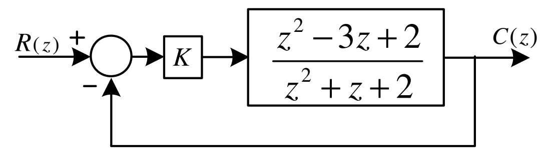
28.05.2014

OTOMATİK KONTROL FİNAL SINAVI CEVAPLARI

S1)

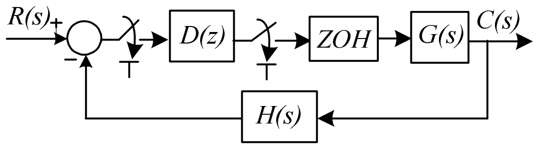


Yanda verilen kontrol sistemi için;

a) Kök-yer eğrisini çiziniz. (kutuplar, sıfırlar, kutup-sıfır dağılımı, asimtodlar, kopma noktaları, birim daireyi kesme noktalarını, kompleks kutuptan çıkış açısını bulunuz)

b) Kopma noktasındaki kazancı yer eğrisinden hesaplayınız.

S2)



Yanda kapalı çevrim kontrol blok diyagramı verilen sisteminde ;

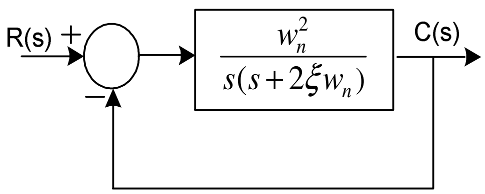
$G(s)=\dfrac{e^{-2.1s}}{s+1}$, $D(z)=1$, $T=1sn$ ve $R(s)=\dfrac{1}{s}$ olduğuna göre;

a) $\dfrac{C(z)}{R(z)}$ Ayrık-zaman kapalı çevrim transfer fonksiyonunu elde ediniz.

b) $C(k)=?$ elde ediniz.

c) $C(\infty)=?$ Son değer teoreminden elde ediniz.

S3)



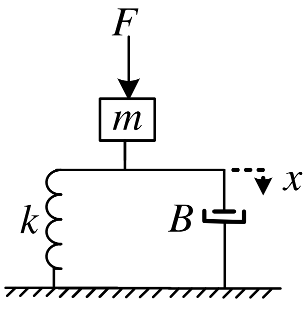
II. Dereceden Örnek sisteme ait $\xi=0.707$ ve $w_n=1.4144$ olduğuna göre;

a) Aşım ve **%2** kriterine göre yerleşme zamanını hesaplayarak birim basamak cevabının zamana göre değişimini yaklaşık olarak çiziniz.

b) Geçici rejim parametrelerinden (ξ, w_n) kullanarak II. Dereceden örnek sistem için s-domeninde transfer fonksiyonunu (matematiksel modelini) yazınız.

c) Birim basamak ve birim rampa için sürekli hal hatalarını e_{ss} hesaplayınız.

S4)



Yanda verilen mekanik sistem için;

a) Sistemi tanımlayan diferansiyel denklemleri yazınız (**Sistem dengede**).

b) $B=\dfrac{\alpha}{x}$ olarak kabul edilmek üzere durum değişkenlerini tanımlayınız ve durum denklemlerini elde ediniz. Durum denklemi matrisel olarak $\dfrac{dx(t)}{dt}=f(x(t))+g(x(t))u(t)$ formunda yazınız.(B sönüm katsayısı, x konum ile ters orantılı kabul edilmiştir. $B=\dfrac{\alpha}{x}$)

c) Çalışma noktası $x=x_0=\begin{bmatrix}x_{10}\\ x_{20}\end{bmatrix}$ çalışma noktası etrafında sistemi doğrusallaştırarak $\Delta\dot{x}(t)=A^*\Delta x(t)+B^*\Delta u(t)$ vektör matris formunda elde ediniz.

$$A^*=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{x_0,r_0} \qquad B^*=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial r_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial r_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial r_n}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial r_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial r_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial r_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial r_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial r_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial r_n}\end{bmatrix}_{x_0,r_0}$$

$$x(k)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_i)^m X(z)z^{k-1}\right]_{z=z_i}$$

$$X(z)=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[(s-s_i)^m X(s)\frac{z}{z-e^{sT}}\right]\right\}$$

