DİFERANSİYEL DENKLEMLER

DERS NOTLARI

Prof. Dr. Uğur ARİFOĞLU

SAKARYA ÜNİVERSİTESİ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ

ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ ÖĞRETİM ÜYESİ

2016 EYLÜL

1. Giriş

1.1. Diferansiyel denklem tanımı

Fonksiyonun türevini bilinmeyen olarak bulunduran denklemler diferansiyel denklemler olarak tanımlanır. Örneğin, birinci mertebeden birinci dereceden bir diferansiyel denklem;

$$y' = f(y,t) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dt} \Rightarrow P(y,t)dt+Q(y,t)dy=0$$

formunda yazılabilir. Örneğin,

$$t^2y^2 + e^y = 0$$

denklemi bir diferansiyel denklem değildir, zira içinde türev ifadesi barındırmamaktadır.Örneğin,

$$8\frac{d^2y}{dt^2} - 3t\frac{dy}{dt} = \sin t \quad \Rightarrow \quad 8y^{(2)} - 3ty^{(1)} = \sin t$$

t'ye göre 2. mertebeden bir diferansiyel denklemdir. Örneğin,

$$2\frac{d^3y}{dt^3} - 5\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 2\sin(8t) + t^2 \quad \Rightarrow \quad 2y^{(3)} - 5y^{(2)} + y^{(1)} = 2\sin(8t) + t^2$$

denklemi 3. mertebeden, **sabit katsayılı**, lineer (doğrusal) bir diferansiyel denklemdir. Örneğin,

$$t^2\frac{d^3y}{dt^3} - 2t\frac{d^2y}{dt^2} + t^3\frac{dy}{dt} = 2\sin(4t) + t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2y^{(3)} - 2ty^{(2)} + t^3y^{(1)} = 2\sin(4t) + t^2$$

denklemi 3. mertebeden, **değişken katsayılı**, lineer (doğrusal) bir diferansiyel denklemdir. Örneğin,

$$t^2\left[\frac{d^3y}{dt^3}\right]^2 - 2t\frac{d^2y}{dt^2} + t^3\frac{dy}{dt} = 2\sin(4t) + t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2\left[y^{(3)}\right]^2 - 2ty^{(2)} + t^3y^{(1)} = 2\sin(4t) + t^2$$

denklemi 3. mertebeden, değişken katsayılı, **lineer olmayan** (ikinci dereceden) bir diferansiyel denklemdir. Bir diferansiyel denklemde, en yüksek mertebeli türevin derecesine diferansiyel denklemin derecesi denir. Aşağıda verilen;

$$\frac{d^3y}{dt^3} - e^{2t}\frac{d^2y}{dt^2} + y\frac{dy}{dt} = t^3$$

diferansiyel denklemi ise $y\frac{dy}{dt}$ terimi nedeni ile lineer olmayan bir dif.denklemdir.

1.1.2. Diferansiyel denklem nerelerde gerekir?

Aşağıda 7 farklı amaç için diferansiyel denklemlerin oluşturulma yöntemleri gösterilmiştir:

1. Eğri ailelerinin diferansiyel denklemlerinin kurulması

Problem 1.1

$$y = \frac{C\cos x + x}{C\sin x - x} \quad ; \quad (C: \text{parametre})$$

eğri ailesinin diferansiyel denklemini kurunuz.

Çözüm

Verilen (ilkelin) denklemin türevi alınacak, her iki denklemden C katsayısı yok edilecektir. Verilen denklemde içler ile dışlar çarpımı yapılırsa;

$$Cy\sin x - yx = C\cos x + x$$
$$C(y\sin x - \cos x) = x + xy$$
$$C = \frac{x + xy}{y\sin x - \cos x}$$

elde edilir. Yukarıda verilen eşitlikte her iki tarafın x'e göre türevi alınırsa, C sıfır olacağından dolayı, C parametresi ortadan kalkacaktır:

$$\frac{(1 + y + xy')(y\sin x - \cos x) - (y'\sin x + y\cos x + \sin x)(x + xy)}{\text{payda}^2} = 0$$

Yukarıda elde edilen denklem düzenlenerek istenen diferansiyel denklem elde edilir:

$$(-x\cos x - x\sin x)y' + (\sin x - \cos x - x\sin x - x\cos x)y + (\sin x - x\cos x)y^2 - \cos x - x\sin x = 0$$

2.Geometrik problemler

Problem 1.2

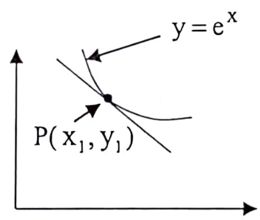
$y = e^x$ eğrisinin teğetlerinin diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm

(x_1, y_1) noktasındaki teğet denklemi;

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

formunda olacaktır.



Şekil 1.1

P değme noktasında $y = e^x$ eğrisine çizilen teğetin eğimi (m), $y = e^x$ eğrisinin türevinin $P(x_1, y_1)$ noktasındaki değerine eşittir:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_1} = e^{x_1} = y' \quad \Rightarrow \quad x_1 = \ln y'$$

$y_1 = e^{x_1} = y'$ $\Leftarrow$(teğet $P(x_1, y_1)$ noktasını sağlamak zorunda)

Yukarıda elde edilen değerler teğet denkleminde yerine konulursa;

$$y - e^{x_1} = e^{x_1}(x - \ln y') \Rightarrow y - y' = y'(x - \ln y')$$

elde edilir. Elde edilen denklem düzenlenirse;

$y = y'x + y'(1 - \ln y')$ (Claurant diferansiyel denklemi)

bulunur.

Problem 1.3

$y=-x^2$ parabolünün normallerinin diferansiyel denklemini bulunuz.

(**Cevap:** $y+\dfrac{(y')^2}{4}=-\dfrac{1}{y'}(x+\dfrac{y'}{2})$ Yol gösterme: $y-y_1=-\dfrac{1}{y'}(x-x_1)$)

3. Fizik problemlerinde

Problem 1.4

$y=C_1\cos x+C_2\sin x$ (ilkel)

eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz (C_1, C_2 ; parametre).

Çözüm

Genel olarak, n adet parametre barındıran bir ilkel, sabitleri bulunmayan n.mertebeden bir diferansiyel denklemi doğurur. Aranan diferansiyel denklem, ilkel ve n adet diferansiyel denklemden oluşan denklem sisteminde (n+1 adet denklemde) parametrelerin yok edilmesi ile bulunur.

Yukarıda anlatılan yaklaşım verilen probleme uygulanırsa, ilkelin (iki adet parametre barındırdığı için) iki kere türevinin alınması gerekir;

$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x$ (1)

$y''=-C_1\cos x-C_2\sin x$ (2)

$C_1(\cos x-\sin x)+C_2(\cos x+\sin x)=y'-y''$

Yukarıda elde edilen türev eşitlikleri ve ilkel düzenlenirse,

$-C_1\sin x+C_2\cos x-y'=0$ (1)

$-C_1\cos x-C_2\sin x-y''=0$ (2)

$C_1\cos x+C_2\sin x-y=0$ (3)

elde edilir. Eğer (1) ve (2) eşitliklerinden parametreler birbirleri cinsinden elde edilir ve 3. eşitlikte yerlerine konulursa;

$y''+y=0$

bulunur.

Problem 1.5

$y=C_1e^x+C_2xe^x$ (ilkel)

eğri ailesinin sağladığı diferansiyel denklemini bulunuz (C_1, C_2 ; parametre).

(**Cevap:** $y''-2y'+y=0$)

4. Eğri ailesinin diferansiyel denkleminin elde edilmesi

Problem 1.6

$$(x - C)^2 + (y - C)^2 = 2C^2$$

eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

$x^2-2xC+C^2+y^2-2yC+C^2=2C^2$

$x^2+y^2-2xC-2yC=0$

Çözüm

Verilen denklem açılır ve bulunan eşitlikten C parametresi çekilirse;

$$2C = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

elde edilir. Bulunan eşitliğin her iki tarafının x'e göre türevi alınırsa;

$$\frac{(2x + 2yy')(x + y) - (1 + y')(x^2 + y^2)}{payda^2} = 0$$

bulunur. Elde edilen eşitlik düzenlenirse;

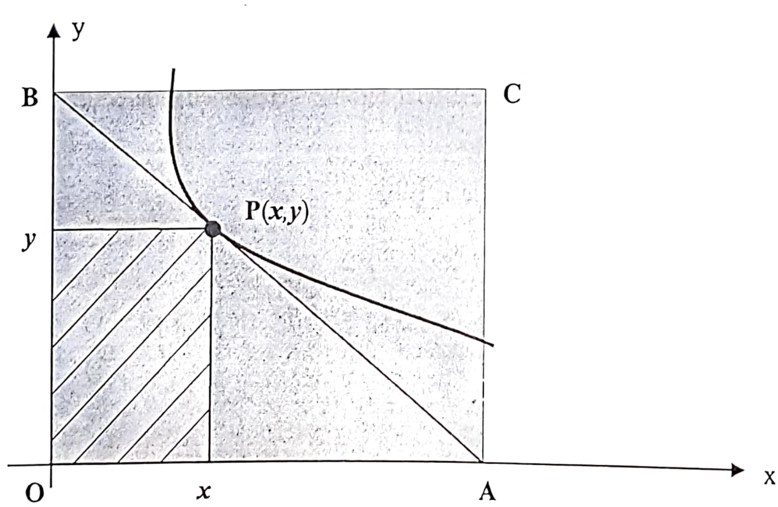
$$y'(2yx + y^2 - x^2) - y^2 + 2xy + x^2 = 0$$

bulunur.

5. <u>Alan hesaplamalarında</u>

Problem 1.7

Öyle eğriler bulunuz ki, bu eğrilerin teğetlerinin koordinat eksenlerinden ayrıldıkları x ve y parçaları üzerine kurulan dikdörtgenlerin alanı, değme noktalarının apsis ve ordinatları üzerine kurulan dikdörtgenlerin alanının 4 katına eşit olsun.



Şekil 1.2

Çözüm

$4x.y = A.B$

Verilen problemde istenen şart (Şekil 1.2'den);

4(OxPy)=OACB

alanlarının eşitliğidir. P noktasından çizilen teğetin denklemi;

$y-y=y'(x-x)$

olacaktır. y=0 için teğet denklemi (A noktası teğet denklemini sağlamalıdır),

$-y=y'(x-x)$

olur. Bu denklemden;

$y'x=xy'-y \Rightarrow x=x-(y/y')$

elde edilir. Bu sonuca göre A noktasının koordinatları;

$A(x-(y/y');\ 0)$

olacaktır. x=0 için teğet denklemi (B noktası teğet denklemini sağlamalıdır),

$y=y-y'x$

olur. Bu sonuca göre B noktasının koordinatları;

$B(0;\ y-y'x)$

olacaktır. 4(OxPy)=OACB alan eşitliği kullanılarak;

$4xy=(x-(y/y'))(y-y'x)$

$x_0y_0 - y'x_0x_0 - \frac{y_0y_0}{y'} + y_0x_0$

$2y_0x_0y' + (y')^2x_0^2 + y_0^2 = 0$

elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse;

$(xy'+y)^2=0 \Rightarrow xy'+y=0$

bulunur. Son ifade, aranan diferansiyel denklemdir. Bu diferansiyel denklemi sağlayan ilkeller problemdeki şartı sağlayan eğri ailesinin denklemini verir. Şu halde yukarıda bulunan diferansiyel denklemin çözümü bulunmalıdır:

$xy'+y=0 \Rightarrow x(dy/dx)+y=0 \Rightarrow xdy+ydx=0 \Rightarrow dy/y+dx/x=0$

Son ifadenin her iki tarafının entegrali alınırsa;

$\ln y+\ln x=\ln C \Rightarrow y\,x=C$ (ilkel)

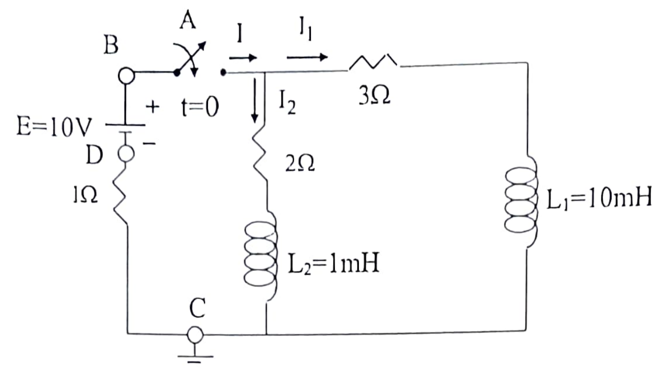
denklemi aranan eğri ailesidir (hiperbol).

6. Doğru akım devrelerinin analizinde

Problem 1.8

Şekil 1.3'te verilen devrede A anahtarı t=0 anında kapatılmaktadır.

a) $t=\infty$ için BC uçları arasındaki gerilimin değerini bulunuz.
b) Her hangi bir t anında BC uçları arasındaki gerilimin değerini bulunuz.



Şekil 1.3

Çözüm

a) Bobin içeren devrede akım, sürekli hale gelinceye kadar zamana bağlı olarak değişir. t=∞ için tüm bobinler kısa devre olacağından 2Ω ve 3Ω'luk rezistanslar paralel bağlı duruma gelecek ve eşdeğer rezistans;

$$R_{eş} = \frac{2*3}{2+3} = 1.2\Omega$$

olacaktır. Kaynaktan çekilen akım ise;

$$I = \frac{10V}{1\Omega + R_{eş}} = \frac{10V}{2.2\Omega} = 4.54A$$

olarak bulunur. Bobin akımlarının t=∞ için değerleri ise akım bölücü formül kullanılarak;

$$I_1 = I_{1son} = 4.54A\frac{2\Omega}{2\Omega + 3\Omega} = 1.816A$$

$$I_2 = I_{2son} = I - I_1 = 4.54 - 1.816 = 2.724A$$

bulunur. C noktası referans alındığına göre D noktası C noktasının geriliminden ($V_C = 0$) 1Ω'luk rezistanstaki gerilim düşümü kadar daha küçük gerilim değerine sahip olur. 1Ω'luk rezistans üzerindeki gerilim düşümü;

$$V_C - V_D = 4.54A*1\Omega = 4.54V$$

olduğundan (akımın yüksek potansiyelden düşük potansiyele doğru aktığı unutulmasın) D noktasının referans noktasına göre gerilimi;

$$V_C - V_D = 4.54V = 0 - V_D \Rightarrow V_D = -4.54V$$

olur. Kaynağın (+) ucu negatif ucundan 10V daha büyük olduğuna göre B noktasının referans noktasına göre gerilim değeri aşağıdaki değeri alır:

$$V_{BC} = V_{BD} + V_{DC} = 10V + (-4.54) = 5.46V$$

b) Eğer verilen bir devrede kaynak akımı sürekli hale gelmeden önceki bir t anındaki bobin akım değeri sorulursa, devredeki iki çevreye kirchhoff'un gerilim yasası ve bir düğüme kirchhoff'un akım yasası uygulandığında elde edilen (aşağıda verilen) diferansiyel denklem takımının çözülmesi gerekir;

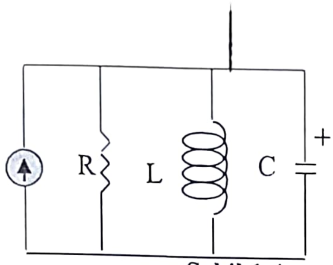
$$E = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + 2 * i_2(t) + 1 * i(t) \; ; \qquad E = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + 3 * i_1(t) + 1 * i(t) \; ; \qquad i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

7. Durum denklemlerinde

Problem 1.9

Picard ile çözülüyor

$i_k(t) = 2A$



$+ \; v_c(0) = 2V \, , \; i_L(0) = 1A$

R=3Ω, L=1 H, C=1 F

Şekil 1.4

Şekil 1.4'de görülen devreye ilişkin durum denklemlerini elde ediniz

Çözüm

Şekil 1.4'de verilen devrede iki çevreye KGY uygulanırsa;

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = -4v_c(t) - 12i_L(t) + 12i_k(t) \; ; \quad \frac{di_L(t)}{dt} = 0.25v_c(t)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -12 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c(t \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix} i_k(t) \quad ; \; i_k(t)=2 \text{ A}$$

elde edilir. (Bu konu çok önemli olduğundan ileride teferruatlı olarak anlatılacaktır)

Not: Diferansiyel denklemin çözümünde, diferansiyel denklemin mertebesi kadar sabit bulunur. Bu sabitlerin belirlenmesinde sabit sayısı kadar ilk koşul kullanılır. Eğer ilk koşullar verilen diferansiyel denklemin çözümünün tek bir noktada sağlaması gereken koşullar ise buna **başlangıç koşulları**, eğer birden çok noktada sağlaması gereken koşullar ise buna **sınır koşulları** adı verilir.

Ör 1: $y'' - 3y' = \sin(t) \, , \; y(0) = 1, y'(0) = 0$ (başlangıç değer problemi)

Ör 2: $y'' - 3y' = \sin(t) \, , \; y(0) = 1, y'(1) = 0$ (sınır değer problemi)

1.2. Değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklemler

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{1.1}$$

Diferansiyel denkleminde, eğer

$P(x,y)= P_1(x) * P_2(y)$

$Q(x,y)= Q_1(x) * Q_2(y)$ $\Leftarrow$ P ve Q değişkenlerine ayrılabiliyor

eşitlikleri geçerli ise (1.1) ifadesi,

$$P_1(x) * P_2(y)\, dx + Q_1(x) * Q_2(y)\, dy=0 \tag{1.2}$$

olarak yazılabilir. (1.2) eşitliğinin her iki tarafı $P_2(y) * Q_1(x)$ 'e bölünürse,

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)} dy = 0 \tag{1.3}$$

elde edilir. Böylece (1.1) eşitliğinde dx önüne x'li bir ifade, dy önüne ise y'li bir ifade getirilerek diferansiyel denklem çarpanlara ayrılmaktadır. Böyle bir diferansiyel denklem ise aşağıdaki şekilde (her bir entegral bağımsız olarak) çözülebilir:

$$\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \int \frac{Q_{2(y)}}{P_2(y)}dy = C$$

Problem 1.10

$$3x^3(1+y^2)dx + xdy = 0$$

diferansiyel denklemini değişkenlerine ayırarak çözünüz.

Çözüm

$$\frac{3x^3(1+y^2)}{x(1+y^2)}dx + \frac{x}{x(1+y^2)}dy = 0 \Rightarrow 3x^2dx + \frac{1}{1+y^2}dy = 0$$

Yukarıda elde edilen en son eşitlik (1.3) eşitliği formunda yazılabilmektedir. Bu nedenle her bir entegral parçası ayrı ayrı entegre edilebilir:

$$\int 3x^2dx + \int \frac{1}{1+y^2}dy = 0$$

$x^3 + \arctan y = C$ (Parametrik eğri ailesi- verilen diferansiyel denklemin genel çözümü)

Problem 1.11

$$y(1-x)dx + x^2(1-y)dy = 0$$

diferansiyel denklemini değişkenlerine ayırarak çözünüz.

Çözüm

$$\frac{y(1-x)}{yx^2}dx + \frac{x^2(1-y)}{yx^2}dy = 0 \Rightarrow \frac{(1-x)}{x^2}dx + \frac{(1-y)}{y}dy = 0$$

$$\int \frac{(1-x)}{x^2}dx + \int \frac{(1-y)}{y}dy = 0 \Rightarrow \int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})dx + \int (\frac{1}{y} - 1)dy = 0$$

$$-\frac{1}{x} - \ln x + \ln y - y = C \quad \text{veya} \quad -\frac{1}{x} + \ln\frac{y}{x} - y = C$$

1.3. Homojen diferansiyel denklemler

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x,y)$$

olmak üzere,

$$y' = \varphi(\frac{y}{x}) \qquad (1.4)$$

olarak yazılabiliyor ise diferansiyel denkleme **homojen** dir denir. Eğer,

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

diferansiyel denkleminde P(x,y) ve Q(x,y) fonksiyonları x ve y'nin aynı dereceden homojen fonksiyonları ise diferansiyel denklem **homojen diferansiyel denklemdir**.

Homojen fonksiyon

f(x,y) fonksiyonunda,

$$x \Rightarrow \lambda x$$
$$y \Rightarrow \lambda y \qquad (1.5)$$

değişken dönüşümü yapıldığında

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y) \qquad (1.6)$$

eşitliği sağlanabiliyor ise f(x,y)'ye **n . dereceden homojendir** denir. Örneğin,

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = 0$$

fonksiyonu,

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 (x^2 + y^2) = \lambda^2 f(x,y)$$

özelliğini sağladığından dolayı 2 . dereceden homojen bir fonksiyondur.

1.3. Homojen diferansiyel denklemin çözüm yöntemi

(1.4) eşitliği ile verilen homojen bir diferansiyel denklemin çözümü için,

$$\boxed{u = \frac{y}{x}} \qquad (1.7)$$

$$y = ux \qquad (1.8)$$

değişken dönüşümü yapılır. (1.8) eşitliğinin her iki tarafının x'e göre türevi alınırsa,

$$\boxed{y' = u'x + u} \qquad (1.9)$$

elde edilir. (1.4) ve (1.9) eşitliğinden,

$$y' = u'x + u = \varphi(u)$$

$$u'x = \varphi(u) - u$$

NOT: Homojen dif denk. y' ifadesinin sağ tarafı yalnızca ve rakamdan oluşur. X ve ~~[illegible]~~ ve y içerecek

$$x\,du - (\varphi(u) - u)dx = 0$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u) - u} \qquad (1.10)$$

elde edilir. Böylece (1.4) eşitliği ile verilen homojen diferansiyel denklem, (1.7) eşitliğinde verilen değişken dönüşümü kullanılarak, değişkenlere ayrılabilen bir diferansiyel denklem türüne dönüştürülmüş oldu. (1.10) denklemi ise Bölüm 1.2'de verilen yöntem kullanılarak çözülebilir.

Problem 1.12

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm

Verilen denklemin pay ve paydası x'e bölünürse

$$\varphi(\frac{y}{x}) = y' = \frac{1+(y/x)}{1-(y/x)}$$

elde edilir. Böylece verilen diferansiyel denklem (y/x)'in fonksiyonu olarak ifade edilebildi. Son ifadede (1.7) eşitliği kullanılarak,

$$y' = u'x + u = \varphi(u) = \frac{1+u}{1-u} \Rightarrow \frac{1+u}{1-u} - u = \frac{1+u-u+u^2}{1-u} \Rightarrow u'x = \frac{1+u^2}{1-u} \Rightarrow \frac{du}{dx}x = \frac{1+u^2}{1-u}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-u}{1+u^2}du$$

elde edilir. Son ifade değişkenlerine ayrılabilen tipte bir diferansiyel denklem olduğu için aşağıdaki şekilde çözülebilir:

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{du}{1+u^2} - \int\frac{u}{1+u^2}du \Rightarrow \ln x - \ln C = \arctan u - 0.5\ln(1+u^2)$$

$\ln\frac{x}{C} = \arctan u - 0.5\ln(1+u^2)$ ifadesinin her iki tarafı e sayısının üstüne alınırsa;

$$e^{\ln\frac{x}{C}} = e^{\arctan u - 0.5\ln(1+u^2)} = e^{\arctan u}\, e^{-0.5\ln(1+u^2)}$$

$$\frac{x}{C} = \frac{e^{\arctan u}}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$x = C\frac{e^{\arctan(y/x)}}{\sqrt{1+(y/x)^2}} \qquad \text{(verilen diferansiyel denklemin genel çözümü)}$$

elde edilir.

Problem 1.13

$(y^2 + xy)dx - x^2 dy = 0$
diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm

$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{y^2 + xy}{x^2} = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$ (homojen diferansiyel denklem)

Yukarıdaki eşitlikte u=y/x değişken dönüşümü kullanılırsa;

$y' = u'x + u = u^2 + u \Rightarrow u'x = u^2$

$\frac{du}{dx}x = u^2 \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{u^2}du \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{u^2}du \Rightarrow \ln\frac{x}{C} = -\frac{1}{u} \Rightarrow x = Ce^{-\frac{1}{u}}$

$x = Ce^{-\frac{x}{y}}$ (verilen diferansiyel denklemin genel çözümü)

1.4. Homojene getirilebilir diferansiyel denklemler

Eğer verilen diferansiyel denklem;

$$\frac{dy}{dx} = y' = \varphi\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \qquad (1.11)$$

formunda ise ve

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$\Rightarrow \det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ koşulu altında

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$

yukarıda verilen iki bilinmeyenli birinci dereceden denklem sisteminin kökleri;

x=h; y=k

olmak üzere,

$$x = x_0 + h$$
$$y = y_0 + k \qquad (1.12)$$

değişken dönüşümü yapılarak (1.11) ile verilen diferansiyel denklem homojen diferansiyel denkleme getirilir.

Problem 1.14

$y' = \frac{x + y - 1}{x - y + 1}$ (verilen kesrin pay ve paydasındaki fonksiyon tipleri aynı, katsayılar farklı)

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm

$x+y-1=0$
$x-y+1=0$ $\Leftarrow$ katsayılar determinantının sıfırdan farklı olduğu görülmeli!

denklem sistemi çözülürse; **Not:** $\det\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$x = h = 0$
$y = k = 1$

elde edilir. Bu değerler (1.12) eşitliklerine taşınır ise,

$x = x_0 + h = x_0 + 0 = x_0$
$y = y_0 + k = y_0 + 1$ (değişken dönüşümü yapılıyor)

elde edilir. Yukarıdaki iki adet eşitliğin her iki tarafının diferansiyeli alınırsa,

$dx = dx_0$
$dy = dy_0$

elde edilir. Değişken dönüşümü ile elde edilen denklemler problemde verilen diferansiyel denkleme taşınır ise,

$$y_0' = \frac{x_0 + y_0 + 1 - 1}{x_0 - (y_0 + 1) + 1} \Rightarrow \quad y_0' = \frac{x_0 + y_0}{x_0 - y_0}$$

elde edilir. Böylece problemde verilen diferansiyel denklem, homojen diferansiyel denklem formuna getirilmiş oldu. Bundan sonra $u = y_0 / x_0 \Rightarrow y_0' = u' x_0 + u$ değişken dönüşümü kullanılarak, problem 10'da gösterilen çözüm yaklaşımı ile aşağıda verilen genel çözüm elde edilir:

$$x_0 = C\frac{e^{\arctan\frac{y_0}{x_0}}}{\sqrt{1 + (y_0 / x_0)^2}} \Rightarrow x = C\frac{e^{\arctan\frac{y-1}{x}}}{\sqrt{1 + (y-1)^2 / x^2}}$$

Problem 1.15

$(x - y - 1)dx + (4y + x - 1)dy = 0$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm

$x - y - 1 = 0$ (verilen dif.denklemde dx ve dy önündeki fonksiyon tipleri aynı, katsayılar farklı)
$4y + x - 1 = 0$

$$\det\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \quad x = h = 1; \quad y = k = 0$$

$x = x_0 + 1 \quad \Rightarrow \quad dx = dx_0$
$\Rightarrow \quad u = y_0 / x_0 \Rightarrow y_0' = u' x_0 + u$

$y = y_0 \qquad \Rightarrow \quad dy = dy_0$

$$y_0' = \frac{-(x_0+1)+y_0+1}{x_0+4y_0+1-1} \Rightarrow \quad = \frac{-x_0+y_0}{x_0+4y_0} \Rightarrow y_0' = \frac{-1+\dfrac{y_0}{x_0}}{1+4\dfrac{y_0}{x_0}} \Rightarrow y_0' = u + u'x_0 = \frac{-1+u}{1+4u}$$

$$u'x_0 = \frac{-1+u-u-4u^2}{1+4u} = \frac{-1-4u^2}{1+4u} \Rightarrow x_0\frac{du}{dx_0} = -\frac{1+4u^2}{1+4u}$$

$$\frac{dx_0}{x_0} = -\frac{1+4u}{1+4u^2}du \Rightarrow \int\frac{dx_0}{x_0} = -\int\frac{1+4u}{1+4u^2}du \Rightarrow \int\frac{dx_0}{x_0} = -\int\frac{du}{1+4u^2} - \int\frac{4u}{1+4u^2}du$$

$2u = t \Rightarrow 2du = dt \Rightarrow du = dt/2$ (değişken dönüşümü yapılıyor)

$$\ln\frac{x_0}{C} = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2} - \int\frac{t}{1+t^2}dt$$

$$\ln\frac{x_0}{C} = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2} - \int\frac{t}{1+t^2}dt$$

$$\ln\frac{x_0}{C} = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2} - \int\frac{t}{1+t^2}dt \Rightarrow \ln\frac{x_0}{C} = -(1/2)\arctan t - (1/2)\ln(1+t^2)$$

$$x_0 = C\,\frac{e^{-(1/2)\arctan t}}{\sqrt{1+t^2}} \quad \Rightarrow \quad x_0 = C\,\frac{e^{-(1/2)\arctan 2u}}{\sqrt{1+4u^2}}$$

$$x-1 = C\,\frac{e^{-(1/2)\arctan 2(y/x-1)}}{\sqrt{1+4\dfrac{y}{(x-1)^2}^{\,2}}} \qquad \text{(genel çözüm)}$$

Problem 1.16

$2xy(4-y^2)dx + (y-1)(x^2+2)dy = 0$
diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklemin her iki tarafı $y(4-y^2)(x^2+2)$ ifadesine bölünsün:

$$\frac{2x}{x^2+2}dx + \frac{y-1}{y(4-y^2)}dy = 0 \qquad \text{(verilen dif. denklem değişkenlerine ayrıldı)}$$

$$\int\frac{2x}{x^2+2}dx + \int\frac{y-1}{y(4-y^2)}dy = \ln C$$

$$\ln C = \int\frac{2x}{x^2+2}dx + \int\frac{y-1}{y(2-y)(2+y)}dy$$

$$\ln C = \int\frac{2x}{x^2+2}dx + \int\frac{A}{y}dy + \int\frac{B}{2-y}dy + \int\frac{C}{2+y}dy = \int\frac{2x}{x^2+2}dx - \int\frac{(1/4)}{y}dy - \int\frac{(1/8)}{2-y}dy + \int\frac{(3/8)}{2+y}dy$$

$(2+y).(2-y) \quad (2+y).y \quad y.(2-y)$

$4A - Ay^2 + 2yB + By^2 + 2yC - Cy^2 = y-1$

$-A+B-C=0$

$4A = -1 \qquad 2B+2C = 1$

$A = -1/4 \qquad B+C = 1/2 \qquad B = 1/8 \qquad C = 3/8$

$B-C = -1/4$

$$\ln C = \ln(x^2+2) - (1/4)\ln y - (1/8)\ln(2-y) + (3/8)\ln(2+y)$$

Yukarıda verilen eşitliğin her iki tarafı eksponansiyel üzerine taşınsın;

$$e^{\ln C} = e^{\ln(x^2+2)-(1/4)\ln y-(1/8)\ln(2-y)+(3/8)\ln(2+y)} = \frac{e^{\ln(x^2+2)+(3/8)\ln(2+y)}}{e^{(1/8)\ln(2-y)+(1/4)\ln y}} = \frac{e^{\ln(x^2+2)}e^{(3/8)\ln(2+y)}}{e^{(1/8)\ln(2-y)}e^{(1/4)\ln y}}$$

$$C = \frac{(x^2+2)(y+2)^{3/8}}{(2-y)^{1/8}y^{1/4}} \quad \text{(genel çözüm)}$$

Problem 1.17

$$e^{x^3-y^2} + (y/x^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm

$$e^{x^3-y^2}dx + (y/x^2)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2e^{x^3}e^{-y^2}dx + ydy = 0$$

$$x^2e^{x^3}dx + e^{y^2}ydy = 0 \quad \text{(dif. denklem değişkenlerine ayrıldı)}$$

$$t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2dx\,; \quad u = y^2 \Rightarrow du = 2ydy \quad \text{(değişken dönüşümleri kullanılarak)}$$

$$\int e^{x^3}x^2dx + \int e^{y^2}ydy = \frac{1}{3}\int e^t dt + \frac{1}{2}\int e^u du = 0$$

$$(1/3)e^t + (1/2)e^u = C$$

$$(1/3)e^{x^3} + (1/2)e^{y^2} = C \quad \text{(genel çözüm)}$$

Problem 1.18

$$\frac{dy}{dx} = e^{y/x} + \frac{y}{x} + 1$$

homojen diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm

u=y/x değişken dönüşümü kullanılarak,

$$y' = u'x + u = e^u + u + 1 \Rightarrow x\frac{du}{dx} = e^u + 1 \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{e^u+1}du \Rightarrow \ln\frac{x}{C} = \int\frac{du}{e^u+1}$$

$$\ln\frac{x}{C} = \int\left(\frac{e^{-u}}{e^{-u}}\right)\frac{du}{e^u+1} = \int\frac{e^{-u}}{1+e^{-u}}du$$

$$1 + e^{-u} = t \Rightarrow -e^{-u}du = dt$$

$$\ln\frac{x}{C} = \int\frac{e^{-u}}{1+e^{-u}}du \Rightarrow \ln\frac{x}{C} = -\int\frac{dt}{t} = -\ln t = -\ln(1+e^{-u})$$

$$x=\frac{C}{e^{-u}+1} \Rightarrow x=\frac{C}{e^{-y/x}+1} \quad \text{(genel çözüm)}$$

Problem 1.19

$$(2x-5y+3)dx-(2x+4y-6)dy=0$$

homojene getirilebilir diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm

$$2x-5y+3=0$$
$$2x+4y-6=0$$

$$\det\begin{vmatrix}2 & -5\\ 2 & 4\end{vmatrix}\neq 0$$

$$\begin{matrix} x=h=1 & & x=x_0+1 & & dx=dx_0 \\ & \Rightarrow & & \Rightarrow & \\ y=k=1 & & y=y_0+1 & & dy=dy_0 \end{matrix}$$

Yukarıdaki işlemler problemde verilen birinci dereceden iki adet denkleme uygulanırsa,

$$[2(x_0+1)-5(y_0+1)+3]dx_0-[2(x_0+1)+4(y_0+1)-6]dy_0=0$$

$$(2x_0-5y_0)dx_0-(2x_0+4y_0)dy_0=0$$

$$\frac{dy_0}{dx_0}=y_0'=\frac{2x_0-5y_0}{2x_0+4y_0}=\frac{2-5\frac{y_0}{x_0}}{2+4\frac{y_0}{x_0}}$$

$$\frac{y_0}{x_0}=u; \qquad y_0=ux_0; \qquad y_0'=u'x_0+u; \qquad u'=\frac{du}{dx_0}$$

$$y_0'=u'x_0+u=\frac{2-5u}{2+4u} \Rightarrow u'x_0=\frac{2-5u}{2+4u}-u=\frac{-4u^2-7u+2}{4u+2}$$

$$\frac{du}{dx_0}x_0=\frac{-4u^2-7u+2}{4u+2} \Rightarrow \frac{dx_0}{x_0}=-\frac{4u+2}{4u^2+7u-2}du$$

$$4u^2+7u-2=0 \Rightarrow u_1=-2; \quad u_2=0.25$$

$$\frac{4u+2}{4u^2+7u-2}=\frac{A}{u+2}+\frac{B}{u-0.25} \Rightarrow A=2/3 \ ; \ B=1/3$$

HATA

$A = 4$
$B = 4/3$

$Au - \frac{A}{4} + Bu + 2B = 4u + 2$
$A + B = 4$
$-\frac{A}{4} + 2B = 2$

$$\int\frac{dx_0}{x_0}=-\int\frac{4u+2}{4u^2+7u-2}du=-\int\frac{2/3}{u+2}du-\int\frac{1/3}{u-0.25}du$$

$$\ln\frac{x_0}{C} = -(2/3)\ln(u+2) - (1/3)\ln(u-0.25)$$

$$e^{\ln\frac{x_0}{C}} = e^{-(2/3)\ln(u+2)-(1/3)\ln(u-0.25)} = e^{-(2/3)\ln(u+2)}\, e^{-(1/3)\ln(u-0.25)}$$

$$x_0 = \frac{C}{(u+2)^{2/3}(u-0.25)^{1/3}} = \frac{C}{(\frac{y_0}{x_0}+2)^{2/3}(\frac{y_0}{x_0}-0.25)^{2/3}}$$

$$x-1 = \frac{C}{(\frac{y-1}{x-1}+2)^{2/3}(\frac{y-1}{x-1}-0.25)^{1/3}}$$

Problem 1.20

$$(2x-y-1)dx + (4x-2y+1)dy = 0$$

homojene getirilebilir diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm

$$2x-y-1=0$$
$$4x-2y+1=0$$

$$\det\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftarrow \quad \textbf{dikkat!}$$

$2x-y-1=z$ (değişken dönüşümü uygulanıyor)

$4x-2y+1=2(2x-y-1)+3=2z+3$ x de ya y olamaz

elde edilir.

$2x-y-1=z$ ifadesinin her iki tarafı x'e göre türetilirse;

$$2-y' = z' \Rightarrow y' = 2-z'$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler problemde verilen dif.denkleme uygulanır ise;

$$(2x-y-1)dx + (4x-2y+1)dy = 0 \Rightarrow zdx + (2z+3)dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = -\frac{z}{2z+3}$$

$$y' = 2-z' \Rightarrow 2-z' = -\frac{z}{2z+3} \Rightarrow z + (2z+3)(2-z') = 0$$

$$z + 4z + 6 - (2z+3)z' = 0$$

$(5z+6)dx - (2z+3)dz = 0$ (değişkenlerine ayrılabilen dif.denklem)

elde edilir. Son eşitlik düzenlenir ve entegrali alınırsa aşağıdaki genel çözüm elde edilir.

$$dx = \frac{2z+3}{5z+6}dz \Rightarrow \int dx = \int\frac{2z+3}{5z+6}dz \Rightarrow x = \int\left(\frac{2}{5} + \frac{(3/5)}{5z+6}\right)dz + C$$

$$x = \frac{2}{5}z + \frac{3}{25}\ln(5z+6) + C$$

$$x = \frac{2}{5}(2x-y-1) + \frac{3}{25}\ln(5(2x-y-1)+6) + C \qquad \text{(genel çözüm)}$$

Önemli not:

Pay ve paydanın 1. mertebeden olduğu kesirlerde, basit kesirlere ayırma yöntemi;

$$\frac{kz+y}{mz+n} = A + \frac{B}{mz+n}$$ şeklinde yazılabilmesi için

verilen eşitliğinde paydalar eşitlenerek A ve B değerleri bulunur. Örnek olarak yukarıda yapılan işlemde;

$$\frac{2z+3}{5z+6} = A + \frac{B}{5z+6} \Rightarrow 5Az + 6A + B = 2z + 3 \Rightarrow 5A = 2;\ \ 6A + B = 3 \Rightarrow A = 2/5;\ \ B = 3/5$$ bulunur.

1.5. Tam diferansiyel denklem

Çok değişkenli fonksiyonlarda kısmi türev alınır.

kısmi türev

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = Mdx + Ndy = 0 \qquad \boxed{du = 0 \Rightarrow u = C} \qquad (1.13)$$

fonksiyon tanımı

olmak üzere u(x,y) fonksiyonunun birinci mertebeden sürekli kısmi türevleri var ise ve

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (1.14)$$

1.13 ve 1.14 aynı anda bulunmalı

f(t)

t domain
s domain çok önemli

şartı sağlanıyor ise (1.13) ifadesine u(x,y)'nin tam diferansiyeli denir.

Problem 1.21

$du = y^2dx + 2xydy = 0$
fonksiyonunun tam diferansiyel denklem olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm

$du = y^2dx + 2xydy = Mdx + Ndy = 0$;

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \qquad (*)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y \qquad (**)$$

(*) ve (**) eşitlikleri (1.14) şartını sağladığı için $du = y^2dx + 2xydy$ ifadesi bir tam diferansiyel denklemdir.

Problem 1.22

$(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = du = 0; \qquad \Leftarrow \quad (du = Mdx + Ndy = 0)$

diferansiyel denkleminin (1.14) şartını sağlayıp sağlamadığını araştırınız, sağlıyor ise u(x,y) fonksiyonunu (ilkeli) bulunuz.

Çözüm

Soldan başla

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 4x$$

Yukarıdaki eşitliklere bakıldığında (1.14) şartının sağlandığı, dolayısı ile verilen denklemin tam diferansiyel denklem olduğu görülmektedir.

Aynı u bulunur

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = 3x^2 + 4xy \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N = 2x^2 + 2y$$

C(x)

$$u(x,y) = \int (3x^2 + 4xy)\partial x + C(y)$$

$$u(x,y) = x^3 + 2x^2 y + C(y)$$

NOT: Aşağıdaki satırların hedefi C(y)'yi bulmak

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \cancel{2x^2} + 2y = \frac{\partial(x^3 + 2x^2 y + C(y))}{\partial y} = \cancel{2x^2} + \frac{\partial C}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y} = 2y \Rightarrow C(y) = y^2 + C_1$$

$$u(x,y) = x^3 + 2x^2 y + y^2 + C_1 \qquad \text{(ilkel)}$$

$$\frac{dC(y)}{dy} = C'(y)$$

$\boxed{du = 0 \Rightarrow u = C}$

$$u(x,y) = x^3 + 2x^2 y + y^2 + C_1 = C \quad ; \quad C - C_1 = \overline{C}$$

1. mertebeden denklem olduğundan 1 tane C olmalı

$$x^3 + 2x^2 y + y^2 = \overline{C} \qquad \text{(genel çözüm)}$$

x → zaman
y → akım

Problem 1.23

Problem 1.22'de y(0)=2 koşulunu sağlayan çözümü (özel çözüm) bulunuz.

Çözüm

Problem 1.22'de $x^3 + 2x^2 y + y^2 = \overline{C}$ olarak bulunmuştu. Bu ifadede x=0, y=2 değerleri yerlerine konulursa, $\overline{C} = 4$ elde edilir. Buna göre özel çözüm ise aşağıda gösterildiği gibi olur:

$$x^3 + 2x^2 y + y^2 = 4$$

Problem 1.24

$$(e^x \sin y + 2x + \frac{1}{x})dx + (e^x \cos y - 2y - 1)dy = 0$$

diferansiyel denkleminin (1.14) şartını sağlayıp sağlamadığını araştırınız, sağlıyor ise u(x,y) fonksiyonunu (ilkeli) bulunuz.

Çözüm

$$\frac{\partial M}{\partial y}=e^{x}\cos y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=e^{x}\cos y$$

Sağlan Bak

Yukarıdaki eşitliklere bakıldığında (1.14) şartının sağlandığı, dolayısı ile verilen denklemin tam diferansiyel denklem olduğu görülmektedir.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M=e^{x}\sin y+2x+\frac{1}{x} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=N=e^{x}\cos y-2y-1$$

sağlatılır eşitlen

$$u(x,y)=\left[\int(e^{x}\sin y+2x+\frac{1}{x})\partial x\right]+C(y)$$

y'ye göre türevi alınıp

$$u(x,y)=e^{x}\sin y+x^{2}+\ln x+C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N=e^{x}\cos y-2y-1=\frac{\partial(e^{x}\sin y+x^{2}+\ln x)}{\partial y}+\frac{\partial C(y)}{\partial y} \Rightarrow C(y)=-y^{2}-y+C_1$$

$$u(x,y)=e^{x}\sin y+x^{2}+\ln x+C(y)=e^{x}\sin y+x^{2}+\ln x-y^{2}-y+C_1$$

$$u(x,y)=e^{x}\sin y+x^{2}+\ln x-y^{2}-y=\overline{C}$$

1.6. Entegrasyon çarpanı metodu

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x} \qquad \mu(x,y)$$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=Mdx+Ndy=0$$

diferansiyel denklemi (1.14) koşulunu <u>sağlamıyor ise</u> verilen diferansiyel denklem, $\mu(x,y)$ adlı bir <u>entegrasyon çarpanı</u> bulunur. Bu çarpan ile $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=Mdx+Ndy=0$ eşitliğinin her iki tarafı çarpılarak diferansiyel denklem tam diferansiyel denklem formuna dönüştürülür ve Bölüm 1.5'de anlatıldığı gibi diferansiyel denklem çözülür. Entegrasyon çarpanını bulmak için önce verilen diferansiyel denklemin her iki tarafı μ ile çarpılır:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

$$\mu(x,y)du=\mu(x,y)*0=\mu(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}dx+\mu(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\mu(x,y)Mdx+\mu(x,y)Ndy=0 \qquad (1.15)$$

(1.15) eşitliği artık tam diferansiyel denklem özelliğini kazanmıştır. Bundan dolayı (1.14) şartı sağlanmalıdır:

$$\boxed{\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}} \qquad (1.16)$$

$$\mu'\frac{\partial M}{\partial y}\cdot M\frac{\partial M}{\partial y}=$$

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\frac{\partial M}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}-\mu\frac{\partial N}{\partial x}=0$$

Yukarıdaki ifade düzenlenirse:

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)= \qquad =u$$

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{N_x-M_y}{Mv_y-Nv_x}$$

$$V=y^3 \qquad V_y=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right] \qquad (1.17)$$

elde edilir. İşlemleri daha da basitleştirmek için bu aşamada değişken dönüşümü yapılabilir:

$v=v(x,y)$; $\mu=\mu(v)$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{d\mu}{dv}\frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{dv}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Son ifade (1.17) eşitliğinde kullanılırsa;

$$M\mu'\frac{\partial v}{\partial y}-N\mu'\frac{\partial v}{\partial x}=\mu\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right] \qquad (1.18)$$

$$\boxed{\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M\dfrac{\partial v}{\partial y}-N\dfrac{\partial v}{\partial x}}=\frac{\mu'}{\mu}=\frac{N_x-M_y}{Mv_y-Nv_x}=\eta(v)} \qquad (1.19)$$

$\mu'=\dfrac{d\mu}{dv}$

$\mu(x^y)=\mu(v)$

v

$\ln\mu(v)=\int\eta(v)dv$

$$\mu(v)=e^{\int\eta(v)dv} \qquad (1.20)$$

elde edilir.

Hiç v yoksa v=x dir.

Özel durumlar:

1) $\mu=\mu(x)$ - entegrasyon çarpanı yalnızca x'e bağlı **(v=x)**

$v=x$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=v_x=1$; $\dfrac{\partial v}{\partial y}=v_y=0$

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{N_x-M_y}{-N}=\eta(x) \Rightarrow \mu(x)=e^{\int\eta(x)dx}$$

$\dfrac{N_x-M_y}{\cancel{M}-N}$

$v_x=1$

2) $\mu=\mu(y)$ - entegrasyon çarpanı yalnızca y'ye bağlı **(v=y)**

$v=y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=v_x=0$; $\dfrac{\partial v}{\partial y}=v_y=1$

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{N_x-M_y}{M}=\eta(y) \Rightarrow \mu(y)=e^{\int\eta(y)dy}$$

3) İntegral çarpanının x*y'nin fonksiyonu olması **(v=x*y)**

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=y$ ve $\dfrac{\partial v}{\partial y}=x$

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{N_x-M_y}{Mx-Ny} \Rightarrow \mu(x*y)=e^{\int\frac{N_x-M_y}{Mx-Ny}d(x*y)}$$ şeklindedir.

4) İntegral çarpanının (x+y)'nin bir fonksiyonu olması (v=x+y)

$$\frac{\partial v}{\partial x}=1 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial v}{\partial y}=1$$

$$\frac{\mu'(x+y)}{\mu(x+y)}=\frac{N_x-M_y}{M-N} \Rightarrow \ln\mu(x+y)=\int\frac{N_x-M_y}{M-N}d(x+y)$$

$$\mu(x+y)=e^{\int\frac{N_x-M_y}{M-N}d(x+y)}$$ şeklindedir.

5) İntegral çarpanının (x^2+y^2)'nin bir fonksiyonu olması $(v=x^2+y^2)$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2x \quad \text{ve} \quad \frac{\partial v}{\partial y}=2y$$

$$\frac{\mu'(x^2+y^2)}{\mu(x^2+y^2)}=\frac{N_x-M_y}{2yM-2xN} \Rightarrow \ln\mu(x^2+y^2)=\int\frac{N_x-M_y}{2yM-2xN}d(x^2+y^2)$$

$$\mu(x^2+y^2)=e^{\int\frac{N_x-M_y}{2yM-2xN}d(x^2+y^2)}$$

6) İntegral çarpanının (x^2-y^2)'nin bir fonksiyonu olması $(v=x^2-y^2)$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2x \quad \text{ve} \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-2y$$

$$\frac{\mu'(x^2-y^2)}{\mu(x^2-y^2)}=\frac{N_x-M_y}{-2yM-2xN} \Rightarrow \ln\mu(x^2-y^2)=\int\frac{N_x-M_y}{2yM+2xN}d(x^2-y^2)$$

$$\mu(x^2-y^2)=e^{\int\frac{M_x-N_y}{2yM+2xN}d(x^2-y^2)}$$

Problem 1.25

$$(2x-a)ydx+(y^2-x^2+ax)dy=0$$

diferansiyel denklemi y'ye bağlı olan ($\mu=\mu(v=y)$) bir entegrasyon sabitinin olduğu bilindiğine göre bu çarpan fonksiyonunu bulunuz. Bu çarpanı kullanarak verilen diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm

$$\frac{\partial M}{\partial y}=M_y=2x-a\neq-2x+a=\frac{\partial N}{\partial x}=N_x \quad \Leftarrow \text{(verilen dif.denklem tam dif.denklem değil)}$$

diferansiyel denklemi (1.14) koşulunu sağlamıyor ise verilen diferansiyel denklem, $\mu(v=y)$ adlı bir entegrasyon çarpanı bulunur. Entegrasyon çarpanı (1.19) eşitliği kullanılarak;

$$\frac{\mu'(y)}{\mu}=\frac{N_x-M_y}{Mv_y-Nv_x}=\frac{-2x+a-(2x-a)}{(2x-a)y}=-\frac{2}{y}$$

$$\ln\mu=-2\ln y \Rightarrow \mu=\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\frac{d\mu}{dv}}{\mu}=-\frac{2}{y}$$

$v=y$

$$v\frac{d\mu}{dv}=-2\mu$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=-2\frac{dv}{v}$$

elde edilir. Daha sonra problemde verilen diferansiyel denklem, yukarıda bulunan entegresyon çarpanı ile çarpılarak tam diferansiyel denklem haline getirilir:

$$(2x-a)\frac{y}{y^2}dx+(y^2-x^2+ax)\frac{1}{y^2}dy=0 \Rightarrow (2x-a)\frac{1}{y}dx+(1-\frac{x^2}{y^2}+\frac{ax}{y^2})dy=0$$

Son elde edilen eşitlikte; eşit çıkmalı

$$\frac{\partial M}{\partial y}=M_y=-\frac{2x}{y^2}+\frac{a}{y^2}=\frac{\partial N}{\partial x}=N_x=-\frac{2x}{y^2}+\frac{a}{y^2}$$

tam diferansiyel denklem olma şartının sağlandığı görülmektedir. Artık bölüm 5'de anlatılan yaklaşım kullanılarak yukarıda verilen diferansiyel denklem çözülebilir:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M=(2x-a)\frac{1}{y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=N=1-\frac{x^2}{y^2}+\frac{ax}{y^2}$$

$$u(x,y)=\left[\int(2x-a)\frac{1}{y}\partial x\right]+C(y) \Rightarrow u(x,y)=\frac{x^2}{y}-a\frac{x}{y}+C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=1-\frac{x^2}{y^2}+\frac{ax}{y^2}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{x^2}{y}-a\frac{x}{y})+C'(y)$$

$$C'(y)=1-\frac{x^2}{y^2}+\frac{ax}{y^2}-(-\frac{x^2}{y^2}+\frac{ax}{y^2})=1 \Rightarrow \frac{dC(y)}{dy}=1 \Rightarrow C(y)=y+C_1$$

$$u(x,y)=\frac{x^2}{y}-a\frac{x}{y}+y+C_1=C \Rightarrow \frac{x^2}{y}-a\frac{x}{y}+y=\overline{C} \quad \text{(genel çözüm-ilkel)}$$

Problem 1.26

$$(y+xy^2)dx+(x-x^2y)dy=0$$

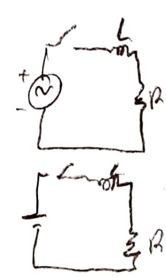
diferansiyel denklemi x ve y'ye bağlı olan ($\mu=\mu(x*y)$ bir entegrasyon sabitinin olduğu bilindiğine göre bu sabite ilişkin fonksiyonunu bulunuz. Bu çarpanı kullanarak verilen diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

$$(\mu=\mu(x*y)=\frac{1}{x^2y^2}; \quad \ln x-\frac{1}{xy}-\ln y=C)$$

1.7. Birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler

Ac'den beslenen bobin ve direnç devresi

Bu tür denklemler aşağıda belirtilen formata uygun olurlar:



lineer

$$a(x)y'+b(x)y=M(x)$$

$$y'+\frac{b(x)}{a(x)}y=\frac{M(x)}{a(x)}$$

$$\boxed{y'+P(x)y=Q(x)} \quad \textbf{(denklem tipine dikkat ediniz)} \qquad (1.21)$$

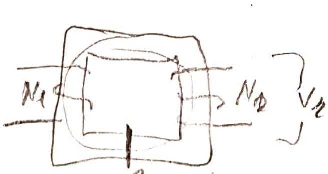
Bu tür diferansiyel denklemler genel olarak üç farklı yaklaşım ile çözülebilirler:

Sağ taraf sıfırsa kaynaksız

$yy'+c(x)y=Q(x) \rightarrow$ Nonlineer

$(y')^2+c(x)y=Q(x)$

Kocaeli



örnek ... ölçüm olduğunda 1,5cm dursa kaçak ölçüm olur

V soruda verilmezse x'e gör
V=X

- <u>Entegrasyon çarpanı metodu</u>

(1.21) eşitliği aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$(Py-Q)dx+dy=0 \tag{1.22}$$

Entegrasyon çarpanının $\mu=\mu(x)$ formunda olduğu kabulü ile (1.19) eşitliğinden;

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{N_x-M_y}{Mv_y-Nv_x}=\frac{-P}{-1}=P \;\Rightarrow\; \ln\mu=\int Pdx \;\Rightarrow\; \mu=e^{\int P(x)dx}$$

elde edilir. (1.22) eşitliğinin her iki tarafı (1.22.1) ifadesi ile çarpılırsa;

$$\boxed{\mu=e^{\int P(x)dx}} \qquad y'+P(x)y=Q(x) \tag{1.22.1}$$

$$Pye^{\int Pdx}dx+e^{\int Pdx}dy=e^{\int Pdx}Qdx$$

$$d(e^{\int Pdx}y)=e^{\int Pdx}Qdx$$

$$ye^{\int Pdx}=\int e^{\int Pdx}Qdx+C$$

$y=Ce^{-\int Pdx}+e^{-\int Pdx}\int e^{\int Pdx}Qdx$ (P ve Q'nun ne olduğunu anlamak için 1.21 eşitliğine bakınız)

$$y=Ca(x)+b(x) \tag{1.23}$$

elde edilir.

- <u>Değişken dönüşümü yöntemi</u>

(1.21) eşitliğinde,

$$y=u*v \tag{1.24}$$

değişken dönüşümü yapılırsa;

$$u'v+v'u+Puv=Q$$

$$v(u'+Pu)+v'u=Q \tag{1.25}$$

eşitliği elde edilir. Eğer u fonksiyonu;

$$(u'+Pu)=0 \tag{1.25.1}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde seçilirse;

$$\frac{u'}{u}=-P \tag{1.25.2}$$

640x360
3,07 MB

1H → 360p → 250MB
720p → 900MB
480p → 400MB

$\ln u = -\int P dx$

$$u = e^{-\int P dx} \qquad (1.25.3)$$

elde edilir. (1.25.3) ifadesi (1.25) denkleminde yerine konulursa;

$$v' e^{-\int P dx} = Q \;\Rightarrow\; v' = Q e^{\int P dx}$$

$$\frac{E}{L} = \frac{L}{L} * di(t) + \frac{R * i(t)}{L}$$

$$v = C + \int Q e^{\int P dx} dx$$

$$y = u * v = (e^{-\int P dx}) * (C + \int Q e^{\int P dx} dx) \qquad (1.25.4)$$

$$i' = \underbrace{\frac{R}{L}}_{P} i(t) = \underbrace{\frac{E}{L}}_{Q}$$

$$\boxed{y = C e^{-\int P dx} + e^{-\int P dx} \int e^{\int P dx} Q dx} \qquad (1.25.5)$$

genel çözümü verir

elde edilir. (1.25) eşitliği ile (1.23) eşitliğinin aynı olduğu görülmektedir.

- Lagrange sabitlerinin değişimi metodu (L.S.D) EDT

(1.21) eşitliğinin sağ tarafı atılırsa (homojen hale getirilirse);

$$y_h' + P(x) y_h = 0 \qquad (1.26)$$

elde edilir. (1.26) eşitliği değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklemdir. Bu ifadeden,

$$\frac{y_h'}{y_h} + P(x) = 0 \;\Rightarrow\; \ln \frac{y_h}{C} = -\int P(x) dx$$

$$\boxed{y_h = C e^{-\int P dx}} \qquad (1.27)$$

elde edilir. (1.27) eşitliği (1.21) ile verilen diferansiyel denklemin homojen çözümüdür. (1.27) eşitliğindeki C sabiti bir an için değişken (C=C(x)) kabul edilir ve (1.27) eşitliği ile verilen y_h değeri (1.21)'de y yerine yazılırsa;

$$C'(x) e^{-\int P dx} - P C(x) e^{-\int P dx} + P C(x) e^{-\int P dx} = Q \qquad (1.28)$$

$$C'(x) e^{-\int P dx} = Q \;\Rightarrow\; C'(x) = Q e^{\int P dx}$$

$$C(x) = \int e^{\int P dx} Q dx + C_1 \qquad (1.29)$$

elde edilir. (1.29) eşitliği (1.27) eşitliğinde yerine konulursa,

$$y = \underbrace{C_1 e^{-\int P dx}}_{y_h} + \underbrace{\int e^{\int P dx} Q dx) e^{-\int P dx}}_{y_p} = y_h + y_p \qquad (1.30)$$

elde edilir. (1.30) eşitliğinde y_h; homojen çözümü, y_p; özel çözümü ifade eder.

Problem 1.27

en yüksek mertebenin katsayısını 1 yap

$xy' + y = x^2$ (P(x))

a) entegrasyon çarpanı yöntemi ile, b) L.S.D yöntemi ile çözünüz. c) Değişken dönüşümü yöntemi ile çözünüz.

Çözüm

d) sıklıkla Got

b)

a) $y' + \frac{1}{x}y = x$

(1.21) eşitliğinden;

$y' + P(x)y = Q(x) \Rightarrow P(x) = 1/x$; $Q(x)=x$ olur. (1.22.1)'den

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

elde edilir. Verilen diferansiyel denklemin her iki tarafı $\mu(x) = x$ ile çarpılırsa;

$$xy' + y = x^2 \Rightarrow (y - x^2)dx + xdy = 0$$

elde edilir. Son ifadenin tam diferansiyel denklem olduğu görülmektedir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = (y - x^2) \; ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

$$u(x,y) = \left[\int (y - x^2)\partial x\right] + C(y) \Rightarrow u(x,y) = yx - \frac{x^3}{3} + C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x = \frac{\partial}{\partial y}(yx - \frac{x^3}{3} + C(y)) \Rightarrow x = x - C'(y) \Rightarrow C(y) = C_1$$

$$u = C_2 = yx - \frac{x^3}{3} + C(y) = yx - \frac{x^3}{3} + C_1 = C_2$$

$$yx - \frac{x^3}{3} = C_2 - C_1 = C_3$$

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{C_3}{x} \quad \text{(genel çözüm)}$$

1- y' katsayısı 1 kaynak sağ tarafta
2- Eşitliğin sağ tarafını sıfır yap
3- $y \rightarrow y_h$ yaz $y_h' = \frac{dy_h}{dx}$
4- C', y_h sil, yerine kaynak
5- Homojen ifadedeki yerine koy

b) L.S.D yöntemi ile dif.denklem çözümünde önce genel çözüme ulaşılmaya çalışılır: (y_h bulunur)

$y' + \frac{1}{x}y = x$ (*) kaynak atılır (kısa devre)

$y_h' + \frac{1}{x}y_h = 0$ (sağ tarafsız dif.denklem) homojen

Depolanan elemanların enerjilerini geri boşaltmasında homojen denir (EDT)

$$\frac{y_h'}{y_h} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \ln\frac{y_h}{C} = -\ln x = \ln\frac{1}{x}$$

$y_h = \frac{C}{x}$ (homojen çözüm) C yi değişken yap (C'). Cnın üzerine tırnak at, y_h atıp sıfırlanan kaynağa eşitle

$\frac{C'}{x} = x \Leftarrow$ (*) denkleminin sağ tarafı

$C' = x^2$

$C' = \frac{dC}{dx}$

$$\frac{dy_h}{dx} = -\frac{1}{x}y_h$$

$$\frac{dy_h}{y_h} = -\frac{dx}{x}$$

$$C' = \frac{dC}{dx} = x^2 \Rightarrow C = \frac{x^3}{3} + C_1$$ → C yi yerine yazıp $y_h \to y$ çevrilsin

Elde edilen C değeri homojen çözümde yerine konulursa diferansiyel denklemin genel çözümü;

$$y = \frac{C}{x} + \frac{x^2}{3}$$

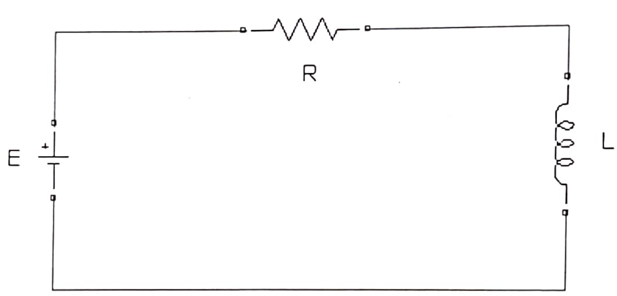
olarak elde edilir (sonuç a şıkkı ile aynıdır).

