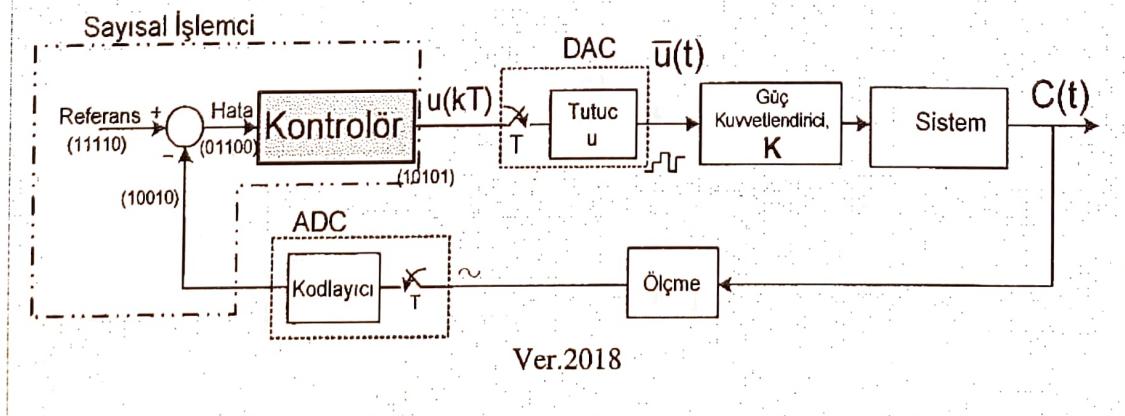


$$K_d = \frac{|z_1|}{\sin \beta} \left[ \frac{K_i \sin \beta}{|z_1| - 2 \cos \beta + \frac{1}{|z_1|}} + \frac{\sin \psi}{|G_p(z_1)|} \right]$$

**SAKARYA ÜNİVERSİTESİ**  
Elektrik-Elektronik Mühendisliği

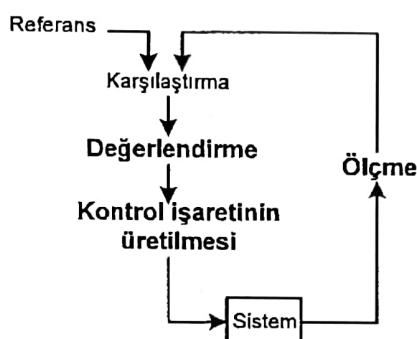
## OTOMATİK KONTROL DERS NOTLARI

Prof. Dr. Ayhan Özdemir

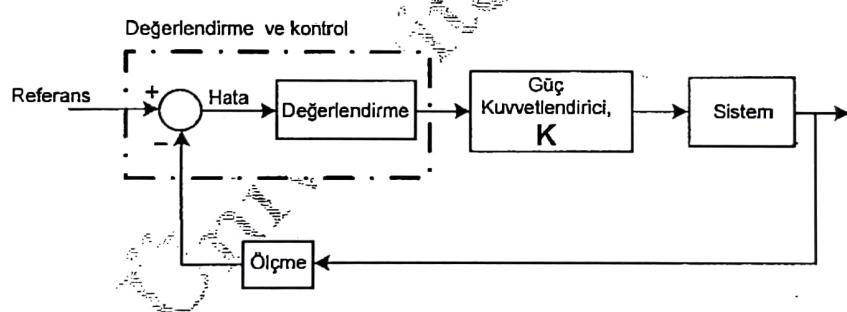


## 1. Kontrol Sistemlerine Giriş

**Kontrol**, bir sistemde fiziksel büyülüğün/büyüklüklerin istenen referans değeri belirlenen performansta takip etmesini sağlayan kurallar olarak tanımlanabilir. Amaç, fiziksel sistemdeki herhangi bir büyülüğü (sıcaklık, basınç, hız,...vs) istenen referans değere belirlenen performansı sağlayacak şekilde getirilmesidir. En geniş manada kontrol sistemlerinin aşağıda akış diyagramında gösterildiği gibi üç temel bloktanoluştugu düşünülebilir: **Ölçme, değerlendirme ve kontrol işaretinin üretilmesi**.

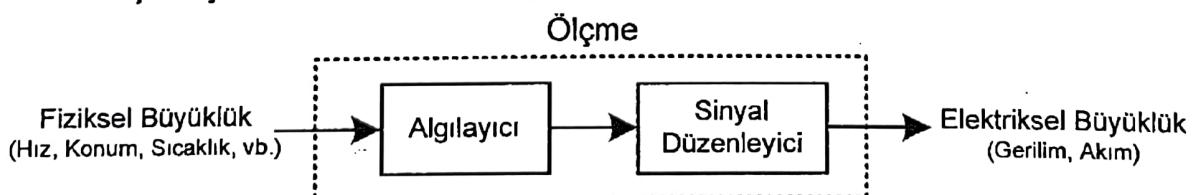


Yukarıdaki şekilde akış diyagramı verilen kontrol sistemi için kapalı-çevrim kontrol blok diyagram gösterimi aşağıdaki gibi verilebilir.



Verilen kontrol blok diyagramında kesikli-noktalı çizgi ile çevrelenen değerlendirme ve kontrol kısmı analog veya sayısal işlemci tarafından gerçekleştirilebilir.

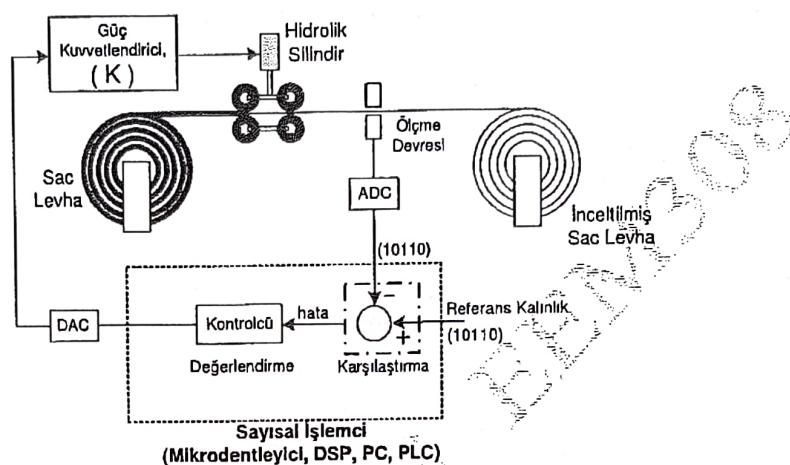
Kontrol edilen sistemin çıkış işaretinin çoğunlukla fiziksel (hız, basınç, sıcaklık, seviye vb.) bir büyülüktür. Kontrol sistemleri ise elektriksel işaretlere göre işlem yapan sistemlerdir. Dolayısıyla kontrol edilmek istenen sistemin fiziksel büyülüğü ile orantılı bir elektriksel işaret (gerilim, akım) üretilmelidir. Bu işlem algılayıcı ve işaret düzenleyici devreler yardımı ile gerçekleştirilir. Aşağıda genel olarak gösterildiği gibi algılayıcı ve sinyal düzenleyici devreden oluşan ölçme sistemi fiziksel bir büyülüğü elektrik işaretine dönüştürür.



Ölçme sistemi: Algılayıcı ve işaret düzenleyici devre.

Aşağıda çeşitli kontrol sistemlerine ait örnekler verilmiştir.

- I- Sac Levha Kalınlık Kontrolü:** Amaç rulo halindeki sac levha kalınlığının belirlenen referans değere getirilmesidir. Kontrol sistemindeki her bir blok aşağıda kısa olarak izah edilecektir.



**Ölçme devresi:** Sac kalınlığı ile orantılı olarak akım veya gerilim işaretini üretir.

**ADC (Analog Digital Converter, Analog Sayısal Dönüşürücü):** Sürekli zaman giriş işaretini ayrık-zaman sayısal işaretre dönüştürür. Ölçme devresinin sac kalınlığı ile orantılı olarak ürettiği işaretler sayısal kodlara dönüştürülür.

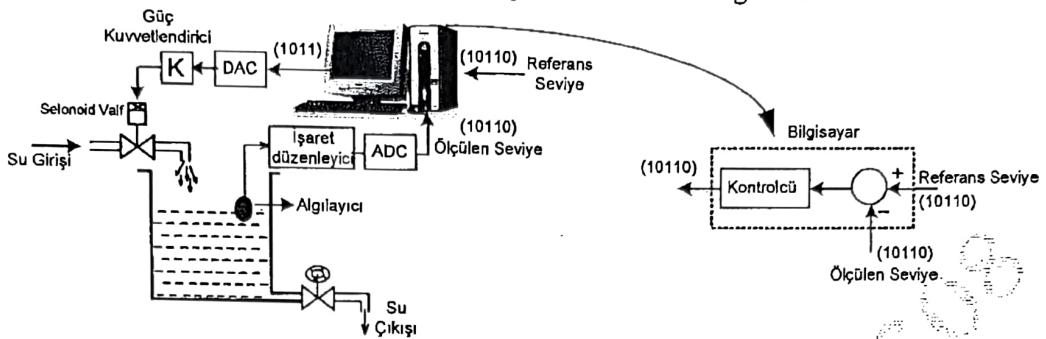
**Sayısal işlemci:** Mikrodenetleyici (Microcontroller MC), sayısal işaret işleyici (Digital Signal Processor DSP), Kişisel bilgisayar (Personal Computer PC) veya Programlanabilir lojik denetleyici (Programmable Logic Controller, PLC) olabilir. Sayısal işlemci, öncelikle referans sac kalınlığı ile ölçülen sac kalınlığı arasındaki hata değerini hesaplar. Bu hata işaretine belirlenmiş olan kontrol kurallarını uygular ve çıkışında sayısal olarak kontrol işaretini üretir.

**DAC (Digital Analog Converter, Sayısal Analog Dönüşürücü):** Üretilen sayısal kontrol işaretini sayısal analog dönüştürücü ve tutucu ile sürekli zaman (analog) işaretre dönüştürür.

**Güç Kuvvetlendirici (Power Amplifier, PA):** Sayısal işlemci ve DAC ile analog kontrol işaretini üretilmiştir. Bu işaret güç kuvvetlendirici ile güç işaretine dönüştürülür ve hidrolik silindire uygulanır. Hidrolik silindirin pozisyonu kontrol edilerek sac kalınlığı istenen referans değere getirilir.

İleriki konularda matematik modelleri verilecek olan ADC ve DAC işaret dönüştürücü olarak kullanılmış arayüz devreleridir.

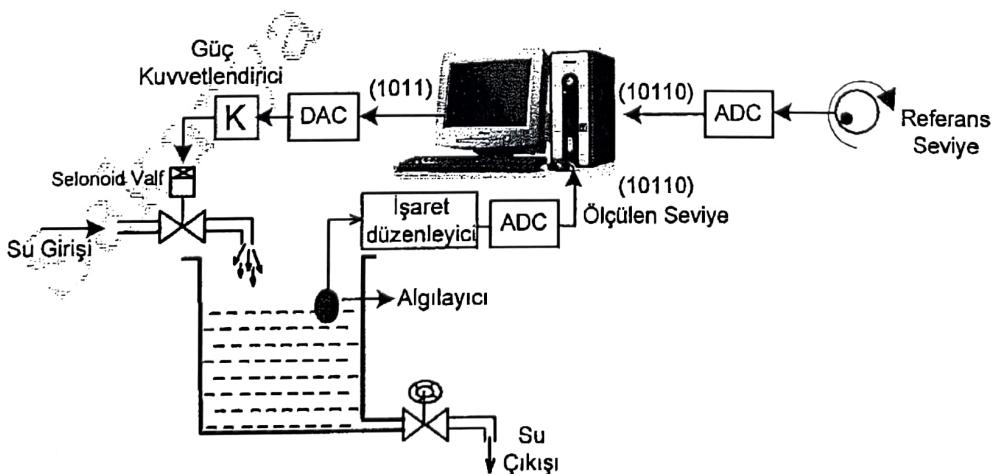
- 2- Sıvı Seviye Kontrolü:** Aşağıda bir sıvı tankına ait sıvı seviye kontrol sistemi ile ilgili olarak basitleştirilmiş kontrol düzeneği verilmiştir. Burada amaç tanktaki sıvı seviyesini belirlenmiş olan referans seviyede tutulmasını sağlamaktır.



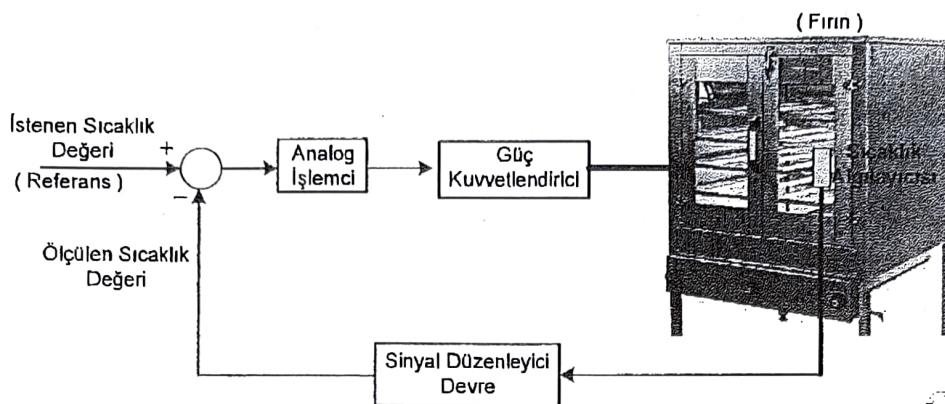
Verilen sistemde su (sıvı) seviyesi ölçme devresi ile ölçülp ADC tarafından sayısal işaret dönüştürülmektedir. Sayısal işlemci (PC) referans su seviyesi ile ölçülen su seviyesini karşılaştırarak hata değerini hesaplamaktadır. Ardından hata işaretini kontrol kuralı ile işlenerek kontrol işaretini üretmektektir. Sayısal tabanlı olarak üretilen işaret, DAC vasıtası ile analog işaret dönüştürülerek ve güç kuvvetlendirici, K, ile selonoid valfe sürülmektedir.

Yukarıda verilen birinci sisteme saç malzemenin kalınlığı kontrol edilirken ikinci sisteme ise bir tanktaki su (sıvı) seviyesi kontrol edilmek istenmektedir. Görüldüğü gibi her iki sisteme birbirinden çok farklı fizikal büyüklükler kontrol edilmektedir. Ancak kontrolcü açısından her iki sistem için yapılan işlem adımları aynıdır. Bu işlemler yukarıda akış ve blok diyagramı ile gösterildiği gibi; ölçme, değerlendirme ve kontrol işaretinin üretilmesi olarak sıralanabilir. Sonuç olarak kontrol edilmek istenen fizikal sistem ne olursa olsun ana kontrol blokları temel işlemler açısından değişmemektedir.

Yukarıda verilen sayısal işlemci tabanlı örnek iki kontrol sisteminde de (saç levha kalınlığı ve sıvı seviye) referans değer sayısal (örnek;10010) olarak belirtilmiştir. Gerçek zaman uygulamalarda referans değerinin dışarıdan analog olarak girildiği durumlarda mümkündür. Yukarıda verilen PC tabanlı sıvı-seviye kontrol sistemi için bu durum aşağıda gösterilmiştir.



- 3-Sıcaklık Kontrolü:** Aşağıda ise bir fırının analog işlemci ile gerçekleştirilen sıcaklık kontrol sistemi için basitleştirilmiş blok diyagramı gösterilmiştir. Analog işlemciler işlemsel kuyvetlendiriciler (Operational Amplifier OP-AMP) ile gerçekleştirilir.



Yukarıda verilen örnek kontrol sistemlerinde işlemci olarak hem analog hem de sayısal işlemciler gösterilmiştir. Analog işlemciler, işlemsel kuvvetlendiriciler (OP-AMP) kullanılarak donanımsal olarak gerçekleştirilirler. Eğer kontrol kuralında bir değişiklik yapılmak istenir ise, tasarlanmış ve gerçekleştirilmiş olan analog kontrolcü üzerinde donanımsal olarak müdahale yapılması ve devre topolojisinin değişmesi gerekebilecektir. Bu durum oldukça zahmetli ve masraflı bir süreçtir. Diğer yandan analog kontrolcüler toz, sıcaklık, titreşim gibi çevre koşullarından aşırı derecede etkilendiklerinden kontrol performansı olumsuz etkilenir.

Sayısal işlemcilerde (mikrodenetleyici, DSP, PC veya PLC) ise ölçme, değerlendirme ve kontrol işaretinin üretilmesi işlemleri tasarımcı tarafından yapılan yazılımla gerçekleştirilir. Gerektiğinde yazılım içerisinde ilgili kısımlar değiştirilerek kontrol kuralı yada yöntemleri kolay bir şekilde güncellenebilir. Yine yazılım sayesinde, cihaz tarafından kullanıcı yönlendirilebilir, bilgilendirilebilir yada emniyet tedbirleri alınabilir.

Otomatik kontrol sistemlerini incelemeye başlamadan önce bazı temel terimlerin tanımlanması uygun olacaktır.

### 1.1 Temel Kavramlar

**Sistem:** Bir bütünü oluşturan, birbirine bağlı veya bir işlem için bir araya getirilmiş olan elemanlar kümesidir.

Örneğin yukarıda gösterilen sayısal işlemci tabanlı sac levha kalınlık kontrol sisteminde işlenmemiş sac levha rulosu, hidrolik silindirler, ölçme devresi, ADC, sayısal işlemci, DAC, güç kuvvetlendirici ve inceltilmiş sac rulosu sistemi oluşturan elemanlardır.

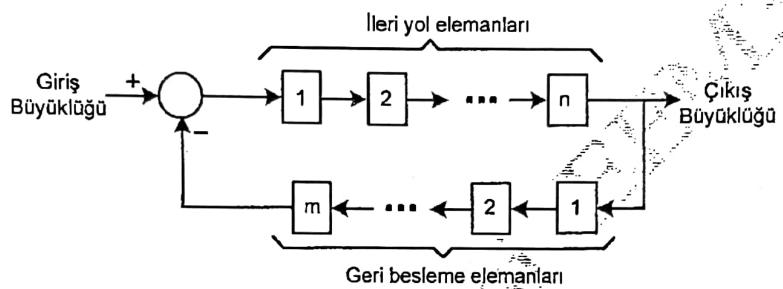
**Süreç (Proses):** Belirli bir sonuca yöneltilmiş bir dizi kontrol aksiyonundan oluşan hareketler dizisidir. Başka bir ifade ile sistem tarafından yerine getirilen işlev olarak tanımlanabilir.

Sac levha kontrol sisteminde, işlenmemiş sac rulosundan sacın çekilmesi hidrolik silindirler tarafından sıkıştırılarak inceltimesi, ölçme devresi tarafından sac levha kalınlığı ile orantılı elektriksel işaret üretilmesi, kontrolcünün gerekli değerlendirmeleri yaparak kontrol kuralını işlemesi ve kontrol işaretini üretmesi ve hidrolik silindirleri süren güç devresine iletmesi, istenen kalınlığa getirilen sac levhanın ruloya sarılması sistem tarafından gerçekleştirilen süreç (proses) olarak ifade edilir.

**Bozucu:** Sistemin davranışını olumsuz yönde etkileyen sinyallerdir. Örneğin yukarıda verilen fırın sıcaklık kontrol sisteminde çalışma anında fırın kapısının açılıp kapanması durumunda fırın ile ortam arasındaki sıcaklık farkından dolayı fırın ile ortam arasında ısı transferi gerçekleşecektir ve neticede fırın sıcaklığı değişecektir. Dolayısıyla fırın kapısının açılıp kapanması fırın sıcaklık kontrol sistemi için bozucu bir bozucudur.

Sıvı tank seviye kontrol sisteminde kullanıcının ihtiyacına bağlı olarak sıvı tank çıkışındaki vanayı aç-kapa yapması tank içindeki sıvı seviyesini olumsuz etkileyecektir, bu bir bozucudur.

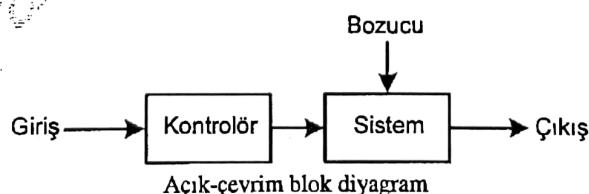
**Geri besleme:** Bir sistemde çıkış büyüğünün giriş büyüğünne toplam veya fark olarak etki etmesidir.



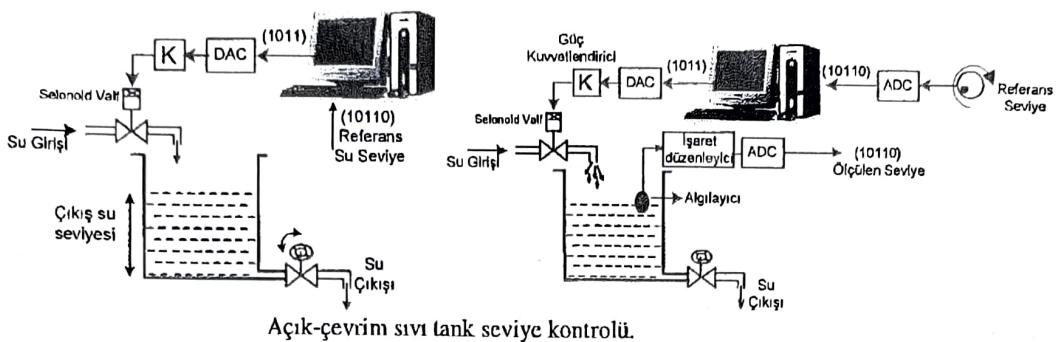
Yukarıda verilen sac levha kalınlık kontrol sisteminde sac kalınlığının, sıvı seviye kontrol sisteminde sıvı tank içindeki sıvı seviyesinin, veya sıcaklık kontrol sisteminde iç-fırın sıcaklığının ölçüлerek kontrolcüye iletilmesi her bir sistem için bir *geri beslemedir*.

**Kumanda:** Sistemlerin istenilen bir duruma yönlendirilmesidir. Kontrol ise sistem çıkışındaki fizikalı büyüklüğün, bozucu etkisinde olsa bile, istenilen bir referans değerinde sürekli tutulmasıdır.

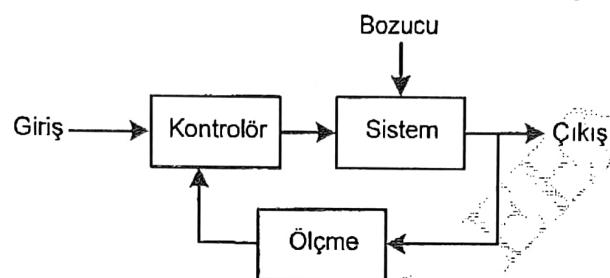
**Açık Çevrim:** Çıkış büyüğünün kontrol işlemine etkisinin olmadığı sistemlerdir. Başka bir ifade ile açık çevrim kontrol sistemlerinde çıkış işaretini giriş referans işaret ile karşılaştırılmaz.



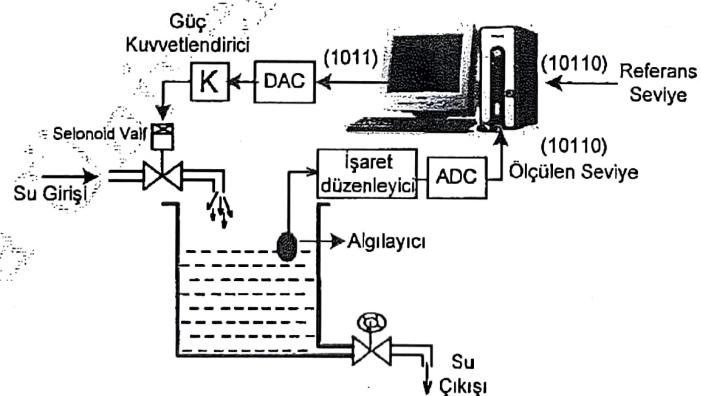
Aşağıda açık çevrim sistemlere örnek olarak bir sıvı-seviye kontrol sistemi verilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi, sıvı tank içindeki sıvı seviyesinin giriş referans su seviyesi ile hiçbir etkileşimi yoktur. Sıvı tank içindeki sıvı seviyesi ölçülmemekte ve geri besleme yapılmamaktadır. Sıvı tank içindeki sıvı seviyesi ölçülmüş olsa da, eğer referans işaretine etki etmez ise yine bir açık-çevrimdir.



**Kapali Çevrim:** Çıkış büyülüğünün kontrol işlemine doğrudan etki ettiği sistemlerdir.

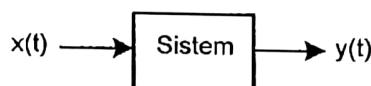


Kapali çevrim sistemlere örnek olarak aşağıda, sıvı-seviye sistemi verilebilir. Şekilden görüldüğü gibi sistem çıkışı olan su seviyesi ölçülerek ve referans su seviye ile karşılaştırılarak kontrolörün değerlendirilmesi hata işaretini elde edilmektedir. Dolayısı ile sistemin çıkışı kontrol kural işlemine doğrudan etki etmektedir.

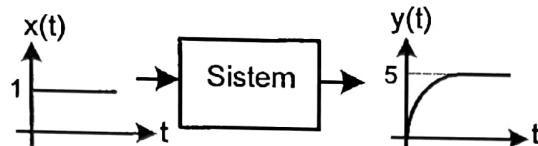


**Nedensellik:** Herhangi bir anda sistemin çıkışı sadece o andaki ve/veya geçmişteki girişlerine ve/veya çıkışlarına bağlı olan sistemlerdir. Sistem çıkışının elde edilmesinde gelecekteki giriş değerlerine ihtiyaç duymazlar. Nedensel olmayan sistemlerde şimdiki çıkış değeri için gelecekteki giriş değerine ihtiyaç vardır. Fizikselli sistemler nedenseldir ve gerçek zaman uygulama ve tasarımda nedensellik gerek şarttır.

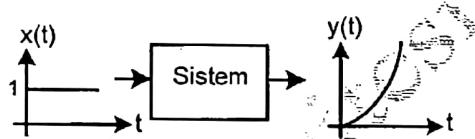
**Kararlılık:** Girişine sınırlı bir işaret uygulandığında çıkış işaretinin sınırlı olan sistemler giriş çıkış ilişkisi açısından kararlı sistemler olarak tanımlanır. Bu durum sınırlı giriş sınırlı çıkış (Bounded Input Bounded Output, BIBO,) kararlılık kriteri olarak adlandırılır. Örneğin aşağıda verilen sistemde;



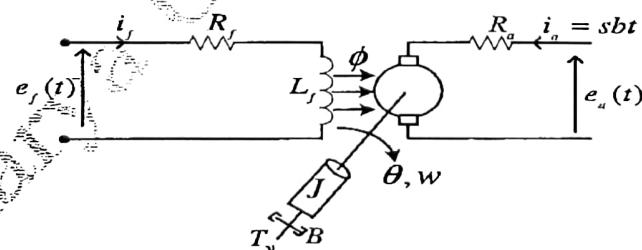
Giriş işaretinin  $x(t) \leq |M| < \infty$  aralığında değerler alırken çıkış işaretinin  $y(t) \leq |N| < \infty$  aralığında kalıyor ise sistem giriş-çıkış ilişkisi açısından kararlıdır.



Verilen sistemin girişine sınırlı bir işaret  $\{x(t) = 1\}$  uygulanmış ve sistemin çıkışında zamanla artarak sınırlı bir değerde  $\{y(t) = 5\}$  kalmıştır. Dolayısı ile sistem giriş-çıkış ilişkisi açısından kararlıdır. Diğer yandan aşağıda verilen başka bir sisteme yine sınırlı bir giriş işaretinin  $\{x(t) = 1\}$  uygulanmış fakat sistem çıkışının  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$  olmaktadır. Dolayısı ile bu sistem giriş-çıkış ilişkisi açısından kararsızdır. Fiziksel sistem gerçek zamanda sonsuza gidemeyeceğinden eğer gerekli koruma önlemleri alınmamış ise tahrip olacaktır. Örneğin bir kalorifer kazanının sıcaklığı sürekli artmak isterse ve koruma önlemleri alınmamış ise kazan patlar.



**Zamanla değişmeyen kontrol sistemi:** Parametreleri zamanla değişmeyen sistemlerdir. Aşağıda verilen DC motorun stator ve rotor dirençleri  $R_a$ ,  $R_f$ , endüktans  $L_f$ , rotor ataleti  $J$  ve viskos sürtünmesi  $B$  değerleri, gerçek zaman uygulamalarda çalışma anında çevre şartlarına bağlı olarak değişebilmektedir. **Zamanla değişmeyen kontrol sistem'lerinde** bu parametrelerin sabit kaldığı kabul edilmektedir.



Parametreleri zamanla değişmeyen Alan-kontrollü DC-makine

**Lineer Kontrol sistemi:** *Sistem parametreleri durum değişkenlerine bağlı değil ise bu tür kontrol sistemlerine "Lineer Kontrol sistemi" denir. Lineer sistemler aynı zamanda **süperpozisyon (çarpımsallık ve toplamsallık)** ilkesini sağlayan sistemlerdir.*

n. dereceden lineer (doğrusal) bir sistem matematik modeli

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t) \quad \text{diferansiyel denklemi ile verilir.}$$

Burada,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  katsayıları  $y(t)$ 'nin fonksiyonu olmadığı sürece diferansiyel denklem "doğrusal adı diferansiyel denklem" olarak adlandırılır. "t" bağımsız değişken, "y(t)" ise diferansiyel denklemin çözülmesi ile bulunması gereken bağımlı değişken dir.

*n. dereceden doğrusal (lineer) sistemin durum uzay modeli vektör-matris formunda,*

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

ile verilir. A ve B katsayı matrisleri sabit ise "zamanla değişmeyen lineer Kontrol sistemi",

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

A ve B katsayı matrisleri sabit değil ise "zamanla değişen lineer kontrol sistemi" olarak adlandırılır.

**Lineer Olmayan Kontrol sistemi:** Sistem parametreleri durum değişkenlerine bağlı olan sistemlerdir.

Sistemi tanımlayan diferansiyel denklem,

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}(y(t)) \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = g(y(t))f(t) \quad \text{olarak verilebilir.}$$

Diferansiyel denklemde  $g(y(t))$  ve/veya  $a_0, a_1, \dots, a_n$  katsayılarının bazıları  $y(t)$  nin fonksiyonudur ve "Lineer olmayan diferansiyel denklem" dir.

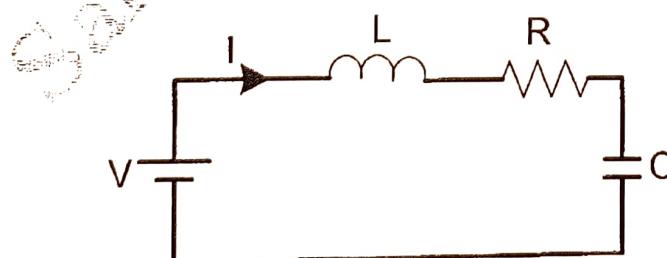
*Lineer olmayan sistem durum uzay modeli ise,*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + g(x(t))u(t)$$

biçiminde verilir.

Aşağıda sırası ile lineer ve lineer-olmayan bir sistem ele alınacaktır. Her bir sisteme ait diferansiyel denklemler yazılacak ve durum-uzay modelleri elde edilecektir.

### Örnek-1:



Şekilde verilen devrede  $R, L$  ve  $C$  parametre değerleri sabittir. Sisteme ait dinamik denklemeler yazınız ve durum uzay modelini vektör-matris formunda veriniz.

**Çözüm:**

$$\text{Çevre denklemi, } V(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Kondansatör gerilimi ve akımı için,  $V_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \rightarrow i(t) = C \frac{dV_c(t)}{dt}$  ifadeleri yazılır.

$$i(t) \text{ ifadesi } V(t) \text{ yerine koyulur, } V(t) = RC \frac{dV_c(t)}{dt} + L \frac{d}{dt} (C \frac{dV_c(t)}{dt}) + V_c(t)$$

$$\begin{aligned} \text{Ve düzenlenir ise, } V(t) &= RC \frac{dV_c(t)}{dt} + LC \frac{d^2V_c(t)}{dt^2} + V_c(t) \\ \frac{d^2V_c(t)}{dt^2} &= -\frac{R}{L} \frac{dV_c(t)}{dt} - \frac{1}{LC} V_c(t) + \frac{1}{LC} V(t) \end{aligned}$$

elde edilir.

Diferansiyel denklem incelendiğinde, **2. dereceden doğrusal adı diferansiyel denklem** olduğu görülür. Dolayısı ile şekilde verilen RLC devresi lineer bir Sistemdir.

*Durum uzay modeli elde edilsin.* Durum değişkenlerini,

$$x_1(t) = V_c(t) \quad x_2(t) = \frac{dV_c(t)}{dt} \quad \text{olarak tanımlayalım. Durum denklemi:}$$

$$x_2(t) = \frac{dV_c(t)}{dt} \rightarrow \text{denkleminde } V_c(t) \text{ yerine } x_1(t) \text{ yazılır.}$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \quad \text{1. durum denklemi ve}$$

$$\frac{d^2V_c(t)}{dt^2} = -\frac{R}{L} \frac{dV_c(t)}{dt} - \frac{1}{LC} V_c(t) + \frac{1}{LC} V(t) \quad \text{denklemde } V_c(t) \text{ yerine } x_1(t)$$

yazılır ise,

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{1}{LC} x_1(t) - \frac{R}{L} x_2(t) + \frac{1}{LC} V(t) \quad \text{2. durum denklemi elde edilir.}$$

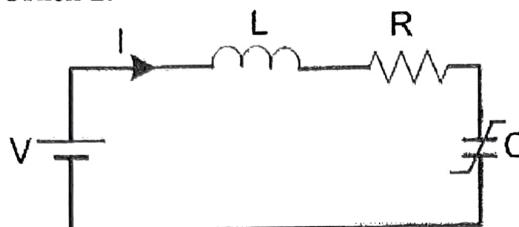
Elden edilen durum denklemi, vektör-matris formu  $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$  şeklinde

yazılır ise,

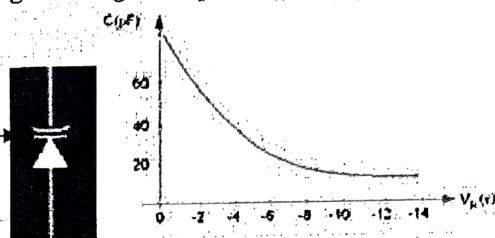
$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u(k)$$

elde edilir.

**Örnek-2:**



**Varaktör:** Uçlarına uygulanan ters polariteli gerilime göre kapasitesi değişen eleman.



Şekilde verilen devrede  $R, L$  sabittir ve kapasite değeri ise kondansatör uç gerilimi ile ters orantılı  $C = f(V_c(t)) = k_c \frac{1}{V_c(t)}$  olarak verilmektedir. Sisteme ait dinamik denklemeler yazınız ve durum uzay modelini veriniz.

*Yukarıda tanımlanan durum değişkenleri ve elde dilen durum denklemeleri kullanılacaktır.*

**Çözüm:**

$$x_1(t) = V_c(t) \quad x_2(t) = \frac{dV_c(t)}{dt} \text{ olmak üzere,}$$

$$C = f(V_c(t)) = k_c \frac{1}{V_c(t)} \text{ olarak verildiğine göre}$$

$$C = k_c \frac{1}{x_1(t)} \text{ olarak yazılabilir.}$$

! Lineer olmayan sistem tanımı, “*Sistem parametreleri durum değişkenlerine bağlı olan sistemlerdir*” hatırlanır ise,  $C$  parametresinin durum değişkeni  $x_1(t)$ ’e bağlı olduğu ve sistemin Lineer olmayan sistemi tanımına uyduğu görülebilir.

*Yukarıda elde edilen  $\frac{d^2V_c(t)}{dt^2}$  denkleminde  $C$  yerine  $\frac{k_c}{V_c(t)}$  yazılır ise, sistemi tanımlayan diferansiyel denklem,*

$$\frac{d^2V_c(t)}{dt^2} = -\frac{R}{L} \frac{dV_c(t)}{dt} - \frac{1}{L(\frac{k_c}{V_c(t)})} V_c(t) + \frac{1}{L(\frac{k_c}{V_c(t)})} V(t) \quad \text{halini alır, düzenlenir ise,}$$

$$\frac{d^2V_c(t)}{dt^2} = -\frac{R}{L} \frac{dV_c(t)}{dt} - \frac{1}{Lk_c} V_c^2(t) + \frac{1}{Lk_c} V_c(t)V(t) \quad \text{olarak elde edilir.}$$

Elde edilen 2. dereceden diferansiyel denklemden görüldüğü gibi  $V_c^2(t)$  ve  $V_c(t)V(t)$  terimlerinden dolayı denklem lineer değildir. Sonuç olarak, şekilde verilen RLC devresi lineer olmayan bir sistemdir.

**Durum uzay modeli::**

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \quad 1. \text{ durum denklemi aynı kalır}$$

2. durum denkleminde,  $C = k_c \frac{1}{x_1(t)}$  yazılır ise,

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{L(k_c \frac{1}{x_1(t)})} x_1(t) - \frac{R}{L} x_2(t) + \frac{1}{L(k_c \frac{1}{x_1(t)})} V(t) \quad \text{elde edilir ve düzenlenir ise.}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{Lk_c} x_1^2(t) - \frac{R}{L} x_2(t) + \frac{1}{Lk_c} x_1(t)V(t) \quad \text{şeklini alır. Durum denklemi matrisel}$$

olarak  $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + g(x(t))u(t)$  formunda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{1}{Lk_c} x_1(t)^2 - \frac{R}{L} x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Lk_c} x_1(t) \end{bmatrix} V(t)$$

$$f(x(t)) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{1}{Lk_c} x_1(t)^2 - \frac{R}{L} x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad g(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Lk_c} x_1(t) \end{bmatrix} \quad \text{dir.}$$

!! Lineer olmayan sistemlere ait durum denklemler vektör matris formu

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad \text{şeklinde yazılamaz}$$

## 1.2 İşaretler

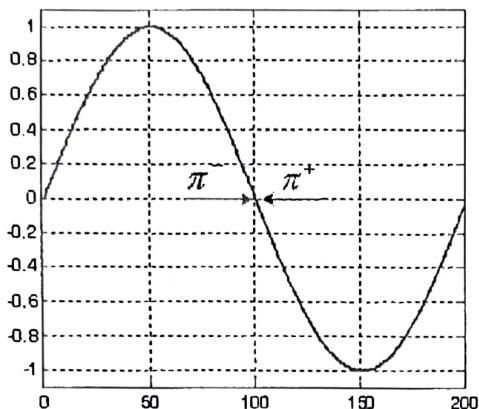
**İşaret:** Sistem elementlerinin ve sistemlerin birbirleri arasında etkileşmeyi sağlayan her türlü ölçülebilir büyüklüktür.

Bir işaret “ $f(t)$ ” notasyonu ile temsil ediliyor olsun. Burada “ $t$ ” bağımsız değişken “ $f(t)$ ” ise bağımlı değişken olarak tanımlanır. İşaretler bağımsız değişken “ $t$ ” nin aldığı değerlere göre sürekli zaman işaretler ve ayrik zaman işaretler olarak iki ana sınıfa ayrılır.

### 1-) Sürekli zaman işaret:

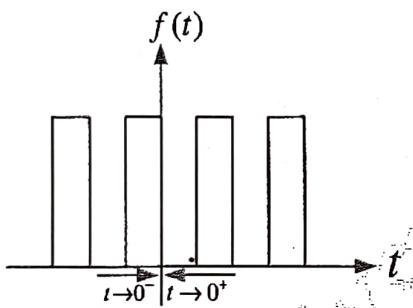
İşaretin bağlı olduğu bağımsız “ $t$ ” değişkeni sürekliidir ve işaret “ $t$ ” nin tüm anları için bir degere sahiptir. Sürekli zaman işaretlerde kendi arasında ikiye ayrılır:

- i) **Sürekli işaret:**  $f(t)$  fonksiyonunun tanımlı olduğu her noktada işaretin sağdan ve soldan limitleri birbirine eşittir. Örneğin aşağıdaki şekilde verilen  $f(t)=\sin(t)$  işaretinin “ $t$ ” anı için sağdan ve soldan limitler birbirine eşittir. Aynı zamanda, her nokta için sağdan ve soldan limitler birbirine eşittir.



Sinüs işaretinin her noktasında sağdan ve soldan limitler eşit olduğundan sinüs işaretü sürekli bir işaretettir.

- ii) **Süreksiz işaret:**  $f(t)$  fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıktaki herhangi bir noktada sağdan ve soldan limitler birbirine eşit değildir.

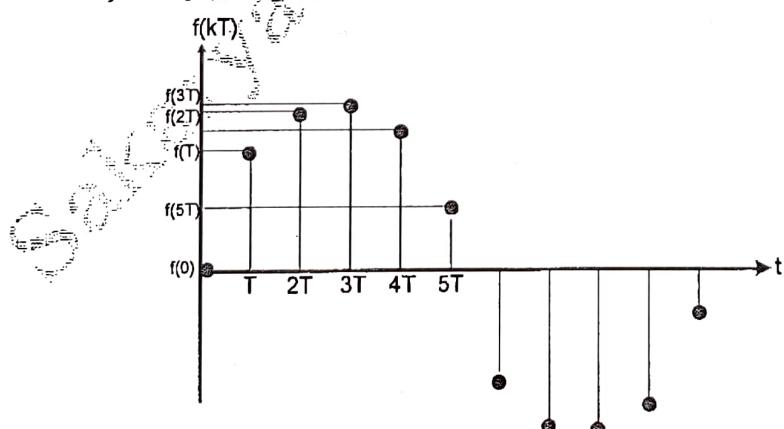


$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0$$

$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) \neq \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$  olduğundan  $f(t)$  işaretü sürekli bir işaretettir.

Süreksiz işaretettir.

- 2-) **Ayırık-zaman işaret:** İşaretin bağlı olduğu bağımsız “ $t$ ” değişkeni sadece belirli anlar için tanımlıdır ve işaret sadece bu anlar için değer almaktadır. Aşağıda sürekli-zaman “ $\sin(t)$ ” işaretinin  $T$  periyodu ile örneklenmesi ile elde edilen ayırik zaman “ $\sin(kT)$ ” işaretü gösterilmiştir.  $f(t) = \sin(t)$   $t \rightarrow kT$  için  $f(kT) = \sin(kT)$



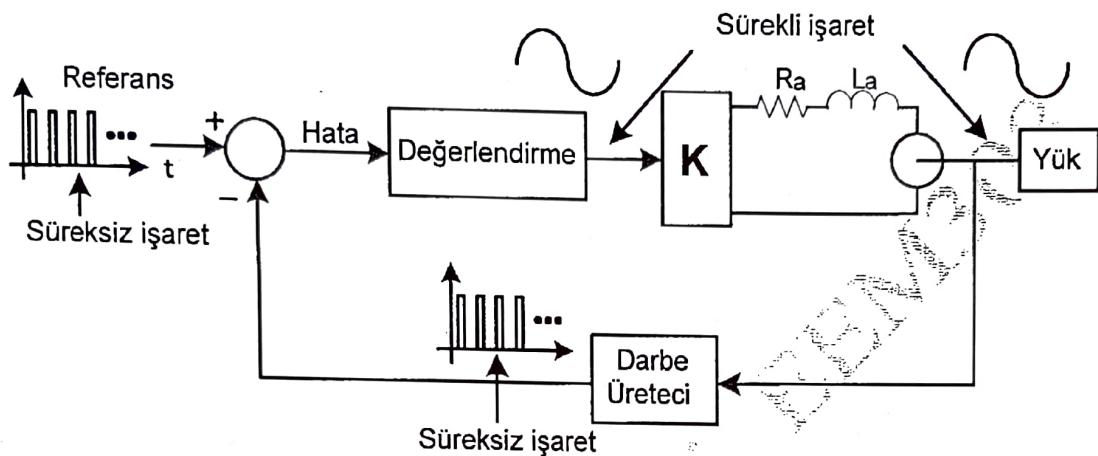
Şekilden görüldüğü gibi ayırik-zaman  $f(kT)$  işaretü bağımsız “ $t$ ” değişkeninin sadece belirli anları ( $0T, T, 2T, 3T, \dots$ ) için tanımlıdır. Yani  $f(kT)$  sadece bu anlar için bir değere sahiptir.

# Sürekliye Teori (Nelikeler örneklilikte? Bütçeyi boyk, olsalar en iyisine hizalır?)

Otomatik Kontrol Prof. Dr. Ayhan Özdemir

İki nokta arasında  $f(kT)$  tanımsızdır dolayısıyla iki nokta arasında  $f(kT)$ 'nin değeri için bir şey söylemenemez, çünkü *iki nokta arasından sonsuz adet eğri geçebilir.*

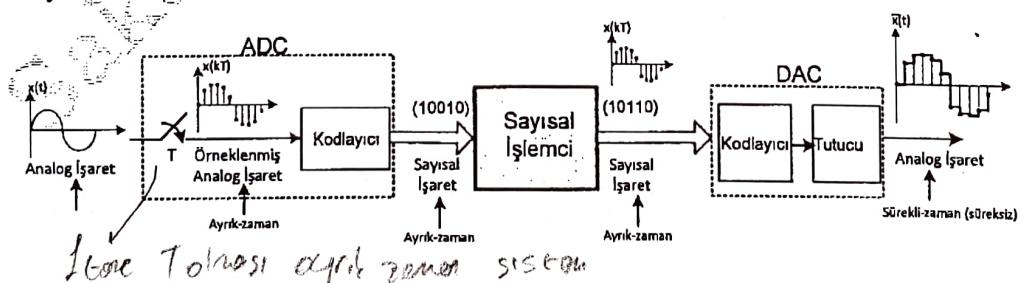
**Sürekli zaman kontrol sistemi:** İşaretler sürekli ve/veya süreksiz olabilir. Aşağıda örnek bir sürekli zaman kontrol sistemi gösterilmiştir. İ işaretlerin tümü sürekli zamandır. Bundan dolayı sistem analiz ve sentezinde diferansiyel denklemler çözülmeden S-domeninde analiz ve sentez yapılır.



Şekilde verilen sistem incelendiğinde, kapalı-çevrim sistemindeki işaretlerin sürekli-zaman sürekli ve süreksiz işaretlerdenoluştugu görülmektedir.

## Ayırık-zaman sistem:

Sistemdeki işaretlerden biri dahi ayırik zaman ise o sistem ayırik zaman sistemdir. Ayırik zaman sistemlerin giriş ve çıkış işaretleri ayırik zamandır. Sayısal işlemciler (Bilgisayar, Programlanabilir Lojik Denetleyiciler, Mikrodenetleyiciler,...) ayırik zaman sistemlere en iyi örnek teşkil ederler. Ancak gerçek zaman kontrol uygulamalarında kontrol edilen sistemin doğası gereği ölçüüp kontrol edilecek olan büyüklükler zamanda sürekli işaretlerdir. Bu büyüklüklerin sayısal işlemciler (mikrodenetleyici, DSP, PC, PLC) tarafından ölçülebilmesi, değerlendirilebilmesi ve kontrol işaretinin üretilebilmesi için aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi giriş-çıkışlarda sinyal dönüştürücü (ara-yüz) elemanlara ihtiyaç duyulur. Analog-Sayısal Dönüşürtücü (Analog-Digital Converter, ADC) ve Sayısal-Analog Dönüşürtücü (Digital-Analog Converter, DAC) olarak adlandırılan bu ara-yüz elemanlarının modellenmesi ilerleyen bölümlerde ele alınacaktır.



Şekilde verilen sayısal işlemci ayırik-zaman sistemlere en iyi örneklerden birisidir. Giriş ve çıkış işaretleri ayırik-zaman sayısal işaretlerdir. Yukarıda verilen örnektenden görüldüğü gibi verilmiş ayırik zaman sistem hem sürekli hemde ayırik zaman işaretleri barındırmaktadır, yani işaret türü yönünden hibrittir (melezdir).

### 1.3 Kontrol Sistemlerinin Sınıflandırılması:

Kontrol sistemleri ana ve alt başlıklar olarak aşağıda verildiği gibi genel olarak sınıflandırılabilir.

#### A) Analiz ve Sentez Yönünden

##### A-1) Lineer Sistemler

##### A-2) Lineer olmayan Sistemler

#### B) İşaret Türü Yönünden

##### B-1) Sürekli zaman (AC, DC)

##### B-2) Ayrık zaman (Aynık analog, Aynık sayısal)

##### B-3) Belirgin işaretler (Deterministik), Olası işaretler (Stokastik)

#### C) Karmaşıklık Yönünden

##### C-1) Tek-giriş, tek-çıkış

##### C-2) Çok-giriş, çok-çıkış

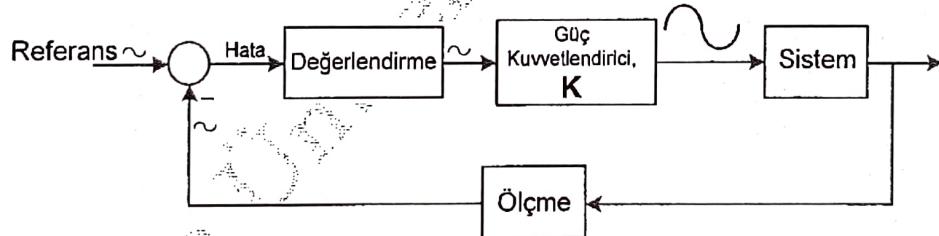
#### D) Sistemin Zamanla olan Fonksiyonel İlişkisi

##### D-1) Zamanla Değişmeyen sistem

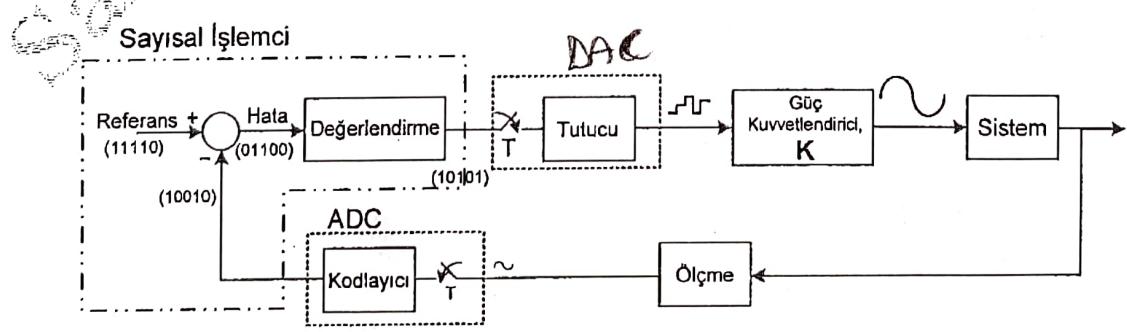
##### D-2) Zamanla Değişen sistem

Sınıflandırılan kontrol sistemlerinden; lineer, zamanla değişmeyen, (çoğunlukla) tek-giriş tek-çıkış, zamanda sürekli ve ayrık işaretli sistemler incelenecektir.

Lineer, zamanla değişmeyen, **zamanda sürekli kontrol sisteme** ait kapalı çevrim kontrol blok diyagramı aşağıda gösterilmiştir.



Burada “~” zamanda sürekli işaret temsil etmektedir. Bundan sonraki konu anlatımları akışı içinde kullanılacak olan zamanda sürekli işaret ifadesi yukarıda açıklanan “**sürekli ve sürekli işaretleri**” kapsamaktadır. Lineer, zamanla değişmeyen, **zamanda ayrık kontrol sisteme** ait kapalı çevrim kontrol blok diyagramı ise aşağıda verilmiştir.



\*Ayrık-zaman kapalı çevrim kontrol sistemi \*

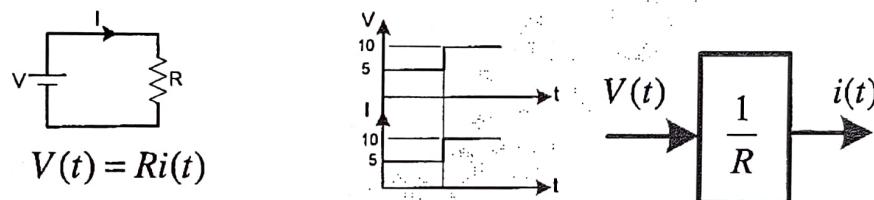
## 2. Statik ve Dinamik Sistemler

Kontrol teorisinden bir sistemin statik yada dinamik olması sistemdeki giriş-çıkış işaretlerinin değişimi ile ilgilidir. Sistemler, giriş ve çıkış işaretleri arasında gecikme olup olmamasına göre aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir.

- i) Statik sistemler (giriş- çıkış işaretleri arasında gecikme yok)
- ii) Dinamik sistemler (giriş- çıkış işaretleri arasında gecikme var)

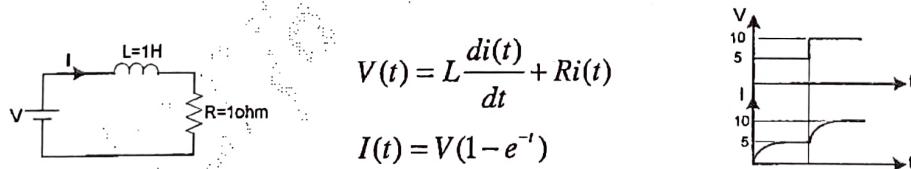
**Statik Sistemler:** Giriş – çıkış bağıntısı cebirsel denklemlerle ifade edilebilen sistemlerdir. Statik sistemlerde sistemin herhangi bir andaki çıkışı sadece o andaki girişe bağlıdır. Statik sistemlerde sistemin girişi ile çıkışı arasında gecikme yoktur. Sistem çıkışı giriş işaretindeki değişimleri gecikmesiz olarak ani olarak takip eder. Statik sistemler anlık sistemler olarak da adlandırılır. Örnek olarak aşağıda verilen elektrik devresi incelensin.

**Giriş:** Gerilim kaynağı işareti  $V$ , **Çıkış:** Yük akımı  $I$ ,  $R=1 \text{ ohm}$



Sistemden akan akımın ifadesi  $I=V/R$  dir. Girişe uygulanan  $V$  gerilimi ile  $R$  direnci üzerinden akan akım grafiksel olarak yukarıda gösterilmiştir. Görüldüğü gibi girişe uygulanan  $V$  geriliminin değeri değiştiği anda  $I$  akımının değeri de gecikmesiz olarak değişmektedir, akım giriş gerilimindeki değişikliği gecikmesiz olarak takip eder.

**Dinamik Sistemler:** Sistemin herhangi bir andaki çıkışı, çıkış işaretinin ve/veya giriş işaretinin o andaki ve/veya geçmişteki değerlerine bağlı olan sistemlerdir. Dinamik sistemler bellekli sistemler olarak da adlandırılır.



Yukarıda verilen örnek R-L devresinde görüldüğü gibi dinamik sistemlerde çıkış giriş'i belli bir gecikme ile takip eder. Dinamik sistemler diferansiyel denklemler veya aşağıda RLC devresinde verildiği gibi integro-diferansiyel denklemler ile ifade edilir.

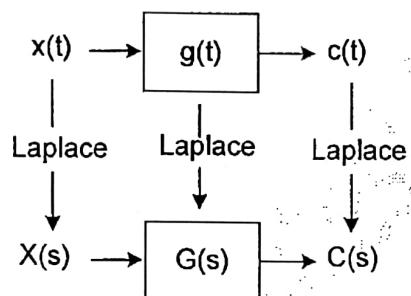
**Genel bir dinamik sistem;** n. dereceden bir diferansiyel denklem ile aşağıdaki gibi modellenir.

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_m x$$

Bir sistemin analizi yapılrken sisteme ait diferansiyel denklemelerin çözülmesi gereklidir. Ancak yüksek dereceli diferansiyel denklemelerin çözülmesi karmaşık işlemlerden dolayı zordur. Bu nedenle lineer dinamik sistemlerin çözümünde, işlem kolaylığı olması açısından, Laplace dönüşümü kullanılarak integro - diferansiyel denklemeler cebirsel denklemelere dönüştürülür. Böylece sisteme ait diferansiyel denklemeler çözülmeden grafiksel metotlar yardımı ile sistemin analizi ve sentezi yapılabilir.

## 2.1 Transfer fonksiyonu

*Lineer zamanla değişmeyen sistemlerde* başlangıç koşulları sıfır alınarak çıkış işaretinin Laplace dönüşümünün giriş işaretinin Laplace dönüşümüne oranına transfer fonksiyonu denir.



$X(s) \rightarrow$  giriş işaret Laplace dönüşümü,  $C(s) \rightarrow$  çıkış işaret Laplace dönüşümü

Reel bağımsız değişkenli bir  $f(t)$  fonksiyonunun **Laplace dönüşümü**;

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt, \quad (s = \sigma + jw \text{ olmak üzere}) \text{ ifadesi ile hesaplanır.}$$

$$X(s) = L\{\dot{x}(t)\} = \int_0^\infty x(t)e^{-st} dt \quad \text{ve}$$

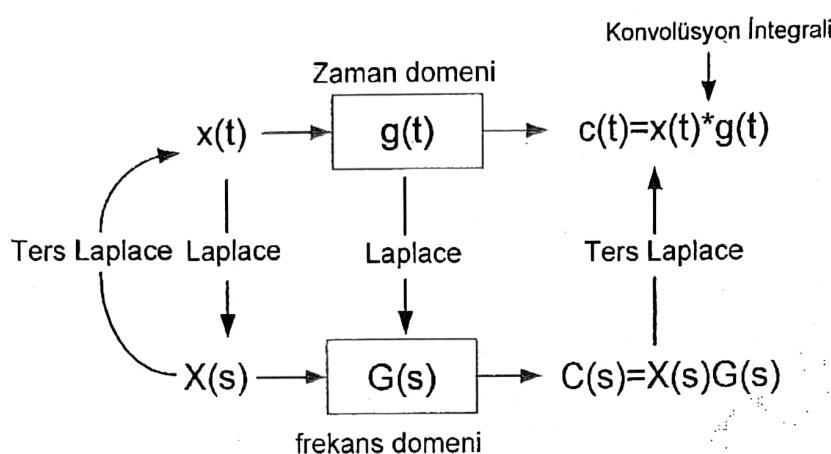
$$C(s) = L\{c(t)\} = \int_0^\infty c(t)e^{-st} dt \quad \text{dir.}$$

**Transfer fonksiyonu**  $G(s) = \frac{C(s)}{X(s)} = \frac{\text{Çıkışın Laplace dönüşümü}}{\text{Girişin Laplace dönüşümü}}$  (ilk koşullar sıfır)

Çıkış ifadesi, kompleks S-düzleminde  $C(s) = X(s)G(s)$  çarpımıdır.

$$G(s) = \frac{C(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + s^n} \quad \text{ifadesi ile verilir.}$$

Fiziksel nedensel sistemlerde (nedensel sistemler için)  $n \geq m$  dir.



Kompleks düzlemede  $C(s) = X(s)G(s)$  çarpımı, zaman domeninde  $c(t) = x(t) * g(t)$  konvolüsyon integraline karşılık gelir.

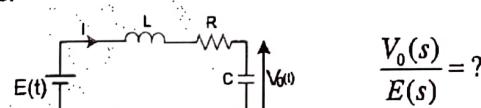
$$c(t) = L^{-1}\{C(s)\} = x(t) * g(t) = \int_0^t x(\tau)g(t-\tau)d\tau \rightarrow \text{konvolüsyon integrali (katlama integrali).}$$

$$= \int_0^t g(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad \text{ile verilir. } g(t) \text{ ve } x(t) \quad t < 0 \text{ için sıfırdır.}$$

$$= g(t) * x(t)$$

$$C(s) = L\left\{\int_0^t g(\tau)x(t-\tau)d\tau\right\} = G(s)X(s) \quad \text{yazılabilir.}$$

**Örnek:** Aşağıda verilen R-L-C devresinin transfer fonksiyonunu (matematiksel modelini) elde ediniz.



*Herhangi bir sistemin transfer fonksiyonu yazılıurken,*

1-) Öncelikle incelenen sistemin  $t$ -domenin de dinamik denklemleri yazılır

R-L-C devresi için dinamik denklemler aşağıdaki gibi yazılabılır.

$$E(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad \text{çevre denklemi yazılır.}$$

$$V_0(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad \text{çıkış kondansetör gerilimi.}$$

2-)  $t$ -domeninde yazılan integro-diferansiyel denklemler ilk koşullar=0 alınarak  $s$ -domenine dönüştürülür.  $t$ -domeninden  $s$ -domenine geçilirken integral ve türev operatörleri için aşağıdaki dönüşümler yapılır.

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) \quad \text{ve} \quad L\left\{\int f(t) dt\right\} \rightarrow \frac{F(s)}{s}$$

**not:** İlk koşullar sıfırdır. Laplace Dönüşüm Özellikleri Bölümüne Bakınız.

Bu durumda R-L-C devresi için 1. adımda elde edilen integro-diferansiyel denklemler aşağıdaki gibi  $s$ -domenine dönüştürülür.

$$E(s) = LS I(s) + RI(s) + \frac{1}{sC} I(s) = I(s) \left[ \frac{s^2 LC + sRC + 1}{sC} \right]$$

*girişin Laplace dönüşümü.*

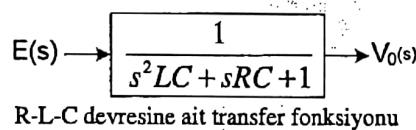
$$V_0(s) = \frac{I(s)}{sC}$$

*çıkışın Laplace dönüşümü.*

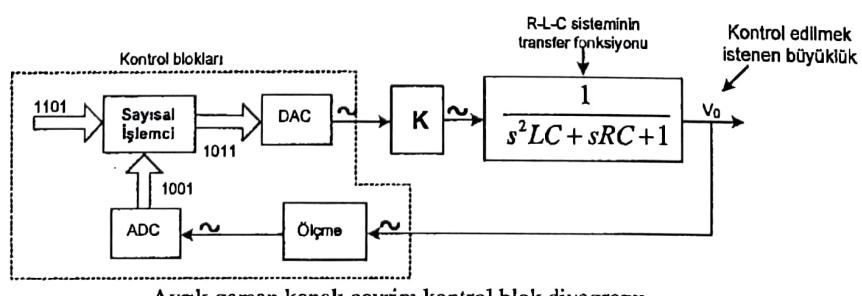
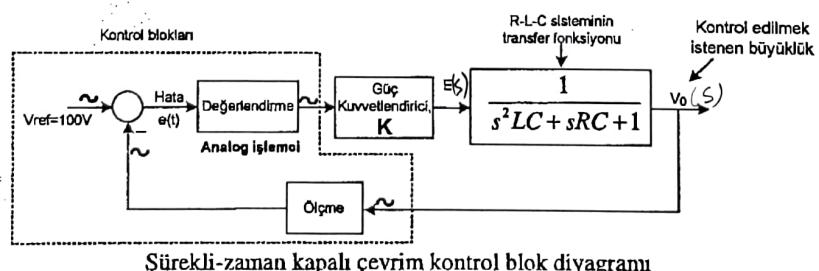
Böylece RLC sistemine ait transfer fonksiyonu çıkış girişi oranlanarak bulunur.

$$\frac{V_0(s)}{E(s)} = \frac{1}{s^2 LC + sRC + 1}$$

Yukarıda verilen R-L-C devresinde transfer fonksiyonuna ait kontrol blok diyagramı aşağıda verilmiştir.



İncelenen R-L-C sisteminde kondansatör gerilim kontrolü için kapalı çevrim kontrol blok diyagramı analog ve sayısal kontrol için aşağı ayrı gösterilmiştir.



Analog işlemci ve sayısal işlemci için verilen kapalı çevrim kontrol blok diyagramları karşılaştırıldığında aradaki farkın sadece *kontrol bloklarında* olduğu görülür. Dolayısıyla kontrol algoritmasının analog veya sayısal işlemci ile yapılmıyor olması sistemin transfer fonksiyonunun (matematik modelinin) elde edilmesi aşamalarını değiştirmemektedir.

Ancak, Sürekli-zaman ve Ayrık-zaman sistemlerin analiz ve sentezleri kontrol teorileri açısından çok farklılıklar içtiva etmektedir. Ayrıca birbirlerine göre avantaj ve dezavantajlara sahip olabilmektedirler.

## 2.2 Laplace Dönüşüm

Aşağıda verilen tanımlara göre;

$$f(t) = 0 \quad t < 0 \text{ için ,}$$

$s = \sigma + jw$  bir kompleks değişken ve  $F(s)$ ,  $f(t)$  'nin Laplace dönüşümü olmak üzere,

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \text{ dir.}$$

Ters Laplace dönüşümü ise,

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} f(t)e^{st} ds \quad t > 0 \quad \text{integrali ile hesaplanabilir.}$$

Ters Laplace işleminin integral ifadesine bakıldığından karmaşık olduğu görülmektedir, ters Laplace işlemlerinde bu ifade pek kullanılmamaktadır. Çok daha basit yöntemler ile ters Laplace işlemi gerçekleştirilmektedir.

**Örnek1:**  $f(t) = 0 \quad t < 0$

$f(t) = 10u(t) \quad t \geq 0$  verildiğine göre Laplace dönüşümü  $F(s)$ 'i bulunuz,

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} 10e^{-st} dt = -\frac{10}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{10}{s}\right)$$

$$F(s) = \frac{10}{s}$$

**Örnek2:**  $f(t) = 0 \quad t < 0$

$f(t) = t \quad t \geq 0$  verildiğine göre Laplace dönüşümü  $F(s)$  bulunuz,

$$\begin{aligned} F(s) = L\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = -t \frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt \\ &= \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ F(s) &= \frac{1}{s^2} \text{ olarak elde edilir.} \end{aligned}$$

**Örnek3:**  $f(t) = 0 \quad t < 0$   
 $f(t) = e^{-3t} \quad t \geq 0$  verildiğine göre Laplace dönüşümü  $F(s)$  bulunuz,

$$\begin{aligned} F(s) = L\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-3t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+3)t} dt \\ &= \frac{1}{-(s+3)} e^{-(s+3)t} \Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s+3}\right) \\ F(s) &= \frac{1}{s+3} \end{aligned}$$

**Örnek4:**  $f(t) = 0 \quad t < 0$   
 $f(t) = \sin wt \quad t \geq 0$  verildiğine göre Laplace dönüşümü  $F(s)$  bulunuz,

$$\begin{aligned} F(s) = L\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} \sin wt e^{-st} dt \\ \sin wt &= \frac{1}{2j}(e^{jw t} - e^{-jw t}) \text{ olarak yazılır ve integral ifadesinde yerine koyulur ise,} \\ &= \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} (e^{jw t} - e^{-jw t}) e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} (e^{(jw-s)t} - e^{-(jw+s)t}) dt \\ &= \frac{1}{2j} \left( -\frac{e^{-(s-jw)t}}{s-jw} + \frac{e^{-(jw+s)t}}{s+jw} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s-jw} - \frac{1}{s+jw} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{s+jw}{(s-jw)(s+jw)} - \frac{s-jw}{(s+jw)(s-jw)} \right) \\ &= \frac{w}{s^2 + w^2} \\ F(s) &= \frac{w}{s^2 + w^2} \end{aligned}$$

$f(t)$  fonksiyonunun Laplace dönüşümünü almak için her defasında

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \text{ integralinin hesaplanması gerekmek.}$$

Verilen bir  $f(t)$  fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulmak için Laplace dönüşüm tablosundan yararlanılabilir. Aşağıda, gerekli durumlarda başvurmak üzere, en genel ve sık kullanılan  $f(t)$  fonksiyonları için Laplace dönüşüm Tablosu verilmiştir.

*Genel Laplace Dönüşüm Çiftleri*

<i>f(t) fonksiyon</i>	<i>Laplace Dönüşüm</i>
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{ab} \left[ 1 + \frac{1}{a-b} (be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\sin(\omega_n t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega_n^2}$
$\cos(\omega_n t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$
$e^{-at} \sin(\omega_n t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega_n^2}$
$e^{-at} \cos(\omega_n t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_n^2}$

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \{f(t)\} e^{-st} dt$$

Kontrol mühendisliğinde önemli olan bazı Laplace dönüşüm özelliklerini aşağıda Tablo halinde verilmiştir.

### Genel Laplace Dönüşüm Özellikleri

Tanım	Gösterilim
Dönüşüm tanımı	$f(t) \xleftarrow{L} F(s)$ $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$
Lineerlik	$Af_1(t) + Bf_2(t) \xleftarrow{L} AF_1(s) + BF_2(s)$
Birinci Türev	$\frac{df(t)}{dt} \xleftarrow{L} sF(s) - f(0^+)$
İkinci türev	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \xleftarrow{L} s^2 F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$
n. dereceden türev	$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \xleftarrow{L} s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} f^{(i-1)}(0^+)$
Integral	$\int_0^t f(\lambda) d\lambda \xleftarrow{L} \frac{1}{s} F(s)$
Zaman ile çarpma	$t f(t) \xleftarrow{L} \frac{dF(s)}{ds}$
Zaman gecikmesi	$f(t-a)U(t-a) \xleftarrow{L} e^{-as} F(s)$
Kompleks kaydırma	$f(t)e^{-at} \xleftarrow{L} F(s+a)$
Ölçekleme	$f\left(\frac{t}{a}\right) \xleftarrow{L} aF(as)$
Konvolusyon Özelliği	$f_1(t) * f_2(t) \xleftarrow{L} F_1(s)F_2(s)$
İlk değer teoremi	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Son değer teoremi	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}, 1.\text{dereceden türev ifadesinin Laplace dönüşümü},$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = f(t)\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] \frac{e^{-st}}{-s} dt, \\ &= \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] e^{-st} dt \end{aligned}$$

$u = f(t) \quad dv = e^{-st} dt \quad \text{dönüşülmü}_i \text{ yapıılır}$   
 $du = df(t) \quad v = \frac{e^{-st}}{-s} \quad \text{ve } uv - \int vdu \text{ integral}_i \text{ hesabi yapılır.}$

$$F(s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s} L\left\{\left[ \frac{d}{dt} f(t) \right]\right\} \quad \text{buradan} \quad L\left\{\left[ \frac{d}{dt} f(t) \right]\right\} \quad \text{çekilir ise,}$$

$f(0) + L\left\{\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]\right\} = sF(s)$  ve düzenlenir ise,

$$L\left\{\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]\right\} = sF(s) - f(0) \quad \text{olarak elde edilir.}$$

2. dereceden türev ifadesinin Laplace dönüşümü,  $g(t) = \frac{df(t)}{dt}$  tanımı yapılır,

$$\begin{aligned} L\left\{\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right]\right\} &= L\left\{\left[\frac{d}{dt}g(t)\right]\right\} = sL[g(t)] - g(0), \quad g(0) = \frac{df(0)}{dt} \\ &= sL\left\{\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]\right\} - \frac{df(0)}{dt} \\ &= s[sF(s) - f(0)] - \frac{df(0)}{dt} \end{aligned}$$

$$L\left\{\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right]\right\} = s^2F(s) - sf(0) - \frac{df(0)}{dt} \quad \text{olarak elde edilir.}$$

Benzer olarak  $n$ . dereceden türev ifadesinin Laplace dönüşümü aşağıda verilmiştir.

$$L\left\{\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right]\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\frac{df(0)}{dt} - \dots - s^1f(0)^{n-2} - f(0)^{n-1}$$

$L\left\{\int f(t)dt\right\}$ , Bir fonksiyon integralinin Laplace dönüşümü,

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty \left[ \int f(t)dt \right] e^{-st}dt, \quad dv = e^{-st}dt \text{ alınır ise } v = \frac{e^{-st}}{-s} \text{ olur.} \\ &= \left[ \int f(t)dt \right] \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) \frac{e^{-st}}{-s} dt \\ &= \frac{1}{s} \int f(0)dt + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad \text{not: } f^{-1}(0) = \int f(t)dt \quad t=0 \text{ için alınmıştır.} \end{aligned}$$

$$L\left\{\int f(t)dt\right\} = \frac{f^{-1}(0)}{s} + \frac{F(s)}{s} \quad \text{olarak elde edilir.}$$

□

Laplace dönüşüm özellikleri ilgili örnekler:

**Örnek1:**  $C(s) = \frac{12}{s(s+1)(s+3)}$  olarak verildiğine göre  $c(\infty) = ?$  değerini hesaplayınız.

Son değer teoreminde,  $c(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s)$   $c(\infty) = \frac{12}{(0+1)(0+3)} \rightarrow c(\infty) = 4$

**Örnek2:**  $f(t) = 0 \quad t < 0$

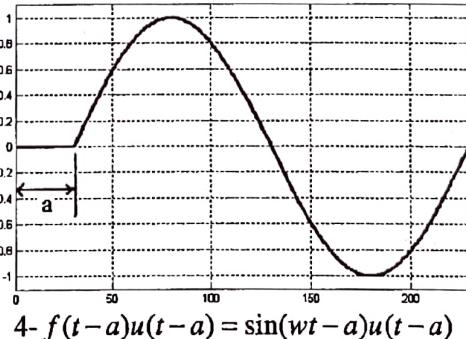
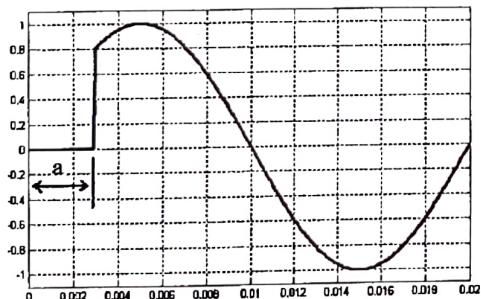
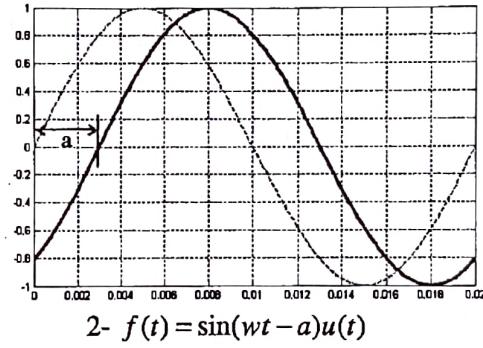
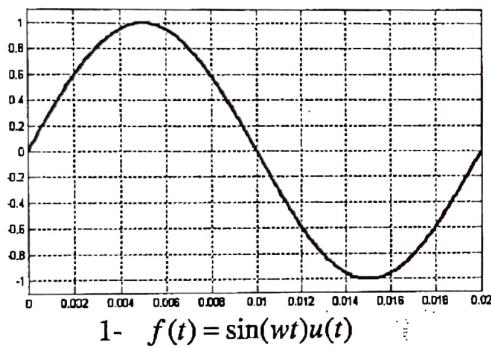
$f(t) = e^{-3t}u(t) \quad t \geq 0$  verildiğine göre  $f(t-3)u(t-3)$  Laplace dönüşümünü bulunuz.

$L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$  zaman gecikme özelliği kullanılacaktır,

$L\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}$  daha önceden bulunmuştu veya tablodan elde edilebilir.

$$L\{f(t-3)u(t-3)\} = \frac{e^{-3s}}{s+3}$$

**Not:**  $f(t)$  fonksiyonunun çeşitli gecikme durumları için grafikler aşağıda verilmiştir.



$$f(t) = \sin(wt)u(t-a) = \sin(wt - a + a)u(t-a) = \{\sin(wt - a)\cos(a) + \cos(wt - a)\sin(a)\}u(t-a)$$

$$= \cos(a)\sin(wt - a)u(t-a) + \sin(a)\cos(wt - a)u(t-a)$$

$$F(s) = e^{-as} \left( \cos(a) \frac{1}{s^2 + a^2} + \sin(a) \frac{s}{s^2 + a^2} \right)$$

Birim basamak fonksiyonunun:

$$\begin{aligned} u(t) &= 1 \quad t > 0 \\ u(t) &= 0 \quad t < 0 \end{aligned} \quad \text{olduğu göz önünde bulundurulmalıdır.}$$

**Örnek3:**  $f(t) = 0 \quad t < 0$

$f(t) = 5 \sin t \ u(t) \quad t \geq 0$  verildiğine göre  $f(t-2)u(t-2)$  Laplace dönüşümünü bulunuz.

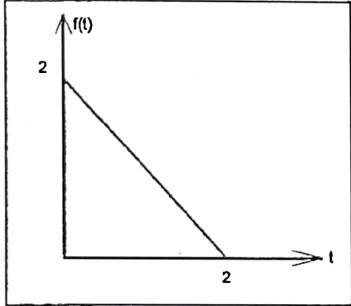
$$f(t) = 5 \sin t \ u(t) \quad \text{ise} \quad F(s) = \frac{5}{s^2 + 1} \quad \text{dir.}$$

$f(t-2)u(t-2) = 5 \sin(t-2) \ u(t-2)$  olarak yazılır.

$L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$  zaman gecikme özelliği kullanılacaktır,

$$= \frac{5e^{-2s}}{s^2 + 1}$$

**Örnek4:**



Sırası ile  $g(t)$  ve  $y(t)$  fonksiyonları için denklemler yazılır ise,

$$g(t) = (-t+2)u(t) \quad \text{ve}$$

$$y(t) = (t-2)u(t-2) \quad \text{ifadeleri elde edilir.}$$

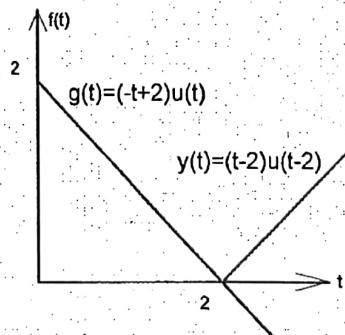
$f(t)$  eğrisi,

$$f(t) = g(t) + y(t) \quad \text{şeklinde yazılır.}$$

$$= (-t+2)u(t) + (t-2)u(t-2)$$

Yanda verilen  $f(t)$  fonksiyonunun Laplace dönüşümü  $F(s)$ 'i bulunuz.

$f(t)$  fonksiyonu  $g(t)$  ve  $y(t)$  fonksiyonlarının toplamı olarak düşünülebilir.



$$L\{t\} = \frac{1}{s^2} \quad L\{(t-2)u(t-2)\} = \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

$$F(s) = L\{f(t)\} = L\{g(t)\} + L\{y(t)\} \quad \text{lineerlik özelliği}$$

$$F(s) = L\{(-tu(t) + 2u(t)\} + L\{(t-2)u(t-2)\}, \quad L\{(t-2)u(t-2)\} = \frac{e^{-2s}}{s^2} \quad \text{zaman gecikme özelliği}$$

$$F(s) = -\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2} \quad \rightarrow \quad F(s) = -\frac{1}{s^2}(1 - e^{-2s}) + \frac{2}{s} \quad \text{dir.}$$

### 2.3 Ters Laplace dönüşümü

Ters Laplace dönüşümü,  $F(s)$  in rezidü toplamları bulunarak elde edilebilir.  $F(s)$ , fonksiyonu her bir kutup için rezidü'ye sahiptir.

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds = \sum \text{rezidüller},$$

$F(s)$ 'in basit bir kutup için rezidü hesabı,

$$\boxed{\text{rezidü} = \lim_{s \rightarrow \text{kutup}} [(s - \text{kutup})F(s)e^{st}]}$$

ifadesi ile hesaplanır. Diğer bir kompakt ifade ile, kompleks değişkenli fonksiyonlar teoreminde rezidü yöntemi ile ters Laplace dönüşümü  $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ ,

$$\boxed{f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[ (s - s_i)^m F(s) e^{st} \right]_{s=s_i}}$$

ifadesi kullanılarak hesaplanır.

Ters Laplace dönüşümü için diğer bir yol, Transfer fonksiyonu basit kesirlere ayrılır ve her bir terim için ayrı ayrı ters Laplace dönüşümü bulunur.

**Örnek1:**  $F(s) = \frac{10(s+5)}{s(s+2)}$  verilmektedir. Ters Laplace dönüşümü ile  $f(t)$  'yi elde ediniz.

**1-Yol:** Kutuplar:  $s_1 = 0$  ve  $s_2 = -2$  dir. Her bir kutup için rezidü hesabı aşağıda yapılmaktadır. 2 adet rezidü var.

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \sum \text{rezidüller}$$

$$f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ (s-0) \frac{10(s+5)}{s(s+2)} e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow -2} \left[ (s+2) \frac{10(s+5)}{s(s+2)} e^{st} \right]$$

$$f(t) = \frac{10(0+5)}{(0+2)} e^{0t} + \frac{10(-2+5)}{-2} e^{-2t}$$

$$f(t) = 25u(t) - 15e^{-2t} \quad t \geq 0$$

**2.Yol:** Basit kesirlere ayırarak:  $\frac{10(s+5)}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2)}$  ise  $A = 25$  ve  $B = -15$  elde edilir.

$$F(s) = \frac{10(s+5)}{s(s+2)} = \frac{25}{s} - \frac{15}{(s+2)} \text{ ise } f(t) = 25u(t) - 15e^{-2t} \quad t \Rightarrow 0 \text{ olarak elde edilir.}$$

**Katlı kök durumunda Rezidüler:** Katlı kök durumunda rezidü hesabında aşağıda verilen ifadelerden herhangi biri kullanılabilir.

$$\text{rezidü} = \lim_{s \rightarrow \text{kutup}} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[ (s - \text{kutup})^m F(s) e^{st} \right]$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[ (s - s_i)^m F(s) e^{st} \right]_{s=s_i} \quad n := 1 \text{ rezidü sayısı } m = 3 \text{ katılık derecesi}$$

**Örnek:**  $F(s) = \frac{10(s+5)}{(s-2)^3}$  verilmektedir. Ters Laplace dönüşümü ile  $f(t)$ 'yi elde ediniz.

Kutuplar:  $s_{1,2,3} = 2$  bir adet rezidü vardır, katalık derecesi  $n=3$  tür.

$$f(t) = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[ (s-2)^3 \frac{10(s+5)}{(s-2)^3} e^{st} \right]$$

$$= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[ 10(s+5)e^{st} \right]$$

$$= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left[ 10ste^{st} + 10e^{st} + 50te^{st} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ 20t^2 e^{2t} + 10te^{2t} + 10tse^{2t} + 50t^2 e^{2t} \right]$$

$$f(t) = (35t^2 + 10t)e^{2t} \quad t \geq 0$$

$$F(s) = \frac{10(s+5)}{(s-2)^3 \cdot (s-3)^2}$$

$s_{1,2,3} = 2 \quad s_4,5 = 3$

$m_1 = 3 \quad m_2 = 2$

**Örnek:**

$$F(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)} \quad \text{ifadesinin ters Laplace' ni elde ediniz...}$$

(dikkat:  $m > n$  Pay derecesi > Payda derecesi)

$$F(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)} = s+2 + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \quad \text{olarak (n payda, m pay derecesi olmak üzere, } n \Rightarrow m \text{ olacak şekilde yazılır.)}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \right\} = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$$L^{-1}\{2\} = 2\delta(t) \quad \text{her bir çarpana ait ters Laplace dönüşümleri alınır sonra toplanır.}$$

$$L^{-1}\{s\} = \frac{d}{dt} \delta(t) \quad f(t) = \frac{d}{dt} \delta(t) + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t} \quad t \geq 0$$

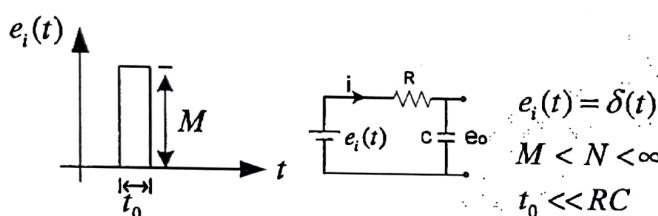
**Yorum:**  $f(t)$  ifadesine göz atıldığında,  $2e^{-t} - e^{-2t}$  bileşeninin fiziksel olarak üretilebileceği görülebilir, nedenseldir.

Ancak,  $\frac{d}{dt}\delta(t) + 2\delta(t)$  kısmı fiziksel olarak üretilemez. Dirac fonksiyonu  $\delta(t)$ 'nin kendisi genliği sonsuz ve sıfır zaman genişliğinde kurgusal olarak matematiksel bir fonksiyondur.  $f(t)$  fonksiyonunda hem  $\delta(t)$  ve hemde  $\delta(t)$ 'nin türevi söz konusudur. Dolayısı ile böyle bir cevap verebilen gerçek zaman bir sistem (fiziksel sistem) söz konusu olamaz, böyle bir işaret üretilemez.

**Sonuç:** Fiziksel sistemler nedenseldir. Fiziksel sistem transfer fonksiyonunda payda derecesi pay derecesinden büyük yada eşit olmalıdır.

$$G(s) = \frac{C(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + s^n} \quad n \geq m$$

**Örnek:** Şekilde  $e_i(t) = \delta(t)$  Dirac olması istensin. Bunun anlamı, sonsuz genlikte ve sıfır zaman genişlikte bir gerilim işaretinin devre girişine uygulanmasıdır. Böyle bir işaret üretici söz konusu olamaz.



Dirac fonksiyonu  $\delta(t)$  yaklaşık olarak üretilebilir. Ancak,  $e_i(t) = \delta(t)$  işaretti, ömek verilen sistem için, zaman sabiti  $RC$  ye göre üretilebilecek en küçük zaman aralığı  $t_0$  ve genlik olarak fiziksel sınırların belirlediği en yüksek genlik  $M$  olmak üzere yaklaşık olarak üretilebilir. Sitemin girişine dahi yaklaşık Dirac  $\delta(t)$  fonksiyonu uygulanabilir iken devre çıkış cevabının Dirac  $\delta(t)$  yada  $\delta(t)$ 'ın türevi olması imkansızdır. Bunun anlamı devre çıkış cevabının giriş işaretinden zamanda önde olmasıdır.

### 3. Sürekli ve Ayrık-Zaman Sistemler

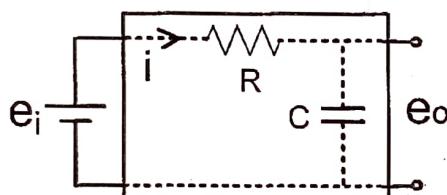
Örneklenmiş işaretin Laplace dönüşümü, "Z-dönüştümü" olarak adlandırılır. Aşağıda sırası ile sürekli-zaman ve ayrık-zaman sisteme örnek olarak basit RC devresi ile beraber örneklemeye teoremi incelenecaktır.

Once,  $e_i(t)$  gerilim kaynağı ile seri bağlı  $R$  direnci ve  $C$  kondansatörden oluşan sistemin matematik modeli elde edilecektir.

Sonra, Örneklemeye olayını ve örneklenmiş veri sisteminin matematik modelinin elde edilmesini açıklamak amacıyla,  $e_i(t)$  gerilim kaynağı ile seri bağlı *ideal örnekleyici*,  $R$  direnç ve  $C$  kondansatörden oluşan sistemin matematik modeli elde edilecektir.

#### 3.1 Sürekli-Zaman Sistem

Aşağıda verilen RC devresi için  $\frac{E_0(s)}{E_i(s)}$  elde edilsin.



1) Dinamik denklemler yazılır,

$$E_i(t) = RI(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$E_0(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

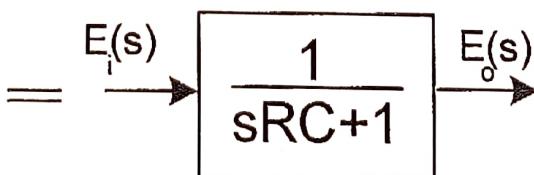
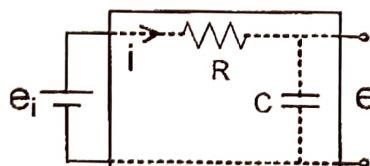
2) ilk koşullar = 0 alarak Laplace dönüşümü alınır,

$$E_i(s) = RI(s) + \frac{1}{sC} I(s)$$

$$E_0(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

R-C devresinin transfer fonksiyonunu

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{sRC + 1} \quad \text{olarak bulunur. Verilen RC devresi sürekli-zaman bir sistemdir.}$$



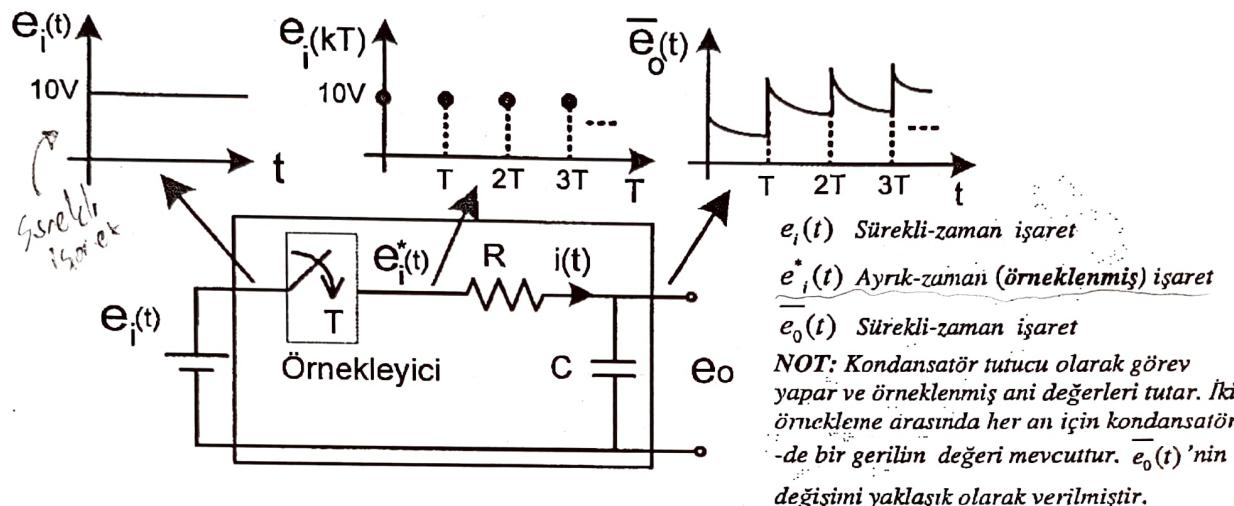
RC-devresi

Sürekli-zaman transfer fonksiyonu

$e_i(t) \rightarrow \text{örneklenmiş}$

### 3.2 Ayrık-Zaman Sistem

Yukarıda incelenen, **R-C** devresinde girişe aşağıda gösterildiği gibi **seri bir ideal örnekleyici** bağlansın. Örnekleyici giriş – çıkışındaki ve çıkış kondansatöründeki işaretler aşağıda şekilde sırası ile yaklaşık olarak verilmiştir.



Sistemin dinamik denklemleri t-domeninde,  $e_i^*(t)$  örneklenmiş işaret olmak üzere,

$$e_i^*(t) = Ri(t) + e_0(t) \quad ; \text{ Örnekleyici çıkışından çevre denklemi ve aşağıda}$$

$$i(t) = C \frac{de_0(t)}{dt} \quad ; \text{ Kondansatör akımı yazılır.}$$

Her iki denklem için Laplace dönüşüm alınır ise,

$$E_i^*(s) = RI(s) + E_0(s) \quad \text{ve} \quad I(s) = sCE_0(s) \quad \text{yazılır. Akım ifadesi yerine koyulur}$$

$$E_i^*(s) = RCsE_0(s) + E_0(s) \quad \text{ve} \quad \text{Çıkış kondansatör gerilimi çekilir ise,}$$

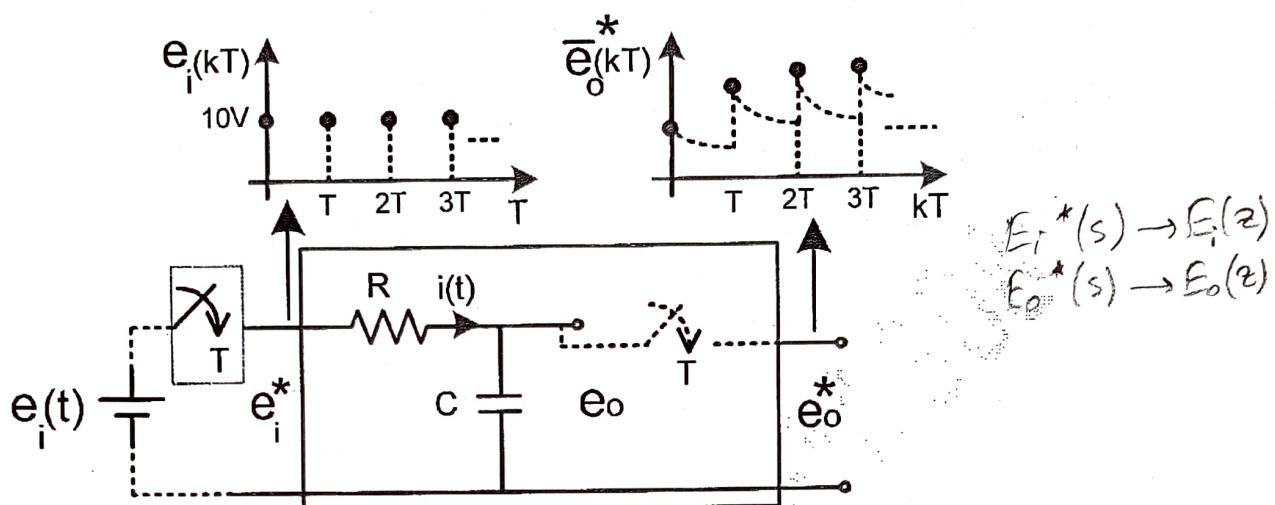
$$\frac{E_0(s)}{E_i^*(s)} = \frac{1}{sRC + 1} \quad \text{olarak elde edilir. Dikkat edilir ise, Örneklenmiş işaretin Laplace}$$

dönüşüm,  $E_i^*(s)$  söz konusudur. Örnekleyicili RC devresinin Transfer fonksyonu S-domeninde verilememektedir. Bu durumda, çıkış işaretini örneklenebilir. Örneklenmiş çıkış işaretinin Laplace dönüşümünün Örneklenmiş giriş işaretinin Laplace dönüşümüne oranı elde edilebilir. Bu amaç için çıkışta örnekleyici varmış gibi işlem yapılır.

**Yorum:** Yukarıda verilen ideal örnekleyicili basit RC devresinin giriş işaretini örneklenmiş ayrık-zaman ve çıkış işaretini sürekli zaman bir işaretettir. Ancak örnekleyicili RC devresi ayrık-zaman bir sistem olarak tanımlanmaktadır. Ayrık zaman sistemin giriş ve çıkış işaretleri ayrık-zaman olmak zorundadır. Peki bu durum bir çelişki değil midir?

Bu sorunun cevabını şu şekilde düşünülebilir.  $E_0(s)$  işaretini  $E_o^*(s)$  gibi örneklenir ise o zaman  $\frac{E_o^*(s)}{E_i^*(s)}$  oranı verilebilir. Dikkat edilirse bu durumda her iki işaret örneklenmiş olmaktadır ve her iki işaret ayrık-zamandır. Yani örnekleyicili RC devresinin giriş işaretini ayrık-zaman çıkış işaretini ayrık-zaman işaret ve örnekleyicili RC devresi ayrık-zaman bir sistem olmaktadır.

Yorumda anlatılan olay şeke olarak aşağıda verilmiştir. RC devresinin giriş ve çıkış işaretlerine dikkat ediniz.



Yukarıda verilen sistemde RC devresinin giriş işareti ve çıkış işareti ayrık zamanlıdır. Örnekleyciden dolayı, seri bağlı RC ayrık-zaman bir sistemdir.

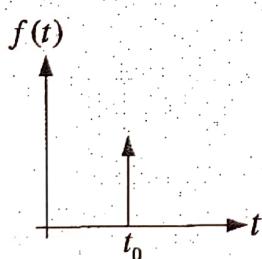
Bundan sonraki kısımda *ideal örnekleme*, *örnekleme* ve *örneklenmiş işaretin Laplace dönüşümü* olan *Z-dönüşümü* incelenecaktır.

#### 4. Örnekleme ve Z-Dönüştümü

Kontrol teorisinde, Sürekli-zaman sistemlerin analiz ve sentezleri Laplace dönüşümü, Ayrık-zaman sistemlerin analiz ve sentezleri *Z-dönüşümü* ile yapılmaktadır.

*İdeal örneklemeye*, sürekli işaret  $f(t)$  ile impulse dizisinin çarpımından oluşur. Bundan dolayı, *Kontrol teorisinde önemli yeri olan Birim-Impulse fonksiyonu* (veya *Dirac delta fonksiyonu*) *ve dizi* özet olarak ele alınacaktır.

**4.1 Birim-Impulse fonksiyonu (veya Dirac delta fonksiyonu):** Alanı "1" olan impulse fonksiyonu birim impulse fonksiyonu olarak adlandırılır. Impulse fonksiyonu Sonsuz genlikte sıfır genişlikte matematiksel bir işaretdir. Fiziksel olarak böyle bir işaret üretilemez. Ancak yaklaşık olarak gerçekleştirilebilir.  $f(t) = \delta(t - t_0)$  fonksiyonu aşağıda şekilde verilmiştir.



*impulse fonksiyonu:*

$$f(t) = \delta(t - t_0) = 0 \quad t \neq t_0 \quad \text{icin}$$

$$f(t) = \delta(t - t_0) = \infty \quad t = t_0 \quad \text{icin}$$

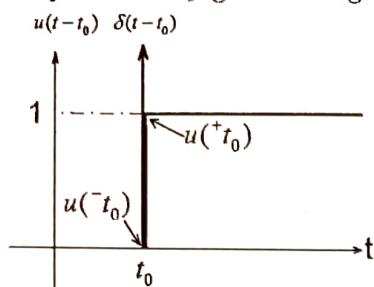
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

özelliklerini sağlar.

Birim impulse fonksiyonu  $\delta(t - t_0)$ ,  $t = t_0$  da sürekli birim basamak fonksiyonu  $u(t - t_0)$  'in türevi olarak düşünülebilir.

$$\delta(t - t_0) = \frac{d}{dt} u(t - t_0) \quad \text{dir.}$$

Grafik olarak aşağıda verildiği gibi yorumlanabilir,



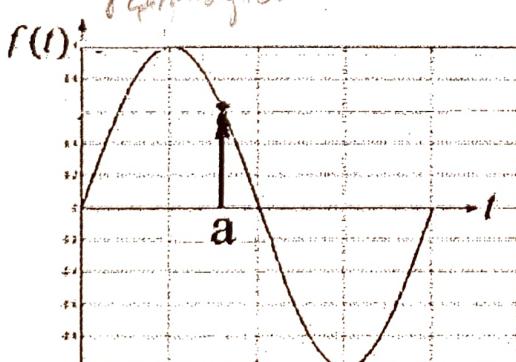
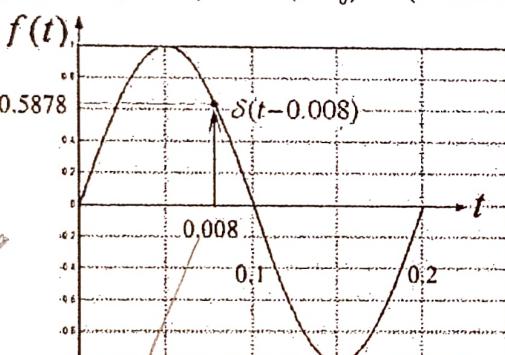
$$\delta(t-t_0) = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u^+(t_0) - u^-(t_0)}{t_0 - t_0} = \frac{1-0}{0} = \infty$$

$$t_0 = {}^+t_0 = {}^-t_0$$

Yukarıda verilen, "İmpulse fonksiyonu " $\infty$ " genlikte "0" genişlikte matematiksel bir işaretdir." tanımı hatırlanırsa, grafikte  $t=t_0$ 'da  $u(t-t_0)$ 'ın türevi alınır ise genlik " $\infty$ " darbe genişliğinin '0' olduğu görülebilir.

$\delta(t)$ 'nin önemli özelliği  $\int_0^\infty f(t)\delta(t-kT)dt = f(kT)$  olarak tanımlanır.

**Yorum:**  $\delta(t)$  İmpulse fonksiyonu, sürekli  $f(t)$  fonksiyonu ile çarpılıp  $(0, \infty)$  aralığında integrali alınır ise, sonuç  $f(t)$  fonksiyonun o anki değerini verir. Grafik olarak  $f(t) = \sin(2\pi 50t)$  ve  $\delta(t-t_0) = \delta(t-0.008)$  olmak üzere, aşağıda verilmiştir.



$$f(0.008) = \int_0^\infty \sin(2\pi 50t)\delta(t-0.008) dt = 0.5878$$

ifadesinin grafik gösterimini yanda verilmiştir.

i-Sürekli zaman işaret  $f(t)$ , impulse fonksiyonu  $\delta(t-a)$  ile çarpılır ve  $\int dt$  alınır ise  $f(t)$ 'nin  $t=a$  ya karşılık gelen sadece değerini verir. Yandaki şekil.

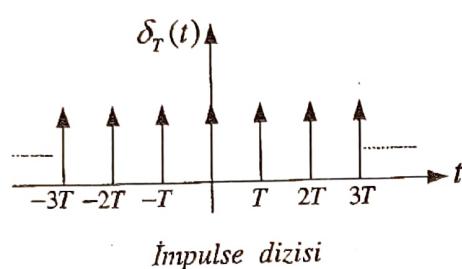
ii-Sürekli zaman işaret  $f(t)$  impulse fonksiyonu  $\delta(t-a)$  ile çarpılır ise  $t=a$  anı için ani işaret elde edilir, o ana karşılık gelen nokta elde edilir. Değer elde edilmez. Yandaki şekil.

**Dirac fonksiyonu**  $\delta(t)$ 'nin bu önemli özelliği sayısal kontrolde, örneklem teoreminde çok yaygın olarak kullanılmaktadır.

Örneklemme, sürekli zaman işaret,  $f(t)$  ile impulse dizisi  $\delta_T(t)$  'nın çarpımından oluşur.

impulse dizisi,  $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$  dir.

Impulse dizisini şekilde olarak gösterilimi aşağıda verilmiştir.

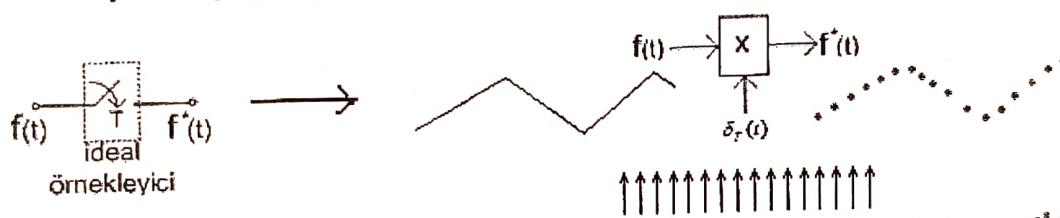


Örneklenmiş işaret  $f^*(t)$  ile gösterilir ise,

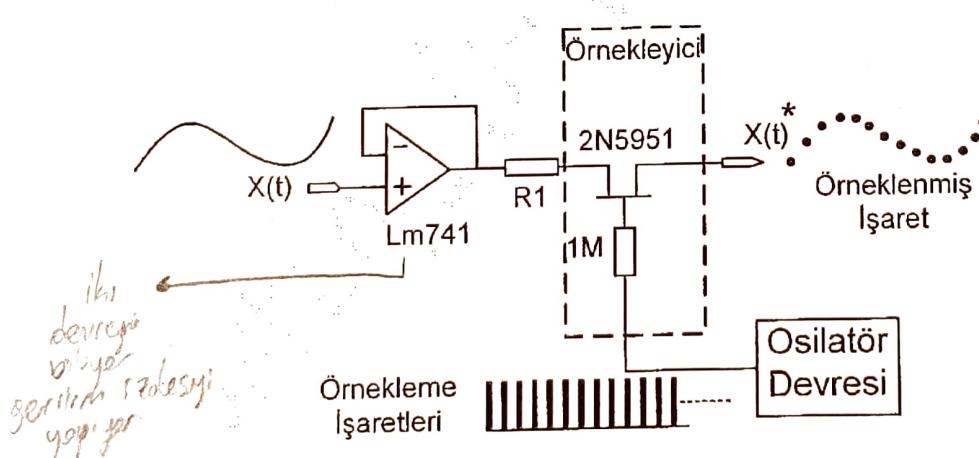
$$f^*(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad \text{dir.}$$

$$= f(t) \delta_T(t)$$

Ideal örneklemme işlemi, aşağıda gösterildiği gibi sürekli işaret  $f(t)$  ile impulse dizisinin modülasyonu ile gerçekleştirilebilir.



Gerçek zaman, örneklemme işlemine ait basitleştirilmiş devre aşağıda verilmiştir. LM741 işaret izleyici, 2N5951 ise bir örnekleyicidir.



## 4.2 Z-dönüştüm

Örneklemme ile ilgili verilen bu kısa açıklamalardan sonra,  $f^*(t)$ , örnekleme işaret olmak üzere, örnekleme işaretin Laplace dönüşümünü alırsak

$$F^*(s) = \int_0^\infty f^*(t)e^{-st} dt \quad \text{ifadesi ile verilir. Burada } f^*(t),$$

$f^*(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$  olmak üzere,  $f^*(t)$  ifadesi  $F^*(s)$  te yerine koymak ise,

$$F^*(s) = \int_0^\infty f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-st} dt$$

elde edilir. Bu ifade aşağıda verildiği gibi düzenlenir.

$$F^*(s) = \int_0^\infty f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-st} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty f(t) e^{-st} \delta(t - kT) dt$$

$g(t) = f(t) e^{-st}$  bir fonksiyon olarak düşünülür ve özelligi göz önüne alınarak,

$$\int_0^\infty g(t) \delta(t - kT) dt = g(kT)$$

$$F^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty g(t) \delta(t - kT) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kT)$$

olarak elde edilir ve  $g(kT) = g(t)|_{t=kT} = f(kT) e^{-skT}$  nin ifadesi yerine koymak ise,

$$F(z) = F^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} f(kT) e^{-skT} \quad \underline{\text{örnekleme işaretin Laplace dönüşümü olarak elde edilir.}}$$

Burada,  $z \triangleq e^{sT}$  olarak tanımlanmaktadır.  $z \triangleq e^{sT}$

“s” operatörü,  $s = \sigma + j\omega$  olmak üzere bir kompleks ifadedir. Bu durumda “z” ifadesi,

$$z = e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \quad \text{olarak yazılabilir.}$$

örnekleme işaretin Laplace dönüşümü  $F^*(s) = F(z)$  olarak gösterilir.

$F^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} f(kT)e^{-skT}$  ifadesinde " $e^{sT}$ " yerine " $z$ " koyulursa

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} f(kT)z^{-k} \quad (\text{örneklenmiş işaretin Laplace dönüşümü = Z-dönüşüm})$$

Ifadesi elde edilir.  $F(z)$  ifadesine çift taraflı z-dönüştümü denir. Kontrol teorisinde  $t \geq 0$  için işaretler ile ilgilenildiğinden  $F(z)$  ifadesi tek taraflı z-dönüştümü olarak aşağıda verildiği gibi tek taraflı z-dönüştümü kullanılır.

$$F(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT)z^{-k}$$

**Ek-Bilgi (Hatırlatma):** t-domeninden z-domenine dönüşümde gerekli olan bazı geometrik dizilere ait genel terimler aşağıda verilmiştir.

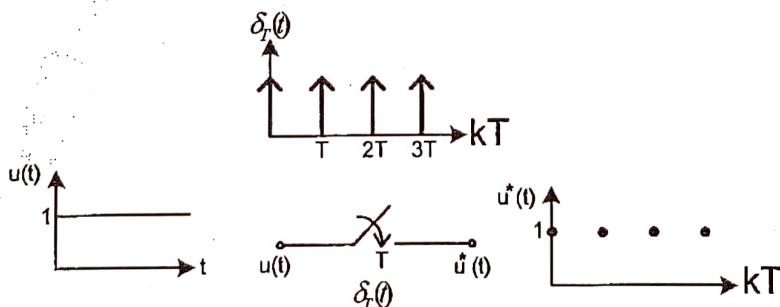
$$1-) \sum_{k=n_1}^{n_2} q^n = \frac{q^{n_1} - q^{n_2+1}}{1-q}, \quad 1 \neq q$$

$$2-) \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

$$3-) \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}, \quad |q| < 1$$

$$4-) \sum_{n=n}^{\infty} q^n = \frac{q^n}{1-q}, \quad |q| < 1$$

**Örnek1:**  $f(t) = u(t)$  fonksiyonu aşağıda gösterildiği gibi  $T$  örneklemme periyodu ile örneklenmektedir. Örneklenmiş birim basamak fonksiyonunun Z-dönüştümü  $F(z) = ?$



Örneklenmiş basamak fonksiyon.

Örneklenmiş birim basamak fonksiyonu,  $u^*(t) = u(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$  dir.

$$\text{İstenen } L\{f^*(t)\} = u^*(s) = F(z) = ?$$

z-dönüştüm ifadesinden,  $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)z^{-k}$  yazılır.

