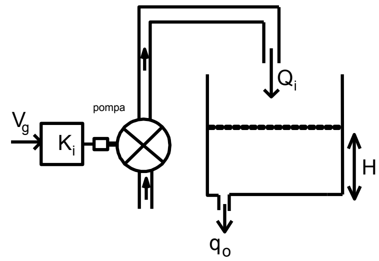
Otomatik Kontrol Vize Sınavı **24.04.2014**

S-1)Açık çevrim transfer fonksiyonu $G(s)=\dfrac{1}{s+1}$ olarak verilen sistem, ayrık zaman sayısal kontrolcü ile kontrol edilmek istenmektedir.

i) Kontrolcü D(z) olmak üzere kapalı çevrim kontrol blok diyagramını gerekli çevre birimleri ile birlikte çiziniz.
ii) D(z)=1 olmak üzere, ayrık-zaman kapalı çevrim transfer fonksiyonunu elde ediniz. (Örnekleme zamanı T=0.1s)

S-2) Yanda verilen sıvı seviye sistemini tanımlayan lineer olmayan diferansiyel denklem



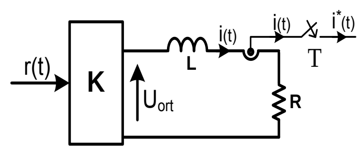
$$\frac{dH(t)}{dt}=k_1V_g-k_2\sqrt{2gH(t)}$$

olarak verilmektedir.

a) $H(t)=H_0$ ve $V_g(t)=V_0$ çalışma noktaları için sistemi lineerleştiriniz ve durum denklemini vektör matris formu $\left(\dfrac{\Delta H(t)}{\Delta t}=A^*\Delta H(t)+B^*\Delta V_g(t)\right)$ yazınız ve transfer fonksiyonunu elde ediniz.

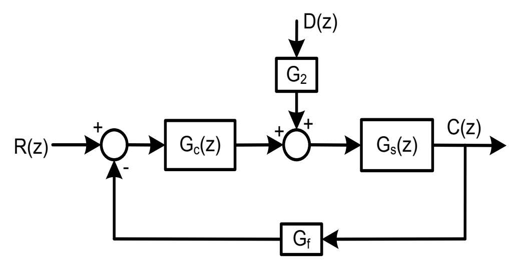
b) Kontrolcü $G_c(s)$ olmak üzere kapalı çevrim blok diyagramını çiziniz.

S-3) Verilen şekilde r(t) = 2u(t), K=0.5, L=1H ve $R_L=1\Omega$ olmak üzere, ölçülen akım T=0.1s örnekleme zamanı ile örneklenmektedir.



a) Gerekli denklemleri t-domeninde yazınız.
b) I(z) ve i(k) 'yı elde ediniz.
c) k=10 için i(10) akım değerini hesap ediniz.

S-4) Yanda verilen sistem için



a) $G_2(z)=\dfrac{1.5z+0.35}{z-0.5}$,

$G_c(z)=\dfrac{6.06z+5.3}{z-1}$ $G_f(z)=1$ve $G_s(z)=\dfrac{0.04}{z-0.95}$

olarak verilmektedir.

C(z) = ? ifadesini $G_s(z), G_2(z), G_f(z)$ ve $G_c(z)$ bağlı olarak elde ediniz.

b) $R(z)=0$ ve bozucu giriş $D(z)=\dfrac{z}{z-1}$ olmak üzere $C_D(\infty)=C(\infty)=?$ değerini hesaplayınız.

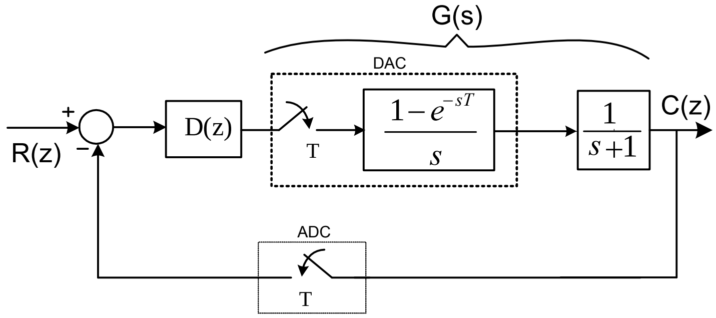
c)

$$x(k)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_i)^m X(z)z^{k-1}\right]_{z=z_i} \qquad X(z)=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[(s-s_i)^m X(s)\frac{z}{z-e^{sT}}\right]_{s=s_i}\right\}$$

$$A^*=\left[\frac{\partial f_1}{\partial H(t)}\right]_{H_0,V_0}, \quad B^*=\left[\frac{\partial f_1}{\partial V_g(t)}\right]_{H_0,V_0} \qquad C(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)C(z)$$

