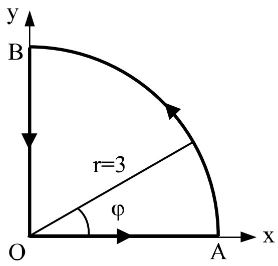
ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER 2



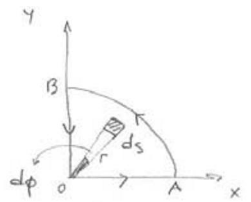
1. Verilen $\overline{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{a}}_r \sin\phi + \hat{\mathbf{a}}_\varphi 3\cos\phi$ vektör alanı ve şekildeki çeyrek daire bölge için Stokes teoremini sağlayınız.

$$\int_S (\overline{\nabla}\times\overline{F})\cdot\overline{ds} = \oint_C \overline{F}\cdot\overline{dl} \quad \text{Stokes Teoremi} \qquad \overline{F} = \hat{a}_r \underbrace{\sin\phi}_{F_r} + \hat{a}_\phi \underbrace{3\cos\phi}_{F_\phi}$$

Eşitliğin sol tarafı

$$\overline{\nabla}\times\overline{F} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\phi r & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin\phi & 3r\cos\phi & 0 \end{vmatrix} = \hat{a}_r \frac{1}{r}(0-0) + \hat{a}_\phi \frac{1}{r}(0-0) + \hat{a}_z \frac{1}{r}(3\cos\phi - \cos\phi)$$

$$\overline{\nabla}\times\overline{F} = \hat{a}_z \frac{2\cos\phi}{r}$$



$$\overline{ds} = \hat{a}_z\, r\, d\phi\, dr$$

$$\int_S \left(\hat{a}_z \frac{2\cos\phi}{\cancel{r}}\right)\cdot\left(\hat{a}_z \cancel{r}\, d\phi\, dr\right) = \iint 2\cos\phi\, dr\, d\phi$$

$$= 2 \underbrace{\int_0^3 dr}_{3} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\phi\, d\phi}_{1} = 6$$

$$\boxed{\int_S (\overline{\nabla}\times\overline{F})\cdot\overline{ds} = 6}$$

Eşitliğin sağ tarafı :

$$\oint_C \overline{F}\cdot\overline{dl} = \int_{OA} \overline{F}\cdot(\hat{a}_r dr) + \int_{AB} \overline{F}\cdot(\hat{a}_\phi r\, d\phi) + \int_{BO} \overline{F}\cdot(\hat{a}_r dr)$$

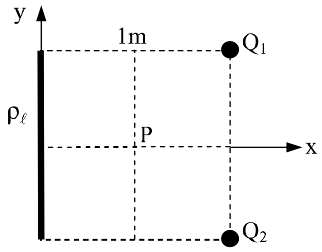
$$= \int_0^3 \sin\phi\, dr + \int_0^{\pi/2} 3r\cos\phi\, d\phi + \int_3^0 \sin\phi\, dr$$

$$= 3\sin\phi\Big|_{\phi=0^\circ} + 3r\Big|_{r=3} - 3\sin\phi\Big|_{\phi=\frac{\pi}{2}}$$

$$= 0 + 9 - 3 = 6$$

$$\boxed{\oint_C \overline{F}\cdot\overline{dl} = 6}$$

2.



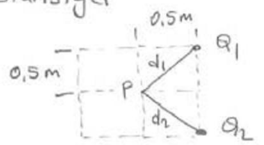
$Q_1 = +1\,\text{pC}$, $Q_2 = -10\,\text{pC}$ nokta yükleri ve $\rho_\ell = +10\,\text{pC/m}$ düzgün yük yoğunluğuna sahip bir çizgi yük dağılımı havada kenar uzunluğu 1m olan bir kare oluşturacak şekilde yerleştirilmiştir. Karenin merkezinde (P noktasında) skaler elektrik potansiyeli bulunuz.