Eğer aynı problem <u>değişken dönüşümü</u> ile yapılsaydı aşağıdaki işlemler yapılacaktı;

c) $P(x)=1/x$; $Q(x)=x$ olacaktır.

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx$$
$$y = Ce^{-\ln x} + e^{-\ln x}\int e^{\ln x}xdx$$
$$y = \frac{C}{x} + \frac{1}{x}\int x * x * dx = \frac{C}{x} + \frac{x^3}{3}\frac{1}{x} = \frac{C}{x} + \frac{x^2}{3}$$ elde edilir.

Problem 1.28



Şekil 1.5

Yukarıda verilen elektrik devresinde devre akımına ilişkin genel çözümü bulunuz.

Çözüm

Verilen devreye Kirchhoff gerilim yasası uygulanırsa;

$$E = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow i' + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$ (türevli ifadenin katsayısı 1 yapılıyor dikkat edilsin)

elde edilir. Yukarıda verilen diferansiyel denklem LSD yaklaşımı ile çözülecektir:

$$\frac{i_h'}{i_h} = -\frac{R}{L} \Rightarrow \ln\frac{i_h}{C} = -\frac{R}{L}t \Rightarrow i_h(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t}$$ (sağ tarafsız)

$$C'e^{-\frac{R}{L}t} = E/L$$ (özel çözüm-LSD ile);

$$C' = \frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t} \Rightarrow C = \frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C_1$$

$$i_g(t) = (\frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C_1)e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_g(t) = \frac{E}{R} + C_1 e^{-\frac{R}{L}t} \quad \text{(genel çözüm)}$$

(nonlineer) Bernoulli

1
2
3

1.8. Lineere dönüştürülerek diferansiyel denklem çözümünün bulunması

1.8.1. Bernoulli diferansiyel denklemi

$\boxed{a(x)y' + b(x)y = c(x)y^n}$ (birinci mertebeden n. dereceden dif.denklem), $n \neq 0$, $n \neq 1$

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{c(x)}{a(x)}y^n$$

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \qquad (1.31)$$

(1.31) eşitliğinin her iki tarafı y^n 'e bölünürse;

$$\frac{y'}{y^n} + P(x)\frac{y}{y^n} = Q(x) \qquad (1.32)$$

elde edilir. Eğer (1.32) eşitliğinde **P(x)'in katsayısına** "u" denir ve

$$\boxed{u = \frac{1}{y^{n-1}}} \qquad (1.33)$$

Bernoulliyi bernoulli yapan

değişken dönüşümü yapılırsa,

$$y^{1-n} = u \Rightarrow (1-n)y^{-n}y' = u'$$

Ber

$$\boxed{\frac{y'}{y^n} = \frac{u'}{1-n}} \quad \text{(her zaman geçerli bir ifade)} \qquad (1.34)$$

elde edilir. (1.34) ifadesi (1.32)'de yerine konulursa,

Akümülatörle olsun

$$\frac{u'}{1-n} + P(x)u = Q(x) \Rightarrow u' + M(x)u = D(x) \quad \text{(LSD)} \qquad (1.35) \Leftarrow (1.21) \text{ ifadesinden}$$

elde edilir. (1.35) ifadesi (1.21) eşitliğinde verilen **birinci mertebeden birinci dereceden diferansiyel denklem** formunda olduğundan dolayı (1.35) denkleminin çözümü de (1.23)'de verilen;

$$u = CA(x) + B(x) \qquad (1.36)$$

denklem türünde olacaktır. (1.36) eşitliğinde u yerine (1.33)'deki karşılığı konulursa;

$$\frac{1}{y^{n-1}} = CA(x) + B(x) \qquad (1.37)$$

$$y^{n-1} = \frac{1}{CA(x) + B(x)} \qquad (1.38)$$

elde edilir.

Problem 1.28

$y' + y\tan x = y^2 \cot an^2 x$
diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm Plam yanındaki ifadeye u'de

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{\tan x}{y} = \cot an^2 x$$ (n=2 olduğundan verilen diferansiyel denklem $1/y^2$ ile çarpılmıştır)

$\frac{1}{y} = u$

$-y' \cdot \frac{1}{y^2} = u'$

Verilen diferansiyel Bernoulli tipi diferansiyel denklem olduğundan (n=2), problem

$$u = \frac{1}{y^{n-1}} = \frac{1}{y^{2-1}} = \frac{1}{y} \quad \Leftarrow \text{(1.33) yardımı ile}$$

değişken dönüşümü kullanılarak çözülecektir.

$$\frac{1}{y} = u \Rightarrow -\frac{y'}{y^2} = u'$$

$$-u' + (\tan x)u = \cot an^2 x \quad \Leftarrow \text{(1.35) formatına sokulmalıdır}$$

$$u' \underbrace{-(\tan x)}_{P(x)} u = \underbrace{-\cot an^2 x}_{Q(x)} \qquad (1.39)$$

Son eşitlik sağ tarafsız çözülürse; (L.S.D) yöntemi ile

$$\frac{u_h'}{u_h} = \tan x \Rightarrow \ln\frac{u_h}{C} = -\ln\cos x$$

$$u_h = \frac{C}{\cos x} \quad \text{(homojen çözüm)} \qquad (1.40)$$

(1.40)'da verilen eşitlikte C=C(x) kabul edilirse;

$$\frac{C'}{\cos x} = -\cot an^2 x \quad \Leftarrow \text{(1.39) ifadesinin sağ tarafı}$$

$$C' = -\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \cos x \quad \text{not: } \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} = \frac{(\cos^2 x)(\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x} - \cos x$$

$$C = \frac{1}{\sin x} + \sin x + C_1 \qquad (1.41) \quad \Leftarrow \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}$$

elde edilir. (1.41) değeri (1.40) ifadesinde yerine konulursa,

$$u = \frac{C_1}{\cos x} + \tan x + \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{C_1}{\cos x} + \tan x + \frac{2}{\sin 2x}} \qquad \text{(genel çözüm)}$$

elde edilir.

1.8.2. Riccati diferansiyel denklemi

Her zaman y^2

$$a(x)y' + b(x)y + c(x)y^2 + d(x) = 0 \qquad (1.42)$$

tipinde olan diferansiyel denklemler Riccati tipi diferansiyel denklem olarak adlandırılır. (1.42) eşitliği düzenlenirse;

$$\boxed{y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2} \qquad (1.43)$$

Riccati tipi → Bernoulli ile ilişkili $y' + P(x)y = Q(x)y^?$

elde edilir. (1.43) eşitliği birinci mertebeden | 2. dereceden bir diferansiyel denklem olup P,Q,R fonksiyonları ise sürekli fonksiyonlardır.

Not: (1.43) eşitliğinde P(x)=0 ise denklem; birinci mertebeden lineer diferansiyel denkleme, P(x)=Q(x)=0 ise değişkenlere ayrılabilen diferansiyel denkleme, R(x)=0 ise Bernoulli tipi diferansiyel denkleme dönüşür.

1.8.2.1. Bir özel çözümü bilinen Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümü

Riccati ve özel çözüm

$$\boxed{y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2} \qquad (1.44)$$

y_1, y'nin bir özel çözümü ise

$$y_1' = P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2 \qquad (1.45)$$

Tüm çözümün diferansiyel denklemi sağlamasına özel çözüm denir

(1.44) eşitliği ile (1.45) eşitliği birbirlerinden çıkartılır ise;

$$y' - y_1' = Q(x)(y - y_1) + R(x)(y^2 - y_1^2) \qquad (1.46)$$

elde edilir. (1.46) eşitliğinde,

$$y - y_1 = \frac{1}{u} \Rightarrow y = y_1 + \frac{1}{u}$$

Riccati'yi Bernoulli'ye yapan

değişken dönüşümü kullanılarak,

$$y' - y_1' = -\frac{u'}{u^2} \qquad (1.47)$$

$$y^2 - y_1^2 = (y - y_1)(y + y_1) = \frac{1}{u} * (2y_1 + \frac{1}{u}) \qquad (1.48)$$

elde edilir. (1.47) ve (1.48) eşitlikleri (1.46) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\frac{-u'}{u^2} = \frac{Q}{u} + \frac{R}{u}(2y_1 + \frac{1}{u})$$

$$\boxed{u' + (Q + 2y_1R)u = -R} \quad \Leftarrow \textbf{dikkat} \qquad (1.49)$$

yukarıdan

elde edilir. (1.49) eşitliği 1.mertebeden 1.dereceden bir diferansiyel denklem formundadır. Bu tür diferansiyel denklemlerin çözümü ise (1.36) formunda olacaktır:

$$u = CA(x) + B(x)$$

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

ifadesi kullanılarak;

$$y = y_1 + \frac{1}{CA(x) + B(x)} = \frac{C\alpha(x) + P(x)}{C\gamma(x) + \delta(x)} \qquad (1.50)$$

elde edilir.

$-x\cos x + \int \cos x \, dx$

$x = u$, $dx = du$, $\sin x \, dx = dv$, $-\cos x = v$

$x^2 = u$, $2x\,dx = du$, $\cos x \, dx = dv$, $\sin x = v$

$x^3 = u$, $3x^2 dx = du$, $\sin x \, dx = dv$, $-\cos x = v$

$x^4 = u$, $4x^3 dx = du$, $\cos x \, dx = dv$, $\sin x = v$

$-x^3\cos x + \int \cos x \, 3x^2 dx$

$x^2 \sin x - \int \sin x \, 2x \, dx$

$x^4 \sin x - \int \sin x \, 4x^3 dx$

önemli

Denklem düzenle

Problem 1.29

$$y' = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}y - y^2$$

Riccati diferansiyel denkleminde $y_1 = \frac{1}{x}$ bir özel çözüm olduğuna göre genel çözümü bulunuz.

Çözüm

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = \frac{1}{x} + \frac{1}{u} \qquad (1.51)$$

değişken dönüşümü kullanılarak,

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{u'}{u^2} \qquad (1.52)$$

elde edilir. (1.51) ,(1.52) ifadeleri problemde verilen dif.denklemde kullanılırsa;

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{u'}{u^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{u}\right] - \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{u}\right]^2$$

$u'+(Q+2y_1R)v=-R$

$$\boxed{u' - \frac{3}{x}u = 1} \Leftarrow \textbf{(1.21) formatına geldi} \qquad (1.53)$$

1 volt der

elde edilir. Son ifadede homojen çözüm bulunursa;

$$\frac{u_h'}{u_h} = \frac{3}{x} \Rightarrow \ln\frac{u_h}{C} = 3\ln x$$

$$u_h = Cx^3 \qquad (1.54)$$

elde edilir. Son ifadede C=C(x) olduğu kabulü ile,

$$C'x^3 = 1 \Leftarrow \text{(1.53) eşitliğinin sağ tarafı}$$

x^{-3} $\quad -3x^{-2}$

$$C' = \frac{1}{x^3}$$

$$C = -\frac{1}{2x^2} + C_1 \qquad (1.55)$$

bulunur. (1.55) ifadesi (1.54)'e taşınır ise,

$$u = C_1x^3 - \frac{x}{2}$$

elde edilir. Son eşitlik (1.51)'e taşınır ise;

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{C_1x^3 - \frac{x}{2}} = \frac{Cx + 0.5}{x(x^2 - 0.5)} \qquad \text{(genel çözüm)}$$

elde edilir.

Not: Yukarıdaki problemde (1.53) eşitliği aşağıdaki şekilde de elde edilebilirdi;
(1.49) eşitliğine bakarak; $P(x)=1/x^2$; $Q(x)=-1/x$; $R=-1$ kullanılarak;

$$u'+(-\frac{1}{x}+2(\frac{1}{x})(-1))u=1 \Rightarrow u'-(3/x)u=1$$ ifadesi bulunabilirdi.

1.8.2.2. İki özel çözümü bilinen Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümü

y'ye ilişkin iki özel çözüm, y_1 ve y_2 olsun;

$$y'=P(x)+Q(x)y+R(x)y^2 \qquad (1.56)$$
$$y_1'=P(x)+Q(x)y_1+R(x)y_1^2 \qquad (1.57)$$
$$y_2'=P(x)+Q(x)y_2+R(x)y_2^2 \qquad (1.58)$$

(1.56) eşitliğinden (1.57) eşitliği ve (1.58) eşitliği sıra ile çıkartılırsa;

$$y'-y_1'=Q(x)(y-y_1)+R(x)(y^2-y_1^2) \qquad (1.59)$$
$$y'-y_2'=Q(x)(y-y_2)+R(x)(y^2-y_2^2) \qquad (1.60)$$
$$\frac{y'-y_1'}{y-y_1}=Q+R(y+y_1) \qquad (1.61)$$
$$\frac{y'-y_2'}{y-y_2}=Q+R(y+y_2) \qquad (1.62)$$

bulunur. (1.61) eşitliğinden (1.62) eşitliği çıkartılırsa;

$$\frac{y'-y_1'}{y-y_1}-\frac{y'-y_2'}{y-y_2}=R(y_1-y_2) \qquad (1.63)$$
$$\frac{dy-dy_1}{y-y_1}-\frac{dy-dy_2}{y-y_2}=R(y_1-y_2)dx \qquad (1.64)$$
$$\int\frac{dy-dy_1}{y-y_1}-\int\frac{dy-dy_2}{y-y_2}=\int R(y_1-y_2)dx \qquad (1.65)$$
$$(\ln(y-y_1)-\ln(y-y_2))/C=\int R(y_1-y_2)dx \qquad (1.66)$$
$$\boxed{\frac{y-y_1}{y-y_2}=Ce^{\int(y_1-y_2)Rdx} \quad \text{(genel çözüm)}} \qquad (1.67)$$

Problem 1.30

$$y'=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}y-y^2$$

Riccati diferansiyel denkleminin iki özel çözümü;

$$y_1=1/x; \quad y_2=-1/x$$

bilindiğine göre genel çözümü bulunuz.

Çözüm

(1.67) eşitliği verilen probleme uygulanırsa (R=−1):

$$\frac{y-\frac{1}{x}}{y+\frac{1}{x}} = Ce^{\int -(1/x+1/x)dx} = Ce^{-2\ln x} = \frac{C}{x^2}$$

$$y = \frac{C+x^2}{x^3 - xC} \qquad \text{(genel çözüm)}$$

Açıklama

Riccati diferansiyel denkleminin, $y_1 y_2, y_3, y_4$ gibi dört özel çözümü biliniyor ise,

$$\frac{\dfrac{y_2-y_1}{y_2-y_3}}{\dfrac{y_4-y_1}{y_4-y_3}} = C \qquad (1.68)$$

oranı sabittir (ispatı verilmemiştir).

1.8.2.3. Üç özel çözümü bilinen Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümü

(1.68) denkleminde y_2 yerine y, y_4 yerine ise y_2 yazılsın:

$$\frac{y-y_1}{y-y_3} \div \frac{y_2-y_1}{y_2-y_3} = C$$

$$\frac{y-y_1}{y-y_3} = C\frac{y_2-y_1}{y_2-y_3} \qquad (1.69)$$

$$\boxed{y = \frac{C(y_1-y_2)y_3 + y_1(y_2-y_3)}{C(y_1-y_2)+(y_2-y_3)} \quad \text{(genel çözüm)}} \qquad (1.70)$$

1.8.2.4. Üç özel çözümü bilinen Riccati diferansiyel denkleminin kurulması

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$$
$$y_1' = P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2$$
$$y_2' = P(x) + Q(x)y_2 + R(x)y_2^2$$
$$y_3' = P(x) + Q(x)y_3 + R(x)y_3^2$$

$$\begin{vmatrix} y' & y^2 & y & 1 \\ y_1' & y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2' & y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3' & y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.71)$$

Yukarıdaki matrisin determinantı bulunur ve sıfıra eşitlenir. Elde edilen denklemden y' çekilerek aranan diferansiyel denkleme ulaşılır.

Problem 1.31

a) $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = x$ olarak üç özel çözümü verilen Riccati diferansiyel denklemini kurunuz.
b) $y_1 = 0$ özel çözümü bilinen Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz
c) $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, özel çözümleri bilinen Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz
d) $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = x$ özel çözümleri bilinen Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz
e) Bulunan genel çözümlerde $C=\infty, 0, -1$ değerleri için y değerlerini bulunuz ve yorumlayınız.
f) a şıkkında bulunan denklemi, Riccati olduğu bilinmeksizin doğrudan entegre ediniz

Çözüm

a) (1.71) eşitliği kullanılarak;

$$\begin{vmatrix} y' & y^2 & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

1. satıra göre kofaktör yöntemi ile Det. al

$$y'(x-x^2) + y^2 - y = 0 \Rightarrow y' = \frac{y^2 - y}{x^2 - x}$$

$$y' = \frac{-y}{x(x-1)} + \frac{1}{x(x-1)} y^2 \qquad \text{(Riccati dif.denklemi)}$$

Not: $y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$ idi

$$y' = \frac{y^2 - y}{x^2 - x} \text{ ifadesinde } Q(x) = -\frac{1}{x(x-1)}; \; R(x) = \frac{1}{x(x-1)} \text{ olur}$$

b) $y_1 = 0$; $y = 0 + \dfrac{1}{u}$

$$\frac{-u'}{u^2} = -\frac{1}{ux(x-1)} + \frac{1}{u^2 x(x-1)}$$

$$-u' = -\frac{1}{x(x-1)} u + \frac{1}{x(x-1)}$$

$$u' - \frac{1}{x(x-1)} u = -\frac{1}{x(x-1)} \quad \text{denklemi L.S.D yöntemi ile çözülürse} \quad (1.72)$$

$$\frac{u_h'}{u_h} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

$$\ln \frac{u_h}{C} = \ln \frac{x-1}{x}$$

$$u_h = C \frac{x-1}{x} \qquad (1.73)$$

C=C(x) ise

$$C'\frac{x-1}{x}=-\frac{1}{x(x-1)} \Leftarrow \text{(1.72) eşitliğinin sağ tarafı}$$

$$C=\frac{1}{x-1}+C_1 \tag{1.74}$$

elde edilir. (1.74) eşitliği (1.73)'de yerine konulursa;

$$u=C\frac{x-1}{x}=(\frac{1}{x-1}+C_1)\frac{x-1}{x}$$

$$u=C_1\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x} \tag{1.75}$$

(1.75) eşitliği $y=0+\frac{1}{u}$ ifadesinde yerine konulursa;

$$y=\frac{1}{C_1\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x}}=\frac{x}{C_1(x-1)+1} \quad \text{(genel çözüm)}$$

elde edilir.

c) $\frac{y-y_1}{y-y_2}=Ce^{\int(y_1-y_2)Rdx} \Rightarrow \frac{y-0}{y-1}=Ce^{\int-\frac{1}{x(x-1)}dx}=Ce^{\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1})dx}=Ce^{\ln\frac{x}{x-1}}=C\frac{x}{x-1}$

$$y(x-1)=Cx(y-1)$$

$$y=\frac{-Cx}{(x-1)-Cx} \Rightarrow -\frac{1}{C}=C_1 \text{ alınırsa} \Rightarrow y=\frac{x}{C_1(x-1)+x}$$

Sonuç b şıkkı ile aynıdır.

d) $\frac{y-y_1}{y-y_3}=C\frac{y_2-y_1}{y_2-y_3} \Rightarrow \frac{y}{y-x}=\frac{C}{1-x} \Rightarrow y(1-x)=Cy-Cx$

$$y=\frac{-Cx}{1-x-C} \Rightarrow C=C_1^{-1} \text{ alınırsa} \Rightarrow y=\frac{x}{C_1(x-1)+x}$$

Sonuç b ve c şıkkı ile aynıdır.

e) $y=\frac{x}{C_1(x-1)+x}$ denkleminde $C_1=\infty,0,-1$ değerleri için,

ilk koşulu katoya göre sağlar

$C_1=\infty \Rightarrow y=0=y_1$

$C_1=-1 \Rightarrow y=x=y_3$

$C_1=0 \Rightarrow y=1=y_2$

elde edilir. Yukarıda değerlerde de görüldüğü gibi C_1 değerleri özel çözümlere karşılık gelmektedir.

f) $y'=\frac{y^2-y}{x^2-x}$

$$\frac{dy}{y^2-y}=\frac{dx}{x^2-x} \Rightarrow (\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y})dy=(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x})dx \Leftarrow \text{değişkenlerine ayrılabilen dif.denklem}$$

$$\ln(\frac{\frac{y-1}{y}}{C})=\ln\frac{x-1}{x} \Rightarrow \frac{\frac{y-1}{y}}{C}=\frac{x-1}{x} \Rightarrow y=\frac{x}{C(x-1)+1}$$

1.8.2.5. Hiç bir özel çözümü bilinmeyen Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümü (Jacobi dönüşümü)

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$$

diferansiyel denkleminde,

$$y = -\frac{1}{R}\frac{u'}{u} \quad \text{(Jacobi dönüşümü)} \tag{1.76}$$

uygulanırsa (R=R(x) olduğu unutulmasın),

$$y' = \frac{R'}{R^2}\frac{u'}{u} - \frac{1}{R}\left(\frac{u''u - u'^2}{u^2}\right) \Rightarrow \frac{R'}{R^2}\frac{u'}{u} - \frac{1}{R}\frac{u''}{u} + \frac{1}{R}\frac{u'^2}{u^2} = P + Q\left(-\frac{1}{R}\frac{u'}{u}\right) + \frac{1}{R}\frac{u'^2}{u^2}$$

$$\frac{u''}{Ru} - \left(\frac{Q}{R} + \frac{R'}{R^2}\right)\frac{u'}{u} + P = 0$$

Lineer

$$u'' - \left(Q + \frac{R'}{R}\right)u' + RPu = 0 \quad \Leftarrow \textbf{dikkat} \tag{1.77}$$

elde edilir. (1.77) eşitliğinde görüldüğü gibi Riccati diferansiyel denklemi, Jacobi dönüşümü kullanılarak ikinci mertebeden bir diferansiyel denkleme dönüşmektedir. (1.77)'de verilen yüksek mertebeden diferansiyel denklem çözümleri ileride anlatılacaktır.

Problem 1.32

$y' = 1 + y^2$ Riccati diferansiyel denklemini Jacobi dönüşümünü kullanarak 2.mertebeden bir diferansiyel denkleme dönüştürünüz.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklemde R=1 değerini almaktadır. Buna göre (1.76) eşitliği;

$$y = -\frac{u'}{u}$$

olmaktadır. Değişken dönüşümü verilen diferansiyel denklem uygulanır ve ifadeler düzenlenirse;

$$-\left(\frac{u''u - u'^2}{u^2}\right) = 1 + \frac{u'^2}{u^2}$$

$$u'' + u = 0$$

elde edilir.

Problem 1.33

$y' = \dfrac{xy^2 - y}{x}$ diferansiyel denklemi verilmektedir.

a) $v = xy$ olacak şekilde bir entegrasyon çarpanı bularak diferansiyel denklemin genel çözümü elde ediniz.

b) $y_1 = 0$ bir özel çözümü bilindiğine göre diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

c) Verilen diferansiyel denklemi doğrudan entegre ediniz. (**Bernoulli** tipi olduğu hatırlansın)

Çözüm Tam dif.

a) $du = Mdx + Ndy = 0$ (verilen dif.denklemin (1.13) formatına sokulması gerekir)

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - y}{x} \Rightarrow -(xy^2 - y)dx + xdy = 0$$

$$N = x\,; \quad M = -(xy^2 - y)\,; \quad \frac{dN}{dx} = N_x = 1\,; \quad \frac{dM}{dy} = M_y = -2xy + 1$$

Tam değil

$$v = xy\,;\ v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = y\,;\ v_y = \frac{\partial v}{\partial y} = x$$

elde edilir. (1.19) eşitliğinden;

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{Mv_y - Nv_x} = \frac{\frac{d\mu}{dv}}{\mu} = \frac{d\mu}{\mu dv} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1 + 2xy - 1}{x(y - xy^2) - yx} dv$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{yx} dv \Rightarrow \ln\mu = -2\ln v \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^2 y^2}$$

elde edilir. Bulunan entegrasyon sabiti ile verilen diferansiyel denklem çarpılırsa;

$$N\ \frac{1}{xy^2} dy - \frac{1}{x^2 y}(xy - 1)dx = 0 \quad \text{(Tam dif. denklem)}\ M$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{1}{xy^2}$$

eşitle

Çıkan C(y)

$$u(x,y) = \left[\int -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 y} \partial x\right] + C(y) \Rightarrow u(x,y) = -\frac{1}{xy} - \ln x + C(y) = C_1$$

y türevdi

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{xy^2} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{xy} - \ln x\right) + C'(y)$$

$$C'(y) = \frac{1}{xy^2} - \frac{1}{xy^2} \Rightarrow \frac{dC(y)}{dy} = 0 \Rightarrow C(y) = C_2$$

$$u(x,y) = -\frac{1}{xy} - \ln x + C(y) = C_1 = u(x,y) = -\frac{1}{xy} - \ln x + C_2$$

$$y = \frac{1}{x(C_3 - \ln x)} \qquad \text{(genel çözüm-ilkel)}$$

b) $y_1 = 0\,; \quad y = y_1 + \frac{1}{u}\,; \quad y = 0 + \frac{1}{u} = \frac{1}{u}\,; \quad y' = -\frac{u'}{u^2}\,; \quad -\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{x}\frac{1}{u}$

Direk çözebilirsen

$$u' - \frac{1}{x}u = -1 \quad \text{(u'ya göre lineer dif.denklem)}$$

Yukarıda verilen dif.denklemin homojen çözümü;

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\frac{u_h}{C} = \ln x \Rightarrow u_h = Cx$$

elde edilir. C=C(x) alınırsa,

$$C'x = -1 \Rightarrow C = -\ln x + C_1$$

elde edilir. C değeri $u_h = Cx$ ifadesinde yerine konulursa;

$$u = x(-\ln x + C_1) = -x\ln x + xC_1$$

$$y = \frac{1}{u} \Rightarrow y = \frac{1}{xC_1 - x\ln x}$$

c) Verilen diferansiyel denklemde,

$$y^{1-n} = y^{-1} = z$$

değişken dönüşümü kullanılırsa,

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = 1 \;\Rightarrow$$

elde edilir.

$$y^{1-n} = y^{-1} = z \;\Rightarrow\; -y^{-2}y' = z'$$

$$-z' + \frac{1}{x}z = 1$$

$$z' - \frac{1}{x}z = -1 \qquad \text{(lineer diferansiyel denklem)}$$

Yukarıdaki lineer dif.denklemin homojen çözümü;

$$\frac{z_h'}{z_h} = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; \ln\frac{z_h}{C} = \ln x \;\Rightarrow\; z_h = Cx$$

olarak elde edilir. C=C(x) için,

$$C'x = -1 \;\Rightarrow\; C = -\ln x + C_1$$

$$z_h = Cx$$

$$z = Cx = (-\ln x + C_1)x = -x\ln x + C_1 x$$

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{C_1 x - x\ln x}$$

elde edilir. c şıkkında şöyle bir yaklaşım da geliştirilebilirdi;

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

eşitliği kullanılarak;

Akış kart izleme aralı
PIXIS Designer 9
SFT2841
PT expert 9

$u = 1/(y^{n-1})$ için

$$y' + \frac{y}{x} = y^2 \;\Rightarrow\; n{=}2;\; P(x){=}1/x;\; Q(x){=}1$$

$$\frac{u'}{1-n} + P(x)u = Q(x) \Rightarrow \frac{u'}{-1} + \frac{1}{x}u = 1 \quad \text{elde edilir.}$$

1.9. Diferansiyel denklemlerde değişken dönüşümü

$$y' = f(x,y)$$

diferansiyel denkleminde,

x=x(u,v)
y=y(u,v)

eşitlikleri geçerli ise,

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv = x_u du + x_v dv \qquad (1.78)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv = y_u du + y_v dv \qquad (1.79)$$

yazılabilir. (1.78) ve (1.79) ifadeleri verilen dif.denklemde yerine konulursa,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y_u du + y_v dv}{x_u du + x_v dv} \qquad (1.80)$$

elde edilir. (1.80) eşitliğinin sağ tarafındaki kesrin pay ve paydası dv'ye bölünürse;

$$y' = \frac{y_u u' + y_v}{x_u u' + x_v} \qquad (1.81)$$

$$\frac{y_u u' + y_v}{x_u u' + x_v} = f(x(u,v), y(u,v)) \qquad (1.82)$$

$$y_u x_u + y_v x_v = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad ? \qquad (1.83)$$

elde edilir.

Problem 1.34

$y' = f(x,y) = \sin(x+y) - 1$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü x+y=u değişken dönüşümü yardımı ile bulunuz.

Çözüm

x+y=u [dx+dy=du 1+dy/dx=du/dx $1 + y' = u'$]

alınırsa ve her iki taraf x'e göre türetilirse;

$$1 + y' = u' \Rightarrow 1 + \sin(x+y) - 1 = u' \Rightarrow 1 + \sin u - 1 = u' \Rightarrow u' = \sin u$$

$$\frac{du}{dx} = \sin u \Rightarrow \frac{du}{\sin u} = dx \Rightarrow \ln(\tan\frac{u}{2}) = x + C$$

$$\ln(\tan\frac{x+y}{2}) = x + C \qquad \text{(genel çözüm)}$$

elde edilir.

Problem 1.35

$(x+y)\tan(x-y) + [2 - (x+y)\tan(x-y)]y' = 0$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü,

2 değişken (
x+y=u
x−y=v

değişken dönüşümlerini kullanarak bulunuz.

Çözüm

$$y = \frac{u - v}{2} \Rightarrow dy = \frac{du - dv}{2}$$

$$x = \frac{u + v}{2} \Rightarrow dx = \frac{du + dv}{2}$$

$\frac{1-v'}{1+v'} = y'$ (bu da dur)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du - dv}{du + dv}$$

Son eşitliğin sağ tarafının pay ve paydası dv'ye bölünürse,

$$y' = \frac{u' - 1}{u' + 1} \qquad (1.84)$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen eşitlikler yardımı ile problemde verilen diferansiyel denkleme dönülürse;

$$u \tan v + [2 - u \tan v]\frac{u' - 1}{u' + 1} = 0$$

$$uu' \tan v + u \tan v + 2u' - 2 - uu' * \tan v + u \tan v = 0$$

$u(t) \to$ birim basamak fonk.

$$u' + (\tan v)u = 1$$

$\to u(t) \to 1$ ivdo

1. mertebeden lineer sağ taraflı dif. denk.

LSD

Yukarıdaki lineer dif.denklemin sağ tarafsız çözümü;

$$\frac{u_h'}{u_h} = -\tan v \Rightarrow \ln(u_h / C) = \ln(\cos v) \Rightarrow u_h = C \cos v \text{ elde edilir.}$$

$$u_h = C \cos v$$

C=C(v) kabulü ile

$\to dC/dv$

$$C' \cos v = 1 \Rightarrow C' = \frac{1}{\cos v} \Rightarrow C = \ln \tan(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{4}) + C_1$$

elde edilir. C değeri $u_h = C \cos v$ ifadesinde yerine konulursa,

$$u = C_1 \cos v + (\cos v) \ln(\tan(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{4}))$$

$$x + y = C_1 \cos(x - y) + (\cos(x - y)) \ln(\tan(\frac{x - y}{2} + \frac{\pi}{4})) \qquad \text{(genel çözüm)}$$

elde edilir.

Problem 1.36

$$y' = \sqrt{x + y + 1}$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü u=x+y+1 değişken dönüşümü kullanarak bulunuz.

Çözüm

$$u = x + y + 1 \Rightarrow du = dx + dy \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow u' = 1 + y' \Rightarrow y' = u' - 1$$

$$u' - 1 = \sqrt{u}$$

$$du = (\sqrt{u} + 1)dx$$

$$\frac{du}{\sqrt{u} + 1} = dx \qquad (1.85)$$

$t = \sqrt{u}$ ile tekrar değişken dönüşümü yapılırsa;

$$\frac{1}{2\sqrt{u}}du = dt \Rightarrow du = 2tdt$$

Syfa 17.

elde edilir. Son ifade (1.85) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\int \frac{2tdt}{t+1} = \int dx \Rightarrow \frac{2t}{t+1} = A + \frac{B}{t+1} \Rightarrow A = 2; B = -2 \text{ bulunur. } \int \frac{2tdt}{t+1} = \int 2dt - \int \frac{2}{t+1}dt$$

$$2\int (1 - \frac{1}{t+1})dt = x + C$$

$$2\sqrt{x+y+1} - 2\ln(\sqrt{x+y+1} + 1) = x + C \qquad \text{(genel çözüm)}$$

Problem 1.37

$$(x+y)\cot an(x-y) + [2 - (x+y)\cot an(x-y)]y' = 0$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü, $x + y = u$, $x - y = v$ değişken dönüşümlerini kullanarak bulunuz.

Çözüm

$$x + y = u \,; \quad x - y = v$$

$$u\cot anv + [2 - u\cot anv]y' = 0 \Rightarrow u\cot anv + [2 - u\cot anv]\frac{u' - 1}{u' + 1} = 0$$

$$u'u\cot anv + 2u\cot anv + 2u' - 2 - uu'\cot anv = 0$$

$$2u\cot anv + 2u' = 2 \Rightarrow u\cot anv + u' = 1$$

$$\frac{du}{dv} + u\cot anv = 1$$ 1. mertebeden lineer sağ taraflı Dif. Denk.

Son eşitlik u'ya göre lineer bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemin homojen çözümü;

$$\frac{du_h}{dv} + u_h \cot anv = 0$$

$$\frac{du_h}{u_h} = -\frac{\cos v}{\sin v}dv$$

$$\ln\frac{u_h}{C} = -\ln \sin v$$

$$u_h = \frac{C}{\sin v}$$

Son eşitlikte C=C(v) alınırsa (sağ taraflı çözüm için);

$$\frac{C'}{\sin v} = 1 \Rightarrow C = -\cos v + C_1$$

elde edilir. Son eşitlik homojen çözümde yerine konulursa (u'ya göre genel çözüm);

$$u = \frac{-\cos v + C_1}{\sin v}$$

$$x + y = -\cot an(x-y) + \frac{C_1}{\sin(x-y)} \qquad \text{(genel çözüm)}$$

elde edilir.

y' $(y')^3$

1.10. Birinci mertebeden ve yüksek mertebeden diferansiyel denklemler

$\Rightarrow$ nonlineer

$$a_1(x,y) + a_2(x,y)y' + a_3(x,y)(y')^2 + \dots\dots + a_n(x,y)(y')^n = 0 \qquad (1.86)$$

formunda yazılabilen bir denklem, birinci mertebeden n. dereceden bir diferansiyel denklemdir. (1.86) eşitliği,

$$(y' - f_1(x,y))(y' - f_2(x,y))(y' - f_3(x,y))\dots\dots = 0 \qquad (1.87)$$

Çarpanlarına ayrılmış hali

biçiminde yazılabilir. (1.87) eşitliğinin sağlanabilmesi için

$y' - f_1(x,y) = 0$ dif.denkleminin çözümü $\Rightarrow$ $\varphi_1(x,y,C) = 0$

$y' - f_2(x,y) = 0$ dif.denkleminin çözümü $\Rightarrow$ $\varphi_2(x,y,C) = 0$

$y' - f_3(x,y) = 0$ dif.denkleminin çözümü $\Rightarrow$ $\varphi_3(x,y,C) = 0$

$y = x + C$
$y - x - C = 0$

.

.

$y' - f_n(x,y) = 0$ dif.denkleminin çözümü $\Rightarrow$ $\varphi_n(x,y,C) = 0$ (1.88)

eşitliklerinin sağlanması gerekir. (1.87) eşitliklerinin çözümü (ilkeli);

$$\varphi_1(x,y,C) * \varphi_2(x,y,C) * \varphi_3(x,y,C) * \dots\dots * \varphi_n(x,y,C) = 0 \qquad (1.89)$$

eşitliği ile verilebilir.

Problem 1.38

$$(y')^2 - (x + \sin y)y' + x\sin y = 0$$ (1. mertebeden, 2. dereceden dif.denklem)

diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklem çarpanlarına ayrılırsa;

$$(y' - \sin y)(y' - x) = 0$$

elde edilir. Birinci çarpım için;

$$y' - \sin y = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \sin y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{\sin y} = dx$$

$$\ln\tan\frac{y}{2} = x + C$$ $\qquad \ln\tan\frac{y}{2} - x - C = 0$

elde edilir. İkinci çarpım için ise;

$$y' - x = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = x \;\Rightarrow\; dy = x\,dx$$

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

bulunur. Sonuç olarak verilen diferansiyel denklemin ilkeli (1.89) eşitliği kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(\ln\tan\frac{y}{2} - x - C)(y - \frac{x^2}{2} - C) = 0$$

Yukarıda anlatılan çarpanlara ayırma yöntemine ilişkin 3 adet soru ve çözümü aşağıda verilmiştir:

Örnek 1: $y'^2 - 2y'x + x^2 - y^2 = 0$

Çözüm: $((y' - y - x)(y' + y - x) = 0 \Rightarrow (y - Ce^{x} + x + 1)(y - Ce^{-x} - x + 1) = 0$

Örnek 2: $y'^3 - (x+y)y'^2 + (xy + y)y' - y^2 = 0$

Çözüm: $(y - xy' + y'^2)(y' - y) = 0 \Rightarrow (y - xC + C^2)(y - Ce^{x}) = 0$

Not: Clairaut dif. denklemi

Örnek 3: $9y'^2 - x^4 = 0$

Çözüm: $(3y' - x^2)(3y' + x^2) = 0 \Rightarrow (y - \frac{x^3}{9} - C)(y + \frac{x^3}{9} - C) = 0$

1.10.1. Tekil (singüler) çözüm

İlk koşulları yerine koyarsak özel çözüm bulunur
Tekil çözüm özel çözümlerden elde edilemez

Bazı özel çözümler genel çözümden elde edilemeyebilir. Diğer bir ifade ile çözüm olduğu halde denklemin genel çözümünden elde edilemeyebilen çözümler bulunabilir. Böyle çözümlere tekil çözüm adı verilir. Bir denklemin tekil çözümü aranabilir (bakınız problem 1.39) veya bir diferansiyel denklemin tekil çözümü aranabilir (bakınız problem 1.41).

genel çözümden [illegible] fakat dif. Denk. sağlayan çözüm

(1) Denklemin tekil çöz.
(2) Dif. Denk. tekil çözüm

f(x,y,C)=0, bir eğri ailesine ilişkin denklemi göstersin (C;sabit). Böyle bir eğri ailesine örnek olmak üzere,

$$f(x,y,C) = y - (x + C)^2 = 0 \qquad (1.90)$$

x, y → sabit
C → değişken
C'ye göre türev
sonra sıfıra eşitle
C'yi bul

denklemi verilsin. (1.90) denklemini sıfır yapan C değerleri aşağıda hesaplanmıştır:

$$y - (x + C)^2 = 0 \Rightarrow x + C = \mp\sqrt{y} \Rightarrow C = \mp\sqrt{y} - x \qquad (1.91)$$

(1.90) denkleminin C'ye göre türevi alınırsa (bu durumda y ve x sabit kabul edilmelidir);

$$\frac{\partial f(x,y,C)}{\partial C} = 0 \qquad (1.92)$$

$$\frac{\partial f(x,y,C)}{\partial C} = -2(x + C) = 0 \Rightarrow C = -x$$

bulunur. C=−x değeri (1.91) eşitliğinde yerine konulursa;

y=0

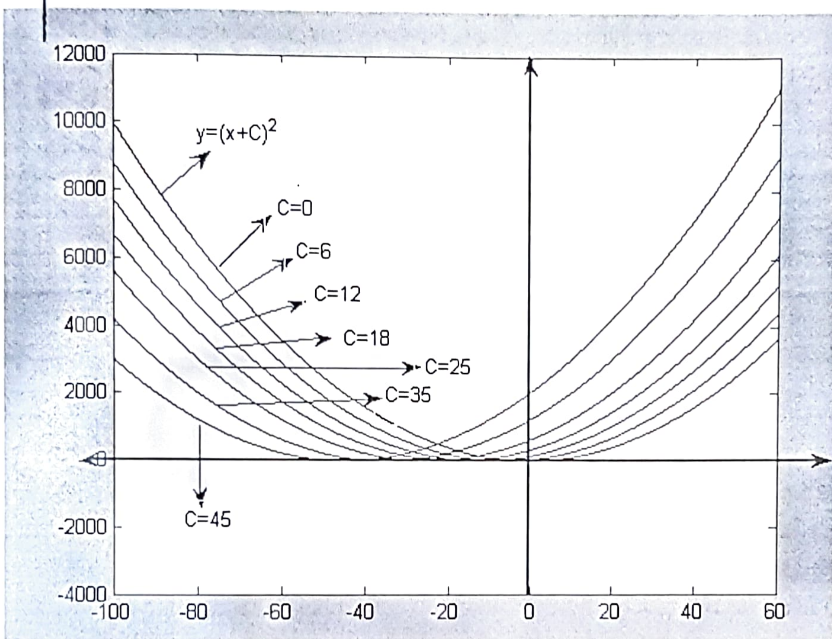
elde edilir. **Kısaca** bir denklemin tekil çözümü bulunurken, verilen denklem ve bu denklemin C'ye göre türev denklemi birlikte çözülürek C yok edilir. Elde edilen y=f(x) denklemi tekil çözüm olarak adlandırılır.

Sonuç olarak (1.90) ve (1.92) eşitliklerinden C değerinin yok edilmesi ile elde edilen y ifadesine zarf (diskriminant) eğrisi adı verilir. Yukarıda yapılan hesaplamalara bakılarak,

$$f(x,y,C) = y - (x + C)^2 = 0$$

denklemi ile verilen zarf eğrisinin, y=0 denklemi olduğu anlaşılmaktadır. (1.90) ile verilen eğri ailesinin değişik C değerleri için çizimi şekil 1.6'da gösterilmiştir. Burada görüldüğü gibi y=0 doğrusu (diğer bir ifade ile x ekseni), tüm eğri ailesini saran bir zarf eğrisidir.

Zarf eğrisi, tekil noktaları içeren bir eğri özelliğine sahiptir. **Tekil nokta tanımı** şöyle yapılabilir: (1.90) denklemi ile verilen bir eğri ailesinin x ve y'ye göre türevlerini aynı anda sıfır yapan noktalar bulunabiliyor ise bu noktalara tekil (singüler) noktalar denir. Bu iki türevi aynı anda sıfır yapmayan noktalar ise adi, düzgün (tekil olmayan) noktalar olarak adlandırılır. Tekil çözümde C sabiti olmamalıdır. **Tekil çözüm verilen denklemi sağlamak zorundadır.**



Genel çözümden elde edilemeyen çözümler Tekil çözüm

Tekil çözüm tüm tam çözümleri kapsar

y=0 do

Şekil 1.6

Problem 1.39

$$f(x,y,C) = y^2 - (x-C)^3 = 0$$

eğri ailesinin tekil noktalarının geometrik yerini bulunuz.

(x ve y sabit kabul edip C'ye göre türev al)

Çözüm

$$f(x,y,C) = 0$$

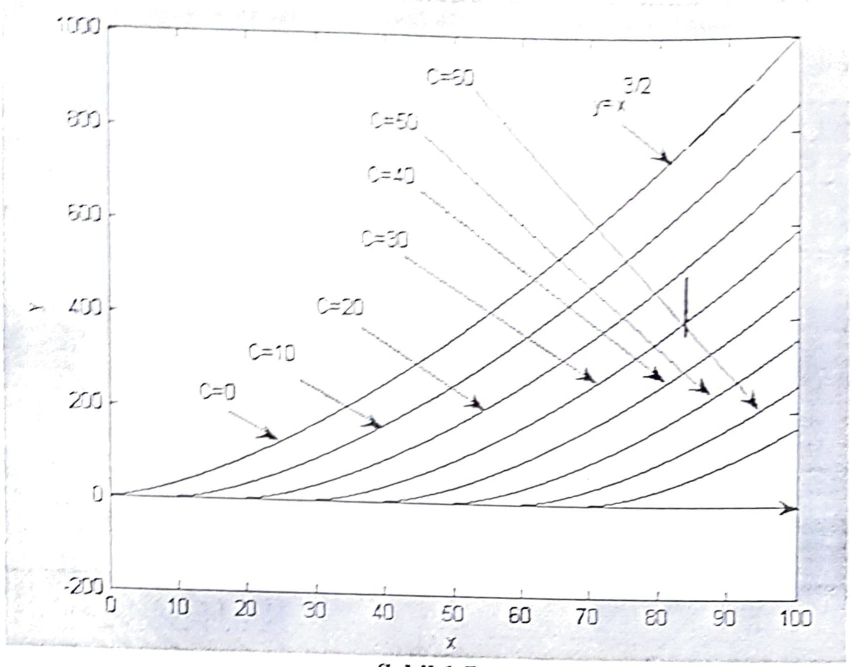
$$\frac{\partial f(x,y,C)}{\partial C} = 0$$

y=2

Yukarıda verilen iki adet denklem ortak çözülerek C sabitinin yok edilecek ve böylece aranan geometrik yer eğrisi bulunmuş olacaktır: y-2

$$\frac{\partial f(x,y,C)}{\partial C} = 0 = \frac{\partial}{\partial C}(y^2 - (x-C)^3) \Rightarrow C = x$$

C=x değeri, $f(x,y,C)=0$ ifadesinde yerine konulursa y=0 elde edilir. Bu durumda $y^2 - (x-C)^3 = 0$ eğri ailesinin tekil noktalarının geometrik yeri y=0 (x ekseni) olmaktadır. Şekil 6'da bu durum gösterilmiştir.



Şekil 1.7

Problem 1.40

$f(x,y,C)=y^2+(x-C)^2-a^2=0$

eğri ailesinin tekil noktalarının geometrik yerini bulunuz.

Çözüm

$$f(x,y,C)=0$$
$$\frac{\partial f(x,y,C)}{\partial C}=0$$

Yukarıda verilen iki adet denklemin ortak çözülmesi ile C sabinin yok edilmesi ile aranan geometrik yer eğrisi bulunmuş olacaktır:

$$\frac{\partial f(x,y,C)}{\partial C}=0=\frac{\partial}{\partial C}(y^2+(x-C)^2-a^2)\Rightarrow(x-C)=0$$

x−C=0 değeri, $f(x,y,C)=0$ ifadesinde yerine konulursa aşağıda verilen sonuca ulaşılır:

$$y^2=a^2\Rightarrow y=\mp a$$

1.10.2. Diferansiyel denklemlerin tekil çözümleri

Birinci mertebeden $F(x,y,y')=0$ diferansiyel denklemi ve $\frac{\partial F}{\partial y'}=0$ denklemi arasında y' yok edilerek meydana gelen $\varphi(x,y)=0$ denkleminin gösterdiği eğriye 'diskriminant eğrisi' denir. Bu eğri veya onun bir kolu diferansiyel denklemin bir çözümü olabilir. Eğer böyle bir kol mevcut ise bu eğriye tekil çözüm denir.

$f(x,y,y')=0$ (1.93)

ifadesi ile verilen bir diferansiyel denklemin tekil çözümünü bulmak için;

$\boxed{y' = p}$ P ye göre türev (x ile y'yi sabit) (1.94)

dönüşümü yapıldıktan sonra elde edilen;

$f(x,y,p)=0$ (1.95)

ifadesinin p'ye göre türevi alınır (türev alınırken x ve y sabit kabul edilecek) ve sıfıra eşitlenir. Buradan elde edilen p değeri ise verilen diferansiyel denklemde y' yerine konulur ve x ile y arasında bir denklem elde edilir. Aranan tekil çözüm y=y(x) denklemidir. **Tekil çözümler verilen diferansiyel denklemi sağlamak zorundadır.**

Problem 1.41

$$y = 2xy' + (y')^2$$

diferansiyel denkleminin tekil noktalarının geometrik yerini bulunuz.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklemde $p = y'$ değişken dönüşümü yapılırsa;

$$y - 2xp - p^2 = 0$$

elde edilir. Bulunan denklemin p'ye göre türevi alınırsa;

$$\frac{d}{dp}(y - 2xp - p^2) = 0 \Rightarrow -2x = 2p \Rightarrow x = -p$$

elde edilir. $x = -p$ eşitliği, değişken dönüşümü yapılan $y - 2xp - p^2 = 0$ denkleminde yerine konulursa;

$$y + 2xx - x^2 = 0 \Rightarrow y = -x^2$$

İlk koşullar dışında genel çözüm bulunan

elde edilir (Tekil çözüm verilen diferansiyel denklemi **sağlamaz**). Tekil çözüm yoktur.

1.10.3. Clairaut diferansiyel denklemi (en kolay)

$y = xy' + \varphi(y')$ (1.96)

formunda olan diferansiyel denklem Clairaut diferansiyel denklemi olarak adlandırılır. Bu diferansiyel denklemin en önemli özelliği (1.96) eşitliğinde $y' = C$ yazıldığında elde edilen (1.97) denkleminin, (1.96) denkleminin genel çözümü olmasıdır:

$y = 2xy' + (y'^3+5)$ değil

$y = xy' + (y'^3+5)$ Clairaut

$y = xC + \varphi(C)$ (1.97)

$y = xy' - (y')^3 \rightarrow y = xC - C^3$

$y = xy' + \sin y' \rightarrow y = xC + \sin C$

(+1)x olmalı diğer türlü olmaz

Bunun kullanıcı açısından en önemli özelliği, (1.96) türündeki diferansiyel denklemlerin genel çözümünün hemen (hesaplama yapılmaksızın) elde edilebilmesidir. Aşağıda bu iddianın ispatı verilmiştir:

x, y, p → değişken

$$y = xp + \varphi(p) \qquad (1.98)$$

türev $\frac{d}{dx}\left(y = xp + \varphi(p)\right)$

$$\frac{dy}{dx} = y' = p = p + \left[x + \frac{d\varphi}{dp}\right]\frac{dp}{dx}$$

$p = p + xp' + \frac{d}{dx}\varphi(p)$

$y' = p$

$\frac{d}{dx}[\varphi(p)] = \frac{d\varphi(p)}{dp} \cdot \frac{dp}{dx}$

$$\left[x + \frac{d\varphi}{dp}\right]\frac{dp}{dx} = 0 \qquad (1.99)$$

(1.99) eşitliğinin sıfır olması için her iki çarpanın ayrı ayrı sıfıra eşitlenmesi gerekir.

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = C \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C$$

$$y = Cx + C_1 \qquad (1.100)$$

elde edilir. Hem ($y = Cx + C_1$) hem de ($y' = p = C$) eşitlikleri birlikte (1.96) denkleminde kullanılırsa;

$$Cx + C_1 = xC + \varphi(C)$$

$$C_1 = \varphi(C) \qquad (1.101)$$

elde edilir. (1.101) eşitliği (1.100) ifadesinde kullanılırsa (1.97) eşitliği elde edilmiş olur (ispat tamamlandı).

Problem 1.42

$$y = xy' + (y')^2$$

diferansiyel denkleminin genel ve tekil çözümlerini bulunuz.

Çözüm

Verilen denklem (1.96) türünde bir diferansiyel denklem olduğu için Clairaut diferansiyel denklemi adını alır. Yukarıda da bahsedildiği gibi bu tür diferansiyel denklemlerde genel çözüme ulaşmak için $y' = p = C$ dönüşümü yapmak yeterli olmaktadır. Buna göre verilen diferansiyel denklemin genel çözümü;

$$y = xC + C^2$$

olarak verilebilir.

Tekil çözümü bulmak için ise verilen diferansiyel denklemde $y' = p$ dönüşümü yapılıp,

$$y - xp - p^2 = 0$$

elde edilen denklemin p'ye göre türevini almak;

$$\frac{d}{dp}(y - xp - p^2) = 0 \Rightarrow p = -\frac{x}{2}$$

ve elde edilen değeri verilen diferansiyel denklemde $y' = p = -\frac{x}{2}$ ifadesini kullanmaktır:

$$y = xy' + (y')^2 \Rightarrow y = x(-\frac{x}{2}) + (-\frac{x}{2})^2$$

Bu işlemler sonunda tekil çözüm aşağıdaki denklem olacaktır:

$y = -\frac{x^2}{4}$ (Tekil çözüm dif.denklemi sağlamalı). Aşağıda kontrol yapılmaktadır.

$$y = xy' + (y')^2 \rightarrow -\frac{x^2}{4} = x(-2x/4) + (-2x/4)^2 \rightarrow 0 = 0 \text{ (Tekil çözüm sağladı)}$$

Problem 1.43

$$y = xy' + (1 - \ln y')y'$$

diferansiyel denkleminin genel ve tekil çözümlerini bulunuz.

Çözüm

Verilen denklem (1.96) türünde bir diferansiyel denklem olduğu için Clairaut diferansiyel denklemi adını alır. Bu problemin çözümü bir önceki problem gibi yapılacaktır:

$y = xC + (1 - \ln C)C$ (genel çözüm)

Tekil çözüm için ise,

$$y - xp - (1 - \ln p)p = 0$$

$$\frac{d}{dp}(y - xp - (1 - \ln p)p) = 0 \Rightarrow -x - 1 + \ln p + p(1/p) = 0 \Rightarrow \ln p = x$$

elde edilir. ($y - xp - (1 - \ln p)p = 0$) denkleminde $\ln p = x \Rightarrow e^x = p$ ifadeleri kullanılırsa tekil çözüm olarak;

$y = e^x$ (tekil çözüm)

elde edilir.

1.10.4. Lagrange diferansiyel denklemi

$$y = xf(y') + \varphi(y') \qquad (1.102)$$

formunda olan diferansiyel denklem Lagrange diferansiyel denklemi olarak adlandırılır. Bu diferansiyel denklemde $f(y') = y'$ durumunda bu diferansiyel denklem Clairant diferansiyel denklem formuna gelir. Lagrange diferansiyel denklemi çözülmek istendiğinde;

1) $y' = p$ dönüşümü yapılır ve bu dönüşüm (1.102) eşitliğine uygulanır:

$$y = xf(p) + \varphi(p) \qquad (1.102.1)$$

2) 1. adımda elde edilen denklem x'e göre türetilir. Elde edilen denklem x'e göre lineer diferansiyel denklemdir:

Burda değişken

3 adım da hepsi doğru olmalı

$$\frac{\partial}{\partial x}(y = xf(p) + \varphi(p)) \Rightarrow p = f(p) + \left[x\frac{\partial f(p)}{\partial p} + \frac{\partial \varphi(p)}{\partial p}\right]\frac{dp}{dx}$$

$$[p - f(p)]\frac{dx}{dp} = x\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \quad \text{(x'e göre lineer dif.denklem)} \qquad (1.103)$$

paydada dp olacak şekilde düzenlemeli

3) (1.103) diferansiyel denkleminin x=f(p,C) cinsinden genel çözümü elde edilir.

(1.102) ve 3.adımdan elde edilen denklemler parametrik formda olup istenirse;

$$x = f(p) + C$$
$$y = xf(p) + \varphi(p)$$

SON

iki denklem halinde bırakılırlar, istenirse bu iki eşitlikten birisinde p elde edilip diğerinde p ifadesi yerine konularak y=f(x,C) formatında bir genel çözüm elde edilir.

Lagrange diferansiyel denkleminin tekil çözümü ise daha önce anlatıldığı gibi yapılır.

Problem 1.44

dan dolayı Lagrange

$$y = 2xy' + (y')^2$$

diferansiyel denkleminin genel ve tekil çözümlerini bulunuz.

Çözüm

1) $y' = p$ dönüşümü yapılır ve bu dönüşüm verilen diferansiyel denkleme uygulanır:

$$y = 2xp + p^2 \qquad (1.104)$$

2) (1.104) denklemi x'e göre türetilir:

$$\frac{\partial}{\partial x}(y = 2xp + p^2) \Rightarrow p = 2p + (2x + 2p)\frac{dp}{dx}$$

$$-p\frac{dx}{dp} = 2x + 2p \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -2 \quad \text{(lineer dif.denklem)} \qquad (1.105)$$

p'ye göre lineer

3) Lineer diferansiyel denklem daha önceleri gösterildiği gibi sağ taraflı ve sağ tarafsız olarak çözülür:

$$\frac{dx_h}{x_h} = -\frac{2}{p}dp \quad \text{(sağ tarafsız)}$$

$$\ln\frac{x_h}{C} = -2\ln p = \ln\frac{1}{p^2}$$

$$x_h = \frac{C}{p^2} \quad \text{(homojen çözüm)}$$

$$\frac{C'}{p^2} = -2 \quad \text{(sağ taraflı)}$$

$$C' = -2p^2 \Rightarrow C = -\frac{2}{3}p^3 + C_1$$

Son ifade homojen çözümde yerine yazılırsa;

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{C_1}{p^2} - \frac{2}{3}p \\ y &= 2xp + p^2 \end{aligned}\right\} \text{ genel çözüm}$$

Yukarıda elde edilen iki denklemden istenirse p yok edilerek y=f(x) denklemine de ulaşılabilir;

$$y = 2\left(\frac{C_1}{p^2} - \frac{2}{3}p\right)p + p^2 = -\frac{1}{3}p^2 + 2\frac{C_1}{p} \qquad \text{(genel çözüm)}$$

Tekil çözüm için ise, verilen diferansiyel denklemde $y' = p$ dönüşümü yapılır, elde edilen ifade p'ye göre türetilir, bulunan eşitlik ve verilen diferansiyel denklemin p konmuş hali birlikte çözülerek y=f(x) formundaki tekil çözüm bulunur:

$$y = 2xp + p^2$$

$$\frac{\partial}{\partial p}(y - 2xp - p^2) = 0 \Rightarrow -2x - 2p = 0 \Rightarrow x = -p$$

$$y = 2xp + p^2 \Rightarrow y = 2(-x)x + x^2 \Rightarrow y = -x^2$$

Tekil çözümün verilen diferansiyel denklemi sağlaması gerekir:

$$y = -x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = -2x$$

$$y = 2xy' + (y')^2$$

$$-x^2 = 2x(-2x) + (-2x)^2$$

$-x^2 = 0$ (sağlamadı) $\Rightarrow$ **Tekil çözüm yok!!!** (zarf eğrisi yok)

Ancak y=0 için tekil çözüm vardır denir.

Problem 1.45

$$(y')^2 \cos^2 y - y' x \cos y + \sin y = 0$$

diferansiyel denkleminin genel ve tekil çözümlerini bulunuz.

Çözüm

Önce bir değişken dönüşümü yapılarak,

$$u = \sin y \Rightarrow u' = y' \cos y \Rightarrow y' = \frac{u'}{\cos y}$$

$$(u')^2 - u'x + u = 0 \Rightarrow u = u'x - (u')^2$$

(1.96) eşitliği ile karşılaştırıldığında son eşitliğin Clairant diferansiyel denklemi olduğu anlaşılır. Buna göre $u = u'x - (u')^2$ eşitliğinin genel çözümü;

$$u = Cx - C^2$$

olacaktır. u=siny eşitliği son eşitlikte kullanılırsa;

$\sin y = Cx - C^2$ (genel çözüm)

elde edilir. Tekil çözüm için $u = u'x - (u')^2$ denklemi kullanılmalıdır. Önce $u' = p$ dönüşümü yapılmalı;

$$u = px - p^2$$

Daha sonra ise son ifade p'ye göre türetilmeli;

$$x - 2p = 0 \Rightarrow p = \frac{x}{2}$$

p değeri $u = px - p^2$ iadesinde yerine konulmalı;

$$u = (\frac{x}{2})x - (\frac{x}{2})^2 = \sin y = \frac{x^2}{4} \Rightarrow y = \arcsin\frac{x^2}{4} \quad \text{(tekil çözüm)}$$

denklemde yerine koy sağlayıp sağlamadığına bak

1.10.5. Diferansiyel denklemlerin sayısal çözüm metotları

1.10.5.1. Taylor seri metodu

Taylor seri metodu kullanılarak

$$y' = f(x, y) \tag{1.106}$$

tipinde verilen bir diferansiyel denklemin, $x = x_0$ ve $y(x_0) = y_0$ başlangıç şartlarını sağlayan, çözümü bulunur (aranan eğri, x_0, y_0 noktalarından geçecek). y(x), her mertebeden türevi olan (analitik) bir fonksiyon ise, y(x) ifadesi Taylor seri açılımı kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir;

Taylor serisi

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + ... + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{1.107}$$

Problem 1.46

$$y' = x + y^2$$

diferansiyel denklemini $y(0) = 0.5$ başlangıç şartını sağlayan çözümünü Taylor seri açılımı yardımı ile 3. dereceden terimlere kadar bulunuz.

