- Sınav bayramdan sonra(?)
- 6. Hafta ... ders vize sınavı
- Vize Fourier dönüşümüne kadar.

İşaretler

İşaretler bilgi taşımalı (prizden gelen volt)
İşaret sürekli olmalı, analog (ayrık işaret algılamaz)

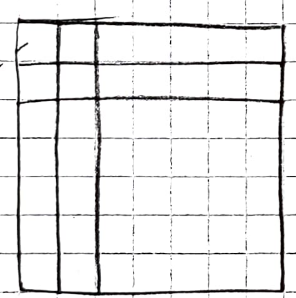
Bağımsız değişkene göre sınıflandırılır.

1) Ayrık-zaman işaret
2) Sürekli-zaman işaret

* 

p(h) → yükseklik
↳ basınç

basınç yükseklik
bağımsız yükseklik (h)
değişken basınç
1'den fazla bağımsız olabilir.

* 

Analog dijitale

megapiksel ↑ görüntü o kadar detay

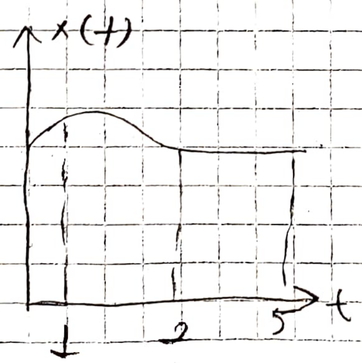
$\boxed{\cdot} \to I(x,y)$ $I(1,1)$ (x,y) koordinat $(1,1)$ piksel değeri

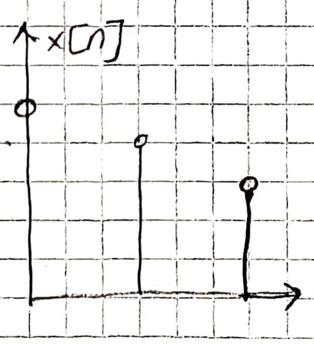
ışık şiddeti

2 boyutlu 0-255 $I_R(x,y)$ $I_G(x,y)$ $I_B(x,y)$

* $I(x,y,z) \to$ 3 boyutlu işaret

2) Sürekli-zaman işareti $x(t)$ $x[n]$





n (tamsayı olmak zorunda)

Date : ....../....../......

Enerji ve Güç İşareti

→ Sürekli-zaman işaretin $t_1 \le t < t_2$ aralığında enerjisi;

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad |.| \rightarrow \text{genlik}$$

Güç;

Birim zamanda ortalama enerji miktarı

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \rightarrow \text{işaretin gücü}$$

→ Ayrık zaman için;

$n_1 \le n \le n_2$ aralığında enerji

$$E = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

Güç;

$$P = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

60 ...

Mattas 6
Olasılık 6
Devre 8
Dalga 3

* $T \rightarrow \infty$ (sürekli-zaman aralığı için)

$$\vec{E} = E_\infty = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

$$P = P_\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(x)|^2 dt$$

sürekli — sürekli işaret ise bu, sürekli olup olmadığını ara.

* $N \rightarrow \infty$ (ekseni aralığı)

$$E = E_\infty = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

$$P = P_\infty = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |X[N]|^2$$

Ayrık — Ayrık işaret ise bu

* Enerji işaretli ise,

$E_\infty < \infty$ $P_\infty = 0$ → hesapla bu çıkarsa enerji işareti
Güç 0'sa enerji

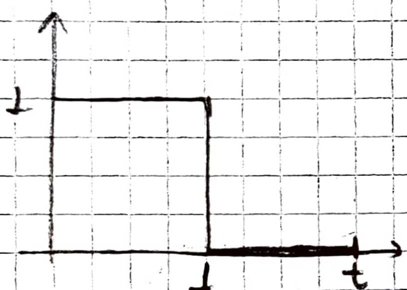
* Güç işareti ise,

$P_\infty < \infty$ $E_\infty = \infty$ → enerji ∞ olmalıdır.

ikisinde çıkmazsa bu 2 kategoriden geçer.

Örnek!

[0,1] kapalı aralığında değeri 1, diğer her yerde 0 (sıfır) olan, işaretin enerji işareti olup olmadığını inceleyiniz.



[0,1] aralığında sürekli zaman işareti formülleri kullan

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_0^1 1^2 dt = 1$$

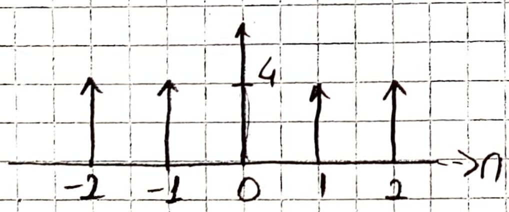
$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{1} |1|^2 dt = 0$$

$E_\infty = 1 < \infty$, $P_\infty = 0$ ⇒ Enerji işareti!

Örnek!

Tüm n değerleri için (n tamsayı) değeri 4 olan işaret güç işareti midir?

* n değerlerinin hepsi tamsayı o yüzden ayrık işaret



$$E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |\underbrace{x[n]}_{4}|^2 = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} \overbrace{|x[n]|^2}^{16}$$

$\hookrightarrow \sum_{0}^{2N}$ 2N+1 tane

16(2N+1)

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} (2N+1) \cdot 16 = 16$$

$16 < \infty$

Güç işareti!

Date: ...../...../.....

Bağımsız Değişken Dönüşümleri

1- Öteleme

2- Ölçekleme

3- Zamanda tersine çevirme

1. Öteleme

$x(t) \longrightarrow x(t-t_0)$ $\quad$ t_0, n_0 = öteleme miktarı

$x[n] \longrightarrow x[n-n_0]$

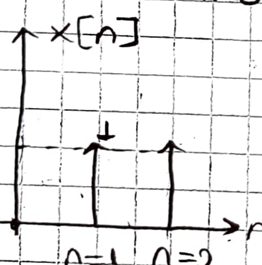
$t_0, n_0 < 0$ ise, $x(t+t_0)$, $x[n+n_0]$ → sola öteleme

$t_0, n_0 > 0$ ise, $x(t-t_0)$, $x[n-n_0]$ → sağa öteleme

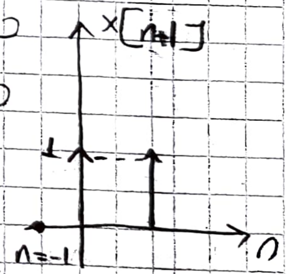
Örnek:

$x[n] = \{0, 1, 1\}$ ($\uparrow n=0$) veriliyor. $x[n+1]$ işaretini çiziniz.

aynısı ↓



$$x[n+1] = \begin{cases} n=-2 & x[-1]=0 \\ n=-1 & x[0]=0 \\ n=0 & x[1]=1 \\ n=1 & x[2]=1 \\ n=2 & x=0 \end{cases}$$



Sola 1 br ötelendi.

2. Ölçekleme:

$x(t) \longrightarrow x(\alpha t)$ $\quad$ $\alpha > 1 \Rightarrow$ işaret $\frac{1}{\alpha}$ oranında daralır.

$x[n] \longrightarrow x[\alpha n]$ $\quad$ $0 < \alpha < 1 \Rightarrow$ işaret $\frac{1}{\alpha}$ oranında genişler.

NOT: $x(t)$ işaretinden $x(\alpha t + \beta)$ işaretini elde edelim.

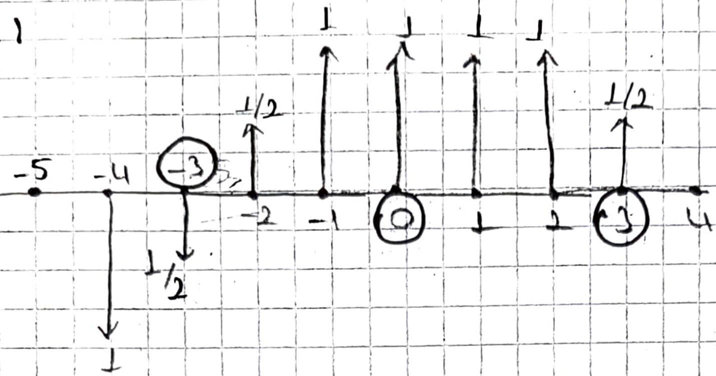
Eğer soruda üçüde varsa sırası ile öteleme, ölçekleme, zamanda ters çevirme şeklinde yapılmalıdır aksi halde yanlış çıkar.

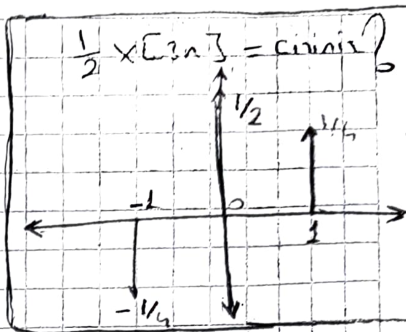
1-) Öteleme $\beta > 0$ $\beta < 0$.

2-) ölçekle $|\alpha| > 1$ daralt $0 < |\alpha| < 1$ genişlet.

Ayrık'ta tamsayı olmak zorunda, sürekli'de değil.

Örnek 1





x[n] işareti şekilde veriliyor. x[3n] işaretini çiziniz.

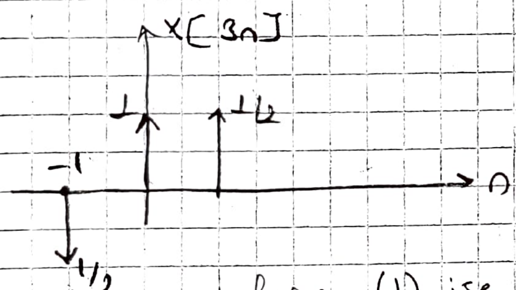
$x[3n] \Rightarrow \alpha = 3 \rightarrow \frac{1}{3}$ oranında daralır.

-3, 0, 3 'te tamsayı

$\alpha < 1$ $\frac{1}{\alpha}$ genişler

$\alpha > 1$ $\frac{1}{\alpha}$ daralır

$\frac{1}{3}n$



Burası (+) ise sola (-) ise sağa kayar.

b) x[3n+1] → önce 1 br sola ötele daha sonra ölçeklendir (tamsayıları)

3. Zamanda Tersine Çevirme

$x(t) \rightarrow x(-t)$

$x[n] \rightarrow x[-n]$

y eksenine göre simetri

~~$x(\frac{3}{2}t + \frac{1}{2})$~~
~~$x(\frac{3}{2}(t+1))$~~ ortak parantez alma!

Periyodik İşaret

sürekli'de → $x(t) = x(t+T)$ T = periyot (işaret T'de 1 tekrarlıyor)

veya

Ayrık'ta → $x[n] = x[n+N]$ oluyorsa N = periyot N_0 = En küçüğü temel periyottur.

işaret periyodiktir.

(Periyot tamsayı olmak zorunda!)

NOTE $x(t) = A\cos(w_0 t + \phi)$ ise bu işaretin periyodu $T_0 = \frac{2\pi}{|w_0|}$ temel periyodu

$x[n] = A.\cos[w_0 n + \phi]$ ise periyodu $N_0 = \frac{2\pi}{|w_0|} \cdot m$ 'dir. Burada m ve N_0 tam sayıdır.

$x(t) = x(t+3)$ → Periyodu 3'tür.

3, 6, 9 → periyot larıdır

Örnek!

a) $x(t) = 3\cos(4t + \pi/3)$ verilen işaret periyodik midir?

b) $x[n] = \cos(\frac{n}{8} - \pi)$ Periyodik ise ~~temel~~ periyodunu bulun.

sağlayan en küçüğü

a) $x(t+T) \overset{?}{=} x(t)$ ise periyodik

$3\cos(4t + 4T + \pi/3) \overset{?}{=} 3\cos(4t + \pi/3)$

$4T = 2\pi$

temel periyot demeseydi $4T = 2\pi k$ yazardık

$\boxed{T_0 = \frac{\pi}{2}}$ temel periyot.

b) $x[n+N] \overset{?}{=} x[n]$ → N tamsayı olmak zorunda

$\cos\left(\frac{n+N}{8} - \pi\right) \overset{?}{=} \cos\left(\frac{n}{8} - \pi\right)$

$\frac{N}{8} = 2\pi$

$N = 16\pi$

$\frac{N}{8} = 2\pi$

$N_0 = 16\pi$ (tamsayı değildir, periyodik değildir)

Tek ve Çift İşaretler

$x(t) = x(-t)$ veya $x[n] = x[-n]$ ise işaret çift, $x(t) = -x(-t)$ veya $x[n] = -x[-n]$ ise işaret tektir.

$x(t) = x_{tek}(t) + x_{çift}(t)$

$x_{çift}(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$

$x_{tek}(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$

ayrık zaman için de geçerli (n)

Örnek $x[n] = \sin\left(\frac{6\pi}{7}n + 1\right)$ varsa periyodunu bulunuz?

$w_0 = \frac{6\pi}{7}$ $\quad N = \frac{2\pi}{\frac{6\pi}{7}} \cdot m$

$N = \frac{7}{3} \cdot m$ $\quad \boxed{m = 3}$, $\boxed{N = 7}$ $\quad \boxed{N_0 = 7}$ → Temel periyot

Bir işaret zamanda ters çevrilmiş haline eşitse çift, ters çevrilmiş halinin negatifine eşitse tek işarettir denir.

$x(t) = x(-t)$	$x(t) = -x(-t)$
$x[n] = x[-n]$	$x[n] = -x[-n]$
ise çift	ise tektir.

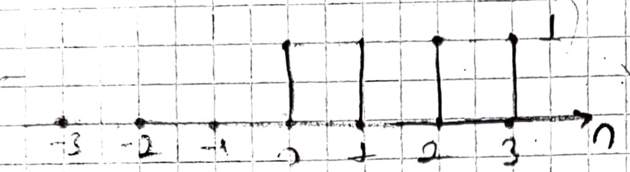
Bir işaretin tek ve çift parçası aşağıdaki eşitlikler kullanılarak hesaplanabilir.

$$\text{Çift}\{x(t)\} = \frac{1}{2}\{x(t) + x(-t)\}$$

$$\text{Tek}\{x(t)\} = \frac{1}{2}\{x(t) - x(-t)\}$$

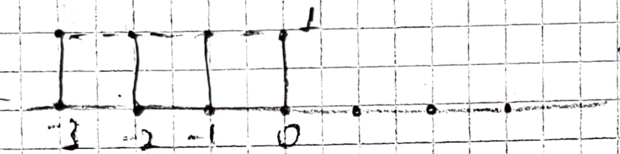
Örnek!

Yanda verilen işaretin tek ve çift parçalarını bulunuz.

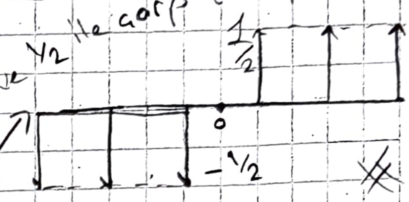


Topla

$x[-n]$

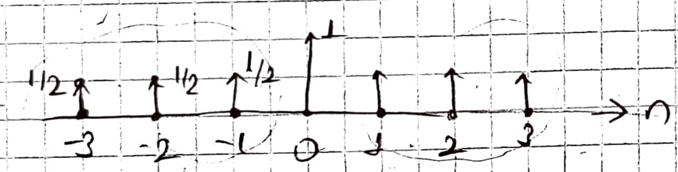


Çıkart ve $1/2$ ile çarp tek parçasını elde ettik.



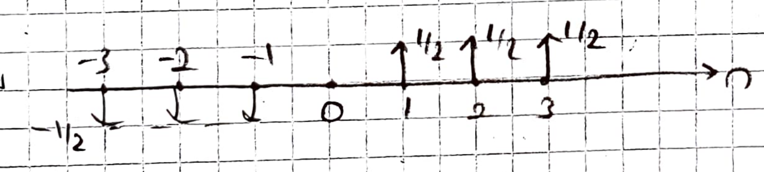
Sonuç

$x_ç[n]$



$1/2$ çarp

$x_t[n]$



⇒ Sağlaması

1) $x_ç[n] + x_t[n] = x[n]$ olmalı

2) $x_ç[n]$ y'ye göre simetrik olmalı,

$x_t[n]$ y'ye göre simetriğinin tersi olmalı.

Sürekli zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

$x(t) = C.e^{at}$ olsun.

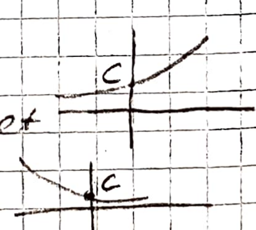
Durum 1: C ve a reel sayı olsun.

$x(t) = C.e^{at}$

$a = 0$ ise $x(t) = C$ DC işaret

$a > 0$ ise $x(t) = C.e^{at}$ artan üstel işaret

$a < 0$ ise azalan üstel işaret



Date :....../......./.......

Durum 2: C reel $a = j\omega_0$ olsun.
($C = 1$ olsun.)

$x(t) = C e^{at} = e^{j\omega_0 t}$ periyodik ise

$x(t+T) = x(t)$

$e^{j\omega_0 (t+T)} = e^{j\omega_0 t}$

$e^{j\omega_0 t} \cdot \underbrace{e^{j\omega_0 T}}_{1} = e^{j\omega_0 t}$

$e^{j\omega_0 T} = 1$ ise işaret periyodiktir.

$\underbrace{\cos(\omega_0 T)}_{1} + \cancel{j\sin(\omega_0 T)}^{0} = 1$

$\omega_0 T_0 = 2\pi$

$\boxed{T_0 = \dfrac{2\pi}{|\omega_0|}}$ Temel periyot $\quad T = \dfrac{2\pi}{|\omega_0|} \cdot k \quad \underset{\text{harmonik}}{k} = \mp 1, \mp 2, \ldots \infty$

↳ cos çift fonk. olduğu için mutlak

NOT:

$x(t) = A.\cos(\omega_0 t + \phi)$ işareti periyodik karmaşık üstel işaretlere yakından ilişkili sinüsoidal bir işarettir. Burada t'nin birimi saniye, ω_0'ın birimi radyan/sn, ϕ'nin birimi radyandır.

$\omega_0 = 2\pi . f_0$ → Hertz

Bu işaret periyodik olup temel periyodu $T_0 = \dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$ ile hesaplanır.

Örnek!

$\omega t = 4$ $\quad \omega = 4$ $\quad 2\pi f = 4$

$x(t) = 3\cos(4t + \pi/3)$ işaretinin periyodunu bulunuz.

$4 = A\cos(\omega_0 t + \phi)$

$\omega_0 = 4$

$T_0 = \dfrac{2\pi}{|\omega_0|} = \pi/2$

C ve a karmaşık sayı olsun.

Durum 3: $C = |C| e^{j\theta}$ ve $a = r + j\omega_0$ olsun.

$x(t) = C.e^{at} = |C|.e^{j\theta} e^{(r+j\omega_0)t}$

$= |C|.e^{j\theta}.e^{rt}.e^{j\omega_0 t}$

$= \underbrace{|C|.e^{rt}}_{\text{genlik}} \; e^{j(\omega_0 t+\theta)}$ (faz)

$T = \frac{2\pi k}{|\omega_0|}$, $\omega_0 = 2\pi f_0$ açısal frekans

$k=1$ ise temel periyot

$k=2,3...$ harmonik periyot

$r=0$ ise sabit genlikli sinüzoidal

$r>0$ ise artan " " (sönümsüz)

$r<0$ ise azalan " " (sönümlü)

Ayrık-zaman üstel sinüzoidal İşaretler

$\boxed{x[n] = C.\alpha^n}$ olsun.

Durum 1: C ve α reel olsun

$\boxed{x[n] = C.\alpha^n}$

Durum 2: $\alpha = e^{j\omega_0}$ ve C reel olsun.

$C=1$

$x[n] = C.\alpha^n = e^{j\omega_0 n}$ periyodik ise,

$x[n+N] = x[n]$

$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}$

$e^{j\omega_0 n}.e^{j\omega_0 N} = e^{j\omega_0 n}$

$e^{j\omega_0 N} = 1$ olmalı → $\omega_0 = 0$ DC işaret

↘ $\omega_0 \neq 0$ ise,

$e^{j\omega_0 N} = \cos(\omega_0 N) + j\sin(\omega_0 N) = 1$

$\omega_0 N = 2\pi k$

$N = \frac{2\pi k}{|\omega_0|}$ N tamsayı, k tamsayı

$\cos(\omega_0 N) + j\sin(\omega_0 N) = 1$

$\omega_0 N_0 = 2\pi$

$\boxed{N_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}}$ Temel periyot

$N = \frac{2\pi m}{|\omega_0|}$ (N ve m kesinlikle tamsayı)

$N_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$ Temel periyot

2π ile periyodik $m = 0,1,2 ... N-1$

periyot yok N tane

Örnek:

a) $x[n] = \sin\left(\frac{6\pi}{7}n + 1\right)$

b) $x[n] = \cos\left(\frac{n}{4} - \pi\right)$

işaretlerinin temel periyotlarını bulunuz

a) $A\cos(w_0 n + \phi)$

$w_0 = \frac{6\pi}{7}$

$N_0 = \frac{2\pi}{6\pi/7} \cdot m$

$N_0 = \frac{7}{3} m$

$m = 3$ $\boxed{N_0 = 7}$

Periyodu var.

b) $w_0 = \frac{1}{4}$

$N_0 = \frac{2\pi}{1/4} \cdot m$

$\underline{\underline{N_0}} = 8\pi m$

(m ve N_0 tamsayı olmadığından periyodik değildir)

Durum 3:

$x[n] = C . \alpha^n$

$C = |C| . e^{j\theta} . |\alpha|^n . e^{jw_0 n}$

$= \underbrace{|C| . |\alpha|^n}_{\text{genlik}} . e^{j\underbrace{(w_0 n + \theta)}_{\text{açı}}}$

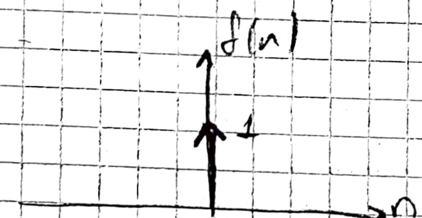
sinüsoidal işaret var (diğer 3 durumdan farkı ayrık olması)

$\alpha = 0$ ise sabit genlikli sinüsoidal işaret

$|\alpha| < 1$ ise azalan " " "

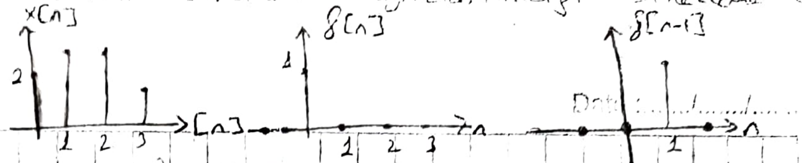
$|\alpha| > 1$ ise artan " " "

Ayrık zaman impuls ve basamak fonksiyonu



$\delta[n] = \begin{cases} n = 0, & 1 \\ n \neq 0, & 0 \end{cases}$

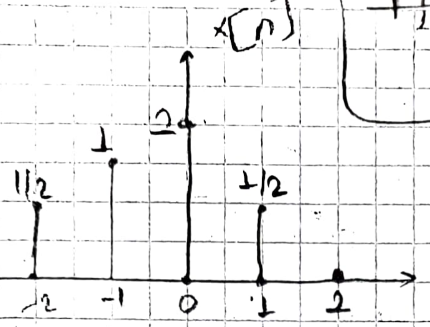
...ıs dersinin aşağıda verilen örnekleme özelliği doğrusal ve zamanla değişmeyen s... ...ların analizinde ve sürekli zaman işaretlerin ayrıklaştırıldığı örnekleme konusunda oldukça önemlidir.



$x[n]\cdot\delta[n] = x[0]$

$x[n]\cdot\delta[n-1] = x[1]$

$\boxed{x[n]\cdot\delta[n-n_0] = x[n_0]}$

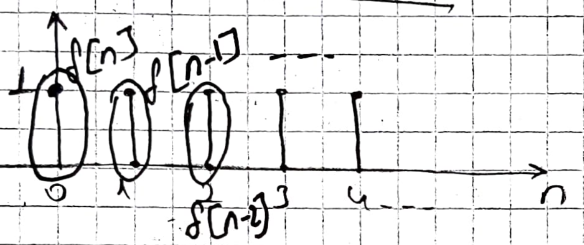


$x[-2] = x[n]\cdot\delta[n+2]$ $\quad n=-2$

$x[1] = x[n]\cdot\delta[n-1]$ $\quad n=1$

$$\boxed{x[n]\cdot\delta[n-n_0] = x[n_0]}$$

Basamak Dizisi ($u[n]$)

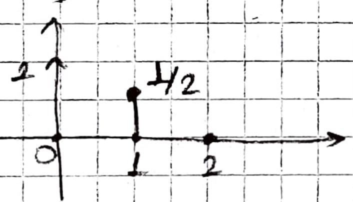


$$u[n] = \begin{cases} n\geq 0, & 1 \\ n<0, & 0 \end{cases}$$

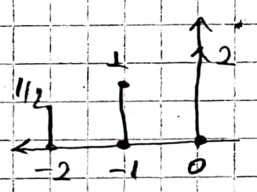
$$\boxed{u[n] = \sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k] \qquad \delta[n] = u[n]-u[n-1]}$$

Yukarıdaki örnekte;

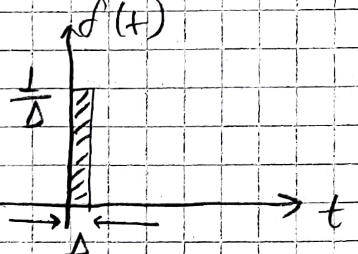
$x[n]\cdot u[n] =$



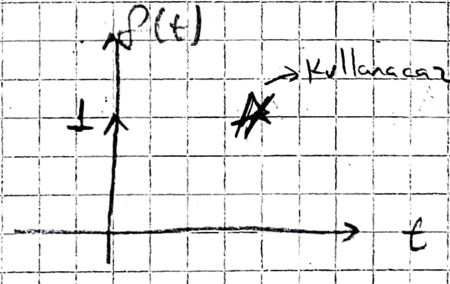
$x[n]\cdot u[-n] =$



Sürekli Zaman İmpuls ve Basamak Dizileri



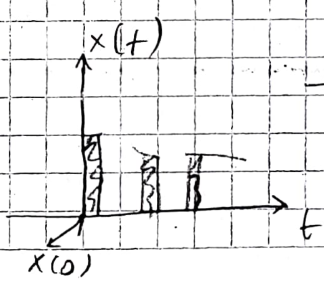
$\lim_{\Delta\to 0}$



→ Kullanacaz

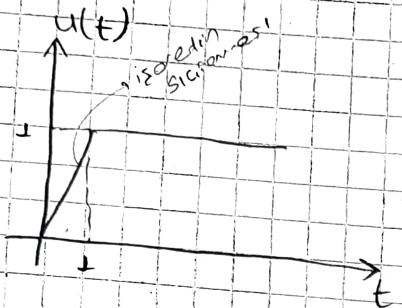
$$\boxed{x(t)\cdot\delta(t-t_0) = x(t_0)}$$

Örnekleme

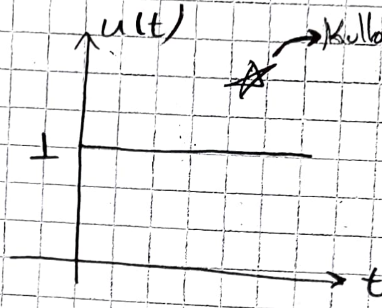


→ Sürekli zamanı impulsla çarparsak ayrık olur.

Basamak Dizisi $(u(t))$



lim



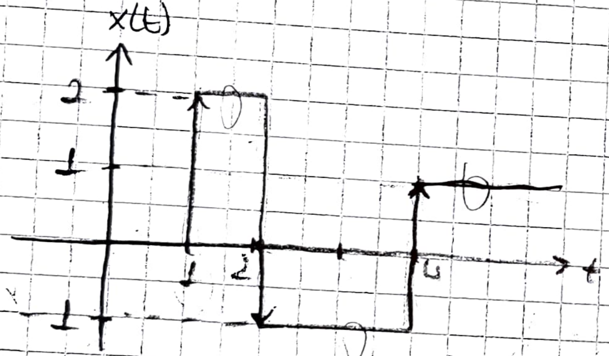
★ → Kullanacaz

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

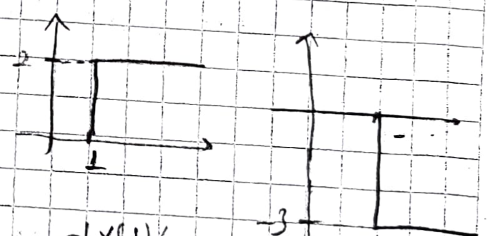
$$\boxed{\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}}$$

★ $u(t) = \int_0^{\infty} \delta(t-\tau)\, d\tau$

Örnek:



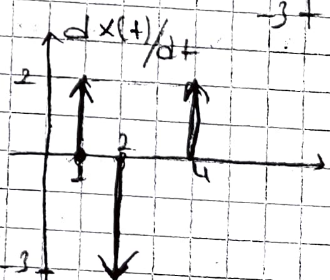
Şekilde verilen sürekli zaman işaretin türevini hesaplayınız ve çiziniz.



$$x(t) = 2u(t-1) - 3u(t-2) + 2u(t-4)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2\delta(t-1) - 3\delta(t-2) + 2\delta(t-4)$$

$$\boxed{\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)}$$



Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

$x[n]$ → sistem → $y[n]$

Ayrık-zaman işaret — Ayrık-zaman sistem — Ayrık-zaman işaret

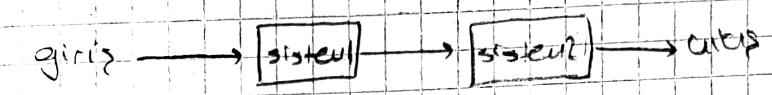
$x(t)$ → Sistem → $y(t)$

sürekli-zaman işaret — ADC ↳ Analog → dijital — sürekli-zaman işaret

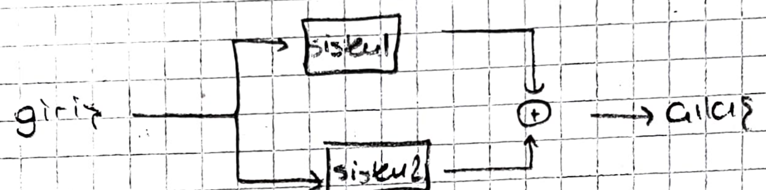
DAC ↳ dijital → analog

NOT:

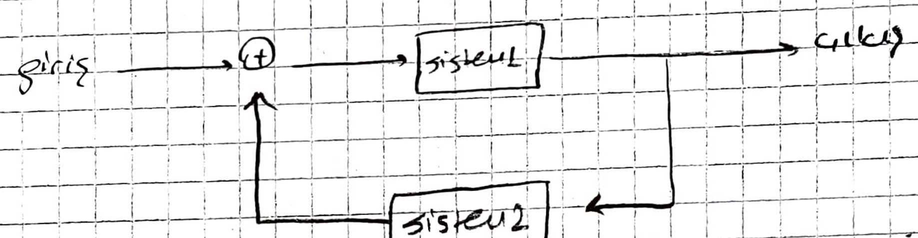
Sürekli-zaman sistemler diferansiyel denklemlerle ayrık-zaman sistemler fark denklemleri ile ifade edilirler.



seri



paralel



geri beslemeli

Sistemin Özellikleri

Bu bölümdeki amacımız bir sistemin girişi ile çıkışı arasındaki ilişkiyi inceleyerek 5 temel özelliği sağlayıp sağlamadığını tespit etmektir.

