Sürekli-Zaman Fourier Dönüşümü

$x_a(t)$ işaretinin Sürekli-Zaman Fourier Dönüşümü (CTFT)

$$X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde, ters CTFT

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

eşitliğiye verilir. Bir CTFT çifti

$$x_a(t) \overset{\text{CTFT}}{\longleftrightarrow} X_a(j\Omega)$$

notasyonu ile gösterilecektir.

Sürekli-Zaman Fourier Dönüşümü

- Bağımsız değişken t'nin birimi saniye ise, Ω gerçektir ve radyan/saniye cinsinden sürekli-zaman açısal frekansı belirtir.

- CTFT genelde Ω nın karmaşık değerli bir fonksiyonu olup kutupsal koordinatlarda

$$X_a(j\Omega) = |X_a(j\Omega)| e^{j\theta_a(\Omega)}$$

şeklinde ifade edilebilir. $|X_a(j\Omega)|$'ya GENLİK SPEKTRUMU, $\theta_a(\Omega)$'ya FAZ SPEKTRUMU denir.

- Genlik ve faz spektrumları Ω nın gerçek fonksiyonudur.

- Bir işaretin CTFT'sinin var olabilmesi için Drichlet koşullarını sağlaması gerekir.

Sürekli-Zaman Fourier Dönüşümü

Dirichlet Koşulları:

i. Herhangi bir sonlu aralıkta, işaret sonlu sayıda süreksizlik ile sonlu sayıda maksimum ve minimuma sahiptir.
ii. İşaret mutlak integrallenebilirdir. Yani,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)|\, dt < \infty$$

Dirichlet koşulları sağlanıyorsa,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega) e^{j\Omega t}\, d\Omega$$

eşitliği, $x_a(t)$'nin süreksiz olduğu t noktaları hariç diğer t noktalarında $x_a(t)$'ye yakınsar. $x_a(t)$ mutlak integrallenebilir ise, $|X_a(j\Omega)| < \infty$ ve dolayısıyla CTFT'nin var olacağını göstermek zor değildir.

Enerji Yoğunluk Spektrumu

Tanım: Sürekli-zaman $x_a(t)$ işaretinin toplam enerjisi E_x

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x_a(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) x_a^*(t)\, dt$$

olarak tanımlanır.

Bir işaretin toplam enerjisi ister zaman ister frekans uzayında hesaplansın aynı değer elde edilmelidir. Bu sonuç, sonlu enerjili sürekli-zaman işaretleri için PARSEVAL İLİŞKİSİ olarak bilinmektedir ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|X_a(j\Omega)\right|^2 d\Omega$$

eşitliğiyle verilir. Parseval ilişkisi aşağıda ispatlanmıştır.

Enerji Yoğunluk Spektrumu

Parseval İlişkisinin İspatı: Toplam enerji denklemini

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_a^*(j\Omega)e^{-j\Omega t}\,d\Omega\right]dt$$

şeklinde yeniden düzenlemek mümkündür. İntegrallerin sırası değiştirildiğinde

$$\mathcal{E}_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_a^*(j\Omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\Omega t}\,dt\right]d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_a^*(j\Omega)X_a(j\Omega)\,d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|X_a(j\Omega)\right|^2 d\Omega$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Enerji Yoğunluk Spektrumu

$|X_a(j\Omega)|^2$, $x_a(t)$'nin ENERJİ YOĞUNLUK SPEKRUMU olarak adlandırılır ve $S_{xx}(\Omega)$ ile gösterilir.

$$S_{xx}(\Omega) = \left|X_a(j\Omega)\right|^2$$

Belirli bir $\Omega_a \leq \Omega \leq \Omega_b$ frekans aralığında enerji enerji yoğunluk fonksiyonunun integraline eşittir.

$$\mathcal{E}_{x,r} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_a}^{\Omega_b} S_{xx}(\Omega)\, d\Omega$$

Sürekli-Zaman Band-Sınırlı İşaretler

- Sürekli-zaman, sonlu enerjili TAM-BAND bir işaretin spektrumu $-\infty < \Omega < \infty$ ile verilen tüm frekans aralığında bileşenlere sahiptir.

- Sürekli-zaman BAND-SINIRLI bir işaret $-\infty < \Omega < \infty$ ile verilen tüm frekans aralığının sadece bir kısmında sıfırdan farklı bileşenlere sahiptir.

- İdeal band-sınırlı bir işaret $\Omega_a \leq |\Omega| \leq \Omega_b$ sonlu frekans aralığının dışında sıfırdır.

$$X_a(j\Omega) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\Omega| < \Omega_a \\ 0, & \Omega_b < |\Omega| < \infty \end{cases}$$

Ancak, pratikte ideal band-sınırlı bir işaret üretmek mümkün değildir.

Sürekli-Zaman Band-Sınırlı İşaretler

Band-sınırlı işaretler, işaretin spektrumunun yoğunlaştığı frekans aralığına göre sınıflandırılır.

Sürekli-zaman ALÇAK GEÇİREN bir işaretin spektrumu $|\Omega| \leq \Omega_p < \infty$ aralığında sıfırdan farklıdır. Ω_p' ye işaretin BANDGENİŞLİĞİ denir.

Sürekli-zaman YÜKSEK GEÇİREN bir işaretin spektrumu $0 < \Omega_p \leq |\Omega| < \infty$ aralığında sıfırdan farklıdır. İşaretin BANDGENİŞLİĞİ Ω_p'den sonsuza kadardır.

Sürekli-zaman BAND GEÇİREN bir işaretin spektrumu $0 < \Omega_L \leq |\Omega| \leq \Omega_H < \infty$ aralığında sıfırdan farklıdır. İşaretin BANDGENİŞLİĞİ Ω_L- Ω_H' dir.

Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

Tanım: Bir $x[n]$ dizisinin ayrık-zaman Fourier dönüşümü (DTFT)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

olarak tanımlanır. $X(e^{j\omega})$ genelde karmaşık değerli bir fonksiyon olup

$$X(e^{j\omega}) = X_{re}(e^{j\omega}) + j\, X_{im}(e^{j\omega})$$

şeklinde yazılabilir. $X_{re}(e^{j\omega})$ ve $X_{im}(e^{j\omega})$, sırasıyla $X(e^{j\omega})$'nin gerçel ve sanal kısımlarıdır. DFTF alternatif olarak kutupsal koordinatlarda

$$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\theta(\omega)}$$

olarak yazılabilir. $|X(e^{j\omega})|$ ve $\theta(\omega)$ geçek değerli fonksiyonlar olup sırasıyla GENLİK ve FAZ SPEKTRUMLARI olarak adlandırılır.

Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

- Gerçek bir $x[n]$ dizisi için, $|X(e^{j\omega})|$ ve $X_{re}(e^{j\omega})$ çift fonksiyon; $\theta(\omega)$ ve $X_{im}(e^{j\omega})$ ise tek fonksiyondur.

- Herhangi bir tamsayı k için

$$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\theta(\omega+2\pi k)}$$
$$= \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\theta(\omega)}$$

olduğundan faz fonksiyonu $\theta(\omega)$ tek olarak belirtilemez.

- Aksi belirtilmediği sürece faz fonksiyonunun TEMEL DEĞER olarak bilinen

$$-\pi \leq \theta(\omega) \leq \pi$$

aralığında olduğunu varsayacağız.

Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

- Bazı dizilerin DTFT'si faz spektrumlarında 2π süreksizliği gösterir.
- Bu nedenle, faz spektrumu için sürekli olan alterntif bir faz spektrumu kullanılır.
- Alternatif spektrum, orijinal faz spektrumundaki 2π süreksizlikleri yok edilerek elde edilir.
- Süreksizliklerin yok edilmesinden sonra oluşturulan faz spektrumu $\theta_c(\omega)$ ile gösterilir.
- Bazı durumlarda süreksizliklerin yok edilmesinden sonra π süreksizliği kalabilir.

Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

Örnek: İmpuls dizisi $\delta[n]$'nin DTFT'sini hesaplayalım.

$$\Delta(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = \delta[0] = 1$$

Örnek: $x[n] = \alpha^n \mu[n], \ |\alpha| < 1$ dizisinin DTFT'sini hesaplayalım.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n \mu[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n}$$

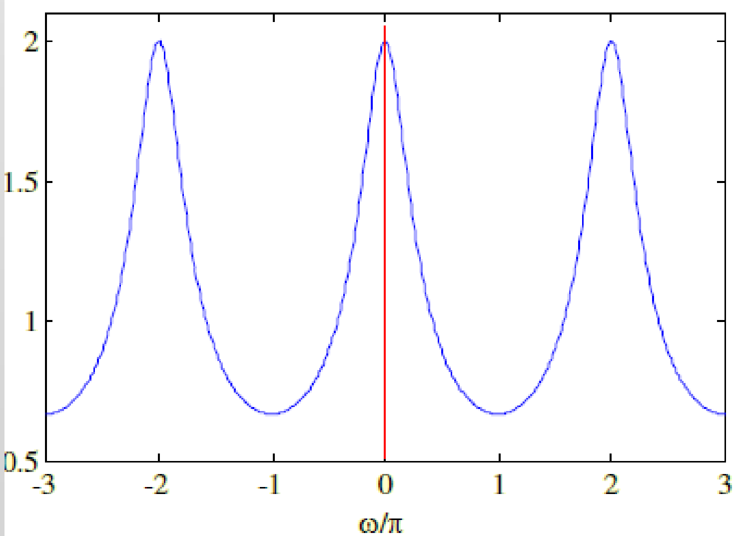
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

(Yukarıdaki sonuç elde edilirken $\left|\alpha e^{-j\omega}\right| = |\alpha| < 1$ gerçeği kullanılmıştır!)

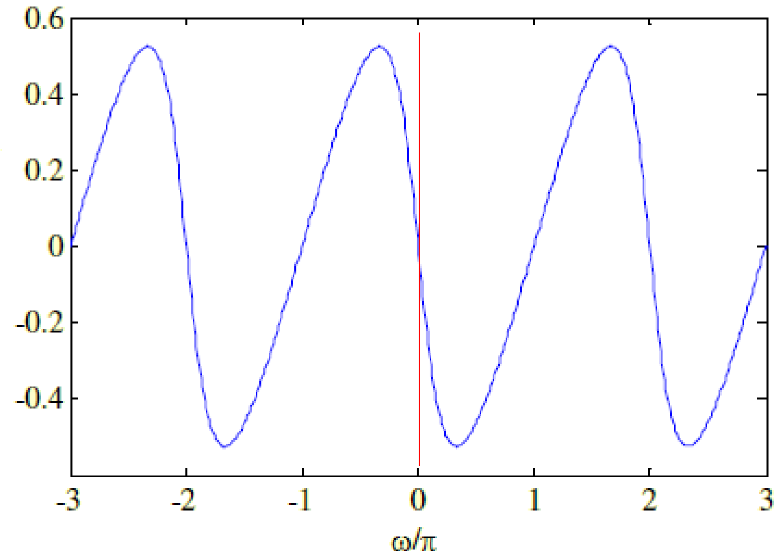
Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

Örnek bir DTFT, buna karşılık gelen genlik ve faz spektrumları aşağıda verilmiştir.

$$X(e^{j\omega}) = 1/(1-0.5e^{-j\omega})$$



$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$$



$$\theta(\omega) = -\theta(-\omega)$$

Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

- Bir $x[n]$ dizisinin DTFT'si $X(e^{j\omega})$ sürekli fonksiyondur.
- Ayrıca, DTFT 2π ile periyodiktir. İspat aşağıda verilmiştir.

$$X(e^{j(\omega_o+2\pi k)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega_o+2\pi k)n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega_o n}e^{-j2\pi kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega_o n} = X(e^{j\omega_o})$$

- Periyodikliğin sonucu olarak, DFTF periyodik bir fonksiyonun Fourier serisi açılımına karşı gelir. Seri açılımındaki katsayılar ayrık-zaman dizisine eşit olup

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

eşitliğinden hesaplanabilir. Bu eşitlik aynı zamanda ters dönüşüm formülüdür.

Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

Ters Fourier Dönüşüm formülü: $x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$

İspat: $x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}x[\ell]e^{-j\omega\ell}\right)e^{j\omega n}d\omega$

Parantez içindeki toplama düzgün yakınsıyorsa, toplamave integralin sırası değiştirilebilir.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}x[\ell]e^{-j\omega\ell}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}x[\ell]\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega(n-\ell)}d\omega\right)=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}x[\ell]\frac{\sin\pi(n-\ell)}{\pi(n-\ell)}$$

$$\frac{\sin\pi(n-\ell)}{\pi(n-\ell)}=\begin{cases}1, & n=\ell\\ 0, & n\neq\ell\end{cases}=\delta[n-\ell]$$

olduğundan $\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}x[\ell]\frac{\sin\pi(n-\ell)}{\pi(n-\ell)}=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}x[\ell]\delta[n-\ell]=x[n]$

Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

Sonsuz bir seri yakınsayabilir veya ıraksayabilir.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

sonsuz serisini göz önüne alalım ve

$$X_K(e^{j\omega}) = \sum_{n=-K}^{K} x[n]e^{-j\omega n}$$

sonlu serisini tanımlayalım. $X(e^{j\omega})$'nin düzgün yakınsaması için $\lim_{K\to\infty} \left| X(e^{j\omega}) - X_K(e^{j\omega}) \right| = 0$ eşitliği sağlanmalıdır. $x[n]$ dizisi mutlak taplanabilir, yani $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$ ise,

$$\left| X(e^{j\omega}) \right| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

olacağından $x[n]$ dizisinin mutlak taplanabilirliği $X(e^{j\omega})$'nin varlığı için yeter bir koşuldur.

Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

Örnek: $x[n] = \alpha^{n}\mu[n]$, $|\alpha| < 1$ dizisi için

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\alpha^{n}\right| \mu[n] = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\alpha^{n}\right| = \frac{1}{1-|\alpha|} < \infty$$

olduğundan dizi mutlak toplanabilirdir ve dizinin DTFT'si $1/(1-\alpha e^{-j\omega})$'ya düzgün olarak yakınsar.

Mutlak toplanabilir bir dizi sonlu enerjiye sahiptir. Sonuç aşağıda ispatlanmıştır.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^{2} \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \right)^{2}$$

Ancak, sonlu enerjili bir işaret her zaman mutlak toplanabilir olmayabilir. Bu duruma bir örnek şöyle verilebilir.

$$x[n] = \begin{cases} 1/n, & n \geq 1 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}$$

Dizisinin enerjisi $\mathcal{E}_{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{2} = \frac{\pi^{2}}{6}$ lup sonludur, ancak dizi mutlak toplanabilir değildir.

Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

Mutlak toplanabilir olmayan sonlu enerjili bir dizinin DTFT'sini hesaplamak için ORTALAMA KARESEL YAKINSAKLIK kullanılır.

Tanım:

$$X_K(e^{j\omega}) = \sum_{n=-K}^{K} x[n]e^{-j\omega n}$$

olmak üzere, $x[n]$'nin DTFT'si $X(e^{j\omega})$ ile $X_k(e^{j\omega})$ arasındaki farkın enerjisi tüm ω değerleri için K sonsuza giderken sıfıra gidiyor yani

$$\lim_{K\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| X(e^{j\omega}) - X_K(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega = 0$$

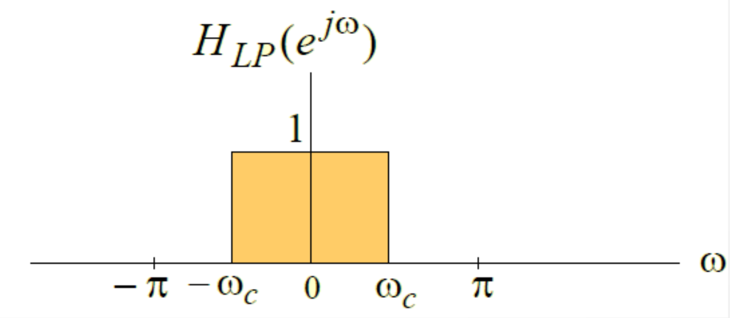
ise $X_k(e^{j\omega})$ ortalama karesel anlamda $X(e^{j\omega})$ 'ya yakınsar.

Mutlak toplanabilir olmayan sonlu enerjili bir dizi durumunda için tüm ω değerleri için K sonsuza giderken hatanın mutlak değeri $|X(e^{j\omega}) - X_k(e^{j\omega})|$ sıfıra gitmeyebilir ve DTFT sonlu olmaz.

Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

Örnek: Aşağıda matematiksel ifadesi ve grafiği verilen DTFT'yi ele alalım.

$$H_{LP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$



Ters DTFT hesaplanırsa

$$h_{LP}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{j\omega_c n}}{jn} - \frac{e^{-j\omega_c n}}{jn}\right) = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty$$

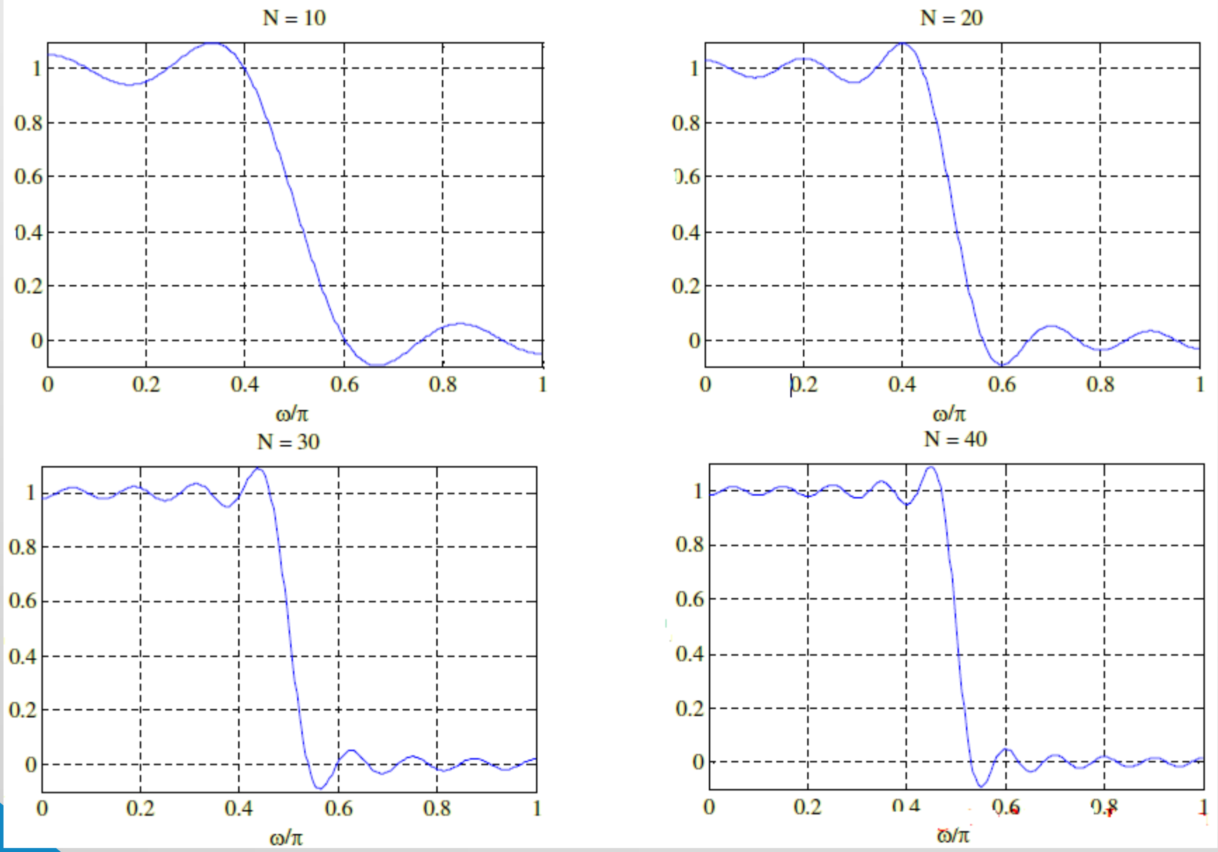
bulunur. $h_{LP}[n]$'nin enerjisi ω_c/π olup sonludur, ancak dizi mutlak toplanabilir değildir. Sonuç olarak, K adet terim kullanılarak hesaplanan DTFT gerçek DTFT'ye karesel ortalama anlamında yakınsar.

Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

$h_{LP}[n]$ dizisinin karesel ortalama yakınsaklığı K adet terim kullanılarak hesaplanan ve

$$H_{LP,K}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-K}^{K} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}$$

ile verilen ifadenin çeşitli K değerleri için grafiklerinden de görülebilir.



Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

- Şekillerden görüldüğü gibi K'nın değerinden bağımsız olarak, $H_{LP,K}(e^{j\omega})$ grafiğinde $\omega = \omega_c$ noktasının her iki tarafında dalgalanmalar vardır.
- K'nın değeri büyüdükçe dalgalanma sayısı da artmaktadır, ancak maksimum dalgalanma denliği K'dan bağımsız olarak sabit kalmaktadır.
- K sonsuza giderken

$$\lim_{K\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| H_{LP}(e^{j\omega}) - H_{LP,K}(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega = 0$$

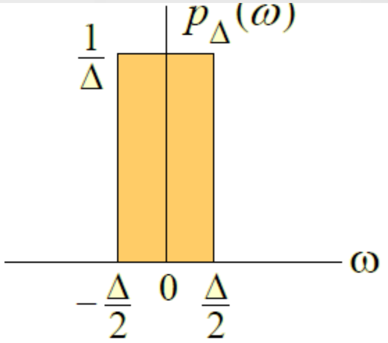
eşitliği geçerli olup $H_{LP,K}(e^{j\omega})$ 'nın $H_{LP}(e^{j\omega})$'ya yakınsadığını göstermektedir.

