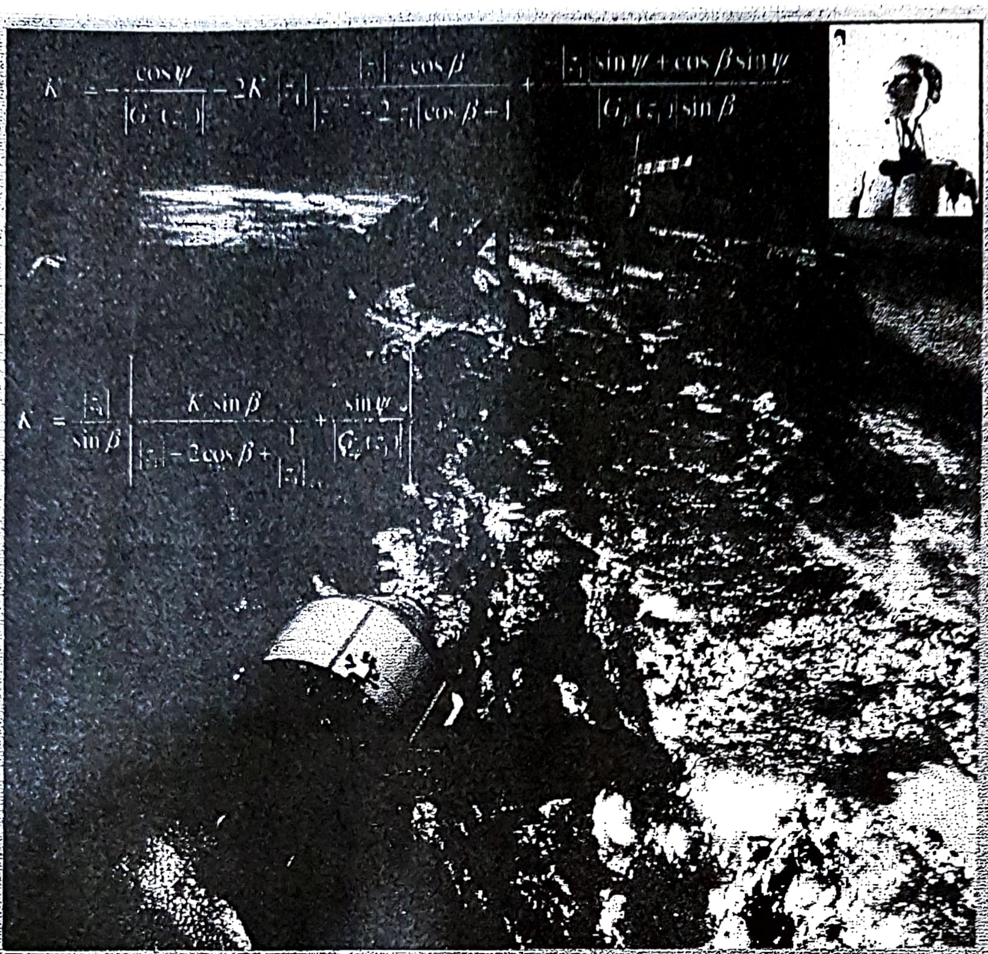
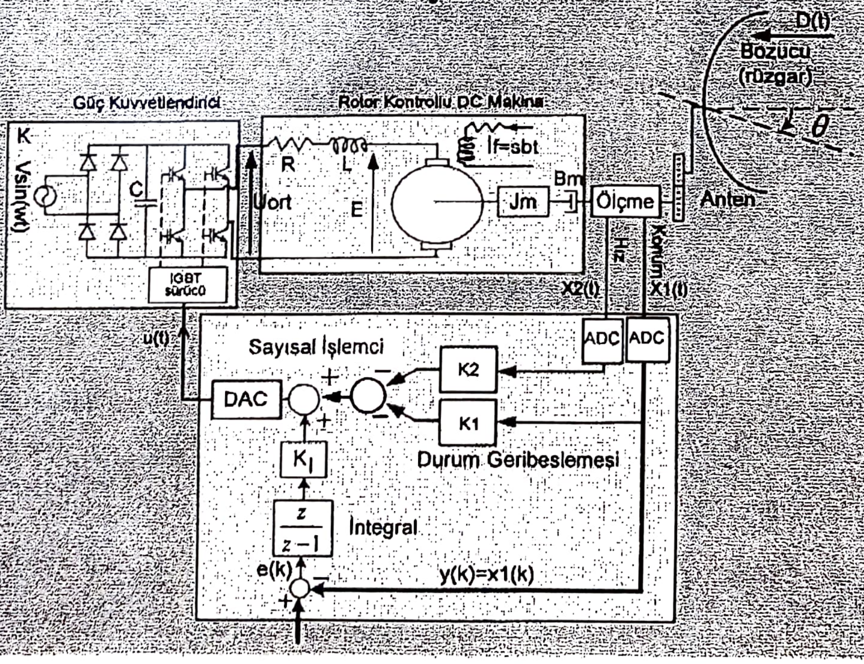


SAKARYA ÜNİVERSİTESİ ***Elektrik-Elektronik Mühendisliği***

DİGİTAL KONTROL

DERS NOTLARI_2017

Prof. Dr. Ayhan Özdemir

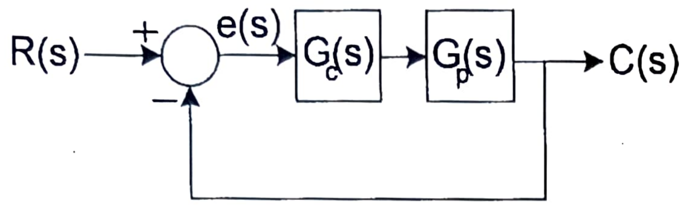


İÇİNDEKİLER

Kontrolör Tasarım Denklemleri

Sürekli-Zaman Kontrolör Tasarım Denklemleri

Şekilde kontrol edilmek istenen sistem $G_p(s)$ ve kontrolör transfer fonksiyonu $G_c(s)$ 'dir.



$$G_c(s) = K_d \frac{s^2 + \frac{K_p}{K_d}s + \frac{K_i}{K_d}}{s}$$ PID kontrolör transfer fonksiyonudur.

Problem: *verilen bir s_1 değeri için, $F(s_1) = G_c(s_1)G_p(s_1) + 1 = 0$ diğer bir ifade ile, $G_c(s)G_p(s) = \alpha\angle\gamma = \alpha e^{j\gamma}$ denklemini sağlayan $K_p,\ K_i$ ve K_d katsayı parametrelerini bulmaktır.*

Tasarım yöntemi: *Geometrik-yer eğrisine dayalı tasarım yapılacaktır.*

i- İstenen kontrol kutbu s_1, $s_1 = \sigma_1 + jw_1 = |s_1|e^{j\beta}$ kompleks olduğundan genlik $|s_1| = \sqrt{\sigma_1^2 + w_1^2}$ ve faz $\beta = \tan^{-1}(\frac{w_1}{\sigma_1})$ olarak yazılır.

ii- Yine $G_p(s_1)$ kompleks olduğundan, $G_p(s_1) = a + jd = |G_p(s_1)|e^{j\psi}$ genlik $|G_p(s_1)| = \sqrt{a^2 + d^2}$ ve faz $\psi = \tan^{-1}(\frac{d}{a})$ olarak yazılır.

iii- $G_c(s_1)G_p(s_1) + 1 = 0$ kompleks ifadesinden $G_c(s_1)G_p(s_1) = -1 = \alpha e^{j\gamma}$ $\rightarrow \alpha = 1$ *ve* $\gamma = 180$ olarak yazılabilir.

iv- $G_c(s_1)G_p(s_1) = -1 = \alpha e^{j\gamma}$ $\rightarrow \alpha = 1\ \ \gamma = 180^\circ$ *Faz ve genlik koşuludur.* Ara işlemlerden sonra K_p ve K_d 'ler aşağıda verildiği gibi elde edilir.

Sürekli-zaman PID kontrolör için, s_1 *istenen performanstan belirlenen kontrol kutbudur.*

$$K_p = -\frac{\sin(\psi + \beta)}{|G_p(s_1)|\sin\beta} - \frac{2K_i\cos\beta}{|s_1|} \qquad K_d = \frac{\sin\psi}{|G_p(s_1)||s_1|\sin\beta} + \frac{K_i\sin\beta}{|s_1|^2}$$ elde edilir.

K_i, hız hata katsayısından veya istenen bir değere analiz veya benzetim çalışmaları ile atanabilir.

PI kontrolör için, $K_d = 0$

$$K_p = -\frac{\sin(\psi + \beta)}{|G_p(s_1)|\sin\beta} - \frac{2K_i\cos\beta}{|s_1|}$$

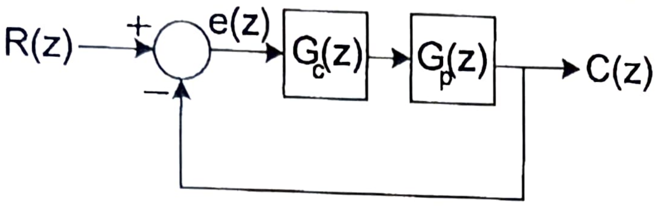
$$K_i = -\frac{|s_1|\sin\psi}{|G_p(s_1)|(\sin\beta)^2}$$

PD kontrolör için, $K_i = 0$

$$K_p = -\frac{\sin(\psi + \beta)}{|G_p(s_1)|\sin\beta}$$

$$K_d = \frac{\sin\psi}{|G_p(s_1)||s_1|\sin\beta}$$

Ayrık-Zaman Kontrolör Tasarım Denklemleri



$$G_c(z) = K_p + K_i \frac{z}{z-1} + K_d \frac{z-1}{z}$$

PID transfer fonksiyonu dur. **Problem:** *verilen bir* z_1 *değeri için,* $F(z_1) = G_c(z_1)G_p(z_1) + 1 = 0$ için *diğer bir ifade ile,* $G_c(z_1)G_p(z_1) = \alpha\angle\gamma = \alpha e^{j\gamma}$ *denklemini sağlayan* $K_{p,}$ K_I *ve* K_d *katsayı parametrelerini bulmaktır. Ara işlemlere girilmeden parametrik denklemler aşağıda verilmiştir.*

Tasarım yöntemi: *Geometrik-yer eğrisine dayalı tasarım yapılacaktır.*

i-) z_1, kompleks olduğundan $z_1 = \sigma_{z1} + jw_{z1} = |z_1|e^{j\beta}$ $z_1 = \sqrt{\sigma_{1z}^{\ 2} + w_{1z}^{\ 2}}$ $\beta = \tan^{-1}(\frac{w_{1z}}{\sigma_{1z}})$

i- ii-) $G_p(z_1)$, kompleks olduğundan Yine $G_p(s_1)$ kompleks olduğundan,

ii- $G_p(z_1) = a + jd = |G_p(z_1)|e^{j\psi}$ genlik $|G_p(z_1)| = \sqrt{a^2 + d^2}$ ve faz açısı için $\psi = \tan^{-1}(\frac{d}{a})$ olarak yazılır. Bu ifadeler parametrik denklemlerde kullanılır.

Ayrık-zaman PID Kontrolör

$$K_d = \frac{|z_1|}{\sin\beta}\left\{\frac{K_i \sin\beta}{|z_1| - 2\cos\beta + \frac{1}{|z_1|}} + \frac{\sin\psi}{|G_p(z_1)|}\right\} \qquad z_1 = |z_1|e^{j\beta} \qquad G_p(z_1) = |G_p(z_1)|e^{j\psi}$$

$$K_p = -\frac{\cos\psi}{|G_p(z_1)|} - 2K_i|z_1|\frac{|z_1| - \cos\beta}{|z_1|^2 - 2|z_1|\cos\beta + 1} + \frac{-|z_1|\sin\psi + \cos\beta\sin\psi}{|G_p(z_1)|\sin\beta}$$

Ayrık-zaman PI Kontrolör, $K_d = 0$

$$K_p = -\frac{\cos\psi}{|G_p(z_1)|} - 2K_I|z_1|\frac{|z_1| - \cos\beta}{|z_1|^2 - 2|z_1|\cos\beta + 1} + \frac{-|z_1|\sin\psi + \cos\beta\sin\psi}{|G_p(z_1)|\sin\beta}$$

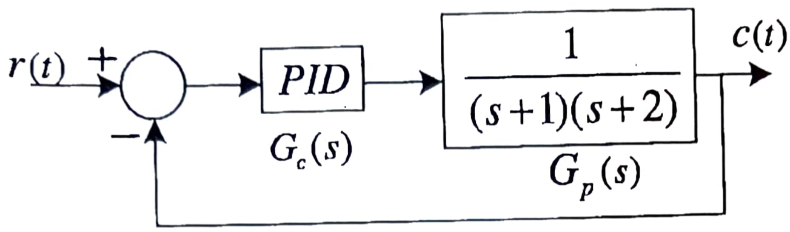
$$K_i = -\frac{\sin\psi}{|G_p(z_1)|}\frac{|z_1| - 2\cos\beta + \frac{1}{|z_1|}}{\sin\beta}$$

Ayrık-zaman PD Kontrolör, $K_i = 0$

$$K_p = -\frac{\cos\psi}{|G_p(z_1)|} + \frac{-|z_1|\sin\psi + \cos\beta\sin\psi}{|G_p(z_1)|\sin\beta}$$

$$K_d = \frac{|z_1|}{\sin\beta}\frac{\sin\psi}{|G_p(z_1)|}$$

Sürekli -Zaman Tasarım



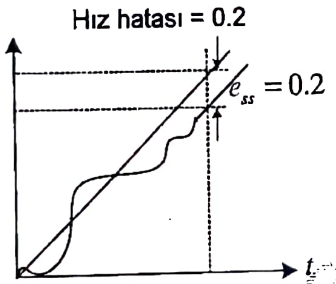
Kontrol sisteminde *birim rampa fonksiyon giriş* için hız hatası $e_{ss} = 0.2$ ve *birim basamak giriş* için %2 kriterine göre *yerleşme zamanı* $t_s = 1s$ ve $\zeta = 0.707$ olması istenmektedir.

i- PID Kontrolör parametreleri, K_p, K_i ve K_d=? $e_{ss} = R\frac{2\xi}{w_n}$

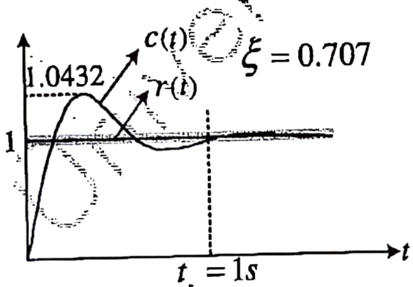
ii- $G_c(s)G_p(s)$ açık-çevrim transfer fonksiyonu olmak üzere yer eğrisini çiziniz. Kapalı-çevrim kontrol kutuplarını (baskın kutupları) yer eğrisinde gösteriniz.

Olması istenenler:

$\zeta = 0.707 \Rightarrow M_p = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi} \Rightarrow M_p = 0.0432 = \%4.32$ *istenen aşım.*



Birim rampa giriş için olması istenen hata



Birim basamak giriş için olması istenen aşım ve yerleşme zamanı

İstenen geçici rejim parametreler ζ ve w_n'i sağlayacak olan PID kontrolör katsayıları K_p, K_i ve K_d hesaplanacaktır. İlk olarak istenen geçici rejim kriterlerinden kontrol kutupları belirlenecektir.

$s_1 = -\sigma \pm jw_n\sqrt{1-\zeta^2}$ $0 < \zeta < 1$ için,

$\zeta = 0.707$ ve yerleşme zamanı,

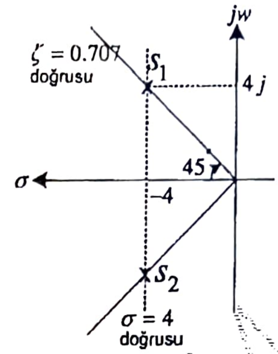
$$t_s = \frac{4}{\zeta w_n} = \frac{4}{\sigma} \Rightarrow 1 = \frac{4}{\sigma} \Rightarrow \sigma = 4 \text{ kontrol kutbunun reel kısmıdır.}$$

$$w_n = \frac{4}{\zeta t_s} = \frac{4}{0.707*1} \quad w_n = 5.6577 \text{ rad/sn}$$

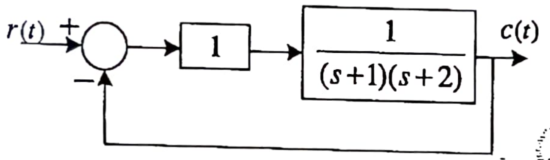
kontrol kutbunun orijinle yaptığı açı, $\theta = arc\cos\zeta$

$\theta = arc\cos(0.707) = 45^\circ$

Neticede kontrol kutupları, $s_{1,2} = -4 \pm 4j$ olarak belirlenir



Kontrolör tasarımından önce sistemin kontrolör etkisiz , $G_c(s) = 1$, davranışını başka bir ifade ile sistemin doğal kapalı-çevrim davranışı incelenecektir.



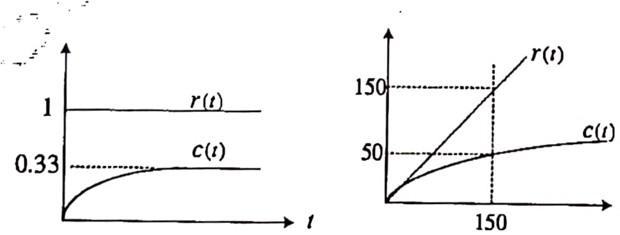
Kontrolcüsüz kapalı çevrim kontrol blok diyagram

Sisteme birim basamak giriş uygulandığında, $R(s) = \dfrac{1}{s}$ için sürekli hal hatası,

$e_{ss} = \dfrac{1}{1+k_p} \Rightarrow k_p = \lim\limits_{s \to 0} G(s)$ olarak tanımlanmıştı.

İncelenen sistem için; $k_p = \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} = 0.5 \Rightarrow e_{ss} = 0.67 = \%67$ sürekli hal hatası $e_{ss} = \%67$ olarak hesaplanır, *kabul edilebilir sınırların çok ötesindedir.*

Kontrolörsüz sistemin birim basamak ve birim rampa girişleri için cevap eğrisi yaklaşık olarak aşağıda verilmiştir.



Birim basamak giriş için cevap Birim rampa giriş için cevap

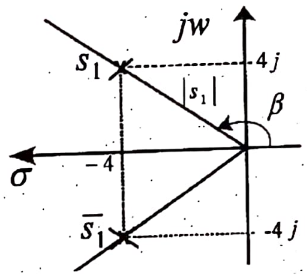
Kontrol edilen sistem $G_p(s)$, Birim basamak ve rampa cevaplarından görüldüğü gibi sistemin sürekli hal cevabının ve dinamiğinin düzeltilmesi gerekmektedir.

Parametrik Denklem ile Kontrolör tasarımı

i-) hız hata katsayısından ***Integratör katsayısı***, K_i hesaplanır.

$$e_{ss} = 0.2 \;\; \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{k_v} \;\; \Rightarrow k_v = 5 \textit{ hız hata katsayısı elde edilir.}$$

$$\underbrace{k_v}_{\text{Hız hata katsayısı}} = \lim_{s\to 0} sG(s) \quad \text{ve} \quad G(s) = G_{PID}(s)G_p(s)$$ *ileri yol transfer fonksiyonudur.*



$$k_v = \lim_{s\to 0} s\left(\left[K_p + \frac{K_i}{s} + sK_d\right]\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right]\right) = 5$$

$$k_v = \lim_{s\to 0}\left(\frac{K_i}{2}\right) = 5 \;\; \Rightarrow \;\; K_i = 10$$ **integratör katsayısı.**

K_p ve K_d, katsayıları sürekli-zaman PID için elde edilen ifadelerden hesaplanacaktır.

Kutupsal koordinatlar:

Hesap ile edilen kontrol kutup, $s_1 = -4 \pm 4j$ dir.

$$|s_1| = 4\sqrt{2}, \;\; \beta = \arctan\frac{4}{-4} = 135^\circ$$

$$|G_p(s_1)| = \left|\frac{1}{(-4+4j+1)(-4+4j+2)}\right| = \left|\frac{1}{(-3+4j)(-2+4j)}\right|$$

$$|G_p(s_1)| = 0.04472, \quad \psi = -243.4^\circ$$

$$G_p(s_1) = 0.04472\angle -243.4$$

Kutupsal koordinatlarda s_1, $G_p(s_1)$ için hesaplanan modül ve faz değerleri ile kontrolör katsayıları K_p ve K_d aşağıda verilen ifadeler yardımı ile hesaplanır.

$$K_p = -\frac{\sin(\psi+\beta)}{|G_p(s_1)|\sin\beta} - \frac{2K_i\cos\beta}{|s_1|} \qquad K_d = \frac{\sin\psi}{|G_p(s_1)||s_1|\sin\beta} + \frac{K_i\sin\beta}{|s_1|^2}$$

$$K_p = \frac{-\sin(-108.4)}{0.04472\sin(135)} - \frac{2*10\cos(135)}{4\sqrt{2}} = 32.25 \quad \text{ve} \quad K_d = \frac{\sin(-243.4)}{4\sqrt{2}*0.04472\sin(135)} + \frac{10}{(4\sqrt{2})^2} = 5.312$$

Karakteristik Denklem ile PID katsayılarının belirlenmesi

Kontrol edilen sistem için karakteristik denklem,

$$1+G_{PID}(s)G_p(s)=0 \rightarrow 1+\left(K_p+\frac{K_i}{s}+sK_d\right)\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)=0 \quad \text{yazılır.}$$

İfadesi bilinenler eşitliğin sol tarafında ve bilinmeyenler sağ tarafta olmak üzere düzenlenir.

$$K_p+sK_d=-\frac{1}{G_p(s)}-\frac{K_i}{s}$$ Kontrol kutbu $s=s_1=-4\pm 4j$ için çözüm yapılır.

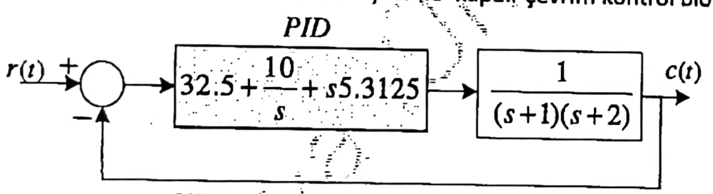
$$K_p+K_d(-4+4j)=-\frac{1}{\dfrac{1}{(-4+4j+1)(-4+4j+2)}}-\frac{10}{-4+4j}=-(-10-20j)-\frac{-40-40j}{32}$$

Denklemin her iki tarafı düzenlenerek reel ve sanal kısımlar birbirine eşitlenir.

$$\underbrace{K_p-4K_d}_{reel\ kısım}+\underbrace{4K_d j}_{imajinel\ kısım}=\underbrace{\frac{320+40}{32}}_{reel\ kısım}+j\underbrace{\frac{640+40}{32}}_{imajinel\ kısım}$$ K_d ve K_p *ifadeleri sırası ile.*

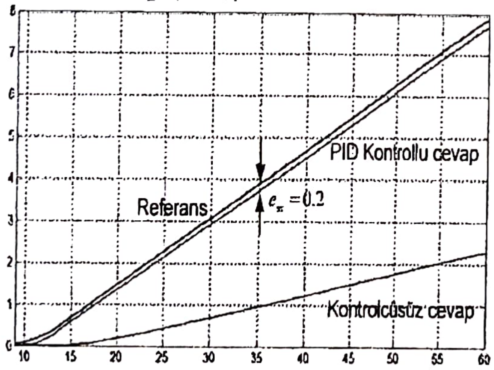
$$4K_d=\frac{640+40}{32} \Rightarrow K_d=5.3125, \quad K_p-4K_d=\frac{320+40}{32} \Rightarrow K_p=32.5 \ \textit{elde edilir.}$$

PID kontrolör için elde edilen katsayılar ile kapalı-çevrim kontrol blok diyagramı aşağıda verilmiştir.

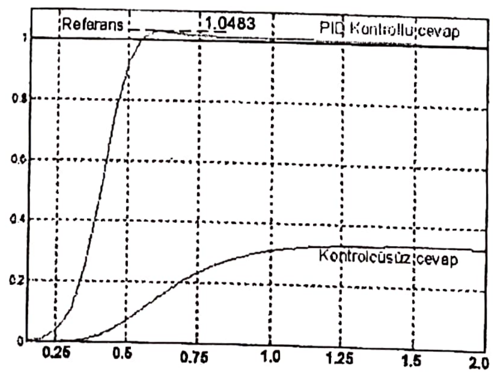


PID *Kontrollü kapalı çevrim kontrol blok diyagram*

Tasarım kriterlerine göre, elde edilen PID katsayıları için birim basamak ve rampa cevap eğrileri sırası ile aşağıda verilmiştir.



Rampa giriş için, ***Kontrollü ve kontrolcüsüz kapalı çevrim***



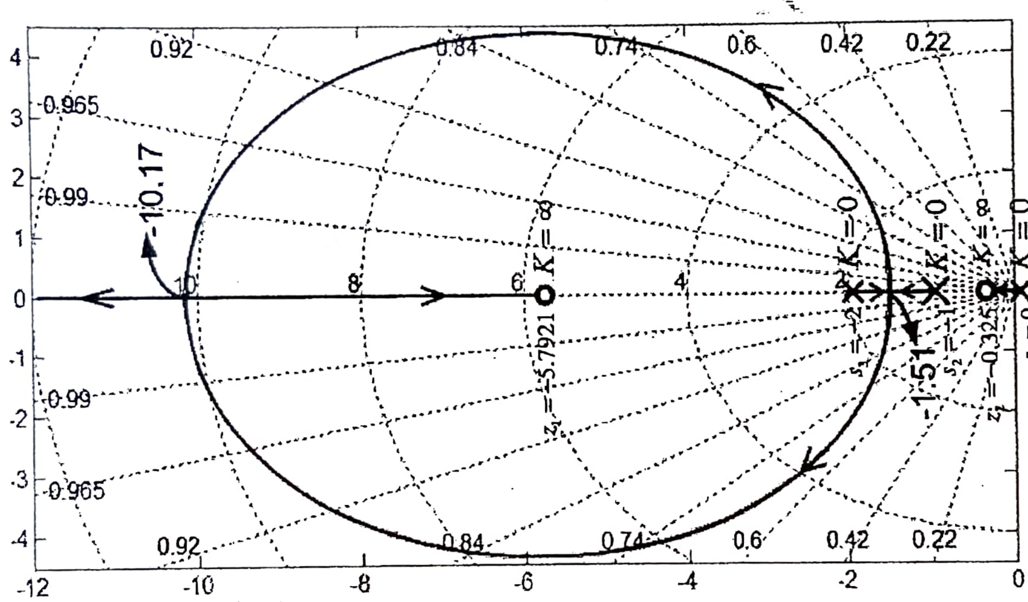
Basamak giriş için, ***Kontrollü ve kontrolcüsüz kapalı çevrim***

PID kontrolör ile sisteme ait geometrik yer eğrisi çizimi aşağıda verilmiştir:*Kontrol edilen sistemin açık-çevrim transfer fonksiyonu,*

$$G_c(s)G_p(s) = 5.3125\frac{s^2+6.117s+1.8823}{s(s^2+3s+2)}$$ *dır.*

Kutuplar	Sıfırlar	Asimtodlar	Kollar
$s_1=0$	$z_1=-5.7921$	3-2=1 *adet*	*n=3 adet*
$s_2=-1$	$z_2=-0.325$	$K=0$'da başlar	$K=\infty$'da biter.
$s_3=-2$	$z_3=\infty$	*yer eğrisi ile ilgili diğer hesaplar okuyucuya bırakılmıştır.*	

n=3 Kutup sayısı, m=2 sıfır sayısı



Açık-çevrim transfer fonksiyonu $G_c(s)G_p(s)$'e ait geometrik yer eğrisi

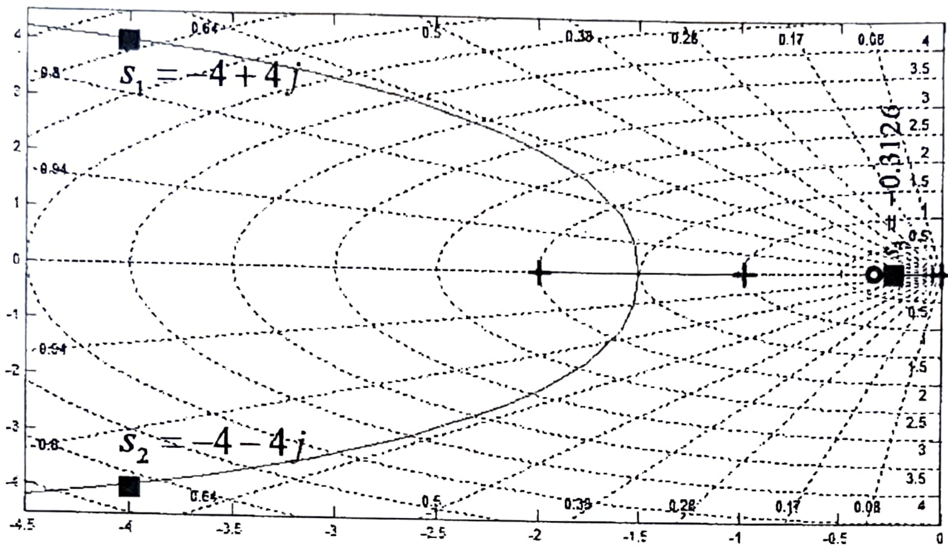
Kontrol edilen sisteme ait karakteristik denklem,

$F(s)=1+G_c(s)G_p(s)=1+5.3125\dfrac{s^2+6.117s+1.8823}{s(s^2+3s+2)}=0$ *yazılır ve düzenlenir ise,*

$F(s)=s^3+8.3125s^2+34.49s+10=0$ *ve kökler*

$s_1=-4+4j$, $s_2=-4-4j$ ve $s_3=-0.3126$ dir.

Tasarımda elde edilen PID katsayılarına göre kapalı çevrim kutupları s_1, s_2 ve s_3'ün yer eğrisinde aşağıda gösterilmiştir, $s_{1,2} = -4 \pm 4j$ ***Kontrol (baskın) kutuplardır.*** *Şekilde kutup yerlerini daha iyi gösterebilmek amacı ile geometrik yer eğrisinde sadece ilgili kısımlar bire bir ölçekli olarak verilmiştir.*



Kapalı-çevrim kutupları s_1, s_2 ve s_3 yer eğrisindeki yerleri. Kontrol (baskın) kutuplar s_1 ve s_2 dir

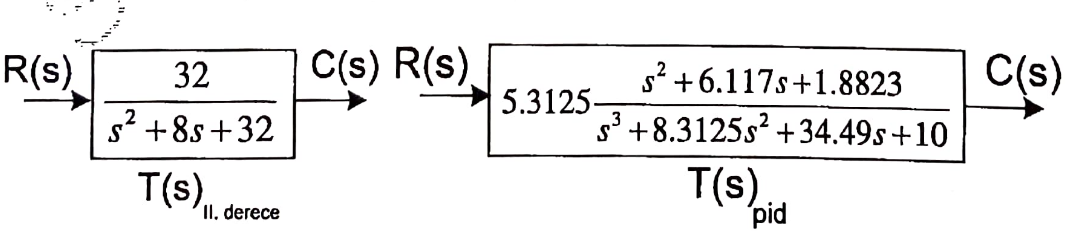
Tasarlanmış olan PID kontrol kurallı $G_c(s)$ ile $G_p(s)$ sistemine ait kapalı-çevrim transfer fonksiyonu:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = 5.3125\frac{s^2+6.117s+1.8823}{s^3+8.3125s^2+34.49s+10} \text{ dir.}$$

Tasarımda, verilen geçici rejim parametreleri, $\zeta = 0.707$ ve $w_n = 5.6577$ 'ne göre,

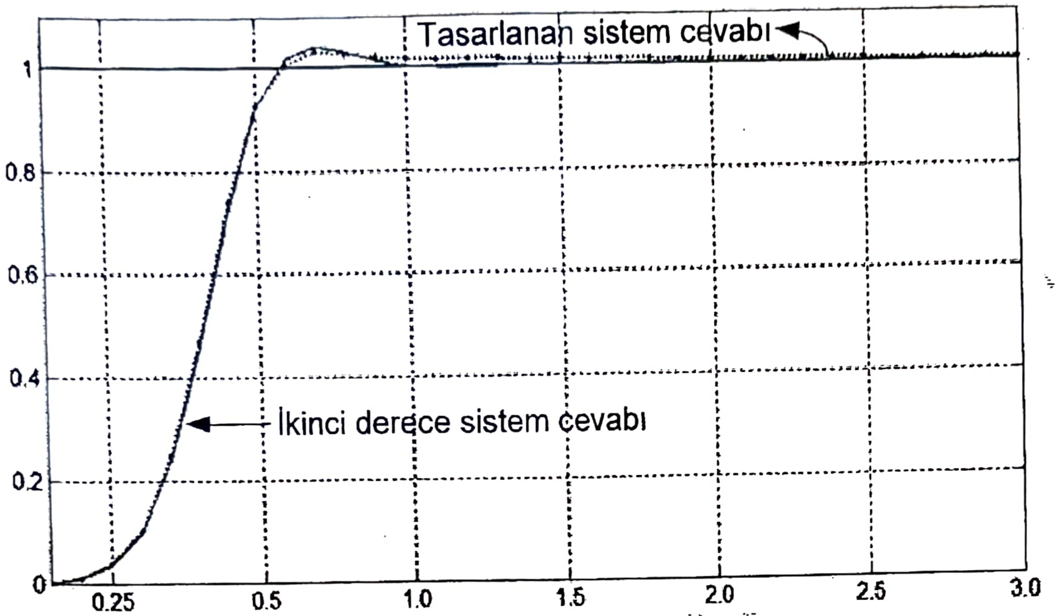
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2+2\xi w_n s + w_n^2}$$ olmak üzere, tasarım sonrasında olması istenen

II. dereceden kapalı-çevrim transfer fonksiyonu ise, $\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{32}{s^2+8s+32}$ olur. Her iki transfer fonksiyonu için blok diyagramlar aşağıda verilmiştir.



II. derecen sistem transfer fonksiyonu *Tasarlanan PID kontrol kurallı sisteme ait transfer fonksiyonu*

Basamak giriş için her iki sisteme ait cevaplar aşağıda verilmiştir.



II. derecen ve PID kontrol kurallı sistemlerin basamak giriş için cevapları.

Her iki sistem transfer fonksiyonlarına bakıldığında çok farklı yapıda oldukları görülmektedir. Ancak basamak giriş için cevap eğrileri bir birine çok yakındır. Nedeni aşağıda tartışılacaktır.

PID kontrol kurallı sistem, $\dfrac{C(s)}{R(s)} = 5.3125\dfrac{s^2+6.117s+1.8823}{(s^2+8s+32)(s+0.312)}$ düzenlenir ve

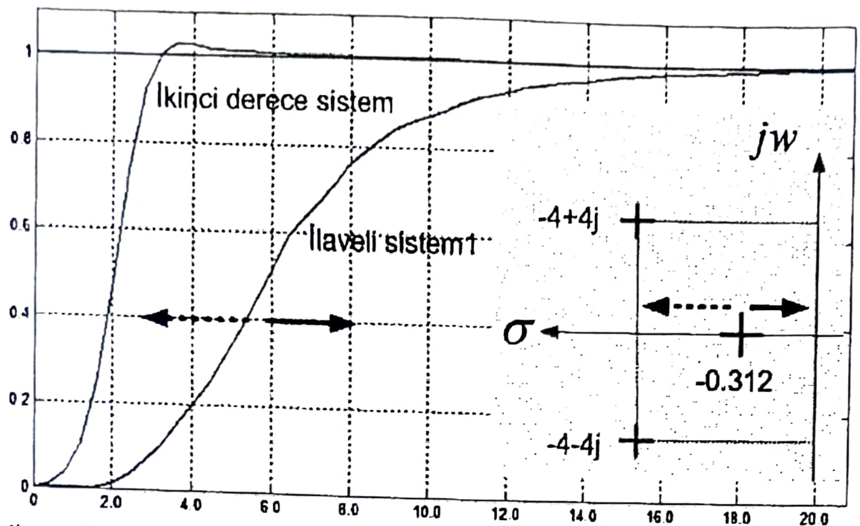
II.dereceden sistem göz önüne alındığında,

$\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{32}{s^2+8s+32}$ iki transfer fonksiyonu arasındaki

fark, $\Delta(s) = 0.166\dfrac{s^2+6.117s+1.8823}{s+0.312} = 0.166\dfrac{(s+5.7921)(s+0.325)}{s+0.312}$ elde edilir.

$\Delta(s)$ de görülen her bir çarpan sırası ile, ***birim kazançlı*** olarak II. dereceden transfer fonksiyonuna ilave edilecek ve çıkış cevap eğrisi üzerindeki etkisi tartışılacaktır.

1- Birim kazançlı kutup $\dfrac{0.312}{s+0.312}$ ilavesi ile $\dfrac{C_1(s)}{R_1(s)} = \dfrac{32}{s^2+8s+32}\,\dfrac{0.312}{s+0.312}$ **ilaveli_sistem1** elde edilir. İlaveli_sistem1 ve II. dereceden sistem cevap eğrileri aşağıda verilmiştir.



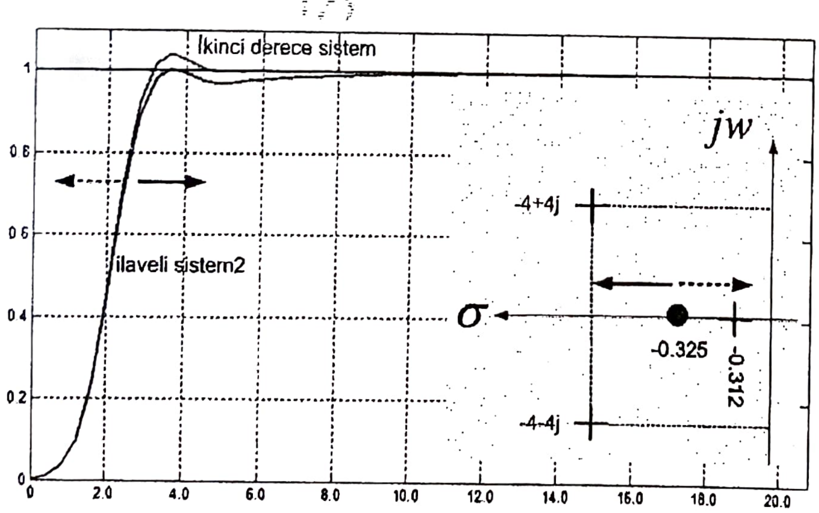
ilave_sistem1 ve II. derece sistem cevapları.

İlave kutup $s=-0.312$ den $s=0$'a orijine doğru yaklaştıkça sistem cevabı yavaşlar. İlave kutup orijinden, $s=0$'dan $s=-\infty$'a doğru gittikçe sistem cevap hızı artar.

*Yukarıda şekilde, cevap eğrilerinin sağ köşesinde, **ilave_sistem1**kutup dağılımı s-kompleks düzleminde gösterilmiştir. **İlave kutbun yer değiştirmesine** bağlı olarak **cevap eğrisinin değişim hızı** ilgili oklarla gösterilmiştir.*

2- Birim kazançlı sıfır $\frac{1}{0.325}(s+0.325)$ ilavesi ile ***ilaveli_sistem2***

$$\frac{C_2(s)}{R_2(s)}=\frac{32}{s^2+8s+32}\,3.0769\frac{s+0.325}{s+0.312}$$ olarak elde edilir. **İlaveli_sistem2** ve **II. dereceden sistem** cevap eğrileri aşağıda verilmiştir.



İlaveli sistem2** ve **II. derece sistem cevapları.

İlave sıfır $z=-0.325$'den $s=0$'a orijine doğru yaklaştıkça sistem cevabı hızlanır, ilave sıfır $z=-0.325$ orijinden $s=0$'dan $s=-\infty$'a doğru gittikçe sistem cevap hızı yavaşlar.

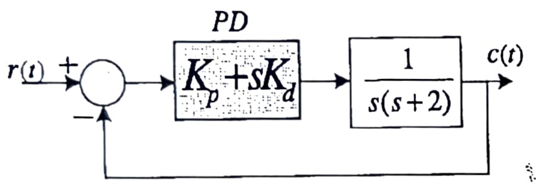
*Yukarıdaki şekilde, cevap eğrilerinin sağ köşesinde**Ilave_sitem2** kutup-sıfır dağılımı s-kompleks düzleminde gösterilmiştir. **İlave sıfırın yer değiştirmesine** bağlı olarak **cevap eğrisinin değişim hızı** ilgili oklarla gösterilmiştir.*

3- Birim kazançlı sıfır 2. sıfır $\frac{1}{0.325}(s+0.325)$ ilavesi ile yeni sistem

$\frac{C_3(s)}{R_3(s)}=\frac{32}{s^2+8s+32}0.1657\frac{(s+5.7921)(s+0.325)}{s+0.312}$ olarak elde edilir. Düzenlenir ise,

$\frac{C(s)}{R(s)}=5.3125\frac{s^2+6.117s+1.8823}{s^3+8.3125s^2+34.49s+10}$ *PID kontrol kurallı kapalı-çevrimtransfer fonksiyonu elde edilir. Birim basamak cevabı yukarıda incelendiğinden dolayı, tekrar edilmeyecektir.*

Örnek:



Verilen sistemde %2 kriterine göre yerleşme zamanı $t_s=2s$, $\%M_p=4.3$ (ζ=0.707) olması isteniyor. Buna göre $K_p, K_d=?$

%2 kriterine göre yerleşme zamanı $t_s=\frac{4}{\sigma}=\frac{4}{\xi w_n}$ dir.

$t_s=2=\frac{4}{\sigma} \Rightarrow \sigma=2$ ise $w_n=\frac{2}{\xi}=\frac{2}{0.707}=2.8289\,rad/sn$ ise

---

$w_n=2.8289$ rad/sn ve ζ=0.707 dir. Kontrol kutupları $s_{1,2}$ iki şekilde bulunabilir.

1- $0<\zeta<1$ *için $s_{1,2}$ kontrol kutupları karakteristik denklem kök ifadesinden hesaplanır.*

$s_{1,2}=-\xi w_n \pm jw_n\sqrt{1-\xi^2}=-0.707*2.8289\pm j2.8289\sqrt{1-0.707^2}$ ise,

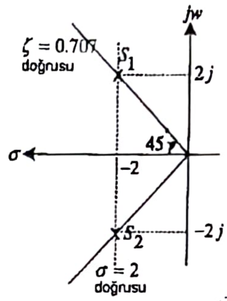
$s_{1,2} = -2 \pm 2j$ elde edilir.

2- *S-kompleks düzleminden $s_{1,2}$ aşağıda verildiği gibi elde edilir.*

kontrol kutbunun orijinle yaptığı açı, $\theta = arc\cos\zeta$

$\theta = arc\cos(0.707) = 45^\circ$

Kontrol kutupları, $s_{1,2} = -2 \pm 2j$ olarak belirlenir



PD kontrol kuralı için katsayılar K_p ve K_d farklı iki yöntem ile elde edilecektir.

Köklerin Geometrik Yer Eğrisinde PD Tasarım

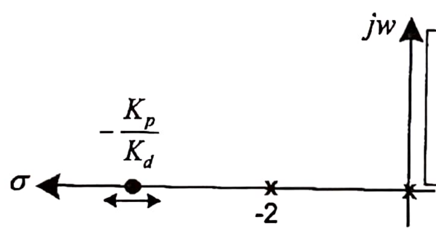
Açık-çevrim transfer fonksiyonu yazılır ise

$$G_{PD}(s)G_p(s) = \frac{K_p + sK_d}{s(s+2)}$$ dir. S-kompleks düzleminde kutup-sıfır dağılımı yapılır.

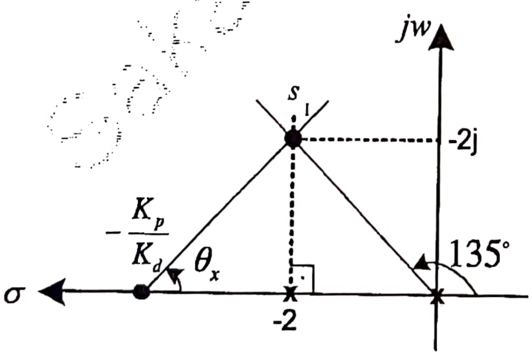
Kutuplar sıfırlar

$s_{p1} = -2$ $z_1 = -\dfrac{K_p}{K_d}$

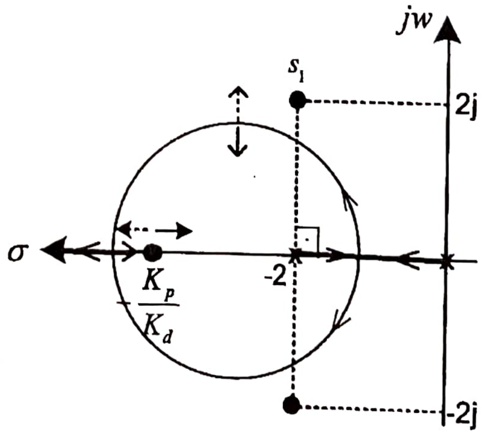
$s_{p2} = 0$ $z_2 = \infty$



Yer eğrisi s_1 noktasından geçecek şekilde K_p ve K_d ayarlanmalıdır.



s_1'noktası ve kutup-sıfır dağılımı.



K_p / K_d'ye göre yer eğrisi.

K_p/K_d'ye göre yer eğrisine ait şekilden görüleceği üzere, $-\dfrac{K_p}{K_d}$ orijine $s=0$ 'a doğru yaklaştıkça çember şeklinde olan yer eğri çapı küçülmektedir. $-\dfrac{K_p}{K_d}$ orijinden $s=0$ noktasından uzaklaştıkça çember şeklindeki yer eğrisi yarı çapı büyümektedir.

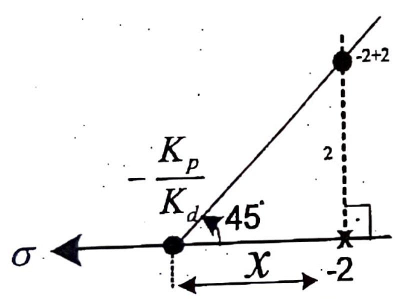
$-\dfrac{K_p}{K_d}$ s-kompleks düzleminde öyle bir noktaya yerleştirilmelidir ki geometrik yer eğrisi s_1 noktasından geçsin.

Yer eğrisinin s_1 noktasından geçmesi için, s_1 **noktası faz ve modül koşulunu** sağlamak mecburiyetindedir.

i- **Faz koşulu:** s_1'noktası ve kutup-sıfır dağılımına ait şekilden s_1'noktasına faz koşulu, aşağıda verildiği gibi uygulanır.

$\sum\theta_{sıfır}-\sum\theta_{kutup}=\pm180^{\circ}$ ise $\theta_x-(90+135)=180 \rightarrow \theta_x=405^{\circ}$

$-\dfrac{K_p}{K_d}$, s_1'noktasına $\theta_x=405^{\circ}-360^{\circ}=45^{\circ}$ **açı ile yerleştirilmelidir.**



Şekilden, $\tan\theta_x=\tan(45)=\dfrac{2}{x}=1 \quad \rightarrow x=2$

$-\dfrac{K_p}{K_d}$ *nin* $s=0$ orijine uzaklığı ise

$-\dfrac{K_p}{K_d}=-x-2$ *dir.* $-\dfrac{K_p}{K_d}=-4$ ve

$K_p=4K_d$ dir.

İki bilinmeyen K_p ve K_d tek. *İkinci denklem modül koşulundan yazılır.*

ii- **Modül koşulu**: *Köklerin geometrik yer eğrisinin s_1'noktasından geçebilmesi için (veya s_1 noktasının yer eğrisine ait bir nokta olabilmesi için) s_1 noktası, ikinci koşul olan modül koşulunu sağlamak mecburiyetindedir.* Modül koşulu, $\left|G_{PD}(s)G_p(s)\right|_{s=-2+2j}=1$ dir.

$$\left|\frac{K_d(s+4)}{s(s+2)}\right|_{s=-2+2j}=1 \;\Rightarrow\; \frac{K_d(-2+2j+4)}{(-2+2j)(-2+2j+2)}=-1 \;\Rightarrow\; \frac{K_d(2+2j)}{(-2+2j)(2j)}=-1$$

$$\left|\frac{K_d}{2}\right|=\left|-1\right| \;\Rightarrow\; K_d=2\,,\quad \frac{K_p}{K_d}=4 \;\Rightarrow\; K_p=4K_d \;\text{ ise,}\; K_p=8 \;\text{ dir.}$$

Parametrik Denklemler ile PD Tasarım

Kontrol kuralı olarak PD kontrolör kullanıldığından parametrik ifadelerde $K_i = 0$ alınır.

$$K_i = 0 \quad için \qquad K_p = -\frac{\sin(\psi+\beta)}{|G_p(s_1)|\sin\beta} \qquad K_d = \frac{\sin\psi}{|G_p(s_1)||s_1|\sin\beta}$$

$s_1 = -2+2j$ ise $s_1 = |s_1|e^{j\beta} = 2\sqrt{2}e^{j135^\circ}$

$G(s) = \dfrac{1}{s(s+2)}$ ise $G(s) = |G(s)|e^{j\psi}$ $s = s_1 = -2+2j$ verilerek,

$$G(s_1) = \frac{1}{(-2+2j)(-2+2j+2)} = 0.1768e^{j135^\circ}$$

Kutupsal koordinatlarda hesaplanan genlik ve faz değerleri aşağıda verilmiştir.

$|s| = 2\sqrt{2}$ $\qquad \beta = 135^\circ$

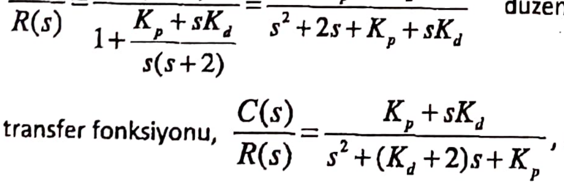
$|G(s)| = 0.1768$ $\qquad \psi = 135^\circ$

Bu sayısal değerler, K_p ve K_d parametrik denklemlerinde yerine koyulur.

$$K_p = -\frac{\sin(\psi+\beta)}{|G_p(s_1)|\sin\beta} = -\frac{\sin(135+135)}{0.1768*\sin(135)} \text{ ise, } K_p = 8$$

$$K_d = \frac{\sin\psi}{|G_p(s_1)||s_1|\sin\beta} = \frac{\sin(135)}{0.1768*2\sqrt{2}*\sin(135)} \text{ ise } K_d = 2$$

Kutup Yerleştirme Yöntemi ile PD Tasarım



Verilen sisteme ait kapalı-çevrim transfer fonksiyonu elde edilir.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{K_p+sK_d}{s(s+2)}}{1+\dfrac{K_p+sK_d}{s(s+2)}} = \frac{K_p+sK_d}{s^2+2s+K_p+sK_d}$$ düzenlenlr ise PD kontrol kurallı kapalı-çevrim

transfer fonksiyonu, $\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{K_p+sK_d}{s^2+(K_d+2)s+K_p}$, elde edilir.

ζ=0.707 ve $w_n = 2.8289$ rad/sn için kontrol kutupları , $s_{1,2} = -2 \pm 2j$ edilmişti. II.dereceden sisteme ait karakteristik denklem,

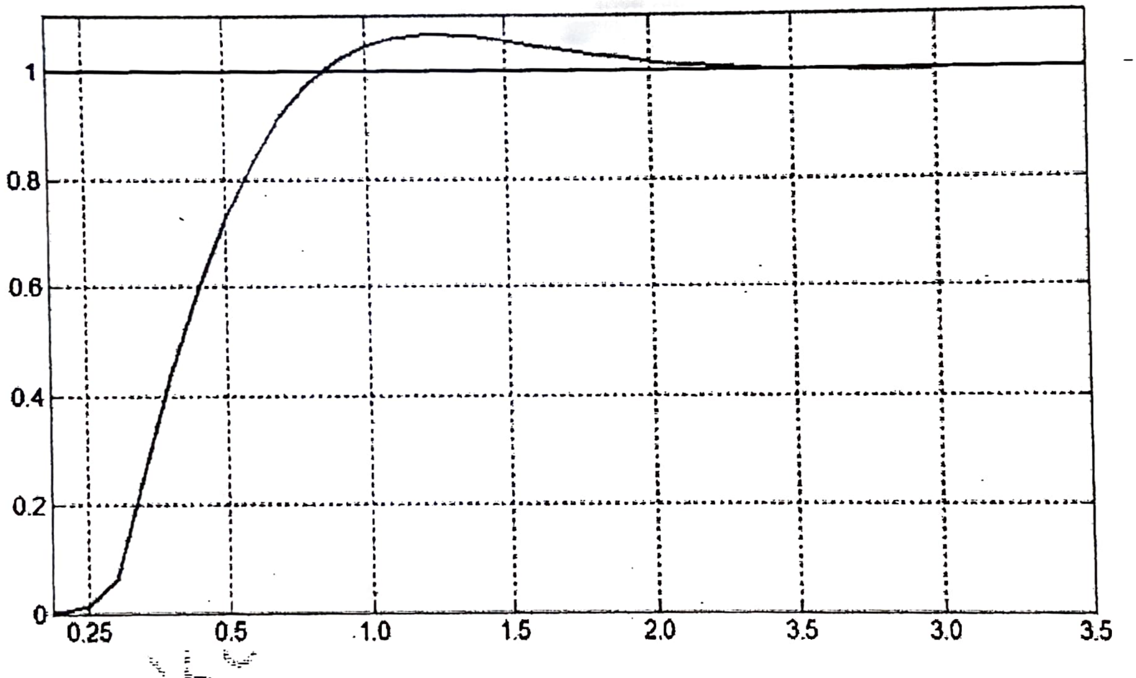
$F(s) = (s - s_1)(s - s_2) = (s + 2 - 2j)(s + 2 + 2j)$ ise,

$F(s) = s^2 + 4s + 8 = 0$ *Olması istenen karakteristik denklem olarak elde edilir.*

PD kontrol kurallı kapalı-çevrime ait karakteristik denklem ile II. derece sisteme ait karakteristik denklem eşitlenir. Aynı terimli katsayılardan bilinmeyenler hesaplanır.

$F(s) = s^2 + (K_d + 2)s + K_p = s^2 + 4s + 8 = 0$ eşitliğinden, $K_p = 8$ $K_d + 2 = 4$ ise $K_d = 2$ dir.

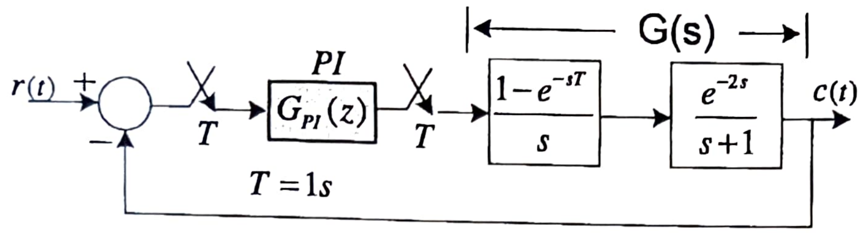
Hesaplanan katsayılar K_p *ve* K_d *kullanılarak PD kontrol kurallıkapalı-çevrim birim basamak giriş için çıkış cevabı aşağıda verilmiştir.*



PD kontrol kurallı sistemin birim basamak giriş için cevabı.

Ayrık-Zaman Tasarım

Örnek:



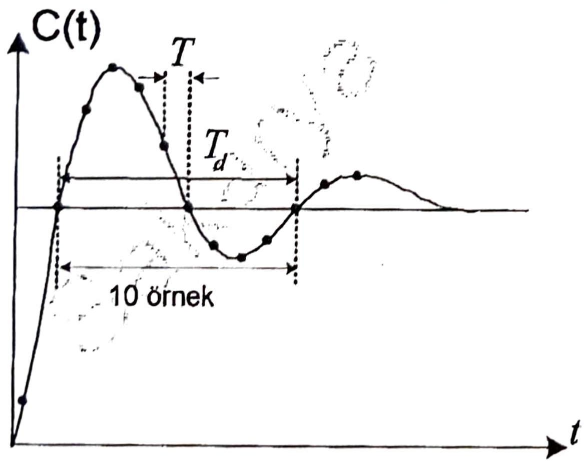
Şekilde verilen ayrık-zaman sistemde, $\zeta=0.5$ ve sistem cevabı $c(t)$ sönümlü sinüs şeklinde osilasyon yapmaktadır. Her osilasyon periyodunda 10 örnek alabilinecek şekilde PI kontrolcüsünün katsayılarını K_p, K_i belirleyiniz.

Ayrık-zaman kontrolcü tasarlanacağından sistemin ayrık-zaman açık-çevrim transfer fonksiyonu elde edilmelidir.

Rezidü yönteminden; $G(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{e^{-2s}}{s+1}\right\} = \left(1-z^{-1}\right)z^{-2}Z\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}$

$$G(z) = \frac{0.6321}{z^2(z-0.3679)}$$ elde edilir.

Osilasyonlu sinüs cevabı aşağıda verilmiş olup, her osilasyon periyodundan 10 örnek alınması için gerekli örnekleme aralıkları gösterilmiştir.



Örnekleme açısal frekansı: $w_s \triangleq \frac{2\pi}{T}$

Örnekleme zamanı: $T = \frac{2\pi}{w_s}$

Osilasyon açısal frekansı: $w_d = w_n\sqrt{1-\zeta^2}$

Doğal açısal frekans: $w_n = \frac{w_d}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

$$w_n T = \frac{w_d}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{2\pi}{w_s} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{w_d}{w_s}$$

$$w_n T = \frac{2\pi}{10\sqrt{1-\zeta^2}}$$ dır.

T=Td/10

II. dereceden sistemde kontrol kutupları,

$T(s) = \dfrac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = -\zeta w_n \pm j w_n \sqrt{1-\zeta^2}$ *kontrol kutuplarıdır.* Ayrık-zaman kontrol-kutupları $z_{1,2}$,

$$z \triangleq e^{sT} \quad z_{1,2} \triangleq e^{\left(-\zeta w_n \pm j w_n \sqrt{1-\zeta^2}\right)T} \triangleq e^{-\zeta w_n T} e^{\pm j w_n T \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$w_n T = \frac{2\pi}{10\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi}{10\sqrt{1-0.5^2}} = 0.7255$$

$$w_d T = w_n T \sqrt{1-\zeta^2} = 0.7255\sqrt{1-0.5^2} = 0.6283$$

$$z_{1,2} = e^{-\zeta w_n T} e^{-j w_d T} = e^{-0.5*0.7255} e^{\pm j0.6283} = 0.6958 e^{\pm j0.6283}$$

$z_{1,2} = 0.5629 \pm j0.4090$ *Ayrık-zaman kontrol kutupları (baskın kutuplar)*

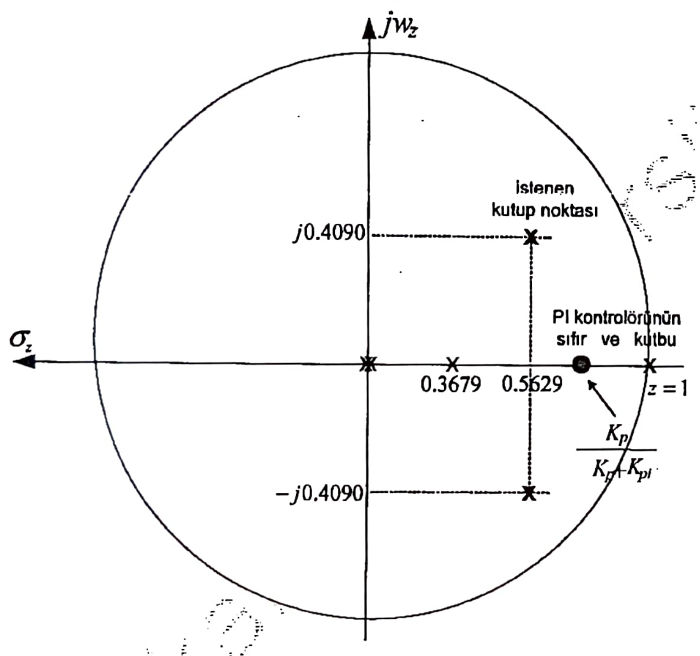
Köklerin Geometrik Yöntemi ile PI Katsayı Tasarımı

PI kontrol kurallı ayrık-zaman açık-çevrim transfer fonksiyonu ,

$$G_{PI}(z)G(z) = (K_p + K_i)\,\frac{z - \dfrac{K_p}{(K_p+K_i)}}{z-1}\,\frac{0.6321}{z^2(z-0.3679)}$$ şeklinde düzenlenir.

Kutuplar	**sıfırlar**
$p_{1,2} = 0$	$z_1 = -\dfrac{K_p}{K_p + K_i}$
$p_3 = -0.3679$	$z_2 = \infty$

Kutup-sıfır dağılımı z-kompleks düzleminde verilmiştir.



Z-Kompleks kutup-sıfır dağılımı.

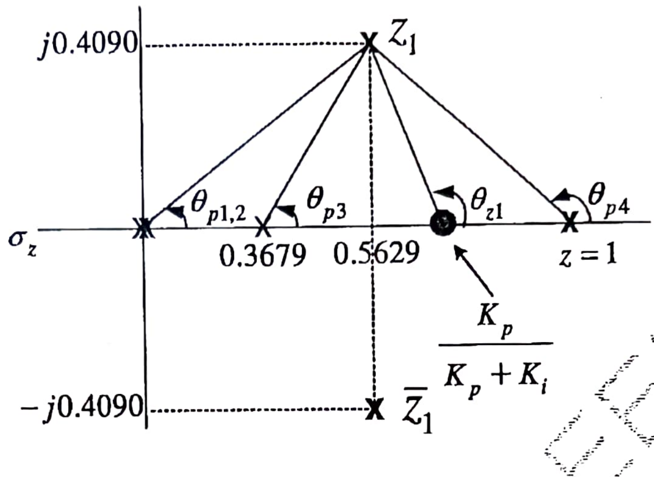
***PI** kontrolör, ayrık-zaman açık-çevrim transfer fonksiyonuna,* $z=1$ *de bir kutup ve* $z = \dfrac{K_p}{(K_p+K_i)}$ *de bir adet sıfır getirmektedir.*

İstenen cevap performansı için, yer eğrisi $z_{1,2}$ *noktasından geçecek şekilde* K_p *ve* K_i *hesaplanmalıdır.*

Bunun için $z_{1,2}$ noktaları:

1- **Faz koşulu:** Kutup-sıfır dağılımı hesap kolaylığı açısından aşağıda geometrik olarak çizilmiştir. Faz koşulunun kontrol kutuplarından z_1 veya $\overline{z_1}$ den birisine uygulanması yeterlidir.

$\sum \angle z + z_i - \sum \angle z + p_i = 180^\circ$ *faz-koşulu.*



$\theta_{p1},\ldots,\theta_{p4}$ açıları şekil üzerinden aşağıda hesaplanmaktadır.

$$\theta_{p1}=\theta_{p2}=\arctan\frac{0.4090}{0.5629}=36^\circ$$

$$\theta_{p3}=\arctan\frac{0.4090}{(0.5629-0.3679)}=64.51^\circ$$

$$\theta_{p4}=180^\circ-\arctan\frac{0.4090}{(1-0.5629)}=136.9^\circ$$ *Elde edilen açılar faz-koşulu ifadesinde kullanılarak,* ***PI*** *kontrolör sıfırı* $z=\dfrac{K_p}{(K_p+K_i)}$ *'in kontrol kutbu* z_1 *ile yapması gereken açı* θ_{z1} *aşağıdaki gibihesaplanır.*

$$\sum\angle z+z_i-\sum\angle z+p_i=180^\circ \Rightarrow \quad \theta_{z1}-\left(\theta_{p1}+\theta_{p2}+\theta_{p3}+\theta_{p4}\right)=180^\circ$$

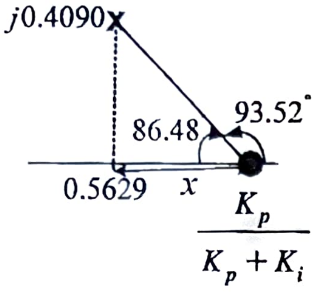
$$\theta_{z1}-\left(36^\circ+36^\circ+64.51^\circ+136.9^\circ\right)=180^\circ$$

$$\theta_{z1}=453.52^\circ=93.52^\circ$$

Elde edilen θ_{z1} ile, $z=\dfrac{K_p}{K_p+K_i}$ noktası aşağıda hesaplanmıştır.

$$\tan\frac{0.409}{x}=86.48 \quad \rightarrow x=0.0252$$

$$\frac{K_p}{K_p+K_i}=0.5629+0.0252=0.5881 \qquad K_p=1.3666K_i$$



2- **Genlik Koşulu:** Köklerin geometrik yer eğrisinin z_1 kontrol kutbundan geçebilmesi için genlik koşulu kesin sağlanmalıdır.

$$\frac{K_p}{(K_p+K_i)}=\frac{1.3666\cancel{K_i}}{1.3666\cancel{K_i}+\cancel{K_i}}=0.5775$$

$$K_p+K_i=1.3666K_i+K_i=2.3666K_i$$

$$\left|G_{PI}(z_1)G(z_1)\right|=1=\left|(K_p+K_i)\,\frac{z-\dfrac{K_p}{(K_p+K_i)}}{z-1}\,\frac{0.6321}{z^2(z-0.3679)}\right|_{z=0.5629+j0.4090}=1$$

$$=\left|2.3666K_i\,\frac{z-0.5775}{z-1}\,\frac{0.6321}{z^2(z-0.3679)}\right|_{z=0.5629+j0.4090}=1$$

$$K_i\left|\frac{(0.5629+j0.4090)-0.5881}{(0.5629+j0.4090)-1}\,\frac{0.6321}{(0.5629+j0.4090)^2\left[(0.5629+j0.4090)-0.3679\right]}\right|=1$$

Ara işlemler yapılarak $K_i=0.2145$ ve

$$K_p=1.3666K_i=0.2145*1.3666$$

$K_p=0.2931$ *olarak hesaplanır.*

Karakteristik Denklem ile PI Katsayı Tasarımı

PI kontrol kurallı kapalı çevrim transfer fonksiyona ait karakteristik denklem,

$F(z)=1+G_{PI}(z)G_P(z)=0$ *ifade edilir.*

$$1+\left(K_p+K_i\frac{z}{z-1}\right)\frac{0.6321}{z^2(z-0.3679)}=0$$

Karakteristik denklem bilinenler eşitliğin bir tarafına bilinmeyenler diğer tarafta olacak şekilde düzenlenirse,

$$G_{PI}(z)=\frac{-1}{G_P(z)} \Rightarrow \left.\left(K_p+K_i\frac{z}{z-1}\right)\right|_{z=0.5629+j0.4090}=-\left.\frac{1}{\dfrac{0.6321}{z^2(z-0.3679)}}\right|_{z=0.5629+j0.4090}$$

$$\left(K_p+K_i\frac{0.5629+j0.4090}{(0.5629+j0.4090)-1}\right)=-\frac{1}{\dfrac{0.6321}{(0.5629+j0.4090)^2(0.5629+j0.4090-0.3679)}}$$

ifadesinde ara işlemler yapılıp her iki taraftaki reel ve sanal kısımlar birbirine eşitlenirse;

$$j0.23883=j1.1414K_i \Rightarrow K_i=0.2094$$

$$K_p=0.25179+0.2198K_i \Rightarrow K_p=0.29782$$

Parametrik Denklemlerden PI Katsayı Tasarımı

Hatırlatma:

$$K_i=-\frac{\sin\psi}{|G_p(z_1)|}\frac{|z_1|-2\cos\beta+\dfrac{1}{|z_1|}}{\sin\beta}$$

$$K_p=-\frac{\cos\psi}{|G_p(z_1)|}-2K_i|z_1|\frac{|z_1|-\cos\beta}{|z_1|^2-2|z_1|\cos\beta+1}+\frac{-|z_1|\sin\psi+\cos\beta\sin\psi}{|G_p(z_1)|\sin\beta}$$

$$z_1=|z_1|e^{j\beta} \qquad G_p(z_1)=|G_p(z_1)|e^{j\psi}$$

İstenen cevap performansı için olması gereken kapalı-çevrim baskın kutupları,

$z_{1,2} = 0.5629 \pm j0.4090$ *olarak elde edilmişlerdi.* $G(z) = \dfrac{0.6321}{z^2(z-0.3679)}$

$$z_1 = 0.5629 + j0.4090 \rightarrow |z_1| = \sqrt{0.5629^2 + 0.4090^2} \rightarrow |z_1| = 0.6958$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{0.409}{0.5629}\right) \rightarrow \beta = 0.6284$$

$$G_p(z_1) = \frac{0.6321}{(0.5629 + j0.4090)^2(0.5629 + j0.4090 - 0.3679)} = -2.0906 - j1.9830 \rightarrow$$

$$|G_p(z_1)| = \sqrt{(-2.0906)^2 + (-1.9830)^2} = 2.8815 \quad |G_p(z_1)| = 2.8815$$

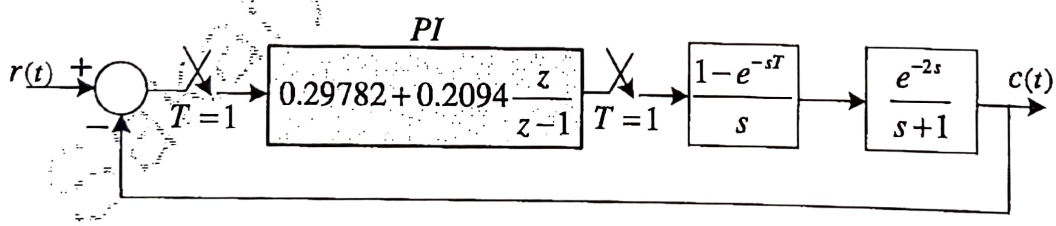
$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{-1.9830}{-2.0906}\right) = -2.3826 \rightarrow \psi = -2.3826$$

Elde edilen genlik ve faz değerleri parametrik denklemler K_p ve K_i de yerine koyulur.

$$K_i = -\frac{\sin(-2.3826)}{2.8815}\,\frac{0.6958 - 2\cos(0.6284) + \dfrac{1}{0.6958}}{\sin(0.6284)} \rightarrow K_i = 0.2098$$

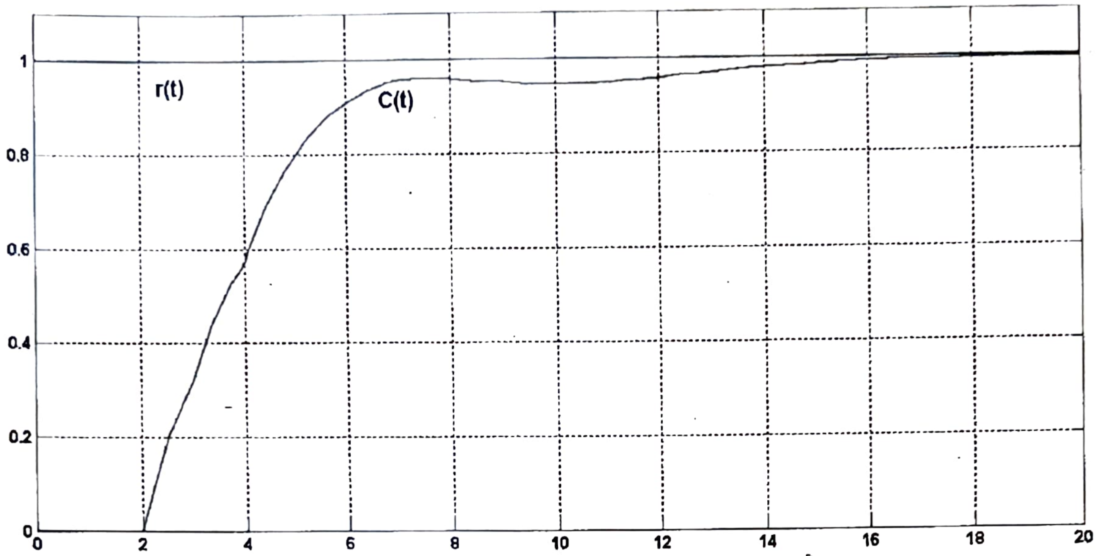
$$K_p = -\frac{\cos(-2.3826)}{2.8815} - 2(0.2098)0.6958\frac{0.6958 - \cos(0.6284)}{0.6958^2 - 20.6958\cos(0.6284) + 1}$$

$$+\frac{-0.6958\sin(-2.3826) + \cos(0.6284)\sin(-2.3826)}{2.8815\sin(0.6284)} \quad K_p = 0.2978$$



PI kontrol kurallı ayrık-zaman kapalı-çevrim kontrol blok diyagram

Birim basamak giriş $r(t)$ için cevap $c(t)$ aşağıda verilmiştir.



