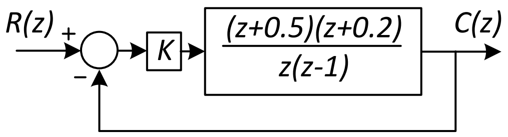
01.06.2016

OTOMATİK KONTROL FİNAL SINAVI

S1)



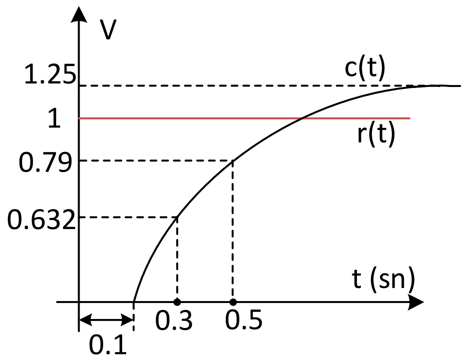
Yanda verilen kontrol sistemi için;

a) Kök-yer eğrisini çiziniz. (kutuplar, sıfırlar, kutup-sıfır dağılımı, asimtodlar, kopma noktaları, varsa birim daireyi kesme noktalarını)

b) Kopma noktalarındaki kazançları yer eğrisinden hesaplayınız.

c) Jury kararlılık testine göre sistemin kararlılığını inceleyiniz.

S2)

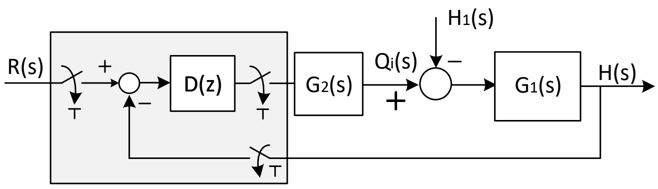


Açık çevrim cevabı yanda verilmiş olan ölü zaman sistem için;

a) Açık çevrim transfer fonksiyonunu $\dfrac{C(s)}{R(s)} = G(s)$ yazınız.

b) Örnekleme zamanı $T = 0.04sn$ için ZOH'lu ayrık zaman açık çevrim transfer fonksiyonu $G_{ZOH}\,G(z)$ elde ediniz.

S3)

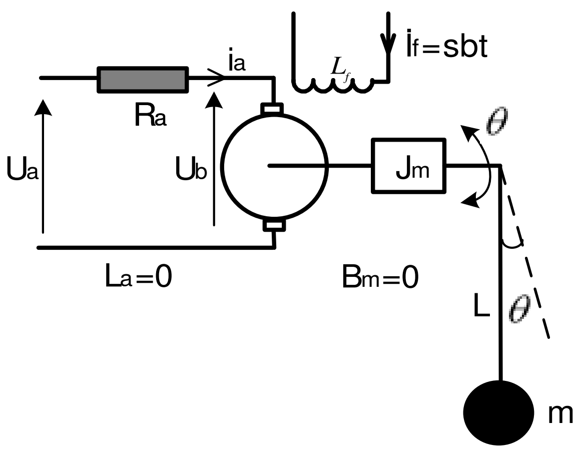


Şekilde verilen kontrol sisteminde,

a) İki girişli sistem için $H(z)$ çıkış cevabını elde ediniz.

b) $D(z)$ kontrolcüsünün hangi şart/şartlar altında $H(z) = R(z)$ sağlayabileceğini gösteriniz.

S4)



Şekilde verilen kontrol sisteminde motor miline L uzunluğunda esnek olmayan bir bağlantı ile sabitlenmiş kütle θ açısı ile sağa-sola döndürülmektedir.

a) Sistemi tanımlayan denklemleri t-domeninde yazınız ve durum denklemlerini elde ediniz.

b) Durum denklemlerini $\theta = 0$ civarında doğrusallaştırınız ve durum denklemlerini $\dfrac{\Delta x(t)}{\Delta t} = A^{*}\Delta x(t) + B^{*}\Delta u(t)$ vektör matris formunda yazınız

$$A^{*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_0, r_0} \qquad B^{*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r_1} & \frac{\partial f_1}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial r_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r_1} & \frac{\partial f_2}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial r_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial r_1} & \frac{\partial f_n}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial r_n} \end{bmatrix}_{x_0, r_0}$$

$$X(z) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[(s - s_i)^m X(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right] \right\}$$

