

ELEKTRİOMAGNETİK ALANLAR

VE

MÜHENDİSLİK UYGULAMALARI

Elektrik ve magnetik kuvvetler, gravitasyonel, zayıf ve kuwelli etkileşmeler fizigin bilinen dört kuvvetidir. Gravitasyon gezegenler ve gezegenler arası ölçüte etkin olurken zayıf ve kuwelli etkileşmeler atom çekirdeğinde önemli olmaktadır. Elektrik ve magnetik kuvvetler ise bu ikili etkileşme arasında yer alır. Günlük hayatı rastladığımız kuvvetler çoğunlukla elektrik ve magnetik kaynaklardır.

Einsteinstein elektromagnetik dalgaların uzaya yoğun kütlelerin yakınından geçerken; büktüğüne ve yansığına keşfetti. Ve daha sonra dört kuvvetin Büyükk Birleşik Alan Teorisi isimli teoride birleştirilmesi için gayret etmesine rağmen başaramamıştır. Bu konuda yoğun şaba gösteren fizikçilerden Salam ve Weinberg sadece elektromagnetik ve zayıf etkileşmeleri birleştirirken birleşik alan teorisini çalısmaları halende modern fizigin önemli bir gayesini oluşturmaktaadır.

Günlümüzde elektromagnetik teori anlaşıldıkça, mühendislik disiplininde diğer konular (Devre teorisi ve İletişim gibi) ve pratik uygulamalara yeni bir boyut getirecektir. Elektrik motorları, jeneratörler, aydınlatma, ısıtma, telefonlar, radyo, televizyon, data linkleri, radar uzaktan algılama yüzeylerde yaşam scivyesinde büyük değişiklikler vermiştir. Bilimsel araştırmalarda öncünlük bülöjde sınırlı uyumlamlarının, kalbin veya beyinin elektriksel aktivitesinin modellenmesi, elektrik ve magnetik alanların canlılarla etkileşmesinin araştırılması, içten elektromagnetik alan teorisine ihtiyaç duyulur.

Doç.Dr. Ş.Selim ŞEKER

Yard.Doç.Dr. Osman Çerezci

Boğaziçi Üniversitesi

Mühendislik Fakültesi

Elektrik - Elektronik Mühendisliği Bölümü

İSTANBUL

İstanbul Teknik Üniversitesi

Sakarya Mühendislik Fakültesi

Elektrik - Elektronik Mühendisliği Bölümü

ADAPAZARI

Bu kitabımızda statik ve zamanla değişen elektromagnetik alanlar mühendislik uygulanılan ile birlikte verilen teorinin temel anlamda daha iyi anlaşılması ve ilgi çekmesi amaçlanmıştır.

Bu nedenle öğrencilerin skınlardan elektromagnetik teorisi öğrenme arzusunu duyacağına ümit ediyoruz. Elektromagnetik teorinin mühendislik ve modern bilime olan geniş katkısı öğrenciler tarafından laikçe öğrenilmesi daha başarılı olmalarını sağlayacaktır.

ÖNSÖZ

S. Selim Şeker, Osman Çerezci

I.T.U.

SAKARYA MUHENDİSLİK FAKÜLTESİ MATBAASI
MART - 1992

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ	1
BÖLÜM 1. VEKTÖREL ANALİZ	1
1.1 Skalar ve Vektörel Alanlar	1
1.2 Vektörel Cebir	2
1.3 Karteziyen Koordinat Sistemi	4
1.4 Silindirik Koordinat Sistemi	7
1.5 Küresel Koordinat Sistemi	8
1.6 Koordinat Sistemleri Arasında Dönüşümler	9
1.7 Diferansiyel Vektör İşlemleri	13
1.8 Integral Vektör Teoremleri	15
BÖLÜM 2. STATİK ELEKTRİK ALANLARI	19
2.1 Elektrik Yükleri ve Alan Şiddeti	19
2.2 Noktasal Yüklerin Elektrik Alanı	20
2.3 Çizgisel Yük Dağılımının Elektrik Alanı	22
2.4 Yüzeysel Yük Dağılımının Elektrik Alanı	24
2.5 Hacimsel Yük Dağılımının Elektrik Alanı	25
2.6 Elektriksel Açı Yoğunluğu ve Gauss Kanunu	28
2.7 Diverjansın Fiziksel Anlamı	33
2.8 Statik Elektrik Alanların Uygulamaları	34
BÖLÜM 3. STATİK ALANLARA ENERJİ VE POTANSİYEL	41
3.1 Elektrik Alanda Hareket Eden Yükün Enerjisi	41
3.2 Potansiyel ve Potansiyel Farkı	43
3.3 Noktasal Bir Yük ve Yük Sistemlerinin Elektriksel Potansiyeli	44
3.4 Potansiyel Gradyant	47
3.5 Statik Elektriksel Dipol	50
3.6 Statik Alanlarda Enerji Yoğunluğu	52
BÖLÜM 4. İLETKENLER VE DİELEKTRİKLER	56
4.1 Akım ve Akım Yoğunluğu	56
4.2 Akım Sürekliliği	58
4.3 Metalik İletkenler	59
4.4 İletken Özellikleri ve Sınır Şartları	63
4.5 Yan İletkenler	69
4.6 Dielektrik Malzemelerin Özelliği ve Sınır Şartları	70
4.7 Kapasitörler ve Uygulamalar	78
BÖLÜM 5. ELEKTROSTATİK ALANLarda ÇÖZÜM TEKNİKLERİ	92
5.1 Denklemlerin Türetilmesi	92
5.2 Laplace Denkleminin Çözümü	93
5.3 Poisson Denkleminin Çözümü	99
5.4 Görüntü Metodu	102
5.5 Sayısal Teknikler	106
BÖLÜM 6. STATİK MAGNETİK ALANLAR	116
6.1 Biot Savart Kanunu	116
6.2 Skalar ve Vektörel Magnetik Potansiyeller	131
6.3 Hareketli Bir Üçlü Etkiyen Kuvvet	136
6.4 Akım Elemanına Etkiyen Kuvvet ve Tork	138
6.5 Maddenin Magnetik Özelliği	143
6.6 Magnetik Devreler ve Potansiyel Enerji	156
6.7 Indüktans ve Karşılıklık İndüktans	161
BÖLÜM 7.ZAMANLA DEĞİŞEN ALANLAR VE MAXWELL DENKLEMLERİ	169
7.1 Faraday Kanunu	169
7.2 Yerdeşitme Akımı	173
7.3 Maxwell Denklemlerinin Nokta ve Integral Formu	176
7.4 Dalga Denklemi ve Propagasyon	183
7.5 Harmonik Alanlar İçin Maxwell Denklemi	187
7.6 Uygulamalar	188
BÖLÜM 8. DÜZLEM DALGA VE YANSIMASI	204
8.1 Boşlukta Dalga Yayılımı	204
8.2 Düzlem Dalgaların Polarizasyonu	207
8.3 Pointing Vektör ve Güç Akışı	211
8.4 Dielektrik Ortanda Dalga Yayılımı	222
8.5 İyi İletken Ortamlarda Dalga Yayılımı ve Deri Olay	230
8.6 Düzlemsel Dalgalanın Yansıma ve İletimi	236
EKLER	249
A. Boyut ve Birimler	249
B. Dönüşüm Çarpanları	253

C. Fiziksel Sabitler	255
D. Vektörel Füştükler	256
E. Dielektrik Matemeler ve Özellikleri	258
KAYNAKLAR	261

BÖLÜM 1 VEKTÖREL ANALİZ

Vektörel analiz bazı matematiksel işlemleri oldukça kolaylaştırması nedeniyle fizikçiler ve mühendisler tarafından sık sık kullanılan bir yöntemdir. Kitabın diğer bölmelerinin rahat anlaşılabilmesi için bu ilk bölümde vektörel analiz, gerekli ayrıntıları ile özetlenecektir.

1.1 SKALAR VE VECTÖREL ALANLAR

Bazı fiziksel büyüklükler bir sayı ile tanımlanabilir. Değeri bir koordinat sisteme bağlı olmayan büyükler skalar denir. Örneğin bir odada bir noktadaki sıcaklık tek bir sayı ile ifade edilebilir. Yoğunluk, bir dilim ekmeğin katorik değeri gibi kavamlar skalar büyüklüklerdir.

Fiziksel büyüklülerden bir kısmı; sadece sayısal olarak ifade edilmesi ile tanımlanmış olanaz. Bunların büyütük ve yönünün de bilinmesi gereklidir. Örneğin firtınanın hızı şudur deyince onun büyütüğünü ve hangi yöne estiğinin bilindiği anlamına gelir. Dolayısıyla hız vektörel bir büyüklüktür. Kuvvet, ivme gibi kavamlar da vektörel büyüklüktürler.

Fizikte incelemekle olan kavamların bazıları uzayın belili bir bölgesinde sürekli dağılmış olabilir. Dolayısıyle bu büyütüğü inceleken, her bölgede tanımlayacak bir şekilde ifade etmek gereklidir. Bu ise alan kavramını ortaya çıkarır. Alan kelimesi fiziksel bir büyütüğün beliri bir bölgede sürekli değişmiş olmasının belirtir. Eğer söz konusu büyütük, skalar nicelik ise inceleen alan skalar alan, ve eğer vektöre inceleen alan vektörel alan oluşturur. Homojen bir ortamda kütte yoğunluğu, atmosferde basınç dağılımı, nem dağılımı skalar alanlara önektilir. Beliri bir bölgede bulunan partiküllerin oluşturduğu hız, vektörel alana örnek verilebilir. Uzayın bir bölgesindeki etkiyen kuvvetlere ilişkin alanlar birer vektörel alan oluştururlar. Gravitasyonel alanda bunlardan biridir. Bir ifadenin vektör olduğunu belirtmek tizere o ifadeyi koyu karakterle göstereceğiz.

Eğer alan zamanından bağımsız ise statik, ve zamanla değişiyorsa dinamik alan olarak isimlendirilir. Hiçbir fiziksel büyütüğün zamanla tamamen sabit kalmayacağı bilindiğine göre statik alanları çok kişiük zaman aralıklarında zamanından bağımsız olduklarını düşünekmek gereklidir. Eğer zamanla değişimler büyük fakat yavaş ise kuasistatik alan ifadesi kullanılabilir.

Elektromagnetik alanların çeşitleri. Elektrik ve magnetik alanlar, elektrik yüklerine bağlı olarak ortaya çıkan kuvvet alanlardır. Bu kuvvet alanları, yüklerin hareketine bağlı olarak,

- A.Statik Elektrik Alanlar
- B.Statik Magnetik Alanlar
- C.Elektromagnetik Alanlar

şeklinde grublandırılır. Elektrik yükleri gözlem yapılan noktaya göre dengeye bulunuyorlarsa

zamandan bağımsız bir statik elektrik alan oluştururlar. Yüklerin bağlı hareketleri söz konusu olursa, statik elektrik alana ilave olarak birde magnetik alan isimli kuvvet alam ortaya çıkar. Bu ilave alan ikiye ayrılarak incelenir. Eğer yükler gözlem noktasına göre sabit hızla hareket ediyorsa (yani kaynağı d-c akım olan alanlara) statik magnetik alan, eğer yükler ivmeli hareket ediyorlarsa elektromagnetik alanlar olarak isimlendirilen zamana bağlı elektrik ve magnetik alanları oluştururlar. Bu alanlar, 7.Bölümde görüleceği üzere Maxwell denklemleri ile kaynaklarına, yanı yük ve akımlarına bağlanırlar.

1.2. VEKTÖREL CEBİR

Vektör ve vektör alanlarının böyle tanımlandıktan sonra vektörel cebirin bazı kurallarını tanımlamaya devam edebiliriz.

Vektörlerin toplanması paralel kenar yöntemiyle grafiksel olarak kolayca yapılabilir. Şekil 1.1 A ve B gibi vektörün toplamının göstermektedir. Kolayca görüleceği üzere $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ 'dır. (Yer değişebilirlik kuralı-Commutative law) Vektörel toplama aynı zamanda birleşirebilme kuralına tabidir; Yani;

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad (\text{Birleştirilebilirlik kuralı})$$

Aynı düzlemdeki vektörleri (örneğin Şekil 1.1'de kağıt düzlemindeki vektörleri) her bir vektöri yatay ye dikey bileşenleri cinsinden ifade ederek ve aynı eksendeki bileşenlerden faydalananak da toplamak mümkündür.



Şekil 1.1

Üç boyutlu vektörlerin toplanmasında aynı şekilde yapılır. Her bir vektör bileşenler cinsinden ifade edilir, aynı türden bileşenler birbiriley toplanarak, toplam vektör bulunur.

Vektörün çkartma kuralı, toplama kuralından faydalananak kolaylıkla yaplabilir. Şöyle ki; A dan B vektörünün çkartılması

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

şeklinde ifade edilebilir.

Vektörler, skalar ile çarpılabilir. Bu takdirde vektörün büyüklüğü değişmeyece beraber skalar pozitif ise vektörün yönü değişmez; skalar negatif ise vektörün yönü ters döner. Vektörlerin bir skalar ile çarpımı, cebirin bilesütürilebilirlik ve dağıtlabilirlilik kurallarına uyar. Yani;

$$(r+s)(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = r(\mathbf{A}+\mathbf{B})+s(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = r\mathbf{A}+r\mathbf{B}+s\mathbf{A}+s\mathbf{B}$$

bağıntısı geçerlidir.

SKALAR VE VECTÖREL ÇARPIMLAR

\mathbf{A} ve \mathbf{B} gibi iki vektörün skalar çarpımı \mathbf{A} ve \mathbf{B} 'nin mutlak değerleri ile, iki vektör arasındaki en küçük açısının kosinusunu çarpmıştır.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta_{AB} \quad (1)$$

skalar bir çarpmanın sonucu skalar bir ifadedir ve yer değiştirebilirlik kurallı geçerlidir. Yani

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

dur. Bir vektörün kendisiyle skalar çarpımının sonucu, mutlak değerinin karesidir.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} &= A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z \\ |\mathbf{A}| |\mathbf{A}| \cos \theta &= |\mathbf{A}|^2 \end{aligned}$$

Skalar çarpının en önemli uygulamalarından biri bir vektörün bir yöndeki bileşenini bulmakur. a verilen bir yöndeki birim vektör ise;

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{A}| |\mathbf{a}| \cos \theta_{Aa} = |\mathbf{A}| \cos \theta_{Aa}$$

İfadeleri \mathbf{A} 'nın a birim vektörü yönündeki izdüşümüdür.

\mathbf{A} ve \mathbf{B} gibi iki vektörün vektörel çarpımı $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ şeklinde gösterilir. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ yine bir vektör olup, mutlak değeri, $|\mathbf{A}|$ ve $|\mathbf{B}|$ 'nin mutlak değerleri ile iki vektör arasındaki sinüsyle çarpılmış; yönü ise \mathbf{A} ve \mathbf{B} vektörlerinin içinde bulunduğu düzleme dik olacak şekilde dir.

Söyledenenle denklem olurak yazacağ olursak

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \frac{1}{2} |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta_{AB} \quad (2)$$

a_N birim vektörünün dip harfi N ; $A \times B$ vektörünün yönünü A ve B düzleminde dik olduğunu gösterir.

A ve B vektörünün yönünü sırası değiştiğimizde birim vektörün yönü ters döner. Dolayısıyle vektöriyel çarpım komutatif özelliğe sahip değildir.

$$B \times A = -(A \times B)$$

dir.

Vektörel çarpım, kartezyen koordinat sistemindeki birim vektörlere tabib edilirse $a_x \times a_y = a_z$ bulunur. Her bir vektör birim uzunluğadır ve iki vektör birbirine dikdir. Sağ el kuralına göre, el a_x ’den a_y ’ye döndürdüğünde baş parmak pozitif z ekseniğini gösterir. Benzer şekilde $a_y \times a_z = a_x$ ve $a_z \times a_x = a_y$ ’dır.

Kolayca hatırlanabilmesi için determinant şeklinde yazarsak

$$A \times B = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (3)$$

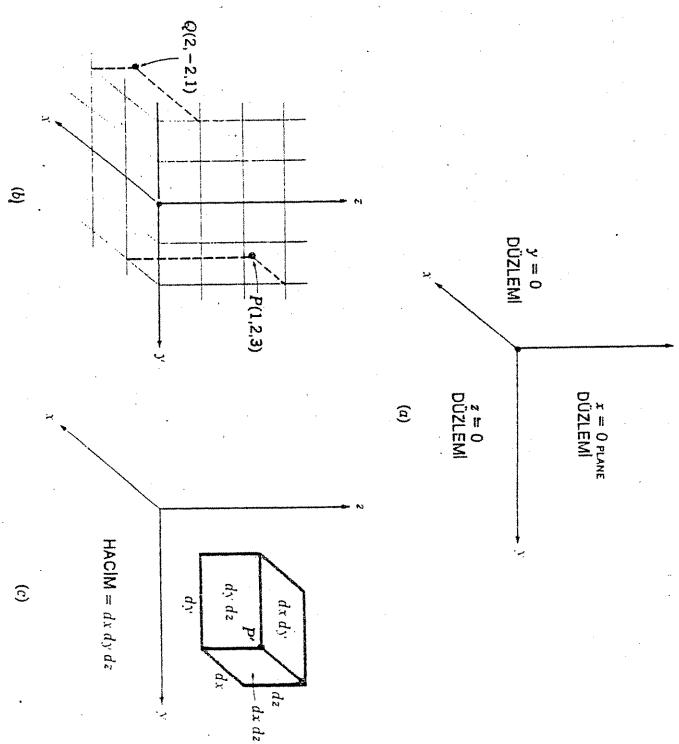
şeklinde ifade edilir.

1.3. KARTEZYEN KOORDİNAT SİSTEMLİ

Bir vektörün doğru olarak tarif edilebilmesi için, uzunluk, yön, açı, ve bileşkelerinin verilmesi gereklidir. Bunu yapmanın kolay yollarından biri dik kartezyen koordinat sistemi kullanmaktadır.

Kartezyen koordinat sisteminde, birbirlerine dik açıda üç adet koordinat ekseni teşkil ederiz. Bu eksenler sırasıyla x, y, z eksenleridir.

Bu koordinat sisteminde bir nokta, x, y, z koordinatları verilerek yerleştirilir. Şekil 1.2 koordinatları $(1, 2, 3)$ ve $(2, -2, 1)$ olan P ve Q noktalarını göstermektedir. P noktası, $x=1, y=2, z=3$ düzlemlerinin kesiştiği ortak noktası, Q noktası $x=2, y=-2, z=1$ düzlemlerinin kesiştiği ortak noktadır.



Şekil 1.2 Dik Kartezyen Koordinat Sisteminde $P(1,2,3)$ ve $Q(2,-2,1)$ noktalarının yerleşimi ve hacim elementinin gösterilimi.

Kartezyen koordinat sisteminde bir vektörü tanımlanak üzere, önce başlangıç noktasından dışarı doğru uzanan bir \mathbf{r} vektörünü ele alalım. Bu vektörün tanımlamanın en akıcı yolu üç koordinat ekseni boyunca uzanan bileşen vektörleri cinsinden vermektedir. Bileşen vektörlerin

vektörel toplam \mathbf{r} vektörünü verir. Eğer \mathbf{r} 'nın bileşenleri x, y ve z ise $\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$ dir. Bileşen vektörler Şekil 1.3. de gösterilmiştir.

Herhangi bir vektör \mathbf{B} , $\mathbf{B} = B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z$ şeklinde ifade edilebilir. \mathbf{B} 'nin büyüklüğü (mutlak değeri)

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \text{ dir.} \quad (4)$$

Herhangi bir yöndeki bir vektörün birim vektörü o yöndeki bir vektörün kendi büyüklüğine (mutlak değerine) oranına eşittir. \mathbf{r} vektörünün yönündeki bir birim vektör $\mathbf{a}_r = \mathbf{r} / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dir. \mathbf{B} vektörünün istikametine birim vektör ise

$$\mathbf{a}_b = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} \quad (5)$$

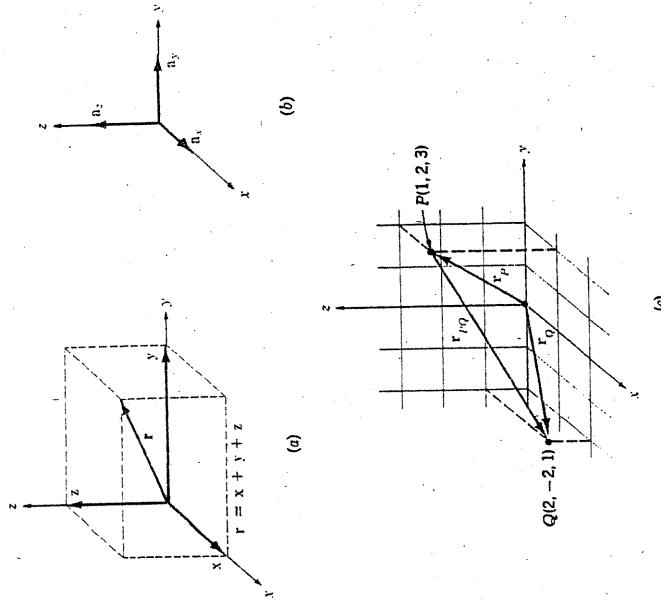
olarak ifade edilir.

1.4. SILINDİRTİK KOORDİNAT SİSTEMİ

Silindirik koordinat sistemi, analitik geometrideki kutupsal koordinatların üç boyutlu çevrilmiş şeklidir. Kolaylık açısından dairesel silindirik koordinatlara, sadece silindirin koordinatları diyeceğiz.

Bu sistemde kartezyen koordinatlarda olduğu gibi üç eksen tanımlanmaz bunun yerine birbirine dik üç yüzeyin kesisme noktası ile alınr. Bu yüzeyler, bir dairesel silindir ($r = \text{ sabit}$), bir düzleme ($\phi = \text{ sabit}$), ve bir başka düzlemedir ($z = \text{ sabit}$). Silindirik koordinatlardaki bu üç yüzey Şekil 1.4a de gösterilmektedir.

Şekil 1.3 (a) \mathbf{r} vektörünün x, y, z bileşenleri (b) Birim vektörler (c) $\mathbf{r}_{PQ} - \mathbf{r}_{PQ}$ eşit olan \mathbf{r}_{PQ} vektörü



Eğer billeske vektörü iki birim büyüklükte ve yönü y ekseninin pozitif yönüne doğru ise bu takdirde $y=2a$ dir. Başlangıç noktasını, $P(1,2,3)$ noktasına bireştiştiren vektör \mathbf{r}_P ise $\mathbf{r}_P = a_x + 2a_y + 3a_z$ dir. P noktasından Q noktasına uzanan bir vektör, vektörel toplama kuralları tablib edilerek elde edilebilir.

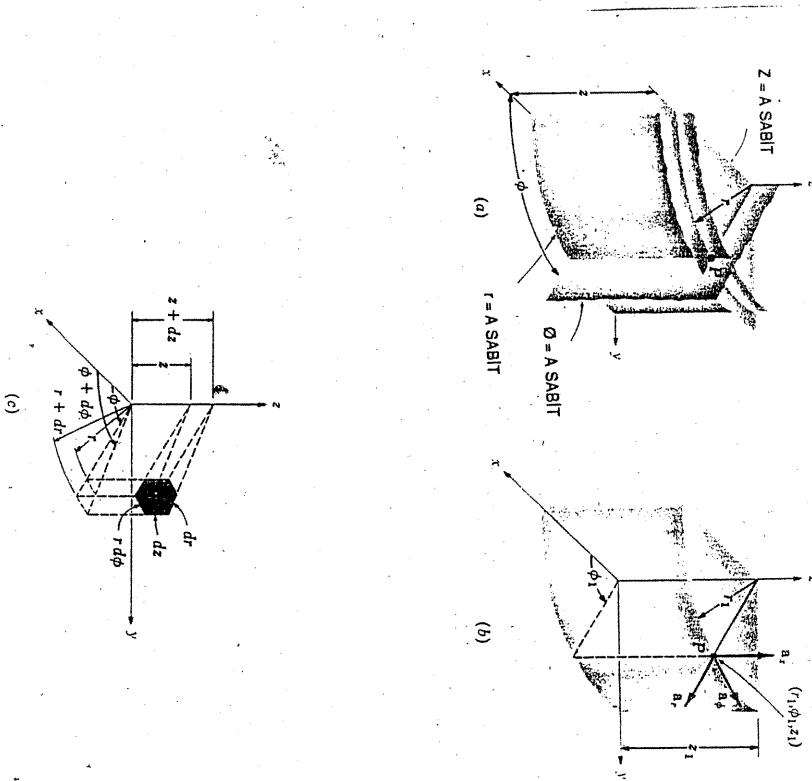
Silindirik koordinat sisteminde de a_r, a_θ ve a_z ile gösterileceğimiz birim vektörler vardır. Şekil 1.4b de görüldüğü gibi bir $P(1, \phi, z)$ noktasındaki birim vektör $\mathbf{r} = r \mathbf{a}_r$ silindir yüzeyine dik düz doğru yönlemiştir. a_θ birim vektörü ise $\phi = \phi$ düzleme dik olup artan ϕ yönündedir. Birim vektör a_z ise kartezyen koordinatlardaki az vektörünün aynısıdır.

Silindirik koordinatlarda sonsuz küçük hacim elemanı: $dr, d\phi$ ve dz artışlarından faydalananarak elde edilebilir. Şekil 1.4c de görüldüğü gibi $dr, d\phi$ ve dz kenarlarını sahip silindirin parçasının hacmi $rd\phi dz dr$ dir.

kalan θ sabit açısıdır. $\theta=$ sabit olan yüzey bir konidir.

Üçüncü koordinat ϕ açısı tamamen silindirik koordinatlardaki ϕ açısının aynıdır. ϕ sabit yüzeyi $\theta=0$ çizgisinden (veya z eksenini) geçen bir düzlemdir.

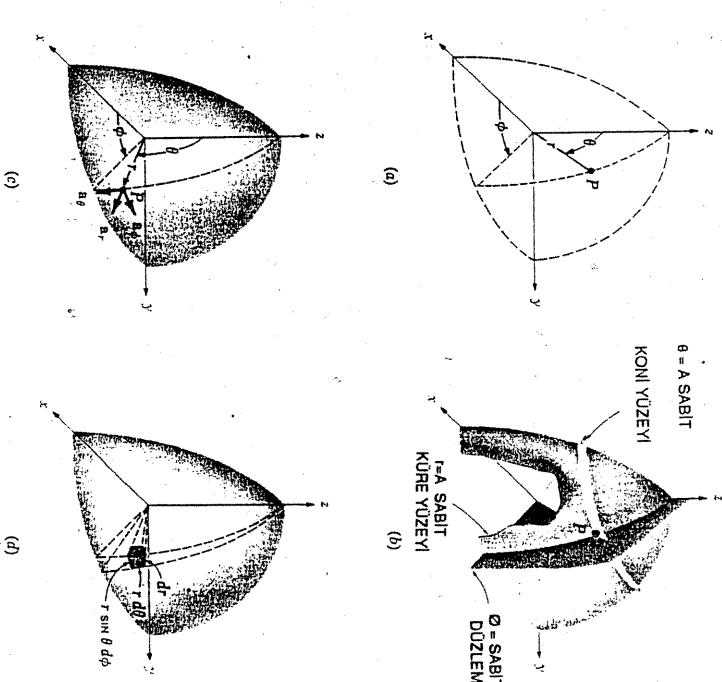
Üç birim vektor keza her noktada tanımlanabilir. Herbir birim vektor, birbirine dik üç yüzeyden birine diktir ve yönü artan koordinat istikametindedir. Kütresel koordinat sisteminde kenarları dr , $r d\theta$, $r \sin \phi d\phi$ olan sonsuz küçük hacim Şekil 1.5 de de görüldüğü gibi $r^2 \sin \theta d\phi$ olarak tanımlanır.



Şekil 1.4. Silindirik koordinatlarında birim vektörler, yüzeyler ve hacim elemanı

1.5. KÜRESEL KOORDİNAT SİSTEMLİ

Kütresel koordinat sistemini üç kartezyen ekseninde tanımlamaya çalışacağız. Başlangıç noktasından herhangi bir noktaya olan uzaklık r olsun. $r=$ sabit yüzeyleri kütre yüzeylerini oluşturur. İkinci koordinat z ekseniley, başlangıç noktasını P noktasına bireştiğen çizgi arasında



Şekil 1.5. Kütresel Koordinat Sistemi.

1.6. KOORDİNAT SİSTEMLERİ ARASINDA DÖNÜŞÜMLER

Vektörel analizi elektrik ve manyetik alan problemlerinin çözümünde kullanılmaya başladıkten sonra ilk etapta kartezyen koordinatları kullanarak oldukça güç problemleri kolaylıkla çözebilceğiz ancak silindirik veya kütresel koordinatlar cinsinden cevaplar bazen daha uygun olacaktır.

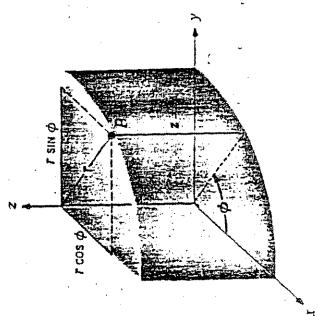
$$A\phi = A.a\phi$$

Bazen de koordinat sistemleri arasında ters bir dönütüm gerekliliği olacaktır. Önce kartezyen koordinatlardaki bir vektörün silindirik koordinatlara nasıl aktarılacağını görelim. Bu işlem esasen değişkenlerin değiştirilmesi ve bileşkele rin değiştirilmesi olarak iki basamaklı bir problemdir. (Kartezyen koordinatlarda bir vektör $\mathbf{A} = A_x \mathbf{ax} + A_y \mathbf{ay} + A_z \mathbf{az}$ olsun, $(A_x, A_y$ ve A_z 'nın bire fonksiyonudur.) Silindirik koordinatlarda $\mathbf{A} = A_r \mathbf{ar} + A_\theta \mathbf{a\theta} + A_z \mathbf{az}$ şeklinde dönüştürülecektir. $(A_r, A_\theta$ ve A_z z'in birer fonksiyonudur.

Dik kartezyen ve silindirik koordinat sistemlerini $z=0$ düzlemleri kaçışacak şekilde Şekil 1.6. daki gibi ayarlsın. Ve $y=0$ düzlemi $\phi=0$ düzlemi olsun Bu taktirde herhangi bir P noktasında değişkenler arasında aşağıdaki ilişkiler mevcuttur.

$x=r\cos\phi$	$y=r\sin\phi$	$z=z$
$r^2=x^2+y^2$	$\tan\phi=y/x$	$z=z$

Göntüldiiši lizerse hirrim yekktör az her iki sistemde de avnidır



Gakki 16

Şimdi bilesenlerin değişimini görelim. Genel anlamda elimizde A vektörünün üç kartezyen bileşkesi A_x, A_y, A_z ve üç silindirik bileşkesi A_r, A_θ ve A_z vardır. Hemen A_z bileşkelein her iki sisteme de aynı olduğunu söyleyebiliriz; Çünkü her iki sisteme bu yöndeki birim vektörleri aynıdır.

$B = (z \cos\phi + \sin\phi - r \sin\phi \cos\phi) a_r + (-z \sin\phi + \cos\phi - r \cos^2\phi) a_\theta + \tan\phi a_z$ olarak bulunur.

$$\mathbf{B} = (z \cos\phi + \sin\phi - r \cos^2\phi) \mathbf{a}_r + (-z \sin\phi + \cos\phi - r \cos\phi \sin\phi) \mathbf{a}_\theta + (r \sin\phi) \mathbf{a}_z$$

Eşas itibarıyle, koordinatlar arası transformasyon önce değişkenleri sonra bileşenleri değiştirecek sonucu varır.

- 1 -

2

Tablo 1.1. Kartezyen ve Silindirik Koordinatların bileşenleri arasındaki bağıntılar

Kartezinden Silindirige

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

Silindirikten Kartezyne

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$A_r = A_x \cos \phi + A_y \sin \phi$$

$$A_\theta = A_x \sin \phi + A_y \cos \phi$$

$$A_z = A_z$$

$$A_x = A_r \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - A_\theta \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$A_y = A_r \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + A_\theta \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$A_z = A_z$$

$$a_r \cdot a_x = \sin \theta \cos \phi$$

$$a_\theta \cdot a_x = \cos \theta \cos \phi$$

$$a_\phi \cdot a_x = -\sin \theta$$

$$a_r \cdot a_y = \sin \theta \sin \phi$$

$$a_\theta \cdot a_y = \cos \theta \sin \phi$$

$$a_\phi \cdot a_y = \cos \phi$$

$$a_r \cdot a_z = 0$$

$$a_\theta \cdot a_z = 0$$

$$a_\phi \cdot a_z = 0$$

Bir vektörün kartezyen koordinatlardan küresel koordinatlara aktarımı ya da tersi aşağıdaki yol takip edileerek bulunur.

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\tan \phi = \frac{y}{x}$$

Herhangi bir küresel bir vektörün, bir kartezyen birim vektöriyle skalar çarpımı, kartezyen vektör yönündeki küresel vektörün bileşkesi olacağından, az ile skalar çarpımlar aşağıdaki gibi bulunur.

$$a_r \cdot a_x = a_x \cdot a_r = \cos \theta$$

$$a_\theta \cdot a_x = a_x \cdot a_\theta = -\sin \theta$$

$$a_\phi \cdot a_x = a_x \cdot a_\phi = 0$$

a_x ve a_y ile yapılan skalar çarpımlarda, küresel birim vektörün hem xy düzlemindeki projeksiyonu hemde istenen $a_r \cdot a_x$ i bulmak istersək önce a_r 'in xy düzlemindeki izdüşümünü ki bu $\sin \theta$ 'dır. Sonradan $\sin \theta$ 'nın x ekseniindeki izdüşümünü bulmak gerekiyor ki bu da $\sin \theta \cos \phi$ 'dır.

Bu sonuçlara A_r , A_θ ve A_ϕ bileşenlerini A_x , A_y ve A_z cinsinden (ya da tersini) bulabiliyoruz. Bu sonuçlar Tablo 1.2'de kartezyen ve küreselkoordinatlar arasındaki dönüştürme bağıntıları olarak özetlenmektedir.

1.7. DİFERANSİYEL VEKTÖR İŞLEMİLERİ

Vektörel analizde sıkça kullanılan dört differansiyel işlem vardır. Bu işlemleri dik kartezyen koordinat sisteminde inceleyeceğiz. Diğer koordinat sistemleri ile ilgili bağıntılar ise el-bölümde özet olarak verilecektir.

Üç boyutta türevi veren nabla operatörü

$$\nabla = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}$$

şeklinde tanımlanır. Verilen bir $f(x,y,z)$ skalar fonksiyonu için gradyan tanımı

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} a_x + \frac{\partial f}{\partial y} a_y + \frac{\partial f}{\partial z} a_z$$

şeklinde olup. Artık grad f geometrik anlamda $f(x,y,z) = \text{sabit yüzey} \rightarrow \text{dik vektöri gösterir}$. Ve büyükligi, $f(x,y,z)$ yüzeyine dik yönde $f(x,y,z)$ fonksiyonunun türevine eşittir. Yani n yüzeeye dik birim vektöri göstermek üzere;

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial n} n$$

dir. Bu bağıntının ispatı alıştırma olmak üzere okuyucuya bırakılmıştır.

Tablo 1.2 Kartezyen ve Küresel Koordinatlarda Bileşenler arasındaki Bağıntılar

Kartezyenden Küresel

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$A_r = A_x \sin \theta \cos \phi$$

$$+ A_y \sin \theta \sin \phi$$

$$+ A_z \cos \theta$$

$$A_\theta = \frac{A_x z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{A_y y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{A_z x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$A_\phi = \frac{A_y z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{A_z y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{A_x z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$A_\phi = -A_x \sin \theta \cos \phi + A_y \cos \theta \sin \phi - A_z \sin \theta$$

Bir vektörün Diverjansı, örneğin \mathbf{A} vektör alanı için

$$\operatorname{Div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

şeklinde ifade edilir.

Bir vektörün rotasyoneli ise, yine \mathbf{A} vektör alanı için

$$\operatorname{rota} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

ile ifade edilir.

Bir skalar alanın laplasiyeni, ikinci dereceden türev işlemi olup, f skalar alan için ifadesi;

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

dir. Gradyant, diverjans ve rotasyonel kavramların anımları daha sonraki bölümlerde ayrıca anlatılacaktır.

1.8 INTEGRAL VEKTÖR TEOREMLERİ

Elektromagnetik Teoride bir kaç tane çok kullanılan integral vektör bağıntıları vardır. Bu teoremlerden en çok kullanılan ikisi aşağıda özetlenmiştir.

Diverjans, veya Gauss Teoremi: Verilen bir \mathbf{A} vektör alanı için, V hacmini çevreleyen yüzey S ise Gauss Teoreminin ifadesi;

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

dir.
Stokes Teoremi: A yine bir vektör alanı gösterse. S açık yüzeyini çevreleyen eğri C olsun bu durumda Stokes Teoremi

$$\int_S (\nabla \cdot \mathbf{A}) ds = \int_C A dl \quad \text{şeklinde ifade edilir.}$$

ÖRNEK PROBLEMLER

Örnek 1.1 Bir kuvvet alanı $\mathbf{F} = (5x^2a_x + 2y^2a_y - 4z^2a_z)e^{-t}$ (N) şeklinde verilmektedir. Bu vektör alanının $P_1(1,1,0)$, $P_2(1,2,0)$ ve $P_3(2,1,0)$ noktalarındaki $t=0$ için değerini bulun? Ve $z=0$ düzleminde \mathbf{F} vektör alanını bu üç noktası için çiziniz?

Cözüm:

$$\mathbf{F}_1(x,y,z)|_{P_1} = (5x^2a_x + 2y^2a_y - 4z^2a_z)e^{-t}|_{x=1, y=1, z=0} = (5a_x + 2a_y) \text{ (N)}$$

$$y=1$$

$$z=0$$

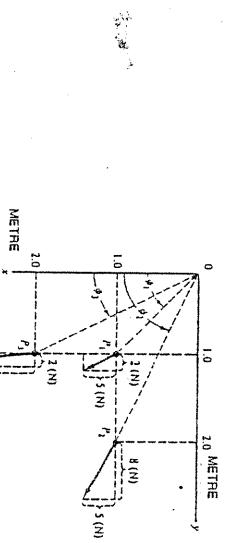
$$t=0$$

benzer şekilde

$$\mathbf{F}_2(x,y,z,t)|_{P_2} = (5a_x + 2a_y) \text{ (N)}$$

$$\mathbf{F}_3(x,y,z,t)|_{P_3} = (20a_x + 8a_y) \text{ (N)}$$

\mathbf{F} 'nin ölçekli çizimini Şekil 1.7 de gösterilmektedir.



Şekil 1.7 \mathbf{F} kuvvet alanının $z=0$ düzleminde ve üç noktadaki çizimi

Örnek 1.2. Hız vektör alanı $v = (5x^2a_x + 2y^2a_y - 4z^2a_z)$ (m/s) olarak verilmektedir. v nin $(1,1,0)$ noktasında ar yönündeki değerini bulunuz?

$$\text{Cözüm: } v|_{(1,1,0)} = (5a_x + 8a_y) \text{ (m/s)}$$

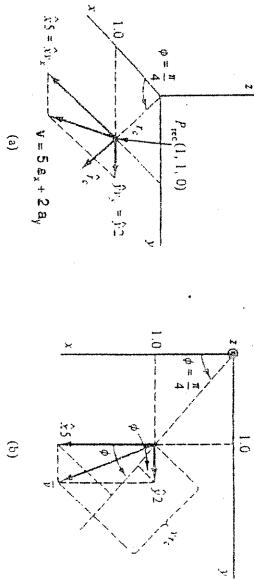
v nin $(1,1,0)$ noktasındaki değeri şekil 1.8 de gösterilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi v nin ar bileşeni

$$v_r = [5\cos\phi + 2\sin\phi]_{\phi=\pi/4} = 4.95 \text{ (m/s)}$$

bulunur. Veya;

$$v \cdot a_r|_{\phi=\pi/4} = v_r = (5a_x + 2a_y) \cdot (\cos\phi a_x + \sin\phi a_y)|_{\phi=\pi/4}$$

$$= 5\cos\phi + 2\sin\phi|_{\phi=\pi/4} = 4.95 \text{ (m/s)}$$



Şekil 1.8

PROBLEMLER

1. Bir radyasyon alanı $20(y-z)a_x + 10x a_y - 10a_z (\text{W/m}^2)$ ile verilmektedir.

- (a) $P(2,1,0)$ noktasında alanın büyüklüğünü ve yönünü bulunuz?
 (b) Alanın x, y ve $z = \pm 1$ ile sınırlı bölgedeki maksimum değerini bulunuz?

2. Bir elektrik alan kartezyen koordinatlarda

$$\mathbf{E} = 10[xa_x + ya_y + za_z] \sqrt{2(x^2+y^2)} \ a_z / \sqrt{x^2+y^2}$$

şeklinde verilmektedir. Bu alanın $(3,4,-2)$ noktasındaki yönü birim vektörünü de ifade ederek bulunuz?

3. Silindirik koordinatlarda $\mathbf{F} = r\hat{a}_r - za_z$ alanı verildiğine göre, $(-3,4,10)$ noktasında değerini ve $\mathbf{D} = 2za_x - 2ay + az$ ile yaptığı açıyı bulunuz?

4. İki vektör alanı $\mathbf{A} = 3t^2 \cos\phi \hat{a}_r + 5rsin\phi \hat{a}_\theta + z^2 \cos\phi \hat{a}_\phi$ ve $\mathbf{B} = 4r^3 \sin\phi \hat{a}_r + z^2 \cos\phi \hat{a}_\theta$ ile verilmektedir.

$P(2,\pi/3,5)$ noktasında; (a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (b) $|\mathbf{A}|$ yi bulunuz?

(a) $P(2,1,0)$ noktasında 20($y-z$) $a_x + 10x a_y - 10a_z (\text{W/m}^2)$ ile verilmektedir.

(b) Alanın x, y ve $z = \pm 1$ ile sınırlı bölgedeki maksimum değerini bulunuz?
 Her bir maddenin pozitif ve negatif elektrik yüklerinden yapılmış olduğunu ve en küçük yük birimlerinin atomu oluşturan elektron ve protonlara ait olduğu bilinmektedir.

2.1. ELEKTRİK YÜKLERİ VE COULOMB KANUNU

Durgun ve hareket eden yükler durmaktakı yada hareket eden diğer yükler üzerinde kuvvet uygular. Bu kuvvet alanlarına elektrik alan, ve magnetik alan denir. Yükler hareketsiz olduğunda ortaya çıkan alan statik elektrik alan olarak, yükler sabit hızla hareket ederken oluşturdukları alanda statik magnetik alan olarak isimlendirilir. Fıvnelenmiş yükler elektrik ve magnetik alanları zamanla değiştiği elektromagnetik alanları oluşturur. Elektromagnetik alanın örnek olarak, içindeki ivmevi yükler nedeniyle radyo istasyon anteninden yayınlanan radyo işaretlerini verebiliriz. Şu anda içinde durduğumuz oda uzaydan (yıldızlardan) gelen ışınları, radyo ışıkları, CB işaretlerini, elektrikmagnetik gürtütleri, radyo-TV yayınlarından kaynaklanan elektromagnetik alanların kaynaşığı bir ortamdır.

Elektrik ve magnetik alanlar bundan başka, elektrik devreleri, transistörler, kondensatörler, indüktör, elektrik makinaları, jeneratörler, TV resim tipi, güneş pilleri gibi v.s. elementların içindedir. Bu bölümde boşlukta durgun elektrik alanını inceleyeceğiz. Bu gibi alanlar elektrostatik katot ışın tipilerinin sapırma sistemlerinde bulunur. Bulunacak sonuçlar pratik amaçlar için hava ya da diğer gazlı ortamlarda kolayca tablib edilebilir nitelikte olacaktır.

Coulomb Kanunu: Elektrik yükleri arasındaki etkileşmenin, yapılan deneyler sonunda, yükler çarpımıyla doğru, yükler arası uzaklığın karesiyle ters orantılı olduğu bulunmuştur. İsteğe bağlı şekilde ortaya çıkan bu etkileşme Coulomb Kanunu olarak isimlendirilmiştir. Yükleri birleştiren çizgi doğrultusunda olan F etkileşme kuvveti

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \quad (1)$$

ile ifade edilir. Burada R (m) yükler arası uzaklığı, Q (C) yük miktarını, k orantı sabitini göstermektedir. $k = 1/4\pi\epsilon_0$ olup $\epsilon_0 (F/m)$ boşluğunun dielektrik sabittir. $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} = 1/36\pi \cdot 10^9 (F/m)$ dir. SI birim sisteminde yük birini olarak kullanılan Coulomb hayli büyük bir yük ölçüdür. Elektronun yükünün $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ olduğu düşünürse 1 Coulombuk negatif yük

İçinde 6.1018 elektron bulunur. Ve 1 Coulomb'luk aynı işaretli iki yükün 1 mm uzaktan uyguladıkları kuwert 9.1015 N olur. Bu işe yaklaşık 9.2.1011 ton külteli cisimin ağırlığına eşittir. Bu değer Amerikadaki tüm binaları aynı zamanda havaya kaldırılmaya yeterlik kuverte eşittir. En küçük yük kuantasına sahip elektron 9.10956.10-31 kg durgun kütleye ve 3,8.10-15 m yangapa sahiptir. Elektron kesin olarak kütlesel bir şekilde sahip olmadığını ancak yavaş hareket eden bir elektron için muhtemelen sahip olacağı şekilde kabul edilir. Diğer bir yüklü parçacık olan proton, elektronдан daha büyük kütle ve yangapa sahiptir. Q_1 ve Q_2 yükleri arasında \mathbf{R}_{12} vektörünü ve \mathbf{a}_{12} birim vektörünü tanımlarsak; (\mathbf{R}_{12} sembolü, 1 nolu yükten 2 nolu yükle yönelik vektörü göstermektedir.) Q_2 yüküne etkiyen kuwert F_2 olsun,

$$F_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{a}_{12} \quad (2)$$

Q_1 yükünün Q_2 yüküne etkiyi yükler aynı işaretli ise itici, yükler zıt işaretli ise çekici özelliktedir.

Örnek : $P_1(0,1,2)$ noktasında bulunan, $Q_1=2.10^{-5}$ (C) noktasal yükünün $P_2(2,4,5)$ noktasındaki $Q_2=10^{-6}$ (C) yükine boşluka uyguladığı kuwerti bulunuz?

Cözüm:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{12} &= (x_2-x_1)\mathbf{a}_x + (y_2-y_1)\mathbf{a}_y + (z_2-z_1)\mathbf{a}_z \\ &= (2-0)\mathbf{a}_x + (4-1)\mathbf{a}_y + (5-2)\mathbf{a}_z \\ &= 2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

O halde $R_{12} = \sqrt{(2^2+3^2+3^2)/2} = 4.69$

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}} = \frac{2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z}{4.69}$$

bulduğumuz bu ifadeleti (2) nolu denklemeye taşırsak

$$F_2 = \frac{(2.10^{-5})(10^{-6})}{4\pi(1/36\pi.10^{-9})(4.69)^2} \frac{2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z}{4.69} =$$

$$= (3.49)\mathbf{a}_x + (5.23)\mathbf{a}_y + (5.23)\mathbf{a}_z \quad (\text{mN})$$

Coulomb Kanunuyla tanımlanan kuwert her iki yük arasındaki etkişine kuwertidir. Her iki yükte aynı şiddette fakat zıt yönde kuvetlere maruzdur. Örneğin 2 nolu yükün 1 nolu yük üzerindeki etkisi:

$$F_1 = -F_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{a}_{21} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{a}_{12}$$

dir. Eğer Q_1 yüküne birden fazla kuwert etkiyorsa, herbir yükün etkiyi vektörel olarak toplanarak, Q_1 yüküne etkiyen bileşke kuwert bulunabilir.

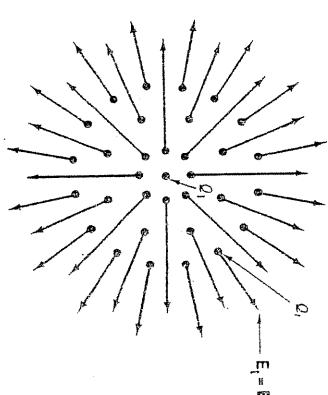
2.2. NOKTASAL YÜKLERİN ELEKTRİK ALANI

Sabit bir Q_1 yükü etrafında ikinci bir Q_1 test yükü yavaşaça döndürülürse test yüküne her noktada bir kuwert etkiyi. Yani bir kuwert alanının varlığı ortaya çıkar. Birim yük başına etkiyen kuwert

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{11}^2} \mathbf{a}_{11} \quad (3)$$

olarak ifade edilir. Görtülüüğü gibi bu (3) ifadesi test yükünün büyüklük yada işaretine bağlı değildir. Test yükünün değeri artıp azaldıkça ona etki eden kuwertte o nisbettte artıp azalacaktır. Test yükü işaret değiştirdiğinde kuwertin yönü de değişecektir; ancak her halükarda többüğe olan oranları sabit kalacaktır. Bu sonuç bir vektör alanını tanımlar. Şekil 2.1 de sabit bir noktada bulunan Q_1 yükünün civarında oluşturduğu elektrik alan vektörü gösterilmektedir.

Elektrik alan şiddeti metre bağına Volt olarak ölçülür. Ve E sembolüyle gösterilir. O halde



Şekil 2.1. Sabit bir noktada bulunan Q_1 yükünün civarındaki E Elektrik alanının haritası. Q_1 test yükü ile Q_2 kaynak yükü aynı işaretlidir.

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_t}{Q_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad (4)$$

yük yoğunluğu olarak kabul edilir. $\rho_L (\text{C/m})$ ile gösterilir. Katot işin tüpünün keskin bimi, çok küçük yarıçaplı bir hattaki yük dağılımı çizgisel yük dağılıma örneğidir. Elektron biminde elektron hareketi düzgün ve sürekli olduğunda (dc bimi gibi) ve magnetik alandan kaynaklanan moment göz önünde alınmazsa, elektron hıznesi durağan elektronlardan oluştuğu ve herhangi bir andaki durumu için aynı yük yoğunluğuna sahip olduğu düşünülebilir.

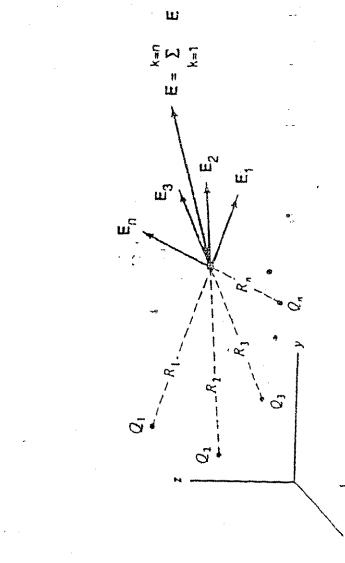
Burada R ile, Q yükünden elektrik alan bulunan herhangi bir noktaya olan uzaklık ifade edilmektedir.

Birden fazla yükün uzayın herhangi bir noktasında oluşturacağı toplam elektrik alan, her bir yükü oluşturdğu elektrik alan vektörlerinin toplamına eşittir. Şekil 2.2 de görüldüğü gibi bileske alan, n tane yük için:

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \mathbf{a}_{R1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \mathbf{a}_{R2} + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 R_n^2} \mathbf{a}_{Rn} \quad (5)$$

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{4\pi\epsilon_0 R_k^2} \mathbf{a}_{Rk} \quad (\text{V/m}) \quad (6)$$

bulunur.



Şekil 2.2. n tane yükün toplam elektrik alanı

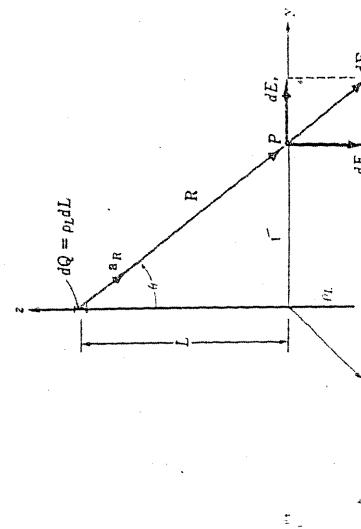
2.3. ÇİZGİSEL YÜK DAĞILIMININ ELEKTRİK ALANI

Uzun bir telin kalınlığı ihmal edilirse birim uzunluk başına taşıması olduğu yük çizgiseli

Şekil 2.3 de görüldüğü gibi silindirik koordinat sisteminde z ekseni boyunca -eğan $\pm z$ 'a kadar uzanmış ρ_L çizgisel yoğunluklu bir yük alalım. Uzayın herhangi bir noktasındaki \mathbf{E} elektrik alanının bulunum. Şekilden de görüldüğü gibi çizgisel yükün etrafında dolandıkça r ve z sabit kalmasına rağmen ϕ değişmektedir. Çizgisel yük herbir ϕ açısında aynı kalır. Bu durumda açısal simetri vardır ve hiçbir alan bileşeni ϕ ile değişmez.

r ve ϕ sabit kalmakta sağ -yukarı hareket edilirse, z nin değişimine bağlı olarak çizgisel yük yine sonsuz kalır. Buna ekse nel simetri denir ve alanın z nin fonksiyonu olmadığını ortaya koyar. Benzer işlemler ϕ ve z sabit bırakılarak, r nin değişimine göre tekstanlar, r artırsa alanın azalduğu, ortaya çıkar. Bu nedenle alan yalnız r ye bağlıdır.

Çizgisel yükün çok küçük yük elamanının noktasal bir yük gibi davranışını düşündürsek, alanın $E_\phi = 0$ olur. P noktasındaki alanın z bileşenleri tüm çizgisel yük dikkate alındığında birbirlerini götürür. Bu nedenle alanın sadece E_r bileşeni olduğunu ve r ye bağlı olduğunu görürür.



Şekil 2.3. Z ekseni boyunca uzanan çizgisel bir yükün, civarındaki P noktasında oluşturduğu elektrik alanının bulunması

P noktasındaki dE elektrik alan değişimini

$$dE = \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0 R^2} a_R \quad (7)$$

$$dE_r = \frac{\rho_L dL \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho_L dL r}{4\pi\epsilon_0 R^2 R} = \frac{\rho_L dL r}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

R^2 yeine eşiti olan R^2+r^2 yerleştirilirse

$$E_r = \int_{\infty}^{+\infty} \frac{\rho_L r dL}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + L^2)^{3/2}}$$

$L=r \cot\theta$ olduğu dikkate alınrsa;

$$E_r = \frac{\rho_L r}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} \frac{1}{\sqrt{L^2 + r^3}} \right)_{\infty}^{+\infty}$$

$$E_r = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (8)$$

Problem değişik yollarda da çözülebilir. Buna bir tanesi de integral değişkenini θ açısı olarak ele almak ve diğer değişkenleri θ açısı cinsinden ifade ederek (7) denklemi çözmektedir. Bunu alım alırmak üzere öğrenciyeye bırakıyoruz.

2.4. YÜZEYSEL YÜK DAĞILIMININ ELEKTRİK ALANI

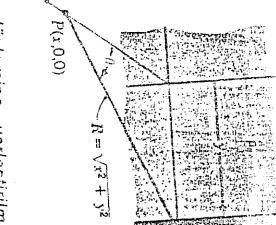
Paralel levhali kondansatörlerdeki, iletim hatlarının iletken yüzeylerindeki yük dağılımları yüzeysel yük dağılımlarıyle ifade edilir. Yüzeysel yük yoğunluğu ρ_s (C/m^2) ile gösterilir.

Örnek 2.1. $y-z$ düzleme yerleştirilmiş ρ_s yüzeysel yükülü $P(x,0)$ noktasında oluşturacağı elektrik alanını bulalım.

Cözüm. Şeklin simetrisi inceleinirse alanın y ve z ile değişmediği görtür. Bu nedenle sadece E_x vardır. Ve bu bilesen sadece x in fonksiyonudur. (Bakınız Şekil 2.4)

Tabakayı sonsuz sayıda dy kalınlıkçı çizgisel yük dilimlerine ayıralım. Bu durumda çizgisel yük yoğunluğu $\rho_L=\rho_s dy$ ve P noktasına olan uzaklık $R=\sqrt{x^2+y^2}$ olur. O hálde alan

Şekil 2.4 $y-z$ düzleme yerleştirilmiş sonsuz boyaklı bir levhanın P noktasındaki elektrik alanının bulunması



tüm dilimler dikkate alınrsa:

$$dE_x = \frac{\rho_s dy}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dy}{x^2 + y^2} = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \arctg \frac{y}{x} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$E_x = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

Eğer P noktası negatif x ekseniinde sezikirse; $E_x = -\rho_s / 2\epsilon_0$ olur. Yük yoğunluğunu pozitif olarak bulmuş olduğumuz bu bağıntıyı, negatif yük yoğunluklarının da dikkate alacak şekilde genişletmek istenirse, a_n yüzeye dik birim vektör olmak üzere

(9)

$$E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_n$$

yazılır.

Eğer $-\rho_s$ yük yoğunluğu ikinci bir levha $x=a$ düzleminde bulunuyorsa. Toplam alanı her bir levhanın alana katkısını dikkate alarak bileske alan bulunabilir. $x>a$ bölgesinde

$$E_+ = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad E_- = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad E = E_+ + E_- = 0$$

ve $x<0$ bölgesinde bileske alan

$$E_+ = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad E_- = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad E = E_+ + E_- = 0$$

ve $0 < x < a$ aralığında ise:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \mathbf{a}_x$$

(10)

olur. Bu (10) ifadesi levhaların boyutlarının levhalararası uzaklığa göre çok büyük olduğu hava aralıkları kondansatörler için pratikte uygulanabilir. Kenarlarından uzakta levhalar arasındaki bir noktadaki alan bu bağından hesaplanır. Kondansatörün dışındaki alan ideal durumlar için sıfır kabul edilebilir.

2.5.HACIMSAL YÜK DAĞILIMININ ELEKTRİK ALANI

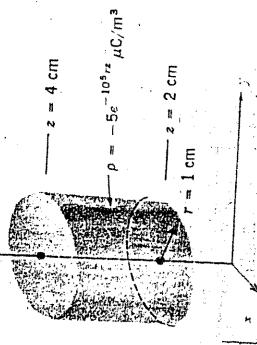
Yükler belirli bir hacim içinde sürekli dağılmışsa ρ_v (C/m³) hacimsel yük yoğunluğu ile ifade edilir. Örneğin elektron tabancasında; katot ve Kontrol grid arası gibi çok küçük aralıklarda ayrılmış çok sayıda yüklerle dolu bölgeyi dikkate alalım. Çok küçük parçacıkların dağılmının yerdeğiştirmesi hacimsel yük yoğunluğu gibi sürekli bir yük dağılmayı tanımlanabilir.

Bir Q yükü, hacimsal yük yoğunluğu cinsinden

$$Q = \int_V \rho dv \quad (11)$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.2 Şekil 2.5 de gösterilen 2 cm uzunluklu bir elektron hüzmesinin toplam yükünü bulalım. Herhangi bir andaki hacim yük yoğunluğu $\rho = -5 \cdot 10^{-6} e^{-10rz}$ (C/m³) olsun



Şekil 2.5 Hacimsel yük yoğunluğununa sahip silindirin toplam yükünün hesabı

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \mathbf{a}_x$$

Çözüm: (11) nolu bağıntı uygulayalım.

$$Q = \int_{0.02}^{0.04} \int_0^{2\pi} \int_0^{0.01} -5 \cdot 10^{-6} e^{-10rz} r dr d\theta dz$$

$$= \int_0^{0.01} -10^{-10} \pi (e^{-2000r} - e^{-4000r}) dr = \frac{-\pi}{40} (\mu C)$$

bulunur.

Bu elektron hüzmesi içinde elektronlar ışık hızının %10'u hızla hareket etdiyorsa akım, $I = \Delta Q / \Delta t$ formülüyle hesaplanabilir. $\Delta t = Yol / hız = 2/3$ (ns) ve

$$I = \frac{-(\pi/40) \cdot 10^{-12}}{(2/3) \cdot 10^{-9}} \equiv 118 \mu A$$

bulunur. ΔQ yükünün oluşturduğu alan şiddeti ise

$$\Delta E = -\frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R = \frac{\rho \Delta \vartheta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$

olur. Tüm hacimdeki yük elemanları dikkate alınrsa

$$\mathbf{E} = \sum_{m=1}^M \frac{\rho \Delta \vartheta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$

$\Delta \vartheta$ hacminin sonsuz kütüklük olduğunu ve yük sayısının sonsuz tane olduğunu düşüntük toplam simbolu yerine integral alınamaz.

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad (12)$$

bulunur.

Alan Çizgileri. Bir vektör alanın temsil etmek için alan çizgileri kavramından da faydalanan Elektrik alan çizgileri hehangi bir noktasında Elektrik alanına teğet olan sürekli eğilidir. Alanın kuvvetli olduğu yerde çizgiler sık, zayıf bölgelerde de seyrekleşir. Bir eğriliğin içine herhangi bir noktaya yerleştirildiğinde ivmelemeleri alan çizgisi

üzerinde hareket eder. Alan çizgilerini basitleştirmek için iki boyutta incelemek gerekir. Bu nedenle alanın z bileşeni $E_z=0$ olsun. Herhangi bir noktadaki alan bileşenleri için

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{dy}{dz} \quad (13)$$

yazılabilir. $\rho_L=2\pi r_0$ olan çizgisel bir yük yoğunluğunun alan çizgilerini veren bağıntı $E=L/r$ ar olduguına göre Kartezyen koordinatlarında;

$$\mathbf{E} = \frac{x}{x^2+y^2} \mathbf{a}_x + \frac{y}{(x^2+y^2)} \mathbf{a}_y$$

olur (13) nolu bağıntı uygulanırsa, çizgisel yük dağılımı için alan çizgilerini veren bağıntı

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \text{veya} \quad \ln y = \ln x + \ln c$$

ve buradan $y=Cx$ bulunur. C'ye çeşitli değerler verilecek herbir durum için Şekil 2.1'deki gibi simetrik alan çizgileri elde edilir. Yükün yakınında alan çizgileri sık, yíktan uzaklaşıkça çizgilerin sıklığı azalır.

Örnek 2.3. $E = 2(y-1)a_x + 2x a_y$ ile verilen bir elektrostatik alanda bulunan P(-2,7,10) oktasından geçen alan çizgisi bulalım.

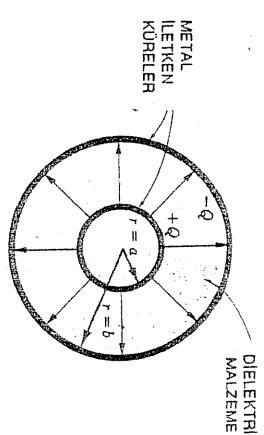
Cözüm.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{2x}{2(y-1)} \text{ den} \quad (y-1)dy = xdx$$

buradan $0,5(y-1)^2 = 0,5x^2+C$ ve eğri P noktasından geçtiğine göre $0,5x^2+2+C, c=16$ olur. halde eğrinin denklemi $(y-1)^2-x^2=32$ bulunur.

2.6. ELEKTRİK AKI YOĞUNLUĞU VE GAUSS KANUNU

Elektrik yüklerinin civarındaki elektrik alanlarını görsel olarak daha iyi anlayabilmek ve krostatik problemlerin çözümünde kolaylık getirmesi bakımından elektriksel akı kavramı oluşturulmuştur. 1837 de Michael Faraday Şekil 2.6 da gösterilen aynı merkezli iletken iki evi yalıtkanla ayıracak içteki kütreyi Q yüküyle yíklediğinde dış kütreninde -Q yükü ile dendiğini gösteren elektriksel akı kavramını geliştirmiştir.