P noktasındaki skaler elektrik potansiyel

$$V_P = V_{Q_1} + V_{Q_2} + V_{\rho_\ell}$$

Q_1 ve Q_2 yüklerinin P noktasında oluşturduğu potansiyel

$$V_Q = V_{Q_1} + V_{Q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{d_1} + \frac{Q_2}{d_2}\right)$$

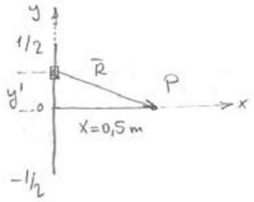


$$V_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{10^{-12}}{0{,}707} + \frac{-10.10^{-12}}{0{,}707}\right)$$

$$d_1 = d_2 = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2} = 0{,}707\ (\text{m})$$

$$\underline{V_Q = -0{,}115\ \text{V}}$$

Çizgi yük dağılımının P noktasında oluşturduğu potansiyel



$$V_{\rho_\ell} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{L'} \frac{\rho_\ell}{R}\, d\ell'$$

$$d\ell' = dy'$$
$$\bar{R} = \hat{a}_x x - \hat{a}_y y'$$
$$R = |\bar{R}| = \sqrt{x^2 + y'^2}$$

$$V_{\rho_\ell} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dy'}{\sqrt{x^2 + y'^2}}$$

$$V_{\rho_\ell} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left|y' + \sqrt{x^2 + y'^2}\right|\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left|0{,}5 + \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2}\right| - \ln\left|-0{,}5 + \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2}\right|\right]$$

$$V_{\rho_\ell} = \frac{10.10^{-12}}{4\pi\varepsilon_0}\left[0{,}188 + 1.575\right]$$

$$\underline{V_{\rho_\ell} = 0{,}159\ \text{V}}$$

P noktasındaki skaler elektrik potansiyel

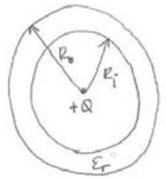
$$V_P = -0{,}115 + 0{,}159$$

$$\boxed{V_P = 44\ (\text{mV})}$$

3. İç yarıçapı R_i ve dış yarıçapı R_0 olan küresel dielektrik kabuğun merkezinde pozitif Q nokta yükü bulunmaktadır. Kabuğun dielektrik sabiti ε_r 'dir.

a) Her yerdeki elektrik yerdeğiştirme $(\vec{\mathbf{D}})$ ve elektrik alan şiddetini $(\vec{\mathbf{E}})$ Gauss yasasını kullanarak bulunuz.

b) Kutuplanma vektörü $(\vec{\mathbf{P}})$, eşdeğer kutuplanma yüzey (ρ_{ps}) ve hacim (ρ_{pv}) yük yoğunluklarını ve toplam eşdeğer yükü bulunuz.



(a) Gauss Yasası ; $\oint_S \overline{D} \cdot \overline{ds} = Q$

Elektrik yerdeğiştirme $\overrightarrow{D}$

$R < R_i$, $R > R_o$ ve $R_i < R < R_o$ için

$$\iint (\hat{a}_R D_R) \cdot (\hat{a}_R R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi) = Q$$

$$R^2 D_R \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = Q \Rightarrow D_R = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$\boxed{\overrightarrow{D} = \hat{a}_R \frac{Q}{4\pi R^2}}$$

Elektrik alan şiddeti $\overline{E}$

$R < R_i$ ve $R > R_o$ için

$$\overrightarrow{E} = \frac{\overrightarrow{D}}{\varepsilon_o} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{E} = \hat{a}_R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2}}$$

$R_i < R < R_o$ için

$$\overline{E} = \frac{\overline{D}}{\varepsilon_o \varepsilon_r} \Rightarrow \boxed{\overline{E} = \hat{a}_R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r R^2}}$$

(b) Kutuplanma vektörü $\overrightarrow{P}$

$R_i < R < R_o$ için

$$\overrightarrow{P} = \overline{D} - \varepsilon_o \overline{E}$$

$$\overrightarrow{P} = \hat{a}_R \left[\frac{Q}{4\pi R^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_r R^2} \right]$$

$$\boxed{\overrightarrow{P} = \hat{a}_R \frac{Q}{4\pi R^2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)}$$

Eşdeğer kutuplanma yüzey yük yoğunluğu

$$\rho_{ps} = \overrightarrow{P} \cdot \hat{a}_n$$

Kabuğun iç yüzeyinde $(R = R_i)$

$$(\rho_{ps})_{iç} = \overrightarrow{P} \cdot (-\hat{a}_R)$$

$$\boxed{(\rho_{ps})_{iç} = -\frac{Q}{4\pi R_i^2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)}$$