Çözüm

$$y'' = 1 + 2yy'$$
$$y''' = 2(y')^2 + 2yy''$$
$$y''(0) = 1 + 2y(0)y'(0) = 1 + 2 * 0.5 * (0 + 0.5^2) = 5/4$$
$$y'''(0) = 2(y'(0))^2 + 2y(0)y''(0) = 2 * (0 + 0.5^2)^2 + 2 * 0.5 * (5/4) = 11/8$$

Yukarıda bulunan değerler (1.107) ifadesinde yerine konulursa;

$y''+y'=\sin x$
$y(0)=0 \quad y'(0)=1$

$$y(x)=0.5+\frac{0.5^2}{1!}(x-0)+\frac{(5/4)}{2!}(x-0)^2+\frac{(11/8)}{3!}(x-0)^3$$

$$y(x)=0.5+\frac{1}{4}x+\frac{5}{8}x^2+\frac{11}{48}x^3 \quad \text{(verilen diferansiyel denklemin çözümünün bir parçası)}$$

Açıklama

n. mertebeden (1.108) formunda verilen bir diferansiyel denklem,

$$f(x,y,y',y'',y''',\ldots\ldots y^{(n-1)},y^{(n)})=0 \qquad (1.108)$$

sayısal çözüm metotları kullanılarak çözülebilir. Bunun için aşağıda gösterildiği gibi değişken dönüşümü yardımı ile n. mertebeden bir diferansiyel denklem n adet birinci mertebeden diferansiyel denkleme dönüştürülebilir:

Sayısal Analitik Fonk Sorusu

$$y'=y_1$$
$$y''=y_1'=y_2=f_1(x,y,y_1)$$
$$y'''=y_2'=y_3=f_2(x,y,y_1,y_2)$$
$$\vdots$$
$$y^{(n-1)}=y_{n-2}'=y_{n-1}=f_{n-2}(x,y,y_1,y_2,y_3,\ldots,y_{n-2})$$
$$y^{(n)}=y_{n-1}'=y_n=f_{n-1}(x,y,y_1,y_2,y_3,\ldots,y_{n-2},y_{n-1})$$

1.10.5.2. Picard iterasyon metodu (ardışık yaklaşımlar metodu)-Runge Kutta-

Picard metodu kullanılarak

$$y'=f(x,y) \qquad (1.109)$$

tipinde verilen bir diferansiyel denklemin, $x=x_0$ ve $y(x_0)=y_0$ başlangıç şartlarını sağlayan, çözümü n adet iterasyon sonunda,

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx$$

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_1)dx$$

$$y_3(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_2)dx$$

$$\vdots$$

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-1})dx$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x)=y(x) \quad \text{(verilen diferansiyel denklemin çözümü)}$$

Taylor toplar diyor
Picard → son bulduğun değeri sonucuna getir

y(x) çözümü elde edilir. İterasyon adımı (n) arttıkça, gerçek çözüme o kadar yaklaşılmış olur.

Problem 1.47

$$y'=x+y^2$$

diferansiyel denklemini $y(0)=0.5$ başlangıç şartını sağlayan çözümünü Picard iterasyon yöntemini kullanarak yaklaşık olarak bulunuz.

Çözüm

$$y_1(x)=y_0+\int_0^x (x+y_0^2)dx=0.5+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}$$

$$y_2(x)=y_0+\int_0^x (x+y_1^2)dx=0.5+\int_0^x (x+(0.5+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4})^2)dx$$

$$y_2(x)=\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{16}x^4+\frac{3}{16}x^3+\frac{5}{8}x^2+\frac{1}{4}x++\frac{1}{2}$$

$$y_3(x)=y_0+\int_0^x (x+y_2^2)dx=0.5+\int_0^x (x+(\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{16}x^4+\frac{3}{16}x^3+\frac{5}{8}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})^2)dx$$

$$y_3(x)=\frac{1}{4400}x^{11}+\frac{1}{1600}x^{10}+\frac{29}{11520}x^9+\frac{11}{1024}x^8+\frac{177}{8960}x^7+\frac{17}{384}x^6+\frac{11}{320}x^5+\frac{5}{64}x^4+\frac{1}{148}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

....

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x)=y(x)$$

Problem 1.48

$$y'=1+y^2$$

diferansiyel denklemini $y(0)=0$ başlangıç şartını sağlayan çözümünü Picard iterasyon yöntemini kullanarak yaklaşık olarak bulunuz.

Çözüm

$$y_1(x)=0+\int_0^x (1+0)dx=x$$

$$y_2(x)=y_0+\int_0^x (1+y_1^2)dx=0+\int_0^x (1+x^2)dx=x+\frac{x^3}{3}$$

$$y_3(x)=y_0+\int_0^x (1+y_2^2)dx=0+\int_0^x (1+(x+\frac{x^3}{3})^2)dx=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{1}{63}x^7 \qquad \text{(tan(x) açılımı)}$$

....

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x)=y(x)=\tan(x)$$

Aynı problem direkt olarak da entegre edilebilirdi;

$$\frac{dy}{1+y^2}=dx \Rightarrow \arctan y=x+C \Rightarrow y=\tan(x+C)$$

$y(0)=0$ başlangıç şartını için,

$y=\tan(x)$

elde edilir.

Problem 1.49

$f(x,y,z) \Rightarrow y' = x - y + z$

$g(x,y,z) \Rightarrow z' = y - x$

diferansiyel denklem sistemini $y(0)=2$ ve $z(0)=0$ başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü Picard iterasyon yöntemini kullanarak ikinci yaklaşıma kadar bulunuz.

Çözüm

$$y_1(x) = y_0 + \int_0^x f(x, y_0, z_0)dx = 2 + \int_0^x (x-2)dx = 2 + \frac{1}{2}x^2 \Big| - 2x$$

$$z_1(x) = z_0 + \int_0^x g(x, y_0, z_0)dx = \int_0^x (2-x)dx = 2x - \frac{1}{2}x^2$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_0^x f(x, y_1, z_1)dx = 2 + \int_0^x (x - (2 + \frac{1}{2}x^2 - 2x) + (2x - \frac{1}{2}x^2))dx$$

$$y_2(x) = -0.333x^3 + 2.5x^2 - 2x + 2$$

$$z_2(x) = z_0 + \int_0^x g(x, y_1, z_1)dx = 0 + \int_0^x ((2 + \frac{1}{2}x^2 - 2x) - x)dx = 2x + 0.166x^3 - 1.5x^2$$

Problem 1.50

$y'' + 2xy' - 4y^2 = 0$

diferansiyel denklemini x=0 için, y(0)=0.2, $y'(0) = 0.5$ olan çözümünü Picard yöntemi ile 2.yaklaşıma kadar çözünüz.

Çözüm

Değişken dönüşümü yapılarak verilen diferansiyel denklemin mertebesi düşürülür:

$f(x,y,z) \Rightarrow y' = u$

$g(x,y,z) \Rightarrow y'' = u' = 4y^2 - 2xu$

Böylece problem 1.49'da gösterilen çözüme gelinmiş oldu. Problem 49'daki z yerine burada u kullanılacaktır. $y(0) = 0.2$ ve $u(0) = 0.5$ ilk koşullardır.

$$y_1(x) = y_0 + \int_0^x f(x, y_0, u_0)dx = 0.2 + \int_0^x u_0 dx = 0.2 + \int_0^x 0.5dx = 0.2 + 0.5x$$

$$u_1(x) = u_0 + \int_0^x g(x, y_0, z_0)dx = 0.5 + \int_0^x (4y_0^2 - 2xu_0)dx = 0.5 + \int_0^x (4 * 0.2^2 - 2 * x * 0.5)dx$$

$$u_1(x) = 0.5 + 0.16x - \frac{x^2}{2}$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_0^x f(x, y_1, u_1)dx = 0.2 + \int_0^x (0.5 + 0.16x - \frac{x^2}{2})dx = 0.2 + 0.5x + 0.8x^2 - \frac{x^3}{6}$$

$$u_2(x) = 0.5 + 2.66(0.2 + 0.5x)^3 + 0.25x^4 - 0.11066x^3 - 0.5x^2$$

Değişken katsayılı n. mertebeden sağ taraflı dif. denk.

1.11. Yüksek mertebeden lineer (birinci dereceden) diferansiyel denklemler

Yüksek mertebeden lineer (birinci dereceden) sağ taraflı bir diferansiyel denklem:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots\dots\dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = Q(x) \qquad (1.110)$$

formundadır. Eğer diferansiyel denklem sağ tarafsız ise,

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots\dots\dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0) \qquad (1.111)$$

biçiminde verilir. Sağ tarafsız, yüksek mertebeden, lineer bir diferansiyel denklemin (C_i'ler sabit) çeşitli özel çözümleri;

$C_1y_1(x),\ C_2y_2(x),\ \dots\dots,\ C_ny_n(x)$; **Not:** Özel çözümlerin C'li olduğu unutulmamalı!

ise (1.111) ile verilen diferansiyel denklemin genel çözümü;

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots\dots + C_ny_n(x) \qquad (1.112)$$

ifadesi ile elde edilebilir. (1.112) eşitliğinin geçerli olabilmesi için ancak;

$$C_1 = C_2 = \dots\dots = C_n = 0 \qquad (1.113)$$

şartı altında,

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots\dots + C_ny_n(x) = 0 \qquad (1.114)$$

olabilmeli, başka hiçbir şart altında (1.114) ifadesi sağlanmamalıdır. Diğer bir ifade ile,(1.114) eşitliği ancak ve ancak (1.113) koşulu altında sağlanıyorsa, $y_1(x),\ y_2(x),\ \dots\dots,\ y_n(x)$ 'ler lineer bağımsızdır denir.

Örneğin, $y_1(x) = 1,\ \ y_2(x) = x,\ \ y_3(x) = x^3$ ifadeleri (esas sistem parçaları) lineer bağımsızdır. Zira bu parçalar birleştirildiğinde elde edilen (1.115) denkleminin,

$$C_1 1 + C_2x + C_3x^3 = 0 \qquad (1.115)$$

*Bir birleri ile elde edilemez

*lineer bağımsız.

$y_1 = 1$
$y_2 = x$
$y_3 = 1-x$

$C_1 1 + C_2 x + C_3(1-x) \neq y_3$

ancak

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

koşulu altında sıfır olması, bunun dışında hiçbir C_i değerleri için (1.115) eşitliğinin sıfır olmaması, $y_1(x) = 1,\ \ y_2(x) = x,\ \ y_3(x) = x^3$ ile verilen esas sistem parçalarının lineer bağımsız olduğunu gösterir.

Şu soru akla gelebilir: Neden esas sistem parçalarının lineer bağımsız olması bu kadar önemli? Bu sorunun cevabı ise şu şekildedir: Eğer elimizde (1.111) ifadesi ile verilen bir diferansiyel denklem varsa ve bu denkleme ilişkin lineer bağımsız olduğu bilinen ($y_1, y_2, .., y_n$ gibi) esas sistem parçaları mevcut ise, (1.111) ifadesi ile verilen diferansiyel denklemin genel çözümü, (1.114) eşitliği ile bulunabilir.

Örneğin, $y_1(x) = 1,\ \ y_2(x) = x,\ \ y_3(x) = 1 + x$ ifadeleri (esas sistem parçaları) lineer bağımlıdır. Bunu ispat etmek için;

$C_1 1 + C_2 x + C_3(1+x) = 0$

eşitliğinin sıfırdan farklı C_i değerleri için sağlanıp sağlanmadığına bakılmalıdır. Eğer $C_1 = C_2 = 1, C_3 = -1$ alınırsa $C_1 1 + C_2 x + C_3(1+x) = 0$ ifadesi sağlanır. Böylece $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x,\ y_3(x) = 1 + x$ esas sistem parçalarının lineer bağımsız olamadıkları anlaşılmaktadır.

1.11.1. Lineer bağımsızlık için kriter

$y_1(x),\ y_2(x), \ldots\ldots, y_n(x)$ ifadeleri n adet esas sistem parçasını göstermek üzere, (1.114) eşitliğinin **(n−1)** kere ard arda türevi alındığında;

$$C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) + \ldots\ldots + C_n y_n'(x) = 0$$

$$C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x) + \ldots\ldots + C_n y_n''(x) = 0$$

$$C_1 y_1'''(x) + C_2 y_2'''(x) + \ldots\ldots + C_n y_n'''(x) = 0 \qquad (1.116)$$

.

.

$$C_1 y_1^{(n-1)}(x) + C_2 y_2^{(n-1)}(x) + \ldots\ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x) = 0$$

elde edilen denklem sisteminde C_i'lerin değişken olduğu kabulü ile (1.116) denklem sisteminin katsayılar determinantı (**Wronski determinantı**);

$$W(y_1, y_2, .. y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1.117)$$

(özel çözümlerin birbiri ile lineer bağımlılığını bulur.)

şartını sağlıyor ise, $y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x)$ <u>esas sistem parçalarının lineer bağımsız</u> olduğu söylenebilir. Bu durumda da, (1.111) eşitliği ile verilen diferansiyel denklemin **genel çözümü**;

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots\ldots + C_n y_n(x) \qquad (1.118)$$

$C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n = y_{genel}(x)$ özel çözüm

ifadesi ile verilebilir. Eğer $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ ise, <u>esas sistem parçalarının lineer bağımlı</u> olduğu ve dolayısı verilen diferansiyel denklemin genel çözümünün (1.118) ile verilen <u>denkleme eşit olamayacağı bilinmelidir.</u>

Eğer verilen esas sistem parçalarına ilişkin Wronski determinantı sıfıra eşit değilse (diğer bir ifade ile (1.117) şartı sağlanıyor ise), ve esas sistem parçaları kullanılarak diferansiyel denkleme ulaşılmak istenir ise;

$$W(y, y_1, y_2, .. y_n) = \begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \ldots & y_n \\ y' & y_1' & y_2' \ldots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & y_2^{(n)} \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.119)$$

özel çözümleri olan diferansiyel denklemi bulur.

determinantı hesaplanmalıdır. Bu determinant değeri aranan diferansiyel denklemi verecektir.

Problem 1.51

x*lnx, x, 1 değerleri

a) Bir diferansiyel denklemin esas parçaları olabilir mi?
b) Esas sistem parçalarını kullanarak diferansiyel denklemi elde ediniz.
c) Esas sistem parçalarını kullanarak diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm

a) Verilen esas denklem parçaları kullanılarak Wronski determinantı hesaplanırsa;

$$W(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x & x\ln x \\ 0 & 1 & 1+\ln x \\ 0 & 0 & 1/x \end{vmatrix}=\frac{1}{x}\neq 0$$

b) $$W(y,y_1,y_2,y_3)=\begin{bmatrix} y & y_1 & y_2 & y_3 \\ y' & y_1' & y_2' & y_3' \\ y'' & y_1'' & y_2'' & y_3'' \\ y''' & y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y & 1 & x & x\ln x \\ y' & 0 & 1 & 1+\ln x \\ y'' & 0 & 0 & 1/x \\ y''' & 0 & 0 & -1/x^2 \end{bmatrix}=xy'''+y''=0$$

c) Esas sistem parçalarının lineer bağımsız oldukları görüldüğü için b şıkkında elde edilen diferansiyel denklemin genel çözümü (1.118) eşitliği yardımı ile aşağıdaki gibi bulunur:

$$y=C_1+C_2x+C_3x\ln(x)$$

EDT

1.12. Yüksek mertebeden, sağ tarafsız, sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin genel çözümü

(1.110) eşitliğinde verilen diferansiyel denklemde (Q(x)=0 şartı altında) katsayılar x'in fonksiyonu olmayıp da yalnızca sayı ise bu tür diferansiyel denkleme sağ tarafsız yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem denir:

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots\dots\dots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (1.120)$$

Sağ tarafsız, yüksek mertebeden, sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemin genel çözümünün;

$$\boxed{y=f(e^{\alpha x})} \qquad (1.121)$$

$e^{\alpha x}$ → özel çözüm

türünde olduğu kabul edilsin. Bu şart altında;

$$y'=\alpha e^{\alpha x};\ \ y''=\alpha^2e^{\alpha x};\ \ y'''=\alpha^3e^{\alpha x},\dots\dots\dots,\ y^{(n)}=\alpha^ne^{\alpha x} \qquad (1.122)$$

yazılabilir. (1.122) eşitlikleri (1.120) eşitliğinde yerlerine konulursa;

$$e^{\alpha x}(a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+a_2\alpha^{(n-2)}+\dots\dots\dots+a_{n-1}\alpha+a_n)=0 \qquad (1.123)$$

elde edilir. (1.123) ifadesinde görülen;

$$f(\alpha)=a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+a_2\alpha^{(n-2)}+\dots\dots\dots+a_{n-1}\alpha+a_n=0 \qquad (1.124)$$

eşitliğine diferansiyel denkleme ilişkin **karakteristik denklem** adı verilir. Karakteristik denklemde α değişkendir.

Karakteristik denklemi sağlayan α değerlerine bağlı olarak diferansiyel denkleme ilişkin genel çözüm değişir.

1.12.1. Karakteristik denklemin köklerinin reel olması durumunda genel çözümün elde edilmesi

(1.124) eşitliğinde $f(\alpha)=0$, $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq .... \neq \alpha_n$ (kökler birbirlerinden farklı ve reel) şartları altında verilen diferansiyel denkleme ilişkin esas sistem parçaları;

$$y_1(x)=e^{\alpha_1 x},\quad y_2(x)=e^{\alpha_2 x},\quad y_3(x)=e^{\alpha_3 x},\ldots\ldots\ldots\ldots,\quad y_n(x)=e^{\alpha_n x} \qquad (1.125)$$

olacaktır. Bu durumda verilen diferansiyel denkleme ilişkin genel çözüm;

$$y=C_1e^{\alpha_1 x}+C_2e^{\alpha_2 x}+C_3e^{\alpha_3 x}+\ldots\ldots+C_ne^{\alpha_n x} \qquad (1.126)$$

olarak elde edilir.

Problem 1.52

$$y''-5y'+6y=0$$

sabit katsayılı diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm

Verilen diferansiyel denkleme ilişkin karakteristik denklem;

$$\alpha^2-5\alpha+6=0$$

çözüldüğünde $\alpha_1=3;\alpha_2=2$ elde edilir. Bu sonuçlar ile (1.126) eşitliğine gidilirse;

Kökler reel

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{2x} \quad \text{(genel çözüm)}$$

elde edilir.

1.12.2. Karakteristik denklemin köklerinin tümünün katlı ve reel olması durumunda genel çözümün elde edilmesi

Verilen diferansiyel denkleme ilişkin köklerin tümünün reel ve (k katlı) katlı olması durumunda, diğer bir ifade ile $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=.......=\alpha_k$ olması durumunda genel çözüm;

$$y=(C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3\ldots\ldots+C_kx^{k-1})e^{\alpha x} \qquad (1.127)$$

formunda olur. Eğer karakteristik denklemin köklerinin bazısı reel ve katsız, bazıları ise reel ve katlı ise genel çözüm (1.126) ve (1.127) denklemlerinin bir arada kullanılması ile elde edilir.

Problem 1.53

$$y^{(5)}-9y^{(4)}+31y^{(3)}-51y^{(2)}+40y'-12y=0$$

sabit katsayılı diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklemin karakteristik denklemi;
$\alpha^5 - 9\alpha^4 + 31\alpha^3 - 51\alpha^2 + 40\alpha - 12 = 0$

çözüldüğünde $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$; $\alpha_3 = \alpha_4 = 2$; $\alpha_5 = 3$ elde edilir. Bu sonuçlar ile (1.126) ve (1.127) eşitliklerine gidilirse aşağıda verilen genel çözüm elde edilir:

$$\boxed{y = (C_1 + C_2 x)e^x + (C_3 + C_4 x)e^{2x} + C_5 e^{3x}} \qquad (C_3 + C_4 x + C_6 x^2)\, e^{2x}.$$

5. mertebeden bir diferansiyel denklemin genel çözümünde 5 adet C sabiti bulunur.

1.12.3. Karakteristik denklemin köklerinin kompleks olması durumunda genel çözümün elde edilmesi

Verilen diferansiyel denkleme ilişkin köklerin tümünün kompleks olması durumunda, diğer bir ifade ile $\alpha_1 = a + bi$; $\alpha_2 = a - bi$; $\alpha_3 = c + di$, $\alpha_4 = c - di$; ...., $\alpha_{n-1} = m + ni$; $\alpha_n = m - ni$ olması durumunda genel çözüm;

$$y = e^{ax}(C_1 \cos(bx) + C_2 \sin(bx)) + e^{cx}(C_3 \cos(dx) + C_4 \sin(dx)) + ... + e^{nx}(C_{2n-1} \cos(nx) + C_{2n} \sin(nx)) \quad (1.128)$$

formunda olacaktır.

Problem 1.54

ÇÖZ ÖNEMLİ BEŞ

$y^{(5)} - 16y^{(4)} + 126y^{(3)} - 564y^{(2)} + 1280y' - 1088y = 0$
sabit katsayılı diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklemin karakteristik denklemi;
$\alpha^5 - 16\alpha^4 + 126\alpha^3 - 564\alpha^2 + 1280\alpha - 1088 = 0$

çözüldüğünde $\alpha_1 = \alpha_2 = 4$; $\alpha_3 = 3 + 5i$; $\alpha_4 = 3 - 5i$; $\alpha_5 = 2$ elde edilir. Bu sonuçlar ile (1.126), (1.127) ve (1.128) eşitliklerine gidilirse, aşağıda verilen genel çözüm elde edilir:

$$y = e^{3x}(C_1 \cos(5x) + C_2 \sin(5x)) + e^{4x}(C_3 + C_4 x) + C_5 e^{2x}$$

elde edilir.

1.13. Yüksek mertebeden, sağ taraflı, sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin genel çözümü

Eğer verilen diferansiyel denklem,

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = Q(x) \quad (1.129)$$

formunda ise bu denklem yüksek mertebeden, sağ taraflı, sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Bu tür bir diferansiyel denklem çözülürken önce sağ tarafsız (Q(x)=0) olarak çözülür ve homojen (y_h) çözüm elde edilir. Daha sonra sağ taraflı çözüme geçilir. Sağ taraflı çözüm için ise 2 farklı yaklaşım bulunmaktadır:

- Belirsiz katsayılar yöntemi
- Lagrange sabitlerin değişimi metodu

$e^{x}(A_0x^{1}+B)$

1.13.1. Belirsiz katsayılar yöntemi

(1.129) denklemi sağ tarafsız olarak çözülür ve homojen çözüm elde edilir. Daha sonra Tablo 1.1'de gösterilen şartlar altında özel çözümler elde edilir. Nihayet, homojen ve özel çözümler toplanarak genel çözüm elde edilir.

kaynak yokken çözüm → homojen çözüm
kaynak varken çözüm → özel çözüm
+ genel çözüm / tam çözüm

Tablo 1.1

kaynak $Q(x)$	Karakteristik denklemin kökü değilse	(y_p) Özel çözüm
C sbt	0	A
x^n zaman	0	$A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n$
$e^{\alpha x}$	α	$Ae^{\alpha x}$
$x^n e^{\alpha x}$	α	$e^{\alpha x}(A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n)$
$\begin{cases}\cos(\beta x)\\ \sin(\beta x)\end{cases}$	$i\beta$	$A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$
$e^{\alpha x}\begin{cases}\cos(\beta x)\\ \sin(\beta x)\end{cases}$	$\alpha \mp i\beta$	$e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$
$x^n e^{\alpha x}\begin{cases}\cos(\beta x)\\ \sin(\beta x)\end{cases}$	$\alpha \mp i\beta$	$e^{\alpha x}\cos(\beta x)\left[A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n\right] + e^{\alpha x}\sin(\beta x)\left[B_0x^n + B_1x^{n-1} + ... + B_n\right]$

1.55

$A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3$

(Özel çözüm Tahmini)

Tablo 1.1'de ikinci sütunda yer alan ifadeler karakteristik denklemin bir kökü ise bu duruma rezonans hali denir. Rezonans durumunda, ikinci sütundaki ifadeler, karakteristik denklemin k katlı kökü iseler, Tablo 1.1'de üçüncü sütundaki ifadeler x^k ile çarpılır. Yukarıda anlatılan işlemler aşağıda verilen problemler yardımı ile daha iyi anlaşılacaktır.

Problem 1.55 tek tek çözeceğiz

$y'' - y = \cos x + 2e^x$

sağ taraflı, lineer, sabit katsayılı diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm

Daha önce bahsedildiği gibi sağ taraflı diferansiyel denklemlerde öncelikle sağ tarafsız denklem çözümü elde edilir:

$\alpha^2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 1;\ \alpha_2 = -1$

$y_h = C_1e^x + C_2e^{-x}$ (homojen çözüm) kaynaksızdı

A ve B yi bulacağız
C_1 ve C_2 → Başlangıç koşulu ile bulunur

Şimdi ise sağ taraflı çözüm (özel çözüm) bulunacaktır. Sağ tarafta **iki adet fonksiyon** bulunmaktadır. Bu nedenle her iki fonksiyon içi ayrı ayrı özel çözüm bulunacaktır: Önce cos(x) için işlem yapılsın;

$e^t(Ax+B)$ Ate^t+Be^t+C

Tablo 1.1'de sol sütunda $Q(x)=\cos(\beta x)$ için özel çözüm tahmini olarak ($i\beta$ karakteristik denklemin bir kökü değilse) y_p olarak; $y_{p1}=A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)$ alınması gerektiği belirtilmektedir. β değeri burada 1 olmaktadır. Buna göre birinci özel çözüm tahmini verilen diferansiyel denklemi sağlamalıdır:

$$y'_{p1}=-A\sin(x)+B\cos(x) \quad \rightarrow y''-y=\cos x$$

$$y''_{p1}=-A\cos(x)-B\sin(x)$$

Bu denklemler verilen diferansiyel denklemde yerine konularak A ve B sabitleri bulunacaktır. Burada <u>dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta</u> ise; verilen diferansiyel denklemde, yukarıdaki türev ifadeleri yerlerine konulurken, sağ tarafta Q(x) olarak yalnızca cos(x) ifadesinin bulunması gerektiğidir:

$$y''_{p1}-y_{p1}=-A\cos(x)-B\sin(x)-[A\cos(x)+B\sin(x)]=\cos(x) \qquad (1.130)$$

Tablo 1.1'de 2. sütunda gösterilen $i\beta$ değeri kök olmadığından dolayı üçüncü sütundaki ifadeyi x ile çarpmamız gerekmemektedir. (1.130) ifadesinde sin(x) ve cos(x)'li ifadeler kendi aralarında ayrı ayrı eşitlenirse;

$$-2A=1 \Rightarrow A=-0.5; \quad -2B=0 \Rightarrow B=0$$

elde edilir. Bu değerler özel çözüm tahmini olan $y_{p1}=A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)$ eşitliğinde yerlerine konulur ise aşağıda verilen 1. özel çözüm elde edilir.;

$$y_{p1}=-0.5\cos(x)$$

Verilen diferansiyel denklemde sağ tarafta bulunan ikinci ifade $2e^x$ olarak verilmiştir. İkinci özel çözüme ulaşmak için Tablo 1.1'den faydalanılacaktır. Bu tabloda $Q(x)=e^{\alpha x}$ için α'nın karakteristik denklemin bir kökü olmaması şartı altında <u>özel çözüm tahmininin</u> $y_{p2}=Ae^{\alpha x}$ olacağı söylenmiştir. Fakat bu problemde $e^{\alpha x}=e^x$ olduğundan, $\alpha=1$ karakteristik denklemin bir köküdür. Bu nedenle y_{p2} özel çözüm tahmininin x^k ile çapılması gerekmektedir (kök bir katlı olduğundan k=1 olur ve bu nedenle $x^k=x^1=x$ olur).

$$y_{p2}=xAe^x \qquad (1.131)$$

$$y'_{p2}=Ae^x+xAe^x$$

$$y''_{p2}=2Ae^x+xAe^x$$

Yukarıda elde edilen eşitlikler verilen diferansiyel denklemde yerlerine konulur ve sağ tarafa ise yalnızca $2e^x$ yazılırsa;

$$2Ae^x+xAe^x-xAe^x=2e^x$$

A=1 değeri elde edilir. Bu değer (1.131) eşitliğinde yerine konulur ise ikinci özel çözüm ifadesi;

$$y_{p2}=xe^x$$

olacaktır. Aranan genel çözüm ise;

$$\boxed{y=y_h+y_p=y_h+y_{p1}+y_{p2}}$$

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-0.5\cos(x)+xe^x$$

olacaktır.

Problem 1.56 EDT

$y''' - 2y'' + y' = x + e^x$
sağ taraflı, lineer, sabit katsayılı diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm

Önce homojen çözüm bulunacaktır:
$\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ (katlı kök)
$y_h = C_1 e^{0x} + e^x(C_2 + C_3 x) = C_1 + e^x(C_2 + C_3 x)$ (homojen çözüm)

Daha sonra özel çözüm bulunacaktır. İki adet sağ taraf eşitliği bulunmaktadır. Önce Q(x)=x için tahmin yapılacaktır. $\alpha = 0$ karakteristik denklemin bir kökü olduğundan:

$y_{p1} = (Ax + B)x$

tahmini yapılmalıdır. Bu ifadenin üç adet türevi alınır, verilen diferansiyel denklemde yerine konulur ve sağ taraf x'e eşitlenirse;
$y'_{p1} = 2Ax + B; \quad y''_{p1} = 2A; \quad y'''_{p1} = 0$
$0-2*2A+2Ax+B=x \Rightarrow A=0.5; B=2$
$y_{p1} = (0.5x + 2)x$

elde edilir. Şimdi diğer özel çözüme ilişkin işlemlere geçilebilir: $Q(x)=e^x$ olduğundan ve $\alpha = 1$ karakteristik denklemin iki katlı bir kökü olduğundan:
$y_{p2} = A_1 e^x x^2$
olacaktır. Bu ifadenin üç adet türevi alınır, verilen diferansiyel denklemde yerine konulur ve sağ taraf e^x 'e eşitlenirse;
$y'_{p2} = A_1(e^x x^2 + 2xe^x) = A_1 e^x (x^2 + 2x);$
$y''_{p2} = A_1 e^x (x^2 + 4x + 2); \quad y'''_{p2} = A_1 e^x (x^2 + 4x + 2 + 2x + 4) = A_1 e^x (x^2 + 6x + 6)$
$A_1 e^x (x^2 + 6x + 6) - 2(A_1 e^x (x^2 + 4x + 2)) + A_1 e^x (x^2 + 2x) = e^x \Rightarrow A = 0.5$
$y_{p2} = 0.5 e^x x^2$
elde edilir. Aranan genel çözüm ise;
$y = y_h + y_p = y_h + y_{p1} + y_{p2}$
$y = C_1 + e^x(C_2 + C_3 x) + (0.5x + 2)x + 0.5_1 e^x x^2$
olacaktır.

AÇIKLAMA:
Aşağıda, değişik Q(x) değerleri için verilen karakteristik köklere bağlı olarak üretilen özel çözüm tahminleri verilmiştir: polinom

1) $y''' - 2y'' + y' = 8x^2 + 3x + 4 + 2\sin x + 3\cos x - 6e^{2x}; \quad \alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 1$
$y_p = (Ax^2 + Bx + C)x + D\sin x + E\cos x + Fe^{2x}$ (özel çözüm tahmini)

2) $y''' - 2y'' + y' = xe^{2x} + 5e^{2x}; \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1; \alpha_3 = 0$
$y_p = (Ax + B)e^{2x}$ (özel çözüm tahmini)

$xe^{2x} + 5e^{2x}$
$(Ax+B)e^{2x}$ $\quad Ce^{2x}$

3) $4y''' - 3y' - y = x^2 e^x; \quad \alpha_1 = 1; \alpha_2 = \alpha_3 = -0.5$
$y_p = (Ax^2 + Bx + C)xe^x$ (özel çözüm tahmini)

4) $y^{(4)} - y = xe^x \sin 2x; \quad \alpha_1 = 1; \alpha_2 = -1; \alpha_3 = i; \alpha_4 = -i$

$y_p = (Ax + B)e^{2x}$
$y_p' = 2Axe^{2x} + (A+2B)e^{2x}$
$y_p'' = 4Axe^{2x} + (4A+4B)e^{2x}$
$y_p''' = 8Axe^{2x} + (12A+8B)e^{2x}$

$A = 1/2$
$B = 5/4$

özel çözüm → Belirsiz katsayılar yönt
↘ LSD

$y_p = (Ax+B)e^x \cos 2x + (Cx+D)e^x \sin 2x$ (özel çözüm tahmini)

5) $y''' - 2y'' = x^3 e^x$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 0; \alpha_3 = 2$

$y_p = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^x$ (özel çözüm tahmini)

6) $y''' - 2y'' = e^x \sin x$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 0; \alpha_3 = 2$

$y_p = (A\cos x + B\sin x)e^x$ (özel çözüm tahmini)

7) $y''' - 2y'' = \sin x + \cos 2x$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 0; \alpha_3 = 2$

$y_p = (A\cos x + B\sin x) + (C\cos 2x + D\sin 2x)$ (özel çözüm tahmini)

8) $y''' - 2y'' = x^2 + 1$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 0; \alpha_3 = 2$

$y_p = (Ax^2 + Bx + C)x^2$ (özel çözüm tahmini)

9) $y''' - 3y' + 2y = e^x \cos 2x$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 1; \alpha_3 = -2$

$y_p = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^x$ (özel çözüm tahmini)

10) $y''' - 3y' + 2y = 5xe^{-2x}$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 1; \alpha_3 = -2$

$y_p = (Ax+B)xe^{-2x}$ (özel çözüm tahmini)

11) $y''' + y' = xe^x \sin 2x - 5\sin 2x + 3\cos 2x$; $\alpha_1 = 0; \alpha_2 = i; \alpha_3 = -i$

$y_p = (Ax+B)e^x \cos 2x + C\cos 2x + D\sin 2x$ (özel çözüm tahmini)

SPT (GOA)

1.13.2. Lagrange sabitlerin değişimi metodu

$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots\dots + a_{n-1}y' + a_n y = Q(x)$

denklemi sağ tarafsız olarak çözülür ve (1.132)'de gösterildiği gibi homojen çözüm elde edilir:

$$y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots\dots + C_n y_n(x) \tag{1.132}$$

(1.132) eşitliğinde bir an için C_i 'lerin x'e bağlı bir ifade olduğu kabul edilirse,

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots\dots + C_n(x)y_n(x) \tag{1.133}$$

elde edilir. (1.133) ifadesinin x'e göre türevi alınırsa;

$$y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \dots\dots + C_n(x)y_n'(x) + C_1' y_1(x) + C_2' y_2(x) + \dots\dots + C_n' y_n(x) \tag{1.134}$$

elde edilir. (1.134) eşitliğinde C_i' 'lü ifadeler sıfıra eşitlenirse;

$$0 = C_1' y_1(x) + C_2' y_2(x) + \dots\dots + C_n' y_n(x) \tag{1.135}$$

elde edilir. (1.134) ifadesinin x'e göre bir daha türevi alınır ve elde edilen eşitlikte (1.135) ifadesi kullanılırsa;

$$y'' = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + \dots\dots + C_n(x)y_n''(x) + C_1' y_1'(x) + C_2' y_2'(x) + \dots\dots + C_n' y_n'(x) \tag{1.136}$$

elde edilir. (1.136) eşitliğinde C_i''lü ifadeler sıfıra eşitlenirse;

$$0 = C_1' y_1'(x) + C_2' y_2'(x) + \dots\dots\dots + C_n' y_n'(x) \qquad (1.137)$$

elde edilir. Bu işlem n adet türev için yukarıdaki işlemlere benzer şekilde tekrar edilir. En sonunda;

$$\frac{Q(x)}{a_0} = C_1' y_1^{(n-1)}(x) + C_2' y_2^{(n-1)}(x) + \dots\dots\dots + C_n' y_n^{(n-1)}(x) \qquad (1.138)$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak (1.135), (1.137),….,(1.138) denklemlerinden C_i' ve entegre edilerek C_i değerlerine ulaşılır. Lagrange sabitlerin değişimi metodunda, verilen diferansiyel denklemin mertebesi kadar türev denklemi kullanılır.

Problem 1.57

$$y'' - y = e^x$$

sağ taraflı, lineer, sabit katsayılı diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm

Önce genel çözüm bulunmalıdır:

$$\alpha^2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = -1$$

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \qquad (1.139)$$

önce homojeni bul

olacaktır. Lagrange sabitlerin değişimi yaklaşımı kullanılırsa (y_h ifadesindeki C_i'ler değişken kabul ediliyor). Yukarıdaki türev eşitliğinde C_i''li ifadeler sıfıra eşitlenirse;

$$0 = C_1' e^x + C_2' e^{-x} \qquad (1.140)$$

elde edilir. Verilen diferansiyel denklemin mertebesi 2 olduğundan maksimum iki kere türev alınmalıdır. (1.140) eşitliği bir daha türetilirse (ikinci türev, son türev olduğu için $Q(x)/a_0$'a eşitlenmelidir) ($a_0 = 1$);

$$C_1' e^x - C_2' e^{-x} = e^x \qquad (1.141)$$

(1.40'ın x'e göre türevi $= e^x$)

$C_1' e^x + C_2' e^{-x} = 0$

$C_1' e^x - C_2' e^{-x} = e^x$

elde edilir. (1.140) ve (1.141) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa;

$$C_1' = 0.5 \Rightarrow C_1(x) = 0.5x + C_1$$

elde edilir. Bu değer (1.140) ifadesinde yerine konulursa;

$$C_2(x) = -\frac{1}{4} e^{2x} + C_2$$

elde edilir. $C_1(x)$ ve $C_2(x)$ eşitlikleri y_h ifadesinde yerine konursa;

$$y_g = (0.5x + C_1)e^x + (-\frac{1}{4}e^{2x} + C_2)e^{-x} = \overbrace{(C_1 - 0.25)}^{C_1} e^x + C_2 e^{-x} + 0.5xe^x$$

$$y_g = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 0.5xe^x$$

elde edilir.

45k

Problem 1.58

3 dereceden / 3 bilinmeyen sınavda

$$y^{(3)}+y^{(1)}=\frac{1}{\sin x}$$

sağ taraflı, lineer, sabit katsayılı diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm

$\alpha_{12}=2\mp 3i \rightarrow e^{2x}(A\cos 3x + B\cos 3x)$

Önce genel çözüm bulunmalıdır:

$$\alpha^3+\alpha=0 \Rightarrow \alpha_1=0;\ \alpha_2=i;\ \alpha_3=-i$$
$$y_h=C_1+C_2\cos(x)+C_3\sin(x) \qquad (1.142)$$

olacaktır. Lagrange sabitlerin değişimi yaklaşımı kullanılırsa (y_h ifadesindeki C_i'ler değişken kabul ediliyor) birinci denklemi bulalım;

$$0=C_1'+C_2'\cos(x)+C_3'\sin(x) \qquad (1.143)$$

Birinci denklemin x'e göre türevini alalım ve ikinci denklemi elde edelim;

$$0=-C_2'\sin(x)+C_3'\cos(x) \qquad (1.144)$$

İkinci denklemin x'e göre türevini alarak üçüncü ve **sonuncu** denklemi elde edelim;

$$\frac{1}{\sin(x)}=-C_2'\cos(x)-C_3'\sin(x) \qquad (1.145)$$

elde edilir. (1.143) ve (1.145) karşılaştırılırsa;

$$C_1'=\frac{1}{\sin(x)} \Rightarrow C_1(x)=\ln\tan\frac{x}{2}+C_1$$

elde edilir. (1.144) ve (1.145) eşitlikleri birlikte çözülürse;

$$C_3'=-1 \Rightarrow C_3(x)=-x+C_3$$

elde edilir. Bu değer (1.144)'de yerine konulursa;

$$C_2'=-\cot an(x) \Rightarrow C_2(x)=-\ln\sin(x)+C_2$$

elde edilir. Bulunan $C_i(x)$ ifadeleri (1.142) eşitliğinde yerine konulur ise;

$$y=C_1+C_2\cos(x)+C_3\sin(x)+\ln\tan(x/2)-\cos(x)\ln\sin(x)-x\sin(x) \qquad \text{(genel çözüm)}$$

elde edilir.

Nolte in Amor Chopin

Sadece 2. mertebe

Açıklama: P(x), Q(x) ve R(x) sürekli fonksiyonlar, y_1 ve y_2 homogen çözümün kökleri olmak üzere;

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \quad (*)$$

olarak verilen 2.mertebeden bir diferansiyel denklemin **özel çözümleri**;

Değişken katsayılarda kullanılabilir

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \quad (**)$$

olarak verilebilir. (**) ifadesinde geçen değişkenler;

$$\boxed{u_1 = -\int \frac{y_2 R(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dx \quad \text{ve} \quad u_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dx} \quad (***)$$

eşitlikleri ile hesaplanır.

Örnek: $y'' - 2y' + y = e^x / x$
diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: (*) eşitliğinden; R(x)= e^x / x olduğu görülür. y_1 ve y_2 değerleri ise sağ tarafsız diferansiyel denklemin homojen çözümünden elde edilecektir:

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \; ; \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

Wronski

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

$y_1 = e^x$; $y_2 = xe^x$ $\longrightarrow$ sıcakenir esas parçaları (sayfa 54)

(***) eşitliğinden;

$$u_1 = -\int \frac{y_2 R(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} = -\int \frac{xe^x e^x}{e^{2x} x} dx = -\int dx = -x$$

$$u_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dx = \int \frac{e^x e^x}{e^{2x} x} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

Özel çözüm ise (**) eşitliğinden;

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = -xe^x + (\ln x) xe^x$$

elde edilir. Genel çözüm ise;

$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 xe^x - xe^x + (\ln x)xe$ olacaktır.

Riccati / Bernoulli → Nonlineer → Lineer   Euler → Değişken katsayı → sabit katsayı

$x(3x^2y''' - 5xy'' + 6y') = (\sin x)x$

1.14. Euler diferansiyel denkleminin genel çözümünün bulunması
1.14.1. Euler diferansiyel denkleminin genel çözümünün bulunması (sağ tarafsız)

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + a_2x^{n-2}y^{(n-2)} + \dots\dots\dots + a_{n-1}xy' + a_ny = 0 \qquad (1.146)$$

$x^3y''' + 2x^2y''$

tipinde olan diferansiyel denklemler Euler diferansiyel denklemi olarak adlandırılır (a_i' ler sabit).

Sağ tarafsız Euler diferansiyel denklemi, iki farklı yaklaşım ile çözülebilir.

1) $x = e^t \Rightarrow \partial x = e^t\partial t \Rightarrow \dfrac{\partial x}{\partial t} = e^t$ dönüşümü yapılır: $\Rightarrow \dfrac{\partial t}{\partial x} = e^{-t}$

$y^{(n)} = \dfrac{d^ny(x)}{dx^n}$

$x = e^t$
$\ln x = t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^{-1} = \frac{\partial y}{\partial t}\left(e^t\right)^{-1} = e^{-t}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{\partial}{dt}\left(e^{-t}\frac{\partial y}{\partial t}\right) = e^{-2t}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - e^{-2t}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{\partial t}{\partial x} = e^{-t}\frac{\partial}{dt}\left(e^{-2t}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - e^{-2t}\frac{\partial y}{\partial t}\right) = e^{-3t}\frac{\partial^3 y}{\partial t^3} - 3e^{-3t}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2e^{-3t}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Yukarıda elde edilen türevler alınmaya devam edilir ve elde edilen türevler (1.146) eşitliğinde yerine konulursa;

$$b_0\frac{\partial^n y}{\partial t^n} + b_1\frac{\partial^{n-1} y}{\partial t^{n-1}} + b_2\frac{\partial^{n-2} y}{\partial t^{n-2}} + \dots\dots\dots + b_{n-1}\frac{\partial y}{\partial t} + b_ny = F(t) \qquad (1.147)$$

→ sabit katsayılı

(yukarıda Q(x) fonksiyonunun $x = e^t$ dönüşümü ile F(t)'ye dönüştürüldüğü görülmelidir) sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem elde edilir (bu tür dif.denklem çözümü yukarıda verilmişti). (1.147) eşitliğinde $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$ dönüşümü kullanılırsa **genel çözüm olarak**;

$$y = C_1y_1(\ln x) + C_2y_2(\ln x) + \dots\dots\dots + C_ny_n(\ln x) \qquad (1.148)$$

elde edilir.

Bu dönüşümde bu da geçerlidir

2) $y = x^\alpha$ dönüşümü yapılır: $(x = e^t)$

$$y' = \alpha x^{\alpha-1};\ y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2};\ \dots\dots;\ y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

ifadeleri (1.146) eşitliğinde yerlerine konulursa;

$$x^\alpha(a_0\alpha(\alpha-1)\dots\dots(\alpha-n+1) + a_1\alpha(\alpha-1)\dots\dots(\alpha-n+2) + \dots\dots + a_{n-2}\alpha(\alpha-1) + a_{n-1}\alpha + a_n) = 0 \qquad (1.149)$$

elde edilir. (1.149) eşitliğinde yer alan;

$$f(\alpha) = a_0\alpha(\alpha-1)\dots\dots(\alpha-n+1) + a_1\alpha(\alpha-1)\dots\dots(\alpha-n+2) + \dots + a_{n-2}\alpha(\alpha-1) + a_{n-1}\alpha + a_n = 0 \qquad (1.150)$$

ifadesine **karakteristik denklem** denir. Karakteristik denklemin kökleri reel, katlı ya da kompleks olabilir. Bu üç farklı durum için çözüm yaklaşımları aşağıda verilmiştir:

a) Karakteristik denklemin kökleri reel ise;

$f(\alpha)=0$

$\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq ..... \neq \alpha_n$ için Euler diferansiyel denkleminin genel çözümü;

$$y = C_1 x^{\alpha_1} + C_2 x^{\alpha_2} + C_3 x^{\alpha_3} + C_4 x^{\alpha_4} .... + C_n x^{\alpha_n} \tag{1.151}$$

formunda olur.

b) Karakteristik denklemin kökleri katlı ise;

$f(\alpha)=0$

$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k$ için Euler diferansiyel denkleminin genel çözümü;

$$y = \left[C_1 + C_2 \ln x + C_3 (\ln x)^2 + ... + C_k (\ln x)^{k-1}\right] x^{\alpha_1} \tag{1.152}$$

formunda olur.

c) Karakteristik denklemin kökleri kompleks ise;

$f(\alpha)=0$

$\alpha_1 = a + ib \quad ; \quad \alpha_2 = a - ib$ için Euler diferansiyel denkleminin genel çözümü;

$$y = C_1 x^{(a+ib)} + C_2 x^{(a-ib)}$$

$$y = x^a (C_1 \cos(b \ln x) + C_2 \sin(b \ln x))$$

1.14.2. Euler diferansiyel denkleminin genel çözümünün bulunması (sağ taraflı)

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} x y' + a_n y = Q(x) \tag{1.153}$$

formunda verilen sağ taraflı Euler diferansiyel denklemin homojen çözümü, sağ tarafsız Euler diferansiyel denklem çözümü gibidir. Özel (y_p) çözümü aramak için ise 3 farklı yaklaşım kullanılır.

1) Belirsiz katsayılar yöntemi

(1.146) eşitliğinde Q(x) fonksiyonları için Tablo 1.1'de özel çözüm tahminleri yapılır. Bu tahminler yapılırken x yerine lnx yazılır. Daha sonraki adımlar, daha önce belirsiz katsayılar yönteminde anlatıldığı gibidir.

2) Lagrange sabitlerin değişimi metodu uygulanır.

3) (1.153)'e ilişkin karakteristik denklem yazılır:

$f(\alpha) = a_0 \alpha(\alpha - 1)......(\alpha - n + 1) + ... + a_n \quad (a_n ; y\text{'nin katsayısı})$

Sonra bu karakteristik denkleme uyan sabit katsayılı diferansiyel denklem yazılır. Daha sonra Q(x)'de $x = e^t$ eşitliği kullanılarak sabit katsayılı diferansiyel denklem elde edilir. Son olarak ise sabit katsayılı diferansiyel denklem çözülür.

Problem 1.59

$$x^2y'' + xy' - y = \ln x$$

diferansiyel denklemin genel çözümünü yukarıda gösterilen 3 farklı yaklaşım ile bulunuz.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklem (1.153)'de verilen formda olduğu için Euler tipi diferansiyel denklemdir. Bu denklem yukarıda bahsedilen üç farklı yaklaşım ile ayrı ayrı çözülecektir:

1) Önce verilen denklem $x = e^t$ değişken dönüşümü yapılarak sabit katsayılı lineer diferansiyel denkleme dönüştürülür daha sonra belirsiz katsayılar yöntemi uygulanır:

$$x = e^t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-2t}\frac{dy}{dt}$$

$e^{-2t}\, y''$

1. Yöntem

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \qquad (1.154)$$

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \qquad (1.155)$$

$$-y = -y \qquad (1.156)$$

(1.154), (1.155)) ve (1.156) eşitlikleri, verilen diferansiyel denklemde yerlerine konulursa;

$$y'' - y = t \qquad (1.157)$$

$y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$ $\quad Q(x=e^t)=t$ $\quad \ln x \Rightarrow \ln e^t \Rightarrow t$

elde edilir. (1.157) eşitliği lineer, sabit katsayılı sağ taraflı dif. denklem olup daha önce anlatılan belirsiz katsayılar yöntemi kullanılarak çözülürse:

$$\alpha^2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 1; \alpha_2 = -1$$

$y_h = C_1e^t + C_2e^{-t}$; $y_p = At + B$ (özel çözüm tahmini); $(At+B)'' - (At+B) = t \Rightarrow B=0;\ -A = 1$

$$A = -1$$

$$y_p = -t$$

$$y = y_h + y_p = C_1e^t + C_2e^{-t} - t$$

elde edilir. Daha önce yapılan değişken dönüşümü tersine uygulanırsa $t = \ln x$ olur. Bu ifade, elde edilen çözümde t yerine konulursa;

$$y = C_1x + C_2\frac{1}{x} - \ln x$$

elde edilir.

$3A+B$
$-6A-3B$
$Ae^t t + Be^t$ $\quad -4A-4B$
$-7A-6B=0$
$Ae^t + Ate^t + Be^t + 1$ $\quad 2A+2$
$\frac{7}{6}$ $\quad 6A+4B$
$2Ae^t + Ate^t + Be^t$ $\quad e^t(At+B)$

2) $y=x^{\alpha}$ dönüşümü yapılır: $(x=e^{t}$ olduğu hatırlansın)

$y'=\alpha x^{\alpha-1};\ y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

ifadeleri problemde verilen diferansiyel denklemde yerlerine konulursa;

x'in sıfır olmasın

$x^{\alpha}(\alpha(\alpha-1)+\alpha-1)=0$

$\alpha(\alpha-1)+\alpha-1=0$

$(\alpha-1)(\alpha+1)=0 \Rightarrow \alpha_1=1;\alpha_2=-1$ $\quad y_h=C_1e^{t}+C_2e^{-t} \quad (x=e^{t})$

$y=C_1x+C_2x^{-1}$ (1.158)

LSD

$\alpha^2-1=0 \Rightarrow y''-y=\ln x=t \Rightarrow a_0=1 \quad \Leftarrow e^{t}=x$

$C_1'e^{t}+C_2'e^{-t}=0$ (1.159)

$C_1'e^{t}-C_2'e^{-t}=Q(x)/a_0=t$ (1.160)

(1.159) ve (1.160) eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve buradan C_1' çekilirse;

$C_1'=0.5te^{-t} \Rightarrow C_1=-0.5te^{-t}-0.5e^{-t}+C_1$ (1.161)

elde edilir. (1.159) ve (1.160) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılır ve buradan C_2' çekilirse;

$C_2'=-0.5te^{t} \Rightarrow C_2=-0.5te^{t}+0.5e^{t}+C_2$ (1.162)

elde edilir. (1.161) ve (1.162) denklemleri (1.58) eşitliğinde yerlerine konulursa $(e^{t}=x,\ \ln x=t)$;

$y=C_1x+C_2\dfrac{1}{x}-\ln x$

elde edilir.

$\boxed{x=e^{t}}$

3) $y=x^{\alpha}$ dönüşümü yapılır:

$y'=\alpha x^{\alpha-1};\ y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

ifadeleri problemde verilen diferansiyel denklemde yerlerine konulursa;

$x^{\alpha}(\alpha(\alpha-1)+\alpha-1)=0$

$\alpha(\alpha-1)+\alpha-1=0$

$(\alpha-1)(\alpha+1)=0 \Rightarrow \alpha_1=1;\alpha_2=-1$

$y_h=C_1x+C_2x^{-1}$ (sağ tarafsız çözüm)

sağ taraflı çözüm için ise

$\alpha^2-1=0$

ifadesine uyan sabit katsayılı diferansiyel denklem kurulursa;

$y''-y=\ln x=\ln e^{t}=t$ (sabit katsayılı diferansiyel denklem) (1.163) elde edilir. Sağ taraf için özel çözüm tahmini;

$$y_p = At + B$$

olur. Bu ifade (1.163) eşitliğinde yerine konulursa, A= -1; B=0 elde edilir.Bu sonuç genel çözüme taşınırsa ($e^t = x$, $\ln x = t$) aşağıdaki çözüm elde edilir.

$$y = C_1 x + C_2 x^{-1} + y_p = C_1 x + C_2 x^{-1} - \ln x$$

Problem 1.60

$$x^2 y''' + xy'' = \cos(\ln x)$$

$\ln e^t$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklemin her iki tarafı x ile çarpılırsa Euler diferansiyel denklemi elde edilir: (Birinci yaklaşım ile çözülecektir)

$$x^3 y''' + x^2 y'' = x\cos(\ln x)$$

$x = e^t$ değişken dönüşümü kullanılarak t'ye göre sabit katsayılı diferansiyel denklem elde edilir:

$$dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^t} = e^{-t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}$$

$x = e^t$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)e^{-t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t} - e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)e^{-t} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)e^{-t} = -2e^{-3t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) - e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = e^t\cos t$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = e^t\cos t$$

$$y''' - 2y'' + y' = 0$$

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha = 0$$

$$\alpha(\alpha - 1)^2 = 0c \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 1$$

$$y_h = C_1 + C_2 e^t + C_3 te^t = C_1 + e^t(C_2 + C_3 t)$$

$$y = C_1 + e^t(C_2 + C_3 t) + 0.5e^t\cos t \quad y_p = e^t(A\cos t + B\sin t) \Rightarrow A = 0.5; B = 0 \Rightarrow t = \ln x$$

$$y = C_1 + x(C_2 + C_3\ln x) + 0.5x\cos(\ln x)$$

Problem 1.61

$$x^3y''' + x^2y'' = x$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. $y(1) = 0,\ y'(1) = 0,\ y''(1) = 0$ başlangıç şartını sağlayan tam çözümünü belirtiniz.

Çözüm

Problem üçüncü yaklaşım ile çözülecektir. $y = x^{\alpha}$ şeklinde çözümleri olduğu kabul edilsin:

$$y' = \alpha x^{\alpha-1};\ y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2};\ y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

x^{α} kolml.

türevleri verilen diferansiyel denklemde yerlerine konulursa;

$$x^3x^{\alpha-3}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + x^2x^{\alpha-2}\alpha(\alpha-1) = 0$$
$$x^{\alpha}[\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + \alpha(\alpha-1)] = 0$$
$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + \alpha(\alpha-1) = 0 \Leftarrow \text{Euler dif.denk.karakteristik denklemi}$$
$$\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 1; \alpha_3 = 0$$

Mertebe katsayıları denkler

Yukarıda elde edilen denkleme uygun diferansiyel denklem aşağıda verilmiştir:

$$y''' - 2y'' + y' = e^t \quad (*) \text{ — LSD.}$$

$y_h = C_1 + C_2e^t + C_3e^t \cdot t$

$y_h = C_1 + C_2x + C_3x\ln x$

Homojen çözüm;

$$y_h = C_1 + e^t(C_2 + C_3t)$$

özel çözüm tahmini;

$$y_p = Ae^tt^2$$

olur ve ifade (*) ifadesinde yerine konulursa;

A=0.5

elde edilir. Genel çözüm;

$$y_g = y_h + y_p = C_1 + e^t(C_2 + C_3t) + 0.5e^tt^2$$

olur. Yukarıdaki genel çözümde $e^t = x \Rightarrow t = \ln x$ ifadeleri kullanılarak;

$$y_g = C_1 + x(C_2 + C_3\ln x) + 0.5x(\ln x)^2$$

elde edilir. Problemde verilen ilk koşullar y_g ifadesinde kullanılarak genel çözümdeki sabitler bulunacaktır:

$$y(1) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$$

$$y'(1) = 0 \Rightarrow C_2 + C_3\ln x + C_3\frac{1}{x}x + 0.5\left[(\ln x)^2 + 2x\frac{\ln x}{x}\right] = 0$$

$$y'(1) = 0 \Rightarrow C_2 + C_3\ln x + C_3\frac{1}{x}x + 0.5\left[(\ln x)^2 + 2x\frac{\ln x}{x}\right] = 0 \Rightarrow C_2 + C_3 = 0$$

$$y''(1) = 0 \Rightarrow C_3\frac{1}{x} + 0.5\left[2\ln x + \frac{2}{x}\right] = 0 \Rightarrow C_3 = -1$$

$C_2 + C_3 = 0 \Rightarrow C_2 + (-1) = 0 \Rightarrow C_2 = 1$

$C_1 + C_2' = 0 \Rightarrow C_1 + 1 = 0 \Rightarrow C_1 = -1$

Yukardaki sabitler genel çözümde yerlerine konulursa aşağıdaki tam çözüm elde edilir:

$3x^2 x^{\alpha-2}\alpha(\alpha-1)$

$3x^{\alpha}\alpha(\alpha-1)$

$$y = -1 + x(1 - \ln x) + 0.5x(\ln x)^2$$

$x^3(x^{\alpha-3}(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha)$

Problem 1.62

$-6x\alpha x^{\alpha-1}$

$$x^3 y''' + 6x^2 y'' + 11xy' + 5y = (2 + \ln x)/x$$

x^{α} $6\alpha x$

Euler diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$x^{\alpha}((\alpha-2)(\alpha-1)\alpha + 3\alpha(\alpha-1) - 6\alpha)$

Çözüm

Önce sağ tarafsız olarak çözüm elde edilecektir. $y = x^{\alpha}$ şeklinde çözümleri olduğu kabul edilir, gerekli türevler alınır, diferansiyel denklemde yerine konulur ve karakteristik denklem elde edilirse;

$$\alpha^3 + 3\alpha^2 + 7\alpha + 5 = 0$$

olacaktır. Bu denklemi karakteristik denklem olarak kabul eden (sağ taraflı) diferansiyel denklem;

$$y''' + 3y'' + 7y' + 5y = 2e^{-t} + e^{-t}t = e^{-t}(t + 2) \qquad (*)$$

olur. Karakteristik denklemin kökleri;

$\alpha_1 = -1$; $\alpha_2 = -1 + 2i$; $\alpha_3 = -1 - 2i$

Homojen çözüm;

$$y_h = C_1 e^{-t} + e^{-t}(C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t)$$

özel çözüm tahmini;

$$y_p = (At + B)e^{-t}t$$

olur ve ifade (*) ifadesinde yerine konulursa (her üç türev de yerine konulmalı);

$$A = 5/12; \quad B = 4/3$$

elde edilir. Bulunan değerler için genel çözüm;

$$y_g = y_h + y_p = C_1 e^{-t} + e^{-t}(C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t) + (\frac{5}{12}t + \frac{4}{3})e^{-t}t$$

olur. Bu ifadede $e^t = x \Rightarrow t = \ln x$ eşitliği kullanılırsa;

$$y_g = y_h + y_p = \frac{C_1}{x} + \frac{1}{x}(C_2 \cos 2(\ln x) + C_3 \sin 2(\ln x)) + (\frac{5}{12}\ln x + \frac{4}{3})\frac{\ln x}{x}$$

elde edilir.