***PI** kontrol kurallı ayrık-zaman kapalı-çevrim cevap*

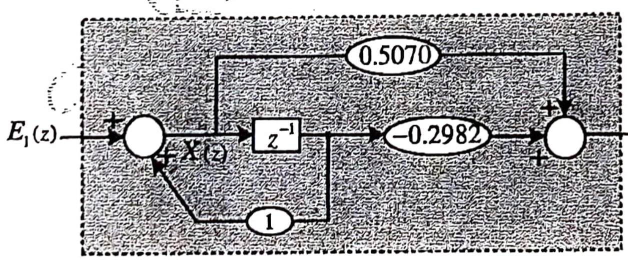
*Sayısal **PI** kontrolörüne ait doğrudan programlama yöntemi ile durum diyagramı ve sembolik dilde yazılım aşağıda verilmiştir.*

$$E_1(z) \longrightarrow \overset{PI}{\boxed{0.29782+0.2094\frac{z}{z-1}}} \longrightarrow E_2(z) \quad \equiv \quad E_1(z) \longrightarrow \overset{PI}{\boxed{0.5070\frac{z-0.5881}{z-1}}} \longrightarrow E_2(z)$$

$$\frac{E_2(z)}{E_1(z)} = 0.5070\frac{z-0.5881}{z-1}\frac{z^{-1}}{z^{-1}}\frac{X(z)}{X(z)}$$

$$E_1(z) = X(z) - z^{-1}X(z) \quad \Rightarrow \quad X(z) = E_1(z) + z^{-1}X(z) \quad \Rightarrow \quad X(k) = E_1(k) + X(k-1)$$

$$E_2(z) = 0.5070X(z) - 0.2982z^{-1}X(z) \quad \Rightarrow \quad E_2(k) = 0.5070X(k) - 0.2982X(k-1)$$



Sembolik yazılım.

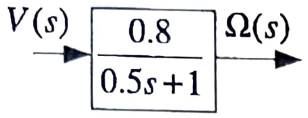
```
      A = 0
dvm:  read e1
      X = e1+A
      e2 =0.5070*X-0.2982*A
      out e2
      A=X
      goto dvm
```

$$X(k) = E_1(k) + X(k-1)$$

$$E_2(k) = 0.5070X(k) - 0.2982X(k-1)$$

NOT: $A = z^{-1}X(z)$ olsun.

Örnek: Kontrol edilecek olan sisteme ait sürekli-zaman açık-çevrim transfer fonksiyonu aşağıda verilmiştir.



İsterler: %2 kriterine göre yerleşme zamanı $t_s = 2.5\,sn$, sönüm oranı $\xi = 0.707$ $(aşım = \%4.33)$, örnekleme zamanı $T = 0.05\,sn$ ve hız hatası ise $e_{ss} = 0.0672$ istenmektedir.

a) Açık çevrim ayrık zaman transfer fonksiyonunu bulunuz.
b) Ayrık-zaman PID kontrolör katsayılarını,
   - i- Parametrik denklemleri kullanarak elde ediniz.
   - ii- Karakteristik denklem metodu ile elde ediniz.
   - iii- Ayrık-zaman kapalı-çevrim kontrol blok diyagramının çiziniz.
   - vi- PID- Kontrolörü sembolik dilde programlayınız

a) $z = e^{sT}$ olmak üzere,

$$G_p(z) = Z\{G_{ZOH}(s)G_p(s)\} = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{0.8}{0.5s+1}\right\}$$

$$G_p(z) = \frac{0.8}{0.5}\left(1-e^{-sT}\right)Z\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\}$$

$$G_p(z) = \frac{0.8}{0.5}\left(1-z^{-1}\right)\left(\left.(s-0)\frac{1}{s(s+2)}\frac{z}{z-e^{sT}}\right|_{s=0} + \left.(s-(-2))\frac{1}{s(s+2)}\frac{z}{z-e^{sT}}\right|_{s=-2}\right)$$

$$G_p(z) = 1.6\left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{z}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{-2T}}\right) = 0.8\left(1-\frac{z-1}{z-0.9048}\right) = \frac{0.8z-0.7238-0.8z+0.8}{z-0.9048}$$

$$G_p(z) = \frac{0.0762}{z-0.9048}$$ Açık-Çevrim Ayrık-zaman transfer fonksiyonu elde edilir.

b)

i- PID kontrolör katsayıları için parametrik denklemler ile bulunması

kapalı evrim kontrol sistemine ait rampa girişi için sürekli hal hız hatasından **Ki** bulunur. Önce hız hata katsayısı elde edilecektir. $G_c(z)$, PID transfer fonksiyonu ve $G_p(z)$ kontrol edilen sistemin açık çevrik transfer fonksiyonu olmak üzere hız hatası,

$$K_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)G_c(z)G_p(z)$$ olarak yazılır.

$$K_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)\left(K_P + K_I\frac{z}{z-1} + K_D\frac{z-1}{z}\right)\frac{0.0762}{z-0.9048}$$

$$K_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}\left((z-1)K_P + K_I z + K_D\frac{(z-1)(z-1)}{z}\right)\frac{0.0762}{z-0.9048}$$

$$K_v = \frac{1}{T}K_I\frac{0.0762}{1-0.9048} = \frac{1}{0.05}K_I\frac{0.0762}{0.0952} = 16.0084K_I$$

$$e_{ss}(\infty)=\frac{1}{K_v}=\frac{1}{14.88} \Rightarrow \frac{1}{16.0084K_I}=\frac{1}{14.88} \Rightarrow 16.0084K_I=14.88 \Rightarrow$$

$K_i=0.9295$ İntegral katsayısı elde edilir. Aşağıda verilmiş olan K_d, K_p ve $G_p(z)$ ifadeleri ve hesap edilmiş olan K_i değeri kullanılarak oransal ve türevsel katsayı hesaplanır.

$$K_d=\frac{|z_1|}{\sin\beta}\left(\frac{K_i\sin\beta}{|z_1|-2\cos\beta+\frac{1}{|z_1|}}+\frac{\sin\psi}{|G_p(z_1)|}\right) \quad G_p(z)=\frac{\Omega(z)}{V(z)}=\frac{0.0762}{z-0.9048}$$ olarak bulunmuştu.

$$K_p=-\frac{\cos\psi}{|G_p(z_1)|}-2*K_i|z_1|\frac{|z_1|-\cos\beta}{|z_1|^2-2|z_1|\cos\beta+1}+\frac{-|z_1|\sin\psi+\cos\beta\sin\psi}{|G_p(z_1)|\sin\beta}$$ dir.

Sırası ile $|z_1|$, β ve $|G_p(z_1)|$, ψ hesaplanacaktır.

$|z_1|$, β **<u>için önce Sürekli zaman kontrol kutupları elde edilir.</u>**

%2 kriterine göre yerleşme zamanı, $t_s=\frac{4}{\xi w_n}=2.5 \Rightarrow w_n=\frac{4}{\xi t_s}=\frac{4}{0.707*2.5} \rightarrow w_n=2.2631$

$$s_{1,2}=-\zeta w_n\pm jw_n\sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow s_{1,2}=-0.707*2.2631\pm j2.2631\sqrt{1-0.707^2}$$

$$s_{1,2}=-0.707*2.2631\pm j2.2631\sqrt{1-0.707^2}$$

$s_{1,2}=-1.6\pm j1.6005$ sürekli-zaman kontrol-kutupları (Baskın-kutuplar)

$T=0.05\,sn$ **<u>için ayrık zaman kontrol kutuplar hesaplanır.</u>**

Örnekleme zamanı, $T=0.05\,sn$ için,

$$z=e^{sT} \Rightarrow z_{1,2}=e^{(-1.6\pm 1.6005j)0.05}=e^{-0.08}e^{j0.08}=0.9201\pm j0.0738$$

$z_{1,2}=0.9201\pm j0.0738$ ayrık-zaman baskın kutuplar (kontrol-kutuplar) elde edilir.

$z_1=0.9201+j0.0738 \Rightarrow z_1=\sqrt{0.9201^2+0.0738^2}\tan^{-1}(\frac{0.0738}{0.9201})$ dir.

$|z_1|=0.9231$ *ve* $\beta=0.08\ rad\ (4.58^\circ)$ olarak elde edilir.

$$G_p(z_1)=\frac{0.0762}{z_1-0.9048}=\frac{0.0762}{(0.9201+0.0738j)-0.9048}=\frac{0.0762}{(0.0153+0.0738j)}=\frac{0.0762(0.0153-0.0738j)}{0.00568}$$

$$G_p(z_1)=0.205257+j0.99 \quad G_p(z_1)=0.2060-j0.9897$$

$$G_p(z_1)=\left|G_p(z_1)\right|\angle\psi \;\rightarrow\; G_p(z_1)=\sqrt{0.2060^2+0.9897^2}\,\tan^{-1}\frac{0.2060}{-0.9897}$$

$\left|G_p(z_1)\right|=1.0101 \quad ve \quad \psi=-1.3664\ rad\ (-78.26^{\circ})$ olarak elde edilir.

Bulunan değerler, denklemlerde yerlerine koyulur ise,

$$K_d=\frac{0.9231}{\sin 0.08}\left(\frac{0.9295*\sin 0.08}{0.9231-2*\cos 0.08+\dfrac{1}{0.9231}}+\frac{\sin 1.3664}{1.0111}\right)=11.5532\left(\frac{0.0743}{0.0128}+0.9684\right)=78.2508$$

$$K_p=-\frac{\cos\psi}{\left|G_p(z_1)\right|}-2*K_I\left|z_1\right|\frac{\left|z_1\right|-\cos\beta}{\left|z_1\right|^2-2\left|z_1\right|\cos\beta+1}+\frac{-\left|z_1\right|\sin\psi+\cos\beta\sin\psi}{\left|G_p(z_1)\right|\sin\beta}$$

$$K_p=-\frac{\cos 1.3664}{1.0111}-2*0.9295*0.9231\frac{0.9231-\cos 0.08}{0.9231^2-2*0.9231*\cos 0.08+1}$$

$$+\frac{-0.9231*\sin 1.3664+\cos 0.08*\sin 1.3664}{1.0111*\sin 0.08}$$

$K_p=9.6091$

$K_i=0.93$ PID katsayıları olarak elde edilir.

$K_p=55.85$

ii- **Karaktereistlik denklem metodu**

$$F(z)=1+G_c(z)G_p(z)=0$$

$$G_c(z)=K_p+K_d\left(\frac{z-1}{z}\right)+K_I\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

Hesaplanmış olan değişkenler,

$K_I=0.93 \quad z_1=0.9201+j0.0738$ ve $G_p(z_1)=0.2060-j0.9897$ dir.

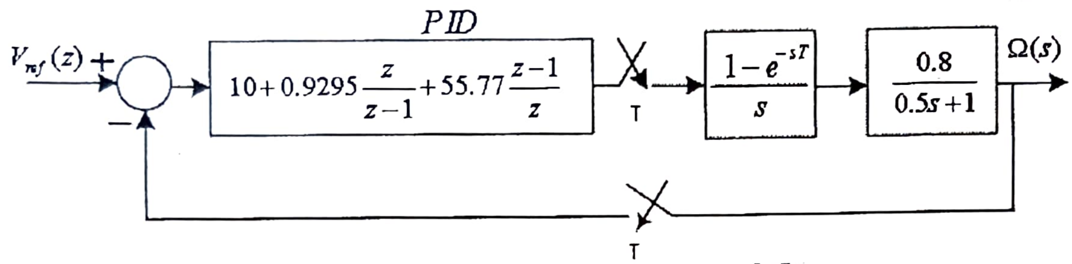
$1+\left\{K_p+K_d\left(\frac{z_1-1}{z_1}\right)+K_I\left(\frac{z}{z-1}\right)\right\}G_p(z_1)=0$, z_1 ve $G_p(z_1)$ yerine koyulur ise,

$$1+\left\{K_p+K_d\left(\frac{0.9201+j0.0738-1}{0.9201+j0.0738}\right)+K_I\left(\frac{0.9201+j0.0738}{0.9201+j0.0738-1}\right)\right\}(0.9201-j0.9897)=0$$

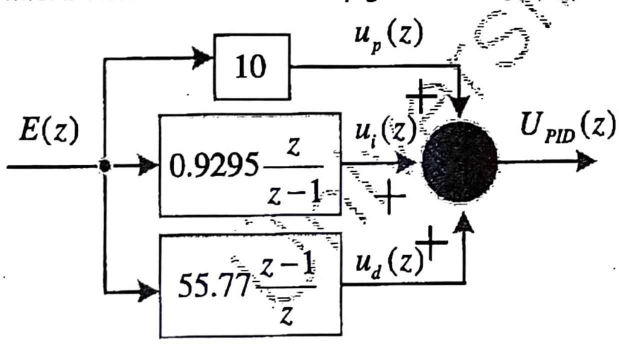
düzenlenir ise, ara işlemlerden sonra

$K_p = 10.0051$
$K_d = 55.7714$ elde edilir.
$K_i = 0.9295$

iii-Ayrık-zaman kapalı-çevrim kontrol blok diyagram aşağıda verilmiştir.



v- Paralel programlama yöntemi ile PID kontrolör sembolik dilde tasarımı:Aşağıda PID kontrol kuralına ait kontrol blok diyagramı verilmiştir.



PID kontrol kuralının sayısal işlemcide gerçekleştirilmesi amacı için paralel programlama yöntemi kullanılacaktır. Paralel programlamada her bir blok kendi içinde doğrudan programlama yöntemi ile programlanacaktır.

Up(z):<u>*Oransal Kontrol*</u> $u_p(z) = 10E(z)$

Ui(z):<u>*Integral kontrol*</u> $u_i(z) = \frac{0.9295z}{z-1}E(z)$

$$G_i(z) = \frac{u_i(z)}{E(z)} = \frac{0.9295z}{z-1}\frac{z^{-1}}{z^{-1}}\frac{x_i(z)}{x_i(z)} \rightarrow \frac{u_i(z)}{E(z)} = \frac{0.9295x_i(z)}{x_i(z)-z^{-1}x_i(z)}$$ pay ve payda ayrı ayrı

$E(z) = x_i(z) - z^{-1}x_i(z)$ ve **a)** $u_i(z) = 0.9295x_i(z)$ olarak yazılır.

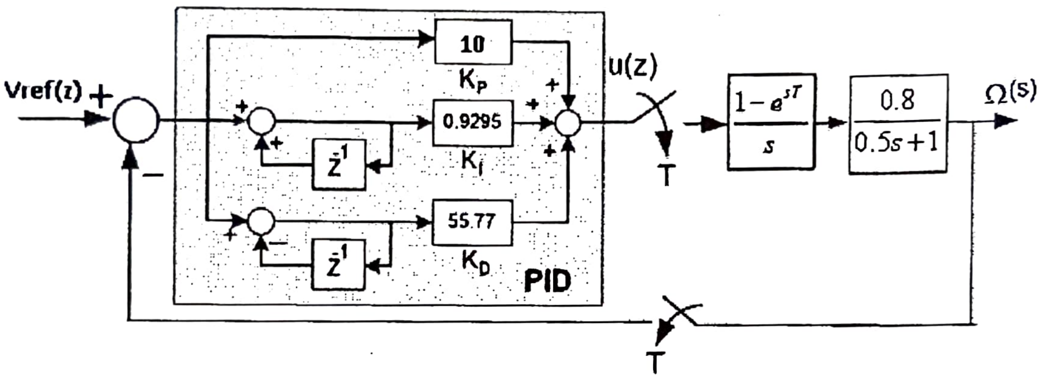
$\underbrace{E(z)}_{Bilinen} = \underbrace{x_i(z)}_{hesaplanacak} \underbrace{-z^{-1}x_i(z)}_{Bilinen}$ ise **b)** $x_i(z) = E(z) + z^{-1}x_i(z)$ a) ve b) integratör denklemleri yazılır.

Ud(z):Türevsel kontrol=> $u_d(z) = 55.77\frac{z-1}{z}E(z)$

$$G_d(z) = \frac{u_d(z)}{E(z)} = 55.77\frac{z-1}{z}\frac{z^{-1}}{z^{-1}}\frac{x_d(z)}{x_d(z)} \rightarrow \frac{u_d(z)}{E(z)} = 55.77\frac{x_d(z) - z^{-1}x_d(z)}{x_i(z)}$$ pay ve payda ayrı ayrı

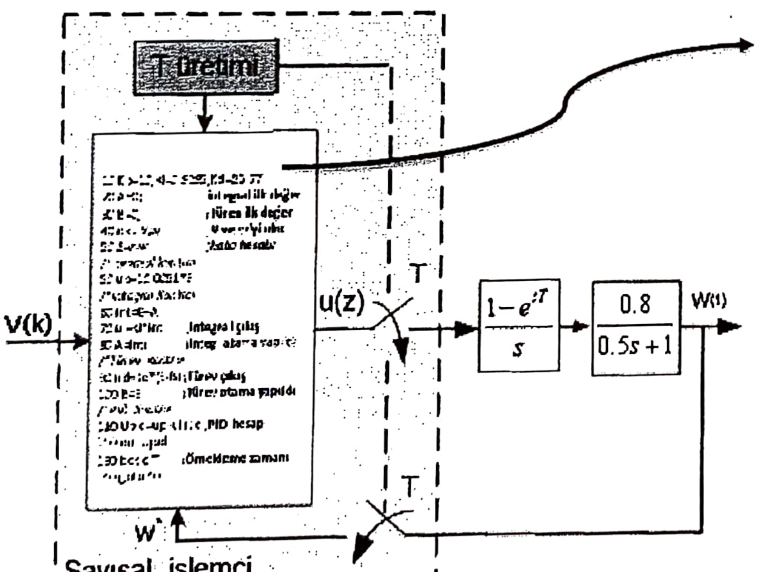
$E(z) = x_i(z)$ ve **c)** $u_d(z) = 55.77(x_d(z) - z^{-1}x_d(z))$ olarak yazılır.

$\underbrace{E(z)}_{Bilinen} = x_d(z) \rightarrow$ **d)** $x_d(z) = E(z)$ c) ve de Türev denklemleri yazılır.



Paralel programlama ile PID kontrol kurallı programlama diyagramı ile ayrık-zaman kapalı çevrim kontrol blok diyagram yukarıda ve simgesel dilde yazılımı ise aşağıda verilmiştir.

$z^{-1}x_i(z) = A$ ve $z^{-1}x_d(z) = B$ olsun. Türevci $u_d(z) = 55.77(E(z) - B)$ olur.



Simgesel Dilde Program

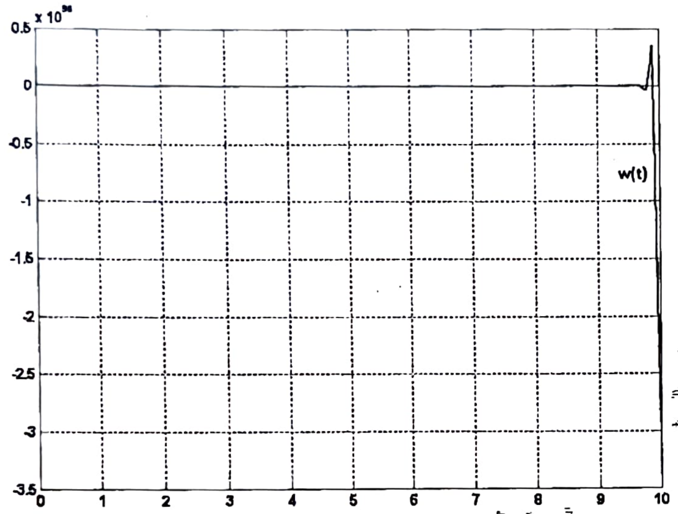
```
10 Kp=10;KI=0.9295;Kd=55.77
20 A=0;                ;integral ilk değer
30 B=0;                ;Türev ilk değer
40 oku V,w             ;V ve w'yi oku
50 E=r-w               ;hata hesabı
/* oransal kontrol
50 up=10.0051*E
/*Integral Kontrol
60 Int=E+A
70 ui=Ki*Int           ;integral çıkış
80 A=Int;              ;Integ. atama yapıldı
/*Türev Kontrol
90 ud=Kd*(E-B) ;Türev çıkış
100 B=E                ;Türev atama yapıldı
/*PID Kontrol
110 Upid=up+ui+ud ;PID hesap
120 out Upid
130 bekle T            ;Örnekleme zamanı
140 goto 40
```

PID li sistem Kararlılık analizi:

$$F(z)=1+G_c(z)G_p(z)=1+\left\{10+0.9295\frac{z}{z-1}+55.77\frac{z-1}{z}\right\}\frac{0.0762}{z-0.9048}=0$$

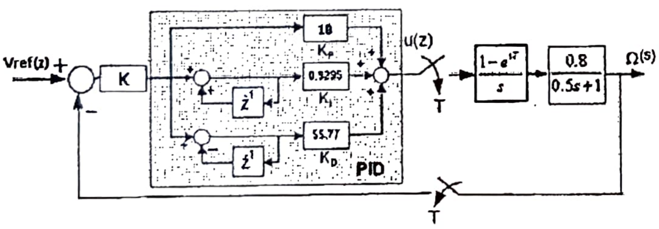
$$F(z)=z^3+3.178z^2-8.357z+4.25=0$$ kökler hesap edilir ise,

$z_{1,2}=0.9179\pm j0.071$ $z_3=-5.0136$ birim çemberin dışındadır. PID ile kontrol edilen kapalı çevrim sistem karasızdır. Cevap eğrisi aşağıda verilmiştir.



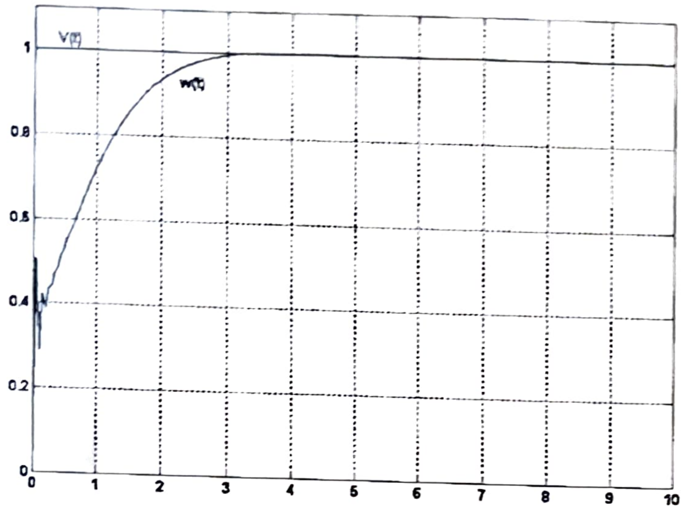
da ,

Tasarım-1: İnce ayar ve sistemin Kararlılaştırılması ileri yola **K** eklenir ve kazanç ayarı yapılabilir.



$$F(z)=1+KG_c(z)G_p(z)=1+K\frac{5.083z^2-9.261z+4.25}{z^3-1.905z^2+0.9048z}=0$$

$F(z)=z^3+(K5.083-1.905)z^2+(0.9048-K9.261)z+K4.25=0$ kararlılık analizi ile $K_{sınır}$ bulunur. $0<K<K_{sınır}$ arasında seçilerek istenen performans elde edilenceye kadar tasarım aşamalrı tekrar edilir.



Örnek olarak ince yara sonrası cevap b) K=0.1 için verilmiştir.

Tasarım-2: İsterlerden elde edilen ξ, w_n için doğrudan hız hatası $e_{ss} = \dfrac{2\xi}{w_n}$ elde edilir. Bu hız hatasından K_i hesaplanır. Parametrik denklemler kullanılarak K_p ve K_d tekrar elde edilir.

Not: Problem verilir iken hız hatası $e_{ss} = 0.0672$ tahmini olarak verilmiştir. Bunun yerine basamak giriş için belirlenmiş olan isterlerden elde edilen ξ, w_n karılık gelen hız hatası kullanılabilir.

$$e_{ss} = \frac{2\xi}{w_n} = \frac{2*2.2631}{w_n} \rightarrow e_{ss} = 0.6248 \quad e_{ss} = \frac{1}{K_v} \rightarrow K_v = \frac{1}{e_{ss}} = \frac{1}{0.6248} \quad \rightarrow K_v = 1.6005$$

$$K_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)G_c(z)G_p(z) \qquad K_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)\left\{K_p + K_i\frac{z}{z-1} + K_p\frac{z-1}{z}\right\}\frac{0.0762}{z-0.9048}$$

olarak yazılır. $K_v = \dfrac{1}{T}\left\{(1-1)K_p + K_i\cancel{(z-1)}\dfrac{z}{\cancel{z-1}} + K_p(1-1)\dfrac{1-1}{1}\right\}\dfrac{0.0762}{1-0.9048}$

$$K_v = \frac{1}{0.05}K_i 0.8004 \quad \rightarrow \quad 1.6005 = \frac{1}{0.05}K_i 0.8004 \rightarrow K_i = 0.1$$

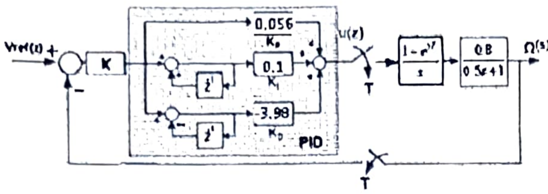
$|G_p(z_1)| = 1.0101 \quad ve \quad \psi = -1.3664\ rad\ (-78.26^\circ)$

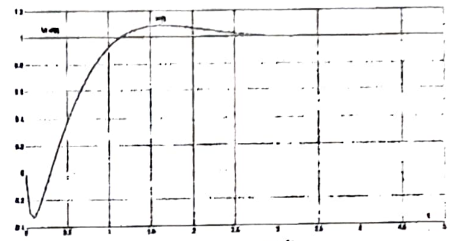
$|z_1| = 0.9231 \quad ve \quad \beta = 0.08\ rad\ (4.58^\circ)$, $e_{ss} = \dfrac{2\xi}{w_n} \rightarrow e_{ss} = 0.6248$ ve $K_i = 0.1$ değerleri

kullanılarak parametrik denklemler ile K_p, K_d tekrar hesaplanır ise,

$K_p = 0.0566$

$K_d = -3.9814$





Tasarım-3: Tasarım-2 de elde eilen performans yeterli görülmemiş ise $e_{ss} = k\dfrac{2\xi}{w_n}$ düşünülerek çeşitli k değerleri için çözüm yapılır ve istenen performans elde edildiğinde tasarım sonlandırılır. $k = 0.68$ için tsarım aşağıda tekrar edilmiştir.

$$e_{ss} = k\frac{2\xi}{w_n} = 0.68\frac{2*2.2631}{w_n} \rightarrow e_{ss} = 0.4249 \quad e_{ss} = \frac{1}{K_v} \rightarrow K_v = \frac{1}{e_{ss}} = \frac{1}{0.4249}$$

$$\rightarrow K_v = 2.3537$$

$$K_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)G_c(z)G_p(z) \qquad K_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)\left\{K_p + K_i\frac{z}{z-1} + K_p\frac{z-1}{z}\right\}\frac{0.0762}{z-0.9048}$$

olarak yazılır. $$K_v = \frac{1}{T}\left\{(1-1)K_p + K_i\cancel{(z-1)}\frac{z}{\cancel{z-1}} + K_p(1-1)\frac{1-1}{1}\right\}\frac{0.0762}{1-0.9048}$$

$$K_v = \frac{1}{0.05}K_i 0.8004 \rightarrow \qquad 2.3537 = \frac{1}{0.05}K_i 0.8004 \rightarrow K_i = 0.1731$$

$|G_p(z_1)| = 1.0101$ *ve* $\psi = -1.3664\ rad\ (-78.26^\circ)$

$|z_1| = 0.9231$ *ve* $\beta = 0.08\ rad\ (4.58^\circ)$, $e_{ss} = 0.4249$ ve $K_i = 0.1731$ değerleri kullanılarak

$K_{p,}\ K_d$ tekrar hesaplanır ise,

$K_p = 0.7039$

$K_d = -0.6913$

$$T(z)_{PID} = \frac{\Omega(z)}{V_{ref}(z)} = \frac{G_c(z)G_s(z)}{1+G_c(z)G_s(z)} = 0.01203\frac{z^2+3.6541z-3.722}{\left(z^2-1.84z+0.8521\right)(z-0.0525)}$$

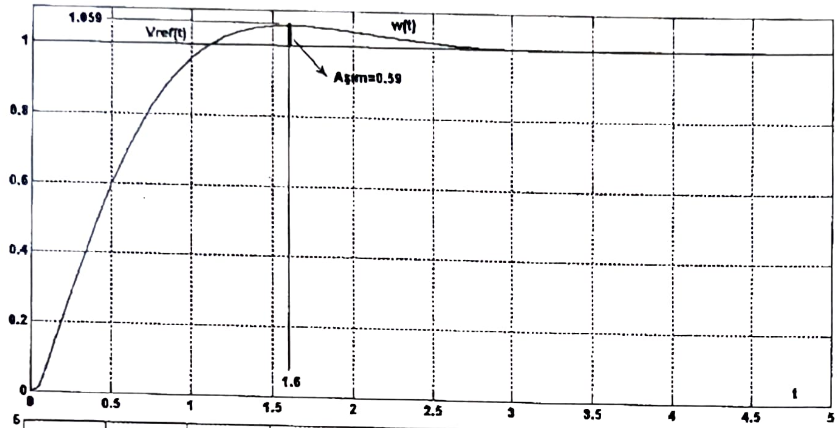
$$T(z)_{PID} = \frac{\Omega(z)}{V_{ref}(z)} = 0.01203\frac{(z+4.484)(z-0.722)}{(z-0.9201+0.0738j)(z-0.9201-0.0738j)(z-0.0525)}$$

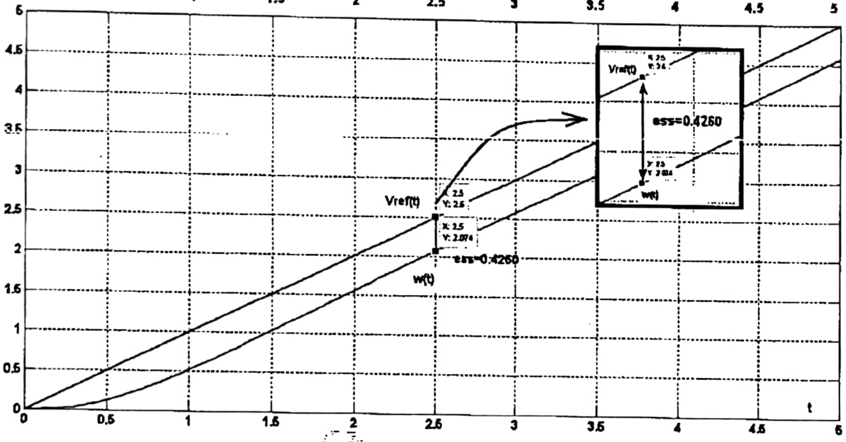
$$T(z)_{PID} = 0.01203\frac{z^2+3.6541z-3.722}{\left(z^2-1.84z+0.8521\right)(z-0.0525)}$$

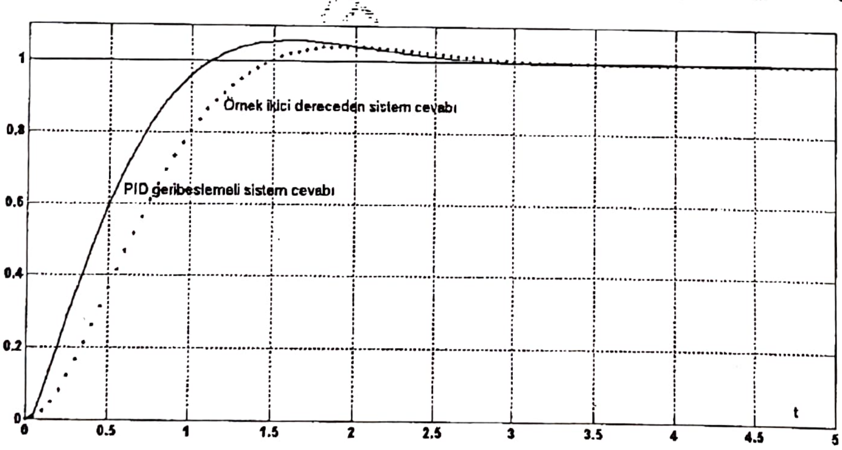
$$T(s)_{istenen} = \frac{\Omega(s)}{V_{ref}(s)} = \frac{5.1215}{s^2+3.2s+5.1215} \rightarrow T(z)_{istenen} = Z\{T(s)_{istenen}\} \quad T(z)_{istenen} = \frac{0.01181z}{z^2-1.84z+0.8521}$$

İsterlere karşılık gelen (örnek sistem) ayrık zaman transfer fonksiyonu; $T(z)_{İstenen} = \dfrac{0.01181z}{z^2 - 1.84z + 0.8521}$

PID Kontrollü kapalı çevrim Transfer fonksiyonu; $T(z)_{PID} = 0.01203\dfrac{z^2 + 3.6541z - 3.722}{\left(z^2 - 1.84z + 0.8521\right)(z - 0.0525)}$



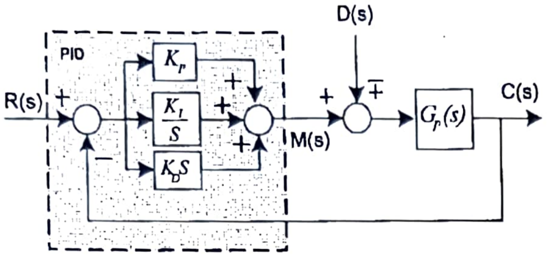




MODİFİYE EDİLMİŞ PID KONTROLÖR

Bu bölümde *standart (Klasik) PID kontrol kural* mimarisi ile *Modifiye edilmiş PID Kontrol kural* mimarisi incelenecek ve kapalı çevrim transfer fonksiyonları ayrı ayrı elde edilecektir.

i- **Klasik PID kontrol kuralı** ile kontrol edilen sisteme ait kapalı çevrim transfer fonksiyonu,



cevabı hızlandırır, fakat aşımı arttırır.

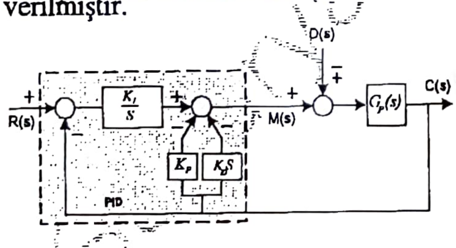
D(s)=0 için $\dfrac{C(s)}{R(s)}$ ifadesi gerekli ara işlemlerden sonra,

$$T(s)=\frac{\omega_n^2\,[\text{Polinom yok}]}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$ 'ye benzemesi isteniyor.

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K_I G_P(s)\left[\dfrac{K_D}{K_I}s^2+\dfrac{K_P}{K_I}s+1\right]}{s+(K_D s^2+K_P s+K_I)G_P(s)}$$

olarak elde edilir. Transfer fonksiyonuna dikkat edilir ise, PID kontrol kuralından dolayı **PAY** kısmında 2.dereceden bir polinomun ***(iki adet sıfır)*** geldiği görülmektedir. Bu sıfırların etkilerinden dolayı, basamak girişe karşılık sistem cevabını ayarlamak zor olabilir. Bu sıfırlar sistem cevap çıkışında erken bir tepe değere veya aşımın artmasına neden olurlar. Bu aşım değeri kayda değer olabilir ve sıfırlar orijine yaklaştıkça bu aşım artar. ***Klasik PID kontrolör mimamirisinden dolayı Kapalı Çevrim Transfer Fonksiyonun (KÇTF) pay kısmında gelmekte olan 2. derece polinomdan Modifiye PID mimarisi kullanarak kurtulunabilinir.***

ii- Modifiye edilmiş PID ile kontrol edilen sisteme ait kapalı çevrim sistem aşağıda verilmiştir.



D(s)=0 için $\dfrac{C(s)}{R(s)}$ elde edilir.

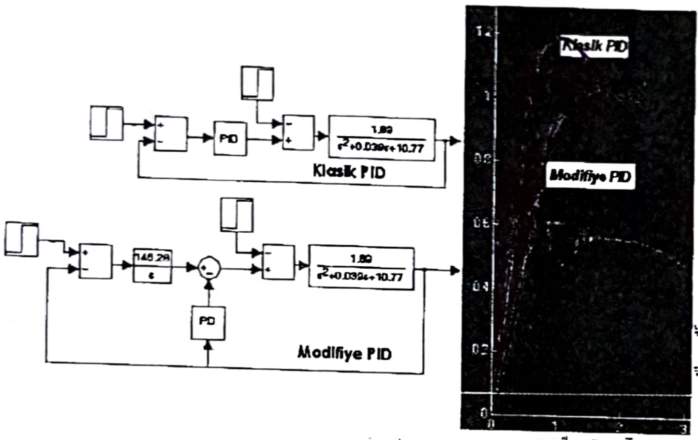
$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K_I G_P(s)}{\left[s^2K_D+sK_P+K_I\right]G_P+s}$$

Kapalı çevrim Transfer fonksiyonu aşağıda verilen ara işlemlerden sonra elde edilmiştir. Modifiye edilmiş PID mimarisinde, Klasik PID kontrolörde olduğu gibi **"I"**, *integratörü* ileri yoldadır. Ancak, oransal kontrolör**"P"** ve türevsel kontrolör **"D"**, geri-besleme yolu üzerindedir. Her iki mimariye ait kapalı çevrim KÇTF karşılaştırma amacı ile aşağıda verilmiştir. Dikkat edilir ise her iki KÇTF nunda karakteristik denklemlerin aynı olduğu görülür.

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K_I G_P(s)\left[\frac{K_D}{K_I}s^2+\frac{K_P}{K_I}s+1\right]}{s+(K_D s^2+K_P s+K_I)G_P(s)} \qquad \frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K_I G_P(s)}{s+\left[K_D s^2+K_P s+K_I\right]G_P}$$

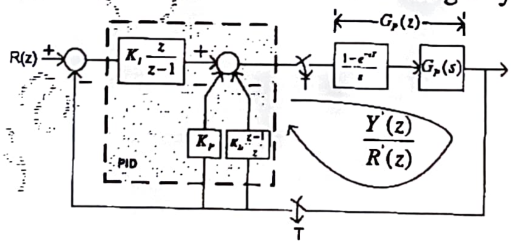
Klasik PID ile KÇTF Modifiye PID ile KÇTF

Örnek: Sarkaç probleminde elde edilmiş olan PID katsayılarına karşılık cevaplar karşılaştırma amacı ile aşağıda verilmiştir. $K_P=67.0476$, $K_I=146.2857$, $K_D=15.2175$



AYRIK-ZAMAN MODİFİYE EDİLMİŞ PID KONTROLÖR

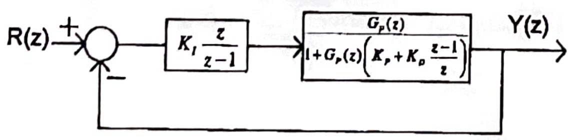
Aşağıda verilen kapalı-çevrim kontrol sisteminde görüldüğü gibi, Ayrık-zaman PID kontrolörün integral kısmı ileri yolda, oransal ve türev kısmı ise geri-yol üzerindedir.



$\frac{Y(z)}{R(z)}$ yine kapalı çevrim transfer fonksiyonunun elde edilmesine dair işlem basamakları aşağıda verilmiştir.

1) $$\frac{Y'(z)}{R'(z)}=\frac{G_P(z)}{1+G_P(z)\left(K_P+K_D\frac{z-1}{z}\right)}$$ iç çevrimin transfer fonksiyonudur.

Sadeleştirilmiş kontrol bloğu,



Elde edilir. $\frac{Y(z)}{R(z)}$ elde etmek amacı ile indirgenmiş blok aşağıda verildiği gibi düzenlenirse,

$$\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{\dfrac{G_P(z)\left(K_I\dfrac{z}{z-1}\right)}{\left(1+G_P(z)\left[K_P+K_D\dfrac{z}{z-1}\right]\right)}}{1+\dfrac{G_P(z)\left(K_I\dfrac{z-1}{z}\right)}{1+G_P(z)\left(K_P+K_D\dfrac{z-1}{z}\right)}}$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G_P(z)\left(K_I\dfrac{z}{z-1}\right)}{1+G_P(z)\left(K_P+K_D\dfrac{z-1}{z}+K_I\dfrac{z}{z-1}\right)}\Rightarrow \text{pay ve payda } \frac{z-1}{z} \text{ ile çarpılırsa;}$$

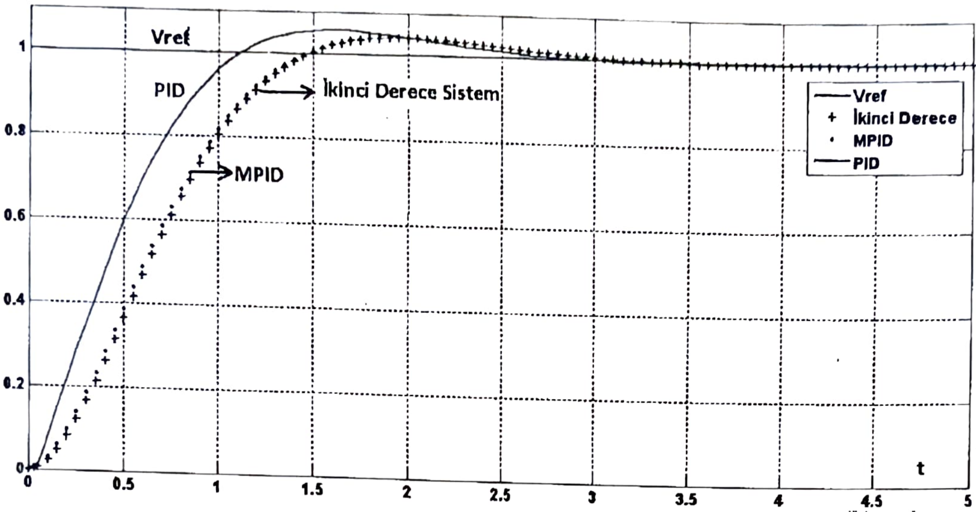
$$\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G_P(z)K_I}{\left(\dfrac{z-1}{z}\right)+G_P(z)\left(\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^2K_D+\dfrac{z-1}{z}K_P+K_I\right)}$$

Modife edilmiş PID kontrol kuralı ile denetlenen sisteme ait kapalı-çevrim transfer fonksiyonu elde edilir. Klasik ve modifiye edilmiş PID kontrollü her iki sistem karşılaştırılır ise, Karakteristik denklemlerinin aynı olduğu görülmektedir.

$$F(z)=\left(\frac{z-1}{z}\right)+G_P(z)\left(\left(\frac{z-1}{z}\right)^2K_D+\frac{z-1}{z}K_P+K_I\right)=0$$

Sürekli-zaman PID kontrolörde ifade edildiği gibi, Klasik PID' li kontrollü sistemde kapalı-çevrim transfer fonksiyonun pay kısmında klasik PID konfigürasyonundan dolayı iki adet sıfır gelmektedir. Buda kapalı-çevrim kontrol sistem cevabında aşımın artmasına sebep olmaktadır.

Yukarıda çözülen örnek için, modifiye PID cevap analizi aşağıda verilmiştir.



$$T(z)_{Modifiye}=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G_p(z)\,K_i\,\dfrac{z}{z-1}}{1+G_p(z)G_{PID}(z)}=\frac{\dfrac{0.01121z}{z^2-1.905z+0.9048}}{\dfrac{z^3-1.893z^2+0.9488z-0.04478}{z\left(z^2-1.905z^1+0.9048\right)}}$$

$$T(z)_{Modifiye}=\frac{0.01121z}{z^2-1.905z+0.9048}\;\frac{z\left(z^2-1.905z^1+0.9048\right)}{z^3-1.893z^2+0.9488z-0.04478}$$

$$T(z)_{Modifiye}=\frac{0.01121z^2}{\left(z^2-1.84z+0.8521\right)(z-0.0525)}$$

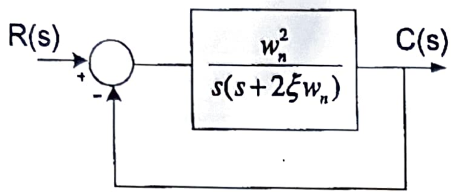
$$T(z)_{PID}=\frac{\Omega(z)}{V_{ref}(z)}=\frac{G_c(z)G_s(z)}{1+G_c(z)G_s(z)}=0.01203\,\frac{z^2+3.6541z-3.722}{\left(z^2-1.84z+0.8521\right)(z-0.0525)}$$

$$T(z)_{istenen}=\frac{0.01181z}{z^2-1.84z+0.8521}$$

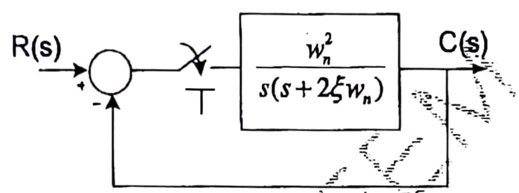
HATIRLATMA.

Ayrık-Zaman II. Dereceden Örnek Sistem

Otomatik kontrol sistem cevabı geçici rejim kriterleri, birim basamak giriş için ve II. dereceden örnek sistem için verilmiştir. Doğal açısal frekans w_n ve sönüm oranı ξ ye bağlı II. Dereceden örnek sistem transfer fonksiyonu $T(s)$'in T örnekleme zamanına göre ayrık-zaman ifadesi <u>**sıfırıncı mertebeden tutucusuz**</u> olarak elde edilişi $0<\xi<1$ aralığı için aşağıda verilmiştir.



II. dereceden sistem.



Örneklenmiş II. dereceden sistem.

Örneklenmiş II. dereceden sistem rezidü teoremi ile T örnekleme zamanı için ayrıklaştırılacaktır.

$s^2+2\xi w_n s+w_n{}^2=0$ karakteristik denklem kökleri $0<\xi<1$ için $s_{1,2}=-\xi w_n \pm jw_n\sqrt{1-\xi^2})$ olduğu göz önünde bulundurulur ise,

$$T(s)=\frac{w_n{}^2}{s^2+2\xi w_n s+w_n{}^2}=\frac{w_n{}^2}{(s+\xi w_n+jw_n\sqrt{1-\xi^2})(s+\xi w_n-jw_n\sqrt{1-\xi^2})}$$ yazılır. Rezidü teoremi kullanılır ise,

$$Z\{T(s)\}=T(z)=\frac{\cancel{(s+\xi w_n+jw_n\sqrt{1-\xi^2})}\,w_n{}^2}{\cancel{(s+\xi w_n+jw_n\sqrt{1-\xi^2})}(s+\xi w_n-jw_n\sqrt{1-\xi^2})}\frac{z}{z-e^{sT}}\Bigg|_{s=-\xi w_n-jw_n\sqrt{1-\xi^2}}+$$

$$\frac{\cancel{(s+\xi w_n-jw_n\sqrt{1-\xi^2})}\,w_n{}^2}{(s+\xi w_n+jw_n\sqrt{1-\xi^2})\cancel{(s+\xi w_n-jw_n\sqrt{1-\xi^2})}}\frac{z}{z-e^{sT}}\Bigg|_{s=-\xi w_n-jw_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$T(z)=\frac{w_n{}^2}{(-\cancel{\xi w_n}-jw_n\sqrt{1-\xi^2}-jw_n\sqrt{1-\xi^2}+\cancel{\xi w_n})}\cdot\frac{z}{z-e^{-\xi w_n T-jw_n T\sqrt{1-\xi^2}}}+$$

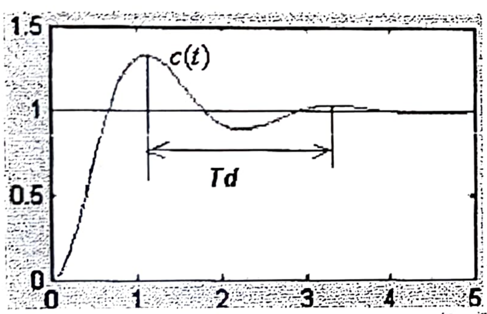
$$\frac{w_n{}^2}{(-\xi w_n+jw_n\sqrt{1-\xi^2}+\xi w_n+jw_n\sqrt{1-\xi^2})}\cdot\frac{z}{z-e^{-\xi w_n T+jw_n T\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$T(z)=\frac{w_n}{\sqrt{1-\xi^2}\cdot 2j}\cdot\left[\frac{z}{z-e^{-\xi w_n T+jw_n T\sqrt{1-\xi^2}}}-\frac{z}{z-e^{-\xi w_n T-jw_n T\sqrt{1-\xi^2}}}\right]$$

$$T(z)=\frac{w_n}{2j\cdot\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\left[\frac{\cancel{z^2}-ze^{-\xi w_n T-jw_n T\sqrt{1-\xi^2}}-\cancel{z^2}+ze^{-\xi w_n T+jw_n T\sqrt{1-\xi^2}}}{z^2-z(e^{-\xi w_n T+jw_n T\sqrt{1-\xi^2}}+e^{-\xi w_n T-jw_n T\sqrt{1-\xi^2}}+e^{-2\xi w_n T}}\right]$$

$$T(z)=\frac{w_n e^{-\xi w_n T}}{\sqrt{1-\xi^2}\cdot 2j}\cdot\frac{e^{jw_d T}-e^{jw_d T}}{z^2-ze^{-\xi w_n T}(e^{jw_d T}+e^{-jw_d T})+e^{-2\xi w_n T}}$$ Olarak elde edilir.

$w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2}$ sönüm osilasyon açısal frekansı ve periyot olarak, $T_d=\dfrac{2\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}}$ olmak üzere



Osilasyon sönüm periyodu.

$$T(z)=\frac{w_n e^{-\xi w_n T}}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{z\sin w_d T}{z^2-2ze^{-\xi w_n T}\cos w_d T+e^{-2\xi w_n T}}$$

$$\boxed{T(z)=\frac{w_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\frac{ze^{-\xi w_n T}\sin(w_n\sqrt{1-\xi^2}T)}{z^2-2ze^{-\xi w_n T}\cos(w_n\sqrt{1-\xi^2}T)+e^{-2\xi w_n T}}}$$ ayrık-zaman örnek II. Dereceden sistem elde edilir. Bu transfer fonksiyonunu daha sadeleştirilir ise,

$c=\dfrac{w_n e^{-\xi w_n T}\sin(w_n\sqrt{1-\xi^2}T)}{\sqrt{1-\xi^2}}$ $d=2e^{-\xi w_n T}\cos(w_n\sqrt{1-\xi^2}T)$ ve $e=e^{-2\xi w_n T}$ olarak

tanımlanır , $T(z)=\dfrac{cz}{z^2-dz+e}$ olarak elde edilir.

Elde edilen ayrık-zaman II. Dereceden örnek sistem sürekli-zaman örnek II. dereceden sistem ile aynı kazanca sahip olabilmesi için birim basamak girişe karşılık son değerin "1" e gitmesi gerekir. Bunun için son değer teoremi uygulanır ve tanımlanan "K" kazancı elde edilmiş olur.

$T(z) = \dfrac{C(z)}{R(z)} = K\dfrac{cz}{z^2 - dz + e}$ olduğuna göre ve birim basamak giriş $R(z) = \dfrac{z}{z-1}$ için çıkış genliği $c(\infty) = \lim_{t\to\infty} c(t) = 1$ olmalıdır. Son değer teoreminden,

$$c(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\frac{z}{z-1}K}{z^2 - dz + e} = 1 \Rightarrow$$

$K = \dfrac{1-d+e}{c}$ Olarak elde edilir. II.Dereceden sürekli-zaman örnek sisteme karşılık gelen ayrık-zaman II. dereceden örnek sistem, T örnekleme zamanı olmak üzere,

$$\boxed{T(z) = \left(\frac{1-d+e}{c}\right)\frac{cz}{z^2 - dz + e} \quad \text{elde edilir.}}$$

Örnek: $\begin{matrix} \xi = 0.707 \\ wn = 2.82 \end{matrix}$ İçin örnek II. Dereceden sürekli-zaman ve ayrık-zaman transfer fonksiyonlarını elde ediniz. Örnekleme zamanı T 'yi seçiniz.

Osilasyon açısal frekansı $w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2} = \dfrac{2\pi}{T_d} \Rightarrow$ buradan osilasyon periyodu,

$T_d = \dfrac{2\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}}$ dir. Örnekleme zamanı ise yaklaşık olarak, $T = (0.1 \sim 0.05)T_d$ arasında seçilebilir.

$$wd = 1.9943 = \frac{2\pi}{Td} \Rightarrow$$

$Td = 3.1506sn$ örnekleme zamanı

$$T = 0.02 * 3.1506 \Rightarrow$$

$\boxed{T = 0.063sn}$ olarak hesaplanır.

Sürekli-zaman II. Dereceden örnek sistem transfer fonksiyonu, $wn = 2.82$ ve $\xi = 0.707$ için,

$T(s) = \dfrac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n + w_n^2}$ Olmak üzere,

$T(s)=\dfrac{7.9524s}{s^2+3.9875s+7.9524}$ Olarak elde edilir. $T=0.063sn$, $wn=2.82$ ve $\xi=0.707$ için,

$c=\dfrac{w_n e^{-\xi wnT}\sin(w_n\sqrt{1-\xi^2}T)}{\sqrt{1-\xi^2}}$ $=0.4408$ $d=2e^{-\xi wnT}\cos(w_n\sqrt{1-\xi^2}T)=1.75$

$e=e^{-2\xi w_n T}=0.7778$ Ve son değer teoreminden kazanç hesaplanır ise,

$$c(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\frac{z}{z-1}K}{z^2-1.75z+0.7778}=1$$

ise $K=0.0632$ elde edilir.

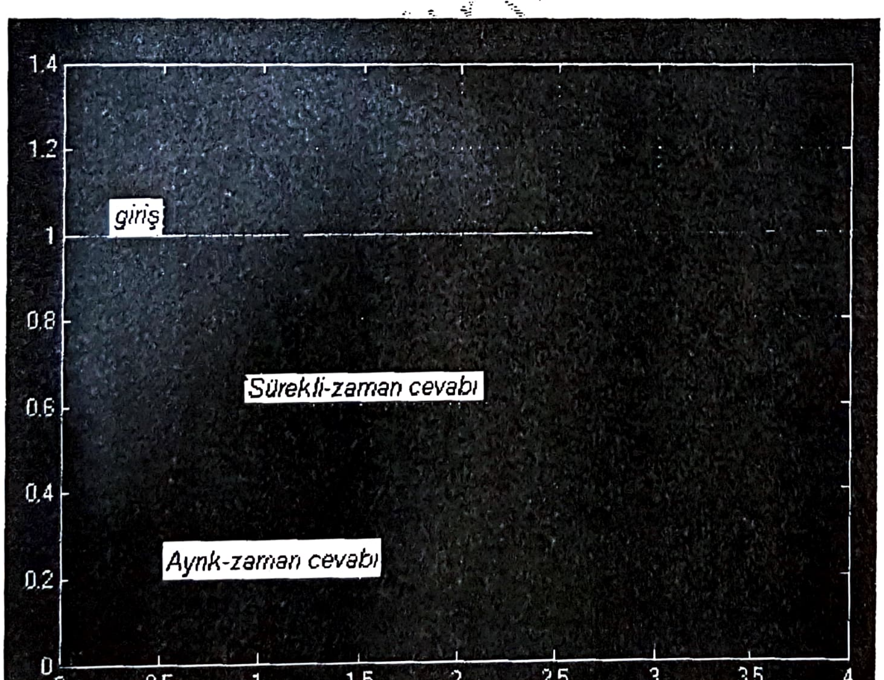
Veya $K=(\dfrac{1-d+e}{c})$ den aynı sonuç elde edilebilir.

$$T(z)=0.0632\frac{0.4408z}{z^2-1.75z+0.7778}$$

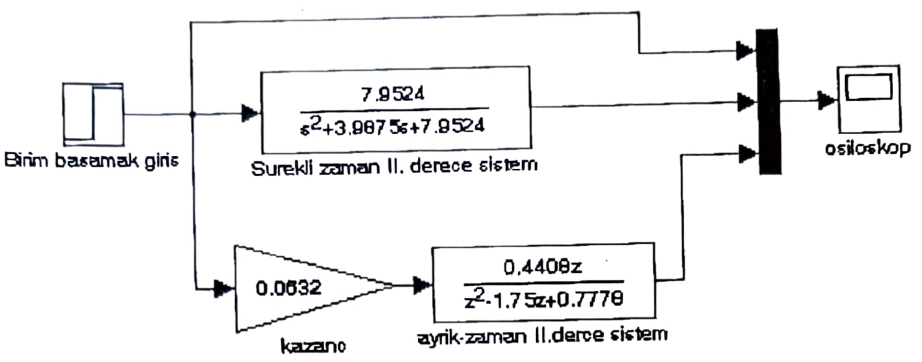
ise Ayrık-zaman II. Dereceden örnek sistem transfer fonksiyonu

$T(z)=\dfrac{0.02785z}{z^2-1.75z+0.7778}$ $T(s)=\dfrac{7.9524s}{s^2+3.9875s+7.9524}$ olarak elde edilir.

II. dereceden örnek sistem birim basamak-giriş ve $T=0.063sn$, $wn=2.82$ ve $\xi=0.707$ değerleri ve birim basamak giriş için, sürekli-zaman ve ayrık-zaman cevap çıkışları aşağıda verilmiştir.

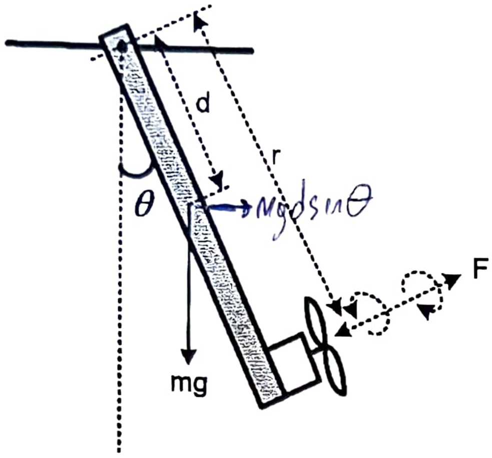


Birim basamak giriş için Ayrık zaman ve sürekli zaman cevapları, T=0.0632 sn.

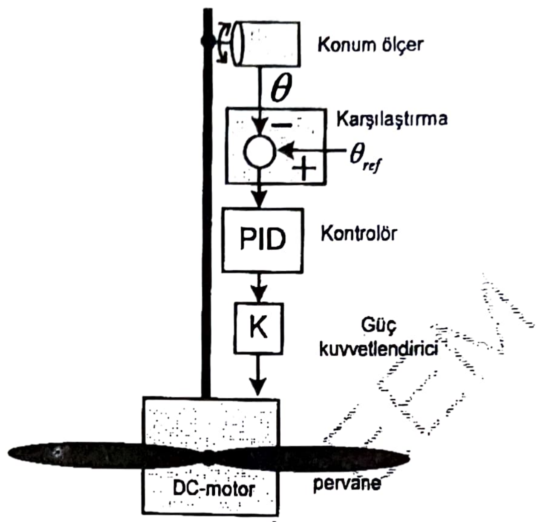


II. dereceden sürekli ve ayrık-zaman Matlab blok diyagramı

Örnek:



a) Sarkaç sistemi



b) Basitleştirilmiş sarkaç kontrol gösterimi.

Şekil a) da verilen sistemde, DC motor ile tahrik edilen sarkaç sisteminde çıkış θ açısı, istenen θ_{ref} konumunda tutulmaya çalışılmaktadır. Sisteme ait dinamik denklemleri yazınız.

$d\,[m]\; m\,[kg]\; J\,[kg.m^2]$ *Atalet Momenti* $C\left[\frac{Nms}{rad}\right]$ *Viskoz Sönüm Katsayısı* olmak üzere,

a) Sistemi $\theta = 0$ denge noktasında lineerleştirin.

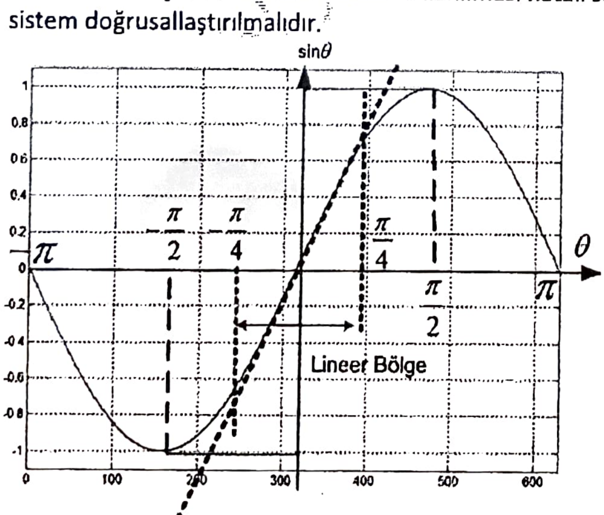
b)%2 kriterine göre yerleşme zamanı ***ts=1.67sn, ς=0.707*** olması istenmektedir. PID kontrolör katsayılarını bulunuz.

sarkaç hareket denklemi;

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + C\frac{d\theta}{dt} + mgd\sin\theta = T$$

$T = J\cdot\frac{dw}{dt} + Cw + mgd\sin\theta$

Lineerleştirilmiş model; $\theta = 0$ civarında $\sin\theta \approx \theta$ olduğu aşağıda verilmiş olan $f(\theta) = \sin\theta$ eğrisinden görülebilir. Şekilden, $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ aralığı için $\sin\theta \approx \theta$ yaklaşıklığı doğru sonuç verir, ancak aralık dışında bu lineer model kullanılması hatalı sonuçlar verir. Yeni çalışılacak nokta etrafında sistem doğrusallaştırılmalıdır.



$K_m V = J\frac{d^2\theta}{dt^2} + C\frac{d\theta}{dt} + mgd\sin\theta$

$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

$\sin\theta \approx \theta$ alınarak sarkaç hareket denklemi yeniden,

$K_m V(s) = \left[Js^2 + Cs + mgd\right]\theta(s)$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{J}\frac{d\theta}{dt} + \frac{mg}{J}d\theta = \frac{K_m}{J}V$$ olarak yazılabilir.

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{\frac{K_m}{J}}{s^2 + \frac{C}{J}s + \frac{mgd}{J}}$$

$K_m\left[\frac{N_m}{volt}\right] V\,[volt]$

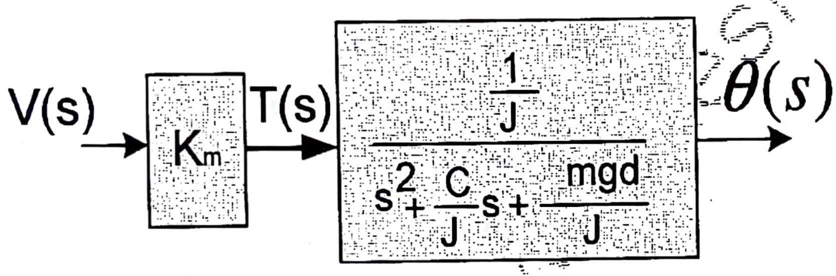
bilindiğine göre,

$\boxed{T = K_m.V} \rightarrow MotorMomenti$ olmak üzere,

$$\theta(s)\left[s^2 + \frac{C}{J}s + \frac{mg}{J}d\right] = \frac{T(s)}{J} \Rightarrow$$

i) $$\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{\frac{1}{J}}{s^2 + \frac{C}{J}s + \frac{mg}{J}d}$$

ii) $T(s) = K_m.V(s)$ elde edilir. Sarkaç sistem modeline ait blok diyagram aşağıda verilmiştir.



Sayısal değerler yerlerine koyulur ise transfer fonksiyonu,

$K_m = 0.017 N_m / V$

$d = 0.023m$

$J = 0.009kgm^2$ $$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{1.89}{s^2 + 0.039s + 10.77}$$ elde edilir. $s^2 + 0.039s + 10.77 = 0$, $s_{1,2} = -0.0019 \pm j3.28$

$m = 0.43kg$

$C = 0.00035 N_{ms} / rad$

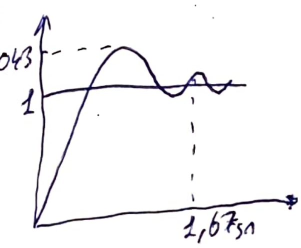
Tasarım: %2 kriterine göre yerleşme zamanı **ts=1.67sn** **ξ=0.707** olması istenmektedir. Bu kriterleri sağlayacak olan kapalı-çevrim kutupları (kontrol kutupları) aşağıda elde edilmiştir.

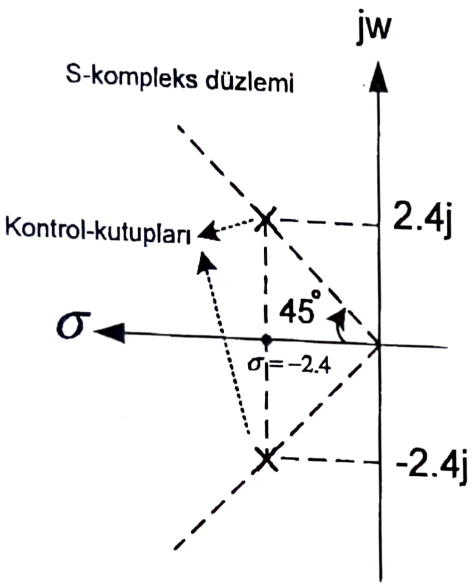
isteler
%2: $t_s = 1{,}67sn$
$\xi = 0{,}707$
Aşım = %4,3

$$t_s = \frac{4}{\xi w_n} \Rightarrow 1.67 = \frac{4}{0.707 w_n} \Rightarrow w_n = \frac{4}{1.67 * 0.707} \Rightarrow w_n = 3.3878\frac{rad}{sn}$$

$\xi = 0.707$ ise $\theta = \cos^{-1}\xi = \cos^{-1}(0.707)$ ise, $\theta = 45^\circ$ dir. Kontrol kutuplarının s-kompleks düzleminde gösterimi aşağıda verilmiştir.

$$T(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} = \frac{3{,}38^2}{s^2 + 2.0{,}707.3{,}385 + 3{,}38^2} = \frac{11{,}52}{s^2 + 4{,}8s + 11{,}52}$$





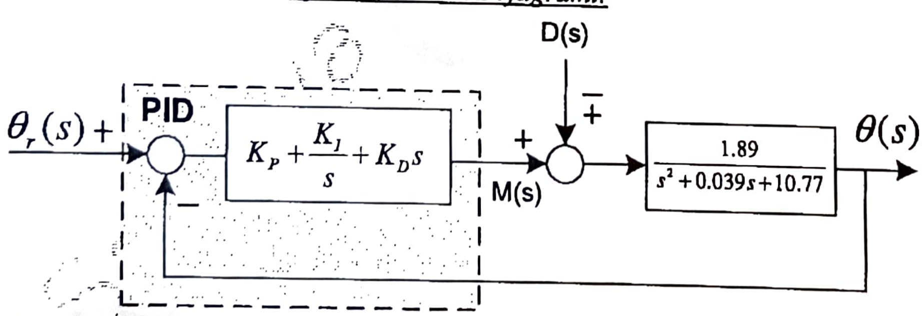
İstenen geçici rejim kriterlerini sağlayan karakteristik denklem, ξ ve w_n için

$$F(s) = s^2 + 2\xi w_n s + w_n^{\ 2} = s^2 + 2*0.707*3.3878s + 3.3878^2 = 0$$

$F(s) = s^2 + 4.8s + 11.52 = 0$ $\quad s^2 + 4.8s + 11.52 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -2.4 \mp j2.4$ olarak elde edilir.

Yada kompleks kontrol kutupları $s_{1,2} = -\xi w_n \pm j w_n\sqrt{1-\xi^2}$ ifadesi ile doğrudan hesap edilebilir.

__Klasik PID kontrol kural İçin Genel Blok Diyagramı:__



D(s)=0 için, sarkaç sistemine ait kapalı-çevrim kontrol blok diyagramı;

$$\frac{\theta(s)}{\theta_r(s)} = \frac{(K_D s^2 + K_P s + K_I)*1.89}{s^3 + (0.039 + 1.89K_D)s^2 + (3.61\times10^{-6} + K_P)s + K_I 1.89}$$

elde edilir. Örnek ikince dereceden sistemin derecesi etkisi az olan kutup ilave ile artırılır. $T(s) = \dfrac{w_n^2}{(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)(s + x)}$

$(s^3 + (0.039 + 1.89K_D)s^2 + (3.61*10^{-6} + K_P)s + 1.89K_P = (s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)(s + x)$ karakteristik denklemler eşitlenerek katsayılar elde hesap edilir.

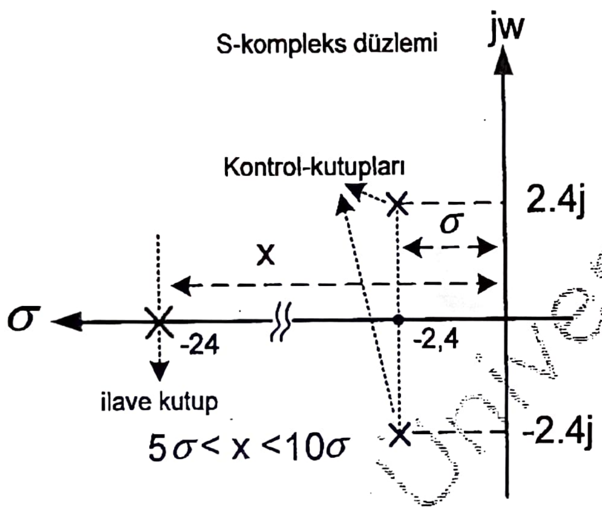
PID li sistemin Karakteristik denklemi,

$F(s) = s^3 + (0.039 + 1.89K_D)s^2 + (3.61\times10^{-6} + K_P)s + K_I 1.89 = 0$ dır ve **3. derecedendir.**

İstenen davranışı sağlayacak olan karakteristik denklem ise,

$F_{ref}(s) = s^2 + 4.8s + 11.52 = 0$ dır ve **2. derecedendir.**

Dolayısıyla K_p, K_I ve K_D nin hesap edilebilmesi için $F_{ref}(s)$'in derecesi bir artırılacaktır. Ancak ilave **kutup sistem cevabında baskın olmayacak**tır. Bu amaç için, Tasarlanan sistemin örnek 2. dereceden sistem gibi davranabilmesi için, ilave **3.kutup** "x" s-kompleks düzleminde reel eksen üzerinde kontrol-kutuplarının reel kısımlarının **5-10** kat arası uzağına şekilde verildiği gibi yerleştirilir.



Sistemde hemen sönümleneceği için x'i 5-10 kat uzağa yerleştirilir. Fiziksel olarak öz yıl-da fazla olması mümkün değildir.

Kutup ilaveli karakteristik denklem: x=-2.4*10=-24 alınırsa

$F_{refx}(s) = (s^2 + 4.8s + 11.52)(s + x) = (s^2 + 4.8s + 11.52)(s + 24) = 0$

$F_{refx}(s) = s^3 + 28.8s^2 + 126.72s + 276.48 = 0$ karakteristik denklem elde edilir.

$F(s) = F_{refx}(s)$ eşitlenerek polinom katsayılarından PID katsayıları elde edilir.

