İşlenecek Konular

Hafta	Konu
1	Elektrik-Elektronik mühendisliğinde olasılık modelleri
2	Olasılık teorisinin temel kavramları
3	Olasılık teorisinin temel kavramları (devam)
4	Ayrık rastlantı değişkenleri
5	Sürekli rastlantı değişkenleri
6	Sürekli rastlantı değişkenleri (devam)
7	İki rastlantı değişkeni
8	İki rastlantı değişkeni (devam)
9	ARA SINAV
10	Vektör rastlantı değişkenleri
11	Rastlantı değişkenlerinin toplamı ve ortalamalar
12	Rastlantı değişkenlerinin toplamı ve ortalamalar (devam)
13	İstatistik (parametre kestirimi)
14	İstatistik (hipotez testi)

Geçme Notunun Belirlenmesi:

1 Arasınav (% 41)

2 Kısa sınav (%6)

1 Ödev (% 3)

Final (% 50)

Ders Kitabı:

A.L. Garcia, *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*, 3rd edition, Prentice Hall

Hafta 1:
Elektrik-Elektronik Mühendisliğinde Olasılık Modelleri

Ele Alınacak Ana Konular

- Analiz ve tasarımda matematiksel modeller
- Deterministik modeller
- Olasılık modelleri
- Örnek: Ses iletim sistemi
- Diğer örnekler

Analiz ve Tasarımda Matematiksel Modeller

- Karmaşık bir sistemin tasarımı maliyet, güvenilirlik ve performans gibi ölçütler dikkate alınarak yapılır.

- Çeşitli alternatifler arasından hangisinin en iyi olduğunu tespit etme, genelde sistem gerçekten tasarlanarak yapılmaz. Bunun yerine, alternatifler için modeller kullanılarak elde edilen tahminlerden yararlanılır.

- Bir model, fiziksel bir durumun tahmini bir temsilidir. Bir model, basit ve anlaşılabilir bir kural kümesi kullanarak gözlemlenen davranışı açıklamaya çalışır. Bu kurallar, verilen fiziksel durumu ilişkin deneylerin çıkışını tahmin etmede kullanılabilir.

- Modeller, mühendislerin iş gücü, malzeme ve zaman gibi deney maliyetlerinden kurtulmasına imkan verir.

Analiz ve Tasarımda Matematiksel Modeller

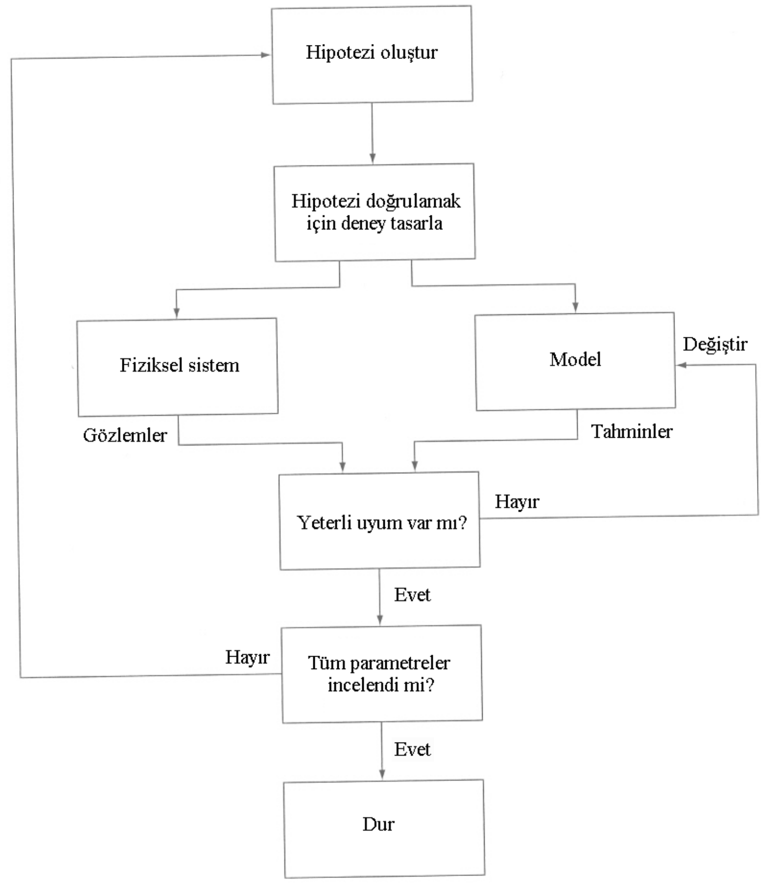
- Gözlemlenen olay, ölçülebilir özelliklere sahip olduğunda matematiksel modeller kullanılır.

- Matematiksel bir model, bir sistemin nasıl çalıştığı hakkında bir varsayımlar kümesinden oluşur. Bu varsayımlar, sistemin önemli parametrelerini ve değişkenlerini içeren matematiksel ilişkiler şeklinde ifade edilir.

- Sistemi ilgilendiren bir deneyin gerçekleştirildiği koşullar matematiksel ilişkilerdeki verilenlerdir. Bu ilişkilerin çözümü, ölçümleri deneyi fiziksel olarak gerçekleştirmeden tahmin etmemize mümkün kılar.

- Bir modelin faydalı olabilmesi için, verilen bir olaya ilişkin gerçeklerle uyumlu olmalıdır. Bu nedenle, bir modelin geliştirilmesi ve doğrulanması bir takım aşamalar içermelidir. Modelleme süreci aşağıda verilmiştir.

Analiz ve Tasarımda Matematiksel Modeller



Kaynak: A. L. Garcia, *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*, third edition , Prentice Hall, 2008.

