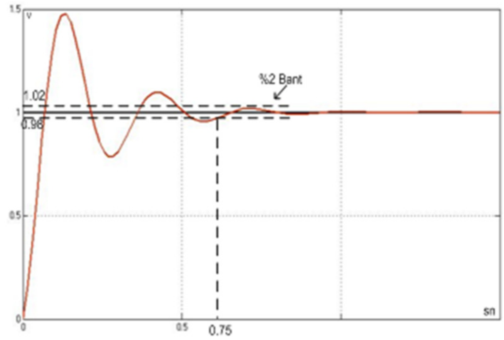
DİJİTAL KONTROL VİZE SINAVI 27/11/2013

S.1



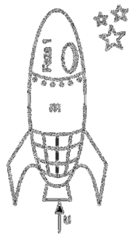
Açık çevrim transfer fonksiyonu $G(s)=\dfrac{0.85}{0.15s+1}$ olan birinci derecen siste, ayrık zaman **PI** kontrolcüsü ile kontrol edilmek istenmektedir. Kontrol edilen sistemin istenen kapalı çevrim cevabı şekildeki gibidir.

a) Ayrık-zaman **PI** kontrolcü parametrelerini (K_p, K_i) hesaplayınız.

b) Kontrol edilen sisteme ait kapalı çevrim kontrol blok diyagramını çiziniz.

(Sönüm oranı $\zeta = 0.5$, Örnekleme zamanı **T=0.015**)

S.2



Milli roket **Feza-1**sürtünmesiz uzay ortamında konumlandırılacaktır. u(t) **Feza-1 'e** uygulanankontrol işareti olmak üzere **Feza-1**'i tanımlayan diferansiyel denklem $u(t)=m\dfrac{dx(t)^2}{dt^2}$ olarak verilmektedir.

a) **Feza-1**'e ait sürekli zaman durum denklemlerini elde ediniz.

b) Örnekleme zamanı **T=0.1**sn olduğuna göre **Feza-1**'e ait ayrık-zaman durum denklemlerini elde ediniz. (**m=1** alınız)

S.3 $\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$ olarak transfer fonksiyonu verilmiştir. T=0.1 sn olmak üzere ayrık zaman durum denklemlerini kontrol edilebilir kanonik formda elde ediniz. $x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)$, $y(k)=Cx(k)+Du(k)$,(**ZOH**'suz dönüşüm yapılacak. $\dfrac{Y(z)}{U(z)}$ için)

S.4 Ayrık-zaman durum denklemleri $x(k+1)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(k)$ ve $y(k)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x(k)$ şeklinde olan sistem matrisi G'yi diagonal hale getiren lineer dönüşüm matrisi P'yi elde ediniz ve bu dönüşüm matrisini kullanarak yeni durum denklemlerini elde ediniz.

Hatırlatma:

$$X(z)=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[(s-s_i)^m X(s)\frac{z}{z-e^{sT}}\right]\Bigg|_{s=s_i}\right\}$$

$$t_s=\frac{4}{\xi w_n} \quad (\%\ 2\ \text{kriteri}) \qquad s_{1,2}=-\xi w_n \pm j w_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$K_i=-\frac{\sin\psi}{|G_p(z_1)|}\,\frac{|z_1|-2\cos\beta+\dfrac{1}{|z_1|}}{\sin\beta}$$

$$z_1=|z_1|e^{j\beta} \qquad G_p(z_1)=|G_p(z_1)|e^{j\psi}$$

$$\phi(t)=L^{-1}\left\{[sI-A]^{-1}\right\} \qquad H=e^{AT}\left[\int_0^T e^{-A\tau}\,d\tau\right]B$$

$$K_p=-\frac{\cos\psi}{|G_p(z_1)|}-2K_i|z_1|\frac{|z_1|-\cos\beta}{|z_1|^2-2|z_1|\cos\beta+1}+\frac{-|z_1|\sin\psi+\cos\beta\sin\psi}{|G_p(z_1)|\sin\beta}$$

$$\phi(k)=Z^{-1}\left\{z[zI-G]^{-1}\right\}$$

$$x(kT)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_i)^m X(z)z^{k-1}\right]_{z=z_i} \qquad L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t$$

Başarılar..
Prof. Dr. Ayhan ÖZDEMİR
Süre 100 dk

CEVAPLAR:

C.1.

a)

