ÖRNEK PROBLEMLER

VEKTÖR ANALİZ

Problem 1.

A, **B** ve **C** vektörleri aşağıdaki gibi veriliyor.

$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x 6 + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 3$

$\mathbf{B} = \mathbf{a}_x 4 - \mathbf{a}_y 6 + \mathbf{a}_z 12$

$\mathbf{C} = \mathbf{a}_x 5 - \mathbf{a}_z 2$

Şıklarda istenenleri bulunuz.

a) $\mathbf{a}_B$

b) $|\mathbf{B} - \mathbf{A}|$

c) **A**'nın **B** yönündeki bileşeni

d) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

e) **B**'nin **A** yönündeki bileşeni

f) θ_{AB}

g) $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$

h) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ ve $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$

a) $\hat{a}_B = \dfrac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \dfrac{\hat{a}_x 4 - \hat{a}_y 6 + \hat{a}_z 12}{\sqrt{4^2 + (-6)^2 + (-12)^2}} = \dfrac{1}{7}\left(\hat{a}_x 2 - \hat{a}_y 3 + \hat{a}_z 6\right)$

b) $|\vec{B} - \vec{A}| = \left| -\hat{a}_x 2 - \hat{a}_y 8 + \hat{a}_z 15 \right| = \sqrt{(-2)^2 + (-8^2) + 15^2} = 17.12$

c) $\vec{A} \cdot \hat{a}_B = \vec{A} \cdot \dfrac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \left(\hat{a}_x 6 + \hat{a}_y 2 - \hat{a}_z 3\right) \cdot \dfrac{1}{7}\left(\hat{a}_x 2 - \hat{a}_y 3 + \hat{a}_z 6\right) = -1.71$

d) $\vec{B} \cdot \vec{A} = (4)(6) + (-6)(2) + (12)(-3) = -24$

e) $\vec{B} \cdot \hat{a}_A = \vec{B} \cdot \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \left(\hat{a}_x 4 - \hat{a}_y 6 + \hat{a}_z 12\right) \cdot \dfrac{1}{7}\left(\hat{a}_x 6 + \hat{a}_y 2 - \hat{a}_z 3\right) = -3.43$

f) $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta_{AB} \Rightarrow \theta_{AB} = \cos^{-1}\left[\dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}\right] = \cos^{-1}\left[\dfrac{24 - 12 - 36}{(7)(14)}\right] = 104.18^\circ$

g) $\vec{A} \times \vec{C} = \left(\hat{a}_x 6 + \hat{a}_y 2 - \hat{a}_z 3\right) \times \left(\hat{a}_x 5 - \hat{a}_z 2\right) = -\hat{a}_x 4 - \hat{a}_y 3 - \hat{a}_z 10$

h) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{A} \cdot \left[\left(\hat{a}_x 4 - \hat{a}_y 6 + \hat{a}_z 12\right) \times \left(\hat{a}_x 5 - \hat{a}_z 2\right)\right]$

$= \left(\hat{a}_x 6 + \hat{a}_y 2 - \hat{a}_z 3\right) \times \left(\hat{a}_x 12 + \hat{a}_y 68 + \hat{a}_z 30\right) = 118$

$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \left[\left(\hat{a}_x 6 + \hat{a}_y 2 - \hat{a}_z 3\right) \times \left(a_x 4 - \hat{a}_y 6 + \hat{a}_z 12\right)\right] \cdot \vec{C}$

$= \left(\hat{a}_x 6 - \hat{a}_y 84 - \hat{a}_z 44\right) \times \left(\hat{a}_x 5 - \hat{a}_z 2\right) = 118$

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$

Problem 2.

Bir $P(x, y, z)$ noktasının konum vektörünü **R** ile gösterelim.

$\nabla(1/R)$'yi

a) Kartezyen koordinatlarda,

b) küresel koordinatlarda bulunuz.

a) Kartezyen Koordinatlarda $P(x,y,z)$ noktasının konum vektörü

$$\vec{R} = \hat{a}_x x + \hat{a}_y y + \hat{a}_z z$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{R}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = \hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right) + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\left(-\hat{a}_x x - \hat{a}_y y - \hat{a}_z z\right)}{R}$$

b) Küresel Koordinatlarda $P(x,y,z)$ noktasının konum vektörü

$$\vec{R} = \hat{a}_R R$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{R}|} = \frac{1}{R}$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = \hat{a}_R \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\right) + \hat{a}_\theta \frac{1}{R} \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{R}\right)} + \hat{a}_\phi \frac{1}{R\sin\theta} \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{R}\right)} = -\hat{a}_R \frac{1}{R^2}$$

Problem 3.

