SAKARYA ÜNİVERSİTESİ, TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ, ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜH.
2014-2015, GÜZ YARIYILI, ELEKTRİK DEVRELERİ I, BÜTÜNLEME SINAVI, 12.01.2015

CEVAPLAR

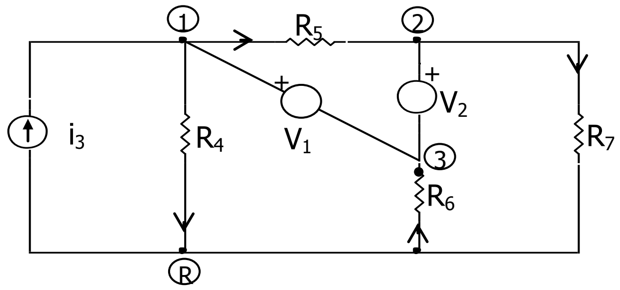
SORU 1. [30 puan]

$R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = 1\,\Omega$

$V_1 = 2$ Volt,

$V_2 = \sin t$ Volt

$i_3 = V_6$ Amper veriliyor.



Şekildeki devreye ait düğüm denklemlerini yazınız. Bütün elemanların akım, gerilim ve güçlerini bulunuz.

__Çözüm:__

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{d1} \\ V_{d2} \\ V_{d3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_3 - i_1 \\ -i_2 \\ i_2 + i_1 \end{bmatrix}$$

Ek denklemler:

$V_{d1} - V_{d3} = 2 \quad \rightarrow \quad V_{d1} = V_{d3} + 2 \quad \quad ...(1)$

$V_{d2} - V_{d3} = \sin t \quad \rightarrow \quad V_{d2} = V_{d3} + \sin t \quad \quad ...(2)$

$i_3 = -V_{d3} \quad \quad ...(3)$

Ek denklemler, matris eşitliğinde yerine yazılıp, denklemler açılıp düzenlenirse:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ V_{d3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t - 4 \\ 2 - 2\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

olur. 3 denklem toplanırsa, $\boxed{V_{d3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sin t \;\; \text{Volt}}$ bulunur.

V_{d3} ek denklemlerde yazılarak,

$\boxed{V_{d1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\sin t \;\; \text{Volt},}$ $\boxed{V_{d2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sin t \;\; \text{Volt},}$ $\boxed{i_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin t \;\; \text{Amper}}$ bulunur.

V_{d3} , 1.ve 2. denklemlerde yazılarak da, $\boxed{i_1 = -3 + \frac{3}{2}\sin t \;\; \text{Amper}}$ $\boxed{i_2 = \frac{5}{2} - \frac{7}{4}\sin t \;\; \text{Amper}}$ bulunur

$i_1 = -3 + \frac{3}{2}\sin t \;\; A,$ $\quad V_1 = 2 \;\; V,$ $\quad P_1 = -6 + 3\sin t \;\; W$

$i_2 = \frac{5}{2} - \frac{7}{4}\sin t \;\; A,$ $\quad V_2 = \sin t \;\; V,$ $\quad P_2 = \frac{5}{2}\sin t - \frac{7}{4}\sin^2 t \;\; W$

$i_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin t \;\; A,$ $\quad V_3 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\sin t \;\; V,$ $\quad P_3 = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{16}\sin^2 t \;\; W$

$i_4 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\sin t \;\; A,$ $\quad V_4 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\sin t \;\; V,$ $\quad P_4 = \frac{9}{4} - \frac{3}{4}\sin t + \frac{1}{16}\sin^2 t \;\; W$

$i_5 = 2 - \sin t \;\; A,$ $\quad V_5 = 2 - \sin t \;\; V,$ $\quad P_5 = 4 - 4\sin t + \sin^2 t \;\; W$

$i_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin t \;\; A,$ $\quad V_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin t \;\; \text{Volt},$ $\quad P_6 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{16}\sin^2 t \;\; W$

