T.C.

Sakarya Üniversitesi

ELEKTROMANYETİK ALAN TEORİSİ

Prof. Dr. Osman Çerezci

MUS'AB UĞUR

B150100037

Alan: Bir fiziksel büyüklüğün uzayda dağılmış halidir. / Bir fiziksel nesnenin uzayda dağılımıdır.

a- Skaler Alanlar: Sayısal

b- Vektörel Alanlar: Sayı ve Yön

Zamana bağımlılık açısından alanlar 3 kategoriye ayrılır;

1- Statik Alan: Zamanla değişmeyen

2- Dinamik Alan: Zamanla değişen

3- Kuasistatik Alan: Sanki statik ; Zamanla değişim çok az

Elektromanyetik alanların sınıflandırılması;

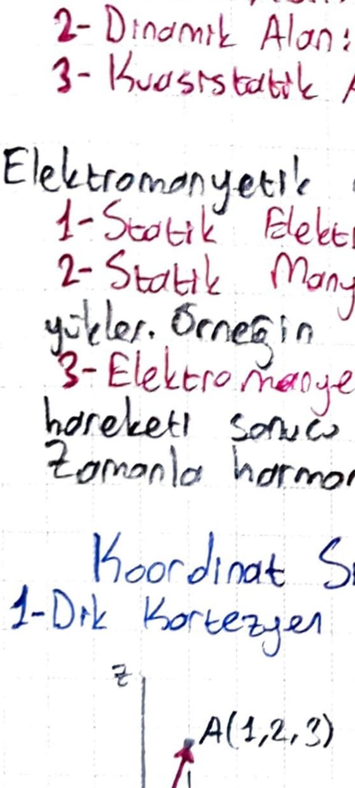
1- Statik Elektrik Alan: Kaynak: Durağan elektrik yükleri (V/m)

2- Statik Manyetik Alan: Sabit hızla hareket eden elektriksel yükler. Örneğin DC devreleri (A/m)

3- Elektromanyetik Alan: Kaynak: Elektriksel yüklerin ivmeli hareketi sonucu oluşur. Örneğin verici TV-radyo-baz antenler. Zamanla harmonik değişir.

Koordinat Sistemleri

1-Dik Kartezyen Koordinat Sistemi



$$\vec{OA} = 1\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 3\vec{a}_z$$

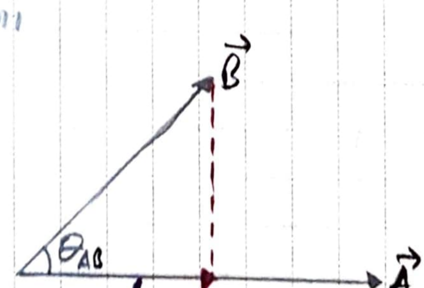
$$|\vec{OA}| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14} \text{ br}$$

A(1,2,3)'nın anlamı; x=1 düzlemi ile y=2 düzleminin ve z=3 düzleminin ortak kesimidir.

$\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$, $\vec{a}_z$: Birim vektör

- İki vektörün skaler çarpımı

$$\vec{A}.\vec{B} = |A|\,|B| \cos\theta_{AB}$$



- $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

(T) → $\vec{B}$

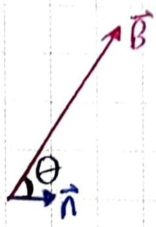
$\vec{H}$ → manyetik alan

- Bir vektör, bir birim vektörle skaler çarpılırsa o vektörün birim vektör yönünde parçası bulunur. (iz düşüm)

$\vec{n} \rightarrow$ birim vektör

$|\vec{n}| = 1$

$$\vec{n}.\vec{B} = |\vec{n}|.|\vec{B}| \cos\theta_{nB}$$
$$= B\cos\theta_{nB}$$

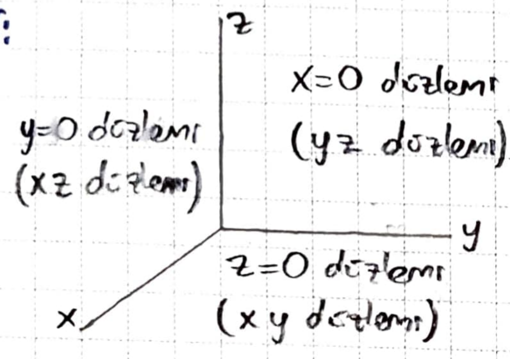


- İki vektörün vektörel çarpımı;

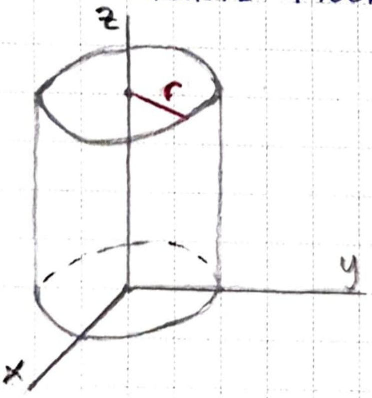
$$\vec{A} = A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z$$
$$\vec{B} = B_x\vec{a}_x + B_y\vec{a}_y + B_z\vec{a}_z$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

NOT:



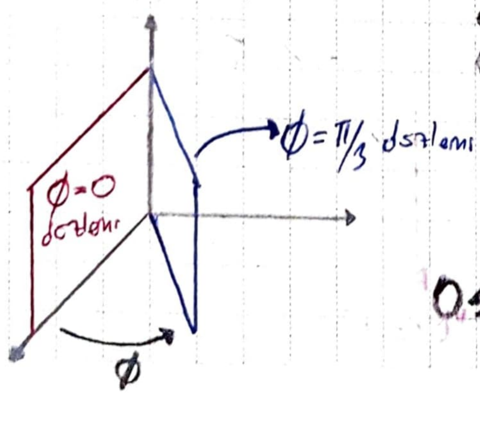
2- Dik Silindirik Koordinat Sistemi



Bu sistemde herhangi bir vektör;
$\vec{A} = A_r\vec{a}_r + A_\phi\vec{a}_\phi + A_z\vec{a}_z$ ile gösterilir.

Bu sistemde baz vektörleri $\vec{a}_r, \vec{a}_\phi, \vec{a}_z$ dir. Ve birbirine diktir. $\vec{a}_z$ kartezyen koordinat sistemiyle aynıdır.

$P(2, \pi/3, 4)$ noktasının anlamı $r=2$ olan silindir ile, $z=4$ düzleminin ve $\phi = \pi/3$ düzleminin kesişimidir.



