SAÜ MÜH. FAK. ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERANSİYEL DENKLEMLER
VİZE SINAV SORULARI

Soru 1) $xdy - ydx = x^2 e^x dx$

diferansiyel denkleminin x'e bağlı bir integrasyon çarpanı bulunmaktadır. Buna göre verilen diferansiyel denklemin genel çözümü bulunuz. **(25 puan / PÇ1)**

Soru 2) $xdy - \left[y + xy^3(1+\ln x)\right]dx = 0$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. **(25 puan / PÇ1)**

Soru 3)

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4e^{-2t} \\ t * e^{-2t} \end{bmatrix}$$

a) Homojen çözümünü bulunuz **(10 puan / PÇ2)**
b) Tam çözümünü bulunuz. **(16 puan / PÇ2)**
$x_1(0) = 1; \quad x_2(0) = 0$

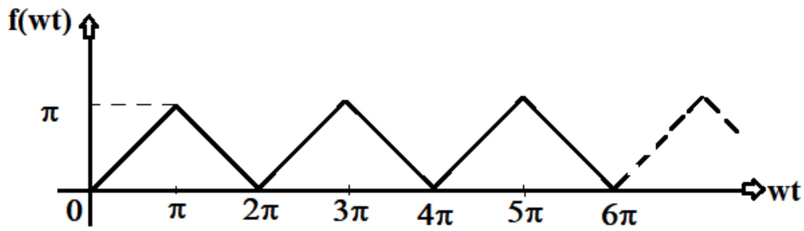
Soru 4) a) $w^{(2)} - y + 2 * z = 3 * e^{-x}$

$-2w^{(1)} + 2 * y^{(1)} + z = 0$

$2 * w^{(1)} - 2 * y + z^{(1)} + 2 * z^{(2)} = 0$

Yukarıda verilen diferansiyel denklem sistemini Laplace yardımı ile çözerek w(t), y(t) ve z(t) değişimlerini bulunuz. Çözüm için aşağıdaki ilk koşullar kullanılacaktır:

$w(0) = 1; w^{(1)}(0) = 1; y(0) = 2; z(0) = 2; z^{(1)} = -2$ **(12 puan / PÇ4)**



b)

Yukarıda görülen f(wt) değişimine ilişkin F(s) laplace değerini bulunuz.
(12 puan / PÇ4)

Süre 110 dakikadır.
Yalnızca "ciltli" ders notları açıktır. Kitap vb. dokümanların kullanılması yasaktır.
Soru kağıtları öğrencide kalacaktır. Çözümler SABİS sisteminde ilan edilecektir.
Başarılar dileriz.

ÇÖZÜMLER

Çözüm 1)

$$xdy - ydx = x^2 e^x dx$$

$$-(y + x^2 e^x)dx + xdy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-y - x^2 e^x) = -1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \qquad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial y}$$

$$\frac{\mu'(x)}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{Mv_y - Nv_x} = \frac{-1-1}{x} = -\frac{2}{x}$$

$$\ln \mu = -2 \ln x \qquad \mu = \frac{1}{x^2}$$

$$-\frac{1}{x^2}(y + x^2 e^x)dx + x\frac{1}{x^2}dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{x^2} - e^x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2} \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

$$u(x,y) = \int(-\frac{y}{x^2} - e^x)dx = \frac{y}{x} - e^x + C(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x} - e^x + C(y)) = ?\, N$$

$$\frac{1}{x} + C'(y) = \frac{1}{x} \qquad C'(y) = 0; \quad C(y) = C$$

$$u(x,y) = \frac{y}{x} - e^x + C \qquad y = Cx + xe^x$$

Çözüm 2)

$$x\frac{dy}{dx} - \left[y + xy^3(1 + \ln x)\right]\frac{dx}{dx} = 0$$

$$xy' - y = xy^3(1 + \ln x)$$

$$y' - y\frac{1}{x} = y^3(1 + \ln x)$$

$$y' - y\frac{1}{x} = y^3(1 + \ln x) \quad n = 3 \quad u = \frac{1}{y^{n-1}} = \frac{1}{y^2} \quad u' = -2\frac{y'}{y^3} \quad -\frac{u'}{2} = \frac{y'}{y^3}$$