Burada örneklenmiş  $u(t)$  birim basamak fonksiyonunun her  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  için değerinin "1" olduğu görülür.

k	f(kT)
0	1
1	1
2	1
3	1
...	1

Genel terim olarak  $f(kT) = 1^k$  yazılabilir.  $F(z)$  te yerine yazılır ise,

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \text{ olarak elde edilir.}$$

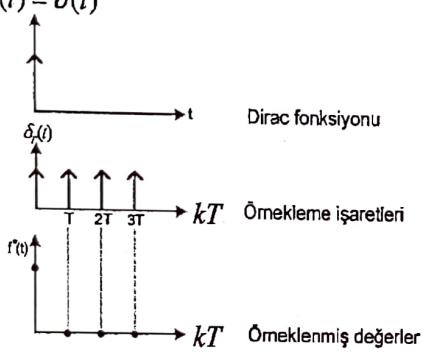
Geometrik dizilere ait 2. özellikten

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \text{ olarak hesaplanır.}$$

$$F(z) = Z\{u(t)\} = \frac{z}{z - 1}$$

**Örnek2:**  $f(t) = \delta(t)$  Örneklenmiş birim impulse fonksiyonunun Z-dönüştümü  $F(z) = ?$

$$f(t) = \delta(t)$$



Dirac fonksiyonunun örneklenen değerleri,

$$\int_0^{\infty} \delta(t) \delta(t - kT) dt = \delta(kT) = 1$$

$$\delta(0) = 1,$$

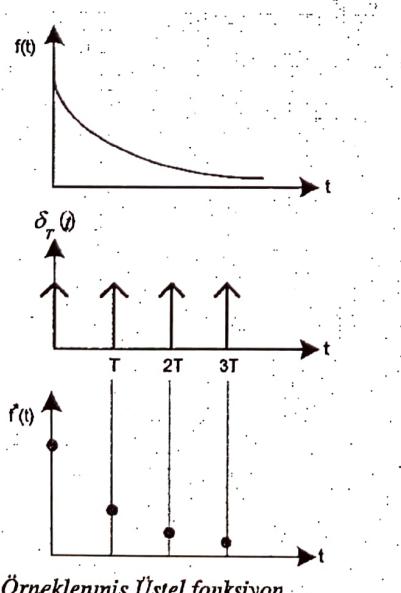
$$\delta(T) = 0,$$

$$\delta(2T) = 0 \dots \text{ Ve } \delta(kT) = 0 \dots \text{ yazılabilir.}$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(kT) (z^{-1})^k = 1z^0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + \dots = 1$$

$$F(z) = Z\{\delta(t)\} = 1 \text{ olarak elde edilir.}$$

**Örnek3:** Üstel fonksiyon,  $f(t) = e^{-at} u(t)$ , verilmektedir. Z-dönüştüm  $F(z)$  elde ediniz.



$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}, \quad f(kT) = e^{-akT}$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-aT} z^{-1})^k$$

$F(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}$ , ifadesinden görüldüğü gibi sürekli zaman f(t) fonksiyonunun z-dönüştümü seçilen örneklemeye zamanına T'ye bağlıdır. Dolayısı ile farklı T değerleri için farklı F(z) elde edilir.

T verilmeden f(kT) bulunmaz.

**Örnek4:** sinüs fonksiyon,  $f(t) = u(t) \sin wt$ , verilmektedir. Z-dönüştüm  $F(z)$  elde ediniz.

$$t = kT, f(kT) = \sin(wkT) = \frac{1}{2j}(e^{jkwT} - e^{-jkwT}) \text{ ve } \cos(wkT) = \frac{1}{2}(e^{jkwT} + e^{-jkwT}) \text{ yazılabilir.}$$

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)(z^{-1})^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sin(kwT)(z^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2j}(e^{jkwT} - e^{-jkwT})(z^{-1})^k \\ &= \frac{1}{2j} \sum_{k=0}^{\infty} e^{jkwT}(z^{-1})^k - \frac{1}{2j} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-jkwT}(z^{-1})^k \\ &= \frac{1}{2j}[1 + e^{jwT}z^{-1} + e^{j2wT}z^{-2} + \dots] - \frac{1}{2j}[1 + e^{-jwT}z^{-1} + e^{-j2wT}z^{-2} + \dots] \end{aligned}$$

geometrik seriler ile ilgili verilen tablodan 2. özellik kullanılır

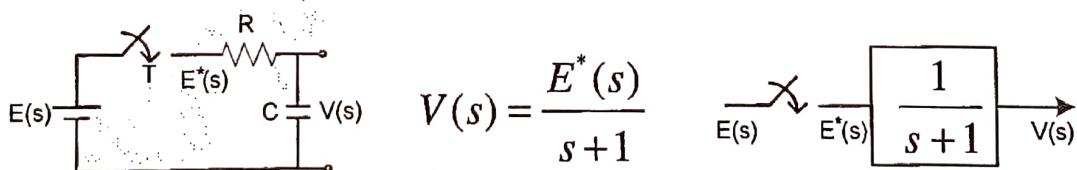
$$= \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{1 - e^{jwT}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-jwT}z^{-1}} \right] = \frac{1}{2j} \left[ \frac{z}{z - e^{jwT}} - \frac{z}{z - e^{-jwT}} \right] \quad \text{paydalar eşitlenir ve}$$

düzenlenir

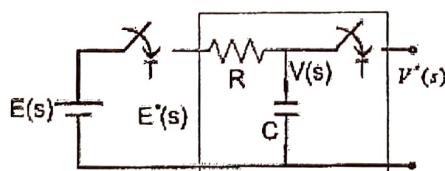
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2j} \left[ \frac{z^2 - ze^{-jwT} - z^2 + ze^{jwT}}{z^2 - ze^{-jwT}ze^{jwT} + 1} \right] = \frac{1}{2j} \left[ \frac{ze^{jwT} - ze^{-jwT}}{z^2 - ze^{-jwT} - ze^{jwT} + 1} \right] \\ &= \frac{z \frac{e^{jwT} - e^{-jwT}}{2j}}{z^2 - 2z(\frac{(e^{-jwT} + e^{jwT})}{2}) + 1} \quad \text{düzenlenir ve trigonometrik ifadeler yerine koyulur ise,} \end{aligned}$$

$$F(z) = Z\{\sin(wt)\} = \frac{z \sin(wT)}{z^2 - 2z \cos(wT) + 1}, \quad T: \text{örnekleme zamanı, } k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

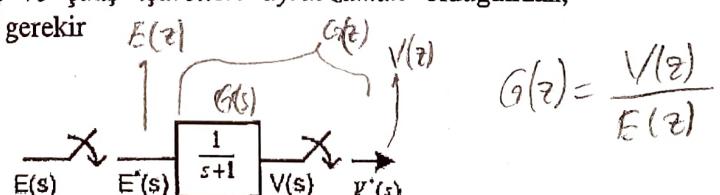
**Örnek5:** Aşağıda verilen R-C devresinin ayırık zaman transfer fonksiyonunu elde ediniz.  $R = 1\Omega$  ve  $C = 1F$  olsun.



Ayırık-zaman transfer fonksiyonunun, giriş ve çıkış işaretleri ayırık-zaman olduğundan, sistemin çıkış işaretini  $V(t)$  'nın örneklenmesi gereklidir.

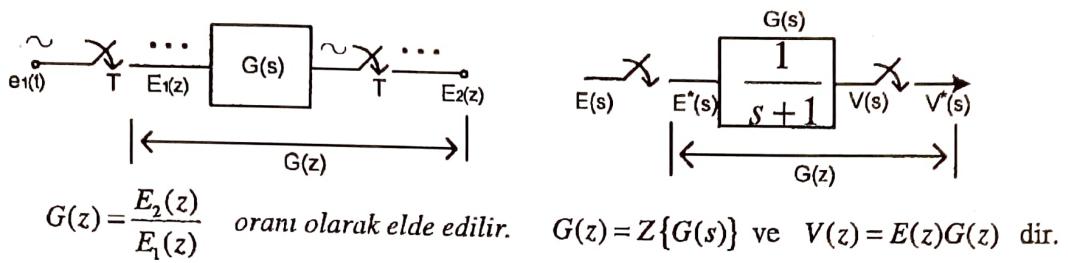


RC çıkış gerilim işaretinin örneklenmesi



RC devresinin giriş-çıkış işaretlerinin örneklenmesi

Ayırık-zaman transfer fonksiyonu aşağıda verilen şekil yardımı ile,



i-  $G(z)$  'in elde edilmesi,

Ters Laplace dönüşümü  $g(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$ ,  $g(t) = e^{-t}$  elde edilir.

$$G(z) = Z\{e^{-t}\} = \frac{z}{z - e^{-T}}, \quad \text{yukarıda elde edilmiştir.}$$

ii- Giriş işaretü  $e(t) = u(t)$  olsun.

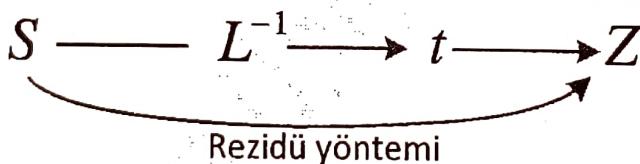
$$E(z) = Z\{e(t)\} = Z\{u(t)\} = \frac{z}{z-1} \quad \text{yukarıda elde edilmiştir.}$$

Elde edilen dönüşümler  $V(z)$  'te yerine koyulur ise,

$$V(z) = G(z)E(z) = \frac{z}{z - e^{-T}} \frac{z}{z-1} \quad \text{olarak çıkış kondansatör gerilim ifadesi elde edilir.}$$

Eğer verilen fonksiyonun Laplace dönüşümü biliniyor ise **kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinden "rezidü" yöntemi kullanarak**, Z-dönüşümü doğrudan gerçekleştirilebilir.

S-domeni Ters laplace t-domeni z-dönüşüm



$$X(z) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[ (s - s_i)^m X(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=s_i} \right\}$$

$X(z)$  ifadesinde  
"n"  $X(s)$  'in rezidü sayısı,  
"m" i.kutbun katılık derecesini,  
 $s_i$  içarpan kökü  
 $T$  örneklemme zamanıdır.

Örnek1:

$$X(s) = \underbrace{\frac{1}{s^2(s+a)(s+b)^2(s+c)}}_{n=4} \quad m_1 = 2 \quad m_2 = 1 \quad m_3 = 2 \quad m_4 = 1$$

**Örnek2:**  $X(s) = \frac{1}{s+1}$  verildiğine göre  $X(s)$  in Z-dönüştümü  $X(z) = ?$

Rezidü teoremi  $X(z) = ?$

$$X(z) = \sum_{i=1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-1)!} \frac{d^{1-1}}{ds^{1-1}} \left[ (s - (-1)) \frac{1}{s+1} \frac{z}{z - e^{(-1)T}} \right] \right\}$$

$$X(z) = (s+1) \frac{1}{s+1} \frac{z}{z - e^{-T}} \quad \text{düzenlenir ise,}$$

$$X(z) = \frac{z}{z - e^{-T}} \quad \text{olarak elde edilir.}$$

**Örnek3:**  $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ , verildiğine göre  $X(s)$  in Z-dönüştümü  $X(z) = ?$

$$\begin{aligned} X(z) &= (s - (-1)) \frac{1}{(s+1)(s+2)} \frac{z}{z - e^{sT}} \Big|_{s=-1} + (s - (-2)) \frac{1}{(s+1)(s+2)} \frac{z}{z - e^{sT}} \Big|_{s=-2} \\ &= \frac{z}{z - e^{-T}} - \frac{z}{z - e^{-2T}} \quad \text{olarak hesaplanır.} \end{aligned}$$

**Örnek4:**  $X(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$  verildiğine göre  $X(s)$  in Z-dönüştümü  $X(z) = ?$

Verilen  $X(s)$  için  $n = 2$ , çarpan sayısı (rezidü sayıısı)

$i = 1$ . çarpan ( $s^2$ ) için  $s_1 = 0$  ve  $m = 2$

$i = 2$ . çarpan ( $s+1$ ) için  $s_2 = -1$  ve  $m = 1$  dir. Rezidü teoreminden,

$$X(z) = \frac{d}{ds} \left[ s^2 \frac{1}{s^2(s+1)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=0} + (s - (-1)) \frac{1}{s^2(s+1)} \frac{z}{z - e^{sT}} \Big|_{s=-1}$$

$$= \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{(s+1)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=0} + \frac{1}{(-1)^2} \frac{z}{z - e^{-T}} \quad 1. \text{ terimin } s \text{'c} \text{ göre türevi alınır, } s = 0 \text{ verilir.}$$

$$X(z) = \left[ \frac{[0 * (s+1)(z - e^{sT})] - z[(z - e^{sT}) + (s+1)(0 - Te^{sT})]}{[(s+1)(z - e^{sT})]^2} \right]_{s=0} + \frac{z}{z - e^{-T}}$$

$$= \frac{-z[(z-1)-T]}{(z-1)^2} + \frac{z}{z - e^{-T}}$$

$$= \frac{-z^2 + (T+1)z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z - e^{-T}} \quad \text{olarak hesaplanır.}$$

Laplace dönüşümünde olduğu gibi z-dönüşümünde tablodan faydalananabiliriz. Aşağıda sık kullanılan genel fonksiyonlar için Laplace ve Z-dönüştürmeleri tablo halinde verilmiştir.

<i>Laplace Dönüşüm</i>	<i>Zaman Fonksiyon</i>	<i>Z-dönüşüm</i>
$\frac{1}{s}$	Birim Impulse $\delta(t)$	$1$
$\frac{1}{s-a}$	Birim Basımak $u_1(t)$	$\frac{z}{z-a}$
$\frac{1}{1-e^{-T}}$	$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{T^2}$	$t$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \left[ \frac{z}{z-e^{-T}} \right]$
$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-at}$	$\frac{Tz e^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{ia}{s^2 + a^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{z(z-\cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$

Genel fonksiyonlar için Laplace ve Z-dönüştürü tablosu.

### 4.3 Z -dönüştüm özelliklerı

$$Z\{f_1(t) + f_2(t)\} = Z\{f_1(t)\} + Z\{f_2(t)\} = F_1(z) + F_2(z)$$

$$Z\{af_1(t)\} = aF_1(z)$$

$$Z\{f(t+T)\} = zF(z) - zF(0)$$

$$Z\{f(t+2T)\} = z^2F(z) - z^2F(0) - zF(1)$$

$$Z\{f(t+nT)\} = z^nF(z) - z^nF(0) - z^{n-1}F(1) - \dots - zF(n-1)$$

$$= z^n \left\{ F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} F(k)z^{-k} \right\} \quad Z\{f(t+2T)\} = z^2F(z) - z^2F(0) - zF(1)$$

$$Z\{e^{\pm at} f(t)\} = F(ze^{\mp at})$$

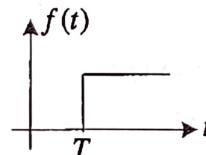
$$Z\{tf(t)\} = -Tz \frac{dF(z)}{dz}$$

$\blacktriangleleft Z\{f(t-nT)\} = z^{-n}F(z)$

$$e(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad \text{ilk değer teoremi}$$

$\blacktriangleleft e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) \quad \text{son değer teoremi, } F(z) \text{ kararlı olmalı ve osilasyon yapmamalıdır.}$

**Örnek1:**  $f(t) = u(t-T)$  z-dönüştümünü bulunuz.



$$Z\{u(t-T)\} = z^{-1} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1}$$

**Örnek2:**  $f(t) = e^{-at} \sin wt$  z-dönüştümünü bulunuz.

Hatırlatma:  $Z\{\sin wt\} = \frac{z \sin(wT)}{z^2 - 2z \cos(wT) + 1} \rightarrow F(z) = \frac{ze^{at} \sin wt}{(ze^{at})^2 - 2ze^{at} \cos wt + 1}$

**Örnek3:**  $F(z) = \frac{5z}{(z-1)(z-0.25)}$  ile verilmektedir.  $f(\infty)$  hesaplayınız. *Son değer*

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{5z}{(z-1)(z-0.25)} = \frac{1*5}{(1-0.25)}$$

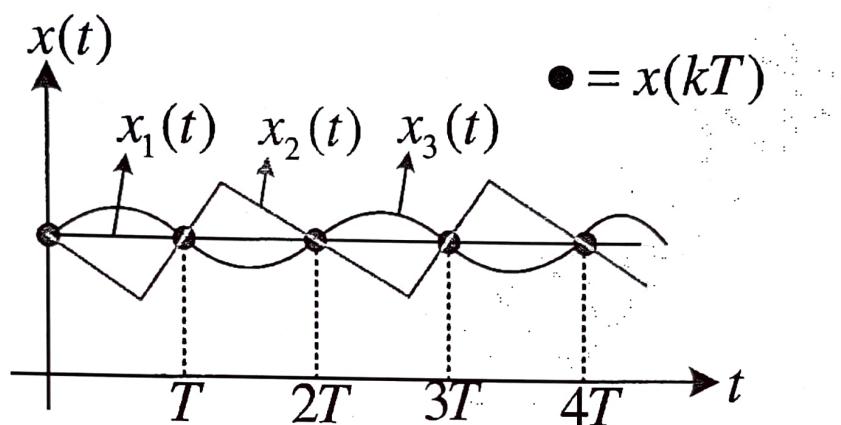
$$f(\infty) = 6.667$$

**Örnek4:**  $F(z) = \frac{1.5z}{(z-1)}$  ile verilmektedir.  $f(0)$  hesaplayınız.

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1.5z}{(z-1)} = \frac{1.5z}{z(1-\frac{1}{z})} \quad f(0) = 1.5$$

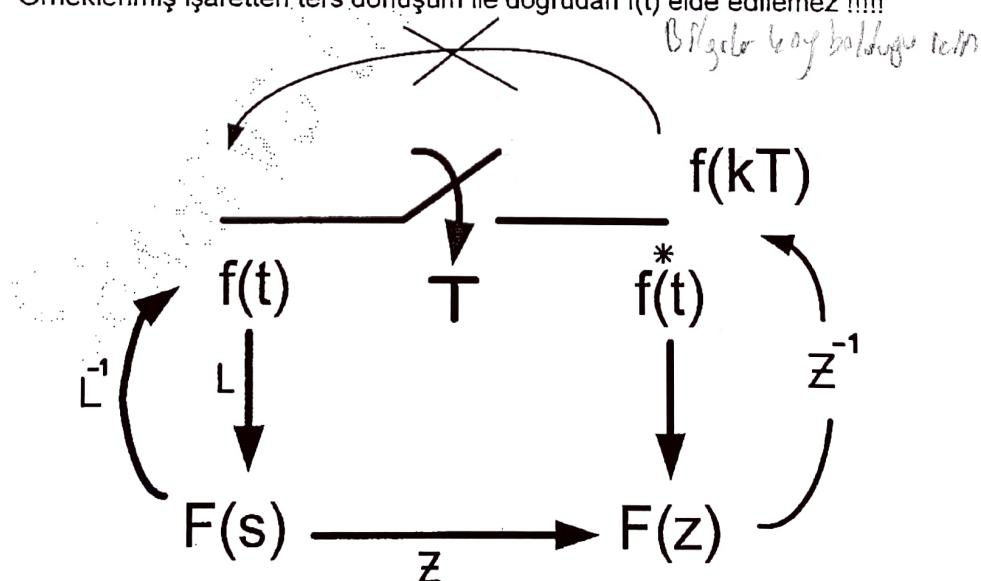
#### 4.4 Ters z-dönüştümü

Z-dönüştümünün tersi zaman dizisi  $x(k)$  (veya  $x(kT)$ )'yi verir. Ters z-dönüştümü sonucunda tek bir  $x(k)$  elde edilirken tek bir  $x(t)$  elde edilemez. Çünkü, ters z-dönüştümü sadece  $x(t)$ 'nin  $t = 0, t = T, t = 2T, t = 3T, \dots$  anlarında değerini verirken iki nokta arasında,  $0-T, T-2T, \dots (n-1)T-nT$ ,  $x(t)$ 'nin alacağı değer için hiçbir bilgi veremez. Bu durumda aşağıda şekilde gösterildiği gibi iki nokta arasından sonsuz tane eğri geçebileceğinden ters z-dönüştümü sonucunda sonsuz adet  $x(t)$  elde edilebilir. Bu durum aşağıda verilen örnekten daha iyi anlaşılabilir.



Çeşitli tipte filtre/filtreler kullanılarak ayrık-zaman örneklenmiş işaret  $f^*(t)$  den sürekli zaman işaret  $f(t)$  yaklaşık olarak elde edilebilir. Sürekli zaman işaret  $f(t)$  ve örneklenmiş işaret  $f^*(t)$  için sırası ile Laplace dönüşümü ( $L$ ), ters-Laplace dönüşümü ( $L^{-1}$ ), Z - dönüşümü ( $Z$ ) ve ters-Z ( $Z^{-1}$ ) dönüşüm arasındaki ilişkiler aşağıda verilmiştir.

Örneklenmiş işaretten ters dönüşüm ile doğrudan  $f(t)$  elde edilemez !!!!



Belirlenmiş Örnekleme zamanı  $T$  için Z-dönüştümü yapılır. Her  $T$  için farklı  $F(z)$  elde edilir. !!!!!!

**Ters z-dönüştümü** aşağıda verilen ters dönüşüm integral ifadesi ile hesaplanabilir.

$$f(k) = f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{k-1} dz$$

Ancak, ters dönüşüm için daha basit farklı yöntemler aşağıda kısaca verilmiştir.

#### Ters z-dönüştüm yöntemleri :

- 1-) Tablodan faydalananma
- 2-)  $E(z)$  negatif kuvvetlerine göre serise açılır ve z katsayılarından  $e(k)$  elde edilir.
- 3-) Basit kesire ayrılmış her kesir için  $e(k)$  bulunur.
- 4-) Kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinden rezidü yöntemi kullanılır.

$$x(k) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z - z_i)^m X(z) z^{k-1} \right]_{z=z_i}$$

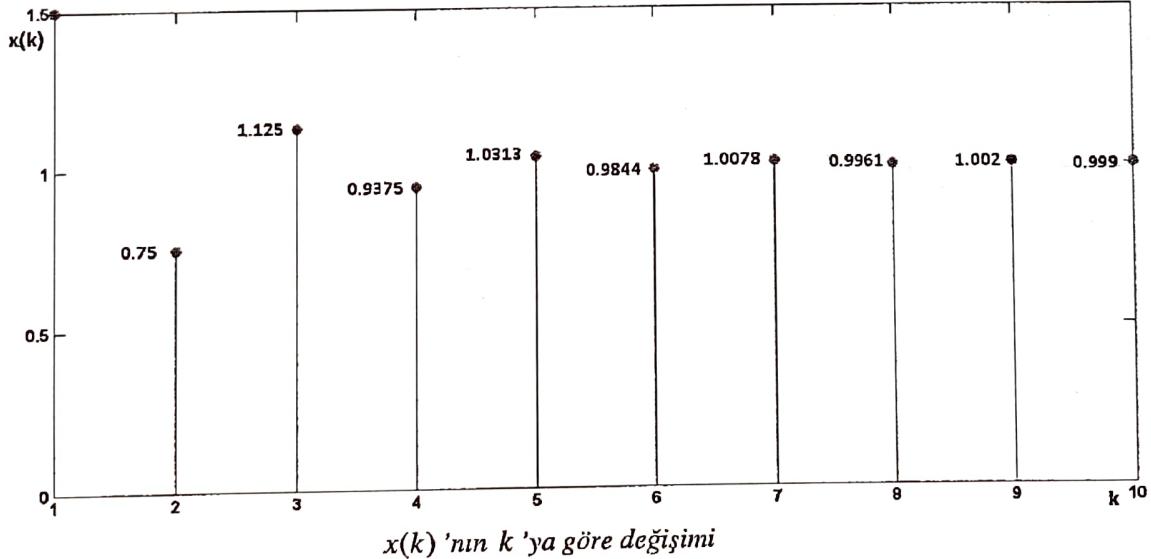
$z_i = i. \text{ kutu}, m = i. \text{ kutbun derecesi}$   
 $n = \text{çarpan sayısı(rezidü sayısı)}$

**Örnek1:**  $X(z) = \frac{1.5z}{z^2 - 0.5z - 0.5}$  rezidü yöntemini kullanarak **ters z-dönüştümü**  $x(k)$  elde ediniz.

$$x(k) = (z-1) \frac{1.5z}{(z-1)(z+0.5)} z^{k-1} \Big|_{z=1} + (z+0.5) \frac{1.5z}{(z-1)(z+0.5)} z^{k-1} \Big|_{z=-0.5}$$

$$x(k) = \frac{1.5z^k}{(z+0.5)} \Big|_{z=1} + \frac{1.5z^k}{(z-1)} \Big|_{z=-0.5} = 1^k - (-0.5)^k = 1 - 0.5^k \cos k\pi, \quad \cos k\pi = (-1)^k$$

Aşağıda  $x(k)$ 'nın  $k$ 'ya göre değişimi verilmiştir.



**Örnek2:**  $E(z) = \frac{z}{z-5}$  ters z-dönüştürümünü negatif kuvvetlerine göre serise açma yöntemi ile elde ediniz.

$$z \quad |z-5$$

$$\begin{array}{r} z-5 \\ \hline 5 \end{array} \quad 1+5z^{-1}+25z^{-2}+125z^{-3}$$

$$\underline{5-25z^{-1}}$$

$$\underline{25z^{-1}}$$

$$\underline{25z^{-1}-125z^{-2}}$$

$$\underline{125z^{-2}}$$

$$\underline{125z^{-2}-625z^{-3}}$$

$$\underline{625z^{-3}}$$

$$E(z) = 1 + 5z^{-1} + 25z^{-2} + 125z^{-3} + \dots$$

$$E(z) = 1 + 5^1 z^{-1} + 5^2 z^{-2} + 5^3 z^{-3} + \dots \Leftrightarrow E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) z^{-k}$$

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 5^k z^{-k} \Rightarrow e(k) = 5^k$$

$$\text{Hاتırlatma: } E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) z^{-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Örnek3:**  $E(z) = \frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)}$  ters z-dönüştürümünü negatif kuvvetlerine göre serise açarak elde ediniz.

$$10z+5 \quad |z^2 - 1.2z + 0.2$$

$$10z-12+2z^{-1} \quad 10z^{-1} + 17z^{-2} + 18.4z^{-3} + 18.68z^{-4}$$

$$\underline{17-2z^{-1}}$$

$$\underline{17-20.4z^{-1} + 3.4z^{-2}} \dots$$

$$18.4z^{-1} - 3.4z^{-2}$$

$$E(z) = 10z^{-1} + 17z^{-2} + 18.4z^{-3} + 18.68z^{-4} + \dots \Leftrightarrow E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) z^{-k}$$

Örnekte görüldüğü gibi negatif kuvvetlerine göre serise açma yöntemi dizinin ilk birkaç terimi gerekiyor ise el ile hesaplanabilir. Genel olarak bu yöntem  $e(k)$  nin kapalı form ifadesini her zaman vermez.

**Örnek4:**  $F(z) = 1 + 2z^{-2} + 3z^{-4}$  ters z-dönüştürümünü bulunuz.

$$f(k) = \delta(k) + 2\delta(k-2) + 3\delta(k-4) \text{ dir.}$$

Diger bir ifade ile,

$$f[0] = 1, \quad f[2] = 2, \quad f[4] = 3. \quad \text{tür.}$$

**Kompleks ters z-dönüştürümü:** Ters z-dönüştürümü alınacak olan ifadenin kutupları kompleks ise aşağıda verilen yöntem kullanılarak dönüşüm yapılabılır.

$$x(z) = \frac{z}{(z-a+jb)(z-a-jb)} \Rightarrow$$

$$x(k) = (z-a+jb) \frac{z}{(z-a+jb)(z-a-jb)} z^{k-1} \Big|_{z=a-jb} + (z-a-jb) \frac{z}{(z-a+jb)(z-a-jb)} z^{k-1} \Big|_{z=a+jb}$$

$$x(k) = \frac{1}{(a-jb-a-jb)} (a-jb)^k + \frac{1}{(a+jb-a+jb)} (a+jb)^k \Rightarrow$$

$$x(k) = \frac{1}{2bj} \left[ (a+jb)^k - (a-jb)^k \right]$$

$$a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} e^{j \tan^{-1} \frac{b}{a}}$$

$$a - jb = \sqrt{a^2 + b^2} e^{-j \tan^{-1} \frac{b}{a}}$$

$$x(k) = \frac{1}{2bj} \left[ (a^2 + b^2)^{\frac{k}{2}} e^{jk\phi} - (a^2 + b^2)^{\frac{k}{2}} e^{-jk\phi} \right] \Rightarrow$$

$$x(k) = \frac{1}{b} (a^2 + b^2)^{\frac{k}{2}} \left[ \frac{e^{jk\phi} - e^{-jk\phi}}{2j} \right]$$

$$x(k) = \frac{1}{b} (a^2 + b^2)^{\frac{k}{2}} \sin(k\phi)$$

**Örnek4:**  $x(z) = \frac{z}{z^2 - 0.3z + 0.3}$  ters z-dönüştümü bulunuz.

$$x(z) = \frac{z}{z^2 - 0.3z + 0.3} = \frac{z}{(z - 0.15 + j0.5268)(z - 0.15 - j0.5268)}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{0.5268}{0.15} = 1.293 \text{ rad} \quad a^2 + b^2 = 0.3$$

$$x(k) = \frac{1}{0.5268} (0.3)^{k/2} \sin(1.2934k)$$

Ters Z-dönüştümüne ait tablo aşağıda verilmiştir.

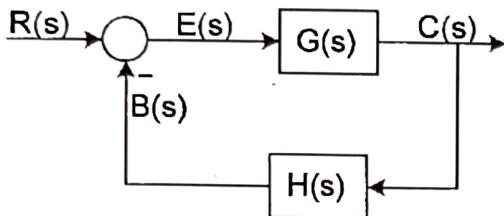
Ters Z-dönüştüm Tablosu

$f[k]$	$F(z)$	$f[k]$	$F(z)$
$\delta[k] = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$	1	$k^2$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$u[k] = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$	$\frac{z}{z-1}$	$k^3$	$\frac{z(z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^4}$
$k$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\sin ak$	$\frac{z \sin a}{z^2 - 2z \cos a + 1}$
$e^{-ak}$	$\frac{z}{z - e^{-a}}$	$\cos ak$	$\frac{z(z - \cos a)}{z^2 - 2z \cos a + 1}$
$a^k$	$\frac{z}{z-a}$	$e^{-ak} \sin bk$	$\frac{ze^{-a} \sin b}{z^2 - 2ze^{-a} \cos b + e^{-2a}}$
$ka^k$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$e^{-ak} \cos bk$	$\frac{z^2 - ze^{-a} \cos b}{z^2 - 2ze^{-a} \cos b + e^{-2a}}$

## 5. Kontrol Sistemlerinin Blok Diyagramları

### 5.1 Bozucu Girişsiz Kapalı-çevrim transfer fonksiyonu

Negatif geri beslemeli bir sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu,  $T(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$ , elde edilmesi aşağıda verilmiştir.



Deklenlemler sırası ile aşağıda yazılmıştır.

$$1) \quad B(s) = C(s)H(s)$$

$$2) \quad E(s) = R(s) - B(s)$$

$$E(s) = R(s) - C(s)H(s)$$

$$3) \quad C(s) = G(s)E(s)$$

Önce  $B(s)$ ,  $E(s)$  ve  $C(s)$  ifadeleri yazılır. Ara işlemler yapılarak  $\frac{C(s)}{R(s)}$  oranı elde edilir. Elde edilecek olan ifadede tanımlanmış olan  $B(s)$  ve  $E(s)$  ara terimleri görülmemelidir. Elde edilecek olan transfer fonksiyonunda sadece transfer fonksiyonları  $G(s)$  ve  $H(s)$  terimleri olmalıdır.

2. denklem sonucu 3. Denklemde yerine koyulur.

$$C(s) = G(s)[R(s) - C(s)H(s)] \quad \text{elde edilir.}$$

Denklem düzenlenir ise

$$G(s)R(s) = C(s)[1 + G(s)H(s)]$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad \text{olarak elde edilir.}$$

$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$  ifadesinde  $G(s) = \frac{C(s)}{E(s)}$  ileri yol transfer fonksiyonunu

$H(s) = \frac{B(s)}{C(s)}$  geri yol transfer fonksiyonu olarak adlandırılır.

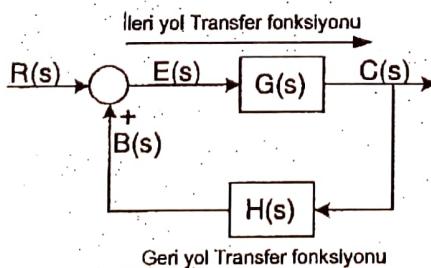
**Negatif geri beslemeli** sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu;

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\text{ileri yol transfer fonksiyonu}}{1 + \text{ileri yol transfer fonksiyonu} * \text{geri yol transfer fonksiyonu}} \quad \text{şeklinde yazılır.}$$

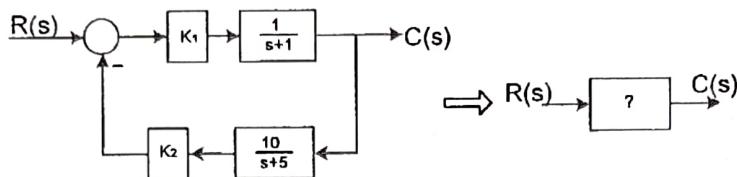
**Pozitif geri beslemeli** sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu;

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\text{ileri yol transfer fonksiyonu}}{1 - \text{ileri yol transfer fonksiyonu} * \text{geri yol transfer fonksiyonu}} \quad \text{şeklinde yazılır.}$$

**Pozitif geri beslemeli** bir sistem aşağıda verilmiştir. Transfer fonksiyonunun edilmesi yukarıda anlatılanlar ile aynıdır.



**Örnek:** Aşağıda verilen negatif geri beslemeli sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu bulunuz.



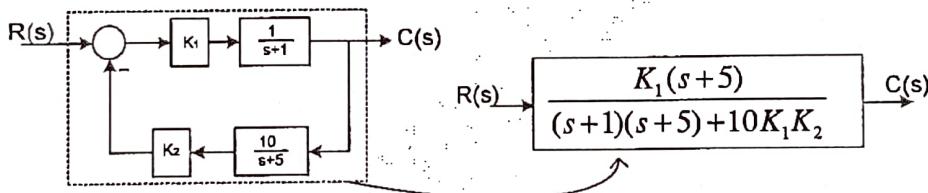
$$\text{Sistemin ileri yol transfer fonksiyonu} \rightarrow G(s) = \frac{K_1}{s+1}$$

$$\text{Sistemin geri yol transfer fonksiyonu} \rightarrow H(s) = \frac{10K_2}{s+5}$$

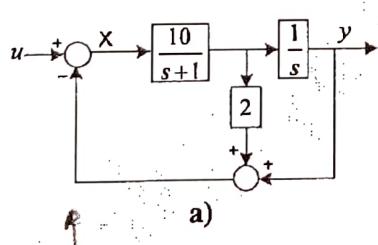
Bu durumda sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu yukarıda elde edilen ifadeden,

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_1}{s+1}}{1 + \frac{K_1}{s+1} \frac{10K_2}{s+5}} = \frac{K_1(s+5)}{(s+1)(s+5) + 10K_1K_2}$$

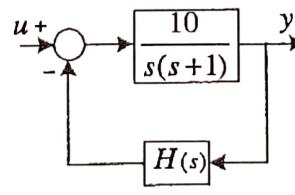
olarak bulunur.



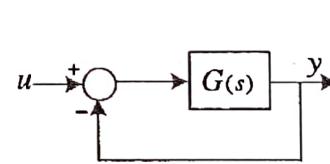
**Örnek:** Kontrol blok diyagramı a'da verilen sistemi b) ve c) formlarında elde ediniz.



a)



b)



c)

Geçici birer H(s) var  
defteri L dir.

Öncelikle a) da verilen sistemin transfer fonksiyonunu bulunur.

$$x = u - \left( 2 \cdot \frac{10x}{s+1} + \frac{10x}{s(s+1)} \right) \Rightarrow x = \frac{s(s+1)}{s^2 + 21s + 10} u$$

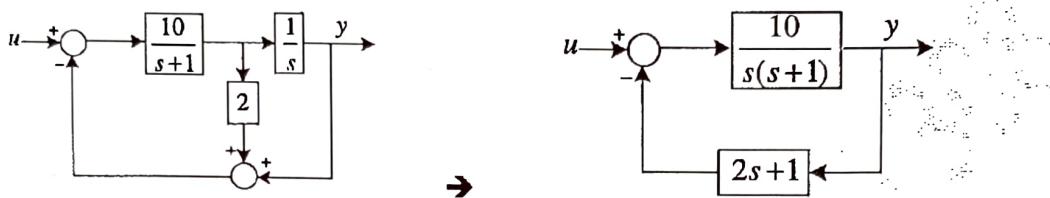
$$y = \frac{10x}{s(s+1)} = \frac{10}{s^2 + 21s + 10} u \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{u} = \frac{10}{s^2 + 21s + 10} \text{ olarak elde edilir.}$$

b) ve c) formlarının transfer fonksiyonları a) formunun transfer fonksiyonuna eşit olabilmesi için sırası ile H(s) ve G(s) ler elde edilecektir.

b) formunda verilen sistem için transfer fonksiyonu  $\frac{y}{u} = \frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1 + \frac{10}{s(s+1)} H(s)} = \frac{10}{s^2 + s + 10H(s)}$

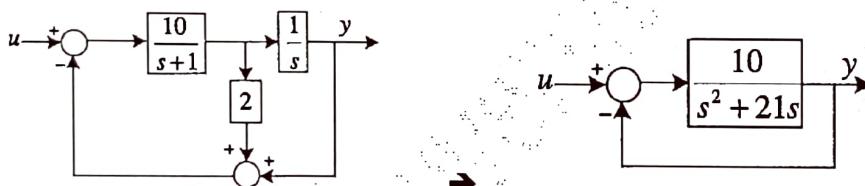
İki transfer fonksiyonu eşit olmalıdır,  $\frac{10}{s^2 + 21s + 10} = \frac{10}{s^2 + s + 10H(s)}$

paydanın eşit olabilmesi için  $21s + 10 = s + 10H(s)$  eşitliğinden ve  $H(s) = 2s + 1$  olur.

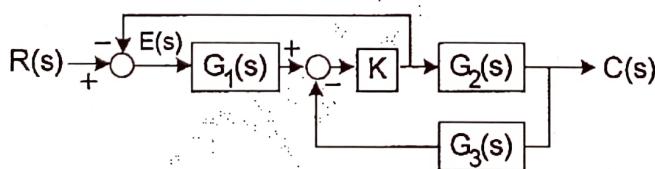


c) formunda verilen sistem için transfer fonksiyonu  $\frac{y}{u} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$

İki transfer fonksiyonu eşit olmalıdır,  $\frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{10}{s^2 + 21s + 10} = \frac{10}{(s^2 + 21s)\left(1 + \frac{10}{s^2 + 21s}\right)} = \frac{\frac{10}{G(s)}}{1 + \frac{10}{s^2 + 21s}}$

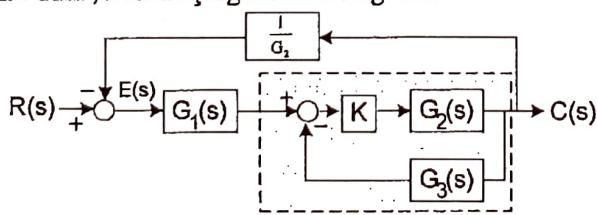


Örnek:

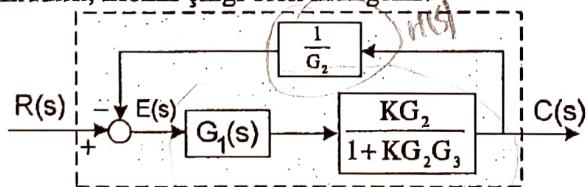


Yanda verilen Kontrol blok diyagramında, Kapalı-çevrim transfer fonksiyonu elde ediniz.  
 $\frac{C(s)}{R(s)} = ?$

I. Adım, kesikli çizgi blok indirgenir.



II. Adım, kesikli çizgi blok indirgenir.



II. Adım sonunda aşağıda verilen ifade elde edilir.

$$\frac{R(s)}{C(s)} = \frac{G_1 \frac{KG_2}{1+KG_2G_3}}{1+G_1 \frac{KG_2}{1+KG_2G_3} \frac{1}{G_2}}$$

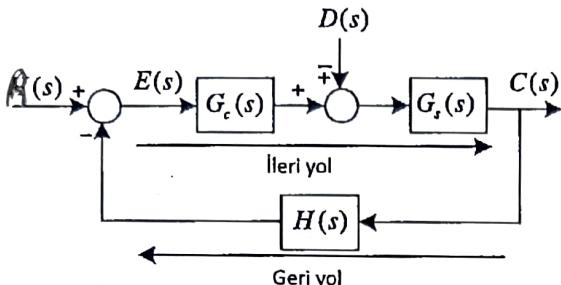
Sadeleştirilir ise olarak elde edilir.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 KG_2}{1 + KG_2 G_3 + G_1 K}$$

Aşağıda blok diyagram indirgeme (dönüşüm) için genel tablo verilmektedir. Gerekli durumlarda başvurulabilir.

Transformation	Equation	Block diagram	Equivalent block diagram
1. Combining blocks in cascade	$Y = (G_1 G_2)X$		
2. Combining blocks in parallel; or eliminating a forward loop	$Y = G_1 X \pm G_2 X$		
3. Removing a block from a forward path	$Y = G_1 X \pm G_2 X$		
4. Eliminating a feedback loop	$Y = G_1(X \pm G_2 Y)$		
5. Removing a block from a feedback loop	$Y = G_1(X \pm G_2 Y)$		
6. Rearranging summing points	$Z = W \pm X \pm Y$		
7. Moving a summing point ahead of a block	$Z = G(X \pm Y)$		
8. Moving a summing point beyond a block	$Z = G(X \pm Y)$		
9. Moving a take-off point ahead of a block	$Y = G X$		
10. Moving a take-off point beyond a block	$Y = G X$		

## 5.2 Bozucu Girişli Kapalı-çevrim transfer fonksiyonu



$R(s)$  = Referans giriş  
 $D(s)$  = Bozucu giriş  
 $G_c(s)$  = Kontrolör  
 $G_s(s)$  = Kontrol edilen sistem  
 $H(s)$  = Ölçme düzeneği

Bozucu giriş,  $D(s)$ , sisteme (+) veya (-) olarak etki edebilir. Kontrolör tasarımda  $D(s) = 0$  alınır.  $G_c(s)$  Kontrolörünün, bozucu girişi  $D(s)$ 'in sistem cevabı  $C(s)$ 'a olan etkisini yok etmesi istenir ve tasarım ona göre yapılır.

*VİDEO* a) **Açık çevrim transfer fonksiyonu (ACTF):** Çevrim içindeki transfer fonksiyonlarının çarpımından oluşur.

$$\begin{aligned} ACTF &= G_c(s)G_s(s)H(s) \\ &= \text{ileri yol transfer fonksiyonu} * \text{geri yol transfer fonksiyonu} \end{aligned}$$

b) **İleri yol transfer fonksiyonu:** Çıkış sinyali ile hata sinyali arasındaki transfer fonksiyonudur.

$$\frac{C(s)}{E(s)} = G_c(s)G_s(s)$$

Yukarıda verilen kapalı çevrim kontrol blok diyagramında sistemin iki giriş işaretleri vardır: Referans giriş  $R(s)$  ve Bozucu giriş  $D(s)$ . Bu durumda çıkış ifadesi lineer sistemlerin toplamsallık özelliğinden yararlanarak elde edilebilir.

Lineer sistemler süper pozisyon (çarpımsallık-toplamsallık) ilkesini sağlarlar. Önce her bir giriş için çıkış bulunur. Bu amaç için sırasıyla:

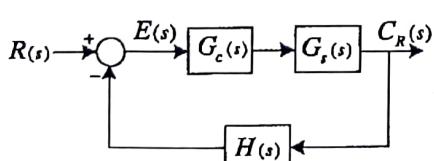
- i) Giriş  $R(s) \neq 0$ ,  $D(s) = 0$  durumu için çıkış  $\rightarrow C(s) = C_R(s)$
- ii) Giriş  $D(s) \neq 0$ ,  $R(s) = 0$  durumu için çıkış  $\rightarrow C(s) = C_D(s)$

Her iki giriş  $R(s) \neq 0$  ve  $D(s) \neq 0$  için çıkış ifadesi, her bir giriş için elde edilen çıkışların toplamı,

$$C(s) = C_R(s) + C_D(s)$$

Yukarıda anlatılan i) ve ii) adımları ile sırasıyla  $C_R(s)$  ve  $C_D(s)$  ifadeleri elde edilsin.

i) Giriş  $R(s) \neq 0$ ,  $D(s) = 0$  için, kapalı çevrim kontrol blok diyagramı olarak düzenlenlenebilir.



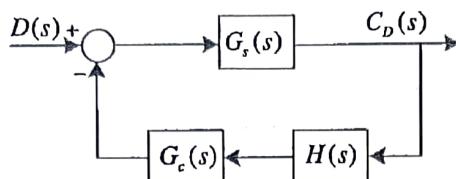
Dikkat edilirse sistemin yeni hali negatif geri beslemeli kapalı çevrim kontrol blok diyagramı formundadır.

$\frac{C_R(s)}{R(s)}$ : Kapalı-çevrim transfer fonksiyonu, daha önceden

elde edilen genel ifade  $T(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$  kullanılarak

doğrudan yazılabılır,  $C_R(s) = \frac{G_c(s)G_s(s)}{1+G_c(s)G_s(s)H(s)}R(s)$

ii) Giriş  $D(s) \neq 0$ ,  $R(s) = 0$  için, kapalı çevrim kontrol blok diyagramı yeniden çizilir ise,



elde edilir.  $\frac{C_D(s)}{D(s)}$  Kapalı-çevrim transfer fonksiyonu, yine genel ifade  $T(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$

kullanılarak doğrudan yazılabilir ve,  $C_D(s) = \frac{G_s(s)}{1 + G_c(s)G_s(s)H(s)} D(s)$  olarak elde edilir.

Her iki girişin sıfırdan farklı olduğu,  $R(s) \neq 0$ ,  $D(s) \neq 0$ , durum için sistem çıkış  $C(s)$  ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.  $C(s) = C_R(s) + C_D(s)$  olmak üzere,

$$C(s) = \frac{G_c(s)G_s(s)}{1 + G_c(s)G_s(s)H(s)} R(s) + \frac{G_s(s)}{1 + G_c(s)G_s(s)H(s)} D(s) \text{ elde edilir.}$$

**Yorum:** Yukarıda  $C(s)$  ifadesinde  $R(s)$  istenen referans  $D(s)$  ise bozucu girişidir. İdealde olması istenen  $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = r(t)$  ve çıkışta bozucu girişe karşı cevap  $\lim_{t \rightarrow \infty} c_D(t) = 0$  olmasıdır.

Peki,  $G_c(s)$  kontrolör bu olayı gerçekleştirebilir mi?

Bunun için  $C(s)$  ifadesinde  $G_c(s)$  parantezine alarak aşağıda verildiği gibi düzenlenir

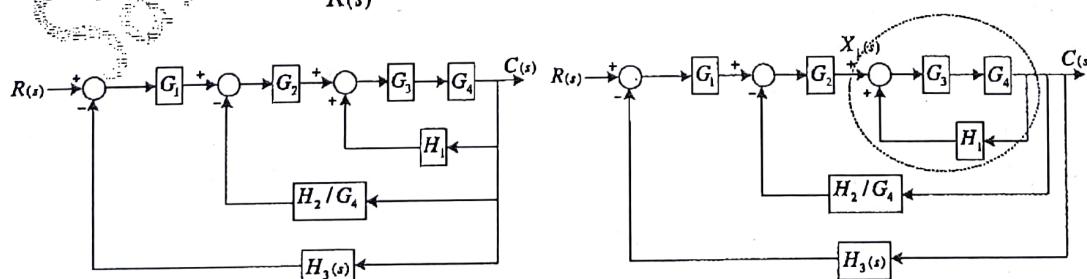
$$C(s) = \frac{\frac{G_s(s)}{G_c(s)}}{\frac{1}{G_c(s)} + G_s(s)H(s)} R(s) + \frac{\frac{G_c(s)}{G_s(s)}}{\frac{1}{G_c(s)} + G_s(s)H(s)} D(s), \quad G_c(s) \text{ kontrolör kazancı çok büyük,}$$

idealde  $|G_c(s)| \rightarrow \infty$  olsun. Bu değer  $C(s)$ 'de yerine koyulur ise,  $\frac{G_s(s)}{G_c(s)} = 0$  ve  $D(s)$ 'li

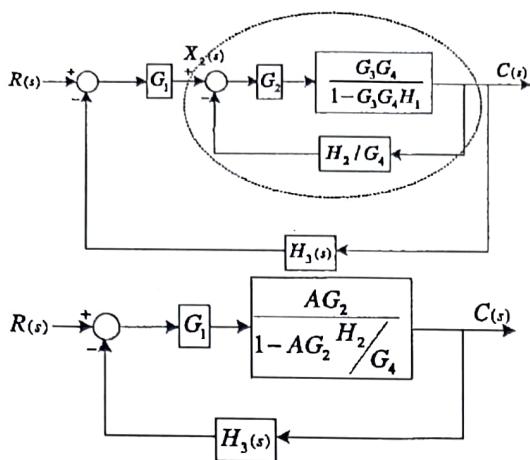
terim sıfır olur.  $\frac{1}{G_c(s)} = 0$  olur.  $H(s) = 1$  birim geri-beslemeli sisteme  $C(s) = R(s)$  olur.

$G_c(s)$  Kontrolör sistemin referansı takip etmesini sağlar ve bozucu etkisini çıkış cevabında sıfırlar.

**Örnek:** Aşağıda kapalı çevrim kontrol blok diyagramı verilen sistemin kapalı-çevrim transfer fonksiyonunu elde ediniz.  $\frac{C(s)}{R(s)} = ?$ . Önce daire içine alınan kısım indirgenir.



$$\frac{C(s)}{X_1(s)} = \frac{G_3 G_4}{1 - G_3 G_4 H_1} \quad \text{Benzer şekilde indirmeye devam edilir.}$$



$$A = \frac{G_3 G_4}{1 - G_3 G_4 H_1} \text{ olsun}$$

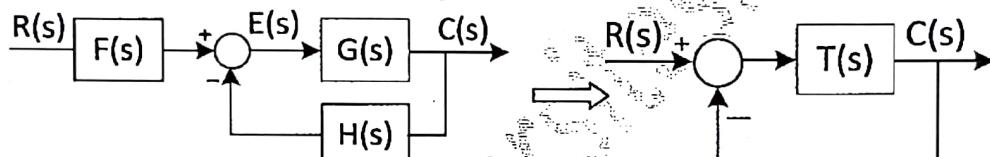
$$\frac{C(s)}{X_2(s)} = \frac{A G_2}{1 + A G_2 \frac{H_2}{G_4}} \text{ olarak yazılır.}$$

$$B = \frac{A G_2}{1 + A G_2 \frac{H_2}{G_4}} \text{ olsun}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{B G_1}{1 + B G_1 H_3} \text{ olarak yazılır.}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 H_2 - G_3 G_4 H_1 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_3} \text{ olarak elde edilir.}$$

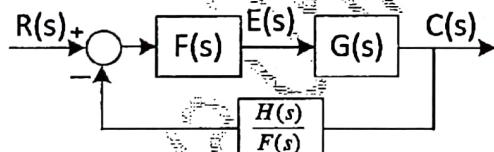
**Örnek:** Aşağıda verilen blok diyagramında sırası ile  $F(s)$  giriş işaret filtresi ve  $H(s)$  ise ölçüme devresine ait (geri-besleme) transfer fonksiyonudur.  $T(s)$ 'i bulunuz ve blok diyagramı aşağıda verildiği gibi birim geri-beslemeli olarak elde ediniz.



Giriş filtreli birim geri-beslemeli olmayan sistem

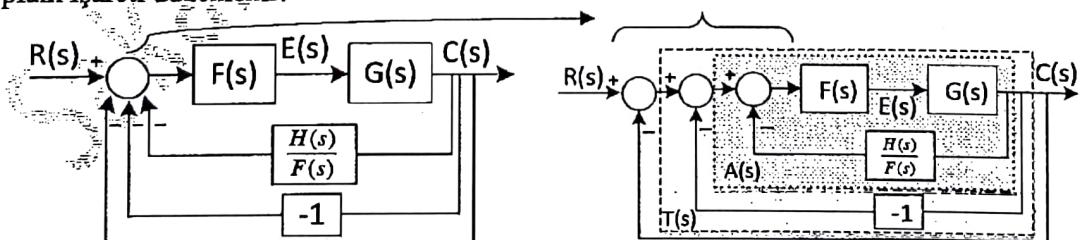
Birim geri-beslemeli sistem

**1.Adım:**  $E(s) = R(s)F(s) - C(s)H(s)$  göz önüne alınır ise,  $E(s)$  değişmeyecek şekilde



blok diyagramda yanda verilen işlem yapılır.

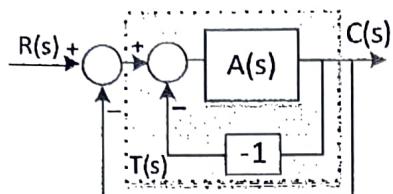
**2.Adım:**  $C(s)$  cevabı değişmeyecek şekilde (+) ve (-) birim geri-besleme ilave edilir ve toplam işaretin düzenlenir.



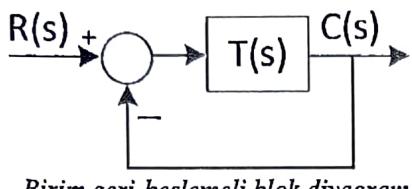
**3.Adım:** Yukarıda sağda verilmiş olan blok diyagramdan önce  $A(s)$  bloğu elde edilir.

$$A(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)\frac{H(s)}{F(s)}} \quad \text{ise} \quad A(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + G(s)H(s)} \text{ dir. } A(s) \text{ bloğu blok diyagramda}$$

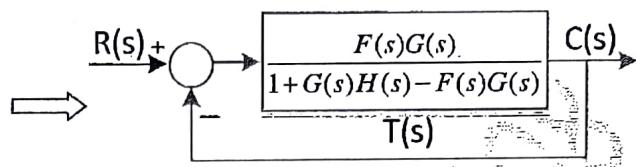
yerine yazılır ve  $T(s)$  bloğu ise aşağıda verilen (+) geri-beslemeli sisteminde elde edilir



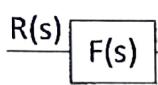
$$T(s) = \frac{A(s)}{1-A(s)} = \frac{\frac{F(s)G(s)}{1+G(s)H(s)}}{1-\frac{F(s)G(s)}{1+G(s)H(s)}} = \frac{F(s)G(s)}{1+G(s)H(s)-F(s)G(s)}$$



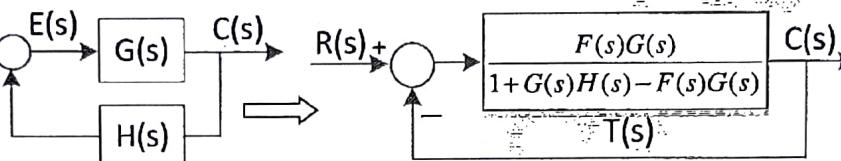
Birim geri-beslemeli blok diyagram



Elde edilen birim geri-beslemeli blok diyagram



Giriş filtreli birim geri-beslemeli olmayan sistem



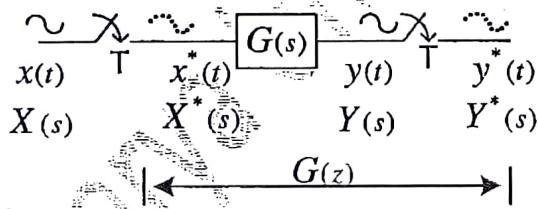
Birim geri-beslemeli sistem

**NOT:** Burada anlatılan blok diyagram indirmeler z-domeninde de geçerlidir. Yani transfer fonksiyonlarında  $S$  yerine  $Z$  koyulur.  $R(z), C(z), A(z), F(z), H(z), G(z), A(z)$  gibi.

## 6. Z-dönüşüm yöntemlerinin kontrol sistemlerine uygulanması

### 6.1 Ayrık zaman transfer fonksiyonu

İlk koşullar sıfır alınarak çıkış işaretinin z-dönüşümünün giriş işaretinin z-dönüşümüne oramıdır.



$$Y(s) = G(s)X^*(s) \quad \text{çıkış yazılır.}$$

$$Y^*(s) = G^*(s)X^*(s) \quad \text{örneklenmiş çıkış ifadesi}$$

$$Y(z) = G(z)X(z) \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) \quad \text{elde edilir. Gördüğü gibi ayrık transfer fonksiyonunun giriş ve çıkış işaretleri aynık işaretlerdir.}$$

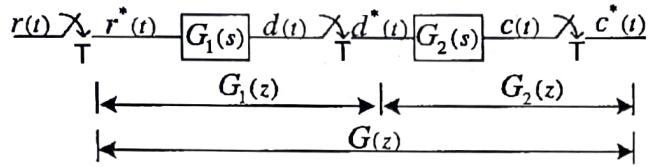
Transfer fonksiyonu yorumlamak konusunda bir örnek konur.

(R5) →

## 6.2 Kaskad (seri) bağlı sistemler

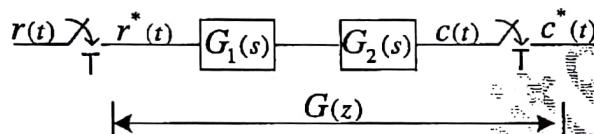
Seri bağlı sistemler örnekleyicinin var olup olmamasına göre farklı iki şekilde ele alınabilir.

6-2-1) *Örnekleyicili seri bağlı sistemler*: İki blok arasında örnekleyici vardır.



$\frac{C(z)}{R(z)} = G_1(z)G_2(z)$  transfer fonksiyonlarına ayrı ayrı z-dönüştümü uygulanır ve z-domenindeki transfer fonksiyonları çarpılır.

6-2-2) *Örnekleyicisiz seri bağlı sistemler*: İki blok arasında örnekleyici yoktur.



$C(s) = G_1(s)G_2(s)R^*(s)$   
 $C^*(s) = G_1G_2^*(s)R^*(s)$   
 $\frac{C(z)}{R(z)} = G_1G_2(z)$  : Transfer fonksiyonları s-domeninde çarpılır, sonra çarpının z-dönüştümü alınır.

Örnekleyicili seri bağlı sisteme her bir transfer fonksiyonunun z-dönüştümü ayrı ayrı alınır sonra z-dönüştümü alınmış transfer fonksiyonları çarpılır.

$$G_1(z)G_2(z) = Z\{G_1(s)\}Z\{G_2(s)\}$$

Örnekleyicisiz seri bağlı sisteme her iki transfer fonksiyonu s-domeninde çarpılır, sonra çarpımından oluşan transfer fonksiyonun z-dönüştümü alınır.

$$G_1G_2(z) = Z\{G_1(s)G_2(s)\}$$

Örnekleyicili seri bağlı sistem transfer fonksiyonu örnekleyicisiz seri bağlı sistem transfer fonksiyonuna eşit değildir.

$$G_1G_2(z) \neq G_1(z)G_2(z)$$

$$Z\{G_1(s)G_2(s)\} \neq Z\{G_1(s)\} \cdot Z\{G_2(s)\}$$

**Örnek:**  $G_1(s) = \frac{1}{s+a}$  ve  $G_2(s) = \frac{1}{s+b}$  olarak veriliyor.

$G_1G_2(z)$  ve  $G_1(z)G_2(z)$ 'i elde ederek  $G_1G_2(z) \neq G_1(z)G_2(z)$  olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad G_1G_2(z) &= Z(G_1(s)G_2(s)) = Z\left(\frac{1}{s+a}\frac{1}{s+b}\right) \\ &= Z\left(\frac{1}{s+a}\frac{1}{s+b}\right) = (s+a)\frac{1}{(s+a)(s+b)} \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=-a} + (s+b)\frac{1}{(s+a)(s+b)} \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=-b} \\ &= \frac{1}{(b-a)} \frac{z(e^{-aT} - e^{-bT})}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})} \\ \text{ii)} \quad G_1(z)G_2(z) &= Z(G_1(s))Z(G_2(s)) = Z\left(\frac{1}{s+a}\right)Z\left(\frac{1}{s+b}\right) \\ &= \frac{z}{z-e^{-aT}} \frac{z}{z-e^{-bT}} = \frac{z^2}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})} \end{aligned}$$

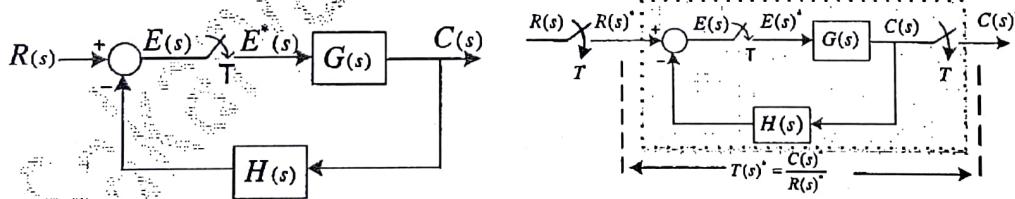
Gördüğü gibi;  $\frac{1}{(b-a)} \frac{z(e^{-aT} - e^{-bT})}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})} \neq \frac{z^2}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$  olduğundan

**NOT:**  $G_1G_2(z) \neq G_1(z)G_2(z)$  dir.

### 6.3 Ayrık kontrol sistemlerinin kapalı çevrim transfer fonksiyonu

Ayrık-zaman kontrol sistemlerinde örnekleminin bulunduğu yer ve/veya yerlere göre kapalı çevrim transfer fonksiyonu değişmektedir. Aşağıda örneklemenin çeşitli durumları için sık karşılaşılan aynı zamanki sistemler verilmiştir.

**Örnek:**  $R(s)$  giriş ve  $C(s)$  çıkış olmak üzere aşağıdaki sisteme  $T(s)^* = \frac{C(s)^*}{R(s)^*}$  'i elde ediniz.



$\frac{C(s)^*}{R(s)^*}$  yazılabilmesi için giriş ve çıkış işaretleri yukarıda sağda verildiği gibi örnekleştir.

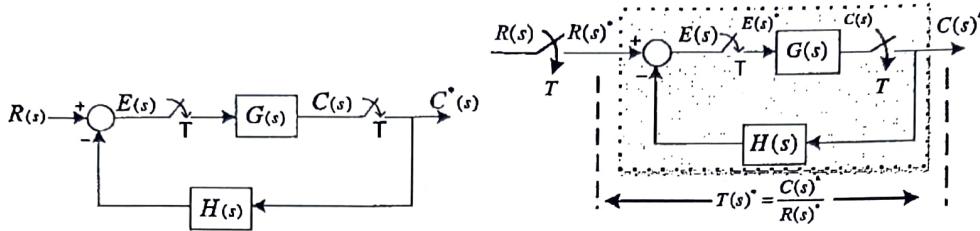
$$C(s) = E^*(s)G(s) \quad \text{ve} \quad E(s) = R(s) - C(s)H(s) \rightarrow E(s) = R(s) - H(s)(E^*(s)G(s)) \quad \text{yazılır.}$$

$$\downarrow \quad E(s) \text{ örnekleştir ise} \quad E^*(s) = R^*(s) - GH^*(s)E^*(s) \implies E(z) = \frac{R(z)}{1+GH(z)} \text{ elde edilir.}$$

$$C^*(s) = E^*(s)G^*(s) \implies C(z) = E(z)G(z)$$

$$C(z) = \frac{R(z)}{1+GH(z)} G(z) \implies T(s)^* = \frac{C(s)^*}{R(s)^*} = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+GH(z)} \text{ olarak elde edilir.}$$

**Örnek:**  $R(s)$  giriş ve  $C(s)^*$  çıkış olmak üzere aşağıdaki sisteme  $T(s)^* = \frac{C(s)^*}{R(s)}$  'i elde ediniz.



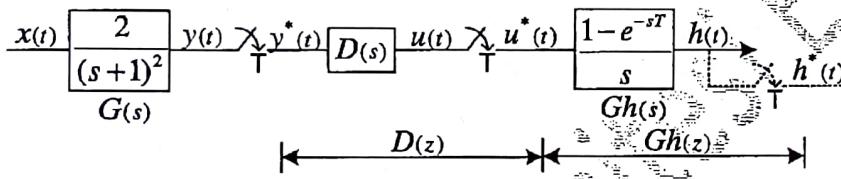
$\frac{C(s)^*}{R(s)^*}$  yazılabilmesi için giriş işaretini yukarıda sağda verildiği gibi örneklenir.

$$C(s) = E(s)^* G(s) \quad \text{ve} \quad E(s) = R(s) - C^*(s) H(s) \implies E(s)^* = R(s)^* - C(s)^* H(s)$$

$$C(s)^* = E(s)^* G(s)^* \Rightarrow C(s)^* = G^*(s) (R(s)^* - C(s)^* H(s))$$

$$C(z)[1 + G(z)H(z)] = G(z)R(z) \Rightarrow \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} \text{ olarak elde edilir.}$$

**Örnek:**



$$D(z) = \frac{z - 0.5}{T(z + 0.5)}, \quad x(t) = e^{-t}u(t) \quad \text{verildiğine göre } H(z) = ?$$

Şekilden  $H(z) = Gh(z)D(z)Y(z)$  dir

$$\text{i-) } Y(s) = G(s)X(s) \Rightarrow Y^*(s) = GX^*(s) \Rightarrow Y(z) = GX(z) = Z\{G(s)X(s)\} \text{ dir.}$$

$$X(s) = L\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1} \text{ elde edilen ifade } Y(z) \text{ de yerine koyulur.}$$

$$Y(z) = Z\left\{\frac{2}{(s+1)^2} \cdot \frac{1}{s+1}\right\} = Z\left\{\frac{2}{(s+1)^3}\right\} \text{ elde edilir. Z-dönsümü aşağıda yapılır.}$$

$$Y(z) = \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^2}{ds^2} \left\{ (s+1)^3 \frac{2}{(s+1)^3} \frac{z}{z - e^{sT}} \Big|_{s=-1} \right\} = \frac{d^2}{ds^2} \left\{ \frac{z}{z - e^{sT}} \Big|_{s=-1} \right\}$$

$$= \frac{d}{ds} \left\{ \frac{Tze^{sT}}{(z - e^{sT})^2} \Big|_{s=-1} \right\} = \frac{zT^2e^{-T}(z + e^{-T})}{(z - e^{-T})^3}$$

$$\text{ii-) } Gh(z) = Z\left\{\frac{1 - e^{-sT}}{s}\right\} \xrightarrow{s=e^{sT}} Z\left\{\frac{1 - z^{-1}}{s}\right\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s}\right\} \text{ ise } Gh(z) = \frac{z-1}{z} \frac{z}{z-1} = 1$$

Elde edilen aynı zamanda transfer fonksiyonları  $H(z)$  de yerlerine koyulurlar ise

$$H(z) = Gh(z)D(z)Y(z) = \frac{z - 0.5}{T(z + 0.5)} \frac{zT^2e^{-T}(z + e^{-T})}{(z - e^{-T})^3} \text{ elde edilir.}$$

## 7. Fiziksel Sistemlerin Matematik Modelleri

Bir sistemin matematik modeli o sistemin davranışını gösteren matematiksel bağıntılardır. Bu bağıntılar cebrik denklemler, diferansiyel denklemler ve diferans (fark) denklemleri şeklinde olabilir. Sistem değişkenleri arasındaki bağıntıyı veren denklemlere otomatik kontrol sisteminin matematik modeli denir. Fiziksel bir sistem elektrik, mekanik, pnömatik, hidrolik, termik veya bunların karışımı bir temele dayanabilir.

## 7.1 Elektriksel sistemler

*Kaynaklar:* Gerilim (V), Akım (I)

<i>Elemenler:</i>	<b>Direnç</b>	<b>Self</b>	<b>Kondansatör</b>	<b>ideal trafo</b>
				
<i>Uç denklemleri :</i>	$e(t) = Ri(t)$	$e(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$e(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$	$e_1(t)i_1(t) = e_2(t)i_2(t)$

## 7.2. Mekanik sistemler

Mekanik sistemleri doğrusal hareketli ve döner hareketli olmak üzere iki grupta incelemek mümkündür.

### **7-2-1 Doğrusal hareketli mekanik sistemler**

*Kaynaklar: Kuvvet f(t) N (Newton), hız v(t) m/sn (metre/Saniye)*

The diagram shows four components arranged horizontally. On the left, a small car-like object with arrows pointing in opposite directions is labeled "Elemenlar". To its right is a car with friction wheels labeled "Sürtünme". Further right is a mass labeled "Kütle" with a "1 Kg" weight hanging from it. On the far right is a coiled spring labeled "Yay". Below the first three components is a schematic representation of a mass-spring system: a mass  $m$  connected to a spring with stiffness  $k$ , with a velocity  $V(t)$  arrow and a displacement  $\phi(t)$  arrow.

**7-2-2 Döner hareketli mekanik sistemler**

**Kaynaklar:** Moment  $T(t)$  N m (Newton metre) **acısal hız**  $w(t)$  rad/sn (radian/sn)

$$Uç denklemleri : \quad T(t) = Bw(t) \quad T(t) = J \frac{dw(t)}{dt} \quad T(t) = k \int_0^t w(t) dt$$

$= \beta \frac{d\phi(t)}{dt}$

$= \int \beta t^2 \phi(t)$

$$= B \frac{d\mu_B}{dt}$$

$$T(t) = J \frac{dw(t)}{dt}$$

$$= \int \frac{d^2\phi(t)}{\partial t^2}$$

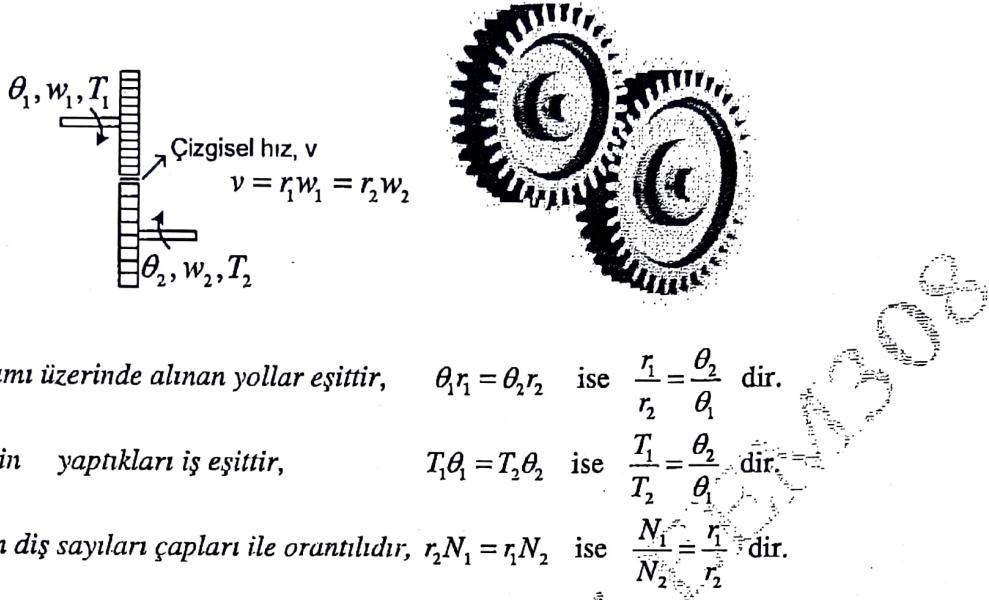
$$T(t) = k \int_0^t w(t) dt$$

from dear old hit.

58

$$\begin{array}{ccc} \phi(t) & \longrightarrow & [S] \xrightarrow{\quad} w(t) \\ w(t) & \longrightarrow & [T_S] \xrightarrow{\quad} \phi(t) \end{array}$$

### Dişli Takımı



Dişli takımı üzerinde alınan yollar eşittir,  $\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2$  ise  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1}$  dir.

İki dişinin yapıkları iş eşittir,  $T_1 \theta_1 = T_2 \theta_2$  ise  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1}$  dir.

Dişlerin dış sayıları çapları ile orantılıdır,  $r_2 N_1 = r_1 N_2$  ise  $\frac{N_1}{N_2} = \frac{r_1}{r_2}$  dir.

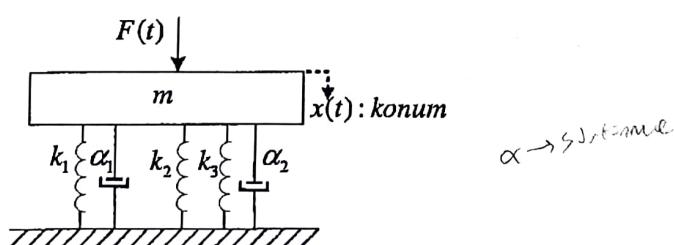
Nihayetinde dişli takımı için aşağıdaki eşitlikler tanımlanabilir:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

### Mekanik Elemanların Seri ve Paralel Bağlanması

A-) **Paralel bağlı lineer mekanik sistemler;** Her elemanın aynı yer değiştirmeye sahip olduğu ve sisteme uygulanan kuvvetin sistemeındaki elemanların kuvvetleri toplamına eşit olduğu sistemlerdir.

**NOT:** 2017 den önceki ders notlarında verilmiş olan paralel ve seri bağlı mekanik sistem tanımları ders notları kaynaklar kısmındaki "Otomatik Kontrol- I sayfa 63-65 , Prof.Dr. M.Kemal Sarıoğlu, İTÜ,3.Baska" göre verilmiştir. Bu kaynaktaki paralel/seri tanımları elektrik devrelerindeki akım  $i(t)$  ye karşılık mekanik sistemlerdeki konum  $x(t)$  göz önüne alınarak verilmiştir. Elektrik devrelerinde içinden aynı  $i(t)$  akımı geçen elemanların seri bağlantı tanımı, mekanik sistemlerde aynı  $x(t)$  konum değiştirmeye sahip mekanik elemanlar için işaretler göz önünde bulundurularak verilmiştir, mekanik elemanların bağlanma şekillerine göre değil. Bu tanımlar güncel ve yaygın görüşler dikkate alınarak mekanik elemanları bağlantı şekillerine göre güncellenmiştir.



Yukarıda çeşitli mekanik elemanlardan oluşan sistem incelendiğinde,  $m$  kütlesine  $F(t)$  kuvveti uygulandığında sistemdeki tüm mekanik elemanlar ( $k_1, k_2, k_3, \alpha_1$  ve  $\alpha_2$ ) aynı

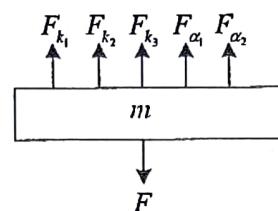
yer değiştirme  $x(t)$ 'ye eşittir. *Paralel bağlı lineer mekanik sistemler* tanımına göre tüm mekanik elemanlar birbirleri ile Paralel bağlıdır.

*Verilen sistemin dinamik denklemleri iki farklı durum için yazılabilir.*

1-) Sistem denge durumunda iken  $F(t)$  kuvveti uygulanır ise  $Mgu(t) = 0$  dir.

2-) Yay sıkışması sıfır iken (konum değiştirme  $x(t) = 0$ )  $F(t)$  kuvveti uygulanması durumu  $Mgu(t) \neq 0$  dir.

**1. durum sistem dengede durumunda iken  $F(t)$  kuvveti uygulanır ise,  $m$  kütlesinin serbest cisim gösterimi aşağıdaki gibi olur.  $Mgu(t) = 0$  dir.**



$$F_{net} = ma = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Sistemi tanımlayan dinamik denklemler aşağıda verildiği gibi elde edilir. Sistemi net hareket ettiren kuvvet,

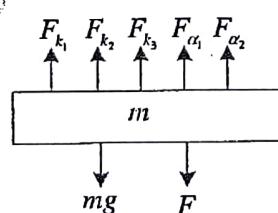
$$F_{net}(t) = ma = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \sum F(t) \quad \text{dir.}$$

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(t) - (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{dx(t)}{dt} - (k_1 + k_2 + k_3)x(t) \quad \text{buradan } F(t) \text{ çekilir ise}$$

$$F(t) = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{dx(t)}{dt} + (k_1 + k_2 + k_3)x(t) \quad \text{elde edilir.}$$

$$m s^2 X(s) = F(s) = [(k_1 + k_2 + k_3)X(s) + (\alpha_1 + \alpha_2)sX(s)]$$

**2. durum sistem dengede değil iken,  $m$  kütlesinin serbest cisim gösterimi ise aşağıdaki gibi olur.  $Mgu(t) \neq 0$  dir.**



$$F_{net} = ma = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Sistemi tanımlayan dinamik denklemler aşağıdaki gibi elde edilir.

$$F_{net}(t) = ma = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \sum F(t) \quad \text{dir.}$$

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(t) + mg(t) - (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{dx(t)}{dt} - (k_1 + k_2 + k_3)x(t) \quad \text{olarak yazılır.}$$

$$F(t) + mg(t) = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{dx(t)}{dt} + (k_1 + k_2 + k_3)x(t)$$

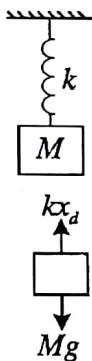
$$F(s) + mgU(s) = \{ms^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)s + (k_1 + k_2 + k_3)\} X(s)$$

$X(s)$  yer değiştirme uygulanan kuvvet  $F(s)$  ve yerçekimi kuvveti  $mgU(s)$  bağlı olarak aşağıda verilmiştir.

$$X(s) = \frac{1}{ms^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)s + (k_1 + k_2 + k_3)} F(s) + \frac{mg}{ms^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)s + (k_1 + k_2 + k_3)} U(s)$$

Yukarıdaki örnekte,  $F(t)$  kuvvetinin sistem denge halinde uygulandığında (yer çekimi kuvveti mekanik elemanların her birinin kuvvetleri toplamına eşit)  $Mg u(t) = 0$  ve yayların sıkışmamış olması durumunda  $F(t)$  kuvvetinin uygulanması halinde  $Mg u(t) \neq 0$  dır. Aşağıdaki örnek incelenerek sebebi anlaşılabılır.

Örnek:



*Yaya asılı kütle denge konumunda bulunsun. Denge konumunda bloğa etki eden kuvvetlerin (yer çekimi kuvveti ve yay kuvveti) toplamı sıfırdır. Bu durumda sistemin serbest cisim gösterimi aşağıdaki gibidir.*

$$Mg - kx_d = 0 \rightarrow x_d = \frac{Mg}{k}$$

*$x_d$  = denge durumunda yayın statik yer değiştirmesi*

- 1- Yaya asılı kütle denge durumunda iken ( $x_d$ ), yay  $x$  kadar uzatılıp  $x_t = x + x_d$  noktasından serbest bırakılırsa, M külesini hareket ettiren net kuvvet,

*Sistemdeki kuvvetlerin toplamı sıfırdır.*

$$x_t = x + x_d \quad \text{ve}$$

$$x_d = \frac{Mg}{k} \rightarrow x_t = x + \frac{Mg}{k} \quad \text{dir}$$

$$\sum F = ma \Rightarrow Mg - kx_t = M \frac{d^2 x_t}{dt^2}$$

$$Mg - k(x + \frac{Mg}{k}) = M \frac{d^2 x}{dt^2}$$

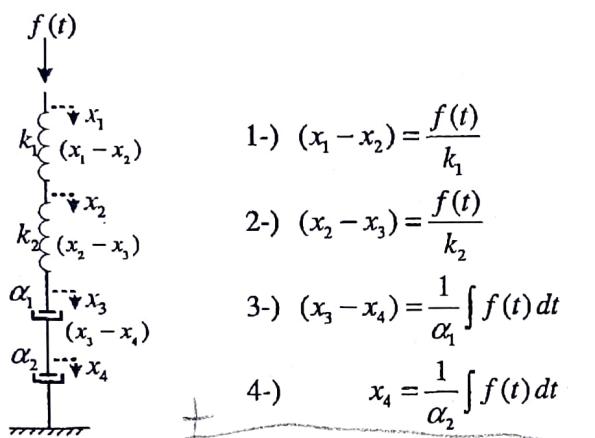
$$Mg - kx - Mg = M \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow M \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad \text{elde edilir.}$$

*Görüldüğü gibi denge konumunda  $F$  kuvveti uygulanır ise, hareket denklem ifadesinde  $Mg$  yok olur.*

- 2- Yay uzamamış konumda iken sistem  $x$  kadar uzatılıp serbest bırakılır ise,  $x_d=0$  olacağından  $x_t = x + x_d$  ifadesinden  $x_t = x$  olur.

$$Mg - kx = M \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow Mg = M \frac{d^2 x}{dt^2} + kx \quad \text{Görüldüğü gibi yer çekim kuvveti mevcuttur.}$$

**B-) Seri bağlı lineer mekanik sistemler;** Bir lineer mekanik sisteme elemanlara uygulanan kuvvet aynı ve toplam yer değiştirmeye her bir mekanik elemanın yer değiştirmeye toplamına eşit ise o sisteme ait mekanik elemanlar birbiri ile *seri bağlıdır*.



Toplam  $x$   
 $(x_1)$  bulunabilir  
 ola deşirler  
 sensör  
 uygulansın

$$f(t) = k_1 (x_1 - x_2)$$

$$f(t) = k_2 (x_2 - x_3)$$

$$f(t) = \alpha_1 \frac{d}{dt} (x_3 - x_4)$$

$$f(t) = \alpha_2 \frac{d}{dt} (x_1 - x_4)$$

4 numaralı denklem 3 numaralı denklem de yerine yazılırsa,  $x_3 = \frac{1}{\alpha_1} \int f(t) dt + \frac{1}{\alpha_2} \int f(t) dt$

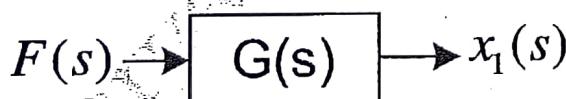
3 numaralı denklem 2 numaralı denklem de yazılırsa,

$$x_2 = \frac{f(t)}{k_2} + \frac{1}{\alpha_1} \int f(t) dt + \frac{1}{\alpha_2} \int f(t) dt$$

ve sistemin toplam yer değiştirmesi 2 numaralı denklemin 1 numaralı denklem de yerine yazılıması ile aşağıdaki gibi bulunur.

$$x_1(t) = \frac{f(t)}{k_1} + \frac{f(t)}{k_2} + \frac{1}{\alpha_1} \int f(t) dt + \frac{1}{\alpha_2} \int f(t) dt \quad \text{elde edilir.}$$

$x_1(t)$  toplam yer değiştirmeye, her bir elemanın yer değiştirmelerinin toplamıdır. Tamıma göre  $k_1, \alpha_1, k_2$  ve  $\alpha_2$  lineer mekanik elemanlar birbiri ile seri bağlıdır. Birbiri ile seri bağlı mekanik elemanlardan oluşan sistemin girişi  $f(t)$  kuvveti ve çıkış ise toplam yer değiştirmeye  $x_1(t)$  olmak üzere transfer fonksiyonu  $G(s)$  elde edilmeye çalışılsın.



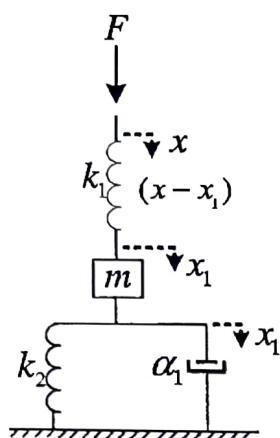
$x_1(t)$  nin Laplace dönüşümü alınır ve düzenlenir ise

$$X_1(s) = F(s) \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{s\alpha_1} + \frac{1}{s\alpha_2} \right] \Rightarrow \frac{X_1(s)}{F(s)} = \left[ \frac{s^2 k_2 \alpha_1 \alpha_2 + s^2 k_1 \alpha_1 \alpha_2 + s k_1 k_2 \alpha_2 + s k_1 k_2 \alpha_1}{s^2 k_1 k_2 \alpha_1 \alpha_2} \right]$$

$$F(s) \rightarrow \boxed{\frac{s^2 k_2 \alpha_1 \alpha_2 + s^2 k_1 \alpha_1 \alpha_2 + s k_1 k_2 \alpha_2 + s k_1 k_2 \alpha_1}{s^2 k_1 k_2 \alpha_1 \alpha_2}} \rightarrow x_1(s)$$

olarak elde edilir.

Örnek:



Verilen sisteme ait dinamik denklemleri yazınız.

(Not: Bundan sonraki mekanik sistemlerde aksi belirtilmemiş F(t) kuvvetinin sistem denge halinde iken uygulandığı kabul edilecektir.)

$$m\ddot{x} = F_{net} = F(t) - (F_1 + F_2) ; \quad F(t) = k_1(x - x_1)$$

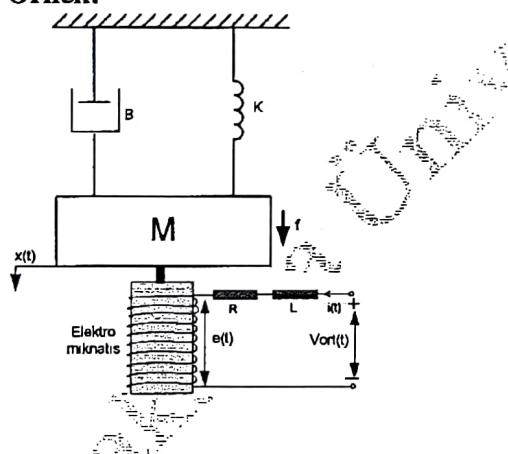
$$m \frac{d^2x_1(t)}{dt^2} = F(t) - k_2 x_1(t) - \alpha_1 \frac{dx_1(t)}{dt}$$

Verilen sistem incelediğinde  $m$  kütlesi,  $k_2$  yayı ve  $\alpha_1$  sürtünme elemanlarının aynı yer değiştirmeye  $x_1(t)$  ye sahip oldukları görülür. Bundan dolayı  $m$ ,  $\alpha_1$  ve  $k_2$  elemanları birbirleri ile **paralel bağlı**dır. Aralarında paralel bağlı olan  $m$ ,  $\alpha_1$  ve  $k_2$  elemanları  $k_1$  yayı ile seri bağlıdır. Bu durumda sistemin dinamik denklemleri aşağıda verildiği gibi yazılır.

$$1-) F(t) = k_1(x(t) - x_1(t)) \Rightarrow \frac{F(t)}{k_1} = x(t) - x_1(t)$$

$$2-) F(t) = m \frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + k_2 x_1(t) + \alpha_1 \frac{dx_1(t)}{dt}$$

Örnek:



Şekilde verilen kütle-yay sisteminde konum  $x(t)$  bir elektromagnıt tarafından kontrol edilmek istenmektedir. Sisteme ait dinamik denklemleri yazınız. Kontrol blok diyagramını çiziniz.

$e(t) = K_b \frac{dx(t)}{dt}$  : elektro-magnıtta endüklenen gerilim.

$f(t) = K_f i(t)$  : Elektro-magnıt kuvveti.

**Çözüm2:** Dinamik denklemler sırası ile aşağıda yazılır.

- Elektro-magnıt bobin eşdeğer devresi için çevre denklemi yazılır

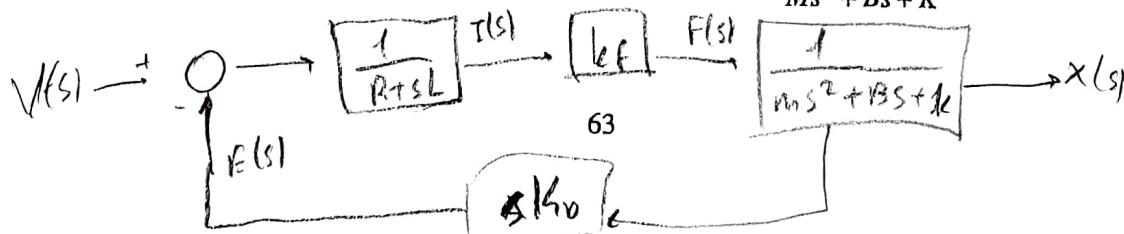
$$V_{out}(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad V_{out}(s) = R \cdot I(s) + L \cdot s \cdot I(s) + E(s) \rightarrow I(s) = \frac{V_{out}(s) - E(s)}{sL + R}$$

$$2- \text{ Elektro-magnıtta üretilen kuvvet, } f(t) = K_f \cdot i(t) \rightarrow F(s) = K_f \cdot I(s)$$

- Kütle, yay ve sökümlendirici Kuvvetleri: Her bir eleman aynı yer değiştirmeye sahip olduğu için kendi aralarında seri bağlıdır. Toplam kuvvet elemanların kuvvetleri toplamına eşittir.  $m\ddot{x} = F_{net} = F(t) - (F_1 + F_2)$

$$f(t) = M \frac{d^2x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t)$$

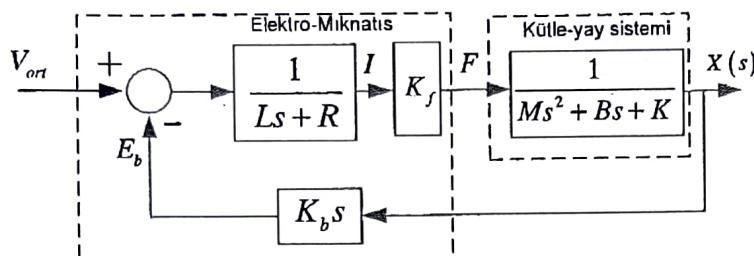
$$F(s) = M \cdot s^2 \cdot X(s) + B \cdot s \cdot X(s) + K \cdot X(s) \rightarrow X(s) = \frac{F(s)}{Ms^2 + Bs + K}$$



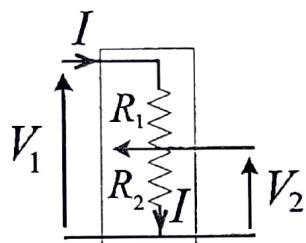
4- Elektro-mıknatıs bobininde  $\frac{dx(t)}{dt}$  dolayı endüklenen gerilim.

$$e(t) = K_b \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow E(s) = K_b \cdot s \cdot X(s)$$

Denklem 1,2,3 ve 4 kullanılarak sisteme ait kontrol blok diyagramı aşağıda verilmiştir.



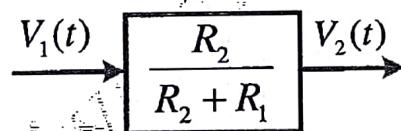
**Lineer Potansiyometre:** Lineer gerilim bölücü olarak kullanılır.



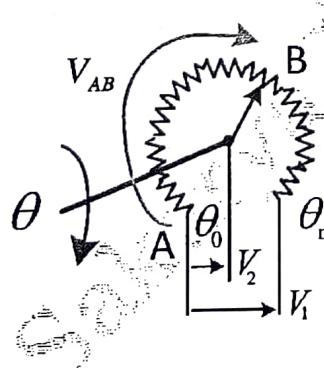
$$V_1(t) = (R_2 + R_1)I(t) \quad \text{giriş gerilimi}$$

$$V_2(t) = R_2I(t) \quad \text{çıkış gerilimi}$$

$$\frac{V_2(t)}{V_1(t)} = \frac{R_2 I(t)}{(R_2 + R_1) I(t)} \quad \text{ise} \quad \frac{V_2(t)}{V_1(t)} = \frac{R_2}{R_2 + R_1} \quad \text{dir.}$$

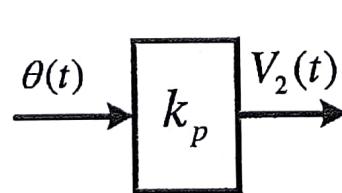


**Döner Potansiyometre:** Açısal gerilim bölücü olarak kullanılır



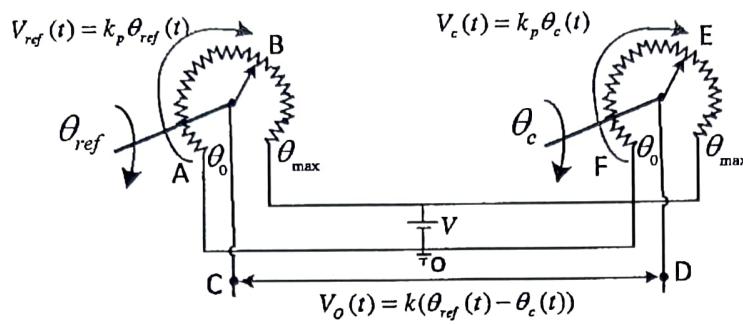
Potansiyometre  $\theta$  açısı kadar döndürüldüğünde A dan B'ye gelmektedir. Potansiyometre katsayısi  $k_p$  (Volt / derece) dir. Giriş gerilimi  $V_1(t) = k_p \theta_{\max}$  dir.  $k_p = \frac{V_1(t)}{\theta_{\max}}$  olur.

Çıkış gerilimi  $V_2(t) = k_p \theta(t)$  dir,  $V_2(t) = \underbrace{\left( \frac{V_1(t)}{\theta_{\max}(t)} \right)}_{k_p} \theta(t)$  dir.

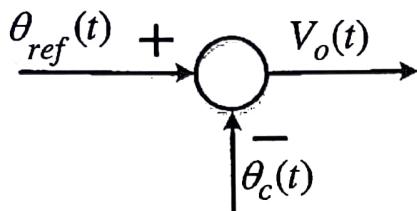


$$\frac{\theta_0}{\theta_{\max}} = \frac{V_2}{V_1}$$

İki adet döner potansiyometre pozisyon kontrolünde kullanılmaktadır.  $\theta_e(t)$  Çıkışı motor miline bağlanmaktadır.  $\theta_{ref}(t)$  referans girişidir.  $V_o(t)$  ise ölçülen hatadır.



C-D uçları  $V_o$  çıkış gerilimidir.  
A-B-C-D-E-F-O-A yolu boyunca çevre gerilimleri yazılır.  
 $V_{AB} - V_{CD} - V_{EF} = 0$   
 $V_{ref} - V_o - V_c = 0$   
 $V_o = V_{ref} - V_c$  elde edilir.  
 $V_o(t) = k_p \theta_{ref}(t) - k_p \theta_c(t)$  olur.

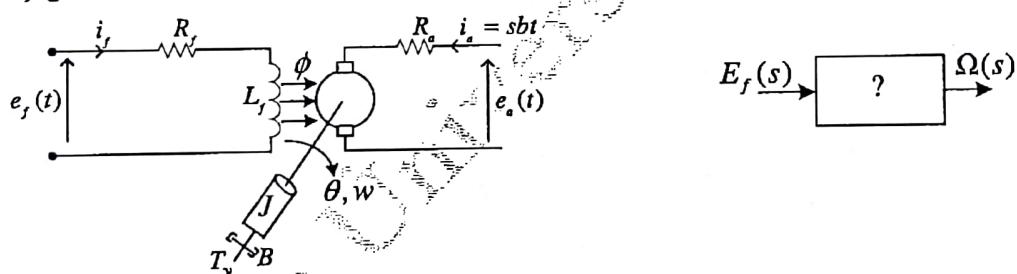


### 7.3 Elektromekanik Sistemler

Hem elektrik hem de mekanik temellere dayanan elektrik makineleri gibi sistemlerdir.

### 7.4 Alan kontrollü DC-Makine

Aşağıda verilen alan kontrollü DC makinenin kontrol blok diyagramını elde edilecektir.



t-domeninde dinamik denklemleri yazılır.

$$1-) e_f(t) = R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt}$$

stator sargısı için çevre denklemi yazılır.

$$\phi(t) = k_f i_f(t)$$

$$2-) T_e(t) = \phi(t) k_a i_a(t) = k_f k_a i_a(t) i_f(t) = K_i_f(t)$$

elektriği moment

$$T_e = K_I I_f(t)$$

$$3-) T_m(t) = J \frac{dw(t)}{dt} + Bw(t) + T_y$$

mekanik moment

$$4-) T_e(t) = T_m(t) \quad (\text{sürekli rejimde})$$

Not: Rotorun sabit akım kaynağı ile beslendiği kabul edildiğinden denklem yazılma esnasında rotor için zit emk etkisi göz önüne alınmaz

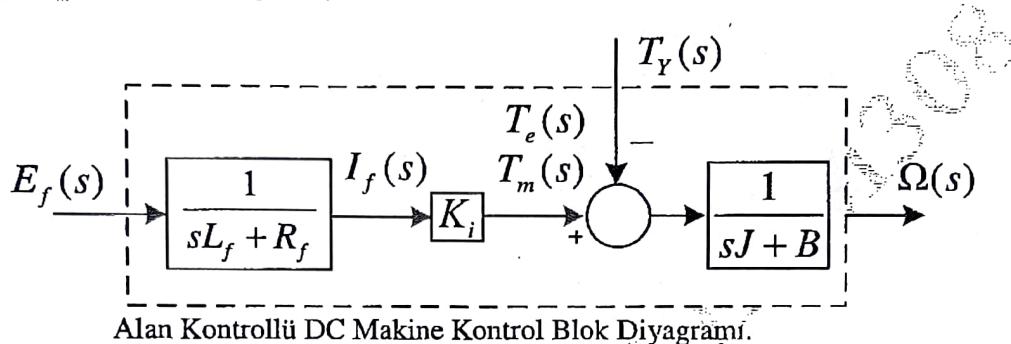
*t*-domeninde elde edilen 1-4 denklemlerinin Laplace dönüşümleri aşağıda verilmiştir.

$$1-) \quad E_f(s) = R_f I_f(s) + sL_f I_f(s) \quad \Rightarrow \quad I_f(s) = \frac{E_f(s)}{sL_f + R_f}$$

$$2-) \quad T_e(s) = K_i I_f(s)$$

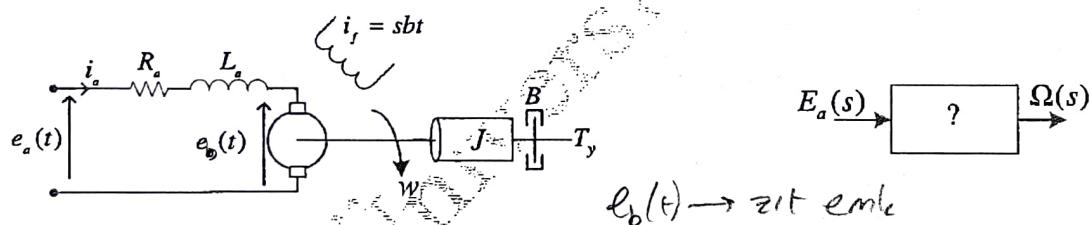
$$3-) \quad T_m(s) = sJ\Omega(s) + B\Omega(s) + T_y(s) \quad \Rightarrow \quad \Omega(s) = \frac{T_m(s) - T_y(s)}{sJ + B}$$

$$4-) T_e(s) = T_m(s) \quad (\text{sürekli rejimde})$$



## 7.5 Endüvi (Rotor) kontrollü DC-Makine

Aşağıda verilen endüvi kontrollü DC makinenin kontrol blok diyagramı elde edilecektir.



t-domeninde dinamik denklemleri yazılır.

$$1-) e_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_b(t) \quad \text{rotor sargısı için çevre denklemi yazılır.}$$

$$2-) \quad T_e(t) = K_i i_a(t) \quad \text{električni moment}$$

$$3-) \quad T_m(t) = J \frac{dw(t)}{dt} + Bw(t) + T_y \quad \text{mekanik moment}$$

$$4-) \quad e_b(t) = K_b w(t) \quad \text{zit emk}$$

$$\text{d}) \quad T_e(t) = T_m(t) \quad \text{sürekli rejimde}$$

$t$ -domeninde elde edilen 1-4 denklemlerinin Laplace dönüşümleri aşağıda verilmiştir.

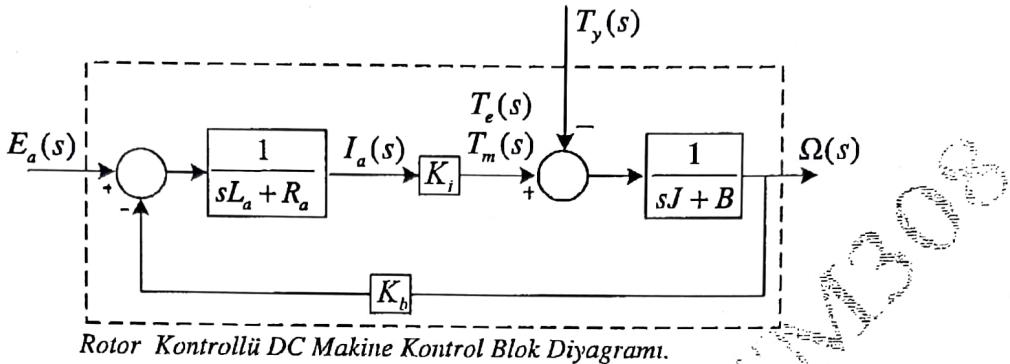
$$1-) \quad E_a(s) = R_a I_a(s) + s L_a I_a(s) + E_b(s) \quad \Rightarrow \quad I_a(s) = \frac{E_a(s) - E_b(s)}{sL_a + R_a}$$

$$B(w(f)) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(t) dt$$

$$2-) T_e(s) = K_i I_a(s)$$

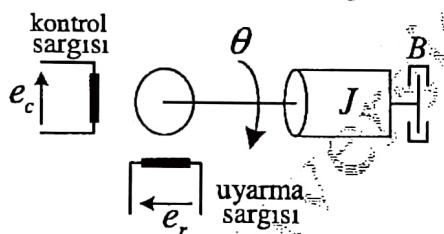
$$3-) T_m(s) = sJ\Omega(s) + B\Omega(s) + T_y(s) \Rightarrow \Omega(s) = \frac{T_m(s) - T_y(s)}{sJ + B}$$

$$4-) T_e(s) = T_m(s) \quad (\text{sürekli rejimde})$$



### 7.6 İki fazlı AC Motor

İki fazlı alternatif akım motoru konum kontrolünde kullanılır. İki fazlı sincap kafesli bir asenkron makinedir. Sade yapısı ve kolay arıza yapmamasından dolayı tercih edilir. Çok düşük güçlerden ( $<1$  watt) birkaç yüz watt gücüne kadar imal edilebilmektedir.



Referans (uyarma) sinyeline 50, 60, 400 veya 1000 Hz' lik referans işaret uygulanır. Statordaki referans ve kontrol sinyal eksenleri arasında  $90^\circ$  faz farkı vardır. Motorun davranış sabitesinin küçük olması için eylemsizlik momenti ( $J$ )'nin küçük tutulması gereklidir. Bunun için rotor çapı küçük boyu uzun yapılmalıdır. Kontrol geriliminin polaritesi dönüş yönünü belirler. Kontrol ve uyarma sinyallerine uygulanan gerilimler zaman içinde  $90^\circ$  faz farkındır.

$K_b$ : motorun zit elektromotor kuvvet katsayısi [Nm/rad/s]

$J$ : motor mil eylemsizlik momenti [kgm<sup>2</sup>]

$B$ : viskoz sürünme katsayısi [Nm/rad/s]

$$T_e = K_m E_c - K_b \dot{\theta}$$

elektriği moment

$$T_m = J \ddot{\theta} + B \dot{\theta}$$

mekanik moment

$$T_e = T_m$$

$$K_m E_c - K_b \dot{\theta} = J \ddot{\theta} + B \dot{\theta}$$

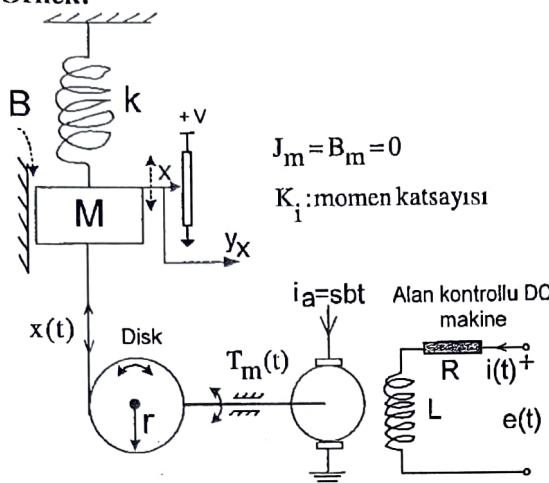
$$K_m E_c = J \ddot{\theta} + B \dot{\theta} + K_b \dot{\theta}$$

$$K_m E_c = J \ddot{\theta} + (B + K_b) \dot{\theta}$$

$$K_m E_c(s) = [s^2 J + s(B + K_b)] \theta(s)$$

$$\frac{\theta(s)}{E_c(s)} = \frac{K_m}{s^2 J + s(B + K_b)} \quad \text{giriş kontrol gerilimi ile mil konumu arasında bağıntı elde edilir.}$$

Örnek:



Yanda verilen kütle, yay ve elektromagnit sisteminde alan kontrollü DC makine ile pozisyon kontrolü yapılmaktadır. Disk ve motora ait atalet ve sürtünmeler ihmali edilmektedir. Sisteme ait dinamik denklemleri yazınız. Kontrol blok diyagramını elde ediniz.  $y_x = x(t)$  (ölçülen konum)

**Not:** Kütle yay dengede

**Çözüm:** DC-makinenin stator sargı eşdeğer devresinden çevre yazılır.

$$1- e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \xrightarrow{s} E(s) = RI(s) + LS I(s) \xrightarrow{} I(s) = E(s) \frac{1}{Ls + R}$$

DC-makinenin satotor sargasından  $i(t)$  akımı geçtiğinde oluşan elektriği moment,

$$2- T_e(t) = i(t) K_i \xrightarrow{s} T_e(s) = I(s) K_i$$

Sürekli rejimde DC-Makinede üretilen elektriği -moment DC-makine miline bağlı olan mekanik momentlerin toplamına eşittir,

$$3- T_e(t) = T_m(t) \xrightarrow{s} T_e(s) = T_m(s)$$

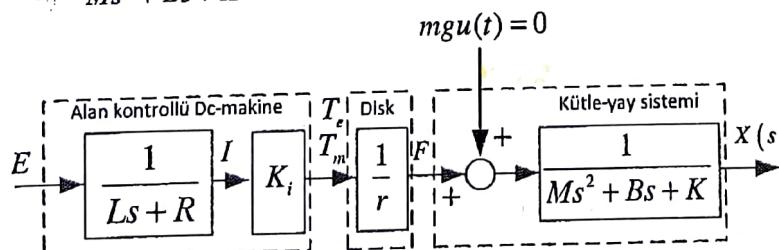
DC-Makinede üretilen momentin ve r- yarıçaplı disk ile 'kütle, yay ve elektromagnit' sistemi için oluşturulan çekme kuvveti,

$$4- T_m(t) = f(t) r \xrightarrow{s} F(s) = \frac{T_m(s)}{r}$$

5- Sistem Dengede olduğundan  $mgu(t) = 0$  alınacaktır.

$$f(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) \xrightarrow{s} F(s) = Ms^2 X(s) + BsX(s) + KX(s)$$

$$X(s) = \frac{F(s)}{Ms^2 + Bs + K}$$

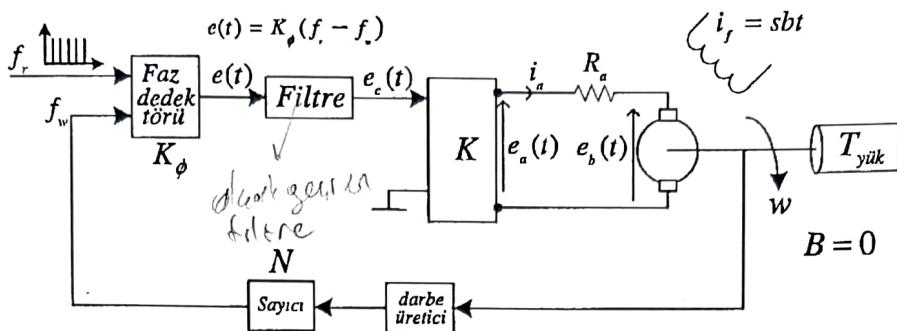


$$F_K(t) \quad F_B(t)$$

$$\begin{aligned} ma &= m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \\ F(t) & \quad mgu(t) \end{aligned}$$

Serbest cisim gösterimi.

**Örnek:** Şekilde rotor kontrollü DC makinaya ait hız kontrolü verilmiştir.



$K_\phi = \text{faz dedektör kazancı}$ ,

$K_e = \text{darbe üretici kazancı}$

$K_i = \text{DC motor moment kazancı}$      $f_r = \text{referans (giriş) darbe dizisi}$

Kapalı çevrim blok diyagramında gösterilen filrenin transfer fonksiyonu aşağıda elde edilmiştir.