$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Birim Vektörler Arasında Dönüşüm Tablosu

	$\vec{a}_r$	$\vec{a}_\phi$	$\vec{a}_z$
a_x	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	0
a_y	$\sin\phi$	$\cos\phi$	0
a_z	0	0	1

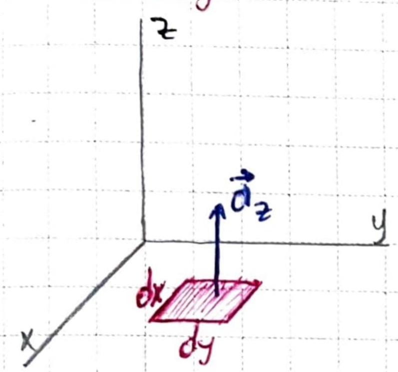
$\phi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$x = r\cos\phi$

$y = r\sin\phi$

NOT: Kartezyen

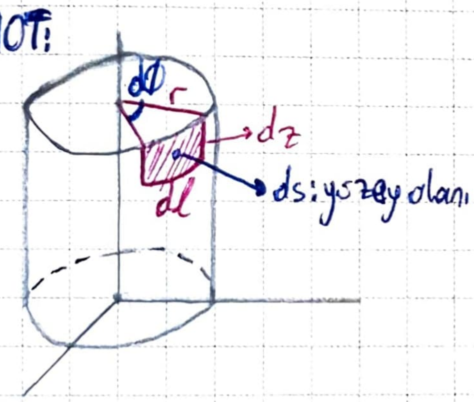


Yüzey elemanı = ds

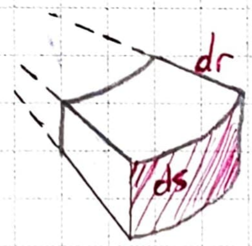
$ds = dx.dy$

$d\vec{s} = dx\,dy\,\vec{a}_z$

NOT:



Dairesel harekette yay uzunluğu;
$dl = r\,d\phi$



$ds = dz\,r\,d\phi$

$d\vec{s} = r\,d\phi\,dz\,\vec{a}_r$ ↳ silindir yüzeyine dik vektör

$dV = dr\,dz\,r\,d\phi$ ↳ hacim elemanı

ÖRNEK: $\vec{A} = 2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y + \vec{a}_z$ vektörünü silindirik koordinatta ifade ediniz?

$$\vec{A} = A_r\,\vec{a}_r + A_\phi\,\vec{a}_\phi + A_z\,\vec{a}_z$$

$\vec{A}\vec{a}_r = A_r \rightarrow (2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y + \vec{a}_z)\vec{a}_r = 2\vec{a}_x\vec{a}_r + 3a_y a_r + \vec{a}_z a_r$
$= 2\cos\phi + 3\sin\phi + 0$

$\vec{A}\vec{a}_\phi = A_\phi \rightarrow (2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y + \vec{a}_z)\,\vec{a}_\phi = -2\sin\phi + 3\cos\phi + 0$

$\vec{A} = (2\cos\phi + 3\sin\phi)\vec{a}_r + (-2\sin\phi + 3\cos\phi)\,\vec{a}_\phi + \vec{a}_z$

$\phi = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{3}{2} = 56$

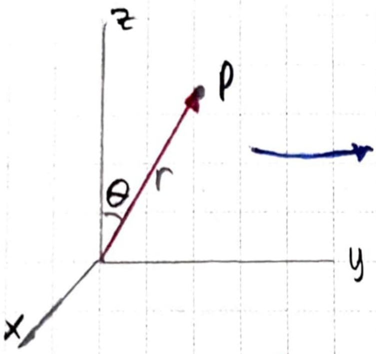
3- Dik Küresel Koordinat Sistemi

Her hangi bir P noktası $P(r, \theta, \phi)$ ile tanımlanır.

r = kürenin yarıçapı

ϕ = silindirik koordinatlar aynı

$\vec{A} = A_r \vec{a}_r + A_\theta \vec{a}_\theta + A_\phi \vec{a}_\phi$; Küresel koordinatlarda $\vec{A}$ vektörünün ifadesi



$0 \leq \theta \leq \pi$

$\longrightarrow z = r\cos\theta$

θ sabit, düzlemi konidir.

Kartezyen - Küresel Dönüşüm Tablosu

	a_r	a_θ	a_ϕ
a_x	$\sin\theta\cos\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	$-\sin\phi$
a_y	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$\cos\phi$
a_z	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0

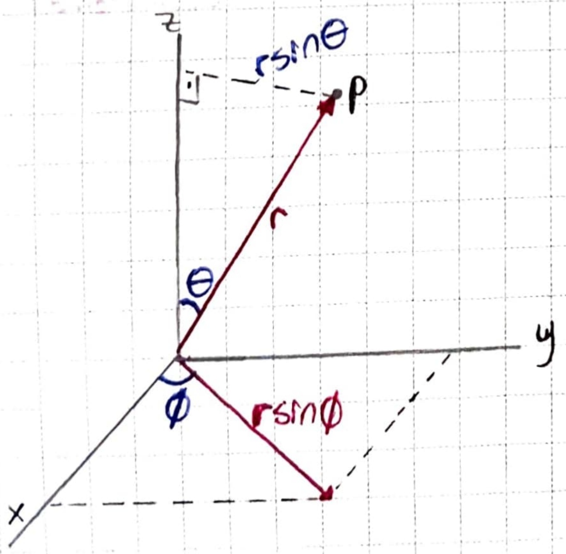
$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$x = r\cos\phi\sin\theta$

$y = r\sin\theta\sin\phi$

$z = r\cos\theta$

$\phi = \arctan\frac{y}{x}$



$z = r\cos\theta$

$x = \cos\phi \, r\sin\theta$

$y = \sin\phi \, r\sin\theta$

/ /

Koordinat Sistemlerinde Hacim Elemanı

1- Dik kartezyen koordinatlarda $dV = dx\,dy\,dz$ (m^3)
2- Silindirik koordinatlarda $dV = r\,dr\,d\phi\,dz$ (m^3)
3- Dik küresel koordinatlarda $dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$ (m^3)

Diferansiyel Vektör Operatör

$\vec{\nabla}$: nabla sembolü

$$\vec{\nabla}_\circ = \vec{a}_x \frac{\partial_\circ}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial_\circ}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial_\circ}{\partial z}$$

1. $f = f(x,y,z)$ skaler alan olsun

$$\vec{\nabla} f = \text{grad} f = \vec{a}_x \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$$

↓ f'in gradyanı

Skaler bir alanı nabla ile çarparsak sonuç vektör olarak bulunur.

2. $\vec{A}(x,y,z)$ şeklinde bir vektör alanı olsun

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\vec{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right).\left(A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z\right)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$: Sonuç skaler

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{a}_x \perp \vec{a}_z \\ \vec{a}_x \perp \vec{a}_y \\ \vec{a}_x \vec{a}_y = \vec{a}_x . \vec{a}_z = 0 \\ \vec{a}_x . \vec{a}_x = 0 \end{array}}$$

3. $$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} : \ldots ?$$

↓ Rotasyonel

Rotasyonel $\vec{A}$ = rot $\vec{A}$

4. $$\vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \nabla_\circ^2 = \frac{\partial_\circ^2}{\partial x^2} + \frac{\partial_\circ^2}{\partial y^2} + \frac{\partial_\circ^2}{\partial z^2}$$

↓ Laplacian

$$f(x,y,z) \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}$$

NOT: $f = f(x,y,z)$ skaler fonksiyonu için gradf($\vec{\nabla} f$) geometrik anlamda $f(x,y,z)$ = sabit yüzeylerine dik vektörü gösterir.
$\vec{n}$ yüzeye dik vektör olmak üzere $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial n} \cdot \vec{n}$ bağıntısı geçerlidir.

