Kompleks Sayıların Özellikleri

$ax^2+bx+c=0$ biçimindeki denklemlerin kökleri; $\sqrt{\Delta}=\sqrt{b^2-4ac}$

$\Delta>0$ ise denklemin iki reel kökü var.
$\Delta=0$ ise denklemin çakışık iki reel kökü var.
$\Delta<0$ ise denklemin reel kökü yok. Kompleks iki kökü var.

$\Rightarrow x^2+2x+2=0$ denkleminin köklerini bulunuz?

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{2^2-4.1.2}=\sqrt{-4}=\sqrt{-1.4}=\sqrt{-1}.\sqrt{4}=2i$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2\mp 2i}{2}=-1\mp i$$

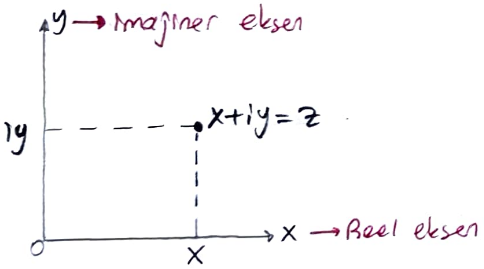
$$\mathbb{C}=\{x+iy : x,y\in\mathbb{R}\}$$

- Her x reel sayısını $x+i.0=x$ biçiminde yazılabildiğinden $\mathbb{C}$ kümesi $\mathbb{R}$ kümesini kapsar. $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

$\underset{\in\mathbb{R}}{1}=\underset{\in\mathbb{C}}{1+i.0}$ Her reel sayı bir kompleks sayıdır.

- $z,w\in\mathbb{C}$ olsun $z=a+ib$, $w=x+iy$ diyelim. $z=w \Leftrightarrow a+ib=x+iy \Leftrightarrow x=a, y=b$
- $z<w$, $w<z$ iki kompleks sayı arasında büyüklük küçüklük ilişkisi yani sıralama var mıdır?

$1+i \gtrless -1-i$, $1+i \gtrless -(1+i)$ Kompleks sayılarda sıralama yoktur



$Re z = x$ reel kısım
$Im z = y$ imajiner kısım

xOy düzlemi

Teorem: Kompleks sayılarda sıralama yoktur.

İspat: Kabul edelim ki kompleks sayılarda sıralama olsun, $i<0$ veya $i>0$ olabilir. $i<0$ olsun. $-i>0$ dır.

$(-i)(-i)>0(-i) \Rightarrow i^2>0 = (\sqrt{-1})^2=-1>0$ bulunur ki bu çelişkidir.

$i>0$ olsun.
$i.i>0.i \Rightarrow i^2>0 \Rightarrow (\sqrt{-1})^2=-1>0$ bulunur ki bu çelişkidir.

Yani kompleks sayılarda sıralama yoktur.

Kompleks Sayılarda Aritmetik İşlemler

$z,w \in \mathbb{C}$ olsun. $z+w = w+z = (a+ib)+(x+iy) = \underbrace{(a+x)}_{Re(z+w)} + i\underbrace{(b+y)}_{Im(z+w)}$

$z-w = (a+bi)-(x+iy) = (a-x)+i(b-y)$

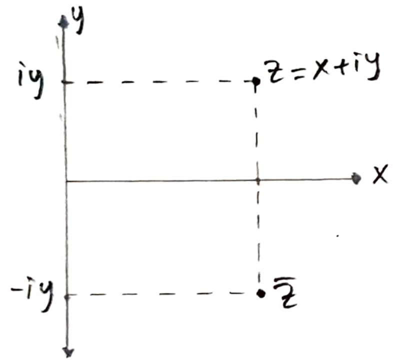
$z.w = (a+bi).(x+iy) = a.x + aiy + ibx + ibiy = \underbrace{(ax-by)}_{Re(z.w)} + i\underbrace{(ay+bx)}_{Im(z.w)}$

$$\frac{z}{w} = \frac{a+ib}{\underset{(x-iy)}{x+iy}} = \frac{(a+ib)(x-iy)}{x^2+ixy-ixy+y^2} = \underbrace{\frac{ax+by}{x^2+y^2}}_{Re\left(\frac{z}{w}\right)} + i\underbrace{\frac{bx-ay}{x^2+y^2}}_{Im\left(\frac{z}{w}\right)}$$

- $z+(-z) = 0+0i$ → z'nin toplamaya göre tersi
- $z.\left(\frac{1}{z}\right) = 1$ → z'nin çarpmaya göre tersi

Kompleks Eşlenik

Bir z kompleks sayısının sanal kısmının işareti değiştirilerek elde edilen sayıya z'nin kompleks eşleniği ve ya sadece eşleniği denir. $\bar{z}$ ile gösterilir.



Eşleniğin Özellikleri

$z,w \in \mathbb{C}$ olsun.

1- $\overline{z \mp w} = \bar{z} \mp \bar{w}$

2- $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w}$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

3- $\overline{(\bar{z})} = z$

4- $z+\bar{z} = 2x$, $Re\,z = \frac{z+\bar{z}}{2}$

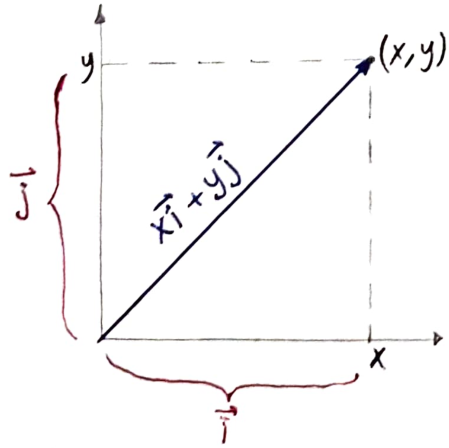
5- $z-\bar{z} = (x+yi)-(x-yi) = 2iy$, $Im\,z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

6- $z.\bar{z} = x^2+y^2$

7- $z=\bar{z}$, $z \in \mathbb{R}$

Kompleks Sayının Modulü

$z = x+iy$ kompleks sayısını başlangıç noktası orjin ve bitiş noktası (x,y) noktası olan bir vektöre karşılık getiririz.



Modul: $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ sayısına z kompleks sayısının modulü (mutlak değeri) denir.

Modülün Özellikleri

1- $z.\bar{z} = x^2+y^2 = |z|^2$

2- $|z| = |\bar{z}|$

3- $|z.w| = |z|.|w|$

4- $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

5- $Re\,z \leq |Re\,z| \leq |z|$, $x \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$
$Im\,z \leq |Im\,z| \leq |z|$; $y \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

6- $|z+w| \leq |z|+|w|$ (Üçgen eşitsizliği)

7- $|z-w| \geq ||z|-|w||$ (Ters Üçgen Eşitsizliği)

8- $(|z+w|)^2 + (|z-w|)^2 = 2(|z|^2+|w|^2)$
(Paralel kenar Kuralı)

İspat

3- $|z.w|^2 = (z.w).(\overline{z.w}) = (z.w).(\bar{z}.\bar{w}) = (z.\bar{z}).(w.\bar{w})$

$|z.w|^2 = (z.\bar{z}).(w.\bar{w})$

$\sqrt{|z.w|^2} = \sqrt{|z|^2.|w|^2}$

$|z.w| = |z|.|w|$

6- $|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w).(\bar{z}+\bar{w})$

$= z.\bar{z} + z.\bar{w} + \underbrace{w.\bar{z}}_{(\overline{z\bar{w}})} + w.\bar{w}$

$= z.\bar{z} + z\bar{w} + (\overline{z\bar{w}}) + w\bar{w}$

$= |z|^2 + 2Re(z\bar{w}) + |w|^2$

$|z+w|^2 = |z|^2 + 2Re(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + |2Re(z\bar{w})| + |w|^2$

$|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2$

$|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|z|.|\bar{w}| + |w|^2$

$|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|z|.|w| + |w|^2$

$\sqrt{|z+w|^2} \leq \sqrt{(|z|+|w|)^2} \Rightarrow |z+w| \leq |z|+|w|$

8- $|z+w|^2 + |z-w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) + (z-w).(\overline{z-w})$

$= (z+w).(\bar{z}+\bar{w}) + (z-w).(\bar{z}-\bar{w})$

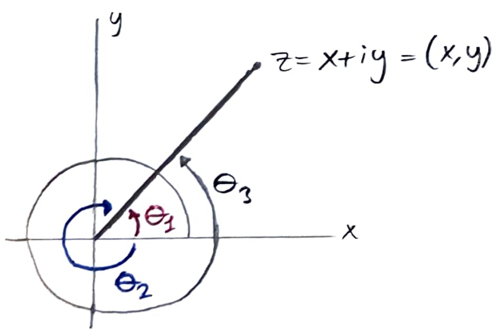
$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w}$

$= 2(z\bar{z} + w\bar{w})$

$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2+|w|^2)$

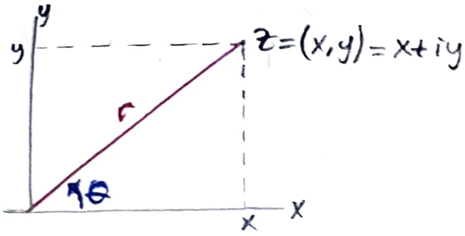
Kutupsal Koordinatlar ve Euler Formülü

Argüman (arg z): $z \neq 0$ kompleks sayısı verilsin. z kompleks sayısının belirtildiği vektörün x ekseninin pozitif kısmıyla yaptığı açıya z'nin argümanı ve ya argümenti denir. arg z ile gösterilir.



$\arg z = \theta_1$ $(\arg z = \theta \in \mathbb{R})$
$\arg z = \theta_2$
$\arg z = \theta_3$

$\arg z = \{\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$



$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = r$$

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{r}$$

$$x = |z|\cos\theta = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{r}$$

$$y = |z|\sin\theta = r\sin\theta$$

$$z = x+iy = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta$$
$$= r\cos\theta + ir\sin\theta$$
$$z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$$

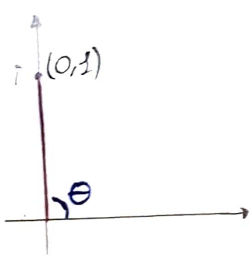
ifadesine z'nin kutupsal koordinatı denir.

• $-\pi < \theta < \pi$ bir tek değerine z'nin esas argümenti denir ve Arg z ile gösterilir.

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

⇒ i sayısını kutupsal biçimde yazınız?

$z = a+ib = i = 0 + i.1$



$$\cos\theta = \frac{0}{1} \Rightarrow \cos\theta = 0$$

$$\sin\theta = \frac{1}{1} \Rightarrow \sin\theta = 1$$

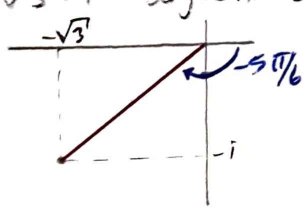
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{0} = \text{tanımsız} \qquad \theta = \pi/2$$

$$z = i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$i = 1(\cos\pi/2 + i\sin\pi/2)$$

$$i = 1[\cos(\pi/2 + 2k\pi) + i\sin(\pi/2 + 2k\pi)] , \ k \in \mathbb{Z}$$

⇒ $-\sqrt{3} - i$ sayısını kutupsal biçimde yazınız?



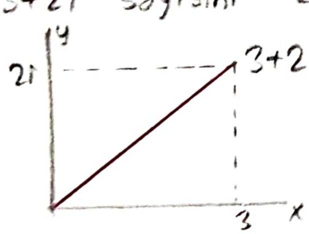
$$|z| = 2$$

$$\arctan\frac{x}{y} = \theta \qquad \theta = \frac{7\pi}{6}$$

Genel → $z = 2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right)\right]$

Esas Gösterim → $z = 2\left[\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)\right]$

⇒ $3+2i$ sayısını kutupsal biçimde yazınız?



$x = 3$
$y = 2$

$$|z| = \sqrt{13}$$

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{2}{3}$$

$$z = \sqrt{13}\left[\cos\left(\arctan\tfrac{2}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\arctan\tfrac{2}{3} + 2k\pi\right)\right]$$

$k \in \mathbb{Z}$

Kutupsal Koordinatlarda İşlemler

$z_1 = r_1[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1]$, $z_2 = r_2[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$ olsun.

- $z_1.z_2 = r_1[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1].r_2.[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$

$$= r_1.r_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + ir_1r_2\cos\theta_1\sin\theta_2 + ir_1r_2\sin\theta_1\cos\theta_2 - r_1r_2\sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$z_1.z_2 = r_1r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1.\sin\theta_2] + ir_1r_2[\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2]$$

$$z_1.z_2 = r_1r_2\cos(\theta_1+\theta_2) + ir_1r_2\sin(\theta_1+\theta_2)$$

$$= \underbrace{r_1r_2}_{\rho}[\cos(\underbrace{\theta_1+\theta_2}_{\psi}) + i\sin(\underbrace{\theta_1+\theta_2}_{\psi})] \Longrightarrow z_1z_2 = \rho(\cos\psi + \sin\psi)$$

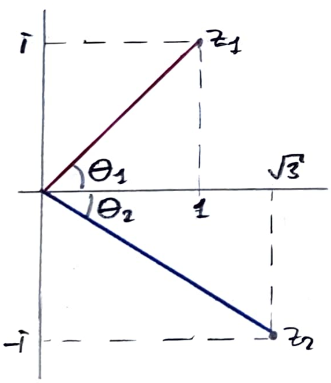
İki kompleks sayının çarpımında; çarpımın modülü, modüller çarpımına; argümenti, argümentler toplamına eşittir.

- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1]}{r_2[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

Teorem: $z, w \in \mathbb{C}$ olsun.

1- $\arg(z.w) = \arg z + \arg w \quad (\text{mod } 2\pi)$
2- $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w \quad (\text{mod } 2\pi)$
3- $c \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\arg z = \arg(cz)$
4- $\arg z = -\arg\bar{z}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ sayısını kutupsal biçimde yazınız?