Başarılar, Süre 90 dk

Prof. Dr. Ayhan ÖZDEMİR, Yrd. Doç. Dr. Zekiye ERDEM

CEVAPLAR

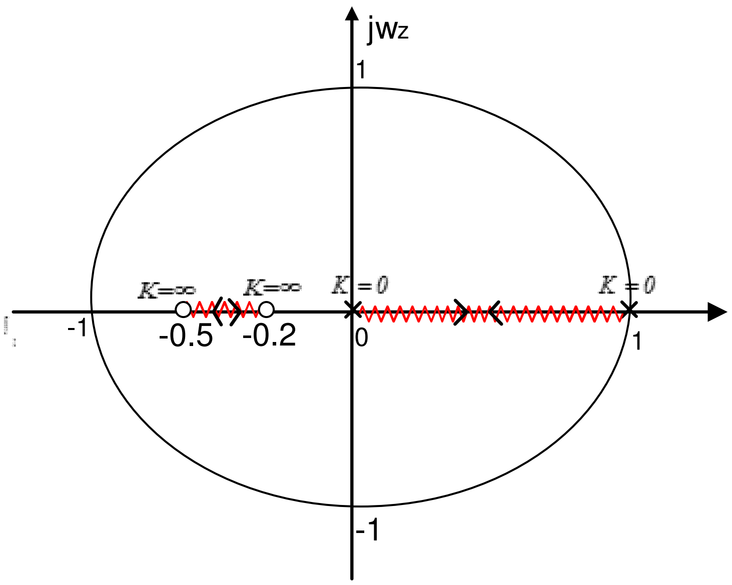
C1.a) Yer eğrisi çizim için açık-çevrim transfer fonksiyonu gereklidir. Verilen kapalı çevrim kontrol blok diyagramından,

1. $A.Ç.T.F.=\dfrac{K(z+0.5)(z+0.2)}{z(z-1)}$ olarak yazılır.

Açık çevrim transfer fonksiyonuna ait:

Kutuplar	Sıfırlar
$p_1=0$	$s_1=-0.5$
$p_2=1$	$s_2=-0.2$
---------------------	-----------------------
$n=2$ Kutup sayısı.	$m=2$ Sıfır sayısı.

2. Kutup sıfır dağılımı



- ✓ **<u>İki Kutup arası</u>** kök-yer eğrisine dahil olduğundan bir adet **<u>çıktı olarak kopma noktası</u>** olacaktır.
- ✓ **<u>İki Sıfır arası</u>** kök-yer eğrisine dahil olduğundan bir adet **<u>girdi olarak kopma noktası</u>** olacaktır.

3. Asimtodlar

n-m=0, Kutup sayısı = Sıfır sayısı olduğundan kök-yer eğrisinin sonsuza giden kolu dolayısıyla asimtodu yoktur.

4.Kopma noktaları;

$\dfrac{dG(z)H(z)}{dz}=0$ ifadesinden hesaplanır.

$\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{K(z^2+0.7z+0.1)}{z^2-z}\right)=0$ dan

$$\Rightarrow \; K\left[\frac{(2z+0.7)(z^2-z)-(2z-1)(z^2+0.7z+0.1)}{\left(z^2-z\right)^2}\right]=0 \text{ dan}$$

$$1.7z^2+0.2z-0.1=0 \rightarrow z_1=-0.3084 \;\rightarrow \text{Girdi olarak kopma noktası}$$
$$z_2=0.1907 \;\rightarrow \text{Çıktı olarak kopma noktası}$$

- ✓ İki kutup arası kök-yer eğrisine dâhil olduğundan bir adet çıktı olarak kopma noktası olacaktır. Dâhil olan bölge göz önünde bulundurulduğunda (0 -1 noktaları arası taralı bölge), **Çıktı olarak kopma noktası=0.1907 noktasıdır.**
- ✓ İki sıfır arası kök-yer eğrisine dâhil olduğundan bir girdi olarak kopma noktası olacaktır. Dâhil olan bölge göz önünde bulundurulduğunda (-0.2 -0.5 noktaları arası taralı bölge); **Girdi olarak kopma noktası=-0.3084 noktasıdır.**

5. Birim daireyi kesme noktaları

Jury Kararlılık kriterinden karakteristik denklem:

$$F(z)=1+G(z)H(z)=1+\frac{K(z^2+0.7z+0.1)}{z^2-z}=0 \;\Rightarrow\; F(z)=(1+K)z^2+z(0.7K-1)+0.1K=0$$

Jury kararlılık kriteri ile sistemin kararlılık analizi için önce iki gerek koşula bakılmalıdır.

i) $F(1)>0$ olmalıdır.

$1+K+0.7K-1+0.1K>0$

$1.8K>0$

$K>0$ olmalıdır. (**1. Gerek koşul**)

ii) $(-1)^2F(-1)>0$ olmalıdır.