1) Hafızalı Sistem

Herhangi bir andaki çıkışı sadece o anki girişine bağlı olan sistemlere hafızasız sistem aksi halde hafızalı sistem denir.

① $y[n] = (2x[n] + 4x[n])^2$ → hafızasız → $x[n]$ bilindiğinde yeterli olacak depolama yok hafızasız.

② $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = \ldots x[-2] + x[-1] + x[0] + \ldots + x[n]$ → hafızalı, önceki değerleri hatırlamalıyım

③ $y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$ → hafızalı → bir önceki değer depolandığından

④ $y(t) = Rx(t)$ → hafızasız

x'ler giriş y'ler çıkış

$y[n] = 3x[n-1] + 2$ → hafızalı

$y(t) = x(t) + 3[x(t)]^2$ → hafızasız

$y[n-1] = 3x[n-1] + 2$ → hafızasız → neden yoksa bizden $(n-1)$ değerini istediğinden sebep ...

Date ....../....../......

2) Nedensel Sistem

$y[n] = 3(x[n-1])^2 \rightarrow$ Nedenseldir.

Bir sistemin çıkışı girişin o anki ve önceki değerlerini gerektiriyorsa geleceketeki değerlerini gerektirmiyorsa nedenseldir denir. Nedensellik incelenirken giriş ve çıkış dışındaki fonksiyonlar dikkate alınmaz.

① $y[n] = \sum_{k=-3}^{n} x[k]$ nedensel, hafızalı

$\rightarrow$ $x[n+1]$ olsaydı nedensel değildir.

② $y[n] = x[n] + 2x[n+1]$ nedensel değil

↳ hafızasız

$\rightarrow$ bir sonraki değeri istediğinden nedensel değil.

③ $y(t) = x(t+1)$ nedensel değil $\rightarrow$ Nedensel olmadığından hafızalı olması incelenemez hafızasız diyebiliriz.

④ $y(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$ nedensel, hafızalı

⑤ $y[n] = 2x[n] + 3(x[n-1])^2 + h[\cancel{n}+3]$ nedensel, hafızalı

↳ bu dikkate alınmaz. (harici fonksiyon)

3) Kararlı Sistem

Bir sisteme sınırlı giriş uygulandığında çıkışta sınırlı oluyorsa sistem kararlıdır. Aksi halde kararsızdır denir.

① $y[n] = \frac{1}{2m+1}\sum_{k=-m}^{m} x[n-k]$ kararlı, nedensel değil

② $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ kararsız

$\rightarrow$ $x[k]$ sınırlı yalnız n kez topladığından sınırsız olur.

③* $y(t) = t.x(t)$ kararsız ($x(t)=5$ gibi sınırlı olsa bile $y(t)$ sınırsız)

$\rightarrow$ $x(t)$ sınırlı yalnız t için birşey dönmemiş sınırsız olabilir.

?④ $y(t) = e^{x(t)}$ kararlı, nedensel, hafızasız

$|x(t)| < B$ olsun $e^{-B} < y(t) < e^{B}$

sınırlı   sınırlı

$|x[n]|, |x(t)| < B$

olduğunda kararlı haline bakarız

$x[n]$ ve $x(t)$'yi sınırlı varsayıp bakarız.

4) Zamanla Değişmeyen Sistem

Sistemin girişi n_0 kadar ötelendiğinde çıkışta aynı oranda öteleniyorsa sistem zamanla değişmeyen sistemdir.

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{sistem}} \rightarrow y[n]$$

$$x[n-n_0] \rightarrow \boxed{\text{sistem}} \rightarrow y[n-n_0]$$ oluyorsa zamanla değişmeyen sistemdir.

① $y(t) = \sin[x(t)]$

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{sinüs al}} \rightarrow y(t) = \sin[x(t)]$$

$$x(t-t_0) \rightarrow \boxed{\text{sinüs al}} \rightarrow \sin[x(t-t_0)] \overset{?}{=} y(t-t_0)$$

$$= \sin[x(t-t_0)]$$

↳ zamanla değişmez

② $y[n] = n \cdot x[n]$

$$x[n] \rightarrow \boxed{n \text{ ile çarp}} \rightarrow y[n]$$

$$x[n-n_0] \rightarrow \boxed{n \text{ ile çarp}} \rightarrow n \cdot x[n-n_0] \overset{?}{=} y(n-n_0)$$

$$\neq (n-n_0) \cdot x[n-n_0]$$

↳ zamanla değişir.

ÖRNEK $y(t)=t.x(t)$ doğrusalmıdır?

$x_1(t) \rightarrow \boxed{S} \rightarrow y_1(t)=t\,x_1(t)$

$x_2(t) \rightarrow \boxed{S} \rightarrow y_2(t)=t\,x_2(t)$

Subject: $ax_1(t)+b\,x_2(t) \rightarrow \boxed{S} \rightarrow y(t)=t\left[ax_1(t)+bx_2(t)\right]$

$y(t) \overset{?}{=} a y_1(t)+b y_2(t)$

$= a(x_1(t))+b(x_2(t))$

Eşit oldu doğrusaldır.

Date: ....../....../......

5) Doğrusal Sistem

$x_1[n] \longrightarrow y_1[n]$

$x_2[n] \longrightarrow y_2[n]$ ise,

$a.x_1[n]+b.x_2[n] \longrightarrow y[n]=a.y_1[n]+b.y_2[n]$ oluyorsa sistem doğrusaldır. Olmuyorsa doğrusal değildir.

① $y(t)=t.x(t)$

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t)=t.x_1(t)$

$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)=t.x_2(t)$

$ax_1(t)+bx_2(t) \longrightarrow y(t)=t.(ax_1(t)+bx_2(t)) \overset{?}{=} a.y_1(t)+b\,y_2(t)$

$\Rightarrow t.a.x_1(t)+t.b.x_2(t) \overset{?}{=} a.t.x_1(t)+b.t.x_2(t)$

doğrusaldır.

② $y(t)=x^2(t)$

$x_1(t) \rightarrow y_1(t)=x_1^2(t)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t)=x_2^2(t)$

$ax_1(t)+b\,x_2(t) \longrightarrow y(t)=[ax_1(t)+bx_2(t)]^2 \overset{?}{=} a.y_1(t)+b.y_2(t)$

$a^2x_1^2(t)+b^2x_2^2(t)+2abx_1(t)x_2(t) \neq a.x_1^2(t)+b.x_2^2(t)$

doğrusal değil

Örnek! (Artışsal Doğrusal Sistem)

$y[n]=2x[n]+3$ giriş çıkış ilişkisi verilen sistem doğrusal mıdır?

$x_1[n] \longrightarrow y_1[n]=2x_1[n]+3$

$x_2[n] \longrightarrow y_2[n]=2x_2[n]+3$

$ax_1[n]+b.x_2[n] \longrightarrow 2.(ax_1[n]+bx_2[n])+3 \overset{?}{=} a\,y_1[n]+b.y_2[n]$

$\neq a.(2x_1[n]+3)+b.(2x_2[n]+3)$

$y[n] \overset{?}{=} a.y_1[n]+b\,y_2[n]$

$=2a.x_1[n]+3a+2b.x_2[n]+3b$

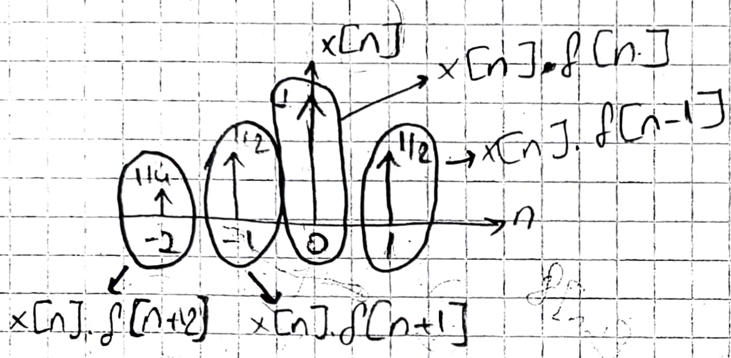
doğrusal değil $3 \neq 3a+3b$

doğrusal değil

NOT: Çıkışlar arasındaki fark girişler arasındaki farkın katı olan sistemlere artışsal doğrusal sistemler denir.

$$y_2[n] - y_1[n] = 2\,(\underbrace{x_2[n] - x_1[n]})$$

DOGRUSAL VE ZAMANLA DEĞİŞMEYEN SİSTEMLER (LTI)



LTI bir sistemin girişine uygulanan herhangi bir işareti temel bazı işaretlerin toplamı cinsinden yazabilirsek sistemin çıkışı temel işaretlere olan yanıtların toplamı olarak hesaplanabilir.

$$x[n] = \sum_{k=-2}^{1} x[k].\delta[n-k]$$

Genlik

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].\delta[n-k]$$

Genel olarak

$$x[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} x[k].\delta[n-k]$$

*** impuls cevabı

$$x[n] = \delta[n] \rightarrow \boxed{\text{sistem}} \rightarrow y[n] = \underbrace{h[n]}_{\text{impuls cevabı}}$$

impuls cevabı biliniyorsa,

$$\delta[n] \rightarrow \boxed{\text{sistem}} \rightarrow h[n]$$

LTI

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] \rightarrow \boxed{\text{sistem}} \rightarrow y[n] = ?$$

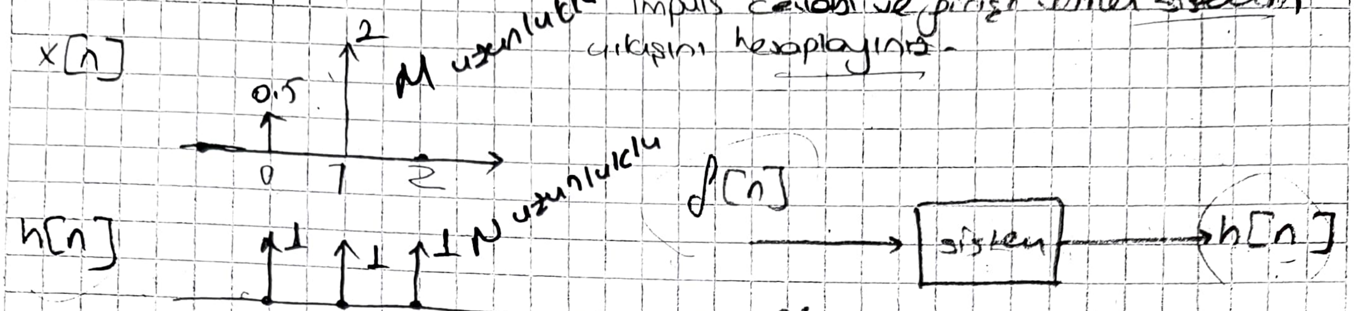
$$\boxed{y[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} x[k].h[n-k]}$$

Konvolüsyon Toplamı

Date : ....../....../......

ÖRNEK 1.

M uzunluklu impuls cevabı ve girişi verilen sistemin çıkışını hesaplayınız.



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$

$N+M-1$ uzunluklu

$$y[n] = \sum_{k=0}^{1} x[k] . h[n-k]$$

$$y[n] = \overset{0,5}{x[0]} . h[n] + \overset{2}{x[1]} h[n-1]$$

$$\boxed{y[n] = 0,5 . h[n] + 2 h[n-1]}$$

$n<0$, $y[n]=0$

$n=0$, $y[0] = 0,5 . h[0] + \cancel{2h[-1]}^{\,0} = 0,5$

$n=1$, $y[1] = 0,5 . h[1] + 2h[0] = 2,5$

$n=2$, $y[2] = 0,5\, h[2] + 2h[1] = 2,5$

$n=3$, $y[3] = 0,5\, h[3] + 2h[2] = 2$

$n \geq 4$, $y = 0$

→ istenen "0" old. indis içi toplamı "0" olmalıdır.

$\overset{0}{y[0]} = x[0]h[0] + x[1]h[-1]$ (toplamı 0, top. 0)

$\overset{1}{y[1]} = x[0]h[1] + x[1]h[0]$ (2, 1)

$y[2] = ...$

NOT: Konvolüsyon toplamı yapılırken aşağıdaki adımlar izlenir.

$N=2$ (N giriş eleman sayısı)

$M=3$ (M giriş eleman sayısı)

$y = N+M-1 = 4$ tane eleman gelir.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$

1) İlk önce $x[k]$ ve $h[n-k]$ işaretleri k'nın fonksiyonu olarak çizilir. ~~Bu~~ iki fonksiyon çarpılarak $g[k] = x[k]\, h[n-k]$ dizisi elde edilir.

1-) x ve h k'nın fonksiyonu olarak çizilir.

2-) H dizisi zaman ekseninde tersine çevrilerek $h[-k]$ elde edilir.

1) Daha sonra $g[k]$ olarak tüm k değerleri üzerinden toplanarak $y[n]$ bulunur.

3) Çıkışı bulmak için bu işlem tüm n değerleri için tekrarlanır.

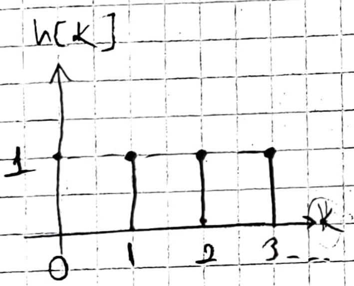
3-) $h[-k]$ işareti n birim ötelenerek konvolüsyon toplamı hesaplanır.

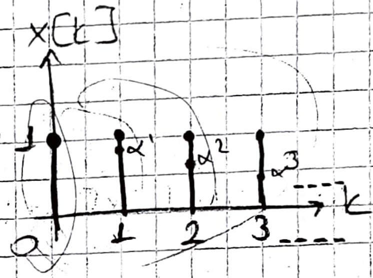
ÖRNEK:

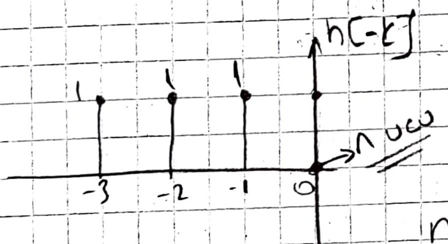
Bir ayrık-zaman LTI sistemin impuls cevabı

$h[n] = u[n]$ ve girişi $x[n] = \alpha^n u[n]$ $0<\alpha<1$

veriliyor. Sistemin çıkışını hesaplayınız.







$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$y[n]=0 \quad , n<0$

$n \geq 0 \quad y[0] = \alpha^0 \cdot 1$

$y[1] = \alpha^0 + \alpha^1$

$y[2] = \alpha^0 + \alpha^1 + \alpha^2$

$y[3] = \alpha^0 + \alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3$

$n<0 \quad y[n] = 0$

$n=0 \quad y[n]=0$

$n=1 \quad y[1] = 1 + \alpha^1$

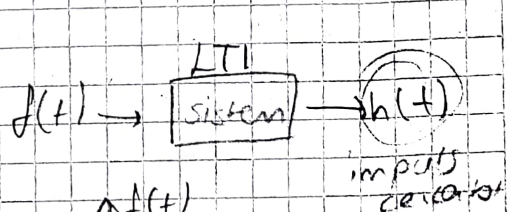
$n=2 \quad y[2] = 1 + \alpha^1 + \alpha^2$

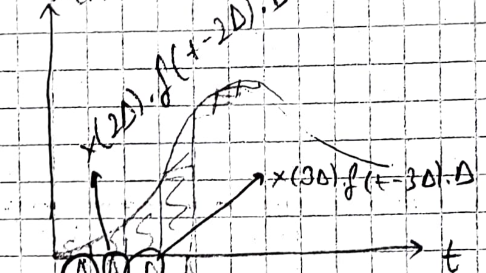
$n=3 \quad y[3] = 1 + \alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3$

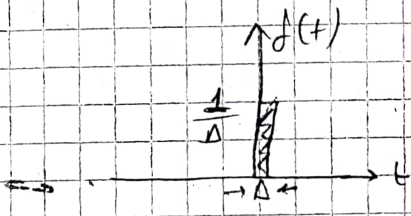
$$\boxed{y[n] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n}$$

$$= \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \quad \# \quad n \geq 0 \text{ için geçerli}$$

Sürekli-Zaman da Konvolüsyon





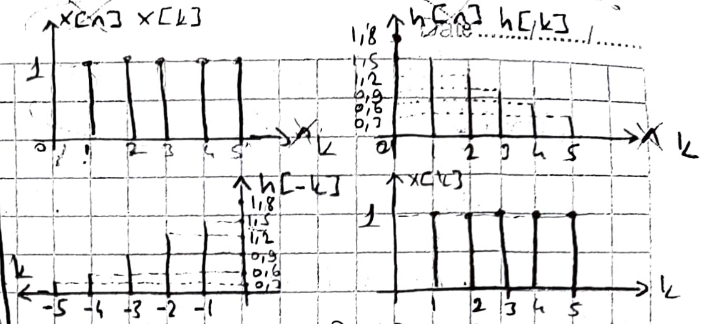


$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta).\delta(t-k\Delta).\Delta}$$

$$\lim x(t) \int^{\infty} x(\tau).\delta(t-\tau)d\tau$$

Konvolüsyon toplamı ile ilgili örnek 3 adımda yapılan sorudur. ⇒ LTI bir sistemin girişi ve impuls verilmiştir. Sistemin cevabını bulunuz.

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 5 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \qquad h[n] = \{$$



$h[k]$'yı sağa doğru kaydırarak $x[k]$ ile çalıştırıp sırayla çakışan değerleri topla.

$y[0] = h[0]\,x[0] = 1{,}8$

$y[1] = h[0].x[1] + h[1].x[0] = 1{,}8 + 1{,}\ldots = 3{,}\ldots$

$y[2] =$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta).\delta(t-k\Delta).\Delta$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\,h(t-k\Delta).\Delta$$

$\lim \Delta \to 0$

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).h(t-\tau)\,d\tau}$$ Konvolüsyon integrali

NOT:

1) İlk önce $x(\tau)$ ve $h(t-\tau)$ işaretleri τ değişkeninin fonksiyonu olarak çizilir. Bu iki fonksiyon çarpılarak $g(\tau) \triangleq x(\tau).h(t-\tau)$ fonksiyonu elde edilir.

2) $g(\tau)$ işaretinin integrali alınarak $y(t)$ bulunur.

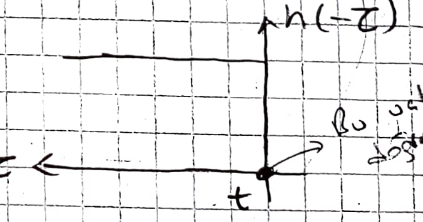
3) Bu işlem tüm t değerleri için tekrarlanır.

★ Örnek!

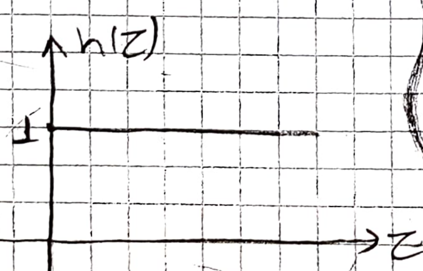
$h(t) = u(t)$, $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$

Sürekli-zaman LTI sistemin girişi ve impuls cevabı veriliyor. Sistemin çıkışını hesaplayınız.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).h(t-\tau)\,d\tau$$



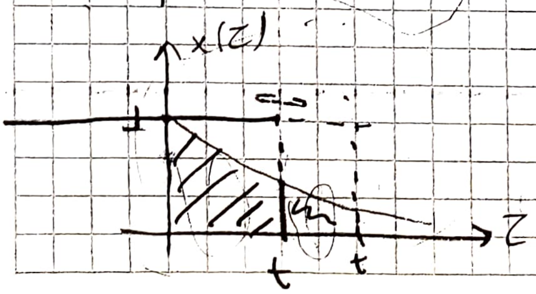
Bu uçtan tut x'e doğru ilerle.



$y(t) = 0$, $t < 0$

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau}.1.d\tau \, , \; t > 0$$

$$= -\frac{1}{a}e^{-a\tau}\Big|_0^t = -\frac{1}{a}(e^{-at} - 1)$$

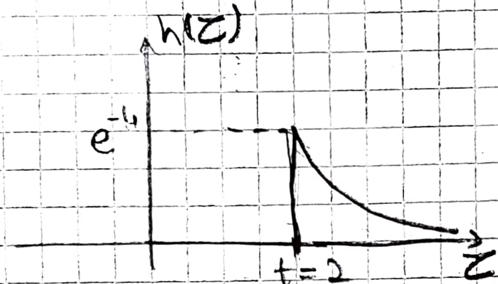


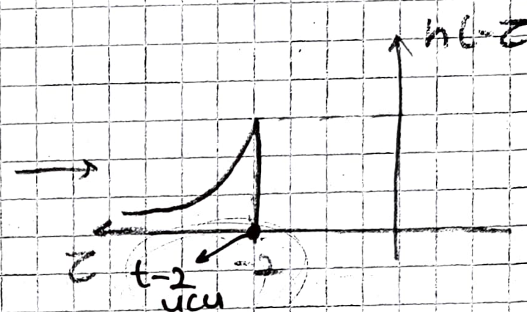
Örnek:

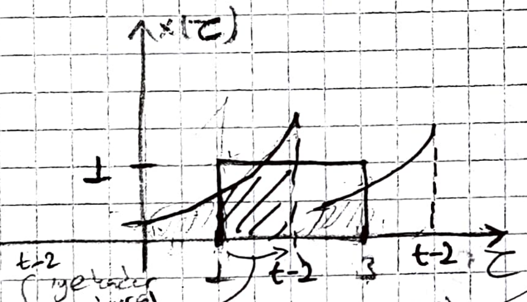
$$h(t) = e^{-2t}\,u(t-2)$$

$$x(t) = u(t-1) - u(t-3)$$

LTI sistemin girişi ve impuls cevabı veriliyor. Çıkışı hesaplayınız.







$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

1) $t-2<1$, $y(t)=0$

2) $1<t-2<3$, $y(t) = \int_{1}^{t-2} 1 \cdot e^{-2(t-\tau)}\,d\tau$

$\int_{1}^{t-2}$ yerleştir integral

$\frac{1}{2}\left(e^{-4} - e^{-2t+2}\right)$

3) $t-2>3$, $y(t) = \int_{1}^{3} 1 \cdot e^{-2(t-\tau)}\,d\tau$

$\frac{1}{2}e^{-2t}\left(e^{6} - e^{2}\right)$

$$y(t) = \int_{1}^{t-2} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = \int_{1}^{t-2} 1 \cdot e^{-2(t-2)}\,d\tau$$

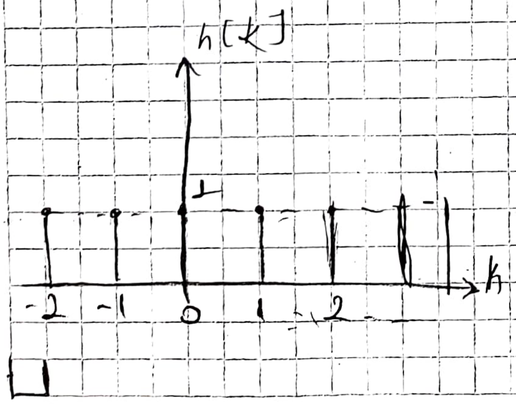
h(t)'ye h(t-τ) yaz
x(t)'nin 1 olduğu

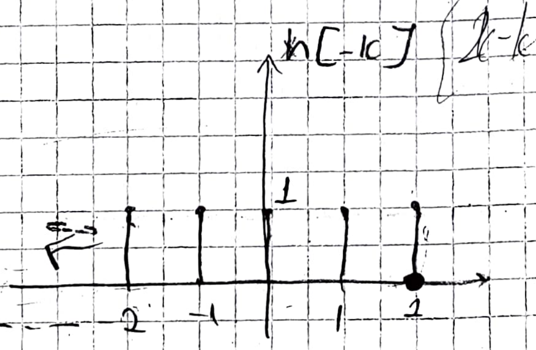
Örnek!

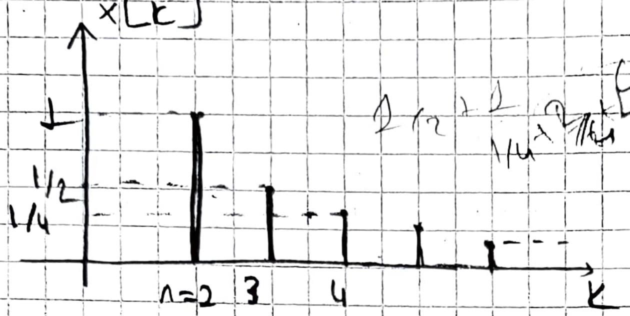
$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2]$$

$$h[n] = u[n+2]$$

Girişi ve impuls cevabı verilen ayrık-zaman sistemin çıkışını hesaplayınız.







$y[2] = 1$

$y[3] = \frac{3}{2}$

$y[4] = \frac{7}{4}$

$$y[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} x[k] . h[n-k]$$

$\frac{1}{4} + 1$ $\qquad$ $\frac{5}{4}$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-2} . u[k-2] . u[n-k+2]$$

$k \geq 2$ $\qquad$ $n-k+2 \geq 0$

$k \leq n+2$

$$y[n] = \sum_{k=2}^{n+2} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-2}$$

$y[2] =$

$y[3] =$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

Doğrusal ve Zamanla Değişmeyen (LTI) Sistemlerin Özellikleri

Konvolüsyonun özellikleri

1) Değişme özelliği

$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$h[n] \longrightarrow \boxed{x[n]} \longrightarrow y[n]$

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

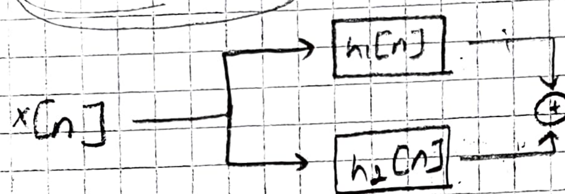
$$y[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} x[k] . h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k]$$

NOT:

LTI bir sistemin girişi ve impuls cevabı yer değiştirirse çıkış değişmez.

2) Dağılma Özelliği

$$x[n]*(h_1[n]+h_2[n]) = x[n]*h_1[n] + x[n]*h_2[n]$$



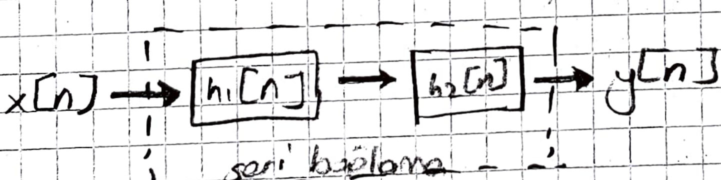
$$\rightarrow y[n] = x[n]*\underbrace{(h_1[n]+h_2[n])}_{\text{paralel bağlı}}$$

NOT:

Dağılma özelliği sistemlerin paralel bağlanmasına karşılık gelir. Paralel bağlamada impuls cevapları toplanır.

3) Birleşme Özelliği

$$x[n]*(h_1[n]*h_2[n]) = (x[n]*h_1[n])*h_2[n]$$



$$h[n]=h_1[n]*h_2[n]$$

NOT:

Birleşme özelliği LTI sistemlerin seri bağlanmasına karşılık gelir. Seri bağlı sistemlerin impuls cevabı konvolüsyon ile bulunur.

1-) Hafızasız Sistem için örnek 3

$h[n]=u[n]-u[n-1]$ → $\delta[n]$ → hafızasız

$h(t)=3.\delta(t+1)$ → hafızalı

$h(t)=2.\delta(t)-5$ → hafızasız

Doğrusal ve zamanla değişim özelliği LTI sistemde incele.
LTI zaten Doğrusal ve zamanla...dır.

(h[n] incelenir, önceki inceleme gibi değil)

LTI sistemlerin özellikleri (h[n] veya h(t) biliniyor)

1) Hafızasız Sistem

$$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$$

$$y[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overset{\text{impuls}}{h[k]} . \underbrace{x[n-k]}_{x[n] \text{ kalmalı}}$$

$h[n] = k\,\delta[n]$, k = sabit

$h(t) = k . \delta(t)$

Şart sağlanırsa hafızasızdır.

Şartlar sağlanmalı ⟹ $n \neq 0$ için $h[n]=0$ ayrıkta
$t \neq 0$ için $h(t)=0$ sürekli de

NOT:

Hafızasız sistem tanımından LTI bir sistemin hafızasız olması için ayrık zaman durumunda $n \neq 0$ için $h[n]=0$, sürekli zaman durumunda $t \neq 0$ için $h(t)=0$ olmalıdır. Bu şartı sağlayan fonksiyon impuls fonksiyonudur.

Konvolüsyon işleminde bir işaretin impuls ile konvolüsyonu kendisine eşittir. Yani konvolüsyon işleminin birim operatörü impuls fonksiyonudur.

$$x[n] * \delta[n] = x[n]$$

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]$$

Bu şartın sağlanması için tek yol $h[n] = K.\delta[n]$
$h(t) = K.\delta(t)$ K = sabit
olmasıdır.

