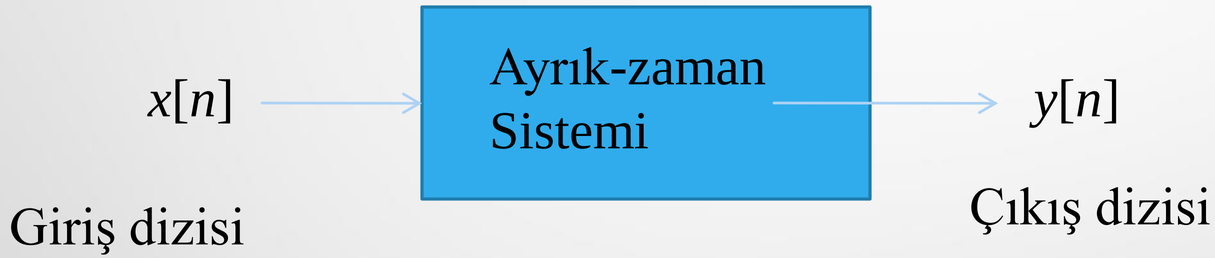
Ayrık-Zaman Sistemler

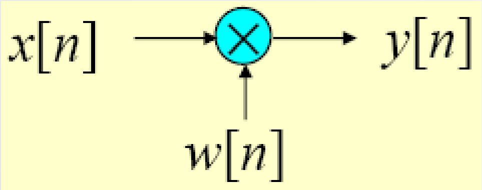
Bir ayrık-zaman sistemi, bir giriş dizisi $x[n]$'yi işleyerek daha iyi özelliklere sahip bir çıkış dizisi $y[n]$ oluşturur.

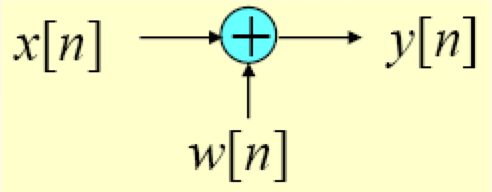
Çoğu uygulamalarda ayrık-zaman sistemi bir giriş ve bir çıkıştan oluşur.



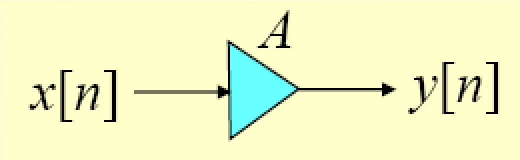
Ayrık-Zaman Sistemlere Örnekler

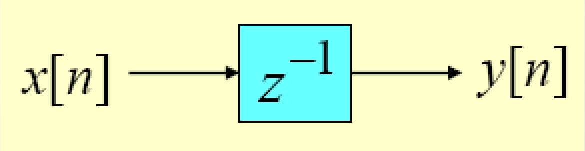
2-giriş, 1-çıkışlı ayrık-zaman sistemler

