

## Hafta 1: İşaretler ve Sistemler

1

### Ele Alınacak Ana Konular

- Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretler
- Bağımsız değişkenin dönüştürülmesi
- Üstel ve sinüzoidal işaretler
- İmpuls ve birim basamak fonksiyonları
- Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler
- Sistemlerin temel özellikleri

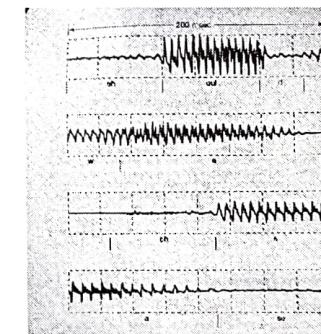
2

### Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretler

- İşaretler bir olayın davranışı veya doğası hakkında bilgi içermektedir.
- İşaretler, matematiksel olarak bir veya daha fazla bağımsız değişkenin fonksiyonu biçiminde temsil edilir.
- Örneğin, ses işaretinin zamanın fonksiyonu olarak akustik basıncı belirtilir. Benzer şekilde, bir görüntü iki konum değişkeninin fonksiyonu olarak parlaklıklar tanımlanır.
- Bu derste, aksi belirtildiği sürece bir bağımsız değişkenli işaretleri inceleyeceğiz ve bağımsız değişkene ZAMAN diyeceğiz. Ancak, tüm fiziksel olaylarda bağımsız değişkenin zaman olmadığı hatırda tutulmalıdır. Örneğin, meteorolojik araştırmalarda yükseliğe bağlı olarak hava basıncı, sıcaklık ve rüzgar hızının değişimi hakkında bilgi önemlidir. Bu durumda bağımsız değişken yükseklikdir. İncelenen işaretler ise hava basıncı, sıcaklık ve rüzgar hızıdır.

3

### Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretler



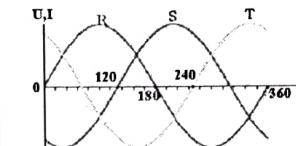
Bir ses kaydı. İşaret, "should we chase" kelimelerini, zamana bağlı olarak akustik basıncı değişimleri şeklinde temsil etmektedir. Üst satır "should", ikinci satır "we" ve son iki satır "chase" kelimelerine karşılık gelmektedir.

4

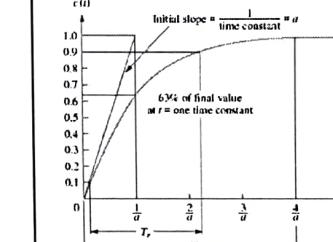
### Sürekli-zaman ve ayrik-zaman işaretleri

- Bu derste, sürekli-zaman ve ayrık-zaman şeklinde sınıflandırılan temel iki tür işaretin incleyeceğiz. Sürekli-zaman işaret durumunda, bağımsız değişken sürekli olur ve dolayısıyla işaret **bağımsız değişkenin tüm değerleri** için tanımlıdır. Diğer yandan, ayrık-zaman işaretler sadece **belirli zamanlarda** tanımlıdır ve bağımsız değişken ayrık değerler alır.
  - Zamanın fonksiyonu olarak ses işareti ve yüksekliğin fonksiyonu olarak atmosferik basınç sürekli-zaman işaretlere örnektir. İstanbul Menkul Kıymetler Borsası (IMKB) haftalık endeksi ve dünyadaki ülkeler göre toplam nüfus ayrık zaman işaretlere örnektir.
  - Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretlerini birbiriley karıştırmamak amacıyla sürekli ve ayrık durumlarda bağımsız değişken için sırasıyla  $t$  ve  $n$ ; işaretler içi de  $x(t)$  ve  $x[n]$  notasyonlarını kullanacağız.

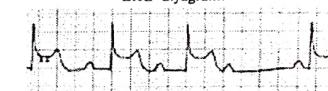
Sürekli-zaman işaretle



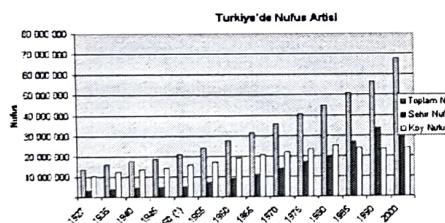
1.dereceden sistemin açık çevrim cevabı



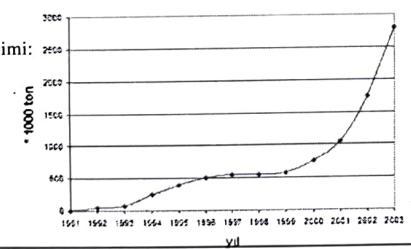
EKG diagram



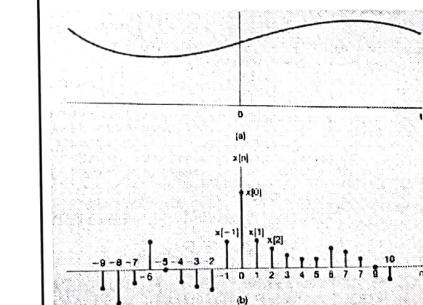
#### Aynı-zaman işaretleri



Yıllık buğday üretimi: 250



### Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretleri



(a) Sürekli-zaman ve (b) ayrık-zaman işaretlerinin grafik gösterilimi.

2.5 kişiden oluşan bir aile için ortalama kazançtan söz etmenin anlamsız olması gibi bir ayrık-zaman işaretinin 3.5. örneği hakkında söz etmek de anlamlı değildir. Bu yüzden, kaynağı ne olursa olsun, ayrık-zaman işaretlerinin *n*'nin tamsayı değerleri için tanımlı olduğuuna dikkat ediniz.

## Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretler

### Enerji - Güç

- İşaretler çeşitli fiziksel olayları temsil edebilir. Çoğu uygulamada, ilgilenilen işaret bir fiziksel sistemdeki güç ve enerjiyi belirten fiziksel büyüklüklerle doğrudan ilişkilidir.
- Bir sürekli-zaman işareti  $x(t)$ 'de  $t_1 \leq t \leq t_2$  aralığında ve bir ayrık-zaman işareti  $x[n]$ 'de  $n_1 \leq n \leq n_2$  aralığındaki TOPLAM ENERJİ, işin sayının genliğini göstermek üzere

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt, \quad \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

ilişkilerinden hesaplanır. ORTALAMA GÜÇ, sonuçlar ilgili aralıkların boyuna bölünerek (sürekli durumda  $t_2 - t_1$ ; ayrık durumda  $n_2 - n_1 + 1$ ) elde edilir.

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt, \quad \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

9

## Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretler

### Enerji - Güç

- Sınırlı bir aralık  $((t_2-t_1)(n_2-n_1))$  için yukarıda verilen ilişkileri sonsuz aralık durumuna genelleştirmek mümkündür. Aralığın sonsuza gittiği limit durumunda aşağıda verilen tanımlar elde edilir:

$$E_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad E_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

$$P_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad P_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

10

## Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretler

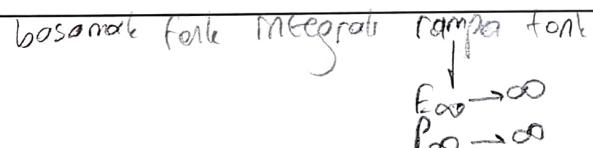
### Enerji - Güç

- Enerji ve güç içeriğine göre işaretler üç sınıfa ayrılabilir.
- Sonlu enerjiye sahip ( $E_\infty < \infty$ ) işaretlere ENERJİ İŞARETİ denir. Enerji işaretlerinin gücü sıfır olmalıdır. Bir örnek vermek gerekirse,  $[0,1]$  aralığında 1, diğer zamanlarda sıfır eşit olan bir sürekli-zaman işaretinin enerji işaretini olduğunu göstermek zor değildir.
- Sonlu güç sahip işaretlere ( $P_\infty < \infty$ ) GÜÇ İŞARETİ denir. Güç işaretlerinin enerjisi sonsuz olmalıdır. Örneğin; değeri 4 olan sabit bir ayrık-zaman işareti (tüm  $n$  değerleri için  $x[n]=4$ ) güç işaretidir.
- Diğer bir grup işaretler için ne enerji ne de güç sonlu bir değere sahiptir. Örneğin;  $x(t) = t$  şeklindeki bir işaret bu grubu girmektedir.

$$N=1 \quad E = 3 \times 16 = 48 \quad (-1, 0, +1) \quad P = 48 / 2N+1 = 16$$

$$N=2 \quad E = 80 \quad P = 16$$

11

bosankak forte integratı ramper tonk  
  
 $E_\infty \rightarrow \infty$   
 $P_\infty \rightarrow \infty$

## Bağımsız değişkenin dönüşümü

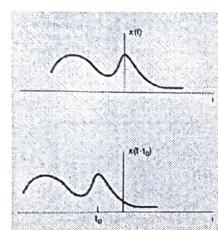
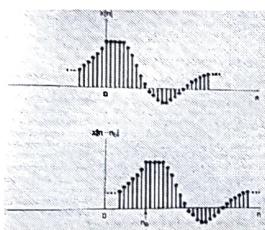
- İşaret ve sistem analizindeki önemli bir kavram bir işaretin dönüştürülmesidir.
- Örneğin, bir uçak kontrol sisteminde pilotun eylemlerine karşılık işaretler elektriksel ve mekanik sistemler aracılığıyla uçağın hız veya konumundaki değişikliklere dönüştürülür.
- Diğer bir örnek olarak, bir ses sisteminde kaset veya CD'ye kaydedilmiş müziği temsil eden bir giriş işaretini istenilen karakteristikleri iyileştirme, kaydetme gürültüsünü gidermek amacıyla değiştirebilir.
- Aşağıda, bağımsız değişkene yapılan basit değişikliklerden oluşan dönüşümleri ele alacağız.
- Bu basit dönüşümler, işaretler ve sistemlerin temel özelliklerini tanımlamamamıza imkan verecektir.

$x(t - t_0)$  sağ  
 $x(t + t_0)$  sola

12

### Bağımsız değişkenin dönüşümü

- ZAMANDA ÖTELEME:**  $x(t)$  işaretinin zaman domeninde  $t_0$  kadar ötenmesi ile elde edilen işaret  $x(t-t_0)$  şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde  $n_0$  kadar ötenmiş ayrık zaman  $x[n]$  işaretide  $x[n-n_0]$  şeklinde ifade edilir. Orijinal  $\{x(t)\}$  veya  $\{x[n]\}$  ve ötenmiş işaretlerin  $\{x(t-t_0)\}$  veya  $\{x[n-n_0]\}$  şekli aynıdır ancak işaretler bağımsız değişken domeninde birbirlerine göre kaymıştır.

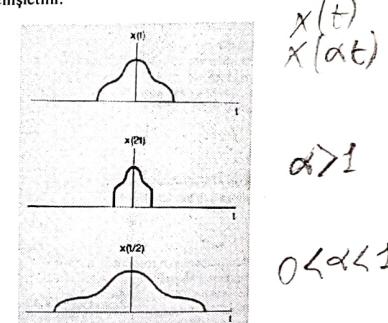


- Öteleme işlemi ile radar, sonar ve sismik işaret işleme uygulamalarında karşılaşılır. Bu uygulamalarda, farklı konumlardaki alıcılar bir ortamdan iletelenen bir işaretin alırlar. İşaretin alıcılara ulaşma süreleri arasındaki farktan ötürü alıcılardaki işaretler birbirine göre ötenmiş olmaktadır.

13

### Bağımsız değişkenin dönüşümü

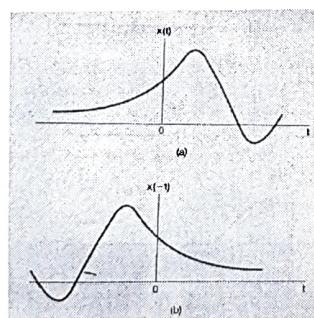
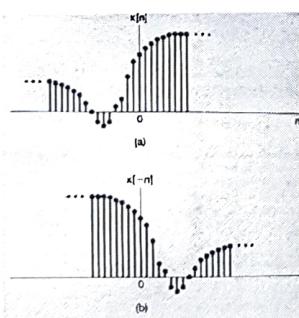
- Bağımsız değişkene yapılabilecek ikinci dönüşüm **ÖLÇEKLEME** dir ve sürekli zamanda  $x(\alpha t)$  ayrık zamanda ise  $x[\alpha n]$  biçiminde temsil edilir.  $\alpha$ 'ya ölçekleme katsayısi denir.  $\alpha > 1$  durumunda orijinal işaret  $\{x(t)\}$  veya  $\{x[n]\}$   $\alpha$  kadar daraltılarak ölçeklenmiş işaret elde edilir.  $\alpha < 1$  durumunda ise, orijinal işaret zaman domeninde  $\alpha$ 'nın tersi kadar genişletilir.



14

### Bağımsız değişkenin dönüşümü

- Bağımsız değişkene yapılabilecek üçüncü bir dönüşüm **ZAMANI TERSİNE ÇEVİRME** dir ve sürekli zamanda  $x(-t)$  (ayırık zamanda  $x[-n]$ ) şeklinde ifade edilir. Orijinal işaretin dikey eksen ( $t = 0$ ) etrafında  $180^\circ$  döndürülmesiyle zamanda tersine çevrilenmiş işaret elde edilir.



15

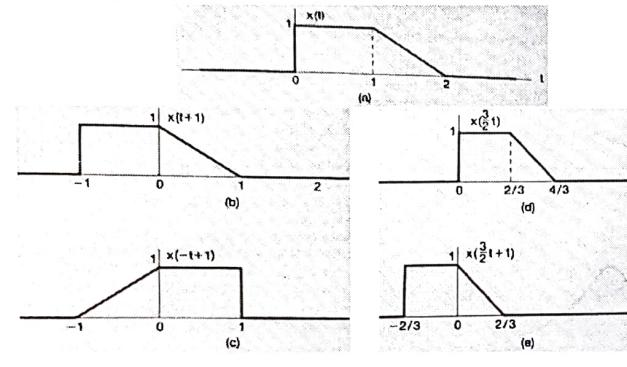
### Bağımsız değişkenin dönüşümü

- Şimdi orijinal işarete bu üç temel dönüşümün birlikte uygulanmasını ele alacağız. Genel dönüşüm  $x(\alpha t + \beta)$  şeklinde ifade edilebilir. Orijinal işaretten dönüştürülmüş işaretin bulmak için, işaret ilk önce  $\beta$  kadar ötenir, daha sonra ötenmiş işaret  $\alpha$  ile ölçeklenir.  $\alpha$ 'nın negatif olması durumunda ayrıca zaman tersine çevrilir.

16

### Bağımsız değişkenin dönüşümü

Aşağıda, bir sürekli-zaman işareti  $x(t)$  için,  $x(t+1)$ ,  $x(-t+1)$ ,  $x(3/2t)$  ve  $x(3/2t+1)$  işaretleri çizilmiştir.



17

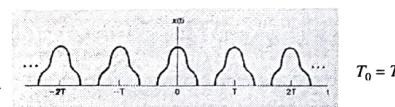
Örnek:

 $x(-2t+2)$  işaretini elde edelim..1-) işaret ilk önce  $\beta = -2$  kadar öteleñir2-) daha sonra  $a=2$  ile ölçeklenir3-) son olarak  $a < 0$  olduğundan işaret terslenirJT  
JL  
TEL

18

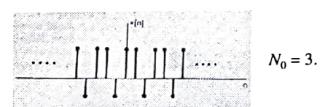
### Periyodik işaret

TANIM: Bir sürekli-zaman işareti  $t$ 'nin değerinden bağımsız olarak  $x(t) = x(t+T)$  eşitliğini pozitif bir  $T$  değeri için sağlıyorsa  $T$  periyodu ile periyodiktir. Eşitliğin geçerli olduğu en küçük  $T$  değerine temel periyod ( $T_0$ ) denir. Periyodik olmayan işaretlere aperiodik denir.



$T_0 = T$

TANIM: Bir ayrık-zaman işareti  $n$ 'nın değerinden bağımsız olarak  $x[n] = x[n+N]$  eşitliğini pozitif bir tam sayı  $N$  değeri için sağlıyorsa  $N$  periyodu ile periyodiktir. Eşitliğin geçerli olduğu en küçük  $N$  değerine temel periyod ( $N_0$ ) denir.



$N_0 = 3$

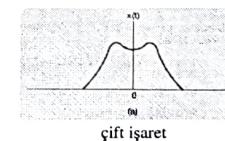
19

$q$  ve  $r$  1'ki tam sayı  
ise  $X_3(t)$  non  
temel periyodu  
 $T_3$  ve  $T_2$  nm ekok'u

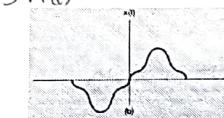
### Çift ve Tek işaretler

TANIM: Bir işaret zaman tersine çevrilmiş haline eşitse ( $x(t) = x(-t)$ ) ÇİFT; zaman tersine çevrilmiş halinin negatifine eşitse ( $x(t) = -x(-t)$ ) TEK işaretir.

SIN(E)



çift işaret



tek işaret

dösey sinem (cos(t))  
ekse / x etse  
 $x(t) = -x(-t)$   
genlik g-elesen.

TANIM: Bir işaret ile zaman tersine çevrilmiş halinin toplamının yarısına işaretin ÇİFT PARÇASI denir. Bener şekilde, işaret ile zaman tersine çevrilmiş halinin farkının yarısına işaretin TEK PARÇASI denir.

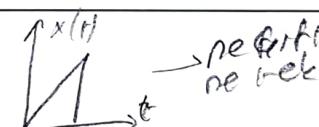
$E_v\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$

çift parçası

$O_d\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$

tek parçası

20

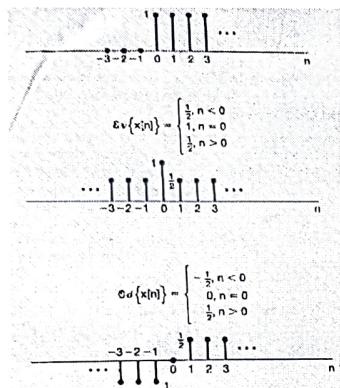


Impuls

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT) \Rightarrow$$

$$\int x(t) dt = \frac{1}{2}x^2(t) \rightarrow S(t)$$

Bir ayrık-zaman işaretini ile işaretin çift ve tek parçaları aşağıda verilmiştir.



2

#### Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

2-)  $C$  gerçel bir sayı (kolaylık olması açısından  $C=1$  olsun)  $a$  ise gerçel kısmı sıfır olan karmaşık bir sayı ( $a = jw_0t$ ), yani  $x(t) = e^{j\omega_0 t}$  olsun.

Bu durumda  $x(t)$  işaretinin periyodik olduğunu söyleyebiliriz!

- Periyodik tanımından,  $x(t)$ 'nin periyodik olması için  $e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t}$  eşitliğini sağlayan pozitif bir  $T$  değeri bulunabilir. Üstel sayıların özelliğinden

$$e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$$

olduğundan, periyodiklik için  $e^{j\omega_0 T} = 1$  olmalıdır.

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

bulunur. O halde,  $e^{j\omega_1 t}$  ve  $e^{-j\omega_1 t}$  işaretleri aynı temel periyoda sahiptir.

9

Brim Basenely  $X[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \rightarrow u[n]$

$Q u[n+1] \rightarrow$  

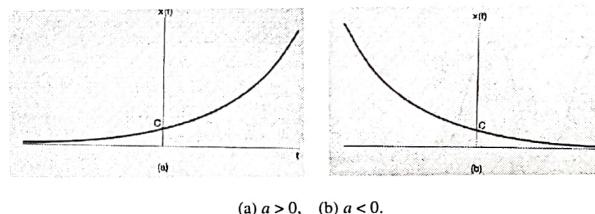
9/21/2016

$x(t) = \begin{cases} 2t, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \rightarrow v(t)$

Sürekli-zaman Üstel ve Sinüzoidal işaretler

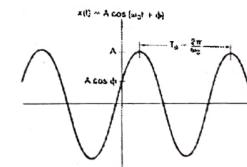
- Sürekli-zaman karmaşık üstel işaretin genel ifadesi,  $C$  ve  $a$  karmaşık sayılar olmak üzere  $x(t) = Ce^{at}$ , dir. Bu iki parametrenin değerine bağlı olarak karmaşık üstel işaret farklı davranış gösterir.

- 1-1**) Aşağıda gösterildiği gibi **C ve a gerçel** ise, iki durum vardır.  $a$  pozitif ise  $x(t)$  artan, aksi halde azalan işaretir. Ayrıca,  $a = 0$  olduğunda,  $x(t)$  sabit değer olacaktır.



## Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Periyodik karmaşık üstel işaretle yakından ilişkili bir işaret  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$  şeklinde tanımlanan sinüzoidal işaretettir.
  - $t$ 'nin birimi saniye ise,  $\phi$  ve  $\omega_0$ 'ın birimleri radyan ve saniye başına radyandır (rad/s).  $\omega_0 = 2\pi f_0$  yazılırsa  $f_0$ 'nın birimi, saniye başına değişim sayısı veya hertz (Hz)'dır.
  - Sinüzoidal işaret periyodik olup temel periyodu  $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$  şeklindekir.



$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

### Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Euler ilişkisi kullanılarak, karmaşık üstel ve sinüzoidal işaretler birbirini cinsinden yazılabilir. İlişkiler aşağıda verilmiştir:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$$

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 t}$$

- Eşdeğer olarak, sinüzoidal işaretler, karmaşık üstel işaretin gerçel ve sanal kısmı şeklinde ifade edilebilir:

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \operatorname{Re}[e^{j(\omega_0 t + \phi)}]$$

$$A \sin(\omega_0 t + \phi) = A \operatorname{Im}[e^{j(\omega_0 t + \phi)}]$$

- Üstel işaretler atomik patlamalardaki zincir reaksiyonları, karmaşık kimyasal işlemleri, radyoaktif bozunumu, RC devrelerinin ve sönmülü mekanik sistemlerin yanıtını modellemeye kullanılır. Benzer şekilde, sinüzoidal işaretler enerjinin korunduğu fizikal sistemlerde karşımıza çıkar. Örneğin, bir LC devresinin doğal yanısı ve bir müzik tonuna karşılık gelen akustik basınç değişimleri sinüzoidalıdır.

25

### Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Periyodik karmaşık üstel ve sinüzoidal işaretlerin **güt işaret** olduğu gösterilebilir.
- Periyodik karmaşık üstel işaretlerden çoğu diğer işaret üretilenbilir.
- Ortak bir periyod ile periyodik olan periyodik üstel işaretler kümesine HARMONİK İLİŞKİLİ KARMAŞIK ÜSTEL KÜMESİ denir.
- $e^{j\omega t}$  işaretinin  $T_0$  ile periyodik olabilmesi için  $\omega T_0 = 2\pi k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  olmalıdır.  $\omega_0 = 2\pi / T_0$  olarak tanımlanursa,  $\omega T_0 = 2\pi k$  koşulunun sağlanması için  $\omega$ ,  $\omega_0$ 'ın katı olmalıdır. O halde, harmonik ilişkili bir karmaşık üstel kümesi, pozitif bir  $\omega_0$  frekansının katlarına eşit temel frekansa sahip periyodik üstel işaretler kümesidir:

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- $k = 0$  için  $\phi_0(t)$  sabittir, herhangi bir diğer  $k$  değeri için  $\phi_k(t)$ ,  $k\omega_0$  temel frekansıyla veya

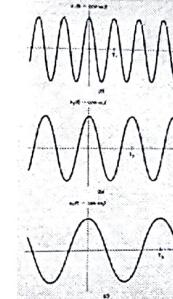
$$\frac{2\pi}{|k|\omega_0} = \frac{T_0}{|k|}$$

temel periyodu ile periyodiktir.  $\phi_k(t)$ 'ye  $k$ . HARMONİK denir.

27

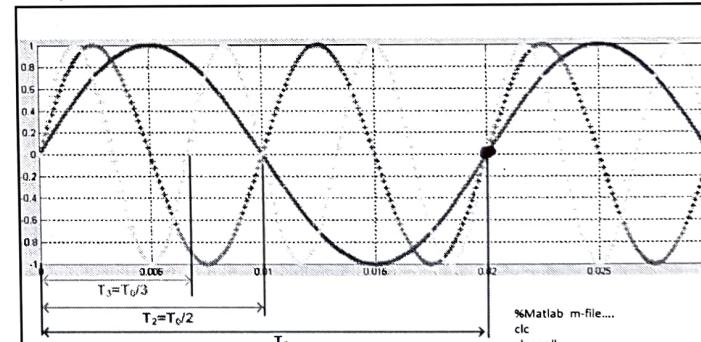
### Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Bir sürekli-zaman sinüzoidal veya periyodik karmaşık üstel işaretin temel periyodu  $T_0$ , TEMEL AÇISAL FREKANS olarak adlandırılan  $\omega_0$  ile ters orantılıdır.



- $\omega_0 = 0$  ise,  $x(t)$  sabit olup herhangi bir pozitif  $T$  için periyodiktir. O halde, sabit bir işaretin temel periyodu tanımsızdır. Ancak, sabit bir işaretin temel periyodunu sıfır kabul edebiliriz (sabit bir işaretin değişim hızı sıfırdır).

28



```
%Matlab m-file...
clc
clear all
t = 0:0.0001:0.03;
w0 = 2*pi*50; %stemel bileşen
x0 = sin(w0*t);
w2 = 2*w0; %2.harmonik
x2 = sin(w2*t);
w3 = 3*w0; %3.harmonik
x3 = sin(w3*t);
plot(t,x0,'b*',t,x2,'r*',t,x3,'g*')
grid on
```

$T$   
 $Th$   
 $T/3$

$T \rightarrow$  hanesiz işaret

### Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

3-) Sürekli-zaman karmaşık üstel işaretin genel ifadesi,  $C$  ve  $\alpha$  karmaşık sayılar olmak üzere  $Ce^{\alpha t}$  ile verildiğini hatırlayın.  $C$ , kutupsal koordinatlarda  $C = |C|e^{j\theta}$ ,  $\alpha$  ise kartezyen koordinatlarda  $\alpha = r + j\omega_0$  şeklinde ifade edilsin.

- $C$  ve  $\alpha$  yerine konulup Euler ilişkisi konulursa karmaşık üstel işaret

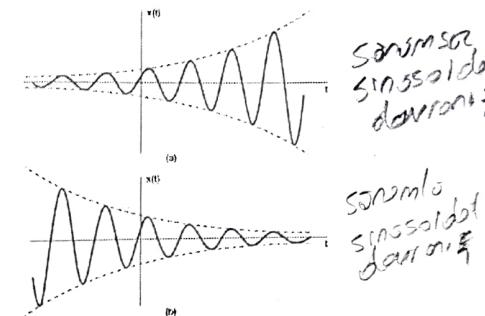
$$\begin{aligned} Ce^{\alpha t} &= |C|e^{j\theta} e^{(r+j\omega_0)t} = |C|e^r e^{j(\omega_0 t + \theta)} \\ &= |C|e^r \cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^r \sin(\omega_0 t + \theta) \end{aligned}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Bu ilişkiden aşağıdaki gözlemler yapılabilir.

- Karmaşık üstel işaretin genliği  $|Ce^{\alpha t}|$  dir.
- $r = 0$  ise, karmaşık üstelin gerçel ve sanal kısımları sinüzoidalıdır.
- $r > 0$  ise, gerçel ve sanal kısımlar artan üstel işaret,  $r < 0$  ise azalan üstel işaret çarpılır. Azalan üstel işaret ile çarpılan sinüzoidal işaretlere SÖNÜMLÜ sinüzoidal denir. Sönümlü sinüzoidal işaretlerle RLC devrelerinde ve mekanik sistemlerde karşılaşılır. Bu tür sistemler, zamanla azalan salınımlı enerji üretir.

29

### Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler



(a) Artan sinüzoidal işaret  $x(t) = Ce^r \cos(\omega_0 t + \theta)$ ,  $r > 0$ .  
(b) Azalan sinüzoidal işaret  $x(t) = Ce^r \cos(\omega_0 t + \theta)$ ,  $r < 0$ .

Şekillerde kesikli eğriler  $|Ce^{\alpha t}|$  fonksiyonlarına karşılık gelmektedir.

30

### Ayrık-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Ayrık-zaman karmaşık üstel işaretin genel ifadesi,  $C$  ve  $\alpha$  karmaşık sayılar olmak üzere  $x[n] = Ca^n$  dir.  $\alpha = e^{\theta}$  olmak üzere, üstel işaret  $x[n] = Ce^{\theta n}$  şeklinde de yazılabilir.  $C$  ve  $\alpha$ 'nın aldığı değerlere göre işaretin şekli değişir.

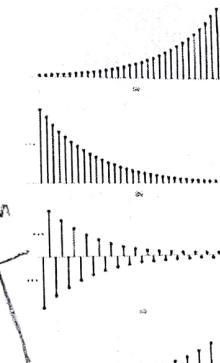
- $C$  ve  $\alpha$  gerçel ise, aşağıdaki durumlar mümkündür:

$|\alpha| > 1$  ise, işaretin genliği  $n$  arttıkça üstel olarak artar.  
 $|\alpha| < 1$  ise, işaretin genliği  $n$  arttıkça üstel olarak azalır.  
 $\alpha$  pozitif ise, işaretin tüm değerleri aynı işaret (hepsi pozitif veya negatif) sahiptir.  
 $\alpha$  negatif ise,  $x[n]$ 'nin işaretin örnekten örneğe değişir.  
 $\alpha = 1$  ise,  $x[n]$  sabittir ( $x[n] = C$ ).  
 $\alpha = -1$  ise,  $x[n]$  dönüştümlü olarak  $C$  ve  $-C$  değerlerini alır.

- Ayrık-zaman gerçel üstel işaret doğum oranına bağlı olarak nüfus artışı ve zamana (gün, ay, yıl vb) bağlı olarak yatırım sonucunda elde edilen kar gibi olayları modellemede kullanılır.

31

### Ayrık-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler



Ayrık-zaman gerçel üstel işaret  $x[n] = Ca^n$   
(a)  $\alpha > 1$ .  
(b)  $0 < \alpha < 1$ .  
(c)  $-1 < \alpha < 0$ .  
(d)  $\alpha < -1$

32

C / SİA

### Ayırık-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Sürekli durumda olduğu gibi, karmaşık üstel işaretle yakından ilişkili bir işaret  $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$  şeklinde tanımlanan sinüzoidal işaretdir.
- $n$  boyutsuz ise,  $\phi$  ve  $\omega_0$ 'ın birimleri radyandır.
- Euler ilişkisi kullanılarak ayırık-zaman karmaşık üstel ve sinüzoidal işaretler birbirleri cinsinden yazılabilir:

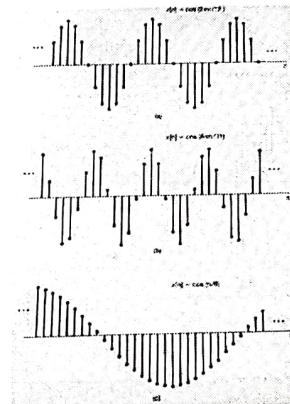
$$e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j \sin(\omega_0 n)$$

$$A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}$$

- Ayırık-zaman karmaşık üstel ve sinüzoidal işaretlerin, sürekli durumda olduğu gibi güç işaretleri olduğunu göstermek zor değildir.

33

### Ayırık-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler



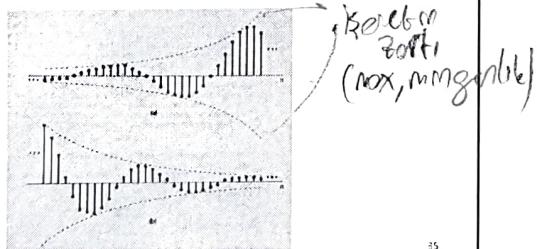
34

### Ayırık-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- $C$  ve  $\alpha$  için kutupsal koordinatlarda  $C = |C|e^{j\theta}$ ,  $\alpha = |\alpha|e^{j\theta}$  yazılıp  $C\alpha^n$  ifadesinde yerine konulursa ayırık-zaman karmaşık üstel işaret aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$C\alpha^n = |C|\alpha^n \cos(\omega_0 n + \theta) + j|C|\alpha^n \sin(\omega_0 n + \theta)$$

- $|\alpha| = 1$  ise, karmaşık üstel işaretin gerçek ve sanal kısımları sinüzoidalıdır.  $|\alpha| < 1$  ise, sinüzoidal işaretler azalan bir üstel işaretle, aksi halde ise artan bir üstel işaretle çarpılmaktadır.



35

$$|C| e^{j\theta} |\alpha|^n e^{j\omega_0 n}$$

$$|C| |\alpha|^n / e^{j(\omega_0 n + \theta)}$$

### Ayırık-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Sürekli-zaman ve ayırık-zaman işaretler arasında önemli farklar vardır. Birinci fark olarak, aşağıda gösterildiği gibi  $e^{j\omega_0 n}$ ,  $2\pi$  ile periyodiktir:

$$e^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = e^{j2\pi n} e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n} \cos(2\pi n)$$

- Sürekli durumda  $\omega_0$ 'nın farklı değerleri için  $e^{j\omega_0 t}$  farklı işaretler olmasına karşın, ayırık-durumda  $e^{j\omega_0 n}$  işaretinde  $\omega_0$  yerine  $\omega_0 + 2\pi, \omega_0 + 4\pi, \omega_0 + 6\pi, \dots$  yazıldığında aynı sonuç elde edilmektedir. Bu yüzden, ayırık-zaman karmaşık üstel işaretleri  $2\pi$  uzunluğundaki bir frekans aralığında incelemek yeterlidir. Genelde  $0 \leq \omega_0 < 2\pi$  veya  $-\pi \leq \omega_0 < \pi$  seçilir.

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j(\omega_0 + 2\pi)t} = e^{j\omega_0 t} e^{j2\pi t}$$

$$\downarrow$$

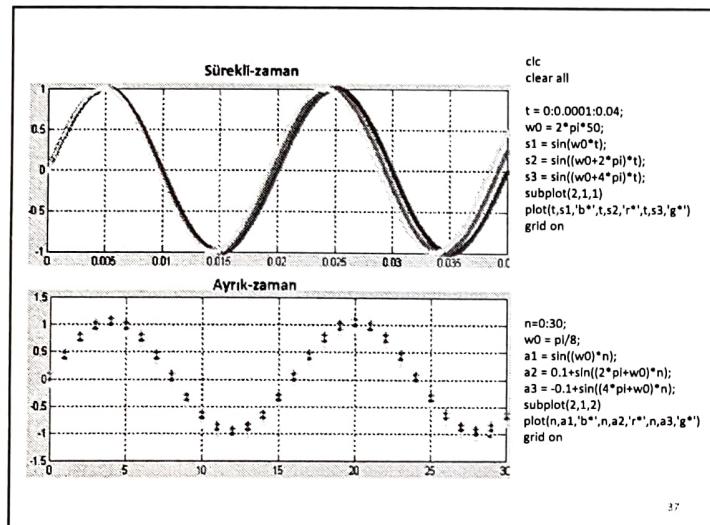
$$\cos(2\pi t) + j \sin(2\pi t)$$

$$e^{j\omega_0 t}, \omega_1 \neq \omega_2 \Rightarrow x_1(t) = e^{j\omega_1 t} \neq x_2(t) = e^{j\omega_2 t}$$

If  $\omega_1 \neq \omega_2$   $x_1[n] = x_2[n]$  eger  $\omega_2 = \omega_1 + 2\pi k$   
 $k=0, 1, 2, \dots$

$$\cos(\omega_0 n + \phi) + j \sin(\omega_0 n + \phi)$$

9

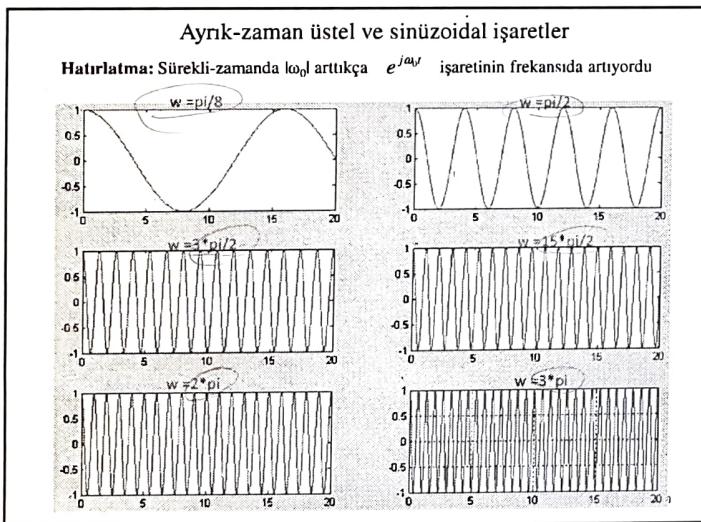


37

### Ayrık-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Sürekli-zamanda  $\omega_0$  arttıkça  $e^{j\omega_0 t}$  işaretinin temel frekansı artıyordu. Ayrık-zamanda bu durum geçerli değildir.  $\omega_0$ ,  $0$ 'dan  $\pi$ 'ye doğru artarken  $e^{j\omega_0 n}$  işaretinin birim zamandaki salınım sayısı (frekans değeri) artarken  $\omega_0 \pi$ 'den  $2\pi$ 'ye doğru artarken salınım sayısı azalır. O halde, ayrık-zaman karmaşık üstel işaret,  $\omega_0$ 'in  $0$  veya  $\pi$ 'nin çift katlarına yakın değerleri için düşük frekanslı,  $\pi$ 'nin tek katlarına yakın değerleri içins yüksek frekanslıdır.

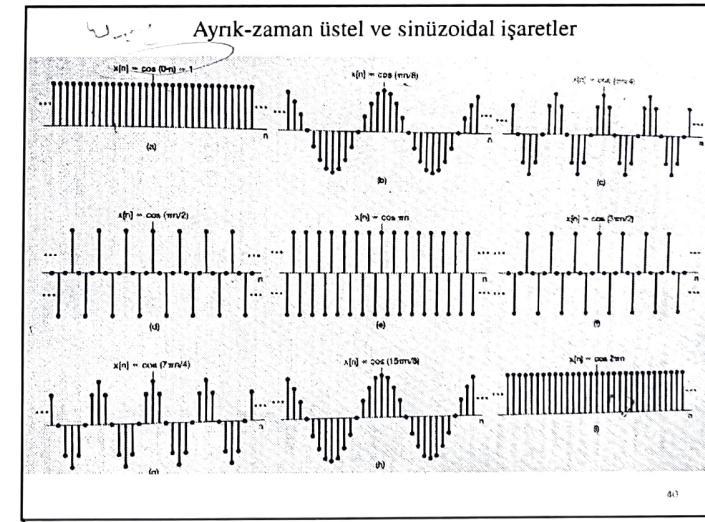
38



$$j\omega_0(t+\tau)$$

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\omega_0 \tau}$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}$$



$$e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n} \cdot e^{j\omega_0 N}$$

$$N = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

### Ayrık-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- $e^{j\omega_0 n}$  işaretinin periyodik olması için  $e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}$  veya  $e^{j\omega_0 N} = 1$  eşitliğini sağlayan pozitif bir tam sayı  $N$  değeri bulunabilirmiydi. Karmaşık üstel işaretin 1 değerini alması için  $i\omega_0$ 'nın katı olmalıdır. O halde,  $m$  bir tam sayı olmak üzere periyodiklik şartı olarak  $\omega_0/2\pi$ 'nın rasyonel bir sayı olması gerektiğini belirtir.

$$\omega_0 N = 2\pi m \Rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

yazılabilir (ikinci fark: sürekli işaret  $\omega_0$ 'ın herhangi bir değeri için periyodikt!). Bu koşul, ayrık-zaman sinüzoidal işaretler için de geçerlidir.

- Ayrık-zaman karmaşık üstel işaretin temel periyodu  $N$  ise, temel frekansı  $2\pi/N$ 'dir. O halde,  $e^{j\omega_0 n}$  işaretinin temel frekansı

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{\omega_0}{m}$$

olacaktır.

41

### Ayrık-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

#### Sinüs

#### Ayrık

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
$\omega_0$ 'ın farklı değerler için farklı işaretler	$2\pi$ ile periyodik
$\omega_0$ 'ın herhangi bir değeri için periyodik	$N > 0$ ve $m$ tam sayıları için $\omega_0 = 2\pi m/N$ ise periyodik
Temel frekans: $\omega_0$	Temel frekans: $\omega_0/m$
Temel periyod: $\omega_0=0$ ise tanımsızdır $\omega_0 \neq 0$ ise $2\pi/\omega_0$	Temel periyod: $\omega_0=0$ ise tanımsızdır $\omega_0 \neq 0$ ise $m(2\pi/\omega_0)$

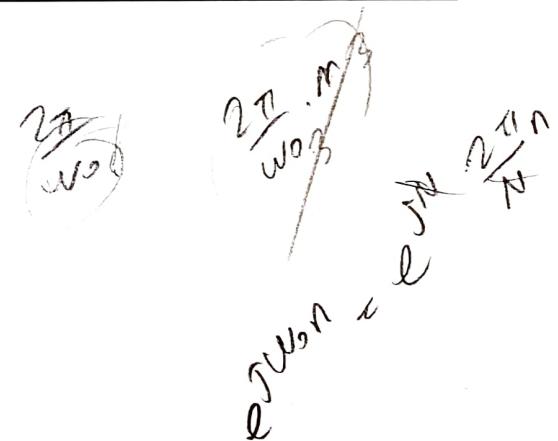
- Son olarak, harmonik ilişkili bir ayrık-zaman karmaşık üstel kümesi, ortak bir periyod  $N$ 'ye sahip periyodik üstel işaretler kümesidir:

$$\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- Sürekli durumdan farklı olarak, periyodiklikten ötürü kümede  $N$  adet işaret olduğuna dikkat ediniz (sürekli durumda kümede sonsuz işaret vardır!).