Tanım: Ters Sistem

$$x[n] \rightarrow \boxed{h_1[n]} \rightarrow \boxed{h_2[n]} \rightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] * \underbrace{(h_1[n] * h_2[n])}_{\delta[n]}$$

ise $h_1[n]$ $h_2[n]$ in ters sistemidir.

$\boxed{h_1[n] * h_2[n] = \delta[n]}$ ohalde

Herhangi bir işaretin impuls fonks. ile konvolüsyonu kendisine eşittir. Ohalde konvolüsyon işleminin birim elemanı impuls fonksiyonudur. Yani $x(t) * \delta(t) = x(t)$

$$x[n] \rightarrow \boxed{h_1[n]} \xrightarrow{\delta[n-5]} x[n-5]$$

$$x[n-5] \rightarrow \boxed{h_2[n]} \xrightarrow{\delta[n+5]} x[n]$$

$h_2[n] = ?$

$$h_1[n] * h_2[n] = \delta[n-5] * \delta[n+5] = \delta[n]$$

2) Nedensel Sistem:

Gibi değerler gelmesin istiyoruz. $k<0$ olmamalı.

$x[n+2]$
$x[n+1]$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k]$$

$$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$$

$\cancel{x[n+1]}$
$\cancel{x[n+2]}$
$\vdots$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{\infty} h[k]\,x[n-k]$$

$$\boxed{\begin{matrix} h[n]=0, & n<0 \\ h(t)=0, & t<0 \end{matrix}}$$ oluyorsa Nedenseldir.

NOT!

Nedensellik tanımına göre LTI bir sistemin nedensel olabilmesi için impuls cevabı bağımsız değişkenin negatif değerleri için 0 olmalıdır.

3) Kararlı sistem:

Bir LTI sistemin kararlı olabilmesi için sağlaması gereken şartı ayrık zamanda çıkartalım.

$|x[n]|<B$, B sabit olsun.

$$|y[n]|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].x[n-k]\right|$$

$$|y[n]|\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|.\overbrace{|x[n-k]|}^{B}$$

sonsuz yerine sonlu olduğunu bu ifade belli eder.

$$|y[n]|\leq B\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|<\infty \text{ olmalı}$$

$$\Rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].h[n-k] \qquad |x[k]|\leq B \qquad \Rightarrow$$

$$|y[n]|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].h[n-k]\right|$$

$$|y[n]|\leq\sum \overbrace{|x[k]|}^{B}.|h[n-k]|$$

Kararlılık için

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad \text{(mutlak toplanabilir)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty \quad \text{(mutlak integrallenebilir.)}$$

NOT: → Bazı durumlardan impuls cevabı yerine birim basamak cevabıda kullanılabilir. $u[n] \rightarrow \boxed{\text{sistem}} \rightarrow s[n]$

$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$

LTI bir sistemin kararlı olabilmesi için impuls cevabı ayrık zamanda mutlak toplanabilir, sürekli zamanda ise mutlak integrallenebilir olmalıdır.

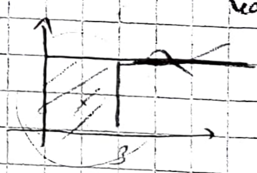
Örnek!

tek impuls → sonsuz bir ifade yok

a) $h[n] = \delta[n-n_0]$ → kararlı

b) $h[n] = u[n]$ → 0'dan sonsuza → kararsız & birbirinden çıkarırsak 3 birimlik impuls kalır. Sonlu hale gelir ve kararlı hale gelir

c) $h[n] = u[n] - u[n-3]$ → kararlı



d) $h(t) = \delta(t-t_0)$ → kararlı

Sistemlerin kararlılıklarını inceleyiniz.

? **Örnek!** Yaz (vize)

Aşağıdaki sistemlerin doğrusallık, zamanla değişmezlik, nedensellik, kararlılık ve hafızasızlık özelliklerini inceleyiniz.

a) $$y[n] = \begin{cases} x[n], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n+1], & n \leq -1 \end{cases}$$

b) $$y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t+2), & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

Date : ....../....../......

c) $h[n] = \left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n] + (1{,}03)^n u[1-n]$

d) $h(t) = (2.e^{-t} - e^{(t-100)})u(t)$

a) $x_1[n] \rightarrow y_1[n]$

$x_2[n] \rightarrow y_2[n]$

$ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n]$

* doğrusal. ✓

$x[n-n_0] \rightarrow y[n-n_0]$

$x[n+1] \rightarrow y[n]$

$x[n-n_0+1] \rightarrow y[n-n_0+1]$

* zamanla değişmeyen ✓

$y[n] = x[n+1] \quad n < -1$

$n=-1 \quad y[-1] = x[0]$

$n=-2 \quad y[-2] = x[-1]$

* nedensel değildir.

* kararlıdır.

* hafızalı değil (önceki değeri aklında tutmuyor.)

NOT: Nedensel LTI sistemlerin başlangıç koşulları her zaman sıfırdır. Bu sebeple denklemin tam çözümü her zaman elde edilebilir.

b) * doğrusal

* $y(t-t_0) = x(t-t_0) + x(t-t_0+2)$

$x(t) \rightarrow \boxed{sistem} \rightarrow x(t) + x(t+2)$

$x(t-t_0) \rightarrow x(t-t_0) + x(t-t_0+2)$

* zamanla değişmeyen

* kararlı

* nedensel değil

* hafızasız

c) $h[n]=0, \; n<0$ nedensellik

* nedensel değil $h[n] \neq 0, \; n<0 \; (u[1-n])$

$h[n]=k\delta[n]$ hafızasız (çünkü $h[n]$ impuls değil)

* hafızalıdır.

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$ kararlı

* kararsız (u'lar sonsuza taşıdığı için)

(1. bileşen sonsuza gidiyor, 2. bileşen $-\infty$'a gidiyor)

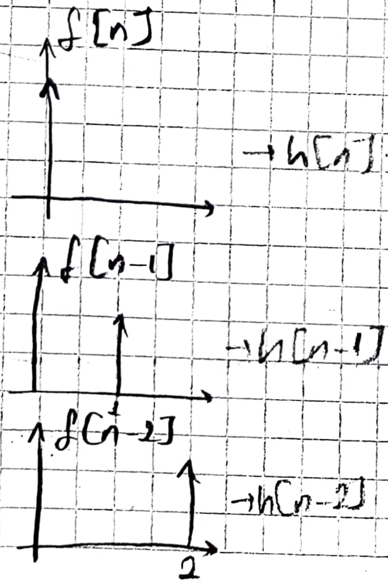
d) $h[t]=0, \; t<0$

* nedenseldir (u(t) sadece $t>0$'da tanımlı)
* hafızalıdır. (impuls değil)
* kararsızdır. (integral sonsuza gider)

Birim Basamak Cevabı

$x[n]=\delta[n] \longrightarrow \boxed{\text{sistem}} \longrightarrow y[n]=\underbrace{h[n]}_{\text{impuls cevabı}}$

$x[n]=u[n] \longrightarrow \boxed{\text{sistem}} \longrightarrow y[n]=\underbrace{s[n]}_{\text{Birim basamak cevabı}}$



$$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

NOT: Nedensel diyorsa soruda başlangıç değerleri sıfır. Verilmiyorsa farklıdır.

Diferansiyel Denklemle Tanımlı LTI Sistemler (sürekli-zaman)

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \qquad y(t) = y_h(t) + y_ö(t)$$

Bu denklemin tam çözümünü elde etmek için tüm başlangıç koşulları bilinmelidir. Eğer sistem nedensel ise tüm başlangıç koşulları 0'dır.

Fark denklemleri ayrık sistemlerdedir.

Fark Denklemi ile Tanımlanan LTI Sistemler

N. dereceden sabit katsayılı bir fark denklemi aşağıdaki eşitlik ile verilir.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k . y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k . x[n-k] \qquad a_k \text{ ve } b_k \rightarrow \text{sabit}$$

$$a_0 y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k . y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k . x[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} . y[n-k]$$

→ $y[n]$'in hesaplanabilmesi için çıkışın önceki değerleri bilinmelidir. Eğer sistem nedensel ise önceki değerler 0'dır.

Nedensel ise

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} . x[n-k]$$

1- N=0 olsun.

$$a_0 . y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k . x[n-k]$$

$$\boxed{y[n] = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{M} b_k . x[n-k]}$$

D2D

Sistemin impuls cevabı ($x[n] \to \delta[n]$ yazılır)

$$h[n] = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{M} b_k \underbrace{\delta[n-k]}_{n=k} = \begin{cases} \frac{b_n}{a_n} & \text{(sonlu impuls yanıtlı (FIR) sistem)} \\ \end{cases}$$

$$h[n] = \frac{b_n}{a_0} \text{ cevabı çıkar.}$$

2- $N \neq 0$ olsun.

Bu durumda çıkış hem girişin hem de çıkışın önceki değerlerine bağlıdır. Böyle denklemlere yinelemeli denklemler denir.

Örnek:

$y[n] = x[n] + \frac{1}{2} y[n-1]$ giriş-çıkış ilişkisi verilen sistemin nedensel ve LTI olduğu biliniyor. Sistemin impuls cevabını bulunuz.

$n=0 \quad y[0] = x[0] + \frac{1}{2} \cancel{y[-1]}$ → 0 nedensel old. için

$n=1 \quad y[1] = x[1] + \frac{1}{2} y[0] = x[1] + \frac{1}{2} x[0]$

$n=2 \quad y[2] = x[2] + \frac{1}{2} y[1] = x[2] + \frac{1}{2} x[1] + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x[0]$

$n=3 \quad y[3] = x[3] + \frac{1}{2} y[2] = x[3] + \frac{1}{2} x[2] + \frac{1}{4} x[1] + \frac{1}{8} x[0]$

⋮

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k]}$$

$x[k] \to \delta[k]$

$$h[n] = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \underbrace{\delta[k]}_{k=0}$$

$$\boxed{h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$ → sonsuz impuls yanıtlı sistem (IIR)

LTI sistemlerin Blok Diyagramı

$\boxed{D}$ → hafıza elemanı

Ayrık-zaman

$x_1[n] \rightarrow (+) \rightarrow x_1[n] + x_2[n]$ ($x_2[n]$ toplayıcıya girer)

$x[n] \rightarrow a\,x_1[n]$ (katsayı)

$x[n] \rightarrow \boxed{D} \rightarrow x[n-1]$ (birim gecikme)

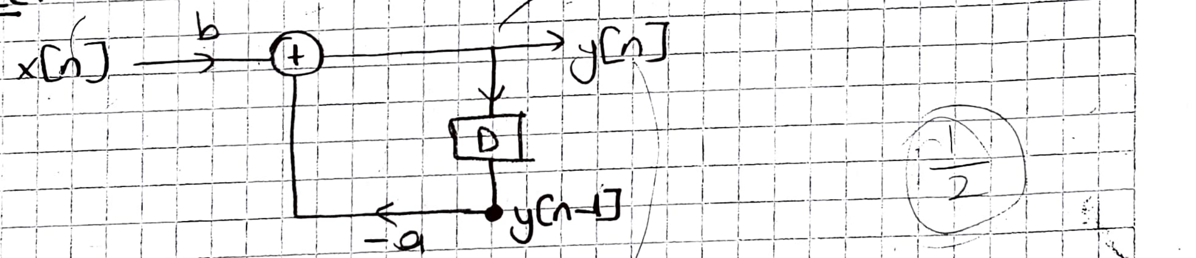
Sürekli-zaman

$x_1(t) \rightarrow (+) \rightarrow x_1(t) + x_2(t)$ ($x_2(t)$ toplayıcıya girer)

$x_1(t) \xrightarrow{a} a.x_1(t)$

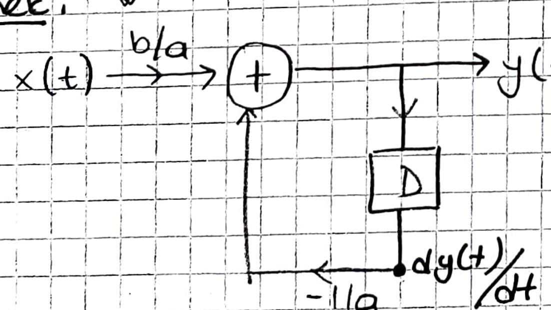
$x(t) \rightarrow \boxed{D} \rightarrow \frac{dx(t)}{dt}$ (türev alıcı)

Örnek:



$$y[n] = b\,x[n] - a\,y[n-1]$$

Örnek:



$$y[n] = \frac{b}{a} \cdot x[n] - \frac{1}{a}\frac{dy(t)}{dt}$$

Türev işleminin gerçekleştirilmesi zordur. Ve gürültülere karşı oldukça hassastır. Bu nedenle blok diyagramı gösteriminde integral alıcı kullanılması tercih edilir.

Sistem nedensel ise giriş uygulanıncaya kadar hafıza elemanında saklanan değer 0'dır. Sürekli-zaman sistemler türev alıcı yerine integral alıcı kullanılarak da tasarlanabilirler.

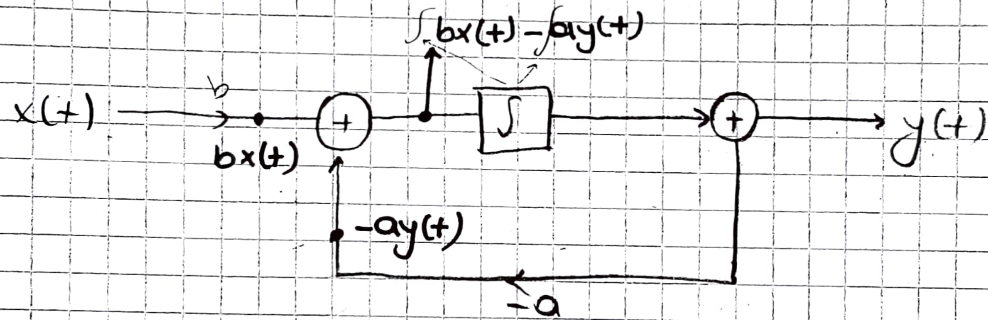
Örnek!

$$\frac{dy(t)}{dt} = bx(t) - a.y(t)$$

İntegral alıcı sistemde $\rightarrow \boxed{\int} \rightarrow$ sınırlar $\int_{-\infty}^{t}$ $(-\infty, t)$ aralığındadır. ve nedenselliği bozmaz.

Giriş-çıkış ilişkisi verilen sistemi integral alıcı ile gerçekleştirelim.

integral al! $y(t) = b\int_{-\infty}^{t} x(t)dt - a\int y(t)dt$



Örnek! (Yaz okulu - vize 2016)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} - x(t)$$

Giriş-çıkış ilişkisi verilen LTI sistemi integral alıcı kullanarak çiziniz

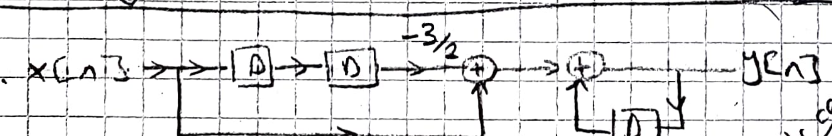
integral al! $\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} - \int_{-\infty}^{t} x(t)dt$

2. integrali al! $y(t) + 3\int_{-\infty}^{t} y(t)dt = x(t) - \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$

$$y(t) = x(t) - \iint x(t)dt - 3\int y(t)dt$$

İmpuls cevabında yararlı ... çıktığından hep kararlı sistemdir.
$y[0] = -\frac{3}{2}\delta[n-2] + \delta[n] = 1$
$y[1] = 1 - \frac{3}{2}\delta[-1] + \delta[1] = 1$

Ödev



impuls cevabıdır.

giriş-çıkış ilişkisini bularak hafıza ve kararlılık özelliklerini inceleyiniz?

$y[n] = y[n-1] - \frac{3}{2}x[n-2] + x[n] = y[n]$ → Hafızalı, Kararlı

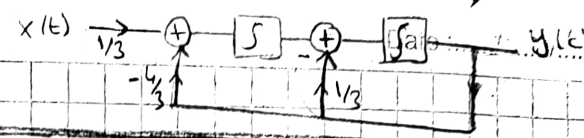
Blok diyagramı verilmişse - Blok diyagramı varsa gerçekleştirilebilir

3. $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t)$

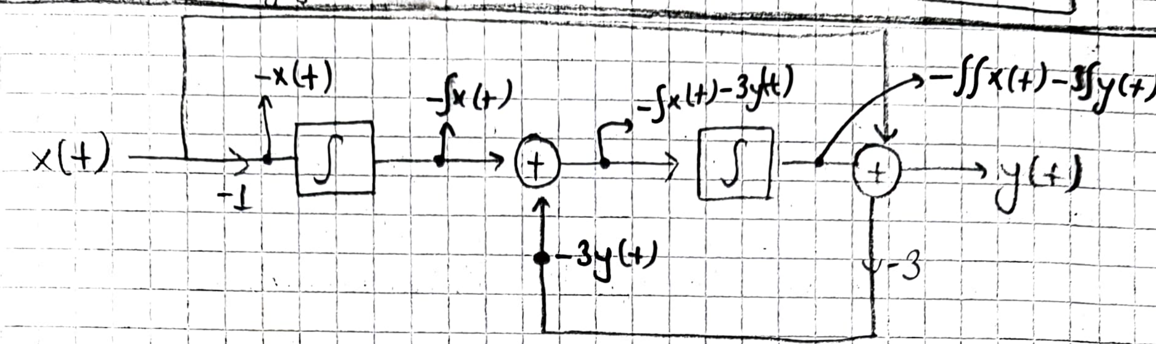
sistemin blok diyagramını integratörlerle tasarlayınız?

$3y(t) + \int_{-\infty}^{t} y(t)dt + 4\iint_{-\infty}^{t} y(t)dt = \iint_{-\infty}^{t} x(t)$

$y(t) = \frac{1}{3}\left\{ \iint_{-\infty}^{t} x(t) - 4\iint_{-\infty}^{t} y(t)dt - \int_{-\infty}^{t} y(t)dt \right\}$



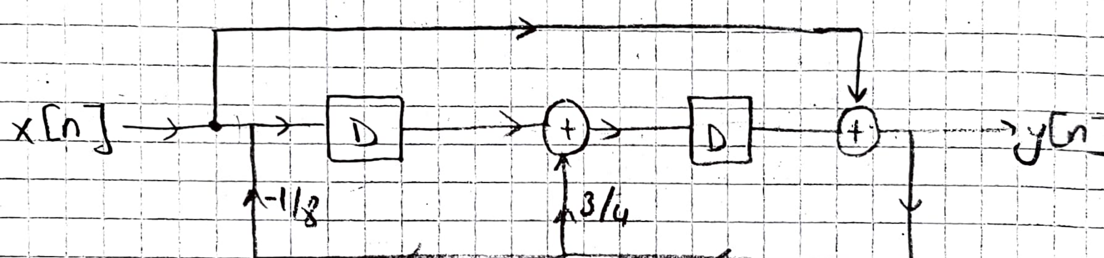
Her 2 tarafa 2 kez integral alıp türevden kurtulmamız lazım daha sonra diyagram çiz.



Örnek!

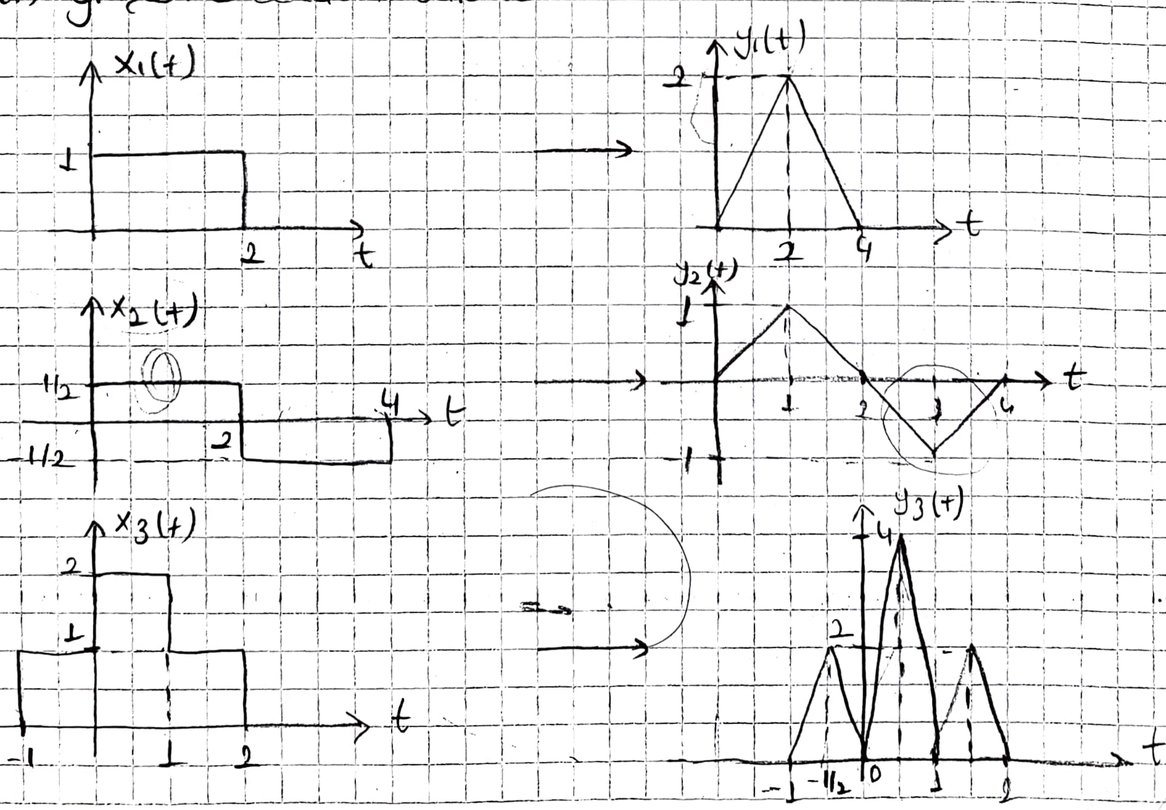
$y[n] = x[n] + \frac{3}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2]$

LTI sistemin blok diyagramını çiziniz.



Örnek!

LTI bir sistemin $x_1(t)$ girişine cevabı $y_1(t)$ biliniyor. $x_2(t)$ ve $x_3(t)$ girişlerine cevabını bulunuz.



$x[n]=a_1 \cdot z_1^n + a_2 \cdot z_2^n + \dots a_n z_n^n$

$y[n]=a_1 \cdot z_1^n H(z_1) + \dots + a_n \cdot z_n^n \dots$

$x[n]=z^n \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{n-k} = z^n \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{-k}}_{H(z)} = \underset{\text{öz. fonks.}}{z^n} \cdot \underset{\text{özdeğer}}{H(z)}$$

Subject: Date: ..../..../....

Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterimi

LTI bir sistemin çıkışı $\{y(t)$ veya $y(n)\}$, girişin $\{x(t)$ veya $x[n]\}$ karmaşık bir sabitle çarpımına eşitse girişe sistemin öz fonksiyonu, karmaşık sabit ise sistemin öz değeri denir.

s ve z karmaşık sayılar olmak üzere sürekli-zamanda e^{st}, ayrık-zamanda z^n LTI sistemin öz fonksiyonudur.

$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$

5. Hafta

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau \,, \quad x(t)=e^{st} \text{ olsun.}$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,\overbrace{e^{s(t-\tau)}}^{e^{st}\cdot e^{-s\tau}}\,d\tau$$

$$x(t)=a_1 e^{s_1 t}+a_2 e^{s_2 t}+\dots+a_n e^{s_n t}$$

$$y(t)=a_1 e^{s_1 t} \cdot H(s_1)+\dots+a_n e^{s_n t} H(s_n)$$

$$y(t)=\underset{\text{öz fonksiyon}}{e^{st}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-s\tau}\,d\tau}_{\text{öz değeri}}$$

$$\boxed{H(s)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-s\tau}\,d\tau} \text{ öz değer} \qquad y(t)=\underset{\text{öz fonks.}}{e^{st}} \underset{\text{öz değer}}{H(s)}$$

$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k]$$

$$x[n]=z^n$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{n-k} \xrightarrow[n \text{ sbt}]{} y[n]=\underset{\text{öz fonks.}}{z^n} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,z^{-k}}_{\text{öz değer}}$$

$$\boxed{H(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{-k}} \qquad y[n]=z^n \cdot H(z)$$

Örnek!

İmpuls cevabı $h(t)$ olan sistemin girişine

$$x(t) = a_1 . e^{s_1 t} + a_2 . e^{s_2 t} + a_3 . e^{s_3 t}$$

işaretini uygulayalım. Sistemin çıkışını bulunuz.

$$y(t) = a_1 . e^{s_1 t} H(S_1) + a_2 e^{s_2 t} H(S_2) + a_3 e^{s_3 t} H(S_3)$$

NOT:

$x(t) = \sum_k a_k . e^{s_k t}$ olsun.

$$\boxed{y(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \; H(s_k)}$$ olur.

$x[n] = \sum_k a_k z_k^n$ olsun.

$$\boxed{y[n] = \sum_k a_k z_k^n \; H(z_k)}$$ olur.

* Bu gözlem Fourier ve kendisinden sonra gelenlerin herhangi bir işareti karmaşık üstel işaretlerin doğrusal bir kombinasyonu olarak nasıl yazabileceklerini araştırmalarına neden olmuştur. s ve z herhangi bir karmaşık sayı olabilir ancak Fourier s'i $j\omega$, z'yi de $e^{j\omega}$ olarak kabul etmiştir.

$$e^{st} = e^{j\omega t} \text{ (sürekli)} \quad , \quad z^n = e^{j\omega n} \text{ (ayrık-zaman)}$$

Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

Sürekli-zaman periyodik bir işaretin karmaşık üstel işaretlerin doğrusal bir kombinasyonu şeklinde yazılmasına Fourier serisi gösterimi denir ve aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k . e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t} \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

a_k = Fourier serisi katsayıları

$s = j\omega_0 \quad e^{st} = e^{j\omega_0 t}$ (Fourier Taban fonksyonu)

$$\boxed{x(t) = \sum^{\infty} a_k . e^{jk\omega_0 t}} = \sum^{\infty} a_k . e^{jk\frac{2\pi}{T} . t} \quad : T = \text{periyodu}$$

Ör: $x(t) = \sum_{k=-3} a_k . e^{jk2\pi t}$ Temel frekansı 2π olan sürekli zaman işaretin ... verilmiştir. $x(t)$'yi elde ediniz? ($a_0 = 1$, $a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}$, $a_2 = a_{-2}$ ..., $a_3 = a_{-3}$ ...)

$T = \frac{2\pi}{|w_0|}$ ...

$$x(t) = \underbrace{a_{-3} . e^{-j6\pi t}}_{k=-3} + \underbrace{a_{-2} . e^{-j4\pi t}}_{k=-2} + \underbrace{a_{-1} e^{-j2\pi t}}_{k=-1} + \underbrace{a_0}_{k=0} + \underbrace{a_1 e^{j2\pi t}}_{k=1} + \underbrace{a_2 e^{j4\pi t}}_{k=2} + \underbrace{a_3 . e^{j6\pi t}}_{k=3}$$

$$= \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + 1$$

$$\boxed{x(t) = \frac{2}{3}\cos 6\pi t + \cos 4\pi t + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + 1}$$

$$\cos Q = \frac{1}{2}(e^{jQ} + e^{-jQ})$$

$$\sin Q = \frac{1}{2j}(e^{jQ} - e^{-jQ})$$

$k = 0$ ise $x(t) = a_0$ (DC bileşen)

$k = 1$ ise $x(t) = a_1 . e^{jw_0 t}$ (temel bileşen 1. harmonik)

$k = 2$ ise 2. harmonik

Örnek:

Temel frekansı 2π olan sürekli-zaman periyodik işaretin Fourier serisi katsayıları aşağıda veriliyor. $x(t)$ işaretini bulunuz.

$a_0 = 1$

$a_1 = a_{-1} = 1/4$

$a_2 = a_{-2} = 1/2$

$a_3 = a_{-3} = 1/3$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t} = \sum_{k=-3}^{3} a_k e^{jkw_0 t} \quad w_0 \to 2\pi$$

$$= \overset{1/3}{a_{-3}} e^{j(-3).2\pi t} + \overset{1/2}{a_{-2}} e^{j(-2)2\pi t} + \overset{1/4}{a_{-1}} e^{j(-1)2\pi t}$$
$$+ \underset{1}{a_0} + \underset{1/4}{a_1} . e^{j2\pi t} + \underset{1/2}{a_2} e^{j2.2\pi t} + \underset{1/3}{a_3} . e^{j3 2\pi t}$$

$$x(t) = 1/3 (e^{-j6\pi t} + e^{j6\pi t}) + 1/2 (e^{-j4\pi t} + e^{j4\pi t}) + 1/4 (e^{-j2\pi t} + e^{j2\pi t}) + 1$$

(Euler bağlantıları.
$$\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = \cos\theta, \quad \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = \sin\theta)$$

$$x(t) = \frac{1}{3} 2\cos 6\pi t + \frac{1}{2} 2\cos 4\pi t + \frac{1}{4} 2\cos 2\pi t + 1$$

$$\boxed{x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3}\cos 6\pi t}$$

Verilmeyen tüm katsayılar "0"dır.

Sentez yapılmıştır.

3 tane harmoniği var.

$$x(t) = a_{-1} e^{-jw_0 t} + a_0 + a_1 e^{jw_0 t} + a_2 e^{2jw_0 t} + a_3 e^{3jw_0 t} + \ldots$$

$k = 0$ $a_0 = $ DC Bileşen

$k = \mp 1$ 1. Harmonik

Örnek:

Aşağıda verilen işaretin Fourier serisi gösterimini elde ediniz.

$$x(t) = \sin(w_0 t)$$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t}$$

$$x(t) = \sin(w_0 t) = \frac{1}{2j}\left(e^{jw_0 t} - e^{-jw_0 t}\right) = \underbrace{\frac{1}{2j}}_{a_1} e^{jw_0 t} \underbrace{-\frac{1}{2j}}_{a_{-1}} e^{-jw_0 t}$$

$k=1$, $k=-1$

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

Not:

Euler ilişkisi kullanılarak sinüsoidal işaretlerin Fourier serisi gösterimleri örnekteki gibi doğrudan elde edilebilir.