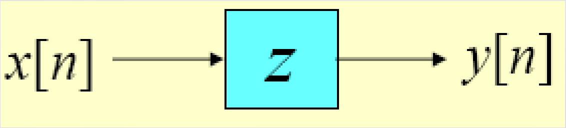




1-giriş, 1-çıkışlı ayrık-zaman sistemler

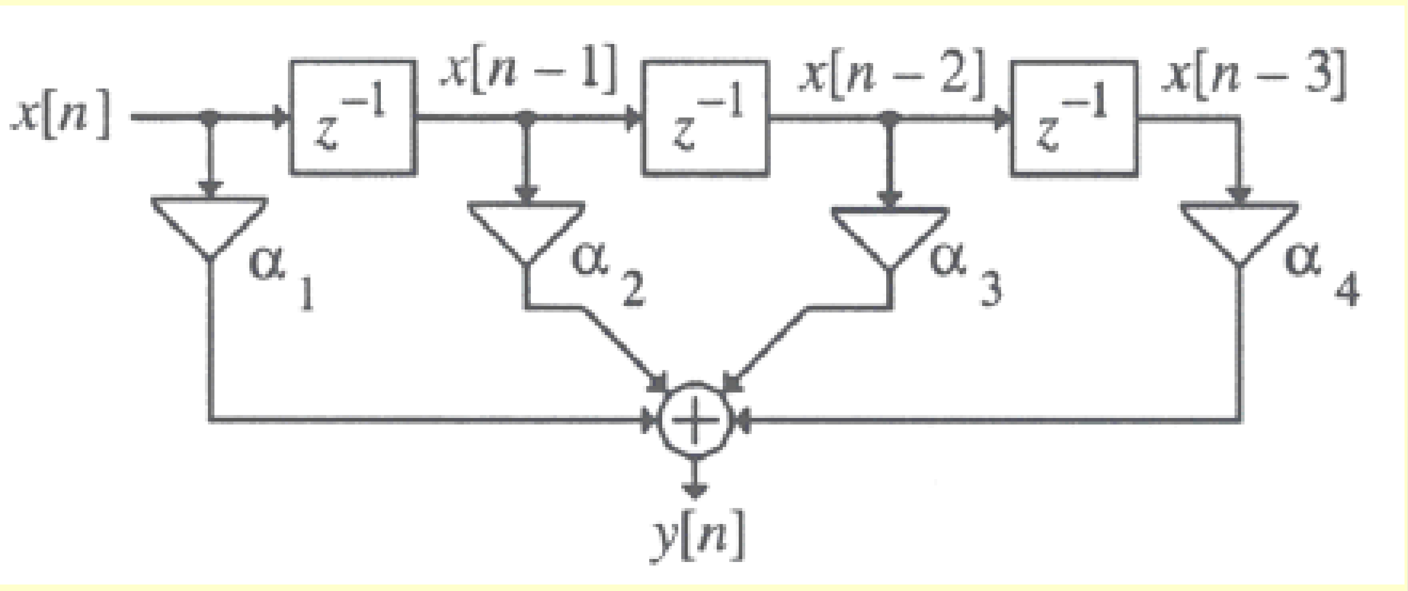






Ayrık-Zaman Sistemlere Örnekler

1-girişli 1-çıkışlı daha karmaşık bir sistem aşağıda verilmiştir.



Ayrık-Zaman Sistemlere Örnekler

Toplayıcı:

n anındaki çıkış *y*[*n*], *n* anındaki giriş *x*[*n*] ile çıkışın *n*-1 anındaki değerinin toplamına eşittir. *N*-1 anındaki çıkış *y*[*n*-1] ise -∞'dan *n*-1'e kadar olan girişlerin toplamına eşittir. Diğer bir deyişle, sistem giriş değerlerini toplayarak çıkışa vermektedir. Sistemin giriş ile çıkışı arasındaki ilişkiyi iki şekilde yazmak mümkündür . İkinci gösterilim nedensel işaretler için kullanılır ve *y*[-1]'e başlangıç koşulu denir.

$$y[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{n} x[\ell]$$

$$= \sum_{\ell=-\infty}^{n-1} x[\ell] + x[n] = y[n-1] + x[n]$$

$$y[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{-1} x[\ell] + \sum_{\ell=0}^{n} x[\ell]$$

$$= y[-1] + \sum_{\ell=0}^{n} x[\ell], \;\; n \geq 0$$

Ayrık-Zaman Sistemlere Örnekler

M-nokta Kayan Ortalama Alıcı:

Bu sistem, verideki rastgele değişimleri yumuşatmada kullanılır. Giriş sınırlı bir dizi ise çıkış da sınırlı bir dizi olur. Sistem aşağıdaki denklemle tanımlanır:

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

Denklemden görüldüğü gibi çıkışı hesaplamak için *M*-1 toplama, 1 bölme ve girişin geçmişteki *M*-1 adet örneğinin hafızada saklanması gereklidir. Denklemi hesap yükü daha az olacak şekilde yeniden düzenlemek mümkündür.

Ayrık-Zaman Sistemlere Örnekler

$$y[n] = \frac{1}{M}\left(\sum_{\ell=0}^{M-1} x[n-\ell] + x[n-M] - x[n-M]\right)$$

$$= \frac{1}{M}\left(\sum_{\ell=1}^{M} x[n-\ell] + x[n] - x[n-M]\right)$$

$$= \frac{1}{M}\left(\sum_{\ell=0}^{M-1} x[n-1-\ell] + x[n] - x[n-M]\right)$$

O halde,

$$y[n] = y[n-1] + \frac{1}{M}\left(x[n] - x[n-M]\right)$$

Ayrık-Zaman Sistemlere Örnekler

Değiştirilmiş M-nokta kayan ortalama alıcı sisteminin gerçekleştirilmesi için 2 toplama ve 1 bölme gereklidir.

Sistemin uygulamasına örnek olarak, gürültülü bir işarette gürültünün azaltılmasını ele alalım. $s[n]$ gürültüsüz işaret, $d[n]$ gürültü ve $x[n]$ gözlemlenen gürültülü işaret olmak üzere

$$x[n] = s[n]+d[n]$$

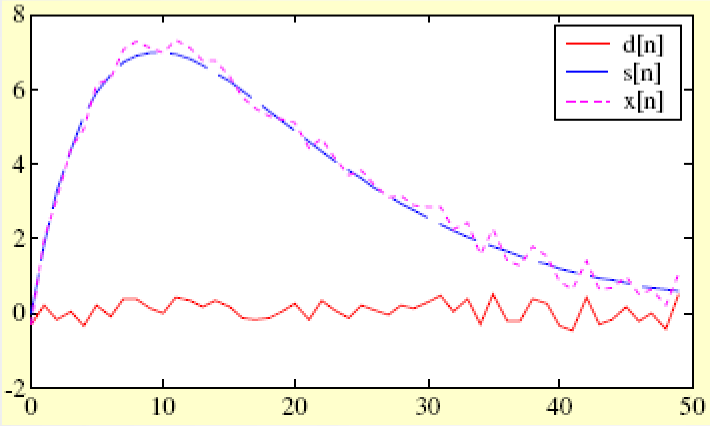
eşitliğiyle verilen işaret, M-nokta kayan ortalama alıcı sisteme uıygulandığında elde edilen çıkış $y[n]$ olsun. İşaretlerin şekilleri aşağıda verilmiştir.