- $H_{LP,K}(e^{j\omega})$'nın bir süreksizlik noktasında $H_{LP}(e^{j\omega})$'yı karesel ortalama anlamında yaklaşık olarak veren salınımlı davranışı GIBBS OLAYI olarak bilinir.

Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

- DTFT, ne mutlak ne de karesel toplanabilir bazı diziler için de tanımlanabilir.
- Birim basamak dizisi $\mu[n]$, sinüzoidal dizi $\cos(\omega_0 n+\phi)$ ve üstel dizi $Ae^{\alpha n}$ böyle dizilere örnektir.
- Böyle diziler için DIRAC DELTA FONKSİYONU $\delta(\omega)$ kullanılarak DTFT tanımlanır.
- Dirac delta fonksiyonu $\delta(\omega)$, sonsuz genlikli sıfır genişlikli ve altında kalan alan bir olan bir fonksiyondur.
- Dirac delta fonksiyonunu klasik fonksiyonların limit durumu gibi düşünebiliriz. Aşağıda Dirac delta fonksiyonu bir darbenin limit durumu olarak ifade edilmiştir.

$$\lim_{\Delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} p_{\Delta}(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)\,d\omega$$



Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

Örnek: $-\pi \leq \omega_0 \leq \pi$ ve $\delta(\omega)$ Dirac delta fonksiyonu olmak üzere,

$$x[n] = e^{j\omega_o n}$$

üstel dizisinin DTFT'si

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_o + 2\pi k)$$

olarak verilir. Yukarıda verilen DTFT 2π ile periyodiktir ve PERİYODİK İMPULS DİZİSİ olarak bilinir. Verilen DTFT gerçekten de üstel dizinin DTFT'si ise tersi hesaplandığında üstel diziyi vermelidir. Gerekli işlemler aşağıda yapılmıştır.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_o + 2\pi k) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_o) e^{j\omega n} d\omega = e^{j\omega_o n}$$

Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

Sıklıkla kullanılan DTFT çiftleri:

$$\delta[n] \leftrightarrow 1$$

$$1 \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$$

$$e^{j\omega_o n} \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_o + 2\pi k)$$

$$\mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$$

$$\mu[n], (|\alpha| < 1) \leftrightarrow \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

DTFT’nin işaret işleme algoritmalarında faydalı olan önemli özellikleri vardır. İspatları oldukça kolay olan bu özellikler aşağıda tablolar şeklinde verilmiştir.

Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

Tablo 1. Karmaşık bir dizi için DTFT'nin simetri ilişkileri

$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
$x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
$\mathrm{Re}\{x[n]\}$	$X_{\mathrm{cs}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\{X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})\}$
$j\mathrm{Im}\{x[n]\}$	$X_{\mathrm{ca}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\{X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})\}$
$x_{\mathrm{cs}}[n]$	$X_{\mathrm{re}}(e^{j\omega})$
$x_{\mathrm{ca}}[n]$	$jX_{\mathrm{im}}(e^{j\omega})$

Not: $X_{cs}(e^{j\omega})$ ve $X_{ca}(e^{j\omega})$ sırasıyla $X(e^{j\omega})$'nın eşlenik simetrik ve eşlenik anti-simetrik parçalarını göstermektedir. Benzer şekilde, $x_{cs}[n]$ ve $x_{ca}[n]$ sırasıyla $x\,[n]$'in eşlenik simetrik ve eşlenik anti-simetrik parçalarını göstermektedir.

Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

Tablo 2. Gerçel bir dizi için DTFT'nin simetri ilişkileri

$x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X_{re}(e^{j\omega}) + jX_{im}(e^{j\omega})$
$x_{ev}[n]$	$X_{re}(e^{j\omega})$
$x_{od}[n]$	$jX_{im}(e^{j\omega})$
Symmetry relations	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ $X_{re}(e^{j\omega}) = X_{re}(e^{-j\omega})$ $X_{im}(e^{j\omega}) = -X_{im}(e^{-j\omega})$ $\lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert$ $\arg\{X(e^{j\omega})\} = -\arg\{X(e^{-j\omega})\}$

Not: $x_{ev}[n]$ ve $x_{od}[n]$ sırasıyla $x[n]$'in çift ve tek parçalarını göstermektedir.

Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

Tablo 3. DTFT'nin genel özellikleri

Type of Property	Sequence	Discrete-Time Fourier Transform
	$g[n]$ $h[n]$	$G(e^{j\omega})$ $H(e^{j\omega})$
Linearity	$\alpha g[n] + \beta h[n]$	$\alpha G(e^{j\omega}) + \beta H(e^{j\omega})$
Time-shifting	$g[n - n_o]$	$e^{-j\omega n_o} G(e^{j\omega})$
Frequency-shifting	$e^{j\omega_o n} g[n]$	$G\left(e^{j(\omega-\omega_o)}\right)$
Differentiation in frequency	$ng[n]$	$j\dfrac{dG(e^{j\omega})}{d\omega}$
Convolution	$g[n] \circledast h[n]$	$G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$
Modulation	$g[n]h[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\theta})H(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$
Parseval's relation	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]h^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})\,d\omega$	

Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

Örnek: $y[n]=(n+1)\alpha^n\mu[n],\ |\alpha|<1$ dizisinin DTFT'sini hesaplayalım. *x*[*n*] dizisini olarak tanımlarsak

$$x[n]=\alpha^n\mu[n],\ |\alpha|<1$$

y[*n*] dizisi $y[n]=n\,x[n]+x[n]$ şeklinde yazılabilir.

Tablodan *x*[*n*]'nin DTFT'sinin $X(e^{j\omega})=\dfrac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$ olduğunu biliyoruz. Yine tablodan

DTFT'nin türev alma özelliğinden *nx*[*n*]'nin DTFT'si *x*[*n*]'nin DTFT'sinin türevine eşittir:

$$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}=j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)=\frac{\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$$

Son olarak, DTFT'nin doğrusallık özelliğinden *x*[*n*]'nin DTFT'si *nx*[*n*] ile *x*[*n*]'nin DTFT'lerinin toplamına eşittir:

$$Y(e^{j\omega})=\frac{\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}+\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}=\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$$

Ayrık-Zaman Fourier Dönüşümü

Örnek: $d_0 v[n] + d_1 v[n-1] = p_0 \delta[n] + p_1 \delta[n-1]$ denklemi ile tanımlanan $v[n]$ dizisinin DTFT'sini hesaplayalım.

$\delta[n]$'nin DTFT'si 1'dir. DFTF'nin öteleme özelliğinden $\delta[n-1]$'nin DTFT'si $e^{-j\omega}$ olur. Yine, öteleme özelliğinden $v[n]$'nin DTFT'si $V(e^{j\omega})$ ise $v[n-1]$'in DTFT'si $e^{-j\omega} V(e^{j\omega})$ olur.

Bu bilgiler ışığında fark denkleminin her iki tarafının DTFT'si alınırsa

$$d_0 V(e^{j\omega}) + d_1 e^{-j\omega} V(e^{j\omega}) = p_0 + p_1 e^{-j\omega}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem $V(e^{j\omega})$ için çözülürse

$$V(e^{j\omega}) = \frac{p_0 + p_1 e^{-j\omega}}{d_0 + d_1 e^{-j\omega}}$$

bulunur.