ÖRNEK:

$$x(t) = \overset{a_0}{1} + \sin(w_0 t) + 2\cos(w_0 t) + \cos\left(2w_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

x(t) işaretinin Fourier serisi gösterimini elde ediniz.

$$= 1 + \frac{1}{2j}\left(e^{jw_0 t} - e^{-jw_0 t}\right) + 2\,\frac{1}{2}\left(e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}\right) + \frac{1}{2}\left(\overbrace{e^{j(2w_0 t + \pi/4)}}^{e^{j2w_0 t}\cdot e^{j\pi/4}} + \overbrace{e^{-j(2w_0 t + \pi/4)}}^{e^{-j2w_0 t}\cdot e^{-j\pi/4}}\right)$$

$$a_k = |a_k| e^{j\angle a_k}$$

$$a_k = 1 - \frac{1}{2}j$$

$$|a_k| = \sqrt{1^2 + (1/2)^2}$$

$$\angle a_k = \tan^{-1}\left(\frac{-1/2}{1}\right)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jkw_0 t} = \underset{k=1}{a_1 \cdot e^{jw_0 t}}$$

$$= \overset{a_0}{1} + e^{jw_0 t}\overbrace{\left(\frac{1}{2j} + 1\right)}^{a_1} + e^{-jw_0 t}\overbrace{\left(-\frac{1}{2j} + 1\right)}^{a_{-1}} + e^{j2w_0 t}\overbrace{\left(\frac{1}{2}e^{j\pi/4}\right)}^{a_2} + e^{-j2w_0 t}\overbrace{\left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}\right)}^{a_{-2}}$$

$a_0 = 1$

$a_1 = 1 + \frac{1}{2j}$

$a_{-1} = 1 - \frac{1}{2j}$

$a_2 = \frac{1}{2} e^{j\pi/4}$

$a_{-2} = \frac{1}{2} e^{-j\pi/4}$

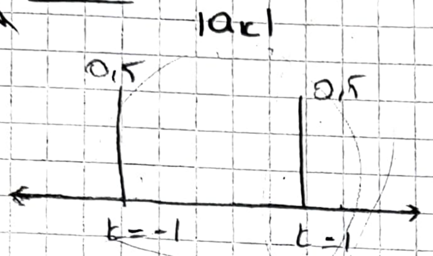
$$\boxed{a_k = |a_k| \cdot e^{j\angle a_k}}$$

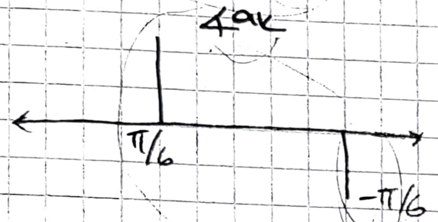
genlik spektrumu — faz spektrumu

Not: Periyodik işaretlerin fourier serisi katsayıları hesaplanırken sinüzoidal işaretler euler bağıntısından yararlanarak katsayılar doğrudan hesaplanabilir. Sinüzoidal olmayanlarda aşağıda elde edilen analiz denklemi kullanılır.
Arka sayfada →

Subject: Date: ....../....../......

Örnek:





Fourier serisi gösterilimi şekilde verilen x(t) işaretini bulunuz.

$$x(t)=\sum_{k=-1}^{1} a_k . e^{jk\omega_0 t} = a_{-1} . e^{-j\omega_0 t} + a_1 e^{j\omega_0 t}$$

$$a_1 = |a_1| . e^{j\angle a_1} = 0{,}5\, e^{-j\pi/6}$$

$$a_{-1} = |a_{-1}| . e^{j\angle a_{-1}} = 0{,}5 . e^{j\pi/6}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} . e^{j\pi/6} . e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} . e^{-j\pi/6} e^{j\omega_0 t}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{j(\pi/6-\omega_0 t)} + e^{j(\omega_0 t - \pi/6)}\right) = \cos(\omega_0 t + \pi/6)$$

Fourier Serisinin Farklı Gösterilimleri

Reel: Gerçek zaman bir x(t) işaretinin fourier serisi gösterilimi farklı şekillerde elde edilebilir.

$$x(t) = x^*(t)$$

eşitle

$$\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k . e^{jk\omega_0 t}}_{x(t)} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* . e^{-jk\omega_0 t}}_{x^*(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* . e^{jk\omega_0 t}$$

$$\boxed{\begin{matrix} a_k = a_{-k}^* \\ a_k^* = a_{-k} \end{matrix}}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\,Re\{a_k\, e^{jk\omega_0 t}\}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \qquad A_k = |a_k|$$

$$\theta_k = \angle a_k$$

$x(t)$ işareti reel olduğundan $x(t) = x^*(t)$ olur.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}\right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* \cdot e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=\infty}^{-\infty} a_{-k}^* \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_k &= a_{-k}^* \\ a_k^* &= a_{-k} \end{aligned}}$$

Fourier Serisi Katsayılarının Hesaplanması

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$ ifadesinin her iki tarafını $e^{-jn\omega_0 t}$ ile çarpıp bir periyot boyunca integralini alalım.

$$\int_T x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$\int_T x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt$$

$k = n$ için $\int \to T$ çıkar

$$e^{j(k-n)\omega_0 t} = \cos((k-n)\omega_0 t) + j\sin((k-n)\omega_0 t)$$

$$\begin{cases} k = n, & e^{j(k-n)\omega_0 t} = 1 \\ k \neq n, & 0 \end{cases}$$

$$\int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = T a_n$$

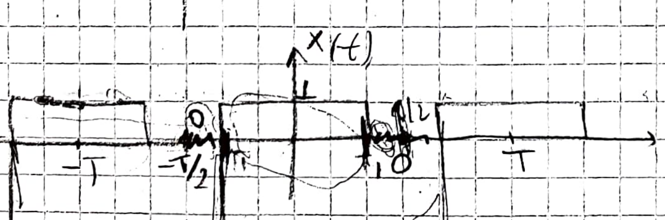
$$\boxed{a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t}} \rightarrow \text{Analiz denklemi}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T} \int x(t) dt} \text{ DC bileşeni}$$

Örnek:

Temel periyodu T, temel frekansı $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ olan periyodik kare dalganın Fourier serisi katsayılarını bulunuz.

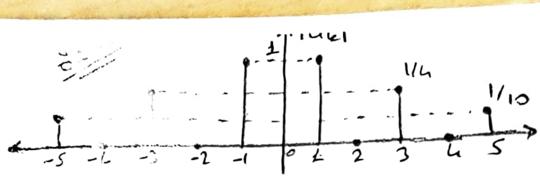
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases} \qquad -T_1 \leq t \leq T$$

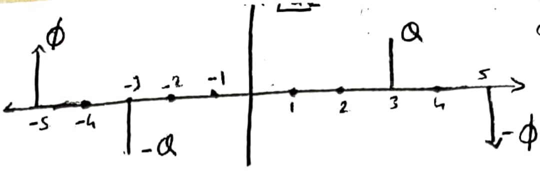


Not: Fourier serisi için matematiksel eşitlikler kullanılarak farklı gösterimler elde edilebilir. Aşağıdadır.

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \mathrm{Re}\{a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}\}$$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} [B_k \cdot \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t)]$$





Gonlik ve verilen x(t) ediniz?

$a_k = |a_k| \cdot e^{j\angle a_k}$

$x(t) = \sum_{k=-5}^{5} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$

$a_0 = 0$
$a_1 = 1$
$a_{-1} = 1$
$a_2 = a_{-2} = 0$
$a_3 = \frac{1}{6} e^{j\alpha}$
$a_{-3} = \frac{1}{6} e^{-j\alpha}$
$a_4 = a_{-4} = 0$
$a_5 = \frac{1}{10} \cdot e^{-j\phi}$
$a_{-5} = \frac{1}{10} \cdot e^{j\phi}$

$$a_k = \frac{1}{T} \int x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} 1 \, e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \left(\frac{-1}{jk\omega_0} \cdot e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1} \right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{T}} \cdot \frac{\cancel{-1}}{\cancel{j}k\cancel{2}\frac{\pi}{\cancel{T}}} \left(e^{-jk\omega_0 T_1} - e^{+jk\omega_0 T_1} \right) \rightarrow \cancel{2}\cancel{j}\sin(k\omega_0 T_1)$$

$$x(t) = \sum_{k=-5}^{5} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} = \underbrace{1 \cdot e^{j\omega_0 t}}_{k=1} + \underbrace{1 \cdot e^{-j\omega_0 t}}_{k=-1} + \underbrace{\frac{1}{6} e^{j\alpha} \cdot e^{j3\omega_0 t}}_{k=3} + \underbrace{\frac{1}{6} e^{-j\alpha} \cdot e^{-j3\omega_0 t}}_{k=-3} + \underbrace{\frac{1}{10} \cdot e^{-j\phi} e^{j5\omega_0 t}}_{k=5} + \underbrace{\frac{1}{10} \cdot e^{j\phi} e^{-j5\omega_0 t}}_{k=-5}$$

$$a_k = \frac{\sin(k \overset{2\pi/T}{\omega_0} T_1)}{k\pi}, \quad k \neq 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = \frac{2T_1}{T}$$

$$\xrightarrow[\text{sadeleştirilmiş hali}]{\text{En son}} = 2\cos\omega_0 t + \frac{1}{3}\cos(3\omega_0 t + \alpha) + \frac{1}{5}\cos(5\omega_0 t - \phi)$$

Drichlet Koşulları

Sürekli zaman periyodik bir x(t) işaretinin Fourier serisine açılabilmesi için drichlet koşullarını sağlaması gerekir.

★ Koşul 1: İşaret 1 periyot boyunca mutlak integrallenebilir olmalıdır.

$$\int_T |x(t)| dt < \infty$$

Koşul 2: İşaretin 1 periyot boyunca sonlu sayıda minumumu ve max olmalıdır.

Koşul 3: Sonlu bir aralıkta işaretin sonlu sayıda süreksizlik noktası olmalıdır.

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Temel periyodu T, temel frekansı $2\pi/T$ olan periyodik bir işaretin fourier serisi katsayıları a_k olsun.

$$x(t) \longleftrightarrow a_k$$

1) Zamanda Öteleme:

$x(t) \longleftrightarrow a_k$ ise

$x(t \pm t_0) \longleftrightarrow a_k \cdot e^{\pm jk w_0 t_0}$ olur.

NOT:

Periyodik bir işaret ötelendiğinde işaretin periyodu değişmez. Fourier serisi katsayılarının sadece fazı değişir.

2) Zamanda Tersine Çevirme:

$x(t) \longleftrightarrow a_k$ ise

$x(-t) \longleftrightarrow a_{-k}$ olur.

NOT:

Sürekli zaman bir işaret zamanda tersine çevrilirse Fourier serisi katsayılarıda tersine çevrilir. O halde çift işaretlerin Fourier serisi katsayıları çift, tek işaretlerin fourier serisi katsayıları tektir.

$x(t) = x(-t)$ çift $\qquad$ $x(t) = -x(-t)$ tek

$a_k = a_{-k}$ $\qquad$ $a_k = -a_{-k}$

3) Ölçekleme:

$x(t) \longleftrightarrow a_k$

$x(\alpha t) \longleftrightarrow a_k$

NOT:

Bir sürekli-zaman işaret ölçeklendiğinde Fourier serisi katsayıları değişmez.

4) Zamanda Türev Alma:

$$x(t) \longleftrightarrow a_k$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow jkw_0 . a_k$$

NOT:

Sürekli-zaman işaretin türevini alma Fourier serisi katsayılarının hem genliğini hem de fazını değiştirir.

★5) Parseval İlişkisi:

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt \quad , \quad |x(t)|^2 = x(t)\,x^*(t) \quad , \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k . e^{jkw_0t}$$

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jkw_0t}$$

$$= \frac{1}{T}\int_T x(t) . x^*(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k . e^{jkw_0t}\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^* e^{-jlw_0t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_k . a_l^* \boxed{\int_T e^{jkw_0t} . e^{-jlw_0t}\, dt}$$

$$e^{j(k-l)w_0t} = \cos((k-l)w_0t) + j\sin((k-l)w_0t)$$

$k = l$, 1
$k \neq l$, 0

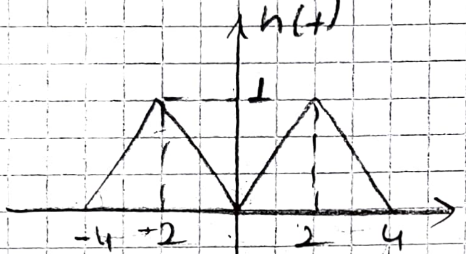
$$= \frac{1}{\cancel{T}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_k . a_l^* \cancel{T} \quad k = l$$

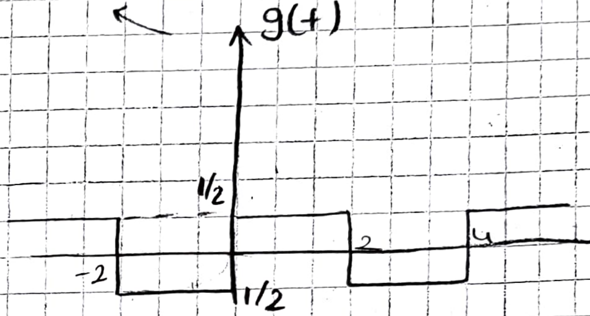
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k . a_k^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

★ $$\boxed{\frac{1}{T}\int |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2}$$

ÖRNEK!

$$a_k = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} \cdot e^{-jk\pi/2} \quad , \; a_0 = 0$$



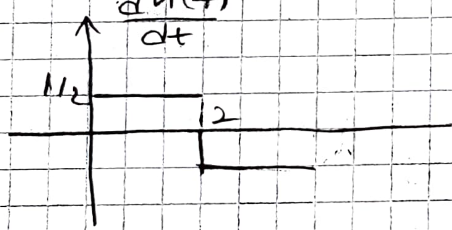


Altındaki alan

Fourier katsayılarıyla g(t) işareti veriliyor. Fourier serisinin özelliklerinden faydalanarak h(t) işaretinin fourier serisi katsayılarını bulunuz.

$$h(t) \longleftrightarrow e_k$$

$\frac{dh(t)}{dt}$



$$\frac{dh(t)}{dt} = g(t)$$

$$(jkw_0) e_k = d_k$$

$$e_k = \frac{1}{jkw_0} d_k$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{dh(t)}{dt} = g(t) \\ jkw_0 \cdot e_k = b_k \\ e_k = \left[\frac{\sin(kw_0)}{k\pi} \cdot e^{-jkw_0}\right] / jkw_0 \\ e_0 = \frac{1}{2} \end{array}}$$

$$e_k = \frac{1}{jk\pi/2} \cdot \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2} \quad k \neq 0$$

$$e_0 = \frac{1}{T}\int_T h(t)dt = \frac{1}{4} \cdot 2 = 1/2$$

Vize

Ayrık-Zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

Ayrık-Zaman Fourier serisindeki amaç periyodik bir ayrık-zaman işareti harmonik ilişkili ayrık-zaman karmaşık üstel işaretler cinsinden yazmaktır. Ancak

$$\phi_k[n] = e^{jkw_0 n} = e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad , \; k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

ile verilen harmonik ilişkili karmaşık üstel işaretler kümesinde N adet işaret olduğu unutulmamalıdır.

Date: ....../....../......

Subject:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$ (sürekli-zaman F.S)

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$k=0,1,2,\ldots N-1$
$k=1,2,3,\ldots N$
$k=2,3,4,\ldots N+1$

N tane örnek alarak hesapla

Sentez denklemi

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \cdot e^{jk\frac{2\pi}{N}\cdot n}}$$

NOT:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \phi_k[n]$$

$\rightarrow k=0,1,\ldots,N-1$

$$x[n] = a_0 + a_1 \cdot \phi_1[n] + a_2 \cdot \phi_2[n] + \ldots + a_{N-1}[n]$$

$\rightarrow k=1,2,\ldots,N$

$$x[n] = a_1\phi_1[n] + a_2\phi_2[n] + \ldots + \phi_{N-1}[n] + a_N \cdot \phi_N[n]$$

iki ifadenin eşit olması için

$$a_0 = a_N \cdot \phi_N[n] \longrightarrow \phi_N[n] = e^{jN\frac{2\pi}{N}n} = e^{j2\pi n}$$

$$\boxed{a_0 = a_N} \qquad \boxed{a_k = a_{k+N}} \qquad = \cos(2\pi n) + j\sin(2\pi n) = 1$$

Sonuç olarak periyodik ayrık-zaman bir işaretin Fourier serisi katsayılarıda periyodiktir.

Fourier Serisi Katsayılarının Hesaplanması (Analiz Denklemi)

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \cdot e^{jk(2\pi/N)n}$$

denkleminin her iki tarafını $e^{-jr(2\pi/N)n}$ ile çarpıp N üzerinden toplamını alalım. (N adet)

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] \cdot e^{-jr\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = \sum_{n=\langle N\rangle} \sum_{n=\langle N\rangle} a_k \underbrace{e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} e^{-jr\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}}_{e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n(k-r)}}$$

$$= \sum_{n=\langle N\rangle} a_r = N a_r$$

$$\begin{cases} k-r=0, \mp N, \mp 2N \mp \ldots & , 1 \\ \text{diğer durumlarda} & , 0 \end{cases}$$

$$\boxed{a_{r_k} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \cdot e^{-jr_k \left(\frac{2\pi}{N}\right) n}}$$

$k=r$

Analiz denklemi

Örnek:

$x[n] = \sin(w_0 n)$ işaretinin Fourier serisi açılımını bulunuz.

Durum 1:

$w_0 = \frac{2\pi}{N}$

$x[n] = \frac{1}{2j}\left(e^{jw_0 n} - e^{-jw_0 n}\right)$

$a_1 = \frac{1}{2j}$

$a_{-1} = -\frac{1}{2j}$

Durum 2:

$w_0 = \frac{2\pi}{N} M$

$x[n] = \frac{1}{2j}\left(\underbrace{e^{j\frac{2\pi M}{N}n}}_{k=M} - \underbrace{e^{-j\frac{2\pi M}{N}n}}_{k=-M}\right)$

$a_M = \frac{1}{2j}$

$a_{-M} = -\frac{1}{2j}$

Örnek!

$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N} n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N} n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N} n + \frac{\pi}{2}\right)$ işaretinin Fourier serisi gösterimini bulunuz.

$$x[n] = 1 + \frac{1}{2j}\left(\underbrace{e^{j\frac{2\pi}{N}n}}_{k=1} - \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}_{k=-1}\right) + 3\frac{1}{2}\left(\underbrace{e^{j\frac{2\pi}{N}n}}_{k=1} + \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}_{k=-1}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\underbrace{e^{j\left(\frac{4\pi}{N}n + \pi/2\right)}}_{k=2} + \underbrace{e^{-j\left(\frac{4\pi}{N}n + \pi/2\right)}}_{k=-2}\right)$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

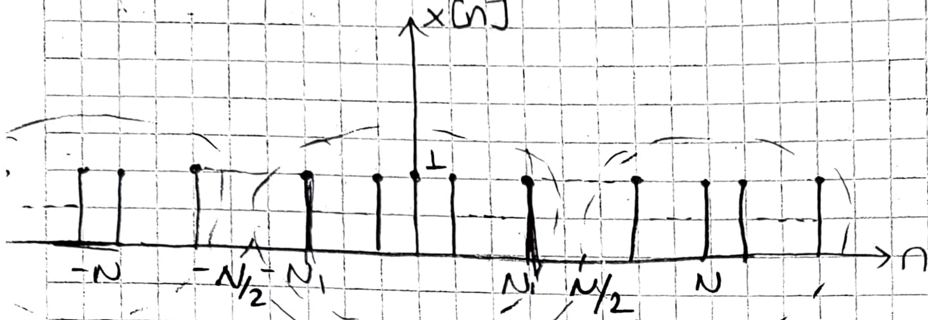
$a_0 = 1 \quad a_1 = \frac{1}{2j} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - j\frac{1}{2} \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + j\frac{1}{2}$ ⟶

$a_2 = \frac{1}{2} e^{j\pi/2} = \frac{1}{2} j \quad a_{-2} = \frac{1}{2} e^{-j\pi/2} = -\frac{1}{2} j$

Date : ....../....../......

Örnek:

Aşağıda verilen periyodik kare dalganın fourier serisi gösterimini elde ediniz.



Periyot = N

Kolaylaştırmak için bu aralıkta aldık.

$$\boxed{a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] \cdot e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1+N_1}^{N_1+N_1} 1\, e^{-jk(2\pi/N)n}$$

→ Bu hale getirip bırakabiliriz. Sınavda sert hale girme.

Sınırı etkilediğimizden sistemi indisten çıkardık.

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{2N_1} \underbrace{e^{-jk(2\pi/N)(n-N_1)}}_{e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}\; e^{+jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)N_1}}$$

sbt

$$\left(\sum_{m=0}^{N}\alpha^m = \frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha} \text{ idi}\right)$$

$$= \frac{1}{N}e^{jk(2\pi/N)N_1}\cdot\sum_{n=0}^{2N_1} \underbrace{e^{-jk(2\pi/N)n}}_{\alpha}$$

$$= \frac{1}{N}e^{jk(2\pi/N)N_1}\;\frac{1-e^{-jk(2\pi/N)(2N_1+1)}}{1-e^{-jk(2\pi/N)}}$$

$$\left\{\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N}\sin[2\pi k(N_1+1/2)/N] \quad , k\neq 0, \mp N, \mp 2N \mp \ldots \\ a_0 &= \frac{2N_1+1}{N} \end{aligned}\right.$$

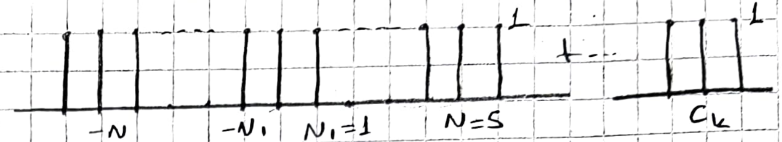
$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\; e^{-jk(2\pi/N)n}$$

1

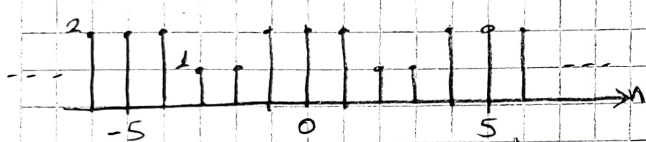
$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{N}\,\frac{\sin[2\pi k(N_1+1/2)/N]}{\sin \pi k/N} & , k \neq 0, \mp N, \mp 2N \\ \frac{2N_1+1}{N} & , k = 0, \mp N, \mp 2N \end{cases}$$

Örnek

$$\begin{cases} \frac{1}{N}\sin(2\pi k(N_1+1/2)/N) \\ \frac{2N_1+1}{2} \end{cases}$$



Dikdörtgen darbenin ayrık-zaman F.S katsayıları veriliyor. F.S özelliklerinden yararlanarak aşağıda verilen $x[n]$ işaretinin F.S katsayılarını bul?



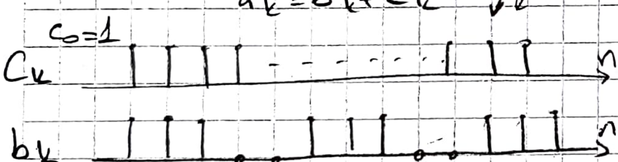
$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{5}\,\frac{\sin(2\pi k(\frac{3}{2})/5)}{\sin(\pi k/5)} & k \neq \mp 5, \mp 10 \\ \frac{3}{5} & k = 0, \mp 5, \mp 1 \end{cases}$$

$N=5 \quad a_k = ?$

Bu ifadeyi üstten çıkartır.

$c_k = \{1 \quad k = 0$

$a_k = b_k + c_k$



$\boxed{N=5}$ $\boxed{N_1=1}$

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{5}\,\frac{\sin[3\pi k/5]}{\sin[\pi k/5]} & , k \neq 0, \mp 5, \mp 10 \ldots \\ \frac{8}{5} & , k = 0, \mp 5, \mp 10 \ldots \end{cases}$$

Örnek i) $x[n]$ işareti 6 ile periyodiktir $(N=6)$

ii) $\sum_{n=0}^{5} x[n] = 2$

iii) $\sum_{n=2}^{7} x[n].(-1)^n = 1$

$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{\langle N\rangle} |x[n]|^2 = \text{periyot başına enerji}}$

en küçük enerjiyi bulmak için

iiii) Yukarıdaki üç koşulu sağlayan işaretler arasından periyot başına en küçük enerjiye sahiptir.

Yukarıdaki özellikleri sağlayan periyodik ayrık-zaman $x[n]$ işaretini bul

$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k . e^{jkw_0 n}$

$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{\langle N\rangle} |a_k|^2 \text{ min olması için diğer tüm } a_k\text{'lar sıfırdır}}$

$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n].e^{-jkw_0 n}$

$a_k = \frac{1}{6}\sum_{n=2}^{7} x[n].e^{-jkw_0 n}, \quad w_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jkw_0 n}$

$a_k = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n].e^{-jkw_0 n}$

$\Rightarrow e^{-jkw_0} = -1 = \cos(kw_0) + j\sin(kw_0)$

$k=0, \; k=3$

$k.\frac{\pi}{3} = \pi \quad \underline{k=3}$

$a_0 = \frac{1}{6}\underbrace{\sum_{n=0}^{5} x[n]}_{1/2} \quad a_0 = \frac{1}{3}$

$a_3 = \frac{1}{6}\sum_{n=2}^{7} x[n](-1)^n = 1/6$

$x[n] = \frac{1}{3} + a_3 . e^{j3.\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^{j\pi}$

$E_x = \sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2 \quad x[n] = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-1)^n \; \#$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-1)^n$

Vize buraya kadar

Date : ....../....../......

Fourier Serisi ve LTI Sistemler:

$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = e^{st} H(s)$, $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) . e^{-st} dt$, $s = j\omega$

$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n] = z^n H(z)$, $H(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} h[n] . z^{-n}$, $z = e^{j\omega}$

Fourier serisine göre $s=j\omega$ özel durumunda sürekli zaman sisteminin fonk. sistemin frekans cevabı denir. Frekans cevabı, $H(j\omega)$ ile gösterilir.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) . e^{-j\omega t} dt$$ frekans cevabı (sürekli zaman)

Aynı şekilde $z = e^{j\omega}$ için ayrık-zaman sistem fonk. sistemin frekans cevabı denir. Frekans cevabı $H(e^{j\omega})$ ile gösterilir.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] . e^{-j\omega n}$$ frekans cevabı (ayrık zaman)

NOT: LTI bir sistemin periyodik bir işarete cevabı sistemin frekans cevabından kolaylıkla belirlenebilir. Adım aşağıda verilmiştir.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k . e^{jk\omega_0 t} . e^{st}$$ $s = jk\omega_0$

$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$

a_k LTI $b_k = ?$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k . e^{j\omega_0 t} . H(jk\omega_0)$$

$b_k = a_k . H(jk\omega_0)$

$H(j\omega)\big|_{\omega = k\omega_0} = H(jk\omega_0)$

Ayrık-zaman için;

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k . e^{jk\frac{2\pi}{N} . n} . z^n$$

$z = e^{jk\frac{2\pi}{N}}$

$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$

a_k $b_k = ?$

$$y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k . e^{jk\frac{2\pi}{N} . n} . H\left(e^{jk . \frac{2\pi}{N}}\right)$$

$b_k = a_k . H\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right)$

$H(e^{j\omega})\big|$ $= H\left(e^{-jk\frac{2\pi}{N}}\right)$

ÖRN3 Aşağıda verilen sürekli zaman periyodik işaret impuls cevabı $h(t)=e^{-t}u(t)$ olan sisteme uygulandığında çıkışın F.S katsayılarını bu

$$x(t)=1+\frac{1}{2}\cos(2\pi t)+\cos(4\pi t)+\frac{2}{3}\cos(6\pi t), \quad w_0=2\pi$$

$$x(t)=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(e^{j2\pi t}+e^{-j2\pi t}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{j4\pi t}+e^{-j4\pi t}\right)+\frac{1}{2}\frac{2}{3}\left(e^{j6\pi t}+e^{-j\dots}\right.$$

$a_0=1$

$a_1=a_{-1}=\frac{1}{4}$

$a_2=a_{-2}=\frac{1}{2}$

$a_3=a_{-3}=\frac{1}{3}$

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt=\int_0^{\infty}\underbrace{e^{-t}\cdot e^{-j\omega t}}_{e^{-t(1+j\omega)}}\,dt$$

$$=\frac{-1}{1+j\omega}\cdot e^{-t(1+j\omega)}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{1+j\omega}$$

$b_k=a_k\cdot H(jk\omega_0)$

$b_0=a_0\cdot H(0)=1$

$b_1=a_1\cdot H(j\omega_0)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+j\omega_0}$

$b_{-1}=a_{-1}\cdot H(-j\omega_0)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-j\omega_0}$

$b_2=a_2\cdot H(j2\omega_0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+j2\omega_0}$

ÖRN3 $h[n]=\alpha^n u[n]$ olan ayrık-zaman sisteme $x[n]=\cos(2\pi n/N)$ girişi uygulandığında sistemin frekans cevabını ve çıkışın fourier serisi katsayılarını bulunuz?

$x[n]=\cos(2\pi n/N)=\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi n}{N}}+e^{-j\frac{2\pi n}{N}}\right)=a_1=a_{-1}$

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]\cdot e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\alpha^n\cdot e^{-j\omega n}}_{(\alpha\cdot e^{-j\omega})^n}=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$ frekans cevabı

$$H(e^{jk\omega_0})=\frac{1}{1-\alpha\cdot e^{-jk\omega_0}}$$

a_0 olmadığında b_0 yok.

$b_1=a_1^{1/2}\cdot\frac{1}{1-\alpha\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}}}$

$b_{-1}=a_{-1}^{1/2}\cdot\frac{1}{1-\alpha\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n=\frac{1}{1-\alpha}$$

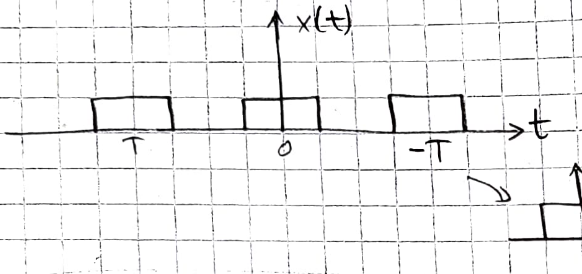
Subject:

Date: ....../....../......