- sistemin kapalı çevrim kontrol blok diyagramını çiziniz,
- Darbe üretici her turda 36 darbe üretmektedir.  $f_r=120$  darbe/s olarak verilmiş ve çıkışın 1800 dev/dak olması isteniyor. Sayıcı kazancı  $N=?$
- sistemin kapalı çevrim kontrol blok diyagramının elde edilmesinde ilk adım t-domeninde dinamik denklemlerin yazılmasıdır.

$$1-) e(t) = K_\phi(f_r - f_w)$$

$$E(s) = K_\phi[F_r(s) - F_w(s)]$$

$$2-) \frac{E_c(s)}{E(s)} = \frac{sCR_2 + 1}{sCR_1}$$

$$E_c(s) = E(s) \frac{sCR_2 + 1}{sCR_1}$$

$$3-) e_a(t) = Ke_c(t)$$

$$E_a(s) = KE_c(s)$$

$$4-) e_a(t) = R_a i_a(t) + e_b(t)$$

$$I_a(s) = \frac{E_a(s) - E_b(s)}{R_a}$$

$$5-) T_e(t) = K_i i_a(t)$$

$$T_e(s) = K_i I_a(s)$$

$$6-) T_m(t) = J \frac{dw(t)}{dt} + T_y$$

$$T_m(s) = sJ\Omega(s) + T_y(s) \Rightarrow \Omega(s) = \frac{T_m(s) - T_y(s)}{sJ}$$

$$7-) e_b(t) = K_b w(t)$$

$$E_b(s) = K_b \Omega(s)$$

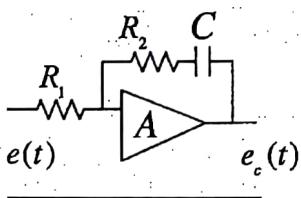
$$8-) T_e(t) = T_m(t)$$

$$T_e(s) = T_m(s) \quad (\text{sürekli rejimde})$$

$$9-) f_w(t) = NK_e w(t)$$

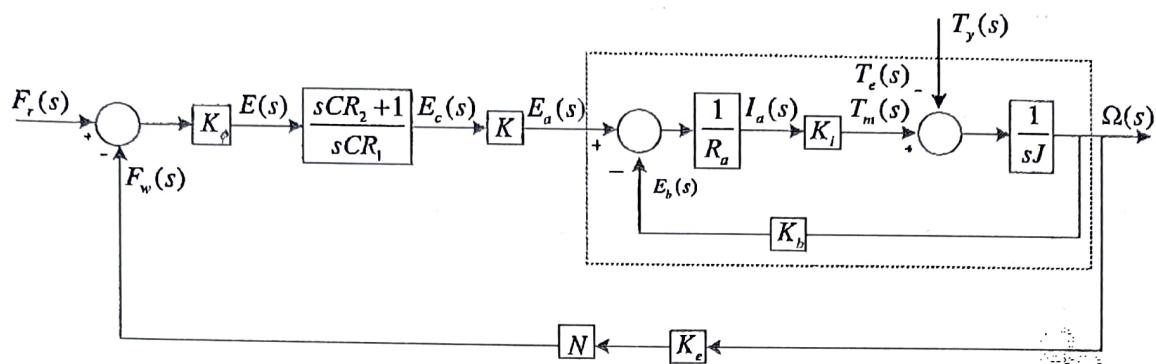
$$F_w(s) = NK_e \Omega(s)$$

Filtre transfer fonksiyonu aşağıda verilmiştir.



$$\frac{E_c(s)}{E(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}, \quad Z_2(s) = R_2 + \frac{1}{sC} = \frac{sCR_2 + 1}{sC}$$

$$\frac{E_c(s)}{E(s)} = \frac{sCR_2 + 1}{sCR_1} \quad Z_1(s) = R_1$$



Endüvi kontrollü DC makine kontrol blok diyagramı

- b-  $f_r(t) = 120 \text{ darbe/sn}$  verilmektedir.  $e_f(t) = f_r(t) - f_w(t) = 0$  olabilmesi için  $120 - f_w(t) = 0$  ise  $f_w(t) = 120$  olmalıdır.

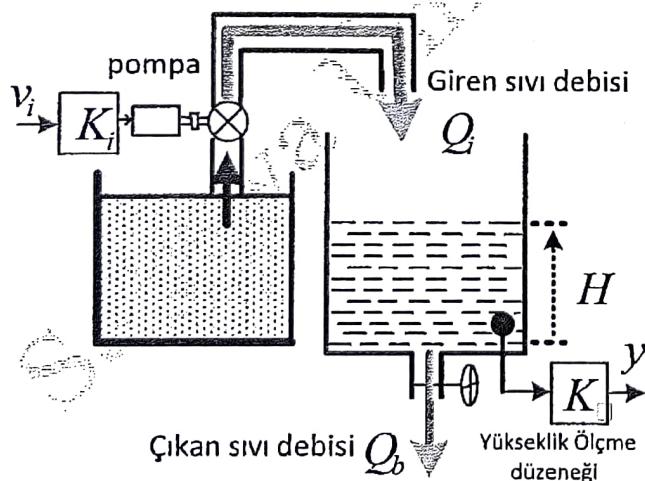
1 saniyedeki motor devir sayısı basit orantı ile bulunur: 60snde 1800 devir yapar ise,

$$1 \text{ saniyede kaç devir yapar? } x = \frac{1800}{60} = 30 \text{ devir/sn}$$

Enkoder (darbe üretici) 1 turda 36 darbe ürettiğine ve motorda 1 sn de 30 devir yaptığına göre, darbe üretici 1 sn'de  $D = 30 * 36 = 1080 \text{ darbe/sn}$  üretir.

$$f_w(t) = N * D = 120 \text{ darbe/sn} \text{ olmalıdır. } N = \frac{120}{1080} \text{ ise } N = \frac{1}{9} \text{ olmalıdır. Yani sayıcı her dokuzu kadar saydıktan sonra bir darbe üretecektir. Frekansı 9 bölecektir.}$$

## 7.7 Tek sıvı tank modeli



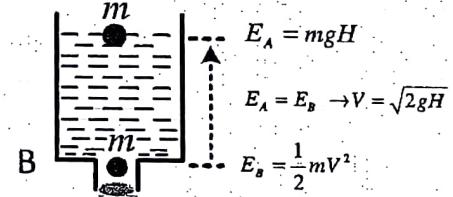
$A$  = Sıvı tank alanı,

$Q_i$  = Tanka giren sıvı debisi,

$Q_i - Q_b$  = Tanktaki sıvı miktarı değişimi

$$\frac{dH}{dt} = \frac{Q_i - Q_b}{A}$$

Bilgi:  $m$  kütüleli sıvı hareketinin incelenmesi.



A ve B noktalarındaki enerjiler eşittir.

$$E_A = E_B \rightarrow V = \sqrt{2gH} \text{ m/sn}$$

$a_b : m^2$  çıkış hıznesinin alanı

$c_{db}$ : sıvı akışkanı ile ilgili katsayı

$$Q_b = c_{db} a_b V \rightarrow Q_b = c_{db} a_b \sqrt{2gH}$$

$H$  = tanktaki sıvı yüksekliği,

$Q_b$  = tanktan çıkan sıvı debisi.

~~X~~ Depodan çıkan sivının debisi,  $Q_b = c_{db} a_b \sqrt{2gH}$  şeklinde nonlineer bir ifadeye sahiptir.

$Q_b = DH$  şeklinde lineer kabul edilecektir.

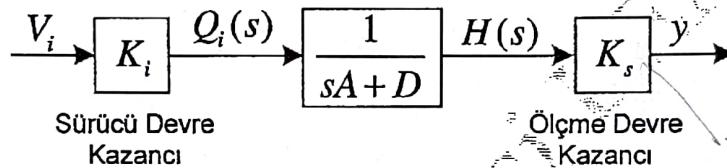
Tanktaki sıvı değişim ifadesi yeniden yazılır ise,

$$Q_i - DH = A \frac{dH}{dt} \rightarrow Q_i(s) = DH(s) + sAH(s)$$

Böylece tek sıvı tank sistemi için transfer fonksiyonu,

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{sA + D} \quad \text{olarak bulunur.}$$

Sıvı seviyesinin kontrol edilebilmesi için fiziksel büyülük olan giriş sıvı debisi ve çıkış sıvı seviye yüksekliği elektriksel büyülük (gerilim, akım) cinsinden ifade edilmesi gerekir. Bu amaçla sistemin girişine uygun bir sürücü ve çıkışına ölçme devresi ilâve edilmesi gerekir.



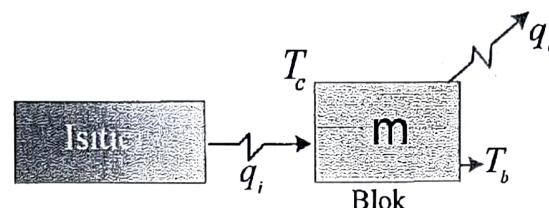
Sistemin sürücü ve ölçme devresi ile birlikte transfer fonksiyonu;

$$\frac{Y(s)}{V_i(s)} = \frac{K_i K_s}{sA + D}$$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi sürücü ve ölçme-devrelerinin ilavesi sadece sistemin kazancını değiştirmiştir.

### 7.8 Termal Sistem

Aşağıda bir ısı enerji kaynağı ve bir  $m$  kütlesi verilmiştir. Amaç, kütleye verilen ısı enerjisi, kütleden ortama yayılan ısı enerjisi, kütle sıcaklığı ve ortam sıcaklıklarını kullanılarak termal sisteme ait matematik modeli elde etmektir.



$q_i$  = giriş ısı enerjisi

$q_o$  = bloktan kaçan ısı enerjisi

$T_b$  = blok sıcaklığı

$T_c$  = çevre sıcaklığı

$m$  = blok kütlesi

$c_e$  = blok özgül ısısı

$C$  = blok ısı kapasitesi

$h$  = blok ısı transfer kapasitesi

$A$  = blok ısı transfer yüzeyi

*Bloktaki ısı değişimi = Bloğa giren ısı enerjisi - Bloktan kaçan ısı enerjisi*

$$q_i - q_o = \text{Bloktaki ısı değişimi}$$

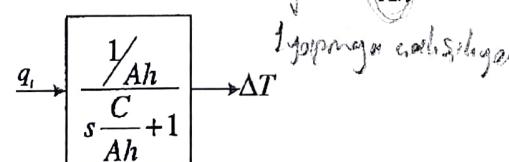
$$q_i - q_o = mc_e \frac{d\Delta T(t)}{dt}$$

$$q_i - q_o = C \frac{d\Delta T(t)}{dt}, \quad \Delta T = T_b - T_c, \quad \text{bloktaki sıcaklık farkı}$$

Bloktan kaçan ısı enerjisi,  $q_o = Ah\Delta T(t)$  olarak yazılır. Bu ifade yukarıda yerine koymulur ise,

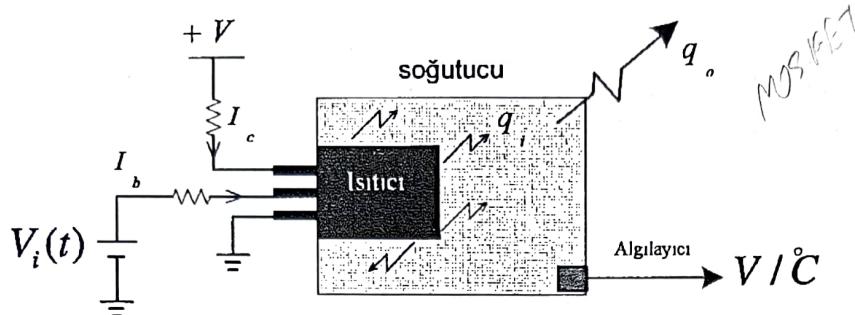
$q_i - Ah\Delta T(t) = C \frac{d\Delta T(t)}{dt}$  ve ilk koşullar sıfır için, düzenlemelerden sonra çıkışın Laplace dönüşümünün girişin Laplace dönüşümüne oranlanır ise,

$$Q_i(s) - Ah\Delta T(s) = sC\Delta T(s) \Rightarrow \frac{\Delta T(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{sC + Ah} = \frac{1/Ah}{s\frac{C}{Ah} + 1} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad \text{elde edilir}$$

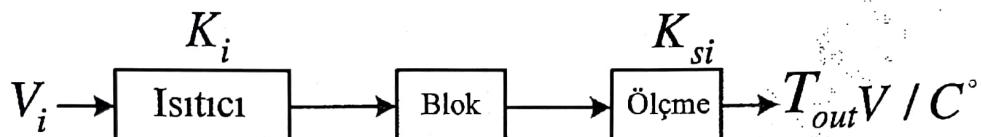


Termal sistem için yukarıda elde edilen modelde görüldüğü gibi giriş ısı enerjisi ( $q_i$ ) çıkış sıcaklık değişimi ( $\Delta T$ )'dır. Kontrol açısından sistemin giriş-çıkışlarının elektriksel büyülüklük (gerilim, akım) cinsinden ifade edilmesi gereklidir. Bu amaçla sistemin girişine uygun sürücü ve çıkışa ölçme devrelerinin ilave edilmesi gereklidir. Aşağıda bu şekilde yapılan örnek bir devre verilmiştir. Bir transistor ısı kaynağı olarak kullanılmıştır. Kollektör geçen akıma bağlı

olarak transistor den soğutucuya iletilen ısı enerjisi değişmektedir.



Sistemin açık-çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi düzenlenir.

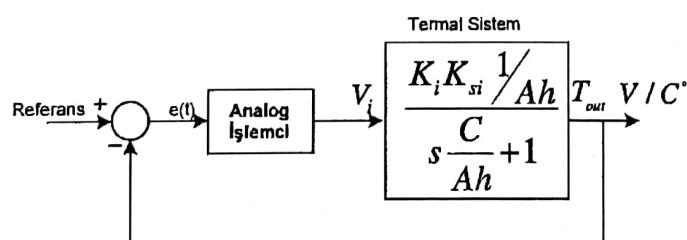


$K_i$  = sürücü devrenin kazancı,  $K_{si}$  = ölçme devresinin kazancı

$$\frac{T(s)}{V_i(s)} = K_i \frac{\frac{1}{Ah}}{s \frac{C}{Ah} + 1} K_{si} = \frac{K_i K_{si}}{s \frac{C}{Ah} + 1}$$

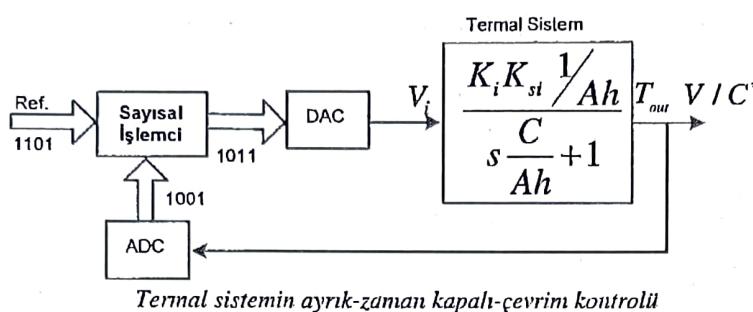
Sistemin transfer fonksiyonu  $\frac{\frac{1}{Ah}}{s \frac{C}{Ah} + 1}$  ve sürücü ile ölçme devresinin ilave edilmesi ile elde edilen transfer fonksiyonu incelendiğinde  $\frac{K_i K_{si}}{s \frac{C}{Ah} + 1}$  değişen sadece sistemin kazancıdır. Sistemin zaman sabiti  $\frac{C}{Ah}$  değişmemiştir.

Yukarıda transfer fonksiyonu elde ettiğimiz termal sistemi analog işlemci ile kontrol edilmek istensin. Bu durumda sistemin kapalı çevrim kontrol blok diyagramı aşağıdaki gibi olur.



Termal sistemin süreli-zaman kapalı-çevrim kontrolü

Eğer aynı sistem analog işlemci yerine sayısal işlemci kullanarak kontrol edilmek istenirse sistemin ayrık zaman kapalı çevrim kontrol blok diyagramı aşağıda verildiği gibi olacaktır.



Aynık zaman kapalı çevrim kontrol blok diyagramında bulunan ADC (Analog Digital Converter, Analog Sayısal Dönüşürücü), Sayısal işlemci ve DAC (Digital Analog Converter, Sayısal Analog Dönüşürücü)'ın transfer fonksiyonu ise sırası ile aşağıda verilmiştir.

## 8. Örneklenmiş Veri Sistem Matematik Modeli

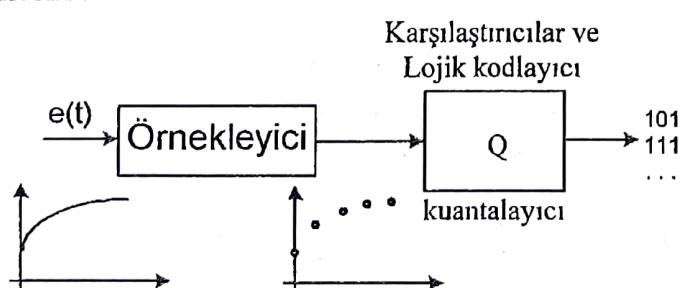
Örneklenmiş veri sistemi olarak analog sayısal dönüştürücü, sayısal işlemci ve sayısal analog dönüştürücüden oluşan açık-çevrim sistem ele alınıp sırası ile her bir elemana ait matematik model incelenecektir.

### 8.1 Analog Dijital Dönüşürücü Matematik modeli

Ayırk-zaman sayısal kontrol sistemlerinde kontrolör sayısal işlemci olduğundan kontrol edilecek olan büyülüklüklerin sayısallaştırılması ADC arayüz elemanı ile yapılmaktadır. Sayısal işlemcide koşturulan kontrol kurallarının üreteceği kontrol işaretini  $u(kT)$  sayısaldır. Sayısal kontrol işaretini DAC arayüz elemanı ile sürekli işarette dönüştürülür ve güç kuvvetlendirici üzerinden sisteme uygulanır. Bu işleme ait aynık-zaman açık-çevrim sayısal kontrol blok diyagram aşağıda verilmiştir.

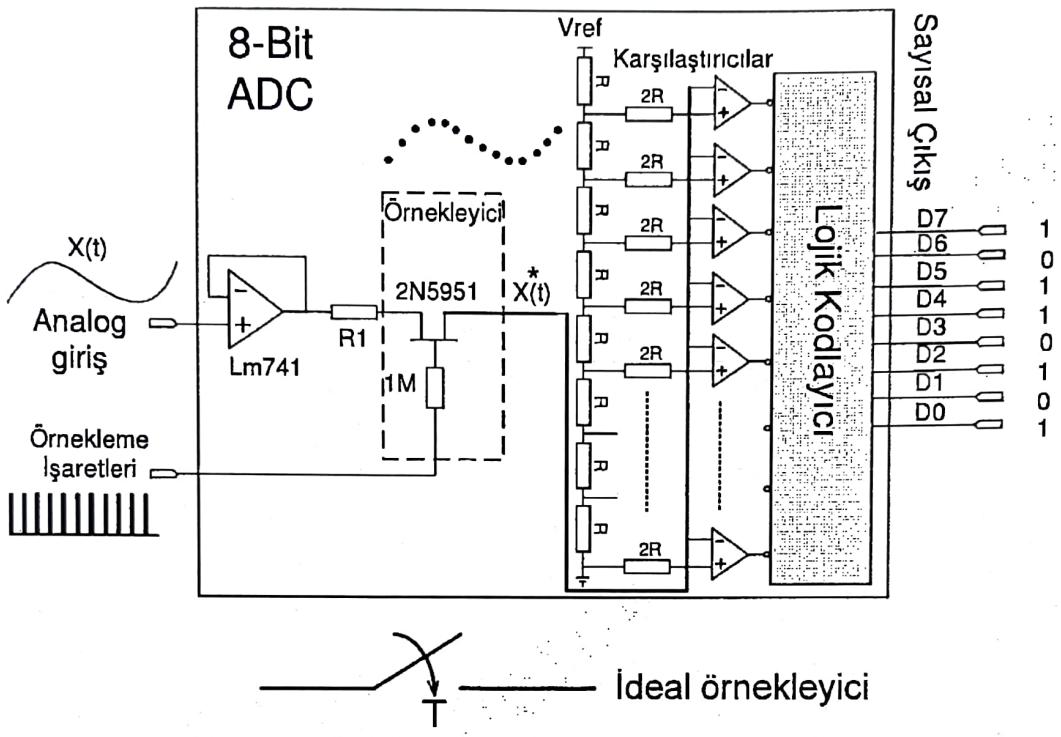


Sayısal işlemci toplama, çıkarma, çarpma, integral alma vb. matematik işlemleri sayısal olarak yaptıklarından giriş işaret genliklerinin sayılarla ifade edilen darbe dizisi şeklinde olması gerekmektedir. ADC sürekli işaretin örneklenmiş anı değerleri ile orantılı sayısal kodlar üretir. ADC örnekleyici ve sayısal değerlendirmeli olmak üzere iki blok olarak düşünülebilir.



*ADC için basitleştirilmiş blok şeması aşağıda verilmiştir.*

Aşağıda, örnekleme ve sayısal değerlendirme bloklarından oluşan 8-bit Flash Analog Dijital Dönüştürücüye ait prensip devre şeması verilmiştir. Örnekleme işaretleri 'T' aralıkları ile sayısal işlemci yada bir osilatör devresinden üretilir.



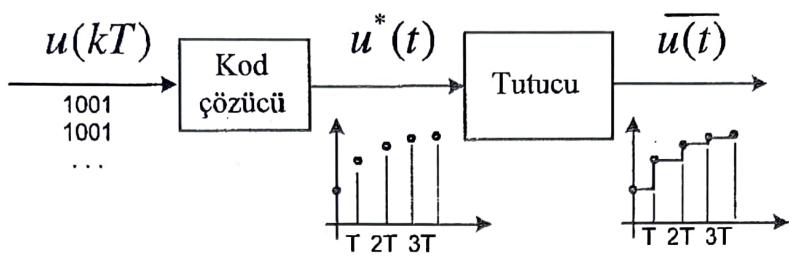
Basitleştirilmiş Flash ADC prensip devre şeması ve ideal örnekleyici.

ADC'lerde sayısal değerlendirme ve kodlama transfer fonksiyonu sabittir ve idealde 1' dir. **ADC bir ideal örnekleyici olarak modellenir.** ADC nin çevrim hızı sistem zaman sabitinin yanında çok küçük olduğu için ihmal edilir. Analog işaretin sayısal çevrim süresi, ADC kullanılan metoda bağlı olarak ms, us veya ns mertebelerinde olabilir,

Özellikle hızlı değişen işaretlerin ADC tarafından sayısal diziye dönüştürülmesi esnasında analog işaretin değişimemesi için T/H (Trace/Hold, İzle/Tut) devresi tarafından işaret izlenir ve tutulur. Böylece işaretin örnekleme anına karşılık gelen sayısal değer en az hata ile elde edilir. Yukarıda, ADC şemasında, şekil karmaşası olmaması için T/H gösterilmemiştir. Sayısal değerlendirme ve örnekleyici arasında bir blok olarak düşünülebilir.

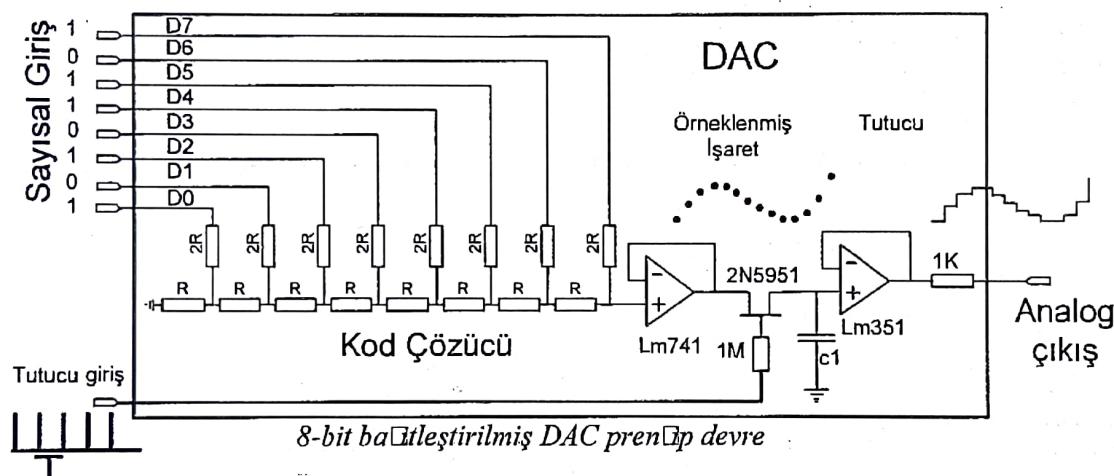
## 8.2 Dijital Analog Dönüşürücü Matematik Modeli

Ayrık-zaman sayısal sistemlerde, üretilen kontrol işaretini aşağıda basit blokları verilen DAC arayüz elemanı ile sürekli işareteye dönüştürülür.



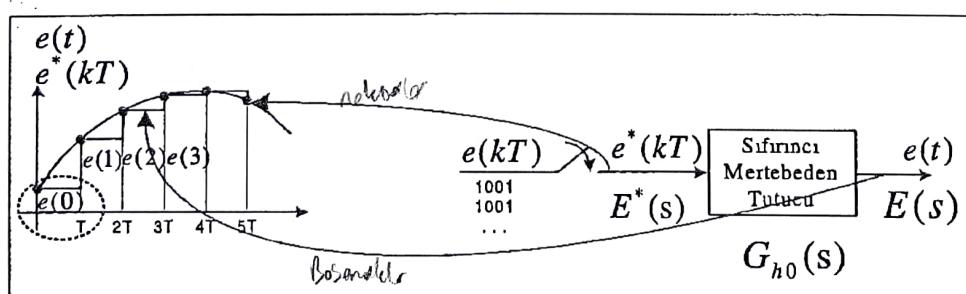
*Basitleştirilmiş DAC yapısı*

Sayısal işlemcinin ürettiği kontrol işaretini  $u(kT)$  sayı dizileri,  $T$ , örnekleme zaman aralıkları ile DAC sayısal girişine uygulanır, bu olay örneklemidir ve sembolik olarak ideal örnekleyici ile gösterilir. Kod çözücü ile ayrık analog işaret  $u^*(t)$  'ye dönüştürülür. Tutucu ile sürekli işaret  $u(t)$  ye dönüştürülür.



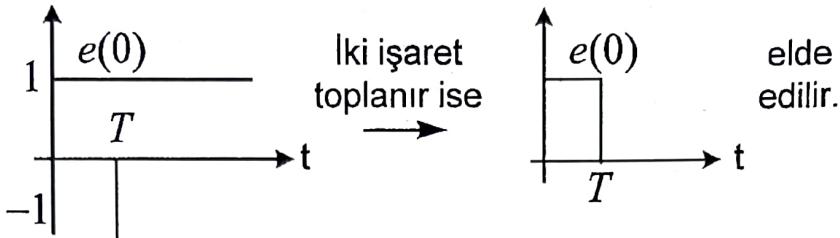
Sayısal kontrol sistemlerinde *tutma devreleri* duyarlılıklarına bağlı olarak sıfırıcı, birinci, ... n. mertebeden tutma devresi olarak adlandırılır.

## 8.3 Örnekleyici Ve Sıfırıcı Mertebeden Tutucunun Matematik Modeli



Tutucu transfer fonksiyonu elde edilmesi amacı ile, tutucu çıkış işaretinin basamak fonksiyonları cinsinden yazılacak ve Laplace dönüşümü alınacaktır. Bu amaç için aşağıdaki şekilde faydalananabilir.

Diğer grafik dilimleri de benzer şekilde basamak fonksiyonları ile ifade edilir.



$$e(0) = e(0)[u(t) - u(t-T)]$$

$$e(T) = e(T)[u(t-T) - u(t-2T)]$$

.....

her bir  $T$  aralığı basamak fonksiyonu ile ifade edilir,

$$e(t) = e(0) + e(T) + e(2T) + \dots + e(nT) \quad \text{ve toplam eğri için } e(t) \text{ yazılır.}$$

$$e(t) = e(0)[u(t) - u(t-T)] + e(T)[u(t-T) - u(t-2T)] + \dots + e(nT)[u(t-nT) - u(t-(n+1)T)]$$

*Basamak fonksiyonlarının sırası ile Laplace dönüşümüleri alınır ise,*

$$L\{e(t)\} = E(s) = e(0)\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT}\right] + e(T)\left[\frac{1}{s}e^{-sT} - \frac{1}{s}e^{-2sT}\right] + \dots + e(nT)\left[\frac{1}{s}e^{-nsT} - \frac{1}{s}e^{-(n+1)sT}\right]$$

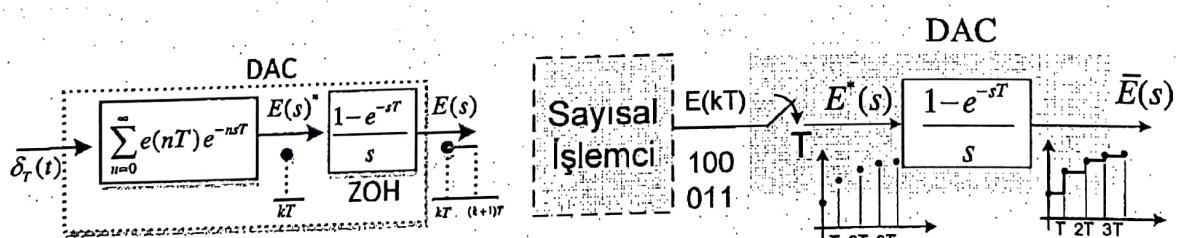
$$E(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s} [e(0) + e(T)e^{-sT} + e(2T)e^{-2sT} + \dots] \quad \text{düzenlenir ise,}$$

$$E(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s} \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-nsT} \rightarrow E(s) = E^*(s)G_{h0}(s) \quad \text{olarak elde edilir. Burada,}$$

*Tutucunun (görünür)  $E^*(s)$  örnekleme darbelerinin matematik modeli  
(çıkarıcı)*

$$G_{h0}(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s} \quad \text{sıfırıncı mertebeden tutucunun matematik modeli}$$

olarak tanımlanır. Aşağıda DAC'a ait matematik model ve kontrol blok diyagramı olarak gösterimi verilmiştir.

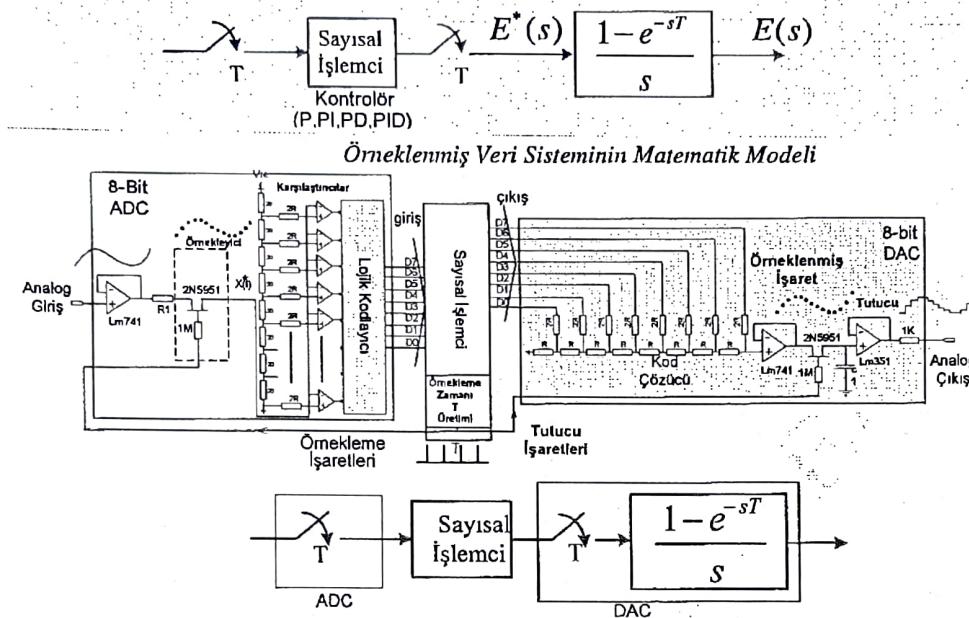


(ZOH: Zero Order Hold  
Sıfırıncı mertebeden tutucu )

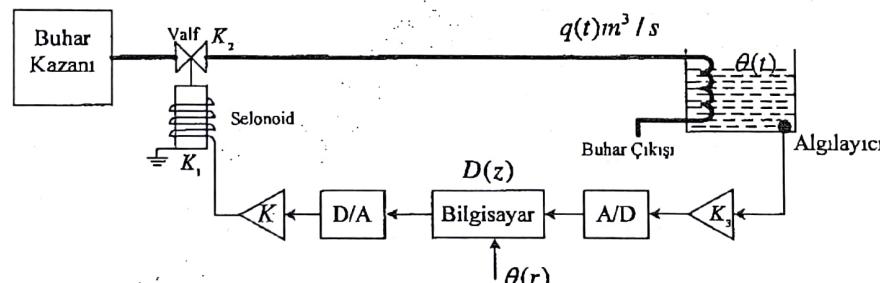
Kontrol Blok Diyagramı

ADC ve DAC'a ait elde edilen matematik modeller ile Ayrık-zaman açık-çevrim örneklenmiş veri sistem modeli ve basitleştirilmiş prensip devre şeması aşağıda sırası ile verilmiştir.

“Örneklenmiş Veri Sisteminin Matematik Modeli” açık-çevrim kontrol blok diyagramı olarak aşağıda verildiği gibi elde edilir.



Ayrık-zaman açık-çevrim örneklenmiş veri sistem modeli ve basitleştirilmiş prensip devre şeması  
Örnek:



$$K(V/V) \text{ güç kuvvetlendirici kazancı}, K_1 = 0.4 \text{ m/V}, \text{ selonoid kazancı}, K_2 = 2.5 \frac{m^3 / s}{m}$$

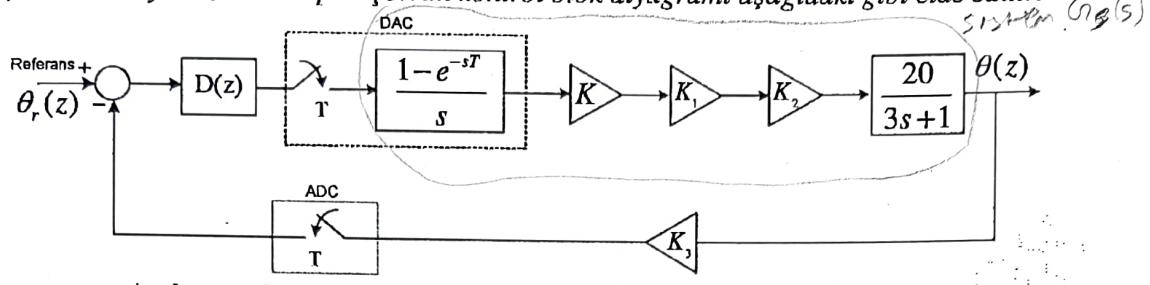
valf kazancı,  $G(s) = \frac{20}{3s+1} [C^\circ / (m^3 / s)]$  sıvı tankın transfer fonksiyonu,  $K_3 = 0.04 \text{ V/C}^\circ$ , kuvvetlendirici kazancıdır.

Şekilde bir tanktaki sıvının sıcaklık kontrolü yapılmaktadır. Buhar kazanından çıkan buharın debisi  $K_2$  valfi ile ayarlanmaktadır. Buhar miktarının değişimi ile sıvuya aktarılan ısı enerjisi kontrol edilmektedir. Sıvı sıcaklığı algılayacı ile ölçülmektedir. ADC ile sayısal kodlara dönüştürülerek ve sayısal işlemcide girilen referans değer ile karşılaştırılmaktadır. Hata sayısal işlemcide kontrol kurallarına göre işlenmektedir. Üretilen sayısal kontrol işaretini DAC ile analog işarete dönüştürülerek ve kuvvetlendirici ile buhar debi kontrolünü yapan selenoide uygulanmaktadır.

- a) Isı kontrolüne ait sistemin ayrık-zaman kapalı çevrim kontrol blok diyagramını çiziniz.

b)  $\frac{\theta(z)}{\theta_r(z)}$ , kapalı-çevrim transfer fonksiyonunu bulunuz.

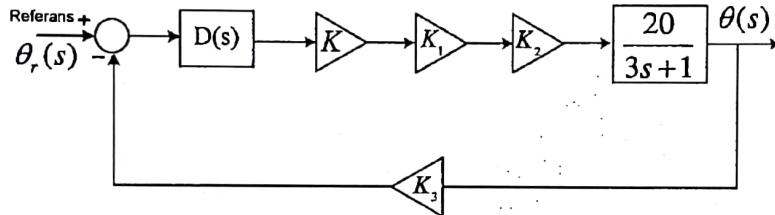
a) Sistemin ayrık-zaman kapalı çevrim kontrol blok diyagramı aşağıdaki gibi elde edilir.



Ayrık-zaman kapalı-çevrim kontrol blok diyagramı

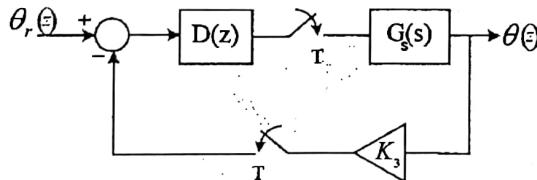
Kapalı-çevrim kontrol blok diyagram çizmine referans girişten başlanır, çıkış ve geri-besleme yolu üzerinden fark alıcıya geri dönlür.

Eğer yukarıda verilen sistem sayısal işlemci  $D(z)$  yerine analog işlemci ile kontrol edilseydi bu durumda sistemin sürekli zaman kapalı çevrim kontrol blok diyagramı aşağıda verildiği gibi elde edilir.



Sürekli-zaman kapalı-çevrim kontrol blok diyagramı

b) Sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu aşağıda verilen kontrol blok diyagramından elde edilebilir.



$$\frac{\theta(z)}{\theta_r(z)} = \frac{D(z)G_s(z)}{1 + D(z)G_s(z)K_3}$$

$$G_s(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{20K_1K_2K}{3s + 1} \right\} = 20K_1K_2K(1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{1/3}{s(s + 1/3)} \right\} \quad \text{Rezidü teorimine göre } z-\text{dönüşümü yapılmıştır. } K_s = K_1K_2K$$

$$G_s(z) = 20K_1K_2K \frac{z-1}{z} \frac{1}{3} \left\{ \left. \frac{1}{s(s + 1/3)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right|_{s=0} + \left. (s + \frac{1}{3}) \frac{1}{s(s + 1/3)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right|_{s=1/3} \right\}$$

$$G_s(z) = 20K_s \frac{z-1}{z} \frac{1}{3} \left\{ \frac{3z}{z-1} - \frac{3z}{z - e^{-T/3}} \right\} = 20K_s \left( 1 - \frac{z-1}{z - e^{-T/3}} \right) = \frac{20K_s (1 - e^{-T/3})}{z - e^{-T/3}}$$

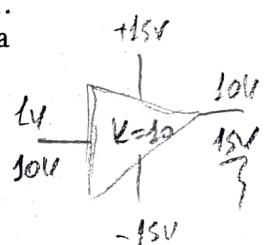
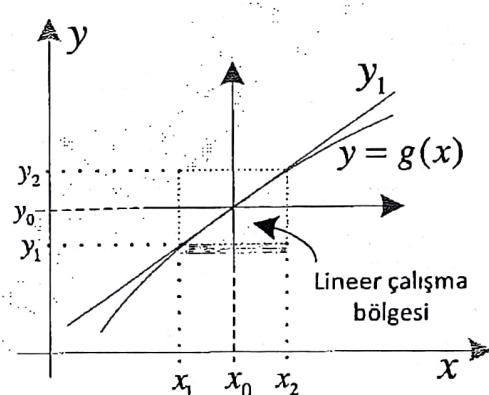
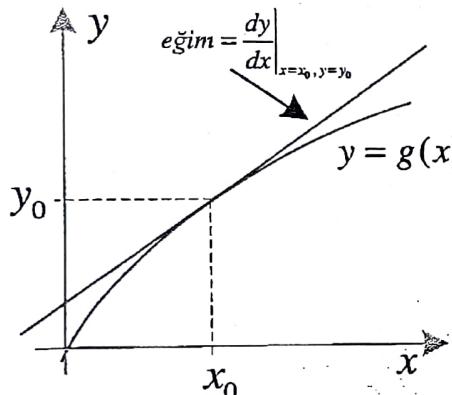
Ayrık-zaman kapalı çevrim transfer fonksiyonu  $\frac{\theta(z)}{\theta_r(z)} = \frac{D(z)20K_s(1 - e^{-T/3})}{z - e^{-T/3} + 0.8D(z)K_s(1 - e^{-T/3})}$  dir.

## 9. Doğrusal Olmayan Sistemlerin Doğrusallaştırılması

Uygulamada bazı düzenlerdeki lineersizlik belirli çalışma koşullarının dışına çıkıldığında görülür. Bu düzenlerin, geniş bir çalışma bölgesinde doğrusal bir sistem olarak modellenmesi, yeterli doğrulukta analitik sonuçlar verir. Ancak doğrusal olmama mertelesi yüksek olan sistemlerde, *elde edilen lineer bir model*, sadece doğrusallaştırma yapılan bir çalışma noktası ve çevresindeki çok sınırlı bir bölge için geçerlidir.

Doğrusal olmayan sistemlerin analizi sentezi genellikle zor olduğundan koşullar el verdiğincde doğrusallaştırılmaya çalışılır. Birden fazla çalışma noktasının gerektiği durumlarda parça parça doğrusallaştırma yapılır. Yani her çalışma noktası için doğrusal denklemler elde edilir. Çalışma aralığına göre karşılık gelen doğrusal denklem kullanılır.

Doğrusallaştırmada, doğrusal olmayan denklemler Taylor serisine açılır. Açılmışta 1. mertebeden yüksek terimler atılır ve böylece nominal nokta (veya belirlenen çalışma noktası/denge noktası) etrafında doğrusal yaklaşımı elde edilir.



Non-lineer eğrinin grafiksel gösterimi ve lineer çalışma bölgesi

$y = g(x)$  eğrisi  $x_0$  çalışma noktası için taylor serisine açılır.

$$y = g(x) = g(x_0) + \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \left. \frac{d^2 g(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \left. \frac{d^n g(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

Çalışma noktasındaki eğim  $m$  olsun;  $m = \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$  dir. Çalışma noktası etrafındaki küçük değişimler için yüksek dereceden terimler atılır ve y için doğrusal denklem aşağıda verildiği gibi yazılır.

$$y = g(x_0) + \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) = y_0 + m(x - x_0)$$

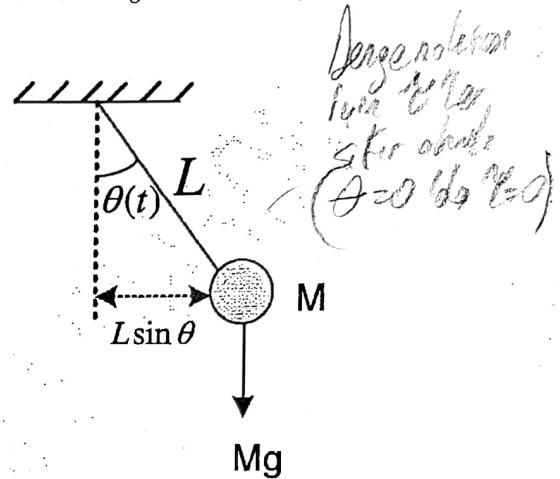
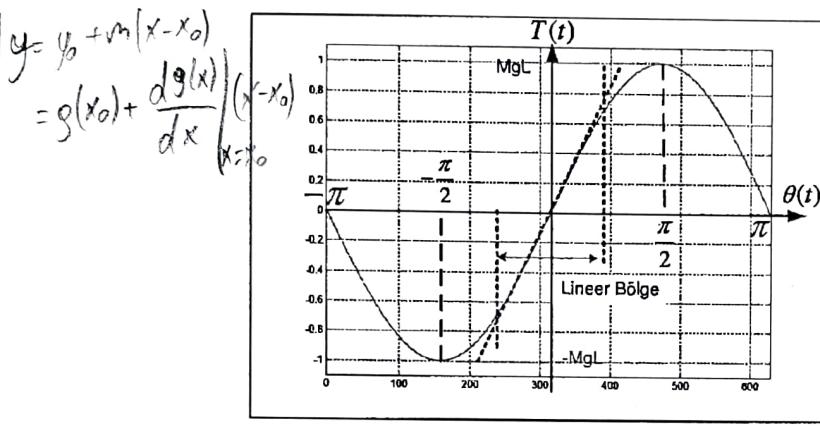
Taylor

Dogrusal denklem 80

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

**Denge noktaları:** Denge noktaları  $x_0, u_0$  bulmak için tüm durum denklemlerinde,  $\frac{dx(t)}{dt} = 0$   $x_0, u_0$  ifadeleri için çözüm yapılır.

**ÖRNEK-1:** Şekilde verilen sarkaç'a ait dinamik denklemi yazınız. Denge noktası etrafında lineerleştirin.



$g$ , yer çekimi ivmesi olmak üzere, moment ifadesi  $T(t)$  kutupsal koordinatlarda yazılır ise,  
 $T(t) = MgL \sin \theta(t)$  dir.  $T(t)$  ve  $\theta(t)$  arasındaki ilişki grafik olarak yukarıda verilmiştir.  
denge noktası  $\theta(t) = \theta_0 = 0$  etrafında lineerleştirilmiştir.

$$T(t) = MgL \sin \theta_0 + MgL \frac{\partial \sin \theta(t)}{\partial \theta(t)} \Big|_{\theta_0} (\theta(t) - \theta_0)$$

seriye açılımda yüksek terimler atılır.

$T = MgL\theta$  elde edilen doğrusallaştırılmış model  $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$  aralığına doğru cevap verir.  
Sinüs eğrisi  $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$  aralığı için şekeiten görüldüğü gibi yaklaşık olarak doğrusaldır.

### Lineer Olmayan Durum Uzay Denklemlerinin Lineerleştirilmesi

n. dereceden lineer olmayan durum denklemleri,

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$$

$$\dots$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$$

ve çıkış denklemi

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

durum değişken vektörü

$u(t)$  kontrol girişi ve  $y(t)$  ise sistem çıkışıdır.

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \end{bmatrix}$$

dir.

$$y(t) = h(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$$

olarak verilsin.

Yukarıdaki tanımlamalar göz önüne alındığında, n. dereceden lineer olmayan durum denklemleri

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, u) \quad \text{ve çıkış denklemi ise } y(t) = h(x, u) \quad \text{kapalı formunda gösterilebilir.}$$

**Lineerleştirme (Doğrusallaştırma):**  $u = u_0$  ve  $x_0 = [x_{01} \ x_{02} \ \dots \ x_{0n}]$  denge noktasındaki (Çalışma Noktası) değerler olmak üzere denge noktası etrafındaki değişimler için

$$\Delta x = x - x_0 = \begin{bmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \\ \dots \\ x_n - x_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \dots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} \quad \Delta u = u - u_0 \quad \Delta y = y - h(x_0, u_0) \quad \text{yazılabilir.}$$

Yeni koordinatlar  $\Delta x$ ,  $\Delta u$  ve  $\Delta y$  ler ise  $x, u$  ve  $y$  lerin denge noktası etrafındaki değişimlerini göstermektedir. Denge noktası etrafında lineerleştirilmiş denklemler

$$\frac{d(x - x_0)}{dt} = \frac{d\Delta x(t)}{dt} = A^* \Delta x(t) + B^* \Delta u(t) \quad \frac{d(x(t) - x_0)}{dt} = \frac{d\Delta x(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \quad x_0 : \text{SABİTTİR}$$

$\Delta y(t) = C^* \Delta x(t) + D^* \Delta u(t)$  ifadeleri ile verilir. Bir-giriş Bir-çıkış sistem için  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  ve  $D^*$  katsayı matrisleri aşağıda verildiği gibi hesap edilir.

$$A^* = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_0, u_0} \quad B^* = \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{bmatrix}_{x_0, u_0}$$

$$C^* = \left[ \frac{\partial h}{\partial x} \right]_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_0, u_0} \quad D^* = \left[ \frac{\partial h}{\partial u} \right]_{x_0, u_0}$$

Denge noktası etrafındaki küçük değişimler için geçerli olan bu lineerleştirme (doğrusallaştırma) aynı zamanda küçük- işaret modeli olarak da adlandırılır.

**DENGE NOKTASI:** Denge noktasını elde etmek için tüm lineer olmayan denklemler

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, u) = 0 \quad \text{yapılır. Verilen } u(t) \text{ giriş için } f(x, u) = 0$$

denklemi çözülür ve  $x(t)$  değeri elde edilebilir.  $y(t)$  yi elde etmek için bu değerler  $y(t) = h(x, u)$  denkleminde yerine koyulur. Elde edilen bu değerler sistemin denge noktası/Çalışma noktasıdır.

**NOT:** Lineer olmayan durum denklemlerinin lineerleştirilmesi için  $x_0$  ve  $u_0$  denge noktası etrafında Taylor serisine açılması ve 1. mertebeden yüksek terimlerin atılması ile  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  ve  $D^*$  matrislerinin elde edilmesi aşağıda verilmiştir.

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x, u) = f_1(x_0, u_0) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0} \underbrace{(x_1 - x_{o1})}_{\Delta x_1} + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x_0, u_0} \underbrace{(x_2 - x_{o2})}_{\Delta x_2} + \dots + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{x_0, u_0} \underbrace{(x_n - x_{on})}_{\Delta x_n} + \left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \underbrace{(u - u_o)}_{\Delta u}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x, u) = f_2(x_0, u_0) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0} \underbrace{(x_1 - x_{o1})}_{\Delta x_1} + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x_0, u_0} \underbrace{(x_2 - x_{o2})}_{\Delta x_2} + \dots + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_{x_0, u_0} \underbrace{(x_n - x_{on})}_{\Delta x_n} + \left. \frac{\partial f_2}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \underbrace{(u - u_o)}_{\Delta u}$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = f_n(x, u) = f_n(x_0, u_0) + \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0} \underbrace{(x_1 - x_{o1})}_{\Delta x_1} + \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right|_{x_0, u_0} \underbrace{(x_2 - x_{o2})}_{\Delta x_2} + \dots + \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{x_0, u_0} \underbrace{(x_n - x_{on})}_{\Delta x_n} + \left. \frac{\partial f_n}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \underbrace{(u - u_o)}_{\Delta u}$$

Denge noktasında  $\frac{dx(t)}{dt} = f(x, u) = f(x_0, u_0) = 0$  olduğu göz önüne alınır ise,

$\Delta x = x - x_0$  ifadesinin türevi alınırsa  $x_0$  sabit olduğundan  $\frac{d\Delta x}{dt} = \frac{dx}{dt}$  olur. Yukarıdaki **n-tane** ifade matrisel formda ;

$$\begin{bmatrix} \frac{d\Delta x_1(t)}{dt} \\ \frac{d\Delta x_2(t)}{dt} \\ \dots \\ \frac{d\Delta x_n(t)}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{A^*} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \\ \dots \\ \Delta x_n(t) \end{bmatrix}}_{B^*} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{bmatrix}}_{x_0, u_0} \Delta u(t)$$

N adet çıkışlı  $y(t) = h(x, u)$  çıkış denklemi denge noktası etrafında Taylor serisine açılır ve 1.mertebeden yüksek terimler atılır ve  $\Delta y = y - h(x_0, u_0)$

$$y_1(t) = h_1(x, u) = h_1(x_0, u_0) + \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \Big|_{x_0, u_0} \underbrace{(x_1 - x_{o1})}_{\Delta x_1} + \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \Big|_{x_0, u_0} \underbrace{(x_2 - x_{o2})}_{\Delta x_2} + \dots + \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \Big|_{x_0, u_0} \underbrace{(x_n - x_{on})}_{\Delta x_n} + \frac{\partial h_1}{\partial u} \Big|_{x_0, u_0} \underbrace{(u - u_o)}_{\Delta u}$$

$$y_2(t) = h_2(x, u) = h_2(x_0, u_0) + \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \Big|_{x_0, u_0} \underbrace{(x_1 - x_{o1})}_{\Delta x_1} + \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \Big|_{x_0, u_0} \underbrace{(x_2 - x_{o2})}_{\Delta x_2} + \dots + \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \Big|_{x_0, u_0} \underbrace{(x_n - x_{on})}_{\Delta x_n} + \frac{\partial h_2}{\partial u} \Big|_{x_0, u_0} \underbrace{(u - u_o)}_{\Delta u}$$

$$y_n(t) = h_n(x, u) = h_n(x_0, u_0) + \frac{\partial h_n}{\partial x_1} \Big|_{x_0, u_0} \underbrace{(x_1 - x_{o1})}_{\Delta x_1} + \frac{\partial h_n}{\partial x_2} \Big|_{x_0, u_0} \underbrace{(x_2 - x_{o2})}_{\Delta x_2} + \dots + \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \Big|_{x_0, u_0} \underbrace{(x_n - x_{on})}_{\Delta x_n} + \frac{\partial h_n}{\partial u} \Big|_{x_0, u_0} \underbrace{(u - u_o)}_{\Delta u}$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \frac{\partial h_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{C^*}_{x_0, u_0} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \\ \dots \\ \Delta x_n(t) \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} \\ \dots \\ \frac{\partial h_n}{\partial u} \end{bmatrix}}_{D^*}_{x_0, u_0} \Delta u(t)$$

Lineerleştirme işlemleri ve elde edilen matrisler yukarıda Bir-giriş n-çıkışlı sistem için yapılmıştır (denklem yazılımları uzun tuttuğundan dolayı).

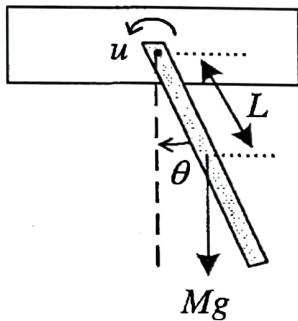
n-giriş n-çıkış sistem için katsayı matrisleri benzer yol ile kolay olarak elde edilebilir.

$$B^* = \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{x_0, u_0}, D^* = \left[ \frac{\partial h}{\partial u} \right]_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \frac{\partial h_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u_1} & \frac{\partial h_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial u_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_n}{\partial u_1} & \frac{\partial h_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{x_0, u_0}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x, u) = f_2(x_0, u_0) + \underbrace{\left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0} \frac{(x_1 - x_{o1})}{\Delta x_1} + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x_0, u_0} \frac{(x_2 - x_{o2})}{\Delta x_2} + \dots + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_{x_0, u_0} \frac{(x_n - x_{on})}{\Delta x_n}}_{g(t)} + \left. \frac{\partial f_2}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \frac{(u - u_o)}{\Delta u}$$

n-qirisli sistem için diğer tüm lineer olmayan durum denklemleri aşağıda örnekte verildiği gibi yazılabilir.

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = g(t) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \right|_{x_0, u_0} \frac{(u_1 - u_{1o})}{\Delta u_1} + \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \right|_{x_0, u_0} \frac{(u_2 - u_{2o})}{\Delta u_2} + \dots + \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \right|_{x_0, u_0} \frac{(u_n - u_{no})}{\Delta u_n}$$



Bağlantı noktası etrafında atalet  $I$  ve  $y(t)$  çıkış  $u(t)$  ise DC motorun uyguladığı döndürme momenti olmak üzere yanda verilen sistem için hareket denklemi;

$$I \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + mgL \sin \theta(t) = u(t) \text{ düzenlenir ise,}$$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{mgL \sin \theta(t)}{I} + \frac{1}{I} u(t) \text{ olur. Çıkış olarak } y(t) = \theta(t) \text{ yazılır. Durum değişkenleri tanımlanır.}$$

$$x_1(t) = \theta(t) \text{ ve}$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = x_2(t) \text{ olsun} \quad \text{1. Durum denklemi} \quad f_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{dx_2(t)}{dt} \text{ olur. Tanımlanan durum değişkenleri hareket denkleminde yerine koyulur.}$$

$$\text{2. Durum denklemi} \quad f_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{mgL \sin(x_1(t))}{I} + \frac{1}{I} u(t)$$

$$\text{ve çıkış denklemi} \quad y(t) = x_1(t) \text{ olur.}$$

Matris formunda aşağıda verildiği gibi yazılır.

$$f(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{mgL \sin(x_1(t))}{I} + \frac{1}{I} u(t) \end{bmatrix} \quad h(x(t), u(t)) = x_1(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)) \text{ denge noktasını elde etmek için}$$

$$u(t) = u_0 = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)) = 0 \text{ yapılır.}$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) = 0 \rightarrow x_{02} = 0$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{mgL \sin(x_1(t))}{I} + \frac{1}{I} u(t) = 0 \rightarrow -\frac{mgL \sin(x_1(t))}{I} = 0$$

$\rightarrow \sin(x_1(t)) = 0$  olur. Çözüm ise  $x_1(t) = n\pi$  denge noktası zamandan bağımsızdır ve sonsuz tanedir,  $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ . Denge noktası için ilk değer  $n = 0$  seçilir.  $x_{01} = 0$  olur.

Denge/çalışma noktaları  $x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  ve  $u_0 = 0$  dır.

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgL \cos(x_1(t))}{I} & 0 \end{bmatrix}_{0,0,0} \rightarrow A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgL}{I} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} \rightarrow B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix}$$

Lineerleştirilmiş durum denklemleri

$$\frac{\Delta x(t)}{dt} = A^* \Delta x(t) + B^* \Delta u(t)$$

$\Delta y(t) = C^* \Delta x(t) + D^* \Delta u(t)$  formunda yazılır.

$$\begin{bmatrix} \frac{d\Delta x_1(t)}{dt} \\ \frac{d\Delta x_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgL}{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix} \Delta u(t) \quad \Delta y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix}$$

### NOT:

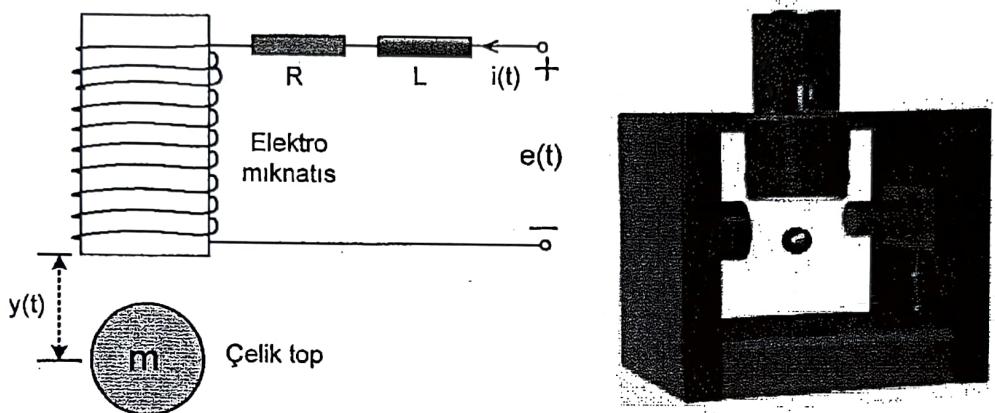
1-Lineerleştirilmiş sistem çalışma noktası (denge noktası) etrafında Lokal bir yaklaşımdır.

2-Çalışma noktası değişir ise, aynı nonlinear sistem için lineerleştirilmiş model değişir.

3- Doğrusallaştırılmış dinamikleri kullanarak yapılan kontrol tasarımının olağan amacı "sapmayı en aza indirme" dir. (deviation minimization)

4-Lineerleştirilmiş dinamiğe dayalı kontrol tasarımı her zaman kazanç ayar felsefesine dayanır.

**ÖRNEK:**



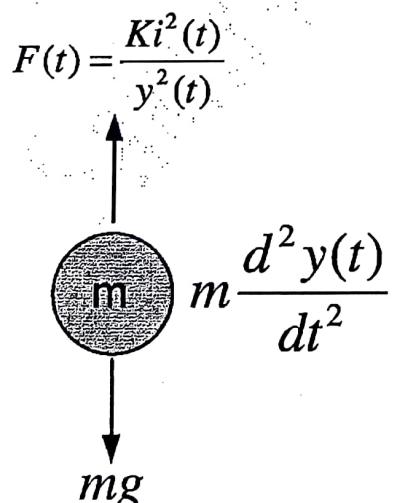
Şekilde çelik top bir elektro mıknatıs yardımı ile  $y(t)$  pozisyonunda asılı olarak tutulmak istenmektedir. ( $F(t) = \frac{Ki^2(t)}{y^2(t)}$  elektro mıknatıs kuvveti)

- a) sisteme ait dinamik denklemleri yazınız  
b)  $y(t) = y_0(t)$  çalışma noktası etrafında sistemi doğrusallaştırın.

$K$ : elektro mıknatıs katsayısı

çelik top serbest cisim gösterimi;

Çelik topu hareket ettiren net kuvvet;



$$1) m \frac{d^2y(t)}{dt^2} = mg - \frac{Ki^2(t)}{y^2(t)}$$

$$2) e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

elektro mıknatıs için çevre  
denklemi.

durum değişkenleri:

$$x_1(t) = y(t) \quad \text{konum},$$

$$x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad \text{hız}$$

$$x_3(t) = i(t) \quad \text{elektro mıknatıs akım olarak belirlensin.}$$

i)  $x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} \rightarrow \text{1. Durum denklemi.}$

ii)  $m \frac{dx_2(t)}{dt} = mg - \frac{Kx_3^2(t)}{x_1^2(t)} \Rightarrow \frac{dx_2(t)}{dt} = g - \frac{Kx_3^2(t)}{mx_1^2(t)} \quad \text{2. durum denklemi}$

iii)  $\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}e(t) - \frac{R}{L}i(t) \Rightarrow \frac{dx_3(t)}{dt} = -\frac{R}{L}x_3(t) + \frac{1}{L}e(t) \quad \text{3. durum denklemi}$

sisteme ait elde edilen durum denklemeleri,

$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$  formunda yazılabilir. Çünkü ii) nolu denklem  $x_3^2(t)$  ve  $\frac{1}{x_1^2(t)}$  ifadelerinden dolayı non-lineerdir. Sistemin  $y(t) = y_0(t)$  nokta civarında lineer modeli elde edilecektir.

$y_0(t) = x_{01} = sbt \rightarrow$  yileşebilir (kanan)

$x_{02}(t) = \frac{dx_{01}(t)}{dt} = 0 \rightarrow hiz=0$

$\frac{d^2y_0(t)}{dt^2} = \frac{dx_{02}(t)}{dt} = 0$  olur.

Çelik topun belirlenen çalışma noktası  $y_0(t)$  tutulabilmesi için elektro mıknatısının çekmesi gereken akım,  $i(t)$  nin nominal değeri,  $i_0(t) = x_{03} = sbt$  olsun; nasıl bulunur?

$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg - \frac{Ki^2(t)}{y^2(t)}$  ifadesi kullanarak,

$0 = mg - \frac{Kx_{03}^2}{x_{01}^2} \Rightarrow x_{03} = x_{01} \sqrt{\frac{mg}{K}}$  çelik topun  $y(t) = y_0(t) = x_{01}$  noktasında tutulabilmesi için elektro mıknatısının çekmesi gereken akım değeridir. Durum denklemeleri,

$$f_1 = \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$f_2 = \frac{dx_2(t)}{dt} = g - \frac{Kx_3^2(t)}{mx_1^2(t)}$$

$$f_3 = \frac{dx_3(t)}{dt} = \frac{-R}{L}x_3(t) + \frac{1}{L}e(t) \quad \text{şeklinde ifade edilir.}$$

Sırası ile  $A^*$  ve  $B^*$  matrisleri bulunacaktır.

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2Kx_{03}^2}{mx_{01}^3} & 0 & \frac{-2Kx_{03}}{mx_{01}^2} \\ 0 & 0 & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} \quad B^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial e} \\ \frac{\partial f_2}{\partial e} \\ \frac{\partial f_3}{\partial e} \end{bmatrix} \Rightarrow B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$A^*$  ve

$B^*$  matrisleri kullanılarak lineerleştirilmiş denklem vektör matris formunda,

$$\begin{bmatrix} \frac{d\Delta x_1(t)}{\Delta t} \\ \frac{d\Delta x_2(t)}{\Delta t} \\ \frac{d\Delta x_3(t)}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2g}{x_{01}} & 0 & \frac{-2}{x_{01}} \sqrt{\frac{Kg}{m}} \\ 0 & 0 & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \\ \Delta x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \Delta e(t)$$

olarak yazılabilir.

$$\Delta x_1(t) = x_1(t) - x_{01}(t)$$

$$\Delta x_2(t) = x_2(t) - x_{02}(t)$$

$$\Delta x_3(t) = x_3(t) - x_{03}(t) \quad \text{dir.}$$

*çıkış denklemi ise  $y(t) = x_1(t)$  olmak üzere, çıkış çelik top konumudur.*

$$\Delta e(t) = e(t) - e_0(t)$$

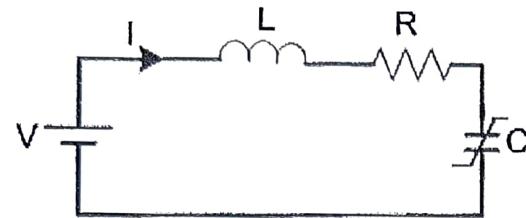
$$\Delta y(t) = y(t) - y_0(t) \quad \text{olarak tanımlanır ise,}$$

$$\text{Çıkış denklemi} \quad \Delta y(t) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \\ \Delta x_3(t) \end{bmatrix} \quad \text{olarak elde edilir.}$$

sistem çalışma noktası  $y_0(t)$  için

$$\Delta \dot{x}(t) = A^* \Delta x(t) + B^* \Delta e(t)$$

$\Delta y(t) = C\Delta x(t)$  vektör matris formunda elde edilmiştir.



ÇÖZÜM:

Çalışma noktaları:  $x_0, V_0$  dır. Önce sırası ile,  $A^*$  ve  $B^*$  matrislerinin hesabı için  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$

$$f_1(t) = x_2(t)$$

$$f_2(t) = -\frac{1}{Lk_c}x_1(t)^2 - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{Lk_c}x_1(t)V(t)$$

Şekilde verilen RLC devresine ait durum uzay denklemleri  $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + g(x(t))u(t)$  formunda aşağıda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{1}{Lk_c}x_1(t)^2 - \frac{R}{L}x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Lk_c}x_1(t) \end{bmatrix}V(t)$$

ve çıkış denklemi  $y(t) = x_1(t)$  olduğuna göre durum denklemlerini çalışma noktası etrafında lineerleştiriniz.

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x_0, V_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2x_{01}}{Lk_c} + \frac{V_0}{Lk_c} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad B^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial V} \\ \frac{\partial f_2}{\partial V} \end{bmatrix}_{x_0, V_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x_{01}}{Lk_c} \end{bmatrix}$$

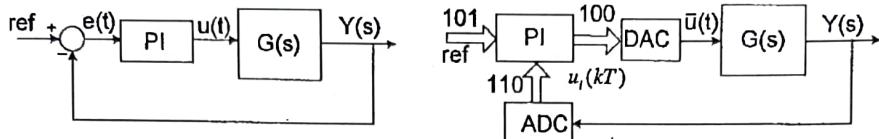
$$\begin{bmatrix} \frac{d\Delta x_1(t)}{dt} \\ \frac{d\Delta x_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2x_{01}}{Lk_c} + \frac{V_0}{Lk_c} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x_{01}}{Lk_c} \end{bmatrix} \Delta V(t)$$

$$\Delta y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix}$$

## 10. Fark Denklemleri

Ayrık-zaman  
Diferansiyel Denklem  
Sürekli-zaman

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman kapalı çevrim kontrol sistemlerine örnek olmak üzere, Oransal + Integral (PI, Proportional+Integral) kontrol kurallı kontrol blok diyagramları sırası ile aşağıda a) ve b) şeillerinde verilmiştir.



a) sürekli-zaman kapalı-çevrim kontrol

b) ayrık-zaman kapalı-çevrim kontrol

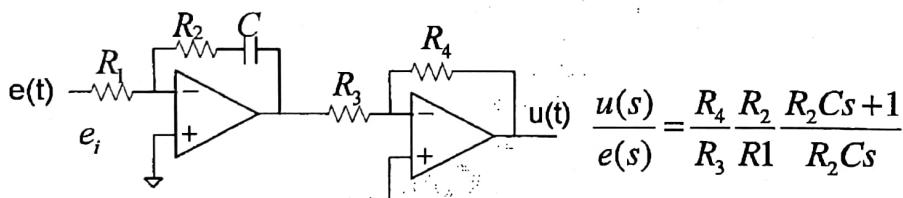
PI kontrolör hata işaretini  $e(t)$  ye iki işlem uygulamaktadır. İlk olarak,  $e(t)$  hatası oransal katsayı ile çarpılır *oransal kısım* oluşturulur ikinci işlem olarak ise *oransal kısım integrali* alınır. Her iki sonuç toplamı, kontrol işaretini  $u(t)$ 'yi oluşturur. Bu işlemler *sürekli-zaman* kontrol sistemlerinde *analog işlemciler*, *ayırık-zaman sayısal* kontrol sistemlerinde ise *sayısal işlemciler* tarafından gerçekleştirilmektedir.

Sürekli-zaman kontrol için kontrol işaretini  $u(t)$  'ye ait denklemeler,

$$e(t) = \text{ref}(t) - y(t) \quad \text{analog hata işaretisi}$$

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int e(t) dt \quad \text{analog kontrol işaretisi}$$

olarak yazılabilir. Basitleştirilmiş PI analog kontrolör (işlemci) aşağıda verilmiştir.



Analog Oransal Integral kontrolör.

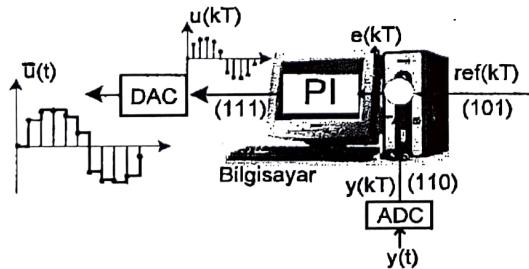
Ayrık-zaman sayısal kontrolde  $u(t)$  kontrol işaretini'ne ait denklemeler aşağıda verilmiştir, bu ifadeler diferansiyel denklemler olarak adlandırılır,

$$e(kT) = \text{ref}(kT) - y(kT) \quad \text{sayısal hata işaretisi}$$

$$u_i(kT) = u_i[(k-1)T] + K_p T e(kT) \quad \text{sayısal integratör}$$

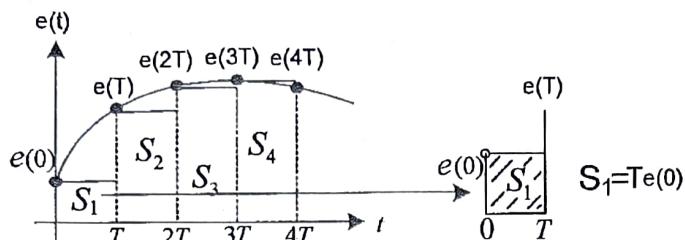
$$u(kT) = u_i(kT) + K_p e(kT) \quad \text{sayısal kontrol işaretisi}$$

Sayısal işlemci tarafından üretilen kontrol işaretini  $u(kT)$  DAC arayüz çevirici ile  $\bar{u}(t)$  sürekli zaman işareteye dönüştürülür.



Sayısal Oransal Integral kontrolör

Sayısal integral  $u_i(kT)$  sayısal işlemci tarafından gerçekleştirilmektedir. Sayısal integral alma işlemi aşağıda verilen eğri üzerinde basit olarak anlatılmıştır.



$e(t)$  eğrisi altında kalan alan yaklaşık olarak sırası ile  $S_1 = Te(0)$ ,  $S_2 = Te(T)$ ,  $S_3 = Te(2T)$  ve  $S_4 = Te(4T)$  ..., alanların tek tek hesaplanması ve toplanması ile elde edilebilir.

$\int e(t)dt \approx \sum S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots$  yazılabilir. Bu ifade yardımcı ile sayısal işlemcide  $u_i(kT)$  integral ifadesinin matematik modeli fark (diferans) denklemi ile aşağıda verilmiştir.

$$u_i(kT) = u_i[(k-1)T] + Te(kT)$$

Dijital kontrol sistemlerinde kontrolör mikrodenetleyici, DSP (Digital signal processor), PLC (Programmable Logic Controller), yada sayısal bir bilgisayardır. Bu *sayısal işlemcilerin* matematik modelleri verilen ömekten görüldüğü gibi **fark denklemeleri** ile verilir.

**Sürekli zaman sistemlerde** sistemi tanımlayan matematik model **diferansiyel denklemeler** yardımcı ile elde edilmekte iken **ayrık-zaman kontrol sistemlerinde** işaretlerin bir kısmı veya tamamı darbe *dizisi şeklinde değişen sürekli işaretler* olduğundan bu işaretleri taşıyan sistemler **fark denklemeleri** ile matematiksel olarak modellenirler.

Ayrık-zaman sisteme durumlar, girişler ve çıkışlar sürekli olan  $t$  zamanının  $kT$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  ayrık anlarında tanımlıdır ve bu büyülükler

$x(k)$ ,  $x(kT)$  *durumlar* ( $x(k)$ ,  $x(kT)$  literatürde her iki kullanımda mevcuttur.)

$u(k)$ ,  $u(kT)$  *girişler*

$y(k)$ ,  $y(kT)$  *çıkışlar* olarak gösterilirler.

**Örnek:** 10 küçük maymun dizilip oturmuşlar bir ağaca.. alay ederler timsahla.. bizi yakalayamazsın diye... olabildiğince ustaca tırmanır timsah ağaca, Slap..., 9 küçük maymun dizilip oturmuşlar bir ağaca.. alay ederler timsahla.. bizi yakalayamazsın diye... olabildiğince ustaca tırmanır timsah ağaca, Slap..., 8 küçük maymun..., 7 küçük maymun..., .....  $m(k)$ ,  $k$  adet slaptan sonra kalan maymun sayısını,  $m(0)$  başlangıç maymun sayısını gösterdiğine göre fark (diferans) denklemini kurunuz.

$$m(0) = 10$$

*başlangıçtaki maymun sayısı*

$$k = 1 \rightarrow m(1) = m(0) - 1$$

*1.Slap'tan sonraki maymun sayısı*

$$k = 2 \rightarrow m(2) = m(1) - 1$$

*2.Slap'tan sonraki maymun sayısı*

$$k = 3 \rightarrow m(3) = m(2) - 1 \quad 3. \text{Slaptan sonraki maymunun sayısı}$$

$$\dots \\ \boxed{m(k) = m(k-1) - 1} \quad k. \text{Slaptan sonraki maymunun sayısı}$$

Fark denklemi,  $\boxed{\underline{m(k+1)} = \underline{m(k)} - 1}$ , ifadesi olarak elde edilir.

Fark denklemelerinde;

$x(k)$  = durum değişkenin şimdiki değeri

$x(k-1)$  = durum değişkenin bir önceki (bir örneklemme zamanı önceki değeri) değeri

$x(k-n)$  = durum değişkenin  $n$  önceki değeri

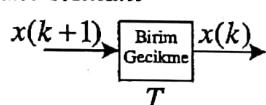
$u(k)$  = giriş değişkenin şimdiki değeri

$u(k-n)$  = giriş değişkenin  $n$  önceki değeri

olarak tanımlanır.

Sayısal kontrol sistemlerinde, fark denklemelerine ait diyagram çiziminde kullanılan temel bloklar aşağıda verilmiştir.

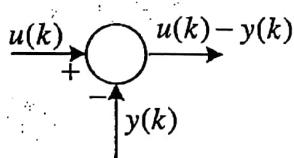
a) Birim gecikme elemanı



b) Kazanç elemanı



c) Toplama elemanı



Yukarıda verilen elemanlar kullanılarak lineer, zamanla değişimyen sayısal kontrol sistemler derecelerine bağlı olarak aşağıda verildiği gibi fark denklemleri ile gösterilir.

**Hatırlatma:** Fark denklemelerinin derecesi denklemdeki en yüksek gecikmenin derecesine eşittir. Aşağıda çeşitli diferans (fark) denklemler verilmiş ve bunların kaçinci dereceden olduğu belirtilmiştir.

*erik*

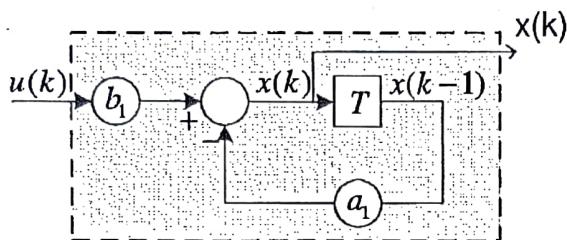
$$\begin{aligned} x(k) + a_1x(k-1) + a_2x(k-2) &= b_1u(k) && 2. \text{ derece fark denklemi} \\ x(k) + a_2x(k-2) &= b_1u(k) && 2. \text{ derece fark denklemi} \\ x(k) + a_2x(k-2) + a_4x(k-4) &= b_1u(k) && 4. \text{ derece fark denklemi} \end{aligned}$$

**Örnek:**

$$x(k) + a_1 x(k-1) = b_1 u(k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{ diferans (fark) denklemine ait diyagramı çiziniz.}$$

Once,  $x(k)$  ifadesi elde edilir,  $x(k) = b_1 u(k) - a_1 x(k-1) \quad k = 0, 1, 2, \dots$

Temel elamanlar kullanılarak diferans denkleme ait diyagram aşağıda verildiği gibi çizilebilir.

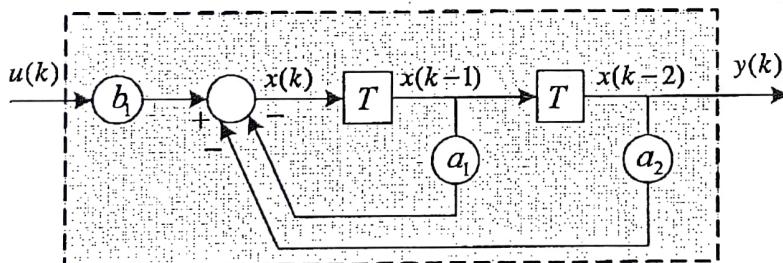


**Örnek:**  $x(k) + a_1 x(k-1) + a_2 x(k-2) = b_1 u(k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$  diferans denklemine ait diyagramı çiziniz.

Once, şimdiki değer  $x(k)$  elde edilir.

$$x(k) = b_1 u(k) - a_1 x(k-1) - a_2 x(k-2) \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{ birim gecikme, toplama ve çarpma elemanları}$$

kullanılarak  $x(k)$  ifadesine ait diyagram çizilir.



Verilen diferans (fark) denkleminde;

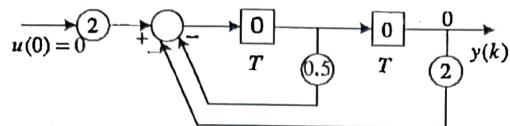
$$x(k-1) = x(k-2) = 0 \quad \text{ilk değerler (başlangıçta sıfır alınabilir.)}$$

$$u(k) = \{0, 3, 2, 1.5\} \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad \text{için girişler}$$

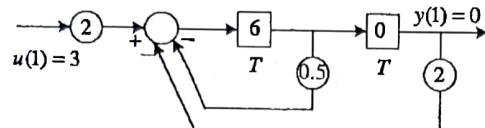
$$b_1 = 2, a_1 = 0.5, a_2 = 2 \quad \text{katsayılar}$$

Olarak verildiğine göre, verilen fark denklem 3 adım koşturularak çıkış,  $y(k) = x(k-2)$  hesaplanacaktır.

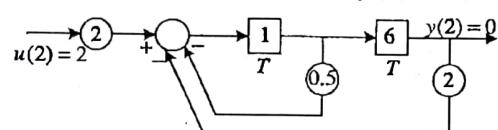
$k = 0$  için  $u(0) = 0, x(k-1) = x(k-2) = 0, y(0) = 0$  dır.  $k = 0$  için durum diyagramı aşağıdadır.



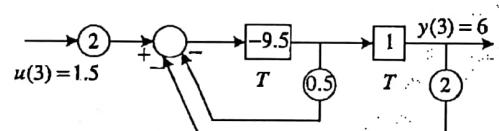
$k=1$  için.  $u(1)=3$  için, 1. adım sonunda  $y(1)=0$ , ve diyagram aşağıda verildiği gibi edilir.



$k=2$  için.  $u(2)=2$  için, 2. adım sonunda,  $y(2)=0$ , ve diyagram aşağıda verildiği gibi edilir



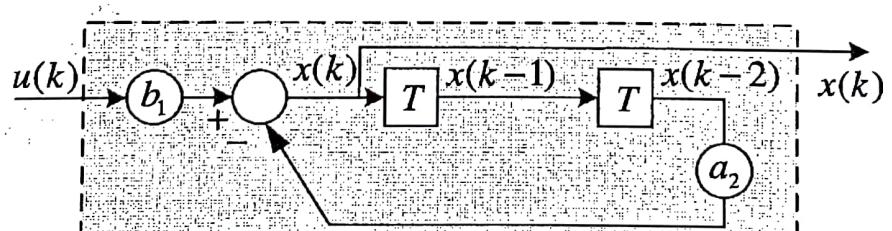
$k=3$  için.  $u(3)=1.5$  için, 3. adım sonunda,  $y(3)=6$ , ve diyagram aşağıda verildiği gibi edilir



olarak elde edilir. Bu hesaplamalar  $k=0, 1, 2, 3, 4, \dots$  şeklinde devam eder.

**Örnek:**  $x(k) + a_2 x(k-2) = b_1 u(k)$   $k = 0, 1, 2, \dots$  diferans denklemine ait diyagramı çiziniz.

Once  $x(k)$  elde edilir. Ve  $x(k) = b_1 u(k) - a_2 x(k-2)$   $k = 0, 1, 2, \dots$



### 10.1 Fark Denklem Çözümleri

Fark denklemlerinin çözümü, normal diferansiyel denklemlerin çözümünde olduğu gibi tamamlayıcı ve özel çözüm olmak üzere iki çözümü vardır. Sürekli-zaman sistemlerde, diferansiyel denklem çözülmeden sistem analiz ve sentezinin Laplace-dönüştürüm ile yapıldığı gibi, ayrık-zaman sistemlerde, fark denklemleri çözülmeden analiz ve sentez, "z-dönüşüm" yöntemi ile yapılacaktır.

**Örnek1:**  $y(k) - 0.3y(k-1) = u(k)$  fark denklemini çözünüz.

Önce her iki tarafın Z-dönüşümü alınır,

$$Y(z) - 0.3z^{-1}Y(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = \frac{z}{(1-0.3z^{-1})(z-1)} = \frac{z^2}{(z-0.3)(z-1)}$$

ters z-dönüşüm basit kesirlere ayrılarak

yapılacaktır.

$$e^{-ak} \rightarrow \frac{z}{z - e^{-a}}$$

olduğu düşünülür ise  $\frac{Y(z)}{z}$  gibi düşünülür ve sonuç  $\frac{z}{z - e^{-a}}$  formuna getirilir.

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-0.3)(z-1)} = \frac{A}{z-0.3} - \frac{B}{z-1} \quad A \text{ ve } B \text{ katsayıları}$$

sırası ile aşağıda verildiği gibi bulunabilir.

$$A = \frac{B}{(z-1)}(z-0.3) \Big|_{z=0.3} + \frac{z}{(z-1)} \Big|_{z=0.3} = \frac{.3}{-0.7} = -0.428$$

$$B = \frac{A}{(z-0.3)}(z-1) \Big|_{z=1} + \frac{z}{(z-0.3)} \Big|_{z=1} = \frac{1}{0.7} = 1.42857$$

A ve B katsayıları elde edilen kesirler, tekrar z ile çarpılır ve tablodan ters z-dönüşüm okunur.

$$Y(z) = \frac{-0.428z}{(z-0.3)} + \frac{1.42857z}{(z-1)}$$

tablodan,  $\frac{z}{z - e^{-a}}$  ile  $\frac{z}{(z-0.3)}$  kesri karşılaştırılır ise,  $e^{-a} = 0.3$  olduğu görülür ve

$e^{-ak} = (0.3)^k$  olarak yazılır. Benzer işlem diğer kesir içinde yapılır.

$$y(k) = 1.42857 - 0.428(0.3)^k$$

**II. yol: Rezidü yöntemi ile,**

Hatırlatma:

$$x(kT) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z-z_i)^m X(z) z^{k-1} \right]_{z=z_i}$$

$$y(k) = \cancel{(z-0.3)} \frac{z^2}{\cancel{(z-0.3)(z-1)}} z^{k-1} \Big|_{z=0.3} + \cancel{(z-1)} \frac{z^2}{\cancel{(z-0.3)(z-1)}} z^{k-1} \Big|_{z=1}$$

$$y(k) = \frac{(0.3)}{(0.3-1)} (0.3)^k + \frac{(1)}{(1-0.3)} (1)^k$$

$$y(k) = 1.4258 - 0.4258 * (0.3)^k$$

**Örnek 2: İkinci dereceden fark denklemini çözünüz.**

$$y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(1) = 2$$

**Çözüm:**

Z-dönüşüm yapılır ve ,

$$Z\{f(t+nT)\} = z^n F(z) - z^n F(0) - z^{n-1} F(1) - \dots - z F(n-1) = z^n \left\{ F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} F(k) z^{-k} \right\} \text{ özelligi}$$

kullanılır ise,  $Z\{y(t+T)\} = zY(z) - zY(0)$

$$Z\{y(t+2T)\} = z^2 Y(z) - z^2 Y(0) - zY(1) \text{ olur.}$$

$$z^2 Y(z) - z^2 y(0) - zy(1) - 5(zY(z) - zy(0)) + 6Y(z) = 0$$

değerler yerine koyulur ise,

$$z^2 Y(z) - 0z^2 - 2z - 5(zY(z) - 0z) + 6Y(z) = 0$$

$$z^2 Y(z) - 5zY(z) + 6Y(z) = 2z$$

$$(z^2 - 5z + 6)Y(z) = 2z \quad \text{Buradan}$$

$$Y(z) = \frac{2z}{(z-2)(z-3)} \quad \text{elde edilir. Basit kesirlere ayrılır ise}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{z-3} - \frac{2}{z-2} \quad \text{elde edilir ve z ile tekrar çarpılır ise} \quad Y(z) = \frac{2z}{z-3} - \frac{2z}{z-2}$$

$$\text{Tablodan} \quad y(k) = 2(3^k) - 2(2^k) \quad \text{elde edilir.}$$

**II. yol: Rezidü yöntemi ile,**

Hatırlatma:  $x(kT) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z-z_i)^m X(z) z^{k-1} \right]_{z=z_i}$

$$y(k) = \cancel{(z-2)} \frac{2z}{(z-3)\cancel{(z-2)}} z^{k-1} \Big|_{z=2} + \cancel{(z-3)} \frac{2z}{(z-2)\cancel{(z-3)}} z^{k-1} \Big|_{z=3}$$

$$y(k) = \frac{2}{(2-3)} (2)^k + \frac{2}{(3-2)} (3)^k$$

$$y(k) = 2(3)^k - 2(2)^k$$

**Örnek3:**

$$y(k+2) - 0.3y(k+1) + 0.02y(k) = (0.01)(0.3)^k u(k) \text{ fark denklemini çözünüz.}$$

Z-dönüşüm alınır, ilk koşullar  $Y(1) = Y(0) = 0$  dır.

Hatırlatma:  $a^k = \frac{z}{z-a}$

$$z^2 Y(z) - 0.3z Y(z) + 0.02 Y(z) = 0.01 \frac{z}{z-0.3}$$

$$Y(z)(z^2 - 0.3z + 0.02) = 0.01 \frac{z}{z-0.3}$$

$$Y(z) = \frac{0.01z}{(z-0.1)(z-0.2)(z-0.3)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{(z-0.1)} + \frac{B}{(z-0.2)} + \frac{C}{(z-0.3)}$$

$$A = \frac{0.01}{(z-0.2)(z-0.3)} \Big|_{z=0.1} = \frac{0.01}{(-0.1)(-0.2)} = 0.5$$

$$B = \frac{0.01}{(z-0.1)(z-0.3)} \Big|_{z=0.2} = \frac{0.01}{(0.1)(-0.1)} = -1$$

$$C = \frac{0.01}{(z-0.1)(z-0.2)} \Big|_{z=0.3} = \frac{0.01}{(0.2)(0.1)} = 0.5$$

$$y(k) = (0.5(0.1)^k - (0.2)^k + 0.5(0.3)^k) u(k) \text{ olarak elde edilir.}$$

**II. yol: Rezidü yöntemi ile,**

Hatırlatma:  $x(kT) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z - z_i)^m X(z) z^{k-1} \right]_{z=z_i}$

$$y(k) = \cancel{(z-0.1)} \frac{0.01z}{\cancel{(z-0.1)(z-0.2)(z-0.3)}} z^{k-1} \Big|_{z=0.1} + \cancel{(z-0.2)} \frac{0.01z}{(z-0.1)\cancel{(z-0.2)}(z-0.3)} z^{k-1} \Big|_{z=0.2} \\ + \cancel{(z-0.3)} \frac{0.01z}{(z-0.1)(z-0.2)\cancel{(z-0.3)}} z^{k-1} \Big|_{z=0.3}$$

$$y(k) = \frac{0.01}{(0.1-0.2)(0.1-0.3)} (0.1)^k + \frac{0.01}{(0.2-0.1)(0.2-0.3)} (0.2)^k + \frac{0.01}{(0.3-0.1)(0.3-0.2)} (0.3)^k$$

$$y(k) = 0.5 (0.1)^k - (0.2)^k + 0.5 (0.3)^k$$


---

*Nonlinear fark denklemi,*

$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_1y(k+1) + a_0y(k) = b_n u(k+n) + b_{n-1}u(k+n-1) + \dots + b_0u(k)$  olarak verilir.

*Nonlinear fark denklenme örnek olarak,,*

$$y(k+1) = -0.1y^2(k) \quad \text{verilebilir.}$$


---

## 11. Sistemlerin Zaman Cevabı

Fiziksel sistemlerin transfer fonksiyonları, sistemi tanımlayan diferansiyel denklemlerden Laplace dönüşümü ile edilmektedir. Sistemlerin zaman cevap analizi için ise çıkış cevabının analitik ifadesi elde edilmelidir. Bu amaç için öncelikle sırası ile I. Ve II. Dereceden sistemlerin cevapları analitik ifadeleri kullanılarak incelenecektir.

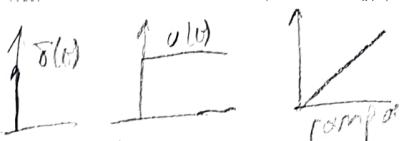
### 11. 1 Dereceden Sistemler

RL, RC gibi elektriksel sistemler, ısıl sistemler, tek sıvı tank sistemi, ...vb 1. dereceden sistemlerdir. I. dereceden sistemlerin genel transfer fonksiyonu;

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad K = \text{sistemin kazancı}, \quad \tau = \text{zaman sabiti}$$

ifadesi ile verilir.

**Hatırlatma:** Transfer fonksiyonu elde edilirken ilk koşullar = 0 alınır.



Bu durumda sistemin çıkış ifadesi,  $Y(s) = G(s)U(s)$  olarak yazılabilir.

Yukarıda genel transfer fonksiyonu verilen 1.dereceden sistemlerin 3 farklı giriş işaretleri: Birim-basamak, birim-rampa ve birim-impulse fonksiyonları için davranışları inceleneciktir.

**1. Birim-Basamak giriş:**  $u(t) = 1 \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$

$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \frac{1}{s}$  olur. İşlem kolaylığı açısından  $K = 1$  alınsın. Bu durumda  $A=1$   $B=-\tau$  ters Laplace dönüşümü ile  $y(t)$  aşağıdaki gibi bulunur.

$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1}$  basit kesirlere ayrılır

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}\right\} \Rightarrow y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

elde edilir.

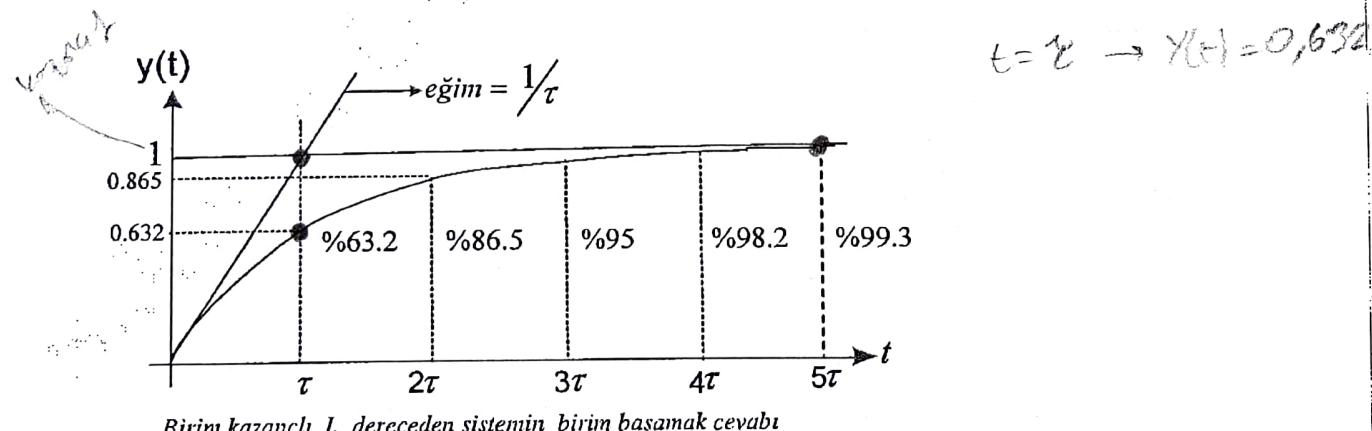
$t = \tau$  anında çıkış,  $y(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau} y(t) = 1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}} \Rightarrow y(\tau) = 1 - e^{-1} \Rightarrow y(\tau) = 0.632$  olur.

Zaman sonsuza gittiğinde,  $t = \infty$  için,  $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1 - e^{-\frac{\infty}{\tau}} = 1 - \frac{1}{e^{\infty}} = 0$

*Birim Basamak  
İşlem kolaylığı  
ve  
ters Laplace  
dönüşümle  
islenildi.  
Sonuç  
seçiliye ulendi.*

**Not:** Birinci dereceden bir sistemde,  $t = \tau$  sonunda ( $\tau$  = sistemin zaman sabiti olmak üzere) 1. dereceden sistem çıkış cevabı  $y(t)$  son değerinin %63.2'sine varır,  $y(\tau) = 0.632y(\infty)$  dur

Birim kazançlı 1. dereceden sistemin, birim basamak cevabı  $y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$  aşağıda verilmiştir.



Sistemin,  $t = 0$  anındaki eğimi,  $\frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{0}{\tau}} = \frac{1}{\tau}$  olarak hesaplanır.

**Not:** Eğer sistem  $t = 0$  daki çıkış hızını kaybetmeseydi, şekilden görüldüğü gibi ( $\tau$ ) sürede sonuna son değerine varmış olacaktı.

**2. Birim-Rampa giriş:**  $u(t) = tu(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s^2}$

$Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \frac{1}{s^2}$  olur. İşlem kolaylığı açısından  $K = 1$  alınsın.

ters Laplace dönüşümü  $y(t)$  aşağıdaki gibi bulunur.

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} \Rightarrow y(t) = t - \tau + \tau e^{-t/\tau}$$

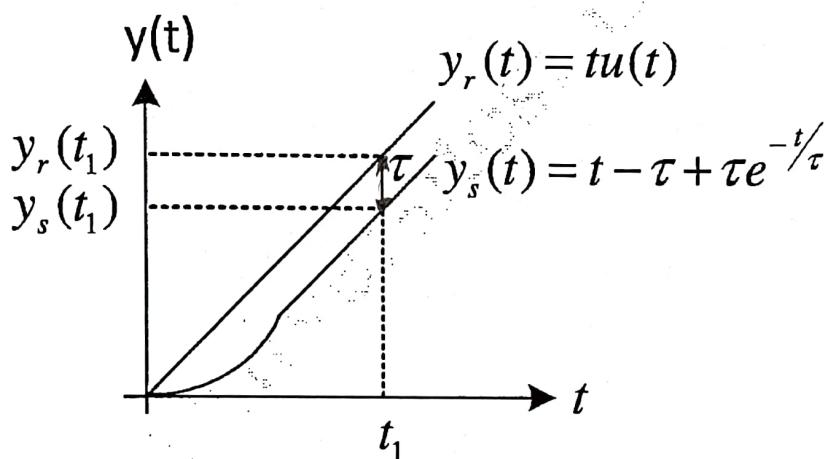
Giriş ile çıkış işaretleri arasındaki hata,  $e(t)$  aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$e(t) = u(t) - y(t) \Rightarrow e(t) = t - (t - \tau + \tau e^{-t/\tau}) \Rightarrow e(t) = \tau - \tau e^{-t/\tau}$$

Hatanın alacağı son değer,

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\tau - \tau e^{-t/\tau}) = \tau \quad \text{olarak bulunur.}$$

Hata  $e(t)$  tür.  $t \rightarrow \infty$  tür.  $e(t)$  tür.  $e(t)$  tür.



Birim Rampa giriş için I. Dereceden sistem cevabı.

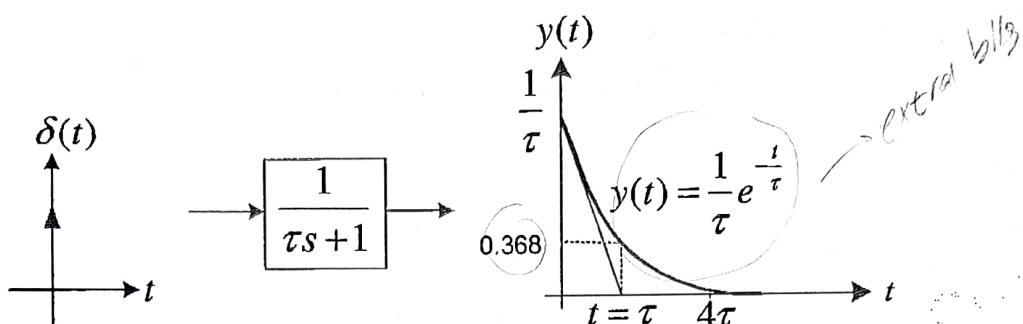
**3. Birim- Impulse giriş:** giriş  $\rightarrow u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1$

$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$  olur. İşlem kolaylığı açısından  $K = 1$  alınsın. Bu durumda ters Laplace dönüşümü ile  $y(t)$  aşağıdaki gibi bulunur.

$$Y(s) = \frac{1}{\tau s + 1} = \frac{\frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} \quad \text{olarak düzenlenir,}$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}}\right\} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \text{elde edilir.}$$

$y(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$  ifadesine ait cevap eğrisi aşağıda verilmiştir.



Birim-Impulse giriş için birim kazançlı I. Dereceden sistem cevabı.

**Not:** i) I. Dereceden sistemin Birim-rampa cevabı,

$$y(t) = t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{dir.}$$

ii) I. Dereceden sistemin Birim-rampa cevabının türevi,

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$= 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{Birim-Basamak cevabını verir.}$$

iii) I. Dereceden sistemin Birim-Basamak cevabının türevi,

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$y(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{Birim-impulse cevabını verir.}$$

rampa  
↓阶跃  
yazılım  
↓梯度  
Impuls

**Not:** Birim-Impulse Cevabın Laplace-dönüştümü sistemin transfer fonksiyonunu verir.

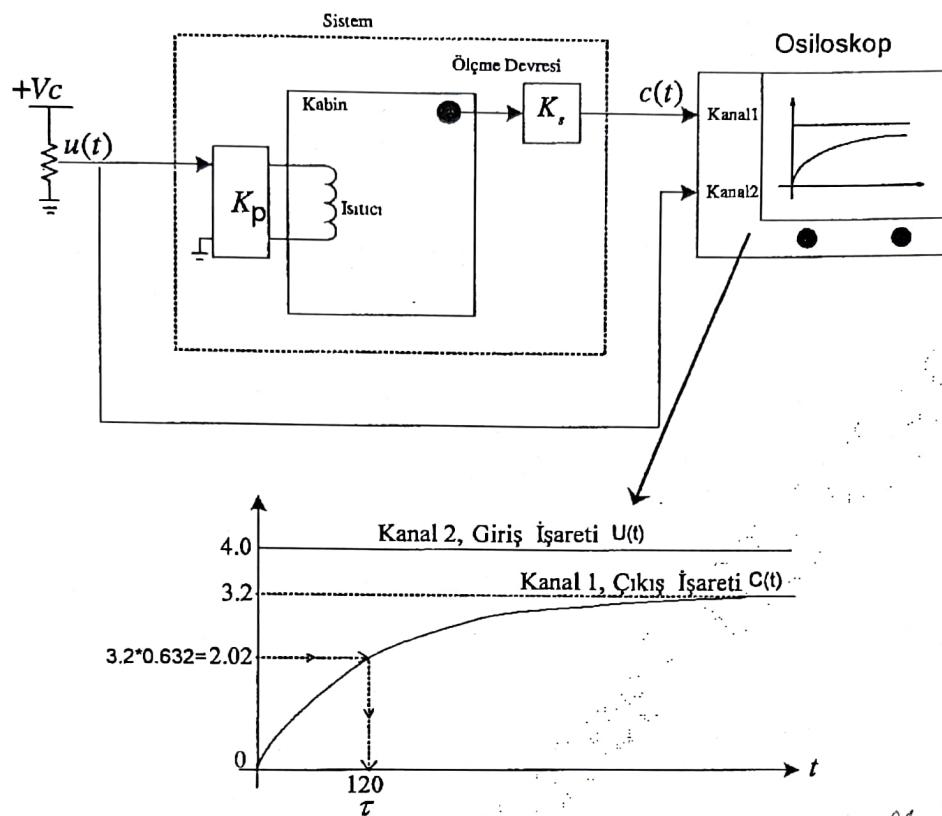
$$G(s) = L\{y(t)\} = L\left\{\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\right\} \rightarrow G(s) = \left\{ \frac{\frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} \right\}$$

## 11.2 I. Dereceden Sistem Modelinin Basamak Cevabından Elde Edilmesi

Birinci dereceden bir sistemin dinamik karakteristığının basamak cevabı ile edilmesine yönelik örnek bir uygulama verilmiştir. Birinci dereceden sistem olarak ıslı sistem seçilmiştir.

İslı sistemin dinamik karakteristığını elde etmek için, sisteme referans giriş işaretini olarak *Basamak fonksiyonu*  $u(t)$  uygulanır. Çıkış işaretin, yaklaşık olarak  $5\tau$  kadar sonra varış değerinin %99.3 ne ulaşır. Gerçek zamanda osiloskop yardımı ile I. Dereceden sistem cevap eğrisi  $c(t)$  elde edilir. Cevap eğrisinden yararlanarak transfer fonksiyonundaki parametreler ( $K$  ve  $\tau$ ) elde edilir.  $K$ , kontrol edilen sistemin açık-çevrim kazancıdır ve sensör, işaret dizenleyici devre, güç kat ve ıslı sistem kazançlarını ihtiiva etmektedir.

Örnek olarak aşağıda verilen sisteme  $r(t) = 4u(t)$ 'luk bir giriş işaretini uygulansın. Sistem cevap eğrisi aşağıda gösterildiği gibi elde edilsin.



$$1. \text{ Sistemin açık-çevrim Kazancı, } K = \frac{\text{Çıkış}}{\text{Giriş}} = \frac{3.2}{4} = 0.8$$

2. Sistemin Zaman Sabiti,  $\tau =$  Son değerinin %63.2 sine verdiği süredir.

Şekilden son değer = 3.2V

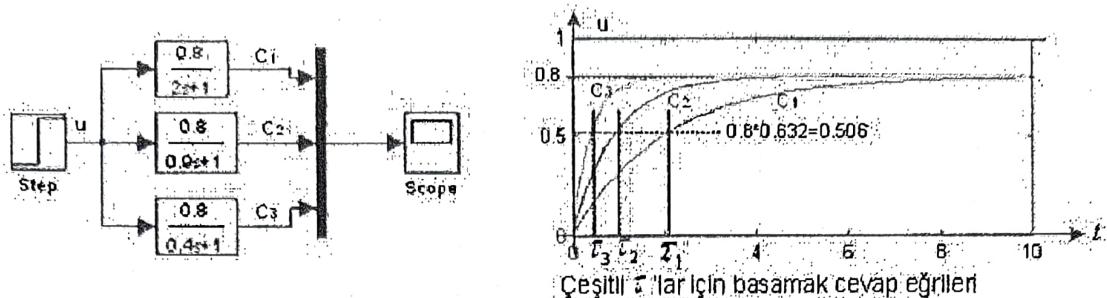
$$\text{Son değerinin \%63.2'si} = 3.2 * 0.632 = 2.02V$$

Şekilden sistemin %63.2 değerine 120. saniyede verdiği görülmektedir. Bu durumda  $\tau = 120$  olarak elde edilir. Kontrol edilen sistemin, *açık-çevrim transfer fonksiyonu*

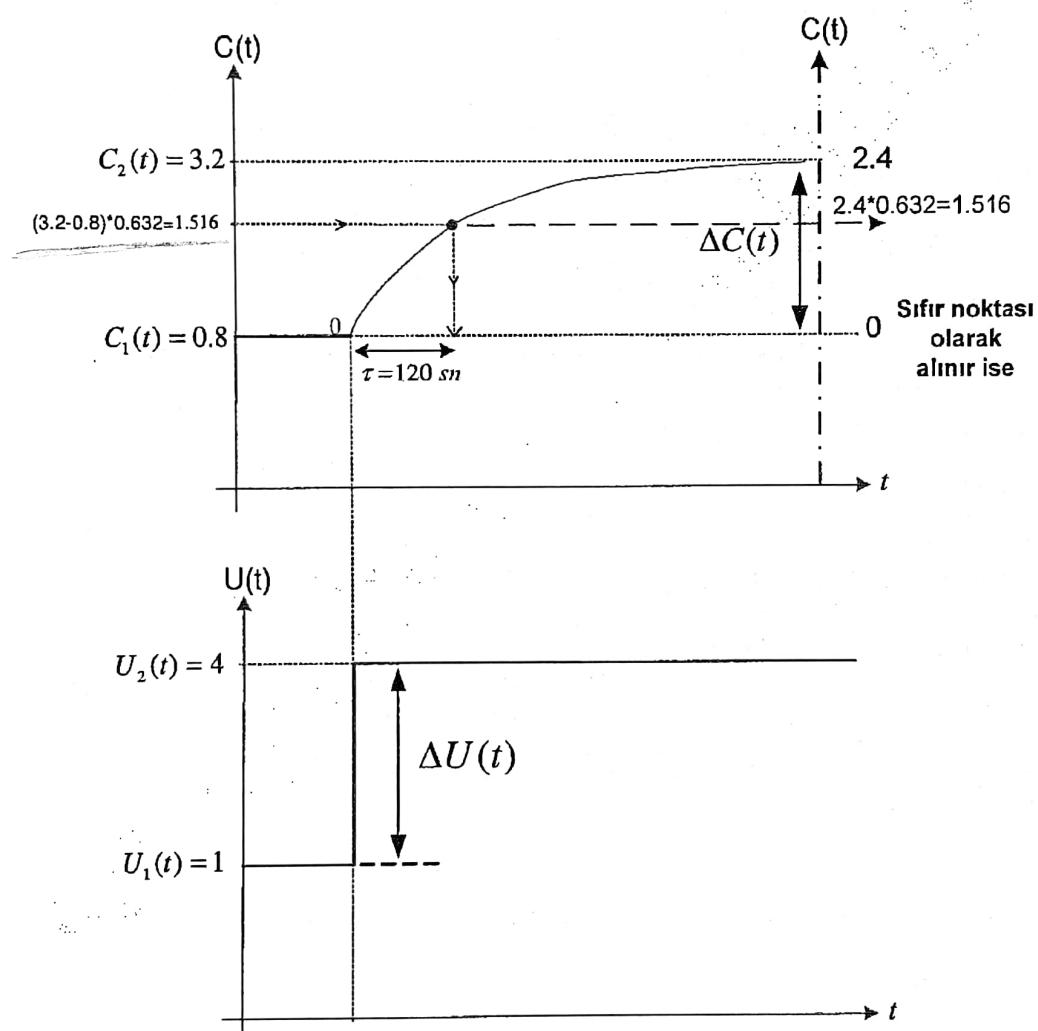
$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \text{ genel ifadesinden, } G(s) = \frac{0.8}{120s + 1} \text{ olarak yazılabilir}$$

I. dereceden sistemlerde sistem parametresi,  $\tau$  zaman sabiti, sistem cevap hızını değiştirir.

$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$ ,  $K = 0.8$  ve çeşitli  $\tau$ 'lar için I. dereceden sistemin basamak giriş için cevap eğrileri aşağıda verilmiştir.



Basamak cevap modeli elde edilecek olan sistem aşağıda verildiği gibi, belli bir çalışma noktasından başlanmak üzere modellenmek istensin.



$$1. \text{ Sistemin açık-çevrim Kazancı, } K = \frac{\Delta C(t)}{\Delta U(t)} = \frac{C_2(t) - C_1(t)}{U_2(t) - U_1(t)} = \frac{3.2 - 0.8}{4 - 1} \rightarrow K = 0.8$$

2. Sistemin Zaman Sabiti,  $\tau$  = Sistem cevabının son değerinin %63.2 sine verdiği süredir.  
Şekilden son değer =  $3.2 - 0.8 = 2.4$  V

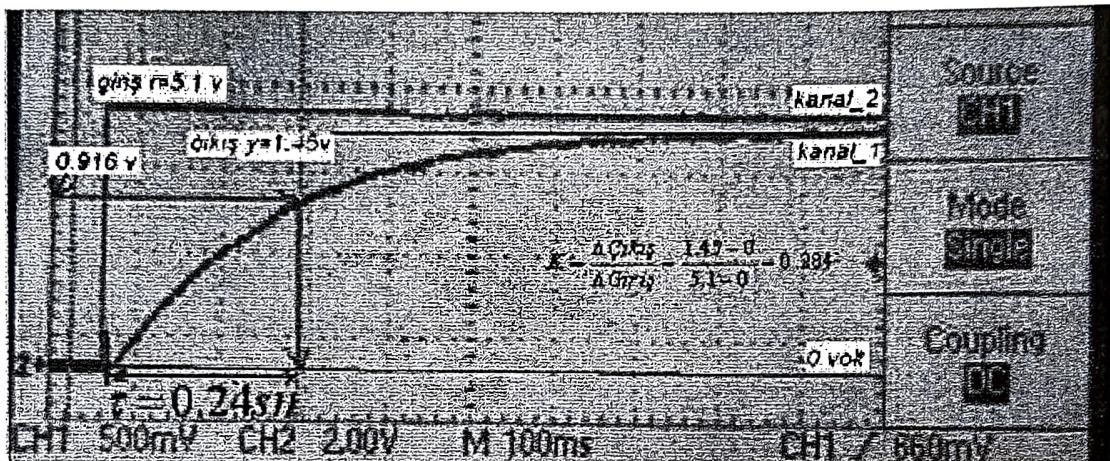
Son değerinin %63.2'si =  $2.4 \cdot 0.632 = 1.5168$  V

Şekilden sistemin %63.2 değerine 120. saniyede verdiği görülmektedir.