$s^3 + (0.039 + 1.89K_D)s^2 + (3.61\times10^{-6} + K_P)s + K_I 1.89 = s^3 + 28.8s^2 + 126.72s + 276.48 = 0$

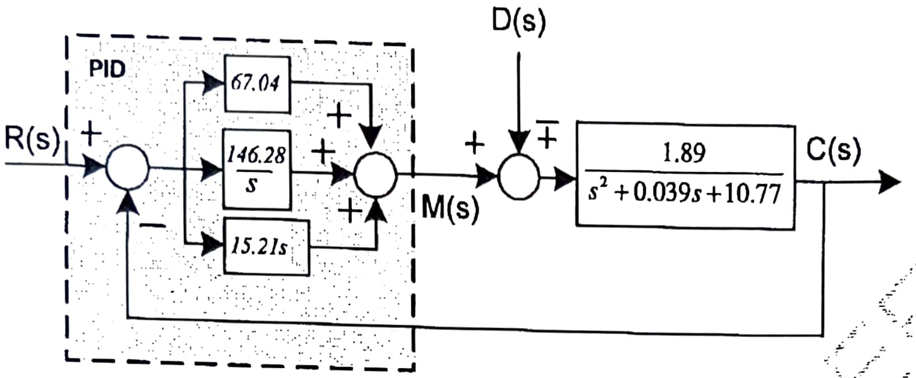
$0.039 + 1.89K_D = 28.8 \Rightarrow K_D = 15.2175$

$3.61\times10^{-6} + 1.89K_P = 126.72 \Rightarrow K_P = 67.0476$

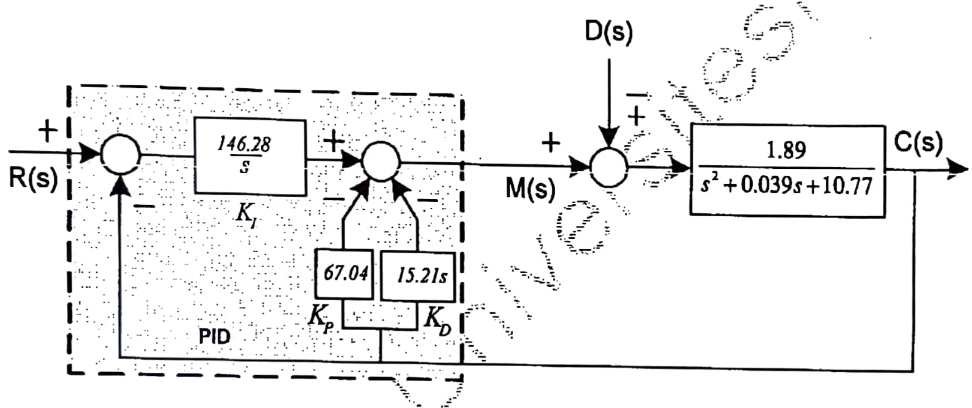
$1.89K_I = 276.48 \Rightarrow K_I = 146.2857$

Yukarıda klasik PID için verilmiş olan kapalı-çevrim transfer fonksiyonu,

$$\frac{\theta(s)}{\theta_r(s)}=\frac{28.74s^2+126.705s+276.4692}{s^3+28.8s^2+126.72s+276.48}$$ elde edilir.



Aşağıda modifiye edilmiş PID için kapalı-çevrim kontrol blok diyagram verilmiştir.



Modifiye PID için kapalı-çevrim transfer fonksiyonu: $\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{K_I G_P(s)}{s+\left[K_D s^2+K_P s+K_I\right]G_P}$

%2 kriterine göre yerleşme zamanı ts=1.67 sn ξ=0.707 için olması istenen örnek 2. dereceden sistemin transfer fonksiyonu,

1- $T(s)=\dfrac{\theta(s)}{\theta_r(s)}=\dfrac{11.52}{s^2+4.8s+11.52}$ dır.

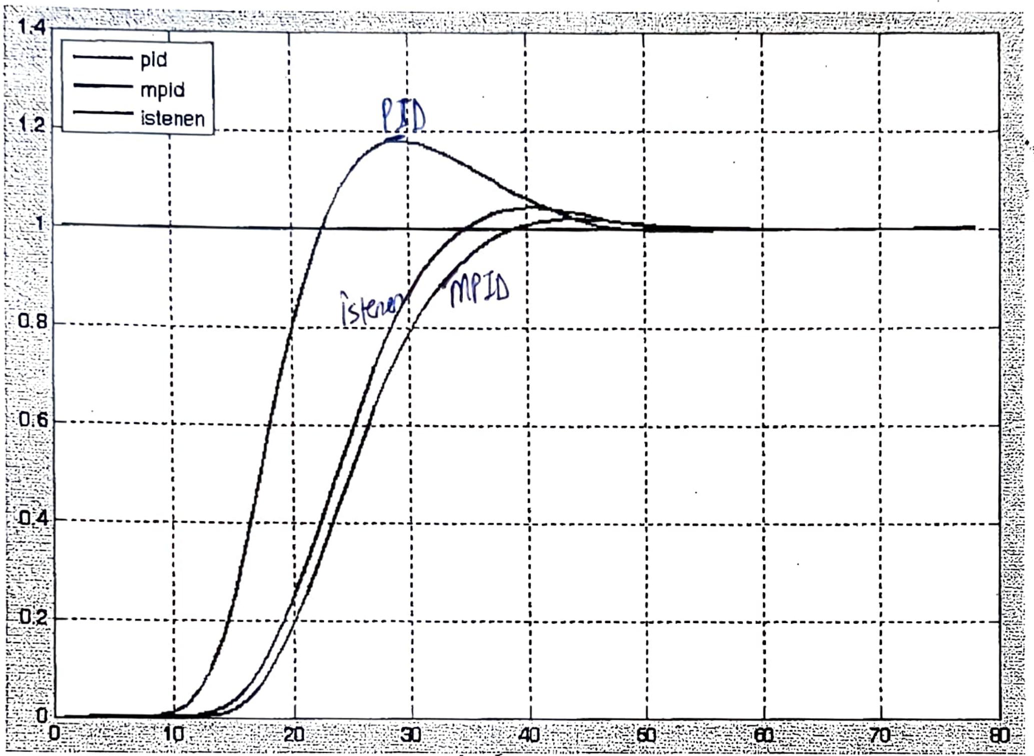
Klasik PID konfigürasyonu kullanıldığında elde edilen kapalı çevrim transfer fonksiyonu.

2-$T(s)=\dfrac{\theta(s)}{\theta_r(s)}=\dfrac{28.74s^2+126.705s+276.4692}{s^3+28.8s^2+126.72s+276.48}=\dfrac{28.74s^2+126.705s+276.4692}{(s^2+4.8s+11.52)(s+24)}$

Modifiye edilmiş PID konfigürasyonu kullanıldığında elde edilen kapalı çevrim transfer fonksiyonu

3- $T(s)=\dfrac{\theta(s)}{\theta_r(s)}=\dfrac{276.48}{s^3+28.8s^2+126.72s+276.48}=\dfrac{276.48}{(s^2+4.8s+11.52)(s+24)}$

Aşağıdaki grafikte, örnek 2.dereceden sistem *(istenen),* Klasik PID ve modifiye PID için basamak cevapları verilmiştir.



MODERN KONTROLE GİRİŞ

Klasik kontrol sistemlerinde, analiz, sentez ve tasarımda transfer fonksiyonu kullanılmaktadır. Transfer fonksiyonu, lineer zamanla değişmeyen (sabit katsayılı) kontrol sistemlerine ilişkin dinamiği sadece giriş ve çıkış büyüklükleri ile (aracılığı ile) verir. Sistemin giriş ve çıkış işaretleri belli koşullar altında kontrol edilirken sistemin durum değişkenleri hiçbir şekilde kontrol edilmemektedir. Modern kontrol teorisinde, sistem dinamiğini tanımlayan n.dereceden diferansiyel denklem n adet 1.dereceden diferansiyel denklem ile ifade edilir. N adet diferansiyel denklem Örneğin, çıkışında kararlı değişim özelliği gösteren bir kontrol sisteminde, içinde bulunan bir elemanın gerilimi, akımı, basıncı ve hızı... vb. elemanın dayanabileceği büyüklükleri üzerine çıkarak sistemin çalışamaz duruma gelmesine yol açabilir.

TRANSFER FONKSİYONU VE DURUM UZAY DENKLEM KARŞILAŞTIRMA

iç değişken Giriş Çıkış

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t),\; y(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$\dfrac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C(sI - A)^{-1} B = \dfrac{s-1}{(s-1)(s+2)} = \dfrac{1}{s+2}$ ve impuls giriş için çıkış yazılır ise,

$u(t) = \delta(t) \rightarrow u(s) = 1$ için çıkış $Y(s) = \dfrac{1}{s+2}$ ve

Çıkış t-domeninde $y(t) = e^{-2t}$ olur. **Eğer, sadece çıkışa bakılır ise hiç bir problem olmadığı gözükür**. BiBO (Bounded Input Bounded Output) kararlılık kriterine göre sistem kararlıdır. Sınırlı giriş için sınırlı çıkış vermektedir.Oysa durum değişkenlerine bakılır ise,

$\dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \qquad sx_1(s) = x_2(s) \rightarrow x_1(s) = \dfrac{1}{s} x_2(s)$ dir.

$\dfrac{dx_2(t)}{dt} = 2x_1(t) - x_2(t) + u(t)$ ise $sx_2(s) = 2x_1(s) - x_2(s) + u(s)$ ve $x_1(s)$ yerine koyulur ise

$u(t) = \delta(t) \rightarrow u(s) = 1$ olduğu göz önünde bulundurulur.

$sx_2(s) = 2\dfrac{x_2(s)}{s} - x_2(s) + u(s)$ ise ve düzenlenir ise $s^2 x_2(s) + sx_2(s) - 2x_2(s) = s$ olur.

$x_2(s) = \dfrac{s}{s^2 + s - 2} = \dfrac{s}{(s+2)(s-1)}$ olur. $\qquad x_1(s) = \dfrac{1}{s} x_2(s) = \dfrac{s}{s(s+2)(s-1)}$ ise

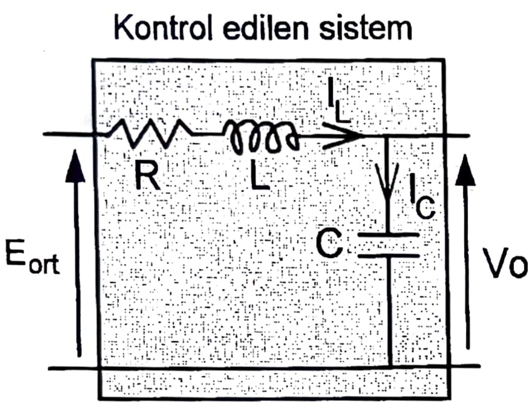
$x_1(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s-1)}$ olarak elde edilirler. Zaman domeninde sırası ile durum değişkenleri

$y(t) = -x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y(t) = 4e^{-2t}$ Dikkat: İç değişkenler

$x_1(t) = \frac{1}{3}\left(e^{t} - 2e^{-2t}\right)$ *(Durum değişkenleri) sonsuza gider iken çıkış sonlu değere gidiyor.

$x_2(t) = \frac{1}{3}\left(e^{t} + 2e^{-2t}\right)$ elde edilir. Durum değişkenlerine bakıldığında ise, durumlar zamanla sonsuza gitmektedir. Buda , eğer önlem alınmamış ise, devrenin yada sistemin bozulması yada bazı elemanların yanması anlamına gelmektedir. Halbuki transfer fonksiyonu ile çıkışa bakıldığında her hangi bir problem görülmemektedir.

ÖRNEK:Aşağıda verilen R,L,C devresini göz önüne alalım.



R, L ve C devresi

Önce t-domeninde dinamik denklemler yazılır ise ,(ilk koşullar sıfır)

$$1) Eort = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt \qquad (1)$$

$$2) Vo(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \qquad \text{elde edilir.} \qquad (2)$$

S-domeninde

$$1) Eort(s) = RI(s) + sLI(s) + \frac{I(s)}{sC} \Rightarrow Eort(s) = I(s)\left[\frac{RCs + s^2LC + 1}{sC}\right]$$

$$2) Vo(s) = \frac{I(s)}{sC}$$

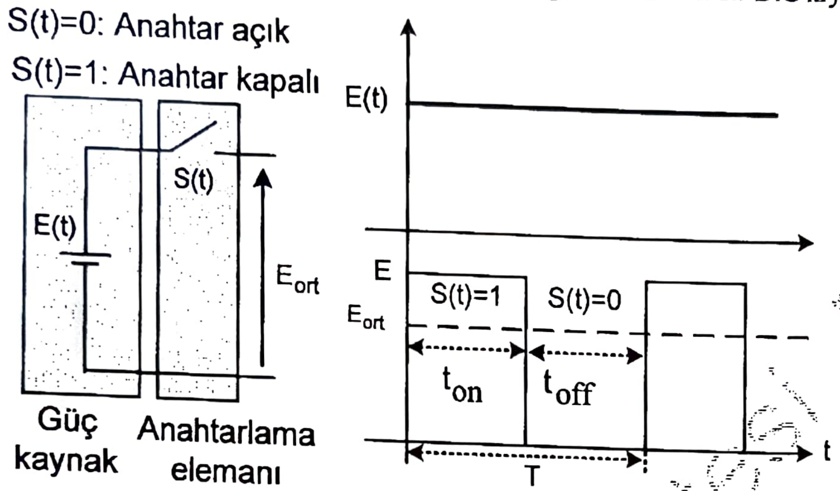
$$\frac{Vo(s)}{Eort(s)} \Rightarrow \frac{\frac{I(s)}{sC}}{I(s)\left[\frac{s^2LC + RCs + 1}{sC}\right]}$$ son ifade düzenlenir ise transfer fonksiyonu,

$$\boxed{\frac{Vo(s)}{Eort(s)} \Rightarrow \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}}$$ olarak elde edilir.

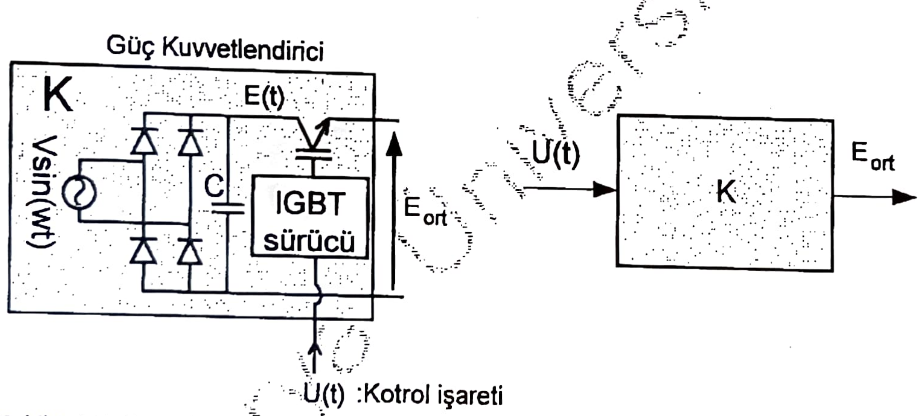
Kesintisiz Güç kaynağı Tasarımı T.F.

R,L,C devresinde kondansatör gerilimi V0(t) kontrol edilmek istensin. Geribeslemeli sistem klasik kontrole göre aşağıdaki işlem basamaklarına göre verilebilinir.İlk adım olarak, Eort(t) giriş geriliminin elde edilmesi prensip olarak ve basit devresi ile beraber açıklanacaktır.

i) Vort(t) gerilimi E(t) dc gerilim kaynağı ile beslenen bir D.C kıyıcıdan elde edilsin.



Şekil 2. a) Basitleştirilmiş DC kıyıcı b) DC kıyıcı çıkış

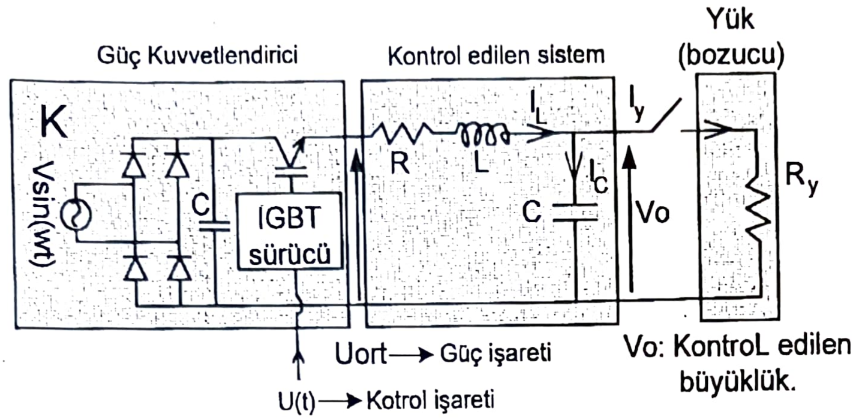


Şekil 3. Güç Kuvvetlendirici DC-Kıyıcı'nın a) basit devreşeması b) Kontrol blok gösterimi.

Şekilde anahtar T periyodu ile t_{on} süresince kapalı t_{off} süresince açık tutulur ise, çıkış geriliminin ortalama değeri,

$$Eort(t) = \frac{1}{T}\int_0^{t_{on}} E(t)dt \Rightarrow Eort(t) = \frac{t_{on}}{T}E(t) \quad \text{elde edilir.}$$

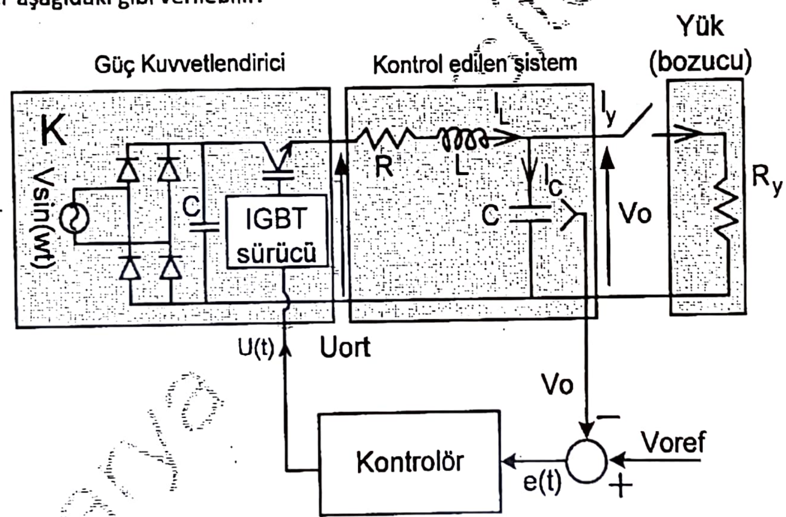
S(t) anahtarı bir statik anahtar tranzistörden oluşsun. R,L,C devresinde V0(t) gerilim kontrolüne ait güç devresini basit olarak aşağıda verildiği gibi çizilebilir. u(t) üretilecek olan kontrol işaretidir. Sürücü devre üzerinden transistor base ne uygulanmış olsun.



Güç devresinin basit devre şeması

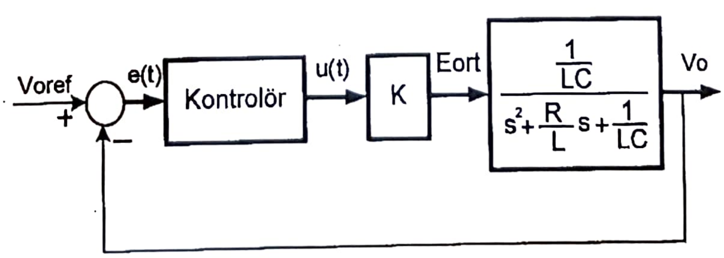
Güç kuvvetlendirici katı bir güç elektroniği devresidir. Kontrol blok gösteriminde sadece bir Güç kuvvetlendirici kazancı **K** olarak gösterilir. Bazı durumlarda **K** kazancının dışında 1. veya 2. dereceden bir sistem olarak modellenmesi gerekebilir.

Yukarıda Şekilde basit güç şeması verilen sistem yine basitleştirilmiş kapalı-çevrim kontrol devresi ile beraber aşağıdaki gibi verilebilir.



RLC devresinde çıkış gerilim kontrolüne ait basitleştirilmiş güç ve kontrol devresi

RLC devresinde çıkış gerilim kontrolüne ait basitleştirilmiş güç ve kontrol devresi ile ilgili negatif geri beslemeli kapalı-çevrim kontrol blok diyagramı aşağıda verilmiştir.

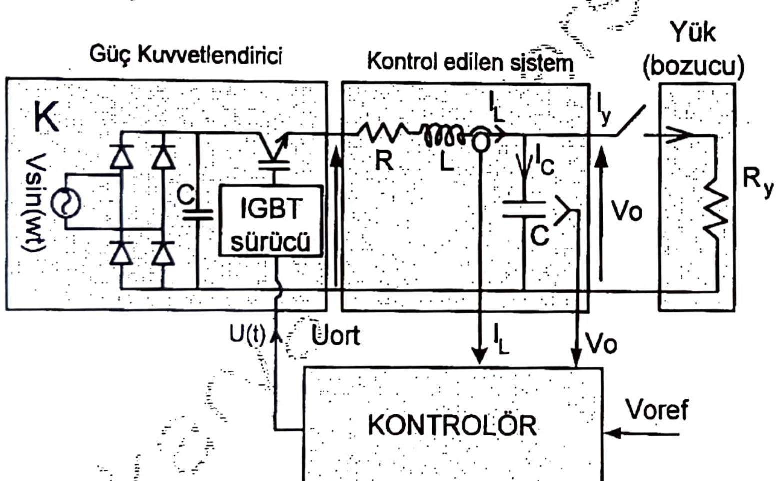


Kapalı-çevrim kontrol blok diyagramı

Şekildeki kontrol sisteminde çıkış gerilimi $V_0(t)$ ölçülmekte ve kontrol edilmektedir. Dikkat edilir ise, sadece çıkış büyüklüğü olan kondansatör gerilimi ölçülmekte, buna karşılık endüktans akımı $I(t)$ ölçülmemekte ve kontrol edilmemektedir.

Yukarıda 2 nolu denklemden görüleceği üzere çıkış gerilimi akıma bağlıdır. Gerilim kontrol amacı ile eğer aşırı akım çekilir ise transistor zarar görebilir. En önemlisi ise akım dinamiği ile ilgilenilmemektedir, sadece gerilim dinamiği kontrol edilmektedir. Örnekten görüldüğü gibi, **<u>transfer fonksiyonu</u>**, sistemin durumları ile ilgili dinamik yerine, sadece giriş-çıkış dinamiğini göz önüne almaktadır. Verilen örnekte durum değişkenleri $I_L(t)$ ve $V_c(t)$ iken sadece çıkış gerilimi $V_c(t)$ (aynı zamanda $V_c(t) = V_0(t)$ 'dir.) ölçülmekte ve dinamiği ayarlanmaktadır. Bundan başka, transfer fonksiyonu ile analiz ve tasarımda bütün ilk koşullar ihmal edilmekte böylece sistemin geçmiş ve başlangıç durumuna ilişkin bilgiden yararlanılmış olunmamaktadır.Klasik analiz ve inceleme yöntemleri sistemin lineer olmaması, zamanla değişmesi, çok-giriş, çok-çıkış olması hallerinde uygulanmaz. Transfer fonksiyonu basitliği nedeni ile hala kullanılmaktadır ve kullanılmaya devam edecektir. Kontrol sistemlerinin modern inceleme ve tasarımda, durum değişkenleri ve sistemin başlangıç koşullarından oluşan <u>durum uzayı</u> yaklaşımı kullanılır.

Durum uzayı modeli, başlangıç koşulları verilmiş, birinci mertebeden diferansiyel denklemler sisteminden oluşur.



<u>Durum-Uzay-Denklemleri:</u>Durum-uzay analizinde dinamik sistem modellemesinde üç tip değişken göz önünde bulundurulur.

i) Giriş değişkenleri,
ii) Çıkış değişkenleri,
iii) Durum değişkenleri

Aynı bir sistem için tek bir durum-uzay gösterimi yoktur. Durum değişken sayısı aynı kalmakla beraber aynı sistem için çok farklı sayıda durum-uzay gösterimi elde edilir. Kullanılan durum uzay elde etme yöntemlerine ve kullanılabilecek lineer dönüşümlere bağlı olarak farklı katsayılar matrisleri elde edilecektir. Ancak aynı bir sistem için ***<u>katsayılar matrisleri farklı olmakla beraber karakteristik</u>***

denklemleri aynıdır. Eğer durum denklem elde etme yöntemi veya lineer dönüşüm sonunda karakteristik denklem değişir ise o sistem zaten başka bir sistem demektir, hata yapılmıştır.

Lineer ***zamanla değişen*** ayrık-zaman ve sürekli-zaman durum denklemi sırası ile;

$$\left.\begin{array}{ll} x(k+1) = G(k)x(k) + H(k)u(k) & \text{durum denklemi} \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) & \text{çıkış denklemi} \end{array}\right\} \text{Ayrık-Zaman}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) & \text{durum denklemi} \\ \text{Sürekli-Zaman} & \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) & \text{çıkış denklemi} \end{array}\right\} \text{Sürekli Zaman}$$

gibi verilebilir. Değişkenler ve katsayı matrisleri aşağıda açıklanmıştır.

x(k)=n-vektör (durum vektörü)

y(k)=m-vektör (çıkış vektörü)

u(k)=r-vektör (giriş vektörü)

A(t),G(k)=nxn matris (durum matris)

B(t),H(k)=nxr matris (giriş matris)

C(t),C(k)=mxn matris (çıkış matris)

D(t),D(k)=mxr matris (doğrudan iletim matrisi, direct transmission matrix)

Matris argümanlarındaki (k) ve (t), $G(k)$ ve $A(t)$ deki gibi matrislerin zamanla değiştiğini gösterir.

Eğer ***zamanla değişmeyen*** bir sistem ise, durum ve çıkış denklemleri;

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

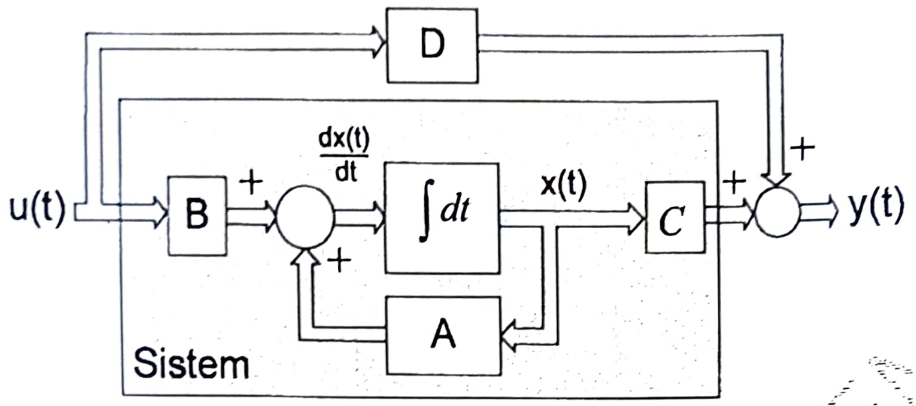
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Ve

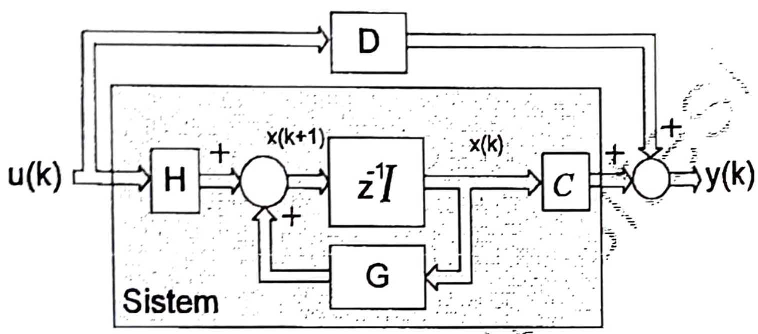
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t)$$

$y(t) = Cx(t) + Du(t)$ olarak yazılabilir. Katsayı matrisleri sabittir, zamanla değişmez.

Aşağıda şekil 7-8 de sırası ile sürekli-zaman ve ayrık-zaman durum denklemlerinin blok diyagram gösterimi verilmiştir.

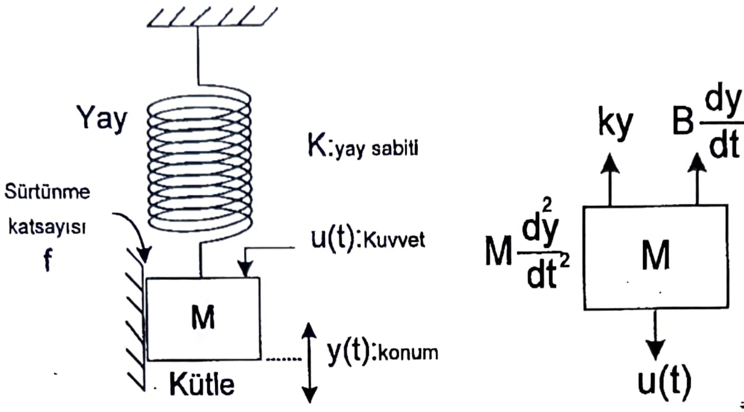


Sürekli-zaman zamanla -değişmeyen sistemin durum uzay blok diyagramı gösterimi



Ayrık-zaman zamanla değişmeyen sistemin durum uzay blok diyagram gösterimi;

ÖRNEK-1:



a) Kütle-yay mekanik sistemi. b) Serbest cisim gösterimi.

Şekil de, denge konumun da bulunan sisteme ait,

i- Sistemin davranışını tanımlayan dinamik denklemleri yazınız.

ii- Durum denklemlerini elde ediniz. (sistem denge konumunda iken $u(t)$ uygulanıyor.)

i- Sistem davranışını ifade eden diferansiyel denklem,

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2}+f\frac{dy(t)}{dt}+Ky(t)=u(t) \qquad (3)$$

olarak yazılır. Sistem durum değişkenlerini konum ve hız olarak alırsak ve sırası ile $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ ile gösterelim.

$$x_1(t)=y(t)\rightarrow Konum$$

$$x_2(t)=\frac{dy(t)}{dt}\rightarrow hız$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t)$$ *1. durumdenklemi,*

(3) denkleminde düzenlemeler yapılır $\Rightarrow$

$$M\frac{dx_2(t)}{dt}+fx_2(t)+Kx_1(t)=u(t)\Rightarrow$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt}=\frac{1}{M}u(t)-\frac{f}{M}x_2(t)-\frac{K}{M}x_1(t)$$ *2. durum denklemi*elde edilir.

Elde edilen *1. ve 2. durum denklemleri* vektör-matris formunda aşağıda verildiği gibi yazılabilir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{f}{M} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

Kontrol edilen sistem göz önüne alındığında, **çıkış** olarak alınan fiziksel büyüklük **konum**dur.

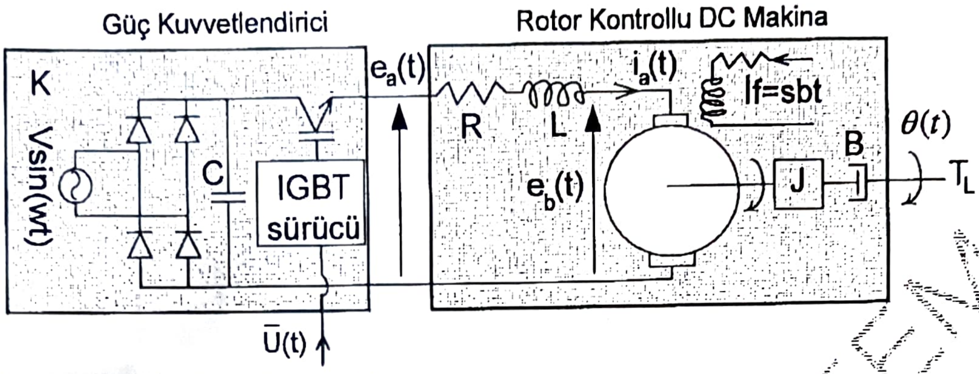
$y(t) = x_1(t)$ olarak yukarıda tanımlanmıştı. Çıkış denklemi durum değişkenleri cinsinden matris formunda aşağıda verilmiştir.

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x}$$

Kütle-yay sistemine ait $\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$ durum denklemleri yukarıda

vektör-matris formunda elde edilmiştir.

ÖRNEK-2:



Şekil 10 Rotor kontrollü DC-makine ve DC-Kıyıcı

i- Basitleştirilmiş rotor kontrollü DC-makineye ait dinamik denklemleri yazınız.

ii- Durum-uzay modelini vektör matris formunda elde ediniz.(L_a=0 alınacak)

<u>t-domeni denklemler</u>

1) $e_a(t) = K\bar{u}(t)$

2) $e_a(t) = L_a \dfrac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + e_b(t) \longrightarrow$ I 'yı çek

3) $T_e(t) = K_a i_a(t)$

4) $T_m(t) = J\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + B\dfrac{d\theta}{dt} + T_L(t) \longrightarrow$ θ'yı çek

5) $e_b(t) = K_b \dfrac{d\theta(t)}{dt}$

x 6) $w(t) = \dfrac{d\theta(t)}{dt}$

7) $T_m(t) = T_e(t)$ (sürekli rejimde, üretilen elektriki moment=Mekanik moment)

<u>S- domeninde</u>

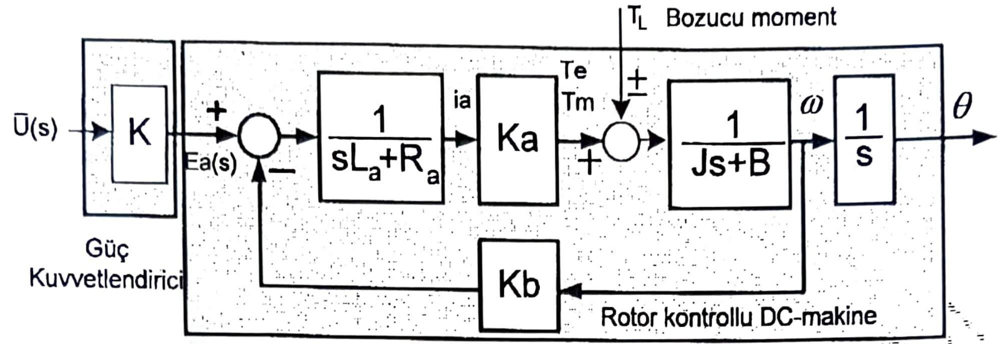
i) $I_a(s) = \dfrac{E_a(s) - E_b(s)}{sL_a + R_a}$

ii) $T_e(s) = K_a I_a(s)$

iii) $T_m(s) - T_L(s) = (s^2 J + Bs)\theta(s) \quad \Rightarrow \quad \theta(s) = \dfrac{T_m(s) - T_L(s)}{s(sJ + B)}$

iv) $E_b = K_b \Omega(s)$

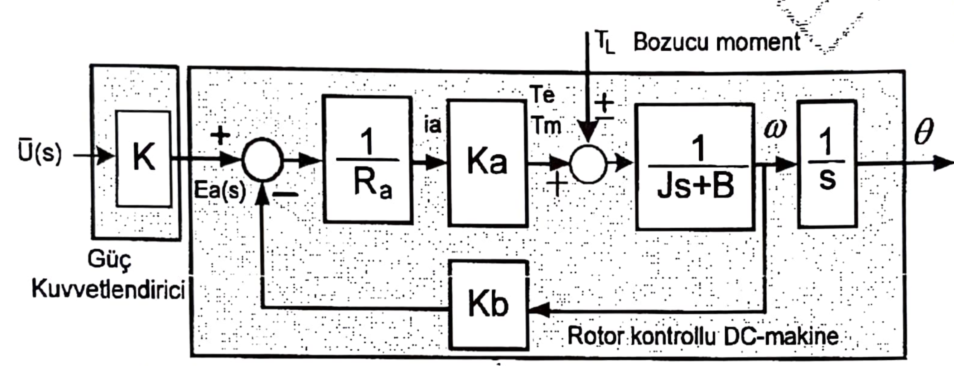
v) $T_m(s) = T_e(s)$



Rotor kontrollü DC-makine ve DC-Kıyıcı kontrol blok diyagramı.

- Rotor kontrollü DC-makinenin basitleştirilmiş modeli ($L_a = 0$ için) aşağıda verilmiştir.

Elektriksel zaman sabiti Mekanik zaman sabitine göre çok küçük olduğundan ihmal edilebilir.



Basitleştirilmiş rotor kontrollü DC-makine ve DC-Kıyıcı kontrol blok diyagramı.

olarak elde edilir.

ii- **Durum-uzay** denklemleri için, (1-7) denklemleri kullanılır ve makine çıkışı olan $\theta(t)$ nın davranışını tanımlayan denklem elde edilir ($L_a \approx 0$ alındı).

1)' nolu denklemden; $i(t) = \dfrac{e_a(t) - e_b(t)}{R_a}$

2) 'den $T_e(t) = K_a \dfrac{e_a(t) - e_b(t)}{R_a} = K_a \dfrac{e_a(t) - K_b \dfrac{d\theta(t)}{dt}}{R_a}$

sürekli rejimde $T_e(t) = T_m(t) \Rightarrow$

$$e_a(t)\frac{K_a}{R_a} - \frac{K_a K_b}{R_a}\frac{d\theta(t)}{dt} = J\frac{d^2(t)}{dt^2} + B\frac{d\theta(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$J\frac{dw(t)}{dt} = -\left(B + \frac{K_a K_b}{R_a}\right)w(t) + \frac{K_a}{R_a}e_a(t) \Rightarrow J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\left(B + \frac{K_a K_b}{R_a}\right)\frac{d\theta}{dt} + \frac{K_a}{R_a}e_a(t)$$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}=-\left(\frac{BR_a+K_aK_b}{R_aJ}\right)\frac{d\theta(t)}{dt}+\frac{K_a}{R_aJ}e_a(t) \Rightarrow \frac{dw(t)}{dt}=-\left(\frac{BR_a+K_aK_b}{R_aJ}\right)w(t)+\frac{K_a}{R_aJ}e_a(t)$$

Basitleştirilmiş model yardımı ile, rotor kontrollu DC-makine çıkışı $\theta(t)$ ifadesi elde edildi.

Durum değişkenleri tanımlanarak **durum denklemleri** $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$ denkleminden elde edilecektir.

$\frac{d\theta(t)}{dt}=w(t)$

$x_1(t)=\theta(t) \rightarrow konum$

$L \cong 0$

$x_2(t)=\frac{d\theta(t)}{dt} \rightarrow hız$

durum değişkenleri olarak belirlenir ise;

$\frac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t)$ *1. durum denklemi*

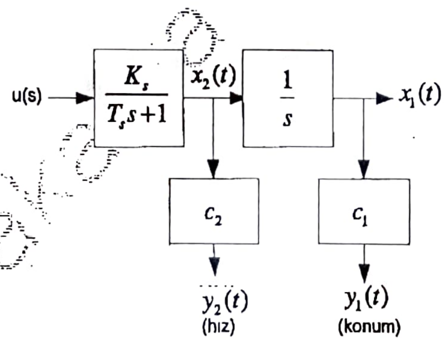
$\frac{dx_2(t)}{dt}=-\left(\frac{BR_a+K_aK_b}{R_aJ}\right)x_2(t)+\frac{K_a}{R_aJ}e_a(t)$ *2. durum denklemi*

Durum denklemlerini vektör-matris formunda aşağıda verildiği gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix}\frac{dx_1(t)}{dt}\\ \frac{dx_2(t)}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\left(\frac{BR_a+K_aK_b}{R_aJ}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{K_a}{R_aJ}\end{bmatrix}e_a(t)$$

$e_a = V.k$

Hız ve *Konum* çıkış olmak üzere seçilir ise, çıkış denklemi olarak C1 ve C2 ölçme ile ilgili sabitler olmak üzere,



$y_1(t)=\begin{bmatrix}C_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$ $y_1(t)$ çıkış.

$y_2(t)=\begin{bmatrix}0 & C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$ $y_2(t)$ çıkış.

$$y(t)=\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1 & 0\\ 0 & C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

$y_1(t)$ ve $y_2(t)$ olarak tanımlanabilir.

Basitleştirilmemiş DC-makine durum denklemleri (1-7) dinamik denklemleri düzenlenir ise,

$e_a = v_k$

$L \neq 0$

$$u_{ort}(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + K_b w(t) \quad \rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{K_b}{L}w(t) + \frac{1}{L}u_{ort}(t)$$

$$K_i i(t) = J\frac{dw(t)}{dt} + T_y(t) + Bw(t) \rightarrow \frac{dw(t)}{dt} = \frac{K_i}{J}i(t) - \frac{1}{J}T_y(t) + \frac{B}{J}w(t)$$ ve **durum değişkenleri** tanımlanır

$x_1(t) = i(t)$ ***akım***

$x_2(t) = \theta(t)$ ***konum***

$x_3(t) = \dfrac{d\theta(t)}{dt} = w(t)$ ***Açısal hız***

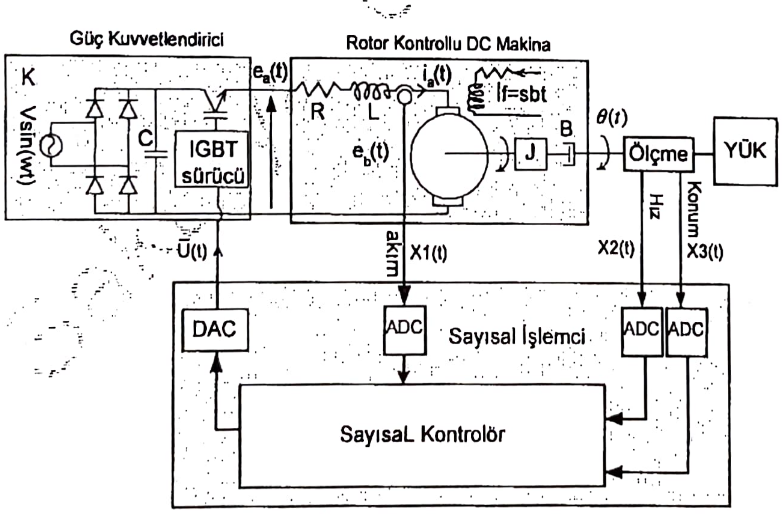
ve durum denklemleri vektör matris formunda yazılır.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & 0 & -\dfrac{K_b}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{K_i}{J} & 0 & -\dfrac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U_{ort}(t)$$ ***Durum denklemleri***

Ve Çıkış denklemi, $y(t) = \theta_y(t) = C_1\theta_m(t)$

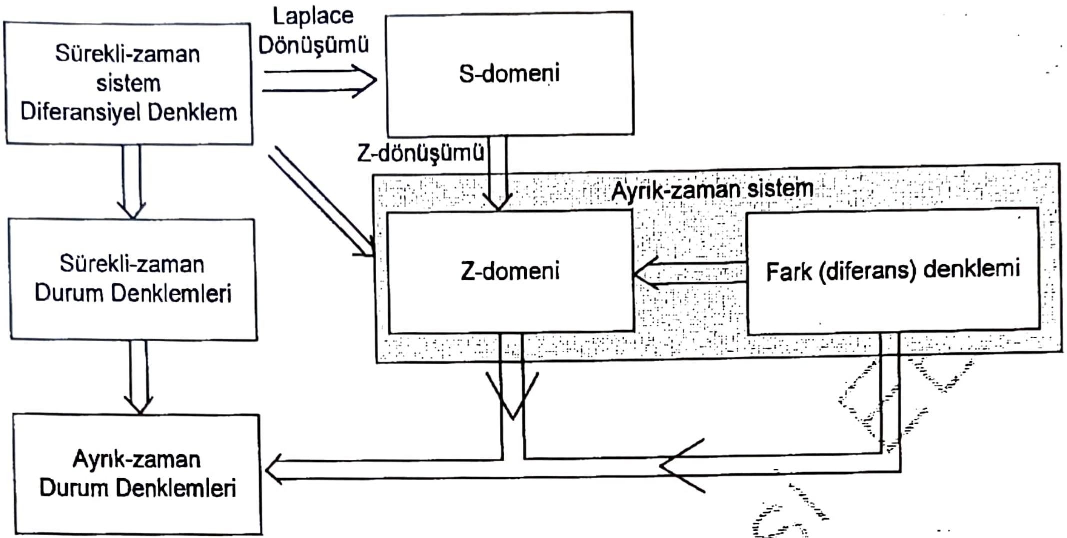
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$ elde edilir.

Durum denklemleri elde edilmiş olan rotor kontrollü DC-makine'ye ait ***tüm durum geri beslemeli*** sayısal tabanlı kontrol yapısına ait basitleştirilmiş kontrol devresi fikir vermesi (ön bilgi) için aşağıda verilmiştir. Amaç SayısaL Kontrolör'ün tasarlanmasıdır.



Tüm durum geri beslemeli Rotor kontrollü DC-makineye ait sayısal kontrol

Ayrık-Zaman Sistemlerinin Durum Uzay Gösterimleri



Ayrık-zaman durum uzay denklemlerinin kanonik formları: Ayrık zaman sistemlerin durum-uzay gösterimlerini elde etmek için birçok teknik mevcuttur.

k. örnekleme anında **u(k)** giriş **y(k)**çıkış olmak üzere ayrık-zaman sistem;

$$y(k)+a_1y(k-1)+a_2y(k-2)+...+a_ny(k-n)=b_0u(k)+b_1u(k-1)+...b_nu(k-n) \quad \mathbf{(1)}$$

fark denklemi ile verilsin.

Açıklama:

-Darbe transfer fonksiyonu: *çıkış darbe dizilerinin z-dönüşümünün giriş darbelerinin z-dönüşümüne oranına denir (ilk koşullar sıfır).*

$y(k) \to Y(z)$ $\quad u(k) \to U(z)$ *(şimdiki değer)*

$y(k-1) \to z^{-1}Y(z)$ $\quad u(k-1) \to z^{-1}U(z)$ *(bir örnek önceki değer)*

$\vdots \quad \vdots$

$y(k-n) \to z^{-n}Y(z)$ $\quad u(k-n) \to z^{-n}U(z)$ *(n örnek önceki değer)*

Olmak üzere;

$$Y(z)+a_1z^{-1}Y(z)+a_2z^{-2}Y(z)+...+a_nz^{-n}Y(z)=b_0U(z)+b_1z^{-1}U(z)+...+b_nz^{-n}U(z)$$

$$\to \; Y(z)\left[1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+.........+a_nz^{-n}\right]=U(z)\left[b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+.........+b_nz^{-n}\right]$$

$$\boxed{\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{\left[b_0+b_1z^{-1}+...+b_nz^{-n}\right]}{\left[1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+...+a_nz^{-n}\right]}}$$ **(2)** Veya pay ve payda $\frac{z^n}{z^n}$ ile çarpılır=>

$$\boxed{\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_0z^n+b_1z^{n-1}+...+b_n}{z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{-2}+...+a_n}}$$ **(3)**

(1), (2) ve **(3)** denklemlerinin durum uzay gösterimleri bir çok yoldan elde edilebilinir. Aşağıda sırası ile anlatılacaktır.

1. Kontroledilebilir Kanonik *Form (Controllable Canonical Form) (Faz-Değişken Kanonik Form:phase-veriable canonical form)*:Doğrudan programlama metodu ile elde edilebilir.

$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_0z^n+b_1z^{n-1}+...+b_n}{z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{-2}+...+a_n}\frac{X(z)}{X(z)}$ pay ve payda **X(z)**ile çarpılır ve ayrı ayrı yazılır ise,

•$U(z)=(z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{-2}+...+a_n)X(z)$ (*)

•$Y(z)=(b_0z^n+b_1z^{n-1}+...+b_n)X(z)$ olur.

$X(z)$, $zX(z)$ ..., $z^nX(z)$nin ters dönüşümleri kullanılır ise;

$X(z)\rightarrow x(k)=x_1(k)$ olsun. *1. durum değişkeni*

$zX(z)\rightarrow \boxed{x(k+1)=x_2(k)}$ olsun. *2. durum değişkeni*

$z^2X(z)\rightarrow x(k+2)=x_3(k)$ olsun. *3. durum değişkeni*

. $\boxed{x_2(k+1)=x_3(k)}$

.

$z^3X(z)\rightarrow x(k+3)=x_4(k)$

$\boxed{x_3(k+1)=x_4(k)}$ *4. durum değişkeni*

$z^{n-1}X(z)\rightarrow x(k+n-1)\rightarrow x_{n-1}(k+1)=x_n(k)$ ***n. durum değişkeni***

$z^nX(z)\rightarrow x(k+n)=x_n(k+1)$ $x_n(k+1)=x(k+n)$

yeni durum değişkenleri $x_1(k), x_2(k),..., x_n(k)$ *olarak tanımlanmıştır.*

$x_n(k+1)$ ifadesi ise yeni durum değişkenleri kullanılarak,

$z^{n} X(z) = U(z) - a z^{n-1} X(z) - \dots - a_n X(z)$

en yüksek terim yalnız bırakılır

$U(z) = (z^{n} + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n) X(z)$ denkleminden elde edilir.

$U(z) = z^{n} X(z) + a_1 z^{n-1} X(z) + a_2 z^{n-2} X(z) + \dots + a_n X(z) \Rightarrow$

$u(k) = x_n(k+1) + a_1 x_n(k) + \dots + a_{n-1} x_2(k) + a_n x_1(k) \Rightarrow$

$$\boxed{x_n(k+1) = u(k) - a_1 x_n(k) - \dots - a_{n-1} x_2(k) - a_n x_1(k)}$$

yeni durum değişkenleri kullanılarak çıkış ifadesi olarak,

$Y(z) = b_0 z^{n} X(z) + b_1 z^{n-1} X(z) + \dots + b_n X(z)$ yazılır.

NOT:

pay derecesi=payda derecesi-1 olsun $z^{n-1} X(z) \to x(k+n-1) = x_n(k)$ olur.

$$\boxed{y(k) = b_0 x_n(k) + b_1 x_{n-1}(k) + \dots + b_n x(k)}$$

Elde edilen durum denklemleri vektör-matris formunda yazılır.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ . \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots 0 \\ . & . & . & \dots\dots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ . \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \to$$ **kontrol edilebilir Kanonik form**

çıkış denklemi ise,

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ . \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$ **yazılır.**

•*Eğer pay ve payda derecesi eşit ise*;

$y(k) = b_0 x_n(k+1) + b_1 x_n(k) + b_2 x_{n-1}(k) + \dots + b_{n-1} x_2(k) + b_n x_1(k)$

$x_n(k+1)$ yerine yazılır ve düzenlenir,

$y(k) = b_0 u(k) + [b_1 - a_1 b_0] x_n(k) + [b_2 - a_2 b_0] x_{n-1}(k) + \dots + b_{n-1} x_2(k) + [b_n - a_n b_0] x_1(k)$

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_n - b_0 a_n \dots\dots\dots b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \dots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + [b_0] u(k)$$

durum değişkenlerinin sırasını değiştirirsek, eski durum değişkenlerine göre yenilerini;

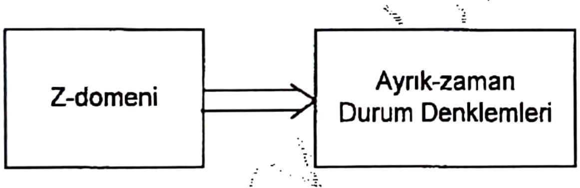
$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \cdots \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & 0 & 1 \\ 0 & 0 & . & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & . & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ . \\ x_n(k) \end{bmatrix} \text{ tanımlarsak durum denklemleri;}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \cdots \\ \hat{x}_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & . & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ . \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

çıkış denklemi; $y(k) = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 & b_2 - a_2 b_0 & . & b_n - a_n b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ . \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$ olarak yazılabilir.

ÖRNEK: $y(k+2) = u(k) + 1.7y(k+1) - 0.72y(k)$ fark denklemi ile verilen sistemin durum denklemlerini kontrol edilebilir kanonik form (faz-değişken kanonik form) da elde ediniz.

1. yol; ***Z- dönüşüm transfer fonksiyonundan ayrık-zaman durum denklemlerinin elde edilmesi;***



İlk koşullar sıfır alınarak transfer fonksiyonu elde edilir.........

$$y(k+2) = u(k) + 1.7y(k+1) - 0.72y(k)$$

$$z^2Y(z) = U(z) + 1.7zY(z) - 0.72Y(z) \Rightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^2 - 1.7z + 0.72}\,\frac{X(z)}{X(z)} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} Y(z) = X(z) \\ U(z) = z^2x(z) - 1.7zx(z) + 0.72x(z) \end{array}$$

Önce durum değişkenleri tanımlanır:

$X(z) \rightarrow x(k) = x_1(k) \qquad x_1(k)$, **1. Durum değişkeni**

$x(z)$ *şimdiki değer* $x_1(k)$ *olsun* $x(z) = x_1(k)$ ve $y(k) = x_1(k)$ olur.

$zX(z) = x(k+1) = x_2(k) \rightarrow \boxed{x_1(k+1) = x_2(k)}$ **1. Durum denklemi,**

$x_2(k)$ 2.durumdeğişkenidir.

- $z^2X(z) = x(k+2) = x_2(k+1)$*'dir.*

$U(z) = z^2X(z) - 1.7zX(z) + 0.72X(z) =>$

$z^2X(z) = U(z) + 1.7zX(z) - 0.72X(z)$

tanımlanmış olan durum değişkenleri yerlerine koyulur.

$\boxed{x_2(k+1) = u(k) + 1.7x_2(k) - 0.72x_1(k)}$ **2. Durum denklemi**

$\boxed{Y(z) \rightarrow y(k) = x(k) \rightarrow y(k) = x_1(k)}$ **çıkış denklemi**

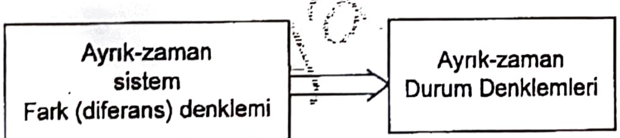
2. Dereceden diferans(fark) denkleminden 1.dereceden iki adet diferans(fark) denklemi elde edilmiştir. 1. Dereceden elde edilen fark denklemleri vektör-matris formunda yazılır=>

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.72 & 1.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

2.yol doğrudan fark denklemleri kullanılabilinir;



$y(k+2) = u(k) + 1.7y(k+1) - 0.72y(k)$

diferans denklemi ile verilen sistemin durum denklemlerini yazınız.

$y(k) = x_1(k)$ çıkışın şimdiki değeri $x_1(k)$ olsun. ***1. Durum değişkeni.***

$y(k+1) = x_1(k+1) = x_2(k)$ çıkışın bir örnek sonraki değeri $x_2(k)$ olsun. ***2.Durum değişkeni.***

Yukarıdaki tanımlara göre,

$x_1(k+1) = x_2(k) = y(k+1)$ **1. Durum denklemi .**

$x_2(k+1) = y(k+2)$ olur. Tanımlanan durum değişkenleri

$y(k+2) = u(k) + 1.7y(k+1) - 0.72y(k)$ denkleminde yerlerine konulur=>

$x_2(k+1) = u(k) + 1.7x_2(k) - 0.72x_1(k)$ **2. Durum denklemi .**

Elde edilen durum ve çıkış denklemleri vektör-matris formunda aşağıda verildiği gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.72 & 1.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

GÖZLENEBİLİR KANONİK FORM(OBSERVABLE CANONICAL FORM):

Darbe transfer fonksiyonu, $G(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)} = \dfrac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}}$ olarak verilsin, G(z) yeniden düzenlenir ise, ***içler-dışlar çarpımı*** yapılır.

→ en yüksek dereceyi (z^{-n}) pay ve payda ile çarpılıp negatif form elde edilir.

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \ldots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \ldots + b_n z^{-n} U(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) - b_0 U(z) + z^{-1}\left[a_1 Y(z) - b_1 U(z)\right] + z^{-2}\left[a_2 Y(z) - b_2 U(z)\right] + \ldots + z^{-n}\left[a_n Y(z) - b_n U(z)\right] = 0$$

Veya

$$Y(z) = b_0 U(z) + \underbrace{z^{-1}\Big(b_1 U(z) - a_1 Y(z) + \underbrace{z^{-1}\Big\{b_2 U(z) - a_2 Y(z) + \overbrace{z^{-1}\left[b_3 U(z) - a_3 Y(z) + \ldots\ldots\right]}^{X_{n-2}(z)}\Big\}}_{X_{n-1}(z)}\Big)}_{X_n(z)} \quad (*)$$

yeni durum değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanır =>

$X_n(z) = z^{-1}\left[b_1 U(z) - a_1 Y(z) + X_{n-1}(z)\right]$ *n. Durum değişkeni*

$X_{n-1}(z) = z^{-1}\left[b_2 U(z) - a_2 Y(z) + X_{n-2}(z)\right]$ *(n-1). Durum değişkeni*

....

$X_2(z) = z^{-1}\left[b_{n-1} U(z) - a_{n-1} Y(z) + X_1(z)\right]$ *2. Durum değişkeni*

$X_1(z) = z^{-1}\left[b_n U(z) - a_n Y(z)\right]$ *1. Durum değişkeni*

(*) Y(z) denklemi, $Y(z) = b_0 U(z) + X_n(z)$ olarak yazılır ve durum değişkenlerinin ∀ taraf "z" ile çarpılır ise;

$X_n(z) = z^{-1}\left[b_1 U(z) - a_1 Y(z) + X_{n-1}(z)\right]$ Y(z) yerine yukarıdaki eşitlik yazılır......

$zX_n(z) = \left[b_1 U(z) - a_1[b_0 U(z) + X_n(z)] + X_{n-1}(z)\right]$ düzenlenir ise,

$zX_n(z) = X_{n-1}(z) - a_1 X_n(z) + (b_1 - a_1 b_0) U(z)$ aynı işlemler diğer durum değişkenleri için yapılır.

$zX_{n-1}(z) = X_{n-2}(z) - a_2 X_n(z) + (b_2 - a_2 b_0) U(z)$

...

$zX_2(z) = X_1(z) - a_{n-1} X_n(z) + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0) U(z)$

$zX_1(z) = -a_n X_n(z) + (b_n - a_n b_0) U(z)$ ters z- dönüşümü alınır ve çıkan denklemler ters sıra ile yazılır ise;

$x_1(k+1) = -a_n x_n(k) + (b_n - a_n b_0)u(k)$ 1. Durum denklemi

$x_2(k+1) = x_1(k) - a_{n-1}x_n(k) + (b_{n-1} - a_{n-1}b_0)u(k)$ 2. Durum denklemi

...

$x_{n-1}(k+1) = x_{n-2}(k) - a_2 x_n(k) + (b_2 - a_2 b_0)u(k)$ (n- 1). Durum denklemi

$x_n(k+1) = x_{n-1}(k) - a_1 x_n(k) + (b_1 - a_1 b_0)u(k)$ n. Durum denklemi

çıkış denkleminin ters z-dönüşümü alınarak , $y(k) = x_n(k) + b_0 u(k)$ olarak yazılır.

Durum denklemleri **GÖZLENEBİLİR KANONİK FORM' da**vektör-matris olarak

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \cdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1}b_0 \\ \cdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(k)$$

yazılır. Çıkış denklemi olarak,

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

elde edilir.

ÖRNEK: $y(k+2) = u(k) + 1.7y(k+1) - 0.72y(k)$ fark denklemi ile verilen sistemi durum denklemlerini **gözlenebilir kanonik form'** da elde ediniz.

elde edilen $\dfrac{Y(z)}{U(z)} = \dfrac{1}{z^2 - 1.7z + 0.72}\,\dfrac{z^{-2}}{z^{-2}}$ idi. pay ve payda $\dfrac{z^{-2}}{z^{-2}}$ ile çarpılır ve

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-2}}{1 - 1.7z^{-1} + 0.72z^{-2}}$$

içler dışlar çarpımı yapılır.

$Y(z) - 1.7z^{-1}Y(z) + 0.72z^{-2}Y(z) = z^{-2}U(z) =>$

$Y(z) = z^{-2}U(z) + 1.7z^{-1}Y(z) - 0.72z^{-2}Y(z)$

Durum değişkenleri tanımlanır...........

$$Y(z) = \underbrace{z^{-1}\left\{1.7Y(z) + \underbrace{z^{-1}\{U(z) - 0.72Y(z)\}}_{X_1(z)}\right\}}_{X_2(z)}$$ olarak tanımlanır=>

$X_1(z) = z^{-1}(U(z) - 0.72Y(z))$ 1. Durum değişkeni.

$X_2(z) = z^{-1}(1.7Y(z) + X_1(z))$ 2. Durum değişkeni.

ve $Y(z) = X_2(z)$ tir. Çıkış denklemi.

$X_1(z)$ ve $X_2(z)$ te Y(z) yerine koyulur ve eşitliklerin $\forall$ iki tarafı z ile çarpılır ise;

$zX_1(z) = U(z) - 0.72X_2(z)$

$zX_2(z) = 1.7X_2(z) + X_1(z)$ ters z-dönüşümü yapılır ise,

$x_1(k+1) = u(k) - 0.72x_2(k)$ 1. Durum denklemi.

$x_2(k+1) = 1.7x_2(k) + x_1(k)$ 2. Durum denklemi.

$y(k) = x_2(k)$ Çıkış denklemi.

gözlenebilir kanonik form' vektör-matris formunda;

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.72 \\ 1 & 1.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$ elde edilir.

Yada,

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-2}}{1 - 1.7z^{-1} + 0.72z^{-2}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$ genel teriminden katsayılar yazılır ise

$\boxed{\begin{array}{l} b_0 = b_1 = 0, b_2 = 1 \\ a_1 = -1.7, a_2 = 0.72 \end{array}}$ dir. Doğrudan gözlenebilir kanonik form genel matrisinde katsayılar yerlerine yazılır.

•Durum değişkenlerinin sırası değiştirilir ise , $\hat{x}(k)$ yeni durum değişkenleri olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & \dots & 1 \\ 0 & 0 & . & 1 & 0 \\ . & \dots & & . & . \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \dots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$ tanımlanır ise;

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \dots \\ \hat{x}_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & . & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & . & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \dots \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ \dots \\ b_n - a_n b_0 \end{bmatrix}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \dots \\ \hat{x}_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

- Elde edilen durum ve çıkış denklemleri de GÖZLENEBİLİR KANONİK FORM' dur.

!NOT:Gözlenebilir kanonik formda elde edilen durum denklemlerinde nxn sistem matrisi **Kontrol edilebilir** kanonik formda elde edilen nxn sistem matrisinin **Transpoze**'sidir.

KÖŞEGEN KANONİK FORM (Diagonal Canonical Form):

$G(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)}$ darbe transfer fonksiyonu ile verilen sistemin kutupları farklı ise (katlı değil ise) durum-uzay gösterimi köşegen kanonik formda gösterilebilir.

darbe transfer fonksiyonu; $\dfrac{Y(z)}{U(z)} = \dfrac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$ olarak düzenlenir ise ve tüm payda kökleri (kutuplar) farklı olduğuna göre, $\dfrac{Y(z)}{U(z)}$ basit kesirlere ayrılmış olarak aşağıda verildiği gibi yazılabilinir.

$\dfrac{Y(z)}{U(z)} = b_0 + \dfrac{c_1}{z-p_1} + \dfrac{c_2}{z-p_2} + \dots + \dfrac{c_n}{z-p_n}$ bu ifade,

$$Y(z) = U(z) b_0 + \underbrace{\frac{c_1}{z-p_1} U(z)}_{X_1(z)} + \underbrace{\frac{c_2}{z-p_2} U(z)}_{X_2(z)} + \dots + \underbrace{\frac{c_n}{z-p_n} U(z)}_{X_n(z)}$$

durum değişkenleri olarak tanımlanır ise;

$$X_1(z) = \frac{1}{z-p_1}U(z)$$

$$X_2(z) = \frac{1}{z-p_2}U(z)$$

...

$X_n(z) = \dfrac{1}{z-p_n}U(z)$ bu denklemlerden sırası ile,

$zX_1(z) = p_1X_1(z) + U(z) \Rightarrow \quad x_1(k+1) = p_1x_1(k) + u(k)$ 1. durum denklemi

$zX_2(z) = p_2X_2(z) + U(z) \Rightarrow \quad x_2(k+1) = p_2x_2(k) + u(k)$ 2. durum denklemi

...

$zX_n(z) = p_nX_n(z) + U(z) \Rightarrow \quad x_n(k+1) = p_nx_n(k) + u(k)$ n. durum denklemi olarak ifadeler yazılır.

çıkış denklemi;

$$Y(z) = b_0U(z) + c_1X_1(z) + c_2X_2(z) + \ldots + c_nX_n(z) \Rightarrow$$

$\boxed{y(k) = b_0u(k) + c_1x_1(k) + c_2x_2(k) + \ldots + c_nx_n(k)}$ olarak elde edilir.

durum denklemlerini vektör-matris formda aşağıda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \ldots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & . & \ldots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \ldots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Ve çıkış denklemini $y(k) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \ldots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0u(k)$ yazılır.

<u>ÖRNEK:</u> $y(k+2) = u(k) + 1.7y(k+1) - 0.72y(k)$ fark denklemi ile verilen sistemin durum denklemlerini köşegen kanonik formda elde ediniz.

verilen fark denkleminden transfer fonksiyonu elde edilir ise;

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^2 - 1.7z + 0.72} = \frac{1}{(z-0.9)(z-0.8)} = \frac{A}{z-0.9} + \frac{B}{z-0.8} \Rightarrow \text{A=10,B=-10 dur}$$

$$\frac{Y(z)}{\cancel{U(z)}}=\frac{10}{z-0.9}U(z)-\frac{10}{z-0.8}U(z)$$ basit kesre ayrılır.

$$\frac{Y(z)}{\cancel{U(z)}}=\underbrace{\frac{10}{z-0.9}U(z)}_{X_1(z)}-\underbrace{\frac{10}{z-0.8}U(z)}_{X_2(z)}$$

$$X_1(z)=\frac{U(z)}{z-0.9}\Rightarrow zX_1(z)=U(z)+0.9X_1(z)$$

$$X_2(z)=\frac{U(z)}{z-0.8}\Rightarrow zX_2(z)=U(z)+0.8X_2(z)$$ ters z dönüşümü alınırsa;

$x_1(k+1)=u(k)+0.9x_1(k)$ 1. Durum denklemi

$x_2(k+1)=u(k)+0.8x_2(k)$ 2. Durum denklemi.

$y(k)=10x_1(k)-10x_2(k)$ Çıkış denklemi.

durum denklemlerini vektör-matris formda

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(k)$$ yazılır.

iç değişkenler birbirinden bağımsız olarak hesaplanabilir.

çıkış denklemi $y(k)=[10\quad -10]\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_1(k)\end{bmatrix}$ olarak elde edilir.

Jordan Kanonik Form: Verilen transfer fonksiyonunda , $z=p_1$'de m katlı kök olsun ve diğer kutuplar birbirinden farklı olsun. Bu şartlar altında durum denklemi ve çıkış denklemi aşağıda verildiği gibidir.

$$\left[\begin{array}{c}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\\\vdots\\x_m(k+1)\\\hline x_{m+1}(k+1)\\\vdots\\x_n(k+1)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccccc|ccc}P_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\0 & P_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \vdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \dots & P_1 & 0 & \dots & 0\\\hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & P_{m+1} & \dots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & P_n\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}x_1(k)\\x_2(k)\\.\\x_m(k)\\\hline x_{m+1}(k+1)\\\vdots\\x_n(k+1)\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}0\\0\\.\\1\\\hline 1\\\vdots\\1\end{array}\right]u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \dots \\ x_n(k) \end{bmatrix}+b_0u(k)$$ Kaynak:discrete time control systems Katsuhiko Ogata

$$Y(z)=b_0U(z)+\frac{c_1}{(z-p_1)^m}U(z)+\frac{c_2}{(z-p_1)^{m-1}}U(z)+\dots+\frac{c_m}{z-p_1}U(z)+\frac{c_{m+1}}{z-p_{m+1}}U(z)$$

$$+\frac{c_{m+2}}{z-p_{m+2}}U(z)+\dots+\frac{c_n}{z-p_n}U(z)$$

$$X_1(z)=\frac{1}{(z-p_1)^m}U(z) \Rightarrow \qquad \frac{X_1(z)}{X_2(z)}=\frac{1}{z-p_1}$$

$$X_2(z)=\frac{1}{(z-p_1)^{m-1}}U(z) \qquad \frac{X_2(z)}{X_3(z)}=\frac{1}{z-p_1}$$

$$\dots \qquad\qquad \dots$$

$$X_m(z)=\frac{1}{z-p_1}U(z) \qquad \frac{X_{m-1}(z)}{X_m(z)}=\frac{1}{z-P_1}$$

kalan (n-m) adet durum değişkenler;

$$X_{m+1}(z)=\frac{1}{z-p_{m+1}}U(z)$$

$$X_{m+2}(z)=\frac{1}{z-p_{m+2}}U(z)$$

$$\vdots$$

$$X_n(z)=\frac{1}{z-p_n}U(z)$$

LİNEER DÖNÜŞÜMÜN DURUM DENKLEMLERİNE UYGULANMASI

Benzerlik Dönüşümü

Ayrık-zaman sistemlerin durum modellerinin elde edilmesinde farklı modellerin , kontrol edilebilir kanonik form, gözlenebilir kanonik form, köşegen kanonik form vb.... gibi elde edilebilineceği daha önce ifade edilmiştir.

Benzerlik dönüşümü yardımı ile verilen bir sistemin çok farklı sayıda ayrık-zaman durum modeli elde edilebilinir.

Durum denklemleri; $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ ve

Çıkış denklemi $y(k) = Cx(k) + Du(k)$ olarak verilsin.

Bu denklemlere lineer dönüşüm, $x(k) = Px'(k)$ uygulansın. $x(k+1) = Px'(k+1)$ olur.

$P \to nxn$ matris olmak üzere, $x'(k)$ yeni durum vektörüdür.

Burada, **<u>P matrisi tersi alınabilir ve nxn boyutlu sistem matrisi A ile aynı boyutta matris olmak zorundadır.</u>** Lineer dönüşümü durum denklemlerine uygularsak,

$Px'(k+1) = APx'(k) + Bu(k)$ $\forall$ taraf P^{-1} ile çarpılır ise,

$$\left.\begin{aligned} x'(k+1) &= P^{-1}APx'(k) + P^{-1}Bu(k) \\ y(k) &= CPx'(k) + Du(k) \end{aligned}\right\} \text{yeni durum denklemleri, elde edilir.}$$

$A_p = P^{-1}AP, B_p = P^{-1}B, C_p = CP, D_p = D$ olarak tanımlanırsa,

$$\left.\begin{aligned} x'(k+1) &= A_p x'(k) + B_p u(k) \\ y(k) &= C_p x'(k) + D_p u(k) \end{aligned}\right\} \text{olarak yeni durum denklemleri yazılır.}$$

Böylece tersi olan her P matrisi için farklı durum modeli elde edilebilinir. Lineer dönüşümde sistemin karakteristik denklemi değişmez.

A matrisinin karakteristik denklemi;
$|zI - A| = (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n) = 0$ dır

Özellik: $|P^{-1}||A||P| = |A|$ olduğu hatırlanır ise, A_p matrisinin karakteristik denklemi;

$$|zI - A_p| = |zP^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}||zI - A||P|$$

$= |zI - A|$ Görüldüğü her iki sistem matrislerine ait karakteristik denklemler eşittir.

ÖRNEK:

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0.8 & 1\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(k)$$

$$X(k)=PX'(k)$$
$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}$$

Durum değişken modeli verilen sistemin lineer benzerlik dönüşümü yardımı ile yeni durum denklemini elde ediniz.

Çözüm: Lineer dönüşüm matris , 2x2 boyutunda tersi alınabilen P matrisi keyfi olarak seçilir.