Kabuğun dış yüzeyinde $(R = R_o)$

$$(\rho_{ps})_{dış} = \overrightarrow{P} \cdot \hat{a}_R$$

$$\boxed{(\rho_{ps})_{dış} = \frac{Q}{4\pi R_o^2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)}$$

Eşdeğer kutuplanma hacim yük yoğunluğu

$$\rho_{pv} = -\overline{\nabla} \cdot \overline{P} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 P_R)$$

$$\rho_{pv} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^2 \frac{Q}{4\pi R^2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \right]$$

$$\boxed{\rho_{pv} = 0 \quad (C/m^3)}$$

Toplam eşdeğer yük :

$$\text{Toplam yük} = \oint_S \rho_{ps}\, ds + \int_V \rho_{pv}\, dv \qquad dv = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dR$$

$$ds = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\oint_S \rho_{ps}\, ds = \int_{\substack{\text{Kabuk}\\ \text{iç yüzeyi}}} \rho_{ps}\, ds + \int_{\substack{\text{Kabuk}\\ \text{dış yüzeyi}}} \rho_{ps}\, ds.$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -\frac{Q}{4\pi R_i^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right) R_i^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{Q}{4\pi R_o^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right) R_o^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

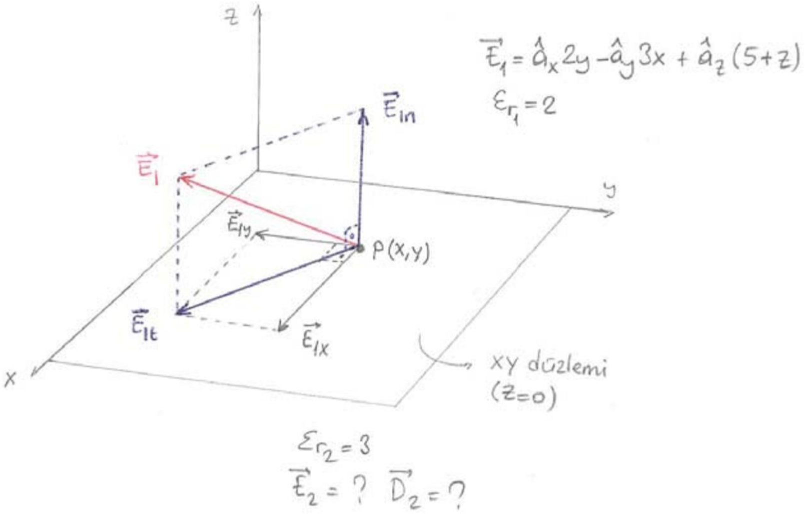
$$= -Q\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right) + Q\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

$$= 0$$

$$\int_V \rho_{pv}\, dv = 0$$

$$\boxed{\text{Toplam yük} = 0 \quad (C)}$$

4. xy düzlemi, dielektrik sabitleri $\varepsilon_{r1} = 2$ ve $\varepsilon_{r2} = 3$ olan iki kayıpsız dielektrik bölgeyi birbirinden ayırmaktadır. Birinci bölgedeki elektrik alan $\vec{\mathbf{E}}_1 = \hat{\mathbf{a}}_x 2y - \hat{\mathbf{a}}_y 3x + \hat{\mathbf{a}}_z (5+z)$ olarak biliniyorsa ikinci bölgedeki elektrik alan şiddeti $(\vec{\mathbf{E}}_2)$ ve elektrik yerdeğiştirmeyi $(\vec{\mathbf{D}}_2)$ hesaplayınız.



İki kayıpsız dielektrik bölgenin arayüzü olan xy düzleminde (z=0 düzlemi)

$$\vec{E}_1 = \underbrace{\hat{a}_x 2y - \hat{a}_y 3x}_{\vec{E}_{1t}} + \underbrace{\hat{a}_z 5}_{\vec{E}_{1n}} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{E}_{1t} = \hat{a}_x 2y - \hat{a}_y 3x \\ \vec{E}_{1n} = \hat{a}_z 5 \end{array}$$