Başarılar, Süre 90 dk

Prof. Dr. Ayhan ÖZDEMİR, Yrd. Doç. Dr. Zekiye ERDEM

CEVAPLAR

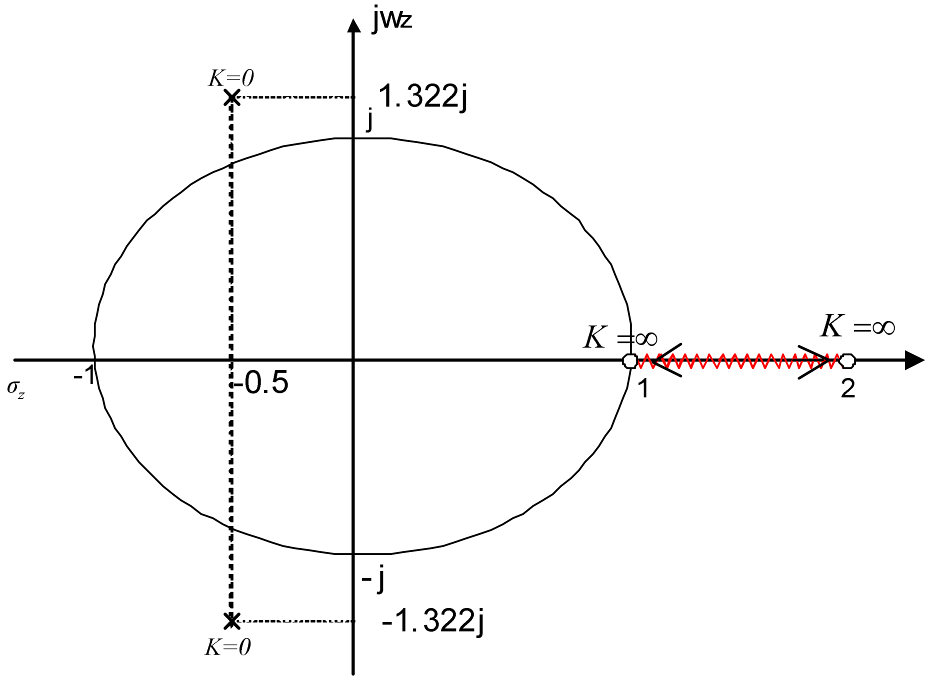
C1.a)

1. $A.Ç.T.F. = \dfrac{K\left(z^2 - 3z + 2\right)}{z^2 + z + 2}$

Açık çevrim transfer fonksiyonuna ait:

Kutuplar	Sıfırlar
$p_1 = -0.5 + 1.3229j$	$s_1 = 1$
$p_2 = -0.5 - 1.3229j$	$s_2 = 2$
---------------------	-----------------------
$n = 2$ Kutup sayısı.	$m = 2$ Sıfır sayısı.

2. Kutup sıfır dağılımı



✓ İki Sıfır arası kök-yer eğrisine dahil olduğundan bir adet girdi olarak kopma noktası olacaktır.

3. Asimtodlar

n-m=0, Kutup sayısı = Sıfır sayısı olduğundan kök-yer eğrisinin sonsuza giden kolu dolayısıyla asimtodu yoktur.

4.Kopma noktaları;

$\dfrac{dG(z)H(z)}{dz}=0$ ifadesinden hesaplanır.

$\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{K(z^2-3z+2)}{z^2+z+2}\right)=0$ dan

$\Rightarrow\ K\left[\dfrac{(2z-3)(z^2+z+2)-(2z+1)(z^2-3z+2)}{(z^2+z+2)^2}\right]=0$ dan $z^2-2=0 \rightarrow z_{1,2}=\pm 1,414$

- ✓ **<u>İki sıfır arası</u>** kök-yer eğrisine dahil olduğundan bir adet girdi olarak kopma noktası olacaktır. Dahil olan bölge göz önünde bulundurulduğunda (1 ve 2 noktaları arası);
- ✓ **Girdi olarak kopma noktası=1.414 noktasıdır.**

5. Birim daireyi kesme noktaları

Jury Kararlılık kriterinden

karakteristik denklem:

$$F(z)=1+G(z)H(z)=1+\frac{K(z^2-3z+2)}{z^2+z+2}=0 \quad\Rightarrow\quad F(z)=(1+K)z^2+z(1-3K)+2K+2=0$$

Jury kararlılık kriteri ile sistemin kararlılık analizi için önce 2 gerek koşula bakılmalıdır.

i) $F(1)>0$ olmalıdır.

$1+K+1-3K+2+2K>0$

$3>0$ olduğundan 1. Şart sağlanmıştır.

ii) $(-1)^2F(-1)>0$ olmalıdır.