Sağ tarafsız ve 2. mertebeden

Açıklama: Eğer sağ tarafsız Euler diferansiyel denklemi;

$$x^2y'' + bxy' + cy = 0 \quad (*)$$ $\longrightarrow x^2(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}) + bx(\alpha x^{\alpha-1}) + cx^{\alpha} = 0$

tipinde ise;

$\alpha(\alpha-1) + b\alpha + c = 0$

$\alpha^2 - \alpha + b\alpha + c$

$$r^2 + (b-1)r + c = 0 \quad (**)$$

$x^2y''-2xy'-4y=0$

denkleminin kökleri r_1 ve r_2 olmak üzere, Euler denkleminin sağ tarafsız çözümü;

$b=-2$

$c=-4$

$r^2+(-2-1)r-4=0$

$r^2-3r-4=0$

$-1 \quad 4$

$y=C_1x^{-1}+C_2x^4$

$$y = C_1|x|^{r_1} + C_2|x|^{r_2} \qquad (r_1 \neq r_2, \text{gerçek kök})$$

$$y = (C_1 + C_2 \ln|x|)\,|x|^{r} \qquad (r_1 = r_2 = r, \text{gerçek kök})$$

$$y = |x|^{\alpha}\left[C_1 \sin(\beta \ln|x|) + C_2 \cos(\beta \ln|x|)\right] \qquad (r_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \text{kompleks kök})$$

x>0 için mutlak değer işareti kaldırılabilir.

Örnek 1: $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$

Çözüm: (**) denkleminden;

$$r^2 + (-2-1)r - 4 = 0 \Rightarrow r_1 = -1;\; r_2 = 4 \quad \text{(kökler reel ve farklı)}$$

$$y = C_1|x|^{r_1} + C_2|x|^{r_2} = C_1/x + C_2x^4$$

Örnek 2: $x^2y'' + 3xy' + y = 0$

Çözüm: (**) denkleminden;

$$r^2 + (3-1)r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -1 \quad \text{(kökler eşit)}$$

$$y = (C_1 + C_2 \ln|x|)\,|x|^{r} = (C_1 + C_2 \ln x)/x$$

Açıklama: Eğer verilen diferansiyel denklem;

$$a_0(x-x_0)^n y^{(n)} + a_1(x-x_0)^{n-1}y^{(n-1)} + a_2(x-x_0)^{n-2}y^{(n-2)} + \dots\dots\dots + a_{n-1}(x-x_0)y' + a_n y = Q(x)$$

biçiminde verilmiş ise,

$y = x^{\alpha}$ yerine $y = (x-x_0)^{\alpha}$

$x = e^{t}$ yerine $e^{t} = (x-x_0)$

yazılarak, tüm işlemler ve türevler daha önce anlatıldığı gibi yapılır.

Açıklama: Eğer elimizde ikinci mertebeden **sağ taraflı** Euler diferansiyel denklemi var ise, bunun genel çözümü için, LSD yönteminin (**Problem 1.58**) sonunda anlatılan yaklaşımdan faydalanarak genel çözümünü bulabiliriz. Aşağıdaki örnek çözüm incelenmelidir:

Burada Euler'in 2. yaklaşımı kullanılacak

Örnek: $x^2y'' - 2xy' - 4y = 10x$

Sağ taraflı Euler tipi diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Öncelikle verilen diferansiyel denklem;

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

formuna çevrilmelidir:

$$y'' - \frac{2}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = \frac{10}{x}$$

R(x)=10/x olacaktır. Verilen Euler denkleminin sağ tarafsız çözümünden kökler;

$$y_1 = 1/x;\quad y_2 = x^4 \;\Rightarrow\; \left(\begin{array}{l} x^2 x^{\alpha-2}\alpha(\alpha-1) - 2x x^{\alpha-1}\alpha + x^{\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0 \\ \alpha_1 = -1; \alpha_2 = 4; y_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t} = C_1\frac{1}{x} + C_2 x^4 \end{array} \right)$$

bulunur. Özel çözüm;

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

olarak verilebilir. Özel çözüm ifadesinde geçen değişkenler;

$$u_1 = -\int \frac{y_2 R(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2}dx = -\int \frac{x^4(10/x)}{(1/x)(4x^3) - (-1/x^2)(x^4)} = -\int 2x dx = -x^2$$

$$u_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2}dx = -\int \frac{1}{x}\frac{(10/x)}{(1/x)(4x^3) - (-1/x^2)(x^4)} = -\int \frac{2}{x^4}dx = -\frac{2}{3x^3}$$

olduğuna göre;

$$\underset{\text{özel}}{y_p} = u_1 y_1 + u_2 y_2 = -x^2\frac{1}{x} - \frac{2}{3x^3}x^4 = -\frac{5}{3}x$$ olarak bulunur. $\underset{\text{genel}}{y_g} = C_1\frac{1}{x} + C_2 x^4 - \frac{5}{3}x$

Problem 1.63

$$y''' + y' = \tan^2 x$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü (Lagrange sabitlerin değişimi yöntemi ile) bulunuz.

Çözüm

$$\alpha^3 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha^2 + 1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0; \alpha_2 = -i; \alpha_3 = i$$

$y_h = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x$ (tanx Tablo 1.1'de yok)

$$y_p = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x$$

$$y_p' = -C_2(x)\sin x + C_3(x)\cos x + \overbrace{C_1' + C_2'\cos x + C_3'\sin x}^{=0}$$

$$y_p'' = -C_2(x)\cos x - C_3(x)\sin x - \overbrace{C_2'\sin x + C_3'\cos x}^{=0}$$

$$y_p''' = C_2(x)\sin x - C_3(x)\cos x - \overbrace{C_2'\cos x - C_3'\sin x}^{=(\tan^2 x)/1}$$

sağ taraf (0) sıfır işareti

Yukarıdaki eşitliklerde sağ tarafta verilen üç adet denklem;

$$C_1' + C_2'\cos x + C_3'\sin x = 0$$
$$-C_2'\sin x + C_3'\cos x = 0$$
$$-C_2'\cos x - C_3'\sin x = \tan^2 x$$

olur. Üç adet denklemin ortak çözülmesinden;

$$C_1' = \tan^2 x$$
$$C_2' = \frac{-\sin^2 x}{\cos x}$$
$$C_3' = \frac{-\sin^3 x}{\cos^2 x}$$
$$C_1 = \int \tan^2 x dx = \int (\tan^2 x + 1 - 1)dx = \tan x - x + \overline{C_1}$$
$$C_2 = \int \frac{-\sin^2 x}{\cos x}dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx = \int \cos x dx - \int \frac{dx}{\cos x} = \sin x - \ln(\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})) + \overline{C_2}$$
$$C_3 = \int -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = -\int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}dx$$

cosx=u olarak alınırsa;

$$C_3 = \int \frac{1-u^2}{u^2}du = -\frac{1}{u} - u + \overline{C_3}$$

$$y_g = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x - x - \cos x \ln(\tan(\frac{x}{2} + \frac{pi}{4}))$$

elde edilir.

1.15. Diferansiyel denklemin bir özel çözümü bilindiğine göre mertebe düşürmek

dönüşecek mertebe kadar özel çözüm verilmeli

Verilen diferansiyel denklemin bir özel çözümü y_1 ise, diferansiyel denklemde $y = uy_1$ değişken dönüşümü yapılır. Daha sonra ise $u' = v$ eşitliği kullanılarak mertebe düşümü yapılmalıdır. Böylece amaca ulaşılıncaya kadar değişken dönüşümünü mertebe düşümü takip ederek işleme devam edilir. Bir diferansiyel denklemde kaç adet özel çözüm biliniyorsa o kadar değişken dönüşümü ve mertebe düşümü yapılır.

Problem 1.64

$$x^2 y'' + xy' - y = 0$$

diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1 = x$ olduğuna göre genel çözümü bulunuz.

Çözüm

$$y = uy_1 = ux \quad \Rightarrow \quad y' = u + u'x \;\Rightarrow\; y'' = u' + u''x + u' = 2u' + u''x$$
$$x^2(u''x + 2u') + x(xu' + u) - ux = 0$$
$$x^3 u'' + 3x^2 u' = 0$$
$$xu'' + 3u' = 0 \qquad (1.164) \qquad \Leftarrow \text{(değişken dönüşümü tamamlandı)}$$

(1.164) eşitliğine $u' = v$ değişken dönüşümü uygulanırsa; $\Leftarrow$ (mertebe düşümü yapılıyor)

$$v' + 3v = 0 \Rightarrow \frac{v'}{v} = -\frac{3}{x} \Rightarrow \ln\frac{v}{C} = -3\ln x \Rightarrow v = \frac{C}{x^3} = u' \Rightarrow u = -\frac{C_2}{2x^2} + C_1$$

$$y = uy_1 = ux = \left(-\frac{C_2}{2x^2} + C_1\right)x$$

$$y = -\frac{C_2}{2x} + C_1 x$$

elde edilir.

Problem 1.65

$$x^3 y''' + xy' - y = 0$$

diferansiyel denkleminin iki özel çözümü $y_1 = x$ ve $y_2 = x\ln x$ olduğuna göre, diferansiyel denklemin mertebesini iki defa düşürerek birinci mertebeden bir diferansiyel denklem elde ederek genel çözümü bulunuz.

Çözüm

$$y = uy_1 = ux$$
$$y' = u + u'x$$
$$y'' = u' + u''x + u' = 2u' + u''x$$
$$y''' = u'''x + 3u''$$

Yukarıda elde edilen türevler verilen diferansiyel denklemde yerine konulursa;

$$x^3(3u'' + u'''x) + x(u + u'x) - xu = 0 \Rightarrow x^4u''' + 3x^3u'' + x^2u' = 0$$

Eşitliğin her iki tarafı x^2'ye bölünürse;

$$x^2u''' + 3xu'' + u' = 0 \qquad (1.165) \qquad \Leftarrow \text{(değişken dönüşümü tamamlandı)}$$

elde edilir. (1.165) eşitliğinde $u' = v$ dönüşümü kullanılırsa; $\Leftarrow$ (mertebe düşümü yapılıyor)

$$x^2v'' + 3xv' + v = 0 \qquad (1.166)$$

elde edilir. Şimdi ise $y_2 = x\ln x$ ikinci özel çözüm kullanılarak bir mertebe daha düşürülecektir. Yalnız y_2 verilen ilk diferansiyel denklemin bir özel çözümü idi fakat (1.166) ile verilen diferansiyel denklem farklıdır (zira v'ye bağlıdır). Bu nedenle y_2 ile (1.166) arasında bir ilişki kurulmalıdır:

$$\boxed{y_2 = x\ln x = y = xu \;;\; (y_1 = x \text{ verilmişti}) \Rightarrow u = \ln x \Rightarrow u' = v \Rightarrow (\ln x)' = v \Rightarrow v = \frac{1}{x}}$$

1. özel çözümü 2. özel çözüm değişken şeklinde kullanılır

(Doğru) Ama soruda verilen ilk özelliğin v doğ- lem (mars)

Böylece v içeren (1.166) denkleminin bir özel çözümü $v = 1/x$ olarak bulunmuş oldu. Yukarıda yapıldığı gibi tekrar ($v_1 = 1/x$ özel çözüm bilindiğine göre) değişken dönüşümü yapılmalıdır:

$$v = wv_1 = w\frac{1}{x}$$

$$v' = -\frac{1}{x^2}w + \frac{1}{x}w'$$

$$v'' = \frac{2}{x^3}w - \frac{2}{x^2}w' + \frac{1}{x}w''$$

$$x^2\left(\frac{2}{x^3}w - \frac{2}{x^2}w' + \frac{1}{x}w''\right) + 3x\left(-\frac{1}{x^2}w + \frac{1}{x}w'\right) + \frac{1}{x}w = 0$$

$xw'' + w' = 0$ $\Leftarrow$ (değişken dönüşümü tamamlandı)

$w' = z$ dönüşümü kullanılırsa; $\Leftarrow$ (mertebe düşümü yapılıyor)

$xz' + z = 0$ (lineer diferansiyel denklem)

$$z' + \frac{z}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\frac{z}{C_1} = -\ln x \Rightarrow z = \frac{C_1}{x}$$

$$w' = z = \frac{C_1}{x} \Rightarrow w = \int z dx + C_2 = \int \frac{C_1}{x}dx + C_2$$

$$w = C_1 \ln x + C_2$$

$$v = wv_1 \text{ idi} \Rightarrow v = w\frac{1}{x} = (C_1 \ln x + C_2)\frac{1}{x} = \frac{C_1}{x}\ln x + \frac{C_2}{x}$$

$u' = v$ olarak alınmıştı,

$$u = \int\left(C_1\frac{\ln x}{x} + \frac{C_2}{x}\right)dx + C_3 \Rightarrow u = 0.5C_1(\ln x)^2 + C_2 \ln x + C_3$$

$y = uy_1 = ux$

$$y = 0.5C_1x(\ln x)^2 + C_2x\ln x + C_3x$$

Açıklama: Eğer verilen diferansiyel denklem ikinci mertebeden ve;

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

biçimindeyse ve özel çözüm y_1 (sıfırdan farklı) verilmişse,

$$v = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx \quad (*)$$

olmak üzere, verilen diferansiyel denklemin genel çözümü;

$$y = C_1y_1 + C_2vy_1 \quad (**)$$

olacaktır. (d'Alembert kuralı)

Örnek: $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$ diferansiyel denkleminine ilişkin bir özel çözüm, $y_1 = x$ olarak verildiğine göre, mertebe düşürerek genel çözümü bulunuz.

Çözüm: $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0 \Rightarrow y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0 \Rightarrow P(x) = -\frac{4}{x}$; $Q(x) = \frac{4}{x^2}$

(*) denkleminden;

$$v = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx = \int \frac{e^{\int \frac{4}{x}dx}}{x^2} dx = \int \frac{e^{4\ln x}}{x^2} dx = \int \frac{x^4}{x^2} dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

(**) denkleminden;

$$y = C_1 y_1 + C_2 v y_1 = C_1 x + C_2 \frac{x^3}{3} x = C_1 x + C_2 \frac{x^4}{3}$$

$$y = C_1 x + C_3 x^4$$

Açıklama: Üçüncü mertebeden bir diferansiyel denklemin bir adet özel çözüm kullanılarak mertebe düşürme yolu ile genel çözümünün nasıl bulunduğu aşağıda verilen örnek problem yardımı ile açıklanmıştır:

Soru: : $y''' - y' = 0$, diferansiyel denkleminin bir adet özel çözümü $y_1 = e^x$ olduğuna göre, $y_2(x) = 1$ ve $y_3(x) = e^{-x}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $y = vy_1 = e^x v$ alarak;

$$y' = (e^x v)' = e^x(v + v'), \quad y'' = e^x(v + 2v' + v'')$$
$$y''' = e^x(v + 3v' + 3v'' + v''')$$

elde edilir. Bu türev eşitlikleri verilen denklemde yerine konulursa;

$$e^x(v + 3v' + 3v'' + v''') - e^x(v + v') = 0$$
$$v''' + 3v'' + 2v' = 0$$

$w = v'$, alınarak, son elde edilen diferansiyel denklem mertebe düşürülürse;

$$w'' + 3w' + 2w = 0$$

$$\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0. \ \alpha_1 = -1; \ \alpha_2 = -2.$$

$$w(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} \quad (*)$$

$C_1 = -1, C_2 = 0$ (karakteristik denklemin birinci kökü kullanıldı)

veya

$C_1 = 0, C_2 = -2,$ (karakteristik denklemin ikinci kökü kullanıldı)

alınarak (*) denkleminin lineer bağımsız iki özel çözümü;

$w_1(x) = -e^{-x}$ ve $w_2(x) = -2e^{-2x}$ olarak bulunabilir.

$w = v'$ eşitliğinden;

$$v_1(x) = \int w_1(x)dx = \int -e^{-x}dx = e^{-x}$$
$$v_2(x) = \int w_2(x)dx = \int -2e^{-2x}dx = e^{-2x}$$

elde edilir. $y_1(x) = e^{x}$ olarak verildiğinden, diğer iki (bağımsız) özel çözüm;

$$y_2(x) = v_1(x)y_1(x) = (e^{-x})(e^{x}) = 1$$

$$y_3(x) = v_2(x)y_1(x) = (e^{-2x})(e^{x}) = e^{-x}$$

olarak bulunur. Buna göre verilen diferansiyel denklemin genel çözümü (sistemin esas parçaları yardımı ile);

$$y(x) = C_1e^{x} + C_2 + C_3e^{-x}$$

olacaktır.

1.16. Operatörler metodu ile sabit katsayılı diferansiyel denklem çözümü

$$D = \frac{d}{dx}\,;\; Dy = \frac{dy}{dx}\,;\; D^2y = \frac{d^2y}{dx^2}\,;\; D^ny = \frac{d^ny}{dx^n} \qquad (1.167)$$

kabulü altında aşağıdaki özellikler incelenmelidir:

$$D(f + \varphi) = Df + D\varphi \qquad (1.168)$$
$$(D + a)f = Df + af \qquad (1.169)$$
$$D(cf) = cDf \qquad \text{(c:sabit)} \qquad (1.170)$$
$$(D + a)[(D + b)f] = (D + b)[(D + a)f] \qquad (1.171)$$
$$D^nD^my = D^{n+m}y \qquad (1.172)$$

Eğer diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde verilmiş ise;

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = Q(x) \qquad (1.173)$$

(1.173) eşitliği D operatörü kullanılarak aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$a_0D^ny + a_1D^{n-1}y + ... + a_{n-1}Dy + a_ny = Q(x) \qquad (1.174)$$

(1.174) eşitliği y parantezine alınırsa:

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y = Q(x) \qquad (1.175)$$

elde edilir. (1.175) eşitliğinde parantez içi D'ye göre bir polinomdur:

$$a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n = f(D) \qquad (1.176)$$

(1.176) eşitliği (1.175) ifadesinde kullanılırsa;

$$f(D)y = Q(x) \qquad (1.177)$$

$$y=\frac{Q(x)}{f(D)} \qquad (1.178)$$

elde edilir. (1.176) denkleminin **homojen çözümünü** elde etmek için ifadeyi D'ye göre çarpanlarına ayırmak gerekir:

$$f(D)=(D-\alpha_1)(D-\alpha_2)(D-\alpha_3)............(D-\alpha_n)=0 \qquad (1.179)$$

(1.179) eşitliğinin kökleri farklı, katlı veya kompleks (karmaşık) olabilir:

1) Kökler farklı ise;

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq ....\neq \alpha_n$$

$$y_h=C_1e^{\alpha_1 x}+C_2e^{\alpha_2 x}+.......+C_ne^{\alpha_n x} \qquad (1.180)$$

2) Kökler katlı ise;

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=........=\alpha_k$$

$$y_h=(C_1+C_2x+C_3x^2+.......+C_kx^{k-1})e^{\alpha_1 x} \qquad (1.181)$$

3) Kökler kompleks ise;

$$\alpha_1=a+bi; \quad \alpha_2=a-bi$$

$$y_h=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx) \qquad (1.182)$$

(1.176) denkleminin **özel çözümünü** elde etmek için aşağıdaki işlemlerin yapılması gerekir:

$$f(D)y=Q(x)\,; \quad y=\frac{Q(x)}{f(D)}$$

$$y=\frac{Q(x)}{(D-\alpha_1)(D-\alpha_2)(D-\alpha_3)............(D-\alpha_n)} \qquad (1.183)$$

Eğer u adlı bir değişken, aşağıdaki şekilde tanımlanır ise;

$$u=\frac{Q(x)}{D-\alpha_n} \qquad (1.184)$$

$$(D-\alpha_n)u=Q(x) \qquad (1.185)$$

elde edilir. (1.185) eşitliğine (1.169) özelliği uygulanırsa;

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha_n u=Q(x) \qquad (1.186)$$

elde edilir. (1.186) denklemi u'ya göre sağ taraflı lineer bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemin homojen çözümü;

$$\frac{u_h'}{u_h}=\alpha_n \Rightarrow \ln\frac{u_h}{C_n}=\alpha_n x \qquad (1.187)$$

$$u_h=C_ne^{\alpha_n x} \Leftarrow \text{homojen çözüm} \qquad (1.188)$$

olacaktır. (1.188)'den özel çözüme gidilirse;

$$C_n'e^{\alpha_n x}=Q(x) \Rightarrow (C'e^{-\alpha_n x}+\alpha_n C e^{-\alpha_n x})-\alpha_n Ce^{\alpha_n x}=Q(x) \qquad (1.189)$$

$$C_n'=e^{-\alpha_n x}Q(x)$$

$$C_n=\int e^{-\alpha_n x}Q(x)dx+C_n \qquad (1.190)$$

elde edilir. (1.190) ifadesi (1.188) eşitliğinde kullanılırsa genel çözüm elde edilir:

$$u=C_ne^{\alpha_n x}+e^{\alpha_n x}\int e^{-\alpha_n x}Q(x)dx \qquad (1.191)$$

(1.191) eşitliği (1.184) denklemine taşınır ise;

$$(D-\alpha_n)(C_n e^{\alpha_n x} + e^{\alpha_n x}\int e^{-\alpha_n x} Q(x)dx) = Q(x)$$

$$C_n e^{\alpha_n x} + e^{\alpha_n x}\int e^{-\alpha_n x} Q(x)dx = \frac{Q(x)}{D-\alpha_n} \qquad (1.192)$$

elde edilir. (1.193) ve (1.194) eşitlikleri daima geçerlidir:

$$\frac{1}{D}Q(x) = \int Q(x)dx \qquad (1.193)$$

$$\frac{1}{D-\alpha_n}Q(x) = e^{\alpha_n x}\int e^{-\alpha_n x} Q(x)dx \qquad (1.194)$$

$$\frac{1}{(D-\alpha_{n-1})}\frac{1}{(D-\alpha_n)}Q(x) = \frac{1}{D-\alpha_{n-1}}\left[e^{\alpha_n x}\int e^{-\alpha_n x} Q(x)dx\right] \qquad (1.195)$$

(1.195) eşitliği, (1.194) özelliği kullanılarak elde edilmiştir. (1.195) ifadesinde (1.194) özelliği tekrar kullanılırsa;

$$\frac{1}{D-\alpha_{n-1}}\left[e^{\alpha_n x}\int e^{-\alpha_n x} Q(x)dx\right] = e^{\alpha_{n-1} x}\int e^{-\alpha_{n-1} x}\left[e^{\alpha_n x}\int e^{-\alpha_n x} Q(x)dx\right]dx$$

$$= e^{\alpha_{n-1} x}\int e^{(\alpha_n-\alpha_{n-1})x}\int e^{-\alpha_n x} Q(x)(dx)^2 \qquad (1.196)$$

elde edilir. Bu özellik (1.183) eşitliğine taşınır ise özel çözüm;

1) $y_p = e^{\alpha_1 x}\int e^{(\alpha_2-\alpha_1)x}\int e^{(\alpha_3-\alpha_2)x} \ldots\ldots\ldots\int e^{(\alpha_n-\alpha_{n-1})x}\int e^{-\alpha_n x} Q(x)(dx)^n \qquad (1.197)$

2) $y_p = \dfrac{Q(x)}{(D-\alpha_1)(D-\alpha_2)(D-\alpha_3)\ldots\ldots\ldots(D-\alpha_n)}$

$$y_p = \left[\frac{A_1}{(D-\alpha_1)} + \frac{A_2}{(D-\alpha_2)} + \frac{A_3}{(D-\alpha_3)} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{(D-\alpha_n)}\right]Q(x)$$

$$y_p = A_1 e^{\alpha_1 x}\int e^{-\alpha_1 x} Q(x)dx + A_2 e^{\alpha_2 x}\int e^{-\alpha_2 x} Q(x)dx + \ldots\ldots + A_n e^{\alpha_n x}\int e^{-\alpha_n x} Q(x)dx \qquad (1.198)$$

yöntemlerinden bir tanesi kullanılarak elde edilebilir.

Problem 1.66

$$(\frac{d^2y}{dx^2} - y) = e^x$$

D operatör yaklaşımını kullanarak yukarıda verilen diferansiyel denklemini genel çözümü bulunuz.

Çözüm

$$(D^2-1)y = e^x$$

$$(D^2-1) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = 1;\; \alpha_2 = -1$$

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \quad \Leftarrow \text{ homojen çözüm}$$

Özel çözüm için yukarıda gösterilen her iki yaklaşım da ayrı ayrı uygulanacaktır:

1) (1.197) eşitliği kullanılarak;

$$y_p = e^x \int e^{(-1-1)x} \int e^{-(-1)x} \overbrace{e^x}^{=Q(x)} dxdx = e^x \int e^{-2x} \int e^x e^x dxdx = e^x \int e^{-2x} \frac{1}{2} e^{2x} dx$$

$$y_p = 0.5e^x x$$

elde edilir. Genel çözüm ise;

$$y_g = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 0.5e^x x$$

olarak bulunur.

2) $$y_p = \frac{1}{(D-1)(D+1)} \overbrace{e^x}^{=Q(x)}$$

$$\frac{1}{(D-1)(D+1)} = \frac{A}{D-1} + \frac{B}{D+1} \Rightarrow A = 0.5; \quad B = -0.5$$

(1.198) eşitliği kullanılarak;

$$y_p = \left[\frac{0.5}{D-1} - \frac{0.5}{D+1}\right] e^x$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede (1.198) özelliği kullanılarak;

$$y_p = 0.5_1 e^x \int e^{-x} e^x dx - 0.5e^{-x} \int e^x e^x dx = 0.5xe^x - 0.25e^{-x} e^{2x} = 0.5xe^x - 0.25e^x$$

elde edilir. Genel çözüm ise aşağıda verilmiştir:

$$y_g = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 0.5xe^x - 0.25e^x = (C_1 - 0.25)e^x + C_2 e^{-x} + 0.5xe^x$$

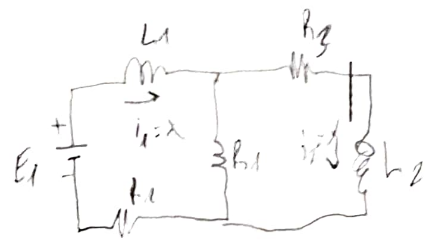
$$y_g = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 0.5xe^x$$

özel çözüm bulma → Belirsiz katsayılar
→ LSD
→ Operatörler kuralı

BÖLÜM 2 (Tekniğin diferansiyel denklemleri)

2.1. Diferansiyel denklem sistemleri
2.1.1. Lineer diferansiyel denklemler

$D=\frac{d}{dt}$ operatörünü kullanarak diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünün nasıl yapılacağı aşağıda verilen örnek ile gösterilmiştir.



Problem 2.1

$$\frac{dx}{dt}+2\frac{dy}{dt}-3y=3e^{t}$$

$$\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}-6x=6$$

denklem sisteminin x(0)=0 ve y(0)=0 başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklem sistemi D operatörü kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

(D) $Dx+2Dy-3y=3e^{t}$ yörün çarpanları
(2D-3) $Dx-Dy-6x=6$

Yukarıdaki denklem sistemi yok etme yaklaşımı ile çözülmek istenirse, 1. denklem D ile 2. denklem ise 2D-3 ile çarpılır ve 1. denklemden 2. denklem taraf tarafa toplanırsa;

$$(D^{2}+2D^{2}-15D+18)x=3e^{t}-18 \Rightarrow (D^{2}-5D+6)x=e^{t}-6$$

$$\frac{d^{2}x}{dt^{2}}-5\frac{dx}{dt}+6x=e^{t}-6 \Rightarrow \alpha^{2}-5\alpha+6=0 \Rightarrow \alpha_1=3;\ \alpha_2=2$$

$$x_h=C_1e^{3t}+C_2e^{2t}$$

elde edilir. Sağ taraf için özel çözüm tahmini;

$$x_p=Ae^{t}+B \Rightarrow x_p'=Ae^{t},\ \ x_p''=x_p'=Ae^{t}$$

olarak yapılır ve bu ifade sağ taraflı diferansiyel denklemde yerine konulur ise;

$$Ae^{t}-5Ae^{t}+6(Ae^{t}+B)=e^{t}-6 \Rightarrow A=0.5;\ B=-1$$

$$x_g=x_h+x_p=C_1e^{3t}+C_2e^{2t}+0.5e^{t}-1 \qquad (2.1)$$

elde edilir. (2.1) eşitliği problemde verilen 2.diferansiyel denklemde yerine konulursa;

$$Dy=3C_1e^{3t}+2C_2e^{2t}+0.5e^{t}-6(C_1e^{3t}+C_2e^{2t}+0.5e^{t}-1)-6$$

$$Dy=-3C_1e^{3t}-4C_2e^{2t}-2.5e^{t}$$

$$y=-C_1e^{3t}-2C_2e^{2t}-2.5e^t+C_3 \qquad (2.2)$$

elde edilir. (2.1) ve (2.2) değerleri problemde verilen ilk diferansiyel denklemde yerlerine konulursa;

$$3C_1e^{3t}+2C_2e^{2t}+0.5e^t-6C_1e^{3t}-8C_2e^{2t}-5e^t-3(-C_1e^{3t}-2C_2e^{2t}-2.5e^t+C_3)=3e^t \qquad (2.3)$$

elde edilir. (2.3) eşitliğinde t=0 için $C_3=0$ bulunur. Bu değer (2.2) eşitliğinde yerine konulursa;

$$y=-C_1e^{3t}-2C_2e^{2t}-2.5e^t$$

elde edilir. İlk koşullar x(t) ve y(t) eşitliklrtinde yerlerine konulursa;

$$x(0)=0=C_1+C_2+0.5-1$$
$$y(0)=0=-C_1-2C_2-2.5 \quad \Rightarrow \quad C_1=3.5;\ \ C_2=-3$$

elde edilir. Bu sabitler için x(t) ve y(t) ifadeleri;

$$x_g=x(t)=3.5e^{3t}+3e^{2t}+0.5e^t-1$$
$$y_g=y(t)=-3.5e^{3t}+6e^{2t}-2.5e^t$$

olarak elde edilir.

Problem 2.2

1. mertebe — 3. mertebeden

$$y'-z'=1$$
$$y''-z=e^{-2t}$$

2. mertebe

denklem sisteminin y(0)=1, z(0)=-1 ve $y'(0)$=-1 başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklem sistemi D operatörü kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$Dy-Dz=1 \qquad (2.4)$$
$$D^2y-z=e^{-2t} \qquad (2.5)$$

(2.5) eşitliği –D ile çarpılır, (2.4) ve (2.5) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa;

$$(D-D^3)y=1-De^{-2t}$$

$$\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{dy}{dt}=-2e^{-2t}-1 \qquad (2.6)$$

$$\alpha^3-\alpha=0 \Rightarrow \alpha_1=0;\alpha_2=1;\alpha_3=-1$$

$$y_h=C_1+C_2e^t+C_3e^{-t}$$

$y_p=Ae^{-2t}+Bt \quad \Leftarrow \alpha_1=0$ kök olduğu için B sabiti t ile çarpıldı

$$y_p'=-2Ae^{-2t}+B;\ \ y_p''=4Ae^{-2t};\ \ y_p'''=-8Ae^{-2t}$$

elde edilir. Yukarıda bulunan türev ifadeleri (2.6) eşitliğinde yerine konulursa;

$$-8Ae^{-2t}+2Ae^{-2t}-B=-2e^{-2t}-1$$

$$-6A=-2 \Rightarrow A=1/3;\ B=1$$

$$y_g = y(t) = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-t} + (1/3)e^{-2t} + t \qquad (2.7)$$

(2.7) eşitliği (2.5) eşitliğinde yerine konulur ve z(t) yalnız bırakılırsa;

$$y'' = C_2 e^t + C_3 e^{-t} + (4/3)e^{-2t}$$
$$z_g(t) = z(t) = C_2 e^t + C_3 e^{-t} + (1/3)e^{-2t} \qquad (2.8)$$

elde edilir. Verilen üç adet ilk koşul ilgili denklemlerde yerine konulursa;

$$y'(0) = C_2 e^0 - C_3 e^0 - (2/3)e^{-0} + 1 = -1 \Rightarrow C_2 - C_3 - (2/3) + 1 = -1$$
$$z(0) = C_2 e^0 + C_3 e^{-0} + (1/3)e^{-2*0} \Rightarrow C_2 + C_3 + (1/3) = -1$$
$$y_g = C_1 + C_2 e^0 + C_3 e^{-0} + (1/3)e^{-2*0} + 0 = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 + C_3 + (1/3) = 1$$
$$C_1 = 2$$
$$C_2 = -1.33$$
$$C_3 = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak;

$$y(t) = y_h + y_p = 2 - 1.33e^t + (1/3)e^{-2t} + t$$
$$z(t) = -1.33e^t + (1/3)e^{-2t}$$

elde edilir.

2.1.2. Sağ tarafsız diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü

2.1.2.1. Sağ tarafsız diferansiyel denklem sistemlerinin yok etme yöntemi ile elde edilmesi

Verilen diferansiyel denklem sistemi D operatörü yardımı ile matrisel formda yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} L_{11}(D) & L_{12}(D) & L_{13}(D) & \cdots\cdots & L_{1n}(D) \\ L_{21}(D) & L_{22}(D) & L_{23}(D) & \cdots\cdots & L_{2n}(D) \\ L_{31}(D) & L_{32}(D) & L_{33}(D) & \cdots\cdots & L_{3n}(D) \\ . & . & . & \cdots\cdots & . \\ . & . & . & \cdots\cdots & . \\ L_{n1}(D) & L_{n2}(D) & L_{n3}(D) & \cdots\cdots & L_{nn}(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow L * X = 0 \qquad (2.9)$$

olarak bulunur. (2.9) denkleminde yok etme metodu kullanılarak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değişkenleri D'ye bağlı olarak elde edilirler. Daha sonra D'ye bağlı ifadelerden karakteristik denklem kurularak α_i kökleri hesaplanır. Bu kök değerlerinin değerine bağlı olarak (değişik,katlı,kompleks) homojen çözüm fonksiyonu elde edilir.

Problem 2.3

$$(x_1'' + x_1' - x_1) + (x_2'' - 3x_2' + 2x_2) = 0$$
$$x_1' + 2x_1 + 2x_2' - 4x_2 = 0$$

Yukarıda verilen diferansiyel denklem sistemini sağlayan $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklem sistemi D operatörü kullanılarak yazılırsa;

$$(D^2 + D - 1)x_1 + (D^2 - 3D + 2)x_2 = 0 \qquad (2.13)$$

$$(D + 2)x_1 + (2D - 4)x_2 = 0 \qquad (2.14)$$

elde edilir. (2.14) ifadesinden x_2 çekilirse;

$$x_2 = -\frac{(D+2)}{2D-4}x_1 \qquad (2.15)$$

elde edilir. (2.15) eşitliği (2.13) eşitliğinde yerine konulur ise;

$$(D^3 - D^2 - 2D)x_1 = 0 \qquad (2.16)$$

elde edilir. (2.16) eşitliği;

$$D(D^2 - D - 2)x_1 = 0 \qquad (2.17)$$

olarak yazılabilir. Karakteristik denklemin çözümünden;

$$\alpha_1 = 0; \ \alpha_2 = 2; \ \alpha_3 = -1;$$

elde edilir. Buradan $x_1(t)$ 'ye ilişkin genel çözüm;

$$x_1 = C_1 + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t} \qquad (2.18)$$

bulunur. (2.15) eşitliğinde x_1 yalnız bırakılırsa;

$$x_1 = -\frac{2D-4}{(D+2)}x_2 \qquad (2.19)$$

elde edilir. (2.19) ifadesi (2.13)'de yerine konulursa;

$$x_2\left[-2D^2 - 2D + 2 + D^2 - D + 2D - 2\right] = 0 \Rightarrow -x_2(D^2 + D) = 0$$

Karakteristik denklemin çözümünden;

$$\alpha_1 = 0; \ \alpha_2 = -1;$$

elde edilir. Buradan $x_2(t)$ 'ye ilişkin genel çözüm aşağıdaki gibi elde edilir:

$$x_2 = C_1 + C_2 e^{-t} \qquad (2.18)$$

2.1.2.2. Sağ tarafsız diferansiyel denklem sistemlerinin Eigen karakteristik denklemi ile çözümü

Verilen diferansiyel denklem sistemi lineer ve sağ tarafsız ise aşağıda verilen formda yazılabilir:

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \qquad (2.19)$$

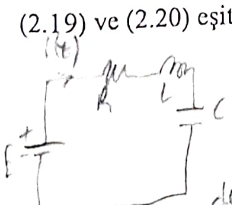
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \qquad (2.20)$$

Durum denkleminin u(t)si ihmal edilmiş
kaynak olmadığı için hangisi

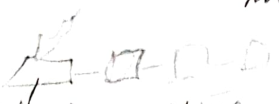
(2.19) ve (2.20) eşitlikleri matrisel formda yazılırsa;

Durum denklemi (State equation)

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}}_{\text{kare matris}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{\text{durum değişken vektörü}} + \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \underbrace{u(t)}_{\text{kaynak değişken vektörü!}}$$



RLC → devre parametresi
E → u(t)
i(t) → x(t)



Lokomotif
u(t)

Vagon
x(t)

$$\frac{d}{dt}X = A * X \tag{2.21}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{2.22}$$

elde edilir. (2.19) ve (2.20) ile verilen diferansiyel denklem sisteminin çözümlerinin;

$$x_1 = Ae^{\alpha t} = \overset{h}{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}} e^{\alpha t} \tag{2.23}$$

2.adım h değişkeni 2y? ...
1.adım α yı bul

$$x_2 = Be^{\alpha t} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} e^{\alpha t} \tag{2.24}$$

şeklinde olduğu kabul ile (2.23) ve (2.24) ifadeleri (2.19) ve (2.20) eşitliklerinde yerlerine konulur ise;

$$\alpha Ae^{\alpha t} = a_{11}Ae^{\alpha t} + a_{12}Be^{\alpha t} \tag{2.25}$$

$$\alpha Be^{\alpha t} = a_{21}Ae^{\alpha t} + a_{22}Be^{\alpha t} \tag{2.26}$$

elde edilir. (2.25) ve (2.26) eşitlikleri düzenlenirse;

$$\left.\begin{array}{l} \det(\alpha I - A) = 0 \\ \det(A - \alpha I) = 0 \end{array}\right\} \alpha \text{ bulunur}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \alpha & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} e^{\alpha t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \alpha & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ veya } \begin{bmatrix} \alpha - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \alpha - a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

elde edilir. (2.28) ifadesi **homojen cebrik denklem** olarak bilinir ve bu denklemin (0,0)`dan farklı çözümü olması için katsayılar determinantının sıfır olması gerekir. (2.28)'ye ilişkin katsayılar determinantı;

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \alpha & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \alpha \end{vmatrix} = 0 \tag{2.29}$$

şeklinde verilir. (2.29) de verilen determinant, Eigen karakteristik denklemi olarak adlandırılır. Eigen karakteristik denkleminin kökleri **(özdeğerler)** üç türlü olabilir: 1)Reel ve birbirlerinden farklı, 2) kompleks, 3) katlı.

(2.29) ifadesinden elde edilen iki kökten bir tanesi α_1 diğeri ise α_2 olsun. α_1 kökü (2.28) ifadesinde yerine konularak A_1, A_2 değerleri birbirleri cinsinden hesaplanırsa:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \alpha_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \alpha_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_2 = kA_1$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen matrisel eşitlikten iki tane denklem elde edilir. Bu iki denklem lineer bağımlı olduklarından her iki denklemden aynı $A_2 = kA_1$ ifadesi elde edilir).

Daha sonra aynı işlem α_2 kökü için yapılır:

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\alpha_2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\alpha_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B_2 = kB_1$$

Bu sefer de farklı bir $B_2 = mB_1$ ilişkisi elde edilir. Son olarak;

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=A_1\begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}e^{\alpha_1 t}+B_1\begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix}e^{\alpha_2 t} \qquad (2.30)$$

elde edilir.

ÇOK ÖNEMLİ NOT:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$ (←kaynak içermeyen durum denklemi)

homojen diferansiyel denklem sisteminde;
det(A)= 0 ise sistemin ya çözümü yoktur, ya da sonsuz çözümü vardır.

1) Karakteristik denklemin kökleri reel ve birbirlerinden farklı ise

Örneğin karakteristik denklemin iki kökü (özdeğerler); α_1 ve α_2 ise, diferansiyel denklem sistemine ilişkin homojen çözüm (2.30) denklem sistemi şeklinde olacaktır.

Problem 2.4

$$x_1' = x_1 + x_2$$
$$x_2' = 4x_1 + x_2$$

diferansiyel denklem sistemini sağlayan $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ çözümlerini bulunuz.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklem sisteminden elde edilen homojen cebrik denklemine ilişkin katsayılar determinantı bulunur ve sıfıra eşitlenirse;

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 4 & 1-\alpha \end{vmatrix}=\alpha^2-2\alpha-3=0$$

olur. Eigen karakteristik denkleminin kökleri (özdeğerler); $\alpha_1 = 3$; $\alpha_2 = -1$ olur. Bu iki kökten ilki olan $\alpha_1 = 3$ değeri, (2.28) eşitliğinde yerlerine konulursa;

$$\boxed{X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}e^{3t}+\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}e^{-t}}$$

$C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 1 \\ 4 & 1-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_2 = 2A_1$$

Her zaman Lineer bağımlı [illegible]

elde edilir. Aynı işlem ikinci kök olan $\alpha_2 = -1$ için yapılırsa;

$$\begin{bmatrix} 1-(-)1 & 1 \\ 4 & 1-(-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B_2 = -2B_1$$

elde edilir. $A_2 = 2A_1$ ve $B_2 = -2B_1$ eşitlikleri (2.30) eşitliğinde yerine konulursa;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}e^{3t} + B_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}e^{-t}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}e^{3t} + C_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}e^{-t}$$

$$x_1 = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}$$

$$x_2 = 2C_1e^{3t} - 2C_2e^{-t}$$

elde edilir.

Problem 2.5

$$x_1' = 7x_1 - 2x_2$$

$$x_2' = -2x_1 + 6x_2 - 2x_3$$

$$x_3' = -2x_2 + 5x_3$$

diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Verilen diferansiyel denklem sisteminden elde edilen homojen cebrik denklemine ilişkin katsayılar determinantı bulunur ve sıfıra eşitlenirse;

$$\Delta = \begin{bmatrix} \alpha-7 & 2 & 0 \\ 2 & \alpha-6 & 2 \\ 0 & 2 & \alpha-5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\alpha^3 - 18\alpha^2 + 99\alpha - 162 = 0$$

elde edilir. Eigen karakteristik denkleminin özdeğerleri (kökleri);

$$\alpha_1 = 3\ ;\ \alpha_2 = 6\ ;\ \alpha_3 = 9$$

olacaktır. Bu üç kökten ilki olan $\alpha_1 = 3$ değeri, (2.28) eşitliğinde yerlerine konulursa;

$$\begin{bmatrix} 3-7 & 2 & 0 \\ 2 & 3-6 & 2 \\ 0 & 2 & 3-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \quad \begin{aligned} -4u_1 + 2u_2 &= 0 \\ 2u_1 - 3u_2 + 2u_3 &= 0 \\ 2u_2 - 2u_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} X_{1h} \\ X_{2h} \\ X_{3h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} e^{6t} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} e^{9t}$$

elde edilir. Bulunan üç denklem aralarında lineer bağımlı olduklarından, içlerinden bir tanesi (u_1) parametre seçilirse;

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} C_1 \qquad (2.31)$$

$U_1 = 1$ → Al... $U_2 = 2$ → Bul $U_3 = 2$ → Bul

elde edilir. İkinci özdeğer ($\alpha_2 = 6$) için yukarıdaki işlemler tekrar yapılırsa;

$$\begin{bmatrix} 6-7 & 2 & 0 \\ 2 & 6-6 & 2 \\ 0 & 2 & 6-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} -u_4 + 2u_5 &= 0 \\ 2u_4 + 2u_6 &= 0 \\ 2u_5 + u_6 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan üç denklem aralarında lineer bağımlı olduklarından, içlerinden bir tanesi (u_2) parametre seçilirse;

$$\begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} u_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} C_2 \qquad (2.32)$$

elde edilir. Üçüncü özdeğer ($\alpha_3 = 9$) için yukarıdaki işlemler tekrar yapılırsa;

$$\begin{bmatrix} 9-7 & 2 & 0 \\ 2 & 9-6 & 2 \\ 0 & 2 & 9-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} 2u_7 + 2u_8 &= 0 \\ 2u_7 + 3u_8 + 2u_9 &= 0 \\ 2u_8 + 4u_9 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan üç denklem aralarında lineer bağımlı olduklarından, içlerinden bir tanesi (u_3) parametre seçilirse;

$$\begin{bmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} u_9 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} C_3 \qquad (2.33)$$

elde edilir. (2.31), (2.32) ve (2.33) eşitliği (2.30) ifadesinde yerine konulursa;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{6t} + C_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{9t}$$

elde edilir.

2) Karakteristik denklemin kökleri kompleks ise

Karakteristik denklemin bir kökü $\alpha_1 = a + bi$ ise diğer bir kökün $\alpha_2 = a - bi$ olması gerekir. (2.29) ifadesinden elde edilen α_1 değeri (2.28) ifadesinde yerine konularak A_1, A_2 değerleri birbirleri cinsinden hesaplanır ((2.28) ifadesinden iki tane denklem elde edilir fakat bunlar lineer olarak

$\alpha = \alpha \mp bi$ $\quad \begin{bmatrix} x_{1h} \\ x_{2h} \end{bmatrix} = e^{\alpha t}\left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \cos bt + \begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \sin bt \right)$

bağımlı olduklarından her iki denklemden aynı $A_2 = kA_1$ ifadesi elde edilir). Daha sonra aynı işlem α_2 kökü için yapılır ve bu seferde farklı bir $B_2 = mB_1$ ilişkisi elde edilir. Son olarak;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix} e^{\alpha_1 t} + B_1 \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} e^{\alpha_2 t} \tag{2.34}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix} e^{(a+bi)t} + B_1 \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} e^{(a-bi)t} \tag{2.35}$$

elde edilir. (2.35) ifadesi düzenlenirse;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} e^{at} \cos bt + \begin{bmatrix} k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} e^{at} \sin bt \tag{2.36}$$

elde edilir. (2.36) ifadesinde sabit sayısı 4 olarak görülmektedir. Verilen denklem sistemi 2 bilinmeyenli denklem olduğundan sabit sayısının da 2 olması gerekmektedir. Bu durumda k_1, k_2, k_3, k_4 sabitlerinden her hangi ikisi diğer ikisi cinsinden yazılmalıdır. Bunun için (2.36) eşitliğinden elde edilen x_1 ve x_2 değerleri, verilen diferansiyel denklemde yerlerine konarak elde edilen eşitliklerde k_1 ve k_2 sabitleri birbirleri cinsinden, yine k_3 ve k_4 sabitleri de birbirleri cinsinden yazılır ve (2.36) eşitliğindeki sabit sayıları 2'ye düşürülür.

Problem 2.6

$$x_1' = x_1 - x_2$$
$$x_2' = 5x_1 - 3x_2$$

diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklem sisteminden elde edilen homojen cebrik denklemine ilişkin katsayılar determinantı bulunur ve sıfıra eşitlenirse;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\alpha & -1 \\ 5 & -3-\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0$$

olur. Eigen karakteristik denkleminin kökleri (özdeğerler); $\alpha_1 = -1 + i$; $\alpha_2 = -1 - i$ olur. Bu iki kök (2.36) ifadesinde yerlerine konulur ise (a=-1; b=1);

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_3 \end{bmatrix} e^{-t} \cos t + \begin{bmatrix} k_2 \\ k_4 \end{bmatrix} e^{-t} \sin t \tag{2.37}$$

elde edilir. (2.37) ifadesinde 4 sabit vardır ve bunların sayısı verilen diferansiyel denklem sisteminde yer alan değişken sayısına düşürülmesi gerekir. Bunun için (2.37)'den elde edilen x_1 ve x_2 değerleri problemde verilen diferansiyel denklemlerin birisinde yerlerine konulmalıdır:

$$x_1 = k_1 e^{-t} \cos t + k_2 e^{-t} \sin t$$
$$x_2 = k_3 e^{-t} \cos t + k_4 e^{-t} \sin t$$

$$x_1' = -k_1 e^{-t}\cos t - k_1 e^{-t}\sin t - k_2 e^{-t}\sin t + k_2 e^{-t}\cos t$$

Yukarıda verilen üç adet ifade, problemde verilen ilk diferansiyel denklemde yerine konulursa (diğerinde de yerine konulursa, aynı sonuçlar elde edilir, zira her iki ifade lineer bağımlı olacaktır);

$$-k_1 e^{-t}\cos t - k_1 e^{-t}\sin t - k_2 e^{-t}\sin t + k_2 e^{-t}\cos t = (k_1 e^{-t}\cos t + k_2 e^{-t}\sin t)$$
$$-(k_3 e^{-t}\cos t + k_4 e^{-t}\sin t)$$

elde edilir. Yukarıda verilen eşitlikten (sinüslü ifadeler sinüslü ifadelere, kosinüslü ifadeler de kosinüslü ifadelere eşitlenerek katsayılar birbirleri cinsinden yazılmalıdır);

$$\begin{aligned} -k_1 + k_2 &= k_1 - k_3 \qquad & k_3 &= 2k_1 - k_2 \\ & \Rightarrow & & \\ -k_1 - k_2 &= k_2 - k_4 \qquad & k_4 &= 2k_2 + k_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu değerler (2.37) eşitliğinde yerlerine konulursa;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ 2k_1 - k_2 \end{bmatrix} e^{-t}\cos t + \begin{bmatrix} k_2 \\ 2k_2 + k_1 \end{bmatrix} e^{-t}\sin t$$

elde edilir.

3) Karakteristik denklemin kökleri katlı ise

Karakteristik denklemin kökleri $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ ise diferansiyel denklemin çözümü;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_3 \end{bmatrix} e^{\alpha t} + \begin{bmatrix} k_2 \\ k_4 \end{bmatrix} t e^{\alpha t} \qquad (2.38)$$

şeklinde olacaktır. (2.38) ifadesinde sabit sayısı 4 olarak görülmektedir. Verilen denklem sistemi 2 bilinmeyenli denklem olduğundan, sabit sayısının da 2 olması gerekmektedir. Bu durumda k_1, k_2, k_3, k_4 sabitlerinden her hangi ikisi diğer ikisi cinsinden yazılmalıdır. Bunun için (2.38) eşitliğinden elde edilen x_1 ve x_2 değerleri, verilen diferansiyel denklemde yerlerine konarak elde edilen eşitliklerde sabitler birbirleri cinsinden yazılır ve sayıları 2'ye düşürülür.

Problem 2.7

$$x_1' = x_1 - x_2$$
$$x_2' = x_1 + 3x_2$$

$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 2$

$(C_1 + C_2 t)\, e^{2t}$

diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklem sisteminden elde edilen homojen cebrik denklemine ilişkin katsayılar determinantı bulunur ve sıfıra eşitlenirse;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\alpha & -1 \\ 1 & 3-\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \Rightarrow (\alpha-2)^2 = 0$$

olur. Eigen karakteristik denkleminin kökleri (özdeğerler); $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ olur. Bu kök (2.38) ifadesinde yerlerine konulur ise;

$$\boxed{X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_3 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} k_2 \\ k_4 \end{bmatrix} te^{2t}} \qquad (2.39)$$

(2.39) ifadesinde 4 sabit vardır ve bunların sayısı verilen diferansiyel denklem sisteminde yer alan değişken sayısına düşürülmesi gerekir. Bunun için (2.39)'dan elde edilen x_1 ve x_2 değerleri problemde verilen diferansiyel denklemlerin birisinde yerlerine konulmalıdır:

$$x_1 = k_1 e^{2t} + k_2 te^{2t}$$
$$x_2 = k_3 e^{2t} + k_4 te^{2t}$$
$$x_1' = 2k_1 e^{2t} + k_2 e^{2t} + 2k_2 te^{2t}$$

Yukarıda verilen eşitlikler problemde verilen ilk diferansiyel denklemde yerine konulursa;

$$2k_1 e^{2t} + k_2 e^{2t} + 2k_2 te^{2t} = (k_1 e^{2t} + k_2 te^{2t}) - (k_3 e^{2t} + k_4 te^{2t}) \qquad (2.40)$$

elde edilir. (2.40) eşitliğinde aynı tip fonksiyonların katsayıları birbirlerine eşitlenir ise;

$$2k_1 + k_2 = k_1 - k_3 \Rightarrow k_1 = -(k_2 + k_3)$$

$$2k_2 = k_2 - k_4 \Rightarrow k_2 = -k_4$$

elde edilir. Katsayılar (2.39) ifadesinde yerine konulursa;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_2 - k_3 \\ k_3 \end{bmatrix} e^{2t} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{2t}$$
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + k_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{2t}$$

elde edilir.

Problem 2.8

$$x' = \frac{x}{2} - y$$

$$y' = x + \frac{y}{2}$$

diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

(Cevap: $x = e^{t/2}(C_1 \cos t - C_2 \sin t)$; $y = e^{t/2}(C_2 \cos t + C_1 \sin t)$)

Problem 2.9

$$x' = -3x + y$$
$$y' = -x - 5y$$

diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

(Cevap: $x = e^{-4t}(C_1 + C_2 t)$; $y = e^{-4t}(-C_2 t + C_2 - C_1)))$

gerekli hayır

2.1.2.3. Sağ taraflı diferansiyel denklem sistemlerinin Eigen karakteristik denklemi ile çözümü (Lagrange sabitlerin değişimi metodu)

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n + g_1(t)$$
$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n + g_2(t)$$
$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n + g_3(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n + g_n(t) \qquad (2.41)$$

(2.41) ile verilen sağ taraflı diferansiyel denklem sistemi önce sağ tarafsız olarak çözülür. Bu işlemin nasıl yapılacağı daha önce anlatılmıştı. (2.41) denklem sistemini sağ tarafsız olarak sağlayan çözümler;

Ayla

$$x_{h1} = C_1 f_{11}(t) + C_2 f_{12}(t) + C_3 f_{13}(t) + \dots + C_n f_{1n}(t)$$
$$x_{h2} = C_1 f_{21}(t) + C_2 f_{22}(t) + C_3 f_{23}(t) + \dots + C_n f_{2n}(t)$$
$$x_{h3} = C_1 f_{31}(t) + C_2 f_{32}(t) + C_3 f_{33}(t) + \dots + C_n f_{3n}(t)$$
$$\vdots$$
$$x_{hn} = C_1 f_{n1}(t) + C_2 f_{n2}(t) + C_3 f_{n3}(t) + \dots + C_n f_{nn}(t) \qquad (2.42)$$

olarak elde edilsin. (2.42) denklem sistemine Lagrange sabitlerin değişimi yaklaşımı uygulanarak, tüm C_i'lerin değişken olması sağlanır ve her denklem ayı ayrı (2.41)de görülen $g_i(t)$ fonksiyonlarına eşitlenirse;

$$C_1' f_{11}(t) + C_2' f_{12}(t) + C_3' f_{13}(t) + \dots + C_n' f_{1n}(t) = g_1(t)$$
$$C_1' f_{21}(t) + C_2' f_{22}(t) + C_3' f_{23}(t) + \dots + C_n' f_{2n}(t) = g_2(t)$$
$$C_1' f_{31}(t) + C_2' f_{32}(t) + C_3' f_{33}(t) + \dots + C_n' f_{3n}(t) = g_3(t)$$
$$\vdots$$
$$C_1' f_{n1}(t) + C_2' f_{n2}(t) + C_3' f_{n3}(t) + \dots + C_n' f_{nn}(t) = g_n(t) \qquad (2.43)$$

elde edilir. (2.43) denklem sistemi C_i''ler cinsinden n adet bilinmeyen içeren n adet denklem sistemini içermektedir. (2.43) denklem sisteminden C_i''ler, t değişkeni cinsinden bulunurlar. Buradan entegral alınarak C_i değerlerine ulaşılır. Son olarak ise C_i'ler (2.42) eşiliklerinde yerlerine konarak tüm x değerlerine ilişkin genel çözümler elde edilir.

Problem 2.10

$x_1' = 2x_1 - 5x_2 - \cos t$
$x_2' = x_1 - 2x_2 + \sin t$
denklem sistemini çözünüz.

Çözüm

Verilen denklem sistemi sağ taraflı olduğundan önce sağ tarafsız olarak çözülüp homojen çözümlere ulaşılmalıdır:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-\alpha & -5 \\ 1 & -2-\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = i;\ \ \alpha_2 = -i$$

Elde edilen özdeğerler (2.36) ifadesinde yerlerine konulursa;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} e^{0t} \cos 1t + \begin{bmatrix} k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} e^{0t} \sin 1t$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} \sin t \qquad (2.44)$$

elde edilir. (2.44) eşitlikleri problemde verilen diferansiyel denklemlerde x_1' değerine de gereksinim duyulduğundan;

$$x_1' = -k_1 \sin t + k_3 \cos t \qquad (2.45)$$

bulunur. (2.44) ve (2.45) ifadeleri problemde verilen diferansiyel denklem sisteminde yerlerine konulursa;

$$x_1' = 2x_1 - 5x_2 \quad -k_1 \sin t + k_3 \cos t = 2(k_1 \cos t + k_3 \sin t) - 5(k_2 \cos t + k_4 \sin t) \qquad (2.46)$$

elde edilir. (2.46) eşitliğinde aynı tip fonksiyonların katsayıları eşitlenirse;

$-k_1 = 2k_3 - 5k_4$
$k_3 = 2k_1 - 5k_2 \quad \Rightarrow k_4 = k_1 - 2k_2$

homojen çözüm bitti

elde edilir. Bu ifadeler (2.44) eşitliğinde yerlerine konulursa;

$$\begin{bmatrix} x_{1h} \\ x_{2h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 2k_1 - 5k_2 \\ k_1 - 2k_2 \end{bmatrix} \sin t$$

$$x_{1h} = k_1(\cos t + 2\sin t) - 5k_2 \sin t \qquad (2.47)$$
$$x_{2h} = k_1 \sin t + k_2(\cos t - 2\sin t) \qquad (2.48)$$

(2.47) ve (2.48) eşitliklerine Lagrange sabitleri değişimi yöntemi uygulanırsa;

$$k_1'(\cos t + 2\sin t) - 5k_2' \sin t = -\cos t \qquad (2.49)$$
$$k_1' \sin t + k_2'(\cos t - 2\sin t) = \sin t \qquad (2.50)$$

elde edilir. (2.49) ve (2.50) eşitliklerinden;

$$k_1' = 4\sin^2 t - 2\sin t\cos t + 1 \qquad (2.51)$$
$$k_2' = 2\sin^2 t + 2\sin t\cos t \qquad (2.52)$$

elde edilir. (2.51) ve (2.52) eşitliklerinin entegralleri alınırsa;

$$k_1 = -3\cos t\sin t + 2t - \cos^2 t + \bar{k}_1 \qquad (2.53)$$
$$k_2 = -\cos t\sin t + t - \cos^2 t + \bar{k}_2 \qquad (2.54)$$

Homojenden k_1, k_2 yerine yaz

bulunur. (2.53) ve (2.54) ifadeleri (2.47) ve (2.48) eşitliklerinde yerlerine konulursa;

$$x_{1g} = k_1\cos t + 2k_1\sin t - \cos t + 2t\cos t - t\sin t - 5k_2\sin t$$
$$x_{2g} = k_1\sin t - \cos t + k_2\cos t - 2k_2\sin t + t\cos t$$

elde edilir.

Not: Elimizde (örneğin) 3 adet birinci mertebeden diferansiyel denklem mevcut ve bunların özel çözümlerini **belirsiz katsayılar yöntemi ile bulmak istiyor isek**, aşağıdaki özel çözüm tahminine dikkat ile bakılmalıdır.