$1+i = \sqrt{2}[\cos\pi/4 + i\sin\pi/4]$

$\arctan\frac{1}{1} = \theta_1 = \frac{\pi}{4}$

$\sqrt{3}-i = 2[\cos(\frac{-\pi}{6}) + i\sin(\frac{-\pi}{6})]$

$\arctan\frac{-1}{\sqrt{3}} = \theta_2 = \frac{-\pi}{6}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right]$$

Kompleks Sayıların Tam ve Rasyonel Kuvveti

Bir Kompleks Sayının Tam Kuvveti: Reel sayılarda olduğu gibi $z \neq 0$ ve n bir tamsayı olmak üzere $z^n = \underbrace{z.z.z.\ldots.z}_{n \text{ tane}}$ ile tanımlıdır. $z \neq 0$ iken $z^{n+1} = z^n.z$, $z^{-n} = \frac{1}{z}$ ve $z^0 = 1$ dir.

• $n, m \in \mathbb{Z}$ iken $z^n.z^m = z^{n+m}$, $\frac{z^n}{z^m} = z^{n-m}$, $(z^n)^m = z^{nm} = (z^m)^n$

• $z, w \in \mathbb{C}$ iken $z^2 + w^2 = (z - iw).(z + iw)$ dır.

$z^2 - w^2 = (z - w).(z + w)$

Teorem (De Moivre Formülü): n pozitif bir tamsayı olmak üzere $z = \cos\theta + i\sin\theta$ şeklinde verilmiş olan z kompleks sayısı için $z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ dır.

$$\arg(z.w) = \arg z + \arg w$$
$$\arg(z_1.z_2 z_3) = \arg z_1 + \arg z_2 + \arg z_3$$
$$\vdots$$
$$z^n = z.z.\ldots.z$$
$$\arg z^n = \arg z + \arg z + \ldots + \arg z = n.\arg z = n\theta$$

• $z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$, $w = p[\cos\phi + i\sin\phi]$

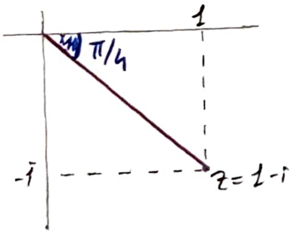
$$z.w = rp[\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)]$$
$$z^n = z.z^{n-1} = z.z.z^{n-2} = z.z.z.\ldots.z = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$\Rightarrow$ $z = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$ ise $z^{20} = ?$

$$z^{20} = \cos\left(20.\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(20.\frac{\pi}{5}\right) = 1 + i.0 = 1$$

$\Rightarrow$ $(1-i)^{23}$ kompleks sayısını $a+bi$ şeklinde yazınız?

$$1-i = |z|[\cos\theta + i\sin\theta] = \left(\sqrt{1^2+(-1)^2}\right)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$



$$(1-i)^{23} = (\sqrt{2})^{23}.\left[\cos\left(-\frac{23\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{23\pi}{4}\right)\right]$$
$$= (\sqrt{2})^{23}.\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - 6\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - 6\pi\right)\right]$$
$$= (\sqrt{2})^{23}.\left(\cos \pi/4 + i\sin \pi/4\right)$$
$$= 2^{11}(1+i)$$

$\Rightarrow$ $\cos 3\theta$ ve $\sin 3\theta$ yı $\cos\theta$ ve $\sin\theta$ cinsinden yazınız?

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$
$$\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta + 3i^2\cos\theta\sin^2\theta + (i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$
$$\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i[3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta] = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$
$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$
$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

Bir Kompleks Sayının Rasyonel Kuvveti: $z_0 \neq 0$ ve n bir rasyonel sayı olmak üzere $z^n = z_0$ denklemini sağlayan z sayılarının her birine z_0 in n. dereceden kökü denir ve $z^n = z_0 \Rightarrow z = z_0^{1/n} = \sqrt[n]{z_0}$ biçiminde yazılır.

Teorem: n pozitif bir tam sayı $w = |w|[\cos\theta + i\sin\theta]$ olmak üzere w kompleks sayısının n. kökleri;

$$z_k = |w|^{1/n}\left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

sayılarıdır. Burada n tane kök vardır.

$\Rightarrow$ $(1-i)$ nin küp köklerini bulunuz?

$$(1-i) = \sqrt{2}\cdot\left[\cos\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_k = (\sqrt{2})^{1/3}\left[\cos\frac{-\pi/4 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi/4+2k\pi}{3}\right], \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = (\sqrt{2})^{1/3}\left[\cos\left(-\tfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$z_1 = (\sqrt{2})^{1/3}\left[\cos\left(\tfrac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\tfrac{7\pi}{12}\right)\right]$$

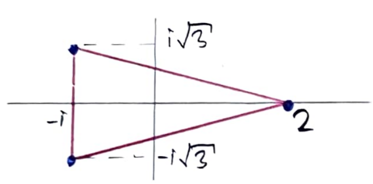
$$z_2 = (\sqrt{2})^{1/3}\left[\cos\left(\tfrac{15\pi}{12}\right) + i\sin\left(\tfrac{15\pi}{12}\right)\right]$$

$\Rightarrow$ 8'in küp köklerini bulunuz?

$z^3 = 8$

$|z| = \sqrt{8^2 + 0^2} = 8$

$\text{Arg } z = \theta = 0$



$$8 = 8[\cos 0 + i\sin 0]$$

$$z_k = 8^{1/3}\left[\cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3}\right], \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = 2[1 + i0] = 2$$

$$z_1 = 2\left[-\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right] = -1 + i\sqrt{3}$$

$$z_2 = 2\left[-\tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right] = -1 - i\sqrt{3}$$

Teorem: 1'in n. köklerine birimin n. kökleri denir.

$$z_k = \cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

$\Rightarrow$ Birimin küp kökleri; $1 = \cos 0 + i\sin 0$

$$z_k = \cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3}$$

$$z_1 = 1 + i0 = 1, \quad z_2 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_3 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}$$

Tanım: $w = z^{p/q}$ kompleks sayısı için $(p,q) = 1$ [p ve q aralarında asal] olmak üzere q tane kök vardır.

$$z_k = |w|^{p/q}\left[\cos\frac{p\theta + 2k\pi}{q} + i\sin\frac{p\theta + 2k\pi}{q}\right]$$

$\Rightarrow (1+i)^{3/4}$ ün bütün değerlerini bulunuz?

$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\arctan \frac{1}{1} = Arg z = \theta = \pi/4$

$1+i = \sqrt{2}\left[\cos \pi/4 + i\sin \pi/4\right]$

$(3,4)=1$ olduğundan 4 tane kök var.

$$z_k = (\sqrt{2})^{3/4}\left[\cos \frac{3\pi/4 + 2k\pi}{4} + i\sin \frac{3\pi/4+2k\pi}{4}\right], \quad k=0,1,2,3$$

$$z_0 = 2^{3/8}\left[\cos \frac{3\pi}{16} + i\sin \frac{3\pi}{16}\right] \qquad z_2 = 2^{3/8}\left[\cos \frac{19\pi}{16} + i\sin \frac{19\pi}{16}\right]$$

$$z_1 = 2^{3/8}\left[\cos \frac{11\pi}{16} + i\sin \frac{11\pi}{16}\right] \qquad z_3 = 2^{3/8}\left[\cos \frac{27\pi}{16} + i\sin \frac{27\pi}{16}\right]$$

Kompleks Sayılarda Üstel ve Logaritma

Tanım: $z = x+iy$ olmak üzere $e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{\in \mathbb{R}} e^{iy}$ ifadesine kompleks üstel ifade denir.

$y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $e^{iy} = \cos y + i\sin y$ olarak tanımlanır ve Euler formülü olarak isimlendirilir.

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x[\cos y + i\sin y]$$
$$z = |z|[\cos\theta + i\sin\theta]$$
$$z = |z| e^{i\theta}$$

Teorem! (e^z'nin özellikleri)

1- $e^z = 0$ olduğu bilindiğine göre $z \in \mathbb{C}$ yoktur. (e^z hiçbir zaman sıfır olamaz)

$$e^z = \underbrace{e^x}_{\substack{>0 \\ \neq 0}}\underbrace{[\cos y + i\sin y]}_{\neq 0} \neq 0$$

2- $|e^z| = |e^x \cos y + i e^x \sin y| = \sqrt{(e^x\cos y)^2 + (e^x \sin y)^2} = \sqrt{e^{2x}[\underbrace{\cos^2 y + \sin^2 y}_{1}]} = \sqrt{e^{2x}}$

$\sqrt{e^{2x}} = |e^x| = e^x = e^{Re z}$

3- $\arg e^z = \arctan \dfrac{e^x \sin y}{e^x \cos y} = \arctan(\tan y) = y = Im\, z$

4- $z, w \in \mathbb{C}$ olmak üzere $e^{z+w} = e^z e^w$ dır.

5- $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $(e^z)^n = e^{nz}$ dır.

6- $e^z = 1 \iff z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ dır.

$e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1$ dır.

7- $e^z = e^w \iff z = w + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ dır

ispat $\longrightarrow \dfrac{e^z}{e^w} = 1 \quad e^{z-w} = 1 \quad z - w = 2k\pi i \quad z = w + 2k\pi i$

$\Rightarrow e^z + i = 0$ denklemini sağlayan z değerlerini bulunuz?

$e^z = -i$

$\rightarrow |e^z| = |-i|$

$\underbrace{e^x}_{\in \mathbb{R}} = 1 \iff 0 = x$ dır.

$\rightarrow \arg(e^z) = \arg(-i)$

$y = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$z = x+iy$$
$$z = 0 + i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$$

Kompleks Sayıların Logaritmaları

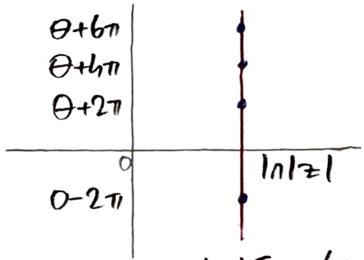
z sıfırdan farklı bir kompleks sayı olmak üzere $e^w = z$ eşitliğini sağlayan w kompleks sayılarına z nin logaritması denir.

$e^w = z \Rightarrow w = \log z = \ln|z| + i\arg z$ ile gösterilir.

⇒ (-1) sayısının logaritmasını bulunuz?

$$\log(-1) = \ln|-1| + i\arg(-1)$$
$$= \underbrace{\ln 1}_{0} + i(\pi + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$\log(-1) = i(\pi + 2k\pi)$$

• $\log z = \underbrace{\ln|z|}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{i\arg z}_{\in \mathbb{R}}$

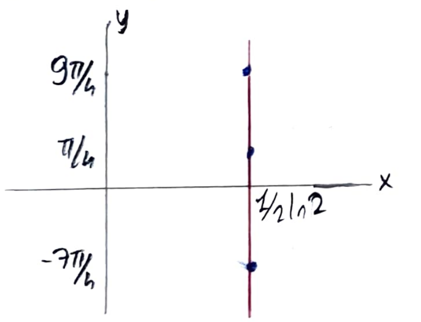


Tanım: $z \neq 0$ kompleks sayısı $z = |z|[\cos(\operatorname{Arg} z) + i\sin(\operatorname{Arg} z)]$ olmak üzere $\log z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ değerine z'nin esas logaritması denir.

⇒ $(1+i)$'nin logaritmasını bulup düzlemde gösteriniz. Esas logaritmasını hesaplayınız?

$$1+i = \underbrace{\sqrt{2}}_{|z|}\left(\cos\underbrace{\left(\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right)}_{\arg z} + i\sin\left(\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)$$

$$\log(1+i) = \ln|z| + i\arg z$$
$$= \ln\sqrt{2} + i\left(\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \; k \in \mathbb{Z}$$
$$\log(1+i) = \tfrac{1}{2}\ln 2 + i\left(\pi/4 + 2k\pi\right)$$



$$\log(1+i) = \ln|1+i| + i\operatorname{Arg}(1+i)$$
$$= \tfrac{1}{2}\ln 2 + i\tfrac{\pi}{4}$$

Teorem: (Kompleks logaritmanın özellikleri) z, w sıfırdan farklı kompleks sayılar olsun.

1- $e^{\log z} = z$

2- $\log e^{z} = z$

3- $\log(z.w) = \log z + \log w + 2k\pi i \quad , k \in \mathbb{Z}$

$\quad \mathrm{Log}(z.w) = \mathrm{Log}\, z + \mathrm{Log}\, w \longrightarrow$ Her zaman sağlanmaz.

4- $\log\left(\frac{z}{w}\right) = \log z - \log w + 2k\pi i \quad , k \in \mathbb{Z}$

$\quad \mathrm{Log}\left(\frac{z}{w}\right) = \mathrm{Log}\, z - \mathrm{Log}\, w \longrightarrow$ Her zaman sağlanmaz.

5- $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\log z^n = n \log z$ dır.

İspat: 1- $e^{\log z} = e^{\ln|z| + i\arg z} = e^{\ln|z|} e^{i\arg z} = |z| e^{i\theta} = z$

2- $\log e^{z} = \ln|e^{z}| + i\arg e^{z} = \ln e^{x} + iy = x + iy = z$

3- $\log(z.w) = \ln|z.w| + i\arg(z.w)$
$= \ln|z|.|w| + i(\arg z + \arg w)$
$= \ln|z| + \ln|w| + i\arg z + i\arg w$
$= \ln|z| + i\arg z + \ln|w| + i\arg w$
$= \log z + \log w$

$\Rightarrow z = -1 \quad , w = i$

$\mathrm{Log}(-1) = \ln|-1| + i\mathrm{Arg}(-1)$
$= \ln|1| + i\pi$
$= i\pi$

$\mathrm{Log}(i) = \ln|i| + i\mathrm{Arg}(i)$
$= \ln 1 + i\pi/2$
$= i\pi/2$

$\mathrm{Log}(-i) = \ln|-i| + i\mathrm{Arg}(-i)$
$= \ln 1 + i(-\pi/2)$
$= -i\pi/2$

$-\pi < \mathrm{Arg}\, z \leq \pi$

$\mathrm{Log}(z.w) \overset{?}{=} \mathrm{Log}\, z + \mathrm{Log}\, w$

$-\frac{i\pi}{2} \neq i\pi + i\pi/2$

Kompleks Sayıların Kompleks ve İrrasyonel Kuvvetleri

$x, y \in \mathbb{R} \qquad x^y = e^{y\ln x} = e^{\ln x^y} \qquad x > 0$

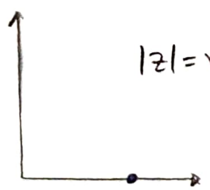
Tanım: (z^w şeklindeki kuvvetler) $z \neq 0 \;, w \in \mathbb{C}$ olsun.

$$z^w = e^{w\log z} = e^{w[\ln|z| + i\arg z]}$$

denklemi ile verilen kuvvetlere kompleks kuvvetler denir.