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

42



Hafta 2  
İşaretler ve Sistemler

1

$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$

Ele Alınacak Ana Konular

- Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretler
- Bağımsız değişkenin dönüştürülmesi
- Üstel ve sinüzoidal işaretler
- İmpuls ve birim basamak fonksiyonları
- Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler
- Sistemlerin temel özellikleri

2

$\delta[0] = 1 \quad n=2$

$x[n] = \delta[n-2] = 1$

Ayrık-zaman impuls ve birim basamak dizileri

TANIM: Ayrık-zaman IMPULS dizisi  $\delta[n]$  aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n=0 \end{cases}$$

Dizinin grafik gösterilimi:

TANIM: Ayrık-zaman BİRİM BASAMAK dizisi  $u[n]$  aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases} \quad n \leq -1$$

Dizinin grafik gösterilimi:

3

Ayrık-zaman impuls ve birim basamak dizileri

• Ayrık-zaman impuls ve birim basamak dizileri arasında aşağıdaki ilişkiler vardır:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

(1. gösterilim)

$$u[n] = \sum_{m=0}^n \delta[m] \quad (2. gösterilim)$$

$\hookrightarrow$  Bağımsız değişken  $n$

• Toplama işlemlerinin pozitif ve negatif  $n$  değerleri için hesaplanması aşağıda gösterilmiştir:

1. gösterilim, a)  $n < 0$ , b)  $n > 0$ .

2. gösterilim, a)  $n < 0$ , b)  $n > 0$ .

4

$$X[n] = A u[n] \quad \text{sifirdan to } a, \text{ geriye } A$$

$$X[n] = A \quad \text{so da } +\infty \text{ da, geriye } A$$



### Ayrık-zaman impuls ve birim basamak dizileri

- Ayrık-zaman impuls dizisi, bir işaretin  $n = 0$  anındaki değerini örneklemede kullanılabilir:
- $x[n] \delta[n] = x[0] \delta[n]$

- Daha genel ifadeyle,  $n = n_0$  anındaki bir impuls işaretin  $n_0$  anındaki değerini örneklemede kullanılabilir:

$$\boxed{x[n] \delta[n - n_0] = x[n_0] \delta[n - n_0]}$$

- İmpuls dizisinin örnekleme özelliği, doğrusal ve zamanla değişmeyen sistemlerin analizi ile sürekli-zaman işaretlerin aynılaştırıldığı örnekleme konularında sıkça kullanılacaktır.

5

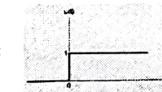
### Delta-Derde, Dirac fonk.

#### Sürekli-zaman birim basamak ve impuls fonksiyonları

TANIM: Sürekli-zaman birim basamak fonksiyonu  $u(t)$  aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad t = 0 \Rightarrow 0,5$$

Fonksiyonun grafik gösterilimi:



TANIM: Sürekli-zaman impuls fonksiyonu  $\delta(t)$  aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\text{Ağrıleton} \rightarrow \delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

Not:  $u(t)$ ,  $t = 0$  anında sürekli olmayıp türevi hesaplanamayacağından  $\delta(t)$ 'nın tanımı aslında geçerli değildir. Ancak, limit durumda birim basamak fonksiyonuna eşit olan yumuşak geçişli işaretler kullanırsa tanım geçerli olacaktır.

6

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{d u_{\Delta}(t)}{dt} \quad (2)$$

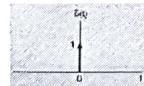
### Sürekli-zaman impuls ve birim basamak fonksiyonları

- Aşağıda,  $\Delta \rightarrow 0$  limit durumunda  $u(t)$ 'ye eşit olan, türevi tüm noktalarda hesaplanabilir bir fonksiyon  $u_{\Delta}(t)$  ve fonksiyonun türevi  $\delta_{\Delta}(t)$  verilmiştir.



- $\delta_{\Delta}(t)$ ,  $\Delta$ 'nın değerinden bağımsız olarak altındaki alan 1 olan kısa süreli bir darbedir.  $\Delta \rightarrow 0$  yaklaştıkça  $\delta_{\Delta}(t)$  daralsı dikkat edilecek ancak altında kalan alan hep 1 olacaktır.  $\Delta \rightarrow 0$  limit durumunda darbein süresi sıfır, yüksekliği sonsuz olacaktır. Bu durum grafiksel olarak şöyle gösterilir:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{du_{\Delta}(t)}{dt}$$



Zorun eksemdede  
yer kaplıyor

1. genligi itade ediyor.  
Oraya da 2. birimlik dloni temensit  
ediyor.

$$\delta(t)|_{t=0} = 1$$

### Sürekli-zaman impuls ve birim basamak fonksiyonları

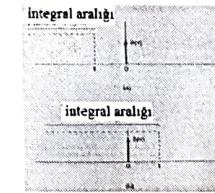
- Genel olarak, altındaki alan  $k$  olan ölçülenmiş impuls fonksiyonu  $k\delta(t)$  ile gösterilir ve grafik gösterimde okun yanına  $k$  yazılır.

- $\delta(t)$ ,  $u(t)$ 'nin türevi olduğundan,  $u(t) \delta(t)$ 'nın integralidir. Integral esdeğer iki şekilde yazılabilir:

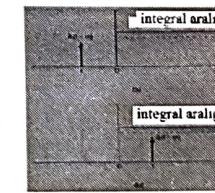
$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (1. \text{ gösterim})$$

$$u(t) = \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau \quad (2. \text{ gösterim})$$

- İntegrların pozitif ve negatif  $t$  değerleri için hesaplanması aşağıda gösterilmiştir:



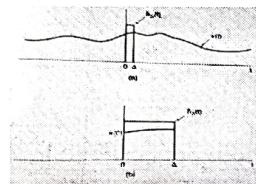
1. gösterim, a)  $t < 0$ , b)  $t > 0$ .



2. gösterim, a)  $t < 0$ , b)  $t > 0$ .

### Sürekli-zaman impuls ve birim basamak fonksiyonları

- Sürekli-zaman impuls fonksiyonun da ömekleme özelliği vardır. Aşağıda, keyfi bir  $x(t)$  için,  $x_i(t) = x(t)\delta_\Delta(t)$  çarpımı ve çarpının sıfırdan farklı olduğu kısmın büyütülmüş hali gösterilmiştir.



- Yeterince küçük  $\Delta$  için,  $0 \leq t \leq \Delta$  aralığında  $x(t)$  yaklaşık olarak sabit olduğundan  $x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t)$  yazılabilir.  $\Delta \rightarrow 0$  limit durumunda  $\delta_\Delta(t)$ ,  $\delta(t)$ 'ye eşit olduğundan impulsun ömekleme özelliğii  $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$  elde edilir.
- Benzer adımları kullanarak,  $t = 0$  yerine  $t = t_0$  anındaki bir impuls için ömekleme özelliğii  $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$  şeklinde olur.

9

### Sürekli-zaman impuls ve birim basamak fonksiyonları

- Gerçek bir fiziksel sistem, eylemsizlige sahiptir ve uygulanan girişlere aniden yanıt veremez. Dolayısıyla, sistemin yanıtı uygulanan darbenin süresi veya şekeinden ziyade darbenin altındaki alandan (darbenin toplam etkisinden) etkilenenecektir.
- Hızlı davranış gösteren sistemler için darbenin süresi, yanıt darbenin şekli veya süresinden etkilenmeyecek şekilde küçük olmalıdır. Herhangi bir gerçek fiziksel sistem için süresi yeterince küçük bir darbe bulabiliriz. Impuls fonksiyonu, bu kavramın idealleştirilmişidir (herhangi bir sistem için yeterince küçük süreli darbe!).
- Impuls ve ilişkili fonksiyonlara TEKİL veya GENELLEŞTİRİLMİŞ fonksiyonlar denilmektedir. Daha fazla bilgi aşağıdaki kaynaklardan edinilebilir:

A. H. Zemanian, *Distribution theory and transform analysis*, NY, McGraw-Hill, 1965.  
 R. F. Hoskins, *Generalised functions*, NY, Halsted Press, 1979.  
 M. J. Lighthill, *Fourier analysis and generalized functions*, NY, Cambridge University Press, 1958.

10

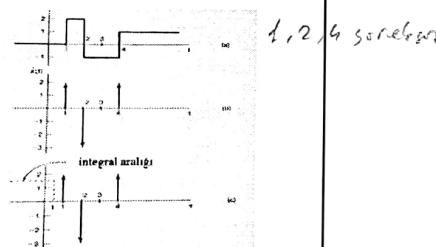
### Sürekli-zaman impuls ve birim basamak fonksiyonları

- Süreksizlik içeren sürekli-zaman işaretlerinin türevi impuls fonksiyonu kullanılarak hesaplanabilir. Süreksizlik noktalarındaki türev impuls fonksiyonu oluşturur ve impulsun genliğini süreksizlik noktasındaki sıçrama miktarı belirler. Aşağıda bir örnek verilmiştir.

Türev doğru ise, b)'deki işaretin integrali a)'daki işaretin vermelidir; c)'de herhangi bir  $t$  değeri için integral aralığı gösterilmiştir. Integral işleminin sonucu

$$\begin{aligned} t < 0 \text{ ise } 0 \\ 1 \leq t < 2 \text{ ise } 2, \\ 2 \leq t < 4 \text{ ise } -1, \\ t \geq 4 \text{ ise } 1 \end{aligned}$$

olup gerçekten de a)'daki işaret elde edilir.

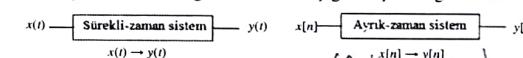


11

### Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

- SİSTEM**, girişine uygulanan bir işaretin çıkışında başka bir işaretin dönüştürmen bir süreç olarak değerlendirilebilir.

- Sürekli-zaman sistemlerde giriş ve çıkış işaretleri sürekliyen; ayrık-zaman sistemlerde ayrıktır. Sistemler grafiksel olarak aşağıdaki şekilde gösterilir:



(Bilgisayar)

- Bir işaret, başka bir işaret haline dönüştürülmek istendiğinde bir sürekli-zaman sistemi tasarlanabilir (analog çözüm). Ancak, işaret ömeklenip ayrık-zaman haline getirildikten sonra aynı işlem bir ayrık-zaman sistemi tasarlanarak da yapılabilir (sayısal çözüm). Sayısal çözümde elde edilen sonucun tekrar sürekli hale getirilmesi gerekligine dikkat ediniz.

- Sayısal çözümün analog çözüme göre üstünlükleri oldukça fazladır. Bu konu SAYISAL İŞARET İŞLEME dersinde ele alınmaktadır.

12

Giriş çıkış orası işles  
 \* Diferansiyel Darbeler  
 \* Entegro dif. derl

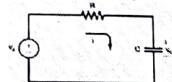
\* Diferans (tak) derl

**Elektriki SİS'leri**  
**Elektromekanik SIS,**  
**Termal SIS,**  
**Hydro SIS,**

**Genel olarak**  
**bir girdi bir**  
**fazda olt sistem**  
**İEDETTİ.**

### Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

Örnek: Bir sürekli-zaman sisteme örnek olarak, aşağıda verilen  $RC$  devresinde giriş işaretini  $v_s(t)$  ile çıkış işaretini  $v_c(t)$  arasındaki ilişkiyi bulalım.



Ohm yasasından, direnç üzerinden geçen akım, direnç üzerindeki gerilimin dirençin değerine bölünmesiyle elde edilir:

$$i(t) = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{R}$$

Kapasitenin tanımından  $i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$

Bu iki eşitlikten, giriş ile çıkış arasındaki ilişki aşağıda verilen diferansiyel denklem olarak elde edilir:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = \frac{1}{RC} v_s(t)$$

13

### Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

Örnek: Bir ayrık-zaman sisteme örnek olarak, ay sonunda banka hesabındaki para miktarını ele alalım.  $x[n]$  ay boyunca net para girişi (yatırılan-çekilen) ve  $y[n]$  ay sonunda hesaptağı para olmak üzere,  $y[n]$ 'nin aşağıda verilen fark denklemiyle belirlendiğini varsayıyalım:

$$y[n] = 1.01y[n-1] + x[n]$$

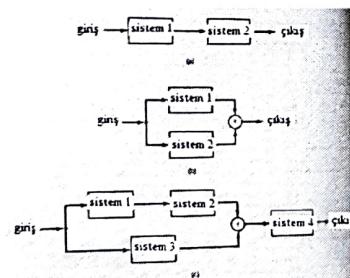
Modeldeki  $1.01y[n-1]$  terimi, ilgili ayda % 1 oranında faizi modellemektedir.

- Yukarıda verilen basit iki örnek, daha karmaşık sistemlere uyarlanabilir. Genelde, giriş ile çıkış arasındaki ilişki, sürekli-zaman sistemlerde diferansiyel denklemlerle, ayrık-zaman sistemlerde ise fark denklemleriyle verilir.
- Bu derste, sistemleri analiz edebilmek için etkili yöntemler (Fourier dönüşümü, z-dönüştümü vb) tanıtılacaktır.

14

### Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

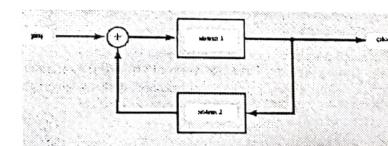
- Çoğu gerçek sistem, birkaç alt sistemden oluşmaktadır. Diğer bir deyişle, basit sistemler birleştirilerek karmaşık sistemler oluşturulabilir.
- Sistemleri çok değişik biçimlerde birbirleriyle bağlamak mümkündür. Ancak, sıkılıkla kullanılan bağlama biçimleri SERİ, PARALEL ve SERİ-PARALEL olup bunlara karşılık gelen blok diyagramlar aşağıda verilmiştir.



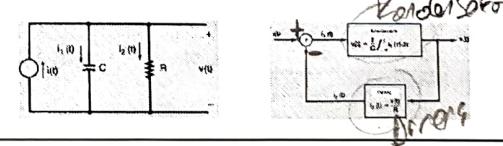
15

### Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

- Diğer önemli bir sınıf, aşağıda gösterilen GERİBESLEMELİ bağlamadır.



- Geribesleme sistemleri birçok uygulamada kullanılmaktadır. Örneğin, sayısal olarak kontrol edilen bir uçak sisteminde gerçek ve gerekli hız, yön ve yükseklik arasındaki farklar gerekli düzeltmeleri yapmak üzere geri besleme işaretleri olarak kullanılır. Elektrik devrelerinde de geribesleme mevcuttur. Aşağıda bir elektrik devresi ve karşılık gelen blok diyagram verilmiştir



16

Gercek zamanlı sistemler nedensel dir.  
Nedensel olmayan bir sistem fiziksel olarak desteklenemez.

28.09.2017

### Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

- Herhangi bir andaki çıkışı, sadece o andaki girişine bağlı olan sistemlere HAFIZASIZ, aksi halde HAFIZALI denir.

#### Hafızasız sistemler:

~~statis~~ ~~statis~~ sistem

$$y[n] = (2x[n] - x^2[n])^2 \quad (\text{nedensel})$$

$$y(t) = R x(t)$$

#### Hafızalı sistemler:

~~PC~~ ~~dynamic~~ sistem

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

- Hafızalı sistemlerde, girişi çıkışın hesaplandığı an dışındaki zamanlarda saklayan mekanizmalar olmalıdır. Çoğu fiziksel sisteme, hafıza enerjinin depolanması ile doğrudan ilişkilidir. Örneğin, kondansatör elektriksel yük biriktirerek enerji saklar.

17

hafızalı  
 $y[n] = x[n+1]$   
nedensel  
değil  
(geleceğe ihtiyac yok)

hafızalı  
 $y[n] = x[n-1]$   
 $y[2] = x[0] + x[1] + x[2]$

### Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

- Herhangi bir andaki çıkışı, girişin geçmişteki veya o andaki değerlerine bağlı olan sistemlere NEDENSEL denir.

#### Nedensel sistemler:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

#### Nedensel olmayan sistemler:

$$y[n] = x[n] - x[n+1]$$

$$y(t) = x(t+1)$$

- Bir sistemin nedensel olup olmadığı belirlenirken giriş-çıkış arasındaki ilişki tüm anlarda incelenmelidir. Ayrıca, giriş-çıkış arasındaki ilişkide girişten hariç diğer fonksiyonlar dikkate alınmamalıdır.

18

$$y_2[n] = y_1[n-n_0] = (y_1[n] - y_1[n-1])x[n-n_0]$$

$$y_1[n] = y_1[n-n_0] = (y_1[n] - y_1[n-1])x[n-n_0]$$

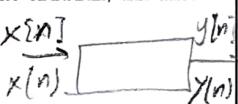
5

### Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

- Sınırlı girişler için sınırlı çıkışlar oluşturan sistemlere KARARLI, aksi halde KARARSIZ denir.

#### Kararlı sistemler:

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x(n-k)$$



$$y(t) = e^{stu}$$

$$y(t) = 10x(t) \rightarrow \text{kararlı}$$

#### Kararsız sistemler:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

$$y(t) = tx(t)$$

- Bir sistemin kararsız olduğunu göstermek için iyi bir yaklaşım, sonsuz bir çıkış üreten sonlu bir giriş bulmaktır. Ancak, bu her zaman mümkün olmayıpabilir. Bu gibi durumlarda, giriş işaretinden bağımsız olarak çalışan bir yöntem kullanılmalıdır.

19

İşretin tamamı olsaydı  $y(t) = e^{x(t)^2}$   
aralıktır sonra sınırlı  
(genişleme bozulur)  $t \rightarrow (-\infty, \infty)$

### Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

- X Bir sistemde, giriş işaretine uygulanan bir öteleme çıkış işaretinde de aynı miktarda ötelemeye neden oluyorsa sisteme ZAMANLA DEĞİŞMEYEN, aksi halde zamanla değişen denir.

#### Örnek: Giriş-çıkış ilişkisi

$$y(t) = \sin[x(t)]$$

ile verilen sistemi ele alalım. Giriş işaretine  $t_0$  kadar bir öteleme uygulayalım, yani  $x_2(t) = x(t-t_0)$  olsun. Sistemin  $x_2(t)$ 'ye yanıtı,  $y_2(t) = \sin[x_2(t)] = \sin[x(t-t_0)]$ 'dır. Çıkışın  $t_0$  kadar ötelememişi,  $y(t-t_0) = \sin[x(t-t_0)]$ 'dır. Giriş işaretine uygulanan öteleme, çıkışta da aynı miktarda ötelemeye sebep olup bu sistem zamanla değişmeyen bir sistemdir.

#### Örnek: Giriş-çıkış ilişkisi

$$y[n] = nv[n]$$

olan sistemin zamanla değiştiği, benzer işlemler takip edilerek gösterilebilir.

20

$$y_1(t) = \sin(x_1(t))$$

$$x_2(t) = x_1(t-t_0)$$

$$y_2(t) = \sin(x_2(t)) = \sin(x_1(t-t_0))$$

$$y_2(t) = y_1(t-t_0) = \sin(x_1(t-t_0))$$

$$x(t) \rightarrow x(t-t_0)$$

$$y(t) \Big|_{t=t_0} = y(t-t_0)$$

$$y[n] = nX[n] \rightarrow y[n-n_0] = nX[n-n_0]$$

$$x[n] = X[n] \rightarrow x[n-n_0] = X[n-n_0]$$

$$y[n] = nX[n] \rightarrow y[n-n_0] = nX[n-n_0]$$

$$x[n] = X[n] \rightarrow x[n-n_0] = X[n-n_0]$$

$$y[n] = nX[n] \rightarrow y[n-n_0] = nX[n-n_0]$$

$$x[n] = X[n] \rightarrow x[n-n_0] = X[n-n_0]$$

$$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow y_3(t) = a y_1(t) + b y_2(t)$$

28.09.2017

Toplumsallık  
Geçimsallık  
Super DED  
Doğrusal

Doğrusal ve Zorlu  
Bileşmeler (DED)

### Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

- İki veya daha fazla işaretin toplamından oluşan bir girişe olan yanıtını, giriş işaretini oluşturan bileşenlere yanıtlarının toplamına eşit olan sistemlere DOĞRUSAL denir.
- Doğrusallığın matematiksel tanımı, sürekli-zaman sistemleri için aşağıda verilmiştir. Tanım, ayrık-zaman durumunda da geçerlidir.
- Bir sisteme uygulanan  $x_k(t)$  girişlerine karşılık gelen çıkışlar  $y_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  olsun.  $a_k$ 'lar katsayı olmak üzere, sistemin

$$x(t) = \sum_k a_k x_k(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + a_3 x_3(t) + \dots$$

girişine yanıtı

$$y(t) = \sum_k a_k y_k(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + a_3 y_3(t) + \dots$$

ise, sistem doğrusaldır.

$$x(t) = \sum_k a_k x_k(t) \rightarrow \boxed{\text{DED}} \rightarrow y(t) = \sum_k a_k y_k(t)$$

### Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

Örnek: Giriş-çıkış ilişkisi  $y(t) = x_1^2(t)$  olan sistemin doğrusal olup olmadığını belirleyelim. Sistemin, keyfi iki giriş işaretini  $x_1(t)$  ve  $x_2(t)$ 'ye olan yanıtını

$$\begin{aligned} x_1(t) &\rightarrow y_1(t) = x_1^2(t) \\ x_2(t) &\rightarrow y_2(t) = x_2^2(t) \end{aligned}$$

olsun.  $a$  ve  $b$  katsayılar olmak üzere,  $x_1(t)$  ve  $x_2(t)$ 'nin ağırlıklı toplamı  $x_3(t)$  olsun:

$$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$$

Sistemin  $x_3(t)$ 'ye olan yanıtı

$$\begin{aligned} y_3(t) &= x_3^2(t) \\ &= (a x_1(t) + b x_2(t))^2 \\ &= a^2 x_1^2(t) + b^2 x_2^2(t) + 2ab x_1(t) x_2(t) \\ &= a^2 y_1(t) + b^2 y_2(t) + 2ab y_1(t) y_2(t) \end{aligned}$$

olup sistem doğrusal değildir.

$$y_3(t) \neq y_1(t) + y_2(t) \times$$

$$(x_1(t))^2 \quad (x_2(t))^2$$

$$y_1(t) = a t x_1(t)$$

$$y_2(t) = b t x_2(t)$$

$$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \rightarrow y_3(t) = t x_3(t)$$

$$y_3(t) = y_1(t) + y_2(t) \checkmark$$

### Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

Örnek: Giriş-çıkış ilişkisi  $y(t) = tx(t)$  olan sistemin doğrusal olup olmadığını belirleyelim. Sistemin, keyfi iki giriş işaretini  $x_1(t)$  ve  $x_2(t)$ 'ye olan yanıtını

$$\begin{aligned} x_1(t) &\rightarrow y_1(t) = t x_1(t) \\ x_2(t) &\rightarrow y_2(t) = t x_2(t) \end{aligned}$$

olsun.  $a$  ve  $b$  katsayılar olmak üzere,  $x_1(t)$  ve  $x_2(t)$ 'nin ağırlıklı toplamı  $x_3(t)$  olsun:

$$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$$

Sistemin  $x_3(t)$ 'ye olan yanıtı

$$\begin{aligned} y_3(t) &= t x_3(t) \\ &= t(a x_1(t) + b x_2(t)) \\ &= a t x_1(t) + b t x_2(t) \\ &= a y_1(t) + b y_2(t) \end{aligned}$$

şeklinde olup sistem doğrusaldır.

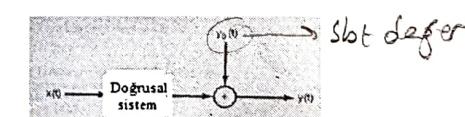
✓<sub>22</sub>

$$y[n] = 2x[n] + 3$$

$$x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

$$\begin{aligned} y_3[n] &= 2x_3[n] + 3 \\ &= 2(x_1[n] + x_2[n]) + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3[n] &= y_1[n] + y_2[n] \\ &= 2x_1[n] + 2x_2[n] + 6 \end{aligned}$$



Örneğimizde doğrusal sistem  $x[n] \rightarrow 2x[n] + 3$ , sıfır-giriş yanıtı  $y_0[n] = 3$ 'dür. Böyle sistemlerde, iki giriş olan yanıtlar arasındaki fark, girişlerin farkının doğrusal bir fonksiyonudur:

$$y_1[n] - y_2[n] = 2x_1[n] + 3 - (2x_2[n] + 3) = 2(x_1[n] - x_2[n])$$

Bu tür sistemlere ARTIŞSAL DOĞRUSAL sistem denilmektedir.

✓<sub>23</sub>

*Dogrusal - 2 nolu Bileşmeler*

**Hafta 3:**  
**Doğrusal ve Zamanla Değişmeyen Sistemler**  
**(Linear Time Invariant, LTI)**

1

**Ele Alınacak Ana Konular**

- Ayrık-zaman işaretlerin impuls dizisi cinsinden ifade edilmesi
- Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi
- Sürekli-zaman işaretlerin impuls fonksiyon cinsinden ifade edilmesi
- Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

2

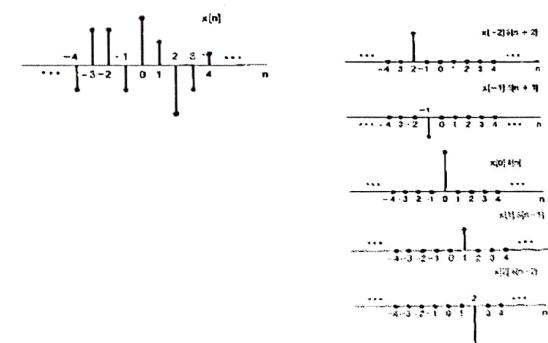
**Ayrık-zaman işaretlerin impuls dizisi cinsinden ifade edilmesi**

- Doğrusallık ve zamanla değişmezlik özellikleri iki açıdan çok önemlidir: (i) çoğu fiziksel sistem bu iki özelliğe sahip olup doğrusal ve zamanla değişmeyen (Linear Time Invariant, LTI) sistem olarak modellenebilir, (ii) LTI sistemleri incelemek amacıyla geliştirilmiş güçlü matematiksel yöntemler (Laplace ve Z-dönüştürmeleri) mevcuttur.
- LTI bir sistemin girişine uygulanan herhangi bir işaret, temel bazı işaretlerin toplamı cinsinden yazabilsek, sistemin çıkışını temel işaretlere olan yanıtlarının toplamına eşit olacaktır.
- Aşağıda gösterileceği gibi, sürekli-zaman işaretleri impuls fonksiyonu, ayrık-zaman işaretleri ise impuls dizisi cinsinden ifade edilebilir. O halde, sistemin impuls işaretine olan yanıtını bilindiğinde herhangi bir girişe olan yanıtını hesaplanabilir.
- Sistemin impuls işaretine olan yanıtına İMPULS YANITI denir. Giriş-çıkış ilişkisi ayrık-zaman durumunda KONVOLÜSYON TOPLAMI, sürekli-zaman durumunda ise KOÑVOLÜSYON İNTEGRALİ ile verilir.

3

**Ayrık-zaman işaretlerinin impuls cinsinden ifade edilmesi**

- Bir ayrık-zaman işaret impulslarının toplamı şeklinde düşünülebilir. Aşağıda bir ayrık-zaman işaretinin  $[-2, 2]$  aralığındaki bileşenlerinin impuls dizisi karşılıkları verilmiştir.



4

$$\delta[n] \rightarrow [D^2 D] \rightarrow h[n]$$

$$x[0]\delta[n] \rightarrow [D] \rightarrow x[0]h[n]$$

$$\delta[n-k] \rightarrow [D] \rightarrow h[n-k]$$

$$x[2]\delta[n-2] \rightarrow [D^2 D] \rightarrow x[2]h[n-2]$$

### Ayrık-zaman işaretlerinin impuls cinsinden ifade edilmesi

- Şekilden, beş bileşenin toplamının  $-2 \leq n \leq 2$  aralığında  $x[n]$ 'ye eşit olduğu görülmektedir. Genelleştirme yaparsak, bir ayrık-zaman işaret  $x[n]$  impuls dizisi cinsinden şöyle yazılabilir:

$$x[n] = \dots + x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + \dots$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Kesin Aşırı Toplam

- Yani, herhangi bir ayrık-zaman işaret öteleme impulslarının ağırlıklı toplamı olup ağırlıklar işaretin değerleridir. Ömek olarak,  $x[n] = u[n]$  olsun.  $k < 0$  için  $u[k] = 0$  ve  $k \geq 0$  için  $u[k]=1$  olduğundan, daha önce tartıştığımız ilişki elde edilir:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

### Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolusyon toplamı gösterilimi

- Bir ayrık-zaman LTI sistemin keyfi bir  $x[n]$  girişi olan yanıtını bulmaya çalışalım. Giriş,

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

şeklinde yazılabilir.

- Sistemin  $\delta[n-k]$ 'ya olan yanıtını  $h_k[n]$  ile belirtelim. Sistem doğrusal olduğundan, sistemin  $x[n]$ 'ye yanıtı

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

olacaktır.

- O halde, ayrık-zaman LTI sistemin  $-\infty < k < \infty$  için  $\delta[n-k]$ 'ya olan yanları ( $h_k[n]$ 'ler!) biliniyorsa, sistemin herhangi bir girişe olan yanıtı hesaplanabilir.

$$\delta[n] \rightarrow [D^2 D] \rightarrow h[n]$$

$D^2 D$   
Impulse  
Response

$$x[n] \rightarrow [h[n]] \rightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

Konvolusyon  
İşlemi

### Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolusyon toplamı gösterilimi

- Sistem zamanla değişmez olduğundan,  $h_k[n] = h_0[n-k]$  ilişkisi geçerli olmalıdır.
- Çünkü,  $h_k[n]$  sistemin  $\delta[n-k]$ 'ya;  $h_0[n]$  ise  $\delta[n]$ 'ye olan yanıdır. Zamanla değişmeyecek bir sistemde giriş hangi miktarda öteleme ise çıkış aynı miktarda öteleme. Girişler arasında  $k$  kadar öteleme olduğuna göre, çıkışlar arasında da  $k$  kadar öteleme, yani  $h_k[n] = h_0[n-k]$  olmalıdır.
- Notasyon kolaylığı için  $h[n] = h_0[n]$  yazacak ve  $h[n]$ 'e sistemin İMPULS YANITI (sisteme  $\delta[n]$  uygulandığında elde edilen yanıt) diyeceğiz.
- Sonuç olarak, bir ayrık-zaman LTI sistemin impuls yanıtı  $h[n]$  ve sisteme uygulanan giriş  $x[n]$  ise, sistemin yanımı

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

ilişkisinden hesaplanır. Bu ilişkiye KONVOLÜSYON TOPLAMI denir ve kısaca  $y[n] = x[n] * h[n]$  şeklinde gösterilir.

### Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolusyon toplamı gösterilimi

ÖRNEK: Bir ayrık-zaman LTI sistemin impuls yanıtı  $h[n]$  ve sisteme uygulanan giriş aşağıda verilmiştir. Sistemin çıkışını hesaplayınız.



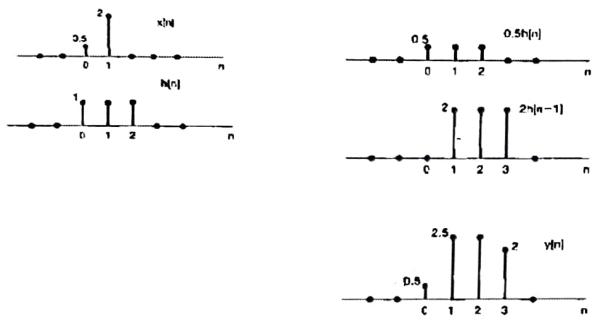
ÇÖZÜM: Giriş işaretinde sadece iki terim sıfırdan farklı olduğundan konvolusyon toplamı iki terimin toplamından oluşur:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \Rightarrow y[n] = x[0]h[n-0] + x[1]h[n-1] = 0.5h[n] + 2h[n-1]$$

Bu örnek için, impuls yanıtı  $x[0]=0.5$  ile çarpılır, 1 birim sağa öteleen  $x[1]=2$  ile çarpılır. İki işleminden elde edilen sonuçların toplamı çıkış eşit olur. İlgili işlemler ve sonuç aşağıda verilmiştir.

### Ayırık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \Rightarrow y[n] = x[0]h[n-0] + x[1]h[n-1] = 0.5h(n) + 2h(n-1)$$



### Ayırık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

- Giriş ve/veya impuls yanıt sonsuz değer alındığında konvolüsyon toplamı etkin bir şekilde hesaplanmalıdır. Çıkışın herhangi bir  $n$  anındaki değerinin konvolüsyon toplamından hesaplandığını hatırlayınız:

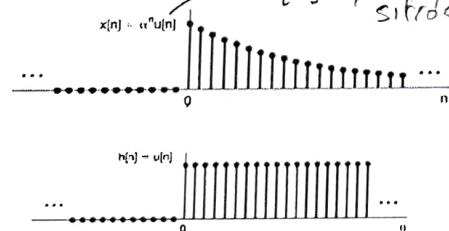
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

- İlk önce,  $x[k]$  ve  $h[n-k]$  işaretleri  $k$ 'nın fonksiyonu olarak çizilir. Bu iki fonksiyon çarpılarak  $g[k] = x[k] h[n-k]$  dizi elde edilir.
  - Daha sonra,  $g[k]$  dizi tüm  $k$  değerleri üzerinden toplanarak  $y[n]$  bulunur.
  - Çıkışı bulmak için bu işlem tüm  $n$  değerleri için tekrarlanır.
- ©** Bu işlem yapıldıktan sonra  $h[n-k]$ 'nin  $h[k]$ 'nin zaman tersine çevrilmiş ve  $n$  kadar öteleme hali olduğu hâlde tutulmalıdır.

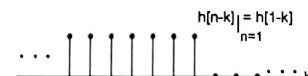
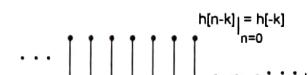
10

### Ayırık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

ÖRNEK: Bir ayırık-zaman LTI sisteminin impuls yanıtı  $h[n] = u[n]$  ve sisteme uygulanan giriş,  $0 < \alpha < 1$  olmak üzere  $x[n] = \alpha^n u[n]$  olarak verilmiştir. Sistemin çıkışını hesaplayınız.



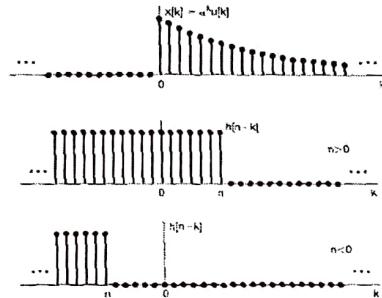
...  
sıfırdan önceki  
Odır



12

### Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

**ÇÖZÜM:** Aşağıda  $x[k]$  ve  $h[n-k]$   $n < 0$  ve  $n \geq 0$  için çizilmiştir.



13

### Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

- Şekillerden  $n < 0$  ise,  $x[k]$  ile  $h[n-k]$  dizilerinin kesişmemeyip  $x[k] h[n-k]$  çarpımının sıfır eşit olduğu görülmektedir. O halde,  $n < 0$  ise  $y[n] = 0$ .

- $n \geq 0$  ise, diziler  $0 \leq k \leq n$  aralığında kesiştiğinden  $x[k] h[n-k]$  çarpımı şöyledir:

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

- $y[n]$ 'yi belirlemek için konvolüsyon toplamı hesaplanmalıdır.

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^n x[k]h[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \end{aligned}$$

Hatırlatma:  $\sum_{k=n_1}^{n_2} q^k = \frac{q^{n_1} - q^{n_2+1}}{1-q}$  Sınavda yerler

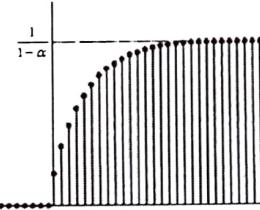
14

### Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

Özetle,

$$y[n] = \begin{cases} \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$y[n] = \left( \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \right) u[n]$$

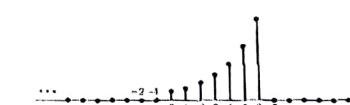


15

### Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

**ÖRNEK:** Bir ayrık-zaman LTI sisteminin impuls yanıtı  $h[n]$  ve sisteme uygulanan giriş  $x[n]$  aşağıda verilmiştir. Sistemin çıkışını hesaplayınız.

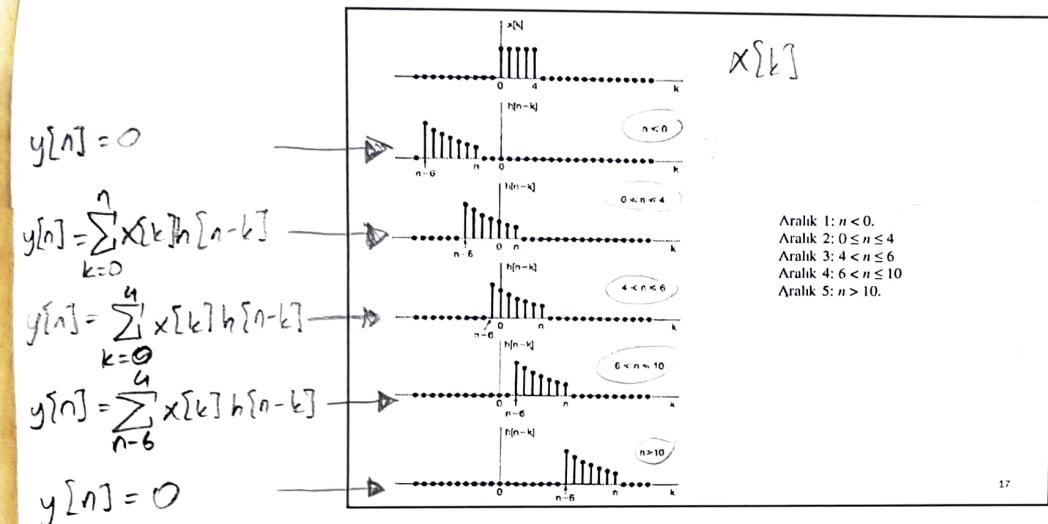
$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \quad h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$



$$x[n] = u[n] - u[n-7]$$

$$h[n] = \alpha^n (u[n] - u[n-7])$$

16

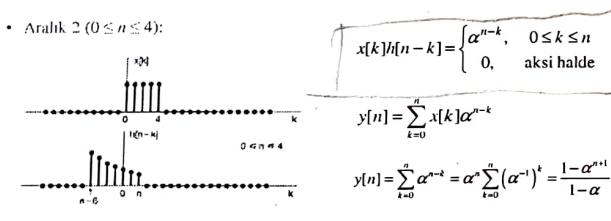


Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

- ÇÖZÜM:  $x[k]h[n-k]$  çarpımı 5 aralıktaki farklı değerler alındıktan, çıkış her aralıktaki ayrı ayrı hesaplanmalıdır.

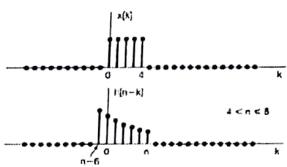
- Aralık 1 ( $n < 0$ ):  $x[k]h[n-k]$  çarpımı sıfır olup  $y[n] = 0$ .

- Aralık 2 ( $0 \leq n \leq 4$ ):



Hatırlatma:  $\sum_{k=n_1}^{n_2} q^k = \frac{q^{n_1} - q^{n_2+1}}{1-q}$ ,  $1 \neq q$

- Aralık 3 ( $4 < n \leq 6$ ):



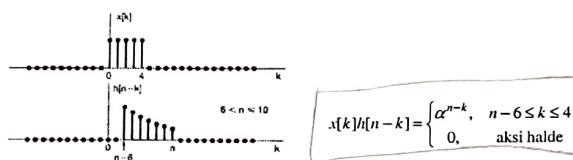
$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^4 \alpha^{n-k} = \alpha^n \sum_{k=0}^4 (\alpha^{-1})^k = \alpha^n \frac{1 - (\alpha^{-1})^5}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

Hatırlatma:  $\sum_{k=n_1}^{n_2} q^k = \frac{q^{n_1} - q^{n_2+1}}{1-q}$ ,  $1 \neq q$

19

- Aralık 4 ( $6 < n \leq 10$ ):



$$y[n] = \sum_{k=n-6}^4 \alpha^{n-k} = \sum_{r=0}^{10-n} \alpha^{6-r} = \alpha^6 \sum_{r=0}^{10-n} (\alpha^{-1})^r = \alpha^6 \left( \frac{1 - \alpha^{n-11}}{1 - \alpha^{-1}} \right) = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}$$

Hatırlatma:  $\sum_{k=n_1}^{n_2} q^k = \frac{q^{n_1} - q^{n_2+1}}{1-q}$ ,  $1 \neq q$

- Aralık 5 ( $n > 10$ ):  $x[k]h[n-k]$  çarpımı sıfır olup  $y[n] = 0$ .