Homojen çözümde [illegible] bulmuştu

$$x_1' = 2x_1 - 3x_3 + 5t$$
$$x_2' = x_1 + x_2 - x_3 + 3te^{-2t} + 1$$
$$x_3' = -x_1 + 5x_3$$

$y_{p_1} = Ate^{-2t}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{kaynak} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} te^{-2t} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$; (böyle bir kaynağa ilişkin özel çözüm tahmini aşağıdadır)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} te^{-2t} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} g \\ h \\ k \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} m \\ n \\ s \end{bmatrix}$$ (özel çözüm tahmini)

ÖNEMLİ BİR BİLGİ: Daha önce anlatıldığı gibi, verilen bir **diferansiyel denklemde**, eğer verilen homojen çözümünde, e^{3t} ifadesi olsaydı ve aynı zamanda diferansiyel denklemde kaynak olarak e^{3t} ifadesi de olsaydı (bu durum, karakteristik denklemin köklerinden birisinin 3 olduğu anlamına gelir), özel çözüm tahmini ate^{3t} oluyordu. Eğer karakteristik denklemin 3'de iki katlı kökü olsa, bu durumda özel çözüm tahmini at^2e^{3t} oluyordu. Fakat, **diferansiyel denklem sisteminde durum biraz farklıdır.** Bu durumda, aynı koşullar altında, özel çözüm tahmini; t^2e^{3t} **olmaz**, bunun yerine, **polinom** şeklinde açılan ve " $\mathbf{a}t^2e^{3t} + \mathbf{b}te^{3t} + \mathbf{c}e^{3t}$ " tipinde bir özel çözüm tahminine ihtiyaç duyulur duyulur (burada **a**, **b** ve **c** ifadeleri, katsayılar içeren **vektörlerdir**).

NOT: Belirsiz katsayılar yönteminde, özel çözüme ilişkin katsayılar bulunurken, eğer elde edilen denklemler arasında (özel çözüme ilişkin) katsayıları bulmada sıkıntı yaşanırsa, bazı katsayı(ları) **tahmin ederek** işleme devam etmelisiniz.

$y_p = At^3 \longrightarrow$ dif denk

$At^3 + Bt^2 + Ct + D \longrightarrow$ [illegible]

t^2e^{3t}

$y_p = \bar{A}t^2e^{3t} + \bar{B}te^{3t} + \bar{C}e^{3t}$

__Örneğin__, özel çözüm katsayıları arasında, aşağıdaki 6 adet denklem olduğu kabul edilsin:

$a_1 = b_1 - b_2$ (1) $c_2 = 2c_1 - 3$ (3) $a1 = a_2$ (5)

$a2 = a_1$ (2) $a_2 = -3b_1 + 3b_2 + 4$ (4) $4c_2 = 3c_1$ (6)

Yukarıda verilen 6 adet denklem incelendiğinde, (2) ve (5) numaralı eşitlikler aynı olduğundan, 6 adet bilinmeyeni bulmak istediğimizde (matris yöntemi ile), **matrisin determinantı sıfır olacaktır** (satırlar arasında bağımlılık olduğundan). Bu durumda çözüm için **bir parametrenin tahmin edilmesi şarttır.**

Bu nedenle (1), (2) ve (4) eşitlikleri birlikte çözülürse;

$a_2 = a_1 = 1$

bulunacaktır. Bu değerler ile (1) ve (4) eşitliklerine gidilirse,

$b_1 - b_2 = 1$

denklemi elde edilir. Burada b_1 ya da b_2 sabitlerinden bir tanesinin değerinin **tahmin edilmesi şarttır**. Zira, bu iki değişkenin değerini bulabileceğiniz bir başka eşitlik daha yoktur. (örneğin, $b_1 = 1$ olarak tahmin edilirse, mecburen $b_2 = 0$ olacaktır. Yukarıda (3) ve (6) eşitliklerinden, rahatlıkla c_1 ve c_2 katsayıları bulunabilir. Böylece 6 adet denklemden, 6 adet katsayı bulunmuş olacaktır.

Problem 2.10.1

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{4t} \\ -u(t) \end{bmatrix} \quad ; \; x(0)=0, \quad y(0)=0 \quad ; u(t)\text{:birim basamak fonk.}$$

x(t) değerinin tam çözümünü bulunuz.

Çözüm

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{4t} \\ -u(t) \end{bmatrix}$$

Karakteristik denklem: $\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$; $\alpha_1 = 4$; $\alpha_2 = -1$;

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_h = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} e^{4t} + \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$4Ae^{4t} - Ce^{-t} = 2Ae^{4t} + 2Ce^{-t} + 3Be^{4t} + 3De^{-t}$$

4A=2A+3B;→ 2A= 3B; A= (3/2)B
-C=2C+3D; C=-D

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_h = B\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + D\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Özel çözüm tahmini:

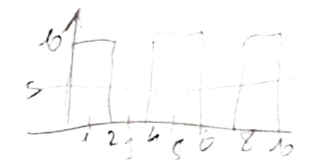
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_p = \overbrace{t\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}e^{4t} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}e^{4t}}^{e^{4t}\ \text{için}} + \overbrace{\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}}^{u(t)\ \text{için}}$$ (verilen soruda yerine yazılırsa);

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_p = t\begin{bmatrix} 12/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}e^{4t} + \begin{bmatrix} -7/10 \\ 0 \end{bmatrix}e^{4t} + \begin{bmatrix} 5/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$ → işlem atlanan (sabitler bulunur)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_g = B\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{4t} + D\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-t} + t\begin{bmatrix} 12/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}e^{4t} + \begin{bmatrix} -7/10 \\ 0 \end{bmatrix}e^{4t} + \begin{bmatrix} 5/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$ (B ve D bulunsun)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{0} + D\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{0} + 0\begin{bmatrix} 12/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}e^{0} + \begin{bmatrix} -7/10 \\ 0 \end{bmatrix}e^{0} + \begin{bmatrix} 5/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$ (ilk koşullardan)

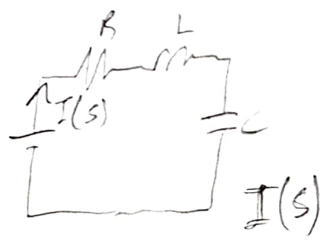
B=22/25; D=33/25 bulunur.



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{tam} = -(8/25)\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{4t} + (33/25)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-t} + t\begin{bmatrix} 12/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}e^{4t} + \begin{bmatrix} -7/10 \\ 0 \end{bmatrix}e^{4t} + \begin{bmatrix} 5/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{tam} = t\begin{bmatrix} 12/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}e^{4t} + \begin{bmatrix} -59/50 \\ -8/25 \end{bmatrix}e^{4t} + \begin{bmatrix} -33/25 \\ 33/25 \end{bmatrix}e^{-t} + \begin{bmatrix} 5/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{tam} = t\begin{bmatrix} 2.4 \\ 1.6 \end{bmatrix}e^{4t} + \begin{bmatrix} -1.18 \\ -0.32 \end{bmatrix}e^{4t} + \begin{bmatrix} -1.32 \\ 1.32 \end{bmatrix}e^{-t} + \begin{bmatrix} 2.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$



2.2. Laplace dönüşümü (Laplace transformasyonu)

t>0 ve f(t) fonksiyonu 0 ile sonsuz aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt = f(s) \tag{2.55}$$ → kısmi integrasyon

£ → laplace
£$^{-1}$ → ters laplace

ifadesine F(t) fonksiyonunun Laplace dönüşümü adı verilir ve f(s) ile gösterilir. (2.55) ifadesinin bir diğer gösterim şekli aşağıda verilmiştir:

$$£\{F(t)\} = f(s) \tag{2.56}$$ $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$

(2.56) eşitliğinde kullanılan £ işareti Laplace transformasyonunu temsil eder. Örneğin, F(t)=1 olduğunda (2.55) entegrali;

$$\int_0^\infty e^{-st}u(t)dt = -\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s} = f(s)\ ;\quad s>0$$

$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} I(s)$

$I(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$

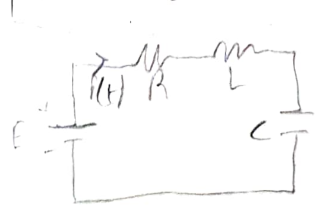
$$\boxed{£\{u(t)\} = \frac{1}{s}} \tag{2.57}$$

olacaktır. Eğer F(t)= $e^{\alpha t}u(t)$ olarak verilirse, F(t)'nin Laplace dönüşümü;

$$\int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}u(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt = \frac{1}{s-\alpha} = f(s)$$

$$\boxed{£\{e^{\alpha t} * u(t)\} = \frac{1}{s-\alpha}\ ;\qquad s>\alpha} \tag{2.58}$$

E = Ri(t)+



olarak elde edilir. Eğer F(t) fonksiyonu iki adet fonksiyonun toplamı biçiminde ise;

Toplamda geçer
çarpımda geçmez

$$\boxed{\pounds\{F_1(t)+F_2(t)\}=f(s)}$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\left[F_1(t)+F_2(t)\right]dt=\int_0^\infty e^{-st}F_1(t)dt+\int_0^\infty e^{-st}F_2(t)dt=f_1(s)+f_2(s)$$

$$\pounds\{F_1(t)+F_2(t)\}=f_1(s)+f_2(s) \tag{2.59}$$

elde edilir. Sonuç olarak iki ayrı fonksiyonun toplamının Laplaca dönüşümü, bu fonksiyonların her birinin ayrı ayrı Laplace dönümlerinin toplamına eşittir.

(2.59) ifadesine örnek olması bakımından cosh(αt) fonksiyonunun Laplace dönüşümü bulunmak istenirse (2.59) ve (2.58) ifadeleri yardımı ile);

$$\pounds\{\cosh(\alpha t)\}=\pounds\left\{\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}\right\}=\pounds\left\{\frac{e^{\alpha t}}{2}\right\}+\pounds\left\{\frac{e^{-\alpha t}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{s+\alpha}\right]=\frac{s}{s^2-\alpha^2} \tag{2.60}$$

elde edilir. Benzer şekilde sinh(αt) fonksiyonunun Laplace dönüşümü bulunmak istenirse;

$$\pounds\{\sinh(\alpha t)\}=\pounds\left\{\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}\right\}=\pounds\left\{\frac{e^{\alpha t}}{2}\right\}-\pounds\left\{\frac{e^{-\alpha t}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-\alpha}-\frac{1}{s+\alpha}\right]=\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2} \tag{2.61}$$

Problem 2.11

sint fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm

Not: $\int udv=uv-\int vdu$; $u=e^{-st}$; $du=-se^{-st}dt$; $dv=\sin t dt=-d(\cos t)=-dv \Rightarrow -v=\cos t$

$$\pounds\{\sin t\}=\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt=-\int_0^\infty e^{-st}d(\cos t)=-\left[e^{-st}\cos t\Big|_0^\infty-(-s)\int_0^\infty e^{-st}\cos t dt\right]=-\left[-1+s\int_0^\infty e^{-st}\cos t dt\right]$$

$$\pounds\{\sin t\}=1-s\int_0^\infty e^{-st}\cos t dt=1-s\int_0^\infty e^{-st}d(\sin t)=1-s\left[\underbrace{e^{-st}\sin t\Big|_0^\infty}_{=0}-(-s)\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt\right]$$

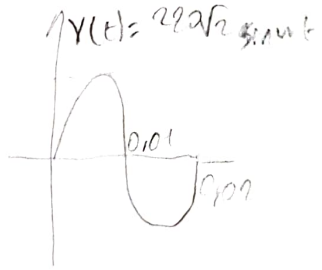
$$\pounds\{\sin t\}=1-s\left[0+s\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt\right]=1-s^2\pounds\{\sin t\}$$

$$\pounds\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1} \tag{2.62}$$

sin(αt) ve cos(αt) fonksiyonlarının Laplace transformasyonları ise aşağıdaki şekildedir (ispatı verilmemiştir):

$$\pounds\{\sin(\alpha t)\}=\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \tag{2.63}$$

$$\pounds\{\cos(\alpha t)\}=\frac{s}{s^2+\alpha^2} \tag{2.64}$$



Problem 2.12

t^n fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm

Önce t ifadesinin Laplace dönüşümü hesaplanırsa;

Not: $dv = e^{-st} \Rightarrow v = -\frac{1}{s}e^{-st}$; $dt = du \Rightarrow u = t$

$$£\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}\,t\,dt = -\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty - \frac{-1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = 0 + \frac{1}{s}£\{1\} = \frac{1}{s}\frac{1}{s}$$

$$£\{t\} = \frac{1}{s^2} \qquad (2.65)$$

elde edilir. Şimdi de t^2 ifadesinin Laplace dönüşümü hesaplansın:

$$£\{t^2\} = \int_0^\infty e^{-st}t^2dt = -\frac{t^2}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty - \frac{-1}{s}\int_0^\infty e^{-st}2tdt = 0 + \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}tdt = \frac{2}{s}£\{t\} = \frac{2}{s}\frac{1}{s^2}$$

$$£\{t^2\} = \frac{2}{s^3} \qquad (2.66)$$

Şimdi de t^3 ifadesinin Laplace dönüşümü hesaplansın:

$$£\{t^3\} = \int_0^\infty e^{-st}t^3dt = -\frac{t^3}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty - \frac{-3}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^2dt = 0 + \frac{3}{s} = \frac{3}{s}£\{t^2\} = \frac{3}{s}\frac{2}{s^3} = \frac{2*3}{s^4}$$

Bu şekilde devam edilirse;

$$\boxed{£\{t^n\} = \begin{cases} \dfrac{n!}{s^{n+1}}; & \text{n pozitif tam sayı} \\[2ex] \dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}; & \text{n reel sayı} \end{cases}} \qquad (2.67)$$

elde edilir.

$n! = \Gamma(n+1)$

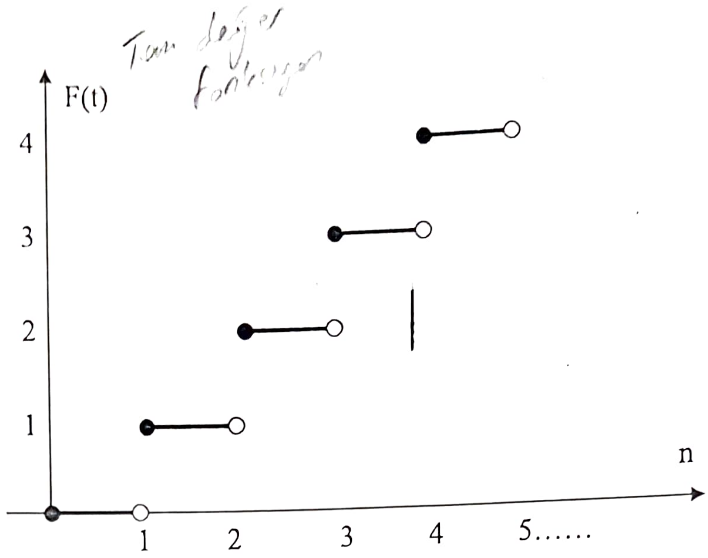
$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$\Gamma(3/2) = 1/2\,\Gamma(1/2)$

$1/s^n$

Problem 2.13



Şekil 2.1

$n \le t < n+1$ için F(t)=n (n=0,1,2,3,...) fonksiyonunun Laplace dönüşümünün;

$$\pounds\{F(t)\} = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$$

olduğunu gösteriniz. F(t) fonksiyonu şekil 2.1'de verilmiştir.

Çözüm

F(t) fonksiyonu değişik n değerleri için farklı değerlere sahip olduğu için [0 ∞] aralığı parçalanmalıdır:

$$\pounds\{F(t)\} = \int_0^1 e^{-st}\,0dt + \int_1^2 e^{-st}\,1dt + \int_2^3 e^{-st}\,2dt + \int_3^4 e^{-st}\,3dt + \dots\dots\dots\dots$$

$$\pounds\{F(t)\} = 0 + \frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_1^2 + \frac{-2}{s}e^{-st}\Big|_2^3 + \frac{-3}{s}e^{-st}\Big|_3^4 + \dots\dots\dots\dots$$

$$\pounds\{F(t)\} = \frac{-1}{s}(e^{-2s}-e^{-s}) + \frac{-2}{s}(e^{-3s}-e^{-2s}) + \frac{-3}{s}(e^{-4s}-e^{-3s}) + \dots\dots\dots\dots$$

$$\pounds\{F(t)\} = \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-2s} + \frac{1}{s}e^{-3s} + \frac{1}{s}e^{-4s} + \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{s}e^{-ns}$$

$$\pounds\{F(t)\} = \frac{1}{s}e^{-s}(1 + e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + \dots\dots\dots) \qquad (2.68)$$

$(1 + e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + \dots\dots\dots)$ dizisi, ortak çarpanı $q = e^{-s} < 1$ olan bir geometrik seridir. Böyle bir serinin toplamı;

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-(e^{-s})^n}{1-e^{-s}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-e^{-s}} \qquad (2.69)$$

olacaktır. (2.69) eşitliği (2.68) ifadesinde yerine konulursa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\pounds\{F(t)\} = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})} \qquad (2.70)$$

Problem 2.14

$\pounds\{t^{-0.5}\}$ fonksiyonunu hesaplayınız.

Çözüm

Not: $st = u^2 \Rightarrow sdt = 2udu$

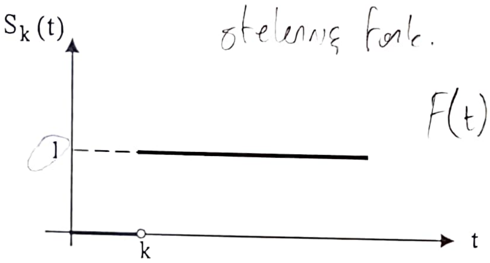
$$\pounds\{t^{-0.5}\} = \int_0^\infty e^{-st}t^{-0.5}dt = \int_0^\infty e^{-u^2}\left(\frac{u^2}{s}\right)^{-0.5}\frac{2u}{s}du = \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-u^2}du$$

$\boxed{\text{not: } 2\int_0^\infty e^{-u^2}du = \pi^{0.5} \text{ (özel bir integraldir)}}$

$$\pounds\{t^{-0.5}\} = \left(\frac{\pi}{s}\right)^{0.5} \tag{2.71}$$

Problem 2.15

$$S_k = \begin{cases} 0 & \Leftarrow \quad 0 < t < k \\ 1 & \Leftarrow \quad t >= k \end{cases}$$



Şekil 2.2

ötelenmiş fonk.

$F(t) = u(t-k)$

k süre sonra

$\pounds\{S_k(t)\}$ fonksiyonunu hesaplayınız.

Çözüm

$$\pounds\{S_k(t)\} = \pounds\{u(t-k)\} = \int_0^\infty e^{-st}S_k(t)dt = \int_0^k e^{-st}0dt + \int_k^\infty e^{-st}1dt = 0 + \left(-\frac{e^{-st}}{s}\Big|_k^\infty\right)$$

$$\pounds\{S_k(t)\} = \pounds\{u(t-k)\} = \frac{e^{-ks}}{s} \tag{2.72}$$

$\rightarrow \frac{1}{s}e^{-ks}$

$-k \rightarrow$ sağ

$+k \rightarrow$ sol

(t domeninde k kadar ötelenmiş birim basamak fonksiyonunun laplace karşılığı)

Problem 2.16

$f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$ olduğuna göre, $f(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}F(t)dt$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm

$$f(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}F(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\{e^{at}F(t)\}dt = \pounds\{e^{at}F(t)\}$$

Dünya

Mars $= e^{at}$ Dünya

ötelenmiş

ötelenmiş hali

$f(s-a) = \pounds\{e^{at}F(t)\}$	(öteleme özelliği) –frekans kayması
$f(s+a) = \pounds\{e^{-at}F(t)\}$	- frekans kayması

(2.73)

$\pounds\{F(t)u(t-\tau)\} = e^{-s\tau}\pounds\{F(t+\tau)\}$ -zaman gecikmesi

b

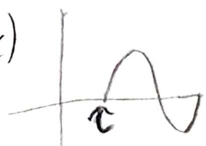
a) $F(t)\,u(t)$

b) $F(t)\,u(t-\tau)$

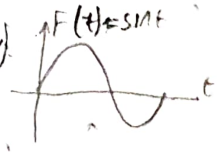
c) $F(t-\tau)\,u(t)$

d) $F(t-\tau)\,u(t-b)$

c)



a)



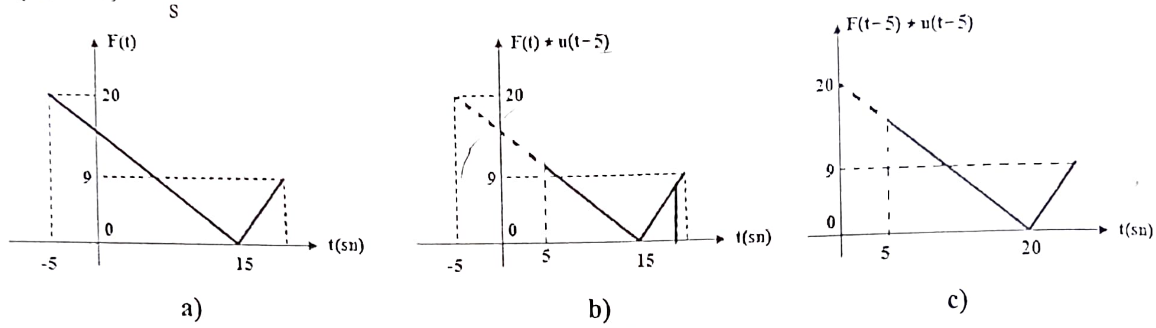
b)

Hardware devrelerinde hat kaydırma
mikroişlemcilerde gerekli

c) $\pounds\{F(t-\tau)u(t-\tau)\} = e^{-s\tau} f(s)$ -zaman gecikmesi

$\pounds\{F(t-\tau)u(t-\tau)\} = e^{-s\tau} f(s)$

$$\pounds\{u(t-\tau)\} = \frac{e^{-s\tau}}{s}$$



Şekil 2.2.1.

$\pounds\{F(t)u(t-\tau)\} = e^{-s\tau} \pounds\{F(t+\tau)\}$

Öteleme hakkında:

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt \Rightarrow e^{-bs} f(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-bs} F(t)dt = \int_0^\infty e^{-s(t+b)} F(t)dt$$

$$\text{not}: t + b = \tau \Rightarrow \int_{\tau=b}^{\tau=\infty} e^{-s\tau} F(\tau - b)d\tau$$

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F_b(t)dt = \int_0^b 0 + \int_b^\infty e^{-st} F(t-b)dt$$

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-\tau s} F(\tau - b)d\tau = \int_0^b 0 + \int_b^\infty e^{-\tau s} F(\tau - b)d\tau = \pounds\{F_b(t)\}$$

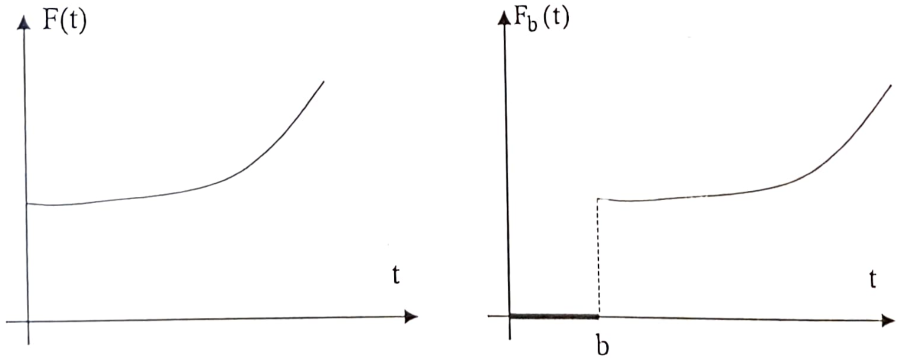
Yukarıda;

$$t + b = \tau$$

alınarak değişken dönüşümü yapılmıştır. $t = 0$ için $\tau = b$; $t = \infty$ için ise $\tau = \infty$ olacaktır.

$$F_b(t) = \begin{cases} F(t-b) & t > b \\ 0 & t < b \end{cases}$$

Şekil 2.3'de $F(t)$ ve $F_b(t)$ fonksiyonları gösterilmiştir.



Şekil 2.3

Örnek (kesme)

$\pounds\{u(t-3)\,t^2\} = e^{-3s} \pounds\{(t+3)^2\}$

$= e^{-3s} \pounds\{(t^2+6t+9)\}$

Örnek (öteleme)

$\pounds\{u(t-3)(t-3)^2\} = e^{-3s} \frac{2}{s^3}$

$$£\{F(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(at)dt \quad ; \quad at = \tau \ \text{ seçilerek} \Rightarrow dt = \frac{d\tau}{a}$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}\tau} F(\tau)d\tau = \frac{1}{a} f(\frac{s}{a}) \ ; \quad \frac{1}{a} = c \ \text{ seçilirse} \qquad \Rightarrow \boxed{£\{F(at)\} = \frac{1}{a} f(\frac{s}{a})} \ \ \textbf{(SONUÇ)}$$

$$= c\,£\left\{F(\frac{t}{a})\right\} = cf(cs)$$

$$f(as-b) = f(a(s-\frac{b}{a})) = \frac{1}{a}£\left\{e^{\frac{b}{a}t} F(\frac{t}{a})\right\}$$

F(t) - f(s)

$ℒ\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$

$ℒ\{\sin at\} =$

$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(\frac{s}{a})^2+1} = \frac{a}{s^2+a^2}$

F(t)'lin laplace formu bilinip, F(at) bulunmak istendiğinde $£\{F(at)\} = \frac{1}{a} f(\frac{s}{a})$ olacaktır.

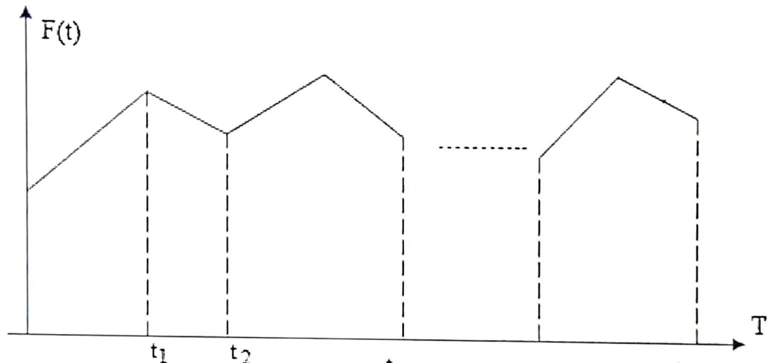
$ℒ\{\sin(3t+4)\} =$

$a=3 \quad b=-4$

$\frac{1}{3} e^{-\frac{4}{3}t} \sin \frac{t}{3}$

2.2.1. Türevin Laplace transformasyonu

F(t) sürekli ve $F'(t)$ parça parça sürekli fonksiyonlar olsunlar. F(t) fonksiyonunun türevinin Laplace transformasyonu;



Şekil 2.4

$$£\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F'(t)dt = \int_0^{t_1} \underbrace{e^{-st}}_{u} \underbrace{F'(t)dt}_{dv} + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st}F'(t)dt + \int_{t_2}^{t_3} e^{-st}F'(t)dt + \ldots + \int_{t_n}^{T} e^{-st}F'(t)dt = \int_0^T e^{-st}F'(t)dt \qquad (2.74)$$

olarak elde edilir. (2.74) eşitliğine tüm zaman aralıklarında $\int udv = uv - \int vdu$ ifadesi uygulanırsa;

$$£\{F'(t)\} = e^{-st}F(t)\Big|_0^{t_1} + e^{-st}F(t)\Big|_{t_1}^{t_2} + e^{-st}F(t)\Big|_{t_2}^{t_3} + \ldots + e^{-st}F(t)\Big|_{t_n}^{T}$$

$$+ s\int_0^{t_1} e^{-st}F(t)dt + s\int_{t_1}^{t_2} e^{-st}F(t)dt + \ldots\ldots + s\int_{t_n}^{T} e^{-st}F(t)dt$$

$$£\{F'(t)\} = e^{-st_1}F(t_1) - 1F(0) + e^{-st_2}F(t_2) - e^{-st_1}F(t_1) + e^{-st_3}F(t_3) - e^{-st_2}F(t_2) +$$

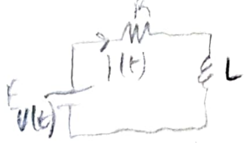
$$e^{-st_4}F(t_4) - e^{-st_3}F(t_3) + \ldots + e^{-st_n}F(t_n) - e^{-st_{n-1}}F(t_{n-1}) +$$

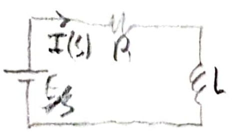
$$+ s\left[\int_0^{t_1} e^{-st}F(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st}F(t)dt + \ldots\ldots + \int_{t_n}^{T} e^{-st}F(t)dt\right]$$

$$£\{F'(t)\} = -F(0) + s\left[\int_0^T e^{-st}F(t)dt\right] \rightarrow £\{F'(t)\} = sf(s) - F(0) \qquad (2.75)$$

elde edilir.

$ℒ\{\sin t\} = s \cdot \frac{1}{s^2+1} - 0$





$E = R\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt}$

$\frac{E}{s} = I(s)R + L\left[sI(s) - I(+)\right]$

$I(s) = \frac{E}{s(R+Ls)}$

Problem 2.17

$E = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$

$$£\left\{F''(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}F''(t)dt$$

Yukarıda gösterildiği gibi, F(t) fonksiyonunun ikinci türevinin Laplace transformasyonunu bulunuz. $F(t)$ ve $F'(t)$ sürekli, $F''(t)$ ise parça parça sürekli fonksiyon olsun.

Çözüm

Verilen ifadeye $\int udv = uv - \int vdu$ kuralı uygulanırsa;

$$£\left\{F''(t)\right\} = e^{-st}F'(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}F'(t)dt = -F'(0) + s[-F(0) + sf(s)]$$

$$£\left\{F''(t)\right\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0) \qquad (2.76)$$

Türevinin sıfırdaki değeri

Problem 2.18

$$£\left\{F^{(n)}(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}F^{(n)}(t)dt$$

Yukarıda gösterildiği gibi, F(t) fonksiyonunun n. türevinin Laplace transformasyonunu bulunuz. $F(t)$, $F'(t), F''(t), F'''(t), \ldots, F^{(n-1)}(t)$, sürekli, $F^{(n)}(t)$ ise parça parça sürekli fonksiyon olsun.

Çözüm

Problem (2.17)'de yapılan işlemler 3.,4., ..,n. türevler için yapılırsa;

$$£\left\{F^{(n)}(t)\right\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - s^{n-3}F''(0) - \ldots\ldots\ldots - F^{(n-1)}(0) \qquad (2.77)$$

elde edilir.

Problem 2.19

$$£\{\cos(\alpha t)\} = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$$

özelliğini türevin Laplace özelliğinden faydalanarak ispatlayınız.

Çözüm

$F(t) = \cos(\alpha t)$; $\quad F'(t) = -\alpha\sin(\alpha t)$; $\quad F''(t) = -\alpha^2\cos(\alpha t)$; $\quad F(0) = 1$; $\quad F'(0) = 0$

(2.76) eşitliğinden faydalanarak;

$$£\left\{F''(t)\right\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$$

$$£\left\{F''(t)\right\} = £\left\{-\alpha^2\cos(\alpha t)\right\} = -\alpha^2 £\{\cos(\alpha t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$$

$$-\alpha^2 £\{\cos(\alpha t)\} = s^2 £\{\cos(\alpha t)\} - sF(0) - F'(0)$$

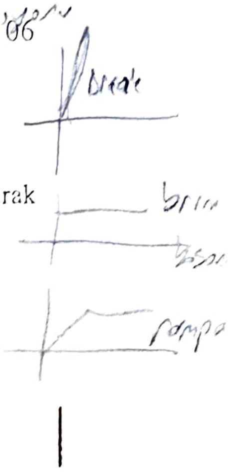
$$-\alpha^2 £\{\cos(\alpha t)\} = s^2 £\{\cos(\alpha t)\} - 1s - 0$$

$$£\{\cos(\alpha t)\} = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$$

elde edilir.

Birim basamak fonksiyonu ve rampa fonksiyonu

Problem 2.20



t^n fonksiyonunun Laplace dönüşümünü, türevin Laplace transformasyonu özelliğinden faydalanarak bulunuz.

Çözüm

$F(t)=t^n$; $\quad F'(t)=nt^{n-1}$; $\quad F''(t)=n(n-1)t^{n-2}$; ….; $\quad F^{(n)}(t)=n!$; $\quad F^{(n+1)}(t)=0$

$F(0)=0$; $\quad F'(0)\neq 0$; … ; $F^{(n)}(0)=n!$

(2.77) özelliğinden yararlanarak;

$$£\{F^{(n+1)}(t)\}=s^{n+1}f(s)-s^nF(0)-s^{n-1}F'(0)-s^{n-2}F''(0)-\dots\dots\dots-F^{(n)}(0)$$

$$£\left\{\frac{d^{n+1}(t^n)}{dt^{n+1}}\right\}=0=s^{n+1}f(s)-s^nF(0)-s^{n-1}F'(0)-s^{n-2}F''(0)-\dots\dots\dots-F^{(n)}(0)$$

$$£\left\{\frac{d^{n+1}(t^n)}{dt^{n+1}}\right\}=0=s^{n+1}f(s)-s^n0-s^{n-1}0-s^{n-2}0-\dots\dots\dots-n!$$

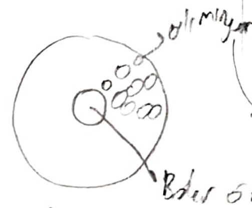
$$0=s^{n+1}f(s)-n!$$

$$\boxed{f(s)=£\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}}$$

elde edilir.

n tam sayı, n>0
n → reel sayılarda yanlış
(Γ) Gama fonk gerekli

sinωt
sint
cosωt
cost
t^2
t



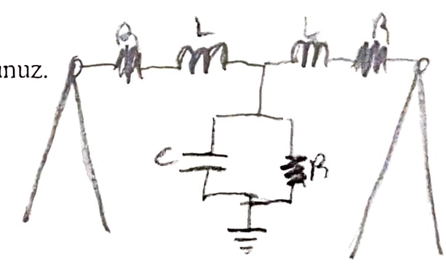
Sıcaklık ve gerilim kaybı olmadığından

Problem 2.21 (ÖNEMLİ)

$$£\left\{\int_0^t F(\tau)d\tau\right\}$$

kondansatör

fonksiyonunu, türevin Laplace transformasyonu özelliğinden faydalanarak bulunuz.



Çözüm

$$G(t)=\int_0^t F(\tau)d\tau$$

$$£\left\{\int_0^t F(\tau)d\tau\right\}=£\{G(t)\}=g(s)$$

$£\{G'(t)\}=sg(s)-G(0)=sg(s)$; **Not:** $G(0)=\int_0^0 F(0)d\tau=0$ (her zaman sıfır olur,ilk koşuldan bağımsızdır)

$$£\{G'(t)\}=sg(s)$$
$$£\{G'(t)\}=£\{F(t)\}=f(s)$$
$$sg(s)=f(s)$$
$$g(s)=\frac{1}{s}f(s)$$

$$\boxed{£\left\{\int_0^t F(\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{s}f(s)} \qquad \textbf{(SONUÇ)} \qquad (2.78)$$

$e^{-3}\left(e^{3t}u(t-1)\right)$

$n\in\mathbb{Z}$
$n>0$

Not:

$$\boxed{\pounds\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n f(s)}{ds^n}} \quad \text{(SONUÇ)} \qquad (2.79)$$

$\int_0^\infty e^{-st} t^3 \sin 5t \, dt = \pounds\{t^3 \sin 5t\}$

Laplace'a gireceğiz

İspat:

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt$$

$$f'(s) = \frac{d}{ds} f(s) = \int_0^\infty e^{-st}(-tF(t))dt = -\pounds\{tF(t)\}$$

$$f''(s) = \int_0^\infty e^{-st}((-1)^2 t^2 F(t))dt$$

$$f^{(n)}(s) = \int_0^\infty e^{-st}((-1)^n t^n F(t))dt$$

$$\pounds\{t^n F(t)\} = (-1)^n f^{(n)}(s) = (-1)^n \frac{d^n f(s)}{ds^n}$$

Problem 2.22

$$\int_0^\infty te^{-t} \sin t dt = \pounds\{t \sin(t)\}$$

integralinin değerini (2.79) özelliğini kullanarak hesaplayınız.

Çözüm

$\pounds\{t \sin(t)\} \Rightarrow \pounds\{t^n F(t)\} \Rightarrow$ n=1; F(t)=sin(t); $f(s)=\dfrac{1}{s^2+1}$

$$\pounds\{t \sin(t)\} = (-1)\frac{df(s)}{ds} = (-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = -\frac{-2s}{(s^2+1)^2}$$

Verilen problemde s=1 olduğu için;

$$\pounds\{t \sin(t)\} = -\frac{-2(1)}{((1)^2+1)^2} = 0.5$$

elde edilir.

Problem 2.22.1 (ÖNEMLİ)

$\boxed{\dfrac{F(t)}{t}}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm

$$f(s) = \int_{t=0}^\infty e^{-st} F(t)dt = \pounds\{F(t)\}$$

$$\int_s^\infty f(s)ds = \int_s^\infty \int_{t=0}^\infty e^{-st} F(t)dt \, ds$$

$$= \int_{t=0}^{\infty}\left[\int_{s}^{\infty} e^{-st}ds\right]F(t)dt$$

$$\int_{s}^{\infty} f(s)ds = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st}\frac{1}{t}F(t)dt = \pounds\left\{\frac{1}{t}F(t)\right\}$$

$$\boxed{\int_{s}^{\infty} f(s)ds = \pounds\left\{\frac{1}{t}F(t)\right\}} \quad \text{(SONUÇ)}$$

olacaktır.

$$\pounds\left\{\frac{u(t)}{t}\right\} = \quad u(t)=1 \quad f(s)=1/s$$

$$\int_{s}^{\infty}\frac{1}{s}ds = \ln s\Big|_{s}^{\infty} = \ln\infty - \ln s$$

yok

Not: Yukarıda;

$$\int_{s}^{\infty} e^{-st}ds = \frac{e^{-st}}{-t}\Bigg|_{s=s}^{s=\infty} = 0 - \frac{e^{-st}}{-t} = \frac{e^{-st}}{t}$$

eşitliği kullanılmıştır.

Soru: $f(t) = \frac{\cosh 3t}{t}$ ifadesinin laplace değerini bulunuz. (**cevap**: "yoktur". İspatlayınız)

Problem 2.22.2

$\pounds\left\{\frac{1}{t}u(t)\right\}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm

$$\pounds\left\{\frac{u(t)}{t}\right\} = \int_{s}^{\infty}F(s)ds = \lim_{W\to\infty}\int_{s}^{W}\frac{1}{s}ds = \lim_{W\to\infty}\left[\ln s\right]_{W=s}^{W} = \lim_{W\to\infty}\ln W - \ln s = \infty$$

olarak bulunur. Bulunan sonuca göre, entegral yakınsamadığından, u(t)/t fonksiyonunun laplace dönüşümünün "**olmadığı**" anlaşılmaktadır.

2.2.2. Ters Laplace dönüşümü (Ters Laplace transformasyonu)

Yukarıda t domeninde verilen fonksiyonların Laplace dönüşümleri gerçekleştirildi. Bu bölümde ise Laplace transformasyonları ((f(s)) bilinen fonksiyonları doğuran f(t) fonksiyonlarının nasıl bulunacağı gösterilecektir.

$$\pounds\{F(t)\} = f(s)$$

eşitliğini sağlayan F(t) fonksiyonunu bulmak için;

$$\pounds^{-1}\{f(s)\} = F(t) \tag{2.80}$$

işlemi yapılır. (2.80) ile verilen işleme f(s)'in ters Laplace dönüşümü adı verilir. Ters Laplace işlemi $\pounds^{-1}$ işareti ile temsil edilir.

Aşağıda ters Laplace transformasyonuna ilişkin toplama özelliği verilmiştir:

$$\pounds^{-1}\{f(s) \mp g(s)\} = \pounds^{-1}\{f(s)\} \mp \pounds^{-1}\{g(s)\} = F(t) \mp G(t) \tag{2.81}$$

Not:

Aşağıdaki özellikler unutulmamalıdır:

$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{s\to\infty} y(s) = 0 &(2.82)\\ &\lim_{s\to\infty} sy(s) = \lim_{t\to 0} Y(t) &(2.83)\\ &\lim_{s\to 0} sy(s) = \lim_{t\to\infty} Y(t) &(2.84)\end{aligned}}$$

Problemlerin çözümünde sonuçların bulunmasında kolaylık

Problem 2.23

$£^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-a)^{n+1}}\right\}$ ifadesini bulunuz.

Çözüm

(2.67) eşitliği ile,

$$£\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

olarak verilmişti. Bu eşitlik kullanılarak;

$$£^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{n!}{n!}£^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{1}{n!}£^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = \frac{1}{n!}t^n$$

elde edilir. (2.73) eşitliği ile,

$$f(s-a) = £\{e^{at}F(t)\}$$

verilmişti. Bu eşitlik kullanılarak;

$$£^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right\} = \frac{n!}{n!}£^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right\} = \frac{1}{n!}£^{-1}\left\{\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right\} = \frac{1}{n!}e^{at}t^n$$

$$\boxed{£^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right\} = \frac{1}{n!}e^{at}t^n} \tag{2.85}$$

elde edilir.

Problem 2.24

$£^{-1}\left\{\dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}\right\}$ ifadesini bulunuz.

$e^{at}\cos(kt)$

Çözüm

(2.64) ve (2.73) eşitliği kullanılarak;

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}\right\}=e^{at}\cos(kt) \quad (2.86)$$

elde edilir.

2.2.3. Basit kesirlere ayırma metodu (Heavisede) ile ters Laplace transformasyonu

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{P(s)}{(s-a)^n(s-b)^m}\right\}=\pounds^{-1}\left\{\frac{A_1}{(s-a)^n}+\frac{A_2}{(s-a)^{n-1}}+..+\frac{A_n}{s-a}+\frac{B_1}{(s-b)^m}+\frac{B_2}{(s-b)^{m-1}}+..+\frac{B_n}{s-b}\right\}$$

$$=\pounds^{-1}\left\{\frac{A_1}{(s-a)^n}\right\}+\pounds^{-1}\left\{\frac{A_2}{(s-a)^{n-1}}\right\}+.\pounds^{-1}\left\{\frac{A_n}{s-a}\right\}+\pounds^{-1}\left\{\frac{B_1}{(s-b)^m}\right\}+..+\pounds^{-1}\left\{\frac{B_n}{s-b}\right\} \quad (2.87)$$

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{P(x)}{(x^2+bx+c)^n}\right\}=\pounds^{-1}\left\{\frac{A_1x+B_1}{(x^2+bx+c)^n}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^{n-1}}+.....+\frac{A_nx+B_n}{x^2+bx+c}\right\}$$

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{P(x)}{(x^2+bx+c)^n}\right\}=\pounds^{-1}\left\{\frac{A_1x+B_1}{(x^2+bx+c)^n}\right\}+\pounds^{-1}\left\{\frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^{n-1}}\right\}+...+\pounds^{-1}\left\{\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c}\right\} \quad (2.88)$$

Verilen bir fonksiyon önce basit kesirlerine ayrılır, sonra her bir kesrin ters Laplace fonksiyonu bulunur. Aşağıdaki örnek incelenmelidir.

Problem 2.25

$\pounds^{-1}\left\{\frac{k^2}{s(s^2+k^2)}\right\}$ ifadesini bulunuz.

Çözüm

(2.87) ve (2.88) eşitliği birlikte kullanılarak;

$$\frac{k^2}{s(s^2+k^2)}==\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+k^2}\Rightarrow A=1;\quad B=-1;\quad C=0$$

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{k^2}{s(s^2+k^2)}\right\}=\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+k^2}\right\}=\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\}=u(t)-\cos(kt)$$

elde edilir.

2.2.4. Sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin Laplace dönüşümü ile çözümü

Daha önce açıklanan yaklaşımlar kullanılarak sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemler Laplace dönüşümü ile çözülebilir. Aşağıda bu yaklaşımla ilgili örnek problemler verilmiştir.

Problem 2.26

$$Y^{(2)}(t)+k^2Y(t)=0;\ Y(0)=A;\ Y'(0)=B$$

diferansiyel denklemini Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz.

Çözüm

Verilen fonksiyonun her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa;

$$£\left\{Y^{(2)}(t)+k^2Y(t)\right\}=£\{0\}=0$$

$$£\left\{Y^{(2)}(t)+k^2Y(t)\right\}=£\left\{Y^{(2)}(t)\right\}+£\left\{k^2Y(t)\right\}=0 \qquad (2.89)$$

elde edilir.

$$£\{Y(t)\}=y(s)$$

ve

$$£\left\{Y^{(2)}(t)\right\}=s^2y(s)-sA-B$$

$i(t) = 3\sin wt + 5e^{-2t}$ Geçici Hal

eşitlikleri (2.86)'da kullanılırsa;

		Domenler
$L\frac{di(t)}{dt}$	$\frac{1}{C}\int i(t)dt$	t
JwI	$\frac{1}{JwC}$	Jw
$sI+I(s)$	$\frac{1}{Cs}$	s
		z

Jw dönemi geçici hal yok eder

$$s^2y(s)-sA-B+k^2y(s)=0 \qquad (2.90)$$

elde edilir. (2.90) eşitliğinde y(s) yalnız bırakılır ise,

$$y(s)=\frac{sA+B}{s^2+k^2} \qquad (2.91)$$

elde edilir. (2.91) eşitliğinde basit kesitlere ayırma yaklaşımı kullanılarak;

$$y(s)=\frac{sA+B}{s^2+k^2}=A\frac{s}{s^2+k^2}+\frac{B}{s^2+k^2} \qquad (2.92)$$

yazılabilir. (2.92) ifadesinin her iki tarafının ters Laplace dönüşümü alınır ise;

$$Y(t)=£^{-1}\{y(s)\}=£^{-1}\left\{\frac{sA+B}{s^2+k^2}\right\}=A£^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\}+\frac{B}{k}£^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\}$$

$$Y(t)=A\cos(kt)+\frac{B}{k}\sin(kt)$$

elde edilir.

Problem 2.27

$$Y^{(2)}(t)-Z^{(2)}(t)+Z'(t)-Y(t)=e^t-2u(t);$$
$$2Y^{(2)}(t)-Z^{(2)}(t)-2Y'(t)+Z(t)=-t$$
$$y(0)=0;\quad y'(0)=0;\quad z(0)=0;\quad z'(0)=0$$

diferansiyel denklem sistemini Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz.

Çözüm

Verilen diferansiyel takımının her iki tarafının Laplace dönüşümü alınır ve türevin Laplace dönüşümü eşitlikleri kullanılırsa;

$$\pounds\{Y(t)\} = y(s)\,; \qquad \pounds\{Z(t)\} = z(s)\,; \qquad \pounds\{Y'(t)\} = sy(s) - 0\,; \qquad \pounds\{Z'(t)\} = sz(s) - 0\,;$$

$$\pounds\{Y^{(2)}(t)\} = s^2y(s) - s0 - 0\,; \quad \pounds\{Z^{(2)}(t)\} = s^2z(s) - s0 - 0\,; \quad \pounds\{e^t\} = \frac{1}{s-1}\,; \quad \pounds\{2\} = \frac{2}{s}\,; \quad \pounds\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\pounds\{Y^{(2)}(t) - Z^{(2)}(t) + Z'(t) - Y(t)\} = \pounds\{e^t - 2\} \Rightarrow s^2y(s) - s^2z(s) + sz(s) - y(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s} \qquad (2.93)$$

$$\pounds\{2Y^{(2)}(t) - Z^{(2)}(t) - 2Y'(t) + Z(t)\} = \pounds\{-t\} \Rightarrow 2s^2y(s) - s^2z(s) - 2sy(s) + z(s) = -\frac{1}{s^2} \qquad (2.94)$$

elde edilir. (2.93) eşitliğinden z(s) çekilir ve bu değer (2.94)'de yerine konulursa;

$$y(s) = \frac{1}{s(s-1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} \qquad (2.95)$$

elde edilir. (2.95) eşitliği (2.94)'de yerine konulursa;

$$z(s) = \frac{2s-1}{s^2(s^2-2s+1)} = -\frac{1}{s^2} + \overbrace{\frac{1}{(s-1)^2}}^{(2.85)\text{ ifadesini kullan}} \qquad (2.96)$$

elde edilir. (2.95) ve (2.96) eşitliklerine ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$Y(t) = u(t) - e^t + te^t$$
$$Z(t) = -t + te^t$$

elde edilir.

$y^{2}(s) - s\,y(s) - 1 - 6y(s) = \frac{2}{s}$

Problem 2.28

$Y^{(2)}(t) - Y'(t) - 6Y(t) = 2u(t)\,;\;$ Y(0)=1; $\;Y'(0) = 0$

diferansiyel denklemini Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz.

Çözüm

$$\pounds\{Y(t)\} = y(s)\,; \qquad \pounds\{Y'(t)\} = sy(s) - y(0) = \boxed{sy(s) - 1}\,; \qquad \pounds\{Y^{(2)}(t)\} = s^2y(s) - sy(0) - 0 = s^2y(s) - s$$

$$\pounds\{Y^{(2)}(t) - Y'(t) - 6Y(t)\} = \pounds\{2\}$$

$$(s^2y(s) - s) - (sy(s) - 1) - 6y(s) = \pounds\{2\} = \frac{2}{s}$$

$$y(s)[s^2 - s - 6] = y(s)(s-3)(s+2) = \frac{2}{s} + s - 1$$

$$y(s) = \frac{2}{s(s-3)(s+2)} + \frac{s-1}{(s-3)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+2} = -\frac{1/3}{s} + \frac{8/15}{s-3} + \frac{4/5}{s+2}$$

$$Y(t) = \pounds^{-1}\{y(s)\} = -\frac{1}{3}u(t) + \frac{8}{15}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t}$$

Problem 2.29

$$x'(t) + y'(t) - x(t) = e^t$$
$$2x'(t) + y'(t) + 2y(t) = 0$$

$y(0)=0;\quad x(0)=0;$

diferansiyel denklem sistemini Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz.

Çözüm

Aradaki işlemler gösterilmemiştir.

Yukarıda verilen problemlerdeki mantık aynı şekilde bu probleme de uygulanırsa;

$$y(s) = \frac{2s}{(s-1)(s^2-s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2-s+2} = \frac{1}{s-1} - \frac{s-2}{s^2-s+2} = \frac{1}{s-1} - \frac{s-2}{(s-0.5)^2+(\sqrt{7}/2)^2}$$

Not: $s^2 - s + 2 = (s-k)^2 + m^2 = s^2 - 2sk + k^2 + m^2 \Rightarrow 2k = 1 \Rightarrow k = 0.5; m^2 = 7/4 \Rightarrow m = \sqrt{7}/2$

Hatırlatma:

$£\{\cos(\alpha t)\} = \dfrac{s}{s^2+\alpha^2}$; $\quad £\{\sin(\alpha t)\} = \dfrac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$ olarak verilmişti.

$$\frac{s}{(s-0,5)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} - \frac{2}{(s-0,5)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

Yukarıda verilen Laplace dönüşümleri kullanılarak;

$$y(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{s-0.5}{(s-0.5)^2+(\sqrt{7}/2)^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{(s-0.5)^2+(\sqrt{7}/2)^2} \tag{2.97}$$

elde edilir. (2.97) eşitliği, problemde verilen ilk diferansiyel denklemin Laplace transformu olan;

$$sx(s) + sy(s) - x(s) = \frac{1}{s-1}$$

ifadesinde yerine konulur ise;

$$x(s) = -\frac{s+2}{(s^2-s+2)(s-1)} \tag{2.98}$$

elde edilir. (2.97) ifadesinin her iki tarafının ters Laplace dönüşümü alınırsa;

$$Y(t) = £^{-1}\{y(s)\} = e^t - e^{0.5t}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{7}}e^{0.5t}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$$

$$Y(t) = e^t + e^{0.5t}[\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + \frac{3}{\sqrt{7}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t]$$

elde edilir. (2.98) ifadesi kolaylıkla ters Laplace alınabilir şekilde kesirlere ayrılırsa;

Aradaki işlemleri 9

$$x(s) = \frac{s+2}{(s-1)(s^2-s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2-s+2} = \frac{3/2}{s-1} + \frac{3s/2+1}{s^2-s+2} = \frac{3/2}{s-1} + \frac{3s/2}{s^2-s+2} + \frac{1}{s^2-s+2}$$

$$= \frac{3/2}{s-1} + \frac{3}{2}\frac{s-0.5}{(s-0.5)^2+7/4} + \frac{3}{2\sqrt{7}}\left[\frac{\sqrt{7}/2}{(s-0.5)^2+7/4}\right] \qquad (2.101)$$

elde edilir. (2.98) ifadesinin ters Laplace dönüşümü alınırsa;

$$X(t) = \frac{3}{2}e^{t} + e^{0.5t}\left[\frac{3}{2}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + \frac{3}{2\sqrt{7}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right]$$

elde edilir.

Problem 2.30 İspatla (Bu dersi anladım mı?)

$$x'(t) + y'(t) - 4y(t) = 1$$
$$x(t) + y'(t) - 3y(t) = t^2$$

y(0)=0; x(0)=0;

diferansiyel denklem sistemini Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz.

(Cevap: $y(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}e^{2t}$; $x(t) = t^2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{2}t - \frac{1}{4}e^{2t}$)

Problem 2.31

s domeninde direk bulunur
t domeninde ayrı ayrı fonk yazılır

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t<1 \\ 2 & t \geq 1 \end{cases}$$

$$y''(t) + y(t) = F(t); \quad y(0)=0; \; y'(0)=0$$

Yukarıda verilen diferansiyel denklemi belirtilen başlangıç koşulları altında çözünüz.

Çözüm

$$£\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}F(t)dt = \int_0^1 e^{-st}F(t)dt + \int_1^{\infty} e^{-st}F(t) = 0 + \int_1^{\infty} e^{-st}2dt = -\frac{2}{s}e^{-st}\Big|_1^{\infty} = \frac{2}{s}e^{-s}$$

$$s^2y(s) - sy(0) - y'(0) + y(s) = \frac{2}{s}e^{-s} \Rightarrow (s^2+1)y(s) = \frac{2}{s}e^{-s} \Rightarrow y(s) = \frac{2}{s(s^2+1)}e^{-s}$$

$$y(s) = 2e^{-s}\left(\frac{1}{s} * \frac{1}{s^2+1}\right) = 2e^{-s}\left[\frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}\right] = \frac{2e^{-s}}{s} - \frac{2se^{-s}}{s^2+1} \quad \Leftarrow A=1;\ B=-1;\ C=0$$

sabit değil fonksiyon olarak

Hatırlatma: $£\{F(t-b)\} = e^{-bs}f(s)$ (zaman gecikmesi)

$f(s-a) = £\{e^{at}F(t)\}$ (frekans kayması)

$$y(t) = 2u(t-1) - 2\cos(t-1); \qquad (2.102)$$

u(t)= birim basamak fonksiyonu

(2.102) eşitliği aşağıda gösterildiği gibi de yazılabilir:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[(s-s_i)^m F(s) e^{st}\right]_{s=s_i} \quad \text{(Ters Laplace)}$$

$$y(t)=\begin{cases}2u(t-1)-2\cos(t-1) & t\geq 1\\ 0 & t<1\end{cases}$$

2u(t-1) - 2cos(t-1)xu(t-1)

Çöz **Problem 2.32** 3 ceviz kerell elekdevresi.

$$x^{''}(t)-y(t)+2z(t)=3e^{-t}$$
$$-2x^{'}(t)+2y^{'}(t)+z(t)=0$$
$$2x^{'}(t)-2y(t)+z^{'}(t)+2z^{''}(t)=0$$

diferansiyel denklem sistemini,

$x(0)=1;\ x^{'}(0)=1;\ y(0)=2;\ z(0)=2,\ z^{'}(0)=-2$

ilk koşulları altında Laplace transformasyonu yardımı ile çözünüz.

(**Cevap:** $y(t)=e^{t}+e^{-t}$; $z(t)=2e^{-t}$; $x(t)=-\frac{3}{2}e^{t}+e^{0.5t}(\frac{3}{2}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t-\frac{2}{\sqrt{7}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t)$)

Problem 2.33

$$x^{'}(t)+y(t)=0$$
$$x^{''}(t)+y^{'}(t)+y(t)=e^{t}$$
$x(0)=1;\ x^{'}(0)=0;\ y(0)=0$

diferansiyel denklem sistemini Laplace transformasyonu yardımı ile çözünüz.

Çözüm

$$sx(s)-1+y(s)=0$$
$$s^{2}x(s)-s+sy(s)+y(s)=\frac{1}{s-1}$$

Yukarıda verilen denklemlerin ortak çözümünden

$$y(s)=\frac{1}{s-1}\Rightarrow y(t)=e^{t}$$
$$x(s)=\frac{1-y(s)}{s}=\frac{s-2}{s(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}=\frac{2}{s}+\frac{-1}{s-1}\Rightarrow x(t)=2u(t)-e^{t}$$

Elde edilen x(t) ve y(t) eşitliklerinde, problemde verilen ilk koşullar kullanılırsa, x(t) ve y(t) ifadelerinin $x^{'}(0)=0$ ve y(0)=0 ilk koşullarını sağlamadığı görülecektir.

İlk koşulu sağlamamış.

Problem 2.34 (ÖNEMLİ)

$$y^{''}(t)+ty^{'}(t)-y(t)=0$$

değişken katsayılı

diferansiyel denklemini, y(0)=0, $y^{'}(0)=1$ şartları altında çözünüz

Çözüm

eulerde çözülemediği için laplace ile çöz

Verilen diferansiyel denklemde,

$$\pounds\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n f(s)}{ds^n}$$

özelliği kullanılarak,

$$s^2 y(s) - 1 - \frac{d}{ds}[sy(s) - y(0)] - y(s) = 0 \Rightarrow s^2 y(s) - 1 - y(s) - sy'(s) - y(s) = 0$$

$$y'(s) + (\frac{2}{s} - s)y(s) = -\frac{1}{s}$$ (**s'e bağlı birinci mertebeden sağ taraflı değişken katsayılı dif.denklem)**

$$y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{C}{s^2} e^{0.5s^2} \Rightarrow \pounds^{-1}\{y(s)\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + C\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} e^{0.5s^2}\right\}$$

$y(t) = t + C\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} e^{0.5s^2}\right\}$; y(0)=0 şartının sağlanabilmesi için C=0 olmalıdır.Diğer bir şekilde (2.82) eşitliği kullanılarak da C=0 elde edilebilir.

$$y(t) = t$$

Sayfa 65

Problem 2.35

$$ty''(t) + y'(t) + ty(t) = 0$$

diferansiyel denklemini, y(0)=1, $y'(0) = 0$ şartları altında çözünüz

Çözüm

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2 y(s) - s\right] + sy(s) - 1 - \frac{d}{ds} y(s) = 0$$

$$-s^2 y'(s) - 2sy(s) + 1 + sy(s) - 1 - y'(s) = 0$$

$$(s^2 + 1)y'(s) = -sy(s) \Rightarrow \ln\frac{y(s)}{C} = -\frac{1}{2}\ln(s^2 + 1)$$

$$y(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{C}{s}(1 + \frac{1}{s^2})^{-0.5} = \frac{C}{s}(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{s^3} + \frac{1*3}{2!*2^2}\frac{1}{s^4} - ... + ... - .... + (-1)^n \frac{1*3*5*..(2n-1)}{n!2^n....s^{2n}}$$

$$y(s) = \frac{C}{s}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} n!^2 s^{2n}} = C\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} n!^2 s^{2n+1}}$$

$y(t)= C\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n} n!^2}$ (seriye açarsak, y(0)=1 şartının sağlanabilmesi için C=1 olmalıdır)

limiti kontrol et!

$$y(t)= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{t}{2})^{2n}}{n!^2} = J_0(t)$$

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right\} = J_0(t) \Rightarrow \pounds\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \qquad (2.103)$$

Problem 2.36

$$\mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\times f_2(s)\}=\int_0^t F_1(t-\tau)F(\tau)d\tau$$

$$y''(t)+k^2y(t)=\phi(t)$$

diferansiyel denklemini sağlayan y(t) ifadesini bulunuz.

Çözüm

$$s^2y(s)-sy(0)-y'(0)+k^2y(s)=\varphi(s) \Leftarrow \mathcal{L}\{\phi(t)\}=\varphi(s)$$

$$y(s)=\frac{s}{s^2+k^2}y(0)-\frac{y'(0)}{s^2+k^2}+\varphi(s)\frac{1}{s^2+k^2}$$ EDT (Laplace da Carpım)

$$y(t)=y(0)\cos(kt)-\frac{1}{k}y'(0)\sin(kt)+\frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-\tau)\phi(\tau)d\tau$$

Problem 2.37 (Önemli)

$$y''+5y=te^{3t}\sin 2t$$

Yukarıda verilen diferansiyel denklemde Y(s) değerini bulunuz.