NOT: $\vec{A}$ vektör alanı için, V hacmini çevreleyen yüzey S ise;

$$\iiint \vec{\nabla} \vec{A} \, d\vec{v} = \iint \vec{A} \, d\vec{s}$$ bağıntısı geçerlidir.

NOT: $\vec{A}$ bir vektör alanı ve S açık yüzeyini çevreleyen eğri c ise

$$\iint \vec{\nabla} \times \vec{A} \, d\vec{s} = \oint_c \vec{A} \, d\vec{l}$$ bağıntısı geçerlidir.

ÖRNEK: $\vec{A} = yz\,\vec{a}_x + 4xy\,\vec{a}_y + y\,\vec{a}_z$ vektör alanının diverjansını ve rotasyonunu hesaplayın?

$$\vec{A} = \underbrace{yz}_{A_x}\vec{a}_x + \underbrace{4xy}_{A_y}\vec{a}_y + \underbrace{y}_{A_z}\vec{a}_z$$

→ $\mathrm{div}\vec{A} = \vec{\nabla} . \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 + 4x + 0$

$\mathrm{div}\vec{A} = \vec{\nabla} . \vec{A} = 4x$ P(1,1,1) noktasındaki değeri?

$$\vec{\nabla}\vec{A}\Big|_{P(1,1,1)} = 4$$

→ $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz & 4xy & y \end{vmatrix} = \vec{a}_x\left(\frac{\partial}{\partial y} y - \frac{\partial}{\partial z}(4xy)\right) - \vec{a}_y\left(\frac{\partial}{\partial x} y - \frac{\partial}{\partial z}(yz)\right)$

$$+ \vec{a}_z\left(\frac{\partial}{\partial x} 4xy - \frac{\partial}{\partial y} yz\right)$$

$$= \vec{a}_x(1-0) - \vec{a}_y(0-y) + \vec{a}_z(4y-z)$$

$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{a}_x + y\,\vec{a}_y + \vec{a}_z(4y-z)$ P(1,1,1) noktasındaki değeri?

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_{P(1,1,1)} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + 3\vec{a}_z$$

ÖRNEK: Bir hız vektörü alan $V = 5x^2 \vec{a}_x + 2y^2 \vec{a}_y - 4z^2 \vec{a}_z$ (m/s) olarak veriliyor. Bu vektör alanının $P(1,1,0)$ noktasındaki değerini bulunuz ve bulduğunuz alanı $\vec{a}_r$ yönündeki izdüşümünü (bileşenini) hesaplayınız?

$$\vec{V}(P) = 5.1^2 \vec{a}_x + 2.1^2 \vec{a}_y - 4.0^2 \vec{a}_z$$
$$\vec{V}(P) = 5\vec{a}_x + 2\vec{a}_y \ (m/s)$$

$$\vec{a}_r = \cos\phi \, \vec{a}_x + \sin\phi \, \vec{a}_y$$

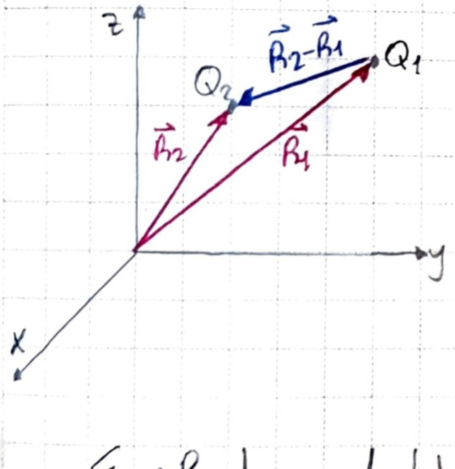
[$\vec{a}_r$ yönü silindirik koordinatlarda birim vektördür.]

$$\phi = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{1}{1} = \pi/4$$
$$\cos\phi = \cos 45° = \sin 45°$$

$$\underbrace{\vec{V}(P) . \vec{a}_r}_{V_r} = (5\vec{a}_x + 2\vec{a}_y).(\cos 45 \, \vec{a}_x + \sin 45 \, \vec{a}_y)$$

$$V_r = 5\cos 45 + 2\sin 45 = 4,95 \ (m/s)$$

Elektriksel Yükler Arasındaki Etkileşme (Kulon Yasası)



Q_1 ve Q_2 yükleri arasındaki etkileşim kuvveti;

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}^2} \vec{a}_{12} \quad (N)$$

$\vec{a}_{12}$ → Birim vektör

$$\vec{R}_{12} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$$

→ Yükler arasındaki vektör

$$\vec{a}_{12} = \frac{\vec{R}_{12}}{|\vec{R}_{12}|} = \frac{\vec{R}_{12}}{R_{12}}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$$

ε_0 : Boşluğun dielektrik sabiti $= 8,85 \times 10^{-12}$ (F/m)

$\vec{F}_{12}$: Yükler aynı işaretli ise itici, yükler zıt işaretli ise çekicidir.

ÖRNEK: $P_1(0,1,2)$ noktasında $Q_1 = 2.10^{-5}$ (C) ve $P_2(2,4,5)$ noktasında ise $Q_2 = 10^{-6}$ (C) bulunmaktadır. Yükler arasındaki etkileşim kuvvetini bulunuz?

$$R_1 = 0.\vec{a}_x + \vec{a}_y + 2\vec{a}_z$$
$$R_2 = 2\vec{a}_x + 4\vec{a}_y + 5\vec{a}_z$$

$$\vec{R}_{12} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 = (2-0)\vec{a}_x + (4-1)\vec{a}_y + (5-2)\vec{a}_z$$
$$R_{12} = 2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y + 3\vec{a}_z$$
$$|\vec{R}_{12}| = R_{12} = \sqrt{2^2+3^2+3^2} = \sqrt{22} = 4{,}69$$
$$\vec{a}_{12} = \frac{\vec{R}_{12}}{R_{12}} = \frac{2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y + 3\vec{a}_z}{4{,}69}$$
$$\vec{F}_{12} = \frac{2.10^{-5}.10^{-6}}{4\pi.8{,}85.10^{-12}(4{,}69)^2} \cdot \frac{(2;3;3)}{4{,}69}$$
$$\vec{F}_{12} = (3{,}49\vec{a}_x + 5{,}23\vec{a}_y + 5{,}23\vec{a}_z).\underbrace{10^{-3}\ (N)}_{mN\ (mili)}$$

Elektrik Alan

İçinde hiç yük bulundurmayan uzaya bir yük konulur. Sonra başka bir yük daha getirilip bu iki yükün durumu incelenir. Elektrik alan birim yük başına uygulanan kuvvettir.

$$\text{YÜK}(1) \xrightarrow{\text{ALAN}} \text{YÜK}(2)$$

Elektrik Alan: $\vec{E} = \frac{\vec{F}_{12}}{Q}$ (N/C) ve ya (V/m)

Q → Test yükü

Etkileşme Kuvveti: $\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_{test}}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}^2}\vec{a}_{12}$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{1t}^2}\vec{a}_{1t} \quad (V/m)}$$

Yük Çeşitleri: Yükler belirli bir bölgede yayılmışsa

$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{a}_r$ olur. Bu ifadede

$dQ = \rho_L dl$ olabilir ve ya $dQ = \rho_s ds$ olabilir ve ya $dQ = \rho_v dv$ olabilir.