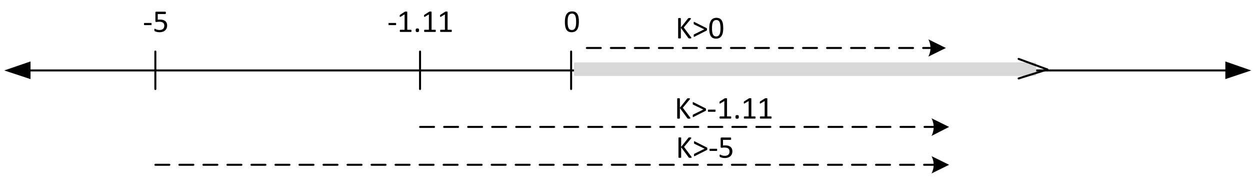
$1+K-0.7K+1+0.1K>0$

$0.4K>-2 \Rightarrow$

$K>-5$ olmalıdır. (**2. Gerek koşul**)

Yeter koşul: $|a_n|>|a_0| \rightarrow |1+K|>|0.1K| \rightarrow K>-1.11$ olmalıdır. (**Yeter koşul**)

Bu gerek ve yeter koşullar aşağıda şekilde gösterilmiştir. Her üç koşulun da sağlandığı bölge **<u>K>0</u>** gri alan olarak gösterilmiştir.

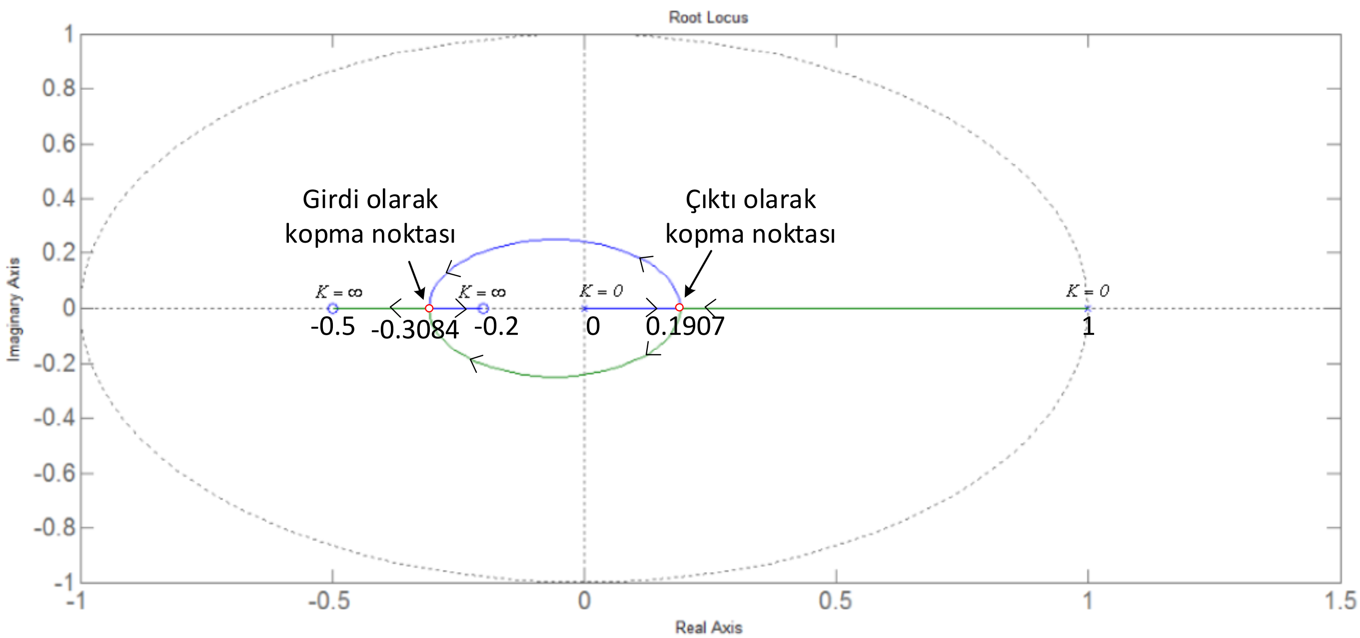


<u>$K>0$ için yani $\infty<K>0$ aralığı için sistem kararlıdır. Kapalı çevrim kutularının tümü birim daire içindedir. Yer eğrisi birim daireyi kesmez. K nın sınır değeri YOKTUR.</u>