Analiz ve Tasarımda Matematiksel Modeller

- Model deneysel ölçümlerle doğrulanmadığı sürece, bir matematiksel modelden elde edilen tahminlere güvenilmemelidir.

- Sistem tasarımında ikilemle karşılaşılır. Gerçek sistem mevcut olmadığından, model deneysel olarak doğrulanamaz. Bu durumda, bilgisayar simülasyon modeli önemli bir rol oynar.

- Bir bilgisayar simülasyon modeli, bir sistemin dinamiklerini taklit eden bir bilgisayar proğramından oluşur. Proğramın içinde, ilgili performans paremetrelerini ölçen komutlar mevcuttur.

- Simülasyon modelleri, matematiksel modellere göre sistemleri daha detaylı temsil edebilir. Ancak, matematiksel modellere göre daha az esnektirler ve daha fazla hesaplama zamanı gerektirirler.

Deterministik Modeller

- Deterministik modellerde, bir deneyin gerçekleştirildiği koşullar deneyin çıkışını belirler.

- Deterministik matematiksel modellerde, bir matematiksel denklemler kümesinin çözümü deneyin çıkışını tam olarak verir. Devre teorisi, deterministik bir matematiksel modele örnektir.

- Bir gerilimin ölçülmesine ilişkin bir deney, aynı koşullar altında defalarca tekrarlandığında devre teorisi gözlemlerin daima aynı olacağını söyler.

- Gerçekte, ölçüm gürültüsü ve kontrol edilemeyen etmenlerden ötürü gözlemlerde hafif değişimler olacaktır. Tahmin edilen değerlerdeki sapmalar küçük olduğu sürece bu deterministik model yeterli olacaktır.

Olasılık Modelleri

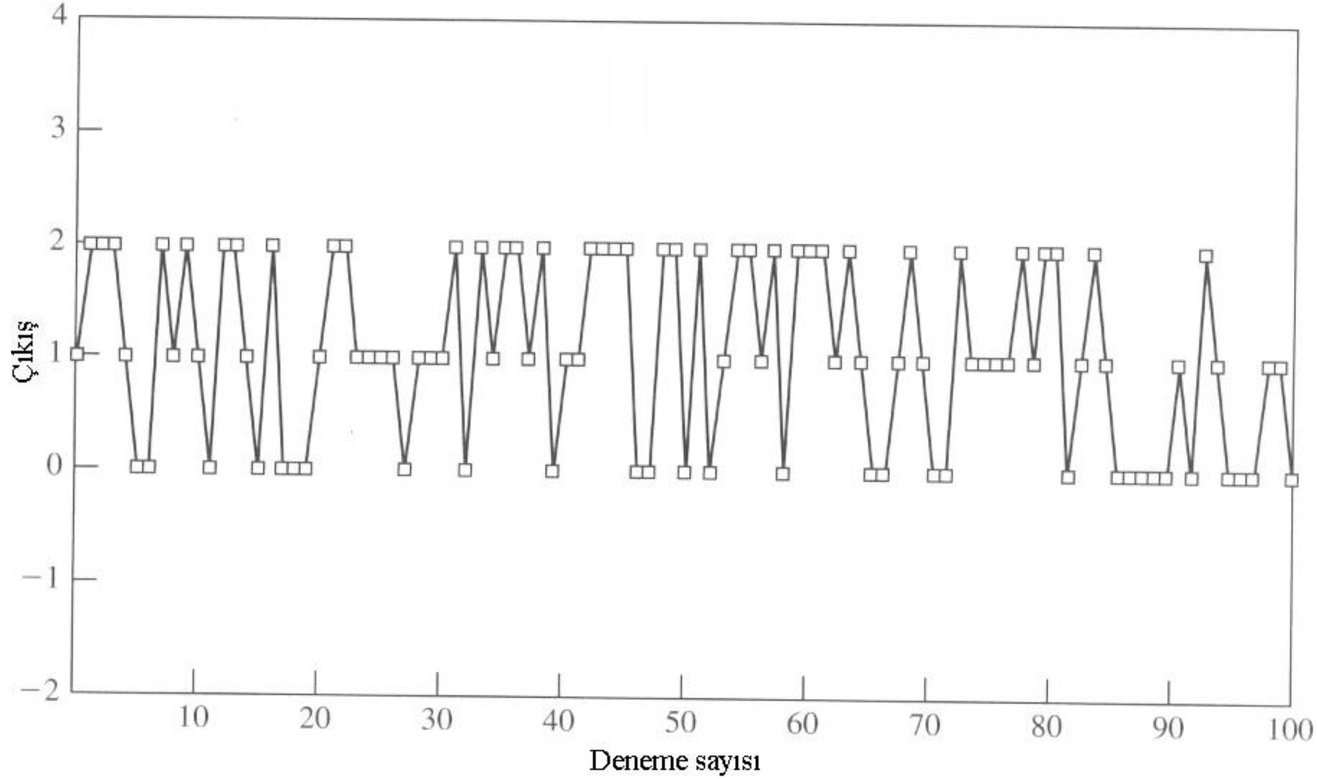
- Çoğu sistem, öngörülemeyen değişim ve rastgelelik göstermektedir. Aynı koşullar altında tekrarlandığında, çıkışları öngörülemeyen bir şekilde değişen deneylere rastlantı deneyi denir.

- Deterministik modeller, deneyin her tekrarlanışında aynı çıkışı tahmin ettiklerinden rastlantı deneyleri için uygun değildir.

- Bir rastlantı deneyine örnek olarak, üzerlerinde 0, 1 ve 2 yazılı 3 özdeş top içeren bir vazodan bir top çektiğimizi varsayalım. Topun üzerinde yazan rakam kaydediltikten sonra topun vazoya geri konulduğunu varsayalım.

