Hafta 4:
Ayrık Rastlantı Değişkenleri

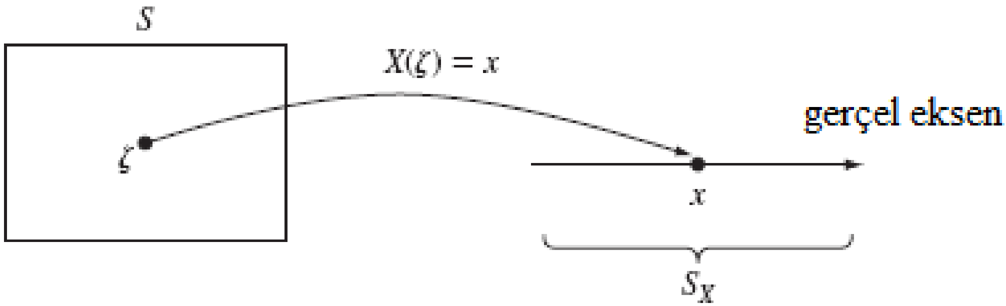
Ele Alınacak Ana Konular

- Rastlantı değişkeni kavramı
- Ayrık rastlantı değişkenleri ve olasılık kütle fonksiyonu
- Ortalama (beklenen) değer ve momentler
- Koşullu olasılık kütle fonksiyonu
- Önemli ayrık rastlantı değişkenleri
- Ayrık rastlantı değişkenlerinin üretilmesi

Rastlantı Değişkeni Kavramı

Tanım: Bir rastlantı deneyine ilişkin örnek uzay içindeki her çıkışa bir rakam atayan bir fonksiyona bir **RASTLANTI DEĞİŞKENİ** denir.

Bir rastlantı değişkeni, şekilde gösterildiği gibi, tanım kümesi örnek uzay görüntü kümesi gerçel eksen olan bir fonksiyondur.



- Rastlantı değişkenleri büyük harf (*X*, *Y* vb.), değişkenin aldığı değer ise küçük harf (*x*, *y* vb.) ile gösterilecektir.

- Deneyin çıkışları sayısal ise, rastlantı değişkeni $X(\zeta) = \zeta$ şeklinde tanımlanabilir.

Rastlantı Değişkeni Kavramı

ÖRNEK:

Bozuk bir para 3 kez atılmaktadır. *X* rastlantı değişkeni, üç atıştaki tura sayısı olsun. *X*, gerçel eksenin bir alt kümesi olan $S_x = \{0,1,2,3\}$ kümesinden değerler alır.

Tabloda, örnek uzay içindeki tüm çıkışlar ve her çıkış için *X*'in aldığı değer belirtilmiştir.

ζ:	YYY	YYT	YTY	TYY	TTY	TYT	YTT	TTT
$X(\zeta)$:	0	1	1	1	2	2	2	3

Rastlantı Değişkeni Kavramı

ÖRNEK:

Bir oyuncu 1.5 TL ödeyerek aşağıdaki oyunu oynamaktadır. Bir para 3 kez atılmaktadır. X, üç atıştaki tura sayısı olsun. Oyuncu, $X = 2$ ise 1 TL, $X = 3$ ise 8 TL kazanmakta, aksi durumlarda ise para kazanmamaktadır. Y, oyuncunun kazandığı para olsun. Y, $S_x = \{0,1,8\}$ kümesinden değerler alır.

Y, X'in bir fonksiyonudur. Ancak, X'in aldığı değerler örnek uzayın çıkışları tarafından belirlenmektedir. Y, tabloda gösterildiği gibi X veya örnek uzayın çıkışları cinsinden ifade edilebilir.

ζ:	YYY	YYT	YTY	TYY	TTY	TYT	YTT	TTT
$X(\zeta)$:	0	1	1	1	2	2	2	3
$Y(\zeta)$:	0	0	0	0	1	1	1	8

Bir rastlantı değişkeninin fonksiyonu da bir rastlantı değişkenidir!

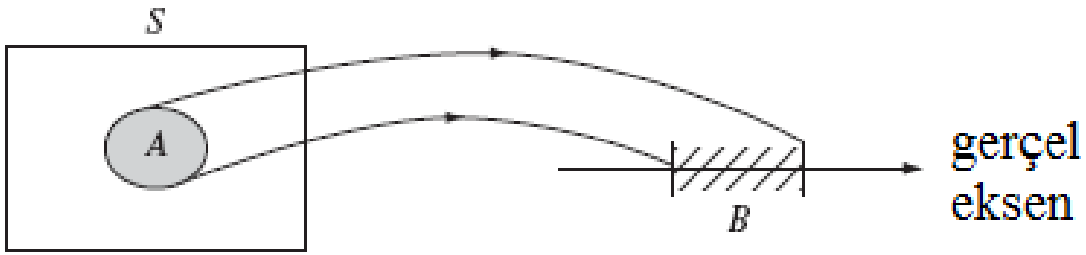
Rastlantı Değişkeni Kavramı

- Rastlantı değişkeninin alacağı değerler, deneyin çıkışlarının olasılıkları tarafından belirlenmektedir. Yani, rastlantı değişkeninin herhangi bir değere eşit olması olasılığını deneye ilişkin çıkışların olasılıkları cinsinden belirleyebiliriz.