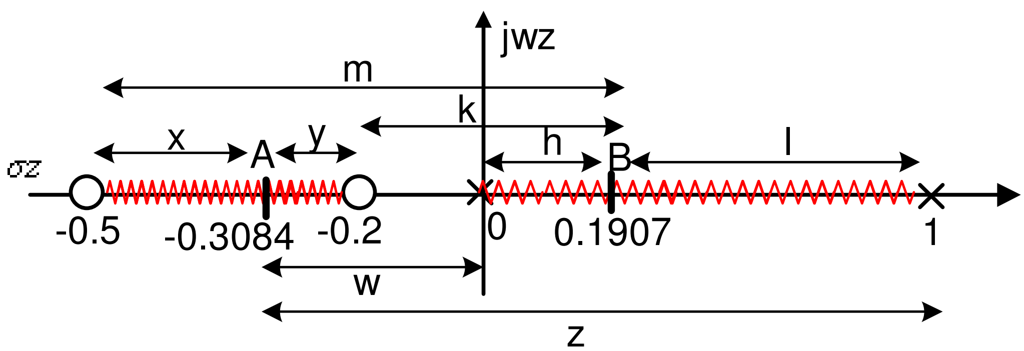
Kök-yer eğrisi çizdirmek için MATLAB kodları aşağıdadır:

```
num=[1 0.7 0.1];
den=[1 -1 0];
T=0.1
s=tf('z')
Gz=tf(num,den,T)
rlocus(Gz)
```

Tüm hesaplamalardan sonra incelenen sistem için kök-yer eğrisi aşağıda çizdirilmiştir.



b)Kopma noktalarındaki kazanç



$$K_A = \frac{Kutupların\ A-noktasına\ uzaklıklarının\ çarpımı}{Sıfırların\ A-noktasına\ uzaklıklarının\ çarpımı} = \frac{w\,z}{x\,y} = \frac{(0.3084*(1+0.3084))}{(0.5-0.3084)*(0.3084-0.2)} = 19.4$$

$$K_B = \frac{Kutupların\ B - noktasına\ uzaklıklarının\ çarpımı}{Sıfırların\ B - noktasına\ uzaklıklarının\ çarpımı} = \frac{h\,l}{k\,m} = \frac{(0.1907*(1\text{-}0.1907))}{(0.5+0.1907)*(0.1907+0.2)} = 0.572$$

<u>II. YOL: Kopma noktalarındaki kutuplar karakteristik denklemde yerine koyulur ise yukarıda elde edilen sonuçlar elde edilebilir.</u>

$$F(z) = (1+K)z^2 + z(0.7K-1) + 0.1K$$
$$F\left(0.3084\right) = (1+K_A)0.3084^2 + 0.3084(0.7K_A - 1) + 0.1K_A = 0$$

$$K_A = 19.4$$

$$F\left(0.1907\right) = (1+K_B)0.1907^2 + 0.1907(0.7K_B - 1) + 0.1K_B = 0$$

$$K_B = 0.572$$

c) Jury Kararlılık kriterinin uygulanması: Kararlılık analizi için öncelikle karakteristik denklem yazılmalıdır.

$$F(z) = 1 + G(z)H(z) = 1 + \frac{K(z^2+0.7z+0.1)}{z^2-z} = 0 \quad \Rightarrow \quad F(z) = (1+K)z^2 + z(0.7K-1) + 0.1K = 0$$

Jury kararlılık kriteri ile sistemin kararlılık analizi için önce iki gerek koşula bakılmalıdır.

i) $F(1) > 0$ olmalıdır.

$$1+K+0.7K-1+0.1K>0$$
$$1.8K>0$$

$K>0$ olmalıdır. (**1. Gerek koşul**)

ii) $(-1)^2 F(-1) > 0$ olmalıdır.

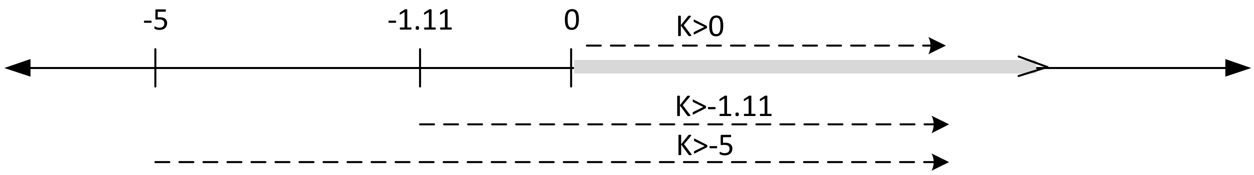
$$1+K-0.7K+1+0.1K>0$$
$$0.4K>-2 \Rightarrow$$

olmalıdır. $K>-5$ (**2. Gerek koşul**)

Yeter koşul: $|a_n| > |a_0| \rightarrow |1+K| > |0.1K| \rightarrow$ $K > -1.11$ olmalıdır. (**Yeter koşul**)