Enerji Yoğunluk Spektrumu

Tanım: Ayrık-zaman $g[n]$ işaretinin toplam enerjisi E_g

$$\mathcal{E}_g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|g[n]\right|^2$$

olarak tanımlanır.

Tablodaki Parseval ilişkisinden

$$\mathcal{E}_g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|g[n]\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|G(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

yazılabilir. Yukarıdaki ifadede

$$S_{gg}(\omega) = \left|G(e^{j\omega})\right|^2$$

fonksiyonuna ENEJİ YOĞUNLUK SPEKTRUMU denir. Enerji yoğunluk spektrumunun $-\pi \leq \omega \leq \pi$ aralığında altında kalan alanın 2π 'ye bölünmesi ile işaretin enerjisi elde edilir.

Ayrık-Zaman Band-Sınırlı İşaretler

- Ayrık-zaman işaretlerin spektrumu 2π ile priyodik olduğundan ayrık-zaman, sonlu enerjili TAM-BAND bir işaretin spektrumu $-\pi < \omega < \pi$ ile verilen tüm frekans aralığında bileşenlere sahiptir.

- Ayrık-zaman BAND-SINIRLI bir işaret $-\pi < \omega < \pi$ ile verilen tüm frekans aralığının sadece bir kısmında sıfırdan farklı bileşenlere sahiptir.

- İdeal band-sınırlı bir işaretin spektrumu $0 < \omega_a \leq |\omega| \leq \omega_b < \pi$ sonlu frekans aralığının dışında ssıfırdır.

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\omega| < \omega_a \\ 0, & \omega_b < |\omega| < \pi \end{cases}$$

Ancak, pratikte ideal band-sınırlı bir işaret üretmek mümkün değildir.

Ayrık-Zaman Band-Sınırlı İşaretler

Band-sınırlı ayrık-zaman işaretler, işaretin spektrumunun yoğunlaştığı frekans aralığına göre sınıflandırılır.

Ayrık-zaman ALÇAK GEÇİREN bir işaretin spektrumu 0 < $|\omega| \leq \omega_p < \pi$ aralığında sıfırdan farklıdır. ω_p' ye işaretin BANDGENİŞLİĞİ denir.

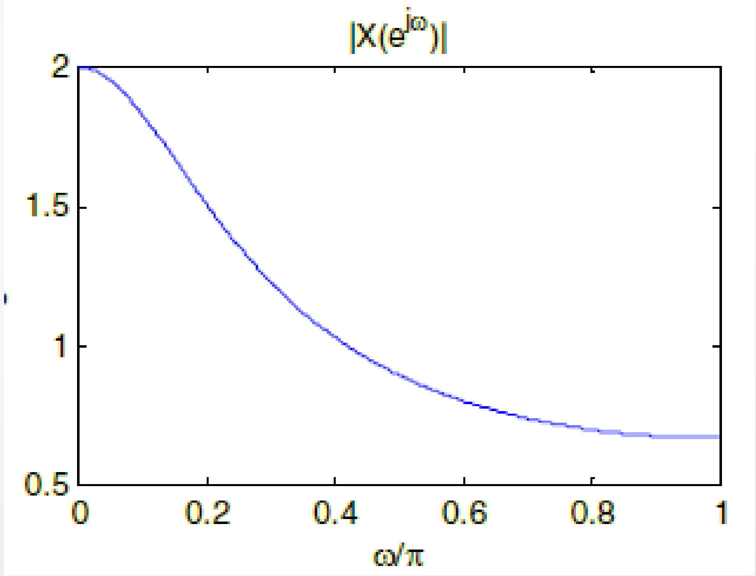
Ayrık-zaman YÜKSEK GEÇİREN bir işaretin spektrumu 0 < $\omega_p \leq |\omega| < \pi$ aralığında sıfırdan farklıdır. İşaretin BANDGENİŞLİĞİ π - ω_p ye eşittir.

Ayrık-zaman BAND GEÇİREN bir işaretin spektrumu 0 < $\omega_L \leq |\omega| \leq \omega_H < \pi$ aralığında sıfırdan farklıdır. İşaretin BANDGENİŞLİĞİ ω_L- ω_H' dir.

Ayrık-Zaman Band-Sınırlı İşaretler

Örnek: $x[n] = (0.5)^n \mu[n]$ dizisinin DTFT'si ve genlik spektrumu aşağıda verilmiştir.

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\omega}}$$



Alçak geçiren bu işaretin enerjisinin enerjisinin % 80' ninin $0 \le |\omega| \le 0.5081\pi$ aralığında olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla, % 80 bandgenişliğini 0.5081π olarak tanımlayabiliriz.

Enerji Yoğunluk Spektrumu

Örnek:

$$h_{LP}[n]=\frac{\sin\omega_c n}{\pi n},\quad -\infty<n<\infty$$

olarak verilen dizinin enerjisini hesaplayalım. Parseval ilişkisinden

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h_{LP}[n]\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|H_{LP}(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

Dizinin DTFT'sinin

$$H_{LP}(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & 0\le|\omega|\le\omega_c\\ 0, & \omega_c<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

olduğunu göstermek zor değildir. O halde,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h_{LP}[n]\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega=\frac{\omega_c}{\pi}<\infty$$

Verilen dizi sonlu enerjili alçak geçiren bir işarettir.

MATLAB Kullanılarak DTFT Hesaplanması

freqz fonksiyonu kullanılarak bir dizinin rasyonel bir fonksiyon olarak

$$X(e^{j\omega}) = \frac{p_0 + p_1 e^{-j\omega} + \dots + p_M e^{-j\omega M}}{d_0 + d_1 e^{-j\omega} + \dots + d_N e^{-j\omega N}}$$

şeklinde verilen DTFT'si verilen frekans noktalarında hesaplanılabilir.

Örneğin, w 0 ila 2π aralığında belirtilen frekanslardan oluşan bir vektör olmak üzere