$i_7 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sin t \;\; A,$ $\quad V_7 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sin t \;\; \text{Volt},,$ $\quad P_7 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\sin t + \frac{9}{16}\sin^2 t \;\; W$

$\sum P = 0 \;\; W$

Matris Çözümünün MATLAB ile doğrulanması

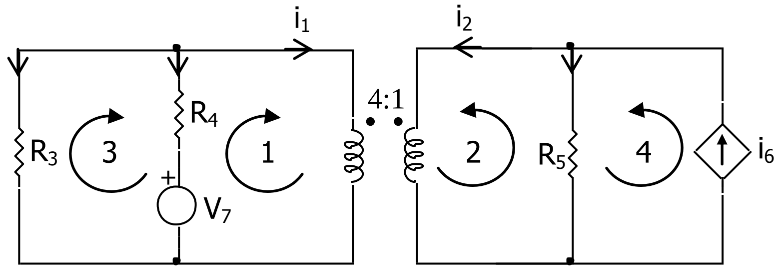
```
>> syms t
>> G=[1 0 2;0 1 1;-1 -1 1]
G =
     1     0     2
     0     1     1
    -1    -1     1

>> I=[-4+sin(t);2-2*sin(t);0]
I =
      sin(t) - 4
    2 - 2*sin(t)
               0

>> V=inv(G)*I
V =
      (3*sin(t))/2 - 3
    5/2 - (7*sin(t))/4
      - sin(t)/4 - 1/2
```

SORU 2. **[25 puan]**

$R_3 = R_4 = R_5 = 1$ ohm

$i_6 = 2i_3$ Amper

$V_7 = 5\sin t$ Volt



a) Çevre denklemlerini devreye bakarak yazın.
b) Çevre akımlarını hesaplayarak, kaynakların güçlerini hesaplayınız.

<u>**Çözüm:**</u> **a)**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{Ç1} \\ i_{Ç2} \\ i_{Ç3} \\ i_{Ç4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_1 + 5\sin t \\ -V_2 \\ -5\sin t \\ -V_6 \end{bmatrix}$$

Ek denklemler:

$\boxed{i_{Ç4} = -2i_{Ç3}}$ (bağımlı kaynaktan)

$\boxed{i_{Ç1} = -\frac{1}{4} i_{Ç2}}$ (transformatörden)

$\boxed{V_1 = 4V_2}$ (transformatörden)

b) a şıkkında bulduğumuz ifadede ek denklemleri kullanarak $i_{Ç1}$, $i_{Ç3}$, ve V_1 'i elimine edersek,

$$\begin{bmatrix} -1/4 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{Ç2} \\ i_{Ç3} \\ V_2 \\ V_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\sin t \\ 0 \\ -5\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

2. satır (-4) ile çarpılıp ilk denklemle toplanır ve 3. denklemle ortak çözülürse, $\boxed{i_{Ç2} = \frac{28}{5}\sin t}$ A bulunur.

Diğer denklemlerde yazılarak, $\boxed{i_{Ç3} = \frac{-16}{5}\sin t}$ Amper, $\boxed{V_2 = \frac{4}{5}\sin t}$ Volt, $\boxed{V_6 = \frac{-4}{5}\sin t}$ Volt olur.

Ek denklemlerde yerlerine yazılarak, $\boxed{i_{Ç4} = \frac{32}{5}\sin t}$ Amper, $\boxed{i_{Ç1} = \frac{-7}{5}\sin t}$ Amper, $\boxed{V_1 = \frac{16}{5}\sin t}$ Volt