- Şekilde, örnek uzay içindeki bir olay ve bu olay için rastlantı değişkeninin aldığı değerler arasındaki ilişki gösterilmiştir.

- $X(\zeta)\in B$ ise $\zeta\in A$. B'nin meydana gelmesi için A oluşmalıdır. Tersine, $\zeta\in A$ ise $X(\zeta)\in B$. A meydana gelmişse B oluşur. A ve B'ye **EŞDEĞER OLAYLAR** denir. O halde,

$$P[X\in B]=P[A]=P[\{\xi : X(\xi)\in B\}]$$



Rastlantı Değişkeni Kavramı

ÖRNEK:

Bozuk bir para 3 kez atılmaktadır. X rastlantı değişkeni, üç atıştaki tura sayısı olsun. $\{X=2\}$ olayının olasılığını hesaplayınız. Önceki örnekte açıklanan oyunda, $\{Y= 8\}$ (oyuncunun 8 TL kazanması) olayının olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

$X = 2$ ise, örnek uzaydaki {TTY,TYT,YTT} çıkışları meydana gelmiştir.

$$\begin{aligned} P[X = 2] &= P[\{\text{TTY,TYT,YTT}\}] \\ &= P[\{\text{TTY}\}] + P[\{\text{TYY}\}] + P[\{\text{YTT}\}] \\ &= 3/8 \end{aligned}$$

$Y = 8$ ise, örnek uzaydaki {TTT} çıkışı meydana gelmiştir.

$$P[Y = 8] = P[\{\text{TTT}\}] = 1/8$$

Ayrık Rastlantı Değişkenleri ve Olasılık Kütle Fonksiyonu

Tanım: Sayılabilir bir kümeden değer alan bir rastlantı değişkenine **AYRIK RASTLANTI DEĞİŞKENİ** denir.

Tanım: Sonlu sayıda elemana sahip bir kümeden değer alan bir ayrık rastlantı değişkenine **SONLU** denir.

Tanım: Bir ayrık rastlantı değişkeninin **OLASILIK KÜTLE FONKSİYONU** denir, $p_X(x)$ notasyonu ile gösterilir ve x gerçel sayısı için

$$p_X(x) = P[X = x] = P[\{\xi : X(\xi) = x\}]$$

eşitlikleriyle tanımlanır.

Ayrık Rastlantı Değişkenleri ve Olasılık Kütle Fonksiyonu

- Örnek uzayı $S_X = \{x_1, x_2, x_3 ...\}$ şeklinde belirtirsek, $\{X = x_k\}$ ve $A_k = \{\zeta: X(\zeta) = x_k\}$ olayları eşdeğerdir. O halde, olasılık kütle fonksiyonu (kısaca PMF)

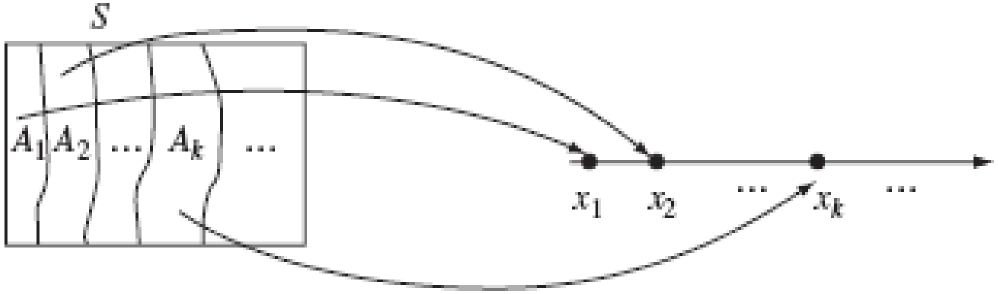
$$\boxed{p_X(x_k) = P[A_k]}$$

olarak yazılabilir.

- $j \neq k$ ise, $A_k \cap A_j = \{\zeta: X(\zeta) = x_k \text{ ve } \zeta: X(\zeta) = x_j\} = \varnothing$.

- Herhangi bir $\zeta \in S$, gerçel eksen üzerindeki bir x_k'ya dönüştürüldüğünden ζ bir A_k olayının bir elemanı olup $S = A_1 \cup A_2 \cup ...$. Özetle,

$$\boxed{\begin{array}{l} j \neq k \text{ ise, } A_k \cap A_j = \varnothing \\ S = A_1 \cup A_2 \cup ... \end{array}}$$



Ayrık Rastlantı Değişkenleri ve Olasılık Kütle Fonksiyonu

PMF aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) Tüm x için $p_X(x) \geq 0$.