$P=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ olarak seçilsin. $P^{-1}=\dfrac{[cof[P]]^T}{|P|}$ $P^{-1}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ -0.5 & 0.5\end{bmatrix}$

$Adjo\text{int}\ Matris\ (Ek\ matris)\ Adj(P)=cof\,[P]\rightarrow$ *işaretli minör*

$$A_p=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ -0.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.8 & 1\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A_p=\begin{bmatrix}1.35 & 0.55\\ -0.45 & 0.35\end{bmatrix}$$

$$B_p=P^{-1}B=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ -0.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}$$

$$C_p=CP=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$$ yeni durum denklemini yazarsak;

$$x'(k+1)=\begin{bmatrix}1.35 & 0.55\\ -0.45 & 0.35\end{bmatrix}x'(k)+\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}x'(k)$$

$$|zI-A|=\begin{vmatrix}z-0.8 & -1\\ 0 & z-0.9\end{vmatrix}=0\Rightarrow z^2-1.7z+0.72=0$$

İki karakteristik denklem eşittir.

$$|zI-A_p|=\begin{vmatrix}z-1.35 & -0.55\\ 0.45 & z-0.35\end{vmatrix}=0\Rightarrow z^2-1.7z+0.72=0$$

Böylece tersi olan her P matrisi için farklı durum modeli elde edilebilinir. Lineer dönüşümde sistemin karakteristik denklemi değişmez.

Lineer Dönüşüm İle Sistem Matrisi A'nın Köşegen Hale Getirilmesi

Lineer Dönüşüm sistem durum denklemlerinin öz-değerlerini değiştirmez. A matrisini *diagonal (köşegen)* hale getiren özel lineer dönüşüm matrisi elde edilecektir.

Tanım: Amatrisi nxn boyutlu ve öz-değerleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ olsun. Öz-vektörler her bir öz-değer için tanımlanırlar ve $n x 1$ boyutludur. $\forall$ hangi bir λ_i **öz-değerine** ilişkin **öz-vektör** $z_{iö}$ ise

$$Az_{iö} = \lambda_i z_{iö} \quad => \quad [\lambda_i I - A]\underbrace{z_{iö}}_{\text{öz vektör}} = 0$$

$|zI - A| = 0$ ⟶ öz değer

denkleminin çözümleri olan $z_i(nxn)$ boyutundaki vektördür. Her öz-değer için bir öz-vektör bulunur.

NoT: Sistem matrisi kontrol edilebilir formda ise,

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_3^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$ λ_1, λ_2 ve λ_3 özdeğerlerdir.

λ_1 için $z^T{}_{1öT} = [v_{11} \quad v_{21} \quad \dots \quad v_{n1}]$

λ_2 için $z^T{}_{2öT} = [v_{12} \quad v_{22} \quad \dots \quad v_{n2}]$

...

λ_n için $z^T{}_{nöT} = [v_{1n} \quad v_{2n} \quad \dots \quad v_{nn}]$

nxn boyutlu **A** matrisinin bütün öz-değerlerinin ***basit ve gerçel olması koşulu halinde*** öz-vektörlerden oluşan P lineer dönüşüm matrisi ;

$$P_{öz} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ \underbrace{v_{n1}}_{z_{1öT}} & \underbrace{v_2}_{z_{2öT}} & \dots & \underbrace{v_{nn}}_{z_{nöT}} \end{bmatrix}$$

1. sütun 1. öz-vektör, 2. sütun 2. öz-vektöre .... aittir.

$P_{öz}$'e **Benzerlik dönüşüm** ya da **model matris** denir.

ÖRNEK:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$ Durum denklemi ile verilen sistem lineer benzerlik dönüşümü ile

sistem matrisi **A'** yı köşegen hale getiriniz.

ÇÖZÜM: Önce A matrisinin **Öz-değer** ve **Öz-vektörleri** bulunur.

A-matrisinin karakteristik denklemi; $|zI - A| = 0$ dır. *Karakteristik denklem kökleri öz-değerlerdir.*

$$\begin{vmatrix} z-0.5 & 0 & -1 \\ 0 & z+0.5 & -1 \\ 0 & 0 & z+0.7 \end{vmatrix} = 0 = (z-0.5)(z+0.5)(z+0.7) = 0 \Rightarrow$$

öz-değerler;

$$\lambda_1 = z_1 = 0.5$$
$$\lambda_2 = z_2 = -0.5$$
$$\lambda_3 = z_3 = -0.7$$

Her bir öz-değere ilişkin öz-vektörler aşağıda sırası ile hesap edilir.

$$z_{1öz} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix}_{z_1=\lambda_1} \quad z_{2öz} = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix}_{z_2=\lambda_2} \quad z_{3öz} = \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix}_{z_3=\lambda_3}$$

Öz-vektörler belirlensin. $[\lambda_i I - A] z_{iöz} = 0$

matrisi tersi alınamaz değerler lineer bağımlı

1. öz değer

- $\lambda_1 = z_1 = 0.5 \Rightarrow [\lambda_1 I - A] z_{1öz} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -0.7 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$-v_{31} = 0$ $v_{21} - v_{31} = 0$ $1.2v_{31} = 0$ denklemleri değerlendirilir ise,

$v_{31} = 0$

$v_{21} = 0$ olur. Ve v_{11}'i gelişi güzel alınabilirş

$v_{11} = 1$ olsun,

$\lambda_1 = 0.5$ öz-değeri için öz-vektör $z_{1öz} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dir.

2. öz değer

- $\lambda_2 = z_2 = -0.5$ için ,

$$\Rightarrow \left\{ -0.5\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0.5&0&1\\0&-05&1\\0&0&-0.7\end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix}v_{12}\\v_{22}\\v_{32}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&0&-1\\0&0&0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{12}\\v_{22}\\v_{32}\end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$-v_{12} - v_{32} = 0$, $-v_{32} = 0$ ve $0.2v_{32} = 0$ denklemleri sırası ile değerlendirilir.

ise $v_{12} = v_{32} = 0$, $v_{22} = 1$ gelişi güzel seçilir,

$\lambda_2 = -0.5$ öz-değeri için öz-vektör $z_{2öz} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

---

3. öz değer

- $\lambda_3 = z_3 = -0.7$ öz-değeri için öz-vektörü belirlersek;

$$\Rightarrow \left\{ -0.7\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0.5&0&1\\0&-05&1\\0&0&-0.7\end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix}v_{13}\\v_{23}\\v_{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1.2&0&-1\\0&-0.2&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{13}\\v_{23}\\v_{33}\end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$-1.2v_{13} - v_{33} = 0$, $-0.2v_{23} - v_{33} = 0$ denklemler yazılır. $v_{23} = -5v_{33}$, $v_{33} = -1.2v_{13}$ denklemleri sırası ile değerlendirilir. $v_{33} = 0.24$ seçilir ise $v_{13} = -0.2$, $v_{23} = -1.2$ olur.

$\lambda_3 = -0.7$ öz-değeri için öz-vektör $z_{3öz} = \begin{bmatrix}-0.2\\-1.2\\0.24\end{bmatrix}$

$$P_{öz} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ . & . & . & . \\ \underbrace{v_{n1}}_{z_{1öz}} & \underbrace{v_{n2}}_{z_{2öz}} & \cdots & \underbrace{v_{nn}}_{z_{nöz}} \end{bmatrix}$$ olduğu göz önüne alınarak öz-vektörler yerlerine yazılır ve

$$P_{öz} = \begin{bmatrix}1&0&-0.2\\0&1&-1.2\\0&0&0.24\end{bmatrix}$$ öz-vektörlerden oluşan dönüşüm matrisi yada model matris elde edilir.

$$P_{öz}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{0.2}{0.24}\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & \frac{1}{0.24}\end{bmatrix} \Rightarrow ve \quad \begin{matrix} x'(k+1)=P_{öz}^{-1}AP_{öz}x'(k)+P_{öz}^{-1}Bu(k)\\ y(k)=CP_{öz}x'(k)+Du(k)\end{matrix}$$

$$P_{öz}^{-1}AP_{öz}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{0.2}{0.24}\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & \frac{1}{0.24}\end{bmatrix}}_{P^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 1\\ 0 & -0.5 & 1\\ 0 & 0 & -0.7\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & -0.2\\ 0 & 1 & -1.2\\ 0 & 0 & 0.24\end{bmatrix}}_{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0\\ 0 & -0.5 & 0\\ 0 & 0 & -0.7\end{bmatrix}$$

$$P_{öz}^{-1}B=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{0.2}{0.24}\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & \frac{1}{0.24}\end{bmatrix}}_{P^{-1}}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{0.2}{0.24}\\ 5\\ \frac{1}{0.24}\end{bmatrix} \qquad CP_{öz}=\underbrace{[0 \;\; 0 \;\; 1]}_{C}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & -0.2\\ 0 & 1 & -1.2\\ 0 & 0 & 0.24\end{bmatrix}}_{P}=[0 \;\; 0 \;\; 0.24]$$

Çıkışta 1 ve 2 görünmüyor

Hepsi kontrol edilebilir.

$$\begin{bmatrix}x_1'(k+1)\\ x_2'(k+1)\\ x_3'(k+1)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0\\ 0 & -0.5 & 0\\ 0 & 0 & -0.7\end{bmatrix}}_{P^{-1}AP}\begin{bmatrix}x_1'(k)\\ x_2'(k)\\ x_3'(k)\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{0.2}{0.24}\\ 5\\ \frac{1}{0.24}\end{bmatrix}}_{P^{-1}B}u(k)$$ durum denklemleri ve

Öz-vektör hesabında **lineer bağımlı denklemlerden** dolayı öz-değerler için hesap edilen öz-vektörlerde bazı değerler keyfi seçilmek zorundadır. Dolayısı ile her seçilen değere bağlı olarak $P_{öz}$ dönüşüm matrisi değişecektir. Ancak **sistem matrisi A** yine **diagonal** (Köşegen) olacaktır. $P_{öz}^{-1}AP_{öz}$ aynı kalır ancak $P_{öz}^{-1}B$ ve $CP_{öz}$ matrisleri değişir.

Durum Denklemlerinden Transfer Fonksiyonunun Elde Edilmesi:

Sisteme ait durum denklemi, $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$ ve çıkış denklemi

$y(k)=Cx(k)+Du(k)$ *olarak verilsin.*

***Durum denkleminin z-dönüşümü alınırsa*;**

$zX(z)-zX(0)=AX(z)+BU(z)$ transfer fonksiyonu elde edilirken ilk koşullar sıfır alınır. $X(0)$;

$[zI-A]X(z)=BU(z) \Rightarrow$

$X(z)=[zI-A]^{-1}BU(z)$

HATIRLATMA!

$$Z\{f(t+T)\}=zF(z)-zF(0)$$

$$Z\{f(t+nT)\}=z^nF(z)-z^nF(0)-z^{n-1}F(1)-...-zF(n-1)$$
$$=z^nF(z)-z^n\sum_{k=0}^{n-1}F(k)z^{-k}$$

$y(k)=Cx(k)+Du(k) \quad \Rightarrow \quad Y(z)=CX(z)+DU(z)$ $X(z)$ ifadesi $Y(z)$ te yerine koyulur.

$$Y(z)=\{C[zI-A]^{-1}B+D\}U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=T(z)=c[zI-A]^{-1}B+D$$

$$T(z)=C\frac{\overbrace{[cof(zI-A)]^T}^{AdjA}B+|zI-A|D}{|zI-A|}=\frac{G(z)}{1+G(z)H(z)}$$

Lineer zamanla değişmeyen bir sistem için sistem matrisi A biliniyor ise, yukarıda elde edilmiş olan transfer fonksiyonunu $T(z)$'den, $F(z)=1+G(z)H(z)=0$ karakteristik denklemi için ve $|zI-A|=|zI-A_p|$

$$|zI-A|=1+G(z)H(z)=0 \quad \textit{Karakteristik Denklem.}$$

İfadesi yazılabilir.

ÖRNEK:

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1.35 & 0.55\\ -0.45 & 0.35\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0.5\\ 0.5\end{bmatrix}u(k) \quad y(k)=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}x(k)$$ durum denklemi ile

verilen sistemin transferfonksiyonunu elde ediniz.

$$[zI-A]=\begin{bmatrix}z-1.35 & -0.55\\ 0.45 & z-0.35\end{bmatrix} \quad |zI-A|=z^2-1.7z+0.72$$

cof:kofaktör $\quad cof[zI-A]=\begin{bmatrix}z-0.35 & -0.45\\ 0.55 & z-1.35\end{bmatrix} \quad [zI-A]^{-1}=\dfrac{[cof[zI-A]]^T}{|zI-A|}$

$$=\frac{1}{z^2-1.7z+0.72}\begin{bmatrix} z-0.35 & 0.55 \\ -0.45 & z-1.35 \end{bmatrix}$$ **D=0** olduğundan;

$$T(z)=C\left[zI-A\right]^{-1}B=\frac{1}{z^2-1.7z+0.72}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} z-0.35 & 0.55 \\ -0.45 & z-1.35 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}$$

$$\boxed{T(z)=\frac{1}{z^2-1.7z+0.72}}$$

Durum Denklemlerinin Çözümü :

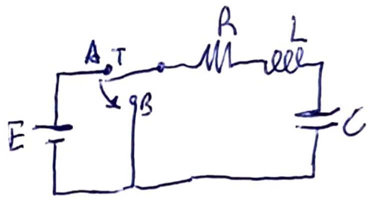
İlk durumlar x(0) ve u(j)j=0,1,2,... biliniyor ise,

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$$

$$y(k)=Cx(k)+Du(k)$$

lineer-zamanla değişmeyen durum denklemlerinin çözümünü elde etmeye çalışılsın.

Çözüm elde edilirken sırası ile k=0,1,2,... değerleri verilsin.



örnekleme zamanı (T)

k=0 $\quad x(1)=Ax(0)+Bu(0)$

k=1 $\quad x(2)=Ax(1)+Bu(1)$

$\vdots \quad\quad =A^2x(0)+ABu(0)+Bu(1)$

k=2 $\quad x(3)=A^3x(0)+A^2Bu(0)+ABu(1)+Bu(2)$

Çözüme devam edilirse, k. terim için

$$\boxed{x(k)=A^k x(0)+\sum_{j=0}^{k-1}A^{(k-1-j)}Bu(j)}$$ elde edilir.

eğer $\boxed{A^k=\phi(k)}$ olarak tanımlanırsa, $\phi(k)$ **Durum geçiş matrisi olarak adlandırılır.**

$$\boxed{x(k)=\phi(k)x(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\phi(k-1-j)Bu(j)}$$ ifadesi elde edilir.

Bu ifade y(k)'da yerine koyulur ise, çıkış ifadesi elde edilir.

$$y(k)=C\phi(k)x(0)+\sum_{j=0}^{k-1}C\phi(k-1-j)Bu(j)+Du(k)$$

ÖRNEK:

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(k) \quad \text{ve} \quad x(0)=0, u(k)=1 \quad \text{k=0,1,...}$$

$y(k)=\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}x(k)$ olarak verildiğine göre x(k) ve y(k) değerlerini ardışıl olarak elde ediniz.

$$x(1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x(0)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(0) => x(1)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$y(1)=\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} => y(1)=1$$

$$x(2)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x(1)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(1)=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

$$y(2)=\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} => y(2)=1$$

$$x(3)=\begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix} \quad y(3)=-1$$

$$x(4)=\begin{bmatrix}5\\-10\end{bmatrix} \quad y(4)=5$$

$\vdots$

Formül kullanarak hesaplansın.

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 6 & 9\end{bmatrix}$$

k=2 için hesap yapalım:

$$x(2)=A^2x(0)+\sum_{j=0}^{1}A^{1-j}Bu(j)$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 6 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}}_{A^1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}}_{I_{BIRIMMATRIS}}}^{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=0+\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=>$$

$\boxed{x(2)=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}}$ $\qquad y(2)=\underbrace{\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}}_{C}\overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix}-2 & -3\\6 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}}_{A^2\quad x(0)}}^{\phi}+\sum_{j=\phi}^{1}\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix}^{1-j}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}1$

$$=\phi+\begin{bmatrix}-2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=0+\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{y(2)=1}$$

Durum Geçiş Matrisinin z-Dönüşüm Metodu ile Elde Edilmesi:

$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$ olarak verilsin. * <u>Durum geçiş matrisi sitemin serbest davranışı ile ilgilidir</u>.u(k)=0 alınır.

<u>Durum geçiş matrisi sitemin serbest davranışı ile ilgilidir</u>.u(k)=0alınır (*kaynak yok*).

$x(k+1)=Ax(k) \Rightarrow zX(z)-zX(0)=AX(z)\underbrace{+Bu(z)}_{0}\Rightarrow$

$X(z)=z\left[zI-A\right]^{-1}X(0)$ ve

$x(k)=\mathbb{Z}^{-1}\{X(z)\}=\mathbb{Z}^{-1}\left\{z\left[zI-A\right]^{-1}\right\}X(0)$ elde edilir.

$$x(k)=\mathbb{Z}^{-1}\left\{z\left[zI-A\right]^{-1}\right\}X(0) \Leftrightarrow x(k)=A^k x(0)=\phi(k)x(0)$$

$$x(k)=\phi(k)X(0)+\underbrace{\sum_{j=0}^{k-1}\phi(k-1-j)B\overbrace{u(j)}^{0 \text{ olduğundan}}}_{0 \text{ olur}} \quad \text{ve}$$

$x(k)=\phi(k)x(0)$ dır. Ve $x(k)=\mathbb{Z}^{-1}\left\{z\left[zI-A\right]^{-1}\right\}X(0)$ denklemiile karşılaştırılır=>

$$\phi(k)=\mathbb{Z}^{-1}\left\{z\left[zI-A\right]^{-1}\right\}$$ **Durum Geçiş Matrisi** elde edilir.

<u>ÖRNEK:</u>

$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix}$ verildiğine göre durum geçiş matrisini bulunuz.

$$[zI-A]=\begin{bmatrix} z & -1 \\ 2 & z+3 \end{bmatrix} \text{ ise } |zI-A| = z^2+3z+2=(z+1)(z+2)$$

$$[zI-A]^{-1}=\frac{1}{(z+1)(z+2)}\begin{bmatrix} (z+3) & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{z+1}-\frac{1}{z+2} & \frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2} \\ \frac{-2}{z+1}+\frac{2}{z+2} & \frac{-1}{z+1}+\frac{2}{z+2} \end{bmatrix}$$

$$\phi(k)=\mathbb{Z}^{-1}\left\{z[zI-A]^{-1}\right\}=\mathbb{Z}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{2z}{z+1}-\frac{z}{z+2} & \frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2} \\ \frac{-2z}{z+1}+\frac{2z}{z+2} & \frac{-z}{z+1}+\frac{2z}{z+2} \end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{bmatrix} 2(-1)^k-(-2)^k & (-1)^k-(-2)^k \\ -2(-1)^k+2(-2)^k & -(-1)^k+2(-2)^k \end{bmatrix}$$

Hatırlatma: ters z-dönüşüm için

$$x(kT)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_i)^m X(z)z^{k-1}\right]_{z=z_i}$$

Hatırlatma:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$\phi(k)$ **Durum geçiş matrisinin matris özellikleri:**

1) $\phi(0)=I=A^0$

2) $\phi(k_1+k_2)=A^{k_1+k_2}=A^{k_1}A^{k_2}=\phi(k_1)\phi(k_2)$

3) $\phi(-k)=A^{-k}=\left[A^k\right]^{-1}=\phi(k)^{-1}$ veya $\phi(k)=\phi(-k)^{-1}$

Sürekli-zaman Durum Denklemlerinden Zamanla Değişmeyen Ayrık-zaman Durum Denklemlerine Geçiş

Sürekli sistem durum denklemleri;

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$y(t) = Cx(t) + Du(t)$ *olarak verilsin.*

$\dot{x}(t) - Ax = Bu$ şeklinde yazıp her iki tarafı e^{-At} ile çarparsak;

$$\underbrace{e^{-At}(\dot{x}(t) - Ax)}_{*} = e^{-At}Bu(t) \quad \textbf{not:} \begin{cases} \underbrace{\frac{d}{dt}\left[e^{-At}x(t)\right]}_{*} = -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}\dot{x}(t) \\ = e^{-At}\left[\dot{x}(t) - Ax(t)\right] \end{cases}$$

olmak üzere,

$\frac{d}{dt}\left[e^{-At}x(t)\right] = e^{-At}Bu(t)$ yazılabilir.

Bu ifadenin 0-t aralığında integrali alınır ise,

$e^{-At}x(t) = x(0) + \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$ ve her tarafı e^{At} ile çarparsak;

$$\boxed{x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{+A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

$e^{At} = \phi(t)$ tanımlanır ve **durum geçiş matrisi** olarak isimlendirilir.

$x(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$ $\{t_0 = 0\}$ için genel çözüm elde edilir.

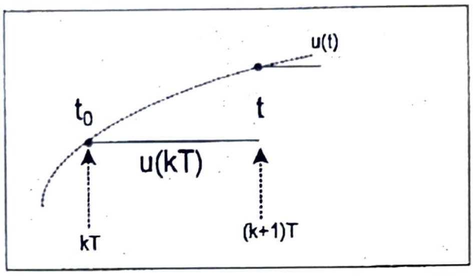
$t_0 \neq 0$ için $x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)}}_{\phi(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

Çıkış ifadesi ise, elde edilen **x(t)** genel çözüm **y(t)**ifadesinde yerine koyulur ise,

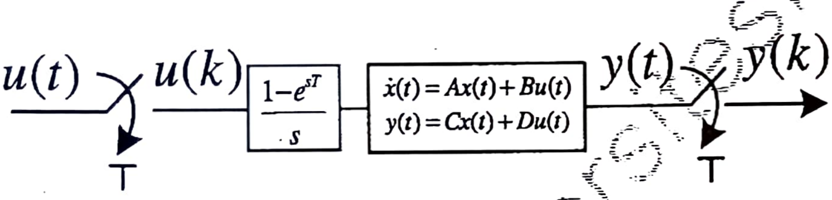
$y(t) = C\left[\phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau\right] + D(t)u(t)$ elde edilir.

Ayrık-zaman Durum denklemlerinin elde edilmesi:

İki örnekleme zamanaralığını $kT \le t < kT+T$ düşünelim. Bu amaç için $t_0 = kT$ ve $t = kT+T$ alınır ve bu aralıkta kontrol işareti $u(\tau) = u(kT)$ sabit kabul ederek (**ZOH**'lu yaklaşım)



Sıfırıncı-dereceden tutuculu Sürekli zaman sisteme ait durum denklemlerine ait şekil aşağıda verilmiştir.



$$x\left[(k+1)T\right] = \phi(kT+T-kT)x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \phi\left[(k+1)T-\tau\right]Bu(kT)d\tau$$

$$x\left[(k+1)T\right] = \phi(T)x(kT) + \underbrace{\int_{kT}^{(k+1)T} \phi\left[(k+1)T-\tau\right]B}_{\gamma(T)}u(kT)d\tau$$

integralın dışında

$$x\left[(k+1)T\right] = \phi(T)x(kT) + \gamma(T)u(kT)$$

$u(kT)$ giriş örnekleme aralığında sabit alındığından, integral ifadesi;

$$\gamma(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} \phi\left[(k+1)T-\tau\right]Bd\tau$$ ***olarak tanımlanır;***

$$\gamma(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(k+1)T}e^{-A\tau}d\tau$$ dir. $\gamma(T) = e^{A(k+1)T}\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau}Bd\tau$ veya örnekleme aralığı için

k=0 alınır ise $0 \le t \le T$ aralığı için;

$$\boxed{\gamma(T) \triangleq e^{AT}\left[\int_0^T e^{-A\tau}d\tau\right]B \quad \text{Olarak elde edilir.}}$$

$$\gamma(T) \triangleq e^{AT}\left[\int_0^T e^{-A\tau}d\tau\right]B \rightarrow$$

$\phi(t) = e^{At}$ ve $\phi(T) = e^{AT}$ olduğu hatırlanır ise,

$\boxed{\phi(T) = \phi(t)\big|_{t=T}}$ dir ve

Sürekli zaman durum denklemlerinden ayrık zaman durum denklemleri

$$x[(k+1)T] = \phi(T)x(kT) + \gamma(T)u(kT)$$
$$y(kT) = Cx(kT) + Du(kT)$$

Tam ayrıklaştırma elde edilir.

Sürekli zamanda Durum Geçiş matrisinin elde edilmesi:

Sistemin durum geçiş matrisi sadece serbest davranışı ile ilgilidir. Çözümde **u(t)=0** alınır.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \Rightarrow sx(s) - x(0) = Ax(s) \Rightarrow sx(s) - Ax(s) = x(0) \Rightarrow$$

$x(s) = [sI - A]^{-1}x(0)$ elde edilir. Ters Laplace alınır ise, $x(t) = e^{At}x(0) + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{0}$

$$x(t) = \ell^{-1}\{x(s)\} \Rightarrow x(t) = \ell^{-1}\left[[sI - A]^{-1}\right]x(0)$$

serbest davranış için elde edilen çözüm **x(t)** ile **u(t)=0** için genel çözüm için elde edilen **x(t)** karşılaştırılır ise,

$x(t) = \phi(t)x(0)$ olduğu görülür.

Buradan,

Sürekli zaman durum geçiş matrisi,

$$\phi(t) = \ell^{-1}\left\{[sI - A]^{-1}\right\} = e^{At} \text{ dir.}$$

Yaklaşık (Basit) Ayrıklaştırma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \rightarrow \frac{x(k+1) - x(k)}{T} = Ax(k) + Bu(k)$$

$$x(k+1) = TAx(k) + TBu(k) + Ix(k)$$

$$x(k+1) = \underbrace{(I + TA)}_{\phi(T)}x(k) + \underbrace{TB}_{\gamma(T)}u(k)$$

Örnekleme zamanı küçük olduğunda yakın çıkar. Büyük olursa hata artar.

Sürekli zaman sistem durum geçiş matrisinden ayrık zaman sistem matrisi $\phi(T)$,

Ayrık zaman durum geçiş matrisi,

$$\phi(T) = \phi(t)\big|_{t=T} \text{ ile elde edilir.}$$

Örnek: Sürekli zamanda;

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

$x(k+1)=(AT+I)x(k)+BTu(k)$ (Yaklaşık)

denklemleri ile verilen sistemin Ayrık-zam durum

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

$x(k+1)=\left\{\begin{bmatrix}-T & 2T\\ 0 & -2T\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}x(k)+\begin{bmatrix}T\\ 0\end{bmatrix}u(k)$

denklemlerini elde ediniz.

$x(k+1)=\begin{bmatrix}1-T & 2T\\ 0 & 1-2T\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}T\\ 0\end{bmatrix}u(k)$ (Yaklaşık)

Çözüm:

İşlem basamakları kısaca aşağıda verildiği gibidir.

1) $\phi(t)$,sürekli zaman ***durum geçiş matrisi*** bulunur, sonra ***t=T*** verilerek ayrık zaman ***durum geçiş matrisi*** $\phi(T)$ elde edilir..

2) $\gamma(T)$ ifadesi, $\gamma(T)\triangleq e^{AT}\left[\int_0^T e^{-A\tau}d\tau\right]B$ ile hesaplanır.

$\phi(T)$ ve $\gamma(T)$ ifadeleri kullanılarak ayrık-zaman durum denklemleri,

$x[(k+1)T]=\phi(T)x(kT)+\gamma(T)u(kT)$ olarak elde edilir.

Önce, *sürekli zaman durum geçiş matrisi,* $\phi(t)$ elde edilir.

$$[sI-A]=\begin{bmatrix}s+1 & -2\\ 0 & s+2\end{bmatrix}\Rightarrow[sI-A]^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{2}{(s+1)(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

NOT: $\frac{2}{(s+1)(s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}=\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s+2}$ *dir.*

A=2,B=-2

$$\phi(t)=\ell^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]=\begin{bmatrix}e^{-t} & 2e^{-t}-2e^{-2t}\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$$ ***durum geçiş matrisi*** olarak elde edilir.

doğrulama için t=0 yazılır birim matris elde

ÖZELLİK: $\phi(0) = I$ *olmalıdır.* $\phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *olur.*

$$\phi(T) = \phi(t)\Big|_{t=T} \Rightarrow \phi(T) = \begin{bmatrix} e^{-T} & 2e^{-T} - 2e^{-2T} \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$e^{-A\tau} = \phi(-\tau) = \begin{bmatrix} e^{-T} & 2e^{-T} - 2e^{-2T} \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}_{T=-\tau}$$

$$\gamma(T) = \phi(T)\left[\int_0^T e^{-A\tau} d\tau\right] B = \begin{bmatrix} e^{-T} & 2e^{-T} - 2e^{-2T} \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} \left\{ \int_0^T \begin{bmatrix} e^{\tau} & 2e^{\tau} - 2e^{2\tau} \\ 0 & e^{2\tau} \end{bmatrix} d\tau \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^T \begin{bmatrix} e^{\tau} & 2e^{\tau} - 2e^{2\tau} \\ 0 & e^{2\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \int_0^T e^{\tau} d\tau & \int_0^T \left(2e^{\tau} - 2e^{2\tau}\right) d\tau \\ 0 & \int_0^T e^{2\tau} d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\tau} & 2e^{\tau} - e^{2\tau} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{2\tau} \end{bmatrix}_0^T$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-T} & 2e^{-T} - 2e^{-2T} \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\tau} & 2e^{\tau} - e^{2\tau} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{2\tau} \end{bmatrix}_0^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-T} & 2e^{-T} - 2e^{-2T} \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{T} - 1 & 2e^{T} - e^{2T} - 1 \\ 0 & \frac{1}{2}e^{2T} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} & 2 - e^{T} - e^{T} + e^{-T} - e^{-T} - 1 + e^{-2T} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-T} - \frac{1}{2}e^{-2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma(T) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-T} & 2e^{-T} - 2e^{-2T} \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ 0 \end{bmatrix} u(kT)$$

Aynı $\gamma(T)$ bağıntısı ikinci yoldan elde edilebilir.

$$\gamma(T) = e^{AT}\int_0^T e^{-A\tau}Bd\tau = \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bd\tau$$

değişken değiştirmesi yapılır ise, $T-\tau=\lambda$ dersek, $-d\tau = d\lambda$ (***T sabit***) ve

$\tau = 0 \Rightarrow \lambda = T$

$\tau = T \Rightarrow \lambda = 0$ ***sınır değerler göz önüne alınır ve*** $d\tau = -d\lambda$ yazılır

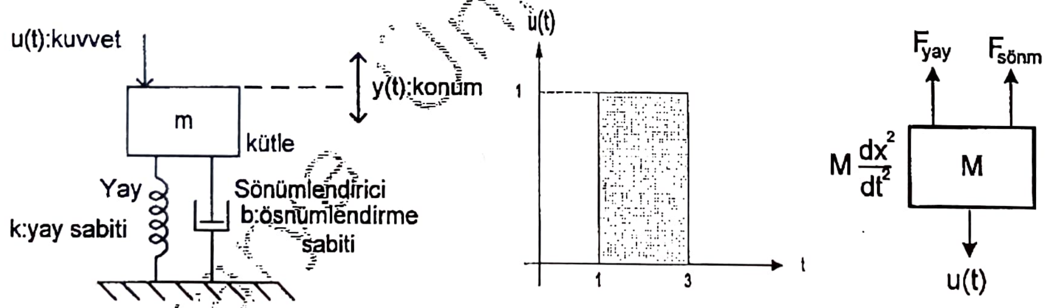
$$\gamma(T) = \left(-\int_T^0 e^{A\lambda}d\lambda\right)B = \left(\int_0^T e^{A\lambda}d\lambda\right)B$$ bağıntısı elde olunur.

$$\gamma(T) = \left(\int_0^T \begin{bmatrix} e^{-\lambda} & 2e^{-\lambda}-2e^{-2\lambda} \\ 0 & e^{-2\lambda} \end{bmatrix} d\lambda\right)B = \begin{bmatrix} 1-e^{-T} & 2e^{-T}-e^{-2T}-1 \\ 0 & -\frac{1}{2}e^{-2T}+\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\gamma(T) = \begin{bmatrix} 1-e^{-T} \\ 0 \end{bmatrix}$$

4 Örnek: Çeyrek araç amortisör sistemi

Dengede bulunan **kütle-yay** sistemine uygulanan kuvvetin zamana göre değişimi aşağıda verilmiştir.



1-Sistemi tanımlayan diferansiyel denklemi yazınız.

2-Y(s), (konum) ifadesini elde ediniz. $0 < t < 1, 1 < t < 3$ ve $t \geq 3$ aralıkları için $y(t)$ *ve* $\frac{dy(t)}{dt}$

İfadelerini elde ediniz.

3-Sürekli zaman Durum denklemlerini vektör matris formunda yazınız. (m=1, k=0.5, b=1.5)

4-T=0.1 sn için ayrık-zaman durum denklemlerini elde ediniz.

5-Ayrık-zaman Durum geçiş matrisini elde ediniz.

6- $0 < t < 20$ sn aralığı için kütle-yay sisteminde konum ve hızın değişimini tam çözüm ve öz çözüm olmak üzere sürek-zaman ve ayrık-zaman olarak çiziniz.

1-Sistemi tanımlayan diferansiyel denklemin elde edilmesi: lineer değilse lineerleştir.

$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{dy(t)}{dt}+\frac{k}{m}y(t)=\frac{1}{m}u(t)$ $\qquad u(t)=u(t-1)-u(t-3)$ $\qquad$ Serbest cisim gösterim.

Çözüm: $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{dy(t)}{dt}+\frac{k}{m}y(t)=\frac{1}{m}(u(t-1)-u(t-3))$

$$(s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m})Y(s)=\frac{1}{m}(\frac{e^{-s}-e^{-3s}}{s})$$

$Y(s)=\frac{\frac{1}{m}(e^{-s}-e^{-3s})}{s(s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m})}$ parametre değerleri, m=1, k=0.5, b=1.5 , yerlerine koyulur ise,

$Y(s)=\frac{(e^{-s}-e^{-3s})}{s(s^2+1.5s+0.5)}$ elde edilir.

$$Y(s)=\underbrace{\frac{1}{s(s^2+1.5s+0.5)}}_{F(s)}(e^{-s}-e^{-3s})$$

$F(s)=\frac{1}{s(s^2+1.5s+0.5)}=\frac{1}{s(s+1)(s+0.5)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+0.5}$ ise $A=2,\ B=2,\ C=-4$

$F(s)=\frac{2}{s}+\frac{2}{s+1}-\frac{4}{s+0.5}$ ters Laplace dönüşümü alınır ise,

$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}\ ise,$

$f(t)=2+2e^{-t}-4e^{-0.5t}$ olarak elde edilir.

$Y(s)=F(s)(e^{-s}-e^{-3s})$ ise,

$Y(s)=F(s)e^{-s}-F(s)e^{-3s}$ olur....

$y(t)=L^{-1}\{F(s)e^{-s}-F(s)e^{-3s}\}$

> Hatırlatma:
>
> $g(t)=f(t-a)u(t-a)=\begin{cases}0 & t<a\\ f(t-a) & t>a\end{cases}$
>
> $G(s)=L\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}F(s)$
>
> $f(t-a)u(t-a)=L^{-1}\{e^{-as}F(s)\}$

$y(t)=f(t-1)u(t-1)-f(t-3)u(t-3)$ olur......

$f(t)=2+2e^{-t}-4e^{-0.5t}$ olduğu göz önüne alınarak $y(t)$ ifadesi yazılır.

$f(t-1)u(t-1)=2+2e^{-(t-1)}-4e^{-0.5(t-1)}$ $\qquad$ (t>1)'den sonraki cevap........

$f(t-3)u(t-3)=2+2e^{-(t-3)}-4e^{-0.5(t-3)}$ $\qquad$ (t>3)'den sonraki cevap........

$f(t-1)u(t-1)-f(t-3)u(t-3)=2+2e^{-(t-1)}-4e^{-0.5(t-1)}-2-2e^{-(t-3)}+4e^{-0.5(t-3)}$

$=2e^{-(t-1)}-4e^{-0.5(t-1)}-2e^{-(t-3)}+4e^{-0.5(t-3)}$ ((t>1)'den sonraki cevaptan (t>3)'ten sonraki cevap çıkarılır.)

2- $y(t)$ ve $\frac{dy(t)}{dt}$ ifadelerinin $0 < t < 1, 1 < t < 3$ ve $t \geq 3$ aralıkları için yazılması.

Oldukları göz önünde bulundurularak, Kütle yay ve sönümlendirici sistemine ait $y(t)$ çıkış ifadesi elde edilir.

$$y(t) = konum = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ 2 + 2e^{-(t-1)} - 4e^{-0.5(t-1)} & 1 < t < 3 \\ 2e^{-(t-1)} - 4e^{-0.5(t-1)} - 2e^{-(t-3)} + 4e^{-0.5(t-3)} & t \geq 3 \end{cases}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = hız = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ -2e^{-(t-1)} + 2e^{-0.5(t-1)} & 1 < t < 3 \\ -2e^{-(t-1)} + 2e^{-0.5(t-1)} + 2e^{-(t-3)} - 2e^{-0.5(t-3)} & t \geq 3 \end{cases}$$

3-Sürekli zaman Durum denklemlerini vektör matris formunda elde edilişi:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{k}{m}y(t) = \frac{1}{m}u(t)$$

$x_1(t) = y(t)$ konum

$x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ hız

$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$ 1. durum denklemi

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\frac{b}{m}\frac{dy(t)}{dt} - \frac{k}{m}y(t) + \frac{1}{m}u(t)$$

$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{b}{m}x_2(t) - \frac{k}{m}x_1(t) + \frac{1}{m}u(t)$ 2. Durum denklemi

Durum denklemleri vektör-matris formunda

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b}{m} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ olarak elde edilir ve k=0.5,b=1.5,m=1 kg değerleri yerlerine yazılır.

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

4-T=0.1 sn için ayrık-zaman durum denklemlerinin elde edilmesi.

Sürekli-zaman durum denklemleri elde edilir. T=0.1 sn için Ayrık-zaman durum denklemleri aşağıda elde edilir.

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

G matrisi, sürekli zaman durum geçiş matrisi, $\emptyset(t)$ elde edilir ve $G = \emptyset(t)|^{t=T}$ verilerek elde edilir.

$$\emptyset(t) = L^{-1}\{\emptyset(s)\} \qquad \emptyset(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0.5 & s+1.5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+0.5)}\begin{pmatrix} s+1.5 & 1 \\ -0.5 & s \end{pmatrix}$$

$$\emptyset(t) = L^{-1}\left\{\begin{pmatrix} \dfrac{s+1.5}{(s+1)(s+0.5)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+0.5)} \\ \dfrac{-0.5}{(s+1)(s+0.5)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+0.5)} \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{(s+1)} + \dfrac{2}{(s+0.5)} & \dfrac{-2}{(s+1)} + \dfrac{2}{(s+0.5)} \\ \dfrac{1}{(s+1)} - \dfrac{1}{(s+0.5)} & \dfrac{2}{(s+1)} - \dfrac{1}{(s+0.5)} \end{pmatrix}^{-1}$$

$\emptyset(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-0.5t} - e^{-t} & 2e^{-0.5t} - 2e^{-t} \\ e^{-t} - e^{-0.5t} & 2e^{-t} - e^{-0.5t} \end{pmatrix}$ sürekli zaman durum geçiş matrisi elde edilir.

$\emptyset(0) = I$ olmalıdır. $\emptyset(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir.

$G = \emptyset(t)|^{t=T} = \begin{pmatrix} 2e^{-0.5t} - e^{-t} & 2e^{-0.5t} - 2e^{-t} \\ e^{-t} - e^{-0.5t} & 2e^{-t} - e^{-0.5t} \end{pmatrix}\Big|^{t=0.1}$ ise,

$G = \begin{pmatrix} 0.9976 & 0.0928 \\ -0.0464 & 0.8584 \end{pmatrix}$ olarak elde edilir.

$$e^{-A\tau} = \emptyset(-\tau) = \begin{pmatrix} 2e^{0.5\tau} - e^{\tau} & 2e^{0.5\tau} - 2e^{\tau} \\ e^{\tau} - e^{0.5\tau} & 2e^{\tau} - e^{0.5\tau} \end{pmatrix}$$

$e^{AT} = \emptyset(T) = \begin{pmatrix} 2e^{-0.5T} - e^{-T} & 2e^{-0.5T} - 2e^{-T} \\ e^{-T} - e^{-0.5T} & 2e^{-T} - e^{-0.5T} \end{pmatrix}$ oldukları göz önüne alınır ise,

$$H = e^{AT}\left[\int_0^T e^{-A\tau}\, d\tau\right] B =$$

$\begin{pmatrix} 2e^{-0.5T} - e^{-T} & 2e^{-0.5T} - 2e^{-T} \\ e^{-T} - e^{-0.5T} & 2e^{-T} - e^{-0.5T} \end{pmatrix}\left[\int_0^T \begin{pmatrix} 2e^{0.5\tau} - e^{\tau} & 2e^{0.5\tau} - 2e^{\tau} \\ e^{\tau} - e^{0.5\tau} & 2e^{\tau} - e^{0.5\tau} \end{pmatrix} d\tau\right]\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ hesaplanır.

$$\int_0^T \begin{pmatrix} 2e^{0.5\tau} - e^{\tau} & 2e^{0.5\tau} - 2e^{\tau} \\ e^{\tau} - e^{0.5\tau} & 2e^{\tau} - e^{0.5\tau} \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 4e^{0.5\tau} - e^{\tau} & 4e^{0.5\tau} - 2e^{\tau} \\ e^{\tau} - 2e^{0.5\tau} & 2e^{\tau} - 2e^{0.5\tau} \end{pmatrix}_0^T$$

$$= \begin{pmatrix} 4e^{0.5T} - e^{T} - 3 & 4e^{0.5T} - 2e^{T} - 2 \\ e^{T} - 2e^{0.5T} + 1 & 2e^{T} - 2e^{0.5T} \end{pmatrix}$$

$$H=\begin{pmatrix}2e^{-0.5T}-e^{-T} & 2e^{-0.5T}-2e^{-T}\\ e^{-T}-e^{-0.5T} & 2e^{-T}-e^{-0.5T}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4e^{0.5T}-e^{T}-3 & 4e^{0.5T}-2e^{T}-2\\ e^{T}-2e^{0.5T}+1 & 2e^{T}-2e^{0.5T}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$H=\begin{pmatrix}2e^{-0.5T}-e^{-T} & 2e^{-0.5T}-2e^{-T}\\ e^{-T}-e^{-0.5T} & 2e^{-T}-e^{-0.5T}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4e^{0.5T}-2e^{T}-2\\ 2e^{T}-2e^{0.5T}\end{pmatrix}$$

$$H=\begin{pmatrix}8-4e^{0.5T}-4e^{-0.5T}-4e^{-0.5T}+2+2e^{-T}+4e^{0.5T}-4-4+4e^{-0.5T}\\ 4e^{-0.5T}-2-2e^{-T}-4+2e^{0.5T}+2e^{-0.5T}+4-4e^{-0.5T}-2e^{0.5T}+2\end{pmatrix}_{T=0.1}$$ ara

işlemlerden sonra,

$H=\begin{pmatrix}0.0048\\0.0928\end{pmatrix}$ olarak elde edilir. Matlab komut: `[G,H]=c2d(A,B,0.1)`

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9976 & 0.0928\\-0.0464 & 0.8584\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.0048\\0.0928\end{bmatrix}u(k)$$ T=0.1 sn için ayrık-zaman durum denklemleri

$$y(k)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}$$

5-Ayrık-zaman Durum geçiş matrisi:

Ayrık-zaman durum geçiş matrisi:

$$\emptyset(k)=Z^{-1}\{z[zI-G]^{-1}\}=Z^{-1}\left\{z\left[\begin{bmatrix}z & 0\\0 & z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.9976 & 0.09278\\-0.04639 & 0.8584\end{bmatrix}\right]^{-1}\right\}$$

$$=Z^{-1}\left\{z\begin{bmatrix}z-0.9976 & -0.09278\\0.04639 & z-0.8584\end{bmatrix}^{-1}\right\}$$

$$=Z^{-1}\left\{\frac{z}{z^2-1.856z+0.8606}\begin{bmatrix}z-0.8584 & 0.09278\\-0.04639 & z-0.9976\end{bmatrix}\right\}$$

$$=Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z-0.9522)(z-0.9038)}\begin{bmatrix}z-0.8584 & 0.0928\\-0.04639 & z-0.9976\end{bmatrix}\right\}$$

$$=Z^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\frac{z(z-0.8584)}{(z-0.9522)(z-0.9038)} & \frac{0.0928z}{(z-0.9522)(z-0.9038)}\\ \frac{-0.0464z}{(z-0.9522)(z-0.9038)} & \frac{z(z-0.9976)}{(z-0.9522)(z-0.9038)}\end{bmatrix}\right\}$$ Kompleks değişkenler teorisinden rezidü teoremi yardımı ile ters z dönüşümü bulunur.

$$x(k)=\sum_{i=1}^{1}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_i)x(z)z^{k-1}]_{z=z_i}$$

$$Z^{-1}\left\{\frac{z(z-0.8584)}{(z-0.9522)(z-0.9038)}\right\}=\frac{(0.9522-0.8584)\,0.9522^k}{(0.9522-0.9038)}+\frac{(0.9038-0.8584)0.9038^k}{(0.9038-0.9522)}$$
$$=1.938*0.9522^k-0.9380*0.9038^k$$

$$Z^{-1}\left\{\frac{0.0928z}{(z-0.9522)(z-0.9038)}\right\}=\frac{0.0928*0.9522^k}{(0.9522-0.9038)}+\frac{0.0928*0.9038^k}{(0.9038-0.9522)}$$
$$=1.9174*0.9522^k-1.9174*0.9038^k$$

$$Z^{-1}\left\{\frac{-0.0464z}{(z-0.9522)(z-0.9038)}\right\}=\frac{-0.0464*0.9522^k}{(0.9522-0.9038)}+\frac{-0.0464*0.9038^k}{(0.9038-0.9522)}$$
$$=-0.9587*0.9522^k+0.9587*0.9038^k$$

$$Z^{-1}\left\{\frac{z(z-0.9976)}{(z-0.9522)(z-0.9038)}\right\}=\frac{(0.9522-0.9976)*0.9522^k}{(0.9522-0.9038)}+\frac{(0.9038-0.9976)*0.9038^k}{(0.9038-0.9522)}$$
$$=-0.9380*0.9522^k+1.9380*0.9038^k$$

Ayrık-zaman durum geçiş matrisi.

$$\emptyset(k)=\begin{bmatrix}1.938*0.9522^k-0.9380*0.9038^k & 1.9174*0.9522^k-1.9174*0.9038^k\\ -0.9587*0.9522^k-0.9587*0.9038^k & -0.9380*0.9522^k-1.9380*0.9038^k\end{bmatrix}$$

Sağlaması:

$\emptyset(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ olmalıdır.

6- $0<t<20$ sn aralığı için kütle-yay sisteminde konum ve hızın değişiminin sürek-zaman ve ayrık-zaman olmak üzere çizilmesi.

Kütle-yay sistemi **T=0.1 sn** için ayrıklaştırılmış ve **20 sn** süre ile benzetim çalışması yapılmıştır. 20 sn aralığı için $K=\frac{t_2-t_1}{T}=\frac{20-0}{0.1}$ ise $K=200$ örnek olmak alınmaktadır. Ayrık-zaman da benzetim çalışması **0<k<200** aralığında yapılmaktadır.

Durum denklemi $\boldsymbol{x(k)}$**'nın** tam çözümü için

$x(k)=\emptyset(k)x(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\emptyset(k-1-j)\,Bu(j)$ ifadesi ile ve çıkış ise $\boldsymbol{y(k)}$

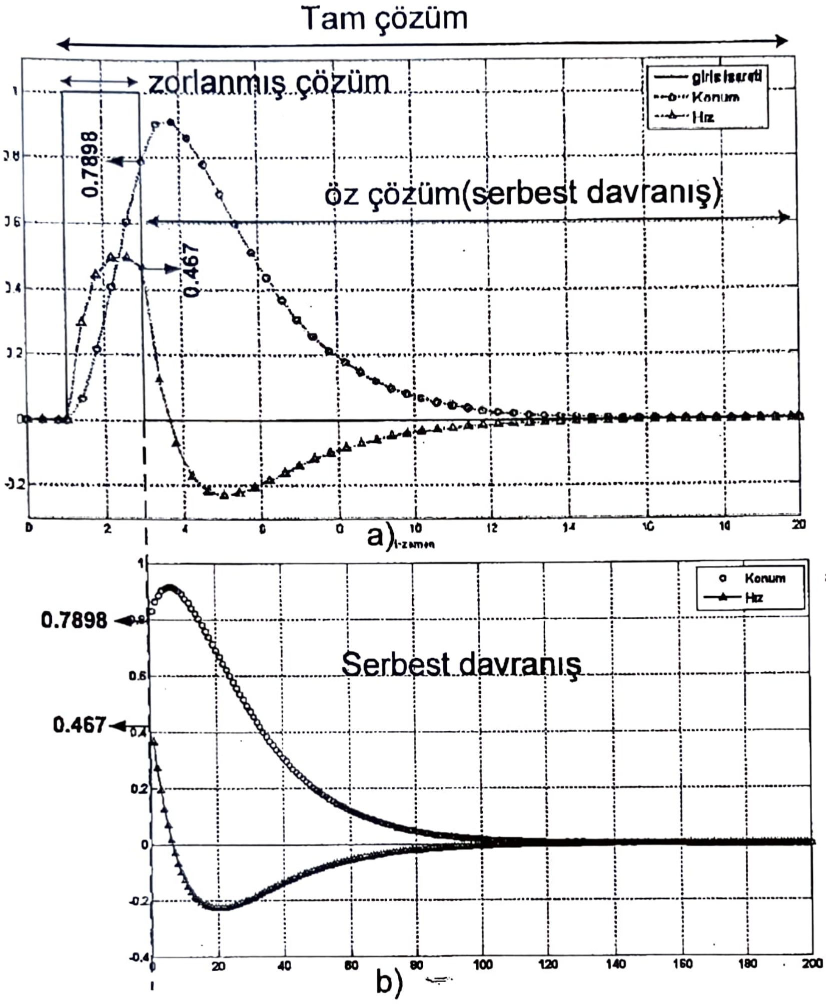
$y(k)=C\emptyset(k)x(0)+\sum_{j=0}^{k-1}C\emptyset(k-1-j)\,Bu(j)+Du(k)$ denklemi kullanılarak hesaplanır.

$k=0,1,2,3\ldots,200$ olmak üzere $x_1(k)$:konum ve $x_2(k)$: *hız* için hesap edilen ani değerler grafik olarak aşağıda verilmiştir. $\boldsymbol{x(k)}$ denklemi kullanılarak elde edilen **tam çözüm** ile konum ve hız değişimi **şekil a)** da verilmiştir.

$x(k)=\emptyset(k)x(0)$, serbest çözüm.

$$\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.938*0.9522^k-0.9380*0.9038^k & 1.9174*0.9522^k-1.9174*0.9038^k\\ -0.9587*0.9522^k-0.9587*0.9038^k & -0.9380*0.9522^k-1.9380*0.9038^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.7898\\ 0.467\end{bmatrix}$$

t>3 sn ve **u(k)=0** için $\boldsymbol{x(k)}$ denklemi kullanılarak elde edilen **öz çözüm** ile konum ve hız değişimi **şekil b)** da verilmiştir.

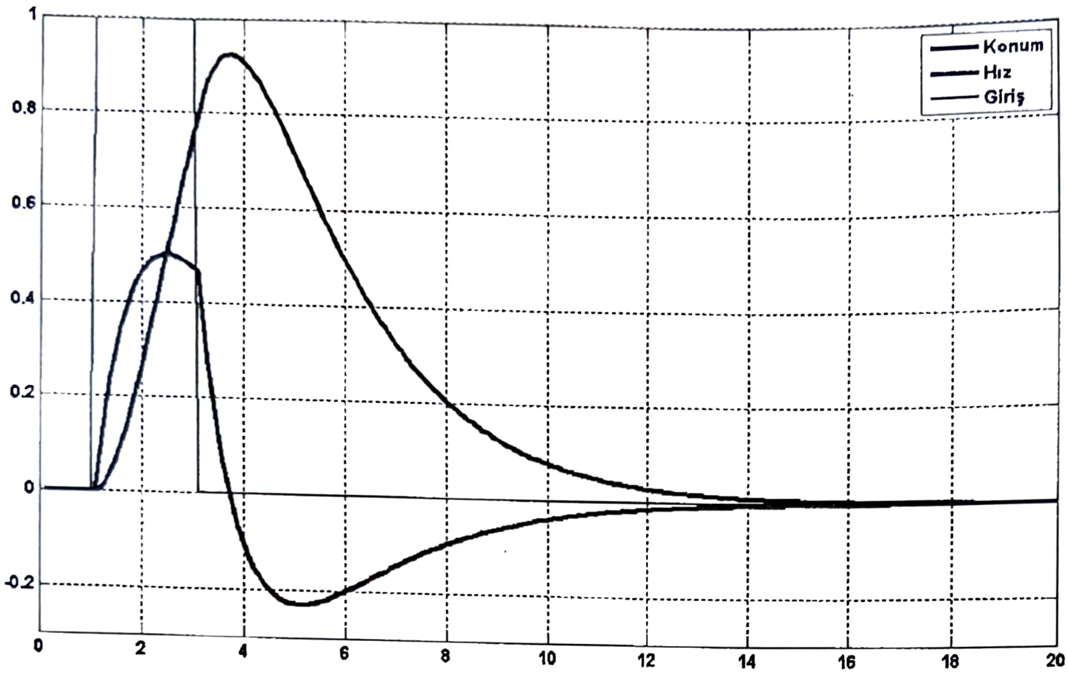


Diferansiyel denklem çözüm sonucu:

$$y(t) = konum = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ 2 + 2e^{-(t-1)} - 4e^{-0.5(t-1)} & 1 < t < 3 \\ 2e^{-(t-1)} - 4e^{-0.5(t-1)} - 2e^{-(t-3)} + 4e^{-0.5(t-3)} & t \geq 3 \end{cases}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = hız = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ -2e^{-(t-1)} + 2e^{-0.5(t-1)} & 1 < t < 3 \\ -2e^{-(t-1)} + 2e^{-0.5(t-1)} + 2e^{-(t-3)} - 2e^{-0.5(t-3)} & t \geq 3 \end{cases}$$

Grafik aşağıda verilmiştir.



MATLAB kodu

```
t=0:0.1:20
N=length(t);
for k=1:N
   if t(k)<=3
konum(k)=2+2*exp(-(t(k)-1))-4*exp(-0.5*(t(k)-1));
elseif t(k)>3
    konum(k)=2*exp(-(t(k)-1))-4*exp(-0.5*(t(k)-1))-2*exp(-(t(k)-3))+4*exp(-
0.5*(t(k)-3));
end
 if t(k)<1
     konum(k)=0;
end
 if t(k)<3
hiz(k)=-2*exp(-(t(k)-1))+2*exp(-0.5*(t(k)-1));
elseif t(k)>=3
    hiz(k)=-2*exp(-(t(k)-1))+2*exp(-0.5*(t(k)-1))+2*exp(-(t(k)-3))-2*exp(-
0.5*(t(k)-3));
end
 if t(k)<1
    hiz(k)=0;
end
 if t(k)<3
u(k)=1;
elseif t(k)>=3
    u(k)=0;
end

if t(k)<1
       u(k)=0;
end
```

```
end
plot(konum)
hold on
plot(hiz)
plot(u)
grid on
```

DURUM UZAY KARARLILIK ANALİZİ

Kararlılık analizi BIBO kriteri kullanılarak yapılabilir (bounded input,bounded output). Sınırlı giriş için sınırlı çıkış ürcten sistem kararlıdır. Durum-uzay kararlılık analizi yöntemlerinden birisi transfer fonksiyonundan yararlanarak yapılmasıdır.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

ile verilen sistemin transfer fonksiyonu;

$\dfrac{Y(z)}{U(z)} = T(z) = C\left[zI - A\right]^{-1} B + D$, $\left[zI - A\right]^{-1}$ ifadesini açarak yazılır ve kapalı çevrim transfer fonksiyonuna eşitlenir ise

$$T(z) = C\frac{\overbrace{\left[cof(zI-A)\right]^T}^{Adj(A)} B + |zI - A| D}{|zI - A|} = \frac{G(z)}{1+G(z)H(z)}$$

elde edilir. Bu ifadelerden kararlılık analizi için gerekli olan karakteristik denklem,

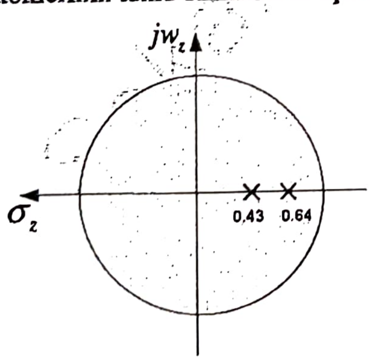
$F(z) = 1 + G(z)H(z) = \det(zI - A) = 0$ olduğu görülebilir. **F(z)=0** karakteristik denklem kökleri aynı zamanda **öz-değer** olarak adlandırılır.

ÖRNEK:

$A = \begin{bmatrix} 0.43 & 0 \\ -0.037 & 0.64 \end{bmatrix}$ sistem matrisi ile verilen ayrık-zaman sisteminin kararlılığını inceleyiniz.

i) $\det(zI - A) = \begin{bmatrix} z-0.43 & 0 \\ 0.037 & z-0.64 \end{bmatrix} = 0$

$\det(zI - A) = (z-0.43)(z-0.64) = 0 \Rightarrow \quad z_1 = 0.43 \;\; ve \;\; z_2 = 0.64 \;\; dir.$ karakteristik denklem köklerinin tümü birim daire içindedir. SİSTEM KARARLIDIR .



Jury kriteri ile karalılık analizi yapılabilir;

Karakteristik denklem: $F(z) = z^2 - 1.07z + 0.2752 = 0$,olmak üzere, karakteristik denklem derecesi n=2 dir.

Gerek koşullar

i) $F(1) > 0 \Rightarrow F(1) = 0.2052 > 0$'*dır*

ii) $(-1)^2 F(-1) \Rightarrow F(-1) = 2.3452 > 0$'*dır* $(-1)^n F(-1) > 0$

n → sistemin derecesi

Yeter koşullar

i) **n-1=1** tane **koşul sağlanmalıdır.** $|a_n| > |a_0|$, olmalıdır.

1> 0.2752 'dır.

Gerek ve yeter koşul sağlandığından kapalı-çevrim transfer fonksiyonunun tüm kutupları birim daire içindedir. **SİSTEM KARARLIDIR.**

Lyapunov Kararlılık Kriteri

Non-lineer sistemlerin kararlılığın incelenmesinde en önemli teorilerden birisi Rus Matematikçi Alexander Mikhailovich Lyapunov tarafından gösterilmiştir(1892). Lyapunov 'un 2. Kararlılık kriteri, dinamik bir sisteme ilişkin diferansiyel denklemin çözümünü elde etmeksizin denklemin biçiminden dinamik sistemin kararlı olup olmadığının saptanmasını sağlar. **Lyapunov** , *sistemin içinde biriktirilen enerji ile sistemin dinamiği arasında bağlantı kuracak bir fonksiyon tanımlanmıştır.* **Eğer toplam enerji,** *sistem denge durumuna ulaşıncaya kadar sürekli azalır ise bu sistem kararlıdır.*

Sistemler için yazılan enerji fonksiyonları **kesin pozitiftir**(positive definit). *Toplam enerjisi sürekli azalan bir sistemde ise enerji fonksiyonunun zamana göre türevi negatif olur.* Lyapunov enerji fonksiyonunun zamana göre türevi negatif olur. Lyapunov enerji fonksiyonunun kesin pozitif olma özelliğinden ve kararlı sistemin enerji fonksiyonunun bu özelliğinden yararlanarak 2. Kararlılık kriteri verilmiştir. Bu kriter sadece diferansiyel denklemin yapısından kararlılık incelemesi yapma olanağı verdiğinden Lyapunov 'un *''Doğrudan kriteri''* diye adlandırılır. **Bu teorem**, *eğer uygun bir Lyapunov fonksiyonu bulunabilirse kararlılık hakkında bir şey söyleyebilir. Eğer fonksiyon bulunamazsa bir şey söyleyemez.*

Lyapunov'un 2. Kararlılık Kriteri:

Bir kontrol sistemine ait dinamik denklem,

bütün t'ler için $\dfrac{dx}{dt} = f(x,t)$; $f(0,t) = 0$ biçiminde verilmiş olsun.

Sistemin kararlı olabilmesi için **v(x,t)** , Lyapunov fonksiyonu ağıdaki 3 şartı sağlamalıdır.
1- Sürekli ve birinci mertebeden türevi olmalı.
2-Kesin pozitif fonksiyon olmalıdır.
3- $\dfrac{dv(x,t)}{dt}$ kesin negatif olmalıdır.

1,2, ve **3** şartlarını sağlayan bir skaler fonksiyon (değeri skaler olan fonksiyon, f=f(p), p'y bağlı olarak f'nin değeri skalerdir.) bulunabilir ise, bu sistemin başlangıç noktasındaki kararlılığı düzgün asimtotik kararlılık özelliğindendir. İlave olarak $\|x\|^{*} \to \infty$ için **v(x,t)** sonsuza giderse, sistem düzgün asimtotik geniş anlamda kararlıdır denir. $\|x\|^{*} = \left[x^T x\right]^{1/2}$ **v(x,t)** skaler Lyapunov fonksiyonunun bulunması için doğrudan doğruya bir yol olmadığı ve **v(x,t)** 'nin elde edilmesinin zorluğu göz önünde bulundurulmalıdır.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 'nin fonksiyonu olan skaler fonksiyon

v(x)

1- i) **v(x)>0,** $x \neq 0$

ii) **v(0)=0** $\|x\|^{*} = \left[x^T x\right]^{1/2}$ vektörün normu denir.

NoT: Eğer fonksiyon $x \neq 0$ durumlarında farklı x değişkenleri için farklı işaret alıyor ise tanımsız fonksiyondur.

İse **v(x)** **''Kesin pozitif fonksiyon''** olarak adlandırılır. (örnek: x^2)

2- i) $v(x) \geq 0, x \neq 0$

3- ii) **v(0)=0**

ise **v(x)''Yarı kesin pozitif fonksiyon''** olarak adlandırılır.

4- Eğer **−v(x)** ***''Kesin pozitif fonksiyon''*** ise **v(x)** **''Kesin negatif fonksiyondur''**.

ÖRNEK: $x_1 = 0, x_2 = 0$ da kararlı olan sistemin, kararlılığını Lyapunov 2. Kriteri yardımı ile inceleyiniz.

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{(x_1^2 + x_2^2)x_1}{2} - x_2$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{dV}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{dt}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - \frac{(x_1^2 + x_2^2)x_2}{2}$$

ÇÖZÜM:

$v(x) \to$ Lyapunov fonksiyonu ve $v(x) = x_1^2 + x_2^2$ kesin pozitif fonksiyon olarak seçelsin.

seçilen enerji fonksiyonu

1)

$$\left.\begin{array}{l} i)\ v(x) > 0, \quad x_1 \neq 0, x_2 \neq 0 \\ ii)\ v(0) = 0, \quad x_1 = 0, x_2 = 0 \end{array}\right\}$$ olduğundan **v(x)** skaler fonksiyonu ***''kesin pozitiftir''***

2) $\dfrac{dv(x)}{dt} = 2x_1\dfrac{dx_1}{dt} + 2x_2\dfrac{dx_2}{dt}$

$$= 2x_1\left\{-\frac{(x_1^2+x_2^2)x_1}{2} - x_2\right\} + 2x_2\left\{x_1 - \frac{(x_1^2+x_2^2)}{2}x_2\right\} \Rightarrow$$

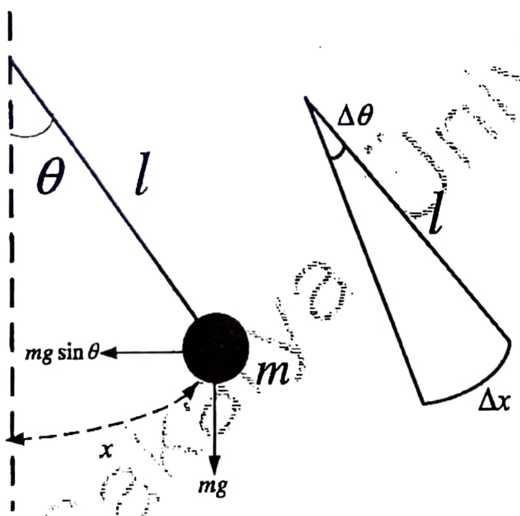
$$= -2x_1^2\frac{(x_1^2+x_2^2)x_1}{2} - 2x_1x_2 + 2x_2x_1 - \frac{(x_1^2+x_2^2)}{2}2x_2^2 = -x_1^4 - x_1^2x_2^2 - x_1^2x_2^2 - x_2^4$$

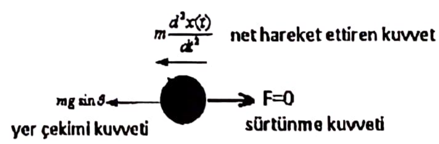
$$= -(x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4)$$

$\dfrac{dv(x)}{dt} = -(x_1^2 + x_2^2)^2$ ***kesin negatif fonksiyondur.***

Yukarıdaki tanımda ifade edildiği fibi seçilen **v(x,t)** skaler fonksiyonu koşulları sağlandığından ve $x \to \infty$ için $v(x) \to \infty$ 'da olacağından sistem başlangıç denge durumunda geniş anlamda asimtotik olarak kararlıdır denir.

ÖRNEK: Bir sarkaç sistemini ele alalım ve karalılığını Lyapunov kararlılık kriteri ile inceleyelim.





Serbest cisim gösterimi

Sarkacı net hareket ettiren kuvvet, $\sum F = ma$ dır. Şekilden $\Delta x = l\Delta\theta$ yazılır ve $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = l\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

olarak düzenlenir ise, $\dfrac{dx}{dt} = l\dfrac{d\theta}{dt}$ elde edilir ve $\dfrac{d^2x}{dt^2} = l\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ olarak yazılabilir.

Newtonun 2. Kanunu yazılırsa, **k** hava ile sürtünme katsayısı(sönüm katsayısı)olmak üzere,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}+mg\sin\theta=0$$

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}+kl\frac{d\theta}{dt}+mg\sin\theta=0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

Sarkaç sistemin dinamik denklemi elde edilir. Bu ifade yardımı ile önce durum değişkenleri tanımlanır sonra durum denklemleri elde edilir;

i) ***Durum değişkenleri tanımlanır.***

$x_1=\theta$: ***konum***

$x_2=\dfrac{dx_1}{dt}=\dfrac{d\theta}{dt}$: ***hız***

tanımlanan durum değişkenleri $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=-\dfrac{k}{m}\dfrac{d\theta}{dt}-\dfrac{g}{l}\sin\theta$ ifadesinde yazılır ise,

$\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=\dfrac{dx_2}{dt}$ olmak üzere, $\dfrac{dx_2(t)}{dt}=-\dfrac{k}{m}x_2-\dfrac{g}{l}\sin x_1$ **2. Durum denklemi.**

$\dfrac{dx_1(t)}{dt}=x_2$ **1. Durum denklemi.**

$$\begin{bmatrix}\dfrac{dx_1(t)}{dt}\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{g}{l}\sin x_1 & -\dfrac{k}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

1) Sistemin denge noktası için **x1=0** ve **x2=0**'dır. Türevleri, eğer $\dfrac{dx_1}{dt}=0$ ve $\dfrac{dx_2}{dt}=0$ **=>orjin (0,0)** sistem için denge noktasıdır.

$\dfrac{dx_1}{dt}=x_2=0$, $(x_1=x_2=0 \quad için)$ $\left(\dfrac{dx_1}{dt},\dfrac{dx_2}{dt}\right)=(0,0)$ 'dır,

$\dfrac{dx_2}{dt}=-\dfrac{g}{l}\sin\underbrace{(0)}_{x_1}-\dfrac{k}{m}\underbrace{(0)}_{x_2}=0$ 'dır.

Orjin denge noktasıdır.

2) Orjinde asimtotik kararlımıdır, yoksa sadece kararlımıdır?

Asimtotik kararlılık testi için **Lyaponov fonksiyonu**

$$\left.\begin{aligned} &v(0)=0 \\ &v(x)>0 \quad (kesin\ pozitif) \end{aligned}\right\}$$

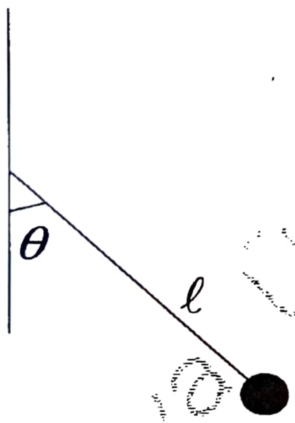
$$\frac{dv(x)}{dt}<0 \quad (kesin\ negatif)$$

kesin pozitif şartlarını sağlar ise sarkaç sistemi asimtotik kararlıdır. **Eğer,**

$\frac{dv(x)}{dt} \le 0$ **şartını sağlar ise sadece kararlıdır.**

i) Önce Lyaponov fonksiyonunu yazmaya çalışalım. LF (Lyapunov fonk.) sisemin **Lyaponov fonksiyonu** ***potansiyel ve kinetik enerji***leri cincinden yazılacak,

a) Sarkaç sisteminin kinetik enerjisi;



$$E_k=\frac{1}{2}mV^2$$

$$E_k=\frac{1}{2}m(l\frac{d\theta}{dt})^2 \Rightarrow$$

$V \rightarrow$ *Çizgisel Hız*

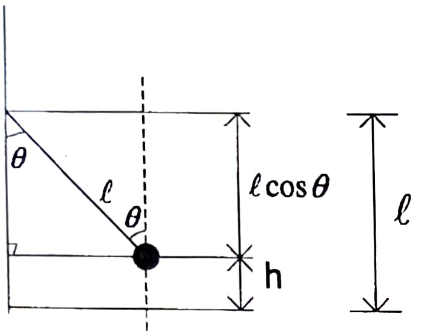
$V = w*l \rightarrow$

$w=\frac{d\theta}{dt}$ *(açısal hız)*

$V=l\frac{d\theta}{dt}$

Sarkaç sisteminin Kinetik enerjisi $E_k=\frac{1}{2}ml^2(\frac{d\theta}{dt})^2$

b) Sarkaç sisteminin potansiyel enerjisi=> $E_p = mgh$



$h = l - l\cos\theta \Rightarrow$

$h = l(1-\cos\theta)$

Sarkaç sisteminin potansiyel enerjisi $E_p = mgl(1-\cos\theta)$

Sarkaç sistemini toplam enerjisi: $E_T = E_k + E_p$

$$E_T = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgl(1-\cos\theta)$$

Lyaponov fonksiyonu, durum değişkenleri cinsinden,

$V(x) = E_T(x) = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + mgl(1-\cos x_1)$ olarak elde edilir.

Lyapunov fonksiyonu

1-x=0 için $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow V(0) = 0'dır.$

$x_1 \neq 0, x_2 \neq 0 \Rightarrow V(x) > 0'dır.$ ***kesin pozitif bir fonksiyondur.***

2-*Lyapunov fonksiyonu 1. Türevi alınır.*

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{\delta V}{\delta x_1}\left(\frac{\delta x_1}{\delta t}\right) + \frac{\delta V}{\delta x_2}\left(\frac{\delta x_2}{\delta t}\right)$$ (zincir kuralı uygulayarak, $\frac{dV(x)}{dt}$ elde edilir)

$\frac{\delta V(x)}{\delta x_1} = mgl\sin x_1 \qquad \frac{\delta x_1}{\delta t} = x_2$ **1.** Durum denklemi.

$$\frac{\delta V(x)}{\delta x_2} = ml^2 x_2 \frac{\delta x_2}{\delta t} = -\frac{k}{m} x_2 - \frac{g}{l}\sin x_1$$ tüm türevler $\frac{dV(x)}{dt}$ de yerine konulur=>

$$\frac{dV(x)}{dt} = mgl\sin x_1 * x_2 + ml^2 x_2(-\frac{k}{m}x_2 - \frac{g}{l}\sin x_1)$$

$$= mgl\sin x_1 * x_2 - kl^2 x_2^2 - mgl\sin x_1 * x_2$$

$\frac{dV(x)}{dt} = -kl^2 x_2^2 \le 0$ $x_1 = x_2 = 0$ için $\frac{dV(x)}{dt} = 0$ olmalı. Ancak x_1 'in herhangi bir değeri ve $x_2 = 0$ için $\frac{dV(x)}{dt} = 0$ oluyor.