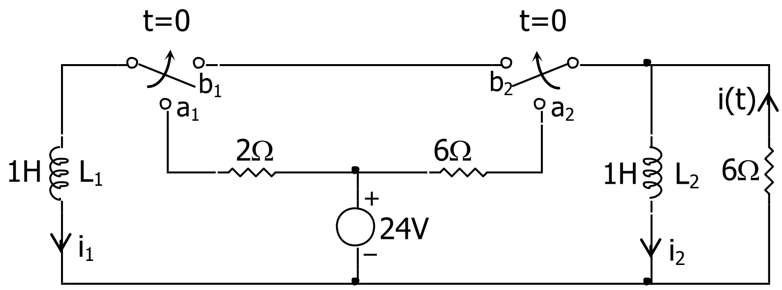
$i_6 = i_{Ç4} = \frac{32}{5}\sin t$ Amper, $V_6 = -V_2 = -\frac{4}{5}\sin t$ Volt, $P_6 = -\frac{64}{5}\sin^2 t$ Watt

$i_7 = i_{Ç3} - i_{Ç1} = (\frac{-16}{5}\sin t) - (\frac{-7}{5}\sin t) = \frac{-9}{5}\sin t$ Amper, $V_7 = 5\sin t$ Volt, $P_7 = -9\sin^2 t$ Watt

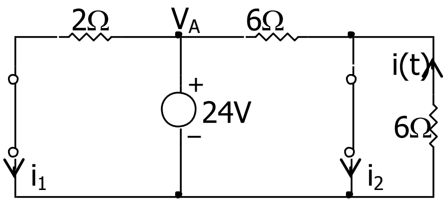
<u>**Matris Çözümünün MATLAB ile doğrulanması**</u>

```
>> syms t
>> R=[-0.25 -1 4 0;1 2 1 0;0.25 2 0 0;-1 -2 0 1]
R =
   -0.2500   -1.0000    4.0000         0
    1.0000    2.0000    1.0000         0
    0.2500    2.0000         0         0
   -1.0000   -2.0000         0    1.0000

>> V=[5*sin(t);0;-5*sin(t);0]
V =
   5*sin(t)
          0
  -5*sin(t)
          0

>> I=inv(R)*V
I =
  (28*sin(t))/5
 -(16*sin(t))/5
   (4*sin(t))/5
  -(4*sin(t))/5
```

SORU 3. **[20 puan]]** Şekildeki devrede anahtarlar uzun süre a konumlarında kaldıktan sonra b konumlarına getiriliyor. $t \geq 0$ için i(t) ‘yi elde ediniz.



Çözüm: Önce devreyi kararlı halde iken alalım:

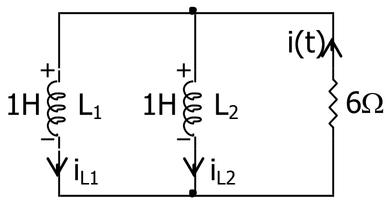


$$V_A = 24\,V$$

$$i_1 = \frac{V_A}{2\Omega} = \frac{24V}{2\Omega} = 12\,A, \quad i_{L_1}(0) = 12\,A$$

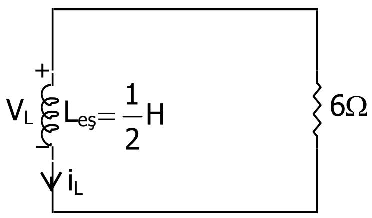
$$i_2 = \frac{V_A}{6\Omega} = \frac{24V}{6\Omega} = 4\,A, \quad i_{L_2}(0) = 4\,A,$$ (6Ω ‘luk direnç devre dışı kalır).

Anahtarlar b konumuna getirildiğinde devre aşağıdaki gibi olur.
Bobinlerin eşdeğerini hesaplayalım.



$$L_{eş} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = \frac{1 \times 1}{1+1} = \frac{1}{2}\,H$$ bulunur.