Şekil 2.6. İççe girmiş yükü kütrelere arasındaki elektriksel akı

Faraday bu deney sonunda iletken kütrelere arasında dielektrik ortam olmasına rağmen iç kütrenin yüklenmesiyle dış kütreninde zit işaretli yükle yükleniğini, iç kütreden dış kütreye doğru bir "deplasman" yerdeğiştirme olduğu sonucuna vardı. Bu yerdeğiştirme akışına deplasman akısı veya elektrik akısı denir. İç kütrenin daha fazla yüklenmesi dış kütrede daha fazla negatif yük toplamasını doğurur. Elektriksel akı iç kütredeki yükde doğru orantılı olarak artar. Elektrik akışını Ψ ile içteki kütrenin yükünü Q ile gösterirsek $\Psi = Q/C$ yazılır. İç kütrenin yançapı a, dış kütrenin yançapı b ise, iç kütrenin birim yüzeyindeki elektriksel akı yoğunluğu $Q/4\pi a^2 (C/m^2)$ olur. Elektriksel akı yoğunluğu vektörel bir alan olup D ile gösterilir. Birazın deplasman akısı da denilir. D'nin yönü o noktadaki akı çizgilerinin yönündedir. Birim yüzeyden geçen akı çizgilerinin sayısı büyüklüğünü verir. Şekil 2.6'ya göre iç ve dış kütrelereki elektriksel akılar radyal yönde olup değerleri sırasıyla;

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi a^2} \mathbf{a}_r \quad \text{ve} \quad \mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi b^2} \mathbf{a}_r$$

dir, herhangi bir r uzaklığında ($a < r < b$) deplasman

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

dir. İç kütre gitmekçe küçülerek noktalı bir Q yüküne dönmesi durumunda, bir r uzaklıktaki şutulmuştur. 1837 de Michael Faraday Şekil 2.6 da gösterilen aynı merkezli iletken iki evi yalıtkanla ayıracak içteki kütreyi Q yüküyle yíklediğinde dış kütreninde -Q yükü ile

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad (14)$$

olur. Bu denklemler noktasal bir yükün r uzaklığındaki elektrik alanını bağıntısıyla karşılaştırılırsa boşluk için

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

bulunur. Hacimsel bir ρ_v yük dağılımı için

$$\mathbf{D} = \int_V \frac{\rho d\Omega}{4\pi R^2} \mathbf{a}_r$$

olur.

Gauss Kanunu ve Uygulamaları. Faraday deneyinin sonuçları Gauss Kanunu'nda toplanabilir. Yani "Herhangi bir kapalı yüzeyden geçen elektriksel akı yüzeyin çevresi"ndeki hacim içinde kalan elektriksel yüklerin toplamına eşittir. Kapalı yüzey s ise, $d\mathbf{s}$ yüzey elemanı vektörünü göstermek üzere

$$\Psi = \int_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$$

yazılır. Burada Q kapalı yüzeyin içindeki toplam yükü gösterir. Yükler ρ_v yoğunluğu ile dağılmışsa

$$\Psi = \int_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho_v dV$$

olur.

$$Q = \int_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = D_s \int_{\text{yanal}} ds + 0 \int_{\text{üst}} ds + 0 \int_{\text{alt}} ds = D_s 2\pi L$$

Kism

buradan

$$D_s = D_r = \frac{Q}{2\pi L} = \frac{\rho_L}{2\pi r}$$

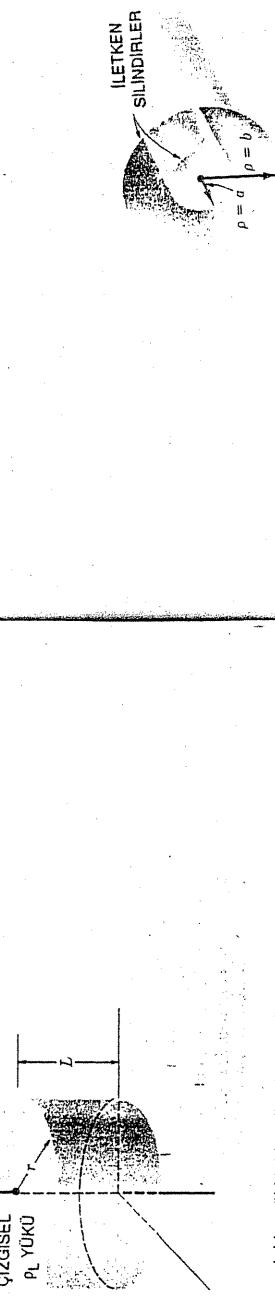
bulunur. Veya

$$E_r = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ olur.}$$

Örnek 2.4 ρ_L yük yoğunluklu sonsuz uzunluklu çizgisel bir yük z eksenine oturmuş olsun. Uzayın herhangi bir noktasındaki elektrik alanını bulalım.

Cözüm. Daha önceki bilgilereinden deplasman vektörünün bu probleme sadece radial

$D = D_r \mathbf{a}_r$ olup D_r ının fonksiyonudur. D_r nin her zaman dik olacağı bir kapalı yüzey olarak r yan çaplı bir silindir seçelim boyu L olsun Gauss Kanunu uygulsak (bakınız Şekil 2.7)



Şekil 2.7 Sonsuz Uzunluklu yükü bir telin Gauss Yüzeyi. D silindir yüzeyine dik

Şekil 2.8 Koaksiyel kablo silindirler arasında Elektriksel akı oluşturur.

Şekil 2.8 Koaksiyel kablo silindirler arasında Elektriksel akı oluşturur.

olduğuna göre iç silindin L uzunluğuna düşen yük

$$Q = \int_{z=0}^L \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_s a d\phi dz = 2\pi a L \rho_s$$

$$\mathbf{D} = \frac{a\rho_s}{r} \mathbf{a}_r \quad (a < r < b)$$

olur. Bu ifade çizgisel yük cinsinden de, ifade edilebilir. $\rho_L = 2\pi a \rho_s$ konusunda $\mathbf{D} = \rho_L / 2\pi r$ bulunur.

$\int_{\text{ç}} \rho_s dV$ silindirden gelen herbir elektrik aktı çizgisi dış silindide son bulunduğuna göre dış silindirdeki toplam yük

$$Q_{\text{dis}} = -2\pi a L \rho_s i_{\text{ç}}$$

$$2\pi b L \rho_s i_{\text{ç}} = -2\pi a L \rho_s i_{\text{ç}}$$

$$\text{veya } \rho_s i_{\text{ç}} = -a/b \rho_s i_{\text{ç}} \text{ olur.}$$

$$r > b \text{ olursa toplam yük sıfır olacağдан}$$

$$\mathbf{D}_{\text{ç}} = 0 \quad (r > b) \text{ olur.}$$

Böylece koaksiyel kablo yada kapasitörün dışında bir alan olmadığı dış ilekkenin ekranlama yaptığı anlaşılmaktadır. Benzer şekilde iç silindirin içinde elektrik alanının sıfır olduğunu söyleyebiliriz.

Sayısal uygulama: Koaksiyel kablonun boyu 50 cm, yarıçapları 1 mm ve 4 mm olsun. İç ilektenin iç silindirdeki toplam yük 30nC , ve silindirler arası ortam hava ise;

$$\text{iç silindirin yüzeysel yük yoğunluğu } = \rho_{s,\text{ç}} = Q_{\text{ç}} / 2\pi a L = 9.55 (\mu\text{C/m}^2)$$

İç silindirin yüzeysel yük yoğunluğu $= \rho_{s,\text{ç}} = Q_{\text{ç}} / 2\pi a L = 9.55 (\mu\text{C/m}^2)$

$$\mathbf{D}_{\text{ç}} = \frac{a\rho_s}{r} \mathbf{a}_r = \frac{9.55}{r} (\text{nC/m}^2), \mathbf{E}_{\text{ç}} = \frac{\mathbf{D}_{\text{ç}}}{\epsilon_0} = \frac{1079}{r} (\text{V/m})$$

olur. $r > 4$ mm ve $r < 1$ mm aralıklarında \mathbf{E} ve \mathbf{D} sıfırdır.

kanunuunu uygulamasında özel Gauss yüzeyleri seçidiği görüldü. Bir yüzeyin Gauss yüzeyi olabilmesi için aşağıdaki şartların gerçekleşmesi gerektir.

1. Yüzey kapalı olmalıdır.
2. Yüzey üzerinde herbir noktada \mathbf{D} vektörünün teğetsel veya normal bileşenlerinden birisi bulunmalıdır.
3. \mathbf{D} nin dik olduğu yüzeyin tüm noktalarında, \mathbf{D} aynı değere sahip olmalıdır.

2.7 DİVERANSIN FİZİKSEL ANLAMI

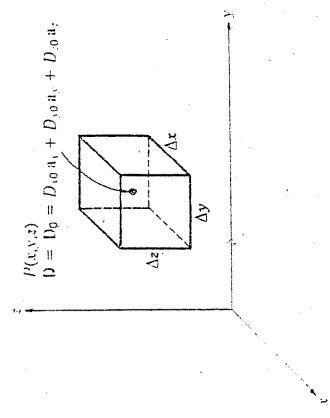
Gauss kanunu simetrik olmayan yük dağılımlarına uygulamak için diverans kavramından faydalанılır. Bir D alanının kapalı bir yüzey üzerinde yaklaşık sabit (kaldı) kabul edilerek, D nin çok küçük bir değişmesi, Taylor açılımının ilk iki terimi ile ifade edilebilir. Gauss yüzeyinin çevrelemiş olduğu hacim azaldıkça dana doğru bir sonuç elde edilebilir. Burada, daha önceki Gauss uygulamaları gibi \mathbf{D} yi telde etmeyip çok küçük bir yüzeyin çevrelemiş olduğu bölgedeki D nin değişimine ilişkin kısmını differansiyelli differansiyel denklem bulacağız. Bulacağımız bu ifade, bir \mathbf{D} vektör alanının uzayın herhangi bir P noktasına yerleşmiş fiziksel bir nicelek ile olan ilişkisini ortaya çıkaracaktır.

Kartezyen koordinat sisteminde uzayın bir bölgesine Şekil 2.9 daki gibi yerleşmiş bir P noktası göz önüne alalım. D alanının bu P noktasındaki değeri $D_o = D_{x0} \mathbf{a}_x + D_{y0} \mathbf{a}_y + D_{z0} \mathbf{a}_z$ olarak ifade edilsin. Şekilde görüldüğü gibi P noktasını çevreleyen küçük kubik yüzeyin kenarları $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ olsun. Bu kübik yüzeye Gauss Kanunu uygularsak

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$$

bağlınsızındaki eşitliğin solundaki integral, kubin herbir yüzeyine ilişkin aynı aynı alınıp bunların toplanmasıyla bulunur. Dolayısıyla altı adet integralin toplamından oluşur. Biz burada sadece ön yüzü için hesaplama yapıp sonucu tüm diğer yüzeyler içinde yapılmış olarak kabul ederek gerçekleştireceğiz. Kübik yüzeyin ön yüzüne ilişkin integral, D nin yüzey üzerinde sabit kaldığı ve yüzey elamanının çok küçük olması kabulüne göre;

$$\int_{\text{ön}} = \mathbf{D}_{\text{ön}} \cdot \Delta \mathbf{S}_{\text{ön}} = D_{x,\text{ön}} \Delta y \Delta z$$



Şekil 2.9. P noktası civarında D 'nin uzayal değişimini bulmak için kullanılan sansuz kütük hacimli kare yüzeyi.

yazılabilir. Burada D_x in ön yüzdeki yaklaşıklı ifadesini; P noktasındaki D_{x0} değeri cinsinden ifade edebiliriz. Kubün söz konusu ön yüzü, P noktasından $\Delta x/2$ uzaklığında olduğuna göre

$$D_{x,0} = D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

olur. Diğer yüzler içinde; D alanının bir P noktası civarındaki açılımından faydalananarak benzer işlemler tekrarlanırsa sonuç olarak

$$\int_S D \cdot d\mathbf{s} = Q = (\nabla \cdot D) \Delta V$$

O halde herhangi bir \mathbf{A} gibi vektör alanının diverjansı

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta V}$$

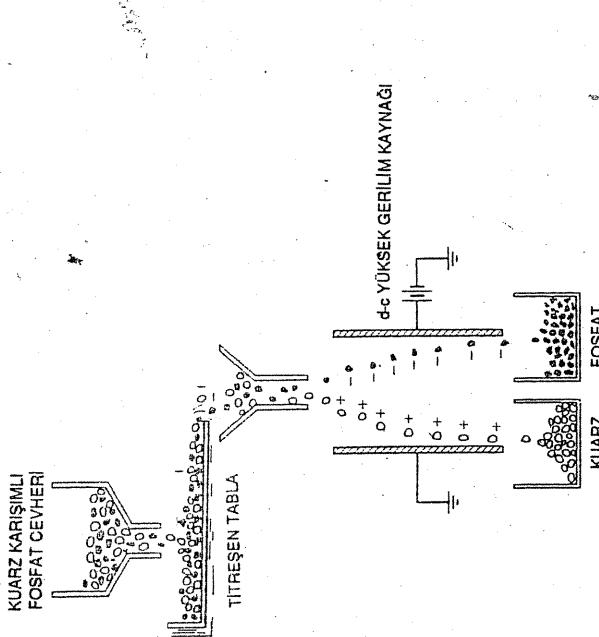
olarak ifade edilir. Yani \mathbf{A} vektör akı yoğunluğunun diverjansı; şok kübü kapalı bir yüzeyden, (bu yüzeyin çevrelediği hacim sıfır yaklaşıken) birim hacıma düşen çakan akı miktarıdır.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (\text{C/m}^3)$$

bulunur. Gauss kanununun noktasal bir formu olan bu ifade, elektromagnetik teorinin temel bağıntısı olup, ilerde Maxwell bağıntısı olarak tekrar tanıtılacaktır.

2.8 STATİK ELEKTRİK ALANLARININ UYGULAMALARI

Elektrostatik Ayırma. Elektrostatik kuvvetler iki farklı taneceğimsi malzemeyi birbirinden ayırmakta kullanılmıştır. Çalışma prensibi şekil 2.10 da görülen, ayrıncı cihazlardan endüstriye çeşitli minarellerin ayrışmasında geniş bir şekilde faydalanamaktadır. Titreşen besleyici kanala konulan fosfat kaya ve kuartz parçacıklarından oluşan iki mineral karışımının titresmesi sırasında aralarında oluşan stiritme nedeniyle kuartz taneleri pozitif, fosfat taneleri de negatif olarak yüklenir. Sürünmeden kaynaklanan bu yüklenme olayı; saçın tarakla taranması sonucu, saç ve taragnın zit işaretle yüklenmesine benzer.



Şekil 2.10 Elektrostatik Ayırma

Titreşen besleyici kanal, minarel parçaları üzerine yaklaşık 10^{-5} (C/kg) lük yüklenme oluşturur. Daha sonra bu yüklü taneler olusan geçerek, zit yüklü plakalar arasından akarken ayrırlar ve aynı kabarda toplanırlar.

Örnek 2.6 Şekil 2.10 daki ayıncının plakaları arasına 100 kV luk gerilim uygulanmaktadır. Plakalar aralığı 0,5 m olup, her bir plaka 1 m uzunluğundadır. Kuarz parçasının yük oranı $9 \cdot 10^{-6}$ (C/kg) olup, tanecikler plakaların ortasına serbest düşme ile ulaştığı kabul ederek, kuarz tanelerinin plakaların alt ucundan çıkışken konumunu belirtiniz.

$$E = \frac{d^2 x}{dt^2} a_x = 2 \cdot 10^5 a_x \quad (V/m)$$

Çözüm.
İşin yarısının yük kütte oranı $9/10$ (C_{kg}) olup, kalsilite, plumbonacarit, galenit ve pyritin konumunu eyiniz.

Şekil 2.11 daki koordinat sistemini seçelim. Yerçekiminden dolayı taneçikler aşağı doğru hızlanacaklardır.

$$\frac{dz}{dt} = g = 9.8 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

buradan ilk hız sıfır olduğu dikkate alınarak herhangi bir andaki hızı ve konumunu

$$v = 9,8 \text{ m/s}$$

$z = 4,9 t^2$ (m)
bulunur. Buradan taneciklerin levhayı geçme süresi, $z=1$ m olduğuna göre

$$\text{S) } \left(\frac{1}{4}, 9 \right) \equiv (0, 4)$$

olur. Pozitif x doğrultusunda elektrostatik kuvvet etkidiğine göre

$$\frac{d^2x}{dt^2} = Q$$

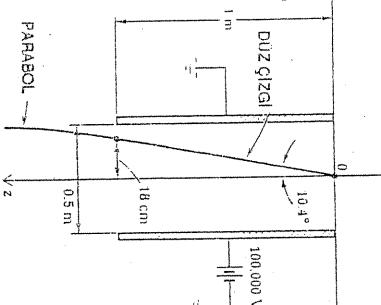
yazılabilir.

$z = 5,44 x$

bağıntısı bulunur. Görüldüğü gibi parçacıklar plakalar arasında çizgisel bir hareket yapmaktadır. levhalardan dışarı çıkmazsa sadece çekim kuvvetinin ekisinde kalarak yörüngesi parabol olup, $y=0$ düzlemindeki bir parabolüne benzerdir.

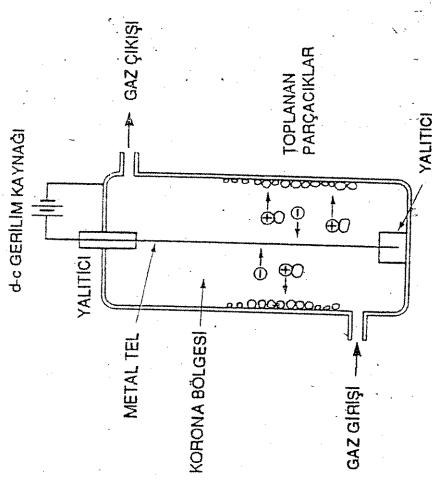
Elektrostatik Filtre. Elektrostatik filtreler, fabrikalarda oluşan atmosfere verilecek gazlardan artıç parçacıkların arındırılmasına sık sık kullanılır. Ayrıca evlerde, çiçek tozlarına ya da tozlarla karşı alerji duyan insanlar için klima olarak da yararlanılmaktadır. Şekil 2.12 de elektrostatik filtrenin temel yapısı gösterilmiştir. Çalışma prensibi Korana olayı denilen yüksək şiddetli alanların gaz boşalması oluşturmaması sonucunda ortaya çıkan plazma hareketine dayanır. Bölüm 4'de ayrıntılı olarak inceleneceği üzere iletkenlerin keskin ucu ve ince teller civarında şiddetli elektrik alanı mevcutur. Yeterince şiddetli bu tur alanlar ince teller civarında gaz boğalması suretiyle iyonizasyona sebebiyet verirler.

Elektrostatik filtrede, saflaştırılacak gaz veya hava metal silindirik bölgeye alınır. Metal silindirik kabın ortasındaki iletken telin civarında korana oluşturucak şiddette alan oluşturulması sağlandığında oluşan pozitif iyonlar, toplayıcı negatif elektrotlara giderek yapışır.



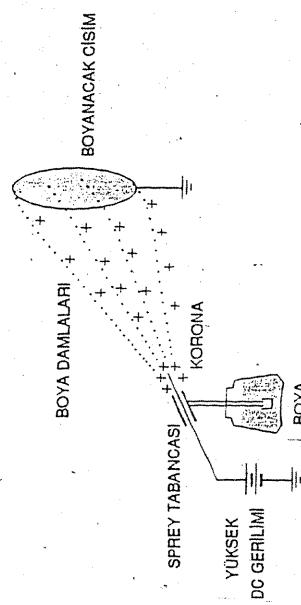
Şekil 2.11 Kuariz parçasının yörüngesinin bulunması
Levhalar arasında elektrik alan ise

Xerography. Foto iletken malzeme ve statik elektrik kullanmak suretiyle görüntü kaydetme teknigidir. 1930 larda keşfedilen bu sistem günümüzde yaygın bir şekilde, bürolarda fotokopi cihazı olarak, mikrofilm büyütümlerinde faksimile şöglütmalarında ve bilgisayar - data printinge kullanılmaktadır.

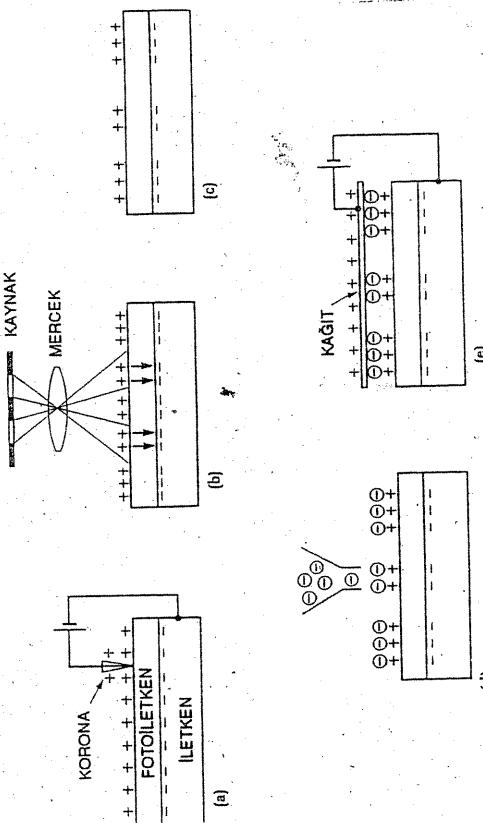


Şekil 2.12. Elektrostatik filtre. Koranada oluşan pozitif iyonlar boyanın kabını negatif kollektörlerine giderken çıkış yapısır.

Elektrostatik Boyama. Elektrostatik filtreye benzer bir prensiple çalışan bu sisteme bir korona ile yüklenen sprey tabancasından püsküren boy, korona elektrotundan daha düşük potansiyelde tutulan hedefe yöneltilir. Ve böylece boyaya partiküller elektrostatik kuvvet ekisinde kalarak hedefe yerlesirler. Bu metod sayesinde boyama verimi olan %40 dan % 70 e yükselmiştir. (Bakanız Şekil 2.13)



Şekil 2.13 Elektrostatik boyacı püskürme



Şekil 2.14. Xerography (a) Foto iletken tabakanın yüklenmesi, (b) Foto iletken tabakanın ışınlanması, (c) Elektrostatik görünüyü oluşumu (d) Karbon taneciklerinin yüklenmesi (e) Karbon taneciklerinin kağıda geçışı

Şekil 2.14 (a) da görüldüğü gibi, 20 - 100 (μm) kalınlığında amorf selenium gibi ışınabilir malzeme ile metal iletken kaplanır. Foto iletken malzemede, ışığa maruz kalan bölgeler iletken, maruz kalmayan karanlık bölgeler ise yahikan özellikle sahipür. İlk olarak Korona yüklenmesi yoluya Foto iletken yüklenerek xerography işlemi başlanır. Bu işlem, zat yüklerin foto iletken malzemede düzgün dağılmaması sağlanmak için kararlılıkta yapılır. İkinci adım Şekil 2.14 (b) de görüldüğü gibi foto iletken üzerine ışık düşürülerek bu bölgeler iletken olurken, karanlıkta kalan bölgelerde de yüklerin değişimmemesi sağlanır. Işık düşen bölgelerdeki iletkenlik

söz konusu bölgeye düşen ışık şiddetine bağlıdır. Böylece Şekil 2.14 (c) de görülen elektrostatik kuluçka görüntüleri oluşur. Daha sonra elektrostatik görüntüü üzerine 2.14 (d) de görüldüğü gibi negatif yükü karbon partikülleri dağıtır. Yük miktar fazla olan bölgeler daha fazla karbon partikülünü çekmiş olarak böylece foto ileken malzeme üzerinde karbon partikülleri tutulur. Ve pozitif yüklü kağıt görüntü düzlemine yerleştirildiğinde karbon partiküllerini kağıda Şekil 2.14 (e) de görüldüğü gibi yapısını suretiyle foto ileken levhadaki görüntününin kağıda geçmesi sağlanır. Plaka temizlenerken, tekrar yüklediğinde bu işlem aynı çevrimle tekrarlanabilir.

Problemler.

2.1. $20(\mu\text{C})$ luk dört eşit yük x ve y eksenlerinde ± 4 noktasına yerleştirilmişdir. (0,03)

noktasındaki $100(\mu\text{C})$ luk yükle etkilenen kuweti bulunuz?

2.2. $\rho_L=20\text{nC/m}$ çizgisel yük yoğunluklu bir tel $x=2$ m, $y=-4$ m noktasından geometrededir. (-2, -1,4)m deki elektrik alanını bulunuz?

2.3. $z=5$ m ye yerleştirilmiş $\rho_s=1/3(\pi\text{n.C}/\text{m}^2)$ yük yoğunluklu bir levha ile $z=-3(\text{m})$, $y=3(\text{m})$ ye yerleştirilmiş $\rho_L=25/9(\text{n.C}/\text{m})$ çizgisel yükünün $(x, -1,0)$ m noktasında oluşturduğu elektrik alanını bulunuz?

2.4. \vec{t} içe girmiş üç küresel yüzeyin yan çapları; a, b, c ve yükleri $Q_a=2(\text{nC})$, $Q_b=1(\text{nC})$, $Q_c=1(\text{nC})$ dir. Gauss Kanunundan faydalananark tüm bölgelerdeki deplasmanı bulunuz? $b=2a(\text{m})$ ve $c=3a(\text{m})$ kabul ederek D, E grafiğini çiziniz.

2.5. Deplasman akısı aşağıda verilen herbir durum için ρ_v yük yoğunluklarını bulunuz?

- 100 $a_y(\text{c}/\text{m}^2)$,
- $100yz_y(\text{c}/\text{m}^2)$
- $100x^2 a_x + 100y^2 a_y (\text{c}/\text{m}^2)$

2.6. Uzayın belirli bir bölgesinde D alanının yalnız x bileşeni olduğu bilinmektedir. $\text{Div.D}=3x^2 (\text{c}/\text{m}^3)$ olduğuna göre D nin ifadesini bulunuz?

2.7. Silindirik koordinatlarında $F=ra_r-3a_z$ ile verilen alanı $(4,600,2)$ noktası için birim vektöriyle birlikte silindirik koordinatlarında ve karzyen koordinatlarda ifade ediniz?

2.8. $E=(4/x)a_x-(1/y)a_y$ şekilde verildiğine göre alan çizgilerini veren bağıntıyı bulun ve çiziniz?

STATİK ELEKTRİK ALANLARINDA ENERJİ VE POTANSİYEL

Küçük uzaklıklarla biteninin ayrılmış zit işaretli yüklerle ilişkin elektrik alanının hesaplanması gereken problemlerde uygun Gauss yüzeyi seçmek hayatı zordur. Coulomb kanunu ise bu gibi problemlerin çözümünde, bazı güçlüklerle birlikte uygulanabilemektedir. Böyle durumlarda elektrik alan, uygun bir skalar fonksiyondan faydalananarak ta hesaplanabilir. Bu skalar fonksiyona potansiyel fonksiyonu yada potansiyel alanı denir. Bu bölümde, elektrik alanının bulunmasında yatarlı bir kavram olan elektriksel potansiyel kavramı çeşitli yük türleri için inceleyeceğiz ve yüklerin belirli bir hacimde toplanması durumunda oluşturacakları potansiyel enerjisi ilişkin bağlantılar elde edilecektir.

3.1. ELEKTRİK ALANDA HAREKET EDEN YÜKÜN ENERJİSİ

Bir Q test yükü, bir elektrik alanına zıt yönde ivmeli hareket ettiğinde, yükle alanın uyguladığı kuvvete zıt yönde fakat eşit şiddette bir kuvvet uygulanır. Bu durum enerji uygulamasını yada iş yapmasını gerektirir. Eğer yük alan yönünde hareket ederse, enerji harcanası negatif olur. Fakat iş yapmaz. İşi alan yapar.

E elektrik alanında bir Q yükünü dL kadar hareket ettirincek, bu yükle etkilenen kuwet

$$\mathbf{F}_E = Q \mathbf{E}$$

olarak a_L , dL yönünde birim vektörü göstersin. Buna göre uygulanan kuweti;

$$\mathbf{F}_{\text{uyg}} = -QE \cdot \mathbf{a}_L$$

olar. Ve harcanan enerji (dişardan Q yüküne yapılan iş);

$$dW = QE \cdot dL \quad (1)$$

olur. Yük belirli bir B noktasından A noktasına hareket ettiğimizse;

$$W = - \int_B^A QE \cdot dL$$

(2) bağntusundaki skalar çarpım yapılırsa

$$W = Q \int_B^A E_L dL$$

olur. Burada E_L ; E nin dL boyunca bilesenidir. Q yükünün düzgün bir elektrik alanında hareket etmesi durumunda (2) bağıntısı

$$W = Q E L_{BA}$$

yazılabilir. Bu son başlığı yapılan işin yalnız QE ve L_{BA} ya bağlı olduğunu, izlenen yola bağlı olmadığını gösterir. L_{BA} uzaklıği diz çizgi yada seçilecek herhangi bir eğri olabilir. dL yay uzunluğunun her üç koordinat sisteminde ifadesi aşağıda verilmiştir.

$$dL = dx_A + dy_A + dz_A \quad (\text{Kart}) \quad (3)$$

$$dL = dr_A + rd\phi_A + dz_A \quad (\text{Sili.}) \quad (4)$$

$$dL = dr_A + rd\theta_A + \sin\theta d\phi_A \quad (\text{Küres.}) \quad (5)$$

Örnek 3.1 r_L çizgisel yoğunluklu z eksenine yerlesmiş sonsuz uzun bir hattın etrafında, r_1 yarıçaplı bir dairede pozitif bir yükü dağıtmakla yapılacak işi bulalım. (Şekil 3.1)

Cözüm. Elektrik alan ile izlenen yolu her an birbirine dik olduğu düşünüllürse yapılan işin sıfır olduğu ortaya çıkar. Şimdi cevabı sayısal olarak hesaplayalım. Silindirik koordinatlarda $dL = r_1 d\phi_A$ olur (Seçilen dairesel yörüngede $dr = dz = 0$.) Bu durumda iş;

$$W = -Q \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r_1} a_r r_1 d\phi_A \quad (6)$$

Eğer yük Şekil 3.1.(b) deki gibi r_1 ve r_2 arasında hareket etmiş ise $dL = dr_A$ olur. Ve yapılan iş

$$W = Q \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r} a_r dr_A = -\frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (7)$$

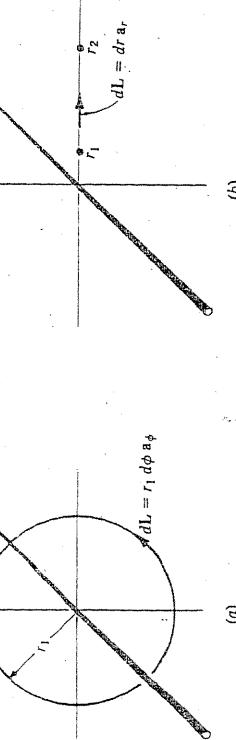
bulunur. Eğer yük $r=r_2$ den $r=r_1$ ye getirilmiş olsaydı $dL = dr_A$ yine aynı olduğundan yapılan iş

$$W = \frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

bulunur.

3.2. POTANSİYEL VE POTANSİYEL FARKI

Birim pozitif yükü elektrik alanında A noktasından B noktasına hareket ettirebilmek için yapılan işe potansiyel farkı denir.



Şekil 3.1 Çizgisel bir yükün alanında bulunan Q yükünün (a) dairesel yolu (b) radikal yolu

$$W = \frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Önceki Şekil 3.1(b) ye ait probleme yükün r_2 den r_1 e getirilmesi durumunda yapılan iş

olur. Yükler B noktasından A noktasına götürülmüş ise, B ve A noktaları arasındaki V_{AB} potansiyel farkı yük başına yapılan işi verir. V_{AB} nin tanımda B ilk noktası A ise son noktası olacak kabul edilir. B ilk noktasının potansiyeli sıfır seçilerek, A noktasının yükseltin sabit durumunu temsil etmesi sağlanır.

3.3. NOKTASAL BİR YÜK VƏ VÜK SİSTEMLERİNİN ELEKTRİKSEL POTANSİYELİ

$$V_{12} = \frac{W}{Q} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Noktasal Q yükünden radyal uzaklıklarda bulunan A ve B noktaları arasındaki potansiyel farkı; $V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = V_A - V_B$

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

olduğuna göre $V = \int dV = da$ olduğundan

$$V_{AB} = - \int_B^A E_r dr = - \int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

$r_B > r_A$ ise $V_{AB} > 0$ olur. Yani pozitif yükü B den A noktasına getirmekle dış kaynağı yaptığı iş pozitifdir. $V_{AB} = V_A - V_B$ olarak ifade edilir.

Bir potansiyel ifadesinin bir örneke sahip olması için sıfır potansiyel seviyesinde mutabakat sağlanmalıdır. Teorik olarak arz yüzeyi sonsuz uzun düzlemsel tabaka olarak kabul edilirse potansiyeli sıfır alınır. Ancak okyanusları aşan dalga yayılmıştan için küresel yüzeylerde sıfır potansiyelli olarak fazl edilir.

Sıkça kullanılan diğer bir sıfır referans noktası da sonsuzdur. Bir uçağın fininalı bulut yığımı içinde uçuşunda kanadının ucunda birikmiş yük civarındaki elektrik alanı ile ilgilendiğinde veya atom içinde alan incelendiginde söz konusu referans potansiyel seviyesi olarak sönüz alınır. Ayrıca koaksiyel kablolarla, dış iletken sıfır potansiyel seviyesi olarak seçilir.

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (7)$$

olur. Bu (7) bağıntısı skalar bir ifade olup, bir Q yükünden eşit uzaklıktada bulunan noktaların, merkezi Q yükünün bulunduğu nokta olan, eşpotansiyel küre yüzeyleri oluşturduğu gösterin.

Yükler birden fazla olduğunda toplam potansiyel herbir yükün söz konusu noktadaki potansiyelleri toplamna eşittir. Yani

$$V = \sum_{m=1}^n \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0 R_m}$$

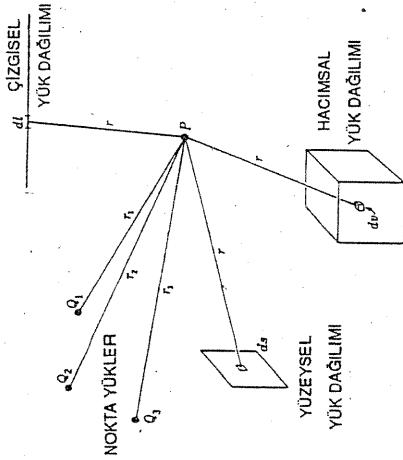
olur. Eğer yükler ρ yoğunluğu ile hacimsel, yüzeysel veya çizgisel olarak dağılmışsa yük elemanından R uzaklığındaki potansiyel sırasıyla

$$V = \int_{\text{hac}} \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad V = \int_{\text{yüz}} \frac{\rho_s ds}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad V = \int_{\text{çiz}} \frac{\rho_L dl}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (9)$$

olarak yazılır.

Eğer yükler Şekil 3.2 deki gibi çeşitli tiplerden oluşmuş ise P noktasındaki potansiyeli,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \frac{Q_n}{r_n} + \int \frac{\rho_L}{r} dl + \iint \frac{\rho_s}{r} ds + \iiint \frac{\rho}{r} d\theta \quad (10)$$



Şekil 3.2. Çeşitli tiplerin P noktasındaki toplam elektriksel potansiyeli, herbir yük dağılımının potansiyelleri toplamına eşittir.

Örnek 3.2 Şekil 3.3. de görüldüğü gibi kenar uzunluğu 1m olan karenin sağ ve üst köşelerine; $Q_1=1(pC)$, $Q_2=-10(pC)$ yükleri yerleştirilmiştir. $\rho_L=10(pC/m)$ yoğunluklu bir çizgisel yük bu karenin sol yüzüsünde bulunmaktadır. Karenin orta noktası olan P deki elektriksel potansiyeli bulalım.

Cözüm. Noktasal yüklerin P noktasındaki potansiyelleri

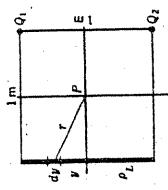
$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{10^{-12}}{0,707} - \frac{10^{-11}}{0,707} \right) = -0,115V$$

ve çizgisel yükün potansiyeli

$$V_L = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{y=0,5}^{0,5} \frac{10^{-11}}{\sqrt{0,5^2+y^2}} dy = +0,158 V$$

o halde toplam potansiyel

$$V = V_p + V_L = 43mV \text{ bulunur.}$$



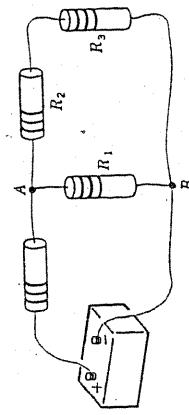
Şekil 3.3. A ve B noktalarını arasındaki potansiyel farkını veren

$$V_{AB} = V_A - V_B = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

bağıntısı izlenen yola bağlı olmayıp birim yükün kapalı bir eğride dolanması durumunda yapılan iş sıfıdır. Yani kapalı yol boyunca

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

olar. Burada E zamanla değişmemektedir. Şekil 3.4 deki gibi bir d-c devresi göz önüne alalım. A ve B gibi iki nokta seçelim. Birim yükü A noktasından R_2 ve R_3 üzerinden B noktasına ve R_4 üzerinden yeniden A noktasına taşıdığımızda yapılan iş (11) bağıntısı nedenyile sıfırdır. (11) bağıntısı Kirchhoff gerilim kanunuun bir formudur. Herhangi bir alan (11) denklemini sağlıyorsa o alana korunumuş olur denir.



Şekil 3.4 $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}=0$ bağıntısının uygulanabileceği bir basit devre

3.4. POTANSİYEL GRADYANT

Elektriksel potansiyelin hesabına dair şimdide kadar gördüğümüz, elektrik alanının

Çizgisel integrali veya yük yoğunluğundan faydalanan metodları hayli zor olup pratik değildir.

Potansiyelin hızla arttığı yörelerin tersidir. a_N birim vektördü es potansiyel yüzeyine dik ve daha yüksek potansiyellere doğru yönelmiş olsun. Bu taktikde elektrik alan vektörü yönelmiş olsun. Bu taktikde elektrik alan vektörü

Ancak

$$V = \int E \cdot dL$$

bağıntısını

$$\Delta V = -E \cdot \Delta L$$

(13)

$$E = -\frac{dV}{dN} a_N$$

(14)

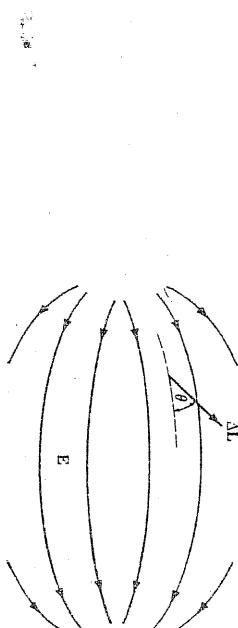
Şekilde yazarsak, V ile E arasındaki ilişki ortaya çıkar. Şekil 3.5 de E ve V her noktada değişir. $\Delta L = \Delta L a_L$ olarak yazılırsa (13) bağıntısı $\Delta V = -E \Delta L \cos \theta$ olur. Buradan

$$\frac{dV}{dL} = -E \cos \theta$$

bulunur. Herhangi bir noktada E ve ΔL sabit olduğuna göre ΔV potansiyel değişimini en büyük değerini $\cos \theta = 1$ olunca alır. Veya başka bir ifadeyle ΔL vektörü E ye zıt yönlü olur. Dolayısıyle

$$\frac{dV}{dL} = -E \cos \theta$$

elde edilir.



Şekil 3.5 dL yaracağı gösteren vektör E alanı ile θ açısı yapmaktadır. Alan çizgileri verilen kaynaklar şekilde gösterilmemiştir.

Sonuç olarak;

- 1.Potansiyelin uzaklıklarda değişiminin maksimum değeri elektrik alan şiddetini verir.
- 2.Bu maksimum değer E ye zıt yönde uzaklaşmakla elde edilebilir. Yani E nin yönü,

ve alanı doğuran hacimsel yük yoğunluğu ise;

$$\rho_V = V \cdot D = 35,4 \text{ pC/m}^3$$

bulunur.

$$D = \epsilon_0 E = 35,4 \times 32,2^2 + (5)^2 / 2 = 57,9 \text{ (V/m)}$$

Bu alanı bölgelikle kabul edersek Deplasman vektörünü

$$E_p = 48a_x - 32a_y + 5a_z \text{ (V/m)}$$

olarak bulunur. Örnek 3.3 Potansiyel fonksiyonu $V = 2x^2y - 5z$ olsun. P(4,3,6) noktasındaki alanı bulalım. o haldে alanın P noktasındaki değeri;

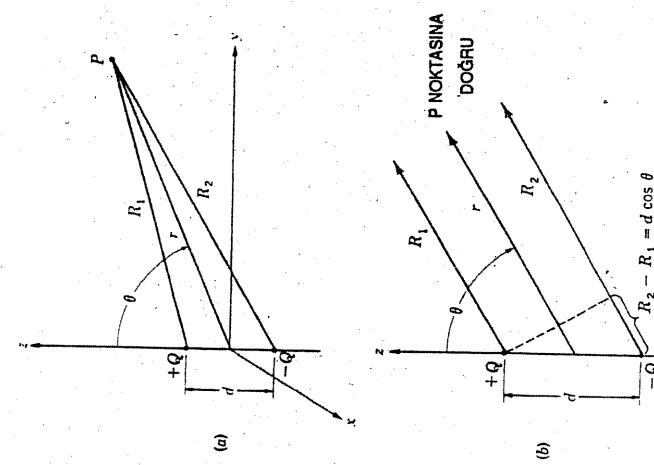
$$V_p = 2(-4)^2(3) - 5(6) = 66 \text{ (V)}$$

$$E = -\nabla V = -4xya_x - 2x^2a_y + 5a_z \text{ (V/m)}$$

3.5. STATİK ELEKTRİKSEL DİPOL

Dipol alanları ilerde de görüleceği gibi elektrik alanı içinde bulunan dielektrik malzemelerin davranışlarını açıklamak için gerekli önemli bir kavrandır.

Elektrik dipol; elektrik alan veya potansiyel hesaplanacak noktaya göre (Şekil 3.6 deki P noktası) çok küçük aralığa yerleştirilmiş zit işaretli iki yükten oluşan sisteme denir. P noktası karesel koordinatlarda r, θ ve $\phi=90^\circ$ olarak tanımlanmıştır. Yükler arası uzaklık d dir.



Şekil 3.6 Dipol Probleminin Geometrisi

Eğer bu sistemin P'de meydana getirdiği E alanını bulmak isterseniz karesel koordinatlarda iki bileşenin olduğunu ve sınırlarından dolayı E_ϕ nin sıfır olduğunu göz önünde bulundurmalıyız. Bilahare E alanından çizgi integrale gerçek V'yi bulmamız gereklidir. Ancak burada dikkat edersek çizgi integralinin nokta yükte olduğu gibi bir kapalı yol (gevrim) izlemesi, iki yük olmasının ve bu iki yükün bir dipol olarak incelenmesi nedeniyle gerçekleşmez. Bu nedenle biz işi diğer yoldan yani önce V'yi bularak bilahare gradyent operatör kullanarak E alanını bulacağımız. V bir skalar olduğundan ve P noktasında bu iki nokta yükün meydana

getireceği potansiyel herbir yükün potansiyelinin toplamı olacağından toplam potansiyel

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

olar. Çok uzak mesafelerde bu eşitlik $R_1=R_2$, $R_1 R_2=r^2$ ve Şekil 3.6b den $R_2 - R_1=d \cos\theta$ alınarak sonuc

$$V = \frac{Qd \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (16)$$

bulunur. $\theta=0$ ($\theta=90^\circ$) düzleminin sıfır potansiyelli olduğunu vurgulayalım. Küresel koordinatlarda gradyant ifadesi kullanılarak elektrik alan

$$\mathbf{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos\theta \mathbf{a}_r + \sin\theta \mathbf{a}_\theta) \quad (17)$$

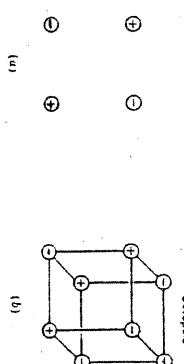
olarak bulunur. Bu bağntıda

$$\mathbf{P} = Q\mathbf{d} \quad (18)$$

olup elektriksel dipol olarak tanımlanır. Bu durumda

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_r = d \cos\theta \text{ olduğunu (16) bağntısı} \quad (19)$$

olarak ifade edilebilir. Görüldüğü gibi dipolün alan uzaklığın kübüyle, potansiyeli de karesiyle değişim göstermektedir. Quadripol ve Oktapol gibi değişik yük konfigürasyonları içinde, elektrik alan ve potansiyelin r uzaklığı ile değişimini inceleyebilir. Sonuç olarak yüksek mertebeden yük konfigürasyonlarında potansiyel ve alan daha hızlı değişim gösterir. (Bakınız tablo 3.1)



Sekil 3.7. Yük Konfigürasyonları (a)Quadrupol (b)Octopol

Tablo 3.1. Potansiyel ve Elektrik Alanının Değişik yük Yapılan İçin Uzaklıkla Değisimi

Konfigürasyon	Elektrik Potansiyeli	Elektrik Alan
Tek yük	r^{-1}	r^{-2}
Dipol	r^{-2}	r^{-3}
Quadrupole	r^{-3}	r^{-4}
Octopole	r^{-4}	r^{-5}

3.6. STATİK ALANLARDA ENERJİ YOGUNLUĞU

Bir positif yükün sonsuzdan sabit olarak duran bir başka yükün elektrik alanı içinde bir noktaya getirilip orada tutulması durumunda bu getirilen yük de \vec{d} kaynak tarafından bir iş yapılarak ona potansiyel enerji kazandırılmış olur. Bu yük serbest bırakıldığında sabit diğer yükten ivmelenerek uzaklaşacaktır. Yük sistemlerinin potansiyel enerjisini bulmak için \vec{d} käynagın yaptığı işten faydalanaçagız.

Tamamen yükten arındırılmış bir uzaya Q_1 yükünü sonsuzdan getirelim. Uzay boş olduğundan bu işlemde bir iş yapılması gerekmek, Q_1 in alanına başka bir Q_2 yükü getirilirse, Q_2 ile Q_1 yükünün söz konusu getirilen noktadaki potansiyelinin çarpımı kadar iş yapılır. Bu potansiyele $V_{2,1}$ dersek

$$Q_2$$
 yükü üzerinde yapılan iş = $Q_2 V_{2,1}$

ve bu işlemi, Q_3, Q_4, Q_5, \dots gibi yüklerin sonsuzdan getirilmesi durumuna genelleştirinsek

Yapılan toplam iş = potansiyel enerji = W_E

$$= Q_2 V_{2,1} + Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2} + Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3} + \dots$$

olar. Buradan faydalananarak toplam yapılan iş

$$W_E = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + \dots) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N Q_m V_m \quad (20)$$

buluruz. Bir bölgede $\rho_v dv$ miktarında yükü toplamak için yapılan iş integral ifadesiyle

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{hac}} \rho_v V dv \quad (21)$$

olarak yazılır.

Elektrostatik potansiyel enerjisi veren (21) nolu bağıntının yerine Deplasman vektörü cinsinden daha basit bir ifade bulmak için I. Maxwell bağıntısından faydalanalım.

$$\begin{aligned} W_E &= \frac{1}{2} \int_{\text{hac}} P_V V dv = \frac{1}{2} \int_{\text{hac}} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{D}) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{\text{hac}} [V \cdot (\nabla \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot (\nabla V)] dv \end{aligned}$$

Diverjans teoremini kullanılarak, Eşitliğin sağ ilk terimi yüzey integraline döşünürlü. (21) bağıntısındaki hacim tüm yükleri kapsayaçağrı için sonsuz seçilebilir. Dolayısıyle yüzeyde bu şekildeki seçenek bir hacmi kapsayan yüzey olacaktır. O halde

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{hac}} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{D}) \cdot dS - \frac{1}{2} \int_{\text{hac}} \mathbf{D} \cdot (\nabla V) dv$$

olar. V fonksiyonu $1/r$ ile \mathbf{D} , $1/r^2$ ile değişim gösterdiği ve yüzey r^2 ile değişim gösterdiği için, sağdaki ilk terim $1/r$ ile değişim göstererek limit durum için sıfır gider. Böylece bir elektrostatik alanda depolanan potansiyel enerji

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{hac}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{2} \int_{\text{hac}} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 dv \quad (22)$$

olarak bulunur. Bu ifadenin diferansiyelini alarak birim hacimde depolanan enerjiyi bulabiliriz.

$$\frac{dW_E}{dv} = \frac{1}{2} D \cdot E \cdot dv$$

$$\frac{dW_E}{dv} = \frac{1}{2} D \cdot E \quad (J/m^3)$$

Örnek 3.4. L uzunluğundaki bir kapasitor veya koaksiyel kablonun statik alanında depolanan potansiyel enerjisini bulalım.

Cözüm. Önceki bölümde; ρ_s iç iletken yüzeysel yük yoğunluğunu göstermek üzere

$$E = \frac{\rho_s}{\epsilon_0 r} a_r \quad a < r < b$$

bulunmuştur. Burada a iç silindir yarıçapı b göstermektedir. O halde

$$W_E = \frac{1}{2} \int_0^L \int_a^b \epsilon_0 \frac{\rho_s}{a_r^2} r dr d\phi dz = \frac{\pi L a^2 \rho_s^2}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

Bu sonuç V_a silindirler arasındaki potansiyeli göstermek üzere

$$W_E = \frac{1}{2} Q V_a$$

olarak yazılabilir. Bilindiği gibi bu ifade kapasitörde depolanan enerjidir.

PROBLEMLER

3.1. 8(μC) luk bir yük, $E=x\hat{a}_x + 2y\hat{a}_y$ alanında bir düş kuvvet tarafından $dL=-\hat{a}_x + \hat{a}_z$ (mm) yolunda hareket ettiirmektedir. Enerji değişimini bulun ve bu enerjinin elektrik alanında alındığını veya verdiğini açıklayınız.

3.2. $r_1=10(m)$ ve $r_2=20(m)$ arasında potansiyel farkı 50V dur. Potansiyelin nokta bir ydiken kaynaklandığını kabul ederek $r_s=50(m)$ uzaklıktaki potansiyeli bulunuz.

3.3. $V=x^2+y^2$ ile verildiğine göre E yi bulunuz.

3.4. $-4\pi \times 8.85 \text{ pC/m}$ çizgisel yükü (-5,0)m ve (-2,0)m nokaları arasında yerleştirilmişdir. Aynı büyüklükte pozitif başka bir çizgisel yük (2,0) ve (5,0)m nokalarına yerleştirildiğine göre (1,0)m noktasındaki elektrik potansiyelini (b) Elektrik alanını bulunuz?

3.5. I ve d şı yarıçapları 0,01 m ve 0,05m olan içe girmiş iletken silindirleri arasında elektrik alan $E=105/r a_r$ dir. Sağlananma ihmal edildiğine göre silindirin 0,5m uzunluğunda depolanan enerjiyi bulunuz.

Bölüm 4 İLETKENLER VE DIELEKTRİKLER

Önceki bölümlerde boşlukta statik E, D, V alanlarını ve yükleri incelenmiş. Bu bölümde yüklerin sabit hızla hareketini inceleyerek akım kavramını ele alacağız. Akım kavramı ise iletken ortamların tanımlamasını doğuracaktır. Sonra elektriksel polarizasyon özellikle sahip ortamlar olan dielektrik malzemeler tartışılacaktır.

İletken ortamlar; iletkenlik ve direnç kavramlarını, dielektrik ortamları; ise dielektrik sabiti ve kondansatör gibi devre analizinde sık sık kullanılan kavramların incelenmesine yol açacaktır.

4.1. AKIM VE AKIM YOĞUNLUĞU

Elektrik yüklerinin hareketi akım oluşturur. Birimi amper olup herhangi bir noktadan bir saniyede geçen bir különlik yük miktarı olarak tanımlanır. Herde görüleceği gibi metallerde akımı sebep elektronlar oluştururken akım desik hareketi denilen positif yüklerin hareketiliğinden de meydane gelebilir.

Birim yüzeyden geçen akım şiddeti akım yoğunluğu olarak tanımlanır. Ve J (A/m^2) vektörel ile gösterilir ΔS yüzeyinden geçen akım elemanı ΔI ise

$$\Delta I = J_n \Delta S$$

veya akım yoğunluğu yüzeye dik değilse;

$$\Delta I = J \Delta S$$

olar. Toplam akım ise

$$I = \int_S J \cdot dS \quad (1)$$

dir. Akım yoğunluğu; bir noktadaki hacimsel yük yoğunluğunun hızına bağlıdır. Bunun için x eksenine oturmuş kesiti S olan ve içinde D_x yoğunluğu yükler bulunan bir silindir düşünelim.

$E = E_x a_x$ alanı etkisi içinde kalan bu silindirin Şekil (4.1) de görüldüğü gibi ΔV hacmindeki ΔQ yükü, $\Delta Q = \rho_v \Delta S \Delta x$ olarak ifade edilebilir. Ait zamanda ΔS yüzeyinden geçen yük

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho_v \Delta S \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

olur. $\Delta t \rightarrow 0$ limit durumu için geçen akım

$$\Delta I = \rho_v \Delta S v_x$$

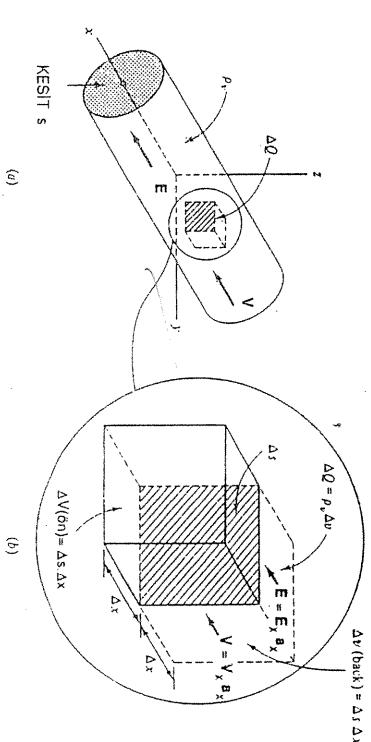
bulunur. Bunu akım yoğunluğu anlamında yazarsak

$$J_x = \rho_v v_x$$

olduğundan daha genel olarak,

$$J = \rho_v v \quad (2)$$

bulunur. Hareketli yüklerden oluşan ve (2) nolu bağlantıda ifade edilen akım yoğunluğu konveksiyon akım yoğunluğu denir. Bu tip akımlarda konveksiyon akımı denir. ρ_v yük yoğunluğu pozitif veya negatif olsa $E = E_x a_x$ ise J her zaman positif x doğrultusundadır.



Şekil 4.1 Akım yoğunluğu kavramının, $E = E_x a_x$ alanına maruz kalan bir silindir için incelenmesi.
Akım yoğunluğu vektörel pozitif ve negatif yüklerin hareketini kapsayacak biçimde daha

genel biçimde

$$\mathbf{J} = \rho_{vv} \mathbf{v}_+ + \rho_{vv} \mathbf{v}_-$$

şeklinde ifade edilir.

4.2. AKIM SÜREKLİLİĞİ

Kapalı bir yüzeyden geçen akım

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

şeklinde yazılabilir. Pozitif yükün yüzeyden dışa doğru akışı kapalı yüzey içindeki pozitif yüklerin azaltılmasıyla negatif yüklerin çoğalmasına sebep olur. Kapalı yüzey içindeki akım Q_i ile gösterilirse yükün azaltma oranı dQ_i/dt olur. Enerji korunumu gereği

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{dQ_i}{dt} \quad (4)$$

yazılır. (4) nolu denkleme negatif işaretin olup olmaması incelenen akım ve yönde bağlıdır. Devre teorisinde genellikle kapasitörün bir ucundan geçen akım o plakada zamanla yük artışı oranı ile ilgilidir. Bu nedenle akım dışa doğru akan tiptendir. Diverjans teoreminden faydalananak (4) nolu başlığını

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{hac}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv$$

$$\int_{\text{hac}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv = - \frac{d}{dt} \int_{\text{hac}} \rho_v dv$$

olar. Sabit bir yüzey için, türev kısmını türev halinde gösterilebilir.

$$\int_{\text{hac}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv = \int_{\text{hac}} - \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv$$

Herhangi bir hacim için geçerli olan bu bağıntı ΔV sonsuz küütük hacim içinde doğrudur.

Dolayısıyle

$$(\nabla \cdot \mathbf{J}) \Delta v = - \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \Delta v$$

ve buradan süreklik denkleminin noktası formu

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (5)$$

olarak bulunur. Diverjansın fiziksel anlamından faydalananak (5) denklemi, birim hacimdeki çok küçük bir hacimden ayrılan akım, herbir noktadaki birim hacimdeki yükün zamanla azalma oranına eşittir, şekilde yorumlanır. Yani hiçbir yük, bir yerdeki yük miktarında azalmaya sebep olmadan akıp gitmez.

Örnek 4.1 2mm yançaplı silindirik bir iletkeende akım yoğunluğu uzaklığa

$$J = 10^3 e^{-400r} \text{ (A/m}^2\text{)}$$

bağlıtsına göre değişmektedir. Silindirin kesitinden geçen toplam akımı bulunuz.

Gözüm.

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^{0.002} 10^3 e^{-400r} r dr d\phi = 7.51 \text{ mA}$$

bulunur.

4.3. METALIK İLETKENLER

Fizikte positif atom çekirdeğini çevreleyen elektronların davranışları elektronun toplam enerjisini ile tanımlanır. Bu toplam enerji kinetik ve potansiyel enerjilerin toplamıdır. Bir elektronu çekirdektен uzaklaştmak için ona enerji verilmesi gerekeceğinden, atomdaki herbir elektronun enerjisi negatiftir. Çekirdeğe yakın yörüngeler daha büyük negatif değerli enerjiye tekabül eder. Kuantum teorisine göre atomda, izin verilebilen belirli ayrı enerji seviyeleri vardır. Bu nedenle elektron bir seviyeye geçerken aynı enerji salar veya soğurur. Mutlak sıfır sıcaklığından bir normal atomda elektronlar en düşük enerji kabuklarını işgal edecek biçimde yerlesirler.

Metal veya elmas gibi kat kristallede atomlar çok sıkı, bir araya gelmiş olup, bitişik atomlar arasındaki etkileşme nedeniyle çok çeşitli elektronlar için değişik enerji seviyeleri vardır. Elektronların sahibi oldukları enerjiler geniş aralıklara ya da bandlara grublandırılabilir. Ve herbir band çok sayıda aynı enerji seviyesinden oluşur. En yüksek enerji seviyesinde bulunan elektronlara valans bandı elektronları denir. Eğer valans

bandında işin verilecek dala yüksek enerji seviyesi varsa veya valans bandı ileketenlik bandının düzince birleşmiş vaziyette ise, diş alan tarafından valans elektronlarına verilecek iia ve bir kinetik enerji elektron akışına sebep olur. Böyle bir kau malzemeye metalik iletken denir. Şekil 4.2 de O₉K de dolu valans bandı ve bog iletkenlik bandına sahip iletken gösterilmektedir.

En büyük enerjili elektron valans bandında en üst seviyede bulunur. Valans bandı iletkenlik bandı arasında bir ara bölge varsa elektronlar küçük bir ilave enerji ile iletkenlik bandına geçenezler. Böyle malzemelere yalıtkan malzemeler denir. Bir maddenin odak sıcaklığında yalıtkan olabilmesi için gerek şart valans bandının dolu iletişim bandının norma olarak boş ve yasak bölge (ara bölge) genişliğinin bir elektron voltan fazla olmasıdır. Oddıcılığında ise yasak bölge genişliği 26 milielektronvolt olur. Buna karşılık elmas son derece iyidir yalıtkan olup, bir elektronun valans bandından iletkenlik bandına geçebilmesi için 6 eV gereklidir. Yalıtkan malzemelerde elektronları iletkenlik bandına çıkarabilecek için hayatı büyütür enerjilere ihtiyaç vardır. Böyle bir durunda yalıtkan bozularak iletkenlik sağlanır.

$$|\Gamma^3| = s$$

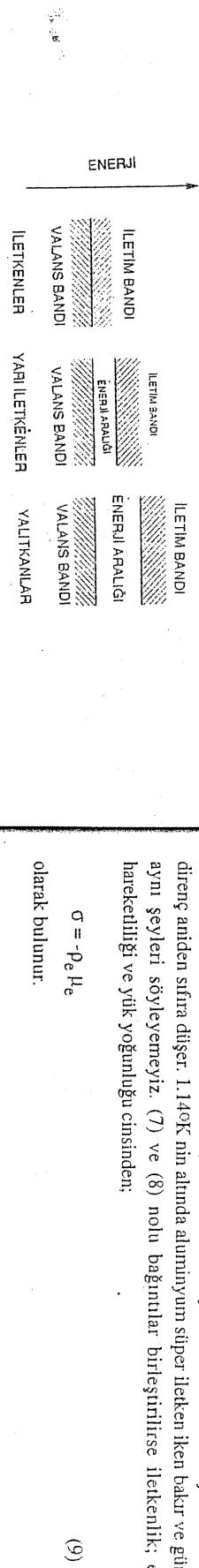
Suyuklumne tuzuna enşter. Bu muz, elektrik alamana ve elektronun söz konusu ortadakı μ_e ne gösterilen hareketliliğine bağlıdır.

bulunur. Burada p_e serbest elektron yük yoğunluğu olup negatif değerlidir. Nötr bir malzemedede eşit sayıda pozitif ve negatif yükler bulunduğu için p_v toplam yük yoğunluğu sıfırdır.

$$J = \sigma E$$

Valans ve iletkenlik bandlarını ayıran yasık bölge çok küçük olduğunda; ıslı, yükselişin alan ile verilecek çok küçük enerji miktarı, dolu valans bandının en üstündeki elektronların enerjilerini artırabilir ve oldukça fazla elektron iletim bandına geçebilir. Böyle malzemeler yarıiletken denir. Germaniyum ve silisyum en çok kullanılan iki yarı iletken olup yasak bölgelerinin genişlikleri sırasıyla 0.76 ve 1.1 eV dur. Bu iki malzemenin özgül dirençleri bir iletkenlik (mesala bakır) bir yarıktanın (mesala elmas) arasındadır.

Valans veya iletim bandında bulunan elektronlar E elektrik alanında bulunuyorsa, elektronun yükünü göstermek üzere $F=eE$ kuvveti etkisinde kalırlar. Bu kuvvet elektronları boşlukta etkisiyle ivmelerine sebep olurdu. Ancak krisallerde elektrik alanına maruz



Şekil 4.2. CCK'da bulunan farklı malzemelerde enerji-band yapıları

(a) İleikenderde valans ve iletim bandı arasındaki hizmet erişimi artanlılığı.

(b) Yalıçanlarda büyük enerji arası var.

kalan elektronlar hareketleri süresince, ısı ve çarpışma gibi çeşitli etkileşimler sonunda sabit bi-

$$V_{ab} = - \int_b^a E \cdot dL = - E \cdot L_{ba} = E \cdot L_{ab}$$

olur. Böylece

$$J = \frac{I}{S} = \sigma E = \sigma \frac{V}{L}$$

ve

$$V = \frac{I}{\sigma S} L$$

olur.

$$(11)$$

$$R = + \frac{V_{ab}}{I} = \frac{- \int_b^a E \cdot dL}{I}$$

$$(13)$$

bağıntısı geçerlidir.

Örnek 4.2 1,291.10⁻³ m çaplı 1609 m uzunluklu bir bakır telin direncini bulalım.