Süre **100**dk, ***Başarılar…***
Prof.Dr.Ayhan ÖZDEMİR
Yrd.Doç.Dr.İrfan YAZICI

Cevap 1: a)



b) $T(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)}$ $\quad G(z)=Z\{G(s)\}=Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s(s+1)}\right\}$ z-dönüşümü uygulanır.

$$G(z)=Z\{G(s)\}=Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s(s+1)}\right\}=\left(1-e^{-sT}\right)\left\{\cancel{s}\,\frac{1}{\cancel{s}(s+1)}\frac{z}{z-e^{sT}}\bigg|_{s=0}+\cancel{(s+1)}\,\frac{1}{s\,\cancel{(s+1)}}\frac{z}{z-e^{sT}}\bigg|_{s=-1}\right\}$$

$$=\left(\frac{z-1}{z}\right)\left\{\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-0.9048}\right\}=\left\{1-\frac{z-1}{z-0.9048}\right\}=\frac{\cancel{z}-0.9048\cancel{-z}+1}{z-0.9048}$$

$G(z)=\frac{0.0952}{z-0.9048}$ ve $D(z)=1$ verilmiştir. $T(z)$ ifadesinde yerlerine koyulur.

$$T(z)=\frac{\frac{0.0952}{z-0.9048}}{1+\frac{0.0952}{z-0.9048}}$$ düzenlenir ise $$T(z)=\frac{\frac{0.0952}{z-0.9048}}{1+\frac{0.0952}{z-0.9048}}$$

$T(z)=\frac{0.0952}{z-0.8096}$ olarak elde edilir.

Cevap 2: Sıvı seviye kontol sistemini tanımlayan Lineer olmayan diferansiyel denklem

$$f_1 = \frac{dH(t)}{dt} = k_1 V_g - k_2\sqrt{2gH(t)}$$ olarak verilmiştir. Durum denklemini

$\frac{\Delta H(t)}{\Delta t} = A^*\Delta H(t) + B^*\Delta V_g(t)$ vektör matris formunda yazabilmek için A^* ve B^* matrislerinin elde edilmesi gerekir.

$A^* = \left[\frac{\partial f_1}{\partial H(t)}\right]_{H_0,V_0}$, $B^* = \left[\frac{\partial f_1}{\partial V_g(t)}\right]_{H_0,V_0}$ olduğu göz önüne alınır ise,

$$\frac{\partial f_1}{\partial H(t)} = -k_2\frac{2g}{2}\left(2gH(t)\right)^{-\frac{1}{2}}\Bigg|_{H_0,V_0} = -\frac{k_2\, g}{\sqrt{2gH_0}}$$ ise

$$B^* = \left[\frac{\partial f_1}{\partial V_g(t)}\right]_{H_0,V_0} = k_1$$

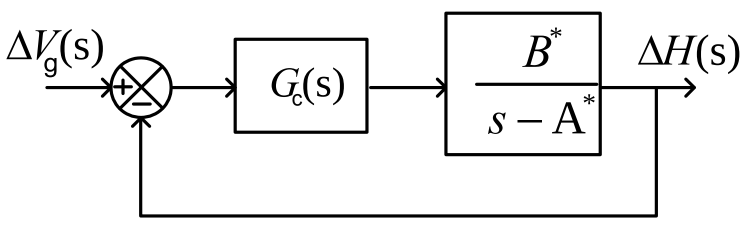
$A^* = -\frac{k_2 g}{\sqrt{2gH_0}}$ ve $B^* = k_1$ elde edilir.