Sürekli-Zaman Fourier Dönüşümü 8

Periyodik olmayan bir işareti periyodu sonsuz olan periyodik bir işaret gibi düşünebiliriz. F.S'nin periyodun sonsuza gitmesi durumunda limit halini forier dönüşümü denir.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jw_0 k t}$$



$$\boxed{a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot e^{-jkw_0 t}}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(jw) \cdot e^{jwt} \, dw}$$ Ters sürekli zaman F.D #

$$\boxed{x(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-jwt} \, dt}$$ Sürekli-Zaman F.D #

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \, dt < \infty$$ mutlak integrallenebilir.

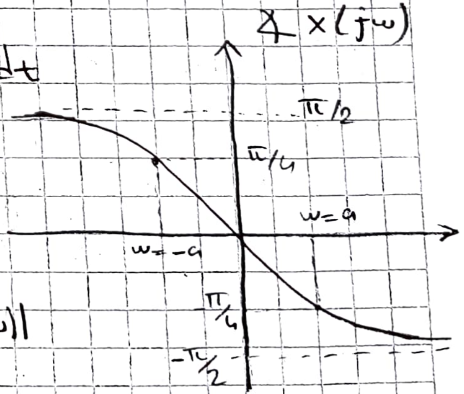
ÖRNEK

$x(t) = e^{-at} \cdot u(t)$, $a > 0$ işaretinin F.D dönüşümünü hesapla genlik ve faz spektrumlarını çiziniz?

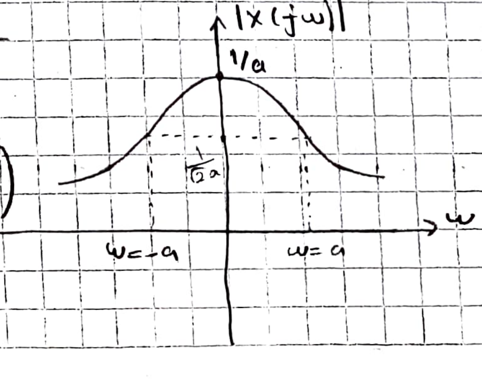
$$x(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-jwt} \, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-jwt} \, dt = \int_0^{\infty} e^{-t(a+jw)} \, dt$$

$$= \frac{-1}{a+jw} \cdot e^{-t(a+jw)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+jw}$$



$$|x(jw)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + w^2}}$$



$$\measuredangle x(jw) = -\tan^{-1}\left(\frac{w}{a}\right)$$

ÖRN:

$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a>0$ — x(t) işaretinin F.D bul ve çiz?

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

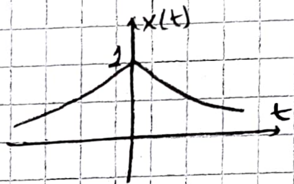
?

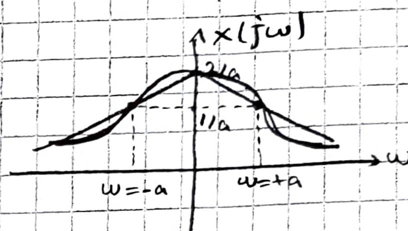
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{e^{at} \cdot e^{-j\omega t}}_{e^{t(a-j\omega)}} dt + \int_{0}^{\infty} \underbrace{e^{-at} \cdot e^{-j\omega t}}_{e^{-t(a+j\omega)}} dt$$

(Mutlak değer olduğu için işaretinin değiştiği sınırları ayırır.)

$$= \frac{1}{a-j\omega} \cdot e^{t(a-j\omega)} \Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{a+j\omega} e^{-t(a+j\omega)} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega}$$

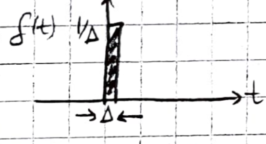
$$X(j\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$





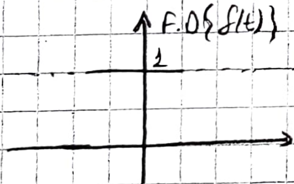
ÖRN:

Sürekli-zaman impuls işaretinin F.D hesapla?



$x(t) = \delta(t)$

$$X(j\omega) = F.D\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = 1$$



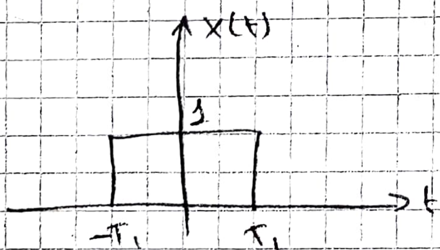
(frekans zaman ekseni terstir. İmpuls en dar işaretten zaman ekseninde frekans ekseninde en geniş işaret olur)

ÖRN:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t < |T_1| \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

x(t) işaretinin F.D bul?

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_1}^{T_1} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt$$



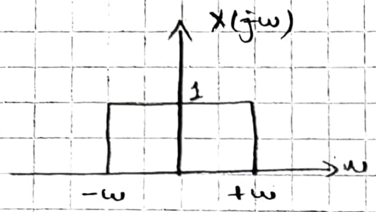
$$= \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = +\frac{1}{j\omega} \underbrace{\left(e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}\right)}_{2j \cdot \sin(\omega T_1)}$$

$$= \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

Ters fourier dönüşümü

Date ...../...../.....

ÖRNEK $x(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < w \\ 0, & |\omega| > w \end{cases}$ F.D yanda verilen işaretin zaman ekseninindeki ifadesini bulunuz?



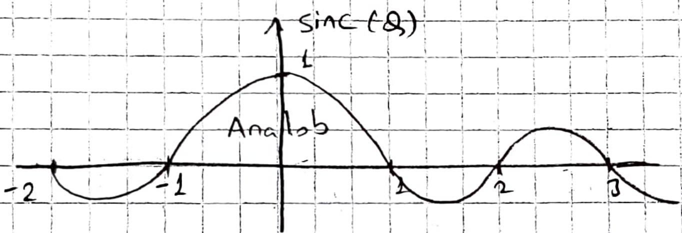
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega) \cdot e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-w}^{w} 1 \cdot e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{jt} \cdot e^{j\omega t}\Big|_{-w}^{w}$$

$$= \frac{1}{2\pi j t}\underbrace{\left(e^{jwt} - e^{-jwt}\right)}_{2j\sin(wt)} = \frac{\sin(wt)}{\pi t}$$

NOT: Sürekli zaman F.D ve LTI sistemlerin analizinde $\frac{\sin(a\theta)}{b\theta}$ şeklinde özel bir fonk. sıklıkla karşılaşılır. Bu fonk.'a "sinc" fonks. denir.

(a ve b sabit, θ değişken)



Periyodik İşaretler İçin Fourier Dönüşümü:

$x(j\omega) = 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$ olan $x(t)$ işaretini bulalım.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega) \cdot e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)\, e^{j\omega t}\, d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\underbrace{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}}_{\text{Fourier Serisi}} \xleftrightarrow{F.D} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot 2\pi\,\delta(\omega - k\omega_0)$$

Periyodik

$$\boxed{x(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)}$$ → Periyodik işaretin fourier dönüşümü

Periyodik işaretlerin Fourier Dönüşümü

Fourier dönüşümü $X(j\omega) = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$ olan $x(t)$ işaretini bulalım.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega).e^{j\omega t}$$

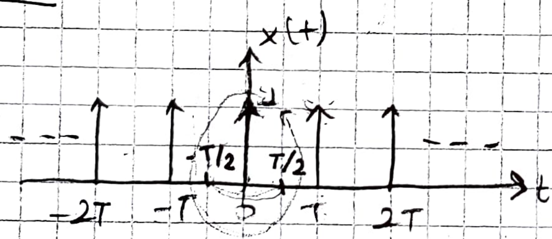
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)\,e^{j\omega t}\,d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$

$$\underset{\text{periyodik}}{x(t)} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,e^{jk\omega_0 t}}_{\text{Fourier Serisi}} \xleftrightarrow{\text{Fourier Dönüşümü}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,2\pi\,\delta(\omega-k\omega_0)$$

$$\boxed{X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,2\pi\,\delta(\omega-k\omega_0)}$$ Periyodik işaretin Fourier dönüşümü

Örnek:

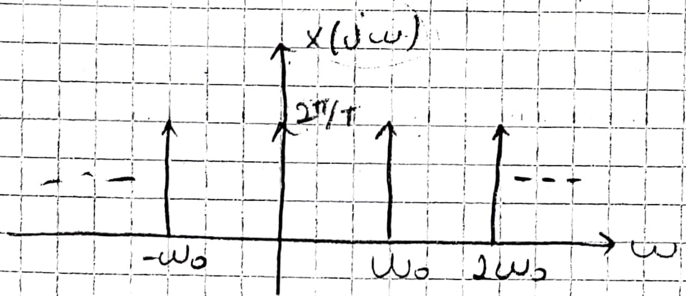


Şekilde verilen $x(t)$ işaretinin fourier dönüşümünü hesaplayınız.

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{T} x(t).e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T} \qquad t=0$$

$$\boxed{X(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-k\omega_0)}$$ Fourier dönüşümü //



$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Örnek :

$x_1(t) = \sin(\omega_0 t)$ periyodik işaretlerin fourier dönüşümünü bulunuz

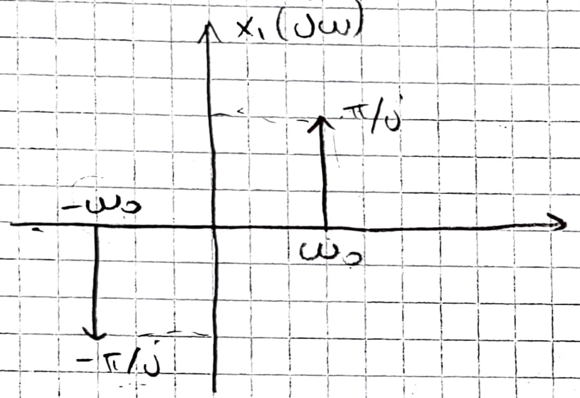
$x_2(t) = \cos(\omega_0 t)$

$$X_1(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right) \qquad a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

2 kat sayı olduğu için direk yazarız

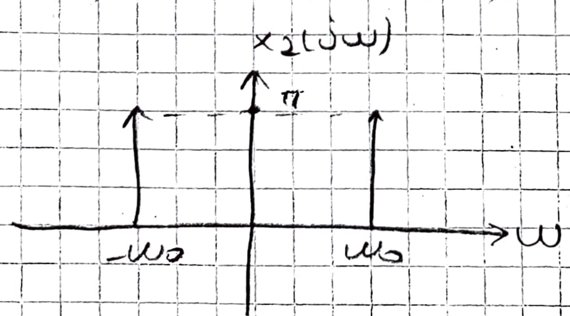
$$X_1(j\omega) = \frac{1}{\cancel{2}j} \cdot \cancel{2}\pi\delta(\omega - \omega_0) - \frac{1}{\cancel{2}j} \cancel{2}\pi\delta(\omega + \omega_0)$$



$$X_2(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

$$x_2(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) \qquad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$X_2(j\omega) = \underbrace{\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2}\pi\delta(\omega - \omega_0)}_{k=1} + \underbrace{\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2}\pi\delta(\omega + \omega_0)}_{k=-1}$$



Date:....../....../

Sürekli-Zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

1) Zamanda Öteleme:

$$x(t) \longleftrightarrow X(jw)$$

$$x(t \pm t_0) \longleftrightarrow e^{\pm jwt_0} X(jw)$$

NOT:

Sürekli-zaman bir işaret zaman ekseninde ötelendiğinde fourier dönüşümünün fazı aynı oranda ötelenir. Genlik değişmez.

2) Zaman-Frekans Ölçekleme:

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{jw}{a}\right)$$

$a>1$ ise genlik $\left(\frac{1}{|a|}\right)$ $\frac{1}{a}$ oranında daralır. $X\left(\frac{jw}{a}\right)$ genişler.

$a=-1$ olsun.

$$x(-t) \longleftrightarrow X(-jw)$$

3) Zamanda Türev Alma:

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} \longleftrightarrow (jw)^k X(jw)$$

NOT:

Bu özellik sabit katsayılı diferansiyel denklemlerle tanımlanan LTI sistemlerin analizinde oldukça faydalıdır. Diferansiyel denklemler bu sayede basit cebirsel denklemlere dönüştürülerek kolayca çözülebilir.

4) Konvolüsyon Özelliği:

$$x(t) * y(t) \longleftrightarrow X(jw) \cdot Y(jw)$$

5) Çarpma (modülasyon) Özelliği:

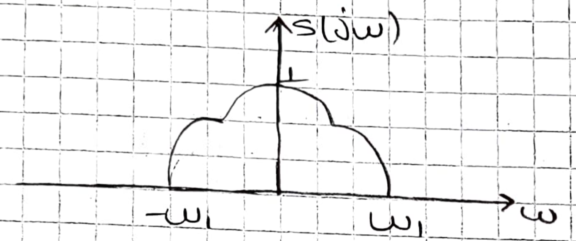
$$x(t) \cdot y(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \left\{ X(jw) * Y(jw) \right\}$$

Örnek !

Bir $s(t)$ işaretinin spektrumu (frekans eksenindeki görüntüsü) şekilde verilmiştir.

$p(t) = \cos(w_0 t)$ taşıyıcı olmak üzere

$r(t) = s(t)\, p(t)$ işaretinin spektrumunu bulunuz.

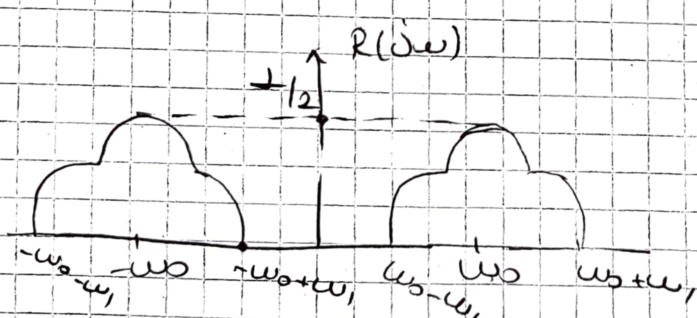


$$r(t) = s(t).p(t) \longleftrightarrow R(jw) = \frac{1}{2\pi}\left\{ S(jw) * P(jw) \right\}$$

$P(jw) = \pi\, \delta(w - w_0) + \pi\, \delta(w + w_0)$ direkt alırız ispata gerek yok

$$\left(x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \right)$$

$$R(jw) = \left[\pi\, S(j(w - w_0)) + \pi\, S(j(w + w_0))\right] \frac{1}{2\pi}$$



Doğrusal Sabit Katsayılı Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Sistemler

Giriş-çıkış ilişkisi aşağıda verilen LTI sistemin frekans cevabını bulalım.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Her iki tarafın fourier dönüşümünü alalım.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k \, Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

AYRIK - ZAMAN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ (DTFT)

frekans-zaman ekseni

$N \longrightarrow \infty$

2π ile periyodik

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} \, d\omega \quad \text{Ters DTFT}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \, e^{-j\omega n} \quad \text{DTFT}$$

zaman-frekans ekseni

Örnek:

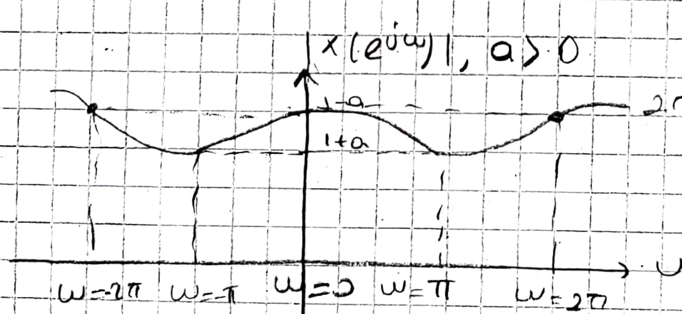
$x[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$ $\quad$ $x[n]$ işaretinin fourier dönüşümü

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-j\omega})^n$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}} \qquad \boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-a e^{-j\omega}}}$$

$\rightarrow \cos\pi - j\sin\pi$

$\cos\pi + j\sin\pi$



$\omega = 0$, $\frac{1}{1-a}$

$\omega = \pi$, $\frac{1}{1+a}$

$\omega = -\pi$, $\frac{1}{1+a}$

Örnek:

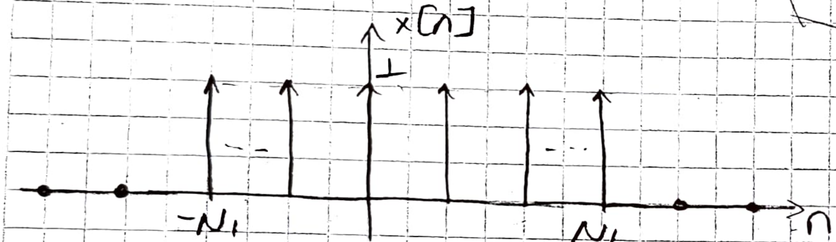
Aytık-zaman işaretin impuls işaretinin Fourier dönüşümü?

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[n]}_{\substack{\delta[n] \\ n=0}} \cdot \underbrace{e^{-j\omega n}}_{\substack{n=0 \\ =1}}$$

Örnek:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \le N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$ (bunu verirse)



$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1+N_1}^{N_1+N_1} 1 \cdot e^{-j\omega(n-N_1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{2N_1} e^{-j\omega n} \cdot e^{j\omega N_1}$$

$$= e^{j\omega N_1} \sum_{n=0}^{2N_1} (e^{-j\omega})^n = e^{j\omega N_1} \frac{1-e^{-j\omega(2N_1+1)}}{1-e^{-j\omega}}$$

Periyodik İşaretlerin Fourier Dönüşümü

Fourier dönüşümü $X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$ olan $x[n]$ işaretini bulalım.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \, d\omega$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \cancel{2\pi}\,\underbrace{\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)}_{\omega=\omega_0+2\pi l} e^{j\omega n} \, d\omega$$

$$= e^{j(\omega_0+2\pi l)n} = e^{j\omega_0 n} \underbrace{e^{j2\pi l n}}_{1}$$

$$x(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l) \xleftrightarrow{F.D} e^{j\omega_0 n} \qquad x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{-jk\overset{\omega_0}{\frac{2\pi}{N}}n}$$

periyodik

FS

$$\underbrace{\sum_{k\langle N\rangle} a_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\omega-k\omega_0-2\pi l)}_{FD}$$

Örnek:

$x[n] = \cos(\omega_0 n)$ işaretinin F.D. bulunuz

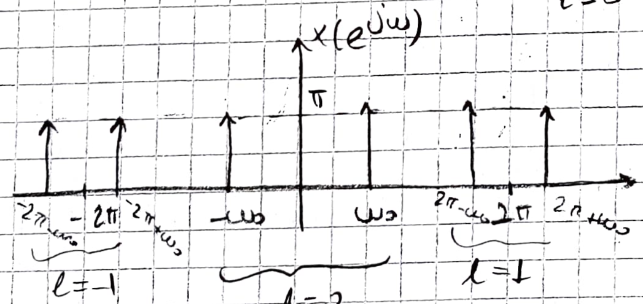
$$\cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x[n] &= \sum_{\langle N\rangle} a_k \cdot e^{-jk\omega_0 n} \\ x(e^{j\omega}) &= \sum_{\langle N\rangle} a_k \cdot 2\pi\,\delta(\omega-k\omega_0-2 \end{aligned}}$$

$$a_1 = a_{-1} = 1/2$$

$$x(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\cancel{2}\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\omega_0-2\pi l) + \frac{1}{2}2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega+\omega_0-2\pi l)$$

$l=0$ için grafik çizilirse;



2π de periyodik

Ayrık-zaman Fourier ~~Serisi~~ Dönüşümünün Özellikleri

1) Zamanda Öteleme

$x[n] \longleftrightarrow x(e^{j\omega})$ ise

$x[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-j\omega n_0}\, x(e^{j\omega})$

Fourier serisinin genliği değişmez. Faz n_0 kadar ötelenir.

Subject :

Date : ....../....../......

2) Frekansta Türev Alma:

$$n.x[n] \longleftrightarrow j\frac{dX(e^{jw})}{dw}$$

3) Konvolüsyon:

$$x[n] * y[n] \longleftrightarrow X(e^{jw}).Y(e^{jw})$$

4) Çarpma:

$$x[n].y[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\left\{X(e^{jw}) * Y(e^{jw})\right\}$$

5-) Parseval ilişkisi:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{jw})|^2 dw$$

Doğrusal Sabit Katsayılı Fark Denklemleriyle Tanımlanan Sistemler

Giriş-Çıkış ilişkisi aşağıda verilen ayrık-zaman sistemin frekans cevabını bulalım.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

Her iki tarafın DTFT alalım.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k . e^{-jwk}\, Y(e^{jw}) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, e^{-jwk}\, X(e^{jw})$$

$$H(e^{jw}) = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jwk}}{\sum_{k=0}^{N} a_k . e^{-jwk}}$$

frekans cevabı

impuls cevabı $h[n] \xleftrightarrow{F.D} H(e^{jw})$ → frekans cevabı

② Sürekli zaman Fourier dönüşümü
③ Laplace dönüşümü
④ Ayrık zaman Z dönüşümü

FİNAL KONULARI

* **Örnek 4!**

Giriş-çıkış ilişkisi aşağıda verilen sistemin frekans cevabını ve impuls cevabını bulunuz.

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=2x[n]$$

DTFT

$$Y(e^{jw})-\frac{3}{4}e^{-jw}Y(e^{jw})+\frac{1}{8}e^{-2jw}Y(e^{jw})=2X(e^{jw})$$

$h[n] \leftrightarrow H(e^{jw})$

Buraya geçiş basit kesirlere ayırarak bulu

$$H(e^{jw})=\frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})}=\frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-jw}+\frac{1}{8}e^{-2jw}}$$ frekans cevabı → Ters DTFT alalı

$$H(e^{jw})=\frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-jw}+\frac{1}{8}e^{-2jw}}=\frac{A}{1-\frac{1}{4}e^{-jw}}+\frac{B}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}=\frac{-2}{1-\frac{1}{4}e^{-jw}}+\frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}$$

$(1-\frac{1}{2}e^{-jw})$ $(1-\frac{1}{4}e^{-jw})$ → Katlı kök gelirse $Ax+B$'den yapılır.

veriliyor.

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-jw}}$$

$$A-\frac{A}{2}e^{-jw}+B-\frac{B}{4}e^{-jw}=2$$

$A+B=2$ $\boxed{A=-2}$

$\boxed{B=4}$

$$\underbrace{-\frac{A}{2}-\frac{B}{4}\rightarrow}$$

$$-\frac{A}{\cancel{2}}=\frac{B}{\cancel{4}_2}$$

$B=-2A$

$$\boxed{h[n]=-2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]+4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]}$$ impuls cevabı

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

$$x(t)\longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)=e^{st}H(s)$$

$x(t)=e^{st}$

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\,e^{-st}\,dt$$

$s\to jw$

$$H(jw)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\,e^{-jwt}\,dt \quad (\text{CTFT})$$

Subject :

Date : ..../......./.......

$s = j\omega$ için verilen integral ifadesi $h(t)$'nin fourier dönüşümüdür.

$s = \sigma + j\omega$ genel durumu için integral ifadesine laplace dönüşümü denir. Sürekli zaman bir $x(t)$ işaretinin laplace dönüşümü şu şekilde gösterilir.

$$s = \sigma + j\omega$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) . e^{-st}$$

$$x(t) \xrightarrow{L} x(s)$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = x(s)$$

Laplace dönüşümü ile sürekli-zaman fourier dönüşümü arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

$$x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st} dt \xrightarrow{s=j\omega} x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\boxed{x(s)\Big|_{s=j\omega} = F.D\{x(t)\}}$$

$$x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) . e^{-st} dt$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$x(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) . e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) . e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{x(t)\} = FD\{x(t) . e^{-\sigma t}\}}$$

$\Rightarrow$ $A(t) = x(t) . e^{-\sigma t}$ $\Leftarrow$

$$\xrightarrow{FD} \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) . e^{-\sigma t}) . e^{-j\omega t} dt$$

NOT:

1) Bir $x(t)$ işaretinin laplace dönüşümünün varolabilmesi için $x(t).e^{-\sigma t}$ işaretinin fourier dönüşümü yakınsamalıdır (sonsuza gitmicek) Verilen bir $x(t)$ işareti için laplace dönüşümünün var olduğu s değerler kümesine yakınsaklık bölgesi denir.

Region of convergence (ROC)

2) Yakınsaklık bölgesi $s=j\omega$ eksenini içeriyorsa işaretin fourier dönüşümü de vardır.

3) Bazı işaretler için fourier dönüşümü yakınsamaz iken laplace dönüşümü yakınsayabilir.

ÖRNEK!

sağ taraflı (?)

$x(t)=e^{-at}u(t)$ işaretinin laplace dönüşümünü hesaplayınız.

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{0}^{\infty} \underbrace{e^{-at}.e^{-j\omega t}}_{e^{-t(a+j\omega)}} dt$$

$$=-\frac{1}{a+j\omega}e^{-t(a+j\omega)}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{a+j\omega}$$

$a>0$ (yakınsaklık şartı)

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-st}dt$$

$$=\int_0^{\infty} \underbrace{e^{-at}e^{-st}}_{e^{-t(a+s)}}dt=-\frac{1}{a+s}.e^{-t(a+s)}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s+a}=\frac{1}{(\sigma+a)+j\omega}$$

$\sigma+a>0$ (yakınsaklık şartı)

$$\boxed{X(s)\big|_{s=j\omega}=FD\{x(t)\}}$$

$$\boxed{Re\{s\}>-a}$$

ROC

(2)

ÖRNEK :

sol taraflı

$x(t) = -e^{-at}u(-t)$ işaretinin laplace dönüşümünü bulunuz.

$t<0$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-st}\,dt$$

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{0} e^{-at}e^{-st} = -\int_{-\infty}^{0} e^{t(-s-a)}\,dt$$

$$= \frac{1}{s+a}\,e^{t(-s-a)}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s+a} = \frac{1}{(\sigma+a)+j\omega}$$

$\sigma + a < 0$

$$\boxed{Re\{s\} < -a}$$

ROC

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{0} e^{-at}\cdot e^{-st}\,dt$$

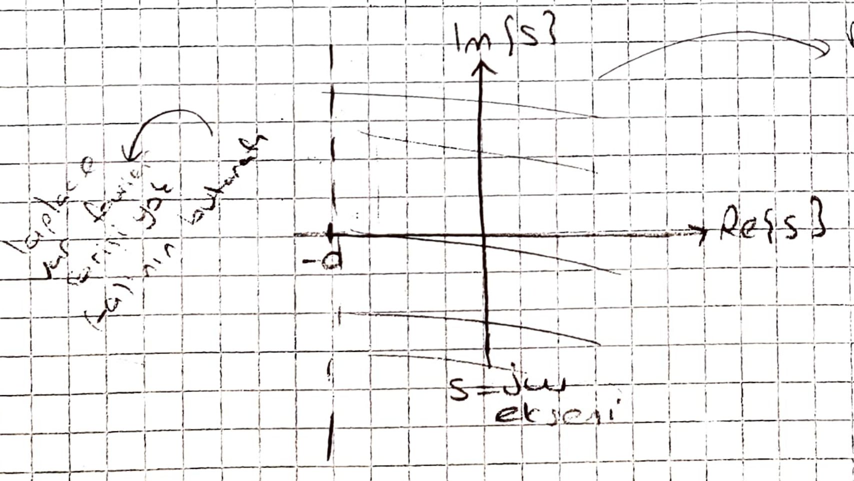
$$\underbrace{e^{-at}\cdot e^{-\sigma t}}_{e^{-t(a+\sigma)}}\cdot e^{-j\omega t} \rightarrow 0 \text{ olmaması için } \infty \text{ olmalı } \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

$a + R\{s\} < 0 \quad R\{s\} < -a$

ROC

NOT:

İki örnekten görüldüğü gibi farklı iki işarete ait laplace dönüşümü cebirsel olarak aynı olabilir. Bu durumda laplace dönüşümü için cebirsel ifadenin yanında yakınsaklık bölgesi mutlaka belirtilmelidir.



Roc $Re\{s\} > -a$

ROC grafiği jω eksenini içeriyorsa hem laplace hem de fourier var, içermiyorsa laplace var fourier yok.

$x(t) = -e^{-at} \cdot u(-t)$ laplace hesaplaz?

$X(s) = -\int_{-\infty}^{0} e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t(-s-a)} dt = -\frac{1}{-s-a} \cdot e^{t(-s-a)} \Big|_{-\infty}^{0}$

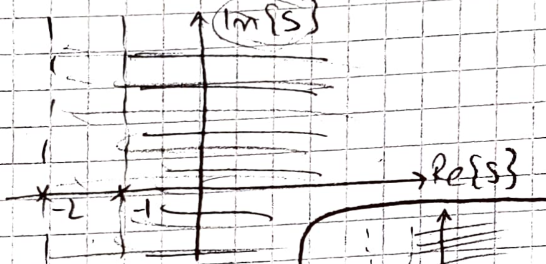
ÖRNEK:

$x(t) = 3e^{-2t} u(t) - 2e^{-t} u(t)$ işaretinin laplace dönüşümü?

$\mathcal{L}\{e^{-at} u(t)\} = \frac{1}{s+a}$

$Re\{s\} > -2$ $\quad$ $Re\{s\} > -1$

$x(s) = 3 \cdot \left(\frac{1}{s+2}\right) - 2\left(\frac{1}{s+1}\right)$ $\quad Re\{s\} > -1$



ikisinin ortak alanı alınır.

$\cos 3t = \frac{1}{2}(e^{j3t} + e^{-j3t})$

$x(t) = e^{-2t} u(t) + \frac{e^{-t}}{2}(e^{j3t} + e^{-j3t}) u(t)$

$= \left[e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-t(1-3j)} + \frac{1}{2} e^{-t(1+3j)}\right]$

$x(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1-3j} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+1+3j}$

$Re\{s\} > 2$ $\quad$ $Re\{s\} > -1$ $\quad$ $Re\{s\} > -1$

illere bakmayız

ÖRNEK:

$x(t) = e^{-2t} u(t) + e^{-t} \cos(3t) u(t)$ işaretinin laplace dönüşümü?