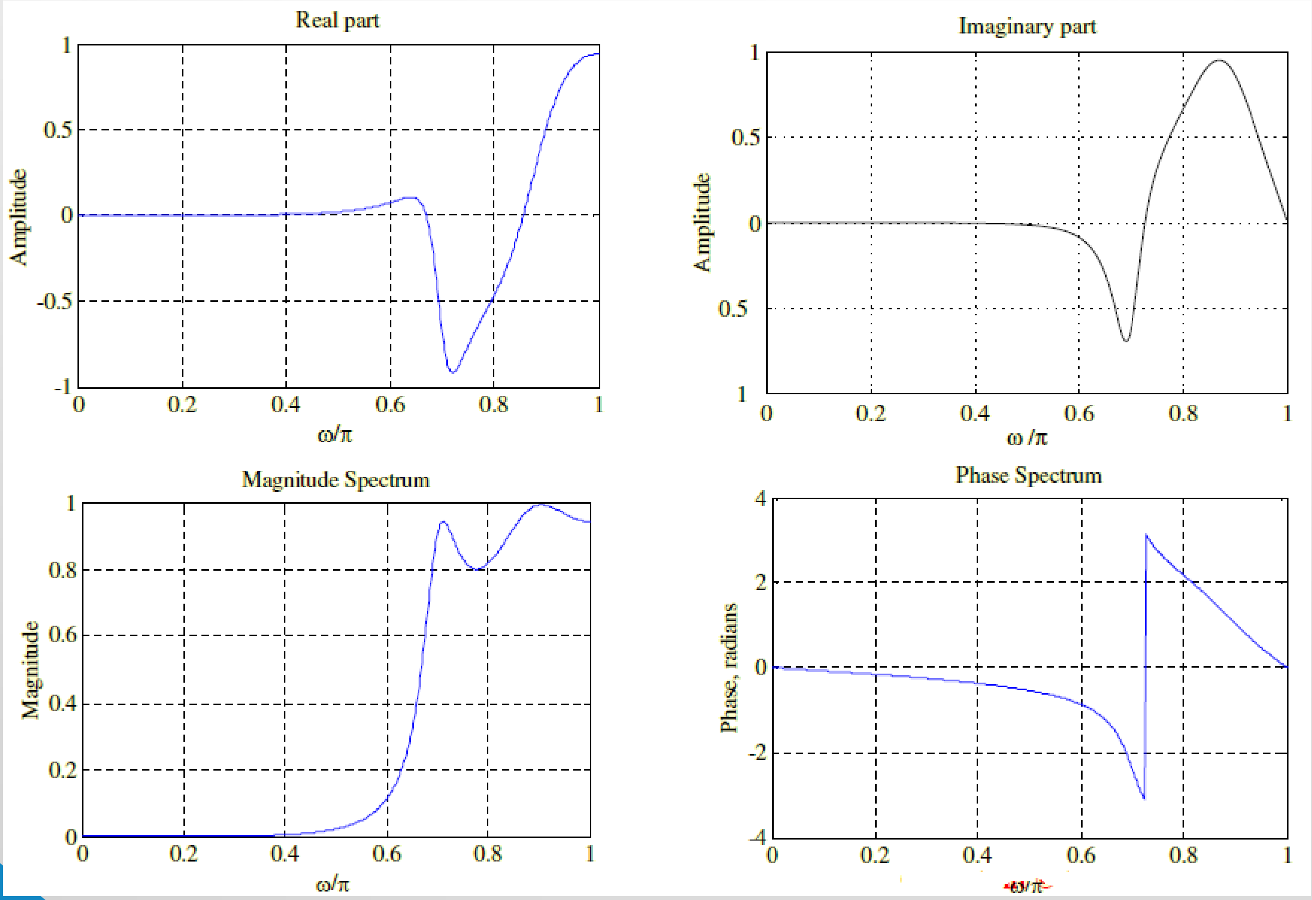
H = freqz (num, den, w)

komutu, pay ve payda polinomu katsayıları sırasıyla num ve den vektörlerinde tanımlanmış DTFT'yi H vektörü olarak verir.

freqz fonksiyonunun başka şekilleri de vardır. freqz fonksiyonu ile DTFT hesaplandıktan sonra gerçel ve sanal kısımlar ile genlik ve faz spektrumları hesaplanabilir. Aşağıda bir örnek verilmiştir.

MATLAB Kullanılarak DTFT Hesaplanması

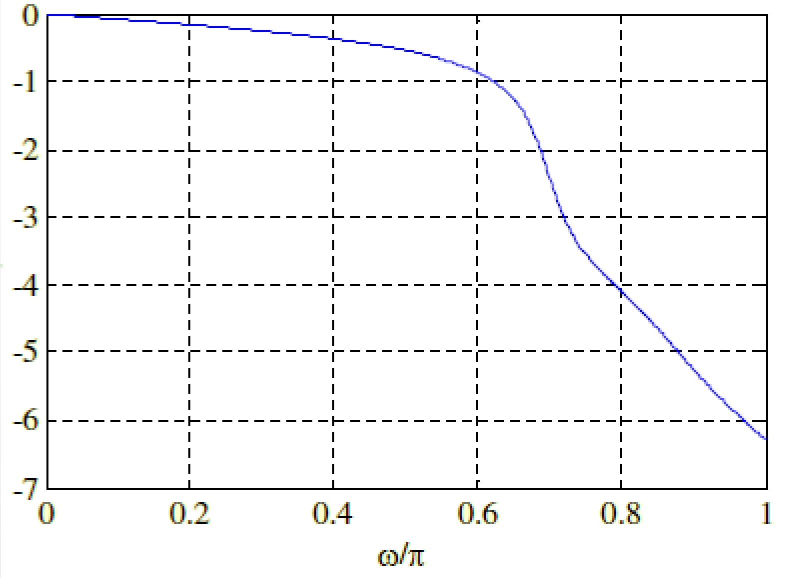
$$X(e^{j\omega})=\frac{0.008-0.033e^{-j\omega}+0.05e^{-j2\omega}-0.033e^{-j3\omega}+0.008e^{-j4\omega}}{1+2.37e^{-j\omega}+2.7e^{-j2\omega}+1.6e^{-j3\omega}+0.41e^{-j4\omega}}$$



MATLAB Kullanılarak DTFT Hesaplanması

Faz spektrumunun $\omega = 0.72$ noktasında 2π kadar süreksizliğe sahip olduğu görülmektedir.

Bu süreksizlik MATLAB'in bir fonksiyonu olan unwrap kullanılarak giderilebilir. Sonuç olarak, süreksizliği giderilmiş faz fonksiyonu



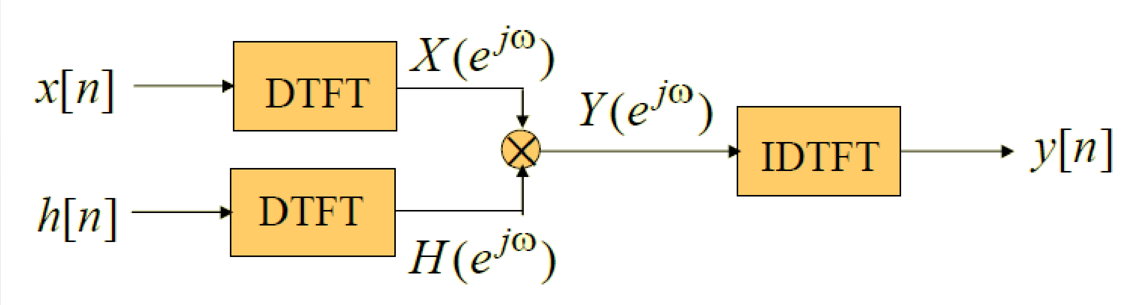
şeklinde olur.

DTFT Kullanılarak Doğrusal Konvolüsyonun Hesaplanması

DTFT’nin konvolüsyon özelliğne göre, zaman uzayında konvolüsyon frekans uzayında çarpmaya karşılık gelmektedir. Bu özelliğe göre, iki dizinin konvolüsyonu aşağıdaki adımlar izlenerek hesaplanabilir:

1. Dizilerin DTFT’leri hesaplanır.
2. DTFT’ler çarpılır.
3. Çarpımın ters DTFT’si hesaplanarak konvolüsyon hesaplanmış olur.

Bu işlemler, blok diyagram olarak



şeklinde gösterilebilir.