Q: Noktasal Yük

ρ_L : Çizgisel yük yoğunluğu (C/m) [Tek katlı integral]
ρ_s : Yüzeysel yük yoğunluğu (C/m^2) [Çift katlı integral]
ρ_v : Hacimsel yük yoğunluğu (C/m^3) [Üç katlı integral]

ÖRNEK: R yarıçaplı küresel bir bölgede hacimsel yük yoğunluğu $\rho_v = \rho_0 R$ (C/m^3) olarak verilmektedir. $\rho_0 = 10^{-7}$ ve kürenin yarıçapı $R = 10cm$ olduğuna göre bu kürenin toplam yükünü bulunuz?

$$Q = \underbrace{\iiint}_{r,\ \theta,\ \phi} \rho_v \, dv \rightarrow \text{küresel koordinat}$$

$$Q = \int_{R=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_0 R (R^2 \sin\theta \, d\theta \, dR \, d\phi)$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \qquad \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = 2}$$

$$= \frac{R^4}{4} 2\pi \, 2 \rho_0$$

$$= \pi \rho_0 R^4$$

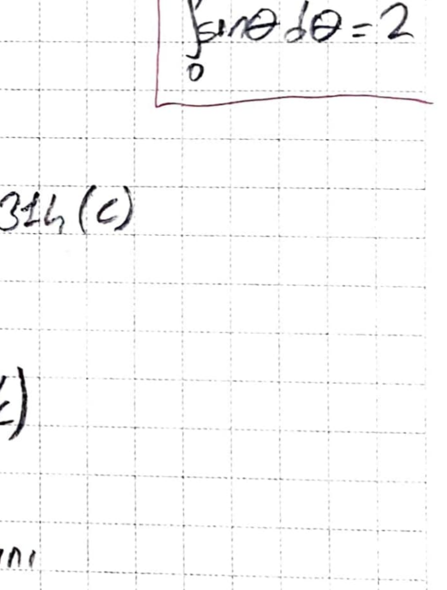
$$= \pi . 10^{-7} . 10^4 = 10^{-3}\pi = 0{,}00314 \, (C)$$

i) Q Noktasal yükün elektrik alanı;

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{a}_r \quad (V/m) \text{ ve ya } (N/C)$$

ii) Sürekli yük dağılımının elektriksel alanı

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{a}_r \, (V/m)$$



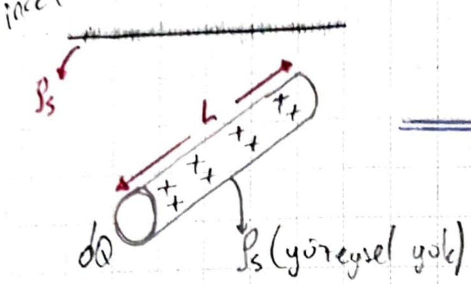
$dQ = \rho_L \, dL \rightarrow \frac{C}{m}$: Çizgisel yük

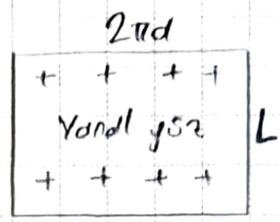
$dQ = \rho_s \, ds \rightarrow \frac{C}{m^2}$: yüzeysel yük

$dQ = \rho_v \, dv \rightarrow \frac{C}{m^3}$: hacimsel yük

$dV = r\,dr\,d\phi\,dz$
↓
silindirik

- ince tel

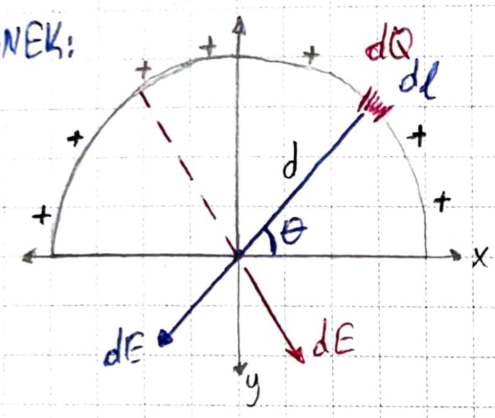




Q: toplam yük

$$Q = \rho_s \Delta s$$
$$= \rho_s 2\pi a L$$

ÖRNEK:



ρ_L (C/m) çizgisel yük yoğunluklu şekildeki yarım halkanın O noktasındaki oluşturacağı elektriksel alanı veren bağıntı?

a: yarım çemberin yarıçapı
dl: dQ yükünün yerleştiği yay uzunluğu

$$dQ = \rho_L dl = \rho_L \underbrace{a d\theta}_{\text{yay uzunluğu}}$$

$$dE_y = \frac{\rho_L a d\theta \sin\theta}{4\pi \varepsilon_0 a^2}$$

Simetriden dolayı elektrik alan y yönünde alınır.

İntegral alınırsa;

$$\int dE_y = E_y = \frac{a \rho_L}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \frac{a \rho_L}{2\pi \varepsilon_0 a^2} \quad \text{ve} \quad \text{ya}$$

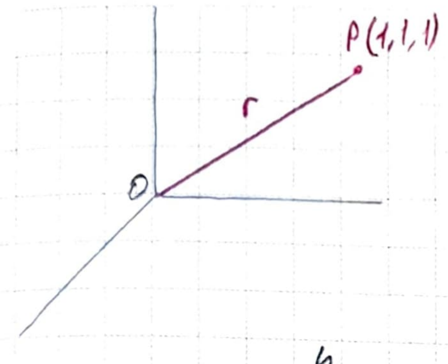
$$\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi \varepsilon_0 a} \vec{a}_y \; (V/m)$$

ÖRNEK: $P_1(1,1,0)$, $P_2(-1,1,0)$, $P_3(-1,-1,0)$, $P_4(1,-1,0)$ noktalarına yerleşmiş 3(nC) değerindeki özdeş yüklerin P(1,1,1) noktasında oluşturacağı toplam elektrik alan=?