$\frac{\Delta H(t)}{\Delta t} = A^*\Delta H(t) + B^*\Delta V_g(t)$ ise Laplace dönüşümü alınır,

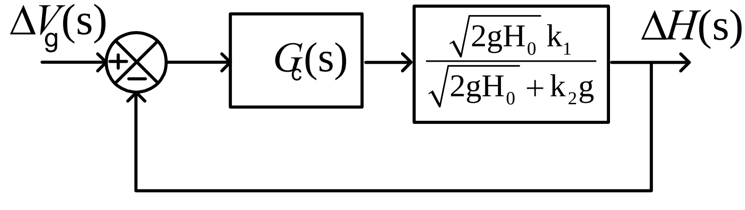
$s\Delta H(s) = A^*\Delta H(s) + B^*\Delta V_g(s)$ transfer fonksiyonu

$$\frac{\Delta H(s)}{\Delta V_g(s)} = \frac{B^*}{s - A^*} = \frac{k_1}{s + \frac{k_2 g}{\sqrt{2gH_0}}} = \frac{\sqrt{2gH_0}\; k_1}{\sqrt{2gH_0} + k_2 g}$$ olarak elde edilir.

$D(s)$ kontrolör olmak üzere sürekli-zaman kapalı çevrim kontrol blok diyagramını çiziniz.



Sürekli-zaman kapalı çevrim kontrol blok diyagramını



Cevap 3:

t-domeni denklemler **S-domeni denklemler**

1- $U_{ort}(t) = K\,r(t)$ $U_{ort}(s) = K\,R(s)$

2- $U_{ort}(t) = R\,i(t) + L\dfrac{di(t)}{dt}$ $U_{ort}(s) = R\,I(s) + sLI(s)$ ise $I(s) = \dfrac{U_{ort}(s)}{sL+R}$ elde edilir. $U_{ort}(s)$

eşitliği $I(s)$ ifadesinde yerine koyulur ise, $I(s) = \dfrac{K}{sL+R}\,R(s)$ olarak elde edilir.

$r(t) = 2u(t)$ ise $R(s) = \dfrac{2}{s}$ dir. $I(s) = \dfrac{K}{sL+R}\,\dfrac{2}{s}$ olur. Parametre değerleri yerleine yazılır ise,

$I(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$ olur. Devre çıkışında örneklenmiş akım sorulduğundan $I(s)^* = \left[\dfrac{1}{s(s+1)}\right]^*$ yani

$I(z) = Z\left\{\dfrac{1}{s(s+1)}\right\}$ $z-$dönüşümü uygulanır.

$$I(z) = Z\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \cancel{s}\,\frac{1}{\cancel{s}\,(s+1)}\,\frac{z}{z-e^{sT}}\bigg|_{s=0} + \cancel{(s+1)}\,\frac{1}{s\,\cancel{(s+1)}}\,\frac{z}{z-e^{sT}}\bigg|_{s=-1}$$

$I(z) = \dfrac{z}{z-1} - \dfrac{z}{z-e^{-1}}$ ise $I(z) = \dfrac{z}{z-1} - \dfrac{z}{z-0.9048}$ olarak elde edilir.

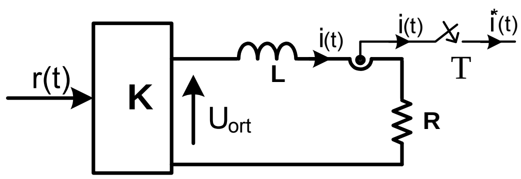
$i(k)$ ise $I(z)$ ifadesinin ters Z-dönüşümü ile elde edilir.

$$i(k) = Z^{-1}\{I(z)\} = \cancel{(z-1)}\,\frac{\cancel{z}}{\cancel{z-1}}\,z^{k\cancel{-1}}\bigg|_{z=1} - \cancel{(z-0.9048)}\,\frac{\cancel{z}}{\cancel{z-0.9048}}\,z^{k\cancel{-1}}\bigg|_{z=0.9048}$$

$i(k) = 1^k - 0.9048^k$ olarak elde edilir.

$k = 10$ için $I(10) = 1^{10} - 0.9048^{10} = 0.6321$ Amper olarak hesap edilir.

Bilgi amaçlı genişletilmiş soru çözümü:



Şekilde sürekli zaman akım $i(t)$ ve T=0.1 sn ile örneklenmiş akım $i(t)^*$ dir. I(k) elde edilmişti. Aşağıda i(t) elde edilecek ve grafik çizimleri verilecektir.