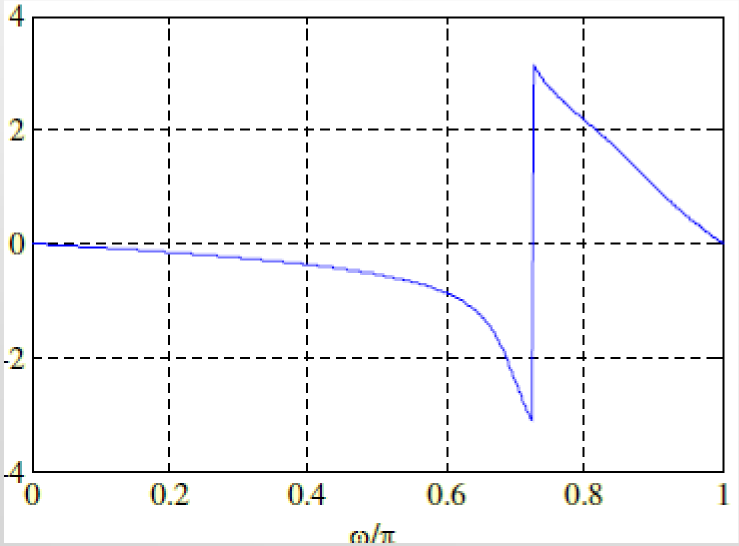
Faz Spektrumunun Düzeltilmesi

Sayısal hesaplamalarda, faz fonksiyonu [-π, π] aralığının dışında değerler aldığında değerleri bu aralığın içine getirmek için faz fonksiyonu mod 2 aritmetiğinde hesaplanır.

Bu nedenle, bazı dizilerin faz spektrumu 2π süreksizliği gösterir. Örneğin,

$$X(e^{j\omega})=\frac{0.008-0.033e^{-j\omega}+0.05e^{-j2\omega}-0.033e^{-j3\omega}+0.008e^{-j4\omega}}{1+2.37e^{-j\omega}+2.7e^{-j2\omega}+1.6e^{-j3\omega}+0.41e^{-j4\omega}}$$

fonksiyonunun faz spektrumunda aşağıda gösterildiği gibi $\omega = 0.72$'de 2π süreksizliği vardır.

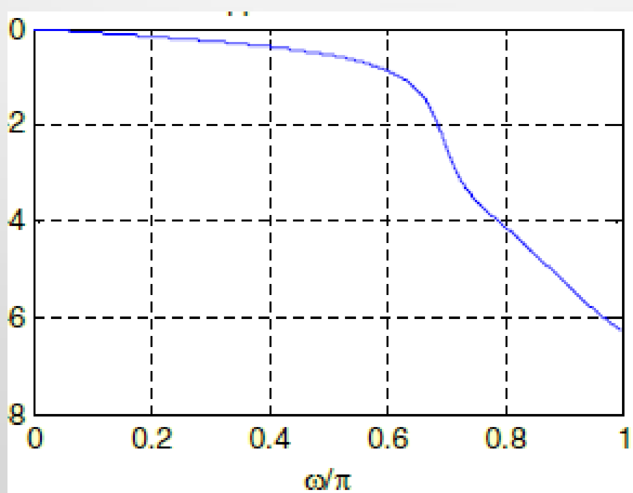


Faz Spektrumunun Düzeltilmesi

- Bazı dizilerin DTFT'si faz spektrumlarında 2π süreksizliği gösterir.

- Bu durumlarda, faz spektrumu için sürekli olan alterntif bir faz spektrumu kullanılır. Alternatif spektrum, orijinal faz spektrumundaki 2π süreksizlikleri yok edilerek elde edilir.

- Süreksizliklerin yok edilmesinden sonra oluşturulan faz spektrumu $\theta_c(\omega)$ ile gösterilir.
- MATLAB'de faz düzeltilmesi amacıyla unwrap fonksiyonu vardır. Örneğin, önceki sayfada gösterilen faz fonksiyonunun unwrap ile sürekli fonksiyon haline getirilmişi şöyledir:



Faz Spektrumunun Düzeltilmesi

Faz fonksiyonunun sürekli olması için gerekli koşulları çıkartalım. *x*[*n*] dizisinin DTFT'sinin her iki tarafının doğal logaritması alınırsa

$$\ln X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| + j\theta(\omega)$$

elde edilir. *ln X*($e^{j\omega}$) var ise, ω'ya göre türevi de vardır ve

$$\frac{d\ln X(e^{j\omega})}{d\omega} = \frac{1}{X(e^{j\omega})}\left[\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\right] = \frac{1}{X(e^{j\omega})}\left[\frac{dX_{\mathrm{re}}(e^{j\omega})}{d\omega} + j\frac{dX_{\mathrm{im}}(e^{j\omega})}{d\omega}\right]$$

şeklinde veya eşdeğer olarak

$$\frac{d\ln X(e^{j\omega})}{d\omega} = \frac{d\left|X(e^{j\omega})\right|}{d\omega} + j\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$$

ifadesinden hesaplanır. O halde, $d\theta(\omega)/d\omega$, türevin sanal kısmına eşittir:

$$\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{\left|X(e^{j\omega})\right|^2}\Big[X_{\mathrm{re}}(e^{j\omega})\frac{dX_{\mathrm{im}}(e^{j\omega})}{d\omega} - X_{\mathrm{im}}(e^{j\omega})\frac{dX_{\mathrm{re}}(e^{j\omega})}{d\omega}\Big]$$

Faz Spektrumunun Düzeltilmesi

O halde, faz fonksiyonunu (θ (o) = o başlangıç koşulu ile) türevinden hesaplayabiliriz.

$$\theta(\omega) = \int_0^{\omega} \left[\frac{d\theta(\eta)}{d\eta}\right] d\eta$$

Yukarıdaki integralle hesaplanan faz fonksiyonu düzeltilmiş faz fonksiyonudur ve *ln X*($e^{j\omega}$) var ise sürekli bir fonksiyondur.

Ayrıca,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{d\theta(\eta)}{d\eta}\right] d\eta = 0$$

ise faz fonksiyonu tek bir fonksiyondur. Yukarıdaki koşul sağlanmadığında düzeltilmiş faz π'den büyük mutlak sıçramalar içerir.

Frekans Yanıtı

Pratikte karşılaşılan çoğu ayrık-zaman işaretler, farklı açısal frekanslı çok veya sonsuz sayıda ayrık-zaman sinüzoidal işaretlerin toplamı olarak yazılabilir.

O halde, LTI sistemin sinüzoidal bir giriş için yanıtı biliniyorsa doğrusallık özelliği kullanılarak sistemin daha karmaşık girişlere olan yanıtı belirlenebilir.

LTI bir sistemin önemli bir özelliği, ÖZ FONKSİYONLAR olarak bilinen belirli girişler için sistemin çıkışının girişin karmaşık bir sabitle çarpımına eşit olmasıdır.

Aşağıda böyle bir öz fonksiyon verilmiştir.

Frekans Yanıtı

İmpuls yanıtı $h[n]$ olan bir ayrık-zaman LTI sistemin girişi-çıkış ilişkisinin konvolüsyon toplamı ile verildiğini hatırlayınız:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Sistemin $x[n] = e^{j\omega n}$, girişine olan yanıtı

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}$$

olacaktır. $H(e^{j\omega})$ fonksiyonunu

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

şeklinde tanımlarsak çıkış $y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ olur. O halde, karmaşık üstel dizi $e^{j\omega n}$ için sistemin çıkışı da $H(e^{j\omega})$ karmaşık sabiti ile çarpılmış aynı frekanslı karmaşık üstel dizidir. Yani, $e^{j\omega n}$ sistemin öz fonksiyonudur.