$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}} \Rightarrow \vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t} = \hat{a}_x 2y - \hat{a}_y 3x$$

$$\boxed{D_{1n} - D_{2n} = \rho_s} \Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$$

$$\vec{D}_{2n} = \vec{D}_{1n} = \varepsilon_1 \vec{E}_{1n} = \varepsilon_{r_1} \varepsilon_0 \vec{E}_{1n} = 2\varepsilon_0 (\hat{a}_z 5) = \hat{a}_z 10\varepsilon_0$$

$$\vec{E}_{2n} = \frac{\vec{D}_{2n}}{\varepsilon_2} = \frac{\vec{D}_{2n}}{\varepsilon_{r_2}\varepsilon_0} = \frac{\vec{D}_{2n}}{3\varepsilon_0} = \frac{1}{3\varepsilon_0}(\hat{a}_z 10\varepsilon_0) = \hat{a}_z \frac{10}{3}$$

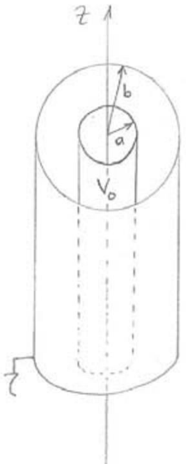
$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{2t} + \vec{E}_{2n}$$

$$\boxed{\vec{E}_2 = \hat{a}_x 2y - \hat{a}_y 3x + \hat{a}_z \frac{10}{3}}$$

$$\vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2 = \varepsilon_{r_2}\varepsilon_0 \vec{E}_2 = 3\varepsilon_0 \vec{E}_2$$

$$\boxed{\vec{D}_2 = \varepsilon_0 (\hat{a}_x 6y - \hat{a}_y 9x + \hat{a}_z 10)}$$

5. Uzun eş eksenli bir silindirik yapının iç ve dış iletkenlerinin yarıçapları sırasıyla a ve b'dir. İç iletkenin potansiyeli V_0, dış iletkeni ise topraklanmıştır. Laplace denklemini çözerek $a \le r \le b$ bölgesindeki elektrik potansiyel V(r)'yi bulunuz. V(r)'yi kullanarak iletkenler üzerindeki yüzey yük yoğunluklarını ve yapının birim uzunluk başına kapasitansını belirleyiniz.



$a \le r \le b$ bölgesinde $V(r) = ?$

$\nabla^2 V = 0$ Laplace denklemi

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V(r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cancelto{0}{\frac{\partial^2 V(r)}{\partial \phi^2}} + \cancelto{0}{\frac{\partial^2 V(r)}{\partial z^2}} = 0$$ Silindirik koordinatlarda

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV(r)}{dr}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dV(r)}{dr}\right) = 0$$

$$r\frac{dV(r)}{dr} = C_1 \Rightarrow \frac{dV(r)}{dr} = \frac{C_1}{r} \Rightarrow V(r) = C_1 \ln(r) + C_2$$

Sınır değerleri kullanılarak C_1 ve C_2 bulunur:

$r=a$ için $V(a)=V_0 \Rightarrow V_0 = C_1 \ln(a) + C_2 \;/(-)$

$r=b$ için $V(b)=0 \Rightarrow \;+\; 0 = C_1 \ln(b) + C_2$

$$-V_0 = C_1\left(\ln(b) - \ln(a)\right) \Rightarrow C_1 = -\frac{V_0}{\ln(b/a)}$$

$$C_2 = -C_1 \ln b = \frac{V_0 \ln(b)}{\ln(b/a)}$$

$$V(r) = -\frac{V_0 \ln(r)}{\ln(b/a)} + \frac{V_0 \ln(b)}{\ln(b/a)} \Rightarrow \boxed{V(r) = V_0\frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}}$$

Yüzey yük yoğunluklarını bulabilmek için $\vec{E}$'nin bilinmesi gerekir:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{a}_r\frac{\partial V(r)}{\partial r} - \hat{a}_\phi\frac{1}{r}\cancelto{0}{\frac{\partial V(r)}{\partial \phi}} - \hat{a}_z\cancelto{0}{\frac{\partial V(r)}{\partial z}}$$

$$\vec{E} = -\hat{a}_r\frac{d}{dr}\left[V_0\frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}\right] = -\hat{a}_r\frac{V_0}{\ln(b/a)}\underbrace{\frac{d}{dr}\left(\ln\frac{b}{r}\right)}_{-\frac{1}{r}} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \hat{a}_r\frac{V_0}{r\ln(b/a)}}$$