Ayrık-Zaman Sistemlere Örnekler

$$s[n] = 2[n(0.9)^n]$$

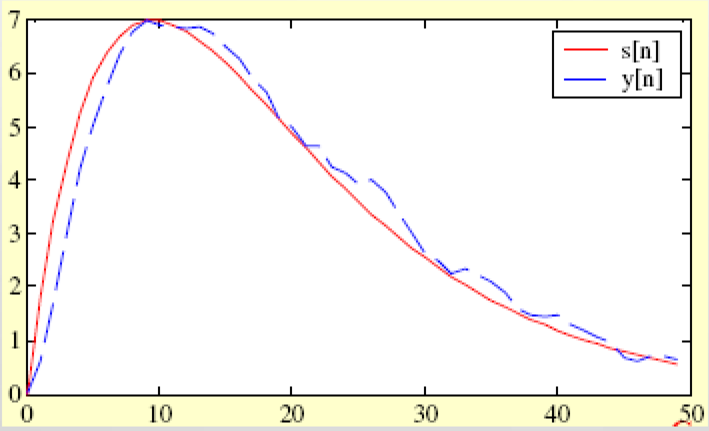
d[n]-rastgele gürültü

Genlik



n

Genlik



n

Ayrık-Zaman Sistemlere Örnekler

Üstel Ağırlıklı Kayan Ortalama Alıcı Filtre

$$y[n] = \alpha y[n-1] + x[n], \quad 0 < \alpha < 1$$

Filtrenin gerçekleştirilmesi için 1 toplama, 1 çarpma ve çıkışın bir önceki değerinin saklanması gereklidir. Girişin geçmişteki değerlerinin toplanmasına gerek yoktur.
Denklemi aşağıdaki şekilde düzenleyebiliriz.

$$\begin{aligned} y[n] &= \alpha\left(\alpha y[n-2] + x[n-1]\right) + x[n] \\ &= \alpha^2 y[n-2] + \alpha x[n-1] + x[n] \\ &= \alpha^2\left(\alpha y[n-3] + x[n-2]\right) + \alpha x[n-1] + x[n] \\ &= \alpha^3 y[n-3] + \alpha^2 x[n-2] + \alpha x[n-1] + x[n] \end{aligned}$$

O halde, $0 < \alpha < 1$ için , çıkışın oluşurulmasında geçmişteki değerlerin katkısı azalmaktadır.

Ayrık-Zaman Sistemlere Örnekler

Doğrusal Aradeğerleme

Bir ayrık-zaman işaretin örnekleme frekansını arttırmada kullanılır. Aşağıda örnekleme frekansını iki ve üç katına çıkartan aradeğerleme sistemlerinin giriş-çıkış ilişkisi verilmiştir.

2-kat:

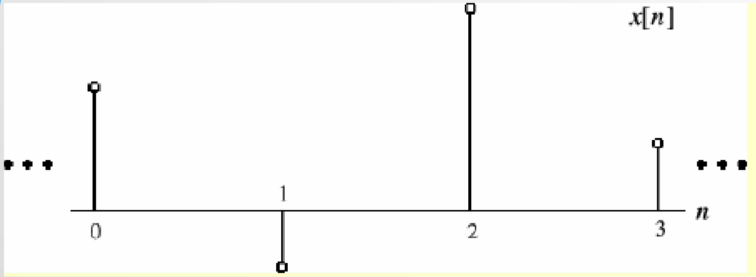
$$y[n]=x_u[n]+\frac{1}{2}\left(x_u[n-1]+x_u[n+1]\right)$$

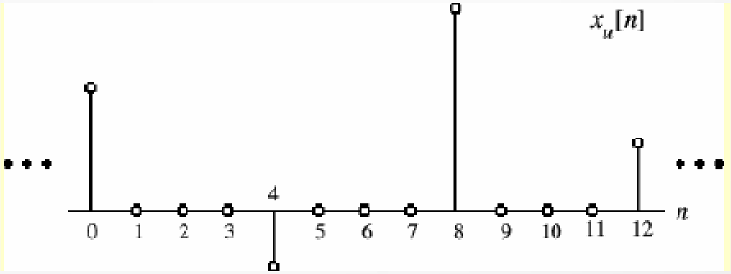
3-kat:

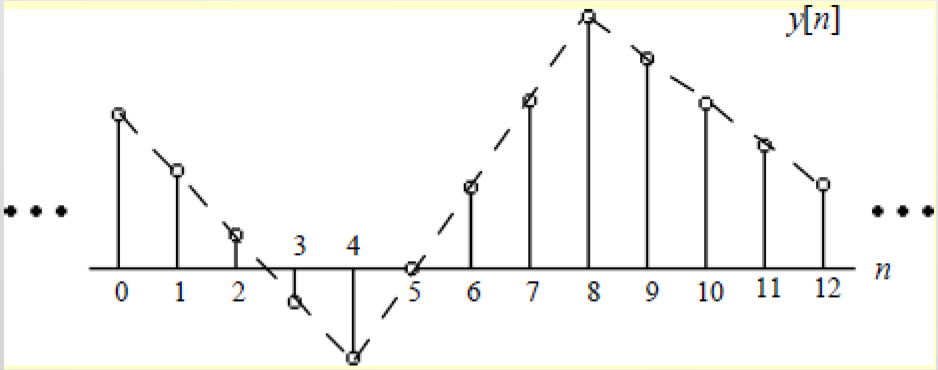
$$y[n]=x_u[n]+\frac{1}{3}\left(x_u[n-1]+x_u[n+2]\right)+\frac{2}{3}\left(x_u[n-2]+x_u[n+1]\right)$$

Ayrık-Zaman Sistemlere Örnekler

Aradeğerleme, bir veya daha yüksekboyutlu işaretlere uygulanabilir. Aşağıda bir boyutlu işaretler için 4 ile aradeğerlemeye örnek verilmiştir.







Ayrık-Zaman Sistemlere Örnekler

Medyan (Ortanca Filtre)

$(2K+1)$ sayının ortancası, sayı kümesindeki K adet sayının kendisinden büyük ve diğer K adet sayının ise kendisinden küçük olduğu sayıdır. Sayılar küçükten büyüğe doğru sıralandığında ortada kalan sayı ortancayı verir. Aşağıdaki sayı kümesini ele alalım:

$$\{2, -3, 10, 5, -1\}$$

Sayılar küçükten büyüğe doğru sıralandığında

$$\{-3, -1, 2, 5, 10\}$$

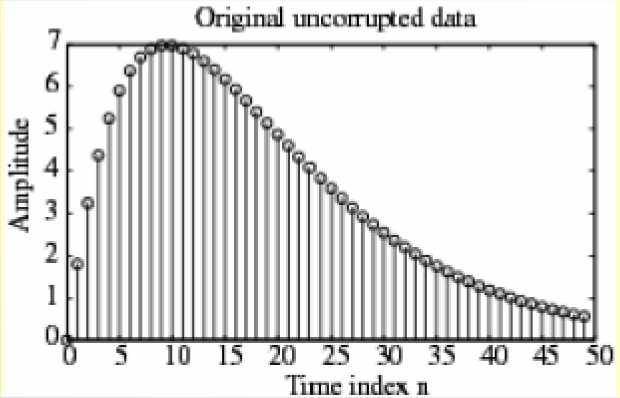
elde edilir. O halde, sayıların ortancası

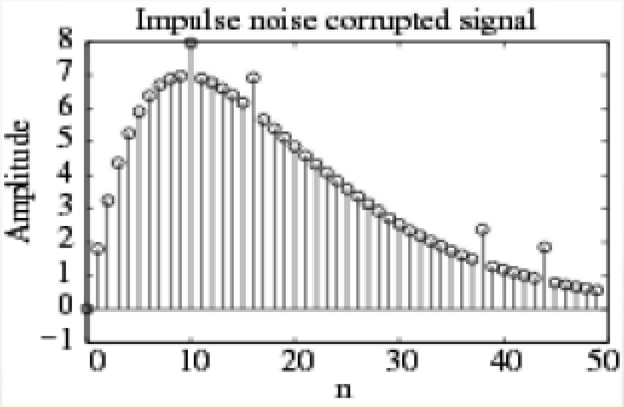
$$\text{med}\{2, -3, 10, 5, -1\} = 2$$

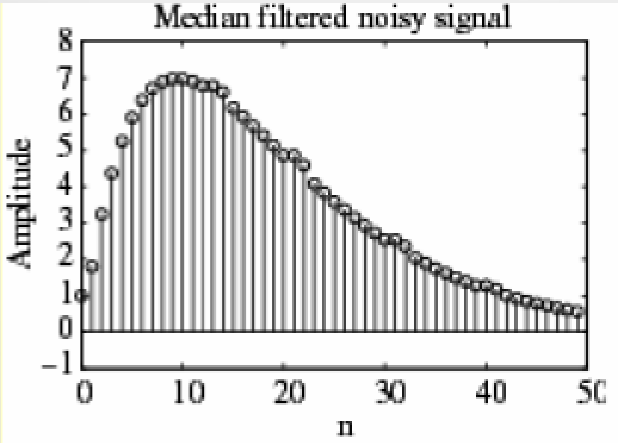
olacaktır.