Aşağıdaki radyal alanların ıraksamasını bulunuz.

a) $f_1(\mathbf{R}) = \mathbf{a}_R R^n$,

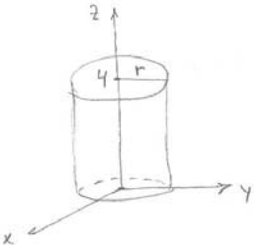
b) k bir sabit olmak üzere $f_2(\mathbf{R}) = \mathbf{a}_R k/R^2$.

a) $\vec{\nabla}\cdot f_1(\vec{R}) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 R^n\right) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^{n+2}\right) = (n+2)\, R^{n-1}$

b) $\vec{\nabla}\cdot f_2(\vec{R}) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 k R^{-2}\right) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(k) = 0$

Problem 4.

$\mathbf{A} = \mathbf{a}_r r^2 + \mathbf{a}_z 2z$ vektör fonksiyonu için $r = 5$, $z = 0$ ve $z = 4$ ile çevrelenen çembersel silindirik bölgede ıraksama teoremini sağlayınız.



Diverjans Teoremi : $\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dv = \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{s}$

Silindirik Koordinatlarda

üst yüzey için $d\vec{s} = \hat{a}_z\, r\,dr\,d\phi$

alt yüzey için $d\vec{s} = -\hat{a}_z\, r\,dr\,d\phi$

yan yüzey için $d\vec{s} = \hat{a}_r\, r\,dz\,d\phi$

$dv = r\,dr\,d\phi\,dz$

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_{\text{üst yüzey}} \vec{A}\cdot d\vec{s} + \int_{\text{alt yüzey}} \vec{A}\cdot d\vec{s} + \int_{\text{yan yüzey}} \vec{A}\cdot d\vec{s}$$

$$\int_{\text{üst yüzey}} \vec{A}\cdot d\vec{s} = \iint \left(\hat{a}_r r^2 + \hat{a}_z 2z\right)\cdot\left(\hat{a}_z\, r\,dr\,d\phi\right) = 2z\int_0^{2\pi}\int_0^{5} r\,dr\,d\phi = 200\pi \quad (z=4)$$

$$\int_{\text{alt yüzey}} \vec{A}\cdot d\vec{s} = \iint \left(\hat{a}_r r^2 + \hat{a}_z 2z\right)\cdot\left(-\hat{a}_z\, r\,dr\,d\phi\right) = -2z\int_0^{2\pi}\int_0^{5} r\,dr\,d\phi = 0 \quad (z=0)$$

$$\int_{\text{yan yüzey}} \vec{A}\cdot d\vec{s} = \iint \left(\hat{a}_r r^2 + \hat{a}_z 2z\right)\cdot\left(\hat{a}_r\, r\,dz\,d\phi\right) = r^3\int_0^{2\pi}\int_0^{4} dz\,d\phi = 1000\pi \quad (r=5)$$

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{s} = 200\pi + 0 + 1000\pi = 1200\pi$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,r^2\right) + \cancel{\frac{1}{r}\frac{d}{d\phi}(0)}^{\,0} + \frac{d}{dz}(2z) = 3r+2$$

$$\int \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dv = \int_0^{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{5}(3r+2)\,r\,dr\,d\phi\,dz = 1200\pi$$

Problem 5.