$$r = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$
$$r_1 = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$
$$r_2 = -\vec{a}_x + \vec{a}_y$$
$$r_3 = -\vec{a}_x - \vec{a}_y$$
$$r_4 = \vec{a}_x - \vec{a}_y$$

$$\sum \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{4} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^2} \vec{a}_r$$

$$\vec{a}_r = \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{|\vec{r} - \vec{r_i}|}$$



$$\vec{r} = (1-0)\vec{a}_x + (1-0)\vec{a}_y + (1-0)\vec{a}_z$$

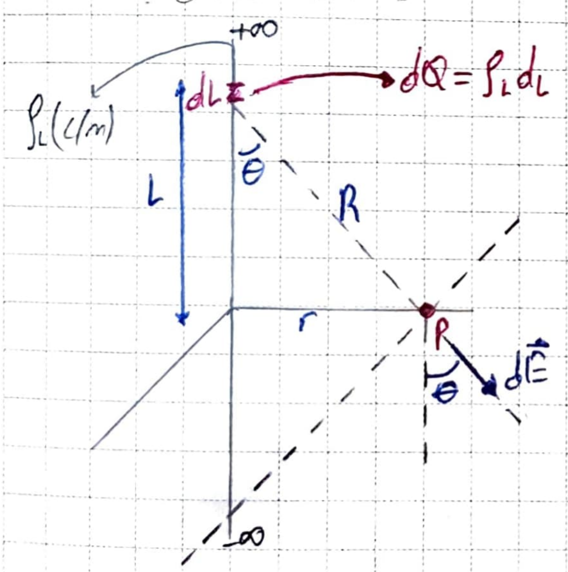
$$\vec{r}-\vec{r}_1 = \vec{a}_z \longrightarrow |\vec{r}-\vec{r}_1| = 1$$
$$\vec{r}-\vec{r}_2 = 2\vec{a}_x + \vec{a}_z \longrightarrow |\vec{r}-\vec{r}_2| = \sqrt{5}$$
$$\vec{r}-\vec{r}_3 = 2\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + \vec{a}_z \longrightarrow |\vec{r}-\vec{r}_3| = 3$$
$$\vec{r}-\vec{r}_4 = 2\vec{a}_y + \vec{a}_z \longrightarrow |\vec{r}-\vec{r}_4| = \sqrt{5}$$

$$\sum \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{4}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

$$\sum E_{P(1,1,1)} = \frac{3.10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{a}_z}{1^3} + \frac{2\vec{a}_x+\vec{a}_z}{(\sqrt{5})^3} + \frac{2\vec{a}_x+2\vec{a}_y+\vec{a}_z}{3^3} + \frac{2\vec{a}_y+\vec{a}_z}{(\sqrt{5})^3}\right]$$

$$\vec{E} = 6,82\,\vec{a}_x + 6,82\,\vec{a}_y + 32,8\,\vec{a}_z \quad (V/m)$$

ÖRNEK: ρ_L (C/m) çizgisel yüklü sonsuz uzun telin civarındaki elektriksel alanı hesaplayınız?



$+\rho_L$ telin sonsuz uzun ve z eksenine yerleşmiş olsun. P noktasında oluşturduğu elektriksel alanı bulalım. (P'nun tele olan mesafesi r olsun)

Çözüm: Sürekli yük dağılımı var.

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\,\vec{a}_r$$

★... $$d\vec{E} = \frac{\rho_L dL \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

(simetri dolayısıyla P noktasında elektriksel alan $\sin\theta$ yönünde)

$$\cot g\,\theta = \frac{L}{r} \Rightarrow L = r\cot g\,\theta \Rightarrow \boxed{dL = -r\,\mathrm{cosec}^2\theta\, d\theta}$$

$$\boxed{R = r\,\mathrm{cosec}\,\theta}$$

★ yerine yaz

$$d\vec{E} = \frac{\rho_L(-r\,\mathrm{cosec}^2\theta\, d\theta)\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2\,\mathrm{cosec}^2\theta}$$

$$dE = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0 r}(-\sin\theta\, d\theta)$$

$$E = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{\pi}^{0}(-\sin\theta\, d\theta) = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Sonuç:

$$E_r = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{ve ya} \quad \vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{a}_r$$

Tele dik uzaklık $\quad \vec{a}_r = \frac{\vec{r}}{r}$

Elektrik Alan Çizgileri

NOT: Elektrik alan vektörlerine herhangi bir noktada teğet olan eğrilere, elektrik alan çizgileri denir. Bir bölgede elektrik alanın görsel olarak anlaşılması için alan çizgilerine ihtiyaç duyulur.
Herhangi bir bölgede elektrik alan varsa o bölgeye bırakılacak +1 birim yük, alan çizgisi üzerinde hareket eder.

$$\vec{E} = E_x\vec{a}_x + E_y\vec{a}_y \quad (E_z = 0)$$

ile verilen elektrik alan için alan çizgilerini tanımlayan bağıntı kartezyen koordinatlarda

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{dy}{dx}$$ ile tanımlanır.

ÖRNEK: $\rho_L = 2\pi\varepsilon_0$ yük yoğunluğu olan sonsuz uzun bir tel için elektrik alan çizgilerini tanımlayan ifadeyi bulunuz?

$$E_r = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{ve ya} \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{a}_r}$$

Silindirik koordinat

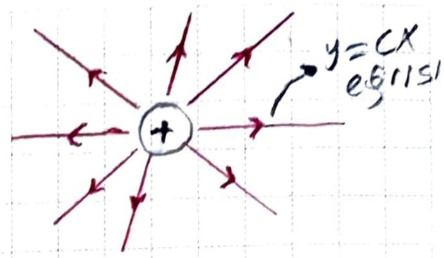
$$r = (x^2+y^2)^{1/2}$$

$$\vec{a}_r = \cos\phi\,\vec{a}_x + \sin\phi\,\vec{a}_y$$

$$\boxed{\vec{a}_r = \frac{x}{r}\vec{a}_x + \frac{y}{r}\vec{a}_y}$$

ÖDEV

$$\vec{E} = \frac{1}{r}\vec{a}_r = \frac{x}{r^2}\vec{a}_x + \frac{y}{r^2}\vec{a}_y$$

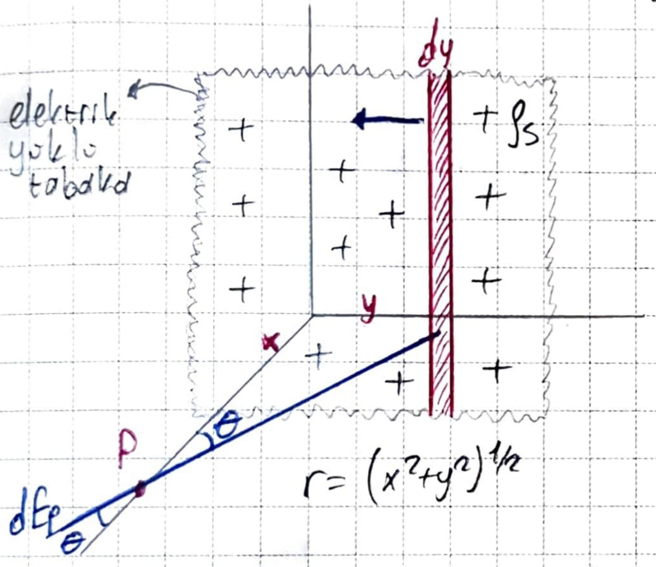


$$\vec{E} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{E_x}\vec{a}_x + \underbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}_{E_y}\vec{a}_y$$

$$\frac{dy}{E_y} = \frac{dx}{E_x} \longrightarrow \frac{dy}{\frac{y}{x^2+y^2}} = \frac{dx}{\frac{x}{x^2+y^2}} \longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \longrightarrow \ln y = \ln x + \ln C$$

$$y = CX$$

ÖRNEK: ρ_s (C/m^2) yüzeysel yüklü büyük bir tabakanın civarındaki elektriksel alanı hesaplayınız?