Bu durumda  $\tau = 120$  olarak elde edilir. Kontrol edilen sistemin, açık-çevrim transfer fonksiyonu  $G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$  genel ifadesinden,

$$G(s) = \frac{0.8}{120s + 1} \quad \text{olarak yazılabilir}$$

$$\frac{145-0}{51-0} = 0.88$$



### 11.3 Modeli Elde Edilen Sistemde Kontrol Yöntemleri

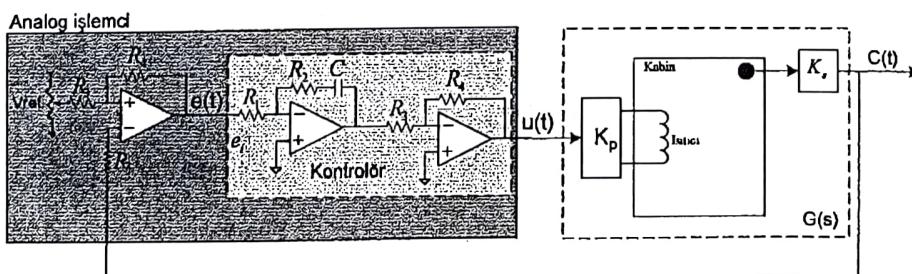
Bir sistemin açık-çevrim transfer fonksiyonu elde edildikten sonra, istenen cevap performansı sağlayacak olan kontrolör tasarılanmalı ve kapalı-çevrim ile sistem kontrol edilmelidir. Tasarlanacak kontrolör,

- i) Sürekli-zaman analog kontrolör
- ii) Ayırık-zaman analog kontrolör
- iii) Ayırık-zaman sayısal kontrolör

olabilir. Sırası ile aşağıda verilecektir.

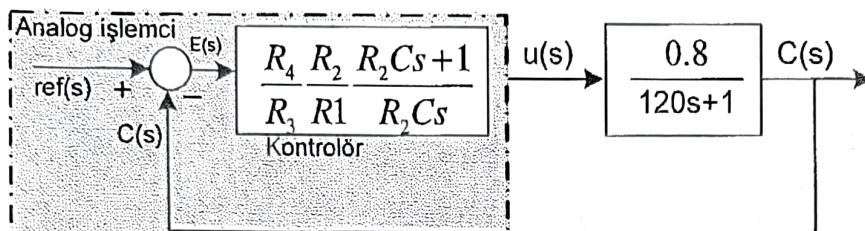
#### i) Sürekli-zaman analog kontrolör tabanlı Kapalı-çevrim kontrol:

Açık-çevrim transfer fonksiyonu elde edilmiş olan *isıl sisteme* ait sürekli-zaman kapalı-çevrim kontrol blok diyagramına ait basitleştirilmiş donanım aşağıda verilmiştir.



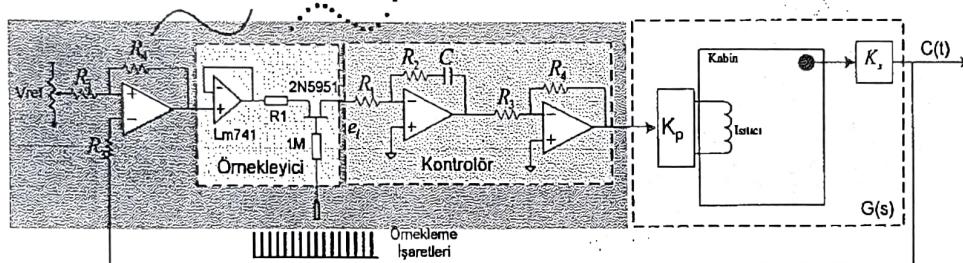
*Sürekli-zaman analog kontrolör tabanlı kapalı-çevrim kontrol'e ait donanım.*

Açık-çevrim transfer fonksiyonu  $G(s)$ , deneysel olarak basamak cevabından elde edilen ıslı sisteme ait kapalı-çevrim kontrol blok diyagramı aşağıda verilmiştir.



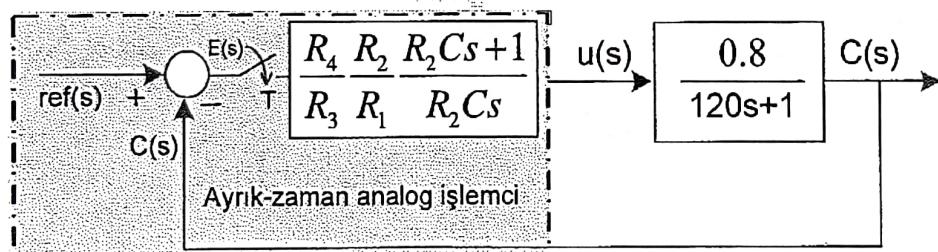
Sürekli-zaman kapalı-çevrim kontrol blok diyagramı

ii) **Ayırık-zaman analog kontrolör tabanlı Kapalı-çevrim kontrol:** Hata işaretinin örneklenmesi, analog işlemcide değerlendirilir ve güç katı kuvvetlendirici girişi  $K_p$ 'ye uygulanır.



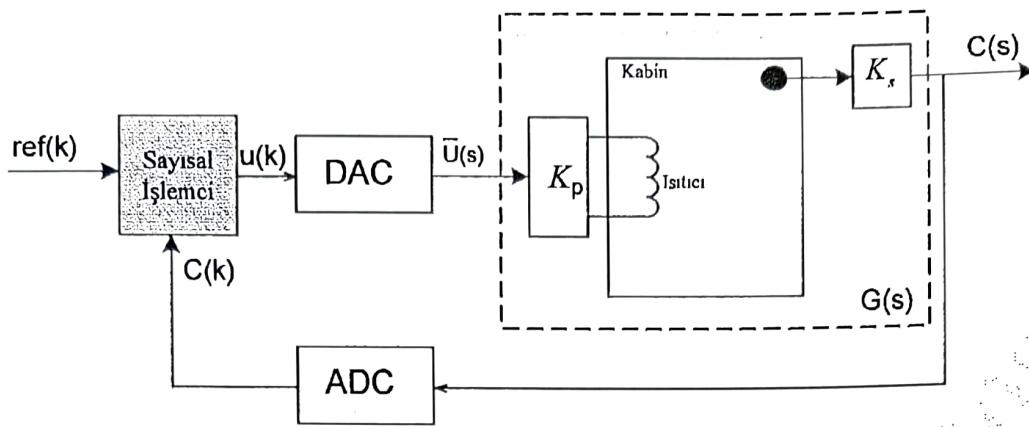
Ayırık-zaman analog kontrolör tabanlı basitleştirilmiş sistem donanımı.

Ayırık-zaman analog kontrolör tabanlı donanıma ait kapalı çevrim kontrol blok diyagramı aşağıda verilmiştir.



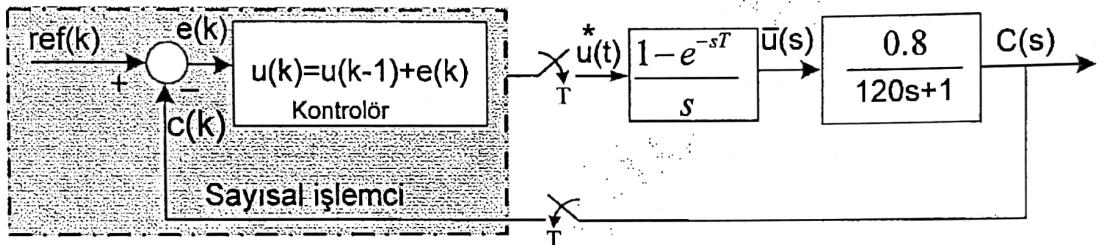
Ayırık-zaman analog kontrolör tabanlı kapalı-çevrim kontrol blok diyagramı.

iii) **Ayırık-zaman sayısal kontrolör tabanlı Kapalı-çevrim kontrol:** Kontrolör olarak sayısal işlemci ve arayüz elemanları olarak ADC ve DAC kullanılmaktadır. Basitleştirilmiş donanım aşağıda verilmiştir.



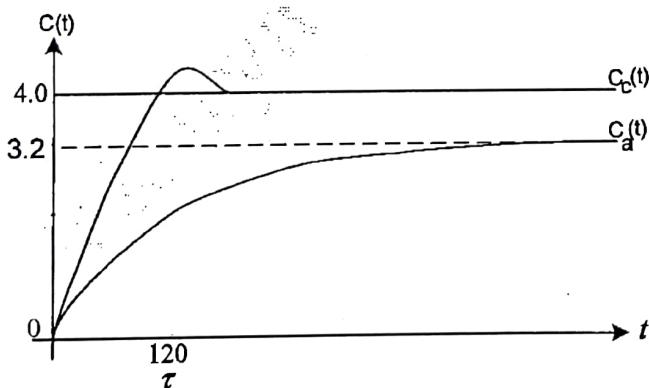
Ayrık-zaman kapali-çevrim kontrol'e ait basitleştirilmiş donanım.

Açık-çevrim transfer fonksiyonu  $G(s)$ , deneysel olarak basamak cevabından elde edilen ıslı sistemde ait ayrık-zaman sayısal kapali-çevrim kontrol blok diyagramı aşağıda verilmiştir.



Ayrık-zaman kapali-çevrim kontrol blok diyagramı

*Not: Isıl sistem'in basamak girişe karşı açık-çevrim cevabı deneysel olarak elde edilmiş ve  $C_a(t)$  dir. Aşağıda şekilden görüldüğü gibi sistem cevabı hem yavaş hemde verilen referans değer  $4u(t)$  yerine  $3.2u(t)$  ye gitmektedir.*



Amaç, Sürekli-zaman veya ayrık-zaman kapali-çevrim kontrol ile sistem cevabının istenen performansı sağlayacak şekilde ayarlanmasıdır. İstenen cevap  $C_e(t)$  ise, bu performansı sağlayacak olan analog-kontrolör veya sayısal-kontrolör tasarılanmalıdır.

#### 11.4 II. Dereceden Sistemler

II. Dereceden sistem için normalize edilmiş diferansiyel denklem

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 2\xi w_n \frac{dc(t)}{dt} + w_n^2 c(t) = w_n^2 u(t) \quad \text{olarak verilir.}$$

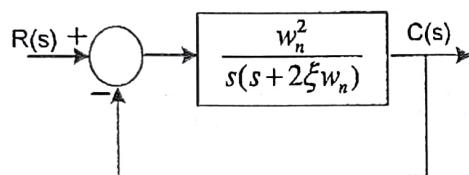
İlk koşullar sıfır alınarak, Laplace dönüşümü alınır ise, II. dereceden örnek sistem transfer fonksiyonu,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

$w_n$  = doğal açısal frekans, ( $w_n = 2\pi f_n$ )

$\xi$  = sönüm oranı

II. Dereceden birim geri beslemeli sistemin kapali çevrim kontrol blok diyagramı aşağıda verilmiştir.



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{w_n^2}{s + 2\xi w_n}}{1 + \frac{w_n^2}{s + 2\xi w_n}} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

II. dereceden birim geri beslemeli sistem için **karakteristik denklem**,  $F(s)$  ve köklerinin kompleks s-düzleminde dağılımı aşağıda gösterilmiştir.

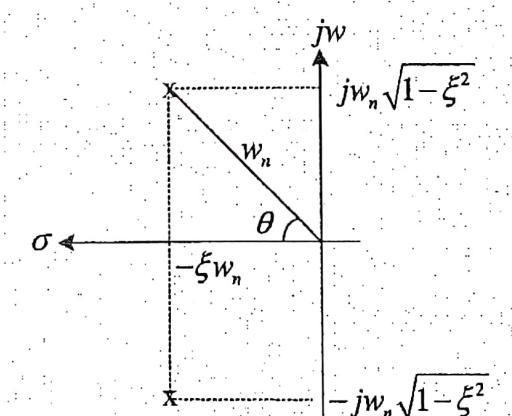
$$F(s) = s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2 = 0$$

$0 < \xi < 1$  için karakteristik denklemin kökleri,

$$s_{1,2} = -\xi w_n \pm jw_n \sqrt{1-\xi^2}$$

$$= -\sigma_d \pm jw_d$$

$\sigma_d = \xi w_n$	sönüm çarpanı(sabiti)
$w_d = w_n \sqrt{1-\xi^2}$	sönüm frekansı
$\tau = \frac{1}{\xi w_n} = \frac{1}{\sigma_d}$	zaman sabiti



II. Dereceden sistemin  $s$ -düzleminde kutup sıfır dağılımı.

Karakteristik denklem köklerinin orijin ile yaptığı açı  $\theta$  şekilden,

$$\cos \theta = \frac{\xi w_n}{w_n} = \xi \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \xi \quad \text{yazılır.}$$

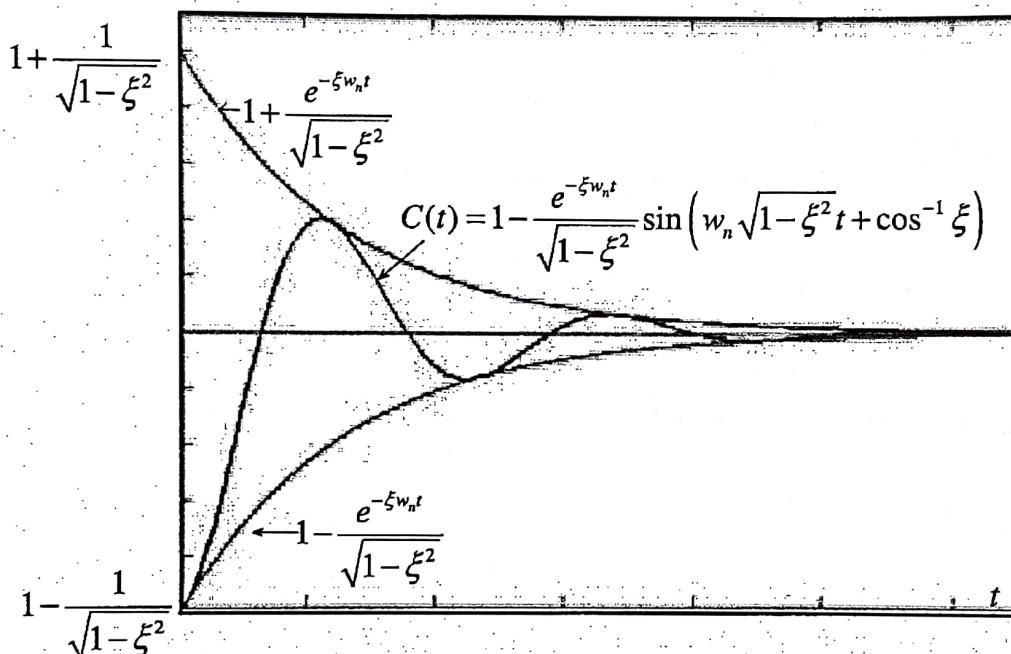
II. dereceden örnek sistem girişi birim basamak fonksiyonu  $R(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$  ve  $0 < \xi < 1$  için çıkışın Laplace ifadesi aşağıda verilmiştir.

$$C(s) = \frac{1}{s} \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} \quad \text{ters Laplace dönüşümü alınır ise, II. dereceden örnek sistem} \quad \mathcal{L}[C(s)] = \int_0^\infty c(t) dt$$

çıkışının analitik ifadesi,

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(w_n \sqrt{1-\xi^2} t + \cos^{-1} \xi) \quad 0 < \xi < 1, \quad t \geq 0 \quad \text{elde edilir.}$$

$\overset{\circ}{\nearrow}$   
sonuç  
sistem



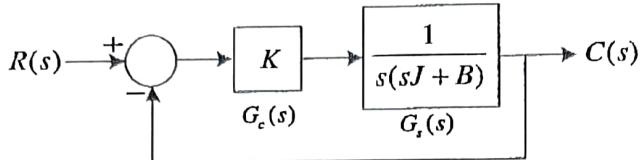
II. Dereceden sistem cevabı  $C(t)$ 'nin zamana göre değişimi.

II. dereceden sistem parametreleri  $\xi$  ve  $w_n$  sistem cevabının hem hızını hem de biçimini değiştirir.

i-)  $C(t)$  eğrisi incelediğinde,  $\xi w_n$  sistem cevabının sönümünü ifade eder ve alt ve üst aşımların sırası ile I. dereceden  $y_1(t) = 1 - \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}$  ile  $y_2(t) = 1 + \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}$  eğri zarflarını takip ettiği görülmektedir.  $y_1(t) = 1 - \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}$  olarak yazılır ise, zaman sabiti  $\tau = \frac{1}{\xi w_n}$  olduğu görülür.

ii-)  $C(t)$  ifadesine bakılırsa, sinüs işaretinin, sönüm açısal frekansı,  $w_d = w_n \sqrt{1-\xi^2}$  dir.

**Örnek:**



Verilen sistemde basitleştirilmiş DC motor modeli,  $L_a = 0$ , yardımı ile pozisyon kontrolü yapılmaktadır. Sistemin doğal açısal frekans  $w_n$  ve sönüm oranı  $\xi$  değerlerini  $B, J$  ve  $K$  parametreleri cinsinden belirleyiniz.

Önce sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonunu elde edilecektir.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s(sJ+B)}}{1 + \frac{K}{s(sJ+B)}} = \frac{K}{s^2 J + sB + K} = \frac{K/J}{s^2 + s B/J + K/J}$$

II. dereceden sistemler için genel transfer fonksiyonu ile eşleştirilsin.

$\rightarrow$  Bilgisayar (DE) programları  
kullanılarak

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K/J}{s^2 + s B/J + K/J} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

Yukarıdaki eşitlikten sistemin doğal açısal frekansı,  $w_n^2 = \frac{K}{J} \Rightarrow w_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$

sönüm oranı,  $2\xi w_n = \frac{B}{J} \Rightarrow \xi = \frac{B}{J} \frac{1}{2w_n} = \frac{B}{J} \frac{1}{2\sqrt{\frac{K}{J}}} \Rightarrow \xi = \frac{B}{2\sqrt{KJ}}$  olarak bulunur.

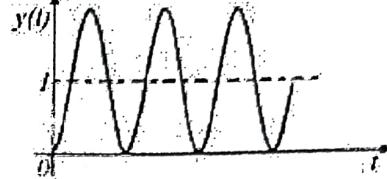
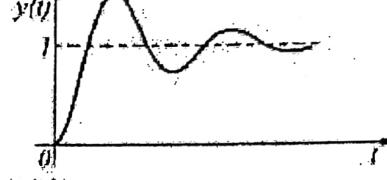
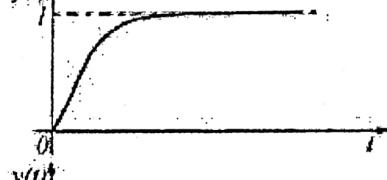
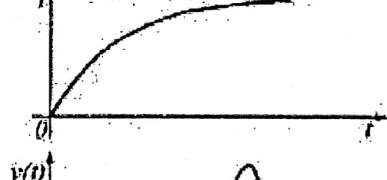
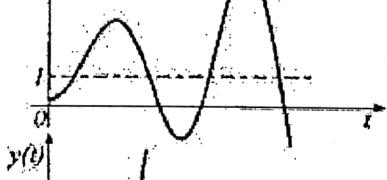
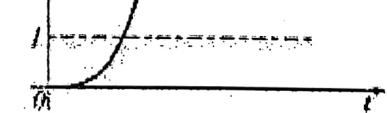
Verilen sistem için elde edilen doğal frekans ve sönüm oranı ifadelerinde  $B, J$  kullanılan DC motora ait sürtünme ve atalet katsayılarıdır. Bu katsayılar makinenin fiziksel özelliklerine ve çevre şartlarına bağlıdır, kullanıcı tarafından değiştirilemez.  $\xi$  ve  $w_n$ , verilen örnekte

$$w_n = \sqrt{\frac{K}{J}} \quad \text{ve} \quad \xi = \frac{B}{2\sqrt{KJ}} \quad K, \text{kazancının ile değiştirilmektedir.}$$

Burada  $K$  kazancı, sistemi kontrol edecek olan **Oransal** kontrolördür. Tasarımcı, sistem cevabının istenen performansı sağlayacak şekilde  $K$ 'yı belirleyebilir.

II. dereceden sistemi cevabının hem hızını hem de biçimini değiştiren parametrelər  $\xi$  ve  $w_n$  dir. Aşağıda  $\xi$  ve  $w_n$  'e göre II. dereceden sistem davranışları tablo halinde verilmiştir.

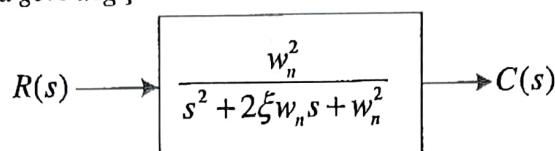
**II. Dereceden Sistemin Farklı  $\xi$  Değerlerine göre Kökleri Ve Zaman Cevabı**

Kökler	S-Kompleks düzleminde kök yerleri	Cevabın zamana göre değişimi	Tanım
$s_{1,2} = \pm jw_n\sqrt{1-\xi^2}$	$\zeta=0$		Sönümsüz Osilasyon (Marjinal Kararlı)
$-\xi w_n \pm jw_n\sqrt{1-\xi^2}$	$0 < \zeta < 1$		Sönümlü
$-w_n$	$\zeta=1$		Kritik sökümlü
$-\xi w_n \pm w_n\sqrt{\xi^2 - 1}$	$\zeta > 1$		Aşırı sökümlü
$\xi w_n \pm jw_n\sqrt{1-\xi^2}$	$0 > \zeta > -1$		Kararsız
$\xi w_n \pm w_n\sqrt{\xi^2 - 1}$	$\zeta < -1$		Kararsız

II. Dereceden Sistemin Farklı  $\xi$  Değerlerine göre davranış eğrileri.

## II. Dereceden sistem davranışına ait çeşitli örnekler

Aşağıda II. dereceden sistemde  $F(s) = s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2 = 0$  karakteristik denklem köklerinin farklı parametreler  $\xi$  ve  $w_n$  için,  $s$ -kompleks düzleminde kutup sıfır dağılımı ve her biri için cevap  $c(t)$  nin zamana göre değişimi verilecektir.



Sadece bir örnek için  $c(t)$  ifadesi elde edilecektir.

$$\text{Örnek 1: } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{9}{s^2 + 9s + 9} \quad \text{giriş } R(s) = \frac{1}{s} \quad C(s) = \frac{1}{s} \frac{9}{s^2 + 9s + 9} \text{ olur.}$$

Ters Laplace dönüşümü ile  $c(t) = L^{-1}\{C(s)\}$ , hesaplanır.

Hatırlatma:  $f(t) = \sum_{i=1}^r \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left| \left( (s-s_i)^n F(s) e^{st} \right) \right|_{s=s_i}$

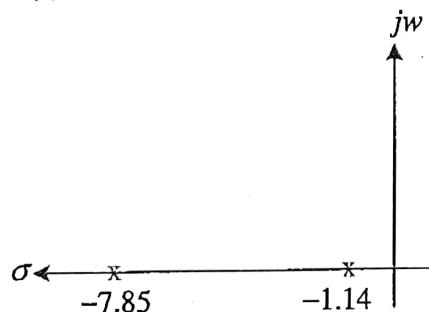
$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 9s + 9)} = \frac{9}{s(s+7.85)(s+1.14)}$$

$$c(t) = s \frac{9}{s(s+7.85)(s+1.14)} e^s \Big|_{s=0} + (s+7.85) \frac{9}{s(s+7.85)(s+1.14)} e^s \Big|_{s=-7.85} + (s+1.14) \frac{9}{s(s+7.85)(s+1.14)} e^s \Big|_{s=-1.14}$$

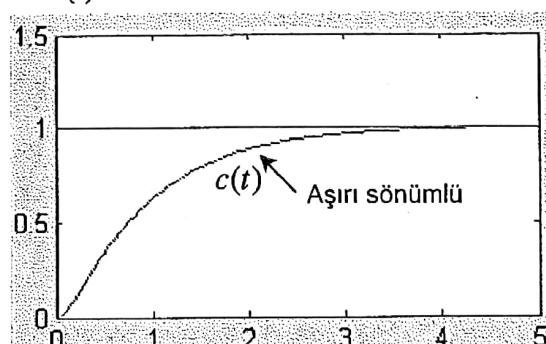
$$c(t) = \frac{9}{(s+7.85)(s+1.14)} e^s \Big|_{s=0} + \frac{9}{s(s+1.14)} e^s \Big|_{s=-7.85} + \frac{9}{s(s+7.85)} e^s \Big|_{s=-1.14}$$

$c(t) = 1 + 0.171e^{-7.85t} - 1.171e^{-1.146t}$  olarak bulunur.  $c(t)$  'nin zamanla değişimi aşağıda verilmiştir.

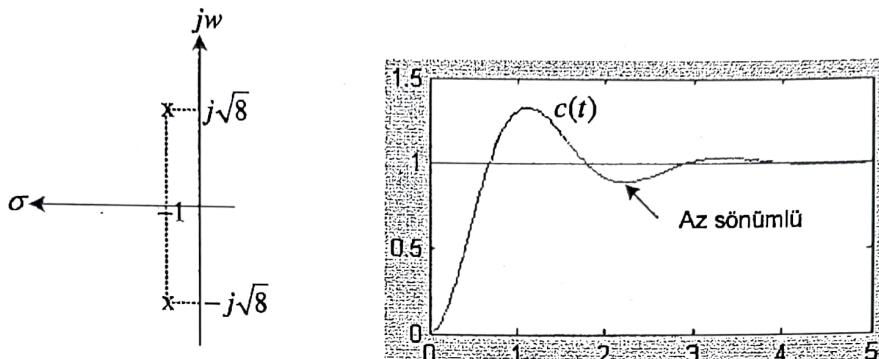
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{9}{s^2 + 9s + 9} \quad \text{für } \text{köcherler farklı reel!}$$



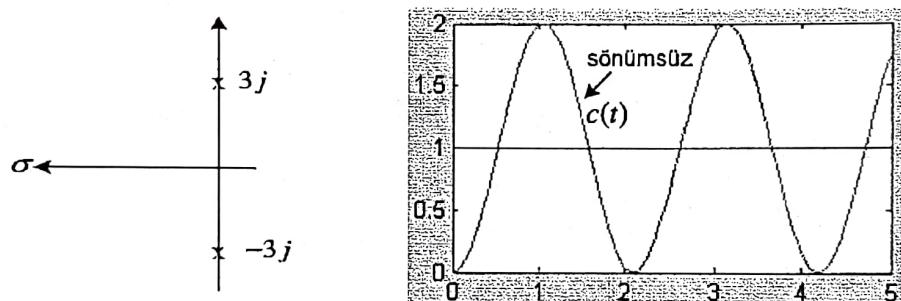
$$c(t) = 1 + 0.171e^{-7.85t} - 1.171e^{-1.146t}$$



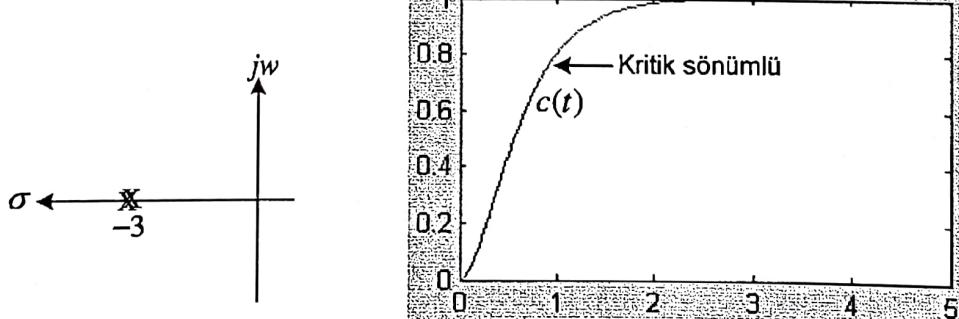
**Örnek 2:**  $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{9}{s^2 + 2s + 9} = \frac{9}{(s+1+\sqrt{8}j)(s+1-\sqrt{8}j)}$ , kompleks eşlenik kökler!



**Örnek 3:**  $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{9}{s^2 + 9} = \frac{9}{(s+j3)(s-j3)}$ , eşlenik imajiner kökler



**Örnek 4:**  $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{9}{s^2 + 6s + 9} = \frac{9}{(s+3)^2}$ , katlı reel kökler!



Yukarıda II. dereceden sistem karakteristik denklem köklerinin farklı reel, kompleks eşlenik, eşlenik imajiner ve katlı reel durumları için örnekler verilmiş s-kompleks düzleminde kutup yerleri gösterilmiş ve cevap eğrileri elde edilmiştir.

## 12. Kontrol Sistemlerinin Geçici ve Sürekli Hal Davranışı

Genellikle, kontrol sistemlerinin istenen performansı zaman büyüklükleri ile tanımlanır. Dinamik sistemlere bir giriş veya bozucu uygulandığında anı olarak cevap veremezler ve transient cevap gösterirler. Zamanla değişmeyen lineer sistemler (kararlı) karakteristik denklem köklerine bağlı olarak transient cevabında aşırı sönümlü, kritik sönümlü, az sönümlü veya sönümsüz cevap gösterebilirler. Kontrol sistemlerinde genel olarak, *birim-basamak* giriş için transient cevap performansı belirlenir.

Bir otomatik kontrol sisteminin veya bir dinamik sistem cevabı  $C(t)$  iki kısımdan oluşur;

- 1-) Geçici hal cevabı,  $C_i(t)$  (Transient response)
- 2-) Sürekli hal cevabı,  $C_{ss}(t)$  (Steady state response)

$$C(t) = C_i(t) + C_{ss}(t)$$

*Sürekli hal cevabı,  $C_{ss}(t)$ , zaman sonsuza giderken erişilen cevaptır. Sürekli hal cevabı kalıcı hal hatalarını belirler.*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = C_{ss}(t)$$

*Geçici hal cevabı,  $C_i(t)$ , sistemin dinamik davranışını belirler. Sistem parametrelerine,  $\xi, w_n$ , bağlı davranış geçici rejimde olur.*

$\lim_{t \rightarrow \infty} C_i(t) = 0$  kararlı bir sistemde transient cevap idealde sıfır olur yada etrafında küçük salınımalar yapabilir.

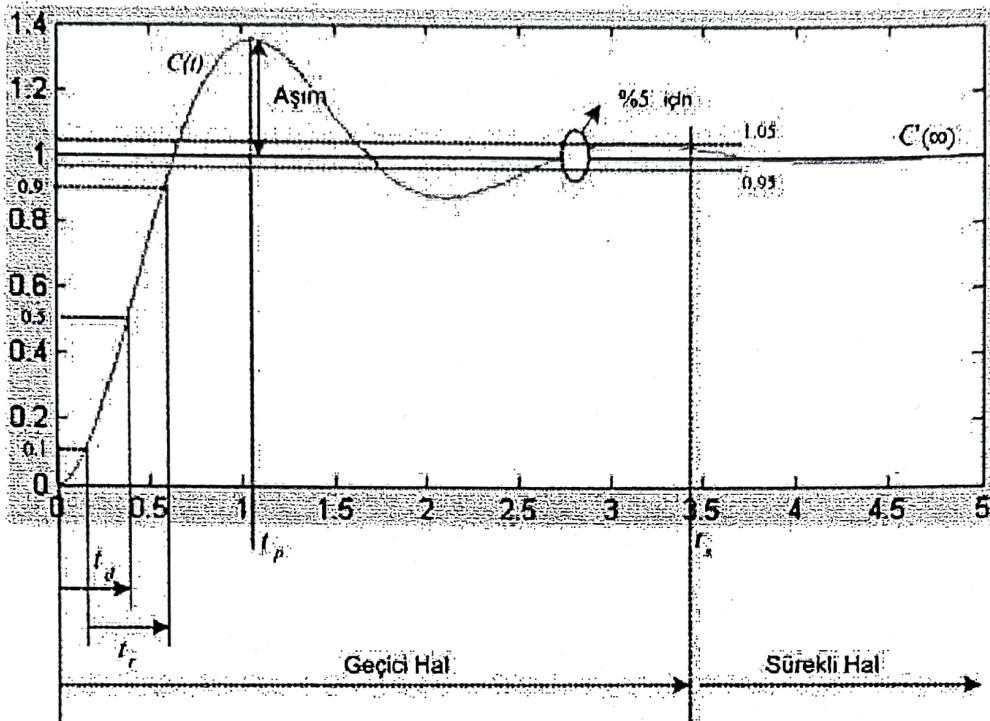
¶ Otomatik kontrol sistemlerinde geçici hal kriterleri birim basamak giriş için tanımlanmıştır.  
II. dereceden örnek sistem *birim basamak* cevabı **S-domeninde**:

$$C(s) = \frac{1}{s} \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} \quad \text{verilir.}$$

zaman domeni ifadesi ise,

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(w_n \sqrt{1-\xi^2} t + \cos^{-1} \xi) \quad 0 < \xi < 1, \quad t \geq 0 \quad \text{dir.}$$

## 12.1 Geçici Hal (Geçici Rejim) Kriterleri



1-) **Tepe zamanı:** Çıkış işaretinin ilk maksimum noktasına varincaya kadar geçen süredir.  $C(t)$  ifadesinin türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse,

$$\begin{aligned} \frac{dc(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( 1 - \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left( w_n \sqrt{1-\xi^2} t + \cos^{-1} \xi \right) \right) = 0 \\ &= \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} (\xi w_n \sin(w_d t + \theta) - w_d \cos(w_d t + \theta)) = 0 \quad \text{olabilmesi için,} \end{aligned}$$

$$\tan(w_d t + \theta) = \frac{w_n \sqrt{1-\xi^2}}{\xi w_n} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \quad \text{dir.}$$

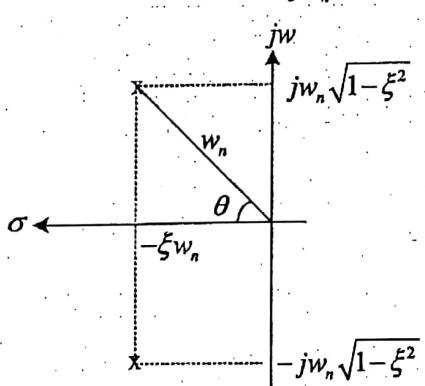
*II. derece karakteristik denklem köklerinin orijin ile yaptığı açı  $\tan \theta$  yazılır ise, yandaki şeviden.*

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \quad \text{dir. Elde edilen ifadeye yerine koyulur}$$

*ise  $\tan(w_d t + \theta) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \tan(\theta)$  sonucuna varılır.*

$$\tan(w_d t + \theta) = \tan(\theta)$$

$$\tan(\pi + \theta) = \tan(\theta) \quad \text{ozelliğinden, } w_d t = n\pi$$



$w_n \sqrt{1-\xi^2} t = n\pi$  koşulundan  $t = \frac{\pi n}{w_n \sqrt{1-\xi^2}}$  elde edilir.

Bu ifade sönümlü sinüs ifadesinin maksimum ve minimum tepe noktalarının zamanını verir.

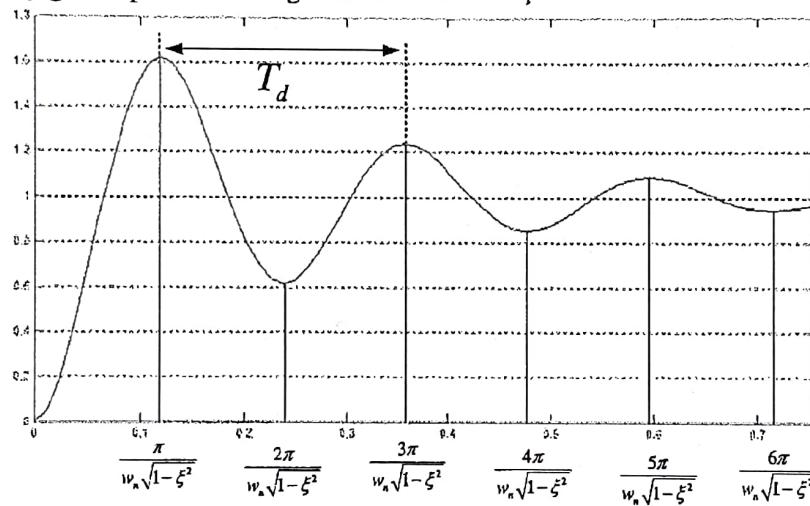
$$n=1, 2, 3, \dots \text{ için } t_1 = \frac{\pi}{w_n \sqrt{1-\xi^2}}, \quad t_2 = \frac{2\pi}{w_n \sqrt{1-\xi^2}}, \quad t_3 = \frac{3\pi}{w_n \sqrt{1-\xi^2}}, \dots$$

Tepe zamanı ilk maksimum tepeye varincaya kadar geçen süre olarak tanımlanıldığından,

**Tepe zamanı:**

$$t_p = \frac{\pi}{w_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad \text{peak time}$$

Aşağıda tepe zamanları grafik olarak verilmiştir.



**Osilasyon periyodu**

$$T_d = \frac{2\pi}{w_n \sqrt{1-\xi^2}} \text{ dir.}$$

**Osilasyon açısal ferkansı**

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} \text{ ise,}$$

$$\omega_d = w_n \sqrt{1-\xi^2}$$

Olarak elde edilir.

$$2 t_p = T_d$$

II. dereceden sistem girişi birim basamak olmasına rağmen cevap sönümlü sinüstür  $0 < \xi < 1$ .

2-) Aşım:  $c(t)$ 'nin ilk tepe değeri ile  $c(\infty)$  arasındaki farktır,  $\text{aşım} = c(t_p) - c(\infty)$ . Ve yüzde olarak aşım ise,  $\% \text{aşım} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} * 100$  dür.

II. dereceden sistem birim basamak

cevabında  $t = t_p = \frac{\pi}{w_n \sqrt{1-\xi^2}}$  ise  $c(t)$  yerinde koyulur.

$$c(t_p) = 1 - \frac{e^{-\xi w_n t_p}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(w_n \sqrt{1-\xi^2} t_p + \theta\right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\xi w_n \frac{\pi}{w_n \sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(w_n \sqrt{1-\xi^2} \frac{\pi}{w_n \sqrt{1-\xi^2}} + \theta\right)$$

II. derece karakteristik denklem köklerinin orijin ile yaptığı açının  $\sin \theta$  si yazılır ise, yandaki şekilde.

$$\sin \theta = \frac{w_n \sqrt{1-\xi^2}}{w_n} = \sqrt{1-\xi^2}$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$$

$$\text{Aşım} \Rightarrow e^{-\frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \pi}$$

$$= 1 - \frac{e^{-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\pi + \theta) = 1 + \frac{e^{-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\theta)$$

$$c(t_p) = 1 + \frac{e^{-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cancel{\sqrt{1-\xi^2}} \rightarrow c(t_p) = 1 + e^{-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Giriş birim basamak olduğundan,  $C_{\text{son}} = 1$  dir.

$$C_{\max} = C(t_p) = 1 + e^{-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\% \text{Aşım} = \% M_p = \frac{C_{\max} - C_{\text{son}}}{C_{\text{son}}} \cdot 100 = \frac{1 + e^{-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} - 1}{1} \cdot 100 \rightarrow$$

Yüzde aşımı, Aşım sadece  $\xi$  ye bağlıdır.

$$\% \text{Aşım} = \% M_p = e^{-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cdot 100$$

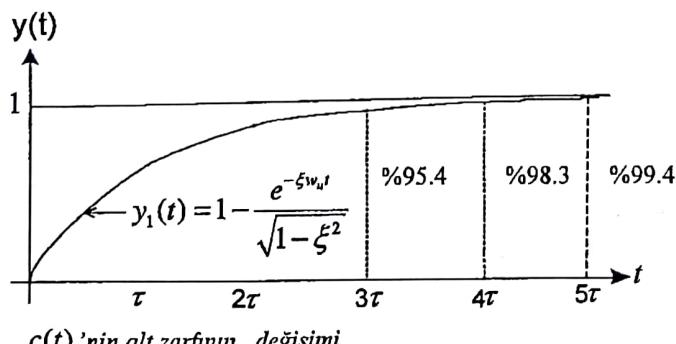
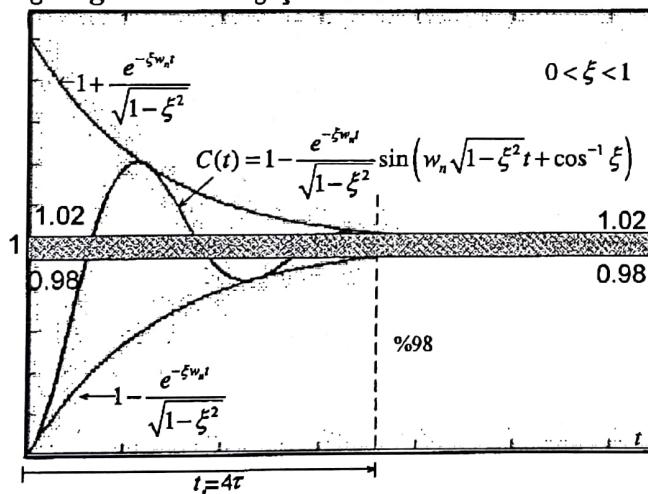
% Aşım Verilmiş ise  $\xi$  aşağıdaki ifade ile hesap edilebilir.

$$\xi = \frac{-\ln(\% M_p / 100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\% M_p / 100)}}$$

Yüzde aşım

$$\% M_p = \frac{C_{\max} - C_{\text{son}}}{C_{\text{son}}} \cdot 100$$

3-) Yerleşme zamanı ( $t_s$ ): sistem cevabının belirlenen tolerans aralığına hiç çıkmamak üzere ilk girdiği ana kadar geçen süredir.



$c(t)$  nin alt zarfının değişimi

$c(t)$  nin alt zarfı,

$$y(t_s) = 1 - \frac{e^{-\xi w_n t_s}}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0.98$$

İçin yazılır ve çözümlür ise,

$$\frac{e^{-\xi w_n t_s}}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0.02 \rightarrow \\ t_s = -\frac{1}{\xi w_n} \ln(0.02 \sqrt{1-\xi^2})$$

Karmaşık denkleminin çözülmesi gerekmektedir. Bunun yerine verilen grafikten yararlanarak çok yakın doğrulukta, YAKLAŞIK olarak

$\% 1$ tolerans için $t_s = \frac{5}{\xi w_n} = \frac{5}{\sigma}$
$\% 2$ tolerans için $t_s = \frac{4}{\xi w_n} = \frac{4}{\sigma}$
$\% 5$ tolerans için $t_s = \frac{3}{\xi w_n} = \frac{3}{\sigma}$

Yerleşme zamanı hesaplanabilir.

Gecikme zamanı ve Yükselme zamanı için kullanılacak olan ifadeler doğrudan verilecektir.

- 4-) Gecikme zamanı ( $t_d$ ): Sistem cevabının variş değerinin %50' sine varincaya kadar geçen zamandır.  $t_d$  nin hesaplanmasıında kullanılan doğrusal yaklaşım ile

$$t_d \equiv \frac{1+0.7\xi}{w_n} \quad \text{dir.} \quad 0 < \xi < 1$$

Parabol yaklaşım ile

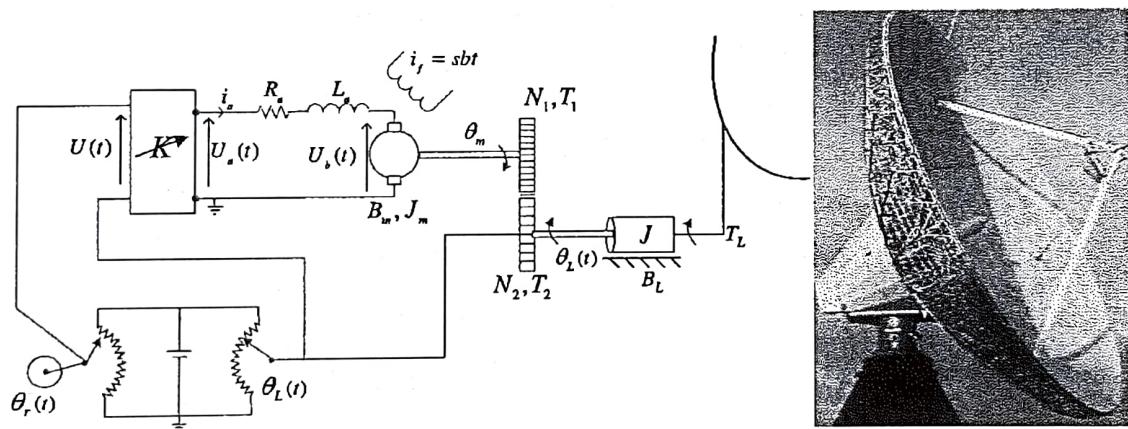
$$t_d \equiv \frac{1.1+0.125\xi+0.469\xi^2}{w_n} \quad 0 < \xi < 1 \quad \text{hesap edilebilir.}$$

- 5-) Yükselme zamanı ( $t_r$ ): Sistem cevabının variş değerinin %10' undan %90' nina varincaya kadar geçen zamandır.

$$t_r \equiv \frac{\pi-\theta}{w_d}, \quad \theta = \arccos \xi, \quad 0 < \xi < 1$$

**Örnek:** Anten pozisyon kontrolüne ait prensip bağlantı devresi aşağıda verilmiştir.

Anten pozisyonu  $\theta_L(t)$  ve referans pozisyonu  $\theta_r(t)$  özdeş iki döner potansiyometre ile ölçülmektedir. Sisteme ait parametre sabitleri aşağıda verilmiştir.



$$K_i = 0.5 \text{ Nm/A}, \quad K_b = 0.5 \text{ V/rad/s}, \quad K_s = 1 \text{ V/rad}$$

$$R_a = 5\Omega, \quad L_a = 0H, \quad B_L = 0.1 \text{ Nm/rad/s}, \quad B_m = 0$$

$$\ddot{\theta}_L = \frac{N_1}{N_2} \dot{\theta}_m = \frac{1}{10} \dot{\theta}_m, \quad J_L = 0.1 \text{ kg m}^2, \quad J_m = 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

- a) Şekilde verilen kontrol sistemine ait dinamik denklemleri t ve s domeninde yazınız.  
 b) Sistemin kapalı çevrim kontrol blok diyagramını çiziniz.  
 c)  $\theta_L(s) = f(\theta_r(s), T_L(s))$  cinsinden bulunuz.  
 d)  $M_p, t_r, t_p$  ve  $t_s$  geçici rejim kriter değerlerini bulunuz.

**t-domeni;**

$$1-) U(t) = K_s [\theta_r(t) - \theta_L(t)] ; \text{Anten pozisyonu ile referans giriş arasındaki fark}$$

$$2-) U_a(t) = KU(t) ; \text{Güç kuvvetlendirici}$$

$$3-) U_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + U_b(t) ; \text{Rotor devresine ait çevre denklemi}$$

$$4-) T_e(t) = K_i i_a(t) ; \text{Elektriği moment}$$

$$5-) U_b(t) = K_b \frac{d\theta_m(t)}{dt} = K_b w_m(t) ; \text{Zit EMK}$$

$$6-) T_m(t) = J_m \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m(t)}{dt} + T_L(t) ; \text{Mekanik moment}$$

$$7-) T_1(t) = \dot{u}T_2(t) ; T_2(t) \text{ momentinin motor miline indirgenmesi.}$$

$$8-) T_2(t) = J_L \frac{d^2\theta_L(t)}{dt^2} + B_L \frac{d\theta_L(t)}{dt} + T_L(t) ; \text{Yük momenti ifadesi}$$

$$9-) \dot{\theta}_L(t) = \dot{u}\theta_m(t)$$

$$10-) T_e(t) = T_m(t) ; \text{Sürekli rejimde iki moment eşittir.}$$

$$\frac{d\theta_L(t)}{dt} = w_L(t)$$

$$T_m(t) = (J_m + \dot{u}^2 J_L) \frac{dw_m(t)}{dt} + (B_m + \dot{u}^2 B_L) w_m(t) + \dot{u} T_L(t)$$

$$T_m(t) = J \frac{dw_m(t)}{dt} + B w_m(t) + \dot{u} T_L(t)$$

**s-domeni;**

$$1-) U(s) = K_s [\theta_r(s) - \theta_L(s)]$$

$$2-) U_a(s) = KU(s)$$

$$3-) I_a(s) = \frac{U_a(s) - U_b(s)}{sL_a + R_a}$$

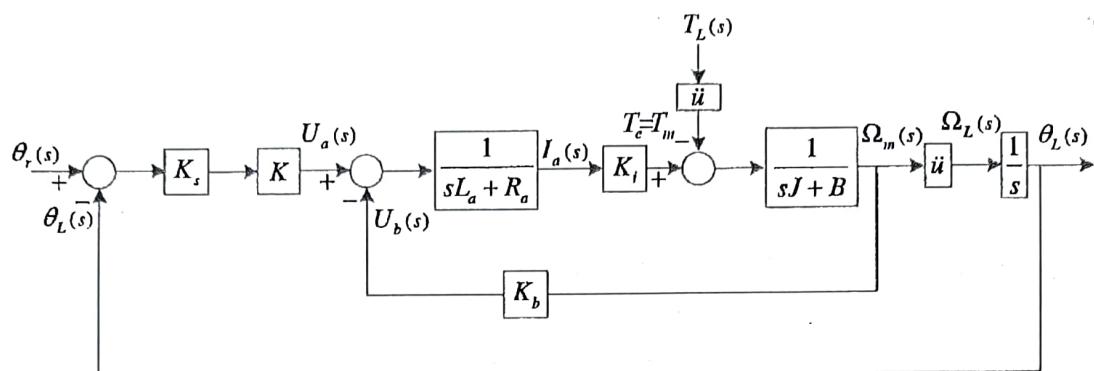
$$4-) T_e(s) = K_i I_a(s)$$

$$5-) U_b(s) = K_b \Omega_m(s) = K_b s \theta_m(s)$$

$$6-) T_m(s) = s J_m \Omega_m(s) + B_m \Omega_m(s) + \dot{u} T_L(s) \Rightarrow \Omega_m(s) = \frac{T_m(s) - \dot{u} T_L(s)}{s J + B}$$

$$7-) \Omega_L(s) = \dot{u} \Omega_m(s), \quad \theta_L(s) = \frac{1}{s} \Omega_L(s)$$

$$8-) T_e(s) = T_m(s) \quad \text{Çizime referans girişten başlanır.}$$



c) Moment ifadesinde önce  $I_a(s)$  sonra sırası ile  $U_a(s)$  ve  $U_b(s)$  ifadeleri yerlerine koymak ise,

$$T_m(s) = K_i I_a(s) = K_i \frac{U_a(s) - U_b(s)}{sL_a + R_a} = \frac{K_i [KK_s [\theta_r(s) - \theta_L(s)] - K_b \ddot{\theta}_L(s)]}{sL_a + R_a} \quad \text{elde edilir.}$$

Ara işlemlerden sonra,

$$\theta_L(s) = \frac{K_i KK_s \ddot{\theta}_r(s) - \ddot{\theta}^2 [sL_a + R_a] T_L(s)}{(Js^2 + Bs)(sL_a + R_a) + K_i K_b K_s + \ddot{\theta} K_i K_s} \quad \text{parametre sabitleri yerine koymak ise}$$

$$\theta_L(s) = \frac{5K\theta_r(s) - 5T_L(s)}{s^2 + 25.5s + 5K} \quad \text{motor mil konumuna ait ifade elde edilir.}$$

d)  $T_L = 0$  için  $\frac{\theta_L(s)}{\theta_r(s)} = \frac{5K}{s^2 + 25.5s + 5K} \triangleq \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$

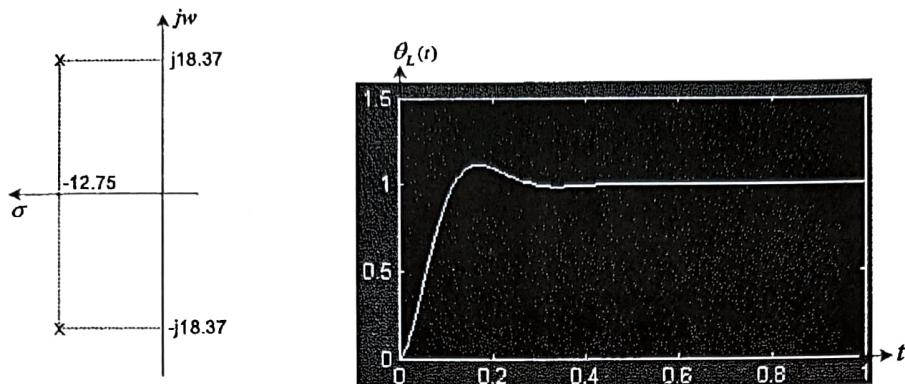
eşitlikten sırası ile, doğal açısal frekans ve sönüüm oranı ,

$$w_n^2 = 5K \Rightarrow w_n = \sqrt{5K}$$

$$2\xi w_n = 25.5 \Rightarrow \xi = \frac{25.5}{2w_n} = \frac{25.5}{2\sqrt{5K}} \quad \text{olarak elde edilir.}$$

Aşağıda farklı K değerleri için  $s^2 + 25.5s + 5K = 0$  karakteristik denklem köklerinin s-kompleks düzlemindeki yerleri ve birim basamak giriş için sistem cevabı verilmiştir.

K=100 için  $s^2 + 25.5s + 5K = 0$  karakteristik denklemi  $s^2 + 25.5s + 500 = 0$  olarak elde edilir. Bu denklemenin kökleri  $s_{1,2} = -12.75 \pm 18.37j$  olarak hesaplanır, s-kompleks düzleminde kutup dağılımı ve birim basamak giriş için sistem cevabının,  $\theta_L(t)$ , zamana göre değişimi aşağıda verilmiştir.



$K=100$  için geçici rejim kriterleri aşağıda hesaplanmıştır ve şekil üzerinde gösterilmiştir.

$$\omega_n = \sqrt{5K} = \sqrt{5*100} = 22.361, \quad \text{doğal açısal frekans}$$

$$\xi = \frac{25.5}{2\sqrt{5K}} = \frac{25.5}{2\sqrt{5*100}} = 0.5702, \quad \text{sönüüm oranı}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = 22.361 \sqrt{1-0.5702^2} = 18.37, \quad \text{sönüüm osilasyon frekansı}$$

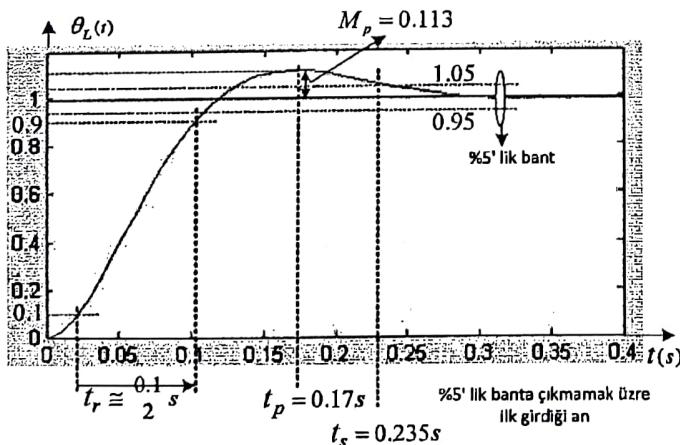
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{3.1416}{22.361 \sqrt{1-0.5702^2}} = 0.171s, \quad \text{tepe zamanı}$$

$$\%5 \text{ kriteri için } t_s = \frac{3}{\xi \omega_n} = \frac{3}{0.5702 * 22.3607} = 0.2353s, \quad \text{yerleşme zamanı}$$

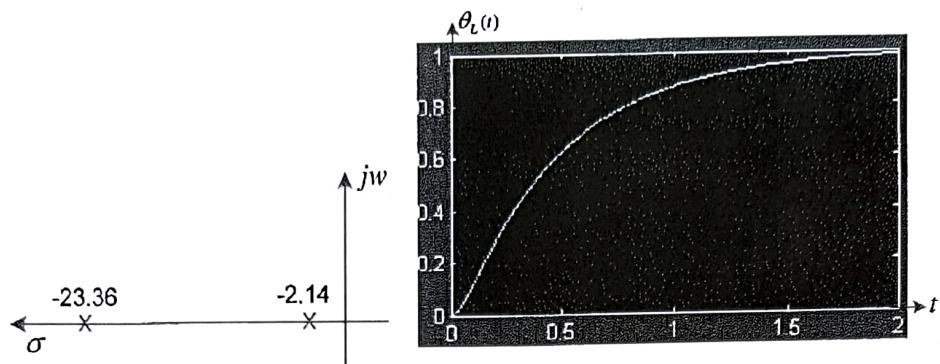
$$t_r \cong \frac{\pi - \varphi}{\omega_d} = \frac{\pi - \arccos \xi}{\omega_d} = \frac{3.1416 - \arccos(0.5702)}{18.37} = 0.1185s, \quad \text{yükselme zamanı}$$

$$M_p = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \pi} = e^{-\frac{0.5702}{\sqrt{1-0.5702^2}} 3.1416} = 0.113 \quad \text{Aşım}$$

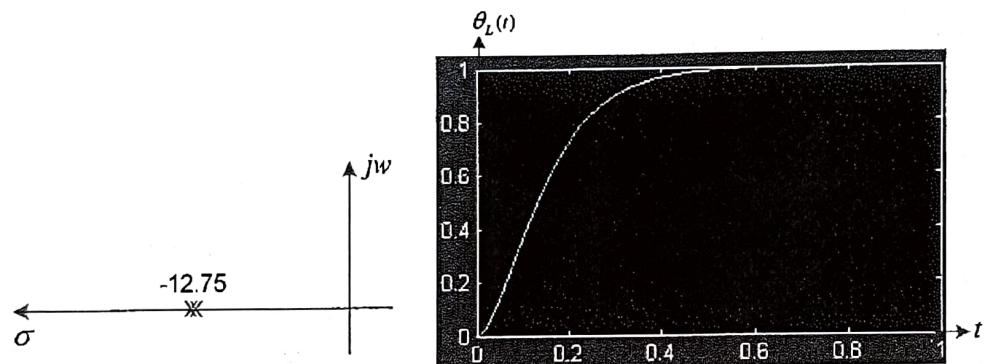
$$\%M_p = M_p * 100 = \%11.3 \quad \text{yüzde aşım}$$



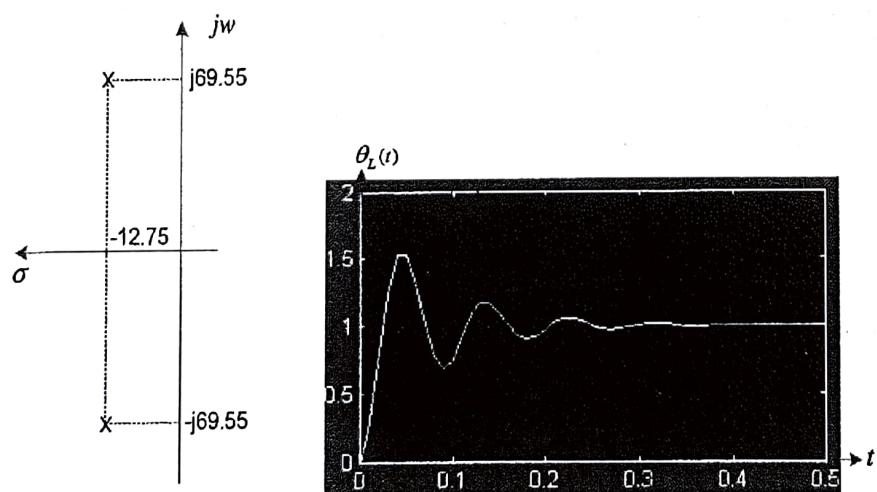
K=10 için,  $\xi=1.8$ , kökler reel



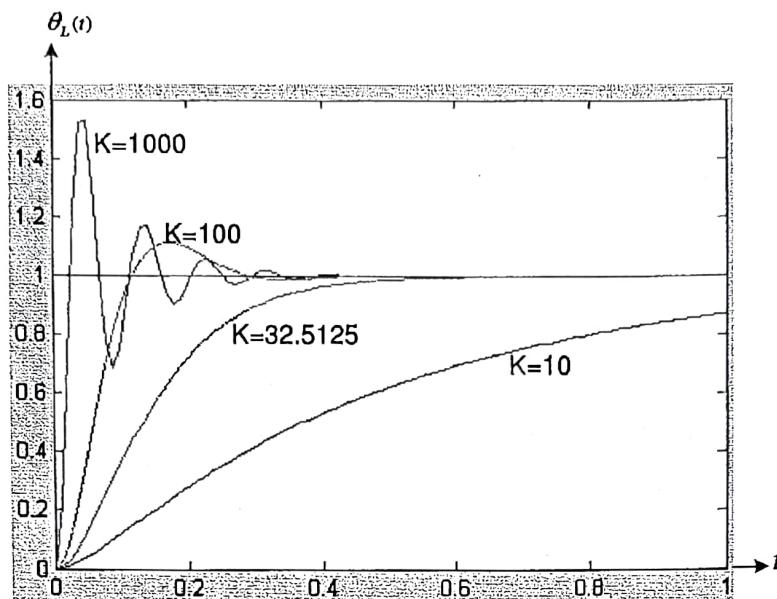
K=32.5125 için,  $\xi=1$ , kökler katlı-reel



K=1000 için,  $\xi<1$ , kökler kompleks eşlenik

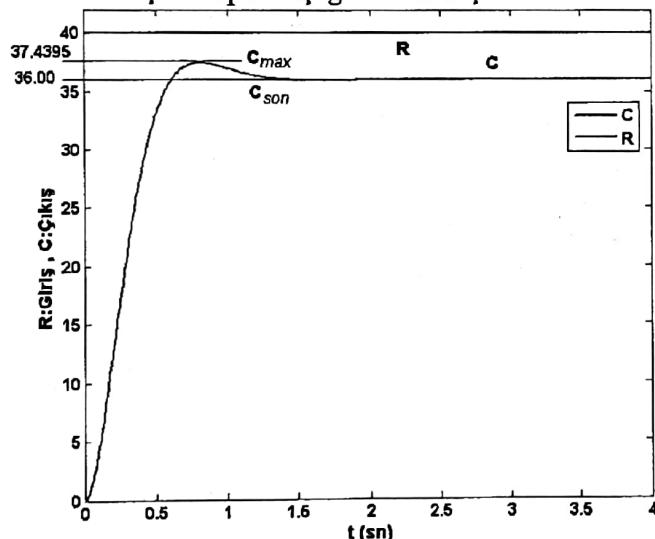


Yukarıda K=10, K=32.5125, K=100 ve K=1000 için aynı ayrı verilen birim basamak cevapları aşağıda aynı ekran üstünde çizdirilerek K'nın değişiminin sistem cevabına olan etkisi karşılaştırılması amaçlanmıştır..



Çeşitli  $K$  değerlerine göre birim basamak giriş için sistem cevapları.

**Örnek: 2.** Dereceden sistemin girişine  $r(t)=40u(t)$  basamak fonksiyonu uygulanmış ve zamana karşı cevap ise aşağıda verilmiştir.



a) Yüzde aşımı ve Aşımı hesap ediniz.

b)  $\zeta$  hesap ediniz.

a) %Aşim ifadesi grafikten faydalananarak

$$\begin{aligned} \%M_p &= \frac{C_{\max} - C_{\text{son}}}{C_{\text{son}}} \cdot 100 \\ &= \frac{37.4395 - 36}{36} \cdot 100 \end{aligned}$$

$$\%M_p = \%3.9986 \cong \%4$$

olarak hesap edilir.

$$\text{Aşım } \%M_p = \frac{\text{Aşım}}{C_{\text{son}}} \cdot 100 \rightarrow \text{Aşım} = M_p = \frac{\%M_p \cdot C_{\text{son}}}{100} = \frac{3.9986 \cdot 36}{100}$$

$Aşım = M_p = 1.4395$  olarak elde edilir. Doğrulaması grafikten yapılabilir.

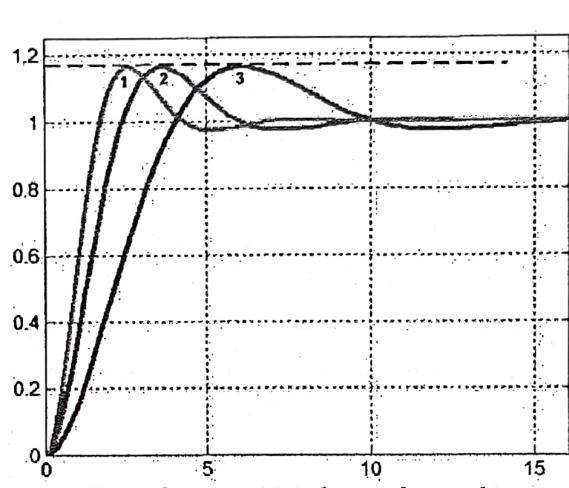
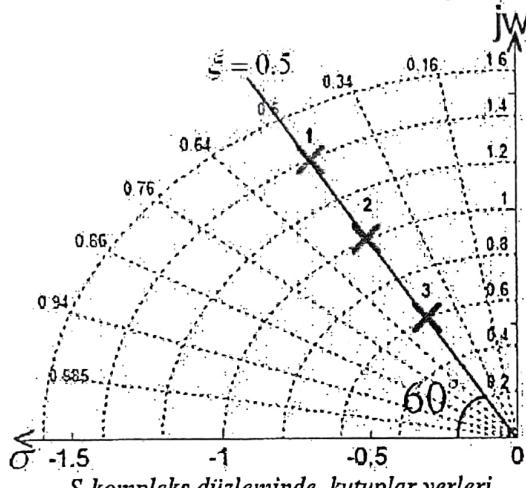
b)  $\zeta = \frac{-\ln(\%M_p / 100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%M_p / 100)}}$  ifadesinde  $\%M_p$  yerine koyulur.

$$\zeta = \frac{-\ln(4/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(4/100)}} = \frac{-(-3.2189)}{4.4979} \rightarrow \zeta = 0.7157$$

## 12.2 II. Dereceden sistem kutup yerlerine göre basamak cevap incelenmesi

İkinci dereceden sistem transfer fonksiyonu,  $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$  dir. Karakteristik denklem kökleri,  $s_{1,2} = -\xi w_n \pm j w_n \sqrt{1-\xi^2}$  nin s-kompleks düzlemindeki çeşitli yerlerine göre basamak cevaplar aşağıda verilmiştir. *Karakteristik denklem köklerinin s-kompleks düzleminde sadece kompleks eşlenik köklerden birisi gösterilmiştir.*

1-  $\xi = sbt$  doğrusu, orijinden  $\theta = \cos^{-1} \xi = \cos^{-1} 0.5 = 60^\circ$  açı yapan eğri, aşımlar  $= e^{\frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi}$  olduğundan her üç sisteme aşımlar aynıdır. *Sabit söñüm oranlıdır.*

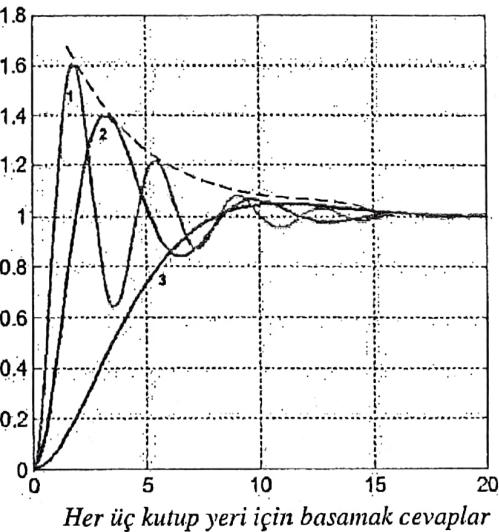
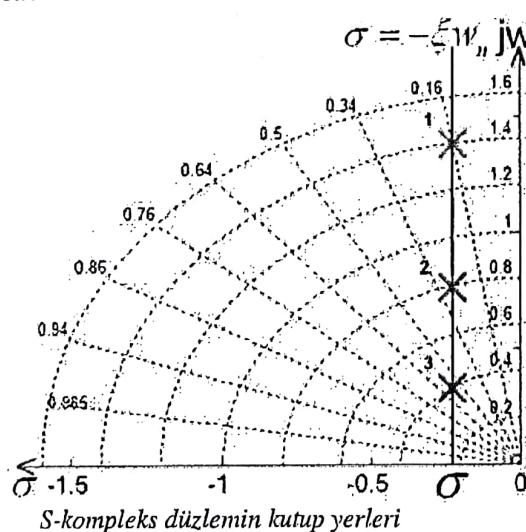


M  
wurzeldelte  
der 1.5 sonraki  
gefolgt

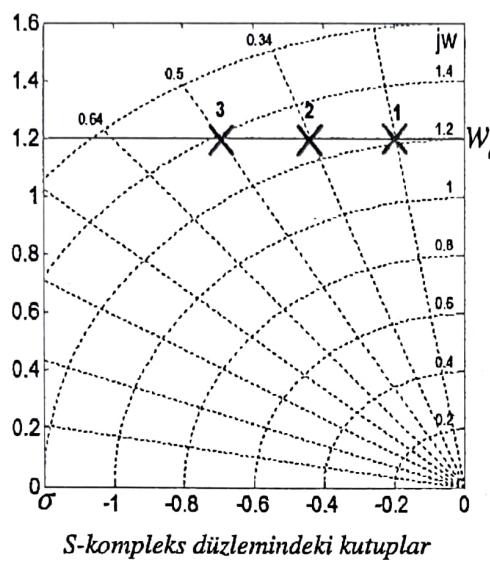
**Not:** Kutuplar kompleks eşleniktir.

2-  $\sigma = -\xi w_n = sbt$  için yerleşme zamanı (%2 kriteri)  $t_s = \frac{4}{\xi w_n}$  olduğundan her üç sistem

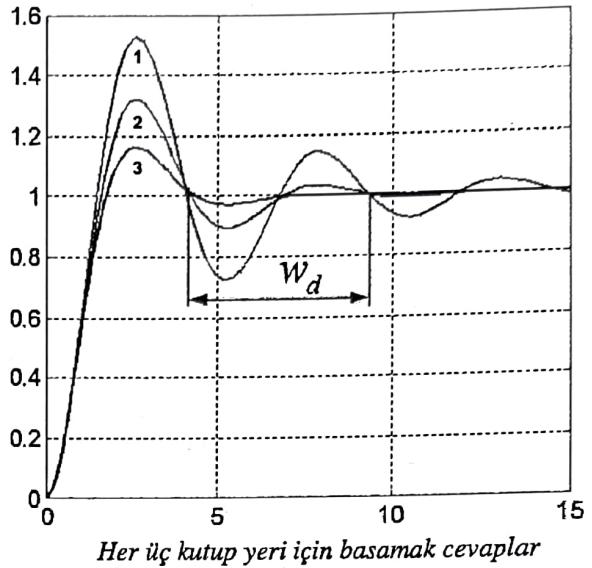
aynı üstel söñüm (zarfa) ve yerleşme zamana sabittir. *Köklerin reel kısımları aynı ve sabittir.*



$3 - w_d = sbt$  için sönüüm osilasyon açısal frekansı  $w_d = w_n \sqrt{1 - \xi^2}$  olduğundan her üç sistemin sönüüm açısal frekansı  $w_d$  aynıdır. **Köklerin sanal kısımları aynı ve sabittir.**



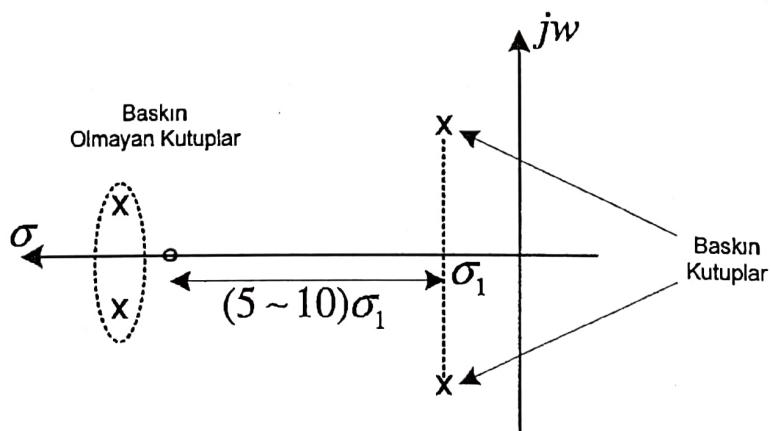
S-kompleks düzlemindeki kutuplar



Her üç kutup yeri için basamak cevaplar

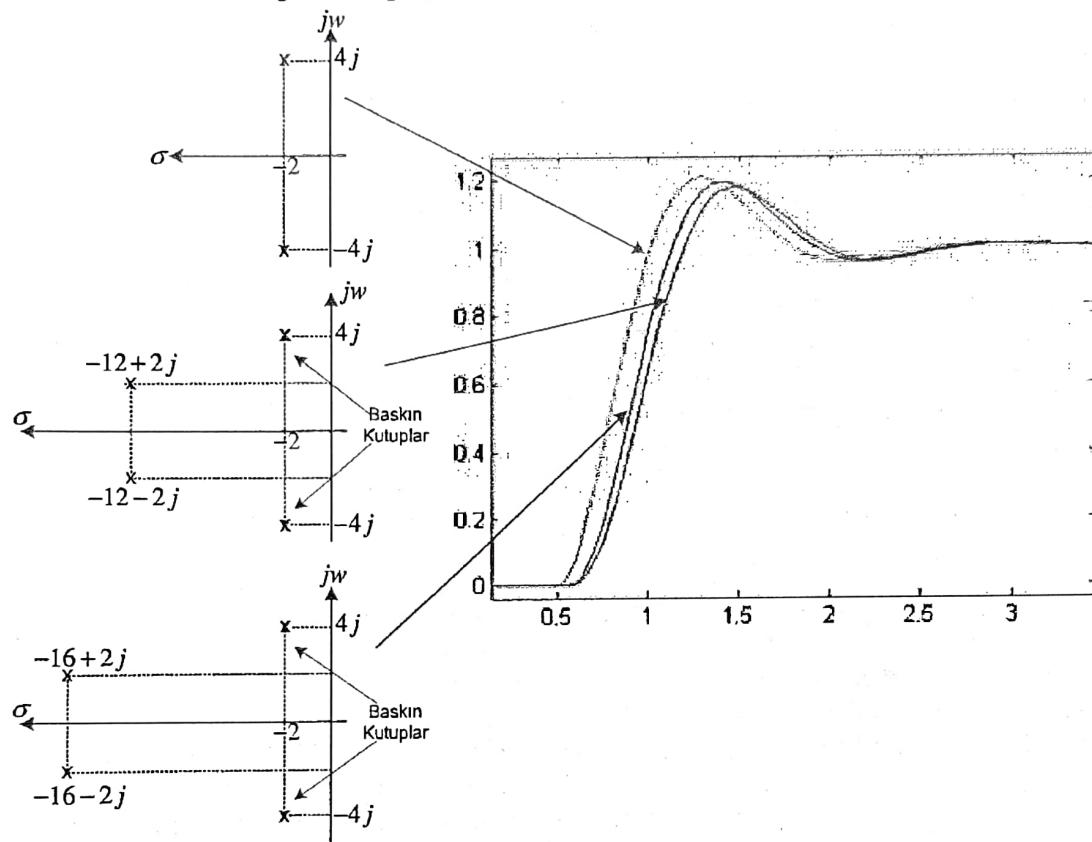
### 12.3 Baskın Transfer Fonksiyonu Kutupları

II. dereceden kontrol sistemleri uygulamada ender rastlansa bile sistemlerin büyük çoğunluğu II. dereceden sistem davranışını gösterecek şekilde tasarlanabilir. Bunun için n. dereceden karakteristik denklem köklerinden kontrol kutupları olarak adlandırılan 2-kutup (kök) seçilir. Bu kutuplar sistemin davranışını belirleyeceklerdir. kontrol sisteminin imajiner eksene en yakın kutbunun kompleks eşlenik olmasına özen gösterilir. Bu kutuplara kontrol kutupları denir. Sistemdeki diğer kutupların real kısımları kontrol kutbunun real kısmından 5 ile 10 kat daha büyük seçilmelidir. Böylece sistem II. dereceden bir sistem davranışını gösterir. **Kontrol kutupları dışındaki kutuplar baskın olmayan kutuplardır.**



Sistemi davranışının önemli ölçüde baskın kutuplar tarafından belirlendiği aşağıda örnekler üzerinde gösterilmiştir.

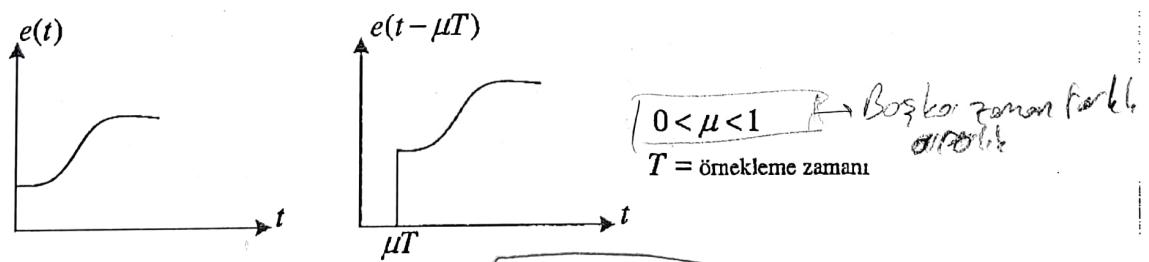
Aşağıda örnek ikinci derece sistem ve ilave kompleks eşlenik bir kök verilmiştir. İlave edilen kompleks eşlenik kökün real kısmı ile ikinci dereceden sistemin kompleks eşlenik kökün real kısmı arasındaki orana göre cevap eğrileri arasındaki değişim incelenmek üzere verilmiştir.



Baskın kutuplar ve cevap eğrileri.

### 13. Ölü Zaman /İletim gecikmesi

Kontrol sistemlerinde ideal zaman gecikmesi olmaması halinde doğrudan normal z-dönüştümü kullanılmaz. Bu kısımda gecikme zamanı örnekleme zamanının tam katı olmayan gecikmeli sistemlerin z-dönüştümü incelenecektir.



Sürekli zamanda ölü zamanlı / iletim gecikmeli sistemler  $G_c(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-sT_d}$  ile ifade edilirler.

Sistemin parametreleri elde edildikten sonra gecikme zamanı ( $T_d$ ) ile örnekleme zamanı ( $T$ )

$$\mathcal{L}\{f(t-T_d) u(t-T_d)\} = f(s) e^{-sT_d}$$

$$\mu = 1 - m$$

arasındaki orana bakılır. Eğer  $T_d / T$  'nin tam katı ise normal z-dönüştümü, tam katı değilse değiştirilmiş z-dönüştümü kullanılır.

Örnek:  $G_c(s) = \frac{10}{5s+1} e^{-20s}$

olarak verilen sistemde  $T_d = 20$  ' dir.  $T = 4$  alınırsa  $T_d / T = 5$  olur ve normal z-dönüştümü kullanılabilir. Fakat aynı sistem için  $T = 3$  alınırsa bu durumda  $T_d / T \approx 6.67$  olur ve değiştirilmiş z-dönüştümünün kullanılması gereklidir.

Gerçek zaman uygulamalarda incelenen sistemin zaman gecikmesi (ölü zamanı) deneySEL çalışmalarla tespit edilir ardından örnekleme zamanı  $T$ , iletim gecikmesi  $T_d$  'nin tam katları olacak şekilde seçilir. Böylece sistem, normal z-dönüştümü kullanılarak ayırtlanabilir.

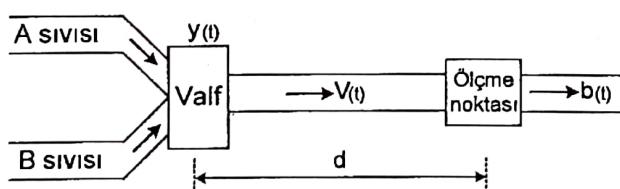
**Hatırlatma:** Rezidü teoreminin uygulanabilmesi için yakınsaklı koşulunun sağlanması gereklidir.

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} \right| < \infty$$

$\text{Re}(s) \rightarrow \infty$  durumundan kaçınmak için değiştirilmiş z-dönüştümü kullanılır.

### 13.1 Ölü-zamanlı/İletim-gecikmeli sistemler

Aşağıda örnek olarak ölü zamanlı çeşitli fizikal sistemler tanıtılmıştır.

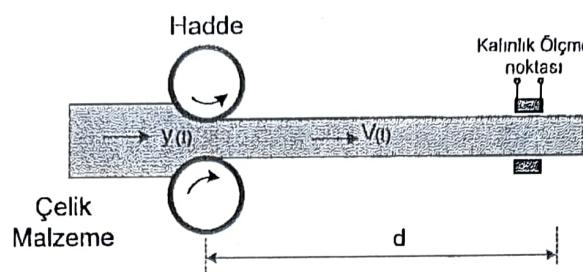


Verilen sistemde iki farklı sıvinin belirlenen oranlarda karışımı sağlanmaktadır. Karışımın homojen hale gelebilmesi için ölçme işlemi karışımın yapıldığı (valf) noktadan belirli bir  $d$  mesafe uzaklıkta yapılmaktadır. Dolayısıyla karışımın yapıldığı yer ile konsantrasyonun ölçüldüğü nokta arasında bir iletim gecikmesi, ölü zaman  $T_d$  vardır. Burada  $v(t)$  karışımın akış hızı,  $d$  ise karışımın yapıldığı nokta ile ölçüm noktası arasındaki mesafe olmak üzere, ölü zaman;

$$T_d = \frac{d}{v}$$

ifadesi ile hesaplanır.

Benzer şekilde çelik malzeme kalınlığının kontrol edildiği sistemde kalınlığın ayarlandığı nokta ile ölçüldüğü nokta arasındaki mesafe  $d$  dir.

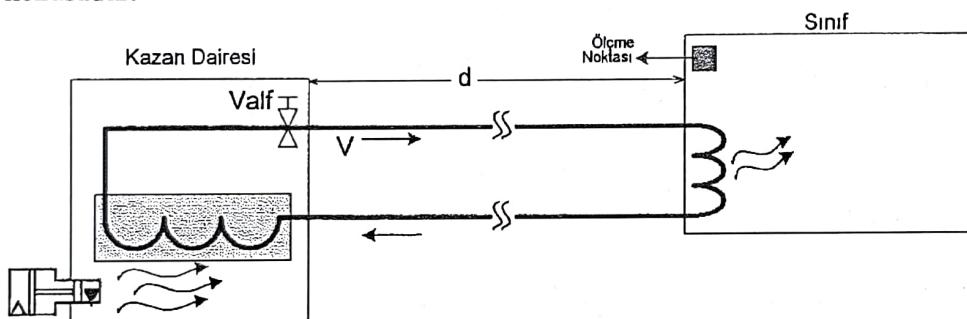


Bu sistem için ölü zaman,  $v(t)$  malzemenin ilerleme hızı,  $d$  kalınlığın ayarlandığı noktası ile ölçüm noktası arasındaki mesafe olmak üzere,

$$T_d = \frac{d}{v}$$

ifadesi ile hesaplanır.

Aşağıdaki sisteme ise bir sınıfın ısıtma sistemi incelenmiştir. Burada kazan dairesinde ısıtılan su buharının sınıfındaki kalorifer peteklerine ulaşıcaya kadar bir iletim gecikmesi söz konusudur.



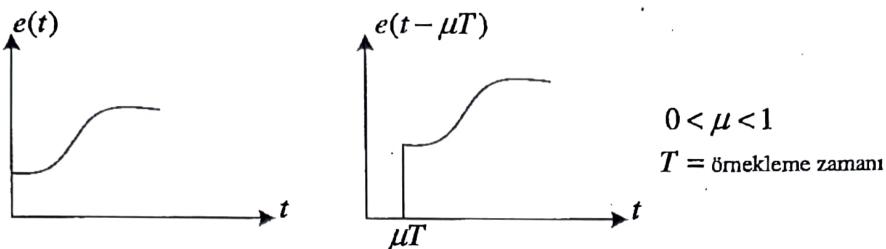
$V$  buhar hızı,  $d$  buhar sıcaklığının ayarlandığı buhar kazanı ile sıcaklığın ölçüldüğü algılayıcı arasındaki mesafe olmak üzere, ölü-zaman/gecikme-zamani

$$T_d = \frac{d}{v} \text{ dir.}$$

Genel olarak I. dereceden ve II. dereceden ölü zaman/iletim gecikmeli sistem transfer fonksiyonları sırası ile

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-st_d} \quad \text{ve} \quad G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} e^{-st_d}$$

### 13.2 Değiştirilmiş Z-Dönüştümü



$\mu T$  kadar geciktirilmiş  $e(t)$  işaretinin Laplace dönüşümü,

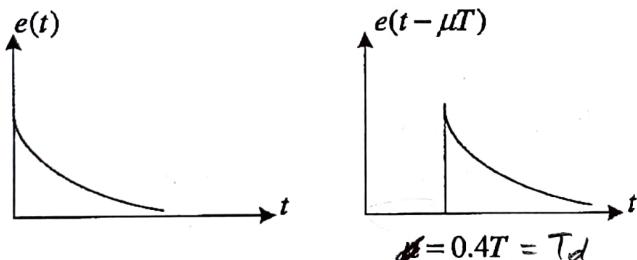
$$L\{e(t - T_d)u(t - T_d)\} = L\{e(t - \mu T)u(t - \mu T)\} = E(s)e^{-s\mu T} \text{ dir. } T_d = \mu T \Rightarrow 0 < \mu < 1$$

Yakınsallık koşulunun sağlanması için  $\mu = 1 - m$  dönüşümü yapılır.

$$Z\{E(s)e^{-s(1-m)T}\} = Z\{E(s)e^{-sT}e^{msT}\} = z^{-1}Z\{E(s)e^{msT}\} \text{ elde edilir.}$$

Bu noktadan sonra rezidü yöntemi uygulanarak z-dönüştümü bulunur.

**Örnek:**  $\mu = 0.4$  için  $e(t) = e^{-at}u(t)$  fonksiyonunun z dönüşümünü bulunuz,  $E(z) = ?$ .



$$E(s) = L\{e(t)\} = \frac{1}{s+a} \Rightarrow L\{e(t - \mu T)\} = \boxed{\frac{1}{s+a} e^{-0.4Ts}}$$

$0 < \mu < 1$ ,  $\mu = 1 - m$  alınır.

$$\mu = 0.4 \Rightarrow \mu = 1 - 0.6 \text{ olur.}$$

$$Z\{E(s)\} = Z\left\{\frac{1}{s+a} e^{-(1-0.6)Ts}\right\} = Z\left\{e^{-Ts} e^{0.6Ts} \frac{1}{s+a}\right\} = z^{-1}Z\left\{\frac{e^{0.6Ts}}{s+a}\right\}$$

$$Z\left\{\frac{e^{0.6Ts}}{s+a}\right\} = \left\{(s+a) \frac{e^{0.6Ts}}{s+a} \frac{z}{z - e^{sT}} \Big|_{s=-a}\right\} = e^{-0.6aT} \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

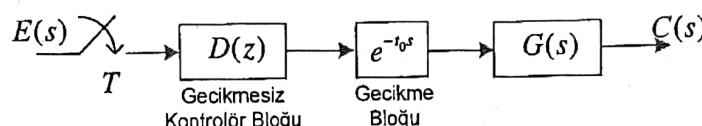
$$Z\{E(s)\} = z^{-1} \frac{ze^{-0.6aT}}{z - e^{-aT}} \Rightarrow E(z) = \frac{e^{-0.6aT}}{z - e^{-aT}}$$

Benzer şekilde, değiştirilmiş Z-dönüştümü hesap zamanı ihmali edilmeyen sayısal kontrolörün darbe transfer fonksiyonunun bulunmasında kullanılır. Sayısal kontrolör;

$$m(k) = \alpha_0 e(k) + \alpha_1 e(k-1) + \dots + \alpha_n e(k-n) - \beta_1 u(k-1) - \dots - \beta_m u(k-m)$$

fark denklemi  $T$  periyodu ile  $t_0$  süresinde çözüyor olsun. Bu durumda  $t=0$  anındaki giriş  $t=t_0$  anında çıkış üretir. Benzer şekilde  $t=T$  anındaki giriş  $t=T+t_0$  anında çıkış üretir.

Bu durumda sayısal kontrolör;  $t_0$  zaman gecikmesi ile seri bağlı gecikmesiz kontrolör olarak modellenir.



Eğer hesap gecikmesi,

$$t_0 = kT + \mu T, \quad 0 < \mu < 1 \text{ ve } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ise

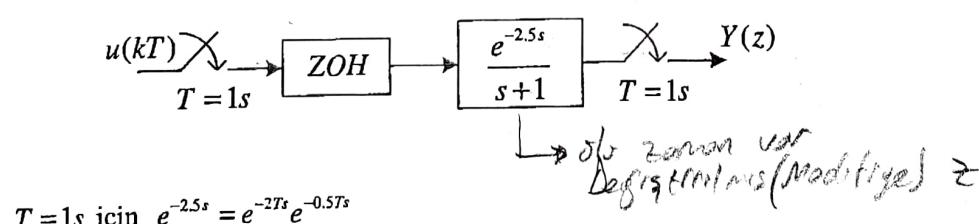
$$e^{-t_0 s} = e^{-kTs} e^{-\mu Ts} \quad \text{olarak yazılabilir.}$$

Bu durumda,

$$Z\{G(s)e^{-t_0 s}\} = Z\{G(s)e^{-kTs} e^{-\mu Ts}\} = z^{-k} Z\{G(s)e^{-\mu Ts}\}$$

olur. Bu noktadan sonra  $\mu = 1 - m$  yapılarak z dönüşümü hesaplanır.

Örnek:



$$T = 1s \text{ için } e^{-2.5s} = e^{-2Ts} e^{-0.5Ts}$$

$$\mu = 0.5 \Rightarrow \mu = 1 - 0.5 \Rightarrow m = 0.5 \text{ olur.}$$

$$Y(s) = U^*(s) ZOH(s) T(s)$$

$$(3-0,5) = (2+0,5)$$

Otomatik Kontrol Prof.Dr. Ayhan Özdemir

$Z\{Y(s)\} = Y(z) = Z\left\{\left(\frac{1}{s}\right)\right\} Z\left\{\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)\left(\frac{e^{-2s}e^{-0.5s}}{s+1}\right)\right\}$  ise,  $e^{-s} = z^{-1}$  ve  $e^{-2s} = z^{-2}$  olmak üzere,

$Y(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)(1-z^{-1})z^{-2}Z\left\{\frac{e^{-0.5s}}{s(s+1)}\right\}$  olmak üzere  $\frac{e^{-0.5s}}{s(s+1)}$  in Z-dönüştümü aşağıda hesaplanır ise,

$$Z\left\{\frac{e^{-0.5s}}{s(s+1)}\right\} \Rightarrow \mu = 1 - 0.5 \Rightarrow Z\left\{\frac{e^{-(1-0.5)s}}{s(s+1)}\right\} = Z\left\{\frac{e^{-s}e^{0.5s}}{s(s+1)}\right\}$$

$$Z\left\{\frac{e^{-s}e^{0.5s}}{s(s+1)}\right\} = \left\{ s \frac{e^{0.5s}}{s(s+1)} \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=0} + (s+1) \frac{e^{0.5s}}{s(s+1)} \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=-1} \right\} = \frac{z}{z-1} - \frac{e^{-0.5}z}{z-e^{-1}} \text{ bulunur.}$$

Bulunan bu sonuç yukarıda  $Y(z)$  te yerine koyulur ise,

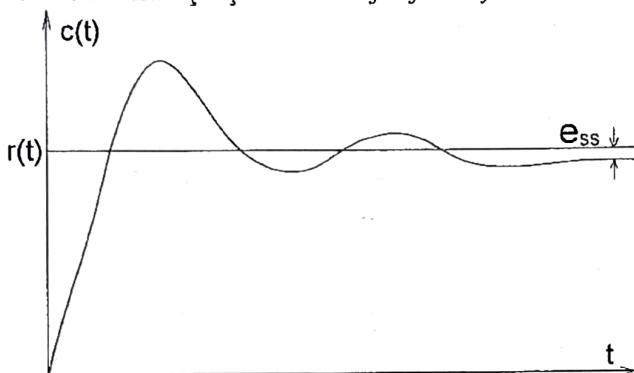
$$Y(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)\left(\frac{z-1}{z}\right)z^{-2}z^{-1} \left[ z \frac{1}{z-1} - z \frac{e^{-0.5}}{z-e^{-1}} \right]$$

$$Y(z) = z^{-2} \left[ \frac{1}{z-1} - \frac{e^{-0.5}}{z-e^{-1}} \right]$$

$z$  düzleminde bulunanlar yanlışlı değil, farklı oldugunu söyleyelim.

#### 14. Sürekli Hal Hataları

Kapalı çevrim kontrol sisteminin sürekli-hal cevap performansı ele alınacaktır. Kapalı çevrim kontrol sistem çıkış cevabının, girişine uygulanan referans işaretini sürekli halde mümkün olduğu kadar en yakından takip etmesi istenir. Sürekli hal cevap çıkışı  $c_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$  ile referans giriş  $r(t)$  arasında bir fark oluşursa bu fark **sürekli hal hatası** olarak adlandırılır. Bir sisteme herhangi bir giriş işaretinin uygulandıktan sonra meydana gelen geçici hal söner ve geriye sürekli hal hataları kahr. Sürekli hal hataları çeşitli sebeplerden dolayı meydana gelir. Ancak en önemlisi açık çevrim transfer fonksiyonunun tabiatıdır, yapısıdır.



Sürekli hal hataları genellikle 3 tip giriş işaret için incelenir.

- \* 1-) Basamak fonksiyon
- \* 2-) Rampa fonksiyon
- 3-) Parabol fonksiyon

Kapalı çevrim kontrol sistem referans girişine karşılık  $c(t)$  cevap hatası  $e(t)$  ile gösterilirse, sürekli hal hatası,

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \{r(t) - c(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

*son deger bco.*

Sürekli hal hatası  $e_{ss}$ 'nin en önemli sebeplerinden birisi **açık-çevrim transfer fonksiyonun** matematik modelidir. Kapalı çevrim kontrol sistemine uygulanan **referans giriş fonksiyonu** ve **açık-çevrim transfer fonksiyon tipi** **sürekli hal hatası**  $e_{ss}$  yi belirler

Aşağıda genel olarak açık-çevrim transfer fonksiyonu  $G(s)H(s)$  verilmiştir.

$$\overbrace{G(s)H(s)}^{AGTF} = \frac{K \underbrace{(T_{01}s+1)(T_{02}s+1) \dots (T_{0m}s+1)}_{m \text{ adet}}}{s^J \underbrace{(T_{k1}s+1)(T_{k2}s+1) \dots (T_{kp}s+1)}_{p \text{ adet}}} \quad \text{sned} \Rightarrow \frac{(s+3)(s+2)}{\underset{j=1}{\circlearrowleft} (s+5)(s+7)}$$

Paydadaki  $s^j$  terimi s kompleks düzleminde orijindeki ( $s=0$ ) kutup sayısını belirler. Orijindeki kutup sayısı da sistem **tipi** olarak tanımlanmaktadır.

$j$  sistem tipi olmak üzere,

Sistemin derecesi  $n = p + j$  dir.

$j = 0$  ise sıfır tipi sistem

$j = 1$  ise bir tipi sistem

$j = n$  ise n tipi sistem olarak adlandırılır.

**Örnek:**  $G(s)H(s) = \frac{100K(s+1)}{(s+3)(s+5)}$  Açık çevrim transfer fonksiyonu verilen sisteme,  
 $= \frac{100K(s+1)}{s^0(s+3)(s+5)}$

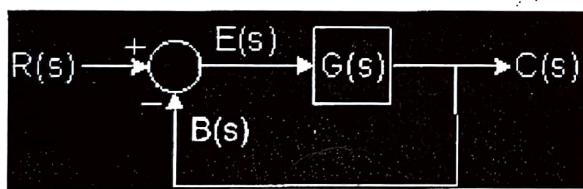
$n=2$  sistem derecesi = 2  
 $j=0$  Sistem tipi = 0' dir

**Örnek:**  $G(s)H(s) = \frac{(s-1)}{s^2+3s}$  Açık çevrim transfer fonksiyonu verilen sisteme,  
 $= \frac{(s-1)}{s(s+3)}$  tür.

$n=2$  sistem derecesi = 2  
 $j=1$  Sistem tipi = 1' dir

**Örnek:**  $G(s)H(s) = \frac{(s-3)}{s^3}$  Açık çevrim transfer fonksiyonu verilen sisteme,  
 $n=3$  sistem derecesi = 3  
 $j=3$  Sistem tipi = 3' tür

→ **Sürekli Hal Hata İfadesi:** Kapali-çevrim kontrol sisteminde sürekli hal hata ifadesi aşağıda verilen kontrol blok diyagramı yardımı ile elde edilecektir.



$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - C(s) && \text{sistem hatalı} \\ E(s) &= R(s) - B(s) && \text{etkin hata} \\ B(s) &= C(s) \\ C(s) &= G(s)E(s) \\ E(s) &= R(s) - B(s) \end{aligned} \quad \text{ifadeleri kullanularak}$$

$E(s) = R(s) - G(s)E(s)$  →  $E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$  (AÇTF)  
 $E(s) = R(s) - E(s)G(s)H(s)$

Giriş İşareti  
 $\frac{R(s)}{1 + G(s)}$   
 hata ifadesi elde edilir.

Sürekli hal hata son değer teoreminden:  $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + G(s)} \quad \text{olarak elde edilir.}$$

*Sürekli hal hata ifadesi incelendiğinde önceden ifade edildiği gibi hata referans giriş  $R(s)$  ve açık-çevrim transfer fonksiyonu  $G(s)H(s)$ 'e bağlıdır.*

Hatırlatma: Son değer teoremi  $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

Birim basamak uygulayınca  
 $\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s(s+1)} \rightarrow \text{sistem hata} \quad (j=0)$

### 14.1 Basamak giriş için sürekli hal hatası

Kapali-çevrim Transfer fonksiyonu giriş  $r(t)$  basamak fonksiyonu,

$$r(t) = Ru(t) \Rightarrow R(s) = \frac{R}{s} \quad \text{tir. Sürekli hal hata}$$

ifadesinde bu giriş fonksiyonu kullanılır ise,

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s}{1+G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{1+G(s)}$$

$$= \frac{R}{1 + \underbrace{\lim_{s \rightarrow 0} G(s)}_{K_p}} \quad \text{elde edilir.}$$

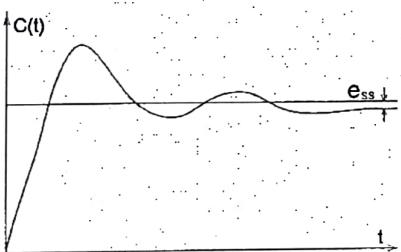
$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0) \rightarrow \text{Konum hata katsayısı}$$

$$e_{ss} = \frac{R}{1+K_p} \rightarrow \text{Konum hatası}$$

Sıfır tipi,  $j=0$ , genel bir sistemin konum hatası incelenir ise,

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{K(T_{01}s+1)(T_{02}s+1)\dots(T_{0m}s+1)}{(T_{k1}s+1)(T_{k2}s+1)\dots(T_{kp}s+1)} = K, \quad 0 < K < \infty$$

$$e_{ss} = \frac{R}{1+K} \quad \text{olur. } j=0 \text{ için sürekli hal hatası } e_{ss} \text{ açık-çevrim kazancı } K \text{ ya bağlıdır.}$$



$j=0$  tipi sisteme basamak giriş için konum hatası  $e_{ss}$

$j=0$  tipi bir sisteme basamak giriş için kazanç  $K$ , artıkça sistemin konum hatası azalır. Ancak kazancı artırmak hiçbir zaman konum hatası  $e_{ss} = 0$  yapamaz.

Basamak giriş için sürekli hal hatası  $e_{ss} = 0$  olabilmesi için sistemin tipi  $j \geq 1$  olmalıdır.

Sistem tipi açık-çevrim transfer fonksyonuna integratör eklenerek artırılabilir.

$G_c(s) = \frac{1}{s}$  ilave edilmesi gereken çarpan. Aşağıda buna ait bir örnek verilmiştir.

$$G(s)H(s) = \frac{100K(s+1)}{(s+3)(s+5)} \quad \text{sistem tipi sıfır, ilave ile } G(s)_c G(s)H(s) = \frac{1}{s} \frac{100K(s+1)}{(s+3)(s+5)} \quad j=1 \text{ dir.}$$

Tipi,  $j \geq 1$  olan bir sistem konum hatası incelenir ise,

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{K(T_{01}s+1)(T_{02}s+1)\dots(T_{0m}s+1)}{s^J(T_{k1}s+1)(T_{k2}s+1)\dots(T_{kp}s+1)} = \infty, \quad J \geq 1 \quad \text{für } e_{ss} = \frac{R}{1+\infty} = 0 \quad \text{olur.}$$

Basamak giriş için Tipi  $\geq 1$  olan sistemlerin konum hatası sıfırdır

### 14.2 Rampa giriş için sürekli hal hatalı

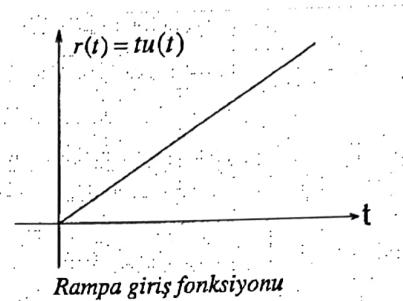
Kapali-çevrim Transfer fonksiyonu giriş  $r(t)$  birim rampa fonksiyonu,

$r(t) = tu(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$  tir. Sürekli hal hata ifadesinde bu giriş fonksiyonu kullanılır ise,

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{R}{s^2}}{1+G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s + sG(s)}$$

$$= \frac{R}{\underbrace{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)}_{K_v}} \quad \text{elde edilir.}$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \rightarrow \text{Hız hata katsayısı}$$



$$e_{ss} = \frac{R}{K_v} \rightarrow \text{Hız hata}$$

Sıfır tipi,  $j=0$ , genel bir sistemin hız hatası incelenir ise,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K(T_{01}s+1)(T_{02}s+1)\dots(T_{0m}s+1)}{(T_{k1}s+1)(T_{k2}s+1)\dots(T_{kp}s+1)} = 0$$

$$e_{ss} = \frac{R}{0} = \infty$$

$J=0$  tipi bir sistemde rampa giriş için kazanç  $K'$  dan bağımsız olarak sürekli hal hatalı  $e_{ss} = \infty$  olur.

Tipi,  $j=1$  olan bir sistemin hız hmasını incelenir ise,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K(T_{01}s+1)(T_{02}s+1)\dots(T_{0m}s+1)}{s(T_{k1}s+1)(T_{k2}s+1)\dots(T_{kp}s+1)} = K$$

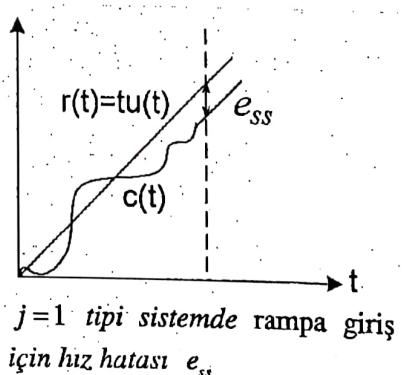
$$e_{ss} = \frac{R}{K}$$

$J=1$  tipi bir sistemde rampa giriş için kazanç  $K$ , arttıkça sistemin hız hatalı azalır. Ancak kazancı artırmak hiçbir zaman hız hatalı  $e_{ss}=0$  yapamaz.

Tipi,  $j \geq 2$  olan bir sistemin hız hmasını incelenir ise,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K(T_{01}s+1)(T_{02}s+1)\dots(T_{0m}s+1)}{s^J(T_{k1}s+1)(T_{k2}s+1)\dots(T_{kp}s+1)} = \infty, \quad j \geq 2$$

$e_{ss} = \frac{R}{\infty} = 0$  olur. Rampa giriş için  $j \geq 2$  olan sistemlerin konum hatalı sıfırdır



### 14.3 Parabol giriş için sürekli hal hataları

Kapalı-çevrim Transfer fonksiyon giriş  $r(t)$  parabol fonksiyonu için

$$r(t) = \frac{1}{2} t^2 R u(t) \Rightarrow R(s) = \frac{R}{s^3}$$

olur.

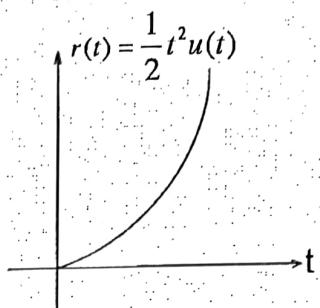
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{R}{s^3}}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s^2 + s^2 G(s)}$$

$$e_{ss} = \frac{R}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)}$$

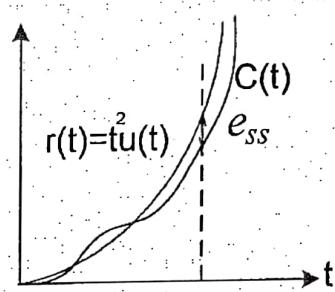
$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) \rightarrow \text{İvme hata katsayısı}$$

$$e_{ss} = \frac{R}{K_a} \rightarrow \text{İvme hata katsayısı}$$

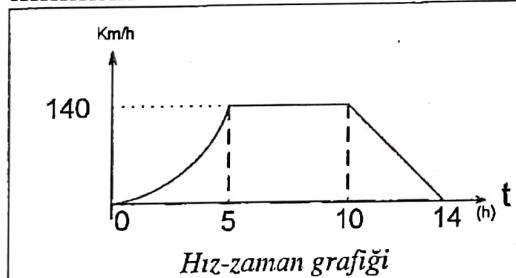
Kapalı-çevrim kontrol sisteminde parabol fonksiyon girişe karşı ivme hata  $e_{ss}$  nin sıfır olabilmesi için sistem tipi  $j \geq 3$  olmalıdır. Eğer sistem tipi  $j < 3$  ise, integratör ilavesi ile sistem tipi arttırmalıdır.



Parabol giriş fonksiyonu



$j=2$  tipi sistemde parabol



Bir araca ait hız zaman grafiği verilmiştir. Araca kapalı-çevrim hız kontrolünde referans giriş olarak,

$$0-5h \quad \text{parabol giriş} \quad r(t) = \frac{280}{25} t^2 u(t)$$

$$5-10h \quad \text{basamak giriş} \quad r(t) = 140 u(t)$$

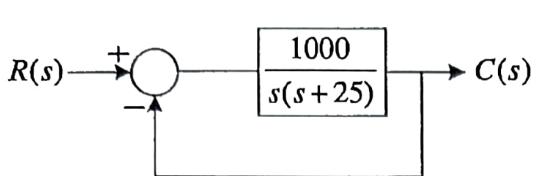
$$10-14h \quad \text{rampa giriş} \quad r(t) = (-35t + 490) u(t)$$

Fonksiyonları uygulanmalıdır.

Sistem tipine göre hata katsayıları ve sürekli hal hataları tablosu

Sistem Tipi	Hata Katsayıları			Giriş İşareti		
	$K_p$	$K_v$	$K_a$	<u>Basamak</u> $r(t) = Ru(t)$	<u>Rampa</u> $r(t) = tRu(t)$	<u>Parabol</u> $r(t) = \frac{1}{2} t^2 Ru(t)$
0	$0 < K_p < \infty$	0	0	$e_{ss} = \frac{R}{1 + K_p}$	$e_{ss} \rightarrow \infty$	$e_{ss} \rightarrow \infty$
1	$\infty$	$0 < K_v < \infty$	0	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = \frac{R}{K_v}$	$e_{ss} \rightarrow \infty$
2	$\infty$	$\infty$	$0 < K_a < \infty$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = \frac{R}{K_a}$
3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$

Örnek:



Şekilde verilen kontrol sistemine her bir giriş test fonksiyonu uygulandığında oluşan hata katsayılarını ve sürekli hal hata değerlerinin bulunuz.

a) Basamak giriş için:  $r(t) = u(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s}$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1000}{s(s+25)} = \infty$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

b) Rampası giriş için:  $r(t) = tu(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1000}{s(s+25)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1000}{(s+25)} = 40$$

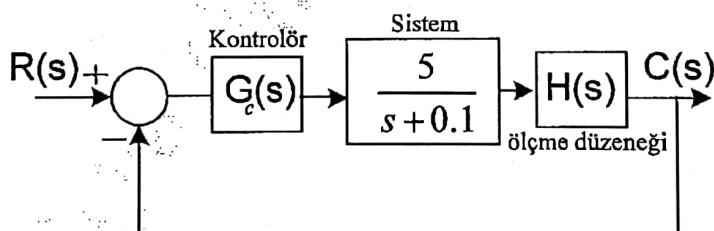
$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{40} = 0.025 \Rightarrow e_{ss} = \% 2.5$$

c) Parabol giriş için:  $r(t) = \frac{1}{2}t^2u(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^3}$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{1000}{s(s+25)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1000}{(s+25)} = 0$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{0} = \infty$$

Örnek:



$G_c(s) = 10 \text{ [v/v]}$  ve ölçme düzeneği  $1^\circ\text{C}$  lik değişimler için  $50 \text{ mV}$  gerilim üretmektedir.