- Bu deneyin çıkışı $S=\{0,1,2\}$ kümesinden bir rakamdır. Aşağıda, bu deney bilgisayar simülasyonu aracılığıyla 100 kez tekrarlandığında çıkışlar verilmiştir. Görüldüğü gibi, çıkış doğru bir şekilde tahmin edilemez.

Olasılık Modelleri



Kaynak: A. L. Garcia, *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*, third edition , Prentice Hall, 2008.

Olasılık Modelleri

- Bir olasılık modeli, bir sistemin gelecekteki davranışını tahmin etmemize imkan vermelidir. Bir olayın tahmin edilebilmesi için davranışında düzenlilik içermelidir.

- Mühendislikteki çoğu olasılık modeli, rastlantı deneylerinin çok sayıda tekrarlanmasından elde edilen ortalamaların yaklaşık olarak aynı değeri verdiği gerçeğine dayanır. Bu özelliğe istatistiksel düzenlilik denir.

- Vazo deneyinin, aynı koşullar altında n kez tekrarlandığını varsayalım. Çıkışın 0, 1 ve 2 olma sayısı sırasıyla $N_0(n)$, $N_1(n)$ ve $N_2(n)$ ve k çıkışının bağıl frekansı $f_k(n)$

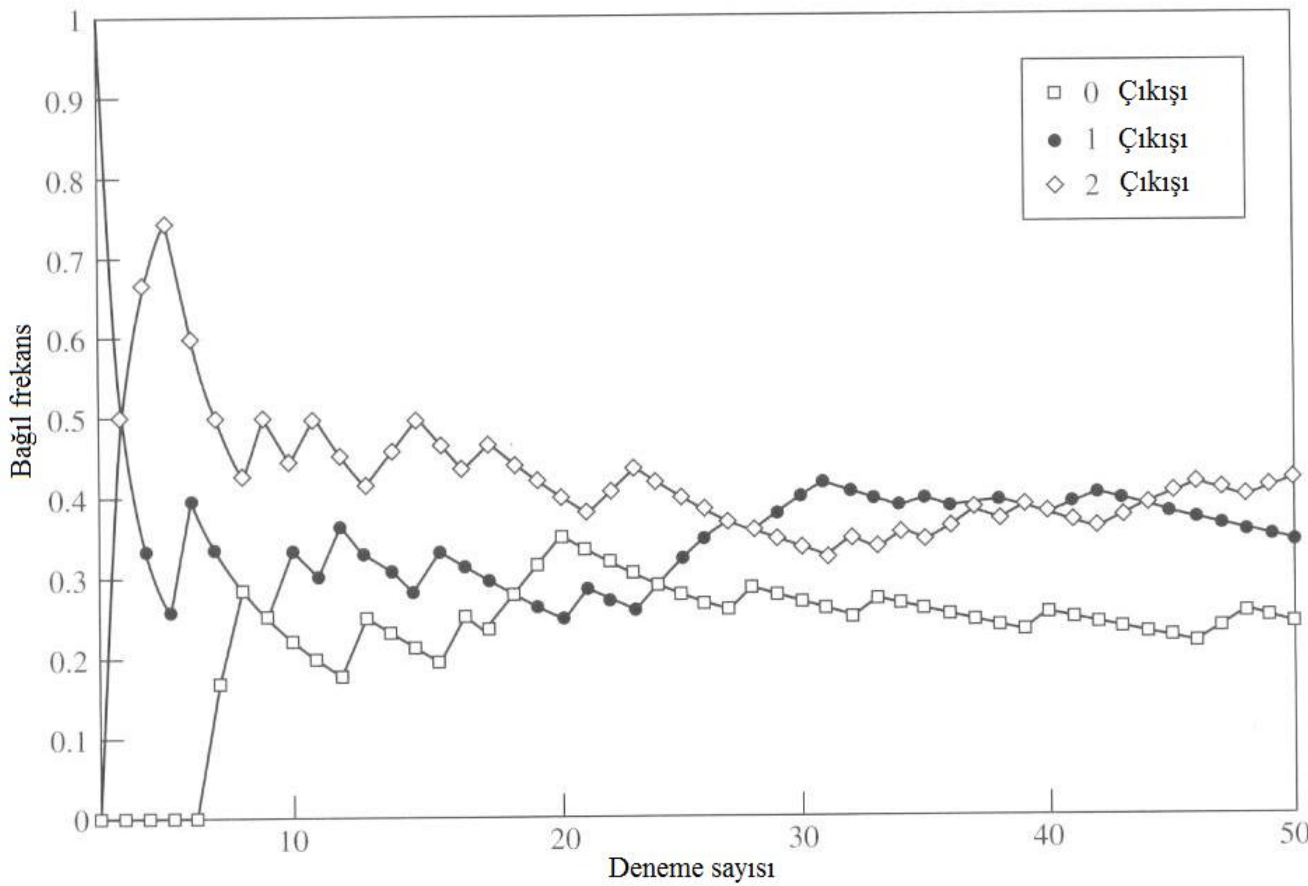
$$f_k(n) = \frac{N_k(n)}{n}, \quad k = 0,1,2$$

ile belirtilsin. İstatistiksel düzenlilik, n çok büyük değerler aldığında bağıl frekansın sabit bir değer etrafında çok az değişeceği, yani