Tabaka $x=0$ (yz) düzleminde yerleşsin $P(x,0,0)$ noktasındaki elektriksel alanı hesaplayalım.

dy kalınlıklı sonsuz uzun şeritin (telin) elektriksel alanı;

$$E = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{dır.}$$

ρ_L: şeritin elektriksel yük yoğunluğu (C/m^2)

$$r = (x^2+y^2)^{1/2} \quad ; \quad dE_P = \frac{\rho_L \cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{1/2}}$$

NOT: Simetri dolayısıyla $P(x,0,0)$ noktasında elektriksel alanların toplamı $\cos\theta$ bileşenidir ve ρ_L yerine $\rho_L = \rho_s dy$ yazarsak

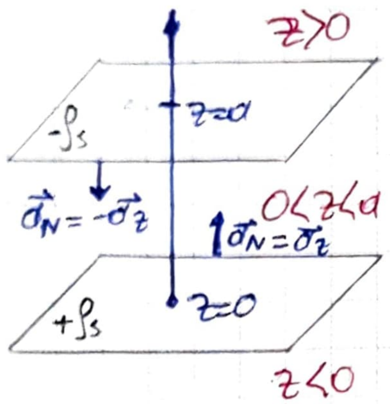
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad dE_P = \frac{\rho_L x}{2\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)}$$

$$dE_P = \frac{\rho_s x\, dy}{2\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)} \quad \text{ve}$$

$$E_P = \frac{\rho_s}{2\pi\varepsilon_0}\int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \quad \text{veya genelleştirirsek} \quad \vec{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\vec{a}_N$$

Tabakaya dik birim vektör

ÖRNEK: $z=0$ düzleminde $+\rho_s$ yüklü bir tabaka ve
$z=a$ düzleminde $-\rho_s$ yüklü diğer bir tabaka vardır.
i) Tabakalar arasındaki elektriksel alan?
ii) Tabakaların dışındaki elektriksel alan?



$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\vec{a}_N$$ → Tabakaya dik (Elektrik alanı hesaplanan noktaya yönelmiş) birim vektör.

i) $0<z<a$ bölgesinde

$$\sum \vec{E}_1 = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

$$\sum \vec{E}_1 = \frac{+\rho_s}{2\varepsilon_0}(+\vec{a}_z) + \frac{-\rho_s}{2\varepsilon_0}(-\vec{a}_z) + \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}(\vec{a}_z) \quad (V/m)$$

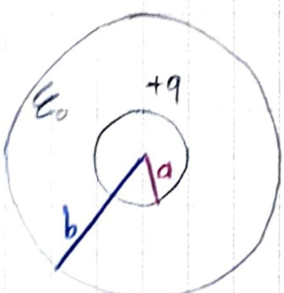
ii) $z<0$ bölgesi için

$$\sum \vec{E}_2 = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{+\rho_s}{2\varepsilon_0}(-\vec{a}_z) + \frac{(-\rho_s)}{2\varepsilon_0}(-\vec{a}_z) = 0$$

Aynı şekilde $z>0$ bölgesinde hesaplanırsa

$\sum \vec{E}_3 = 0$ bulunur.

Elektriksel Akı ve Akı Yoğunluğu



Şekildeki gibi aynı merkezli iç içe girmiş a ve b yarıçaplı 2 küreden içerdeki küre bir şekilde Q yükü ile yüklendiğinde aralarındaki ortam dielektrik olmasına rağmen dış kürenin de eşit, zıt işaretli yükle yüklendiği gözlenir. Bu olay iç küreden dış küreye doğru elektriksel akı geçmesi şeklinde yorumlanır. Ve geçen elektriksel akı iç kürenin yüküne eşit olup

$$\Psi_E = Q_{iç} \text{ dir.}$$

Elektriksel akı yoğunluğu ise (Deplasman vektörü: $\vec{D}$) birim yüzeyden geçen elektriksel akı olup

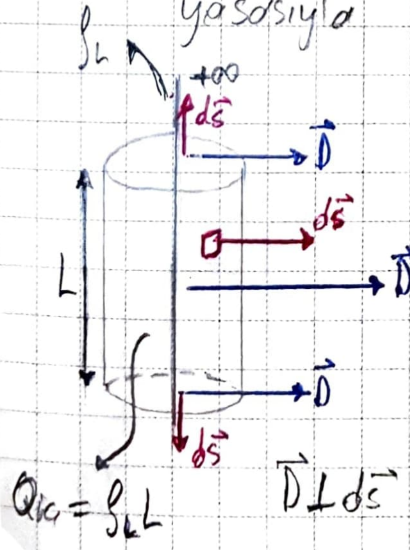
$$\vec{D} = \frac{\Psi_E}{Yüzey} = \frac{Q_{iç}}{4\pi r^2} \quad (C/m^2) \quad a \leq r \leq b \quad \text{dır.}$$

Noktasal Q yükünün elektrik alanı $E = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ bağıntısı dikkate alınırsa deplasman vektörü ile elektriksel alan ilişkisi $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ olduğu görülür ve yönleri aynıdır. Deplasman vektörünün tanımından faydalanılarak elektriksel alan hesaplanmasının başka bir yöntem olarak gauss yasası vardır.

Gauss Yasası: Kapalı bir yüzeyden geçen toplam elektriksel akı bu kapalı yüzeyin içinde kalan toplam yüke eşittir. Ve gauss yasası $\underbrace{\Psi_E = \iint_S \vec{D}\, d\vec{s}}_{\text{Elektriksel akı}} = Q_{iç}$ bağıntısıyla gösterilir.
(kapalı s yüzeyi için) $Q_{iç} \rightarrow$ s yüzeyi içinde kalan yük

ÖRNEK: ρ_L çizgisel yüklü uzun bir telin deplasman vektörü ve elektriksel alanı veren bağıntıyı gauss yasası ile bulalım!

Bunun için teli r yarıçaplı ve L uzunluğunda hayali bir silindirle kuşatalım ve bu silindir yüzeyindeki elektriksel alan ve ya deplasman vektörünü gauss yasasıyla hesaplayalım.