(ii) $$\sum_{x \in S_x} p_X(x) = \sum_{\forall k} p_X(x_k) = \sum_{\forall k} P[A_k] = 1$$

(iii) $$P[X \in B] = \sum_{x \in B} p_X(x), \qquad B \subset S_X$$

Özellik (i) doğrudur çünkü $p_X(x) = P[X = x]$ ve olasılık negatif olamaz.

Özellik (ii) doğrudur çünkü $S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ ve örnek uzayın olasılığı 1'dir.

Özellik (iii) doğrudur çünkü bir B olayı temel olayların birleşimidir ve

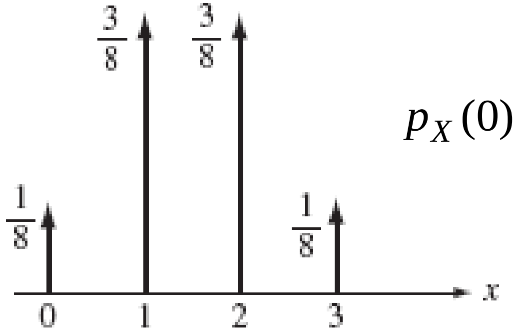
$$P[X \in B] = P[\bigcup_{x \in B} \{\xi : X(\xi) = x\}] = \sum_{x \in B} P[X = x] = \sum_{x \in B} p_X(x)$$

Ayrık Rastlantı Değişkenleri ve Olasılık Kütle Fonksiyonu

ÖRNEK:
Bozuk bir para 3 kez atılmaktadır. X, üç atıştaki tura sayısı olsun. Tura ve yazı gelme olasılıklarının p ve (1-p) olduğunu varsayarak X'in PMF'sini hesaplayınız ve çiziniz.

ÇÖZÜM: X , S_X ={0,1,2,3} kümesinden değerler alır.

$$p_X(0) = P[X = 0] = P[\{\text{YYY}\}] = (1-p)^3$$
$$p_X(1) = P[X = 1] = P[\{\text{YYT,YTY,TYY}\}] = 3(1-p)^2 p$$
$$p_X(2) = P[X = 2] = P[\{\text{YTT,TTY,TYT}\}] = 3(1-p)p^2$$
$$p_X(3) = P[X = 3] = P[\{\text{TTT}\}] = p^3$$



$$p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) = 1$$

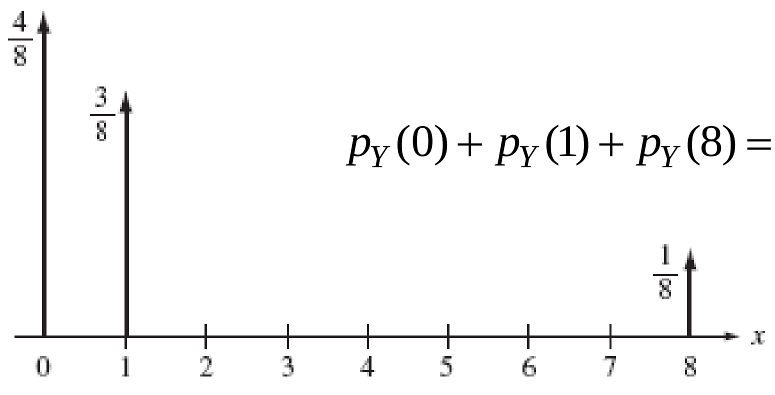
Ayrık Rastlantı Değişkenleri ve Olasılık Kütle Fonksiyonu

ÖRNEK:

Bozuk bir para 3 kez atılmaktadır. X, üç atıştaki tura sayısı olsun. Bir oyuncu 1.5 TL ödeyerek aşağıdaki oyunu oynamaktadır. Oyuncu, X = 2 ise 1 TL, X = 3 ise 8 TL kazanmakta, aksi durumlarda ise para kazanmamaktadır. Y, oyuncunun kazandığı para olsun. Y'nin PMF'sini hesaplayınız ve çiziniz.

ÇÖZÜM: Y, $S_Y = \{0,1,8\}$ kümesinden değerler alır.

$$p_Y(0) = P[Y=0] = P[\{\text{YYY},\text{YYT},\text{YTY},\text{TYY}\}] = 4/8$$
$$p_Y(1) = P[Y=1] = P[\{\text{YTT},\text{TTY},\text{TYT}\}] = 3/8$$
$$p_Y(8) = P[Y=3] = P[\{\text{TTT}\}] = 1/8$$



$$p_Y(0) + p_Y(1) + p_Y(8) = 1$$

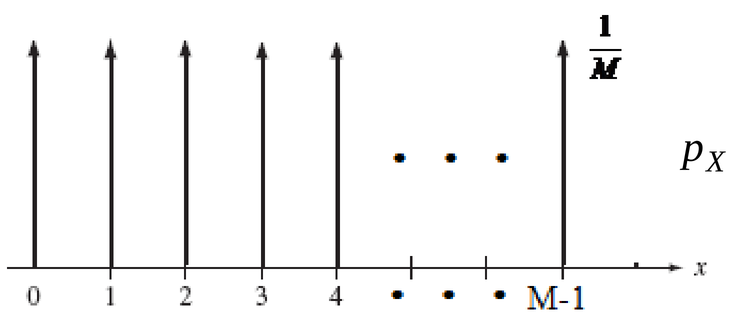
Ayrık Rastlantı Değişkenleri ve Olasılık Kütle Fonksiyonu