Ayrık-Zaman Sistemlere Örnekler

Ortanca filtresini gerçekleştirmek için tek sayı uzunluklu bir pencere giriş dizisi *x*[*n*] üzerinde örnek örnek kaydırılır. *n* anındaki çıkış *y*[*n*], merkezi n olan pencere içindeki örneklerin ortancasıdır. Ortanca filtresi, işarette ani büyük hatalar olarak gözüken toplamsal rastgele gürültüyü yok etmede kullanılır. Aşağıda örnek verilmiştir.







Ayrık-Zaman Sistemlerin Sınıflandırılması

- Doğrusal Sistem
- Zamanla Değişmez Sistem
- Nedensel Sistem
- Kararlı Sistem
- Pasif ve Kayıpsız Sistemler

Doğrusal Ayrık-Zaman Sistemler

Tanım: Bir ayrık-zaman sisteminin $x_1[n]$ girişine olan yanıtı $y_1[n]$, $x_2[n]$ girişine olan yanıtı $y_2[n]$ olsun. α ve β keyfi katsayılar olmak üzere,

$$x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$$

girişine olan yanıtı

$$y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

ise sistem doğrusaldır.

Doğrusal Ayrık-Zaman Sistemler

Örneğin, toplayıcı devresinin doğrusal olup olmadığını belirleyelim. Hatırlanacağı gibi, toplayıcı sistemi değişik şekillerde ifade edilebilir. İlk önce, çıkışın girişin geçmişteki değerleriyle verildiği durumu ele alalım.

$$y_1[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{n} x_1[\ell], \quad y_2[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{n} x_2[\ell]$$

$x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ girişine olan yanıt

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{\ell=-\infty}^{n} (\alpha x_1[\ell] + \beta x_2[\ell]) \\ &= \alpha \sum_{\ell=-\infty}^{n} x_1[\ell] + \beta \sum_{\ell=-\infty}^{n} x_2[\ell] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n] \end{aligned}$$

olup sistem doğrusaldır.

Doğrusal Ayrık-Zaman Sistemler

Çıkışın, girişin geçmişteki değerleri ve çıkışın başlangıç değeriyle verildiği durumu ele alalım. Bu durumda,

$$y_1[n] = y_1[-1] + \sum_{l=0}^{n} x_1[l]$$

$$y_2[n] = y_2[-1] + \sum_{l=0}^{n} x_2[l]$$

olup $x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ girişine olan yanıt

$$y[n] = y[-1] + \sum_{\ell=0}^{n} (\alpha x_1[\ell] + \beta x_2[\ell])$$

olacaktır.

Doğrusal Ayrık-Zaman Sistemler

$\alpha y_1[n]+\beta y_2[n]$ toplamı

$$=\alpha(y_1[-1]+\sum_{\ell=0}^{n}x_1[\ell])+\beta(y_2[-1]+\sum_{\ell=0}^{n}x_2[\ell])$$
$$=(\alpha\, y_1[-1]+\beta\, y_2[-1])+(\alpha\sum_{\ell=0}^{n}x_1[\ell]+\beta\sum_{\ell=0}^{n}x_2[\ell])$$

olduğundan $y[n]=\alpha y_1[n]+\beta y_2[n]$ eşitliğinin sağlanabilmesi ya da sistemin doğrusal olabilmesi için şart

$$y[-1]=\alpha\, y_1[-1]+\beta\, y_2[-1]$$

olarak elde edilir. Bu koşul, başlangıç koşulunun sıfır olması durumunda sağlanabilir. Özetle, toplayıcı devre sıfır başlangıç koşulu için doğrusaldır.

Doğrusal Olmayan Ayrık-Zaman Sistemler

Örneğin, medyan filtresinin doğrusal olmadığını gösterelim. 3 uzunluklu bir ortanca filtresini ele alalım. Filtreye

$x_1[n]=\{3, 4, 5\}$, $0 \leq n \leq 2$ uygulandığında çıkış $y_1[n]=\{3, 4, 4\}$, $0 \leq n \leq 2$
$x_2[n]=\{2, -1, 1\}$, $0 \leq n \leq 2$ uygulandığında çıkış $y_2[\mathrm{n}]=\{0, -1, -1\}$, $0 \leq n \leq 2$

olacaktır. Ancak,

$x[n] = x_1[n] + x_2[\mathrm{n}] = \{5, 3, 6\}$ girişine olan yanıt $y[n] = \{3, 4, 3\}$

olup $y_1[n] + y_2[\mathrm{n}] = \{3, 3, 3\} \neq y[n]$ olduğundan ortanca filtresi doğrusal olmayan bir ayrık-zaman sistemidir.