$G(s)=\dfrac{0.85}{0.15s+1}\Rightarrow G(s)=\dfrac{5.667}{s+6.667}$ $\xi=0.5$, %2 kriterine göre $t_s=0.75sn$ ve örnekleme zamanı T=0.015sn

$$G_p(z)=Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{5.667}{s+6.667}\right\}$$

$$G_p(z)=5.667\cdot\left(1-z^{-1}\right)\cdot Z\left\{\frac{1}{s(s+6.667)}\right\}=5.667\left(\frac{z-1}{z}\right)Z\left\{\cancel{s}\cdot\frac{1}{\cancel{s}(s+6.667)}\frac{z}{z-e^{sT}}\bigg|_{s=0}+(s+6.667)\cdot\frac{1}{s(s+6.667)}\frac{z}{z-e^{sT}}\bigg|_{s=-6.667}\right\}$$

$$G_p(z)=5.667\left(\frac{z-1}{z}\right)\left\{\frac{z}{6.667(z-1)}-\frac{z}{6.667(z-e^{-0.1})}\right\}=\left\{0.85-\frac{0.85(z-1)}{z-0.9048}\right\}\Rightarrow\boxed{G_p(z)=\frac{0.0808}{z-0.9048}}$$

$$s_1=-\xi w_n\pm jw_n\sqrt{1-\xi^2}\Rightarrow z_1=e^{s_1T}=e^{T(-\xi w_n\pm jw_n\sqrt{1-\xi^2})}=e^{-\xi w_nT}\cdot e^{jw_n\sqrt{1-\xi^2}T}$$

$$\xi=0.5\text{ , \%2 kriterine göre } t_s=0.75sn\Rightarrow t_s=\frac{4}{\xi w_n}\Rightarrow w_n=\frac{4}{\xi t_s}=\frac{4}{0.5\cdot0.75}=10.667$$

T=0.015 olduğuna göre;

Ayrık zaman kontrol kutupları (baskın kutuplar);

$$\left.\begin{aligned}\xi w_nT&=0.08\\ w_n\sqrt{1-\xi^2}T&=0.1386\end{aligned}\right\}\Rightarrow z_1=e^{-0.08}\cdot e^{j0.1386}=0.9231(0.9904+j0.1386)$$

$$\boxed{z_{1,2}=0.9142\pm j0.1279}$$

I. YOL: Parametrik denklemlerden;

$$K_i=-\frac{\sin\psi}{|G_p(z_1)|}\frac{|z_1|-2\cos\beta+\frac{1}{|z_1|}}{\sin\beta}$$

$$K_p=-\frac{\cos\psi}{|G_p(z_1)|}-2K_i|z_1|\frac{|z_1|-\cos\beta}{|z_1|^2-2|z_1|\cos\beta+1}+\frac{-|z_1|\sin\psi+\cos\beta\sin\psi}{|G_p(z_1)|\sin\beta}$$

Baskın kutuplar;

$$z_1=0.9142-j0.1279$$

$$\left|z_1\right| = \sqrt{0.9142^2 + 0.1279^2} \Rightarrow \boxed{\left|z_1\right| = 0.9231}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{0.1279}{0.9142}\right) \Rightarrow \boxed{\beta = -0.1386}$$

$$G_p(z_1) = \frac{0.0808}{(0.9142 + j0.1279) - 0.9048} = \frac{0.0808}{0.0094 + j0.1279} = 0.0462 - j0.6283$$

$$\psi = \tan^{-1}\left(-\frac{0.6283}{0.0462}\right) = 1.497$$

$$\left|G_p(z_1)\right| = \sqrt{0.0462^2 + 0.6283^2} = 0.6327$$

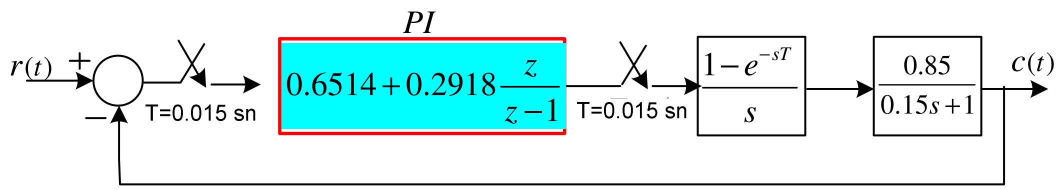
$$K_i = -\frac{\sin(1.497)}{0.6327}\frac{0.9231 - 2\cos(-0.1386) + (1/0.9231)}{\sin(-0.1386)} = 0.2918$$

$$K_p = -\frac{\cos(1.497)}{0.6327} - 2\cdot(0.2918)\cdot 0.9231\frac{0.9231 - \cos(-0.1386)}{0.9231^2 - 2\cdot 0.9231 + 1} + \frac{-0.9231\sin(1.497) + \cos(-0.1386)\cdot\sin(1.497)}{0.6327\sin(-0.1386)}$$

$$K_i = 0.2918$$

$$K_p = 0.6514$$

b) Kapalı çevrim kontrol blok diyagramı:



II. YOL: Karakteristik denklemden yerine koyarak;

$G_{PI}(z)\cdot G(z) =$ *PI kontrol kurallı kapalı çevrim transfer fonksiyona ait karakteristik denklem,*

$F(z) = 1 + G_{PI}(z)G_P(z) = 0$ *ifade edilir.*

$$1 + \left(K_p + K_i\frac{z}{z-1}\right)\frac{0.0808}{z - 0.9048} = 0$$

Karakteristik denklem bilinenler eşitliğin bir tarafına bilinmeyenler diğer tarafta olacak şekilde düzenlenirse,

$$G_{PI}(z) = \frac{-1}{G_P(z)} \Rightarrow \left.\left(K_p + K_i\frac{z}{z-1}\right)\right|_{z=0.9142-j0.1279} = -\left.\frac{1}{\dfrac{0.0808}{z-0.9048}}\right|_{z=0.9142-j0.1279}$$

$$\left(K_p + K_i \frac{0.9142 - j0.1279}{(0.9142 - j0.1279) - 1}\right) = -\frac{1}{\dfrac{0.0808}{(0.9142 - j0.1279) - 0.9048}}$$

ifadesinde ara işlemler yapılıp her iki taraftaki reel ve sanal kısımlar birbirine eşitlenirse,

$$0.1831 = -0.0858 K_p + 0.9142 \mathrm{K}_i \quad \Rightarrow \boxed{K_i = 0.2818}$$

$$0.9332 = K_p + K_i \quad \Rightarrow \boxed{K_p = 0.8691}$$ olarak elde edilir.

C.2

a) Sisteme ait sürekli zaman durum denklemlerini elde ediniz.

Konum: $x = x_1$

Hız: $\frac{dx}{dt} = x_2 = \frac{dx_1}{dt}$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{m} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u$$

b) Örnekleme zamanı T=0.1sn olduğuna göre sistemin ayrık-zaman durum denklemlerini elde ediniz.

$$\phi(t) = L^{-1}\left\{[sI - A]^{-1}\right\} = L^{-1}\left\{\left\{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}^{-1}\right\} = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1}\right\} = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} 1/s & 1/s\,^\wedge 2 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}^{-1}\right\}$$

$$\boxed{\phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \phi(T) = \phi(t)\big|_{t=T} \Rightarrow \boxed{\phi(T) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$e^{-A\tau} = \phi(-\tau) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{T=-\tau}$$

$$\gamma(T)=\phi(T)\left[\int_0^T e^{-A\tau}d\tau\right]B=\begin{bmatrix}1 & T\\ 0 & 1\end{bmatrix}\left\{\int_0^T\begin{bmatrix}1 & \tau\\ 0 & 1\end{bmatrix}d\tau\right\}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\int_0^T\begin{bmatrix}1 & \tau\\ 0 & 1\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}\tau & -\frac{\tau^2}{2}\\ 0 & \tau\end{bmatrix}\Bigg|_0^T=\begin{bmatrix}T & -\frac{T^2}{2}\\ 0 & T\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0.1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1 & -0.005\\ 0 & 0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\gamma(T)=\begin{bmatrix}0.005\\ 0.1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\left[(k+1)T\right]\\ x_2\left[(k+1)T\right]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0.1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\ x_2(kT)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.005\\ 0.1\end{bmatrix}u(kT)$$

II. YOL:

Basitleştirilmiş Çözüm:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x(t+T)-x(t)}{T}$$

$$\frac{dx}{dt}=Ax(t)+Bu(t)$$

$$x(t+T)-x(t)=ATx(t)+BTu(t)$$

$$x(t+T)=(AT+I)x(t)+BTu(t)$$

$$t=kT$$

$$x(k+1)=(AT+I)x(k)+BTu(k)$$

$$x(k+1)=\left[\begin{bmatrix}0 & 0.1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right]x(k)+\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix}u(k)$$

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 0.1\\ 0 & 1\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix}u(k)$$