- a) Sistem  $50^\circ\text{C}$  referans sıcaklıkta tutulmak isteniyor. Uygulanması gereken referans işaretinin basamak değerini hesaplayınız.  
 b) Sürekli hal hatasını hesaplayınız. Sürekli hal  $e_{ss} = 0$  olabilmesi için ne yapılmalıdır?

a)  $H(s) = 50 \text{ mV} / {}^\circ\text{C}$

$$\begin{array}{ccc} {}^\circ\text{C} & 50 \text{ mV} \\ 50^\circ\text{C} & X & \rightarrow X = 2500 \text{ mV} \end{array}$$

Bu durumda  $50^\circ\text{C}$  referans sıcaklık için sistemin girişine genliği  $r(t) = 2.5V$  olan basamak fonksiyonu şeklinde bir işaret uygulanmalıdır.

$$b) \quad K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s), \quad G(s) = G_c(s)G_s(s)H(s) \Rightarrow K_p = \lim_{s \rightarrow 0} 10 \frac{5}{s+0.1} 50 = 25000$$

$$e_{ss} = \frac{R}{1+K_p} = \frac{2500}{1+25000} = 0.0999 \Rightarrow e_{ss} \cong \%10$$

Sistemin sürekli hal hatasının sıfırlanabilmesi için sistem tipi integratör eklenerek artırılmalıdır.

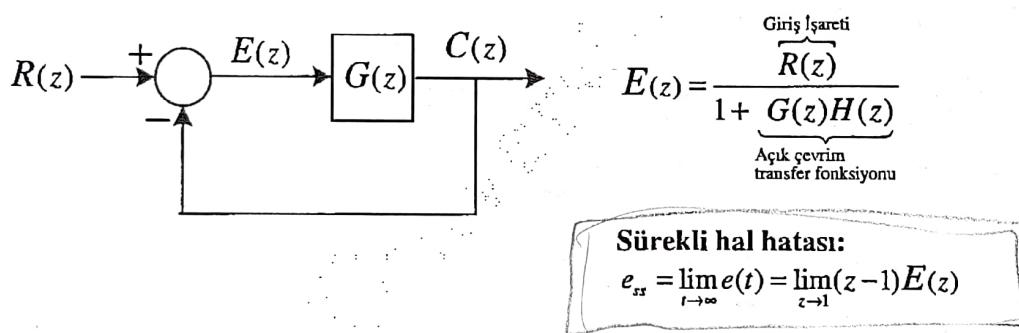
$G_c(s) = \frac{K_i}{s}$  olsun. Bu durumda açık çevrim transfer fonksiyonu,

$$G_c(s)G(s)H(s) = \frac{K_i}{s} \frac{5}{s+0.1} 50 \text{ olur.} \quad K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10}{s} \frac{5}{s+0.1} 50 = \infty$$

$$e_{ss} = \frac{R}{1+K_p} = \frac{2500}{1+\infty} = 0 \text{ olur.}$$

### 15. Ayrık Zaman Kontrol Sistemlerinde Sürekli Hal Hataları

Hatırlatma: Son değer teoremi;  $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) \Rightarrow e_{ss}$



Genel olarak ayrık zaman açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıda verilen sistemde;

$$G(z)H(z) = \frac{K \overbrace{(T_{01}z+1)(T_{02}z+1)\dots(T_{0m}z+1)}^{\text{m adet}}}{(z-1)^j \underbrace{(T_{k1}z+1)(T_{k2}z+1)\dots(T_{kp}z+1)}_{\text{p adet}}} \quad (s = z-1)$$

Paydadaki  $(z-1)^j$  terimi z-kompleks düzleminde  $z=1$  noktasındaki kutup sayısını belirtir.

$j$  sistem tipi olarak tanımlanmak üzere,

$j=0$  ise sıfır tipi sistem

$j=1$  ise bir tipi sistem

...

$j=n$  ise  $n$  tipi sistem olarak adlandırılır.

$n$  sistem derecesini göstermek üzere, sistemin  $n = p + j$  adet kutbu vardır. Fiziksel sistemde  $n \geq m$  dir.

Sistemde zamanla da dğili zamanla da aynı

Otomatik Kontrol Prof.Dr. Ayhan Özdemir

### 15.1 Basamak giriş için sürekli hal hatası

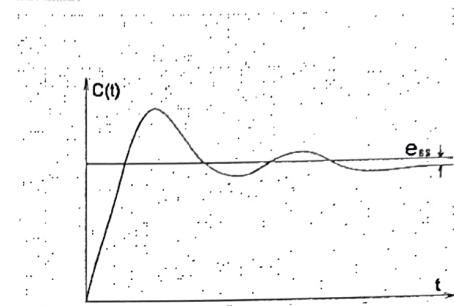
$$r(t) = Ru(t) \Rightarrow R(z) = \frac{Rz}{z-1}$$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z-1}{1+G(z)} = \frac{R}{1 + \underbrace{\lim_{z \rightarrow 1} G(z)}_{K_p}}$$

$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = G(1)$  → Konum hata katsayısı

$$e_{ss} = \frac{R}{1+K_p}$$

→ Konum hata



$j=0$  tipi sisteme basamak giriş için konum hata  $e_{ss}$

Ifadeden de görüldüğü gibi basamak giriş için sürekli hal hatasının  $e_{ss} = 0$ , olabilmesi için  $K_p = \infty$  olması gereklidir. Sıfır tipi bir sistemin,  $j=0$ , konum hatasını incelersek,

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \frac{K(T_{01}z+1)(T_{02}z+1)\dots(T_{0m}z+1)}{(z-1)^0(T_{k1}z+1)(T_{k2}z+1)\dots(T_{kp}z+1)} = \frac{K(T_{01}z+1)(T_{02}z+1)\dots(T_{0m}z+1)}{(T_{k1}z+1)(T_{k2}z+1)\dots(T_{kp}z+1)} = K_{p1}$$

$$e_{ss} = \frac{R}{1+K_{p1}} \text{ olur.}$$

Gerçek zaman uygulamada sistem kazancı daima  $K < \infty$  olacağından  $j=0$  tipi bir sisteme basamak giriş için daima sürekli hal hata oluşacaktır.

Tipi,  $j \geq 1$  olan bir sistemin konum hmasını incelersek,

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{K(T_{01}z+1)(T_{02}z+1)\dots(T_{0m}z+1)}{(z-1)^j(T_{k1}z+1)(T_{k2}z+1)\dots(T_{kp}z+1)} = \infty,$$

$$J \geq 1 \quad e_{ss} = \frac{R}{1+\infty} = 0 \text{ olur.}$$

Basamak giriş için sistem tipi,  $j \geq 1$ , olan sistemlerin konum hata sıfırdır.

### 15.2 Rampa giriş için sürekli hal hatası

$$r(t) = tu(t) \Rightarrow R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{(z-1)^2}{1+G(z)} = \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)}_{K_v}}$$

$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)$  → Hız hata katsayısı

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \rightarrow \text{Hız hata}$$

İfadeden de görüldüğü gibi rampa giriş için sürekli hal hatasının sıfır,  $e_{ss} = 0$ , olabilmesi için  $K_v = \infty$  olması gereklidir. Sıfır tipi bir sistemin,  $\underline{J = 0}$ , hız hatalarını incelersek,

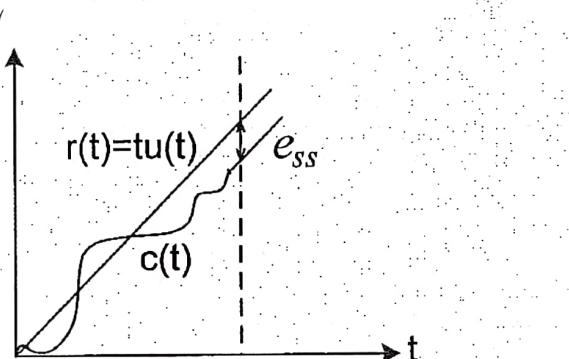
$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{K(T_{01}z+1)(T_{02}z+1)\dots(T_{0m}z+1)}{(T_{k1}z+1)(T_{k2}z+1)\dots(T_{kp}z+1)}$$

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{K(T_{01}z+1)(T_{02}z+1)\dots(T_{0m}z+1)}{(T_{k1}z+1)(T_{k2}z+1)\dots(T_{kp}z+1)} = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} 0 \frac{K(T_{01}z+1)(T_{02}z+1)\dots(T_{0m}z+1)}{(T_{k1}z+1)(T_{k2}z+1)\dots(T_{kp}z+1)} = 0$$

$e_{ss} = \frac{1}{0} = \infty$  olur. Sıfır tipi bir sistem rampa giriş işaretini takip edemez ve sürekli hal hataları zaman ilerledikçe büyür ve teorik olarak sonsuza gider. Tipi  $j=1$  olan bir sistemin hız hatalarını incelersek,

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{K(T_{01}z+1)(T_{02}z+1)\dots(T_{0m}z+1)}{(z-1)(T_{k1}z+1)(T_{k2}z+1)\dots(T_{kp}z+1)} = K_{v1}, \quad J = 1$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_{v1}} = \text{sabit olur.}$$



$j = 1$  tipi sistemde rampa giriş için hız hatalı  $e_{ss}$

Tipi  $j \geq 2$  olan bir sistemin hız hatalarını incelersek,

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{K(T_{01}z+1)(T_{02}z+1)\dots(T_{0m}z+1)}{(z-1)^J (T_{k1}z+1)(T_{k2}z+1)\dots(T_{kp}z+1)} = \infty, \quad J \geq 2 \quad e_{ss} = \frac{R}{\infty} = 0 \text{ olur.}$$

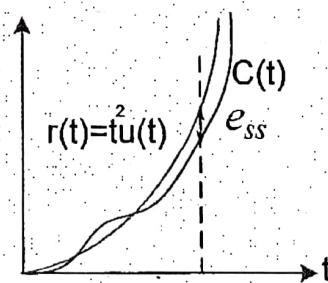
Rampa giriş için, sürekli hal hatasının,  $e_{ss} = 0$  olabilmesi için, sistem tipi  $J \geq 2$  olmalıdır.

### 15.3 Parabol giriş için sürekli hal hatalı

$$r(t) = \frac{1}{2}t^2 u(t) \Rightarrow R(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

$$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z) \rightarrow \text{İvme hata katsayıısı}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} \rightarrow \text{İvme hatalı}$$

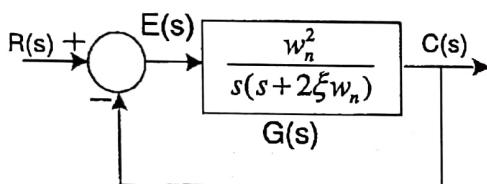


$j = 2$  tipi sistemde parabol giriş için ivme hatalı  $e_{ss}$

Tabloda , giriş işaretinin sistem tipine bağlı olarak hata katsayıları ve sürekli hal hataları verilmiştir.

Sistem Tipi	Hata Katsayıları			Giriş İşareti		
	$K_p$	$K_v$	$K_a$	Basamak $r(t) = Ru(t)$	Rampa $r(t) = tRu(t)$	Parabol $r(t) = 0.5t^2Ru(t)$
0	$0 < K_p < \infty$	0	0	$e_{ss} = \frac{R}{1+K_p}$	$e_{ss} \rightarrow \infty$	$e_{ss} \rightarrow \infty$
1	$\infty$	$0 < K_v < \infty$	0	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$	$e_{ss} \rightarrow \infty$
2	$\infty$	$\infty$	$0 < K_a < \infty$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$
3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$

#### 15.4 II. Dereceden Sistem sürekli hal hataları



**Basamak giriş için:**

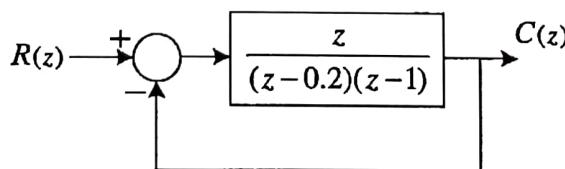
$$e_{ss} = \frac{R}{1+K_p} \text{ ise } K_p = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = G(0) = \infty \rightarrow e_{ss} = \frac{R}{1+\infty} \rightarrow \text{dir. } e_{ss} = 0$$

**Rampa giriş için:**  $e_{ss} = \frac{R}{K_v} \rightarrow K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{w_n^2}{s(0+2\xi w_n)} \rightarrow K_v = \frac{w_n^2}{2\xi w_n} \rightarrow K_v = \frac{w_n}{2\xi} \rightarrow e_{ss} = \frac{R}{K_v} \rightarrow e_{ss} = \frac{R}{\frac{w_n}{2\xi}}$$

$$e_{ss} = R \frac{2\xi}{w_n} \quad \text{Rampa giriş için II. Dereceden sistem sürekli hal hatası.}$$

**Örnek:** Şekilde verilen sistemde hız hatasının  $e_{ss} = 0.01$  ' den küçük olması için  $T$  (örnekleme zamanı) nasıl seçilmelidir. (Başka bir ifade ile örnekleme frekansı ne olmalıdır?)

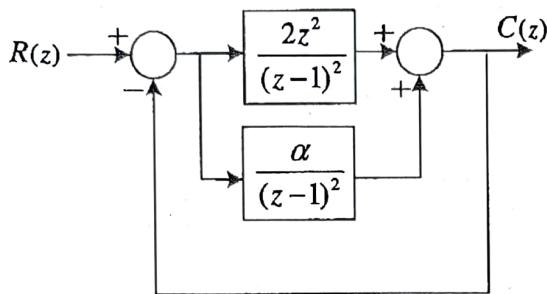


$$G(z) = \frac{z}{(z - 0.2)(z - 1)} \text{ ise, } K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)G(z)H(z) = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{z}{(z - 0.2)(z - 1)}$$

$$= \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{(z - 0.2)} = \frac{1}{T} \frac{1}{1 - 0.2} \text{ ise } K_v = \frac{1.25}{T} \text{ dir.}$$

$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{T}{1.25} \leq 0.01 \Rightarrow T \leq 0.0125s$  Ömekleme frekansı;  $f = \frac{1}{T} \Rightarrow f \geq 80Hz$  olarak seçilmelidir.

**Örnek:** Şekilde verilen sistemde ivme hatasının  $e_{ss} = 0.01$ ' den küçük olabilmesi için  $\alpha$  ve  $T$  arasındaki bağıntıyı elde ediniz.



Gerekli işlemler ile sistem aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$\begin{aligned}
 & \text{Block diagram:} \\
 & \quad \text{Reference input } R(z) \rightarrow \text{Summing junction} \rightarrow \frac{2z^2}{(z-1)^2} \rightarrow \text{Summing junction} \rightarrow \frac{2z^2 + \alpha}{(z-1)^2} \rightarrow C(z) \\
 & \quad \text{Feedback path: } \frac{\alpha}{(z-1)^2} \rightarrow \text{Summing junction} \rightarrow \frac{2z^2 + \alpha}{(z-1)^2} \\
 & G(z) = \frac{2z^2 + \alpha}{(z-1)^2} \quad K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z) H(z) = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \frac{2z^2 + \alpha}{(z-1)^2} \\
 & = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} 2z^2 + \alpha = \frac{2+\alpha}{T^2} \quad \text{ve} \quad K_a = \frac{2+\alpha}{T^2} \quad \text{elde edilir.}
 \end{aligned}$$

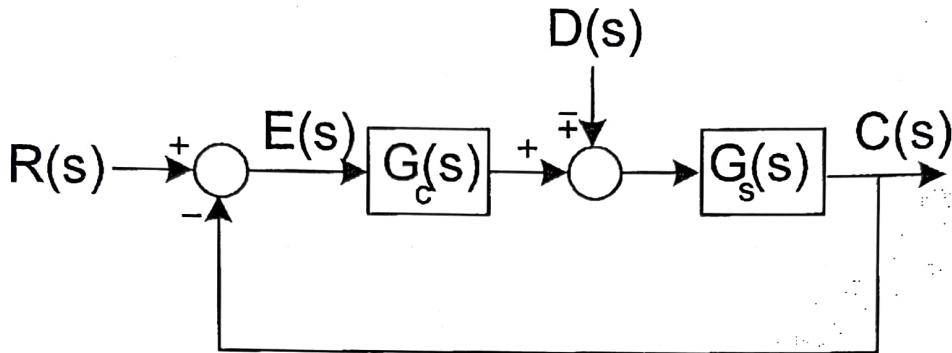
Parabol giriş için, sürekli hal hatası,

$$e_{ss} = 0.01 = \frac{1}{K_a} \Rightarrow 0.01 = \frac{T^2}{2+\alpha} \Rightarrow (10T)^2 = (2+\alpha)$$

$$T = \frac{\sqrt{(2+\alpha)}}{10} \quad \text{elde edilir.}$$

### 15.5 Sürekli-zaman Bozucu giriş için Cevap

Bozucu giriş etkisini, kapalı-çevrim kontrol sistem cevabında hem geçici hemde sürekli rejimde gösterir. Kontrolör  $G_c(s)$ 'in amacı bozucu etkisini gidermek ve sistem bozucu etkisinde dahi olsa, kapalı-çevrim kontrol sistem cevap dinamiğinin istenen performansta davranışmasını sağlamak ve sürekli hal hatasını sıfırlamaktır.



Yukarıda verilen sistemde Kapalı çevrim sistem cevabı  $C(s) = C_R(s) + C_D(s)$  dir.  
 $R(s) = 0$  için  $D(s)$  bozucu girişine karşı cevap  $C_D(s)$  yazılır ise

$$C_D(s) = \frac{G_s(s)}{1 + G_s(s)G_c(s)} D(s) \quad \text{olarak elde edilir. Amaç } G_c(s) \text{ kontrolör 'ün}$$

$$C_D(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} C_D(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s C_D(s) = 0 \quad \text{yapmasıdır. Son değer teoreminden,}$$

$$\begin{aligned} C_D(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_s(s)}{1 + G_s(s)G_c(s)} D(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{\frac{1}{G_s(s)} + G_c(s)} D(s) = \frac{s}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G_s(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)} D(s) \end{aligned}$$

Bozucu giriş basmak fonksiyonu  $D(s) = \frac{R}{s}$  olsun,

$$C_D(\infty) = \frac{\cancel{s}R}{\cancel{s}} \rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G_s(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)$$

Basamak fonksiyonu bozucu girişine karşı Sürekli hal cevap  $C_D(\infty)$

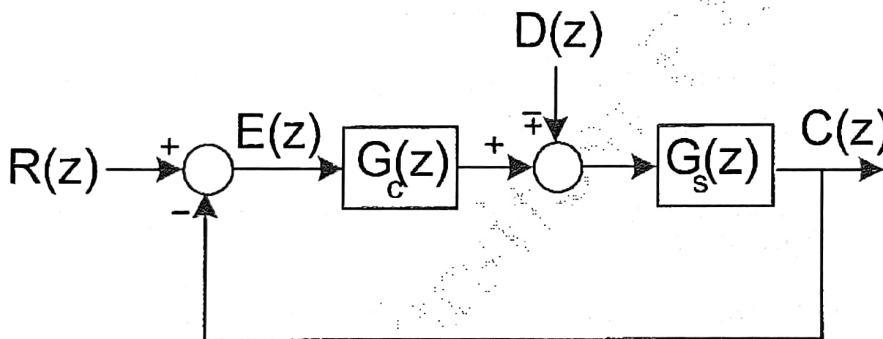
$$C_D(\infty) = \frac{R}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G_s(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)} \quad \text{olarak elde edilir.}$$

$C_D(\infty) = 0$  olabilmesi için paydadaki toplamdan ya  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G_s(s)} = \infty$  yada  $\lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) = \infty$  olmalıdır.

Kontrol edilen sistem açık-çevrim transfer fonksiyon  $G_s(s)$  tipi  $j=1$  ise giriş basamak fonksiyon olduğundan  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G_s(s)} = \infty$  ve  $C_D(\infty) = 0$  olur.  $G_c(s) = K_p$  sadece oransal kontrolcü olabilir.

$G_s(s)$  tipi  $j=0$  ise, en basit olarak  $G_s(s) = \frac{K_p}{s}$  seçilebilir ve  $\lim_{s \rightarrow 0} G_s(s) = \infty$  ve  $C_D(\infty) = 0$  olur.

### 15.6 Ayrık-zaman Bozucu giriş için Cevap



Yukarıda verilen sisteme Kapalı çevrim sistem cevabı  $C(z) = C_R(z) + C_D(z)$  dir.  
 $R(z) = 0$  için  $D(z)$  bozucu girişine karşı cevap  $C_D(z)$  yazılır ise

$$C_D(z) = \frac{G_s(z)}{1 + G_s(z)G_c(z)} D(z) \quad \text{olarak elde edilir. Amaç } G_c(z) \text{ kontrolör 'ün}$$

$C_D(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} C_D(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)C_D(z) = 0$  yapmasıdır. Son değer teoreminden,

$$\begin{aligned} C_D(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{G_s(z)}{1 + G_s(z)G_c(z)} D(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{\frac{1}{G_s(z)} + G_c(z)} D(z) \\ &= \frac{(z-1)}{\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{G_s(z)} + \lim_{z \rightarrow 1} G_c(z)} D(z) \end{aligned}$$

Bozucu giriş basmak fonksiyonu  $D(z) = \frac{Rz}{(z-1)}$  olsun,

$$C_D(\infty) = \frac{(z-1) \frac{Rz}{(z-1)}}{\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{G_s(z)} + \lim_{z \rightarrow 1} G_c(z)} \rightarrow$$

Basamak fonksiyonu bozucu girişine karşı Sürekli hal cevap  $C_D(\infty)$

$$C_D(\infty) = \frac{Rz}{\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{G_s(z)} + \lim_{z \rightarrow 1} G_c(z)} \quad \text{olarak elde edilir.}$$

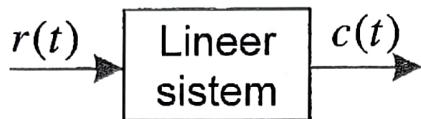
$C_D(\infty) = 0$  olabilmesi için paydadaki toplam bileşenlerinden ya  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{G_s(z)} = \infty$  yada  $\lim_{z \rightarrow 1} G_c(z) = \infty$  olmalıdır.

Kontrol edilen sistem açık-çevrim transfer fonksiyon  $G_s(z)$  tipi  $j=1$  ise giriş basamak fonksiyon olduğundan  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{G_s(z)} = \infty$  ve  $C_D(\infty) = 0$  olur.  $G_c(z) = K_p$  sadece oransal kontrolcü olabilir.

$G_s(z)$  tipi  $j=0$  ise, en basit olarak  $G_c(z) = \frac{zK_p}{z-1}$  seçilebilir ve  $\lim_{z \rightarrow 1} G_c(z) = \infty$  ve  $C_D(\infty) = 0$  olur.

## 16. KARARLILIK

Genel anlamda sınırlı giriş işaretine ilişkin sistem cevabı sınırlı ise sistem kararlıdır. Bu tanım sistemin giriş-cıkış ilişkisine göre verilmiştir ve BIBO (Bounded Input Bounded Output) kararlılık kriteri olarak adlandırılır.

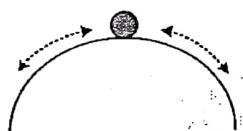


$$t \geq 0 \text{ için } \begin{cases} |r(t)| \leq N < \infty & \text{sınırlı giriş} \\ |c(t)| \leq M < \infty & \text{sınırlı çıkış} \end{cases} \Rightarrow \text{sistem kararlıdır}$$

Kararlı bir sistem uyarılmadıkça harekete geçmez. Uyarılınca harekete geçer, uyma kalkınca sistem eski konumuna geri döner. Kararsız sistem uyarılınca denge noktasından uzaklaşır. Şekillerde kararlılık ile ilgili açıklayıcı örnekler verilmiştir.



Asimtotik kararlı Sistem

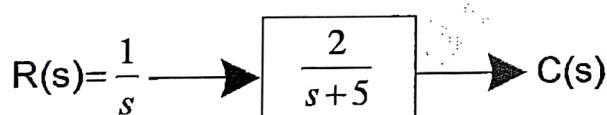


Kararsız Sistem



Marjinal kararlı (tarafsız) sistem

### Örnek1:



$R(s)$  birim basamak giriş için sistem çıkış  $C(t)$  elde ediniz.  
Verilen BIBO kararlılık tanımına göre kararlılığı inceleyiniz.

$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{s+5} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} \rightarrow A = \frac{2}{5}, \quad B = -\frac{2}{5} \quad \text{olarak elde edilir.}$$

$$C(t) = L^{-1}\{C(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{5s} - \frac{2}{5(s+5)}\right\} \rightarrow C(t) = \frac{2}{5}(1 - e^{-5t})u(t) \quad \text{sonucu elde edilir.}$$

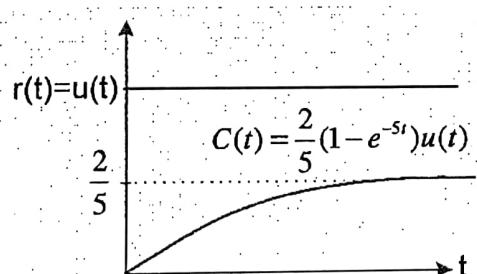
$$C(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = \frac{2}{5}$$

Giriş işaret genliği  $|r(t)| = 1 < \infty$  sınırlı giriş

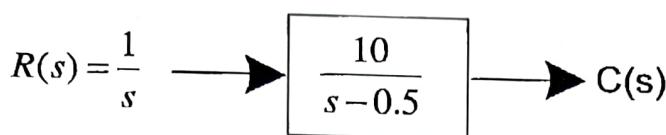
Cıkış işaret genliği  $|c(t)| = \frac{2}{5} < \infty$  sınırlı çıkış

Verilen sistem sınırlı giriş işaretini için sınırlı çıkış işaretü üretmektedir. Asimtotik KARARLIDIR.

Transfer fonksiyonu bireyde kararlı ya da kararsız olduğu biliniyor



**Örnek2:**



Birim basamak giriş için cevap

$R(s)$  birim basamak giriş için sistem çıkış  $C(t)$  elde ediniz.  
Verilen BİBO kararlılık tanımına göre karalılığı inceleyiniz.

$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s-0.5} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-0.5} \rightarrow A = -20, B = 20 \text{ olarak elde edilir.}$$

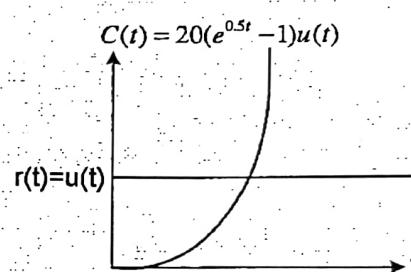
$$C(t) = L^{-1}\{C(s)\} = L^{-1}\left\{-\frac{20}{s} + \frac{20}{s-0.5}\right\} \rightarrow C(t) = 20(e^{0.5t} - 1)u(t) \text{ sonucu elde edilir.}$$

$$C(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = \infty$$

Giriş işaret genliği  $|r(t)| = 1 < \infty$  sınırlı giriş

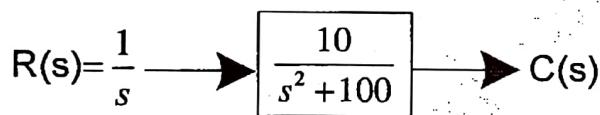
Çıkış işaret genliği  $|c(t)| = \infty$  sınırsız çıkış

Verilen sistem sınırlı giriş işaretini için sınırsız çıkış işaretini üretmektedir. **KARARSIZDIR.**



Birim basamak giriş için cevap.

**Örnek3:**



$R(s)$  birim basamak giriş için sistem çıkış  $C(t)$  elde ediniz.  
Verilen BİBO kararlılık tanımına göre karalılığı inceleyiniz.

$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{10}{s(s+10j)(s-10j)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+10j)} + \frac{C}{(s-10j)} \rightarrow A = \frac{1}{10}, B = -\frac{1}{20}, C = -\frac{1}{20}$$

$$C(t) = L^{-1}\{C(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{10s} - \frac{1}{20(s+10j)} - \frac{1}{20(s-10j)}\right\}$$

$$= \frac{1}{10}u(t) - \frac{1}{10} \left[ \frac{e^{10jt} + e^{-10jt}}{2} \right]$$

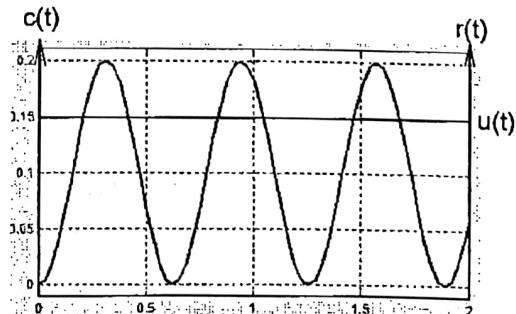
$$C(t) = \frac{1}{10}(1 - \cos 10t)u(t) \text{ sonucu elde edilir.}$$

Giriş işaret genliği  $|r(t)| \leq 1 < \infty$

Çıkış işaret genliği  $|c(t)| = 0 \sim 0.2 < \infty$

Verilen sistem sınırlı giriş işaretini için 0-0.2 arasında değişen sınırlı çıkış işaretini üretmektedir.

**Marjinal (tarafsız) KARARLIÐIR.**



Birim basamak giriş için cevap

*Yazılım: Omer*

Verilen örneklerden görüldüğü gibi kararlılık analizinde transfer fonksiyon kökleri kutuplar kararlılığı belirlemektedir.

Kapalı-çevrim kontrol sistem kararlılık analizinde karakteristik denklem köklerinin s-kompleks düzleminin sol yarısında bulunması kararlılık için gerek ve yeter koşuldur. Orjinde bir katlı ve jw ekseni üzerinde bir Kompleks eşlenik kök bulunabilir. Karakteristik denklem köklerinin s-kompleks düzleminin sol yarısında bulunması için yeter koşul Routh-Hurwitz kriteri ile belirlenir.

### A 16.1 Routh-Hurwitz Kriteri

Bir giriş bir çıkış, zamanla değişmeyen, lineer kontrol sistemi için kapalı çevrim transfer fonksiyonu;

$$T(s) = \frac{P(s)}{q(s)} = \frac{P(s)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

olarak verilsin.

karakteristik denklem;  $F(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$  olarak ifade edilir.

*Delillerin Etkileri bilmem gerek.  
Buyruğeden bu kriteri kullanır.*

Karakteristik denklem, kapalı çevrim transfer fonksiyonunun paydasının sıfıra eşitlenmesi ile elde edilir.

Sistemin kararlılık analizi için önce **2 gerek koşul** 'a bakılmalıdır. Gerek koşullar;

1-) Karakteristik polinom katsayılarının tümü aynı işaretli olmalıdır.

2-) Karakteristik polinom katsayılarının hiçbirini sıfır olmamalıdır. Eğer  $a_0 = 0$  ise s parantezine alınıp tekrar koşullara bakılır. Orjinde bir katlı veya jw ekseni üzerinde bir Kompleks eşlenik kök bulunabilir.

Routh kararlılık kriteri, Karekteristik denklemin köklerinin sağyarı s-düzleminde bulunup bulunmadığını ve jw ekseni üzerinde kökünün bulunup bulunmadığını sağlar.

Eğer gerek koşullardan herhangi biri sağlanamıyor ise sistem kararsızdır. Routh tablosunun oluşturulmasına gerek yoktur.

1. ve 2. gerek koşul sağlanamıyor ise yeter koşul için Routh tablosu oluşturulur ve kararlılık kriterine bakılır.

Routh tablosunun ilk iki satırı karakteristik denklem,  $F(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$ , diğer satırlar ise bu iki satır yardımı ile türetilir.

#### Routh Tablosu

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	.	.	İlk iki satır haricindeki diğer satırlar aşağıda verilen ifadeler ile türetilir.
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	.	.	
$s^{n-2}$	$b_{n-1}$	$b_{n-3}$	$b_{n-5}$	.	.	$b_{n-1} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$ , $b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \dots \dots \dots$
$s^{n-3}$	$c_{n-1}$	$c_{n-3}$	$c_{n-5}$	.	.	
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	
$s^0$	$v_{n-1}$	$v_{n-3}$	$v_{n-5}$	.	.	$c_{n-1} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$ , $c_{n-5} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_{n-1} & b_{n-7} \end{vmatrix} \dots \dots \dots$

*İlk satırın her biri pozitif ise kararlı.*

$$P(s) = s^6 + 4s^3 + 2s + 1 = 0 \quad (\text{kararsız}) \quad S^2 \neq 0$$

$$F(s) = s^6 - 4s^3 + 3s^2 + 2s + 1 = 0 \quad (\text{kararsız}) \quad (-)$$

$$148 \quad F(s) = -s^6 - 4s^3 - 3s^2 - 2s + 1 = 0 \quad (\text{kararsız})$$

Sistemin kararlı olabilmesi için Routh tablosunun 1. sütunundaki terimlerin tümü sıfırdan büyük olmak zorundadır.

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	.	.	
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	.	.	I. Sütündeki katsayılarından herhangi birisi negatif işaretli ise sistem kararsızdır.
$s^{n-2}$	$b_{n-1}$	$b_{n-3}$	$b_{n-5}$	.	.	
$s^{n-3}$	$c_{n-1}$	$c_{n-3}$	$c_{n-5}$	.	.	I. Sütündeki katsayıların işaret değiştirme sayısı kadar karakteristik denklemin sağ yarı s-kompleks düzleminde kökü vardır. sistem kararsızdır.
.		.	.	.	.	
.		.	.	.	.	
$s^0$	$v_{n-1}$	$v_{n-3}$	$v_{n-5}$	.	.	

$> 0$  Olmalıdır.

**Örnek:** Karakteristik denklemi  $F(s) = s^5 + 5s^4 + 3s^3 - 2s^2 + s + 8 = 0$  olarak verilen sistemin kararlılığını inceleyiniz.

Gerek koşulları incelediğinde,  $F(s) = s^5 + 5s^4 + 3s^3 - 2s^2 + s + 8 = 0$  ifadesinde  $s^2$ ' li terimin katsayısı negatif (-), diğerleri pozitif (+) tir. 1. Gerek koşul şart sağlanmaz. **Sistem kararsızdır.**

$$s_1 = -4.1804$$

$$s_2 = -1.1350 + 0.7207i$$

$$s_3 = -1.1350 - 0.7207i$$

$$s_4 = 0.7252 + 0.7299i$$

$$s_5 = 0.7252 - 0.7299i$$

Karakteristik denklem kökleri yanda verilmiştir. Görüldüğü gibi kompleks iki kök  $s_4, s_5$  reel kısımları pozitiftir. Bu kökler S-kompleks düzleminin sağ yarısındadır. **Sistem kararsızdır.**

**Örnek:** Karakteristik denklemi  $F(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 8 = 0$  olarak verilen sistemin kararlılığını inceleyiniz.

Gerek koşulları incelediğinde,  $F(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 0s + 8 = 0$  ifadesinde  $s$ ' li terimin katsayısı sıfırdır. için 2. Gerek koşul sağlanmaz. **Sistem kararsızdır.**

**Örnek:** Karakteristik denklemi  $F(s) = s^5 + 5s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s = 0$  olarak verilen sistemin kararlılığını inceleyiniz.

Gerek koşulları incelediğinde,  $F(s) = s(s^4 + 5s^3 + 3s^2 + 2s + 1) = 0$  ifadesinin 1. ve 2. gerek koşulu sağladığı görülmür. Sistemin kararlı olup olmadığını söyleyebilmek için Routh tablosunun oluşturulması gereklidir.

**Örnek:** Karakteristik denklemi  $F(s) = -s^5 - 5s^4 - 3s^3 - 2s^2 - s - 8 = 0$  olarak verilen sistemin kararlılığını inceleyiniz.

Gerek koşulları incelediğinde,  $F(s) = -(s^5 + s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s + 8) = 0$  ifadesinin 1. ve 2. gerek koşulu sağlamaktadır. Sistemin kararlı olup olmadığını söyleyebilmek için Routh tablosunun oluşturulması gereklidir.

**Örnek:** Kapalı çevrim transfer fonksiyonu,  $T(s) = \frac{5s^2 - 7s + 2}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 1}$ , olarak verilen sistemin kararlılığını inceleyiniz.

-Kapalı çevrim transfer fonksiyonundan karakteristik denklem

$F(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 1 = 0$  olarak yazılır.  $F(s)$  ifadesinin 1. ve 2. gerek koşulu sağladığını görülür. Sistemin kararlı olup olmadığını söyleyebilmek için Routh tablosunun oluşturulması gereklidir. İncelenen sistem için Routh tablosu aşağıda adım adım oluşturulmuştur.

İlk iki satır yukarıda belirtildiği gibi doğrudan karakteristik denklemden oluşturulur.

$s^4$	1	3	1
$s^3$	2	4	0
$s^2$	$b_{n-1}$	$b_{n-3}$	
$s$			
$s^0$			

3. satır, 1. ve 2. satırından faydalananlarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$b_{n-1} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{a_{n-1}} (a_n * a_{n-3} - a_{n-2} * a_{n-1}) = \frac{1}{a_{n-1}} (a_{n-2} * a_{n-1} - a_n * a_{n-3})$$

$$b_{n-1} = \frac{1}{2} (2 * 3 - 1 * 4) = 1$$

$$b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{n-1}} (a_{n-4} * a_{n-1} - a_n * a_{n-5})$$

$$b_{n-3} = \frac{1}{2} (2 * 1 - 1 * 0) = 1$$

$s^4$	1	3	1
$s^3$	2	4	0
$s^2$	1	1	0
$s$	$c_{n-1}$	$c_{n-3}$	
$s^0$			

2. ve 3. satırından faydalananlarak 4. satır oluşturulur.

$$c_{n-1} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix} = \frac{1}{b_{n-1}} (b_{n-1} * a_{n-3} - a_{n-1} * b_{n-3})$$

$$c_{n-1} = \frac{1}{1} (1 * 4 - 1 * 2) = 2$$

$$c_{n-3} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix} = \frac{1}{b_{n-1}} (b_{n-1} * a_{n-5} - a_{n-1} * b_{n-5})$$

$$c_{n-3} = \frac{1}{1} (1 * 0 - 2 * 0) = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 1 \\ s^3 & 2 & 4 & 0 \\ s^2 & 1 & 1 & 0 \\ s & 2 & 0 \\ s^0 & d_{n-1} \end{array}$$

3. ve 4. satırdan faydalananarak 5. satır hesaplanır.

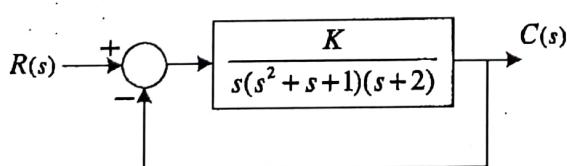
$$d_{n-1} = -\frac{1}{c_{n-1}} \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-3} \\ c_{n-1} & c_{n-3} \end{vmatrix} = \frac{1}{c_{n-1}} (c_{n-1} * b_{n-3} - b_{n-1} * c_{n-3})$$

$$d_{n-1} = \frac{1}{2} (2 * 1 - 1 * 0) = 1$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 1 \\ s^3 & 2 & 4 & 0 \\ s^2 & 1 & 1 & 0 \\ s & 2 & 0 \\ s^0 & 1 \end{array}$$

Gördüğü gibi oluşturulan Routh tablosunun 1. sütundaki tüm katsayılar pozitiftir. **Sistem kararlıdır.** Başka bir ifade ile karakteristik denklem köklerinin hepsi sol yarı S düzlemindedir.

**Örnek:** Blok diyagramı verilen sistemin kararlılığını inceleyiniz. Sistemin kararlı olabilmesi için gerekli K aralığını hesaplayınız.



!!!!!! Kararlılık analizi için önce karakteristik denklem elde edilmelidir. Bu amaç için, önce sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu  $\frac{C(s)}{R(s)}$  elde edilmelidir.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2)}}{1 + \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2)}} = \frac{K}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K}$$

Karakteristik denklem  $F(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$  olarak elde edilir.

Karakteristik denklem 1. ve 2. gerek koşulu sağladığından sistemin kararlılık analizi için Routh tablosunu oluşturulmalıdır.

$s^4$	1	3	K
$s^3$	3	2	0
$s^2$	$\cancel{3}$	K	$c_{n-1} = \frac{\cancel{14}}{3} - 3K$
$s^1$	$\cancel{3}$	0	$\cancel{7}$
$s^0$	K		

Sistemin kararlı olabilmesi için 1.sütundaki tüm terimlerin pozitif olması gereklidir. Bu durumda;

1-)  $s^0$ ' li terim katsayısı  $K > 0$

$$2-) s^1$$
 li terim katsayıısı  $\frac{\cancel{14}}{3} - 3K > 0 \Rightarrow \cancel{14}/3 - 3K > 0 \Rightarrow \frac{14}{3} > 3K \Rightarrow \frac{14}{9} > K$  şartı elde

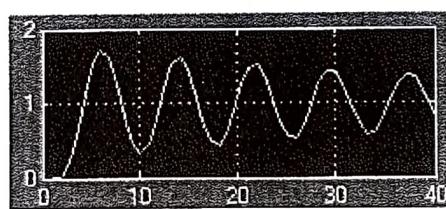
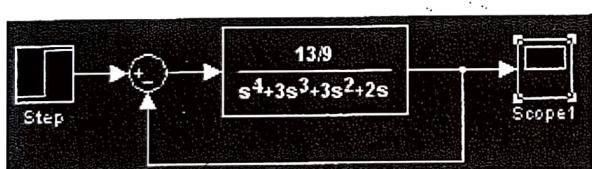
edilir. Her iki şartın sağlandığı aralık 1) ve 2) denklemlerinden,  $0 < K < \frac{14}{9}$  elde edilir.

Burada  $K_s = \frac{14}{9}$  sınır kazanç olarak ifade edilir. Sistem kazancı  $K = K_s = \frac{14}{9}$  olduğunda

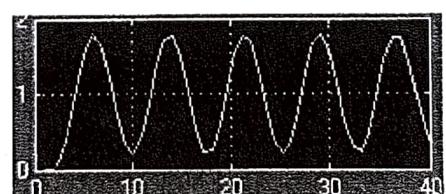
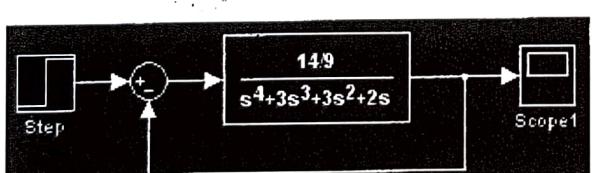
sistem marginal kararlı davranış göstermektedir.  $K > K_s = \frac{14}{9}$  için sistem kararsızlığa gider.;

$K = \frac{13}{9} < K_s = \frac{14}{9}$  için kararlı,

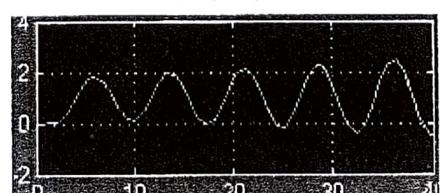
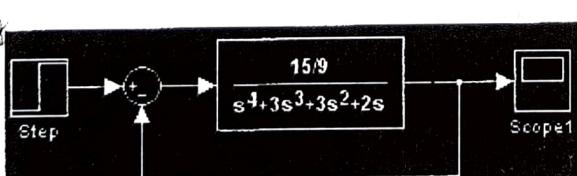
*K tam  $16/9$  olursa  
marginal kararlıdır.*



$K = K_s = \frac{14}{9}$  için marginal kararlı,



ve  $K = \frac{15}{9} > K_s$  için kararsız olduğu gösterilmiştir.



Routh tablosunun oluşturulmasında **özel durumlar**:

- 1-) Bir satırdaki ilk eleman sıfır diğerleri sıfırdan farklı
- 2-) Bir satırdaki elemanların tümü sıfır

Bu iki özel durum için yapılması gereken işlemler aşağıda örnekler üzerinden açıklanmıştır.

**1. Özel durum:**  $F(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0$  karakteristik denklemi ile verilen sistemin kararlılığını inceleyeniz.

1. ve 2. gerek koşul sağlandığından Routh tablosu oluşturulmalıdır.

$s^4$	1	2	3
$s^3$	1	2	0
$s^2$	0	3	0
$s$			
$s^0$			

*sorular sıfır gibi olursa*

Gördüğü gibi  $s^2$  satırındaki ilk terim sıfırdır. Bu durumda  $s^2$  satırındaki ilk terim  $\epsilon$  gibi çok küçük pozitif bir sayı ile toplanarak tablonun oluşturulmasına devam edilir.

$s^4$	1	2	3	$s^4$	1	2	3
$s^3$	1	2	0	$s^3$	1	2	0
$s^2$	0 + $\epsilon$	3	0	$s^2$	0 + $\epsilon$	3	0
$s$				$s$	(2 $\epsilon$ - 3)/ $\epsilon$	0	
$s^0$				$s^0$	3		

1. sütundaki terimler incelenirse  $(2\epsilon - 3)/\epsilon$  teriminin negatif olduğu görülür. **Sistem kararsızdır.** (Not:  $\epsilon$  çok küçük pozitif bir sayı olarak tanımlandığından  $2\epsilon < 3$  olduğundan  $2\epsilon - 3 < 0$  olacaktır.)

**2. Özel durum:**  $F(s) = s^6 + 3s^5 + 3s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = 0$  karakteristik denklemi ile verilen sistemin kararlılığını inceleyeniz.

1. ve 2. gerek koşul sağlandığından Routh tablosu oluşturulmalıdır.

Gördüğü gibi  $s^3$  satırındaki tüm katsayılar sıfırdır. Bu durumda  $s^3$ 'ün bir üst satırından yardımcı denklem oluşturulur. Bu amaçla  $s^4$  satırından;

$q(s) = s^4 + 2s^2 + 1$  elde edilir. Ardından yardımcı denklem türeri alınır.

$$\frac{dq(s)}{ds} = 4s^3 + 4s \quad \text{yeni denklem türetilir.}$$

$s^6$	1	3	3	1
$s^5$	3	6	3	0
$s^4$	1	2	1	0
$s^3$	0	0	0	0
$s^2$				
$s^1$				
$s^0$				

Hepsinin sıfır olduğu sütun bir üstten yeni transfer fonksiyonunu yazdırıp toren alınır.

$$F(s) = s^4 + 2s^2 + 1 = 0 \rightarrow \frac{dF(s)}{ds} = 4s^3 + 4s$$

Yardımcı denklemin türevi alınarak elde edilen yeni denklemin katsayıları tüm katsayıları sıfır olan  $s^3$  terim satırına yazılır.

$s^6$	1	3	3	1
$s^5$	3	6	3	0
$s^4$	1	2	1	0
$s^3$	4	4	0	0
$s^2$				
$s^1$				
$s^0$				

Tabloyu oluşturmaya devam edilir,

$s^6$	1	3	3	1
$s^5$	3	6	3	0
$s^4$	1	2	1	0
$s^3$	4	4	0	0
$s^2$	1	1		
$s^1$	0	0		
$s^0$				

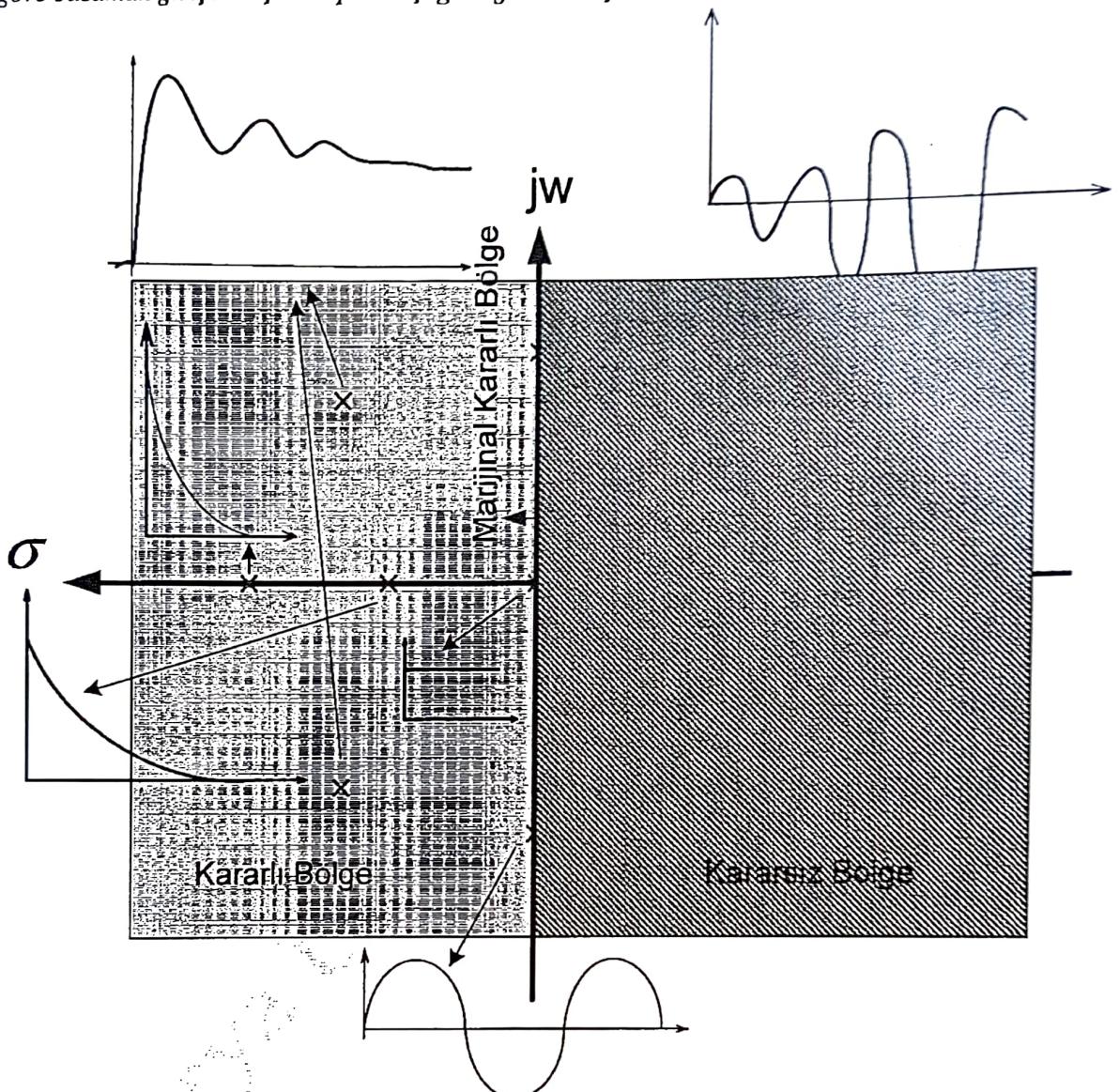
Bu kez  $s^1$  satırındaki tüm terimlerin sıfır olduğu görülmektedir. Benzer şekilde  $s^1$  in bir üst satırından yardımcı denklem oluşturulur. Bu amaçla  $s^2$  satırından;  $q(s) = s^2 + 1$  elde edilir. Ardından yardımcı denklemin türevi alınır.  $\frac{dq(s)}{ds} = 2s$

Elde edilen bu yeni denklemin katsayıları  $s^1$  satırına yazılır ve tablonun oluşturulmasına devam edilir.

$s^6$	1	3	3	1
$s^5$	3	6	3	0
$s^4$	1	2	1	0
$s^3$	4	4	0	0
$s^2$	1	1		
$s^1$	0	0		
$s^0$	1			

Routh tablosu incelendiğinde 1. sütundaki terimlerin işaret değişitmez ve hepsi pozitiftir. Sistem kararlıdır.

Aşağıda karakteristik denklem köklerinin,  $s$ -kompleks düzleminde bulunacağı çeşitli yerlere göre basamak girişe karşı cevapları aşağıda gösterilmiştir.



$S$ -kompleks düzleminde kök yerlerine göre basamak girişe karşı cevaplar

### 17. Ayrık Zaman Kontrol Sistemlerinde Kararlılık

Ayrık zaman kontrol sistemlerinde kararlılık konusuna başlamadan önce  $s$ -düzlemi ile  $z$ -düzlemi arasındaki ilişkiyi incelemek konunun daha iyi anlaşılmasına açısından önemlidir.

$$\text{Önceki konularda } \left. \begin{aligned} z &\triangleq e^{sT} \\ s &= \sigma + j\omega \end{aligned} \right\} z = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \text{ olarak verilmiştir.}$$

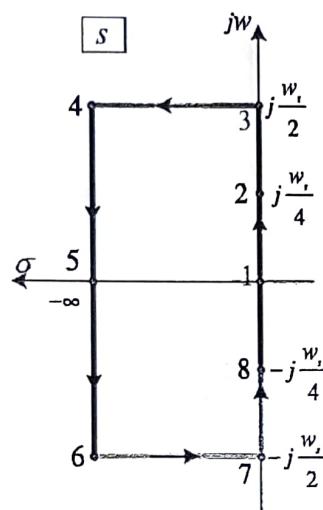
$$w_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T}, \quad w_s = \text{açışal örneklem frekansı}, \quad f_s = \text{örneklem frekansı}, \quad T = \text{örneklem periyodu}$$

$$T = \frac{2\pi}{w_s} \text{ ifadesi } z \text{ 'de yerine yazılırsa,}$$

$$z\text{-operatörünün genlik ve faz ifadeleri, } \left\{ z = e^{\sigma T} e^{j\frac{2\pi}{w_s}} = r e^{j\theta} \right\} \Rightarrow r = |z| = e^{\sigma T}, \theta = \angle z = \angle w \frac{2\pi}{w_s},$$

olarak elde edilir.

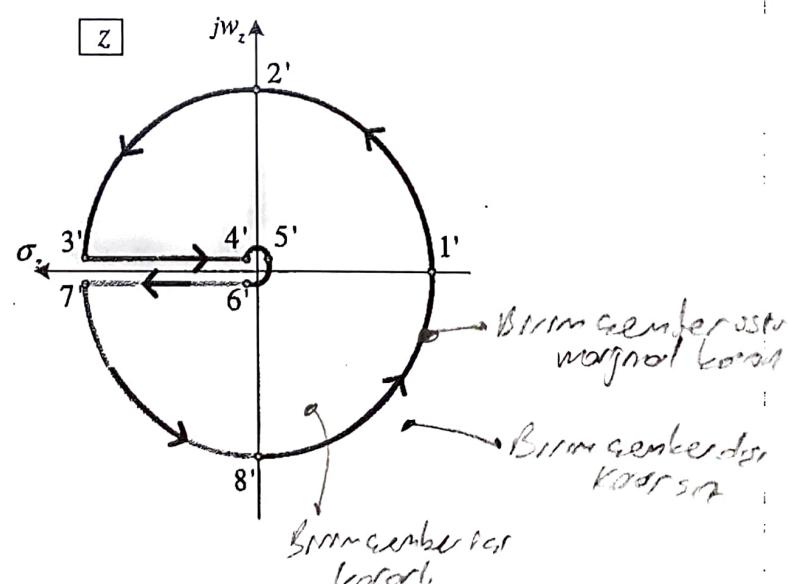
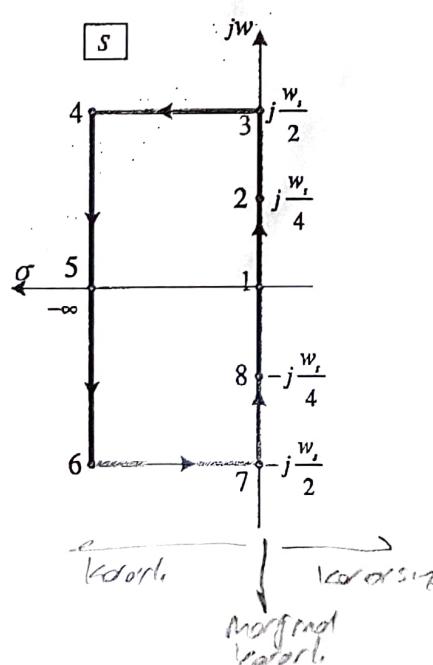
$s \rightarrow z$  haritalaması için öncelikle aşağıda gösterildiği gibi s-düzleminde çeşitli noktalar belirlenmiş, ardından bu noktaların z-düzlemindeki yerleri hesaplanmıştır.



$$\theta = \frac{1}{w_s} 2\pi w_s$$

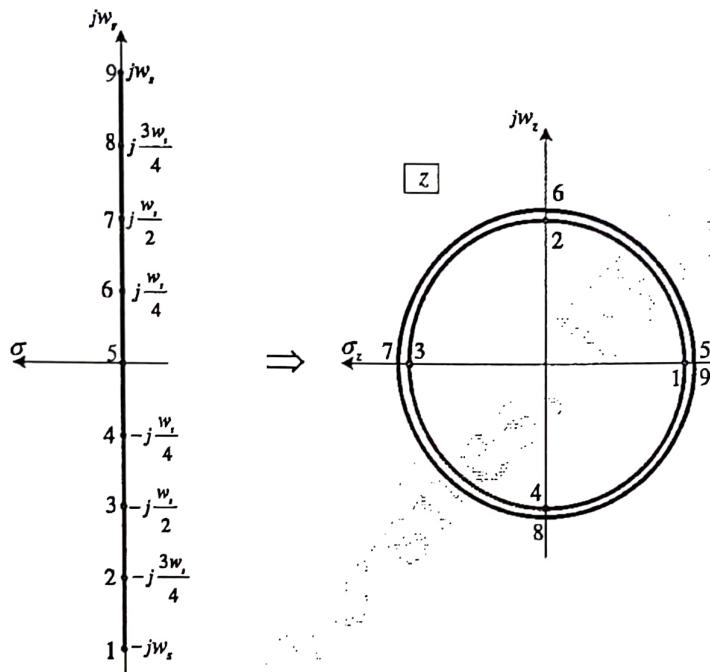
nokta		nokta			
1-	$\sigma = 0$ $w = 0$	$ z  = 1$ $\angle z = 0$	5-	$\sigma = -\infty$ $w = 0$	$ z  = 0$ $\angle z = 0$
2-	$\sigma = 0$ $w = \frac{w_s}{4}$	$ z  = 1$ $\angle z = \frac{\pi}{2}$	6-	$\sigma = -\infty$ $w = -\frac{w_s}{2}$	$ z  = 1$ $\angle z = -\pi$
3-	$\sigma = 0$ $w = \frac{w_s}{2}$	$ z  = 1$ $\angle z = \pi$	7-	$\sigma = 0$ $w = -\frac{w_s}{4}$	$ z  = 1$ $\angle z = -\pi$
4-	$\sigma = -\infty$ $w = \frac{w_s}{2}$	$ z  = 0$ $\angle z = \pi$	8-	$\sigma = 0$ $w = -\frac{w_s}{4}$	$ z  = 1$ $\angle z = -\frac{\pi}{2}$
5-	$\sigma = -\infty$ $w = 0$	$ z  = 0$ $\angle z = 0$			

Yukarıdaki hesaplamalardan sonra s-düzlemindeki noktaların z-düzlemindeki karşılığı aşağıdaki gibi gösterilir.



s-kompleks düzleminde  $-j\frac{w_s}{2}$  noktasından  $j\frac{w_s}{2}$  noktasına gidildiğinde z-kompleks düzleminde birim daire üzerinde gezilir.

Aşağıda görüldüğü gibi s-kompleks düzleminde  $-jw_s$  noktasından  $jw_s$  noktasına nokta nokta gidildiğinde z-kompleks düzleminde birim daire üzerinde iki tur atılır. Bunun gibi s-kompleks düzleminde imajiner eksende  $-j\infty$  dan  $+j\infty$ ' a gidilirse z-düzleminde birim daire üzerinde sonsuz tur atılır.



Sonuç olarak, z-düzlemi  $w_s$  açısal frekansına göre çok katlıdır. S-kompleks düzlemi ile z-kompleks düzlemi arasındaki ilişkiyi Kararlılık açısından, göz önüne alınınsın.  
*S-kompleks düzleminin sağ-yarı düzlemi kararsız, sol-yarı düzlemi kararlı, imajiner eksen marginal kararlıdır. Z-düzleminde bu bölgelere karşılık gelen yerler araştırılacaktır.*

$$s = \sigma + jw \text{ olmak üzere, } z = e^{\sigma T} = e^{\sigma T} e^{jw T} \Rightarrow |z| = e^{\sigma T} \text{ dir.}$$

1- s-düzleminin sağ yarı bölgesi,  $\sigma > 0$  dir.

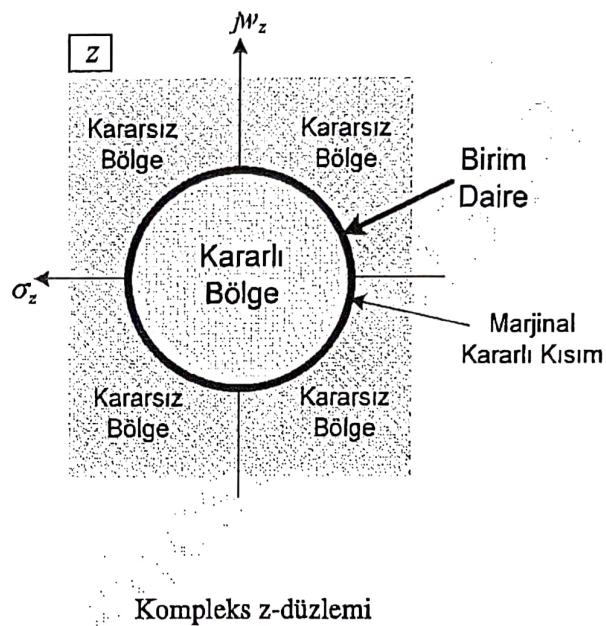
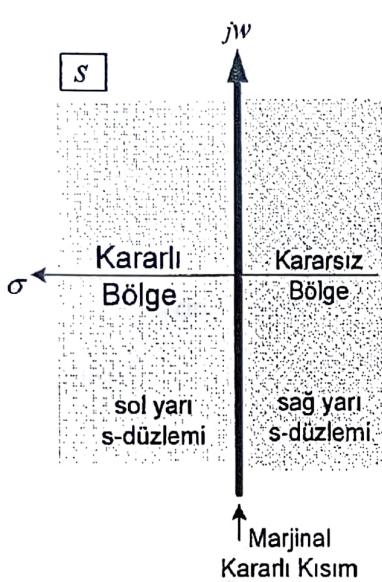
$|z| = e^{\sigma T}$  eşitliği göz önünde bulundurulur ise,  $\sigma > 0$  olduğundan  $|z| = e^{\sigma T} > 1$  dir. Birim dairenin dışına denk gelir. Z-düzleminin Karasızlık bölgeidir.

2- s-düzleminin sol yarı bölgesi,  $\sigma < 0$  dir.

$|z| = e^{\sigma T}$  eşitliği göz önünde bulundurulur ise,  $\sigma < 0$  olduğundan  $|z| = e^{\sigma T} < 1$  dir. Birim dairenin içine denk gelir. Z-düzleminin Kararlı bölgeidir.

3- s-düzleminde kompleks ekseni,  $\sigma = 0$  dir.

$|z| = e^{\sigma T}$  eşitliği göz önünde bulundurulur ise,  $\sigma = 0$  için  $|z| = e^{\sigma T} = 1$  dir. S-düzleminde imajiner eksen, Z-kompleks düzleminde birim daire ye karşılık gelir. Yukarıdaki incelemeleri, kararlılık açısından grafik olarak s ve z-düzlemleri için aşağıdaki gibi verilebilir.



### 17.1 Ayırık Zaman Routh-Hurwitz Kararlılık Kriteri

Bilgilendirme dairesi  
Sınavla kalkışma

Ayırık zaman sistemlerin kararlılık analizinde karakteristik denklem köklerinin tümünün birim dairenin içinde olup olmadığı araştırılır. Tüm kökler birim daire içinde ise sistem kararlıdır. Routh tablosunu zamanda ayırık sistemlere uygulanabilmesi için, z-düzlemi yeni bir w düzlemi veya r düzlemi gibi yeni bir düzleme dönüştürülür sonra Routh kriteri uygulanabilir. Bu yöntem, ayırık-zaman sistemlerin analizi için dolaylı bir yoldur.

$$\text{Dönüşüm yöntemleri: } w \triangleq \frac{z-1}{z+1}, \quad r \triangleq \frac{z+1}{z-1}$$

**Örnek:** Açık çevrim transfer fonksiyonu,  $KGH(z) = \frac{K(z+0.92)}{(z-1)(z-0.7788)}$ , olarak verilen sistemde kararlılık için  $K = ?$

$$\text{Sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu; } T(z) = \frac{K(z+0.92)}{1 + \frac{(z-1)(z-0.7788)}{K(z+0.92)}} \text{ ifadesi}$$

düzenlenirse karakteristik denklem;

$$F(z) = z^2 + (K - 0.7788)z + 0.7788 + 0.92K = 0 \text{ olarak elde edilir.}$$

$$z \triangleq \frac{r+1}{r-1} \text{ dönüşümü uygulanırsa, } F(z) = \left(\frac{r+1}{r-1}\right)^2 + (K - 0.7788)\left(\frac{r+1}{r-1}\right) + 0.7788 + 0.92K = 0$$

$$F(z) = 1.92Kz^2 + (0.4424 - 1.84K)z + (3.5576 - 0.08K) = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} r^2 & 1.92K & 3.5576 - 0.08K \\ r & 0.4424 - 1.84K \\ r^0 & 3.5576 - 0.08K \end{array}$$

Sistemin kararlı olabilmesi için 1. sütundaki tüm terimlerin pozitif olması gereklidir. Bu durumda;

$$1-) r^2 \text{ satırından } 1.92K > 0 \rightarrow K > 0$$

$$2-) r \text{ satırından } 0.4424 - 1.84K > 0 \rightarrow 0.4424 > 1.84K \rightarrow K < \frac{0.4424}{1.84} \rightarrow K < 0.24$$

$$3-) r^0 \text{ satırından } 3.5576 - 0.08K \rightarrow 3.5576 > 0.08K \rightarrow K < \frac{3.5576}{0.08} \rightarrow K < 44.47$$

şartları belirlenir. 3 şart birleştirilirse sistemin kararlı olmasını sağlayan  $K$  aralığı,  $0 < K < 0.24$  olarak bulunur.

## 18. Jury Kararlılık Kriteri

Lineer zamanla değişmeyen sayısal kontrol sistemlerinin kararlılığını doğrudan z-düzleminde incelenmesini sağlar.  $F(z)$  karakteristik denkleminin köklerini bulmaksızın tüm köklerinin birim daire içinde olup olmadığını gösteren kriterdir. Ayrık zaman bir sistemin kararlı olabilmesi için gerek ve yeter koşulların sağlanması gereklidir.

Karakteristik denklem,  $F(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$  olmak üzere,

Gerek koşullar: 1-)  $F(1) > 0$

2-)  $(-1)^n F(-1) > 0$ ,  $n =$  sistemin derecesi olarak tanımlanır.

Gerek koşullardan herhangi biri sağlanmaz ise, sistem **KARARSIZDIR**. Koşullar sağlanır ise yeter şart için Jury tablosu oluşturulur. Jury tablosu oluşturmadan önce  $a_n > 0$  olacak şekilde karakteristik denklem,  $F(z)$ , düzenlenir.

	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$\dots$	$z^{n-1}$	$z^n$	<i>Jury tablosu (2'ler)</i>	$2z^3 + 5z^2 + 6z - 1 = 0$
1.satr	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\dots$	$a_{n-1}$	$a_n$		
2.satr	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\dots$	$a_1$	$a_0$		
3.satr	$b_0$	$b_1$	$\dots$	$\dots$	$b_{n-1}$			
4.satr	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$\dots$	$\dots$	$b_0$			
5.satr	$c_0$	$c_1$	$\dots$	$ $	$c_{n-2}$			
6.satr	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$\dots$	$ $	$c_0$			
<i><math>(2n-3)</math>.satır</i>	$q_0$	$q_1$	$q_2$					

*(-1) (6) (5) 2  
2 5 6 -1  
① ② ③ Det  
3 2 1 Tersle*

Gördüğü gibi Jury tablosunda 1. satır doğrudan karakteristik denklemden yazılır. 2.satır ise 1. satırın tersten yazılımı ile oluşturulur. Diğer satırların 1. ve 2. satırdan türetilmeleri aşağıda verilmiştir. Jury tablosu " $n$ " sistemin derecesi olmak üzere  $(2n-3)$  satırdan oluşur.

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}_{k=0, \pm 1, \pm 2}, \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-k-1} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}_{k=0, \pm 1, \pm 2}, \quad d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix}_{k=0, \pm 1, \pm 2} \dots$$

Jury tablosu oluşturulduktan sonra aşağıdaki  $(n-1)$  adet koşulun sağlanıp sağlanmadığına bakılır. Kararlılık için bu şartların sağlanması **kesin gereklidir**. Bu koşullardan herhangi birisi sağlanmaz ise sistem KARARSIZDIR.

- ∅  $|a_n| > |a_0|$
- $|b_0| > |b_{n-1}|$
- $|c_0| > |c_{n-2}|$  Kararlılık için  $(n-1)$  adet yeter koşul kesin sağlanmalıdır.

$$|q_0| > |q_2|$$

*Olmak gerekiyor*

*1. dereceden olğunda  
 $2n-3 = -1$  ols.*

**Örnek:**  $F(z) = 0.0025 + 0.08z + 0.4126z^2 - 1.368z^3 + z^4 = 0$  karakteristik denklemi ile verilen sistemin kararlılığını inceleyiniz.

Gerek koşullar:  $F(1) > 0, F(1) = 0.0025 + 0.08(1) + 0.4126(1)^2 - 1.368(1)^3 + (1)^4 = 0.1271 > 0$

$(-1)^4 F(-1) > 0, F(-1) = 0.0025 + 0.08(-1) + 0.4126(-1)^2 - 1.368(-1)^3 + (-1)^4 = 2.708 > 0$

Her iki gerek koşul sağlanmıştır. Yeter koşul için Jury tablosunu oluşturulacaktır. Sistemin derecesi  $n=4$  olduğuna göre Jury tablosu  $2n-3=2 \cdot 4-3=5$  satırdan oluşacaktır. İlk iki satır karakteristik denkleminden aşağıdaki gibi yazılır.

	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$z^4$
1.satır	0.0025	0.08	0.4126	-1.368	1
2.satır	1	-1.368	0.4126	0.08	0.0025
3.satır					
4.satır					
5.satır					

3. satır 1. ve 2. satırdan aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$b_0 = \begin{vmatrix} 0.0025 & 1 \\ 1 & 0.0025 \end{vmatrix} \approx -1, \quad b_1 = \begin{vmatrix} 0.0025 & -1.368 \\ 1 & 0.08 \end{vmatrix} \approx 1.368$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} 0.0025 & 0.4126 \\ 1 & 0.4126 \end{vmatrix} \approx -0.4116, \quad b_3 = \begin{vmatrix} 0.0025 & 0.08 \\ 1 & -1.368 \end{vmatrix} \approx -0.0834$$

	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$z^4$
1.satır	0.0025	0.08	0.4126	-1.368	1
2.satır	1	-1.368	0.4126	0.08	0.0025
3.satır	$b_0 \approx -1$	$b_1 \approx 1.368$	$b_2 \approx -0.4146$	$b_3 \approx -0.0834$	
4.satır					
5.satır					

4. satır 3. satırın ters sıra ile yazılmasıyla oluşturulur. 5.satır ise 3.ve 4. satırdan hesaplanır.

$$c_0 = \begin{vmatrix} -1 & -0.0834 \\ -0.0834 & -1 \end{vmatrix} = 0.9936, \quad c_1 = \begin{vmatrix} -1 & -0.4146 \\ -0.0834 & 1.368 \end{vmatrix} = -1.402,$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1.368 \\ -0.0834 & -0.4146 \end{vmatrix} = 0.5256$$

	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$z^4$
1.satır	0.0025	0.08	0.4126	-1.368	1
2.satır	1	-1.368	0.4126	0.08	0.0025
3.satır	$b_0 \approx -1$	$b_1 \approx 1.368$	$b_2 \approx -0.4146$	$b_3 \approx -0.0834$	
4.satır	-0.0834	-0.4146	1.368	-1	
5.satır	$c_0 = 0.9936$	$c_1 = -1.402$	$c_2 = 0.5256$		

Jury tablosu oluşturulmuştur. Yeter koşul için,  $(n-1) = 4-1 = 3$  adet şartın sağlanıp sağlanmadığına bakılır.

$$|a_n| > |a_0|, \quad || > |0.0025|$$

$$|b_0| > |b_{n-1}|, \quad |-1| > |-0.0834|$$

$$|c_0| > |c_{n-2}|, \quad |0.9936| > |0.5256|$$

Üç yeter koşulun sağlandığı görülmektedir. Sistem Kararlıdır. Karakteristik denklemin tüm kökleri birim daire içindedir.

Karakteristik denklem kökleri aşağıda hesaplanmıştır.

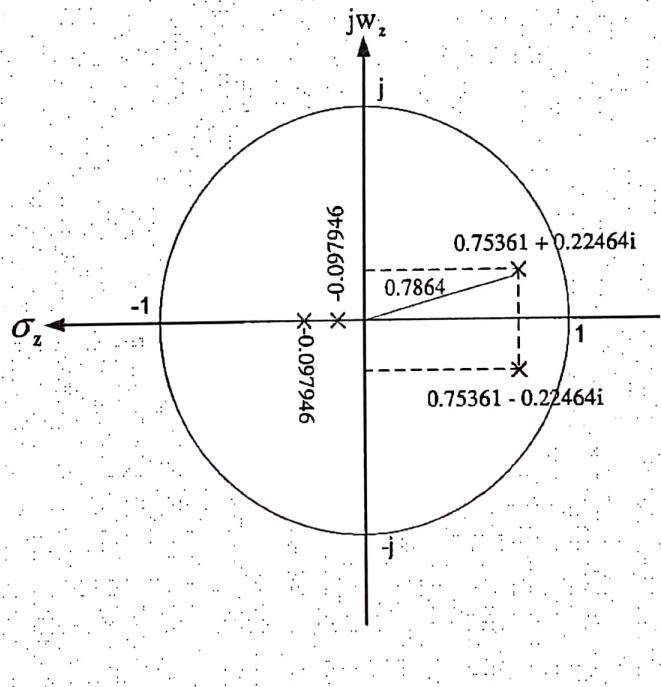
$$F(z) = 0.0025 + 0.08z + 0.4126z^2 - 1.368z^3 + z^4 = 0$$

Jury ile derken  
Köklerin birimda kararlıdır.  
Karsız olğular bulunur.

Kökler,  $a+ib$        $r=\sqrt{a^2+b^2}$

0.75361 + 0.22464i	0.7864 < 1
0.75361 - 0.22464i	0.7864 < 1
-0.097946	0.0979 < 1
-0.041275	0.0413 < 1

Tüm kökler birim daire içindedir. Yanda, z-kompleks düzleminde köklerin (kutuplarının) birim dairede dağılımları gösterilmiştir.

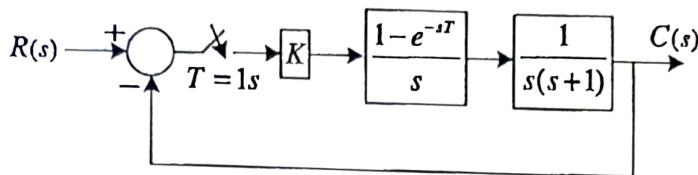


$F(z)$  köklerinin z-kompleks düzleminde kutup dağılımı

Jury kararlılık kriteri, karakteristik denklem kökleri hesaplanmaksızın köklerin z-düzleminde dağılımı hakkında bilgi verir.

$$\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = 0 \rightarrow KTF$$

**Örnek:**



Şekilde verilen kontrol sisteminin jury testi yardımcı ile kararlı olup olmadığını inceleyiniz.

Kararlık analizi için, önce karakteristik denklem  $F(z) = 1 + G(z)H(z) = 0$  elde edilmelidir.

$$G(z) = Z \left\{ K \frac{1 - e^{-sT}}{s^2(s+1)} \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{K}{s^2(s+1)} \right\} \quad \text{Rezidü yöntemi uygulanırsa;}$$

$$G(z) = K(1 - z^{-1}) \left\{ (s+1) \frac{1}{s^2(s+1)} \frac{z}{z - e^{sT}} \Big|_{s=-1} + \frac{d}{ds} \left[ s^2 \frac{1}{s^2(s+1)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right] \Big|_{s=0} \right\}$$

$$G(z) = K(1 - z^{-1}) \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{z}{z - e^{sT}} \Big|_{s=-1} + \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{(s+1)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right] \Big|_{s=0} \right\} \quad \text{Hatırlatma: Rezidü yöntemi}$$

$$G(z) = K \left( \frac{z-1}{z} \right) \left\{ \frac{z}{z-0.367} + \frac{d}{ds} \left[ \frac{z}{sz - se^{sT} + z - e^{sT}} \right] \Big|_{s=0} \right\} \quad X(z) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[ (s-s_i)^m X(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right] \right\}$$

$$G(z) = K \left( \frac{z-1}{z} \right) \left\{ \frac{z}{z-0.367} + \left[ \frac{0 - z(z - e^{sT} - sTe^{sT} - Te^{sT})}{(sz - se^{sT} + z - e^{sT})^2} \right] \Big|_{s=0} \right\}$$

$$G(z) = K \left( \frac{z-1}{z} \right) \left\{ \frac{z}{z-0.367} + \frac{-z(z-2)}{(z-1)^2} \right\} = K \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)}$$

$$G(z) + 1 = 0$$

Kapalı çevrim kontrol sistemi için karakteristik denklem,

$$F(z) = 1 + G(z) = z^2 - (1.368 - 0.368K)z + (0.368 + 0.264K) = 0 \quad \text{olarak elde edilir.}$$

↗ Gerek koşullar incelesin:

$$\text{i-) } F(1) > 0, \quad F(1) = (1)^2 - (1.368 - 0.368K)(1) + (0.368 + 0.264K) > 0 \Rightarrow K > 0$$

$$\text{ii-) } (-1)^2 F(-1) > 0,$$

$$F(-1) = (-1)^2 - (1.368 - 0.368K)(-1) + (0.368 + 0.264K) > 0 \Rightarrow K < 26.3$$

İki gerek koşulun sağlanması için  $K, \quad 0 < K < 26.3$ , aralığında olmalıdır.

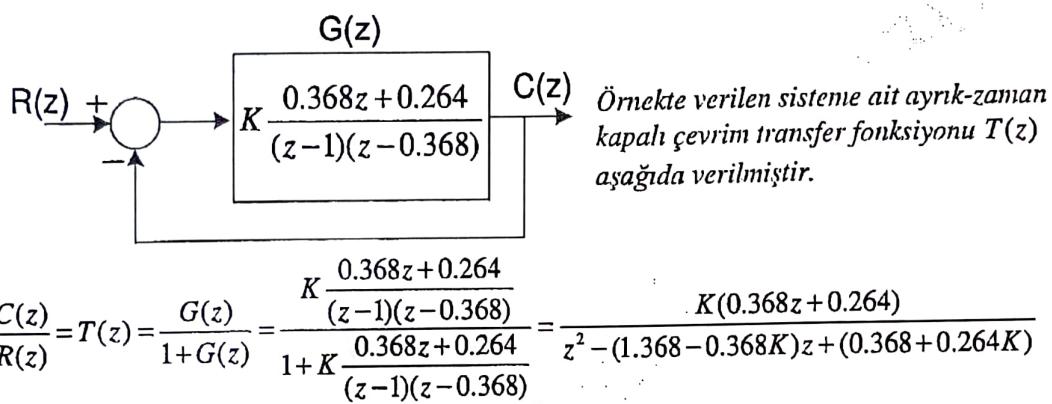
Şimdi yeter koşul için Jury tablosunu oluşturulmalıdır. Sistemin derecesi  $n=2$  olduğuna göre Jury tablosu  $2n-3=2 \cdot 2 - 3 = 1$  satırdan oluşacaktır ve  $n-1=2-1=1$  tane yeter koşul kesin sağlanmalıdır.

Jury tablosu;

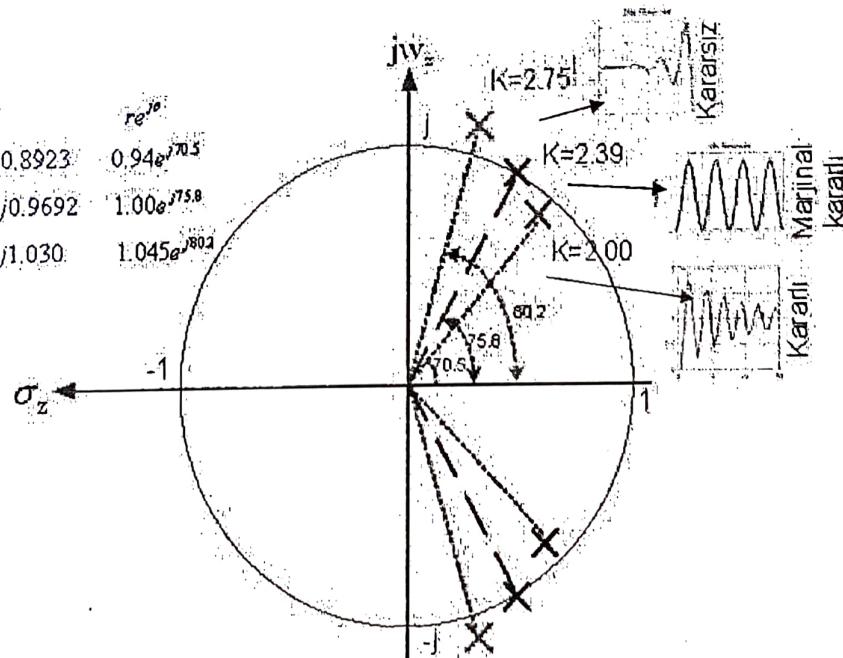
	$z^0$	$z^1$	$z^2$
1.satır	$0.368 + 0.264K_p$	$-(1.368 - 0.368K_p)$	1

$|a_n| > |a_0|, |1| > |0.368 + 0.264K| \Rightarrow K < 2.39$

Gerek koşullar ve yeter koşul için elde edilen kısıtlamalar birleştirilirse sistemin kararlı olabilmesi için  $0 < K < 2.39$  aralığında olması gerekiği görülür.  $K_s = 2.39$  sınır kazanç değeridir.  $K > 2.39$  için karakteristik denklemin birim daire dışında kökü vardır ve sistem kararsızdır *Marginal karsıda*



$K$	Köcher	$r e^{j\theta}$
2.0	$z_{1,2} = 0.316 \pm j0.8923$	$0.94e^{j70.5^\circ}$
2.39	$z_{1,2} = 0.2442 \pm j0.9692$	$1.00e^{j75.8^\circ}$
2.75	$z_{1,2} = 0.1780 \pm j1.030$	$1.045e^{j80.3^\circ}$



Jury kriteri, kapali-çevrim kontrol sistem kutuplarının kazanç  $K$  ya göre kompleks  $z$ -düzlemindeki dağılımı hakkında bilgi vermektedir.  $K$  değerlerine göre kutup yerleri hesaplanmış ve  $z$ -kompleks düzleminde dağılımları ve kutup yerlerine göre birim basamak giriş çıkış cevapları yukarıda verilmiştir.

$S$  ve  $Z$  düzlemleri  $z \triangleq e^{sT}$  basit denklemi ile ilişkili iki-boyutlu kompleks düzlemlerdir.  $s_{1,2} = \sigma \pm jw_d$  olmak üzere, örnek ikinci derece sistem transfer fonksiyonu,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} \text{ dir. Karakteristik denklem kökleri, } 0 < \xi < 1$$

$s_{1,2} = -\xi w_n \pm jw_n \sqrt{1-\xi^2}$  dir. Eğer  $S$ -düzleminde  $s_{1,2}$  noktası biliniyor veya istenen yere atanabiliyor ise aynı zaman özelliklerine sahip  $Z$ -düzlemindeki ayrık zaman kutup yerleri elde edilebilir.

$z \triangleq e^{sT}$  de kökler  $s_{1,2} = -\xi w_n \pm jw_n \sqrt{1-\xi^2}$   $s$ 'te yerine koyulur,

$$z_{1,2} \triangleq e^{-\xi w_n T} e^{\pm(jw_n \sqrt{1-\xi^2})T}$$

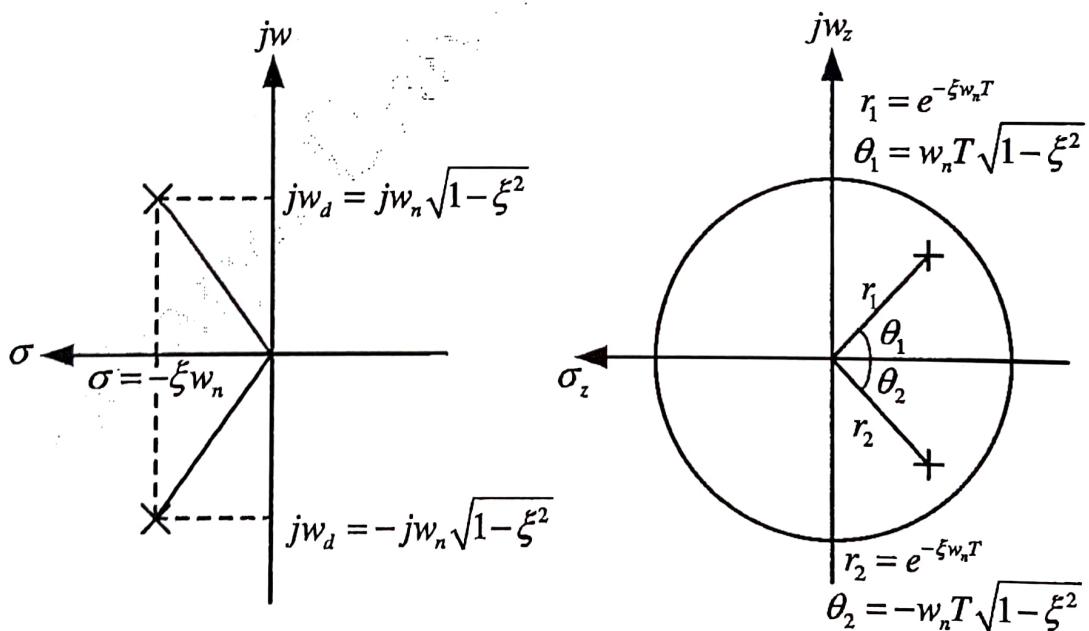
$$= e^{-\sigma T} e^{\pm jw_d T}$$

$$z_{1,2} \triangleq r e^{\pm j\theta}$$

$$r = e^{-\xi w_n T} = e^{-\sigma T} \quad \text{ayırık-zaman kutbun orijine olan uzaklığı.}$$

$$\theta = \pm w_n T \sqrt{1-\xi^2} \quad \text{ayırık-zaman kutbun orijin ile yaptığı açı.}$$

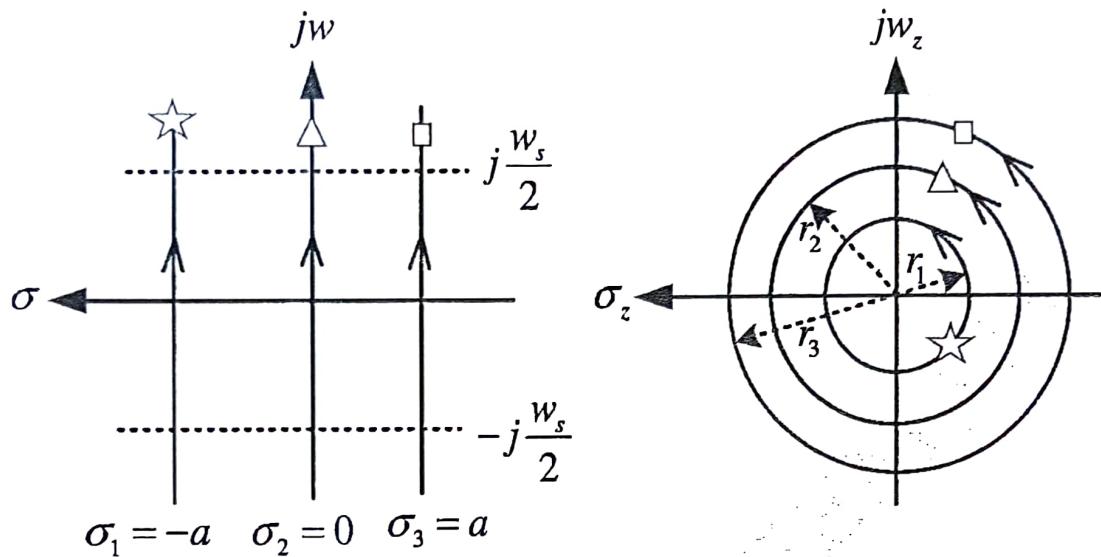
$S$  düzleminde  $s_{1,2}$  köklerinin(kutuplarının)  $Z$ -düzlemindeki yerleri kutupsal koordinat olarak gösterilmiştir.



$s_{1,2}$  Köklerinin  $S$ -düzlemindeki yeri.

$s_{1,2}$  'ye karşılık  $z_{1,2}$  köklerinin  $Z$ -düzlemindeki yeri.

i-)  $\sigma = sbt$  Sönüm doğruları z-düzleminde merkezi orijinde olan dairelere karşılık düşer.



$$r = e^{-\sigma T}$$

$$\theta = \pm w_n T \sqrt{1 - \xi^2}$$

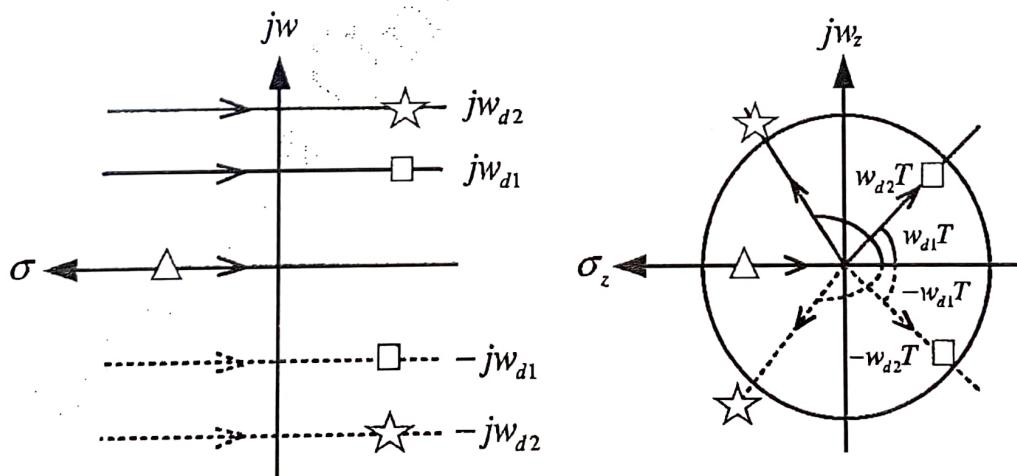
$$r_1 = e^{\sigma_1 T} = e^{-aT} < 1 \quad \text{Z-düzleminde } r_1 \text{ yarı-çaplı daire}$$

$$r_2 = e^{\sigma_2 T} = e^{0T} = 1 \quad \text{Z-düzleminde } r_2 \text{ yarı-çaplı daire}$$

$$r_3 = e^{\sigma_3 T} = e^{aT} > 1 \quad \text{Z-düzleminde } r_3 \text{ yarı-çaplı daire}$$

I. primer seritte  $-\frac{w_s}{2} < w < \frac{w_s}{2}$  dir, ve  $-\pi < \theta < \pi$  olur.

ii-)  $w = sbt$  Doğruları z-düzleminde başlangıcı orijinde olan doğrulara karşılık düşer



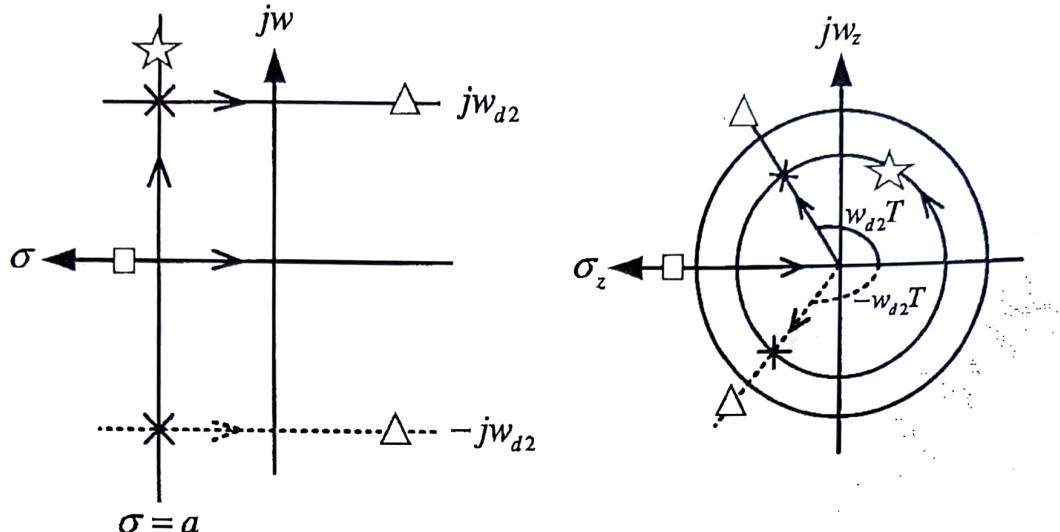
$$r = e^{-\sigma T}$$

$$\theta = \pm w_n T \sqrt{1 - \xi^2}$$

$w_{d1}, w_{d2}$  sabittir.  $\theta_1 = w_{d1}T$ ,  $\theta_2 = w_{d2}T$  sabit açılarıdır.

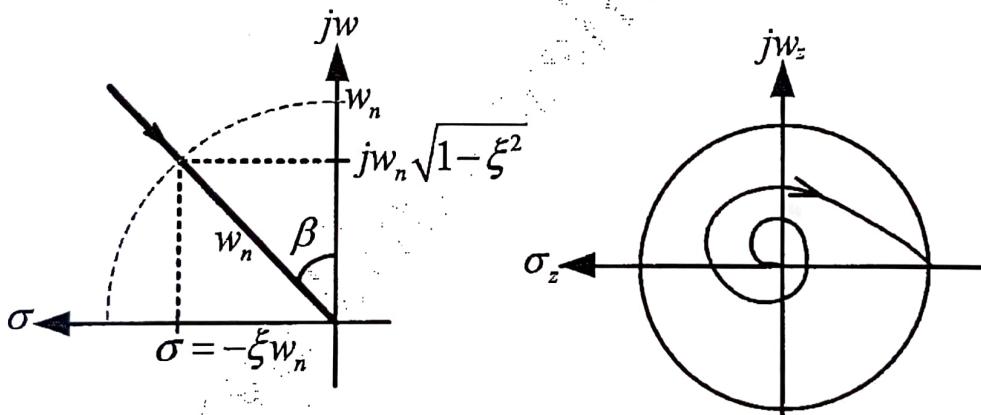
$-\infty < \sigma < \infty$  değişir.  $0 < r_1 < \infty$  ve  $0 < r_2 < \infty$  arasında değişir.

iii-)  $\sigma = sbt$  Sönüüm doğruları ile  $w = sbt$  Doğrularının Z-düzlemindeki yerleri.



i-) ve ii-) de anlatılan bilgiler ışığında  $\sigma = sbt$  sönüm doğruları ile  $w = sbt$  doğrularının Z-düzlemindeki yerleri yukarıda şekilde verilmiştir.

iv-)  $\frac{w}{\sigma} = sbt$  Doğrusunun Z-Düzlemindeki Karşılığı.



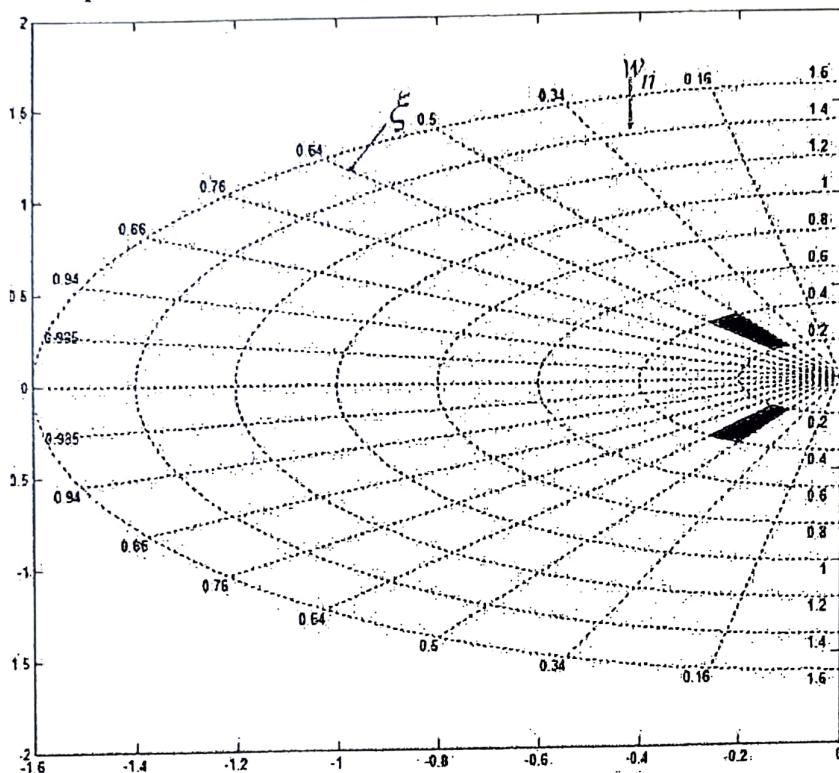
$$S\text{-düzleminde, } \tan \beta = -\frac{\xi w_n}{w_n \sqrt{1-\xi^2}} = -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = -\frac{\sigma}{w} \quad \text{yazılır.}$$

$$z \triangleq e^{\sigma T} e^{jwT} = e^{-w(\frac{\sigma}{w})T} e^{jwT} \quad (-w \text{ ile çarp } -w \text{'e böl})$$

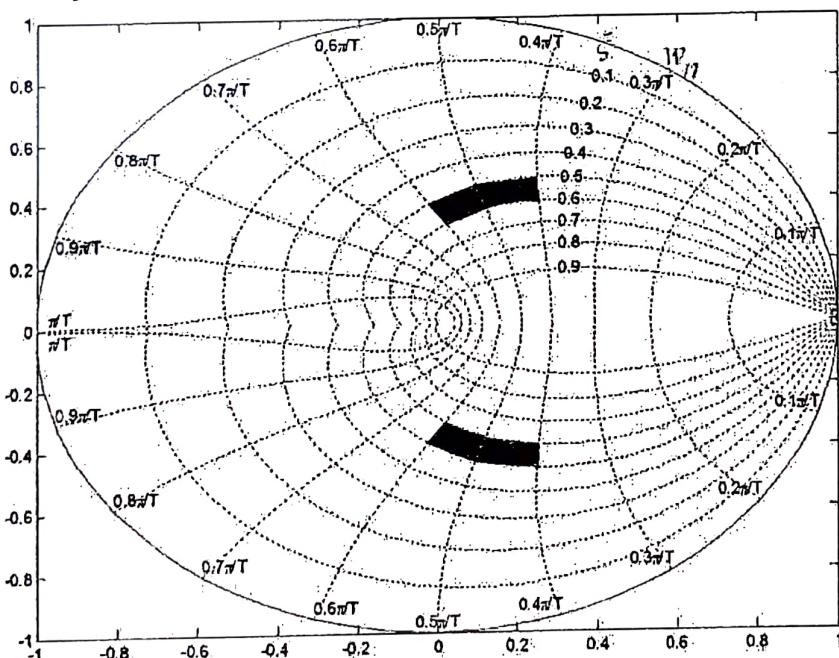
$$\begin{aligned} &= e^{-w \tan \beta T} e^{jwT} \\ T = \frac{2\pi}{w_s} \text{ ise, } z \triangleq e^{-2\pi \frac{w}{w_s} \tan \beta} e^{j2\pi \frac{w}{w_s}} \end{aligned}$$

elde edilir.  $\beta = sbt$  için  $z$ , bağımsız değişken  $w$ 'nın fonksiyonu bir spiraldir ( $\beta = 0^\circ$  ve  $\beta = 90^\circ$  hariç).

$S$ -Kompleks düzleminde sabit  $\xi$  doğruları ve  $w_n$  yarı-çaplı daireler aşağıda verilmiştir.



$S$ -Kompleks düzleminde sabit, II. dereceden örnek sistem için,  $\xi$  doğruları ve  $w_n$  yarı-çaplı dairelere karşı  $Z$ -düzleminde karşı gelen eğriler aşağıda verilmiştir.  $S$ -düzleminde  $0.5 < \xi < 0.6$  ve  $0.2 < w_n < 0.4$  bölgelerinin  $Z$ -düzlemindeki karşılıkları gösterilmiştir.



$S$ -düzleminde  $0.5 < \xi < 0.6$  ve  $0.2 < w_n < 0.4$  için  $Z$ -düzleminde bölgeler yukarıda verilmiştir.

**Örnek:** %2 kriterine göre yerleşme zamanı  $t_s = 4\text{ sn}$  ve aşım %4 olarak verilmektedir.  
a) ikinci derece sürekli zaman ve ayrık zaman transfer fonksiyonlarını elde ediniz.

- b) S ve Z-düzleminde kutup dağılımını gösteriniz.
- c)  $c(t)$  ve  $c(kT)$  ifadelerini elde ediniz.
- d) Birim basamak giriş için cevap eğrilerini çiziniz.

Örneklemme zamanını  $T = \frac{T_d}{10}$  alınız,  $T_d$  osilasyon periyodu.

$$a) \%2 kriterine göre yerleşme zamanı, t_s = \frac{4}{\xi w_n} = 4 \rightarrow \xi w_n = 1$$

$$\% \text{aşım} = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \pi} \rightarrow \frac{4}{100} = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \pi}$$

$$\ln(0.04) = -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \pi \ln(e) \rightarrow -3.2188 = -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \pi$$

$$(3.2188)^2 = \frac{\xi^2}{1-\xi^2} \pi^2 \rightarrow 10.36 - 10.36 \xi^2 = \xi^2 \pi^2$$

$$\xi^2 = \frac{10.36}{\pi^2 + 10.36} \rightarrow \xi = \sqrt{\frac{10.36}{\pi^2 + 10.36}}$$

$$\boxed{\xi = 0.7156 \text{ elde edilir.}}$$

$\xi w_n = 1$  ifadesinden  $w_n = \frac{1}{\xi} = \frac{1}{0.7156} \rightarrow w_n = 1.3973 \text{ rad/sn}$  doğal açısal frekans elde edilir.

Sürekli-zaman II. dereceden örnek transfer fonksiyon ifadesi kullanılır ve elde edilen  $\xi$  ve  $w_n$  parametre değerleri yerlerine yazılır.

$$T(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} = \frac{1.3973^2}{s^2 + 2 * 0.7156 * 1.3973 s + 1.3973^2}$$

$$\boxed{T(s) = \frac{1.9526}{s^2 + 2s + 1.9526} \text{ elde edilir.}}$$

Ayrik-zaman II. dereceden transfer fonksiyon için  $\xi$  ve  $w_n$  parametre değerleri ile kutuplarlar  $s_{1,2}$  hesaplanır ve II. derece karakteristik denklem oluşturulur. Son olarak son değer teoreminden kazanç ayarı yapılır.

$$s_{1,2} = -\xi w_n \pm j w_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{ifadesi ile kökler hesap edilir.}$$

$$s_{1,2} = -0.7156 * 1.3973 \pm j 1.3973 \sqrt{1 - 0.7156^2} \quad \xi \text{ ve } w_n \text{ parametre değerleri yerlerine yazılır.}$$

$$s_{1,2} = -1 \pm j 0.976 \quad \text{sürekli-zaman karakteristik denklem kökleri.}$$

**Hatırlatma:**  $s_{1,2} = \sigma \pm j \omega_d$  dır.  $\omega_d$  osilasyon açısal frekansıdır. Osilasyon periyodu,  $T_d$

$$\text{olmak üzere, } T_d = \frac{2\pi}{\omega_d \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{2\pi}{\omega_d} \text{ dir.}$$

$$T_d = \frac{2\pi}{w_d} = \frac{2\pi}{0.976} \rightarrow T_d = 6.4376 \text{ sn}$$

$$T = \frac{T_d}{10} = \frac{6.4376}{10} = 0.64376 \text{ sn Örneklemme zamanı seçilir.}$$

$s_{1,2} = -1 \pm j0.976$  ve  $T = 0.64376 \text{ sn}$  kullanılarak  $s_{1,2}$  karşılık gelen ayrık-zaman kökler  $z_{1,2}$  hesaplanacaktır.

$$z_1 = e^{s_1 T} = e^{(-1+j0.976)*0.6438} = e^{-0.6438} (\cos(0.6283) + j \sin(0.6283)) = 0.5335(0.8090 + j0.5878)$$

$$z_1 = 0.4316 + j 0.3136 \quad \text{I. ayrık-zaman kompleks kök.}$$

$$z_2 = e^{s_2 T} = e^{(-1-j0.976)*0.6438} = e^{-0.6438} (\cos(0.6283) - j \sin(0.6283)) = 0.5335(0.8090 - j0.5878)$$

$$z_2 = 0.4316 - j 0.3136 \quad \text{II. ayrık-zaman kompleks eşlenik kök.}$$

Ayrik-zaman II. dereceden transfer fonksiyon,  $T(z) = \frac{az}{(z - z_1)(z - z_2)}$  dir.

Elde edilen  $z_{1,2}$  kökleri,  $T(z)$  de yerlerine koyulur ide,

$$T(z) = \frac{az}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{az}{(z - 0.4316 - j 0.3136)(z - 0.4316 + j 0.3136)}$$

$$T(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{az}{z^2 - 0.8632z + 0.2853} \quad \text{elde edilir.}$$

$T(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$  'in kazancının Birim olabilmesi için son değer teoreminden birim basamak

giriş için "a" hesaplanmalıdır.  $R(z) = \frac{z}{z-1}$  olmak üzere,

$$C(z) = \frac{z}{z-1} \frac{az}{z^2 - 0.8632z + 0.2853} \quad \text{olur. Son değer teoreminden,}$$

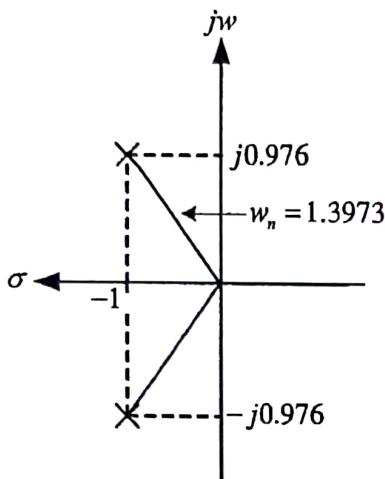
$$C(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{z-1} \frac{a*1}{z^2 - 0.8632z + 0.2853} = 1$$

$$\frac{a}{1 - 0.8632 + 0.2853} = 1 \rightarrow a = 0.4221 \quad \text{ve transfer fonksiyonunda yerine koyulur.}$$

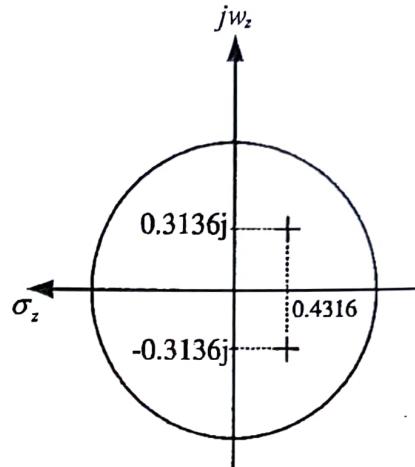
Ayrik-zaman II. dereceden transfer fonksiyon,

$$T(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.4221z}{z^2 - 0.8632z + 0.2853} \quad \text{olarak elde edilir.}$$

b)  $s_{1,2} = -1 \pm j0.976$  ve  $z_{1,2} = 0.4316 \pm j0.3136$  kompleks eşlenik köklerinin sırası ile S ve Z-düzlemlerde kutup yerleri aşağıda verilmiştir.