- Asimtotik kararlımıdır? $\frac{dV(x)}{dt} < 0$ olmalıydı. $\frac{dV(x)}{dt} < 0$'e bakılır ise ,**<u>tüm x değerleri</u>** için $\frac{dV(x)}{dt} < 0$ değildir. **x=0** için göz önüne alınır ise $\frac{dV(x)}{dt} \le 0$ 'dır.

!DİKKAT:

Lyapunov 'a göre sistem sadece kararlı gözükmektedir, asimtotik kararlı değildir. Ancak sarkaç sistemini göz önüne aldığımızda, sarkaç, zamanla sönüm katsayısından dolayı, enerjisi zamanla azalacak (0,0) orjin'de denge noktasında duracaktır. Ve asimtotik olarakta kararlıdır.

Zamanla Değişmeyen Sistemlerin Lyapunov Fonksiyonu;

$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$ olarak verilsin,

$\boxed{\text{NOT: } (AB)^T = B^T A^T}$

Lyapunov fonksiyonu,

durum değişkenleri

$V(x) = x^T p x$ olarak seçilsin ve 1. mertebeden türevi alınır ise,

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{dx^T}{dt}Px + x^T P\frac{dx}{dt} \quad \frac{dx}{dt} = Ax$$ olduğu göz önüne alınır ise,

$$= (Ax)^T px + x^T pAx$$

$$= A^T x^T px + x^T pAx$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dV(x)}{dt} = x^T \underbrace{(A^T p + pA)}_{Q} x$$

Verilen sistem asimptotik kararlı (Lyapunov ölçütüne göre kararlıdır) olabilmesi için $\mathbf{V(x)}$ skaler fonksiyonunun **I. türevi** $\dfrac{dV(x)}{dt}$ nin *kesin negatif olması gerekmektedir.* Bunun için **Q** ***kesin pozitif*** olmak üzere

$$\frac{dV(x)}{dt} = -x^T Q x \text{ biçiminde yazılabilir.}$$

$\{A^T p + pA = -I\}$ ***yapılarak çözüm bulunur.*** **P matrisi simetriktir** ve **P** matrisi kesin pozitif ise sistem **asimtotik** olarak kararlıdır. Denklemden çözülen P, simetrik kesin pozitif bulunuyorsa **asimtotik** sistem kararlıdır.

Örnek:

1) $\dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x$ sistemin kararlılığını belirleyiniz.

Simetri p matrisi; $A^T p + pA = -Q$ ve $Q = I$ matrisi olarak seçelim.

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ denklem çözülürse;}$$

(**p matrisi** kesin pozitif ise sistem **asimtotik** olarak kararlıdır)

$$[-4p_{11} - p_{12} + 3p_{12} - p_{22} - 4p_{11} - p_{12} + 3p_{12} - p_{22}]$$

$$\begin{aligned} -4p_{11} - p_{12} - 4p_{11} - p_{12} &= -1 \\ -4p_{12} - p_{22} + 3p_{11} - p_{12} &= 0 \\ 3p_{11} - p_{12} + 3p_{12} - p_{22} &= 0 \\ 3p_{12} - p_{22} + 3p_{12} - p_{22} &= -1 \end{aligned} \qquad p = \begin{bmatrix} \dfrac{9}{70} & \dfrac{-1}{70} \\ \dfrac{-1}{70} & \dfrac{32}{70} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{9}{70} > 0 \\ \Delta_2 &= \frac{9}{70}\frac{32}{70} - \frac{1}{70}\frac{1}{70} > 0 \end{aligned}$$

Minörler pozitiftir. Sistem asimtotik olarak kararlıdır.

Örnek:

2) $\dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x$ kararlılığı inceleyiniz.

$A^T p + pA = -Q$ ve $Q = I$ matrisi olarak seçelim.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -2p_{11}+p_{12}-2p_{11}+p_{12}=-1 \\ -2p_{22}+p_{22}-p_{12}=0 \\ -p_{22}-p_{22}=-1 \end{array}\right\} p=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Delta_1=\frac{1}{3}>0 \\ \Delta_2=\frac{1}{3}\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\frac{1}{6}>0 \end{array}$$

sistem asimtotik kararlıdır.

ÖRNEK:

$$\dot{x}_1=-x_1-2x_2$$
$$\dot{x}_2=x_1-4x_2$$

sistemin denge durumunda kararlılığını inceleyiniz.

(stability of the equilibrium state)

ÇÖZÜM: Denge noktası orjindedir veya x=0'dır.

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A'p+pA=-I$$
$$p=p'$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -2p_{11}+2p_{12}=-1 \\ -2p_{11}-5p_{12}+p_{22}=0 \\ -4p_{12}-8p_{22}=-1 \end{array}\right\} p=\begin{bmatrix} \frac{63}{20} & \frac{-7}{60} \\ \frac{-7}{60} & \frac{11}{60} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Delta_1=\frac{63}{20}>0 \\ \Delta_2=\frac{63}{20}\frac{11}{60}-\frac{7}{60}\frac{7}{60}>0 \end{array}$$

P matrisi kesin pozitif matristir.

Sistem orjinde asimtotik olarak kararlıdır. Lyapunov fonksiyonu,

$$V(x)=x'px=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{23}{60} & \frac{-7}{60} \\ \frac{-7}{60} & \frac{11}{60} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$=\frac{1}{60}\left[23x_1^2-14x_1x_2+11x_2^2\right]$ ve türevi ise $\frac{dV(x)}{dt}=-x_1^2-x_2^2$ dir.

EK Bilgi:

Quadratik Form (Karesel Form): nxn gerçek simetrikA matrisi ve gerçek n-boyutlu x vektörü olmak üzere,

$$x^T Ax = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \quad a_{ij} = a_{ij} \text{ dir.}$$

Gerçek quadratik form olarak adlandırılır.

ÖRNEK:

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 8x_3^4 = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}}_{x^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = x^T Ax$$

Quadratik form için kesin pozitiflik kriteri (sylvester kriteri):

$x^T Ax$ quadratik formun kesin pozitif olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \ ve \ |A| > 0 \text{ olmalıdır.}$$

Quadratik form kesin negatiflik kriteri (sylvester kriteri): $(-1)^n$

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \ldots, \begin{matrix} |A| > 0 & (n \ \ çift) \\ |A| < 0 & (n \ \ tek) \end{matrix} \quad a_{ij} = a_{ji} \text{ gerçek}$$

simetrik matris için, dikkat minörler içinde, n tek ise det<0, n çift ise det>0 dır.

Quadratik form için yarıkesin pozitiflik kriteri (sylvester kriteri):

$$a_{ij} \geq 0, \begin{vmatrix} aii & aij & aik \\ aji & ajj & ajk \\ aki & akj & akk \end{vmatrix} \geq 0, \ \ldots, |A| = 0 \ i < j < k$$

Quadratik form için yarı kesin negatiflik kriteri (sylvester kriteri):

$$a_{ij} \leq 0, \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \geq 0 \begin{vmatrix} aii & aij & aik \\ aji & ajj & ajk \\ aki & akj & akk \end{vmatrix} \leq 0, \ \ldots, |A| = 0 \ i < j < k$$

ZAMANLA DEĞİŞMEYEN AYRIK-ZAMAN LİNEER SİSTEMLERİN LYAPUNOV KARARLILIK ANALİZİ

Ayrık-zaman sistem, $x(k+1)=Gx(k)$ ile tanımlı olsun.

x=0 denge noktasıdır. $x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)$

Lyapunov fonksiyonu olarak, $V(x(k))=x^T(k)px(k)$ olarak seçelim. P kesin pozitif gerçek simetrik matristir.

$$\Delta V(x(k))=V(x(k+1))-V(x(k))$$

$=x^T(k+1)px(k+1)-x^T(k)px(k)$ ve $x(k+1)=Gx(k)$ olduğu düşünülür ise,

$$=[Gx(k)]^T p[Gx(k)]-x^T(k)px(k)$$
$$=x^T(k)G^T pGx(k)-x^T(k)px(k)$$

$$\Delta V(x(k))=x^T(k)\left[G^T pG-p\right]x(k)$$

Asiptotik kararlılık için **V(x(k))** kesin pozitif seçilmelidir. Bunun için $\Delta V(x(k))$ kesin negatif olmalıdır.

$$\Delta V(x(k))=-x^T(k)Qx(k)$$

$Q=-(G^T pG-p)$ kesin pozitif olmalıdır.

$(G^T pG-p)=-Q$ p'nin kesin pozitif olması gerek ve yeter koşuldur

ÖRNEK:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix}}_{G}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$ sistemin orjin kararlılığını belirleyiniz.

$Q=I$ seçelim.

$$G^T pG-p=-Q$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eğer **p** matrisi **kesin pozitif** ise orijin **x=0** da geniş anlamda asimtotik olarak kararlıdır.

$$\left.\begin{array}{l} 0.25p_{22}-p_{11}=-1 \\ 0.5(-p_{12}+p_{22})-p_{12}=0 \\ p_{11}-2p_{12}=1 \end{array}\right\} p=\begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{24}{5} \end{bmatrix}, \quad p_{11}=\frac{11}{5}, p_{12}=\frac{8}{5}, p_{22}=\frac{24}{5}$$

1) $\frac{11}{5}>0$ dır.

2) $\det(p)=|p|=(\frac{11}{5}\frac{24}{5}-\frac{8}{5}\frac{8}{5})=8$

1 ve 2 den **"p"** ***kesin pozitif matristir.***

KONTROLEDİLEBİLİRLİK VE GÖZLEMLENEBİLİRLİK

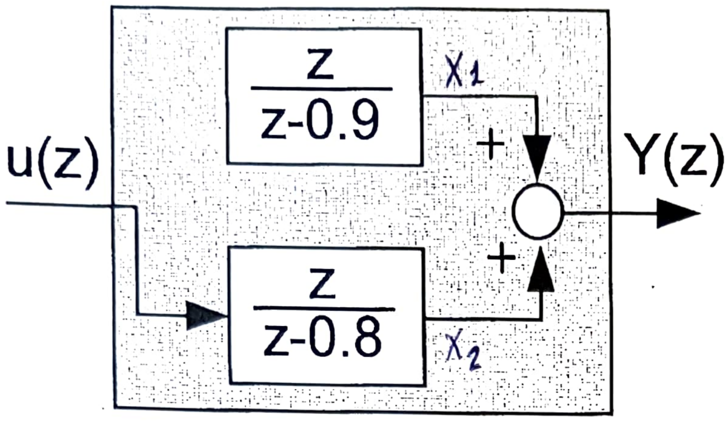
KONTROLEDİLEBİLİRLİK

Eğer bir sistemin tüm durumları her hangi bir ilk değerden istenen bir değere sonlu zamanda getirilebiliniyor ise o sistemin tüm durumları kontrol edilebilir denir. Herhangi bir durum değişkeni kontrol işaretinden bağımsız ise, bu durum değişkenini kontrol etmek imkansızdır. Bundan dolayı bu sistemin tüm durumları kontrol edilemez. Kontrol edilebilirlik,özdeğer atama (kutup yerleştirme), optimal kontrol, sistem tanımlama v.b gibi birçok kontrol problem çözümü için gerek koşuldur.

Tanım: $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$ sistemi, eğer u(0),u(1),...,u(N-1) sonlu N adet girişleri ile sistemin durum değişkenleri x(0) ilk değerinden son durum x(N-1)'e getirilebiliniyorsa sistem **kontrol edilebilir** denir. Yukarıda verilen tanım ancak, $u(k)$ genliğinin sınırsız olması durumunda geçerlidir. Eğer $u(k)$ genliği sınırlı ise, örnekleme N adetten daha fazla olması gerekmektedir.

Bu teoreme göre, açık çevrim $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$ sisteminin tüm durumları kontrol edilemiyor ise, A sistem matrisinin en az bir adet öz değeri kontrol kuralı u(k) ile değiştirilemez. Bu gibi durumlarda tüm öz-değerlerin atanabilmesi için geri besleme kuralında integral ve türev terimleri bulunan dinamik kontrolör kullanılmak zorundadır. Dinamik kontrolör sistem derecesini artırmaktadır.

Şekilde verilen kontrol sisteminde **u(k)**kontrol işaretinin **üst blokta**(moda) herhangi bir etkisi olmamaktadır. Bundan dolayı sistemin tüm durumları kontrol edilemez.



Tüm durumları kontrol edilemeyen sistem.

Tüm durum değişkenlerinin Kontrol edilebilirlik şartının elde dilmesi:
Lineer zamanla değişmeyen ayrık zaman sistem,

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad \text{ve } x(0) \text{ biliniyor.}$$

$$y(k) = Cx(k)$$

sisteminde **k=0,1,2.....N** için **x(k+1)** yazarsak,

$$k=0 \qquad x(1) = Ax(0) + Bu(0)$$

$$k=1 \qquad x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)$$

....

$$x(N) = A^N x(0) + A^{N-1}Bu(0) + \ldots + ABu(N-2) + Bu(N-1) \quad \text{ifadesi}$$

$$= A^N x(0) + \begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{N-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(N-1) \\ u(N-2) \\ \ldots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$\left[\overbrace{\underbrace{B \quad AB \quad \ldots \quad A^{N-1}B}_{V}}^{KontrolEdilebilirlikMatrisi} \right] \begin{bmatrix} u(N-1) \\ u(N-2) \\ \ldots \\ u(0) \end{bmatrix} = x(N) - A^N x(0)$$

şeklinde düzenlenir ise,

x(0) bilindiğine göre, N adet **bilinmeyenin** çözülebilmesi için N adet **denklem** gereklidir.

Durum vektörü $\mathbf{x(k)}$ nın derecesi **n**'dir. Çözümünün olabilmesi için katsayı matrisinin $rank[V] = n$ olmalıdır.

Bir ayrık sistemin tüm durumlarının kontrol edilebilmesi için kontrol edilebilirlik matris $[V]$ 'nin rankının tam olması gerekir. Sistemin derecesi **n** ise $rank[V] = n$ olmalıdır.

Sonuç olarak,

$rank[V] = rank[B \quad AB \quad \ldots \quad A^{N-1}B] = n$ şartı tüm durum değişkenlerin kontrol edilebilirlik için gerek ve yeter koşuldur.

$$x(k+1) = \overbrace{\begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ -1 & 0.8 \end{bmatrix}}^{A} x(k) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B} u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x(k)$$

Durum denklemi ile verilen sistemin kontrol edilebilirlik testini yapınız:

$$AB = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ -1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

$$V = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ 1 & -0.2 \end{bmatrix},$$ 2x2 matris tersi alınamaz. Matrisin rank=1

$rank[V] = 1$ dir.

Sistem derecesi **n=2'**dir. Sistemin 2 adet durum değişkeni mevcuttur. Ancak Kontrol edilebilirlik matrisi $rank[V] = 1$ dir. Ancak bir durum değişkeni **u(k)** işareti ile kontrol edilebilir.[V] matrisinin tersi alınamaz. Matrisin rank=1 sistemin tüm durum değişkenleri kontrol edilemez.(matrisin tersi alınamaz).

z-düzleminde tüm durumların kontrol edilebilirlik şartı:

Darbe transfer fonksiyonunda, tüm durumların kontrol edilebilirlik gerek ve yeter koşul için darbe transfer fonksiyonunda pay ve payda arasında yok etme oluşmamalıdır. Oluşur ise sistem yok edilen mod doğrultusunda kontrol edilemez.

ÖRNEK: $\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z+0.2}{z^2+z+0.16}=\frac{z+0.2}{(z+0.8)(z+0.2)}=\frac{1}{z+0.8}$

Bu yok etmeden dolayı sistem durum değişkenleri tümüyle kontrol edilemez.

Aynı sonuç durum değişkenleri ile de elde edilir. Sistem durum ve çıkış denklemleri,

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ -0.8 \end{bmatrix}u(k)$$

ile gösterilebilir.

$$y(k)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$V=\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 0.64 \end{bmatrix}\Rightarrow rank[V]=1$$

'dir. Kontrol edilemez.

$$=\begin{bmatrix} -0.8 & 0.64 \\ -0.8 & 0.64 \end{bmatrix}$$

KONTROLEDİLEBİLİRLİK

$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+Bu(t)$ durum denkleminde, $z(t)=P^{-1}x(t)$ olmak üzere lineer dönüşüm yapılır ise, $\Lambda=P^{-1}AP$, $B^*=P^{-1}B$, $C^*=CP$ olur.

$$\frac{dz(t)}{dt}=\Lambda z(t)+B^*u(t) \quad ,\Lambda=diag\{\lambda_i\}=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,......\lambda_n\}$$

durum denkleminde Λ matrisi diagonal matris olmak üzere, tüm $x(t)$ durum değişkenlerinin kontrol edilebilmesi için, B^* ***matrisinin hiç bir sıfır değerli satırı olmamalıdır.***

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$ **(Sistem matrisi diagonal (köşegen) formunda !!!!)**

$\dfrac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t)$, *$x_1(t)$ durum değişkeni $u(t)$ girişinin bir fonksiyonu değildir. Bundan dolayı $x_1(t)$ durum değişkeni $u(t)$ girişi tarafından etkilenemez.*

Dolayısı ile , $x_1(t)$ durum değişkeni kontrol edilemez.

$\dfrac{dx_2(t)}{dt} = -2x_2(t) + u(t)$ *$u(t)$ girişi $x_2(t)$ durum değişkenini ektilediğinden $x_2(t)$ değişkeni $u(t)$ girişi ile kontroledilebilir.*

Yukarıda çözülen örnek tekrar ele alınıp kontrol edilebilirliği incelenecektir.

$$x(k+1) = \overbrace{\begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ -1 & 0.8 \end{bmatrix}}^{A} x(k) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B} u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x(k)$$

A matrisini özdeğerleri **z1=0.8** ve **z2=-0.2** dir. Bu öz-değerler için elde edilen öz-vektörlerden oluşan dönüşüm matrisi p elde edilir ve A matrisi diagonal hale getirilir.

$$p = \begin{bmatrix} 0 & 0.7071 \\ -1 & 0.7071 \end{bmatrix}$$ **------>Öz-vektörlerden** oluşan **dönüşüm matrisi.**

$$p^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix} \quad p^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.4142 \end{bmatrix}$$

$$x(k+1) = P^{-1}APx(k) + P^{-1}Bu(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.4142 \end{bmatrix} u(k)$$

$x_1(k)$ durum değişkeni **u(k)** kontrol işareti ile kontrol edilememektedir.

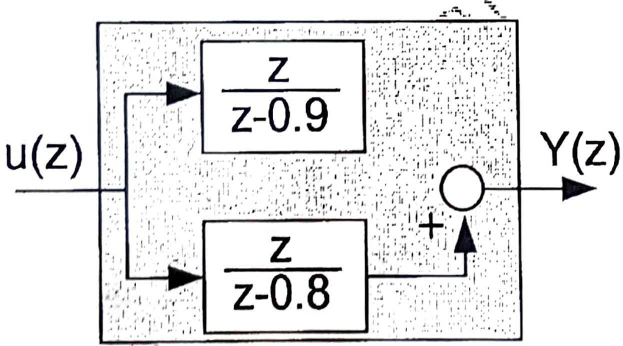
GÖZLENEBİLİRLİK:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

Durum denklemi ile verilen sistemin herhangi ilk durumu ***x(0)***, *N adet sonlu* ***y(0), y(1),.......,y(N-1)*** *ölçümden tüm* $x(0)$ *durum değişkenleri hesaplanabiliyor ise, sistem tümüyle gözlenebilir denir.*

Gözlenebilirlik, ölçülemeyen durum değişkenlerinin elde edilmesinde kullanılır. Bazı geribeslemeli gerçek zaman kontrol sistem uygulamalarında, bir kısım durum değişkenlerinin ölçümü için o durum değişkenlerine doğrudan erişemeyebilir. Bu durumda, geribesleme kontrol işaretini oluşturmak için ölçülemeyen durum değişkenlerinin kestirilmesi gerekmektedir. *Durum kestirmekte gözlemlenebilirlik önemli rol oynar.*



Yukarıda verilen şekilde, sistemde üst blok'un çıkışa etkisi olmadığından o mod'a ait durum gözlenemez (*durum değişkeni hesap edilemez*).

Tüm durum değişkenlerinin Gözlenebilirlik için gerek ve yeter şartlarının elde edilmesi;

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ durum denkleminde $u(k) = 0$ alınır (nedeni aşağıda açıklanacaktır).

k=0,1,2,.....,N-1 için

$$x[(k+1)] = Ax(k) \quad \text{ve} \quad y(k) = cx(k)$$

Yazılır ise,

$$x(1) = Ax(0) \qquad y(0) = Cx(0)$$

$$x(2) = Ax(1) = A^2x(0) \qquad y(1) = Cx(1) = CAx(0)$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$x(N-1) = A^{N-1}x(0) \qquad y(N-1) = Cx(N-1) = CA^{N-1}x(0)$$

Elde edilir. X(N-1) ifadesi **y(N-1)** de yerine koyulur ise, matrisel formda,

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \ldots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \ldots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix}}_{Q} x(0) \quad \text{elde edilir.} \quad Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \ldots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix}$$

Tüm durumların gözlenebilmesi için, $[Q]$ ***Gözlenebilirlik Matrisi olmak üzere, gerek ve yeter koşul*** $rank[Q] = n$

NOT: ***Gözlenebilirlikşartının elde edilmesinde Serbest davranışın alınma sebebi;***

$$x(kT) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu(jT)$$

$$y(kT) = Cx(kT) + Du(kT)$$

A,B,C,D matrisleri ve **u(kT)** girişleri bilinmektedir. Bundan dolayı çıkış denklemi;

$$y(kT) = CA^k x(0) + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} Bu(jT) + Du(kT)}_{SabitBilinenDeğerlerdir}$$

elde edilir. Çıkış denkleminde

$$\sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} Bu(jT) + Du(kT)$$

terimi sabitlerden oluşmaktadır ve bilinmektedir.

Bilinen bu sabit değerler gözlenen y(kT) değerinden çıkarılabilinir.

ÖRNEK:

$$x(k+1)=\overbrace{\begin{bmatrix}-0.2 & 0\\ -1 & 0.8\end{bmatrix}}^{A}x(k)+\overbrace{\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}}^{B}u(k)$$

$$y(k)=\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}}_{C}x(k)$$

Durum denklemi ile verilen sistemin **Gözlenebilirlik** testini yapınız:

$$CA=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.2 & 0\\ -1 & 0.8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.8 & 0.8\end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -0.8 & 0.8\end{bmatrix}$$

n=2 sistem derecesi, **rank[Q]=1**dir. Sistemin tüm durumları gözlemlenemez sadece 1 adet durum gözlenebilir.

Z-düzleminde gözlenebilirlik şartı:

Tüm durumların gözlenebilir olması için, transfer fonksiyonunda kutup-sıfır yok etmesi bulunmamalıdır. Eğer, kutup-sıfır yok etmesi oluşur ise, çıkışta yok edilen mod gözlenemez.

ÖRNEK:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}4 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

u(kT), tüm durumların gözlenebilirliğinde bir etkisi yoktur. Basitçe **u(kT)=0** yazabiliriz.

$$C=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5 & 1\\ -6 & -7 & -1\\ 6 & 5 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow \det(Q)=0, rank(Q)=2$$ dir. İki adet durum gözlenebilir.

Transfer fonksiyonu bulunur;

$\dfrac{Y(z)}{U(z)}=\dfrac{(z+1)(z+4)}{(z+1)(z+2)(z+3)}$, **(z+1)** çarpını pay ve paydada birbirini yok eder. **y(kT)**ölçümleri ile bu **(z+1)** durum değişkeni hesap edilemez.

GÖZLENEBİLİRLİK

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \quad y(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Yukarıdaki denklemler iki diferansiyel denkleme ayrılabilir.

$\dfrac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + u(t)$ $x_1(t)$ durum değişkeni sadece $u(t)$ ye bağlıdır.

$\dfrac{dx_2(t)}{dt} = -2x_2(t) + u(t)$ $x_2(t)$ durum değişkeni sadece $u(t)$ ye bağlıdır.

$y(t) = 2x_1(t)$ $y(t)$ çıkışı sadece $x_1(t)$'ye bağlıdır. $x_2(t)$'nin çıkışa her hangi bir etkisi yoktur. Bundan dolayı çıkış $x_2(t)$ durum değişkenine ait bilgi içermez. Sonuç olarak $y(t)$ ölçümü ile $x_2(t_0)$ belirlenemez. Sisteme ait ***Tüm durum değişkenleri gözlenemez.***

$$\frac{dz(t)}{dt} = \Lambda z(t) + B^{*}u(t) \quad , \Lambda = diag\{\lambda_i\} = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots \lambda_n\}$$

$y(t) = C^{*}x(t) + Du(t)$ **Çıkış denklemi olmak üzere, tüm** $x(t)$ durum değişkenlerinin gözlenebilmesi için, ***C matrisinin hiç sıfır değerli sütünü olmamalıdır.***

ÖRNEK: Aşağıda durum denklemi verilen sistemin gözlenebilirliğini sistem matrisini diagonal forma getirerek inceleyiniz.

$$x(k+1) = \overbrace{\begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ -1 & 0.8 \end{bmatrix}}^{A} x(k) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B} u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x(k)$$

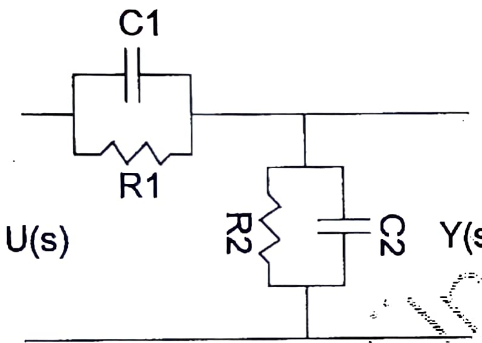
A matrisini özdeğerleri **z1=0.8** ve **z2=-0.2** dir. Bu öz-değerler için elde edilen öz-vektörlerden oluşan dönüşüm matrisi p elde edilir ve A matrisi diagonal hale getirilir.

$$P=\begin{bmatrix}0 & 0.7071\\ 1 & 0.7071\end{bmatrix}$$ ------>**Öz-vektörlerden** oluşan **dönüşüm matrisi.**

$$CP=[-1 \quad 1]\begin{bmatrix}0 & 0.7071\\ 1 & 0.7071\end{bmatrix}=[1 \quad 0]$$

$y(k)=[1 \quad 0]\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}$ $x_2(k)$ durum değişkeninin $y(k)$ çıkışına etkisi yoktur. $y(k)$ nın ölçülmesi ile $x_2(k)$ hesap edilemez.

Örnek:



Devresi göz önüne alınsın, $\dfrac{Y(s)}{U(s)}$ ifadesi yazılır ise,

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{R_2(R_1C_1s+1)}{R_1(R_2C_2s+1)+R_2(R_1C_1s+1)}$$ olarak elde edilir. $R_1C_1=R_2C_2$ olarak alınır ise,

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{R_2(R_2C_2s+1)}{R_1(R_2C_2s+1)+R_2(R_2C_2s+1)}$$ ise

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{R_2}{R_1+R_2}$$ olur.............

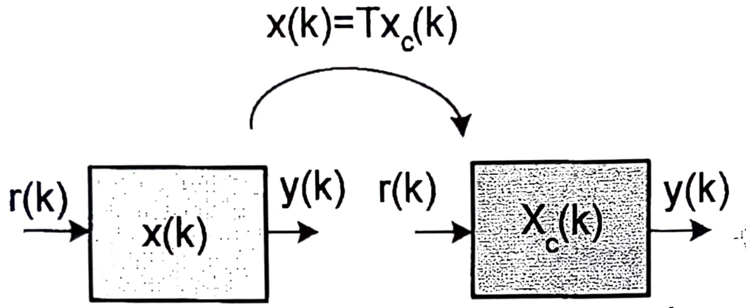
Devredeki kondansatör C_1 ve C_2 gerilimleri kontrol edilemez. Giriş ve çıkış verilerinden kondansatör ilk gerilim değerleri hesap edilemez.

Görüldüğü gibi devrede $R_1C_1=R_2C_2$ alınır ise, ***Devre durum değişkenleri kontrol edilemez ve gözlenemez.***

DURUM-UZAYI TASARIM METODLARI:

1) KONTROLEDİLEBİLİR KANONİK FORMA DÖNÜŞTÜRME:

Herhangi bir ayrık-zaman sistem durum denklemlerinin kontrol edilebilir kanonik forma dönüştürülmesi:



KontroL edilebilir
Kanonik Form

$x(k+1) = Ax(k) + Br(k)$ $x_c(k+1) = A_c x_c(k) + B_c r(k)$

$y(k) = Cx(k)$ $y_c(k) = C_c x_c(k)$

Kontrol edilebilirlik dinamik sistem matrisleri;

$A_c = T^{-1}AT$

$B_c = T^{-1}B$

$C_c = CT$

A_c, B_c, C_c katsayı matrisleri Transfer fonksiyon katsayılarından elde edilebilir.

Transfer fonksiyonu:

$T(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$ *ifadesinden elde edilebilir.*

$$\det(\lambda I - A) = |\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

karakteristik denklem katsayılarından,

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & \ldots \\ . & . & . & . & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & . & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrisi standart formda yazılır.

$A_c,\ B_c$ ***matrislerine karşılık kontrol edilebilirlik matrisi*** V_c ,

$A,\ B$ ***matrislerine karşılık kontrol edilebilirlik matrisi*** V , olmak üzere

$$V = \begin{bmatrix} B & AB & \dots A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$V_c = \begin{bmatrix} B_c & A_c B_c & \dots\dots & A_c^{n-1} B_c \end{bmatrix}$$ dir.

V_c Kontrol edilebilirlik matrisinde $A_c = T^{-1}AT$ ve $B_c = T^{-1}B$ yazılır ise,

$$V_c = \begin{bmatrix} T^{-1}B & T^{-1}A\underbrace{TT^{-1}}_{I}B & \dots \end{bmatrix} = T^{-1}\begin{bmatrix} B & AB & \dots A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$V_c = T^{-1}V$ dir

Elde edilen ifade aşağıda verildiği gibi düzenlenebilir…

$V = TV_c$ den dönüşüm matrisi ,

$T = VV_c^{-1}$ olarak elde edilir.

$A,\ B$ ve $A_c,\ B_c$ matrisleri bilindiğinden T dönüşüm matrisi elde edilir.

T dönüşüm matrisi ile, kontrol edilebilir kanonik form için,

$C_c = CT$ yardımı ile hesaplanır.

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 1 & 0.2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2 & 0.5\end{bmatrix}$ katsayı matrisleri ile verilen ayrık-zaman sistem durum denklemlerini kontrol edilebilir kanonik formda elde ediniz.

Hatırlatma: Kontrol edilebilirKanonik form

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_0z^n+b_1z^{n-1}+...+b_n}{z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{-2}+...+a_n}$$ Transfer fonksiyonu ile verilen sistemin kontrol edilebilir kanonik formu,

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\\ .\\ x_n(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & ...0\\ 0 & 0 & 1 & ...0\\ . & . & . & ....\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & ...-a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\\ .\\ x_n(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ .\\ 1\end{bmatrix}u(k)$$

$$F(z)=z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{-2}+...+a_n=0$$ **Karakteristik denklem............**

çıkış denklemi ise, $$y(k)=\begin{bmatrix}b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & ... & b_1 & b_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\\ .\\ x_n(k)\end{bmatrix}$$

Önce karakteristik denklemi yazılır;

$$|zI-A|=\det\begin{bmatrix}z-0.5 & 0\\ -1 & z-0.2\end{bmatrix}=0$$

i) $$=z^2-0.7z+0.1=0$$

$$=z^2+a_1z+a_0=0$$

ii)

Karakteristik denklem katsayılarından Kontrol edilebilir Kanonik form sistem matrisi ,

$$A_c=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{bmatrix}\Rightarrow A_c=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.1 & 0.7\end{bmatrix}$$ yazılır.

Ve standart olarak $B_c=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ olarak yazılır.

c_c ***'nin belirlenmesi;*** Önce dönüşüm matrisi $T=VV_c^{-1}$ hesaplanır. Sonra $C_c=CT$ elde edilir.

$$V=[B \vdots \; AB]=\begin{bmatrix}-1 \vdots & \begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 1 & 0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\\ 1 \vdots & \end{bmatrix}\Rightarrow V=\begin{bmatrix}-1 & -0.5\\ 1 & -0.8\end{bmatrix}\Rightarrow \det(V)=|V|=1.3$$

$$V_c=[B_c \vdots \; A_cB_c]=\begin{bmatrix}0 \vdots & \begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.1 & 0.7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\\ 1 \vdots & \end{bmatrix}\Rightarrow V_c=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0.7\end{bmatrix}\Rightarrow V_c^{-1}=\begin{bmatrix}-0.7 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$T=VV_c^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -0.5\\ 1 & -0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.7 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow T=\begin{bmatrix}0.2 & -1\\ 1.5 & 1\end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$C_c=CT=[2 \quad 0.5]\begin{bmatrix}0.2 & -1\\ -1.5 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow C_c=[-0.35 \quad -1.5]$$

2.yol => *Transfer fonksiyonundan;*

$$T(z)=C(ZI-A)^{-1}B=[2 \quad 0.5]\begin{bmatrix}z-0.5 & 0\\ -1 & z-0.2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$T(z)=\dfrac{-1.5z-0.35}{z^2-0.7z+0.1}$;transfer fonksiyonu katsayılarından A_c, B_c, C_c matrisleri,

$$T(z)=\frac{b_0z^2+b_1z+b_2}{z^2+a_1z+a_2}\Rightarrow \begin{matrix}b_1=-1.5\\ b_2=-0.35\\ b_0=0\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}a_1=-0.7\\ a_2=0.1\end{matrix} \quad A_c=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.1 & 0.7\end{bmatrix}$$

$$B_c=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \quad C_c=[b_2-b_0a_2 \qquad b_1-a_1b_0]$$

$$[-0.35-0*0.1 \quad -1.5-(-0.7)*0]$$

$$C_c=[-0.35 \quad -1.5]$$

HATIRLATMA: $\dfrac{Y(z)}{U(z)}=\dfrac{b_0z^n+b_1z^{n-1}+...+b_n}{z^n+a_1z^{n-1}+...+a_n}$

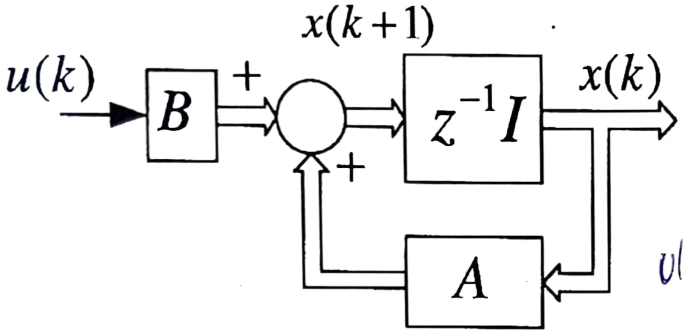
$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\\ \dots\\ x_n(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\\ \dots\\ x_n(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dots\\ 1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=[b_n-b_0a_n \quad \dots \quad b_1-a_1b_0]\begin{bmatrix}x_1(k)\\ \dots\\ x_n(k)\end{bmatrix} \quad \text{n>m}$$

Durum Uzayında Tasarım

Kutup Yerleştirme Tasarım Metodu:

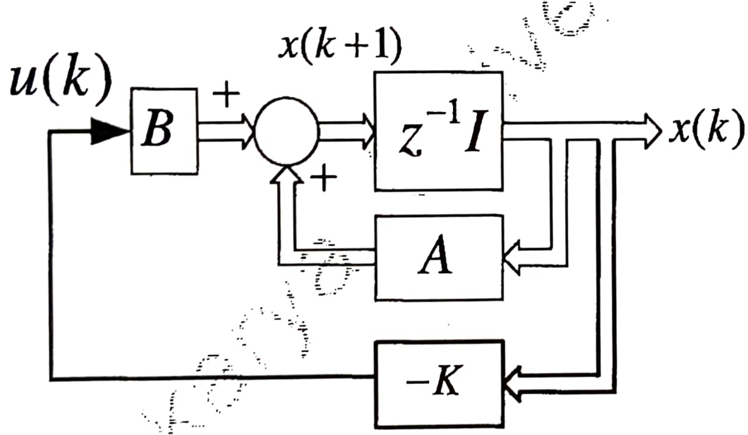
Lineer zamanla değişmeyen ayrık-zaman sistem, **x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)** ile verilsin. Bütün **x(k)**, durumlarının bilindiği ve erişebildiği kabul edilsin.



$$U(k) = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} = -(k_1 x_1(k) + k_2 x_2(k) + k_3 x_3(k))$$

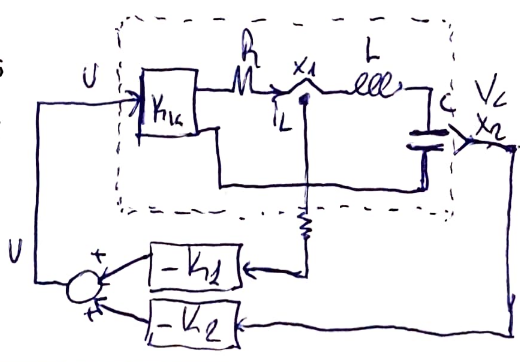
Bu sisteme, lineer durum geri-besleme kontrol kuralı olarak $\boxed{u(k) = -Kx(k)}$ uygulansın ve kapalı-çevrim sistem $x(k+1)$

$x(k+1) = Ax(k) + B(-Kx(k)) \;\Rightarrow\; x(k+1) = (A - BK)x(k)$ olur.



Lineer durum geri-besleme kuralı ile kapalı çevrim sistem

Kontrolör matrisi (statik durum geri-besleme katsayı matrisi) **K**, kapalı-çevrim sisteminin performansını iyileştirecek şekilde seçilebilir. Performansı iyileştirme yollarından biri kutup yerleştirme yöntemidir. Bu metod kullanılarak, açık çevrim sisteminin davranışı önemli ölçüde iyileştirilebilir. Bu metod kararsız bir sistemi kararlı yapabilir, cevap hızını arttırabilir veya azaltabilir, sürekli hal hatasını arttırabilir, azaltabilir, sistem bant genişliğini daraltabilir, genişletebilir. Tüm bu nedenlerden dolayı, kutup ***yerleştirme yöntemi pratikte yaygın olarak kullanılmaktadır.***



Kutup yerleştirme veya kutup atama problemi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ 'ler **açık-çevrim** sisteminin **öz-değerleri** olsun { $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ 'nın

ve

$\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, ..., \hat{\lambda}_n$ 'ler ise $(A - BK)$ **kapalı-çevrim** sistem matrisinin istenen **öz-değerleri** olsun. **Kompleks özdeğerler**, kompleks eşlenik çiftler halindedir.

Aynı zamanda, $p(z)$ ve $\hat{p}(z)$ sırası ile **karakteristik polinomlar** (*karakteristik denklem*) olsun.

- **Açık çevrim** sisteminin **karakteristik denklemi**;

$$p(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i) = |zI - A| = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n = 0$$

- **Kapalı çevrim** sisteminin (*durum geri-beslemeli*)**karakteristik denklemi**;

$$\hat{p}(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \hat{\lambda}_i) = |zI - A + BK| = z^n + \hat{a}_1 z^{n-1} + ... + \hat{a}_{n-1} z + \hat{a}_n = 0 \quad (*)$$

$\hat{p}(z)$ denklemini sağlayacak olan**K** matrisinin bulunması gerekmektedir.

Teorem:Açık-çevrim sisteminin **tüm durum vektörleri kontrol edilebilir** ise kapalı-çevrim sistem $(A - BK)$ matrisininöz-değerlerini herhangi bir $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, ..., \hat{\lambda}_n$ **öz-değerlerine**atayan bir durum ***geri-besleme*** matrisi, **K** vardır.

$$\underbrace{S}_{\substack{\text{Kontrol}\\ \text{Edilebilirlik}\\ \text{Matrisi}}} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$ Tüm durumların kontrol edilebilmesi için ,

Kontrol edilebilirlik matrisinde, $rank[S] = n$ olmalıdır.

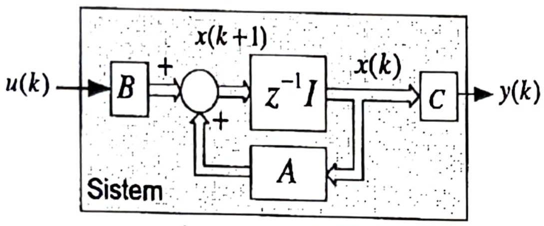
Bu teoreme göre, ***açık-çevrim*** sisteminin ***Tüm durumlarınınkontrol edilemediği*** durumlarda, durum geri besleme kuralı ile A matrisinin en az bir tane öz-değeri değiştirilemez olarak kalır. Bu gibi durumlarda, bütün özdeğerlerin atanabilmesi için, geri-besleme kuralı olarak dinamik kontrolör uygulanmalıdır.Türev ve inregral terimleri ihtiva eden dinamik kontrolörler sistemin derecesini arttırdıklarından dezavantaja sahiptirler. içeren

Tek girişli sistem ele alınsın. **B** matrisi kolon vektör **b, K** matrisi satır vektör k^T ye dönüşür.

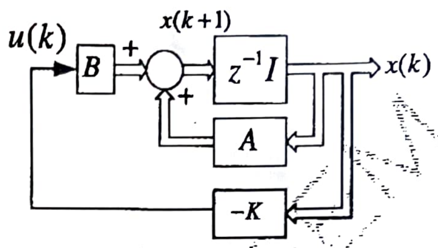
NOT: Reel katsayılı polinom olması için: $(z-1+j)(z-1-j) = z^2 - 2z + 2$ olur.
Kökler kompleks eşlenik olmaz ise kompleks polinom katsayıları çıkar.

$$\hat{p}(z)=\prod_{i=1}^{n}(z-\hat{\lambda}_i)=\left|zI-A+Bk^T\right|=z^n+\hat{a}_1 z^{n-1}+\ldots+\hat{a}_{n-1}z+\hat{a}_n=0$$

Denkleminin **k** ya göre çözümü tektir.**K** nın belirlenmesinde ***birçok yöntem amaçlanmış***tır. En popüler yöntem **Bass ve Gura** ya göredir ve aşağıda verilen basit yöntem ile çözülür.



Açık-çevrim sistem



Kapalı-çevrim sistem

Açık-çevrim sistem karakteristik denklem:

$$p(z)=\prod^{n}(z-\lambda_i)=|zI-A|=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=0$$

(Olması istenen) Kapalı-çevrim sistem karakteristik denklem:

$$\hat{p}(z)=\prod_{i=1}^{n}(z-\hat{\lambda}_i)=\left|zI-A+Bk^T\right|=z^n+\hat{a}_1 z^{n-1}+\ldots+\hat{a}_{n-1}z+\hat{a}_n=0$$

1. **Yol:** a ve w matrisleri ***açık-çevrim sistem karakteristik denklem polinom katsayılarından,***

$$w=\begin{bmatrix}1 & a_1 & \ldots & a_{n-1}\\ 0 & 1 & \ldots & a_{n-2}\\ . & . & \ldots & .\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{bmatrix},\quad a=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \ldots\\ a_n\end{bmatrix}$$ matrisleri ve

$\hat{a}$ matrisi ise ***kapalı-çevrim sistem karakteristik denklem polinom katsayılarından***

$$\hat{a}=\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\\ \ldots\\ \hat{a}_n\end{bmatrix}$$ sırası ile elde edilir. Bu katsayılar matrisleri kullanılarak ***statik durum geri-beslemematrisiK,S, kontrol edilebilirlik matrisi*** olmak üzere,

$$\boxed{K=\left[w^T s^T\right]^{-1}(\hat{a}-a)\,,}\qquad \boxed{S=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & \ldots & A^{n-1}B\end{bmatrix}}$$

ifadesi ile hesap edilir.

2. Yol: eğer verilen sistem matrisi ***faz-değişken (Kontrol edilebilir)*** kanonik formda ise,

$$A=\begin{bmatrix}1 & a_1 & \dots & a_{n-1}\\ 0 & 1 & \dots & a_{n-2}\\ . & . & \dots & .\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix},\ veya\ A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \\ . & . & . & \dots & .\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1\end{bmatrix} \text{ve}\, b=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \dots\\0\\1\end{bmatrix}$$

Ve $S=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B\end{bmatrix}$ $w^T s^T=\tilde{I}$ dır(olur)

$$\tilde{I}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ . & . & . & .\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \left(\tilde{I}\right)^{-1}=\tilde{I} \quad \text{dır.}$$

$$\hat{a}=\begin{bmatrix}\hat{a}_n\\ \hat{a}_{n-1}\\ \dots\\ \hat{a}_1\end{bmatrix},\quad a=\begin{bmatrix}a_n\\ a_{n-1}\\ \dots\\ a_1\end{bmatrix} \text{ olmak üzere,} \quad \boxed{K=\tilde{I}(\hat{a}-a)=\begin{bmatrix}\hat{a}_n-a_n\\ \hat{a}_{n-1}-a_{n-1}\\ \dots\\ \hat{a}_1-a_1\end{bmatrix}}$$

Kapalı çevrim Açık çevrim Polinom katsayılarının farkı

durum geri besleme matrisi kolayca hesap edilebilir.

3. Yol:

Kmatrisinin hesaplanmasında diğer bir yöntem ***Ackerman*** tarafından önerilmiştir.

$$\boxed{k^T=e^T s^{-1}\hat{p}(A)}\quad S=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B\end{bmatrix}\text{kontrol edilebilirlik matris,}$$

$e^T=[0\ \ 0\ \dots\ 0\ \ 1] \longrightarrow$ sistemin derecesine göre örnek: $n=2$ ise $e^T=[0\ 1]$
$n=3$ ise $e^T=[0\ 0\ 1]$

$\hat{p}(A) \Rightarrow \hat{p}(z)$ karakteristik denkleminde $z=A$ koyularak elde edilir. $\hat{P}(A)=\hat{P}(z)\Big|_{z=A}$

$$\hat{p}(z)=A^n+\hat{a}_1 A^{n-1}+\dots+\hat{a}_{n-1}A+\hat{a}_n I$$

Genel olarak, çok girişli sistem durumunda **K** matrisinin belirlenmesi biraz karışıktır(zordur).

$K=qp^T$ olarak q ve p n-boyutlu matrisler olmak üzere,

$A-BK = A-Bqp^T = A-\beta p^T$, $\beta = Bq$ çok girişli sistem tek girişli sisteme indirgenmiş olur.
Kontrol edilebilirlik matrisi, $S=\begin{bmatrix}\beta & A\beta & \dots & A^{n-1}\beta\end{bmatrix}$ olmak üzere yöntemlere başvurulabilir.

Metod4: Genel Kutup Yerleştirme (Formüle gerek yok)

n.dereceden sistem modeli; $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ olsun.

Kontrol işareti, $u(k) = -Kx(k)$ ve $K = [K_1 \quad K_2 \quad \dots \quad K_n]$ olmak üzere,

$x(k+1) = \underbrace{(A-BK)}_{Ac}x(k)$ olur. $\det(zI - A + BK) = 0$

İstenen kutup yerleri; $z = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olmak üzere Kapalı çevrim sistem karakteristik polinom,

$\alpha_c(z) = |zI - A + BK| = |zI - A_c| = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\dots(z-\lambda_n) = 0$ olsun.

Bu denklemde **n** adet $K_1, K_2, \dots, K_n$ bilinmeyen ve sağ tarafta ise **n** adet bilinen polinom katsayıları mevcuttur. Katsayılar eşitlenerek bilinmeyen katsayılar $K_1, K_2, \dots, K_n$ hesaplanır.

Sürekli ise ayrığa çevir

ÖRNEK: *Ayrık-zaman durum denklem katsayılar matrisi aşağıda verilmiş olan sistem için* $S = [B \quad AB]$, rank$[S] = 2$ (Kontrol edilebilir)

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *olduğuna göre, kapalı çevrim sistem öz-değerlerinin* $\hat{\lambda}_1 = -1$ ve
λ_1 ve λ_2 reel olduğundan aşırı sönümlü, complex olsaydı aşım olurdu
$\hat{\lambda}_2 = 0.5$ **olabilmesi için durum geri besleme katsayı vektörü k'yı bulunuz.**

$p(z) = |zI - A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} z & -1 \\ 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z^2 + 1 = 0$ *açık-çevrim sistemin karakteristik denklemi*

$\hat{p}(z) = (z - \hat{\lambda}_1)(z - \hat{\lambda}_2) = (z+1)(z-0.5) = z^2 + 0.5z - 0.5 = z^2 + \hat{a}_1 z + \hat{a}_2$ *istenen karakteristik denklem (Kapalı-çevrim karakteristik denklem)* $\hat{a}_1 = 0.5$ ve $\hat{a}_2 = -0.5$

Metod1: sistem faz değişken kanonik formunda olduğu için

$$k = \begin{bmatrix} \hat{a}_2 - a_2 \\ \hat{a}_1 - a_1 \end{bmatrix} \Rightarrow k = \begin{bmatrix} -0.5-1 \\ 0.5-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \begin{cases} Not: z^2 + a_1 z + a_2 = z^2 + 1 \Rightarrow \\ \quad a_1 = 0, a_2 = 1 \end{cases}$$

Metod2:

$$w=\begin{bmatrix}1 & a_1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \text{ ve } s=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{bmatrix}\Rightarrow s=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$w^Ts^T=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} \text{ ve } (w^Ts^T)^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$k=(w^Ts^T)^{-1}(\hat{a}-a)=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}0.5\\-0.5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}-1.5\\0.5\end{bmatrix}$$

Metod3: **Ackerman** yaklaşımı ile durum geri besleme katsayı matrisi k^T 'nın çözüm,

$\hat{p}(z)=z^2+0.5z-0.5$ polinomda z yerine A matrisi yazılır ise,

$\hat{p}(A)=A^2+\hat{a}_1A+I\hat{a}_2$ elde edilir.

$$\hat{p}(A)=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}^2+0.5\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.5 & 0\\0 & 0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.5 & 0.5\\-0.5 & -1.5\end{bmatrix}$$

$s^{-1}=[b \quad Ab]^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ $e^T=[0 \quad 1]$ dir.

$$k^T=e^Ts^{-1}\hat{p}(A)=[0 \quad 1]\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1.5 & 0.5\\-0.5 & -1.5\end{bmatrix}=[-1.5 \quad 0.5]$$

Metod4:

$$x(k+1)=(A-BK)x(k)$$

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\left[\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}[\mathrm{k}_1 \quad \mathrm{k}_2]\right]\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\left[\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\\mathrm{k}_1 & \mathrm{k}_2\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\-1-\mathrm{k}_1 & -\mathrm{k}_2\end{bmatrix}}_{A_c}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}$$

$$\det(zI - A_c) = \left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$= \left| \begin{bmatrix} z & -1 \\ 1+k_1 & z+k_2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$= z^2 + k_2 z + 1 + k_1 = 0$$

$$z^2 + k_2 z + 1 + k_1 = z^2 + 0.5z - 0.5 = 0$$

$k_2 = 0.5$ ve $1 + k_1 = -0.5$ ise $k_1 = -1.5$

$k^T = [k_1 \quad k_2] = [-1.5 \quad 0.5]$ olarak elde edilir.

Elde edilen durum geri besleme matrisi Kdeğerleri yerlerine yazılır.

$$x(k+1) = Ax(k) + B(-Kx(k)) \Rightarrow x(k+1) = (A - BK)x(k)$$

$$x(k+1) = (A - BK)x(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] \right] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-1.5 \quad 0.5] \right] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}}_{A_c} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$ Kapalı çevrim sistem elde edilir.

$\det(zI - A_c) = \begin{vmatrix} z & -1 \\ -0.5 & z+0.5 \end{vmatrix} = 0$ ise $z^2 + 0.5z - 0.5 = 0$ $z_1 = -1$, $z_2 = 0.5$ tir.

ref giriş yok $v(k) = -Kx(k)$ [Durum Geri Besleme]

ref girişli $v(k) = r(k)K_0 + (-Kx(k))$

$\hat{G} = A - BK$

$\hat{H} = BK_0$

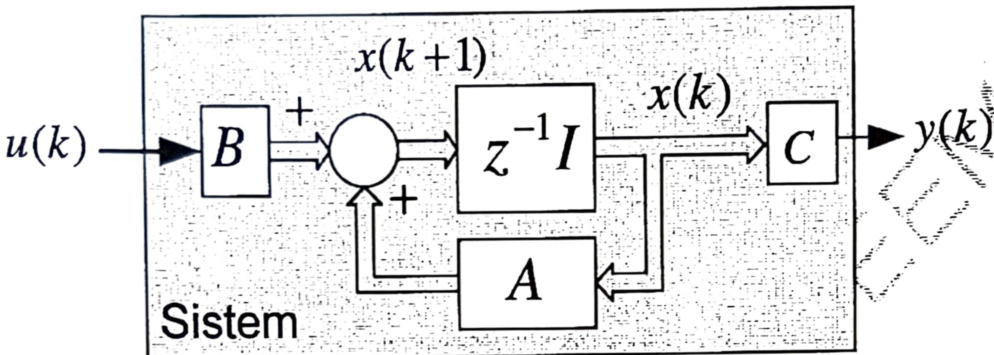
$G(z) = C(zI - \hat{G})^{-1} \cdot \hat{H}$

sondeğer teoreminden K_0 elde edilir.

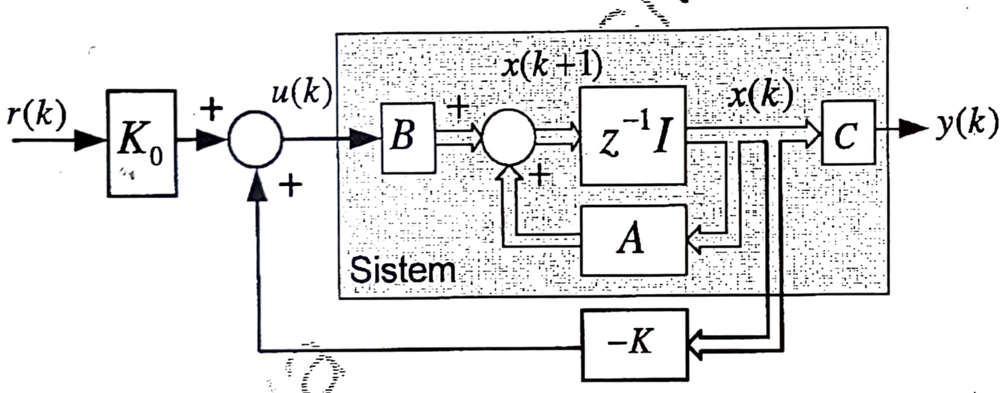
Referans girişli kontrol sistemi: Kontrol edilmek istenen sisteme ait ayrık-zaman durum uzay modeli vektör matris formunda

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

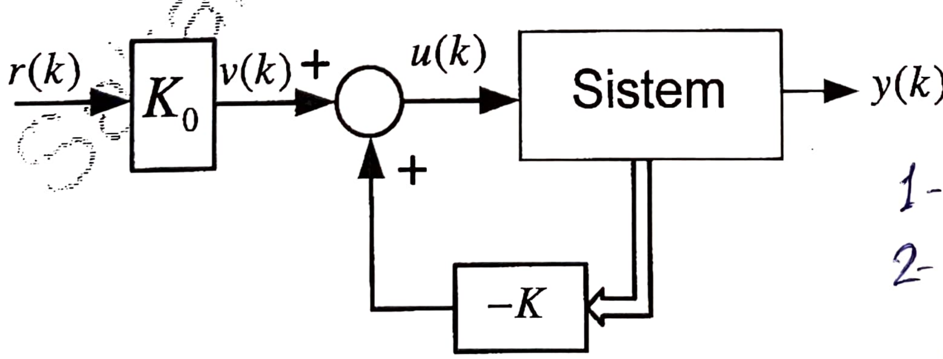
verilsin. Sisteme ait kontrol blok diyagram aşağıda verilmiştir.



Kontrol edilen sistemeaşağıda verildiği gibi durum geri-besleme ile beraber $r(k)$ referans işaret uygulansın.



Referans girişli durum geri-beslemeli sistem.



1- K hesaplanır

2- $\frac{Y}{R} = K_0$ ...

$R = \frac{1}{s}$ girişi için son değer teoremiyle K_0 bulunur.

Referans girişli durum geri-beslemeli kompakt olarak verilmiş sistem.

Referans girişli durum geri-beslemeli sistem ait kontrol işareti yazılır ise,

$u(k) = K_0 r(k) - Kx(k)$ olarak ifade edilir. Bu ifade durum denkleminde yerine yazılır

$$x(k+1) = Ax(k) + BK_0 r(k) - BKx(k) \Rightarrow$$

$x(k+1) = (A - BK)x(k) + BK_0 r(k)$ olarak elde edilir.

Karakteristik denklem ,

$|zI - A + BK| = 0$ olarak yazılır.

Tüm durum geri-beslemesi ile, sistemin karakteristik denklemi değiştirilebilir, ancak sistemin sürekli hal kazancıda değişir. Bundan dolayı, sistemde ayarlanabilir, K_0, ***kazancı gereklidir.*** K_0, ***birim basamak giriş için*** $y(\infty) = 1$ ***olacak şekilde ayarlanmalıdır.***

ÖRNEK:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Kökler kompleks olduğundan sönümlü ilerleyecek

ise, kapalı çevrim kutuplarının $z_1 = 0.5 + j0.5$, $z_2 = 0.5 - j0.5$ olması istenmektedir.

$$|zI - A + BK| = (z - 0.5 - j0.5)(z - 0.5 + j0.5) = z^2 - z + 0.5 \Rightarrow$$

$K = [0.34 \quad -2]$ olarak elde edilir. $\boxed{R(z) = \dfrac{z}{z-1}}$ birim basamak giriş için

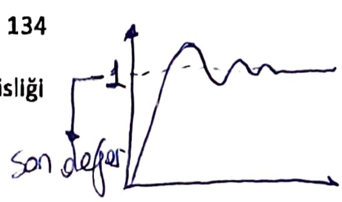
K, kullanılarak transfer fonksiyonu hesaplanır $\boxed{\left.\begin{aligned} \hat{G} &= A - BK \\ \hat{H} &= BK_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow G(z) = C(zI - \hat{G})^{-1}\hat{H}}$

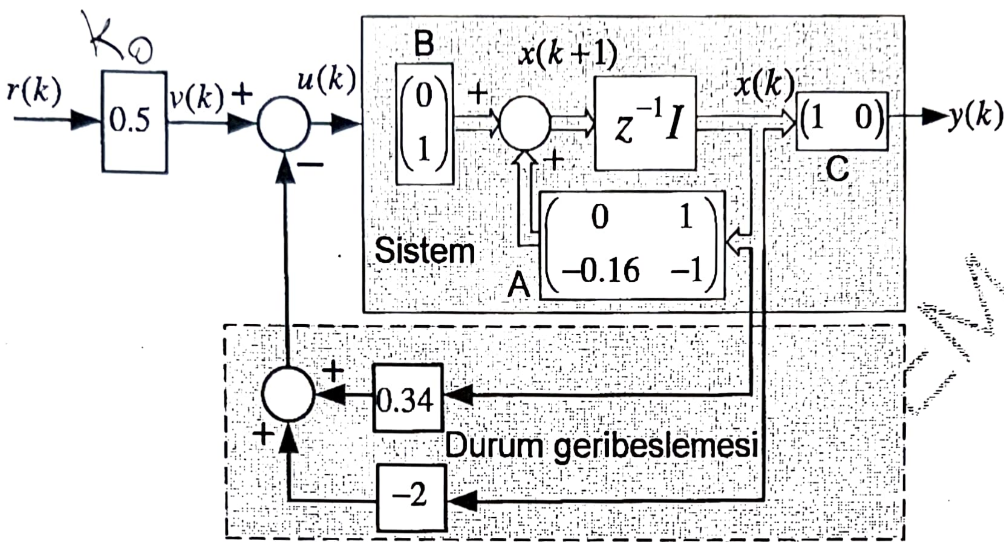
$$\hat{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0.34 \quad -2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} K_0 \quad ise\ \hat{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \end{bmatrix}$$

$$G(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.5 & z-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad G(z) = \frac{K_0}{z^2 - z + 0.5}$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_0}{z^2 - z + 0.5} \Rightarrow y(\infty) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{\frac{z}{z-1} K_0}{z^2 - z + 0.5} \Rightarrow \frac{K_0}{0.5} = 1 \Rightarrow K_0 = 0.5$$

Son değer teoremi





Bilgi notu:

Kontrol edilmek istenen sisteme ait ayrık zaman durum denklemleri,

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

$y(k) = Cx(k)$ olarak verilsin.

$u(k) = -Kx(k)$ durum geri-besleme kontrol kuralı olsun, yerine koyulur ise.

$x(k+1) = Ax(k) + B(-Kx(k))$

$x(k+1) = [A - BK]x(k))$ elde edilir. Sistem matrisin A'dan A-BK'ya dönüştü

Yukarıda verilen sisteme lineer dönüşüm ve durum geri-besleme kontrol kuralı uygulansın.

$x(k) = Tx^{'}(k)$ ve $x^{'}(k) = T^{-1}x(k)$ $x^{'}(k+1) = T^{-1}x(k+1)$ lineer dönüşüm ve geri-besleme uygulanır ise,

$x^{'}(k+1) = T^{-1}ATx^{'}(k) + T^{-1}Bu(k)$

$y(k) = CTx^{'}(k)$ olur.

Kontrol kuralına lineer dönüşüm uygulanır ise,

$u(k) = -Kx(k)$

$u(k) = -KTx^{'}(k)$ $u(k) = -fx^{'}(k)$ elde edilir. $f = KT$ dir.

Lineer dönüşüm ve durum geri-besleme uygulandıktan sonra elde edilen karakteristik denklem lineer dönüşümsüz durum geri-beslemeli sistemin karakteristik denklemi ile aynıdır. Aşağıda ispatı verişmiştir.

$x^{'}(k+1) = A_c x^{'}(k) + B_c u(k)$;lineer dönüşüm uygulanmış durum denklemleri.

$y(k) = C_c x^{'}(k)$

Lineer dönüşümden sonra $u(k) = -fx^{'}(k)$ durum geri-beslemesi uygulanır ise

$x^{'}(k+1) = A_c x^{'}(k) + B_c(-fx^{'}(k))$

$x^{'}(k+1) = [A_c - B_c f]x^{'}(k)$ elde edilir.

Dönüşümden sonra karakteristik denklemler değişmeyeceğinden,

$\det(zI - A + BK) = \det(zI - A_c + B_c f) = 0$ olmalıdır. NOT: **özellik,** $|P^{-1}||A||P| = |A|$ dır.

$\det(zI - A_c + B_c f) = 0$ ifadesini açıp yukarıda verilen özellik göz önüne alınır ise,

$\det(zI - A_c + B_c f) = \det(zT^{-1}IT - T^{-1}AT + T^{-1}Bf) = 0$

$= |zT^{-1}IT - T^{-1}AT + T^{-1}Bf| = 0$ ve $f = KT$ yazılır ise,

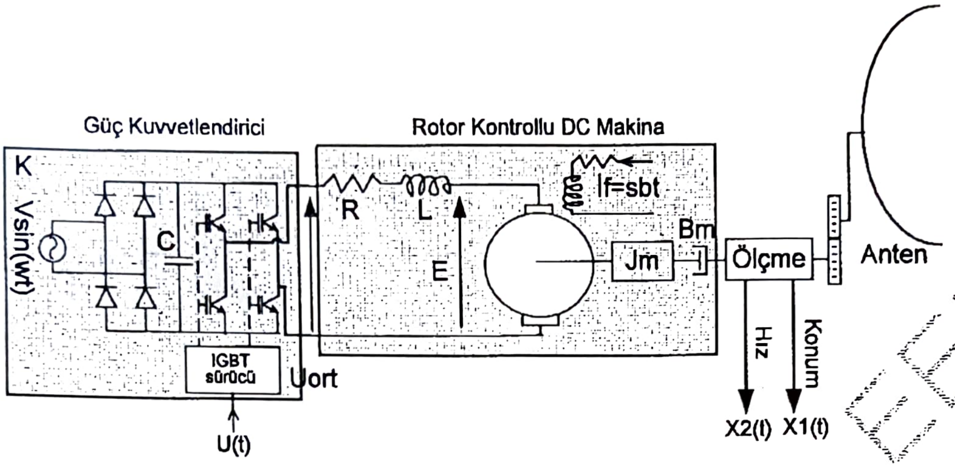
$= |T^{-1}||zI - A + BK||T| = 0$

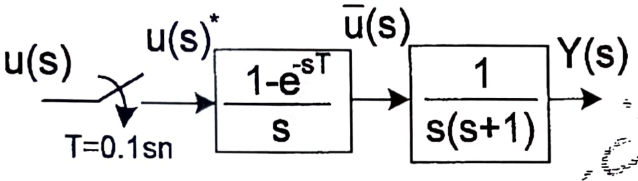
$= |zI - A + BK| = 0$ olur.

Buradan, lineer dönüşüm uygulandıktan sonra durum geri besleme matrisi f elde edilir. Bu matristen, dönüşüm uygulanmamış sistem durum geri besleme matrisi

$K = f^T T^{-1}$ ile elde edilir. f^T : f 'nin Transpozu

ÖRNEK:





Şekilde servo sisteme ait açık-çevrim kontrol blok diyagramı ve aşağıda durum uzay modeli verilmiştir.

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 0.0952\\ 0 & 0.905\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0.00484\\ 0.0952\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(k)$$

u(k)=-Kx(k) durum geri-beslemesi ile yerleşme zamanı (%2) $t_s=4\ sn$ ve $Aşım\cong\%16$ ($\xi=0.46$) olması istenmektedir. Durum geri-besleme matrisi **K**'yı hesaplayınız.

istenen yerleşme zamanı ve aşımı sağlayacak olan kapalı-çevrim kutupları;

$$\%2, t_s=\frac{4}{\xi w_n}=4\Rightarrow \xi w_n=1\Rightarrow w_n=\frac{1}{\xi}\Rightarrow w_n=\frac{1}{0.46}\Rightarrow w_n=2.17 rad/sn, \xi=0.46$$

$$z_{1,2}=e^{-\xi w_n T}e^{\mp j w_n\sqrt{1-\xi^2}T}=e^{-0.46*2.17*0.1}e^{\mp j2.17*\sqrt{1-0.46^2}*0.1}\Rightarrow$$

$$z_{1,2}=\lambda_{1,2}=0.905\angle\pm 11.04\Rightarrow z_{1,2}=\lambda_{1,2}=0.888\mp j0.1745$$

Olması istenen karakteristik denklem $\lambda_{1,2}$ kullanılarak;

$$\alpha(z)=(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)=(z-0.888-j0.1745)(z-0.888+j0.1745)=z^2-1.776z+0.819=0$$

$\alpha(z) = z^2 - 1.776z + 0.819 = 0$ İstenen Karakteristik denklem

Durum geri-besleme matrisi **K** dört farklı yoldan sırası ile aşağıda elde edilecektir.

1.YOL : Geri-besleme matrisi, $K = \left[w^T s^T\right]^{-1}(\hat{a} - a)$ ifadesi ile hesap edilecektir.

$|zI - A|$

$\alpha(z) = z^2 - 1.905z + 0.905 = z^2 + a_1 z + a_2 = 0$ Açık çevrim Karakteristik denklem

$\alpha_c(z) = z^2 - 1.776z + 0.819 = z^2 + \widehat{a_1} z + \widehat{a_2} = 0$ İstenen Kapalı çevrim Karakteristik denklem

$$\alpha = \det(zI - A) = \det\left(\begin{bmatrix} z-1 & -0.0952 \\ 0 & z-0.905 \end{bmatrix}\right) = z^2 - 1.905z + 0.905 = 0$$

Açık-çevrimden elde edilen katsayılar matrisleri

$$w = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & a_{n-2} \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} 1 & -1.905 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} -1.905 \\ 0.905 \end{bmatrix}$$

Kapalı-çevrimden elde edilen katsayı matrisi $\hat{a} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \dots \\ \hat{a}_n \end{bmatrix} \quad \hat{a} = \begin{bmatrix} -1.776 \\ 0.819 \end{bmatrix}$

Kontrol edilebilirlik matrisi: $S = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0.00484 \\ 0.0952 \end{bmatrix} \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0.0952 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.00484 \\ 0.0952 \end{bmatrix}\right\}\right]$

$$S = \begin{bmatrix} 0.0048 & 0.0139 \\ 0.0952 & 0.0862 \end{bmatrix}$$

$$(W^T \cdot S^T)^{-1} \cdot (\hat{a} - d)$$

$$K = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1.905 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0048 & 0.0952 \\ 0.0139 & 0.0862 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} -1.776 \\ 0.819 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.905 \\ 0.905 \end{bmatrix} \right) \quad K = \begin{bmatrix} 4.51 \\ 1.12 \end{bmatrix}$$

2.YOL: Durum denklemleri faz kononik şekline getirilerek, durum geri-besleme matrisi

Uzun yol
(Tavsiye edilmiyor)

$$K = \bar{I}(\hat{a} - a) = \begin{bmatrix} \hat{a}_n - a_n \\ \hat{a}_{n-1} - a_{n-1} \\ \dots \\ \hat{a}_1 - a_1 \end{bmatrix}$$ ifadesi ile hesap edilecektir.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.0952 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.00484 \\ 0.0952 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

Durum denklemleri verilen sistem kontrol edilebilir kanonik form (faz-değişken kanonik form) dönüştürülür. Verilen sistemin karakteristik denkleminden

$\alpha(z) = z^2 - 1.905z + 0.905 = z^2 + a_1 z + a_2 = 0$ Açık çevrim Karakteristik denklem

faz-değişken Kanonik formun sistem matrisi elde edilir.

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.905 & 1.905 \end{bmatrix}$$ ve standart olarak $B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olarak yazılır.

$\alpha_c(z) = z^2 - 1.776z + 0.819 = z^2 + \hat{a}_1 z + \hat{a}_2 = 0$ İstenen Kapalı çevrim Karakteristik denklem

$$K = \begin{bmatrix} \hat{a}_2 - a_2 \\ \hat{a}_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.819 - 0.905 \\ -1.776 - (-1.905) \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.086 \\ 0.129 \end{bmatrix}$$

$$T = VV_c^{-1}$$

$$V = S = \begin{bmatrix} 0.0048 & 0.0139 \\ 0.0952 & 0.0862 \end{bmatrix}$$ elde edilmişti.

$$V_c = [B_c \vdots \; A_c B_c] = \begin{bmatrix} 0\vdots & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1.905 & -0.905 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 1\vdots & \end{bmatrix} \Rightarrow V_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1.905 \end{bmatrix} \Rightarrow V_c^{-1} = \begin{bmatrix} -1.905 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = VV_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0048 & 0.0139 \\ 0.0952 & 0.0862 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1.905 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0.0047 & 0.0048 \\ -0.0952 & 0.0952 \end{bmatrix}$$

$$k = K^T T^{-1} = \begin{bmatrix} -0.086 \\ 0.129 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0.0047 & 0.0048 \\ -0.0952 & 0.0952 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$k^T = \begin{bmatrix} 4.51 \\ 1.12 \end{bmatrix}$$

NOT: Elde edilen dönüşüm matrisi nin doğruluğunu onaylamak için, verilen durum denklemini kontrol edilebilir kanonik forma dönüştürülsün.

$$x_c(k+1) = T^{-1}ATx_c(k) + T^{-1}Br(k)$$
$$y_c(k) = CTx_c(k)$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0.0047 & 0.0048 \\ -0.0952 & 0.0952 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0.0952 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.0047 & 0.0048 \\ -0.0952 & 0.0952 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.905 & 1.905 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0.0047 & 0.0048 \\ -0.0952 & 0.0952 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0.00484 \\ 0.0952 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$CT = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} 0.0047 & 0.0048 \\ -0.0952 & 0.0952 \end{bmatrix}$$
$$= [0.0047 \quad 0.0048]$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.0952 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix}x(k) + \begin{bmatrix} 0.00484 \\ 0.0952 \end{bmatrix}u(k) \qquad y(k) = [1 \quad 0]x(k)$$

Dönüşümden sonra kontrol edilebilir kanonik (faz-değişken kanonik)form aşağıda verilmiştir.

$$x_c(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.905 & 1.905\end{bmatrix}x_c(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}r(k) \qquad y_c(k)=\begin{bmatrix}0.0047 & 0.0048\end{bmatrix}x_c(k)$$

3. YOL: Ackerman ifadesi, $k^T=e^T s^{-1}\hat{p}(A)$ ile durum geri besleme matrisinin bulunması.

$e^T=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{bmatrix}$ ise $e^T=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$ dir.