Ötelemeden Bağımsız Sistemler

Tanım: Bir ayrık-zaman sisteminin $x[n]$ girişine olan yanıtı $y[n]$ olsun. n_0 herhangi bir pozitif veya negatif tamsayı olmak üzere, $x[n- n_0]$ girişine olan yanıt $y[n- n_0]$ ise, sistem ötelemeden bağımsızdır.

n bağımsız değişkeninin zaman örneklerine karşılık geldiği ayrık-zaman dizi ve sistemler durumunda ötelmeden bağımsızlık, zamanla değişmezlik olarak belirtilir.

Zamanla değişmezlik özelliği, verilen bir giriş için çıkışın girişin uygulandığı andan bağımsız olduğu anlamına gelmektedir.

Ötelemeden Bağımsız Sistemler

Giriş dizisi $x[n]$ ile çıkış dizisi $x_u[n]$ arasındaki ilişki

$$x_u[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots.. \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

ile verilen üst örnekleyicinin zamanla değişmez olup olmadığını belirleyelim. Üst örnekleyeyiciye $x[n- n_0]$ uygulandığında elde edilen çıkış dizisi $x_{1,u}[n]$

$$x_{1,u}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n - Ln_0}{L}\right], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olacaktır. Ancak, üst örenekleyicinin tanımından

$$x_u[n - n_0] = \begin{cases} x\left[\frac{n - n_0}{L}\right], & n = n_0, n_0 \pm L, \ldots \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olup $x_{1,u}[n] \neq x_u[n-- n_0]$ olduğundan üst örnekleyici zamanla değişen bir sistemdir.

Doğrusal, Zamanla Değişmeyen Sistemler

Tanım: Doğrusallık ve ve zamanla değişmezlik özelliğini birlikte sağlayan sistemlere doğrusal, zamanla değişmeyen (LTI) sistemler denilir.

- LTI sistemlerin matematiksel olarak temsili ve analizi, dolayısıyla da tasarlanması oldukça kolaydır.

- LTI sistemler için faydalı işaret işleme algoritmaları geliştirilmiştir.

Nedensel Sistemler

Tanım: Bir ayrık-zaman sisteminin n_0 anındaki çıkışı *y*[*n*], sistemin n_0 anı ve daha önceki girişlerini bağlı ve n_0 anından sonraki girişlerden bağımsız ise sistem nedenseldir.

Nedensel Sistemlere Örnekler:

$$y[n] = \alpha_1 x[n] + \alpha_2 x[n-1] + \alpha_3 x[n-2] + \alpha_4 x[n-3]$$

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2]$$

$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$

Nedensel Olmayan Sistemlere Örnekler:

$$y[n] = x_u[n] + \frac{1}{2}(x_u[n-1] + x_u[n+1])$$

$$y[n] = x_u[n] + \frac{1}{3}(x_u[n-1] + x_u[n+2]) + \frac{2}{3}(x_u[n-2] + x_u[n+1])$$

Nedensel Sistemler

Nedensel olmayan bir sistem çıkışın uygun miktarda geciktirilmesiyle nedensel bir sistem haline getirilebilir.

Örneğin nedensel olmayan 2 ile aradeğerleme denklemini ele alalım.

$$y[n] = x_u[n] + \frac{1}{2}(x_u[n-1] + x_u[n+1])$$

Yukarıdaki sistemin nedensel hali

$$y[n] = x_u[n-1] + \frac{1}{2}(x_u[n-2] + x_u[n])$$

ile verilir. Nedensel denklem, nedensel olmayan denklemde *n* yerine *n*-1 yazılarak (veya eşdeğer olarak çıkış bir birim geciktirilerek) elde edilmiştir.

Kararlı Sistemler

Kararlılığın çeşitli tanımları vardır. En sık kullanılan, sınırlı-giriş sınırlı-çıkış (BIBO) kararlılıktır.

Tanım: Bir ayrık-zaman sisteminin $x[n]$ girişine çıkışı $y[n]$ olsun. Sınırlı tüm girişler, yani

$$|x[n]| < B_x \text{ , tüm } n \text{ değerleri için}$$

koşulunu sağlayan girişler için çıkış da sınırlı, yani

$$|y[n]| < B_y \text{ , tüm } n \text{ değerleri için}$$

ise sistem BIBO kararlıdır denir.