Devreyi aşağıdaki gibi düşünürsek,



$$V_L + 6I_L = 0 \;\Rightarrow\; L\frac{dI_L}{dt} + 6I_L = 0$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{dI_L}{dt} + 6I_L = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dI_L}{dt} + 12I_L = 0$$

$$\alpha + 12 = 0, \quad \alpha = -12 \quad I_L(t) = A.e^{-12t}$$

elde edilir. A sabiti başlangıç şartlarından bulunur.

$$I_L(0) = I_{L_1}(0) + I_{L_2}(0) = 12\,A + 4\,A = 16\,A$$

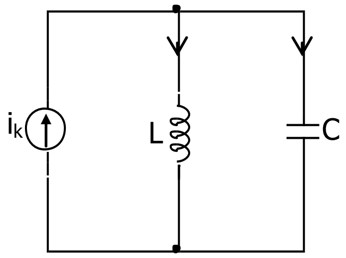
$$I_L(t) = A.e^{-12t}, \; I_L(0) = A.e^0 \;\Rightarrow\; \boxed{A = 16}$$

$I_L(t) = 16.e^{-12t}$ $\qquad$ $I_L(t) = i(t)$ ‘dir. $i(t) = 16.e^{-12t}$ A

SORU 4. [25 puan] Şekildeki devrede $L=\frac{1}{4}H$, $C=\frac{1}{16}F$, $i_k=3\cos 2t$ Amper olarak veriliyor.

a) Devrenin durum denklemlerini çıkarınız.

b) $i_L(0)=2A$, $V_C(0)=3V$ için i_L ve V_C 'ye ilişkin öz ve zorlanmış çözümleri bularak bunların yardımıyla tam çözümleri elde ediniz.



Çözüm: Durum denklemleri:

$$i_C=-i_L+i_k \quad \Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=-16i_L+48\cos 2t$$

$$V_L=V_C \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4}\frac{di_L}{dt}=V_C \quad \Rightarrow \frac{di_L}{dt}=4V_C$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -16 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 48 \\ 0 \end{bmatrix}\cos 2t$$

$$\det(\alpha u-A)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & -16 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha & 16 \\ -4 & \alpha \end{vmatrix}=0, \quad \alpha^2+64=0 \quad \left.\begin{matrix} \alpha_1=8j \\ \alpha_2=-8j \end{matrix}\right.$$

Homojen Çözüm tahmini :

$$\begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}_H=\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix}e^{j8t}+\begin{bmatrix} C_{12} \\ C_{22} \end{bmatrix}e^{-j8t}$$

$$(\alpha_1 u-A)\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix}=0 \rightarrow \begin{bmatrix} 8j & 16 \\ -4 & 8j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix}=0 \rightarrow C_{11}=C_1, \quad C_{21}=-\frac{1}{2}j\cdot C_1$$

$$(\alpha_2 u-A)\begin{bmatrix} C_{12} \\ C_{22} \end{bmatrix}=0 \rightarrow \begin{bmatrix} -8j & 16 \\ -4 & -8j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{12} \\ C_{22} \end{bmatrix}=0 \rightarrow C_{12}=C_2, \quad C_{22}=\frac{1}{2}j\cdot C_2$$

$$\begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}_H=\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix}e^{j8t}+\begin{bmatrix} C_{12} \\ C_{22} \end{bmatrix}e^{-j8t}$$

$$\begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}_H=\begin{pmatrix} 1 \\ -j/2 \end{pmatrix}C_1\cdot e^{j8t}+\begin{pmatrix} 1 \\ j/2 \end{pmatrix}C_2\cdot e^{-j8t}$$

Homojen Çözümde ilk şartları yazarak **Öz Çözüm** bulunur:

t=0, $i_L(0)=2A$, $V_C(0)=3V$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j/2 & j/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} C_1=\frac{3}{2}+2j \\ C_2=\frac{3}{2}-2j \end{matrix}\right.$$

$$\begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}_{ÖZ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -j/2 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{3}{2} + 2j \right) \cdot e^{j8t} + \begin{pmatrix} 1 \\ j/2 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{3}{2} - 2j \right) \cdot e^{-j8t}$$

Euler formülleri ile dönüştürülürse,

$$\begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}_{ÖZ} = \begin{bmatrix} 3\cos 8t - 4\sin 8t \\ 2\cos 8t + \frac{3}{2}\sin 8t \end{bmatrix}$$ elde edilir.