ÖRNEK:

Bir rastgele sayı üreteci, S_X ={0,1,2,..., M-1} kümesinden bir sayıyı eşit olasılıkla üretmektedir. Üretilen sayı X olsun. X'e **düzgün rastlantı değişkeni** denir. X'in PMF'sini hesaplayınız ve çiziniz.

ÇÖZÜM: Sayılar eşit olasılıkla üretildiğinden

$$p_X(0) = p_X(1) = \cdots = p_X(M-1) = \frac{1}{M}$$



$$p_X(0) + p_X(1) + \cdots + p_X(M-1) = \frac{1}{M} M = 1$$

Ayrık Rastlantı Değişkenleri ve Olasılık Kütle Fonksiyonu

ÖRNEK:
X, bir rastlantı deneyinde *A* olayı meydana gelirse “1” aksi halde “0” değeri alan bir fonksiyon olsun. Sadece 2 değer alan *X*’e **Bernoulli rastlantı değişkeni** denir. *A*’nın meydana gelme olasılığının *p* olduğunu varsayarak *X*’in PMF’sini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: X , S_X ={0,1} kümesinden değerler alır

$$p_X(0) = P[X = 0] = P[\{\xi : \xi \in A^c\}] = 1 - p$$

$$p_X(1) = P[X = 1] = P[\{\xi : \xi \in A\}] = p$$

$$p_X(0) + p_X(1) = p + (1 - p) = 1$$

Ayrık Rastlantı Değişkenleri ve Olasılık Kütle Fonksiyonu

ÖRNEK: Bir sayısal haberleşme sisteminde, alıcı doğru karar verinceye kadar verici gönderdiği biti yeniden iletilmektedir. *X*, doğru algılamaya kadar gerekli iletim sayısı olsun. *X*'in PMF'sini hesaplayınız. *X*'in çift bir olma olasılığı nedir? İlk başarı için gerekli deneme sayısını veren *X*'e **geometrik rastlantı değişkeni** denir.

ÇÖZÜM: X , $S_X = \{1, 2, 3, ...\}$ kümesinden değerler alır. $\{X = k\}$ olayı, ilk k-1 iletim hatalı, son iletim başarılı ise meydana geleceğinden

$$p_X(k) = P[X = k] = P[\underbrace{00\cdots0}_{k\text{-1 kez}}1] = (1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p, \; k = 1,2,\cdots$$

X'in çift bir sayıya eşit olabilmesi için $\{X=2,4,6,...\}$ olayı meydana gelmelidir.

$$P[X \text{ çift sayı}] = \sum_{k=1}^{\infty} p_X(2k) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{2k-1} = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}(q^2)^k = \frac{p}{q}\left[\frac{1}{1-q^2} - 1\right]$$

$$= \frac{p}{q}\frac{q^2}{1-q^2} = \frac{pq}{(1-q)(1+q)} = \frac{q}{1+q}$$

Ayrık Rastlantı Değişkenleri ve Olasılık Kütle Fonksiyonu

ÖRNEK: Bir sayısal haberleşme sisteminde, iletilen bir bitin yanlış algılama olasılığı p'dir. n bit iletimdeki hata sayısı X olsun. X'in PMF'sini hesaplayınız. n iletimde 1 veya daha az hata olasılığı nedir? n denemedeki başarı sayısını ölçen X'e **iki terimli rastlantı değişkeni** denir.

ÇÖZÜM: X , S_X ={0,1, 2, ...,n} kümesinden değerler alır. $\{X = k\}$ olayı, k iletim hatalı, n-k iletim başarılı ise meydana gelir. Hatalı iletimler $C^n{}_k$ değişik şekilde oluşabileceğinden