<u>$K>0$</u> **<u>için yani bütün K değerleri için sistem kararlıdır.</u>**

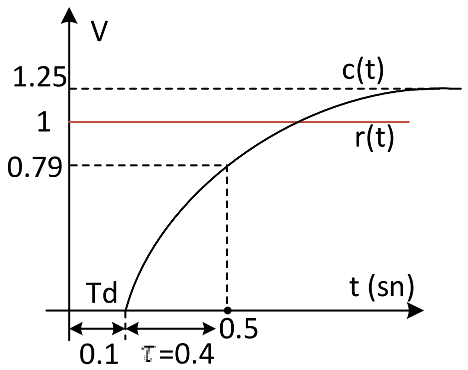
Bu gerek ve yeter koşullar aşağıda şekilde gösterilmiştir. Her üç koşulun da sağlandığı bölge **<u>K>0</u>** gri alan olarak gösterilmiştir.



<u>$K>0$</u> **<u>için yani $\infty < K > 0$ aralığı için sistem kararlıdır.</u>**

C.2)

a)



Yukarıda açık çevrim cevabı görülen ölü zamanlı I.dereceden sisteme ait transfer fonksiyonu,

K=Kazanç, Zaman sabiti= τ ve T_d =ölü zaman olmak üzere ,

$$G(s)=\frac{K}{\tau s+1}e^{-T_d s}$$ formundadır.

i- **Kazanç hesabı:** $K=\frac{\Delta c(t)}{\Delta r(t)}=\frac{c(\infty)-c(0)}{r(\infty)-r(0)}=\frac{1.25-0}{1-0}=1.25$ olarak hesap edilir.

ii- **Zaman Sabiti:** Sistem cevabının son değerinin %63.2 sine varıncaya kadar geçen süredir. Cevap eğrisinden, $c_{0.632}=c(\infty)*0.632 \rightarrow \quad c_{0.632}=1.25*0.632$

$c_{0.632}=0.79$ dur. Cevap eğrisinden $c(t)=0$ dan $c(t)=0.79$' a varıncaya geçen süre,

$\tau=0.5-0.1 \rightarrow \quad \tau=0.4\ sn$ elde edilir.

iii- **Ölü zaman:** Şekilden $T_d=0.1 sn$ dir.

Bulunan bu üç parametre değerleri yerlerine yazılır; $G(s)=\frac{1.25}{0.4s+1}e^{-0.1s}$ olarak elde edilir.

b) Verilen sistem cevabında,

$T=0.04\,sn$ *örnekleme zamanı*, $T_d=0.1\,sn$ *ölü zaman* olarak verilmiştir.

$n=\frac{T_d}{T}=\frac{0.1}{0.04}=2.5$ Örnekleme zamanı, ölü zamanın tam katı olmadığı görülmektedir,

Bundan dolayı değiştirilmiş (modifiye edilmiş) z-dönüşümü kullanılmak zorundadır. Doğrudan z-dönüşümü uygulanamaz.

ZOH'lu açık çevrim transfer fonksiyonu

$$G_{ZOH}G(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right\}$$ olarak yazılır.

$$G_{ZOH}G(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1.25\,e^{-0.1s}}{0.4s+1}\right\}_{T=0.04} = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{3.125e^{-0.1s}}{(s+2.5)}\frac{1}{s}\right\}_{T=0.04}$$ ve düzenlenir.

Örnekleme zamanı ile ölü zaman arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir;

$$e^{-0.1s} = e^{-Tds}$$

$$T = 0.04\,sn \quad örnekleme \;\; zamanı$$

$$T_d = 0.1\,sn \quad ölü\,zaman$$

$T_d = 2T + 0.5T$ olduğundan Örnekleme zamanı, ölü zamanın tam katı olmadığı görülmektedir. Bu nendenle modifiyez-dönüşümü aşağıdaki şekilde uygulanacaktır.

$$e^{-0.1s} = e^{-T_d s} = e^{-2sT}e^{-0.5sT}$$
$$e^{-2sT} = z^{-2}$$
şeklinde düzenlenir ise,

Modifiye-z dönüşümü için

$\mu = 0.5 \rightarrow m = 1-0.5 \rightarrow m = 0.5$ dönüşümü yapılmalıdır. Buradan $G_{ZOH}G(z)$ transfer fonksiyonunda $e^{-T_d s}$ yerine $e^{-T_d s} = e^{-2sT}e^{-0.5sT}$ koyulduğunda,

$$G_{ZOH}G(z) = 3.125Z\left\{\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)\left(\frac{e^{-2sT}e^{-0,5sT}}{s+2.5}\right)\right\}_{T=0.04sn} \rightarrow e^{-sT} = z^{-1} \rightarrow e^{-2sT} = z^{-2}$$