$$\frac{y'}{y^3} - \frac{1}{x}\frac{1}{y^2} = (1 + \ln x)$$

$$-\frac{u'}{2} - \frac{1}{x}u = (1 + \ln x)$$

$$u' + \frac{2}{x}u = -2(1+\ln x)$$

$$u_h' + \frac{2}{x}u_h = 0 \qquad u_h' = -\frac{2}{x}u_h \qquad \int \frac{u_h'}{u_h}dx = -\int \frac{2}{x}dx \quad u_h = \frac{C}{x^2}$$

$$\frac{C'}{x^2} = -2(1+\ln x) \qquad C(x) = -\frac{4}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^3 \ln x + C$$

$$u = \frac{C}{x^2} = \left(-\frac{4}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^3 \ln x + C\right)\frac{1}{x^2} = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{3}x\ln x + C\frac{1}{x^2}$$

$$u = \frac{1}{y^2} \qquad y = \frac{1}{\left(-\frac{4}{9}x - \frac{2}{3}x\ln x + C\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}}$$

Çözüm 3) $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4e^{-2t} \\ t * e^{-2t} \end{bmatrix}$

a) Önce verilen dif. denklemin **homojen çözümü** bulunsun:

$$\det(\alpha I - A) = \det(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}) = \alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0\,; \quad \alpha_1 = \alpha_2 = -2$$

$$\begin{bmatrix} x_{1h} \\ x_{2h} \end{bmatrix} = (t\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix})e^{-2t}$$ (yerine koyma yöntemi ile 4 adet katsayı ikiye düşürülsün↓)

$$x_{1h} = Ate^{-2t} + Ce^{-2t}\,; \qquad x'_{1h} = Ae^{-2t} - 2Ate^{-2t} - 2Ce^{-2t}$$

$$x_{2h} = Bte^{-2t} + De^{-2t}\,;$$

$$\begin{bmatrix} Ae^{-2t} - 2Ate^{-2t} - 2Ce^{-2t} \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Ate^{-2t} + Ce^{-2t} \\ Bte^{-2t} + De^{-2t} \end{bmatrix}$$ (← kaynaksız durum denklemi)

$$Ae^{-2t} - 2Ate^{-2t} - 2Ce^{-2t} = Bte^{-2t} + De^{-2t}$$

$$A - 2C = D$$
$$-2A = B$$

$$\begin{bmatrix} x_{1h} \\ x_{2h} \end{bmatrix} = At\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}e^{-2t} + \begin{bmatrix} C \\ A-2C \end{bmatrix}e^{-2t} \qquad (*)$$ ← HOMOJEN ÇÖZÜM

elde edilir.

b) Şimdi ise belirsiz katsayılar yöntemi ile **özel çözüm** yapılacaktır.

<u>Özel çözüm tahmini</u>;

$$\begin{bmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} t^2 e^{-2t} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \end{bmatrix} te^{-2t} + \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{22} \end{bmatrix} e^{-2t}}^{e^{-2t} \text{ için } (\alpha_1=\alpha_2=-2 \text{ (katlı kök)})} + \overbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} t^3 e^{-2t} + \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \end{bmatrix} t^2 e^{-2t} + \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{22} \end{bmatrix} te^{-2t} + \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{22} \end{bmatrix} e^{-2t}}^{te^{-2t} \text{ için } (\alpha_1=\alpha_2=-2 \text{ (katlı kök)})} \quad (**)$$

Yukarıdaki ifadede benzer terimler toplanırsa;

$$\begin{bmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} t^3 e^{-2t} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} t^2 e^{-2t} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} te^{-2t} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} e^{-2t} \qquad (15)$$

Yukarıda verilen özel çözüm tahminindeki katsayıları bulmak için (**) denklemi verilen problemde yerine yazılırsa;

$$x_{1p} = A_1 t^3 e^{-2t} + B_1 t^2 e^{-2t} + C_1 te^{-2t} + D_1 e^{-2t}$$
$$x_{2p} = A_2 t^3 e^{-2t} + B_2 t^2 e^{-2t} + C_2 te^{-2t} + D_2 e^{-2t}$$