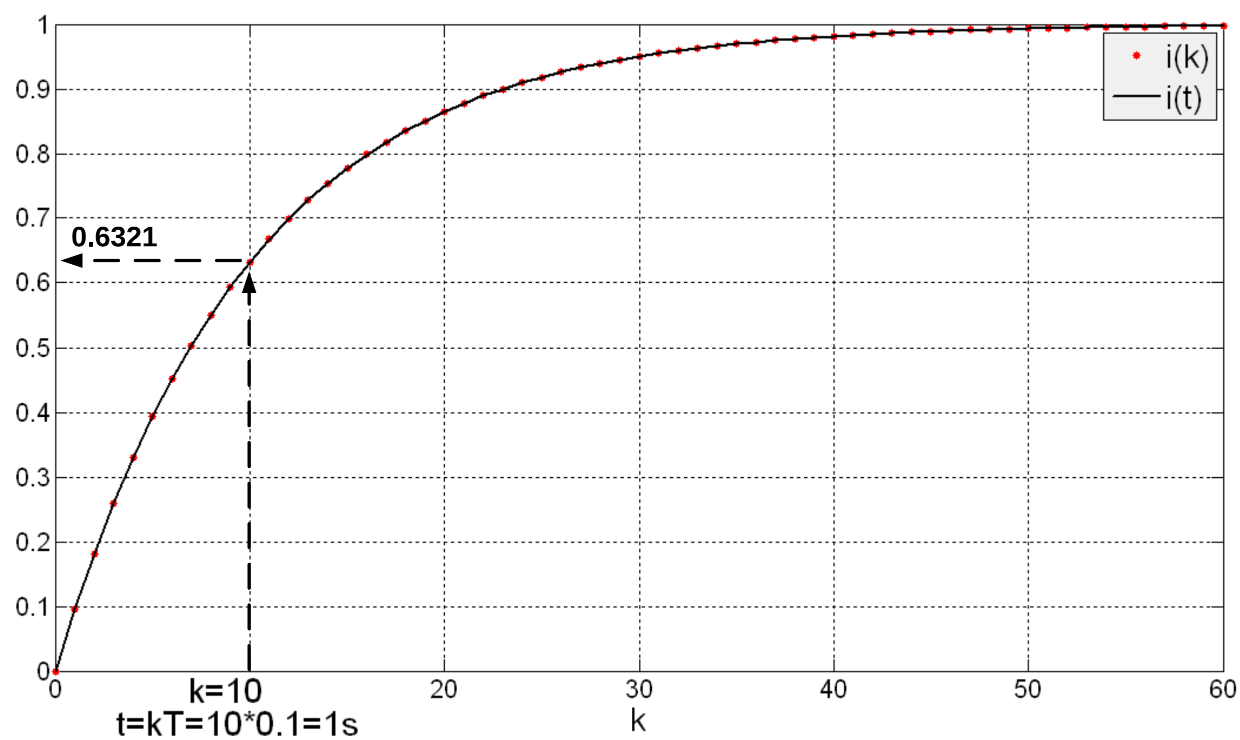
NOT: Aynı soru için sürekli zaman için çözüm yapılırak doğrulaması aşağıda verilmiştir.

$$I(s)=\frac{1}{s(s+1)} \quad \text{ise} \quad i(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}=\cancel{s}\,\frac{1}{\cancel{s}(s+1)}e^{st}\Big|_{s=0}+\cancel{(s+1)}\,\frac{1}{s\,\cancel{(s+1)}}e^{st}\Big|_{s=-1}$$

$$i(t)=1-e^{-t}$$

sürekli zamanda akım ifadesi elde edilir.

k=10 için $t=kT=10*0.1=1\text{sn}$ olur. Denklemde yerine koyulur ise, $i(1)=1-e^{-1}=0.6321\,\text{Amper}$ olarak hesap edilir.



i(t) ve i(k) aynı grafik ekranında çizimi.