$$p_X(k) = P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,\cdots,n$$

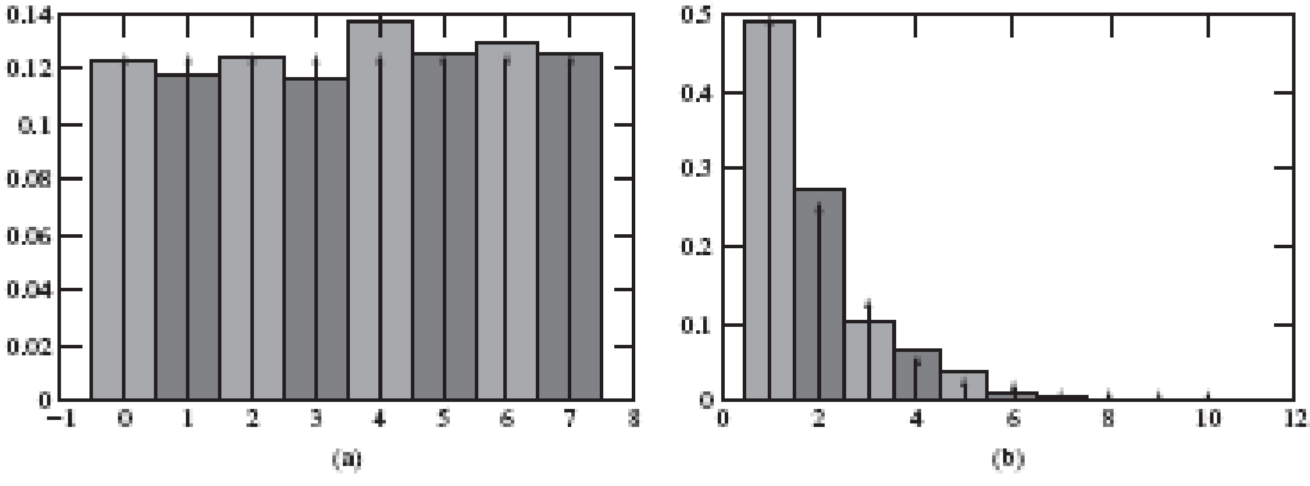
$X \leq 1$ ise 1 veya daha az hata oluşacağından

$$P[X \leq 1] = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$$

Ayrık Rastlantı Değişkenleri ve Olasılık Kütle Fonksiyonu

- X rastlantı değişkeninin alacağı değerleri belirlemek için bir deneyi n kez tekrarladığımızı varsayalım. $\{X = x_k\}$ olayının meydana gelme sayısı $N_k(n)$ ve karşılık gelen bağıl frekans $f_k(n) = N_k(n) / n$ olsun.

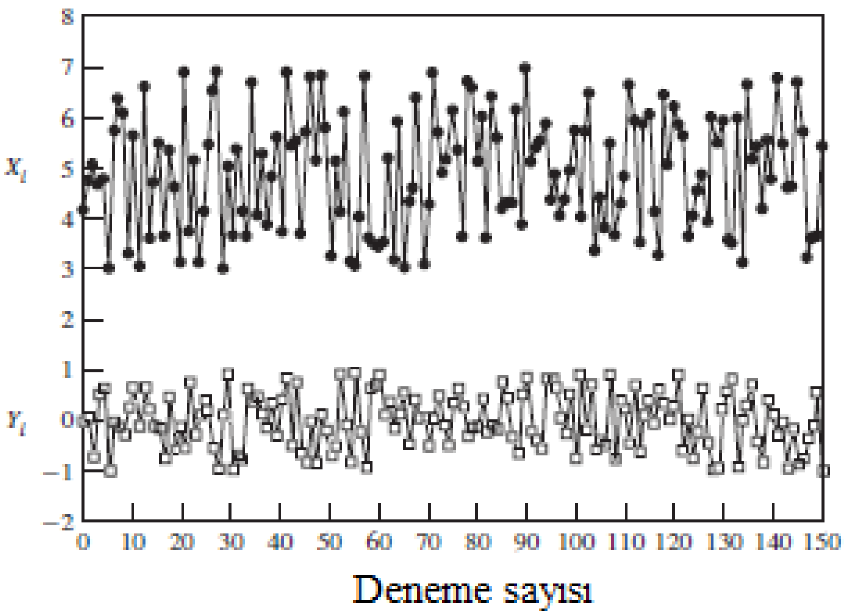
- n büyük değerler aldığında $f_k(n)$'nin $p_X(x_k)$'ya yakınsamasını bekleriz. Yani, bağıl frekans grafiği PMF grafiğine yakınsar.



(a) {0,1,...,7} kümesinden bir sayı üretlimesinin 1000 kez tekrarlanması
(b) p = 1/2 parametreli geometrik rastlantı değişkeninin 1000 kez üretilmesi

Ortalama Değer ve Momentler

- Bir ayrık rastlantı değişkeni hakkındaki tüm bilgi PMF'de saklıdır. Bazen, PMF'nin verdiği bilgiyi özetleyen birkaç parametreyi bilmek yeterlidir.



- Örneğin, iki değişkenin aldığı değerler, deneyin 150 tekrarı için verilmiştir. *X*, 5; *Y*, 0 civarında değer alır. *X*'in sapması, *Y*'nin sapmasından daha fazladır.

Ortalama Değer ve Momentler

Tanım: X ayrık rastlantı değişkeninin **ORTALAMA DEĞERİ**

$$m_X = E[X] = \sum_{x \in S_x} x p_X(x) = \sum_k x_k p_X(x_k)$$

eşitliğiyle tanımlanır.

