Sayısal İşaret Çalışma Soruları

1-) SÜREKLİ ZAMAN BİR $X_a(t)$ İŞARETİ 250 Hz, 450 Hz, 1 kHz, 2.75 kHz, VE 4,05 kHz FREKANSLARINDA SİNÜSODİAL İŞARETLERİN DOĞRUSAL KOMBİNASYONUNDAN OLUŞMAKTADIR. $X_a(t)$ İŞARETİ 1,5 kHz ÖRNEKLEME FREKANSIYLA ÖRNEKLENİYOR VE KESİM FREKANSI 750 Hz OLAN İDEAL BİR AGF'DEN GEÇİRİLİYOR. SONUÇTA ELDE EDİLEN $y_a(t)$ İŞARETİNİN FREKANS BİLEŞENLERİNİ BULUNUZ.

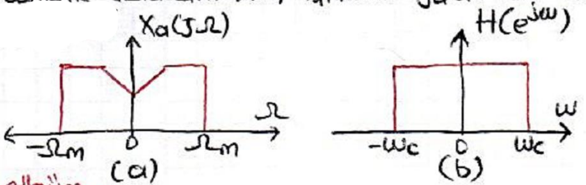
ÇÖZÜM =

$X_a(t)$ İŞARETİ 1,5 kHz İLE ÖRNEKLENDİĞİNDEN $X_a(t)$'Yİ OLUŞTURAN HER BİR SİNÜSODİAL BİLEŞENİN KOPYALARI AŞAĞIDAKİ FREKANSLARDA OLUŞUR:

$F_1 = 250$ Hz $\quad F_{1m} = 250,\ 1250,\ 1750 \ldots$ Hz
$F_2 = 450$ Hz $\quad F_{2m} = 450,\ 1050,\ 1950 \ldots$ Hz
$F_3 = 1000$ Hz $\quad F_{3m} = 1000,\ 500,\ 2500 \ldots$ Hz
$F_4 = 2750$ Hz $\quad F_{4m} = 2750,\ 1250,\ 250 \ldots$ Hz
$F_5 = 4050$ Hz $\quad F_{5m} = 4050,\ 1050,\ 450 \ldots$ Hz

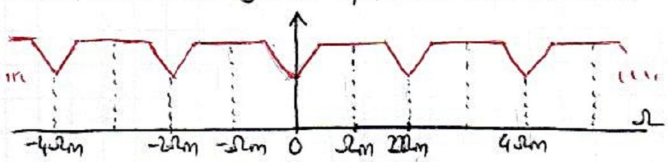
BU İŞARETLER, 750 Hz KESİM FREKANSLI İDEAL AGF'DEN GEÇİRİLİRSE $y_a(t)$ NİN FREKANS BİLEŞENLERİ 250, 450 VE 500 Hz OLUR.

2-) $X_a(t)$, SPEKTRUMU AŞAĞIDA VERİLEN SÜREKLİ-ZAMAN BİR İŞARET OLSUN VE NYQUIST HIZINDA ÖRNEKLENSİN. AYRIK-ZAMAN İŞLEMCİ FREKANS CEVABI, $H(e^{jw})$, AŞAĞIDA VERİLEN İDEAL BİR AGF OLSUN VE KESİM FREKANSI, T ÖRNEKLEME PERİYODU OLMAK ÜZERE, $w_c = \Omega_m T/3$ OLARAK VERİLSİN. ÇIKIŞ İŞARETİ $y_a(t)$'NİN SPEKTRUMUNU BULUNUZ.



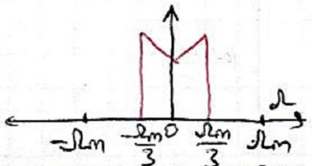
ÇÖZÜM =

ÖRNEKLEMEDEN SONRA İŞARETİN SPEKTRUMU:

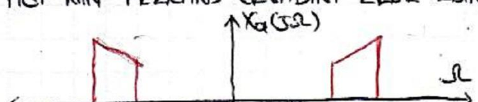


$T = \frac{2\pi}{2\Omega_m} = \frac{\pi}{\Omega_m}$ 'DİR. $w_c = \frac{\Omega_m . \pi}{3\Omega_m} = \frac{\pi}{3}$

O HALDE AGF'DEN SONRA İŞARETİN SPEKTRUMU $y_a(J\Omega)$ AŞAĞIDAKİ GİBİ OLUR:



3-) SÜREKLİ-ZAMAN $X_a(t)$ İŞARETİNİN SPEKTRUMU $X_a(J\Omega)$ AŞAĞIDA VERİLİYOR. AŞAĞIDAKİ HER BİR Ω_1 VE Ω_2 KENAR FREKANSLARI İÇİN $X_a(t)$ ÖRNEKLENMİŞ $X[n]$ İŞARETİNDEN DOĞRU ELDE EDİLECEK ŞEKİLDE EN KÜÇÜK ÖRNEKLEME FREKANSINI BULUNUZ. $X_a(t)$ NİN BU FREKANSTA ÖRNEKLENMESİ İLE ELDE EDİLEN $X[n]$ İŞARETİNİN FOURIER DÖNÜŞÜMÜNÜ BULUNUZ VE HER BİR DURUM İÇİN $X_a(t)$ İŞARETİNİ DOĞRU BİR ŞEKİLDE GERİ ELDE ETMEK İÇİN GEREKEN İDEAL AGF'NİN FREKANS CEVABINI ELDE EDİNİZ.

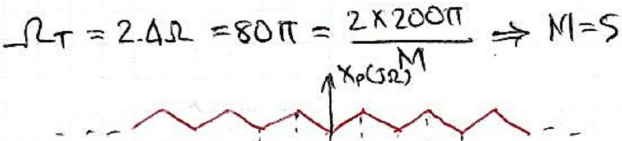


a) $\Omega_1 = 200\pi$, $\Omega_2 = 160\pi$
b) $\Omega_1 = 160\pi$, $\Omega_2 = 120\pi$
c) $\Omega_1 = 150\pi$, $\Omega_2 = 110\pi$

ÇÖZÜM =

a-) $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = 40\pi$ (Ω_2 NİN TAM KATIDIR.) BU DURUMDA AÇISAL ÖRNEKLEME FREKANSI =

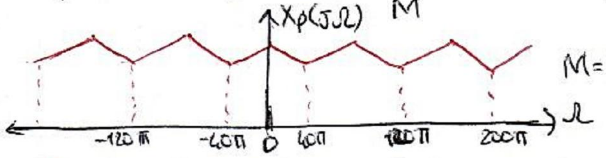
$\Omega_T = 2.\Delta\Omega = 80\pi = \frac{2 \times 200\pi}{M} \Rightarrow M = 5$ VE ÖRNEKLEME FREKANSI $F_T = 40$ Hz



II

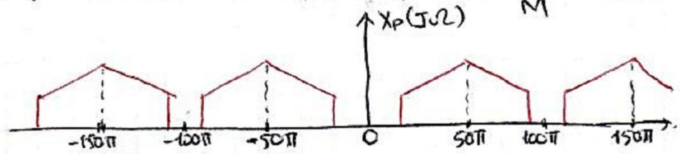
b) $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = 40\pi$ (Ω_2 NİN TAM KATIDIR.) O HALDE AÇISAL ÖRNEKLEME FREKANSI:

$$\Omega_T = 2\Delta\Omega = 80\pi = \frac{2\times160\pi}{M} \Rightarrow M=4 \quad F_T = 40\,Hz$$



c-) $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = 40\pi$.... $\Delta\Omega$, Ω_2 NİN TAM KATI DEĞİLDİR. BU NEDENLE BANDGENİŞLİĞİ EN KÜÇÜK FREKANS Ω_0 OLACAK ŞEKİLDE SOLA GENİŞLETİLİR. ÖRNEKLEME FREKANSI AŞAĞIDAKİ EŞİTLİĞİ SAĞLAYACAK ŞEKİLDE SEÇİLİR.

$$\Omega_T = 2\Delta\Omega = 2(\Omega_2 - \Omega_0) = \frac{2\times150\pi}{M} \Rightarrow \Omega_0 = 100\pi \quad M=3, \quad F_T = 50\,Hz$$



4-) 0,5 dB KESİM FREKANSI 2,1 kHz'DE VE MİNİMUM ZAYIFLATMASI 8 kHz'DE 30 dB OLAN ALÇAK GEÇİREN BUTTERWORTH FİLTRENİN DERECESİNİ BULUNUZ.

ÇÖZÜM =

$$10\log\left(\frac{1}{1+\varepsilon^2}\right) = -0{,}5 \Rightarrow \varepsilon = 0{,}3493$$

$$10\log\left(\frac{1}{A^2}\right) = -30 \Rightarrow A^2 = 1000$$

$$\frac{1}{k} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = \frac{8}{2{,}1} = 3{,}809 \qquad \frac{1}{k_1} = \frac{\sqrt{A^2-1}}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{999}}{0{,}3493} = 90{,}486$$

$$N = \frac{\log_{10}(1/k_1)}{\log_{10}(1/k)} = 3{,}3684 \Rightarrow N=4$$

5-) SORU 4'TE VERİLEN ÖZELLİKLERE SAHİP ALÇAK GEÇİREN 1. TÜR CHEBYSHEV FİLTRENİN DERECESİNİ BULUNUZ.