$1+K+3K-1+2+2K>0$

$6K>-2 \Rightarrow K>-\dfrac{1}{3}$

Yeter koşul: $|a_n|>|a_0| \rightarrow |1+K|>|2+2K| \rightarrow |1+K|>2|1+K|$ yeterlilik koşulunu sağlamaz….

$|1+K|$ ifadesi $2|1+K|$ dan büyük olamaz……

$K>0$ Tüm kazanç değerleri için sistem kararsızdır.

$z=jw$ verilir ise,

$$(1+K)(jw)^2+(jw)(1-3K)+2K+2=0$$

$$-w^2(1+K)+(jw-3jwK)+2K+2=0$$

$(-w^2 - K\,w^2 + 2K + 2) + j\,(w - 3wK) = 0$ olabilmesi için hem reel hemde imajiner kısımların ayrı ayrı sıfır olması gerekir.

$w - 3wK = 0 \quad K = \dfrac{1}{3}$ köklerin imajiner eksen olabilmesi için **K** değeri.

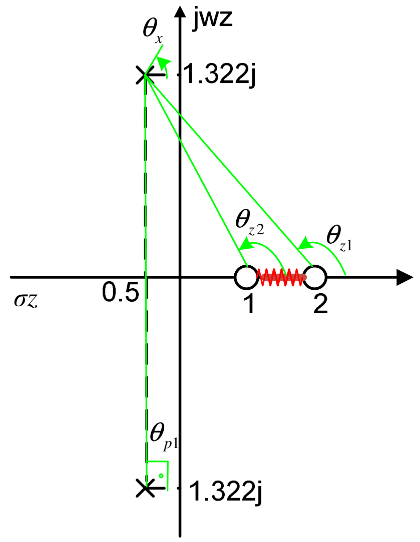
ve $-w^2 - K\,w^2 + 2K + 2 = 0$ denkleminde **K** yerine $K = \dfrac{1}{3}$ koyulur ise,

$$-w^2 - \frac{1}{3}w^2 + \frac{2}{3} + 2 = 0$$

$\dfrac{4}{3}w^2 = \dfrac{8}{3} \quad w = \pm\sqrt{2}$ ise imajiner eksen için $z = \pm\,jw = \pm\,j\sqrt{2}$ elde edilir.

6. Kompleks kutuptan çıkış açısı

Kutuplardan çıkış açıları faz koşulundan bulunur.



$$\theta_{z1} = 180 - \tan^{-1}\frac{1.322}{2.5} \qquad \theta_{z1} = 152.14^0$$

$$\theta_{z2} = 180 - \tan^{-1}\frac{1.322}{1.5} \qquad \theta_{z1} = 138.61^0$$

$$\theta_{p1} = 90^\circ$$

$$\left(\theta_{z1} + \theta_{z2}\right) - \left(\theta_{p1} + \theta_x\right) = 180^\circ$$