$$\lim_{n\to\infty} f_k(n) = p_k$$

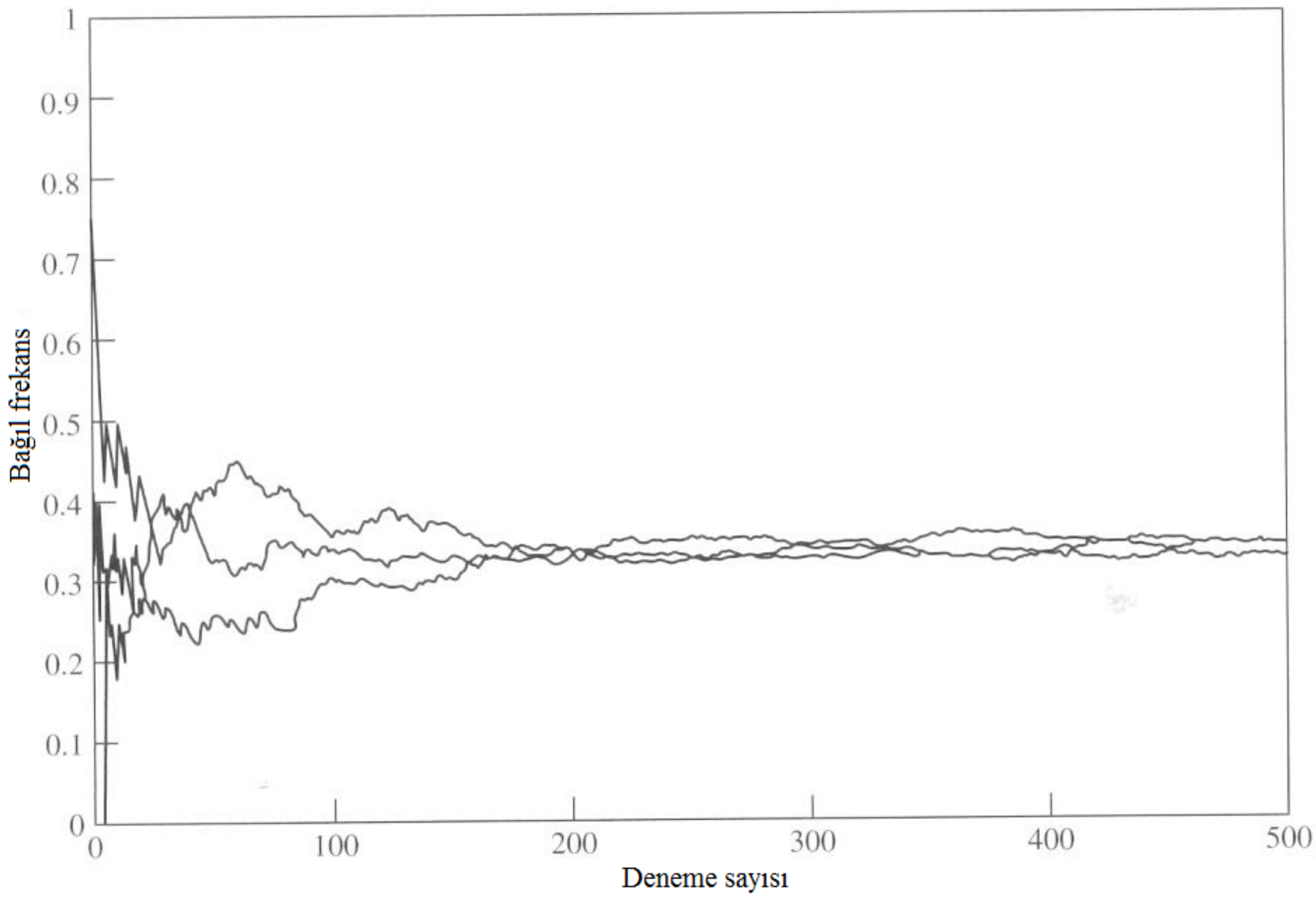
olduğu anlamındadır. p_k sabitine k çıkışının olasılığı denir.

Olasılık Modelleri



Kaynak: A. L. Garcia, *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*, third edition , Prentice Hall, 2008.

Olasılık Modelleri



Kaynak: A. L. Garcia, *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*, third edition , Prentice Hall, 2008.

Olasılık Modelleri

- Bir rastlantı deneyinin K çıkışı olduğunu varsayalım, yani $S=\{1,2,\ldots,K\}$. n denemede, herhangi bir çıkışın gözükme sayısı 0 ve n arasında bir sayı olup

$$0 \le N_k(n) \le n, \quad k = 1,2,\cdots,K$$

- Eşitsizlikler n'ye bölünürse, bağıl frekansların birinci özelliği bulunur:

$$\boxed{0 \le f_k(n) \le 1, \quad k = 1,2,\cdots,K}$$

- Tüm çıkışların gözükme sayısının toplamı n olmalıdır

$$\sum_{k=1}^{K} N_k(n) = n$$

- Eşitlik n'ye bölünürse , bağıl frekansların ikinci özelliği elde edilir:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{K} f_k(n) = 1}$$

Olasılık Modelleri

- Bazen bir deneyin çıkışarına ilişkin olayların kaç kez oluştuğuyla ilgili oluruz. Vazo deneyinde, “üzerinde çift sayı yazan bir top çekilir” olayını ele alalım. Bu olayın bağıl frekansı nedir?

- Çekilen topun üzerindeki rakam 0 veya 2 ise olay gerçekleşir. Olayın meydana gelme sayısı $N_E(n)$ ise, $N_E(n) = N_0(n) + N_2(n)$. O halde, olayın bağıl frekansı

$$f_E(n) = \frac{N_E(n)}{n} = \frac{N_0(n) + N_2(n)}{n} = f_0(n) + f_2(n)$$

- Bu örnek, bir olayın bağıl frekansının ilişkili çıkışların bağıl frekanslarının toplamına eşit olduğu görülmektedir. Daha genel olarak, A ve B aynı anda gerçekleşmeyen iki olay olmak üzere C olayı, “ A veya B meydana gelir” olsun. C olayının meydana gelme sayısı $N_C(n) = N_A(n) + N_B(n)$ olup, bağıl frekansın üçüncü özelliği aşağıdaki gibi olur:

$$\boxed{f_C(n) = f_A(n) + f_B(n)}$$

Olasılık Modelleri

- Önceki tartışmalarımızdan, bir olayın olasılığının, olay çok sayıda tekrarlandığındaki bağıl frekansıyla tanımlandığı anlaşılmaktadır. Ancak, bu tanım temel üç problem içermektedir.