İletken-boş uzay arayüzündeki sınır şartlarından faydalanılarak ρ_s bulunabilir.

$$E_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho_s = \varepsilon_0 E_n$$

iç iletken için yüzey yük yoğunluğu; $E_n = \vec{E}\cdot\hat{a}_n \quad \hat{a}_n = \hat{a}_R \,,\; r=a$

$$E_n = \vec{E}\cdot\hat{a}_R = \frac{V_0}{a\ln(b/a)}$$

$$\boxed{\rho_s = \varepsilon_0 E_n = \frac{\varepsilon_0 V_0}{a\ln(b/a)}}$$

Dış iletken için yüzey yük yoğunluğu ; $E_n = \bar{E} \cdot \hat{a}_n$, $\hat{a}_n = -\hat{a}_R$, $r = b$

$$E_n = \bar{E} \cdot (-\hat{a}_R) = -\frac{V_0}{b \ln(b/a)}$$

$$\boxed{\rho_s = \varepsilon_0 E_n = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{b \ln(b/a)}}$$

Kapasitansı bulmak için iç iletken üzerindeki toplam yük hesaplanmalı. (uzunluk L kabul edilerek)

$$Q = \int_s \rho_s ds = \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon_0 V_0}{a \ln(b/a)} a \, d\phi \, dz = \frac{2\pi \varepsilon_0 V_0 L}{\ln(b/a)}$$

Kapasitans (L uzunluğu için)

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{2\pi \varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

Kapasitans (birim uzunluk başına)

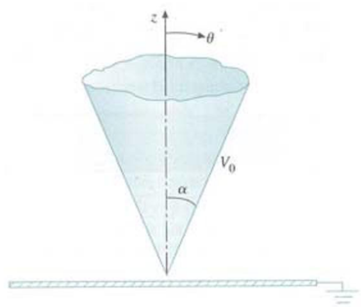
$$\boxed{C_\ell = \frac{C}{L} = \frac{2\pi \varepsilon_0}{\ln(b/a)}}$$

6. Yarı açısı α olan, sonsuz uzunluktaki bir koni V_0 potansiyelinde tutulmaktadır ve şekilde gösterildiği gibi topraklanmış bir iletken plakadan izole edilmiştir. Aşağıdakileri belirleyiniz.

a) $\alpha < \theta < \pi/2$ bölgesindeki potansiyel dağılımı $V(\theta)$,

b) $\alpha < \theta < \pi/2$ bölgesindeki elektrik alan şiddeti,

c) Koni yüzeyindeki ve topraklanmış düzlemdeki yük yoğunlukları



a) $\nabla^2 V = 0$ Laplace denklemi

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(\cancel{R^2 \frac{\partial V(\theta)}{\partial R}}\right) + \frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\cancel{\frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial \phi^2}} = 0 \quad \text{Küresel Koord.}$$

$$\frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta}\right) = 0$$

$$\sin\theta \frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta} = C_1 \Rightarrow \frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta} = \frac{C_1}{\sin\theta} \Rightarrow V(\theta) = C_1 \ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) + C_2$$

Sınır değerleri kullanılarak C_1 ve C_2 bulunur.

$\theta = \alpha$ için $V(\alpha) = V_0 \Rightarrow V_0 = C_1 \ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right) + C_2$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ için $V(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \underbrace{\ln\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)}_{=0} + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

$$C_1 = \frac{V_0}{\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\boxed{V(\theta) = \frac{V_0}{\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)} \ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)}$$

b) Elektrik Alan şiddeti ;

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\hat{a}_R \cancel{\frac{\partial V(\theta)}{\partial R}}^{0} - \hat{a}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta} - \hat{a}_\phi \frac{1}{R\sin\theta} \cancel{\frac{\partial V(\theta)}{\partial \phi}}^{0}$$

$$\vec{E} = -\hat{a}_\theta \frac{1}{R} \frac{V_0}{\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)} \underbrace{\frac{d}{d\theta}\left(\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)\right)}$$

$$\frac{\frac{d}{d\theta}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)}{\tan\frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\tan\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\hat{a}_\theta \frac{V_0}{\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right) R\sin\theta}}$$