$$-\theta_x = 180^\circ - 152.14^\circ - 138.61^\circ + 90^\circ$$

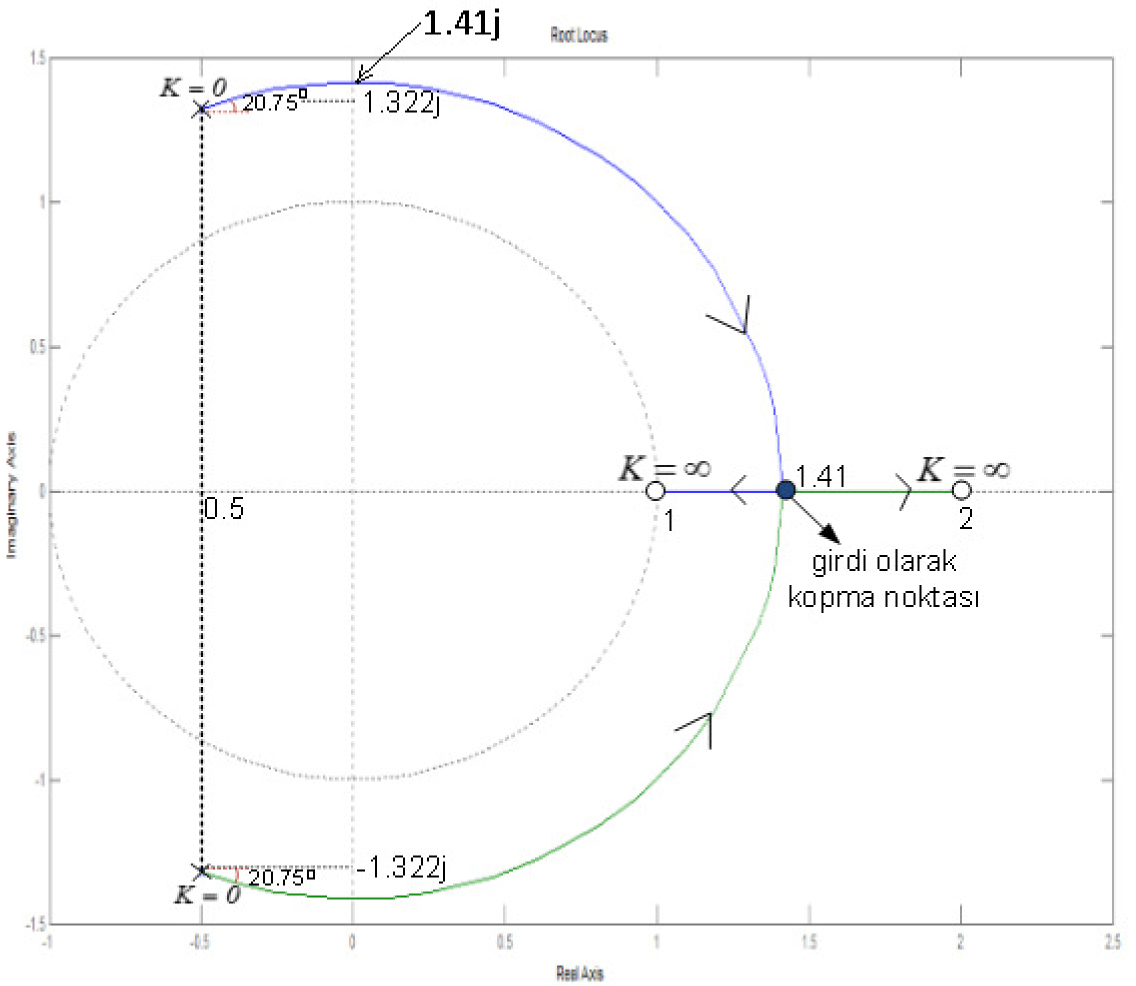
$$\theta_x = 20.75^\circ$$

Kök-yer eğrisi çizdirmek için MATLAB kodları aşağıdadır:

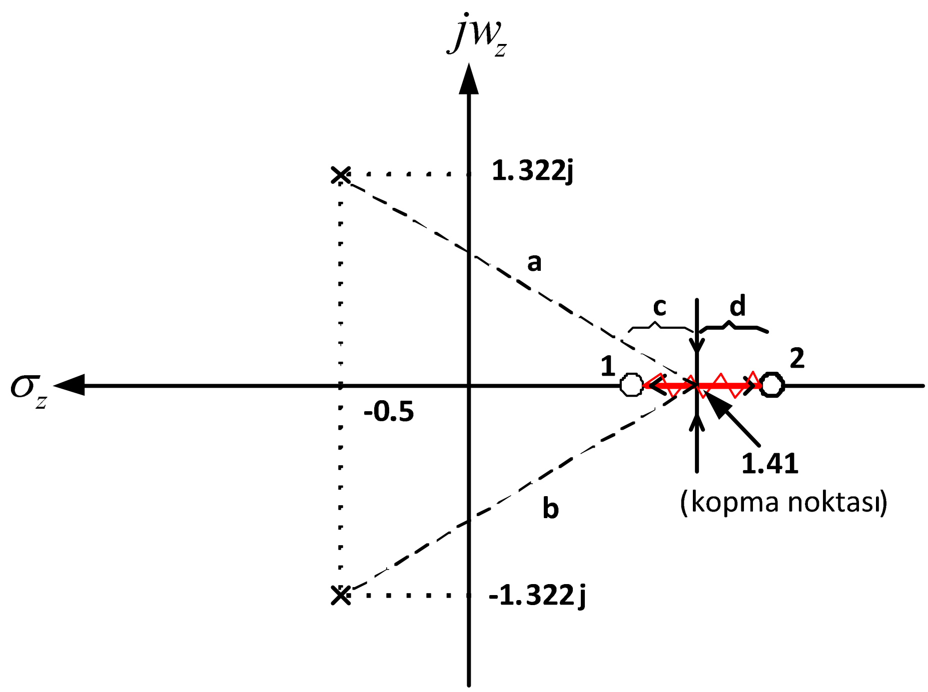
```
num=[1 -3 2];
den=[1 1 2];
s=tf('s')
Gs=tf(num,den)
rlocus(Gs)
```