$S=\begin{bmatrix}0.0048 & 0.0139\\ 0.0952 & 0.0862\end{bmatrix}$ ise $S^{-1}=\begin{bmatrix}-95.0347 & 15.3358\\ 105.0107 & -5.3388\end{bmatrix}$ dir.

$$\hat{p}(z)=A^n+\hat{a}_1A^{n-1}+\dots+\hat{a}_{n-1}A+\hat{a}_nI$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0.0952\\ 0 & 0.905\end{bmatrix}^2-1.776\begin{bmatrix}1 & 0.0952\\ 0 & 0.905\end{bmatrix}+0.819\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\hat{p}(z)=\begin{bmatrix}0.043 & 0.0123\\ 0 & 0.0307\end{bmatrix}$$

$$k^T=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-95.0347 & 15.3358\\ 105.0107 & -5.3388\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.043 & 0.0123\\ 0 & 0.0307\end{bmatrix}$$

$k^T=\begin{bmatrix}4.51 & 1.12\end{bmatrix}$ elde edilir.

4.YOL: kutup yerleştirme yöntemi ile durum geri-besleme matrisinin bulunması.

$K=\begin{bmatrix}K_1 & K_2\end{bmatrix}$ durum geri besleme matrisi kullanılarak istenen karakteristik denklem elde edilir.

$$\alpha_c=\det(zI-A+BK)=\det\left(\begin{bmatrix}z-1 & -0.0952\\ 0 & z-0.905\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.00484\\ 0.0952\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_1 & K_2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\det\left(\begin{bmatrix}z-1 & -0.0952\\ 0 & z-0.905\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.00484K_1 & 0.00484K_2\\ 0.0952K_1 & 0.0952K_2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\det\left(\begin{bmatrix}z-1+0.00484K_1 & 0.00484K_2\\ 0.0952K_1 & z-0905+0.0952K_2\end{bmatrix}\right)$$

Durum geribeslemeli sistem karakteristik denklem aşağıda verilmiştir.

$$\alpha_c(z) = z^2 + (0.00484K_1 + 0.0952K_2 - 1.905)z + 0.004684K_1 - 0.0952K_2 + 0.905 = 0$$

Olması istenen kapalı-çevrim Karakteristik denklem

$$\alpha(z) = z^2 - 1.776z + 0.819 = z^2 + \hat{a}_1 z + \hat{a}_2 = 0$$

istenen kapalı çevrim karakteristik denklem

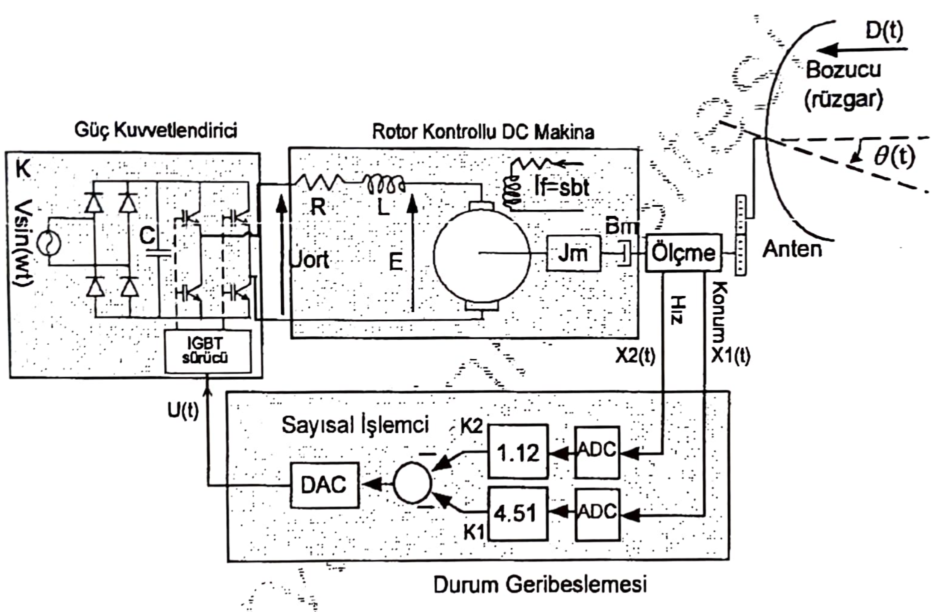
$\alpha_c(z)$ ve $\alpha(z)$ polinom katsayıları eşitlenir $\Rightarrow \alpha_c(z) = \alpha(z)$

$$0.00484K_1 + 0.0952K_2 - 1.905 = -1.776 \quad \Rightarrow \quad 0.00484K_1 + 0.0952K_2 = 0.1290$$

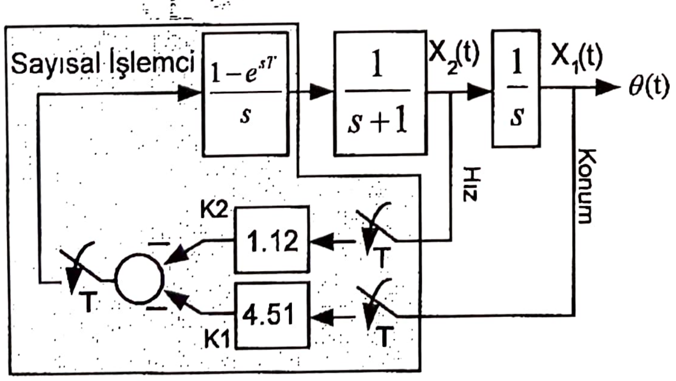
$$0.004684K_1 - 0.0952K_2 + 0.905 = 0.819 \quad \Rightarrow \quad 0.004683K_1 - 0.0952K_2 = -0.086$$

$K_1 = 4.51$ (*pozisyon için*)

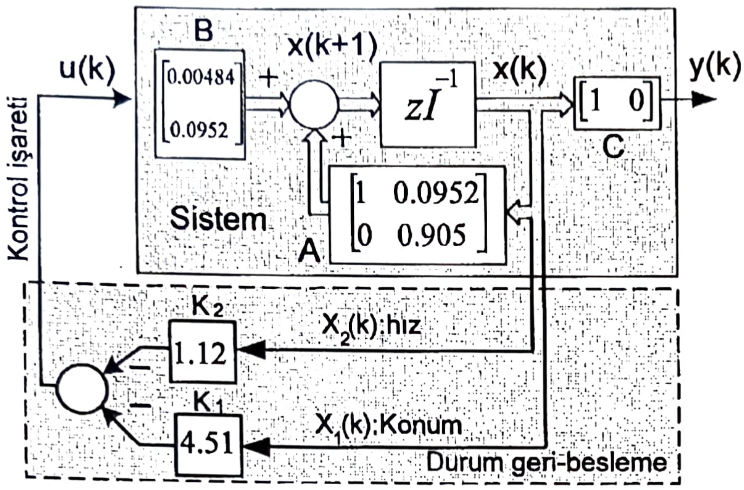
$K_2 = 1.12$ (*hız için*) olarak elde edilir.



Durum geribeslemeli DC makine kontrolüne ait basitleştirilmiş donanım.

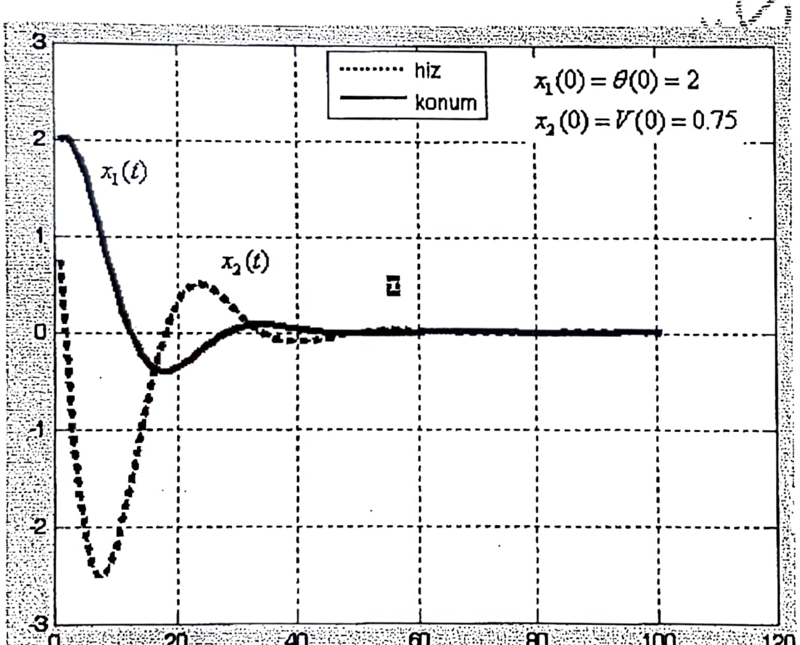


Durum geribeslemeli DC makine kontrolüne ait basitleştirilmiş kontrol blok diyagramı.



Durum geri beslemeli DC makine kontrolüne ait basitleştirilmiş ayık-zaman kontrol blok diyagramı.

$x_1(0) = \theta(0) = 2$ *ve* $x_2(0) = V(0) = 0.75$ için hız ve konumun zamana göre değişimi.



Ups sistemleri için bozucu giriş yoktur.

Elde edilmiş olan durum geri-besleme kontrol işareti servo sisteme uygulanarak elde edilen kapalı-çevrim sisteme ait yeni durum denklemi aşağıda verilmiştir.

Kontrol işareti,

$$u(k) = -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 4.51 & 1.12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$ dir.

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 0.0952\\ 0 & 0.905\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0.00484\\ 0.0952\end{bmatrix}\left(-\begin{bmatrix}4.51 & 1.12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}\right)$$

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 0.0952\\ 0 & 0.905\end{bmatrix}x(k)-\begin{bmatrix}0.0219 & 0.0054\\ 0.4299 & 0.1071\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}$$

$$x(k+1)=\underbrace{\begin{bmatrix}0.9781 & 0.0898\\ -0.4299 & 0.7979\end{bmatrix}}_{A_c}x(k)$$

A_c Durum geri-beslemeli kapalı-çevrim sistem matrisidir. İstenen karakteristik denklem elde edilip edilmediği doğrulaması ise aşağıda yapılmaktadır.
Tasarımın başlangıcında istenen kriterleri sağlayacak olan karakteristik denklem

$\alpha(z)=z^2-1.776z+0.819=0$ İstenen Karakteristik denklem

Olarak elde edilmiştir. Tasarım sonunda elde edilen sistem matrisi kullanılarak kapalı-çevrim karakteristik denklem,

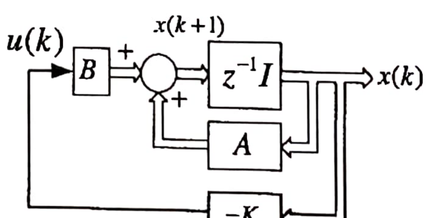
$$\alpha_c=\det(zI-A_c)=\det\left(\begin{bmatrix}z-0.9781 & -0.0898\\ 0.4299 & z-0.7979\end{bmatrix}\right)$$

$\alpha_c=z^2-1.776z+0.819=0$ olarak elde edilir ve olması istenen karakteristik denklem ile aynı olduğu görülmektedir, sonuç olarak tarsımın doğruluğu gösterilmiştir.

MATLAB komutu: Aşağıda verilen sisteme durum geri beslemesi uygulanacaktır.

$$x(k+1)=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0.0952\\ 0 & 0.905\end{bmatrix}}_{A}x(k)+\underbrace{\begin{bmatrix}0.00484\\ 0.0952\end{bmatrix}}_{B}u(k)$$

$$y(k)=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{C}x(k)$$



P:*Olması istenen kapalı-çevrim kutupları.*

```
p=[0.888+0.1745i 0.888-0.1745i]

K=acker(A,B,p) veya  K=place(A,B,p)
```

K =4.5149 1.1255 olarak elde edilir.

NOT:
Place komutu ile değeri sıfır olan **katlı kutuplar** verilemiyor. **Acker** komutu ile verilebilir.

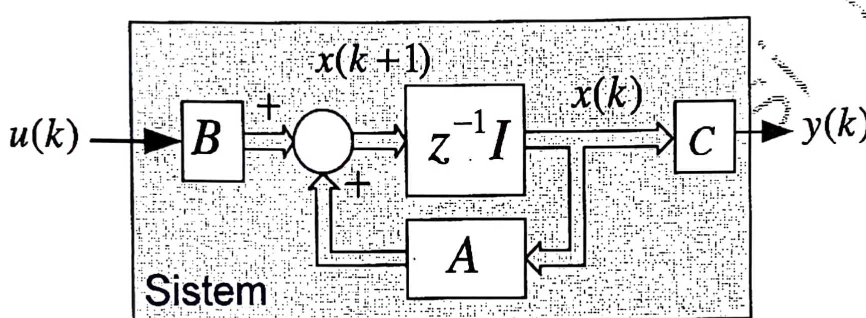
ÖNKOMPANZASYONLU (Referans Girişli) STATİK DURUM GERİBESLEME

Kontrol edilen sistemde durum geri-beslemesi ile sistemin dinamik davranışı düzenlenebilmektedir. Sistem cevabının istenen bir referans değere gitmesi istenebilir. Bu durumda, sistem kazancı bir olmalıdır. Bu amaç için referans giriş ile beraber bir kazanç terimi ilave edilmeli ve hesaplanmalıdır. Kazanç hesabı için önerilen iki yol aşağıda verilmiştir

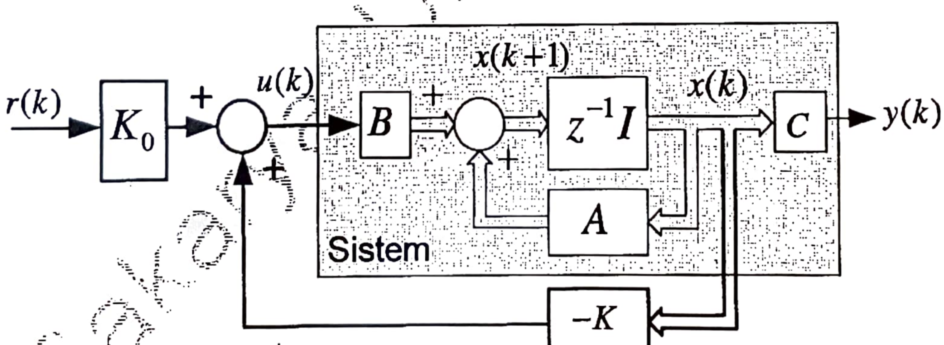
I.YOL: Kontrol edilmek istenen sisteme ait ayrık-zaman durum uzay modeli vektör matris formunda Transfer fonksyonu ile K_0 elde edilmi

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

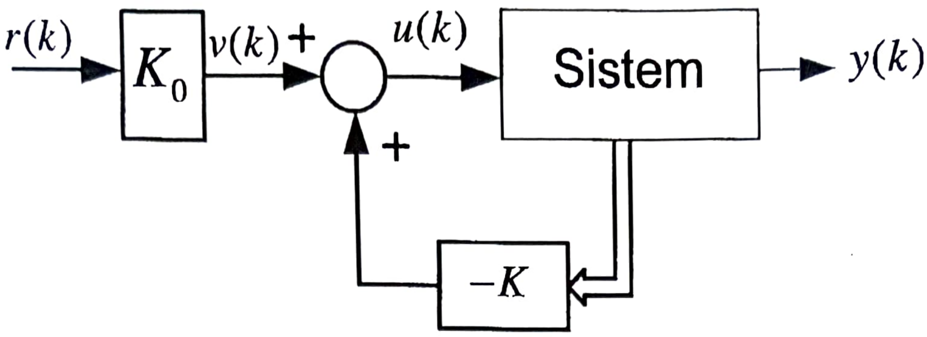
$y(k) = Cx(k)$ verilsin. Sisteme ait kontrol blok diyagram aşağıda verilmiştir.



Kontrol edilen sistemeaşağıda verildiği gibi durum geri-besleme ile beraber $r(k)$ referans işaret uygulansın.



Referans giriş li durum geri-beslemeli sistem.



Referans giriş li durum geri-beslemeli kompakt olarak verilmiş sistem.

Referans girişli durum geri-beslemeli sistem ait kontrol işareti yazılır ise,

$u(k) = K_0 r(k) - Kx(k)$ olarak ifade edilir. Bu ifade durum denkleminde yerine yazılır

$$x(k+1) = Ax(k) + BK_0 r(k) - BKx(k) \Rightarrow$$

$$x(k+1) = (A - BK)x(k) + BK_0 r(k)$$ olarak elde edilir.

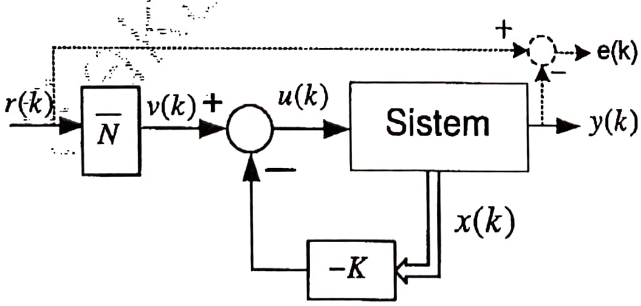
Karakteristik denklem ,

$|zI - A + BK| = 0$ olarak yazılır.

Tüm durum geri-beslemesi ile, sistemin karakteristik denklemi değiştirilebilir, ancak sistemin sürekli hal kazancıda değişir. Bundan dolayı, sistemde ayarlanabilir, K_0, ***kazancı gereklidir. Bbirim basamak giriş için*** K_0 kazançı ***SON DEĞER*** teoreminden $y(\infty) = 1$ ***olacak şekilde ayarlanmalıdır.***

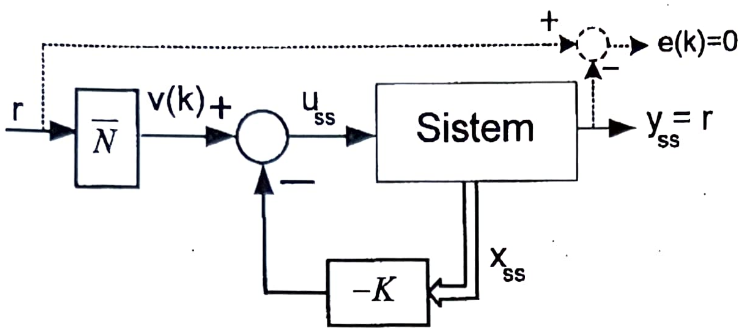
II. YOL: Referans girişi takip edebilen statik durum geribesleme ele alınacaktır.
Matris sistemi ile No elde edilirmi

Referans giriş, r olsun; $e(k) = r - y(k)$ kontrol hatasıdır.



$u(k) = -Kx(k) + \overline{N}\, r$

$e(k)=0$ olduğunda $x(k)$ durum vektörünün sürekli hal değeri x_{ss}, ve $u(k)$ kontrol vektörünün sürekli hal değeri u_{ss} olsun.



Amacımız, istenen sürekli hal çıkışın ölçülen değeri y_{ss}'i sağlayan, statik durum geribesleme kuralı $u(k)=-Kx(k)$ yı ayarlamaktır. Bu ise kontrol kuralında durum vektör ofseti (denkleştirme, kaydırması) ile yapılır.

Sürekli rejim için Kontrol işaret' inden Kx_{ss} çıkartılır ve sürekli rejim için gerekli olan u_{ss} ilave edilerek kontrol işareti,

$u(k)=-K(x(k)-x_{ss})+u_{ss}$ olarak yazılır.

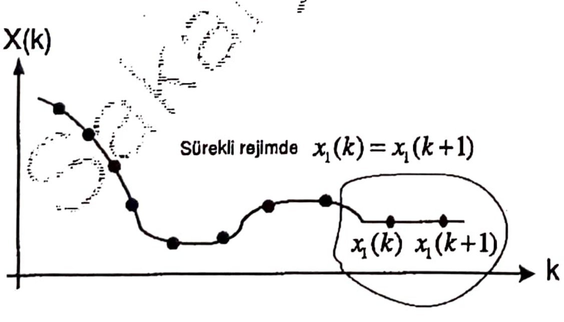
Böylece ölçülen çıkış değeri y, referans giriş r'e eşit olur.

$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$

$x(k+1)=Ax(k)-BK(x(k)-x_{ss})+Bu_{ss}$ burada **u(k)** yerine yazılır =>

Sürekli halde, $x(k+1)=x(k)=x_{ss}$ olur...

$x_{ss}=Ax_{ss}+Bu_{ss}$ veya $Bu_{ss}=x_{ss}-Ax_{ss}$ yerine konulur ise, $x_{ss}\rightarrow$ *Steady State(sürekli hal)*



$x(k+1)=Ax(k)-BK(x(k)-x_{ss})+\underbrace{x_{ss}-Ax_{ss}}_{Bu_{ss}}\Rightarrow$

$x(k+1)-x_{ss}=(A-BK)(x(k)-x_{ss})$

Bu denklem, ***statik durum geri-beslemesinin*** $(x(k)-x_{ss})$ durum vektörüne uygulandığı gibi yorumlanabilir. $x_{ss}=x(k)$ olduğunda $r=y(k)$ 'dır. Ön kompanzatörün uygun seçilmesi kontrol sistemi çıkışının r'ye yakınsamasını sağlar. ***Önkompanzatör ilavesi sistemin kutuplarını etkilemez***. Sürekli hal cevabı göz önüne alınır ise,

$$x_{ss}=Ax_{ss}+Bu_{ss}$$
$$y_{ss}=Cx_{ss}\qquad \text{olur.}$$
$$y_{ss}=r$$

$$Ax_{ss}-x_{ss}+Bu_{ss}=0\Rightarrow(A-I)x_{ss}+Bu_{ss}=0$$

$Cx_{ss}+0u_{ss}=r$ ve $(A-I)x_{ss}+Bu_{ss}=0$ denklemleri ile arttırılmış durum vektörü;

$$\begin{bmatrix}A-I & B\\ C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{ss}\\ u_{ss}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ r\end{bmatrix}$$ yazılabilir.

Buradan, $\begin{bmatrix}x_{ss}\\ u_{ss}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A-I & B\\ C & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ r\end{bmatrix}$ elde edilir. Ve **u(k)'da yerine yazılır=>**

$u(k)=-Kx(k)+Kx_{ss}+u_{ss}$ önce **u(k)** düzenlenir.

$$=-Kx(k)+\begin{bmatrix}K & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{ss}\\ u_{ss}\end{bmatrix}$$

$$=-Kx(k)+\underbrace{\begin{bmatrix}K & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A-I & B\\ C & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{\overline{N}}r$$

$$u(k)=-K(x(k)-x_{ss})+u_{ss}$$

$$u(k)=-Kx(k)+\overline{N}r$$

$$\overline{N}=K_0=\begin{bmatrix}K & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A-I & B\\ C & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$ olarak elde edilir.

ÖRNEK:

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(k) \quad \text{ve} \quad y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}$$

ise, kapalı çevrim kutuplarının $z_1=0.5+j0.5$, $z_2=0.5-j0.5$ *olması istenmektedir.*

Çıkışın istenen referans değere gidebilmesi için ***Durum geri –besleme matrisi K ve giriş kazancı*** K_0*'ı hesaplayınız.* $y=r$

Açık-çevrim karakteristik denklem:

$$|zI-A|=z^2+z-0.16=z^2+a_1z+a_2=0$$

İstenen Kapalı-çevrim karakteristik denklem:

$$|zI-A+BK|=(z-0.5-j0.5)(z-0.5+j0.5)=z^2-z+0.5=z^2+\hat{a}_1z+\hat{a}_2=0$$

Sistem matrisi faz değişken kanonik formdadır.

Karakteristik denklem katsayılarından, $\hat{a}_1=-1$, $\hat{a}_2=0.5$, $a_1=-1$ $a_2=-0.16$ yazılabilir.

$$k=\begin{bmatrix}\hat{a}_2-a_2\\ \hat{a}_1-a_1\end{bmatrix}\Rightarrow k=\begin{bmatrix}0.5-0.16\\ -1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.34\\ -2\end{bmatrix}$$

Durum geri-besleme matrisi, $K=[0.34 \quad -2]$ olarak elde edilir.

Ön Kompanzatör kazancı farklı iki yoldan hesaplanabilir.

I.YOL: *Transfer fonksiyonu ve son değer teoremi kullanılır.*

$R(z)=\dfrac{z}{z-1}$ birim basamak giriş için

Kontrol kuralı $u(k)=-Kx(k)+K_0r(k)$ durum geri-beslemedurum denkleminde yerine koyulur ,

$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$ ise $x(k+1)=Ax(k)+B(-Kx(k)+K_0r(k))$

$$x(k+1)=\underbrace{(A-BK)}_{\hat{G}}x(k)+\underbrace{BK_0}_{\hat{H}}r(k)$$

Durum denklemlerine ait katsayılar matrisleri kullanılarak transfer fonksiyqnu hesaplanır.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{G} = A - BK \\ \hat{H} = BK_0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad G(z) = C(zI - \hat{G})^{-1}\hat{H}$$ durum geri-beslemeli ve ön-kompanzatör girişli sisteme ait kapalı-çevrim transfer fonksiyonu.

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.34 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} K_0 \quad ise \quad \hat{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \end{bmatrix}$$

$$G(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.5 & z-1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad G(z) = \frac{K_0}{z^2 - z + 0.5}$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = G(z) = \frac{K_0}{z^2 - z + 0.5} \Rightarrow$$ son değer teoreminden, y=r olması isteniyor

$$y(\infty) = \lim_{z \to 1}(z-1)\frac{\frac{z}{z-1}K_0}{z^2 - z + 0.5} \Rightarrow \frac{K_0}{0.5} = 1 \Rightarrow K_0 = 0.5$$ olarak elde edilir.

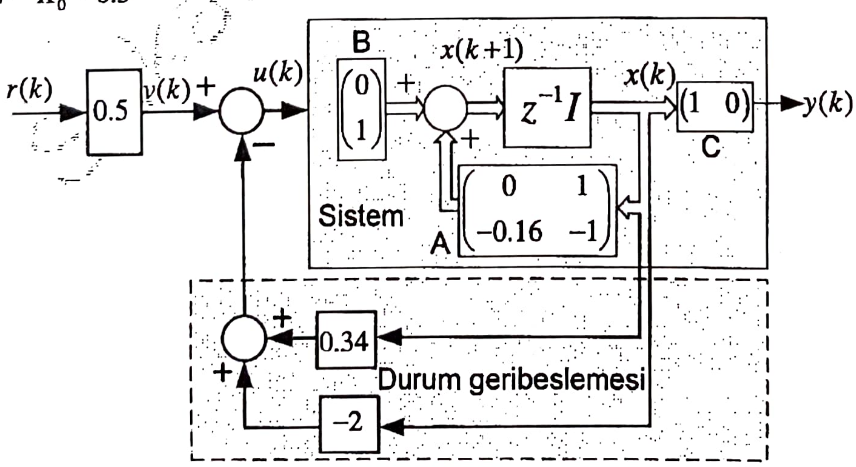
II.YOL: *Elde dilmiş olan kazanç ifadesi doğrıdan kullanılır.*

$$\overline{N} = K_0 = \begin{bmatrix} K & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A-I & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ ifadesi kullanılır.

$$\overline{N} = K_0 = \begin{bmatrix} [0.34 & -2] & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{N} = K_0 = \begin{bmatrix} 0.34 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -0.16 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{N} = K_0 = 0.5$$



Bilgi Botu:

Kontrol edilmek istenen sisteme ait ayrık zaman durum denklemleri,

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

$y(k) = Cx(k)$ olarak verilsin.

$u(k) = -Kx(k)$ durum geri-besleme kontrol kuarlı olsun, yerine koyulur ise.

$x(k+1) = Ax(k) + B(-Kx(k))$

$x(k+1) = [A - BK]x(k))$ elde edilir.

Yukarıda verilen sisteme lineer dönüşüm ve durum geri-besleme kontrol kuralı uygulansın.

$x(k) = Tx'(k)$ ve $x'(k) = T^{-1}x(k)$ $x'(k+1) = T^{-1}x(k+1)$ lineer dönüşüm ve geri-besleme uygulanır ise,

$x'(k+1) = T^{-1}ATx'(k) + T^{-1}Bu(k)$

$y(k) = CTx'(k)$ olur.

Kontrol kuralına lineer dönüşüm uygulanır ise,

$u(k) = -Kx(k)$

$u(k) = -KTx'(k)$ $u(k) = -fx'(k)$ elde edilir. $f = KT$ dir.

Lineer dönüşüm ve durum geri-besleme uygulandıktan sonra elde edilen karakteristik denklem lineer dönüşümsüz durum geri-beslemeli sistemin karakteristik denklemi ile aynıdır. Aşağıda ispatı verişmiştir.

$x'(k+1) = A_c x'(k) + B_c u(k)$;lineer dönüşüm uygulanmış durum denklemleri.

$y(k) = C_c x'(k)$

Lineer dönüşümden sonra $u(k) = -fx'(k)$ durum geri-beslemesi uygulanır ise

$x'(k+1) = A_c x'(k) + B_c(-fx'(k))$

$x'(k+1) = [A_c - B_c f]x'(k)$ elde edilir.

Dönüşümden sonra karakteristik denklemler değişmeyeceğinden,

$\det(zI - A + BK) = \det(zI - A_c + B_c f) = 0$ olmalıdır. NOT: **özellik,** $|P^{-1}||A||P| = |A|$ dır.

$\det(zI - A_c + B_c f) = 0$ ifadesini açıp yukarıda verilen özellik göz önüne alınır ise,

$\det(zI - A_c + B_c f) = \det(zT^{-1}IT - T^{-1}AT + T^{-1}Bf) = 0$

$= \left| zT^{-1}IT - T^{-1}AT + T^{-1}Bf \right| = 0$ ve $f = KT$ yazılır ise,

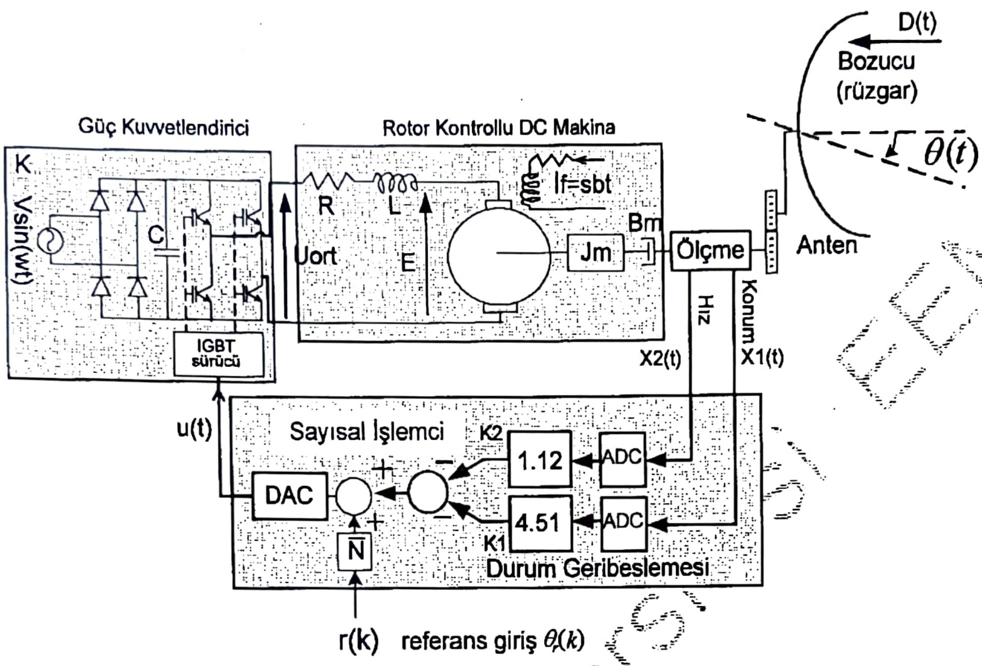
$= \left|T^{-1}\right| \left|zI - A + BK\right| \left|T\right| = 0$

$= \left|zI - A + BK\right| = 0$ olur.

Buradan, lineer dönüşüm uygulandıktan sonra durum geri besleme matrisi f elde edilir. Bu matristen, dönüşüm uygulanmamış sistem durum geri besleme matrisi

$K = f^T T^{-1}$ ile elde edilir. f^T : f 'nin Transpozu

ÖRNEK: Bir önceki statik durum geri-beslemeli DC makine kontrolünde ölçülen çıkışın aşağıda verildiği gibi referans girişi takip etmesi istenmektedir. Ön kompanzatör kazancını hesaplayınız.



Sistemin durum modeli;

$$x(k+1)=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0.0952\\ 0 & 0.905\end{bmatrix}}_{A}x(k)+\underbrace{\begin{bmatrix}0.00484\\ 0.0952\end{bmatrix}}_{B}u(k)$$

$$y(k)=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{C}x(k),$$

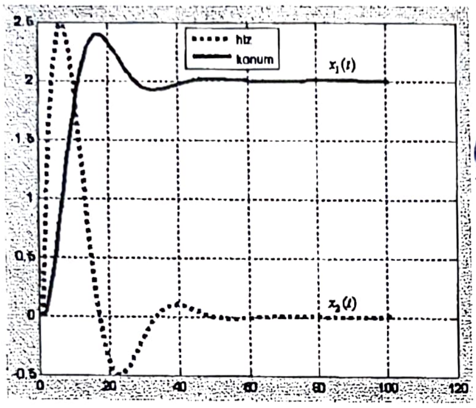
Durum geri-besleme kazanç matrisi $K=\begin{bmatrix}4.51 & 1.12\end{bmatrix}$ olarak verilmiştir.

$$\overline{N}=\begin{bmatrix}K & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A-I & B\\ C & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}[4.51 \;\; 1.12] & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overbrace{\begin{bmatrix}0 & 0.0952\\ 0 & -0.905\end{bmatrix}}^{A-I} & \begin{matrix}0.00484\\ 0.0952\end{matrix}\\ \begin{matrix}1 & \quad 0\end{matrix} & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$ ara işlemler yapıldıktan sonra,

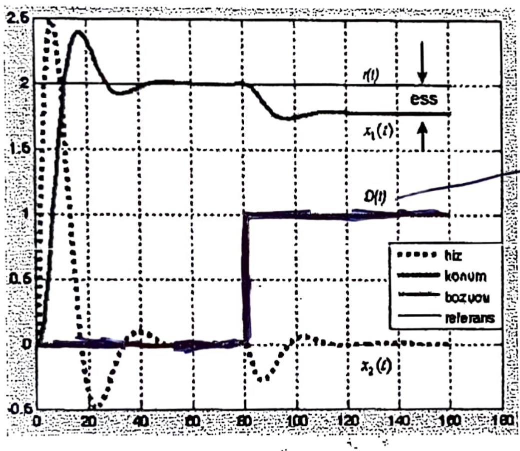
$\overline{N}=4.51$ olarak elde edilir.

$D(t)=0$ rüzgar etkisi sıfır ve $r(t)=2u(t)$ referans giriş için servo sistem cevabı.



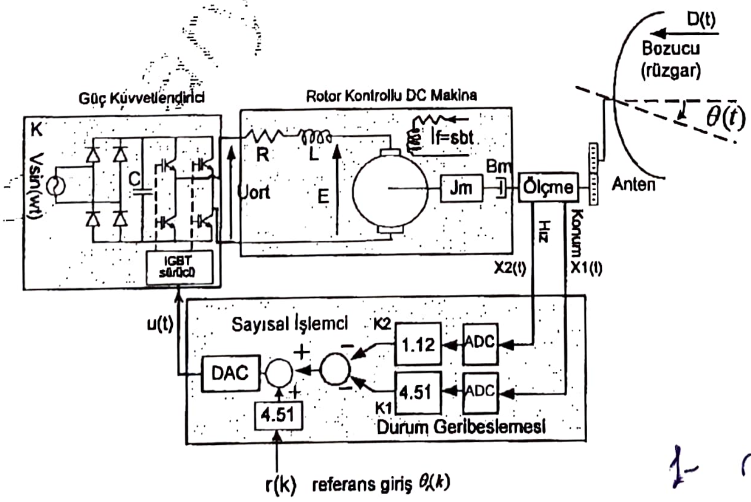
Bozucu yok, davranış istendiği gibi

$D(t-8)=u(t-8)$ $\quad ,T=0.1$ $\quad$ *için* $\quad k=\dfrac{8}{0.1}=80$ rüzgar etkisi başlangıcı anı ve $r(t)=2u(t)$ referans giriş için servo sistem cevabı.



Bozucu

Örnekten görüleceği gibi, statik durum geri-beslemesi ile ön kompanzatörlü sistem bozucu yoksa referans girişi iyi bir şekilde izler. Eğer bozucu mevcutsa, izleme performansı zayıftır, e_{ss} sürekli hal hatası oluşur.



Statik durum geri-beslemesi ile ön kompanzatörlü sistem

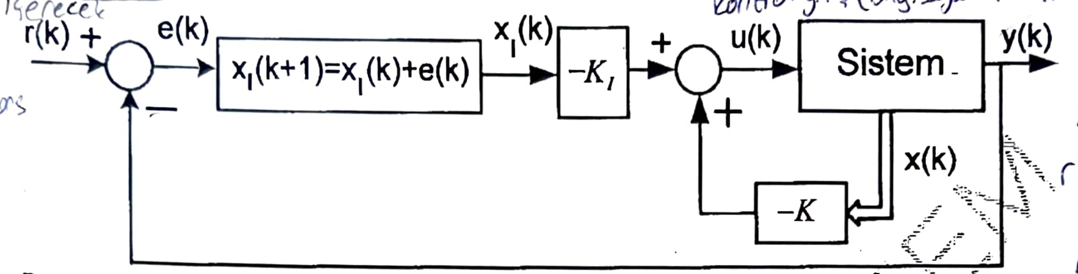
1- ref = 0 D ≅ 0
K → 4 yol

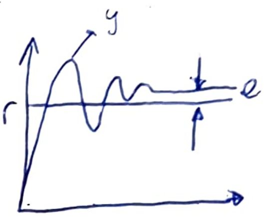
2- ref ≠ 0 D ≅ 0 y = r
K₀ → 2 yol

3- ref ≠ 0 D ≠ 0 ?
(integratör eklenecek)

DİNAMİK-DURUM GERİBESLEMESİ

Hem referans girişi takip eden hemde bozucu etkisini gideren (yok eden) durum uzay yapısı ele alınacaktır. Başlangıç noktamız, durum vektörünü kontrol hatası $e(k) = r(k) - y(k)$'yı ihtiva edecek (içerecek) şekilde arttırmaktır.





$-e = y - r$

Dinamik durum geri-besleme kontrol sistem blok diyagramı

İntegre edilmiş kontrol hatası;

$$x_I(k+1) = x_I(k) + e(k) \Rightarrow e(k) = r(k) - y(k) = r(k) - Cx(k) \Rightarrow$$

$$x_I(k+1) = x_I(k) + r(k) - Cx(k)$$

$$y(k) = Cx(k) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix}$$

Kullanılan Integrator yöntemlerinin farkları ile transfer fonksiyonu değişir (örnek, dikdörtgen ve ya yamuk alan yöntemi)

Arttırılmış durum vektörü, $\begin{bmatrix} x(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix}$ dır. Kontrol kuralı, $\boxed{u(k) = -\begin{bmatrix} K_p & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix}}$ olur.

$x(k)$ durum vektörü $nx1$ boyutlu ise, $K_p = [K_{p1} \quad K_{p2} \quad \ldots\ldots \quad K_{pn}]$ dir.

Dinamik durum geri-beslemeli kontrolün karakteristik denklemi:

$$U(k) = -\begin{bmatrix} K & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(k) \\ X_I(k) \end{bmatrix} \Rightarrow -KX(k)$$

Arttırılmış-durum uzay modeli $\boxed{\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ x_I(k+1) &= x_I(k) + r(k) - Cx(k) \end{aligned}}$ ifadeleri kullanılarak aşağıda verildiği gibi elde edilir.

arttırılmış sistem (augmented system)

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_I(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

$$X_I(k+1) = X_I(k) + e(k)$$

$$z X_I(z) = X_I(z) + E(z)$$

$$(z-1) X_I(z) = E(z)$$

Kontrol kuralı u(k) yerine koyulur ise,

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_I(k+1) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\downarrow K}{K_p} & K_I \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

$$\frac{X_I(z)}{E(z)} = \frac{1}{z-1}$$

Karakteristik polinom,

$$X_I(0) = 0$$

$$k=0 \Rightarrow X_I(1) = X_I(0) + e(0) = e(0)$$

$$k=1 \Rightarrow X_I(2) = X_I(1) + e(1) = e(0) + e(1)$$

$$\det\left\{zI-\left(\begin{bmatrix}A & 0\\ -C & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_P & K_I\end{bmatrix}\right)\right\}=0 \text{ dır.}$$

K_P ve K_I 'nın seçilmesi ile kapalı-çevrim sistem dinamiği ayarlanır.

ÖRNEK:

$$A=\begin{bmatrix}0.13 & 0\\ 0.46 & 0.63\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}0.069\\ 0\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

Artırılmış durum-uzay modeli;

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\\ x_I(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overbrace{\begin{matrix}0.13 & 0\\ 0.46 & 0.63\end{matrix}}^{A} & \overbrace{\begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}}^{0}\\ \underbrace{\begin{matrix}-1 & -1\end{matrix}}_{-C} & \underbrace{1}_{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\\ x_I(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.069\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u(k)+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}r(k)$$

Kontrol kuralı u(k) yerine koyulur ise,

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\\ x_I(k+1)\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}0.13 & 0 & 0\\ 0.46 & 0.63 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.069\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_{P1} & K_{P2} & K_I\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\\ x_I(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}r(k)$$

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\\ x_I(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.13-0.069K_{P1} & -0.069K_{P2} & -0.069K_I\\ 0.46 & 0.63 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\\ x_I(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}r(k)$$

Dinamik durum geri-beslemeli sistemin artırılmış durum-uzay modeli.

Problem; K_{P1}, K_{P2}, K_I katsayılarının hesabıdır.

Dinamik durum geri-beslemeli kontrolün karakteristik denklemi:

Arttırılmış-durum uzay modeli; $\begin{aligned}x(k+1)&=Ax(k)+Bu(k)\\ x_I(k+1)&=x_I(k)+\underbrace{r(k)}_{e}-\underbrace{Cx(k)}_{y}\end{aligned}$ ifadeleri kullanılarak aşağıda verildiği gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix}x(k+1)\\ x_I(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & 0\\ -C & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(k)\\ x_I(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}u(k)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}r$$

$e=r-y$

Kontrol kuralı u(k) yerine koyulur ise,

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_I(k+1) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_P & K_I \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

Karakteristik polinom,

$$\det\left\{ zI - \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_P & K_I \end{bmatrix} \right) \right\} = 0 \text{ dır.}$$

DURUM-UZAY GERİBESLEME İÇİN KUTUP YERLEŞTİRME TASARIMI

Tasarım amacı, yerleşme zamanının t_s ve maximum aşımın M_p^* değerini geçmemesidir.

1- Kapalı-çevrim kutupları $z_{1,2} = re^{\pm j\theta}$ hesaplayınız. $r = e^{-\frac{4T}{t_s}}$, $\theta = \pi \dfrac{\log(r)}{\log(M_p^*)}$

2- İstenen karakteristik denklemi oluşturun,
- $F(z) = (z^2 - 2r\cos\theta z + r^2)(z - 0.25r)^{n-2}$

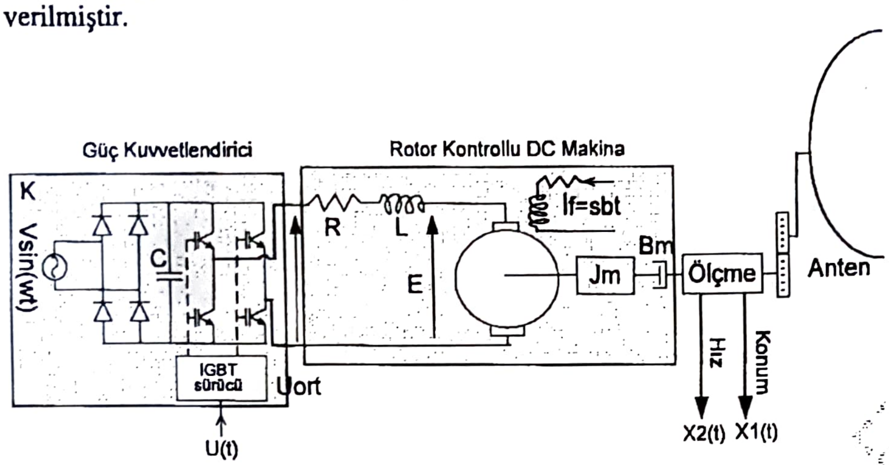
$n \rightarrow$ durum uzay boyutu. $(z - e^{j\theta})(z - e^{-j\theta}) = z^2 - 2r\cos\theta z + r^2$

3- Modellenen karakteristik polinomu, $x(k+1) = Ax(k) - BKx(k)$ yı oluşturun ve açın,
- $K = [K_1, \ldots, K_n]$ olmak üzere,
- modellenen karakteristik denklem, $\det[zI - (A - BK)]$

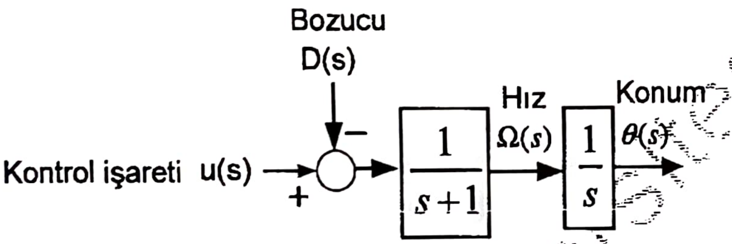
4- K'lar hesaplanır, istenen karakteristik denklem katsayıları ile modellenen karakteristik denklem katsayıları eşitlenir (aynı derecedeki polinomlar) ve denklem çözülür.

5- Sonuç doğrulaması yapılır,
- kapalı-çevrim kutuplarının birim dairede içinde olup olmadığı kontrol edilir,
- Transient cevabın istenen performansı sağlayıp sağlamadığını simüle edilir.

Örnek: Aşağıda servo sisteme ait şekil a) donanım ve b) açık-çevrim kontrol blok diyagram verilmiştir.



a) Servo sistem donanımı



b) Servo sisteme ait açık-çevrim kontrol blok diyagram

istenenler:

i) Statik ve dinamik durum geri-beslemeli servo sisteme ait ***donanım blok*** diyagramı çiziniz.

ii) Statik ve dinamik durum geri-beslemeli servo sisteme ait ***Kontrol blok*** diyagramı çiziniz.

iii) Servo sistemde $\xi = 0.46$ ve %2 kriterine göre $t_s = 4sn$ olması istenmektedir. Sistemin ***referans girişi takip edilebilmesi ve bozucu etkisini gidermesi istenmektedir***. Servo sisteme ait ayrık-zaman durum denklemleri $T = 0.1sn$ için ,

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.0952 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.00484 \\ 0.0952 \end{bmatrix} u(k)$$ olarak verilmektedir.

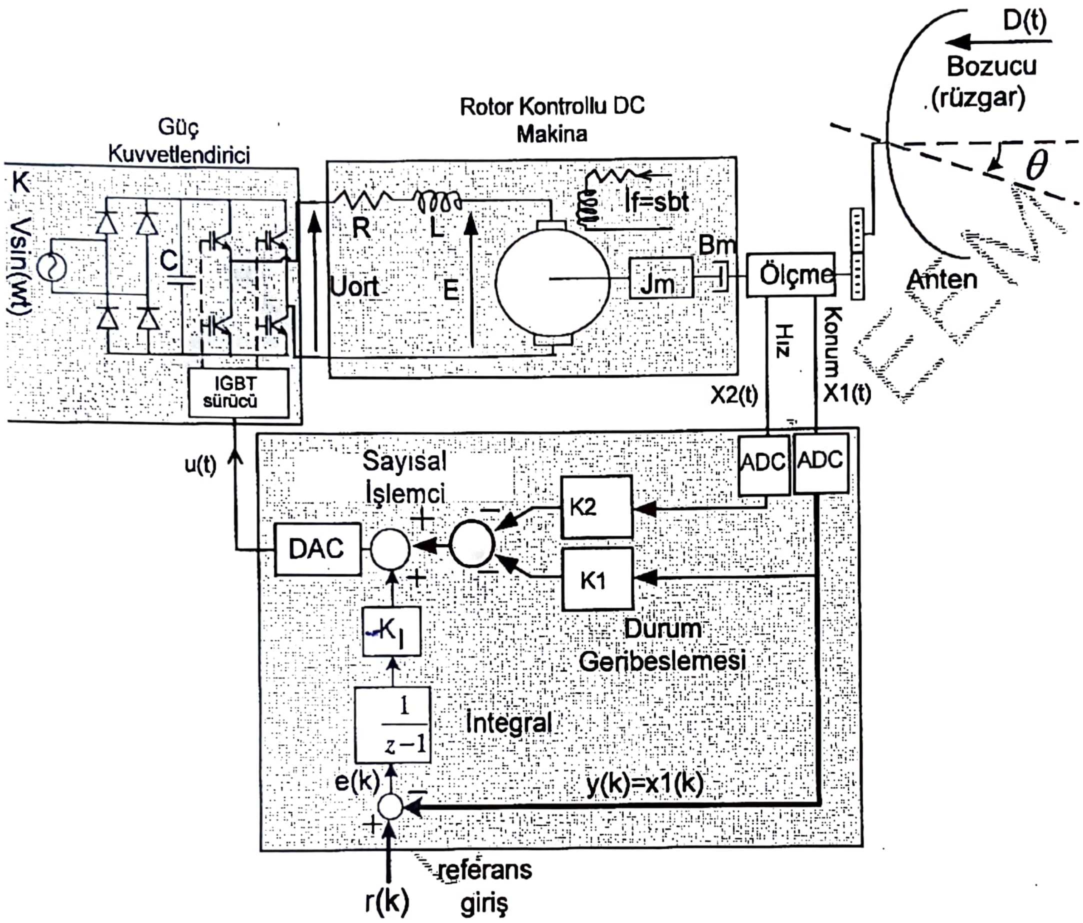
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

statik ve dinamik durum geri-besleme katsayıları K_{p1}, K_{p2}, K_I hesaplayınız.

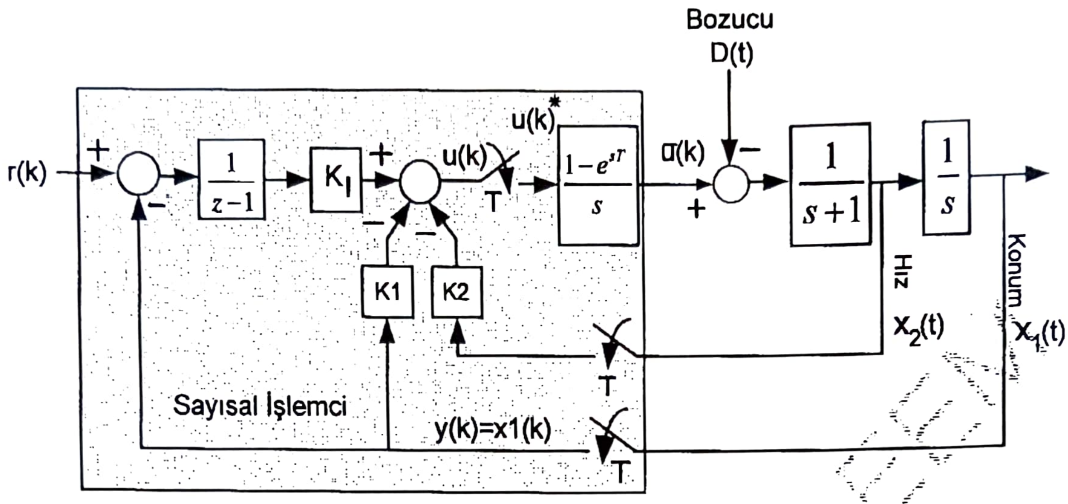
- **iv)** Statik ve dinamik durum geri-beslemeli servo sisteme ait ***durum ve çıkş denklemlerini*** elde ediniz.
- **v)** Statik ve dinamik durum geri-beslemeli servo sisteme ait ***ayrık-zaman Transfer fonksiyonunu*** elde ediniz.
- **vi)** Statik ve dinamik durum geri-beslemeli kontrol kurallı ***ayrık-zaman sayısal kontrole*** ait programını sembolik dilde yazınız.

ÇÖZÜM:

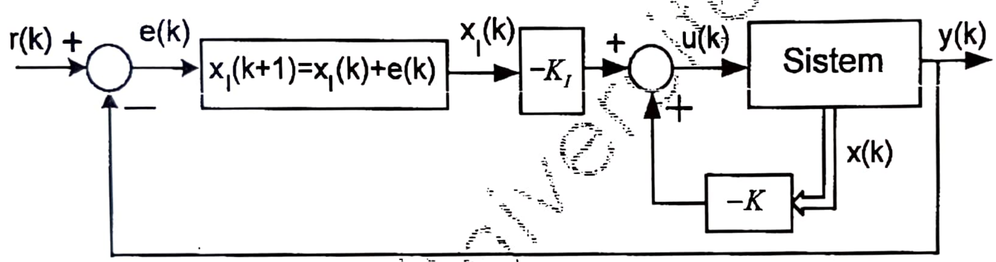
i) Statik ve dinamik durum geri-beslemeli servo sisteme ait ***donanım blok*** diyagramı.



ii)Statik ve dinamik durum geri-beslemeli servo sisteme ait ***Kontrol blok*** diyagramı :



iii- Statik ve dinamik durum geri-besleme katsayıları K_{p1}, K_{p2}, K_I hesap edilmesi.



Yukarıda verilen sistemde, istenen kriterleri sağlayacak olan $[K_{p1} \quad K_{p2} \quad K_I]$ katsayıları hesaplanacaktır.

1- Kapalı-çevrim sisteme ait karakteristik denklem:

$$F(z)=\det\left\{zI-\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}[K \quad K_I]\right)\right\}=0$$

$$=\det\left\{\begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}-\left(\begin{matrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0.0952 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix}}^{A} & \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{0} \\ \underbrace{[-1 \quad 0]}_{C} & \underbrace{1}_{1} \end{matrix}\right)-\left(\begin{matrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 0.00484 \\ 0.0952 \end{bmatrix}}^{B} \\ \underbrace{0}_{0} \end{matrix}\right)[K_1 \quad K_2 \quad K_I]\right\}=0$$

$$=\det\left\{\left(\begin{bmatrix} z-1 & -0.0952 & 0 \\ 0 & z-0.905 & 0 \\ 1 & 0 & z-1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0.00484K_1 & 0.00484K_2 & 0.00484K_i \\ 0.0952K_2 & 0.0952K_2 & 0.0952K_i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right\}=0$$

$$= \det\left\{\begin{bmatrix} z-1-0.00484K_1 & -0.0952-0.00484K_2 & -0.00484K_i \\ -0.0952K_1 & z-0.905-0.0952K_2 & -0.0952K_i \\ 1 & 0 & z-1 \end{bmatrix}\right\} = 0$$

Staik ve dinamik durum geribeslemeli servo sisteme ait parametrik karakteristik denklem;

$$F(z) = z^3 + (-0.0952K_2 - 2.905 - 0.00484K_1)z^2 +$$

$$(0.0015716K_1 + 2.81 + 0.1904K_2 + 0.00484K_i)z$$

$$+0.0046828K_1 - 0.905 - 0.0952K_2 + 0.0046828K_i = 0$$

$$F(z) = z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0$$

İstenen karakteristik denklem;

$\xi = 0.46, \qquad \%\ t_s = 4sn \Rightarrow \quad w_n = 2.17 rad/sn$

$$s_{1,2} = -\xi w_n \mp j w_n \sqrt{1-\xi^2} = -0.46 * 2.17 \mp j2.17\sqrt{1-0.46^2} \Rightarrow s_{1,2} = -0.9982 \mp j1.9268$$

$$z = e^{sT} \Rightarrow z = e^{-(0.9982 \mp j1.9268)0.1} \Rightarrow z_{1,2} = 0.8883 \pm 0.1687j$$

$r = abs(z)$

$r = 0.9050$

$$\alpha(z) = (z - 0.8883 - 0.1687j)(z - 0.8883 + 0.1687j)(z - 0.25 * 0.9050) = 0 \Rightarrow$$

$\alpha(z) = z^3 - 2.0029z^2 + 1.22z - 0.1853 = 0$ istenen karakteristik denklem

$$\alpha(z) = z^3 + \hat{a}_1 z^2 + \hat{a}_2 z + \hat{a}_3 = 0$$

$F(z) = \alpha(z)$ yazılır ve katsayılar eşitlenir ise,

- $-0.0952K_2 - 2.905 - 0.00484K_1 = -2.0029$

$-0.0952K_2 - 0.00484K_1 = 0.9021$

- $0.0015716K_1 + 2.81 + 0.1904K_2 + 0.00484K_i = 1.22$

$$0.0015716K_1+0.1904K_2+0.00484K_I=-1.59$$

$$\bullet\, 0.0046828K_1-0.905-0.0952K_2+0.0046828K_I=-0.1853$$

$$0.0046828K_1-0.0952K_2+0.0046828K_I=0.7199$$

$$\begin{bmatrix} -0.00484 & -0.0952 & 0 \\ 0.0001572 & 0.1904 & 0.00484 \\ 0.00484 & -0.0952 & 0.004683 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.9021 \\ -1.59 \\ 0.7197 \end{bmatrix}\Rightarrow$$

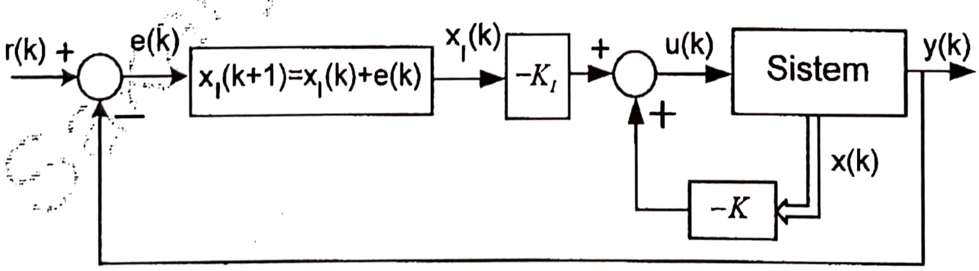
$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.00484 & -0.0952 & 0 \\ 0.0001572 & 0.1904 & 0.00484 \\ 0.00484 & -0.0952 & 0.004683 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0.9021 \\ -1.589 \\ 0.7197 \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -156.64 & -51.63 & 53.37 \\ -2.54 & 2.62 & -2.71 \\ 105.01 & 105.01 & 105.01 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.9021 \\ -1.589 \\ 0.7197 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -20.79 \\ -8.41 \\ 3.33 \end{bmatrix}$$

$$u(k)=-Kx(k)=-\begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix}$$ Kontrol işareti................

$$u(k)=-[20.79 \quad 8.41 \quad -3.33]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix}$$

★ ***Artırılmış sistem Karakteristik denkleminin elde edilmesi.***



Artırılmış sistem için durum denklemleri yazılır.

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_I(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}u(k)+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}r(k)$$

Şekilden görülebileceği gibi $u(k)$ kontrol işareti ve $r(k)$ ise referans giriştir. $r(k)=0$ alınarak daha önce verilmiş olan ***Bass-Gura ,faz kanonik form için verilmiş olan basitleştirilmiş yöntem*** ve ***Ackerman*** ının önerdiği her bir yöntem ayrı ayrı uygulanarak durum geri besleme matrisi **K** hesap edilebilir. Aşağıda sırası ile verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_I(k+1)\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix}1 & 0.0952\\0 & 0.905\end{bmatrix}}^{A} & \overbrace{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}}^{0} \\ \underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix}}_{C} & \underbrace{1}_{1}\end{pmatrix}}_{G} \begin{bmatrix} x_1(k)\\x_2(k)\\x_I(k)\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}\overbrace{\begin{bmatrix}0.00484\\0.0952\end{bmatrix}}^{B}\\ \underbrace{0}_{0}\end{pmatrix}}_{H} u(k)$$

İntegral ilaveli sistem durum denklemleri (açık-çevrime ait durum denklemleri). Vektör matris formunda , $x(k+1)=Gx(k)+Hr(k)$, aşağıda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_I(k+1)\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0.0952 & 0\\0 & 0.905 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{G}\begin{bmatrix} x_1(k)\\x_2(k)\\x_I(k)\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0.00484\\0.0952\\0\end{bmatrix}}_{H} u(k)$$

Açık-çevrim karakteristik denklem yazılır.

$$F(z)=\det\left(zI-G\right)=0=\det\left\{\left(\begin{bmatrix} z-1 & -0.0952 & 0\\ 0 & z-0.905 & 0\\ 1 & 0 & z-1\end{bmatrix}\right)\right\}=0$$

$$F(z)=(z-1)(z-1)(z-0.905)=0$$

Integral ilaveli sisteme ait karakteristik denklem.

$$F(z)=z^3-2.905z^2+2.81z-0.905=z^3+a_1z^2+a_2z+a_3=0$$

İstenen karakteristik denklem: Geçici rejim kriterlerinden $\xi=0.46$ ve $\%\ t_s=4sn \Rightarrow \ w_n=2.17\,rad/sn$ değerleri kullanılarak sürekli zaman baskın kutuplar (Kontrol kutuplar)

$s_{1,2} = -\xi w_n \mp j w_n \sqrt{1-\xi^2} = -0.46*2.17 \mp j2.17\sqrt{1-0.46^2} \Rightarrow s_{1,2} = -0.9982 \mp j1.9268$ olarak belirlenir.

Elde edilen sürekli zaman kutupların T örnekleme zamanına göre ayrık-zaman karşılıkları elde edilir.

$$z = e^{sT} \Rightarrow z = e^{-(0.9982 \mp j1.9268)0.1} \Rightarrow z_{1,2} = 0.8883 \pm 0.1687j$$

$$= re^{j\theta} = \sqrt{0.8883^2 + 0.1687^2} \quad \tan^{-1}\frac{0.8883}{(-0.1687)}$$

$$r = 0.9050$$

Açık-çevrim sistem 3. Dereceden olduğu için olması istenen karakteristik denklemde 3. dereceden olmalıdır. 3. Kutup ilavesi yapılır. 3. Kutup yeri belirlenir iken hem çıkış cevap etkisi az olacak hem de gerçeklenebilir olmasına dikkat edilecektir.

Olması istenen Karakteristik denklem:

$$\alpha(z) = (z - 0.8883 - 0.1687j)(z - 0.8883 + 0.1687j)(z - 0.25 * 0.9050) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha(z) = z^3 - 2.0029z^2 + 1.22z - 0.1853 = z^3 + \hat{a}_1 z^2 + \hat{a}_2 z + \hat{a}_3 = 0}$$

2-Bass ve Gura'ya, $K = \left[w^T s^T\right]^{-1}(\hat{a} - a)$ ifadesine göre durum geri besleme katsayılarınınhesaplanması. Önce sırası ile W ve S matrisleri belirlenecektir.

$$w = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & a_{n-2} \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$ ifadesinden $w = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ yazılır. w matris değerleri, açık-çevrim karakteristik denklem ,

$F(z) = z^3 - 2.905z^2 + 2.81z - 0.905 = z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0$ 'dan belirlenir.

Açık çevrim Karakteristik Denklem

$$w = \begin{bmatrix} 1 & -2.905 & 2.81 \\ 0 & 1 & -2.905 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$s=\begin{bmatrix} H & HG & HG^2 \end{bmatrix}$ kontrol edilebilirlik matris aşağıda elde edilmiştir.

$$=\left[\begin{bmatrix}0.00484\\0.0952\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0.0952 & 0\\0 & 0.905 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.00484\\0.0952\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0.0952 & 0\\0 & 0.905 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}0.00484\\0.0952\\0\end{bmatrix}\right]$$

$$s=\begin{bmatrix}0.0048 & 0.0139 & 0.0221\\0.0952 & 0.0862 & 0.078\\0 & -0.0048 & -0.187\end{bmatrix}$$ ise

$\hat{a}$ katsayı matrisi istenen karakteristik denklemden elde edilir.

$$\alpha(z)=z^3-2.0029z^2+1.22z-0.1853=z^3+\hat{a}_1z^2+\hat{a}_2z+\hat{a}_3=0$$

$$\hat{a}=\begin{bmatrix}-2.0029\\1.22\\-0.1853\end{bmatrix}$$

a katsayı matrisi açık-çevrim karakteristik denklemden elde edilir.

$$F(z)=z^3-2.905z^2+2.81z-0.905=z^3+a_1z^2+a_2z+a_3=0$$

$$a=\begin{bmatrix}-2.905\\2.81\\-0.95\end{bmatrix}$$ yazılır. $K=\begin{bmatrix}w^Ts^T\end{bmatrix}^{-1}(\hat{a}-a)$. Elde edilenkatsayı matrisleri ***Bass ve Gura***

tarafından önerilen kazanç hesap ifadesinde yerlerine koyulur,

$$K=\left(\begin{bmatrix}1 & -2.905 & 2.81\\0 & 1 & -2.905\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0.0048 & 0.0139 & 0.0221\\0.0952 & 0.0862 & 0.078\\0 & -0.0048 & -0.187\end{bmatrix}^T\right)^{-1}\left(\begin{bmatrix}-2.0029\\1.22\\-0.1853\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2.905\\2.81\\-0.95\end{bmatrix}\right)$$

$$K=\begin{bmatrix}20.8702\\-8.4163\\-3.4594\end{bmatrix}$$

3- Durum denklemleri faz kononik şekline getirilerek, durum geri-besleme matrisi

$$K = \tilde{I}(\hat{a} - a) = \begin{bmatrix} \hat{a}_n - a_n \\ \hat{a}_{n-1} - a_{n-1} \\ \dots \\ \hat{a}_1 - a_1 \end{bmatrix}$$ *ifadesi ile hesap edilecektir.*

Durum denklemleri verilen sistem kontrol edilebilir kanonik form (faz-değişken kanonik form) dönüştürülür. Verilen sistemin karakteristik denkleminden

İntegral ilaveli sisteme ait karakteristik denklem.

$$F(z) = z^3 - 2.905z^2 + 2.81z - 0.905 = z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0$$

$$a = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.905 \\ 2.81 \\ -2.905 \end{bmatrix} \quad A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.905 & -2.81 & 2.905 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha(z) = z^3 - 2.0029z^2 + 1.22z - 0.1853 = z^3 + \hat{a}_1 z^2 + \hat{a}_2 z + \hat{a}_3 = 0$$

istenen karakteristik denklembelirlenmiştir.

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} \hat{a}_3 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1853 \\ 1.22 \\ -2.0029 \end{bmatrix}$$

$$K = \tilde{I}(\hat{a} - a) = \begin{bmatrix} \hat{a}_n - a_n \\ \hat{a}_{n-1} - a_{n-1} \\ \dots \\ \hat{a}_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1853 \\ 1.22 \\ -2.0029 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.905 \\ 2.81 \\ -2.905 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 0.7197 \\ -1.589 \\ 0.9022 \end{bmatrix}$$ Elde edilen kazanç matrisi faz-kanonik forma dönüştürülmüş durum denklemleri içindir. Dönüşüm matrisi T bulunmalı ve $k = K^T T^{-1}$ ifadesi ile durum geri-besleme katsayı matrisi

Dönüşüm matrisi, $T = VV_c^{-1}$ ifadesi ile hesaplanmalıdır.

Açık çevrim sistem kontrol edilebilirlik matrisi $V = s$ daha önce elde edilmiştir.

$$V = s = \begin{bmatrix} 0.0048 & 0.0139 & 0.0221 \\ 0.0952 & 0.0862 & 0.078 \\ 0 & -0.0048 & -0.187 \end{bmatrix}$$

İstenen kapalı çevrim sistem kontrol edilebilirlik matris V_c elde edilmelidir.

$V_c = s = \begin{bmatrix} B_c & B_c A_c & B_c A_c^{\,2} \end{bmatrix}$ yukarıda elde edilen matrisler yerlerine koyulur.

$$V_c = s = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.905 & -2.81 & 2.905 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.905 & -2.81 & 2.905 \end{bmatrix}^2 \right)$$

$$V_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2.905 \\ 1 & 2.905 & 5.629 \end{bmatrix}$$ elde edilen kontrol edilebilirli matrisler kullanılarak dönüşüm matrisi elde edilir.

$$T = VV_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0048 & 0.0139 & 0.0221 \\ 0.0952 & 0.0862 & 0.078 \\ 0 & -0.0048 & -0.187 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2.905 \\ 1 & 2.905 & 5.629 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} -0.0047 & -0.0002 & 0.0048 \\ -0.0952 & -0.1904 & 0.0952 \\ -0.0047 & -0.0048 & 0 \end{bmatrix}$$ dönüşüm matrisi elde edilir.

dönüşüm matrisi ve faz kanonik form için elde edilmiş olan durum geri besleme kazanç matrisi kullanılarak verilen sisteme ait durum geri besleme katsayılar matrisi elde edilir.

$$k = K^T T^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7197 \\ -1.589 \\ 0.9022 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0047 & -0.0002 & 0.0048 \\ -0.0952 & -0.1904 & 0.0952 \\ -0.0047 & -0.0048 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$k = \begin{bmatrix} 20.8702 & 8.4163 & -3.4594 \end{bmatrix}$ olarak elde edilir.

4- *Ackerman* tarafından önerilmiş olan $k^T = e^T s^{-1} \hat{p}(A)$ *ifadesi ile* K matrisinin hesaplanması:

6

$e^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere, $e^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir.

İstenen karakteristik denklemde $z = G$ yazılarak $\hat{p}(G)$ elde edilir.

$\hat{p}(z) = \alpha(z) = z^3 - 2.0029z^2 + 1.22z - 0.1853$ dir.

$$\hat{p}(G) = \alpha(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0.0952 & 0 \\ 0 & 0.905 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 - 2.0029\begin{bmatrix} 1 & 0.0952 & 0 \\ 0 & 0.905 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 + 1.22\begin{bmatrix} 1 & 0.0952 & 0 \\ 0 & 0.905 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 0.1853\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{p}(G) = \alpha(G) = \begin{bmatrix} 0.0329 & 0.0124 & 0 \\ 0 & 0.0206 & 0 \\ -0.2155 & -0.0859 & 0.0329 \end{bmatrix}$$

Elde edilmiş olan katsayı matrisleri Ackerman ifadesinde yerine koyulur.

$$k^T = e^T s^{-1} \hat{p}(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0048 & 0.0139 & 0.0221 \\ 0.0952 & 0.0862 & 0.078 \\ 0 & -0.0048 & -0.187 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.0329 & 0.0124 & 0 \\ 0 & 0.0206 & 0 \\ -0.2155 & -0.0859 & 0.0329 \end{bmatrix}$$

$k^T = \begin{bmatrix} 20.8702 & 8.4163 & -3.4594 \end{bmatrix}$ durum geri-besleme matrisi elde edilir.

Elde edilen statik ve dinamik durum geri-besleme katsayıları ile verilmiş ayrık-zaman kontrol blok diyagram aşağıda verilmiştir.