$$x'_{1p} = -2A_1 t^3 e^{-2t} + 3A_1 t^2 e^{-2t} + 2B_1 te^{-2t} - 2B_1 t^2 e^{-2t} + C_1 e^{-2t} - 2C_1 te^{-2t} - 2D_1 e^{-2t}$$
$$x'_{2p} = -2A_2 t^3 e^{-2t} + 3A_2 t^2 e^{-2t} + 2B_2 te^{-2t} - 2B_2 t^2 e^{-2t} + C_2 e^{-2t} - 2C_2 te^{-2t} - 2D_2 e^{-2t}$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 t^3 e^{-2t} + B_1 t^2 e^{-2t} + C_1 te^{-2t} + D_1 e^{-2t} \\ A_2 t^3 e^{-2t} + B_2 t^2 e^{-2t} + C_2 te^{-2t} + D_2 e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4e^{-2t} \\ te^{-2t} \end{bmatrix} \qquad (***)$$

(***) eşitliğinin birinci denkleminden;

$$-2A_1 = A_2 \leftarrow (t^3 e^{-2t})\text{'nin katsayıları} \qquad (1)$$

$$3A_1 - 2B_1 = B_2 \leftarrow (t^2 e^{-2t})\text{'nin katsayıları} \qquad (2)$$

$$2B_1 - 2C_1 = C_2 \leftarrow (te^{-2t})\text{'nin katsayıları} \qquad (3)$$

$$C_1 - 2D_1 = D_2 + 4 \leftarrow \quad ((e^{-2t})\text{'nin katsayıları}) \qquad (4)$$

<u>(***) eşitliğinin ikinci denkleminden;</u>

$$-2A_2 = -4(A_1 + A_2) \leftarrow (t^3 e^{-2t})\text{'nin katsayıları} \quad (5)$$

$$3A_2 - 2B_2 = -4(B_1 + B_2) \leftarrow (t^2 e^{-2t})\text{'nin katsayıları} \quad (6)$$

$$2(B_2 - C_2) = -4(C_1 + C_2) + 1 \leftarrow (te^{-2t})\text{'nin katsayıları} \quad (7)$$

$C_2 - 2D_2 = -4(D_1 + D_2) \leftarrow ((e^{-2t})\text{'nin katsayıları})$ (8)

Yukarıda bulunan 8 adet eşitlikten 8 adet katsayı bulunacaktır.

(1) ve (5) eşitliklerinden;

$-2A_1 = A_2$; $-2A_2 = -4(A_1 + A_2)$

$-2A_1 = A_2$ (9)

(2) ve (6) eşitliklerinden;

$3A_1 - 2B_1 = B_2$; $3A_2 - 2B_2 = -4(B_1 + B_2)$

$3A_1 = 2B_1 + B_2$ (10)

veya $3A_2 = -2(2B_1 + B_2)$ elde edilir.

(3) ve (7) eşitliklerinden;

$2B_1 - 2C_1 = C_2$ (13)

$2(B_2 - C_2) = -4(C_1 + C_2) + 1$ eşitliklerinden;

$2B_1 = 2C_1 + C_2$ ve $2B_2 = -4C_1 - 2C_2 + 1$ yazılabilir. Son eşitlikten;

$2B_2 = -2(2C_1 + C_2) + 1$ yani; $2B_2 = -2(2B_1) + 1 = -4B_1 + 1$

$4B_1 + 2B_2 = 1$ ve (10) eşitliğinden;

$2(\underbrace{2B_1 + B_2}_{3A_1}) = 1$

$A_1 = 1/6$ ve (9) eşitliğinden;

$A_2 = -1/3$

elde edilir.

(4) ve (8) eşitliklerinden;

$C_1 - 2D_1 = D_2 + 4$; $C_2 - 2D_2 = -4(D_1 + D_2)$

$C_1 = 2D_1 + D_2 + 4$ (11)

$C_2 = -4D_1 - 2D_2$

$C_2 = -2(2D_1 + D_2)$ (12)

(11) ve (12) eşitliklerinden;

$2C_1 + C_2 = 8$ (14)

elde edilir.

(13) eşitliğinden;

$\underbrace{2C_1 + C_2}_{2B_1} = 8$

$B_1 = 4$ elde edilir. (10) eşitliğinden;

$3A_1 = 2B_1 + B_2$; $3*(1/6) = 2*4 + B_2$

$B_2 = -15/2$

elde edilir.