Telin kesiti 1,308.10⁻⁶ m² olduğuuna göre

$$R = \frac{1609}{(5,8 \cdot 10^{-7}) (1,308 \cdot 10)^{-6}} = 21,2 \Omega$$

bulunur. Bu tel için güvenlik limiti 10 A/dc olduğuna göre bu değere karşı gelen akım yoğunluğu $10/1,308 \cdot 10^{-6} = 7,65 \cdot 10^6$ A/mm² olur. Bu akıma karşı gelen telin uçları arasındaki potansiyel farkı ise 212 V olup alan şiddeti $0,312$ V/m ve sürüklenme hızı $0,000422$ m/s dir. Serbest elektron yük yoğunluğu ise $-1,81 \cdot 10^{10}$ C/m³ bu ise bir kenarındaki angrönüm olan bir küp içinde yaklaşık 1 elektron var demektir.

4.4. İLETKEN ÖZELLİKLERİ VE SINIR ŞARTLARI

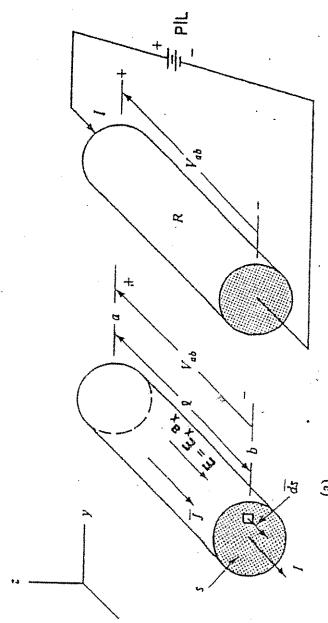
Bir iletkendeki yük dağılım dengesi bozulduğunda ne olacağım inclemek için statik ortama çok küçük bir zaman aralığında bakınmak yeterlidir. İletkenin içinde bir elektronun aniden oluştuğunu düşünelim. Bu elektronların oluşturduğu elektrik alan artı yükleme karşılıkla yüklenen birbirlerinden uzaklaşmaya başlarlar. Bu durum, elektronları veya sızdırılan bu elektron miktarına eşit bir elektron kütlesinin iletkenin yüzeyine varmasına kadar devam edecektir. Burada, iletkenin bir yanından ilerleyen yük kalınlığı bir yüzeye yaklaştığında ve böylece iletkenin içinde herhangi bir yük kalmayacaktır. (Eğer kalsayıdı, oluşan elektriksel alan bu yükleri yüzeye itecekti).

Sonuç olarak iletkende içerisinde yük yoğunluğu sıfır olacak, yüzeyde ise bir yüzey yük yoğunluğu olacaktır. Bu iyi bir iletkenin iki özelliğinden biridir. Diğer özellikle; Ohm Kanununun bir sonucu olarak iletken içindeki elektrik alanın sıfır olmasıdır.

Şekil 4.3. Bir iletkenin direncinin bulunması ve basit bir devre modeli

Devre teorisinde kullanılan, $V=IR$ Ohm bağıntısı dikkate alınırsa

$$R = \frac{L}{\sigma S} \quad (12) \quad (\Omega)$$



bulunur. Bu bağlantılar düzgün elektrik alanı için geçerlidir. Eğer alan düzgün değilse direnç yine V/I oranından tamamlanabilir. Burada V malzemede iki belirli eşpotansiyel yüzeyler arasındaki potansiyel farkı, I ise malzemeye positif yüzeyden gerekçen toplam akımı göstermektedir. Ve tıuniform olmayan alanlar için direnç

Bu olay süreklilik bağımlısı de incleyebiliriz. Hareketli yüklerden kaynaklanan tımkınlardır iletkende sıfır olduğunu statik durum gerçekleştirmektedir. Eğer iletkende fazladan bir ρ_V yükü varsa, süreklilik denkleminde $J=\sigma E$ alarak durumu incleyelim.

$$\nabla \cdot J = - \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot E = - \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \right)$$

$V \cdot E = \rho_v / \epsilon_0$ olduğu dikkate alınrsa;

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho_v = 0$$

bu kısmi diferansiyel denklemi gözlemlerinden

$$\rho_v = \rho_v(t) = \rho_0 e^{-t/\tau} \quad (14)$$

bulunur. Burada ρ_0 , $t=0$ dahi yük yoğunluğunu, $\tau(t_0)$ ise relaksyon (gevşeme) zaman sabitini göstermektedir.

$$\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \quad (s) \quad (15)$$

dir. Relaksyon süresi yükün başlangıç değerinin $1/e$ katına düşmesi için geçen süredir. Bakır gibi iyi iletkenler için $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ $\sigma = 5,8 \cdot 10^17$ (s) alınarak $\tau = 1,5 \cdot 10^{-19}$ (s) bulunur.

Iyi yalıtkanlarda z saatler ve günler mertesindedir. Dolayısıyla iyi bir yalıtkana yük yerleştirildiğinde iletkende olduğu gibi hızlı bir şekilde dağılma göstermez. İletkenlerde ρ_v yükünün bir kaq zaman sabiti mertesisi içinde yüzeylere dağılmı süresince statik durum ortadan kalkar. Bu şartlı; iletkenlerin statik durumlardaki iletim özelliklerini olarak söyle özetlenebilir:

1. Atomdaki tüm elektron ve protonlar dikkate alınarak iletken içinde net $\rho_v = 0$ dir.

2. İletken içinde net $E=0$ dir. Aksi takdirde akım gelir. Bu hulus metal içinde elektrik alanın makroskopik göstergesi midir. Atom çekirdeği yakundaki makroskopik E için geçersizdir.

3. İletken için $\nabla \cdot V = E = 0$ olduğundan, iletken espransiyel bir cisimdir.

4. ρ_v yük yoğunluğu varsa yalnız yüzeyede bulunur.

5. İletken yüzeyinde, $\sigma E_t = I_t = 0$ olduğundan, iletken yüzeyinde elektrik akımı tegetsel birleşen sindir.

6. İletken yüzeyinde elektrik alanının dik biseri; yüzede D_s yükü bulunuysa sınırları farklı bir değere sahiptir.

Nötr bir iletken tabaka E_a elektrik alanına sokulunca relaksyon süresinin bir kaç kan gibi çok kısa bir sürede serbest elektronlar yüzeye doğru zorlanır ve tabaka içindeki net E alanı sıfır oluncaya kadar yükler yüzeye toplanmaya devam eder.

Böylece ρ_s yüzeyel yükleri tabaka içinde $E = E_a + E_i = 0$ olacak şekilde E_i iç alanı induklar.

Örnek 4.3. Paralele yüzelli bir iletken tabaka $E_a = 5/\epsilon_0 a_z$ (V/m) ds alanında sokulduğuna göre; b) D_a vektörünü, b) alt ve üst yüzeylerde toplanan ρ_s yükünü bulalım.

Cözüm.

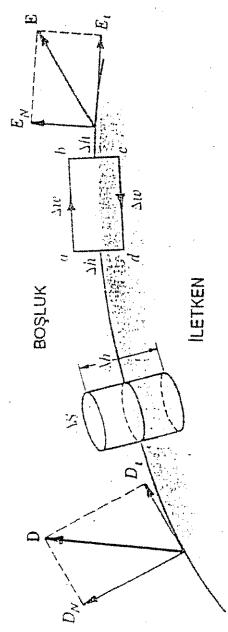
$$(a) D_a = \epsilon_0 E_a = 5 a_z \text{ (C/m}^2\text{)}$$

$$E_i = -E_a = 5/\epsilon_0 a_z \text{ (V/m)} \quad D_i = D_a = 5 a_z \text{ (C/m}^2\text{)}$$

$$(b) \rho_s |_{\text{üst}} = D_i |_{\text{üst}} = D_i |_{\text{n}} |_{\text{üst}} = 5 a_z \cdot (-a_z) = 5 \text{ (C/m}^2\text{)}$$

$$\rho_s |_{\text{alt}} = D_i |_{\text{alt}} = D_i |_{\text{n}} |_{\text{alt}} = -5 a_z \cdot (a_z) = -5 \text{ (C/m}^2\text{)} \text{ bulunur.}$$

İletken malzemeler içindeki elektrik alanlarını inceledikten sonra artık iletken yüzeyi dışındaki alan ile iletken yüzeyindeki alanın ilişkisini inceleyebiliriz. İletken malzemelerin yüzeyi civarında elektriksel alan vektörünü, teget ve normal olnak üzere iki bileşene ayrılabılır. Statik durum söz konusu olduğundan yükler yüzey üzerinde hareketsizdir. Bu durum yüzey üzerinde elektriksel alanın tegetsel bileşenin sıfır olduğu sonucunu verir. Dik-bileşenin durumunu Gauss Kanunundan faydalananak açıklayabiliriz. Tegetsel alan bileşeninin sıfır olması nedeniyle aksi bu yönde yükü terkedmez. İletkenin içine de oradaki alanın sıfır olması nedeniyle giremez. Dolayısıyla aksı ancaq iletken yüzeyini dik terkemek zorundadır. Sayısal olarak (C/m^2) biriminde yüzeyi terkeden elektriksel aksı yük yoğunluğu yüzeyel yük yoğunluğuna eşittir. Yani $D_n = \rho_s$ olur. Şekil 4.4. de boşlukla sınırlanan bir iletkende D ve E nin bileşenleri gösterilmiştir. Tegetsel alan, abcd kapalı çevresi etrafında



Şekil 4.4. İletken ve boşluk arasındaki sınır yüzeyinde elektriksel alan vektörlerinin bilesenlerine ayrılmazı ve $E_t = 0$, $D_n = \rho_s$ sınır şartlarının bulunması. bağıntısı uygulanarak bulunabilir. Integral dört kısma ayrılığında ve $E_t = 0$ olduğuna dikkat ederek

$$\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = 0$$

$$E_t \Delta w - E_N 1/2 \Delta h + E_N 1/2 \Delta h = 0$$

$\Delta h \rightarrow 0$ limit durumunu dikkate alırsak

$$E_t \Delta w = 0$$

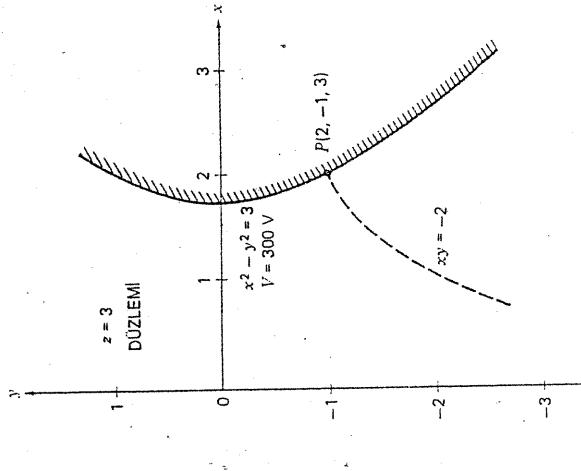
ve bu nedenle

$$E_t = 0$$

olur. Dik bileşen ise Gauss kanunundan faydalananarak bulunabilir. Gauss yüzeyi olarak ΔS kesiti, Δh yüksekliğinde silindir seçelim. Tekrar Δh uzaklığım sıfırı yaklaştırılmış.

$$\oint_S D_n ds = Q$$

$$\int_{\text{üst}} + \int_{\text{alt}} + \int_{\text{yanyaz}} = Q$$



Şekil 4.5. $V = 100(x^2 - y^2)$ potansiyel alanında P noktasından geçen eş potansiyel yüzey alan çizgisi

Ara kesit P noktasına potansiyel

$$V_p = 100(2^2 - (1)^2) = 300 \text{ (V)}$$

olur. İletken yüzeyi potansiyel yüzey olduğundan, iletkenin tüm yüzeyi 300 V luk potansiyelidir. Ve içinde E=0 dir. 300 V luk potansiyete sahip nokaların geometrik yeri

$$300 = 100(x^2 - y^2)$$

veya

$$x^2 - y^2 = 3$$

denklemi sağlar. Şekil 4.5 de gördüğü gibi yüzey hiperbolik silindirdir.

$$E = 100 \text{ V}(x^2 - y^2) = 200xa_x + 200ya_y$$

olur. P noktası için

$$E_p = -400a_x - 200a_y \text{ (V/m)}$$

$$D_p = \epsilon_0 E_p = -3,54a_x - 1,771a_y \text{ (nC/m}^2\text{)}$$

P noktasında alar, eşpotansiyel yüzeyine dik olduğundan, sola ve aşağı yönelmiştir. Yani

$$DN = 3,96 \text{ (nC/m}^2\text{)}$$

ve P noktasındaki yüzeyel yük yoğunluğu

$$\rho_{s,p} = DN = 3,96 \text{ (nC/m}^2\text{)}$$

olur. Eğer iletkenin diğer yanını dikkate alsaydık $\rho_s = 3,96 \text{ (nC/m}^2\text{)}$ bulunurdu. P noktasındaki alan çizgileri

$$\frac{E_y}{E_x} = -\frac{200y}{-200x^2} = -\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$$

bağıntısını sağlar. Buradan

ve $y/x = C$ bulunur. P den geçen alan çizgisi için $C = (2)(-1) = -2$ olur. Böylece alan çizgisi denklemi

$$yx = -2 \text{ olarak bulunur.}$$

5.5. YARI İLETKENLER

Silikon ve Germanyum gibi yan iletkenlerde elektronlar ve desikler olmak üzere iki türlü akım taşıyıcıları vardır. Valans bandının en üst seviyesinde bulunan elektronlar genellikle terminal etkilerle enerji alarak yaşak band aşırı iletkenlik bandına geçebilirler. Yasak band yaklaşık 1 eV enerji aralığına sahiptir. Elektronlardan kalan boşluklar dolmamış enerji seviyeleri olup kristallede atomdan atoma hareket eder. Desik denilen bu boşluklar positif ve yukarına sahipmiş gibi kabul edilir. Yarı iletken özellikleri bu desiklerle belirlenir. Desik hareketliği μ_h ile gösterilir. Ve kütlesi elektron kütmesine mukayese edilebilir büyüküktür. Elektronlar ve desikler elektrik alanda birbirlerine zıt yönlere hareket ederler. Bu durumda iletkenlik, desik ve elektron yoğunlukları ile hareketetiltilerine bağlı olarak

$$\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h \quad (18)$$

olarak verilir. Silikon'un elektron ve desik hareketetiltileri (3000K de) sırasıyla 0,12 ve 0,025, Germanyunun ise 0,36 ve 0,17 dir. Bu değerler daha önce bahsedildiği gibi (m^2/Vs) biriminde olup, alüminyum, bakır ve gümüşünden 10-100 kat daha büyütür.

Elektron ve desik yoğunlukları büyük ölçüde sıcaklığı bağlıdır. Silikon ve germanyununda 3000K de elektron ve desik yoğunlukları $0,0024 \text{ (C/m}^3\text{)}$ ve $3 \text{ (C/m}^3\text{)}$ dir. Sıcaklık arttıkça hareketetilik azalır fakat yük yoğunluğu hızla artar. Sonuçta silikonu iletkenliği 3000K sıcaklığından 3300K sıcaklığı ulasıldığından 10 kat artar. Sıcaklık 3000K den 2750K ne düşunce ise 10 kat azalır. Saf yan iletkenlerin iletkenlikleri sıcaklıkla artı gösteriken metalik iletkenlerde sıcaklıkla azalır. Bu husus iletkenlerle saf yan iletkenler arasındaki karakteristik farklı belirler. Saf yan iletkenler Ohm kanunu noktasal formunu da gerçekleştirler. Yani iletkenlik akım yoğunluğu ve yönü ile olabildigince sabit kalır.

Saf bir yan iletken kristaline yabancı maddeler katınam suretiyle iletkenlik ve yük taşıyıcı sayısını artırılabilir. Saf bir yan iletkenin yabancı atomlar katma işlenmesine katkıda bulunur. Yeten atomlarla katılanın bir kristanın tipi, alan atomlarla katılanın bir kristal işi tipi yan iletken olarak adlandırılır. Örneğin silikon konstantrasyonunda 107 de bir kadar düşük bir katkı iletkenliği 105 kat artırabilir.

Demek oluyor ki yan iletkenler üç tipe ayrılabilir. Bir has yan iletken, içindeki desik

sayısız serbest elektron sayısına eşit olan kristaldir. n tipi yarı iletkenlerde elektronların sayısı desük sayılarından fazladır. P tipinde ise desük sayısı elektronlardan daha baskındır.

5.6. DİLEKTRİK MALZEMELERİN ÖZELLİĞİ VE SINIR ŞARTLARI

İletkenlerin tersine olarak dielektriklerin serbest elektronları hemen hemen yoktur. Dielektrik malzemelede yükler atomlarda çok kuvvetli bağlanmıştır. Elektrik alamna manzur kalan dielektriklerde pozitif ve negatif yüklerden oluşan elektrik dipoller düzene dizilir. Bu dipoller iletme hizbir katında bulunmazlar. Bağlı yükler denilen yükler iletkenliği tayin eder. Bağlı yükler elektrostatik boş uzaydaki herhangi diğer kaynaklar gibi düşünülebilir.

Katt, sıvı veya gaz dielektrik malzemelerin tümü ister kristal olsun ister olmasın elektrik enerjisini depolayıcı özelliğe sahiptir. Bu depolama, moleküller ve atomik kuvvetlere karşı bağlı olan pozitif ve negatif yüklerin iç pozisyonlarında bir kayma meydana gelmesi suretiyle olur.

Kıstılayıcı kuvvette karşı bu yer değiştirmeye sonunda dielektrik malzeme bir ağırlığın kaldırılması veya bir yayın gerilmesi olaylarına benzer biçimde potansiyel enerji kazanır. Enerji kaynağı dış alan olup kayan yükler bir pile giden geçici akımların oluşmasını netice verir. Yüklerin yer değiştirmesi dielektrik malzemelerinde çeşitli şekillerde olur. Polar moleküller olarak bilinen bazı moleküller, positif ve negatif yüklerin kütte merkezleri arasında düzelendi bir yer değiştirmeye sahipdir. Ve herbir yük çifti bir dipol gibi davranıştır. Normalde dipolller maizemedede gelişigizel dağılmıştır, ve dış alanın etkisi bu molekülleri bir dereceye kadar aynı yönde dizer. Yeterince kuvvetli olan pozitif ve negatif yükler arasında fazladan bir yerde değiştirme bile olusutabilir.

Polar olmayan moleküllerde alan uygulanmadan önce dipol düzene yoktur. Alınla birlikte pozitif ve negatif yükler zıt yönlerde kayarlar ve dipol oluştururlar. Polar ve polar olmayan polaryasyon örnekleri Şekil 4.8 de gösterilmiştir.

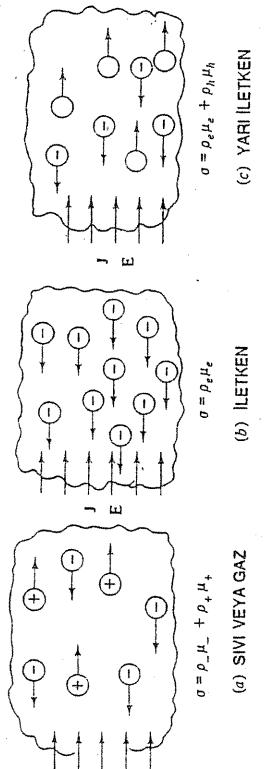
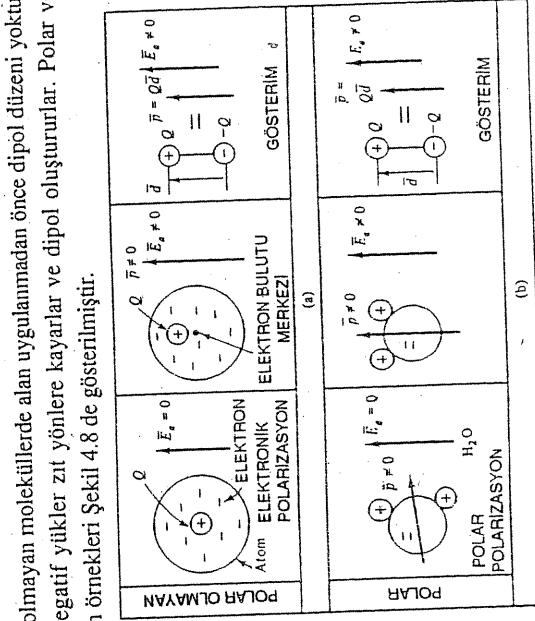
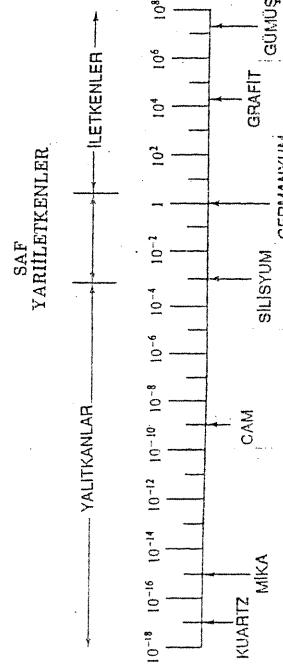


Fig. 4-4

Şekil 4.6. İletkenliğin çeşitli ortamlarda sağlanması



Şekil 4.8 Mikroskopik ölçekte polaryasyon mekanizmasının ayrıntılı şeması
(a) elektronik (polar olmayan) polaryasyon; (b) Polar Polaryasyon



Şekil 4.7. Çeşitli malzemeler için iletkenlik stralaması

Her iki tip dipol, p dipol momenti tarafından

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$$

olarak tanımlanabilir. Q dipoltır oluşturan bağlı yüklerden, positif olanını tensil etmektedir. d ise negatif yükten postif yükle doğru yönelmiş vektördür.

Eğer birim hacimde n tane dipol varsa ΔV hacminde naV tane dipol bulunur. Toplam dipol moment

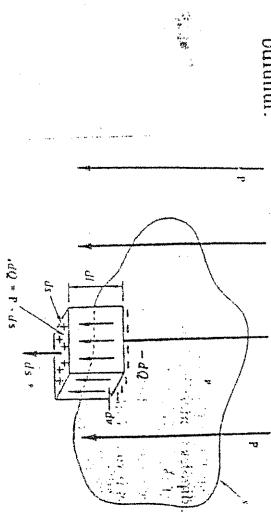
$$\mathbf{P}_t = \sum_{i=1}^{naV} \mathbf{p}_i \quad (19)$$

olur. Eğer dipoller aynı yönde sıralanmışsa toplam moment önemli bir değere sahip olur. Gelişigizel sırlanma durumunda \mathbf{P}_{top} sıfır olur. Birim hacimdeki dipol momente polarizasyon vektörü denir ve

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{naV} \mathbf{p}_i \quad (\text{C/m}^3) \quad (20)$$

olarak ifade edilir. Şimdi dipol hacim yük yoğunluğunun bir düş alan etkisiyle serbest hacim yük yoğunluğu gibi davranışını gösterelim. $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ bağıntısuna benzer sonuç bulacağız.

Dielektrikin polar olmayan moleküllerden meydana geldiğini kabul edelim. Malzeme de başlangıçta hiç dipol moment yoktur. Bir ds elektrik alan uygulandığında Şekil 4.8 de görüldüğü gibi dv hacminin ds alt yüzeyinde dQ ile gösterilen pozitif bağlı yükler toplanır. Bu duruma söz konusu hacmin içindeki yükler ait dipol moment $d\mathbf{p} = dQ\mathbf{dL}$, Şekilde ifade edilirse (dL hacim elemannın bir kenarı) (20), nolu bağlı gereği \mathbf{P} polarizasyon vektöri cinsinden dipol moment $d\mathbf{p} = \mathbf{P} \cdot dV = (\mathbf{P} \cdot d\mathbf{s}) dL$ yazılabilir. Bulduğumuz bu dipol moment ifadeleri eşitlenirse $dQ = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s}$ bulunur. S yüzeyini kesen bu pozitif bağlı yük, hacim içinde $-dQ$ negatif yükü bırakır o halde hacim içindeki net bağlı yük miktarı $dQ = -dQ = -\mathbf{P} \cdot d\mathbf{s}$ bulunur. Bu sonucun V hacmi üzerinden integrali alınarak, S yüzeyinin çevrelediği net polarizasyon yükü bulunur.



$$Q_b = \int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} \quad (21)$$

olar. Bu son bağıntı Gauss Kanunun benzeridir. Elektrik aktı kavramını, boşluktan başka tüm ortamlara genelleştirmek için; Q_T kapalı yüzeyin çevrelediği tüm yükleri (bağlı+serbest) tensil etmek üzere

$$Q_T = \oint \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (22)$$

yazılabilir. Q serbest yükleri göstermek üzere

$$Q_T = Q_b + Q$$

son üç bağıntıyı biraraya getirisek

$$Q = Q_T - Q_b = \int_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{s} \quad (23)$$

ve polarize olabilen malzemeler mevcut olduğunda D vektörü

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (24)$$

olarak tanımlanırsa

$$Q = \int_V \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \quad (25)$$

olarak bulunur. Burada Q serbest yükleri tensil etmektedir. Böylece çeşitli hacim yoğunlukları

$$Q_b = \int_V \rho_b dV$$

şeklinde verilebilir. Divergans teoreminden faydalananak

$$(26)$$

Şekil 4.9 Bir dielektrik hacim elemannın polarizasyonu

$$\begin{aligned}\nabla \cdot P &= -\rho_b \\ \nabla \cdot \epsilon_0 E &= \rho_T \\ \nabla \cdot D &= \rho_v\end{aligned}\quad (27)$$

olarak bulunur, (27) nolu son bağnazdaki yükün serbest yük olduğuuna tekrar dikkat çekiyoruz.

Dielektrik malzemeler ile ilgili uygulamalarda E ve P bilinmesi gereklidir. Ortan izotropik olarak kabul edilirse bu iki büyütüklük birbiriniyle lineer bağlı olur. Bir çok mühendislik işlerinde izotropik malzemeler kullanılır. Kristal malzemelerin periyodik yapısı, dipol momentlerin kolaylıkla kristal eksenin boyunca şekillenmesini sağlar.

Ferroelektrik malzemelerde P ve E arasındaki ilişkisi sadexe lineer olmaya histeris etkisi gösterir. Bu tip dielektriklere örnek olarak baryum titanat ve roşel tuzu örnek verilebilir. P ve E arasındaki lineer ilişkisi

$$P = \chi_e \epsilon_0 E \quad (28)$$

olur. Burada χ_e (ksı) boyutsuz olup, elektriksel duyarlılığı gösterir. (25) nolu bağnazdan faydalananarak

$$D = \epsilon_0 E + \lambda \epsilon_0 E - (\chi_e + 1) \epsilon_0 E$$

ve ϵ_R (boyutsuz) büyütüklüğünü, malzemenin bağlı dielektrik olarak

$$\epsilon_R = \chi_e + 1 \quad (29)$$

şeklinde tanımlanırsa

$$D = \epsilon_0 \epsilon_R E = \epsilon E \quad (30)$$

$$\epsilon = \epsilon_R \epsilon_0 \quad (31)$$

bulunur. ϵ malzemenin dielektrik olup çeşitli malzemelerin dielektrik sabitleri ekte verilmiştir.

Anizotropik dielektrik malzemeler dielektrik ve duyarlılık cinsinden basitçe tanımlanır.

$$\begin{aligned}D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z\end{aligned}$$

Gördüğü gibi anizotropik malzeme matris elementleri koordinat eksenlerinin seçimi bağlıdır. Eksen yönleri uygun seçilerek problem bastırılabilir. Anizotropik malzemelerde $D = \epsilon_0 E + P$ geçerli olmasına rağmen E ile P paralel olmaz. $D = \epsilon E$ yine geçerlidir.

Özeltenirse dielektrik malzemelerde geçerli bağıntılar

$$D = \epsilon E \quad (32)$$

$$\epsilon = \epsilon_R \epsilon_0 \quad (33)$$

$$\epsilon = \epsilon_R \epsilon_0 \quad (34)$$

$$V \cdot D = \rho_v \quad (35)$$

Saf Dielektrik Malzemelerde Sunur Şartları. İletken malzemeleri bir, başka ortamla aynıara yüzeylerde elektrik alan vektörünün tegetsel bileşenini sıfır, normal bileşenini ise yüzeysel yük yoğunluğuna eşit bulmuştur. Simide benzer işlenmeleri bir dielektrikin başka bir dielektrik veya bir iletkenle ayıran ara yüzeye elektrik alan vektörlerinin tegetsel ve normal bileşenlerinin alacağı değerleri inceleyeceğiz. Şekil 4.10 daki gibi dielektrik özelliklikleri ϵ_1 ve ϵ_2 olan iki yüzeyi ayıran yüzeyi göz önüne alalım. Alanın tegetsel bileşenlerini kullanarak

$$\int S E \cdot dL = 0$$

$$E_{11} \Delta w - E_{12} \Delta w = 0$$

olur. E nin dik bileşeninin, Δh boyunca integrale katkısı Δh azaldıkça ihmali edilebilicek duruma gelir. Ve kapalı eğri arakesi yüzeyine bireşir. Dolayısıyla

$$E_{11} = E_{12} \quad (28)$$

bulunur. Eğer sunur boyunca elektrik alan şiddetinin tegetsel bileşeni sürekli kalyorsa D nin tegetsel bileşenini sürekli olur. Bunu

$$\frac{D_{11}}{\epsilon_1} = \frac{D_{12}}{\epsilon_2}$$

veya

$$\frac{D_{11}}{D} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (29)$$

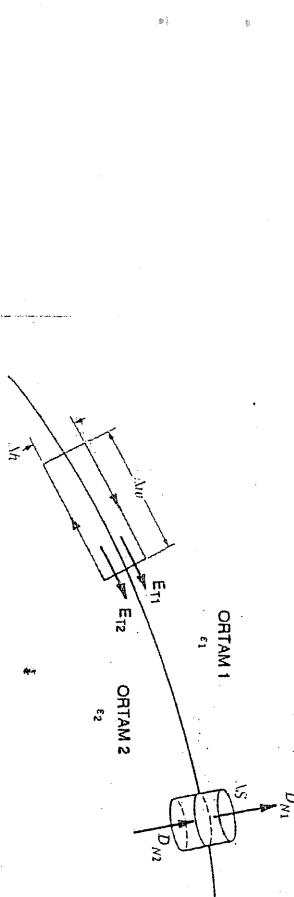
şeklinde ifade ederiz.

Normal bileşen için sinur şartları uygulanırsa, Şekil 4.10 da küçük silindir için Gauss Kanunundan

$$D_{N1}\Delta S - D_{N2}\Delta S = \Delta Q = \rho_s \Delta S$$

$$D_{N1} - D_{N2} = \rho_s$$

yazılır. Silindirin yan kenarları çok kısa olup aki alt ve üst yüzeylerden geçmektedir.



Şekil 4.10 Farklı dielektrik əzəlliliyi olan iki ortamı ayran yüzey için alan bilesenlerinin incelemesinde kullanılan Gauss yüzeyleri

(30) bağıntısında ki yük yoğunluğu bağlı yüklerle ait olamaz çünkü dielektrik sabiti polarizasyonu içececek şekilde daha önce ifade edilmiştir. Saf dielektriklerde sebessi yükde olamayacağına göre, bu yük dielektrik malzemede dengelenmemiş toplam yük olduğu düşünülebilir. Özel bir durum için $\rho_s=0$ seçelim. Bu durumda;

$$D_{N1} = D_{N2} \quad (31)$$

$$\epsilon_1 E_{N1} = \epsilon_2 E_{N2} \quad (32)$$

bulunur. Böylece E nin normal bileşenin sürekli, D nin normal bileşeni ise stokli olduğu görüllür. Bu sonuç Şekil 4.11 den faydalananarak, θ_1 e θ_2 açıları D_1 ve D_2 nin yüzey normali ile yaptığı açılar olmak üzere

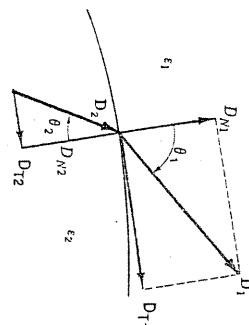
$$E_2 = E_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \cos^2 \theta_1} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} D_1 \cos \theta_1 &= D_2 \cos \theta_2 \\ \epsilon_2 D_1 \sin \theta_1 &= \epsilon_1 D_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (33) \quad (34)$$

bulunur. Taraf tarafa bölünüse

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (35)$$

olar. Burada $\epsilon_1 > \epsilon_2$ olduğunda, $\theta_1 > \theta_2$ olur.



Şekil 4.11 Dielektrikleri ϵ_1 ve ϵ_2 olan ortamları ayran ara kesit yüzeyinde D_1 ve D_2 nin yönleri

$$(\epsilon_1 > \epsilon_2)$$

ϵ_2 ortamında D ve E nin şiddetleri

olur. Bu denklemlerin incelenmesinden $\theta_1=\theta_2=0$ olmadıkça dielektrik artıktır D ninde artacağı ve E nin ise $\theta_1=\theta_2 90^\circ$ olmadıkça dielektrik artıktır ϵ klüştüğü anlaşılır.

Örnek 4.4 Bağlı dielektriği $\epsilon_r=10$ olan ince bir disk, boşlukta $D=3a_z(nC/m^2)$ lik düzgün bir alana dik olarak konulmuştur. (a) Diskin merkezindeki D , (b) E , (c) P , (d) r_b yi bulunuz. (Yüzey üzerinde başlangıçta $P_s=0$ olduğu kabul edilecek)

Cözüm. (a) Diskin dielektriği $\epsilon_R=\epsilon_0\epsilon_r=10\epsilon_0$ olur. Disk alana dik konulduğuna göre $D_{IN}=D_{IN}$ den $D_2=3a_z(nC/m^2)$ olur. Disk parel yüzü ve ince olduğu için D_2 diskin üstünden altna kadar ayndır.

(b) Diskin üstünde

$$E_{2N} = E_{1N} \epsilon_1 / \epsilon_2 = 0,3 / \epsilon_0 \quad (\text{nV/m})$$

bulunur. $E_2=E_{2N}$ olduğundan $E_2 = 0,3/\epsilon_0 a_z$ (nV/m) olur.

$$(c) P_2 = D_2 - \epsilon_0 E_2 = 2,7 a_z \quad (\text{nC/m}^2) \text{ olur.}$$

$$(d) \Delta Q_b = P \cdot n \cdot D_s \text{ den polarizasyon yük yoğunluğu}$$

$$\frac{\Delta Q_b}{\Delta s} = \rho_b \cdot P \cdot n$$

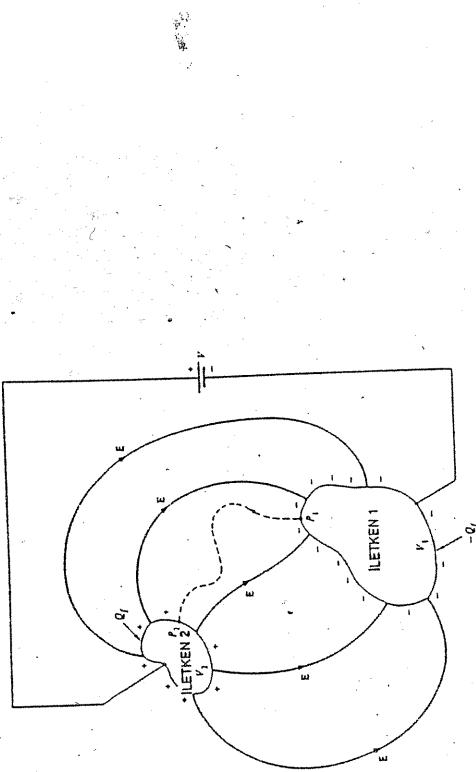
bulunur. O halde $p_b = (2,7 a_z) a_z = 2,7 \text{ nC/m}^2$ olur.

5.7. KAPASİTÖRLER

Şekil 4.12 de görüldüğü gibi homojen bir dielektrik içine iki iletkenin konulmuş olduğunu düşünelim. İletkenlerde eşit fakat zıt işaretli yükler bulunmaktadır. Yüklerin iletken yüzeylerde birliği ve elektrik alanının iletken yüzeye dik olduğunu daha önce görmüştük. Aki positif iletkenden negatif iletkenne doğrudır. İletkenler arasındaki potansiyel farkı V ve iletkenlerin herbirinin yükü Q ise kapasite

$$C = \frac{Q}{V} \quad (\text{F})$$

ile tanımlanır. Birini farad olup pratikte μF , pF gibi alt birimler kullanılır.



Şekil 4.12 Dielektrik ortama yerleştirilen iki iletkenin kapasitesi

İletken cisimlere uygulanan V gerilimi iletkenlerde $+Q$ ile $-Q$ ile gösterilen serbest yük ayrılmalarına neden olur. Pozitif yüklü cisim yüzeyinde biriken yük Gauss kanunundan ve sınır şartından faydalananarak

$$Q = \int_S D \cdot dS \quad (39)$$

olar. Üreteç tarafından uygulanan V gerilimi, iletkenlerin eş potansiyel yüzeylerinin P_1 ve P_2 noktaları arasındaki eğri boyunca, elektrik alanının integrali ile bulunabilir.

$$V = - \int_{P_1}^{P_2} E \cdot dL \quad (40)$$

bu ifadeler (38) de yerleştirilirse

$$C = \frac{\int_S \epsilon E \cdot dS}{\int_{P_1}^{P_2} E \cdot dL} \quad (41)$$

bulunur. Bu tammi $z=0$ ve $z=d$ düzlemlerine yerleştirilmiş $\pm p$ yük yoğunluğu sahip tabakalar için uygulayalım.

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon} \mathbf{a}_z \quad (42)$$

olur. ϵ ortamın dielektriğini göstermektedir. Buna göre

$$\mathbf{D} = \rho_s \mathbf{a}_z$$

olur. Alt tabakanın deplasman vektörü yukarı yönelik olduğu için bu tabakaya ait yük yoğunluğu positif olmalıdır.

$$\mathbf{D}_N = \mathbf{D}_Z = \rho_s$$

Üst levhada ise

$$\mathbf{D}_N = -\mathbf{D}_Z$$

olduğundan yük yoğunluğu üst levhada negatiftir. Tabakalar arasındaki potansiyel farkı ise;

$$V = - \int_{\text{üst}}^{\text{alt}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_{\text{d}}^0 \frac{\rho_s}{\epsilon} dz = \frac{\rho_s}{\epsilon} d$$

bulunur. Burada levhanın toplam yükünü $Q = \rho_s S$ ile göstersek

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{E_s}{d} \quad (43)$$

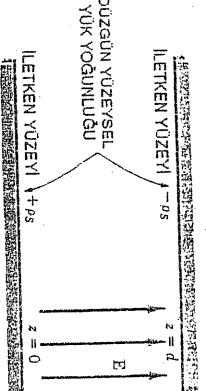
bulunur.

ve $\Delta V = \Delta L / d$ hacminde depolanan enerji

$$\Delta W = \frac{1}{2} \Delta C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \Delta v$$

bulunur. Enerji yoğunluğunu ω ile göstersek,

$$\omega = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta v} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (\text{J/m}^3)$$



Şekil 4.13. Paralel levhalı kondansatörün siğası birim metre karelik yüzey başına ederdir.

Eğer ikiden fazla iletken söz konusu ise herbir çiftin arasındaki kapasiteler göz önüne alınır. Bir kapasitorde depolanan enerji

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{hac}} \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \int_0^d \frac{\epsilon \rho_s^2}{\epsilon^2} dz ds = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S \rho_s^2}{\epsilon^2} d^2 \quad (44)$$

bulunur. Bu ifade kapasitorde sabit potansiyel farkında depolanan enerjinin ortamın dielektriği artıka çoğalacağını göstermektedir.

Depolanan enerji kapasitiin neresinde bulunur sorusununun cevabı, plakalar arası bölge olarak cevaplandırılır. Bunu açıklamak için levhalar arasından Şekil 4.14 de görüldüğü kenarı AL olan küb alalım. Bu kübü, alt ve üst yüzeyleri levha yüzeylerine paralel olsun. Bu kübün alt ve üst yüzeylerine çok ince bir iletken konursa alan bozulmaz. (levhalar yeterince ince olmak kaydıyle) Bu şekilde yeni oluşan Δv hacimli kücük kapasitorün kapasitesi

$$\omega = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + PE) = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (J/m^3)$$

Burada

$1/2 \varepsilon_0 E^2$ = boşluktaki enerji yoğunluğu

$1 / 2 PE$ = dielektrik ortamda ilave enerji yoğunluğunu göstermektedir. Görtülüdüğü gibi dielektrik ortamın mevcut olması ile birlikte, toplam enerji $1 / 2 PE$ kadar bir ilave terim eklenmektedir. Buradan anlaşıldığı gibi elektrik alanı enerji ihtiyacını etmekle olup daha ilerki konularında görüleceği üzere magnetik alanında enerji ihtiyacını etmekle olup, hareket halindeki elektromagnetik alanlar enerji tasırlar.

ve $\Delta V = \Delta L^3$ hacminde depolanan enerji

$$\omega = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + PE) = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (J/m^3)$$

Burada

$1/2 \varepsilon_0 E^2$ = boşluktaki enerji yoğunluğu

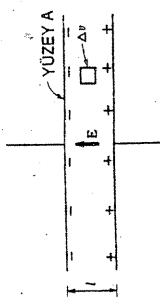
$1 / 2 PE$ = dielektrik ortamda ilave enerji yoğunluğunu göstermektedir. Görtülüdüğü gibi dielektrik ortamın mevcut olması ile birlikte, toplam enerji $1 / 2 PE$ kadar bir ilave terim eklenmektedir. Buradan anlaşıldığı gibi elektrik alanı enerji ihtiyacını etmekle olup daha ilerki konularında görüleceği üzere magnetik alanında enerji ihtiyacını etmekle olup, hareket halindeki elektromagnetik alanlar enerji tasırlar.

ve $\Delta V = \Delta L^3$ hacminde depolanan enerji

Şekil 4.15 (a) Küresel ve sıvı iletkenlerin oluşturduğu alan çizgileri
 (b) Havada korona boşalmasına sebep olan sıvı uc vekinindəki kuvarlı ala-

ortamın dijitektrik mukavemeti ile orantılıdır. İletken yüzeyin eğriliğin yanıçapı da başka bir faktördür. Bir iletkenin yakınındaki E elektrik alan şiddeti ileten yüzeyi üzerindeki ρ_s yük yoğunluğu ile orantılıdır ve bu yük yoğunluğu eğriliğin yanıçapı kütçük yüzeylerde, eğrilik yanıçapı büyük yüzeylere göre daha büyuktur.

İNCE METAL LEVHALAR



Şekil 4.14 Kapasitör levhaları arasındaki elektrik alanında enerji depolamması. Kübik acımlı şemmanın (b) de gösterildiği gibi, bir kareye 4 katı bir kareye 1 katı denir.

Dielektrik Mukavemeti. Bir dielektrikteki E alan şiddeti sunursuzca artırlamaz. Belirli bir değer aşıldığında ak olur. Bu durumda bulunan dielektrik malzemenin delindiği söylenir. Bir dielektrikin delinmeden manzı kalaabileceğinin maksimum alan şiddetine dielektrik mukavemet denir.

Kondansatörlerin tasarımında delinme vuku bulmadan önce uygulanabilecek maksimum rotansiyet faktörünün bilinmesi önemlidir. Belirli bir plaka aralığı için bu delinme plakalarındaki asındır.

Buluç ile zemin arasında 100 milyon voltan daha fazla bir potansiyel farkı olabilir. Bir deşarj ya da yıldırım oluştuğunda bulut ile yeryüzü arasında 100 000 A veya daha fazla şiddetinde akımlar ani olarak akabiliyor. Yıldırım akımının kısa süreli olmasına rağmen, bu ani enerji 1 milyar (10^9) joule ulasabilemektedir.

Benjamin Franklin tarafından icadedilen paratoner sıvri ucu ve topraklı iletkenileyle yıldırım akımı için düzlik dirençli bir yol sağlar. Paratoner herhangi bir isabet olmadığından, topraka bağlı kablosu ve yeterli toprak bağlantısıyle, yıldırım çarpması hasasız olarak geçistirilir. Eklede

bazı dielektriklerin mukavemetleri verilmişdir. Elekrostatik boşalma olayı elektrojet baskısı, spray boyama, kopyalama gibi birçok alanlarda uygulanmaktadır.

Örnek 4.5. İç yarıçapı a , dış yarıçapı b olan L uzunluklu koaksiyal kablonun kapasitesini bulalım.

Cözüm. Bu kablonun levhalan arasındaki potansiyel farkı bölüm 3 de verilmiştir. Ve toplan yük $\rho_L L$ olduğuna göre,

$$C = \frac{2\pi\rho L}{\ln(b/a)} \quad (47)$$

bulunur.

Örnek 4.6. İç yarıçapı a dış yarıçapı b olan içe girmiş kütresel bir iletken kabuklardan oluşmuş kapasitörün şemasını bulalım.

Cözüm. Elektrik alanu daha önceden Gauss kanunundan faydalananarak

$$E_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

olur. ϵ iletken küreler arasındaki bölgenin dielektrik sabitini göstermektedir. Bu ifadeden faydalananak çizgisel integralle potansiyel farkı

$$V_{ab} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

olar. Buradan kapasite

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad (48)$$

olur. Eğer dış iletkenin yarıçapı sonsuz büyüklükte ise

Yalıtlımsı küresel bir iletkenin kapasitesi

$$C = 4\pi\epsilon a$$

bulunur.

Örnek 4.7. Yalıtlımsı a yarıçaplı iletken kütrenin yüzeyi ϵ_1 dielektrik malzeme $r=a$ dan

$r=b$ ye kadar kaplı olması durumunda kapasiteyi bulalım.

Cözüm.

$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2} \quad (\text{a} < r < b)$$

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{b} < r)$$

ve potansiyel farkı

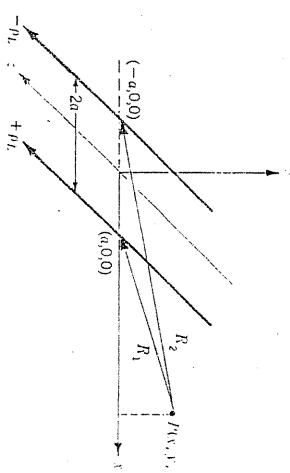
$$V_a - V_\infty = - \int_b^a \frac{Qdr}{4\pi\epsilon_1 r^2} - \int_b^\infty \frac{Qdr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

buradan

$$C = \frac{4\pi}{\epsilon_1 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{\epsilon_0 b}} \quad (48)$$

bulunur.

Örnek 4.8. İki telli hattın kapasitesi. Dairesel kesiti $\pm PL$ çizgisel yük yoğunluğu sonsuz uzun iki hat Şekil 4.16 datı gibi $x \rightarrow 0$ ya yerleşmiş olsun. Hattın kapasitesini bularak yoldan, elektrik alan ve çizgilerini inceleyelim.



Şekil 4.16 Paralel sonsuz uzunluklu çift hat $P(x,y,0)$ noktasının hatlara R_1 ve R_2 uzaklıklarının gösterildiği şema.

Cözüm.

Sonsuz uzun çift hat; x-z düzleminde pozitif hat x=a da, negatif hat x=-a da olacak şekilde yerleşmiş olsun. Tek bir hattın sıfır referansına göre R_0 uzaklığındaki potansiyeli

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_0}{R}$$

dir. İki hattın $P(x,y,0)$ noktasındaki toplam potansiyeli

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \left(\ln \frac{R_0}{R} - \ln \frac{R_{20}}{R} \right) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_0 R_{20}}{R_{20} R}$$

olar. $R_{10}=R_{20}$ segerer her iki hattan eşit uzaklıktaki sıfır referansının yerleştielim. Bu yüzey $x=0$ düzlemdir. Ve

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \quad (51)$$

olar. Eşpotansiyel yüzeyleri daha iyi anlamak için bazı cebirsel işlemler yapmalıyız. Bunun için eş potansiyel yüzeyde $V=V_1$ olsun ve

$$K_1 = e^{4\pi\epsilon V_1 / \rho_L}$$

$$K_1 = \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \quad (52)$$

olsun.

Düzenlerek

$$\left\{ \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} \right\}^2 + y^2 = \left\{ \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1} \right\}^2$$

olar. $V=V_1$ eşpotansiyel yüzeyi z den bağımsız olup xy düzlemini b yançaplı bir çemberle kestiği görültür. Burada b

$$b = \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1}$$

olar,

$$h = a \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1}$$

olmak üzere çemberin merkezi $x=h, y=0$ noktasıdır.

O halde problem sıfır potansiyeli letken $x=0$ düzleminden h uzaklığa V_0 potansiyeli ve b yarıçaplı iletken bir silindir konulmuş gibi düşünülebilir. Bu son denklemeler b ve h cinsinden gözürlüse

$$a = \sqrt{h^2 - b^2} \quad (51)$$

$$\sqrt{K_1} = \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b} \quad (52)$$

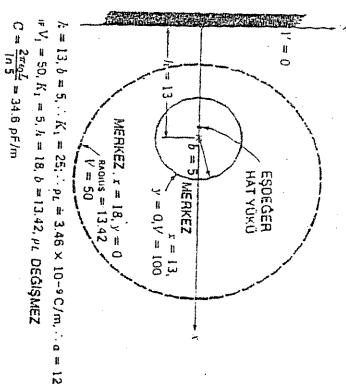
$$\sqrt{K_1} = e^{-2\pi\epsilon V_0 / \rho_L} \quad (53)$$

$\rho_L = \frac{4\pi\epsilon V_0}{\ln K_1}$
Böylece verilen h, b ve V_0 için a, ρ_L ve K_1 parametresi bulunabilir. Silindirin L boyu ile $x=0$ daki sıfır potansiyeli düzlemin arasındaki kapasite;

$$C = \frac{\rho_L}{V_1} L = \frac{4\pi\epsilon L}{\ln K_1} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \sqrt{K_1}} \quad (54)$$

bulunur. Şekil 4.17 deki içteki direte; 100 Volt potansiyeli 5m yarıçaplı ve sıfır potansiyeli düzleminden 13m uzaklıktaki bir silindirin kesisini göstermektedir. Buna göre $b=5, h=13, V_0=100$ olur. Bu durumda

$$a = \sqrt{h^2 - b^2} = 12m, \quad K_1 = 25, \quad \rho_L = 3,46 \text{ nC/m} \text{ ve } C=34,6 \text{ pF/m bulunur.}$$



Şekil 4.17 Yarıçapı 5m ve sıfır potansiyeli düzleme 13m uzakta paralel uzanan 100V potansiyelli iletken bir silindirin, kapasiteli, çizgisel yükü, eşpotansiyel yüzeylerin bulunması

50 Voltluk eşpotansiyel yüzeyli silindirden ayrıca hesap edebiliz. Bunun için

$$K_1 = e^{4\pi V_1/\rho_L} = e^{4\pi \cdot 8854 \cdot 10^{-12} \cdot 50 / 3.46 \cdot 10^{-9}} = 5$$

yeni yarıçap

$$b = \frac{2 \cdot a \sqrt{K_1}}{K_1 - 1} = \frac{2 \cdot 12 \sqrt{5}}{5 - 1} = 13,42 \text{ m}$$

$$h = a \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} = 12 \frac{5 + 1}{5 - 1} = 18 \text{ m}$$

bu silindir Şekil 4.17 de en droitaki kesik çizgilerle gösterilmiştir.

Potansiyel fonksiyonunun gradyamını alarak elektrik alanının bulabiliyoruz.

$$E = V \left[\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{2(x+a)a_x + 2ya_y}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{2(x-a)a_x + 2ya_y}{(x-a)^2 + y^2} \right]$$

D_x de $x=h-b$, $y=0$ yerleştirerek $\rho_{s,\max}$ yük yoğunluğunu bulabiliyoruz.

$$\rho_{s,\max} = -D_{x,x=h-b,y=0} = \frac{\rho_L}{2\pi} \left[\frac{h-b+a}{(h-b+a)^2} - \frac{h-b-a}{(h-b-a)^2} \right] = 0.1650 \text{ nC/m}^2$$

Örneğin;

$$\rho_{s,\max} = \frac{3.46 \times 10^{-9}}{2\pi} \left[\frac{13-5+12}{(13-5+12)^2} - \frac{13-5-12}{(13-5-12)^2} \right] = 0.1650 \text{ nC/m}^2$$

Benzer şekilde $\rho_{s,\min} = D_x, x=h+b, y=0$ dan

$$\rho_{s,\max} = \frac{3.46 \times 10^{-9}}{2\pi} \left[\frac{13+5+12}{30^2} - \frac{13+5-12}{6^2} \right] = 0.0734 \text{ nC/m}^2$$

Böylece,

$$\rho_{s,\max} = 2.25 \rho_{s,\min}$$

Eğer (54) nolu bağıntı $b < h$ durumunu için uygulanırsa

$$[\ln(h+\sqrt{h^2-b^2})/b] = \ln[(h+h)/b] = \ln(2h/b)$$

olduğundan

$$C = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(2h/b)} \quad (b < h) \quad (55)$$

elde edilir.

(54) ve (55) nolu bağıntılarda verilen kapasite bağıntıları, birbirinden $2h$ uzaklığında bulunan dairesel iki iletken arasındaki kapasitenin iki katıdır. Buradan faydalananak iki telli hatın kapasitesi hesaplanabilir.

PROBLEMLER

4.1. 2 m yarıçaplı bir küresel hacim içinde yük I saniyede $2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ dan $1,5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ (C)'a düşüyor. Dış doğru akan konveksiyon akımını bulunuz.

4.2. $0,8 \text{ m}^2$ kesiti, 2m uzunluğunda iletken bir malzemeye $0,5 \cdot 10^{-7} \text{ V/luk gerilim}$ uygulandığında $0,9 \text{ A/lk}$ diziğin bir akım geçmektedir. (a) E, (b)R, (c) σ , (d)v sırtıklenme hızını bulunuz. ($\mu_e = 0,003 \text{ m}^2/\text{Vs}$ kabul edilecek)

4.3. İçi boş bir homojen silindirin iç ve dış yarıçapları 1cm ve 2cm dir. İletkenliği $\sigma = 5 \cdot 10^7 \text{ (mho/m)}$ olduğuna göre bu iletkenin 10m lik uzunluğunun direncini bulunuz.

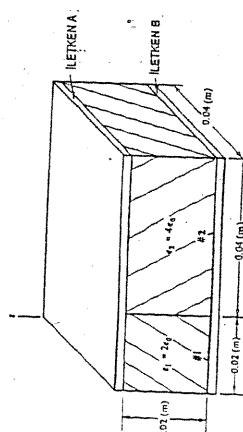
4.4. Elektronlar $z=0$ da bulunan düzlem bir katoldan sıfır hızıyla yayınlanmaktadır. $z > 0$ bölgesinde boyalı olup $E = -2,5 \cdot 10^6 \text{ a}_z \text{ (V/m)}$ lik alan mevcuttur. (a) Elektronun $v(t)$ hızını bulun. (b) $v(t)$ yörüngesi denklemini bulun. (c) $v(z)$ yi bulun. (d) Elektronların $0,2\text{mm}$ yarıçaplı hizmette yeryüzünden yayıldığından ve toplam akımın 100nA olduğu kabul ederek $J(z)$ ve $\rho_v(z)$ yi bulunuz.

4.5. Ince bir küresel dielektrik kabuğun iç ve dış yarıçapları metre biriminde sırasıyla, a,b dir. Bağlı dielektriği 3 olup polarizasyon vektörü

$$\mathbf{P} = \frac{10^{-5}}{r^2} \left(\frac{2}{3}\right) \mathbf{a}_r \text{ (C/m}^2\text{)}$$

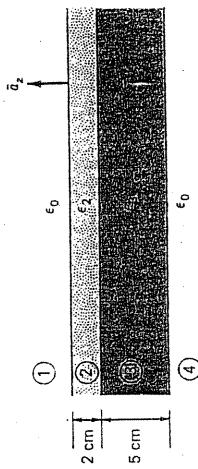
dir.

- (a) Her iki yüzdeki bağlı yükleri,
- (b) Dielektrik içindeki hacimsel bağlı yük yoğunluğunu,
- (c) Her iki yüzdeki toplam yükü,
- (d) Dielektrik içindeki toplam yükü;
- (e) Dielektriğin toplam yükünü bulunuz.



Şekil 4.18 (Problem 4.6)

4.6. Şekil 4.18 deki paralel levha kondansatöre 50V uygulanmaktadır. Her iki dielektrik malzemedeni (a)E,D,P (b) #1 dielektriğine bitişik üst iletken levhadaki ρ_s (c) #2 dielektriğine bitişik alt iletken levhadaki ρ_s değerlerini (d)sistemin kapasitesini bulun.



Şekil 4.19 (Problem 7 ye bakınız)

4.7. 4.19 da görüldüğü gibi sonsuz uzun ϵ_2, ϵ_3 saf dielektrik tabakalar paralel yerleştirilmişdir. Dış ortam boşluktur. 3 nolu bölgede $E_3 = 3 a_z \text{ (V/m)}$ ve $P_3 = 15 a_z \text{ (pC/m}^2\text{)}$ dir. $P_2 = 20 a_z \text{ (pC/m}^2\text{)}$ olduğuna göre (a) ϵ_{R3} , (b) ϵ_{R2} (c) E_1 , (d)2 ve 3 nolu bölgeler boyunca toplam potansiyeli bulunuz.

BÖLÜM 5

ELİKTROSTATİK ALANLARDA ÇÖZÜM TEKNİKLERİ

bulunur. Bu bağıntıya Poisson denklemi denir ve homojen ve yük yoğunluğu sıfır olan bir ortama uygulanrsa

$$\nabla^2 V = 0 \quad (\text{V/m}^2) \quad (4)$$

Laplace denklemi elde edilir. Dik, silindir ve küresel koordinatlarında Laplasyenin ifadeleri eklere verilmiştir.

5.2. LAPLACE DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

İkinci dereceden katsayı türevli differansiyel denklem olan Laplace denklerinin çözümüne ait birçok metod geliştirilmiştir. Bir burada tek boyutlu problemlere uygulanan direk integrasyon metodunu ve çok boyutlu problemlere uygulanan Çarpanlara ayıma metodunu kısaca açıklayacağız. Tek boyutta çözüm potansiyel alanu sadece bir değişkene bağlı olarak ifade edildiğinde, Laplace denkleminin doğrudan integrali alınarak çözüm bulunur.

1.Yük dağılımının bilinmesiyle elektrik alanının bulunması ve buradan da $-\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ nin integraliyle söz konusu aralıklar arasındaki V potansiyel farkının bulunması

2.Gauss Kanunu kullanarak, \mathbf{E} ve \mathbf{D} yi bulmak. Ve daha sonra $-\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ integralini kullanmak

3.Doğrudan yük dağılımından faydalananarak elektriksel potansiyeli bulmak ve sonra da $\mathbf{E} = -\nabla V$ bağıntısını kullanmaktadır. Bu bağıntıyı bağlı yüklerin ihtiyaç eden dielektrikler için de kullanabileceğini biliyoruz. Bu duruma yük dağılımı, seibest ve bağlı yükleri birlikte ifade edecek şekilde verilmelidir.

Yukarda zikredilen metodların tümü elektrik yük yoğunlıklarının bilinmesi durumunda geçerli olur. Gerçekte elektrostatik durumların çok azında yük dağılımı bilinir. Dolayısıyla bu çözüm metotları hayli sınırlıdır. Bu bölümde Laplace ve Poisson denklemelerinin çözümüyle yük dağılımları bulunabilecektir. Ayrıca diğer çözüm metodlarından görüntüyü metodu ve sayısal tekniklerde ayrıca bahsedilecektir.

5.1. POISSON DENKLEMLERİNİN TÜRETİLMESİ

Gauss Kanunu

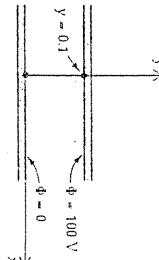
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1)$$

olarak ifade edilmiştir. $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ yerleştirilerek herhangi bir ortam için $\mathbf{E} = -\nabla V$ bağıntısını da dikkate alarak

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\rho/\epsilon \quad (2)$$

$$\nabla^2 V = -\rho/\epsilon \quad (\text{V/m}^3) \quad (3)$$

Şekil 5.1. Sınır şartlarına halz paralel levhalar arası bölgede Laplace denkleminin çözümü



Şekil 5.1. de görüldüğü gibi plakalar sonsuz büyüklükte olması dolayısıyla potansiyel fonksiyonu V , x ve z den bağımsızdır. Levhalar arasında hiç yük yoktur. Bu durumda Laplace denklemi $y=0$ ve $y=1$ m deki $V=0$, $V=100$ (V) lük sınır şartları dikkate alınarak problem çözümünde kullanılabilir. Laplace bağıntısı dik koordinatlarında

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (5)$$

yazılır. Potansiyel sadece y 'ye bağlı olduğuna göre

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

olur. İki defa y değişkenine göre integral alınarak

$$V(y) = C_1 y + C_2$$

bulunur. Burada C_1 ve C_2 integral sabitleri sınır şartları kullanılarak tayin edilebilir.

$$V(0) = 0 = C_2$$

$$V(0,1) = 100 = 0,1C_1 + C_2$$

den; $C_1=1000$, $C_2=0$ bulunur. O halede somuç

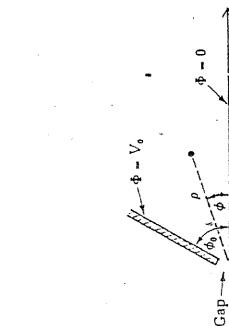
$$V(y) = 1000y$$

bulunur. Elektrik alan ise;

$$\mathbf{E} = \nabla V = -1000\mathbf{a}_y$$

olur.

Örnek 5.2. Şekil 5.2 de görüldüğü gibi yarı sonsuz iki levha arasında bir miktar açılık meydana getirilerek 0 ve V_o potansiyellerinde yitlemiştir. Levhalar arasındaki açı ϕ_0 olduğuna göre $0 < \phi < \phi_0$ bölgesinde potansiyel fonksiyonunun ifadesini bulunuz.



Cözüm. Şeklin simetrisinden faydalananak silindirik koordinatları kullanmak uygun olacaktır. Levhalar arasında yük bulunmadığına göre Laplace denklemi verilen sınır şartları altında çözülebilir. Simetri dolayısıyle potansiyel fonksiyonu yalnız ϕ ye bağılıdır. Bu nedenle silindirik koordinatlarında laplasiyenin yalnız açıya bağlı kısmını yazarsak

$$\frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (7)$$

hava açılığının bulunduğu $r=0$ ds'ında

$$V = C_1 \phi + C_2$$

bulunur. Sınır şartları kullanılarak

$$V = \frac{V_o}{\phi_0} \phi$$

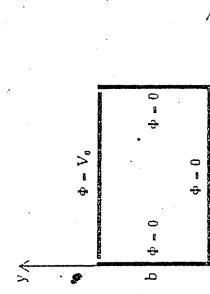
bulunur. Ve elektrik alan ise

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{V_o}{\phi_0} \frac{\partial}{\partial \phi} \phi \quad (8)$$

bulunur. Elektrik alanının, yüksek potansiyelli plakadan, düşük potansiyelli tabakaya doğru olduğu ve bu tabakada son bulduğu anlaşılmaktadır.

Çarpanlara Ayırma Metodu. Laplace denklemi belirli sınır şartları altındaiki boyutta çözümü yapılarak sonuç üç boyut için genelleştirilecektir.

Şekil 5.3 de görüldüğü gibi kenar uzunlukları a ve b olan z ekseni boyunca uzanan, (elektrik alanı ve potansiyeli z değişkeninden bağımsız kılacak kadar) sonsuz uzunluklu dikdörtgen kesidi bir metal boru göz önüne alalım.



Şekil 5.3. Bir kenarı V_o potansiyeline tutulan diğer kenarları topraklılmış dikkörtgen kesili metal bir boru içinde yük yok. Üst levha açılık bırakılmak suretiyle yan kenarlardan izole edilmiştir.