Çözüm

$$\mathcal{L}\{y''+5y\}=\mathcal{L}\{te^{3t}\sin 2t\}$$

$$\mathcal{L}\{y''\}+5\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{tf(t)\}$$

$$f(t)=e^{3t}\sin 2t \Rightarrow F(s)=\mathcal{L}\{e^{3t}\sin 2t\}=\frac{2}{(s-3)^2+4}$$

$$\mathcal{L}\{tf(t)\}=-dF(s)/ds$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+5Y(s)=-\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{(s-3)^2+4}\right)=\frac{4(s-3)}{(s^2-6s+13)^2}$$

$$Y(s)=\frac{(s^2-6s+13)^2y'(0)+s(s^2-6s+13)^2y(0)-12}{(s^2+5)(s^2-6s+13)^2}$$

Problem 2.38

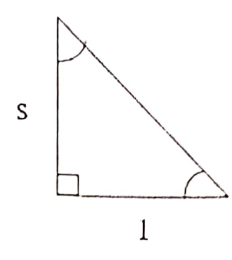
$$ty''(t)+2y'(t)+ty(t)=0$$

Diferansiyel denklemini $y(0^+)=1$, $y'(0)=0$, $y(\pi)=0$ ilk koşulları altında sağlayan y(t) ifadesini bulunuz.

Çözüm

$$-\frac{d}{ds}(s^2f(s)-sF(0)-F'(0))+2(sf(s)-F(0))+(-f'(s))=0$$

$$f'(s)=-\frac{1}{s^2+1};\quad df=\frac{-1}{s^2+1}ds;\quad \text{f=-arctan(s)+C}$$



Sayfa 109 (2.82)

$$\lim_{s\to\infty} f(s) = \lim_{s\to\infty}(-\arctan(s)+C) = 0 = -\arctan(\infty)+C = -\frac{\pi}{2}+C=0 \Rightarrow C=\frac{\pi}{2}$$

$$f(s)=\frac{\pi}{2}-\arctan(s)=\arctan(\frac{1}{s}) \;;$$

$$F(t)=\pounds^{-1}\left\{\arctan(\frac{1}{s})\right\}$$

hatırlatma: $(\arctan(u))'=\dfrac{u'}{1+u^2}$ ifadesi yukarıdaki ifade için kullanılırsa;

$$\pounds^{-1}\{f'(s)\}=\pounds^{-1}\left\{\frac{u'}{1+u^2}\right\}=\pounds^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{s^2}}{1+\frac{1}{s^2}}\right\}=\pounds^{-1}\left\{\frac{-1}{s^2+1}\right\}=-\sin(t)$$

1- Kolu al
2- Barşı? ...
3- t...

$$\pounds\{tF(t)\}=-\frac{df(s)}{ds} \Rightarrow \pounds^{-1}\left\{\frac{df(s)}{ds}\right\}=-tF(t)=-\sin(t)$$

$$F(t)=\frac{\sin(t)}{t}$$

elde edilir.

Problem 2.39

$\pounds^{-1}\left\{\ln\dfrac{s+1}{s-1}\right\}$ ifadesini bulunuz.

Çözüm

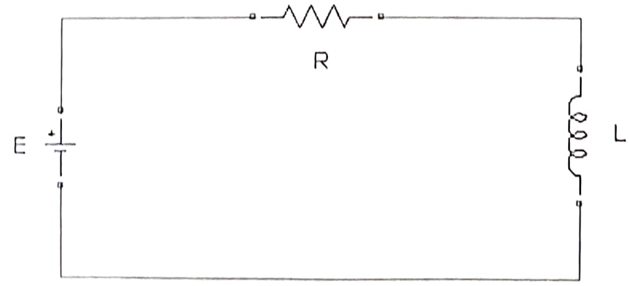
$$\pounds^{-1}\left\{\ln\frac{s+1}{s-1}\right\}=\pounds^{-1}\{\ln(s+1)-\ln(s-1)\}=\pounds^{-1}\{f(s)\}$$

(**Önemli bir yaklaşım:** Eğer parentez içinde **zor bir s fonksiyonu** var ise bu fonksiyonun türevi alınarak -dolayısı ile karşı tarafın da türevi alınmak zorundadır- F(t) bulunmaya çalışılır. Yukarıda $\ln\dfrac{s+1}{s-1}=f(s)$ olsun. Bunun türevini alırsak $f'(s)$ olur. Sağ tarafın da türevi alınmak zorundadır –eşitlik bozulmamalıdır-. Tabloda türev ifadesi yaklaşımı ile F(t) bulunur)

$$\pounds^{-1}\{f'(s)\}=\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}\right\}=e^{-t}-e^{t}$$

κ. 2.79 eşitliği⇒) $-tF(t)=e^{-t}-e^{t} \Rightarrow F(t)=\dfrac{e^{t}-e^{-t}}{t}$

oblem 2.40



Şekil 2.5

Şekil 2.5'te verilen elektrik devresinde devre akımına ilişkin genel çözümü bulunuz.

Trafo Büyük Bobin

Çözüm

Verilen devreye Kirchhoff gerilim yasası uygulanırsa;

$$E = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow i' + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}u(t)$$

elde edilir. Yukarıda verilen diferansiyel denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa;

$$\pounds\left\{i' + \frac{R}{L}i\right\} = \pounds\left\{\frac{E}{L}u(t)\right\}$$

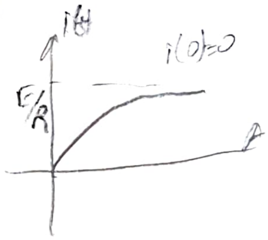
Bobin → içinden geçen akımı anı değişim yaparsa bobin ucundaki gerilim artar

$$\pounds\{i'(t)\} + \pounds\left\{\frac{R}{L}i(t)\right\} = \pounds\left\{\frac{E}{L}u(t)\right\} \Rightarrow sI(s) - i(0) + \frac{R}{L}I(s) = \frac{E}{sL}$$

$$I(s)[s + \frac{R}{L}] = \frac{E}{sL} + i(0) \Rightarrow I(s) = \frac{E}{sL[s+\frac{R}{L}]} + \frac{i(0)}{[s+\frac{R}{L}]} = \frac{A}{sL} + \frac{B}{[s+\frac{R}{L}]} + \frac{i(0)}{[s+\frac{R}{L}]};$$

$$A = \frac{E*L}{R}; \quad B = -E/R$$

$$I(s) = \frac{E}{sR} - \frac{E/R}{[s+\frac{R}{L}]} + \frac{i(0)}{[s+\frac{R}{L}]}$$

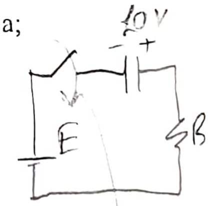


elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının ters Laplace dönüşümü alınırsa;

$$\pounds^{-1}\{I(s)\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{E}{sR}\right\} - \pounds^{-1}\left\{\frac{E/R}{[s+\frac{R}{L}]}\right\} + \pounds^{-1}\left\{\frac{i(0)}{[s+\frac{R}{L}]}\right\}$$

$$i(t) = \frac{E}{R}u(t) - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + i(0)e^{-\frac{R}{L}t}$$

Kapasite doluyken gerilimi bir anda boşaltılırsa akım oluşturur ve patlar.

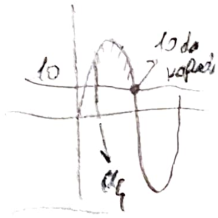


elde edilir.

2.2.5. Konvulüsyon (Katlama-convolution)

$$\pounds^{-1}\{f_1(s).f_2(s)\} = \int_0^t F_1(\tau)F_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t F_2(\tau)F_1(t-\tau)d\tau = F_1(t)\#F_2(t) \qquad (2.104)$$

Kısmi integrasyonda daha kolay olmasını sağlar.



Problem 2.41

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}\right\}$$ ifadesini konvulüsyon yaklaşımı yardımı ile bulunuz.

Elektronik Devre

Çözüm

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}\right\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\frac{1}{s-1}\right\} = t\#e^t = F_1(t)\#F_2(t)$$

(2.104) eşitliği kullanılarak; $dv = e^{-\tau}d\tau$; $v = -e^{-\tau}$; $u = \tau$; $\int udv = uv - \int vdu$

$i = C \cdot \dfrac{dU}{dt}$

$$\int_0^t (t-\tau)e^{\tau}d\tau = \int_0^t e^{t-\tau}\tau\, d\tau = e^t\int_0^t e^{-\tau}\tau\, d\tau = e^t\left[-\tau e^{-\tau} + \int_0^t e^{-\tau}\,d\tau\right]$$

$$= e^t\left[-\tau e^{-\tau}\Big|_0^t + \int_0^t e^{-\tau}\,d\tau\right] = e^t\left[-\tau e^{-\tau}\Big|_0^t - e^{-\tau}\Big|_0^t\right]$$

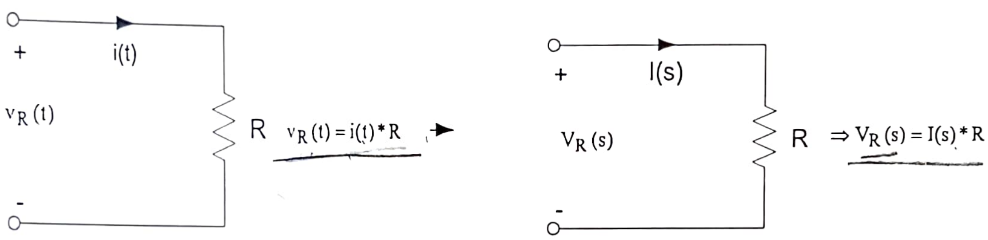
$$\int_0^t (t-\tau)e^{\tau}d\tau = e^t\left[-te^{-t} - e^{-t} + 1\right] = e^t - t - 1$$

veya

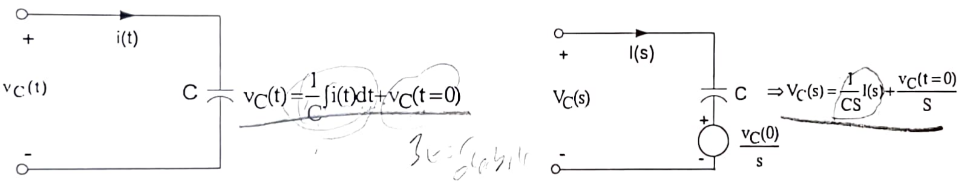
$$£^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}\right\} = £^{-1}\left\{\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-1} = -\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}\right\} = e^t - t - 1$$

elde edilir.

2.2.6. Elektrik devre elemanlarının s domeni modelleri (ilk koşullar göz önüne alınıyor)

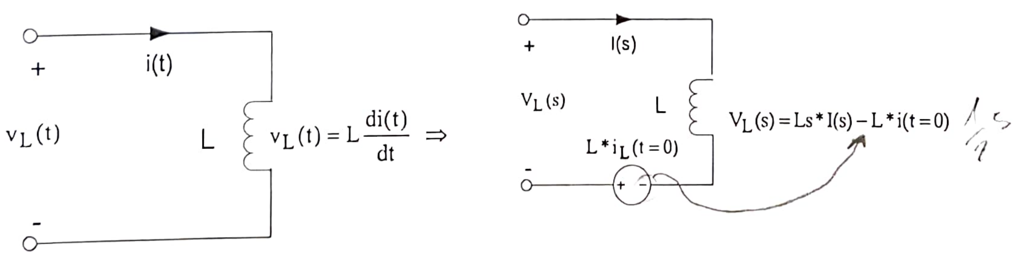


Şekil .2.7 Direnç (R) elemanının t domeni ve s domeni gösterimi



Not: Yukarıdaki kapasite devresinde gerilimin ilk koşulu t domenindeki (denklemde) modellenebilir ve s domeni devresinde paydasında s olan tanım bağıntısına sahip bir kaynak olarak modellenebilir.

Şekil 2.8. Kapasite (C) elemanının t domeni ve s domeni gösterimi

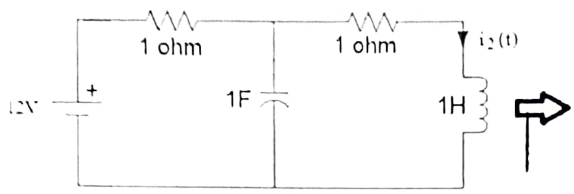


Not: Yukarıdaki bobin devresinde akımın ilk koşulu t domeninde (denklemde) modellenemez zira tanım bağıntısı gerilim için yazılmıştır. Ama s domeninde denklem içinde L*i(t=0) olarak yazılabilir ve s domeni devresinde doğru gerilim kaynağı olarak modellenebilir.

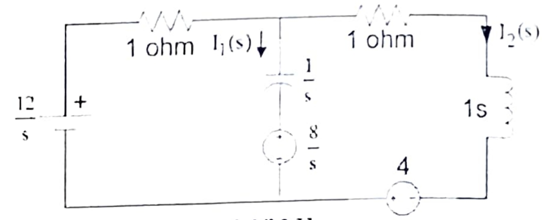
Şekil 2.9. Bobin (L) elemanının t domeni ve s domeni gösterimi

Problem 2.42

Şekil 2.10'da verilen devrede bobin üzerinden akan akımın denklemini bulunuz. $v_C(0) = 8V$, $i_L(0) = 4A$ alınız.



Şekil 2.10



Şekil 2.11

Çözüm

Şekil 2.1'de problemde verilen devrenin s domeni eşdeğeri gösterilmiştir. Çevre akımları yöntemi her iki çevreye de uygulanırsa;

A * X = B

[B] [I] = [V]

$$(1+\frac{1}{s})I_{ç1}(s) - \frac{1}{s}I_{ç2}(s) = \frac{12}{s} - \frac{8}{s} \qquad \text{(1.çevreden)}$$

$$\frac{1}{-s}I_{ç1}(s) + (1+s+\frac{1}{s})I_{ç2}(s) = 4 + \frac{8}{s} \qquad \text{(2.çevreden)}$$

V = I.R

elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerden $I_{ç1}(s)$ yok edilirse;

$$I_{ç2}(s) = \frac{4(s^2+3s+3)}{s(s^2+2s+2)}$$ → Heveser!

elde edilir. Basit kesirlere ayırma yaklaşımı ile;

$$\frac{I_2(s)}{4} = \frac{1.5}{s} - \frac{0.5s}{(s+1)^2+1} \Rightarrow i_2(t) = 6u(t) + 2\sqrt{2}e^{-t}\sin(t-45^o) \text{ Amper}$$

bulunur. (Yukarıdaki eşitlikte ikinci terimde kaydırma olabilmesi için payın da s+1 olması gerektiği unutulmamalıdır)

2.2.7. Konvulüsyon teoreminin integral denklemlerine uygulanması

Aşağıda verilen integral içeren denklemin;

$$y(t) = F(t) + \int_0^t G(t-\tau)y(\tau)d\tau \qquad (2.105)$$

her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$y(s) = f(s) + g(s)y(s)$$

$$y(s) = \frac{f(s)}{1-g(s)} \qquad (2.106)$$

elde edilir. (2.106) eşitliğinin her iki tarafının ters Laplace dönüşümü alınarak y(t) elde edilir.

Problem 2.43

$$y(t) = t^2 + \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)d\tau$$

integral denkleminde y(t) ifadesini konvulüsyon yardımı ile bulunuz.

Çözüm

Verilen ifadenin her iki tarafın Laplace dönüşümü alınır ve (2.104) eşitliği kullanılırsa;

$$\pounds\{y(t)\} = \pounds\{t^2\} + \pounds\left\{\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)d\tau\right\}$$

$$y(s) = \frac{2}{s^3} + y(s)\frac{1}{s^2+1} \Rightarrow y(s) = 2\left(\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^5}\right)$$

elde edilir. Elde edilen ifadenin her iki tarafının ters Laplace dönüşümü alınırsa;

$$y(t) = \frac{t^4}{2} + t^2$$

elde edilir.

Problem 2.44

Zor (Sır 20E)

$$\int_0^t (t-\tau)^{-0.5} y(\tau)d\tau = 1-t$$

ifadesini konvulüsyon yardımı ile bulunuz.

Çözüm

Verilen ifadenin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa;

$$\pounds\left\{\int_0^t (t-\tau)^{-0.5} y(\tau)d\tau\right\} = \pounds\{1-t\}$$ **not:** (2.71)'de $\pounds\{t^{-0.5}\} = \left(\frac{\pi}{s}\right)^{0.5}$ olarak verilmişti

$$\pounds\{t^{-0.5}\}y(s) = \pounds\{1\} - \pounds\{t\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}$$ **not:** $\frac{1}{s^{3/2}}$ için bak. (2.67) $\Rightarrow \pounds\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$

elde edilir. (2.67) eşitliği kullanılarak;

$$\pounds\{t^{-0.5}\} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{s^{-0.5+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \Rightarrow y(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{1}{s^{3/2}}\right)$$

elde edilir. Son ifadenin her iki tarafının ters Laplace dönüşümü alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$y(t) = \frac{1}{\pi} t^{-0.5} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} t^{0.5}$$

2.2.8. Periyodik fonksiyonların Laplace dönüşümleri

F(t) periyodik bir fonksiyon olsun. T periyod değerini göstermek üzere; (T+y=y periyodiklik şartı)

$$F(t+T)=F(t)$$

$$\pounds\{F(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt=\int_0^T e^{-st}F(t)dt+\int_T^\infty e^{-st}F(t)dt \qquad (2.107)$$

elde edilir. (2.107) eşitliğine y= t−T değişken dönüşümü uygulanırsa;

$$\int_T^\infty e^{-st}F(t)dt=\int_0^\infty e^{-s(T+y)}F(T+y)dy=e^{-sT}\int_0^\infty e^{-sy}F(y)dy=e^{-sT}\pounds\{F(t)\} \qquad (2.108)$$

elde edilir. (2.108) eşitliği (2.107) ifadesinde yerine konulursa;

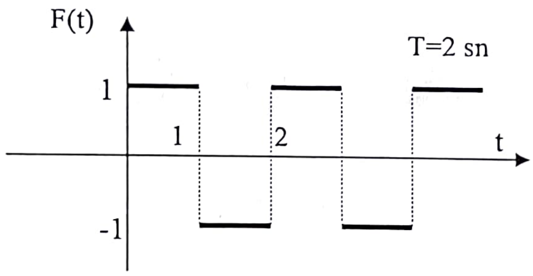
$$\pounds\{F(t)\}=f(s)=\int_0^T e^{-st}F(t)dt+e^{-sT}f(s)$$

AC&DC

$$\boxed{f(s)=\frac{\int_0^T e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-sT}}} \qquad (2.109)$$

elde edilir. Aşağıdaki problem incelenmelidir:

Problem 2.45



Şekil 2.12

Şekil 2.12'de görülen F(t) periyodik fonksiyonunun Laplace transformasyonunu bulunuz.

Çözüm

$$F(t)=\begin{cases} 0<t<1\,;\,F(t)=1 \\ 1<t<2\,;\,F(t)=-1 \end{cases} \quad ; \qquad F(t+2)=F(t)$$

$$\int_0^2 e^{-st}F(t)dt=\int_0^1 e^{-st}(1)dt+\int_1^2 e^{-st}(-1)dt=\left.\frac{e^{-sT}}{-s}\right|_0^1+\left.\frac{e^{-sT}}{-s}\right|_1^2=\frac{1}{s}\left[-e^{-s}+1+e^{-2s}-e^{-s}\right]$$

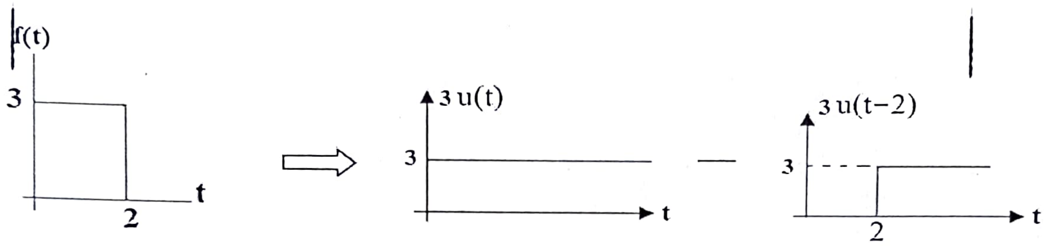
$$=\frac{1}{s}\left[1-e^{-s}\right]^2$$

Yukarıda elde edilen eşitlik (2.109) ifadesinde yerine konulursa;

$$f(s)=\frac{\int_0^T e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-sT}}=\frac{\int_0^2 e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-sT}}=\frac{(1-e^{-s})^2}{s(1-e^{-s2})}=\frac{(1-e^{-s})(1-e^{-s})}{s(1-e^{-s})(1+e^{-s})}=\frac{(1-e^{-s})}{s(1+e^{-s})}$$

elde edilir.

Problem 2.46



Yukarıda verilen f(t) işaretinin Laplace dönüşümünü bulunuz.

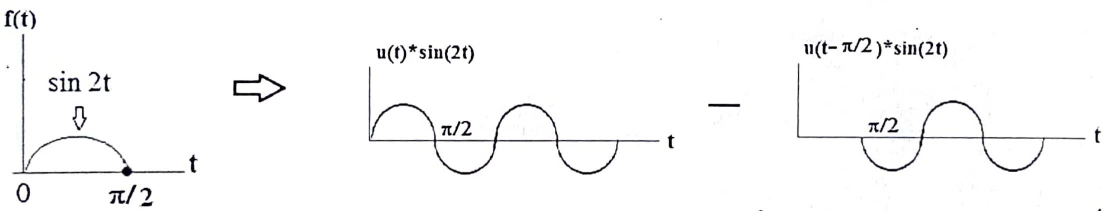
$$\mathcal{L}\{u(t-t_0)\}=\frac{e^{-st_0}}{s}$$

Çözüm

$f(t)=3u(t)-3u(t-2)$ (Yukarıda, sağ tarafta verilen iki şekile bakınız)

$$£\{f(t)\}=£\{3u(t)-3u(t-2)\}=3£\{u(t)\}-3£\{u(t-2)\}=\frac{3}{s}-\frac{3e^{-2s}}{s}=\frac{3}{s}(1-e^{-2s})$$

Problem 2.47



Yukarıda verilen f(t) fonksiyonunun F(s) değerini bulunuz.

$$\mathcal{L}\{F(t)u(t-\tau)\}=e^{-s\tau}\mathcal{L}\{F(t+\tau)\}$$

Çözüm

$$f(t)=\left[\overset{\to 1}{u(t-0)}-u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]\sin 2t=\sin 2t-u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin 2t$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{\sin 2t\}-\mathcal{L}\left\{u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin 2t\right\}=\frac{2}{s^2+4}-e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}\{\sin(2t+\pi)\}$$

$$=\frac{2}{s^2+4}+e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}\{\sin 2t\}=\frac{2}{s^2+4}+e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{2}{s^2+4}$$

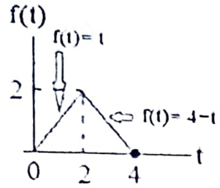
$$=\frac{2}{s^2+4}\left(1+e^{-\frac{\pi}{2}s}\right)$$

Not: $\sin(2t+\pi)=-\sin 2t$. Not: $£\{u(t-\tau)F(t)\}=e^{-s\tau}£\{F(t+\tau)\}$ olarak verilmişti. (KESME)

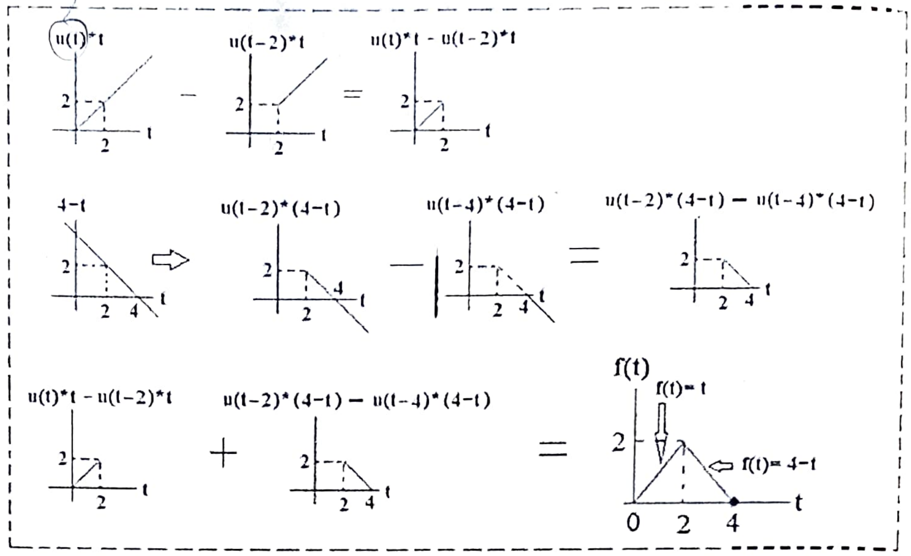
$$£\left\{u(t-\frac{\pi}{2})\sin(2t)\right\}=e^{-s\frac{\pi}{2}}£\{\sin 2(t+\frac{\pi}{2})\}=e^{-s\frac{\pi}{2}}£\{\sin(2t+\pi)\}$$

Problem 2.48

u(t).t ile çarpmazsa sonsuza gider



İSPAT



Yukarıda verilen f(t) fonksiyonunun F(s) değerini bulunuz.

Çözüm

$$f(t) = [u(t-0) - u(t-2)]t + [u(t-2) - u(t-4)](4-t)$$

$$f(t) = (-2t+4)u(t-2) + (4-t)u(t-4) + u(t)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{(-2t+4)u(t-2)\} + \mathcal{L}\{(4-t)u(t-4) + u(t)\ \}$$

Not: $\mathcal{L}\{u(t-\tau)F(t-\tau)\} = e^{-s\tau}\mathcal{L}\{\ F(t)\ \}$ olduğu hatırlanırsa; (ÖTELEME)

$$= -2\mathcal{L}\{u(t-2)(t-2)\} = -e^{-2s}\mathcal{L}\{\ t\ \} = -2\frac{e^{-2s}}{s^2}$$

$$= -\mathcal{L}\{u(t-4)(t-4)\} = -e^{-4s}\mathcal{L}\{\ t\ \} = -\frac{e^{-4s}}{s^2}$$

$$= -\frac{1}{s^2}(-1 + 2e^{-2s} + e^{-4s})$$

Problem 2.49

$$F(t) = \begin{cases} t^4 & 0 < t < 5 \\ t^4 + 3\sin(\frac{t}{10} - \frac{1}{2}) & t \geq 5 \end{cases}$$

fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm

$$F(t)=\begin{cases} t^4 & 0\leq t<5 \\ t^4+3\sin(\frac{t}{10}-\frac{1}{2}) & t\geq 5 \end{cases}$$

$$F(t)=[u(t-0)-u(t-5)]t^4+u(t-5)\left[t^4+3\sin(\frac{t}{10}-\frac{1}{2})\right]$$

$$F(t)=t^4u(t-0)+u(t-5)\left[-t^4+t^4+3\sin(\frac{t}{10}-\frac{1}{2})\right]$$

$$F(t)=t^4u(t)+3u(t-5)\sin(\frac{t}{10}-\frac{1}{2})$$

$$F(t)=t^4u(t)+3u(t-5)\sin(\frac{1}{10}(t-5))$$

$$f(s)=\frac{4!}{s^5}+\frac{3(\frac{1}{10})e^{-5s}}{s^2+(\frac{1}{10})^2}$$

$$=\frac{24}{s^5}+\frac{\frac{3}{10}e^{-5s}}{s^2+\frac{1}{100}}$$

VİZE

ATLA

2.2.9. Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin Laplace dönüşümleri ile çözümü

F(x,t) ifadesi, F fonksiyonunun hem x hem de t'ye bağlı olduğunu göstersin. t>0 şartı altında F(x,t) ifadesinin t'ye göre Laplace dönüşümü;

$$£_t\{F(x,t)\}=\int_0^\infty e^{-st}F(x,t)dt=f(x,s) \tag{2.110}$$

ifadesi ile bulunur. F(x,t) ifadesinin t'ye göre türevinin t'ye göre Laplace dönüşümünü ise;

$$£_t\left\{\frac{\partial F(x,t)}{\partial t}\right\}=sf(x,s)-F(x,0) \tag{2.111}$$

ifadesi kullanılarak bulunur. F(x,t) ifadesinin x'e göre türevinin t'ye göre Laplace dönüşümü ise;

$$£_t\left\{\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}\right\}=\frac{\partial}{\partial x}f(x,s) \tag{2.112}$$

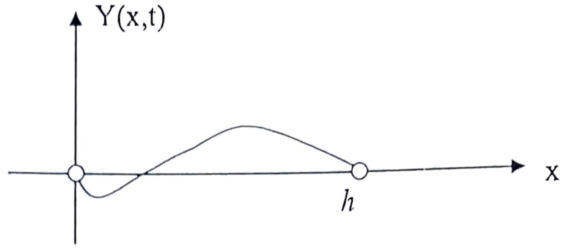
ifadesi ile bulunur. Aşağıdaki problem incelenmelidir.

Problem 2.50

Bir yaya ilişkin yatay hareketin titreşim **genliğine** ilişkin denklem;

$$\frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.113}$$

olarak verilmektedir.



Şekil 2.13

Verilen denkleme ilişkin ilk koşul şartları (şekil 2.13 kullanılarak);

$Y(0,t) = Y(h,t) = 0$ (x=0 ve x=h değerlerinde titreşim yoktur)

$\dfrac{\partial Y(x,0)}{\partial t} = 0$ (t=0 anında tel çekilmediği için hızı yoktur)

$Y(x,0) = F(x) = c\sin\dfrac{\pi\lambda}{h}$ (t=0 anında telin yalnızca uzunluğu vardır)

olarak belirlenmektedir. (2.111) ve (2.112) eşitlikleri kullanılarak (2.13) ifadesinin Laplace dönüşümü alınırsa;

$$s^2 y(x,s) - sc\sin\frac{\pi x}{h} = a^2\frac{d^2y(x,s)}{dx^2}$$

$$\frac{d^2y(x,s)}{dx^2} - \frac{s^2}{a^2}y(x,s) = -\frac{sc\sin}{a^2}\frac{\pi x}{h} \tag{2.114}$$

elde edilir. (2.14) ile verilen diferansiyel denkleme ilişkin karakteristik denklem ve homojen çözüm;

$$\alpha^2 - \frac{s^2}{a^2} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{s}{a};\ \alpha_2 = \frac{s}{a};\ \Rightarrow\ y_h(x,s) = C_1e^{-\frac{s}{a}x} + C_2e^{\frac{s}{a}x}$$

olarak elde edilir. (2.14) ile verilen dif.denklemde sağ tarafa ilişkin özel çözüm tahmini;

$$y_p(x,s) = A\sin\frac{\pi x}{h} + B\cos\frac{\pi x}{h} \tag{2.115}$$

olduğuna göre (2.115) ifadesinin 2. türevi alınarak (2.14) ifadesinde yerine konulur ve sağ tarafa eşitlenirse;

$$A = \frac{sc}{a^2\dfrac{\pi^2}{h^2} + s^2};\quad B = 0$$

değerleri bulunur. A ve B katsayıları (2.15) eşitliğinde yerine konulur ve genel çözüm ifadesi yazılırsa;

$$y_g(x,s) = C_1e^{-\frac{s}{a}x} + C_2e^{\frac{s}{a}x} + \frac{sc\sin(\frac{x\pi}{h})}{a^2\dfrac{\pi^2}{h^2} + s^2} \tag{2.116}$$

elde edilir. (2.116) ifadesindeki sabitleri bulmak için ilk koşullar kullanılırsa;

$y(0,s)=y(h,s)=0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Leftarrow y(0,s)=0$

$y(h,s)=0 \quad \Rightarrow C_1 e^{-\frac{s}{a}h} + C_2 e^{\frac{s}{a}h} = 0 \; ; \; C_1 = C_2 = 0$

$$y(x,s) = c\sin\frac{\pi x}{h}\frac{s}{a^2\frac{\pi^2}{h^2}+s^2}$$

elde edilir.

2.2.10. Basamak fonksiyonunun Laplace dönüşümü

Şekil 2.14'de basamak fonksiyonu gösterilmiştir. Şekil 2.15'de ise;

$F(t) = [1+\frac{t}{h}] = 1+[\frac{t}{h}] \quad \Leftarrow$ h: basamak genişliği

fonksiyonu verilmiştir.

$$Y(t) = 1+[\frac{t}{h}] \qquad (2.117)$$

Y(t) fonksiyonu h kadar ötelenirse;

$$Y(t-h) = 1+[\frac{t-h}{h}] = 1+[\frac{t}{h}]-[\frac{h}{h}] = [\frac{t}{h}] \qquad (2.118)$$

elde edilir. (2.117) eşitliği (2.118) eşitliğinde yerine konulursa;

$$\begin{cases} Y(t) = Y(t-h)+u(t) & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \qquad (2.119)$$

elde edilir. Laplace transformasyonunda kullanılan öteleme ifadesi;

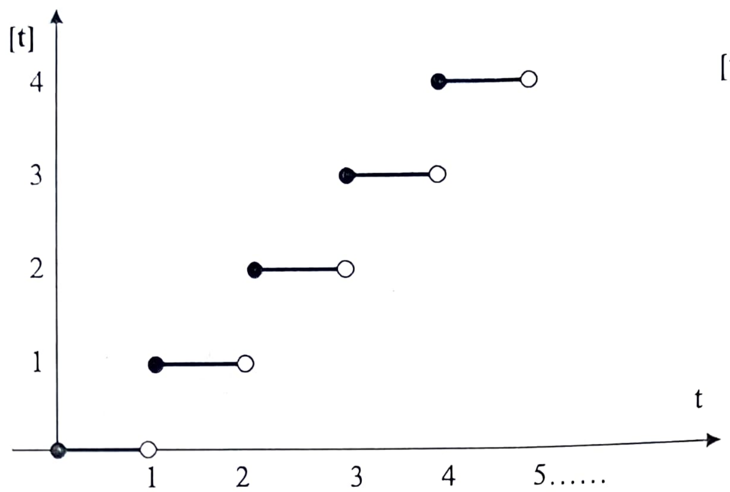
$$e^{-hs}f(s) = \begin{cases} 0 & ; \; 0<t<h \\ F(t-h) & ; \; t>h \end{cases} \quad \Leftarrow \textbf{önemli!}$$

olarak verilmişti. Öteleme ifadesi (2.119) eşitliğinde yerine konulursa;

$$y(s) = e^{-hs}y(s)+\frac{1}{s}$$

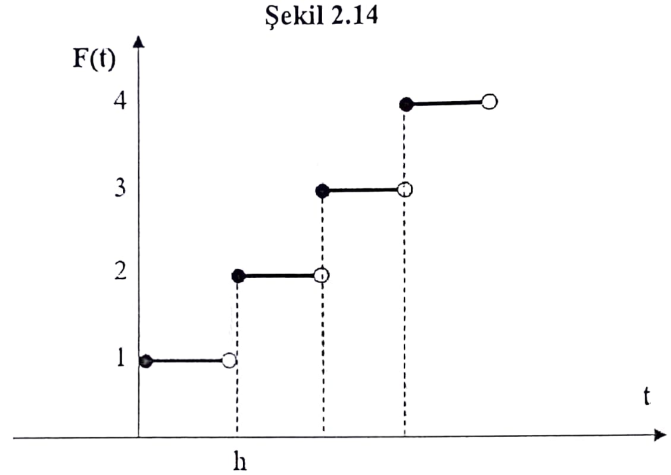
$$\boxed{y(s) = \frac{1}{s(1-e^{-hs})} = £\left\{\left[1+\frac{t}{h}\right]\right\}} \Leftarrow \text{ bak (2.117)} \qquad (2.120)$$

elde edilir.



$$[t]=\begin{cases}0 & ; \ 0\le t<1\\ 1 & ; \ 1\le t<2\\ 2 & ; \ 2\le t<3\\ \vdots & \end{cases}$$

Şekil 2.14



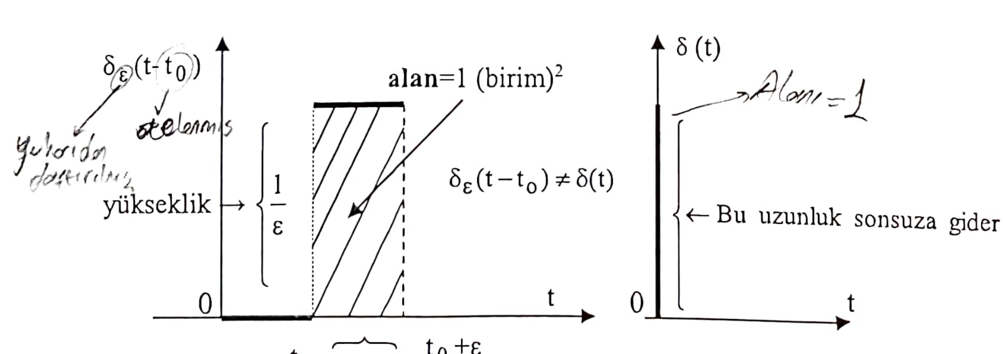
Şekil 2.15

2.2.11. Impulse (dirac-darbe) fonksiyonunun Laplace dönüşümü

Hayali fonksiyon

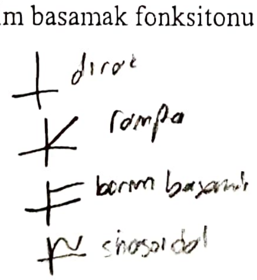
$$\delta_{\varepsilon}(t-t_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon} & t_0<t<t_0+\varepsilon\\ 0 & t<t_0 \ ; \ \ t>t_0+\varepsilon\end{cases} \tag{2.121}$$

(2.121) ifadesi ile impulse fonksiyonunu verilmiş, şekil 16 ile de bu fonksiyon çizdirilmiştir.



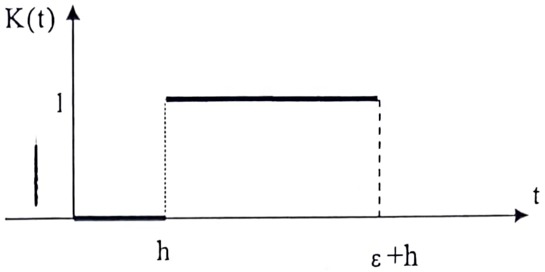
Şekil 2.16

Dirac fonksiyonu,birim basamak fonksitonu cinsinden de yazılabilir:



$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{u(t) - u(t-\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 1/\varepsilon \text{ özellik} \qquad (2.122)$$

Şekil 2.16'da ε değeri sıfıra yaklaştıkca **alan** sabit olduğundan dolayı **yükseklik** sonsuza yaklaşır.



$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$

$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

Şekil 2.17

Şekil 2.17'den

$$K(t-h) = \begin{cases} 0 & 0 < t < h \\ 1 & t > h \end{cases} \qquad (2.123)$$

yazılabilir. (2.122) ve (2.121) eşitlikleri birlikte kullanılırsa;

$$\delta_\varepsilon(t-h) = \frac{K(t-h) - K(t-h-\varepsilon)}{\varepsilon} \qquad (2.124)$$

elde edilir. (2.123) ifadesinin her iki tarafının Laplace transformasyonu alınırsa;

$$\pounds\{\delta_\varepsilon(t-h)\} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{s}e^{-hs} - \frac{1}{s}e^{-(h+\varepsilon)s}\right) = \frac{e^{-hs}(1-e^{-\varepsilon s})}{\varepsilon s} \qquad (2.125)$$

elde edilir. $\delta(t-h) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \delta_\varepsilon(t-h)$ olarak tanımlanır.

$\delta_\varepsilon(t-t_0)$ ifadesi $t \neq t_0$ için sıfır olan, t=to için ise sonsuz olan bir fonksiyondur. Bu nedenle $\delta_\varepsilon(t-t_0)$ fonksiyonu $t = t_0$ dışındaki değerlerde sıfır olan bir fonksiyondur.

Dirac fonksiyonunun laplace dönüşümü:

$$\delta(t-t_0) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \delta_\varepsilon(t-t_0)$$

ifadesinin her iki tarafının laplace dönüşümü alınırsa;

$$\pounds\{\delta(t-t_0)\} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \pounds\{\delta_\varepsilon(t-t_0)\} \qquad (2.126)$$

elde edilir. (2.125) eşitliğinin limitini bulmak için (2.125) eşitliğine L'hospital kuralı uygulanırsa, ε sıfıra giderken limit sıfıra gider dolayısı ile ε' a göre türev hesaplanabilir:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \pounds\{\delta_\varepsilon(t-t_0)\} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{e^{-t_0 s}(1-e^{-\varepsilon s})}{\varepsilon s}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} s\frac{e^{-t_0 s}(e^{-\varepsilon s})}{s} = e^{-st_0} \qquad (2.127)$$

$u(t) \to 1/s$

$\delta(t) \to 1$

(2.127) ifadesi incelendiğinde ;

otomatik kontrol ve EDT

$\boxed{\pounds\{\delta(t-t_0)\} = 1 * e^{-t_0 s}}$ (ör: $\pounds\{\delta(t-3)\} = 1 * e^{-3s}$ olur) (2.128)

ifadesinin $\delta(t)$ dirac fonksiyonunun t_0 kadar kaydırılması sonucu elde edilen ifadenin laplace transformu olduğu anlaşılmaktadır. Eğer $t_0 = 0$ alınırsa;

$\boxed{\pounds\{\delta(t)\} = 1}$ (ör: $\pounds^{-1}\{1\} = \delta(t)$) (2.129)

elde edilir. Dirac fonksiyonuna konvulüsyon teoremi ile yaklaşılırsa;

$\int_0^{\infty} f(\tau)\,\delta(\tau - t)\,d\tau = f(t) \Rightarrow f * \delta = f$ (Konvolüsyon işleminde dirac birim değer etkisi yapmaktadır)

(ör1: $F(s) = \dfrac{s-a}{s+b} = 1 - \dfrac{a+b}{s+b} \Rightarrow f(t) = \delta(t) - (a+b) * e^{-bt}$

(ör2: $F(s) = e^{-3s} - \dfrac{a+b}{s+b} \Rightarrow f(t) = \delta(t-3) - (a+b) * e^{-bt}$

Problem 2.51 (pay ve paydanın ikinci dereceden olduğu durumda)

$$y(s) = \frac{9s^2}{s^2 + 4s + 13} \Rightarrow Y(t) = ?$$

Çözüm

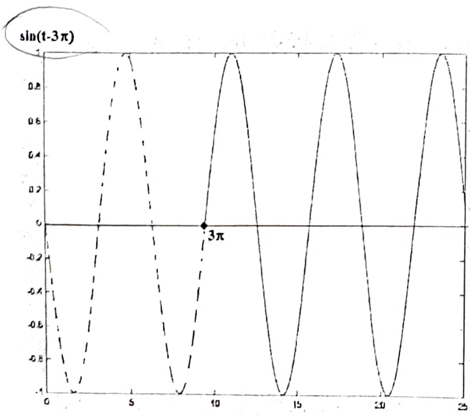
$$y(s) = \frac{9s^2}{(s+2)^2 + 3^2} = A + \frac{Bs + C}{(s+2)^2 + 3^2} = 9 - \frac{36s}{(s+2)^2 + 3^2} - \frac{117}{(s+2)^2 + 3^2}$$

$$y(s) = 9 - \frac{36(s+2) - 36 * 2}{(s+2)^2 + 3^2} - \frac{117}{(s+2)^2 + 3^2}$$

$$y(s) = 9 - \frac{36(s+2)}{(s+2)^2 + 3^2} - \frac{45}{(s+2)^2 + 3^2} = 9 - \frac{36(s+2)}{(s+2)^2 + 3^2} - \frac{45}{3}\frac{3}{(s+2)^2 + 3^2}$$

$$Y(t) = 9 * \text{dirac}(t) - 36 * e^{-2t} * \cos(3t) - 15 * e^{-2t} \sin(3t)$$

Problem 2.52



$$f(t)=\begin{cases}0, & t\langle 3\pi\\ \sin t, & t\geq 3\pi\end{cases}$$

Yukarıda verilen f(t) fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm

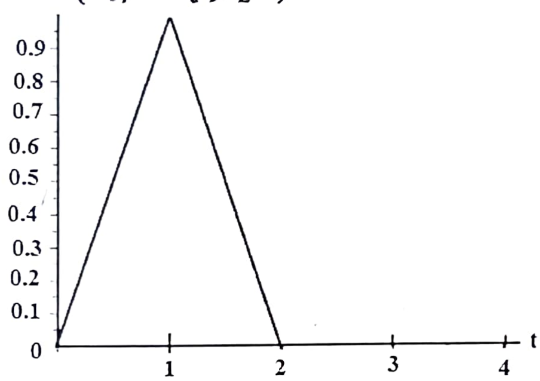
$$f(t)=u(t-3\pi)\sin(t-3\pi)=-u(t-3\pi)\sin t$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{u(t-3\pi)\sin(t-3\pi)\}=e^{-3\pi s}\mathcal{L}\{\sin t\}=\frac{e^{-3\pi s}}{s^2+1}$$

Problem 2.53

0 , 0>t

$$f(t)=\begin{Bmatrix}t, & t\leq 1\\ 2-t, & 1<t\leq 2\\ 0, & t>2\end{Bmatrix}$$



Yukarıda verilen f(t) fonksiyonunun F(s) değerini bulunuz.

Çözüm

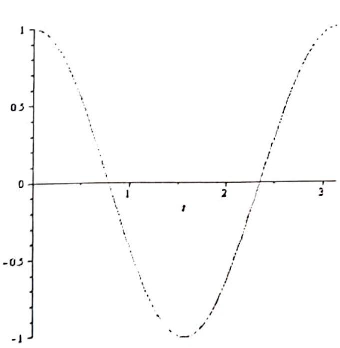
$$f(t)=[u(t-0)-u(t-1)]t+[u(t-1)-u(t-2)](2-t)$$

Devamını yap....

Problem 2.54

0 t<0

$$f(t)=\begin{Bmatrix}\cos 2t, & t\leq\pi\\ 0, & t>\pi\end{Bmatrix}$$



Yukarıda verilen f(t) fonksiyonuna ilişkin F(s) değerini bulunuz.

Çözüm

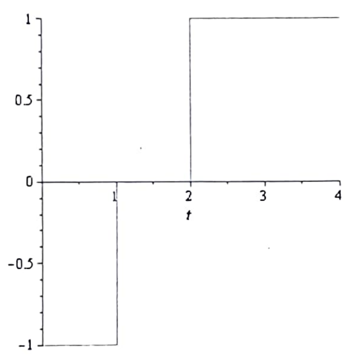
$$f(t) = [u(t-0) - u(t-\pi)]\cos 2t = \cos 2t - u(t-\pi)\cos 2t$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{\cos 2t - u(t-\pi)\cos 2t\} = \mathcal{L}\{\cos 2t\} - \mathcal{L}\{u(t-\pi)\cos 2t\} \\
&= \frac{s}{s^2+4} - e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\cos 2(t+\pi)\} \\
&= \frac{s}{s^2+4} - e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\cos 2t\} \\
&= \frac{s}{s^2+4} - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+4} \\
&= \frac{s}{s^2+4}(1-e^{-\pi s})
\end{aligned}$$

Problem 2.55

$0 \quad t<0$

$$f(t) = \begin{cases} -1, & t<1 \\ 0, & 1 \le t \le 2 \\ 1, & t>2 \end{cases}$$



Yukarıda verilen f(t) fonksiyonuna ilişkin F(s) değerini bulunuz.

Çözüm

$$f(t) = [u(t-0) - u(t-1)](-1) + u(t-2)(1)$$

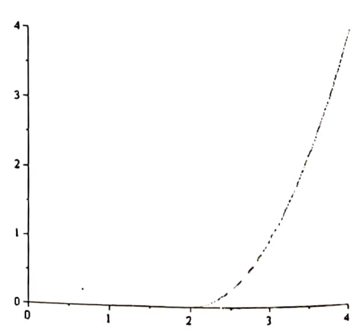
$$f(t) = u(t-1) + u(t-2) - 1$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{u(t-1) + u(t-2) - 1\}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{L}\{u(t-1)\} + \mathcal{L}\{u(t-2)\} + \mathcal{L}\{-1\} \\
&= \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{1}{s} \\
&= \frac{1}{s}(e^{-2s} + e^{-s} - 1)
\end{aligned}$$

Problem 2.56

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t<2 \\ (t-2)^2, & t \ge 2 \end{cases}$$



Yanda verilen f(t) fonksiyonuna ilişkin F(s) değerini bulunuz.

Çözüm

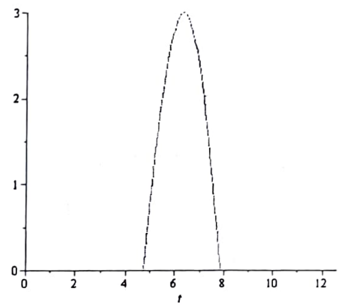
$$f(t) = u(t-2)(t-2)^2$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{u(t-2)(t-2)^2\} = e^{-2s}\mathcal{L}\{t^2\}$$

$$= e^{-2s}\frac{2}{s^3} = \frac{2e^{-2s}}{s^3}$$

Problem 2.57

$$f(t) = \begin{Bmatrix} 0, & t < 3\pi/2 \\ 3\cos t, & 3\pi/2 \le t \le 5\pi/2 \\ 0, & t > 5\pi/2 \end{Bmatrix}$$



Yanda verilen f(t) fonksiyonuna ilişkin F(s) değerini bulunuz.

Çözüm

$$f(t) = \left[u\left(t-\frac{3\pi}{2}\right) - u\left(t-\frac{5\pi}{2}\right)\right](3\cos t)$$

$$f(t) = 3u\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)\cos t - 3\,u\left(t-\frac{5\pi}{2}\right)\cos t$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{3u\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)\cos t - 3\,u\left(t-\frac{5\pi}{2}\right)\cos t\right\}$$

$$= 3\mathcal{L}\left\{u\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)\cos t\right\} - 3\mathcal{L}\{u\left(t-\frac{5\pi}{2}\right)\cos t\}$$

$$= 3e^{-\frac{3\pi}{2}s}\mathcal{L}\left\{\cos\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)\right\} - 3e^{-\frac{5\pi}{2}s}\mathcal{L}\{\cos\left(t+\frac{5\pi}{2}\right)\}$$

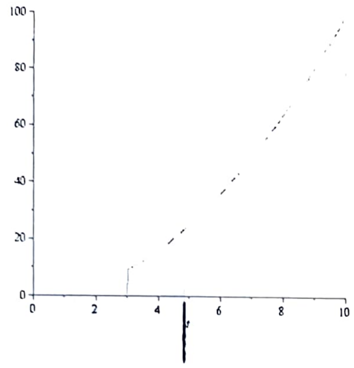
$$= 3e^{-\frac{3\pi}{2}s}\mathcal{L}\left\{\cos\frac{1}{2}t\right\} - 3e^{-\frac{5\pi}{2}s}\mathcal{L}\{-\cos\frac{1}{2}t\}$$

$$= 3\mathcal{L}\left\{\cos\frac{1}{2}t\right\}\left(e^{-\frac{3\pi}{2}s} + e^{-\frac{5\pi}{2}s}\right)$$

$$= \frac{3s}{s^2+\frac{1}{4}}\left(e^{-\frac{3\pi}{2}s} + e^{-\frac{5\pi}{2}s}\right) = \frac{12s}{4s^2+1}\left(e^{-\frac{3\pi}{2}s} + e^{-\frac{5\pi}{2}s}\right)$$

Problem 2.58

$$f(t) = \begin{Bmatrix} 0, & t < 3 \\ t^2, & t \ge 3 \end{Bmatrix}$$



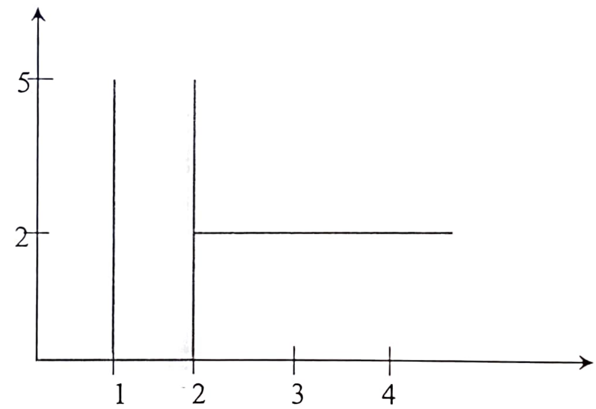
Yukarıda verilen f(t) fonksiyonuna ilişkin F(s) değerini bulunuz.

Çözüm

$$f(t) = u(t-3)t^2$$
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{u(t-3)t^2\} = e^{-3s}\mathcal{L}\{(t+3)^2\} = e^{-3s}\mathcal{L}\{t^2+6t+9\}$$
$$= e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^2}+\frac{9}{s}\right) = \frac{e^{-3s}}{s^3}(9s^2+6s+2)$$

Problem 2.59

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t<1 \\ 5, & t=1 \\ 0, & 1<t<2 \\ 5, & t=2 \\ 2, & t>2 \end{cases}$$



Yukarıda verilen f(t) fonksiyonuna ilişkin F(s) değerini bulunuz.

Çözüm

$$f(t) = 5\delta(t-1) + 5\delta(t-2) + 2u(t-2)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{5\delta(t-1) + 5\delta(t-2) + 2u(t-2)\}$$
$$= 5\mathcal{L}\{\delta(t-1)\} + 5\mathcal{L}\{\delta(t-2)\} + 2\mathcal{L}\{u(t-2)\}$$
$$= 5e^{-s} + 5e^{-2s} + \frac{2e^{-2s}}{s}$$
$$= 5e^{-s} + \left(5+\frac{2}{s}\right)e^{-2s} \qquad = 5e^{-s} + \frac{5s+2}{s}e^{-2s}$$

Bazı kesirlerin basit kesirlere ayrılmış halleri

$\frac{1}{2x+6}$	$\frac{A}{2x+6}$
$\frac{1}{x^2+6}$	$\frac{Ax+B}{x^2+6}$
$\frac{1}{x^2+6x+4}$	$\frac{Ax+B}{x^2+6x+4}$
$\frac{1}{x^3+6}$	$\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+6}$
$\frac{1}{x^3}$	$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}$
$\frac{1}{(x-3)^2}$	$\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x-3)^2}$
$\frac{1}{(x^2+3)^2}$	$\frac{Ax+B}{(x^2+3)}+\frac{Cx+D}{(x^2+3)^2}$

Bazı Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri

F(t)	**f(s)**	**F(t)**	**f(s)**
$u(t)$	$\frac{1}{s}$ (s>0)	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$ $(s>\lvert a\rvert)$
t	$\frac{1}{s^2}$ (s>0)	$\frac{1}{a-b}(ae^{at}-be^{bt})$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ (s>0, n tamsayı)	$\delta(t)$	**1**
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ (s>a)	$\delta(t-b)$	e^{-bs}
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$ (s>0)	$e^{bt/a}f(\frac{t}{a})$	$aF(as-b)$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$ (s>0)	$f(\frac{t}{a})$	$aF(as)$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$ $(s>\lvert a\rvert)$	$\frac{1}{a-b}(e^{at}-e^{bt})$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
$t\sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{1}{2a^2}(\sin at - at\cos at)$	$\frac{a}{(s^2+a^2)^2}$		

$$\frac{dy_h}{y_h}=-(\frac{2}{s}-s)ds \Rightarrow \ln y_h=-2\ln s+\frac{s^2}{2} \Rightarrow y_h-\frac{1}{s^2}+0.5s^2=e^{0.5s^2} \Rightarrow y_h=\frac{1}{s^2}+e^{0.5s^2}$$

FBGA
DSP
MIKRO
DC BARA

BÖLÜM 3

3.1. Diferansiyel denklemlerin serilerle çözümü

Lineer sağ taraf sıfır dif denk

Değişken katsayılı

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \qquad (3.1)$$

Her dif denklem seri ile çözülemeyebilir

tipinde değişken katsayılı bir diferansiyel denklem;

$$y'' + \frac{P_1(x)}{P_0(x)}y' + \frac{P_2(x)}{P_0(x)}y = 0 \qquad (3.2)$$

$$y'' + \frac{R_1(x)}{(x-a)}y' + \frac{R_2(x)}{(x-a)^2}y = 0 \qquad (3.3)$$

biçiminde yazılabiliyor ise ve hem $R_1(x)$ hem de $R_2(x)$'in x=a civarında Taylor açılımları var ise

$$x=a \qquad (3.4)$$

noktası **düzgün tekil** bir noktadır ve bu nokta civarında (3.1) ile verilen diferansiyel denklemin

$$\boxed{y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m}} \qquad (3.5)$$

denklem 2. mertebeden fakat cevap sonsuza gidiyor.

Sonu sabit katsayılı ise $m=0$ dır.

seri biçiminde çözümü bulunabilir. x=a değeri;

$$P_0(x=a) = 0 \qquad (3.6)$$

denkleminden elde edilir.

Problem 3.1

$$(1+x)y'' + 2xy' - 3y = 0$$

$$y'' + \frac{\overbrace{2x}^{R_1(x)}y'}{1+x} - \frac{\overbrace{3y(1+x)}^{R_2(x)}}{(1+x)^2} \qquad x=-1$$

denkleminde tekil nokta neresidir? Bu noktanın düzgün bir tekil nokta olup olmadığını araştırınız.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklemde (3.6) eşitliğinden,

$$P_0(x) = 1 + x = 0 \Rightarrow x = -1 \quad \text{(tekil nokta)}$$

elde edilir. Verilen diferansiyel denklem (3.3) formunda yazılırsa;

$$y'' + \frac{2x}{(1+x)}y' + \frac{-3(1+x)y}{(1+x)^2} = 0 \qquad (3.7)$$

elde edilir. (3.7) eşitliğinden,

$$R_1(x) = 2x = 2(x+1) - 2$$
$$R_2(x) = -3(1+x)$$

bulunur. Bu sonuçlardan $R_1(x)$ ve $R_2(x)$ 'in $x=-1$ civarında Taylor serisine açılabileceği görülmektedir. Bu nedenle $x=-1$ noktası düzgün bir tekil noktadır.

Problem 3.2

$$x^3y'' + x^2y' + y = 0$$

denkleminde tekil nokta neresidir? Bu noktanın düzgün bir tekil nokta olup olmadığını araştırınız.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklemde (3.6) eşitliğinden,

$$P_0(x) = x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{(tekil nokta)}$$

elde edilir. Verilen diferansiyel denklem (3.3) formunda yazılırsa;

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1/x}{x^2}y = 0 \qquad (3.8)$$

elde edilir. (3.8) eşitliğinden,

$$R_1(x) = 1$$
$$R_2(x) = 1/x \rightarrow \text{Tanımsız}$$

bulunur. $R_2(x)$ fonksiyonu, x=0 civarında Taylor serisine açılamadığı için (x=0 için $R_2(x)$ tanımsızdır) x=0 noktası **düzgün tekil** bir nokta **değildir**.

Problem 3.2

$y'' + y = 0$ m=0 (sabit katsayılı)

Yukarıda verilen diferansiyel denklem düzgün tekil noktaya sahip ise bu diferansiyel denklemi sağlayacak seri çözümü bulunuz.

Çözüm

Verilen denklemde katsayılar x'e bağlı olmadığından (m=0 alınabilir) verilen diferansiyel denklemin (3.5) ile verilen seri şeklinde bir çözümü vardır.

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k ; \qquad y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} ; \qquad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \qquad \Leftarrow \text{(m=0)}$$

Yukarıda verilen eşitlikler yardımı ile problemde verilen diferansiyel denklem yeniden yazılırsa;

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0 \qquad (3.9)$$

elde edilir. (3.9) eşitliğinde iki farklı seri toplamı bulunmaktadır. Bu iki toplamda hesaplamanın basitleşebilmesi için x^k 'lı ifade x^{k-2} 'li ifade cinsinden yazılmalıdır (**büyük üslü ifade daima küçük üslü ifade cinsinden yazılmalıdır**). Bunun için ise;

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}} \qquad (3.10)$$

veya

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k} \qquad (3.11)$$

genel

eşitliklerinin bilinmesi gerekmektedir. (3.9) eşitliğinde x^k 'lı ifade (3.10) eşitliği yardımı ile x^{k-2} 'li ifade cinsinden yazılırsa;

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k-2} \qquad (3.12)$$

elde edilir. (3.9) eşitliğinde yer alan $\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}$ terimi (3.11) formunda yazılırsa (amaç (3.12) eşitliğine benzetmektir);

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = 0*(-1)*a_0 x^{-2} + 1*0*a_1*x^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} \qquad (3.13)$$

elde edilir. (3.12) ve (3.13) eşitlikleri (3.9) eşitliğindeki yerlerine konulursa;

$$\boxed{\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k-2} + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = 0} \longrightarrow \text{3.9 u bu hale getirdik} \qquad (3.14)$$

elde edilir. (3.14) eşitliği düzenlenirse;

$$\sum_{k=2}^{\infty} (a_{k-2} + k(k-1)a_k)\, x^{k-2} = 0 \qquad (3.15)$$

elde edilir. (3.15) eşitliğinde yer alan;

$$a_{k-2} + k(k-1)a_k \qquad (3.16)$$

ifadesine **indirgeme bağıntısı** adı verilir. (3.15) eşitliğinin tüm x değerleri için sağlanabilmesi için indirgeme bağıntısının sıfıra eşit olması gerekir:

$$a_{k-2} + k(k-1)a_k = 0 \qquad (3.17)$$

(3.17) eşitliğinden;

$$\boxed{a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k-1)}} \; ; \quad (k=2,3,4,\ldots..) \qquad (3.18)$$

elde edilir. (3.18) eşitliği k değerleri için ayrı ayrı yazılırsa;

Varlık yoklu
bide bu

İki sabit

$$a_2=-\frac{a_0}{2};\quad a_3=-\frac{a_1}{3*2};\quad a_4=-\frac{a_2}{4*3}=\frac{a_0}{4*3*2}=\frac{a_0}{4!};\quad a_5=-\frac{a_3}{5*4}=\frac{a_1}{5!};\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{2n}=(-1)^n\frac{a_0}{2n!};\quad a_{2n+1}=(-1)^n\frac{a_1}{(2n+1)!}\qquad(3.19)$$

elde edilir. (3.19) eşitlikleri (3.5) eşitliğinde yerine konulur ise;

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots..+a_{2n+1}x^{2n+1}+\ldots\ldots\ldots.$$

$$y=a_0+a_1x-\frac{a_0}{2!}x^2-\frac{a_1}{3!}x^3+\frac{a_0}{4!}x^4+\ldots..$$

$$y=a_0(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots)+a_1(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots..)$$

$$\boxed{y=a_0\cos(x)+a_1\sin(x)}$$

elde edilir.

