{3}{28} + \frac{9}{28} + \frac{6}{28} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$$

⇒ Bir şekerleme şirketi krema ve fındık karıştırarak hafif ve bitter çikolata üretmektedir. X ve Y sırasıyla hafif ve bitter çikolatayı göstermek üzere olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$f(x,Y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3Y) & , 0 \leq x \leq 1 \ ; \ 0 \leq Y \leq 1 \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

a) Buna göre toplam olasılığın 1'e eşit olduğunu gösteriniz?
b) X'in sıfır ile 1/2 , Y'nin ise 1/4 ile 1/2 arasında olma olasılığı kaçtır?

a) $\sum P \stackrel{?}{=} 1$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\, dy\, dx \stackrel{?}{=} 1$$

$$\int_0^1 \frac{2}{5}\left(2xy + \frac{3y^2}{2}\right)\Big|_0^1 dx \stackrel{?}{=} 1$$

$$\int_0^1 \left(\frac{4x}{5} + \frac{3}{5}\right) dx \stackrel{?}{=} 1$$

$$\left(\frac{4x^2}{5.2} + \frac{3x}{5}\right)\Big|_0^1 \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

b) $P(0 < x < 1/2 \ , \ 1/4 < Y < 1/2) = ?$

$$P(X,Y) = \int_0^{1/2} \int_{1/4}^{1/2} \frac{2}{5}(2x+3y)\, dy\, dx = \frac{13}{160}$$

Dağılım fonksiyonlarından elde edilen $F_{xy}(X,Y) \longrightarrow F_x(X)$ ve $F_y(Y)$ fonksiyonlarına marjinal dağılım fonksiyonu denir. Marjinal yoğunluk fonksiyonları ise aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$f_x(X) = \frac{dF_x(X)}{dx} \qquad f_y(Y) = \frac{dF_y(Y)}{dy}$$

$$f_x(X)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(X,Y)\,dy \qquad f_y(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(X,Y)\,dx$$

$X=x$ iken Y'nin koşullu olasılığı;

(x ve y her hangi bir değer)

$$P(Y|X)=\frac{P(X,Y)}{P_x(X)} \quad , \; P_x(X)>0$$

$Y=y$ iken X'in koşullu olasılığı;

$$P(X|Y)=\frac{P(X,Y)}{P_y(Y)} \quad , \; P_y(Y)>0$$

- ⇒ Bir torbada 3 mavi, 2 kırmızı, 3 beyaz top vardır. X mavi, Y kırmızı top sayısını göstermektedir. Torbadan rasgele 2 top çekilmektedir. $Y=1$ için X'in koşullu olasılık dağılımını bulunuz?

$Y=1$ iken $P(X|Y)=?$

$$P_y(Y)=\sum_{x=0}^{2} P(x,1)=\frac{3}{14}+\frac{3}{14}+0=\frac{3}{7}$$

$$P(X|Y)=\frac{7}{3}P(x,1) \quad , x=0,1,2$$

Birinin kırmızı olduğu bilindiğine göre;

$$P(0|1)=\frac{7}{3}P(0,1)=\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{14}=\frac{1}{2}$$

$$P(1|1)=\frac{7}{3}P(1,1)=\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{14}=\frac{1}{2}$$

$$P(2|1)=\frac{7}{3}P(2,1)=\frac{7}{3}\cdot 0=0$$

İstatiksel Bağımsızlık

X ya da Y ayrık veya sürekli rassal değişkenlerken bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu ($f_{xy}(X,Y)$), $f_x(X)$ ve $f_y(Y)$ marjinal yoğunluk fonksiyonu olmak üzere bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu marjinal yoğunluk fonksiyon ile çarpımı ise;

$$f_{xy}(X,Y)=f_x(X)\cdot f_y(Y) \qquad \text{(Bağımsızlık koşulu)}$$

X ve Y birbirinden bağımsızdır.

⇒ Bir önceki örnekteki rassal değişkenlerin istatiksel olarak bağımsız olduğunu gösteriniz?

$$P_{xy}(0,1) = \frac{3}{14} = P_x(0) \cdot P_y(1)$$

$$= \sum_{y=0}^{2} P(0,y) \cdot \sum_{x=0}^{2} P(x,1)$$

$$\frac{3}{14} \stackrel{?}{=} \left(\frac{3}{28} + \frac{3}{14} + \frac{1}{28}\right) \cdot \left(\frac{3}{14} + \frac{3}{14} + 0\right)$$

$$\frac{3}{14} \neq \frac{15}{98}$$ (Bağımsızdır)

BÖLÜM: 6 ÖRNEKLEME