Tüm hesaplamalardan sonra incelenen sistem için kök-yer eğrisi aşağıda çizdirilmiştir.

veya



b)Kopma noktasındaki kazanç



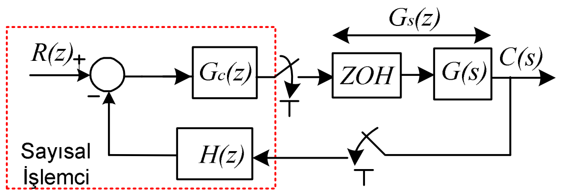
$$K_p = \frac{a*b}{c*d} \qquad a=b=\sqrt{1.322^2+1.91^2} \rightarrow a=b=2.3229$$

$$c=1.41-1 \rightarrow c=0.41$$

$$d=2-1.41 \rightarrow d=0.59$$

$$K_p = \frac{2.3229*2.3229}{0.41*0.59} \rightarrow K_p = 22.30$$

C.2)



a) $\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G_s(z)}{1+G_c(z)G_s(z)H(z)}$

$$G_s(z) = z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right\}$$

$$G(z) = z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{e^{-2.1s}}{s+1}\right\}_{T=1} = (1-z^{-1})z\left\{\frac{e^{-2.1s}}{(s+1)}\frac{1}{s}\right\}_{T=1}$$

$$e^{-2.1s} = e^{-Tds}$$

$$T = 1sn$$

$$T_d = 2.1 \text{ ölü zaman}$$

$$T_d = 2T + 0.1T$$

$$e^{-2.1s} = e^{-T_d s} = e^{-2s}e^{-0.1s}$$

$$e^{-2sT} = z^{-2}$$

Modifiye z dönüşümü uygulaması:

$\mu = 0,1 \rightarrow m = 1-0,1 \rightarrow m = 0,9$ olacaktır

$$G(z)=Z\left\{\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)\left(\frac{e^{-2sT}e^{-0,1sT}}{s+1}\right)\right\}_{T=1sn} \rightarrow e^{-sT}=z^{-1}\rightarrow e^{-4sT}=z^{-4}$$

$$G(z)=\left(1-z^{-1}\right)Z\left\{\frac{e^{-2sT}e^{-0.1sT}}{s(s+1)}\right\}=\left(1-z^{-1}\right)z^{-2}Z\left\{\frac{e^{-(1-0.1)sT}}{s(s+1)}\right\}$$

$$G(z)=\left(1-z^{-1}\right)z^{-2}z^{-1}Z\left\{\frac{e^{0,9sT}}{s\left(s+1\right)}\right\}=\frac{z-1}{z}\frac{1}{z^{2}}z^{-1}Z\left\{\frac{e^{0,9sT}}{s\left(s+1\right)}\right\}$$

$$=\frac{z-1}{z^{4}}\left\{s\frac{e^{0.9sT}}{s(s+1)}\frac{z}{z-e^{sT}}\Bigg|_{s=0}+(s+1)\frac{e^{0,9sT}}{s(s+1)}\frac{z}{z-e^{sT}}\Bigg|_{s=-1}\right\}=\frac{z-1}{z^{4}}\left\{\frac{z}{z-1}-\frac{0.4066z}{z-0.3679}\right\}$$

$$G(z)=\left\{\frac{1}{z^{3}}-\frac{0.4066(z-1)}{z^{3}(z-0.3679)}\right\}$$

$$G(z)=\frac{(z-0.3679)-0.4066(z-1)}{z^{3}(z-0.3679)}$$

$$G(z)=\frac{z-0.3679-0.4066z+0.4066}{z^{3}(z-0.3675)}$$

$$G(z)=\frac{0.5934z+0.0387}{z^{3}(z-0.3679)}$$

$$C(z)=R(z)\frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)H(z)}$$

$$R(s)=\frac{1}{s}\quad ise\ R(z)=\frac{z}{z-1}\quad olur\qquad D(z)=1\quad H(z)=1$$

$$C(z)=\frac{\dfrac{0.5934z+0.0387}{z^{3}(z-0.3679)}}{1+\dfrac{0.5934z+0.0387}{z^{3}(z-0.3679)}}\frac{z}{z-1}$$

$$C(z)=\frac{0.5934z+0.0387}{z^{4}-0.3679z^{3}+0.5934z+0.0387}\frac{z}{z-1}$$

b)

$$C(z)=\frac{0.5934z+0.0387}{z^{4}-0.3679z^{3}+0.5934z+0.0387}\frac{z}{z-1}$$ ifadesi çarpanlarına ayrılır.