$s_{1,2} = -1 \pm j0.976$  kutup yerleri



$z_{1,2} = 0.4316 \pm j0.3136$  kutup yerleri

c)  $c(t) = L^{-1}\{C(s)\}$  ifadesi,  $C(s) = R(s) \frac{1.9526}{s^2 + 2s + 1.9526}$  dir.

$$C(s) = \frac{1.9526}{s(s^2 + 2s + 1.9526)} = \frac{1.9526}{s(s+1+j0.976)(s+1-j0.976)}$$

$c(t) = L^{-1}\left\{\frac{1.9526}{s(s+1+j0.976)(s+1-j0.976)}\right\}$  ters Laplace dönüşümü rezidü yöntemi ile hesaplanacaktır.

**Hatırlatma:** Ters Laplace rezidü toplamları ile elde edilebilir.

$$c(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (s-s_i)^m F(s) e^{st} \right]_{s=s_i}$$

$$C(t) = \left. \frac{1.9526}{s(s+1+j0.976)(s+1-j0.976)} e^{st} \right|_{s=0} + \\ \left. \frac{1.9526}{(s+1+j0.976) \cancel{s(s+1+j0.976)(s+1-j0.976)}} e^{st} \right|_{s=-1-j0.976} + \\ \left. \frac{1.9526}{(s+1-j0.976) \cancel{s(s+1+j0.976)(s+1-j0.976)}} e^{st} \right|_{s=-1+j0.976}$$

$$C(t) = \frac{1.9526}{(0+1+j0.976)(0+1-j0.976)} e^{0t} + \frac{1.9526}{(-1-j0.976)(-1-j0.976+1+j0.976)} e^{(-1-j0.976)t} + \\ \frac{1.9526}{(-1+j0.976)(-1+j0.976+1+j0.976)} e^{(-1+j0.976)t} \\ C(t) = 1 + (-0.5 - 0.5123j)e^{(-1-0.976j)t} + (-0.5 + 0.5123j)e^{(-1+0.976j)t}$$

$$C(t) = 1 + 0.7159e^{-2.344j}e^{(-1-0.976j)t} + 0.7159e^{2.344j}e^{(-1+0.976j)t}$$

Hatırlatma:

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$C(t) = 1 + 2 * 0.7159e^{-t} \left( \frac{e^{-(0.976t+2.344j)} + e^{(0.976t+2.344j)}}{2} \right)$$

$$C(t) = 1 + 1.4318e^{-t} \cos(0.976t + 2.344) \quad \text{sürekli-zaman cevap elde edilir.}$$

Birim basamak giriş için, ayrık-zaman  $c(kT)$  cevabı;  $R(z) = \frac{z}{z-1}$  giriş olmak üzere,

$$C(z) = \frac{z}{z-1} \frac{0.4221z}{z^2 - 0.8632z + 0.2853} = \frac{0.4221z^2}{(z-1)(z-0.4316-j 0.3136)(z-0.4316+j 0.3136)}$$

$$c(kT) = Z^{-1}\{C(z)\} = Z^{-1}\left\{ \frac{0.4221z}{(z-1)(z-0.4316-j 0.3136)(z-0.4316+j 0.3136)} \right\}$$

Hatırlatma:  $x(kT) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z - z_i)^m X(z) z^{k-1} \right]_{z=z_i}$

$$c(kT) = \left[ \cancel{(z-1)} \frac{0.4221z^{\cancel{z}}}{\cancel{(z-1)}(z-0.4316-j 0.3136)(z-0.4316+j 0.3136)} z^{k-1} \right]_{z=1} +$$

$$\left[ \cancel{(z-0.4316-j 0.3136)} \frac{0.4221z^{\cancel{z}}}{\cancel{(z-1)} \cancel{(z-0.4316-j 0.3136)} (z-0.4316+j 0.3136)} z^{k-1} \right]_{z=0.4316+j 0.3136} +$$

$$\left[ \cancel{(z-0.4316+j 0.3136)} \frac{0.4221z^{\cancel{z}}}{(z-0.4316-j 0.3136)(z-1) \cancel{(z-0.4316+j 0.3136)}} z^{k-1} \right]_{z=0.4316-j 0.3136}$$

$$c(kT) = \frac{0.4221*1}{(1-0.4316-j 0.3136)(1-0.4316+j 0.3136)} 1^k +$$

$$\frac{0.4221*(0.4316+0.3136j)}{(0.4316+0.3136j-1)(0.4316+0.3136j-0.4316+0.3136j)} (0.4316+0.3136j)^k +$$

$$\frac{0.4221*(0.4316-0.3136j)}{(0.4316-0.3136j-1)(0.4316-0.3136j-0.4316-0.3136j)} (0.4316-0.3136j)^k$$

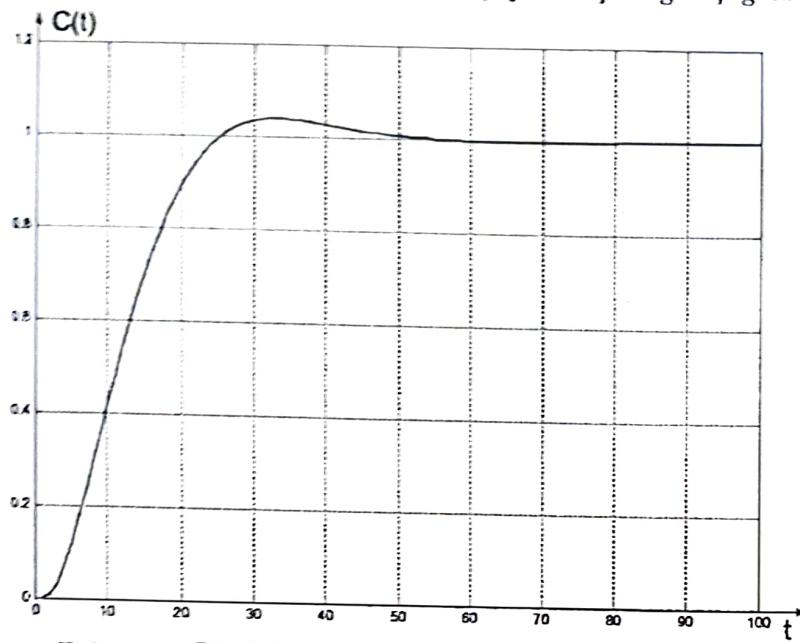
$$c(kT) = 1.0016 + (-0.5008 + 0.2347j)(0.4316+0.3136j)^k + (-0.5008 - 0.2347j)(0.4316-0.3136j)^k$$

$$c(kT) = 1.0016 + 0.5531e^{j2.7033} 0.5335^k e^{j0.6284k} + 0.5531e^{-j2.7033} 0.5335^k e^{-j0.6284k}$$

$$c(kT) = 1.0016 + 0.5335^k 2 * 0.5531 * \left( \frac{e^{j(0.6284k+2.7033)} + e^{-j(0.6284k+2.7033)}}{2} \right)$$

$$c(kT) = 1.0016 + 1.1062 * 0.5349^k \cos(0.6284k + 2.7033) \quad \text{ayırık-zaman cevap ifadesi elde edilir.}$$

d)  $C(t) = 1 + 1.4318e^{-t} \cos(0.976t + 2.344)$  ifadesi için eğri aşağıda verilmiştir.



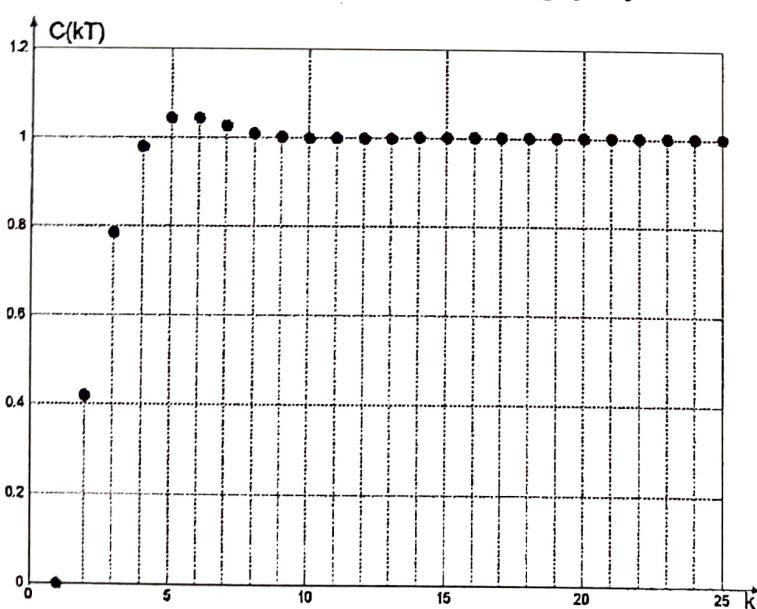
II. dereceden Sürekli-zaman transfer fonksiyon birim basamak cevabı.

$c(kT) = 1.0016 + 1.1062 * 0.5349^k \cos(0.6284k + 2.7033)$  ifadesine ait eğri çizimi:

$x(kT)$  ifadesinde  $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  için  $x(0), x(T), x(2T), x(3T), x(4T), \dots$  hesaplanır.

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	.....
$x(kT)$	0	0.4206	0.7853	0.9807	1.0454	1.0455	1.0270	1.0111	1.0025	0.9997	0.9997	1.0005	1.0012	

$k$  'ya göre  $x(kT)$  değer dizisi aşağıda verildiği gibi çizilir.

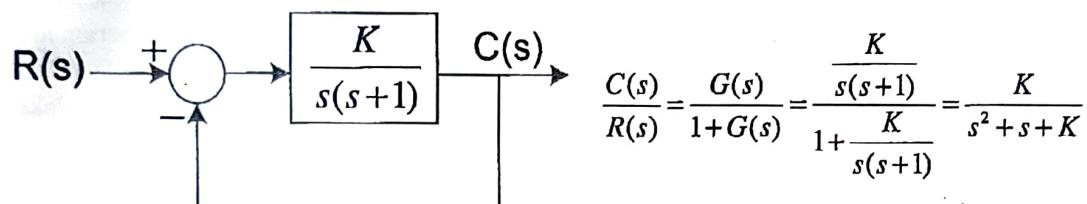


II. dereceden ayrik-zaman transfer fonksiyon birim basamak cevabı.

### 19. Köklerin Geometrik Yerleri

Açık-çevrim transfer fonksiyon kazancı  $0 < K < \infty$  aralığı için, kapalı-çevrim transfer fonksiyon kutuplarının değişimi, sistem kararlılığı ve dinamiği açısından önemlidir. Köklerin geometrik yer eğrisi çiziminden önce bir örnekle kapalı-çevrim kutuplarının değişimini  $0 < K < \infty$  aralığı için çizilecektir.

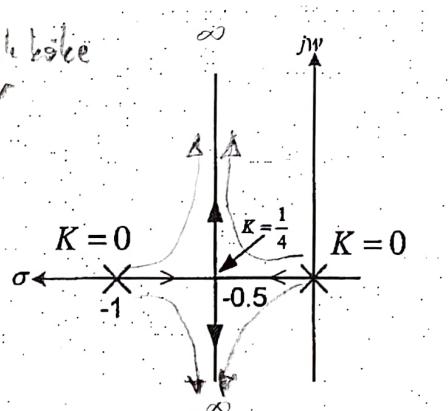
**Örnek:**



$$\text{Karakteristik denklem, } F(s) = s^2 + s + K = 0 \quad s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4K}}{2}$$

$K$	$s_{1,2}$
$K = 0$	$s_1 = -1, s_2 = 0$
$K = \frac{1}{4}$	$s_{1,2} = -\frac{1}{2}$ kahı kökler
$K \leq \frac{1}{4}$	$s_{1,2}$ gerçek kökler
$K > \frac{1}{4}$	$s_{1,2}$ kompleks kökler

Sıfırдан kahı kökler  
döğru gider

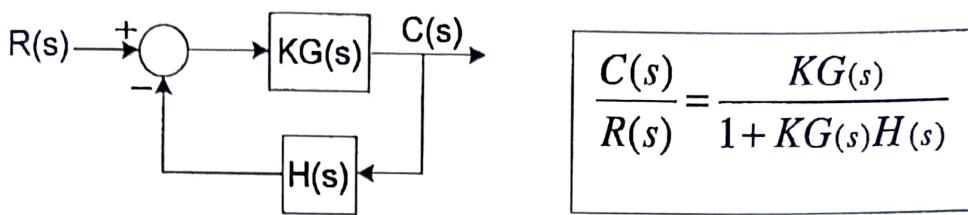


### 19. 1 Köklerin Geometrik Yerleri Yönteminin Kontrol Sistemlerine Uygulanması

Köklerin geometrik yer eğrisinin oluşturulmasında amaç, açık çevrim kontrol sisteminin kutup ve sıfırları bilindiğinde veya bunlar istenilen yere yerleştirildiğinde kontrol sisteminin parametreleri, özellikle K kazancı, değiştiğinde karakteristik denklem köklerinin, başka bir ifade ile kapalı çevrim kutuplarının, nasıl değiştiğinin incelenmesidir. Karakteristik denklem köklerinin s-düzleminde değişimini gösteren eğriye köklerin geometrik yer eğrisi denir.

**Köklerin geometrik yer eğrisi,**

- Kapalı-çevrim sisteminin kararlığı hakkında bilgi verir.
- Kapalı-çevrim sisteminin dinamiği hakkında bilgi verir.
- Kapalı-çevrim sisteminde istenilen performansı sağlayacak olan kontrolcü tasarımu yer-eğrisine dayalı olarak yapılabılır.
- Yer-eğrisine dayalı olarak K-kazancına göre sentez yapılabilir.
- K-kazancının veya diğer parametre değişimlerine göre kapalı-çevrim kutuplarının değişimini incelenmesi yapılır.
- Sürrekli-zaman ve ayrik-zaman sistem analiz ve tasarımında aynı çizim kurallarının geçerli olduğu grafik bir yöntemdir.



Kapalı-çevrim transfer fonksiyonu karakteristik denklem köklerinin kazanç veya parametre değişimlerini, açık-çevrim  $G(s)H(s)$  transfer fonksiyonunun  $K=0$  için kutup ve sıfırlarından başlayıp S-kompleks düzleminde  $0 < K < \infty$  aralığında çizmek için,  $s = \sigma + j\omega$  kompleks değişken olmak üzere, gerekli koşullar

$$F(s) = 1 + KG(s)H(s) = 0 \text{ karakteristik denkleminden elde edilir.}$$

$KG(s)H(s) = -1$  ifadesi, 's' parametresinden dolayı kompleksdir.

Hatırlatma:  $-1 = re^{\pm j180k} = 1e^{\pm j180(2k+1)} = 1 \angle (2k+1)\pi \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$-1 = r e^{j\theta}$  modül faz  
modül ve faz  
ve olur olur

$KG(s)H(s) = -1$  kompleks ifade modül ve faz ve olarak,

$$KG(s)H(s) = |KG(s)H(s)| \angle KG(s)H(s) \quad \text{yazılır. Bu ifadeler ile,}$$

Modül koşulu:  $|KG(s)H(s)| = 1$  ve

Faz koşulu:  $\angle KG(s)H(s) = \sum_{i=1}^m \angle z_i - \sum_{j=1}^n \angle p_j = (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  elde edilir.  
olarak  $\angle z_i$  sıfır  $\angle p_j$  payın kutuları - payla kutuları

$KG(s)H(s)$  açık-çevrim transfer fonksiyonundan faydalananarak çizilen geometrik yer eğrisinin modül ve faz koşullarını sağlayan yerler kapalı-çevrim transfer fonksiyon kutuplarına aittir.

Genel olarak bir sistemin açık-çevrim transfer fonksiyonu,

$\leftarrow GTF \quad G(s)H(s) = \frac{K(s+z_{01})(s+z_{02})\dots(s+z_{0m})}{s^j(s+p_{k1})(s+p_{k2})\dots(s+p_{kp})} \quad \text{olarak verilsin.}$

Açık-çevrim transfer fonksiyon kutupları,  $-p_{k1}, -p_{k2}, \dots, -p_{kp}, s^j = 0$  dir.

Açık-çevrim transfer fonksiyon sıfırları,  $-z_{01}, -z_{02}, \dots, -z_{0m}$  dir.

Açık-çevrim transfer fonksiyon kazancı  $K$  dir.

Açık-çevrim transfer fonksiyon kutup sayısı  $n = (j+P)$

Açık-çevrim transfer fonksiyon sıfır sayısı  $m$

Karakteristik denklem ifadesi yazılır ise,

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+z_{01})(s+z_{02})\dots(s+z_{0m})}{s^j(s+p_{k1})(s+p_{k2})\dots(s+p_{kp})} = 0$$

$$F(s) = s^j(s+p_{k1})(s+p_{k2})\dots(s+p_{kp}) + K(s+z_{01})(s+z_{02})\dots(s+z_{0m}) = 0 \quad \text{elde edilir.}$$

175  $K = -s^j(s+p_{k1})(s+p_{k2})\dots$

Kutuplarda  $K=0$   $(s+z_{01})(s+z_{02})\dots$   
sıfırlarda  $K=\infty$   
Her kutup bir sıfırın sonlandırır

Tanımlamalar göz önünde bulundurularak aşağıda kurallar verilir.

**1-  $K = 0$  için kapalı-çevrim kutupları, aynı zamanda açık-çevrim kutuplarıdır.**

$F(s) = s^J(s + p_{k1})(s + p_{k2}) \dots (s + p_{kp}) + K(s + z_{01})(s + z_{02}) \dots (s + z_{0m}) = 0$  denkleminde,  
 $K = 0$  verilir ise,  $F(s) = s^J(s + p_{k1})(s + p_{k2}) \dots (s + p_{kp}) = 0$  olur.  $K = 0$  elde edilen kutuplar,  
 $-p_{k1}, -p_{k2}, \dots, -p_{k3}, s^J = 0$  olur. Açık-çevrim kutupları ile aynıdır.

**2-  $K = \infty$  için kapalı-çevrim kutupları açık-çevrim sıfırlarına eşit olur.**

$F_{k=0}(s) = \lim_{K \rightarrow \infty} F(s) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \{ s^J(s + p_{k1})(s + p_{k2}) \dots (s + p_{kp}) \} + (s + z_{01})(s + z_{02}) \dots (s + z_{0m}) = 0$   
 $F_{k=0}(s) = (s + z_{01})(s + z_{02}) \dots (s + z_{0m}) = 0$  olur.  $K = \infty$  için kutuplar yazılır ise,  
 $-z_{01}, -z_{02}, \dots, -z_{0m}$  olur. Açık-çevrim sıfırları ile aynıdır.

**3- Açık-çevrim transfer fonksiyon kutup sayısı kadar geometrik yer eğrisinin kolu vardır.**  
Bir kol,  $K = 0$  için, açık-çevrim kutbundan başlar,  $K = \infty$  için açık-çevrim sıfırında son bulur.

**4- Kompleks açık-çevrim transfer fonksiyon kutup ve sıfırları, eşlenik olduklarından geometrik yer eğrisi reel eksene göre simetiktir.**

**5- Eğer açık-çevrim transfer fonksiyon sıfır sayısı ' $m$ ', kutup sayısı ' $n$ 'den küçük ise ( $m < n$ ),  $n-m$  tane asimtot vardır.  $n-m$  tane geometrik yer eğrisi kolu  $K = \infty$  da açık-çevrim sıfırında son bulur.**

$n-m$  tane her bir asimtot, kompleks S-düzleminde reel ekseni ile,  $\theta = \pm \frac{(2k+1)180}{n-m}$   
 $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  açısı yapar.

$n-m$  tane asimtotların tümü kompleks S-düzleminde reel ekseni tek bir noktada keser.  
Kestikleri noktanın orijine uzaklıği aşağıda verilen ifade ile hesaplanır.

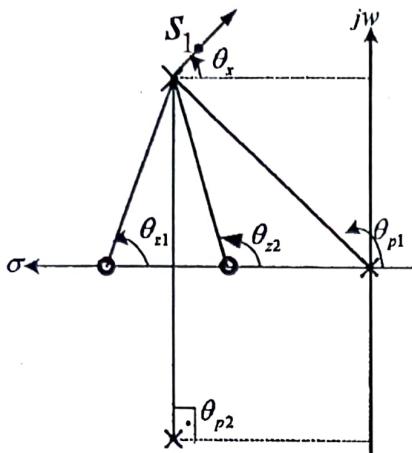
$$\sigma = \frac{\sum \text{açık çevrim sonlu kutuplar} - \sum \text{açık çevrim sonlu sıfırlar}}{n-m}$$

**6- Reel eksen üzerinde kök yer eğrileri faz koşulu uygulanarak bulunur (kapalı-çevrim kutuplarının S-kompleks düzleminin reel ekseninde bulunduğu bölgeler.)**

Reel eksen üzerinde herhangi bir bölgede herhangi bir nokta seçilir, bu nokta bölge olarak iki kutup arası, iki sıfır arası veya kutup-sıfır arasındadır. Seçilen noktanın sağındaki sonlu açık-çevrim kutup ve sıfır sayıları tek sayı ise o noktanın bulunduğu bölge yer eğrisine aittir, çift ise dahil değildir. Diğer bir ifade ile  $0 < K < \infty$  için o bölgede kapalı-çevrim reel kutbu vardır.

Sanal eşlenik kutuplar için faz-koşulları her noktada sağlanır.

**7- köklerin yer eğrisinin bir kompleks kutuptan çıkış yada bir kompleks sıfır'a geliş açısı köklerin yer eğrisinin sağladığı açı koşulundan bulunur. İlgiilenilen kutba yada sıfır'a çok yakın bir  $s_1$  noktası seçilir faz-koşulu uygulanır.**



$$(\theta_{z1} + \theta_{z2}) - (\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_x) = 180^\circ$$

**8-** Kök yer eğrisinin S-kompleks düzleminde imajiner ekseni kesme noktaları iki yoldan bulunabilir.

- i) Kararlılık analizinden sınır kazanç  $K$ , bulunur.  $s^2$  terimden  $w_s$  osilasyon açısal frekans elde edilir.
- ii) Karakteristik denklemde  $s$  yerine  $jw$  verilir,  $w_s$  ve  $K$ , için çözüm yapılır.

**9- Kopma noktaları:** Reel eksen üzerinde açık-çevrim transfer fonksiyonunun iki kutbu arasında yer eğrisi var ise bu iki kutup arasında çıkış olarak bir kopma noktası vardır. Eğer reel eksen üzerinde açık-çevrim transfer fonksiyonunun iki sıfırı arasında yer eğrisi var ise bu iki sıfır arasında giriş olarak kopma noktası vardır.

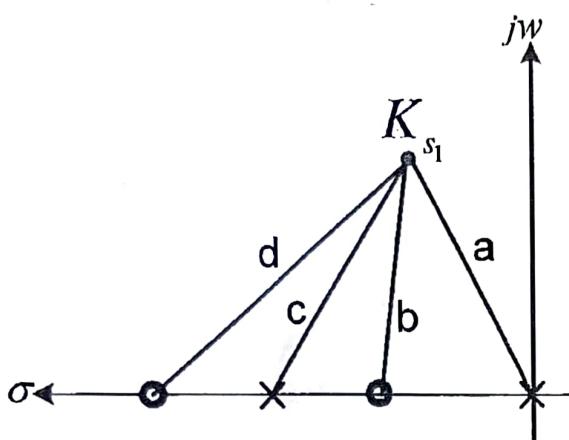
Kopma noktaları,

$$\frac{dG(s)H(S)}{ds} = 0 \text{ denkleminden bulunur. Kopma noktasında katlı kök vardır.}$$

**10- Kök eğrisinde herhangi bir noktaya ait kazancın bulunması;**

$F(s) = 1 + KG(s)H(s) = 0$  karakteristik denkleminden,

$$K = \frac{1}{|G(s)H(s)|} = \frac{\prod_{i=1}^n |s + p_i|}{\prod_{i=1}^m |s + z_i|} = \frac{G(s)H(s)' \text{kutuplarının } s_1 \text{ noktasına uzaklıklarının çarpımı}}{G(s)H(s)' \text{sıfırlarının } s_1 \text{ noktasına uzaklıklarının çarpımı.}}$$

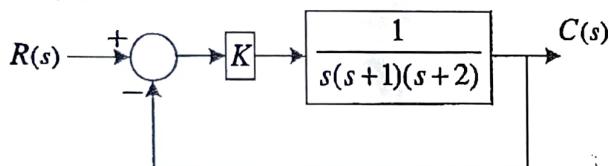


Şekilde  $s_1$  noktasındaki kazanç

$$K_{s_1} = \frac{a * c}{b * d} \text{ dir.}$$

Köklerin geometrik yer eğrisinin çiziminde verilen 1-10 arasındaki tüm kurallar hem sürekli-zaman hem de ayrik zaman kontrol sistemleri içinde geçerlidir.

Örnek:



Şekilde verilen sistemin  $K$ 'ya göre geometrik yer eğrisini (kök yer eğrisini) çiziniz. Başka bir ifade ile karakteristik denklem köklerinin  $K$ 'ya göre değişimini inceleyiniz.

Burada amaç  $K$ ,  $0 < K < \infty$  aralığında değişirken kapalı çevrim sistemin köklerinin s-düzleminde (veya z-düzleminde) değişimini incelemektir.

Çözüm:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

acık-çevrim transfer fonksiyonu.

(1)

Kutuplar

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = 0 \\ p_2 = -1 \\ p_3 = -2 \end{array} \right\} n = 3 \rightarrow \text{kutup sayısı}$$

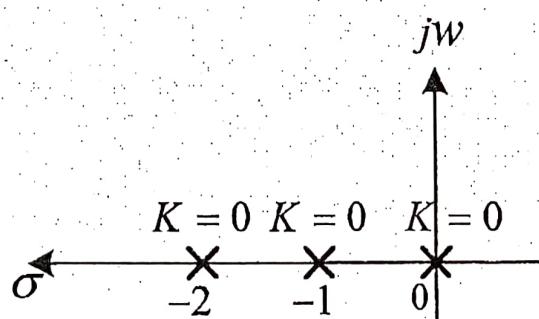
$$\left. \begin{array}{l} z_1 = \infty \\ z_2 = \infty \\ z_3 = \infty \end{array} \right\} m = 0 \rightarrow \text{sıfır sayısı}$$

Sıfırlar

$$\boxed{n = 3 \quad \text{adet kol vardır.} \\ n - m = 3 \quad \text{adet asimtot vardır.}}$$

(2)

S-kompleks düzleminde  $G(s)H(s)$  kutup Sıfır dağılımı yanında verilmiştir.

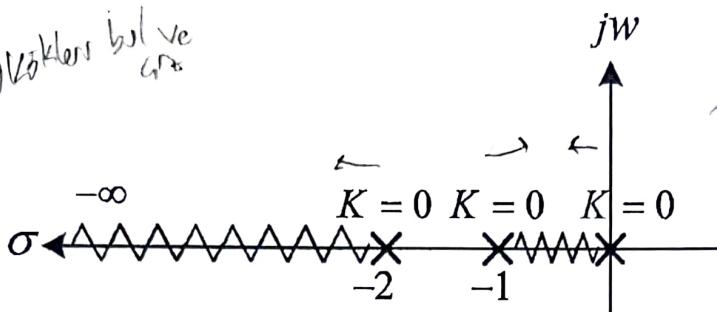


*X'* *X* Kompleks düzlemindeki  
kötümleri.

Otomatik Kontrol Prof.Dr. Ayhan Özdemir

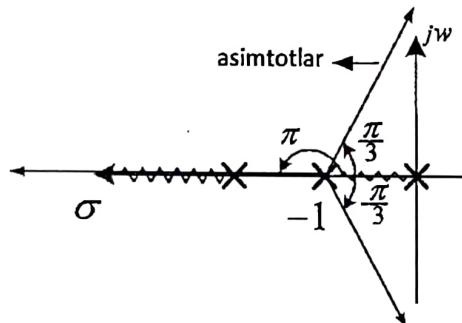
6. Kural uygulandığında reel eksende yer eğrisine ait yerler aşağıda gösterilmiştir.

(2) *Vektörler bül ve*



*Sayılarla kural bireye göre 15000  
tekrar yapın ve 50000  
gittikten sonra 15000'e*

(3)



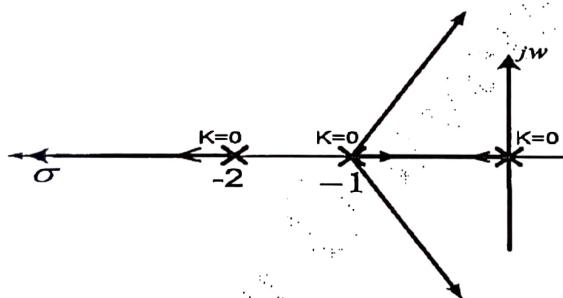
Asimtotların reel eksenin kesme noktası.

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{[(-1) + (-2) + (0)] - 0}{3} = -1$$

Asimtotların reel eksen ile yaptıkları açılar.

$$\theta_a = \pm \frac{(2k+1)\pi}{n-m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow \theta_a = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \pi$$

$k = -1, 0, 1 \rightarrow 3$  deşimpoğlu olduğunu



1-kutup dağılımları yapıldı,  $K=0$  noktaları.

2-Reel eksende kök eğrisine ait bölgeler belirlendi (kırmızı renkli bölgeler).

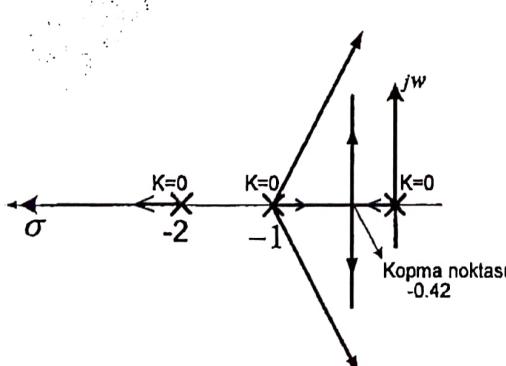
3-Asimtot açıları ve reel eksenin kesme noktası belirlendi.

Tüm veriler yanda s-kompleks düzleminde gösterilmiştir.

(4)

9. Kural kopma noktası:  $\frac{d[G(s)H(s)]}{ds} = 0$  denklemi çözülerek kopma noktası bulunur.

Kopma noktasında katlı kök vardır.



$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[ \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right] &= \frac{d}{ds} \left[ \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 2s} \right] \\ &= -[3s^2 + 6s + 2] = 0 \\ s_1 &= -0.42 \end{aligned}$$

~~$s_2 = -1.57$~~

$s_2$  kökü  $-2$  ile  $-1$  arasındadır. Yer eğrisine dahil değildir. Alınmaz.

(5)

8. İmajiner ekseni kesme noktaları:

Kök yer eğrisinin imajiner ekseni kesme noktaları iki şekilde bulunabilir.

- Karakteristik denklemde  $s$  yerine  $jw$  konulur  $w$ , ve  $K$ , için çözüm yapılır.
- Kararlılık analizi yapılır.

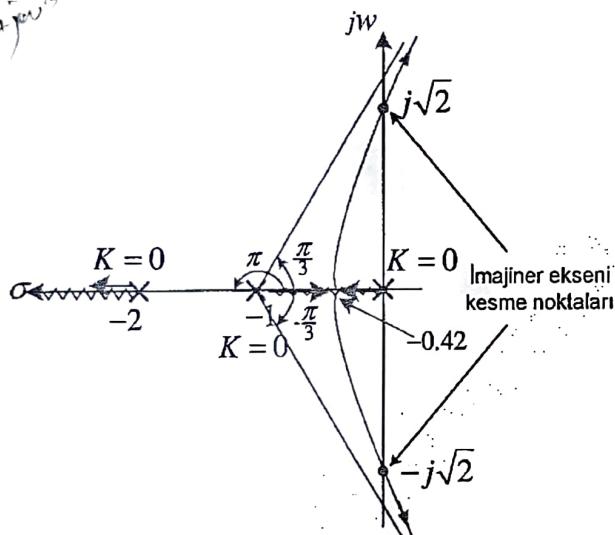
i) Karakteristik denklem ile  $jw$  eksen noktalarının bulunması:

$F(s) = 1 + G(s)H(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$  de  $s = jw$  verilir ve çözüm yapılır.

$$F(s) = (jw)^3 + 3(jw)^2 + 2(jw) + K = 0$$

$(K - 3w^2) + j(2w - w^3) = 0$  ifadesinin sıfır olabilmesi için reel ve sanal kısımları sıfıra eşit olmalıdır.

$$2w - w^3 = 0 \Rightarrow w = \sqrt{2} \text{ rad/sn.} \Rightarrow jw = \pm j\sqrt{2} \text{ imajiner ekseni kesme noktaları.}$$



Köklerin imajiner ekseni kestiği noktadaki  $K$  değeri ise,

$$K - 3w^2 = 0 \Rightarrow K = 3w^2$$

$$\Rightarrow K = 3(\sqrt{2})^2 = 6$$

olarak hesaplanır.

ii) Kararlılık analizi ile  $jw$  eksen noktalarının bulunması :

$F(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$  karakteristik denklem. Routh tablosu oluşturulur.

$s^3$	1	2	Karakarlılık şartı, Routh tablosunun I. sütun katsayıları pozitif olmalıdır.
$s^2$	3	$K$	
$s^1$	$\frac{6-K}{3}$	0	$i \rightarrow \frac{6-K}{3} > 0$ ise
$s^0$	$K$		$ii \rightarrow K > 0$ Her iki koşulun sağlandığı aralık

$$0 < K < 6 \text{ dır.}$$

Sınır kazanç  $K_s = 6$  dır. Kökler  $jw$  eksen üzerindedir. O nokta için

açısal frekans,  $S^2$  terimden bulunur.

$$3s^2 + K_s = 0 \text{ ise } 3s^2 + 6 = 0 \rightarrow s_{1,2} = \pm jw = \pm j\sqrt{2}$$

~~K (seb) - küt egrisi sağ~~  
~~(z-1)(z-0.7788)~~

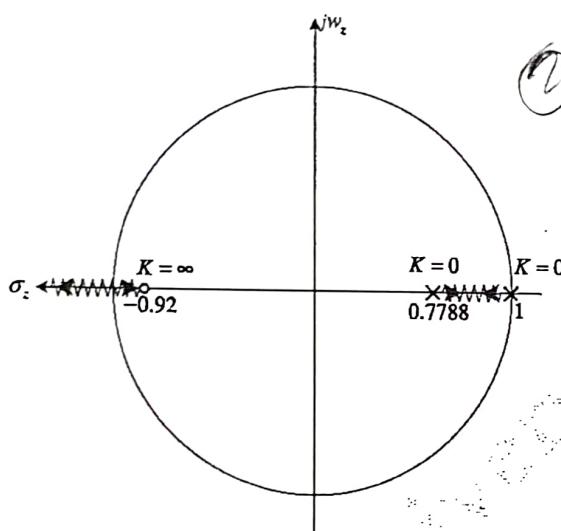
Otomatik Kontrol Prof.Dr. Ayhan Özdemir

Örnek:  $KG(z) = \frac{K(z+0.92)}{(z-1)(z-0.7788)}$  verilen sistemin kapalı çevrim kutuplarının  $0 < K < \infty$  aralığındaki değişimini inceleyiniz.

**Not:** Daha önce belirtildiği gibi kök yer eğrisinin çizim kuralları sürekli ve ayrık zaman sistemler için aynıdır. Dolayısıyla yukarıda sürekli zaman için tanımlanan kurallar kullanılarak ayrık zaman sistemin kök yer eğrisi çizilecektir.

1-) Sistemin kutup ve sıfırları;  $\textcircled{1} \quad p_1 = 1, p_2 = 0.7788 \quad n=2$  (kutup sayısı)  
 $z_1 = -0.92 \quad m=1$  (sıfır sayısı)

Kutup ve sıfırları birim daire üzerine yerleştirilsin ve kök eğrilerine dahil olan bölgeleri işaretlensin.



$(n-m) = (2-1) = 1$  tane sonsuza giden kol, dolayısı ile 1 tane asimtot vardır.

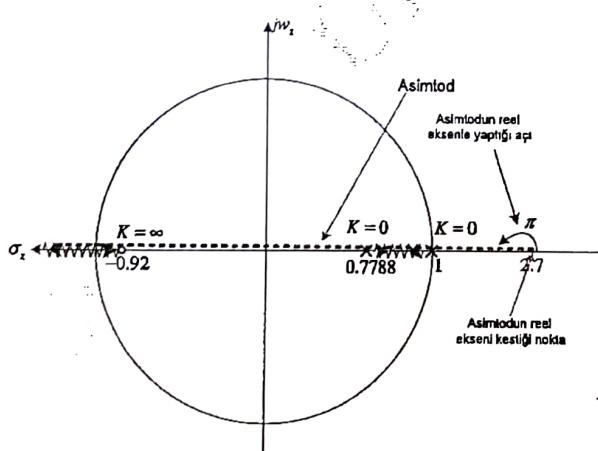
Asimtotların reel eksenle kesiştiği nokta;

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{1 + 0.7788 - (-0.92)}{1} = 2.7$$

Asimtotların reel eksenle yaptıgı açı,

$$\theta_a = \pm \frac{(2k+1)\pi}{n-m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow \theta_a = \pi$$

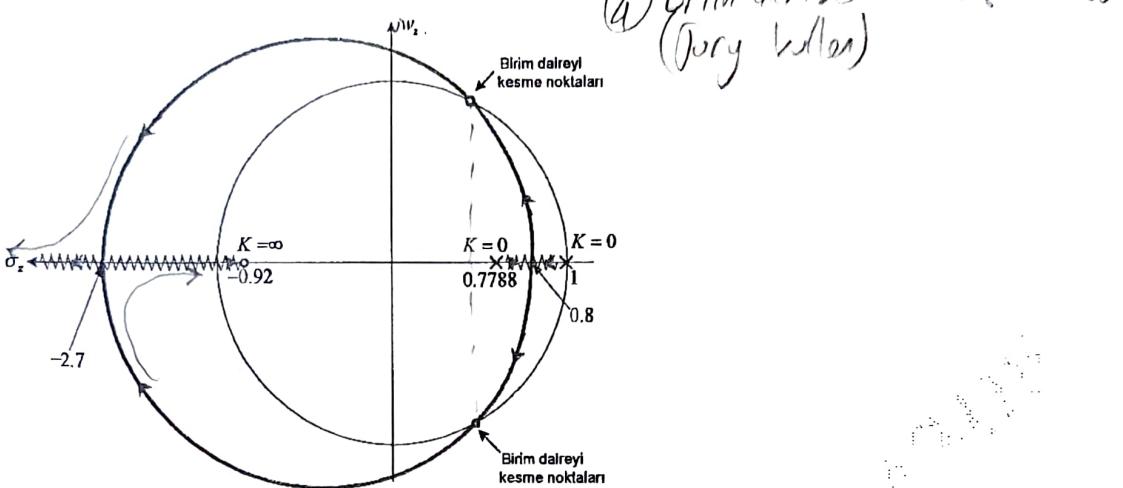
1 tane asimtot olduğunu



Şekilden görüldüğü gibi  $p_1 = 1, p_2 = 0.7788$  noktalarındaki kutupların arası ve  $z_1 = -0.92, z_2 = \infty$  noktalarındaki sıfırların arası köklerin yer eğrisine dahildir. Dolayısıyla  $p_1 = 1, p_2 = 0.7788$  arasında çıktı olarak,  $z_1 = -0.92, z_2 = \infty$  arasında ise girdi olarak bir kopma noktası vardır. Kopma noktaları hesaplanın.

$\textcircled{2} \quad \frac{d}{dz} \left[ \frac{K(z+0.92)}{(z-1)(z-0.7788)} \right] = 0 \Rightarrow K \left[ \frac{(z^2 - 1.7788z + 0.7788) - (z+0.92)(2z-1.7788)}{(z-1)(z-0.7788)^2} \right] = 0$

ifadesi çözülürse kopma noktaları  $z_1 = 0.88$  ve  $z_2 = -2.72$  olarak hesaplanır.



Köklerin birim daireyi kestiği noktalar kararlılık analizi ile hesaplanacaktır.

$$KG(z) = \frac{K(z+0.92)}{(z-1)(z-0.7788)} \text{ sistemi için karakteristik denklem;}$$

$$F(z) = z^2 + (K-1.7788)z + 0.7788 + 0.92K = 0$$

Jury testi yardımını ile kararlılık analizini yapılır.

Gerek koşullar:

$$F(1) > 0, F(z) = (1)^2 + (K-1.7788)(1) + 0.7788 + 0.92K > 0 \Rightarrow K > 0$$

$$(-1)^2 F(-1) > 0, F(z) = (-1)^2 + (K-1.7788)(-1) + 0.7788 + 0.92K > 0 \Rightarrow K > 0$$

Yeter koşul:

$$|1| > |0.7788 + 0.92K| \Rightarrow K < 0.24 \text{ olarak bulunur.}$$

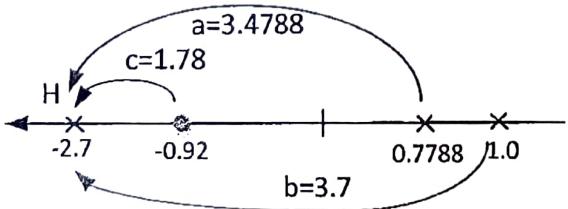
Sistemin kararlı olabilmesi için  $K, 0 < K < 0.24$  aralığında olmalıdır.

$K = 0.24$  sınır kazanç değeridir.  $K = 0.24$  için karakteristik denklem çözülürse,

$$F(z) = z^2 + (0.24 - 1.7788)z + 0.7788 + 0.92 * 0.24 = 0 \text{ karakteristik denklem kökleri,}$$

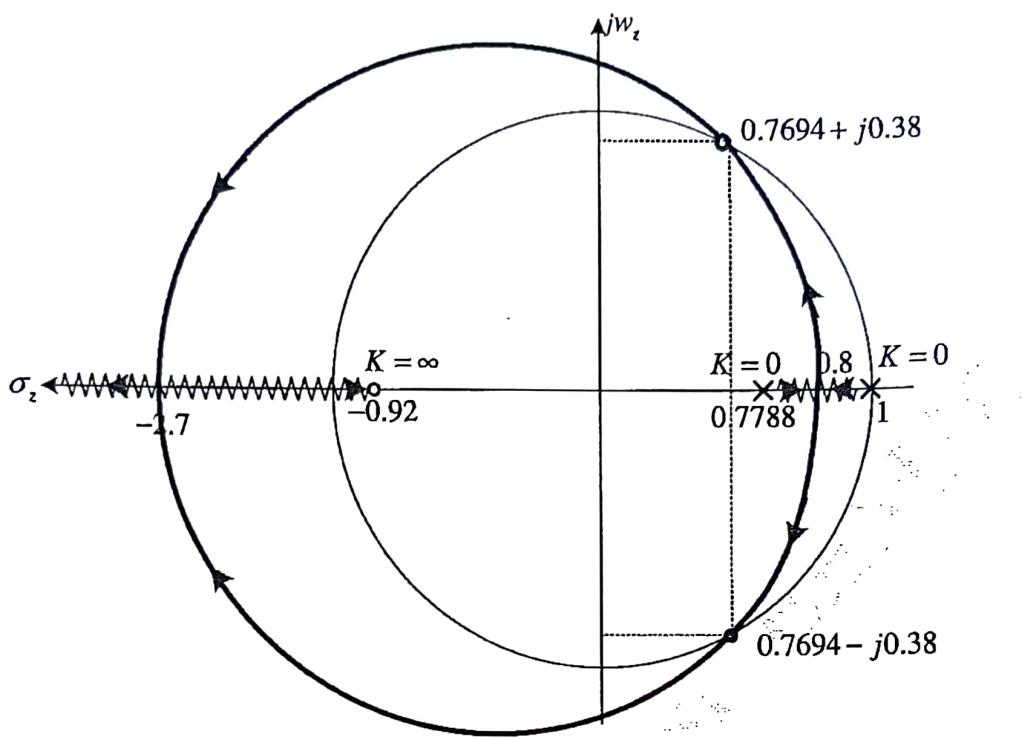
$$z_{1,2} = 0.7694 \pm j0.38 \text{ olarak hesaplanır.}$$

#### H noktasındaki kazanç hesabı



$$K_H = \frac{ab}{c} = \frac{3.4788 * 3.7}{1.78}$$

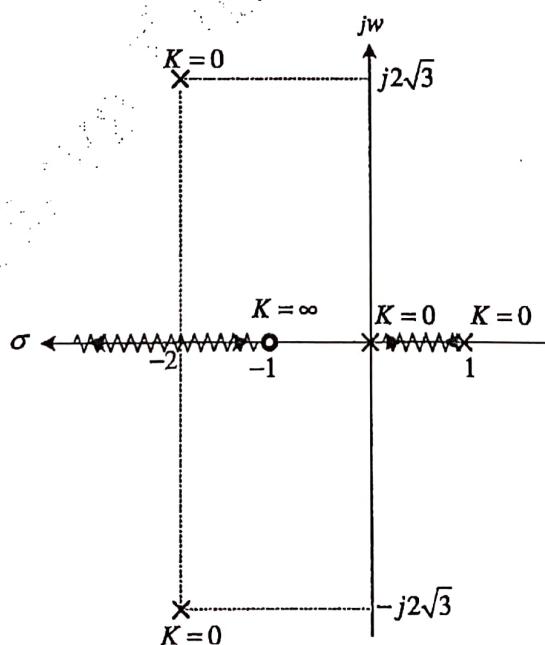
$$K_H = 7.2312$$



Örnek :  $G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s^3 + 3s^2 + 12s - 16)}$  Verilen sisteminin yer eğrisini çizerek kararlılığını inceleyiniz.

Kutup ve sıfırlar:  $p_1 = 0, p_2 = 1, p_{3,4} = -2 \pm j2\sqrt{3}, n=4$

$z_1 = -1, m=1$  olarak hesaplanır. Sistemin kutup sıfır dağılımını aşağıda gösterilmiştir.



Asimtot sayısı ( $n-m$ ) =  $4-1=3$ ' tür. Asimtotların reel eksenle kesiştiği nokta;

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{0+1+(-2-2\sqrt{3})+(-2+2\sqrt{3})-(-1)}{3} = -\frac{2}{3}$$

Asimtotların reel eksenle yaptı açılar,

$$\theta_a = \pm \frac{(2k+1)\pi}{3}, \quad k=0,1,2,\dots \Rightarrow \theta_a = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \pi$$

Köklerin imajiner eksenin kesme noktaları kararlılık analizinden hesaplanır. Bu amaç için karakteristik denklem elde edilir.

$$1 + G(s)H(s) = 0 \Rightarrow s^4 + 3s^3 + 12s^2 + (K-16)s + K = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 12 & K \\ s^3 & 3 & K-16 & 0 \\ s^2 & \frac{52-K}{3} & K & 0 \\ s^1 & c_{n-1} & 0 \\ s^0 & K \end{array} \quad c_{n-1} = \frac{(K-16)\left(\frac{52-K}{3}\right) - 3K}{\frac{52-K}{3}} = \frac{-K^2 + 59K - 832}{52-K} > 0$$

Sistemin kararlı olabilmesi için 1. sütundaki katsayılarının hepsi sıfırdan büyük olmalıdır. Bu şart gereği;

$$1-) \frac{52-K}{3} > 0 \Rightarrow K < 52$$

$$2-) \frac{-K^2 + 59K - 832}{52-K} > 0 \Rightarrow K^2 - 59K + 832 < 0 \Rightarrow (K-35.7)(K-23.3) < 0$$

$(K-35.7)(K-23.3) < 0$  koşulundan sistemi kararlı kıyan K aralığı,  $23.3 < K < 35.7$  olarak elde edilir. Dikkat edilirse burada,  $K_{s1} = 23.3$  ve  $K_{s2} = 35.7$ , olmak üzere 2 tane sınır kazanç değeri vardır. Bu 2 sınır kazanç değeri için karakteristik denklem çözülür kök-yer eğrisinin sanal eksenin kestiği noktalar aşağıdaki gibi bulunur.

$$K=23.3 \text{ için, } \text{Kökler} \quad -1.5004 \pm 2.7048i \text{ ve } 0.00043508 \pm 1.5606i$$

$$K=35.7 \text{ için, } \text{Kökler} \quad -1.5005 \pm 1.7847i \text{ ve } 0.00052431 \pm 2.5625i$$

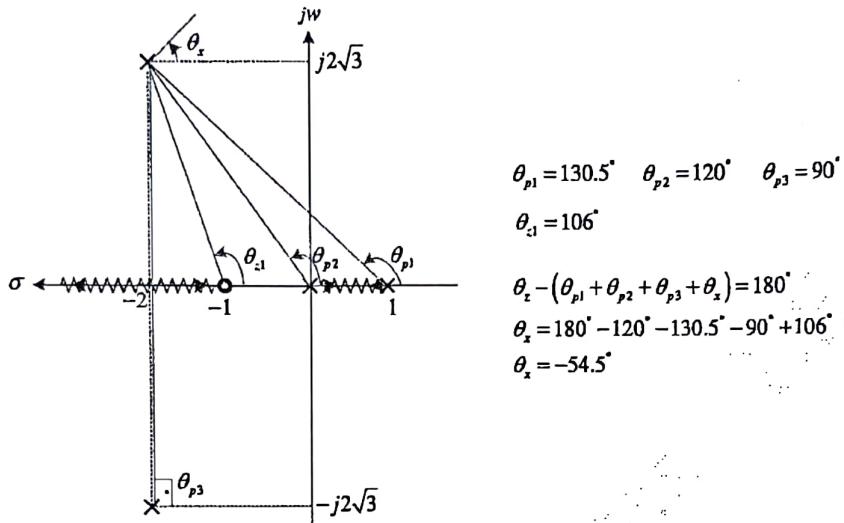
Kök-yer eğrisinin sanal eksenin kestiği noktalar  $s^2$  terimden hesaplanır.

$$\left(\frac{52-K_1}{3}\right)s^2 - K_1 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j2.56, \quad \left(\frac{52-K_2}{3}\right)s^2 - K_2 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm 1.56$$

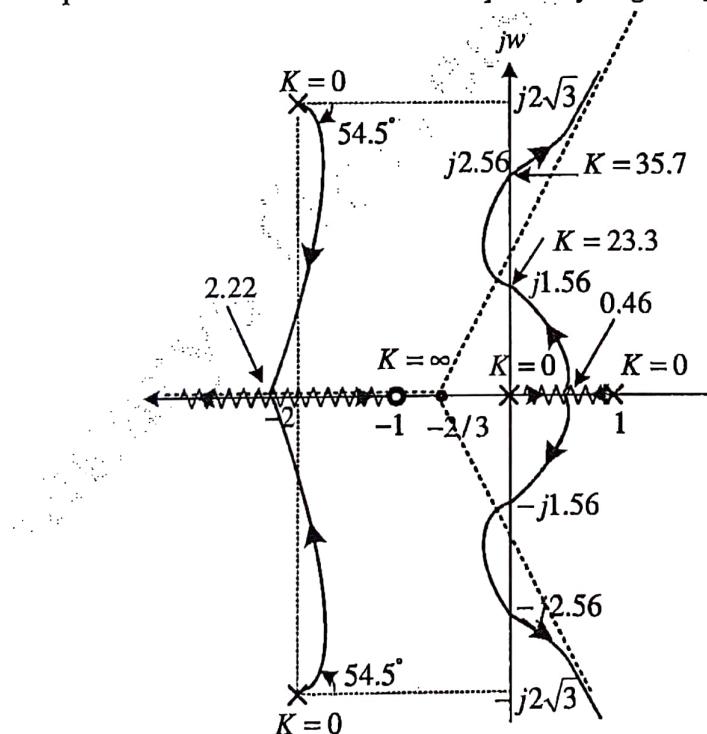
Kopma noktaları;

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{K(s+1)}{s(s^3 + 3s^2 + 12s - 16)} \right] = \Rightarrow s_1 = 0.46, \quad s_1 = -2.22, \quad s_{3,4} = -0.79 \pm j2.16$$

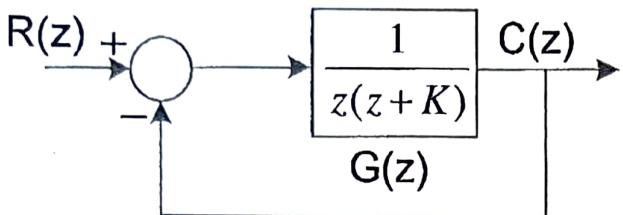
olarak hesaplanır. Kutuplardan çıkış açıları faz koşulundan bulunur.



Tüm hesaplamlardan sonra incelenen sistem için kök-yer eğrisi aşağıda çizdirilmiştir.



**19.2 Yer Eğrisi Çiziminde Parametrenin Transfer Fonksiyonunda Farklı Yerde Bulunması Durumu:**



Şekilde verilen sisteme, karakteristik denklem köklerinin  $0 < K < \infty$  için z-kompleks düzleminde değişimlerini (köklerin geometrik yer eğrisini) çiziniz.

$$F(z) = 1 + G(z) = 1 + \frac{1}{z(z+K)} = 0 \rightarrow F(z) = z^2 + zK + 1 = 0 \text{ denklemi elde edilir.}$$

$F(z)$  yeniden,  $F(z) = \frac{zK}{z^2 + 1} + 1 = G(z) + 1 = 0$  olarak düzenlenir ve açık-çevrim transfer fonksiyonu,  $G(z) = \frac{zK}{z^2 + 1}$  olarak elde edilir.

*Kutuplar*

$$z_{p1,2} = \pm j \quad n = 2 \rightarrow \text{kutup sayısı}$$

*Sıfırlar*

$$z_1 = 0 \quad m = 1 \rightarrow \text{sıfır sayısı}$$

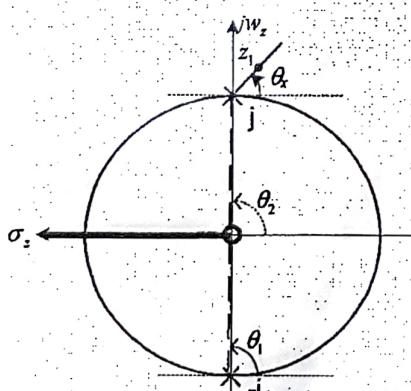
$n = 2 \quad \text{adet kol vardır.}$   
 $n - m = 1 \quad \text{adet asimtot vardır.}$

*Kopma noktası.*

$$\frac{dG(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \left( \frac{zK}{z^2 + 1} \right) = \frac{K(z^2 + 1) - 2z(zK)}{(z^2 + 1)^2} = 0$$

$$-z^2 + 1 = 0 \rightarrow z^2 = 1 \text{ ise } z_1 = -1, \quad z_2 = 1$$

Kopma noktası,  $z_1 = -1$  dir. Yer eğrisi aşağıdadır.

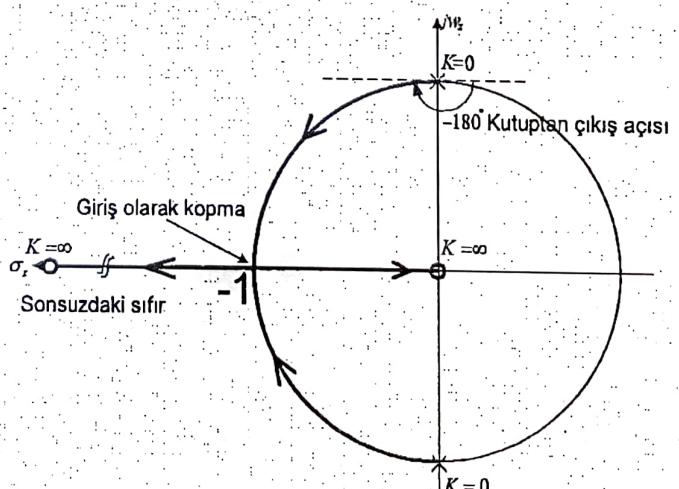


1- Kutuptan çıkış açısı şékilden,

$$\theta_1 - (\theta_2 + \theta_x) = 180$$

$$90 - (90 + \theta_x) = 180$$

$\theta_x = -180^\circ$  eğrinin kutuptan çıkış açısı.

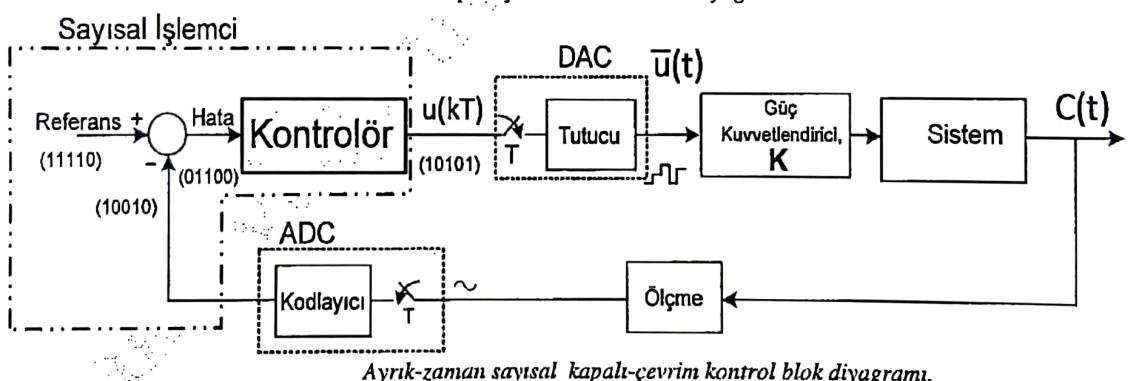
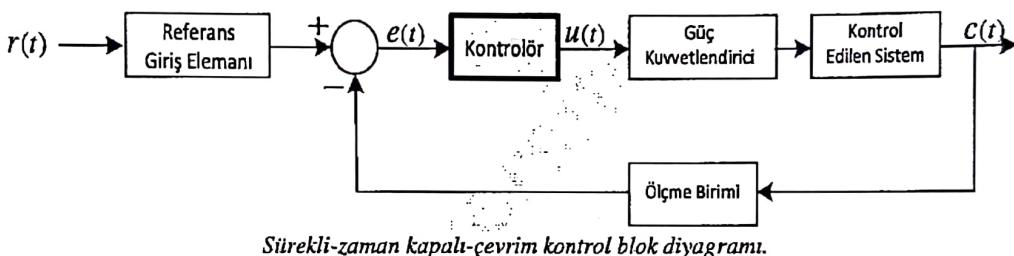


## 20. Kontrolör Türleri

Bu bölümde kadar genel olarak, Laplace ve z-dönüşüm, fiziksel sistemlerin matematik modellenmesi, kontrol blok diyagramları, lineerleştirme, ayıklaşdırma, fark denklemleri, s ve z-düzlemleri arasındaki ilişki, sürekli hal cevap, geçici rejim cevap, kararlılık, geometrik yer eğrisi çizimi konuları sürekli ve ayrık-zaman sistemler için incelenmiştir.

Kontrol edilen sistemin açık-çevrim transfer fonksiyon tipine ve giriş referans fonksiyonuna bağlı olarak sürekli hal hatasının giderilmesi için tipinin artırılması gerekebilir. Yada sistem cevap dinamiğinin belirlenen performansta davranışması istenebilir. Aynı sistem için hem sürekli hal hatasının hem de dinamik cevabının düzeltilmesi veya karalılığının artırılması gerekebilir.

Tüm bu amaçlar için kontrol edilen büyülüğün ölçülmesi ve referans işaret ile karşılaştırıldıktan sonra  $e(t)$  hata işaretine 'Kontrolör' ile *kontrol kuralı/kuralları* uygulanmalıdır. Üretilen kontrol işaretini  $u(t)$  veya  $\bar{u}(t)$  'nin güç kuvvetlendirici üzerinden kontrol edilen sisteme uygulanması gereklidir. Kontrolör sürekli-zaman veya ayrık-zaman sayısal/analog olabilir. Sayısal yada analog *kontrol kuralına*, kontrol edilen sistem analizi neticesinde ve olması istenen performansa göre karar verilir. Aşağıda sırası ile sürekli-zaman ve ayrık-zaman kapalı-çevrim kontrol blok diyagramları verilmiştir.

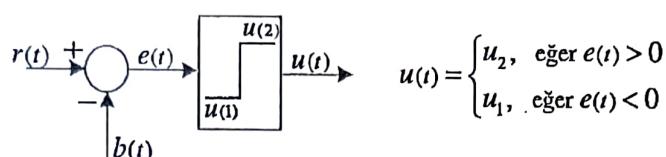


Kontrolörün hata işaretini  $e(t)$ 'ye uygulayacağı sayısal yada analog *Kontrol kuralları* aşağıda verilmiştir.

- 1-) On/Off (açık-kapalı) kontrol
- 2-) Oransal kontrol (Proportional, P)
- 3-) Oransal + Integral kontrol (Proportional + Integral, PI)
- 4-) Oransal + Türevsel kontrol (Proportional + Derivative, PD)
- 5-) Oransal + Integral + Türevsel kontrol (Proportional + Integral+ Derivative, PID)

## 20.1 On/Off kontrol

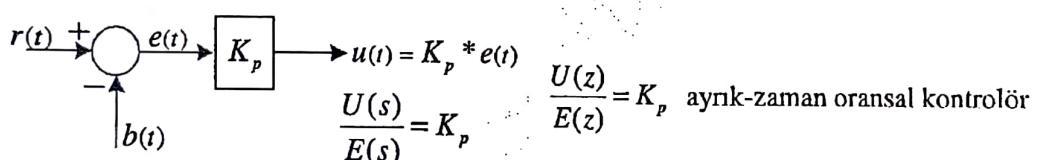
İki durumlu kontrolör olarak da adlandırılan on/off kontrolörde çıkış işaretinin hata  $e(t)$ 'nin değerine göre sabit iki değerden,  $u_1$  ve  $u_2$  değerlerinden birini alır.



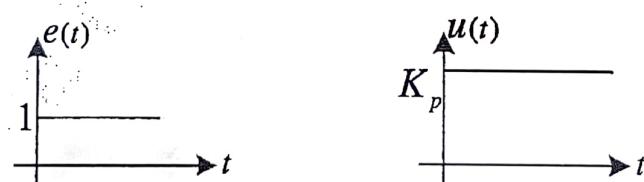
En basit kontrol yöntemlerinden birisidir. Kullanılan ev ve endüstriyel aletlerin bir kısmı bu yöntem ile kontrol edilmektedir. Örneğin, bir buz dolabı veya endüstriyel fırın on/off kontrol dür. Buz dolabında sıcaklık termostat ile ölçümde ve soğutucu motor devreye alınır yada çıkartılır. Kısaca hata  $e(t)$ 'nın sıfırdan büyük/küçük olmasına göre sisteme enerji verilir yada kesilir.

## 20.2 Oransal kontrol

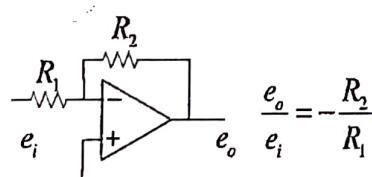
Kontrol işaretini  $u(t)$ , sistemin  $e(t)$  hatasının sabit bir  $K_p$  katsayı ile çarpılması ile elde edilir.



$e(t)$  kontrolör giriş işaretini ve  $u(t)$  kontrolör çıkış işaretini olmak üzere oransal kontrolör için örnek giriş-çıkış dalga şekilleri aşağıda verilmiştir.



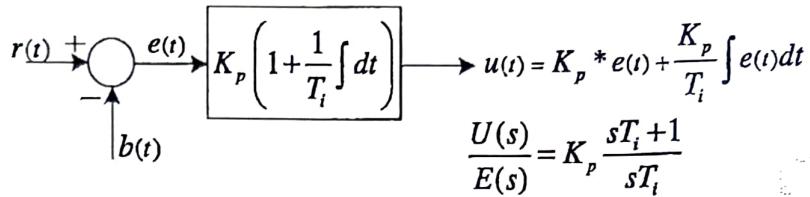
Analog oransal kontrolör aşağıda gösterildiği gibi gerçekleştirilebilir.



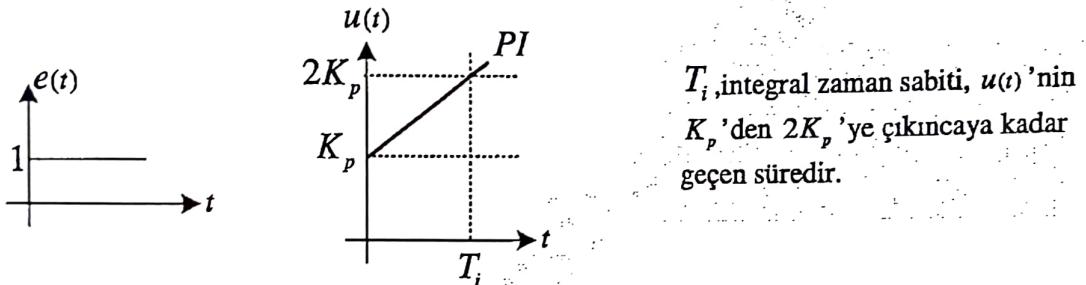
- i- Sürekli hal hatasını ve bozucu etkisini azaltır.  
Sıfırlayamaz.
- ii- Sistem cevabını hızlandırabilir.
- iii-  $\frac{U(z)}{E(z)} = K_p$  Ayrık-zaman transfer fonksiyonu.

### 20.3 Oransal + Integral kontrol (PI)

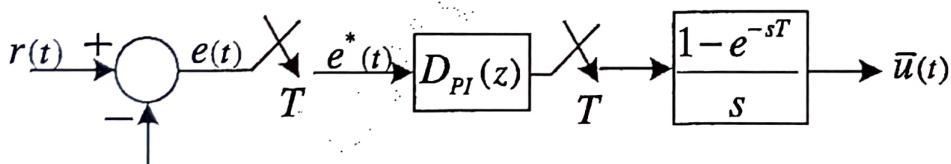
PI kontrolcüsü sürekli zamanda  $s=0$ 'da, ayrık zamanda ise  $z=1$ 'de kutup ilavesi yaparak sistemin tipini artırır ve böylece basamak giriş için sistemin sürekli-hal hmasını giderir. Aşağıda sürekli ve ayrık zaman PI kontrolcüsü ayrı ayrı verilmiştir.



$e(t)$  kontrolör giriş işaretleri,  $u(t)$  kontrolör çıkış işaretleri olmak üzere PI kontrolör için örnek giriş-cıkış dalga şekilleri aşağıda verilmiştir.  $u(t)$  çıkışının, oransal kısmın iki katına çıkıncaya kadar geçen süre,  $T_i$ , integral zaman sabiti olarak adlandırılır.

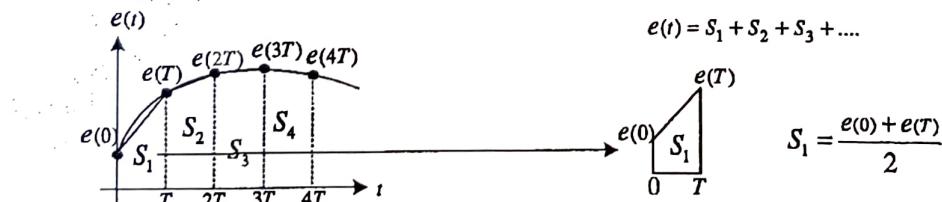


Ayrık-zaman PI kontrolörün ifadesi aşağıda verilmiştir.



Integral elemanı için z-dönüşümü farklı şekillerde elde edilebilir.

1. Yöntem: yanuk alanı hesabı ile;



$$\frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt = \frac{K_p}{T_i} \left[ \frac{e(0) + e(T)}{2} T + \frac{e(T) + e(2T)}{2} T + \dots + \frac{e((k-1)T) + e(kT)}{2} T \right]$$

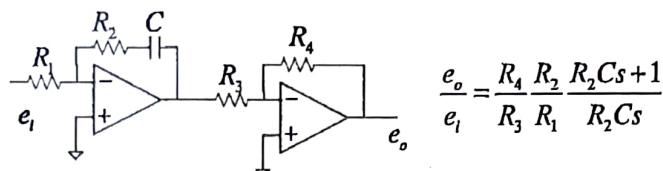
Ara işlemlerde sonra;

$$Z \left\{ \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt \right\} \rightarrow \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_p T}{2T_i} \frac{z+1}{z-1},$$

olarak elde edilir.

**2. Yöntem:** Rezidü teoremi ile,  $Z\left\{\frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t)dt\right\} \rightarrow \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_p}{T_i} \frac{z}{z-1}$  olarak elde edilir.

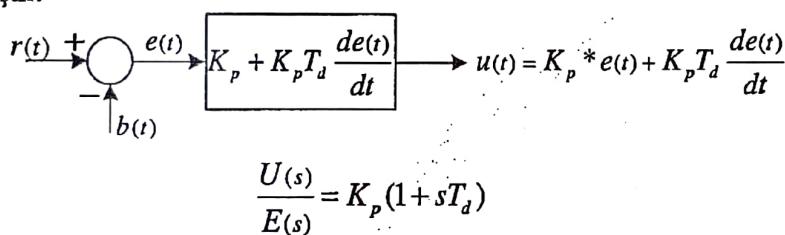
Analog oransal + integral kontrol kuralı aşağıda gösterildiği gibi basit olarak gerçekleştirilebilir.



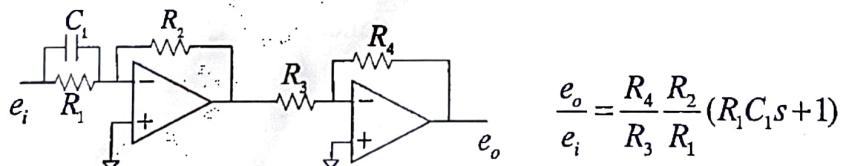
- i- PI kontrolör sistem tipini artırır. Basamak değişim için sistem cevabında sürekli hal hatasını ve bozucu etkisini giderir.
- ii- Sistemin karasızlığını artırır.  $\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_p T}{2T_i} \frac{z+1}{z-1}$  veya  $\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_p}{T_i} \frac{z}{z-1}$
- iii- Sistem cevabını yavaşlatır.

#### 20.4 Oransal + Türevsel kontrol (PD)

Hata işaretini  $e(t)$  ye oransal ve türev işlemi uygulanır. Kontrol blok diyagramı aşağıda verilmiştir.



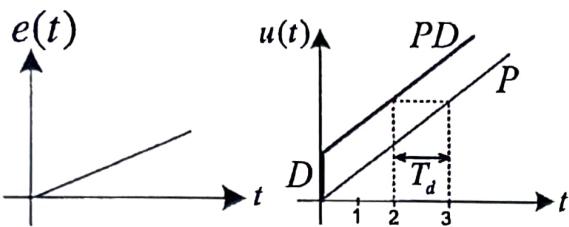
Analog oransal + türevsel kontrolör aşağıda gösterildiği gibi gerçekleştirilebilir.



$e(t)$  kontrolör giriş işaretti,  $u(t)$  kontrolör çıkış işaretti olmak üzere PD kontrolör için örnek giriş çıkış dalga şekilleri aşağıda verilmiştir.



Yukarıdaki şekilden görüldüğü gibi basamak fonksiyonu şeklindeki hata (giriş) işaretti için türev kontrolörünün çıkışı "0" olur. Aşağıda ise rampa giriş işaretti için PD kontrolörün cevabı gösterilmiştir.

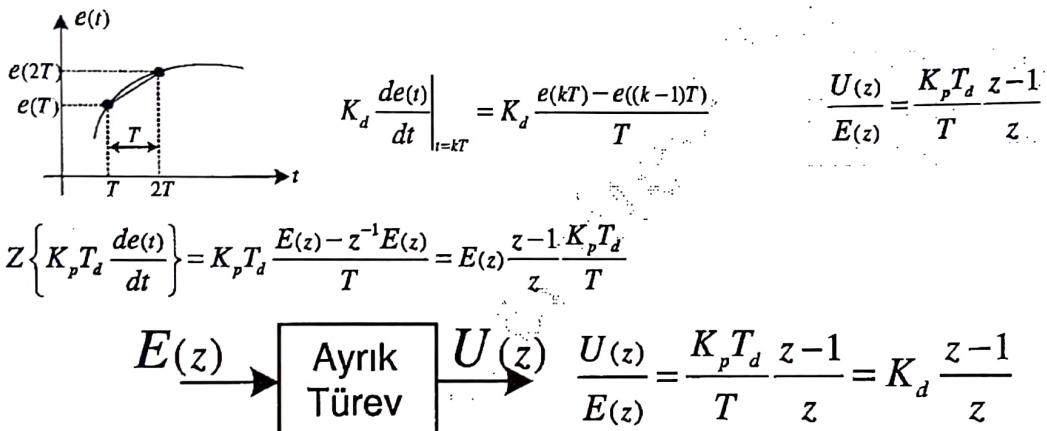


$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \frac{(1+sT_d)}{(1+\alpha sT_d)} \quad 0 < \alpha < 1$$

alinarak hızlı değişimlerin çıkışa olan etkisi yavaşlatılır.

### Türevsel kontrolör;

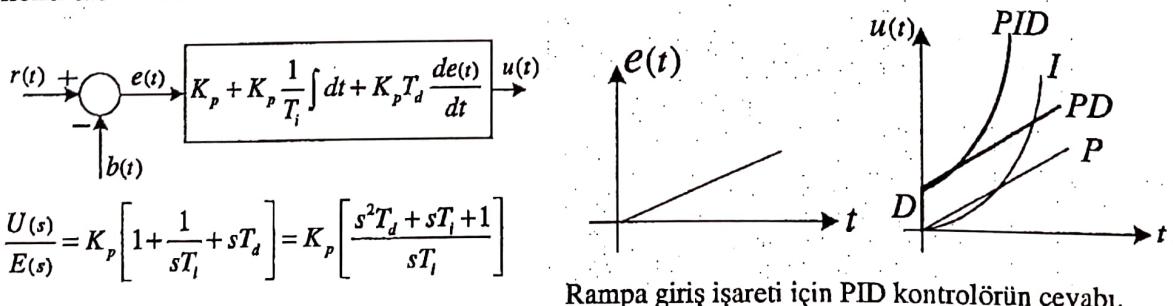
Kontrol kuralı olarak  $u(t)$  de tek başına türev kesinlikle kullanılmaz. Sabit hata işaretini  $e(t)$  için türev sıfır olacağından kontrol işaretini  $u(t)$  de sıfır olur. Geçici (transient) durumlarda etkilidir. Kontrolör hata  $e(t)$  'nin değişim hızından etkilenerek  $u(t)$  kontrol işaretini ürettiğinden hata çok büyümeden düzelleme eğilimi gösterir. Sistem kararlılığını artırır. Sürekli hal hatasına doğrudan etkisi yoktur. Ancak daha büyük oransal kazanç  $K_p$  kullanımına imkan sağladığından sürekli hal hatasını dolaylı olarak iyileştirebilir. Cevap hızını arttırır. Ayırık-zaman türev ifadesi aşağıda elde edilmiştir. Şekilden türev ifadesi yazılır.



- i- Türev kontrolör, geçici rejimi düzeltmede etkilidir.
- ii- Sistemin kararlılığını artırır.
- iii- Tek başına türev kontrolör kullanılmaz.
- iv- Dolaylı olarak sürekli hal hatasını azaltabilir.
- v- Cevap hızını artırır.

### 20.5 Oransal + Integral + Türevsel kontrol (PID)

Hata işaretine oransal, integral ve türev işlemleri uygulandığından dolayı "üç terimli kontrolör" olarak ta adlandırılmaktadır.



Rampa giriş işaretini için PID kontrolörün cevabı.

*PID kontrolörü her bir kontrolörün avantajını üzerinde toplar.* Ayrık zaman PID kontrolör transfer fonksiyonu, her bir blok için elde edilen ayrık-zaman modeller kullanılarak aşağıda verildiği gibi elde edilir.

$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_p + \frac{K_p T}{2T_i} \frac{z+1}{z-1} + \frac{K_p T_d}{T} \frac{z-1}{z} \quad \text{veya} \quad \frac{U(z)}{E(z)} = K_p + \frac{K_p}{T_i} \frac{z}{z-1} + \frac{K_p T_d}{T} \frac{z-1}{z}$$

i- Hata işaretine Oransal, Integral ve türev işlemlerinin uygulandığı üç terimli kontrol kuralıdır.

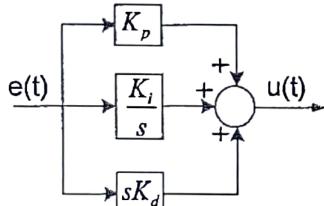
ii- Her bir PI ve PD kontrol kurallarının avantajlarına sahiptir.

$$\text{iii- } \frac{U(z)}{E(z)} = K_p + \frac{K_p T}{2T_i} \frac{z+1}{z-1} + \frac{K_p T_d}{T} \frac{z-1}{z} \quad \text{veya} \quad \frac{U(z)}{E(z)} = K_p + \frac{K_p}{T_i} \frac{z}{z-1} + \frac{K_p T_d}{T} \frac{z-1}{z}$$

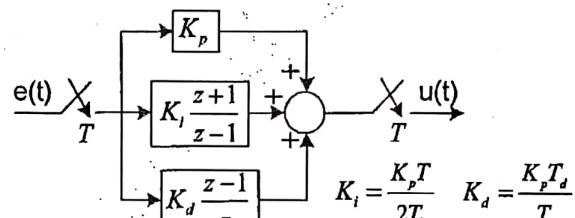
Aşağıda sürekli-zaman ve ayrık-zaman PID kontrolörlere ait blok diyagramları aşağıda verilmiştir. Aynık-zaman PID kontrolör için farklı iki blok diyagram ve transfer fonksiyonu verilmiştir, literatür yada uygulamada her iki kontrol kuralı ile karşılaşılabilir.

#### Ayrık-zaman PID kontrolör

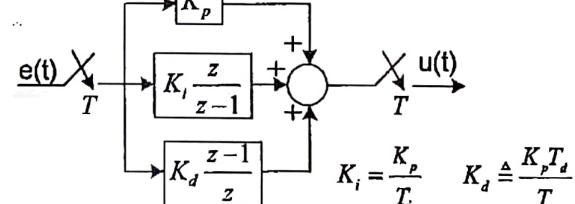
Sürekli-zaman PID kontrolör



$$K_i \triangleq \frac{K_p}{T_i} \quad K_d \triangleq K_p T_d$$



veya



**Ayrık-zaman PID transfer fonksiyonu,  $K_i \frac{z}{z-1}$  için analiz:**

$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_p + K_i \frac{z}{z-1} + K_d \frac{z-1}{z} = \frac{K_p z(z-1) + K_i z^2 + K_d(z-1)^2}{z(z-1)}$$

$$= \frac{K_p z^2 - K_p z + K_i z^2 + K_d z^2 - 2K_d z + K_d}{z(z-1)} = \frac{(K_p + K_i + K_d)z^2 - (K_p + 2K_d)z + K_d}{z(z-1)}$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = (K_p + K_i + K_d) \frac{z^2 - \frac{(K_p + 2K_d)}{(K_p + K_i + K_d)} z + \frac{K_d}{(K_p + K_i + K_d)}}{z(z-1)} \quad \text{PID kontrolör transfer}$$

$$z^2 - \frac{(K_p + 2K_d)}{(K_p + K_i + K_d)} z + \frac{K_d}{(K_p + K_i + K_d)} = 0$$

$\Delta = (K_p + 2K_d)^2 - 4(K_p + K_i + K_d)K_d \rightarrow \Delta = K_p^2 - 4K_i K_d$  determinant elde edilir.

$$z_{s1,2} = \frac{K_p + 2K_d \pm \sqrt{K_p^2 - 4K_i K_d}}{2(K_p + K_i + K_d)} \rightarrow \text{PID kontrolör sıfırları.}$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_{pid} \frac{(z+z_1)(z+z_2)}{z(z-1)}, \quad K_{pid} = K_p + K_i + K_d \rightarrow \text{PID kontrolör kazancı.}$$

Ayrık-zaman PID transfer fonksiyon,  $K_i \frac{z+1}{z-1}$  için analiz:

$$\begin{aligned} \frac{U(z)}{E(z)} &= K_p + K_i \frac{z+1}{z-1} + K_d \frac{z-1}{z} = \frac{K_p z(z-1) + K_i z^2 + K_i z + K_d (z-1)^2}{z(z-1)} \\ &= \frac{K_p z^2 - K_p z + K_i z^2 + K_i z + K_d z^2 - 2K_d z + K_d}{z(z-1)} \\ &= \frac{(K_p + K_i + K_d)z^2 - (K_p + 2K_d - K_i)z + K_d}{z(z-1)} \end{aligned}$$

$$z_{s1,2} = \frac{K_p + 2K_d - K_i \pm \sqrt{K_i^2 - 2K_i K_d - 8K_i K_d + K_p^2}}{2(K_p + K_i + K_d)} \rightarrow \text{PID kontrolör sıfırları.}$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_{pid} \frac{(z+z_1)(z+z_2)}{z(z-1)}, \quad K_{pid} = K_p + K_i + K_d \rightarrow \text{PID kontrolör kazancı}$$

$$(K_p + K_i + K_d)z^2 - (K_p + 2K_d - K_i)z + K_d = 0 \quad \text{ve} \quad \Delta = K_i^2 - 2K_i K_d - 8K_i K_d + K_p^2 \rightarrow \text{determinant}$$

Sürekli-zaman PID transfer fonksiyon için analiz:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \quad K_d s^2 + K_p s + K_i = 0 \quad \Delta = K_p^2 - 4K_d K_i$$

$$s_{1,2} = \frac{-K_p \pm \sqrt{K_p^2 - 4K_d K_i}}{2K_d} \quad K_{pid} = K_d \rightarrow \text{PID kontrolör kazancı}$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_{pid} \frac{(s+s_1)(s+s_2)}{s} \quad s = 0 \text{ 'da kutup getirir. PID kontrolör sıfırları, } s_{1,2}$$

$K_p, K_i$  ve  $K_d$  parametrelerine bağlı olarak PID sıfırları  $s_1$  ve  $s_2$  kompleks yada reel olabilir.

Ayrık-zaman PID kontrolör kontrol kurallarının her ikisi,

$$z_{p1} = 0 \text{ ve } z_{p2} = 1 \text{ de kutup getirirler.}$$

Sürekli-zaman PID kontrolör,  $s = 0$  'da kutup getirir.

$K_p$ ,  $K_i$  ve  $K_d$  parametrelerine bağlı olarak sürekli-zaman PID sıfırları  $s_1$  ve  $s_2$  ve ayrık-zaman PID sıfırları  $z_{s1}$  ve  $z_{s2}$  kompleks yada reel olabilir. Bu sıfırlar, gerekli durumlarda sürekli-zaman sistemlerde kompleks  $s$ -düzleminin sol yarı düzlemindeki yada ayrık-zaman sistemlerde kompleks  $z$ -düzleminde birim daire içindeki reel yada kompleks eşlenik kutupları yok etmek için kullanılabilir.

---

Ayrık-zaman PI transfer fonksiyon,  $K_i \frac{z}{z-1}$  için analiz:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_p + K_i \frac{z}{z-1} = \frac{K_p z - K_p + K_i z}{z-1} = \frac{(K_p + K_i)z - K_p}{z-1}$$

$$G(z)_{PI} = (K_p + K_i) \frac{z - \frac{K_p}{K_p + K_i}}{z-1}$$

Ayrık-zaman PI transfer fonksiyon,  $K_i \frac{z+1}{z-1}$  için analiz:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_p + K_i \frac{z+1}{z-1} = \frac{K_p z - K_p + K_i z + K_i}{z-1} = \frac{(K_p + K_i)z - K_p + K_i}{z-1}$$

$$G(z)_{PI} = (K_p + K_i) \frac{z - \frac{K_p - K_i}{K_p + K_i}}{z-1}$$


---

Ayrık-zaman PID kontrolörde,  $K_p, K_i = 0$  ve  $K_d$  için PD kontrol kuralına ait transfer fonksiyonu;

$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_p + K_d \frac{z-1}{z} = \frac{K_p z + K_d z - K_d}{z} = \frac{(K_p + K_d)z - K_d}{z}$$

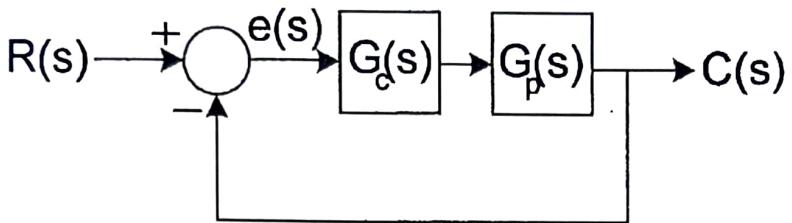
$$G(z)_{PD} = (K_p + K_d) \frac{z - \frac{K_d}{K_p + K_d}}{z}$$

**Not:** Aksi söylenmemişçe, tasarım ve analiz çalışmalarında ayrık-zaman integratör olarak transfer fonksiyonu olarak  $K_i \frac{z}{z-1}$  kullanılacaktır.

## 21 Kontrolör Tasarım Denklemleri

### 21.1 Sürekli-Zaman Kontrolör Tasarım Denklemleri

Şekilde kontrol edilmek istenen sistem  $G_p(s)$  ve kontrolör transfer fonksiyonu  $G_c(s)$ 'dır.



$$G_c(s) = K_d \frac{s^2 + \frac{K_p}{K_d}s + \frac{K_i}{K_d}}{s} \quad \text{PID kontrolör transfer fonksiyonudur.}$$

**Problem:** verilen bir  $s_1$  değeri için,  $F(s_1) = G_c(s_1)G_p(s_1) + 1 = 0$  diğer bir ifade ile,

$$G_c(s)G_p(s) = \alpha \angle \gamma = \alpha e^{j\gamma} \quad \text{denklemi} \quad \text{sağlayan}$$

$K_p$ ,  $K_i$  ve  $K_d$  katsayı parametrelerini bulmaktr.

**Tasarım yöntemi:** Geometrik-yer eğrisine dayalı tasarım yapılacaktır.

i-)  $s_1$ , kompleks olduğundan  $s_1 = \sigma_1 + jw_1 = |s_1|e^{j\beta} \quad s_1 = \sqrt{\sigma_1^2 + w_1^2} \quad \beta = \tan^{-1}\left(\frac{w_1}{\sigma_1}\right)$

ii-)  $G_p(s_1)$ , kompleks olduğundan  $G_p(s_1) = |G_p(s_1)|e^{j\psi} \quad \psi = \underline{|G_p(s_1)|}$

iii-)  $G_c(s_1)G_p(s_1) = -1 = \alpha e^{j\gamma} \rightarrow \alpha = 1 \quad \gamma = 180^\circ, \quad \text{Faz ve genlik koşuludur.}$

ara işlemlerden sonra  $K_p$  ve  $K_d$  'ler

PID kontrolör için

$$K_p = -\frac{\sin(\psi + \beta)}{|G_p(s_1)| \sin \beta} - \frac{2K_i \cos \beta}{|s_1|} \quad K_d = \frac{\sin \psi}{|G_p(s_1)| |s_1| \sin \beta} + \frac{K_i \sin \beta}{|s_1|^2} \quad \text{elde edilir.}$$

$$s_1 = |s_1|e^{j\beta} \quad G_p(s_1) = |G_p(s_1)|e^{j\psi}$$

$K_i$ , hız hata katsayısından veya istenen bir değere analiz veya benzetim çalışmaları ile atanabilir.  $s_1$  Tasarım ilk aşamasında istenen performanstan belirlenen kontrol kutubudur.

PI kontrolör için,  $K_d = 0$

$$K_p = -\frac{\sin(\psi + \beta)}{|G_p(s_1)| \sin \beta} - \frac{2K_i \cos \beta}{|s_1|}$$

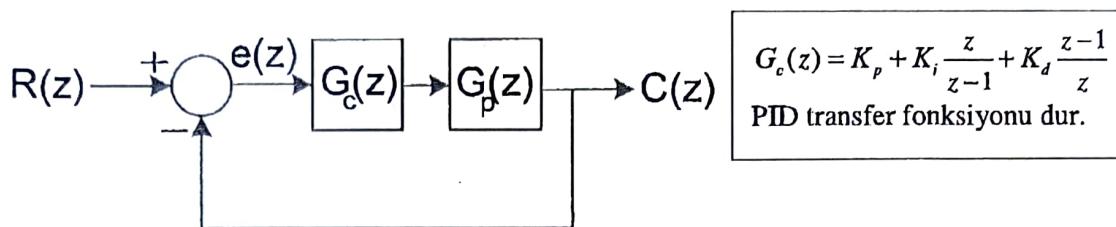
$$K_i = -\frac{|s_1| \sin \psi}{|G_p(s_1)| (\sin \beta)^2}$$

PD kontrolör için,  $K_i = 0$

$$K_p = -\frac{\sin(\psi + \beta)}{|G_p(s_1)| \sin \beta}$$

$$K_d = \frac{\sin \psi}{|G_p(s_1)| |s_1| \sin \beta}$$

## 21.2 Ayrık -Zaman Kontrolör Tasarım Denklemleri



**Problem:** verilen bir  $z_1$  değeri için,  $F(z_1) = G_c(z_1)G_p(z_1) + 1 = 0$  diğer bir ifade ile,

$$G_c(z_1)G_p(z_1) = \alpha \angle \gamma = \alpha e^{j\psi} \quad \text{denklemi sağlayan}$$

$K_p$ ,  $K_i$  ve  $K_d$  katsayı parametrelerini bulmaktadır. Ara işlemler verilmeden parametrik denklemler aşağıda verilmiştir.

**Tasarım yöntemi:** Geometrik-yer eğrisine dayalı tasarım yapılacaktır.

$$\text{i-) } z_1, \text{ kompleks olduğundan } z_1 = \sigma_{z_1} + jw_{z_1} = |z_1|e^{j\beta} \quad z_1 = \sqrt{\sigma_{z_1}^2 + w_{z_1}^2} \quad \beta = \tan^{-1}\left(\frac{w_{z_1}}{\sigma_{z_1}}\right)$$

$$\text{ii-) } G_p(z_1), \text{ kompleks olduğundan } G_p(z_1) = |G_p(z_1)|e^{j\psi} \quad \psi = \underline{|G_p(z_1)|}$$

### Ayrık PID Kontrolör

$$K_d = \frac{|z_1|}{\sin \beta} \left\{ \frac{K_i \sin \beta}{|z_1| - 2 \cos \beta + \frac{1}{|z_1|}} + \frac{\sin \psi}{|G_p(z_1)|} \right\} \quad z_1 = |z_1|e^{j\beta} \quad G_p(z_1) = |G_p(z_1)|e^{j\psi}$$

$$K_p = -\frac{\cos \psi}{|G_p(z_1)|} - 2K_i |z_1| \frac{|z_1| - \cos \beta}{|z_1|^2 - 2|z_1|\cos \beta + 1} + \frac{-|z_1|\sin \psi + \cos \beta \sin \psi}{|G_p(z_1)|\sin \beta} \quad [\text{Ref1}]$$

$K_i$ , hız hata katsayısından veya istenen bir değere analiz veya benzetim çalışmaları ile atanabilir.  $z_1$  Tasarım ilk aşamasında istenen performanstan belirlenen kontrol kutubudur.

### Ayrık PI Kontrolör, $K_d = 0$

$$K_p = -\frac{\cos \psi}{|G_p(z_1)|} - 2K_i |z_1| \frac{|z_1| - \cos \beta}{|z_1|^2 - 2|z_1|\cos \beta + 1} + \frac{-|z_1|\sin \psi + \cos \beta \sin \psi}{|G_p(z_1)|\sin \beta}$$

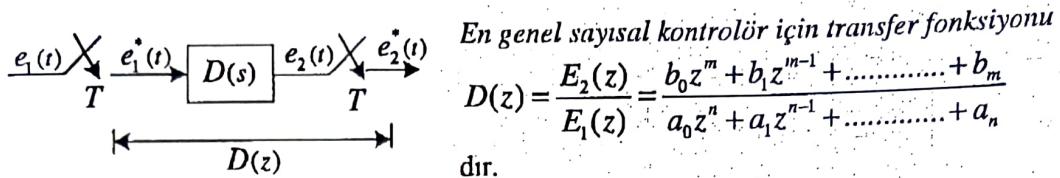
$$K_i = -\frac{\sin \psi}{|G_p(z_1)|} \frac{|z_1| - 2 \cos \beta + \frac{1}{|z_1|}}{\sin \beta}$$

### Ayrık PD Kontrolör, $K_i = 0$

$$K_p = -\frac{\cos \psi}{|G_p(z_1)|} + \frac{-|z_1|\sin \psi + \cos \beta \sin \psi}{|G_p(z_1)|\sin \beta}$$

$$K_d = \frac{|z_1|}{\sin \beta} \frac{\sin \psi}{|G_p(z_1)|} \quad [\text{Ref1}]$$

## 22. Sayısal Kontrolör



Ayrik-zaman sayısal kapalı çevrim kontrol sistemlerinde hata işaretinin işlendiği kontrol kuralı sayısal işlemci tarafından gerçekleştirilmektedir. Kontrol edilmek istenen sistem önce modellenir, ayıralaştırılır ve ayrik-zaman analizi yapılır. Kontrol edilen sistemde, istenen sürekli ve geçici rejim cevap performansı sağlayacak olan ayrik-zaman sayısal kontrol kuralı belirlenir ve ayrik-zaman kontrolör transfer fonksiyonu  $D(z)$  tasarılanır. Tasarılanan ayrik-zaman kontrolör transfer fonksiyonu  $D(z)$ , sayısal işlemcide yazılım olarak aşağıda verilen yöntemler kullanılarak programlanabilir.

### 22.1 Programlama türleri

- 1-) Doğrudan programlama
- 2-) Seri programlama
- 3-) Paralel programlama *olmak üzere üç tanedir.*

### 22.2 Doğrudan programlama

$$1. \text{ adım; } D(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \frac{z^{-n}}{z^{-n}} \frac{X(z)}{X(z)} \quad n \geq m$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ adım; } E_1(z) &= (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) X(z) \\ X(z) &= \frac{E_1(z)}{a_0} - \frac{1}{a_0} (a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) X(z) \\ E_2(z) &= (b_0 z + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}) X(z) z^{-(n-m)} \end{aligned}$$

**Örnek:**  $D(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{5z^2 + 1.25z}{z^2 - 0.6z + 0.05}$  transfer fonksiyonu verilen kontrolöre ait programlama diyagramını çiziniz ve sembolik dilde programlayınız.

$$\frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{5z^2 + 1.25z}{z^2 - 0.6z + 0.05} \frac{z^{-2}}{z^{-2}} \frac{X(z)}{X(z)}$$

$$\frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{5X(z) + 1.25z^{-1}X(z)}{X(z) - 0.6z^{-1}X(z) + 0.05z^{-2}X(z)} \Rightarrow \begin{aligned} E_1(z) &= X(z) - 0.6z^{-1}X(z) + 0.05z^{-2}X(z) \\ X(z) &= E_1(z) + 0.6z^{-1}X(z) - 0.05z^{-2}X(z) \end{aligned}$$

$X(z) = X(k) = X$  'in şimdiki değeri

$z^{-1}X(z) = X(k-1) = X$  'in bir önceki değeri

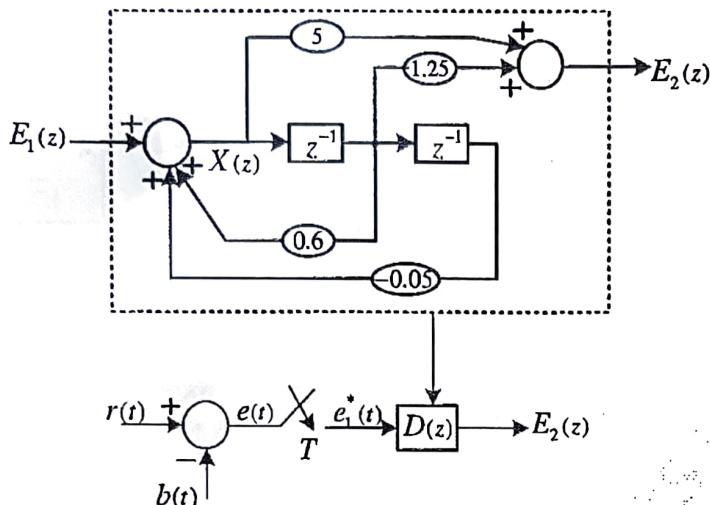
$z^{-2}X(z) = X(k-2) = X$  'in iki önceki değeri

$z^{-n}X(z) = X(k-n) = X$  'in n öncüki değeri

Bu durumda;  $X(z) = E_1(z) + 0.6z^{-1}X(z) - 0.05z^{-2}X(z)$  ifadesi,

$X(k) = E_1(k) + 0.6X(k-1) - 0.05X(k-2)$  şeklinde düzenlenir.

$$E_2(z) = 5X(z) + 1.25z^{-1}X(z) \Rightarrow E_2(k) = 5X(k) + 1.25X(k-1)$$



Doğrudan programlama diyagramı

### Sembolik Program

$$X(k) = E_1(k) + 0.6X(k-1) - 0.05X(k-2)$$

$$E_2(k) = 5X(k) + 1.25X(k-1)$$

$$A = X(k-1), B = X(k-2)$$

$$X = e_1 + 0.6A - 0.05B$$

$$e_2 = 5X + 1.25A$$

$$A=0, B=0$$

devam: read e1

$$X = e_1 + 0.6*A - 0.05*B$$

$$e_2 = 5*X + 1.25*A$$

out e2

$$B=A$$

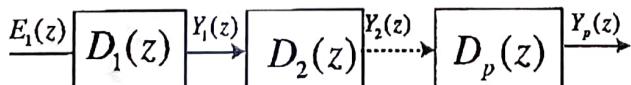
$$A=X$$

goto devam

### 22.3 Seri programlama

Ayrık-zaman transfer fonksiyonu  $D(z)$ ,

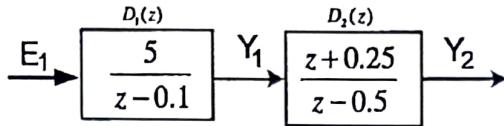
$$D(z) = \prod_{k=1}^p D_k(z) = D_1(z)D_2(z)\dots\dots D_p(z) \text{ çarpım biçiminde ifade edilir.}$$



$D(z)$  transfer fonksiyonu'nun seri (kaskad) konfigürasyonu

Her blok kendi içinde doğrudan programlama yöntemi ile programlanır.

**Örnek:**  $D(z) = \frac{5}{z-0.1} \frac{z+0.25}{z-0.5} = \frac{5z^2 + 1.25z}{z^2 - 0.6z + 0.05} z^{-2} = \frac{5(1+0.25z^{-1})}{(1-0.1z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$  Transfer fonksiyon çarpanlarına ayrılır.



$$D_1(z) = \frac{Y_1(z)}{E_1(z)} = \frac{5}{1-0.1z^{-1}} \frac{x(z)}{x(z)} \quad E_1(z) = x(z) - x(z)0.1z^{-1} \rightarrow x(z) = E_1(z) + 0.1x(z)z^{-1}$$

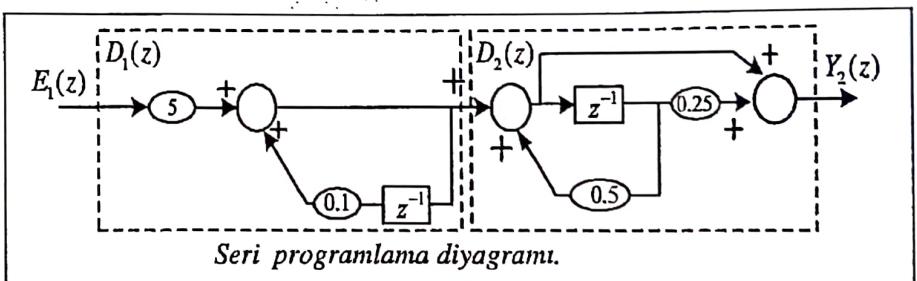
$$\rightarrow Y_1(z) = 5x(z) \quad x(z)z^{-1} \rightarrow x(k-1) = A \\ x = e_1 + 0.1 * A$$

$$D_2(z) = \frac{Y_2(z)}{Y_1(z)} = \frac{1+0.25z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} \frac{x(z)}{x(z)} \quad y_1 = 5 * x$$

$$Y_1(z) = x(z) - 0.5x(z)z^{-1} \rightarrow x(z) = Y_1(z) + 0.5x(z)z^{-1} \quad x(z)z^{-1} \rightarrow x(k-1) = B \\ \rightarrow Y_2(z) = x(z) + 0.25x(z)z^{-1} \quad x = y_1 + 0.5 * B \\ y_2 = x + 0.25 * B$$

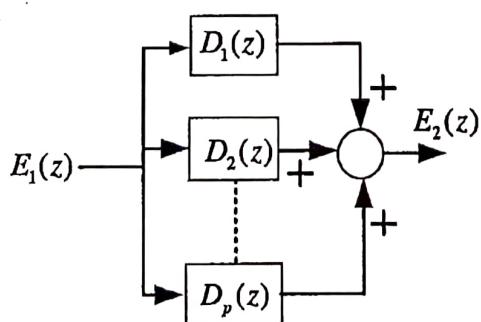
### Sembolik Program

```
A=0, B=0
x1: read e1
    x = e1+0.1*A
    y1 = 5*x
    A = x
    x = y1 + 0.5*B
    y2 = x+0.25*B
    B = x
    out y2
    goto x1
```



### 22.4 Paralel programlama

Ayırık-zaman transfer fonksiyonu  $D(z)$ ,  $D(z) = \sum_{k=1}^p D_k(z) = D_1(z) + D_2(z) + \dots + D_p(z)$  toplam biçiminde basit kesirlere ayrılarak ifade edilir.



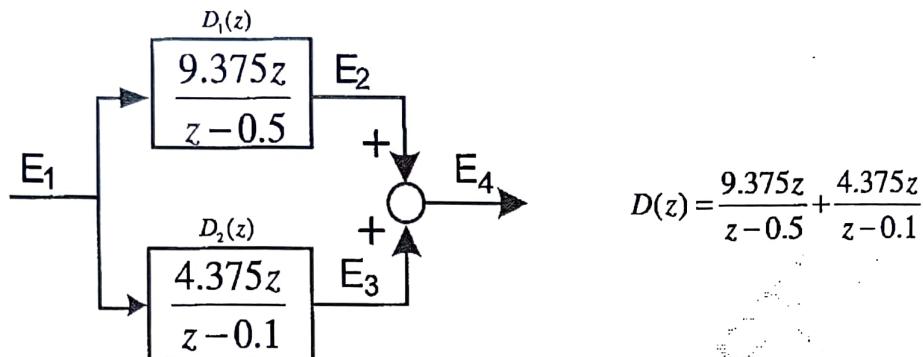
Her blok kendi içinde doğrudan programlama yöntemi ile programlanır.

*D(z) transfer fonksiyonunun paralel konfigürasyon*

Örnek:  $D(z) = \frac{E_4(z)}{E_1(z)} = \frac{5z^2 + 1.25z}{z^2 - 0.6z + 0.05}$  transfer fonksiyonu basit kesirlere ayrılır.

$$D(z) = \frac{5z^2 + 1.25z}{z^2 - 0.6z + 0.05} = \frac{Az}{z-0.5} + \frac{Bz}{z-0.1} \rightarrow \frac{5(0.5)^2 + 1.25(0.5)}{(0.5)^2 - 0.6(0.5) + 0.05} = 0.5A \rightarrow A = 9.375$$

$$\rightarrow \frac{5(0.1)^2 + 1.25(0.1)}{(0.1)^2 - 0.6(0.1) + 0.05} = 0.1B \rightarrow B = 4.375$$



$$D_1(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{9.375z}{z-0.5} z^{-1} = \frac{9.375}{1-0.5z^{-1}} x(z)$$

$$D_2(z) = \frac{E_3(z)}{E_1(z)} = \frac{4.375z}{z-0.1} z^{-1} = \frac{4.375}{1-0.1z^{-1}} x(z)$$

$$E_1(z) = x(z) - 0.5x(z)z^{-1} \quad x(z)z^{-1} = A$$

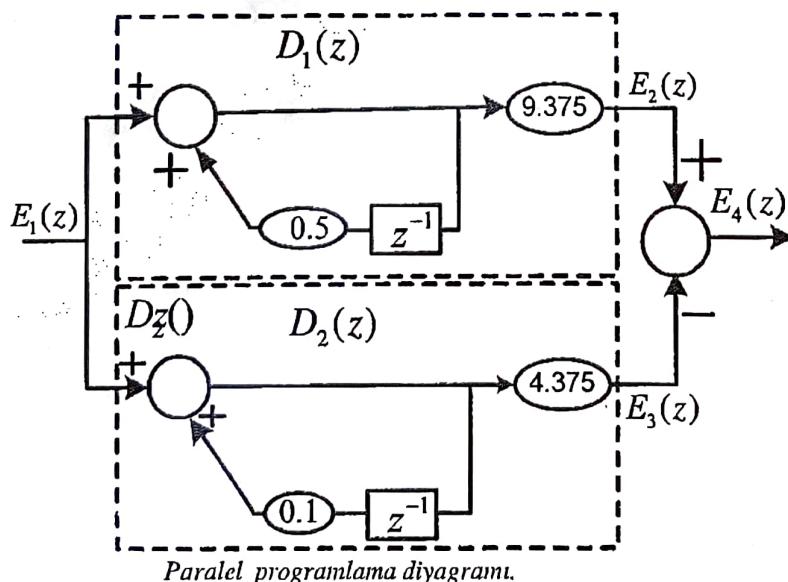
$$x(z) = E_1(z) + 0.5x(z)z^{-1}$$

$$E_2(z) = 9.375x(z)$$

$$E_1(z) = x(z) - 0.1x(z)z^{-1} \quad x(z)z^{-1} = B$$

$$x(z) = E_1(z) + 0.1x(z)z^{-1}$$

$$E_3(z) = 4.375x(z)$$



#### Sembolik Program

```
A=0, B=0
x1: read e1
    x = e1+0.5*A
    e2=9.375*x
    A = x
    x = e1+0.1*B
    e3= 4.375*x
    B = x
    e4=e2+e3
    out e4
    goto x1
```

### 23. Örnekleme Zamanının ( $T$ ) Belirlenmesi

Örnekleme zamanı,  $T$ 'in belirlenmesi kontrolör tasarımlarının en önemli kararlarından birisidir. Sayısal kontrolör tasarımda verilecek olan kararlardan ilkidir. Ne kadar hızlı örneklemlerse o kadar iyi olur düşüncesi yanlıştır. Gereğinden hızlı örnekleme hem gereksiz işlem fazlalığına neden olur hem de sistemin parametre değişimlerine karşı, özellikle kapalı-çevrim kazancı  $K$ , duyarlığını artırır.

$G(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)}$  transfer fonksiyonu göz önüne alınınsın. Kutup  $s = -\frac{1}{\tau}$  dir. Z-kompleks

düzleminde karşılık gelen kutup,  $z \triangleq e^{sT}$  olmak üzere,  $z \triangleq e^{-\frac{T}{\tau}}$  dir.  $z$  ifadesinde örnekleme zamanı  $T$  küçüldükçe z-düzleminde kutup  $z=1$ 'e gider.

$z = \lim_{T \rightarrow 0} (e^{-\frac{T}{\tau}}) = 1$  ifadesinden görüldüğü gibi  $T$  çok küçüldükçe transfer fonksiyonundaki tüm kutuplar  $z=1$ 'de toplanır. Bunun sonucu olarak, transfer fonksiyonundaki kazanç  $K$ 'daki küçük değişimler çıkışında büyük değişimlere sebep olur, ciddi salınımlar oluşur hatta sistem kararsız olabilir.

**Örnek:**  $G(s) = \frac{1}{(s+10)(s+1)}$  transfer fonksiyonu ele alınınsın. Çeşitli örnekleme zamanları  $T$  için sıfırıncı-dereceden tutuculu  $G_h(z)$  elde edilsin.

$$G_h(z) = Z\{G_{zoh}(s)G(s)\} = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s(s+10)(s+1)}\right\}$$

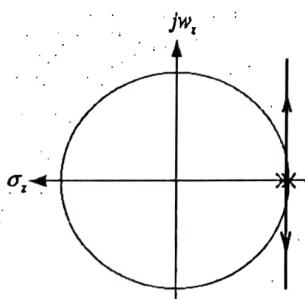
dir.

$$T = 0.01 \quad \text{icin} \quad G_h(z) = 4.821 \cdot 10^{-5} \frac{z + 0.9641}{z^2 - 1.895z + 0.8958} = 4.821 \cdot 10^{-5} \frac{z + 0.9641}{(z - 0.99)(z - 0.9048)}$$

$$T = 0.001 \quad \text{icin} \quad G_h(z) = 4.982 \cdot 10^{-7} \frac{z + 0.9641}{z^2 - 1.9891z + 0.9891} = 4.982 \cdot 10^{-7} \frac{z + 0.9962}{(z - 0.999)(z - 0.99)}$$

$$T = 0.00001 \quad \text{icin} \quad G_h(z) = 5e-011 \frac{z + 1}{z^2 - 2z + 0.9999} = 5e-011 \frac{z + 0.9962}{(z - 1)(z - 0.9999)}$$

Örneklerden görüldüğü gibi,  $T$  küçüldükçe ayrik-zaman transfer fonksiyon kutupları  $z=1$ 'e gitmektedir.