Şekilnde düzenlenip $\mu = 0.5 \rightarrow m = 1-0.5 \rightarrow m = 0.5$ dönüşümü yapılarak denklemde yerine koyulduğunda,

$$G_{ZOH}G(z) = 3.125\left(1-z^{-1}\right)Z\left\{\frac{e^{-2sT}e^{-0.1sT}}{s(s+2.5)}\right\} = 3.215\left(1-z^{-1}\right)z^{-2}Z\left\{\frac{e^{-(1-0.5)sT}}{s(s+2.5)}\right\}$$ olarak elde edilir.

$$G_{ZOH}G(z) = 3.125\left(1-z^{-1}\right)z^{-2}z^{-1}Z\left\{\frac{e^{0.5sT}}{s(s+2.5)}\right\} = 3.125\frac{z-1}{z}\frac{1}{z^{2}}z^{-1}Z\left\{\frac{e^{0.5sT}}{s(s+2.5)}\right\}$$

$$X(z) = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[(s-s_i)^m X(s)\frac{z}{z-e^{sT}}\right]\right\}$$ z-dönüşümüne ait rezidü teoremi kullanılarak,

$$G_{ZOH}G(z) = 3.125\frac{z-1}{z^4}\left\{\cancel{s}\frac{e^{0.5sT}}{\cancel{s}(s+2.5)}\frac{z}{z-e^{sT}}\bigg|_{s=0} + \cancel{(s+2.5)}\frac{e^{0.5sT}}{s\,\cancel{(s+2.5)}}\frac{z}{z-e^{sT}}\bigg|_{s=-2.5}\right\}\Bigg|_{T=0.04}$$

$$G_{ZOH}G(z)=3.125\frac{z-1}{z^4}\left\{\frac{z}{2.5(z-1)}-\frac{e^{-1.25T}z}{2.5(z-e^{-2.5T})}\right\}\Bigg|_{T=0.04}$$

$$G_{ZOH}G(z)=3.125\frac{z-1}{z^4}\left\{\frac{z}{2.5(z-1)}-\frac{0.9512z}{2.5(z-0.9048)}\right\}$$

$$G_{ZOH}G(z)=3.125\left\{\frac{1}{2.5z^3}-\frac{0.3805(z-1)}{z^3(z-0.9048)}\right\}$$

$$G_{ZOH}G(z)=\frac{1.25}{z^3}-\frac{1.1891(z-1)}{z^3(z-0.9048)}$$

$$G_{ZOH}G(z)=\frac{1.25(z-0.9048)-1.1891z+1.1891}{z^3(z-0.9048)}$$

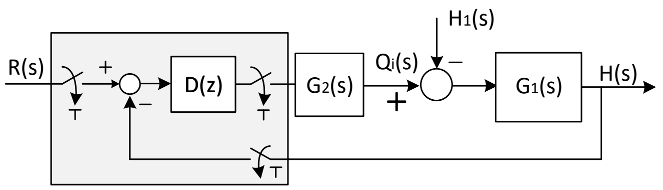
Ara işlemler yapıldıktan ve düzenlendikten sonra,

$\boxed{G_{ZOH}G(z)=\frac{0.061z-0.058}{z^3(z-0.9048)}}$ şeklinde yazılabilir.

Çözüm için MATLAB kodları aşağıdadır:

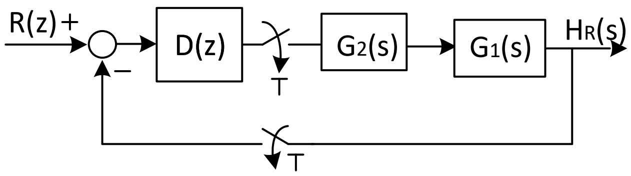
```
Gs = tf(3.125,[1 2.5],'iodelay',0.1); %transfer fonksiyon
Gz = c2d(Gs, 0.04) % zoh'lu G(z) hesabı
```

C.3) a)



Şekilde verilen kontrol sistemi iki-giriş tek çıkışlı bir sistemdir. Lineer sistemler için Toplamsallık özelliği kullanılarak çıkış ifadesi $H(z)$ elde edilir.

Önce $\boldsymbol{H_1(s) = 0}$ **ve** $\boldsymbol{R(s) \neq 0}$ **için** $\boldsymbol{H_R(z)}$ elde edilir. Bu şartlar için blok diyagram aşağıda verilmiştir.

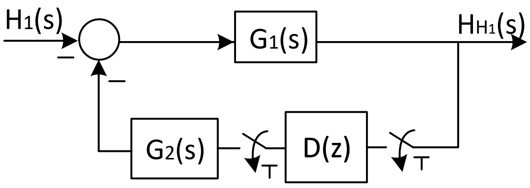


Şekilde verilen blok diyagramdan $R(z)$ giriş için çıkış;

$$H_R(z) = \frac{D(z)G_1G_2(z)}{1 + D(z)G_1G_2(z)}\, R(z)$$

elde edilir.