Şekil 5.2. Paralel olmayan levhalar arasındaki bölgede Laplace denklemi çözümlü

Metal boru içinde yük yoğunluğunu sıfır kabul edersek

$$\nabla^2 V(x,y) = 0; \quad 0 < x < a \quad \text{ve} \quad 0 < y < b \quad \text{için}$$

ve sınır şartları ise;

$$\begin{aligned} V(0,y) &= 0 & 0 < y < b \\ V(a,y) &= 0 & 0 < y < b \\ V(x,0) &= 0 & 0 < x < a \\ V(x,b) &= 0 & 0 < x < a \end{aligned} \quad (9)$$

olur. Boru içinde ρ_v yük yoğunluğu sıfır olmakla beraber boru yüzlerinde yüzeysel yük mevcut olup, iç ciarılarda düzgün dağılmamıştır. Potansiyel fonksiyonu bulunduğuunda bu yük dağılmı bulunabilir.

Potansiyel sadece x ve y değişkenlerine bağlı olması dolayısıyle

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (10)$$

olar. Ve $V(x,y)$ potansiyel fonksiyonu

$$V(x,y) = X(x) Y(y) \quad (11)$$

şeklinde yazılıp (10) nolu bağıntıda yerleştirilirse;

$$\frac{\ddot{X}}{X} = C, \quad \frac{\ddot{Y}}{Y} = -C \quad (12)$$

Böylece ikinci dereceden kısmi türevli differansiyel denklem ikinci dereceden adı bulunur. Böylece ikinci dereceden kısmi türevli differansiyel denklem ikinci dereceden adı differansiyel denklem haline getirilmiş olur. (9) nolu sınır şartlarını gerçekleştirecek biçimde olması için $C = -k^2$ sefersek, (12) bağıntısından

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 \sin(kx) + B_1 \cos(kx) \\ Y(y) &= A_2 \sinh(ky) + B_2 \cosh(ky) \\ V(x,y) &= [A_1 \sin(kx) + B_1 \cos(kx)] \\ &\quad [A_2 \sinh(ky) + B_2 \cosh(ky)] \end{aligned} \quad (13)$$

bulunur. $x=0, y=0$ 'a ilişkin sınır şartlarından faydalananarak $B_1=B_2=0$ bulunur.

Böylece

$$V(x,y) = A \sin(kx) \sinh(ky) \quad (14)$$

elde edilir. Burada A ve k keyfi sabitleri göstermektedir. $x=a$ için mevcut sınır şartından faydalananak $m=1,2,3,\dots$ olmak üzere

$$V(x,y) = A \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \quad (15)$$

olur. (9) nolu bağıntılarda verilen sınır şartları kullanılarak bulunan bu (15) ifadesi Laplace denklemini sağlar. Bu ifadeyi m'nin farklı değerleri için serise açılmış olarak yapıp son sınır şartını kullanıalın. $0 < x < a$ aralığı için

$$V_0 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{m\pi b}{a}\right) \quad (16)$$

Buradan A_m fourier katsayıları hesaplanır ve yerine konursa

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=\text{tek}}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \quad (17)$$

bulunur. Verilen problemin tek çözümü olabilmesi için $n=1,3,5,\dots$ gibi tek sayılara eşit olmalıdır. Şekil 5.4. de

$$\sum_{n=\text{tek}}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = 1 \quad (18)$$

ifadesinin ilk üçünü göstermektedir. Sonsuz seri şeklinde sınır-değer probleminin çözümü yapılmış olmasına rağmen V potansiyelinin sayısız olarak uygun bir bilgisayar süresinde hesaplanması için sonsuz serinin hızla yakınsayacağı durumu içermek yerinde olur. Bunun için seri içinde n indeksine bağlı terimlere dikkat edelim.

$$\sinh(nu) = \frac{e^{nu} - e^{-nu}}{2}$$

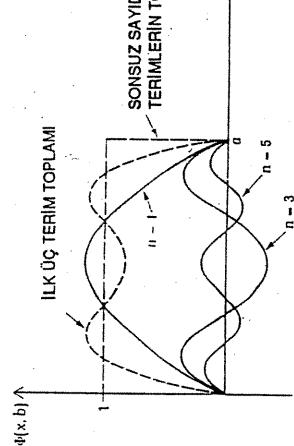
bağıntısı güz öntüne alınrsa, nu büyütükçe ikinci terim ihmali edilebilir. Ve asintotik olarak

$$\sinh(nu) \rightarrow e^{nu/2} \quad (19)$$

olur. Dolayısıyle (17) nolu bağıntıdaki n.terimi

$$\frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp\left(\frac{-in(b-y)}{a}\right) \quad (20)$$

yazılabilir. Bu sonuc $y=b$ civarı haric exponansiyel olarak kücültür. $y=b$ de potansiyelin V_0 olduğu bilinmektedir. Bu nedenle boru içinde herhangi bir noktada seri hizla yakınsar.



Şekil 5.4. $V(x,b)$ ve fourier bilesenleri

Şekil 5.5. de $V_0=100$ volt, $a=16$ birim, $b=9$ birim alınarak boru içinde şeşiti noktalarda hesaplanmış potansiyel değerleri görtülmektedir. Hesaplama larda (17) nolu formüdeki ilk beş terim dikkate alınmıştır.

0	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100			
0	48	70	76	81	84	84	85	86	85	84	84	84	84	81	76	70	48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	27	47	58	64	68	70	72	72	72	70	68	64	58	47	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	18	33	43	50	55	57	59	59	59	57	55	55	50	43	33	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	12	23	32	38	43	45	47	47	45	43	38	32	23	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
0	8	17	23	28	32	35	36	36	35	36	32	28	23	17	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	6	11	16	20	23	25	26	26	25	23	20	16	11	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
0	3	7	10	13	15	16	17	17	16	15	13	10	7	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
0	1	3	5	6	7	8	8	8	8	7	6	5	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Şekil 5.5. Metal boru içindedeki potansiyel değerleri $V_0=100(V)$, $a=16$, $b=9$ birim alınmıştır.

Örnek 5.3. (Laplace denklemiin üç boyutta Çözümü).

Şekil 5.6. da görüldüğü gibi kenarları; a,b,c olan bir metal kutu içindedeki potansiyeli bulalım. Kutunun 5 kenarın sıfır potansiyelde sadece üst yüzü V_0 potansiyelinde olsun.

Cözüm: Metal kutunun içinde yük olmadığına göre Laplace denklemi uygulayabiliriz.

(21)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

denklemi çarpanlara ayrılarak

$$\begin{aligned} V(0,y,z) &= 0 & 0 < y < b \\ V(a,y,z) &= 0 & 0 < z < c \\ V(x,0,z) &= 0 & 0 < x < a \\ V(x,b,z) &= 0 & 0 < z < c \\ V(x,y,0) &= 0 & 0 < x < a \\ V(x,y,c) &= V_0 & 0 < y < b \end{aligned}$$

simir şartları altında çözüllürse;

$$V(x,y,z) = \frac{16V_0}{\pi^2} \sum_{m=\text{çift}}^{\infty} \sum_{n=\text{çift}}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\sqrt{\left(m/a\right)^2 + \left(n/b\right)^2} \pi z}{mn \sinh \sqrt{\left(m/a\right)^2 + \left(n/b\right)^2} \pi C} \quad (23)$$

bulunur.

5.3. POISSON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Poisson denkleminin çeşitli uygulamaları yarı iletken içindeki p-n junksiyon analizinde yapılır. Burada inceleyeceğiniz örnekte Poisson denklemi çözüterek boşlukta yük dağılım ve potansiyel alanı bulunacaktır. Şekil 5.6. daki gibi paralel plakalı termiyonik katotlu diod alam. Isıtan katottan sıfır hızıyla çıkan elektronları ivmeleterek pozitif yükli anoda varsanlar. Katot sıcaklığı dolayısıyle akım sınırlı olmamakla birlikte anodun V_0

$$\nabla^2 V = -\frac{J}{\nu \epsilon_0} \quad (24)$$

şeklinde yazabiliriz. Sınır şartları

$$\begin{aligned} V &= 0 & y &= 0 \text{ da} \\ V &= V_0 & y &= y_0 \text{ da} \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad y=0 \text{ da} \quad (25)$$

son sınır şartı katotta $E=0$ olduğundan denge durumunu göstermektedir. $y=0$ da ilk hız sıfır olduğundan enerji korunumunu

$$\frac{1}{2} m_e V^2 = -eV \quad (26)$$

olarak yazanz. Buradan hızı bulup (24) nolu bağıntıda yerleştirinsek

$$\frac{d^2 V}{dy^2} = -\frac{J}{\epsilon_0} \left(-\frac{m_e}{2eV} \right)^{1/2} \quad (27)$$

$$K = -\frac{J}{\epsilon_0} \left(-\frac{m_e}{2e} \right)^{1/2} \quad (28)$$

olduğuna göre

$$\frac{d^2 V}{dy^2} = KV^{-1/2} \quad (29)$$

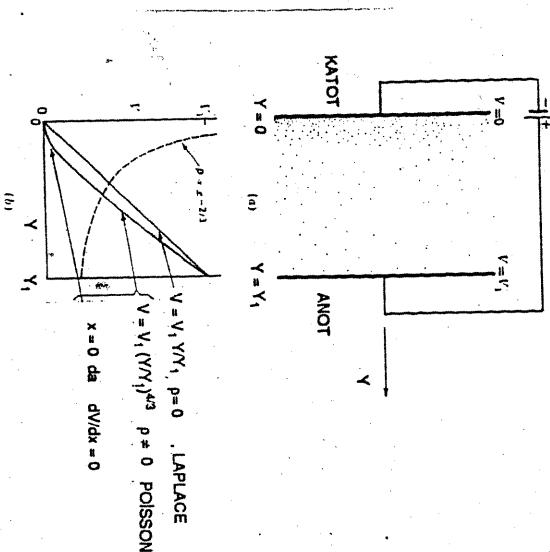
olur. Bu denklemi $2(dV/dy)$ ile çarpıp integralini alırsak

$$V^{3/4} = \frac{3}{2} \sqrt{K} y + B$$

ve sınır şartını kullanarak $B=0$ bulunarak

$$V = \left(\frac{3}{2} \sqrt{K} y \right)^{4/3}; V_0 = \left(\frac{3}{2} \sqrt{K} y_0 \right)^{4/3} \quad (30)$$

yazalabilir. Burada $J(A/m^2)$ akım yoğunluğuudur. $\nu(m/s)$ birimindedir. ρ elektronlar için negatif olduğundan J de negatiftir. Katot-anot arası bölgede akım düzgün kabul edilebilir. Poisson denklemini



Şekil 5.6. Paralel plakalı termiyonik katotlu vakum diyodu. Potansiyel ve yük dağılımı

potansiyeli ile kontrol edilebilir. Buna sınırlı uzay yük durumu denir. Elektronlar v hızıyla anoda gelişyorlarsa yük yoğunluğu

$$V = V_0 \left(\frac{y}{y_0} \right)^{4/3} \quad (31)$$

$$E = \frac{dV}{dy} = -\frac{4V_0}{3y_0} \left(\frac{y}{y_0} \right)^{1/3} \text{ (V/m)} \quad (32)$$

olur. Bu problem m_e (kg) kütüeli dinamik yükü parçacıklarla içermektedir. Elektrik alanı ise

$$J = \frac{4e_0}{9y_0^2} \left(\frac{-2e}{m_e} \right)^{1/2} V_0^{3/2} \text{ (A/m}^2\text{)} \quad (33)$$

ve

$$P = -\frac{4e}{9y_0^2} \left(\frac{y}{y_0} \right)^{-2/3} V_0 \text{ (C/m}^3\text{)} \quad (34)$$

olur. Saçaklıamba dikkate alınmazsa katot anod arasında akan akım, S anod yüzeyini göstermek üzere

$$I = \frac{-4eS}{9y_0^2} \left(\frac{-2e}{m_e} \right)^{1/2} V_0^{3/2} \quad (35)$$

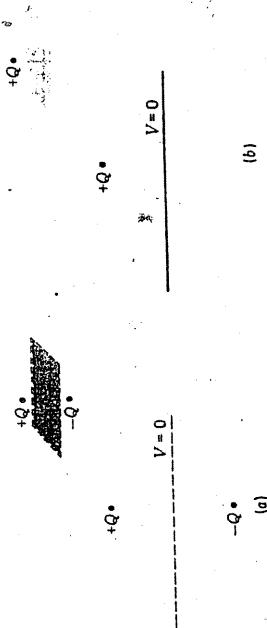
olur. Eksi işaretli anoddan katoda akan konveksiyon akımını gösterir.

5.4. GÖRÜNTÜ METODU

Birçok elektrostatik problemlerde yükler bir iletken civarında bulunur. Katottan yayılanan bir elektron, iletken arz yüzeyinin üzerinde uzayan güç iletim hatları örnek olarak verilebilir. Bir dipolin elektrik alanının önemli özelliği yüklerin ortasında sıfır potansiyelli sonsuz düzleme meydana getirmesidir. Böyle bir düzleme çokince sönümsüz bir iletkenle tensil edilebilir. Şekil 5.7 de görüldüğü gibi bu iletken yüzeyde $V=0$ olduğunu elektrik alan içinde her zaman yüzeyle dik doğrultuda olacaktır. Eğer dipol konfigürasyonu; sadece tek bir yük ve iletken yüzeyinde de alınursa, iletken yüzeyinin üst yarısında alan aynı kalacaktır. Alt tarafındaki yük kaldırıldığı için, iletkenin altında alan sıfırdır. Eğer iletken levhanın altına dipol oluşturulan negatif yük konutursa bu defa da daha önceki dipol konfigürasyonunun negatif yük için mevcut durumuna eşdeğer olan elde edilir.

Veya olayı ters yaklaşımla incelersek iletken yüzey ve yukarıdaki positif yükün oluşturacağı alan, iletken düzlemin altına simetrik olarak konulacak oian negatif yükün iletken

kaldırıldıkten sonra meydana getireceği alanına esdeger olacaktır. Bir çok durumlarda iletken düzlemin üzerindeki yük dağılımlarının hesaplanması gereklidir, yani iletken düzlemin kaldırılmastıyla ortaya çıkacak sırrerik yük dağılımı dikkate alınarak, potansiyel hesaplanır. Ve negatif yükle de pozitif yükün görüntüsi denir.



Şekil 5.7. Tek bir yük ve iletken düzleme eşdeğeri, eşit ve zit iki yük.

Örnek 5.4. Üzerinde P_L çizgisel yük yoğunluğu bulunan bir hat yerden s yüksekliğindede bulunmaktadır. Yerde induktif yüzeysel yük yoğunluğunu ve hattın toprak üzerinde oluşturduğu elektriksel alanı bulalım.

Cözüm. Görüntü metoduna göre problemi, iletken toprak yüzeyini kaldırıp aralarında $2s$ uzaklığında bulunan eşit fakat zit işaretle yüklü iki parel hat gibi düşünübiliriz. Toprak üzerinde alan bu iki hattın aynı ayrı alanlarının toplamına eşit olur. Şekil 5.8. de her bir hattın alan çizgileri ve eş potansiyel yüzeyler gösterilmiştir. Görüldüğü gibi alan toprak yüzeyine dik doğrultudadır.

İletken toprak yüzeyinin yukarısında alan, aşağıdaki görünü hattını kaldırmakla bozulmaz. Aynı etki iletken yüzeydeki ρ_s yük yoğunluğu tarafından sağlanır. Bu yük yoğunluğu;

$$\rho_s = D_n = -\epsilon_0 E_n \quad (36)$$

bulunabilir. Bu iki hattı ince çizgisel yükler gibi düşündürsek, positif yükli hattın alanı E_+ ,

negatif yükün alanı E_- olsun. Bu alanlar Şekil 5.8 de görüldüğü gibi, hat yarıçapından toprak yüzeyindeki herhangi bir noktaya doğu yönelmiş olup

$$E_+ = E_- = \frac{\rho L}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{s^2+x^2}} \quad (37)$$

olur. Buradan

$$E_h = 2\cos\phi E_+ = 2\cos\phi \frac{\rho L}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{s^2+x^2}}$$

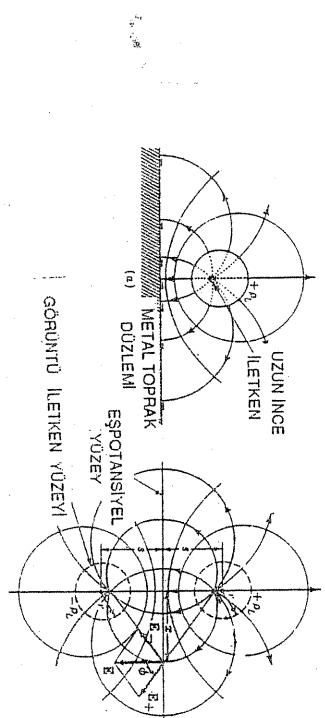
ve $\cos\phi = s/\sqrt{s^2+x^2}$ olduğundan

$$E_h = \frac{\rho L}{\pi\epsilon_0} \frac{S}{s^2+x^2}$$

bulunur. Bu ifade (36) nolu bağıntıya götürülderek $x=0$ iletken yüzeyindeki eş potansiyel düzlemindeki eşdeğer yük yoğunluğu

$$\rho_s = \frac{-\rho L}{\pi} \frac{S}{s^2+x^2} \text{ (C/m}^2\text{)}$$

bulunur. Bu bağıntıdan anlaşıldığı üzere yük yoğunluğu yüzeyin hatta en yakın olduğu yerde en fazla değere erişmektedir. Daha sonra yoğunluk hızla azalmaktadır.



Şekil 5.8. Toprak düzleminin üzerindeki yüklü bir hattın alanı ve onun eşdeğeri alan zıt ve eşit yüklerin hattının alanları

Örnek 5.5 30 (nC/m) lik çizgisel yük $x=0, z=3$ noktasına yerleşmiştir. $z=0$ iletken düzleminde bulunan $P(2,5,0)$ noktasındaki yüzeysel yük yoğunluğunu bulalım.

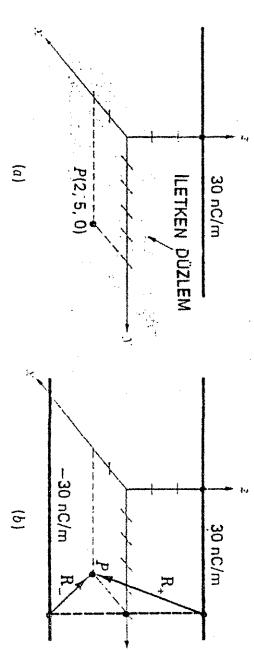
Cözüm. Görüntü metoduna göre iletken düzlemini kaldırımsak -30 nC/m yükü, $x=0, z=3$ noktasına yerleştirerek problemi eşdeğeri hale getirebiliriz. P noktasındaki alan bu iki çizgisel yükün alanlarının toplamına eşit olur. (Bakınız Şekil 5.9.) P noktasını pozitif ve negatif yüklerle bağlayan vektörler $R_+ = 2a_x - 3a_z$ ve $R_- = 2a_x + 3a_z$ ve

$$E_+ = \frac{\rho L}{2\pi\epsilon_0 R_+} \mathbf{a}_{R_+}, E_- = \frac{\rho L}{2\pi\epsilon_0 R_-} \mathbf{a}_{R_-}$$

den faydalananarak bileşke alan

$$E = \sqrt{E_+^2 + E_-^2} = 249 \text{ (V/m)}$$

bulunur.

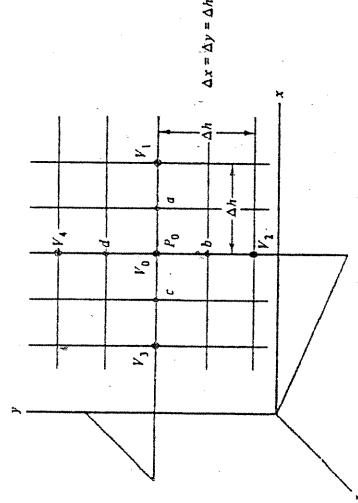


Şekil 5.9. Iletken bir düzlemin üzerindeki çizgisel yük ve iletken düzlemin kaldırıldığında çizgisel yükün görüntüsü.

5.5. LAPLACE DENKLEMİN İTERASYON İLE ÇÖZÜMÜ

Kağıt ve kalemlerde bilgisayar kullanılmamak suretiyle bu metot; potansiyelin bir, ikinci veya üçüncü parametreye bağlı olması durumlarında ve sınır potansiyelleri bilinen problemlere uygulanır. Ve sonuç bilgisayar kullanıldığında yüksek bir doğrulukla elde edilir.

Sayısal çözüm metodu Laplace denkleminin uygun ortalama değer özelligine dayanır. Bir noktadaki potansiyel olarak o nokta civarındaki potansiyellerin ortalaması alınır. Şekil (5.10) da götürdüğü gibi P_0 noktasındaki potansiyel x, y değişkenlerine bağlıdır.



Şekil 5.10. Po noktasındaki ortalama Potansiyelin bulunması için, bölgenin Δh alt karelerine hâlininmesi

L'adace dank[lem] vanzilim

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

$Z =$ sabit tützülemi. Δh kenarlı karelere bölgelim (39) nolu bağıntı bilinen V_1, V_2, V_3 ve V_4 potansiyeli ılıeri cinsinden ifade edeneğe gelselim. Önce a ve c orta noktalardaki kismı türlevleri ilişkite alalım.

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = \frac{y}{Y_1 - Y_0}$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_c = \frac{V_o - V_3}{\Delta h} \quad (41)$$

Kağıt ve kalemler bilgisayar kullanılmak suretiyle bu metot, potansiyelin bir, iki veya olur.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} |_{p_0} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) |_{p_0} = \frac{\frac{\partial V}{\partial x} |_{a} - \frac{\partial V}{\partial x} |_{c}}{\Delta h} \quad (42)$$

olduğundan (40) ve (41) bu son bağlantıda yerleştirilirse

$$\left(43\right) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_{P_0} = \frac{V_1 + V_3 - 2V_0}{(\Delta h)^2}$$

ve benzer sekilde

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right|_{P_0} = \frac{V_4 + V_3 - 2V_0}{(\Delta h)^2} \quad (44)$$

Bu son iki başlığından faydalananarak P_o noktasındaki ortalama V_o potansiyeli bulunur.

$$V_0 \equiv \frac{1}{4} (V_1 + V_2 + V_3 + V_4) \quad (45)$$

bulunur. Elde edilen bu ortamda potansiyel uyguluk Δh ’a tıkanır. $\Delta h \rightarrow 0$ iken kesin değer bulunur.

Örnek 5.6. Şekil 5.11 de görüldüğü gibi sonsuz iletken bir dikdörtgen kesiti boru alalım. Eni yüksekliğinin 1.5 katı olsun. Kesiti eşit karelere bölelim. Ve herbir köşedeki potansiyelin ilk yaklaşımını tahminen alınır. Tahmini köşe potansiyelleri Tablo 5.1 de verilmiştir. Bilgisayar kullanıldığından ilk alnan potansiyeller sıfır seçilir. El ile yapılan hesaplamalarda, köşe potansiyelleri için makul değerler tahmin edilerek seçilir. En son çözüm herbir köşedeki potansiyelin tekrar yeniden hesaplanmasıyle elde edilir. Bir kaç itarasyonla daha iyi sonuç bulunur. Bu şekilde sayısal olarak yapılan çözüm metoduna itarasyonel çözüm denir. Vee için hizlilik kiseğeni kullanarak

卷之三

Tablo 5.1 Örnek 5.6 problemine ait Potansiyelin köşelerdeki ilk yaklaşık değerleri

$V_{33} = \frac{V_{15} + V_{55} + V_{51} + V_{11}}{4} = \frac{100+0+0+50}{4} = 37,5 \text{ (V)}$	$V_{22} = \frac{V_{13} + V_{33} + V_{31} + V_{11}}{4} = \frac{100+37,5+0+50}{4} = 46,9 \text{ (V)}$	$V_{42} = \frac{V_{33} + V_{53} + V_{51} + V_{31}}{4} = \frac{37,5+0+0+0}{4} = 9,4 \text{ (V)}$	$V_{24} = \frac{V_{15} + V_{35} + V_{33} + V_{13}}{4} = \frac{100+37,5+37,5+100}{4} = 68,8 \text{ (V)}$	$V_{44} = \frac{V_{35} + V_{55} + V_{53} + V_{33}}{4} = \frac{37,5+0+0+37,5}{4} = 18,8 \text{ (V)}$
V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}
V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_{25}
V_{31}	V_{32}	V_{33}	V_{34}	V_{35}
V_{41}	V_{42}	V_{43}	V_{44}	V_{45}
V_{51}	V_{52}	V_{53}	V_{54}	V_{55}

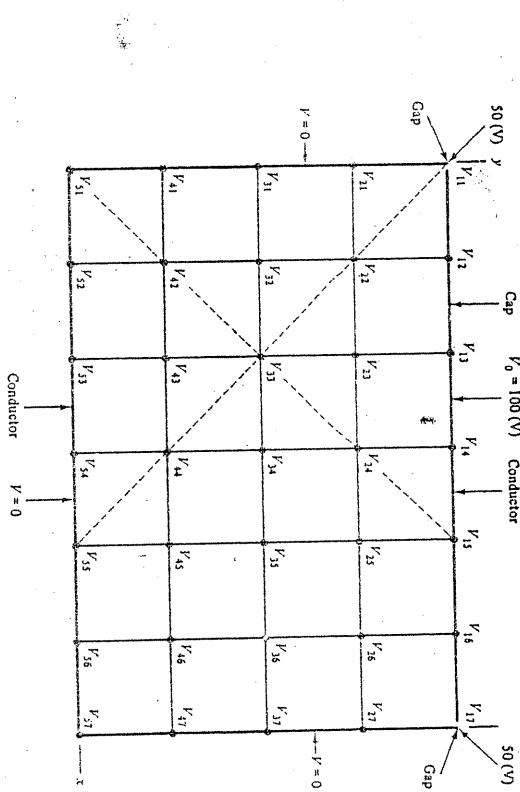
ve klüçük köşegenlerden faydalananak da

$$V_{24} = \frac{V_{15} + V_{35} + V_{33} + V_{13}}{4} = \frac{100+37,5+37,5+100}{4} = 68,8 \text{ (V)}$$

$$V_{44} = \frac{V_{35} + V_{55} + V_{53} + V_{33}}{4} = \frac{37,5+0+0+37,5}{4} = 18,8 \text{ (V)}$$

bulunur. Sinerji dolayısıyle $V_{35} = V_{33}$, $V_{26} = V_{22}$, $V_{46} = V_{42}$ dir. V_{32}, V_{23}, V_{34} ve V_{44} potansiyelleri ise (45) nolu bağıntıdan faydalananak tablodaki değerleri kullanmadan Tablo 5.1 de gösterildiği gibi bulunabilir. Ortalama köşen ilk yaklaşımı yapmadı kullanılır. Bu yaklaşım (45) bağıntısından yerleştirilerek $V_{22}, V_{23}, V_{24}, V_{32}, V_{33}, V_{34}, V_{42}, V_{43}$ ve V_{44} potansiyellerini bulmak için tüm potansiyeller yedinci hesaplanır. Bu iterasyon işlemi yeni hesaplanan değerlerde bir değişme olmayancaya kadar tekrarlanır. Tablo 5.2 de tüm yeni potansiyel değerleri verilmiştir.

Eş potansiyel çizgileri yaklaşık eşit potansiyelli noktaların birleştirilmesi suretiyle çizilebilir. Bu çizgilerden faydalananak E , D ve iletken yüzeyindeki ρ_s yük yoğunlukları bulunabilir.



Şekil 3.11 Dikdörtgen kasılı bir iletken boru içinde potansiyelin iterasyonla çözümü

Fotran IV Program

(Bu program Ierasyon Metodu ile elektriksel potansiyel hesaplar.)

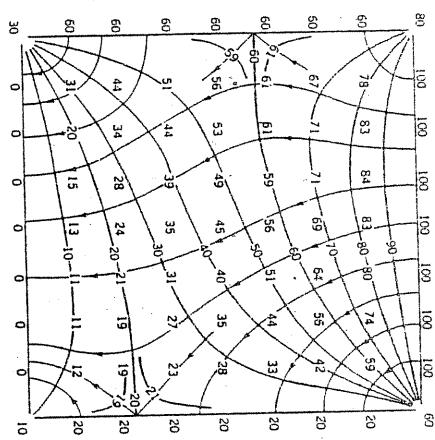
Tablo 5.2 Dikdörtgen boru için potansiyelin tanımlanmış çözümleri

```

PROGRAM TO CALCULATE ELECTRIC POTENTIAL BY THE IERASYON METHOD,
COMMON LAYER, 100V BORU
C ONE POINT IS ON A 1x1 SQUARE, WHICH IS IN THE FIRST QUADRANT,
C I.E., (1,1) IS IN THE TOP LEFT CORNER,
C DATA: VOLTAGE VALUES IN THE BOUNDARIES,
C POINTS ARE NUMBERED AS FOLLOWS:
C 1 2 3 4
C 5 6 7 8
C 9 10 11 12
C 13 14 15 16
C 17 18 19 20
C 21 22 23 24
C 25 26 27 28
C 29 30 31 32
C 33 34 35 36
C 37 38 39 40
C 41 42 43 44
C 45 46 47 48
C 49 50 51 52
C 53 54 55 56
C 57 58 59 60
C 61 62 63 64
C 65 66 67 68
C 69 70 71 72
C 73 74 75 76
C 77 78 79 80
C 81 82 83 84
C 85 86 87 88
C 89 90 91 92
C 93 94 95 96
C 97 98 99 100
C CALCULATE THE CENTER VALUE, CASE 0, 9x9 SQUARE.
C CALCULATE THE NEAREST POINTS, CASE 1, 5x5 SQUARES,
C 11,12,13,14,15,16,17,18,19
C 12,13,14,15,16,17,18,19,20
C 13,14,15,16,17,18,19,20,21
C 14,15,16,17,18,19,20,21,22
C CALCULATE THE 4 SURROUNDING POINTS, CASE 0, 3x3 SQUARES,
C 11,12,13,14,15,16,17,18,19
C 12,13,14,15,16,17,18,19,20
C 13,14,15,16,17,18,19,20,21
C 14,15,16,17,18,19,20,21,22
C NOW GO TO THE 3x3 SQUARES, CASE 1,
C 00 100 200 300 400
C 01 101 201 301 401
C 02 102 202 302 402
C 03 103 203 303 403
C 04 104 204 304 404
C 05 105 205 305 405
C 06 106 206 306 406
C 07 107 207 307 407
C 08 108 208 308 408
C 09 109 209 309 409
C 10 110 210 310 410
C 11 111 211 311 411
C 12 112 212 312 412
C 13 113 213 313 413
C 14 114 214 314 414
C 15 115 215 315 415
C 16 116 216 316 416
C 17 117 217 317 417
C 18 118 218 318 418
C 19 119 219 319 419
C 20 120 220 320 420
C 21 121 221 321 421
C 22 122 222 322 422
C 23 123 223 323 423
C 24 124 224 324 424
C 25 125 225 325 425
C 26 126 226 326 426
C 27 127 227 327 427
C 28 128 228 328 428
C 29 129 229 329 429
C 30 130 230 330 430
C 31 131 231 331 431
C 32 132 232 332 432
C 33 133 233 333 433
C 34 134 234 334 434
C 35 135 235 335 435
C 36 136 236 336 436
C 37 137 237 337 437
C 38 138 238 338 438
C 39 139 239 339 439
C 40 140 240 340 440
C 41 141 241 341 441
C 42 142 242 342 442
C 43 143 243 343 443
C 44 144 244 344 444
C 45 145 245 345 445
C 46 146 246 346 446
C 47 147 247 347 447
C 48 148 248 348 448
C 49 149 249 349 449
C 50 150 250 350 450
C 51 151 251 351 451
C 52 152 252 352 452
C 53 153 253 353 453
C 54 154 254 354 454
C 55 155 255 355 455
C 56 156 256 356 456
C 57 157 257 357 457
C 58 158 258 358 458
C 59 159 259 359 459
C 60 160 260 360 460
C 61 161 261 361 461
C 62 162 262 362 462
C 63 163 263 363 463
C 64 164 264 364 464
C 65 165 265 365 465
C 66 166 266 366 466
C 67 167 267 367 467
C 68 168 268 368 468
C 69 169 269 369 469
C 70 170 270 370 470
C 71 171 271 371 471
C 72 172 272 372 472
C 73 173 273 373 473
C 74 174 274 374 474
C 75 175 275 375 475
C 76 176 276 376 476
C 77 177 277 377 477
C 78 178 278 378 478
C 79 179 279 379 479
C 80 180 280 380 480
C 81 181 281 381 481
C 82 182 282 382 482
C 83 183 283 383 483
C 84 184 284 384 484
C 85 185 285 385 485
C 86 186 286 386 486
C 87 187 287 387 487
C 88 188 288 388 488
C 89 189 289 389 489
C 90 190 290 390 490
C 91 191 291 391 491
C 92 192 292 392 492
C 93 193 293 393 493
C 94 194 294 394 494
C 95 195 295 395 495
C 96 196 296 396 496
C 97 197 297 397 497
C 98 198 298 398 498
C 99 199 299 399 499
C 100 200 300 400 500
C 101 201 301 401 501
C 102 202 302 402 502
C 103 203 303 403 503
C 104 204 304 404 504
C 105 205 305 405 505
C 106 206 306 406 506
C 107 207 307 407 507
C 108 208 308 408 508
C 109 209 309 409 509
C 110 210 310 410 510
C 111 211 311 411 511
C 112 212 312 412 512
C 113 213 313 413 513
C 114 214 314 414 514
C 115 215 315 415 515
C 116 216 316 416 516
C 117 217 317 417 517
C 118 218 318 418 518
C 119 219 319 419 519
C 120 220 320 420 520
C 121 221 321 421 521
C 122 222 322 422 522
C 123 223 323 423 523
C 124 224 324 424 524
C 125 225 325 425 525
C 126 226 326 426 526
C 127 227 327 427 527
C 128 228 328 428 528
C 129 229 329 429 529
C 130 230 330 430 530
C 131 231 331 431 531
C 132 232 332 432 532
C 133 233 333 433 533
C 134 234 334 434 534
C 135 235 335 435 535
C 136 236 336 436 536
C 137 237 337 437 537
C 138 238 338 438 538
C 139 239 339 439 539
C 140 240 340 440 540
C 141 241 341 441 541
C 142 242 342 442 542
C 143 243 343 443 543
C 144 244 344 444 544
C 145 245 345 445 545
C 146 246 346 446 546
C 147 247 347 447 547
C 148 248 348 448 548
C 149 249 349 449 549
C 150 250 350 450 550
C 151 251 351 451 551
C 152 252 352 452 552
C 153 253 353 453 553
C 154 254 354 454 554
C 155 255 355 455 555
C 156 256 356 456 556
C 157 257 357 457 557
C 158 258 358 458 558
C 159 259 359 459 559
C 160 260 360 460 560
C 161 261 361 461 561
C 162 262 362 462 562
C 163 263 363 463 563
C 164 264 364 464 564
C 165 265 365 465 565
C 166 266 366 466 566
C 167 267 367 467 567
C 168 268 368 468 568
C 169 269 369 469 569
C 170 270 370 470 570
C 171 271 371 471 571
C 172 272 372 472 572
C 173 273 373 473 573
C 174 274 374 474 574
C 175 275 375 475 575
C 176 276 376 476 576
C 177 277 377 477 577
C 178 278 378 478 578
C 179 279 379 479 579
C 180 280 380 480 580
C 181 281 381 481 581
C 182 282 382 482 582
C 183 283 383 483 583
C 184 284 384 484 584
C 185 285 385 485 585
C 186 286 386 486 586
C 187 287 387 487 587
C 188 288 388 488 588
C 189 289 389 489 589
C 190 290 390 490 590
C 191 291 391 491 591
C 192 292 392 492 592
C 193 293 393 493 593
C 194 294 394 494 594
C 195 295 395 495 595
C 196 296 396 496 596
C 197 297 397 497 597
C 198 298 398 498 598
C 199 299 399 499 599
C 200 300 400 500 600
C 201 301 401 501 601
C 202 302 402 502 602
C 203 303 403 503 603
C 204 304 404 504 604
C 205 305 405 505 605
C 206 306 406 506 606
C 207 307 407 507 607
C 208 308 408 508 608
C 209 309 409 509 609
C 210 310 410 510 610
C 211 311 411 511 611
C 212 312 412 512 612
C 213 313 413 513 613
C 214 314 414 514 614
C 215 315 415 515 615
C 216 316 416 516 616
C 217 317 417 517 617
C 218 318 418 518 618
C 219 319 419 519 619
C 220 320 420 520 620
C 221 321 421 521 621
C 222 322 422 522 622
C 223 323 423 523 623
C 224 324 424 524 624
C 225 325 425 525 625
C 226 326 426 526 626
C 227 327 427 527 627
C 228 328 428 528 628
C 229 329 429 529 629
C 230 330 430 530 630
C 231 331 431 531 631
C 232 332 432 532 632
C 233 333 433 533 633
C 234 334 434 534 634
C 235 335 435 535 635
C 236 336 436 536 636
C 237 337 437 537 637
C 238 338 438 538 638
C 239 339 439 539 639
C 240 340 440 540 640
C 241 341 441 541 641
C 242 342 442 542 642
C 243 343 443 543 643
C 244 344 444 544 644
C 245 345 445 545 645
C 246 346 446 546 646
C 247 347 447 547 647
C 248 348 448 548 648
C 249 349 449 549 649
C 250 350 450 550 650
C 251 351 451 551 651
C 252 352 452 552 652
C 253 353 453 553 653
C 254 354 454 554 654
C 255 355 455 555 655
C 256 356 456 556 656
C 257 357 457 557 657
C 258 358 458 558 658
C 259 359 459 559 659
C 260 360 460 560 660
C 261 361 461 561 661
C 262 362 462 562 662
C 263 363 463 563 663
C 264 364 464 564 664
C 265 365 465 565 665
C 266 366 466 566 666
C 267 367 467 567 667
C 268 368 468 568 668
C 269 369 469 569 669
C 270 370 470 570 670
C 271 371 471 571 671
C 272 372 472 572 672
C 273 373 473 573 673
C 274 374 474 574 674
C 275 375 475 575 675
C 276 376 476 576 676
C 277 377 477 577 677
C 278 378 478 578 678
C 279 379 479 579 679
C 280 380 480 580 680
C 281 381 481 581 681
C 282 382 482 582 682
C 283 383 483 583 683
C 284 384 484 584 684
C 285 385 485 585 685
C 286 386 486 586 686
C 287 387 487 587 687
C 288 388 488 588 688
C 289 389 489 589 689
C 290 390 490 590 690
C 291 391 491 591 691
C 292 392 492 592 692
C 293 393 493 593 693
C 294 394 494 594 694
C 295 395 495 595 695
C 296 396 496 596 696
C 297 397 497 597 697
C 298 398 498 598 698
C 299 399 499 599 699
C 300 400 500 600 700
C 301 401 501 601 701
C 302 402 502 602 702
C 303 403 503 603 703
C 304 404 504 604 704
C 305 405 505 605 705
C 306 406 506 606 706
C 307 407 507 607 707
C 308 408 508 608 708
C 309 409 509 609 709
C 310 410 510 610 710
C 311 411 511 611 711
C 312 412 512 612 712
C 313 413 513 613 713
C 314 414 514 614 714
C 315 415 515 615 715
C 316 416 516 616 716
C 317 417 517 617 717
C 318 418 518 618 718
C 319 419 519 619 719
C 320 420 520 620 720
C 321 421 521 621 721
C 322 422 522 622 722
C 323 423 523 623 723
C 324 424 524 624 724
C 325 425 525 625 725
C 326 426 526 626 726
C 327 427 527 627 727
C 328 428 528 628 728
C 329 429 529 629 729
C 330 430 530 630 730
C 331 431 531 631 731
C 332 432 532 632 732
C 333 433 533 633 733
C 334 434 534 634 734
C 335 435 535 635 735
C 336 436 536 636 736
C 337 437 537 637 737
C 338 438 538 638 738
C 339 439 539 639 739
C 340 440 540 640 740
C 341 441 541 641 741
C 342 442 542 642 742
C 343 443 543 643 743
C 344 444 544 644 744
C 345 445 545 645 745
C 346 446 546 646 746
C 347 447 547 647 747
C 348 448 548 648 748
C 349 449 549 649 749
C 350 450 550 650 750
C 351 451 551 651 751
C 352 452 552 652 752
C 353 453 553 653 753
C 354 454 554 654 754
C 355 455 555 655 755
C 356 456 556 656 756
C 357 457 557 657 757
C 358 458 558 658 758
C 359 459 559 659 759
C 360 460 560 660 760
C 361 461 561 661 761
C 362 462 562 662 762
C 363 463 563 663 763
C 364 464 564 664 764
C 365 465 565 665 765
C 366 466 566 666 766
C 367 467 567 667 767
C 368 468 568 668 768
C 369 469 569 669 769
C 370 470 570 670 770
C 371 471 571 671 771
C 372 472 572 672 772
C 373 473 573 673 773
C 374 474 574 674 774
C 375 475 575 675 775
C 376 476 576 676 776
C 377 477 577 677 777
C 378 478 578 678 778
C 379 479 579 679 779
C 380 480 580 680 780
C 381 481 581 681 781
C 382 482 582 682 782
C 383 483 583 683 783
C 384 484 584 684 784
C 385 485 585 685 785
C 386 486 586 686 786
C 387 487 587 687 787
C 388 488 588 688 788
C 389 489 589 689 789
C 390 490 590 690 790
C 391 491 591 691 791
C 392 492 592 692 792
C 393 493 593 693 793
C 394 494 594 694 794
C 395 495 595 695 795
C 396 496 596 696 796
C 397 497 597 697 797
C 398 498 598 698 798
C 399 499 599 699 799
C 400 500 600 700 800
C 401 501 601 701 801
C 402 502 602 702 802
C 403 503 603 703 803
C 404 504 604 704 804
C 405 505 605 705 805
C 406 506 606 706 806
C 407 507 607 707 807
C 408 508 608 708 808
C 409 509 609 709 809
C 410 510 610 710 810
C 411 511 611 711 811
C 412 512 612 712 812
C 413 513 613 713 813
C 414 514 614 714 814
C 415 515 615 715 815
C 416 516 616 716 816
C 417 517 617 717 817
C 418 518 618 718 818
C 419 519 619 719 819
C 420 520 620 720 820
C 421 521 621 721 821
C 422 522 622 722 822
C 423 523 623 723 823
C 424 524 624 724 824
C 425 525 625 725 825
C 426 526 626 726 826
C 427 527 627 727 827
C 428 528 628 728 828
C 429 529 629 729 829
C 430 530 630 730 830
C 431 531 631 731 831
C 432 532 632 732 832
C 433 533 633 733 833
C 434 534 634 734 834
C 435 535 635 735 835
C 436 536 636 736 836
C 437 537 637 737 837
C 438 538 638 738 838
C 439 539 639 739 839
C 440 540 640 740 840
C 441 541 641 741 841
C 442 542 642 742 842
C 443 543 643 743 843
C 444 544 644 744 844
C 445 545 645 745 845
C 446 546 646 746 846
C 447 547 647 747 847
C 448 548 648 748 848
C 449 549 649 749 849
C 450 550 650 750 850
C 451 551 651 751 851
C 452 552 652 752 852
C 453 553 653 753 853
C 454 554 654 754 854
C 455 555 655 755 855
C 456 556 656 756 856
C 457 557 657 757 857
C 458 558 658 758 858
C 459 559 659 759 859
C 460 560 660 760 860
C 461 561 661 761 861
C 462 562 662 762 862
C 463 563 663 763 863
C 464 564 664 764 864
C 465 565 665 765 865
C 466 566
```

PROBLEMLER

5.1. Birbirlerinden 5mm aralıklı ayrılmış iletken diskler Şekil 5.13 de görüldüğü gibi 2.2 bağılı dielektrik malzeme ile doldurulmuştur. Disk üzerindeki yük yoğunluklarını bulunuz?



Şekil 5.12. Sonsuz uzun kare kesiti iletken bir boruda, iterasyonla bilgisayar çözümü.
Eşpotansiyel çizgiler kovu elektrik alan çizgileri oktu çizgilerle gösterilmiştir.

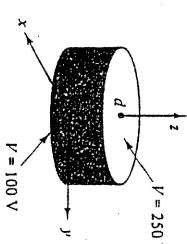
Elektrik alan ve potansiyellerin bulunmasına ilişkin, incelemī oldugūmuz bu metodlardan başka, Grafik metod, Benzetim Metodu ve Deneysel Metotlar da mevcuttur. Bu metodlarda, yük dağılmısına bilinmesine gerek olmadan, laplace denklemlerle bağlı çözümler elde edilir.

Grafik metoda kağıt ve kalem vasıtasıyla çizilen eğrilek karelerle elektrik akı çizgileri ve potansiyel yüzeyler yaklaşıklık olarak elde edilir. Bu metodun doğruluğu grafiklerin elde edilmesindeki sabır ve bireysel kabiliyete bağlıdır.

Benzetim metodu, dielektrik ortamlardaki elektrik akı yoğunluğu ile iletken ortamlardaki akım yoğunluğu arasındaki benzerinden yararlanır. Bu metod ile yapılan ölçmetere de Deneysel Çözüm Metodu denir. Bu ölçüne metodunda düzgün dirençli kağıt ve elektroliz kabı kullanılır.

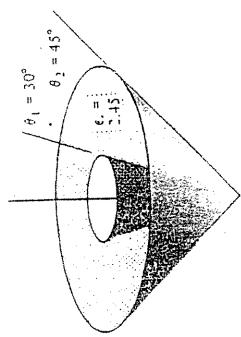
Şekil 5.13

5.2. Şekil 5.14 de görüldüğü gibi aralarında $\alpha = \pi/4$ açısı yapan iki iletken $\phi = \text{satır}$ düzlemleri arasındaki potansiyel farkı 100V tür. Levhalar arasındaki saçıklanmayı ihmal ederek, levhalar arasındaki E yi bulunuz?



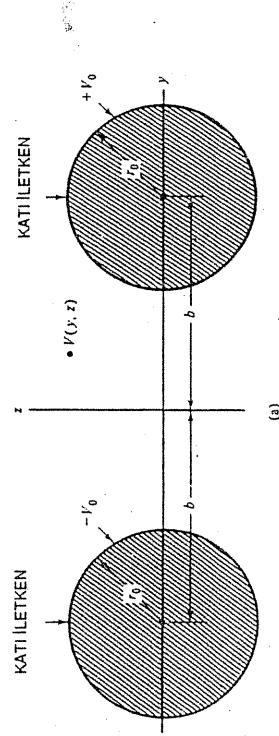
Şekil 5.14

5.3. Şekil 5.15 daki koaksiyal koniler arasında $E = 2,3,103 \frac{a_0}{a} (\text{V/m})$ dir. Koniler arasındaki malzemedenin bağılı dielektriği 2,45 dir. İç ve dış koniler düzey ekseniyle 30° ve 45° lik açılar yapmaktadır. Koniler arasındaki potansiyel farkını bulunuz.

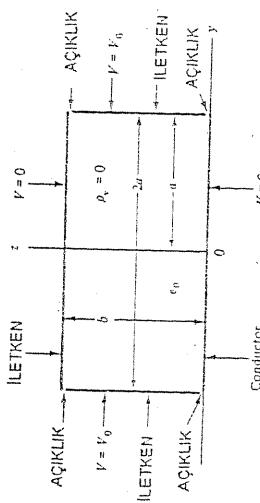


Şekil 5.15

5.4. Şekil 5.16'daki iki boyutlu elektrostatik problemi için (a) V skalar alanını, (b) $a=b$ olduğu zaman $y=0$ ve $z=b/2$ için V yi bulunuz.

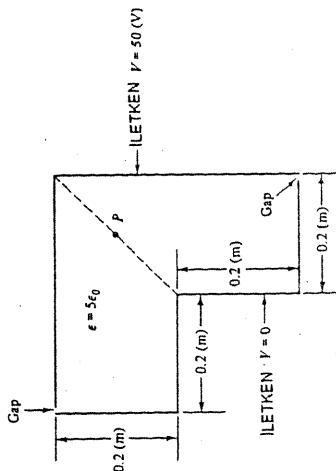


Şekil 5.17
5.6. Kesit görünüsü Şekil 5.18 de verilen uniform iletken plakalı sistemin bir yüzüne 50
 V lük potansiyel uygulanmıştır. P noktasındaki potansiyeli sayısal metota çözün.



Şekil 5.16 x yönünde uzayan sonusuz uzun dört iletkenin oluşturduğu iki değişkenli elektrostatik problemi şekilde gösterilmesi.

5.5. İki sonsuz uzun silindirin iletkenlerin yüzeylerindeki potansiyel $100V$ dur. Birbirlerinden $0,1m$ uzaka ve paralel olan bu silindirlerin yarı çapı $0,01 m$ dir. ($0,8,0$) noktasındaki E yi bulunuz. (Şekil 5.17)



Şekil 5.18

5.6. Kesit görünüsü Şekil 5.18 de verilen uniform iletken plakalı sistemin bir yüzüne 50
 V lük potansiyel uygulanmıştır. P noktasındaki potansiyeli sayısal metoda çözün.

BÖLÜM 6 STATİK MAGNETİK ALANLAR

6.1. BIOT-SAVART KANUNU

Bu bölümde $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial \rho / \partial t = 0$ bağıntısıyle tanımlanan sürekli akımların oluşturduğu düzgün magnetik alanlardan (magnetostatik) bahsedeceğiz. Böyle bir magnetik alan miknatısları ya da zamanla doğrusal değişen elektrik alanlarıyla da oluşturulabilir.

Magnetostatik alanı doğuran akım konfigürasyonları filamenter (çizgisel), yüzeysel, hacimsel olmak üzere üç çeşidir. (Amper-m) birimli bu akın elamanları arasında K çok ince bir levhадaki yilzeysel akım yoğunluğunu, J hacimsel akım yoğunluğunu göstermek üzere

$$IdL = Kds = Jdv \quad (\text{A.m})$$

ilişkisi vardır. Şekil 6.1. de görülen I_1 , dL , akım elamanının P_2 noktasında oluşturduğu dH_2 magnetik alan şiddeti Biot-savart kanunu göre

$$dH_2 = \frac{I_1 d_x a_{R12}}{4\pi R_{12}^2} \quad (A/m) \quad (2)$$

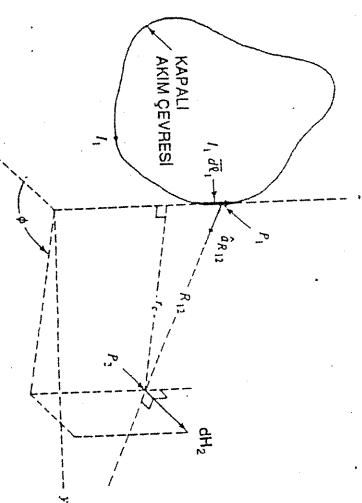
olarak ifade edilir. Burada $a_{R_{12}}$ P_1 noktasından P_2 noktasına yönelmiş birim vektörtür, R_{12} , akım elamanı ile P_2 noktası arası uzaklığ göstermektedir; (2) bağıntısının integrali alınırsa tüm çizgisel akımın P_2 noktasındaki magnitik alan şiddeti hesaplanır.

$$H_2 = \frac{\int I_1 dI_1 \frac{x a_{R12}}{4\pi R_{12}^2}}{m} \quad (A/m) \quad (3)$$

Bu integral magnetik alan doğuran akım konfigürasyonu durumuna bağlı olarak (I_1) bağıntısından faydalananak, yüzyesel ya da hacimsel akım yoğunlukları içerisinde genisletilebilir.

Şekil 6.1. Çizgisel akımın ürettiği magnetik alanın P_2 noktası için bulunması.

Ünitek 0.1. Üzümləndirilmənəz vəzifələr



Şekil 6.2. *I* doğru akımı taşıyan uzun bir telin civarındaki magnitik alanın bulunması.

Cözüm. Magnetik alan hesaplanacak noktanın akım elamanına uzaklığı, R olsun. Şeklin simetrisinden dolayı alan z ve ϕ den bağımsızdır.

$$\mathbf{R} = r \mathbf{a}_r - z \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a} = \frac{r \mathbf{a}_r - za_z}{R^2 (r^2 + z^2)^{1/2}}$$

ve $dL = d2 \mathbf{a}_z$ ifadeleri (2) nolu bağıntuya götürültürse

$$\mathbf{H}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Idz \mathbf{a}_x (ra_x - za_z)}{4\pi (r^2 + z^2)^{3/2}}$$

olar.

$$= \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r dz \mathbf{a}_x \frac{Z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

burada \mathbf{a}_x birim vektöri, r ve z den bağımsız olduğu için integralden sabit olarak dışarı çıkar ve z ye göre integral alındığında

$$\mathbf{H}_2 = \frac{Ir \mathbf{a}_x}{4\pi} \frac{Z}{r^2 (r^2 + z^2)^{1/2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

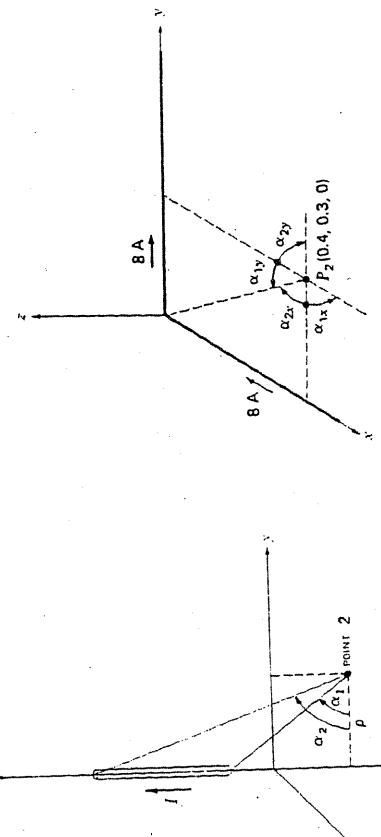
$$\mathbf{H}_2 = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{a}_x$$

Alan çizgileri Şekil 6.3 de görüldüğü gibi akım taşıyan tele, dik düzlem üzerinde iş içe darterler halindedir. Elektrik alanının eş potansiyel çizgilerine benzemektedir. İleride bu benzerlik daha ayrıntılı olarak incelenecesiur.

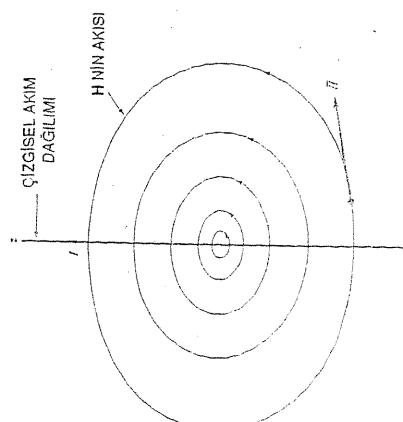
Coulomb Kanununun uygulamalarında, noktalı, çizgisel, yüzeyel ve hacimsel yük yoğunlıklarının oluşturduğu elektrik alamna ilişkin çeşitli problemler çözülmüştür. Benzer uygulamalar, Biot-Savart kanunu ile de yapılabilir. Örneğin üzerinden I akım geçen sonlu uzunluklu bir telin P noktasında oluşturacağı magnetik alan (Şekil 6.4 (a)) deki geometrik duruma göre:

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \quad (5)$$

Örnek 6.2. (5) nolu bağıntıyla Şekil 6.4 (b) deki gibi lizinden 8 A lik akım geçen ve $x-y$ eksenlerine oturmuş telin $(1, 1, 0)$ noktasında oluşturacağı magnetik alanı hesaplayınız.



Şekil 6.4 (a). Sonlu uzunlukta akım taşıyan bir telin P noktasındaki magnetik alanı
 $I / 4 \pi r (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \text{ dir. (b) İki yanı sonsuz telin } P \text{ noktasındaki toplam magnetik alanının bulunması.}$



Cözüm.
 x eksenine yerlesmiş yan sonsuz telin P noktasındaki alan $\alpha_1 = 90^\circ$ ve

Şekil 6.3. Akım geçen sonsuz teliin çizgisiel dağılımını gösteren çizgiyi

$$\mathbf{H}_{(x)} = \frac{8}{4\pi I} (0.7+1) \mathbf{a}_\phi = \frac{3.4}{\pi} \mathbf{a}_\phi$$

birim vektör x eksenine göre alındığından

$$\mathbf{H}_{(x)} = \frac{3.4}{\pi} (-\mathbf{a}_z) \quad (\text{A/m})$$

olur.

Benzer işlemler y eksenindeki akım için tekrarlanırsa

$$\alpha_{1y} = -45^\circ, \quad \alpha_{2y} = 90^\circ$$

$$\mathbf{H}_{(y)} = \frac{8}{4\pi I} (1+0.7) (-\mathbf{a}_z) = \frac{3.4}{\pi} (-\mathbf{a}_z)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{(x)} + \mathbf{H}_{(y)} = \frac{6.8}{\pi} (-\mathbf{a}_z) \quad \text{A/m}$$

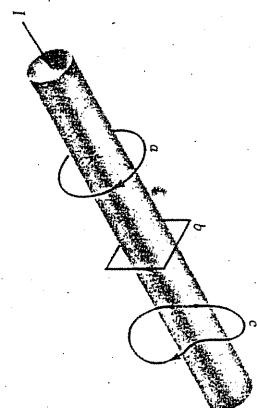
olur.

Amper formülü. Elektrostatikte yük dağılımlarının simetrik olması durumunda problem çözümlerini kolaylaştırılan Gauss kanunu benzer bir bağıntı, simetrik akım dağılımları için magnetik alanlarda da mevcut olup Amper Çevre Kanunu olarak bilinir. Bu kurala göre \mathbf{H} magnetik alanının kapalı bir çevre boyunca integrali bu kapalı çevrenin içinde kalan akına eşittir.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I \quad (6)$$

ile ifade edilir. \mathbf{H} magnetik alanının şekil 6.5. de gösterilen; a, b, c farklı çevreleri boyunca alınacak integralerinden ilk ikisi eşit olup I ya eşit olur. c çevresi üzerinden alınan sonuncu integral ise I dan küçüğ olup başka bir ifadeyle c eğrisinin içerdığı akıma eşittir.

Örnek 6.3. Sonsuz uzun akım taşıyan ilekenin civarındaki magnetik alan şiddetinin bulunması



$$(dL = dz \mathbf{a}_z \text{ ve } R = r\mathbf{a}_r - z\mathbf{a}_z \text{ olduğundan silindirikte } \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\phi \text{ dir})$$

Bu sebeple, \mathbf{H} in herhangi bir bölüme dik yada teğet olduğu ve H in boyunca sabit olduğu bir çevre seçilebilir. Dik yada teğet olma koşulu, skaler çarpımın sonucunu skaler büyütükler cinsinden elde etmeye yarıyacaktır. (H in çevreye dik olması halinde skaler çarpım bilindiği üzere sıfırdır.) Sabit olma koşulu ise, manyetik alan şiddetinin integral işaretini dura alılabilmesini sağlayacaktır.

Şekil 6.5. I akımı geçen ilekenin a ve b çevrelerinin ilekenin içindedeki akımlar eşit ve c çevresindekiinden küçuktur.

Bizim örneğimizde, çevre r yarıçapında bir daire olacaktır. Bu takdirde Amper çevre kuralı

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} H_\phi r d\phi = H_\phi r \int_0^{2\pi} d\phi = H_\phi 2\pi r = I$$

veya

$$H_\phi = \frac{1}{2\pi r}$$

bulunur.

Örnek 6.4. İçinde a yarıçaplı iletken bulunan ve dış kabuğunun yarı çapları b, c ($b < c$) olan şekil 6.6. daki koaksiyel kablonun içinden $+z$ yönünden I akımı ve kabuğundan da $-z$ yönünden I akımı geçmekteidir. Bu kablonun içinde şeşitli bölgelerdeki magnetik alan bulalım.

Cözüm. Kablodan geçen akımlar dc olduğu için ciddi kalınlığı sonsuzdur. Bu durumda akımın düzgün dağıldığını kabul edebiliriz.

Şekil 6.6 (b) deki gibi $r < a$ için alan

$$\int_0^{2\pi} H_\phi r d\phi = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} I \quad \text{dan} \quad H_\phi = \frac{Ir}{2\pi a^2} \text{ olur.}$$

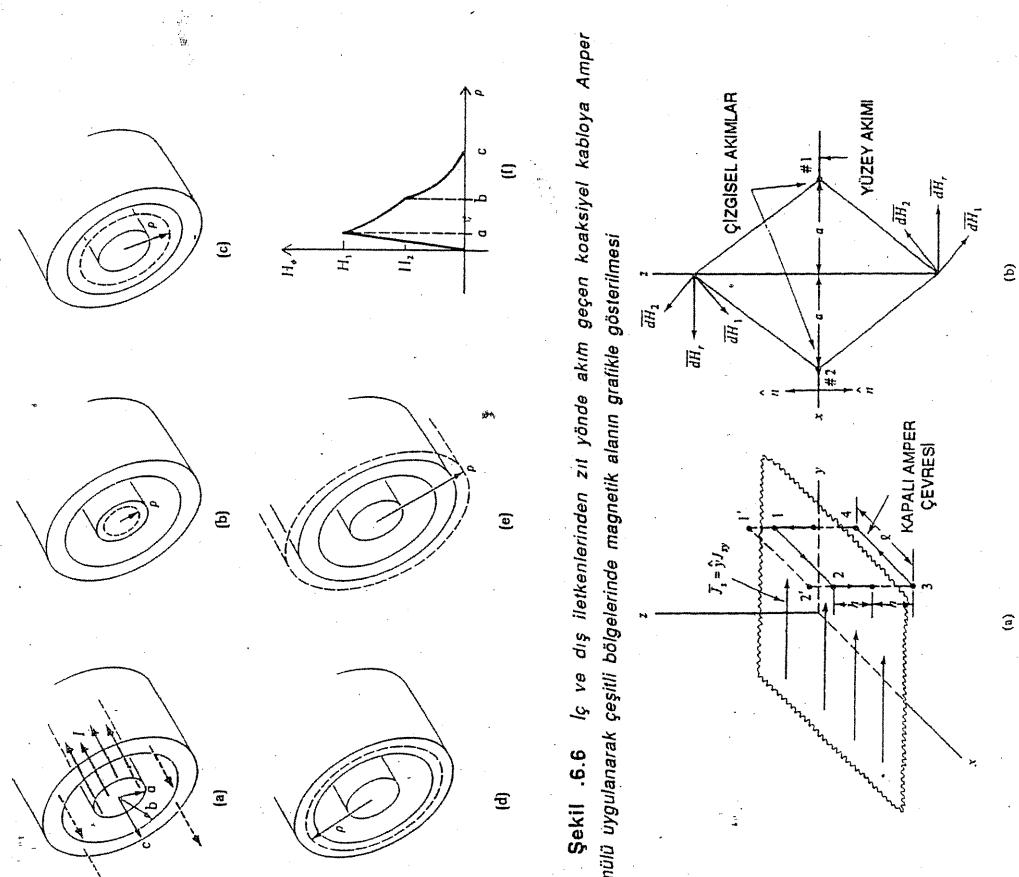
$a < r < b$ için alan şekil 6.6 (c) de görüldüğü gibi Amper bağıntısından $H_\phi = \frac{I}{2\pi r}$ olur.