Kararlı Sistemler

M-nokta kayan ortalama alıcı filtrenin kararlı olup olmadığını belirleyelim. Hatırlanacağı gibi giriş-çıkış ilişkisi

$$y[n]=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}x[n-k]$$

olarak verilmekteydi. Sistem BIBO kararlı ise $|x[n]| < B_x$ koşulunu sağlayan sınırlı bir giriş için çıkış da sınırlı olmalıdır. Aşağıdaki işlemler çıkışın da sınırlı olduğunu göstermektedir.

$$\begin{aligned}|y[n]| &= \left|\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}x[n-k]\right| \le \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}|x[n-k]| \\ &\le \frac{1}{M}(MB_x) \le B_x\end{aligned}$$

Ohalde, *M*-nokta kayan ortalama alıcı filtre BIBO kararlıdır.

Pasif ve Kayıpsız Sistemler

Tanım: Sonlu enerjiye sahip tüm girişler için çıkışının enerjisi en fazla girişin enerjisine eşit olan sistemlere PASİF sistemler denir.

Pasiflik matematiksel olarak

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

eşitsizliğiyle tanımlanır.

Tanım: Sonlu enerjiye sahip tüm girişler için çıkışının enerjisi girişin enerjisine eşit olan sistemlere KAYIPSIZ sistemler denir.

Not: Kayıpsız sistemler için yukarıda verilen eşitsizlik eşitliğe dönüşür.

Pasif ve Kayıpsız Sistemler

N pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$y[n] = \alpha\, x[n]$$

eşitliğiyle tanımlanan ayrık-zaman sistemini göz önüne alalım. Çıkışın enerjisi ile girişin enerjisi arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 = |\alpha|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

O halde, $|\alpha| < 1$ ise sitem pasif, $|\alpha| = 1$ ise sistem kayıpsızdır.

İmpuls ve Basamak Yanıtları

Tanım: Bir ayrık-zaman sisteminin impuls dizisi $\{\delta[n]\}$'ye yanıtına İMPULS YANITI denir ve $\{h[n]\}$ notasyonu ile belirtilir.

Tanım: Bir ayrık-zaman sisteminin birim basamak dizisi $\{u[n]\}$'ye yanıtına BASAMAK YANITI denir ve $\{s[n]\}$ notasyonu ile belirtilir.

İmpuls Yanıtı

Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan ayrık-zaman sistemini göz önüne alalım.

$$y[n] = \alpha_1 x[n] + \alpha_2 x[n-1] + \alpha_3 x[n-2] + \alpha_4 x[n-3]$$

Sistemin impuls yanıtını bulmak için $x[n] = \delta[n]$ yazılırsa,

$$h[n] = \alpha_1 \delta[n] + \alpha_2 \delta[n-1] + \alpha_3 \delta[n-2] + \alpha_4 \delta[n-3]$$

elde edilir. O halde, impuls yanıtı 4-uzunluklu sonlu bir dizi olup

$$\{h[n]\} = \{\underset{\uparrow}{\alpha_1}, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4\}$$

olarak verilir. Ok n= 0 anını göstermektedir.

İmpuls Yanıtı

Toplayıcının impuls yanıtını elde edelim. Sistem

$$y[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{n} x[\ell]$$

eşitliğiyle tanımlanır. Sistemin impuls yanıtını bulmak için $x[n] = \delta[n]$ yazılırsa,

$$h[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{n} \delta[\ell] = \mu[n]$$

elde edilir ($\mu[n]$, birim basamak dizisidir!).

İmpuls Yanıtı

2-oranında aradeğerleyicinin impuls yanıtını belirleyelim. Sistem

$$y[n] = x_u[n] + \frac{1}{2}(x_u[n-1] + x_u[n+1])$$

eşitliğiyle tanımlanır. Sistemin impuls yanıtını bulmak için $x[n] = \delta[n]$ yazılırsa,

$$h[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}(\delta[n-1] + \delta[n+1])$$

elde edilir. O halde, impuls yanıtı 3-uzunluklu sonlu bir dizi olup

$$\{h[n]\} = \{0.5, \quad \underset{\uparrow}{1} \quad 0.5\}$$

olarak verilir. Ok n= 0 anını göstermektedir.

Ayrık-Zaman LTI Sistemlerin Zaman Uzayı Gösterilimi

Doğrusal, zamanla değişmezlik özelliğinin bir sonucu, bir ayrık-zaman LTI sisteminin giriş-çıkış ilişkisinin impuls yanıtıyla verilebilmesidir.

O halde, bir ayrık-zaman LTI sistemin impuls yanıtı biliniyorsa, herhangi bir giriş dizisi için çıkış hesaplanabilir.

Örneğin, bir ayrık-zaman LTI sisteminin

$$x[n] = 0.5\delta[n+2] + 1.5\delta[n-1] - \delta[n-2] + 0.75\delta[n-5]$$

girişine olan yanıtı $y[n]$'yi impuls yanıtı $h[n]$ cinsinden belirleyelim.