Sonra, $\boldsymbol{H_1(s) \neq 0}$ **ve** $\boldsymbol{R(s) = 0}$ **için** $\boldsymbol{H_{H_1}(z)}$ elde edilir. Bu şartlar için blok diyagram aşağıda verilmiştir.

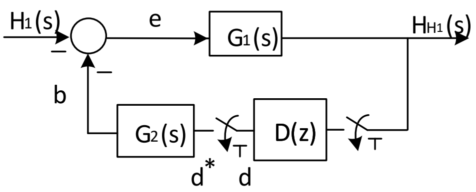


Şekilde verilen blok diyagramdan $H_1(z)$ giriş için çıkış;

$$H_{H_1}(z) = -\frac{G_1H_1(z)}{1 + D(z)G_1G_2(z)}$$

elde edilir. **Dikkat** $\boldsymbol{G_1\ ve\ H_1(s)}$ kaynaşmış

NOT: EK-BİLGİ (Sınavda aşağıda verilen işlemleri yapmadan yukarıda verildiği gibi sonucu doğrudan yazabilirsiniz.)



$$e = H_1(s) - G_2(s)d^*$$
$$d = D^*(s)H_{H1}^*(s) \ \rightarrow \ d^* = D^*(s)H_{H1}^*(s)$$
$$H_{H1}(s) = eG_1(s) \ \rightarrow \ H_{H1}(s) = \underbrace{(H_1(s) - G_2(s)d^*)}_{e}\, G_1(s)$$
$$H_{H1}(s) = H_1(s)G_1(s) - G_2(s)G_1(s)d^*$$
$$H_{H1}^*(s) = H_1G_1^*(s) - G_1G_2^*(s)d^*$$
$$H_{H1}^*(s) = H_1G_1^*(s) - G_1G_2^*(s)\underbrace{\{D^*(s)H_{H1}^*(s)\}}_{d^*}$$
$$H_{H1}^*(s) = H_1G_1^*(s) - G_1G_2^*(s)D^*(s)H_{H1}^*(s)$$
$$H_{H1}^*(s)\{1 + G_1G_2^*(s)D^*(s)\} = H_1G_1^*(s)$$
$$H_{H1}(s) = \frac{H_1G_1^*(s)}{1 + G_1G_2^*(s)D^*(s)}$$
$$H_{H1}^*(z) = \frac{H_1G_1(z)}{1 + G_1G_2(z)D(z)}$$

<u>$\boldsymbol{R(s) \neq 0}$ **ve** $\boldsymbol{H_1(s) \neq 0}$ **için çıkış ise her iki çıkışın toplamıdır.**</u>

$$H(z) = H_R(z) + H_{H_1}(z) \ \rightarrow \ H(z) = \frac{D(z)G_1G_2(z)}{1+D(z)G_1G_2(z)}\, R(z) - \frac{G_1H_1(z)}{1+D(z)G_1G_2(z)}$$

olarak elde edilir.

b) Elde edilen $H(z)$ cevabı $D(z)$ kontrolör parantezine alınır ise,

$$H(z) = \frac{\frac{D(z)G_1G_2(z)}{D(z)}}{\frac{1}{D(z)} + G_1G_2(z)} R(z) - \frac{\frac{G_1H_1(z)}{D(z)}}{\frac{1}{D(z)} + G_1G_2(z)}$$

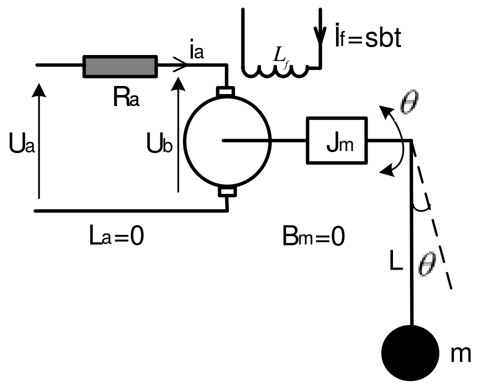
$\boldsymbol{D(z)} = \infty$ alınıp düzenlenir ise,

$$H(z) = \frac{G_1G_2(z)}{\frac{1}{\infty} + G_1G_2(z)} R(z) - \frac{\frac{G_1H_1(z)}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + G_1G_2(z)}$$

$$H(z) = \underbrace{\frac{G_1G_2(z)}{0 + G_1G_2(z)}}_{1} R(z) - \underbrace{\frac{0}{0 + G_1G_2(z)}}_{0}$$

$H(z)$ ifadesinden görüleceği üzere $\boldsymbol{D(z)} = \infty$ için $H(z) = R(z)$ olur.