$\Rightarrow 2^i$'nin bütün değerlerini bulun?

$z = 2 \;, w = i \quad ; \quad 2^i = e^{i\log 2} = e^{i[\ln|2| + i\arg 2]} = e^{i[\ln 2 + i(0 + 2k\pi)]}$
$= e^{i\ln 2 - 2k\pi}$
$= e^{-2k\pi} . e^{i\ln 2}$
$= e^{-2k\pi}[\cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2)]$



$z = 2 + 0i$

$|z| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

$0 = \arctan\frac{0}{2} = \arg z$

$\Rightarrow (1-i)^{1+i}$ nın bütün değerlerini bulunuz?

$z=1-i \;,\; w=1+i \;;\; (1-i)^{1+i} = e^{(1+i)\log(1-i)} = e^{(1+i)[\ln|1-i| + \arg(1-i)]}$

$= e^{(1+i)[\ln\sqrt{2} + i(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)]}$

$= e^{(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2k\pi) + i(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2k\pi)}$

$= e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2k\pi} \cdot e^{i[\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+2k\pi]}$

$= e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2k\pi}\, e^{i[\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}]}\, \underbrace{e^{i[2k\pi]}}_{1}$

$= e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2k\pi}\,[\cos(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}) + i\sin(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4})]$

Tanım: $z^w = e^{w\log z} = e^{w[\ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z]}$ denklemine z^w'nın esas değeri denir ve $P_r[z^w]$ ile gösterilir.

$\Rightarrow (1+i)^{\sqrt{2}}$ nın bütün değerleri ve esas değerini bulunuz?

$z=1+i \;,\; w=\sqrt{2} \;;\; (1+i)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\log(1+i)} = e^{\sqrt{2}[\ln|1+i| + i\arg(1+i)]}$

$= e^{\sqrt{2}[\ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)]}$

$\pi/4 = \arctan\frac{1}{1} = \arg(1+i)$

$= e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}} \cdot e^{i\sqrt{2}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$

$= e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}}\,[\cos[\sqrt{2}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)] + i\sin[\sqrt{2}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)]]$

$P_r[(1+i)^{\sqrt{2}}] = e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}}\,[\cos(\sqrt{2}\,\frac{\pi}{4}) + i\sin(\sqrt{2}\,\frac{\pi}{4})]$ $\quad -\pi < \frac{\pi}{4} \le \pi \rightarrow \mathrm{Arg}\,z$

z^w'nın Özellikleri

$z \neq 0 \;,\; z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun

1- $z^\alpha \cdot z^\beta = z^{\alpha+\beta}$

2- $\frac{z^\alpha}{z^\beta} = z^{\alpha-\beta}$

3- $(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta}$

İspat:

1- $z^\alpha \cdot z^\beta = e^{\alpha\log z} \cdot e^{\beta\log z}$

$= e^{\alpha\log z + \beta\log z}$

$= e^{(\alpha+\beta)\log z}$

$= z^{\alpha+\beta}$

3- $(e^{\alpha\log z})^\beta = e^{\alpha\beta\log z} = z^{\alpha\beta}$

Kompleks Düzlemde Noktalar Kümesi

$\Rightarrow |z-1+3i| = 2$ eşitliğini sağlayan bütün noktalar kümesini bulunuz?

$|x+iy-1+3i| = |(x-1)+i(y+3)| = 2$

$\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2} = 2$

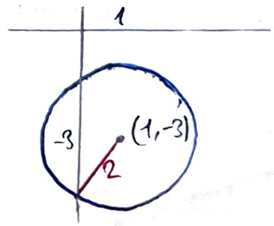
$(x-1)^2+(y+3)^2 = 4$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$

$M(x_0, y_0) \,,\, r$

$M(1,3) \,,\, r=2$

$|z-\underbrace{(1-3i)}_{z_0}| = 2 = r$

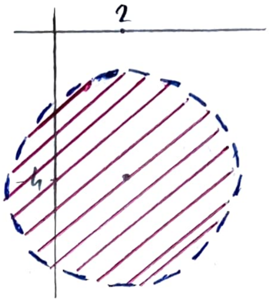


• $|z-z_0| = r$ şeklindeki kompleks sayılar $z_0 = (x_0, y_0)$ merkezli r yarıçaplı çember belirtir.

$\Rightarrow |z-2+4i|<3$ ifadesini sağlayan noktaların geometrik yerini bulunuz?

$|z-(2-4i)|<3$ $\quad M(2,-4)\ ,\ r=3$

$\underbrace{(2-4i)}_{z_0=2-4i}$



$\Rightarrow |z-2|=2|z-2i|$ eşitliğini geometrik düzlemde ne belirtir?

$|x+iy-2|=2|x+yi-2i|$

$|(x-2)+iy|=2|x+i(y-2)|$

$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+(y-2)^2}$

$(x-2)^2+y^2=4\left(x^2+(y-2)^2\right)$

$x^2-4x+4+y^2=4x^2+4y^2-16y+16$

$0=3x^2+3y^2+4x-16y+12$

$0=x^2+\frac{4}{3}x+y^2-\frac{16}{3}y+4$

$\boxed{ax^2+bx+c \quad \mp\left(\frac{b}{2}\right)^2}$

$0=x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+y^2-\frac{16}{3}y+\frac{64}{9}-\frac{64}{9}+4$

$0=\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2-\frac{4}{9}-\frac{64}{9}+4$

$\frac{68}{9}-4=\left(x-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2+\left(y-\left(\frac{8}{3}\right)\right)^2$

$M\left(-\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)\ ,\ r=\frac{\sqrt{32}}{3}$

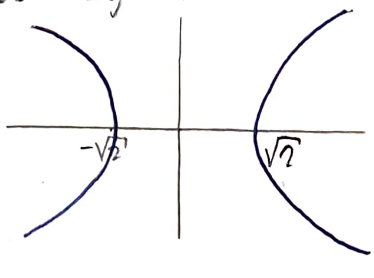
$\Rightarrow z^2+(\bar{z})^2=4$ ifadesini sağlayan z kompleks sayısını bul?

$z=x+iy$

$(x+iy)^2+(x-iy)^2=4$

$x^2+2ixy-y^2+x^2-2ixy-y^2=4$

$x^2-y^2=2 \longrightarrow \sqrt{2}$ odaklı hiperbol



$\Rightarrow |z|^2+3Re(z^2)=4$

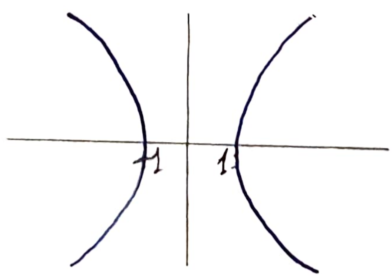
$|z|^2=x^2+y^2$

$Re(z^2)=Re\left((x+iy)^2\right)=x^2-y^2$

$(x^2+y^2)+3(x^2-y^2)=4$

$4x^2-2y^2=4$

$x^2-\frac{1}{2}y^2=1 \longrightarrow 1$ odaklı hiperbol

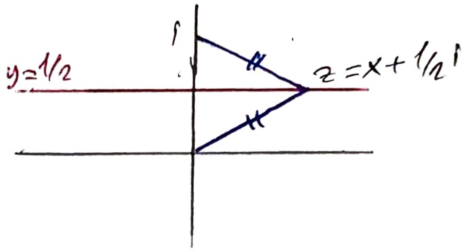


$\Rightarrow |z|^2 + \operatorname{Im} z = 16$

$$x^2+y^2+y=16$$
$$(x-0)^2+y^2+y+1/4-1/4=16$$
$$(x-0)^2+(y+1/2)^2=\frac{65}{4}$$
$$M(0,-1/2)\,,\ r=\frac{\sqrt{65}}{2}$$

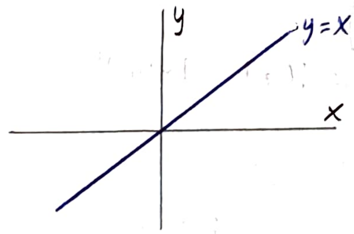
$\Rightarrow |z| = |z-i|$

$$x^2+y^2=x^2+(y-1)^2$$
$$y^2=y^2-2y+1$$
$$y=1/2$$

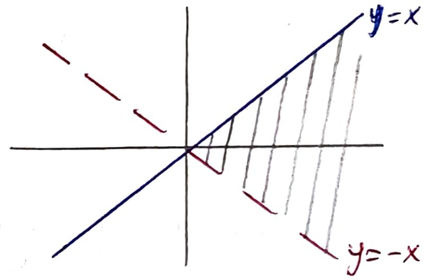


$\Rightarrow A=\{z: -\frac{\pi}{4} < \arg z \leq \pi/4\}$ kümesinin geometrik gösterimi?

$$B=\{z: \arg z = \pi/4\}$$
$$B=\{x+iy: \arctan\frac{y}{x}=\frac{\pi}{4}\}$$
$$B=\{z=x+iy: \frac{y}{x}=\tan\frac{\pi}{4}=1\}$$
$$B=\{x+iy: y=x\}$$



$$A=\{x+iy: -\pi/4 < \arctan\frac{y}{x} \leq \frac{\pi}{4}\}$$
$$A=\{x+iy: \tan(-\frac{\pi}{4}) < \frac{y}{x} \leq \tan\frac{\pi}{4}\}$$
$$A=\{x+iy: -1 < \frac{y}{x} \leq 1\}$$
$$A=\{x+iy: -x<y\leq x\}$$
$$-x<y \qquad y\leq x$$



Kompleks Fonksiyonlar

$A\subset\mathbb{C}$ olsun. A'nın her z elemanına w kompleks sayısı karşılık getiren kurala A'dan $\mathbb{C}$'ye bir kompleks fonksiyon denir.

$$f: A\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$
$$z\to f(z)=w$$

$\Rightarrow$
$$\left.\begin{array}{l} f(z)=z^2\\ f(z)=\bar{z}\\ f(z)=|z|^2\\ f(z)=\operatorname{Arg} z\\ f(z)=\sqrt{z}\end{array}\right\}$$
Kompleks değerli kompleks değişkenli fonksiyonlar.

• $f(z)=f(x+iy)=\overbrace{\underbrace{u(x,y)}_{\text{reel fonksiyon}}}^{\text{reel kısım}}+i\overbrace{\underbrace{v(x,y)}_{\text{reel fonksiyon}}}^{\text{sanal kısım}}$

$$u(x,y): \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$
$$v(x,y): \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow f(z)=z^4$ fonksiyonunu $u(x,y)+iv(x,y)$ biçiminde yazınız?

$$z^4=(x+iy)^4$$
$$=x^4(iy)^0+4x^3(iy)^1+6x^2(iy)^2+4x(iy)^3+1x^0(iy)^4$$
$$=\underbrace{x^4-6x^2y^2+y^4}_{u(x,y)}+i\underbrace{(4x^3y-4xy^3)}_{v(x,y)}$$

$\Rightarrow f(z)=\bar{z}\,Re\,z+z^2+Im\,z$ fonksiyonu için $Re[f(z)]=?$, $Im[f(z)]=?$

$$f(x+iy)=(\overline{x+iy})\,Re(x+iy)+(x+iy)^2+Im(x+iy)$$
$$=(x-iy)x+x^2-y^2+2ixy+y$$
$$=x^2+x^2-y^2+y+i(2xy-xy)$$
$$=\underbrace{2x^2-y^2+y}_{Re[f(z)]}+i\underbrace{xy}_{Im[f(z)]}$$

• $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$; $z=x+iy$

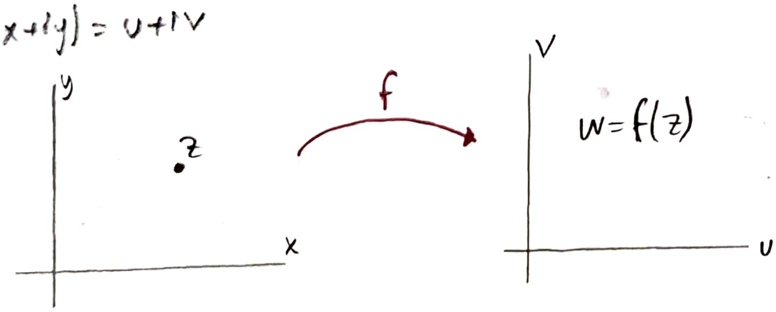
$z=re^{i\theta}$ $\qquad f(r,e^{i\theta})=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$

$\Rightarrow f(z)=z^5+4z^2-6$ fonksiyonu $f(r,e^{i\theta})=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ biçiminde yazınız?

$$z^5=(re^{i\theta})^5=r^5e^{i5\theta}=r^5[\cos 5\theta+i\sin 5\theta]$$
$$z^2=(re^{i\theta})^2=r^2e^{i2\theta}=r^2[\cos 2\theta+i\sin 2\theta]$$
$$f(r,e^{i\theta})=r^5\cos 5\theta+ir^5\sin 5\theta+4r^2\cos 2\theta+i4r^2\sin 2\theta-6$$
$$=[\underbrace{r^5\cos 5\theta+4r^2\cos 2\theta-6}_{u(r,\theta)}]+i[\underbrace{r^5\sin 5\theta+4r^2\sin 2\theta}_{v(r,\theta)}]$$

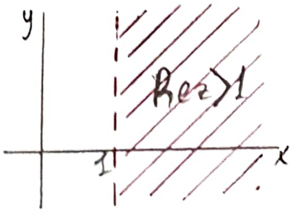
• $f(z)=w$

$f(x+iy)=u+iv$



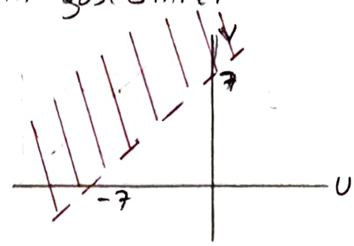
Kompleks sayıların grafiği olmaz. Fakat herhangi bir fonksiyon altında dönüştürüle bilir.