(14) eşitliğinde;

$C_1 = 1$ (tahmin edilen bağımsız değişken)

alınırsa;

$C_2 = 6$

elde edilir.

(11) ve (12) eşitliklerinden;

$D_2 = C_1 - 2D_1 - 4$

$D_1 = 1$ (tahmin edilen bağımsız değişken)

alınırsa;

$D_2 = -5$

elde edilir.

Bulunan tüm katsayılar (15) eşitliğinde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/3 \end{bmatrix} t^3 e^{-2t} + \begin{bmatrix} 4 \\ -15/2 \end{bmatrix} t^2 e^{-2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} t e^{-2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1h} \\ x_{2h} \end{bmatrix} = At \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} C \\ A-2C \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1tam}(0) = 1 \\ x_{2tam}(0) = 0 \end{bmatrix} = A*0*\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2*0} + \begin{bmatrix} C \\ A-2C \end{bmatrix} e^{-2*0} + \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/3 \end{bmatrix} * 0^3 e^{-2*0} + \begin{bmatrix} 4 \\ -15/2 \end{bmatrix} * 0^2 * e^{-2*0} + \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} * 0 * e^{-2*0} + \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} e^{-2*0}$$

1=C+1 ise C=0 yazılır.
0=A−0−5 ise A=5 olur.

$$\begin{bmatrix} x_{1tam} \\ x_{2tam} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/3 \end{bmatrix} t^3 e^{-2t} + \begin{bmatrix} 4 \\ -15/2 \end{bmatrix} t^2 e^{-2t} + \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} te^{-2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

Çözüm 4)

a) $$\left[s^2 W(s) - s - 1\right] - Y(s) + 2 * Z(s) = \frac{3}{s+1}$$

$$-2 * \left[sW(s) - 1\right] + 2 * \left[sY(s) - 2\right] + Z(s) = 0$$

$$2 * \left[sW(s) - 1\right] - 2Y(s) + \left[sZ(s) - 2\right] + 2 * \left[s^2 Z(s) - 2s + 2\right] = 0$$

veya

$$s^2 W(s) - Y(s) + 2 * Z(s) = \frac{s^2 + 2s + 4}{s+1}$$

$$-2sW(s) + 2sY(s) + Z(s) = 2 \; A = \pi r^2$$

$$2sW(s) - 2Y(s) + (2s^2 + s)Z(s) = 4s$$

Sonuç olarak s domeninde çözümler;

$$W(s) = \frac{1}{s-1}; \quad Y(s) = \frac{2s}{(s-1)(s+1)}; \quad Z(s) = \frac{2}{s+1}$$

olarak bulunur. Ters laplace kullanılarak;

$$w(t) = e^{x}; \quad y(t) = e^{x} + e^{-x}; \quad z(t) = 2e^{-x}$$

aranan tam çözümler bulunmuş olur.

b) f(wt) eğrisinde wt=2π periyot olduğundan;

$$f(wt) = \begin{cases} wt & ; \; 0 \le wt \le \pi \\ 2\pi - wt & ; \; \pi \le wt \le 2\pi \end{cases}$$

$$f(s) = \frac{\int_0^T e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

$$f(s) = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-swt} * f(wt) * dwt}{1 - e^{-2\pi s}} = \frac{A(s)}{1 - e^{-2\pi s}}$$

$$A(s) = \int_0^{2\pi} e^{-swt} * f(wt) * dwt = \int_0^{\pi} e^{-swt} * wt * dwt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{-swt} * (2\pi - wt) * dwt$$

$$A(s) = \frac{1}{s^2}\left(e^{-2\pi s} - 2e^{-\pi s} + 1\right) = \frac{1}{s^2}\left(e^{-\pi s} - 1\right)^2$$

$$f(s) = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-swt} * f(wt) * dwt}{1-e^{-2\pi s}} = \frac{1}{s^2} * \frac{(e^{-\pi s}-1)^2}{1-e^{-2\pi s}} = \frac{1}{s^2} * \frac{(e^{-\pi s}-1)^2}{(1-e^{-\pi s})(1+e^{-\pi s})} = \frac{1}{s^2} * \frac{(1-e^{-\pi s})}{(1+e^{-\pi s})}$$

$$f(s) = \frac{1}{s^2} * tanh\frac{\pi s}{2}$$