$$C(z)=\frac{\left(0.5934z+0.0387\right)z}{(z-1)(z-0.5705+0.7144i)(z-0.5705\text{-}0.7144i)(z+0.7077)(z+0.0654)}$$

Rezidü uygulanır ise

$$C(z)=\frac{(0.5934z+0.0387)z}{(z-1)(z-0.5705+0.7144i)(z-0.5705\text{-}0.7144i)(z+0.7077)(z+0.0654)}$$

$$c(k)=\cancel{(z-1)}\,\frac{(0.5934z+0.0387)\cancel{z}}{\cancel{(z-1)}\,(z-0.5705+0.7144\mathrm{i})(z-0.5705\text{-}0.7144\mathrm{i})(z+0.7077)(z+0.0654)}\,z^{k\cancel{-1}}\Bigg|_{z=1}+$$

$$\cancel{(z-0.5705+0.7144\mathrm{i})}\,\frac{(0.5934z+0.0387)\cancel{z}}{(z-1)\,\cancel{(z-0.5705+0.7144\mathrm{i})}\,(z-0.5705\text{-}0.7144\mathrm{i})(z+0.7077)(z+0.0654)}\,z^{k\cancel{-1}}\Bigg|_{z=0.5705-0.7144j}+$$

$$\cancel{(z-0.5705\text{-}0.7144\mathrm{i})}\,\frac{(0.5934z+0.0387)\cancel{z}}{(z-1)(z-0.5705+0.7144\mathrm{i})\,\cancel{(z-0.5705\text{-}0.7144\mathrm{i})}\,(z+0.7077)(z+0.0654)}\,z^{k\cancel{-1}}\Bigg|_{z=0.5705+0.7144j}+$$

$$\cancel{(z+0.7077)}\,\frac{(0.5934z+0.0387)\cancel{z}}{(z-1)(z-0.5705+0.7144\mathrm{i})(z-0.5705\text{-}0.7144\mathrm{i})\,\cancel{(z+0.7077)}\,(z+0.0654)}\,z^{k\cancel{-1}}\Bigg|_{z=-0.7077}+$$

$$\cancel{(z+0.0654)}\,\frac{(0.5934z+0.0387)\cancel{z}}{z-1)(z-0.5705+0.7144\mathrm{i})(z-0.5705\text{-}0.7144\mathrm{i})(z+0.7077)\,\cancel{(z+0.0654)}}\,z^{k\cancel{-1}}\Bigg|_{z=-0.0654}$$

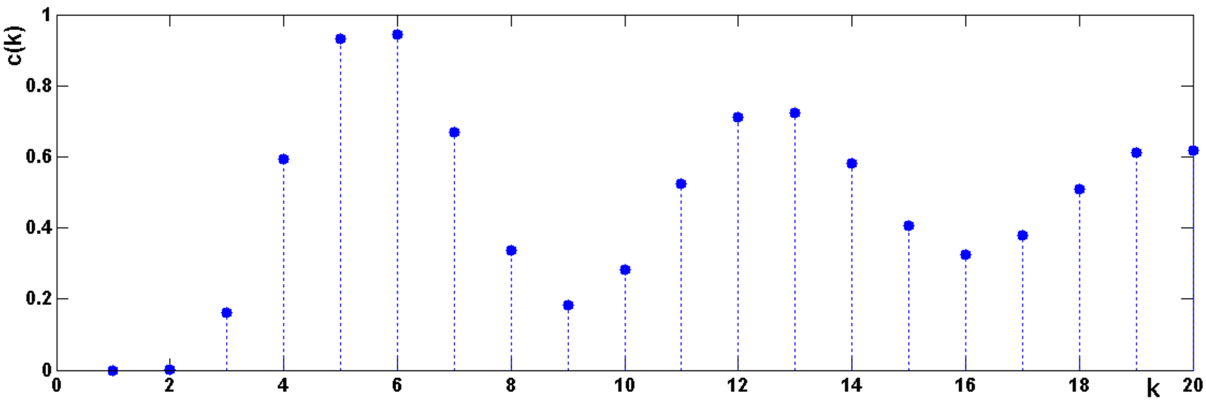
$$c(k)=0.5*1^k+(-0.1690\text{-}0.2952\mathrm{i})*(0.5705\text{-}0.7144\mathrm{i})^k+(-0.1690+0.2952\mathrm{i})*(0.5705+0.7144\mathrm{i})^k+$$
$$(-0.1621)*(\text{-}0.7077)^k-0.00017311*(\text{-}0.0654)^k$$