20

Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi  
Öztele,

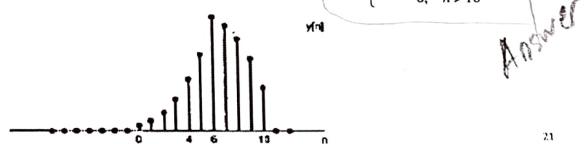
$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$y[n] = x[n] * h[n] \rightarrow$$

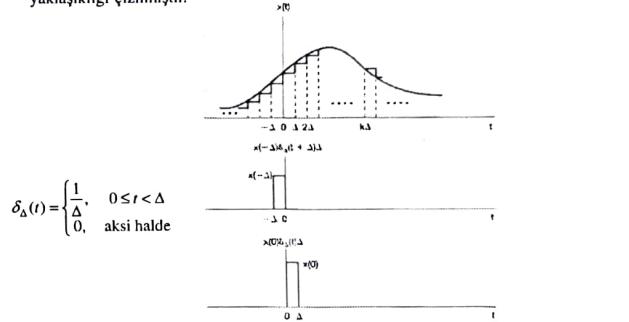
$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, & 0 \leq n \leq 4 \\ \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, & 4 < n \leq 6 \\ \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^7}{1-\alpha}, & 6 < n \leq 10 \\ 0, & n > 10 \end{cases}$$

 $y[n]$  grafiksel gösterilimi:

### Sürekli-zaman işaretlerin impuls cinsinden ifade edilmesi

Bir sürekli-zaman işaretin ötelemmiş darbelerin toplamı biçiminde yaklaşık olarak yazılabilir. Aşağıda bir sürekli-zaman işaretin  $-\Delta \leq t \leq \Delta$  aralığındaki darbe yaklaşılığı çizilmiştir.



### Sürekli-zaman işaretlerin impuls cinsinden ifade edilmesi

- $\delta_\Delta(t)$  fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t < \Delta \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

- Sürekli-zaman  $x(t)$  işaretini yaklaşık olarak şöyle yazılabilir:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_\Delta(t - k\Delta) \Delta$$

- $\Delta$  küçüldükçe yaklaşılıklık iyileşir ve  $\Delta \rightarrow 0$  limit durumunda  $x(t)$  elde edilir. Yani,

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{x}(t) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_\Delta(t - k\Delta) \Delta \end{aligned}$$

23

### Sürekli-zaman işaretlerin impuls cinsinden ifade edilmesi

- $\Delta \rightarrow 0$  limit durumunda toplama integrale eşit olur (Riemann integral tanımını hatırlayınız!).

- Ayrıca,  $\Delta \rightarrow 0$  limit durumunda  $\delta_\Delta(t)$  fonksiyonu  $\delta(t)$ 'ye eşit olur. O halde,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

- Örnek olarak,  $x(t) = u(t)$  olsun.  $t < 0$  için  $u(t) = 0$  ve  $t \geq 0$  için  $u(t) = 1$  olduğundan  $u(t)$  ile  $\delta(t)$  arasında daha önce verdigimiz aşağıda verilen ilişki elde edilir:

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

24

### Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

- Bir sürekli-zaman LTI sistemin keyfi bir  $\hat{x}(t)$  girişine olan yanıtını bulmaya çalışalım. Giriş,

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta$$

şeklinde yazabiliyoruz.

- Sistemin  $\delta_{\Delta}(t-k\Delta)$ 'ya olan yanıtını  $\hat{h}_{\Delta}(t)$  ile belirtelim. Sistem doğrusal olduğundan,  $\hat{x}(t)$ 'ye yanıtı aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \hat{h}_{\Delta}(t)\Delta$$

- $\Delta \rightarrow 0$  limit durumunda  $x(t) = \hat{x}(t)$  ve doayısıyla  $y(t) = \hat{y}(t)$  olur. Yani,

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{y}(t) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \hat{h}_{\Delta}(t)\Delta = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

25

### Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

- Sistem zamanla değişmez olduğundan

$$h_{\Delta}(t) = h_0(t-\tau)$$

ilişkisi geçerli olmalıdır.

- Notasyon kolaylığı için  $h(t) = h_0(t)$  yazacak ve  $h(t)$ 'ye sistemin İMPULS YANITI (sisteme  $\delta(t)$  uygulandığında elde edilen yanıt) diyeceğiz.
- Sonuç olarak, bir sürekli-zaman LTI sistemin impuls yanıtı  $h(t)$  ve sisteme uygulanan giriş  $x(t)$  ise, sistemin yanımı

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

ilişkisinden hesaplanır. Bu ilişkiye KONVOLÜSYON INTEGRALİ denir ve kısaca  $y(t) = x(t) * h(t)$  şeklinde gösterilir.

26

$$x(t) \xrightarrow{[h(t)]} y(t) = x(t) * h(t)$$

### Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

- Çıktının herhangi bir  $t$  anındaki değerinin konvolüsyon integralinden hesaplandığını hatırlayınız:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

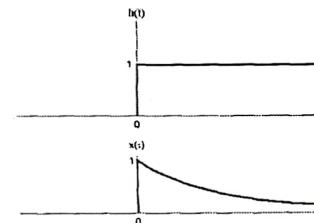
- İlk önce,  $x(\tau)$  ve  $h(t-\tau)$  işaretleri  $\tau$ 'nun fonksiyonu olarak çizilir. Bu iki fonksiyon çarpılarak  $g(\tau) = x(\tau)h(t-\tau)$  işaretini elde edilir.
- Daha sonra,  $g(\tau)$  işaretinin  $\tau$  değerleri üzerinden integrali alınarak  $y(t)$  bulunur.
- Çıkışı bulmak için bu işlem tüm  $t$  değerleri için tekrarlanır.
- Bu işlem yapılırken  $h(t-\tau)$ 'nın  $h(\tau)$ 'nın zaman tersine çevrilmiş ve  $t$  kadar öteleşen halı olduğu hâlde tutulmalıdır.

27

### Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

ÖRNEK: Bir sürekli-zaman LTI sistemin impuls yanımı  $h(t)$  ve sisteme uygulanan girişi  $x(t)$  aşağıda verilmiştir. Sistemin çıkışını hesaplayınız.

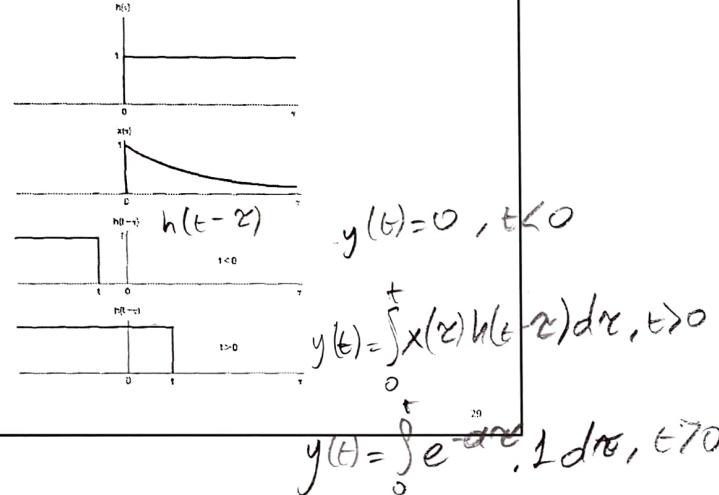
$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-at} u(t), \quad a > 0 \\ h(t) &= u(t) \end{aligned}$$



28

$$e^{-at} u(t+2)$$

**ÇÖZÜM:** Aşağıda  $x(\tau)$  ve  $h(t-\tau)$  işaretleri  $t < 0$  ve  $t \geq 0$  için çizilmiştir.



- Şekillerden  $t < 0$  ise,  $x(\tau)$  ve  $h(t-\tau)$  işaretlerinin kesişmemişip  $x(\tau)h(t-\tau)$  çarpımının sıfır eşit olduğu görülmektedir. O halde,  $t < 0$  ise  $y(t) = 0$ .

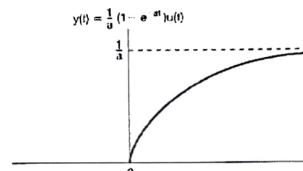
- $t \geq 0$  ise, işaretler  $0 \leq \tau \leq t$  aralığında kesiştiğinden  $x(\tau)h(t-\tau)$  çarpımı şöyledir:

$$x(\tau)h(t-\tau) = e^{-a\tau}$$

- $y(t)$ 'yi belirlemek için konvolüsyon integrali hesaplanmalıdır.

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$$

- Özette,  $y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})u(t)$

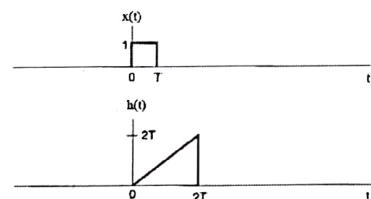


30

### Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

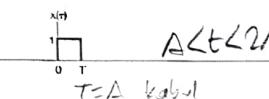
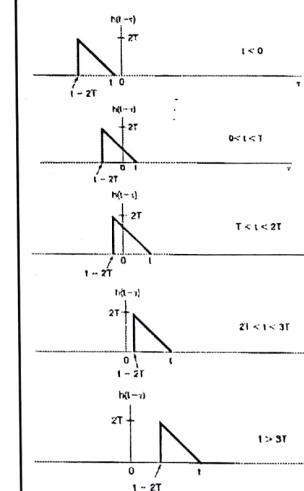
**ÖRNEK:** Bir sürekli-zaman LTI sistemin impuls yanımı  $h(t)$  ve sisteme uygulanan giriş  $x(t)$  aşağıda verilmiştir. Sistemin çıkışını hesaplayınız.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{aksı halde} \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2T \\ 0, & \text{aksı halde} \end{cases}$$



31

- Aralık 1:  $t < 0$ .  
Aralık 2:  $0 < t < T$ .  
Aralık 3:  $T < t < 2T$ .  
Aralık 4:  $2T < t < 3T$ .  
Aralık 5:  $t > 3T$



$0 < t < 2T$

$t = \Delta$  kabul

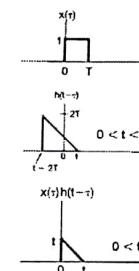
$y(t) = 0, t < 0$   
 $y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$   
 $y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$   
 $y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$   
 $y(t) = 0$

### Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

- ÇÖZÜM:  $x(\tau)h(t-\tau)$  çarpımı 5 aralıkta farklı değerler olduğundan, çıkış her aralıktaki ayrı ayrı hesaplanmalıdır.
- Aralık 1 ( $t < 0$ ):  $x(\tau)h(t-\tau)$  çarpımı sıfır olup  $y(t) = 0$ .
- Aralık 5 ( $t > 3T$ ):  $x(\tau)h(t-\tau)$  çarpımı sıfır olup  $y(t) = 0$ .

33

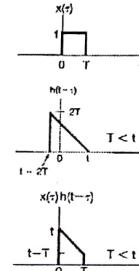
#### Aralık 2 ( $0 < t < T$ )



$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2$$

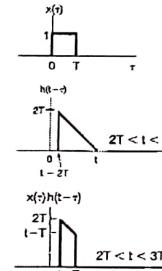
#### Aralık 3 ( $T < t < 2T$ )



$$y(t) = \int_0^T (t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = Tt - \frac{1}{2}T^2$$

#### Aralık 4 ( $2T < t < 3T$ )



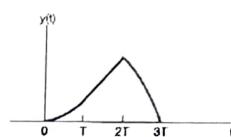
$$y(t) = \int_{t-2T}^T (t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 7t + \frac{3}{2}T^2$$

### Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

Cıktısı bulmak için  $x(\tau)h(t-\tau)$  çarpımının ilgili aralıklardaki integrali hesaplanır. Sonuç ve çıkış işaretinin grafiği aşağıda verilmiştir.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0 < t < T \\ Tt - \frac{1}{2}T^2, & T < t < 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + 7t + \frac{3}{2}T^2, & 2T < t < 3T \\ 0, & t > 3T \end{cases}$$



35

*an önce (4)*

Hafta 4:  
Doğrusal ve Zamanla Değişmeyen Sistemler

4.Hafta 1

$\sum_{k=0}^{n-6} \cup T_{n-k}, \cup T_{n-(7-k)}, \cup T_{n-(8-k)}$

$k > 0 \quad n-k > 0 \quad k < n-6$

**LTI Sistemlerin Özellikleri**

- Konvolüsyon işlemi, değişme özelliğine sahiptir. Matematiksel olarak,
$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Bu ilişkiler, basit değişken dönüşümleriyle ispatlanabilir. Örneğin, aynı-zaman durumunda  $r = n-k$  değişken dönüşümü yapılursa

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n-r)h(r) = h(n) * x(n)$$

- Özetle, bir LTI sisteme giriş ve impuls yanıtının rolleri değiştirilirse çıkış aynı kalmaktadır:

4.Hafta 3

*4.Hafta 1*

Ele Alınacak Ana Konular

- LTI sistemlerin özellikleri
- Diferansiyel denklemlerle tanımlanmış sürekli-zaman nedensel LTI sistemler
- Fark denklemleriyle tanımlanmış aynı-zaman nedensel LTI sistemler
- Tekil fonksiyonlar

4.Hafta 2

*4.Hafta 2*

Hatırlatma:  $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$   $h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$

olmak üzere,  $y[n] = x[n] * h[n] \rightarrow y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, & 0 \leq n \leq 4 \\ \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, & 4 < n \leq 6 \\ \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^7}{1-\alpha}, & 6 < n \leq 10 \\ 0, & n > 10 \end{cases}$

olarak hesaplanmıştır. (3.hafta )  
Örnek üzerinde

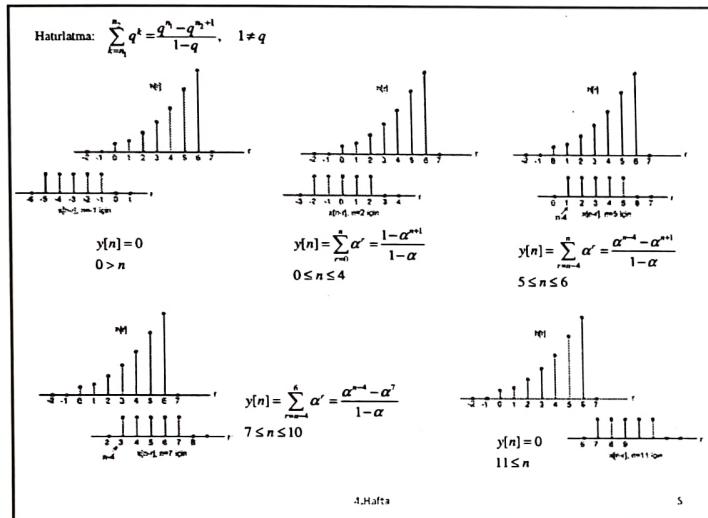
$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n-r)h[r] = h[n] * x[n]$  olduğunu gösterelim.

4.Hafta 2

$y(t) = \int x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$y(t) = \int_{t-6}^0 h(\tau)x(t-\tau)d\tau$

1



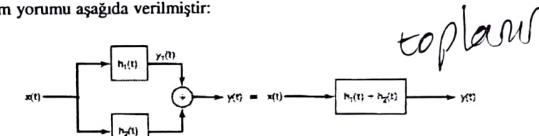
### LTI Sistemlerin Özellikleri

- Konvolüsyon işlemi, dağılıma özgüligine sahiptir. Matematiksel olarak,

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

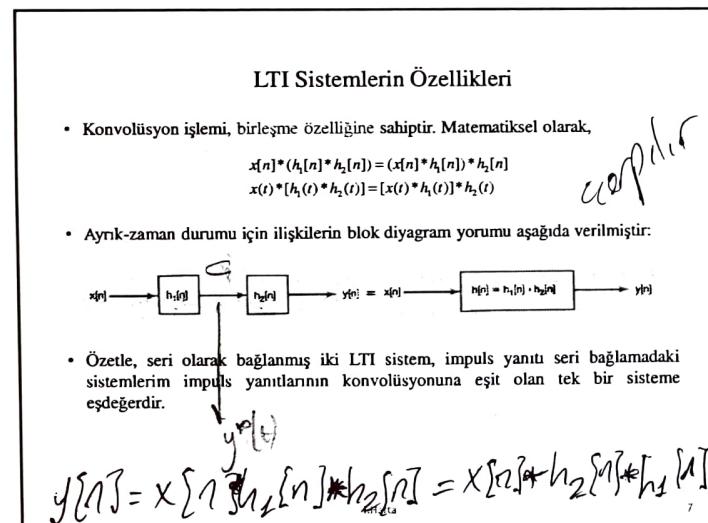
- Bu ilişkileri ispatlamak zor değildir. Sürekli-zaman durumu için ilişkilerin blok diyagram yorumu aşağıda verilmiştir:



- Özetle, paralel olarak bağlanmış LTI sistemler, impuls yanıt parel bağlamadaki LTI sistemlerin impuls yanıtlarının toplamına eşit olan tek bir sisteme eşdeğerdir.

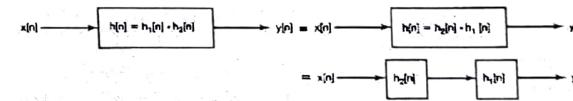
4 Hafta

6

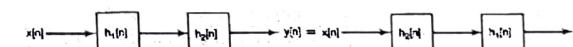


### LTI Sistemlerin Özellikleri

- Konvolüsyon işlemi değişme özgüligine sahip olduğundan iki işaretin konvolüsyonu herhangi bir sırada yapılabilir. O halde, değişme ve bireleşme özelliklerinden



- Sonuç olarak, seri olarak bağlanmış LTI sistemlerde sistemlerin sırası değiştirildiğinde toplam yanıt değişmeyecegi anlaşılmaktadır. Yani,



*if  $(h[n]) = \delta[n]$*

$$y[n] = x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] = x[n] // \text{etkisiz elen}$$

3

### LTI Sistemlerin Özellikleri

- Hafızasız sistem tanımından, LTI sistemlerin hafızasız olabilmesi için ayrık-zaman durumunda  $n \neq 0$  için  $h[n] = 0$ , sürekli-zaman durumunda ise  $t \neq 0$  için  $h(t) = 0$  olmalıdır. Yani,

$$h[n] = K\delta[n]$$

$$h(t) = K\delta(t)$$

*V  $\rightarrow$  1/200*

- $K = 1$  durumunda konvolüsyon toplamı ve konvolüsyon integrali aşağıdaki sonuçları verecektir:

$$x[n]*\delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) = x[n] \Rightarrow x[n]*\delta[n] = x[n]$$

$$x(t)*\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \Rightarrow x(t)*\delta(t) = x(t)$$

- Toplama işleminde, herhangi bir sayının sıfır ile toplamı kendine; çarpma işleminde herhangi bir sayının 1 ile çarpımı kendine eşittir. Konvolüsyon işleminde ise, bir işaretin impuls ile konvolüsyonu kendine eşit olmaktadır. O halde, konvolüsyon işleminin BİRİM OPERATÖRÜ impuls fonksiyonudur.

4.Hafta

9

### LTI Sistemlerin Özellikleri

ÖRNEK: Bir sürekli-zaman LTI sistemin girişi ile çıkışı arasındaki ilişki  $y(t) = x(t-t_0)$  ile verilmektedir. Ters sistemin impuls yanıtını bulunuz.

ÇÖZÜM: Sistemin impuls yanıtını bulmak için girişine  $\delta(t)$  uygulanmalıdır. O halde,

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

Sisteme  $x(t)$  uygulandığında çıkış

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0).$$

olup sistem girişi  $t_0$  kadar ötelemektedir. Çıkış, ters yönde  $t_0$  kadar öteleinirse giriş geri elde edilecektir. Yani, ters sistemin impuls yanıtı  $h_1(t) = \delta(t + t_0)$  olmalıdır. Yanınızı kontrol edelim:

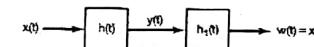
$$\begin{aligned} h(t) * h_1(t) &= \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) \\ &= \delta(t + t_0 - t_0) \\ &= \delta(t) \end{aligned}$$

4.Hafta

11

### LTI Sistemlerin Özellikleri

- Herhangi bir LTI sistemin tersinin de LTI olacağı gösterilebilir.
- Bir işaret, sisteme uygulanıp sistemin çıkışı da ters sisteme uygulandığında tekrar işaret geri elde edilir. Bu gözleml, sürekli-durumda aşağıda özetlenmiştir:



- O halde, sistem ve tersinin seri bağlanmasıından oluşan toplam sistemin impuls yanıt impuls fonksiyonu eşit olmalıdır. Sistemin ve tersinin impuls yanıtları sırasıyla  $h$  ve  $h_1$  ile gösterilsin. Impuls yanıtları arasındaki ilişki

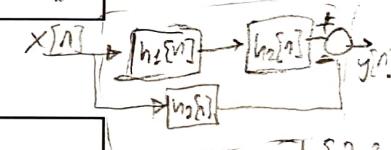
$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

$$h[n]*h_1[n] = \delta[n]$$

eşitlikleriyle verilir.

4.Hafta

10



### LTI Sistemlerin Özellikleri

- Bir LTI sistemin nedensel olabilmesi (çıkışın girişin gelecekteki değerlerine bağlı olmaması) için impuls yanıtı bağımsız değişkenin negatif değerleri için sıfır olmalıdır. Yani,

$$\begin{aligned} h[n] &= 0, \quad n < 0 \\ h(t) &= 0, \quad t < 0. \end{aligned}$$

- O halde, nedensel bir LTI sisteme giriş belirli bir ana kadar sıfır ise çıkış da o ana kadar sıfır olacaktır.

- Nedensel LTI sistemler için konvolüsyon denklemleri aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k)h[n-k] = \sum_{k=0}^{n-1} h[k]x[n-k] \quad \text{bu yededen firdan boylar} \\ y(t) &= \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

4.Hafta

12

$$\begin{aligned} h[n] &= h_1[n] * h_2[n] - h_2[n] \\ h_1[n] &= \delta[n+2] \\ h_2[n] &= \delta[n-2] \\ h_3[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h[n] &= h_1[n] * h_2[n] - h_2[n] \\ &= u[n+2] * \delta[n-2] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \end{aligned}$$

$$= \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) u[n]$$

*-oo < x < 0 arası nedensel bir sistem de geri yok*

$|x[n]| \leq C < \infty$   $|y[n]| \leq B < \infty$

### LTI Sistemlerin Özellikleri

- Bir LTI sistemin kararlı olabilmesi için impuls yanıtının sağlaması gereken koşulu aynı-zamanda çıkaralım. Sürekli-zamanda adımlar benzer olduğundan sadece sonuç verilecektir.
- $B$  bir sabit olmak üzere, impuls yanımı  $y[n]$  olan sistemin girişine tüm  $n$  değerleri için  $|x[n]| < B$  koşulunu sağlayan herhangi bir giriş uygulandığında çıkışın genliği konvolüsyon toplamı kullanılarak bulunabilir:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] \right|$$

- Sonsuz tane sayının toplamının mutlak değeri, sayıların mutlak değerlerinin toplamından küçük (veya eşit) ve iki sayının çarpımının mutlak değeri sayıların mutlak değerlerinin çarpımına eşit olduğundan

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]| \leq A \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

4.Hafta 13

Kararlı sistem  
Input cevabı  
mutlak toplanabilir olsat

### LTI Sistemlerin Özellikleri

- En son toplamada, girişin genliği tüm anlarda  $B'$ den küçük olduğundan, girişin genliği yerine  $B$  yazılırsa toplamın değeri daha fazla büyüyeceğinden

$$|y[n]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

- Son eşitsizlikten, çıkışın sonlu ( $|y[n]| < \infty$ ) ve dolayısıyla sistemin kararlı olabilmesi için impuls yanıtının mutlak toplanabilir olması gereği sonucu çıkmaktadır:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

- Benzer şekilde, bir sürekli-zaman LTI sistemin kararlı olabilmesi için impuls yanıtının mutlak integrallenebilir olması gereği gösterilebilir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

4.Hafta

6CO 1cm  
fonksiyen değer  
varsayı nedensel  
değil

$$h[n] = 0,9^n u[n-2] + 1,1^n u[n]$$

nedensel ✓  
kararsız

$$+ 1,1^n u[n]$$

nedensel  
değil  
kararsız

### LTI Sistemlerin Özellikleri

ÖRNEK: İmpuls yanları aşağıda verilen sistemlerin kararlığını belirleyiniz.

- (a)  $h[n] = \delta(n-n_0)$ , (b)  $h(t) = \delta(t-t_0)$ , (c)  $h[n] = u(n)$ , (d)  $h(t) = u(t)$ .

ÇÖZÜM:

- (a) Sistem kararlıdır çünkü  $\sum |h[n]| = \sum |\delta[n-n_0]| = 1 < \infty$
- (b) Sistem kararlıdır çünkü  $\int |h(t)| dt = \int |\delta(t-t_0)| dt = 1 < \infty$
- (c) Sistem kararsızdır çünkü  $\sum |h[n]| = \sum |u[n]| = \infty$
- (d) Sistem kararsızdır çünkü  $\int |h(t)| dt = \int |u(t)| dt = \infty$

4.Hafta

15

$$h[n] = \alpha^n$$

$|\alpha| < 1$  ise Kararsız ( $\infty$ )  
 $|\alpha| > 1$  ise Kararlı ( $0$ )

### LTI Sistemlerin Özellikleri

- LTI sistemlerin davranışını belirlemek için BİRİM BASAMAK YANITI (sisteme birim basamak uygulandığında elde edilen yanıt) da kullanılabilir. Bu nedenle, impuls yanımı ile birim basamak yanımı arasındaki ilişkiyi bulmak faydalı olabilir.

- Aynı-zamanda sistemin birim basamak yanımı  $s[n]$  ile gösterelim.  $h[n]$  ile  $s[n]$  arasındaki ilişki konvolüsyon toplamı kullanılarak belirlenebilir:

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} h[k] - s[n-1] = \sum_{k=0}^{n-1} h[k]$$

- Yukarıdaki ilişki eşdeğer olarak,  $h[n] = s[n] - s[n-1]$  şeklinde de yazılabilir.

- Sürekli-durumda  $h(t)$  ile  $s(t)$  arasındaki ilişki konvolüsyon integralinden bulunur:

$$s(t) = \int h(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int h(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t)$$

4.Hafta

16

$$x(t) = u(t) \rightarrow y(t) = s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \Rightarrow h(t) \frac{ds(t)}{dt} = s(t) \quad t > 0$$

### Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- $y(t)$  çıkış,  $x(t)$  giriş olmak üzere, bir sürekli-zaman sisteminde giriş-çıkış ilişkisi aşağıdaki gibi olsun:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

- Diferansiyel denklem giriş ile çıkış arasında bir kısıt vermektedir, ancak bu kısıt çözüm için yeterli değildir. Çözüm için başlangıç koşulları da belirtilmelidir.
- Bu derste, nedensel sürekli-zaman LTI sistemleri tanımlamada diferansiyel denklemler kullanacağız. Nedensel LTI sistemler için başlangıç koşulları özel bir şekildedir.
- Diferansiyel denklemi,  $K$  gerçel bir sayı olmak üzere  $x(t) = K e^{3t} u(t)$  giriş'i için çözelim.  $y(t)$ , özel ( $y_p(t)$ ) ve homojen çözümün ( $y_h(t)$ ) toplamına eşittir:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

4.Hafta

17

### Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- Özel çözüm diferansiyel denklemi sağlayan bir çözüm, homojen çözüm ise giriş sifirken diferansiyel denklem'in çözümüdür.

- Özel çözümün girişle aynı forma sahip olduğu ancak parametrelerinin bilinmediği varsayırlar. Yani,  $A$  bilinmeyen bir sabit olmak üzere  $y_p(t) = Ae^{3t}$ . Çözüm, diferansiyel denklemde yerine konulursa:

$$3Ae^{3t} + 2Ae^{3t} = Ke^{3t}, \quad t > 0 \Rightarrow A = \frac{K}{5}, \quad y_p(t) = \frac{K}{5}e^{3t}$$

- Hojojen çözümün,  $B$  ve  $s$  sabitler olmak üzere  $y_h(t) = Be^{st}$  şeklinde olduğu varsayırlar.  $y_h(t)$  diferansiyel denklemde yerine konulursa, aşağıdaki sonuç bulunur:

$$sBe^{st} + 2Be^{st} = e^{st}(s+2) = 0$$

- $s = -2$  olmalıdır ve homojen çözüm herhangi bir  $B$  için  $Be^{-2t}$ dir. Sonuç olarak,

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Be^{-2t} + \frac{K}{5}e^{3t}, \quad t > 0.$$

4.Hafta

18

### Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- Göründüğü gibi, soruda verilen bilgiler  $B$  sabitinin değerini belirlemek için yeterli değildir.
- Sistemin nedensel olduğu varsayırlrsa,  $t < t_0$  için  $x(t) = 0$  ise,  $t < t_0$  için  $y(t) = 0$  olmalıdır. Örneğimizde  $t < 0$  için  $x(t) = 0$  olup  $t < 0$  için  $y(t) = 0$  olacaktır. Çözüm  $t = 0$ 'da hesaplanıp sıfır eşitlenirse  $B$  hesaplanabilir:

$$0 = B + \frac{K}{5} \Rightarrow B = -\frac{K}{5}$$

- O halde, çözüm tam olarak aşağıdaki gibi olur.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{K}{5}(e^{3t} - e^{-2t}), & t > 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = \frac{K}{5}(e^{3t} - e^{-2t})u(t)$$

4.Hafta

19

### Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- Genelleştirme yaparsak,  $N$ . Dereceden sabit katsılılı diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde verilir:

$$\sum_{i=0}^N a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^N b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}$$

- Çıkışın en yüksek dereceden türnevine diferansiyel denklem'in derecesi denir. Çözüm, homojen ve özel çözümlerin toplamına eşittir.

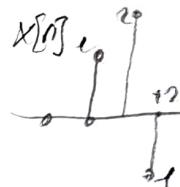
- Diferansiyel denklem tek başına çözüm için yeterli değildir. Başlangıç koşulları da belirtilmelidir. Farklı başlangıç koşulları farklı çözümler verir.

- Ancak, sistem nedensel ise  $t < t_0$  için  $x(t) = 0$  ise,  $t < t_0$  için  $y(t) = 0$  olacağundan başlangıç koşulları bulunabilir ve  $t > t_0$  için  $y(t)$  hesaplanabilir. İlgili başlangıç koşulları şöyledir:

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \frac{d^2y(t_0)}{dt^2} = \dots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0.$$

4.Hafta

20



09.10.2017

$$\textcircled{2} \quad y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

$$x[n] = \delta[n]$$

$$y[0] = 1$$

$$y[1] = \frac{1}{2}$$

$$y[2] = \frac{1}{4}$$

$$y[3] = \frac{1}{8}$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

~~$$BBE \quad y[n] + y[n-1] \\ = x[n] + 2x[n-2]$$~~

→ 1) block diagram form

### Fark Denklemleriyle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- $N$ . dereceden sabit katsayılı bir fark denklemi aşağıdaki şekilde verilir:
$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$
- Cözüm, homojen ve özel çözümlerin toplamına eşittir.
  - Fark denklemi tek başına çözüm için yeterli değildir. Başlangıç koşulları da belirtilmelidir. Fark denklemi şu şekilde de düzenlenebilir:
- $$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\}$$
- O halde,  $y[n]$ 'nin hesaplanabilmesi için  $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$  başlangıç koşullarının bilinmesine gerek vardır.
  - Sürekli durumda olduğu gibi sistemin nedensel olduğu biliniyorsa başlangıç koşulları belirlenebilir ve fark denklemi çözülebilir.

4.Hafta

21

### Fark Denklemleriyle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- Fark denkleminin,  $N$  nin sıfırdan farklı olup olmamasına göre iki şekli vardır:
 
$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\}, \quad N \neq 0,$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^N \left( \frac{b_k}{a_0} \right) x[n-k], \quad N = 0.$$
- $N = 0$  durumunda, çıkış sadece girişe bağlı olup çözüm için başlangıç koşulları gerekli değildir. Bu tür denklemlere YINELEMELİ OLMIYAN denklem denilir.
- Yinelemeli olmayan fark denkleminde  $x[n] = \delta[n]$  yapılırsa sistemin impuls yanıt elde edilir:
 
$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$
- İmpuls yanıtı, sonlu sayıda değer alındıktan yinelemeli olmayan fark denklemleriyle tanımlanan LTI sistemlere SONLU İMPULS YANITLI (FIR) sistem denilir.

4.Hafta

22

$$y[n] = x[n] - 2x[n-1]$$

$$y[0] = 1$$

$$y[1] = 2$$

$$y[2] = -3$$

$$y[3] = -6$$

$$y[4] = 2$$

$$y[5] = 0$$

$$x[n] = \delta[n]$$

$$h[0] = 1$$

$$h[1] = 0$$

$$h[2] = 2$$

$$h[3] = 0$$



$$y[n] = h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1]$$

çıkış çıkış ilişkisi  
yell, ise  $h[n]$  ekle  
edilebilir

### Fark Denklemleriyle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- $N \neq 0$  durumunda, çıkış hem giriş hem çıkışa bağlı olup için başlangıç koşullarına gerek vardır. Bu tür fark denklemi YINELEMELİ fark denklemi denilir.
- ÖRNEK: Giriş-çıkış ilişkisi aşağıdaki fark denklemiyle verilen ayrık-zaman nedensel LTI sistemi ele alınır:
 
$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1]$$
- Gördüğü gibi, çıkışın herhangi bir andaki değerinin hesaplanabilmesi için bir önceki değeri bilinmelidir.
- $x[n] = K\delta[n]$  olsun.  $n < 0$  için giriş sıfır olduğundan  $n < 0$  için  $y[n] = 0$  olmalıdır. Bu nedenle,  $n < 0$  için çıkışın hesaplanması gereklidir.
- $n \geq 0$  için başlangıç koşulu olarak  $y[-1] = 0$  seçip hesaplama başlayabiliriz.

4.Hafta

23

### Fark Denklemleriyle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- $$y[0] = x[0] + \frac{1}{2}y[-1] = K$$
- $$y[1] = x[1] + \frac{1}{2}y[0] = \frac{1}{2}K$$
- $$y[2] = x[2] + \frac{1}{2}y[1] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 K$$
- $$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n K$$
- $K = 1$  için  $x[n] = \delta[n]$  olup sistemin impuls yanımı  $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$  olur.
  - İmpuls yanıtı, sonsuz sayıda değer alındıktan yinelemeli fark denklemleriyle tanımlanan LTI sistemlere SONSUZ İMPULS YANITLI (IIR) sistem denilir.

4.Hafta

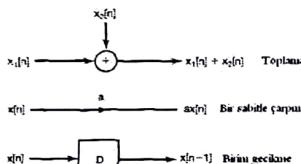
24

### Birinci Dereceden Fark Denklemleriyle Tanımlanmış Ayrık-Zaman LTI Sistemlerin Blok Diyagram Gösterilimi

- Aşağıdaki fark denklemiyle tanımlanan basit bir ayrık-zaman nedensel LTI sistemi ele alalım:

$$y[n] = bx[n] - ay[n-1]$$

- Bu sisteme karşılık gelen blok diyagram gösterimini elde etmek için toplama, bir sabitle çarpma ve birim gecikme operatörleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

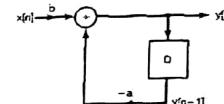


4.Hafta

25

### Birinci Dereceden Fark Denklemleriyle Tanımlanmış Ayrık-Zaman LTI Sistemlerin Blok Diyagram Gösterilimi

- O halde, fark denklemi aşağıda verilen blok diyagramla temsil edilebilir.



- Blok diyagram, sistemin gerçekleştirilebilmesi için hafiza elemanına ve başlangıç koşullarının bilinmesine gerek olduğunu göstermektedir.

- Birim gecikme elemanı hafiza görevini görüp hesaplamalar için gerekli bir önceki çıkış değerini saklamaktadır. Sistem nedensel ise, giriş uygulanıncaya kadar hafiza elemanında saklanan değer sıfırdır.

4.Hafta

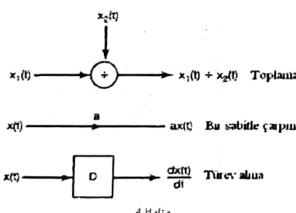
26

### Birinci Dereceden Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Sürekli-Zaman LTI Sistemlerin Blok Diyagram Gösterilimi

- Aşağıdaki fark denklemiyle tanımlanan basit bir ayrık-zaman nedensel LTI sistemi ele alalım:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t) \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{a} \frac{dy(t)}{dt} + bx(t)$$

- Bu sisteme karşılık gelen blok diyagram gösterimini elde etmek için toplama, bir sabitle çarpma ve türev alma operatörleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

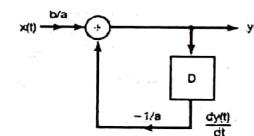


4.Hafta

27

### Birinci Dereceden Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Sürekli-Zaman LTI Sistemlerin Blok Diyagram Gösterilimi

- O halde, diferansiyel denklem aşağıda verilen blok diyagramla temsil edilebilir.



- Türevin gerçekleştirilmesi zordur ve türev işlemi gürültü ile hatalara karşı oldukça duyarlıdır.

- Integral işleminin gerçekleştirilmesi ise kolaydır. Bu nedenle blok diyagram gösteriminde integratör kullanılması tercih edilir.

4.Hafta

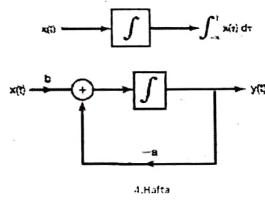
28

Birinci Dereceden Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Sürekli-Zaman  
LTI Sistemlerin Blok Diyagram Gösterilimi

- Diferansiyel denklemin her iki tarafının integrali alınırsa eşdeğer gösterim elde edilir:

$$\frac{dy(t)}{dt} = bx(t) - ay(t) \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t [bx(\tau) - ay(\tau)] d\tau$$

- Bu sisteme karşılık gelen blok diyagram gösterimini elde etmek için toplama, bir sabitle çarpma ve integral alma işlemleri gereklidir. Integratör tanımı ve sistemin blok diyagram gösterimini aşağıda verilmiştir:



4.Hafta

29

Birinci Dereceden Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Sürekli-Zaman  
LTI Sistemlerin Blok Diyagram Gösterilimi

- İntegratörler, işlemel kuvvetlendiriciler kullanılarak gerçekleştirilebilir.
- Bu nedenle, sürekli-zaman sistemlere karşılık gelen blok diyagram gösterimini modern analog hesaplayıcılara temel teşkil etmektedir.
- İntegratör hafıza görevini görüp hesaplamlar için gerekli başlangıç değerini saklamaktadır. Bunu görmek için, integral işleminin aşağıdaki şekilde yeniden düzenleneneceğine dikkat ediniz:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t [bx(\tau) - ay(\tau)] d\tau \Rightarrow y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t [bx(\tau) - ay(\tau)] d\tau$$

- İntegratör  $y(t_0)$  başlangıç değerini saklamaktadır.

- Hem ayrık hem de sürekli durumda yüksek dereceden sistemlere karşılık gelen blok diyagramlar benzer şekilde elde edilebilir.

4.Hafta

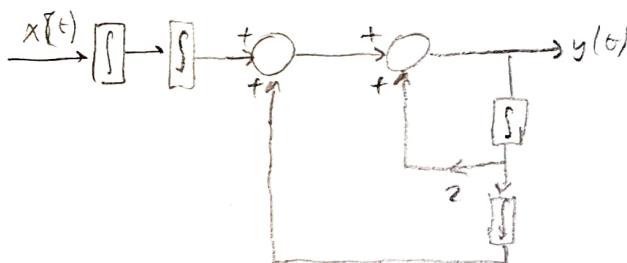
30

Not: Diferansiyel Denklemlerin  
Blok Diyagramları

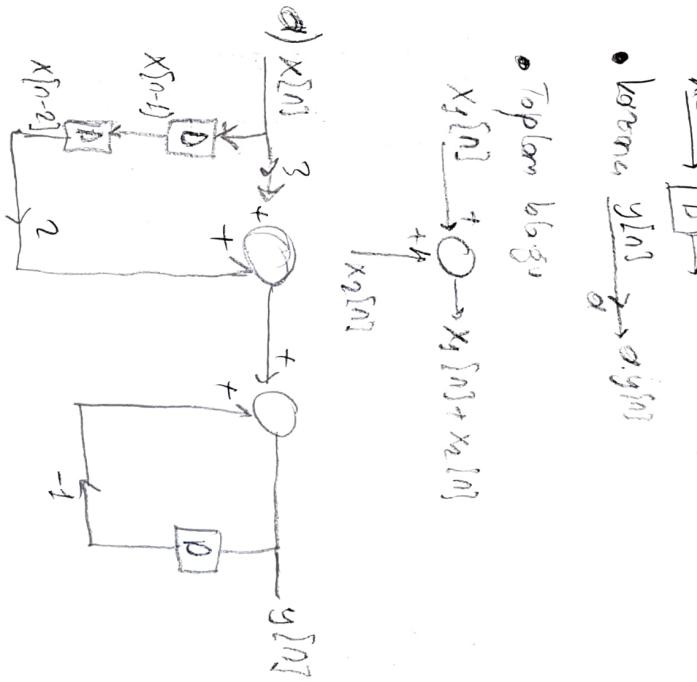
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 2\frac{dy(t)}{dt} - y(t) = x(t)$$

2.İst. mevcut  $\rightarrow$  1.trees, 2.integral

$$y(t) = \int \int x(t) + \int \int y(t) + 2 \int y(t)$$



$$y(t) = \int \int x(t) + 3x(t_0) + 2x(t_0-1) - y(t_0-1) = 3 +$$



$y[n] + y[n-1] = x[n] + 3x[n-1]$   
 $y[0] = 0$ ,  $x[0] = 1$ ,  $x[1] = 2$ ,  $x[2] = 1$ ,  $x[3] = 0$ ,  $x[4] = 1$ ,  $x[5] = 2$ ,  $x[6] = 1$ ,  $x[7] = 0$   
 $y[0] = 0$ ,  $y[1] = 1$ ,  $y[2] = 3$ ,  $y[3] = 1$ ,  $y[4] = 0$ ,  $y[5] = 1$ ,  $y[6] = 3$ ,  $y[7] = 1$

Hafta 5:  
Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

### Ele Alınacak Ana Konular

- LTI sistemlerin karmaşık üstel işaretlere yanıtı
- Sürekli-zaman periyodik işaretlerin Fourier serisi gösterilimi
- Fourier serisinin yakınsaklılığı
- Sürekli-zaman Fourier serisinin özellikleri

$$A \sin(\omega t + \phi) \rightarrow [D \overset{D}{\rightarrow} B] \sin(\omega t + \beta)$$

### LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

- LTI sistemlerin analizinde faydalı bir yaklaşım, işaretleri aşağıdaki iki özelliği sağlayan temel işaretlerin doğrusal kombinasyonu şeklinde temsil etmektedir:
  - Temel işaretler, geniş ve faydalı bir işaret kümесini oluşturabilmelidir.
  - Bir LTI sistemin temel bir işarete yanıtı basit olmalıdır. Böylece, LTI sistemin bir girişe yanıtı, basit yanıtların doğrusal kombinasyonu olacaktır.
- Bu iki özelliği, hem sürekli hem de aynık durumda karmaşık üstel işaretler sağlamaktadır.
- LTI bir sistemin çıkışı  $y(t)$  veya  $y[n]$ , girişin  $x(t)$  veya  $x[n]$ , karmaşık bir sabitle çarpımına eşitse girişe SİSTEMİN ÖZFONKSİYONU, karmaşık sabitle SİSTEMİN ÖZDEĞERİ denilir.
- $x$  ve  $z$  karmaşık sayılar olmak üzere, aşağıda gösterildiği gibi sürekli-zamanda  $e^{\alpha t}$ , aynı zamanda  $z^m$  LTI sistemlerin özfonksiyonudur.