⇒ $w=(-1+i)z-2+3i=f(z)$ dönüşümü altında $\operatorname{Re} z>1$ sağ yarı düzlemin $v>u+7$ yarı düzleminde görüntülendiğini gösteriniz?



$z=x+iy$
$\operatorname{Re} z=x>1$

$\xrightarrow{f}$



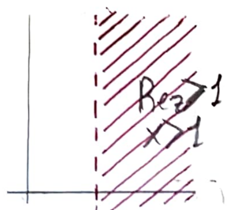
$$w=(-1+i)z-2+3i$$
$$\frac{w+2-3i}{-1+i}=z$$
$$\frac{u+iv+2-3i}{-1+i}=x+iy$$
$$\frac{u+2+i(v-3)}{-1+i}=x+iy$$
$$(-1-i)$$

$$x+iy=\frac{-u-2-1(v-3)-iu-2i+v-3}{2}$$
$$x+iy=\frac{-u-2+v-3+i(-v+3-u-2)}{2}$$
$$x=\frac{-u+v-5}{2} \longrightarrow x=\frac{v-u-5}{2}$$
$$y=\frac{-u-v+1}{2}$$

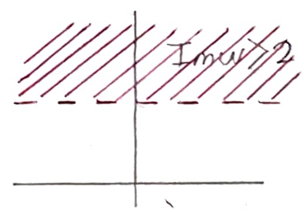
$$x>1$$
$$\frac{v-u-5}{2}>1$$
$$v-u-5>2 \longrightarrow v>7+u$$

⇒ $f(z)=iz+i$ dönüşümünün $\operatorname{Re} z>1$ sağ yarı düzlemini $\operatorname{Im} w>2$ üst yarı düzlemi üzerine götürdüğünü?

$$f(\underbrace{x+iy}_{})=\underbrace{u+iv}_{4 \text{ boyut}}=w$$



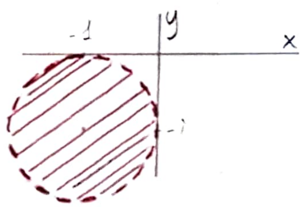
$f(z)=iz+i=w=u+iv$



$$f(x+iy)=i(x+iy)+i=u+iv$$
$$-y+i(x+1)=u+iv$$
$$u=-y \longrightarrow ?$$
$$v=x+1 \qquad x>1$$
$$x+1>1+1 \qquad \operatorname{Im} w=v>2$$

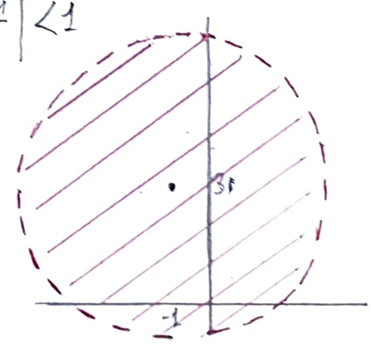
⇒ $w=f(z)=(3-4i)z+6+2i$ dönüşümü altında $|z+1+i|<1$ kümesinin görüntüsünün $|w+1-3i|<5$ kümesi olduğunu gösteriniz?

$$|z-(-1-i)|<1$$
$$M(-1,-1) \quad r=1$$



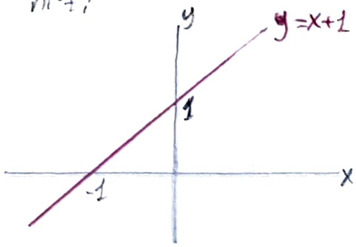
$$|w-(-1+3i)|<5$$
$$w=(3-4i)z+6+2i$$
$$\frac{w-6-2i}{3-4i}=z$$
$$\left|\frac{w-6-2i}{3-4i}+1+i\right|<1$$

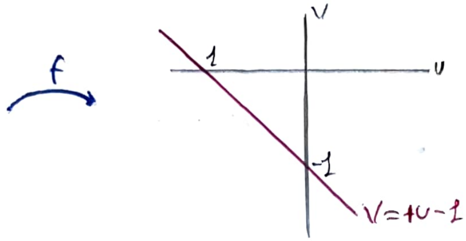
$$\left|\frac{w-6-2i+3-4i+3i+4}{3-4i}\right|<1$$
$$\frac{|w+1-3i|}{|3-4i|}<1$$
$$|w+1-3i|<5$$



PAK METAL
Makina Sanayi Ticaret

⇒ $f(z)=iz$ dönüşümüyle $y=x+1$ doğrusunun $V=+U-1$ doğrusuna görüntülendiğini gösteriniz?





$f(x+iy)=i(x+iy)=u+iv$

$-y+ix=u+iv$

$\left.\begin{array}{l} u=-y \\ v=x \end{array}\right\}$ $y=x+1$ $\quad$ $-u=v+1$

$v=u-1$

z^2 ve $z^{1/2}$ dönüşümleri

• $w=f(z)=z^2$ dönüşümü kutupsal koordinatlarda $r>0$ ve $-\pi<\theta<\pi$ için

$\rho e^{i\phi}=w=f(r.e^{i\theta})=z^2=(r.e^{i\theta})^2=r^2e^{i2\theta}$ olarak yazılır.

$\rho e^{i\phi}=r^2e^{i2\theta}$

$\rho=r^2$, $\phi=2\theta$

⇒ $A=\{(r,\theta):r>0,\ -\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}\}$ kümesi z^2 dönüşümü altında nereye görüntülenir

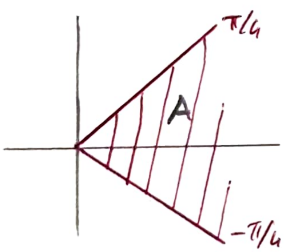
$w=\rho e^{i\phi}=(re^{i\theta})^2$ $\qquad$ $\phi=2\theta \Rightarrow -\frac{\pi}{4}<\theta\leq\frac{\pi}{4}$

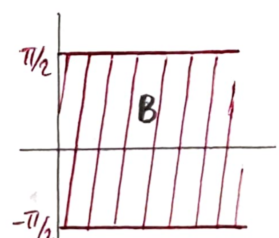
$\rho=r^2 \Rightarrow r>0$ $\qquad$ $-\frac{\pi}{2}<2\theta\leq\frac{\pi}{2}$

$\rho=r^2>0$ $\qquad$ $-\frac{\pi}{2}<\phi\leq\frac{\pi}{2}$

$\rho>0$

$B=\{(\rho,\phi):\rho>0,\ -\frac{\pi}{2}<\phi\leq\frac{\pi}{2}$

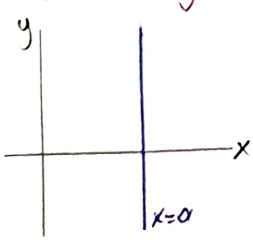




z^2 dönüşümü altında çeyrek düzlem her zaman yarım düzleme dönüşür. Yarım düzlem ise tam düzleme dönüşür.
z^2 dönüşümü kümeyi iki katına çıkarır.

⇒ $f(z)=z^2$ dönüşümü yatay ve düşey doğrularını nereye görüntüler?

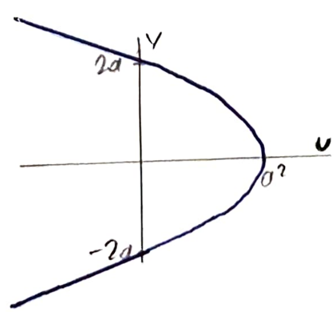
$x=a$ doğrusu , $a>0$



$f(x+iy)=(x+iy)^2=u+iv=w$

$\left.\begin{array}{l} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{array}\right\}$ $x=a$ $\quad$ $u=a^2-y^2$, $\quad v=2ay \longrightarrow y=\frac{v}{2a}$

$\underbrace{u=a^2-\frac{v^2}{4a^2}}$



$x=0=a$ doğrusu

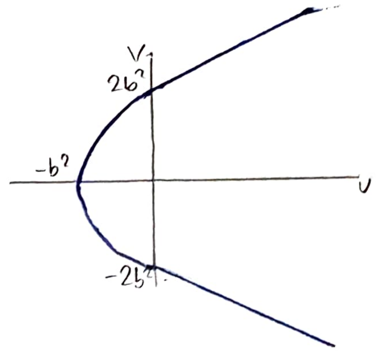
$v=2.0.y=0$

$u=-y^2 \qquad (u,v)=(0,-y^2)$

$y=b$ doğrusu , $b>0$

$\left.\begin{aligned} u&=x^2-y^2 \\ v&=2x \end{aligned}\right\} y=b \qquad \begin{aligned} u&=x^2-b^2 \\ v&=2xb \longrightarrow x=\frac{v}{2b} \end{aligned}$

$u=\frac{v^2}{4b^2}-b^2$

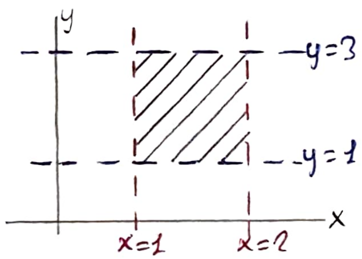


$y=b=0$ doğrusu

$v=2.x.0=0 \qquad (u,v)=(x^2,0)$

$u=x^2-0^2=x^2$

$\Rightarrow A=\{(x,y): 1<x<2 \ , \ 1<y<3\}$ kümesinin $z^2=f(z)$ dönüşümü altında görüntüsünü bulunuz?



$w=u+iv=(x+iy)^2$

$u=x^2-y^2$

$v=2xy$

$x=1, x=2$ doğruları

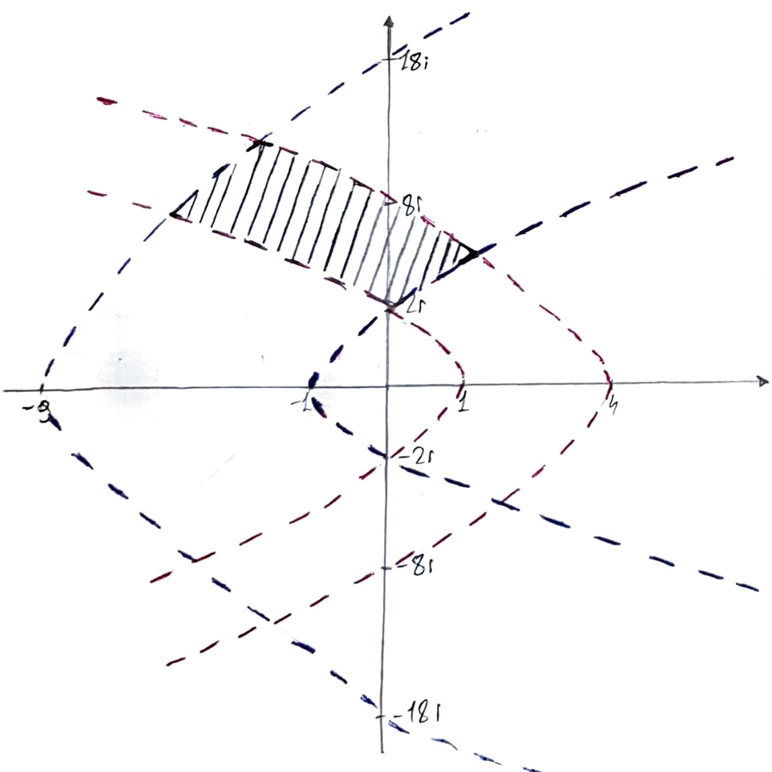
$x=1\begin{cases} u=1-y^2 \longrightarrow u=1-\frac{v^2}{4} \\ v=2y \end{cases}$

$x=2\begin{cases} u=4-y^2 \\ v=4y \end{cases} \Big\} u=4-\frac{v^2}{16}$

$y=1, y=3$ doğruları

$y=1\begin{cases} u=x^2-1 \\ v=2x.1 \end{cases} \qquad u=\frac{v^2}{4}-1$

$y=3\begin{cases} u=x^2-9 \\ v=6x \end{cases} \qquad u=\frac{v^2}{36}-9$



Yarım düzlem z^2 de üst yarı düzleme dönüşür.

- $z^2 = (re^{i\theta})^{1/2} = \rho e^{i\phi}$

  $0 \leq \theta \leq \pi/2 \qquad r>0$

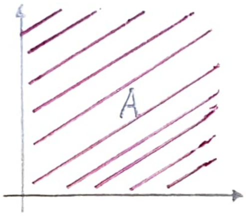
  $0 \leq \phi \leq \pi \qquad \rho = r^2 > 0$

- $w = f(z) = z^{1/2}$ dönüşümü için $r>0$, $-\pi < \theta \leq \pi$ olmak üzere

  $w = \rho e^{i\phi} = (re^{i\theta})^{1/2} = r^{1/2} e^{i\frac{\theta}{2}}$ dir.

  $\rho = r^{1/2} \quad , \quad \phi = \frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow A = \{(r,\theta) : r>0 \ , 0<\theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ kümesinin $f(z) = z^{1/2}$ dönüşümü altında görüntüsünü bulunuz?