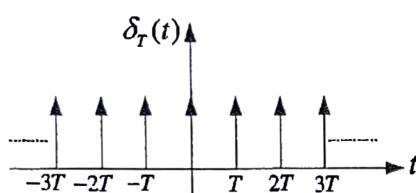


Örnekleme zamanı,  $T$  çok küçüldükçe, yer eğrisinden görüldüğü gibi ayrik-zaman transfer fonksiyon kutupları  $z=1$  civarına yaklaşır. Kapalı-çevri kazancı  $K$  çok az değişse bile, kutuplar birim daireye çok yakın olduklarından dolayı ya çıkış cevabında büyük salınımlara sebep olur yada kapalı çevrim kutuplarından bir kısmının birim daire dışına çıkmasına neden olur ve sistem kararsız olur.

Örnekleme işlemi,  $f(t)$  ve periyodu  $T$  olan bir impuls dizisinin çarpımıdır. Örneklenmiş  $f(t)$  işaretini  $f^*(t)$  olmak üzere,

$$f^*(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \text{olarak verilir.}$$

Bir analog  $f(t)$  işaretinin Fourier dönüşümü  $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jw t} dt$  dir.



*Periyodik impulse dizisi, fourier serileri ile ifade edilir ise,  $T$  periyot olmak üzere,*

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(\frac{2\pi}{T}n)t} \quad \text{dir.}$$

*periyodik impulse dizisi*

Bu ifade örneklenmiş işarette yerine koyulur ise,

$$f^*(t) = f(t) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(\frac{2\pi}{T}n)t} \quad \text{elde edilir. Örneklenmiş işaretin fourier dönüşümü alınır ise,}$$

$$F^*(w) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(\frac{2\pi}{T}n)t}) e^{-jw t} dt$$

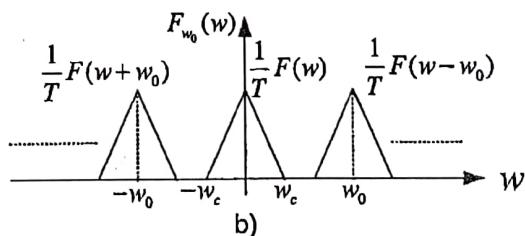
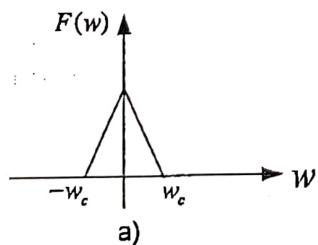
$$F^*(w) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(w - \frac{2\pi}{T}n)t} dt \quad \text{örneklenmiş işaret } f^*(t) \text{ 'nin fourier dönüşümü}$$

$$F^*(w) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(w - \frac{2\pi n}{T}) \quad \text{olarak elde edilir.}$$

$|w| > w_c$  için  $F(w) = 0$  ise  $f(t)$  işaretini  $w_c$  rad/sn'ye bant sınırlı denir.

Aşağıdaki şekilde, bant-sınırlı işaretin  $T < \frac{\pi}{w_c}$  aralıklarında örneklenmesi durumunda,

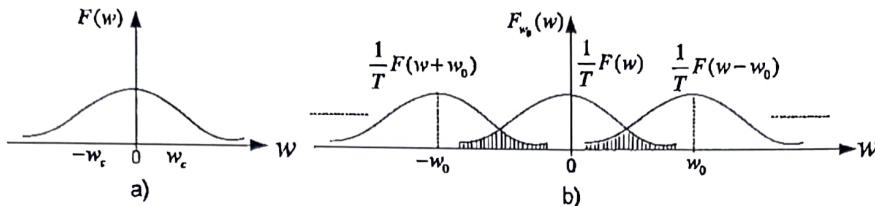
örneklenmiş işaretin frekans spektrumu birbiri ile çakışmayan (örtüşmeyen) periyodik kopyalarından oluşur.



a) Sınırlı bantlı  $f(t)$  işaretinin Fourier dönüşümü b)  $T < \frac{\pi}{w_c}$  için örneklenmiş  $f^*(t)$

işaretinin Fourier dönüşümü ( $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ )

Sınırlı bantlı olmayan işaretin örneklenmesi ile oluşan örtüşme aşağıda verilmiştir.



- a) Sınırlı bantlı olmayan  $f(t)$  işaretinin spektrumu
- b) Herhangi bir örneklemeye zamanı  $T = \frac{2\pi}{w_0}$  için örneklenmiş  $f^*(t)$  ayrık zaman işaretinin spektrumu.

İşaretin sınırlı olmamasından dolayı oluşan örtüşme, analog işaretin alçak geçiren filtreden sonra örneklenmesi ile önlenir.

En büyük frekans bileşeni  $w_c$  olan bant sınırlı bir işaret,  $T < \frac{\pi}{w_c}$  aralıkları ile örneklenir ise, örtüşme oluşmaz.  $f > 2f_c$ ,  $f$ : örneklemeye frekansı,  $f_c$ : bant sınırlı işaretin en yüksek frekans bileşeni.

**Örneklemeye zamanı**,  $T$ 'nin seçimi için literatürde sunulan iki farklı yaklaşım sunulacaktır.

1-) A.C.T.F göz önünde bulundurulması;  $f_c$ ,  $f(t)$  frekans spektrumunda en yüksek frekanslı bileşen olsun.  $f(t)$ 'nin  $f(kT)$ 'den yeniden elde edilebilmesi için  $f > 2f_c$  olmalıdır. Gerçek zaman uygulamalarında  $q$  kontrol edilen sistemin en küçük zaman sabiti olmak üzere örneklemeye periyot zamanı,

$$T \in [0.1q, 0.5q]$$

olarak seçilebilir.

Örnek: A.C.T.F  $G_p(s) = \frac{1}{s(s+2)}$  olarak verilen sistemin ayrık zaman kontrolü gerçekleştirilmek isteniyor. Örneklemeye zamanı  $T$ 'in hangi aralıkta seçilmesi uygundur?

Verilen A.C.T.F'nu genel forma dönüştürünsün.

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{K}{\tau_1 s(\tau_2 s + 1)} \Rightarrow G_p(s) = \frac{0.5}{s(0.5s + 1)}$$

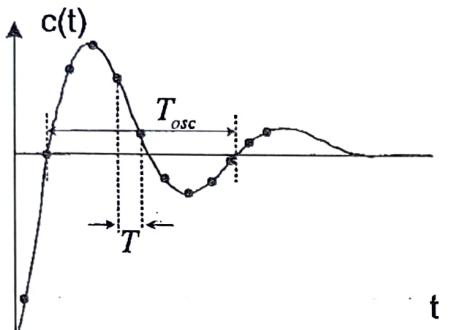
Sistemin zaman sabitleri,  $\tau_1 = 1$  ve  $\tau_2 = 0.5$  dir. Dolayısıyla en küçük zaman sabiti  $q = 0.5$  Bu durumda örneklemeye zamanı  $0.1q \leq T \leq 0.5q \Rightarrow 0.05 \leq T \leq 0.25$  aralığında seçilebilir.

**Ölü zamanlı Sistemler :**  $G(s)H(s) = \frac{e^{-sT_d}}{\tau s + 1}$

$f \leq \frac{2}{T_d}$  veya  $f \leq \frac{4}{T_d}$  olarak alınabilir.

Küçük  $T_d$  değeri orijinde birçok kutup bulunmasına neden olur. Bu ilave kutupların 2 veya 4 tane ile sınırlı tutulması uygundur. Bu durumda örneklemeye frekansı,

2-) Kapalı çevrim transfer fonksiyonuna göre; Ayrık-zaman kontrol sisteminin geçici hal (transient) cevap karakteristiği örnekleme periyodu  $T$ 'e bağlıdır. Büyük örnekleme periyodu sistemin izafî kararlılığını olumsuz etkiler. Kural olarak, eğer kapalı çevrim sistem çıkışı sönümlü sinüzoidal ise **örnekleme zamanı  $T$  osilasyon periyodunun  $\frac{1}{8}$  veya  $\frac{1}{10}$  katı** olarak seçilir.



$T_{osc} = \frac{2\pi}{w_{osc}}$  :  $c(t)$  cevabında osilasyon periyodu.

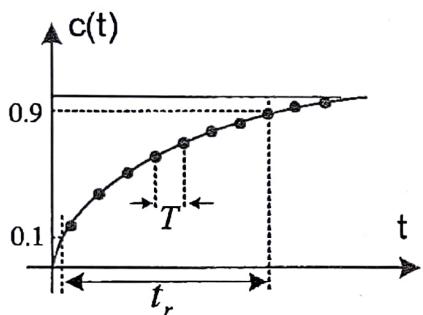
$T = \frac{2\pi}{w_s}$  : Örnekleme zamanı.

$T = T_{osc} \left[ \frac{1}{8}, \frac{1}{10} \right]$ : **Önerilen örnekleme zamanı**

Veya

$T = \frac{2\pi}{w_s} = \frac{2\pi}{w_{osc}} \left[ \frac{1}{8}, \frac{1}{10} \right]$  ile elde edilebilir.

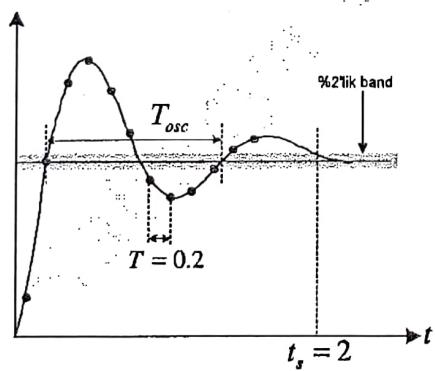
$w_{osc} = w_s \left[ \frac{1}{8}, \frac{1}{10} \right] \rightarrow w_s = w_{osc} [8, 10]$  olmalıdır.



Aşırı sönümlü sistemlerde yükselme zamanına göre Örnekleme zamanı seçilebilir.

$$T = t_r \left[ \frac{1}{8}, \frac{1}{10} \right]$$

Örnek: Standart 2. dereceden bir sistem için %2 kriterine göre yerleşme zamanı  $t_s = 2s$  ve  $\zeta = 0.5$  olarak verilmiştir. Örnekleme zamanı olarak  $T = 0.2s$  alınması uygun mudur?



%2 kriterine göre;

$$t_s = \frac{4}{\zeta w_n} \Rightarrow 2 = \frac{4}{0.5 w_n} \Rightarrow w_n = 4$$

$$w_d = w_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 4 \sqrt{1 - 0.5^2} = 3.464 \text{ rad/s}$$

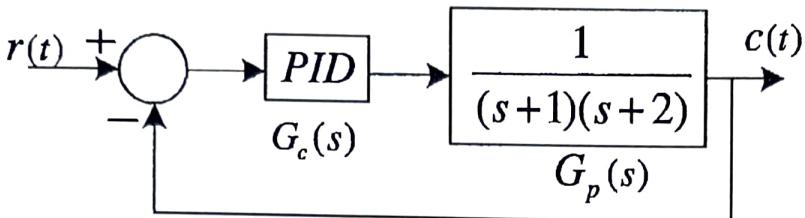
$w_s$ , örnekleme açısal frekansı

$$w_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.2} = 10\pi$$

$$\frac{w_s}{w_d} = \frac{10\pi}{3.464} \approx 9, \quad (w_d = \frac{2\pi}{T_{osc}})$$

Gördüğü gibi  $T = T_{osc} \left[ \frac{1}{8}, \frac{1}{10} \right]$  şartını sağladığından örnekleme zamanının  $T = 0.2$  olarak seçilmesi uygundur.

#### 24. Sürekli-Zaman Tasarım

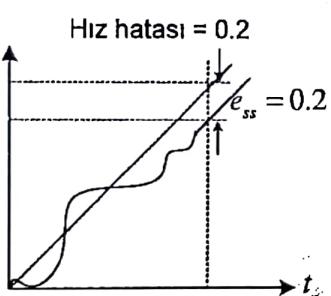


Kontrol sisteminde *birim rampa fonksiyon* giriş için hız hatası  $e_{ss} = 0.2$  ve *birim basamak giriş* için %2 kriterine göre yerleşme zamanı  $t_s = 1s$  ve  $\zeta = 0.707$  olması istenmektedir.

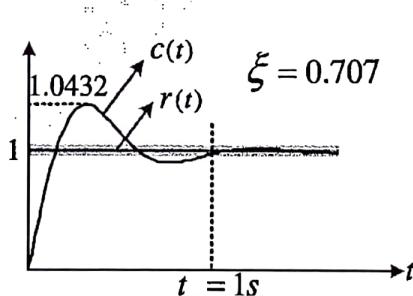
- i- PID Kontrolör parametreleri,  $K_p$ ,  $K_i$  ve  $K_d$ ?  $e_{ss} = R \frac{2\zeta}{w_n}$
- ii-  $G_c(s)G_p(s)$  açık-çevrim transfer fonksiyonu olmak üzere yer eğrisini çiziniz.  
Kapalı-çevrim kontrol kutuplarını (baskın kutupları) yer eğrisinde gösteriniz.
- iii-

Olması istenenler:

$$\zeta = 0.707 \Rightarrow M_p = e^{\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}\pi}} \Rightarrow M_p = 0.0432 = \%4.32 \text{ istenen aşım.}$$



Birim rampa giriş için olması istenen hata



Birim basamak giriş için olması istenen aşım ve yerleşme zamanı

İstenen geçici rejim parametleri  $\zeta$  ve  $w_n$ 'i sağlayacak olan PID kontrolör katsayıları  $K_p$ ,  $K_i$  ve  $K_d$  hesaplanacaktır. İlk olarak istenen geçici rejim kriterlerinden kontrol kutupları belirlenecektir.

$$s_1 = -\sigma \pm jw_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad 0 < \zeta < 1 \text{ için,}$$

$\zeta = 0.707$  ve yerleşme zamanı,

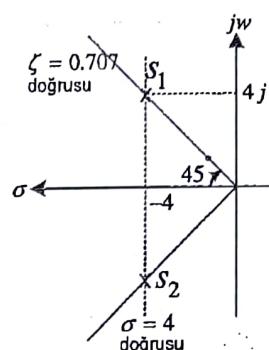
$$t_s = \frac{4}{\zeta w_n} = \frac{4}{\sigma} \Rightarrow 1 = \frac{4}{\sigma} \Rightarrow \sigma = 4 \text{ kontrol kutubunun reel kismidir.}$$

$$w_n = \frac{4}{\zeta t_s} = \frac{4}{0.707 * 1} \quad w_n = 5.6577 \text{ rad/sn}$$

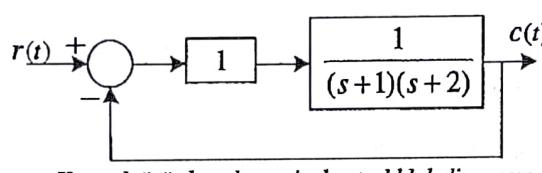
kontrol kutbunun orijinle yaptığı açı,  $\theta = \arccos \zeta$

$$\theta = \arccos(0.707) = 45^\circ$$

Neticede kontrol kutupları,  $s_{1,2} = -4 \pm 4j$  olarak belirlenir



Kontrolör tasarımlarından önce sistemin kontrolör etkisiz,  $G_c(s) = 1$ , davranışını başka bir ifade ile sistemin doğal kapalı-çevrim davranışını incelenecektir.



*Kontrolcüsüz kapalı çevrim kontrol blok diyagram*

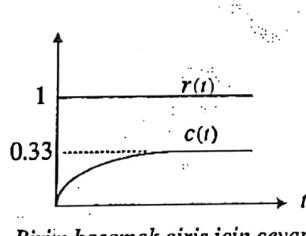
Sisteme birim basamak giriş uygulandığında,  $R(s) = \frac{1}{s}$  için sürekli hal hatası,

$$e_{ss} = \frac{1}{1+k_p} \Rightarrow k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \text{ olarak tanımlanmıştır.}$$

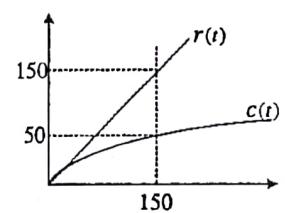
İncelenen sistem için;  $k_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(s+1)(s+2)} = 0.5 \Rightarrow e_{ss} = 0.67 = \%67$  sürekli hal hatası

$e_{ss} = \%67$  olarak hesaplanır, kabul edilebilir sınırların çok ötesindedir.

Kontrolörsüz sistemin birim basamak ve birim rampa girişleri için cevap eğrisi yaklaşık olarak aşağıda verilmiştir.



*Birim basamak giriş için cevap*



*Birim rampa giriş için cevap*

Kontrol edilen sistem  $G_p(s)$ , Birim basamak ve rampa cevaplarından görüldüğü gibi sistemin sürekli hal cevabının ve dinamiğinin düzeltilmesi gerekmektedir.

## 24.1 Parametrik Denklem ile Kontrolör tasarımu

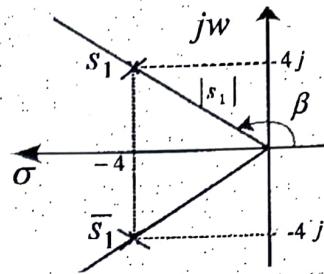
i-) hız hata katsayılarından *Integratör katsayısı*,  $K_i$  hesaplanır.

$$e_{ss} = 0.2 \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{k_v} \Rightarrow k_v = 5 \text{ hız hata katsayısı elde edilir.}$$

$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$ ,  $G(s) = G_{PID}(s)G_p(s)$  ileri yol transfer fonksiyonudur.

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \left[ K_p + \frac{K_i}{s} + sK_d \right] \left[ \frac{1}{(s+1)(s+2)} \right] \right) = 5$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{K_i}{2} \right) = 5 \Rightarrow K_i = 10 \text{ integratör katsayıısı.}$$



$K_p$  ve  $K_d$ , katsayıları sürekli-zaman PID için elde edilen ifadelerden hesaplanacaktır.

Hesap ile edilen kontrol kutup,  $s_1 = -4 \pm 4j$  dir.

$$|G_p(s_1)| = \left| \frac{1}{(-4+4j+1)(-4+4j+2)} \right| = \left| \frac{1}{(-3+4j)(-2+4j)} \right| \\ G_p(s_1) = 0.04472 \angle -243.4^\circ$$

Kutupsal koordinatlar:

$$|s_1| = 4\sqrt{2}, \beta = \arctan \frac{4}{-4} = 135^\circ$$

$$|G_p(s_1)| = 0.04472, \psi = -243.4^\circ$$

Kutupsal koordinatlarda  $s_1$ ,  $G_p(s_1)$  için hesaplanan modül ve faz değerleri ile kontrolör katsayıları  $K_p$  ve  $K_d$  aşağıda verilen ifadeler yardımı ile hesaplanır.

$$K_p = -\frac{\sin(\psi + \beta)}{|G_p(s_1)| \sin \beta} - \frac{2K_i \cos \beta}{|s_1|} \quad K_d = \frac{\sin \psi}{|G_p(s_1)| |s_1| \sin \beta} + \frac{K_i \sin \beta}{|s_1|^2}$$

$$K_p = \frac{-\sin(-108.4)}{0.04472 \sin(135)} - \frac{2 * 10 \cos(135)}{4\sqrt{2}} = 32.25 \quad \text{ve} \quad K_d = \frac{\sin(-243.4)}{4\sqrt{2} * 0.04472 \sin(135)} + \frac{10}{(4\sqrt{2})^2} = 5.312$$

## 24.2. Karakteristik Denklem ile PID katsayılarının belirlenmesi

Kontrol edilen sistem için karakteristik denklem,

$$1 + G_{PID}(s)G_p(s) = 0 \rightarrow 1 + \left( K_p + \frac{K_i}{s} + sK_d \right) \left( \frac{1}{(s+1)(s+2)} \right) = 0 \text{ yazılır.}$$

İfadeler bilinenler eşitliğin sol tarafında ve bilinmeyenler sağ tarafta olmak üzere düzenlenir.

$$K_p + sK_d = -\frac{1}{G_p(s)} - \frac{K_i}{s}$$

Kontrol kutbu  $s = s_1 = -4 \pm 4j$  için çözüm yapılır.

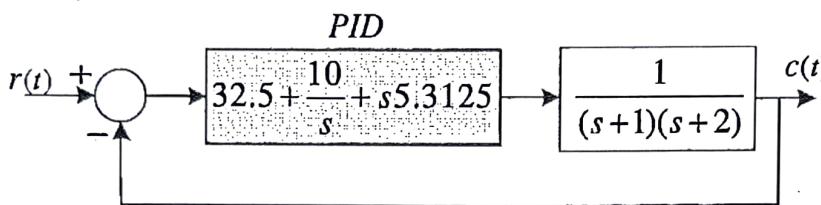
$$K_p + K_d(-4+4j) = -\frac{1}{\frac{1}{(-4+4j+1)(-4+4j+2)}} - \frac{10}{-4+4j} = -(-10-20j) - \frac{-40-40j}{32}$$

Denklemin her iki tarafı düzenlenerek reel ve sanal kısımlar birbirine eşitlenir.

$$\underbrace{K_p - 4K_d}_{\text{reel kism}} + \underbrace{4K_d j}_{\text{imajinel kism}} = \frac{320+40}{32} + j \frac{640+40}{32} \quad K_d \text{ ve } K_p \text{ ifadeleri sırası ile.}$$

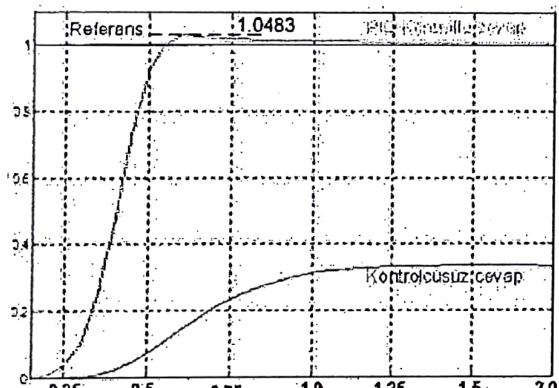
$$4K_d = \frac{640+40}{32} \Rightarrow K_d = 5.3125, \quad K_p - 4K_d = \frac{320+40}{32} \Rightarrow K_p = 32.5 \quad \text{elde edilir.}$$

PID kontrolör için elde edilen katsayılar ile kapalı-çevrim kontrol blok diyagramı aşağıda verilmiştir.

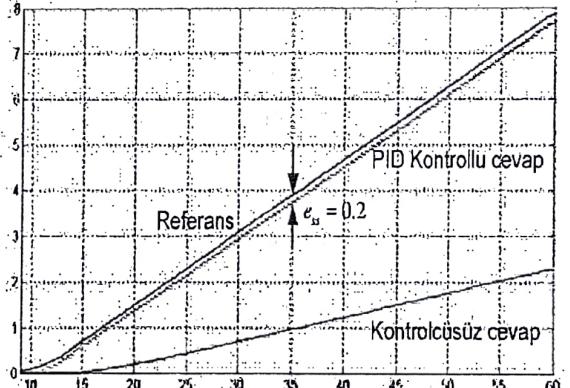


PID Kontrollü kapalı çevrim kontrol blok diyagram

Tasarım kriterlerine göre, elde edilen PID katsayıları için birim basamak ve rampa cevap eğrileri sırası ile aşağıda verilmiştir



PID Kontrollü ve kontrolcüsüz kapalı çevrim kontrol birim basamak cevap



PID Kontrollü ve kontrolcüsüz kapalı çevrim kontrol birim rampa cevap.

**PID kontrolör ile sisteme ait geometrik yer eğrisi çizimi** aşağıda verilmiştir: Kontrol edilen sistemin açık-çevrim transfer fonksiyonu,

$$G_c(s)G_p(s) = 5.3125 \frac{s^2 + 6.117s + 1.8823}{s(s^2 + 3s + 2)} \quad \text{dir.}$$

#### Kutuplar

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = -1$$

$$s_3 = -2$$

$$n=3$$

#### Sıfırlar

$$z_1 = -5.7921$$

$$z_2 = -0.325$$

$$z_3 = \infty$$

$$m=2$$

#### Asintotlar

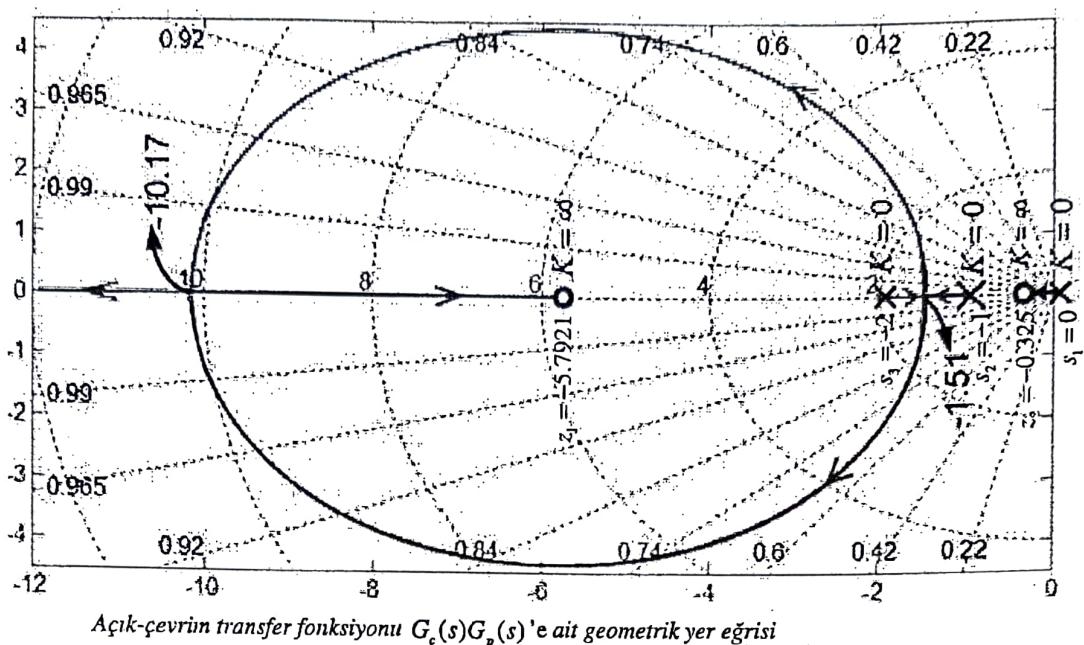
$$3-2=1 \text{ adet}$$

yer eğrisi ile ilgili diğer hesaplar okuyucuya bırakılmıştır.

#### Kollar

$$n=3 \text{ adet}$$

$K = 0$  'da başlar  $K = \infty$  'da biter.



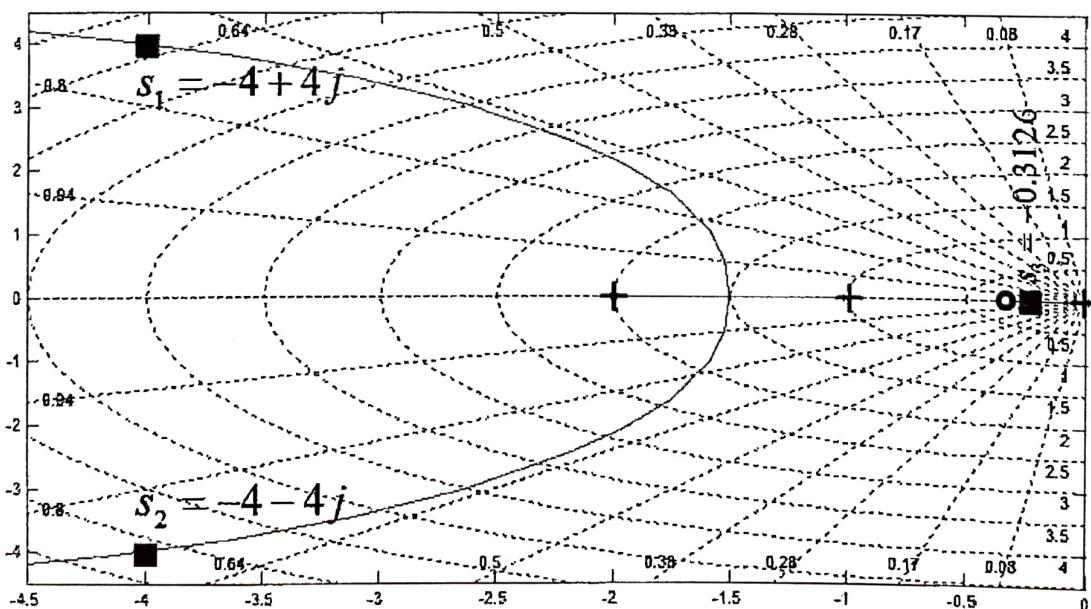
*Kontrol edilen sisteme ait karakteristik denklem*

$$F(s) = 1 + G_c(s)G_p(s) = 1 + 5.3125 \frac{s^2 + 6.117s + 1.8823}{s(s^2 + 3s + 2)} = 0 \quad \text{yazılır ve düzenlenir ise,}$$

$$F(s) = s^3 + 8.3125s^2 + 34.49s + 10 = 0 \text{ ye kökler}$$

$$s_1 = -4 + 4j, \quad s_2 = -4 - 4j \quad \text{ve} \quad s_3 = -0.3126 \text{ dir.}$$

Tasarımında elde edilen PID katsayılarına göre kapalı çevrim kutupları  $s_1$ ,  $s_2$  ve  $s_3$ 'ün yer eğrisinde aşağıda gösterilmiştir,  $s_{1,2} = -4 \pm 4j$  Kontrol (baskın) kutuplardır. Şekilde kutup yerlerini daha iyi gösterebilme amacıyla geometrik ter eğrisinde sadece ilgili kısımlar bire bir ölçekli olarak verilmistir.



Kapali-çevrim kutupları  $s_1$ ,  $s_2$  ve  $s_3$  yer eğrisindeki yerleri. Kontrol (baskın) kutuplar  $s_1$  ve  $s_2$  dir

Tasarlanmış olan PID kontrol kurallı  $G_c(s)$  ile  $G_p(s)$  sistemine ait kapalı-çevrim transfer fonksiyonu:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = 5.3125 \frac{s^2 + 6.117s + 1.8823}{s^3 + 8.3125s^2 + 34.49s + 10} \quad \text{dir.}$$

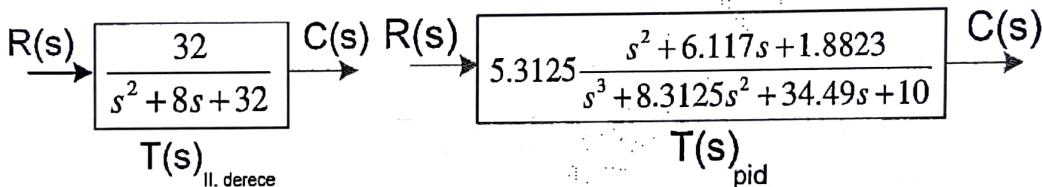
Tasarımda, verilen geçici rejim parametreleri,  $\zeta = 0.707$  ve  $w_n = 5.6577$  'ne göre,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad \text{olmak üzere, tasarım sonrasında olması istenen}$$

II. dereceden kapalı-çevrim transfer fonksiyonu ise ,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{32}{s^2 + 8s + 32} \quad \text{olur. Her iki transfer fonksiyonu için blok}$$

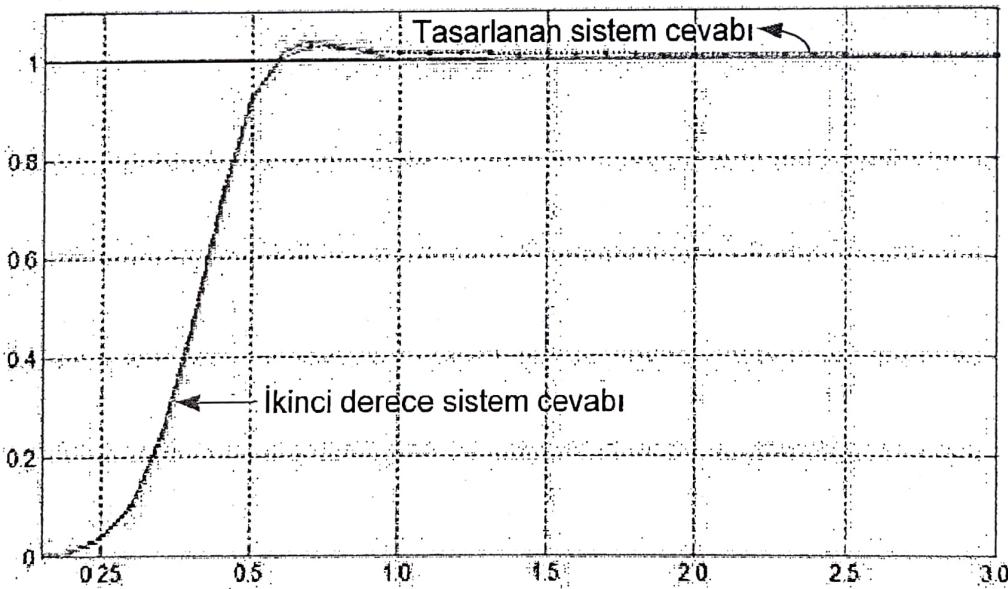
diagramları aşağıda verilmiştir.



II. derecen sistem transfer fonksiyonu

Tasarlanan PID kontrol kurallı sisteme ait transfer fonksiyonu

Basamak giriş için her iki sisteme ait cevaplar aşağıda verilmiştir.



II. derecen ve PID kontrol kurallı sistemlerin basamak giriş için cevapları.

Her iki sistem transfer fonksiyonlarına bakıldığındá çok farklı yapıda oldukları görülmektedir. Ancak basamak giriş için cevap eğrileri bir birine çok yakındır. Nedeni aşağıda tartışılacaktır.

PID kontrol kurallı sistem,  $\frac{C(s)}{R(s)} = 5.3125 \frac{s^2 + 6.117s + 1.8823}{(s^2 + 8s + 32)(s + 0.312)}$  düzenlenir ve

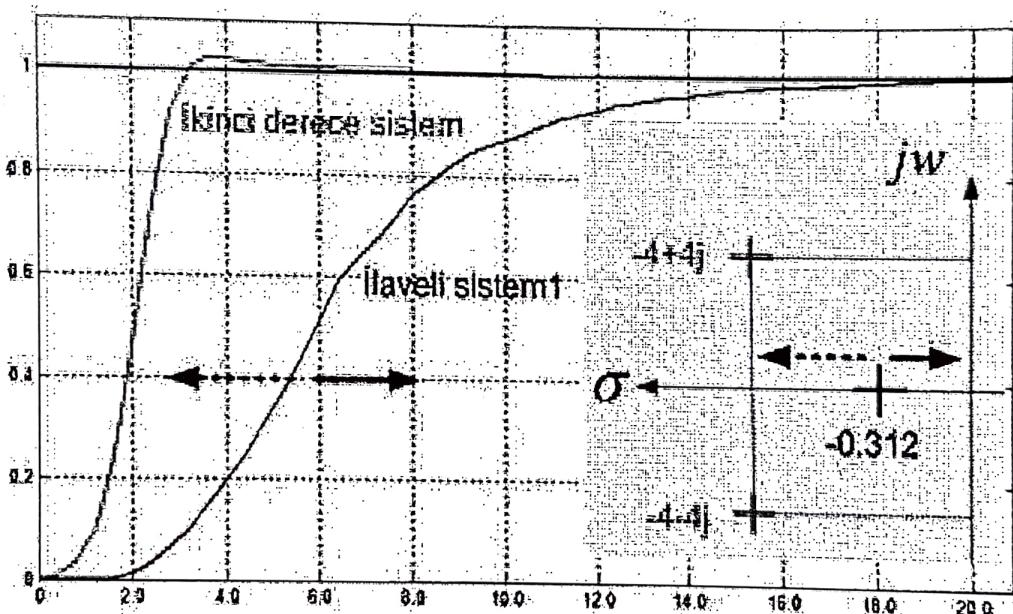
II. dereceden sistem göz önüne alındığında,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{32}{s^2 + 8s + 32} \quad \text{iki transfer fonksiyonu arasındaki}$$

fark,  $\Delta(s) = 0.166 \frac{s^2 + 6.117s + 1.8823}{s + 0.312} = 0.166 \frac{(s + 5.7921)(s + 0.325)}{s + 0.312}$  elde edilir.

$\Delta(s)$  de görülen her bir çarpan sırası ile, *birim kazançlı* olarak II. dereceden transfer fonksiyonuna ilave edilecek ve çıkış cevap eğrisi üzerindeki etkisi tartışılacaktır.

- 1- Birim kazançlı kutup  $\frac{0.312}{s + 0.312}$  ilavesi ile  $\frac{C_1(s)}{R_1(s)} = \frac{32}{s^2 + 8s + 32} \frac{0.312}{s + 0.312}$  ilaveli\_sistem1 elde edilir. İlaveli\_sistem1 ve II. dereceden sistem cevap eğrileri aşağıda verilmiştir.



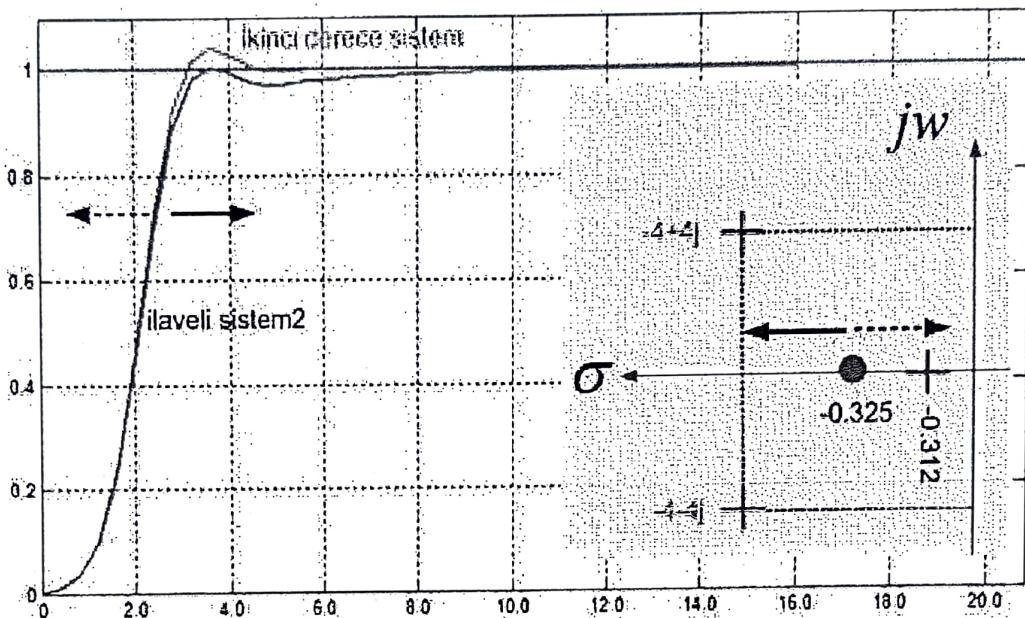
İlave kutup  $s = -0.312$  den  $s = 0$ 'a orijine doğru yaklaşıkça sistem cevabı yavaşlar.  
İlave kutup orijinden,  $s = 0$ 'dan  $s = -\infty$ 'a doğru gittikçe sistem cevap hızı artar.

Yukarıda şekilde, cevap eğrilerinin sağ köşesinde, ilave\_sistem1 kutup dağılımı s-kompleks düzleminde gösterilmiştir. İlave kutubun yer değiştirmesine bağlı olarak cevap eğrisinin değişim hızı ilgili oklarla gösterilmiştir.

- 2- Birim kazançlı sıfır  $\frac{1}{0.325}(s+0.325)$  ilavesi ile *ilaveli\_sistem2*

$$\frac{C_2(s)}{R_2(s)} = \frac{32}{s^2 + 8s + 32} 3.0769 \frac{s + 0.325}{s + 0.312} \text{ olarak elde edilir. } \underline{\text{İlaveli_sistem2}}$$

**II. dereceden sistem** cevap eğrileri aşağıda verilmiştir.



*İlaveli sistem2 ve II. derece sistem cevapları.*

*İlave sıfır*  $z = -0.325$  'den  $s = 0$  'a orijine doğru yaklaşıkça sistem cevabı hızlanır, *ilave sıfır*  $z = -0.325$  orijinden  $s = 0$  'dan  $s = -\infty$  'a doğru gittikçe sistem cevap hızı yavaşlar.

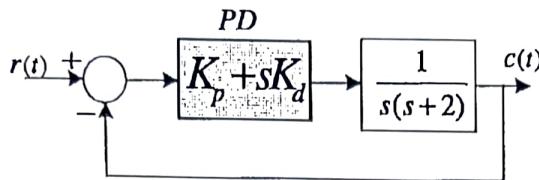
Yukarıdaki şekilde, cevap eğrilerinin sağ köşesinde *ilave\_sitem2* kutup-sıfır dağılımı s-kompleks düzleminde gösterilmiştir. *İlave sıfırın yer değiştirmesine* bağlı olarak cevap eğrisinin değişim hızı ilgili oklarla gösterilmiştir.

- 3- Birim kazançlı sıfır 2. sıfır  $\frac{1}{0.325}(s+0.325)$  ilavesi ile yeni sistem

$$\frac{C_3(s)}{R_3(s)} = \frac{32}{s^2 + 8s + 32} 0.1657 \frac{(s+5.7921)(s+0.325)}{s+0.312} \text{ olarak elde edilir. Düzenlenir ise,}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = 5.3125 \frac{s^2 + 6.117s + 1.8823}{s^3 + 8.3125s^2 + 34.49s + 10} \text{ PID kontrol kurallı kapalı-gevrim transfer fonksiyonu elde edilir. Birim basamak cevabı yukarıda incelediğinden dolayı, tekrar edilmeyecektir.}$$

**Örnek:**



Verilen sistemde %2 kriterine göre yerleşme zamanı  $t_s = 2s$ ,  $\%M_p = 4.3$  ( $\zeta = 0.707$ ) olması isteniyor. Buna göre  $K_p, K_d = ?$

$$\text{\%2 kriterine göre yerleşme zamanı } t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta w_n} \text{ dir.}$$

$$t_s = 2 = \frac{4}{\sigma} \Rightarrow \sigma = 2 \text{ ise } w_n = \frac{2}{\zeta} = \frac{2}{0.707} = 2.8289 \text{ rad/sn ise}$$

$w_n = 2.8289 \text{ rad/sn}$  ve  $\zeta = 0.707$  dir. Kontrol kutupları  $s_{1,2}$  iki şekilde bulunabilir.

**1-**  $0 < \zeta < 1$  için  $s_{1,2}$  kontrol kutupları karakteristik denklem kök ifadesinden hesaplanır.

$$s_{1,2} = -\zeta w_n \pm jw_n \sqrt{1 - \zeta^2} = -0.707 * 2.8289 \pm j2.8289 \sqrt{1 - 0.707^2} \text{ ise,}$$

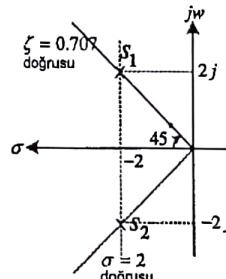
$$s_{1,2} = -2 \pm 2j \text{ elde edilir.}$$

**2-** s-kompleks düzleminde  $s_{1,2}$  aşağıda verildiği gibi elde edilir.

kontrol kutubunun orijinle yaptığı açı,  $\theta = \arccos \zeta$

$$\theta = \arccos(0.707) = 45^\circ$$

Kontrol kutupları,  $s_{1,2} = -2 \pm 2j$  olarak belirlenir



PD kontrol kuralı için katsayılar  $K_p$  ve  $K_d$  farklı iki yöntem ile elde edilecektir.

### 24.3 Köklerin Geometrik Yer Eğrisinde PD Tasarım

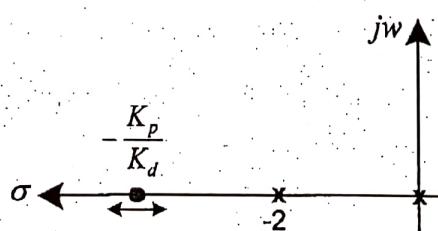
Açık-çevrim transfer fonksiyonu yazılır ise

$$G_{PD}(s)G_p(s) = \frac{K_p + sK_d}{s(s+2)} \text{ dir. S-kompleks düzleminde kutup-sıfır dağılımı yapılır.}$$

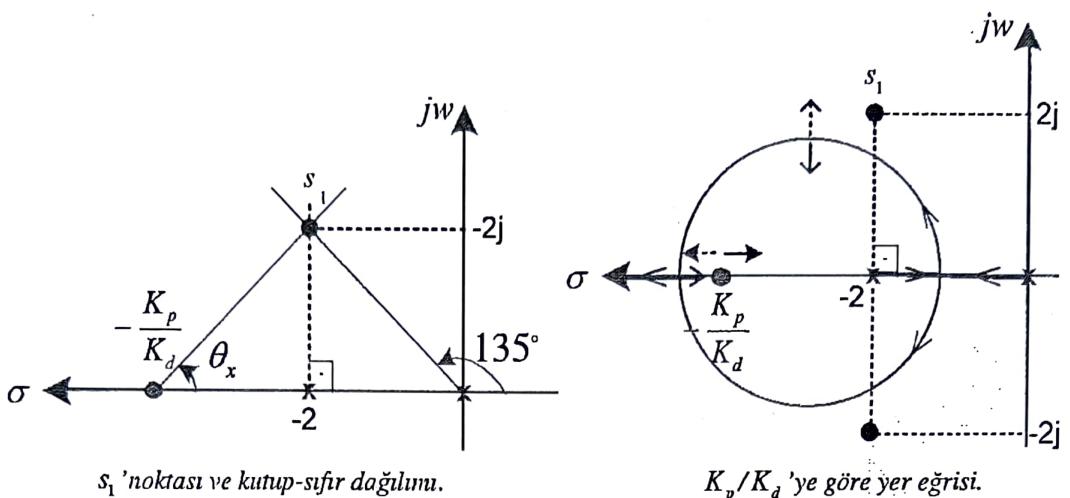
Kutuplar sıfırlar

$$s_{p1} = -2 \quad z_1 = -\frac{K_p}{K_d}$$

$$s_{p2} = 0 \quad z_2 = \infty$$



Yer eğrisi  $s_1$  noktasından geçecek şekilde  $K_p$  ve  $K_d$  ayarlanmalıdır.



$K_p/K_d$  'ye göre yer eğrisine ait şekilden görüleceği üzere,  $-\frac{K_p}{K_d}$  orijine  $s=0$  'a doğru yaklaşıkça çember şeklinde olan yer eğri çapı küçülmektedir.  $-\frac{K_p}{K_d}$  orijinden  $s=0$  noktasından uzaklaşıkça çember şeklindeki yer eğrisi yarı çapı büyümektedir.

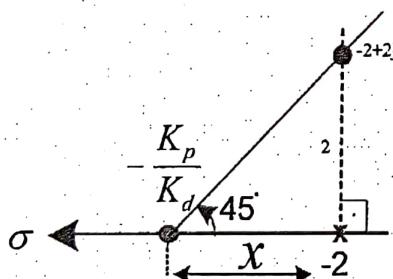
$-\frac{K_p}{K_d}$  s-kompleks düzleminde öyle bir noktaya yerleştirilmelidir ki geometrik yer eğrisi  $s_1$  noktasından geçsin.

Yer eğrisinin  $s_1$  noktasından geçmesi için,  $s_1$  noktası faz ve modül koşulunu sağlamak mecburiyetindedir.

- i- **Faz koşulu:**  $s_1$ 'noktası ve kutup-sıfır dağılımına ait şeilden  $s_1$ 'noktasına faz koşulu, aşağıda verildiği gibi uygulanır.

$$\sum \theta_{\text{örj}} - \sum \theta_{\text{kutup}} = \pm 180^\circ \text{ ise } \theta_x - (90 + 135) = 180 \rightarrow \theta_x = 405^\circ$$

$-\frac{K_p}{K_d}$ ,  $s_1$ 'noktasına  $\theta_x = 405^\circ - 360^\circ = 45^\circ$  açı ile yerleştirilmelidir.



Şekilden,  $\tan \theta_x = \tan(45) = \frac{2}{x} = 1 \rightarrow x = 2$

$-\frac{K_p}{K_d}$  nin  $s=0$  orijine uzaklığı ise

$$-\frac{K_p}{K_d} = -x - 2 \text{ dir. } -\frac{K_p}{K_d} = -4 \text{ ve}$$

$$K_p = 4K_d \text{ dir.}$$

İki bilinmeyen  $K_p$  ve  $K_d$  tek. İkinci denklem modül koşulundan yazılır.

**ii- Modül koşulu:** Köklerin geometrik yer eğrisinin  $s_1$ 'noktasından geçebilmesi için (veya  $s_1$  noktasının yer eğrisine ait bir nokta olabilmesi için)  $s_1$  noktası, ikinci koşul olan modül koşulunu sağlamak mecburiyetindedir. Modül koşulu,  $|G_{PD}(s)G_p(s)|_{s=-2+2j} = 1$  dir.

$$\left| \frac{K_d(s+4)}{s(s+2)} \right|_{s=-2+2j} = 1 \Rightarrow \frac{K_d(-2+2j+4)}{(-2+2j)(-2+2j+2)} = -1 \Rightarrow \frac{K_d(2+2j)}{(-2+2j)(2j)} = -1$$

$$\left| \frac{K_d}{2} \right| = |-1| \Rightarrow K_d = 2, \quad \frac{K_p}{K_d} = 4 \Rightarrow K_p = 4K_d \text{ ise, } K_p = 8 \text{ dir.}$$

#### 24.4 Parametrik Denklemler ile PD Tasarım

Kontrol kuralı olarak PD kontrolör kullanıldığından parametrik ifadelerde  $K_i = 0$  alınır.

$$K_i = 0 \text{ için} \quad K_p = -\frac{\sin(\psi + \beta)}{|G_p(s_1)| \sin \beta} \quad K_d = \frac{\sin \psi}{|G_p(s_1)| |s_1| \sin \beta}$$

$$s_1 = -2 + 2j \quad \text{ise} \quad s_1 = |s_1| e^{j\beta} = 2\sqrt{2} e^{j135^\circ}$$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)} \quad \text{ise} \quad G(s) = |G(s)| e^{j\psi} \quad s = s_1 = -2 + 2j \quad \text{verilerek,}$$

$$G(s_1) = \frac{1}{(-2+2j)(-2+2j+2)} \\ = 0.1768 e^{j135^\circ}$$

Kutupsal koordinatlarda hesaplanan genlik ve faz değerleri aşağıda verilmiştir.

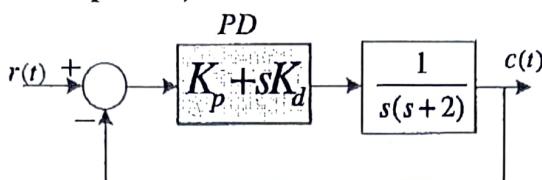
$$|s| = 2\sqrt{2} \quad \beta = 135^\circ \\ |G(s)| = 0.1768 \quad \psi = 135^\circ$$

Bu sayısal değerler,  $K_p$  ve  $K_d$  parametrik denklemlerinde yerine koyulur.

$$K_p = -\frac{\sin(\psi + \beta)}{|G_p(s_1)| \sin \beta} = -\frac{\sin(135 + 135)}{0.1768 * \sin(135)} \quad \text{ise, } K_p = 8$$

$$K_d = \frac{\sin \psi}{|G_p(s_1)| |s_1| \sin \beta} = \frac{\sin(135)}{0.1768 * 2\sqrt{2} * \sin(135)} \quad \text{ise } K_d = 2$$

### 24.5 Kutup Yerleştirme Yöntemi ile PD Tasarım



Verilen sisteme ait

kapalı-çevrim transfer fonksiyonu elde edilir.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_p + sK_d}{s(s+2)}}{1 + \frac{K_p + sK_d}{s(s+2)}} = \frac{K_p + sK_d}{s^2 + 2s + K_p + sK_d} \quad \text{düzenlenir ise PD kontrol kurallı kapalı-çevrim}$$

transfer fonksiyonu,  $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p + sK_d}{s^2 + (K_d + 2)s + K_p}$ , elde edilir.

$\zeta = 0.707$  ve  $w_n = 2.8289$  rad/sn için kontrol kutupları,  $s_{1,2} = -2 \pm 2j$  edilmiştir. II.dereceden sisteme ait karakteristik denklem,

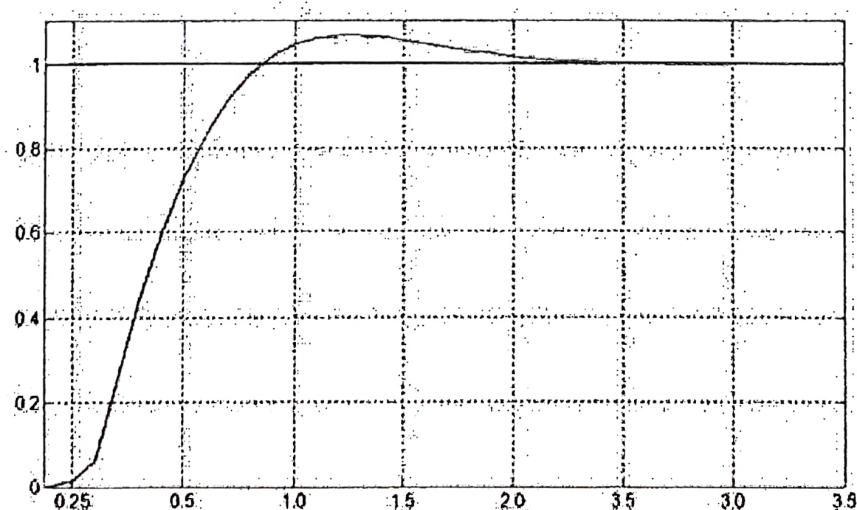
$$F(s) = (s - s_1)(s - s_2) = (s + 2 - 2j)(s + 2 + 2j) \text{ ise,}$$

$F(s) = s^2 + 4s + 8 = 0$  Olması istenen karakteristik denklem olarak elde edilir.

PD kontrol kurallı kapalı-çevrime ait karakteristik denklem ile II. derece sisteme ait karakteristik denklem eşitlenir. Aynı terimli katsayılarından bilinmeyenler hesaplanır.

$$F(s) = s^2 + (K_d + 2)s + K_p = s^2 + 4s + 8 = 0 \text{ eşitliğinden, } K_p = 8 \quad K_d + 2 = 4 \text{ ise } K_d = 2 \text{ dir.}$$

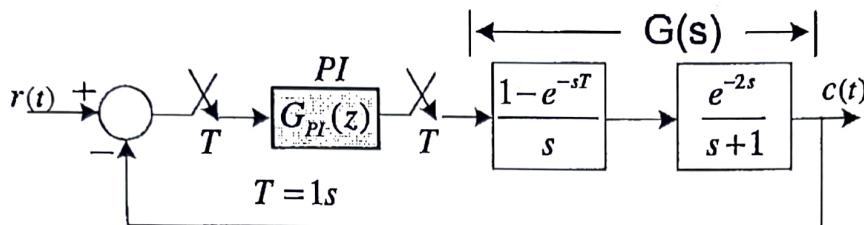
Hesaplanan katsayılar  $K_p$  ve  $K_d$  kullanılarak PD kontrol kurallı kapalı-çevrim birim basamak giriş için çıkış cevabı aşağıda verilmiştir.



PD kontrol kurallı sistemin birim basamak giriş için cevabı.

### 25. Ayrık-Zaman Tasarım

Örnek:



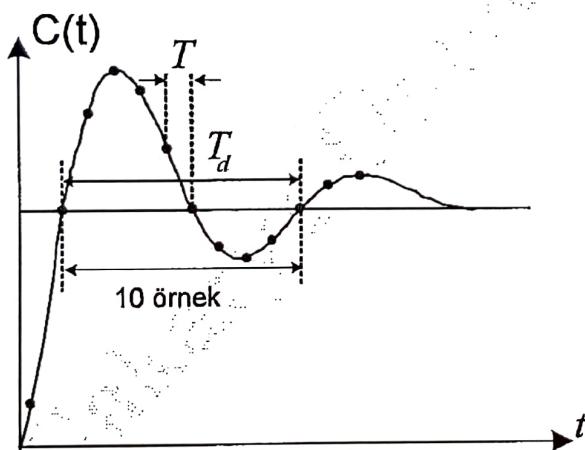
Sekilde verilen ayrık-zaman sisteme,  $\zeta=0.5$  ve sistem cevabı  $c(t)$  sönümlü sinüs şeklinde osilasyon yapmaktadır. Her osilasyon periyodunda 10 örnek alınabilecek şekilde PI kontrolcüsünün katsayılarını  $K_p, K_i$  belirleyiniz.

Ayrık-zaman kontrolcü tasarılanacağından sistemin ayrık-zaman açık-çevrim transfer fonksiyonu elde edilmelidir.

$$\text{Rezidü yönteminden; } G(z) = Z \left\{ \frac{1-e^{-sT}}{s} \frac{e^{-2s}}{s+1} \right\} = (1-z^{-1}) z^{-2} Z \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\}$$

$$G(z) = \frac{0.6321}{z^2(z-0.3679)} \quad \text{elde edilir.}$$

Osilasyonlu sinüs cevabı aşağıda verilmiş olup, her osilasyon periyodundan 10 örnek alınması için gerekli örnekleme aralıkları gösterilmiştir.



II. dereceden sistemde kontrol kutupları,

$$\text{Örnekleme açısal frekansı: } w_s \triangleq \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{Örnekleme zamanı: } T = \frac{2\pi}{w_s}$$

$$\text{Osilasyon açısal frekansı: } w_d = w_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\text{Doğal açısal frekans: } w_n = \frac{w_d}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$w_n T = \frac{w_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{2\pi}{w_s} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{w_d}{w_s}$$

$$w_n T = \frac{2\pi}{10\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{dir.}$$

$T(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \Rightarrow s_{1,2} = -\zeta w_n \pm j w_n \sqrt{1-\zeta^2}$  kontrol kutuplarıdır. Ayrık-zaman kontrol-kutupları  $z_{1,2}$ ,

$$z \triangleq e^{sT} \quad z_{1,2} \triangleq e^{\left( -\zeta w_n \pm j w_n \sqrt{1-\zeta^2} \right) T} \triangleq e^{-\zeta w_n T} e^{\pm j w_n T \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$w_n T = \frac{2\pi}{10\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi}{10\sqrt{1-0.5^2}} = 0.7255$$

$$w_d T = w_n T \sqrt{1-\zeta^2} = 0.7255 \sqrt{1-0.5^2} = 0.6283$$

$$z_{1,2} = e^{-\zeta w_n T} e^{-j w_d T} = e^{-0.5*0.7255} e^{\pm j 0.6283} = 0.6958 e^{\pm j 0.6283}$$

---


$$z_{1,2} = 0.5629 \pm j 0.4090 \quad \text{Ayrık-zaman kontrol kutupları (baskın kutuplar)}$$


---

### 25.1 Köklerin Geometrik Yöntemi ile PI Katsayı Tasarımı

PI kontrol kurallı ayrık-zaman açık-çevrim transfer fonksiyonu,

$$G_{PI}(z)G(z) = (K_p + K_i) \frac{z - \frac{K_p}{(K_p + K_i)}}{z - 1} \frac{0.6321}{z^2(z - 0.3679)} \quad \text{şeklinde düzenlenir.}$$

Kutuplar

$$p_{1,2} = 0$$

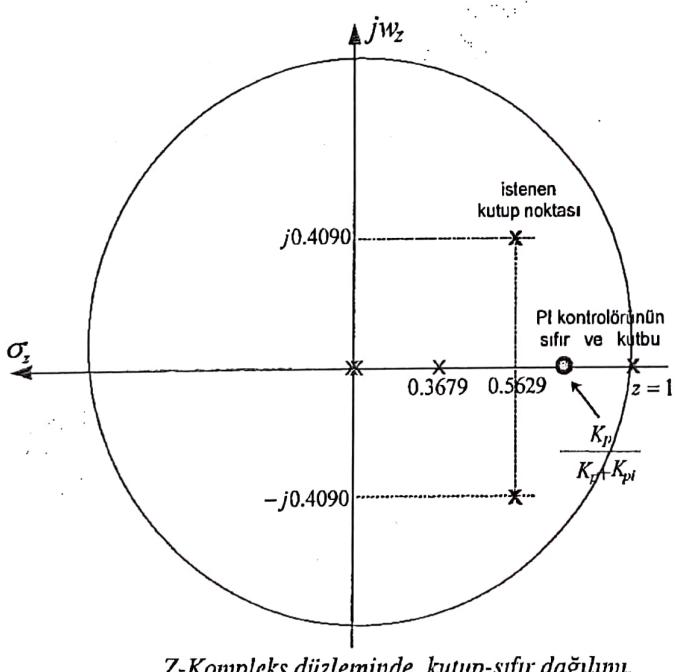
$$p_3 = -0.3679$$

sıfırlar

$$z_1 = -\frac{K_p}{K_p + K_i}$$

$$z_2 = \infty$$

Kutup-sıfır dağılımı z-kompleks düzleminde verilmiştir.



PI kontrolör, ayrık-zaman açık-çevrim transfer fonksiyonuna,  $z = 1$  de bir kutup ve  $z = \frac{K_p}{(K_p + K_i)}$  de bir adet sıfır getirmektedir.

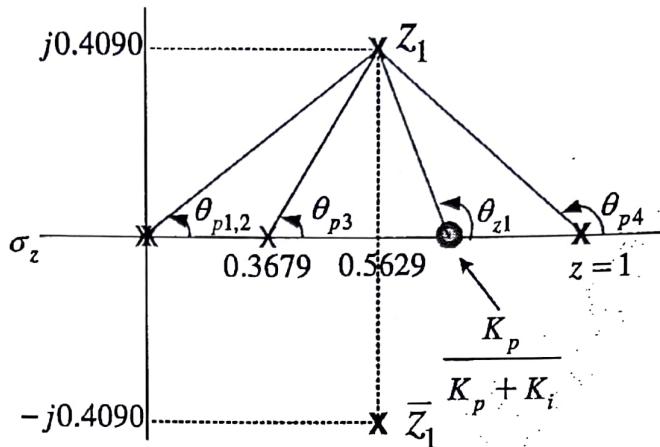
İstenen cevap performansı için, yer eğrisi  $z_{1,2}$  noktasından geçecektir. Bu şekilde  $K_p$  ve  $K_i$  hesaplanmalıdır.

Bunun için  $z_{1,2}$  noktaları:

- 1- Faz-koşul
  - 2- Modül-koşul
- sağlanmak mecburiyetindedir.

**1- Faz koşulu:** Kutup-sıfır dağılımı hesap kolaylığı açısından aşağıda geometrik olarak çizilmiştir. Faz koşulunun kontrol kutuplarından  $z_1$  veya  $\bar{z}_1$  den birisine uygulanması yeterlidir.

$$\sum \angle z + z_i - \sum \angle z + p_i = 180^\circ \quad \text{faz-koşulu.}$$



$\theta_{p1}, \dots, \theta_{p4}$  açıları şekilde üzerinden aşağıda hesaplanmaktadır.

$$\theta_{p1} = \theta_{p2} = \arctan \frac{0.4090}{0.5629} = 36^\circ$$

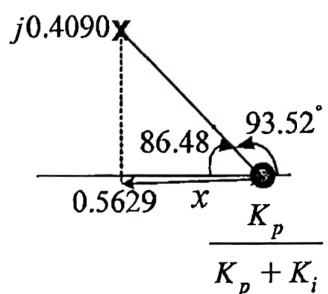
$$\theta_{p3} = \arctan \frac{0.4090}{(0.5629 - 0.3679)} = 64.51^\circ$$

$$\theta_{p4} = 180^\circ - \arctan \frac{0.4090}{(1 - 0.5629)} = 136.9^\circ \quad \text{Elde edilen açılar faz-koşulu ifadesinde}$$

kullanılarak, PI kontrolör sıfırı  $z = \frac{K_p}{(K_p + K_i)}$  'in kontrol kutubu  $z_1$  ile yapması gereken açı  $\theta_{z1}$  aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} \sum \angle z + z_i - \sum \angle z + p_i &= 180^\circ \Rightarrow \theta_{z1} - (\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3} + \theta_{p4}) = 180^\circ \\ \theta_{z1} - (36^\circ + 36^\circ + 64.51^\circ + 136.9^\circ) &= 180^\circ \\ \theta_{z1} &= 453.52^\circ = 93.52^\circ \end{aligned}$$

Elde edilen  $\theta_{z1}$  ile,  $z = \frac{K_p}{K_p + K_i}$  noktası aşağıda hesaplanmıştır.



$$\tan \frac{0.409}{x} = 86.48 \rightarrow x = 0.0252$$

$$\frac{K_p}{K_p + K_i} = 0.5629 + 0.0252 = 0.5881$$

$$K_p = 1.3666 K_i$$

- 2- Genlik Koşulu:** Köklerin geometrik yer eğrisinin  $z_1$  kontrol kutubundan geçebilmesi için genlik koşulu kesin sağlanmalıdır.

$$\frac{K_p}{(K_p + K_i)} = \frac{1.3666 K_i}{1.3666 K_i + K_i} = 0.5775$$

$$K_p + K_i = 1.3666 K_i + K_i = 2.3666 K_i$$

$$\left| G_{PI}(z_1)G(z_1) \right| = 1 = \left| (K_p + K_i) \frac{z - \frac{K_p}{(K_p + K_i)}}{z-1} \frac{0.6321}{z^2(z-0.3679)} \right|_{z=0.5629+j0.4090} = 1$$

$$= \left| 2.3666 K_i \frac{z - 0.5775}{z-1} \frac{0.6321}{z^2(z-0.3679)} \right|_{z=0.5629+j0.4090} = 1$$

$$K_i \left| \frac{(0.5629 + j0.4090) - 0.5881}{(0.5629 + j0.4090) - 1} \frac{0.6321}{(0.5629 + j0.4090)^2 [(0.5629 + j0.4090) - 0.3679]} \right| = 1$$

Ara işlemler yapılarak  $K_i = 0.2145$  ve

$$K_p = 1.3666 K_i = 0.2145 * 1.3666$$

$K_p = 0.2931$  olarak hesaplanır.

## 25.2 Karakteristik Denklem ile PI Katsayı Tasarımı

PI kontrol kurallı kapalı çevrim transfer fonksiyona ait karakteristik denklem,

$$F(z) = 1 + G_{PI}(z)G_p(z) = 0 \quad \text{ifade edilir.}$$

$$1 + \left( K_p + K_i \frac{z}{z-1} \right) \frac{0.6321}{z^2(z-0.3679)} = 0$$

Karakteristik denklem bilinenler eşitliğinin bir tarafına bilinmeyenler diğer tarafta olacak şekilde düzenlenirse,

$$G_{PI}(z) = \frac{-1}{G_p(z)} \Rightarrow \left( K_p + K_i \frac{z}{z-1} \right) \Big|_{z=0.5629+j0.4090} = -\frac{1}{\frac{0.6321}{z^2(z-0.3679)}} \Big|_{z=0.5629+j0.4090}$$

$$\left( K_p + K_i \frac{0.5629 + j0.4090}{(0.5629 + j0.4090) - 1} \right) = -\frac{1}{\frac{0.6321}{(0.5629 + j0.4090)^2 (0.5629 + j0.4090 - 0.3679)}}$$

ifadesinde ara işlemler yapılmış her iki taraftaki reel ve sanal kısımlar birbirine eşitlenirse,

$$j0.23883 = j1.1414K_i \Rightarrow K_i = 0.2094$$

$$K_p = 0.25179 + 0.2198K_i \Rightarrow K_p = 0.29782$$

### 25.3 Parametrik Denklemlerden PI Katsayı Tasarımı

**Hatırlatma:**

$$K_i = -\frac{\sin \psi}{|G_p(z_1)|} \frac{|z_1| - 2 \cos \beta + \frac{1}{|z_1|}}{\sin \beta}$$

$$K_p = -\frac{\cos \psi}{|G_p(z_1)|} - 2K_i |z_1| \frac{|z_1| - \cos \beta}{|z_1|^2 - 2|z_1| \cos \beta + 1} + \frac{-|z_1| \sin \psi + \cos \beta \sin \psi}{|G_p(z_1)| \sin \beta}$$

$$z_1 = |z_1| e^{j\beta} \quad G_p(z_1) = |G_p(z_1)| e^{j\psi}$$

İstenen cevap performansı için olması gereken kapalı-çevrim baskın kutupları,

$$z_{1,2} = 0.5629 \pm j0.4090 \quad \text{olarak elde edilmişlerdi. } G(z) = \frac{0.6321}{z^2(z - 0.3679)}$$

$$z_1 = 0.5629 + j0.4090 \rightarrow |z_1| = \sqrt{0.5629^2 + 0.4090^2} \rightarrow |z_1| = 0.6958$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{0.409}{0.5629}\right) \rightarrow \beta = 0.6284$$

$$G_p(z_1) = \frac{0.6321}{(0.5629 + j0.4090)^2(0.5629 + j0.4090 - 0.3679)} = -2.0906 - j1.9830 \rightarrow$$

$$|G_p(z_1)| = \sqrt{(-2.0906)^2 + (-1.9830)^2} = 2.8815 \quad |G_p(z_1)| = 2.8815$$

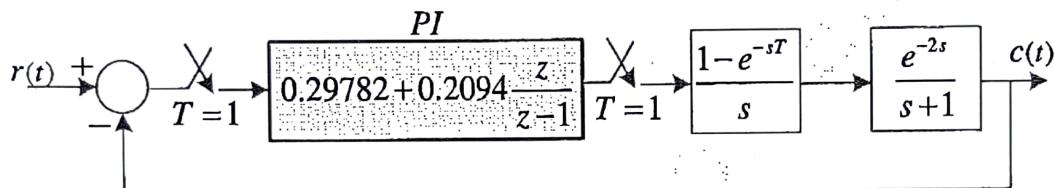
$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{-1.9830}{-2.0906}\right) = -2.3826 \rightarrow \psi = -2.3826$$

Elde edilen genlik ve faz değerleri parametrik denklemler  $K_p$  ve  $K_i$  de yerine koyulur.

$$K_i = -\frac{\sin(-2.3826)}{2.8815} \frac{0.6958 - 2\cos(0.6284) + \frac{1}{0.6958}}{\sin(0.6284)} \rightarrow K_i = 0.2098$$

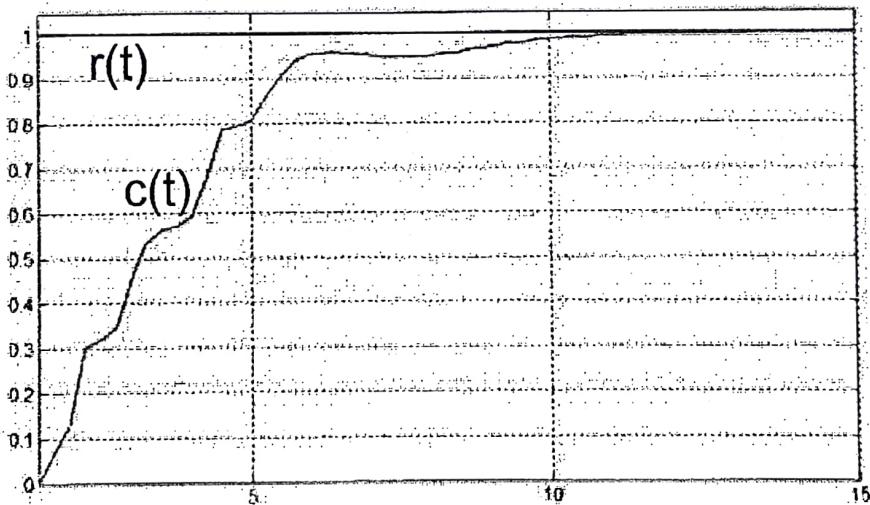
$$K_p = -\frac{\cos(-2.3826)}{2.8815} - 2(0.2098)0.6958 \frac{0.6958 - \cos(0.6284)}{0.6958^2 - 20.6958\cos(0.6284) + 1} \\ + \frac{-0.6958\sin(-2.3826) + \cos(0.6284)\sin(-2.3826)}{2.8815\sin(0.6284)}$$

$$K_p = 0.2978$$



*PI kontrol kurallı ayrik-zaman kapali-çevrim kontrol blok diyagram*

Birim basamak giriş  $r(t)$  için cevap  $c(t)$  aşağıda verilmiştir.



*PI kontrol kurallı ayrik-zaman kapali-çevrim cevap*

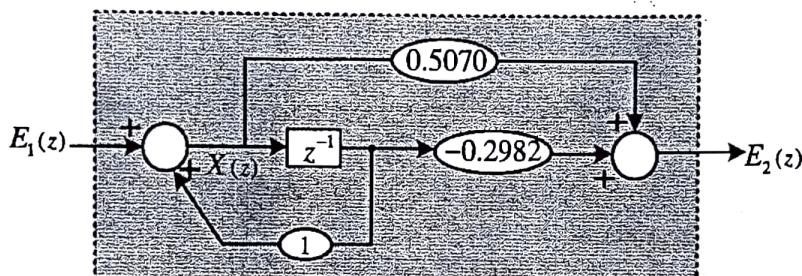
Sayısal PI kontrolörüne ait doğrudan programlama yöntemi ile durum diyagramı ve sembolik dilde yazılım aşağıda verilmiştir.

$$E_1(z) \xrightarrow{\text{PI}} \boxed{0.29782 + 0.2094} \frac{z}{z-1} \rightarrow E_2(z) \quad \equiv \quad E_1(z) \xrightarrow{\text{PI}} \boxed{0.5070} \frac{z - 0.5881}{z-1} \rightarrow E_2(z)$$

$$\frac{E_2(z)}{E_1(z)} = 0.5070 \frac{z - 0.5881}{z-1} \frac{z^{-1}}{z^{-1}} \frac{X(z)}{X(z)}$$

$$E_1(z) = X(z) - z^{-1}X(z) \Rightarrow X(z) = E_1(z) + z^{-1}X(z) \Rightarrow X(k) = E_1(k) + X(k-1)$$

$$E_2(z) = 0.5070X(z) - 0.2982z^{-1}X(z) \Rightarrow E_2(k) = 0.5070X(k) - 0.2982X(k-1)$$



$$X(k) = E_1(k) + X(k-1)$$

$$E_2(k) = 0.5070X(k) - 0.2982X(k-1)$$

$$A = X(k-1)$$

Sembolik yazılım.

```

A = 0
devam: read e1
X = e1+A
e2 = 0.5070*X-0.2982*A
out e2
A=X
goto devam
    
```

## 26. PID Parametrelerinin Deneysel Olarak Ayarlanması

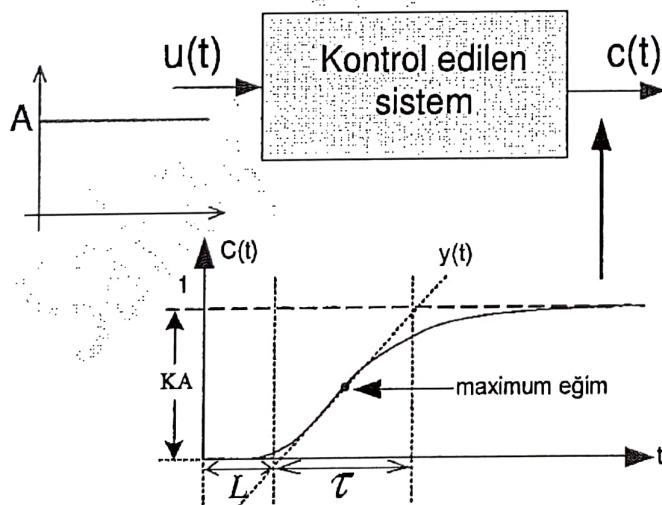
Endüstriyel uygulamalarda, PID kontrolörler genellikle deneysel olarak ayarlanır. PID kontrolör esnek olarak ayarlanabilen üç adet parametre *oransal kazanç  $K_p$* , *integral zaman sabiti  $T_i$*  ve *türev zaman sabiti  $T_d$*  ye sahiptir.  $K_p$  nin artırılması sistem cevap hızını artırrur ancak cevap osilasyonunda artar. Aynı durum  $T_i$ , azaltıldığı zamanda söz konusudur.  $T_d$  nin artırılması ile sistem cevabı daha yavaş ancak daha kararlı olur. Bu bilgiler ışığı altında, matematik modeli mevcut olmayan sistemlerin kontrolünde PID kontrolör parametreleri deneme yanılma yöntemine dayalı olarak ayarlanabilir, ancak bu yöntemin başarısı tamamen tasarımcının deneyimine ve kişisel becerisine bağlıdır. PID kontrolör parametrelerinin daha basit pratik ayarlanabilmesi için Ziegler ve Nichols iki yöntem sunmuşlardır.

### 26.1 Ziegler-Nichols metotları ile PID Tasarımı

Bu metotların avantajı sistem modeli ile ilgili bilgiye ihtiyaç duymamasıdır. PID parametreleri  $K_p$ ,  $T_i$  ve  $T_d$  ayarlamak için, kullanılacak yönteme göre, sadece sistemin açık çevrim veya kapalı-çevrim cevabı yeterli olmaktadır. Ayar kuralları sürekli-zaman sistemlere dayanmaktadır ve eğer örnekleme zamanı  $T$  yeteri kadar küçük seçilirse ayrik-PID kontrolöre de uygulanabilir. İki adet yöntem vardır.

### 26.2 Transient Cevap Metodu ile PID Tasarım (*Transient response method*)

Önce sistemin basamak giriş için açık-çevrim cevabı elde edilir. Bu yöntemin uygulanabilmesi için sistem açık-çevrim cevabının S-şeklinde olması gereklidir. Yoksa bu yöntem uygulanamaz. Kontrol edilecek olan sistemin açık-çevrim transfer fonksiyonunda integratör ve/veya kompleks eşlenik kutuplar bulunmamalıdır. Sistem I. dereceden ölü zamanlı sistem olarak modellenir.



Kontrol edilecek olan sistemin açık transfer fonksiyonu  $G(s)$  Cevap eğrisi  $c(t)$ 'den elde edilir.

$Y(t)$  Doğrusu, Cevap eğrisi  $c(t)$  eğiminin maximum olduğu noktaya teget çizilir.

$$G(s) = \frac{Ke^{-sL}}{\tau s + 1}$$

$K$  : Sürekli hal kazancı

$\tau$  : proses (baksın) zaman sabiti

$L$  : proses (görünen) ölü zaman

cevap eğrisinden;

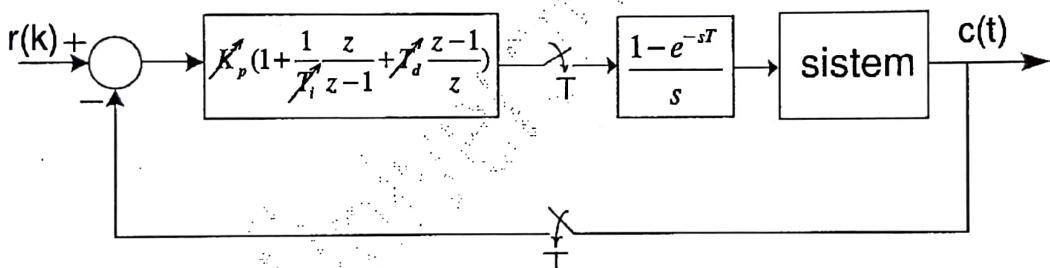
$\xi = 0.2$  civarında olacak şekilde

$K_p, T_i, T_d$  tabloya göre seçilir.

*Transient cevap yöntemine göre,  $K_p$ ,  $T_i$  ve  $T_d$  PID parametre tablosu.*

Kontrolör	$K_p$	$T_i$	$T_d$
Oransal(P)	$\frac{\tau}{KL}$	-	-
Oransal-İntegral(PI)	$\frac{0.9\tau}{KL}$	$3L$	-
Oransal-integral-türevsel(PID)	$\frac{1.2\tau}{KL}$	$2L$	$0.5L$

Bu kurallar PID parametrelerinin seçiminde ilk değer vermemeyi sağlar. Parametrelere son değerler aşağıda şekilde gösterildiği gibi, kapalı-çevrim sisteminde gerçek zamanda ince ayar  $K_i$  yavaş-yavaş azaltılarak ve  $K_d$  artırılarak yapılır.



Kapalı-çevrim PID parametrelerinin ince (has-has) ayarı.

Örnekleme frekansı, pratik olarak en yüksek band genişliği frekansının takriben 20 katı seçilmelidir. Eğer örnekleme frekansı yeteri kadar büyük seçilmezse ayrık-zamanlı PID kontrolör elverişli cevap vermez.

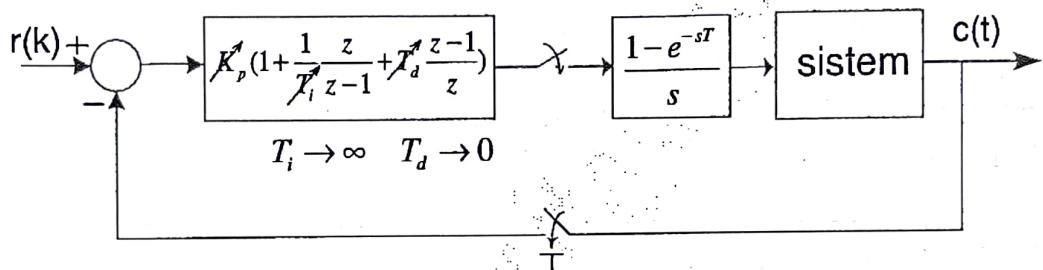
### 26.3 Limit Kararlılık Metodu ile PID Tasarım (The Stability Limit Method)

Bu yöntem kapalı-çevrim kontrol olarak uygulanır. PID parametre ayarına, yalnızca oransal kontrolör  $K_p$  ile başlanır,  $T_i \rightarrow \infty$ ,  $T_d \rightarrow 0$  olmak üzere. Sistem sürekli osilasyon yapınca kadar  $K_p$  yavaş-yavaş artırılır. Sürekli osilasyon başladığında, bu noktada kazanç  $K_s$  ve karşılık gelen osilasyon periyodu ise  $T_w$  dir.  $K_s$  ve  $T_w$  ye göre PID parametreleri  $K_p$ ,  $T_i$  ve  $T_d$  aşağıda verilen tablodan seçilir.

*Limit kararlılık yöntemine göre  $K_p$ ,  $T_i$  ve  $T_d$  PID parametre tablosu.*

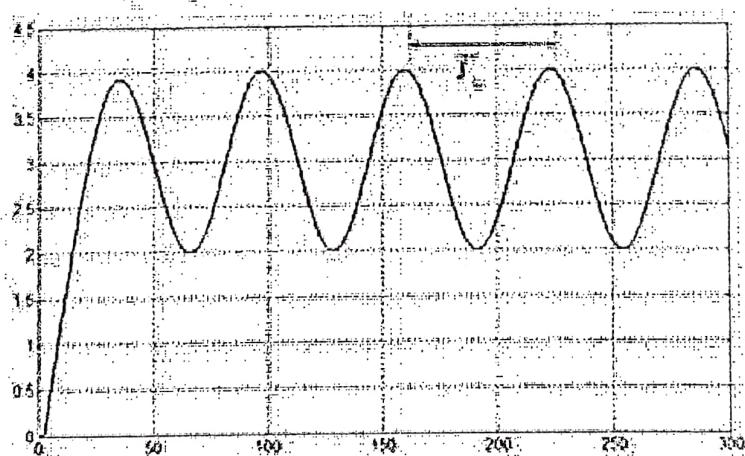
Kontrolör	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5K_s$	-	-
PI	$0.45K_s$	$T_w/1.2$	-
PID	$0.6K_s$	$T_w/2$	$T_w/8$

Limit kararlık yönteminin uygulaması için aşağıda ayrik-zaman kapalı çevrim kontrol blok diyagramından görüldüğü basamak giriş için çıkış cevabı osilasyona gelinceye kadar oransal kontrol katsayısı artırılır, *Osilasyona gelmeyen sistemlerde bu yöntem uygulanamaz*.



*Limit kararlılık yöntemi için kapalı-çevrim kontrol blok diyagramı.*

Sistem aşağıda gösterildiği gibi osilasyona geldiğinde tablodan sınır kazanç ve osilasyon periyoduna göre, PID parametreleri hesabı için gerekli katsayılar tablodan okunur.



*Basamak giriş için osilasyonlu sistem cevabı.*

**Örnek:** Rotor kontrollü DC motora ait transfer fonksiyonu,  $\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js+b)(Ls+R)+K^2}$

olarak ve motora ait parametreler ise aşağıda verilmiştir.

Rotor atalet momenti  $J = 0.01 \text{ km}^2/\text{s}^2$

Mekanik sistem sönüm oranı  $b = 0.1 \text{ Nms}$

Elektromotor kuvvet sabiti  $K = K_e = K_i = 0.01 \text{ Nm/Amp}$

Rotor direnci  $R = 1 \Omega$

Rotor endüktansı  $L = 0.5 \text{ H}$

Rotor giriş gerilimi  $v(t) \text{ volt}$

Motor açısal hız:  $w(t) \text{ rad/sn}$

DC motor PID kontrol kurallı olarak kapalı-çevrim kontrol edilecektir. PID kontrolör parametre katsayılarını Nichols-Ziegler transient cevap metodu yöntemi ile bulunuz.

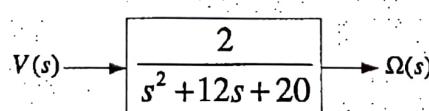
**Çözüm:** Motor sabiteleri transfer fonksiyonunda ilgili parametrelerde yerine koyulur.

$$\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{0.01}{(0.01s+0.1)(0.5s+1)+0.01^2} \rightarrow \frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{0.01}{0.005s^2 + 0.06s + 0.1} = \frac{2}{s^2 + 12s + 20}$$

$\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{2}{(s+2)(s+10)}$  elde edilir. Birim basamak giriş için,  $V(s) = \frac{1}{s}$  olmak üzere

$$\Omega(s) = \frac{2}{s(s+2)(s+10)} \text{ dir.}$$

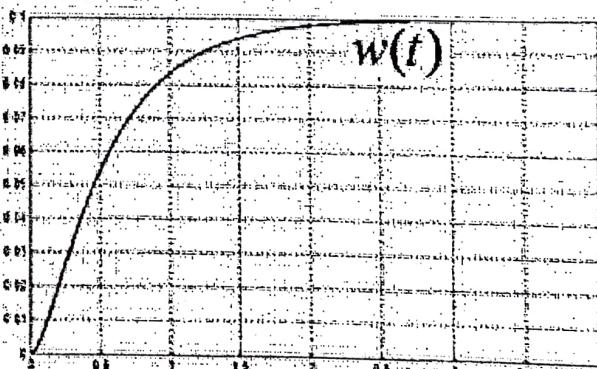
DC motor açık-çevrim transfer fonksiyonu.



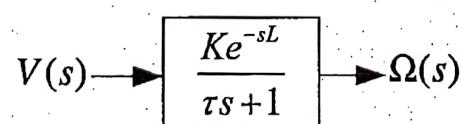
DC motor birim-basamak cevap eğrisi

$w(t)$  den görüldüğü gibi s-şeklindedir.

Nichols-Ziegler yönteminin uygulanması için transfer fonksiyonu I.dereceden ölü zamanlı olarak modellenmelidir.



DC motorun açık-çevrim birim basamak cevabı.



DC motorun I.dereceden ölü zamanlı sistem olarak modellenebilmesi için ölü zaman  $L$  ve zaman sabiti  $\tau$  belirlenmelidir. Bu amaç için, cevap  $w(t)$  nin birim basamak cevap eğrisinde maximum eğim aşağıda hesap edilmektedir.

Ters Laplace hatırlatma:

$$w(t) = L^{-1} \left\{ \frac{2}{s(s+2)(s+10)} \right\}$$

$$c(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} [(s-s_i)^m F(s) e^{st}] \Big|_{s=s_i}$$

$$w(t) = \left. \frac{2}{s(s+2)(s+10)} e^{st} \right|_{s=0} + \left. (s+2) \frac{2}{s(s+2)(s+10)} e^{st} \right|_{s=-2} + \left. (s+10) \frac{2}{s(s+2)(s+10)} e^{st} \right|_{s=-10}$$

$w(t) = \frac{1}{10} - \frac{1}{8} e^{-2t} + \frac{1}{40} e^{-10t}$  motor mil açısal hız ifadesi elde edildi.  $w(t)$  değişiminin maximum eğimi için önce türevi alınır,

$$\frac{dw(t)}{dt} = \frac{1}{4} e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-10t} \quad \text{II. türev sıfıra eşitlenerek maximum eğim zamanı elde edilir.}$$

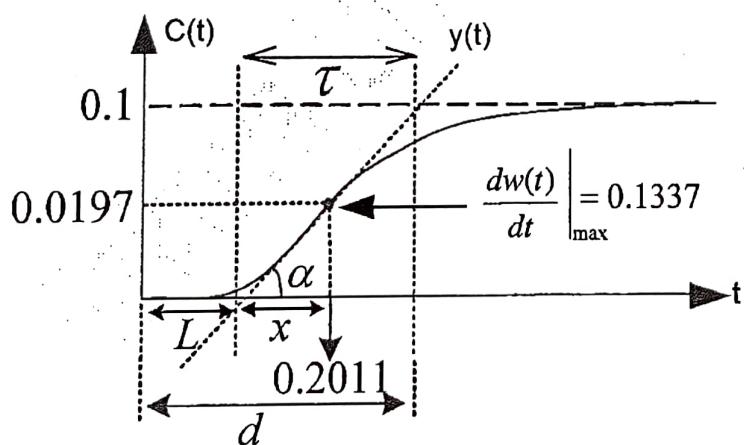
$$\frac{d^2 w(t)}{dt^2} = -\frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{5}{2} e^{-10t} = 0 \rightarrow \frac{5}{2} e^{-10t} = \frac{1}{2} e^{-2t} \rightarrow e^{-8t} = 0.2 \quad \text{ise, } t = \ln(0.2)/(-8) \quad \text{ise,}$$

$$t = \ln(0.2)/(-8) \quad t = 0.2011 \text{ sn. maximum eğimin olduğu an.}$$

$$\frac{dw(0.2011)}{dt} = \frac{1}{4} e^{-2(0.2011)} - \frac{1}{4} e^{-10(0.2011)} = 0.1337 \quad \text{maximum eğim}$$

$$w(0.2011) = \frac{1}{10} - \frac{1}{8} e^{-2(0.2011)} + \frac{1}{40} e^{-10(0.2011)} = 0.0197 \quad \text{maximum eğim noktasında } w(t) \text{ değeri.}$$

Hesaplanan değerler cevap eğrisinde gösterimi aşağıda verilmiştir.



$$\tan(\alpha) = \frac{dw(t)}{dt} \Big|_{\max} = \frac{0.0197}{x}$$

$$= 0.1337$$

$$\rightarrow x = \frac{0.0197}{0.1337}$$

$$\text{ise } x = 0.1437 \text{ sn}$$

$$\text{bu sonuçtan ölü zaman } L = 0.2011 - x = 0.2011 - 0.1437$$

$$L = 0.0574 \text{ sn}$$

Yukarıda verilen eğrilerden  $y(t)$  eğri denklemi,  $y(t) = 0.1371*t - 0.079$  olarak yazılır.

$$y(\infty) = 0.1371 * d - 0.079 = 0.1 \quad \text{yazılır ve } t \text{ için çözüm yapılır ise, } d = 1.3056 \text{ sn bulunur.}$$

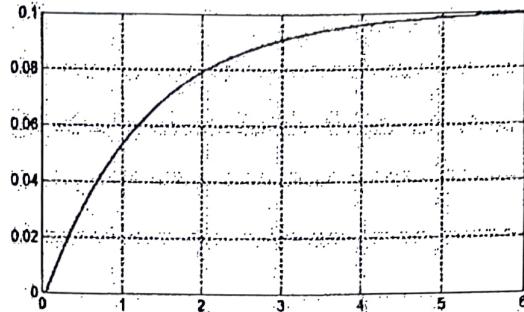
Şekilden,  $\tau = d - L = 1.3056 - 0.0574$  ise  $\tau = 1.2482 \text{ sn}$

$$K = \frac{y(\infty) - y(0)}{V(\infty) - V(0)} = \frac{0.1 - 0}{1 - 0} \rightarrow K = 0.1 \text{ kazanç elde edilir.}$$

DC motor I.dereceden ölü zamanlı sistem olarak,

$$\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{0.1 e^{-0.0574s}}{1.2482s + 1}$$

modellenir.



I.Dereceden ölü zamanlı modelin birim basamak cevabı.

Hesaplanan kazanç, ölü zaman ve zaman sabiti değerleri ile PID parametreleri aşağıda hesaplanmıştır.

$$K = 0.1$$

Kazanç

$$L = 0.0574 \text{ sn}$$

ölü zaman

$$\tau = 1.2483 \text{ sn}$$

zaman sabiti

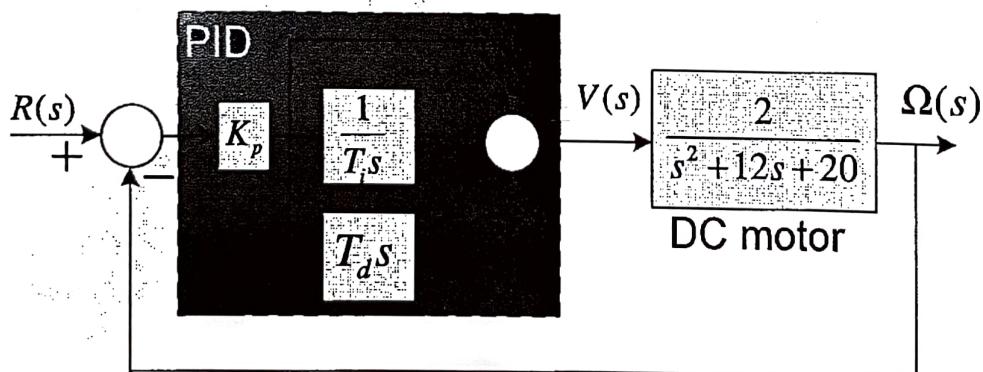
#### PID Katsayıları

$$K_p = \frac{1.2\pi}{KL} = \frac{1.2 * 1.2482}{0.1 * 0.0574} \quad K_p \triangleq K_p \quad K_p = 260.94$$

$$T_i = 2L \rightarrow T_i = 0.1148 \quad K_i \triangleq \frac{K_p}{T_i} \quad K_i = 2273.1$$

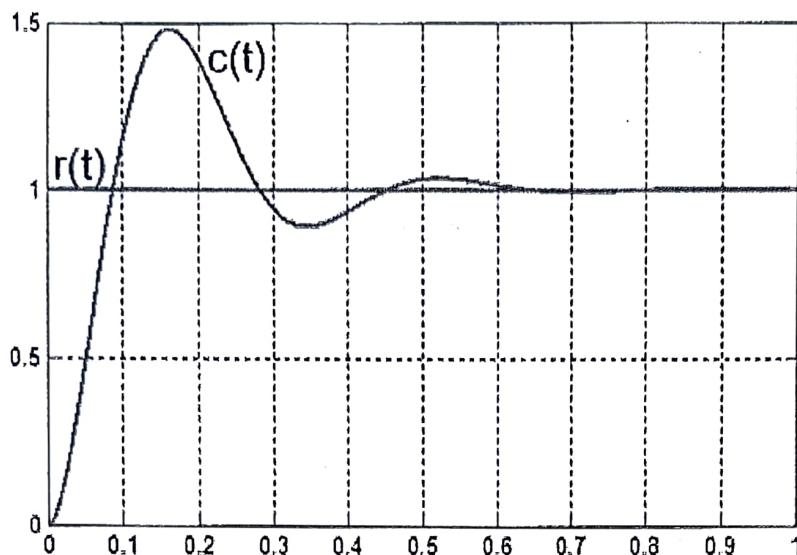
$$T_d = 0.5L \rightarrow T_d = 0.0287 \quad K_d \triangleq K_p T_d \quad K_d = 7.4892$$

DC motor kontrolüne ait kapali-çevrim kontrol blok diyagramı aşağıda verilmiştir.



DC motor kapali-çevrim kontrol blok diyagram

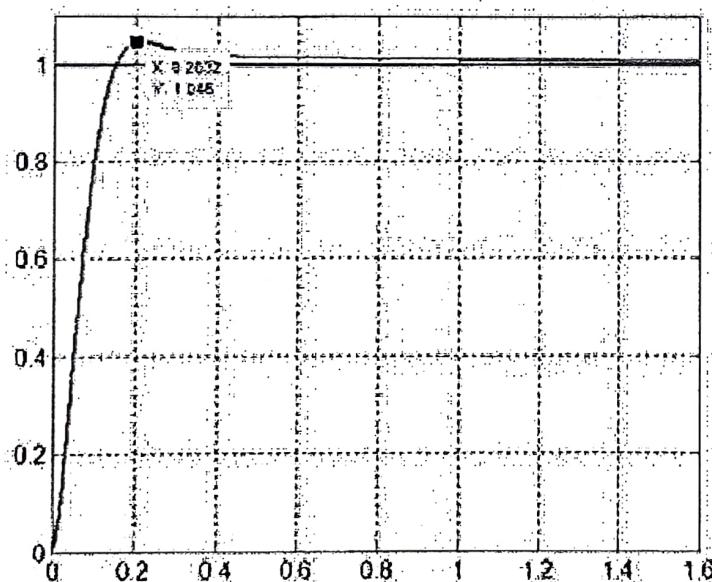
Aşağıda, I.dereceden ölü zaman modeli kullanılarak tasarlanan PID kontrol kurallı DC motorun kapali-çevrim birim basamak cevabı verilmiştir.



*DC motorun birim basamak cevabı.*

Daha önceden ifade edildiği gibi, Nichols-Ziegler metodu ile **PID kontrolör parametrelerine** ilk değer verilir. Nichols-Ziegler ile tasarım neticesinde  $\xi = 0.2$ , aşım=%52 civarında olur.

Sistem cevap performansını iyileştirmek amacıyla,  $K_p$  azaltılarak ve  $K_d$  artırılarak yeni değerlere göre birim basamak giriş için cevap aşağıda verilmiştir, aşım=%4.6 civarındadır.



Tasarım sonrası, atanan başlangıç değerler yardımcı ile, denemeler neticesinde ayarlanan yeni PID parametre katsayı değerleri aşağıda ve DC motor cevabı yanında verilmiştir.

$$K_p = 260.94$$

$$K_i = 239.26$$

$$K_d = 11.60$$

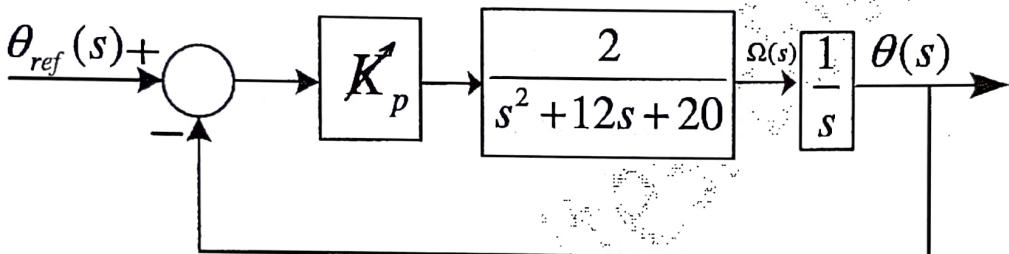
**PID parametrelerinde yapılan ayar sonrası sistem cevabı.**

**Örnek:** DC motor için açısal hız ve rotor giriş gerilimi arasında  $\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{2}{s^2 + 12s + 20}$

transfer fonksiyonu verilmektedir. Ziegler-Nichols limit kararlılık yöntemini kullanarak PID kontrolör parametre katsayılarını bulunuz.

**Çözüm:** DC motor mil konumu  $\theta(t)$  ile rotor giriş gerilimi  $v(t)$  arasındaki transfer fonksiyonu,  $\frac{d\theta(t)}{dt} = w(t)$  olmak üzere,  $s\theta(s) = \Omega(s) \rightarrow \theta(s) = \frac{\Omega(s)}{s}$  dir. Verilen transfer fonksiyonunda kullanılır ise,  $\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{1}{s} \frac{2}{s^2 + 12s + 20}$  elde edilir.

Limit kararlılık yöntemi için önce sadece oransal kontrol kuralı kullanılacaktır. DC motor pozisyon kontrolüne ait kapalı-çevrim kontrol blok diyagram aşağıda verilmiştir.



DC motor oransal kontrol kuralı kapalı-çevrim konum kontrolü

Kapalı-çevrim sistemini osilasyona getirecek olan sınır kazanç  $K_p$ , bulunmalıdır. Bu amaç için Routh kararlılık kriteri kullanılır. Karakteristik denklem,

$$F(s) = 1 + G(s) = 1 + \frac{2K_p}{s(s^2 + 12s + 20)} = 0 \rightarrow F(s) = s^3 + 12s^2 + 20s + 2K_p = 0 \text{ yazılır.}$$

Routh tablosu oluşturulur.

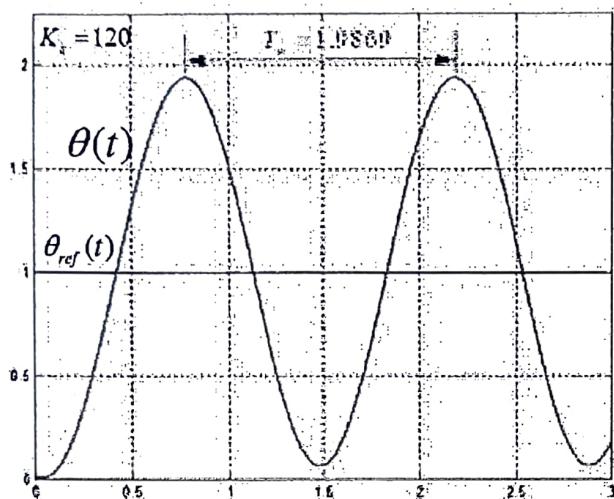
$s^3$	1	20	
$s^2$	12	$2K_p$	
$s^1$	$(240 - 2K_p)/2K_p$	0	$1 - \frac{240 - 2K_p}{2K_p} > 0$ ise $K_p < 120$
$s^0$	$2K_p$	0	2- $2K_p > 0$ ise $K_p > 0$ dir. $0 < K_p < 120$ kararlılık aralıkları

Kararlılık için yeter şart tabloda listetlenen tüm katsayılarının pozitif olmasıdır.

Sınır kazanç  $K_s = 120$  dir. Osilasyon açısal frekans  $w_d$ , routh tablosundan  $s^2$  terimden hesaplanır.  $12s^2 + 2K_s = 0$  ise  $12s^2 + 240 = 0$   $s_{1,2} = \pm j3.61$

$s_{1,2} = \pm jw_d = \pm j3.61 \text{ rad/sn}$  olduğundan osilasyon açısal frekansı  $w_d = 3.61 \text{ rad/sn}$  dir.

Osilasyon periyodu ise,  $T_w = \frac{2\pi}{w_d} \rightarrow T_w = \frac{2\pi}{3.61} \quad T_w = 1.9869 \text{ sn dir.}$



Yukarıda verilmiş olan, oransal kontrol kurallı DC motor pozisyon kontrolünde giriş işaretleri olarak,

$\theta_{ref}(t) = u(t)$  ve sınır kazanç için DC motor mil konumunun değişimi yanında verilmiştir.

$K_s = 120$ , birim basamak giriş için DC motor  $\theta(t)$  cevabı.

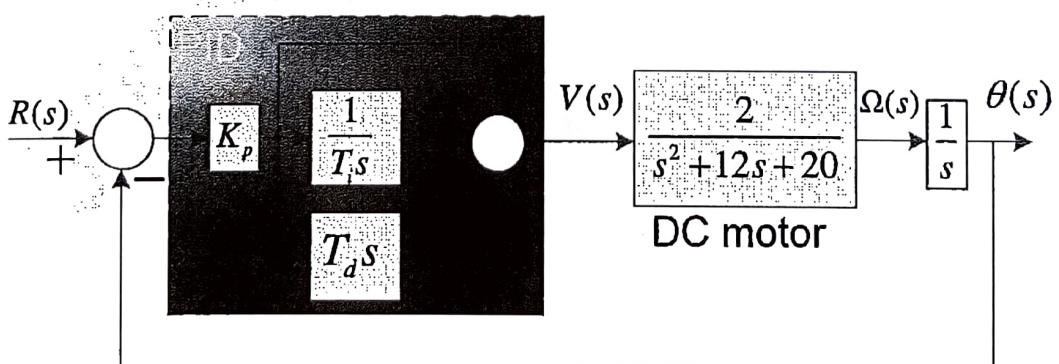
**PID Katsayıları** parametreler  $T_w = 1.9869 \text{ sn}$  ve  $K_s = 120$  için

$$K_p = 0.6K_s \rightarrow K_p = 72 \quad K_p \triangleq K_p \quad K_p = 72$$

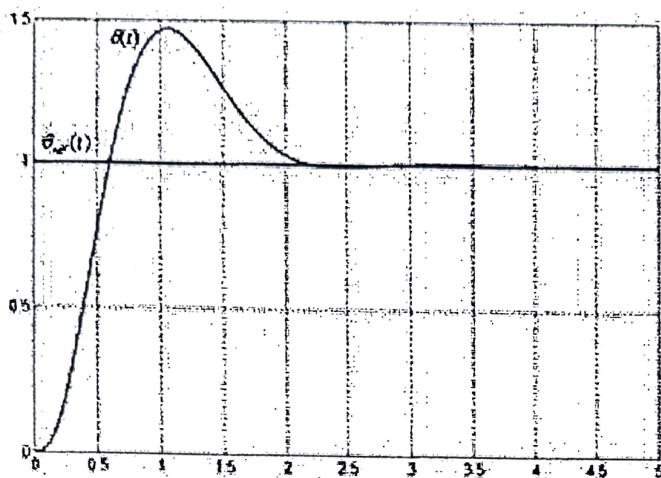
$$T_i = 0.5T_w \rightarrow T_i = 0.9935 \quad K_i \triangleq \frac{K_p}{T_i} \quad K_i = 72.47$$

$$T_d = 0.125T_w \rightarrow T_d = 0.2484 \quad K_d \triangleq K_p T_d \quad K_d = 17.88$$

**PID** kontrol kurallı DC motor pozisyonuna ait kapali-çevrim kontrol blok diyagramı aşağıdadır.

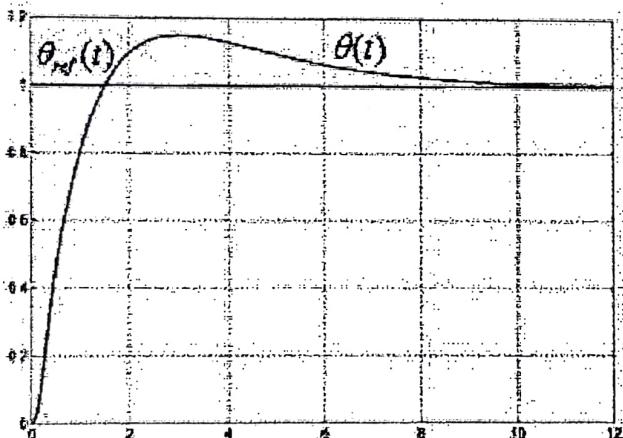


Birim basamak referans giriş için DC motor  $\theta(t)$  nin zamana göre değişimi aşağıda verilmiştir.



Birim basamak DC motor konum cevabı.

Sistem cevap performansını iyileştirmek amacıyla,  $K_i$  azaltılarak ve  $K_d$  artırılarak yeni değerlere göre birim basamak giriş için cevap aşağıda verilmiştir,  $\text{aşım}=\%15$  civarındadır.



PID parametrelerinde yapılan ayar sonrası sistemi cevabı.

PID kontrol kurallı DC motor transfer fonksiyon tipi,  $j=2$  dir.  $\theta_{ref}(t)=tu(t)$  rampa giriş için sürekli hal hatası  $e_{ss}=0$  olur.

Basamak giriş için DC motor pozisyon kontrolünde, PID yerine PD kontrol kuralının uygulanması yeterlidir.

Daha önceden ifade edildiği gibi, Nichols-Ziegler metodu ile PID kontrolör parametrelerine ilk değer verilir. Nichols-Ziegler ile tasarım neticesinde  $\zeta=0.2$  için, şekilde görüldüğü gibi yaklaşık olarak,  $\text{aşım}=\%52$  civarında olur.

Tasarım sonrası, atanan başlangıç değerler yardımcı ile, denemeler neticesinde ayarlanan yeni PID parametre katsayı değerleri aşağıda ve DC motor cevabı yanda verilmiştir.