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow [h(t)] \rightarrow y(t) = x(t) * h(t) \\ &= H(s), X(t) \\ &\text{z = konjugat degeri} \end{aligned}$$

### LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

- İmpuls yanımı  $h(t)$  olan bir sürekli-zaman LTI sistemin girişine  $x(t)=e^{\alpha t}$  uygulandığında sistemin çıkışı  $y(t)$  konvolüsyon integralinden hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{\alpha(t-\tau)}d\tau \\ &= e^{\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-\alpha\tau}d\tau \end{aligned}$$

- Eşitliğin sağındaki integralin yakınsadığını varsayılm. İntegralin değeri  $s$ 'e bağlıdır ve karmaşık bir sayıdır. İntegralin sonucunu  $H(s)$  ile gösterelim:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

- O halde,  $y(t) = H(s)e^{\alpha t}$  çıkış, girişin karmaşık bir sayı  $H(s)$  ile çarpımına eşittir. Böylece, karmaşık üstel  $e^{\alpha t}$  işaretinin sürekli-zaman LTI sistemlerin özfonksiyonu olduğu gösterilmiş olur.

$$S = \sigma + j\omega$$

### LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

- Benzer işlemler ayrık-zamanda yapılabilir. İmpuls yanımı  $h[n]$  olan bir ayrık-zaman LTI sistemin  $z^n$  girişine olan yanıtı konvolüsyon toplamından hesaplanır:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \\ &= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \end{aligned}$$

- Eşitliğin sağindaki toplamanın yakınsadığını varsayılmı. Toplamanın değeri  $z$ 'ye bağlıdır ve karmaşık bir sayıdır. Toplamanın sonucunu  $H(z)$  ile gösterelim:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

- O halde,  $y[n] = H(z)z^n$  (çıkış, girişin karmaşık bir sayı ile çarpımına eşittir). Yani, karmaşık üstel  $z^n$  işaretinin ayrık-zaman LTI sistemlerin özfonksiyonu olduğunu göstermiş olduk.

5

### LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

- Yukarıdaki sonucu genelleştirilebilir. Bir sürekli-zaman LTI sistemin girişi  $x(t)$ , karmaşık üstel işaretlerin ağırlıklı toplamı (doğrusal kombinasyonu) olsun:

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$$

- Doğrusallık ve özfonksiyon özelliklerinden, sistemin çıkışı aşağıdaki gibi olur:

$$y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

- Benzer şekilde, bir ayrık-zaman LTI sistemin girişi  $x[n]$ , ayrık-zaman karmaşık üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu olsun:

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n$$

- Sistemin çıkışı aşağıdaki gibi olur:

$$y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

7

### LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

- İmpuls yanımı  $h(t)$  olan bir sürekli-zaman LTI sisteme üç adet karmaşık üstel işaretin toplamına eşit olan bir giriş uygulayalım.

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t} = \sum_k a_k e^{s_k t}$$

- Özfonksiyon özelliğinden, sistemin karmaşık üstel işaretlere yanıtı şöyledir:

$$\begin{aligned} a_1 e^{s_1 t} &\rightarrow a_1 H(s_1) e^{s_1 t} \\ a_2 e^{s_2 t} &\rightarrow a_2 H(s_2) e^{s_2 t} \\ a_3 e^{s_3 t} &\rightarrow a_3 H(s_3) e^{s_3 t} \end{aligned}$$

- Sistem doğrusal olduğundan, karmaşık üç üstel işaretin toplamından oluşan girişi olan yanıtı üstel işaretlere olan yanıtlarının toplamına eşittir:

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

8

### LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

- GÖZLEM:** Bir LTI sistemin girişi karmaşık üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu ise, çıkış da aynı üstel işaretlerin doğrusal bir kombinasyonudur. Çıkış işaretinin gösterimindeki katsayılar, giriş işaretinin gösterimindeki katsayılar ile karmaşık üstel işaretlere karşılık gelen sistem özdeğerlerinin çarpımına eşittir.

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \quad y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

- Bu gözlem, Fourier ve kendisinden sonra gelenlerin herhangi bir işaretin karmaşık üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu şeklinde nasıl yazılabileceğini hakkında araştırma yapmalarına öncayak olmuştur.

- Bu ve önlüüzdeki haftalar, soruyu sırasıyla sürekli ve ayrık-zaman periyodik işaretler için yanıtlayacak, daha sonraki haftada periyodik olmayan işaretler durumunu ele alacağız.

- $s$  ve  $z$  herhangi bir karmaşık sayı olabilir. Ancak, Fourier analizinde  $s$  ve  $z$  sırasıyla  $s = j\omega$  ve  $z = e^{j\omega}$  varsayılacaktır. Laplace ve  $z$ -dönüşüm konularında  $s$  ve  $z$  herhangi bir karmaşık sayıya genelleştirilecektir.

9

**LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı**

ÖRNEK: Bir sürekli-zaman LTI sistemin giriş ile çıkışı arasındaki ilişki  $y(t) = x(t-3)$  ve sisteme uygulanan giriş  $x(t) = e^{j\omega t}$  olsun. Sistemin çıkışı söyledir:

$$y(t) = e^{j\omega(t-3)} = e^{-j6e^{j2t}}$$

Uygulanan giriş bir öznönsiyon olduğundan bu sonucu aslında bekliyorduk. Girişin karşılık gelen Özdeğeri hesaplayalım. Sistemin impuls yanıtının  $h(t) = \delta(t-3)$  olduğu açıklandı. O halde,

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-3) e^{-s\tau} d\tau = e^{-3s}$$

Örneğimizde  $s = j2$  olduğundan, girişin karşılık gelen Özdeğeri  $H(j2) = e^{-j6}$  olarak elde edilir. Görüldüğü gibi çıkış, giriş ile girişin karşılık gelen Özdeğeri çarpımına eşittir.

$$x(t) = e^{\frac{1}{3}2t}$$

$$c^{-2s} \quad s = 2j$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} e^{j\omega t} \delta(t-t_0) dt = f(t_0)$$

09.10.2017

**Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi**

- Harmonik ilişkili karmaşık üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu şeklinde yazılan bir sürekli-zaman işaretin ele alalım:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

~~x(t) = ... + a\_{-2} e^{-j2t} + a\_0 e^{j0t} + a\_2 e^{j2t} + a\_4 e^{j4t} + ...~~

- Harmonik ilişkili üstel işaretlerin herbirinin  $T$  ile periyodik olduğunu görmüştük. O halde,  $x(t)$ 'de  $T$  ile periyodiktir. (Bkz. 1. hafta slayt 27-28)
- $k = 0$  için, toplamadaki üstel işaret sabittir.  $k = \pm 1$  için üstel işaretlerin temel frekansı  $\omega_0$ 'dır ve bu terimlere TEMEL veya BİRİNCİ HARMONİK bileşenler denir.  $k = \pm 2$  için üstel işaretlerin temel frekansı  $2\omega_0$ 'dır ve bu terimlere ikinci harmonik bileşenler denir. Genel olarak,  $k = \pm N$  için toplamadaki karmaşık üstel işaretlere  $N$ . HARMONİK bileşenler denir.
- Periyodik bir işaretin yukarıdaki gibi toplam serisi şeklinde ifade edilmesine FOURIER SERİSİ gösterilimi denir.

**Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi**

ÖRNEK: Temel frekansı  $2\pi$  olan bir sürekli-zaman periyodik işaretin Fourier serisi gösterilimi aşağıda verilmiştir:

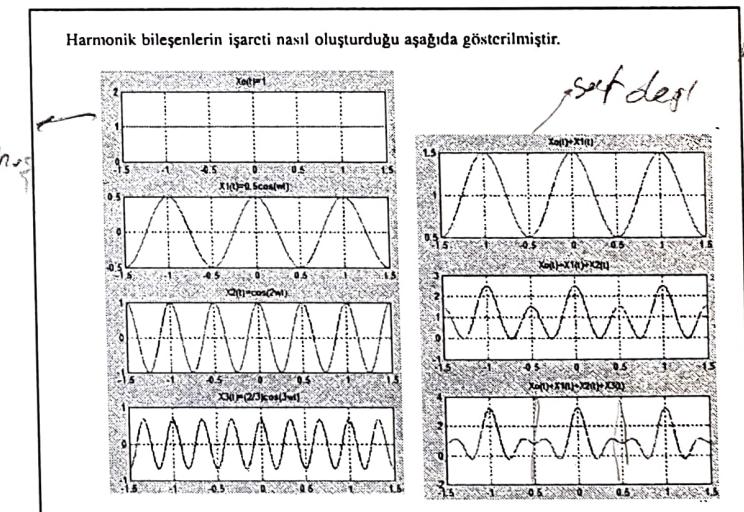
$$x(t) = \sum_{k=-3}^3 a_k e^{jk2\pi t}$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}, \quad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

Katsayılar toplamada yerine konularak işaretin analitik ifadesi elde edilebilir:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t})$$

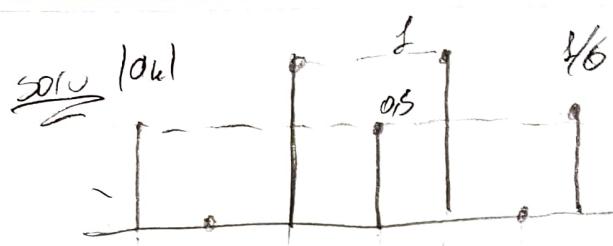
Euler ilişkisi kullanılarak, işaret trigonometrik fonksiyonlar cinsinden de yazılabilir:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t)$$


$$x(t) = \dots + a_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + a_0 e^{-j\omega_0 t} + a_2 e^{j2\omega_0 t} + a_4 e^{j4\omega_0 t} + \dots$$

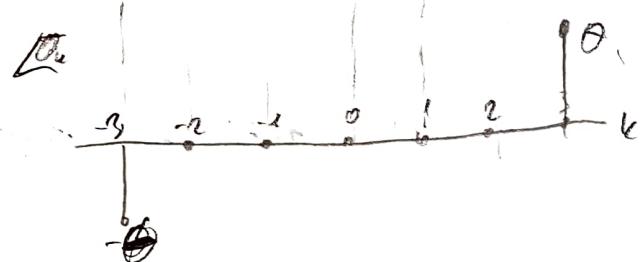
$\boxed{\text{DC Bileşeni}}$

2. Harmonik      1. Harmonik



$x(t) = ?$  trigonometrische Werte?

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{j k \omega_0 t}$$



$$x(t) = \frac{1}{2} + 2e^{j\omega_0 t} + 2e^{-j\omega_0 t} + \underbrace{\frac{1}{6} e^{j3\omega_0 t}}_{d_3} + \underbrace{\frac{1}{6} e^{-j3\omega_0 t}}_{d_{-3}}$$

$$\frac{1}{3} \frac{e^{j(3\omega_0 t + \theta)} + e^{-j(3\omega_0 t + \theta)}}{2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + 2 \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cos(3\omega_0 t + \theta)$$



$$\textcircled{1} \quad X(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k)$$

09.10.2017

$$\textcircled{1} \quad X(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} R_k \sin e^{jk\omega_0 t}$$

~~İşlem formu~~

### Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Sürekli-zaman gerçel periyodik işaretler için Fourier serisinin diğer bir gösterilimi vardır. Gerçel bir işaret için  $x(t) = x^*(t)$  olduğundan

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{jk\omega_0 t}$$

- Son ifade, Fourier serisi gösterilimi ile karşılaştırılırsa  $a_k = a_k^*$  veya eşdeğer olarak  $a_k^* = a_k$  sonucu çıkar. Bu sonuctan yararlanılarak Fourier serisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}] \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t}] \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \{a_k e^{jk\omega_0 t}\} \end{aligned}$$

17

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

~~İşlem formu~~

### Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Son ifadede  $a_k$  kutupsal koordinatlarında  $A_k e^{j\theta_k}$  şeklinde yazılsa aşağıda verilen eşdeğer trigonometrik gösterim elde edilir:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \{A_k e^{j\theta_k} e^{jk\omega_0 t}\} \\ \textcircled{2} \quad &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \end{aligned}$$

- $a_k$  kartezien koordinatlarda  $B_k + jC_k$  şeklinde yazılsa aşağıda verilen diğer bir trigonometrik gösterim elde edilir:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \{(B_k + jC_k) e^{jk\omega_0 t}\} \\ \textcircled{3} \quad &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t)) \\ &\quad \phi_k = B_k + jC_k \end{aligned}$$

18

### Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Şimdi de, periyodik bir işaret için Fourier serisi katsayılarının  $a_k$  nasıl hesaplanabileceğini tartışacağız.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad a_k = ?$$

- Fourier serisi gösteriminde, eşitliğin her iki tarafı  $e^{-jn\omega_0 t}$  ile çarpıldıkten sonra çarpının  $[0, T]$  aralığında integrali alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt &= \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[ \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \right] \end{aligned}$$

$\Rightarrow T$

- Köşeli parantez içindeki ifade Euler formülü kullanılarak yeniden düzenlenebilir:

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \int_0^T \cos((k-n)\omega_0 t) dt + j \int_0^T \sin((k-n)\omega_0 t) dt$$

19

$$\int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = T a_k$$

### Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \int_0^T \cos((k-n)\omega_0 t) dt + j \int_0^T \sin((k-n)\omega_0 t) dt$$

- $\textcircled{1} \quad$   $k \neq n$  için  $\cos((k-n)\omega_0 t)$  ve  $\sin((k-n)\omega_0 t)$  işaretleri  $T/k\pi$  temel periyodu ile periyodiktir. İntegralin aldığı aralık  $T$  uzunlığında olup temel periyodun  $k\pi$  katıdır.

- Sinüs ve kosinüs işaretlerinin bir periyodunda, işaretlerin sıfırın üstünde ve altında kalan kısımları aynı alana sahip olup bu işaretlerin bir periyod ve dolayısıyla da bir periyodon tamsayı katı uzunlığındaki bir aralıktaki integrali sıfır eşittir. Özetle,  $k \neq n$  için her iki integral sıfır eşittir.

- $\textcircled{2} \quad$   $\textcircled{1} \quad$   $k = n$  için, integral 1 olup integralin sonucu  $T$  ye eşittir. Sonuç olarak,

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

- O halde, seri gösterimindeki katsayılar şöyle hesaplanır:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

*Analis dentelesse (dik kotsapısı var)*

### Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Yukarıda bulunan sonucun,  $T$  uzunluklu herhangi bir aralık için geçerli olduğunu dikkat ediniz.  $T$  uzunluklu herhangi bir aralık boyunca integral  $\int_T$  notasyonu ile gösterilmek üzere, sürekli-zaman periyodik işaretin Fourier serisine açılımı ve açılımdaki katsayıların hesabı aşağıdaki eşitliklerde verilmiştir:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t} \\ a_k &= \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk(2\pi/T)t} dt \end{aligned}$$

SENTEZ  
Denklem  
(İşaretin  
sabitini  
bulmak  
isteyen)  
Analiz Denklemi

- İşaretin seri şeklinde gösterilimine SENTEZ, katsayıların nasıl hesaplanacağını veren eşitlige ise ANALİZ denklemi denilir.  $a_0$  katsayısi, işaretteki sabit veya DC bileşen olup işaretin bir periyod boyunca ortalama değeridir:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$$

21

### Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

İlk önce  $a_0$ 'yı belirleyelim.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$$

Diger katsayılar ( $a_k$ ,  $k \neq 0$ ) benzer şekilde hesaplanır:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt$$

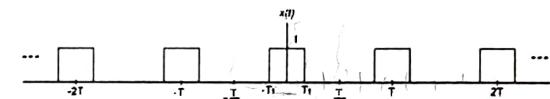
$$a_k = \frac{2}{k\omega_0 T} \left[ \frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j} \right] = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\sin(k \frac{2\pi}{T} T_1)}{k\pi}$$

$a_k$  katsayıları sabit bir  $T_1$  ve değişik  $T$  değerleri için aşağıda çizilmiştir. Bu önek için katsayılar gerçek çıktıından katsayılar için tek bir grafik (genlik grafiği) yeterli olmuşdur. Katsayıların karmaşık sayı olması halinde iki grafisinin (genlik ve faz) gerekliliğine dikkat ediniz.

22

### Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

ÖRNEK: Temel periyodu  $T$  ve temel frekansı  $\omega_0 = 2\pi/T$  olan periyodik kare dalgafunction Fourier serisi gösterimini elde ediniz.



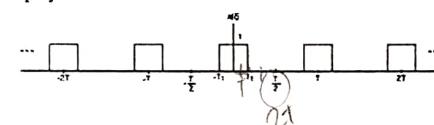
ÇÖZÜM: İşaretin bir periyodunun matematiksel ifadesi şöyledir:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 \leq |t| < T/2 \end{cases}$$

Fourier serisi katsayılarını bulmak için  $T$  uzunluklu herhangi bir aralık seçilebilir. İşaret,  $t = 0$  etrafında simetrik olduğundan aralık olarak  $-T/2 \leq t \leq T/2$  seçilmesi mantıklıdır.

23

~~T=4T\_1~~ için  $a_k$  katsayılarını hesaplayalım.



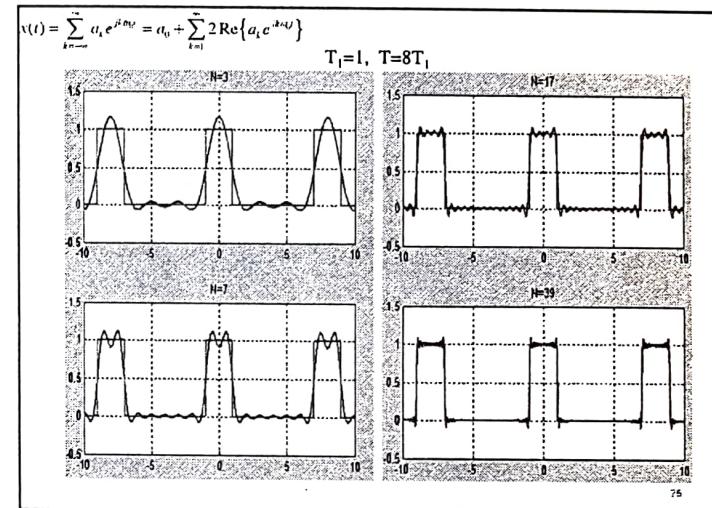
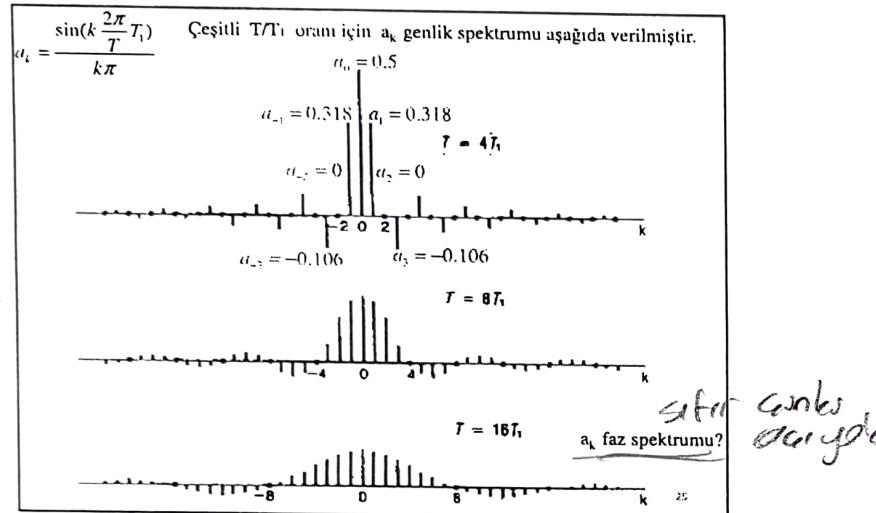
$$a_0 = \frac{2T_1}{T} = \frac{2T_1}{4T_1} = 0.5$$

$$k = 1 \text{ için } a_1 = \frac{\sin(\frac{2\pi}{4T_1} T_1)}{1\pi} = 0.318 \quad k = -1 \text{ için } a_{-1} = \frac{\sin(-\frac{2\pi}{4T_1} T_1)}{-1\pi} = 0.318$$

$$k = 2 \text{ için } a_2 = \frac{\sin(2 \cdot \frac{2\pi}{4T_1} T_1)}{2\pi} = 0 \quad k = -2 \text{ için } a_{-2} = \frac{\sin(-2 \cdot \frac{2\pi}{4T_1} T_1)}{-2\pi} = 0$$

$$k = 3 \text{ için } a_3 = \frac{\sin(3 \cdot \frac{2\pi}{4T_1} T_1)}{3\pi} = -0.106 \quad k = -3 \text{ için } a_{-3} = \frac{\sin(-3 \cdot \frac{2\pi}{4T_1} T_1)}{-3\pi} = -0.106$$

24



**Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi**

ÖRNEK: Örneklemde bahsinde kullanılacak periyodik impuls dizisinin  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$  Fourier serisi katsayılarını bulalım.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

**ÇÖZÜM:** İşaret, analiz denkleminde yerine konularak katsayılar hesaplanabilir. İşaret simetrik olduğundan integral aralığı olarak  $-T/2 \leq t \leq T/2$  almak uygunur.

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \left( \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \right) \frac{1}{T}$$

$-T/2 \leq t \leq T/2$  aralığında  $x(t) = \delta(t)$  olduğundan,  $a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} e^{-jk\omega_0 T} = \frac{1}{T}$

**Not:** Yukarıdaki sonucu bulurken şu özelliği kullandık:  $\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) f(t) dt = f(0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

**Sürekli-zaman Fourier Serisinin Yakınsaklılığı**

- Kare dalgada süreksizlikler vardır. Halbuki seri gösterimindeki harmonik ilişkili karmaşık Üstel işaretlerin hepsi süreklidir. Süreksiz bir işaretin sürekli işaretlerle temsil edilebileceğine şüpheye bakılmıştır.
- Fourier'in tespilleri dönemin usta matematikçisi Lagrange tarafından veto edilmişdir. Hatta, dönemin diğer matematikçileri Lacroix, Monge ve Laplace'in Fourier'e desteği bile araştırmaların yayılmasını için yeterli olmamıştır. Fourier'in araştırmaları vefasından sonra yayınlanabilmiştir.
- Fourier serisinin geçerliliğini göstermek için, bir sürekli-zaman periyodik işaretin sonlu sayıda harmonik ilişkili karmaşık Üstel işaretin temsilini ele alalım:

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t}$$

- $e_N(t)$  yaklaşılık hatasını gösterir:  $e_N(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t}$

### Sürekli-zaman Fourier Serisinin Yakınsaklılığı

- Farklı yaklaşıkların birbirileyle karşılaştırılabilme için, yaklaşılık hatasının boyutunu veren bir ölçüt kullanmamız gereklidir. Ölçüt olarak, bir periyot boyunca hatanın enerjisini kullanacağız.

$$E_N = \int_T |c_N(t)|^2 dt$$

- Hatanın enerjisini minimum yapan katsayıların

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jkn\omega} dt$$

olduğu gösterilebilir (ödevlerin birinde bu sonuç ispatlanacaktır!). Yani, hatanın minimum yapan katsayılar Fourier serisi katsayılarına eşittir. O halde,  $x(t)$ 'nın Fourier serisi gösteriliyor varsa,  $N$  hündükçe hata azalır ve  $N \rightarrow \infty$  limit durumunda  $E_N$  sıfır eșit olur.

- Şimdi de periyodik bir işaretin hangi koşullar altında Fourier serisi gösteriliyor olabileceğini belirlemeye çalışalım.

### Sürekli-zaman Fourier Serisinin Yakınsaklılığı

- İki durumla karşılaşmak mümkündür: (i) katsayıların hesaplanması imkan veren integral yakınsayamayabilir (bazi katsayılar sonsuz olabilir), (ii) katsayıların hepsi sonlu olsa bile, bu katsayılar sentez denkleminde yerine konulduğunda elde edilen seri orijinal işareti vermeyebilir.

- Periyodik bir işaret, bir periyod boyunca sonlu enerjiye sahip, yani  $\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$  ise, Fourier serisi katsayılarının sonlu olduğu gösterilebilir. Bu durumda, işaret ile Fourier serisi gösteriliyor arasındaki hatanın enerjisi bir periyot boyunca sıfır olacaktır.

$$c(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega t} \Rightarrow \int_T |c(t)|^2 dt = 0$$

- Bu sonuç, Fourier serisi gösteriliyorunun işarette csit olduğu anlamına gelmediğini, ancak ikisi arasındaki farkta enerji olmadığını belirtmektedir.

- Fiziksel sistemler, işaretin enerjisine yanıt verdiğiinden, bu anlamda işaret ile Fourier serisi gösteriliyor eşdeğerdir. İlgilendiğimiz çoğu periyodik işaretin enjeksiyonlu olup hu işaretler için Fourier serisi gösteriliyor mevcuttur.

### Sürekli-zaman Fourier Serisinin Yakınsaklılığı

- skew dt*
- dx = 1/T ∫ x(t) dt*
- Dirichlet, periyodik bir işaret ile Fourier serisi gösteriliyorunun, işaretin sürekli olduğu noktalar hariç eşit olabilmesi için koşulları belirlemiştir. Süreksizlik noktalarında seri, işaretin sürekli noktalarında soldan ve sağdan limitlerinin ortalamasına eşit olur. Dirichlet koşulları aşağıda verilmiştir.

- Koşul 1: İşaret bir periyod boyunca mutlak integrallenebilir olmalıdır:

$$\int_T |x(t)| dt < \infty$$

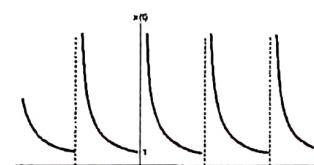
- Koşul 2: Bir periyot boyunca, işaretin sonlu sayıda minimum ve maksimumu olmalıdır.

- Koşul 3: Sonlu bir aralıktı, işarette sonlu sayıda süreksizlik olmalı ve ayrıca süreksizlik noktalarında işaretin değeri de sonlu olmalıdır.

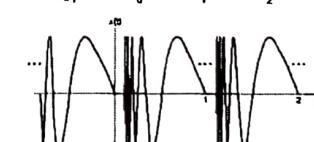
- Dirichlet koşullarını ihlal eden işaretler örnekler aşağıda verilmiştir.

$$\int_T |x(t)| dt \leq A < \infty$$

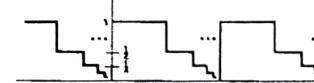
Koşul 1'i ihlal eden bir işaret



Koşul 2'yi ihlal eden bir işaret



Koşul 3'ü ihlal eden bir işaret

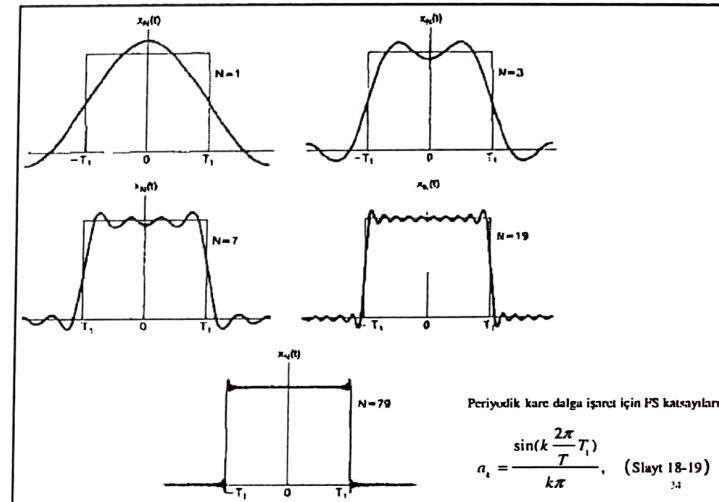


*Periyodik  
Görgele Zannda  
her işaret FS  
darele oyalıbılır*

### Sürekli-zaman Fourier Serisinin Yakınsaklılığı

- Dirichlet koşullarını sağlayan işaretlerin fiziksel sistemlerde karşımıza çıkma olasılığının oldukça az olduğu öneklerden görülmektedir.
- 1898 yılında, Amerikan fizikçi Albert Michelson, sonlu Fourier serisini  $N = 80$ 'e kadar hesaplayan bir aygit (modern adıyla harmonik analizör) geliştirmiştir.
- Michelson, aygitını pek çok periyodik işaret için test etmiştir. Michelson, kare dalga için ummadığı sonuçlar elde edince gelişirdiği aygitın hatalı olabileceğini düşünmüştür ve konuyu matematiksel fizikçi Josiah Gibbs ile paylaşmıştır.
- Gibbs, problemi derinlemesine incelemiştir ve düşüncelerini 1899 yılında Michelson ile paylaşmıştır.
- Periyodik kare dalga, Dirichlet koşullarını sağladığından, sonlu serideki term sayısını sonsuza giderken süreksızlık noktalarında serinin limiti süreksızlık değerinin ortalamasına eşit olmalıdır. Diğer noktalarda, seri işaretin yakınsalıdır. Çeşitli  $N$  değerleri için yaklaşık işaret ve kare dalga aşağıda çizilmiştir.

35



### Sürekli-zaman Fourier Serisinin Yakınsaklılığı

- Michelson'un Gözleme: Sonlu seri, süreksızlık noktalarında dalgalanmalar vermektedir. Dalgalanmaların tepe genliği  $N$ 'den bağımsızdır ve  $N$  arttıkça azalmamaktadır.
- Gibbs'in Açıklaması: İşaretin süreksiz olmadığı bir  $t_1$  noktası süreksızlık noktasına yaklaşıkça hatanın küçük olması için  $N$  büyük olmalıdır. Bu nedenle,  $N$  arttıkça dalgalanmalar süreksızlık noktası etrafında yoğunlaşır ancak dalgalanmanın maksimum genliği sabit kalır.
- Bu gözleme GIBBS OLAYI denir. Yani, süreksiz bir işaretin sonlu terimli Fourier serisi yaklaşılığı yüksek frekanslı dalgalanmalar içerir ve süreksızlık noktasında işaretten daha yüksek değer alır.
- Sonlu terimli Fourier serisi kullanılacaksa, dalgalanmalarındaki toplam enerji ihmali edilebilecek kadar küçük olacak şekilde yeterince büyük  $N$  değeri seçilmelidir. Limit durumunda, hatasının enerjisi sıfır olur ve Fourier serisi yakınsar.

35

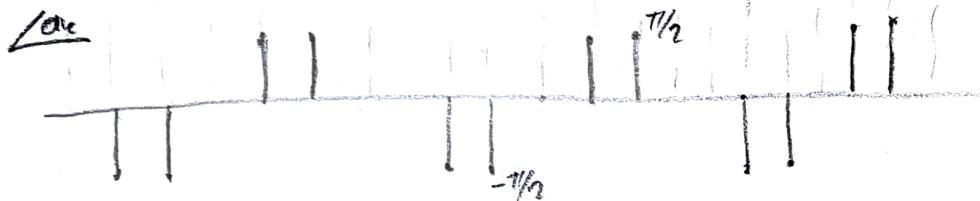
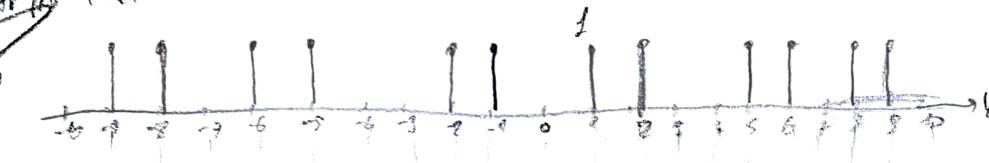
### Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

- Temel periyodu  $T$  ve temel frekansı  $\omega_0 = 2\pi/T$  olan periyodik bir işaretin Fourier serisi katsayılarının  $a_k$  olduğunu belirtmek için  

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$
notasyonunu kullanacağız.
- Sürekli-zaman Fourier serisinin aşağıda verilen özellikleri aracılığıyla, Fourier serisi katsayıları bilinen işaretler yardımıyla çoğu işaretin Fourier serisi açılımını elde etmek kolaylaşmaktadır.
- Fourier dönüşümü konusunda da göreceğimiz gibi, çoğu özellik Fourier dönüşümünün özelliklerinden elde edilebilir. Bu nedenle, sadece en önemli özellikleri sıralayacak ve yorumlayacağız.

36

6. HAF70 1a(d)



$$X[n] = ? \Rightarrow \sum_{k=0}^6 \dots \text{vege} \sum_{k=1}^7 \dots \text{bitz bu so ruder} -31e^{j\frac{\pi}{7}n}$$

$$N=7 \quad X[n] = \sum_{k=-3}^3 a_k e^{jk \frac{2\pi}{7} n}$$

$$\begin{aligned} X[n] &= 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j2\frac{2\pi}{7}n} \\ &\quad + 1 \cdot e^{-j\frac{5\pi}{2}} + e^{-j\frac{2\pi}{7}n} \\ &\quad + e^{-j(\frac{2\pi}{7}n + \frac{\pi}{2})} + e^{j(\frac{2\pi}{7}n + \frac{\pi}{2})} \\ &= 2\cos\left(2\frac{2\pi}{7}n + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$X[n] = 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}n + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(2\frac{2\pi}{7}n + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$X(t-t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0(t-t_0)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t_0} e^{jk\omega_0 t}$$

$$|a_k e^{-jk\omega_0 t_0}| = |b_k| = |a_k|$$

periyod deşifre

### Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

**Özellik 1 (Zamanda öteleme):**  $x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$  ise,  $x(t-t_0) \xleftrightarrow{FS} e^{-jkt_0\omega_0} a_k = e^{-jk(2\pi/T)t_0} a_k$

**İspat:** Periyodik bir işaret, zamanda ötelendirilirse periyodikliği korunur ve periyodu değişmez. Ötelemiş  $y(t) = x(t-t_0)$  işaretinin Fourier serisi katsayıları  $b_k$  olsun:

$$b_k = \frac{1}{T} \int_T y(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T x(t-t_0) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Integralde,  $\tau = t-t_0$  değişken dönüştürümü yapalım.  $t$ , uzunluğu  $T$  olan bir aralıktı deşıiyorsa  $\tau$ 'da uzunluğu  $T$  olan bir aralıktı deşıicektir. O halde,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0(\tau+t_0)} d\tau = e^{-jk\omega_0 t_0} \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \\ &= e^{-jk\omega_0 t_0} a_k = e^{-jk(2\pi/T)t_0} a_k \end{aligned}$$

**Yorum:**  $|e^{-jk(2\pi/T)t_0}| = 1$  olduğundan,  $|b_k| = |a_k|$ .

(Periyodik bir işaret ötelendiğinde Fourier serisi katsayılarının genliği değişmez!)

37

$$\begin{aligned} \text{Grafikte} \quad &x(t) = X(-t) \rightarrow a_k = a_{-k} \\ \text{tek isen} \quad &x(t) = -x(-t) \rightarrow a_k = -a_{-k} \end{aligned}$$

09.10.2017

Vatsayılar değişir / Periyot değişmez

### Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

**Özellik 2 (Zamanda tersine çevirme):**  $x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$  ise,  $x(-t) \xleftrightarrow{FS} a_{-k}$

**İspat:** Periyodik bir işaret, zamanda tersine çevrilirse periyodikliği korunur ve periyodu değişmez. Fourier serisi açılımından  $x(-t)$  işaretü

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk2\pi/T}$$

şeklinde yazılabilir. Toplamada,  $k = -m$  değişken dönüştürülmü yapılursa

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k} e^{jk2\pi/T}$$

Ortaya gelen terimlerdir

**Yorum:** Bir sürekli-zaman periyodik işaret zamanda tersine çevrilirse, karşılık gelen Fourier serisi katsayıları da tersine çevrilir. O halde, çift işaretlerin ( $x(t)=x(-t)$ ) Fourier serisi katsayıları çift ( $a_k=a_{-k}$ ), tek işaretlerininki ise tek ( $a_k=-a_{-k}$ ) olacaktır.

38

### Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

**Özellik 3 (Zamanda ölçekteme):**  $x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$  ise,  $x(a\sigma) \xleftrightarrow{FS} a_k$

**İspat:** Periyodik bir işaret, ölçeklendiğinde periyodu değişir.  $x(t)$ 'nin temel periyodu  $T$  ve temel frekansı  $\omega_0 = 2\pi/T$  ise,  $x(a\sigma)$ 'nın temel periyodu  $T/a$  ve temel frekansı  $a\omega_0$ 'dır.  $x(t)$ 'nın Fourier serisi açılımında  $t$  yerine  $a\sigma$  yazılırsa

$$x(a\sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(a\omega_0\sigma)}$$

Son eşitlik, temel frekansı  $a\omega_0$  olan işaretin Fourier serisi gösterilimi olup açılımdaki katsayıları  $a_k$ 'dır.

**Yorum:** Bir sürekli-zaman periyodik işaretin zamanda ölçekteme Fourier serisi katsayılarını değiştirmez.

Katsayı değişim / Periyod deşifre

39

### Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

**Özellik 4 (Zamanda türev alma):**  $x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$  ise,  $\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FS} jka_k a_k = jk \frac{2\pi}{T} a_k$

**İspat:** Periyodik bir işaretin türevi alınırsa yine periyodik olur ve periyodu değişmez.  $x(t)$ 'nın Fourier serisi açılımında, eşitliğin her iki tarafının  $t$ 'ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} [a_k e^{jk\omega_0 t}] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} jka_k a_k e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

Son eşitlik, temel frekansı  $\omega_0 = 2\pi/T$  olan işaretin Fourier serisi gösterilimi olup açılımdaki katsayılar  $jka_k a_k = jk(2\pi/T)a_k$  olarak görülmektedir.

**Yorum:** Bir sürekli-zaman periyodik işaretin türevini almak, Fourier serisi katsayılarının hem genliğini hem de fazını değiştirmektedir.

Hem genlik, hem faz

$$\left( \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right) \xrightarrow{FS} (jk\omega_0)^n a_k$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{FS} jk\omega_0^n a_k$$

10

G. Hattig

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{j k \frac{2\pi}{N} n}$$

1. Durum  $X[n] = (d_0 + d_1 e^{j \frac{2\pi}{N} n} + d_2 e^{j 2 \frac{2\pi}{N} n} + \dots + d_{N-1} e^{j (N-1) \frac{2\pi}{N} n}), k = 0, \dots, N-1$

2. Durum  $X[n] = d_0 e^{j \frac{2\pi}{N} n} + d_1 e^{j 2 \frac{2\pi}{N} n} + \dots + d_{N-1} e^{j (N-1) \frac{2\pi}{N} n} + d_N e^{j N \frac{2\pi}{N} n}, k = 1 \dots, N$

3. Durum  $X[n] = d_0 e^{j \frac{2\pi}{N} n} + d_1 e^{j 3 \frac{2\pi}{N} n} + \dots + d_{N-1} e^{j (N-1) \frac{2\pi}{N} n} + d_N e^{j N \frac{2\pi}{N} n} + d_{N+1} e^{j (N+1) \frac{2\pi}{N} n}, k = 2 \dots, N+1$

$$d_0 = d_N$$

$$d_1 = d_{N+1}$$

⋮ ⋮

$$\begin{aligned} &= d_{N+1} \left( e^{j N \frac{2\pi}{N} n} \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} n} \right) \\ &= d_{N+1} e^{j 2 \frac{2\pi}{N} n} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Zaman frekans

### Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Özellik 5 (Parseval ilişkisi):  $\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$

İspat: İntegralde,  $|x(t)|^2 = x(t)x'(t)$   
yazıp,  $x(t)$  ve  $x'(t)$  için Fourier serisi gösterimlerini kullanırsak

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt &= \frac{1}{T} \int_T x(t)x'(t) dt = \frac{1}{T} \int_T \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega t} \right] \left[ \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l e^{-jl\omega t} \right] dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_k a_l' \left[ \frac{1}{T} \int_T e^{j(k-l)\omega t} dt \right] \end{aligned}$$

Köşeli parantez içindeki integrali daha önce hesaplamıştık:  $\int_T e^{j(k-l)\omega t} dt = \begin{cases} T, & k=l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$

O halde, son eşitlikte sonsuz tane integral olmasına rağmen integrallerin sonucu sadece  $k = l$  için  $T$ , diğer  $k$  değerlerinde 0'a eşittir. Sonuç olarak, iki toplama bir toplamaya indirgenir ve  $k = l$  olur:

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k a_k' \frac{1}{T} T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

41

### Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Parseval İlişkisinin Yorumu:

- Bir işaretin değişik şekillerde temsil etmek aslında ilave bir bilgi vermemeğidir.
- Bir bakış açısından gizli olan bir bilgi, diğer bir bakış açısından ortaya çıkabilir.
- İşaretin enerjisi kullanılan gösterimden bağımsızdır. Diğer bir deyişle, işaretin enerjisini zaman veya frekans uzayında hesaplamak aynı sonucu vermelidir.