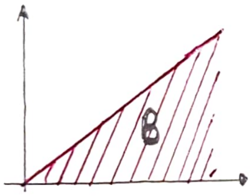
$\rho e^{i\phi} = (re^{i\theta})^{1/2}$

$\rho = r^{1/2} \quad , \quad \phi = \frac{\theta}{2}$

$r>0 \qquad 0<\theta \leq \pi/2$

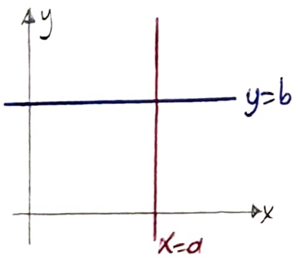
$\rho = r^{1/2} > 0 \qquad 0 < \theta/2 \leq \pi/4$

$0 < \phi \leq \pi/4$



$B = \{(\rho,\phi) : \rho>0 \ , 0<\phi \leq \pi/4\}$

$\Rightarrow f(z) = z^{1/2} = w$ dönüşümü altında $x=a$, $a>0$, $y=b$, $b>0$ doğruları nereye görüntülenir?



$(x+iy)^{1/2} = w = u+iv$

$x+iy = (u+iv)^2$

$x+iy = u^2 - v^2 + 2iuv$

$x = u^2 - v^2$

$y = 2uv$

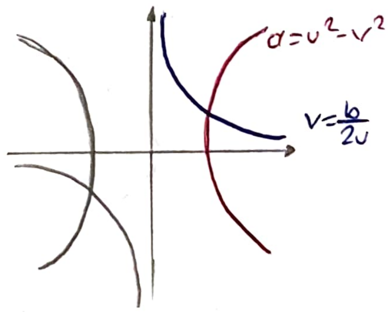
$x=a$ doğrusu

$a = u^2 - v^2$

$y=b$ doğrusu

$b = 2uv$

$v = \frac{b}{2u}$



Bazı Özel Fonksiyonlar

- **Kompleks Üstel Fonksiyon:**

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ fonksiyonuna kompleks üstel fonksiyon denir.

$z \to f(z) = e^z$

$Re(f(z)) = e^x \cos y$

$Im(f(z)) = e^x \sin y$

$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x[\cos y + i \sin y] = u+iv = w$

$u = \overset{\in \mathbb{R}}{e^x} \overset{\in \mathbb{R}}{\cos y}$

$v = e^x \sin y$

[Her z sayısına 1 tane e^z vardır.]

- **Kompleks Logaritma Fonksiyonu:**

$f: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$

$z \rightarrow f(z)$

$f(z) = \log z = \ln|z| + i\arg z$ → çok değerli

$Re(f(z)) = \underbrace{\ln|z|}_{\in \mathbb{R}}$ $Im(f(z)) = \underbrace{\arg z}_{\in \mathbb{R}}$

[Her z sayısına sonsuz tane $\log z$]

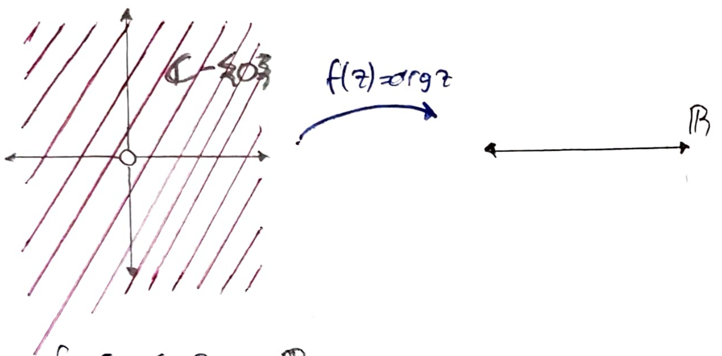
$\underbrace{Log}_{\text{Tek değerli}}\, z = \ln|z| + i \,Arg\, z$ (Esas Logaritma Fonksiyonu)

- **Argüman Fonksiyonu:**

$f: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$z \rightarrow f(z)$

$f(z) = \arg z$ çok değerli fonksiyonuna argüman fonksiyonu denir.



$\arg z = \arctan \frac{y}{x}$

$0 + 0i = z$ için $\arg z$ tanımlı değildir.

$f(z) = \arg z = u + iv = w$

$Re(f(z)) = \arg z$

$Im(f(z)) = 0$

$f: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$z \rightarrow f(z) = Arg\, z$ → Tek değerli

- **Kompleks Trigonometrik ve Hiperbolik Fonksiyonlar:**

Euler formülünde $\theta \in \mathbb{R}$ için $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ve $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ dır.

Alt alta topladığımızda $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$

Alt alta çıkardığımızda $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ dır.

$\theta \in \mathbb{R}$ yerine yukarıdaki denklemlerde $z \in \mathbb{C}$ alınırsa

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Kompleks sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının tanımlarını

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}, \quad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

$\Rightarrow f(z) = \cos z = u(x,y) + i v(x,y)$ biçiminde yaz?

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\cos(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}.e^{y}\} = \frac{1}{2}\{(\cos x + i\sin x)e^{-y} + (\cos x + i\sin x)e^{y}\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos x(e^{y}+e^{-y}) - i\sin x(e^{y}-e^{-y})\}$$

$$= \cos x \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} - i\sin x \frac{e^{-y}-e^{-y}}{2}$$

hiperbolik fonksiyon

$$= \underbrace{\cos x \cosh y}_{u(x,y)} - i\underbrace{\sin x \sinh y}_{v(x,y)}$$

$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$Re(\cos z) = \cos x \cosh y$

$Im(\sin z) = -\sin x \sinh y$

$|\cos x| \leq 1$, $|\sin x| \leq 1$ $\begin{cases} \cos : \mathbb{R} \to [-1,1] \\ \sin : \mathbb{R} \to [-1,1] \end{cases}$

$\Rightarrow \sin z = 5$ denklemini çözünüz. $\sin x = 5$ denklemi için ne söylenir.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 5$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 10i$$

$$e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}} = 10i$$

$$e^{2iz} - 1 = 10ie^{iz}$$

$$e^{2iz} - 10ie^{iz} - 1 = 0 \quad , \quad e^{iz} = t \text{ denirse}$$

$$t^2 - 10it - 1 = 0$$

$$\Delta = (-10i)^2 - 4.1.(-1) = -96$$

$$t_1 = \frac{+10i + \sqrt{-96}}{2} = \frac{10i + 4i\sqrt{6}}{2} = 5i + 2i\sqrt{6} \quad , \quad t_2 = \frac{+10i + \sqrt{-96}}{2} = \frac{10i - 4i\sqrt{6}}{2} = 5i - 2i\sqrt{6}$$

$$e^{iz} = (5+2\sqrt{6})i \longrightarrow iz = \log[(5+2\sqrt{6})i]$$

$$e^{iz} = (5-2\sqrt{6})i \longrightarrow iz = \log[(5-2\sqrt{6})i]$$

$$z = \frac{1}{i}\log[(5 \mp 2\sqrt{6})i]$$

Teorem: 1- $\sin(z+2n\pi)=\sin z$, $\cos(z+2n\pi)=\cos z$

2- $\sin z=0 \iff z=n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$

3- $\cos z=0 \iff z=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$

İspat: 1- $$\sin(z+2n\pi)=\frac{e^{i(z+2n\pi)}-e^{-i(z+2n\pi)}}{2i}=\frac{e^{iz}\cdot \underbrace{e^{2n\pi i}}_{\underbrace{\cos(2n\pi)}_{1}+\underbrace{i\sin(2n\pi)}_{0}}-e^{-iz}\underbrace{e^{-2n\pi i}}_{\underbrace{\cos(2n\pi)}_{1}-\underbrace{i\sin(2n\pi)}_{0}}}{2i}$$

$$=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sin z$$

2- $z=n\pi$ olsun, $$\sin(n\pi)=\frac{e^{in\pi}-e^{-in\pi}}{2i}$$

$$=\frac{\cos(n\pi)+i\sin(n\pi)-(\cos(n\pi)+i\sin(n\pi))}{2i}$$

$$=\frac{(-1)^n+0.i-(-1)^n+i.0}{2i}=0$$

- $$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{1}{2i}\left\{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}\right\}=\frac{1}{2i}\left\{e^{ix}.e^{-y}-e^{-ix}.e^{y}\right\}$$

$$=\frac{1}{2i}\left\{e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}(\cos x-i\sin x)\right\}=\frac{1}{2i}\left\{e^{-y}\cos x+ie^{-y}\sin x-e^{y}\cos x+ie^{y}\sin x\right\}$$

$$=\frac{1}{2i}\left\{i\sin x(e^{y}+e^{-y})-\cos x(e^{y}-e^{-y})\right\}=\sin x\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)-\underbrace{\frac{1}{i}}_{(i)}\cos x\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$$

$$\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)+i\cos\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$$

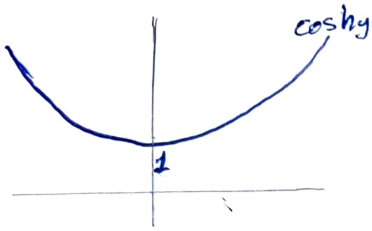
$\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$

- $\sin z=0$

$\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y=0+0i$

$\underbrace{\sin x}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{\cosh y}_{\in\mathbb{R}}=0$, $\underbrace{\cos x}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{\sinh y}_{\in\mathbb{R}}=0$ dır

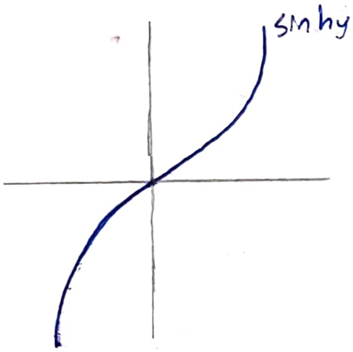
Devamı Arkada →



$\sin x = 0$ ve ya $\cosh y = 0$

$\cosh y > 0$ olduğundan $\cosh y = 0$ olamaz. Yani $\sin x = 0$ olmalıdır. $\sin x$ fonksiyonu ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = k\pi$ için sıfır olur. $\cos x . \sinh y = 0$ denkleminde $x = k\pi$ değerini yerine yazarsak $\underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k}.\sinh y = 0$ olur.

$(-1)^k \neq 0$ olduğundan $\sinh y = 0$ dır.



$\sinh y = 0 \iff y = 0$ dır.

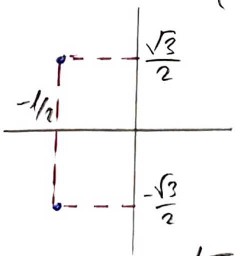
$$z = x + iy$$
$$= k\pi + i0$$
$$z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow \cos z = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\in \mathbb{R}}$ değerini çözünüz?

II. Y

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}$$
$$e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} = 1$$
$$e^{2iz} + 1 = e^{iz}$$
$$e^{2iz} - e^{iz} + 1 = 0, \quad e^{iz} = t$$
$$t^2 - t + 1 = 0$$
$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.1 = -3$$
$$t_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{iz} = \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}$$
$$\log e^{iz} = \log\left[\frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}\right]$$
$$iz = \log\left[\frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}\right]$$
$$z = -i\log\left[\frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}\right]$$
$$z = -i\left\{\ln\left|\frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}\right| + i\arg\left(\frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$
$$z = -i\left\{\ln|1| + i\left(\mp\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right\}$$



$$\arctan\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1/2} = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$
$$\arctan\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1/2} = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$z = \mp\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

$\Rightarrow$ $\cos z = \cosh 2$ denkleminı çözünüz?

IV $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = \cosh 2 + i0$

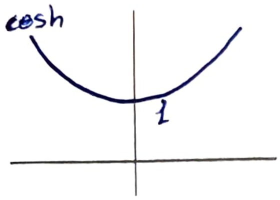
$\cos x \cosh y = \cosh 2$ ve $\sin x . \sinh y = 0$

$\sin x = 0$ ve ya $\sinh y = 0$ dır.

$\cos(k\pi) = \dfrac{\cosh 2}{\cosh y}$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = \dfrac{\cosh 2}{\cosh 0} > 1$ olacağından bu mümkün değildir. Yani $y=0$ olamaz.



$\cos(k\pi) = \dfrac{\cosh 2}{\cosh y}$

$(-1) \neq \dfrac{\cosh 2}{\cosh y}$ cosh fonksiyonu daima pozitif olacağından $\cos(k\pi) = -1$ olamaz

Çift fonksiyon

$1 = \dfrac{\cosh 2}{\cosh y}$ olmalıdır $\Leftrightarrow y = \mp 2$ dır. $z = x+iy$

$z = 2k\pi \mp 2i$

Kompleks Hiperbolik Fonksiyonlar

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \in \mathbb{R}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \in \mathbb{R}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \in \mathbb{R}$$

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere reel değerli hiperbolik fonksiyonlardır.