C.3

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

T=0.1sn

$$G_p(z) = Z\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\}$$

$$G_p(z) = Z\left\{(s+1)\frac{1}{(s+1)(s+2)}\frac{z}{z-e^{sT}}\bigg|_{s=-1} + (s+2)\cdot\frac{1}{(s+1)(s+2)}\frac{z}{z-e^{sT}}\bigg|_{s=-2}\right\}$$

$$G(z) = \left\{\frac{z}{z-e^{-0.1}} - \frac{z}{(z-e^{-0.2})}\right\} = \boxed{G(z) = \frac{0.004671z + 0.00437}{z^2 - 1.792z + 0.8187}}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.004671z + 0.00437}{z^2 - 1.792z + 0.8187}\frac{X(z)}{X(z)}$$

$$U(z) = z^2X(z) - 1.792zX(z) + 0.8187X(z)$$

$$Y(z) = 0.004671zX(z) + 0.00437X(z)$$

$$X(z) \rightarrow x(k) = x_1(k)$$

$$zX(z) \rightarrow x(k+1) = x_2(k) = x_1(k+1)$$

$$z^2X(z) \rightarrow x(k+2) = x_2(k+1)$$

$$x_2(k+1) = u(k) + 1.792x_2(k) - 0.8187x_1(k)$$

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$

$$y(k) = 0.004671x_2(k) + 0.00437x_1(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.8187 & 1.792 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0.004371 & 0.004671 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

C.4.

$x(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u(k)$ ve $y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}x(k)$

Önce A matrisinin **Öz-değer** ve **Öz-vektör**leri bulunur.

A-matrisinin karakteristik denklemi; $|zI - A| = 0$ dır. *Karakteristik denklem kökleri öz-değerlerdir*.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 = (z-2)(z-1) = 0 =>$$

öz-değerler;

$$\lambda_1 = z_1 = 2$$
$$\lambda_2 = z_2 = 1$$

Her bir öz-değere ilişkin öz-vektörler aşağıda sırası ile hesap edilir.

$$z_{1öz} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix}_{z_1=\lambda_1} \quad z_{2öz} = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix}_{z_2=\lambda_2}$$

Öz-vektörler belirlensin. $[\lambda_i I - A] z_{iöz} = 0$

$\lambda_1 = z_1 = 2 \Rightarrow [\lambda_i I - A] z_{iöz} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$v_{21} = 0$ olarak elde edilir. denklemleri değerlendirilir ise,
v_{11}'i gelişi güzel alınır. Keyfi alınır.
$v_{11} = 1$ olsun,
$\lambda_1 = 2$ öz-değeri için öz-vektör $z_{1öz} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dir.

--- ---

$\lambda_2 = z_2 = 1$ için ,

$$\Rightarrow \left\{ 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$-v_{12} - v_{22} = 0$, $v_{22} = -v_{12}$ denklemleri sırası ile değerlendirilir.
ise $v_{12} = 1$ seçilir ise $v_{22} = -1$ gelişi güzel seçilir,
$\lambda_2 = 1$ öz-değeri için öz-vektör $z_{2öz} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

--- ---

$$P_{öz} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ \underbrace{v_{n1}}_{Z_{1ÖT}} & \underbrace{v_{2}}_{Z_{2ÖT}} & \cdots & \underbrace{v_{nn}}_{Z_{nÖT}} \end{bmatrix}$$ olduğu göz önüne alınarak öz-vektörler yerlerine yazılır ve

$P_{öz} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ öz-vektörlerden oluşan dönüşüm matrisi yada model matris elde edilir.

$$P_{öz}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix} => ve \quad \begin{matrix}x^{'}(k+1)=P_{öz}^{-1}AP_{öz}x^{'}(k)+P_{öz}^{-1}Bu(k)\\ y(k)=CP_{öz}x'(k)+Du(k)\end{matrix}$$

$$P_{öz}^{-1}AP_{öz}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}}_{P^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}}_{P}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P_{öz}^{-1}B=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}}_{P^{-1}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} \quad CP_{öz}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}}_{C}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}}_{P}=\begin{bmatrix}0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1^{'}(k+1)\\x_2^{'}(k+1)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}}_{P^{-1}AP}\begin{bmatrix}x_1^{'}(k)\\x_2^{'}(k)\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}}_{P^{-1}B}u(k)$$ durum denklemleri elde edilir.

$$y(k)=\begin{bmatrix}0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^{'}(k)\\x_2^{'}(k)\end{bmatrix}$$