$\mathcal{L}\{e^{-2t} u(t)\} = \frac{1}{s+2}$ $\quad Re\{s\} > -2$

$\mathcal{L}\{e^{-t} \cos 3t\} = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-t} \cos(3t)] e^{-st} dt, \quad \cos 3t = \frac{1}{2}(e^{j3t} + e^{-j3t})$

$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-t} e^{j3t}}_{e^{-t(1-3j)}} \cdot e^{-st} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-t} \cdot e^{-j3t}}_{e^{-t(1+3j)}} e^{-st} dt\right]$

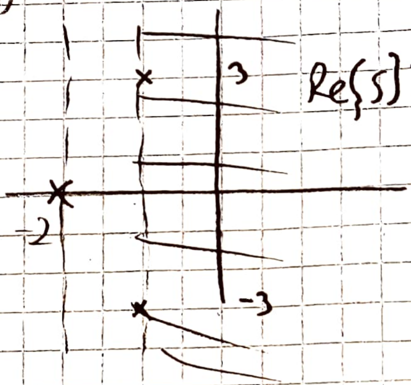
a

$= \frac{1}{2} \frac{1}{s+(1-3j)} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+(1+3j)}$

$x(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+(1-3j)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+(1+3j)}$

$s = -2$ $\quad$ $s = 3j - 1$ $\quad$ $s = -3j - 1$

$Re\{s\} > -2$ $\quad$ $Re\{s\} > -1$ $\quad$ $Re\{s\} > -1$

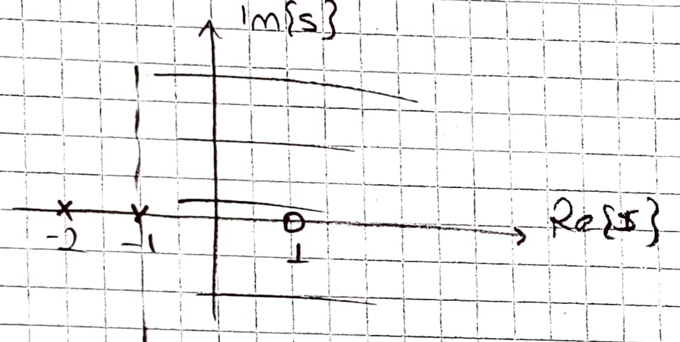


$Re\{s\} > -1$

NOT:

Örneklerden görüldüğü gibi $x(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ şeklinde oransal bir ifadeye sabittir. N(s) polinomunun kökleri laplace dönüşümünün sıfırları olarak adlandırılır ve "0" sembolü ile gösterilir. D(s) polinomunun kökleri ise laplace dönüşümünün kutuplarıdır ve "x" sembolü ile gösterilir.

ÖRN: $x(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}$ olsun. Kutup sıfır diyagrafını çizelim. (ROC $Re\{s\} > -1$)



Kutup sıfır diyagramı ile yakınsaklık bölgesi arasında ilişki yok.

ÖRNEK:

$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$ laplace dönüşümünü bulunuz. Kutup-sıfır diyagramını çizerek yakınsaklık bölgesini gösteriniz.

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(t).e^{-st}}_{t=0}\, dt = 1 \quad \text{Tüm } Re\{s\}$$

$$\mathcal{L}\left\{-\frac{4}{3}e^{-t}u(t)\right\} = -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{s+1} \quad Re\{s\} > -1$$

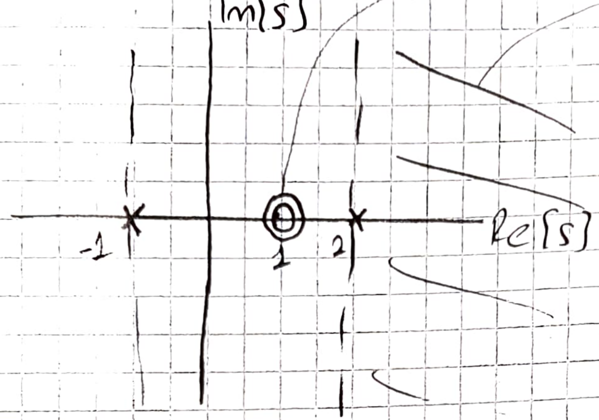
$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{3}e^{2t}u(t)\right\} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s-2} \quad Re\{s\} > 2$$

$$x(s) = 1 - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s-2}$$

$$x(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}, \quad ROC\ Re\{s\} > 2$$

çift katlı kutup.

2 ve -1'in sağ tarafı ortak olan bölgedir.



ROC Re{s} > 2

fourier dönüşümü yok.

Yakınsaklık Bölgesinin Özellikleri (ROC)

1) Laplace dönüşümü $x(s)$'e ait ROC jω eksenine paralel bir şerittir.

2) $x(s)$'e ait ROC kutup içermez.

3) $x(t)$ sonlu bir işaret ve mutlak integrallenebilir ise $x(s)$'e ait ROC tüm s düzlemidir.

Kutup yoksa ROC tüm s düzlemi!

ÖRNEK:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0<t<T \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

işaretin laplace dönüşümünü hesaplayınız.

$$x(s) = \int_0^T \underbrace{e^{-at} . e^{-st}}_{e^{-t(s+a)}} dt = -\frac{1}{s+a} e^{-t(s+a)} \Big|_0^T = -\frac{1}{s+a} \left(e^{-T(s+a)} - 1\right)$$

$$x(s) = \frac{1}{s+a} \left(1 - e^{-T(s+a)}\right)$$

$s = -a$'da $x(s) = 0/0$

$$\lim_{s \to -a} \frac{d/ds\left[1 - e^{-T(s+a)}\right]}{d/ds(s+a)}$$ L'Hospital

$$\lim_{s \to -a} \frac{T . e^{-T(s+a)}}{1} = T$$ Tüm Re{s} → Kutupu kaldırdık

$$x(t) = \begin{cases} e^{-3t}, & 0<t<T \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) . e^{-st} dt = \int_0^T \underbrace{e^{-3t} . e^{-st}}_{e^{-t(s+3)}} dt = \frac{-1}{s+3} e^{-t(s+3)}$$

$$= \frac{-e^{-T(s+3)}}{s+3} + \frac{1}{s+3} = \frac{1 - e^{-T(s+3)}}{s+3}$$

Paydanın tanımsız?

$1 - e^{-T(s+3)} = 0$ sıfır $s = -3$

$s = -3$ kutup.

L'hospital uygula

$Y(s) = \frac{T.e^{-T}}{1}$

$s = -3$ sı kutup y

"ROC Tüm s düzlemi

4) $x(t)$ sağ taraflı bir işaret ise yakınsaklık bölgesi $Re\{s\} > \sigma$ alanıdır.

5) $x(t)$ sol taraflı bir işaret ise yakınsaklık bölgesi $Re\{s\} < \sigma$ alanıdır.

6) $x(t)$ çift taraflı bir işaret ise yakınsaklık bölgesi bir şerit şeklinde olur.

Ters Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü $X(s)$ olan $x(t)$ işaretini bulmak için aşağıdaki ifade kullanılır.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} X(s) \cdot e^{st} \, ds$$

Ancak verilen integrali hesaplamak zor olduğundan basit kesirlere ayırma işlemi ile ters laplace dönüşümü hesaplanır.

ÖRNEK:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

a) $Re\{s\} > -1$ → fourier dönüşümü var.

b) $Re\{s\} < -2$ → laplace d. yok

c) $-2 < Re\{s\} < -1$ → fourier d. yok

3 ifade için $x(t)$ işaretlerini bulunuz.

fourier olup laplace olmayan yoktur

$$X(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$s = -1$ $\quad$ $s = -2$

$As + 2A + Bs + B = 1$

$A + B = 0$

$2A + B = 1$

$\boxed{A = 1}$

$\boxed{B = -1}$

2. yol

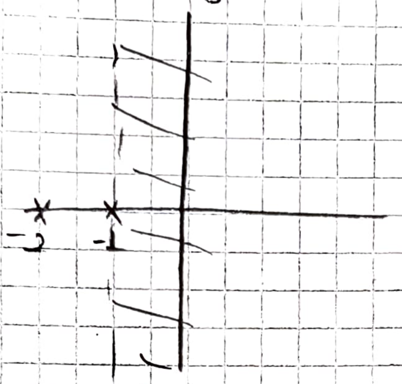
$s \to -1 \quad (s+1)\,X(s) = 1 = A$

$s = -2 \quad (s+2) \cdot X(s) = -1 = B$

a) İkiside sağ

$e^{-at}u(t) \longrightarrow \frac{1}{s+a}$, $Re\{s\} > -a$

$-e^{-at}u(-t) \longrightarrow \frac{1}{s+a}$, $Re\{s\} < -a$

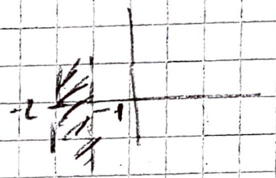


$x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$

İkiside sol

b) $x(t) = -e^{-t}u(-t) + e^{-2t}u(-t)$

c) $x(t) = \underbrace{-e^{-t}u(-t)}_{\text{sol taraf}} - \underbrace{e^{-2t}u(t)}_{\text{sağ taraf}}$

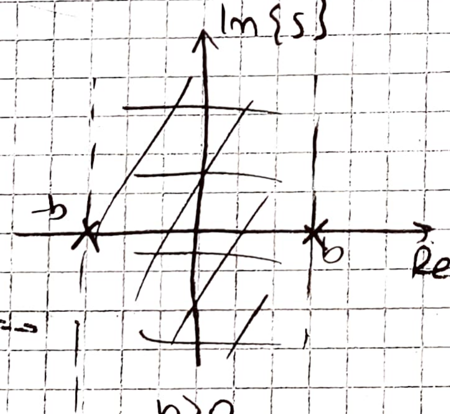


ÖRNEK:

$x(t) = e^{-b|t|}$ x(t) işaretinin laplace dönüşümü mevcut ise hesaplayınız.

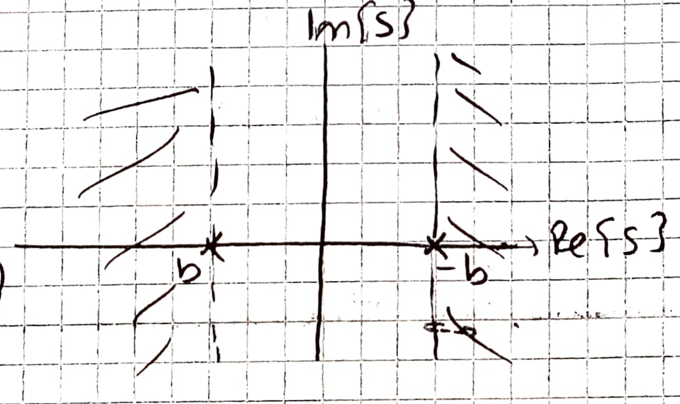
$x(t) = \underbrace{e^{-bt}u(t)}_{t>0} + \underbrace{e^{bt}u(-t)}_{t<0}$

$X(s) = \underbrace{\frac{1}{s+b}}_{Re\{s\}>-b} - \underbrace{\frac{1}{s-b}}_{Re\{s\}<b}$



$b>0$

$-b < Re\{s\} < b$



$b<0$

ROC $= \emptyset$ X(s) yoktur.

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

1) Doğrusallık:

$x_1(t) \xrightarrow{L} X_1(s)$ ROC: R_1

$x_2(t) \xrightarrow{L} X_2(s)$ ise ROC: R_2

$a x_1(t) + b x_2(t) \xrightarrow{L} a X_1(s) + b X_2(s)$ ROC: $R_1 \cap R_2$'yi içerir.

2) Zamanda Öteleme:

$x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ ise, ROC: R

$x(t \pm t_0) \xrightarrow{L} e^{\pm s t_0} X(s)$ ROC: R

fazı etkiler

3) s domeninde öteleme:

$x(t) \xrightarrow{L} X(s)$, ROC: R ise

$e^{s_0 t} x(t) \xrightarrow{L} X(s - s_0)$ ROC: $R + Re\{s_0\}$

4) Zamanda Ölçekleme;

$x(t) \xrightarrow{L} X(s)$, ROC: R ise

$x(at) \xrightarrow{L} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$ ROC $R_1 = \frac{R}{a}$

5) Konvolüsyon Özelliği:

$x_1(t) \xrightarrow{L} X_1(s)$ ROC: R_1

$x_2(t) \xrightarrow{L} X_2(s)$ ROC: R_2 ise

$x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{L} X_1(s) \cdot X_2(s)$ ROC: $R_1 \cap R_2$'yi içerir

6) Zamanda Türev Alma:

$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{L} s X(s)$ → 2. türev $s^2 X(s)$ Başlangıç koşulu 0 kabul edilir.

7) s domeninde Türev Alma; ⇒

$-t \cdot x(t) \xrightarrow{L} \frac{dX(s)}{ds}$

(ROC değişmez)

Genel ifade:

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(s+a)^n} \qquad Re\{s\} > -a$$

$$e^{-at} u(t) \longrightarrow \frac{1}{s+a}$$

$$t\, e^{-at} u(t) \longrightarrow \frac{1}{(s+a)^2} \quad *$$

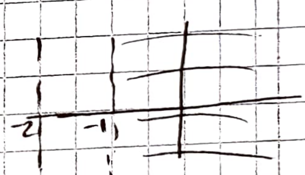
$$\frac{t^2}{2} e^{-at} u(t) \longrightarrow \frac{1}{(s+a)^3}$$

Örnek:

$$x(s) = \frac{2s^2+5s+5}{(s+1)^2 (s+2)} \qquad Re\{s\} > -1 \;,\quad x(t) = ?$$

$$x(s) = \frac{A}{\underset{(s+1)(s+2)}{(s+1)}} + \frac{B}{\underset{(s+2)}{(s+1)^2}} + \frac{C}{\underset{(s+1)^2}{(s+2)}} \Rightarrow A=-1 \quad B=2 \quad C=3$$

$$X(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+2)} \quad (\text{sağ})$$



$$x(t) = -e^{-t}u(t) + 2te^{-t}u(t) + 3e^{-2t}u(t) \qquad e^{-at}u(t) \longrightarrow \frac{1}{(s+a)}$$

$$x(t) = \left[2t\,e^{-t} - e^{-t} + 3\,e^{-2t}\right] u(t)$$

8) Zamanda integral:

$$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt \xrightarrow{L} \frac{1}{s} x(s)$$

* İlk değer teoremi $\quad x(0^+) = \lim_{s \to \infty} s\,x(s)$

* Son değer teoremi $\quad \lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} s\,x(s)$

Nedensellik

Sağ taraflı olmalı

$h(t)=0,\ t<0$ ise sistem nedenseldir. Dolayısıyla impuls cevabı sağ tarafa dayalıdır. Bu durumda nedensel bir sistemin transfer fonksiyonu $H(s)$ için yakınsaklık bölgesi (ROC) sağ taraflıdır. Oransal bir transfer fonksiyonuna sahip nedensel sistemin ROC'u en sağdaki kutbun sağıdır.

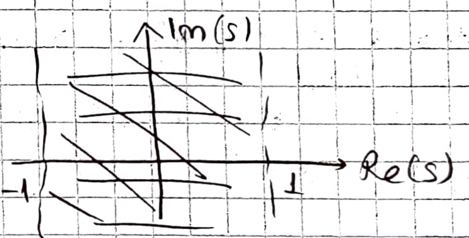
Örnek:

$h(t)=e^{-|t|}$ ile verilen sistemin nedenselliğini inceleyiniz.

$$h(t)=\underbrace{e^{t}u(-t)}_{t<0}+\underbrace{e^{-t}u(t)}_{t>0} \Rightarrow h(t)\neq 0,\ t<0 \text{ olduğundan nedensel değildir.}$$

$$H(s)=-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}$$

$s=1$, $Re\{s\}<1$ $\qquad$ $s=-1$, $Re\{s\}>-1$



ROC : $-1<Re\{s\}<1$ (1'in sağı olsaydı nedensel olurdu.)

Örnek:

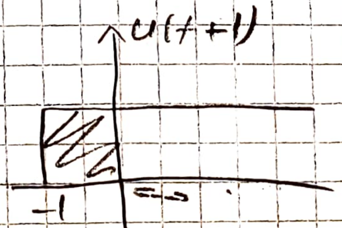
$H(s)=\dfrac{e^{s}}{s+1}$, $Re\{s\}>-1$ transfer fonks. verilen sistemin nedenselliğini inceleyiniz.

$x(t+1) \rightarrow e^{s}X(s)$

(Nedensel olmalı!)

$H(s)=\dfrac{1}{s+1} \xrightarrow{\text{olsaydı}} h(t)=e^{-t}u(t)$

$H(s)=\dfrac{e^{s}}{s+1} \xrightarrow{\text{old. göre}} h(t)=e^{-(t+1)}u(t+1)$ (nedensel değil)



Date : ..../......../........

NOT:

Nedensel sistem için ROC en sağdaki kutbun sağıdır. Ancak ROC'un en sağdaki kutbun sağı olması nedenselliği garanti etmez. İmpuls cevabına bakılarak nedensellik için kesin olarak karar verilir.

Kararlılık

LTI bir sistemin kararlı olması için impuls cevabı mutlak integrallenebilir olmalıdır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$$

Başka bir ifade ile impuls cevabının Fourier dönüşümü yakınsamalıdır.

LTI bir sistemin kararlı olabilmesi için sistemin transfer fonksiyonuna ait ROC jw eksenini içermelidir.

Örnek

$H(s) = \dfrac{s-1}{(s+1)(s+2)}$ transfer fonks. verilen sistemin nedenselliğini ve kararlılığını inceleyiniz.

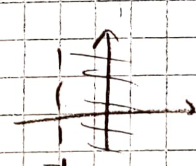
$$= \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)} \Rightarrow AS + 2A + BS + B = S - 1 \Rightarrow \begin{array}{l} A+B=+1 \\ 2A+B=-1 \\ \hline A=-2 \quad B=3 \end{array}$$

(s+2) (s+1)

$$= \frac{-2}{\underbrace{s+1}_{s=-1}} + \frac{3}{\underbrace{s+2}_{s=-2}}$$

1) (sağ) $Re\{s\} > -1$ ise

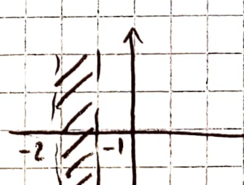
$h(t) = -2e^{-t}u(t) + 3e^{-2t}u(t)$



nedensel
kararlı (jw eksenini içeriyor)

2) $-2 < Re\{s\} < -1$

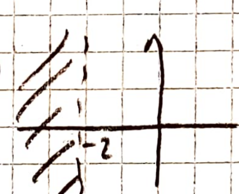
$h(t) = 2e^{-t}u(-t) + 3e^{-2t}u(-t)$



nedensel değil (u(-t) olduğu)
kararlı değil

3) (sol) $Re\{s\} < -2$

$h(t) = 2e^{-t}u(-t) - 3e^{-2t}u(-t)$



nedensel değil
kararlı değil

(Soruda kararlı olduğunu verirse sadece 1 cevaplı olur)

Not:

Nedensel bir sistemin kararlı olabilmesi için tüm kutupların sol-yarı s düzleminde olması gerekir.

Örnek!

$x(t)=e^{-3t}u(t)$ giriş işaretine cevabı $y(t)=[e^{-t}-e^{-2t}]u(t)$ olan sistemin transfer fonksiyonunu bulunuz. Giriş-çıkış ilişkisini tanımlayan dif. denklemi yazınız. Nedenselliğini ve kararlılığını inceleyiniz.

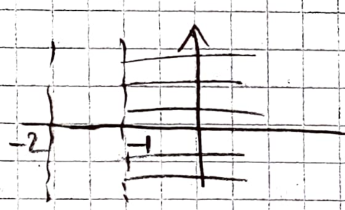
$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$ $\qquad Y(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2} \quad Re\{s\}>-1$

$X(s)=\frac{1}{s+3} \quad Re\{s\}>-3$ $\qquad H(s) \rightarrow Re\{s\}>-1$ kesişimini de kapsamalı.

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1/(s+1)(s+2)}{1/s+3}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}, \quad Re\{s\}>-1$$

Nedenseldir.

Kararlıdır.



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2} \qquad \frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow sX(s)$$

$$s^2Y(s)+3sY(s)+2Y(s)=sX(s)+3X(s)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)$$ (dif. denklem)

Örnek!

Bir sistem hakkında aşağıdaki bilgiler veriliyor.

1) Sistem nedenseldir.

2) Transfer fonksiyonu oransaldır ve $s=-2$ ve $s=4$'te iki kutbu vardır.

3) $x(t)=1$ için $y(t)=0$'dır.

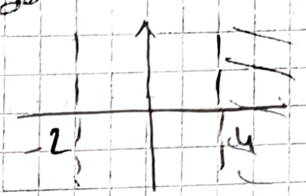
4) İmpuls cevabı $t=0^+ \rightarrow 4$ olarak hesaplanmıştır.

$$\lim_{t\to 0} h(t) \longrightarrow \lim_{s\to\infty} s.H(s)=4$$

$H(s)$ nedir?

nedenselliğinden

$H(s) = \frac{P(s)}{(s+2)(s-4)}$, $Re\{s\}>4$



2 =)

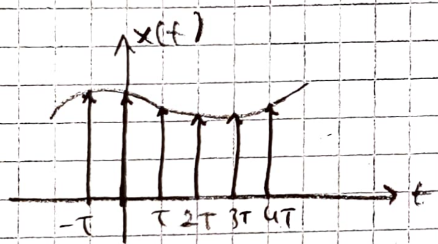
3 =) $x(t)=e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)=e^{st}.H(s)=H(0)=0$

$e^{st}=1$
$s=0$

4 =) $H(s) = \frac{s.q(s)}{(s+2)(s-4)}$ $\quad \lim_{s\to\infty} \frac{s^2\, q(s)}{(s+2)(s-4)} = 4$

$H(s) = \frac{4s}{(s+2)(s-4)}$, $Re\{s\}>4$

Örnekleme



T: örnekleme periyodu

$x(t) \longrightarrow \otimes \longrightarrow x_p(t)$

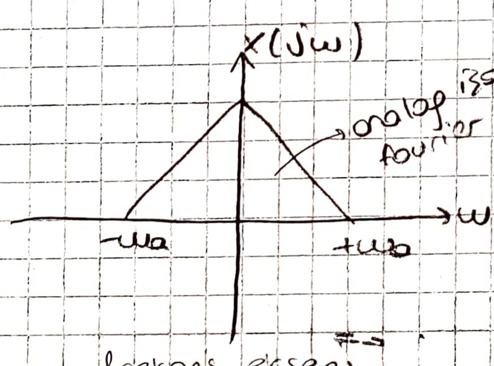
$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$ impuls dizisi

$x_p(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$

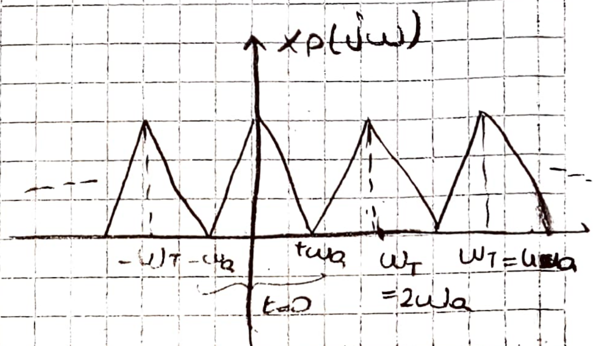
$\boxed{x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)}$ örnekleme

$\boxed{X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega-k.\omega_T))}$

ω_T = örnekleme frekansı



frekans ekseni



$\omega_T < 2\omega_a$ örtüşme olur

$\omega_T \geq 2\omega_a$ Nyquist şartı

z- Dönüşümü

$$x[n] = z^n \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = z^n H(z)$$

$$H(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

$\boxed{z = e^{jw}}$ (Fourier)

$$\underbrace{H(e^{jw})}_{\text{Frekans cevabı}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{h[n]}_{\text{impuls cevabı}} . e^{-jwn}$$

Ayrık - zaman F.D (DTFT)

$z = r.e^{jw}$ (z dönüşümü)

$|z| = 1$ için toplam ifadesine fourier dönüşümü demiştik. $|z| = 1$ olmak zorunda olmadığında toplam ifadesine z dönüşümü denir. Ayrık-zaman bir $x[n]$ işaretinin z dönüşümü şu şekilde hesaplanır.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] . z^{-n}$$

z dönüşümü ile fourier dönüşümü arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

$$z = r.e^{jw}$$

$$X(r.e^{jw}) = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] . (r.e^{jw})^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].r^{-n} e^{-jwn}$$

$$\boxed{X(z) = F.D \{x[n] r^{-n}\}}$$

Bir $x[n]$ işaretinin z dönüşümünün var olabilmesi için $x[n].r^{-n}$ işaretinin fourier dönüşümü yakınsamalıdır. Verilen bir işaret için z dönüşümünün var olduğu r değerleri kümesine yakınsaklık bölgesi (ROC) denir. ROC birim çemberi içeriyorsa işaretin fourier dönüşümüde vardır.

sağ taraf a'nın dışı

Örnek:

$x[n]=a^n u[n]$ işaretinin z dönüşümünü hesaplayınız. Kutup-sıfır diyagramını çizerek ROC'u belirleyiniz.

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

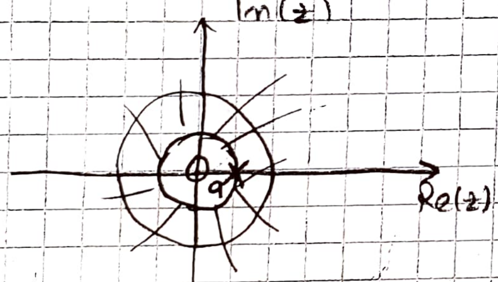
mutlak toplanabilir olmalı

$$=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a.z^{-1})^n \quad , |a.z^{-1}|<1, \quad \left|\frac{a}{z}\right|<1$$

$\boxed{|z|>a}$ ROC

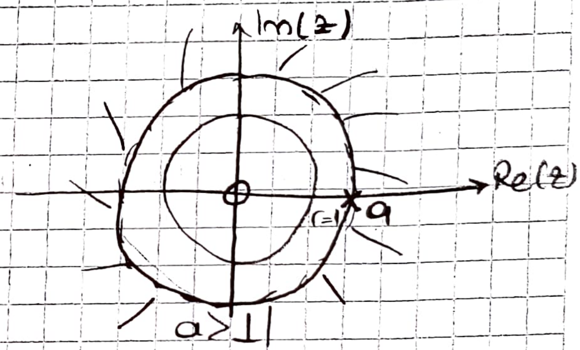
$$X(z)=\frac{1}{1-a.z^{-1}} \quad , |z|>a \qquad \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

$$\boxed{X(z)=\frac{z}{z-a}} \quad , |z|>a$$



$0<a<1$

fourier hesaplanabilir. (birim çemberi içeriyor)



$a>1$

fourier hesaplanamaz.

Örnek:

sol taraf a'nın içi

$x[n]=-a^n u[-n-1]$ z dönüşümü?

$$X[z]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, r<1\right)$$

$$X(z)=-\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^{n} = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n - 1\right) = 1-\frac{1}{1-a^{-1}z}$$

$|a^{-1}z|<1$

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z+a}$$

n yerine -n yaz tersini çevir.

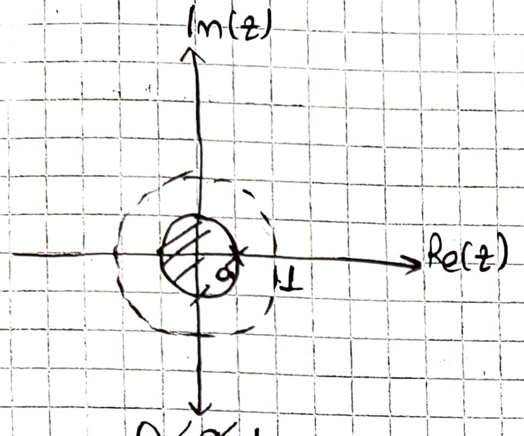
ROC $|z|<|a|$

n=0'dan başlayanlardan n=1 yani yerine koyduğumuzda "1" değerini

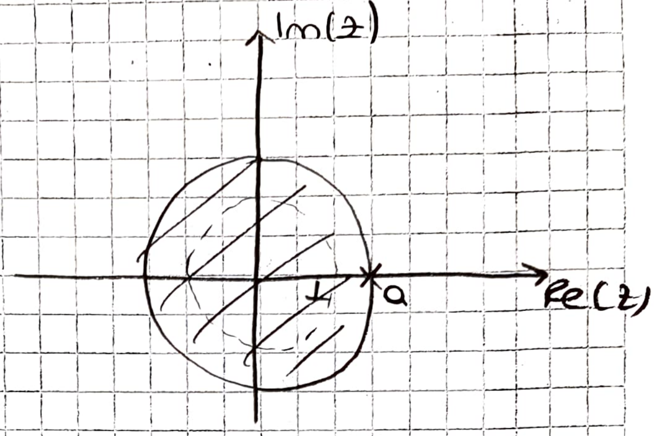
$a^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}}, \ |z|>|a|$

$-a^n u[-n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}}, \ |z|<|a|$

Subject : Date : ..../......./.......



$0<\alpha<1$



$a>1$

fourier hesaplanamaz

fourier hesaplanabilir.

Örnek:

$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ z dönüşümünü hesaplayınız, kutup-sıfır diyagramını çizerek yakınsaklık bölgesini belirleyiniz.