Şekil 6.6 (d) den faydalananak $b < r < c$ arasında alan dış kabuğun içerisindeinden geçen I yançaplı bir gevrek seçip Amper kurallı uygulanırsa,

$$2\pi r H_\phi = I - I \left(\frac{\pi r^2 - \pi b^2}{\pi c^2 - \pi b^2} \right)$$

$$\text{den} \quad H_\phi = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right) \text{ olur.}$$

$r > c$ için toplam akım sıfır olduğu için $H_\phi = 0$ bulunur. Elde edilen sonuçlar 6.6 (f) de grafikte toplanmıştır. Şekilden görüldüğü gibi H magnetik alanı iletken sınırları içerisinde süreklilığını korumaktadır. Ve çok büyük akım geçirilen koaksiyel kabloların ekranlanması sonucu kablo dışındaki magnetik alanın sınırlanabileceği ve böylece civardaki başka devrelein bundan etkilenmesi önlenemeyeceği sonucu ıkırmaktadır.



Şekil 6.6 I ve dış iletkenlerinden zit yönde akım geçen koaksiyel kabloya Amper formülü uygulanarak şeşitli bölgelerinde magnetik alanın grafikle gösterilmesi

Şekil 6.7. $K_y \lambda_y$ yüzeysel akımı geçen bir tabakanın civarında H nin bulunması. Yüzeysel akının elamanları olan şırazisel akımlar levhanın alt ve üstünde levha düzleminde paralel zit yönde magnetik alanları oluşturur.

Örnek 6.5. Şekil 6.7. de görüldüğü gibi $z=0$ düzleminde bulunan sönüz büyük bir tabakadan $K = K_y a_y$ (A/m) lik yoğunluklu akım geçsin. Levham altunda ve üstündeki H magnetik alanını bulalım.

Çözüm. Şekil 6.7. deki yüzeysel akıma Amper kuralını I-2-3-4 çevresi için uygularsak

$$\oint H \cdot dL = \begin{bmatrix} 2 \\ + \\ 3 \\ + \\ 4 \\ + \\ 5 \end{bmatrix} = I = K_v L$$

$H = 0 \quad r > a$

Eğer selonoid L uzunluğunda ve N sarmıdan oluşmuşsa bobin içinde meydana gelen \mathbf{H} (12)

olur. Levhanın üstündeki ve altındaki tek bir çizgisel akım için alan yönü incelenirse Şekil 6.7(b) de açıkça görüldüğü gibi **H** alanında levhamın üstünde $+x$, levhanın altında $-x$ yönündedir. Böylece (7) bağlantısı;

)) de açıkça görüldüğü gibi H alanı levhanın üzerindece (7) bağıntısı;

olur. Burada \int_0^3 ve \int_1^3 integralleri, HDL olması nedeniyle sıfır alınmıştır.

Böylece $2H_x L = K_y L$ den $H_x = \frac{K_y}{2}$ (A/m) Z > 0 ve

bulunur. Veya vektörel ifadeyle, α_N yüzeye dik vektör olmak üzere

$$H = 1/2 \bar{K} \times aN$$

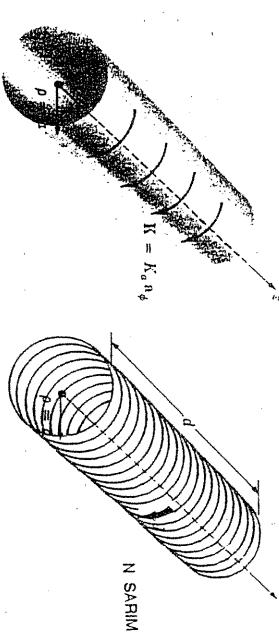
yazılır. Eğer üzerinde $K = -K_y \partial_y$ şeklinde zit yönde akım yoğunluğu bulunan ikinci bir tabaka $z=h$ da bulunuyorsa, levhalar arasındaki magnetik alan

$$H = 0 \quad (z < 0, z > h) \quad (10)$$

billings.

Amper bağıntısının bir başka uygulamasını dairesel akım düzlemini üzerinde yapabiliriz. Bu tip düzleme selonoid denir. İdeal bir selonoid şekil 6.8(a) da görüldüğü gibi sonsuz uzunlukta bir akım kabuğuudur. Akım kabığının yüzeysel düzgün akım yoğunluğu $K = K_a \cdot a_0$ dir. Bu

$$H = K^2 a^2 - j^2 \quad (11)$$



Şekil 6.8 (a) Sonsuz uzunluklu ideal bir selonoid ve **(b)** sonlu uzunluklu N sarımlı selonoid.

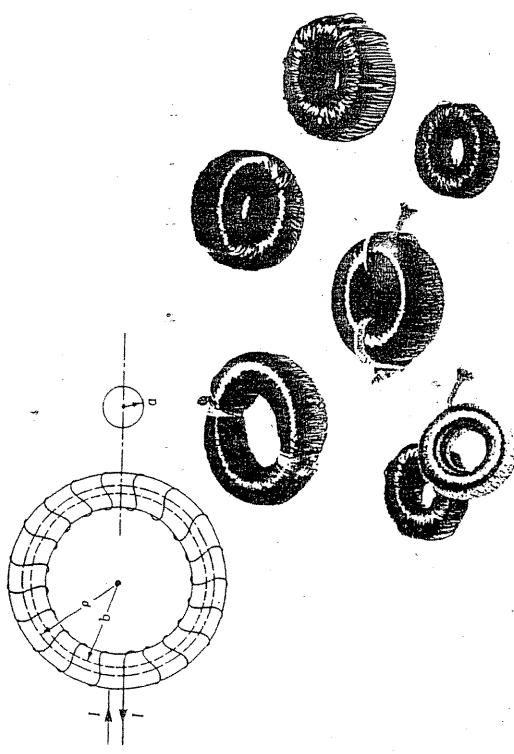
Amper bağıntısı Şekil 6.9. da gösterilen toroidler içinde uygulanabilir. Toroidler iki ucu kapatılmış bir selonoid olarak incelenebilir. Toroidin içinde magnetik alan a_p yönünde olup dışında sıfırdır. b yarıçaplı bir dairesel şevre iğen $2\pi b H_p = NI$ dan

$$H = \frac{NI}{2\pi r_0} \quad (14)$$

bulunur. a toroid genişliğinin yarıçapını göstermektedir. Şekil 6.9. da akımın yönü dikkate alınrsa toroid içinde magnetik alan; saatin dönme yönünün ters yönünde olduğu anlaşılr.

Magnetik Alanın Rotasyoneli. Statik elektrik alanlarında Gauss Kanunu noktasında yazarak, divençin bağıntısını bularıktı. Şimdi de Amper çevre bağıntısının uzayda bir nokta için uygulayarak, rotasyonel kavramına ışık atacağız. Bunun için Şekil 6.10 daki gibi kartezyen koordinatlarında kenarları Δx ve Δy olan bir kapalı çevre alalım. Bu küçük dikdörtgenin merkezinde hemen tamlanmış bir akım tarafından H_0 magnetik alanının

$$H_o = H_{ox} \mathbf{a}_x + H_{oy} \mathbf{a}_y + H_{oz} \mathbf{a}_z$$



Şekil 6.9. Toroidin şematik gösterimi ve telalon tuşları kullanılarak gerçek toroidler.

olsun. Şekildeki çevre boyunca Amper bağıntısını uygularsak $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ integraline, \mathbf{H} nin yola dik bileşenleri katkida bulunmaz.

1-2-3-4 çevresinin içinde bulunduğu \mathbf{H} alanının Taylor serisine açılıp ilk iki terimin ve sadece integralde gidilen yol boyunca bileşenlerini kullanarak

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1 = 1 \quad (16)$$

$$= J_x V_y \nabla y + J_y V_x \nabla z + J_z V_x V_y$$

elde edilir. Buradan

$$\int_1^2 (H_{yo} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x) \Delta y, \int_2^3 = -(H_{xo} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_x}{\partial y} \Delta y) \Delta x$$

dir. Diğer integralde benzer şekilde yazılır toplanırsa,

$$\oint \frac{\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z \quad (17)$$

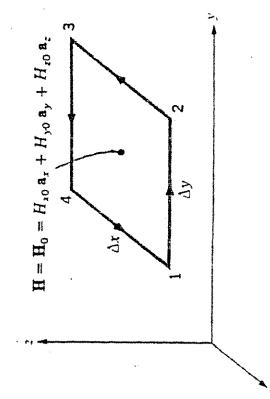
bulunur. Çevreyi gitmekçe küçüllererek limit durumunu düşündürsek

$$\lim_{\Delta x_1 \Delta y \rightarrow 0} \int \frac{\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z \quad (17)$$

Böylece \mathbf{H} nin birim yüzeydeki çizgisel ifadesini bulmuş olduk. Bu işlemi diğer durumlarda da uygulayıp genelleştirebiliriz

$$\text{rot } \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\text{A/m}^2) \quad (18)$$

bulunur. Bu ifade statik alanlar için Maxwell ikinci bağıntısı olup Amper seyre kanununun noktasal formu olarak tanımlanır. Bilindiği gibi Maxwell'ın ilk $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ bağıntısını ikinci bölümde görülmüştü. $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ bağıntısı, elektrik alanının kaynağını verir. $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ de magnetik alanın \mathbf{J} kaynağını verir. Rot \mathbf{H} , bir pervanein birakisken içine bırakılması durumunda herbir kanada uygulanan kuvvet olarak düşünülebilir. Bir alanın rotasyonelini bulmak için bu pervane alana dairdir. Pervane dönmediginde o alanın rotasyoneli sıfırdır. Açısal hız fazla olursa rotasyon fazladır denir. Pervanein dönme yönünde virdanın ilerlemeye yönü rot \mathbf{H} yi verir.



Şekil 6.10.

Örnek 6.6. R yarıçaplı akım taşıyan şekil 6.11 deki gibi bir iletken alalım. Akım düzgün dağılmış olsun ve

$$\mathbf{J} = J_z \mathbf{a}_z = \frac{I}{\pi R^2} \mathbf{a}_z \quad (\text{A/m}) \quad (19)$$

olarak verilisin. Burada I iletkenden geçen toplam akımı göstermektedir. Rot \mathbf{H} yi silindir içinde ve dışında bulalım.

Cözüm. Şekil 6.11. de görüldüğü gibi magnetik alan iletken silindirin merkezinden çevresine doğru, gidişdikçe doğru orantılı olarak artmaktadır ve iletken dışında uzaklıklıkla ters orantılı olarak azalmaktadır. \mathbf{H} , θ yönünde olduğuna göre

$$H_\theta = \frac{I}{2\pi r} \quad \text{silindir içinde}$$

$$H_\theta = \frac{I}{2\pi R^2} r \quad \text{silindir dışında}$$

buradan faydalananızak

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad \text{silindir dışında}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \text{silindir içinde}$$

Stokes Teoremi. Elektrik alanlarda $\mathbf{D} ds$ nin kapalı yüzey integralinin hacim integrali ile ilişkisini gösteren diversans teoremine benzer bir bağıntısı magnetik alanlarda da bulunmak mümkündür. Bu bağıntı stokes teoremiyle verilir. Ve bu teorem sayesinde $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ çevre integrali, rot \mathbf{H} nin yüzeyi integraline bağlanır. Ve

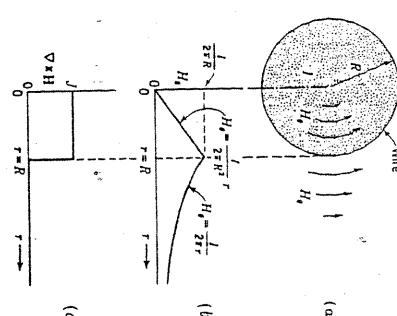
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_s (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot ds \quad (20)$$

olarak ifade edilir. Burada s yüzeyi çizgisel integraldeki çevrenin içinde kalan bölgedir.

Magnetik Açı. Sıratıksız magnetik alanları işlerken şimdide kadar \mathbf{H} (A/m) magnetik alan şiddeti ile ilgilendik. \mathbf{B} ile göstericeğimiz ve boşlukta

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (\text{wb/m}^2) \quad \text{veya} \quad (T) \quad (21)$$

bağıntısıyle verilen, magnetik aşı yoğunluğu Tesla veya metre kare başına Weber biriminde olup magnetik məlzemeler için \mathbf{H} ile ilişkisi (21 nolu) bağından daha değişikir. μ_0 boşluğunun magnetik geçirgenliği olup



Şekil 6.11. Iletken bir telsde Rot \mathbf{H} nin bulunması

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \quad (\text{H/m}) \quad (22)$$

dir, magnetik aşı

$$\Psi_m = \int_s \mathbf{B} \cdot ds \quad (\text{Wb}) \quad (23)$$

ile gösterilir. Elektrik alanlarda

$$\Psi_E = \oint_s \mathbf{D} \cdot ds = Q \quad (24)$$

ile ifade edilen Gauss bağıntısı bilindiği gibi kapalı bir yüzeyden çıkan net aşı, kapalı yüzeyin çevrelediği yük miktarına eşitlik şeklinde tanınmıştır. Ve elektrik aşı çizgileri pozitif yükten çıkış negatif yükse son bulur.

Magnetik malzemelerde, magnetik kutuplar izole edilmediği için magnetik alan çizgilerinin başlayıp son bulduğu magnetik yükler yoktur. Bu nedenle; magnetik akılar için;

$$\Psi_m = \oint_B \cdot ds = Q$$

yazılır. Bu bağıntı magnetik akı çizgilerinin açık olmadığını, kapalı eğriler olduğunu ifade eder. Diverjans teoremini, Gauss kanununun magnetizmadaki karşılığı olan (25 nolu) bağıntiya uygularsak

$$\nabla \cdot B = 0$$

bulunur. Bu ifade statik alanlar için Maxwell'in dörtüncü bağıntısı olarak bilinir. Şimdiye kadar statik alanlar için bulduğumuz Maxwell denklemlerini noktasal formda

$$\nabla \cdot D = \rho$$

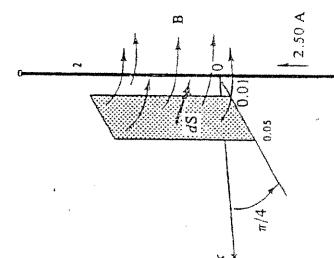
$$\nabla \times E = 0$$

$$\nabla \times H = J$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

olarak toparlayabiliriz.

Örnek 6.7. Üzerinden $2,5 \text{ A}$ lik akım geçen sonsuz uzun bir iletken tel Şekil 6.12. de görüldüğü gibi z eksenine yerleştirilmiştir. $\phi = \pi/4$ de bulunan ve $0,01 < r < 0,05 \text{ m}$; $0 < z < 2 \text{ m}$ ile tanımlanan düzlemden geçen akımı bulunuz.



$$\Psi_m = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (25)$$

olduguuna göre, magnetik akı

$$\Psi_m = \int_0^{0.05} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a_\phi \cdot dr dz a_\phi = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ W}$$

veya $\Psi_m = 1.61 (\mu\text{W})$ bulunur.

6.2. SKALER VE VEKTOREL MAGNETİK POTANSİYELLER

Statik alanlarda yük yoğunluğu verildiğinde V skaler potansiyonun bulunması suretiyle elektrik alanının kolaylıkla hesaplandığı görülmüştür. Magnetik alanlarda da akım dağılımından faydalananarak, skaler bir magnetik potansiyel yardımıyle, magnetik alanı bulmak mümkündür. Bir V_m gibi skaler magnetik potansiyelin varlığı durumunda magnetik alanın, elektrik alan analojisine bağlı kalarak

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m \quad (28)$$

V_m şeklinde yazılabilenini kabul edelim. Bu durumda

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \nabla \times (-\nabla V_m)$$

olar. Bir skaler fonksiyonun rotasyoneli sıfır ejit olması nedeniyle magnetik alanın (28 nolu) bağlantısındaki gibi tanımlanabilmesi için skaler magnetik fonksiyonun tanımlanmış olduğu bölgede $\mathbf{J}=0$ olmalıdır. O halde

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m \quad (\mathbf{J} = 0) \quad (29)$$

Akım taşıyan tellezi içeren magnetik problemler çok karmaşık alan işgal ettileri için skaler magnetik potansiyel kullanılmıştır. V_m in birimi amper olup, daimi muknuslara ilgili durumlarda uygulanabilecektir. Bu skaler fonksiyon Laplace denklemi sağlar, bu nedenle boşluk için

$$\Delta B = \Pi_0 \wedge H = 0$$

Ve Duradamlı

$$O = f$$

100

İter konulurda homojen magnetik malzemelerde de Laplace denklemi V_m nin sürekli sağladığ gösterilecektir. Elektrik alanlarda V potansiyeli sıfır referansına göre tek "değerli" olmasına karşılık magnetik alanlarda V_m skaler magnetik potansiyeli tek değerli değildir. Örneğin Koaksiyel kablolarda i_1 ve i_2 iletkenler arasındaki bölgede ($a < p < b$), $J=0$ olduğuna göre magnetik potansiyeli tanımlayabiliriz. i_1 iletkenden a_2 yönünde geçen akım olmak üzere,

$$\frac{\partial V_m}{\partial \phi} = -\frac{1}{2\pi}; \quad V_m = -\frac{1}{2\pi}\phi \quad (\text{Amper})$$

bulunur. Şekil 6.13. de görüldüğü gibi P noktasındaki potansiyelin değeri $\phi=\pi/4$, $9\pi/4$, $17\pi/4$ veya $\phi = -7\pi/4$, $-5\pi/4$,... gibi değerlere karşı gelmektedir. Çünkü $\phi=0$ alındığında $V_m=0$ olmakta ve saatin dönmeye yönünün tersinde gidiidiğinde magnetik potansiyel negatif değerler alarak doğrusal değişmektedir. Bir çevrim sonunda potansiyel $-I$ olmaktadır. Halbuki aynı noktada daha önce sıfır bulunmuştu. O halde P noktasındaki potansiyel

$$V_{mp} = \frac{1}{2\pi} \left(2n - \frac{1}{4}\right)\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

olur. Magnetik potansiyelin bu çok katlı değer almasının nedeni statik elektrik alanlardaki durumla bir karşılaştırma yaparak anlaşılabılır. Statik elektrik alanlarında

$$0 = \exists x A$$

$$\oint_{E.dL} \phi = 0$$

öfüp, iki nokta arasındaki elektriksel potansiyel, yoldan bağımsız olup

$$V_{ab} = - \int_b^a E \cdot dL$$

idi. Statik magnetik alanlarda isse

10

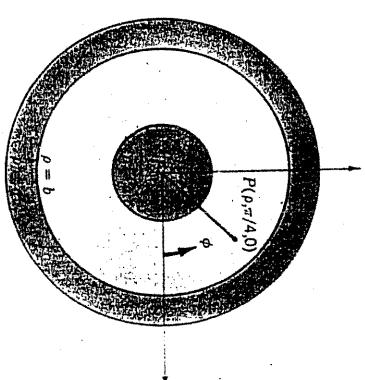
faka

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

dir. Eğer integrasyon, alınan eğri boyunca $J = 0$ ise, her zaman akım başka bir çevre ile katlanabilir. Bu durumda integrasyon sonucu I kadar artar. Eğri hiç bir I akımının kuşatmıyorsa magnetik potansiyel tek değerli tanımlanabilir ve özel bir çevre için

$$V_{m,ab} = - \int_b^a \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \quad (31)$$

olarak yazılabilir. Elektrik potansiyeli korunmuş olan olmasına karşılık magnetik potansiyel korunmuş değildir.



Şekil 6.13. $a < b$ aralığında, V_m magnetik potansiyel \varnothing ye bağlı olarak şok kallı değere sahiptir.

Magnetik Vektör Potansiyeli. Bu vektör alan, antenlerden gelen radyasyonun ve dalga kılavuzları, mikrodalga fırınlar iletim hatlarından kaçan radyasyonun araştırılmasında çok kullanılır. Vektör potansiyeli akım yoğunluğunun sıfır ve sıfırdan farklı olduğu her iki durumda uygulanabilir. İleriki konularda zamana bağlı olarak da ifade edilecektir.

bağıntısını gerçekleyecek şekilde seçilen bir \mathbf{A} vektörel alanını

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (32)$$

$$\mathbf{A} = \int_V \frac{\mu_0 \mathbf{J}' dv'}{4\pi R} \quad (\text{Wb/m}) \quad (38)$$

olacak şekilde sağlayan \mathbf{A} alanına vektörel magnetik potansiyel denir. Birimi metre bağına Weber ile ifade edilir. Bu durumda

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (33)$$

olarak. Burada

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (34)$$

esittigi kullanımlarak

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (35)$$

elde ederiz. Bu vektörel difüansiyel denklem, \mathbf{A} ve \mathbf{A} nın kaynağı olan \mathbf{J} yi iftiva etmemektedir. \mathbf{A} (32 nolu) bağıntısını sağlayacak şekilde bir çok formarda yazılabilir. Örneğin,

$$A_x = f(y, z) + g(x), \quad A_y = f(x, y) + g'(y), \quad A_z = f''(x, y) + g''(z)$$

olduğunda $\nabla \times \mathbf{A}$ ifadesi, $g(x)$, $g'(y)$, $g''(y)$ ye bağlı değildir. Bu nedenle \mathbf{B} alanı için sonsuz sayıda \mathbf{A} seçilebilir. Bu nedenle (32 nolu) ifadesinde \mathbf{B} nin tek bir değer alınması sağlanabilmek için $\nabla \mathbf{A}=0$ alınması gereklidir. Ve bu durumda

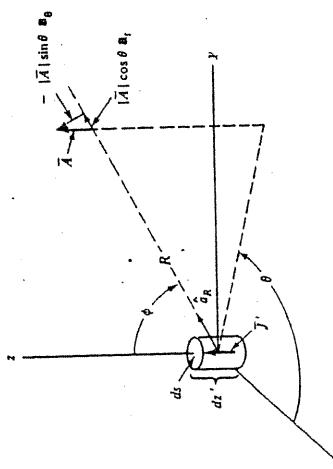
$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (36)$$

elde edilebilir. Bu ifadeye vektör Poisson denklemi de denilebilir. Statik alanlarda Poisson denklemi

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (37)$$

idi. V elektrik potansiyel fonksiyonuna benzer şekilde, A magnetik vektör fonksiyonu, hacimsel, yüzeysel ve çizgisel yük dağılımları için

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I dz'}{4\pi R} \mathbf{a}_z \quad (\text{Wb/m}) \quad (41)$$



Şekil 6.14. $I dz$ akım elementinin magnitik vektör potansiyelinin bülümü

$$\mathbf{A} = \int_L \frac{\mu_0 I dl'}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I a_z}{4\pi R} \int dl \quad (40)$$

Boyu dz' olan bu akım elemanının R uzaklığında oluşturduğu magnetik vektör potansiyel uzaklıktır ters orantılı olup yönü pozitif z eksenini doğrultusundadır ve θ ve ϕ ye bağlı değildir. (Burada $R > L$ kabul edilerek, R sabit seçilmiş.)

6.3. HAREKETLİ BİR YÜKE ETKİYEN KUVVET

Elektrik alanında bulunan Q yüklü bir parçacık üzerine $F = QE$ elektrik kuvveti etkir. Bu yük magnetik alanda V hızıyla hareket ediyorsa bu defa

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (42)$$

magnetik kuvveti etkir. Elektrik ve magnetik kuvvetler arasındaki temel fark, bu bağlantı incelenerek görülebilir. Magnetik kuvvet yükü cisme her an hızına dik doğrultuda tesir etmesi dolayısıyla hızında bir değişmeye neden olmaz. Magnetik alanda hareket eden yüklü parçacığın ivmesi her an hız vektörünü dik olması nedeniyle kinetik enerjisi sabit kalır. Dolayısıyla düzgün magnetik alan, hareketli yüklerde enerji transfer etmez. Elektrik alanda ise, yüklere yöne bağlı olmayan bir kuvvet uygulanır. Bu nedenle alanla yük arasında enerji transferi olur.

Elektrik ve magnetik alanlarda hareket eden yüklü bir parçacığa etkiyen toplam kuvvet ise;

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (43)$$

Şekilde ifade edilen Lorentz kuvvet bağıntısı ile ifade edilir. Bu denklem yardımıyla elektrik ve magnetik alanlarda hareket eden çeşitli tipten yüklerin yörüngeleri bulunabilemektedir.

Düzenli bir magnetik alandan dQ yük elemanına etkiyen kuvveti

$$d\mathbf{F} = dQ \mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad (44)$$

ile ifade ederek, yüklerin hareketinden dolayı oluşan akım elemanın etkiyen kuvveti bulmaya çalışalım. Fiziksel olarak dQ yükünü çok küçük bir hacime yerlesmiş çok sayıda yük topluluğu anlamında düşünüyoruz. \mathbf{F} kuvveti de bu yük topluluğundan herbir yük etkiyen kuvvetinin bileskesidir. İletken içindeki elektronlar kristal yapıyı oluşturan hareketsiz positif iyonların bölgesinde hareket ederler. Bu elektronlara etkiyecük magnetik alan, onların durumlarında hafif kayma ve pozitif, negatif yüklerin kütle merkezleri arasında küçük bir yerdeğistirme oluşturur.

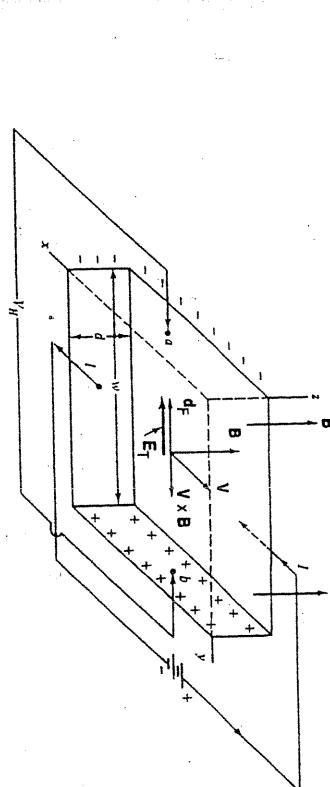
Elektronlar ve positif iyonlar bu yerdeğistirmeyi engellemeye çalışır. Bu nedenle kristal yapının pozitif iyonları ve elektronlar arasında, elektronları hareket ettirmeye teşebbüs etmekten kaynaklanan bir çekicik kuvvet doğar. Böylece magnetik kuvvet kristal yapıya ve dolayısıyla ilektere geçer. Coulomb kuvvetleri, iyi ilekterde, magnetik kuvvetlerden çok daha büyük olup elektronların gerçek yerdeğistirmeleri hemen hemen ölütmeye. Söz konusu yük ayrılması, ilekenin uçları arasında hafif bir potansiyel farkı, magnetik alan ve yüklerin hız vektörlerine dik

birimde uygulandığında bariz şekilde ortaya çıkar.

Bu potansiyel farkına Hall potansiyeli ve bu olayada Hall olayı denir. Şekil 6.15. de görüldüğü gibi bir ileken levhaya gerilim uygulandığında hareketli elektronlara etkiyen magnetik kuvvet nedeniyle yerdeğistiren elektronlar yüzeysel yükler nedeniyle olur. Yüzeysel yük birikmesi $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ ye eşit ve ters E_T elektrik alanının olusmasıyla birlikte durur. Yani

$$E_T + V_- \times B = 0 \quad (45)$$

olur. Bu durunda yüzeysel yüklerden dolayı oluşan Hall potansiyeli;



Şekil 6.15. V_H Hall potansiyelinin bulunması.

$$V_H = - \int_b^a E_T \, dL = - \int_b^a (-V_x \times B_z) \, dL = -V_x B_z \omega \quad (V) \quad (46)$$

olar. Burada W ilekenin kalınlığı, V_x de elektronların hızını göstermektedir. $V_x = J/\rho$ bağıntısını kullanarak

$$V_H = - \frac{J_x}{|\rho|} B_z \omega = - \frac{1/wd}{|\rho|} B_z \omega = \frac{IB_z \omega}{n \cdot e \cdot d} \quad (V) \quad (47)$$

bulunur. Burada n serbest elektron yoğunluğu göstermektedir. Eğer I taşıyıcı akımı pozitif yüklerden oluşuyorsa V_+ hızı V_- nin zıt yönünde olur. Ancak $dF_+ = dF_-$ dir. Bu durumda pozitif yükler sola doğru sapar.

Hall potansiyelinin polaritesi yarı iletkenler içindeki akım taşıyıcılarını, polarnitesini göstermede kullanılır. Böylece N tipi ve P tipi yarı iletkenler ayndır. Hall olayı ayrıca B alanının büyüklüğünü, malzemenin iletkenliğini ve μ hareket yeteneğini hesaplamada kullanılmaktadır.

6.4 AKIM ELAMANINA ETKİYEN KUVVET VE TORK.

Bir iletken içindeki hareketli elektronların türümüne uygunlanan magnetik kuvvet, akım elemanına etkiyen kuvvet olarak tanımlanabilir. $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ ve $dQ = \rho dV$ bağıntısından faydalananarak (44 nolu) bağıntı

$$d\mathbf{F} = \rho dV \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$d\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV \quad (48)$$

olarak ifade edilir. Burada $\mathbf{J} dV$ akım elemanı için duruma göre $J dv = K ds = I dL$ yazılabilir. Bu durumda magnetik bir magnetik alanda bulunan I akımı taşıyan iletkenin etkiyen kuvvet

$$\mathbf{F} = I \int d\mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (N) \quad (49)$$

veya iletken diz ise

$$\mathbf{F} = I \mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (N) \quad (50)$$

olur. Bu son iki bağımı kapalı devrenin herhangi bir bölümünde uygulanabilir.

I_1 ve I_2 akımları taşıyan çevrelerin birbirlerine etkisi (48olu) bağıntısından faydalananarak bulunabilir. Şekil 6.16. da görüldüğü gibi çevrelerin P₁ ve P₂ noktalarındaki $d\mathbf{H}_1$ ve $d\mathbf{H}_2$ alanları

$$d\mathbf{H}_z = \frac{I_1 d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12}}{4\pi R_{12}^2} \quad (A/m) \quad (51)$$

olur. 2. çevrelerin $I_2 d\mathbf{L}_2$ elamanına etkiyen magnetik kuvvet ise

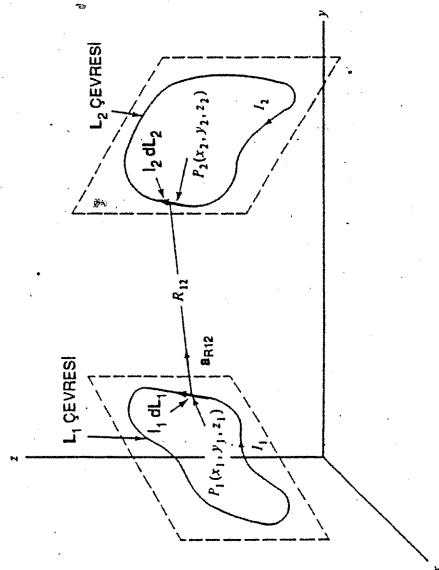
$$d(\mathbf{dF}_2) = I_2 d\mathbf{L}_2 \times d\mathbf{B}_2$$

$$d(\mathbf{dF}_2) = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi R_{12}^2} d\mathbf{L}_2 \times (d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12})$$

bulunur. İki çizgisel yük elamanının birbirine toplam etkisi

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\frac{\mathbf{a}_{R1} \times d\mathbf{L}_1}{2 R_{12}^2} \right] \times d\mathbf{L}_2 \quad (52)$$

Bir iletken içindeki hareketli elektronların türümüne uygunlanan magnetik kuvvet, akım elemanına etkiyen kuvvet olarak tanımlanabilir. $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ ve $dQ = \rho dV$ bağıntısından faydalananarak (44 nolu) bağıntı



Şekil 6.16. Akım devrelerinin birbirine etkisi

avuç içi magnetik alan yönünden tutulursa yana açılan baş parmak magnetik kuvvetin yönünü gösterir. (49 nolu) bağıntı düzgün magnetik alan için

$$\mathbf{F} = -IB_x \oint d\mathbf{L} \quad (53)$$

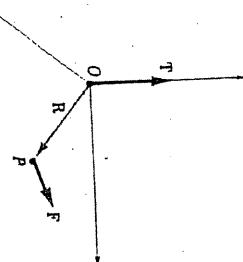
şeklinde yazılabilir, $\oint d\mathbf{L}=0$ olması nedeniyle düzgün bir alanda bulunan kapalı çizgisel akım devresine etkiyen kuvvet sıfırdır. Bu sonuç sadece çizgisel akımlara özgü olmayıp yüzeysel akım ve hacimsel akım yoğunluğu için geçerlidir. Kuvvet sıfır olmakla beraber tork sıfırından farklı olabilir. Şekil 6.17. deki gibi, bir cisim P₁ ve P₂ noktalarına F₁ ve F₂ kuvvetleri etki etmesi durumunda F₁=-F₂ ise cisim herhangi bir ötelemede bulunmaz. Orijine göre T momenti (tork) ise

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_2 \times \mathbf{F}_2 = (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \times \mathbf{F}_1$$

veya $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ olmak üzere

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}_{12} \times \mathbf{F}_1$$

olarak bulunur.

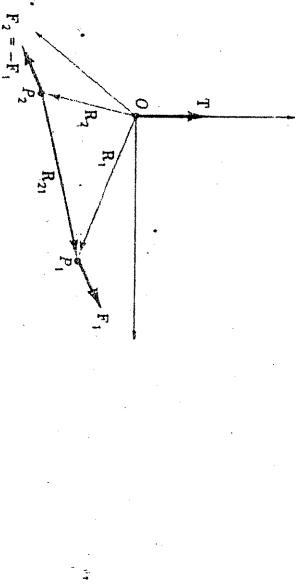


Sekil 6.17.

Kenarları x ve y eksenine平行 bir dx, dy çevresi Sekil 6.19. da görüldüğü gibi bir B magnetik alanında bulunsun. Bu differansiyel çevrenin merkezinde \mathbf{B} alanının düzgün değeri B_0 ise, üzerinden I akımı geçen bu çevreye etkiyen toplam kuvvet sıfır olup, I nolu kenara etkiyen kuvvet

$$d\mathbf{F}_1 = I dx \mathbf{a}_x \times \mathbf{B}_0$$

$$d\mathbf{F}_1 = I dx (B_{oy} \mathbf{a}_z - B_{oz} \mathbf{a}_y)$$



Sekil 6.18

dur. Bu kuvvetin kolu $\mathbf{R}_1 = -\frac{1}{2} d_y \mathbf{a}_x$ olduğuna göre moment
 $d\mathbf{T}_1 = \mathbf{R}_1 \times d\mathbf{F}_1 = -\frac{1}{2} dxdy I B_{oy} \mathbf{a}_x$
 bulunur. Benzer işlemler diğer momentler için tekrarlanırsa
 $d\mathbf{T}_3 = d\mathbf{F}_1$ ve $d\mathbf{T}_2 + d\mathbf{T}_4 = dx dy I B_{ox} \mathbf{a}_y$
 ve toplam moment, ds akım çevresinin yüzey vektöri olmak üzere;

$$d\mathbf{T} = I ds \times \mathbf{B} \quad (54)$$

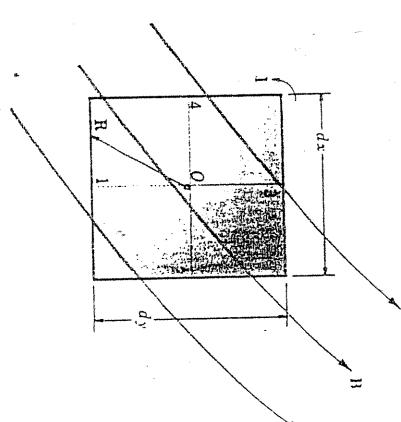
bular. Magnetik dipol moment $d\mathbf{m}=I ds$ ($A.m^2$) olarak tanımlanırsa

$$d\mathbf{T} = d\mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (55)$$

veya düzgün B alanı için, herhangi bir geometrili akım geçen çevreye etkiyen toplam moment

$$\mathbf{T} = I s \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (56)$$

bulunur. Bu moment, çevrenin oluşturduğu magnetik alan ile (torka sebep olan) dış magnetik alan aynı doğrultuya getirmeye çalışır. (56 nolu) bağıntısının düzgün elektrik alanda elektrik dipole etkiyen $T=PxE$ tork ifadesiyle benzerlik içinde olduğu görülmektedir.



Sekil 6.19. ds yüzeyine sahip çevreye etkiyen tork, $T=I ds \times B$ olup çevrenin oluşturduğu magnetik alan ile, B dış magnetik alanının aynı doğrultuya gelmesi.

Örnek 6.9. $m = 10^{-5} \text{ a}_r (\text{A.m}^2)$ olan bir magnetik dipol z ekseni boyunca uzanan solenoidin merkezine yerleştirilmiştir. Solenoid $0.02(\text{m})$ uzunluğunda olup $50(\text{A})$ lik akım taşıyan 2000 匝 solitma sahiptir. (a) dipole etkiyeni ilk torku ve (b) dipolin dönmesi durumunda son yönünü bulunuz.

Cözüm. Solenoidin ekseni üzerindeki magnetik alanı

$$\mathbf{B} = \mu_0 \left(\frac{NI}{L} \right) \mathbf{a}_z = \mu_0 \left(\frac{2000 \cdot 50}{0.02} \right) \mathbf{a}_z = 6.28 \mathbf{a}_z \quad (\text{T})$$

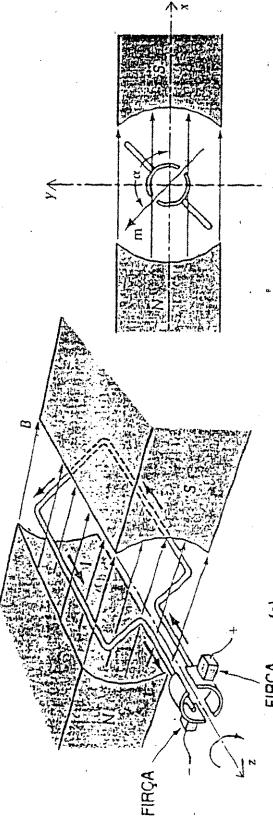
$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = (10^{-5} \mathbf{a}_r) \times (6.28 \mathbf{a}_z) = -6.28 \mathbf{a}_\phi \quad (\mu \text{ N.m})$$

Solenoidin \mathbf{B} alanı; magnetik dipolü \mathbf{B} ile aynı yönde olunceye kadar döndürür ve tork sıfır olur. Bu düzleme sonunda bileske magnetik alan; dipol ve solenoidin magnetik alanları toplamına eşit olur.

DC Motor. Doğru akım motoru, statik magnetik alanda bulunan ve üzerinden doğru akım geçen bir çevrede tork elde etmektedir. Sekil 6.20. de görüldüğü gibi armatür olarak isimlendirilen N sarmalı dikdörtgen çevre alan magnet olarak isimlendirilen diğer bir sarmal takımıının oluşturduğu magnetik alana yerleştirilmiştir. Doğru akım, kamutatör isimli iki yarınlı çevreden geçerek, halkadan akım tek yönde dolanır ve magnetik moment her zaman yukarı yönde bilesene sahiptir. Halkaya ekiyen tork

$$\mathbf{T} = N I A \sin \alpha (-\mathbf{a}_z)$$

olur. Burada α , magnetik alan ile çevrim yörüngi arasındaki açı her zaman $\sin \alpha$ pozitif olması için, 0 ile π arasında değişir. Bu nedenle T daima $-\mathbf{a}_z$ yönünde olup dc motor her zaman aynı yönde döner

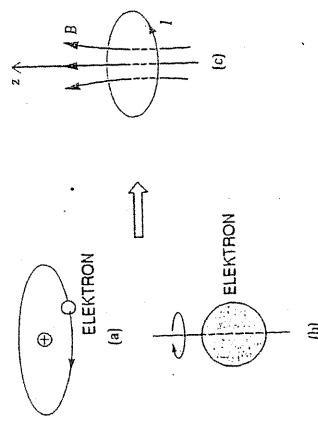


Şekil 6.20. Bir doğru akım motoru. (a) İki yarınlı sarmalın her zaman aynı yönde akmasını sağlar, (b) magnetik m momenti m momenti daima x-y düzleminin üst yarısına doğru yönellir.

6.5. MADDEnin MAGNETİK ÖZELLİĞİ

Birçok pratik uygulamalarda, maksada uygun olacak biçimde magnetik alan üretten özel bobinlere ihtiyaç duyulur. Özellikle, mümkün olduguna kuvvetli magnetik alan, bobinden mümkün mertebe en güçlü akımla sağlanması istenir. Akımlın magnetik alanla orantılı olması nedeniyile, bu düşüncelerin gerçekleşmesi için yüksek magnetik geçirgenlikli malzemeler aranır. Böyle malzemeler ferromagnetik malzeme denir. Maddelerin μ magnetik geçirgenliklerinin boşluğun μ_0 geçirgenliği ile farklı olmasının nedenlerini atomik boyutu incleyerek makul ve genel bir cevapla açıklamak mümkündür.

Bir malzemeyn atomlarındaki hareketli yüklerin düş magnetik alanla etkileşmesine bağlı olarak, B magnetik akısı (magnetik geçirgenliği boşluğa göre büyüklükse) artar (magnetik geçirgenliği boşluğa göre küçüklüğe) azalar. Maddelerin içinde oluşan magnetik alanlar genellikle elektronların yörüngeerde dolaşmalarından ve kendi eksemeleri etrafında dönmelerinden (spin) kaynaklanır. Bu iki benzetim modeli Şekil 6.21. de gösterilmiştir.



Şekil 6.21. (a) Elektronun yörünge hareketi (b) Elektronun ekstenin etrafında dönmeye hareketi (c) z yönünde magnetik alanın oluşması

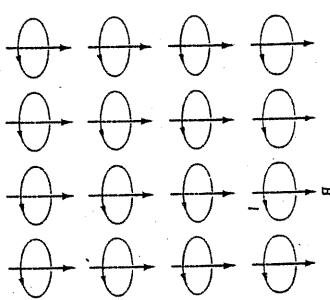
Makroskopik olarak düşünüllürse, elektronun yörünge hareketinin karşılığı olan akım çevreleri sayısızdır. Bunun bir örneği Şekil 6.22 de görülebilir. Herbir süren bir solenoid gibi düşünüllürse ve bir sürenin bir tane çevrim varsa H magnetik alanını;

$$H_z = \frac{N}{L} I$$

yazılabilir. Burada L süren uzunluğuudur. Bu bağlılığı in magnetoik moment cinsinden

$$H_{ic} = \frac{Nm}{L.S} = \frac{\rho Nm}{\text{Hacim}} M \quad (\text{A/m}) \quad (57)$$

Şekilde ifade edilebilir. M ye magnetik moment yoğunluğu denir. Birin hacimdaki magnetik moment sayısını gösterir.



Şekil 6.22. Çok sayıda magnetik momentlerin bulunduğu bir hacimde herbir sütun solonoid olarak modellenebilir.

M magnetik moment yoğunluğu elektronların spin hareketinden kaynaklanır. Bu durumda malzeme içindeki magnetik aki

$$B_{ic} = \mu_0 M \quad (58)$$

olur.

Bazı malzemelerde elektronların yörengi ve spin hareketlerinden kaynaklanan magnetik alanlar birbirlerini nütblleştirir. Buna diaframetik malzemeler denir. Bazi malzemelerde, dışardan uygulanan magnetik alanla, elektronlar ve kuantum mekaniksel kuvvetlerin etkileşmesi sonucu denge hafifçe bozulur, yörengi ve spin hareketlerinin oluşturduğu iç magnetik alanlar nütblleşmez. Ve uygulanan dış magnetik alana zıt yönde bir magnetik moment yoğunluğu induklendir. Bu durumda toplam aki yoğunluğu

$$B = \mu_0 (H_{dis} + M) \quad (59)$$

olur. Diaframetik malzemelerde M ile H zıt yönlidir. Ve

$$M = \chi_m H_{dis}$$

yazılabilir. Bu durumda toplam aki

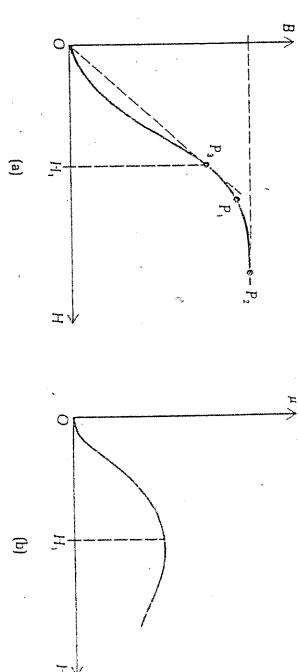
$$B = \mu_0 (1 + \chi_m) H_{dis} \quad (61)$$

veya

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad (62)$$

$$B = \mu H_{dis} \quad (63)$$

bulunur. Burada χ_m simboleyle malzemenin magnitik duyarılığı tanımlanmaktadır. Diaframetik malzemelerde χ_m negatif ve 10^{-5} mertebedindedir.

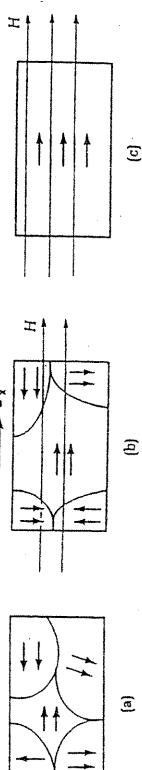


Şekil 6.23.

Paramagnetik malzemelerde elektronun yörengi ve spin hareketlerinden oluşan magnetik alanlar birbirlerini nütblleştirmezler. Ancak termal hareketler nedeniyle magnetik momentler gelişigüzel yönderde olup herhangi bir magnetik moment yoğunluğu olumsuz. Dış magnetik alan tork oluşturarak magnetik momentleri sıraya koyar' $\mathbf{m} \times \mathbf{B}$ çarpımı sıfır olunca yani \mathbf{m} , \mathbf{B} ye paralel olduğunda tork sıfır olur. Bu nedenle paramagnetik malzemelerde bileşke \mathbf{B} , boşluktaki değerinden büyük χ_m magnetik duyarlığı positif olup $10^{-5} - 10^{-3}$ arasında değişir.

Magnetik duyarlılığı çok yüksek olan ferromagnetik malzemeler, kuvvetli \mathbf{B} alanı ürettilesinde çok kullanılır.

Herbir domende spin elektronlarının oluşturduğu birçok magnetik dipoller vardır. Bulunduğu domende paralel dizili dipollerin yönleri domenlerin herbiriinde farklıdır. Bu nedenle malzeme kendiliğindeki magnetik alan oluşmaz. Bu durum Şekil 6.23 deki mıknatıslanmanın eğrisinin O noktasına karşılık gelir. Yine Şekil 6.23 de bir domenin durumu gösterilmiştir. Pozitif x yönünde bir dış magnetik alan uygulandığında, domen içindedeki dipoller uygulanan alana paralel konuma gelirler ve diğer domenler kayboldararak domen genişler. Böylece elektron spininden oluşan alanla dış alan bireleşerek kuvvetli **B** alanını oluştururlar. Bu durum Şekil 6.23 (a) da O ve P₁ noktaları arasındaki eğri ile temsil edilmiştir. Dış alan arttıkça tüm malzeme (cisim) mıknatıslanarak tek bir domen haline gelir ve tüm spinler sıralanır. Böylece **B** alanı doğruluğa erişir. Bu durum P₂ noktası ile gösterilmiştir. Şekil 6.23(b) de μ magnetik geçirgenliğinin, **H** ile çizgisel olmayan ilişkisi gösterilmiştir. μ maksimum değere, orjini eğrisinin üzerine bireleştiren çizginin eğrisi teşte olması durumunda ulaşır. OP₃ çizgisyle bu durum gösterilmiştir.



Şekil 6.24.

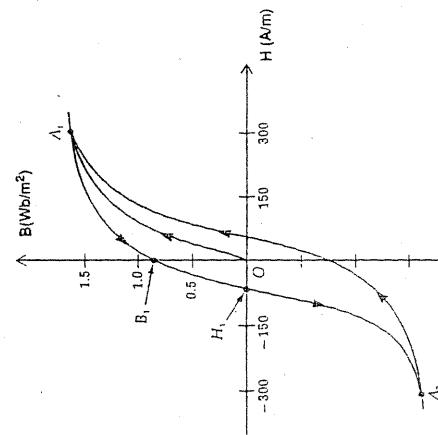
Magnetik özelliklerini itibarıyle, incelenen diamagnetik, paramagnetik, ve ferromagnetik malzemelerden başka üç tip malzeme daha vardır. Buhlar antiferromagnetik, ferrimagnetik ve superparamagnetik malzemelerdir. Bunlardan antiferromagnetik malzemeler, dış alanlardan çok az etkilenirler ve düşük sıcaklıklarda mevcuttur. NiO, CoCl₂ bu şeşit malzemeler olup mühendislikte henüz önem kazanmadır. Ferrimagnetikler ise dış alana, ferromagnetikler kadar olmasa bile büyük tepkide bulunurlar. Bunlardan en önemlisi iletkenliği yan iletkenlerden biraz daha düşük olan ferritlerdir. Bu malzemelerin ferromagnetiklere göre daha büyük dirençli olması alternatif akım uygulandığında (örneğin yüksek frekanslıda çalışan transformatör çekirdeklерinde) yok daha az akım indüklendir. Transformatör çekirdeğinde daha düşük omik kayıplar indirgemmiş akımlara (etdi akımları) yol açar. Fe₃O₄, NiFe₂O₄ bu şeşit malzemelere örnektir. Ferrimagnetizm Curie sıcaklığının üstünde görüntümez. Süperparamagnetikler ise nonferromagnetik bir ortamda ferromagnetik parçacıkların toplanmasıyla olur. Video veya audio tespit kayıtlarında kullanılan magnetik teyplerde

faydalamlar.

Şekil 6.9 da gösterilen toroidin içinde ferromagnetik bir madde bulunmaktadır. Toroiddeki **H** alanı

$$H_{\phi} = \frac{NI}{2\pi b} \quad (64)$$

bağıntısıyla verilir. Akım geçtilce toroid içindeki **B** alanını ölçelim ve başlangıçta toroid içinde magnetik akı olmasın, I akım arttıkça **H** de (64 nolu) bağıntısına göre sıfırdan itibaren artar. Eğer **B-H** grafiği çizilirse Şekil 6.25 deki gibi OA₁ eğrisi elde edilir. Bu ilk mıknatıslanmadan sonra, akım düşürtüllerek **H** min azaldığı ancak ilk mıknatıslanma eğrisini izlemediğ Şekildeki A₁B₁ eğrisini izleyerek azaldığı görlür. B₁ noktasında sargasdan akım geçmemesine ve dolayısıyle **H=0** olmasına rağmen toroidde bir miktar artık magnetik **B** akısının var olduğu görlür. Bu artık mıknatıslanma ferromagnetik malzemede bazı domenlerdeki magnetik momentlerin aynı yönde dizişimlerini devam ettirmelerinden kaynaklanır. Toroidden geçen akımının yönü bu defa deşiyirletek şiddetli olacaktırsa B₁H₁A₂ eğrisi elde edilir. **H** min negatif değerlerine karşılık B sıfır olur, ve sonra eğri A₂ noktasına varır. Akım tekrar azaltılarak sıfır yapılırsa A₂A₁ eğrisi elde edilir. Alımı başlangıçtaki yönde lekler şiddetlendirirsek ferromagnetik malzeme A₁ noktasından mıknatıslığa doyar ve B-H eğrisi hep aynı şekilde çizilmeye devam eder. Bu kapalı eğriye histerisis eğrisi denir. B akı yoğunluğunun, **H** den geri kalarak aralıksız olayına da histeresis denir. Ferromagnetik malzemelerin mıknatıslanmasında **B** nin tersimez oluşu, bu maddelerin teknik uygulamalarında örneğin 50 Hz lik alternatif akım transformatörlerinde saniyede 50



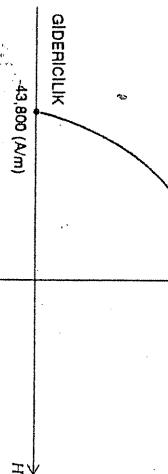
Şekil 6.25. Demirin karakteristik histerisis eğrisi. **B**₁ değeri artık mıknatıslanmayı göstermektedir.

değe histeresis çizilmesi nedeniyle büyük enerji kayiplarına ve isınlamalara yol açar. Magnetik ses ve görüntü şeritlerinde, birekiilen bilgiler devamlılıklarını histeresis olayından kaynaklanan sürekli mıknatslanmadan sağlanır. Magnetik kayıd edici şeritler plastik üzerine kapanmış ferromagnetik malzemeden (Demiroksit) imal edilir. Kayıd edici kafanın uygulanmış magnetik alanı, magnetik malzemeyi mıknatıştır.

Daimi mıknatış. Birçok uygulamada daimi mıknatıslar önemli rol oynarlar. Alcino 5 malzemelerine ait histeresis eğrisinin Şekil 6.25. da görülen ikinci bölmü mıknatışının kaybolmasına karşı gelin. Şekilde alcino 5 alayının zorlancılığı ve kalınlı mıknatışının (hafızası) hayatı yüksek olduğu görülmektedir. Bu nedenle kuvvetli daimi mıknatış olarak kullanılır.

 $B \uparrow$

KALINTILIK

1.2 (Wb/m²)

Şekil 6.26.

Alcino 5, demir, kobalt, nikel, alüminyum ve bakırdan imal edilir. Mıknatışının kaybolması için 43800 A/m lik ters alan gereklmektedir. Ancak, Curie sıcaklığı denilen kritik bir sıcaklığın yukarısında bu daimi mıknatıslık kaybolur. Ferromagnetik malzelerin çöp için Curie sıcaklığı 500 °C civarındadır.

Alcino 5 alayından yapılmış bir daimi mıknatısın, kalınlı mıknatışlığını $B_r = 1.2$ (T) salatım. Bu değere esdeğer aki ilerletek olan içi hava olan n sırasılı selonoidden geçecek akımı hesaplayalım. H alanı

$$H_z = nI$$

olduğuna göre

$$B_z = \mu_0 nI$$

olur. Buradan kalınlı aki yoğunluğu yerleştirilerek

$$nI = \frac{1,2}{\mu_0} = 0.95 \cdot 10^6 (\text{A.sar./m}) \quad (67)$$

bulunur. Görüldüğü gibi çok büyük aki gerekmektedir. Bu durum daimi mıknatış içindeki elektronların spin bareketinin sonucudur. Bir metreküp mıknatış içinde 10^{30} hatta daha fazla elektron var olduğunu burada hatırlatalım. Alcino 5 den 2 cm çaplı, 0.2 cm kalınlılık bir disk şeklinde parça alınrsa magnetik aki yoğunluğu 1,2 T dan daha küçük olur. Bu disk I akımı geçen dairesel bir çevrim olarak modellenirse, (67 nolu) bağıntıyı tek bir sarma uyarlayarak yanı diskin 0,2 cm kalınlığında olduğunu dikkate alarak bu eşdeğer dairesel çevrimden geçen akım

$$I = 0.95 \cdot 10^6 \cdot 0.002 = 1.9 \cdot 10^3 \text{ A}$$

bulunur.

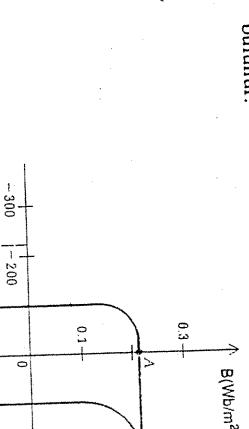
Bu durumda çevrimin ekseni üzerindeki bir noktası B

$$B = \frac{1 a^2 \mu_0}{2 (a^2 + z^2)^{3/2}} a_z \quad (68)$$

ve disk merkezinde ise $z = 0$ alınarak,

$$B = \frac{1 \mu_0}{2a} a_z = 0.12 a_z (\text{Wb/m}^2) \quad (69)$$

bulunur.



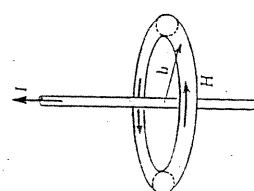
Şekil 6.27.

Magnetik-Core Hafiza. Magnetik malzemelerden ferritlerin Şekil 6.27 da gösterildiği gibi dikdörtgen gibi dikdörtgen görüntüslü histeresis eğrisine sahiptir. A ve C gibi iki muhtemel kalınlu durumu binary (ikili) sayı hafiza sisteminde "bir" ve "sifir"ları temsil etmeye kullanılır.

Ferritin yapılmış bir toroid ve içinde I akumu geçmeyecek olan bir tel koaksiyel bigimde bir anda bulunduğuunu düşünelim. (Şekil 6.28) Toroid şimdilik tek sarmalı kabul edelim. Magnetik alanı

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi b} \quad (70)$$

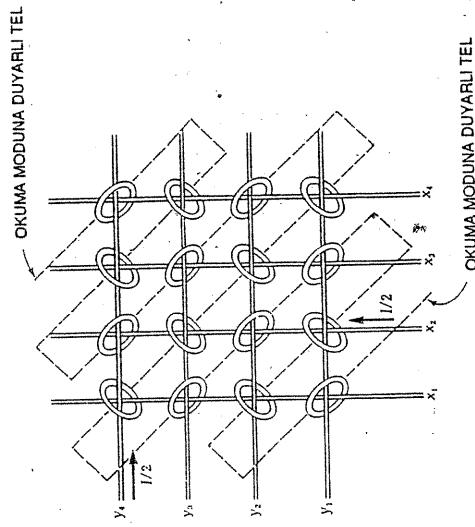
olacaktır. Burada b toroidin yarıçapıdır. Bu bağıntıının aynı zamanda sonsuz uzun teliin magnetik alanı olduğunu biliyoruz. Toroid başlangıçta C durumda olsun ve Şekil 6.28 deki gibi I akımı pozitif ve H_ϕ (70) nolu bağıntındaki H_1 alan bilgiye toroidin akısı geriye doğru azalacak ve I akımı dursa bile akı devam edecektir. Başka bir ifadeyle eğer yeterince büyük genlikli bir pals gönderdiirse toroid durumunu C'den A'ya değiştirecektir. Diğer taraftan toroid ilk durumunda ise, pozitif bir akım toroidin durumunu değiştirmez. Pals kalınlığı, toroidin akımıne kadar hızla değiştirmesiyle tayin edilir. Ferriter için bu bir mikrosaniye metrededir.



Şekil 6.28.

Bilgisayarlarında magnetik çekirdek hafiza binlerce ferit toroidlerden oluşur. Şekil 6.29 da çekirdekler diziler halinde görülmektedir. Herbir ferit çekirdek, iki dik tel tarafından geçirilmektedir. Komşu çekirdekler, aralarındaki bağlantıların minimum olması için dik olarak dizilmişdir.

Şekil 6.29'daki sisteme tüm çekirdekler "sifir" ile gösterilen C durumunda ise $X_2 Y_4$ çekirdeğine "bir" yazmak istenir. X_2 ve Y_4 telinden I_2 akımları gönderilerken kesim noktasındaki $X_2 Y_4$ özel çekirdeğinde uyanan H alan H_1 alamna eşit olur. Böylece çekirdek C durumundan A durumuna geçer. Bu işlem esnasında tüm diğer çekirdekler "sifir" yani C durumunda beklerler, böylece bilgi özel bir çekirdeğe depolamış olur. Çekirdekler arasından geçen üçüncü tellerden faydalananakta bilgi okuma olayı gerçekleştiir.



Şekil 6.29.

Örnek 6.10 Ferritten yapılmış hafiza çekirdeğinin efektif yarıçapı $b=0,6\text{mm}$ dir. Gerekli H alanını Φ evreneek akı $H_1=220\text{ A/m}$ olduğuna göre, magnetik çekirdek hafiza ile uyumlu olan akım tellerinden herbirinden geçerek olan akım palsının büyüklüğünü bulunuz.

Cözüm. Tellere geçen akım I ise, buna karşı gelen magnetik alan $H_{1/2}$ yani 110 A/m olur. Akım çekirdeğin düzlemine dik olduğuna göre, I'nın dik bilesenlerini kullanmamız. Dolayısıyle (70 nolu) bağıntından

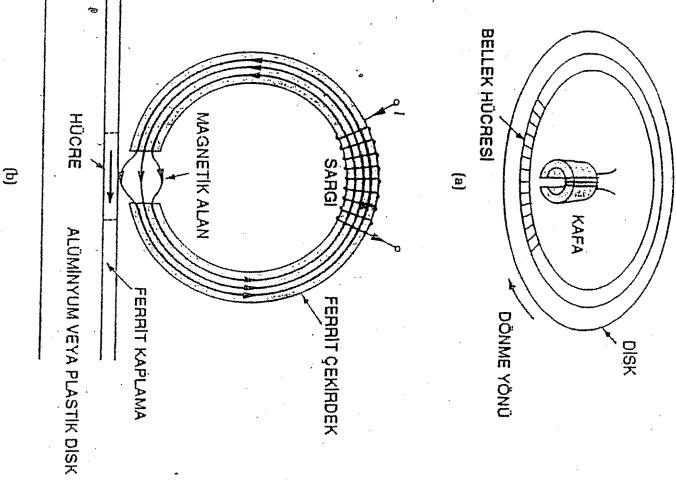
$$110 = \frac{I \cos 45^\circ}{2\pi 0.0006}; I = 0.6 \text{ A} \text{ bulunur.}$$

Magnetik disk hafızası. Modern bilgisayar sistemleri, ikincil bir hafiza olarak, magnetik disk hafızaları kullanırlar. Flexible veya floppy disk olmak üzere iki çeşit disk vardır. Bunlar Mylar plastikinin ferrit ile kapiyanmasından yapıltır. Yüksek performanslı disklerde katı aluminyum disk ferji ile kapiyanır. Herbir diskte $2 \cdot 10^7 \cdot 10^9$ bilgi biti depolanabilir.

Çalışma amında, disk eksemi etrafında dönerken, magnetik kafa ile birleşir. Magnetik kafa ferit çekirdektiden yapılmış bir halka çekirdeği bir cihazdır. Halkanın kütük aralığı magnetik alanın dışarı yayılması, kafa diske data yazma anında imkan verir. Diskten okuma durumunda kafa diske içindeki magnetik alan yine bu küçük aralık vastasyonla toplar (Şekil 6.30).

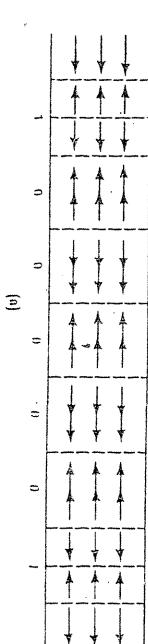
Diskler, floppylerde 0,5 mm rıjiderde 0,025 mm civarlarında genişlıklı çok sayıda dairesel izlere ayrılr. Herbir izde yaklaşık 5 mm uzunluğunda küçük dilimler bulunur. Bir bilgi bitti bu gibi hücrelerde depolarır.

Yazma modunda akım kafasının sargasından gereklilik ferit çekirdekte magnetik alan oluşturur. Magnetik akı hava aralığından dışarı yayılmadıkça çekirdekte bekler. Havadaki magnetik alan diske bağlanır ve hücrelerini nüknatır. Eğer bir sonraki hücre zit yönde trüktaşlanacaksa akım ters akar. Çift frekans modülasyonu olarak isimlendirilen bir kotta "bir" hücre içinde ters muknatsıstanma ile ve "sıfır" ise tersliğin kaldırılmasıyle sağlanır.



Şekil 6.30 (a) Dönen magnetik disk ve okuma yazma kafası (b) yazma modunda akım sargası丹 geçen magnetik akım üretir.

Okuma anında kafa hücrelere geçer ve kalıntı magnetik alanları kaldırır. Ters alıcı sargaşa Faraday induksiyon kanunu nedенiley gerilim indikler. Böylece hücrelerin içindeki "sıfır" veya "bir" bilgisini ve hücre sunularını işaretleyen bir seri pals sargının çıkış gerilimi olarak ortaya çıkar. (Şekil 6.31).



Şekil 6.31. Disk üzerine çift frekans modülasyon kolları (a) Diskteki nüknatsıstanma dokusu (b) okuma başının çıkış gerilimi.