$\mathbf{D} = \mathbf{a}_R(\cos^2\phi)/R^3$ vektör alanı $R = 2$ ve $R = 3$ ile tanımlanan küreler arasındaki bölgede etkilidir.

a) $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$'yi ve

b) $\int \nabla \cdot \mathbf{D}\, dv$'yi hesaplayınız.

a) $$\oint_S \vec{D}\cdot\vec{ds} = \int_{\substack{\text{Dış küresel}\\ \text{yüzey}}} \vec{D}\cdot\vec{ds} + \int_{\substack{\text{iç küresel}\\ \text{yüzey}}} \vec{D}\cdot\vec{ds}$$

Dış küresel yüzey için ;
$\vec{ds} = \hat{a}_R\, R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$

iç küresel yüzey için
$\vec{ds} = -\hat{a}_R\, R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$

$$\int_{\text{Dış yüzey}} \vec{D}\cdot\vec{ds} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\hat{a}_R \frac{\cos^2\phi}{R^3}\right)\cdot\left(\hat{a}_R\, R^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\right)$$

$$= \frac{1}{R}\underbrace{\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta}_{2}\ \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\, d\phi}_{\pi} = \frac{2\pi}{R} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\int_{\text{iç yüzey}} \vec{D}\cdot\vec{ds} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\hat{a}_R \frac{\cos^2\phi}{R^3}\right)\cdot\left(-\hat{a}_R\sin\theta\, d\theta\, d\phi\right) = -\frac{2\pi}{R} = -\pi$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot\vec{ds} = \frac{2\pi}{3} + (-\pi) = -\frac{\pi}{3}$$

b) $$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{\cos^2\phi}{R^3}\right) = -\frac{\cos^2\phi}{R^4}$$

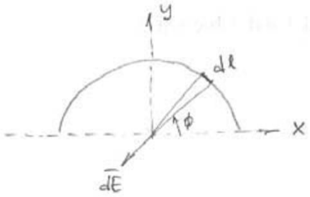
$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\, dv = \iiint -\frac{\cos^2\phi}{R^4} R^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= -\underbrace{\int_2^3 \frac{1}{R^2}dR}_{\frac{1}{6}}\ \underbrace{\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta}_{2}\ \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\, d\phi}_{\pi} = -\frac{1}{6}2\pi = -\frac{\pi}{3}$$

STATİK ELEKTRİK ALANLAR

Problem 6.

Düzgün ρ_ℓ yük yoğunluğu olan bir çizgi yük xy-düzleminin üst yarısında, b yarıçaplı bir yarım çember oluşturmaktadır. Yarı çemberin merkezindeki elektrik alan şiddetinin genliğini ve yönünü belirleyiniz.



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{L'} \hat{a}_R \frac{\rho_\ell}{R^2}\, d\ell'$$

$$\vec{E} = -\hat{a}_y \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\pi \frac{\rho_\ell}{b^2}\sin\phi\,(b\,d\phi)$$

$$\vec{E} = -\hat{a}_y \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0 b}\underbrace{\int_0^\pi \sin\phi\, d\phi}_{2}$$

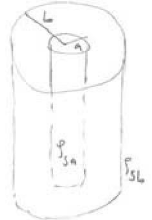
$$\vec{E} = -\hat{a}_y \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 b}$$

Problem 7.

İki sonsuz uzunluklu silindirik yüzeyin yarı çapları $r = a$ ve $r = b$ ($b > a$)'dır ve sırasıyla, ρ_{sa} ve ρ_{sb} yüzey yük yoğunluklarını taşımaktadır.

a) Her yerdeki **E**'yi belirleyiniz.

b) $r > b$'de **E**'nin sıfırlanması için a ve b arasındaki ilişki ne olmalıdır?



a) Silindirik Koordinatlarda, Gauss Yasası yardımıyla

$\underline{r < a}$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0 \qquad (Q = 0)$$

$\underline{a < r < b}$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q_a}{\varepsilon_0}$$

$$Q_a = \int_{S_a} \rho_{sa}\, ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{L} \rho_{sa}\, a\, dz\, d\phi = 2\pi L a \rho_{sa}$$

$$\int_0^{L}\int_0^{2\pi} \hat{a}_r E_r \cdot \hat{a}_r\, r\, d\phi\, dz = \frac{2\pi L a \rho_{sa}}{\varepsilon_0}$$

$$r E_r\, 2\pi L = \frac{2\pi L a \rho_{sa}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \hat{a}_r \frac{a \rho_{sa}}{\varepsilon_0 r}$$

$\underline{r > b}$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q_a + Q_b}{\varepsilon_0}$$

$$Q_b = \int_{S_b} \rho_{sb}\, ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{L} \rho_{sb}\, b\, dz\, d\phi = 2\pi L b \rho_{sb}$$