Frekans Yanıtı

- $H(e^{j\omega})$ fonksiyonuna ayrık-zaman LTI sistemin FREKANS YANITI denir. Frekans yanıtı, sistemin frekans uzayındaki tanımını verir.
- $H(e^{j\omega})$, sistemin impuls yanıtı $\{h[n]\}$'nin DTFT'sine eşittir. Dolayısıyla, genelde karmaşık değerli bir fonksiyon olup 2π ile periyodiktir.
- Frekans yanıtı, gerçel ve sanal kısımlarıyla veya alternatif olarak genlik ve fazıyla ifade edilebilir:

$$H(e^{j\omega}) = H_{re}(e^{j\omega}) + j\,H_{im}(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\theta(\omega)}$$

- $|H(e^{j\omega})|$ fonksiyonuna GENLİK YANITI, $\theta(\omega)$ fonksiyonuna da FAZ YANITI denir.
- Çoğu uygulamada, ayrık-zaman LTI sistemlerin tasarım özellikleri genlik ve faz yanıtları cinsinden verilir.

Frekans Yanıtı

- Bazı durumlarda, genlik yanıtı desibel cinsinden

$$G(\omega) = 20\log_{10}\left|H(e^{j\omega})\right| \quad dB$$

olarak belirtilir. $G(\omega)$'ya KAZANÇ FONKSİYONU denir.

- Kazanç fonksiyonunun negatifi $A(\omega)$'ya ZAYIFLAMA veya KAYIP FONKSİYONU denir.

- Genlik ve faz yanıtlarının gerçel fonksiyonlar, frekans yanıtının ise karmaşık bir fonksiyon olduğuna dikkat ediniz.

- DTFT'nin özelliklerinden $h[n]$ gerçel ise, genlik yanıtı çift, faz yanıtı ise tek bir fonksiyondur.

  - $|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|$, $\theta(\omega) = \theta(-\omega)$

- Benzer bir şekilde, $h[n]$ gerçel ise $H_{re}(e^{j\omega})$ çift, $H_{im}(e^{j\omega})$ tek bir fonksiyondur.

Frekans Yanıtı

Örnek: *M*-nokta kayan ortalama alıcı filtrenin frekans yanıtını hesaplayalım.

$$h[n] = \begin{cases} 1/M, & 0 \le n \le M-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{M}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n} - \sum_{n=M}^{\infty} e^{-j\omega n}\right)$$

$$= \frac{1}{M}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n}\right)\left(1 - e^{-jM\omega}\right) = \frac{1}{M}\cdot\frac{1-e^{-jM\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{1}{M}\cdot\frac{\sin(M\omega/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(M-1)\omega/2}$$

O halde, *M*-nokta kayan ortalama alıcı filtrenin genlik ve faz yanıtları şöyledir:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|\frac{1}{M}\cdot\frac{\sin(M\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right|$$

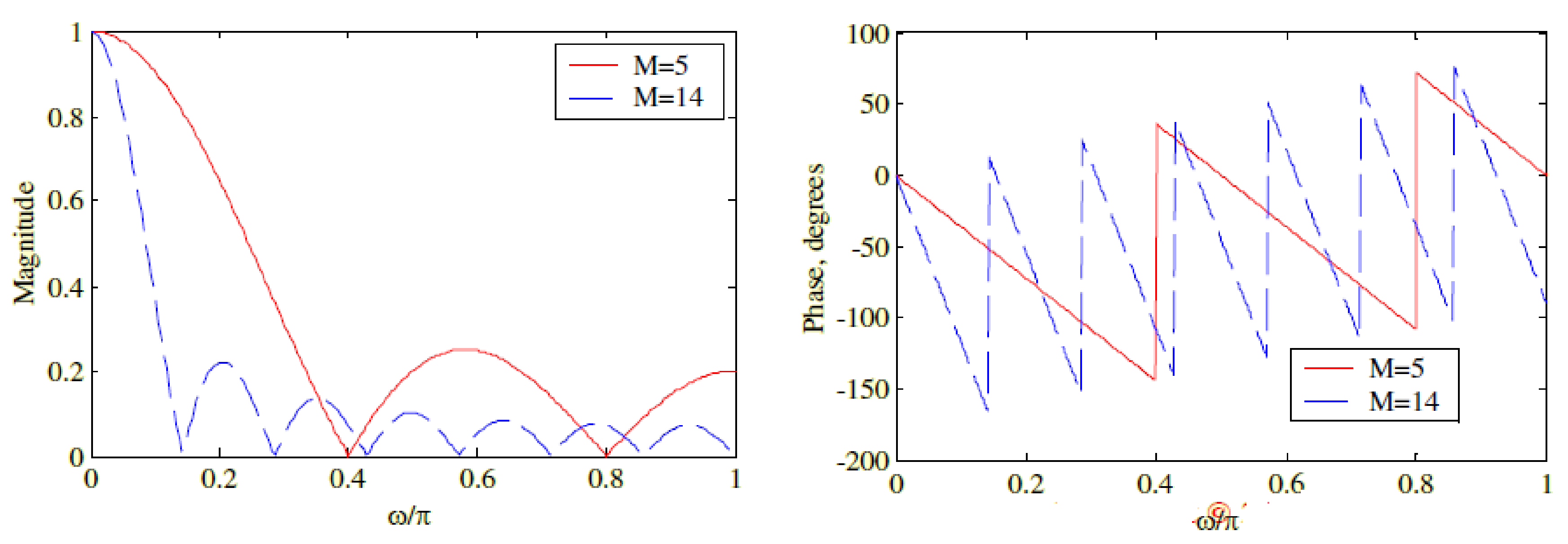
$$\theta(\omega) = -\frac{(M-1)\omega}{2} + \pi\sum_{k=0}^{\lfloor M/2 \rfloor}\mu\left(\omega - \frac{2\pi k}{M}\right)$$

MATLAB Kullanılarak Frekans Yanıtının Hesaplanması

freqz (h, 1, w) fonksiyonu kullanılarak verilen frekans noktalarında frekans yanıtı vektörü h belirlenebilir.

h vektöründen frekans yanıtının gerçel ve sanal kısımları real ve imag fonksiyonları, genlik ve faz yanıtları ise abs ve angle fonksiyonları kullanılarak hesaplanabilir.

Örneğin, *M*-nokta kayan ortalama alıcı filtrenin genlik ve faz yanıtları aşağıda gösterilmiştir.



MATLAB Kullanılarak Frekans Yanıtının Hesaplanması

- Bir ayrık-zaman sisteminin faz yanıtı, bilgisayarla hesaplandığında ters tanjant fonksiyonundan dolayı 2π miktarında sıçramalar gösterebilir.

- Bu süreksizlikler giderilerek faz yanıtı sürekli hale getirilebilir.

- Bu amaçla MATLAB'de unwrap fonksiyonu vardır. Bu fonksiyon, fazın radyan cinsinden hesaplandığını varsaymaktadır.

- 2π miktarında sıçramaların M-nokta kayan ortalama alıcı filtrenin faz yanıtı grafiğinde görüldüğü frekans yanıtının sıfırlarından kaynaklanan sıçramalarla karıştırılmamasına dikkat edilmelidir.