Bilgi amaçlı İkinci Yol: zaman domeninde fonksiyon biliniyor ise Z-dönüşüm , $\mathrm{t}=\mathrm{kT}$ yazılır ve

$\sum_{k=n_1}^{n_2} q^n = \frac{q^{n_1} - q^{n_2+1}}{1-q}$, $1 \neq q$, eşitliği gözönüne alınarak, T=0.1 sn için, tek taraflı z-dönüşümü $F(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT) z^{-k}$ yapılır.

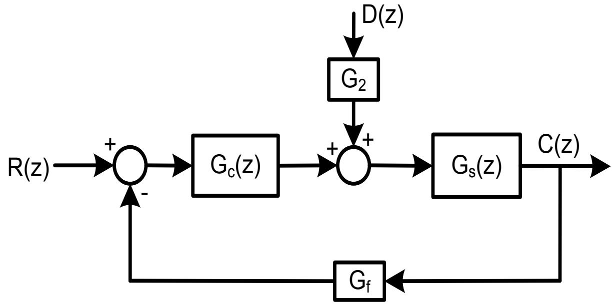
$$I(z) = Z\left\{1 - e^{-t}\right\} = Z\left\{u(t)\right\} - Z\left\{e^{-t}\right\}$$

$$Z\left\{e^{-t}\right\} = \sum_{k=0}^{k=\infty} e^{-kT} z^{-k} = 1 + e^{-T} z^{-1} + e^{-2T} z^{-2} + e^{-3T} z^{-3} + ------\frac{1}{1 - e^{-T} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-0.1}} = \frac{z}{z - 0.9048}$$

$$Z\left\{u(t)\right\} = \sum_{k=0}^{k=\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + ---------------- = \frac{z}{z-1}$$

$$I(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - 0.9048}$$

Cevap 4: a)



Şekilde verilen sistemem toplamsallık özelliği uygulanır.

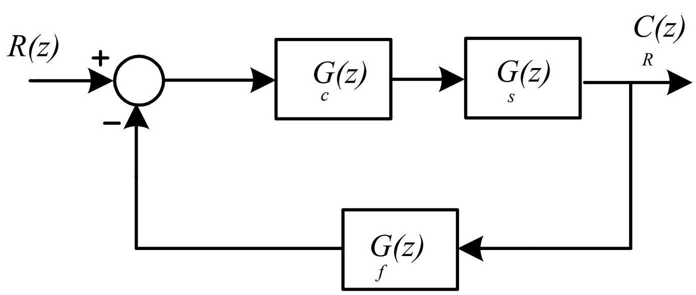
i) Giriş $R(z) \neq 0$, $D(z) = 0$ durumu için çıkış → $C(z) = C_R(z)$

ii) Giriş $D(z) \neq 0$, $R(z) = 0$ durumu için çıkış → $C(z) = C_D(z)$

Her iki giriş $R(z) \neq 0$ ve $N(z) \neq 0$ için çıkış ifadesi, her bir giriş için elde edilen çıkışların toplamı,

$$C(z) = C_R(z) + C_D(z)$$ ile elde edilir.

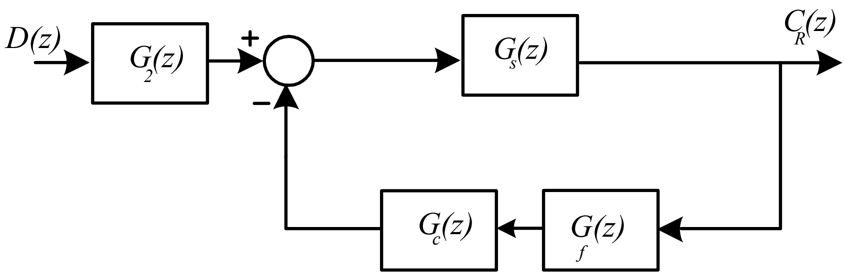
i) Giriş $R(z) \neq 0$, $D(z) = 0$ için, kapalı çevrim kontrol blok diyagramı ,



olarak düzenlenebilir.