Hatırlatma :

$$\ln\left(f(x)\right)' = \frac{f(x)'}{f(x)} \qquad \tan\left(f(x)\right)' = \frac{f(x)'}{\cos^2 f(x)}$$

c) İletken – boş uzay arayüzünde sınır şartları ;

$$E_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho_s = \varepsilon_0 E_n$$

Koni yüzeyinde yüzey yük yoğunluğu;

$$E_n = \vec{E} \cdot \hat{a}_n \ , \quad \hat{a}_n = \hat{a}_\theta \ , \quad \theta = \alpha$$

$$E_n = \vec{E} \cdot \hat{a}_\theta = -\frac{V_0}{\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right) R\sin\alpha}$$

$$\boxed{\rho_s = \varepsilon_0 E_n = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right) R\sin\alpha}}$$

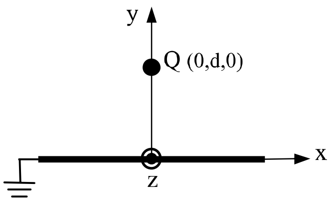
Topraklanmış düzlemde yüzey yük yoğunluğu :

$$E_n = \vec{E} \cdot \hat{a}_n \ , \quad \hat{a}_n = -\hat{a}_\theta \ , \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$E_n = \vec{E} \cdot (-\hat{a}_\theta) = \frac{V_0}{\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right) R}$$

$$\boxed{\rho_s = \varepsilon_0 E_n = \frac{\varepsilon_0 V_0}{\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right) R}}$$

7.



Bir pozitif Q nokta yükü, topraklanmış çok geniş bir iletken plakadan d kadar yukarıya şekilde gösterildiği biçimde yerleştirilmiştir. Sonsuz iletken düzlem yüzeyinde indüklenen toplam yükü bulunuz.

$$\rho_s = \frac{-Q\,d}{2\pi\,(x^2+d^2+z^2)^{3/2}} \qquad \text{(Örnek 3.24' de ulaşılan sonuç.)}$$

<u>I. yol (Kartezyen koordinatlarda çözüm)</u>

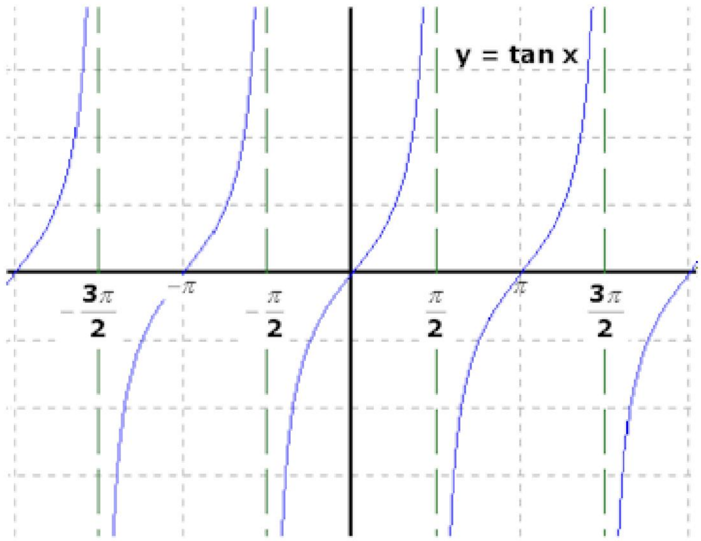
$$Q_T = \int_S \rho_s\, ds = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-Q\,d}{2\pi(x^2+d^2+z^2)^{3/2}}\,dx\,dz$$

$$Q_T = \frac{-Q\,d}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+d^2+z^2)^{3/2}}\right]dz = \frac{-Q\,d}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{x}{(z^2+d^2)(x^2+d^2+z^2)^{1/2}}\right]_{-\infty}^{\infty}dz$$

$$Q_T = \frac{-Q\,d}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{(z^2+d^2)\left(1+\frac{d^2}{x^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)^{1/2}}\right]_{-\infty}^{\infty}dz = \frac{-Q\,d}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{(z^2+d^2)}-\frac{-1}{(z^2+d^2)}\right]dz$$

$$Q_T = \frac{-Q\,d}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(z^2+d^2)} = \frac{-Q\,d}{\pi}\left[\frac{1}{d}\tan^{-1}\frac{z}{d}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{-Q}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