$$c(k)=(-0.1690\text{-}0.2952\mathrm{i})*(0.5705\text{-}0.7144\mathrm{i})^k+(-0.1690+0.2952\mathrm{i})*(0.5705+0.7144\mathrm{i})^k+$$
$$0.5*1^k+0.1621*(\text{-}0.7077)^k+0.00017311*(\text{-}0.0654)^k$$

$$c(k)=0.3402e^{-2.0907i}\,0.9142^k\,e^{-0.8969ik}+0.3402e^{2.0907i}\,0.9142^k\,e^{0.8969ik}+$$
$$0.5*1^k-0.1621*(\text{-}0.7077)^k+0.00017311*(\text{-}0.0654)^k$$

$$c(k)=2*0.3402*0.9142^k\left(\frac{e^{-2.0907i}e^{-0.8969ik}+e^{2.0907i}e^{0.8969ik}}{2}\right)+0.5*1^k-0.1621*(\text{-}0.7077)^k+0.00017311*(\text{-}0.0654)^k$$

$$c(k)=0.6804*0.9142^k*\cos(2.0907+0.8969*k)+0.5*1^k-0.1621*(\text{-}0.7077)^k+0.00017311*(\text{-}0.0654)^k$$



c) Son değer teoreminin uygulanması;

$$c(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)C(z)$$

$$=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{(-0.1052z+0.7321)z}{((z^4-0.3679z^3+z-0.3679-1.105z+1.105)(z-1))}$$

$$c(\infty)=\frac{0.6271}{1-0.3679-0.105+0.7321}=0.5$$

veya

$$c(\infty)=\lim_{k\to\infty}c(k)=\lim_{k\to\infty}(0.6804*0.9142^k*\cos(2.0907+0.8969*k)+0.5*1^k-0.1621*(-0.7077)^k+0.00017311*(-0.0654)^k)$$

$$c(\infty)=\lim_{k\to\infty}c(k)=0.6804*\underbrace{0.9142^{\infty}}_{0}*\cos(2.0907+0.8969*\infty)+0.5*1^{\infty}-0.1621*\underbrace{(-0.7077)^{\infty}}_{0}+0.00017311*\underbrace{(-0.0654)^{\infty}}_{0}$$

$$c(\infty)=\lim_{k\to\infty}c(k)=0.5$$

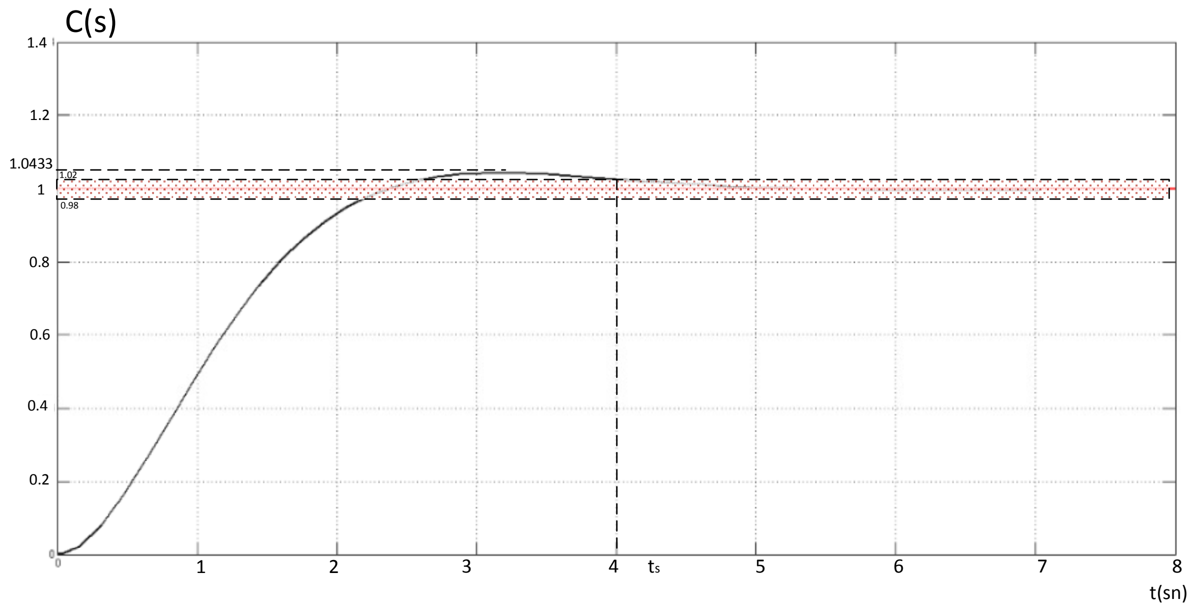
C-3)

$\xi=0.707 \quad w_n=1.4144$

a) $M_p=e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\Pi}=0.0433 \Rightarrow \%4.33 aşım$

$\%2 \text{ kriterine göre } t_s=\dfrac{4}{\xi w_n}=4 \text{ sn}$

- Verilen kriterlere göre birim basamak cevabı aşağıdaki gibi olacaktır.