- Birincisi, tanımdaki limitin ne zaman ve hangi anlamda var olduğu açık değildir.

- İkincisi, bir deney sonsuz kez tekrarlanamayacağından olasılıklar tam olarak bilinemez.

- Sonuncusu, bir deneyin tekrarlanamayacağı durumlarda bağıl fekans kavramı uygulanamaz.

- O halde, olasılığın matematiksel teorisi herhangi bir özel uygulamayla bağlantılı olmayacak şekilde yapılmalıdır.

Olasılık Modelleri

- Bir olayın olasılığının tanımı, bağıl frekansın özelliklerini sağlamalıdır.

- Modern olasılık teorisi aşağıdaki varsayımları yapar: (i) bir rastlantı deneyi tanımlanmış ve tüm çıkışlar kümesi S belirlenmiştir, (ii) olaylar denen S'nin alt kümeleri belirtilmiştir, (iii) her bir olay A'ya aşağıdaki aksiyomlar sağlanacak şekilde bir rakam $P[A]$ verilmiştir:

$$0 \leq P[A] \leq 1$$
$$P[S] = 1$$
$$A \cap B = \varnothing \text{ ise } P[A \text{ veya } B] = P[A] + P[B]$$

- Olasılık teorisi, olasılıkların nasıl elde edildiği ve ne anlama geldiğiyle ilgili değildir. Yukarıdaki aksiyomları sağlayan olasılıklar geçerlidir. Verilen bir uygulamada, olasılıkların nasıl tanımlanacağını belirlemek model geliştiriciye (teorinin kullanıcısına) kalmıştır.

Olasılık Modelleri

- Şimdi, rastgelelik içeren bir gerçek problemden bir olasılık modeline nasıl geçeceğimizi tartışalım.

- Gerçek Problem: Bir konuşmacının aktif veya dinlemede olduğunu belirlemek için bir telefon konuşması test edilmektedir. Bir konuşmacının zamanın 1/3'ünde aktif, diğer zamanlarda öteki konuşmacıyı dinlemekte veya kelimeler arasında durduğu bilinmektedir.

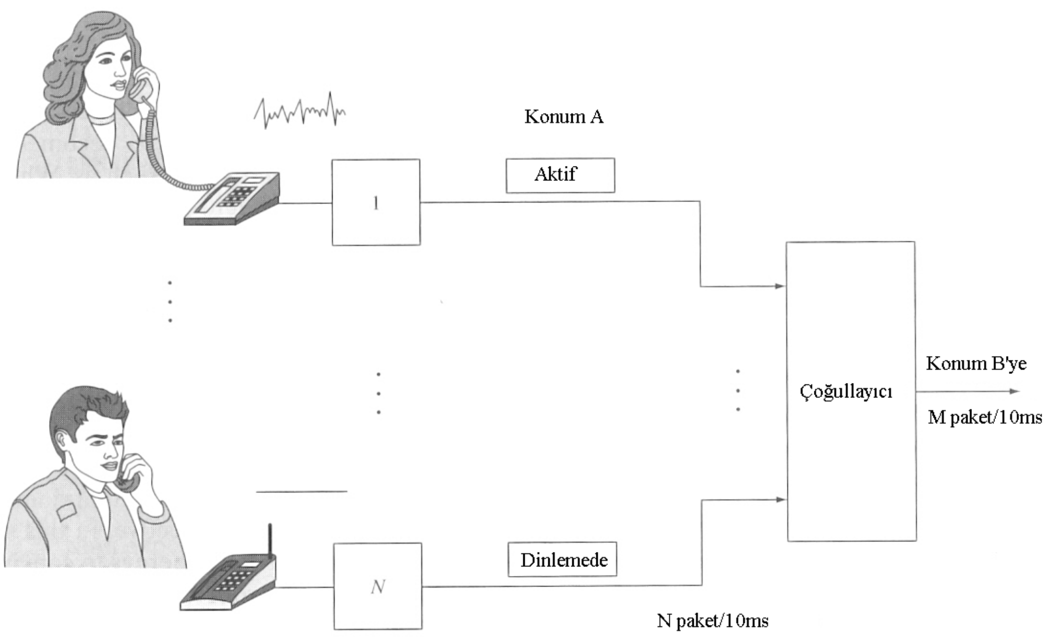
- Çözüm: Rastlantı deneyi tanımlanmalıdır; tüm çıkışlar kümesi S ve ilgili olaylar belirlenmelidir; tüm olayların olasılıklarının hesaplanabileceği bir olaslık atama kuralı belirtilmelidir. Amaç, gerçek problemi tüm yönleriyle açıklayan en basit modeli geliştirmektir.

- Bu fiziksel durumu, içinde 2 beyaz (dinlemede) ve 1 siyah (aktif) top bulunan bir vazodan bir top çekme deneyiyle modelleyebiliriz.

Örnek: Ses İletim Sistemi

- Aynı anda 48 konuşmayı ses bilgi paketleri kullanarak *A* konumundan *B* konumuna ileten bir haberleşme sisteminin gerekli olduğunu düşünelim.

- Bir konuşmacının sesi 10 ms süreli paketler haline getirilir. Paket iletilmeden önce, paketi oluşturan kaynak ve paketin varacağı adres paketin sonuna eklenir.