ÇÖZÜM =

TÜM ADIMLAR AYNIDIR. SADECE N, DERECE FORMÜLÜ FARKLIDIR.

$$N = \frac{\cosh^{-1}(1/k_1)}{\cosh^{-1}(1/k)} = \frac{\cosh^{-1}(90{,}486)}{\cosh^{-1}(3{,}809)} = 2{,}5824 \Rightarrow N=3$$

6-) GEÇİRME BANDI KENAR FREKANSI 0,2 Hz VE GEÇİRME BANDI DALGALANMASI 0,5 dB OLAN İKİNCİ DERECEDEN ANALOG BUTTERWORTH ALÇAK GEÇİREN FİLTRENİN TRANSFER FONKSİYONU:

$$H_{LP}(s) = \frac{4{,}52}{s^2+3s+4{,}52}$$

SPEKTRAL DÖNÜŞÜM İFADESİNİ KULLANARAK GEÇİRME BANDI KENAR FREKANSI 2 Hz VE GEÇİRME BANDI DALGALANMASI 0,5 dB OLAN ANALOG YGF TRANSFER FONKSİYONUNU BULUNUZ.

ÇÖZÜM =

ALÇAK GEÇİREN – YÜKSEK GEÇİREN DÖNÜŞÜM İÇİN $\Omega_p = 2\pi(0{,}2) = 0{,}4\pi$
$\hat{\Omega}_p = 2\pi(2) = 4\pi$ DIR. SPEKTRAL DÖNÜŞÜM İFADESİ $s \rightarrow \frac{\Omega_p \cdot \hat{\Omega}_p}{\hat{s}} = \frac{1{,}6\pi^2}{\hat{s}}$
$= \frac{15{,}791}{s}$. O HÂLDE,

$$H_{HP}(s) = H_{LP}(s)\Big|_{s=\frac{15{,}791}{s}} = \frac{4{,}52}{\left(\frac{15{,}791}{s}\right)^2 + 3\left(\frac{15{,}791}{s}\right) + 4{,}52} = \frac{4{,}52s^2}{4{,}52s^2 + 47{,}37s + 249}$$

7-) ŞU ÖZELLİKLERE SAHİP ANALOG ELLİPTİK BGF TASARLANACAKTIR: GEÇİRME BANDI KENAR FREKANSLARI 20 kHz VE 45 kHz, DURDURMA BANDI KENAR FREKANSLARI 10 kHz VE 60 kHz, GEÇİRME BANDI DALGALANMASI 0,5 dB VE DURDURMA BANDI MİNİMUM ZAYIFLATMASI 40 dB. KARŞILIK GELEN ANALOG AGF'NİN DERECESİ VE KENAR FREKANSI NEDİR? BAND GEÇİREN FİLTRENİN DERECESİ NEDİR?

ÇÖZÜM=

$\hat{F}_{p1} = 20\times10^3,\ \hat{F}_{p2} = 45\times10^3,\ \hat{F}_{s1} = 10\times10^3,\ \hat{F}_{s2} = 60\times10^3,\ \alpha_p = 0{,}5\text{dB},\ \alpha_s = 40\text{dB}$

$$\hat{F}_{p1}\cdot\hat{F}_{p2} = 20\times45\times10^6 = 9\times10^8$$

$$\hat{F}_{s1}\cdot\hat{F}_{s2} = 10\times60\times10^6 = 6\times10^8$$

$\hat{F}_{p1}\cdot\hat{F}_{p2} \neq \hat{F}_{s1}\cdot\hat{F}_{s2}$ OLDUĞUNDAN DURDURMA BANDI KENAR FREKANSI $\hat{F}_{s1}$ 15×10^3 ALINABİLİR. BU DURUMDA $\hat{F}_{s1}\cdot\hat{F}_{s2} = \hat{F}_{p1}\cdot\hat{F}_{p2} = \hat{F}_0^2 = 9\times10^8$ OLUR. İSTENEN BGF'NİN AÇISAL MERKEZ FREKANSI $\Omega_0 = 2\pi F_0 = 2\pi\times30\times10^3$ OLUR. BANDGENİŞLİĞİ $B_w = \hat{\Omega}_{p2} - \hat{\Omega}_{p1} = 2\pi\times25\times10^3$. PROTOTİP AGF NİN KENAR FREKANSINI BELİRLEMEK İÇİN $\Omega_p = 1$ ALINIR VE

$$\Omega_s = \Omega_p\cdot\frac{\hat{\Omega}_0^2 - \hat{\Omega}_{s1}^2}{\hat{\Omega}_{s1}\cdot B_w} = \frac{30^2-15^2}{15\times25} = 1{,}8 \qquad k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}555$$