Deniz Tabanının Magnetik Hafızası. İlkinci dünya savaşından sonra bilim adamları, deniz altlarını tespit etmek ve deniz tabanındaki kayaların yerel magnetik alanlarını ölçmek için duvarlı magnetik alan dedektörleri kullanmışlardır. Çalışmalar esnasında İzlanda adası yakınlarında deniz tabanında yüzlerce mil uzunluğunda paralel magnetik şeritleri keşfedilmiştir. Ve şeritlerin nüknatsığının yer magnetik alanının ters yönünde olması ilgi çekmektedir. Bilim adamları bu şeritlerin bir zamanlar İzlanda adası yakınında okyanus tabanının parçalandığı ve tabandan yukarıya ermiş kayalar çökken Curie sıcaklığının altında bir siccaklıktı iken tabanının yer magnetik alan tarafından nüknatsıldığını; ancak yer magnetik alanının geçen milyonlarca yılda defalarca yön değiştirmesine rağmen bu şeritlerin nüknatsılık yönünü muhafaza ettiklerini söylemektedirler.

Binary kayıt cihazı ile Şekil 6.31 de gösterilen paternen benzer dokunun deniz dibindeki neyi kayıd ettiğini merak konusudur. İnsan yapısı magnetik disk hafızada tersine nüknatsıstanma disklerde birkaç mikrometre uzunluğu kaplıken, deniz tabanlarında birkaç kilometre uzunluğu erişir. Ayrıca yazma ve okuma bir-kaç mikrosaniye sürenken deniz tabanındaki data kaydı birkaç milyon yıl kapsamaktadır.

Bölüm 6: Statik Magnetik Alanlar

$\oint H dL = I$ Amper çevre kanunu kapalı çevrimde uygulanırsa :

Magnetik Sınır Şartları. Farklı magnetik özellikli malzemelerin arakesit yüzeylerinde \mathbf{B}_1 ve \mathbf{M}_1 nin sağladığı sınır şartlarını bulmak çeşitli problem çözümlerinde önemli olur. Şekil 6.3.2 de görüldüğü gibi μ_1 ve μ_2 magnetik geçirgenlikli iki ortamı ayıran ara yüzeyde küçük bir silindir alalım.

Magnetizmann Gauss kanunu uygularsak

$$\oint B \cdot ds = 0$$

dan normal bilesenler için

$$B_{N1}\Delta S - B_{N2}\Delta S = 0$$

den

$$M_{N2} = \frac{\chi_{m2} \mu_1}{\chi_{m1} \mu_2} M_{N1}$$

B₁ nin normal bileşeni sürekli kalırken, H₁ nin normal bileşeni μ_1 / μ_2 oranı kadardı şireksizlik göstermektedir.

גָּדְעָן וְעַמְּלֵנְדָּן

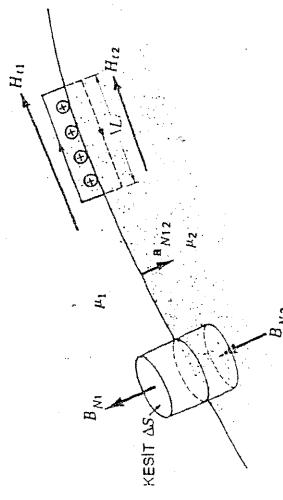
$$H_{ij} = H^{12}_{ij}$$

haline döner. O halde iki farklı iltken ortamın arakesitinde magnetik alanın teğetsel bileşeni sürekli olmaktadır. Bu durum Sekil 6.33 (a) da gösterilmiştir.

Durum B. Arakesit düzleminin ayndığı ortamlardan birisi mükemmel iletken ise ($\sigma_2 = \infty$); $J_2 = \sigma_2 E_2$ bağıntısına göre, akım yoğunluğunun sonlu bir değere erişebilmesi için $E_2 = 0$ olmalıdır. Bu durumda (Maxwell denklemlerinden faydalananlarak) $H_{z=0}$ olduğu görülebilir. O halde [74] nolu başlıklıdan faydalansınca,

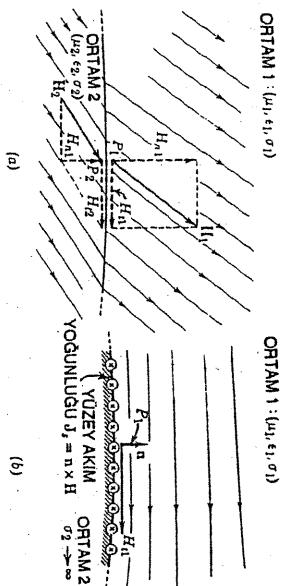
$$H_{11} = a_{N12}K \quad (A/m) \quad (78)$$

הנִזְקָנָה



Sokil 30

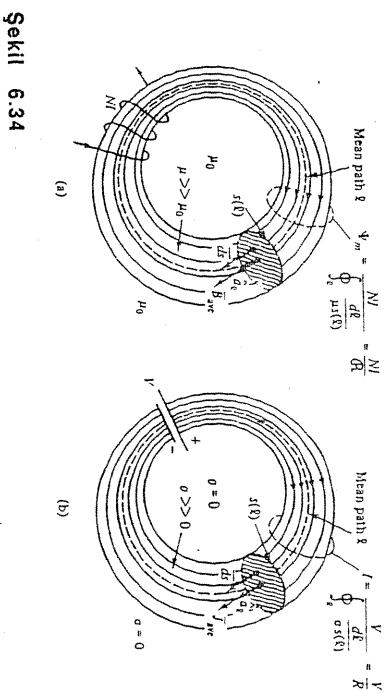
Bu durum Şekil 6.33(b) de gösterilmiştir. O halde iki farklı ortamdan birisinin mülkemmel ilerken olması durumunda magnetik alanın teğetsel bilgesini yüzeysel akım yoğunluğuna eşit olmaktadır. Herde görüleceği gibi böyle bir haldde, mülkemmel ilerken yüzeyine dik \mathbf{H} veya \mathbf{B} ının bilegeni olamaz. Dolayısıyla bileske alan teğetsel bilegenin bizzat kendisidir.



Şekil 6.33. Sınır şartlarına ilişkin iki özel durum: Arakasılı ayrılan yüzeylerden biri (a) Sonlu ilerken (b) Mükemmeli ilerken.

6.6 MAGNETİK DEVRELER VE POTANSİYEL ENERJİ

Elektrik devreleri gibi magnetik devrelerinde bir çok uygulamaları vardır. Daha önceki derslerimizde magnetik çekirdeğin minknatsılaşması yada minknatsığının kalkılması için gerekli akımı hesaplamıştık. Mıknatslar biraç daha karışık biçimde dc motorlarında, magnetik disk hafızalarında kullanılır. Magnetik geçirgenliği yüksek malzemelerden geçen akı çizgilerinin paralelliği, yüksek iletkenlikli malzemeden geçen elektrik akısına benzer. Bu benzerlik elektrik ve magnetik devreler arasında bir analog oluşturur. Şekil 6.34 de NI sarımı ile uyarılmış bir yüksek iletkenlikli elektrik devresi arasındaki benzerlikler gösterilmiştir.



Şekil 6.34.

Magnetik çekirdekteki Ψ_m akısı herhangi bir kesit için

$$\Psi_m = \int_B \cdot ds \quad (80)$$

olar. Herhangi bir kapalı L çevrimi için Ampere kanunu uygulanırsa

$$\oint H \cdot dL = NI \quad (81)$$

olur. (81 no lu) bağıntısı akı cinsinden ifade edersek $dL=dL_a$, olarak ve Ψ_m akısını sabit kabul ederek, s kesiti çekinde

$$\Psi_m \int \frac{dl}{\mu s} = NI \quad (82)$$

bulunur. Burada

$$R = \int \frac{dl}{\mu s} \quad (A / w) \quad (83)$$

ifadesi magnetik devrenin geometrik özelliklerine bağlı olup reliktans denir. Bu durumda akı ifadesi magnetik devrenin geometrik özelliklerine bağlı olup reliktans denir. Bu durumda akı

$$\Psi_m = \frac{NI}{R} \quad (84)$$

olar. Tablo 6.1 de magnetik ve elektrik devreleri arasındaki benzerlik terminleri ve bağıntılar verilmiştir. Burada NI ifadesine magnetomotif kuvvet denir. Akının magnetik devrede akmasını sağlar. Eğer devrenin kesit ve boyu sabit ise reliktans yani magnetik direnç

$$R = \frac{L}{\mu s} \quad (H^{-1}) \quad (85)$$

olar.

Tablo 6.1. *Magnetik ve elektrik devreler arasındaki benzerlikler.*

Magnetic Circuit	Electric Circuit
$\vec{B} = \mu \vec{H}$	$\vec{j} = \sigma \vec{E}$
H	E
μ	σ
$\Psi_m = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$	$I = \int_v j \cdot d\vec{s}$
M	V
$\mathcal{Q} = \int_t \frac{dl}{\mu s(t)}$	$R = \int_{\ell} \frac{dt}{\sigma s(\ell)}$
$\frac{1}{R} = \phi$	$\frac{1}{R} = G$

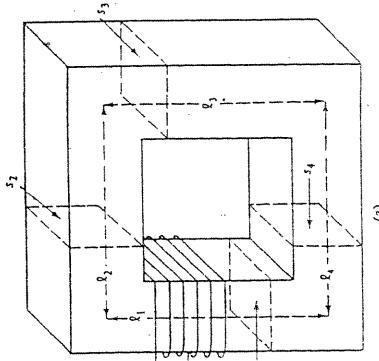
Şekil 6.35 de kesitli bir devre gösterilmiştir. Burada relüktans

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_4 = \frac{L_1}{\mu_s^1} + \frac{L_2}{\mu_s^2} + \frac{L_3}{\mu_s^3} + \frac{L_4}{\mu_s^4}$$

olup, aki

$$\frac{N}{\lambda} = m$$

den hesaplanabilir. Söz konusu devrenin elektriksel benzetimi 6.34(b) de gösterilmiştir.



Şekil 6.35 Sabit kesitli magnetik devre ve elektrik devresine modellemesi
Örnek 6.11 Şekil 6.34'deki devre soldan inerken 3 A

$l_1 = l_3 = 0,3$ (m), $l_2 = l_4 = 0,2$ (m) dir. Kesit sabit olup $s = 6 \cdot 10^{-3}$ (m^2) $I = 0,05$ (A) v ϵ çelik için çizgisel kabul edilebilecek mıknatsıslanma eğrisi $H=200B$ olduğuna göre, (a) \Re , (b) devrenin 11 parçasında $B_1 = 1$ (T) lik akı üretilmesi için sarım sayısı ne olmalıdır?

Cözüm. $B = \mu H$ olduğuna göre $\mu = 1/200$ olur.

$$(a) \quad \mathfrak{R} = \frac{L_1}{\mu S_1} + \frac{L_2}{\mu S_2} + \frac{L_3}{\mu S_3} + \frac{L_4}{\mu S_4} =$$

$$= 10^5 + 0.667 \cdot 10^5 + 10^5 + 0.667 \cdot 10^5 = 3.33 \cdot 10^5 \text{ (H}^{-1}\text{)}$$

$$N = \frac{\Psi_m R}{1} = \frac{6 \cdot 10^{-4} \cdot (3,33 \cdot 10^5)}{0,05} = 4000 \text{ (satır)}$$

$$NI = 300 \text{ (A satum)}$$

huradan favdalanarak

$$\psi_m(\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_3 + \mathfrak{N}_4) = \text{NI}(\text{A.sarim})$$

yazılarsa, bu ifadenin elektrik devresinde, dirençler boyunca potansiyeller toplamı uygulanır. Potansiyel esit olduğu duruma benzettiği görüldür. Burada Ψ_m , $\Psi_{reliktans}$ boyunca

magnetometre kuvvet veya magnetik gerilimi temsil etmektedir.

$$W_E = \frac{1}{2} \int D.E \, dv \quad (86)$$

Sabit magneterik alanda depolanan potansiyel enerji

$$W_H = \frac{1}{2} \int B \cdot H \, dv \quad (J) \quad (87)$$

olduğu gösterilebilir. $B = \mu H$ komularak

$$W_H = \frac{1}{2} \int \mu H^2 dv = \frac{1}{2} \int \frac{B^2}{\mu} dv \quad (88)$$

olarak ifade edilebilir. Bu bağıntılar ileri konularda Poynting teoreminde faydalananlara şarttır. Birim hacimde depolanan magnetik enerji ise $1/2 BH$ (J/m^3) ile gösterilebilir. Bu bağıntılar lineer olmayan magnetik malzemelerdeki kuvvetleri hesaplamak için kullanılabilir. Bunun için silisyum çeliğinden yapılan çekirdeği bulunan bir selonoit alalım. Çekirdekte birim uzunluktaki sarım sayısı N ($\text{Sarım}/m$) ve geçen akım I olsun. Bu durumda çekirdekteki magnetik alan şiddeti NI ($A \cdot \text{sarım}/m$) olur. Ve magnetik akı yoğunuğu miktatının eğrisinden bulunabilir. Selonoit iki yarı silindirden teşekkül ettiğini ve aki sabit kalarak bu iki selonoidi birbirinden dL kadar ayırmaya çalışılsa yapılan $\int F dl$ olur. İki parçalı çekirdeğin bir parçasını hareket ettirmekle yapılan iş bu hareket sonucu oluşan hava aralığında depolanan enerjiye eşittir. Burada uygulanan F mekanik kuvveti uyu zamanda miktatırm iki kutbu arasındaki çekim kuvveti olduğunu düşünelim.

6.7 İNDÜKTANS VE KARŞILIKLI İNDÜKTANS

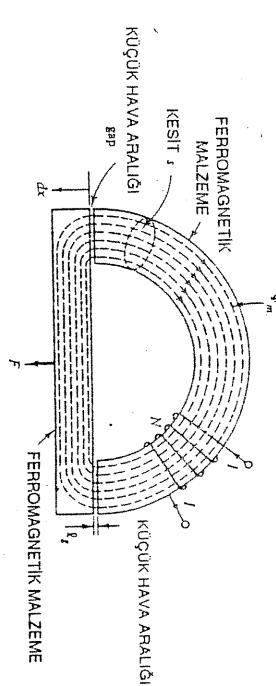
İnduktans elektrik devre teorisinde direnç, kapasitor gibi sık sık kullanılan bir terimdir. Önceki derslerimizde direnci, bir iletkenin eşpotansiyel yüzleri arasındaki potansiyel farkının, bu eş potansiyel yüzeylerden geçen toplam akıma oranı olarak ve kapasiteyi de eşpotansiyel herhangi iletken yüzeylerden birindeki toplam yükün bu yüzeye esasındaki potansiyel farkına oran olarak tanımlamıştık. Kapasite bilitiği gibi iletken yüzeylerin geometrisine ve onları çevreleyen veya aralarındaki ortamın dielektrikine bağlıdır.

Sarım sayısı N olan toroidden geçen I akımı Ψ_m akısını oluşturuyorsa, N sarımın oluşturduğu toplam magnetik akının, bu akımı oluşturan akıma oranın sabit olup, induktans olarak tanımlanır. Ve L simboli ile gösterilir. Birimi Henry (H) dir. Yani

$$L = \frac{N\Psi_m}{I} \quad (H) \quad (90)$$

dir. Eğer elektrik devresini halkalayan toplam magnetik akı aynı devreden geçen bir akım tarafından oluşturulmuşsa, bobin akısının bu akıma oranına devrenin öz induktansı denir. Yok eğer başka bir devrenin akımı tarafından oluşturulmuşsa, bu bobinin akısının bunu oluşturan öteki devredeki akıma oranına bu iki devre arasındaki karşılıklı induktansı denir.

İnduktansa eşdeğer başka bir tanım, herhangi bir noktadaki magnetik enerjiden faydalananlara şarttır. (91) ifadesi



Şekil 6.36.

$$F.dL = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} sL$$

$$F = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} s$$

bulunur. Örneğin çeliğin miktatınnasında doygunluğa erişmesi için gereken magnetik alan $1,5 \text{ T}$ olduğuuna göre, çeliğin içindeki magnetik kuvvet $F=7,8 \cdot 10^5 \text{ N}$ bulunur.

Örnek 6.12. Şekil 6.36 daki elektromagnetiñin hava aralığında $b=1,4 \text{ (T)}$ ve kesit $s=10^{-4} \text{ (m}^2\text{)}$ dir. F magnetik çekim kuvveti bulunuz.

Cözüm.

$$F = \frac{B^2 s}{\mu_0} = \frac{(1,4)^2 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 1,56 \cdot 10^2 \text{ (N)} \quad \text{olur.}$$

İnduktansa eşdeğer başka bir tanım, herhangi bir noktadaki magnetik enerjiden faydalananlara şarttır. (91) ifadesi

$$L = \frac{2W_H}{I^2} \quad (H) \quad (91)$$

burada I kapalı çevreden geçen akım, W_H de bu akımın oluşturduğu magnetik enerjisi göstermektedir. (91) ifadesi

$$L = \frac{1}{I^2} \int_V \frac{\mu J}{4\pi R} dv$$
(92)

yazılır. Ve $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ yerleştirilirse

$$L = \frac{1}{I^2} \int_V \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dv$$
(93)

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{I^2} \left[\int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dv + \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dv \right] \\ &= \frac{1}{I^2} \left[\oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) ds + \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dv \right] \end{aligned}$$
(93)

olar. Parantezin içindeki ilk integral; tüm magnetik enerjiyi kapsayan hacimi kuşatan yüzey üzerinde alındığı için sıfırdır. Yani sınır yüzeyinde $\mathbf{A} = \mathbf{H} = 0$ dir. Böylece indüktans

$$L = \frac{1}{I^2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dv$$
(94)

bulunur. (94) deki \mathbf{A} ve \mathbf{J} herhangi bir noktadaki değerleri göstermektedir. Akım yoğunluğu sadece iletken içinde mevcut olduğuna göre iletken dışında her yerde integral sıfır olur. Dolayısıyle iletken dışında magnetik vektör potansiyelin bulunmasına gerek olmaz. \mathbf{A} vektör potansiyeli; orjinal \mathbf{J} akımı ile diğer akım kaynaklarından katkılardan oluşabilir. Ancak sınırlık bu durumu göz önüne almayaçğız. Daha sonra bu hususu karşılıklı indüktans bahisinde inceleyeceğiz.

\mathbf{J} akım yoğunluğununa ilişkin magnetik vektör potansiyeli

$$A = \int_V \frac{\mu J}{4\pi R} dv$$
(95)

olarak verildiğine göre

$$M_{12} = \frac{N_2 \Psi_{12}}{I_1} \quad (H)$$
(99)

şeklinde ifade edilir. Ψ_{12} , I_1 akımında oluşturulan ve I_2 akımının çevresine bağlanan akımı, N_2 de 2 nolu devrenin sarım sayısını göstermektedir. Karşılıklı indüktans, iki devrenin magnetik etkileşmesine bağlı olup toplam enerji, iki öz indüktansa ve karşılıklı indüktansa bağlıdır. (99) bağıntısı

$$M_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \int (B_1 \cdot H_2) dv \quad (100)$$

Şekilde ifade edilebilir. $B_1, I_2=0$ kabul edilerek I_1 akımının oluşturduğu alan olup M_{21} de yeniden elde edildiğinde

$$M_{12} = M_{21}$$

olduğu görülebilir.

Örnek 6.13. Şekil 6.37. de gösterilen 1 ve 2 devrelerinin karşılıklı induktansını bulunuz.

Örnek 6.14. Şekil 6.37 deki devrede 2 nolu devrenin uçları arasında ölçülenen V_2 gerilimi $M_{12} \frac{dI_1}{dt}$ olduğuna göre, $N_1 = 1000$ sarm, $N_2 = 200$ sarm, $\mu = 100 \mu_0$, $(c-a) = 0.01$ (m) $b = 0.2$ (m), ve $I = 5 \cos(120\pi t)$ alarak V_2 gerilimini bulunuz.

Cözüm.

$$(101)$$

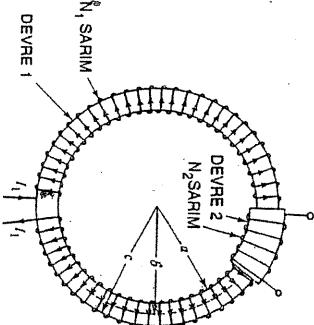
$$V_2 = M_{12} \frac{dI_1}{dt}, \quad \frac{dI}{dt} = 5(120\pi) \sin(120\pi t)$$

$$M_{12} = \frac{\mu N_1 N_2 (c-a)^2}{8b} = 1.57 \cdot 10^{-3} \text{ (H)} \text{ olduğuna göre}$$

$$V_2 = 1.57 \cdot 10^{-3} (-5) (120\pi) \sin(120\pi t)$$

$$V_2 = -296 \sin(120\pi t) \text{ (V) bulunur.}$$

Örnek 6.15. Sıkıştırılmış 1,2 m kenar uzunluklu küb şeklinde 12000 N luk eski bir arabayı kaldırın elektromagnitik şekil 6.37 de görülmektedir. herbir kutbun $0,12 \text{ m}^2$ lik bir yüzeyle temas ettiğini ve 4mm lik efektif aralık olduğunu kabul ederek sağya verilecek elektromotor kuvvetini; elektromagnetik devrenin relüktansını ihmali ederek (b) ihmali ederek fakat arabanın efektif 0,8 m uzunluğunda ve $0,12 \text{ m}^2$ lik yüzeyi ve bağlı magnetik geçirgenliğinin 300 olduğunu kabul ederek bulunuz.



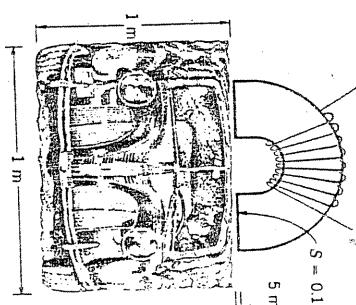
Şekil 6.37.

Çözüm. Toroidin çapı $(c-a)$ olduğuna göre toroidin kesiti $[\pi(c-a)^2]/4$ olur. Bu durumda

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12} N_2}{I_1} = \frac{B_{12} S_2 N_2}{I_1} = \frac{\left(\frac{\mu N_1 I_1}{2\pi b}\right) \left(\frac{\pi(c-a)^2}{4}\right) N_2}{I_1}$$

$$M_{12} = \frac{N_1 N_2 (c-a)^2}{8b} \quad (\text{H})$$

bulunur.



Şekil 6.38.

Cözüm (a) Elektromagnitik alanın tek bir kutubunun arabaya uyguladığı magnetik kuvvet

$$F = \frac{12000}{2} = 6000 \text{ N} \quad \text{olduğuna göre, } B \text{ magnetik induksiyonu (89) numaralı başlıklıdan,}$$

$$6000 = \frac{B^2 S}{\mu_0} \text{ dan } S = 0.12 \text{ konularak } B = 0.354 \text{ (T) ve } H=B / \mu_0 = 0.282 \cdot 10^6 \text{ (A/m)}$$

bulunur. O halde magnetik elektromotor kuvvet

$$V_m = \int H \cdot dL = (0.282 \cdot 10^6) \cdot (4 \cdot 10^{-3}) = 1128 \text{ (A.Sar.) olur}$$

Veburadan

$$NI = 2 \cdot 1128 = 2260 \text{ (A.Sar.) bulunur.}$$

(b) Arabanın relikansı

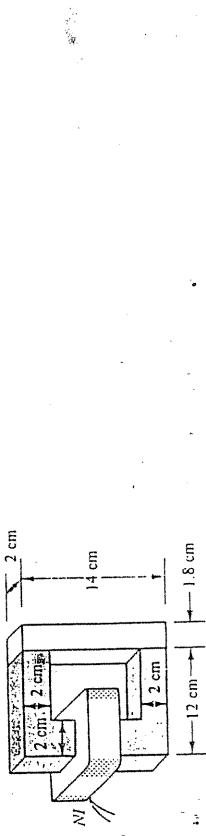
$$\mathfrak{R} = \frac{L}{\mu s} = \frac{0.8 \cdot 10^7}{1200\pi \cdot 0.12} = 17.680 \text{ (1/H)}$$

ve aki

$\Psi_m = 0.354 \times 0.12 = 42.5 \cdot 10^3$, buradan faydalananarak arabanın magnetik elektromotor kuvveti,

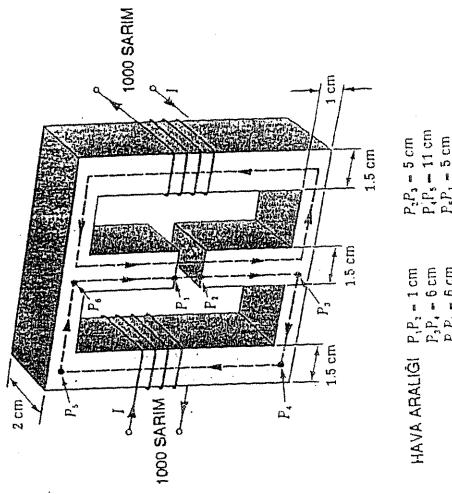
$$V_m = \Psi_m \mathfrak{R} = (42.5) \cdot (17.68) = 752 \text{ olur.}$$

O halde toplam magnetik gerilim $NI = 2260 + 752 = 3010$ (A.Sar.) bulunur.



Şekil 6.39 (prob. 6.3)

6.4 Şekil 6.40 deki magnetik devrede hava aralığındaki magnetik alan $B=1.2$ (T) dir. $\mu=1000 \mu_0$ olduğuna göre sargılarından geçen akımları bulunuz.



Şekil 6.40 (Problem 6.4)

Problemler

6.1 İki sonsuz uzunluklu paralel tabakadan zıt yönlerde $K=10^2$ (A/m) akımları geçmektedir. Tabakalar arasında $d=0.01$ (m) lik aralık olduğuna göre, tabakalar arasında birim yüzeye düşen çekim kuvvetini bulunuz.

6.2 4 (m) uzunluklu 10 (A) lik akım taşıyan bir iletken a , y ekseninde, y eksenine $y = \pm 2m$ ler arasında yerleşmiştir. Dış alan $B=0.05$ A/m olduğuna göre bu iletkeni $x=z=2$ (m) noktasına paralel biçimde sabit hızla götürülmeli durumunda yapılan işi bulunuz.

6.3 Şekil 6.39'daki magnetik devrede 1. parça dökme çelik 2. parça dökme demirden yapılmıştır. Dökme demirdeki aki yönlüğü 0,45 (T) olduğuna göre 150 sarmal sargıdan geçen akım şiddetini bulunuz.

6.5 Kesitleri $z=0$ ve $z=20$ (mm) yüzeyleri ile tanımlanan kare kesiti toroidin iç ve dış yarıçapları 30 mm ve 50 mm dir. Toroidin $r=30$ mm olan yüzeyinde $K=10 \text{ A}_z \text{ k A/m}$ lik akım geçmektedir. (a) Diğer üç yüzeydeki yüzeysel akımı (b) Toroid içindeki H alanını (c) toroidin içinde $\mu_R=20$ olduğuna göre depolanan toplam enerjiyi bulunuz.

6.6 Boşlukta z eksenesine yerlesmiş olan sonsuz uzun çizgisel akım ve N sarmal $y=0$ düzleminde $(b,0),(b+a,0),(b+a,0,a),(b,0,a)$ köşelerine yerlesmiş bir sargedan oluşan sistemin karşılıklı induktansını bulunuz.

6.7 1 kg ve dış yarıçapları 0.3 (cm) ve 2 (cm) olan koaksiyel kablonun (a) 1 (m) lik boyuna düşen kısmında iç ve dış iletkenler arasındaki hacmi (b) Bu hacmin içte ikisi $\mu=\mu_0$ liken kalan kısmı $\mu_R=10$ olan malzeme ile dolduruluyor. Bu durumda birim uzunluğa düşen induktansın maksimum olması için magnetik malzeme hacmine nasıl dağıtılmalıdır. (c) Maksimum induktansı bulunuz.

7.1. FARADAY KANUNU

Önceki bölümlerde, statik veya ivmelememiş yüklerin oluşturduğu zamanla değişmeyecek alanları inceledim. Bu bölümde zamanla değişen magnetik alanların oluşturduğu elektromotor kuvveti, elektrik jeneratörlerinin, transformatörlerin, induktörün çalışma prensibi, eddy, deplasman akımları anlatılacak.

Zamanla değişen magnetik alanlar uygun bir iletken çevrede elektromotor kuvveti (emf) denilen bir gerilim indikler. Elektromotor kuvvet sabit magnetik alanda iletkenlerin hareketiyle oluşabilir. Faraday kanunu

$$\text{emf} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (V) \quad (1)$$

şeklinde ifade edilir. Sıfırdan farklı olan değişimini aşağıdaki durumların bir sonucu olabilir.

1. Kapalı sabit bir çevreye bağlanan zamanla değişen bir akı
2. Düzgün akı ve kapalı çevre arasındaki bağlı hareket
3. Bu son iki durumun birlikte gerçekleşmesi

(1) denklemindeki eksiz işaretini emk'nın akım oluşturacak yönde olduğunu gösterir. Lenz kanunu gereği induklennmiş gerilim zıt yönde akı oluşturur. Eğer devre N sarmalından oluşmuşsa emk,

$$\epsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (2)$$

olur. Herhangi bir kapalı devre için elektromotor kuvveti, elektrostatikde elektrik alanının çizgisel integrali potansiyel faktörü verdiği için

$$\epsilon = \oint E \cdot dL = -\frac{d}{dt} \int_S B \cdot ds \quad (3)$$

Şekilde tanımlanabilir.

Transformatör gibi sabit bir çevrenin değişen magnetik alanın oluşturacağı elektromotor kuvvetini (3) bağıntısını dikkate alarak inceleyelim. (3) bağıntısında sadece \mathbf{B} zamanla değiştiği için integral işaretinin altında kısmı türveni alarak

$$\varepsilon = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot ds \quad (4)$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot ds = - \int \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot ds$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (5)$$

bulunur. I Maxwell bağıntısı olan bu ifade noktasal formda ifade edilmiştir. (4) ifadesi de Faraday kanununun sabit bir çevre için integral ifadesi olarak bilinir.

\mathbf{B} zamanla değişmiyorsa, statik alanlarda daha önce bulduğumuz

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Sonuçlar elde edilir.

Örnek 7.1. Yarıçapı b olan bir silindir içinde \mathbf{B} magnetik induksiyonu eksponansiyel olarak zamanla artmaktadır. $r < b$ için

$$\mathbf{B} = B_0 e^{kt} \mathbf{a}_z$$

olduğuna göre, elektrik alanını bulunuz?

Çözüm. Silindirin içinde yarıçaplı bir çevre için $z=0$ düzleminde

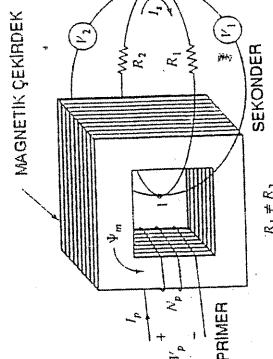
$\mathbf{E} = 2\pi a E_\phi = -k B_0 e^{kt} \mathbf{a}_\theta$
olur. Herhangi bir anda bir yüzeyden geçen akı yüzeyle orantılı olduğu için elektromotor kuvvette a^2 ile orantılı olmaktadır. Elektrik alan ise

$$\mathbf{E} = -1/2 k B_0 e^{kt} r \partial_\phi \mathbf{a}_\theta \quad (7)$$

olur. B_0 pozitif kabul edilirse, R dirençli çizgisi iletkenden negatif a_θ yönünde akım geçer.

Bu akım dairesel çevrim içinde negatif a_z yönünde bir akı oluşturur. \mathbf{E}_ϕ zamanla eksponansiyel artışı için akım ve aynı deşimi gösterir. Görüldüğü gibi zamanla değişen magnetik alanlarda \mathbf{E} sırtulosyon yapmakta ve statik alanlardaki gibi bir yükten diğer yükle doğru uzanması söz konusu değildir.

Örnek 7.2. Şekil 7.1 de çekiirdekteki magnetik akı $3,75 \times 10^{-3} \sin 377t$ (Wb) olduğuna göre, $R_2 = 10R_1$ için rms voltmetrelerdeki okunan değerleri bulun.



Şekil 7.1

Çözüm.

$$\varepsilon = - \frac{d\psi_m}{dt} = -1.414 \cos 377t$$

$$V_{rms} = \frac{1.414}{\sqrt{2}} = 1(V) = V_1 + V_2 \text{ den}$$

$R_2 = 10R_1$ olduğu için $V_1 = 90.9$ (mV), $V_2 = 909$ (mV) olur.

Şimdilik de sabit bir \mathbf{B} alanında Şekil 7.2 deki gibi bir ucu hareketli çevre ele alalım. Hareketli çubuk y konumunda olduğuna göre herhangi bir t anında geçen akı ve elektromotor kuvveti

$$\varepsilon = - \frac{d\psi_m}{dt} = -B_v d$$

olar.

Elektromotor kuvveti $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ ile tanımlandığına göre \mathbf{E} yi kapalı çevrenin her yerinde tanımlayabiliriz. Statik alanlarda iletken yüzeyde $E_t = 0$ olduğunu ve münkemmel iletken yüzeylerde, değişken alanlar için de $E_t = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda münkemmel iletken bir kısa devre olduğu söylenebilir. Şekil 7.2 deki devreyi voltmetre dışında münkemmel iletken olarak kabul edebilir.

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6)$$

Şekilde ifade edildi. Şimdi zamanla değişen alanların ele alalım. Bunun için Amper çevre beğnişini sabit magneteğ alan için yazalım.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (7)$$

$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}$ olur.

$\nabla \mathbf{J} = 0$ olduğu için süreklilik denkleminden $\partial \rho / \partial t = 0$ olduğu görültür. Bu mümkün olamayacağı için, bir \mathbf{G} terimini (7) bağıntısına ekleyelim. Ve tekrar diverjansını alalım.

$$\mathbf{O} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{G}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

bulunur. O halde Amper çevre bağıntısı süreklilik denklemiyle uyuşacak biçimde;

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

olarak ifade ederiz. $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, ifadesini \mathbf{J}_d yerdeğistirme akım yoğunluğu olarak tanımlarsak, (7) denklemi

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d \quad (8)$$

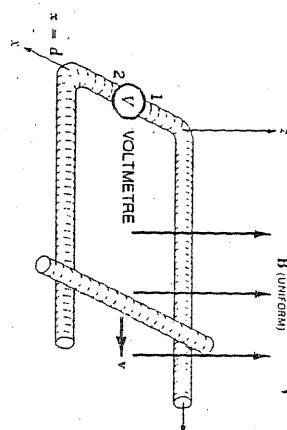
oları.

Net yük yoğunluğu sıfır olan bir bölgede yüklerin (genellikle elektronların) hareketi olarak $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ ile tanımlanan iletken akım yoğunluğu ve hacimsel yük yoğunluğunun hareketi olarak $\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{V}$ ile tanımlanan konveksiyon akım yoğunluğu daha önce görülmüştür. Bu iki tip akında (8) bağıntısında \mathbf{J} ile temsil edilmekte olup \mathbf{H} nun içinde ifade edilmişdir. Iletken olmayan ortamlarda hacimsel yük yoğunluğu sıfır olduğu için $\mathbf{J} = 0$ dir. Bu durumda

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (9)$$

oları. Bu ifade (6) bağıntısının sinetrigidir.

Amper çevre bağıntısının zamana bağlı şemasını (8) nolu bağının S yüzeyi üzerinden



Şekil 7.2

Bu nedenle $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ nin hesaplanmasına hareteli çubugun ve çevrenenin diğer parçalarının bir katkısı yoktur. Saatin dönmeye yönünün tersinde döntülerken, voltmetrelerin uçları arasında integral değeri E.dL bulunur. Bu değer -B.dv ye eşit olacağı için, voltmetredeki elektrik alan şiddeti 2 ucundan 1 ucuna doğru yönlendiği anlaşılır. Yani 2 nolu uç cihazın pozitif kubudur. Bu hınsus akım yöni dikkate alınarak Lenz kanunuyle doğrulanabilir. Akayı azaltacak akım saat yönünde dolasacaktır. Bu ise 2 ucunun pozitif olduğunu doğrular.

integrasyonunu alarak

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \mathbf{I} + \mathbf{I}_d = \mathbf{I} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (10)$$

olarak bulunur.

Yerdeğleştirme (deplasman) akımının özelliğini anlamak için Şekil 7.3 (d) deki gibi paralel bağlı direnç ve kapasitörden oluşan bir devre düşünelim. Devreye bir V gerilimi uygulandığında kapasitör ve dirençten geçen akım farklı olacaktır. Sabit bir gerilim direncin uçlarından geçen sürekli sabit bir akım sağarken kapasitörden akımın geçmesi ancak gerilimin değişken olmasıyla mümkündür. Devredeki elamanları, V , R , C ile gösterirsek dirençten geçen akım $I_1 = V/R$ olur. Kapasitörden geçen akım ise

$$I_2 = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} \quad (11)$$

olur. Burada Q kapasitördे biriken herhangi bir andaki yük miktarıdır. Nettenden geçen iletim akımı, kondansatörden geçen akıma yerdeğleştirme (deplasman) akımı denir. Gerçekte kapasitörtün içinden akım geçmemesine rağmen dış etkenlerle geçmiş gibi olmaktadır. Olay sedede elektrik alanının salınumundan ibarettir. Levhalar arası ortam boşluk dahi olsa yerdeğleştirme akımı yine mevcuttur. Paralel bağlı kapasitör ve direnç Şekil 7.3b deki gibi üç boyutta incelemeye alınabilir. Alan sağlanmasını ihmali edelim. Her bir elaman içindeki alan eşit olup uçları arasındaki gerilimin boyutuna orantıdır.

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{E}\sigma = \frac{\mathbf{I}_1}{A} \quad (12)$$

kesiti A olan, d aralıklı kondansatörden geçen akım (11) nolu bağından faydalananak

$$I_2 = C \cdot \frac{dV}{dt} = \epsilon A \frac{dE}{dt} \quad (13)$$

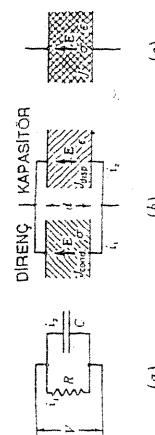
bulunur. Buradan akım yoğunluğu

$$J_2 = \epsilon \frac{dE}{dt} = \frac{dD}{dt} \quad (14)$$

olur. Son olarak iki ayrı saf bir direnç ve kondansatörden ibaret sistem yerine Şekil 7.3 (c) de görüldüğü gibi iletken özellikli dielektrik madde ile dolu bir kondansatörü ele alalım. Bu durumda toplam akım yoğunluğu

$$J_1 = J_1 + J_d \quad (15)$$

olacaktır. Yerdeğleştirme akımı, Maxwell tarafından boşlukta magnetcik alanların oluşturulması için bulunmuş bir kavramdır. Boşluğun iletkenliği olmadığı için iletim akımı yoktur. Bu nedenle yerdeğleştirme akımına bağlı olan magnetcik alanlar vardır.



Şekil 7.3 İletim ve Deplasman akımları
Yani $E=V/d$ olur. Direnç içindeki akım yoğunluğu

7.3. MAXWELL DENKLEMLERİNİN NOKTA VE INTEGRAL FORMU

Elektromagnetik teorinin dört temel denkleninin zamanla değişen alanlar için noktasal formda ifadesi;

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ &= \rho_v (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (17) \quad (28)$$

ve zamandan bağımsız diğer ikisi de

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (19)$$

(18) nolu bağıntı yük yoğunluğunun elektriksel akının kaynağı olduğunu gösterir. Faraday Kanununun noktasal formu olan (16) nolu bağıntı, değişen magnitik alanlar sözkonusu olduğunda \mathbf{E} ve dolayısıyla \mathbf{D} nin sıklıkla sahip olduğunu ve bu nedenle elektrik aktı çizgilerinin kapalı çevrim yapacağına etaya koyar. (19) nolu bağıntı magnitik yüklerin veya kutupların mevcut olmadığını gösterir. Magnetik aktı bir noktasal kaynaktan doğmuyıp her zaman bir kapalı çevrime bulunur.

Burada \mathbf{D} ile \mathbf{E} , ve \mathbf{B} ile \mathbf{H} arasındaki ilişkiler;

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (20)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (21)$$

dir. İletim akım yoğunluğu;

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (22)$$

Konveksiyon akım yoğunluğu

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{V} \quad (23)$$

dir. Eğer iyi bir malzeme ile çalışılıyorsa, polaryasyon ve magnetizasyon (mukatışlama) alanlarını da göz önüne almak gereklidir. Bu nedenle (20) ve (21) nolu bağıntılar

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (24)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (25)$$

olur.

Linear malzemeler için

$$\mathbf{P} = \chi_m \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (26)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (27)$$

lişkileri mevcuttur. Ve Lorentz kuvvet denklemide, birim hacme düşen kuvvet olarak noktasal forması;

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \rho_v (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &\text{şeklinde ifade edilir.} \end{aligned}$$

Deneyselde fiziksel makroskopik büyüklükler incelenerek bulunan sonuçlar, integral bağıntılarıyla verilir. Bu nedenle teoriyi temsil eden differansiyel denklemelerin integral ilişkileri içinde ifade edilmesi, deneysel kanunların anlaşılması dahada kolaylaştırır. (16) bağıntısına Stokes teoremi uygulanırsa

$$\oint_{\text{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_{\text{S}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (29)$$

Faraday kanunu bulunur. Aynı işlem (17) ye uygulanırsa

$$\oint_{\text{S}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + \int_{\text{S}} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (30)$$

Amper çevre kanunu bulunur. (18) ve (19) bağıntılara diverjans teoremi uygulanarak hacim üzerinde integralleri alırsak

$$\begin{aligned} \oint_{\text{V}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\text{V}} \rho_v dV \\ \oint_{\text{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &= 0 \end{aligned} \quad (31) \quad (32)$$

şeklinde elektrik ve magnetik alanların Gauss kanunları bulunur.

Bu dört integral denkleminden faydalananak \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{H} ve \mathbf{E} nin sağladığı sınırları bulunabilir. Bu sınırları genellikle daha önce bulduğumuz statik alanlarınınıyla ayndır. Ve aynı metodlar kullanılır. Sınırlar yüzeyinde $K=0$ olan iki fiziksel ortam arasında (29) nolu bağıntıdan faydalananak elektrik alanın tegetsel bileşenleri arasında

$$E_1 = E_2 \quad (33)$$

$$H_{t1} = H_{t2} \quad (34)$$

ve normal bilesenler için de

$$D_{N1} - D_{N2} = \rho_s \quad (35)$$

$$B_{N1} = B_{N2} \quad (36)$$

dir. Mükemmel bir iletken için, σ sonsuz olduğu için Ohm kanunundan mükemmel iletken içinde;

$$E = 0$$

ve Faraday kanunundan faydalansırsa

$$H = 0$$

olar. Yine değişen alanlar için Amper çevre kanununun noktasal formundan faydalananarak akım yoğunluğu için

$$J = 0$$

sonlu değeri bulunur. O halde iletken yüzeyinde akım K yüzeysel akımı olarak taşınmalıdır. Eğer 2 bölgeyi mükemmel iletken ise (33) ve (36) arası bağıntılar

$$\begin{aligned} E_{t1} &= 0 \\ H_{t1} &= K \\ D_{N1} &= \rho_s \\ B_{N1} &= 0 \end{aligned}$$

Burada yüzeysel yük yoğunluğu terimiyle; dielektriklerde, mükemmel iletkenlerde veya mükemmel olmayan iletkenlerde olabilecek fiziksel bir durum düşünülmektedir. Fakat yüzeysel akım yoğunluğu ise sadice mükemmel iletkenlere ilişkin bir faraziyedir.

Elektriksel özelliklerin birbirinden farklı iki veya daha fazla ortamda Maxwell denklemlerinin çözümü genel olarak bir fiziksel problemin ana hedefini leşkil eder. Bu durumda çözümleme sınırlarda aldığı değerleri birbirine eşitemek gereklidir. Bunun için yukarıda bahsedilen sınırları kullanmak büyük kolaylık sağlar.

Geciktirilmiş potansiyeller. Zamanla değişen potansiyeller gecikmiş potansiyeller olarak tanımlanır. Statik yük dağılımına ilişkin elektriksel potansiyel daha önce,

$$V = \int \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon R} \quad (\text{statik}) \quad (37)$$

ve akım dağılımına ilişkin zamanla değişmeyen vektörel magnetik potansiyel

$$A = \int \frac{\mu J dv}{4\pi R} \quad (\text{dc}) \quad (38)$$

olarak ifade edilmiş olup bu potansiyellerin sağladıkları differansiyel denklemler

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (\text{Statik}) \quad (39)$$

$$\nabla^2 A = -\mu J \quad (\text{dc}) \quad (40)$$

$$E = -\nabla V \quad (\text{Statik}) \quad (41)$$

$$B = \nabla \times A \quad (\text{dc}) \quad (42)$$

dir. Statik ve doğu akımlar için yıldızdaki bağıntıları sağlayan zamana bağlı potansiyeller bulmaya çalışalım. (42) nolu bağıntının diveransını alırsak $\text{div. } B = 0$ olduğunu Maxwell denklemini sağladığı görültür. (41) denklemini incelersek $\nabla \times E = 0$ olduğu görültür.. Halbuki Faraday Kanunuun noktasal formundan $\nabla \times E$ nun genellikle sıfır olmadığı bilinir. Bu nedenle (41) denklemini Maxwell bağıntılarını gerçekleyecek şekilde düzeltme yapalım. Bunun için sağ tarafına yeni bir N terimi ilave edelim ve tekrar rotasyonel alalım.

$$E = -\nabla V + N$$

$$\nabla \times E = 0 + \nabla \times N$$

ve Faraday Kanunuunu kullanarak

$$\nabla \times N = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

ve (42) nolu bağıntıyı kullanarak

Bölüm 7. Zamanla değişen alanlar ve Maxwell denklemleri

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{N} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

bultur. Böylece elektriksel alan

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{V/m}) \quad (43)$$

olur. (42) ve (43) ifadeleri Maxwell denklemlerinin diğer kisine yerleştirilerek kontrol edilebilir. Yani

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

bağıntılarından faydalananarak,

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J} + \epsilon \left(-\nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right)$$

$$\epsilon \left(-\nabla \cdot \nabla V - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = \rho_v$$

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \mu \epsilon \left(\nabla \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) \quad (44)$$

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (45)$$

bulunur. Statik ve dc durumunda $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ olacağı için (44) ve (45) ifadeleri (41) ve (42) bağıntılarına dönüştür. Ancak bu son ikinci bağıntının \mathbf{A} ve V yi tamamen tanımlamakta yetersiz olduğunu belirtmek gerekir. Bir vektör sadece başka bir vektöriin rotasyoneli $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ şeklinde tanımlanamaz. \mathbf{A} vektöriin döner jansında tanımlaması lazımdır. Bu nedenle (44) ve (45) inceleterek en basit biçimde

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (\text{Wb/m}^2)$$

olarak tanımlanabilir. Bu durumda (44) ve (45) bağıntıları yerine

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \quad (\text{Wb/m}^3) \quad (47)$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (\text{V/m}^2) \quad (48)$$

bağıntıları bulunur. Bu denklemler dalga denklemi oluşturmakta kullanışlıdır. Elektronnagnetcik etki sonlu hızla yayılır. Boşlukta bu hız ışık hızı olup yaklaşık $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ dir. Elektronnagnetcik etki sonlu hızla yayıldığı için, herhangi bir noktadaki potansiyelin belli bir noktadaki değeri aynı andaki yük yoğunluğuna bağlı olmayaip, onun daha önceki zamanda dağlığına bağlıdır. Dolayısıyle (37) bağıntısını

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (\text{m/s})$$

bağıntısını sağlar. Herhangi bir elektromagnetik ışınım homojen μ ve ϵ ortamında

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (46)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (43)$$

şeklinde ifade etmek uygundur. Burada $[\rho_v]$, ρ_v , ifadesinde gözükken her t ; geçikmiş zaman olan

$$t' = t - \frac{R}{V}$$

ile yer değiştireceği anılarına gelmektedir. Örneğin uzayda yük yoğunluğu

$$\rho_v = e^{-t'} \cos \omega t$$

ise

$$[\rho_v] = e^r \cos \left[w(t - \frac{R}{v}) \right]$$

olur. Burada R çizgisel yük ile potansiyeli hesap edilen nokta arasındaki uzaklığıt.

Benzer şekilde gecikmiş magnetik vektör potansiyeli

$$\mathbf{A} = \int_V \frac{\mu J}{4\pi R} dv \quad (50)$$

olarak ifade edilir. Özet olarak uzayda ρ_v ve J dağılımları biliniyorsa (49) ve (50) bağıntılarından faydalananlarak V ve \mathbf{A} bulunabilir. Ve daha sonra (42), (43) nolu bağıntılar kullanılarak elektrik ve magnetik alanlar hesaplanır.

$$\nabla \hat{U} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (51)$$

şeklinde verilir. Bu denklem sadece gerili tellere özgü olmayıp salının hareketi yapan ihm olaylara uygulanabilir. Örneğin U fonksiyonu mekanik sıkışmayı tensil ederse, (51) nolu denkemin çözümü bir bordonki havanın yapacağı kütük salınımını verir. Biraz sonra Maxwell denklemleri ile ilgili bazı işler yapıldığında (51) nolu bağıntı U fonksiyonu yerine E (veya H) gelmiş olarak karşımıza çıkacaktır. Ve sonuçta E veya H nin tamamlanmış olduğu olayın uzaya yayılan elektromagnetik dalgalar olduğunu sonucu çıkaracaktır.

Lineer, homojen, izotrop ve kaynaklarının bulunduğu bir ortamda Maxwell denklemleri

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (52)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \dot{\sigma} \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (53)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (54)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (55)$$

Şeklinde yazılır. (53) bağıntısının rotasyonelini alıp, (52) ile birleştirilirse

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (56)$$

bulunur. Benzer işler (52) için tekrarlanırsa

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (57)$$

olur. Bu iki bağıntı Maxwell'in üçüncü ve dördüncü bağıntıları ile birleştirilirse; \mathbf{E} ve \mathbf{H} nin tabi oldukları dalgalar denklemleri;

$$-\nabla^2 \mathbf{H}^2 + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (58)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{E} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{d\mathbf{E}}{dt} = 0 \quad (59)$$

olarak bilmek. Bu denklemler ileken olmayan bir ortam için daha basit duruma girer. Bunun için $\sigma=0$ alınarak

$$\nabla^2 H - \mu e \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \quad (60)$$

bulunur. Eğer $v^2 = \frac{1}{\mu \epsilon}$ olduğu göz önüne alırsa denklem 51 eide edilir. (61) denklemi daha açık biçimde

$$\nabla^2 E_x - \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} - \mu_e = 0$$

$$\nabla^2 E_{z-z'} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0^2} \delta_{zz'}$$

$$\nabla E_z - \mu e = 0$$

sadece; $E_y = E_z = 0$ özel durumu dikkate almadan önce yazmaktadır. Bu denklemler son üç bağıntıdan

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} =$$

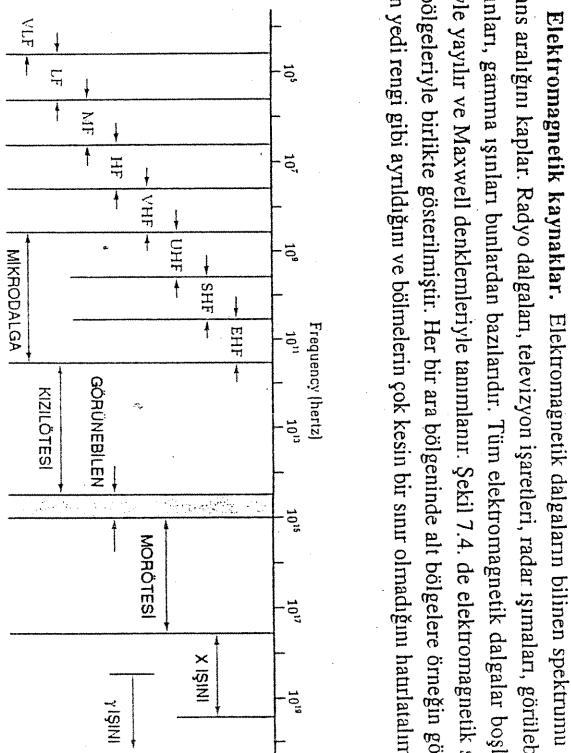
bagıntısı kalır. Bu kısmı differansiyel denklemin çözümü

$$E_x(z,t) = E_x^+(z-vt) + E_x^-(z+vt)$$

Sonuncu ikinci bağımsız ve birde zamanından bağımsız $V = 1 / f_{UE}$ çözümünden ibarettir.

bu elektrik alanında tekrar magnetik alan oluşturarak tekrar bir dönüştürmenin varlığını ortaya koyar. Bu şekilde uzayın bir bölgesinde yapılıacak olan elektriksel veya magnetik perturbasyon, bir nevi dönüştürülmüş enerji serisi şeklinde uzaya ilerler. Yani yürüyen elektromagnetik enerji dalgası meydana gelmiş olur.

Buna biraz benzeyen bir durumu ele alıp inclemek konuya biraz daha ağırlık getirecektir. Bir gölete bir varılı su birdenbire boşaltılacak olursa bir osilasyon hareketi başlatılmış olur. Bu noktadaki su yüzeysi osilasyonlu bir şekilde yükselip alçacaktır. Ancak bu varılı dolusu suyun göletteki sudan yada etrafındaki sudan bağımsız olarak osilasyon yapması mümkünün değildir. Perryodik basıncı azlığı yada fazlılığı etrafındaki suya nakledilir, bu surelle bu suda enerji alır ve harekete geçer. Bundan dolayı hası olan dalgada bitişik olan dış bölgeye enerji nakleder. Bu nedenle göletin yüzeyi boyunca bir dalgıa yayılır.



Sekil 7.4 Elektromagnetik Spektrum

Her yerde elektromagnetik enerji kaynağı bulunur. Örneğin güneş, yıldızlar, şimşek, fürtuna, doğal elektromagnetik enerji kaynaklarıdır. Hatta gündeşin elektromagnetik radyasyonunu içeren vanyetan soğuran her cism elektromagnetik enerji kaynağı gibi davranır. Nükleer

Patlamalar, vakum tüplü ve transistörlü elektronik devreler, mikrodalga dioddaları, laser ve nüaseler, mikrodalga firmalarındaki magnetronlar, radyo antenleri v.s. de suni elektromagnetik enerji kaynaklarından bazalarını oluşturur. Burada bu kaynaklardan çok az da olsa bahsederek radyasyon özelliğle anten konusunda ayrıntılı olarak incelenecettir.

Güneşten gelen radyo dalgaları genellikle 50MHz-50GHz aralığında olur. Ortalama olarak günışten gelen elektromagnetik dalgaların eryüzünden oluşturdukları enerji yoğunluğu $1,8 \cdot 10^{11}$ MW dir. 1970 yılında dünyada tüketilen toplam elektrik gücü 10^6 MW olduğu göz önüne alınursa, günışten dünyamız her saniye muazzam miktarda enerji ulaştığı anlaşılmaktadır. Güneşden gelen elektromagnetik radyasyon gamma, x, mor ötesi görünen ışık, kızıl ötesi ve radyo dalgalarıdır. Görünmen yıldızlar görününen ışık bandında bir elektromagnetik enerji kaynağıdır. Kwasar ve pulsarlar LGM olarak isimlendirilen radyo dalgaları gönderenlerdir.

Uzaktan algılama. Aktif ve pasif olmak üzere arzın mikro dalgalarla iki çeşit uzaktan algılanması vardır.

Aktif mikrodalga uzaktan algılama alıcı ve verici çiflerinin uçak ya da uyduya yerleştirilmesiyle sağlanır. Verici anten mikro dalmayı doğrudan yeryüzündeki hedefe gönderir alıcı antende hedeften yansyan işaretin tesbit eder. Kaydedilen verilerin analizi yapılarak (cisimlerin tipine göre farklı yansuma karakteristikleri olması nedeniyle) hedefin özellikleri testit edilir.

Pasif uzaktan algılanmada, farklı yüzeylerin farklı elektromagnetik ışma neşretmesinden yararlanılır. Uydu veya uçşa yerleştirilmiş alıcı; yeryüzüne yöneller ve hedeflerin yadıkları mikrodalga radyasyonunu tesbit ederek arz yüzündeki bilinmeyen duruma ilişkin bilgileri biriktirerek sonuç çıkarır.

7.5. HARMONİK ALANLAR İÇİN MAXWELL DENKLEMİ

İncelemiş olduğumuz elektromagnetik alanlar, elektrik akımları elektrik yük yoğunlukları uzay ve zamana bağlı gerçek fonksiyonlardır. Incelenmemizde bu fiziksel büyüklüklerin tek bir açısal frekansla, harmonik olarak değiştğini kabul edeceğiz. Bu açısal frekans ω ise, E alanının E_x bileşeni

$$\begin{aligned} E_x(x,y,z,t) &= E_1(x,y,z) \cos(\omega t + \phi) \\ &= \operatorname{Re} \left\{ E_1(x,y,z) e^{j\phi} e^{j\omega t} \right\} \end{aligned} \quad (64)$$

şeklinde ifade edilebilir. Ve

$$E_x(x,y,z) = E_1(x,y,z) e^{j\phi} \quad (65)$$

yerleştirilerek, orijinal $E_x(x,y,z,t)$ gerçek fonksiyonu hakkında gerekli tüm bilgiler; w ve $E_x(x,y,z)$ kompleks fonksiyonundan elde edilir. Aynı işlemi E alanının diğer bileşenlerine de uygulanabilir. Böylece özetle

$$E(x,y,z,t) \leftrightarrow E(x,y,z) \quad (66)$$

şeklinde ifade edilerek E vektörü real ve sanal parçalarından oluşan bir kompleks vektör haline getirilebilir. Bu durumda zamanla göre türev jw ile tensil edilir. Yani

$$\frac{\partial}{\partial t} B(x,y,z,t) \leftrightarrow j\omega B(x,y,z) \quad (67)$$

olur. Bu kompleks notasyon Maxwell denklemlerine uygulanırsa

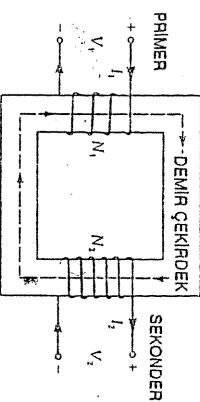
$$\begin{aligned} \nabla \times E &= -j\omega B \\ \nabla \times H &= j\omega D + J \\ \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \cdot D &= \rho_v \end{aligned} \quad (68)$$

elde edilir. Buradaki tüm fiziksel büyüklükler zamandan bağımsız kompleks büyüklükler olup uzay-zaman ilişkisi içinde ifade edilmesi gerektiğinde $e^{j\omega t}$ kompleks ifası ile çarpılıp reel kismı aynıdır.

7.6 UYGULAMALAR

A. Transformatörler

Transformatörler manyetik akıyi halkalayarak devrenin gerilim ve empedansını değiştirmekle kullanılan iki parçalı bir devre elemandır. Ferromagnetik bir malzemeden yapılan çekişdek üzerine sanalmış primer ve sekonder isimli sargılarla Şekil 7.5 de gösterildiği gibi devrenin iki parçası birbirine bağlanır. Magnetik akının tamamına yakının akmasını sağlayarak tuhmasını sağlamak ve primerden sekondere akının tamamına yakının akmasını sağlayarak transformatörle civar devreler arasındaki bağlantıyı minimuma indirmek için, çekişdeğin imalinde yüksek magnetik geçirgenliği sahip ferromagnetik malzeme özellikle kullanılır.



Şekil 7.5 Bir transformator şeması. Gerilimin kutbu ile akının yönü aynıdır.

Çekişdeğin efectif boyu L, kesiti A ise magnetik devre formüllerinden faydalananak

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = HL$$

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = \frac{\psi_m L}{\mu A} \quad (69)$$

yazılır. Ideal transformatör durumunda μ sonsuz kabul edilerek

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (70)$$

bulunur. Faraday kanununa göre

$$V_1 = N_1 \frac{d\psi_m}{dt}$$

$$\text{olduğu için}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (71)$$

elde edilir. Bu son iki bağıntı zamanla değişen tüm akım ve gerilimler için geçerli olup primer ve sekonderin empedansları arasındaki ilişkisi;

$$Z_1 \equiv V_1/I_1, Z_2 \equiv V_2/I_2 \text{ olduğu dikkate alınarak}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2$$

bulunur. Ideal bir transformatörde herhangi bir güç kaybı olmayacağı için giriş ve çıkış güçleri birbirine eşit olur. Yani,

$$\frac{V_1 I_1^*}{V_2 I_2^*} = 1$$

yazılabilir. Gerçekte bir transformatörde her zaman bir miktar güç kaybı olur. Bu kaybın kaynağı; girdap akım ve histerezis kayplarıdır.

Transformatörde girdap akım kaybı. Bir transformatörde zamanla değişen akıtlar itekende girdap akımları denilen akımlar induklayarak isıtımıya yol açan kaypları doğurur. Transformatörde bu kaypları azaltmak için iki çareye baş vurulur. Birincisi, ferritler gibi yüksek magnetik geçirgenlikli ve düşük elektriksel iletkenlikli malzeme kullanılır. Örneğin demirin iletkenliği $\sigma = 300$ (S/m) iken ferriterde ise bu değer yaklaşık 0,01 (S/m) ye düşer. İkinci metod ise.., çekişdek tek parçalı küle halinde imal edilmeyip ince yapraklar birleştirilmesinden oluşurular. Şekil 7.5 de görüldüğü gibi kare şeklinde içi boş ince plaklar okşır veya yalıcı boyalarla yalıtlı olarak magnetcik çekişdeğin oluşturacak şekilde sıkıca biraraya getirilir. Çekişdeğin bu şekilde inal edilmesi, magnetik akıya her zaman dik doğrultuda akan girdap akımlarını büyük oranda azaltır.

B. AC GENERATÖRLERİ

Alternatif akım发电机larının çalışma prensibi; şekil 7.7 de görüldüğü gibi armatür şargı olarak isimlendirilen dikdörtgen bir sargının, mekanik bir cihazda dc magnetik alanunda w sabit açısal hızıyla döndürülmüşüne dayanır. Besbellidirki Çerçeveyi böyle sabit bir hızla döndürebilmek için çerçeveye eksenine dışardan bir döndürme momenti uygulanmak gereklidir. Bu moment ve dönme hareketi bir mekanik enerji tannır. Öte yandan Çerçeve bir magnetik alan $\Psi_m = B A \sin \theta$ olduğuuna göre endiklenen zit elektromotor kurev

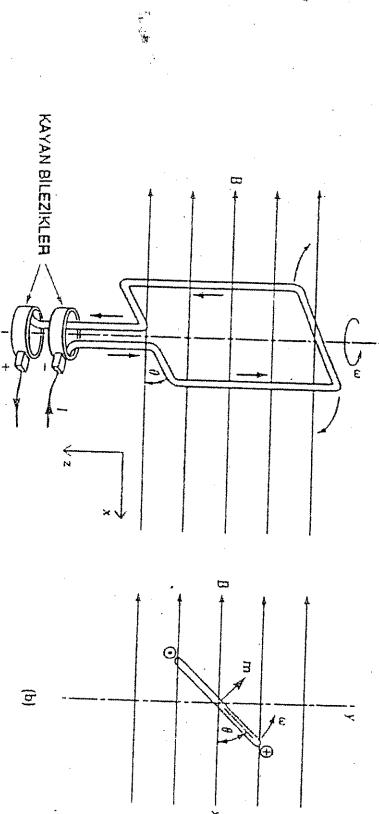
$$\text{emk} = -\frac{d\Psi_m}{dt} = -BA\omega \cos(\omega t)$$

olur. Bu bağıntıda negatif işaret dolayısıyle $\theta = \omega t = \pi/4$ değerinde emk'in yönü, şekil 7.7 de gösterilenin zit yönünde olur. Çerçevenin devre dışında kayan bileziklere bağlı olması dolayısıyle, bileziklerde (75) nolu bağıntıyla ifade edilten, zamana bağlı gerilim ortaya çıkar. Çerçeve uçları bir direnç üzerine bağlanırsa devreden akım geçer. Böylece direnç devresine elektrik enerjisi verilmesi olur.