Problem 3.3

$$3xy''+2y'+y=0$$

Yukarıda verilen diferansiyel denklem <u>düzgün tekil noktaya</u> sahip ise bu diferansiyel denklemi sağlayacak seri çözümü bulunuz.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklem (3.3) formunda yazılırsa;

$$y''+\frac{2/3}{x}y'+\frac{x/3}{x^2}y=0$$

elde edilir. $R_1(x)$ ve $R_2(x)$ 'in x=0 civarında Taylor açılımları bulunduğu için x=0 noktası **düzgün tekil** bir noktadır. (3.5) eşitliği yardımı ile; (katsayılar x'e bağlı olduğundan $m\neq 0$ olacaktır)

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+m};\qquad y'=\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)a_kx^{k+m-1};\qquad y''=\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m-1)a_kx^{k+m-2}$$

yazılabilir. Yukarıdaki ifadeler verilen diferansiyel denklemde yerlerine konulur ise;

$$\sum_{k=0}^{\infty}3(k+m)(k+m-1)a_kx^{k+m-1}+\sum_{k=0}^{\infty}2(k+m)a_kx^{k+m-1}+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+m}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(3(k+m-1)+2)a_kx^{k+m-1}+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+m}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(3k+3m-1)a_kx^{k+m-1}+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+m}=0\qquad(3.20)$$

elde edilir. (3.20) eşitliğinde x^{k+m}'li ifade (3.10) eşitliği yardımı ile x^{k+m-1}'li ifade cinsinden yazılırsa;

Hatırlatma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^{k+m-1} \qquad (3.21)$$

elde edilir. (3.20) eşitliğinde yer alan ilk ifade de (3.21) formatına getirilirse;

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(3k+3m-1)a_k x^{k+m-1} = a_0 m(3m-1)x^{m-1} + \sum_{k=1}^{\infty}(k+m)(3k+3m-1)a_k x^{k+m-1} \qquad (3.22)$$

elde edilir. (3.21) ve (3.22) eşitlikleri (3.20) ifadesinde yerlerine konulursa;

sağ tarafa at

M sayısı ile derece sayısı aynı

$$a_0 m(3m-1)x^{m-1} + \sum_{k=1}^{\infty}((k+m)(3k+3m-1)a_k + a_{k-1})x^{k+m-1} = 0 \qquad (3.23)$$

elde edilir. (3.23) ifadesinin sıfıra eşit olabilmesi için toplamı oluşturan her iki terimim ayrı ayrı sıfıra eşit olması gerekir. Bu durumda iki ayrı denklem ile karşılaşılır:

özel durum

$a_0 m(3m-1) = 0 \qquad (a_0 \neq 0)$ **(karakteristik denklem- indis denklemi)** (3.24)

$(k+m)(3k+3m-1)a_k + a_{k-1} = 0$ (indirgeme bağıntısı) (3.25)

$a_0 \neq 0$ olduğunda (3.24) eşitliği;

$m_1 = 0; \; m_2 = 1/3$

değerleri için sıfır olacaktır. (3.24) ile verilen **karakteristik denklemin** iki adet **kökü (reel ve farklı)** bulunmaktadır.

Bu iki m değeri için (3.23) eşitliğinin sol tarafının ilk terimi sıfıra eşit olmaktadır. (3.23) eşitliğinin sıfır olması için (3.23) eşitliğinin sol tarafının ikinci terimi de sıfıra eşit olmalıdır. Diğer bir ifade ile;

$$a_k = -\frac{1}{(k+m)(3k+3m-1)} a_{k-1} \qquad (3.26)$$

ifadesinin (bu ifade (3.23) eşitliğindeki katsayılar arasındaki ilişkiyi gösterir) tüm **a** katsayıları için sağlanması gerekir. Böylece aranan seri çözüm;

$$\bar{y} = a_0 x^m \left(1 - \frac{1}{(m+1)(3m+2)}x + \frac{1}{(m+2)(3m+5)}x^2 - \ldots\right) \qquad (3.27)$$

şeklindedir. Aranan çözüm;

<u>**(tüm m değerleri için (3.28) eşitliğinin sağ tarafı sıfır olur)**</u>

$3x\bar{y}'' + 2\bar{y}' + \bar{y} = -a_0 m(3m-1)x^{m-1}$ (3.23) den elde edildi (3.28)

denklemini sağlar. (3.26) eşitliği her iki m değeri için de ayrı ayrı sağlanmalıdır. m_1=0 için elde edilen özel çözüme y_1, m_2=1/3 için elde edilen özel çözüme y_2 denirse, y için genel çözüm;

$$y_g = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad (3.29)$$

olacaktır. Önce y_1 'i bulmak için işlemler yapılırsa, ilk kök değeri ($m_1=0$) için (3.25) ifadesi;

$$a_k = -\frac{a_{k-1}}{k(3k-1)} \qquad (k=1,2,3,4,....)$$

$$a_0 \neq 0;\ a_1 = -\frac{a_0}{2};\ a_2 = -\frac{a_1}{10} = \frac{a_0}{20};\ a_3 = -\frac{a_0}{480}$$

olacaktır. Elde edilen bu katsayılar (3.5) ifadesinde yerlerine konulursa;

$$y_1(x) = x^m(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...) = x^0(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...)$$

$$y_1(x) = a_0(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{20}x^2 - \frac{1}{480}x^3 + ...)$$

elde edilir. y_2'yi bulmak için işlemler yapılırsa diğer bir ifade ile (3.26) eşitliğinde m yerine ikinci kök değeri ($m_2=1/3$) konulur ve benzer adımlar atılırsa;

$$y_2(x) = x^m(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...) = x^{1/3}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...)$$

$$y_2(x) = x^{1/3}a_0(1 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{56}x^2 - .....)$$

$$y_g = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

elde edilir.

Açıklama

(3.24)'de gösterilen indis denkleminin kökleri üç farklı şekilde olabilir:

1) Kökler farklı ve fark tam sayı değildir
2) Kökler eşittir
3) Kökler farklı fakat fark tam sayıdır

İlk durum için nasıl bir yaklaşım içinde olunması gerektiği problem 3.3'de gösterildi. İndis denklemi için **kökler eşit** olması durumunda her iki kök değeri için elde edilen çözümler aynıdır. Böyle bir durumda genel çözüm (3.27) ifadesi yerine;

$$\boxed{y_g = a\bar{y}\Big|_{m=m_1} + b\frac{\partial\bar{y}}{\partial m}\Big|_{m=m_2} \quad m1=m2} \qquad (3.30)$$

ifadesi kullanılarak bulunur. Bu tür kök ile ilgili olarak problem 3.4'e bakılmalıdır.

Eğer kökler birbirinden **farklı** ($m_1 < m_2$) ve **farkları tam sayı** ise büyük olan kök (m_2) her zaman bir çözüm verirken, küçük olan kök (m_1) bazen vermeyebilir. Çözüm vermediğinde ikinci özel çözüm hesabında $a_0 = b_0(m - m_1)$ alınarak **(3.30) eşitliği uygulanır**. Bu tür köke ilişkin örnek, problem 3.5'de verilmiştir. **ÖNEMLİ !!!!!!!**

Problem 3.4

$$xy'' + (1-x)y' + 2y = 0$$

Yukarıda verilen diferansiyel denklem <u>düzgün tekil noktaya</u> sahip ise bu diferansiyel denklemi sağlayacak seri çözümü bulunuz.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklem (3.3) formunda yazılırsa;

$$y'' + \frac{(1-x)}{x}y' + \frac{2x}{x^2}y = 0$$

elde edilir. $R_1(x)$ ve $R_2(x)$ 'in x=0 civarında Taylor açılımları bulunduğu için x=0 noktası **düzgün tekil** bir noktadır. (3.5) eşitliği yardımı ile; (katsayılar x'e bağlı olduğundan $m \neq 0$ olacaktır)

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m} \; ; \qquad y' = \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)a_k x^{k+m-1} \; ; \qquad y'' = \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m-1)a_k x^{k+m-2}$$

yazılabilir. Yukarıdaki ifadeler verilen diferansiyel denklemde yerlerine konulur ise;

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m-1)a_k x^{k+m-1} + \sum_{k=0}^{\infty}(1-x)(k+m)a_k x^{k+m-1} + \sum_{k=0}^{\infty}2a_k x^{k+m} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m-1)a_k x^{k+m-1} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)a_k x^{k+m-1} - \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)a_k x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty}2a_k x^{k+m} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)^2 a_k x^{k+m-1} + \sum_{k=0}^{\infty}a_k(-k-m+2)x^{k+m} = 0 \qquad (3.31)$$

$$\boxed{m^2 a_0 x^{m-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(a_k(k+m)^2 + a_{k-1}(k+m+1))x^{k+m-1}\right] = 0} \qquad (3.32)$$

(3.23)'de verilen eşitliğin ilk terimi indirgeme bağıntısı olup;

$$m^2 a_0 x^{m-1} = 0 \qquad (3.33)$$

(3.33) eşitliğinin sıfıra eşit olması durumunda ($a_0 \neq 0$);

$$m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 0 \text{ ve } m_2 = 0$$

elde edilir. Bu durumda (3.32) ifadesindeki ikinci terimin de sıfır olabilmesi için katsayılar arasında;

$$\boxed{a_k = -\frac{(k+m+1)}{(k+m)^2}a_{k-1}} \qquad (k=1,2,3,4,.....) \qquad (3.34)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. (3.34) eşitliğinden;

$$a_1 = -\frac{(m+2)}{(m+1)^2}a_0; \quad a_2 = -\frac{(m+3)}{(m+2)^2}a_1 = \frac{(m+3)}{(m+1)^2(m+2)}a_0$$

$$a_3 = -\frac{(m+4)}{(m+3)^3}a_2 = -\frac{(m+4)}{(m+1)^2(m+2)(m+3)}a_0$$

$$y(x) = x^m(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...)$$

$$\bar{y}(x) = x^m a_0(1 - \frac{m+2}{(m+1)^2}x + \frac{m+3}{(m+1)^2(m+2)}x^2 - \frac{m+4}{(m+1)^2(m+2)(m+3)}x^3 + ... \qquad (3.35)$$

elde edilir. (3.35) eşitliği,

$x\bar{y}'' + (1-x)\bar{y}' + 2\bar{y} = m^2 a_0 x^{m-1}$ **(tüm m değerleri için sağ taraf sıfır olur)**

ifadesini sağlar. (3.35) eşitliğinde $m_1 = 0$ koyarak (**birinci kök**);

$$y_1(x) = a_0(1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + ...) \qquad (3.36)$$

elde edilir. (3.30) eşitliğinden;

$$\left.\frac{\partial \bar{y}}{\partial m}\right|_{m=0} = y_2(x)$$

$$y_2(x) = x^m a_0 \frac{\partial}{\partial m}\left[(1 - \frac{m+2}{(m+1)^2}x + \frac{m+3}{(m+1)^2(m+2)}x^2 - \frac{m+4}{(m+1)^2(m+2)(m+3)}x^3 + ...\right]_{m=0} \qquad (3.37)$$

$$y_2(x) = x^m a_0 \ln x\left[(1 - \frac{m+2}{(m+1)^2}x + \frac{m+3}{(m+1)^2(m+2)}x^2 - \frac{m+4}{(m+1)^2(m+2)(m+3)}x^3 + ...\right]_{m=0} +$$

$$x^m a_0\left[\frac{m+3}{(m+1)^3}x + \frac{2m^2 + 11m + 13}{(m+2)^2(m+1)^3}x^2 - ...\right]_{m=0}$$

$y_2(x) = a_0 \ln x\left[(1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + ...\right] + a_0\left[3x + \frac{13}{4}x^2 - ...\right]$ (türev m'e göre alınıyor x'e göre değil !)

elde edilir. Problemde verilen diferansiyel denkleme ilişkin genel çözüm ise;

$$y_g = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

olacaktır.

Problem 3.5

$$x^2y'' + 4xy' + xy = 0$$

Yukarıda verilen diferansiyel denklem düzgün tekil noktaya sahip ise bu diferansiyel denklemi sağlayacak seri çözümü bulunuz.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklem (3.3) formunda yazılırsa;

$$y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{x}{x^2}y = 0$$

elde edilir. $R_1(x)$ ve $R_2(x)$ 'in x=0 civarında Taylor açılımları bulunduğu için x=0 noktası **düzgün tekil** bir noktadır. (3.5) eşitliği yardımı ile; (katsayılar x'e bağlı olduğundan $m \neq 0$ olacaktır)

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m} \; ; \qquad y' = \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)a_k x^{k+m-1} \; ; \qquad y'' = \sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m-1)a_k x^{k+m-2}$$

yazılabilir. Yukarıdaki ifadeler verilen diferansiyel denklemde yerlerine konulur ise;

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m-1)a_k x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty}4(k+m)a_k x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+m+1} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+m)(k+m+3)a_k x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+m+1} = 0$$

$$\boxed{a_0 m(m+3)x^m + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k(k+m)(k+m+3) + a_{k-1}\right]x^{k+m} = 0} \qquad (3.38)$$

elde edilir. (3.38) eşitliğindeki indirgeme bağıntısı;

$$a_0 m(m+3) = 0$$

olup, bu ifadeyi sıfır yapan $m_1 = 0$ ve $m_2 = -3$ iki kökün arasındaki fark tam sayıdır. Bu tür kök ilişkisinde önce **birinci özel çözümde büyük olan kök** kullanılarak y_1 bulunur;

$$a_k = -\frac{1}{(k+m)(k+m+3)}a_{k-1} \qquad (k=1,2,3,4,........) \qquad (3.39)$$

$$a_1 = -\frac{1}{(m+1)(m+4)}a_0 ; \quad a_2 = -\frac{1}{(m+2)(m+5)}a_1 = \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+4)(m+5)}a_0$$

$$a_3 = -\frac{1}{(m+3)(m+6)}a_2 = -\frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}a_0$$

$$\bar{y}(x) = x^m a_0 (1 - \frac{1}{(m+1)(m+4)} x + \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+4)(m+5)} x^2 - \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)} x^3 + ...) \quad (3.40)$$

$$y_1 = \bar{y}(x)\Big|_{m=0} = a_0 (1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{40} - \frac{1}{720} x^3 + ...)$$

(3.40) eşitliğinde m=−3 kökü için bazı ifadeler belirsizlik yaratacaktır. Bu nedenle (3.40) eşitliği;

$$\boxed{a_0 = b_0 (m+3)}$$

değeri ile çarpılmalıdır:

$$\bar{y}(x) = x^m b_0 (m+3 - \frac{m+3}{(m+1)(m+4)} x + \frac{m+3}{(m+1)(m+2)(m+4)(m+5)} x^2 - \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+4)(m+5)(m+6)} x^3 + ...) \quad (3.41)$$

İkinci özel çözüm (y_2) ise (3.41) eşitliğinin m'e göre türevinde $m = m_2 = -3$ yazılarak elde edilir:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial m}\Big|_{m=-3} = y_2(x) = b_0 x^m \ln x \left[m+3 - \frac{m+3}{(m+1)(m+2)(m+4)(m+5)} ... \right] + b_0 x^m \left[1 - \frac{m^2 + 6m + 11}{(m+1)^2 (m+4)^2} x - ... \right]$$

$$y_2(x) = b_0 x^{-3} \ln x \left[(-\frac{1}{12} x^3 + ... \right] + b_0 x^{-3} \left[1 + \frac{1}{2} x..... \right]$$

$$y_g = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

3.2. Bessel denklemi

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2) y = 0 \quad (3.42)$$

(3.2) ifadesi ile verilen diferansiyel denklem Bessel tipi diferansiyel denklem olarak adlandırılır. (3.42) eşitliği (3.2) formunda yazılırsa x=0 noktasının düzgün bir tekil nokta olduğu görülecektir. Bu nedenle x=0 civarında (3.5) ile verilen formulasyon tipinde Taylor serisine açılarak (3.42) denklemini sağlayan y(x) değeri bulunabilir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+m)(k+m-1) a_k x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+m) a_k x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m+2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^2 x^{k+m} = 0$$

1 sayfa işlem

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[(k+m)^2 - v^2 \right] x^{k+m} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k+m} = 0 \quad (3.43)$$

$$a_0 (m^2 - v^2) x^m + a_1 \left[(m+1)^2 - v^2 \right] x^{m+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ a_k \left[(k+m)^2 - v^2 \right] + a_{k-2} \right\} x^{k+m} = 0 \quad (3.44)$$

FTAP
EMTP

(3.44) ifadesinin her x eğeri için sıfır olabilmesi için toplamı oluşturan üç terimin de ayrı ayrı sıfıra eşit olması gerekir:

$$a_0(m^2 - v^2)x^m = 0 \qquad (3.45)$$ m bulur

$$a_1\left[(m+1)^2 - v^2\right]x^{m+1} = 0 \qquad (3.46)$$ katsayı ilişki

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left\{a_k\left[(k+m)^2 - v^2\right] + a_{k-2}\right\}x^{k+m} = 0 \qquad (3.47)$$ $a_1 = 0$

(3.45) ifadesinin sağlanabilmesi için ;

$$a_0 \neq 0 \;;\; m^2 = v^2 \Rightarrow m_1 = v;\; m_2 = -v$$

$c_1 y_1 + c_2 y_2 = y_3$

$c_1 J_v + c_2 J_{-v}$

y_1 y_2

olması gerekir. (3.46) eşitliğinin sağlanabilmesi için ise;

$$\boxed{a_1 = 0}$$ non bessellerde

olmalıdır, zira; $m_1 = v$; $m_2 = -v$ değerleri için (3.46) eşitliği sıfır olmamaktadır. Bu eşitliğin her x değerinde sıfır olması için, ancak $a_1 = 0$ şartının sağlanması gerekir. Bu şartlar altında (3.47) ifadesinin sıfır olması için ise,

$$a_k = -\frac{1}{(k+m)^2 - v^2}a_{k-2} \;;\; (k=2,3,4,5\ldots) \qquad (3.48)$$

$$y = a_0x^m - \left[\frac{1}{(m+2)^2 - v^2}\right]a_0x^{m+2} + \frac{1}{\left[(m+2)^2 - v^2\right]\left[(m+4)^2 - v^2\right]}a_0x^{m+4} - \ldots\ldots$$

(3.48) ile verilen indirgeme bağıntısının sağlanması gerekir. (3.48) eşitliğinde $m_1 = v$ değeri konulursa;

$$a_k = -\frac{1}{k(k+2v)}a_{k-2}; \qquad a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = \ldots a_{2n-1} = 0$$

$$a_2 = -\frac{1}{2(2+2v)}a_0;\; a_4 = -\frac{1}{4(4+2v)}a_2 = \frac{1}{2*4(2+2v)(4+2v)}a_0$$

$$a_6 = -\frac{1}{2*4*6(2+2v)(4+2v)(2v+6)}a_0$$

$$a_{2k} = (-1)^k\frac{1}{2*4*6*8*10*\ldots\ldots*(2k)(2+2v)(4+2v)(2v+6)\ldots(2v+10)\ldots}a_0$$

elde edilir. Birinci özel çözüm (m=v);

$$J_v(x) = y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+v} = a_0x^v\left(1 - \frac{1}{2*(2v+2)}x^2 + \frac{1}{2*(2v+2)(2v+4)}x^4 - \ldots\right)$$

$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{v+2k}}{k!\Gamma(v+k+1)};\quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad (\Gamma;\text{gama fonksiyonu}),\quad (v;\text{pozitif tam sayı}) \qquad (3.49)$$

olacaktır. Çok kullanılması açısından;

$$J_0(x)=a_0\left[1-\frac{1}{(1!)^2}(\frac{x}{2})^2+\frac{1}{(2!)^2}(\frac{x}{2})^4-\frac{1}{(3!)^2}(\frac{x}{2})^6+\frac{1}{(4!)^2}(\frac{x}{2})^8-.......\right]$$

$$J_1(x)=a_0\frac{x}{2}\left[1-\frac{1}{1!*2!}(\frac{x}{2})^2+\frac{1}{2!*3!}(\frac{x}{2})^4-\frac{1}{3!*4!}(\frac{x}{2})^6+\frac{1}{4!*5!}(\frac{x}{2})^8-.......\right]$$

yazılabilir.

$m_2=-v$ değeri için ise;

$$a_k=-\frac{1}{k(k-2v)}a_{k-2}; \qquad a_1=a_3=a_5=a_7=....=0$$

$$a_2=-\frac{1}{2(2-2v)}a_0;\ a_4=-\frac{1}{4(4-2v)}a_2=\frac{1}{2*4(2-2v)(4-2v)}a_0$$

$$a_6=-\frac{1}{2*4*6(2-2v)(4-2v)(2v-6)}a_0$$

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{v+2k}k!\Gamma(v+k+1)}$$

elde edilir. İkinci özel çözüm $(m=-v)$;

$$J_{-v}(x)=y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k-v}=a_0x^v(1-\frac{1}{2*(2-2v)}x^2+\frac{1}{2*(2v+2)(4-v)}x^4-.....)$$

$$J_{-v}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{(-1)^k(\frac{x}{2})^{-v+2k}}{k!\Gamma(-v+k+1)} \qquad \text{v; pozitif tam sayı} \qquad (3.50)$$

olacaktır. Bessel fonksiyonunun genel çözümü ise;

$$y(x)=C_1J_v(x)+C_2J_{-v}(x) \qquad (3.51)$$

olacaktır.

Not
Bessel fonksiyonları arasında;

$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x) \qquad \text{(n; tam sayı ve >0)} \qquad (3.52.a)$$

$$J_0'(x)=-J_1(x) \qquad (3.52.b)$$

$$\frac{1}{2}[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)]=J_n'(x) \qquad (3.52.c)$$

$$J_{0.5}=\sqrt{\frac{2}{x\pi}}\sin x \qquad (3.52.d)$$

$$J_{-0.5}=\sqrt{\frac{2}{x\pi}}\cos x \qquad (3.52.e)$$

ilişkisi vardır.

3.3. Gama fonksiyonu

$$\boxed{\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx} \quad (n; \text{pozitif reel sayı}) \tag{3.53}$$

$$\Gamma(n) = \left[-e^{-x} x^{n-1} \Big|_0^\infty + (n-1)\int_0^\infty e^{-x} x^{n-2} dx \right] = 0 + (n-1)\Gamma(n-1)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \tag{3.54}$$

$$\Gamma(n-1) = (n-2)\Gamma(n-2)$$

$$\Gamma(n-2) = (n-3)\Gamma(n-3)$$

....

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!$$

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(1) = 0! = 1 \tag{3.55}$$

$$\Gamma(0) = \frac{\Gamma(1)}{0} = \frac{1}{0} \rightarrow \pm\infty$$

$$\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{-1} \rightarrow \mp\infty$$

$$\Gamma(-2) = \frac{\Gamma(-1)}{-2} \rightarrow \pm\infty$$

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4).......3 * 2 * 1 * \Gamma(1) = (n-1)! \tag{3.56}$$

n=1/2 için;

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x} x^{(1/2-1)} dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{-1/2} dx$$

$$x = u^2$$

dönüşümü ile;

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-u^2} u^{-1} 2udu = \boxed{2\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} 2 = \sqrt{\pi} \tag{3.57}$$

Laplace

$$\Gamma(1.5) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = 0.5\sqrt{\pi} \tag{3.58}$$

elde edilir.

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

$$\Gamma(1.5) = (1.5-1)\Gamma(1.5-1)$$

$$\Gamma(1.5) = 0.5\Gamma(0.5)$$

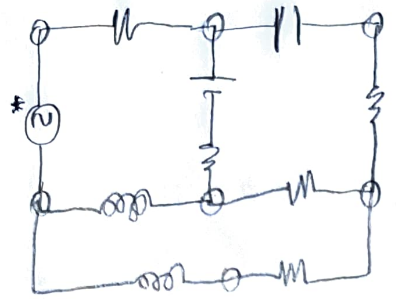
$$\Gamma(1.5) = 0.5\sqrt{\pi}$$

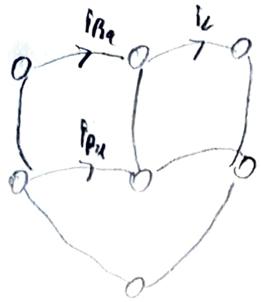
$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

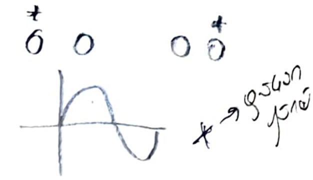
$$\Gamma(2.5) = (2.5-1)\Gamma(2.5-1)$$

$$\Gamma(2.5) = 1.5\Gamma(1.5)$$

$$\Gamma(2.5) = 1.5 * 0.5\sqrt{\pi}$$







(i)

Bobin → üzerinden geçen akımı ani değiştirince V ile karşı koyarım

Kapasitör → " "

Görünür
kompleks
reaktif
anlık
ortalama
güç

P → kaynaktan naşı...

Q → akım gibi akar (reaktif güç)

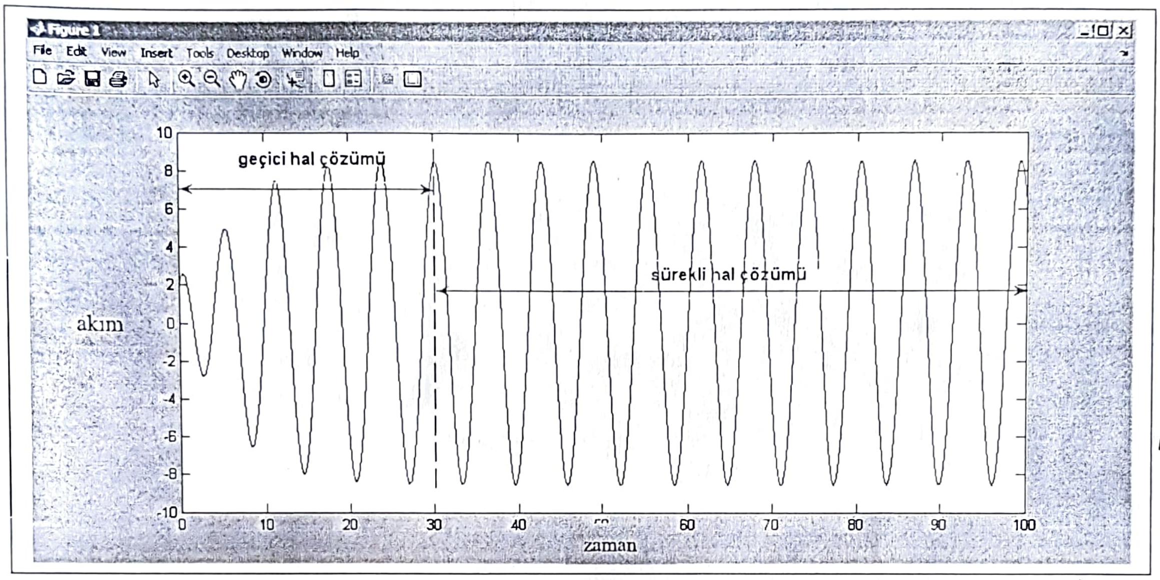
kompanzasyon

ÇS
5
Jw
Z→ mikroişlemci (Dijital kontrol işaret)

BÖLÜM 4
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BİR UYGULAMASI: DURUM DENKLEMLERİ

4.1. Durum denklemlerini bilmek neden önemlidir?

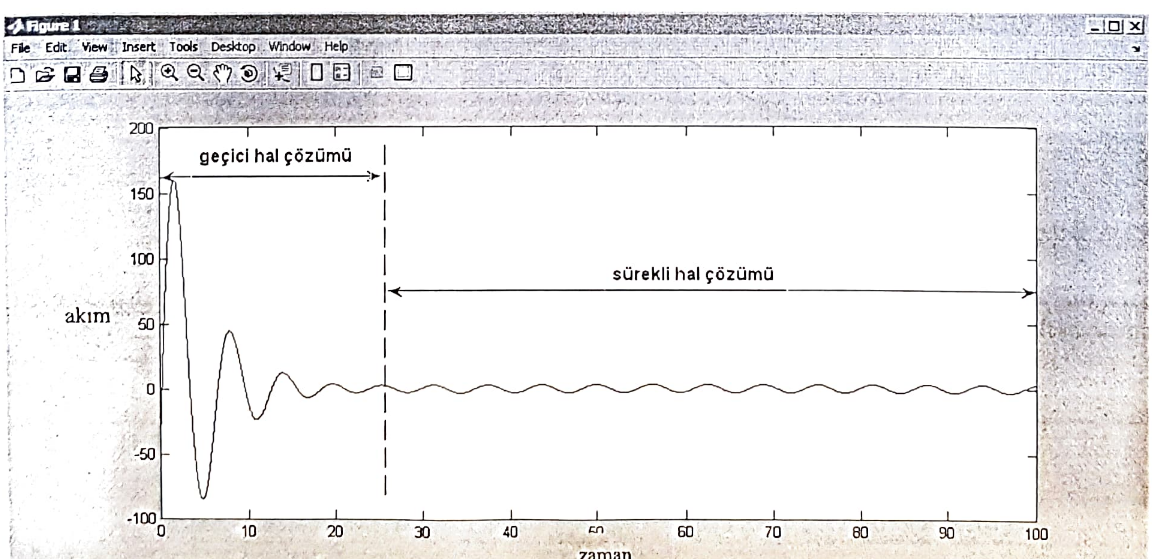
Elektrik devrelerinde jw domeni (fazör) kullanılarak elde edilen akım ve gerilim değerleri, sürekli hal çözümlerini verir. **Bir elektrik-elektronik mühendisi,** devre içinde yer alan her hangi bir elemana ilişkin gerilim veya akımın $0:\infty$ aralığındaki tüm değerlerini görmek istiyor ise verilen devreye ilişkin durum denklemlerini **bulmak** zorundadır. Durum denklemlerinin **çözülmesi** ile (bu denklemler **diferansiyel denklem** türündedir) aranılan akım ve gerilim değerlerine ulaşmak mümkün olur. Örneğin $0:10$ saniye aralığında bir akıma ilişkin değişim aşağıdaki gibi olsun.



Şekil 4.1

Aralıklarda süreksiz yük

Şekil 4.1'de verilen değişim incelendiğinde, akımın ancak 30 saniye civarında sürekli hal değerlerine oturduğu anlaşılmaktadır. Buna göre, $0:30$ saniye aralığı, akıma ilişkin geçici hal çözümünün geçerli olduğu zaman dilimidir. $30:100$ saniye aralığında ise akım sürekli hal koşulları altında çalışmaktadır. Eğer yukarıda elde edilen akım değişimini veren elektrik devresi **jw domeninde** (fazörel çözüm) çözülseydi, $0:30$ saniye aralığındaki geçici çözüme ulaşılması mümkün olmayacaktı.



Şekil 4.2

Aralıklarında sürekli

Yukarıda verilen akım değişimi incelenirse, $0:25$ saniye aralığında akımın geçici bileşenin geçerli olduğu görülecektir. Geçici hal akımının tepe (max) değeri 100 Amper civarındadır. Oysa akımın sürekli hal bileşeninin tepe değeri 3.1 Amper seviyesindedir. Eğer bu akım hesaplamaları jw domeninde yapılırsa 100 A değerindeki akım görülemeyecek, hatta devrenin sigortası (jw domeni hesaplamalarına dayanılarak) 3A civarında seçildiğinden, $0:25$ saniye aralığında sigorta açtığında nedeni anlaşılamayacaktır. Böyle bir durumda devre elemanlarının zarar görmesi ve sonuçta devrenin arızaya geçmesi kaçınılmazdır.

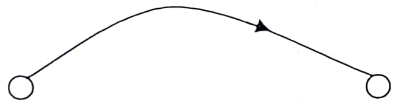
Sonuç olarak bir elektrik-elektronik mühendisinin incelediği devrenin geçici ve sürekli hal çözümlerini bulabilecek bilgiye sahip olması gerekmektedir.

Durum denklemleri adı verilen devre çözüm yöntemi, yukarıda bahsedilen amaca ulaşmak, diğer bir ifade ile devrenin hem geçici hem de sürekli hal bileşen değerlerini bulmak için kullanılır. Aşağıda bu yöntem adım adım anlatılmıştır.

4.2. Graf Teorisi

4.2.1. Topolojik eleman

İki farklı ucu olan yönlü çizgi parçasına denir.



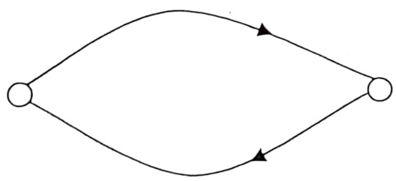
Topolojik düğüm Topolojik düğüm

4.2.2. Topolojik düğüm

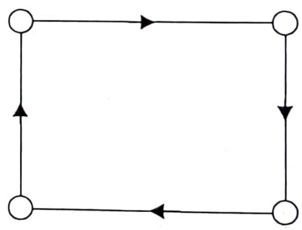
Topolojik elemanın uç noktalarına denir.

4.2.3. Topolojik graf (Graf)

Topolojik eleman ve düğümlerin oluşturduğu kümedir.



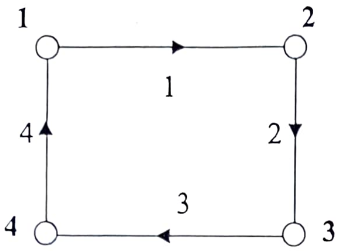
Topolojik graf (T.G)



Topolojik graf (T.G)

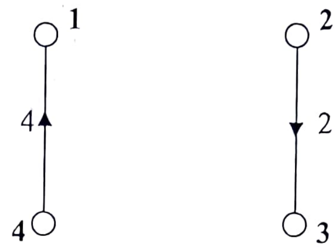
4.2.4. Alt graf

Bazı düğüm ve elemanlardan oluşmuş kümedir. Bir alf graf, verilen bir grafın tüm elemanlarını kapsayabilir.



Topolojik Graf (T.G)

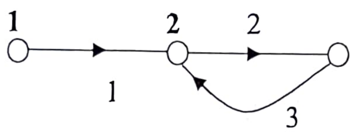
⇒



Alt graf (A.G)

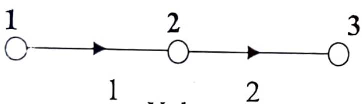
4.2.5. Yol

n elemandan oluşan bir alt grafta, ilk düğüm 1 numara ile son düğüm n+1 ile gösterilirse, 1. ve (n+1). düğüme birer adet, diğer düğümlere ise ikişer adet eleman bağlanmış ise bu alt graf bir yoldur.

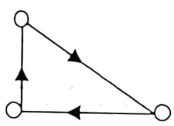


Yol değil

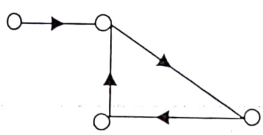
Yukarıda verilen grafta 2. düğüme 3 eleman bağlı olduğundan veya 3.düğüme iki eleman bağlı olduğundan verilen graf bir yol değildir.



Yol



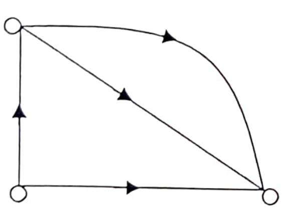
Yol değil



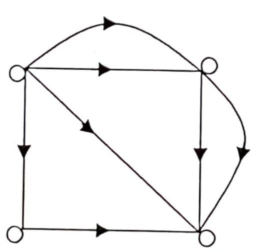
Yol değil

4.2.6. Birleşik graf

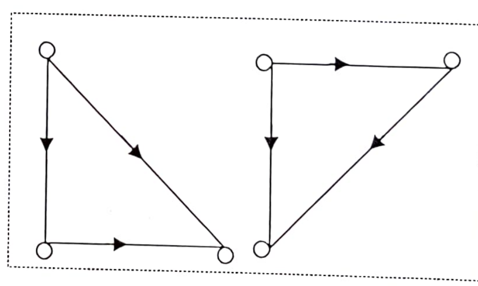
Bir G grafının herhangi iki düğümü arasında en az bir yol varsa bu grafa birleşik graf denir.



Birleşik graf (BG)



Birleşik graf (BG)



Ayrı graf (AG)

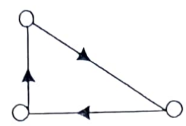
4.2.7. Ayrı graf

Birleşik olmayan grafa denir

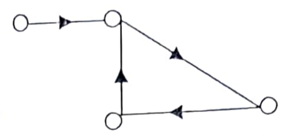
4.2.8. Çevre

G grafının aşağıda belirtilen özelliklerini sağlayan alt grafa çevre denir: (çevre ≠ yol)

a) Alf graf birleşik olmalıdır. ve
b) Alf grafın her düğümüne 2 ve yalnız 2 eleman bağlı olmalıdır.

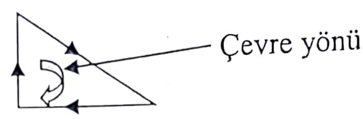


Çevre



Çevre değil (2.koşul yok)

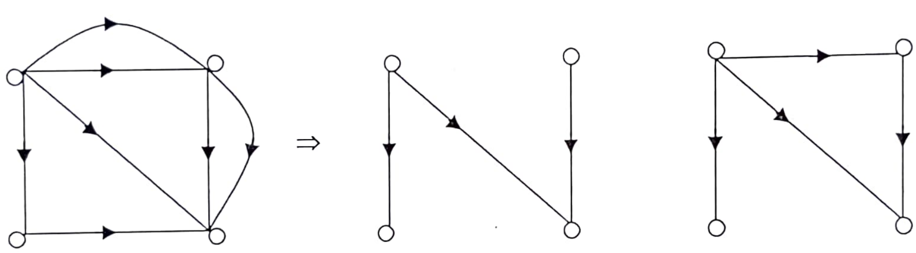
4.2.9. Çevre yönü



4.2.10. Ağaç

Bir G grafının alt grafı aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise buna ağaç denir:

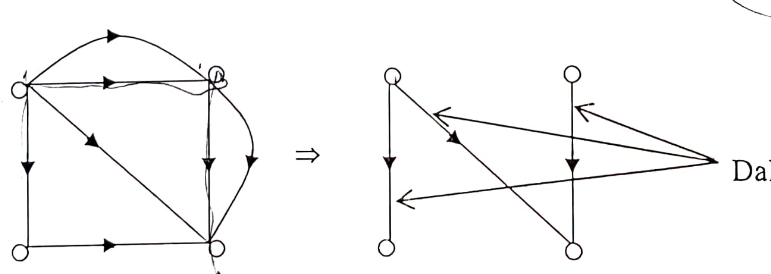
a) G_a alt grafı G grafının tüm düğümlerini içerir.
b) G_a alt grafı birleşiktir. Tüm meyvelere gidebilir
c) G_a alt grafı çevre içermez.



Graf Ağaç Ağaç değil (çevre içeriyor)

4.2.11. Dal

Ağaç içi (ağacı oluşturan) elemana denir. Dal sayısı düğüm sayısından bir eksiktir $(n_d - 1)$

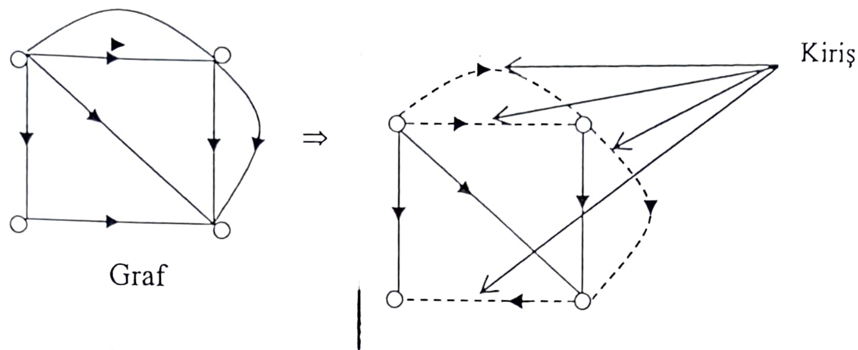


Graf Ağaç

4.2.12. Kiriş sayısı

Graf içindeki ağaç dışı eleman sayısıdır. Kiriş sayısı, graf içindeki eleman sayısından dal sayısının çıkarılması ile bulunur ($n_e - (n_d - 1) = n_e - n_d + 1$). n_d : düğüm sayısı

eleman sayısı Graf - Ağaç = Kiriş



bağımlı göz

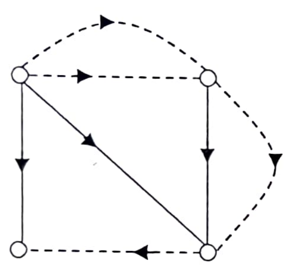
4.2.13. Temel çevre KVL

Dal elemanları ve bir adet kiriş elemanından oluşan çevrelerdir. Temel çevre sayısı, kiriş elemanı sayısına eşittir (diğer bir ifade ile bağımsız göz sayısına eşittir). Temel çevre yönü ise temel çevredeki kiriş elemanının yönü ile aynıdır.

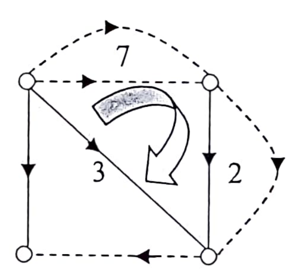
KVL → bağımsız gözlere uygulanır

KCL → bağımsız düğüme uygulanır

Toplam düğüm sayısından 1 eksik olan düğüm bağımsız düğüm denir.



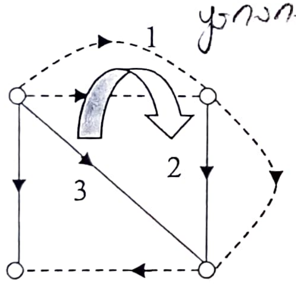
Graf



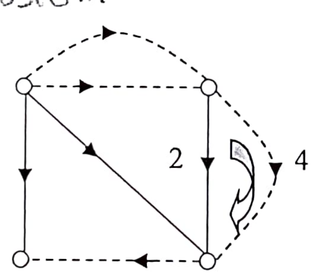
2-3-7 elemanları temel çevre oluştururlar (TÇ1)

kirişin yönü temel çevre yönünü gösterir.

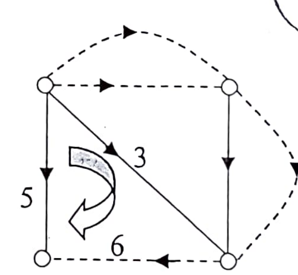
4-1=3 → herbiri bir 3 tane düğüm



1-2-3 elemanları temel çevre oluştururlar (TÇ2)



2-4 elemanları temel çevre oluştururlar (TÇ3)



3-5-6 elemanları temel çevre oluştururlar (TÇ4)

Yukarıdaki grafta 4 adet kiriş elemanı olduğundan, temel çevre sayısı da 4 olacaktır. Yukarıda, temel çevre yönleri (kiriş elemanının yönü) de kalın oklarla gösterilmiştir. Kiriş sayısı kadar Temel çevre var

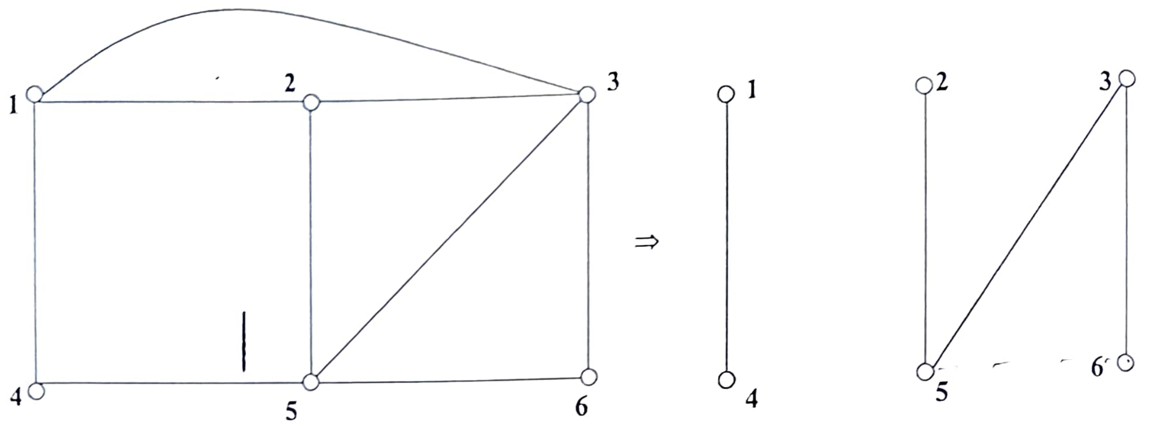
4.2.14. Kesitleme (Birleşik graflar için geçerli)

KCL

Kesitleme bir alt graftır ve aşağıdaki özelikleri sağlar:

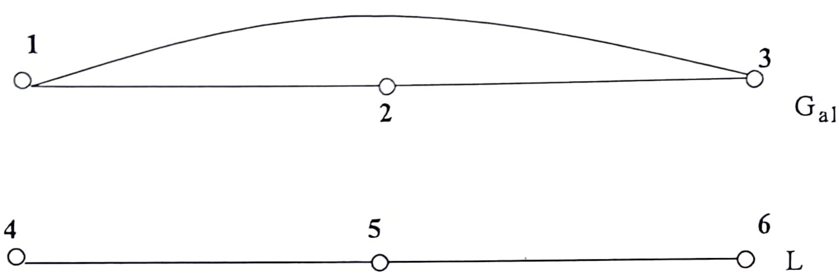
a) G_a alt grafındaki elemanlar G grafından kaldırıldığında graftan ya bir düğüm kalkar ya da G grafı iki ayrı parçaya bölünür.

b) G_a alt grafındaki her hangi bir eleman geri döndürüldüğünde, birleşik grafa geri gelinir.



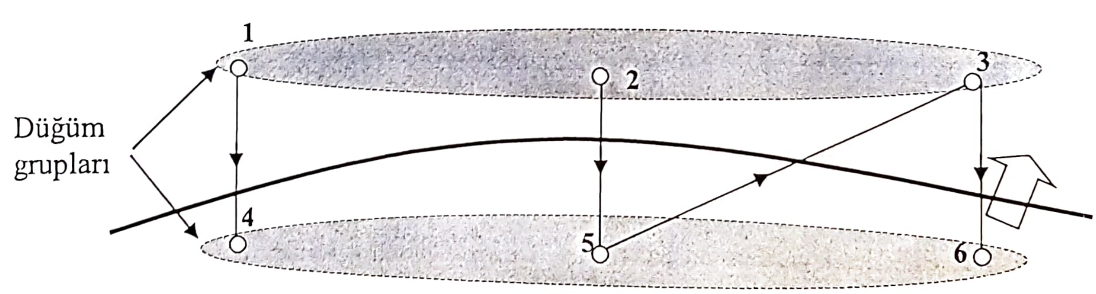
Graf (G) Alt Graf (G_a)

Yukarıdaki şekilde G_a alt grafı G grafından söküldüğünde, aşağıda verilen ikiye bölünmüş alt graf elde edildiğinden dolayı, G_a alt grafı bir kesitlemedir (a kuralı).



Ayrı graflar (G grafı ikiye bölündü)

G_a alt grafından (kesitleme) her hangi bir eleman geri döndürülse, G_{a1} ve G_{a2} grafları birleşik grafa dönecektir (b kuralı).Aşağıda ise kesitlemeye ilişkin düğüm grupları gösterilmiştir.

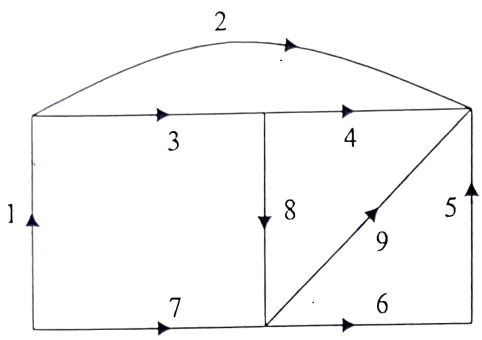


Kesitleme için yön gösterimi

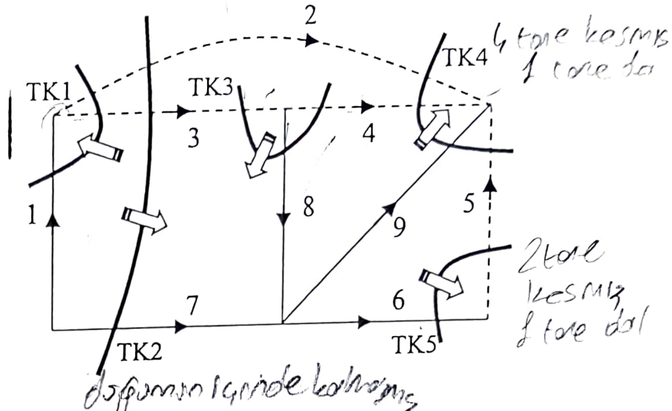
Kesitleme yönü, bir düğüm grubundan diğer düğüm grubuna doğru alınan yöndür. Yukarıda, kalın ok yardımı ile kesitleme yönü gösterilmiştir.

4.2.15. Temel Kesitleme YCL

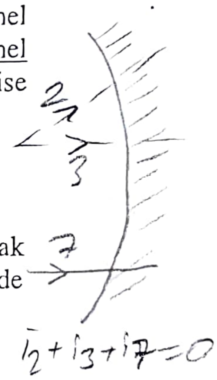
Bir adet dal elemanı ile kiriş elemanlarından oluşan kesitlemedir. Temel kesitleme yönü, temel kesitleme içine giren dal elemanının yönü ile aynıdır. Bir graf içindeki toplam temel kesitleme sayısı, dal sayısı ($n_d - 1$) kadardır. Temel kesitlemeyi dal belirler



Graf



Yukarıda verilen grafta 5 adet dal olduğu için 5 adet temel kesitleme bulunmaktadır. Temel kesitlemelerin yönleri, temel kesitleme içindeki dal elemanının yönü ile aynıdır(kalın oklar). Temel kesitlemeler Kirchhoff akım yasasının elektrik devrelerine uygulanmasında, temel çevreler ise Kirchhoff gerilim yasasının elektrik devrelerine uygulanmasında kullanılır.



4.2.16. Bağımsız gerilim denklemleri

Temel çevreler için yazılan Kirchhoff gerilim denklemleri, bağımsız gerilim denklemleri olarak adlandırılır. Aynı şekilde elektrik devrelerindeki gözler için yazılan Kirchhoff gerilim denklemleri de bağımsız gerilim denklemleri olarak adlandırılır.

4.2.17. Bağımsız akım denklemleri

Temel kesitlemeler için yazılan Kirchhoff akım denklemleri, bağımsız akım denklemleri olarak adlandırılır. Aynı şekilde düğüm sayısından bir eksik sayıda ($n_d - 1$) düğüme uygulanan Kirchhoff akım denklemleri, bağımsız akım denklemleri olarak adlandırılır.

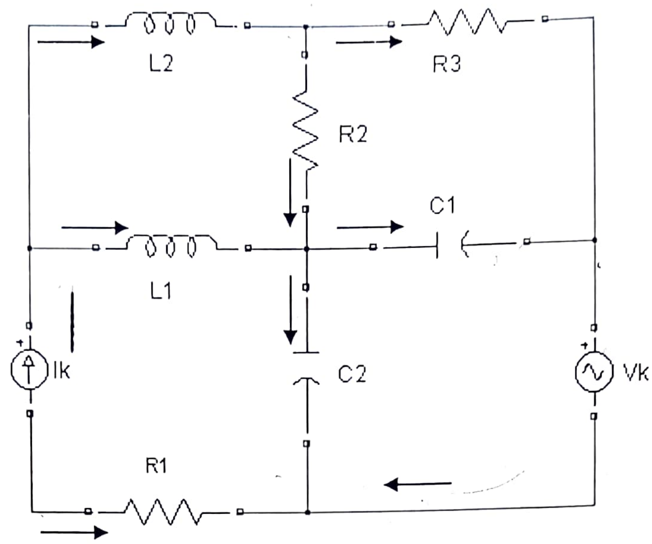
4.3. Durum Denklemlerinin Elde Edilmesi

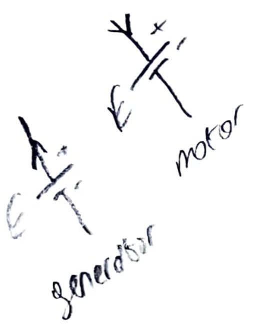
4.3.1. Uygun Ağaç seçilmesi

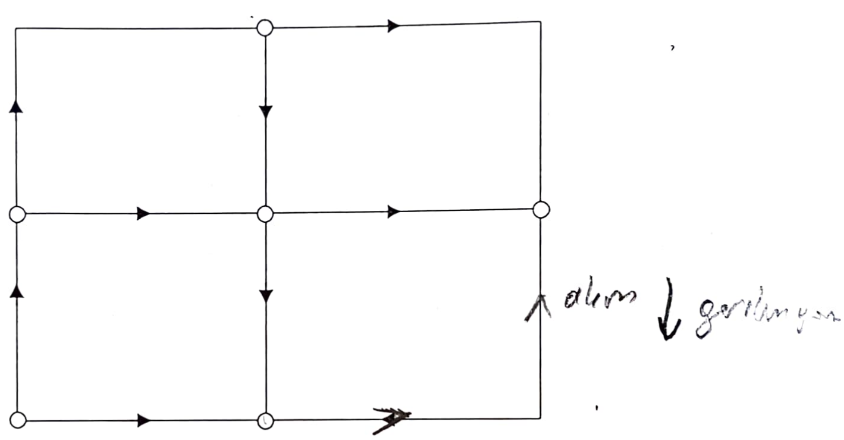
Bir elektrik devresinde birden çok ağaç seçilebilir. Önemli olan durum denklemlerinin elde edilmesini kolaylaştıracak **en uygun ağacın** seçilmesidir. İçinde kapasite ve self (bobin) bulunan bir elektrik devresinde uygun ağaç seçerken dikkat edilmesi gereken özellikler aşağıda belirtilmiştir:

1) Tüm bağımsız gerilim kaynakları dal elemanı olacaktır.
2) Tüm bağımsız akım kaynakları kiriş elemanı seçilecektir.
3) Mümkün olabilen maksimum sayıda kapasite, dal elemanı olarak seçilmeye gayret edilecektir.
4) Mümkün olabilen maksimum sayıda self, kiriş elemanı olarak seçilmeye gayret edilecektir.
5) Devredeki bağımlı kaynaklar ise ağaç yapısını bozmayacak şekilde dal ya da kiriş seçilebilir.

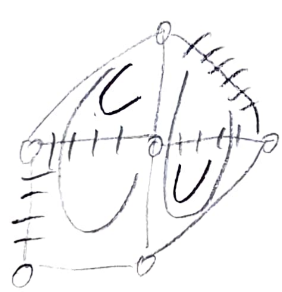
Aşağıda, içinde gerilim kaynağı, akım kaynağı, kapasite ve self barındıran bir elektrik devreleri verilmiştir. Bu devrelere ilişkin uygun ağaç seçiminin nasıl yapıldığı aşağıda gösterilmiştir.

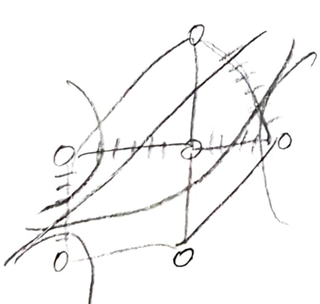


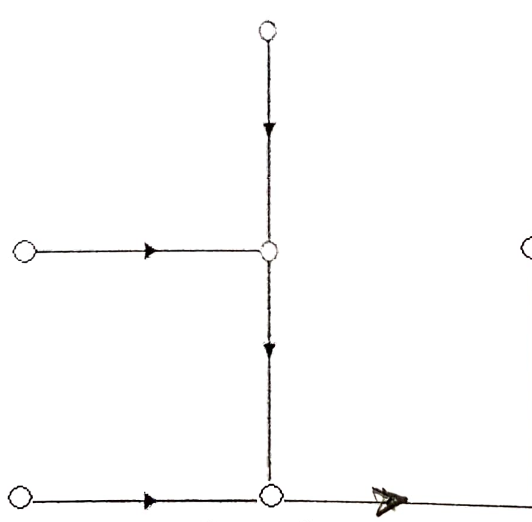




Verilen devrenin grafı



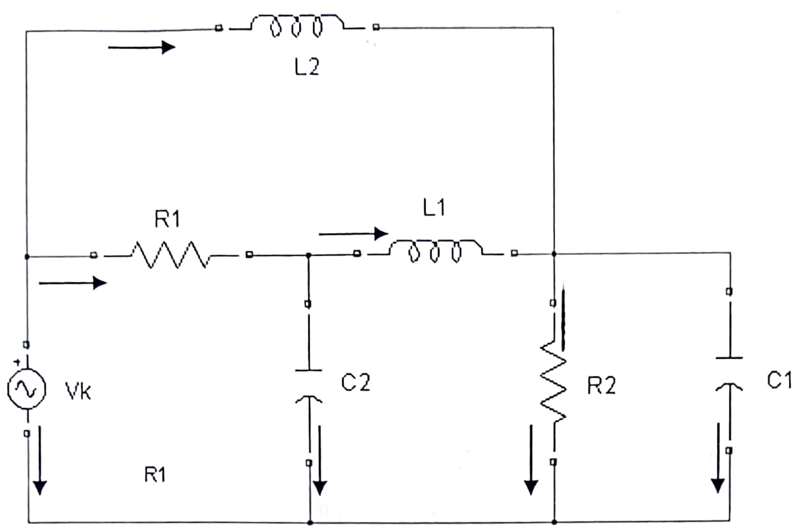




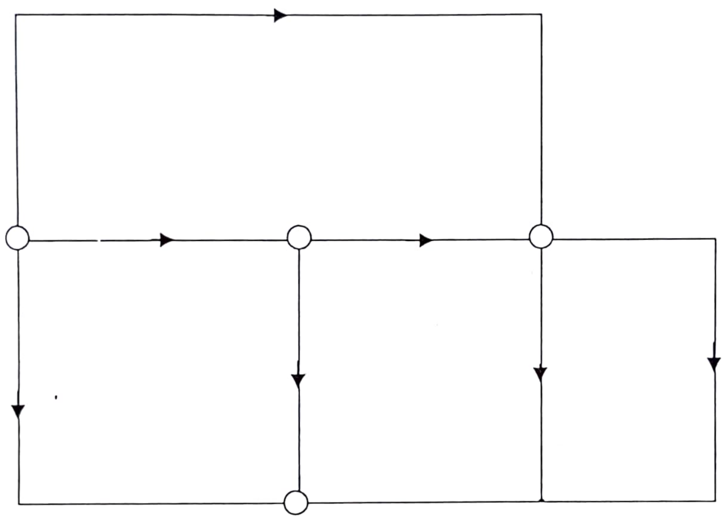
Uygun ağaç

Ağaçta bağımsız gerilim kaynakları dal, bağımsız akım kaynakları kiriş, maksimum sayıda kapasitc dal olarak, maksimum sayıda bobin ise kiriş olarak seçilmiştir.