Not: Toplam mutlak toplanabilir, yani

$$E[|X|] = \sum_k |x_k| p_X(x_k) < \infty$$

isedeğişkeninin ortalması vardır. Bazı değişkenleri için toplama yakınsamayabilir. Bu gibi durumlarda, rastlantı değişkeninin ortalama değeri yoktur.

Ortalama Değer ve Momentler

ÖRNEK: Bernoulli rastlantı değişkeninin ortalama değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $$E[X] = 0p_X(0) + 1p_X(1) = 0(1-p) + 1(p) = p$$

ÖRNEK: X, bir para üç kez atıldığında gözüken tura sayısı olsun. $E[X]$ nedir?

ÇÖZÜM: $$E[X] = \sum_{k=0}^{3} kp_X(k) = 0\left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) = 1.5$$

ÖRNEK:[0,M-1] aralığında değer alan düzgün rastlantı değişkeninin ortalama değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $$E[X] = \sum_{k=0}^{M-1} kp_X(k) = \sum_{k=0}^{M-1} k\frac{1}{M} = \frac{1}{M}\{0+1+2+\cdots+M-1\}$$

$$= \frac{1}{M}\frac{(M-1)M}{2} = \frac{M-1}{2}$$

Ortalama Değer ve Momentler

- Rastlantı değişkeninin ortalama değeri, deney gerçekleştirildiğinde değişkenin alacağı değer şeklinde yorumlanmamalıdır. Örneğin, Bernoulli rastlantı değişkeninin ortalama değeri p'dir ancak değişken 0 ve 1 değerlerini alır.

- Ortalama değer, rastlantı değişkeninin yeterince fazla sayıda gözleminin aritmetik ortalamasına karşılık gelmektedir.

- Deney n kez tekrarlandığında değişkeninin aldığı değerleri $x(1)$, $x(2)$,…, $x(n)$ ile gösterelim ($x(j)$, j. denemedeki çıkışdır!).

- Rastlantı değişkeninin alabileceği değerler x_k ve x_k değerinin gözükme sayısı $N_k(n)$ ise karşılık gelen bağıl frekans

$$f_k(n) = \frac{N_k(n)}{n}$$

olacaktır.

Ortalama Değer ve Momentler

- Gözlemlerin aritmetik ortalama değeri bağıl frekanslar cinsinden hesaplanabilir:

$$
\begin{aligned}
\langle X \rangle_n &= \frac{x(1)+x(2)+\cdots+x(n)}{n} = \frac{x_1 N_1(n) + x_2 N_2(n) + \cdots + x_k N_k(n) + \cdots}{n} \\
&= x_1 f_1(n) + x_2 f_2(n) + \cdots + x_k f_k(n) + \cdots \\
&= \sum_k x_k f_k(n)
\end{aligned}
$$

- Bağıl frekansların olasılığa yakınsadığını biliyoruz: $\lim_{n\to\infty} f_k(n) = p_X(x_k), \forall k$

- O halde,

$$
\boxed{\langle X \rangle_n = \sum_k x_k f_k(n) \rightarrow \sum_k x_k p_X(x_k) = E[X]}
$$

- Özet: *n* büyük değerler aldığında, aritmetik ortalama, $E[X]$'e yakınsamaktadır.

Ortalama Değer ve Momentler

ÖRNEK: Bozuk bir para 3 kez atılmaktadır. *X*, üç atıştaki tura sayısı olsun. Bir oyuncu 1.5 TL ödeyerek aşağıdaki oyunu oynamaktadır. Oyuncu, $X = 2$ ise 1 TL, $X = 3$ ise 8 TL kazanmakta, aksi durumlarda ise para kazanmamaktadır. *Y*, oyuncunun kazandığı para (ödül) olsun. *Y*'nin ortalama değeri nedir? Ortalama kazanç nedir?

ÇÖZÜM: Ortalama ödül, Y'nin PMF'sinden hesaplanabilir:

$$E[Y] = 0\,p_Y(0) + 1\,p_Y(1) + 8\,p_Y(8)$$
$$= 0\left(\frac{4}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 8\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{11}{8}$$

Ortalama kazancı bulmak için, oyuna ödenen para ortalama ödülden çıkarılmalıdır:

Ortalama kazanç: $E[Y] - 1.5 = 11/8 - 1.5 = -1/8$.

Yorum: Oyuncu, oyun başına ortalama 1/8 TL = 12.5 Kr kaybetmektedir.

Ortalama Değer ve Momentler

ÖRNEK:
Parametresi p olan geometrik rastlantı değişkeninin ortalama değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$$

Geometrik seri formülü: $\dfrac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$

Geometrik seri formülünün her iki yanının q'ya göre türevi alınırsa

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{E[X]}{p} \Rightarrow E[X] = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{1-q}$$

Ortalama Değer ve Momentler

ÖRNEK:

Bazı rastlantı değişkenleri için ortalama değer hesaplanamaz. Örneğin, tura gözükünceye kadar yapılan atış sayısı X ve oyuncunun kazandığı para $Y = 2^X$ olsun. Oyuncu, para kazanmayı garantilemek için ne kadar para ödemeye razı olmalıdır?