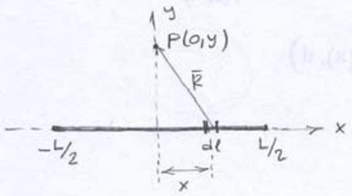
$$\int_0^{L}\int_0^{2\pi} \hat{a}_r E_r \cdot \hat{a}_r\, r\, d\phi\, dz = \frac{2\pi L (a\rho_{sa} + b\rho_{sb})}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \hat{a}_r \frac{a\rho_{sa} + b\rho_{sb}}{\varepsilon_0 r}$$

b) $E = 0$ için $a\rho_{sa} + b\rho_{sb} = 0$ olmalı

$$a\rho_{sa} = -b\rho_{sb} \Rightarrow \frac{b}{a} = -\frac{\rho_{sa}}{\rho_{sb}}$$

Problem 8.

L uzunluğundaki sonlu bir çizgi yük, düzgün ρ_l çizgi yük yoğunluğunu taşımaktadır ve x-ekseni ile çakışıktır. Çizgi yükü ortadan kesen düzlemdeki skaler elektrik potansiyel V'yi hesaplayınız.



$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{L'} \frac{\rho_l}{R}\, dl'$$

$$dl' = dx$$

$$\vec{R} = -\hat{a}_x x + \hat{a}_y y$$

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho_l\, dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\ln\left|x+\sqrt{x^2+y^2}\right|\Big]_{-L/2}^{L/2}$$

$$V = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\left|\frac{L}{2}+\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+y^2}\right|}{\left|-\frac{L}{2}+\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+y^2}\right|}$$

Hatırlatma:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+y^2}\right|$$

Problem 9.

İç yarıçapı r_i ve dış yarıçapı r_o olan uzun bir dielektrik tübün ekseni z-ekseni ile çakışıktır. Dielektrik içinde $\mathbf{P} = P_0(\mathbf{a}_x 3x + \mathbf{a}_y 4y)$ biçiminde bir kutuplanma vektörü vardır.

a) Eşdeğer yüzey ve hacim yük yoğunluklarını belirleyiniz.

b) Toplam eşdeğer yükün sıfır olduğunu gösteriniz.

$$\vec{P} = P_o(\hat{a}_x 3x + \hat{a}_y 4y)$$

Kutuplanma vektörü silindirik koordinatlarda;

$$\begin{pmatrix} P_r \\ P_\phi \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P_x = 3P_o x, \quad P_y = 4P_o y, \quad P_z = 0$$

$$P_r = 3P_o x\cos\phi + 4P_o y\sin\phi$$

$$P_\phi = -3P_o x\sin\phi + 4P_o y\cos\phi$$

$$P_z = 0$$

$$x = r\cos\phi$$

$$y = r\sin\phi$$

$$\vec{P} = \hat{a}_r\, 3P_o r\cos^2\phi + 4P_o r\sin^2\phi + \hat{a}_\phi(-3P_o r\cos\phi\sin\phi + 4P_o r\sin\phi\cos\phi)$$

$$\vec{P} = \hat{a}_r P_o r(3+\sin^2\phi) + \hat{a}_\phi P_o r\sin\phi\cos\phi$$

a) Eşdeğer kutuplanma yüzey yük yoğunluğu (ρ_{ps})

Dış yan yüzey $(r=r_o)$ $\Rightarrow$ $\rho_{ps} = \vec{P}\cdot\hat{a}_n = \vec{P}\cdot\hat{a}_r$

$$\rho_{ps} = P_o r_o(3+\sin^2\phi)$$

İç yan yüzey $(r=r_i)$ $\Rightarrow$ $\rho_{ps} = \vec{P}\cdot\hat{a}_n = \vec{P}\cdot(-\hat{a}_r)$

$$\rho_{ps} = -P_o r_i(3+\sin^2\phi)$$

Silindirin üst yüzeyi $\Rightarrow$ $\rho_{ps} = \vec{P}\cdot\hat{a}_n = \vec{P}\cdot\hat{a}_z = 0$

Silindirin alt yüzeyi $\Rightarrow$ $\rho_{ps} = \vec{P}\cdot\hat{a}_n = \vec{P}\cdot(-\hat{a}_z) = 0$