$Q_{iç} = \rho_L L$

$$Q_{iç} = \iint_S \vec{D}\, d\vec{s}$$

$$\rho_L L = \cancel{\underbrace{\iint \vec{D}\, d\vec{s}}_{\substack{\text{üst}\\\text{kapak}}}} + \cancel{\underbrace{\iint \vec{D}\, d\vec{s}}_{\substack{\text{alt}\\\text{kapak}}}} + \underbrace{\iint \vec{D}\, d\vec{s}}_{\substack{\text{Yanal}\\\text{yüz}}}$$

$\vec{D} \perp d\vec{s}$ $\quad$ $\vec{D} \perp d\vec{s}$

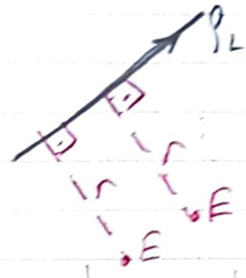
$$\rho_L L = 0 + 0 + D \underbrace{\iint ds}_{\substack{\text{Yanal}\\\text{yüz}}} \longrightarrow 2\pi r L$$

$$\rho_L \cancel{L} = D 2\pi r \cancel{L}$$

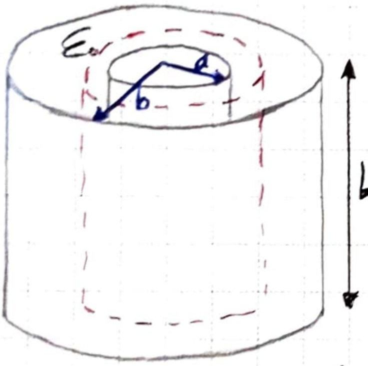
Sonuç → $\vec{D} = \frac{\rho_L}{2\pi r}\vec{a}_r$ (C/m²) ve ya

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{a}_r \quad (V/m)$$

- $\vec{E}$ her zaman iletken yüzeye dik olur



ÖRNEK: İç yarıçapı a dış yarıçapı b olan L uzunluklu bir koaksiyel kablonun içindeki $\vec{E}$=?
(TV kablosu)



İç iletkenin yüzeysel yük yoğunluğu $\rho_{s,a}$ olsun (C/m²)

$a<r<b$ bölgesinde

$$D = \frac{\text{Yük} \to \Psi_E}{\text{Yüzey}} = \frac{2\pi a L \cdot \rho_{s,a}}{2\pi r L}$$

Sonuç → $D_r = \frac{a\rho_{s,a}}{r}$ (C/m²) veya $\vec{D} = \frac{a\rho_{s,a}}{r}\vec{a}_r$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{a\rho_{s,a}}{\varepsilon_0 r}\vec{a}_r \quad (V/m)$$

ÖRNEK: Bir koaksiyel kablonun boyu 50cm ve yarıçapları ise sırasıyla 1mm ve 4mm dir. İç iletkendeki toplam yük 30nC olup iletkenler arası ortam boşluktur. Elektriksel alanı ve iletkenler arası deplasman vektörünü bulunuz?

$a = 1mm$
$b = 4mm$
$Q_{iç} = 30\ (nC)$
$\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}\ (F/m)$
$L = 50cm$

[r = 0,5mm deki E=0 , D=0 dır]

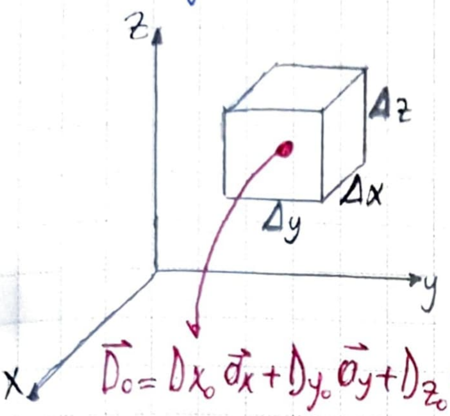
$$\rho_{s,a} = \frac{Q_{iç}}{\text{Yüzey}} = \frac{30\times10^{-9}}{2\pi 10^{-3} . 0{,}5} = 9{,}5\ (\mu C/m^2)$$

$$D_r = \frac{10^{-3} . 9{,}5 . 10^{-6}}{r} = \frac{9{,}5 . 10^{-9}}{r} = \frac{9{,}5}{r}\ (nC/m^2)$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{9{,}5 . 10^{-9}}{8{,}85\times10^{-12}\, r} = \frac{1073}{r}\ (V/m)$$

$$10^{-3}\,m < r < 4 . 10^{-3}\,m$$

Diverjansın Fiziksel Anlamı



$\vec{D}_0 = D_{x_0}\vec{a}_x + D_{y_0}\vec{a}_y + D_{z_0}\vec{a}_z$

Uzayın belli bir bölgesinde deplasman vektörü D_0 şeklinde tanımlanmış olsun. Tanımlanan bu deplasman vektörünün nasıl bir elektriksel kaynaktan dolayı olduğunu anlamak istiyoruz. Bunun için söz konusu noktayı kenar uzunlukları $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ olan bir küp üzerinden gauss yasasını uygulayalım.

$$\boxed{\iint_{\substack{\text{küp}\\\text{yüzeyi}}} \vec{D}\,d\vec{s} = Q_{iç}} \quad (\bigstar)$$

$$\iint_{\substack{\text{ön}\\\text{yüz}}} \vec{D}\,d\vec{s} + \iint_{\substack{\text{arka}\\\text{yüz}}} \vec{D}\,d\vec{s} + \iint_{\substack{\text{sol}\\\text{yan}\\\text{yüz}}} \vec{D}\,d\vec{s} + \iint_{\substack{\text{sağ}\\\text{yan}\\\text{yüz}}} \vec{D}\,d\vec{s} + \iint_{\substack{\text{üst}\\\text{kapak}}} \vec{D}\,d\vec{s} + \iint_{\substack{\text{alt}\\\text{kapak}}} \vec{D}\,d\vec{s}$$

I. İntegral; $\int_{ön} \dots = \vec{D}_{ön}\,\Delta\vec{S}_{ön} = D_{x,ön}\,.\,\Delta y \Delta z\,\vec{a}_x$

$$\vec{D}_{x,ön} = D_{x_0} + \frac{\Delta x}{2}\,\frac{\partial \Delta x}{x}$$

$$\vec{D}_{x,arka} = D_{x_0} - \frac{\Delta x}{2}\,\frac{\partial \Delta x}{x} \;;\; \Delta\vec{S}_{arka} = \Delta y \Delta z\,(-\vec{a}_z)$$

Bu ifadeler benzer şekilde diğer integraller için de uyarlanır ve toplama işlemi yapılırsa...