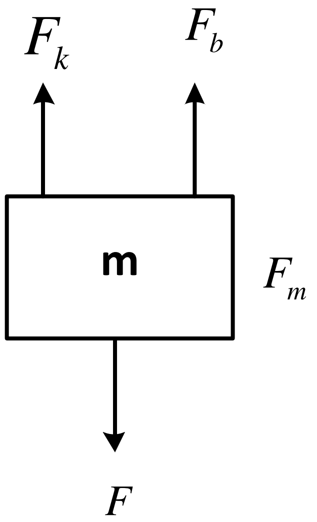


b)2. dereceden örnek sistem $G(s)=\dfrac{w_n^{\,2}}{s^2+2\xi w_n+w_n^{\,2}}=\dfrac{2}{s^2+2s+2}$

c)birim basamak için $e_{ss} = \dfrac{1}{1+K_p} \Rightarrow \begin{array}{l} K_p = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{w_n^{\ 2}}{s(s+2\xi w_n)} \\ K_p = \infty \end{array} \Rightarrow e_{ss} = 0$

birim rampa için $e_{ss} = \dfrac{1}{K_v} \Rightarrow \begin{array}{l} K_v = \lim\limits_{s\to 0} s\dfrac{w_n^{\ 2}}{s(s+2\xi w_n)} \\ K_v = \dfrac{w_n}{2\xi} \end{array} \Rightarrow e_{ss} = \dfrac{2\xi}{w_n} = 1$

4) Serbest cisim gösterim :



$$F_k = Yay\ kuvveti$$
$$F_b = Sönümleyici\ kuvveti$$
$$F = Uygulanan\ giriş\ kuvveti$$
$$F_m = Siste mi n\ et\ hareket\ ettiren\ kuvvet$$

a)

$$F = F_m + F_b + F_k$$

$F(t) = M\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + B\dfrac{dx(t)}{dt} + Kx(t)$ yazılır ve sistemi tanımlayan diferansiyel denklemler elde edilir.

b)

$x(t) = x_1(t) \quad olsun,$

$\dfrac{dx(t)}{dt} = x_2(t) \quad olsun. \qquad Burdan \qquad \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) olur$

$\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = \dfrac{dx_2(t)}{dt} \qquad yazılır\ ve \quad tan ımlanmış\ olan\ değişkenler\ F'\ de \quad yerine\ koyulur$

$$F = M\frac{dx_2(t)}{dt} + Bx_2(t) + Kx_1(t) \Rightarrow$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{1}{M}F(t) - \frac{B}{M}x_2(t) - \frac{K}{M}x_1(t)$$

Sönüm katsayısı B yerine koyulur ise,

$$B = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow B\frac{\alpha}{x_1(t)} olur.$$

B ifadesi $\frac{dx_c(t)}{dt}$ durum denkleminde yerine koyulur.

$$\underbrace{\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{F(t)}{M} - \frac{\alpha}{Mx_1(t)}x_2(t) - \frac{K}{M}x_1(t)}_{2.DURUM\ DENKLEMİ}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{\alpha x_2(t)}{Mx_1(t) - \frac{K}{M}x_1(k)} \end{bmatrix}}_{f()} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}}_{g(s)} F(t)$$

c) Verilen sistem için 1 adet giriş $r_1 = F(t)$ vardır.

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad B^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial F} \\ \frac{\partial f_1}{\partial F} \end{bmatrix}$$

$$f_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$f_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{1}{M}F(t) - \frac{B}{M}x_2(t) - \frac{K}{M}x_1(k)$$

olmak üzere

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\alpha x_{20}}{x_{10}^{\ 2}} - \frac{k}{m} & -\frac{\alpha}{mx_{10}} \end{bmatrix} \qquad B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta x_1(t)}{\Delta t} \\ \frac{\Delta x_2(t)}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\alpha x_{20}}{x_{10}^{\ 2}} - \frac{k}{m} & -\frac{\alpha}{mx_{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \Delta F(t)$$