Eşdeğer kutuplanma hacim yük yoğunluğu (ρ_{pv})

$$\rho_{pv} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP_r) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}(P_\phi) - \frac{\partial}{\partial z}(P_z)$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}P_o r^2(3+\sin^2\phi) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}(P_o r\sin\phi\cos\phi)$$

$$= -2P_o(3+\sin^2\phi) - P_o(\cos^2\phi - \sin^2\phi)$$

$$= -6P_o - 2P_o\sin^2\phi - P_o(1-2\sin^2\phi)$$

$$= -7P_o$$

b) <u>Toplam kutuplanma yükü</u> (Silindirin boyu h kabul edilerek)

$$\text{Toplam yük} = \oint_S \rho_{ps}\, ds + \int_V \rho_{pv}\, dv \quad , \quad dv = r\, dr\, d\phi\, dz$$

$$\oint_S \rho_{ps}\, ds = \int_{\substack{\text{Dış yan}\\ \text{yüzey}\\ (r=r_o)}} \rho_{ps}\, ds + \int_{\substack{\text{İç yan}\\ \text{yüzey}\\ (r=r_i)}} \rho_{ps}\, ds \quad , \quad ds = r\, d\phi\, dz$$

$$= \int_0^h \int_0^{2\pi} P_o r_o (3+\sin^2\phi)\, r_o\, d\phi\, dz - \int_0^h \int_0^{2\pi} P_o r_i (3+\sin^2\phi)\, r_i\, d\phi\, dz$$

$$= \int_0^h \int_0^{2\pi} 3P_o r_o^2\, d\phi\, dz + P_o r_o^2 \int_0^h \int_0^{2\pi} \sin^2\phi\, d\phi\, dz - \int_0^h \int_0^{2\pi} P_o r_i^2 (3+\sin^2\phi)\, d\phi\, dz$$

$$= 7\pi h P_o (r_o^2 - r_i^2)$$

$$\int_V \rho_v\, dv = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} -7P_o\, r\, dr\, d\phi\, dz$$

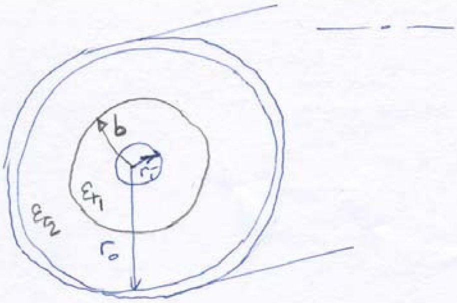
$$= -7\pi h P_o (r_o^2 - r_i^2)$$

$$\text{Toplam yük} = 7\pi h P_o (r_o^2 - r_i^2) - 7\pi h P_o (r_o^2 - r_i^2)$$

$$= 0$$

Problem 10.

Çok uzun eş eksenli bir iletim hattının iç iletkeninin yarıçapı ve dış iletkeninin iç yarıçapı, sırasıyla, r_i ve r_o'dır. İletkenler arasındaki alan iki eş merkezli dielektrik katman ile doldurulmuştur. Dielektrik sabitleri $r_i < r < b$ için ϵ_{r1} ve $b < r < r_o$ için ϵ_{r2}'dir. Birim uzunluk başına kapasitansı belirleyiniz.



— Silindirik koord.
— iç iletken $+Q$
dış iletken $-Q$.

$\vec{E}$ Alan:

1) $r_i < r < b$

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}}$$

$$\iint (\hat{a}_r E_r)\cdot(\hat{a}_r\, r\, d\phi\, dz) = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}$$

$$E_r\, r \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{L} dz = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}$$

$$E_r = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\, 2\pi L r}$$

$$\vec{E}_1 = \hat{a}_r \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} L r}$$

2) $b < r < r_o$

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}$$

$$\bar{E}_2 = \hat{a}_r \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2} L r}$$

Potansiyel farkı:

$$V_{12} = -\int \bar{E}\cdot d\bar{l}$$

$$V_{12} = -\int_{r_o}^{b} \bar{E}_2\cdot d\bar{l} - \int_{b}^{r_i} \bar{E}_1\cdot d\bar{l}$$

$$V_{12} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2} L}\ln\left(\frac{r_o}{b}\right) + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} L}\ln\left(\frac{b}{r_i}\right)$$

$$V_{12} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\left\{\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\ln\left(\frac{r_o}{b}\right) + \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\ln\left(\frac{b}{r_i}\right)\right\}$$