Özel çözüm arayalım:

$$\begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}_{ÖZEL} = \begin{bmatrix} A\cos 2t + B\sin 2t \\ C\cos 2t + D\sin 2t \end{bmatrix}$$ tahmini ile durum denklemlerine girilerek,

$$-2A\sin 2t + 2B\cos 2t = -16C\cos 2t - 16D\sin 2t + 48\cos 2t \qquad \ldots(1)$$

$$-2C\sin 2t + 2D\cos 2t = 4A\cos 2t + 4B\sin 2t \qquad \ldots(2)$$

(1) ve (2)' nin ortak çözülmesiyle

$\boxed{A = 0}$, $\boxed{B = -\frac{8}{5}}$, $\boxed{C = \frac{16}{5}}$, $\boxed{D = 0}$ elde edilir.

$$\begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}_{ÖZEL} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{5}\sin 2t \\ \frac{16}{5}\cos 2t \end{bmatrix}$$

Tam Çözüm :

$$\begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}_{TAM} = \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}_{H} + \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}_{ÖZEL} = \begin{pmatrix} 1 \\ -j/2 \end{pmatrix} C_1 \cdot e^{j8t} + \begin{pmatrix} 1 \\ j/2 \end{pmatrix} C_2 \cdot e^{-j8t} + \begin{bmatrix} -\frac{8}{5}\sin 2t \\ \frac{16}{5}\cos 2t \end{bmatrix}$$ olur.

Zorlanmış Çözüm Katsayılı Tam Çözümde ilk şartlar sıfır alınarak bulunur:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -j/2 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ j/2 \end{pmatrix} C_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{16}{5} \end{pmatrix} \qquad \left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{16}{5} j \\ C_2 &= +\frac{16}{5} j \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}_{ZOR} = \begin{pmatrix} 1 \\ -j/2 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{16}{5} j \right) . e^{j8t} + \begin{pmatrix} 1 \\ j/2 \end{pmatrix} \cdot \left(+\frac{16}{5} j \right) . e^{-j8t} + \begin{bmatrix} -\frac{8}{5}\sin 2t \\ \frac{16}{5}\cos 2t \end{bmatrix}$$

Euler formülleri ile dönüştürülürse,

$$\begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}_{ZOR} = \begin{bmatrix} \frac{32}{5}\sin 8t - \frac{8}{5}\sin 2t \\ -\frac{16}{5}\cos 8t + \frac{16}{5}\cos 2t \end{bmatrix}$$

Tam çözüm bulalım.

$$\begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}_{TAM} = \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}_{ÖZ} + \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}_{ZOR} = \begin{bmatrix} 3\cos 8t - 4\sin 8t \\ 2\cos 8t + \frac{3}{2}\sin 8t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{32}{5}\sin 8t - \frac{8}{5}\sin 2t \\ -\frac{16}{5}\cos 8t + \frac{16}{5}\cos 2t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}_{TAM} = \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}_{ÖZ} + \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}_{ZOR} = \begin{bmatrix} 3\cos 8t + \frac{12}{5}\sin 8t - \frac{8}{5}\sin 2t \\ \frac{3}{2}\sin 8t - \frac{6}{5}\cos 8t + \frac{16}{5}\cos 2t \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Durum Denkleminin MATLAB ile çözdürülerek Sonucun Doğrulanması

```
>> Y=dsolve('DVC=-16*IL+48*cos(2*t)','DIL=4*VC','VC(0)=3','IL(0)=2')
 Y =
        IL: [1x1 sym]
        VC: [1x1 sym]
>> simplify(Y.VC)

  ans = 3*cos(8*t) - (8*sin(2*t))/5 + (12*sin(8*t))/5

>> simplify(Y.IL)
  ans = (16*cos(2*t))/5 - (6*cos(8*t))/5 + (3*sin(8*t))/2
```