C.4) a) Sistemi tanımlayan denklemlerin t-domeninde yazılması ve durum denklemlerini elde edilmesi aşağıda verilmiştir.



1-$U_a(t) = Ri_a(t) + U_b(t) \rightarrow i_a(t) = \frac{u_a(t) - U_b(t)}{R}$

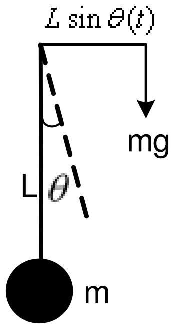
2-$U_b(t) = K_b \frac{d\theta(t)}{dt}$

3-$T_e(t) = K_i i_a(t) \rightarrow T_e(t) = K_i \frac{u_a(t) - U_b(t)}{R}$

4-$T_m(t) = J_m \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + T_1(t)$

5- $T_1(t) = mgLsin\theta(t)$ motor miline m kütlesinden dolayı etki eden yük momenti (**şekil aşağıda**).

6-$T_m(t) = T_e(t)$ sürekli rejimde.



m Kütlesi DC motor tarafından $\boldsymbol{\theta(t)}$ açısı kadar konum değiştirilmek istendiğinde DC motor miline etki eden döndürme kuvveti şekilden $T_1(t) = mgLsin\theta(t)$ dir.

$T_m(t) = J_m \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + mgLsin\theta(t)$ elde edilir. $T_m(t) = T_e(t)$ eşitliğinde $U_b(t)$ ifadesi yerine koyulur ve düzenlenir ise,

$$J_m \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + mgLsin\theta(t) = K_i \frac{u_a(t) - K_b \frac{d\theta(t)}{dt}}{R}$$

ara işlemlerden sonra,

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{K_b K_i}{J_m R}\frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{mgL}{J_m} sin\theta(t) = \frac{K_i}{J_m R} u_a(t)$$

sistemi tanımlayan diferansiyel denklem elde edilir.

Durum değişkenleri tanımlanır;

$\theta(t) = x_1(t)$ olsun.

$\frac{d\theta(t)}{dt} = x_2(t)$ denir ise

$$\boldsymbol{f_1 = \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)}$$ **I.durum** denklemi yazılır.

$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{dx_2(t)}{dt}$ olur. sistemi tanımlayan diferansiyel denklem

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{K_b K_i}{J_m R}\frac{d\theta(t)}{dt} - \frac{mgL}{J_m} sin\theta(t) + \frac{K_i}{J_m R} u_a(t)$$

Olarak düzenlenir ve tanımlanan durum değişkenleri yerlerine koyulur ise,

$\boldsymbol{f_2 = \frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{K_b K_i}{J_m R} x_2(t) - \frac{mgL}{J_m} sinx_1(t) + \frac{K_i}{J_m R} u_a(t)}$ **II.durum** denklemi elde edilir.

Matrisel formda,

$$\boldsymbol{\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{K_b K_i}{J_m R} x_2(t) - \frac{mgL}{J_m} sinx_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_i}{J_m R} \end{bmatrix} u_a(t)}$$

b) $\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \boldsymbol{A}^* \Delta \boldsymbol{x(t)} + \boldsymbol{B}^* \Delta \boldsymbol{u(t)}$ formda yazmak için öncelikle $\boldsymbol{A}^*$ ve $\boldsymbol{B}^*$ matrisleri elde edilmelidir. ($\theta = \boldsymbol{x_{10} = 0}$)

$$\boldsymbol{A^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2(t)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2(t)} \end{bmatrix}_{x_{10}, x_{20},} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgLcosx_{10}}{J_m} & -\frac{K_b K_i}{J_m R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgL}{J_m} & -\frac{K_b K_i}{J_m R} \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{B^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial U_a(t)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial U_a(t)} \end{bmatrix}_{x_{10}, x_{20},} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_i}{J_m R} \end{bmatrix}}$$

$\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \boldsymbol{A}^* \Delta \boldsymbol{x(t)} + \boldsymbol{B}^* \Delta \boldsymbol{u(t)}$ Vektör matris formatında aşağıda verildiği gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta x_1(t)}{\Delta t} \\ \frac{\Delta x_2(t)}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ -\frac{\boldsymbol{mgL}}{\boldsymbol{J_m}} & -\frac{\boldsymbol{K_b K_i}}{\boldsymbol{J_m R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{x_1(t)} \\ \Delta \boldsymbol{x_2(t)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \frac{\boldsymbol{K_i}}{\boldsymbol{J_m R}} \end{bmatrix} \Delta \boldsymbol{u_a(t)}$$