Kapasitans, C

$$C = \frac{Q}{V_{12}}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\ln\left(\frac{r_o}{b}\right) + \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\ln\left(\frac{b}{r_i}\right)}$$

$$\frac{C}{L} \Rightarrow .$$

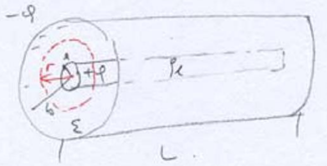
Problem 11.

Bir silindirik kapasitörün iç iletkeninin yarıçapı a, dış iletkeninin iç yarıçapı b ve uzunluğu L'dir. İç ve dış iletkenler arasındaki bölge dielektrik sabiti $\varepsilon_r = 1+\alpha r$ şeklinde değişen dielektrik bir madde ile doldurulmuştur. Burada α, ε_r'yi boyutsuzlaştıran bir sabittir.

a) Kapasitörün kapasitansını hesaplayınız.

b) Silindirik yüzeylere V_0 potansiyel farkı uygulanırsa, $\overline{E}$ ve $\overline{D}$ alanları V_0 cinsinden nasıl ifade edilir.

(a)



$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0(1+\alpha r)$$

(*) Elektrik Alan.

$$\oint \overline{E}\cdot d\overline{s} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

$$\int_0^L\int_0^{2\pi} \hat{a}_r E_r \cdot \hat{a}_r\, r\, d\phi\, dz = \frac{Q}{\varepsilon} = \frac{\rho_l L}{\varepsilon}$$

$$E_r\, r\, 2\pi L = \frac{Q}{\varepsilon}$$

$$E_r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L r}$$

$$\overrightarrow{E} = \hat{a}_r \frac{Q}{2\pi\varepsilon L r} = \hat{a}_r \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(1+\alpha r)Lr}$$

(*) $$V_{12} = -\int_b^a \overline{E}\cdot d\overline{l} = -\int_b^a \left(\hat{a}_r \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(1+\alpha r)Lr}\right)\cdot\left(\hat{a}_r\, dr\right)$$

$$V_{12} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_b^a \frac{1}{r(1+\alpha r)}\,dr$$

$$V_{12} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_b^a \left(\frac{1}{r} - \frac{\alpha}{1+\alpha r}\right)dr$$

$$V_{12} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\left[\underbrace{\int_b^a \frac{1}{r}\,dr}_{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} - \int_b^a \frac{\alpha}{1+\alpha r}\,dr\right]$$

$1+\alpha r = u$

$\alpha\, dr = du$

$$\left.\int_{1+\alpha b}^{1+\alpha a}\frac{du}{u}\right\} \ln\left(\frac{1+\alpha a}{1+\alpha b}\right)$$

$$V_{12} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln\left(\frac{1+\alpha a}{1+\alpha b}\right)\right]$$

$$V_{12} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left[\frac{b(1+\alpha a)}{a(1+\alpha b)}\right]$$

Kapasitans

$$C = \frac{Q}{V_{12}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left[\frac{b(1+\alpha a)}{a(1+\alpha b)}\right]}$$

(b)

$$\overline{E} = \hat{a}_r \frac{\overset{=CV_0}{Q}}{2\pi\varepsilon_0(1+\alpha r)Lr}$$

$Q = CV_0$ olur.

$$\overline{E} = \hat{a}_r \frac{V_0}{\cancel{2\pi\varepsilon_0}(1+\alpha r)\cancel{L}r}\cdot\frac{\cancel{2\pi\varepsilon_0 L}}{\ln[\quad]}$$

$$\overline{E} = \hat{a}_r \frac{V_0}{\ln\left[\frac{b(1+\alpha a)}{a(1+\alpha b)}\right]}\,\frac{1}{r(1+\alpha r)}$$

$$\overline{D} = \hat{a}_r \frac{V_0\varepsilon_0}{r\ln\left[\frac{b(1+\alpha a)}{a(1+\alpha b)}\right]}$$