Diger Özellikler:

- Sürekli-zaman Fourier serisinin ispatını vermediğimiz başka özellikleri de vardır.
- Diğer özelliklerin ispatı benzer şekilde yapılabilir. Özelliklerin tamamı aşağıdaki tabloda listelenmiştir.

42

### Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

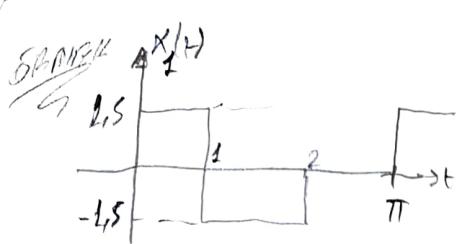
Özellik	Periyodik İşaret	Fourier Serisi Katsayıları
$x(t)$	$a_0 = 2\pi/T$ temel frekansı ve $x(t)$ $T$ temel periyodu ile periyodik	$a_0$
Doğrusallık	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_0 + Ba_0'$
Zamanda öteleme	$x(t - \hat{t}_0)$	$a_0 e^{-j\omega_0 \hat{t}_0} = a_0 e^{-j2\pi f_0 \hat{t}_0}$
Frekansa öteleme	$e^{j\omega_0 t} x(t) = e^{j\omega_1 t} x(t)$	$a_{\omega_0}$
Eşlenik alma	$x'(t)$	$a_{\omega_0}'$
Zamanda tersin çevirme	$x(-t)$	$a_{-1}$
Zamanda ülçekleme	$x(\alpha t)$ ( $\alpha > 0$ ( $T/\alpha$ ile periyodik))	$a_{\alpha}$
Periyodik konvolusyon	$\int_T x(t) y(t - \tau) dt$	$T a_0 b_0$
Zamanda çarpma	$x(t) y(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_k$

43

### Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Özellik	Periyodik İşaret	Fourier Serisi Katsayıları
Zamanda türev alma	$\frac{dx(t)}{dt}$	$jka_0 a_0 = jk \frac{2\pi}{T} a_0$
Zamanda integral alma	$\int_T x(t) dt$	$\left( \frac{1}{jk a_0} \right) a_0 = \left( \frac{1}{jk (2\pi/T)} \right) a_0$
Gereç işaretler için ejeslik simetriklik	$x(t)$ gereç	$a_0 = a_{-1}$ $\Re(a_k) = \Re(a_{-k})$ $\Im(a_k) = -\Im(a_{-k})$ $ a_k  =  a_{-k} $ $-a_k = -a_{-k}$
Gereç ve çift işaretler Gereç ve tek işaretler	$x(t)$ gereç ve çift $x(t)$ gereç ve çift	$a_k$ gereç ve çift $a_k$ saf karmaşık ve çift
Gereç işaretlerinin çift-tek ayırtımı	$x_c(t) = \operatorname{Ev}[x(t)] \cdot [x(t) \text{ gereç}]$ $x_o(t) = \operatorname{Od}[x(t)] \cdot [x(t) \text{ gereç}]$	$\Re(a_k)$ $\Im(a_k)$
Periyodik işaretler için Parseval İlişkisi		$\frac{1}{T} \int_T  x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}  a_k ^2$

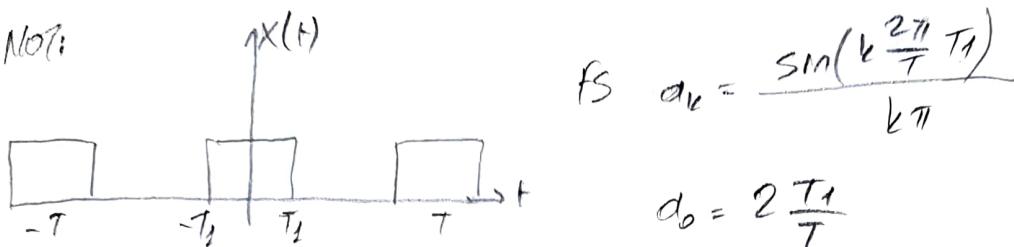
44



FS koatsagının bul? ( $x(t)$  ifadesini,  $X(t)$  kullanıysa)

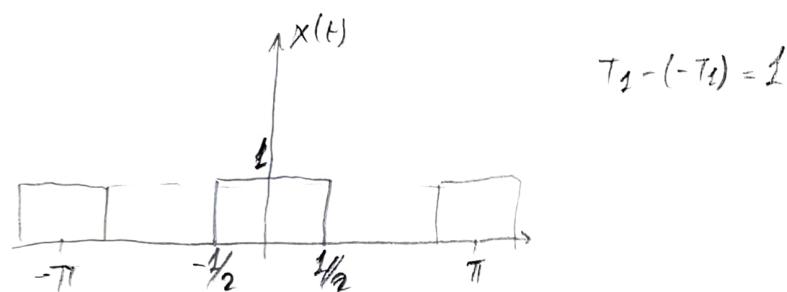
$$X_1(t) \rightarrow T = \pi$$

NOT:

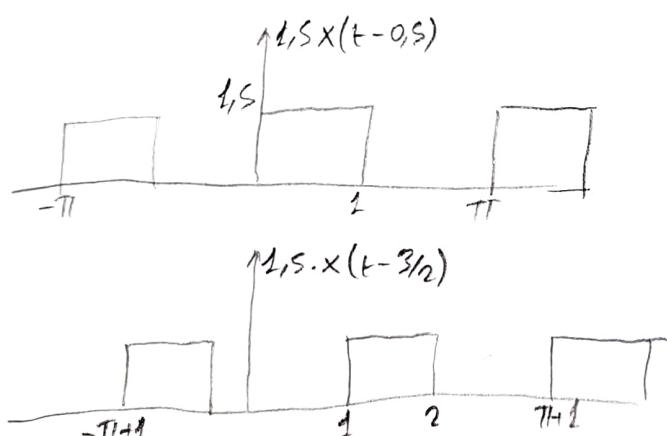


$$\text{fs } a_k = \frac{\sin(k \frac{2\pi}{T} T_1)}{k\pi}$$

$$a_0 = 2 \frac{T_1}{T}$$



$$T_1 - (-T_1) = 2$$



$$x_1(t) = \frac{3}{2} \left( x(t - \frac{1}{2}) - x(t - \frac{3}{2}) \right)$$

$$b_k = \frac{3}{2} \left( a_{k1} e^{-j\omega_0 \frac{1}{2}} - a_{k2} e^{-j\omega_0 \frac{3}{2}} \right)$$

otelene seetliyi

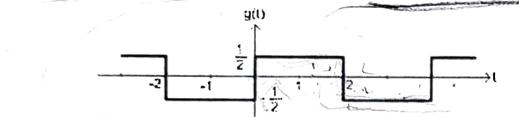
$$b_0 = 0 \quad (\text{Dolma zekil (isaret) sitemdeki heraplan malzeme}) [x_1(t)]$$

$$\textcircled{1} \quad g(t) = x(t-1) - \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad g(t) = (x(t-1) - x(t-3)) \Big/ 2$$

### Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

ÖRNEK: Sürekli-zaman Fourier serisinin özelliklerinden yararlanarak aşağıda verilen  $g(t)$  işaretinin ( $T = 4$  ile periyodik) Fourier serisi katsayılarını bulalım.



**ÇÖZÜM:**  $g(t)$  işaretini analiz denkleminde yerine koymak, Fourier serisi katsayılarını belirleyebiliriz. Ancak,  $g(t)$  işaretini daha önce Fourier serisini hesapladığımız periyodik simetrik kare dalga cinsinden ifade edip sonucu bulacağımız. Kare dalga ve Fourier serisi katsayıları, hâlifatma amacıyla aşağıda verilmiştir:



$x(t-1)$  işaretinin Fourier serisi katsayıları  $b_k$  olsun. Öteleme özelliğinden,

$$b_k = a_k e^{-jk\pi/2}$$

DC terimin (-1/2) Fourier serisi katsayıları  $c_k$  olsun. DC işaretin sıfırdan farklı bir Fourier serisi katsayısı vardır:

$$c_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ -1/2, & k = 0 \end{cases}$$

$g(t)$  işaretinin Fourier serisi katsayıları  $d_k$  olsun. Doğrusallık özelliğinden

$$d_k = b_k + c_k = \begin{cases} a_k e^{-jk\pi/2}, & k \neq 0 \\ a_0 - 1/2, & k = 0 \end{cases}$$

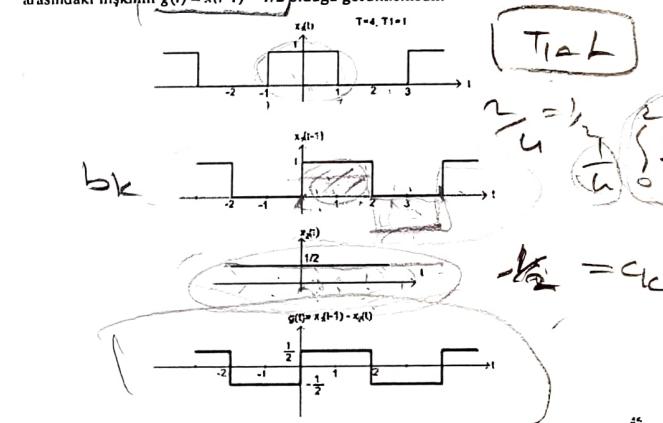
Son ifadele  $a_k$  yerine konulursa

$$d_k = \begin{cases} \frac{\sin(jk\pi/2)}{jk\pi} e^{-jk\pi/2}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

47

$$d_k = b_k + c_k$$

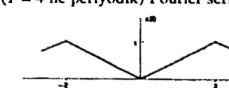
Periyodik kare dalga- işaretinde  $T = 4$  ve  $T_1 = 1$  alalım. Şekillerden,  $g(t)$  ile  $x(t)$  arasındaki ilişkinin  $g(t) = x(t-1) - 1/2$  olduğu görülmektedir.



$$g(t) = [x(t-1) - 1/2] \quad b_k = a_k e^{-jk\pi/2}$$

### Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

ÖRNEK: Sürekli-zaman Fourier serisinin özelliklerinden yararlanarak aşağıda verilen  $x(t)$  işaretinin ( $T = 4$  ile periyodik) Fourier serisi katsayılarını bulalım.



$$d_k = \frac{1}{T} \left[ \int_{-2}^2 x(t) e^{-jk\pi t/2} dt + \int_2^4 x(t) e^{-jk\pi t/2} dt \right]$$

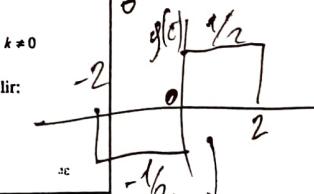
**ÇÖZÜM:** Bu işaretin türevi, önceki örnekte ele alınan  $g(t)$  işaretine eşittir.  $g(t)$  ve  $x(t)$  işaretlerinin Fourier serisi katsayılarını sırasıyla  $d_k$  ve  $e_k$  ile gösterelim. Türev özelliğinden,

$$d_k = jk(2\pi/4)e_k \Rightarrow e_k = \frac{2d_k}{jk\pi}$$

Ifade.  $k \neq 0$  için geçerlidir.  $d_k$  eşitlikteyere konulursa  $e_k = \frac{2\sin(jk\pi/2)}{jk\pi} e^{-jk\pi/2}$ ,  $k \neq 0$

$e_0$ , bir periyot boyunca  $x(t)$ 'nın altındaki alan periyoda bölünerek elde edilebilir:

$$e_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 x(t) dt = \frac{1}{2}$$

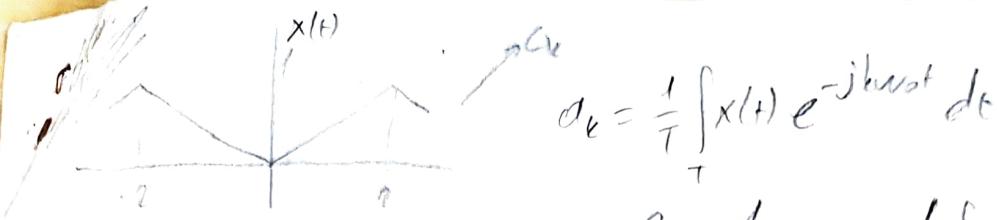


$$d_k = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 x(t) e^{-jk\pi t/2} dt$$

$$\frac{1}{4} + 1^2 = 1/2$$

$$g(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

12



$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T} = \frac{1}{2} \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

buk

$$g(t) = \frac{dX(t)}{dt}$$

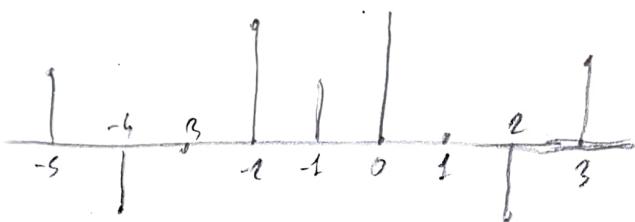


$$x(t) \xrightarrow{\text{FS}} a_k$$

$$\frac{dX(t)}{dt} \xrightarrow{\text{FS}} jk\omega_0 a_k$$

$$b_k = jk\omega_0 c_k$$

Not



$$x_2[n] = x\left[\frac{n}{n_0 + 1} - n_0\right] = x\left[\frac{n}{3} - 2\right]$$

$$n_0 = 2 \quad x_2[n]$$

Not  $x[n] = \cos\left[\frac{3\pi}{4}n\right]$  temel frekans harmonikliğinin işaret formesi

$$\omega = \frac{3\pi}{4}$$

$$N = \frac{2\pi}{\omega} \cdot m$$

$$N = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}} \cdot m = \frac{8}{3} m \rightarrow m=3 \text{ için } N=8 \quad (\text{temel frekans})$$

$$\phi[n] = \left\{ e^{jk\frac{2\pi}{8}n} \middle| k=[0..N-1] \right\} = \left\{ 1, e^{j\frac{2\pi}{8}n}, e^{j2\frac{2\pi}{8}n}, e^{j3\frac{2\pi}{8}n}, \dots, e^{j7\frac{2\pi}{8}n} \right\}$$

N tane isaret bulunur.

$$k=[0..N-1]$$

$$e^{jk\omega_0 n}$$

Hafta 6:  
Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

1

### Ele Alınacak Ana Konular

- Ayrık-zaman periyodik işaretlerin Fourier serisi gösterilimi
- Ayrık-zaman Fourier serisinin özellikleri
- Fourier serisi ve LTI sistemler

2

### Ayrık-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Ayrık-zaman Fourier serisindeki amaç, periyodik bir ayrık-zaman işaretin harmonik ilişkili ayrık-zaman karmaşık üstel işaretler cinsinden yazmaktır.

• Ancak,  $\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk(2\pi/N)n}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  ile verilen harmonik ilişkili karmaşık üstel kümesinde birbirinden farklı sadece  $N$  adet işaret olduğunu hatırlayınız. (Bknz. 1. hafta slayt 42)

- $N$  ile periyodik bir ayrık-zaman periyodik işaretin, harmonik ilişkili üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu şeklinde yazmaya çalışalım:

$$x[n] = \sum_k a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

- Birbirinden farklı  $N$  adet üstel işaret olduğundan, toplama  $N$  terim içermelidir. Toplamaya herhangi bir  $k$  değerinden başlanabilir (örneğin,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  veya  $k = 3, 4, N+2$ ). Bu durumu belirtmek için  $k = <N>$  notasyonu kullanırsak

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

- Periyodik bir ayrık-zaman işaretin bu şekilde yazılmasına ayrık-zaman Fourier serisi gösterilimi ve  $a_k$  katsayılarına Fourier serisi katsayıları denir.

3

*Ayrık  
n tane  
Sınırlı dolu Zona  
Sınırlı  
00 tane  
Sınırlı dolu Zona*

### Ayrık-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Ayrık-zaman Fourier serisi katsayılarının hesaplanmasıında aşağıda verilen eşitliği kullanacağız.

$$\text{Hesaplama: } \sum_{n=<N>} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N \\ 0, & \text{aksi hâlde} \end{cases}$$

- Fourier serisinin iki yanımı  $e^{-jr(2\pi/N)n}$  ile çarpıp,  $N$  terim üzerinden toplarsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n} &= \sum_{n=<N>} \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n} e^{-jr(2\pi/N)n} \\ &= \sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=<N>} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} \end{aligned}$$

- İçteki toplama  $k = r$  için  $N$ ,  $k \neq r$  için 0'dır. O halde, iki toplama tek toplamaya indirgenir ve  $k = r$  olur. Sonuç olarak,

$$\sum_{n=<N>} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{k=<N>} a_r \Rightarrow a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n}$$

4

### Aynık-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Aynık-zaman periyodik işaretin Fourier serisine açılımı ve açılımdaki katsayıların hesabı aşağıdaki eşitliklerde özetlenmiştir.



$$\text{Sentez denklemi: } x[n] = \sum_{k=-N}^{N-1} a_k e^{j\omega_0 n} = \sum_{k=-N}^{N-1} a_k e^{j(2\pi/N)n}$$

$$\text{Analiz denklemi: } a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^{N-1} x[n] e^{-j\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)n}$$

- $\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}$  olsun. Sentez denklemi,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  veya  $k = 1, 2, \dots, N$  için yazılırsa aynı sonucu vereceğinden

$$x[n] = a_0 \phi_0[n] + a_1 \phi_1[n] + \dots + a_{N-1} \phi_{N-1}[n] \quad k=0 \dots N-1$$

$$x[n] = a_1 \phi_1[n] + a_2 \phi_2[n] + \dots + a_N \phi_N[n] \quad k=1 \dots N$$

$$x[n] = a_2 \phi_2[n] + a_3 \phi_3[n] + \dots + a_{N+1} \phi_{N+1}[n] \quad k=2 \dots N+1$$

- Ancak,  $\phi_0[n] = \phi_N[n]$  olduğundan, yukarıdaki eşitliklerden  $a_0 = a_N$  sonucu çıkar. Benzer işlemler, arka arakaya gelen  $N$  adet  $k$  için yapılursa  $a_k = a_{k+N}$  elde edilir. Yani, periyodik bir aynık-zaman işaretin Fourier serisi katsayıları da periyodiktir!

### Aynık-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

ÖRNEK: Sinüzoidal işaretler için Fourier serisi doğrudan hesaplanabilir. Aşağıda verilen işaretin Fourier serisi gösterimini elde edelim.

$$x[n] = \sin(\omega_0 n)$$

Çözüm:  $2\pi/\omega_0$  rasyonel bir sayı ise  $x[n]$  periyodiktir. Bu koşulun sağlanması halinde iki durum vardır:

Durum 1:  $N$  bir tam sayı olmak üzere,  $2\pi/\omega_0 = N$

Durum 2:  $N$  ve  $M$  tam sayılar olmak üzere,  $2\pi/\omega_0 = N/M$

Durum 1: Euler ilişkisinden

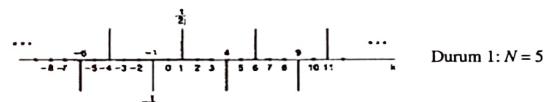
$$\begin{aligned} x[n] &= \sin(\omega_0 n) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}) \\ &= \frac{1}{2j} e^{j(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-j(2\pi/N)n} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}, \quad a_k = 0, \quad k \neq \pm 1 \end{aligned}$$

6

Durum 2: Euler ilişkisinden

$$x[n] = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}) = \frac{1}{2j} e^{j(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-j(2\pi/N)n} \Rightarrow a_M = \frac{1}{2j}, \quad a_{-M} = -\frac{1}{2j}, \quad a_k = 0, \quad k \neq \pm M$$

Fourier serisi katsayıları her iki durum için aşağıda çizilmiştir. Katsayıların periyodik olduğunu dikkat ediniz.



Durum 1:  $N = 5$



Durum 2:  $M=3, N=5$

7

### Aynık-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

ÖRNEK: Aşağıdaki işaretin aynık-zaman Fourier serisi gösterimini elde edelim

$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)$$

CÖZÜM: İşaret  $N$  ile periyodiktir. Euler ilişkisinden

$$\begin{aligned} x[n] &= 1 + \frac{1}{2j} [e^{j(2\pi/N)n} - e^{-j(2\pi/N)n}] + \frac{3}{2} [e^{j(2\pi/N)n} + e^{-j(2\pi/N)n}] + \frac{1}{2} [e^{j(4\pi/N+n+\pi/2)} + e^{-j(4\pi/N+n+\pi/2)}] \\ &= 1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2j}\right) e^{j(2\pi/N)n} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j}\right) e^{-j(2\pi/N)n} + \left(\frac{1}{2} e^{j\pi/2}\right) e^{j2(2\pi/N)n} + \left(\frac{1}{2} e^{-j\pi/2}\right) e^{-j2(2\pi/N)n} \end{aligned}$$

Fourier serisi katsayıları doğrudan yazılabilir:

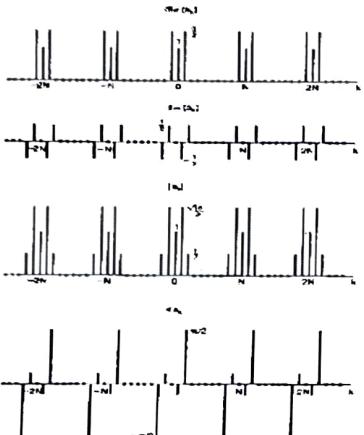
$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j, \quad a_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j$$

$$a_2 = \frac{1}{2}j, \quad a_{-2} = -\frac{1}{2}j, \quad a_k = 0, \quad k \neq 0, \pm 1, \pm 2.$$

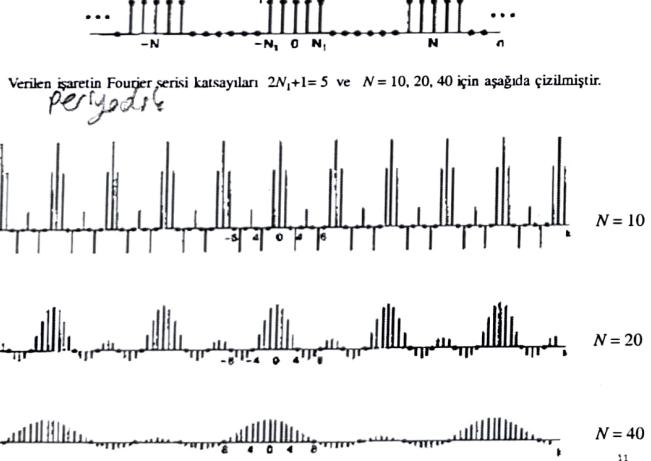
8

Fourier serisi katsayılarının gerçek ve sanal kısımları, genliği ve fazı aşağıda çizilmiştir.

$$\begin{aligned}a_0 &= 1, \\a_1 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j, \quad \angle a_1 = -0.322 \\a_{-1} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j, \quad |a_1| = |a_{-1}| = \frac{\sqrt{10}}{2} \\a_2 &= \frac{1}{2}j, \\a_{-2} &= -\frac{1}{2}j, \quad |a_2| = |a_{-2}| = \frac{1}{2}\end{aligned}$$



Verilen işaretin Fourier serisi katsayıları  $2N_1+1=5$  ve  $N=10, 20, 40$  için aşağıda çizilmiştir.



### Ayırık-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

ÖRNEK: Aşağıdaki verilen periyodik ayrık-zaman kare dalgaının Fourier serisi gösterilimini elde edelim



ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)} = \frac{1}{N} e^{-jk(2\pi/N)N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)m} \\&= \frac{1}{N} e^{-jk(2\pi/N)N_1} \left( \frac{1 - e^{-jk2\pi(2N_1+1)/N}}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}} \right) = \frac{1}{N} \frac{e^{-jk(2\pi/N_1)} [e^{jk2\pi(N_1+1/2)/N} - e^{-jk2\pi(N_1+1/2)/N}]}{e^{-jk(2\pi/N)} [e^{jk(2\pi/2N)} - e^{-jk(2\pi/2N)}]} \\&= \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\sin[2\pi k(N_1+1/2)/N]}{\sin(\pi k/N)}, & k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{2N_1+1}{N}, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \end{cases} \rightarrow DC (a_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=N_1}^{N_2} P^k &\Rightarrow P^k \rightarrow \frac{P^{N_2+1}}{1-P} \\k &= N_1 \\M &= N + N_1 \\n &= M - N_1\end{aligned}$$

### Ayırık-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

- Temel periyodu  $N$  ve temel frekansı  $\omega_0 = 2\pi/N$  olan periyodik bir ayrık-zaman işaretin Fourier serisi katsayılarının  $a_k$  olduğunu belirtmek için

$$x[n] \xleftrightarrow{F} a_k$$

notasyonunu kullanacağız.

- Ayırık-zaman Fourier serisinin aşağıda verilen özellikleri aracılığıyla, Fourier serisi katsayıları bilinen işaretler yardımıyla çoğu işaretin Fourier serisi açılımını elde etmek kolaylaşmaktadır.
- Özellikler, sürekli durumdadıne benzer bir şekilde kolaylıkla ispatlanabilir.

### Ayrık-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Özellik	Periyodik İşaret	Fourier Serisi Katsayıları
	$x[n]$ , $\omega_0 = 2\pi/N$ temel frekansı ve $y[n]$ $N$ temel periyodu ile periyodik	$a_t$ $b_t$
Doğrusallık	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_t + Bb_t$
Zamanda öteleme	$x[n-n_0]$	$a_t e^{-j\omega_0 n_0} = a_t e^{-jR(2\pi/N)n_0}$
Frekansa öteleme	$e^{j\omega_0 n} x[n] = e^{jR(2\pi/N)n} x[n]$	$a_{t-R}$
Eşlenik alma	$x^*[n]$	$a_t^*$
Zamanda tersine çevirme	$x[-n]$	$a_{-t}$
Zamanda ölçümleme	$x_m[n] = \begin{cases} x[n/m], & n, m \text{ nin tam katı} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$	$\frac{1}{m} a_t$
Periyodik konvolusyon	$\sum_{r=-N}^N x[r]y[n-r]$	$Na_t b_t$
Zamanda çarpma	$x[n]y[n]$	$\sum_{k=-N}^N a_k b_{k-t}$

13

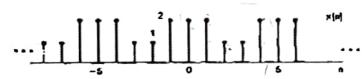
### Ayrık-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Özellik	Periyodik İşaret	Fourier Serisi Katsayıları
Zamanda fark alma	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-jR(2\pi/N)})a_t$
Zamanda toplama	$\sum_{k=1}^N x[k]$	$\left(\frac{1}{1 - e^{-jR(2\pi/N)}}\right)a_t$
Gerçel işaretler için eşlenik simetriklik	$x[n]$ gerçel	$\begin{cases} a_t = a_t^* \\ \Re(a_t) = \Re(a_{-t}) \\ \Im(a_t) = -\Im(a_{-t}) \\  a_t  =  a_{-t}  \\ -a_t = -a_{-t} \end{cases}$
Gerçel ve çift işaretler Gerçel ve tek işaretler	$x[n]$ gerçel ve çift $x[n]$ gerçel ve tek	$a_t$ gerçel ve çift $a_t$ saf karmaşık ve tek
Gerçel işaretlerin çift-tek ayrıştırması	$x_e[n] = \text{Ev}(x[n])$ [ $x[n]$ gerçel] $x_o[n] = \text{Od}(x[n])$ [ $x[n]$ gerçel]	$\Re(a_t)$ $\Im(a_t)$
Periyodik işaretler içi Parseval ilişkisi		
$\frac{1}{N} \sum_{n=-N}^N  x[n] ^2 = \sum_{k=-N}^N  a_k ^2$		

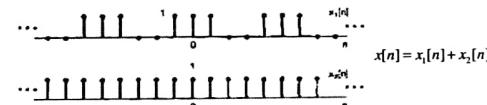
14

### Ayrık-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

ÖRNEK: Ayrık-zaman Fourier serisinin özelliklerinden yararlanarak aşağıda verilen  $x[n]$  işaretinin ( $N = 5$  ile periyodik) Fourier serisi katsayılarını bulalım.



ÇÖZÜM:  $x[n]$  işaretti, aşağıda gösterildiği gibi  $x_1[n]$  ve  $x_2[n]$  işaretlerinin toplamı olarak yazılabilir.



$x[n]$ ,  $x_1[n]$  ve  $x_2[n]$  işaretlerinin Fourier serisi katsayıları sırasıyla  $a_k$ ,  $b_k$  ve  $c_k$  olsun. Doğrusallık özelliğinden  $a_k = b_k + c_k$

15

$$b_k \text{ daha önce bulunmuştu } (N_1=1, N=5): \quad b_k = \begin{cases} \frac{1}{5} \sin(3\pi k/5), & k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ \frac{3}{5} \sin(\pi k/5), & k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \end{cases}$$

$x_2[n]$  işaretti sabit (DC) olup sıfırdan farklı bir Fourier serisi katsayısına sahiptir:

$$c_0 = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

$$\text{Fourier serisi katsayıları } 5 \text{ ile periyodik olduğundan} \quad c_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ 1, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \end{cases}$$

$$\begin{aligned} N &= 5 \\ c_0 &= 1 \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

O halde,

$$a_k = b_k + c_k = \begin{cases} \frac{1}{5} \sin(3\pi k/5), & k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ \frac{8}{5}, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \end{cases}$$

16

### Ayrık-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

ÖRNEK: Hakkında aşağıdaki bilgiler bilinen ayrık-zaman işareti bulunuz.

1.  $x[n], N = 6$  ile periyodiktir,

$$\sum_{n=0}^N x[n] = 2$$

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n x[n] = 1$$

4. Yukarıdaki üç koşulu sağlayan işaretler arasında, periyot başına en küçük enerjive  $x(n)$  sahiptir.

ÇÖZÜM: 2 nolu bilgiden  $a_0 = 1/3$ .

$$(-1)^n = e^{-j\pi n} = e^{-j\frac{2\pi}{6}n} = e^{-jn\frac{2\pi}{6}}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dn}{0}$$

$$(-1)^n = e^{-jn\frac{2\pi}{6}} = e^{-j(2\pi/6)3n}$$

$$\text{Analiz denklemi: } a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\pi n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-k(2\pi/6)n}$$

$$\downarrow$$

$$a_0 = 1/3$$

$$a_3 = 1/6$$

$$x(t) = e^{st} \xrightarrow{h(t)} y(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

$$e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

$$y(t) = x(t) H(s)$$

Transfer Fonksiyonu

### Fourier Serisi ve LTI Sistemler

- Impuls yanıt  $h(t)$  olan bir sürekli-zaman LTI sistemin girişi  $e^{st}$  uygulandığında sistemin çıkışı  $H(s)$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

olmak üzere,  $y(t) = H(s)e^{st}$  ile veriliyor.

- Benzer şekilde, impuls yanıt  $h[n]$  olan bir ayrık-zaman LTI sistemin  $z^n$  girişi olan yanıt  $H(z)$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}$$

olmak üzere,  $y[n] = H(z)z^n$  eşitliğinden hesaplanmaktadır.

- $s$  ve  $z$  genel karmaşık sayılar olduğunda  $H(s)$  ve  $H(z)$ 'ye SİSTEM FONKSİYONU (veya transfer fonksiyonu) denir.

19

$$s = \sigma + j\omega$$

$\hookrightarrow \sigma > 0$  genel durumda

$H(s) \rightarrow$  transfer fonk.  $\sigma = 0, s = j\omega$  bu durumda

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) \rightarrow \text{sistemin frekans cevabı}$$

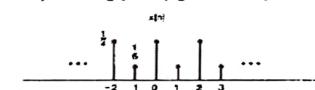
İşaretteki ortalama güç Parseval ilişkisi kullanılarak hesaplanabilir:

$$P = \sum_{k=0}^5 |a_k|^2$$

$a_k$  katsayılarının her birinin  $P$ 'ye katkısı pozitif bir sayıdır.  $a_0$  ve  $a_3$  değerleri belli olduğundan,  $P$ 'nin en küçük olabilmesi için  $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$  olmalıdır. Tüm katsayılar belirlendiğinden, sentez denklemi kullanılarak işaret belirlenebilir.

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=0}^5 a_k e^{jk(2\pi/6)n} = \sum_{k=0}^5 a_k e^{jk(2\pi/6)n} \\ &= a_0 + a_3 e^{j\pi n} = (1/3) + (1/6)(-1)^n \end{aligned}$$

Bir periyot boyunca işaretin değişimi aşağıda verilmiştir



18

### Fourier Serisi ve LTI Sistemler

- $s = j\omega$  özel durumunda (giriş  $\omega$  frekansı karmaşık üstel işaretse) sürekli-zaman sistem fonksiyonuna sistemin FREKANS YANITI denir ve  $H(j\omega)$  ile gösterilir:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

- Benzer şekilde,  $z = e^{j\omega}$  ise, ayrık-zaman sistem fonksiyonuna frekans yanıtı denir ve  $H(e^{j\omega})$  ile belirtilir:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

- LTI bir sistemin periyodik bir işaret yanımı, sistemin frekans yanından kolaylıkla belirlenebilir. Adımlar aşağıda verilmiştir.

20

$$a \cdot e^{j\omega t} \xrightarrow{H(s)} H(s) e^{j\omega t} \cdot a$$

$$+ b e^{j2\omega t} + H(s_0) e^{j\omega t} \cdot b$$

### Fourier Serisi ve LTI Sistemler

- Sürekli-zaman: Periyodik  $x(t)$  işaretinin impuls yanıtının  $h(t)$  olan bir LTI sisteme uygulandığında çıkışı hesaplayalım.
- $x(t)$  periyodik olduğundan Fourier serisine açılabilir:  $x(t) = \sum a_k e^{jk\omega_0 t}$
- Herhangi bir karmaşık üstel ( $a_k e^{jk\omega_0 t}$ ) işaretinin yanıt:  $a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$
- Sistem doğrusal olduğundan, sistemin karmaşık üstel işaretlerin toplamına olan yanıtı, karmaşık üstel işaretlere tek tek yanıtlarının toplamına eşittir.

$$x(t) = \sum a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = \sum a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

Gözlem: Çıkış da periyodiktir. Girişin Fourier serisi katsayıları  $a_k$  ise çıkışın Fourier serisi katsayıları  $H(jk\omega_0)a_k$ 'dır. Yani, giriş katsayıları frekans yanıtının karşılık gelen frekanstaki değeriley çarpılmıştır.

21

### Fourier Serisi ve LTI Sistemler

- Ayrık-zaman: Periyodik  $x[n]$  işaretinin impuls yanıtının  $h[n]$  olan bir LTI sisteme uygulandığında çıkışı hesaplayalım.
- $x[n]$  periyodik olduğundan Fourier serisine açılabilir:  $x[n] = \sum a_k e^{j(2\pi/N)n}$
- Herhangi bir karmaşık üstel ( $a_k e^{j(2\pi/N)n}$ ) işaretinin yanıt:  $a_k H(e^{j(2\pi/N)n}) e^{j(2\pi/N)n}$
- Sistem doğrusal olduğundan, sistemin karmaşık üstel işaretlerin toplamına olan yanıtı, karmaşık üstel işaretlere tek tek yanıtlarının toplamına eşittir.

$$x[n] = \sum a_k e^{j(2\pi/N)n} \Rightarrow y[n] = \sum a_k H(e^{j(2\pi/N)n}) e^{j(2\pi/N)n}$$

Gözlem: Çıkış da periyodiktir. Girişin Fourier serisi katsayıları  $a_k$  ise çıkışın Fourier serisi katsayıları  $H(e^{j(2\pi/N)n})a_k$ 'dır. Yani, giriş katsayıları frekans yanıtının karşılık gelen frekanstaki değeriley çarpılmıştır.

22

### Fourier Serisi ve LTI Sistemler

ÖRNEK: Aşağıda verilen sürekli-zaman periyodik işaretin, impuls yanıtının  $h(t) = e^{-t} u(t)$  olan sisteme uygulandığında, çıkışın Fourier serisi katsayılarını bulunuz.

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t)$$

ÇÖZÜM: Giriş ve çıkışın katsayıları  $a_k$  ve  $b_k$  olsun. İlk önce frekans yanıtını hesaplayalım.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{1+j\omega}$$

Girişin temel periyodu  $T = 1$  ( $\omega_0 = 2\pi$ ) olduğundan çıkışın da temel periyodu 1'dir. Ayrıca, girişin  $k \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$  için Fourier serisi katsayıları sıfırdır. O halde,

$$y(t) = \sum_{k=-3}^3 b_k e^{jk2\pi t}, \quad b_k = a_k H(jk2\pi), \quad b_0 = 1,$$

$$b_1 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1+j2\pi} \right), \quad b_{-1} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1-j2\pi} \right)$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+j4\pi} \right), \quad b_{-2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-j4\pi} \right)$$

$$b_3 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1+j6\pi} \right), \quad b_{-3} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1-j6\pi} \right)$$

$$H(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{j\omega t} dt = -\left( \frac{1}{j\omega + 1} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{j\omega + 1}$$

$\omega_0 = 2\pi$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{6}$$

$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

$$b_0 = a_0 H(j\omega_0)$$

$$b_1 = a_1 H(j2\omega_0)$$

$$b_2 = a_2 H(j3\omega_0)$$

$$b_3 = a_3 H(j4\omega_0)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t} e^{j\omega t} dt = -\left( \frac{1}{j\omega + 1} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{j\omega + 1}$$

### Fourier Serisi ve LTI Sistemler

ÖRNEK: İmpuls yanıtının  $h(n) = a^n u(n)$ , ( $-1 < a < 1$ ) olan sisteme  $x(n) = \cos(2\pi n/N)$  uygulandığında, çıkışın Fourier serisi katsayılarını bulunuz.

ÇÖZÜM: Çıkışın katsayıları  $b_k$  olsun. İlk önce frekans yanıtını hesaplayalım.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$\text{Euler ilişkisinden } x(n) = \frac{1}{2} e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} e^{-j(2\pi/N)n} \quad \text{Hesaplaması: } \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^N - q^{N-1}}{1-q}, \quad 1 \neq q$$

$$\text{O halde, } y[n] = \frac{1}{2} H(e^{j(2\pi/N)n}) e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} H(e^{-j(2\pi/N)n}) e^{-j(2\pi/N)n}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-ae^{-j2\pi/N}} \right) e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-ae^{j2\pi/N}} \right) e^{-j(2\pi/N)n}$$

$$\text{Diğer bir ifade ile, } b_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-ae^{-j2\pi/N}} \right), \quad b_{-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-ae^{j2\pi/N}} \right), \quad b_k = 0, \quad k \neq \pm 1$$

$$b_0 = a_0 H(j\omega_0)$$

$$b_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

Dönümde  $q^N = 1$   
hesapla söylebilir  
Bunun için  $q = \frac{1}{2}$   
Sonra sentez denk-  
lemine yazarak bulur  
6

Hafta 7:  
Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j k \omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} x(t) e^{-j k \omega_0 t} dt$$

$$\int f = \frac{1}{T}$$

### Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

- Periyodik olmayan (aperiyodik) bir işaret, periyodu sonsuz olan periyodik bir işaret gibi düşünülebilir.
- Periyodik bir işaretin periyodu büyükükçe, temel frekans küçülür ve dolayısıyla Fourier serisi gösterimindeki harmonik ilişkili işel işaretlerin frekansları yaklaşır.
- Periyodon sonsuz olması limit durumunda frekans bileşenleri sürekli hale gelir ve Fourier serisi toplamı integrale eşit olur.

*Hatırlatma: Periyodik  $x(t)$  işaretinin F.S açılımı:*  $\left\{ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j k \omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j k(\omega T)t} \right\}$

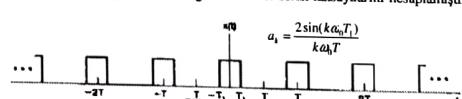
- Fourier serisinin, periyodon sonsuza gitmesi durumundaki limit haline FOURIER DÖNÜŞÜMÜ denir.

### Ele Alınacak Ana Konular

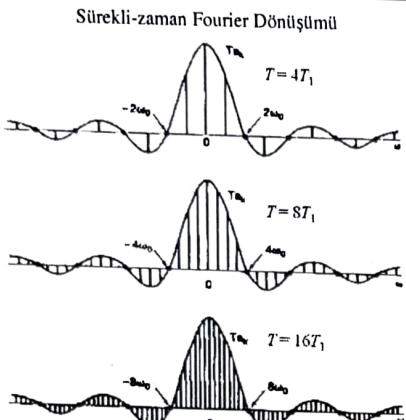
- Sürekli-zaman Fourier dönüşümü
- Sürekli-zaman periyodik işaretler için Fourier dönüşümü
- Sürekli-zaman Fourier dönüşümünün özellikleri
- Doğrusal, sabit katsayılı diferansiyel denklemlerle tanımlanan sistemler

### Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

- Aşağıda verilen periyodik kare dalgaının Fourier serisi katsayılarını hesaplanıyük.