$a^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, \ |z|>|a|$

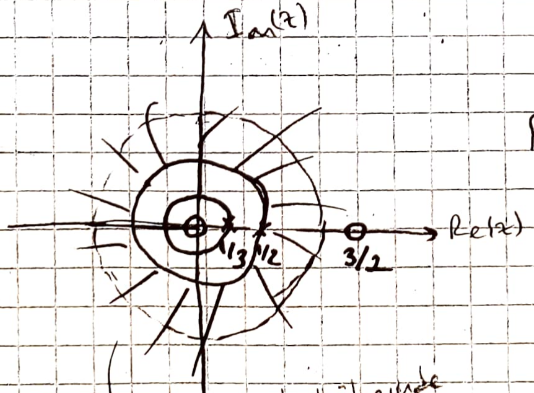
$\longrightarrow \frac{z}{z-a}$

$X(z) = 7\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - 6\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

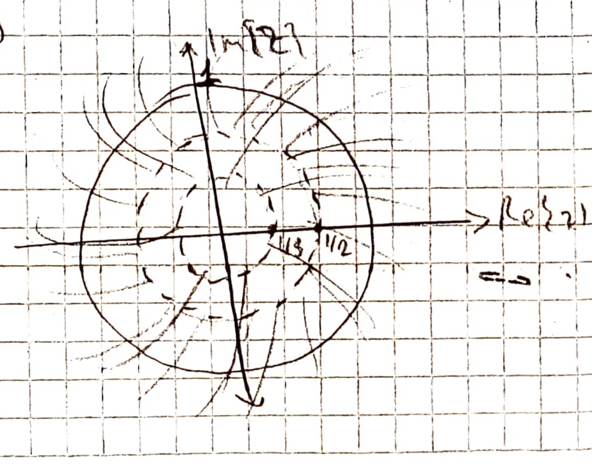
$X(z) = 7\cdot\underbrace{\frac{z}{z-1/3}}_{|z|>\frac{1}{3}} - 6\,\underbrace{\frac{z}{z-1/2}}_{|z|>1/2} = \frac{z(z-3/2)}{(z-1/3)(z-1/2)}$

"o" Payın kökleri sıfırlar $z=0, \ z=3/2$

"x" Paydanın kökleri kutuplar $z=1/3, \ z=1/2$



ROC $|z|>\frac{1}{2}$



⇒ Yakınsaklık bölgesinde asla kutup bulunmaz.

⇒

Örnek!

$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[n]$ z dönüşümünü hesaplayınız.

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{2j}\left(e^{j\pi/4 n} - e^{-j\pi/4 n}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)^n - \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)^n\right] u[n]$$

$$X(z) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{1-\underbrace{\frac{1}{3}e^{j\pi/4}}_{a} z^{-1}} - \frac{1}{2j} \frac{1}{1-1/3\, e^{-j\pi/4} z^{-1}}$$

$$|z| > \left|\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right|$$

uzunluğu $= \frac{1}{3}$

$$\boxed{|z| > \frac{1}{3}}$$

Örnek

a) $x[n] = \delta[n]$

b) $x[n] = \delta[n-1]$

c) $x[n] = \delta[n+1]$ işaretlerinin z dönüşümü?

a)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta[n]}_{n=0,1} z^{-1} \quad ROC: \forall z \text{ (kutup olmadığı için)}$$

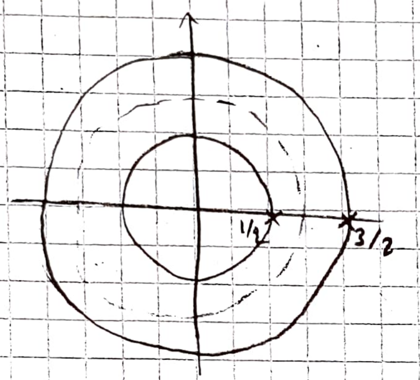
b) $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta[n-1]}_{n=1} z^{-n} = z^{-1} = \frac{1}{z}, \quad ROC: \forall z \text{ (Kutbu 0'dır. 0 yarıçaplı çember olmaz)}$$

c) $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta[n+1]}_{n=-1} z^{-n} = z, \quad ROC: \forall z$$

Yakınsaklık Bölgesinin (ROC'un) Özellikleri

1) Ayrık-zaman bir işaretin z dönüşümünün yakınsaklık bölgesi 0 etrafında bir halkadır.

2) ROC herhangi bir kutup içermez.



$|z| > \frac{3}{2}$ (sağ)

$|z| < \frac{1}{2}$ (sol)

ROC : $\varnothing$

$1/2 < |z| < 3/2$

3) Ayrık-zaman işaret sonlu süreli ise yakınsaklık bölgesi tüm z düzlemidir. $z=0$ hariç

4) Ayrık-zaman işaret sağ taraflı ise yakınsaklık bölgesi $|z| > r_0$ eşitsizliğini sağlayan tüm noktalar kümesidir. İşaret sol taraflı ise yakınsaklık bölgesi $|z| < r_0$ eşitliğini sağlayan noktalar kümesidir.

5) İşaret çift taraflı ise yakınsaklık bölgesi $z = r_0$ halkasını içeren bir simit şeklindedir.

Ters z dönüşümü

Ayrık-zaman bir $x[n]$ işaretinin z dönüşümü $X(z)$ verildiğinde aşağıdaki ifade kullanılarak $x[n]$ bulunabilir.

$$x[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint X(z) \cdot z^{n-1} \, dz$$

Karmaşık düzlemde integral hesaplamak yerine ters z dönüşümü basit kesirlerine ayırma ve kuvvet serilerini açma yöntemleri kullanılarak hesaplanabilir.

Katsayı [illegible]

Örnek :

$$x(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

a) $|z| > 1/3$

b) $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$

c) $|z| < 1/4$ 3 durum için $x[n]$ işaretini hesaplayınız.

$$\frac{A}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} + \frac{B}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$z = \frac{1}{4}$ $z = 1/3$

$$A - \frac{A}{3}z^{-1} + B - \frac{B}{4}z^{-1} = 3 - \frac{5}{6}z^{-1}$$

$a^n u[n] \rightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z| > |a|$

$A + B = 3$

$\frac{A}{3} + \frac{B}{4} = \frac{5}{6}$

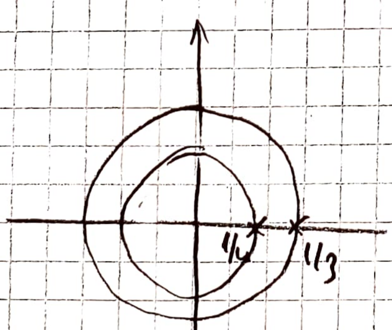
$A = 1$
$B = 2$

$-a^n u[-n-1] \rightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z| < |a|$

a) $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ → 1/4'ün dışı

b) $x[n] = \left(1/4\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$

c) $x[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$ 1/4'ün içi



Birim çemberi içeren yani fourier dönüşümü hesaplanabilen sadece a şıkkı var.

Subject: Date: ..../..../......

Örnek:

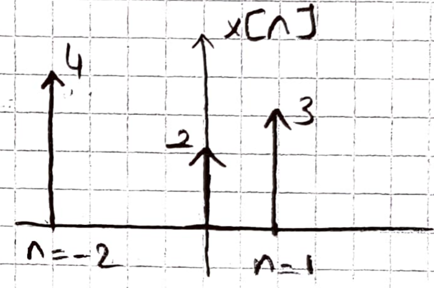
$X(z) = 4z^2 + 2 + 3z^{-1}$ ROC: $0<|z|<\infty$

$x[n]$ işaretini bul.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \text{---} \; x[-2]z^2 + x[-1].z + x[0] +$$

$$x[1].z^{-1} + x[2].z^{-2} + \text{---}$$

$$x[n] = \begin{cases} n=-2, & 4 \\ n=0, & 2 \\ n=1, & 3 \end{cases}$$



ROC: $\forall z$

$x[n] = 2.\delta[n] + 3\delta[n-1] + 4\delta[n+2]$

Örnek:

$X(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}$, $|z|>|a|$ kuvvet serisini olarak $x[n]$ işaretini bul

bunu göre

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1-az^{-1} \\ \underline{-\;1-az^{-1}} & 1+az^{-1}+a^2z^{-2}+a^3z^{-3}\text{---} \\ az^{-1} & \\ \underline{-\;az^{-1}-a^2z^{-2}} & \\ a^2z^{-2} & \\ \underline{-\;a^2z^{-2}-a^3z^{-3}} & \end{array}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$\boxed{x[n] = a^n u[n]}$$

$X(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}$, $|z|<|a|$ kuvvet serisini olarak $x[n]$'i bul.

buna göre

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1-az^{-1} \\ \underline{-\;-a^{-1}z+1} & -a^{-1}z-a^{-2}z^2-a^{-3}z^3\text{---} \\ a^{-1}z & \\ \underline{-\;a^{-2}z^2+a^{-1}z} & \\ a^{-2}z^2 & \end{array}$$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

$$\boxed{x[n] = -a^n u[-n-1]}$$

Örnek:

$$x(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z|>|a|$$

z dönüşümünün özelliklerinden faydalanarak $x[n]$'i bulunuz.

$$a^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z|>|a|$$

$$\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right)' = \frac{-az^{-2}}{(1-az^{-1})^2}$$

$$n\,x[n] \longrightarrow -z \cdot \frac{dx(z)}{dz}$$

$$n.a^n u[n] \longrightarrow -z \cdot \frac{-az^{-2}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$$

$x[n] = n.a^n u[n]$ //

LTI Sistemlerin z Dönüşümü Kullanılarak İncelenmesi

1) Nedensellik:

$n<0$, $h[n]=0$ ise nedenseldir.

Ayrık-zaman bir sistemin nedensel olabilmesi için gerek ve yeter koşul transfer fonksiyonunun yakınsaklık bölgesinin karmaşık z düzleminde bir çemberin dışında ve sonsuzu içeren bir bölge olmasıdır. Rasyonel transfer fonksiyonunun ayrık-zaman LTI sistemin nedensel olabilmesi için gerek ve yeter koşul

a) Transfer fonksiyonunun z dönüşümünün yakınsaklık bölgesi en dıştaki kutbun dışı olmalıdır. ve

b) $H(z)$'in pay polinomunun derecesi payda polinomunun derecesinden büyük olmamalıdır.

Örnek:

a) $$H(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + z}{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}}$$

b) $$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-2z^{-1}}, \quad \text{ROC}, |z|>2$$

nedenselliğini inceleyiniz.

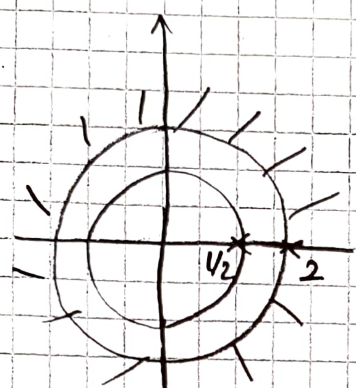
Date:....../....../......

a)

Payın derecesi Paydanın derecesi

3 > 2 nedensel değil

b)



En dıştakinin dışı nedenseldir.

derecelere bakılarak da yapılabilir.

2) Kararlılık:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$ ise kararlıdır.

a) Ayrık-zaman LTI bir sistemin kararlı olabilmesi için transfer fonksiyonun yakınsaklık bölgesi birim çemberi içermelidir.

b) Rasyonel transfer fonksiyonunu nedensel ayrık-zaman LTI sistemin kararlı olabilmesi için $H(z)$'in kutuplarının tümünün birim çemberin içinde olması gerekir.

Transfer Fonksiyonunun Bulunması

Giriş-çıkış ilişkisi aşağıda verilen sistemin transfer fonksiyonunu bulalım.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot x[n-k]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot z^{-k}}$$

4.
Örnek:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1]$$

Giriş-çıkış ilişkisi verilen sistemin transfer fonks. ve impuls cevabını bulunuz. Nedenselliğini ve kararlılığını inceleyiniz.

Transfer fonks.

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

$$Y(z)\left[1-\frac{1}{2}z^{-1}\right] = X(z)\left[1+\frac{1}{3}z^{-1}\right]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+1/3\,z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \begin{cases} \to |z|>1/2 \\ \to |z|<1/2 \end{cases}$$

① $|z|>\frac{1}{2} \to H(z) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \dfrac{1/3\, z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ → $(n-1)$'ler buradan geldi.

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

→ n yerine $n-1$ yazdık

② $|z|<\frac{1}{2} \to h[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[-(n-1)-1]$

1. Nedensel

Kararlı

2. Nedensel değil (En dıştakinin dışı değeri)

Kararlı değil. (Birim çemberi içermez)

Date:....../......./.......

Ödevler:

1-) $x[n] = u[n+2] - u[-1-n] - 3u[n-2]$, $-3 \leq n \leq 3$

a-) $x[n]$ işaretini çiziniz?

b-) $x[-n+3]$ " " ?

c-) $\frac{1}{2} \cdot x[2n+1]$ " " ?

d-) $x[n] \cdot u[n+1]$ " " ?

e-) İşaretin gücünü ve enerjisini bulunuz?

2-) a-) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\delta[n-3k] - \delta[n-1-3k]\right)$

b-) $2 \cdot \cos(10t+1) - \sin(4t-3)$

işaretlerinin varsa periyotlarını bulunuz?

3-) $y(t) = x(t) \cdot \sin(at)$

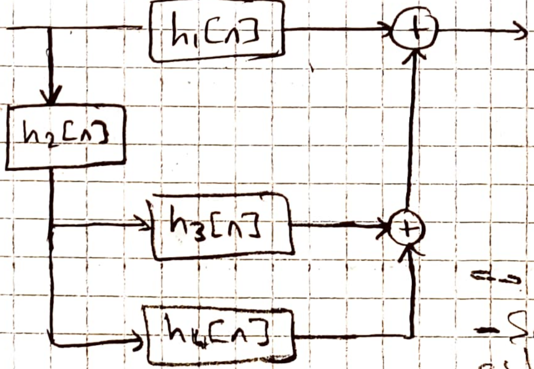
$y[n] = x[n-1] - 2x[n+2]$

şeklinde verilen sistemlerin özelliklerini açıklayarak inceleyiniz?

ÖDEV:

$$\left.\begin{aligned} x[n] &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot u[n-2] \\ h[n] &= u[n+2] \end{aligned}\right\} y[n] = ?$$ (LTI Sistem Çıkışı)

ÖDEV:



$h_1[n] = \delta[n] + 0{,}5\,\delta[n-1]$

$h_2[n] = 0{,}5\,\delta[n] - 0{,}25\,\delta[n-1]$

$h_3[n] = 2 \cdot \delta[n]$

$h_4[n] = -2 \cdot (0{,}5)^n \, u[n]$

- Şekilde verilen ayrık-zaman sistemin eşdeğer impuls cevabını bulunuz?
- Nedenselliği, kararlılığını ve hafızasını inceleyiniz?

*Sürekli Zaman Fourier Dönüşümü

Periyodik olmayan bir işaret periyodu sonsuz olan periyodik bir işaret gibi düşünülebilir. Periyodun sonsuz olması durumunda frekans bileşenleri sürekli hale gelir ve fourier serisindeki toplam sembolleri integrale dönüşür.

Fourier serisinin limit durumundaki haline fourier dönüşümü denir ve aşağıdaki denklemlerle ifade edilir.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw$$ → zamandan frekansa $\leq w \leq 2\pi$

$X(jw)$ → işaretin fourier dönüşümü ($x(t)$'nin)

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-jwt}\, dt$$ → frekanstan zamana

örnek $x(t) = e^{-at}\, u(t)$, $a > 0$

sürekli zaman işaretin fourier dönüşümünü hesaplayınız. Genlik ve faz spektrumunu çiziniz.

$$X(jw) = \int_{0}^{\infty} \underbrace{e^{-at} \cdot e^{-jwt}}_{e^{-t(a+jw)}}\, dt$$

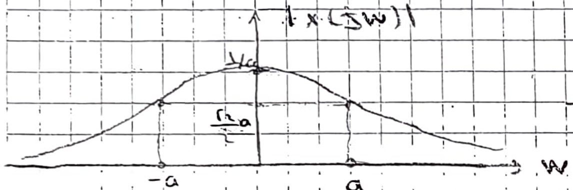
$$= \frac{1}{a+jw} \cdot e^{-t(a+jw)} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{a+jw} \Rightarrow \frac{a-jw}{a^2+w^2}$$

$(a-jw)$

$$Re\{X(jw)\} = \frac{a}{a^2+w^2}$$

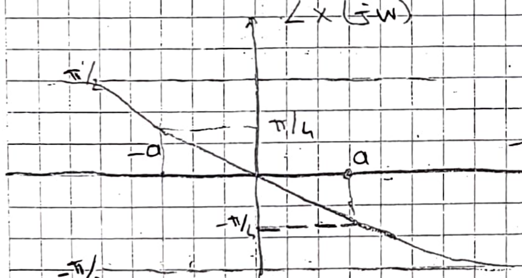
$$Im\{X(jw)\} = \frac{-w}{a^2+w^2}$$

$$|X(jw)| = \sqrt{\frac{1}{a^2+w^2}}$$



→ genlik spektrumu

$$-\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{w}{a}\right)$$



→ faz spektrumu

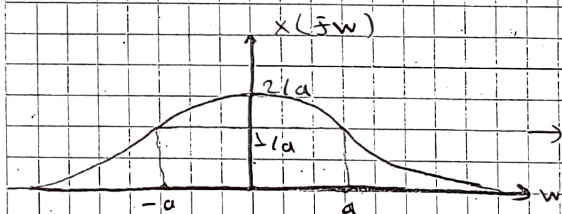
örnek $x(t) = e^{-a|t|}$, $a>0$

İşaretin fourier dönüşümünü hesaplayınız ve frekansın fonksiyonu olarak çiziniz.

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{e^{at} \cdot e^{-jwt}}_{e^{t(a-jw)}} dt + \int_{0}^{\infty} \underbrace{e^{-at} \cdot e^{-jwt}}_{e^{-t(a+jw)}} dt$$

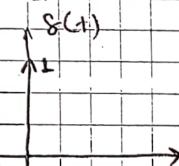
$$= \frac{1}{a-jw} \cdot e^{t(a-jw)} \Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{a+jw} \cdot e^{-t(a+jw)} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{a-jw} + \frac{1}{a+jw} = \frac{2a}{a^2+w^2}$$



→ frekansa bağlı ifade (genlik spektrumu)

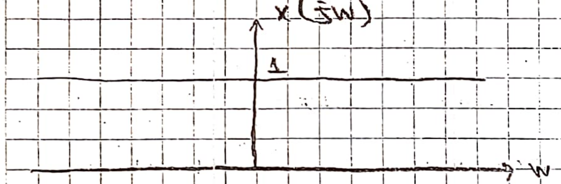
örnek Sürekli zaman impuls işaretinin fourier dönüşümünü hesaplayınız.



$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-jwt} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot \underbrace{e^{-jwt}}_{1} \, dt \qquad * \int f(t) \cdot \delta(t) = f(0)$$

$= 1$

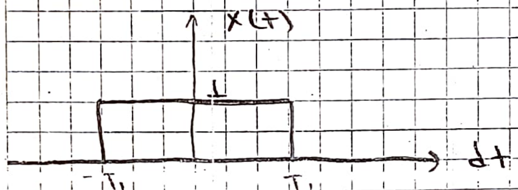


Impuls fonk. frekans ekseninin tüm değerlerinde bileşeni var.

NOT: Örnektende görüldüğü gibi bir işaret zaman ekseninde ne kadar dar alan kaplıyorsa frekans ekseninde o kadar geniş alan kaplar.

örnek Dikdörtgen darbenin fourier dönüşümünü hesaplayın.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$



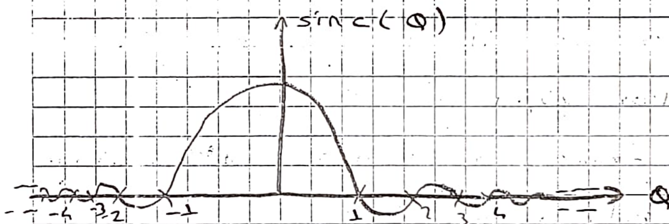
$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-jwt} \, dt$$

$$= \int_{-T_1}^{T_1} 1 \cdot e^{-jwt} \, dt$$

$$= -\frac{1}{jw} \cdot e^{-jwt} \Big|_{-T_1}^{T_1} = -\frac{1}{jw} \underbrace{\left(e^{-jwT_1} - e^{jwT_1}\right)}_{-2j \, \sin(w T_1)}$$

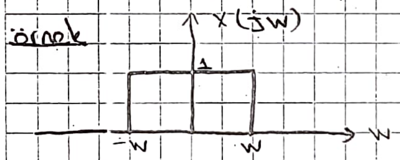
$$= \frac{2 \sin(w \cdot T_1)}{w}$$

NOT: Sürekli zaman fourier dönüşümü (CTFT) ve LTI sistemlerin analizinde sıklıkla karşılaşılan bir fonksiyon $\sin(a.Q) / bQ$, (Q: değişken) şeklinde ifade edilen "sinc" fonksiyonudur.



Kare dalganın fourier dönüşümü sinc fonksiyonudur.

örnek



fourier dönüşümü şekilde verilen sürekli zaman işareti bulunuz.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jw) \cdot e^{jwt} \, dw$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} 1\cdot e^{jwt}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{jt}\, e^{jwt}\Big|_{-W}^{W}$$

$$= \frac{1}{2\pi jt}\,\big(\underbrace{e^{jtW} - e^{-jtW}}_{2j\sin(Wt)}\big)$$

$$= \frac{\sin(Wt)}{\pi t}$$

NOT: Zaman ekseninde dikdörtgen darbenin frekans ekseninde sinc fonksiyonu, frekans eksenindeki dikdörtgen darbenin zaman ekseninde sinc fonksiyonu olduğunu gördük. Bu iki işaret birbirinin fourier dualidir.

Periyodik İşaretlerin Fourier Dönüşümü

$X(jw) = 2\pi\delta(w-w_0)$ olsun

$x(t)$ işaretini bulalım.

$$x(t) \xleftrightarrow{FD} X(jw)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\cdot e^{jwt}\,dw$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\underbrace{w-w_0}_{w=w_0})\,e^{jwt}\,dt = e^{jw_0t}$$

** $e^{jw_0t} \xleftrightarrow{F.D} 2\pi\delta(w-w_0)$

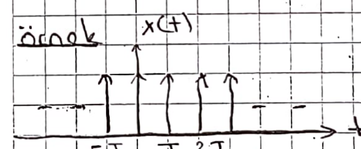
$$\left\{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jkw_0t}\right\} \xleftrightarrow{F.D} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, 2\pi\delta(w-kw_0)$$

Periyodik işaret

$$\boxed{\underset{\text{periyodik}}{x(t)} \xleftrightarrow{F.D} 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} a_k\,\delta(w-kw_0)}$$ ***

NOT: Periyodik bir işaretin fourier serisine açılabildiğini önceden görmüştük. Yukarıdaki ifadede gösterildiği gibi periyodik işaretin fourier dönüşümü de hesaplanabilir. Fourier dönüşümü genlikleri a_k katsayıları olan ötelenmiş impuls fonksiyonları içerir.

Örnek



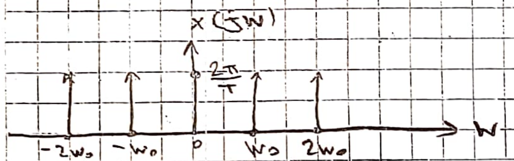
Periyodik $x(t)$ işaretinin fourier dönüşümünü hesaplayınız.

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cdot e^{-jkw_0t}\,dt$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\cdot e^{-jkw_0t}\,dt \qquad t=0$$

$a_k = \frac{1}{T}$

$x(t) \xleftrightarrow{F.D} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \cdot \delta(w - kw_0)$



$w_0 = \frac{2\pi}{T}$

Örnek: $x_1(t) = \sin(w_0 t)$

$x_2(t) = \cos(w_0 t)$

İşaretlerinin fourier dönüşümünü hesaplayınız.

$x_1(t) = \sin(w_0 t) = \frac{1}{2j}\left(e^{jw_0 t} - e^{-jw_0 t}\right)$

$a_1 = \frac{1}{2j}$ $\quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}$

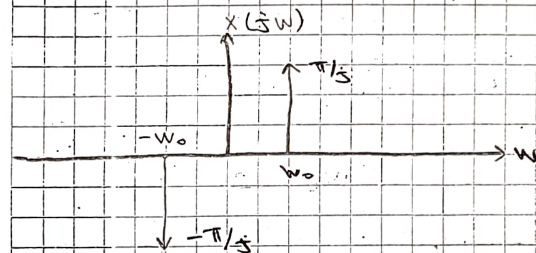
$x_2(t) = \cos(w_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}\right)$

$a_1 = \frac{1}{2}$ $\quad a_{-1} = \frac{1}{2}$

$x_1(t) \xleftrightarrow{F.D} 2\pi \cdot \frac{1}{2j} \delta(w - w_0) \rightarrow k = 1$ için

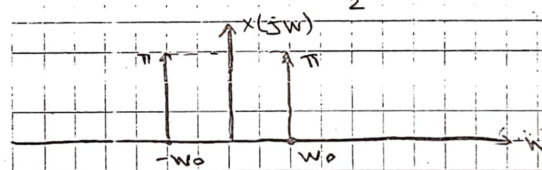
$+ 2\pi \cdot \frac{-1}{2j} \delta(w + w_0) \rightarrow k = -1$ için

$x_1(t) = \frac{\pi}{j} \delta(w - w_0) - \frac{\pi}{j} \delta(w + w_0)$



$k=1 \qquad k=-1$

$x_2(t) \xleftrightarrow{F.D} 2\pi \cdot \frac{1}{2} \delta(w - w_0) + 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta(w + w_0)$



Sürekli Zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

1- Zamanda Öteleme

$x(t) \xleftrightarrow{F.D} X(jw)$ ise

$x(t \pm t_0) \xleftrightarrow{F.D} e^{\pm jwt_0} \cdot X(jw)$ olur.

NOT: İşaret zaman ekseninde ötelendiğinde fourier dönüşümünün genliği değişmez, fazı öteleme miktarı kadar ötelenir.

2- Zaman-frekans Ölçekleme

$x(t) \xleftrightarrow{F.D} X(jw)$ ise

$x(at) \xleftrightarrow{F.D} \frac{1}{|a|} X\left(j \frac{w}{a}\right)$ olur.

$a>1$ ise zamanda daralır, frekansta genişler.

$a<1$ ise zamanda genişler, frekansta daralır.

$a=-1$ ise her iki domende ters çevrilir.

3- Zamanda türev alma

$x(t) \xleftrightarrow{F.D} X(jw)$

$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F.D} jw\, X(jw)$

NOT: Bu özellik sabit katsayılı diferansiyel denklemler ile tanımlanan LTI sistemlerin analizinde oldukça faydalıdır. Fourier dönüşümünün bu özelliği sayesinde çözümü zor olan diferansiyel denklemler basit cebirsel denklemlere dönüşür.

4- Konvolüsyon Özelliği

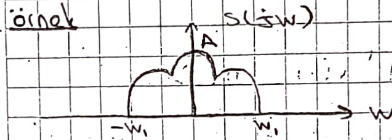
$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{F.D} Y(jw) = X(jw) \cdot H(jw)$

zamanda çarpma, frekansta konvolüsyon olur.

5- Çarpma (modülasyon) özelliği

$r(t) = s(t) \cdot p(t) \xleftrightarrow{F.D} R(jw) = \frac{1}{2\pi} \left(S(jw) * P(jw) \right)$

örnek



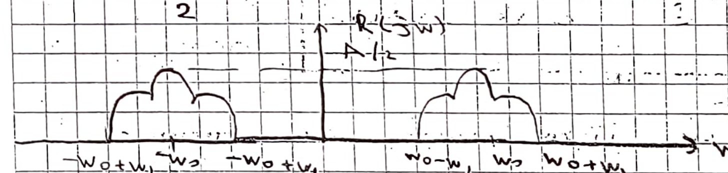
$s(t)$, $p(t) = \cos(wt)$ $r(t) = s(t) \cdot p(t)$

$r(t) = s(t) \cdot p(t) \xleftrightarrow{F.D} \frac{1}{2\pi} \left(S(jw) * P(jw) \right) = R(jw)$

$p(t) = \cos(w_0 t) \xleftrightarrow{F.D} \pi \delta(w-w_0) + \pi \delta(w+w_0) = P(jw)$

$R(jw) = \frac{1}{2\pi} \left(S(jw) * \left(\pi \delta(w-w_0) + \pi \delta(w+w_0) \right) \right)$

$R(jw) = \frac{1}{2} \left(S(j(w-w_0)) + S(j(w+w_0)) \right)$



Doğrusal Sabit Katsayılı Diferansiyel Denklemler ile Tanımlanan Sistemler.