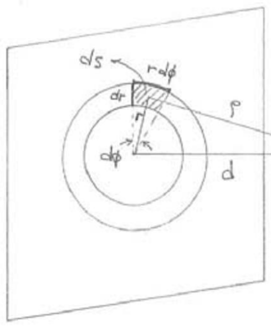
$$\boxed{Q_T = -Q}$$



Hatırlatma:

$$\int \frac{dx}{(c^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{c^2(c^2+x^2)^{1/2}} \qquad\qquad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

2. yol (Silindirik koordinatlarda çözüm)



$$\rho_s = \frac{-Qd}{2\pi (x^2+d^2+z^2)^{3/2}}$$ ifadesi

$x^2+z^2=r^2$ olduğu dikkate alınarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$\rho_s = \frac{-Qd}{2\pi (r^2+d^2)^{3/2}}$$

$$Q_T = \int_s \rho_s \, ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{-Qd}{2\pi (r^2+d^2)^{3/2}} \, r dr d\phi$$

$$Q_T = -Qd \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(r^2+d^2)^{3/2}} = -Qd \left[\frac{-1}{(r^2+d^2)^{1/2}} \right]_0^{\infty} = -Qd\left(0-\left(-\frac{1}{d}\right)\right)$$

$$\boxed{Q_T = -Q}$$

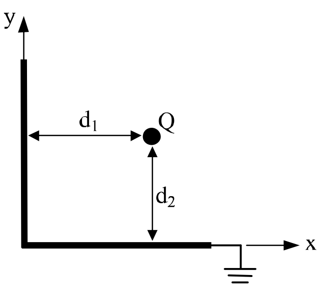
Hatırlatma:

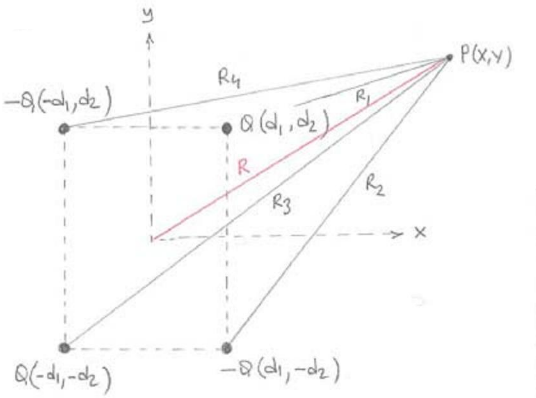
$$\int \frac{x\,dx}{(c^2+x^2)^{3/2}} = \frac{-1}{(c^2+x^2)^{1/2}}$$

8. Bir pozitif Q nokta yükü, birbirine dik yerleştirilmiş ve topraklanmış iletken yarı düzlemlerden d_1 ve d_2 kadar uzağa şekilde gösterildiği gibi yerleştirilmiştir.

a) Gelişigüzel bir P(x,y) noktasındaki potansiyel ve elektrik alan şiddetini

b) İki yarı düzlemde indüklenen yüzey yük yoğunluklarını bulunuz.





a) P noktası xy düzleminde (z=0 düzlemi)

P noktasında 4 nokta yükün oluşturduğu potansiyel ;

$$\boxed{\begin{aligned} V_P &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_4}\right)\\ R_1 &= \left[(x-d_1)^2+(y-d_2)^2\right]^{1/2}\\ R_2 &= \left[(x-d_1)^2+(y+d_2)^2\right]^{1/2}\\ R_3 &= \left[(x+d_1)^2+(y+d_2)^2\right]^{1/2}\\ R_4 &= \left[(x+d_1)^2+(y-d_2)^2\right]^{1/2}\end{aligned}}$$

P noktasında Elektrik Alan Şiddeti $\vec{E}$;

$$\vec{E}_P = -\vec{\nabla} V_P = -\hat{a}_x\frac{\partial V_P}{\partial x} - \hat{a}_y\frac{\partial V_P}{\partial y} - \hat{a}_z\cancelto{0}{\frac{\partial V_P}{\partial z}} \quad \text{(Kartezyen koordinatlarda)}$$