ÇÖZÜM:

$$P[X=k]=\left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad P[Y=2^k]=\left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad \text{k}=1,2,\cdots$$

Oyuncu, oyunu yeterince fazla sayıda oynadığında kazanacağı ödül $E[Y]$'dir.

$$E[Y]=\sum_{k=1}^{\infty} y_k\, p_Y(y_k)=\sum_{k=1}^{\infty} 2^k\, p_Y(2^k)=\sum_{k=1}^{\infty} 2^k\left(\frac{1}{2}\right)^k=1+1+\cdots=\infty$$

Yorum: Ortalama ödül sonsuz olduğundan, oyuncu herhangi bir miktar ödeyerek oyun oynamaya razı olmalıdır. Ancak, hangi koşullarda kar edileceği belirsizdir. Bu belirsizliğin giderilmesi gereklidir!

Ortalama Değer ve Momentler

- X bir rastlantı değişkeni ve g bir fonksiyon olmak üzere, $Z = g(X)$ olsun.

- X ayrık değişkeni x_k değerlerini alıyora, Z değişkeni de ayrık olup $g(x_k)$ değerlerini alır. $g(X)$ fonksiyonunun aldığı değerleri $\{z_1, z_2, \ldots\}$ ile belirtelim.

- $E[Z]$, ilk önce Z'ye ilişkin PMF $p_Z(z)$ bulunarak ve daha sonra ortalama değer formülü kullanılarak belirlenebilir.

- $E[Z]$, $p_Z(z)$ belirlenmeden

$$\boxed{E[Z] = E[g(X)] = \sum_k g(x_k)\, p_X(x_k)}$$

ilişkisinden de hesaplanabilir.

Ortalama Değer ve Momentler

- Bu sonucu göstermek zor değildir.

- Dönüşüm sonucunda z_j değerini veren x değerlerini $\{x_k\colon g(x_k) = z_j\}$ kümesi ile belirtelim.

$$\sum_k g(x_k)p_X(x_k) = \sum_j z_j \left\{ \sum_{x_k : g(x_k) = z_j} p_X(x_k) \right\}$$

- Parantez içindeki terim, $g(x_k) = z_j$ eşitliğini sağlayan x_k değerlerinin olasılığının toplamı olup $p_Z(z_j)$ olduğundan

$$\sum_k g(x_k)p_X(x_k) = \sum_j z_j p_Z(z_j) = E[z]$$

Ortalama Değer ve Momentler

ÖRNEK: X , S_X={-3,-1,1,3} kümesinden değer alan düzgün dağılımlı bir değişken ve $Z = X^2$ olsun. $E[Z]$ nedir?

ÇÖZÜM: Z, S_Z={1,9} kümesinden değerler alır. Birinci yaklaşımdan

$$p_Z(1) = P[X \in \{-1,1\}] = p_X(-1) + p_X(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$p_Z(9) = P[X \in \{-3,3\}] = p_X(-3) + p_X(3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$E[Z] = 1 p_Z(1) + 9 p_Z(9) = 1\left(\frac{1}{2}\right) + 9\left(\frac{1}{2}\right) = 5$$

İkinci yaklaşımdan

$$E[Z] = E[X^2] = \sum_k k^2 p_X(k) = \frac{1}{4}\left\{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2\right\} = 5$$

Ortalama Değer ve Momentler

TEOREM: X bir rastlantı değişkeni, a,b,c katsayılar ve g ile h fonksiyonlar olmak üzere $Z = ag(X) + bh(X) + c$ ise

$$E[Z]= aE[g(X)] + b\, E[h(x)] + c$$

İSPAT:

$$E[Z] = E[ag(X) + bh(X) + c] = \sum_k (ag(x_k) + bh(x_k) + c)\, p_X(x_k)$$

$$= a\sum_k g(x_k)\, p_X(x_k) + b\sum_k h(x_k)\, p_X(x_k) + c\sum_k p_X(x_k)$$

$$= aE[g(X)] + bE[h(X)] + c$$

Teoremin özel halleri:

$E[g(X) + h(X)] = E[g(X)] + E[h(X)]$
$E[aX] = aE[X]$
$E[X + c] = E[X] + c$
$E[c] = c$

Ortalama Değer ve Momentler

ÖRNEK: X , S_X={-3,-1,1,3} kümesinden değer alan düzgün dağılımlı bir değişken ve $Z = (2X+10)^2$ olsun. $E[Z]$ nedir?