Kompleks değerli hiperbolik fonksiyonları tanımlamak için yukarıdaki tanımlarda $x \in \mathbb{R}$ yerine $z \in \mathbb{C}$ alınır. $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere;

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$$

• $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere kompleks trigonometrik fonksiyonlar ve hiperbolik fonksiyonlarda geçerli olan bağıntılar;

→ $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

$$\cos(iz) = \frac{e^{i.iz}+e^{-i.iz}}{2} = \frac{e^{-z}+e^{z}}{2} = \cosh z$$

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z$$

→ $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

$$\sin(iz) = \frac{e^{i.iz}-e^{-i.iz}}{2i} = \frac{e^{-z}-e^{z}}{\underset{(i)}{2i}} = -i\,\frac{e^{-z}-e^{z}}{2} = i\,\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = i\sinh z$$

→ $\cosh(-z) = \dfrac{e^{-z}+e^{z}}{2} = \cosh z$ ⟶ Çift fonksiyon

→ $\sinh(-z) = \dfrac{e^{-z}-e^{z}}{2} = -\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2} = -\sinh z$ ⟶ tek fonksiyon

⇒ $\sinh 4i$ sayısını $a+ib$ biçiminde yazınız?

$$\sinh 4i = \frac{e^{4i}-e^{-4i}}{2} = \frac{(\cos 4+i\sin 4)-(\cos 4-i\sin 4)}{2} = \frac{2i\sin 4}{2} = 0+i\sin 4$$

$a=0$
$b=\sin 4$

Kompleks Ters Trigonometrik ve Hiperbolik Fonksiyonlar

$x,y \in \mathbb{R}$ olmak üzere
$\sin y = x \iff y = \arcsin x$
$\cos y = x \iff y = \arccos x$

$z,w \in \mathbb{C}$ olmak üzere
$\sin w = z \iff w = \arcsin z$
$\cos w = z \iff w = \arccos z$
$\tan w = z \iff w = \arctan z$
$\cot w = z \iff w = \operatorname{arccot} z$

• $\sin w = \dfrac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i} = z \iff w = \arcsin z = ?$

$\sin w = z$

$\dfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2i} = z$

$e^{2iw}-1 = 2i\,e^{iw}.z$

$e^{2iw}-2ie^{iw}.z-1=0$

$e^{iw}=t$ ⟶ $t^2-2izt-1=0$

$\Delta = (-2iz)^2-4.1.(-1)$

$t_{1,2} = \dfrac{2iz \mp \sqrt{4-4z^2}}{2}$

$e^{iw} = t_{1,2} = iz \mp \sqrt{1-z^2}$

$\log e^{iw} = \log\left[iz \mp \sqrt{1-z^2}\right]$

$iw = \log\left[iz \mp \sqrt{1-z^2}\right]$

$w = -i\log\left[iz \mp \sqrt{1-z^2}\right] = \arcsin z$

- $w = \arccos z = -i\log\left[z \mp \sqrt{z^2-1}\right]$
- $\arctan z = w \iff \tan w = z$

$$\frac{\sin w}{\cos w} = \frac{\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}}{\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}} = z$$

$$iz = \frac{e^{2iw}-1}{e^{2iw}+1}$$

$$e^{2iw}-1 = e^{2iw}.iz+iz$$

$$e^{2iw}-e^{2iw}.iz = iz+1$$

$$e^{2iw}[1-iz] = 1+iz$$

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

$$\log e^{2iw} = \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

$$2iw = \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

$$w = \frac{1}{\underset{(-i)}{2i}}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

$$w = -\frac{i}{2}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) = i\log\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^{1/2}$$

- $w = \operatorname{arccot} z = ?$
- $\sinh w = z \iff w = \operatorname{arcsinh} z$

$$\frac{e^{w}-e^{-w}}{2} = z \iff w = ?$$

$$e^{w}-e^{-w} = 2z$$

$$e^{2w}-1 = 2ze^{w}$$

$$e^{2w}-2ze^{w}-1=0$$

$$e^{w}=t \longrightarrow t^2-2zt-1=0$$

$$\Delta = (-2z)^2-4.1.(-1)$$

$$t_{1,2} = \frac{2z \mp \sqrt{4+4z^2}}{2}$$

$$e^{w} = z \mp \sqrt{1+z^2}$$

$$\log e^{w} = \log\left[z \mp \sqrt{1+z^2}\right]$$

$$\operatorname{arcsinh} z = w = \log\left[z \mp \sqrt{1+z^2}\right]$$

$\Rightarrow$ $\arcsin(2^{1/2})$ nin bütün değerlerini hesaplayınız?

$$\arcsin z = -i\log\left[iz \mp \sqrt{1-z^2}\right]$$

$$\arcsin(2^{1/2}) = -i\log\left[i(2^{1/2}) \mp \sqrt{1-(2^{1/2})^2}\right]$$

$$= -i\log\left[i2^{1/2} \mp i\right]$$

$$= -i\log\left[i(2^{1/2} \mp 1)\right]$$

$$= -i\left\{\ln\left|i(2^{1/2} \mp 1)\right| + i\arg\left(i(2^{1/2} \mp 1)\right)\right\}$$

$$= -i\left\{\ln(\sqrt{2} \mp 1) + i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right\}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) - i\ln(\sqrt{2} \mp 1)$$

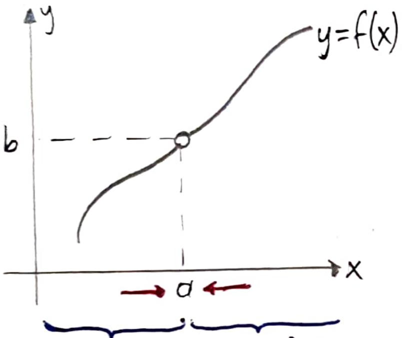
$\Rightarrow \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ olduğunu gösteriniz?

$$\left(\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\right)^2=\frac{e^{2z}+2e^{z}e^{-z}+e^{-2z}-e^{2z}+2e^{z}.e^{-z}-e^{-2z}}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$\Rightarrow \cos^2 z + \sin^2 z = 1$ olduğunu gösteriniz?

$$\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2$$

KOMPLEKS FONKSIYONLARIN LIMITI

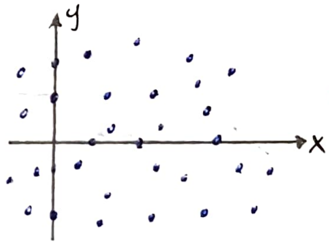


$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L_1 \qquad \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_2$

$x, y, a \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

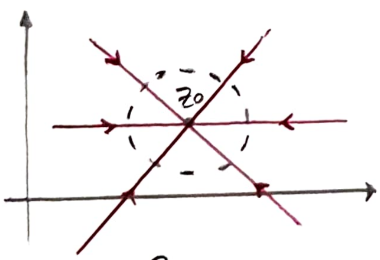
Bir kompleks fonksiyonun limiti: $z_0 \in \mathbb{C}$ olsun. z'ler z_0'a yaklaşırken $f(z)$'lerde L sayısına yaklaşırsa f fonksiyonun z_0'daki limiti L dir denir. Ve $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L$ ile gösterilir.



1- Bir kompleks fonksiyonun limitinin olması için o noktada tanımlı olması gerekmez.

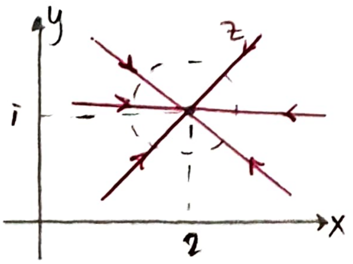
2- Fonksiyonun limiti varsa limit tek bir tanedir.

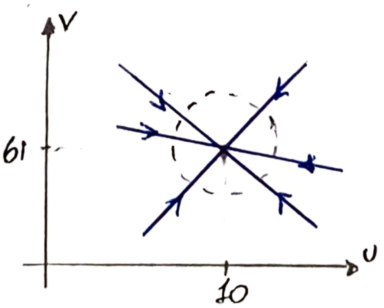
3-



z_0 noktasına farklı doğrular boyunca yaklaşır ve birbirinden farklı limitler elde edilirse fonksiyonun o noktadaki limiti yoktur.

$\Rightarrow \lim\limits_{z\to 2+i} 5z+1 = ? \longrightarrow 5(2+i)+1 = \underbrace{10+6i}_{\in \mathbb{C}}$





$\Rightarrow \lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^2+1}{z^2+z+1-i} = ? \longrightarrow \dfrac{i^2+1}{i^2+i+1-i} = \dfrac{0}{0}$ Belirsizliği

$\lim\limits_{z\to i} \dfrac{(z+i).(z-i)}{z^2+z+1-i}$

$$\begin{array}{r|l} z^2+z+1-i & z-i \\ \cline{2-2} -/\ z^2-zi & z+(1+i) \\ \hline z(1+i)+1-i & \\ -/\ z(1+i)+1-i & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\lim\limits_{z\to i} \dfrac{(z+i)(z-i)}{(z-i)(z+1+i)} = \lim\limits_{z\to i} \dfrac{z+i}{z+1+i} = \dfrac{2i}{1+2i} = \dfrac{2i+4}{5}$

$(1-2i)$

Teorem: $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun z_0 noktasındaki limiti;

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)+iv(x,y)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + i \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = L = a+ib$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b$$

Limitin Özellikleri

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L_1 \quad , \quad \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = L_2$ olsun

1- $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z) \mp g(z)] = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \mp \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = L_1 \mp L_2$

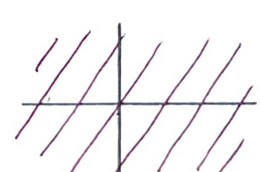
2- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z).g(z) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \cdot \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = L_1 . L_2$

3- $\lim\limits_{z\to z_0} cf(z) = c \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \quad , \ c \in \mathbb{C}$ sabit

4- $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)} = \dfrac{L_1}{L_2} \quad , \ L_2 \neq 0$

5- $\lim\limits_{z\to \infty} \dfrac{1}{z} = 0$ (Sonsuzun işareti yok)

$\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{z} = \infty$



Kompleks sayılarda sonsuzluk bir düzlem belirtir.

$\Rightarrow \lim\limits_{z\to 2i} (z^2-\bar{z}) = ?$

I. Y. $\lim\limits_{z\to 2i} (2i)^2 - (\overline{2i}) = -4+2i$

II. Y. $f(z) = z^2 - \bar{z}$

$f(x+iy) = (x+iy)^2 - (\overline{x+iy})$

$= x^2 - y^2 - x + 2ixy + iy$

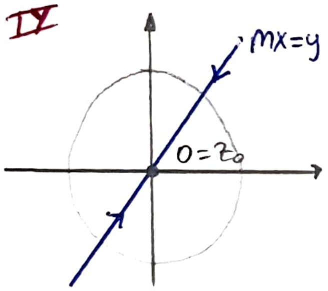
$f(x+iy) = \underbrace{x^2-y^2-x}_{u(x,y)} + i\underbrace{(2xy+y)}_{v(x,y)}$

$z \to 2i$
$x+iy \to 0+2i$
$x \to 0$
$y \to 2$

$$\lim_{z\to 2i} f(z) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \left[x^2-y^2-x+i(2xy+y)\right] = -4+2i$$

$\Rightarrow \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}}{z}$ limitini (varsa) bulun?

I. Y.



$z \to 0$
$x+iy \to 0+0i$
$x \to 0$
$y \to 0$

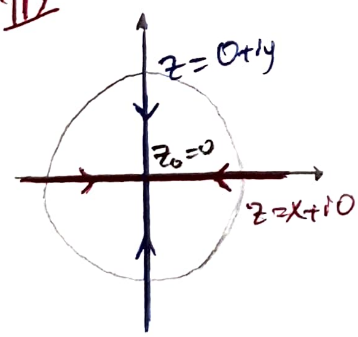
$$\lim_{z\to z_0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-iy}{x+iy}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x-imx}{x+imx}$$

$$= \frac{(1-im)}{(1+im)}$$

m değiştikçe sonuç değişir. Dolayısıyla limit yoktur.

II. Y.



x-ekseni boyunca yaklaşalım

$z \to z_0 = 0$
$x+iy \to 0+0i$
$x+i0 \to 0+0i$
$x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overline{x+i0}}{x+i0} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

y-ekseni boyunca yaklaşalım

$z \to 0$
$0+iy \to 0+i0$
$y \to 0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\overline{0+iy}}{0+iy} = \lim_{y\to 0} \frac{-iy}{iy} = -1$$

Limit Yok

$\Rightarrow f(z) = \dfrac{z^2}{|z|^2}$ fonksiyonu verilsin

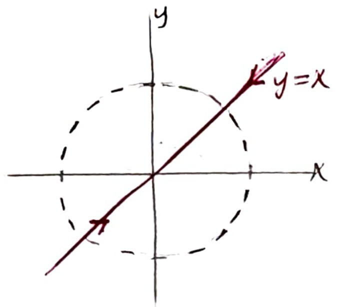
a) $y=x$ doğrusu boyunca $z\to 0$ için $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ yi bulunuz?

b) $y=2x$ doğrusu boyunca $z\to 0$ için $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ yi bulunuz?

c) $y=x^2$ doğrusu boyunca $z\to 0$ için $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ yi bulunuz?

d) $z\to 0$ için $f(z)$'nin limiti hakkında ne söylene bilir?

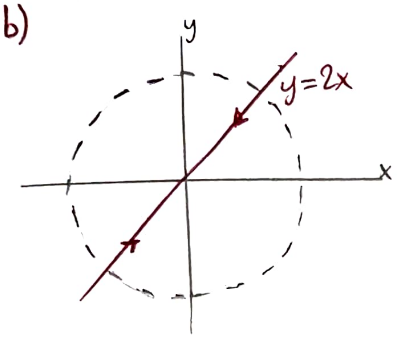
a) $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z^2}{|z|^2} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z^2}{z.\bar{z}} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z}{\bar{z}}$



$z \to 0$
$x+iy \to 0+0i$
$x \to 0$
$y \to 0$

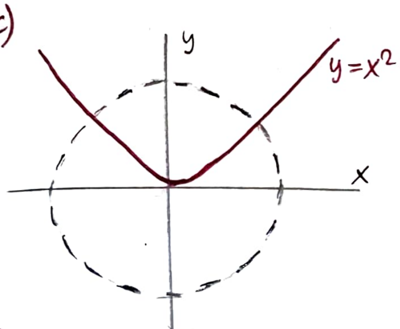
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+iy}{x-iy} = \lim_{x\to 0} \frac{x+ix}{x-ix} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+i)}{x(1-i)} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{2i}{2} = i$$

b)



$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+iy}{x-iy} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+2i)}{x(1-2i)} = \frac{1+2i}{1-2i} = -\frac{3}{5}+i\frac{4}{5}$$

c)



$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+iy}{x-iy} = \lim_{x\to 0} \frac{x+ix^2}{x-ix^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+ix)}{x(1-ix)} = 1$$

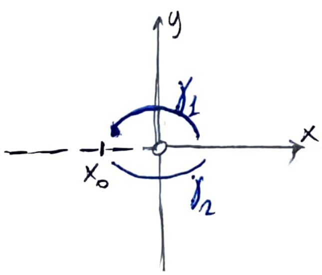
d) Farklı yollar boyunca sıfıra yaklaştığımızda farklı sonuçlar bulduğumuzdan $f(z)=\dfrac{z^2}{|z|^2}$ nın $z_0=0$ için limiti yoktur.