Armatür sarısında $I \cos(\omega t + \alpha)$ gibi bir akım geçtiğini kabul edersek, generatorun dış devreye verdiği ani elektrik gücü

$$P_e(t) = V(t) I(t) = -[BA\omega \cos(\omega t)][I \cos(\omega t + \alpha)] \quad (76)$$

olur.



Armatür etkiyen tork ise; Bölüm 6 da (56) nolu bağıntıya göre $T = m \times B$ ve bu örneğimizde magnetik moment $m = AI \cos(\omega t + \alpha)$ olduğundan

$$T = AI \cos(\omega t + \alpha) B \cos(\omega t) a_z$$

bulunur. Görüldüğü gibi tork Çerçevenin dönmesine karşı olup, bu elektromagnetik çekici kuvveti yenebilecek mekanik güç $-T_{\text{to}}$ veya

$$P_m(t) = -\omega T = -ABI \cos(\omega t) \cos(\omega t + \alpha) \quad (77)$$

bulunur. (76) ve (77) bağıntıları karşılaştırıldığında $P_e(t) = P_m(t)$ olduğu yani herhangi bir zamanda güçün korunduğu görülür. Bu nedenle generator (iğretic), mekanik gücü elektrik güçine çeviren bir cihaz olarak tanımlanır.

C. DC MOTORLarda ENERJİ DÖNÜŞÜMÜ.

Bölüm 6.4 de çalıstma iklesi incelenen dc motorlarda, armatür Çerçevenin magnetik alanla α açısı yapması durumunda (Bakınız Şekil 6.20), geçen akım I ve dış magnetik alan B_o ise; T torku

$$T = NIAB_o \sin \alpha (-a_z)$$

olarak ifade edilmiştir. Burada N sarım sayısını, A da Çerçevenin alını göstermektedir. Şekil 7.8 de görüldüğü gibi armatürün $(-\Delta\alpha)$ açısı kadar dönmesiyle motorun yaptığı mekanik iş $T(-\Delta\alpha)$ veya

$$W_m = NIAB_o \sin \alpha \Delta\alpha \quad (78)$$

olur. Çerçevenin toplam ağı ise $\Psi_m = NB_o A \cos \alpha$ olduğuna göre, Δt süresi içinde armatürün $(-\Delta\alpha)$ açısı dönmekle, çevrede endiklenen gerilim Faraday kanununa göre

$$\text{emk} = -\frac{d\Psi_m}{dt} = NB_o A \sin \alpha \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$$

$$\text{emk} = -NB_o A \sin \alpha \left(\frac{-\Delta\alpha}{\Delta t} \right) \quad (79)$$

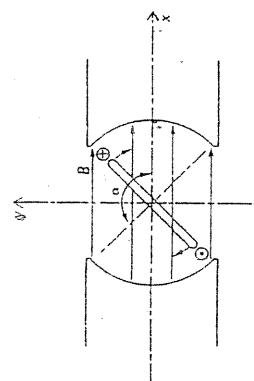
yazılabilir. Lenz kanununa göre bu emk ne karşı I akımı, induksiyon emkının çarpımı, dış elektrik kaynağının motora sağladığı güç eşit olur. Bu güç Δt süresi için

$$W_E = I(\text{emk}) \Delta t = INB_o A \sin \alpha \Delta\alpha \quad (80)$$

olarak ifade edilir. (78) ve (80) bağıntıları karşılaştırılırsa motorun temin ettiği mekanik güçün, dış elektrik kaynağının motora verdiği güç eşit olduğu yani enerji korunduğu görülür. Bu imdadı doğan magnetik momenti göstermektedir.

Şekil 7.7 AC Generatori (a) Genel görünüş, (b) ug görünüşü, m burada Çerçevenin

azıklamlardan anlaşıldığı gibi, şerçeve elektrik uşanından elektrik enerjisi almakta ve bu enerjiyi dönen yoluyla mekanik enerjiye çevirmektedir. Bu şekilde çalışan makinaya motor denir.



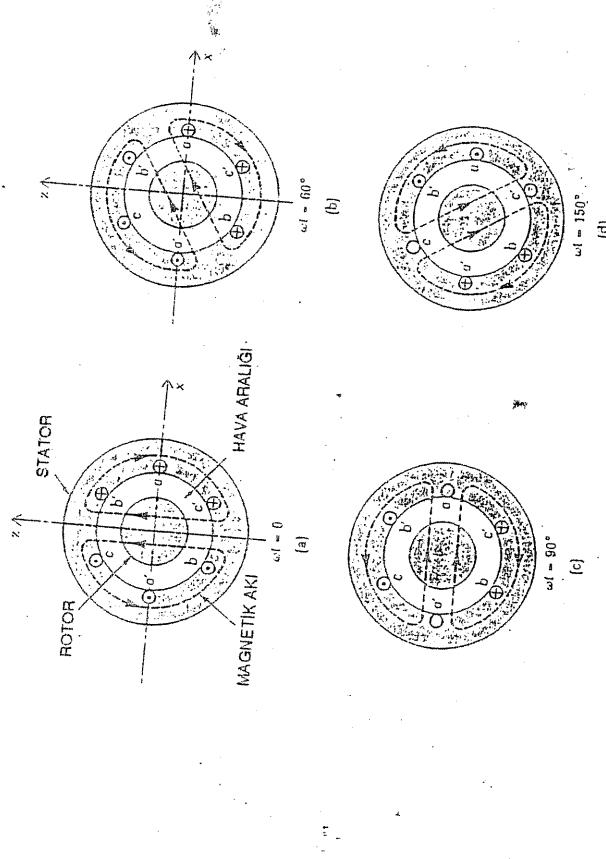
Şekil 7.8 Enerji döntüşüm cihazı olan bir dc motorunda; Akım taşıyan tellere magnetik kuvvet etkisi nedeniyle armatürler magnetik alanında dönerken çevrede zit yönde zit indüksiyon kuvveti oluşmaktadır.

D. DÖNER MAGNETİK ALAN

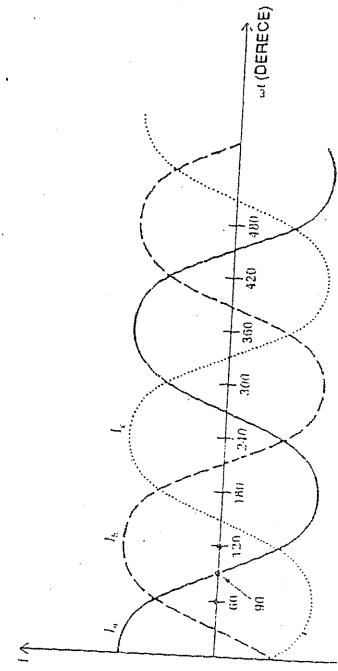
DC ve AC motorlarını, hava içindeki bir sargıyı armatür alarak tanımlayarak isleyiş armatür modeli daha gerçekçi bir şekilde geliştirmek gerekmektedir. Şekil 7.9 da gösterilen böyle bir modelde rotor ferromagnetik bir silindir olarak tanımlanır ve senkron motorların incelemek için yapılmış diğer bir eleman olan stator üzerindeki sargılar vastasyonle magnetik alan tırtıltır. Sargılar arasında akım geçmesi suretiyle uyarılan magnetik alan statordan rotora doğru akarak aralarındaki hava aralığından geçer. Sargılardan geçen akıma ve sargıların geometrisine bağlı olarak motor veya发电机 içinde farklı magnetik alan konfigürasyonları oluşabilir. Burada üç fazlı alternatif akımlar ile bestenen sargıların oluşturduğu döner magnetik alanları inceleyeceğiz. Stator içinde sabit duran sargıların nasıl döner alan oluşturduğunu anlamak için, ilerde inceleenecek olan indüksiyon ve senkron makinalar önceden bilinmelidir.

Stator içine gömülülmüş bulunan üç adet sargı takımıyle magnetik alan uyarılır. Üç fazlı akımlarla bestelenen bu sarmıslar Şekil 7.9 da a-a', b-b', c-c' ile gösterilmektedir.

İa a'a sargasından geçen akımı (a'dan gripli a'den çikan) tanımlanmaktadır. Başlangıçta $t=0$ da İa a'dan doğu düzleme girmekte ve 'a' den kağıt düzlemine dik olarak dışarı çıkmaktadır. Şekilde + sembolü giren akımı, Θ sembolü çikan akımı göstermektedir. Ayın anda ($t=0$) Ib ve Ic akımlarının ikisi de negatiftir. Böylece b ve c sargılarından akımlar b' den b ye, c'den c ye doğru akarlar. Şekil 7.9 a da anlı akım şeması göstürmektedir.



Şekil 7.9 Rotor-stator aralığında döner magnetik alan oluşturmak için düzenlenmiş üç sargı serti a-a', b-b' ve c-c' sargıları. Hava aralığı, rotor, stator ve magnetik akımlar gösteriliyor.



Şekil 7.10 Üç fazlı akımlar: İa akımı, İa akımından 120° geride ve İc akımı da İb akımından 120° geride. Bu akımlar stator sargılarını beslediğinde motorun hava aralığında dönen magnitik alan oluşturur.

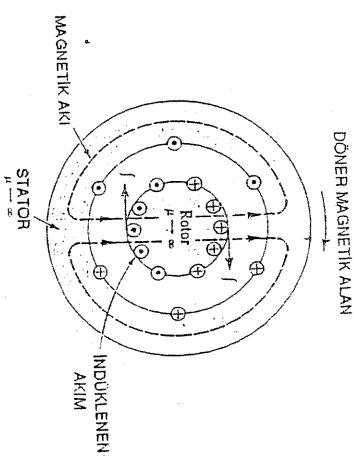
Sekilden görüldüğü gibi bu sistem x-y düzlemine yerleştirilmiş üçlü sargıya eşdeğerdir.
Magnetik alan ; pozitif z yönünde rotordan statora doğru hava aralığından geçerek yönelmekte ve statordan geri dönmektedir.

Üç fazlı akınlara ilişkin Şekil 7.10 incelendiğinde $\omega_t = 60^\circ$ de I_a ve I_b nin pozitif I_c nin negatif olduğu görülmüştür. Buna göre anı akınlar ise Şekil 7.9 (b) de gösterilmiştir. Bu durumu z ekseni ile 60° lik açı yapacak şekilde yöneltmiş üçlü sargı sistemeine eşdeğer olarak kabul edilebilir. Böylece magnetik akı uzayda 60° lik açı yaparak dönüştür olur. Gördüğü gibi burada sargılar hareket etmemesine rağmen, akınlardaki değişimler, stator içindeki sargıların sanki 60° dönüştür gibi magnetik alan üretmesi sağlanmaktadır.

Şekil 7.9(c) ve 7.9(d) de; $\omega_t = 90^\circ$ ve $\omega_t = 150^\circ$ lere karşı gelen magnetik alan ve akım akışı gösterilmiştir. Sonuç olarak, stator içine uygun bir şekilde yerleştirilen sargıları üç fazlı akınlarda beslemek suretiyle rotor - stator hava aralığında döner magnetik alan uyarlmasının mümkün olduğu görülmektedir. Dönen açısal hızı, üç fazlı alternatif akının açısal frekansı ile同步化 edilmiştir. Örneğin, üç fazlı akım frekansı 60 Hz ise Şekil 7.9 daki konfigürasyona göre döner manyetik alan hızı 360° rad/dak, olur. Eğer iki veya daha fazla sargı takımı, periyodik biçimde örneğin her 360° yerine 180° lik periyotta stator magnetik alanına gömülüse, döner magnetik akı hızı 1800 rad/dak, ya da gibi olabilir.

E. ENDÜKSIYON MOTORLARI

Kesit görseli Şekil 7.11 de verilen endüksiyon moturu, yüksek magnetik geçirgenlikli malzemeden yapılmış sator ve rotordan oluşur. Burada da yine statora yerleştirilen sargı seti üç fazlı akınlara beslenerek döner magnetik alan oluşturur. Rotor daki sargılar genellikle kısa devre olması nedeniyle, rotor sonlu elektriksel iletkenlikli ferromagnetik bir silindir gibi modellenebilir. Magnetik alan döner olması nedeniyle, rotor üzerindeki kısa devre olmuş bu sargılarla bağlanan magnetik alan zamanla değişir. Böyle Faraday kanununa göre rotor üzerinde enk indüklenenek akım geçer. Bu akımın magnetik alanla etkileşerek, rotoru döndürmeye zorlayan kuvveti ortaya çıkar.



Şekil 7.11. Bir endüksiyon motorunun kesit görseli : stator sargıları hava aralığında döner magnetik alan oluşturarak, rotorda endüksiyon akımları doğurur. Bu endüksiyon akımları da magnetik alanla etkileşerek tork momenti maydana getirir.

Rotor, magnetik alanın dönen hızından daha düşük hızda döndükçe indüklenen enk her zaman akım ve tork oluşturur. Rotorun hızı döner magnetik alanının etişliğinde ise aralananmadık bağılı hareket kalkacağı için indüklenen enk sıfır olur. Ve kuvvet oluşmayaçağı için rotor yavaşlar. İncelememiz bijaz daha öteletirise endüksiyon motorunun bir asenkron makina olduğunu görüyoruz. Endüksiyon motorunun dönen hızı döner magnetik alanınınkinden daha küçük olur. Şekil 7.11'e göre örneğin, 60 Hz'e bağlı üç fazlı kaynak hızı 360 rad/dak olur.

F. SENKRON MOTORLAR

Sekil 7.12 de görülen üç fazlı senkron motorda, stator sargları üç fazlı akım çekerek döner magnetik alanı üretilir. Burada rotoru dc akım kaynağı tarafından oluşturulmuş ve m momentik momenti radyal yönde olan kutupları vardır. Döner magnetik alan da radyal yönde olmamakla beraber, rotor magnetik momenti ile bir ϕ açısı yapmaktadır. Buna göre m magnetik momenti ile B döner magnetik alan arasındaki olusan tork

$$Y(t) = m_B \sin \left[(\omega_m - \omega_i) t + \phi_o \right] \quad (82)$$

döner magnetik alanı uretirler. Burada rotor dc akım kaynağı tarafından oluşturulur ve magnetik momenti radyal yönde olan kutupları vardır. Döner magnetik alan da radyal yönde olmamakla beraber, rotor magnetik momenti bir ϕ açısı yapmaktadır. Buna göre m magnetik momenti ile \mathbf{B} döner magnetik alanı arasında oluşan tork

$$T = \frac{1}{2} m_B \phi^2$$

olur. Burada ($m_B - \omega_r$) farklı çok küçük olup genellikle $5 - 10$ rad / dk. civarındadır. Eğer yük ve ejlemzsizlik çok büyük ise rotor hızının senkron hızı yakalanması için sinus fonksiyonu yerine uzun süre pozitif kalma devam eder. Bu olaya rotorun sekmeknesi denir.

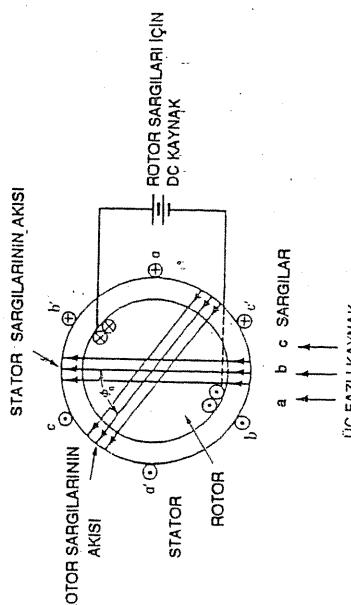
Senkronizm sağlandığında $\omega_r = \omega$ olursa nedeni ile $T = 0$

$$\Pi = m \times B = mB \sin \phi a_z$$

φ yazılabilir. Şekilde bu torkun yönü bidden sayfa düzlemine doğrudur. Döner magnetik alanın φ açısına göre W_m , ve rotorun ki de Wr ile gösterilirse, Φ acısı:

WIT + φ

(31) olur. Bu mağnetin anlaşıldığı üzere sabit bir tork oluşturmak için rotörün açısal hızı, döner magnetik alanına eit olmalıdır.



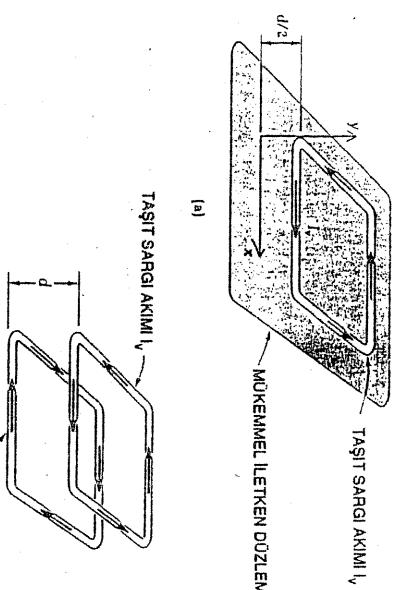
Şekil 7.12 Bir senkron motor, Stator sargıları üç fazlı akımla beslenmektedir.

Bir senkron motor kendi başına senkron motor olarak çalışmaya başlaması için önceden senkron hiza erişerek net bir torkun oluşturulması gereklidir. Senkron motor rotoru genellikle yiyiflaticı (söndürücü) sargı olarak isimlendirdiğin bir eksenel sargı ile şartlıdır. Bu saği motor ıslahatlarında akımların geçmesini sağlamak için kısa devre edilir. Dolayısıyle motor ıslangıçta indüksiyon motoru iken senkron hiza erişerek daha sonra senkron motor haline getirilir. Bunun için rotor bir dc uyarma geniliminden faydalananarak rotor senkron hızda ulaşıcaya kadar itmeye emdirilir ve sonrasında devre edilir.

$$\frac{I}{I_0} = 4 \frac{\mu_0 I_t L}{2\pi d} a_v$$

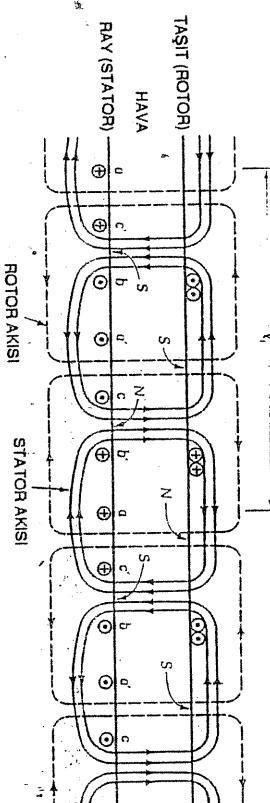
olur. Pozitif y yönünde olan bu kuvvet magnetik düzlemin yükseltmesini sağlar.

Magnetik yastıkları trenin tarihi, senkron motor prensibine dayanır. Ray, standır ve aracın otomatik çalışır. Kangallar ray üzerine döner senkron motorlarda olsun ω_1 varsa ω_2 olabilir.

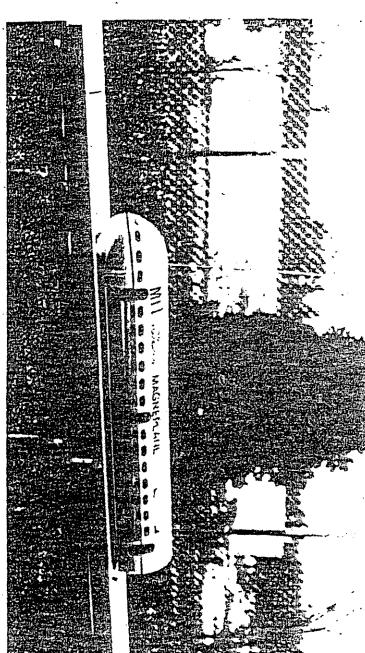


Şekil 7.13. (a) *Magnitik kaldırma, magnitik döviz üzerindeki sargı ile ray arasındaki etkileşme ile sağlanır.* (b) *Önceki durumun iki kangallı sistem gibi modellenmesi*

Şekil 7.14 de a - a' çerçevesi, b - b' ve c - c' çerçevelerini gibi periyotik olarak tekrarlanur. Eğer kangallar üç fazlı akım ile beslenirse yitirilen magnetik alan oluşur. Bu hareketi magnetik etkileşme ile sağları. (b) Önceki durumun iki kangallı sistem gibi modellenmesi



Şekil 7.14 Magnitik trenin linear senkron motorla tahrif ediliyor. Magnitik kuvvet aracının gürneý kutbu ile rayın kuzey kutbunun sıralanmasını sağlar. I_1 uzaklığı ve akımının frekansı magnetik trenin senkronize hızını tayin eder.

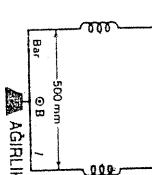


Şekil 7.15 Magnetik trenin henüz deneme safhasında olan küçük bir modeli.

Magnetik uçak A.B.D. de Boing 707 uçağının gövdesine benzer ölçüde yapılmış olup, 1,40 yolculu aracın tahriri için dakikada bir veya iki defa 5 MW elektrik gücü gerekmektedir. Kalkma ve tahrif çerçeveleri içi boş super iletkenlerden yapılarak mümkün olduğunda büyük akımların geçmesi sağlanır. Super iletkenliği sürdürmek için super iletkenler içinde sıvı helyum dolasır. Şekil 7.15 de magnetik trenin öçeklemeňmiş bir modeli gösterilmiştir.

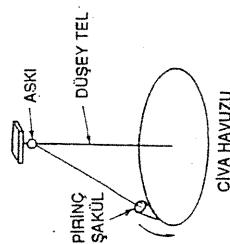
PROBLEMLER

7.1 Şekil 7.16 deki düz bir iletken çubuk düzgün bir B alanunda iki ucundan yaylara asılmıştır. Çubuk, ortasından asılan ağırlıkla birlikte 8 kg gelmekte ve boyu 500 mm dir. $B=3T$ olduğuna göre dengevin sağlanması için I akımının yönü ve değeri ne olmalıdır.



Şekil 7.16 (Problem 7.1)

7.2 Şekil 7.17 de görüldüğü gibi princi bir şakılı 4m uzunluklu iletken ber tele asılarak ucu civa dolu havuzu delegecek biçimde 4s. periyotta 100mm yarıçaplı dairede dönmektedir. Şakılın asıldığı telin bir uzantıda düşey doğrultuda uzatilarak, ucu civa havuzuna dokunmaktadır. Dış magnetik alan yatay doğrultuda olup $50\mu\text{T}$ olduğuna göre devrede induklıken elektrikmotor kuvvetini bulunuz.

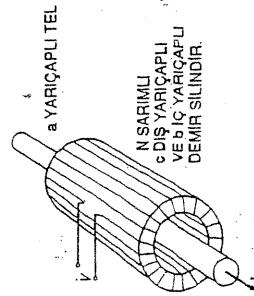


Şekil 7.17 (Problem 7.2)

7.3 Dört iletken tel bir B alanına dik vaziyette kare şeklinde bir devre oluşturuyorlar. Bu teller v sabit hızıyla düşey doğrultuda birbirine degecek biçimde aşındıklarında kare şevede yüzey 4m^2 iken induklıken elektrikmotor kuvvetini bulunuz?

$$(v = 8\text{m/s}, B = 3 \cos 2\pi t \text{ olup } f = 5\text{kHz} \text{ dir.})$$

7.4 Üzerinden $I=I_0$ akımı geçen uzun bir düz tel magnetik geçirgenliği μ olan yumuşak demirden yapılmış L uzunluklu, b ve c iç ve dış yarıçaplı bir silindirle sarılmıştır. Şekil 7.18 de görüldüğü gibi silindirle sarılmıştır. Şekil 7.18 de görüldüğü gibi silindir N sarılmıştır. Tel ile sarımlar arasındaki karşılıklık induktansı bulup, sarımlarda indüktlenen açık devre gerilimini hesaplayınız.

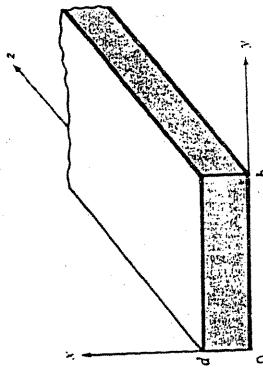


Şekil 7.18 (Problem 7.4)

7.5 Paralel plakalı bir havar araklı kapasitor 1000Ω luk dirençle plakaların ortalarından tutturılmıştır. Plakalar 100m^2 yüzeyli olup 1mm aralıklıdır. Kapasitörlerle 10 Vrms potansiyel farkı uygulandığında (a) kapasitörden geçen rms yerdedışışime akımını (b) rms iletim akımını (c) toplam akım (d) dirençle harcanan gücü; 1Hz, 1kHz, MHz ve 1 GHz frekansları için aynı hesaplayın ve bulunan sonuçları bir tabloda toplayarak sonucu yorumlayınız.

7.6 Elektriksel özellikler $\sigma = 0, \epsilon = 5\epsilon_0$ ve $\mu = 4\mu_0$ olan bir malzeme de $5\cos(2 \cdot 10^8 t - kz)$ ($\mu\text{A}/\mu^2$) lik deplasman akımı geçmektedir. (a) D ve E (b) B ve H büyüklüklerini bulunuz ve (c) Deplasman akımını bulmak için amper çevre bağıntısının noktasal formunu kullanarak k 'nın alabileceğini değerleri bulunuz.

7.7 Şekil 7.19 daki paralel levhali iletim hattında $b = 5\text{cm}$, $d = 1\text{cm}$ olup levhalar arası ortamın elektriksel özelliği, $\sigma = 0, \epsilon_R = 25, \mu_R = 1$ olarak verilmektedir. Dielektrikin dışındaki saçılımlar göz önüne alınmadığna ve elektrik alanı $E = 10^4 \cos(10^9 t - \beta z) a_z$ (V/m) olarak verildiğine göre (a) β yi bulunuz, $\beta > 0$ ise (b) $z = 0$ deplasman akımını (c) $x = 0.5d, 0 < y < b, 0 < z < 0.1\text{m}$ yüzeyinden a_x yönünden geçen toplam deplasman akımını bulunuz.



Şekil 7.19 (Prob. 7.7)

BÖLÜM 8 DÜZLEMLER DALGA VE YANSIMASI

DÜZLEM DALGA

8.1. BOŞLUKTA DÜZLEM DALGA YAVILIMI
J akım kaynağı ve ρ_v yük yoğunluğunun bulunduğu bölgelerin dışında bu kaynakların doğurduğu elektromanyetik alanlar, (7.68) no.lu bağınlardan faydalananarak

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (4)$$

yazılır. Burada boşluğun bünye bağıntıları $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ dir.

Bu durumda dalga denklemi, elektrik alanı için (7.61) bağınlardan faydalananarak

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E} = 0 \quad (5)$$

bulunur. Aynı bağıntı \mathbf{H} için de yazılabilir. 2. dereceden vektörel bu dalga denklemi Helmholtz denklemi olarak bilini. Bu denklemenin basit bir çözümü olarak kabul edeceğimiz E_x çözümünün x ve y den bağımsız olduğu kabul edilirse

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-jkz} \mathbf{a}_x \quad (6)$$

olur. Bu ifade (5)'de yerleştirilerek

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \quad (7)$$

bulunur.

O halde elektrik alanının uzay ve zamana bağlı çözümü

$$(8)$$

$$\mathbf{E} (z,t) = \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}_0 e^{j\omega t} \right] = E_0 \cos (\omega t - kz) \mathbf{a}_x$$

bulunur. Bu ifadenin ne anlana geldiğini incelemek için yeryüzüne dik doğrultulu x ekseni olara, z ekseni de doğuya doğru uzandığı kabul edelim. $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3.10^8 \text{ m/s}$

olduğuna dikkat edilirse $z = 0$ için (8) bağıntısı,

$$E_x = E_0 \cos \omega t$$

olur. $Z = 0$ yeri İstanbul olarak kabul edilirse, İstanbul'da alıcı antende serbest yük saniyede $\omega/2\pi$ defa aşağı yukarı ıvmelemekte olduğu söylemeli. İstanbul'un 500 km. doğusunda 'diyelinki Ankara'da söz konusu alan vektörünün değeri

$$E_x = E_0 \cos (\omega t - \omega \frac{5.10^5}{3.10^8}) = E_0 \cos \omega (t - 0,00167)$$

olur. Gördüğü gibi alan şiddeti İstanbul'da ve Ankara'da aynı olup İstanbul'da 0,00167 saniye daha önce olsuyordu.

Şimdide $t = 0$ alarak incelemeyi sürdürelim.

$$E_x = E_0 \cos (-\omega z \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}) E_0 \cos \frac{\omega z}{c}$$

olur. Böylece alanın $t = 0$ da her yerde Z ile periyodik değiştiği bulunur. Z ekseni boyunca bu kosinus dalgasının ölçülen periyoduna dalga boyu λ denir ve

$$\frac{\omega \lambda}{c} = 2\pi \quad (9)$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.10^8}{f} \quad (\text{boşlukta})$$

bulunur. Böylece E alanının düşey doğrultuda herhangi bir noktada zamanla $T = 1/f$ periyodu ile ve herhangi bir anda λ periyodu ile sinyoidal biçimde değiştiği anlaşılmaktadır. E alanının uzay ve zamana göre bu biçimde değişimi sırasında alan sabit kalması için fazı sabit kalmalıdır. Yani

$$\omega (t - z \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}) = \text{sabit} \quad (10)$$

olur. Buradan her iki tarafın türü alırsa, dalganın faz hızı;

$$\frac{dz}{dt} = V = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c \quad (11)$$

olarak bulunur. Faz hızı V tek hızına eşit olmalıdır. $Z=Z_1$, $t=t_1$ değeri Z_2 noktasında, $Z_2 - Z_1/C$ sonraki değerine eşit olur. Ayrıca $t = t_2$ deki ($t_2 - t_1$).c uzaklığı doğunun ilerlemesine düşer. Bu şekilde elektrik alanının hareket etmesine ve mantıksal bir yaklaşımla dalgaya ismi verilmiştir.

Tekrar Maxwell denklemlerine dönerken verilen bir E alanı için H yi bulabiliyoruz. (1) no.lu bağıntıdan E nin yalnız z ye bağlı olduğunu dikkat ederek

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j \omega \mu_0 H_y \quad (12)$$

bulunur. Buradan E_x in (8) nolu başlığından verilen değeri yerine konularak

$$H_y = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \quad (13)$$

bulunur. Düşey doğrultudaki E nin sağa doğru ilerlerken Magnetik alanunda yatay doğrultuda yine sağa doğru ilerlediği burada görülmektedir. Elektrik ve magnetik alanların büyüklükleri orani

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (14)$$

her zaman sabittir. E ve H büyüklükleri uzay ve zamanda sürekli değişimlerine rağmen oranları sabittir. Bir ortamın karakteristik empedansı

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (15)$$

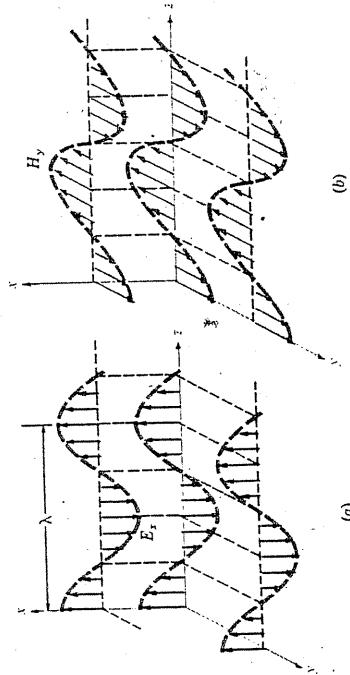
ile verilir. Buna göre boşluğun empedansı

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 = 120\pi \quad (\Omega) \quad (16)$$

olur.

Herhangi bir $z =$ sabit düzleminde alan değerleri her zaman sabit olan bu tür dalgaların

düzen dalgasıdır. Düzlemler dalgalarında birbirine dik olan elektrik ve magnetik alanlar dalganın yayılma yönünü enine kesen düzlemler üzerinde bulunurlar. Bundan dolayı düzlemler dalgaya transverze elektromagnetik dalgaya da kısacası TEM dalgası da denir. Dolayısıyle dalgalar z yönünde ilerliyorsa tüm alan bileşenlerinin x ve y ile değişimi sıfırdır. Şekil 8.1. de alanların ani değerleri gösterilmiştir. Alanlar z eksenine dik düzlemlerde sabit olduğu için propagasyon esnasında aynı değişmeyi gösterirler. Tam bir değişme λ dalgaya boyunda gerçekleşir.



Şekil 8.1 z eksenine paralel $x = 0$ düzleminde, $t = 0$ da keyfi bir doğrultuda z doğrultusunda ilerleyen E ve H alanları E_x ve H_y ; herhangi bir an ve noktada aynı fazdadır.

Düzlemler dalgası, iki boyutta genişletildiğinde sonsuz miktarda enerjiye karşı geldiği için fiziksel olarak mevcut değildir. Ancak kaynaktan çok uzaktaki noktalarda dalgayı düzlemler kabul etmek kolaylık sağlar. Bir radarдан hedefe çarpan bir işaret, laser ışumaları; (hizmete kalınlaşmış laser dalgası boyunun bir kaş yüz bin kat kalınlığında olması nedeniyle), radyo, televizyon dalgaları pratikte düzlemler dalgaları kabul edilir.

8.2. DÜZLEMLER DALGALARIN POLARİZASYONU

Uzayın sabır bir noktasında ; zamana bağlı elektromagnetik dalganın E vektörü zamanla değişir. Bu E vektörünün ucunun zaman geçirkçe izlemiş olduğu eğri o dalganın polarizasyonunu tanımlar. Bu eğri düz bir doğru ise ; doğrusal polarizeilmiş şember ise dairesel polarizeilmiş ellips ise ejiptik polarizeelli, dalgalar denilir. Bir elektromagnetik dalgaya önceden güneş ışığı veya lambadan çıkan ışık gelişigüzel polarizeelli, Böyle durumlarında dalgalar polarizesizdir. Polarisiz dalgalar, bir çok gelişigüzel yönlerde dağınık bir çok doğrusal polarizelidir.

oluştuğu kabul edilebilir. Gökyüzünden süzilen ışık, bir cisimin yüzeyinden yansıyan göz kamaşırı ışık kısmen polarizeli dalgalardır. Buna polarizeli ve polarizesiz dalgaların karışımı gibi düşünülebilir.

Daha önce görmüş olduğumuz z ekseninde yayılan düzlem dalganın E vektörünün ucu sabit bir noktasında x ekseni üzerinde gezinerek maksimum E_0 yer değiştirmesini yapar. Bu nedenle

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \mathbf{a}_x$$

alanın temsil ettiği düzlen dalga doğrusal polarizeidir.

Genel olarak elektriksel alanın E_x ve E_y gibi iki bileşeni bulunuysa bu iki bileşen zamanla aynı fazda bulunduğu sürece E yine xy düzleme paralel bir düzlem içerisindeki sabit bir doğrultuya paralel kılır. Dolayısıyle böyle bir durumda da dalga doğrusal polarizasyonludur.

Bunun için elektrik alan vektörünün bileşenleri;

$$E_x = a \cos(\omega t - kz + \phi_b) \quad (17)$$

$$E_y = b \cos(\omega t - kz + \phi_b) \quad (18)$$

olsun. Burada a ve b gerçek herhangi bir sabiti göstermektedir. E nin üç nokrasının x - y düzleminde çizdiği eğriyi tanımlamak için (17) ve (18) bağıntılarından $(\omega t - kz)$ değişkenini elmine etmek gereklidir. Buna göre

$$\phi = \phi_b - \phi_a = 0 \text{ veya } \pi \text{ ise bu denklemlerden}$$

$$E_y = \pm \frac{b}{a} E_x \quad (19)$$

bulunur.

Bu ise bilindiği gibi eğimi $\pm b/a$ olan doğrudur. Positif işaret $\phi = 0$, negatif işaret $\phi = \pi$ ye karşı gelir ve çizimi 8.2 (a) da verilmiştir.

$\phi = \phi_b - \phi_a = \pm \pi/2$ ve $A = b/a = 1$ ise (17) ve (18) denklemleri, örneğin

$$\phi = \pi/2 \text{ ve } A = 1 \text{ için} \quad (20)$$

$$E_x = a \cos(\omega t - kz + \phi_a)$$

$$E_y = -a \sin(\omega t - kz + \phi_a)$$

olar. t elmine edilirse

$$(21) \quad \omega(t - z \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}) = \text{sabit}$$

bulunur. Bu ifadein ne anlama geldiğini incelenmek için yeryüzüne dik doğrultuyu x ekseni olarak, $ve z$ eksenini de doğuya doğru uzandığı kabul edelim.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3.10^8 \text{ m/s}$$

olduğuna dikkat edilirse $z = 0$ için (8) bağıntısı,

$$E_x = E_0 \cos \omega t$$

olar. $Z = 0$ yeri İstanbul olarak kabul edilirse, İstanbul'da alıcı antende serbest yük saniyede $0/2\pi$ defa aşağı yukarı ıvmelemektede olduğu söylenebilir. İstanbul'un 500 km. doğusunda dijelimki Ankara'da söz konusu alan vektörün değeri

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - \omega \frac{5.10^5}{3.10^8}) = E_0 \cos \omega(t - 0,00167)$$

olur. Görüldüğü gibi alan şiddeti İstanbul'da ve Ankara'da aynı olup İstanbul'da 0,00167 saniye daha önce oluşmaktadır.

Şimdide $t = 0$ olarak incelemeyi sürdürelim.

$$E_x = E_0 \cos(-\omega z \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}) E_0 \cos \frac{\omega z}{c}$$

olar. Böylece alanın $t = 0$ da her yerde Z ile periyodik değiştiği bulunur. Z ekseni boyunca bu kosinus dalgasının ölütlü periyodu dalganın periyodu λ denir ve

$$\frac{\omega \lambda}{c} = 2\pi$$

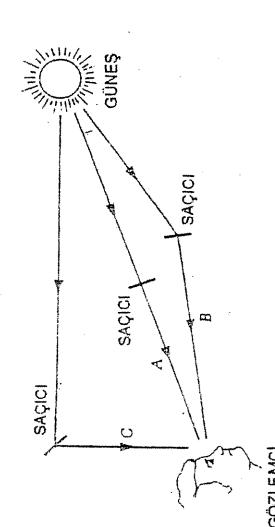
$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.10^8}{f} \quad (\text{boşlukta}) \quad (9)$$

bulunur. Böylece E alanının düşey doğrultuda herhangi bir noktasında zamanla $T = 1/f$ periyodu ile ve herhangi bir anda λ periyodu ile sinioidal biçimde değiştiği anlaşılmaktadır. E alanının uzay ve zamana göre bu biçimde değişimi sırasında alanın sabit kalması için fazı sabit kalmalıdır. Yani

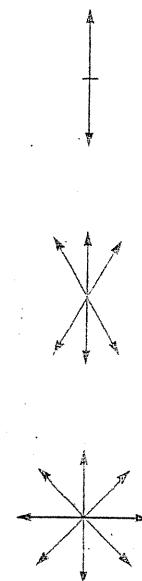
$$(10) \quad \omega(t - z \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}) = \text{sabit}$$

Radyo ve televizyon işaretlerinin alınması. AM istasyonlarından yayılan elektromagnetik dalgalardan yeryüzünde dik doğrultuda E alanuna sahip olup, anten kulesine paraleldir. Bu nedenle alıcılarda maksimum kazanç sağlanmak için düşey yönelik antenler toprağa paralel ve işaretin geldiği tarafa da dik konumda tutulur. FM dalgaları genellikle cihazel polarizedir. Bu durumda FM alıcı antenler, düzlemleri işaretin geldiği yöne dik olarak konumda tutulmaları uygun olacaktır.

Polarize ışığın gözle testi. Gökyüzünden göze direkt ulaşan polarizesiz ışıkla, gözdekiinde bazı cisimlere çarpmaya sonucunda nisbeten çizgisel polarize durumuna gelen ışıklar arasındaki açıdan faydalananak bazı karinca, bal arıları gibi bazı hayvanlar yaşamında yon bulma için polarizasyonu kullanırlar. Şekil 8.3. de güneşden göze gelen polarize ışının ışık ile sağcetten sağlanarak gese gelen çizgisel polarize yakın ışıklar gösterilmiştir.



Şekil 8.3 Gökyüzünden gelen ışığın polarizasyonu.
(A) Polaris olamamış, (B) kısmen polarize, (C) çizgisel polarize durumları



A: PARALEL B: DİĞERİNE DİĞERİ C: DİĞERİNE PARALEL

Radyo ve televizyon işaretlerinin alınması. AM istasyonlarından yayılan elektromagnetik dalgalardan yeryüzünde dik doğrultuda E alanuna sahip olup, anten kulesine paraleldir. Bu nedenle alıcılarda maksimum kazanç sağlanmak için düşey yönelik antenler toprağa paralel ve işaretin geldiği tarafa da dik konumda tutulur. FM dalgaları genellikle cihazel polarizedir. Bu durumda FM alıcı antenler, düzlemleri işaretin geldiği yöne dik olarak konumda tutulmaları uygun olacaktır.

Polarize ışığın gözle testi. Gökyüzünden göze direkt ulaşan polarizesiz ışıkla, gözdekiinde bazı cisimlere çarpmaya sonucunda nisbeten çizgisel polarize durumuna gelen ışıklar arasındaki açıdan faydalananak bazı karinca, bal arıları gibi bazı hayvanlar yaşamında yon bulma için polarizasyonu kullanırlar. Şekil 8.3. de güneşden göze gelen polarize ışının ışık ile sağcetten sağlanarak gese gelen çizgisel polarize yakın ışıklar gösterilmiştir.

Elektromagnetik enerji boşlukta veya, iletken, dielektrik malzemeden yapılmış dalgalar iletim hatları isimli cihazlarla elektromagnetik dalgaları anımda bir yerden başka bir yere nakledilir. Dalgaların bulunduğu bir bölgede kapalı bir yüzeyden geçen güç akışı ; $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ şeklinde ifade edilen güç akısı boyunca integrali olarak tanımlanır. Doğru akım taşıyan tellere, kayıpsız veya iletken ortamlardaki dalgalarla uygulanan bu ifadeden aniden farklıdır, herhangi bir güç, zamana göre ortalama güç, toplam güç akısı gibi tanımlar tütürelerek, herhangi bir yüzeyden, birim zamanda geçen elektromagnetik enerji yoğunluğu hakkında fikir edinilir. Biz burada alanların zamana bağlı ifadelерini kullanarak Poynting teoremi ismini genel bir enerji korunum bağıntısını bulacağız ve bu bağntıyu daha sonra özel hal olarak statik durumlar için yeniden inceleyeceğiz.

Kapalı bir yüzeyden geçen elektromagnetik güç akışı ; Poynting vektörü denilen ifadeyle,

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (\text{W/m}^2) \quad (26)$$

Şekilde verilir. Her iki tarafın diverjansı alırsak ;

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \quad (27)$$

olur. Bölüm 7 de verilen (16) ve (17) nolu Maxwell'in ilk iki bağıntısı (27) de yerleştirilirse ;

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} + \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \right) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (28)$$

Otomobil endüstrisinde güvenilik amacıyla ön camların göz kamasırmayacak biçimde tez姬 edilmesi tasarımılmaktadır. Bunun gerçekleşmesi için polarize lambalar düşünlülmektedir. Bu sağlanan taktide soğforların gözlerine aynı polarize ışık gelecegi için görüş kabiliyeti de olumlu yönde artacaktır.

Gözümüzün herbiri cisimlere farklı açıdan baktığı için beynimiz cisimleri üç boyutta

$$-\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} + \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \right) dv + \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv \quad (W) \quad (29)$$

bulunur. Poynting teoremi denilen bu ifadenin terimleri üç maddede yorumlanabilir.

1. Soldaki ilk ifade S yüzeyi üzerinden giren güç akışını gösterir. Burada $d\mathbf{s}$ da \mathbf{r} ya yönelik yüzey elemansı vektöridür. $\mathbf{P}(t)$ herhangi bir andaki güç akışını göstermek üzere yüzeyden içeri giren güç ;

$$\mathbf{P}(t) = - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} \quad (30)$$

dir.

2. Eşitliğin sağındaki ilk terim, S yüzeyinin çevrimsiz olduğu V haciminde toplam elektromagnetik enerjinin artışı orandır. Statik durumda elektrik ve magnetik enerjiler

$$W_E = \int_V \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} dv, \quad W_H = \int_V \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} dv \quad (31)$$

şeklinde daha önce ifade edilmiştir.

3. Eşitliğin sağındaki son terim, herhangi bir anda V hacminde üretilen veya tüketilen toplam güç ifade eder. Eğer J aksi yoğunluğu vektörünün ızdüşümü \mathbf{E} ile aynı yönlü ise tüketilen güç aksı takdirde üretilen gücü gösterir. Örneğin iletken ortamlarda iletmen akım yoğunluğunu gösteren $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ ifadesi (29) no lu bağıntıda yerine konursa söz konusu olan bu en son terim omik güç kaybını verir. Tükettiilen güç söz konusu ise terimin işaretini negatif olur.

Bu açıklamalar özetlenirse ; (29) no. lu bütünü ; herhangi bir türeteç olmaması durumunda, kapalı bir S yüzeyi çevresindeki alanların oluşturduğu içeriye doğru akan $\mathbf{P}(t)$ güç akısı, V hacmi içindeki elektromagnetik enerjinin zamana artışı oranına ve yine V hacmi içindeki omik kayaplara toplamına eşit olduğunu ifade eder. Eğer V hacmi güç üreticini de kapsiyorsa ilave olarak \mathbf{J}_g gibi hacim integrali alınmış bir terim daha ilave edilmelidir. \mathbf{J}_g burada göz önüne alınacak aktif güç kaynağını göstermektedir. Bu durumda (29) no lu bütünü

$$-\int_S \mathbf{J}_g \cdot \mathbf{E} dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} + \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \right) dv + \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv + \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} \quad (32)$$

durumuna gider. Böylece V hacminde üretilen gücün ; yine V hacmindeki elektromagnetik enerjideki artışa, omik kayaplara ve V hacmini çevreleyen yüzeyden dışarı çıkan güç akışına eşit olduğu görülür. Poynting teoreminin bu ifadesi anten uygulamalarında kullanmak elverişli olmaktadır. Bu durumda (32) bağadiusındaki son terimde, integral yitiriçi anten çevreleyen herhangi bir yüzey olnakta ve integral değeride uzayın herhangi bir bögesine işulenin güç akışını vermektedir.

Statik Poynting Vektörü : Statik elektromagnetik sisteme, devreden doğru akım geçtiği için $\partial / \partial t$ operatörü sıfır olur. Poynting teoremi

$$-\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv \quad (W)$$

şeklinde ifade edilir. Böylece bir dc sisteminde, akım taşıyan iletken civarında oluşturulan kapalı yüzeyine giren güç akısı iletken içinde harcanan güçe eşit olduğu görürlür.

Örnek 8.1. Boyu L olan bir telden I akımı geçmiş olsun. Bu tele giren güç akısını bulup, omik kayıpia karşılaştıralım.

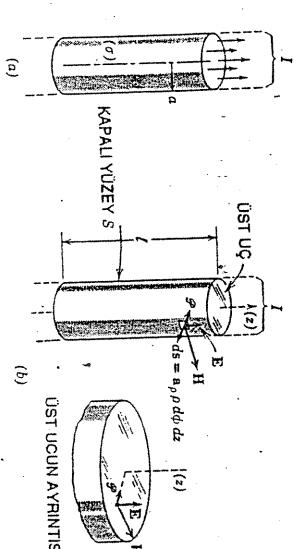
Cözüm. Telin iletkenliğini σ ile gösterelim. Şekil 8.4 de gösterilen iletken telin çevresindeki $r = a$ silindir yüzeyindeki \mathbf{P} poynting vektörü \mathbf{E} ve \mathbf{H} alanlarından bulunabilir.

$$\mathbf{E} = E_z \mathbf{a}_z = \frac{J_z}{\sigma} \mathbf{a}_z = \frac{I}{\sigma A} \mathbf{a}_z, \quad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi a \Delta} \mathbf{a}_\phi$$

olduğuna göre, $r = a$ yüzeyindeki poynting vektör

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = - \frac{I^2}{2\pi a A \Delta} \mathbf{a}_r$$

olar. \mathbf{P} nin yönü Şekil 8.4 (b) de gösterilmiştir.



Şekil 8.4 Statik I akımı taşıyan bir teliin yüzeyindeki \mathbf{E} , \mathbf{H} alanları ve teliin içine akan güç akısı

Yüzeyden içeri giren toplam güç akışı ise ;

$$P = - \int_S P \cdot dS = \int_{z=0}^L \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(-\frac{1}{2\pi\lambda\sigma} \mathbf{a}_r \right) \cdot d\phi dz$$

$$P = I^2 R \quad (\text{W})$$

bulunur. Bu sonuç J.E nin hacim integrali ile de bulunabilir.

$$\int J \cdot E \, dv = \int \sigma E_z^2 \, dv = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sigma A}} \sigma \left(\frac{1}{\sigma A} \right)^2 r \, dr \, d\phi \, dz = I^2 R$$

elde edilir.

Zamanla değişen Poynting vektör. Herhangi bir bölgede yayılan düzlemler dalgaya ilişkili P Poynting vektörünü, (26) no.lu başlığına ifade edilebilir. Bunun için düzlemlerin pozitif z yönündeki boşlukta yayıldığı farzedilirse; elektrik ve magnetik alanlar

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta_0 z) \mathbf{a}_x \quad (33)$$

$$\mathbf{H} = \frac{E_0}{\eta_0} \cos(\omega t - \beta_0 z) \mathbf{a}_y \quad (34)$$

olar. Buradan herhangi bir andaki Poynting vektör.

$$\mathbf{P}(z,t) = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{E_0^2}{\eta_0} \cos^2(\omega t - \beta_0 z) \mathbf{a}_z \quad (35)$$

bulunur. Şekil 8.5a de z yönündede yayılan P vektörü gösterilmektedir. $\cos^2 \theta = 1/2 + 1/2 \cos 2\theta$ özdeşliği kullanılmışsa

$$\mathbf{P}(z,t) = \frac{E_0^2}{2\eta_0} (1 + \cos 2(\omega t - \beta_0 z)) \mathbf{a}_z \quad (36)$$

yazılabilir. (29) no.lu başlığı omik kayıpsız ve üreteçin bulunduğu bir bölge için uygulanursa ;

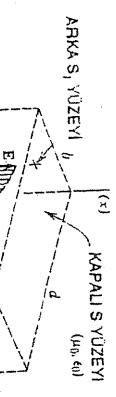
$$P_1(t) = - \int_{S_1} P \cdot dS = - \int_0^b \int_0^a \left(\frac{E_0^2}{\eta_0} \cos^2(\omega t - \beta_0 Z) \right) \cdot (-\mathbf{a}_z) \, dx \, dy = \frac{E_0^2}{\eta_0} a b \cos^2 \omega t$$

Şekil 8.5 Boşlukta yayılan Düzlemler dalgaya ilişkili Poynting vektörü

olur. Burada P (t) nin, kayıpsız ortamda herhangi bir zamanda kapalı S yüzeyine giren güç akısını, sağdaki terimde S yüzeyi içinde depolamış elektromagnetik enerjinin artışı göstermektedir. Bu (37) no.lu bağntının boşlukta yayılan düzlemler dalgalarla uygulanabileceğini aşağıdaki örnekte görelim.

Örnek 8.2 Boşlukta positif z yönünde yayılan düzlemler dalgalarının kenar uzunlukları a, b, d olan ve orjine Şekil 8.6 daki gibi yerleşmiş bir dikdörtgen prizmanın yüzeyinden geçirdiği güç akısını bulunuz ve bu sonucun, prizma içindeki elektromagnetik enerji artusundaki değişimeye eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Dalga + z yönünde yayıldığına göre Poynting vektörde + z yönünde olur. Dikkötgen prizmanın S₁ ve S₂ yüzeylerinden geçen akı



Şekil 8.6

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T P(U_1, U_2, U_3, t) dt \quad (38)$$

olarak gösterilir. ω gibi değişen açısal integrasyon değişkeni için ortalama güç

$$P_{av} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(U_1, U_2, U_3, t) d(\omega) \quad (W/m^2) \quad (39)$$

olur. Gördüğü gibi ortalama güç artık yalnız uzay değişkenine bağlıdır.

Düzlem Dalgalar için ortalama güç akısı. Poynting vektörü (39) bağıntısıyle ifade edilen ortalama değeri, positif z doğrultusunda boşlukta ilerleyen bir düzlem dalgaya uygulanırsa;

$$P(t) = P_1(t) + P_2(t) = \frac{E_0^2}{2\eta_0} a b \cos^2(\omega t - \beta_0 d) \quad (37)$$

$$P_{av} = \frac{1}{(2\pi)(2\eta_0)} \int_0^{2\pi} d(\omega) + \frac{a_z E_0^2}{(2\pi)(2\eta_0)} \int_0^{2\pi} \cos 2(\omega t - k_0 Z) d(\omega) \quad (40)$$

aynı sonuc (37) no.lu bağıntının sağ tarafını hesaplayarak bulunabilir. Bu alıştırma olmak üzere öğrencisiye bırakılmıştır.

Ortalama Poynting Vektör. Sintüidal olarak zamanla değişen alanların bir bölge veya sisteme bırakıldıkları elektromagnetik gücü daha önce herhangi bir zaman için hesaplanmıştır. Ancak pratik ölçümler bu anı güç açısından ziyade zamana göre bir ortalama değere dayanır.

Özellikle devre teorisinde, elektromagnetik alanların ortalama gücü önemli bir kavramdır. Pasif bir şebekenin uşarına giren ortalama güç ; elektrostatik tipi wattmetre ile veya giriş gerilimi ve akımı ve genlikten faydalananlarak bulunabilir. Elektromagnetik açıdan iüteç ihtiyaç etmeyen bir kapalı yüzeye giren zamana göre ortalama güç akısı için daha önce açıklanan kriterler burada da aynen geçerlidir. Yani ortalama güç söz konusu bölgede isimləmeye harcanan omik güç kayiplarına eşittir.

Zamanla harmonik değişen bir fonksiyonun ; zamanla ortalama değeri için Laboratuvar ölçümlerinde bir çevrimli zaman aralığında eriştiği değer olarak kabul edilir. Poynting vektörünün

Bölüm 8 : Düzlem dalgası ve yansımacı

idi zamana göre ortalama alınsa

terimi devre teorisindeki iki üçlu empedansın güç çarpımının bir benzeridir.

Ortalama Poynting Teoremi. Bir s yüzeyinden geçen ortalama güç

$$P_{av} = \int_S \mathbf{P}_{av} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{W}) \quad (42)$$

ile ifade edilir. Burada s açık veya kapalı yüzey olabilir. s kapalı bir yüzey olarak alınrsa, (40) ifadesinin sonucu yüzeyden ayrılan net akayı verir. (40) no.lu bağıntı zamana göre $P(t)$ ani güçte cinsinden de ifade edebiliriz. Bunun için (39) ifadesini (42) de yerleştiresek;

$$P_{av} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{P} \cdot d(\omega t) \right) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t) d(\omega t) \quad (43)$$

bulunur.

Örnek 8.3 Örnek 8.2 de ki boşlukta verilen bir dalga için kapalı yüzeye giren ortalama güçü bulunuz.

Cözüm. Kapalı yüzeye aktı girdiği için (42) bağıntısı negatif işaretle ifade edilmelidir.

$$P_{av} = - \int_{S_1} \mathbf{P}_{av} \cdot d\mathbf{s} \quad (44)$$

olarak bulunur.

$$P_{av} = - \int P_{av} \cdot ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (J \cdot E) d(\omega t) \quad (46)$$

$$P_{av} = - \int_{S_1} \mathbf{P}_{av} \cdot d\mathbf{s}$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{E_0^2}{(2\eta_0)} (-\mathbf{a}_z dx dy) = \frac{E_0^2}{2\eta_0} ab$$

bulunur. Açı kutuya girdiği için sonuçta pozitif çıkmıştır. Aynı işlem S_2 yüzeyi için tekrarlanmıştır negatif çıkmazı gerektirdi. Kaynaksız ve kayıpsız bir bölgenin gevredediği kapalı bir S yüzeyine giren net ortalama güç, $P_{av} = P_{av1} + P_{av2} = 0$ bulunur.

Kayıplı fakat kaynak iletiv etmeyen ortamda bulunan zamanla değişen alanlarda, kapalı bir yüzeye giren ortalama güç hacim içindeki omik gitk kaybının zamana göre ortalama değerine eşittir. Bu ifadenin doğruluğu (29) no.lu bağıntıdan faydalananarak gösterilebilir. Poynting teoremini

$$P(t) = - \int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} (W_E + W_M) + \int_V J \cdot E \, dv$$



Şekil 8.7 Bir hacimde bulunan elektrik alan enerjisinin zamana değişimi

Kompleks Harmonik Alanlarda Ortalama Poynting Vektörü :

Bölüm 7.5 de elektromagnetik alanları kompleks biçimde ifade etmekle ortaya çıkan $e^{j\omega t}$ çarpma sayesinde kompleks ifadeerde zamana bağlı terimleri kullanmaya gerekmediğimi görmüştük. E ve H alanlarının kompleks olması durumunda poynting vektörü

$$\mathbf{P}_c = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (\text{W/m}^2) \quad (47)$$

ile ifade edilir. Burada \mathbf{H}^* ; kompleks magnetik alan vektörünün eşleniğini göstermektedir. \mathbf{P}_c nin ortalama değeri

$$\mathbf{P}_{av} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d(\omega t) \mathbf{E}(x,y,z,t) \times \mathbf{H}^*(x,y,z,t)$$

$$\mathbf{P}_{av} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \quad (48)$$

dir. Herhangi bir S yüzeyinden geçen güç akısı ise

$$\mathbf{P}_{av} = - \oint_S \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{W}) \quad (49)$$

olur. Poynting teoremi, Maxwell denklemlerinin kompleks yazılımından faydalananarak olur. Poynting teoremi, Maxwell denklemlerinin kompleks yazılımından faydalananarak çarparılabili. Bölüm 7.5 deki (68) no.lu kompleks Maxwell bağıntılarından ikini soldan \mathbf{H}^* ile ikincisinide E ile çarparısk

$$\mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \quad (50)$$

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}^* = -j\omega \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \mathbf{J}^* \mathbf{E} \quad (51)$$

bulunur. (50) den (51) çıkartılır ve

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \mathbf{H}^* \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}^*)$$

özdeşliği kullanılırsa

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = -j\omega \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* + j\omega \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* - \mathbf{J}^* \mathbf{E}$$

bulunur. Bir V hacmi üzerinden integrasyon alınırsa ve sol tarafa diverjans teoremi uygulanırsa kompleks Poynting teoreminin ifadesi elde edilir.

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{s} = j\int_V (\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* - \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) dv + \int_V \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} dv \quad (52)$$

V hacmi içindeki J akım yoğunluğu \mathbf{J}_g kaynak akınlarını da içtiğ düşünüllürse \mathbf{J}_g^* . E nin hacimsel integrali (52) ye ilave edilecek;

$$-\int_V \mathbf{J}_g^* \cdot \mathbf{E} dv = j\omega \int_V (\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* - \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) dv + \int_V \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} dv + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{s} \quad (53)$$

elde edilir. Kompleks Poynting teoreminin fiziksel anlamını (53) no.lu bağıntının kompleks ve real kısımlarını eşitleyerek görebiliriz. Ortamda kaynak bulunmasın ve μ, ϵ real olsun. Real terimleri eşitlenirse ;

$$\mathbf{P}_{av} = - \oint_S \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{s} = \int_V \frac{\sigma E^2}{2} dv \quad (\text{W}) \quad (54)$$

olur. Gördüğü gibi (54) ve (46) no.lu ifadeler eşdeğerdir. Sanal kısımlar eşitlenirse

$$-\oint_S \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{s} = 2\omega \int_V \left(\frac{\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*}{4} - \frac{\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{4} \right) dv \quad (55)$$

Burada $1/4 \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*$ ve $1/4 \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$ terimleri zamandan bağımsız olan V hacminden depolanan magnetik ve elektrik enerji yoğunluklarının zamana göre ortalama değerini verir. Eğer V hacmi içinde kaynak yoksa, V hacminin sınırlayan kapalı S yüzeyinden içeri giren aktı, magnetik ve elektrik alanda depolanan enerjilerin zamana göre ortalamlarının farkının 2ω çarpısına eşittir. Bu ifade; devrede L, C gibi enerji depolayan elemanlara uygulandığında bazen Q simbolü ile gösterilir.

Eğer V hacmi içinde \mathbf{J}_g akım kaynağı varsa (53) no.lu bağıntıdan real kısımlar eşitliğinden faydalananak;

$$-\int_V \frac{1}{2} R \epsilon \mathbf{J}_g^* \cdot \mathbf{E} dv = \int_V \frac{\sigma E^2}{2} dv + \int_S \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{s} \quad (56)$$

elde edilir. Bu ise V hacminde üretilen güç zamana göre ortalama değerinin, V hacmindeki omik kayıpların zamana göre ortalama değerleri toplamı ile V hacminin sınırlayan kapalı yüzeyden ayrılan toplam güç almasına eşit olduğunu gösteren bir enerji korumun ifadesidir. (56) no.lu bağıntısı antenler gibi kayıpsız bir ortama (bcşüşü) güç akısı yaymayı anlatır. Bu durumda antenin çevrileyen S yüzeyinden ışıkların güç akısı, anten girişlerine sağlanan güç eşit olur.

8.4. DIELEKTRİK ORTAMLARDA DALGA YAYILIMI

Saf Dielektrik ortamda dalgalar yayılım. Dielektrik ve magnetik geçirgenlik sabitleri sırasıyla ϵ ve μ ile gösterilen izotrop ve homojen bir ortamda pozitif yönde düzlem dalgaya ilişkili dalgalar denklemi

$$\nabla^2 E_x = -\omega^2 \mu \epsilon E_x \quad (57)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu \epsilon E_x \quad (58)$$

yazılabilir. Zayıflatmalar da dikkate alınarak bu denklemin çözümü

$$E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (59)$$

veya kompleks yazılışıyla

$$E_x = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (60)$$

olur. Burada α pozitif z yönünde ilerleyen dalganın zayıflama sabitini göstermektedir. Ortam kayıpssız olduğunda $\alpha = 0$ olur. Radyan biriminde olan β faz sabitini, β ise birim uzunlukta faz kaymasını gösterir. Ve genel olarak γ propagasyon sabiti;

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (61)$$

ile gösterilir. Dolayısıyle,

$$E_x = E_0 e^{-\gamma z} \quad (62)$$

olur. Bu değer (58) de yerleştirilirse;

$$\gamma = \pm j\alpha \sqrt{\mu \epsilon}$$

ve

$$\alpha = 0, \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (63)$$

O halde pozitif z yönünde yayılma bulunur.

Örnek 8.4. 5 GHz ($5 \cdot 10^9$ Hz) frekanslı tıknaz bir düzlem dalgalarının yayılma hızını, (b)

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \quad (64)$$

$$\text{ve v hızı} \quad v = \omega / \beta \quad (65)$$

Saf bir dielektrikte yayılan düzlem dalgalar için

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} \quad (66)$$

olup 2π radyonlu faz değişiminde dalganın aldığı yol λ dalga boyu ile gösterildiğine göre;

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (67)$$

bulunur. Veya,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{f \sqrt{\mu_R \epsilon_R}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} \quad (67)$$

olur. Burada λ_0 boşluktaki dalga boyunu göstermektedir. $\mu_R \epsilon_R > 1$ olduğu için dielektrik ortamda dalga boyu, boşluktaki dalga boyundan daha kısadır. Ve dalga hızı boşluga göre daha küçüktür.