Kaynak: A. L. Garcia, *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*, third edition , Prentice Hall, 2008.

Örnek: Ses İletim Sistemi

- En basit çözüm, (her bir yöne) 48 paket/10 ms iletmektir. Paketlerin 2/3'nün ses bilgisi taşımadığından bu iyi bir çözüm değildir. 48 konuşmacı 10 ms içinde 48/3=16 aktif paket üretmektedir. O halde, 10 ms içinde $M < 48$ paket ileten başka bir sistemi ele alalım.

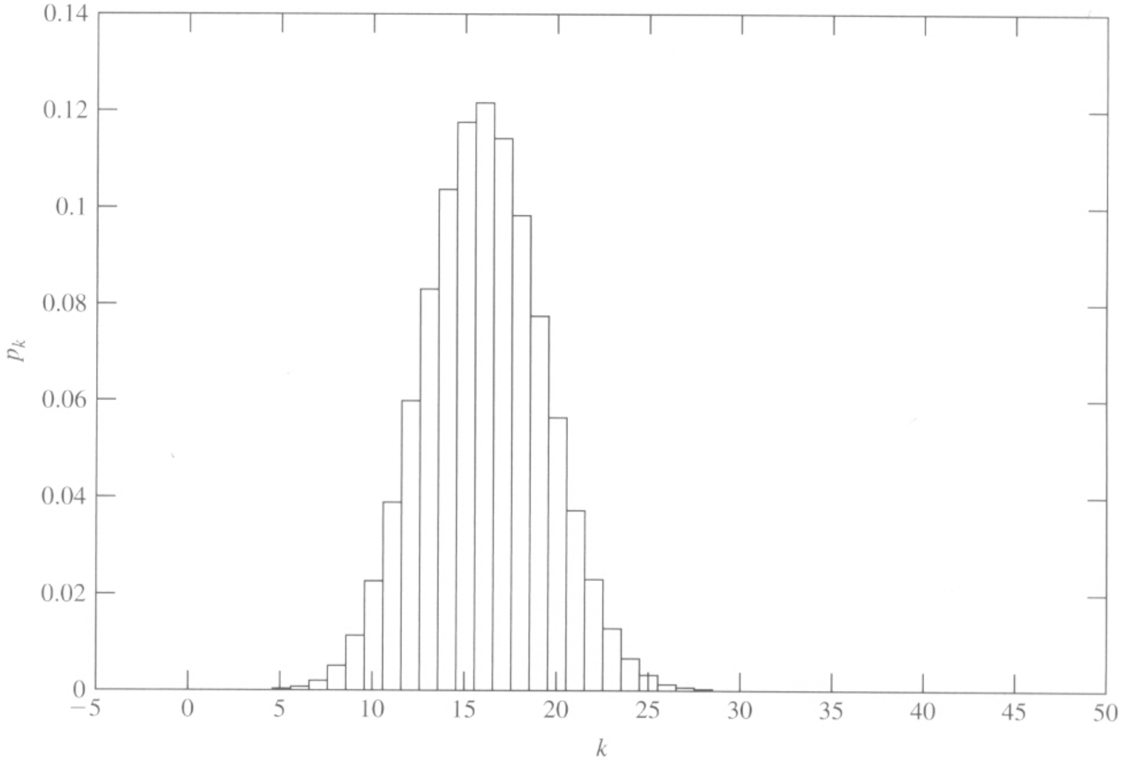
- Yeni sistem, hangi konuşmacıların aktif duruma karşılık gelen paketler ürettiğini belirler. Bu rastlantı deneyinin çıkışı A olsun. A, 0 (hiçbir konuşmacı aktif değil) ile 48 (tüm konuşmacılar aktif) arasında değer alır.

- $A \leq M$ ise, tüm aktif paketler iletilir. $A > M$ ise, sistem tüm aktif paketleri iletemeyeceğinden $A - M$ adet aktif paket rastgele seçilir ve iletilmez. Ancak, bazı paketlerin atılması ses kalitesini kötüleştirir.

- İletilmeyen aktif paketlerin oranını, ses kalitesi kabul edilebilir seviyede olacak şekilde ayarlamak istiyoruz.

Örnek: Ses İletim Sistemi

- Deneyin n kez tekrarlansın. j. denemedeki çıkış $A(j)$; aktif paket sayısının k olduğu deneme sayısı $N_k(n)$ olsun. k çıkışının bağıl frekansı $f_k(n) = N_k(n)/n$ olup p_k olasılığına yakınsasın. Aşağıdaki şekilde, p_k çizilmiştir.



Kaynak: A. L. Garcia, *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*, third edition , Prentice Hall, 2008.

Örnek: Ses İletim Sistemi

- Aktif paketlerin üretilme hızını belirleyelim. 10 ms aralığında üretilen ortalama aktif paket sayısı şöyle hesaplanabilir:

$$\langle A \rangle_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} A(j) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{48} k N_k(n)$$

- n büyük değerler aldığında, $N_k(n)/n$ oranı p_k olasılığına yakınsar. O halde, 10 ms süresince üretilen aktif paket sayısı aşağıdaki ifadeye yakınsar:

$$\langle A \rangle_n \to \sum_{k=0}^{48} k p_k \stackrel{\Delta}{=} E[A]$$

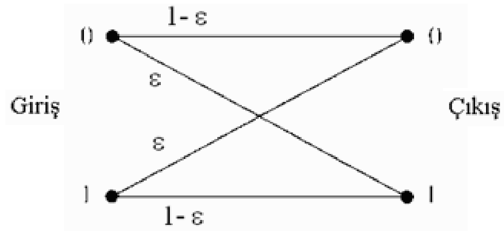
- Eşitliğin sağ tarafındaki ifadeye *A*'nın beklenen değeri denir. Beklenen değeri olasılıklar belirlemektedir.