$$10\log\left(\frac{1}{1+\varepsilon^2}\right) = -0{,}5 \Rightarrow \varepsilon^2 = 0{,}122 \longrightarrow \varepsilon = 0{,}349$$

$$10\log\left(\frac{1}{A^2}\right) = -40 \longrightarrow A^2 = 10000$$

$$k_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-1}} = 0{,}00349 \qquad k' = \sqrt{1-k^2} = 0{,}831 \qquad \rho_0 = \frac{1-\sqrt{k'}}{2(1+\sqrt{k'})} = 0{,}023$$

$$\rho = \rho_0 + 2(\rho_0)^5 + 15(\rho_0)^9 + 150(\rho_0)^{13} = 0{,}023$$

$$N = \frac{2\log(4/k_1)}{\log(1/\rho)} = 3{,}77 \Rightarrow N=4$$

8-) $G[k]$ VE $H[k]$ 7-UZUNLUKLU $g[n]$ VE $h[n]$ DİZİLERİNİN 7-NOKTA DFT'Sİ OLSUN

a) $G[k] = \{1+2j, -2+3j, -1-2j, 0, 8+4j, -3+j, 2+5j\}$

$h[n] = g[\langle n-3\rangle_7]$ İSE DFT KULLANMADAN $H[k]$'YI BULUNUZ.

b)

$g[n] = \{-3.1, 2.4, 4.5, -6, 1, -3, 7\}$ VE $H[k] = G[\langle k-4\rangle_7]$ İSE DFT KULLANMADAN $h[n]$'İ BULUNUZ.

ÇÖZÜM =

a-) $H[k] = \text{DFT}\{h[n]\} = \text{DFT}\{g[\langle n-3\rangle_7]\} = W_N^{3k}G[k] = e^{-j\frac{6\pi k}{7}}G[k]$

$= \{1+2j, e^{-j\frac{6\pi}{7}}(-2+3j), e^{-j12\pi/7}(-1-2j), 0, e^{-j24\pi/7}(8+4j), e^{-j30\pi/7}(-3+2j), e^{-j36\pi/7}(2+5j)\}$

b-)

$h[n] = \text{IDFT}\{H[k]\} = \text{IDFT}\{G[\langle k-4\rangle_7]\} = W_7^{-4n}g[n] = e^{j\frac{8\pi n}{7}}g[n]$

$= \{3.1, 2.4e^{j8\pi/7}, 4.5e^{j16\pi/7}, -6e^{j24\pi/7}, e^{j32\pi/7}, -3e^{j40\pi/7}, 7e^{j42\pi/7}\}$

9-) $X[k]$, 14-UZUNLUKLU $x[n]$ DİZİSİNİN 14-NOKTA DFT'Sİ OLSUN. $X[k]$'NIN İLK SEKİZ ÖRNEĞİ;

$X[0] = 12 \quad X[2] = 3+4j \quad X[4] = -2+2j \quad X[6] = -2-3j$

$X[1] = -1+3j \quad X[3] = 1-5j \quad X[5] = 6+3j \quad X[7] = 10$ OLARAK VERİLMEKTEDİR

IDFT HESAPLAMADAN AŞAĞIDAKİ DEĞERLERİ HESAPLAYINIZ.

a) $x[0]$

b) $x[7]$

c) $\sum_{n=0}^{13} x[n]$

d) $\sum_{n=0}^{13} e^{j(4\pi n/7)} x[n]$

e) $\sum_{n=0}^{13} |x[n]|^2$

Çözüm =

$X[k]$ 'NIN DİĞER ÖRNEKLERİ ŞÖYLE BULUNUR:

$$X[8] = X^*[\langle -8\rangle_{14}] = X^*[6] = -2+3j$$

$$X[9] = X^*[\langle -9\rangle_{14}] = X^*[5] = 6-3j$$

$$X[10] = X^*[\langle -10\rangle_{14}] = X^*[4] = -2-2j$$

$$X[11] = X^*[\langle -11\rangle_{14}] = X^*[3] = 1+5j$$

$$X[12] = X^*[\langle -12\rangle_{14}] = X^*[2] = 3-4j$$

$$X[13] = X^*[\langle -13\rangle_{14}] = X^*[1] = -1-3j$$

a-) $x[0] = \frac{1}{14} \sum_{k=0}^{13} X[k] = \frac{32}{14} = 2,2857$

b-) $x[7] = \frac{1}{14} \sum_{k=0}^{13} (-1)^k X[k] = \frac{-12}{14} = -0,8571$

c-) $\sum_{n=0}^{13} x[n] = X[0] = 12$

e-) PARSEVAL EŞİTLİĞİ KULLANILARAK $\sum_{n=0}^{13} |x[n]|^2 = \frac{1}{14} \sum_{k=0}^{13} |X[k]|^2 = \frac{498}{14}$