Örneğin; ön ve arka yüzlere ait iki integralin toplamı

$$\iint_{ön} + \iint_{arka} = \frac{\partial \Delta x}{\partial x}\,\underbrace{\Delta x \Delta y \Delta z}_{\Delta V} \text{ olur.}$$

$$\iint_{üst} + \iint_{alt} = \frac{\partial \Delta z}{\partial z}\,\underbrace{\Delta x \Delta y \Delta z}_{\Delta V}$$

$$\iint_{\substack{\text{sol}\\\text{yan}}} + \iint_{\substack{\text{sağ}\\\text{yan}}} = \frac{\partial \Delta y}{\partial y}\,\underbrace{\Delta x \Delta y \Delta z}_{\Delta V}$$

(★) bağıntısından Sonuç:

$$\left(\frac{\partial \Delta x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta z}{\partial z}\right) \Delta V = Q$$

$$\vec{\nabla}\vec{D} = \underbrace{\frac{Q}{\Delta V}}_{\lim_{\Delta V \to 0}} = \rho_V$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{D} = \rho_V}$$

1/m C/m² C/m³

- $\vec{\nabla}_o = \vec{a}_x \frac{\partial_o}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial_o}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial_o}{\partial z}$ (Kartezyen)

$$\vec{\nabla}\vec{D} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot D_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad \text{(Silindirik)}$$

$$\vec{\nabla}\vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, D_\theta) + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \quad \text{(Küresel)}$$

Elektriksel Potansiyel

- 1- Kulon Yasası $d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{a}_r$

2- Gauss Yasası $\Psi_E = \underbrace{\iint \vec{D}\, d\vec{s}}_{\text{Elektriksel akı}} = Q$

3- $\vec{\nabla}\vec{D} = \rho_V$

$D = \varepsilon_o \vec{E}$

4- Elektriksel Potansiyel

Bir Q yükü $\vec{E}$ alanında bulunursa etkiyen elektriksel kuvvet $\vec{F} = Q\vec{E}$ idi. Bu yük bir $\vec{F}_{dış} = -Q\vec{E}$ kuvvet etkisi ile belirli bir yol bir dL yolu alırsa yapılan iş $dW = -Q\vec{E}_o d\vec{L}$ olur ve toplam iş integre ederek

$$W_{AB} = -Q\int_B^A \vec{E}\, d\vec{l} \quad (J)$$

ÖDEV

Elektriksel potansiyel; birim yük başına yapılan iş olarak tanımlanır. ve

$$V_{AB} = \frac{W}{Q} = -\int_B^A \vec{E}\, d\vec{l}$$

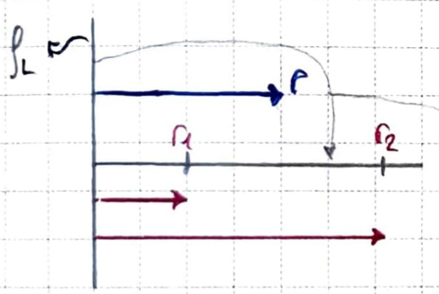
$$V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\, d\vec{l} \qquad (\text{Volt} = \text{Joule}/\text{Kulon})$$

$$\Delta V = -\vec{E} . \Delta\vec{L}$$

$\vec{E} = -\frac{\Delta V}{\Delta L}$ ve ya daha genel olarak bu ifade $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ yazılır.

→ $\vec{\nabla}_o = \vec{a}_x \frac{\partial o}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial o}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial o}{\partial z}$

ÖRNEK: Sonsuz uzun ρ_L (C/m) yüklü bir telin civarındaki iki nokta arasındaki elektriksel potansiyeli hesaplayınız?



$$V_{AB} = -\int_{r_2}^{r_1} +\vec{E} . d\vec{l}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{a}_r}$$

$d\vec{l} = d\vec{r} = dr . \vec{a}_r$

$r_1 < r < r_2$

$$V_{AB} = -\int_{r_2}^{r_1} \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}\, dr$$

$$V_{AB} = \int_{r_2}^{r_1} \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{\sqrt{2}}{r_1}$$

$$V_{AB} = V_A - V_B$$

$$\boxed{V_A - V_B = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1} \quad (V)}$$

ÖRNEK: Bir Q noktasal yükenin civarındaki iki nokta arasındaki elektriksel potansiyel = ?

$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^{\infty} \vec{E}\, dl$$

$$V_{12} = V_1 - V_2 = -\int_{r_2}^{r_1} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr$$

$$\boxed{V_{AB} = -\int_B^A \vec{E}\, d\vec{r}}$$

$dr\, \vec{a_r}$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{a_r}$$

$$V_{12} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_2}^{r_1} -\frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_2}^{r_1}$$

$$\boxed{V_{12} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \longrightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

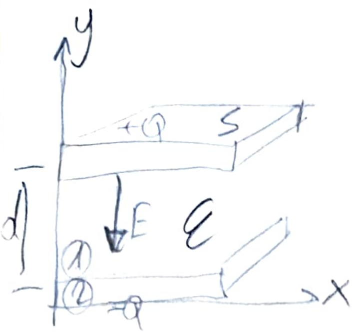
$r_2 \to \infty$ olursa $V_2 = 0$ olur.

sonuç $\longrightarrow$ $V_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$ (V) Q noktasal yükenin elektriksel potansiyeli

ÖDEV

Exile

Anron



$E_{1t} = E_{2t} = 0 \quad E_n = 0 \quad D_2 = 0$

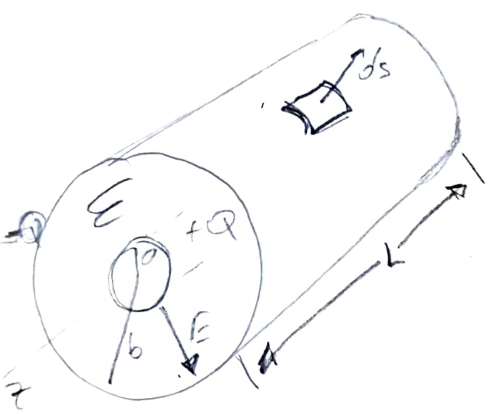
$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$

$D_{1n} = \rho_s = \frac{Q}{S} \qquad D_{1n} = \varepsilon_1 E_{1n} \quad E = -\hat{a}_y \frac{Q}{\varepsilon S}$

$$V_{12} = -\int_2^1 \vec{E}\,d\vec{l}$$

$$V_{12} = -\int_0^d \left(-\hat{a}_y \frac{Q}{\varepsilon S}\right)\left(-\hat{a}_y\,dy\right) = \frac{Qd}{\varepsilon S}$$

$$C = \frac{Q}{V_{12}} \Rightarrow C = \frac{Q}{\frac{Qd}{\varepsilon S}} = \varepsilon \frac{S}{d}$$



$$\oint \vec{D}\,d\vec{s} = Q$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} (\hat{a}_r D_r)(\hat{a}_r r\,d\phi\,dz) = Q$$

$$D_r\, r\, 2\pi L = Q$$

$$D = \hat{a}_r \frac{Q}{2\pi r L}$$

$$D = \varepsilon E \qquad E = \hat{a}_r \frac{Q}{2\pi r L \varepsilon}$$

$$V_{12} = -\int_2^1 \vec{E}\,d\vec{l} = -\int_b^a \left(\hat{a}_r \frac{Q}{2\pi r L \varepsilon}\right)\left(\hat{a}_r\,dr\right)$$

$$= -\frac{Q}{2\pi L \varepsilon}\int_b^a \frac{dr}{r} \Rightarrow \frac{-Q}{2\pi L\varepsilon}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{Q}{2\pi L\varepsilon}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V_{12}} \Rightarrow C = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi L\varepsilon}\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi L\varepsilon}{\ln(b/a)}$$