$$\frac{\partial V_P}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\left[(x-d_1)^2+(y-d_2)^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[(x-d_1)^2+(y+d_2)^2\right]^{1/2}} + \frac{1}{\left[(x+d_1)^2+(y+d_2)^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[(x+d_1)^2+(y-d_2)^2\right]^{1/2}}\right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{-\frac{1}{2}[\quad]^{-1/2}\left(2(x-d_1)\right)}{[\quad]} - \frac{-\frac{1}{2}[\quad]^{-1/2}\left(2(x-d_1)\right)}{[\quad]} + \frac{-\frac{1}{2}[\quad]^{-1/2}\left(2(x+d_1)\right)}{[\quad]} - \frac{-\frac{1}{2}[\quad]^{-1/2}\left(2(x+d_1)\right)}{[\quad]}\right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{(x-d_1)}{\left[(x-d_1)^2+(y-d_2)^2\right]^{3/2}} + \frac{(x-d_1)}{\left[(x-d_1)^2+(y+d_2)^2\right]^{3/2}} - \frac{(x+d_1)}{\left[(x+d_1)^2+(y+d_2)^2\right]^{3/2}} + \frac{(x+d_1)}{\left[(x+d_1)^2+(y-d_2)^2\right]^{3/2}}\right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{(x-d_1)}{R_1^3} + \frac{(x-d_1)}{R_2^3} - \frac{(x+d_1)}{R_3^3} + \frac{(x+d_1)}{R_4^3}\right]$$

$$\frac{\partial V_p}{\partial y} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{(y-d_2)}{R_1^3} + \frac{(y+d_2)}{R_2^3} - \frac{(y+d_2)}{R_3^3} + \frac{(y-d_2)}{R_4^3}\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}_p = &-\hat{a}_x \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{x-d_1}{R_1^3} + \frac{x-d_1}{R_2^3} - \frac{x+d_1}{R_3^3} + \frac{x+d_1}{R_4^3}\right] \\ &-\hat{a}_y \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{y-d_2}{R_1^3} + \frac{y+d_2}{R_2^3} - \frac{y+d_2}{R_3^3} + \frac{y-d_2}{R_4^3}\right]\end{aligned}}$$

b) İletken plaka yüzeylerindeki yüzey yük yoğunluğu için sınır koşulları kullanılarak çözüm yapılabilir.

$$E_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon} \Rightarrow \rho_s = \varepsilon E_n$$

$\Rightarrow$ X-eksenindeki iletken yarı düzlem üzerindeki ρ_s.

$$E_n = \vec{E}\cdot\hat{a}_n \;,\quad \hat{a}_n = \hat{a}_y \;,\quad y=0$$

$$E_n = \vec{E}\cdot\hat{a}_y \;,\quad \rho_s = \varepsilon\,\vec{E}\cdot\hat{a}_y$$

$$\rho_s = -\frac{Q}{4\pi}\left[\frac{d_2}{[(x-d_1)^2+d_2^2]^{3/2}} + \frac{d_2}{[(x-d_1)^2+d_2^2]^{3/2}} - \frac{d_2}{[(x+d_1)^2+d_2^2]^{3/2}} - \frac{d_2}{[(x+d_1)^2+d_2^2]^{3/2}}\right]$$

$$\boxed{\rho_s = -\frac{Q\,d_2}{2\pi}\left[\frac{1}{[(x-d_1)^2+d_2^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+d_1)^2+d_2^2]^{3/2}}\right]}$$

$\Rightarrow$ Y-eksenindeki iletken yarı düzlem üzerindeki ρ_s

$$E_n = \vec{E}\cdot\hat{a}_n \;,\quad \hat{a}_n = \hat{a}_x \;,\quad x=0$$

$$E_n = \vec{E}\cdot\hat{a}_x \;,\quad \rho_s = \varepsilon\,\vec{E}\cdot\hat{a}_x$$

$$\rho_s = -\frac{Q}{4\pi}\left[\frac{d_1}{[d_1^2+(y-d_2)^2]^{3/2}} - \frac{d_1}{[d_1^2+(y+d_2)^2]^{3/2}} - \frac{d_1}{[d_1^2+(y+d_2)^2]^{3/2}} + \frac{d_1}{[d_1^2+(y-d_2)^2]^{3/2}}\right]$$

$$\boxed{\rho_s = -\frac{Q\,d_1}{4\pi}\left[\frac{1}{[d_1^2+(y-d_2)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[d_1^2+(y+d_2)^2]^{3/2}}\right]}$$