Elde edilen katsayılar k_1 k_2 k_I karakteristik denklemde yerine koyulur ise,

$$F(z) = z^3 + (-0.0952(\text{-}8.4186) - 2.905 - 0.00484 * (\text{-}20.7961)z^2 +$$

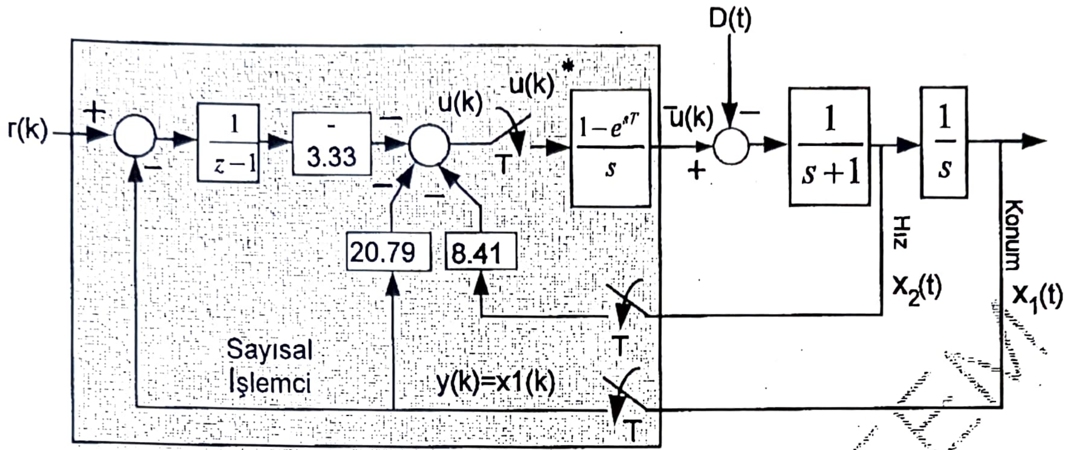
$$(0.0015716(\text{-}20.7961) + 2.81 + 0.1904(\text{-}8.4186) + 0.00484(\ 3.3393))z$$

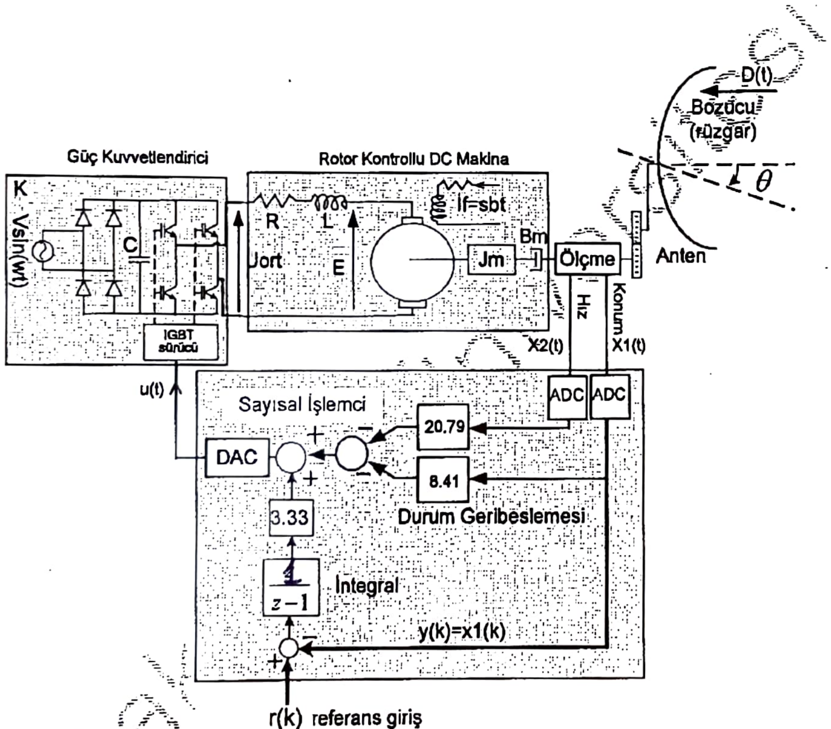
$$+0.0046828(\text{-}20.7961) - 0.905 - 0.0952(\text{-}8.4186) + 0.0046828(\ 3.3393) = 0$$

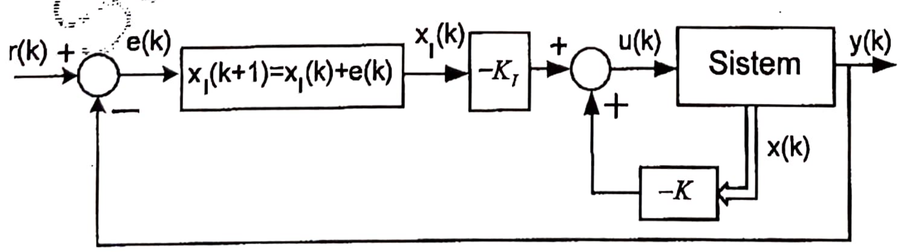
$F(z) = z^3 - 2.0029z^2 + 1.22z - 0.1853 = 0$ olur.................

Sonuç olarak, $\alpha(z) = z^3 - 2.0029z^2 + 1.22z - 0.1853 = 0$ idi.

$F(z) = \alpha(z)$ sağlanmıştır.........

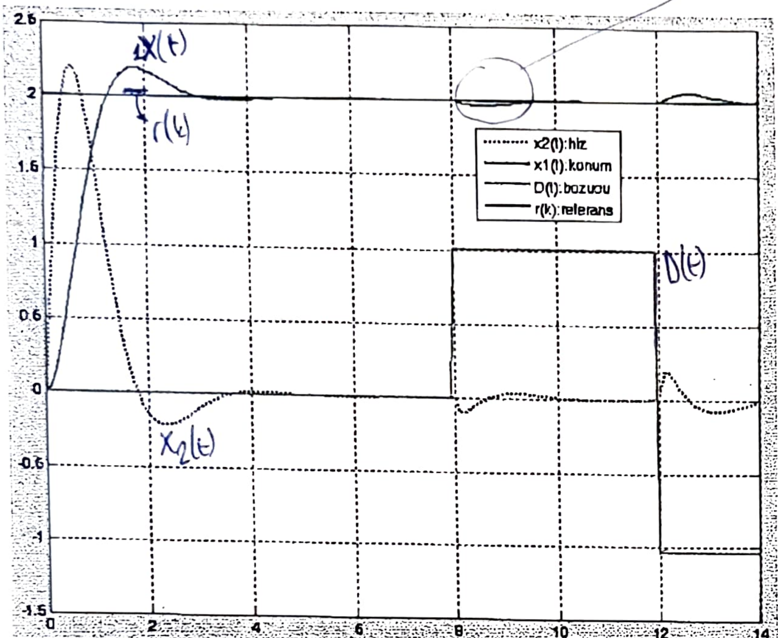

D(t)
r(k)
u(k)
u(k)*
T
3.33
20.79
8.41
Hız
Konum
$x_2(t)$
$x_1(t)$
Sayısal
İşlemci
y(k)=x1(k)


Güç Kuvvetlendirici
Rotor Kontrollu DC Makina
D(t)
Bozucu
(rüzgar)
θ
Anten
R
L
If=sbt
Bm
Jm
Ölçme
Uort
E
IGBT sürücü
Hız
Konum
X2(t)
X1(t)
u(t)
ADC
ADC
Sayısal İşlemci
DAC
20.79
8.41
3.33
Durum Geribeslemesi
Integral
y(k)=x1(k)
r(k) referans giriş

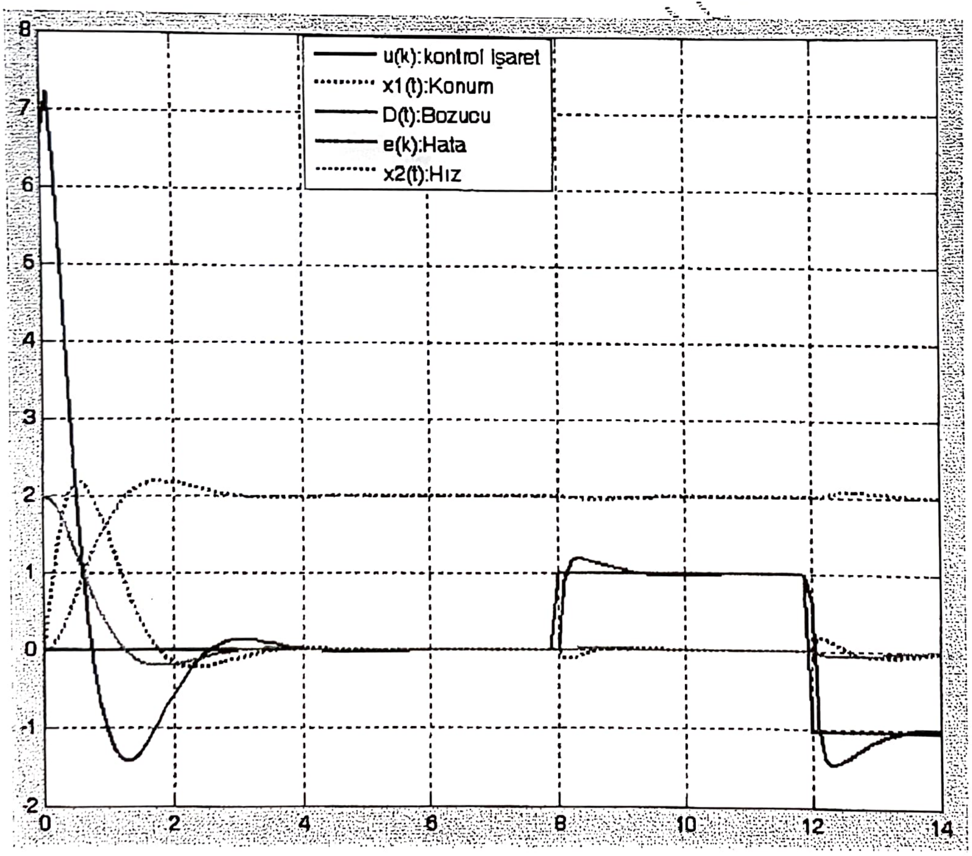

r(k)
e(k)
$x_I(k+1)=x_I(k)+e(k)$
$x_I(k)$
$-K_I$
u(k)
Sistem
y(k)
x(k)
$-K$

integratör sayesinde $e_{ss}=0$ old.

integratör yoksa



Hız, Konum , Bozucu ve referans işaretlerinin zamana göre değişimleri.



Kontrol işaret, konum, Bozucu, hata ve Hız İşaretlerinin zamana göre değişimleri.............................

iv) ***Statik ve dinamik durum geri-beslemeli servo sistem ait durum ve çıkış denklemlerini elde edilmesi:***

Genel olarak n. Dereceden sisteme ait durum denklemi

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ ve çıkış denklemi ise,

$y(k) = Cx(k)$ dir.

Elde edilmiş olan, statik ve dinamik durum geri-beslemeli servo sistem ait genel durum denklemi

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_I(k+1) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & K_I \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$ dir.

$$A_c = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & K_I \end{bmatrix}$$ olarak tanımlanır ve değerler yerlerine yazılır ise,

$$A_c = \left(\begin{matrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0.0952 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix}}^{A} & \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{0} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} & \underbrace{1}_{1} \end{matrix} \right) - \left(\begin{matrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 0.00484 \\ 0.0952 \end{bmatrix}}^{B} \\ \underbrace{0}_{0} \end{matrix} \right) \begin{bmatrix} 20.79 & 8.41 & -3.33 \end{bmatrix}$$ olur ve,

$$A_c = \begin{pmatrix} 0.8993 & 0.05445 & 0.1612 \\ -1.98 & 0.1035 & 0.317 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ olarak elde edilir.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_I(k+1) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8993 & 0.05445 & 0.01612 \\ -1.98 & 0.1035 & 0.317 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$ durum denklemi ve

Çıkış denklemi olarak ise

$$y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix}$$ elde edilir.

vii) Statik ve dinamik durum geri-beslemeli servo sisteme ait ayrık-zaman Transfer fonksiyonunu elde edilmesi:

Genel olarak n. Dereceden sisteme ait durum denklemi

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ ve çıkış denklemi ise,

$y(k) = Cx(k)$ ile verilen sisteme ait ayrık-zaman Transfer fonksiyonu,

$\boxed{T(z) = C[zI - A]^{-1}B + D \quad \text{dir.}}$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_I(k+1) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8993 & 0.05445 & 0.01612 \\ -1.98 & 0.1035 & 0.317 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$ durum denklemi ve

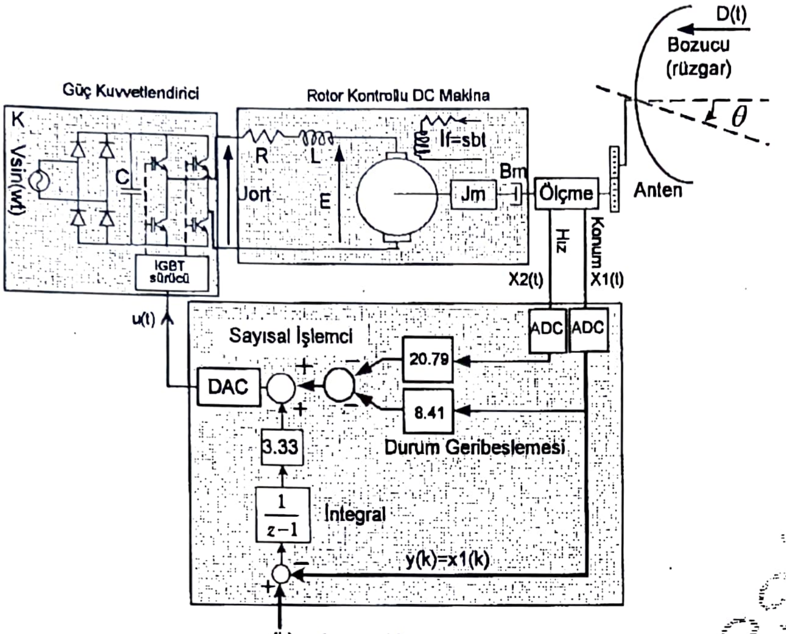
Çıkış denklemi

$$y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix}$$ katsayı matrisleri kullanılarak

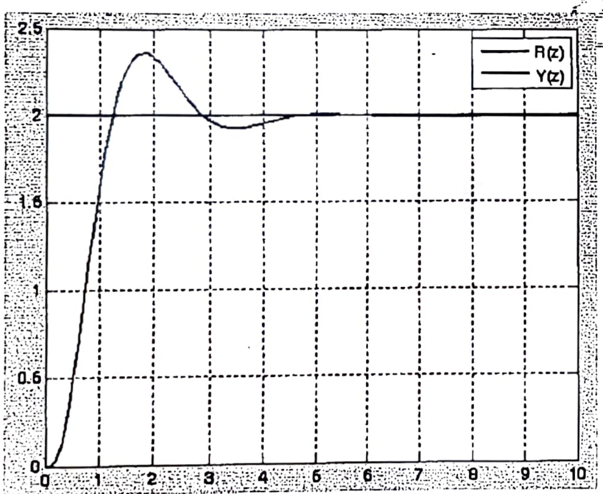
$$T(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(z \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0.8993 & 0.05445 & 0.01612 \\ -1.98 & 0.1035 & 0.317 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z - 0.8993 & -0.05445 & -0.01612 \\ -1.98 & z - 0.1035 & -0.317 \\ 1 & 0 & z-1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(z) = \frac{\theta(z)}{R(z)} = \frac{0.01559 + 0.01612z}{z^3 - 2.0029z^2 + 1.22z - 0.1853}$$ elde dilir. Şekil olarak aşağıda verilmiştir.



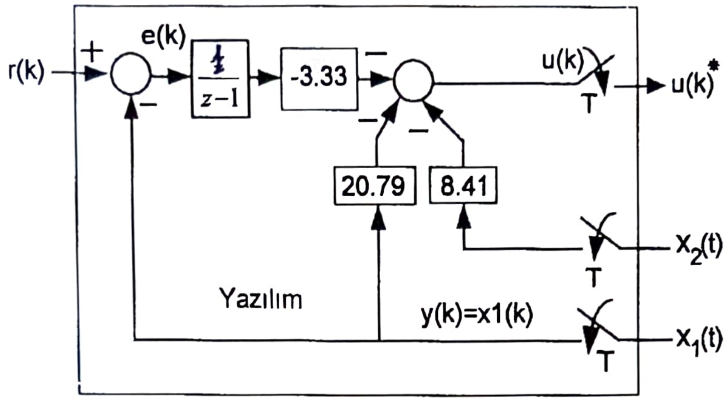
Giriş $r(t) = 2u(t)$ $R(z) = \dfrac{2z}{z-1}$ için çıkışın zamana göre değişimi aşağıda verilmiştir.



$r(t) = 2u(t)$ için $y(t)$ çıkışının zamana göre değişimi.

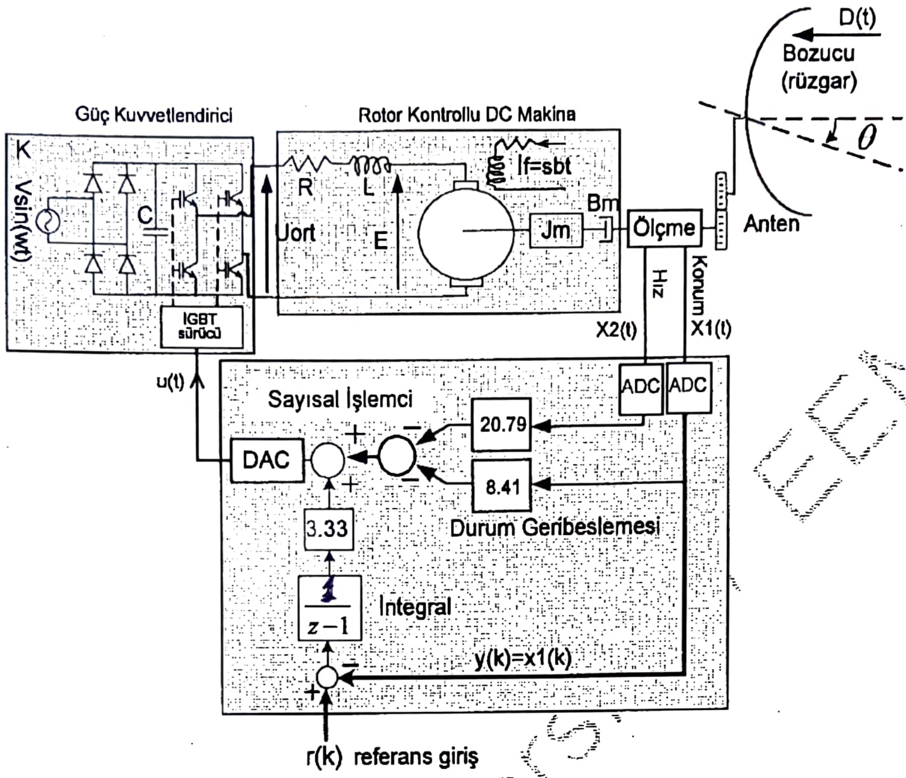
viii) Statik ve dinamik durum geri-beslemeli kontrol kurallı ***ayrık-zaman sayısal kontrole*** ait sembolik dilde programı:

Kontrolcüye ait blok diyagram aşağıda verilmiştir.




```
10 A=0          ; ilk integraL değeri
20 read x1,x2,r
30 e=r-x1
40 integraL=A+e
50 u=-8.41*x1-20.79*x2-(-3.33)*integraL
60 out u
70 A=integraL
80 goto 20      ; T=0.1 sn bekle sonra 20 nolu satıra git.
```

Bir önceki bölümde servo sisteme ait dinamik durum geri besleme tasarımı yapılmış olup tüm kontrol blok diyagramı aşağıda verilmiştir.



Kontrol blok diyagramından görüldüğü ve durum uzay tasarımında ifade edildiği gibi kontrol edilebilir bir sistemde tüm kutupların istenen yere atanabilmesi için tüm durum değişkenlerinin ölçülmesi gerekmektedir.

Tüm durum değişkenlerinin ölçülmesi yerine tüm durum değişkenleri gözlenebilen ve katsayılar matrisleri bilinen bir sistemde çıkış ölçülerek sisteme ait tüm durum değişkenleri hesap edilebilir, gözlenebilir (kestirilebilir).

Tüm durumları gözlenen sisteme tüm durum geri-besleme uygulanabilir.

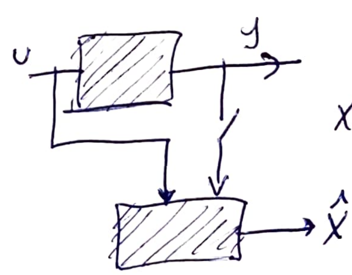
$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

$y(k) = Cx(k)$

$x = \begin{matrix} \text{konum} \\ \text{hız} \\ \text{akım} \end{matrix}$

$u(k) = -Kx(k)$

$u = [K_k \; K_h \; K_a] \begin{bmatrix} \text{konum} \\ \text{hız} \\ \text{akım} \end{bmatrix}$



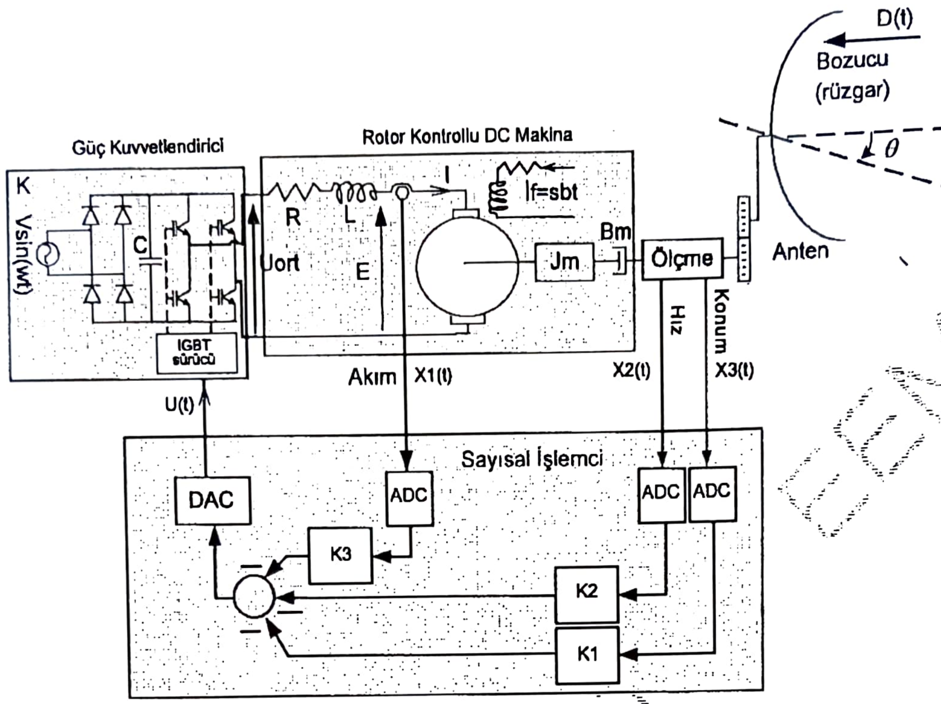
$x \cong \hat{x}$

$u(k) \cong -K\hat{x}(k)$

DURUM GÖZLEYİCİ (KESTİRİCİ)

$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$

rank{O}=n ise tüm değerler gözlenebilir.



Yukarıda verilen servo sistemde tüm durum geri-besleme için üç adet durum değişkenleri akım,konum ve hız ölçülmelidir. Aşağıda anlatılacak olan gözleyici ve tasarımı ile sadece çıkış (konum) ölçülecek ve gözleyici ile akım,konum ve hız ani değerleri hesap edilecektir.

Genel olarak, bir sistemin tüm durumlarının ölçülmesi pratik olmayabilir, ancak ilgilenilen sistemden elde edilen bilgilerden sistemin durumları kestirilebilinir. Genel olarak, bir sistemin durumlarını kestiren sisteme ***gözleyici*** (observer) veya ***durum kestirici*** (state estimator) denir.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

Verilen sistemin herhangi bilinmeyen ilk x(0) durumları için, N adet sonlu y(0), y(1),y(N-1) ölçümünden tüm x(0) durum değişkenleri hesaplanabiliyor ise, sistem tümüyle gözlenebilir denir. Sistemin tüm durumlarının gözlenebilmesi için Gözlenebilirlik matrisi, $O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix}$,

$rank(O) = n$ olmalıdır, A_{nxn} :sistem matrisi.

Luenberger Gözleyici: Durum vektörleri gözlenecek olan sistem modeli,

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

$y(k) = Cx(k)$ $\quad x \in R^n$, $y \in R^p$ ve $u \in R^m$ olarak verilsin. Durum

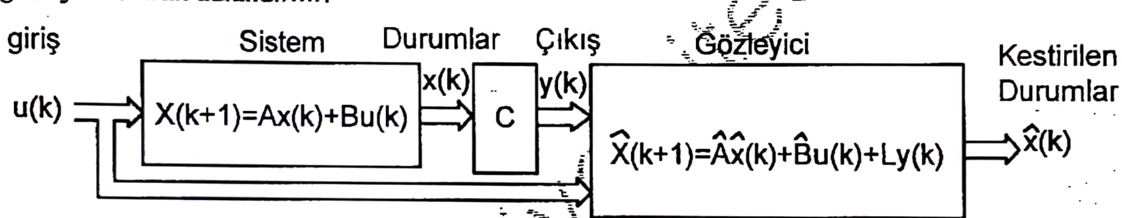
vektörü $x(k)$ 'nın, yaklaşık değeri $\hat{x}(k)$ ile verilsin. Gözleyici modeline ait durum denklemi,

$\hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k) + Ly(k)$ ile verilir.

$\hat{x}(k) \in R^n$ ve $\hat{A}$, $\hat{B}$ ve L bilinmeyen matrisleridir.

L tasarım katsayısı

Gözleyici, $u(k)$ giriş vektörü ve $y(k)$ çıkış vektörü,girişlerin den oluşan **iki girişli** bir dinamik sistemdir. $\hat{x}(k)$ ve $x(k)$ aynı boyutlu ise gözleyici ***tam dereceli/ tüm dereceli*** (full-order) gözleyici olarak adlandırılır. $\hat{x}(k)$ 'nın derecesi $x(k)$ 'dan küçük ise ***düşük-dereceli gözleyici*** olarak adlandırılır.



Sistem ve gözleyicinin basitleştirilmiş gösterimi

Hata vektörü, $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ olarak tanımlansın.

Gözleyici tasarlama probleminin tanımı*,mümkün olan en yüksek hızda $e(k)$ 'yı sıfır yapacak olan $\hat{A}$, $\hat{B}$ ve L matrislerinin belirlenmesidir.*

Problemin çözümü için,

$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1)$ yazılır ve durum denklemleri yerlerine yazılır=>

$= Ax(k) + Bu(k) - \hat{A}\hat{x}(k) - \hat{B}u(k) - L\underbrace{Cx(k)}_{y(k)}$ düzenlenir=>

$\boxed{e(k) = x(k) - \hat{x}(k)} \Rightarrow \hat{x}(k) = x(k) - e(k)$ olduğu göz önüne alınır ise,

$= Ax(k) + Bu(k) - \hat{A}[x(k) - e(k)] - \hat{B}u(k) - LCx(k)$

$e(k+1) = Ax(k) + Bu(k) - \hat{A}x(k) + \hat{A}e(k) - \hat{B}u(k) - LCx(k)$ düzenlenir ise,

hata dinamiği,

$e(k+1)=\hat{A}e(k)+[A-\hat{A}-LC]x(k)+[B-\hat{B}]u(k)$ olarak elde edilir. $e(k)$ 'nın $x(k)$ ve $u(k)$ 'dan bağımsız olarak ***sıfıra gidebilmesi*** için aşağıda verilen 3 şart sağlanmalıdır;

1- $\hat{A}=A-LC$

2- $\hat{B}=B$

3- $\hat{A}$ ***matrisi kararlı olmalıdır.*** 1 ve 2 ifadeleri yerlerine koyulur ise,

$\hat{x}(k+1)=(A-LC)\hat{x}(k)+Bu(k)+Ly(k)=A\hat{x}(k)+Bu(k)+Ly(k)-LC\hat{x}(k)$

$$\boxed{\hat{x}(k+1)=\underbrace{A\hat{x}(k)+Bu(k)}_{Kestirici}+L\underbrace{[y(k)-C\hat{x}(k)]}_{Düzeltici\ terim}\ \textbf{Gözleyici durum denklemi}}$$

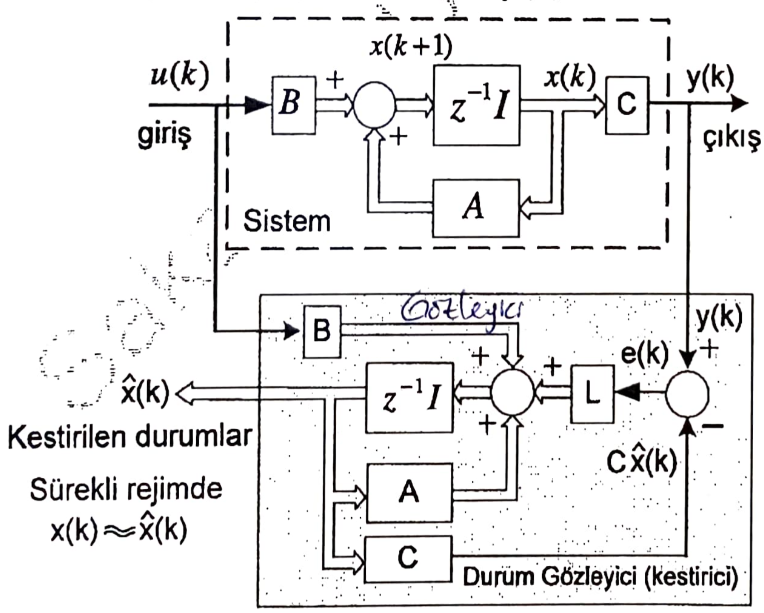
Gözleyici, sisteme göre daha hızlı olmak zorunda, olmalı.

Düzeltici terim, genellikle rezidül olarak adlandırılır (artık kalan, artan). Bu sonuçlardan $e(k)$ aşağıda verilen fark denklemi ile yazılır.

$e(k+1)=\hat{A}e(k)$ $e(k+1)=(A-LC)e(k)$ Hata dinamiği.............................

$$\hat{x}(k+1)=\underbrace{A\hat{x}(k)+Bu(k)}_{Kestirici}+L\underbrace{[y(k)-C\hat{x}(k)]}_{Düzeltici\ terim}$$ *Gözleyici durum denklemi*ne ait sayısal gerçekleştirme diyagramı aşağıda verilmiştir. *Gözleyici durum denklemi*

$\hat{x}(k+1)=(A-LC)\hat{x}(k)+Bu(k)+Ly(k)$ olarak düzenlenir.



Sonlu zaman denirse gözleyicinin karakteristik denklemi z^n dir (deadbeat)

*Gözleyici durum denklemi*ne ait sayısal gerçekleştirme diyagramı.

Gözleyici tasarım problemi; $\hat{A} = A - LC$ matrisinde Lmatrisini elde edilmesi bir ***kutup yerleştirme problemine*** dönüşür.

*Gözleyici tasarımında,*L matrisinin var olabilmesi ve $\hat{A} = A - LC$ nin istenen öz değerlere sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart (A, C) 'nin gözlenebilir olmasıdır.

$rank[O] = n$, gözlenebilirlik matris rankı tam olmalıdır. $\underbrace{O}_{\substack{\text{Gözlenebilirlik} \\ \text{Matrisi}}} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$

Gözleyici'de durum geribesleme matrisL'nin tasarımı:

i- $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *Gözlenecek sistem matrisi* A 'nın ***özdeğer***leri , $P(z)$ *gözlenecek sistem karakteristik denklemi olsun.*

$$P(z) = |zI - A| = \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i) = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n = 0$$ olarak yazılabilir.

ii- ***gözleyici sistem matrisi*** $\hat{A} = A - LC$ ***'nin istenen özdeğer***leri ve $\hat{P}(z)$ ise ***GÖZLEYİCİ karakteristik denklemi*** olsun.

$$\hat{P}(z) = \left|zI - \hat{A}\right| = \prod_{i=1}^{n} (z - \hat{\lambda}_i) = z^n + \hat{a}_1 z^{n-1} + ... + \hat{a}_n = 0$$ olarak yazılabilir.

Problem: gözleyicinin istenen özdeğerlere sahip olabilmesi için L ne olmalıdır?

L'nin bulunması, daha önceden verilen yöntemlerden herhangi biri kullanarak yapılabilir.

$\hat{P}(z)$ gözleyici karakteristik denklem ***seçiminde,*** *gözleyici cevap hızı durum değişkenleri kestirilecek sistem cevap hızından3~10 kat daha hızlı olacak şekilde seçilmesi tavsiye edilir.*

$F(z) = (z-\lambda_1)\dots(z-\lambda_n)$

$\hat{F}(z) = (z-\hat{\lambda}_1)\dots(z-\hat{\lambda}_n) = 0$

Lmatris hesabı için aşağıda verilen yöntemlerden faydalanılabilinir.

I-YOL

i- *Gözlenecek sistem karakteristik denklemi,* $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n = 0$ olmak üzere,

$$w = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & a_{n-2} \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$ Karakteristik denklem katsayılarından elde edilir....

$$O=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix}$$ gözlenebilirlik matris,

ii- Gözleyici karakteristik denklem $\hat{P}(z)=z^n+\hat{a}_1 z^{n-1}+\dots+\hat{a}_n=0$ katsayılarından

$$\hat{a}=\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \dots \\ \hat{a}_n \end{bmatrix}$$ elde edilir.

iii- Gözleyici katsayı matrisi $L=\left[w^T O^T\right]^{-1}(\hat{a}-a)$ ***ifadesi ile hesaplanır.***

II-YOL

Olması istenen gözleyici karakteristik denklem $\hat{P}(z)=z^n+\hat{a}_1 z^{n-1}+\dots+\hat{a}_n=0$ olmak üzere,

Lmatrisi için **Ackerman** eşitliği, $z=A$ için yazılır,

Gözleyici katsayı matrisi $L=\hat{P}(A)\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$ ***ifadesi ile hesaplanır.***

III-YOL

*Durum değişkenleri **kestirilecek**(gözlenecek) olan sistem durum denklemleri **gözlenebilirkanonik**formunda ise,*

Gözleyici katsayı matrisi

$$L=(\hat{a}-a)=\begin{pmatrix} \hat{a}_n-a_n \\ \hat{a}_{n-1}-a_{n-1} \\ \dots\dots\dots \\ \hat{a}_1-a_1 \end{pmatrix}$$ ***ifadesi ile hesaplanır.***

VI-YOL

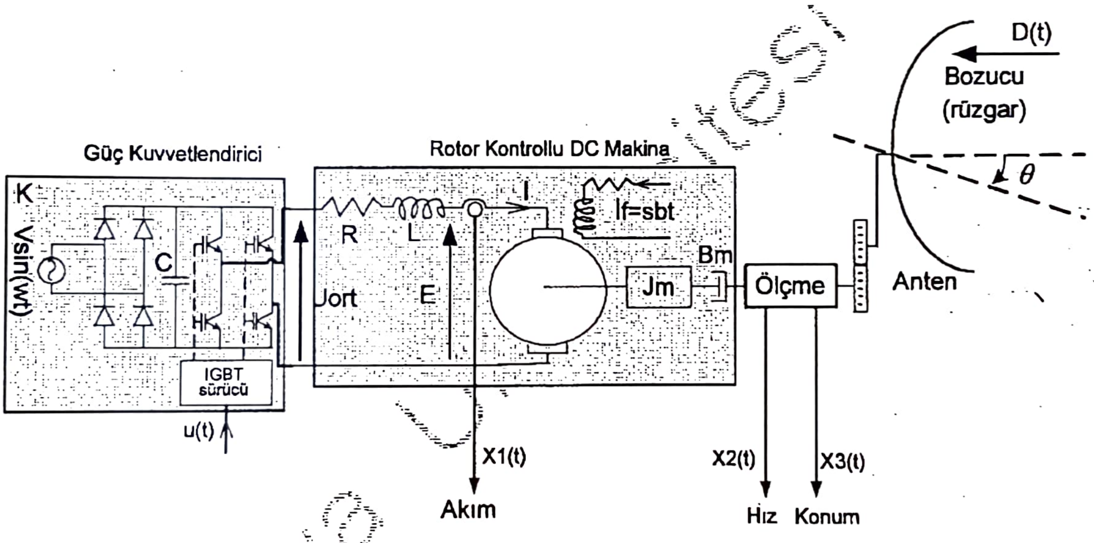
Tüm durum değişkenleri gözlenecek sistemde ayrık-zaman $\hat{A} = A - LC$ matrisine ait karakteristik denklem ile olması istenen gözleyici karakteristik denklemi karşılaştırılır ve katsayılar eşitlenerek durum geri besleme vektörü L elde edilir.,

$\hat{x}(k+1) = (A - LC)\hat{x}(k) + Bu(k) + Ly(k)$ Luenberger gözleyici durum denklemi

$\hat{p}(z) = z^n + \hat{a}_1 z^{n-1} + ... + \hat{a}_{n-1} z + \hat{a}_n = 0$ Olması istenen gözleyici karakteristik denklemi.

$\det(zI - (A - LC)) = \hat{p}(z) = z^n + \hat{a}_1 z^{n-1} + ... + \hat{a}_{n-1} z + \hat{a}_n = 0$ eşitlenir ve L katsayıları elde edilir.

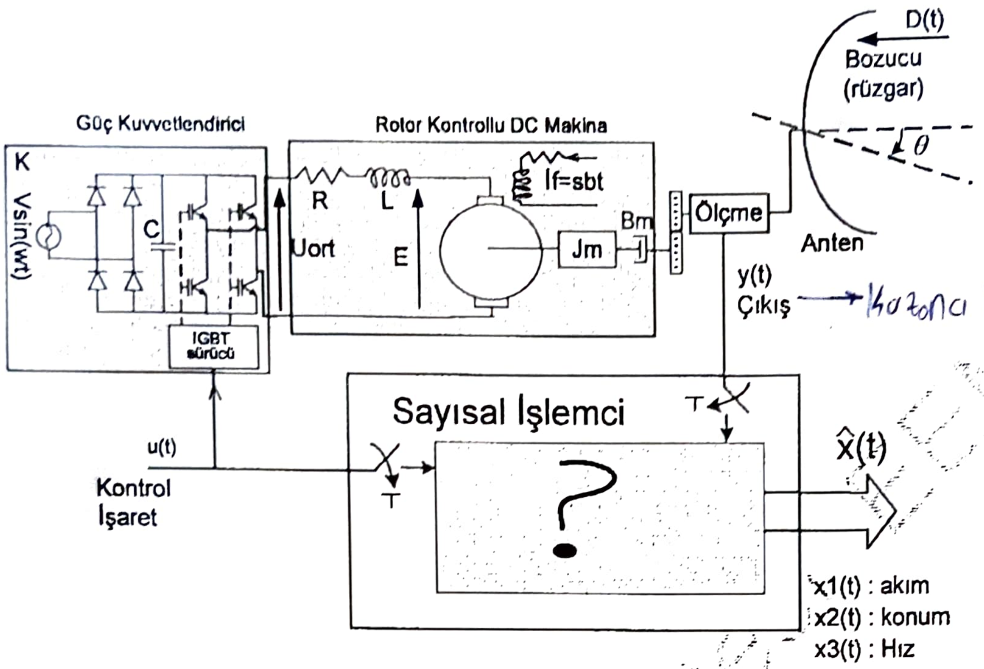
Örnek:



$R = 5\ \Omega$, $L = 200\ mH$, $K_b = 0.1\ V/rad/sn$

$K_t = 0.1\ Nm/A$, $n = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{1}{50}$, $J = 0.02\ kgm^2$

Yukarıda verilen servo sisteme ait parametreler yanda verilmiştir. Aşağıda verilen düzenekte görüldüğü gibi çıkış işaretini ölçerek $x_1(t)$, $x_2(t)$ ve $x_3(t)$ durum değişkenlerini kestiriniz..



Çözüm:Önce sisteme ait dinamik denklemler yazılır.

t-domeninde

$$u_{ort}(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + e(t)$$

$$T_e(t) = K_i i(t)$$

$$e(t) = K_b w(t)$$

$$T_m(t) = J\frac{dw_m(t)}{dt} + nT_y(t)$$

$$T_m(t) = T_e(t)$$

$$w_{m(t)} = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

$$\theta_y(t) = \frac{n_1}{n_2}\theta_m(t) = n\theta_m(t)$$

s-domeninde

$$I(s) = \frac{U_{ort}(s) - E(s)}{Ls + R}$$

$$T_e(s) = K_i I(s)$$

$$\Omega_m(s) = \frac{T_e(s) - nT_y(s)}{Js}$$

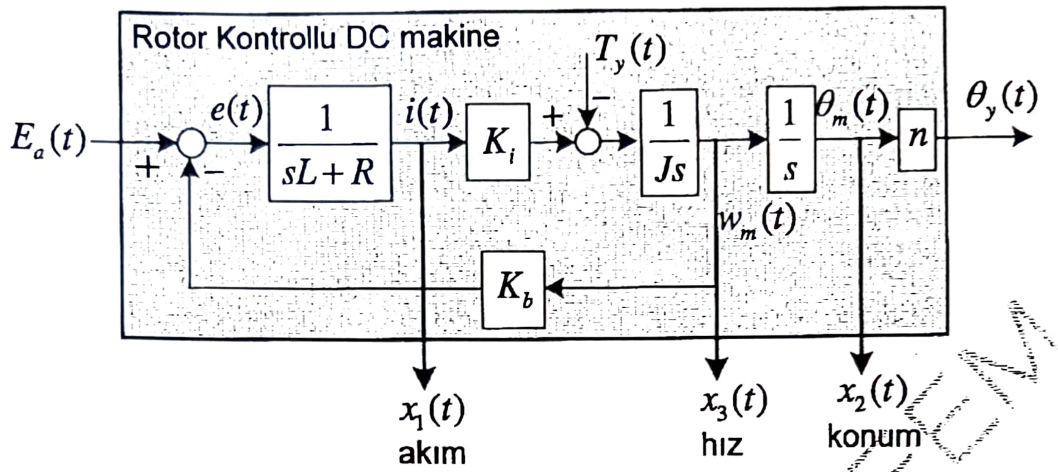
$$E(s) = K_b \Omega(s)$$

$$T_m(s) = T_e(s)$$

$$\theta_m(s) = \frac{\Omega_m(s)}{s}$$

$$\theta_y(s) = n\theta_m(s)$$

S-domeni denklemler kullanılarak Rotor Kontrollü DC-makineye ait kontrol blok diyagram aşağıda verilmiştir.



Yukarıda yazılan dinamik denklemler kullanılarak Rotor Kontrollü DC-makineye ait sürekli zaman durum denklemler aşağıda elde edilmiştir.Dinamik denklemler düzenlenir

$$u_{ort}(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + K_b w(t) \quad \rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{K_b}{L}w(t) + \frac{1}{L}u_{ort}(t)$$

$$K_i i(t) = J\frac{dw(t)}{dt} + T_y(t) \rightarrow \frac{dw(t)}{dt} = \frac{K_i}{J}i(t) - \frac{n}{J}T_y(t)$$ ve **durum değişkenleri** tanımlanır

$x_1(t) = i(t)$ ***akım***

$x_2(t) = \theta(t)$ ***konum***

$x_3(t) = \dfrac{d\theta(t)}{dt} = w(t)$ ***Açısal hız***

ve durum denklemleri vektör matris formunda yazılır.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & 0 & -\dfrac{K_b}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{K_i}{J} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U_{ort}(t) \quad \textbf{\textit{Durum denklemleri}}$$

Ve Çıkış denklemi, $y(t) = \theta_y(t) = n\theta_m(t)$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & n & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}$$ elde edilir. Parametre değerleri yerlerine yazılır ise durum denklemleri ve katsayı matrisleri elde edilir....

$$\begin{bmatrix}\frac{dx_1(t)}{dt}\\\frac{dx_2(t)}{dt}\\\frac{dx_3(t)}{dt}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}-25 & 0 & -0.5\\0 & 0 & 1\\50 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}5\\0\\0\end{bmatrix}}_{B}U_{ort}(t)\quad y(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0.02 & 0\end{bmatrix}}_{C}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}$$

Ayrık-zaman durum denklemleri aşağıda verilen MATLAB komut yardımı ile elde edilmiştir.

MATLAB Komutu: [G H]=c2d(A,B,T) , T=0.004 sn $T=\frac{L}{10R}$ alınmıştır.

Rot or

Kontrollu DC makinaya ait,

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\\x_3(k+1)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0.9047 & 0 & -0.0019\\0.0004 & 1 & 0.004\\0.1903 & 0 & 0.9998\end{bmatrix}}_{G}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\x_3(k)\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0.019\\0\\0.0019\end{bmatrix}}_{H}u(k)$$ durum ve

$$y(k)=\begin{bmatrix}0 & 0.02 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\x_3(k)\end{bmatrix}$$ çıkış denklemleri elde edilir.

Gözlenebilirlik testi: Sistem matrisi 3x3 tür, n=3 alınır.

$$\underbrace{Q}_{\text{Gözlenebilirlik Matrisi}}=\begin{pmatrix}C\\CA\\\cdot\\\cdots\\CA^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C\\CA\\CA^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0.02 & 0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0 & 0.02 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.9047 & 0 & -0.0019\\0.0004 & 1 & 0.004\\0.1903 & 0 & 0.9998\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0 & 0.02 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.9047 & 0 & -0.0019\\0.0004 & 1 & 0.004\\0.1903 & 0 & 0.9998\end{bmatrix}^2\end{pmatrix}$$

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0.02 & 0 \\ 0.000008 & 0.02 & 0.00008 \\ 0.00003046 & 0.02 & 0.000156 \end{pmatrix} \quad rank(O)=3$$ ***tüm durumlar gözlenebilir.....***

Çıkış işareti ölçülerek akım, konum ve hızı kestirilecek olan Rotor Kontrollü DC-makineye ait karakteristik denklem,

$$F(z)=\det(zI-G)=0=\det\left\{\begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0.9047 & 0 & -0.0019 \\ 0.0004 & 1 & 0.004 \\ 0.1903 & 0 & 0.9998 \end{bmatrix}\right\}=\begin{vmatrix} z-0.9047 & 0 & 0.0019 \\ -0.0004 & z-1 & -0.004 \\ -0.1903 & 0 & z-0.9998 \end{vmatrix}=0$$

$F(z)=z^3-2.9045z^2+2.8094z-0.9049=0$ Rotor Kontrollü DC-makine'ye ait karakteristik denklem,

Karakteristik denklem kökleri, öz değerler, $z_1=1$, $z_2=0.9958$ ve $z_2=0.9086$

Gözleyici karakteristik denklemi: Gözlenecek sistem zaman sabiteleri,

Sistem karakteristik denklemleri: Seçilen gözleyici karakteristik kökleri

$z_1=1$ $\longrightarrow$ $z_{1g}=0.25$

4 kat hızlı olsun diye kökler ile bölündü

$z_2=0.9958$ $z_{2g}=0.249$

$z_3=0.9086$ $z_{3g}=0.2271$

$z_{ng}=0.25z_n$ yapılmıştır.

$$\hat{P}(z)=(z-z_{1g})(z-z_{2g})(z-z_{3g})=(z-\overset{0,25}{\cancel{1}})(z-0.249)(z-0.2271)=0$$

$\hat{P}(z)=z^3-1.4761z^2+0.5326z-0.0565=0$ Gözleyici Karakteristik denklem....

Ackerman Formülü ile hesap:

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0.02 & 0 \\ 0.000008 & 0.02 & 0.00008 \\ 0.00003046 & 0.02 & 0.000156 \end{pmatrix}$$ elde edilmişti... tersi alınır ise

$$O^{-1}=\begin{pmatrix} 69106.7 & -1.38240.4 & 69133.7 \\ 50 & 0 & 0 \\ -199410.6 & 263240.4 & 6913.3 \end{pmatrix}$$ olarak elde edilir...

$\hat{P}(z)=z^3-1.4761z^2+0.5326z-0.0565=0$ karakteristik denkleminde $z=G$ yazılır ve $\hat{P}(G)$ elde edilir.

$$\hat{P}(G)=\begin{bmatrix} 0.9047 & 0 & -0.0019 \\ 0.0004 & 1 & 0.004 \\ 0.1903 & 0 & 0.9998 \end{bmatrix}^3 -1.4761\begin{bmatrix} 0.9047 & 0 & -0.0019 \\ 0.0004 & 1 & 0.004 \\ 0.1903 & 0 & 0.9998 \end{bmatrix}^2$$

$$+0.5326\begin{bmatrix} 0.9047 & 0 & -0.0019 \\ 0.0004 & 1 & 0.004 \\ 0.1903 & 0 & 0.9998 \end{bmatrix} -0.0565\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=0$$

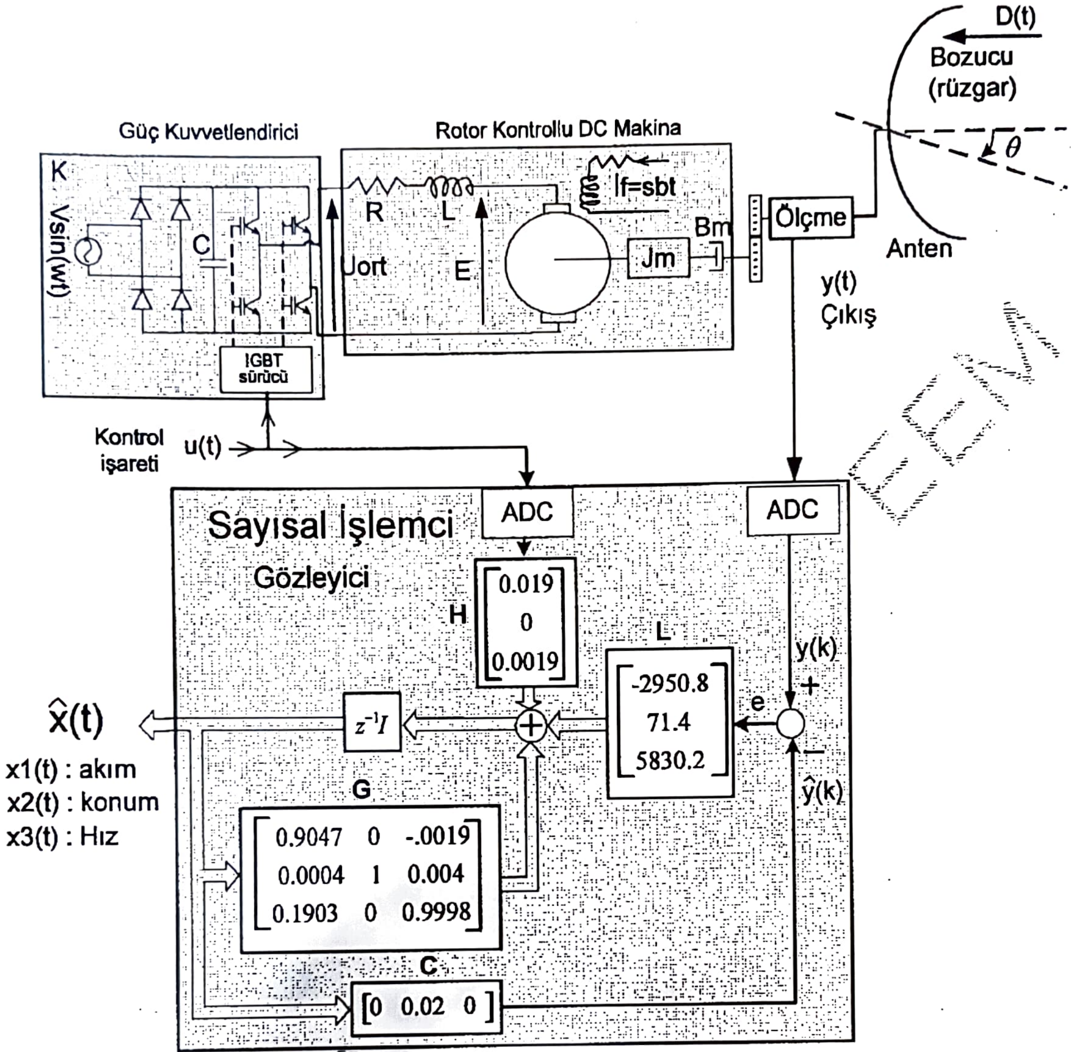
$$\hat{P}(G)=\begin{bmatrix} -0.0428 & 0 & -0.0008 \\ 0.0013 & 0 & 0.0023 \\ 0.0844 & 0 & -0.0006 \end{bmatrix}$$

$$L=\hat{P}(G)\begin{bmatrix} C \\ CG \\ \cdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.0428 & 0 & -0.0008 \\ 0.0013 & 0 & 0.0023 \\ 0.0844 & 0 & -0.0006 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 69106.7 & -1.38240.4 & 69133.7 \\ 50 & 0 & 0 \\ -199410.6 & 263240.4 & 6913.3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix} -2950.8 \\ 71.4 \\ 5830.2 \end{bmatrix}$$ Gözleyici kazanç matrisi elde edilir...

MATLAB komutu ile tasarım:

```
z1=1;
z2=0.9958;        % Gözlenen sistem karakteristik denklem kökleri.
z3=0.9086;
---- Gözleyici tasarim ......................
po=0.25*[z1 z2 z3]; %Gözleyici istenen karakteristik denklem kutupları
[L]=place(G',C',po)' %Gözleyici kazanç matrisi L hesabı
```



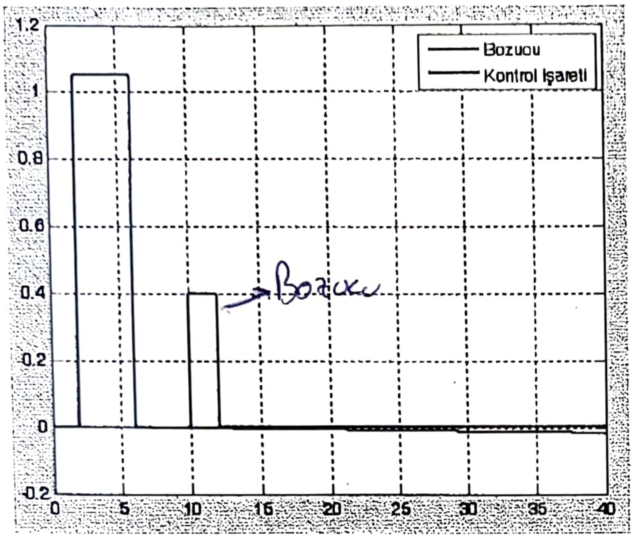
Gözleyici ile rotor kontrollü DC makine durum değişkenlerinin kestirilmesi.....

Durum gözleyiciye ait ayrık-zaman durum denklemi aşağıda verilmiştir.

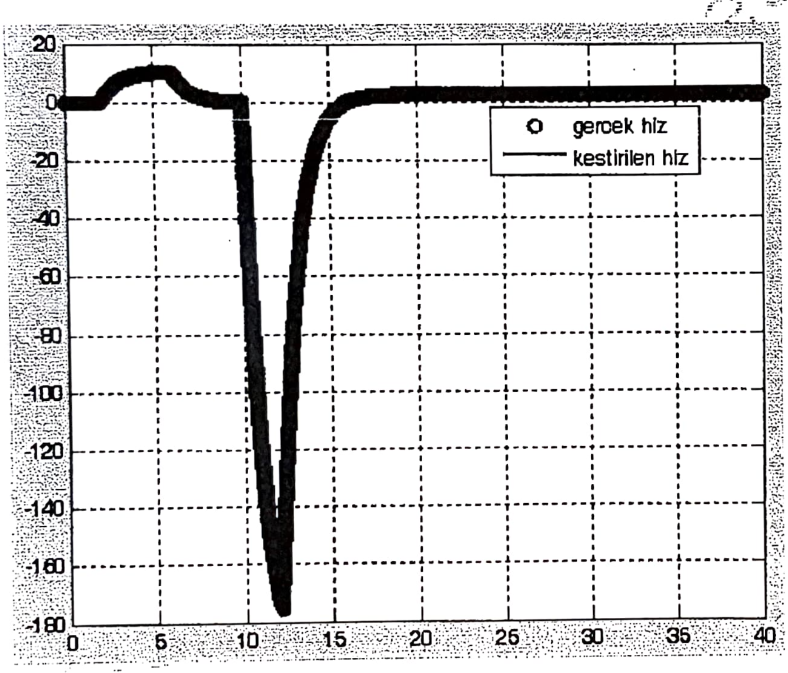
$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L[y(k) - C\hat{x}(k)]$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \hat{x}_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9047 & 0 & -0.0019 \\ 0.0004 & 1 & 0.004 \\ 0.1903 & 0 & 0.9998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.019 \\ 0 \\ 0.019 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} -2950.8 \\ 71.4 \\ 5830.2 \end{bmatrix} [y(k) - [0 \quad 0.02 \quad 0] \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix}]$$

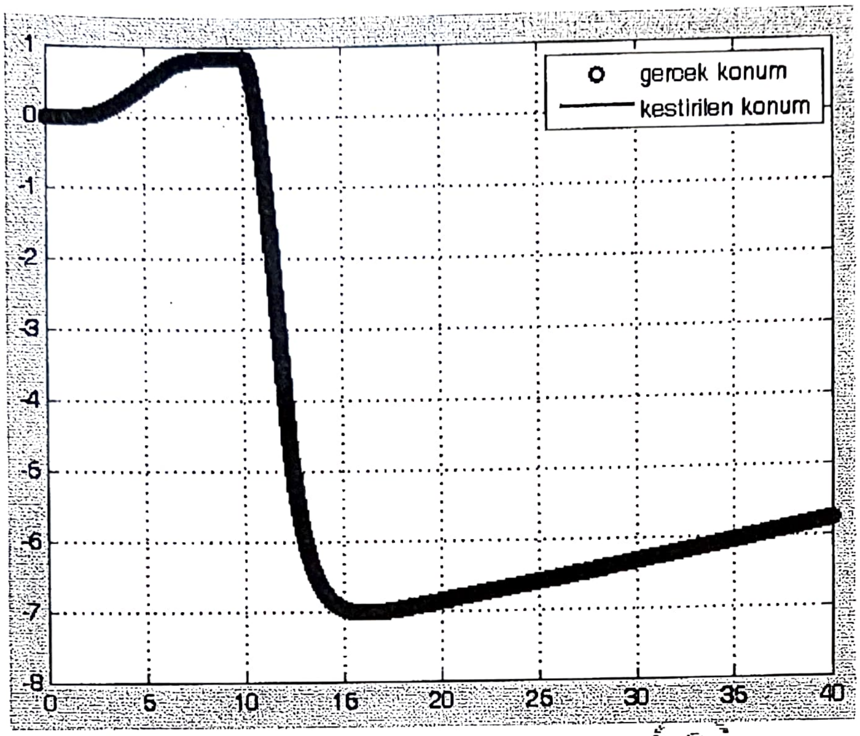
Aşağıda verilen kontrol işaret ve bozucu girişleri için benzetim çalışması yapılmıştır.



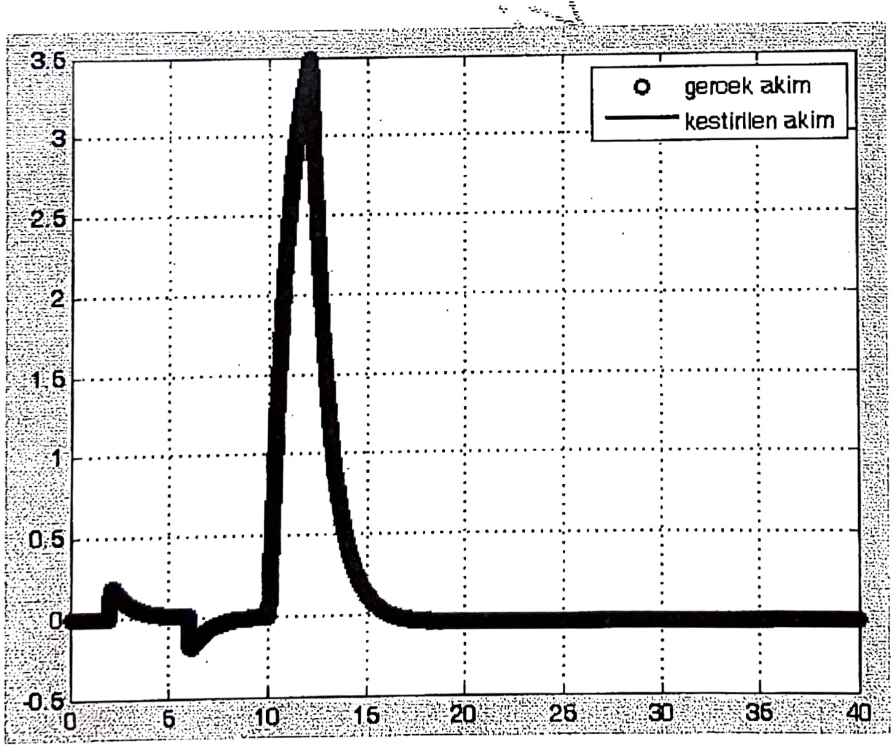
Benzetim çalışması sonucunda , gözleyici ile kestirilen durum değişkenleri ile gerçek zaman durum değişkenlerinin zamana göre değişimleri aşağıda sırası ile verilmiştir.



Gerçek zaman ve kestirilen hız



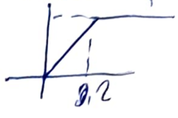
Gerçek zaman ve kestirilen konum



Gerçek zaman ve kestirilen akım

$e \cong 0$

$n=2$, $T=0{,}1sn$ ise $nT=0{,}2sn$ sonra sistem değişmez yerleşir



SONLU ZAMAN KONTROL (DEADBEAT CONTROL)

Sonlu zaman kontrol yalnızca ayrık-zaman sistemlere uygulanabilir. Sürekli-zaman sistemleri için böyle bir sonlu zaman cevap (deadbeat response) yoktur. Sonlu zaman kontrolde, skaler kontrol genliği u(k) sınırlandırılmamış ise, herhangi bir sıfır olmayan hata vektörü en fazla **n-örnekleme** periyodunda sıfır yapılır. Eğer örnekleme periyodu T çok küçük seçilir ise, yerleşme zamanı çok küçük olur, buda kontrol işaret genliğinin çok aşırı derecede büyük olmasını gerektirir. Aksi takdirde, hata cevabını çok kısa sürede sıfıra getirme imkanı olmaz.

sistemin derecesi

Sonlu zaman kontrol de örnekleme periyodu, tek tasarım, parametresidir. Bundan dolayı, sonlu-zaman cevap isteniyor ise, sistemin normal çalışma koşullarında çok aşırı büyük kontrol işaret genliği gerektirmemesi için tasarım ve örnekleme periyodu çok dikkatli seçilmelidir. Fiziksel olarak kontrol işaret genliğini sınırsız büyütme imkanı yoktur. Genlik, yeteri kadar arttırıldığında doyum olayı her zaman gerçekleşir. Kontrol işaret genliğinde doyum olayı gerçekleştiği zaman, cevap artık sonlu-zaman cevap olmaz. Gerçek sonlu-zaman sistem tasarımında , tasarımcı kontrol işaret genliği ve cevap hızı arasında bir tercih yapmak zorundadır. $u \rightarrow$ kısıt olmaması ve ya doyuma gitmemesi lazım

Sonlu-zaman cevabı:

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ ile tanımlanan sistemi göz önüne alalım.

Durum geri-besleme $u(k) = -Kx(k)$ olmak üzere;

$$x(k+1) = Ax(k) + BKx(k) \Rightarrow$$
$$x(k+1) = (A-BK)x(k)$$
bu denklemin çözümü

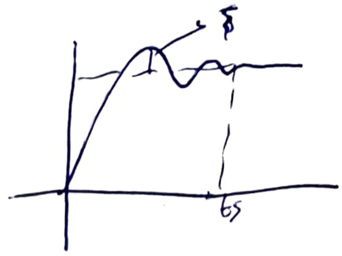
$x(k) = (A-BK)^k x(0)$ dır.

Eğer (A-BK) matrisinin özdeğerleri λ_i, $i = 1,2,...,n$ birim daire içinde iseler, sistem asimtotik olarak kararlıdır ve (A-BK) nın bütün özdeğerlerini sıfır seçerek, $\lambda_i = 0$ sonlu zaman cevap elde etmek mümkündür. Sonlu-zaman cevapta yerleşme zamanı nT den küçük veya eşittir. ***Sonlu zaman kontrolde olması istenen karakteristik denklem***, $\boxed{F(z) = z^n}$ dir.

ÖRNEK: tek tasarım kriteri örnekleme zamanının seçimi "T=?" $T\downarrow$ $u\uparrow$

$\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = u(t)$, diferansiyel denklemi ile verilen sistemin

i) Ayrık-zaman durum denklemlerini matris formunda yazınız.
ii) Sonlu-zaman(deadbeat) kontrol için durum geri-besleme vektörü ''f'' matrisini bulunuz.



ω_n

$s_{1,2} = -\xi\omega_n \mp j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

$z_{1,2} \triangleq e^{sT}$

damoz dea (kutuplar) $z=0$'da kutuplar

$\hat{F}(z) = (z-z_1)(z-z_2) = 0$

$\hat{F}(z) = z^2$

CEVAP:

Sürekli zaman durum denklemlerinin elde edilmesi;

$$y(t) = x_1(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{dy(t)}{dt}}_{x_2(t)}\right) = u(t) \Rightarrow \frac{dx_2(t)}{dt} = u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B} u(t)$$

$$y(t) = \Big[\underbrace{1 \quad 0}_{C}\Big] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

i) Ayrık-zaman durum denklemi;

Ayrık zaman durum denklemi çözümü

$$x\left[(k+1)T\right] = \phi(T)x(kT) + \int_0^{kT} \phi(\lambda)Bu(\lambda)d\lambda$$

Vektör-matris formunda

$$x\left[(k+1)T\right] = \phi x(kT) + Bu(kT)$$

$$\phi = \phi(T) = \ell^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]\Big|_{t=T} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \left[\int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} d\lambda\right] B \quad \text{veya} \quad b = \int_0^T \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} d\lambda$$

$$=\begin{bmatrix} \lambda & \frac{\lambda^2}{2} \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ise} \quad b=\int_0^T \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} d\lambda = \begin{bmatrix} \frac{\lambda^2}{2} \\ \lambda \end{bmatrix}_0^T = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow b = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

Diğer yol ile çözüm….

$\phi(T)=\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olarak hesaplanmıştı....

$$\gamma(T)=\phi(T)\left[\int_0^T e^{-A\tau} d\tau\right] B = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\int_0^T \begin{bmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} d\tau\right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} \tau & -\frac{\tau^2}{2} \\ 0 & \tau \end{bmatrix}_0^T\right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & -\frac{T^2}{2} \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} T^2-\frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} u(kT)$$

Ayrık zaman karakteristik denklemini yazarsak;

$$p(z) = |zI - \phi| = \begin{vmatrix} z-1 & T \\ 0 & z-1 \end{vmatrix} = z^2 - 2z + 1 = z^2 + a_1 z + a_2$$ ***açık çevrim karakteristik denklem***

ve denklemden, $a_1 = -2$ $a_2 = 1$ olduğu görülür.

$$\hat{p}(z) = z^2 = z^2 + \hat{a}_1 z + \hat{a}_2$$ ***istenen karakteristik denklem.*** Katsayılar $\hat{a}_1 = \hat{a}_2 = 0$ dır.

$$w = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } s = [b \quad \phi b] = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & \frac{3T^2}{2} \\ T & T \end{bmatrix} \quad w^T s^T = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & T \\ \frac{T^2}{2} & -T \end{bmatrix}$$

$$(\hat{a} - a) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$f = w^T s^T (\hat{a} - a) = \begin{bmatrix} \frac{1}{T^2} & \frac{1}{T^2} \\ \frac{1}{2T} & \frac{-1}{2T} \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ durum geri-besleme matrisi, $f = \begin{bmatrix} \frac{1}{T^2} \\ \frac{3}{2T} \end{bmatrix}$ olarak elde edilir.

Kapalı çevrim sistem matrisi;

$$\phi - bf^T = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{T^2} & \frac{3}{2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{T}{4} \\ \frac{-1}{T} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

Kapalı çevrim karakteristik denklemi;

$$\hat{p}(z) = |zI - \phi + bf^T| = \begin{vmatrix} z - \frac{1}{2} & -\frac{T}{4} \\ \frac{1}{T} & z + \frac{1}{2} \end{vmatrix} = z^2$$

Kontrol işareti u(kT) yi inceleyelim;

$$u(kT) = -f^T x(kT) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{T^2} & \frac{3}{2}T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

K=0;

$$u(0)=-\begin{bmatrix}\frac{1}{T^2} & \frac{3}{2}T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{1}{T^2} & \frac{3}{2}T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow u(0)=-\frac{1}{T}+\frac{3T}{2}$$

K=1;

$$u(1)=-f^T x(T)$$

$$=-f^T\left[\phi-bf^T\right]x(0)$$

$$=-\begin{bmatrix}\frac{1}{T^2} & \frac{3}{2}T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{T}{4}\\ \frac{-1}{T} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$u(1)=\frac{1}{T^2}x_1(0)+\frac{1}{2T}x_2(0)$$

NOT

$$x\left[(k+1)T\right]=\left[\phi-bf^T\right]x(kT)$$

$$k=0$$

$$x(T)=\left[\phi-bf^T\right]x(0)$$

$$k=1;$$

$$x(2T)=\left[\phi-bf^T\right]x(T)$$

$$x(2T)=\left[\phi-bf^T\right]\left[\phi-bf^T\right]x(0)$$

$$x(2T)=\left[\phi-bf^T\right]^2 x(0$$

...