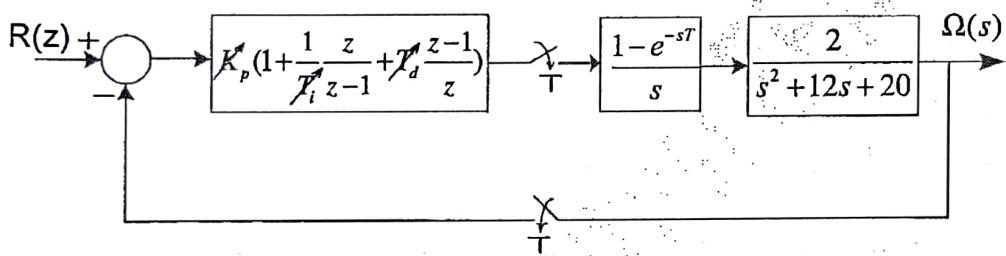
$$K_p = 72$$

$$K_i = 22.3$$

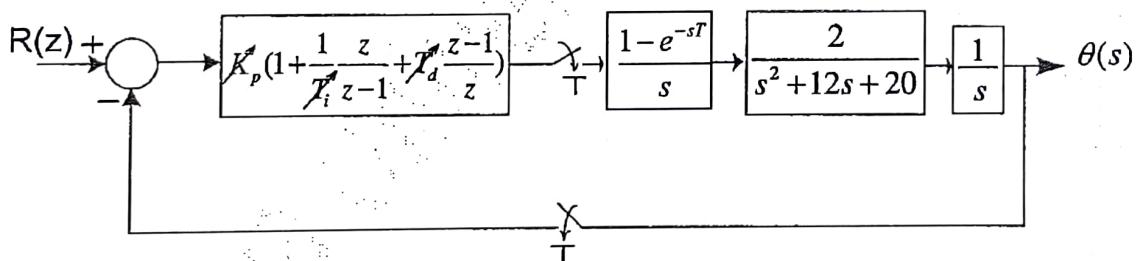
$$K_d = 49.17$$

Deneysel PID parametre ayar yöntemleri Nichol-Ziegler, aynı zamanda ayrık-zaman PID kontrolörlerde uygulanabilir.

Sıfırıncı dereceden tutucu  $\frac{1-e^{sT}}{s} \equiv e^{-\frac{sT}{2}}$  alınarak, sisteme ilave  $\frac{T}{2}$  ölü zaman getirdiği yaklaşılığı ile, yeni ölü zaman  $L = L_{sistem} + \frac{T}{2}$  olarak elde edilir. Aynı analog PID katsayı tablosu kullanılabilir. Nichol-Ziegler yöntemleri, PID kontrolör katsayı ayarlamasında başlangıç değerleri verdiginden, istenen performansı sağlayan katsayılar geniş bir aralıktır artırma ve eksiltmeler ile elde edilmektedir. Dolayısı ile analog kontrolör için elde edilen katsayılar doğrudan ayrık-zaman PID kontrolörde yüksek örneklemeye hızı ile kullanılabilir. Aşağıda sıra ile DC motor hız ve konum kontrolüne ait ayrık-zaman kapali-çevrim kontrol blok diyagramları verilmiştir.



DC motor ayrık-zaman kapali-çevrim hız kontrol blok diyagramı.



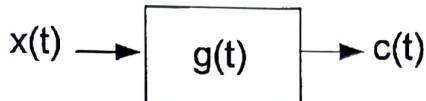
DC motor ayrık-zaman kapali-çevrim konum kontrol blok diyagramı.

Verilen örnekler, DC motor hız ve konum kontrollerinde gerekli parametreler zaman sabiti, ölü zaman, açık-çevrim kazancı ve osilasyon periyodu kontrol edilen sistem matematik modeli belli olduğundan analitik yöntemler ve/veya kararlılık analizleri ile elde edilmiştir.

Gerçek zamanda tüm bu parametreler deneysel olarak elde edilir. Ancak yukarıda sunulan çözüm yolları matematik modeli belli olan sistemlerde istenen performansı sağlayan PID parametre ayarı için alternatif çözüm yolu olabilir.

## 27. Frekans Cevap

Bir lineer sistemin sinüzoidal giriş işaretine karşı çıkış cevabı o sistemin "frekans cevabı" olarak adlandırılır. Aşağıda,  $g(t)$  matematik modeli verilen sistemde  $x(t)$  giriş,  $c(t)$  çıkıştır.

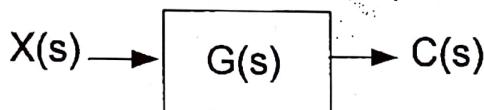


Zaman domeninde  $x(t)$  giriş için  $c(t)$  çıkış konvolüsyon integrali (Katlama integrali) ile hesap edilir.

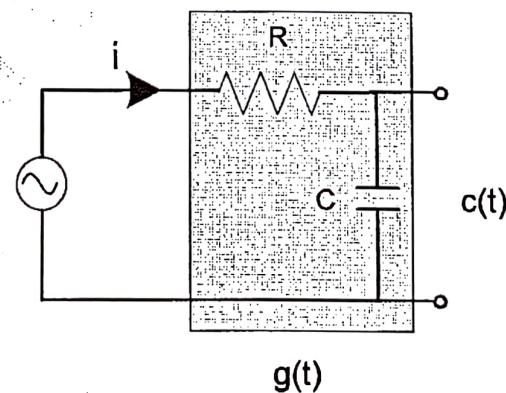
$$\begin{aligned}
 c(t) &= x(t) * g(t) = \int_0^t x(\tau)g(t-\tau)d\tau \rightarrow \text{konvolüsyon integrali (katlama integrali).} \\
 &= \int_0^t g(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad \text{ile verilir. } g(t) \text{ ve } x(t) \quad t < 0 \text{ için sıfırdır.} \\
 &= g(t) * x(t)
 \end{aligned}$$

Ancak s-kompleks düzleminde çıkış ifadesi, aşağıda görüldüğü gibi giriş işaretinin Laplace dönüşümü  $X(s)$  ile  $G(s)$ 'in çarpımına eşittir.

$C(s) = L\{c(t)\} = G(s)X(s)$  yazılabilir, blok diyagramı olarak aşağıda gösterilmiştir.



Örnek olarak, aşağıda verilen RC devresinde giriş  $x(t) = A \cos(\omega t)$  olmak üzere frekans cevabı incelensin.



$g(t)$

Giriş,  $x(t) = A \cos(\omega t)$  olmak üzere transfer fonksiyonu  $G(s)$ ,

$$\left. \begin{aligned}
 x(t) &= Ri(t) + \frac{1}{c} \int i(t)dt \rightarrow X(s) = (R + \frac{1}{sc})I(s) \\
 c(t) &= v_c(t) = \frac{1}{c} \int i(t)dt \rightarrow C(s) = \frac{I(s)}{sc}
 \end{aligned} \right\} \text{ise} \quad \frac{C(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{1}{Rcs + 1} \quad \text{elde edilir.}$$

Sinüzoidal cevap elde edilir iken  $s \rightarrow jw$  yazılır.

$G(jw) = \frac{1}{jwcR + 1}$  görüldüğü gibi  $G(jw)$  ifadesi kompleks bir ifadedir ve faz ve modül olarak ifade edilir.

$$G(jw) = \frac{1}{jwcR + 1} = \frac{1 - jwcR}{1 + w^2 c^2 R^2}$$

$$G(jw) = |G(jw)| |G(jw)| \rightarrow \text{Modül } |G(jw)| = G = \sqrt{\frac{1}{1 + w^2 c^2 R^2}}$$

$$\text{Faz } |G(jw)| = \phi = \tan^{-1}(-wcR)$$

Transfer fonksiyonu kutupsal koordinatlarda,

$$G(jw) = Ge^{j\phi} \text{ olarak yazılır.}$$

Not: giriş  $x(t) = e^{st}$  olması durumunda çıkış  $c(t)$  ifadesi:

$$x(t) = e^{st} \rightarrow \boxed{g(t)} \rightarrow c(t)$$

Laplace dönüşümü  
 $f(t) = 0 \quad t < 0 \text{ ve } s = \sigma + jw \text{ için}$   
 $F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \text{ dir.}$

$x(t) = e^{st}$ ,  $s = \sigma + jw$  kompleks bir sayı olsun

$$c(t) = \int_0^\infty g(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty g(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = \int_0^\infty g(\tau)e^{s\tau}e^{-s\tau}d\tau = \int_0^\infty g(\tau)e^{-s\tau}d\tau e^{st} = G(s)e^{st}$$

NOT: Lineer devrelerde  $e^{st}$  öz fonksiyondur

Benzer biçimde,

$$x(t) = e^{-st} \text{ için } c(t) = G(-s)e^{-st} \text{ dir.}$$

Örnek:  $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t)$  ile verilen sisteme  $u(t) = e^{st}$  olmak üzere,  $G(s)$  ve  $c$  çıkış ifadesi elde edilsin.

Yukarıda elde edilen ifadeden,  $y(t) = G(s)e^{st}$  ve  $\frac{dy(t)}{dt} = G(s)se^{st}$  yazılabilir.

Diferansiyel denklemde bu ifadeler yerlerine koyulur ve çözülür.

$$G(s)se^{st} + 2G(s)e^{st} = e^{st} \quad G(s) = \frac{1}{s+2} \quad c = \frac{e^{st}}{s+2} \text{ olarak elde edilir.}$$

Sinüzoidal girişi RC devresinde giriş  $x(t) = A \cos(wt) = \frac{A}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$  olarak ifade edilir.

Sinüzoidal cevap elde edilir iken  $s \rightarrow jw$  yazıldığı düşünülür ise,  $x(t) = \frac{A}{2}(e^{st} + e^{-st})$

olduğu görülür. Dolayısı ile RC devre girişi  $x(t)$ , iki adet üstel işaretin  $x_1(t) = \frac{A}{2}e^{st}$  ve

$x_2(t) = \frac{A}{2} e^{-st}$  nin toplamından oluşur. Lineer sistemlerin toplamsallık özelliğinden faydalananak çıkış,  $c(t) = c_1(t) + c_2(t)$  olarak hesaplanabilir.

$x_1(t) = \frac{A}{2} e^{st}$  için giriş  $c_1(t)$  çıkışı,

$$c_1(t) = G(s)e^{st} = \frac{A}{2} e^{st} Ge^{j\phi} = \frac{AG}{2} e^{j\omega t} e^{j\phi} = \frac{AG}{2} e^{j(\omega t + \phi)}$$

$x_2(t) = \frac{A}{2} e^{-st}$  için giriş  $c_2(t)$  çıkışı,

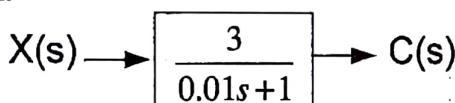
$$c_2(t) = G(-s)e^{-st} = \frac{A}{2} e^{-st} Ge^{-j\phi} = \frac{AG}{2} e^{-j\omega t} e^{-j\phi} = \frac{AG}{2} e^{-j(\omega t + \phi)}, \quad c(t) \text{ iki çıkışın toplamıdır.}$$

$$c(t) = \frac{AG}{2} e^{j(\omega t + \phi)} + \frac{AG}{2} e^{-j(\omega t + \phi)} \quad \text{yazılır.}$$

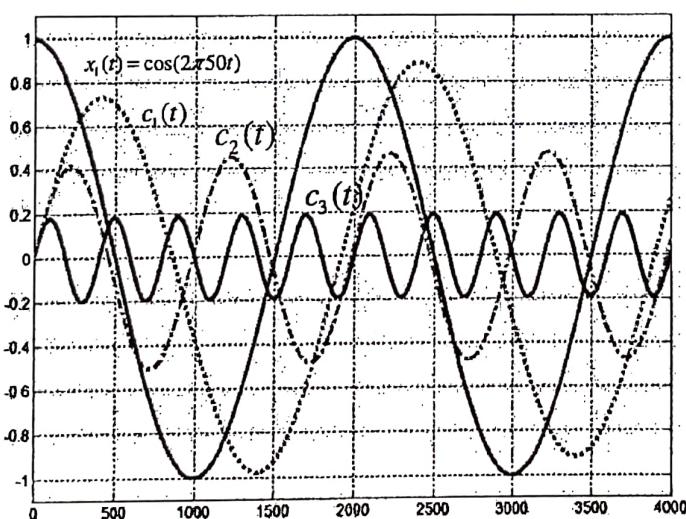
$c(t) = AG \cos(\omega t + \phi)$  olarak elde edilir.

Sonuç incelendiğinde, lineer devre RC girişine uygulanan işaret  $x(t) = A \cos(\omega t)$  çıkışta genlik ve faz olarak değişikliği uğradığı görülmektedir.

### Örnek:



Örnek olarak yanda verilen transfer fonksiyonu ele alınınsın. Giriş  $x(t) = \cos(\omega t)$  olmak üzere çeşitli frekans değerleri için çıkış  $c(t)$  değişimleri incelenecektir.



Çeşitli frekans değerleri aşağıda verilmiştir. Bu frekans değerlerine karşılık gelen çıkış eğrileri yanda çizdirilmiştir. Giriş işaretlerinden sadece 50Hz olanı gösterilmiştir.

$f$ (Hz)	eğri
50	$c_1(t)$
100	$c_2(t)$
250	$c_3(t)$

Çeşitli frekans değerleri için çıkış eğrilerinden görüldüğü üzere, lineer sistemlerde sinüzoidal giriş için çıkış cevabında **genlik** ve **faz** değişmektedir, çıkış işaretinin frekansı kesinlikle değişmez.

Hem teorik olarak hem de örnek benzetim çalışmasından gösterildiği gibi lineer sistemlerde sinüzoidal giriş için sistem cevabı genlik ve faz değişikliğine ugramakla birlikte yine sinüzoidal dır.

i- Logaritmik koordinatlarda, çıkış-giriş genlik oranının frekans değişimlerine göre çizimi ve yine ilgili frekanslara göre faz değişimlerinin çizimleri, **Bode çizimleri** olarak bilinir.

ii- Frekans parametre olmak üzere, frekansa göre çıkış-giriş genlik oranının kutupsal koordinatlarda doğrudan ve ters olmak üzere iki türlü çizimi söz konusudur. Kutupsal koordinatlarda çizimler genel olarak açık-çevrim cevap için yapılır ve Nyquist çizimi olarak bilinir.

### 27.1 Bode Çizimleri

Logaritmik koordinatlarda çizimin avantajları,

- 1- Çarpma işlemleri toplama, bölme işlemleri ise çıkarma işlemlerine dönüşür.
- 2- Transfer fonksiyonunun elde edilme işlemi analitik değil grafik yönteme dayanır.
- 3- Logaritmik eksen kullanıldığı için birincil öneme sahip olan düşük frekans aralıklarının incelenmesine imkan sağlar.
- 4- Göreli kararlılık kazanç payı ve faz payı hakkında bilgi sağlar.

Oranları birbirine eşit olan açısal frekanslar arasındaki bölmeler birbirine eşittir. Frekanslar arasındaki oranlar '10' katları şeklinde ise dekat (decade), frekanslar arasındaki oran '2' nin katları şeklinde ise oktav (oktave) olarak adlandırılmaktadır.

Örnek:  $f_1 = 1\text{Hz}$  ten  $f_2 = 2\text{Hz}$  arası frekans bant genişliği **1 Oktav**'dır  $\frac{f_2}{f_1} = 2$  dir.

$f_1 = 128\text{Hz}$  ten  $f_2 = 256\text{Hz}$  arası frekans bant genişliği **1 Oktav**'dır  $\frac{f_2}{f_1} = 2$  dir.

Örneklerden görüldüğü gibi 1 oktav sabit frekans bant genişliğinde değildir. İncelenen frekans aralıklarına bağlıdır.

$f_1$  den  $f_2$  ye frekans aralığındaki oktav sayısı,  $\frac{\log \frac{f_2}{f_1}}{\log 2} = 3.32 \log \frac{f_2}{f_1}$  ile elde edilir.

$f_1$  den  $f_2$  ye frekans aralığında her  $\frac{f_2}{f_1} = 10$  da bant genişliği '1' dekat artar.

$f_1 = 1\text{Hz}$  ten  $f_2 = 10\text{Hz}$  arası frekans bant genişliği **1 dekat**'dır  $\frac{f_2}{f_1} = 10$  dur.

$f_1 = 128\text{Hz}$  ten  $f_2 = 1280\text{Hz}$  arası frekans bant genişliği **1 dekat**'dır  $\frac{f_2}{f_1} = 10$  dur.

$f_1$  den  $f_2$  ye frekans aralığındaki dekat sayısı,  $\log \frac{f_2}{f_1}$  ifadesi ile elde edilir.

Transfer fonksiyonu  $G(jw)$ 'nin logaritmik genliği,  $20 \log |G(jw)|$  dB (desibel, decibel)

Aşağıda bazı sayıların desibel karşılıkları verilmiştir.

<i>sayı</i>	<i>desibel</i>	<i>sayı</i>	<i>desibel</i>
0.01	-40	2.0	6
0.1	-20	10.0	20
0.5	6	100.0	40
1.0	0	200.0	46

Lineer-zamanla değişmeyen açık-çevrim transfer fonksiyonu,

$G(s)H(s) = K \frac{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$  s-kompleks düzleminde çarpanlarına ayrılır ve genel biçimde

$$G(s)H(s) = \frac{K_m(1+sT_{z1})(1+sT_{z2})\dots}{(s)^p(1+sT_{p1})(1+sT_{p2})\dots[s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2]\dots} \text{ olarak yazılır.}$$

$$= K_m G(s)H'(s)$$

Frekans cevabı sürekli sinüzoidal çalışma için,  $s \rightarrow jw$  yazılır.

$$G(jw)H(jw) = \frac{K_m(1+jwT_{z1})(1+jwT_{z2})\dots}{(jw)^p(1+jwT_{p1})(1+jwT_{p2})\dots[1 + (\frac{2\xi}{w_n})jw + (\frac{jw}{w_n})^2]\dots}$$

$$= K_m G(jw)H'(jw)$$

$G(jw)H(jw)$  açık-çevrim transfer fonksiyonunun '10' tabanına göre logaritması alınır ise,

$$G(jw)H(jw) = |G(jw)H(jw)| e^{j\angle G(jw)H(jw)} \text{ olmak üzere,}$$

$$\begin{aligned} \log_{10}(G(jw)H(jw)) &= \log_{10}|G(jw)H(jw)| e^{j\angle G(jw)H(jw)} \\ &= \log_{10}|G(jw)H(jw)| + (\log_{10}e) j \angle G(jw)H(jw) \\ &= \log_{10}|G(jw)H(jw)| + 0.434 j \angle G(jw)H(jw) \end{aligned}$$

Genlik ve faz ifadeleri ayrı ayrı yazılır. 0.434 sabiti, bundan sonraki kısımlarda, ele alınmayacağından.

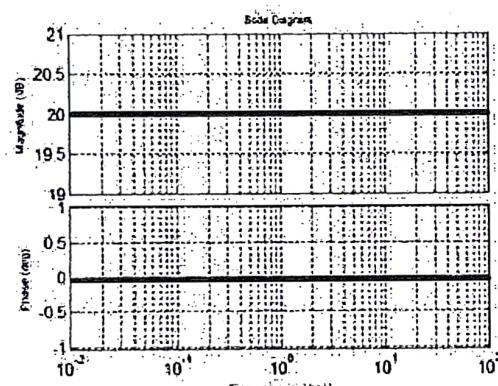
$$\begin{aligned} \log_{10}|G(jw)H(jw)| &= \log_{10}|K| + \log_{10}|1+jwT_{z1}| + \log_{10}|1+jwT_{z2}| + \dots - p \log_{10}|jw| - \log_{10}|1+jwT_{p1}| - \dots \\ &\quad - \log_{10}|1+jwT_{p2}| - \dots - \log_{10}|(jw) + 2\xi w_n j + w_n^2| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |G(jw)H(jw)| &= |K| + |1+jwT_{z1}| + |1+jwT_{z2}| + \dots - |(jw)^2 - |1+jwT_{p1}| - \dots \\ &\quad - |1+jwT_{p2}| - \dots - |(jw) + 2\xi w_n j + w_n^2| \end{aligned}$$

*Genlik ve faz ifadelerinden görüldüğü gibi açık çevrim transfer fonksiyonunda çarpma ve bölme şeklindeki kutup ve sıfır ifadeleri toplama ve çıkarma ifadelerine dönüştürmektedir. Dolayısı ile her bir çarpan için faz ve genlik eğrileri çizilip sonra toplanarak genel ifadeye ait eğri bulunabilir.*

Genel biçimde verilmiş olan lineer-zamanla değişmeyen açık-çevrim transfer fonksiyonu  $G(jw)H(jw)$  açık-çevrim çarpanları;

- 1- Kazanç  $K$
- 2- İntegral ve türev  $(jw)^{\pm 1}$
- 3- I. dereceden çarpan  $(1 + jwT)^{\pm 1}$
- 4- Karesel Çarpan  $(jw)^2 + 2\xi\omega_n j + \omega_n^2$  için bode çizimleri.



$K = 10$  Kazanç için bode çizimi.

#### 1- Kazanç $K$ için Bode çizim:

$$K_{db} = 20 \log_{10} K = -20 \log_{10} \frac{1}{K} \text{ db faz}$$

$$\underline{|K|} = 0$$

$K = 10$  için,  $K_{db} = 20 \log_{10} 10$  ise,  
 $K_{db} = 20 \text{ db}$  dir.  
 $\underline{|K|} = 0$  dir. Bode çizimi yanda  
 verilmiştir.

- 2- a) Türev çarpanı,  $(jw)$  için Bode çizimi :  $(jw)$  çarpanının  $w$  'ya göre genlik ve faz değerleri hesaplanır ;

*Genlik hesabı*

$$20 \log_{10} |jw| = 20 \log_{10} w \text{ db}$$

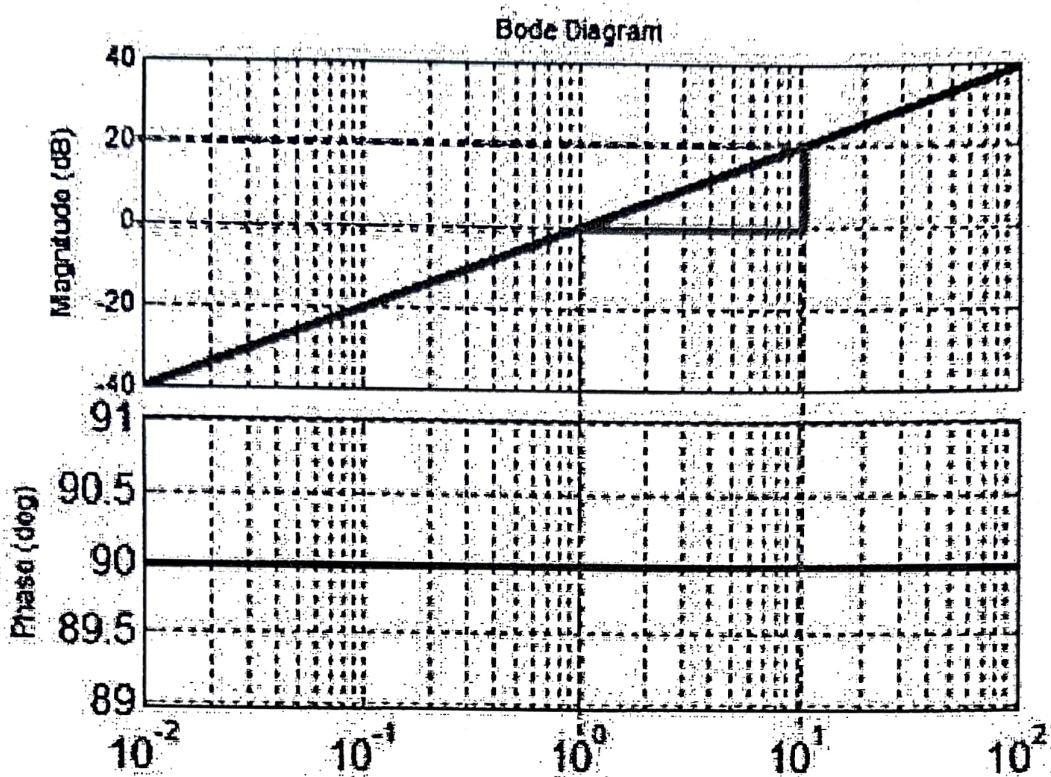
$w$	$ G  \text{ db}$
0.1	-20
10	20
100	40
1000	60

*Faz hesabı*

Faz açısı  $w$  'dan bağımsız olarak sabittir ve

$$\underline{|jw|} = 90^\circ \text{ dir.}$$

$w$  ve  $|G|$  değerlerine dikkat edilir ise, açısal frekans  $w$  her 10 kat arttığında genlik 20 db artmaktadır.  $(jw)$  çarpanı bode çiziminde  $20 \text{ db / dec}$  eğimle artmaktadır. Aşağıda  $(jw)$  'nın  $w$  'ya göre genlik ve faz eğrileri verilmiştir.



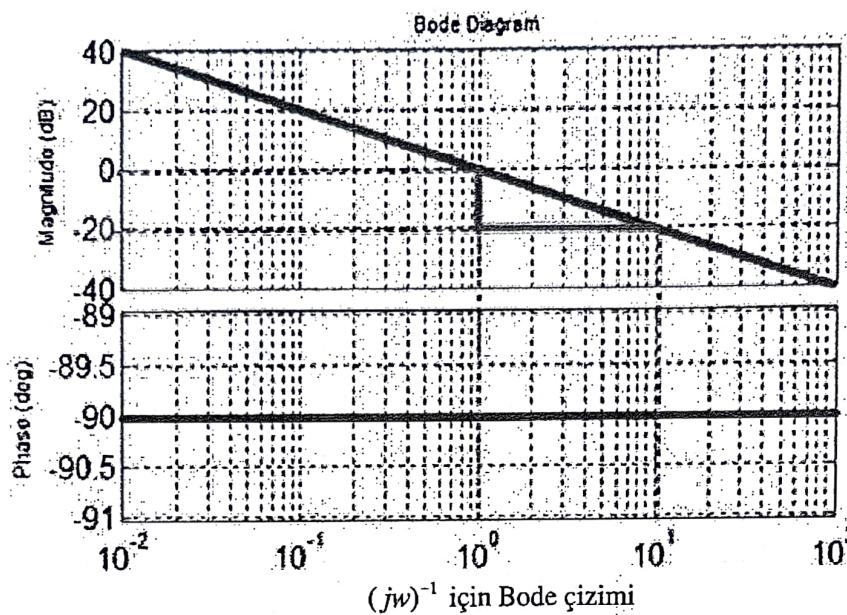
$(jw)$  için Bode çizimi.

Eğer çarpan,  $(jw)^n$  şeklinde ise, genlik  $20n \log_{10} |jw| = 20n \log_{10} w \text{ db}$   
 Faz  $|(jw)^n| = 90^\circ n$

2- b) Integral çarpanı,  $(jw)^{-1}$  için Bode çizimi :  $(jw)^{-1}$  çarpanının  $w$  'ya göre genlik ve faz değerleri hesaplanır ;

Genlik hesabı		Faz hesabı
$20 \log_{10} \left  \frac{1}{jw} \right  = -20 \log_{10} w \text{ db}$		Faz açısı $w$ 'dan bağımsız olarak sabittir ve
		$ (jw)^{-1}  = -90^\circ \text{ dir.}$
$w$	$ G  \text{ db}$	
0.1	20	
10	-20	
100	-40	
1000	-60	

$w$  ve  $|G|$  değerlerine dikkat edilir ise, açısal frekans  $w$  her 10 kat arttığında genlik 20 db azalmaktadır.  $(jw)^{-1}$  çarpanı bode çiziminde  $-20 \text{ db}$  eğimle azalmaktadır. Aşağıda  $(jw)^{-1}$ 'nin  $w$ 'ya göre genlik ve faz eğrileri verilmiştir.



Eğer çarpan,  $(jw)^{-n}$  şeklinde ise, genlik  $-20n \log_{10}|jw| = -20n \log_{10}w \text{ db}$   
Faz  $\underline{|(jw)^{-n}| = -90^\circ n}$

- 3- a) I. dereceden  $(1+jwT)$  için Bode çizimi:  $(1+jwT)$  çarpanının  $w$ 'ya göre genlik ve faz değerleri sırası ile,

$$20 \log_{10}|1+jwT| = 20 \log_{10}\sqrt{1+(wT)^2} \text{ db}$$

$$\underline{|(1+jw)| = \tan^{-1}(wT)} \quad \text{ifadeleri ile hesaplanır.}$$

Düşük frekanslarda  $w \ll \frac{1}{T}$  için genlik yaklaşık olarak  $20 \log_{10}\sqrt{1+(wT)^2} = 0 \text{ db}$  dir.

Yüksek frekanslarda  $w \gg \frac{1}{T}$  için genlik yaklaşık olarak  $20 \log_{10}\sqrt{1+(wT)^2} = 20 \text{ db}$  dir.

$w = \frac{1}{T}$  köşe frekansıdır. Köşe frekansında  $w = \frac{1}{T}$  için genlik

$$20 \log_{10}\sqrt{1+(\frac{1}{T})^2} \text{ db} = 3.0103 \text{ db} \text{ dir.}$$

Bode çiziminde  $w = \frac{1}{T}$  ye kadar 0 db ile çizilir,  $w > \frac{1}{T}$  için  $20 \text{ db/dec}$  lik eğim ile asimtot çizilir. Gerçek eğri  $w = \frac{1}{T}$  köşe frekansında  $3.0103 \text{ db}$  ilave edilerek elde edilir. Aşağıda,  $(1 + jw0.25)$  için çizim yapılmıştır.

$$\text{Köşe açısal frekans } w_k = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.25} = 4 \text{ rad/sn}$$

Genlik hesabı

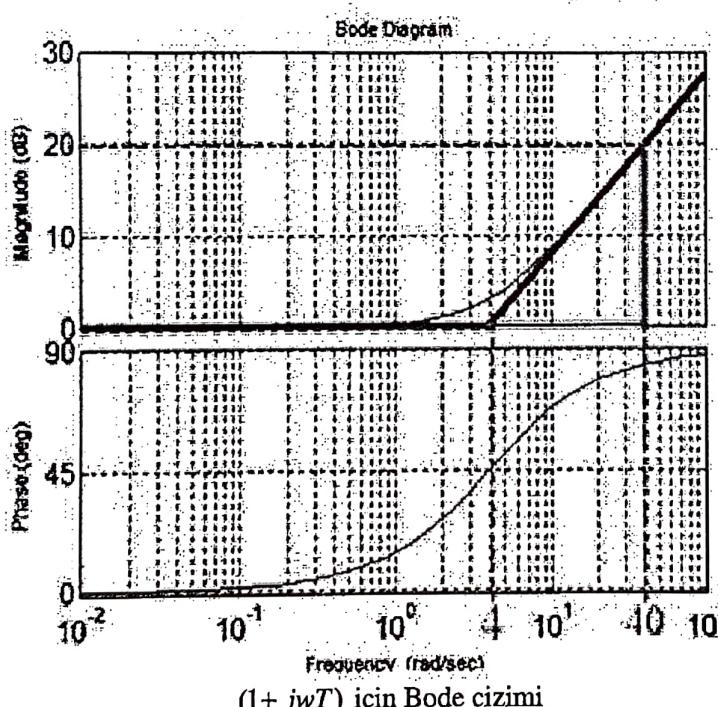
$$20 \log_{10} \sqrt{1 + (w0.25)^2} \text{ db}$$

Faz hesabı

$$\tan^{-1}(w0.25)$$

$w$	$ G  \text{ db}$
0.04	0.0004
0.4	0.0432
4	3.0103
40	20.0432
400	40.0004

$w$	$\tan^{-1}(wT)$
0.04	0.5729
0.4	5.7106
4	45.000
40	84.8294
400	89.4271



Köşe açısal frekansı  
 $w_k = 4 \text{ rad/sn}$  ye kadar  
genlik 0 db lik doğru  
ve  $w_k$  'dan  
son  $20 \text{ db/dec}$  eğimli  
asimtod ile çizilmiştir.

El ile yapılan çizimlerde,  
asimtodlar ile çizilen  
eğriye  $w_k = 4 \text{ rad/sn}$  'de  
 $3.0103 \text{ db}$  ilave edilerek  
şekilde görüldüğü gibi,  
gerçek eğri elde edilir.  
Faz eğrisi, küçük frekanslarda  
 $0^\circ$  den başlar,  $w_k = 4 \text{ rad/sn}$  de  
 $45^\circ$  olur ve yüksek frekanslarda  
 $90^\circ$  ye gider.

Eğer çarpan,  $(1 + jw)^n$  ise, genlik       $20 \log_{10} |(1 + jw)^n| = 20n \log_{10} \sqrt{1 + (wT)^2} \text{ db}$   
Faz       $|(1 + jw)^n| = n \tan^{-1}(wT)$

- 3- b) I. dereceden  $(1+jwT)^{-1}$  için Bode çizimi:  $(1+jwT)^{-1}$  çarpanının  $w$  'ya göre genlik ve faz değerleri sırası ile,

$$20\log_{10}|(1+jwT)^{-1}| = -20\log_{10}\sqrt{1+(wT)^2} \text{ db}$$

$$\boxed{(1+jw)^{-1} = -\tan^{-1}(wT)} \quad \text{ifadeleri ile hesaplanır.}$$

Düşük frekanslarda  $w \ll \frac{1}{T}$  için genlik yaklaşık olarak  $-20\log_{10}\sqrt{1+(wT)^2} = 0 \text{ db}$  dir.

Yüksek frekanslarda  $w \gg \frac{1}{T}$  için genlik yaklaşık olarak  $-20\log_{10}\sqrt{1+(wT)^2} = -20 \text{ db}$  dir.

$w = \frac{1}{T}$  köşe frekansıdır. Köşe frekansında  $w = \frac{1}{T}$  için genlik

$$-20\log_{10}\sqrt{1+(\frac{1}{T})^2} \text{ db} = -3.0103 \text{ db} \text{ dir.}$$

Bode çiziminde  $w = \frac{1}{T}$  ye kadar 0 db ile çizilir,  $w > \frac{1}{T}$  için  $-20 \text{ db/dec}$  'lik eğim ile asimtot çizilir. Gerçek eğri  $w = \frac{1}{T}$  köşe frekansında  $-3.0103 \text{ db}$  ilave edilerek elde edilir. Aşağıda,  $(1+jw0.25)^{-1}$  için çizim yapılmıştır.

Köşe açısal frekans  $w_k = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.25} = 4 \text{ rad/s}$

#### Genlik hesabı

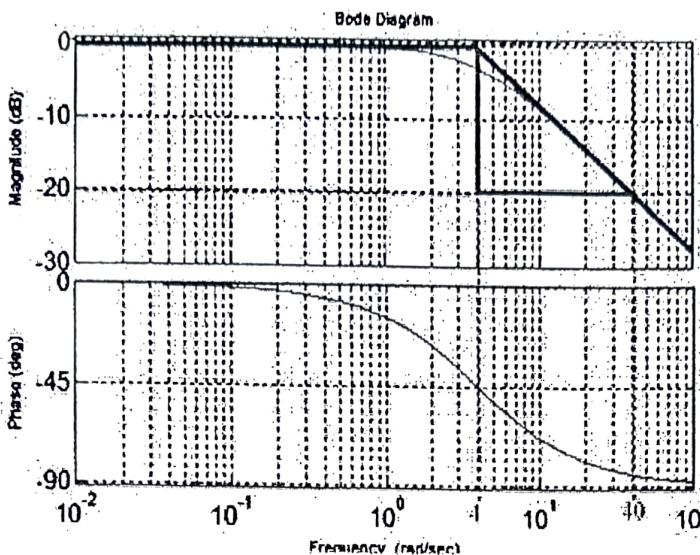
$$-20\log_{10}\sqrt{1+(w0.25)^2} \text{ db}$$

#### Faz hesabı

$$\boxed{-\tan^{-1}(w0.25)}$$

$w$	$ G  \text{ db}$
0.04	-0.0004
0.4	-0.0432
4	-3.0103
40	-20.0432
400	-40.0004

$w$	$\boxed{\tan^{-1}(wT)}$
0.04	-0.5729
0.4	-5.7106
4	-45.000
40	-84.8294
400	-89.4271



$(1+jwT)^{-1}$  için Bode çizimi

Köşe açısal frekansı  
 $w_k = 4 \text{ rad / sn ye kadar}$   
 genlik 0 db 'lik doğru  
 ve  $w_k$  'dan  
 son  $-20 \text{ db / dec}$  eğimli  
 asimtot ile çizilmiştir.

El ile yapılan çizimlerde,  
 asimtotlar ile çizilen  
 eğriye  $w_k = 4 \text{ rad / sn}$  'de  
 $-3.0103 \text{ db}$  ilave edilerek  
 şekilde görüldüğü gibi,  
 gerçek eğri elde edilir.  
 Faz eğrisi, küçük  
 frekanslarda  $0^\circ$  den  
 başlar,  $w_k = 4 \text{ rad / sn}$  de  
 $-45^\circ$  olur ve Yüksek  
 frekanslarda  $-90^\circ$  gider.

Eğer çarpan,  $(1+jw)^{-n}$  ise, genlik  $20\log_{10}|(1+jw)^{-n}| = -20n\log_{10}\sqrt{1+(wT)^2} \text{ db}$   
 Faz  $|(1+jw)^{-n}| = |-n\tan^{-1}(wT)|$

4-  $[(jw)+2\xi w_n j + w_n^2]^{-1}$  için Bode çizimi:  $[(jw)+2\xi w_n j + w_n^2]^{-1}$  çarpanının  $w_n$  'e göre normalize edilmiş asimtotik-frekans cevabı,

$$20\log_{10} \left| \frac{1}{1+2\xi\left(\frac{w}{w_n}\right)j+\left(j\frac{w}{w_n}\right)^2} \right| = -20\log_{10} \sqrt{\left(1-\frac{w}{w_n}\right)^2 + \left(2\xi\frac{w}{w_n}\right)^2} \text{ db}$$

Düşük frekanslarda,  $w \ll w_n$ , genlik  $-20\log_{10}1 = 0 \text{ db}$

Yüksek frekanslarda,  $w \gg w_n$ , genlik  $-20\log_{10}\frac{w^2}{w_n^2} = -40\log_{10}\frac{w}{w_n} \text{ db}$  ve

asimtot eğimi  $-40 \text{ db}$  olur.

$w = w_n$  köşe açısal frekansında, düşük frekans asimtotu ile yüksek frekans asimtotu

kesişir.  $-40\log_{10}\frac{w_n}{w_n} = -40\log_{10}1 = 0 \text{ db}$

Yukarıda, düşük frekans ve yüksek frekans asimtotları  $\xi$  den bağımsız olarak düşünülmüştür. Ancak  $w = w_n$  de rezonans tepeleri oluşacaktır. Rezonans tepelerinin değerini  $\xi$ 'nin değeri belirler.

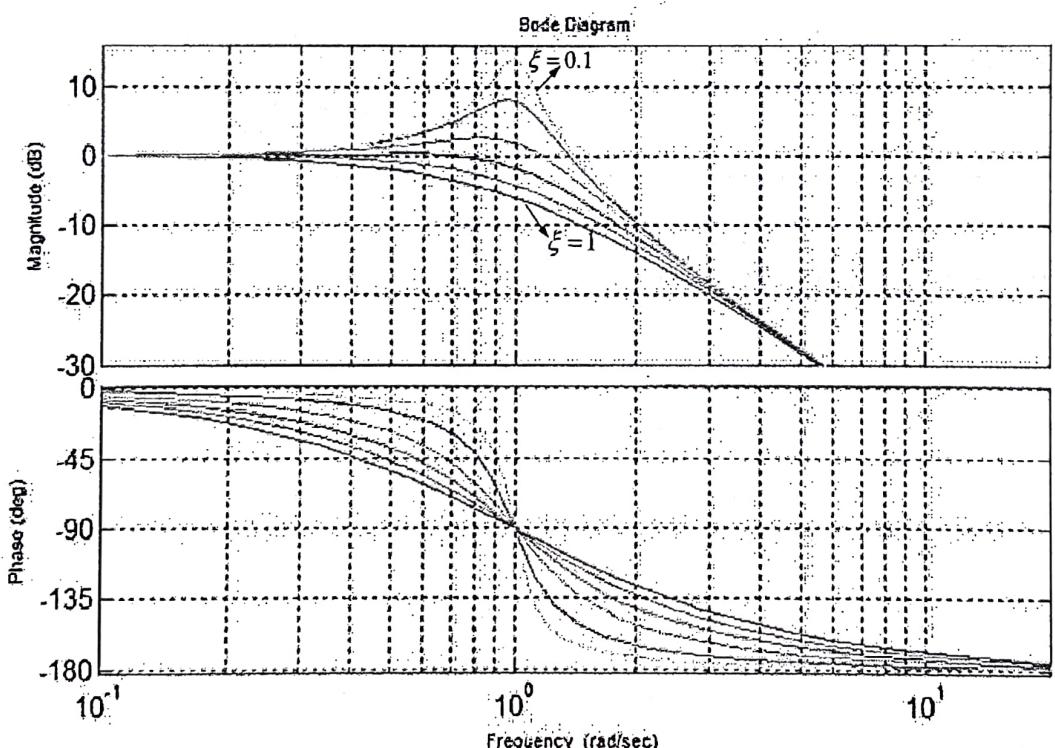
Karesel çarpan,  $[(jw) + 2\xi w_n j + w_n^2]^{-1}$  için faz ifadesi ,

$$\phi = \frac{1}{1 + 2\xi \left(\frac{w}{w_n}\right) j + \left(\frac{jw}{w_n}\right)^2} = -\tan \left[ \frac{2\xi \frac{w}{w_n}}{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2} \right]$$

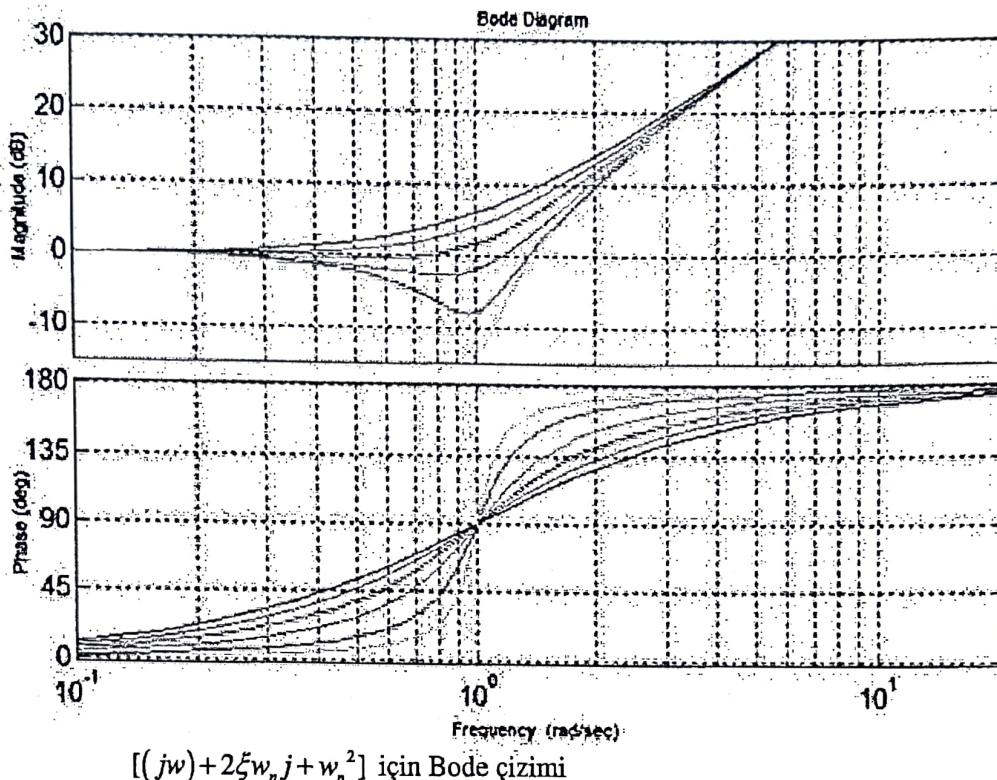
ile hesaplanır.

Faz açısı hem  $\xi$  nin hemde  $w$ ının fonksiyonudur.  $w=0$   $\phi=0$ ,  $w=w_n$  için  $\phi=-90^\circ$   $w=\infty$  için  $\phi=-180^\circ$  olmaktadır.

Aşağıda çeşitli  $\xi$  değerleri,  $\xi=0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  için sırası ile normalize edilmiş II. dereceden çarpan  $[(jw) + 2\xi w_n j + w_n^2]^{-1}$  ait genlik ve faz eğrilerine ait bode çizimleri verilmiştir.



Aşağıda çeşitli  $\xi$  değerleri,  $\xi = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  için sırası ile normalize edilmiş II. dereceden çarpan  $[(jw) + 2\xi w_n j + w_n^2]$  ait genlik ve faz egrilerine ait bode çizimleri aşağıda verilmiştir.



**Örnek:** Açık-çevrim transfer fonksiyonu,  $G(s) = 25 \frac{s+6}{s(s+4)(s^2+2s+11.62)}$  ile verilen sistem **Bode** diyagramını çiziniz.

$$s^2 + 2s + 11.62 = s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2 \text{ eşitliğinden, } w_n^2 = 11.62 \rightarrow w_n = 3.4088 \text{ rad / sn}$$

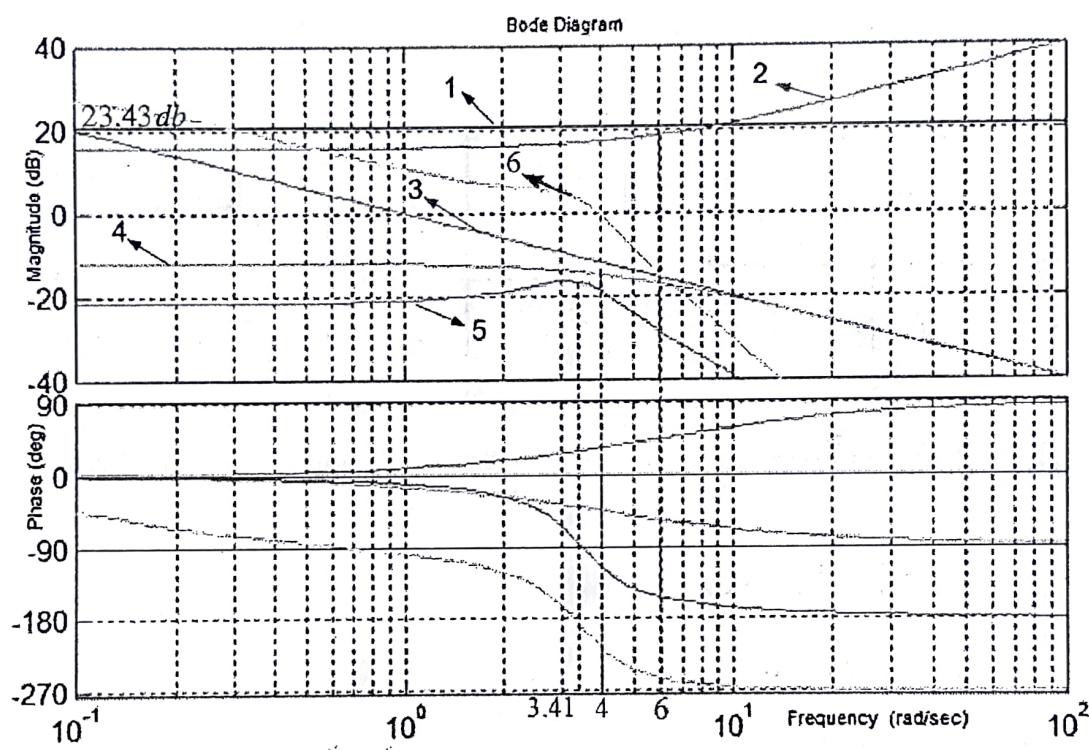
$$\xi = 0.2934$$

$$G(jw) = \frac{25*6}{4*11.62} \frac{j \frac{w}{6} + 1}{jw \left( j \frac{w}{4} + 1 \right) \left[ \left( j \frac{w}{3.4088} \right)^2 + j \frac{2w}{11.62} + 1 \right]}$$

$$K = \frac{25*6}{4*11.62} \rightarrow K = 3.2272 \quad K_{db} = 20 \log_{10} K \quad K_{db} = 20 \log_{10}(3.2272) = 23.43 \text{ db}$$

Her bir çarpana ait 1-5 çizimlerinin toplamı  $G(jw)$ 'ye ait şekilde verilen 6 nolu genlik çizimini ve yine her bir çarpana ait faz çizimlerinin toplamı  $G(jw)$ 'ye faz çizimini verir.

<i>Çarpan</i>	<i>Köşe frekansları</i>	<i>eğimler</i>	<i>grafik no</i>
$(s+6)$	$w_1 = 6 \text{ rad/sec}$	$-20 \text{ db/dec}$	2
$(s+4)^{-1}$	$w_2 = 4 \text{ rad/sec}$	$-20 \text{ db/dec}$	4
$(s^2 + 2s + 11.62)^{-1}$	$w_n = 3.4088 \text{ rad/sec}$	$-40 \text{ db/dec}$	5
$(s)^{-1}$	-----	$-20 \text{ db/dec}$	3
$K$	-----	0	1
$G(j\omega)$	-----	-----	6



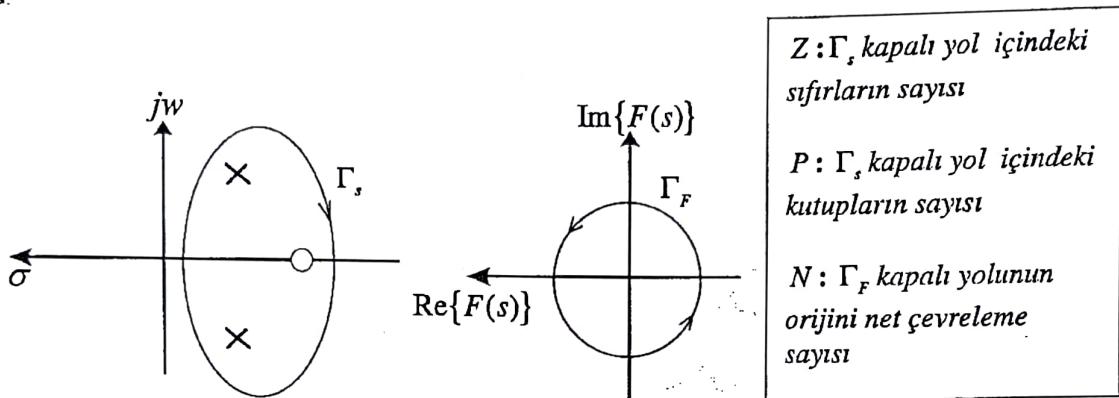
$G(j\omega)$  ye bode çizimi.

Her bir çarpan için çizim yapılması gerekmektedir. Doğrudan bode diyagramı çizilebilir.

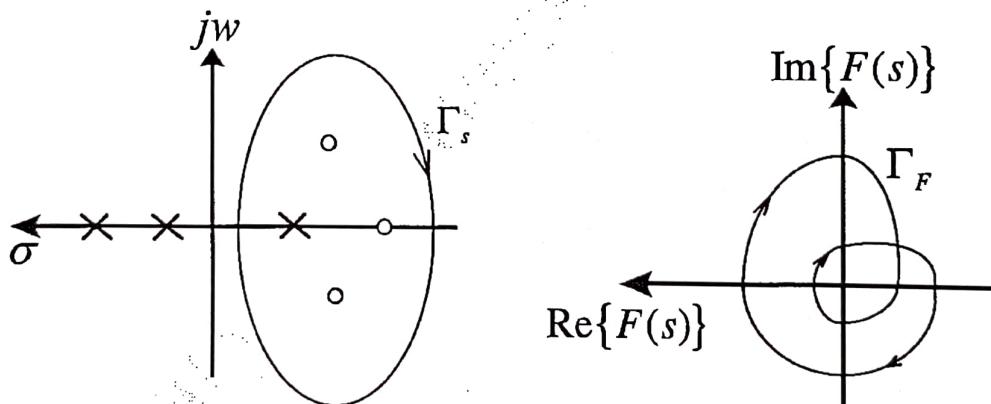
## 27.2 Nyquist Diyagramı

*Nyquist diyagramı kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinde argümanlar prensibine dayanmaktadır.*

**Argümanlar prensibi:**  $F(s)$  fonksiyonu  $s$ -düzlemindeki belirli noktalar dışında tek değer alan rasyonel bir fonksiyon olsun.  $S$ -düzleminde,  $F(s)$ 'in hiçbir kutup ve sıfırından geçmeyecek,  $\Gamma_s$  kapalı yolu boyunca  $F(s)$  analitik olsun. Buna ilişkin  $F(s)$  düzlemindeki yer eğrisi  $\Gamma_F$  orijini  $F(s)$ 'in  $\Gamma_s$  kapalı yolu boyunca çevrelediği  $N = Z - P$  sıfır-kutup sayısı farkı kadar çevreler.



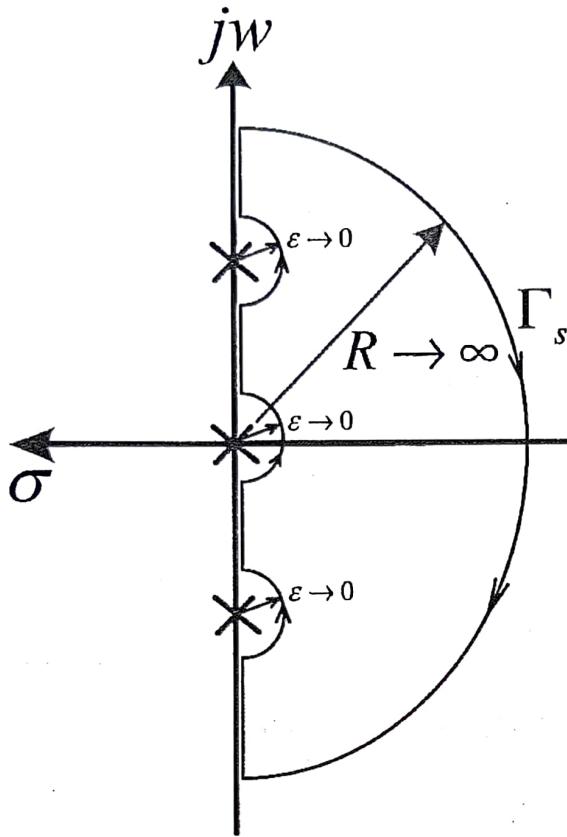
$Z = 1, P = 2$  ise  $N = Z - P = 1 - 2 \rightarrow N = -1$  olduğundan  $\Gamma_F$  orijini,  $\Gamma_s$  kapalı yolunun tersi yönünde '1' kez çevreler.



$Z = 3, P = 1$  ise  $N = Z - P = 3 - 1 \rightarrow N = 2$  olduğundan  $\Gamma_F$  orijini,  $\Gamma_s$  kapalı yolu yönünde '2' kez çevreler.

$F(s)$  fonksiyonu otomatik kontrol sistemlerinde  $F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$  karakteristik denklemi olarak değerlendirilir.  $G(s)H(s) = F(s) - 1$  'den  $\Gamma_s$  yolu boyunca çevrelenen sıfır-kutup sayısı farkı  $G(s)H(s)$  düzleminde kendisini  $(-1, j0)$  noktasını  $2\pi(z - p)$  kadar çevreleme olarak gösterir.

Kararlılık analizine, kapalı-çevrim kontrol sisteminin sağ-yarı  $s$ -düzlemindeki kutupları kararsız bir sistemi belirlediği için  $\Gamma_s$ , çevreleme aşağıda verilen "Nyquist yolu" boyunca yapılır.



$Z : F(s) = 1 + G(s)H(s)$  'in sağ-yarı s-düzlemindeki sıfırlarının sayısı.

$P : G(s)H(s)$  'in sağ-yarı s-düzlemindeki kutup sayısı.

$N : (-1, j0)$  noktasını saatin dönüş yönünde net çevreleme sayısı.

Nyquist yol, orijindeki veya  $jw$  eksenindeki kutup ve sıfırlardan geçmemelidir,  $\varepsilon \rightarrow 0$  çaplı daireler alınır.

$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$  kapalı-çevrim fonksiyonunun kutuplarını veren  $F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$

denkleminin,  $\Gamma_s$  kapalı yolu tarafından çevrelenen sıfırları sayısı  $Z$  dir. Bu kutupların sayısı  $Z$ , kapalı-çevrim transfer fonksiyonu  $T(s)$  'in sağ-yarı s-düzleminde aranan karasız kutuplarına karşılık düşer.

$G(s)H(s)$  'in kutupları aynı zamanda  $1 + G(s)H(s)$  'in kutupları olduğundan  $\Gamma_s$  'in çevrelediği kutupların sayısı,  $P$  bilinmektedir.

Bu bilgiler ışığında,  $Z = P + N$  ilişkisi yardımı ile kapalı-çevrim transfer fonksiyonunun sağ-yarı s-düzlemindeki kutupların sayısı bulunabilir.

#### Nyquist Kararlılık Kriteri:

i-  $G(s)H(s)$  düzleminde çizilen nyquist diyagramında,  $(-1, j0)$  noktasının (+) yönde çevreleme sayısından (-) yönde çevreleme sayısı çıkartılarak net çevreleme sayısı  $N$  bulunur.

ii-  $Z = P + N$  ilişkisinden karakteristik denklemin sağ-yarı s-düzlemindeki köklerinin sayısı bulunur.

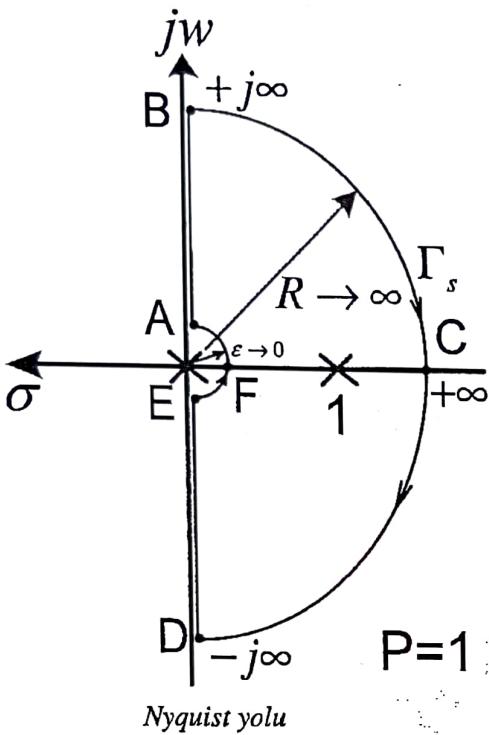
$Z = 0$  sistem KARARLIDIR.

$Z > 0$  sistem KARASIZDIR

$Z < 0$  hata yapılmıştır veya sistem nedensel değildir.

**Örnek:**  $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s-1)}$  Nyquist diyagramını çiziniz. Kararlılığını inceleyiniz.

**Çözüm:** Aşağıda açık-çevrim transfer fonksiyonu  $G(s)H(s)$  'in s-düzleminde kutup-sıfır dağılımı verilmiş ve Nyquist  $\Gamma_s$  kapalı-yolu gösterilmiştir.



Nyquist diyagramı için, s-düzleminde  $\Gamma_s$ , kapalı yolu boyunca A,B,C,D,E ve F noktalarına karşılık,  $F(s)$  düzleminde karşı gelen noktalar elde edilecektir.

$E,F,A$  noktalarında  $\varepsilon \rightarrow 0$  için kutupsal koordinatlarda,  
 $s \rightarrow \varepsilon e^{j\theta}$  yazılır ise,  
 $G(\varepsilon e^{j\theta})H(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}(\varepsilon e^{j\theta} - 1)}$  elde edilir.  $\varepsilon \rightarrow 0$  olduğundan '1' yanında ihmäl edilebilir.

$$G(\varepsilon e^{j\theta})H(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{-\varepsilon e^{j\theta}} = \frac{K}{e^{j\pi}\varepsilon e^{j\theta}}$$

$E, F, A$  noktaları için:  
 $G(\varepsilon e^{j\theta})H(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{Ke^{-j(\theta+\pi)}}{\varepsilon}$  elde edilir.

Benzer şekilde,

$B,C,D$  noktalarında  $\varepsilon \rightarrow \infty$  için kutupsal-koordinatlarda,

$s \rightarrow \varepsilon e^{j\theta}$  yazılır ise,  $G(\varepsilon e^{j\theta})H(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}(\varepsilon e^{j\theta} - 1)}$  elde edilir.  $\varepsilon \rightarrow \infty$  olduğundan '1' ihmäl edilebilir.

$$G(\varepsilon e^{j\theta})H(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}\varepsilon e^{j\theta}} = \frac{K}{\varepsilon^2 e^{j2\theta}}$$

$B, C, D$  noktaları için:  $G(\varepsilon e^{j\theta})H(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{Ke^{j2\theta}}{\varepsilon^2}$  elde edilir.

(E, F, A) ve (B, C, D) noktaları için elde edilen  $G(\varepsilon e^{j\theta})H(\varepsilon e^{j\theta})$  ifadeleri kullanılarak s-düzlemindeki noktalara karşılık gelen  $F(s)$ -düzlemindeki noktalar sırası ile hesaplanacaktır.

1- ( $E, F, A$ ) noktaları için:  $G(\varepsilon e^{j\theta})H(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{Ke^{-j(\theta+\pi)}}{\varepsilon}$

s - düzlemi		$F(s) -$ düzlemi	
$\varepsilon$	$\theta$	$ GH $	$\underline{ GH }$
A	0	$\frac{\pi}{2}$	A' $\infty$ $-\frac{3\pi}{2}$
F	0	0	F' $\infty$ $-\pi$
E	0	$-\frac{\pi}{2}$	E' $\infty$ $-\frac{\pi}{2}$

$|GH| = \frac{K}{\varepsilon}$  ve  $\underline{|GH|} = -(\theta + \pi)$

İfadeleri kullanılarak s- düzlemindeki noktalara karşılık gelen  $F(s)$  düzlemindeki noktalar yanda hesaplanmıştır.

2- ( $B, C, D$ ) noktaları için:  $G(\varepsilon e^{j\theta})H(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{Ke^{j2\theta}}{\varepsilon^2}$

s - düzlemi		$F(s) -$ düzlemi	
$\varepsilon$	$\theta$	$ GH $	$\underline{ GH }$
B	$\infty$	$\frac{\pi}{2}$	B'      0 $-\pi$
C	$\infty$	0	C'      0      0
D	$\infty$	$-\frac{\pi}{2}$	D'      0 $\pi$

$|GH| = \frac{K}{\varepsilon^2}$  ve  $\underline{|GH|} = 2\theta$

İfadeleri kullanılarak s- düzlemindeki noktalara karşılık gelen  $F(s)$  düzlemindeki noktalar yanda hesaplanmıştır.

A'	B'	C'	D'	E'	F'
$ GH $	$\infty$	0	0	$\infty$	$\infty$
$\underline{ GH }$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	0	$\pi$	$-\frac{\pi}{2}$

s- düzlemindeki noktalara karşılık gelen  $F(s)$  düzlemindeki noktalar yukarıda verilmiştir.

Bu noktalar sırası ile  $F(s)$  düzleminde gösterilmiştir.

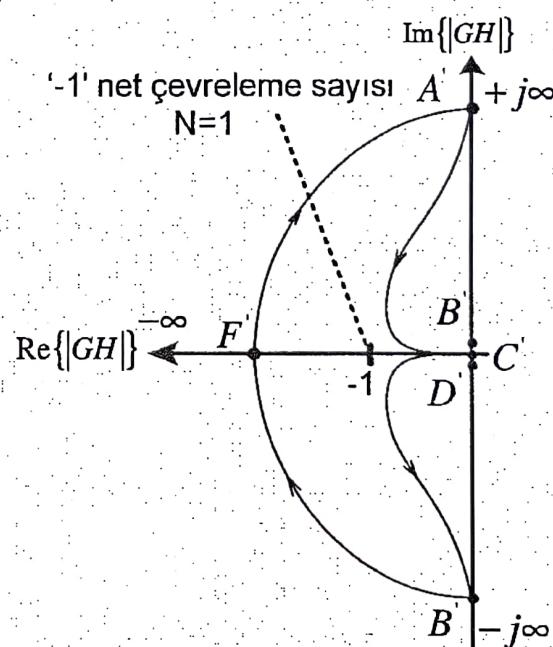
s- düzleminde A-B arasındaki eğri  $F(s)$  düzleminde A'-B' arasındaki eğriye karşılık gelir. Diğer noktalar benzerdir.

**Kararlılık:**

$P=1, N=1 \quad Z=P+N=1+1$

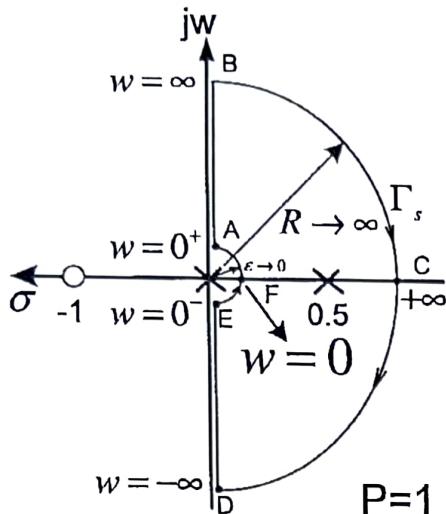
$Z=2$  dir. Sistem Kazanç K' dan bağımsız olarak KARASIZDIR.

Ve kapalı-çevrim transfer fonksiyonunun sağ-yarı s- düzleminde iki adet kutbu vardır.



**Doğrulama:**  $F(S) = s^2 - s + K = 0$  kökleri bulunur ise,  $s_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1-4K}$  görüldüğü gibi kapalı-çevrim kutiplarının ikiside s- düzleminin sağındadır.

*Örnek:*  $G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-0.5)}$  Nyquist diyagramını çiziniz. Kararlılığını inceleyiniz.



Elde edilen üç noktaya ait değerler ile Nyquist diyagramı çizilecektir.

$$1- \lim_{w \rightarrow 0^+} G(jw)H(jw) = \infty \left| -\frac{3\pi}{2} \right.$$

$$2- \lim_{w \rightarrow \infty} G(jw)H(jw) = 0 \left| -\frac{\pi}{2} \right.$$

$$3- w=0 \rightarrow \infty \left| -\pi \right.$$

Kutupsal koordinatlarda  $G(s)H(s)$ ,

$$G(\varepsilon e^{j\theta})H(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K(\varepsilon e^{j\theta} + 1)}{\varepsilon e^{j\theta}(\varepsilon e^{j\theta} - 0.5)}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$  için,

$$G(\varepsilon e^{j\theta})H(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{2K}{\varepsilon e^{j\theta} e^{j\pi}} = \frac{2K}{\varepsilon} e^{-j(\pi+\theta)}$$

$\varepsilon \rightarrow \infty$  için,

$$G(\varepsilon e^{j\theta})H(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K e^{j\theta}}{\varepsilon}$$

1-)  $w=0$  da  $\theta=0$  dir. ve

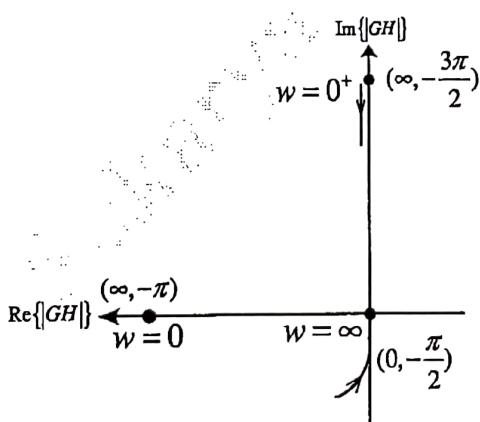
$$w=0 \rightarrow \infty \left| -\pi \right. \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ gider}$$

2-)  $w \rightarrow 0^+$   $\theta = \frac{\pi}{2}$  dir.  $\varepsilon \rightarrow 0$  gider.

$$\lim_{w \rightarrow 0^+} \frac{2K}{\varepsilon} e^{-j(\pi+\theta)} = \infty \left| -\frac{3\pi}{2} \right.$$

3-)  $w \rightarrow \infty$   $\theta = \frac{\pi}{2}$  dir.  $\varepsilon \rightarrow \infty$  gider.

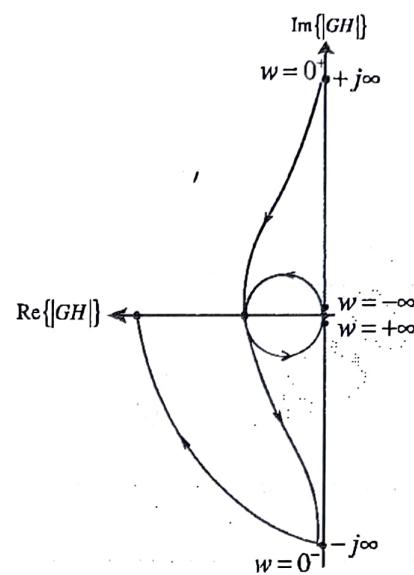
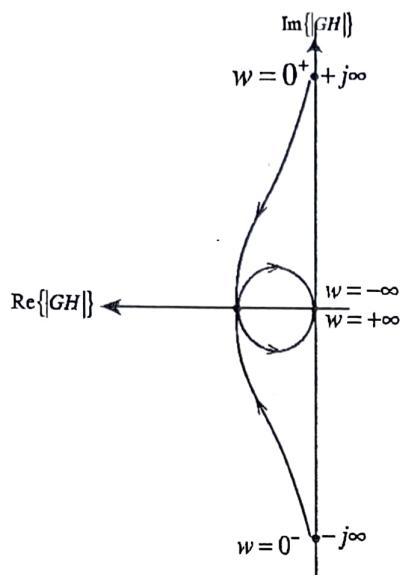
$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{K e^{-j\theta}}{\varepsilon} = 0 \left| -\frac{\pi}{2} \right.$$



$w \rightarrow 0^+$  için,  $w \rightarrow \infty$  ve  $w=0$  için  $F(s)$  düzleminde karşılık gelen noktalar ve açıları gösterilmiştir.

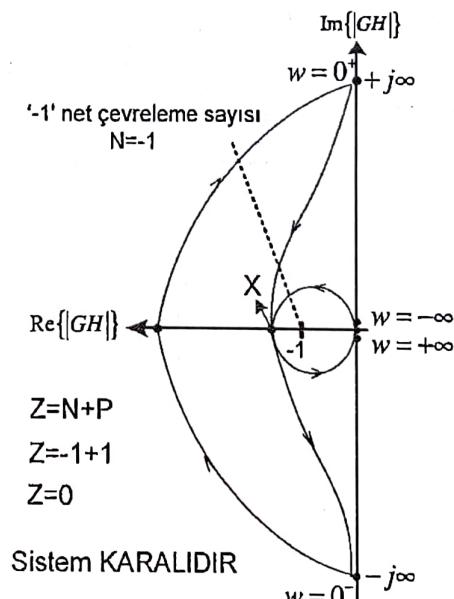
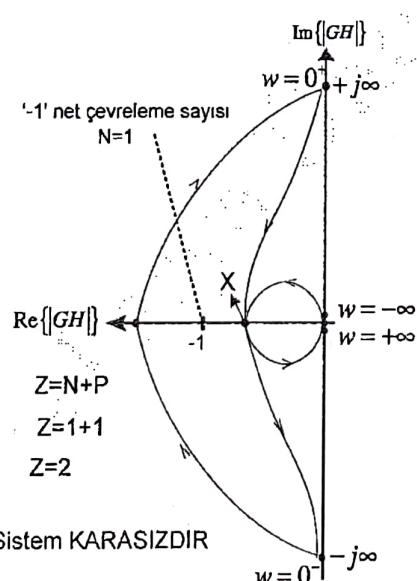
S-düzleminde  $\Gamma_s$  (A-B) yolu  $0^+ < w \leq \infty$  aralığında her nokta için hesap yapılar eğri çizdirilir ise yaklaşık olarak yukarıda verildiği gibidir.

Nyquist diyagramı reel eksene göre simetriktir.



S-düzleminde  $\Gamma_s$ , yolu  $0^- < w \leq -\infty$  aralığında reel eksene göre simetrik eğri elde edilir.  $\Gamma_s$  yolu (A-B-C-D-E) için eğri tamamlanmıştır.

s-düzleminde  $\Gamma_s$  (E-F) yolu  $F(s)$  düzleminde yukarıda çizilmiştir.  $w = 0 \rightarrow \infty \underline{-\pi}$  daha önce elde edilmiştir. (F-A) yoluna ait eğri ile tam çizim aşağıda verilmiştir.



$G(s)H(s)$  için elde edilen nyquist diyagramında X noktasının '-1' noktasının sağında yada solunda olmasına göre kararlılık değişmektedir. Kararsız sistemin sağ yarı s-düzleminde z=2 adet kutbu vardır. X noktası kazanç K'ya bağlıdır. Aşağıda K kararlılık aralığı analizi yapılmıştır.

Açık-çevrim transfer fonksiyonu frekans cevabı için  $s \rightarrow jw$  verilerek

$$G(jw)H(jw) = \frac{K(jw+1)}{jw(jw-0.5)} \text{ elde edilir. Düzenlenir ise,}$$

$$G(jw)H(jw) = \frac{K(jw+1)(-jw)(-jw-0.5)}{(jw)(-jw)(jw-0.5)(-jw-0.5)} = K \frac{-1.5w^2 + j(0.5w - w^3)}{w^2(w^2 + 0.25)}$$

Nyquist diyagramında  $X$  noktasında sanal bileşen sıfırdır. Reel kısım  $X$  'e eşittir.

$$K \frac{j(0.5w - w^3)}{w^2(w^2 + 0.25)} = 0 \rightarrow 0.5w - w^3 = 0 \text{ ise } w^2 = 0.5 \text{ ise } w = 0.7071 \text{ rad/sn}$$

$$X = \frac{-1.5w^2 K}{w^2(w^2 + 0.25)} \text{ dir. } X = \frac{-1.5(0.7071)^2 K}{(0.7071)^2[(0.7071)^2 + 0.25]} \rightarrow X = -2K$$

Sistemin karalı olabilmesi için  $X = -2K > -1 \rightarrow K < 0.5$  olmalıdır.

Sistemin karalı olabilmesi için  $0 < K < 0.5$  olmalıdır.

**Doğrulama:** Karalılık için karakteristik denklem yazılır.

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{s(s-0.5)} = 0 \quad F(s) = s^2 + (K-0.5)s + K = 0$$

Routh tablosu oluşturulur.

$s^2$	1	$K$
$s^1$	$K-0.5$	0
$s^0$	$K$	0

Karalılık için yeter şart, I. Sütun eleman değerleri sıfırdan büyük olmalıdır.  
 $K-0.5 > 0$  ise  $K < 0.5$   
 $K > 0$   
Karalılık için  $0 < K < 0.5$  aralıklarında değişmelidir.

**n tipi sistem:** Nyquist yolu üzerinde orijinde  $n$  tane kutup var ise  $G(s)H(s)$  düzleminde kollar  $180^\circ n$  açıyla bağlanırlar,  $(-1+j0)$  noktasını  $n$  kere çevreler.

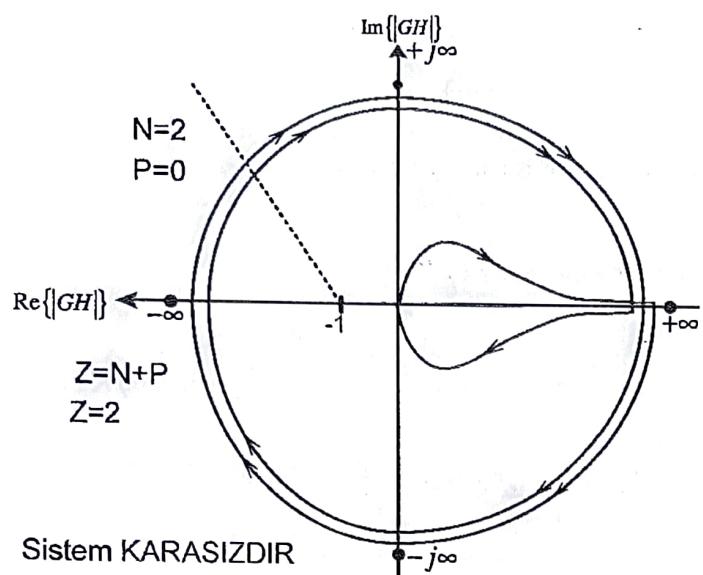
**Örnek:**  $G(s)H(s) = \frac{10}{s^4(s+10)}$  nyquist diyagramını çiziniz.  $s \rightarrow jw$  verilir ise,

$$G(jw)H(jw) = \frac{10}{(jw)^4(jw+10)} = \frac{10}{w^4\sqrt{w^2+10^2}} \left[ 2\pi - \tan^{-1}\left(\frac{w}{10}\right) \right]$$

$$\lim_{w \rightarrow 0^+} \left| \frac{1}{w^4} \right| \left| -2\pi - \tan^{-1}\left(\frac{0}{10}\right) \right| = \infty \left| -2\pi \right|$$

$G(s)H(s)$  sağ-yarı s-düzleminde kutbu yoktur.  $P = 0$

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{w^5} \right| \left| -2\pi - \frac{\pi}{2} = 0 \right| \left| -\frac{5\pi}{2} \right|$$



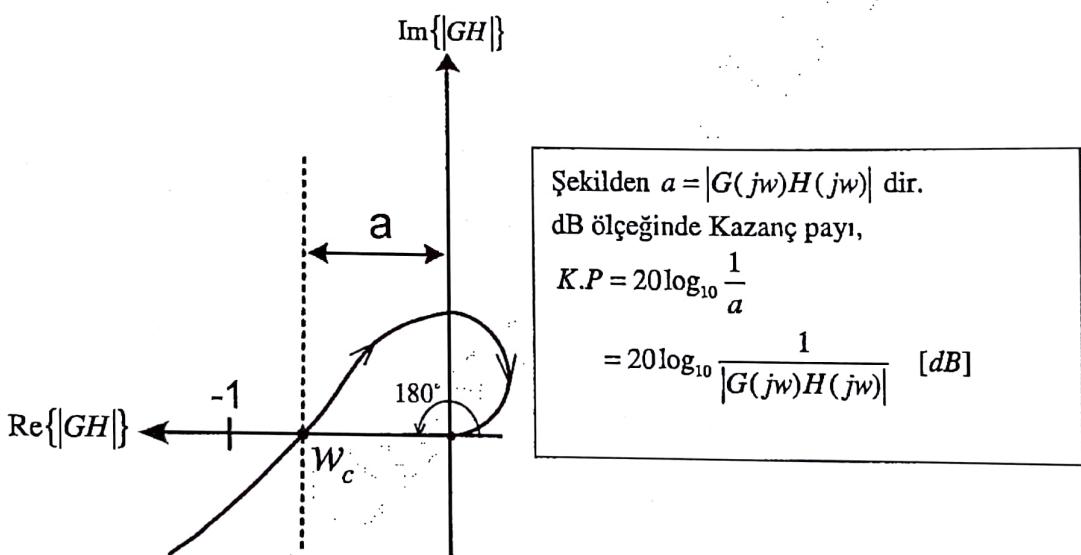
$$G(s)H(s) = \frac{10}{s^4(s+10)} \text{ ait Nyquist diyagramı.}$$

### 27.3 Bağıl Kararlılık

Açık çevrim transfer fonksiyonu  $G(jw)H(jw)$ 'nin kutupsal koordinatlarda çizilen Nyquist eğrisi ve Bode çiziminde genlik ve faz eğilerinden yararlanarak sistemin bağıl kararlılığı hakkında karar verilebilir. Bu amaç için Kazanç payı ve Faz payı Nyquist diyagramı ve Bode çizimi için sırası ile aşağıda anlatılmıştır.

### 27.4 Nyquist diyagramında Kazanç ve Faz payı

**Kazanç-Payı:** Açık çevrim transfer fonksiyonu  $G(jw)H(jw)$  eğrisinde, genlik  $|G(jw)H(jw)|$  'nin kararlılık sınırı olan  $(-1 + j0)$  noktasına erişebilmesi için kazanç  $K$  nin ne kadar daha artırlabileceğini gösterir.  $G(jw)H(jw)$  Nyquist eğrisinde faz açısı  $|G(jw)H(jw)|$  'nin  $180^\circ$  olduğu açısal frekans  $w_c$  olmak üzere Kazanç payı şekilde gösterilmiştir.



Kazanç payı,  $K$  kazancı ne kadar artırılırsa, kapali-çevrim kontrol sistemi karasız olur ölçüsünü vermektedir.

Kararlı bir sistem için  $0 < a < 1$  arasında olmalıdır.

Kararlı bir sistem için kazanç payı,  $KP > 0$  dB dir. Kazanç KP dB kadar artırlabilir.

Karasız bir sistem için kazanç payı,  $KP > 0$  dB dir. Kazanç KP dB kadar azaltılmalıdır.

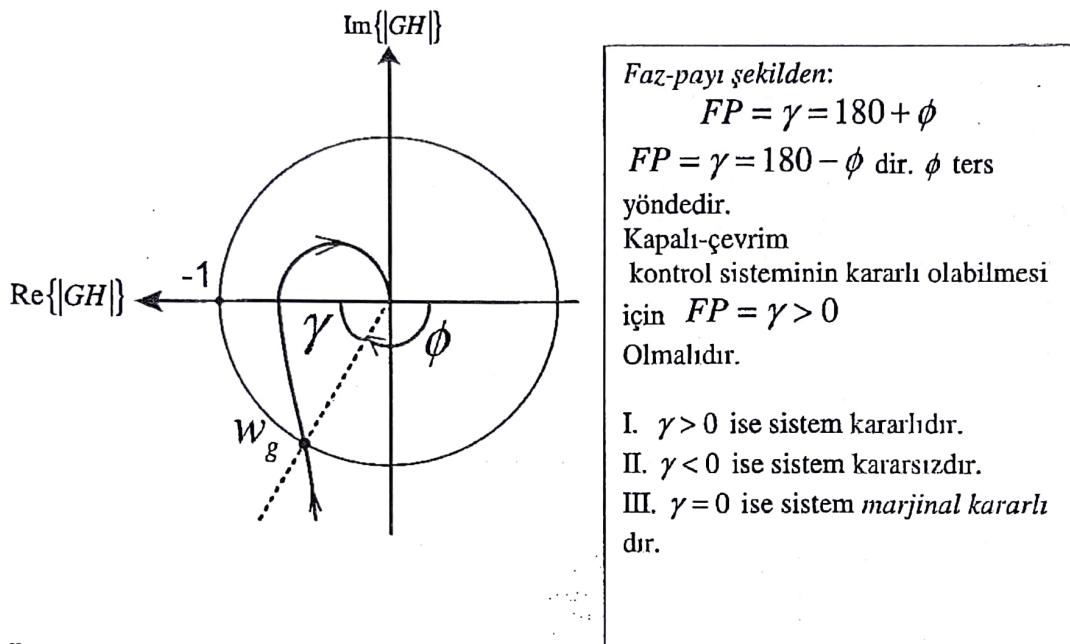
Marjinal bir sistem için kazanç payı,  $KP = 0$  dB dir. Kazanç KP artırılamaz, sistem karasız

olur.  $a \rightarrow 0$  için  $KP \rightarrow \infty$  olur: Kapali-çevrim kontrol sistemi, Kazanç  $K$ 'dan bağımsız olarak Kararlıdır.

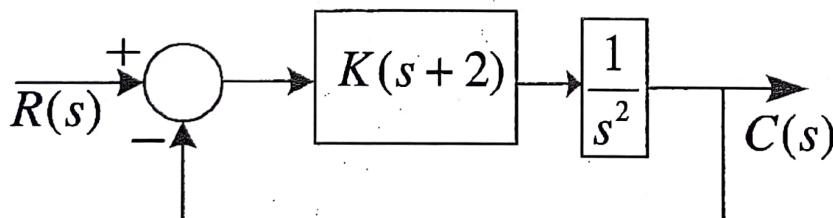
$a \rightarrow 1$  için  $KP \rightarrow 0$  olur: Kazanç  $K$  arttırılamaz, Kapali-çevrim kontrol sistemi kararsız olur. Sistem marjinal kararlıdır.

**Faz payı:** Açık çevrim transfer fonksiyonu  $G(jw)H(jw)$  eğrisinde, genlik  $|G(jw)H(jw)|$  'nin kararlılık sınırı olan  $(-1 + j0)$  noktasını çevreleyebilmesi için kaç derecelik açı gerektiğini göstermektedir.

$G(jw)H(jw)$  Nyquist eğrisinde,  $|G(jw)H(jw)| = 1$  olduğu açısal frekans  $w_g$  olmak üzere Faz payı aşağıda şekilde gösterilmiştir.



**Örnek:**



Şekilde verilen kontrol sisteminde  $FP = \gamma = 50^\circ$  olabilmesi için  $K$  ne olmalıdır? Bu durumda KP kaç dB dir.?

$G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2}$  ileri yol ifadesinde frekans cevap için,  $s \rightarrow jw$  koyulur ise,

$G(jw) = \frac{K(jw+2)}{(jw)^2}$  elde edilir.  $G(jw)$ 'ye ait Faz ve genlik ifadeleri ayrı ayrı yazılmıştır.

$$|G(jw_g)| = \tan^{-1} \frac{w_g}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \tan^{-1} \frac{w_g}{2} - \pi \text{ dir.}$$

$FP = \gamma = 50^\circ$  olması istendiğinde,  $|G(jw_g)| = 50 - 180 = -130^\circ$  (Faz-payı şeviden) olmalıdır.

$$\tan^{-1} \frac{w_g}{2} - \pi = -130 \text{ ise, } \tan^{-1} \frac{w_g}{2} = 50 \quad \tan 50 = \frac{w_g}{2}$$

$$\tan 50 = \frac{w_g}{2} \rightarrow w_g = 1.19175 \text{ rad/sn}$$

$$|G(jw)H(jw)| = 1 \rightarrow \frac{K\sqrt{w^2 + 1}}{w^2} = 1 \text{ ise } K = \frac{w^2}{\sqrt{w^2 + 1}} \text{ dir. } w_g \text{ noktasındaki kazanç ise,}$$

$$K = \frac{(1.19175)^2}{\sqrt{(1.19175)^2 + 1}} \text{ ise } K = 1.82 \text{ dir.}$$

Faz payının  $FP = \gamma = 50^\circ$  olabilmesi için,  $K = 1.82$  olmalıdır.

**Kazanç payı:** Açık-çevrim transfer fonksiyon fazının  $180^\circ$  olduğu açısal frekans  $w_c$  deki kazanç hesaplanmalıdır.

$G(jw) = \tan^{-1} \frac{w}{2} - \pi$  incelendiğinde,  $w = 0$  sınır açısal frekans haricinde faz açısının hiçbir zaman  $180^\circ$  olamayacağı görülmektedir. Kazanç payı  $KP = \infty$  dB. Kapalı-çevrim transfer fonksiyonu açık çevrim kazancı  $K'$  dan bağımsız olarak  $K > 0$  için kararlıdır.

**Routh ile doğrulama:** Karakteristik denklem  $F(s) = 1 + \frac{K(s+2)}{s^2} = 0$  ifadesinden,

$$F(s) = s^2 + Ks + 2K = 0 \text{ Routh tablosu oluşturulur ise,}$$

$$s^2 \quad 1 \quad 2K$$

$$s^1 \quad K \quad 0 \quad \text{Kararlılık için yeter şart, I. sütün elemanları sıfırdan büyük olmalıdır.}$$

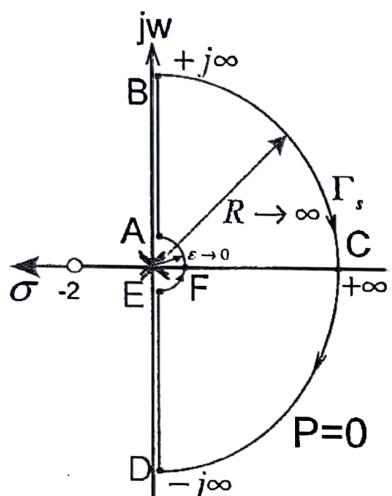
$$s^0 \quad 2K$$

$$2K > 0 \text{ dan } K > 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\text{Nyquist diyagramı: } G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2} \quad s \rightarrow \varepsilon e^{j\theta} \text{ için} \quad G(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K(e^{j\theta} + 2)}{\varepsilon^2 e^{j2\theta}}$$

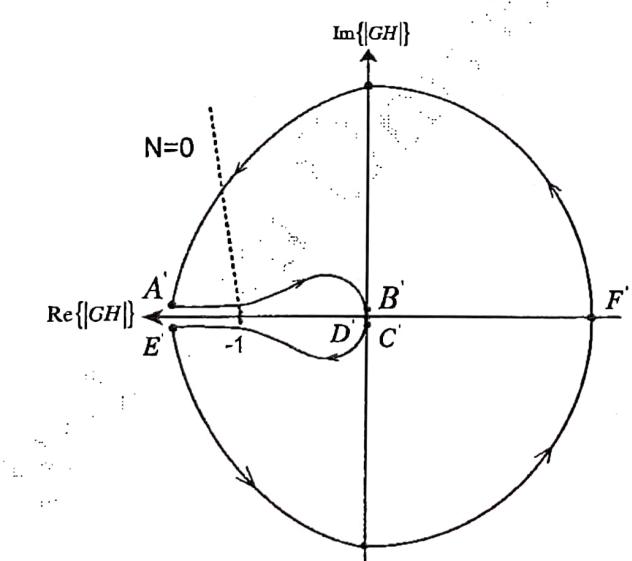
$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad G(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{2Ke^{-j2\theta}}{\varepsilon^2}$$

$$\varepsilon \rightarrow \infty \quad G(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{Ke^{-j\theta}}{\varepsilon}$$



Nyquist yolu.

S düzleminde	$A'(\infty, -\pi)$
A,B,C,D,E ve F	$B'(0, -\frac{\pi}{2})$
noktalarına	$C'(0, 0)$
$G(jw)$	$D'(0, \frac{\pi}{2})$
düzleminde	$E'(\infty, \pi)$
karşılık gelen	$F'(\infty, 0)$
noktalar	
hesaplanmıştır.	



Nyquist diyagramı.

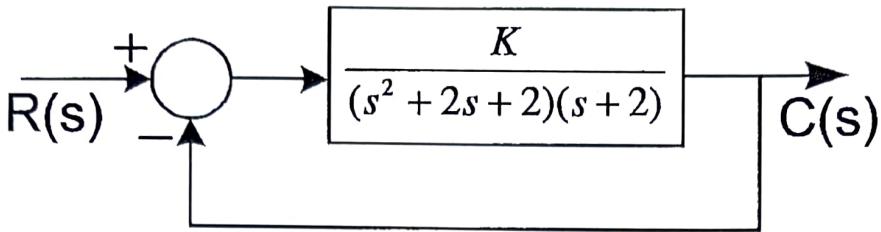
$G(jw)$  eğrisi reel ekseni hiçbir zaman tam  $-180^\circ$  de kesmez. Bundan dolayı

Kazanç payı  $KP = \infty$  dB  
 $Z = N + P$

$Z = 0 + 0$  Sistem kararlıdır.  
 $Z = 0$

Şekilden  $G(jw)$  eğrisi  $-1$  noktasını hiçbir zaman gevrelmez,  $N=0$  dir.

*Örnek:*



Şekilde verilen kontrol sisteminde  $K = 6$  için faz-payı  $FP = \gamma$  ve kazanç payı  $KP$  yi hesaplayınız.

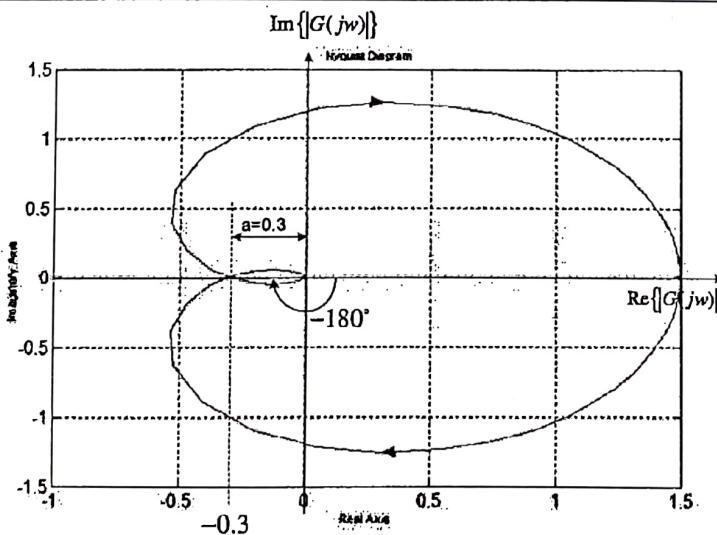
$G(s) = \frac{K}{(s^2 + 2s + 2)(s + 2)}$  ise, frekans cevabı için  $G(jw) = \frac{K}{((jw)^2 + 2(jw) + 2)(jw + 2)}$  yazılır ve düzenlenir.

$$G(jw) = \frac{6(2 - jw)(2 - w^2 - 2jw)}{(4 + w^2)(2 - w^2)^2 + 4w^2} = \frac{24 - 24w^2 + 6jw^3 - 36jw}{(4 + w^2)(2 - w^2)^2 + 4w^2} \text{ dir.}$$

Negatif reel ekseni kestiği noktada sanal bileşen sıfırdır.  $6jw^3 - 36jw = 0$   
 $6w^3 = 36w$  ise  $w_c = \sqrt[3]{6}$  rad / sn. Bu noktadaki kazanç ise,

$$\begin{aligned} |G(jw_c)| &= \frac{24 - 24w_c^2}{(4 + w_c^2)(2 - w_c^2)^2 + 4w_c^2} \\ &= \frac{24 - 24(\sqrt[3]{6})^2}{(4 + (\sqrt[3]{6})^2)(2 - (\sqrt[3]{6})^2)^2 + 4(\sqrt[3]{6})^2} = -\frac{120}{1040} \rightarrow |G(jw_c)| = -0.3 \end{aligned}$$

$|G(jw_c)| = -180^\circ$  olduğu  $w_c = \sqrt[3]{6}$  rad / sn. açısal frekansında  $|G(jw_c)| = -0.3$  tür.



$$KP = 20 \log_{10} \frac{1}{a} \text{ dB}$$

$$KP = 20 \log_{10} \frac{1}{0.3}$$

$$KP = 20 * 0.5228$$

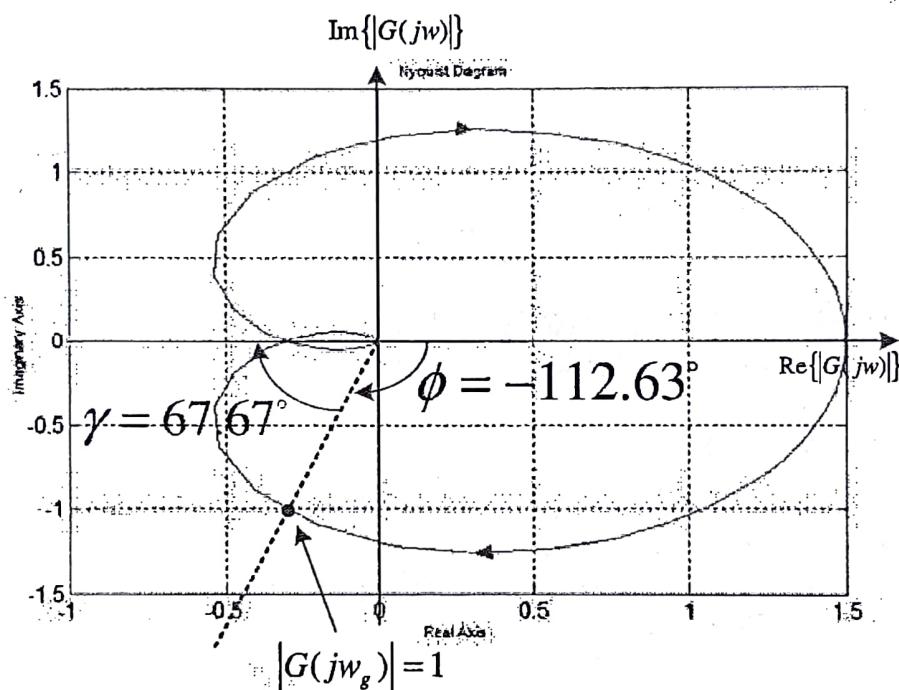
Kazanç payı:  
 $KP = 10.45 \text{ dB}$   
 Olarak elde edilir.

Kazanç payının Nyquist diyagramunda gösterimi.

Faz payı için,  $|G(jw)| = \frac{|24 - 24w^2 + 6jw^3 - 36jw|}{(4+w^2)(2-w^2)^2 + 4w^2} = 1$  için çözüm yapılır ise, genlik eğrisinin '1' olduğu noktada açısal frekans,  $w_g = 1.253 \text{ rad/sn}$ . çıkar. Bu açısal frekans için

$$|G(jw_g)| = \frac{|24 - 24w_g^2 + 6jw_g^3 - 36jw_g|}{(4+w_g^2)(2-w_g^2)^2 + 4w_g^2} \rightarrow \phi = |G(jw_g)| = -112.63^\circ$$

Faz payı,  $FP = \gamma = 180 + \phi = 180 - 112.33 = 67.67^\circ \text{ dir.}$



Faz-payınn Nyquist diyagramında gösterimi.

Kazanç payının Routh ile doğrulaması:  $G(s) = \frac{K}{(s^2 + 2s + 2)(s + 2)}$  açık-çevrimden

karakteristik denklem elde edilir.  $F(s) = 1 + \frac{K}{(s^2 + 2s + 2)(s + 2)} = 0$  ise,

$F(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + K + 4 = 0$ , Routh tablosu oluşturulur.

$s^3$	1	6	Tablodan, $K + 4 > 0$	$K > 0$
$s^2$	4	$K + 4$	$\frac{24 - (K + 4)}{4} > 0$	$K < 20, 0 < K < 20$ olmalıdır.
$s^1$	$\frac{24 - (K + 4)}{4}$	0	$K_{kritik} = 20$ örnekte $K = 6$ için çözüm yapılmıştır.	
$s^0$	$K + 4$		Kazanç payı $K_p = 20 \log_{10}(\frac{20}{6}) \rightarrow K_p = 10.45 \text{ dB}$	

## 27.5 Bode diyagramında Kazanç ve Faz payı

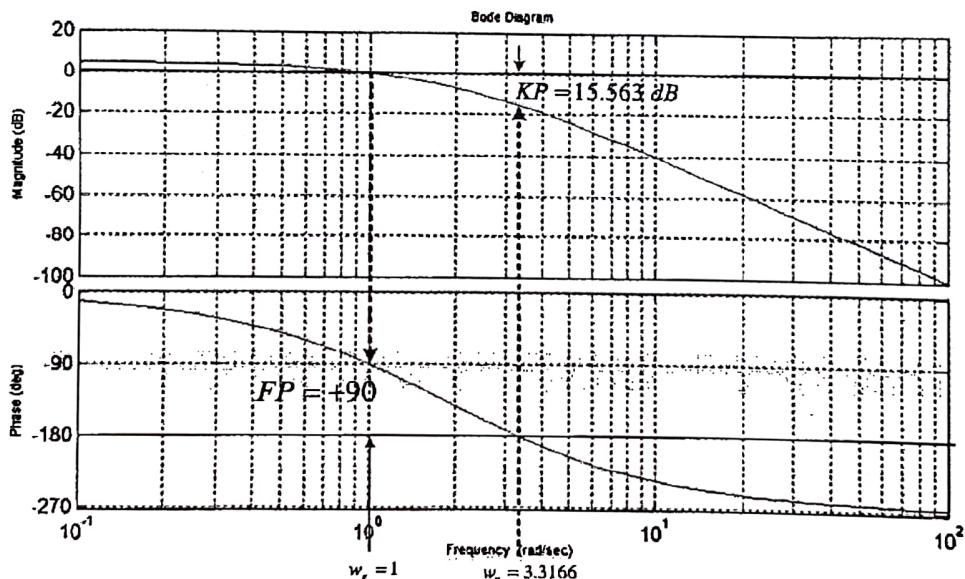
**Kazanç payı:** Açık çevirim transfer fonksiyonu  $G(jw)H(jw)$ 'nin bode çiziminde, faz diyagramından 'Kazanç payı' elde edilir.  $|G(jw)H(jw)|$ 'nin  $180^\circ$  olduğu açısal frekans  $w_c$  olmak üzere, bu açısal frekanstaki genlik  $|G(jw_c)H(jw_c)|$ , kazanç payı  $KP$ 'yi verir. Kazanç payı  $KP$ , kapalı çevrimin kararlılık sınırları içinde, kazancının ne kadar artırılabilceğini göstermektedir.

**Faz payı:** Açık çevirim transfer fonksiyonu  $G(jw)H(jw)$ 'nin bode çiziminde, genlik diyagramından 'Faz payı' elde edilir.  $|G(jw_c)H(jw_c)|$  genliğinin  $0 \text{ dB}$  olduğu açısal frekans  $w_g$  olmak üzere, bu açısal frekanstaki faz  $\phi = \angle G(jw_g)H(jw_g)$  dir. Faz payı  $FP = \gamma = 180 + \phi$  dir.

Örnek:  $G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$  açık çevirim transfer fonksiyonu ile verilen sistemin Bode diyagramı aşağıda verilmiştir. Faz-payı ve Genlik-payı gösterilmiştir.

$$w_g = 1 \text{ rad/sn} \text{ için } \phi = \angle G(jw_g)H(jw_g) = 90^\circ \text{ dir.}$$

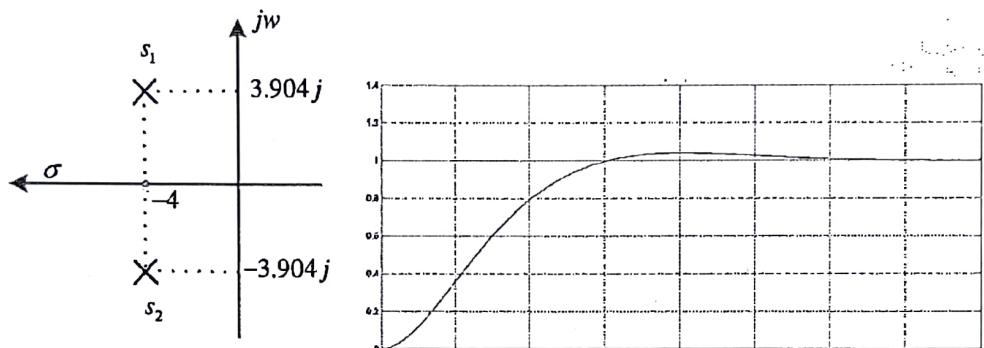
$$w_c = 3.3136 \text{ rad/sn} \text{ için } 20 \log_{10} |G(jw_c)H(jw_c)| = 15.563 \text{ dB} \text{ dir.}$$



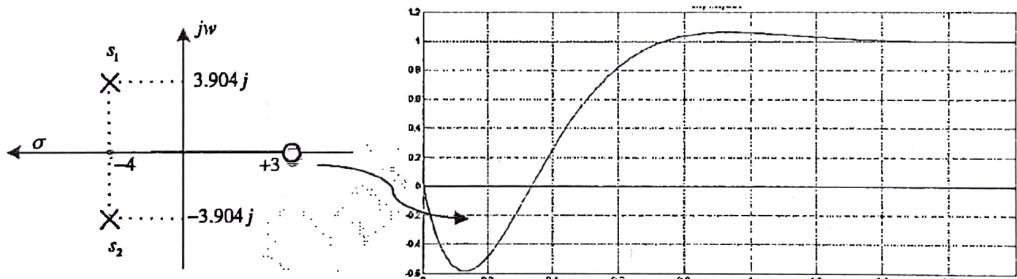
- Büyükk Kazanç ve faz payı zaman domeninde sistem cevabının çok yavaş olması demektir.
- Kapalı-çevrim sistem, *Kazanç payı*,  $KP > 0$  ise **KARARLIÐIR**.  
 $KP < 0$  ise **KARASIZDIR**.
- Kararlı sisteminde  $KP$ , kazancın ne kadar artırılabilceğini gösterir.
- Kararsız sisteminde  $KP$ , kararlılık için kazancın ne kadar azaltılması gerektiğini gösterir.
- Minimum fazlı sistemin kararlı olabilmesi için faz payı kesin  $FP = \gamma > 0$  olmalıdır.

- **Minimum Fazlı ve Minumum Fazlı olmayan sistem:** Sistemin tüm kutup ve sıfırları s-kompleks düzleminin sol-yarısında ise sistem minumum fazlıdır.
- Eğer sistemin en az bir adet kutup yada sıfırı s-kompleks düzleminin sağ-yarı s-düzleminde ise sistem minumum fazlı değildir.

$$T_1(s) = \frac{31.24}{s^2 + 8s + 31.24} \quad \text{minum-fazlı sistem ikinci dereceden bir sistem.}$$

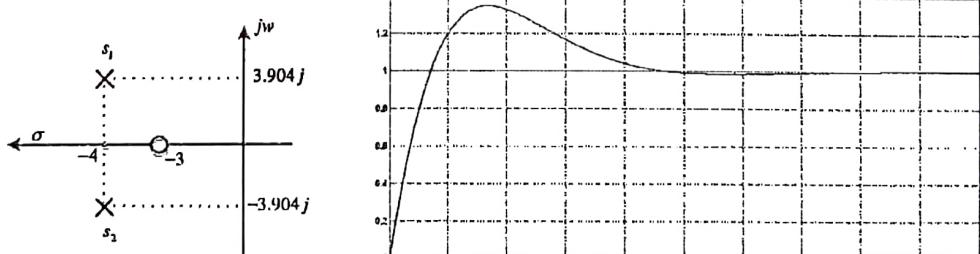


$$T_2(s) = 10.41 \frac{-s+3}{s^2 + 8s + 31.24} \quad \text{minum-fazlı olmayan sistem.}$$



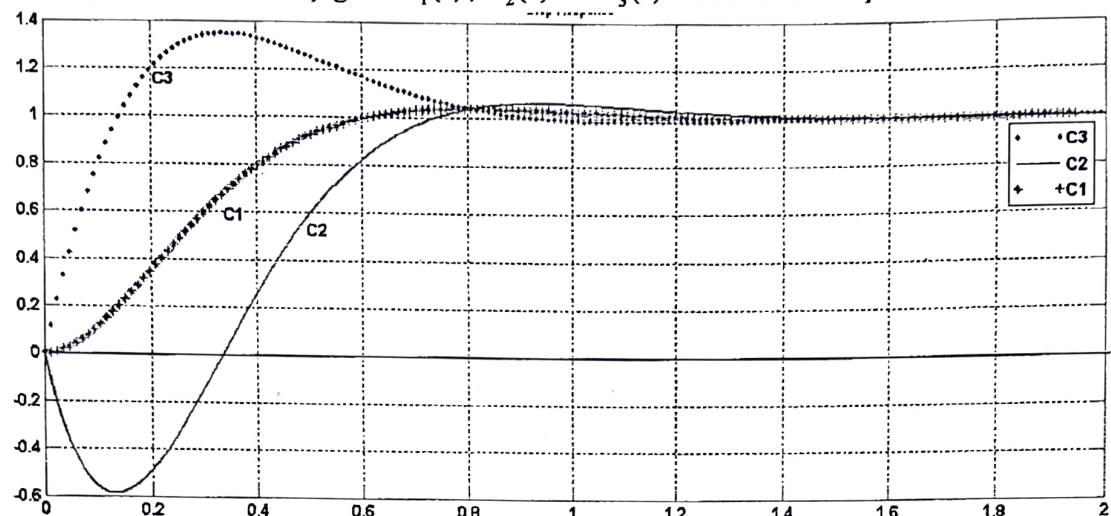
**Yorum:** Sağ s-yarı düzleminde bir sıfır olduğundan sistem minumum-fazlı değildir. Grafikteki negatif bölge, s-kompleks düzleminde  $+3$  deki sıfırdan dolayı oluşmaktadır. Modeli minumum fazlı olmayan bir araca ileri ilerleme gitmesi için bir referans hız verilsin. Önce geri gider sonra ileri gider....

$$T_3(s) = 10.41 \frac{s+3}{s^2 + 8s + 31.24} \quad \text{minum-fazlı sistem.}$$



**Yorum:** Tüm kutuplar ve sıfırlar s-yarı düzleminin sol yarı düzleminde olduğundan sistem minumum-fazlıdır. Ancak  $-3$  sıfırı ilavesinden dolayı sistem cevabı hızlanmış e aşım artmıştır.

$T_1(s)$ ,  $T_2(s)$  ve  $T_3(s)$  transfer fonksiyonlarının birim basamak girişe karşı cevapları karşılaştırmak amacıyla aşağıda  $C_1(s)$ ,  $C_2(s)$  ve  $C_3(s)$  sırası ile verilmiştir.



## Kaynaklar

- 1- Feedback control systems, *John van de vugte*
- 2- Modern control Design, *Ashish Tewari*
- 3- Feedback control of Dynamic System, *G. F. Franklin, J.D. Powel, A.E.Naeini*
- 4- Continuous and Discrete Control Systems, *John Dorsey*
- 5- Digital Control Of Dynamic Systems, *G. F. Franklin,, J.D. Powel, M. Workman*
- 6- Modern Control Engineering, *Katsuhiko Ogata*
- 7- Otomatik Kontrol Sistemleri, *Benjamin Kuo, terc. Prof.Dr. Atilla Bir.*
- 8- Control system design and simulation, *J. Golden, A. Verner*
- 9- Digital Control system analysis and design, *C.L.Phillips, H.T.Nagle*
- 10-Modern control theory, *R.Dorf*
- 11-Dijital Kontrol sistemleri, *Prof.Dr. M.Kemal Sarıoğlu*
- 12- Otomatik Kontrol I-II (Ders Notları), *Prof.Dr. M.Kemal Sarıoğlu*

**Ref1-** A. Ozdemir, Z. Erdem," A New Approach for Calculation of PID Parameters with Model Based Compact Form Formulations", Elektronika IR Elektrotehnika, ISSN 1392-1215, 2014, VOL. 20, NO. 3, 2014, DOI: 10.5755/j01.eee.20.3.4415