ÇÖZÜM: $E[Z] = E[(2X+10)^2] = E[4X^2+40X+100]$

$$= 4E[X^2] + 40E[X] + 100 = 4(5) + 40(0) + 100 = 120$$

ÖRNEK: X, n = 48 ve p = 1/3 parametreli ki terimli rastlantı değişkeni olmak üzere

$$Z = \begin{cases} 0, & X \leq 20 \\ X-20, & X > 20 \end{cases}$$

olsun. $E[Z]$ nedir

ÇÖZÜM:

$$E[Z] = \sum_{k=21}^{48} (k-20)\binom{48}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{48-k} = 0.182$$

Ortalama Değer ve Momentler

- Ortalama değer, bir rastlantı değişkeni hakkında sınırlı bilgi vermektedir. Örneğin, $E[X] = 0$ ise, X her zaman sıfıra eşit olabileceği gibi çok büyük negatif ve pozitif değerler de alabilir.

- Rastlantı değişkeninin ortalama değeri etrafında sapması X-$E[X]$ değişken hakkında ek bir bilgi vermektedir.

- Sapma, pozitif veya negatif değerler alabilir. Ölçmek istediğimiz büyüklük, sapmanın genliği olduğundan, hiçbir zaman negatif değer vermeyen sapmanın karesi $D(X) = (X-E[X])^2$ ele alınmalıdır.

- D'nin ortalamasına rastlantı değişkeninin VARYANSI (DEĞİŞİNTİSİ) denir.

- Bir rastlantı değişkeninin ortalama değeri sabit olduğundan, bundan sonraki tartışmalarda ortalama değer $m_X = E[X]$ notasyonu ile belirtilecektir.

Ortalama Değer ve Momentler

Tanım: X ayrık rastlantı değişkeninin **VARYANSI**

$$\sigma_X^2 = \mathrm{VAR}[X] = E[(X - m_X)^2]$$
$$= \sum_{x \in S_x} (x - m_X)^2 p_X(x) = \sum_k (x_k - m_X)^2 p_X(x_k)$$

eşitliğiyle tanımlanır.

Tanım: Varyansın kareköküne **STANDART SAPMA** denir ve σX ile gösterilir

$$\sigma_X = \mathrm{STD}[X] = \sqrt{\mathrm{VAR}[X]}$$

Ortalama Değer ve Momentler

- Varyans aşağıdaki verilen eşitlikten de hesaplanabilir:

.

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \mathrm{VAR}[X] = E[(X - m_X)^2] = E[X^2 - 2m_X X + m_X^2] \\ &= E[X^2] - 2m_X E[X] + m_X^2 \\ &= E[X^2] - m_X^2\end{aligned}$$

- $E[X^2]$'ye X'in İKİNCİ MOMENTİ denir.
- n pozitif bir tamsayı olmak üzere, $E[X^n]$'ye X'in n. MOMENTİ denir.
- Ortalama değer, birinci momente eşittir.
- Varyans, ikinci momentten birinci momentinin karesi çıkartılarak hesaplanabilir.

Ortalama Değer ve Momentler

Varyans, aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\begin{aligned}&\mathrm{VAR}[X+c] = E[X+c-(E[x]+c)^2]\\&= E[(X-E[X])^2] = \mathrm{VAR}[X]\end{aligned}$$

$$\mathrm{VAR}[cX] = E[(cX-cE[x])^2] = E[c^2(X-E[X])^2] = c^2\mathrm{VAR}[X]$$

$$\mathrm{VAR}[c] = E[(c-c)^2] = E[0] = 0$$

Ortalama Değer ve Momentler

ÖRNEK: Üç kez para atıştaki tura sayısı *X* olsun. VAR[*X*] nedir?

ÇÖZÜM:

$$E[X^2] = 0^2\left(\frac{1}{8}\right) + 1^2\left(\frac{3}{8}\right) + 2^2\left(\frac{3}{8}\right) + 3^2\left(\frac{1}{8}\right) = 3$$

$$\mathrm{VAR}[X] = E[X^2] - m_X^2 = 3 - 1.5^2 = 0.75$$

ÖRNEK: Bernoulli rastlantı değişkeninin varyansını hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

$$E[X^2] = 0^2 p_X(0) + 1^2 p_X(1) = 0(1-p) + 1(p) = p$$

$$VAR[X] = E[X^2] - m_X^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

Ortalama Değer ve Momentler

ÖRNEK: Geometrik rastlantı değişkeninin varyansını hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $$E[X^2]=\sum_{k=1}^{\infty}k^2pq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2q^{k-1}=p\sum_{k=0}^{\infty}k^2q^{k-1}$$

Geometrik seri formülü: $$\frac{1}{1-q}=\sum_{k=0}^{\infty}q^k$$

Serinin her iki yanının q'ya göre iki kez türevi alınır ve her iki taraf pq ile çarpılırsa

$$\frac{2pq}{(1-q)^3}=pq\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)q^{k-2}=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)pq^{k-1}=E[X^2]-E[X]$$

$$\Rightarrow E[X^2]=\frac{2pq}{(1-q)^3}+E[X]=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}=\frac{1+q}{p^2}$$

$$\mathrm{VAR}[X]=E[X^2]-m_X^2=\frac{1+q}{p^2}-\left(\frac{1}{p}\right)^2=\frac{q}{p^2}$$