Giriş çıkış ilişkisi aşağıda verilen sürekli zaman sisteminin frekans cevabını bulalım.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \xleftrightarrow{F.D} \sum_{k=0}^{N} a_k (jw)^k . y(jw)$$

frekans cevabı $F.D\{h(t)\} \longleftrightarrow H(jw)$

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{F.D} Y(jw) = X(jw) . H(jw)$$

$$H(jw) = \frac{Y(jw)}{X(jw)}$$

$$\boxed{H(jw) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k . (jw)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k . (jw)^k} = \frac{Y(jw)}{X(jw)}} \rightarrow \text{frekans cevabı}$$

örnek Giriş çıkış ilişkisi aşağıda verilen sistemin frekans cevabını ve impuls cevabını bulunuz

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3 y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

F.D

$$(jw)^2 . y(jw) + 4 (jw) . y(jw) + 3 y(jw) = (jw) . x(jw) + 2 . x(jw)$$

$$y(jw) . ((jw)^2 + 4(jw) + 3) = X(jw) . (jw + 2)$$

$$H(jw) = \frac{jw + 2}{(jw)^2 + 4(jw) + 3} \rightarrow \text{frekans cevabı}$$

$$F^{-1}\{H(jw)\} = h(t)$$

$$H(jw) = \frac{jw+2}{(jw+3).(jw+1)} = \frac{A}{jw+3} + \frac{B}{jw+1}$$

$$Ajw + A + Bjw + B = 2 + jw$$

$A + B = 1 \quad A + 3B = 2 \quad A = 1/2 \quad B = 1/2$

$$H(jw) = \frac{1/2}{jw+3} + \frac{1/2}{jw+1}$$

$$e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{F.D} \frac{1}{a + jw}$$

$$\frac{1}{2} . e^{-3t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-t} . u(t) \rightarrow \text{impuls cevabı}$$

konvolüsyon

örnek

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10\,y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).z(t-\tau)\,d\tau - x(t)$$

nedensel LTI bir sistemin giriş çıkış ilişkisi yukarıda verilmiştir. Fourier dönüşümünün özelliklerinden faydalanarak sistemin frekans cevabını ve impuls cevabını bulunuz.

$$z(t) = e^{-t}u(t) + 3.\delta(t) = Z(jw) = \frac{1}{1+jw} + 3$$

F.D

$$(jw).y(jw) + 10\,y(jw) = X(jw).Z(jw) - X(jw)$$

$$y(jw)(10+jw) = X(jw).\left(\frac{1}{1+jw} + \underbrace{3-1}_{2}\right)$$

$$H(jw) = \frac{Y(jw)}{X(jw)} = \frac{2jw+3}{(1+jw).(jw+10)} = \frac{A}{1+jw} + \frac{B}{10+jw}$$

frekans cevabı

$10A+B=3$ $\quad A+B=2$ $\quad A=1/9$ $\quad B=17/9$

$$F^{-1}\{H(jw)\} = h(t)$$

$$H(jw) = \frac{1/9}{1+jw} + \frac{17/9}{10+jw}$$

$$h(t) = \frac{1}{9}e^{-t}u(t) + \frac{17}{9}e^{-10t}u(t)$$

Ayrık Zaman Fourier Dönüşümü (DTFT)

lim $N \to \infty$

Periyodik bir işaret fourier serisine açılır ve limit durumunda ($N \to \infty$) davranışı incelenirse fourier dönüşümü elde edilir.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw}).e^{jwn}\,dw \quad \text{ters DTFT} \qquad W_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$\underbrace{X(e^{jw})}_{\text{sürekli}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[n]}_{\text{ayrık}}.e^{-jwn} \rightarrow \text{DTFT}$$

NOT: Sürekli zaman durumunda fourier denklemlerinin her ikisi de integral olup integral aralığı sonsuzdur. Ayrık zaman durumunda fourier denklemi sonsuz bir toplam iken ters fourier denklemi 2π aralığında sonlu bir integraldir. Ayrıca ayrık zaman fourier dönüşümü 2π ile periyodiktir.

İşaretin ayrık zaman fourier dönüşümünün var olabilmesi için mutlak toplanabilir olması şarttır.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

örnek $x[n] = a^n u[n]$, $|a|<1$
İşaretin fourier dönüşümünü hesaplayınız.

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot e^{-jw})^n$$

$$\boxed{* \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, \quad |r|<1}$$

$$X(e^{jw}) = \frac{1}{1-a \cdot e^{-jw}} \,//$$

* örnek $x[n] = a^{|n|}$, $|a|<1$ $\quad -1<a<1$ mutlak toplanabilirlik

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-jwn}$$

$$X(e^{jw}) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} \cdot e^{-jwn}}_{\text{Negatif kısım}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot e^{-jwn}}_{\text{pozitif kısım}}$$

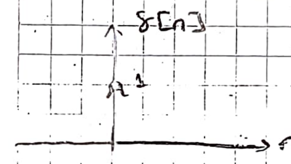
$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot e^{jwn} - 1 \qquad \frac{1}{1-a \cdot e^{-jw}}$$

$$X(e^{jw}) = \frac{1}{1-a \cdot e^{jw}} + \frac{1}{1-a \cdot e^{-jw}} - 1 = \frac{1-a^2}{1-2a\cos(w)+a^2} \,//$$

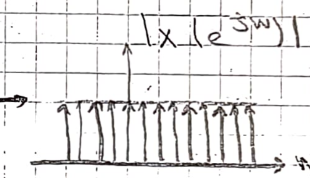
örnek Ayrık zaman impuls işaretinin fourier dönüşümünü hesaplayınız

$$X(e^{jw}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[n] \cdot e^{-jwn} \qquad n=0 \text{ için}$$

$$X(e^{jw}) = 1$$



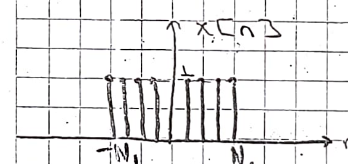
F.D



$T \to \infty \quad w \to 0$

örnek $x[n] = \begin{cases} 1, & |n| < N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$

$x[n]$ işaretinin fourier dönüşümünü hesaplayınız



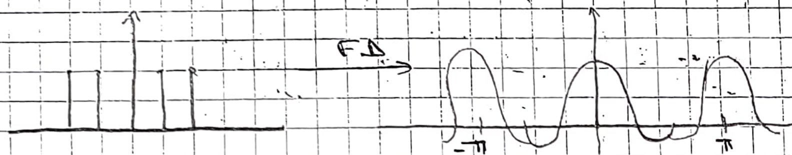
$$\sum_{r=0}^{N} a^r = \frac{1-a^{N+1}}{1-a} \quad |a|<1$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} 1 \cdot e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{2N_1} e^{-jw(n-N_1)} \quad e^{-jwn} \cdot e^{jwN_1}$$

$$X(e^{jw}) = e^{jwN_1} \sum_{n=0}^{2N_1} e^{-jwn}$$

$$X(e^{jw}) = e^{jwN_1} \frac{1-e^{-jw(2N_1+1)}}{1-e^{-jw}}$$

$X(e^{jw}) = \dfrac{\sin(w(N_1 + 1/2))}{\sin(w/2)}$



Aylık zaman periyodik işaretlerin fourier dönüşümü

$x[n] \to$ periyodik olsun $\to a_k$

ayrık zaman periyodik işaretlerin fourier serisine açıldığını önceden görmüştük. Ayrık zaman periyodik işaretlerin fourier dönüşümü de hesaplanabilir. Periyodik işaretlerin fourier dönüşümü ötelenmiş impuls fonksiyonları içerir.

$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jkw_0 n} \xrightarrow{F.D} \sum_{k=\langle N\rangle} 2\pi a_k \delta(w - kw_0 - 2\pi l)$

örnek $x[n] = \cos(w_0 n)$ fourier dönüşümünü hesapla

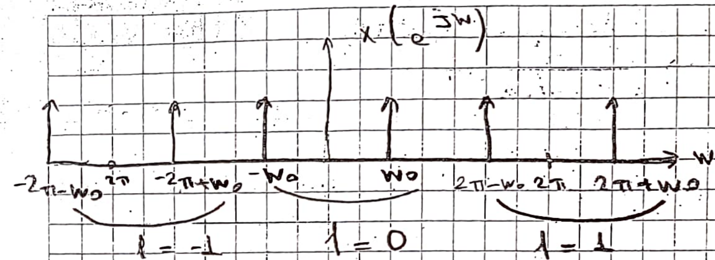
$\Rightarrow \frac{1}{2}(e^{jw_0 n} + e^{-jw_0 n}) \Rightarrow a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$

$X(e^{jw}) = 2\pi \overset{\frac{1}{2}}{a_1} \delta(w - w_0 - 2\pi l) +$

$2\pi \overset{\frac{1}{2}}{a_{-1}} \delta(w + w_0 - 2\pi l)$

$= \pi \delta(w - w_0 - 2\pi l) + \pi \delta(w + w_0 - 2\pi l)$

$l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \infty$



Ayrık-zaman fourier dönüşümünün özellikleri

1- zamanda öteleme:

$x[n] \xleftrightarrow{F.D} X(e^{jw})$ ise,

$x[n \pm n_0] \xleftrightarrow{F.D} X(e^{jw}) . e^{\pm jwn_0}$

NOT: Ayrık zaman işaret zamanda ötelendiğinde fourier dönüşümünün genliği değişmez. Faz, öteleme miktarı kadar ötelenir. Bu özellik fark denklemleriyle tanımlanan LTI sistemlerin analizinde oldukça önemlidir.

2- frekansta türev alma

$x[n] \xleftrightarrow{F.D} X(e^{jw})$ ise,

$n . x[n] \xleftrightarrow{F.D} j . \dfrac{dX(e^{jw})}{dw}$

3- Konvolüsyon impuls cevabı frekans cevabı

$y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{F.D} Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) . H(e^{jw})$

ALLI

4- Çarpma (modülasyon) özelliği

$$x_1[n] \cdot x_2[n] \xleftrightarrow{F.D} \frac{1}{2\pi}\left[X_1(e^{jw}) * X_2(e^{jw})\right]$$

5- Parseval ilişkisi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{jw})|^2 \, dw$$

Doğrusal Sabit Katsayılı Fark Denklemleriyle

Tanımlanan Sistemler

Giriş çıkış ilişkisi aşağıda verilen ayrık zaman sistemin frekans cevabını bulalım

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot x[n-k]$$

$$H(e^{jw}) = \frac{y(e^{jw})}{x(e^{jw})} \quad \text{(frekans cevabı)}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot e^{-jwk} \cdot y(e^{jw}) = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot e^{-jwk} \cdot X(e^{jw})$$

$$H(e^{jw}) = \frac{y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot e^{-jwk}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot e^{-jwk}}$$

****

örnek $y[n] - \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = 2x[n]$

giriş çıkış ilişkisi yukarıda verilen sistemin frekans cevabını ve impuls cevabını bulunuz.

$$y(e^{jw}) - \frac{3}{4} \cdot e^{-jw} \cdot y(e^{jw}) + \frac{1}{8} e^{-jw2} \cdot y(e^{jw}) =$$

$$2 \cdot x(e^{jw})$$

$$y(e^{jw})\left(1 - \frac{3}{4} \cdot e^{-jw} + \frac{1}{8} \cdot e^{-jw2}\right) = 2 \cdot x(e^{jw})$$

$$H(e^{jw}) = \frac{y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = \frac{2}{1 - \frac{3}{4} e^{-jw} + \frac{1}{8} e^{-jw2}} \rightarrow \text{frekans cevabı}$$

$$h[n] = TFD\{H(e^{jw})\}$$

$$\frac{2}{1 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}x^2} = \frac{A}{1 - \frac{1}{4}e^{-jw}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{2}e^{-jw}}$$

$$-\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{2}$$

$$A - \frac{A}{2} e^{-jw} + B - \frac{B}{4} e^{-jw} = 2$$

$$A + B = 2 \qquad \frac{A}{2} + \frac{B}{4} = 0 \qquad A = -2 \quad B = 4$$

$$= \frac{-2}{1 - \frac{1}{4} e^{-jw}} + \frac{4}{1 - \frac{1}{2} e^{-jw}}$$

önemli

* $a^n u[n] \rightarrow \frac{1}{1-a.e^{-jw}}$

$h[n] = -2.\left(\frac{1}{4}\right)^n.u[n] + 4.\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \rightarrow$ impuls cevabı

bu sistem nedensel ve kararlıdır.

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

İmpuls cevabı $h(t)$ olan LTI bir sistemin girişine $x(t) = e^{st}$ uygulandığında $y(t) = e^{st}.H(s)$ olduğunu biliyoruz. Burada;

$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t).e^{-st}\,dt$ ile hesaplanan karmaşık bir sabit idi.

* $s = jw$ için, bu ifade sistemin frekans cevabını yani $h(t)$'nin fourier dönüşümünü ifade eder.

$H(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t).e^{-jwt}\,dt$

* $s = \sigma + jw$ olması durumunda integral ifadesine Laplace dönüşümü denir.

* "s" karmaşık bir sayı olmak üzere sürekli zaman $x(t)$ işaretinin Laplace dönüşümü şu şekilde hesaplanır.

$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-st}\,dt$

$x(t) \xleftrightarrow{L.D} X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$

$X(s)\Big|_{s=jw} = X(jw)$ (!)

Laplace dönüşümü — Fourier dönüşümü

$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-st}\,dt \xleftrightarrow{s=\sigma+jw} \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-(\sigma+jw)t}\,dt$

$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-\sigma t}.e^{-jwt}\,dt$

$FD\{x(t).e^{-\sigma t}\} = X(s)$

NOT: 1 – Bir $x(t)$ işaretinin Laplace dönüşümünün varolabilmesi için $x(t).e^{-\sigma t}$ işaretinin fourier dönüşümü yakınsamalıdır.

Verilen bir $x(t)$ işareti için Laplace dönüşümünün varolduğu "s" değerler kümesine yakınsaklık bölgesi (Region of convergence, ROC) denir.

LA place

..../..../20....

2- Eğer yakınsaklık bölgesi jw eksenini içeriyorsa işaretin fourier dönüşümü de vardır.

3- Bazı işaretler için fourier dönüşümü yakınsamaz iken Laplace dönüşümü yakınsayabilir.

örnek $x(t) = e^{at}.u(t)$ işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayınız. Yakınsaklık bölgesini bulunuz. $a>0$

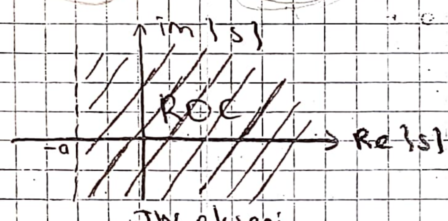
$$x(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-jwt}.dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+jw)t}.dt = \frac{1}{a+jw}, \quad a>0$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-st}.dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+s)t} = \frac{-1}{a+s} e^{-(a+s)t}\Big|_{0}^{\infty} =$$

$\sigma + jw$

$\frac{1}{s+a}$ $\quad a+\sigma>0 \quad$ $Re\{s\} > -a$

$Re\{s\}$ $\quad \infty \to 0$



→ yakınsaklık bölgesi

* yakınsaklık bölgesi jw eksenini kapsadığı için fourier dönüşümü yapılabilir $s=jw$

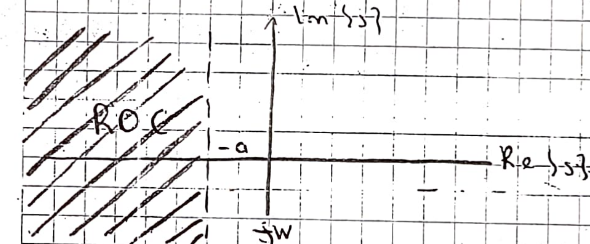
..../..../20....

örnek $x(t) = -e^{-at}.u(-t)$ işaretinin Laplace dönüşümünü ve yakınsaklık bölgesini bulunuz.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{-(a+s)t} = \frac{1}{s+a}.e^{-(a+s)t}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$= \frac{1}{s+a}$, $\quad Re\{s\}+a<0$

$Re\{s\} < -a$



* yakınsaklık bölgesi jw eksenini kapsamadığından fourier dönüşümü hesaplanamaz.

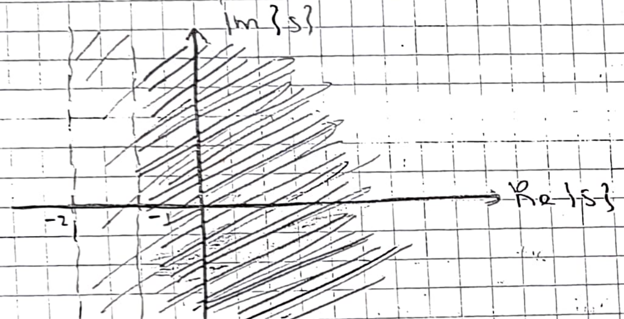
* $e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a}$, $Re\{s\}>-a$

* $-e^{-at}u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a}$, $Re\{s\}<-a$

örnek $x(t) = 3 \cdot e^{-2t} u(t) - 2 \cdot e^{-t} u(t)$

işaretin Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

$$X(s) = 3 \cdot \underbrace{\frac{1}{s+2}}_{Re\{s\} > -2} - 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{Re\{s\} > -1} \quad \text{ROC: } Re\{s\} > -1$$



örnek $x(t) = e^{-2t} u(t) + e^{-t} \cos(3t) \cdot u(t)$

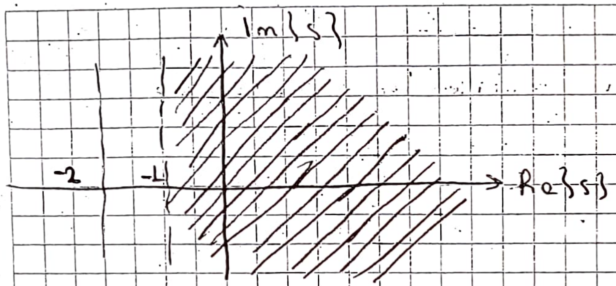
işaretin Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

$$x(t) = e^{-2t} u(t) + \left(\frac{1}{2} e^{3jt} + \frac{1}{2} \cdot e^{-3jt}\right) \cdot e^{-t} \cdot u(t)$$

$$x(t) = e^{-2t} u(t) + \left[\frac{1}{2} \cdot e^{(3j-1)t} + \frac{1}{2} e^{(-3j-1)t}\right] u(t)$$

yakınsak ile alakası yok

$$X(s) = \underbrace{\frac{1}{s+2}}_{Re\{s\} > -2} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{s-3j+1}}_{Re\{s\} > -1} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{s+3j+1}}_{Re\{s\} > -1}$$



ROC $= Re\{s\} > -1$

NOT: $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ örneklerden görüldüğü gibi sürekli zaman $x(t)$ işaretinin Laplace dönüşümü $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ şeklindedir. Pay polinomu $N(s)$'in kökleri Laplace dönüşümünün sıfırlarıdır ve "o" ile gösterilir. $D(s)$ payda polinomunun kökleri ise dönüşümün kutuplarıdır ve "x" ile gösterilir. Bu şekilde elde edilen diyagrama kutup sıfır diyagramı denir.

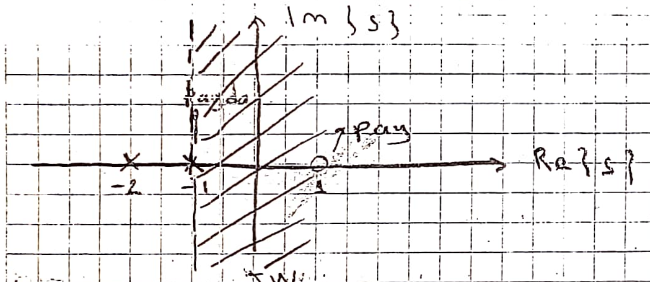
örnek: Laplace dönüşümü verilen işaretin kutup 0 diyagramını çizerek yakınsaklık bölgesini çiziniz.

$X(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}$, $Re\{s\} > -1$

$s = 1$ sıfır

$s^2+3s+2 = (s+1).(s+2)$

$s = -1$ $s = -2$) kutup



fourier dönüşümü yapılabilir (jW) eksenini içerdiğinden.

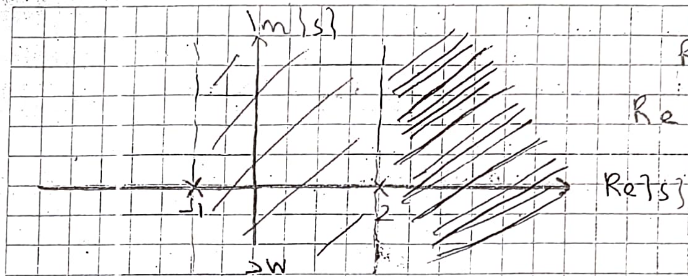
örnek $x(t) = \delta(t) + \frac{1}{3} e^{2t} u(t) - \frac{4}{3} e^{-t} u(t)$

ifadenin laplace dönüşümünü hesaplayınız.

$\delta(t) \xrightarrow{L} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(t) e^{-st}}_{t=0} dt = 1$ Tüm Re{s}

$\frac{1}{3} e^{2t} u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-2}$ $Re\{s\} > 2$

$-\frac{4}{3} e^{-t} u(t) \xrightarrow{L} -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{s+1}$, $Re\{s\} > -1$



yakınsaklık bölgesi jW eksenini içermediğinden fourier dönüşümü yoktur.

ROC'un Özellikleri

1- Laplace dönüşümüne ait ROC bölgesi jW eksenine paralel bir şerittir.

2- ROC kutup içermez.

3- X(t) sonlu ve mutlak integrallenebilir ise yakınsaklık bölgesi tüm s düzlemidir.

4- x(t) sağ taraflı bir işaret ise yakınsaklık bölgesi en sağdaki kutbun sağıdır.

5- x(t) sol taraflı bir işaret ise yakınsaklık bölgesi en soldaki kutbun soludur.

6- x(t) çift taraflı bir işaret ise yakınsaklık bölgesi bir şerit şeklindedir.

örnek $x(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & 0 < t < T \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$

işaretin Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-st}\,dt = \int_0^T e^{-2t}.e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^T e^{-t(s+2)}.dt = \frac{-1}{s+2}.e^{-t(s+2)}\Big|_0^T$$

$$X(s) = \frac{-1}{s+2}\left(e^{-T(s+2)} - 1\right) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+2}e^{-T(s+2)}$$

$$X(s)\Big|_{s=-2} = \frac{0}{0}$$

ROC

$\frac{\text{Payın türevi}}{\text{Paydanın türevi}} = \frac{d}{ds} X(s)\Big|_{s=-2} = T$ Tüm Re{s}

3. özellik

örnek $x(t) = e^{-b|t|}$ işaretinin varsa Laplace dönüşümünü hesaplayınız

$t<0$ için $t>0$ için

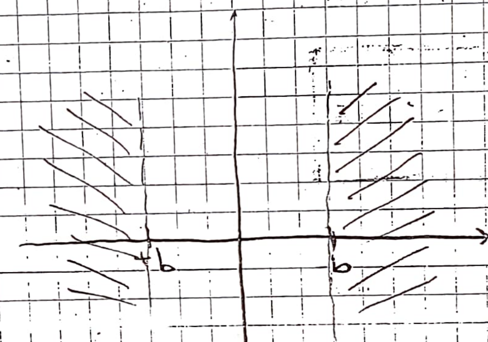
$$x(t) = e^{-b(-t)}.u(-t) + e^{-b(t)}.u(t)$$

$e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+a}$, Re{s} > $-a$

$-e^{-at}.u(-t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+a}$, Re{s} < $-a$

$$X(s) = \frac{-1}{s-b} + \frac{1}{s+b}$$

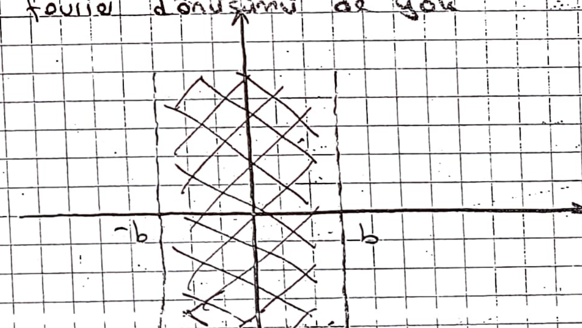
Re{s} < b   Re{s} > $-b$



b<0 ise

Laplace dönüşümü yok (kesişmediklerinden)

fourier dönüşümü de yok



b>0 ise

Laplace ve fourier dönüşümü var.

Ters Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü X(s) olan sürekli zaman x(t) işaretini bulmak için aşağıda verilen ifade kullanılır.

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-jw}^{\sigma+jw} X(s)\, e^{st}\, ds}$$

Bunun yerine basit kesirlere ayırma işlemi ile ters Laplace dönüşümü hesaplanır.

örnek $X(s) = \dfrac{1}{(s+1).(s+2)}$

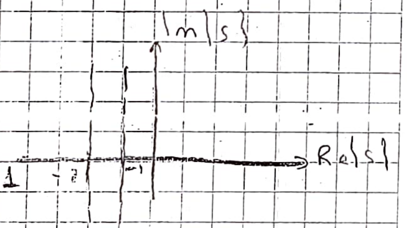
a- $Re\{s\} > -1 \rightarrow$ sağ

b- $Re\{s\} > -2 \rightarrow$ sol

c- $\underset{\text{sol}}{-2} < Re\{s\} < \underset{\text{sağ}}{-1}$

Verilen yakınsaklık bölgeleri için x(t) işaretini bulunuz.

$$X(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$



$$\left((s+1).X(s)\right)\Big|_{s=-1} = A \Rightarrow 1$$

$$\left((s+2).X(s)\right)\Big|_{s=-2} = B \Rightarrow -1$$

a- İkiside sağ

$$x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

$$e^{-at}u(t) \longrightarrow \frac{1}{s+a} \qquad Re\{s\} > -a$$

$$-e^{-at}u(-t) \longrightarrow \frac{1}{s+a} \qquad Re\{s\} < -a$$

b- İkiside sol

$$x(t) = e^{-t}u(-t) + e^{-2t}u(-t)$$

c- $x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$

Laplace dönüşümünün özellikleri

1- Doğrusallık

$x_1(t) + x_2(t) \xrightarrow{L} X_1(s) + X_2(s)$ olur.

2- Zamanda öteleme

$x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ ROC: R ise

$x(t \mp t_0) \xrightarrow{L} X(s).e^{\mp s.t_0}$, ROC: R olur

3- s-domeninde öteleme

$x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ ROC = R

$e^{-s_0 t}.x(t) \longrightarrow X(\underset{\sigma+jw}{s} - \underset{\sigma_0+jw}{s_0})$ ROC: R + Re{s_0}

...... / ...... / 20......

4 - Zamanda ölçekleme

$x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ ROC : R ise

$x(at) \xrightarrow{L} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$ $ROC = R_1 = \frac{R}{a}$

***

5 - Konvolüsyon

$x_1(t) \xrightarrow{L} X_1(s)$ ROC : R_1

$x_2(t) \xrightarrow{L} X_2(s)$ ROC : R_2 olsun

$x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{L} X_1(s) . X_2(s)$, ROC = $R_1 \cap R_2$'yi içerir.

6 - Zamanda Türev

$x(t) \longrightarrow X(s)$ ROC : R ise

$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow s.X(s)$ ROC : R'yi içerir.

7 - s - domeninde türev

$x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ ise, ROC : R

$-t\,x(t) \xrightarrow{L} \frac{dX(s)}{ds}$, ROC : R

NOT: Genel ifade

$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} . e^{-at} u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^n}$, $Re\{s\} > -a$

...... / ...... / 20

8 - İntegral özelliği

$x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ ise

$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt \xrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s)$ olur.

*İlk değer teoremi

$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} s X(s)$

*son değer teoremi

$x(\infty) = \lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} s X(s)$

Laplace dönüşümü kullanılarak sistem özelliklerin incelenmesi

1 - Nedensellik

$h(t) = 0$, $t < 0$ ise nedenseldir.

(sağ taraflı)

Buna göre, sistemin transfer fonksiyonu $H(s)$ için ROC en sağdaki kutbun sağıdır.

örnek: a- $h(t) = e^{-t}u(t)$

b- $H(s) = \frac{e^{s}}{s+1}$, $Re\{s\} > -1$ nedenselliğini incele

a- $t<0$, $h(t) = 0$ olduğuna göre nedensel

$H(s) = \frac{1}{s+1}$, $Re\{s\} > -1$ nedensel

b- $\frac{e^{st_0}}{s+1} \longrightarrow e^{-(t+1)} \cdot u(t+1)$

$h(t) = e^{-(t+1)} \cdot \underbrace{u(t+1)}_{t=-1}$ nedensel değil

NOT: Nedensel bir sistem için ROC en sağdaki kutbun sağıdır. Ancak ROC'un en sağdaki kutbun sağı olması nedenselliği garanti etmez. Sadece impuls cevabının sağ taraflı olduğu nedenselliğin garantisidir.

2- Kararlılık

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$ ise sistem kararlıdır.

Mutlak integrallenebilir.

* fourier dönüşümü vardır.

* Dolayısıyla, LTI bir sistemin kararlı olabilmesi için transfer fonksiyonuna ait yakınsaklık bölgesi $j\omega$ eksenini içermelidir.

NOT: Nedensel bir sistemin kararlı olabilmesi için transfer fonksiyonunun tüm kutupları sol yarı s düzleminde olmalıdır.

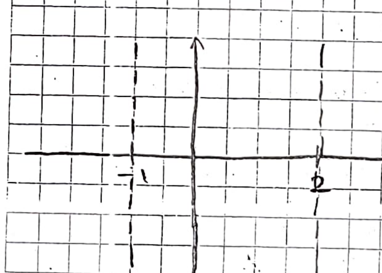
örnek: $H(s) = \frac{s-1}{(s+1)\cdot(s-2)}$ transfer fonksiyonu verilen sistemin nedenselliğini ve kararlılığını inceleyiniz.

$$\frac{s-1}{(s+1)\cdot(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2}$$

$$As - 2A + Bs + B = s - 1$$

$A = \frac{2}{3}$ $B = \frac{1}{3}$

$$H(s) = \frac{2/3}{\underbrace{s+1}_{s=-1}} + \frac{1/3}{\underbrace{s-2}_{s=2}}$$



1. durum ROC: $Re\{s\} > 2$

$H(t) = \frac{2}{3} e^{-t} u(t) + \frac{1}{3} e^{2t} u(t)$

nedensel, kararsızdır.

2 sol yarı düzlemde değil

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| < \infty$

2. durum ROC = $Re\{s\} < -1$

$h(t) = -\frac{2}{3} e^{-t} u(-t) - \frac{1}{3} e^{2t} u(-t)$

nedensel değil, kararsızdır.

3. durum ROC: $-1 < Re\{s\} < 2$

$h(t) = \frac{2}{3} e^{-t} u(t) - \frac{1}{3} e^{2t} u(-t)$

nedensel değil, kararlı

örnek Bir sistem hakkında aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

1- sistem nedenseldir.

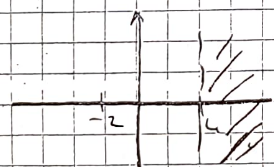
2- transfer fonksiyonu oransaldır. $s=-2$, $s=4$ 'te iki kutba sahiptir.

3- $x(t)=1$ için $y(t)=0$ 'dır.

4- $t=0^+ \longrightarrow 4$ elde edilmiştir ($h(t)$)

Buna göre $H(s)=?$

$H(s) = \frac{n(s)}{(s+2).(s-4)}$



$e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = e^{st}.H(s)$

$e^{st} = 1$ ise $\quad y(t) \to 0 \quad H(s)=0\big|_{s=0}$

$s=0$

$H(s) = \frac{s.p(s)}{(s+2).(s-4)}$

$\lim_{t\to 0} h(t) = \lim_{s\to\infty} s.H(s)$

$\lim s.H(s) = \frac{s^2 \, p(s)}{s^2-2s-8} \longrightarrow 4$ çıkmalı

$H(s) = \frac{4s}{(s+2).(s-4)}$, ROC: $Re\{s\} > 4$