E_x alanı bilindigine göre magnetik alan şiddeti

$$H_y = \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - \beta z) \quad (68)$$

olur. Burada η karakteristik impedansı

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (69)$$

ile gösterilir. Burada aynı fazda olan E_x ve H_y alanları dalga yayıldıkça her zaman birbirine dik olup birlikte dalganın yayılma doğrultusuna dik düzlem üzerinde bulunurlar.

Örnek 8.4. Matsjum elektrik alanının 10 mV/m olduğu göre (a) yayılma hızını, (b) dalga boyunu, (c) faz sabitini, (d) magnitik alan şiddetini bulunuz.

Cözüm. Ortam kaypsız olduğuna göre $\alpha=0$, $\mu_R = 1$ ve $\epsilon_R = 2,53$ (5 GHz de) dir.

$$(a) V = \frac{c}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2.53}} = 1.886 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$(b) \lambda = \frac{V}{f} = \frac{1.886 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^9} = 0.0377 \text{ m}$$

$$(c) \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.0377} = 166,6 \text{ rad/m}$$

$$(d) \eta = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \frac{377}{\sqrt{78}} = 237 \Omega$$

O halde elektrik alanı

$$E_x = 10 \cos(10\pi \cdot 10^9 t - 166,7 z)$$

$$H_y = \frac{10}{237} \cos(10\pi \cdot 10^9 t - 166,7 z) \text{ (m A/m)}$$

$$H_0 = \frac{10}{237} = 0,04219 \text{ (mA/m)} \cong 42,2 \mu\text{A/m}$$

bulunur.

Kayıplı Dielektrik ortamında dalgası yayılımı. Birçok durumlarda ihmali edilmesine rağmen dielektrik ortamlarında bir iletkenliği vardır. Bu durunda Bölüm 7.4 de verilen (58) ve (59) no'lulu başlıklarda $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$ yedeşirilerek dalgası denklemleri

$$\nabla^2 E = j\omega(\sigma + j\omega\epsilon) E \quad (70)$$

$$\nabla^2 H = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) H \quad (71)$$

olarak bulunur. Burada

$$\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) \quad (72)$$

$$\gamma = \pm \sqrt{(\sigma + j\omega\epsilon)j\omega\mu} \quad (73)$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \quad (74)$$

olmak üzere γ 'nın real ve sanal kısımları için genel olarak

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (1/\text{m})$$

yazılabilir. Zayıflama sabiti α (neper / m)'nın birimindeki neper radyan gibi bir boyutlu yazılabılır. Zayıflama sabiti α (neper / m)'nın biriminde olur. Bu durumda $+z$ yönünde büyüklik olduğu için, propagasyon sabiti γ (1/m) biriminde olur. Bu durumda $+z$ yönünde ilerleyen dalganın x bileşeni;

$$E_x = E_0 e^{-\alpha x} e^{-j\beta z} \quad (75)$$

elde edilir. Bundan faydalananak H_y magnetik alanı ise;

$$H_y = \frac{E_0}{\eta} e^{-\alpha x} e^{-j\beta z} \quad (76)$$

bulunur. Ortamın karakteristik empedansı ise;

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}} \quad (77)$$

olar. Görüldüğü gibi elektrik ve magnetik alanlar artık zaman fazında değildir. Alan ifadelerini veren (75) ve (76) bağhtularındaki $e^{-\alpha x}$ terimi; $+z$ yönünde yayılan dalganın genliğiin eksponansiyel olarak azaldığını gösterir. α ile gösterilen zayıflama sabiti metre başına neper ile (Np/m) ölçülür. Örneğin $\alpha = 0,01 \text{ Np/m}$ olan bir ortamda dalganın 50m ilerlemesi durumunda genliği, $Z=0$ daki genliğinin $e^{-0,05} / e^{-0} = 0,607$ katına düşer. Pozitif z yönünde $\frac{1}{\alpha}$ kadar dalgaya yol alduğunda, dalganın genliğinde e^{-1} çarpanı kadar azalma olur. Bu ise bilindiği gibi ilk genliğinin 0,368 katına karşı gelir.

Örnek 8.5. Dielektrigi hayli zayıf olan saf suda yayılan $\omega = 10^{11}$ rad/s (15,9 GHz) frekanlı dalgası için propagasyon sabitini, karakteristik dalgası empedansını bulunuz. ($\mu_R = 1$, $\epsilon_R = 50$, $\sigma = 20 \text{ mho/m}$)

Cözüm .

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{20 \cdot 10^{12}}{10^{11} \cdot 50 \cdot 8.854} = 0.4518$$

ve

$$\begin{aligned}\gamma &= j10^{11} \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8,854 \cdot 50 \cdot 10^{-12}} / \sqrt{1-j0,4518} \\ &= j2359 \sqrt{1,0973} \angle -24,31^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= 2471 \angle 77,84^\circ = 520,3 + j2415 \text{ (m}^{-1}\text{)} \\ \text{zayıflama sabiti ;} \\ \alpha &= 520,3 \text{ (Np/m)}$$

faz sabiti

 $\beta = 2415 \text{ rad/m}$

bulunur. Yani saf su içinde dalganın : E_x veya H_y genlikleri her 1/520 metrede (yaklaşık 2 mm) 0,368 çarpan kadar zayıflayacaktır. Dolayısıyle dalgı oldukça fazla kayba uğrar. Bu örnekte görüldüğü gibi su altında radar etkisiz kalmakta olup, denizaltı haberleşmelerinde sonar tercih edilir. Ayrıca diğer bir sonucuda atmosferdeki su baltalarının veya yağmurun yüksek frekanslarda propagasyonu önlediği şekilde ortaya çıkmaktadır.

Faz sabiti değerinin $\beta = 2415 \text{ rad/m}$ olması ; ortamın iletkenlik özelligine sahip olmasından β nin çok az etkilendiğini gösterir. Eğer $\sigma = 0$ olsaydı $\beta = 2359 \text{ rad/m}$ olacaktı. 15,9 GHz frekanslı dalgası havada 1,886 cm lik dalga boyunu suda ise $\lambda = 2\pi/\beta = 2,601 \text{ mm}$ lik dalga boyuna tekrülür eder.

Karakteristik empedans ise :

$$\begin{aligned}\eta &= \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 12}{50 \cdot 8,854}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-j0,4518}} = 50,86 \angle 12,16^\circ \\ &= 49,72+j10,71 \quad \Omega\end{aligned}$$

olur. E_x her noktada H_y den $12,16^\circ$ önce bulunur.

Dielektrik malzemenin kaybu hayatı küçüklükse $\sigma/j\omega$ değerinin (74) ve (77) bağıntıları dikkate alınarak, bire eşit olup olmaması şeklinde bir karşılaştırma yapılabilir. Maxwell denklemlerini tekrar ele alırsak ;

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E} = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_d$$

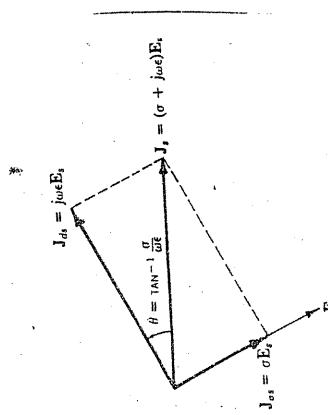
bağlantısındaki iletim ve deplasman akım yoğunlukları arasındaki oran ;

$$\frac{J_i}{J_d} = \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}$$

olur. Bu ise iki vektörün uzayda aynı yönde ancak zaman fazında 90°lik fark olduğunu gösterir. Paralel bağlı kondansatör ve dirençten oluşan herhangi bir elektrik devresinde olduğu gibi, kondansatörden oluşan herhangi bir elektrik devresinde olduğu gibi, kondansatörden geçen akım, dirençten geçen akımdan 90° ilerlerdir. Bu faz ilişkisi Şekil 8.8 de gösterilmiştir. Ve kayıp tanjantı

$$\tan\theta = \frac{\sigma}{j\omega\epsilon} \quad (78)$$

olarak tanımlanır. Kayıp tanjantı küçüklükse, zayıflama, faz sabiti ve karakteristik empedans için bazı yaklaşımlar kabul edilebilir.



Şekil 8.8. İletim ve deplasman akım yoğunlukları arasındaki zaman fazı ilişkisi

γ propagasyon sabitinin (74) no.lu formülde verilen bağntusunda $x = -j\sigma/j\omega\epsilon$ olarak tanımlayıp $|x|<1$ için binom açılımı yaparsa

$$\gamma = j\omega\sqrt{\epsilon} \left(1 - j \frac{\sigma}{2\omega\epsilon} + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 + \dots \right)$$

olur. Buradan faydalananarak

$$\alpha = j\omega\sqrt{\epsilon} \left(-j \frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \right) = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon}}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right] \quad (80 \text{ a})$$

veya daha genel olarak

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (80 \text{ b})$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 + j \frac{\sigma}{2 \omega \epsilon} \right] \quad (81 \text{ a})$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2 \omega \epsilon} \right) \quad (81 \text{ b})$$

bulunur. Kayıp tanjantının birden küçük olduğu kabul edilerek yapılan bu yaklaşımın önemli mühendislik uygulamalarında belli kriterlere göre uygulanır. Buna göre

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} < 0,1 \text{ ise malzeme düşük kayıplı}$$

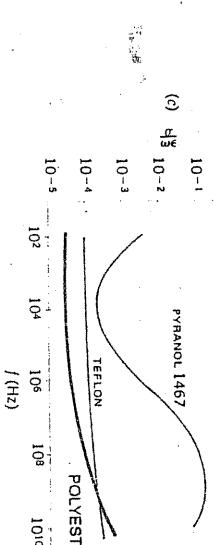
$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} > 0,1 \text{ ise malzeme yüksek kayıplı}$$

$$(82 \text{ a})$$

$$(82 \text{ b})$$

olarak kabul edilir.

Malzeme iletenliği frekansla artar. İletkenlik ve dielektrikin frekansla bağlı değişmesi kayıp tanjantının yalnız frekansla değiştiği şeklinde yorumlanabilir. Şekil 8.9 da kayıp tanjantı - frekans ilişkisi üç değişik malzeme için gösterilmiştir.



Şekil 8.9. Polyester, teflon ve payanol 1467 malzemeleri için kayıp tanjantının frekansla değişimi

Örnek 8.6. 2 ve 50 (MHz) frekans aralığında bir malzemenin kayıp tanjantı 0,05 olup, $\epsilon_R = 5,2$, $\mu_R = 1$ dir. Bu malzemedede α , λ değerlerini (a) 3 MHz için (b) 30 MHz için bulunuz.

$$\alpha = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \sqrt{\mu \epsilon} = 3,58 \cdot 10^{-3} \text{ (Np/m)}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left(1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right) = 0,1434 \text{ (rad/m)}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 43,8 \text{ (m)}$$

(b) Zayıflama sabiti α , α nın frekansla doğru orantılı olduğunu düşünlürsek, frekans 10 kat artınca

$$\alpha = 10 (3,58 \cdot 10^{-3}) = 0,0358 \text{ (Np/m)}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{1,434} = 4,38 \text{ (m)}$$

bulunur.

Örnek 8.7 Ortam özellikleri $\epsilon_R = 4$, $\sigma = 0,1 \text{ (1/}\Omega\text{)}$, $\mu = \mu_0$ olan bir ortanda 2,45 (GHz)frekansla yayılan bir elektromagnetik düzleme dalganın elektrik alan vektörü $E = 100 e^{-\gamma z} (\text{V/m})$ olarak verilmektedir. α ve β yi ve malzemedede metre başına desibell birimindeki zayıflamayı bulunuz.

Cözüm :

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} = 0,1834$$

olduğuna göre tam çözümü bulalımlı.

$$\gamma = j 2\pi (2,45) (10^9) \sqrt{4\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{1 - j \frac{0,1}{40\epsilon_0}}$$

Bölüm 3 : Düzlem dalgası ve yansımacı

yazabiliz. Ancak
 $-j = 1 \angle -90^\circ$

$$= 103,44 \angle 84,8^\circ$$

$$= 9,37 + j103 = \alpha + j\beta \quad (\text{m}^{-1})$$

$$\frac{|E_x|}{|E_x z|} = \frac{1}{e} \cdot \alpha(1) = e^{-9,37}$$

Ve desibel biriminde zayıflama

$$10 \log \frac{|E_x|^2}{|E_x z|^2} = 20 \log e^{-9,37}$$

$$|E_x z| = 0$$

bulunur. O halde

$$\alpha = 9,37 \quad (\text{nepet/m})$$

$$\beta = 103 \quad (\text{rad/m})$$

$$\text{Zayıflama} = 81,39 \quad (\text{dB/m})$$

bulunur.

8.5 İLETKEN ORTAMLARDA DALGA YAYILIMI VE DERİ OLAYI

Bu kısımda iyi iletken malzemelerde; elektromagnetik dalgaların yayılmasına ilişkin, iyi iletkenlerin davranışları incelenecaktır. Sonuçta iletken malzemelerde zamana bağlı alanlar çok hızlı zayıfladıkları için, iletken malzemelerde enerji iletmini iletken dışında oluştugunu anlayacağız.

İyi iletken malzemeler yüksek iletkenlikli olup büyük iletim akumuna sahiptir. Bu tip malzemelerde omik kayıplar sürekli mevcut olmasıyla, dalgaların enerjisini kaybeder. Daha önce bir malzemede ve deplasman akımı oranının kayıp tanjantına eşit olduğunu görmüştük. Nikrom için kayıp tanjantum 100 MHz için hesaparsak;

$\epsilon = \epsilon_0 \sigma = 10^6$ olduğunu göre ; $\sigma / \omega \gg 1$ olduğu görüldür. Bu nedenle iyi iletken malzemelerde α, β ve γ 'nin bulunmasında uygun yaklaşımlar yapılabilir. Propagasyon sabitinin genel ifadesi;

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - \frac{\sigma}{\omega \epsilon}}$$

İdi. Bunu daha basit olarak

$$\gamma = j\sqrt{\mu \epsilon}$$

ve
 $\sqrt{1 \angle -90^\circ} = 1 \angle -45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$

olduğundan yuakanda yerleşsinsek,

$$\gamma = (j+1) \sqrt{\pi \mu \sigma} \quad (83)$$

ve burada

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi \mu \sigma} \quad (84)$$

bulunur. Bu durumda iletken ortamda yayılan dalganın elektrik alamı;

$$E_x = E_0 e^{-z/\sqrt{\pi \mu \sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi \mu \sigma}) \quad (85)$$

olar. iletken malzemeden bu alan, iletken yüzeyi dışındaki alana bağlanabilir. Bunun için $z > 0$ bölgesinde iyi iletken, $z < 0$ bölgesinde dielektrik malzemelerin bulunduğu kabul edelim. Sınır yüzeyinde $z = 0$ için

$$E_x = E_0 \cos \omega t \quad (86)$$

olar. Yerdeşirme akımı çok kişiye olduguuna göre bu alanı iletken içinde alan oluştururan kaynak alan gibi kabul edebiliriz. Ve iletken içindeki iletim akımı
 $J_x = \sigma E_x = \sigma E_0 e^{-z/\sqrt{\pi \mu \sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi \mu \sigma})$

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu \sigma}} \quad (\text{m})$$

ile ifade edilir. Sıvı konusu bu deri kalınlığının başka bir söyleşide penetrasyon kalınlığı olup δ sembolü ile gösterilir.

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} \quad (m) \quad (87)$$

dir. Bakır için $\sigma = 5,8 \cdot 10^7$ (V/m) çeşitli frekanslardaki deri kalınlığı

$$\delta_{cu} = \frac{0,0661}{f} \quad (88)$$

olur. 60 Hz için bu değer $\delta_{cu} = 8,53$ mm bulunur. Güç yoğunluğu ifadesinde eksponansiyel teriminin $e^{-2\alpha z}$ olacağunu düşünelimse, elektromagnetik dalgası bakırda $8,53$ mm ilerlediğinde güç yoğunluğu, sindirimdeki değerinin $(0,368)^2 = 0,135$ katına iner.

10000 MHz mikrodalga frekanslarında deri kalınlığı $6,61 \cdot 10^4$ mm olup bu değer görünen ışığın dalga boyunun yaklaşık sekizde birine eşittir. Bakır gibi iletkenlerde yüzeyden birkaç deri kalınlığı kadar ötede alanlar sıfır olarak kabul edilebilir. Bu nedenle elektromagnetik enerji iletken içinde iletilmeyeip, iletken hat dalgaya klavuzlu yaparak enerji dalga klavuzu çevresindeki bölgede iletilir. Iletken yüzeyinde oluşan akımlar, akım yoğunluğununa dik doğrultuda iletken içine yayılırak omik kayıplarla zayıflar. Bu güç kaybı iletkenin dalga kavuzu olarak kullanılmamasının bir ödülüdür.

Iletken malzemedede iletleyen dalganın dalga boyu

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (88)$$

dan faydalananak

$$P_{z,av} = \frac{1}{4} \sigma \delta E_0^2 e^{-2z/\delta} \quad (W/m^2) \quad (90)$$

$E_x = E_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta})$ ve buradan faydalananak magnetik alan ise,

$$H_y = \frac{\sigma \delta E_0}{\sqrt{2}} e^{-z/\delta} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}) \quad (92)$$

olarak bulunur. Bu bağmlılıdan faydalananak ortalama Poynting vektör,

bulunur. Dalga iletkende cidar kalınlığı kadar ierlediğinde güç yoğunluğunun yüzeydeki değerinin $e^{-2} = 0,135$ katına eşit olduğuna burada bir kere daha dikkat çekelim.

Bir iletkendeki ortalama güç kaybını, akımın iletkenden sadice deri kalınlığından homojen biçimde geçtiği kabul edilerek hesaplayabilir. Aşağıdaki örnekte bunu inceleyeceğiz.

Örnek 8.8. Şekil 8.10 da gösterilen iletken levhada dalga ilerledikçe oluşacak toplam güç kaybını $0 < y < L$ uzunluğu için hesaplayalım.

Cözüm.

Söz konusu iletken yüzeyinden geçen ortalama güç

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega \mu}{\sigma + j\omega \epsilon}} \quad \text{ve} \quad \sigma >> \omega \epsilon \quad \text{icin,}$$

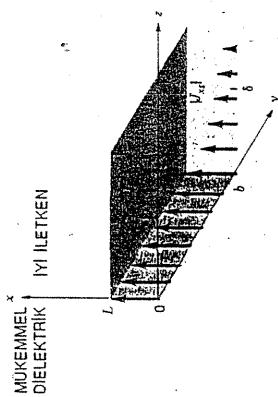
$$\eta = \frac{\sqrt{j\omega \mu}}{\sigma} \quad (91)$$

$$\eta = \frac{\sqrt{2} \angle 45^0}{\sigma \delta} = \frac{1}{\sigma \delta} + j \frac{1}{\sigma \delta} \quad (92)$$

olur. Elektrik alanını δ cinsinden yeniden ifade edersek

olur. Bakır için hesaplanırsa 60 Hz. frekansa $\lambda = 5,36$ cm., $v = 3,22$ m/s bulunur. Halbuki boşlukta 4,998 km. dalga boyuna sahip olup ışık hızı ile yayılır.

Alanın diğer bileşenini iletken malzemedede karakteristik empedansı ifade ettiğten sonra bulabılır. Karakteristik empedans



Şekil 8.10

$$P_{L,av} = \int P_{z,av} ds = \int_0^L \int_0^b \frac{1}{4} \sigma \delta E_0^2 e^{-2x/\delta} dz dx dy$$

$$= \frac{1}{4} \sigma \delta b L E_0^2$$

Yüzeysel akım yoğunluğu

$$J_0 = \sigma E_0 \quad (\text{x yönünde})$$

olduğuna göre,

$$P_{L,av} = \frac{1}{4\sigma} \delta b L J_0^2$$

bulunur.

Yarıçapı a olan dairesel kesiti itetken göz önüne alınsa yarıçaplı frekanslarda direnç, cedar kalınlığına bağlı olarak

$$R = \frac{L}{\sigma s} = \frac{L}{2\pi a \delta}$$

şeklinde ifade edilir. 1 (mm) yarıçaplı ve 1 (km) uzunluklu bir bakır tel için doğru akımda direnç;

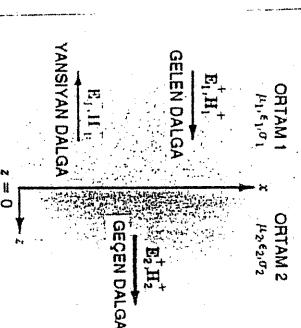
$$R = \frac{10^3}{\pi 10^{-6} (5.8 \cdot 10^7)} = 5,48 \quad (\Omega)$$

bulunabilir. Halbuki 1 (MHz) de ise $\delta = 0,0661$ (mm) olup direnç

8.6 DÜZLEMSEL DALGALARIN YANSIMA VE İLETİMİ

Düzlem dalga iki farklı ortamın sınır yüzeyinde bulunduğuunda, bir kısmı yansır bir kısmı da ikinci bölgeye geçer. Sekil 8.11 de görüldüğü gibi $z = 0$ düzlemini ortam parametreleri $(\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$ ve $(\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$ olan iki ortamı birbirinden ayıran sınır yüzeyi olsun. Birinci ortamda pozitif z yönünden ilerleyerek sınır yüzeyine dik gelen dalga;

$$\begin{aligned} E_{x2}^+ &= E_{x20}^+ e^{-\gamma_2 z} \\ H_{ys2}^+ &= \frac{1}{\eta_2} E_{x20}^+ e^{-\gamma_2 z} \end{aligned} \quad (95)$$



Sekil 8.11. Sınır yüzeyinde E_+ dalgasının, yansımıası ve iletilmesi.

$$E_{x1}^+ = E_{x10}^+ e^{\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

veya

$$E_{xsl}^+ = E_{x10}^+ e^{\gamma_1 z} \quad (93)$$

olarak yazılabilir. Burada 1 indisi bölgeyi, + indisi de pozitif yönde ilerlemeyi, s de sinyoidal dalgayı gösterir. Bu bağmdaki elektrik alanna ilişkin magnetik alan ise

$$H_{ysl}^+ = \frac{1}{\eta_1} E_{x10}^+ e^{\gamma_1 z} \quad (94)$$

olarak ifade edilir. Burada $E_{xsl}^- = -\eta_1 H_{ysl}^+$ olup yansyan dagaaya ilişkin poining vektörü

$-a_z$ yönünde olur. Sınır yüzeyinde toplam elektrik alan şiddetinin sürekliliğinden faydalananarak

$$\begin{aligned} E_{xsl}^+ &= E_{xs2}^- \quad (z=0) \\ E_{xsl}^+ + E_{xsl}^- &= E_{xs2}^+ \quad (z=0) \\ E_{x10}^+ + E_{x10}^- &= E_{x20}^+ \\ H_{ysl}^- &= H_{ys2}^- \quad (z=0) \\ H_{ysl}^+ + H_{ysl}^- &= H_{ys2}^+ \quad (z=0) \end{aligned} \quad (95)$$

Sınır yüzeyinden ikinci ortama geçen enerjiye ilişkin olan bileşenleri ise benzer şekilde

$$\frac{E_{x10}^+}{\eta_1} \cdot \frac{E_{x10}^-}{\eta_1} = \frac{E_{x20}^+}{\eta_2} \quad (96)$$

bağmlılıkları bulunur. Son bağmda E_{x20}^+ (96) da yedeleştirilirse,

olarak Sınır yüzeyinde ($z = 0$) elektrik alanının her iki ortamındaki E_x tegetsel bileşenlerinin eşitliği dolayısıyle $E_{x10}^+ = E_{x20}^+$ olur. Benzer şekilde H_y tegetsel alan bileşenine ilişkin sınır şartı, gerçek ortamlar arasında akım bulunmayaçağ dolayısıyle,

$$E_{x10}^+ / \eta_1 = E_{x20}^+ / \eta_2 \text{ veya } \eta_1 = \eta_2 \text{ olmasını gerektirir.}$$

Sınır yüzeyinde yansyan daga ise $-z$ yönünde yayıldığı için

$$\begin{aligned} E_{x10}^+ + E_{x10}^- &= \frac{\eta_2}{\eta_1} E_{x10}^+ - \frac{\eta_2}{\eta_1} E_{x10}^- \\ E_{x10}^- &= E_{x10}^+ \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \end{aligned}$$

elde edilir. Yansıyan dalmanın genliğinin, gelen dalga genliğine oranına yansuma katsayısı denir ve Γ (gamma) simbolü

$$\Gamma = \frac{E_{x10}^-}{E_{x10}^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (99)$$

olarak ifade edilir. Yansıyan dalga faz kayması mevcut olması durumunda Γ kompleks olabilir. Benzer şekilde geçen alan şiddetinin, gelen alan şiddetine oranı

$$\frac{E_{x20}^+}{E_{x10}^+} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \quad (100)$$

olur.

Özel bir durum olarak birinci ortamı saf bir dielektrik, ikinci ortamı da mükemmel bir iletken gibi ele alalım. σ_2 sonsuz olduğuuna göre (77) no.lu bağıntıdan $\eta_2 = 0$ ve dolayısıyla son yazılın bağıntıda $E_{x20}^+ = 0$ bulunur. Bu ise mükemmel iletkenlerde zamanla değişen hiçbir alanın bulunmayacağı gösterir. Aynı zamanda deri kalınlığı sıfır, yansuma katsayısı -1 ve $E_{x10}^- = -E_{x10}^+$ olur. Bu durumda gelen talmanın tüm enerjisi geri yansıyacaktır. Birinci bögledeki toplam E alanınıse

$$\begin{aligned} E_{xsl}^+ &= E_{xsl}^+ + E_{xsl}^- \\ &= E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} - E_{x10}^- e^{-j\beta_1 z} \end{aligned}$$

yazılır. Burada saf dielektrik için $\gamma_1 = 0 + j\beta_1$ alınr, $e^{j\omega t}$ ile çarparıksak

$$E_{x1}^+ = 2E_{x10}^+ \sin \beta_1 z \sin \omega t \quad (101)$$

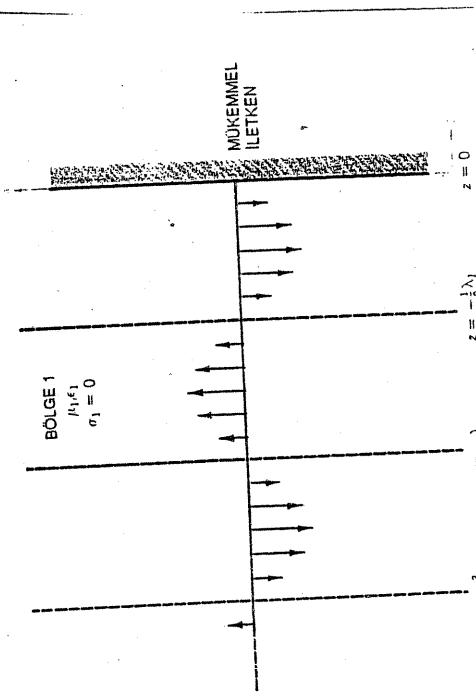
bulunur. 1 no lu bögledeki bu toplam alan yayılan dalgaya olmayıp eşit genlikli zit yönlerde ilerleyen iki dalmanın toplamıdır. Bu ifadeyi

$$E_{x1}^+ = E_{x10}^+ \cos(\omega t - \beta_1 z) \quad (102)$$

ile ifade edilen gelen dalgası ile karşılaştırılmı. Bu son bağıntıda $(\omega - \beta_1 z)$ veya $(t - z/v)$ ifadesinin, dalganın $+z$ yönündede $v_1 = \omega/\beta_1$ hızıyla ilerlediğini gösterdiğini biliyoruz. (101) no.lu bağıntıda $\beta_1 z = n\pi$ olan tüm düzlemlerde E_{x1} bileske alan sıfırdır. Bu şekilde $n = \pm 1 \pm 2, \dots$ olmak üzere $\omega = n\pi$ olduğunda, $E_{x1} = 0$ olan ve (101) no.lu bağıntı ile ifade edilen dalgalara duran dalga denir. $E_{x1} = 0$ olan düzlemler $\beta_1 z = n\pi$ den

$z = n \frac{\lambda_1}{2}$

bulunur. Böylece sınır yüzeyinde ($z = 0$) ve sınırdan itibaren $Z < 0$ bölgesinde her yarım dalgayı uzaklıkta $E_{x1} = 0$ olduğu anlaşılr. Bu durum Şekil 8.12 de gösterilmiştir.



Şekil. 8.12. $t = \pi/2$ için toplam elektrik alanının ani değerleri. Illetken yüzeyden itiba yarım dalgaya boyunun tam katlarında $E_{x1} = 0$ olmaktadır.

Duran dalgaya ilişkili magnetik alan ise

$$\begin{aligned} E_{xsl}^+ &= \eta_1 H_{ysl}^+ & E_{xsl}^- &= -H_{ysl}^- \eta_1 \end{aligned}$$

ilişkileri göz önüne alınpak

$$H_{y1} = 2 \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} \cos \beta_1 z \cos \omega t \quad (103)$$

bulunur. Bu bağından görüldüğü gibi $E_{x1} = 0$, olduğu yerde magnetik alan maksimum olmaktadır. Yani elektrik ve magnetik alanlar arasında 90° lik faz farkı vardır. Bu nedenle her iki yöndede iletilen ortalama güç sıfır.

Örnek 8.9. İki farklı saf dielektrik ortam $z = 0$ düzlemini ile ayrılmış olsun, bu ortamlarda $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ve $\eta_1 = 300$ (Ω), $\eta_2 = 100$ (Ω), $E_{x10}^+ = 100$ (V/m) olsun. Yansıyan ve geçen alan şiddetlerini ve gitici bulunuz.

Çözüm. Yansıma katsayısı ve yansıyan alan şiddeti

$$\Gamma = \frac{100-300}{100+300} = -0,5$$

$$E_{x10}^- = -50 \quad (\text{V/m})$$

ve magnetik alan şiddetleri,

$$H_{y10}^+ = \frac{100}{300} = 0,333 \quad (\text{A/m})$$

$$H_{y10}^- = \frac{-50}{300} = 0,167 \quad (\text{A/m})$$

gelen, yansıyan ve geçen güçler ise,

$$P_{1,av}^+ = \frac{1}{2} E_{x10}^+ H_{y10}^+ = 16,67 \quad \text{W/m}^2$$

$$P_{1,av}^- = -\frac{1}{2} E_{x10}^- H_{y10}^- = 4,17 \quad \text{W/m}^2$$

$$\begin{aligned} E_{x20}^+ &= \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{x10}^+ = 50 \quad \text{V/m} \\ H_{y20}^+ &= \frac{50}{100} = 0,500 \quad \text{A/m} \end{aligned}$$

$$P_{2,av}^+ = \frac{1}{2} E_{x20}^+ H_{y20}^+ = 12,5 \quad \text{W/m}^2$$

olarak bulunur. Enerji korunumu

$$P_{1,av}^+ = P_{1,av}^- + P_{2,av}^+$$

bağıntısı uygulanarak görülebilir. Ayrıca elektriksel alanın sinir yüzeyinde tegetsel bileşenlerinin sürekliliğini ifade eden

$$E_{x10}^+ + E_{x10}^- = E_{x20}^+$$

bağıntısı da bulunan değerler yerleştirilerek doğrulanabilir.

Duran Dalgası Oranı. Bir dalgası kayıpsız bir ortamda ilerlerken iletken bir ortama rasgeleğinde, yansıyan alan gelen alanın yüzde yüzde değişide belirli bir kesimi teşkil ederse, dalgamın gelmiş olduğu birinci bölgede, gelen ve yansıyan dalgalarnın girişiminden oluşan bir dalgası oluşur. Bu dalgası ilerleyen dalgaya olmasına rağmen duran dalgaya denilmesi adet olmuştur. Bu bölgede, herhangi bir noktada alan genliği sıfır olmayıp ilerleyen dalgamın gerçek duran dalgaya genliğine orantıa eşittir.

Birinci bölgedeki toplam alan, gelen ve yansıyan alanlar cinsinden

$$E_{x1} = E_{x1}^+ + E_{x1}^-$$

olarak ifade edilir. Bu E_{x1} alanı zamana göre harmonik ve genellikle sıfırdan farklı faz açısına sahiptir. Dalga ilerlerne yönü olan z ile değişimini, duran dalgaya genliğin maksimumu ve minimum değerlerini bularak bu özellikler arasındaki oran incelleyeceğiz. Duran dalgaya orantılı olarak isimlendirilen bu oran s ile gösterilir.

Birinci ortamı saf dielektrik olarak $\alpha = 0$ kabul edelim. Dalgamın yansımıya yaptığı ortamı herhangi bir ortam olarak düşünebiliriz. Gelen ve yansıyan alanlara ilişkin,

$$E_{xs1}^+ = E_{x10}^- e^{-jB_1 z}$$

$$-\beta_1 z = \beta_1 z + \phi + \pi + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

veya

$$E_{xs1}^- = \Gamma E_{x10}^- e^{jB_1 z} \quad (107)$$

olmak üzere;

$$E_{xs1,\min} = (1 - \Gamma) E_{x10}^+ \quad (108)$$

$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$ bulunur. Minimumlar maksimumlar gibi yarınlar boyunun tam katlarında bulunur. Mükemmeli iletkenler için $-\beta_1 z = 0$ olduğunda sınır yüzeyinde ilk minimumum vardır.

Örnek 8.10-3 (GHz) ve 100 V/m lik bir dalga $\epsilon_{R1} = 4$, $\mu_{R1} = 1$, $\sigma_1 = 0$ ortamda ilerlerken $z > 0$ da bulunan diğer bir $\epsilon_{R2} = 9$, $\mu_{R2} = 1$ olan saf dielektrik ortama dik olarak çarpar. 1. ve 2. bölgelerdeki maksimum ve minimumların yerini ve değerlerini bulunuz.

olarak ifade edilir. İlkinci ortam mükemmel iletken ise $\phi = \pi$, eğer η_2 reel ve η_1 den küçükse $\phi = 0$ olur. O halde toplam alan

$$E_{xs1}^- = (e^{-j\beta_1 z} + |\Gamma| e^{j(\beta_1 z + \phi)}) E_{x10}^+ \quad (104)$$

olur. Bu ifadenin maksimum genliği, parantez içindeki terimlerin faz açıları eşit yapılarak bulunabilir. E_{x10}^+ pozitif ve reel,

$$-\beta_1 z = \beta_1 z + \phi + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (105)$$

olmak üzere

$$E_{xs1,\max} = (1 + |\Gamma|) E_{x10}^+ \quad (106)$$

bulunur. $\phi = 0$ ve Γ pozitif reel yani $\eta_2 > \eta_1$ ise sınır yüzeyinde maksimum vardır.Mükemmeli iletken için $\phi = \pi$ olduğundan $-\beta_1 z = \pi/2, 3\pi/2, \dots$ de maksimum olur.Minimum durum ise (104) no. lu bağıntıdaki terimler arasındaki faz açısı 180° farklı olduğunda gerçekleşir. Böylece

(109)

$$S = \frac{E_{xs1,\max}}{E_{xs1,\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

bağımstır verilir. $|\Gamma| \leq 1$ olduğun için S her zaman birden büyük yada eşittir. Örneğ bir önceki problemede $S = 1.5$ bulunur.

Öçülebilien bir büyütülük olan duran dalga oranının önemli bir parametresidir. Duran dalga oranını yansına kat sayısına bağlı olarak üç ayrı durum için aşağıdaki gibi incleyebiliriz.

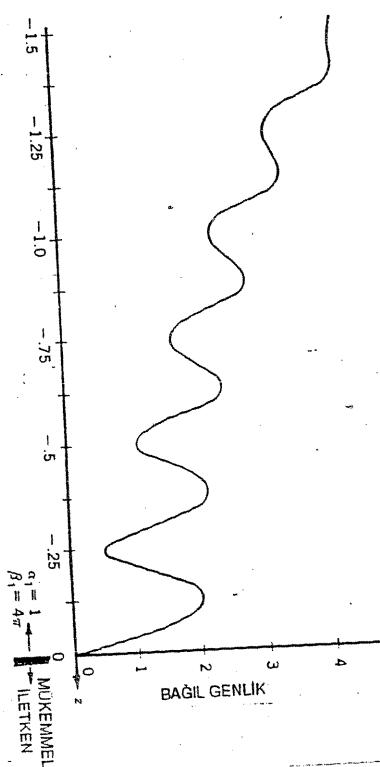
1. $|\Gamma| = 1$ ise gelen ve yansyan genlikler eşit olur ve gelen enerjinin tamamı yansır. Bu durumda duran dalga oranını sonsuzdur. $\lambda_1/2$ nin katlarının oluşturduğu düzlemler $E_{x1} = 0$ yaparak bulunabilir. Bu düzlemler ortasında E_{x1} gelen dalga genliğinin iki katına eşit genliği sahiptir.

2. Eğer $\eta_2 = \eta_1$ ise $\Gamma = 0$ olup enerji yansımı olmaz ve $s = 1$ olup maksimum ve minimum genlikler eşittir.

3. Eğer gelen gücün yansıtı yansura $|\Gamma|^2 = 0,5$, $|\Gamma| = 0,707$ ve $s = 5,83$ bulunur.

Dalgaın geldiği ortam $\alpha_1 \neq 0$ olan kayıplı bir ortam olması durumunda dalga $+z$ doğrultusunda eksponansiyel olarak zayıflar. Ve yansyan dalga da benzer şekilde $-z$ yönende zayıflamaya devam ederek yayılır. Şekil 8.13 de bu durum propagasyon sabiti $\beta_1 = 1 + j4\pi$ olan bir ortamda ileleyen ve mükemmel iletken malzemeden oluşan ikinci ortan için gösterilmiştir. Şekilde de görüldüğü gibi pepsipe gelen maksimumlar veya minimumlar aynı genlikte değildir. Duran dalga oranının z ye bağlı olacağını ifade eden bu özel durum; kayıpsız iletim hattı pratikte mevcut olamayacağı için duran dalga oranının her zaman yüze olan uzaklıkla değişim göstereceğini ortaya koyar. Böyle bir durumda incelenen bölgede s nin yaklaşık olarak değişmediği kabul edilir.

İncelemenizi tekrar kayıpsız ortamı dikkate alarak; toplam elektrik ve magnetik alan şiddetleri arasındaki oranı hesap edelim. Iletleyen bir dalga için yayılma yönüne bağlı olarak empedans $\pm \eta_1$ ile ifade edilir. Mükemmel bir iletkenden dalgaın yansımı durumunda belirli yerlerde E_{x1} veya H_{y1} sıfır eșit olabilmekte veya sıfır ile sonsuz arasında değer alabilmektedir. Toplam alanlar $z = -l$ için



Şekil 8.13. Kayıplı bir malzeme, yansyan dalga etkisinin azalması.

$$\begin{aligned} E_{x1} &= (e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}) E_{x10}^+ \\ H_{y1} &= (e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}) \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} \end{aligned}$$

yazılabilir. Karakteristik giriş empedansı η_{in}

$$\eta_{in} = \frac{E_{x1}}{H_{y1}} \Big|_{z=-l} = \eta_1 \frac{e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}}{e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}}$$

olarak tanımlanır. Burada $\Gamma = (\eta_2 - \eta_1) / (\eta_2 + \eta_1)$ yeterleştirilerek Euler eşitliği kullanırsa girişi empedansi

$$\eta_{in} = \eta_1 \cdot \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan \beta_1}{\eta_1 + j\eta_2 \tan \beta_1} \quad (110)$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntı iletim hattına ilişkin uygulamalarda sık sık kullanılır.

Örnek 8.11. 4(GHz) lik düzlemler dalgası, ortam parametreleri $\epsilon_{R1} = 5$, $\mu_{R1} = 1$ olan $z < 0$ ortamından, ortam parametreleri $\epsilon_{R2} = 2$, $\mu_{R2} = 1$ olan $z > 0$ de bulunan ikinci ortama doğru ilerlemektedir. (a) Birinci ortamda duran dalganın (b) ikinci bölgedeki dalganın oranını (c) $z = -0,6$ (cm) deki η 'nın yi bulunuz.

Cözüm. (a) Birinci ve ikinci ortamların karakteristik dalgaların empedansları verilen parametrelerden faydalananarak $\eta_1 = \eta_0/\sqrt{\epsilon_1}$, $\eta_2 = \eta_0/\sqrt{\epsilon_2}$ bulunur. Bu durumda yansuma katsayıısı $\Gamma = 2/3$, ve $s = 5$ olur. (b) $s = 1$ (c) $\beta_1 = 187,5$ (rad/m) olduğuna göre $\beta_1 l = 1,125$ (rad) = 64,40 ve giriş empedansı ise $\eta_{in} = 86,9 \angle -61,80^\circ$ (Ω) bulunur.

Örnek 8.12. Bir 1(MHz) lik düzlemler dalgası havadan sonsuz uzunluklu bakır levhaya doğru dik yönde ilerlemektedir. Gelen dalganın alam 100 (V/m) olduğuna göre, yansima katsayıımı, cidar kalınlığımı, bakır içinde cidar kalınlığında E ve H alanlarının aldığı değerleri bulunuz.

Cözüm.

η_2 empedansı (77) no.lu bağ手中的dan faydalanaarak,

$$\eta_2 = 3,68 \cdot 10^4 \angle 45^\circ = (2,61 + j2,61) \cdot 10^4 \quad (1)$$

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_0}{\eta_2 + \eta_0} \equiv -1$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu \sigma}} = 6,61 \cdot 10^{-5} \quad (\text{m})$$

Geçme katsayıısı $= \frac{2 \eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 1,95 \cdot 10^{-6} \angle 45^\circ$ ciddar kalınlığında alan değerlerini bulmak için önce geçme katsayıısını bulalım.

$$E_x 2 = (1,95 \cdot 10^{-6}) 100 e^{-1} = 7,17 \cdot 10^{-5} \quad (\text{V/m})$$

$$H_y 2 = \frac{7,17 \cdot 10^{-5}}{3,68 \cdot 10^{-4}} = 0,195 \quad (\text{A/m})$$

bultur.

PROBLEMLER.

8.1. Boşlukta yayılan bir elektromagnetik dalganın elektrik alan $E(z,t) = 10^3 \sin(\omega t - \beta z)$ (V/m) olarak verilmektedir. (a) $H(z,t)$ yi bulunuz, (b) $f = 95,5$ (MHz) olduğuna göre γ propagasyon sabitini bulunuz.

8.2. Havada yayılan bir dalgaya ilişkin ortalamalı Poynting vektör $10(\text{mW/cm}^2)$ olduğuna göre E ve H alanlarının rms değerlerini bulunuz.

8.3. İletkenliği $\sigma = 10^7$ (S/m) olan bir pring borunun iç ve dış yarıçapları 1,7 ve 2 ci olup 100 A dc lik akım taşımaktadır. Pring içindeki E, H, P yi bulunuz.

8.4 Boşlukta $E(z,t) = 50 \cos(\omega t - \beta z)$ a_x (V/m) olarak verildiğine göre z= sat düzleminde 2,5 m yarıçaplı dairesel bir yüzeyden geçen ortalama güçü bulunuz.

8.5. Kayplı bir malzeme 24(MHz) lik frekansla ilerleyen bir düzlemler dalgası 1 (rad/r lik faz kaymasına sahiptir. Ve her metrede genişliği % 50 azalmaktadır. α , β , v ve d_c kalmışlığını hesaplayınız.

8.6. Ortam parametreleri $\epsilon_{R1} = 8,5$, $\mu_{R1} = 1$, $\sigma_1 = 0$ olan bir malzeme $E_0 = 1,5,10$ (V/m) lik düzlemler dalgası, ikinci ortamda dik doğrultuda ilerlemektedir. Bu ikinci ortam ha olarak kabul ederek yansyan ve geçen E, H alanlarını bulunuz.

8.7. İki farklı ortamı ayıran sınır yüzeyine, düzlemler dalgalarının ortamdan yayılalar gelmektedir. $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\mu_{R1} = \mu_{R2} = 1$ olduğuna göre; gelen dalganın enerjisinin % 10 (a) yansıtacağına göre $\epsilon_{R2}/\epsilon_{R1}$ oranını, (b) ikinci ortama geçtiğine göre $\epsilon_{R2}/\epsilon_{R1}$ oran bulunuz.

8.8. Havada duran dalgalarının minumumlarını arasındaki uzaklıklık 1 metre olduğu göre dalganın frekansını bulunuz.

8.9. Bir düzlem dalgası iletken bir tabakaya dik doğrultuda çarpiyor. Dalganın frekansı 10 (GHz) ve deri kalınlığı 0,001 (mm) olduğuna göre iletken malzemedede dalganın hızını bulunuz.

8.10. Düzlem dalgası havadan tuzu su yüzeyine dik olarak gelmektedir. Tuzlu suyun elektriksel sabitleri $\sigma = 6$ (S/m) $\epsilon_R = 80$, $\mu_R = 1$ dir. Gelen dalganın frekansı 150 (MHz) olduğuna göre, (a) yansıtma katsayısını, (b) genliğinin % 1'e düşdüğü, deri kalınlığının % 2'ini bulunuz.

8.11. $z < 0$ bölgesinde $\mu_{R1} = 10$, $\epsilon_{R1} = 2,5$, $\sigma_1 = 0$ malzemesi ve $z > 0$ bölgesinde $\mu_{R2} = 1$, $\epsilon_{R2} = 4$, $\sigma_2 = 0$ malzemesi vardır. Birinci bölgesinde gelen dalgaya ilişkin alan vektörü $E_{x1}^+ = 600 \cos(10^9 t - \beta_1 z)$ (V/m) olduğuna göre (a) Birinci bölgedeki duran dalga oranını (b) $z = -\pi$ (cm) deki η 'nın ve E_{xS} yi bulunuz.

EK-4 BOYUT VE BİRİMLER

Fiziksel bir büyüklük boyutla tanımlanır. Örneğin namluk, kütle zaman, hız ve kuvvet gibi kavramları aynı ayın boyutlara sahiptir. Uzunluk, kütle, zaman, elektrik, alıcı sıralık ve aydınlatma sistemi boyutlara karakterize edilir. Uyuslararası birim sisteminde (SI) katalan edilen bu temel büyüklüklerin sınırları ve tanımları Tablo A.1'de verilmiştir. Tablodan görüldüğü gibi uzunluk L ile kütle M ile, zaman T ile akım I ile gösterilmektedir. Diğer büyüklükler bu büyüklüklerle bağlı olarak ifade edilebilir. Örneğin hız L/T ve kuvvet M/L^2 boyutundadır.

Birim sayısallaşarak ifade edilen bir büyüklüğün standart değeridir. Örneğin uzunluk standartı metre ile, kütle standartı kilogram ile ölçülebilir.

Bir denklenin doğru olup olmadığını boyut analizi yaparak aultasılabilir. Matematiksel olarak bir denklem ile anlatılan fiziksel bağıntının geçeli olabilmesi için her terimin boyutu aynı olmalıdır. Yani hız boyutunda bir terim, ivme boyutunda bir terime eşitlenmez. Örneğin Newton'un II. Kanunu

$$\text{Kuvvet} = \text{kütle} \times \text{ivme}$$

idi. Burada ivme, L/T^2 , kütle M boyutunda olduğundan kuvvetin boyut sembolü M/L^2 olur.

TABLO A.1 SI Sisteminin Temel Birimleri

Büyüklük	Adı	Sembolü	Tanım
uzunluk	metre	m	Krypton-86 atomunun $2P_{10}$ ve $5d_3$ seviyeleri arasında geçiş sonucu yayınladığı ışığın dalga boyunun $1.650763,73$ katı (1960).
kütte	kilogram	kg	Belli bir platin-iridyum silindiren kütlesi (1889).
zaman	saniye	s	Cesum-133 atomunun temel seviyesindeki ince yanmalar arasındaki geçişlerin yayıldığı radyasyonunun periyodunun $9.192631,770$ katı (1967).
elektrik akımı	ampere	A	Boşlukta birbirlerinden 1 m uzaga konmuş dairesel kesidi ihmali edilebilir boyutlu 1 m uzunluğunda olan iki teden geçen birbirine eşit şiddetde iki akım, teller arasında 2×10^{-8} N kuvvet doğuryorsa.
termodynamik sıcaklık	kelvin	K	Suyun üçlü noktasıının termodynamik sıcaklığının $1/283,16$ da biri
madde miktarı	mole	mol	Carbon-12 nin 0,012 kg da bulunan atom sayısı kadar elementer nesne içeren sistem.
aydınlatma şiddeti	lumen	cd	101.325 N/m^2 basınçta ve platin donna sicaklığında bulunan bir siyah cismin ($1/600000$) m^2 lik yüzeyde oluşturduğu aydınlatma.

TABLO A.2 SI Sisteminde Elektrik ve Magnetik Bütünük Ülkelerin Isimleri ve Birimleri

Simbol	İsim	Birim	İşareti	Kısa Yazılışı
F	Kuvvet	Newton	N	
Q	Yük	Coulomb	C	
r,R	Uzunluk	metre	m	
ϵ_0	Dielektrik	Farad/metre	F/m	
E	Elektrik alan şiddeti	Volt/metre	V/m	
v	Hacim	metre ³	m^3	
ρ_L	Çizgisel yük yoğunluğu	Coulomb/metre ²	C/m ²	
ρ_s	Yüzeysel yük yoğunluğu	Coulomb/metre ²	m^2	
Ψ	Elektrik Akısı	Coulomb	C	
D	Elektrikakı yoğunluğu	Coulomb/metre ²	C/m^2	
S	Alan	metre ²	m^2	
W	İş enerji	Joule	J	
V	Potansiyel	Volt	V	
P	Dipol moment	Coulomb-metre	C.m	
I	Akım	Ampere	A	
J	Akım yoğunluğu	Ampere/metre ²	A/m^2	
$\mu_{e,h}$	Hareketlilik	metre ² /volt-saniye	$\text{m}^2/\text{V.s}$	
σ	İletkenlik	Mho/metre	$1/\Omega.\text{m}$	
R	Direnç	Ohm	Ω	
P	Polarizasyon	Coulomb/metre ²	C/m^2	
$\chi_{e,m}$	Duyarlılık	Farad	F	
C	Kapasite	Ampere	A/m	
H	Magnetik Alan Şiddeti	Ampere	A/m	
K	Yüzey akım yoğunluğu	Weber/metre	Wb/m	
B	Magnetik akı yoğunluğu	Weber/metre ²	(T)	
μ_0	Magnetik geçirgenlik	Henry/metre	H/m	
F	Magnetik akı Weber	Wb		
V_m	Magnetik Skaler potansiyel	Ampere	A	
A	Magnetik vektör potansiyel	Weber/metre	Wb/m	
T	Tork	Newton-metre	N.m	
m	Magnetik moment	Ampere-metre ²	A.m ²	
M	Magnetizasyon	Ampere/metre	A/m	
\Re	Reluktans	Ampere-saniye/weber	A.t/W.	
L	İndüktans	Henry	H	
M	Karşılıkductans	Henry	H	

Sembol	İsim	Birim	Kısa Yazılışı
ω	Açışal frekans	Radyan/saniye	rad/s
c	İşik hızı	Metre/saniye	m/s
λ	Dalga boyu	Metre	m
η	Karakteristik empedans	Ohm	Ω
γ	Propapsyon sabiti	Complex teper/metre	m^{-1}
α	Zayıflama Sabiti	Np/m	
β	Faz Sabiti	Radian/metre	
f	Frekans	Hz	
P	Poynting Vektör.	W/m ²	
d	Deri kalınlığı	Metre	
Γ	Yansıtma Katsayısı	W	
s	Duran dalga oranı	1/ Ω	
G	Kondüktans	Mho	
Z	Empedans	Ohm	
Y	Admittans	Mho	$1/\Omega$

EK-B DÖNÜŞÜM CARPANLARI						
KATI AÇI		UZUNLUK				
		cm	METRE	km	in	ft
1 santimetre =	1	10 ⁻²	10 ⁻⁵	0.3937	3.281x10 ⁻²	6.214x10 ⁻⁶
1 METRE =	100	1	10 ⁻³	39.37	3.281	6.214x10 ⁻⁴
1 kilometre =	105	1000	1	3.937x10 ⁴	3281	0.6214
1inc	= 2.540	2.540x10 ⁻²	2.540x10 ⁻⁵	1	8.333x10 ⁻²	1.578x10 ⁻⁵
1foot	= 30.48	0.3048	3.048x10 ⁻⁴	12	1	1.894x10 ⁻⁴
1mil	= 1.609x10 ⁵	1609	6.336x10 ⁻⁴	6.336x10 ⁴	5280	1
1angström =	10 ⁻¹⁰ m	1 işik yılı = 9.460x10 ¹² km			1 yarda = 3ft	
1 deniz mili =	1852 m	1 farsec = 3.08401013 km			1 rod = 16.5 ft	
	= 1.151 mil = 6076 ft	1 fathom = 6 ft.			1 mil = 10 ⁻³ in	
	1 fermi = 10 ⁻¹² m	1 Bohr yarıçapı = 5.292x10 ⁻¹¹ m				

GÜC

	btu/h	ft.lb/s	hp	cal/s	kW	WATT
1 ingiliz ısı birimi/saat =	1	0.2161	3.929x10 ⁻⁴	6.998x10 ⁻²	2.930x10 ⁻⁴	0.2930
1 foot-pound/ saniye =	4.628	*1	1.818x10 ⁻³	0.3239	1.356x10 ⁻³	1.356
1 Bevügfüci=	2545	550	1	178.1	0.7457	745.7
1 kalori/saniye=	14.29	3.088	5.615	1	4.187	4.187
1 kilowatt =	3413	737.6	1.341	238.8	1	1000
1 WATT=	3.413	0.7376	1.341x10 ⁻³	0.2388	0.001	1

MANVETİK AKI

	Maxwell	WEHER
1 maxwell=	1	10^{-8}
1 WEBER=	10^8	1

MANVETİK ALAN

	gauss	TESLA	milligauss
1 Gauss=	1	10^{-4}	1000
1 TESLA=	10^4	1	10^7
1 milligauss=	0.001	10^{-7}	1

1 tesla = 1 weber/metre²

EK-C FİZİKSEL SABİTLER

	Sabit	Sembol	Nominal Değer
Astronomik Birim	AU		1.5×10^8 km
Boltzmann sabiti	k		1.38×10^{-23} J K ⁻¹
Arz külesi			6.0×1024 kg
Arz Yarıçapı			6.37 Mn
Elektron yükü	e		-1.60×10^{-19} C
Elektronun durgun külesi	m		9.11×10^{-31} kg
Elektron yükü oranı	em		1.76×1011 C kg ⁻¹
Akı yoğunluğu (füç)	Jy++		10^{-26} W m ⁻² Hz ⁻¹
Foot	ft		0.30 m (1m = 3.281 ft)
Foot kare	ft ²		$9.3 \times 10^{-2} m^2$ (1m ² = 10.76ft ²)
Işık Hizi	c		300 Mn s ⁻¹ (≈ 1 Gft s ⁻¹)
Işık Yılı	LY		9.46×1012 km
Doğal logaritma	e		2.72
Logaritmik dönüşüm			$\ln x = 2.3 \log x$
Mil	mi		$\log x = 0.43 \ln x$
Ayn uzaklığı (ortalama)			1.61 km (1 k=0.6214 mi)
Ay kütlesi			380 Mn
Ayn yançapı (ortalama)			6.7×1022 kg
Boşluğun magnetik geçirgenliği	μ_0		1.738 Mn
Boşluğun dielektrik sabiti	ϵ_0		1.260 n H m^{-1}
Plank sabiti	h		8.85 pF m^{-1}
Protonun durgun külesi			6.63×10^{-34} J s
Radyan	rad		1.67×10^{-27} kg
Boşluk Empedansı	Z		57.3°
Küre katı açı			376.7 ($= 120\pi$) Ω
Derece kare	deg ²		12.6 sr
Stradyan (radyan kare)	sr		3.05×10^{-4} sr
Güneş uzaklığ	AU		3.283 deg^2
Güneş külesi	M ₀		1.5×10^8 km
Güneş yançapı (ortalama)	R ₀		2.0×10^{30} kg
			700 Mn
			1.414
			$\sqrt{2}$
			$\sqrt{3}$
			$\sqrt{10}$

E.K-D VEKTÖREL ÖZDEŞLİKLER

D.1. Aşağıda verilen bağıntılarda $\mathbf{A}(x,y,z)$, $\mathbf{B}(x,y,z)$, $\mathbf{C}(x,y,z)$ vektör alanları, $\psi(x,y,z)$ $\Phi(x,y,z)$ skalar alanları göstermektedir.

Kartezyen Koordinatlarda :

$$\nabla \Phi = \mathbf{a}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{a}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{a}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} \nabla \Phi &= \mathbf{a}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{a}_r \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{a}_\theta \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{a}_\phi \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \right\} \right\} \end{aligned}$$

D.2. GRADYANT, DIVERJANS ROTASYONEL VE LAPLASİVEN.

Silindirik Koordinatlarda :

$$\nabla \Phi = \mathbf{a}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{a}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_\theta \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \mathbf{a}_\phi \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right]$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

Küresel Koordinatlarda :

$$\nabla \Phi = \mathbf{a}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{a}_r \left\{ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \right\}$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}$$

EKK. DIELEKTRİK MALZEMELER VE ÖZELLİKLERİ

İNDEKS

Malzeme	Bağlı Dielektrik Sabiti	Dielektrik mukavemet	Öz Direnç (Ohm.m)
Hava (Atmosfer basıncında)	1.0006	3	10^{14}
Kehribar	3	91	10^{14}
Amonyak (sivi)	22	-	-
Bakalit	5	25	10^{14}
Selüloz asetat	7	12	-
Selüloz nitrat	5	-	-
Cam	6	30	1013
Gliserin	50	-	-
Mika	6	200	1015
Yağ (mineral)	2.2	15	10^{14}
Kağıt	3	50	-
Parafin	2.1	10	1015
Kontraplak	2.1	-	-
Polietylén	2.2	47	1015
Polyester	2.7	24	1016
Polivinil	3.2	34	1015
Kuartz	5	40	1017
Kaucük	3	34	1013
Titanyum dioksit (TiO ₂)	89-173	-	-
Toprak	-	-	-
(Kuru kum)	3.4	-	-
Stülfür	4	-	1015
Teflon	2.1	59	1015
Su (saf)	81	-	104

Alanların sınırlanılması	1	Elektrostatik enerji yoğunluğu	52
Algılama	186	Elektrostatik filtre	36
AM dalgası	210	Elektromagnetik enerji	
Amper formülü	121	korunu	217
Amper-santım	121	Elektromagnetik spektrum	185
Eljiplik polarizasyon	209	Eljiplik polarizasyon	209
Endüksiyon motor	197	Endüksiyon motor	197
Baglı yükler	71	Faraday Kanunu	169
Biot-Savart	116	Faz hızı	206
Binom açılımı	227	Ferromagnetik malzemeler	144
Boşluk empedansı	206	FM dalgası	210
Coulumb Kanunu	19	Çarpınçlara ayırma	95
Çizgisel yük	22	Gauss Kanunu	28
Daimi mıknatıslık	146	Gauss Teoremi	15
Dairesel polarizasyon	209	Generatorler	192
Dalga boyu	205	Girdap akımı	185
Dalga denklemleri	181	Grafik metod	111
DC Motor	142 - 193	Görüntü yöntemi	102
Deplasman akımı	173	Güç akısı	211
Deri kalınlığı	230	Dielektrik malzeme	71
Dielektrik mukavemet	82	Dielektrik mukavemet	82
Dielektriklerde propagasyon	222	Dielektriklerde propagasyon	222
Diverjanın fizikalı anlamı	33	Diverjan teoremi	15
Diverjanın teoremi	15	Doğrusal polarizasyon	209
Kartezyen koordinatlar	4	Döner magnetik alan	194
Kayaklı dielektrikler	224	Duran dalga oranı	241
Kayıpsız ortam	221	Düşük kayaklı malzemeler	228
Kayıp tarijant	227	Düzlem dalga	204
Kirchoff Kanunu	47	Eddy akımı	143
Konveksiyon akımı	173	Elektrik alan çizgileri	27
Korona deşarjı	83	Elektriksel dipol	50
Kuasi - statik alan	201	Elektromagnetik kaynak	185
Küresel koordinatlar	8	Elektrostatik ayılma	35
İletken özellikler	63	Elektrostatik boyama	38
İterasyon	105		

Elektrostatik enerji ⁹ 41

Hacimsel yük ⁹ 25

Hall olayı ¹³⁷ 137

Harmonik alanlar ¹⁸² 182

Histerezis ¹⁴⁵ 145

Laplace denklemi ⁹³ 93

Lorentz kuvveti ¹³⁶ 136

Leplace denklemi ⁹³ 93

Lorentz kuvveti ¹³⁶ 136

Magnetik aktı ¹²⁷ 127

Magnetik devreler ¹⁵⁶ 156

Magnetik disk ¹⁵¹ 151

Magnetik geçirgenlik ¹⁴¹ 141

Magnetik hafıza ¹⁵³ 153

Magnetik potansiyel ¹³³ 133

Magnetik potansiyel enerji ¹⁵⁹ 159

Magnetik içten ²⁰¹ 201

Maxwell Denklemleri ¹⁸³ 183

Mikrodalga ²³² 232

Mikrodalga firmalar ²³⁵ 235

Noktasal yük ²⁰ 20

Omkırık kayıp ²¹² 212

Ortalama güç ²¹⁶ 216

Payrano ²²⁸ 228

Penetrasyon ²³² 232

Poisson denklemi ¹⁰⁰ 100

Polarizasyon ²⁰⁷ 207

Polyester ²²⁸ 228

Potansiyel gradyant ⁴⁷ 47

Poynting vektör ²¹¹ 211

Propagasyon sabiti ²²² 222

Relüktans ¹⁵⁷ 157

Rotasyonel ¹²⁵ 125

Teflon ²²⁸ 228

Telekomünikasyon. ²¹¹ 211

Tork ¹³⁹ 139

Toroid ¹⁵⁰ 150

KAYNAKLAR

1. HAYT W.H. "Engineering Electromagnetics", Mc Graw Hill Press, 1989.
2. SKİTEK G.G., Marshall S.V. "Electromagnetic Concepts and Applications", Prentice-Hall, Pb, 1982.
3. KRAUSS J.D., "Electromagnetics", Mc Graw Hill Press 1984.
4. PAUL R.C. NASAR A.S., "Introduction to Electromagnetic Fields", McGraw Hill Press 1982.
5. CARL T.A.J. "Engineering Electromagnetic Fields and Waves", John Wiley Press, 1988
6. SEN P.C. "Principles of Electric Machines and Power Electronics", John Wiley Press 1989.
7. SHEN L.C, KONG J.A. "Applied Electromagnetism", A Division of Wadsworth, Inc. 1983.
8. KOLM H.H, THORNTON R.D. "Electromagnetic Flight" Scientific American Oct, 1973.
9. OROWAN E. "The Origin of the Ocean Ridges", Scientific American Apr, 1968.
10. JOSEPH A.E. "Electromagnetics", Schaum'S Outline Series, 1979.
11. İDEMEN M. "Elektromagnetik Alan Teorisinin Temelleri", ITÜ yayınları, 1986.
12. SARİOĞLU M.K. "Elektrik Makinalarının Temelleri I-II", T.TÜ. Yayınları 1984
13. ÖNAL H. "Elektromagnetizma", Çağlayan Yayıncılık, 1984.
14. LEBLEBİCİ Y. "Elektronik Düzlemler ve Devreleri", T.T.U. Yayınları 1984.
15. ŞEKER S.Ş. ÇEREZCİ O, "Elektromagnetik Alanların Biyolojik Etkileri, Güvenlik Standartları ve Koruma Yöntemleri", Boğaziçi Üniversitesi Yayınları 1990.
16. YALÇIN C. "Fizigin Temelleri I-II", Savaş ve Teori Yayımları, 1985