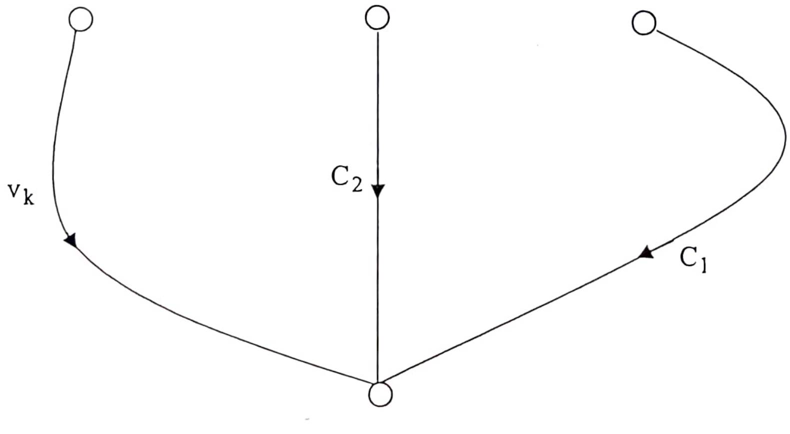
Diğer bir elektrik devresi ve buna ilişkin uygun ağaç seçimi aşağıda gösterilmiştir.



Elektrik devresi



Graf



Uygun Ağaç

4.3.2. Durum denklemlerinin yapısı

x(t) → kontrol edilen (vagon)
u(t) → kontrol eden (lokomotif)

Durum denklemleri aşağıdaki gösterilen diferansiyel denklem formundadırlar:

kare matris

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + B_1 \frac{du(t)}{dt} \qquad \text{(E1.1)}$$

belli değil

B1 ve D1 0 kondalı kontrol

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + D_1 \frac{du(t)}{dt} \qquad \text{(E1.2)}$$

Çıkış
- robot kolu
- Akımı
- gerilimi çıkıştı.

(E1.1) eşitliğinde x(t) durum değişkenleri bulunur, (E1.2) eşitliğinde x(t) yerine yazılarak y(t) değerleri bulunur. y(t) vektörü, devredeki tüm elemanların akım ve gerilim büyüklüklerini içerir.

Yukarıda verilen denklemler içinde görülen x(t), verilen elektrik devresindeki durum değişkenlerini içeren vektör matristir:

daldaki kapasite gerilimi ve kirişlerdeki self akımları

$$x(t) = \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{ck} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{Ln} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{ağaç içi (dala ilişkin) kapasite gerilimleri} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{ağaç dışı (kirişlere ilişkin) self akımları} \end{matrix} \qquad \text{(E1.3)}$$

Verilen devrede, ağaç dışında kalan kapasite veya ağaç içi self elemanları var ise bunlar x(t) vektörü içinde yer alamaz ancak B_1, D_1 vektörleri içinde yer alabilirler.

Yukarıda verilen denklemler içinde görülen u(t), verilen elektrik devresindeki kontrol değişkenlerini, (diğer bir ifade ile bağımsız gerilim kaynaklarının gerilimleri ile bağımsız akım kaynaklarının akımlarını) içeren bir vektör matristir. u(t) vektörü (E1.4) ifadesinde verilmiştir.

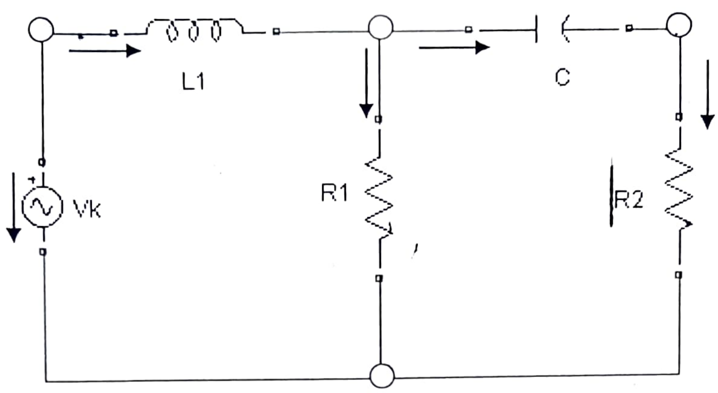
$$u(t) = \begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{ks} \\ i_{s1} \\ i_{s2} \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{sm} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{Bağımsız gerilim kaynağı} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{Bağımsız akım kaynağı} \end{matrix} \qquad \text{(E1.4)}$$

Yukarıda verilen denklemler içinde görülen y(t), verilen elektrik devresindeki tüm elemanlara ilişkin gerilim ve akımları içeren vektör matristir.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} X(t) \end{bmatrix} = \underset{\substack{6\times6 \\ 6\times6}}{\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}} \underset{\substack{6\times1 \\ 6\times1}}{\begin{bmatrix} X(t) \end{bmatrix}} + \underset{6\times5}{\begin{bmatrix} B \end{bmatrix}} \underset{5\times1}{u(t)} \qquad \underset{3\times1}{y(t)} = \underset{3\times6}{C}\,x(t) + \underset{3\times5}{D}\,u(t)$$

y(t) belli olmalı C ve D bulunur

Yukarıda verilen denklemler içinde görülen A, B, B_1 matrislerinin değerlerinin bulunması halinde durum denklemleri tamamlanmış olmaktadır. Aşağıda verilen problemde durum denklemlerinin bir elektrik devresinde nasıl elde edildiği adım adım anlatılmıştır.



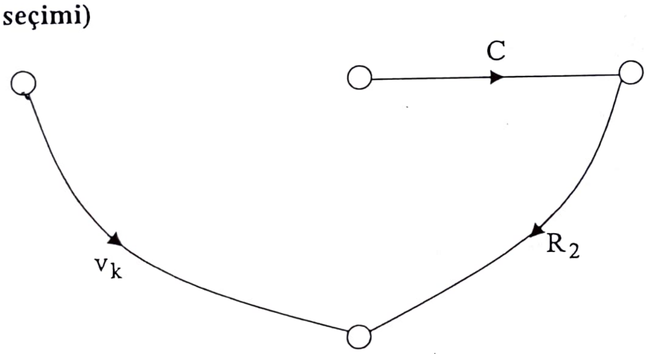
Elektrik devresi

Problem 1

Yukarıda verilen devreye ilişkin durum denklemlerini bulunuz.

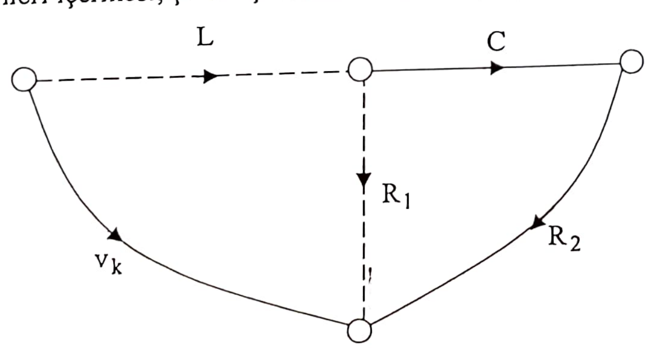
Çözüm

1. adım (uygun ağaç seçimi)



Uygun ağaç

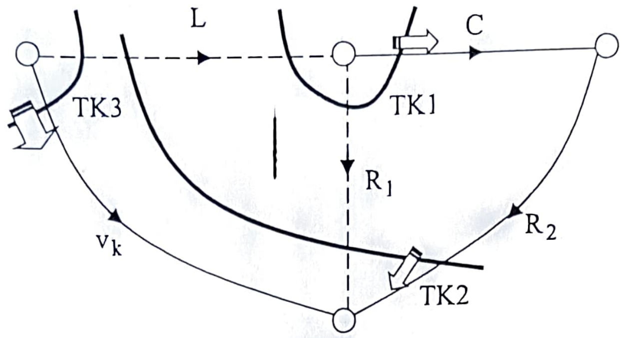
-Bağımsız gerilim kaynağı dal elemanıdır.
-Kapasite, dal elemanı olarak seçilmiştir.
-Self, kiriş elemanı olarak seçilmiştir.
-Ağacın, tüm düğümleri içermesi, çevre içermemesi ve birleşik olması şartı sağlanmaktadır.



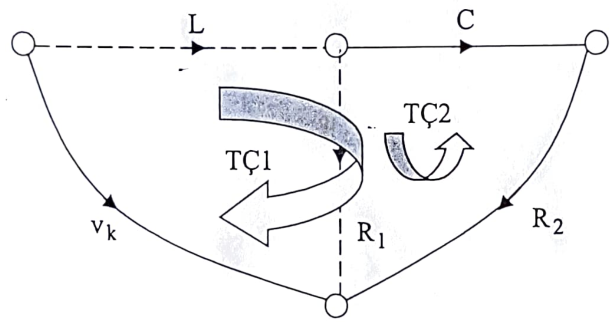
Devre grafına ilişkin dal ve kiriş elemanları

2. adım (temel çevre ve temel kesitlemelerin seçimi)

Temel kesitleme sayısı = Dal sayısı = $n_d - 1 = 3$ (kesitleme yönlerine dikkat edilsin)
Temel çevre sayısı=Kiriş sayısı = $n_e - (n_d - 1) = n_e - n_d + 1 = 5 - 4 + 1 = 2$ (çevre yönlerine dikkat)



Temel kesitlemeler



Temel çevreler

3. adım (temel çevre ve temel kesitleme denklemlerinin oluşturulması)

TÇ1: $v_L(t) + v_c(t) + v_{R2}(t) - v_k(t) = 0$
TÇ2: $v_{R1}(t) - v_{R2}(t) - v_c(t) = 0$

TK1: $i_c(t) + i_{R1}(t) - i_L(t) = 0$
TK2: $i_{R1}(t) + i_{R2}(t) - i_L(t) = 0$
TK3: $i_k(t) + i_L(t) = 0$

$$x(t) = \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{ck} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{Ln} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{ağaç içi (dal) kapasite gerilimler i} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{ağaç dışı (kiriş) self akımları} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} \qquad \text{(E1.5)}$$

$$u(t)=\begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{cs} \\ i_{s1} \\ i_{s2} \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{sm} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{bağımsız gerilim kaynakları} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{bağımsız akım kaynakları} \end{matrix} \Rightarrow u(t)=v_k(t) \qquad \text{(E1.6)}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} V_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix}_{2x1}\begin{bmatrix} V_k(t) \end{bmatrix}_{1x1}$$

$u(t) \rightarrow$ kontrol değişkeni

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} v_k(t) + B_1 \frac{dv_k(t)}{dt} \qquad \text{(E1.7)}$$

Amaç, verilen elektrik devresinde yer alan ağaç içi (dal) kapasite akımları ve ağaç dışı (kiriş) self gerilimlerine ilişkin tanım bağıntılarını;

X ler ve U lar dışı.

$$i_c(t)=C\frac{dv_c(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dv_c(t)}{dt}=\frac{i_c(t)}{C} \qquad \text{(E1.8)}$$

mıknap

$$v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow \frac{di_L(t)}{dt}=\frac{v_L(t)}{L} \qquad \text{(E1.9)}$$

durum değişkenleri ($v_c(t)$, $i_L(t)$) ve kontrol değişkeni ($v_k(t)$) cinsinden yazmaktır. Bu amaçla:

1) <u>Ağaç içi kapasite akımları</u>; eleman tanım bağıntıları ve temel kesitleme denklemlerinden faydalanılarak $v_c(t)$, $i_L(t)$ ve $v_k(t)$ cinsinden yazılmaya çalışılır.
2) <u>Ağaç dışı self gerilimleri</u> ise eleman tanım bağıntıları ve temel çevre denklemlerinden faydalanılarak $v_c(t)$, $i_L(t)$ ve $v_k(t)$ cinsinden yazılmaya çalışılır.

Bu işlemler yapıldığında elde edilen denklem sistemi (E1.7) eşitliğine göre düzenlenmelidir. Yukarıda anlatılan iki maddenin verilen devreye uygulanışı aşağıda gösterilmiştir:

1) Ağaç içi kapasite akımı tanım bağıntısı;

$$i_c(t)=C\frac{dv_c(t)}{dt} \qquad (i_c(t)\,;\ x(t) \text{ ve } u(t) \text{ cinsinden yazılmalı})$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt}=\frac{1}{C}i_c(t) \qquad \text{(E1.10))}$$

<u>temel kesitleme</u> (TK1) denkleminden $i_c(t)$ elde edilip;

$$i_c(t)=i_L(t)-i_{R1}(t)$$

(E1.10) eşitliğinde yerine konularak,

$$\frac{dv_c(t)}{dt}=\frac{1}{C}\left[i_L(t)-i_{R1}(t)\right] \qquad \text{(E1.11)}$$

elde edilir. (E1.11) eşitliğinde $i_{R1}(t)$ değişkeni durum değişkeni olmadığından, bu değişken $v_c(t)$, $i_L(t)$ ve $v_k(t)$ cinsinden yazılmalıdır.

2) Ağaç dışı self gerilimi tanım bağıntısı,

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \quad (v_L(t);\ x(t) \text{ ve } u(t) \text{ cinsinden yazılmalı})$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_L(t)}{L} \qquad (E1.12)$$

temel çevre (TÇ1) eşitliğinden $v_L(t)$ elde edilip;

$$v_L(t) = v_k(t) - v_c(t) - v_{R2}(t)$$ mikrop

(E1.12) eşitliğinde yerine konularak;

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_L(t)}{L} = \frac{v_{k(t)} - v_c(t) - v_{R2}(t)}{L} \qquad (E1.13)$$

elde edilir. (E1.13) eşitliğinde $v_{R2}(t)$ değişkeni durum değişkeni olmadığından, bu değişken $v_c(t)$, $i_L(t)$ ve $v_k(t)$ cinsinden yazılmalıdır.

Amaç, (E1.11) ve (E1.13) eşitliklerinin (E1.7) formunda yazılabilecek hale getirilmesidir.

4. adım ((E1.11) ve (E1.13) eşitliklerinin durum ve kontrol değişkenleri cinsinden yazılması)

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\left[i_L(t) - i_{R1}(t)\right]$$

$$i_{R1}(t) = G_1 v_{R1}(t) \qquad (E1.14)$$

TÇ2 eşitliği (E1.14) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$i_{R1}(t) = G_1\left[v_{R2}(t) + v_c(t)\right] \qquad (E1.15)$$

$$i_{R1}(t) = G_1 i_{R2}(t) R_2 + G_1 v_c(t) \qquad (E1.16)$$

elde edilir. (E1.16) eşitliğinde yer alan $i_{R2}(t)$ değişkeni, durum veya kontrol değişkeni olmadığından, TK2 eşitliği kullanılarak;

$$i_{R1}(t) = i_L(t) - i_{R2}(t) \qquad (E1.17)$$

mikrop

elde edilir. (E1.16) ve (E1.17) eşitliklerinden;

$$G_1 i_{R2}(t) R_2 + G_1 v_c(t) = i_L(t) - i_{R2}(t)$$

$$i_{R2}(t) = \frac{i_L(t) - G_1 v_c(t)}{1 + G_1 R_2} \qquad (E1.18)$$ mikropsuz

elde edilir. (E1.18) ifadesi (E1.17) eşitliğinde yerine konulursa;

$$i_{R1}(t) = i_L(t) - \frac{i_L(t) - G_1 v_c(t)}{1 + G_1 R_2}$$

$$i_{R1}(t) = i_L(t)(1 - \frac{1}{1 + G_1 R_2}) + \frac{G_1 v_c(t)}{1 + G_1 R_2}$$

$$i_{R1}(t) = \frac{G_1 R2}{1 + G_1 R_2} i_L(t) + \frac{G_1}{1 + G_1 R_2} v_c(t) \qquad (E1.19)$$

elde edilir. Böylece direnç akımları, durum ve kontrol değişkenleri cinsinden tanımlanmış olmaktadır.

5. adım (4. adımda elde edilen akımın (E1.11) eşitliğinde yerine konulması)

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}[i_L(t) - i_{R1}(t)]$$

$$i_{R1}(t) = \frac{G_1 R2}{1 + G_1 R_2} i_L(t) + \frac{G_1}{1 + G_1 R_2} v_c(t)$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\left[i_L(t) - \frac{G_1 R2}{1 + G_1 R_2} i_L(t) - \frac{G_1}{1 + G_1 R_2} v_c(t)\right]$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{i_L(t)}{C(1 + G_1 R_2)} - \frac{G_1}{C(1 + G_1 R_2)} v_c(t) \qquad (E1.20)$$

6. adım (4. adımda elde edilen akımın (E1.13) eşitliğinde yerine konulması)

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_L(t)}{L} = \frac{v_{k(t)} - v_c(t) - v_{R2}(t)}{L} = \frac{v_{k(t)} - v_c(t) - i_{R2}(t)R_2}{L}$$

$$i_{R2}(t) = \frac{i_L(t) - G_1 v_c(t)}{1 + G_1 R_2}$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_L(t)}{L} = \frac{v_{k(t)} - v_c(t) - v_{R2}(t)}{L} = \frac{v_{k(t)} - v_c(t) - R_2 \dfrac{i_L(t) - G_1 v_c(t)}{1 + G_1 R_2}}{L}$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R_2}{L(1 + G_1 R_2)} i_L(t) - \frac{1}{(1 + G_1 R_2)} \frac{v_c(t)}{L} + \frac{v_{k(t)}}{L} \qquad (E1.21)$$

7. adım (Durum denkleminin elde edilmesi)

(E1.20) ve (E1.21) eşitlikleri (E1.7) formunda yazılarak verilen devreye ilişkin durum denklemi elde edilmektedir.

$$\frac{dv_c(t)}{dt}=\frac{i_L(t)}{C(1+G_1R_2)}-\frac{G_1}{C(1+G_1R_2)}v_c(t)$$

$$\frac{di_L(t)}{dt}=-\frac{R_2}{L(1+G_1R_2)}i_L(t)-\frac{1}{(1+G_1R_2)}\frac{v_c(t)}{L}+\frac{v_k(t)}{L}$$

denklemleri elde edildi. Bu iki denklem daha önce tanıtılan ve aşağıda tekrar gösterilen durum denklemi formunda yazılması gerekir;

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}+Bv_k(t)+B_1\frac{dv_k(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dfrac{G_1}{C(1+G_1R_2)} & \dfrac{1}{C(1+G_1R_2)} \\ -\dfrac{1}{L(1+G_1R_2)} & -\dfrac{R_2}{L(1+G_1R_2)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}v_k(t) \qquad \text{(durum denklemi)}$$

Yukarıda (E1.1) eşitliği elde edilmiş oldu. (E1.2) eşitliği ise aşağıdaki işlemlere göre elde edilir:

$$i_{R1}(t)=\frac{G_1R2}{1+G_1R_2}i_L(t)+\frac{G_1}{1+G_1R_2}v_c(t); \qquad i_{R2}(t)=\frac{i_L(t)-G_1v_c(t)}{1+G_1R_2}$$

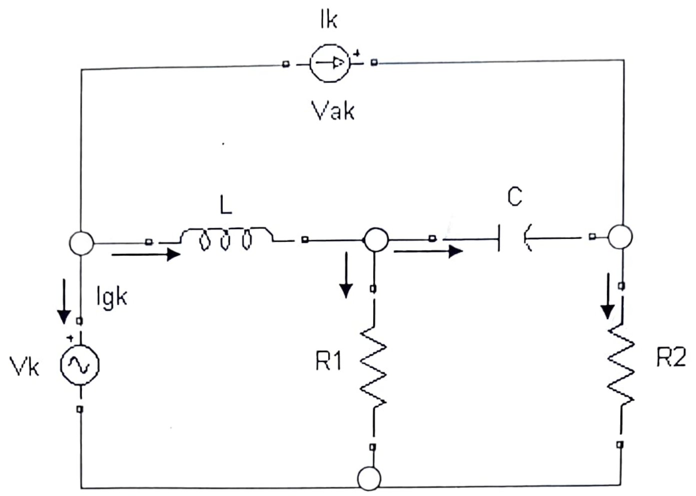
$$i_c(t)=C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_k(t)=-i_L(t)$$

$$y(t)=Cx(t)+Du(t)+D_1\frac{du(t)}{dt}$$

$$\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \\ i_c(t) \\ v_L(t) \\ v_{R1}(t) \\ i_{R1}(t) \\ v_{R2}(t) \\ i_{R2}(t) \\ v_k(t) \\ i_k(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\dfrac{G_1}{(1+G_1R_2)} & \dfrac{1}{(1+G_1R_2)} \\ -(1-\dfrac{G_1R_2}{(1+G_1R_2)}) & -\dfrac{R_2}{(1+G_1R_2)} \\ \dfrac{1}{1+G_1R_2} & \dfrac{R_2}{1+G_1R_2} \\ \dfrac{G_1}{1+G_1R_2} & \dfrac{G_1R_2}{1+G_1R_2} \\ \dfrac{-R_2G_1}{1+G_1R_2} & \dfrac{R_2}{1+G_1R_2} \\ \dfrac{-G_1}{1+G_1R_2} & \dfrac{1}{1+G_1R_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}v_k(t) \qquad \text{(E1.22)}$$

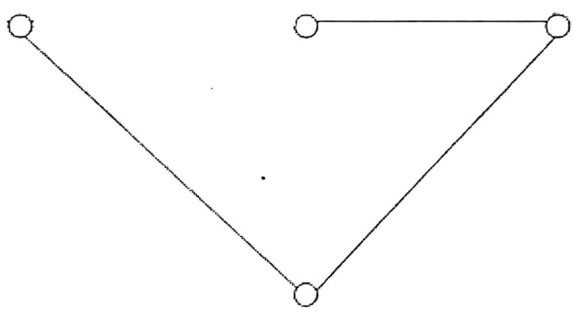


Problem 2

Yukarıda verilen devreye ilişkin durum denklemlerini bulunuz.

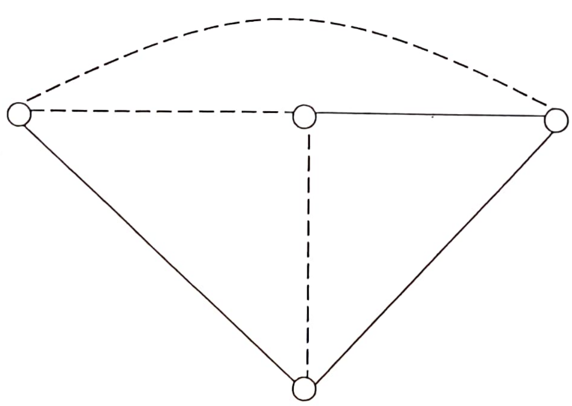
Çözüm

1. adım (uygun ağaç seçimi)



Uygun ağaç

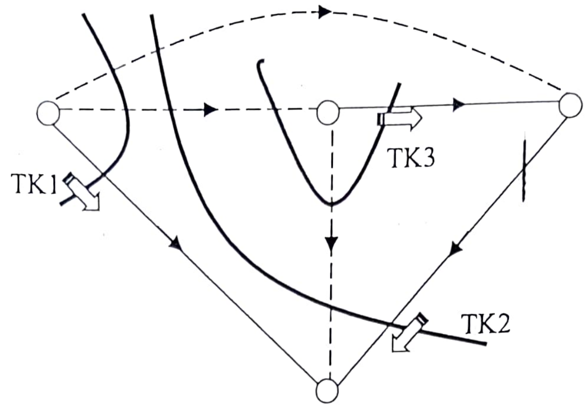
-Bağımsız gerilim kaynağı dal elemanıdır.
-Kapasite, dal elemanı olarak seçilmiştir.
-Self, kiriş elemanı olarak seçilmiştir.
-Ağacın, tüm düğümleri içermesi, çevre içermemesi ve birleşik olması şartı sağlanmaktadır.



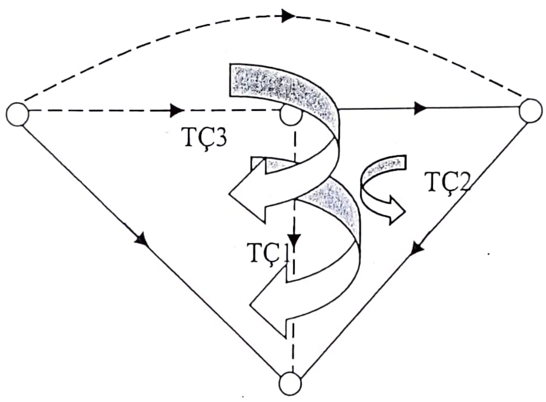
Kiriş ve dal gösterimi

2. adım (temel çevre ve temel kesitlemelerin seçimi)

Temel kesitleme sayısı = Dal sayısı = $n_d - 1 = 3$
Temel çevre sayısı = Kiriş sayısı = $n_e - (n_d - 1) = n_e - n_d + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$



Temel kesitlemeler



Temel çevreler

3. adım (temel çevre ve temel kesitleme denklemlerinin oluşturulması)

TÇ1: $v_L(t) + v_c(t) + v_{R2}(t) - v_k(t) = 0$
TÇ2: $v_{R1}(t) - v_{R2}(t) - v_c(t) = 0$
TÇ3: $-v_{ak}(t) + v_{R2}(t) - v_k(t) = 0$

TK1: $i_{gk}(t) + i_L(t) + i_k(t) = 0$
TK2: $i_{R1}(t) + i_{R2}(t) - i_L(t) - i_k(t) = 0$
TK3: $i_{R1}(t) - i_L(t) + i_c(t) = 0$

Aranan durum denklemlerinin verilen devre için;

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_k(t) \\ i_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{dv_k(t)}{dt} \\ \dfrac{di_k(t)}{dt} \end{bmatrix} \qquad \text{(E1.23)}$$

formunda olması gerekir.
Amaç, verilen elektrik devresinde yer alan ağaç içi kapasite akımları ve ağaç dışı self gerilimlerine ilişkin tanım bağıntılarını;

$$i_c(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{i_c(t)}{C} \qquad \text{(E1.24)}$$

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_L(t)}{L} \qquad \text{(E1.25)}$$

durum değişkenleri ($v_c(t)$, $i_L(t)$) ve kontrol değişkeni ($v_k(t)$) cinsinden yazmaktır. Bu amaçla:

1) Ağaç içi kapasite akımları; eleman tanım bağıntıları ve temel kesitleme denklemlerinden faydalanılarak $v_c(t)$, $i_L(t)$ ve $v_k(t)$ cinsinden yazılmaya çalışılır.
2) Ağaç dışı self gerilimleri ise eleman tanım bağıntıları ve temel çevre denklemlerinden faydalanılarak $v_c(t)$, $i_L(t)$ ve $v_k(t)$ cinsinden yazılmaya çalışılır.

Bu işlemler yapıldığında elde edilen denklem sistemi (E1.23)) eşitliğine göre düzenlenmelidir. Yukarıda anlatılan iki maddenin verilen devreye uygulanışı aşağıda gösterilmiştir:

1) Ağaç içi kapasite akımı tanım bağıntısı;

$$i_c(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} \qquad (i_c(t)\,;\ x(t) \text{ ve } u(t) \text{ cinsinden yazılmalı})$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}i_c(t) \qquad \text{(E1.26))}$$

temel kesitleme (TK3) denkleminden $i_c(t)$ elde edilip;

$$i_c(t) = i_L(t) - i_{R1}(t)$$

(E1.26) eşitliğinde yerine konularak,

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\left[i_L(t) - i_{R1}(t)\right] \qquad \text{(E1.27)}$$

elde edilir. (E1.27) eşitliğindeki $i_{R1}(t)$ değişkeni durum değişkeni olmadığından, bu değişken $v_c(t)$, $i_L(t)$ ve $v_k(t)$ cinsinden yazılmalıdır.

2) Ağaç dışı self gerilimi tanım bağıntısı,

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \qquad (v_L(t)\,;\ x(t) \text{ ve } u(t) \text{ cinsinden yazılmalı})$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_L(t)}{L} \qquad \text{(E1. 28)}$$

temel çevre (TÇ1) eşitliğinden $v_L(t)$ elde edilip;

$$v_L(t) = v_k(t) - v_c(t) - v_{R2}(t)$$

(E1.28) eşitliğinde yerine konularak;

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_L(t)}{L} = \frac{v_{k(t)} - v_c(t) - v_{R2}(t)}{L} \qquad \text{(E1.29)}$$

elde edilir. (E1.29) eşitliğinde $v_{R2}(t)$ değişkeni durum değişkeni olmadığından, bu değişken $v_c(t)$, $i_L(t)$ ve $v_k(t)$ cinsinden yazılmalıdır.

Amaç, (E1.27) ve (E1.29) eşitliklerinin (E1.23) formunda yazılabilecek hale getirilmesidir.

4. adım ((E1.27) ve (E1.29) eşitliklerinin durum ve kontrol değişkenleri cinsinden yazılması)

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\left[i_L(t) - i_{R1}(t)\right]$$

$$i_{R1}(t) = G_1 v_{R1}(t) \qquad \text{(E1.30)}$$

TÇ2 eşitliği (E1.30) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$i_{R1}(t) = G_1\left[v_{R2}(t) + v_c(t)\right] \qquad \text{(E1.31)}$$
$$i_{R1}(t) = G_1 i_{R2}(t) R_2 + G_1 v_c(t) \qquad \text{(E1.32)}$$

elde edilir. (E1.32) eşitliğinde yer alan $i_{R2}(t)$ değişkeni, durum veya kontrol değişkeni olmadığından, TK2 eşitliği kullanılarak;

$$i_{R1}(t) = i_L(t) + i_k(t) - i_{R2}(t) \qquad \text{(E1.33)}$$

elde edilir. (E1.32) ve (E1.33) eşitliklerinden;

$$G_1 i_{R2}(t) R_2 + G_1 v_c(t) = i_L(t) + i_k(t) - i_{R2}(t)$$

$$i_{R2}(t) = \frac{i_L(t) + i_k(t) - G_1 v_c(t)}{1 + G_1 R_2}$$

$$i_{R2}(t) = -\frac{G_1}{1 + G_1 R_2} v_c(t) + \frac{1}{1 + G_1 R_2} i_L(t) + \frac{1}{1 + G_1 R_2} i_k(t) \qquad \text{(E1.34)}$$

elde edilir. (E1.34) ifadesi (E1.33) eşitliğinde yerine konulursa;

$$i_{R1}(t) = i_L(t) + i_k(t) - \frac{i_L(t) + i_k(t) - G_1 v_c(t)}{1 + G_1 R_2}$$

$$i_{R1}(t) = i_L(t)(1 - \frac{1}{1 + G_1 R_2}) + \frac{G_1 v_c(t)}{1 + G_1 R_2} + \frac{G_1 R_2}{1 + G_1 R_2} i_k(t)$$

$$i_{R1}(t) = \frac{G_1}{1 + G_1 R_2} v_c(t) + \frac{G_1 R2}{1 + G_1 R_2} i_L(t) + \frac{G_1 R_2}{1 + G_1 R_2} i_k(t) \qquad \text{(E1.35)}$$

elde edilir. Böylece direnç akımlarını durum ve kontrol değişkenleri cinsinden tanımlama işlemi tamamlanmıştır.

5. adım (4. adımda elde edilen akımın (E1.35) eşitliğinde yerine konulması)

$$\frac{dv_c(t)}{dt}=\frac{1}{C}\left[i_L(t)-i_{R1}(t)\right]$$

$$i_{R1}(t)=\frac{G_1}{1+G_1R_2}v_c(t)+\frac{G_1R2}{1+G_1R_2}i_L(t)+\frac{G_1R_2}{1+G_1R_2}i_k(t)$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt}=\frac{1}{C}\left[i_L(t)-\frac{G_1}{1+G_1R_2}v_c(t)-\frac{G_1R2}{1+G_1R_2}i_L(t)-\frac{G_1R_2}{1+G_1R_2}i_k(t)\right]$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt}=-\frac{G_1}{C(1+G_1R_2)}v_c(t)+\frac{i_L(t)}{C(1+G_1R_2)}-\frac{G_1R_2}{C(1+G_1R_2)}i_k(t) \qquad \text{(E1.36)}$$

6. adım (4. adımda elde edilen akımın (E1.34) eşitliğinde yerine konulması)

$$\frac{di_L(t)}{dt}=\frac{v_L(t)}{L}=\frac{v_{k(t)}-v_c(t)-v_{R2}(t)}{L}=\frac{v_{k(t)}-v_c(t)-i_{R2}(t)R_2}{L}$$

$$i_{R2}(t)=-\frac{G_1}{1+G_1R_2}v_c(t)+\frac{1}{1+G_1R_2}i_L(t)+\frac{1}{1+G_1R_2}i_k(t)$$

$$\frac{di_L(t)}{dt}=\frac{v_L(t)}{L}=\frac{v_{k(t)}-v_c(t)-v_{R2}(t)}{L}$$

$$\frac{di_L(t)}{dt}=\frac{v_{k(t)}-v_c(t)-R_2(-\frac{G_1}{1+G_1R_2}v_c(t)+\frac{1}{1+G_1R_2}i_L(t)+\frac{1}{1+G_1R_2}i_k(t))}{L}$$

$$\frac{di_L(t)}{dt}=-\frac{1}{1+G_1R_2}\frac{v_c(t)}{L}-\frac{R_2}{L(1+G_1R_2)}i_L(t)+\frac{v_{k(t)}}{L}-\frac{R_2}{L(1+G_1R_2)}i_k(t) \qquad \text{(E1.37)}$$

7. adım (Durum denkleminin elde edilmesi)

(E1.36) ve (E1.37) eşitlikleri (E1.23) formunda yazılarak verilen devreye ilişkin durum denklemi elde edilmektedir:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{G_1}{C(1+G_1R_2)} & \frac{1}{C(1+G_1R_2)} \\ -\frac{1}{L(1+G_1R_2)} & -\frac{R_2}{L(1+G_1R_2)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -\frac{G_1R_2}{C(1+G_1R_2)} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L(1+G_1R_2)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_k(t) \\ i_k(t) \end{bmatrix} \qquad \text{(E1.38)}$$

Yukarıda (E1.1) eşitliği elde edilmiş oldu. (E1.2) eşitliği ise aşağıdaki denklemler kullanılarak elde edilir:

$$i_{R1}(t)=\frac{G_1}{1+G_1R_2}v_c(t)+\frac{G_1R2}{1+G_1R_2}i_L(t)+\frac{G_1R_2}{1+G_1R_2}i_k(t);$$

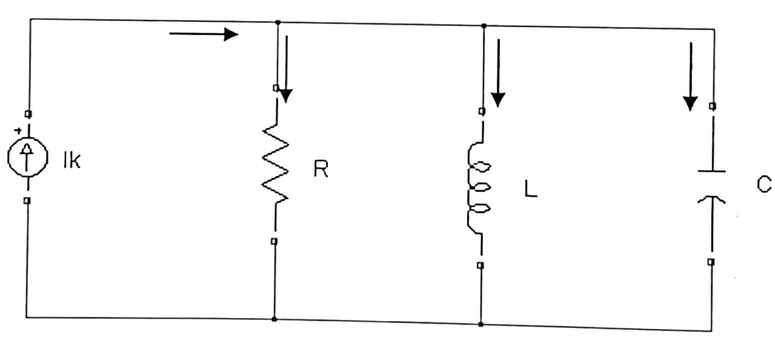
$$i_{R2}(t)=-\frac{G_1}{1+G_1R_2}v_c(t)+\frac{1}{1+G_1R_2}i_L(t)+\frac{1}{1+G_1R_2}i_k(t);i_c(t)=C\frac{dv_c(t)}{dt};$$

$$v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt};\; i_{gk}(t)=-i_k(t)-i_L(t);\, y(t)=Cx(t)+Du(t)+D_1\frac{du(t)}{dt};\, v_{R2}(t)-v_k(t)=v_{ak}(t)$$

$$\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \\ i_c(t) \\ v_L(t) \\ v_{R1}(t) \\ i_{R1}(t) \\ v_{R2}(t) \\ i_{R2}(t) \\ v_k(t) \\ i_{gk}(t) \\ v_{ak}(t) \\ i_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\dfrac{G_1}{1+G_1R_2} & \dfrac{1}{1+G_1R_2} \\ -\dfrac{1}{1+G_1R_2} & -\dfrac{R_2}{1+G_1R_2} \\ \dfrac{1}{1+G_1R_2} & \dfrac{R_2}{1+G_1R_2} \\ \dfrac{G_1}{1+G_1R_2} & \dfrac{G_1R_2}{1+G_1R_2} \\ \dfrac{-R_2G_1}{1+G_1R_2} & \dfrac{R_2}{1+G_1R_2} \\ \dfrac{-G_1}{1+G_1R_2} & \dfrac{1}{1+G_1R_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ \dfrac{-R_2G_1}{1+G_1R_2} & \dfrac{R_2}{1+G_1R_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{G_1R_2}{1+G_1R_2} \\ 1 & -\dfrac{R_2}{1+G_1R_2} \\ 0 & \dfrac{R_2}{1+G_1R_2} \\ 0 & \dfrac{G_1R_2}{1+G_1R_2} \\ 0 & \dfrac{R_2}{1+G_1R_2} \\ 0 & \dfrac{1}{1+G_1R_2} \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_k(t) \\ i_k(t) \end{bmatrix} \quad (E1.39)$$

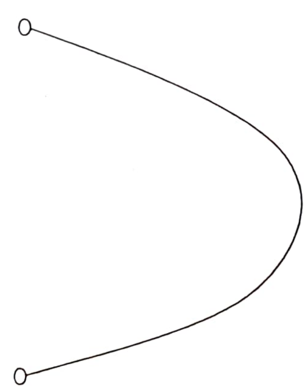
Problem 3

Aşağıda verilen devreye ilişkin durum denklemlerini bulunuz.



Çözüm

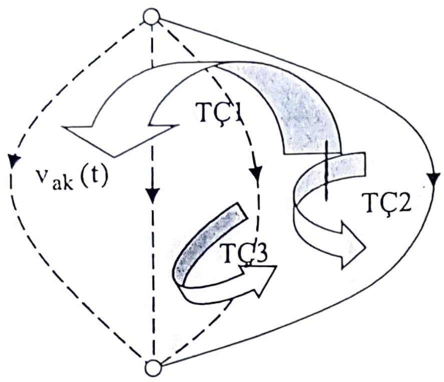
1) Uygun ağaç seçimi



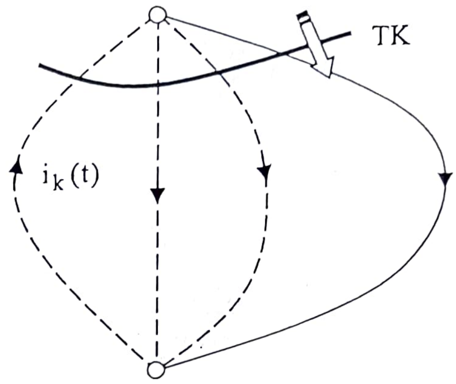
Uygun ağaç

2) Temel kesitleme sayısı = Dal sayısı = $n_d - 1 = 2 - 1 = 1$

Temel çevre sayısı = Kiriş sayısı = $n_e - (n_d - 1) = n_e - n_d + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$



Temel çevreler



Temel kesitleme

3) TÇ1: $-v_c(t) + v_{ak}(t) = 0$

TÇ2: $v_L(t) - v_c(t) = 0$

TÇ3: $-v_c(t) + v_R(t) = 0$

TK: $i_c(t) + i_R(t) + i_L(t) - i_k(t) = 0$

Aranan durum denklemlerinin verilen devre için;

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{bmatrix} i_k(t) \qquad \text{(E1.40)}$$

formunda olması gerekir.

3.1) Ağaç içi kapasite akımı tanım bağıntısı;

$$i_c(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} \qquad (i_c(t)\ ;\ \text{x(t) ve u(t) cinsinden yazılmalı})$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C} i_c(t) \qquad \text{(E1.41)}$$

temel kesitleme (TK) denkleminden $i_c(t)$ elde edilip;

$$i_c(t) = -i_R(t) - i_L(t) + i_k(t)$$

(E1.41) eşitliğinde yerine konularak,

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\left[-i_R(t) - i_L(t) + i_k(t)\right] \qquad \text{(E1.42)}$$

elde edilir. (E1.42) eşitliğindeki $i_R(t)$ değişkeni durum değişkeni olmadığından, bu değişken $v_c(t)$, $i_L(t)$ ve $i_k(t)$ cinsinden yazılmalıdır.

3.2) Ağaç dışı self gerilimi tanım bağıntısı,

$v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$ ($v_L(t)$; x(t) ve u(t) cinsinden yazılmalı)

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_L(t)}{L} \qquad \text{(E1. 43)}$$

temel çevre (TÇ2) eşitliğinden $v_L(t)$ elde edilip;

$$v_L(t) = v_c(t)$$

(E1.43) eşitliğinde yerine konularak;

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_L(t)}{L} = \frac{v_c(t)}{L} \qquad \text{(E1.44)}$$

elde edilir. (E1.44) eşitliğinde $v_c(t)$ değişkeni durum değişkeni olduğundan, (E1.44) eşitliği direkt olarak (E1.40) eşitliğine sokulabilir.

Amaç, (E1.42) ve (E1.44) eşitliklerinin (E1.40) formunda yazılabilecek hale getirilmesidir.

4) $$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\left[-i_R(t) - i_L(t) + i_k(t)\right] \qquad \text{(E1.45)}$$

$$i_R(t) = Gv_R(t) \qquad \text{(E1.46)}$$

TÇ3 eşitliği (E1.46) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$i_R(t) = Gv_c(t) \qquad \text{(E1.47)}$$

elde edilir. (E1.47) eşitliğinde yer alan $i_R(t)$ değişkeni, (E1.45) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\left[-Gv_c(t) - i_L(t) + i_k(t)\right] \qquad \text{(E1.48)}$$

elde edilir.

5) $$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\left[-Gv_c(t) - i_L(t) + i_k(t)\right]$$

ve

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_L(t)}{L} = \frac{v_c(t)}{L}$$

denklemleri (E1.40) formunda düzenlenirse,

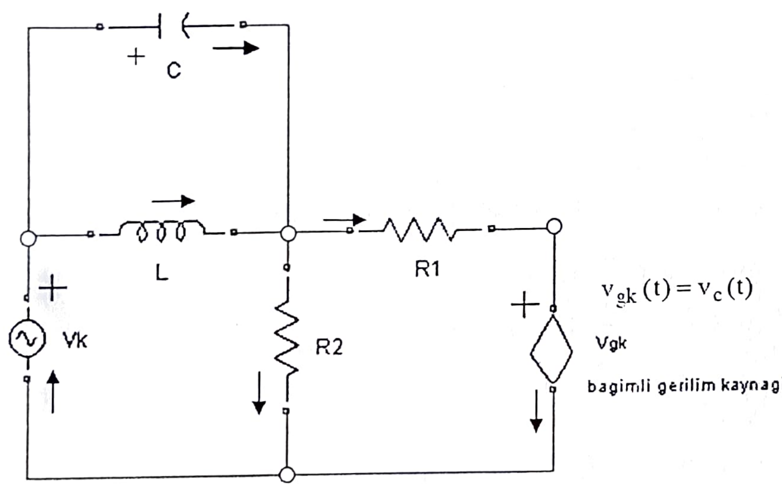
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{G}{C} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} i_k(t)$$

elde edilir. Verilen devre için (E1.1) eşitliği ise yukarıda verilen denklemler kullanılarak elde edilir:

$$\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_c(t) \\ v_L(t) \\ i_L(t) \\ v_R(t) \\ i_R(t) \\ v_{ak}(t) \\ i_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{G}{C} & \frac{-1}{C} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ G & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} i_k(t)$$

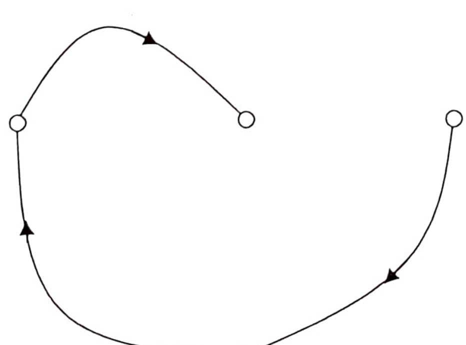
Problem 4)

Aşağıda verilen devreye ilişkin durum denklemlerini bulunuz.



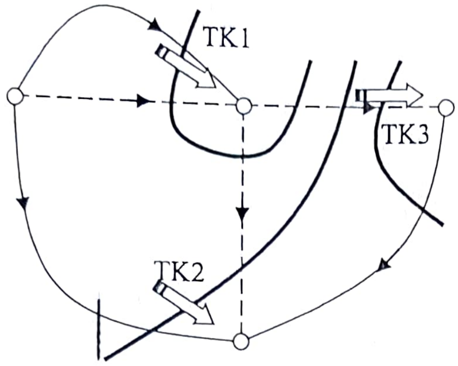
Çözüm

1) Uygun ağaç seçimi

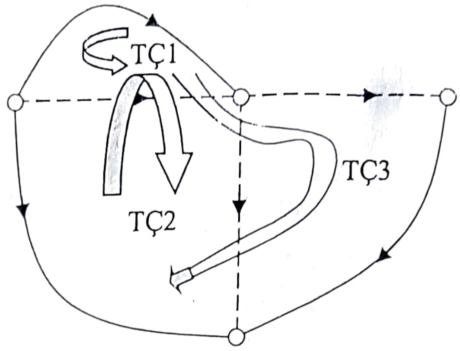


2) Temel kesitleme sayısı = Dal sayısı = $n_d - 1 = 4 - 1 = 3$

Temel çevre sayısı = Kiriş sayısı = $n_e - (n_d - 1) = n_e - n_d + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$



Temel kesitlemeler



Temel çevreler

3) TÇ1: $v_L(t) - v_c(t) = 0$

TÇ2: $v_{R2}(t) + v_c(t) - v_k(t) = 0$

TÇ3: $v_{R1}(t) + v_c(t) + v_{gk}(t) - v_k(t) = 0 \Rightarrow v_{R1}(t) + 2v_c(t) - v_k(t) = 0$

TK1: $i_c(t) - i_{R1}(t) + i_L(t) - i_{R2}(t) = 0$

TK2: $i_k(t) - i_{R2}(t) - i_{R1}(t) = 0$

TK3: $-i_{gk}(t) + i_{R1}(t) = 0$

Aranan durum denklemlerinin verilen devre için;

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{bmatrix} v_k(t) \qquad \text{(E1.49)}$$

formunda olması gerekir.

3.1) <u>Ağaç içi kapasite akımı</u> tanım bağıntısı;

$$i_c(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} \qquad (i_c(t)\,;\ x(t) \text{ ve } u(t) \text{ cinsinden yazılmalı})$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C} i_c(t) \qquad \text{(E1.50)}$$

temel kesitleme (TK1) denkleminden $i_c(t)$ elde edilip;

$$i_c(t) = i_{R1}(t) - i_L(t) + i_{R2}(t) \qquad \text{(E1.51)}$$

(E1.50) eşitliğinde yerine konularak,

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\left[i_{R1}(t) - i_L(t) + i_{R2}(t)\right] \qquad \text{(E1.52)}$$

elde edilir. (E1.52) eşitliğindeki $i_{R1}(t)$ ve $i_{R2}(t)$ değişkenleri durum değişkeni olmadığından, bu değişken $v_c(t)$, $i_L(t)$ ve $v_k(t)$ cinsinden yazılmalıdır.

3.2) Ağaç dışı self gerilimi tanım bağıntısı,

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \quad (v_L(t)\,;\ x(t)\text{ ve } u(t)\text{ cinsinden yazılmalı})$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_L(t)}{L} \tag{E1. 53}$$

temel çevre (TÇ1) eşitliğinden $v_L(t)$ elde edilip;

$$v_L(t) = v_c(t)$$

(E1.53) eşitliğinde yerine konularak;

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_L(t)}{L} = \frac{v_c(t)}{L} \tag{E1.54}$$

elde edilir. (E1.54) eşitliğinde $v_c(t)$ değişkeni durum değişkeni olduğundan, (E1.54) eşitliği direkt olarak (E1.49) eşitliğine sokulabilir.

4) $$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\left[i_{R1}(t) - i_L(t) + i_{R2}(t)\right] \tag{E1.55}$$

(E1.55) eşitliğindeki direnç akımları, durum ve kontrol değişkenleri cinsinden yazılmalıdır:

$$i_{R1}(t) = G_1 v_{R1}(t) \tag{E1.56}$$

TÇ3 eşitliği (E1.56) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$i_{R1}(t) = G_1(v_k(t) - 2v_c(t)) \tag{E1.57}$$

elde edilir. Aynı şekilde $i_{R2}(t)$ için,

$$i_{R2}(t) = G_2 v_{R2}(t) \tag{E1.58}$$

yazılıp, TÇ2 eşitliği (E1.58) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$i_{R2}(t) = G_2(v_k(t) - v_c(t)) \tag{E1.59}$$

5) (E1.57) ve (E1.59) eşitlikleri (E1.55) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\left[G_1(v_k(t) - 2v_c(t)) - i_L(t) + G_2(v_k(t) - v_c(t))\right]$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\left[(G_1 + G_2)v_k(t) - (2G_1 + G_2)v_c(t) - i_L(t)\right] \tag{E1.60}$$

elde edilir.

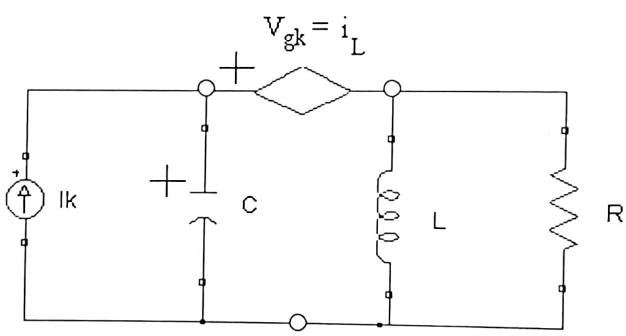
6) (E1.54) ve (E1.60) eşitlikleri (E1.49) formunda yazılırsa;

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-(2G_1+G_2)}{C} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{G_1+G_2}{C} \\ 0 \end{bmatrix} v_k(t) \qquad \text{(E1.61)}$$

$$\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_c(t) \\ v_L(t) \\ i_L(t) \\ v_{R1}(t) \\ i_{R1}(t) \\ v_{R2}(t) \\ i_{R2}(t) \\ v_{gk}(t) \\ i_{gk}(t) \\ v_k(t) \\ i_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(2G_1+G_2) & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ -2G_1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -G_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -2G_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2(G_1-G_2) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G_1+G_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ G_1 \\ 1 \\ G_2 \\ 1 \\ 0 \\ G_1 \\ 1 \\ G_2-G_1 \end{bmatrix} v_k(t) \qquad \text{(E1.62)}$$

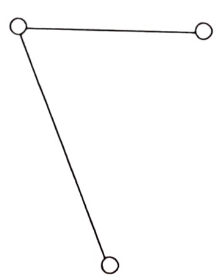
Problem 5)

Aşağıda verilen devreye ilişkin durum denklemlerini bulunuz.



Çözüm

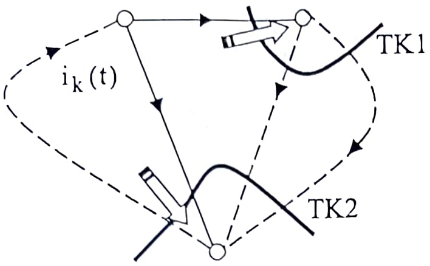
1) Uygun ağaç seçimi



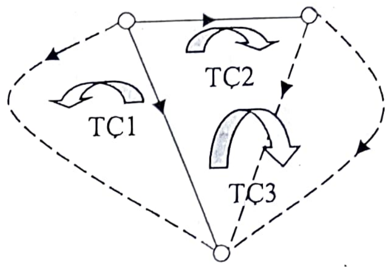
Uygun ağaç

2) Temel kesitleme sayısı = Dal sayısı = $n_d - 1 = 3 - 1 = 2$
Temel çevre sayısı = Kiriş sayısı = $n_e - (n_d - 1) = n_e - n_d + 1 = 5 - 3 + 1 = 3$

$v_{ak}(t)$



Temel kesitlemeler



Temel çevreler

3) TÇ1: $v_{ak}(t) - v_c(t) = 0$

TÇ2: $v_L(t) - v_c(t) + v_{gk}(t) = 0$

TÇ3: $v_R(t) - v_c(t) + v_{gk}(t) = 0$

TK1: $-i_L(t) - i_R(t) + i_{gk}(t) = 0$

TK2: $i_c(t) - i_k(t) + i_R(t) + i_L(t) = 0$

Aranan durum denklemlerinin verilen devre için;

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{bmatrix} i_k(t) \qquad \text{(E1.63)}$$

formunda olması gerekir.

3.1) <u>Ağaç içi kapasite akımı</u> tanım bağıntısı;

$$i_c(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} \qquad (i_c(t)\ ;\ x(t) \text{ ve } u(t) \text{ cinsinden yazılmalı})$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C} i_c(t) \qquad \text{(E1.64)}$$

temel kesitleme (TK2) denkleminden $i_c(t)$ elde edilip;

$$i_c(t) = i_k(t) - i_R(t) - i_L(t)$$

(E1.64) eşitliğinde yerine konularak,

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\left[i_k(t) - i_R(t) - i_L(t)\right] \qquad \text{(E1.65)}$$

elde edilir. (E1.65) eşitliğindeki $i_R(t)$ değişkeni durum değişkeni olmadığından, bu değişken $v_c(t)$, $i_L(t)$ ve $i_k(t)$ cinsinden yazılmalıdır.

3.2) <u>Ağaç dışı self gerilimi</u> tanım bağıntısı,

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \qquad (v_L(t)\ ;\ x(t) \text{ ve } u(t) \text{ cinsinden yazılmalı})$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_L(t)}{L} \qquad \text{(E1. 66)}$$

temel çevre (TÇ2) eşitliğinden $v_L(t)$ elde edilip;

$$v_L(t) = v_c(t) - v_{gk}(t)$$

(E1.66) eşitliğinde yerine konularak;

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_L(t)}{L} = \frac{v_c(t) - v_{gk}(t)}{L} \qquad \text{(E1.67)}$$

elde edilir. (E1.67) eşitliğindeki $v_{gk}(t)$ değişkeni yerine, problemde verilen $v_{gk}(t) = i_L(t)$ eşitliği kullanıldığında;

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_L(t)}{L} = \frac{v_c(t) - i_L(t)}{L} \qquad \text{(E1.68)}$$

elde edilir. (E1.68) eşitliğinde sağ taraf tümüyle durum değişkenleri içerdiğinden, bu eşitlik direkt olarak (E1.63) eşitliğinde kullanılabilir.

Amaç, (E1.65) eşitliğini, (E1.63) formunda yazılabilecek hale getirmektir.

4) (E1.65) eşitliğinin durum ve kontrol değişkenleri cinsinden yazılması)

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\left[i_k(t) - i_R(t) - i_L(t)\right]$$

$$i_R(t) = Gv_R(t) \qquad \text{(E1.69)}$$
$$i_R(t) = G\left[v_c(t) - v_{gk}(t)\right]$$

TÇ3 eşitliğindeki $v_R(t)$ değişkeni çekilip (E1.68) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$i_R(t) = G\left[v_c(t) - v_{gk}(t)\right] \qquad \text{(E1.70)}$$

elde edilir. (E1.69) eşitliğinde yer alan $v_{gk}(t)$ değişkeni, $v_{gk}(t) = i_L(t)$ eşitliği yardımı ile (E1.70) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$i_R(t) = G\left[v_c(t) - i_L(t)\right] \qquad \text{(E1.71)}$$

elde edilir. (E1.71) eşitliği (E1.65) eşitliğinde kullanılırsa;

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\left[i_k(t) - G\left[v_c(t) - i_L(t)\right] - i_L(t)\right]$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\left[-Gv_c(t) - i_L(t)[1 - G] + i_k(t)\right] \qquad \text{(E1.72)}$$

elde edilir.

5) (E1.68) ve (E1.61) eşitlikleri (E1.63) formunda yazılırsa;

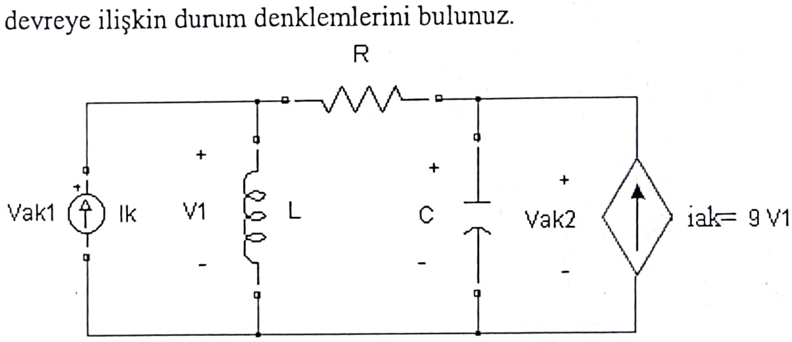
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-G}{C} & -\frac{1-G}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} i_k(t) \qquad \text{(E1.73)}$$

elde edilir. Verilen problem için (E1.2) eşitliği aşağıda verilmiştir;

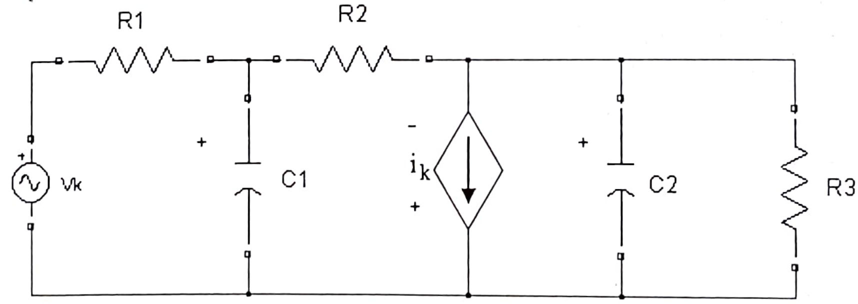
$$\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_c(t) \\ v_L(t) \\ i_L(t) \\ v_R(t) \\ i_R(t) \\ v_{gk}(t) \\ i_{gk}(t) \\ v_{ak}(t) \\ i_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -G & G-1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ G & -G \\ 0 & 1 \\ G & 1-G \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} i_k(t)$$

Problem 6)

Aşağıda verilen devreye ilişkin durum denklemlerini bulunuz.



Problem 7)



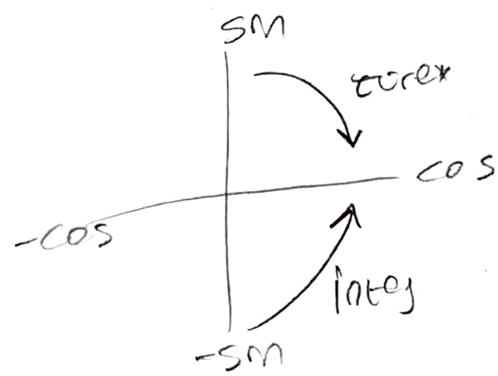
1.BÖLÜM

- Değişken
- Homojen
- Homojene getir
- Tam
- Tama getir (Entegrasyon)
- 1. Mertebeden Lineer dif → Entegrasyon, LSD, Değişken Dönüşümü
- 1. Mertebeden Nonlineer → Bernoulli, Riccati
- 1. Mertebe Yüksek derece → Çarpanlara ayır
- Tekil çözüm (Yerine koy)
- Dif. Denklemi Tekil Çözümü (Clairaut, Lagrange)
- Dif. Denklem Sayısal çözüm metodları (Taylor, Picard)
- Yüksek mertebeden 1. Dereceden Dif. denklem (Esas Sistem Parçaları, Wronski)
  - Sağ Tarafsız (Karakteristik) → Sabit katsayılı
  - Sağ Taraflı (Belirsiz Katsayılar, LSD) → Sabit katsayılı
  - Euler
- Mertebe Düşürmek
- Operatör ile sabit katsayılı dif. denklem çözme

2.BÖLÜM

Bazı Fonksiyonların İntegral Tablosu

$\int \frac{du}{\cosh^2 u} = \text{Tanh}u + C$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	
$\int \frac{du}{\sinh^2 u} = -\text{cot}\,\text{gh}u + C$	$\int \text{tg}u\,du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$ ✓	
$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{\lvert u-a\rvert}{\lvert u+a\rvert} + C$	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \text{Tan}u + C$	
$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\text{a}\tan\frac{u}{a} + C$	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + C$	
$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{a}\sin\frac{u}{a} + C$	$\int \cot u\,du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$	
$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \text{a}\sinh\frac{u}{a} + C$ $= \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\tan\frac{x}{2} + C$	
$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \text{a}\cosh\frac{u}{a} + C$ $= \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) + C$	



$$\frac{d(\tan x)}{dx} = -\ln\cos x$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\} = \frac{1}{2}t^2 e^{-t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s+1}\right\} = Ke^{-t}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$\mathcal{L}\{u(t-2)\,t\} = e^{-2s}\mathcal{L}\{t+2\}$$

$$= e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right)$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$\mathcal{L}\{u(t-3)\,t^2\} = e^{-3s}\mathcal{L}\{(t+3)^2\}$$