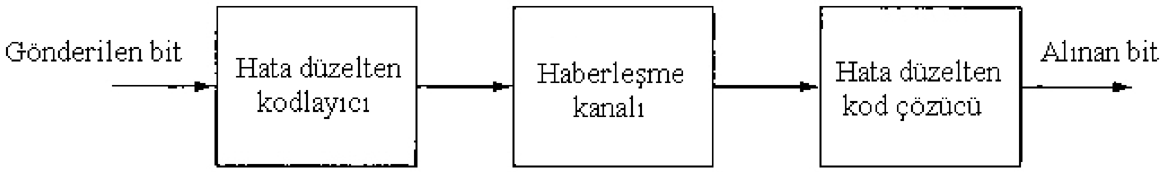
- p_k olasılıklarının sağladığı bilgi, verimli ve iyi ses kalitesine sahip sistemler tasarlamamıza imkan verir. Örneğin, algılanamayan aktif paketleri iletmeyerek iletim kapasitesini 24 paket/10 ms'ye kadar düşürebiliriz.

Örnek: Güvensiz Kanallar Üzerinden Haberleşme

- Çoğu haberleşme sistemi şu şekilde çalışır. *T* saniyede bir, verici bir bit (1 veya 0) işler ve bir işaret gönderir. *T* saniye sonra, alıcı kendisine gelen işarete bakarak iletilen işaretin ne olduğuna karar verir.

- Alıcının verdiği karar, vericinin gönderdiğine eşit olmayabilir. Aşağıda, iletim hatalarının ε olasılığıyla oluştuğu bir sistem modellenmiştir. Hata olasılığının kabul edilebilir seviyede olmadığı durumlarda hata düzelten kodlar kullanılır.





Kaynak: A. L. Garcia, *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*, third edition , Prentice Hall, 2008.

Örnek: Güvensiz Kanallar Üzerinden Haberleşme

- Hata düzelten kodlayıcı iletilen biti 3 kez tekrarlasın. Yani "0" yerine "000" ve "1" yerine "111" iletilsin.

- Kod çözücü, alınan 3 bite bakıp çoğunluğa göre karar versin. Kod çözücünün yanlış bir karar vermesi için iletilen 2 veya 3 bit hatalı olarak kendisine ulaşmalıdır. Hata olasılığının $3\varepsilon^2-2\varepsilon^3$ olduğunu göstermek zor değildir.

- $\varepsilon = 10^{-3}$ ise (yani kanal iletilen 1000 bitin 1 tanesini değiştiriyorsa), hata düzelten kod kullanılması halinde hata olasılığı $3\mathrm{x}10^{-6}$ değerine düşer!

- Bu iyileşmenin elbette bir maliyeti vardır. İletim hızı, hata düzelten kod kullanılmaması durumunda 1 bit/T saniye iken, kod kullanılırsa 1 bit/3T saniye değerine düşer.

- Hata tespit ve düzeltme, kablosuz ve gürültülü diğer kanallar üzerinden güvenli haberleşmeyi mümkün kılar. Olasılık, oluşabilecek hataları belirlemede rol oynar.

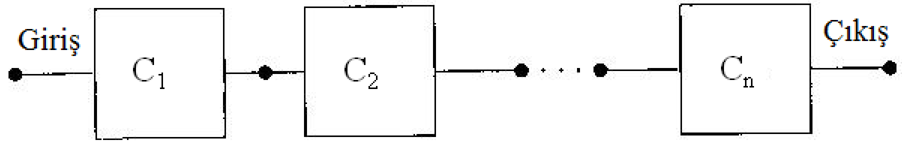
Örnek: Sistem Güvenilirliği

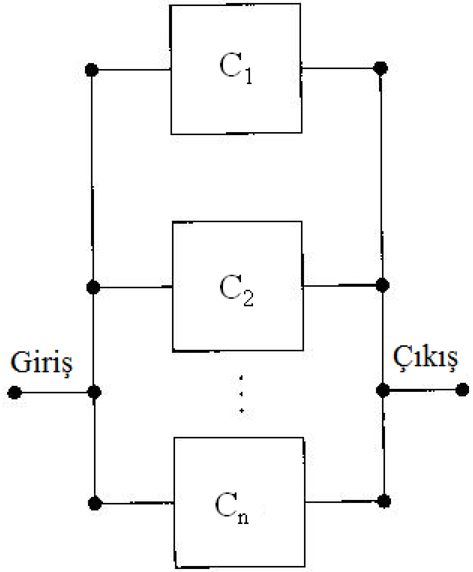
- Güvenilirlik, modern sistemlerin tasarımında çok önemlidir. Örneğin, bankalar arasında elektronik nakit transferi sağlayan haberleşme ağından oluşan bir sistemin arızalar durumunda bile çalışması beklenir.

- Sistemler, genelde alt sistemlerden oluşur. Bir sistemin vazife görmesi için bileşenlerinin hepsinin (seri bağlama) veya en az birinin (paralel bağlama) çalışıyor olması gereklidir. Daha karmaşık sistemler, temel bu iki türden oluşturulabilir.

- Bir bileşenin tam olarak ne zaman vazife göremeyeceğini kestirmek mümkün değildir. Olasılık teorisi, "bozulmaya kadar geçen ortalama süre, belirli bir süre geçtikten sonra bileşenenin hala vazife görmeye devam etmesi olasılığı" gibi güvenilirlik ölçütlerini hesaplamamıza imkan verir.