$$C_R(z) = \frac{G_c(z)G_s(z)}{1 + G_c(z)G_s(z)G_f(z)} R(z)$$

ii) Giriş $R(z) = 0$, $D(z) \neq 0$ için, kapalı çevrim kontrol blok diyagramı ,



$$C_D(z) = \frac{G_2(z)G_s(z)}{1+G_c(z)G_s(z)G_f(z)}D(z)$$

Her iki giriş $R(z) \neq 0$ ve $N(z) \neq 0$ için çıkış ifadesi, her bir giriş için elde edilen çıkışların toplamı,

$$C(z) = C_R(z) + C_D(z)$$

$$C(z) = \frac{G_c(z)G_s(z)}{1+G_c(z)G_s(z)G_f(z)}R(z) + \frac{G_2(z)G_s(z)}{1+G_c(z)G_s(z)G_f(z)}D(z)$$

olarak elde edilir.

b) $D(z) = \frac{z}{z-1}$ ve $C_D(z) = \frac{G_2(z)G_s(z)}{1+G_c(z)G_s(z)G_f(z)}D(z)$ olduğuna göre,

$$C_D(\infty) = C(\infty) = \lim_{z\to1}(z-1)\frac{G_2(z)G_s(z)}{1+G_c(z)G_s(z)G_f(z)}D(z)$$

$$C_D(\infty) = C(\infty) = \lim_{z\to1}\cancel{(z-1)}\frac{\dfrac{1.5z+0.35}{z-0.5}\,\dfrac{0.04}{z-0.95}}{1+\dfrac{6.06z+5.3}{z-1}\,\dfrac{0.04}{z-0.95}}\,\frac{z}{\cancel{z-1}}$$

$$C_D(\infty) = C(\infty) = \frac{1.5z+0.35}{z-0.5}\,\frac{0.04}{z-0.95}\,\frac{(z-1)(z-0.95)}{(z-1)(z-0.95)+(6.06z+5.3)\,0.04}\Bigg|_{z=1}$$ pay kısmında $(z-1)$ çarpanında

$z=1$ verilir ise $\frac{0}{\text{sayı}}$ oluşur yani,

$C_D(\infty) = C(\infty) = 0$ olur.

YORUM: İleri yoldaki $\mathrm{G_c(z)}$ kontrolcüsü $D(z)$ bozucu giriş etkisine karşılık gelen sistem cevap $\mathrm{C_D(\infty)}$ çıkışını sıfırlar, yok eder. Sistem çıkış cevabında sadece $R(z)$ giriş için $C_R(\infty)$ kalır.

$R(z) = \dfrac{R\,z}{z-1}$ olması istensin.

$$C_R(z) = \frac{G_c(z)G_s(z)}{1+G_c(z)G_s(z)G_f(z)}R(z)$$

$$\mathrm{C_R(\infty) = C(\infty) = \lim_{z\to1}(z-1)\frac{G_c(z)G_s(z)}{1+G_c(z)G_s(z)G_f(z)}R(z)}$$

$$\mathrm{C_R(\infty) = C(\infty) = \lim_{z\to1}(z-1)\;\frac{\dfrac{6.06z+5.3}{z-1}\,\dfrac{0.04}{z-0.95}}{1+\dfrac{6.06z+5.3}{z-1}\,\dfrac{0.04}{z-0.95}}\;\frac{R\,z}{z-1}}$$

$$\mathrm{C_R(\infty) = C(\infty) = \cancel{(z-1)}\;\frac{6.06z+5.3}{\cancel{z-1}}\;\frac{0.04}{\cancel{z-0.95}}\;\frac{\cancel{(z-1)}\;\cancel{(z-0.95)}}{\underbrace{(z-1)(z-0.95)}_{0}+(6.06z+5.3)0.04}\;\frac{R\,z}{\cancel{z-1}}\Bigg|_{z=1}}$$

$$\mathrm{C_R(\infty) = C(\infty) = \frac{\cancel{(6.06z+5.3)0.04}\;R\,z}{\cancel{(\,6.06z+5.3)0.04}}\Bigg|_{z=1}}$$ ifadesinde $\mathrm{z=1}$ verilir ise, $\mathrm{C_R(\infty) = C(\infty) = R}$ olarak elde edilir.

SONUÇ:
$$\begin{aligned} C(\infty) &= C_R(\infty) + C_D(\infty) \\ &= R + 0 \end{aligned}$$

$C(\infty) = R$ ileri yoldaki kontrolcü geçici rejim sonunda çıkış cevabındaki bozucu etkisini giderir ve çıkışın istenen referans değer R'ye gelmesini sağlar.