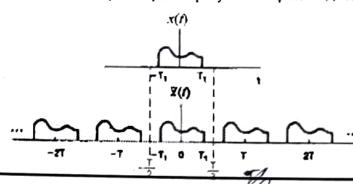


- Sabit bir  $T_1$  ve değişik  $T$  değerleri için Fourier serisi katsayılarını çizersek, periyodon katsayılar üzerindeki etkisini belirlemiş oluruz.
- Alternatif olarak,  $a_k = \frac{2 \sin(k \omega_0 T_1)}{k \omega_0 T}$  değerlerini çizebiliriz.
- $2 \sin(\omega_0 T_1)/\omega$  fonksiyonu,  $T_1$ 'nın zarfını temsil edmektedir ve  $a_k$  katsayıları bu zarfın eşit aralıklı örnekleridir.



## Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

- $T$  arttıkça veya esdeger olarak temel frekans  $\omega_0 = 2\pi/T$  azaldıkça, zarf daha sık örmeklenmektedir.  $T \rightarrow \infty$  limit durumunda, orijinal periyodik kare dalga dikdörtgen darbeye ve  $T$  ile çarpılmış Fourier serisi katsayıları zarfa eşit olur.
- Bu örneği genelleştirmek mümkündür. Aperiyodik bir işaret, periyodik bir işaretin periyod sonsuza giderken limit hali gibi düşünülebilir. Periyodik işaret Fourier serisine aittir ve periyodu sonsuza gitmesi durumunda serinin davranışını incelenir.
- Aşağıda, periyodik olmayan sonlu süreli bir işaret  $x(t)$  ile bu işaretten türetilen ve bir periyodu sonlu süreli işaretin sonlu periyodik bir işaret  $\tilde{x}(t)$  verilmiştir.



$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &\xrightarrow{\text{FS}} a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jkw_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ a_k &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \\ a_k &= \frac{1}{T} X(j\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0} = \frac{1}{T} X(jk\omega_0)\end{aligned}$$

## Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

- $\tilde{x}(t)$  Fourier serisine açılabılır.  $|t|<T/2$  için,  $x(t) = \tilde{x}(t)$  ve aralığın dışında  $x(t)=0$  olduğundan

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ a_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt\end{aligned}$$

- $T\omega_0$ 'nın zarfı  $X(j\omega)$ ,  $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$  şeklinde tanımlansın.

- O halde,  $a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0)$

- Zarf cinsinden bulunan katsayılar, Fourier serisinde yerine konulur ve  $2\pi/T=\omega_0$  olduğu göz önünde bulundurulursa

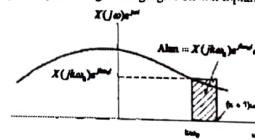
$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \\ &\downarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0}\end{aligned}$$

$T \rightarrow \infty$  giderken  $\omega_0 \rightarrow 0$  gider  
 $k\omega_0 = (k+1)\omega_0$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = x(t)$$

## Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

- $\omega_0 \rightarrow 0$  iken, aşağıdaki şekeiten görüldüğü gibi en son toplama integrale yakınsar.



- Toplamadaki her bir terim, yüksekliği  $X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$  ve genişliği  $\omega_0$  olan bir dikdörtgenin alanıdır.  $\omega_0 \rightarrow 0$  limit durumunda, toplama  $X(j\omega)e^{j\omega t}$  fonksiyonunun integralline yakınsar. O halde,  $T \rightarrow \infty$  için  $\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$  gerçeğini kullanırsak, aşağıda verilen Fourier dönüşüm şifresini elde ederiz.

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \quad \rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{FD}) \\ &\quad \boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt} \quad (\text{FD})\end{aligned}$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{T} X(jk\omega_0)}_{a_k} e^{jk\omega_0 t}$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \cdot \omega_0 \quad (T = 2\pi/\omega_0)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

### Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

- Şimdiye kadar yapılan tartışmadan, periyodik bir işaretin Fourier serisi katsayılarının, işaretin bir periyodun Fourier dönüşümü cinsinden ifade edilebileceği anlaşılmaktadır.
- $\tilde{x}(t)$ ,  $T$  ile periyodik olsun ve Fourier serisi katsayıları  $a_k$  ile gösterilsin.  $\tilde{x}(t)$  nin bir periyoduna eşit sonlu süreli bir işaret  $x(t)$  ve Fourier dönüşümü  $X(j\omega)$  ile belirtilsin. O halde,
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{x}(t) e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega=k\omega_0}$$
- Tartışma, sonlu süreli işaretler için yapılmıştır. İşaret sonlu olmasa bile, analiz denklemindeki integral yakınsayabilir ve bu tür işaretler için Fourier dönüşümü bulunabilir.
- Fourier dönüşümünün yakınsaması için yeterli olan koşullara Dirichlet koşulları denir ve aşağıda listelenmiştir.

### Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

Sürekli-zaman Fourier dönüşümü için Dirichlet koşulları

Koşul 1: İşaret mutlak integrallenebilir olmalıdır:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Koşul 2: Herhangi bir sonlu aralıktaki işaretin sonlu sayıda minimum ve maksimumu olmalıdır.

Koşul 3: Herhangi bir sonlu aralıktaki işaretin sonlu sayıda süreksizlik olmalı ve ayrıca süreksizlik noktalarında işaretin değeri de sonlu olmalıdır.

Özetle, mutlak integrallenebilir sürekli veya sonlu sayıda süreksizliğe sahip işaretlerin Fourier dönüşümü hesaplanabilir.

$a > 0$  olursa genlik sonuzla gider ve mutlak integrallenemeye olmaz. Döngüsünde

Oluşur

### Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

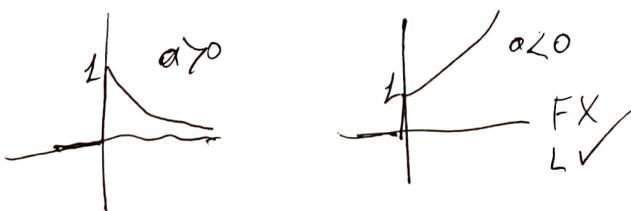
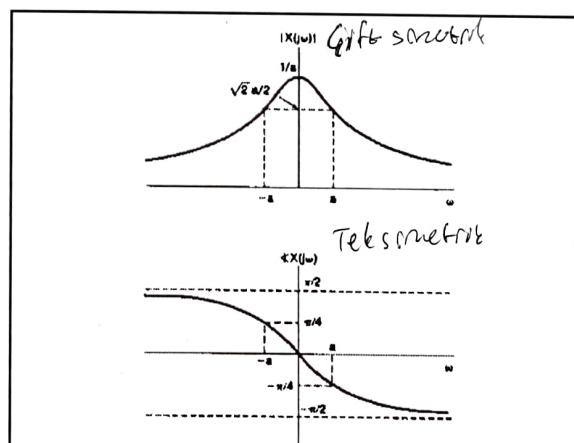
ÖRNEK:  $x(t) = e^{-at} u(t)$ ,  $a > 0$  işaretinin Fourier dönüşümünü hesaplayınız, genlik ve faz spektrumunu çiziniz.

ÇÖZÜM: Fourier dönüşüm denkleminden

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0$$

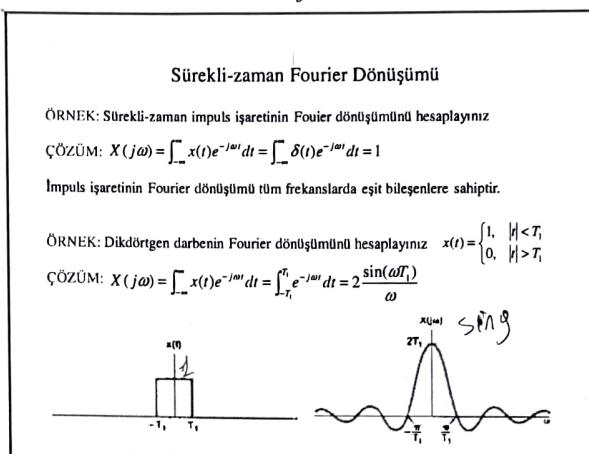
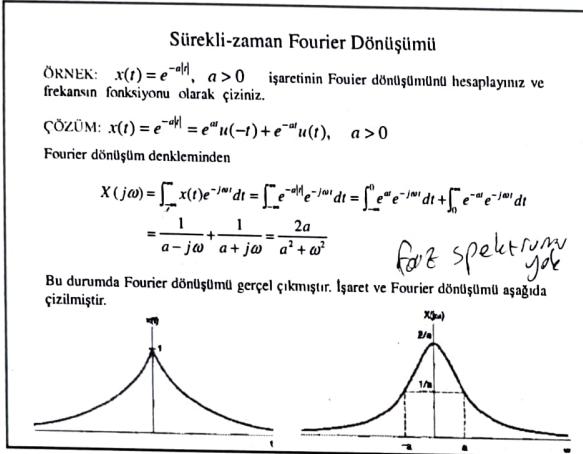
Göründüğü gibi, işaret gerçek olmasına rağmen Fourier dönüşümü karmaşık değerli olabilmektedir. O halde,  $\omega$ 'nın fonksiyonu olarak Fourier dönüşümünün genişliğini (genlik spektrumu) ve fazını (faz spektrumu) belirleyebilir ve çizebiliriz.

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad \angle X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

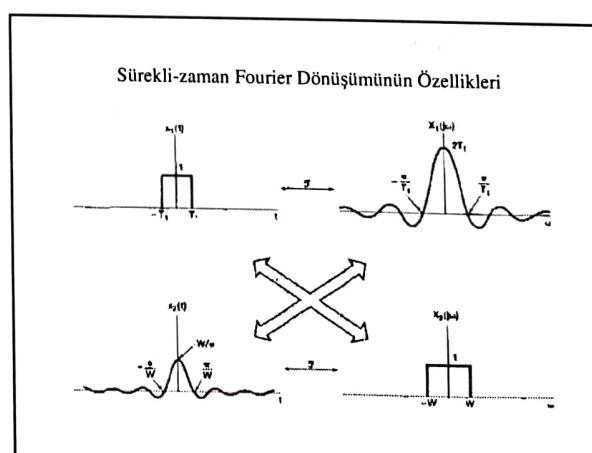
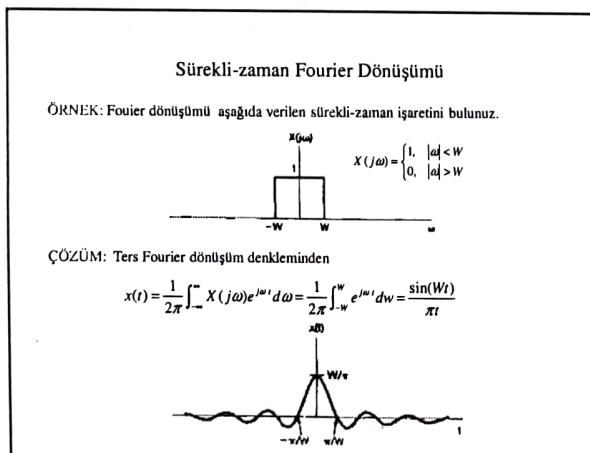


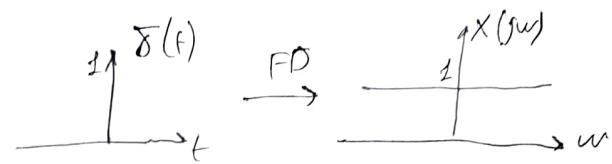
$\rightarrow$  döngüsüzlik özelliğine sahiptir  
 $X(j\omega) = X_1(j\omega) + X_2(j\omega)$

$$\int x(t) \delta(t-t_0) dt = x(t_0)$$



$$\uparrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} \downarrow$$





### Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

- Sürekli-zaman Fourier dönüşümü ve LTI sistemlerin analizinde  $\sin(\omega_0)/b_0$  şeklinde özel bir fonksiyona sıkılıkla karşılaşılır ve böyle fonksiyonlara sinc fonksiyonu denir.
- Sinc fonksiyonu matematiksel olarak şöyle tanımlanır:  $\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta}$
- Sinc fonksiyonu aşağıda çizilmiştir.

Aşağıda sinc( $\omega$ ) fonksiyonu ve Fourier dönüşümü, değişik  $\omega$  değerleri için çizilmiştir.  $\omega$  arttıkça Fourier dönüşümü genişlenken, sinc fonksiyonunun ana lobunun genliği darlaşır. Yani, zaman uzayı ile frekans uzayı arasında ters bir ilişki vardır. Zamanlı dalgıçın fazla yer kaplayan bir işaretin Fourier dönüşümü, daha fazla yer kaplayan bir işaretinkine göre daha geniş bir frekans aralığında frekans bantlarına sahiptir.

$w_1 > w_2 > w_3$

$$X(j\omega) = 2\pi\alpha_1\delta(\omega - \omega_0) + 2\pi\alpha_2\delta(\omega + \omega_0)$$

$$x(t) = \alpha_1 e^{j\omega_0 t} + \alpha_2 e^{-j\omega_0 t} \quad \text{if } (\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2)$$

$$x(t) = \cos(\omega_0 t);$$

3

### Periyodik İşaretlerin için Fourier Dönüşümü

- Sürekli-zaman periyodik işaretlerin de Fourier dönüşümünü hesaplamak mümkündür. Görecğimiz gibi, periyodik işaretlerin Fourier dönüşümü impuls fonksiyonu içermek zorundadır.
- Fourier dönüşümü  $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$  olan işaret, ters Fourier dönüşümü kullanarak rahatlıkla bulabiliriz.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

Daha genel olarak, sonsuz adet impulsun toplamından oluşan bir Fourier dönüşümünün tersi, sonsuz adet işaretin toplamı olmalıdır:

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

O halde, periyodik bir işaretin Fourier dönüşümü, şiddeteri işaretin Fourier serisi katısayları ve konumları temel frekansın katları tarafından belirlenen impulslar içermektedir.

### Periyodik İşaretlerin için Fourier Dönüşümü

ÖRNEK: Aşağıda verilen periyodik işaretin Fourier dönüşümünü hesaplayınız.

$$a_k = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_0)}{k\omega_0 T_0}$$

ÇÖZÜM:  $X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin(k\omega_0 T_0)}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$\alpha_1 = 1/2 = \alpha_{-1} = 1/2$$

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega_0 t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + \omega_0) e^{-j\omega_0 t} d\omega$$

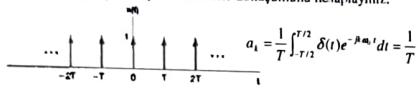
$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \left( \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} \right) = \cos(\omega_0 t)$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

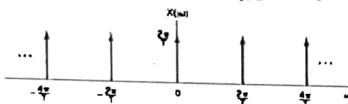
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

### Periyodik İşaretlerin için Fourier Dönüşümü

ÖRNEK: Aşağıda verilen periyodik işaretin Fourier dönüşümünü hesaplayınız.



$$\text{ÇÖZÜM: } X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$$



Not: Zaman uzayı ile frekans uzayı arasındaki ters ilişkiye dikkat ediniz. İmpulslar zaman uzayında birbirinden uzaklaşırsa frekans uzayında yakınlasmaktadır.  
 $T \rightarrow \infty$  limit durumunda  $x(t)$  işaretini ve Fourier dönüşümünü inceleyiniz.

### Periyodik İşaretlerin için Fourier Dönüşümü

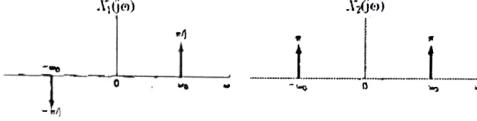
ÖRNEK:  $x_1(t) = \sin(\omega_0 t)$  ve  $x_2(t) = \cos(\omega_0 t)$  periyodik işaretlerinin Fourier dönüşümü hesaplayınız.

$$\text{ÇÖZÜM: } x_1(t) = \sin(\omega_0 t) \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2j}, a_{-1} = -\frac{1}{2j}, a_k = 0, k \neq \pm 1$$

$$X_1(j\omega) = 2\pi i \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi i_{-1} \delta(\omega + \omega_0) = \frac{\pi}{j} \delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j} \delta(\omega + \omega_0)$$

$$x_2(t) = \cos(\omega_0 t) \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}, a_{-1} = \frac{1}{2}, a_k = 0, k \neq \pm 1$$

$$X_2(j\omega) = 2\pi i_1 \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi i_{-1} \delta(\omega + \omega_0) = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$$



### Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

İşaret	Fourier Dönüşümü	Fourier Serisi Katsayıları
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	$a_k$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi i \delta(\omega - \omega_0)$	$a_1 = 1, a_{-1} = 0, k \neq 1$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = 1/2, a_k = 0, k \neq \pm 1$
$\sin(\omega_0 t)$	$(\pi/2) [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = 1/2, a_k = 0, k \neq \pm 1$
$x(t) = 1$	$2\pi \delta(\omega)$	$a_0 = 1, a_k = 0, k \neq 0$
Periyodik kare dalga $x(t) = \begin{cases} 1, &  t  < T_1 \\ 0, & T_1 <  t  < T/2 \end{cases}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} = \frac{\omega_0 T_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$	$a_k = \frac{1}{T}, \forall k$

İşaret	Fourier Dönüşümü	Fourier Serisi Katsayıları
$x(t) = \begin{cases} 1, &  t  < T_1 \\ 0, &  t  > T_1 \end{cases}$	$\frac{2\sin(a\omega T_1)}{a\omega}$	İşaret periyodik değil
$\sin(Wt)$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, &  \omega  < W \\ 0, &  \omega  > W \end{cases}$	İşaret periyodik değil
$\delta(t)$	1	İşaret periyodik değil
$u(t)$	$\frac{1}{j\pi} + \pi \delta(\omega)$	İşaret periyodik değil
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	İşaret periyodik değil
$e^{-\omega_0 t} u(t), \operatorname{Re}\{\omega_0\} > 0$	$\frac{1}{\omega_0 + j\omega}$	İşaret periyodik değil
$t e^{-\omega_0 t} u(t), \operatorname{Re}\{\omega_0\} > 0$	$\frac{1}{(\omega_0 + j\omega)^2}$	İşaret periyodik değil
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\omega_0 t} u(t), \operatorname{Re}\{\omega_0\} > 0$	$\frac{1}{(\omega_0 + j\omega)^n}$	İşaret periyodik değil

\*  $U(t)$  nümlə 1 integrallene bilen deyil  
Genelleştirilmiş F.D. işlədilmişdir.

### Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

- Kolaylık olması bakımından, sürekli-zaman Fourier dönüşümü ve tersini belirtmek için sırasıyla  $F(x(t))$  ve  $F^{-1}(X(j\omega))$  kosa gösterilimini kullanacağız. Ayrıca, sürekli-zaman Fourier dönüşüm çiftini belirtmek için

$$x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)$$

notasyonunu kullanacağız.

- Sürekli-zaman Fourier dönüşümünün aşağıda verilen özellikleri aracılığıyla, Fourier dönüşüm bilinen işaretlerden çoğu işaretin Fourier dönüşümünü elde etmek kolaylaşmaktadır.
- Aşağıda sadece en önemli özelliklerin ispatı verilecektir. Diğer özelliklerin ispatı benzer şekilde yapılabilir.

### Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Zamanda öteleme:  $x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega) \Rightarrow x(t-t_0) \xrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$

İspat: Ters Fourier dönüşüm denkleminden  $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

Eşitliğinin her iki tarafında  $t$  yerine  $t-t_0$  yazılrsa

$$x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (X(j\omega) e^{-j\omega t_0}) e^{j\omega t} d\omega$$

Yorum: Bir sürekli-zaman işaret öteleğinde, Fourier dönüşümünün genişliği değişmez, fazı ise öteleme ile doğru orantılı bir şekilde ötelebilir.

$$\begin{aligned} F\{x(t)\} &= X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)} \\ F\{x(t-t_0)\} &= e^{-j\omega t_0} X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j[\angle X(j\omega) - \omega t_0]} \end{aligned}$$

### Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Zaman-frekans ölçümleme:  $x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega) \Rightarrow x(at) \xrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$

İspat: Fourier dönüşüm denkleminden

$$F\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$

Integralde,  $\tau = at$  değişken dönüşümü yapılırsa

$$F\{x(at)\} = \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau, & a > 0 \\ -\frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau, & a < 0 \end{cases}$$

Yorum: Zaman uzayı ile frekans uzayı arasında ters bir ilişki vardır. Zamanda dar (geniş) yer kaplayan işaretlerin Fourier dönüşümü geniş (dar) bir aralıkta frekans bilesenlerine sahiptir. Ayrıca,  $a = -1$  seçilirse, zamanda tersine çevrilmiş işaretin Fourier dönüşümünün de tersine çevrileceği anlaşılmaktadır.

### Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Zamanda türev alma:  $x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega) \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$

İspat: Ters Fourier dönüşüm denkleminden  $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

Eşitliğinin her iki tarafında  $t$  'ye göre türevi alınırsa

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [j\omega X(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

Yorum: Zaman uzayında türev alma, frekans uzayında  $j\omega$  ile çarpımına karşılık gelmektedir. Bu özellik, sabit katsayılı diferansiyel denklemlerde tanımlanmış LTI sistemlerin analizinde çok önemli rol oynayacaktır. Çözümü zor olan diferansiyel bir denklem, Fourier dönüşümünün bu özelliğinden sayesinde çözümü çok kolay olan bir cebirsel denklem haline getirilir, denklem istenilen değişken için çözülür ve ters Fourier dönüşümü alınarak çözüm elde edilir.

### Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Konvolusyon özelliği:  $y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$

İspat: Konvolusyon denkleminden  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

Eşitliğin her iki tarafının Fourier dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= F\{y(t)\} = \int_{-\infty}^t \left( \int_{-\infty}^{\tau} x(\tau')h(t-\tau)d\tau' \right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^t x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\tau} h(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \end{aligned}$$

Zamanda öteleme özelliğinden parantez içindeki terim  $e^{-j\omega\tau} H(j\omega)$  dir. O halde,

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^t x(\tau) e^{-j\omega\tau} H(j\omega) d\tau \\ &= H(j\omega) \int_{-\infty}^t x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = X(j\omega)H(j\omega) \end{aligned}$$

Yorum: İki işaretin konvolusyonunun Fourier dönüşümü Fourier dönüşümlerinin çarpımına eşittir. Yani, iki işaretin konvolusyonunu bulmak için, Fourier dönüşümleri çarpılır ve çarpının ters Fourier dönüşümü alınır.

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

### Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

ÖRNEK:  $x(t) = e^{-bt} u(t)$   $b > 0$  ve  $h(t) = e^{-at} u(t)$   $a > 0$  işaretlerinin konvolusyonunu Fourier dönüşümünden yararlanarak hesaplayınız.

$$\text{ÇÖZÜM: } X(j\omega) = \frac{1}{b+j\omega}, \quad H(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}, \quad Y(j\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)(b+j\omega)}$$

$$Y(j\omega) \text{ basit kesirlerle açılırsa } Y(j\omega) = \frac{A}{a+j\omega} + \frac{B}{b+j\omega} = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{b+j\omega} \right]$$

$y(t)$ 'yi elde etmek için ters Fourier dönüşümü almak yeterlidir.

$$\begin{aligned} y(t) &= F^{-1}\{Y(j\omega)\} = F^{-1}\left\{ \frac{1}{b-a} \left[ \frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{b+j\omega} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{b-a} [e^{-at} u(t) - e^{-bt} u(t)] \end{aligned}$$

Fde  $U(-t)$  dize brşş yk

$$X(j\omega) = \frac{1}{b+j\omega}, \quad H(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

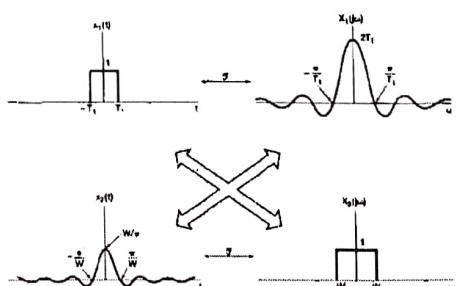
### Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Çarpma (modülasyon) özelliği:  $r(t) = s(t)p(t) \xrightarrow{F} R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [S(j\omega) * P(j\omega)]$

Yorumlar:

1. Zaman uzayında çarpma, frekans uzayında konvolusyonu karşılık getirmektedir.
2. Zaman uzayında konvolusyonun frekans uzayında çarpmaya karşılık geldiğini hatırlayınız. Zaman ve frekans uzayları arasındaki bu ilişkiye DÜALLİK denilir. Düallığın nedeni, Fourier ve ters Fourier dönüşüm denklemlerinin eşit olmanızla birlikte oldukça benzer olmasıdır.
3. Verilen bir Fourier çifti için, zaman ve frekans değişkenlerinin rolleri değiştirilecek DÜAL çift elde edilir.
4. Düallik özelliğini kullanarak, diğer pek çok özellik elde edilebilir. Örneğin, zaman uzayında türev almak  $j\omega$  ile çarpmaya karşılık geldiğine göre, zaman uzayında integral alma  $j\omega$  ile bölmeye karşılık gelmelidir.
5. Düallik özelliğinin, darbe ve sinc Fourier dönüşüm çifti için aşağıda verilmiştir ve diğer fonksiyon çiftlerine uygulanabilir.

### Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri



*zaman domenindeki işaretin  
ju ile gösterimi*

### Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

ÖRNEK: Bir  $s(t)$  işaretinin spektrumu aşağıda verilmiştir.  $p(t) = \cos(\omega_0 t)$  olmak üzere,  $r(t) = s(t)p(t)$  işaretinin spektrumunu Fourier dönüşümünün çarpma (modülasyon) özelliğinden yararlanarak bulunuz.

**ÇÖZÜM:**  
 $P(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$   
 $R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [S(j\omega) * \{ \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \}] = \frac{1}{2} S(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2} S(j(\omega + \omega_0))$

*ω₀ > ω₁  
dolgozlar  
çarpılmıyor*

### Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Özellik	Aperiódik İ işaret	Fourier dönüşümü
	$x(t)$ $y(t)$	$X(j\omega)$ $Y(j\omega)$
Değerlilik	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
Zamanda öteleme	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
Frekansa öteleme	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
Eşlenik alma	$x'(t)$	$X^*(-j\omega)$
Zamanda tersine çevirme	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Zaman ve frekans ölçük	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Konvolusyon	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
Zamanda çarpma	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(j\omega)*Y(j\omega)$

Özellik	Periyodik İ işaret	Fourier Serisi Katsayıları
Zamanda türev alma	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
Zamanda integral alma	$\int_{-\infty}^t x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Frekansa türev alma	$t x(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$
Gerçel işaretler için eşlenik simetriği	$x(t)$ gerçel	$\begin{cases} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \Re[X(j\omega)] = \Re[X(-j\omega)] \\ \Im[X(j\omega)] = -\Im[X(-j\omega)] \\  X(j\omega)  =  X(-j\omega)  \\ \neg X(j\omega) = -\neg X(-j\omega) \end{cases}$
Gerçel ve çift işaretler Gerçel ve tek işaretler	$x(t)$ gerçel ve çift $x(t)$ gerçel ve tek	$X(j\omega)$ gerçel ve çift $X(j\omega)$ saf karmapık ve tek
Gerçel işaretlerin çift-tek ayrıştırması	$x_e(t) = \text{Ev}[x(t)]$ [x(t) gerçel] $x_o(t) = \text{Od}[x(t)]$ [x(t) gerçel]	$\Re[X(j\omega)]$ $j\Im[X(j\omega)]$
Aperiódik işaretler için Parseval İşitsizi	$\int_{-\infty}^{\infty}  x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  X(j\omega) ^2 d\omega$	

### Doğrusal, Sabit Katsayılı Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanan Sistemler

- Giriş-çıkış ilişkisi aşağıda verilen sürekli-zaman sistemin frekans yanıtı bulalım  

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$
- Konvolusyon özelliğinden,  

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$
- Diferansiyel denklemin her iki tarafının Fourier dönüşümü alınır ve Fourier dönüşümünün türev özelliğinin kullanulursa frekans yanıtı bulunabilir:

$$F\left\{ \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} = F\left\{ \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k F\left\{ \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} = \sum_{k=0}^M b_k F\left\{ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\}$$

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(j\omega) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$

*beratay*

**Doğrusal, Sabit Katsayılı Diferansiyel Denklemlerle  
Tanımlanan Sistemler**

ÖRNEK: Giriş-çıkış ilişkisi aşağıda verilen sistemin frekans yanıtını ve impuls yanıtını bulunuz.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

ÇÖZÜM: Her iki tarafın Fourier dönüşümü alırsak

$$(j\omega)^2 Y(j\omega) + 4(j\omega)Y(j\omega) + 3Y(j\omega) = (j\omega)X(j\omega) + 2X(j\omega)$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3}$$

$H(j\omega)$ 'nın ters Fourier dönüşümü alırsak impuls yanıt elde edilir.

$$h(t) = F^{-1}\{H(j\omega)\} = F^{-1}\left\{\frac{1/2}{j\omega+1} + \frac{1/2}{j\omega+3}\right\}$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$

Hafta 8:  
Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü

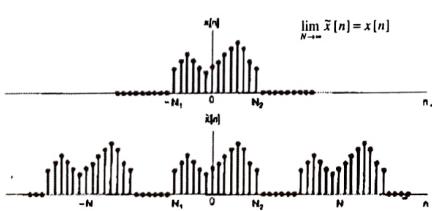
Ele Alınacak Ana Konular

- Ayrık-zaman Fourier dönüşümü
- Ayrık-zaman periyodik işaretler için Fourier dönüşümü
- Ayrık-zaman Fourier dönüşümünün özellikleri
- Doğrusal, sabit katsayılı fark denklemleriyle tanımlanan sistemler



**Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü**

- Aperiyodik bir işaret, periyodik bir işaretin periyod sonsuza giderken limit hali gibi düşünülebilir. Periyodik işaret Fourier serisine açılır ve periyodon sonsuza gitmesi durumunda serinin davranışını incelenir.
- Aşağıda, periyodik olmayan sonlu süreli bir işaret  $x[n]$  ile bu işaretten türetilen ve bir periyodu sonlu süreli işaret eşīt olan periyodik bir işaret  $\tilde{x}[n]$  verilmiştir.



**Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü**

- $\tilde{x}[n]$  Fourier serisine açılabilīir.  $-N_1 \leq n \leq N_2$  için,  $x[n] = \tilde{x}[n]$  ve aralığın dışında  $x[n] = 0$  olduğundan

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k < N} a_k e^{j k (2\pi/N)n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

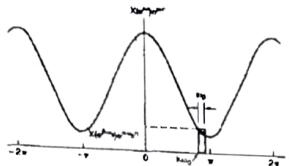
$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega}$  şeklinde tanımlansın.

$$\text{O halde, } a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega_k})$$

- Bulunan katsayılar, Fourier serisinde yerine konulur ve  $2\pi/N = \omega_0$  olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k < N} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k < N} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0$$

### Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü



- Son toplamadaki her bir terim, yüksekliği  $X(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$  ve genişliği  $\omega_0$  olan bir dikdörtgenin alanıdır.  $\omega_0 \rightarrow 0$  limit durumunda, toplama  $X(e^{j\omega})e^{j\omega n}$  fonksiyonunun integraline yakınsar. O halde,  $N \rightarrow \infty$  için  $\tilde{x}[n] \rightarrow x[n]$  geçerliğini kullanırsak, aşağıda verilen ayrık-zaman Fourier dönüşüm çiftini elde ederiz.

*(Signature)*

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega}$$

### Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü

- Sürekli-zaman ve ayrık-zaman Fourier dönüşümleri incelendiğinde önemli farklar olduğu gözle çarpmaktadır.
- İlk olarak, sürekli-zaman durumunda analiz ve sentez denklemlerinin ikisi de integral olup, integral aralığı sonsuzdur. Ayrık-zaman durumunda, analiz denklemi sonsuz bir toplama iken sentez denklemi  $2\pi$  aralığında sonlu bir integraldir.
- İkinci olarak, sürekli-zaman Fourier dönüşümü periyodik değişken (özel durumlar hariç), ayrık-zaman Fourier dönüşümü  $2\pi$  ile periyodiktir.
- Bu farklılıkların nedeni, (ayırık-zamanda) harmonik ilişkili sonlu sayıda karmaşık üstel işaret olmasıdır.
- Ayrıca, ayrık-zamanda 0 veya  $2\pi$ 'nin katlarına yakın frekanslar yavaş değişim işaretlerden,  $\pi$ 'nın katlarına yakın frekanslar ise hızlı değişim işaretlerden kaynaklanmaktadır.

### Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü

- Şimdide kadar yapılan tartışmadan, periyodik bir ayrık-zaman işaretin Fourier serisi katsayılarının, işaretin bir periyodunun ayrık-zaman Fourier dönüşümü cinsinden ifade edilebileceği anlaşılmaktadır.
- $\tilde{x}[n]$ ,  $N$  ile periyodik olsun ve Fourier serisi katsayıları  $a_k$  ile gösterilsin.  $\tilde{x}[n]$  nin bir periyoduna eşit sonlu süreli bir işaret  $x[n]$  ve Fourier dönüşümü  $X(e^{j\omega})$  ile belirtilsin. O halde,

$$a_k = \frac{1}{N} \left. X(e^{j\omega}) \right|_{\omega=k\omega_0}$$

- Tartışma, sonlu süreli işaretler için yapılmıştır. İşaret sonlu olmasa bile, analiz denklemindeki toplama yakınsayabilir ve bu tür işaretler için ayrık-zaman Fourier dönüşümü bulunabilir.
- Ayrık-zaman Fourier dönüşümünün yakınsaması için yeterli olan koşullar sürekli durumdanın farkıdır.

### Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü

Ayrık-zaman Fourier dönüşümü için yakınsama koşulu

Koşul : İşaret mutlak toplanabilir veya sonlu enerjiye sahip olmalıdır:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

Sentez denklemi için yakınsama problemi yoktur çünkü sentez denklemi sonlu bir integraldir.

O halde, sentez denklemi hesaplanırken sürekli-zaman durumunda karşılaşılan Gibbs olay ile ayrık-zaman durumunda karşılaşılmaz.

### Ayırık-zaman Fourier Dönüşümü

ÖRNEK:  $x[n] = a^n u[n]$ ,  $|a| < 1$  işaretinin Fourier dönüşümünü hesaplayınız, genlik ve faz spektrumunu çiziniz.

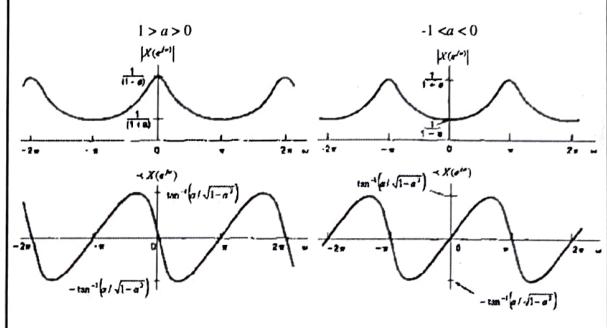
**ÇÖZÜM:** Fourier dönüşüm denkleminde

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Gördüğü gibi, işaret gerçek olmasına rağmen Fourier dönüşümü karmaşık değerli olabilmektedir. O halde,  $\omega$ 'nın fonksiyonu olarak Fourier dönüşümünün genişliğini (genlik spektrumu) ve fazını (faz spektrumu) belirleyebilir ve çizebiliriz.

Pozitif ve negatif  $\omega$  değerleri için genlik ve faz spektrumları aşağıda çizilmiştir. Her iki durumda da spektrumları  $2\pi$  ile periodik olduğunu dikkat ediniz.

$$\text{Hastırma: } \sum_{k=1}^n q^k = \frac{q^n - q^{n+1}}{1-q}, \quad 1 \neq q$$



$0 < a < 1$  için işaretin tüm değerleri pozitif olup işaret yavaş değiştiğinden Fourier dönüşümü  $0$  ve  $2\pi$ 'nin katlarında bileşenlere sahiptir.  $-1 < a < 0$  için işaretin değeri bir pozitif, bir negatif olup işaret hızlı değiştiğinden Fourier dönüşümü  $\pi$ 'nın katlarında frekans bileşenlerine sahiptir.

### Mıktak İntegralelege bilin Ayırık-zaman Fourier Dönüşümü olugunu gösterir

ÖRNEK:  $x[n] = a^{|n|}$ ,  $|a| < 1$  işaretinin Fourier dönüşümünü hesaplayınız ve frekansın fonksiyonu olarak çiziniz.

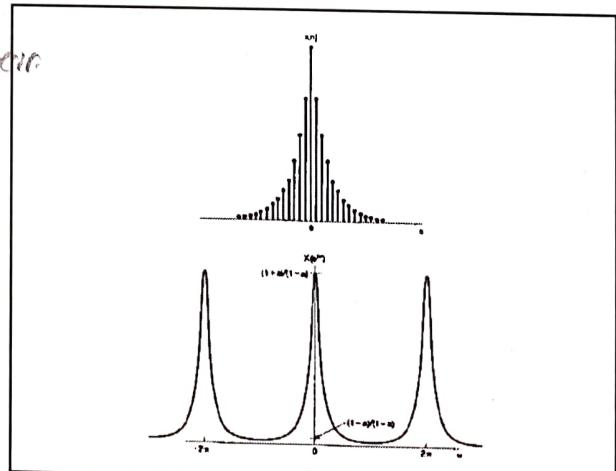
**ÇÖZÜM:** Fourier dönüşüm denkleminde

$$\begin{aligned} x[n] &= a^{|n|}, \quad |a| < 1 \rightarrow x[n] = a^{-n} u[-n-1] + a^n u[n] \\ X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-jn\omega} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jn\omega} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n + \sum_{n=1}^{\infty} (ae^{j\omega})^n \rightarrow \frac{1}{1 - a^2 e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}} = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos(\omega) + a^2} \rightarrow \text{faz } \varphi(\omega)$$

Bu durumda Fourier dönüşümü gerçel çıkmıştır. İşaret ve Fourier dönüşümü aşağıda  $0 < a < 1$  için çizilmiştir.

$$\text{Hastırma: } \sum_{k=1}^n q^k = \frac{q^n - q^{n+1}}{1-q}, \quad 1 \neq q$$



### Ayırık-zaman Fourier Dönüşümü

ÖRNEK: Ayırık-zaman impuls işaretinin Fourier dönüşümünü hesaplayınız.

$$\text{ÇÖZÜM: } X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega} = 1e^{-j\omega n} = 1$$

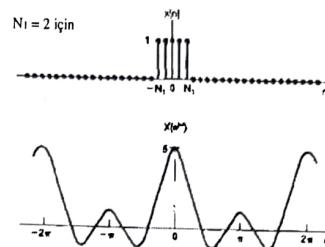
Impuls işaretinin Fourier dönüşümü tüm frekanslarda eşit bileşenlere sahiptir.

ÖRNEK: Dikdörtgen darbenin Fourier dönüşümünü hesaplayınız.

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| < N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

$$\text{ÇÖZÜM: } X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jn\omega} = \begin{cases} \frac{e^{j\omega N_1} - e^{-j\omega(1+N_1)}}{1 - e^{-j\omega}}, & \omega \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \\ 2N_1 + 1, & \omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \end{cases}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega N_1} - e^{-j\omega N_1}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega N_1} (1 - e^{-j\omega(1+2N_1)})}{e^{-j\omega} (e^{j\omega} - e^{-j\omega})} = \frac{e^{j\omega N_1} e^{-j\omega(1+2N_1)} / 2 \left( e^{j\omega(1+2N_1)} / 2 - e^{-j\omega(1+2N_1)} / 2 \right)}{e^{-j\omega} (e^{j\omega} - e^{-j\omega})} = \frac{\sin[\omega(N_1 + 1/2)]}{\sin(\omega/2)}$$



Sürekli durumda olduğu gibi, darbenin Fourier dönüşümü sinc fonksiyonudur. Ancak, sürekli-zamanda yan lobların genişliği devamlı azalırken ayırık-zamanda periyodiklikten dolayı bu durum geçerli değildir.

$$\delta(t - \tau) = e^{-jkw_0 t}$$

### Periyodik İşaretlerin için Fourier Dönüşümü

Ayırık-zaman periyodik işaretlerinde Fourier dönüşümünü hesaplamak mümkündür. Periyodik işaretlerin Fourier dönüşümü impuls fonksiyonu içermek zorundadır.

Fourier dönüşümü  $X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m)$  olan işareti bulalım

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m) \right) e^{j\omega n} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega = e^{j\omega_0 n}$$

(integralin  $2\pi$   $[-\pi, \pi]$  aralığında hesaplandığına dikkat ediniz...)

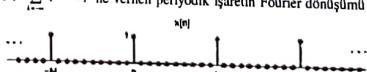
- Periyodik bir ayırık-zaman işaret Fourier serisine açılabılır:  $x[n] = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k e^{j(2\pi k/N)n}$
- Açılımındaki karmaşık üstel terimlerin Fourier dönüşümü temel frekansın katlarında impulslardır. Doğrusallık özelliğinden, sonsuz adet işaretin toplamının Fourier dönüşümü, tek tek Fourier dönüşümlerinin toplamına eşittir. O halde, periyodik işaretlerin Fourier dönüşümü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \omega_0 - k\frac{2\pi}{N}\right)$$

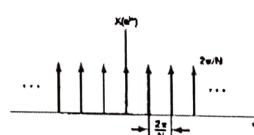
### Periyodik İşaretlerin için Fourier Dönüşümü

ÖRNEK:  $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$  ile verilen periyodik işaretin Fourier dönüşümü nedir?