Örnek: Sistem Güvenilirliği



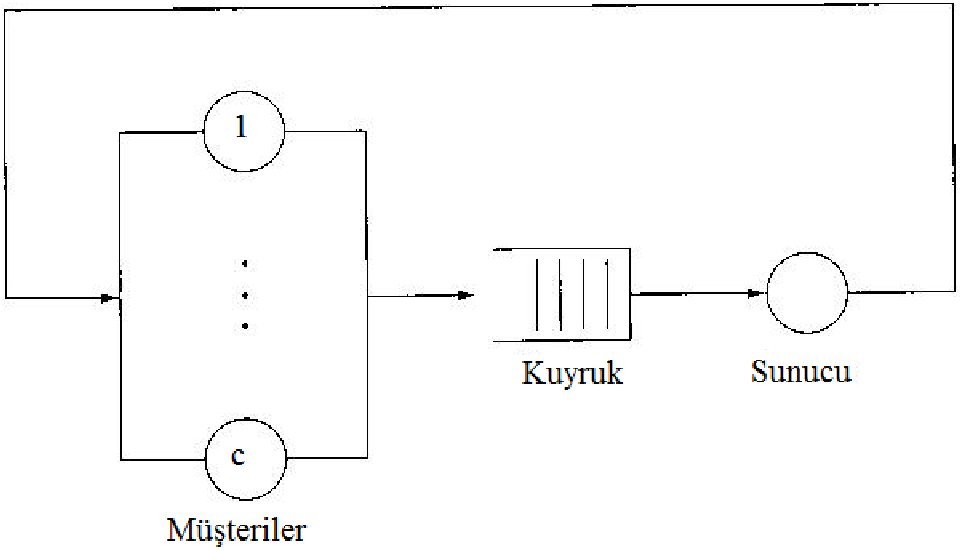


Kaynak: A. L. Garcia, *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*, third edition , Prentice Hall, 2008.

Örnek: Kaynak Paylaşım Sistemleri

- Çoklu müşterili sistemlerde, her müşteriye yeterli kaynak ayrılarak müşteri talepleri karşılanabilir. Ancak, herhangi bir müşterinin talebi olmadığında bu müşteriye ayrılan kaynak kullanılmadığından bu yaklaşım tercih edilmez.

- Daha iyi bir yaklaşım, müşteri isteklerini kaynakları dinamik olarak paylaşarak karşılamaktır. Örneğin, çoğu web sunucusu aşağıda gösterildiği gibi çalışır.



Kaynak: A. L. Garcia, *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*, third edition , Prentice Hall, 2008.

Örnek: Kaynak Paylaşım Sistemleri

- En fazla *c* müşterinin sunucuya erişmesine imkan verilir. Müşteriler sunucuya taleplerini iletir. Talepler sıraya konulur ve sunucu tarafından karşılanır.

- Müşteri, sunucudan yanıt aldıktan sonra bir sonraki talebini iletmeden önce bir süre düşünür. Sistem, belirli bir süre sonra bir müşterinin bağlantısını keser ve onun yerine başka bir müşteriyi sıraya koyar.

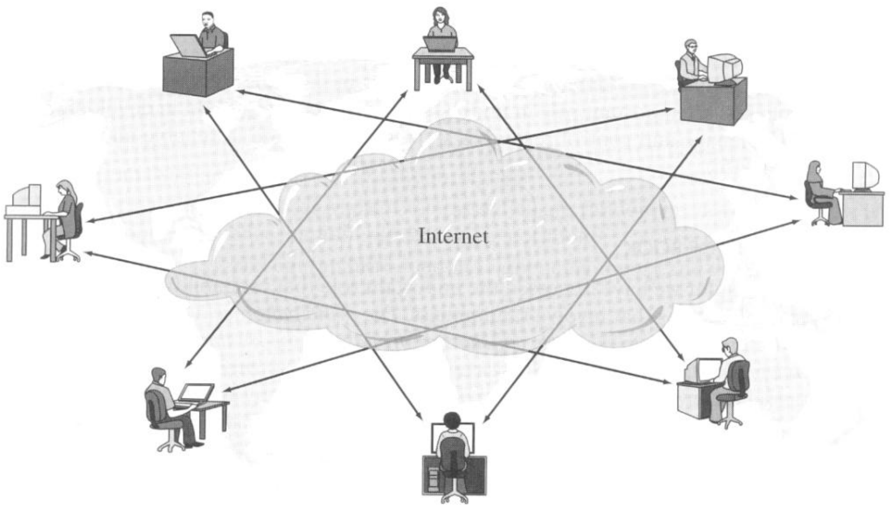
- Müşterilere hızlı yanıt vermek, bağlantıların erken kopmasını önlemek ve kaynakları verimli bir şekilde kullanmak için talep işleme süresi, bağlantı başına talep sayısı, talepler arasında geçen süre gibi parametrelerin istatistiksel olarak belirlenmesine gerek vardır.

- Bu parametreler kullanılarak *c*'nin en uygun değeri belirlenir.

Örnek: İnternet Ölçeğinde Sistemler

- İnternet ölçeğinde sistemlerde, müşteri sayısı oldukça fazladır, kullanıcılar arasındaki ilişki, bir sunucuya erişen müşterilerinkinden daha fazla karmaşıktır. Örneğin,başka web sayfalarına işaret eden bağlantılar birbiriyle ilişkli yüz binlerce belge oluşturur.

- İstatistiksel yöntemler, arama motorlarının çalışmasında; karşılıklı dosya paylaşma ve içerik dağıtma gibi yeni uygulamaların anlaşılmasında ve kaynakları kontrol etmek amacıyla yöntemler geliştirilmesinde önemli bir rol oynar.



Kaynak: A. L. Garcia, *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*, third edition , Prentice Hall, 2008.