$\Rightarrow$ $f(z)=Arg(z)$ fonksiyonunun negatif reel eksen üzerindeki noktalarda limitini (varsa) bulunuz?

$-\pi < \underbrace{Arg\, z}_{w} \leq \pi$

$Arg\, z : \mathbb{C}-\{0\} \to \mathbb{R}$

$\arctan \dfrac{y}{x}$



γ_1 eğrisi boyunca $\lim\limits_{z\to x_0} Arg\, z = \pi$

γ_2 eğrisi boyunca $\lim\limits_{z\to x_0} Arg\, z = -\pi$

x_0 noktasında limit yok yani $Arg\, z$ 'nın negatif reel eksen üzerinde limiti yoktur.

$$\Rightarrow \lim_{z\to\pi/4} \frac{\cos 2z}{\underbrace{\cosh iz}_{\cos z} + \underbrace{i\sinh iz}_{i\sin z}} = \lim_{z\to\pi/4} \frac{\cos 2z}{\cos z - \sin z} \overset{0/0}{=} \lim_{z\to\pi/4} \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{\cos z - \sin z}$$

$$= \lim_{z\to\pi/4} \frac{(\cos z - \sin z)(\cos z + \sin z)}{\cos z - \sin z} = \sqrt{2}$$

KOMPLEKS FONKSİYONLARIN SÜREKLİLİĞİ

$f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \to f(z) = w$ fonksiyonu verilsin

$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow$ f fonksiyonu z_0 da süreklidir.

1- f, z_0 da tanımlı olmalıdır.
2- Fonksiyonun z_0 da limiti mevcut olmalıdır.
3- Tanımlı olduğu değer ile limit değeri birbirine eşit olmalıdır.

1, 2 ve 3 şartlarından en az biri sağlamazsa f fonksiyonu z_0 da sürekli değildir.

Özellikler:

- İki sürekli fonksiyonun toplamı, farkı, çarpımı ve sabitle çarpımı süreklidir.
- f ve g fonksiyonları sürekli fonksiyonlar ise f/g fonksiyonu da $g \neq 0$ için süreklidir.
- $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ kompleks terimli polinom fonksiyonu $\forall z \in \mathbb{C}$ için süreklidir.
- $f(z)$ sürekli bir fonksiyon olsun, $Re[f(z)]$, $Im[f(z)]$, $|f(z)|$ fonksiyonlarıda süreklidir.
- $f(z)$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\overline{f(z)}$ fonksiyonuda süreklidir.

$\Rightarrow f(z) = \dfrac{z^3+3}{z^2+4}$ fonksiyonunun sürekli olduğu kümeyi belirtiniz?

$z^3+3 \longrightarrow$ polinom fonksiyonu, $\forall z \in \mathbb{C}$ kümesi için süreklidir.

$z^2+4 \longrightarrow$ polinom fonksiyonu, $\forall z \in \mathbb{C}$ kümesi için süreklidir.

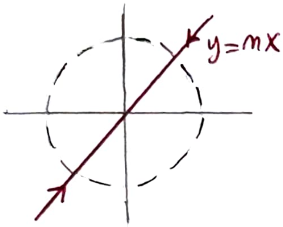
$z^2+4=0 \Leftrightarrow z = \mp 2i$ olduğundan f fonksiyonu

$\mathbb{C} - \{-2i, 2i\}$ kümesinde süreklidir.

$\Rightarrow$ $f(z)=\begin{cases} \dfrac{z.\operatorname{Re}z}{|z|}, & z\neq 0 \text{ ise} \\ 0, & z=0 \text{ ise}\end{cases}$ fonksiyonu verilsin. $z_0=0$'da f sürekli midir?

- $f(0)=0$ ilk şartı sağlıyor.

IV • $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z\operatorname{Re}z}{|z|}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(x+iy)x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+imx)x}{\sqrt{x^2+m^2x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1+m)}{|x|\sqrt{1+m^2}}$



$z\to 0$
$x+iy\to 0+i0$
$x\to 0$
$y\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1+m)}{x\sqrt{1+m^2}}=0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1+m)}{-x\sqrt{1+m^2}}=0$

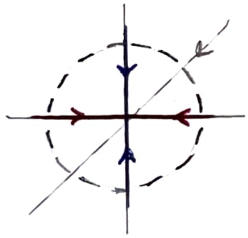
- $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z\operatorname{Re}z}{|z|}=0=f(0)$ $\Rightarrow$ f fonksiyonu 0'da süreklidir.

$\Rightarrow$ $f(z)=\begin{cases} \dfrac{x^2+iy^2}{|z|^2}, & z\neq 0 \text{ ise} \\ 1, & z=0 \text{ ise}\end{cases}$ f(z) fonksiyonu $z_0=0$'da sürekli midir?

- $f(0)=1$ ilk şartı sağlıyor.

IV • $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{x^2+iy^2}{|z|^2}$

x ekseni boyunca yaklaş
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+i0^2}{(\sqrt{x^2+0^2})^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$



$z=0+iy$
$0+iy\to 0+i0$
$y\to 0$

$z=x+i0$
$x+i0\to 0+i0$
$x\to 0$

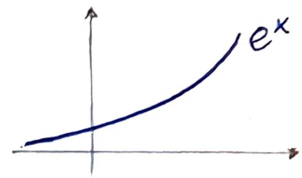
y ekseni boyunca yaklaş
$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0^2+iy^2}{(\sqrt{0^2+y^2})^2}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{iy^2}{y^2}=i$

Farklı sonuçlar bulduğumuzdan sıfırda f fonksiyonunun limiti yok ve sıfırda f fonksiyonu sürekli değildir.

$\Rightarrow f(z) = \underbrace{xe^{y}}_{u(x,y)} + i\underbrace{y^2e^{-x}}_{v(x,y)}$ fonksiyonun sürekli olduğu kümeyi bulunuz?

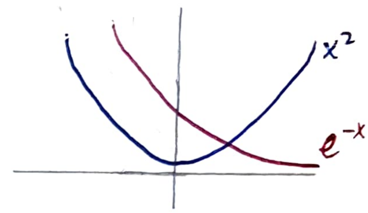
1. $u(x,y) = x\,e^{y}$; $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ için sürekli
İki sürekli fonksiyonun çarpımı sürekli

$\forall x\in\mathbb{R}$ için sürekli $\qquad \forall y\in\mathbb{R}$ için sürekli



2. $v(x,y) = y^2 e^{-x}$; $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ için sürekli

$\forall y\in\mathbb{R}$ için sürekli $\qquad \forall x\in\mathbb{R}$ için sürekli



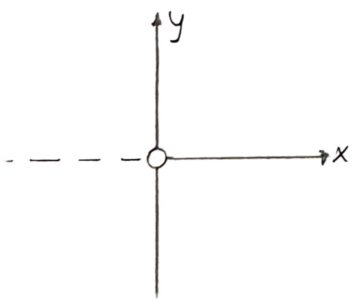
1+2. $f(z)$ fonksiyonu $\forall (x,y)$ için süreklidir.

Teorem: f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de sürekli, g fonksiyonu $\mathbb{C}$ de sürekli ise $(f\circ g)$, $(g\circ f)$ fonksiyonları da $\mathbb{C}$ de süreklidir.

$\Rightarrow h(z) = u(x,y) + v(x,y)$ fonksiyonu tüm düzlemde sürekli olmak üzere $f(z) = Arg\,(h(z))$ fonksiyonunun sürekli olduğu kümeyi bulunuz? Bundan yararlanarak $f(z) = Arg\,(2z+1)$ fonksiyonunun sürekli olduğu kümeyi bulunuz?

$f(z) = Arg\,(h(z)) \longrightarrow f_1 = Arg$

$\qquad\qquad\qquad\quad \longrightarrow f_2 = h \quad \forall z\in\mathbb{C}$ için sürekli



$Arg\, z : \mathbb{C} - \{(x,y) : x \le 0,\ y = 0\}$
kümesinde süreklidir.

$Arg\,(h(z)) = Arg\,(u(x,y) + iv(x,y)) : \mathbb{C} - \{u(x,y) \le 0,\ v(x,y) = 0\}$
kümesinde süreklidir.

$Arg\,(\underbrace{2z+1}_{\substack{\forall z\in\mathbb{C} \\ \text{için} \\ \text{sürekli}}}) = Arg\,(\underbrace{2x+1}_{u(x,y)} + i\underbrace{2y}_{v(x,y)})$

$\mathbb{C} - \{(x,y) : 2x+1 \le 0,\ 2y = 0\}$ kümesinde süreklidir.

DİFERANSİYELLENEBİLME

Bir kompleks f fonksiyonu $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olarak verilsin. $z_0 \in A$ bir iç nokta olsun. Eğer;

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

limiti mevcutsa f fonksiyonu A üzerinde diferansiyellenebilir denir. Bu limit değerine f'in z_0 da türevi denir. Ve $f'(z_0)$ ile gösterilir.

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \frac{df}{dz}\bigg|_{z=z_0}$$

Bu limit tanımına denk olarak;

$h = z - z_0$

$z \to z_0$

$h \to 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0)$$

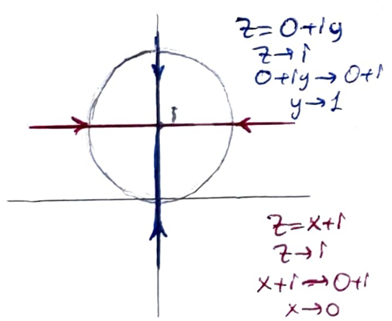
İfadesine f'in z_0 noktasındaki türevi denir.

⇒ $f(z) = z^2$ fonksiyonun $z_0 = 2$ noktasındaki türev değerinin 4 olduğunu gösteriniz?

$$f'(2) = \lim_{z \to 2} \frac{z^2-4}{z-2} = \frac{(z-2)(z+2)}{z-2} = 4$$

⇒ $f(z) = \bar{z}$ fonksiyonu verilsin $f'(i)$ değerini varsa hesaplayınız?

$$f'(i) = \lim_{z \to i} \frac{\bar{z} - \bar{i}}{z - i} = \lim_{z \to i} \frac{\bar{z} + i}{z - i}$$



x için;

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\overline{x+i})+i}{x+i-i}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x-i+i}{x} = 1$$

y için;

$$\lim_{y \to 1} \frac{(\overline{0+iy})+i}{0+iy-i}$$

$$\lim_{y \to 1} \frac{i(-y+1)}{i(y-1)} = -1$$

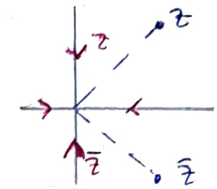
i'de limit mevcut değil dolayısıyla $f'(i)$ türevi mevcut değil

⇒ $f(z)=|z^2|=|z|^2$ verilsin. $f'(0)=0$ olduğunu ve $z_0\neq 0$ için $f'(z_0)$ ın mevcut olmadığını gösteriniz?

$z_0=0$ olsun.

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=f'(0)$$

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2-0}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{z.\bar{z}}{z}=\lim_{z\to 0}\bar{z}=0$$



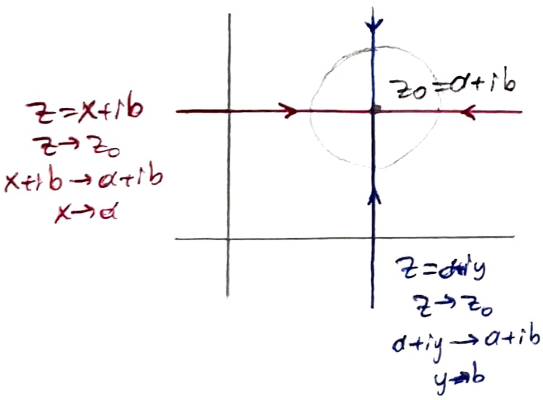
$z_0\neq 0$ olsun

$z_0=ai+b\neq$ olsun

$a\neq 0$ ve ya $b\neq 0$ dır.

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0}$$



x için;
$$\lim_{x\to a}\frac{|x+ib|^2-|a+ib|^2}{x+ib-(a+ib)}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2+b^2-a^2-b^2}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a).(x+a)}{x-a}=2a$$

y için;
$$\lim_{y\to b}\frac{|a+iy|^2-|a+ib|^2}{a+iy-(a+ib)}$$

$$\lim_{y\to b}\frac{a^2+y^2-a^2-b^2}{iy-ib}$$

$$\lim_{y\to b}\frac{(y-b)(y+b)}{i(y-b)}=\frac{2b}{i}=-2bi$$

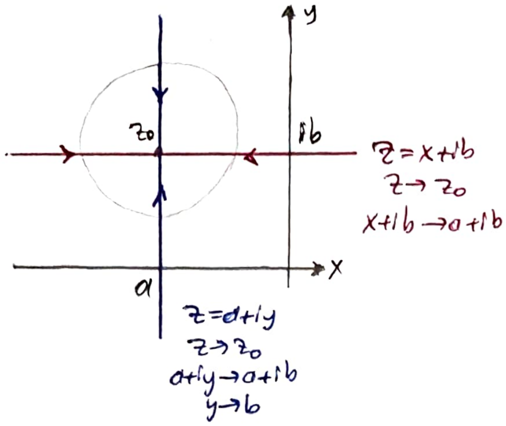
$\forall a,b\in\mathbb{R}$ için $2a\neq -2bi$ olduğundan limit mevcut değildir.