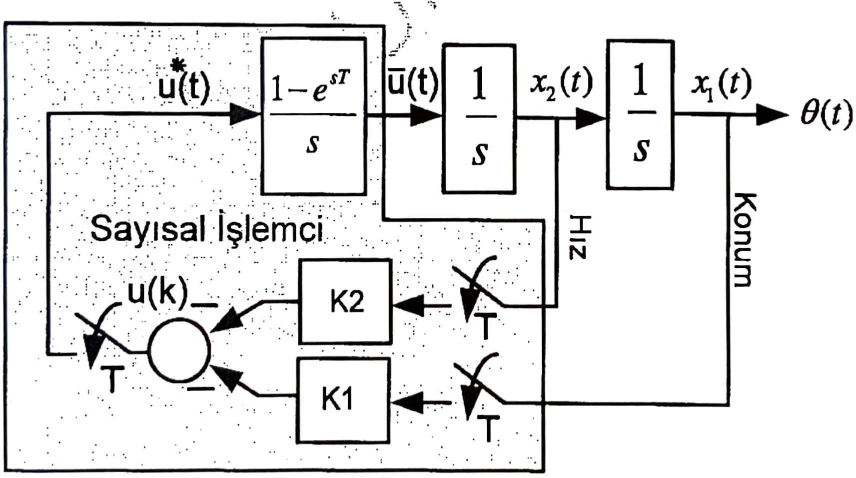
$$x(nT)=\left[\phi-bf^T\right]^n x(0)$$

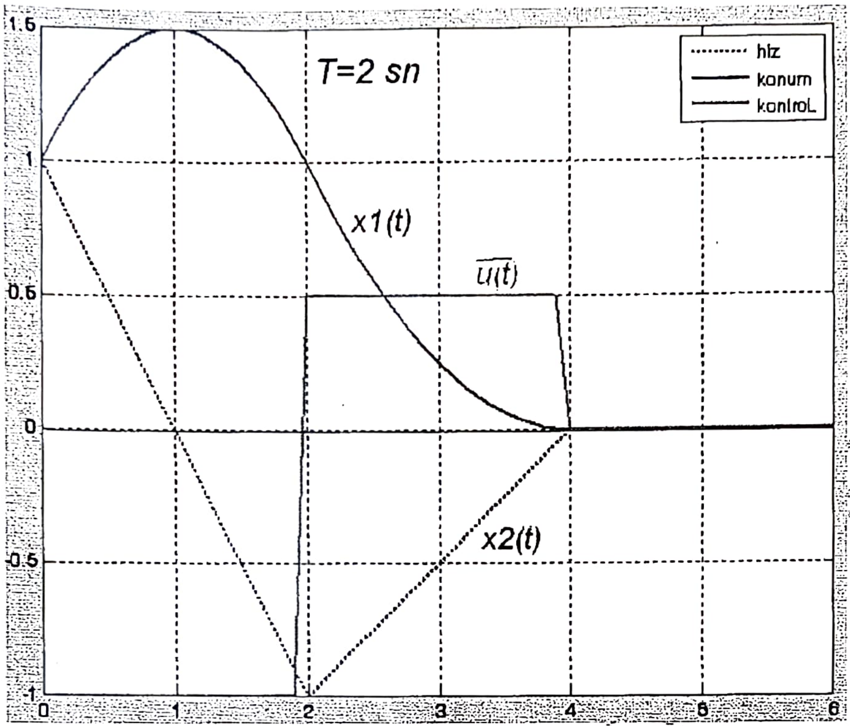
K=2;

$$u(2T)=-f^T x(2T)$$

$$=-f^T\left[\phi-bf^T\right]^2 x(0)$$

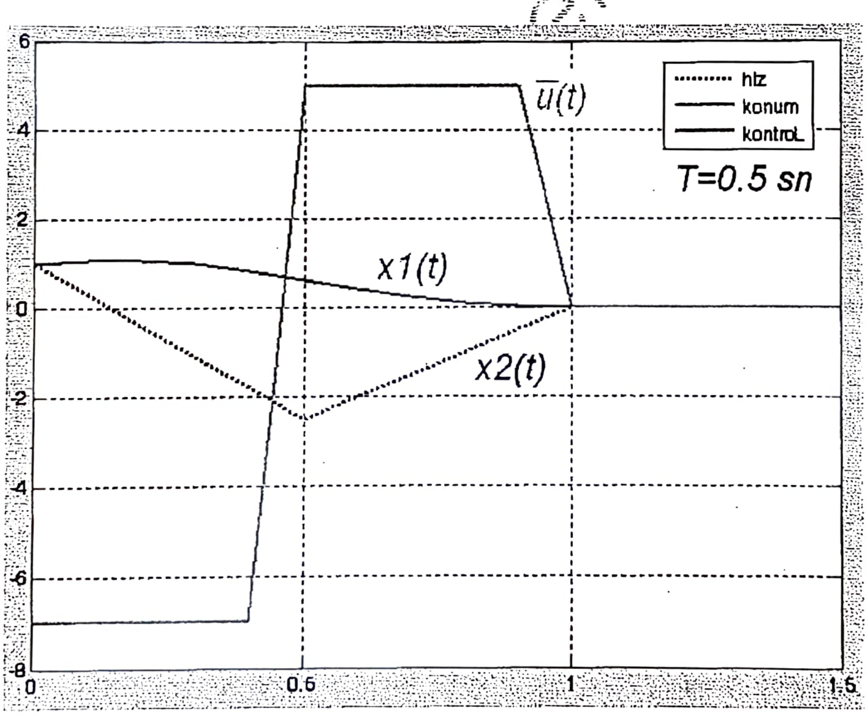
$$u(2T)=0$$



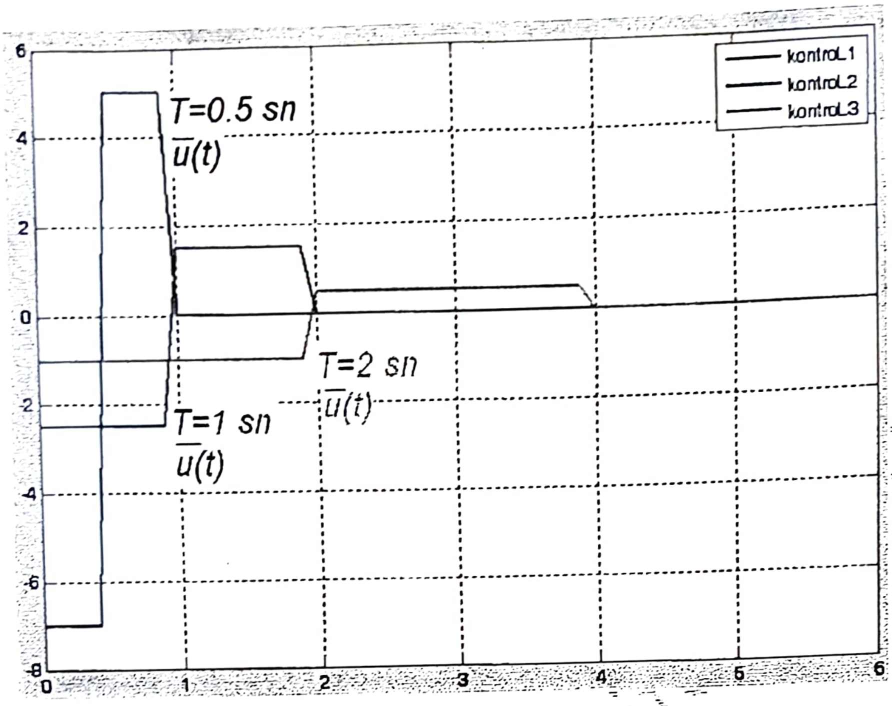


T=2 sn
hız
konum
kontroL
x1(t)
u(t)
x2(t)

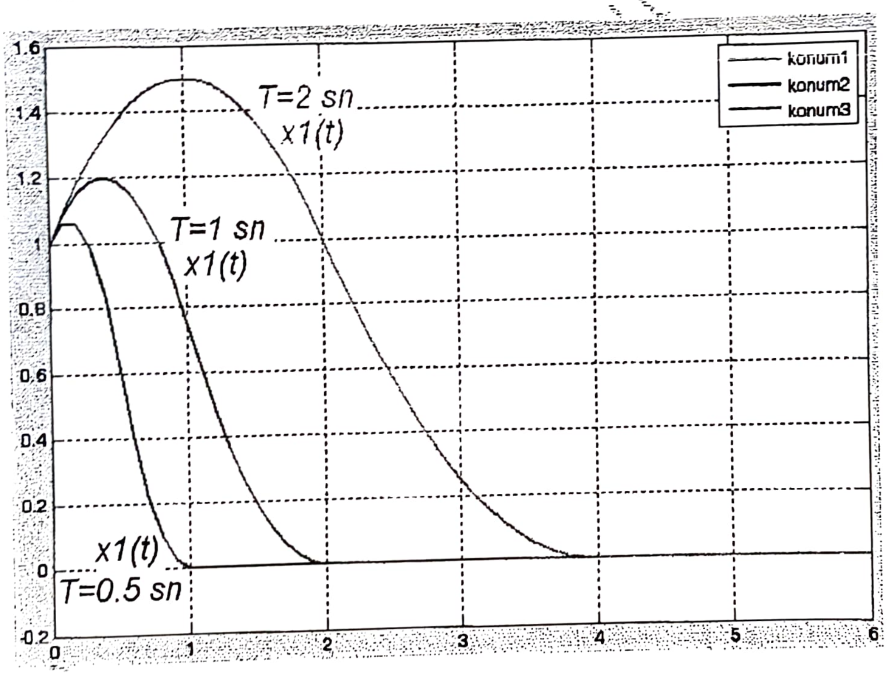
T↓ u↑



hız
konum
kontroL
u(t)
T=0.5 sn
x1(t)
x2(t)

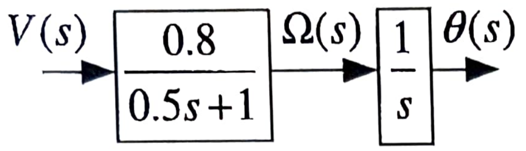

kontroL1
kontroL2
kontroL3
T=0.5 sn
ū(t)
T=2 sn
ū(t)
T=1 sn
ū(t)
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
0
1
2
3
4
5
6

T↓ u↑


konum1
konum2
konum3
T=2 sn
x1(t)
T=1 sn
x1(t)
x1(t)
T=0.5 sn
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
1
2
3
4
5
6

ÖRNEK SORULAR

S-1



Açık-çevrim transfer fonksiyonu yanda verilen sistemde %2 kiterine göre yerleşme zamanı $t_s = 2.5\,sn$ ve $\zeta = 0.707$ olması istenmektedir. (Örnekleme zamanı) T=0.05 sn alınacaktır.

$$\frac{\theta(z)}{V(z)} = \frac{0.0004918z + 0.0004836}{z^2 - 1.951z + 0.9512}$$

olarak verilmiştir.

a) İstenen cevabı sağlayacak olan kontrol-kutuplarını (baskın-kutuplar) sürekli zaman ve ayrık zaman hesaplayınız, yerlerini S ve Z-kompleks düzlemlerinde gösteriniz.

b) Ayrık-zaman PD kontrolör katsayılarını,

i-Parametrik denklemleri kullanarak elde ediniz.
ii-Karakteristik denklem metodu ile elde ediniz.
iii-Ayrık-zaman kapalı-çevrim kontrol blok diyagramının çiziniz.
vi-PD- Kontrolörü sembolik dilde programlayınız.

C-1 a) %2 kriterine göre yerleşme zamanı;

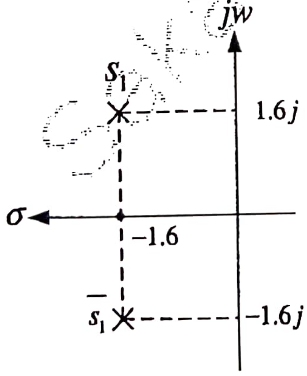
$$t_s = \frac{4}{\xi w_n} = 2.5 \Rightarrow w_n = \frac{4}{\xi t_s} = \frac{4}{0.707 * 2.5} \rightarrow w_n = 2.26$$

$$s_{1,2} = -\zeta w_n \pm j w_n \sqrt{1-\zeta^2} \qquad \Rightarrow \qquad s_{1,2} = -0.707 * 2.26 \pm j2.26\sqrt{1-0.707^2}$$

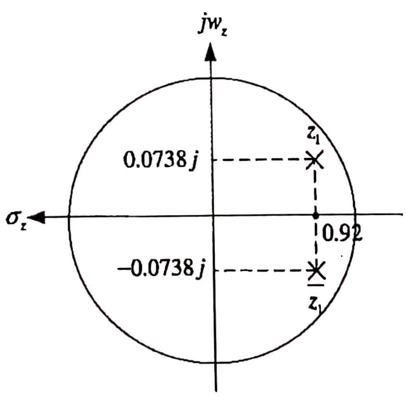
$$s_{1,2} = -0.707 * 2.26 \pm j2.26\sqrt{1-0.707^2} \qquad s_{1,2} = -1.6 \pm 1.6j$$ <u>*sürekli-zaman kontrol-kutuplar*</u>

Örnekleme zamanı , $T = 0.05\,sn$ için ,

$$z = e^{sT} \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = e^{(-1.6\pm1.6j)0.05} \qquad z_{1,2} = 0.92 \pm 0.0738j$$ <u>*ayrık-zaman baskın kutuplar*</u>



S-düzleminde kontrol kutupları



Z-düzleminde kontrol kutupları

b) i) PD kontrolör için parametrik denklemler, $K_I = 0$ için ,

$$K_d = \frac{|z_1|}{\sin\beta}\frac{\sin\psi}{|G_p(z_1)|} \quad K_p = -\frac{\cos\psi}{|G_p(z_1)|} + \frac{-|z_1|\sin\psi + \cos\beta\sin\psi}{|G_p(z_1)|\sin\beta} \text{ dir.}$$

$$G_p(z) = \frac{\theta(z)}{V(z)} = \frac{0.0004918z + 0.0004836}{z^2 - 1.951z + 0.9512} \text{ olarak verilmiştir.}$$

Sırası ile $|z_1|$, β ve $|G_p(z_1)|$, ψ değerleri hesaplanmalıdır.

$$z_1 = 0.92 + 0.0738j \Rightarrow z_1 = \sqrt{0.92^2 + 0.0738^2}\tan^{-1}(\frac{0.0738}{0.92}) \text{ dir.}$$

$z_1 = |z_1|\angle\beta = 0.9231\angle 0.08$ ise $|z_1| = 0.9231$ ve $\beta = 0.08\ rad$ olarak elde edilir.

$$G_p(z_1) = \frac{0.0004918*(0.920.92 + 0.0738j) + 0.0004836}{(0.920.92 + 0.0738j)^2 - 1.951*(0.920.92 + 0.0738j) + 0.9512} = -0.3686 + 0.2358j$$

$$G_p(z_1) = -0.3686 + 0.2358j$$

$$G_p(z_1) = |G_p(z_1)|\angle\psi \rightarrow G_p(z_1) = \sqrt{0.3686^2 + 0.2358^2}\tan^{-1}(\frac{0.2358}{0.3686})$$

$|G_p(z_1)| = 0.4376$ ve $\psi = 2.5725\ rad$ olarak elde edilir.

Bulunan değerler,sırası ile K_p ve K_d denklemlerinde yerlerine koyulur ise,

$$K_d = \frac{|z_1|}{\sin\beta}\frac{\sin\psi}{|G_p(z_1)|} = \frac{0.9231*\sin(2.5725)}{\sin(0.08)*0.4376} \rightarrow K_d = 14.21$$

$$K_p = -\frac{\cos\psi}{|G_p(z_1)|} + \frac{-|z_1|\sin\psi + \cos\beta\sin\psi}{|G_p(z_1)|\sin\beta}$$
$$= -\frac{\cos(2.5725)}{0.4376} + \frac{-0.9231*\sin(2.5725) + \cos(0.08)*\sin(2.5725)}{0.4376*\sin(0.08)}$$
$$K_p = 3.0602$$
$K_d = 14.21$ elde edilir.

ii-Karaktereistlik denklem metodu : PID kontrol katsayıları parametrik denklemler kullanılmadan karakteristik denklem yardımı ile elde edilir. $z_1 = 0.92 + 0.0738j$ kontrol kutupları olmak üzere

Karakteristik denklem, $F(z) = 1 + G_c(z)G_p(z) = 0$

PD Kontrolör Transfer fonksiyonu, $G_c(z) = K_p + K_d(\frac{z-1}{z})$ dir.

$G_p(z_1) = \frac{0.0004918z_1 + 0.0004836}{z_1^2 - 1.951z_1 + 0.9512}$ ise $G_p(z_1) = -0.3686 + 0.2358j$ yukarıda hesaplanmıştı.

$1 + \left\{K_p + K_d(\frac{z_1 - 1}{z_1})\right\} G_p(z_1) = 0$ ise z_1 ve $G_p(z_1)$ yerine koyulur ise,

$1 + \left\{K_p + K_d(\frac{0.920 + 0.0738j - 1}{0.920 + 0.0738j})\right\}\{-0.3686 + 0.2358j\} = 0$ düzenlenir,

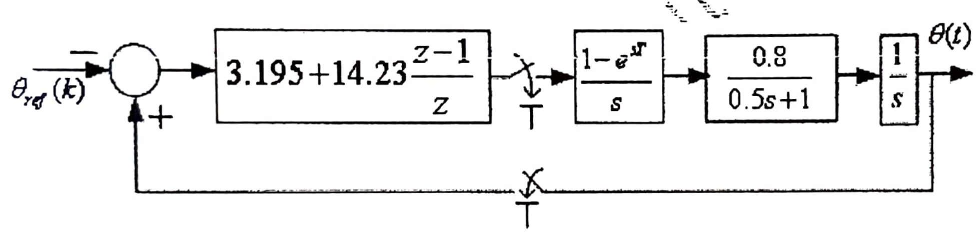
$$K_p + K_d(-0.08 + 0.0866j) = \frac{-1}{-0.3686 + 0.2358j}$$

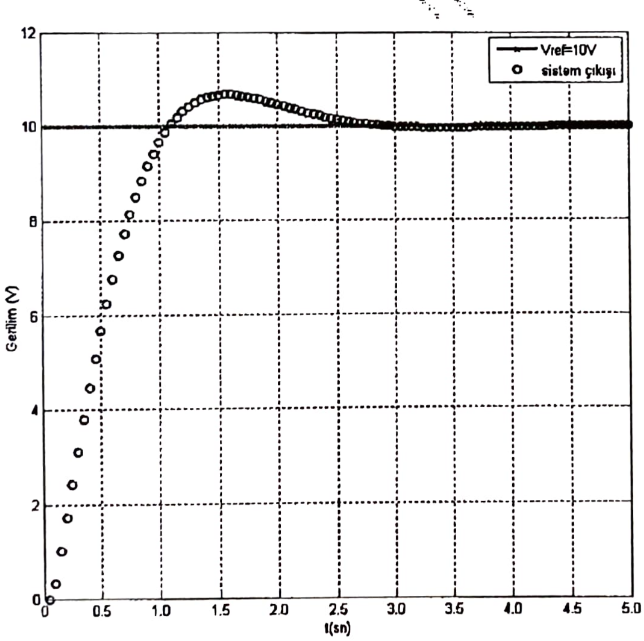
$$K_p - 0.08K_d + 0.0866K_d j = 1.9251 + 1.2315j$$

$$0.0866K_d = 1.2325 \quad K_d = 14.23$$

$K_p - 0.08K_d = 1.9251 \quad K_p = 3.195$ olarak elde edilir.

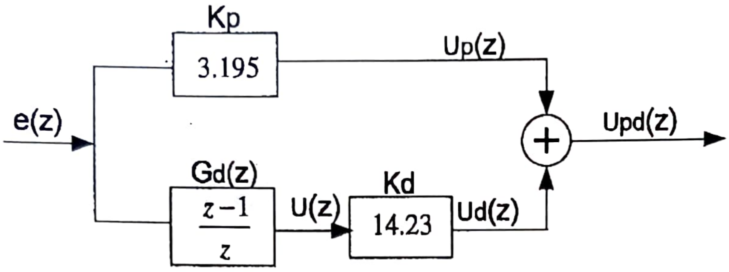
iii-Ayrık-zaman kapalı-çevrim kontrol blok diyagram aşağıda verilmiştir.





$\theta_{ref}(t) = 10u(t)$ için çıkış $\theta(t)$ 'nin zamana göre değişimi.

iv- Paralel programlama yöntemi ile PD kontrolör sembolik dilde tasarımı,



Yukarıda verilen ayrık PD kontrolör simgesel dilde paralel programı aşağıda verilmiştir.

Up(z): $U_P(z)=3.195E(z)$ Oransal Kontrol

Ud(z): $U_d(z)=U(z)K_d$ =>Türevsel Kontrol

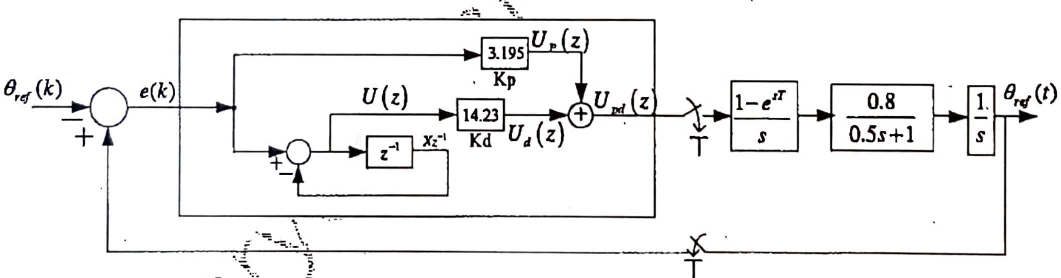
$$G_d(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=G_d(z)\frac{z^{-n}}{z^{-n}}\frac{X}{X} \Rightarrow \frac{U(z)}{E(z)}=\frac{z-1}{z}\frac{z^{-1}}{z^{-1}}\frac{X}{X}=\frac{X-Xz^{-1}}{X}$$

$E(z)=X$

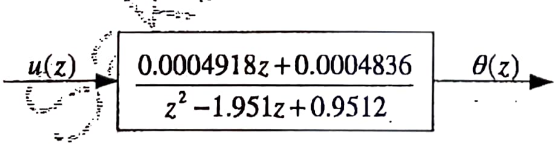
$U(z)=X-Xz^{-1}$

Simgesel dil

```
10 Xz=0;
20 Up=3.195*E
30 U=E-Xz
40 Xz=U
50 Ud=14.23*U
60 Upd=Up+Ud
70 bekle T
80 goto 20
```



S-2

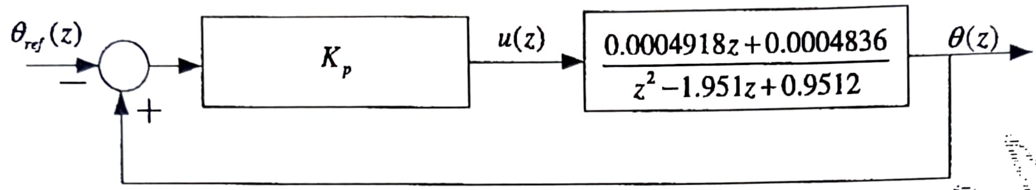


Ayrık-zaman açık çevrim transfer fonksiyonu verilen sistem PD kontrolör ile denetlenmek istenmektedir. T=0.025sn olmak üzere, ***Nichols-Ziegler Limit kararlılık yöntemi***ni kullanarak,

i- PD kontrolör katsayılarını hesaplayınız.

ii- Kapalı çevrim kontrol blok diyagramını çiziniz

C-2.i *PD kontrolör* $= K_P + K_D \dfrac{z-1}{z}$ ***Nichols-Ziegler Limit kararlılık yöntemi****nde* **Kd= 0** ve **Ki=0** alınarak aşağıda verilen kapalı çevrim kontrol sistemine ait blok diyagram kullanılarak kontrol sistemine ait karakteristik denklem elde edilir.



$F(z) = 1 + G_c(z)G_p(z) = 0$ =>Karakteristik denklem olmak üzere

$F(z) = 1 + K_P \dfrac{0.0004918z + 0.0004836}{z^2 - 1.951z + 0.9512} = 0$ =>yazılabilir

$F(z) = z^2 - 1.951z + 0.9512 + 0.0004916zK_P + 0.0004836K_P = 0$, düzenlenirse

$F(z) = z^2 + z(0.0004916K_P - 1.951) + 0.9512 + 0.0004836K_P = 0$

Sistem çıkış cevabını osilasyona getirecek olan sınır kazanç **Ks** Jury kararlılık kriteri ile elde edilir. Bu amaç için sırası ile **gerek** ve **yeter** koşullara sırası ile bakılır.

<u>GEREKLİ KOŞUL</u>

i- **F(1)>0için**

$F(1) = 1 + (0.0004916K_P - 1.951) + 0.9512 + 0.0004836K_P > 0$ =>

$F(1) = 0.0002 + 0.0009752K_P > 0$ => $K_P > -0.205$

ii- $(-1)^n F(-1) > 0$ **için**

$(-1)^2 F(-1) = 1 - (0.0004916K_P - 1.951) + 0.9512 + 0.0004836K_P > 0$ =>

$(-1)^2 F(-1) = 3.90220 - 0.000008K_P > 0$ => $K_P < 487775$

<u>YETERLİ KOŞUL</u>

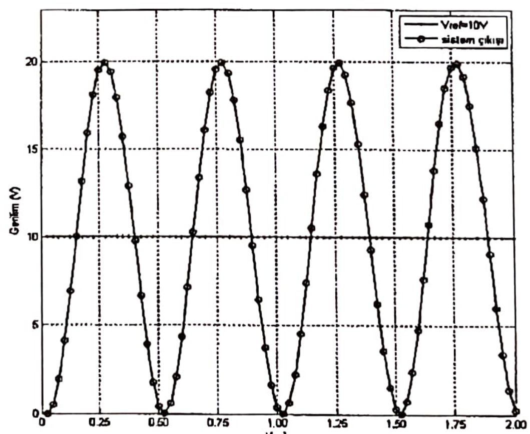
$|a_n| > |a_0|$ için $1 > 0.9512 + 0.0004836K_P$

=> $100.90984 > K_P$ =>

0<Kp<100.90984 için sınır kazanç

$\boxed{K_S = 100.90984}$ dır.

$K_S = 100.90984$ için kontrol sistem çıkışı osilasyon yapar ve yanda matlab simülasyonugerçekleştirilmiş kontrol sistemine ait cevap eğrisi verilmiştir.



Sınır kazanç değeri, Ks=100.90984, F(z) karakteristik denkleminde yerine konursa,

$F(z) = z^2 + z(0.0004916*100.90984 - 1.951) + 0.9512 + 0.0004836*100.90984 = 0$ =>

$F(z) = z^2 + z(0.0496 - 1.951) + 0.9512 + 0.0488 = 0$ =>

$F(z) = z^2 - 1.9014z + 1 = 0$ => $F(z)$ karakteristlik denklemin kökleri,

$z_{1,2} = 0.95507 \mp j0.3102$ elde edilir

$\omega_d T = 0.3102$ => $\omega_d = \dfrac{0.3102}{T} = \dfrac{0.3102}{0.025} = 12.408$ rad/sn

$\omega_d = \dfrac{2\pi}{T_\omega}$ => $T_\omega = \dfrac{2\pi}{\omega_d} = \dfrac{2\pi}{12.408} = 0.50638$ s

Limit kararlılık yöntemine gore **Kp**, **Ti** ve **Td** kontrolör parameter tablosu

kontrolör	Kp	Ti	Td
P	0.5Ks	-	-
PI	0.45Ks	$T_\omega/1.2$	-
PID	0.6Ks	$T_\omega/2$	$T_\omega/8$

Kp=0.5*Ks=0.5*100.90984 ise

Kp= 50.455

Kd=Kp*Td/T

=Kp*Tw/(8*T)

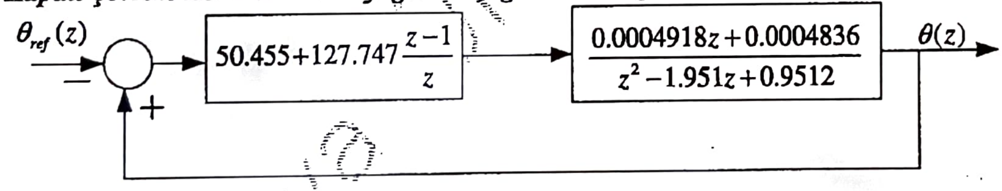
=50.455*0.50638/(8.0.025)

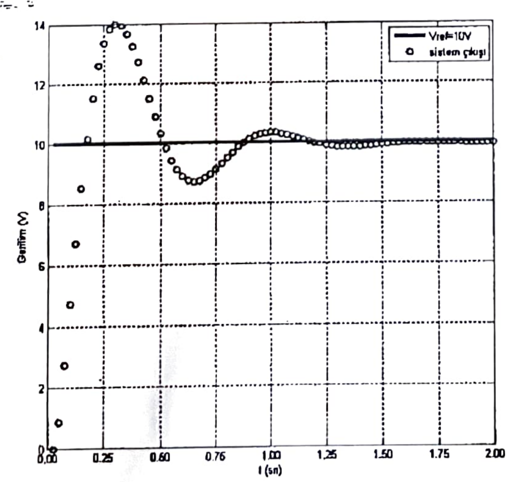
Kd=127.747

Tablodan yararlanılarak PD kontrolör parametreleri, hesaplanır.

C-2.ii

Kapalı-çevrim Kontrol Blok diyagram aşağıda verilmiştir.





$\theta_{ref}(t) = 10u(t)$için sistem çıkışı $\theta(t)$ zamana göre değişimi.

S-3 $\dfrac{Y(z)}{U(z)}=\dfrac{z+0.9833}{z^2-1.951z+0.9512}$ Transcr fonksiyonu için ayrık zaman durum ve çıkış denklemlerini

i-Vektör matris formunda yazınız.
ii-Sistem matrisinin diagonal (köşegen) hale getiriniz.

C-3.i1.Yöntem : Kontrol edilebilir (Faz-değişken) kanonik Form

$$\frac{y(z)}{u(z)}=\frac{z+0.9833}{z^2-1.951z+0.9512}\frac{x(z)}{x(z)}$$

$$y(z)=zx(z)+0.9833x(z)$$

$$u(z)=z^2x(z)-1.951zx(z)+0.9512x(z)$$

$$x(z)\rightarrow x(k)=x_1(k)$$

$$zx(z)\rightarrow x(k+1)=x_2(k)=x_1(k+1)$$

$$z^2x(z)\rightarrow x_2(k+1)$$

$$z^2x(z)=u(z)+1.951zx(z)-0.9512x(z) \Rightarrow$$

$$x_2(k+1)=u(k)+1.951x_2(k)-0.9512x_1(k)$$

$$y(z)=zx(z)+0.9833x(z) \Rightarrow$$

$$y(k)=x_2(k)+0.9833x_1(k)$$

$$\boxed{\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.9512 & 1.951\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(k)}$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}0.9512 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}$$

2. Yöntem : Gözlenebilir Kanonik Form

$$\frac{y(z)}{u(z)}=\frac{z+0.9833}{z^2-1.951z+0.9512}\frac{z^{-2}}{z^{-2}}=\frac{z^{-1}+0.9833z^{-2}}{1-1.951z^{-1}+0.9512z^{-2}}\rightarrow$$

$$y(z)-1.951z^{-1}y(z)+0.9512z^{-2}y(z)=z^{-1}u(z)+0.9833z^{-2}u(z)\rightarrow$$

$$y(z)=+1.951z^{-1}y(z)-0.9512z^{-2}y(z)+z^{-1}u(z)+0.9833z^{-2}u(z)\rightarrow$$

$$\underbrace{y(z)=z^{-1}\left[1.951z^{-1}Y(z)+u(z)+\underbrace{z^{-1}\left(0.9833u(z)-0.9512y(z)\right)}_{x1(z)}\right]}_{x2(z)}\rightarrow$$

$$x_2(z)=z^{-1}\left(0.9833u(z)-0.9512y(z)\right)$$

$$x_2(z)=z^{-1}\left[1.951z^{-1}y(z)+u(z)+x_2(z)\right]$$

$$y(z)=x_2(z)\qquad\rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}0&-0.9512\\1&1.951\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9833\\1\end{bmatrix}u(k)\\ y(k)&=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}\end{aligned}}$$

3. Yöntem : Köşegen Kanonik Form

$$\frac{y(z)}{u(z)}=\frac{z+0.9833}{z^2-1.951z+0.9512}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-0.95}$$

$$\frac{y(z)}{u(z)}=\frac{z+0.9833}{z^2-1.951z+0.9512}=\frac{A(z-0.95)}{z^2-1.951z+0.9512}+\frac{B(z-1)}{z^2-1.951z+0.9512}\rightarrow$$

$$z+0.9833=Az-A0.95+Bz-B=z(A+B)+(-A*0.95-B)\rightarrow$$

$$1=A+B \text{ ve } 0.9833=-A*0.95-B\rightarrow$$

$$A=39.6 \text{ ve } B=-38.6\rightarrow$$

$$\frac{y(z)}{u(z)}=\frac{z+0.9833}{z^2-1.951z+0.9512}=\frac{39.6}{z-1}-\frac{38.6}{z-0.95}\rightarrow$$

$$y(z)=\frac{39.6}{z-1}u(z)-\frac{38.6}{z-0.95}u(z)\rightarrow \boxed{y(z)=39.6x_1(z)-38.6x_2(z)\rightarrow}$$

$$x_1(z)=\frac{u(z)}{z-1}\rightarrow x_1(z)z-x_1(z)=u(z)\rightarrow \boxed{x_1(k+1)=x_1(k)+u(k)}$$

$$x_2(z)=\frac{u(z)}{z-0.95}\rightarrow x_2(z)z-x_2(z)0.95=u(z)\rightarrow \boxed{x_2(k+1)=x_2(k)0.95+u(k)\rightarrow}$$

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0.95\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}39.6 & -38.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}$$

C-3.ii I. Yöntem ile elde edilen durum uzay modeline ait A system matrisini Lineer Dönüşüm İle Köşegen Hale Getirilmesi: A matrisinin öz-değerleri bulunur. Her bir öz-değer için öz-vektörler hesap edilmelidir. Öz-vektörlerden oluşan dönüşüm matrisi kullanılarak sistem matrisi köşegen forma getirilir.

$$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}\lambda & -1\\0.9512 & \lambda-1.951\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^2-1.951\lambda+0.9512=0 \Rightarrow$$

$\lambda_1=0.9555$ ve $\lambda_2=0.9955$ dir.

1. özdeğer için özvektör

$$|\lambda_1\mathbf{I}-\mathbf{A}|z_{1öz}=0 \Rightarrow \left\{\begin{bmatrix}0.9555 & 0\\0 & 0.9555\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\-0.9512 & 1.951\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}z_{11öz}\\z_{21öz}\end{bmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}0.9555 & -1\\0.9512 & -0.9955\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_{11öz}\\z_{21öz}\end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{matrix}0.9555z_{11öz}-z_{21öz}=0\\0.9512z_{11öz}-0.9955z_{21öz}=0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}0.9555z_{11öz}=z_{21öz}\\0.9555z_{11öz}=z_{21öz}\end{matrix}$$

2 denklem aynıdır. Özdeğerler lineer bağımlıdır.

$z_{11öz}=0.7230$ **seçilir ise**
$z_{21öz}=0.9555*z_{11öz}=0.9555*0.7230=0.6908$ **olur.**

2. özdeğer için özvektör

$$|\lambda_2\mathbf{I}-\mathbf{A}|z_{2öz}=0 \Rightarrow \left\{\begin{bmatrix}0.9955 & 0\\0 & 0.9955\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\-0.9512 & 1.951\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}z_{21öz}\\z_{22öz}\end{bmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0.9955 & -1 \\ 0.9512 & -0.9955 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_{21öz} \\ z_{22öz} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} 0.9955z_{21öz} - z_{22öz} = 0 \\ 0.9512z_{21öz} - 0.9955z_{22öz} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0.9955z_{21öz} = z_{22öz} \\ 0.9955z_{21öz} = z_{22öz} \end{matrix}$$

2. denklem de aynıdır. Özdeğerler lineer bağımlıdır.

$z_{21öz} = 0.7087$ **seçilir ise**

$z_{22öz} = 0.9955 * z_{21öz} = 0.9955 * 0.7087 = 0.7055$ **olur.**

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} z_{1öz} & z_{2öz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7230 & 0.7087 \\ 0.6908 & 0.7055 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 34.4037 & -34.5597 \\ -33.6868 & 35.2570 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{bmatrix} 34.4037 & -34.5597 \\ -33.6868 & 35.2570 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.9512 & 1.951 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.7230 & 0.7087 \\ 0.6908 & 0.7055 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9555 & 0 \\ 0 & 0.9955 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_P = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.7230 & 0.7087 \\ 0.6908 & 0.7055 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9555 & 0 \\ 0 & 0.9955 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -34.5597 \\ 35.2570 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_P = \mathbf{CP} = \begin{bmatrix} 0.9512 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 34.4037 & -34.5597 \\ -33.6868 & 35.2570 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4017 & 1.4024 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}'(k+1) = \mathbf{A}_P x'(k) + \mathbf{B}_P u_K$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_P \mathbf{x}'(k)$$

$$\mathbf{x}'(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9555 & 0 \\ 0 & 0.9955 \end{bmatrix} x'(k) + \begin{bmatrix} -34.5597 \\ 35.2570 \end{bmatrix} u_K$$
$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} 1.4017 & 1.4024 \end{bmatrix}\mathbf{x}'(k)$$

Yorum:1- Durum değişkenlerinin kontrol edilebilirlik testi,

1.1- A_{nxn} olmak üzere, $rank\left(\overbrace{\left[\underbrace{B \quad AB \quad \ldots \quad A^{N-1}B}_{V}\right]}^{KontrolEdilebilirlikMatrisi}\right) = n$ ise ayrık sistemin tüm durumları kontrol edilebilir. Yukarıdaki sistemde n=2 olduğuna göre, rank(V) =2 olması durumunda bu sistemin tüm durumları kontrol edilebilir.

1.2-

$$rank(V) = (\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}) =$$

$$rank\left(\begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.9512 & 1.951 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 1 & \end{bmatrix}\right) = rank\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1.951 \end{bmatrix}\right) = 2$$

Tüm durumlar kontrol edilebilir.

1.3- $rank(V) \neq n$ çıkması durumunda sistem matrisi köşegen hale getirilerek $\mathbf{B}_p$ matrisinin değeri sıfır olan satır elemanı bize ilgili satırdaki durum değişkeninin kontrol edilemediğini gösterir.

Sistem matrisi A, köşegen form A_p ye getirildikten sonra B_p kontrol işaret giriş matrisindeki tüm satırlar sıfırdan farklı olduğundan tüm durumlar kontrol edilebilir.

$$\mathbf{x}'(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9555 & 0 \\ 0 & 0.9955 \end{bmatrix} x'(k) + \begin{bmatrix} -34.5597 \\ 35.2570 \end{bmatrix} u_K$$

B_p matrisinin sıfır katsayılı satırı olsa idi, tüm durumları kontrol edilemez. Ancak sıfırdan farklı katsayılı durum değişkenleri kontrol edilebilir, ilgili satır katsayısı sıfır olan durum değişkenleri ise kontrol edilemez.

2- Durum değişkenlerinin gözlenebilirlik testi

2.1- A_{nxn} olmak üzere, $rank \underbrace{\begin{bmatrix} \overset{\text{GözlemlenebilirlikMatrisi}}{C} \\ CA \\ \ldots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix}}_{O} = n$ ise ayrık sistemin tüm durumları gözlenebilir.

Yukarıdaki sistemde n=2 olduğuna göre, $rank(O) = 2$ olması durumunda bu sistemin tüm durumları gözlenebilir.

$$rank[O] = rank\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$$

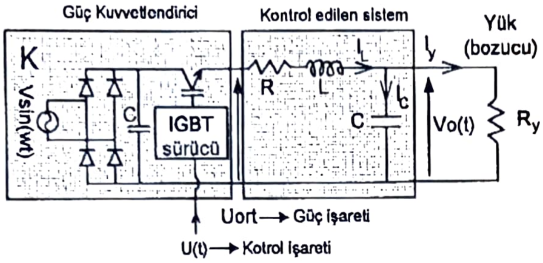
$$= rank\begin{bmatrix} 0.9512 & 1 \\ [0.9512 \;\; 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.9512 & 1.951 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 0.9512 & 1 \\ -0.9512 & 1.8558 \end{bmatrix} = 2$$

Sistemin tüm durumları gözlenebilir.

$rank(O) \neq n$ çıkması durumunda sistem matrisi köşegen hale getirilerek $\mathbf{C}_p$ vektörüne bakılır. Değeri sıfır olan sütun elemanı bize ilgili sütundaki durum değişkenin gözlenemediğini gösterir.

Yukarıdaki örnekte, $\mathbf{y}(k) = [1.4017 \quad 1.4024]\mathbf{x}'(k)$ elde edilmiştir. C_p matrisinin tüm sütunları sıfırdan farklıdır. Çıkış işareti $\mathbf{y}(k)$ ya tüm durumların katkısı vardır. Bundan dolayı çıkış ölçülerek durumlara ait ilk değerler hesaplanabilir. C_p matrisinde sıfır katsayılı eleman olsa idi, o sütün elemanına karşılık gelen durum değişkeni gözlenemezdi. Çünkü çıkışa katkısı olmaz. Dolayısı ile $\mathbf{y}(k)$ ölçülerek o durum değişkenine ait ilk durum hesaplanamaz.

S-4



Şekilde verilen düzenekte, Çıkış gerilimi $V_o(t)$ 'nin referans işaret $V_r(t)$ 'yi takip etmesi istenmektedir. $x_1(t) = I_L(t)$, $x_2(t) = V_o(t)$ durum değişkenleri ve $I_y(t)$ yük akımı ve $K = 1$ olmak üzere,

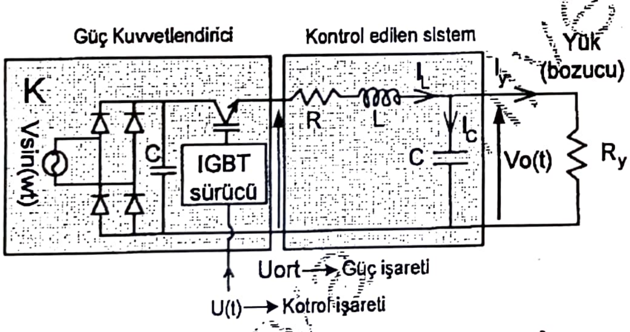
a) Kontrol edilen sisteme ait dinamik denklemleri yazınız ve açık çevrim kontrol blok diyagramını çiziniz.

b) $x_3(k) = V_{\text{int}}(k)$ integral çıkış durum değişkeni olmak üzere, Kontrol işareti,

$$u(k) = -[K_i \quad K_v \quad K_{\text{int}}]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$ dir. Ayrık-zaman **dinamik** durum geri besleme kontrol blok diyagramını çiziniz.

c) $V_o(t)$ çıkış geriliminin sayısal PID Kontrol kuralı için Ayrık-zaman kapalı-çevrim kontrol blok diyagramını çiziniz.

Çözüm-4:



t-domeni dinamik denklemler.

1- $Uort(t) = Ri_L(t) + L\dfrac{di_L(t)}{dt} + V_o(t)$

2- $i_L(t) = i_c(t) + i_Y(t)$

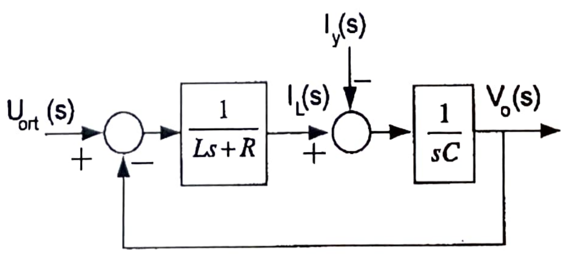
3- $V_o(t) = \dfrac{1}{C}\int i_c(t)\,dt$

$$I_L(s) = \frac{Uort(s) - V_o(s)}{Ls + R}$$

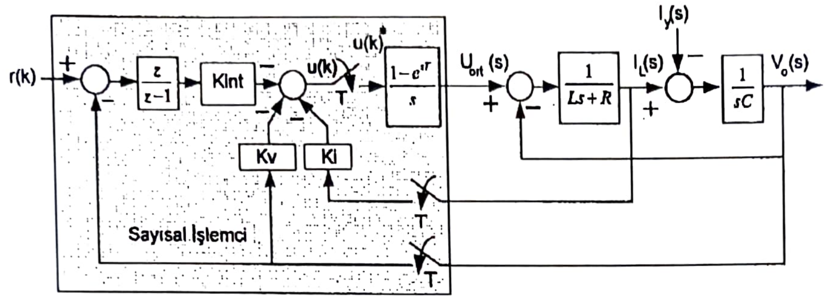
$$I_c(s) = I_L(s) - I_Y(s)$$

$$V_o(s) = \frac{I_c(s)}{sC}$$

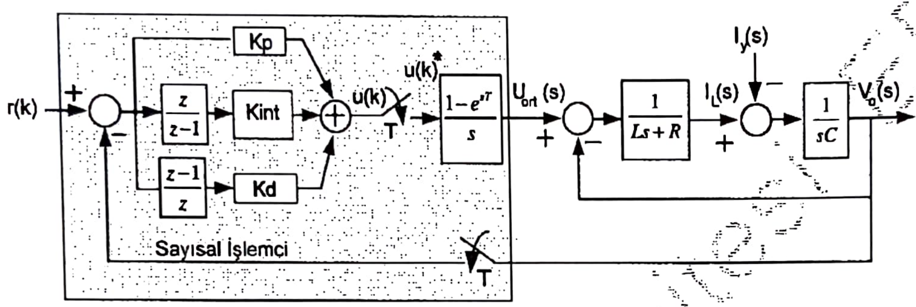
Açık-çevrim transfer fonksiyonu:



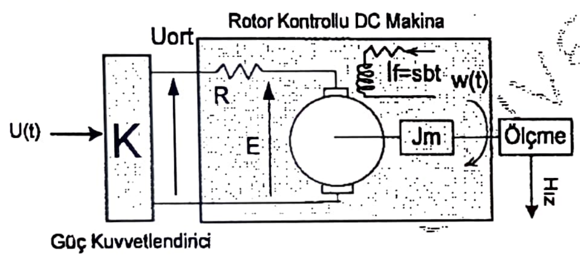
b) $u(k) = -[K_i \quad K_v \quad K_{\text{int}}]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$ kontroL kuralı için dinamik durum geribesleme.



c) PID kontrol kurallı Kapalı çevrim:



S-5



$R = 5\ \Omega$, $L = 0\ mH$

$K_b = 0.1\ V/rad/sn$

$K_i = 0.1\ Nm/A$

$J_m = 0.02\ kgm^2$

$B_m = 0 \quad K = 1\ V/V$

a) Yukarıda verilen DC makineye ait dinamik denklemleri yazınız. Açık-çevrim kontrol blok diyagramını çiziniz.

b) DC makineye ait durum denklemleri $x(k+1) = 0.9048x_1(k) + 0.9516u(k)$ ve $y(k) = x_1(k)$ olarak verilmiştir. $u(k) = -K_v x(k) + Nr(k)$ kontrol kuralı ile **sonlu zaman kontrol (** $\alpha(z) = z^n$ **)** yapılmak istenmektedir. Basamak giriş için sürekli hal hatası $e_{ss} = 0$ olması için, K_v ve N hesaplayınız ve kapalı çevrim kontrol blok diyagramını çizinız.

Çözüm:5 Önce sisteme ait dinamik denklemler yazılır.

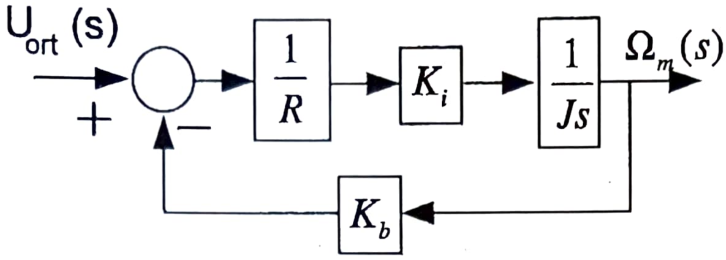
t-domeninde

$$u_{ort}(t) = Ri(t) + E(t)$$
$$T_e(t) = K_i i(t)$$
$$E(t) = K_b w(t)$$
$$T_m(t) = J_m \frac{dw_m(t)}{dt} + T_y(t)$$
$$T_m(t) = T_e(t)$$

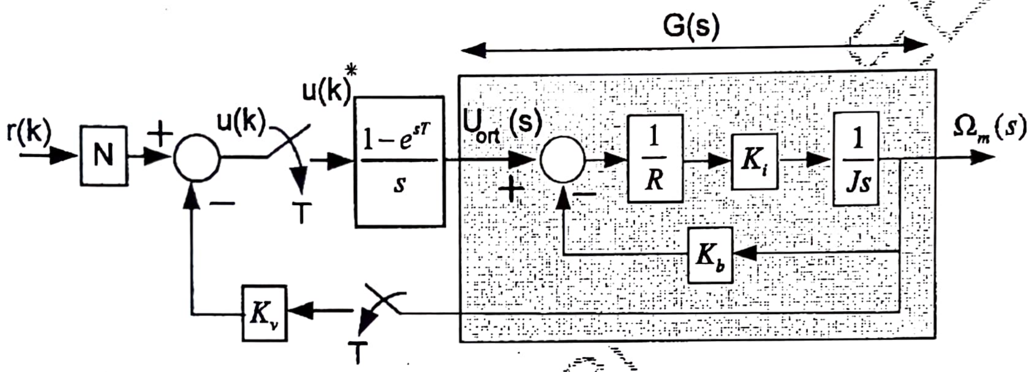
s-domeninde

$$I(s) = \frac{U_{ort}(s) - E(s)}{R}$$
$$T_e(s) = K_i I(s)$$
$$\Omega_m(s) = \frac{T_e(s) - T_y(s)}{J_m s}$$
$$E(s) = K_b \Omega_m(s)$$
$$T_m(s) = T_e(s)$$

Açık-Çevrim kontrol blok diyagramı:



Kapalı çevrim Kontrol blok diyagramı:



$$G(s)=\frac{\dfrac{K_i}{RJs}}{1+\dfrac{K_iK_b}{RJs}}=\frac{\dfrac{1}{K_b}}{\dfrac{RJs}{K_iK_b}s+1}$$ ***ise parametre değerleri yerlerine yazılır ise,***

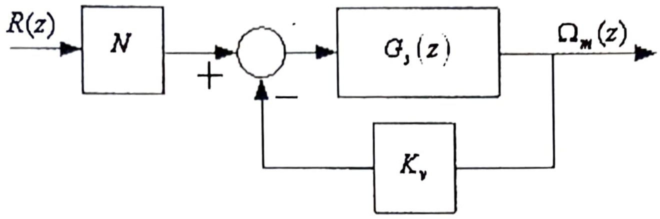
$$G(s)=\frac{10}{10s+1}$$ olarak elde edilir.

$$G_s(z)=Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{10}{10s+1}\right\}=(1-e^{-sT})\left\{s\frac{1}{s(s+0.1)}\frac{z}{z-e^{sT}}\bigg|_{s=0}+(s+0.1)\frac{1}{s(s+0.1)}\frac{z}{z-e^{sT}}\bigg|_{s=-0.1}\right\}$$

$$=(1-z^{-1})\left\{\frac{10z}{z-1}-\frac{10z}{z-e^{-0.1T}}\right\}=\frac{z-1}{z}\left\{\frac{10z}{z-1}-\frac{10z}{z-0.990049}\right\}$$

$$G_s(z)=\left\{10-\frac{10z-10}{z-0.990049}\right\}=\left\{\frac{10z-9.90049-10z+10}{z-0.990049}\right\}=\frac{0.0995}{z-0.99}$$

Kapalı çevrim transfer fonksiyonu:



$$T(z)=\frac{\Omega_m(z)}{R(z)}=N\frac{G_s(z)}{1+G_s(z)K_v}=\frac{\dfrac{0.0995}{z-0.99}}{1+\dfrac{0.0995}{z-0.99}K_v}=\frac{0.0995N}{z-0.99+0.0995K_v}$$

$x(k+1)=0.9048x_1(k)+0.9516u(k)$

$y(k)=x_1(k)$

Açık çevrim karakteristik denklem: $F(z)=\det(zI-A)=z-0.9048=0$

$=z+a_1=0 \;\Rightarrow\; a_1=0.9048$

Sonlu zaman kontrol için olması gereken karakteristik denklem:

$F_c(z)=z=0$ ise $\quad z+\hat{a}_1=0 \;\Rightarrow\; \hat{a}_1=0$

1. Yol:

$k=\left[w^T s^T\right]^{-1}(\hat{a}-a)$ S; kontrol edilebilirlik matrisi

$$w=\begin{bmatrix}1 & a_1 & \dots & a_{n-1}\\ 0 & 1 & \dots & a_{n-2}\\ . & . & \dots & .\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix},\quad \hat{a}=\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\\ \dots\\ \hat{a}_n\end{bmatrix},\quad a=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \dots\\ a_n\end{bmatrix}$$

$w=1$ $s=[0.9516]$ $k=[1*0.9516]^{-1}(0.9048-0)$ *ise* $k=K_v=0.9548$

2. Yol:

Kmatrisinin hesaplanmasında diğer bir yöntem Ackerman tarafından önerilmiştir.

$k^T=e^T s^{-1}\hat{p}(A)\quad S=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B\end{bmatrix}$

$e^T=[0 \;\; 0 \;\; \dots \;\; 0 \;\; 1]$

$\hat{p}(A)\Rightarrow\hat{p}(z)$ karakteristik denkleminde $z=A$ koyularak elde edilir.

$\hat{p}(z)=A^n+\hat{a}_1A^{n-1}+\dots+\hat{a}_{n-1}A+\hat{a}_nI$

$s=[0.9516]$

$F_c(z)=z=0$ ise $\quad F_c(A)=A=0$ *ise* $\quad F_c(A)=0.9048\;\; e^T=[1]$

$k^T=e^Ts^{-1}\hat{p}(A)=1*(0.9516)^{-1}*0.9048\;\; k=K_v=0.9508$ olarak elde edilir.

3. Yol Genel kutup yerleştirme yöntemi: $u(k) = -K_v x_1(k)$

$$x(k+1) = 0.9048x_1(k) - 0.9516K_v x_1(k)$$

$$x(k+1) = [0.9048 - 0.9516K_v]x_1(k)$$

Kapalı çevrim karakteristik denklem: $F_c(z) = \det(zI - A_c) = z - 0.9048 + 0.9516K_v = 0$

İstenen karakteristik denklem: $\alpha(z) = z = 0$

$F_c(z) = \alpha(z) = 0$ yazılır.

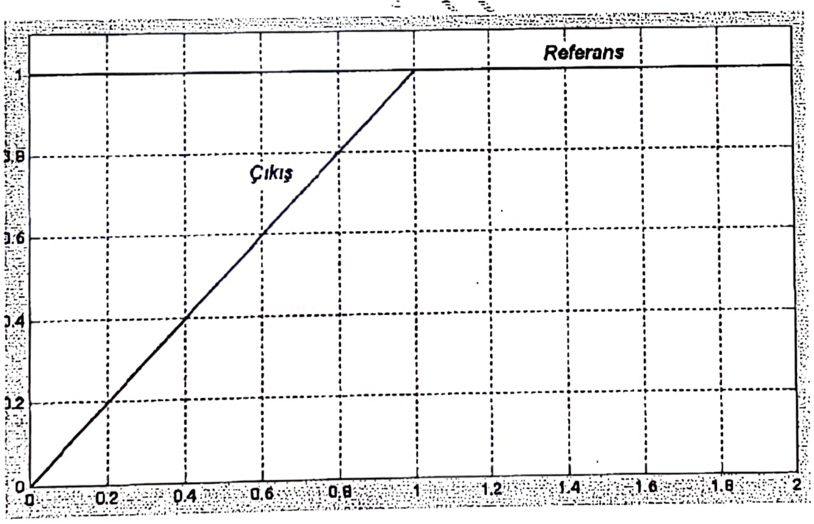
Ve katsayılar eşitlenir ise, $-0.9048 + 0.9516K_v = 0$ olmalıdır.

Denklem çözülür ise, $K_v = 0.9508$ olarak elde edilir.

$T(z) = \dfrac{\Omega_m(z)}{R(z)} = \dfrac{0.0995N}{z - 0.99 + 0.0995*0.9508} = \dfrac{0.0995N}{z - 0.8954}$ son değer teoremi kullanılır ve

$R(z) = \dfrac{z}{z-1}$ için ,

$\Omega_m(\infty) = \lim_{t\to\infty} \Omega_m(t) = \lim_{z\to 1}(z-1)\dfrac{0.0995N}{z - 0.8954}\dfrac{z}{z-1} = 1 \Rightarrow N = 1.05083319$



$K_v = 0.9508$ ve $N = 1.05083319$ değerleri için sonlu zaman cevap.

S-6

i- **Soru-5**deverilmiş olan DC makine **PID**ile hız kontrolü yapılacaktır. Aşım %4, yerleşme zamanı %2 kriterine göre $t_s = 5\,sn$ olması istenmektedir. $K_i = 0.0225$ alınarak K_p ve K_d yi karakteristik denklem yöntemini kullanarak elde ediniz.

ii- Ayrık-zaman kapalı çevrim kontrol blok diyagramını **modifiye PID** için çiziniz.

S-6i- Soru 5'de verilmiş olan DC makine PID ile hız kontrolü yapılacak. Aşım %4 yerleşme zamanı %2 kriterine göre ts=5sn olması istenmektedir.**Ki**=0.0225 alınarak **Kp** ve **Kd**'yi karakteristik denklem yöntemini kullanarak elde ediniz.

ii- Ayrık -zaman kapalı-çevrim kontrol blok diyagramının **modifiyeli PID** için çiziniz.

i- **Karakteristlik denklem metodu**

$$M_p = e^{\left(-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi\right)} \Rightarrow \ln(M_p) = -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi \Rightarrow \left(\frac{\ln(M_p)}{\pi}\right)^2 = \frac{\xi^2}{1-\xi^2} \Rightarrow$$

$$\xi^2 = \frac{\left(\frac{\ln(M_p)}{\pi}\right)^2}{1+\left(\frac{\ln(M_p)}{\pi}\right)^2} = \frac{\left(\frac{\ln(0.04)}{\pi}\right)^2}{1+\left(\frac{\ln(0.04)}{\pi}\right)^2} = \frac{1.0498}{1+1.0498} = 0.5121 \Rightarrow \xi = \sqrt{0.5121} = 0.7156$$

$$t_s = \frac{4}{\xi w_n} = 5 \Rightarrow w_n = \frac{4}{\xi t_s} = \frac{4}{0.7156*5} \rightarrow w_n = 1.1179\, rad/sn$$

$$s_{1,2} = -\zeta w_n \pm j w_n \sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow$$

$$s_{1,2} = -0.7156*1.1179 \pm j1.1179\sqrt{1-0.7156^2} \Rightarrow s_{1,2} = -0.8000 + j0.7808$$

$$z = e^{sT} \Rightarrow z_{1,2} = e^{(-0.8000 \pm 0.7808 j)0.1} \Rightarrow z_{1,2} = 0.9203 \mp j0.0720$$

$$F(z) = 1 + G_c(z) G_p(z) = 0$$

$$G_c(z) = K_p + K_i\left(\frac{z}{z-1}\right) + K_d\left(\frac{z-1}{z}\right)$$

$$G_p(z) = \frac{0.9516}{z-0.9048}$$

$$G_p(z_1)=\frac{0.9516}{z_1-0.9048} \text{ ise } G_p(z_1)=2.7192-j12.6313$$

$$1+\left\{K_p+K_d(\frac{z_1-1}{z_1})\right\}G_p(z_1)=0 \text{ ise } z_1 \text{ ve } G_p(z_1) \text{ yerine koyulur ise,}$$

$$1+\left\{K_p+K_i(\frac{z_1}{z_1-1})+K_d(\frac{z_1-1}{z_1})\right\}\{2.7192-j12.6313\}=0 \text{ düzenlenir,}$$

$$\left\{K_p+K_i(\frac{z_1}{z_1-1})+K_d(\frac{z_1-1}{z_1})\right\}=-\frac{1}{2.7192-j12.6313}=-0.0163-j0.0757$$

$$K_p+K_d(\frac{z_1-1}{z_1})=-0.0163-j0.0757-0.0225(\frac{z_1}{z_1-1})$$

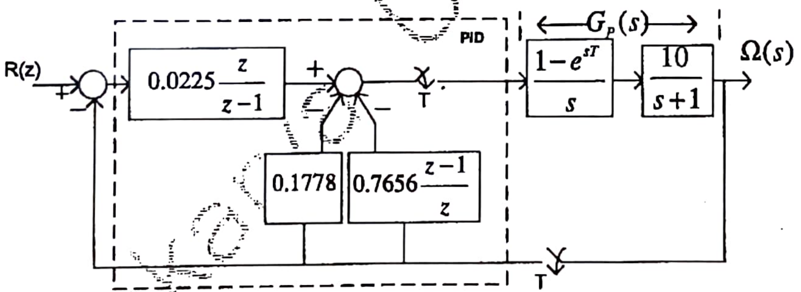
$$K_p+K_d(-0.0800+j0.0845)=-0.0163-j0.0757+0.1329+j0.1404$$

$$K_p-0.0800K_d+j0.0845K_d=0.1166+j0.0647$$

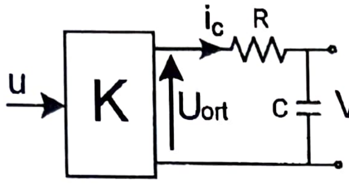
$$j0.0845K_d=j0.0647 \Rightarrow K_d=0.7656$$

$$K_p-0.0800K_d=0.1166 \Rightarrow K_p=0.1166+0.0800*0.7656 \Rightarrow K_p=0.1778$$

iii-modifiyeli PID için ayrık-zaman kapalı-çevrim kontrol blok diyagramı aşağıda verilmiştir.



S-7 Şekilde verilen RC devresinde,



a) $G(s) = \frac{V_c(s)}{u(s)}$ elde ediniz.

b) T=0.1 sn, R=0.3ohm , K=1 ve C=0.01F olmak üzere G(z)'i bulunuz ve çıkış kondansatör gerilimi $V_c(t)$, sayısal PI kontrol kuralı ile kontrol edilmek istenmektedir. Kapalı çevrim kontrol blok diyagramını çiziniz.

c) Kapalı-çevrim kutuplarının $z_{1,2} = 0.9199 \mp 0.0774j$ olması için K_P ve K_I katsayılarını hesaplayınız.

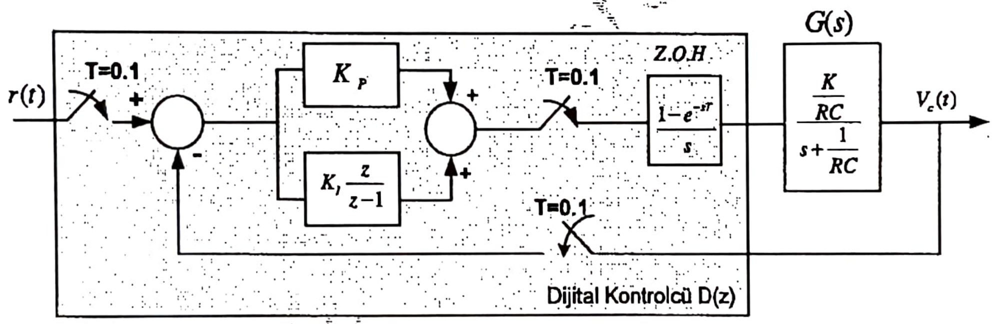
C-7 a) t-Domeni **S-Domeni**

$$U_{ort}(t) = RC\frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) \qquad V_c(s)(s+\frac{1}{RC}) = \frac{K}{RC}u(s)$$

$$U_{ort}(t) = Ku$$

$$\frac{dV_c(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}V_c(t) + \frac{K}{RC}u(t) \qquad G(s) = \frac{V_c(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}$$

b) Kapalı çevrim kontrol blok diyagramı



T=0.1 sn, R=0.3ohm , K=1 ve C=0.01F

$$G(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1000/3}{s+1000/3}\right\} =$$

$$(1-z^{-1})\left(\cancel{s}\frac{1000/3}{\cancel{s}(s+1000/3)}\frac{z}{z-e^{sT}}\Big|_{s=0} + \cancel{s+1000/3}\frac{1000/3}{s\,\cancel{(s+1000/3)}}\frac{z}{z-e^{sT}}\Big|_{s=-333.33}\right)$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\underbrace{3.34*10^{-15}}_{\approx 0}}\right) = \frac{1}{z}$$

c) $z_{1,2} = 0.9199 \mp 0.0774j$ $G(z) = (K_P + K_I\frac{z}{z-1})(\frac{1}{z})$ ileri yol transfer fonksiyonu elde edilir.

$$F(z)=1+G(z)\big|_{z=z_1,z_2}=0$$

$$F(z)=1+\frac{K_P}{z}+\frac{K_I}{z-1}\bigg|_{z=z_1,z_2}=0$$

$$F(z)=z^2+z(K_I+K_P-1)-K_P\big|_{z=z_1,z_2}=0$$

Karakteristik denklem yazılır.

$$0.9199K_I-0.0801K_P=0.07967$$

$$K_I+K_P=-0.83$$

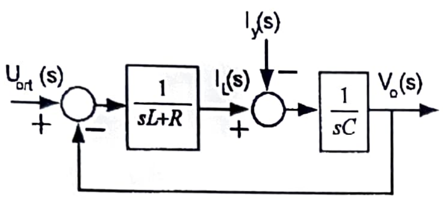
$$K_I=-0.83-K_P$$

$$0.9199(-0.83-K_P)-0.0801K_P=0.07967$$

$$K_P=-0.8522$$

$$K_I=0.0124$$

S-8



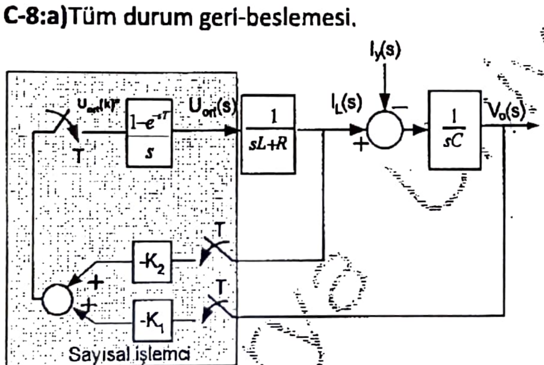
Şekilde verilen kontrol sisteminde I_L ve V_0 durum değişkenleri ve T örnekleme zamanı olmak üzere (tüm durumlar kontrol edilebilir)

a)Sadece sistem dinamiğinin ayarlanabilmesi için kontrol blok diyagramını çiziniz.

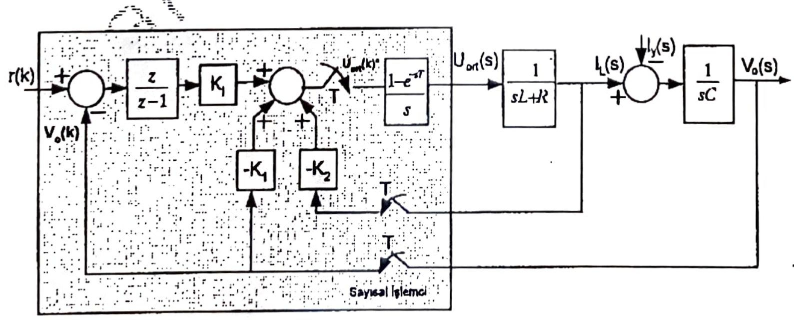
b) Hem sistem dinamiğinin hemde sürekli hal hatasının giderilmesi için kontrol blok diyagramını çiziniz.

c) Şekilde verilen kontrol sistem durum denklemi $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$ ve çıkış denklemi $y(k)=Cx(k)$ dir. b) şıkkı için sistemin artırılmış durum denklemini yazınız.

C-8:a)Tüm durum geri-beslemesi.



b)Tüm ve dinamik durum geri-beslemesi



c) $$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_1(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_1(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r(k)$$

S-9

$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.25 & -1.15 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$ Ayrık-zaman durum denklemi verilen sistem için

a) Durum denklemini diagonal formda elde ediniz .

b) Hangi durum değişkenleri kontrol edilebilir ?

C-9

a) **Açık-çevrim sistem karakteristik denklem** $|zI - A| = 0$ dir.

$$z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.25 & -1.15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.25 & z+1.15 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.25 & z+1.15 \end{bmatrix} = z^2 + 1.15z + 0.25 = 0$$

$$\lambda_1 = z_1 = -0.2911$$

$$\lambda_2 = z_2 = -0.8589$$

Öz vektörlerin bulunması:

$$|\lambda_1 I - A| z_{1öz} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -0.291 & -1 \\ 0.25 & 0.859 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} -0.291.V_{11} - V_{21} = 0 \\ 0.25.V_{11} - V_{21} = 0 \\ V_{11} = 1 \quad \textit{seçildi.} \\ V_{21} = -0.291 \end{array} \qquad z_{1ö} = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.291 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda_2 I - A| z_{2öz} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -0.859 & -1 \\ 0.25 & 0.2911 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} -0.859.V_{12} - V_{22} = 0 \\ 0.25.V_{12} + 0.2911.V_{22} = 0 \\ V_{12} = 1 \quad \textit{seçildi} \\ V_{22} = -0.859 \end{array} \qquad z_{2ö} = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.859 \end{bmatrix}$$

$$P_{öz} = [z_{1ö} \quad z_{2ö}] \quad P_{öz} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.2911 & -0.8589 \end{bmatrix}$$

$$A_p = P_{öz}^{-1} A P_{öz} = \begin{bmatrix} -0.2911 & 0 \\ 0 & -0.8589 \end{bmatrix}, \quad B_p = P_{öz}^{-1} B = \begin{bmatrix} 1.7609 \\ -1.7609 \end{bmatrix}$$

c) B_p **matrisinde her bir satır sıfırdan farklı olduğundan her iki durum değişkeni de kontrol edilebilir.**

S-10 $x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -0.5 & 0.25\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(k)$ verilen sistemde $\zeta=0.707$ ve %2 kriterine göre yerleşme zamanının $t_s=4$ sn olabilmesi için (örnekleme zamanı T=0.1 sn)

a) Durum geri besleme matrisi K 'yı elde ediniz.
b) Kapalı çevrim sistem matrisini elde ediniz.

C-10

a) $$\left.\begin{matrix}\xi=0.707\\ w_n=1.4144\end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{matrix} z_{1,2}=e^{-\xi w_n T}e^{jw_n\sqrt{1-\xi^2}T}\\ z_{1,2}=0.9003\mp j0.0904\end{matrix}$$

İstenen kapalı çevrim karakteristik denklem: $\hat{P}(z)=(z-z_1)(z-z_2)=z^2-1.8z+0.8187=0$

Karakteristik denklemde $z=A$ verilir,

$$\hat{P}(A)=A^2-1.8A+0.8187I$$

$$\hat{P}(A)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -0.5 & 0.25\end{bmatrix}^2-1.8\begin{bmatrix}0 & -1\\ -0.5 & 0.25\end{bmatrix}+0.8187\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\hat{P}(A)=\begin{bmatrix}1.3187 & 1.55\\ 0.775 & 0.9312\end{bmatrix}\quad e^T=[0\quad 1]$$ **dir.**

Kontrol edilebilirlik matrisi;

$$S=[B\quad AB]=\left[\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\quad \begin{bmatrix}0 & -1\\ -0.5 & 0.25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right]\Rightarrow S=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0.25\end{bmatrix}$$

Durum geri-besleme matris hesabı: $k^T=e^T S^{-1}\alpha(A)$ ifadesi ile hesap edilir.

$$k^T=[0\quad 1]\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0.25\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1.3187 & 1.55\\ 0.775 & 0.9312\end{bmatrix}$$

$k^T=[-1.3187\quad -1.55]$ durum geri-besleme matrisi elde edilir.

b) **Kapalı çevrim sistem matrisi :** $u(k)=-Kx(k)$ **olmak üzere durum denkleminde yerine koyulur,**

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0.5 & 0.25\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(k) \text{ ise } x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0.5 & 0.25\end{bmatrix}x(k)-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}Kx(k)$$

$$x(k+1)=\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}0 & -1\\ -0.5 & 0.25\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}[-1.3187\ -1.55]}_{A_c}\right\}x(k)$$

$$A_c=A-BK=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -0.5 & 0.25\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}[-1.3187\quad -1.55]\quad A_c=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0.8187 & 1.8006\end{bmatrix}$$ Kapalı-çevrim sistem matrisi.

Kaynaklar

1- Feedback control systems, *John van de vegte*
2- Modern control Design, *Ashish Tewari*
3- Feedback control of Dynamic System, *G. F. Franklin, J.D. Powel, A.E.Naeini*
4- Continuous and Discrete Control Systems, *John Dorsey*
5- Digital Control Of Dynamic Systems, *G. F. Franklin,, J.D. Powel, M. Workman*
6- Modern Control Engineering, *Katsuhiko Ogata*
7- Otomatik Kontrol Sistemleri, *Benjamin Kuo, terc. Prof.Dr. Atilla Bir.*
8- Control system design and simulation, *J. Golden, A. Verner*
9- Digital Control system analysis and design,*C.L.Phillips, H.T.Nagle*
10- Modern control theory, *R.Dorf*
11- Dijital Kontrol sistemleri, *Prof.Dr. M.Kemal Sarıoğlu*
12- Otomatik Kontrol I-II (Ders Notları), *Prof.Dr. M.Kemal Sarıoğlu*

NOT

Dijital Kontrol Sistemleri Ders Notlarında karşılaşabileceğiniz hataları sözlü olarak iletmeniz

ve/veya

aozdemir@sakarya.edu.tr

adresine yazılı olarak göndermeniz dileği ile….

Katkılarınız için Teşekkür ederim….

Prof.Dr. Ayhan Özdemir
Sakarya Üniversitesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
54187 Esentepe/Sakarya