ÇÖZÜM: Fourier serisi katsayıları tüm n değerleri için  $1/N$  olarak bulunmuştur.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$$

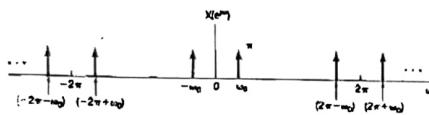


### Periyodik İşaretlerin için Fourier Dönüşümü

ÖRNEK:  $x[n] = \cos(\omega_0 n)$  periyodik işaretin Fourier dönüşümü nedir?

$$\text{ÇÖZÜM: } x[n] = \cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi a_m \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi a_m \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m) \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m)$$



İşaret	Fourier Dönüşümü	Fourier Serisi Katsayıları
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi k/N)n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k$
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$	$a_k = 1, k = m, m \pm N, m \pm 2N, \dots$ aksil halde
$\cos(\omega_0 n)$	$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k))$	$a_k = 2\pi n / N \Rightarrow \text{periyodik}$ $a_k = 1/2, k = \pm m, \pm N, \pm 2N, \dots$ aksil halde
$\sin(\omega_0 n)$	$\frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k))$	$a_k = 2\pi n / N \Rightarrow \text{periyodik}$ $a_k = 1/2j, k = m, m \pm N, m \pm 2N, \dots$ $a_k = -1/2j, k = -m, -m \pm N, -m \pm 2N, \dots$ aksil halde
$x[n] = 1$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$	$a_k = 1, k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ aksil halde
Periyodik kare dalga	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \begin{cases} \frac{\sin((2\pi k/N)(N+1/2))}{N \sin(\pi k/N)}, & k \neq 0, \pm N, \dots \\ (2N+1)/N, & k = 0, \pm N, \dots \end{cases}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{1}{N}, \forall k$

• Genelleştirilmiş Fourier dönüşümü

İşaret	Fourier Dönüşümü	Fourier Serisi Katsayıları
$a' u[n],  a  < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$	İşaret periyodik değil
$x[n] = \begin{cases} 1, &  n  \leq N, \\ 0, &  n  > N, \end{cases}$	$\frac{\sin(\omega(N+1/2))}{\sin(\omega/2)}$	İşaret periyodik değil
$\frac{\sin(Wn)}{Wn}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq  \omega  \leq W \\ 0, & W <  \omega  \leq \pi \end{cases}$	İşaret periyodik değil
$\delta[n]$	1	İşaret periyodik değil
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=0}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k)$	İşaret periyodik değil
$\delta[n - n_0]$	$e^{-jn_0}$	İşaret periyodik değil
$(n+1)a'u[n],  a  < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$	İşaret periyodik değil
$\frac{(n+r-1)}{n(r-1)!} a'u[n],  a  < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^r}$	İşaret periyodik değil

### Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

- Kolaylık olması bakımından, ayrık-zaman Fourier dönüşümü ve tersini belirtmek için sırasıyla  $F[x[n]]$  ve  $F^{-1}[X(e^{j\omega})]$  kısa gösterimini kullanacağız. Ayrıca, ayrık-zaman Fourier dönüşümünü belirtmek için

$$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

notasyonunu kullanacağız.

- Ayrık-zaman Fourier dönüşümünün aşağıda verilen özellikleri aracılığıyla, Fourier dönüşümü bilinen işaretlerden çoğu işaretin Fourier dönüşümünü elde etmek kolaylaşmaktadır.

- Aşağıda sadece en önemli özelliklerin ispatı verilecektir. Diğer özelliklerin ispatı benzer şekilde yapılabilir.

$$\frac{(n!)^2}{n!} = \frac{n^2 \cdot n^1 \cdot n^1 \cdot n^1 \cdot n^1}{(n!)^2}$$

$$(n!)^2 \cdot n^1 \cdot (n-1)!$$

### Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Zamanda öteleme:  $x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) \Rightarrow x[n-n_0] \xrightarrow{F} e^{-jn\omega_0} X(e^{j\omega})$

**Ispat:** Ters Fourier dönüşüm denkleminden  $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega$

Eşitliğin her iki tarafında  $n$  yerine  $n-n_0$  yazılırsa

$$x[n-n_0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega(n-n_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (X(e^{j\omega}) e^{-jn\omega_0}) e^{jn\omega} d\omega$$

**Yorum:** Bir sürekli-zaman işaret öteleğinde, Fourier dönüşümünün genliği değişmez, fazı ise öteleme ile doğru orantılı bir şekilde ötelebilir.

$$\begin{aligned} F\{x[n]\} &= X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{-j\chi(\omega)} \\ F\{x[n-n_0]\} &= e^{-jn\omega_0} X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{-j\chi(\omega)-jn\omega_0} \end{aligned}$$

### Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Frekansa türev alma:  $x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) \Rightarrow nx[n] \xrightarrow{F} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

**Ispat:** Fourier dönüşüm denkleminden  $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega}$

Eşitliğin her iki tarafında  $\omega$  ya göre türevi alınır

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-jn)x[n] e^{-jn\omega}$$

Son eşitliğin her iki tarafı  $j$  ile çarpılırsa sonuç elde edilmiş olur.

### Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Konvolusyon özelliği:  $y[n] = x[n]*h[n] \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

**Ispat:** Konvolusyon denkleminden  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

O halde,

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= F\{y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right] e^{-jn\omega} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k] e^{-jn\omega} \right] \end{aligned}$$

Zamanda öteleme özelliğinden parantez içindeki terim  $e^{-jk\omega} H(e^{j\omega})$  dir. O halde,

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-jk\omega} H(e^{j\omega}) \\ &= H(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-jk\omega} = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

**Yorum:** İki işaretin konvolusyonun Fourier dönüşümü, Fourier dönüşümlerinin çarpımına eşittir. Yani, iki işaretin konvolusyonunu bulmak için, Fourier dönüşümleri çarpılır ve çarpının ters Fourier dönüşümü alınır.

### Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

ÖRNEK:  $x[n] = \beta^n u[n]$   $|\beta| < 1$  ve  $h[n] = \alpha^n u[n]$   $|\alpha| < 1$  işaretlerinin konvolusyonunu Fourier dönüşümünden yararlanarak hesaplayınız.

$$\text{ÇÖZÜM: } X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\omega}}, \quad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}, \quad Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \beta e^{-j\omega})(1 - \alpha e^{-j\omega})}$$

$$Y(e^{j\omega}) \text{ basit kesirlerle açılırsa } Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - \alpha e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \beta e^{-j\omega}} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left[ \frac{\alpha}{1 - \alpha e^{-j\omega}} - \frac{\beta}{1 - \beta e^{-j\omega}} \right]$$

$y[n]$ 'yi elde etmek için ters Fourier dönüşümü almak yeterlidir.

$$\begin{aligned} y[n] &= F^{-1}\{Y(e^{j\omega})\} = F^{-1}\left\{ \frac{1}{\alpha - \beta} \left[ \frac{\alpha}{1 - \alpha e^{-j\omega}} - \frac{\beta}{1 - \beta e^{-j\omega}} \right] \right\} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \alpha^n u[n] - \frac{\beta}{\alpha - \beta} \beta^n u[n] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}] u[n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad y[n] &= x[n] * h[n] \\ \textcircled{2} \quad Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) \\ y[n] &= FD^{-1} \mathcal{E} Y(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

### Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Çarpma (modülatyon) özelliği:

$$y[n] = x_1[n]x_2[n] \xrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} [X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})]$$

**Ispat:** Fourier dönüşüm denkleminden  $Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-jn\omega}$

$x_1[n]$  yerine ters Fourier dönüşüm ifadesi kullanılır ve toplama ile integralin sırası değiştirilirse

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta \right] x_2[n] e^{-jn\omega} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] e^{-j(\theta-n)\omega} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\theta-\omega)}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} [X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})] \end{aligned}$$

### Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Özellik	Aperiódik işaret	Fourier dönüşümü
	$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
	$y[n]$	$Y(e^{j\omega})$
Doğrusallık	$a x[n] + b y[n]$	$a X(e^{j\omega}) + b Y(e^{j\omega})$
Zamanda öteleme	$x(n - n_0)$	$e^{-jn_0\omega} X(e^{j\omega})$
Frekansta öteleme	$e^{jn\omega} x[n]$	$X(e^{j(\omega - n\omega)})$
Eşlenik alma	$x'(t)$	$X^*(-j\omega)$
Zamanda tersine çevirme	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
Zamanda öbekleme	$\hat{x}_k[n] = \begin{cases} x(n/k), & n, k'ün katı \\ 0, & aksı halde \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$
Konvolusyon	$x[n]*y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Zamanda çarpma	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} [X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega})]$

Özellik	Aperiódik işaret	Fourier Dönüşümü
Zamanda fark alma	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$
Zamanda toplama	$\sum_{k=0}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \frac{1}{\pi} X'(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
Frekansta türrev alma	$nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Gerçel işaretler için eşlenik simetriklik	$x[n]$ gerçel	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \Re[X(e^{j\omega})] = \Re[X(e^{-j\omega})] \\ \Im[X(e^{j\omega})] = -\Im[X(e^{-j\omega})] \\  X(e^{j\omega})  =  X(e^{-j\omega})  \\ \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$
Gerçel ve çift işaretler Gerçel ve tek işaretler	$x(n)$ gerçel ve çift $x(n)$ gerçel ve tek	$X(e^{j\omega})$ gerçel ve çift $X(e^{j\omega})$ saf karmaşık ve tek
Gerçel işaretlerin çift-tek ayırtılması	$x_1[n] = \text{Ev}[x(n)]$ [ $x(n)$ gerçel] $x_2[n] = \text{Od}[x(n)]$ [ $x(n)$ gerçel]	$\Re[X(e^{j\omega})]$ $\Im[X(e^{j\omega})]$
Aperiódik işaretler için Parseval İlliği	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}  x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}  X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$	

### Doğrusal, Sabit Katsayılı Fark Denklemleriyle Tanımlanan Sistemler

- Girişi-çıkış ilişkisi aşağıda verilen ayrık-zaman sistemin frekans yanıtını bulalım

$$\sum_{k=0}^n a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^n b_k x[n-k]$$

$$\bullet \text{Konvolusyon özelliğinden, } Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

- Fark denkleminin her iki tarafının Fourier dönüşümü alınır ve Fourier dönüşümünün öteleme özelliği kullanılsa frekans yanıtı bulunabilir:

$$F\left\{ \sum_{k=0}^n a_k y(n-k) \right\} = F\left\{ \sum_{k=0}^n b_k x[n-k] \right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^n a_k F\{y(n-k)\} = \sum_{k=0}^n b_k F\{x(n-k)\}$$

$$\sum_{k=0}^n a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^n b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^n b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^n a_k e^{-jk\omega}}$$

# Doğrusal, Sabit Katsayılı Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanan Sistemler

**ÖRNEK:** Giriş-çıkış ilişkisi aşağıda verilen sistemin frekans yanıtını ve impuls yanıtını bulunuz.

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$$

**ÇÖZÜM:** Her iki taraflı Fourier dönüşümü alınırsa

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}} = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j2\omega}\right)}$$

$H(e^{j\omega})$ 'nın ters Fourier dönüşümü alınırsa impuls yanıtı elde edilir.

$$h[n] = F^{-1} \left\{ H(e^{j\omega}) \right\} = F^{-1} \left\{ \frac{A}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \right\} = F^{-1} \left\{ \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \right\}$$

$$\Rightarrow h[n] = 4 \left( \frac{1}{2} \right)^n u[n] - 2 \left( \frac{1}{4} \right)^n u[n]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

Hafta 9:  
Laplace Dönüşümü

Ele Alınacak Ana Konular

- Laplace dönüşümü
- Laplace dönüşümünün yalanşaklı bölge
- Ters Laplace dönüşümü
- Laplace dönüşümünün özellikleri
- Laplace dönüşümü kullanarak LTI sistemlerin analizi

Laplace Dönüşümü

- Impuls yanısı  $h(t)$  olan bir LTI sisteminin,  $e^s$  girişine olan yanıtının  $y(t) = H(s) e^s$  olduğunu göstermek.  $H(s)$  aşağıdaki gibi hesaplanıyor.

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

- $s=jw$  için yukarıda verilen integral ifadesi  $h(t)$ 'nın Fourier dönüşümünü verir.  $s$ 'in genel karmaşık değeri ( $s = \sigma + jw$ ) olusuk durumunda integral ifadesine Laplace dönüşümü denir.
- $s$  karmaşık bir sayı olusuk üzere, bir sürekli-zaman işaret  $x(t)$ 'nın Laplace dönüşümü

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

denklemiyle tanımlanır. Laplace dönüşümü belirtenek için  $\mathcal{L}(x(t))$  kullanılarak ve işaret ile Laplace dönüşümü arasındaki ilişki, aşağıdaki şekilde belirtilecektir.

$$x(t) \xleftrightarrow{s} X(s)$$

Laplace Dönüşümü

- Laplace dönüşümü ile sürekli-zaman Fourier dönüşümü arasındaki ilişki aşağıda gösterilmiştir.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \xrightarrow{s=jw} X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jw t} dt$$

- $s = jw$  için,  $X(s)|_{s=jw} = F\{x(t)\}$

- Dolayısı ile

$$s = \sigma + jw \text{ için, } X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \xrightarrow{s=\sigma+jw} X(\sigma+jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma+jw)t} dt$$

$$X(\sigma + jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-jw t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-jw t} dt$$

Bu durumda eşitliğin sağ tarafının  $x(t)e^{-\sigma t}$  'nin Fourier dönüşümüne eşit olduğu gürültür.

- Bazı durumlarda Laplace' da  $s \rightarrow jw$  yaparsen F.D'yi bulursun.

-  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \rightarrow \infty$  F.D yok; faktant laplace olabilir.

• Yakın sonda  $\rightarrow$  basit  $\rightarrow$  sade değer

### Laplace Dönüşümü

- Gördüğü gibi Laplace dönüşümü, karmaşık  $s$ -düzleminde  $j\omega$ -eksenin üzerinde ( $\sigma = 0$ ) hesaplandığında sürekli-zaman Fourier dönüşümünü verir. !!!

$$X(s)|_{s=0} = F(x(t))$$

- $x(t)e^{-st}$  işaretinin Fourier dönüşümü de  $x(t)$  işaretinin Laplace dönüşümünü verir.

#### Bu durumda,

- Bir  $x(t)$  işaretinin Laplace dönüşümünün var olabilmesi için  $x(t)e^{-st}$  işaretinin Fourier dönüşümü yok olmalıdır. Verilen bir  $x(t)$  işaret için, Laplace dönüşümünün var olduğu  $s$  değerleri kümelerine YAKINSAKLIK BÖLGESİ (Region of Convergence, ROC) denir.

- Eğer ROC imajiner eksen ( $=j\omega$ ) içindedirsa, işaretin Fourier dönüşümü de vardır.

- Razı işaretler için Fourier dönüşümü yok olamaz iken Laplace dönüşümü yok olabilir.

$X(s)$  in  
or oldus  
t kons!!!

### Laplace Dönüşümü

$\underset{\text{ad.ult})}{\text{ÖRNEK 1: }} x(t) = e^{-at} u(t)$  işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

**CÖZÜM:** Bu işaret için Fourier dönüşümü önceki haftalarda aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0 \rightarrow F. 1$$

İşaretin Laplace dönüşümü ise,

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt \quad S \rightarrow G. 1$$

$$X(s)|_{s=\sigma+j\omega} = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+a)t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{(\sigma+a) + j\omega}, \quad \sigma + a > 0$$

$$\text{veya, } s = \sigma + j\omega \rightarrow X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

İdeal bir -

### Laplace Dönüşümü

**ÖRNEK 2:**  $x(t) = -e^{-ut} u(-t)$  işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

$$\text{ÇÖZÜM: } X(s) = - \int_{-\infty}^0 e^{-ut} e^{-st} u(-t) dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-(s+u)t} dt$$

$$-e^{-ut} u(-t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+u}, \quad \text{Re}\{s\} < -u$$

Not: Önceki örnekte,

$$e^{-ut} u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+u}, \quad \text{Re}\{s\} > -u$$

### Laplace Dönüşümü

Öncekiler incelediğinde farklı iki işaretin ait Laplace dönüşümlerinin cebirsel olarak birbirine eşit olduğu görüldür.

$$-e^{-ut} u(-t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+u}, \quad \text{Re}\{s\} < -u$$

$$e^{-ut} u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+u}, \quad \text{Re}\{s\} > -u$$

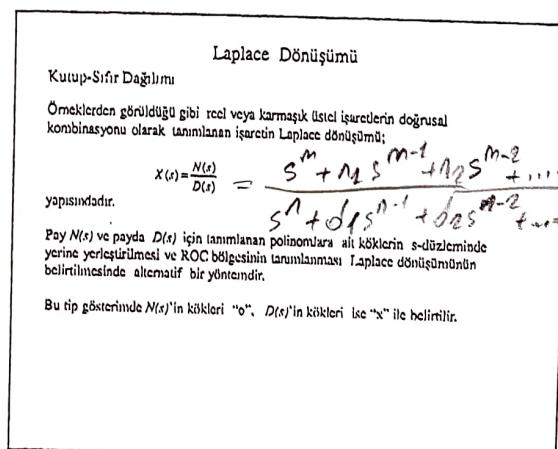
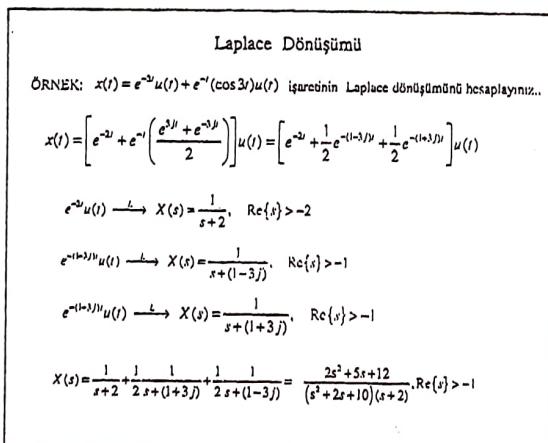
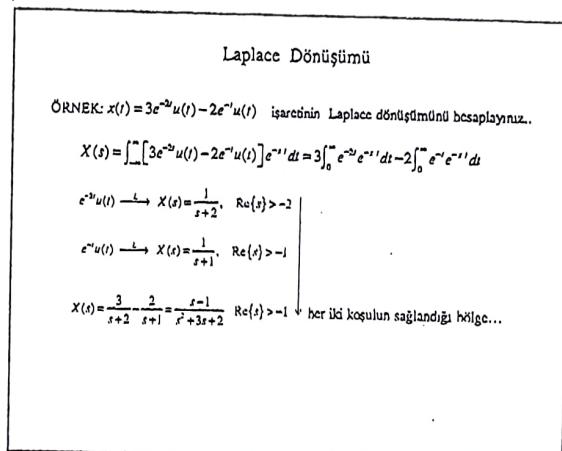
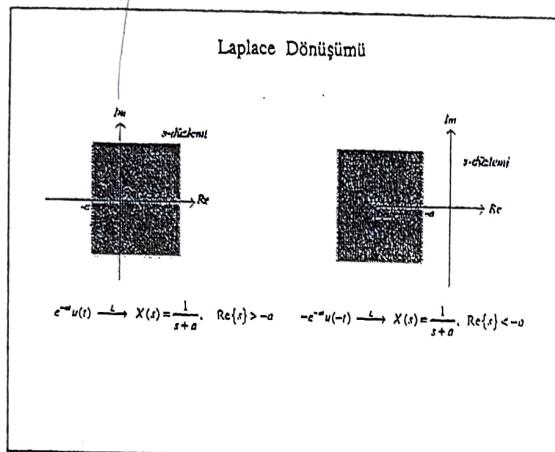
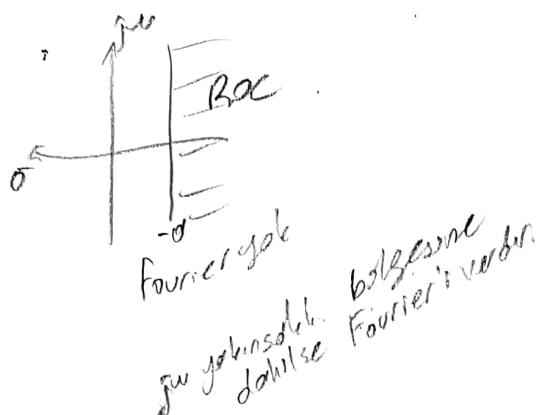
Fakat eşitliklerin geçerli olduğu yakınsaklık bulgusunun  $\{\text{Re}\{s\} < -u\}$  ve  $\{\text{Re}\{s\} > -u\}$  birbirinden farklı olduğunu dikkat ediniz.

Bu durumda Laplace dönüşümü için cebirsel ifadenin yanısıra yakınsaklık hibjesinde bir limitimizdir.

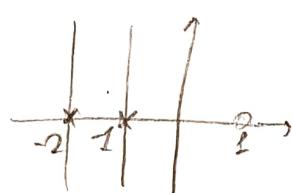
$$X(s) = - \int_{-\infty}^0 e^{-ut} \cdot e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-(u+s)t} dt$$

$$+ \frac{1}{u+s+j\omega} e^{-(u+\delta)t} \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^0$$

$$\boxed{\begin{aligned} u+\delta &< 0 & \text{İzin} & + \frac{1}{u+s} \\ \downarrow & & & \end{aligned}}$$



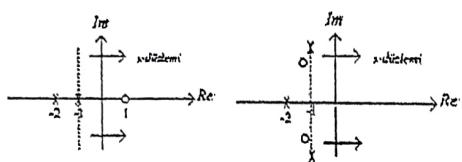
Yokluktakla bölgeleri kopyalayın  
Kutup polelerini kopyalayın



$$X(s) = \frac{(s-1)}{(s+2)(s+1)}, \quad \begin{array}{l} \text{Re}\{s\} > -1 \\ \text{Re}\{s\} < -2 \\ -2 < \text{Re}\{s\} < -1 \end{array}$$

(1) (2) (3)

### Laplace Dönüşümü



$$X(s) = \frac{s-1}{s^2 + 3s + 2} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 12}{(s^2 + 2s + 10)(s + 2)} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$X(s)$ 'in kökleri  $X(s)$ 'in gözlemleri olarak adlandırılır. Çünkü  $s$ 'in bu değerleri için  $X(s) = 0$  değerini alır.  $D(s)$ 'in kökleri ise kutup olarak adlandırılır ve  $X(s) = \infty$  olur.

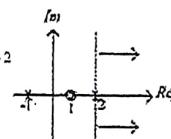
### Laplace Dönüşümü

Örnek:  $x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$  işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayınız..

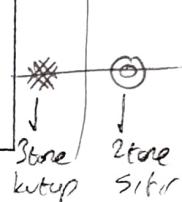
$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int \delta(t)e^{-st} dt = 1$  ROC? Yarım düzleme bölgesi tam s düzleme

$$e^{-t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1 \quad e^{2t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s-2}, \quad \text{Re}\{s\} > 2$$

$$X(s) = 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{s-2} = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)} \quad \text{Re}\{s\} > 2$$



Soru:  $x(t)$  işaretinin Fourier dönüşümü için ne söylenebilir?



Stone  
kutup

### Laplace Dönüşümü

Özellik 1: Laplace dönüşümü  $X(s)$ 'e ait ROC  $jw$  ekseniye paralel bir şerittir.

Daha önce belirtildiği gibi  $s = \sigma + jw$  olmak üzere  $x(t)$  nın Laplace dönüşümünün var olabilmesi için  $x(t)e^{-\sigma t}$  işaretinin Fourier dönüşümü yok olmalıdır.

$$\int |x(t)|e^{-\sigma t} dt < \infty$$

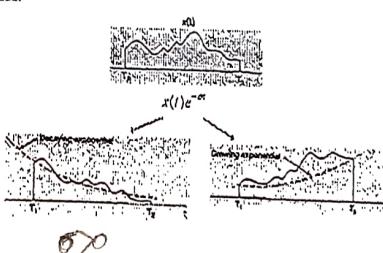
Dolayısı ile koşul  $\sigma = \sigma + jw$  'in gerçel kısımına  $\sigma$  bağlıdır.

Özellik 2:  $X(s)$ 'e ait ROC kutup içermez.

Kutup noktalarında  $X(s) = \infty$  olduğundan  $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$  integralı yakınsamayacaktır.

### Laplace Dönüşümü

Özellik 3:  $x(t)$  sonlu bir işaret ve mutlak integrallenebilir ise  $X(s)$ 'e ait ROC tüm  $s$ -düzlemini.



### Laplace Dönüşümü

Örnek:  $x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & 0 < t < T \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$  işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayıp ROC bölgesinin tüm  $s$  düzlemini olduğunu gösteriniz.

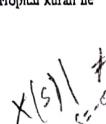
$$X(s) = \int_0^T x(t)e^{-st} dt = \int_0^T e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \frac{1}{s+\alpha} (1 - e^{-(s+\alpha)T})$$

Gördüğün gibi  $X(s)$ 'in  $s=-\alpha$  noktasında kutbu vardır. Kütük noktaları ROC'a dahil olamaz! (Özellik 2).

Ancak  $s=-\alpha$  da  $X(s)=0/0$  olduğundan  $s=-\alpha$  noktasındaki değeri L'Hôpital kuralı ile hesaplanır ise

$$\lim_{s \rightarrow -\alpha} X(s) = \lim_{s \rightarrow -\alpha} \frac{\frac{d}{ds}(1 - e^{-(s+\alpha)T})}{\frac{d}{ds}(s+\alpha)} = \lim_{s \rightarrow -\alpha} T e^{-sT} e^{-sT} = T$$

$X(-\alpha) = T$  olduğundan ROC tüm  $s$  düzlemdir.



### Laplace Dönüşümü

Özellik 4:  $x(t)$  sağ tarafta dayalı bir işaret ise ve  $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma_0$  ROC bölgesinde ise  $\operatorname{Re}\{s\} > \sigma_0$  şartını sağlayan tüm  $s$  noktalarda ROC alanındadır.



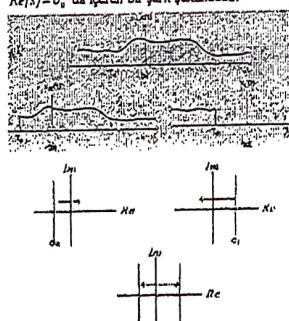
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \text{ ise } \sigma_0 < \sigma, \text{ şartını sağlayan } \sigma_0 \text{ içinde } \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty \text{ geçerli olacaktır.}$$

Özellik 5:  $x(t)$  sol tarafta dayalı bir işaret ise ve  $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma_0$  ROC bölgesinde ise  $\operatorname{Re}\{s\} < \sigma_0$  şartını sağlayan tüm  $s$  noktalarda ROC alanındadır.



### Laplace Dönüşümü

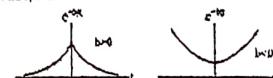
Özellik 6:  $x(t)$  çift tarafta bir işaret ise ve  $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma_0$  ROC bölgesinde ise  $x(t)$  için ROC  $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma_0$  da içeren bir şerit şeklinde.



### Laplace Dönüşümü

ÖRNEK:  $x(t) = e^{-|t|}$  işaretinin Laplace dönüşümünü (mevcut ise) hesaplayınız.

$x(t) = e^{-tu} u(t) + e^{tu} u(-t)$  şeklinde yeniden yazılır ve i)  $t > 0$  ii)  $t < 0$  durumlarına göre sağda gösterilen iki işaret elde edilir.



$$e^{-tu} u(t) \xleftarrow{L} \frac{1}{s+b}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -b \quad e^{tu} u(-t) \xleftarrow{L} \frac{-1}{s-b}, \quad \operatorname{Re}\{s\} < +b$$

$$e^{-|t|} \xleftarrow{L} \frac{1}{s+b} + \frac{1}{s-b} = \frac{-2b}{s^2 - b^2}, \quad -b < \operatorname{Re}\{s\} < b$$

Gördüğün gibi aynı ayrı билgilendirme b'linin tüm değerleri için ( $b>0, b<0$ ) hem sağ tarafta hem de sol tarafta dayalı işaretin Laplace dönüşümü mevcuttur. Ancak  $x(t)$  için sadece  $b>0$  için Laplace dönüşümü mevcuttur.

$$X(s) = e^{-st} U(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}\{s\} > -a$$

$$X(t) = -e^{-st} u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}\{s\} < -a$$

09.10.2017

### Laplace Dönüşümü

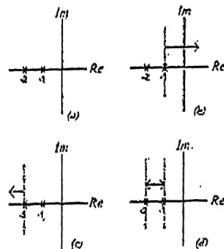
Özellik 7:  $x(t)$ 'ye ait Laplace dönüşümü oransal ise ROC ya kırıplar ile sınırlıdır veya soncuna kadar uzanır.

Özellik 8:  $x(t)$  sağ tarafta dayalı ve Laplace dönüşümü oransal ise ROC en sağdaki kırıplar sağ taraftır.

$x(t)$  sol tarafta dayalı ve Laplace dönüşümü oransal ise ROC en soldaki kırıplar sol taraftır.

### Laplace Dönüşümü

Örnek:  $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$  ifadesi için kırıplar sıfır dağılmamıştır.  $\operatorname{Re}\{s\}$  ve mümkün olan ROC bölgelerini gösteriniz.



### Ters Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü  $X(s)$  olan  $x(t)$  işaretin aşağıda belirtilen ters-Laplace ifadesi ile hesaplanabilir.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} X(s)e^s ds$$

Ancaq yukarıda verilen integrali hesaplamak yerine  $X(s)$  ifadesi basit kesirlerle ayrılarak her bir bileşeni için aynı ters-Laplace dönüşümünü tablodan bakılarak hesaplanması daha kolay bir yöntemdir.

Örnek:  $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$   $\operatorname{Re}\{s\} > -1$  olarak verilmiştir.  $x(t) = ?$

$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)}$

$A = [(s+1)X(s)]_{s=-1} = 1 \quad B = [(s+2)X(s)]_{s=-2} = -1$

$X(s) = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$

*Zurunelde İnceleme*

### Ters Laplace Dönüşümü

$$\text{Hesaplama: } -e^{-st} u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}\{s\} < -a$$

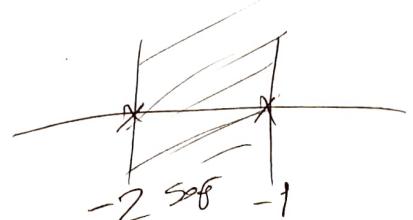
$$e^{-st} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}\{s\} > -a$$

$$\text{Bu durumda } X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}, \operatorname{Re}\{s\} > -1 \text{ ifadesi için ters-laplace:}$$

$$e^{-st} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+1)}, \operatorname{Re}\{s\} > -1 \quad e^{-st} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+2)}, \operatorname{Re}\{s\} > -2$$

$$[e^{-st} - e^{-2s}] u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

olarak hesaplamır.



### Ters Laplace Dönüşümü

Örnek:  $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$   $\operatorname{Re}(s) < -2$  olarak verilmiştir.  $x(t) = ?$

$$-e^{-s} u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \operatorname{Re}(s) < -a \quad e^{-s} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \operatorname{Re}(s) > -a$$

Bu durumda  $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$   $\operatorname{Re}(s) < -2$  ifadesi için ters-laplace;

$$-e^{-s} u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+1)} \quad \operatorname{Re}(s) < -1 \quad -e^{-s} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+2)} \quad \operatorname{Re}(s) < -2$$

$$[-e^{-s} + e^{-2s}] u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \operatorname{Re}(s) < -1$$

olarak hesaplanır.

### Ters Laplace Dönüşümü

Örnek:  $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$   $-2 < \operatorname{Re}(s) < -1$  olarak verilmiştir.  $x(t) = ?$

$$-e^{-s} u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \operatorname{Re}(s) < -a \quad e^{-s} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \operatorname{Re}(s) > -a$$

Bu durumda  $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$   $-2 < \operatorname{Re}(s) < -1$  ifadesi için ters-laplace;

$$-e^{-s} u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+1)} \quad \operatorname{Re}(s) < -1 \quad e^{-s} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+2)} \quad \operatorname{Re}(s) > -2$$

$$-e^{-s} u(-t) + e^{-2s} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad -2 < \operatorname{Re}(s) < -1$$

olarak hesaplanır.

### Laplace Dönüşümünün Özellikleri

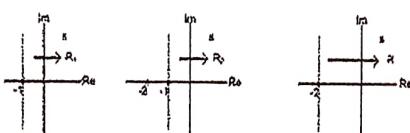
#### Özellik 1: Doğruyalılık

$$x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) \text{ ve } \operatorname{ROC}=R_1, \quad x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s) \text{ ve } \operatorname{ROC}=R_2, \quad a x_1(t) + b x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} a X_1(s) + b X_2(s) \text{ ROC en az } R_1 \cap R_2$$

Örnek:  $x_1(s) = \frac{1}{s+1}$   $\operatorname{Re}(s) > -1$  ve  $x_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$   $\operatorname{Re}(s) > -1$  olsun.

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t) \text{ olarak verildiğine göre } x(t) = ?$$

$$X(s) = X_1(s) - X_2(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \quad \operatorname{Re}(s) > -2$$



### Laplace Dönüşümünün Özellikleri

#### Özellik 2: Zamanda Öteleme

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \text{ ve } \operatorname{ROC}=R \text{ ise } x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} X(s) \text{ ve } \operatorname{ROC}=R$$

#### Özellik 3: s-domeninde Öteleme

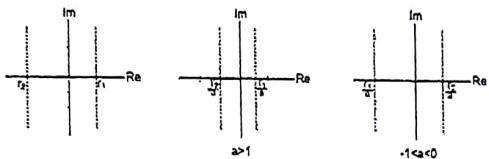
$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \text{ ve } \operatorname{ROC}=R \text{ ise } e^{st_0} x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s-s_0) \text{ ve } \operatorname{ROC}=R+\operatorname{Re}(s_0)$$

$$\begin{aligned} & e^{-2t} v(t) \\ & e^{2t} v(-t) \end{aligned}$$

### Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Özellik 4: Zamanda Ölçekleme

$$x(t) \xrightarrow{L} X(s) \text{ ve } \text{ROC} = R \text{ ise } x(at) \xrightarrow{L} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \text{ ve } \text{ROC} = R, \frac{R}{a}$$



### Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Özellik 5: Konvolüsyon Özelliği

$$x_1(t) \xrightarrow{L} X_1(s) \text{ ve } \text{ROC} = R_1$$

$$x_2(t) \xrightarrow{L} X_2(s) \text{ ve } \text{ROC} = R_2$$

$$x_1(t)*x_2(t) \xrightarrow{L} X_1(s)X_2(s) \quad (\text{ROC} = R_1 \cap R_2 \text{ içenir})$$

$$X_1(s) = \frac{s+2}{s+1} \quad \text{Re}(s) > -1 \quad \text{ve} \quad X_2(s) = \frac{s+1}{s+2} \quad \text{Re}(s) > -2$$

$$X_1(s)X_2(s) = 1 \quad \text{ROC} = \lim_{s \rightarrow \infty} |s| \text{ düzlemi}$$

### Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Özellik 6: Zaman Domeninde Türev Özelliği

$$x(t) \xrightarrow{L} X(s) \text{ ve } \text{ROC} = R \text{ ise}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{L} sX(s) \text{ ve } \text{ROC} = R \text{ içenir.}$$

Özellik 7: s-domeninde Türev Özelliği

$$x(t) \xrightarrow{L} X(s) \text{ ve } \text{ROC} = R \text{ ise}$$

$$-ix(t) \xrightarrow{L} \frac{dX(s)}{ds} \text{ ve } \text{ROC} = R$$

### Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Örnek:  $x(t) = te^{-at} u(t)$  Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

$$e^{-at} u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}(s) > a$$

$$te^{-at} u(t) \xrightarrow{L} -\frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{s+a} \right] = \frac{1}{(s+a)^2} \quad \text{Re}(s) > a$$

$$\text{Örnek: } X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 5}{(s+1)^2(s+2)} \quad \text{Re}(s) > -1 \quad x(t) = ?$$

$$X(s) = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)} + \frac{3}{(s+2)} \quad \text{Re}(s) > -1$$

$$x(t) = [2te^{-t} - e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t)$$

*B1 sefaları S101 kütken*

### Laplace Dönüşümünün Özellikleri

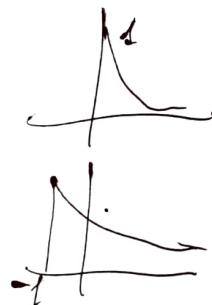
Özellik 8: Zaman Domeninde İntegral Özellikliği

$$x(t) \xrightarrow{L} X(s) \text{ ve } \text{ROC} = R \text{ ise}$$

$$\int x(\tau) d\tau \xrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s) \text{ ve } \text{ROC } R \cap \text{Re}(s) > 0$$

İlk (Başlangıç) Değer Teoremi:  $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$

Son Değer Teoremi:  $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$



### LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

#### Nedensellik

Nedensel LTI sistem için impuls cevabı  $h(t) = 0 \quad t < 0$  dir.

Dolayısı ile nedensel sistemin impuls cevabı sağ tarafta dayalıdır. Bu durumda nedensel bir sistemin transfer fonksiyonu  $H(s)$  için ROC sağ taraftadır.

Oransal bir transfer fonksiyonuna  $H(s)$  sahip nedensel sistemin ROC'u en sağdaki kutbun sağ taraftadır.

Örnek: Impuls cevabı  $h(t) = e^{-t} u(t)$  olan sistemi inceleyelim.

$\star h(t) = 0 \quad t < 0$  olduğundan sistem nedenseldir.

$$\text{Transfer fonksiyonu } H(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{Re}(s) > -1$$

incelediğinde ROC'un en sağdaki kutbun sağ tarafı olduğu görülmektedir.

$$h(t) = e^{-2t} v(t) \rightarrow H(s) = \frac{1}{s+2}$$

*bess3-2*

### LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Örnek: Impuls cevabı  $h(t) = e^{kt}$  olan sistemi inceleyelim.

$h(t) \neq 0 \quad t < 0$  olduğundan sistem nedensel değildir.

$$\text{Transfer fonksiyonu } H(s) = \frac{-2}{s-1} \quad -1 < \text{Re}(s) < 1$$

incelediğinde ROC'un en sağdaki kutbun sağ tarafı olmadığı görülmektedir.

### LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Örnek: Transfer fonksiyonu  $H(s) = \frac{e^s}{s+1} \quad \text{Re}(s) > -1$  olarak verilen sistemi inceleyelim.

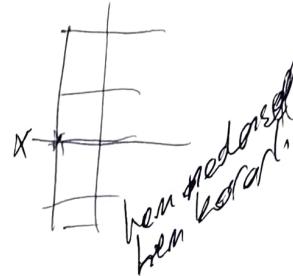
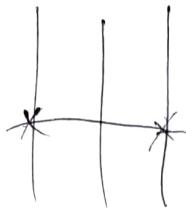
Transfer fonksiyonu için ROC en sağdaki kutbun sağ taraftı olarak verilmiştir. Dolayısı ile impuls cevabı sağ taraftı olmalıdır.

$$\text{Önceki örneklerden } e^{-t} u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+1} \quad \text{Re}(s) > -1$$

$$\text{ve Laplace dönüşümü özelliklerinden, } e^{-(t+1)} u(t+1) \xrightarrow{L} \frac{e^s}{s+1} \quad \text{Re}(s) > -1$$

Bu durumda incelenen sistemin impuls cevabı  $h(t) = e^{-(t+1)} u(t+1)$  olarak elde edilir. Dolayısı ile sistem nedensel değildir.

Nedensel sistem için ROC en sağdaki kutbun sağdır. Ancak ROC'un en sağdaki kutbun sağ olması sistemin nedensel olmasını garanti etmez. Sadece impuls cevabının sağ taraftı olduğunu kesinleştirir.



### LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

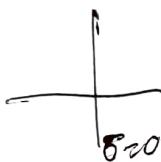
#### Kararlılık

LTI sistemin kararlı olabilmesi için impuls cevabının  $h(t)$  mutlak integrallenebilir olması gereklidir. Başka bir ifade ile impuls cevabının Fourier dönüşümü yakınsamalıdır.

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) = \{X(s)\}_{s=j\omega}$$

olduğundan,

LTI bir sistemin kararlı olabilmesi için sistem transfer fonksiyonuna ait ROC bölgesi  $j\omega$ -eksenini kapsamalıdır.



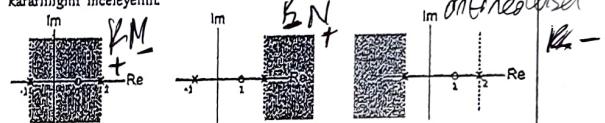
*(kararlı olabilmesi için  
 $\sigma > 0$  'i kapsama)*

### LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Örnek: Transfer fonksiyonu  $H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$  olarak verilen sistemin

kararlılığını inceleyelim.

ROC bölgesi belirlenmediği için mümkün olan tüm ROC bölgeleri için sistemin kararlılığını inceleyelim.



$$h(t) = \frac{2}{3}e^{-t}u(t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t) \quad h(t) = \frac{2}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t) \quad h(t) = -\frac{2}{3}e^{-t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$$

Nedensel bir sistemin kararlı olabilmesi için transfer fonksiyonunun tüm kütüpleri s-vari düzleminde olsmalıdır.

### LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Giriş-çıkış ilişkisi diferansiyel denklem ile verilen LTI bir sistemin transfer fonksiyonu Laplace dönüşümü özellikleri kullanılarak doğrudan elde edilebilir.

$$\text{Örnek: } \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

$$sY(s) + 3Y(s) = X(s) \rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+3}$$

$$\text{Nedensel} \rightarrow \text{Re}(s) > -3 \rightarrow h(t) = e^{-3t}u(t)$$

$$\text{Anti-Nedensel} \rightarrow \text{Re}(s) < -3 \rightarrow h(t) = -e^{-3t}u(-t)$$

### LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Örnek:  $x(t) = e^{-3t}u(t)$  giriş işaretine karşılık cevabı  $y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$

olan sistemin transfer fonksiyonunu elde ediniz. Sistemin giriş-çıkış ilişkisini tanımlayan diferansiyel denklemi yazınız. Sistemin nedenselliği ve kararlılığını belirtiniz.

$$X(s) = \frac{1}{s+3} \quad \text{Re}(s) > -3 \quad Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \text{Re}(s) > -1$$

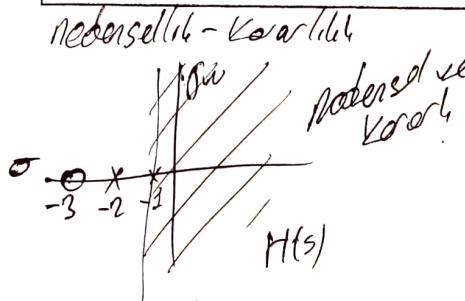
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \quad \text{ROC ?}$$

$H(s)$ 'in ROC'u için 3 alternatif söz konusudur. Aşağıda konvolusyon özelliğinden  $Y(s)$  'in ROC'u nun  $X(s)$  ve  $H(s)$ 'in ROC'u nun kesişimini içermesi gerektiğini biliyoruz. Bu durumda  $H(s)$ 'in ROC'u  $\text{Re}(s) > -1$  olmalıdır. Dolayısı ile sistem nedensel ve kararlıdır.

Sistemin davranışını tanımlayan diferansiyel denklem:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

*nedensellik - kararlılık*





09.10.2017

### LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Örnek: Bir sistem hakkında aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

1. Sistemi nedenseldir.
2. Transfer fonksiyonu oransaldır ve  $s=2$  ve  $s=4$  'te olmak üzere iki kutbu sahiptir.
3.  $x(t) = 1$  için  $y(t) = 0$  olarak elde edilmişdir.
4. İmpuls cevabı  $t = 0^+$   $\rightarrow 4$  olarak hesaplanmıştır.

Buna göre  $H(s) = ?$

$$H(s) = \frac{P(s)}{(s+2)(s-4)}$$

$x(t) = 1 = e^{0t}$  için  $y(t)=0$  olabilmesi için  $Y(s) = X(s).H(s)$

ilişkisinden  $H(0)=0$  olması gerektiği anlaşılmıştır,  $P(s) = sQ(s)$

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 Q(s)}{s^2 - 2s - 8} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks^2}{s^2} = 4 \Rightarrow K = 4$$

$$H(s) = \frac{4s}{(s+2)(s-4)}$$

41

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{SP'(s)}{(s+a)(s-b)}$$

poz derecesi  $\leq$  pay derecesi

## Hafta 10: z-Dönüştümü

### Ele Alınacak Ana Konular

- z-dönüştümü
- z-dönüştümünün yakınsaklık bölgesi
- Ters z-dönüştümü
- z-dönüştümünün özellikleri
- z-dönüştümü kullanarak LTI sistemlerin analizi

### z-Dönüştümü

- İmpuls yanıtı  $h[n]$  olan bir LTI sisteminin,  $z^n$  girişine olan yanıtının  $y[n] = H(z)z^n$  olduğunu görmüştük.  $H(z)$  aşağıdaki gibi hesaplanıyordu:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

- $z = e^{j\omega}$  yani  $|z| = 1$  için, yukarıda verilen toplam  $h[n]$ 'nin ayrık-zaman Fourier dönüşümüdür.  $|z| = 1$  olmak zorunda olmadığından, toplamaya z-dönüştümü denir.
- $z$  karmaşık bir sayı olmak üzere, bir ayrık-zaman işaret  $x[n]$ 'nin z-dönüştümü

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

denklemiyle tanımlanır.

z-dönüştümünü belirtmek için  $Z[x[n]]$  kullanacak, işaret ile z-dönüştümü arasındaki ilişkiyi, aşağıdaki şekilde belirteceğiz.

$$x[n] \xrightarrow{z} X(z)$$

### z-Dönüştümü

- Laplace dönüşümü ile sürekli-zaman Fourier dönüşümü arasında ilişki olduğu gibi, z-dönüştümü ile ayrık-zaman Fourier dönüşümü arasında ilişki vardır.

- $z$  kutupsal koordinatlarda  $z = re^{j\omega}$  şeklinde yazılabilir. O halde,

$$X(z) = X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{x[n]r^{-n}\} e^{-j\omega n}$$

- Göründüğü gibi,  $X(re^{j\omega})$ ,  $x[n]$  ile  $r^{-n}$  dizilerinin çarpımının Fourier dönüşümüne eşittir. Yani,

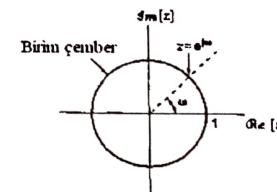
$$X(re^{j\omega}) = F\{x[n]r^{-n}\}.$$

- $|z| = 1$  iken, toplama  $x[n]$  işaretinin ayrık-zaman Fourier dönüşümüne eşit olur:

$$X(z)|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = F\{x[n]\}$$

### *z*-Dönüştümü

- Laplace dönüşümü, karmaşık  $s$ -düzleminde  $j\omega$ -ekseni üzerinde hesaplandığında sürekli-zaman Fourier dönüşümünü veriyordu.
- $z$ -dönüşümü, karmaşık  $z$ -düzleminde birim çember ( $|z|=1$ ) üzerinde hesaplandığında, ayrık-zaman Fourier dönüşümüne eşit olur.



- Bir  $x[n]$  işaretinin  $z$ -dönüşümünün var olabilmesi için  $x[n]r^n$  işaretinin ayrık-zaman Fourier dönüşümü yakınsamalıdır. Verilen bir işaret için,  $z$ -dönüşümünün var olduğu  $r$  değerleri kümesine YAKINSAKLIK BÖLGESİ (ROC) denir. ROC, birim çemberi içeriyoysa, işaretin Fourier dönüşümü de vardır.

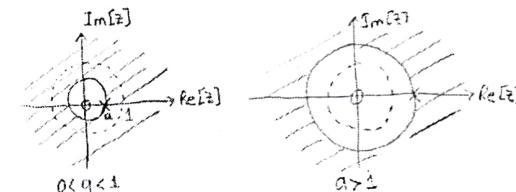
### *z*-Dönüştümü

ÖRNEK:  $x[n] = a^n u[n]$  işaretinin  $z$ -dönüşümünü hesaplayınız, sıfır-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

ÇÖZÜM:  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$  Hatırlatma:  
 $\sum_{k=n}^{\infty} q^k = \frac{q^n - q^{n+1}}{1-q}, \quad 1 \neq q$

Serinin yakınsaması için  $|az^{-1}| < 1$  veya eşdeğer olarak  $|z| > |a|$  olmalıdır. O halde,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad \text{ROC: } |z| > |a|$$



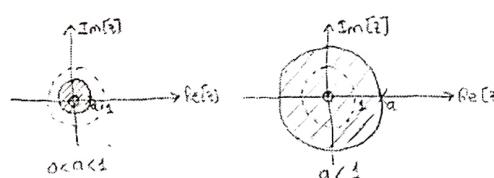
### *z*-Dönüştümü

ÖRNEK:  $x[n] = -a^n u[-n-1]$  işaretinin  $z$ -dönüşümünü hesaplayınız, sıfır-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

ÇÖZÜM:  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n$

Serinin yakınsaması için  $|a^{-1}z| < 1$  veya eşdeğer olarak  $|z| < |a|$  olmalıdır. O halde,

$$X(z) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad \text{ROC: } |z| < |a|$$



### *z*-Dönüştümü

ÖRNEK: Aşağıda verilen işaretin  $z$ -dönüşümünü hesaplayınız, sıfır-kutup diyagramını ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

$$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

ÇÖZÜM:  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \right\} z^{-n} = 7 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n - 6 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n$

$z$ -dönüşümünün var olabilmesi için iki seri de yakınsamalıdır Yani,

$$\left|\frac{1}{3}z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1/3 \quad \text{ve} \quad \left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1/2$$

O halde,

$$X(z) = \frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1-\frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{z\left(z-\frac{3}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2}$$

Aynı sonucu, önceki alıştırmaları kullanarak hesaplama yapmadan da bulabiliriz.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] &\xrightarrow{\frac{z}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}} \frac{1}{3}, & \text{ROC: } |z| > \frac{1}{3} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] &\xrightarrow{\frac{z}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}} \frac{1}{2}, & \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2} \\ 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] &\xrightarrow{\frac{z}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},} & \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### $z$ -Dönüştümü

ÖRNEK: Aşağıda verilen işaretin  $z$ -dönüştümünü hesaplayınız, sıfır-kutup diyagramını ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[n] = \left\{ \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{3} e^{j\pi/4} \right)^n - \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{3} e^{-j\pi/4} \right)^n \right\} u[n]$$

ÇÖZÜM:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{3} e^{j\pi/4} \right)^n - \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{3} e^{-j\pi/4} \right)^n \right\} z^{-n} = \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{3} e^{j\pi/4} z^{-1} \right)^n - \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{3} e^{-j\pi/4} z^{-1} \right)^n$$

$z$ -dönüştümünün var olabilmesi için iki seri de yakınsalıdır Yani,

$$\left| \frac{1}{3} e^{j\pi/4} z^{-1} \right| < 1 \Rightarrow |z| > 1/3 \quad \text{ve} \quad \left| \frac{1}{3} e^{-j\pi/4} z^{-1} \right| < 1 \Rightarrow |z| > 1/3$$

O halde,

$$X(z) = \frac{1}{2j} \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{j\pi/4} z^{-1}} - \frac{1}{2j} \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\pi/4} z^{-1}} = \frac{\frac{1}{3\sqrt{2}} z}{\left( z - \frac{1}{3} e^{j\pi/4} \right) \left( z - \frac{1}{3} e^{-j\pi/4} \right)}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{3}$$

### $z$ -Dönüştümü

ÖRNEK: Aşağıda verilen işaretlerin  $z$ -dönüştümünü hesaplayınız, sıfır-kutup diyagramını ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

- (i)  $x[n] = \delta[n]$ ,    (ii)  $x[n] = \delta[n-1]$ ,    (iii)  $x[n] = \delta[n+1]$

ÇÖZÜM:

$$(i) \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = \delta[0] z^{-0} = 1, \quad \text{ROC: } \forall z$$

$$(ii) \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-1] z^{-n} = \delta[-1] z^{-1} = z^{-1}, \quad \text{ROC: } \forall z$$

$$(iii) \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n+1] z^{-n} = \delta[-1+1] z^{-(1)} = z, \quad \text{ROC: } \forall z$$

### $z$ -Dönüştümü

ÖRNEK: Aşağıda verilen işaretin  $z$ -dönüştümünü hesaplayınız, sıfır-kutup diyagramını ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}, \quad a > 0.$$

$$\text{ÇÖZÜM: } X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a}, \quad \text{ROC: } \forall z$$

Sıfırlar (pay polinomunun kökleri)  $z_k = a_k e^{j(2\pi k/N)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$

Kutuplar (payda polinomunun kökleri):  $z = a$ ,  $z=0$  ( $N-1$  katlı)

$k=0$  için bulunan sıfır ile kutup birbirini götürür. Sonuç olarak,

$$\text{Sıfırlar: } z_k = a_k e^{j(2\pi k/N)}, \quad k = 1, \dots, N-1$$

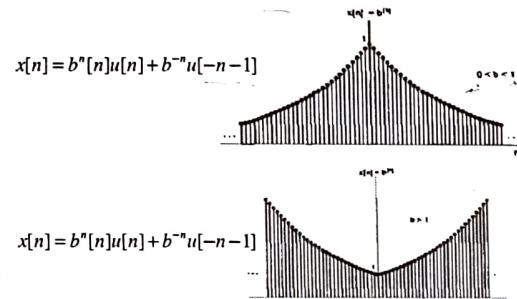
Kutuplar:  $z=0$  ( $N-1$  katlı)

$$\text{Hareket: } \sum_{k=n_1}^{n_2} q^k = \frac{q^{n_1} - q^{n_2+1}}{1-q}, \quad 1 \neq q$$

### $z$ -Dönüştümü

Örnek:  $x[n] = b^{|n|}$ ,  $b > 0$  işaretinin  $z$ -dönüştümünü hesaplayınız, sıfır-kutup diyagramını ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

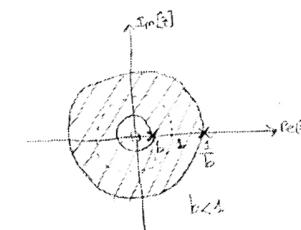
Çözüm: İşaret çift taraflı olup  $b < 1$  ve  $b > 1$  için şekli aşağıda verilmiştir.



$$b^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-bz^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > b$$

$$b^{-n} u[-n-1] \xrightarrow{z} \frac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| < \frac{1}{b}$$

$$\begin{aligned} x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1] &\xrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} - \frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}}, \\ &= \frac{b^2-1}{b} \frac{z}{(z-b)(z-b^{-1})}, \quad \text{ROC: } b < |z| < \frac{1}{b} \end{aligned}$$



### $z$ -Dönüştümünün Yakınsaklık Bölgesinin Özellikleri

1. Bir ayrık-zaman işaretini  $z$ -dönüştümünün ROC'sı,  $z$ -düzleminde sıfır etrafında bir halkadır.
2. ROC herhangi bir kutup içermez.
3. Ayrık-zaman işaret sonlu süreli ise,  $z$ -dönüştümünün ROC'sı muhtemelen  $z = 0$  ve/veya  $z = \infty$  hariç, tüm  $z$ -düzlemdir.
4. Ayrık-zaman işaret sağ taraflı ve  $|z|=r_0$  halkası  $z$ -dönüştümünün ROC'sı içinde ise,  $|z| > r_0$  eşitsizliğini sağlayan tüm  $z$  değerleri de ROC içindedir.
5. Ayrık-zaman işaret sol taraflı ve  $|z|=r_0$  halkası  $z$ -dönüştümünün ROC'sı içinde ise,  $0 < |z| < r_0$  eşitsizliğini sağlayan tüm  $z$  değerleri de ROC içindedir.

### $z$ -Dönüştümünün Yakınsaklık Bölgesinin Özellikleri

6. Ayrık-zaman işaret çift taraflı ve  $|z|=r_0$  halkası  $z$ -dönüştümünün ROC'sı içinde ise, ROC  $|z|=r_0$  halkasını içeren bir halkadır.
7. Ayrık-zaman işaretin  $z$ -dönüştümü rasyonel ise, ROC kutuplarla sınırlıdır veya sonsuza kadar uzanır.
8. Ayrık-zaman işaretin  $z$ -dönüştümü rasyonel ve işaret sağ taraflı ise, ROC en dışındaki kutubun dışındaki bölge, yani en yüksek genilikli kutubun genliğine eşit halkanın dışıdır. İşaret aynı zamanda nedensel ise (sağ taraflı ve  $n < 0$  için sıfır eşitse),  $z = \infty$  ROC içindedir.
9. Ayrık-zaman işaretin  $z$ -dönüştümü rasyonel ve işaret sol taraflı ise, ROC en içeki kutubun içindeki bölge, yani en küçük genilikli kutubun genliğine eşit halkanın içidir. İşaret aynı zamanda nedensel değilse (sağ taraflı ve  $n > 0$  için sıfır eşitse),  $z = 0$  ROC içindedir.

### $z$ -Dönüştüm Çiftleri

İşaret	$z$ -Dönüştümü	Yakınsaklık Bölgesi (ROC)
$\delta[n]$	1	Tüm $z$ değerleri
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  < 1$
$\delta[n-m]$	$z^{-m}$	$m > 0$ için 0 veya $m < 0$ için $\infty$ hariç tüm $z$ değerleri
$\alpha^nu[n]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z  >  \alpha $
$-\alpha^nu[-n-1]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z  <  \alpha $

### $z$ -Dönüştüm Çiftleri

İşaret	$z$ -Dönüştümü	Yakınsaklık Bölgesi (ROC)
$n\alpha^n u[n]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z  >  \alpha $
$-n\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z  <  \alpha $
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z  > 1$
$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z  > 1$
$r^n \cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$ z  > r$
$r^n \sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{r\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$ z  > r$

### Ters $z$ -Dönüştümü

- $x[n]$  işaretinin  $z$ -dönüştümü  $X(z)=X(re^{j\omega})$ ,  $x[n]r^n$  işaretinin ayrık-zaman Fourier dönüşümü ise,  $x[n]r^n$  işaretin  $X(re^{j\omega})$ 'nın ters Fourier dönüşümüdür. Yani,
$$X(re^{j\omega}) = F\{x[n]r^{-n}\} \Rightarrow x[n]r^{-n} = F^{-1}\{X(re^{j\omega})\} \Rightarrow x[n] = r^n F^{-1}\{X(re^{j\omega})\}$$

$$= r^n \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega}) (re^{j\omega})^n d\omega$$
- $z = re^{j\omega}$  değişken dönüşümü yapılrsa,  $dz = jre^{j\omega} d\omega = jz d\omega \Rightarrow d\omega = (1/j)z^{-1} dz$
  - $\omega$ ,  $2\pi$  aralığında değişirken,  $z$   $r$  yarıçaplı bir daire üzerinde değerler alır. Dolayısıyla, integral  $z$  cinsinden aşağıdaki gibi olur:

$$x[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint X(z) z^{-n-1} dz \quad (\text{Ters } z\text{-dönüştümü})$$

- O, merkezi orijin olan, saat yönünün tersi yönde,  $r$  yarıçaplı kapalı bir eğriyi ifade etmektedir. Ters  $z$ -dönüştümü, karmaşık düzlemede integral alma yerine basit kesirlere ayırma ve kuvvet serisine açma yöntemleri kullanılarak belirlenir.

### Ters $z$ -Dönüştümü

Örnek (basit kesirlere ayırma): Aşağıda verilen  $z$ -dönüştümülerinin tersini bulunuz.

$$(i) \quad X(z) = \frac{3-(5/6)z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{3}$$

(ii)  $X(z)$  aynı, ROC:  $1/4 < |z| < 1/3$ ,

(iii)  $X(z)$  aynı, ROC:  $|z| < 1/4$ ,

$$\text{Çözüm: } X(z) = \frac{A}{1-(1/4)z^{-1}} + \frac{B}{1-(1/3)z^{-1}} = \frac{1}{1-(1/4)z^{-1}} + \frac{2}{1-(1/3)z^{-1}}$$

$$(i) \text{ bileşenler sağ taraflıdır: } (1/4)^n u[n] + 2(1/3)^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-(1/4)z^{-1}} + \frac{2}{1-(1/3)z^{-1}}$$

(ii)  $1/4$  kutbundan gelen bileşen sağ taraflı,  $1/3$  kutbundan gelen bileşen sol taraflıdır:

$$(1/4)^n u[n] - 2(1/3)^n u[-n-1] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-(1/4)z^{-1}} + \frac{2}{1-(1/3)z^{-1}}$$

(iii) bileşenler sol taraflıdır:

$$-(1/4)^n u[-n-1] - 2(1/3)^n u[-n-1] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-(1/4)z^{-1}} + \frac{2}{1-(1/3)z^{-1}}$$

### Ters z-Dönüştümü

Örnek (kuvvet serisine açma): Aşağıdaki z-dönüştümünün tersini bulunuz.

$$X(z) = 4z^2 + 2 + 3z^{-1}, \text{ ROC: } 0 < |z| < \infty$$

Çözüm: z-dönüştümünün tanımını hatırlatalım:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Gördüğü gibi, z-dönüştümünde  $z$ 'nin kuvvetlerinin yanında gözükken sayılar işaretin değerleridir ( $z^0$  yanındaki sayı  $x[0]$ ,  $z^1$  yanındaki sayı  $x[1]$ ,  $z^2$  yanındaki sayı  $x[2]$ ,  $z^1$  yanındaki sayı  $x[-1]$ ,  $z^2$  yanındaki sayı  $x[-2]$ , vb). O halde,

$$x[n] = \begin{cases} 4, & n = -2 \\ 2, & n = 0 \\ 3, & n = 1 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x[n] = 4\delta[n+2] + 2\delta[n] + 3\delta[n-1]$$

### Ters z-Dönüştümü

Örnek (kuvvet serisine açma): Aşağıdaki z-dönüştümünün tersini bulunuz.

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \text{ ROC: } |z| > |a|$$

Çözüm: Önceki örneklerden işaretin sağ tarafı ve  $x[n]=a^n u[n]$  olduğunu biliyoruz. Aynı sonucu verilen rasyonel z-dönüştümünü kuvvet serisine açarak da bulabiliriz. Polinom bölme işlemi,  $z$ 'nin negatif kuvvetleri olacak şekilde yapılır:

$$\frac{1}{1-az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots$$

O halde,  $n < 0$  için  $x[n] = 0$ ,  $x[1] = a$ ,  $x[2] = a^2$  veya genel olarak  $x[n] = a^n u[n]$ .

Not: ROC  $|z| < |a|$  olsaydı, işaret sol tarafı olacağından  $z$ 'nin pozitif kuvvetleri olacak şekilde polinom bölüm işlemi yapılır:

$$\frac{1}{1-az^{-1}} = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 + \dots$$

Bu durumda,  $n \geq 0$  için  $x[n] = 0$ ,  $x[-1] = -a^{-1}$ ,  $x[2] = -a^{-2}$  veya genel olarak  $x[n] = -a^n u[-n-1]$ .

### Ters z-Dönüştümü

Örnek (kuvvet serisine açma): Aşağıdaki z-dönüştümünün tersini bulunuz.

$$X(z) = \ln(1+az^{-1}), \text{ ROC: } |z| > |a|$$

Çözüm:  $\ln(1+x)$  için seri açılımı aşağıda verilmiştir.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad |x| < 1$$

$\ln(1+x)$  için seri açılımında  $x$  yerine  $az^{-1}$  yazılırsa soruda  $X(z)$  elde edilir:

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n}, \quad |x| < 1$$

Açılmışta,  $z$ 'nin kuvvetlerinin yanında gözükken sayılar işaretin değerleri olduğundan

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n}, & n \geq 1 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1]$$

### z-Dönüştümünün Özellikleri

- Kolaylık olması bakımından, z-dönüştümü ve tersini belirtmek için sırasıyla  $Z(x[n])$  ve  $Z^{-1}(X(z))$  kısa gösterimini kullanacağız. Ayrıca, z-dönüştüm çiftini belirtmek için

$$x[n] \xrightarrow{Z} X(z)$$

notasyonunu kullanacağız.

- z-dönüştümünün aşağıda verilen özellikleri aracılığıyla, z-dönüştümü bilinen işaretlerden çoğu işaretin z-dönüştümünü elde etmek kolaylaşmaktadır.
- Aşağıda sadece en önemli özelliklerin ispatı verilecektir. Diğer özelliklerin ispatı benzer şekilde yapılabilir.

### $z$ -Dönüştümünün Özellikleri

Zamanda öteleme:  $x[n] \xleftarrow{z} X(z) \Rightarrow x[n-n_0] \xleftarrow{z} z^{-n_0} X(z)$

İspat:  $z$ -dönüştüm denkleminden

$$Z\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0] z^{-n}$$

$n-n_0 = u$  değişken deönüştümü yapılırsa,

$$Z\{x[n-n_0]\} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} x[u] z^{-(u+n_0)} = z^{-n_0} \sum_{u=-\infty}^{\infty} x[u] z^{-u} = z^{-n_0} X(z)$$

$X(z)$ 'nin ROC'sı  $R$  olsun.  $n_0 > 0$  ise,  $z^{n_0}$  ile çarpımdan dolayı,  $z = 0$ 'da kutuplar oluşur ve bunlar  $X(z)$ 'nin  $z = 0$ 'daki sıfırlarını götürebilir. Dolayısıyla,  $z = 0$ ,  $z^{n_0} X(z)$ 'nin kutbu olabilir. Bu durumda  $x[n-n_0]$ 'ın ROC'si orijin hariç  $R'$  dir.

$n_0 < 0$  ise,  $z^{n_0}$  ile çarpımdan dolayı,  $z = 0$ 'da sıfırlar oluşur ve bunlar  $X(z)$ 'nin  $z = 0$ 'daki kutuplarını götürebilir. Dolayısıyla,  $z = 0$ ,  $z^{n_0} X(z)$ 'nın sıfırı olabilir. Bu durumda  $x[n-n_0]$ 'ın ROC'si sonsuz hariç  $R'$  dir.

### $z$ -Dönüştümünün Özellikleri

$z$ -uzayında ölçekleme:  $x[n] \xleftarrow{z} X(z) \Rightarrow z_0^n x[n] \xleftarrow{z} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$

$$\text{İspat: } Z\{z_0^n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_0^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

$z$ ,  $X(z)$ 'nin yakınsaklık bölgesi içindeyse,  $|z_0|z$ ,  $X(z/z_0)$ 'ın yakınsaklık bölgesi içindedir. O halde,  $X(z)$ 'nin yakınsaklık bölgesi  $R$  ise,  $X(z/z_0)$ 'nın yakınsaklık bölgesi  $|z_0|R$  olur.

Özel durum:  $z_0 = e^{j\omega_0} \Rightarrow e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftarrow{z} X(e^{-j\omega_0} z)$

Diğer bir deyişle, bir işaretin zaman uzayında belirli frekanslı karmaşık üstel bir işaret ile çarpmak,  $z$ -dönüştümünün üstel işaretin frekansı kadar dönmeye neden olur. Yani, tüm sıfırlar ve kutuplar üstel işaretin frekansı kadar döner.

### $z$ -Dönüştümünün Özellikleri

Konvolüsyon özelliği:  $y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow Y(z) = X(z)H(z)$

İspat: Konvolüsyon denkleminden

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

$$Y(z) = Z\{y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \right] z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k] z^{-n} \right]$$

Zamanda öteleme özelliğinden parantez içindeki terim  $z^{-k} H(z)$  dir. O halde,

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k} H(z) = H(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k} = X(z)H(z)$$

$X(z)$ 'in ROC'sı  $R_1$  ve  $H(z)$ 'in ROC'sı  $R_2$  olsun.  $Y(z) = X(z)H(z)$  olduğundan,  $Y(z)$ 'in var olabilmesi için  $X(z)$  ve  $H(z)$  var olmalıdır. Yani,  $Y(z)$ 'in ROC'sı  $R = R_1 \cap R_2$  olur. Ancak, çarpımda sıfır-kutup götürmesi olursa  $Y(z)$ 'in ROC'sı  $R_1 \cap R_2$  kesişiminden de büyük olabilir.

### $z$ -Dönüştümünün Özellikleri

$z$ -uzayında türev alma:  $x[n] \xleftarrow{z} X(z) \Rightarrow nx[n] \xleftarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz}$

$$\text{İspat: } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \Rightarrow \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -nx[n] z^{-n-1}$$

Eşitliğin her iki tarafı  $-z$  ile çarpılrsa

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n] z^{-n} = Z\{nx[n]\}$$

$X(z)$ 'in ROC'sı  $R$  olsun.  $-z$  ile çarpmaya ilave bir kutup getirmeyip, sıfır-kutup götürmesi olmaması durumunda  $z = 0$ 'da bir sıfır oluşturur. Bu nedenle, bir ayrık-zaman işaretin zaman-uzayında  $n$  ile çarpmak  $z$ -dönüştümünün ROC'sini etkilemez. Yani,  $-z(dX(z)/dz)$ 'in ROC'sı de  $R'$  dir.

### $z$ -Dönüştümünün Özellikleri

Örnek:  $z$ -dönüştümü

$$X(z) = \ln(1+az^{-1}), |z| > a$$

olan işaretin,  $z$ -uzayında türev alma özelliğinden yararlanarak hesaplayalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} nx[n] &\xrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} \\ a(-a)^n u[n] &\xrightarrow{z} \frac{a}{1+az^{-1}} \\ a(-a)^{n-1} u[n-1] &\xrightarrow{z} \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} \\ x[n] &= \frac{-a(-a)^{n-1} u[n-1]}{n} = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1] \end{aligned}$$

### $z$ -Dönüştümünün Özellikleri

Örnek:  $z$ -dönüştümü

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

olan işaretin,  $z$ -uzayında türev alma özelliğinden yararlanarak hesaplayalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} a^n u[n] &\xrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}} \\ na^n u[n] &\xrightarrow{z} -z \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1-az^{-1}} \right) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^3} \end{aligned}$$

### $z$ -Dönüştümünün Özellikleri

Özellik	İşaret	$z$ -dönüştümü	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	$R$
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	$R_1$
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	$R_2$
Doğrusallık	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	En az $R_1 \cap R_2$
Zamanda öteleme	$x(n-n_0)$	$z^{-n_0} X(z)$	Orijin dahil veya hariç $R$
$z$ -uzayında ölçümleme	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{-j\omega_0 z})$	$R$
	$z_n^* x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_n}\right)$	$z_0 R$
	$a^* x[n]$	$X(a^* z)$	$ a  R$
Zamanda tersine çevirme	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	$1/R$
Zamanda ölçümleme	$x_{(r)}[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$	$X(z^k)$	$R^{1/k}$

### $z$ -Dönüştümünün Özellikleri

Özellik	İşaret	$z$ -dönüştümü	ROC
Eşlenik alma	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	$R$
Konvolüsyon	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	En az $R_1 \cap R_2$
Fark alma	$x[n] - x[n-1]$	$(1-z^{-1})X(z)$	En az $R \cap ( z  > 0)$
Toplama	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{(1-z^{-1})} X(z)$	En az $R \cap ( z  > 1)$
$z$ -uzayında ilrev alma	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R$
İlk Değer Teoremi $n < 0$ için $x[n]=0$ ise $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$			

### LTI Sistemlerin $z$ -dönüştümü Kullanılarak İncelenmesi

- $X(z)$ ,  $Y(z)$  ve  $H(z)$ , bir LTI sistemin sırasıyla girişinin, çıkışının ve impuls yanıtının  $z$ -dönüştümleri olmak üzere, konvolüsyon özelliğinden  $Y(z) = H(z)X(z)$  olduğunu görmüşük.  $H(z)$ 'ye sistemin TRANSFER FONKSİYONU denir.
- Bir LTI sistemin çoğu özelliği, transfer fonksiyonunun kutupları, sıfırları ve yakınsaklık bölgesiyle ilişkilidir.
- Bir sistem nedensel ise  $n < 0$  için  $h[n] = 0$  olup impuls yanıtı sağ taraflıdır. O halde,  $H(z)$ 'nin ROC'sı  $z$ -düzleminde bir çemberin dışından sonsuzda doğru uzanmalıdır.
- Ayrıca,  $H(z)$  rasyonel ise, sistemin nedensel olabilmesi için  $H(z)$ 'nin ROC'sı en dıştaki kutbun dışında ve sonsuzlu içeren bir bölge olmalıdır. Yani,  $z \rightarrow \infty$  limit durumunda  $H(z)$  sonlu olmalıdır. Diğer bir deyişle,  $H(z)$ 'nin pay polinomunun derecesi payda polinomunun derecesinden büyük olmamalıdır.

### LTI Sistemlerin $z$ -dönüştümü Kullanılarak İncelenmesi

Bir ayrık-zaman LTI sistemin nedensel olabilmesi için gerek ve yeter koşul, transfer fonksiyonunun yakınsaklık bölgesinin karmaşık  $z$ -düzleminde bir çemberin dışında ve sonsuzlu içeren bir bölge olmasıdır.

Rasyonel transfer fonksiyonlu bir ayrık-zaman LTI sistemin nedensel olabilmesi için gerek ve yeter koşul (a) transfer fonksiyonunun yakınsaklık bölgesi karmaşık  $z$ -düzleminde en dıştaki kutbun dışındaki bir bölge olmasıdır ve (b)  $H(z)$ 'nin pay polinomunun derecesinin payda polinomunun derecesinden büyük olmamasıdır.

### LTI Sistemlerin $z$ -dönüştümü Kullanılarak İncelenmesi

Örnek: Transfer fonksiyonları aşağıda verilen ayrık-zaman LTI sistemlerin nedensel olup olmadığını belirleyiniz.

$$(i) \quad H(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + z}{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}} \quad (ii) \quad H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > 2$$

Çözüm:

(i) ROC hakkında bilgi sahibi olmamamıza rağmen sistemin nedensel olmadığını söyleyebiliriz çünkü pay polinomunun derecesi payda polinomunun derecesinden büyüktür.

$$(ii) \quad H(z) = \frac{\frac{2}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)} = \frac{\frac{2}{2}z^2 - \frac{5}{2}z}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}$$

$z=1/2$ ,  $z=2$ 'de iki kutup vardır. Sistem nedenseldir çünkü ROC en dıştaki kutbun dışına doğrudur ve pay polinomunun derecesi payda polinomunkinden büyük değildir.

### LTI Sistemlerin $z$ -dönüştümü Kullanılarak İncelenmesi

LTI bir ayrık-zaman sistemin kararlı olabilmesi için impuls yanıtı mutlak toplanabilir olmalıdır. Bu durumda,  $h[n]$ 'nın ayrık-zaman Fourier dönüşümü var olup  $H(z)$ 'nın ROC'sı karmaşık  $z$ -düzleminde birim çemberi içermelidir.

LTI bir ayrık-zaman sistemin nedensel olduğu biliniyorsa,  $H(z)$ 'nın ROC'sı en dıştaki kutbun dışına doğru olmalıdır. ROC'nın aynı zamanda birim çemberi de içermesi için,  $H(z)$ 'nın kutuplarının tümü karmaşık  $z$ -düzleminde birim çemberin içinde olmalıdır.

Bir ayrık-zaman LTI sistemin kararlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul,  $H(z)$ 'nın ROC'sının karmaşık  $z$ -düzleminde birim çemberi ( $|z|=1$ ) içermesidir.

Rasyonel transfer fonksiyonlu nedensel bir ayrık-zaman LTI sistemin kararlı olabilmesi gereklidir ve yeter koşul  $H(z)$ 'nın kutuplarının tümünün birim çember içinde (yani tümünün genliğinin birden küçük) olmasıdır.

### LTI Sistemlerin $z$ -dönüşümü Kullanılarak İncelenmesi

Örnek: Transfer fonksiyonları aşağıda verilen nedensel ayrık-zaman LTI sistemlerin kararlı olup olmadığını belirleyiniz.

$$(i) \quad H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad (ii) \quad H(z) = \frac{1}{1-2r\cos(\theta)z^{-1} + r^2z^{-2}}$$

Cözüm:

(i)  $H(z)$ 'nin  $z = a$ 'da bir kutbu vardır. Sistemin kararlı olabilmesi için kutup birim çember içinde olmalıdır. Yani,  $|a| < 1$  ise sistem kararlı, aksi halde kararsızdır.

(ii)  $H(z)$ 'nin  $z_1 = re^{j\theta}$  ve  $z_2 = re^{-j\theta}$  da iki kutbu vardır.  $|r| < 1$  ise, kutuplar birim çember içinde, aksi halde dışındadır. O halde, sistemin kararlı olabilmesi için,  $|r| < 1$  koşulu sağlanmalıdır.

### Doğrusal, Sabit Katsayılı Fark Denklemleriyle Tanımlanan LTI Sistemler

- Girişi-çıkış ilişkisi aşağıda verilen ayrık-zaman sistemin transfer fonksiyonunu bulalım

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$\bullet \text{ Konvolüsyon özelliğinden, } Y(z) = X(z)H(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

- Fark denkleminin her iki tarafının  $z$ -dönüşümü alınır ve  $z$ -dönüşümünün zamanda öteleme özelliğini kullanırsa transfer fonksiyonunu bulunabilir:

$$\begin{aligned} Z\left\{\sum_{k=0}^N a_k y[n-k]\right\} &= Z\left\{\sum_{k=0}^M b_k x[n-k]\right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k Z[y[n-k]] = \sum_{k=0}^M b_k Z[x[n-k]] \\ \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) &= \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \end{aligned}$$

### Doğrusal, Sabit Katsayılı Fark Denklemleriyle Tanımlanan LTI Sistemler

ÖRNEK: Giriş-çıkış ilişkisi aşağıda verilen sistemin transfer fonksiyonu ve impuls yanıtını bulunuz.

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1]$$

$$\text{ÇÖZÜM: } Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

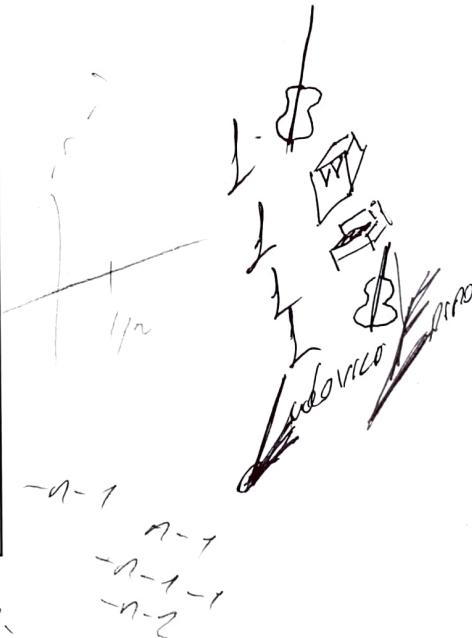
$H(z)$ 'nın ters  $z$ -dönüşümü alınırsa impuls yanıtı elde edilir.

$$h[n] = Z^{-1}\{H(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right\}$$

Ters  $z$ -dönüşümü yakınsaklık bölgelerine bağlıdır. İki durum vardır

$$(i) \text{ ROC: } |z| > 1/2, \text{ impuls yanıtı sağ taraflı olup} \quad h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

$$(ii) \text{ ROC: } |z| < 1/2, \text{ impuls yanıtı sol taraflı olup} \quad h[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[-n]$$



Genelle Zanık Pencibek

$$\phi_0 = \frac{1}{T} \int_T^T (x(t)) dt$$

$$\phi_k = \frac{1}{T} \int_T^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow H_1(e^{-jw}) = \frac{2 - e^{-jw}}{1 + \frac{1}{2}e^{-jw}}, \quad H_2(e^{-jw}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-jw} + \frac{1}{3}e^{-2jw}}$$

$h_1[n]$  ve  $h_2[n]$  koshad(sen) boygı,

a) Giris - Gıçıkas arasındaki farklı denle (benim baktım?)

b) Nedensel olanz sistem iacin;  $X[n] = \cos(\omega_0 n)$  'e borsuklu  
gelenekler?

$$x[n] \xrightarrow{h_1[n]} \boxed{m_1[n]} \xrightarrow{h_2[n]} y[n]$$
$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

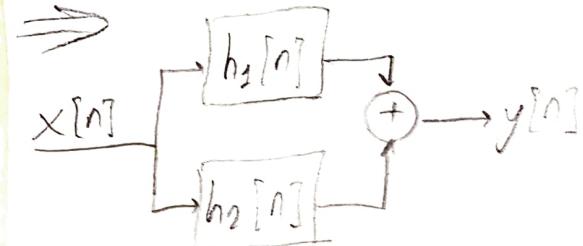
$$H(e^{jw}) = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = H_1(e^{jw}) * H_2(e^{jw})$$

$$\frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} \times \frac{2 - e^{-jw}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j2w}}$$

$$1 \cdot Y(e^{jw}) + \frac{1}{8}e^{-j3w} Y(e^{jw}) = 2X(e^{jw}) - e^{-jw} X(e^{jw})$$

$$y[n] = 2x[n] - x[n-1] - \frac{1}{8}y[n-3]$$

(B)  $H(e^{jw}) \cdot X(e^{jw}) = Y(e^{jw}) \rightarrow y[n] = \dots$



$$h_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n], \quad H(e^{j\omega}) = \frac{-12 + 5e^{-j\omega}}{12 - 7e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}$$

a)  $h_2[n] = ?$

b)  $y[n] \leftrightarrow X[n]$  Basis?

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{-12 + 5e^{-j\omega}}{12 - 7e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}e^{-j3\omega}}{2 - \frac{1}{3}e^{-j3\omega}} + H_2(e^{j\omega})$$

$$(e^{-j\omega} - 3)(e^{-j\omega} - 4)$$

$$= \frac{3}{3 - e^{-j\omega}} + \frac{A}{4 - e^{-j\omega}}$$

$$h_2[n] = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$\text{Giltig } H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{Frequenz domain})$$

$$H(s) \Big|_{s=\sigma+j\omega} = h(t) \text{ im Laplace domain}$$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \rightarrow \text{ Zeitbereich (D2D) Laplace}$$

$\sigma \rightarrow$  Zeitwelle (natürlich)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \rightarrow \infty \quad \text{FD yok f. stabilis.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt \rightarrow 0 \quad f. \text{ vor dir.}$$

$$\text{Ort 1} \rightarrow \text{ganzes System inst.} \quad \sigma + j\omega > 0 \\ \sigma > -\sigma$$

$$\text{Ort 2} \rightarrow \text{ganzes System stab.} \quad \sigma + j\omega < 0 \\ \sigma < -\sigma$$

⑥  $H(e^{j\omega}) \Big|_{\sigma=0}$