$f(z)=|z|^2$ fonksiyonu $z_0\neq 0$ için türevlenemez.

⇒ $f(z)=\mathrm{Re}\,z$, $f'(z_0)$ mevcut ise bulunuz? $z_0\in\mathbb{C}$

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$f'(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{Re}\,z-\mathrm{Re}\,z_0}{z-z_0}$$



$$f'(z_0)=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x+ib-a-ib}=1$$

$$f'(z_0)=\lim_{y\to b}\frac{a-a}{a+iy-a-ib}$$

$$=\lim_{y\to b}\frac{0}{bi(y-b)}=0$$

Bez, $z_0\in\mathbb{C}$ için türevlenemez.

Teorem: f ve g fonksiyonları $z_0\in\mathbb{C}$ noktasında diferansiyellene bilir fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda;

1- $(f\mp g)(z_0)=f'(z_0)\mp g'(z_0)$

2- $\alpha\in\mathbb{C}$ sabit $(\alpha f)'(z_0)=\alpha . f'(z_0)$

3- $(f.g)'(z_0)=f'(z_0).g(z_0)+f(z_0).g'(z_0)$

4- $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0)=\dfrac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}\ ,\ g(z_0)\neq 0$

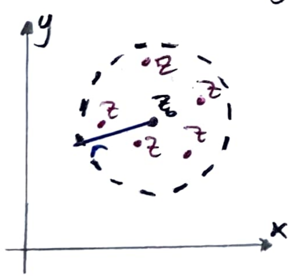
5- $(f\circ g)'(z_0)=g'(z_0).f'(g(z_0))$

6- $(f\circ g\circ h)'(z_0)=h'(z_0)g'(h(z_0))f'(g(h(z_0)))$

7- f fonksiyonu türevlenebilirse f kesinlikle süreklidir. Sürekli ise türevli olması gerekmez.

ANALİTİK FONKSİYONLAR

Bir kompleks fonksiyonun aralığı $B(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<r\}$ kümesine z_0'ın r komşuluğu denir.



$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

limiti mevcutsa f fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellene bilirdir.

Analitiklik: $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bir kompleks fonksiyon verilsin. f fonksiyonu z_0 noktasının herhangi komşuluğunda diferansiyellene bilirse (yani $|z-z_0|<r$ kümesindeki her z için diferansiyellene bilirse) f fonksiyonu z_0 noktasında analitiktir denir.

- f fonksiyonu analitikse diferansiyellenebilir.dir. Tersi doğru olmayabilir. Yani bir z_0 noktasında diferansiyellenebilirse z_0 noktasında analitik olmak zorunda değildir.

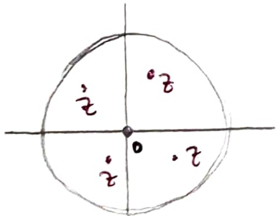
$\Rightarrow f(z)=z^3$ fonksiyonunun her $z\in\mathbb{C}$ için diferansiyellene bilir ve analitik olduğunu gösteriniz?

Her hangi bir $z_0\in\mathbb{C}$ verilsin

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{z^3-z_0^3}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)(z^2+zz_0+z_0^2)}{(z-z_0)}=3z_0^2=f'(z_0)$$

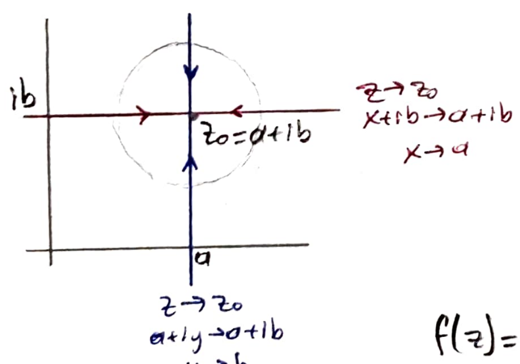
- $f(z)=z^3$, $\forall z\in\mathbb{C}$ için diferansiyellenebilir.
- $\forall r>0$, $\forall z\in\mathbb{C}$ için $|z-z_0|<r$ kümesinde z^3 analitiktir.
- $p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0$ kompleks polinom fonksiyonu analitiktir.

$\Rightarrow f(z)=|z|^n$ fonksiyonu için $f'(0)$ mevcuttur. $z_0\neq 0$ için $f'(z_0)$ mevcut değildir. Yani sıfır dışında diferansiyellene bilir değildir.



Her $|z-\overset{z_0}{0}|<r$ kümesinde diferansiyellenebilir olduğu hiçbir z sayısı olmadığından $|z|^2$, sıfırda analitik değildir.
$z_0\in\mathbb{C}$ için $|z|^2$ diferansiyellene bilir olmadığından analitikde değildir.

$\Rightarrow f(z)=\bar{z}$ $\quad z_0\in\mathbb{C}$ noktasında diferansiyellene bilir mi? Analitik mi?



$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\bar{z}-\bar{z_0}}{z-z_0}$$

$$\lim_{y\to b}\frac{\overline{a+iy}-\overline{a+ib}}{a+iy-(a+ib)}=\lim_{y\to b}\frac{i(-y+b)}{i(y-b)}=-1$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\overline{x+ib}-(\overline{a+ib})}{x+ib-(a+ib)}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=1$$

$f(z)=\bar{z}$, $z_0\in\mathbb{C}$ noktasında diferansiyellene bilir değildir.
$\bar{z}$ hiçbir noktada türevlenemez. Dolayısıyla analitik olmaz.

Özellikler

f ve g fonksiyonları $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında analitik olsunlar.

1- $f \mp g$, $f.g$, f/g, $g \neq 0$, $c.f$ (c sabit), $f\circ g$, $g\circ f$ fonksiyonlarıda analitiktir.

2- $\forall z \in \mathbb{C}$ için analitik olan fonksiyonlara yani tüm düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam (entire) fonksiyonu denir.

3- Polinomlar, $\sin z$, $\cos z$, e^z fonksiyonları tam fonksiyonlar.

$\Rightarrow f(z) = \dfrac{z}{1+z}$ fonksiyonu analitik midir?

$p(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$ için analitik

$q(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$ için analitik

$f(z)$, $z \neq -1$ için analitiktir.

$f(z) = u(x,y) + v(x,y)$ fonksiyon verildiğinde diferansiyellenebilir olma ve analitik kavramlar:

Cauchy-Riemann Denklemleri

$f(z)$ fonksiyonu $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında diferansiyellenebilirse bu noktada u_x, u_y, v_x, v_y kısmi türevleri var ve

$$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)$$
$$u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)$$

ise Cauchy-Riemann denklemi sağlanır.

(i) $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu olmak üzere Cauchy-Riemann denklemleri denildiğinde

$$u_x(x,y) = v_y(x,y)$$
$$u_y(x,y) = -v_x(x,y)$$

denklem sistemi anlaşılır. Cauchy-Riemann denklemlerinin bir $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında sağlaması

$$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)$$
$$u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)$$

eşitliklerinin sağlanması demektir. Eşitliklerden en az biri sağlanmazsa z_0'da Cauchy-Riemann denklemini sağlamaz.

(ii) $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında diferansiyellenebilirse bu noktada Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır.

(iii) $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında Cauchy-Riemann denklemini sağlamazsa z_0'da türevlenemez.

(iv) $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ fonksiyonu $z_0=x_0+iy_0$ noktasında Cauchy-Riemann denklemini sağlarsa diferansiyellenebilir olduğu kesin değildir.

$\Rightarrow f(z)=z^2$ fonksiyonu $z_0\in\mathbb{C}$ noktasında diferansiyellenebilirdir. Diferansiyellenebilir olduğundan Cauchy-Riemann denklemini sağlar.

$z=x+iy \qquad u(x,y)=x^2-y^2 \quad , \quad v(x,y)=2xy$ dır.

$u_x(x,y)=2x \qquad v_x(x,y)=2y$

$u_y(x,y)=-2y \qquad v_y(x,y)=2x$

$z_0=x_0+iy_0 \qquad \left.\begin{array}{l} u_x(x_0,y_0)=2x_0=v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0)=-2y_0=-v_x(x_0,y_0) \end{array}\right\}$ Cauchy-Riemann denklemini sağlar

$\Rightarrow f(z)=\bar{z}$ fonksiyonu $z_0\in\mathbb{C}$ noktasında Cauchy-Riemann denklemini sağlarmı?

$f(z)=\bar{z}$ hiçbir noktada diferansiyellenebilir değildir.

$z=x+iy$ olmak üzere $u(x,y)=x \;,\; v(x,y)=-y$ dir.

$u_x(x,y)=1 \;,\; u_y(x,y)=0 \;,\; v_x(x,y)=0 \;,\; v_y(x,y)=-1$

$z_0=x_0+iy_0$ için $u_x(x_0,y_0)=1\neq-1=v_y(x_0,y_0)$

$u_y(x_0,y_0)=0=-v_x(x_0,y_0)$

Cauchy-Riemann denklemlerinin sağlanması diferansiyellenebilir olmayı sağlamaz.

$\Rightarrow z=x+iy$ olmak üzere;

$$f(z)=\begin{cases} \dfrac{2x^3-y^3}{2x^2+y^2}+i\,\dfrac{2x^3+y^3}{2x^2+y^2} & , z\neq0 \\ 0 & , z=0 \end{cases}$$

fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon $z_0=0$ noktasında Cauchy-Riemann denklemini sağlar. $z_0=0$ noktasında türevlenemez. Gösterin?

Reel değişkenli fonksiyonlardaki kısmi türevinin tanımından

$$u_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{u(h,0)-u(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h-0}{h}=1$$

$$u_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{u(0,h)-u(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-h-0}{h}=-1$$

$$v_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{v(h,0)-v(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h-0}{h}=1$$

$$v_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{v(0,h)-v(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h-0}{h}=1$$

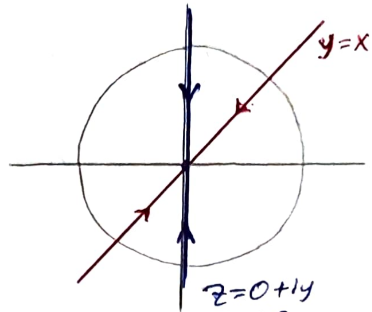
$u_x(0,0)=v_y(0,0)$

$u_y(0,0)=-v_x(0,0)$

Cauchy-Riemann denklemini sağlar

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}$$

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}$$



$z=x+ix$
$z\to 0$
$x+ix\to 0+i0$
$x\to 0$

y eksenınde

$$\lim_{y\to 0}\frac{-y+iy}{iy}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{y(-1+i)}{yi}=1+i$$

$z=0+iy$
$z\to 0$
$0+iy\to 0+i0$
$y\to 0$

y=x ekseninde

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3-x^3}{2x^2+x^2}+i\,\frac{2x^3+x^3}{2x^2+x^2}}{x+ix}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x+ix}{x+ix}=\lim_{x\to 0}\frac{1/3+i}{1+i}=\frac{1/3+i}{1+i}$$

f fonksiyonu $z_0=0$ noktasında diferansiyellenebilir değildir.

Cauchy-Riemann denklemlerini sağlayan fonksiyonlar ne zaman diferansiyellenebilir olur?

Teorem: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ fonksiyonu verilsin $f: A\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ olmak üzere $z_0=x_0+iy_0$ noktası $\{z\in\mathbb{C}: |z-z_0|<r\}\subset A$ özelliğini sağlasın ve $f(z)$ bu noktada sürekli olsun. z_0 noktasının bir komşuluğunda u_x, u_y, v_x, v_y kısmi türevleri var ve bu kısmi türevler sürekli ise ayrıca bu noktada Cauchy-Riemann denklemleri sağlanırsa $f'(z_0)$ vardır ve

$$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_y(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)-iv_x(x_0,y_0)\quad \text{dır.}$$

$\Rightarrow$ $f(z)=2xy+i(x^2+y^2)$ fonksiyonunun $z_0=i$ ve $z_1=1+i$ noktalarında diferansiyellenebilirlik durumunu araştırınız. Diferansiyellenebilirse türevini bulunuz? (Cauchy-Riemann denklemlerini kullanınız)

$z_0=i=0+i$

$$u(x,y)=2xy\quad,\quad v(x,y)=x^2+y^2$$

$$\left.\begin{matrix} u_x(x,y)=2y & v_x(x,y)=2x \\ u_y(x,y)=2x & v_y(x,y)=2y \end{matrix}\right\}\quad \begin{matrix} u_x(0,1)=2=v_y(0,1) \\ u_y(0,1)=0=-v_x(0,1)\end{matrix}$$

Cauchy-Riemann denklemini sağlar

$f'(i)$ mevcuttur.

$$f'(i)=u_x(0,1)+iu_y(0,1)=2+i0=2$$
$$=v_y(0,1)-iv_x(0,1)=2-i.0=2$$

$z_1 = 1+i = 1+i.1$ $\quad u(x,y) = 2xy \quad , \quad v(x,y) = x^2+y^2$

$u_x(x,y) = 2y \qquad v_x(x,y) = 2x$

$u_y(x,y) = 2x \qquad v_y(x,y) = 2y$

$\left.\right\}$ $u_x(1,1) = 2 = v_y(1,1)$

$u_y(1,1) = 2 \neq -v_x(1,1) = -2$

Cauchy-Riemann denklemlerini sağlamadığından $f'(1+i)$ mevcut değildir.

sonuç → $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitikse diferansiyellenebilirdir. Diferansiyellenebilirse Cauchy-Riemann denklemini sağlar. Dolayısıyla $f(z)$ analitikse Cauchy-Riemann denklemini sağlar.

$$\sqrt{a+bi} = \begin{cases} \mp\left(\sqrt{\dfrac{|z|+a}{2}} + i\sqrt{\dfrac{|z|-a}{2}}\right), & b>0 \\ \mp\left(\sqrt{\dfrac{|z|+a}{2}} - i\sqrt{\dfrac{|z|-a}{2}}\right), & b<0 \end{cases}$$