Sistem doğrusal olduğundan, çıkışı belirlemek için girişi oluşturan bileşenler tek tek uygulandığında elde edilen yanıtları toplarız.

Ayrık-Zaman LTI Sistemlerin Zaman Uzayı Gösterilimi

Zamanla değişmezlik özelliğinden

$$\delta[n+2] \rightarrow h[n+2]$$
$$\delta[n-1] \rightarrow h[n-1]$$
$$\delta[n-2] \rightarrow h[n-2]$$
$$\delta[n-5] \rightarrow h[n-5]$$

Doğrusallık özelliğinden

$$0.5\delta[n+2] \rightarrow 0.5h[n+2]$$
$$1.5\delta[n-1] \rightarrow 1.5h[n-1]$$
$$-\delta[n-2] \rightarrow -h[n-2]$$
$$0.75\delta[n-5] \rightarrow 0.75h[n-5]$$

O halde, sistemin çıkışı

$$\begin{aligned} y[n] = {} & 0.5h[n+2] + 1.5h[n-1] \\ & - h[n-2] + 0.75h[n-5] \end{aligned}$$

olacaktır.

Ayrık-Zaman LTI Sistemlerin Zaman Uzayı Gösterilimi

Şimdi, bir ayrık-zaman LTI sistemin herhangi bir giriş $x[n]$ için çıkışını veren genel ifadeyi impuls yanıtı $h[n]$ cinsinden elde edeceğiz. Giriş impuls dizisi cinsinden

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

olarak yazılabilir. LTI sistemin $x[k]\delta[n\text{-}k]$ girişine yanıtı $x[k]h[n\text{-}k]$ olacaktır. O halde, doğrusallık özelliğinden $x[n]$ girişine olan yanıt

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

olacaktır. Basit bir değişken dönüşümü ile yukarıdaki eşitlik

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir.

Konvolüsyon Toplamı

Sonuç: İmpuls yanıtı $h[n]$ bir ayrık-zaman LTI sistemin herhangi bir giriş $x[n]$ için çıkışı

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[n]$$

eşitliklerinden hesaplanabilir. Yukarıdaki eşitliklere KONVOLÜSYON TOPLAMI denir ve

$$y[n] = x[n] \circledast h[n]$$

notasyonu ile gösterilir.

Konvolüsyon Toplamı

Konvolüsyon toplamı aşağıdaki özelliklere sahiptir:

Değişme özelliği

$$x[n] \circledast h[n] = h[n] \circledast x[n]$$

Birleşme özelliği

$$(x[n] \circledast h[n]) \circledast y[n] = x[n] \circledast (h[n] \circledast y[n])$$

Dağılma özelliği

$$x[n] \circledast (h[n] + y[n]) = x[n] \circledast h[n] + x[n] \circledast y[n]$$

Konvolüsyon Toplamı

Konvolüsyon toplamının grafiksel yorumu:

1.$h[k]$'nın dikey eksene göre simetriğini alarak $h[-k]$'yı oluştur.

2.$h[n-k]$ ' yı oluşturmak için n>o ise $h[-k]$'yı sağa, n<o ise $h[-k]$'yı sola n örnek kaydır.

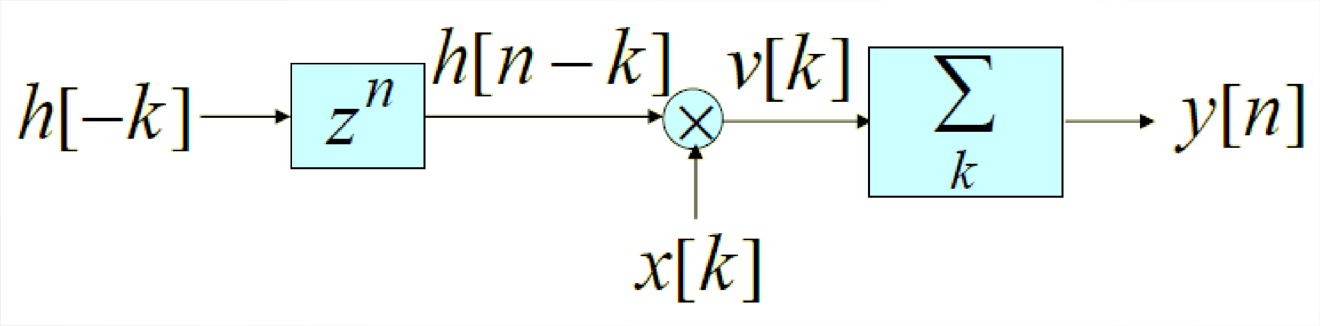
3.$v[k] = x[k]h[n-k]$ çarpımını oluştur.

4.Konvolüsyon toplamı $y[n]$'i oluşturmak için tüm $v[k]$ değerlerini topla.

5.Konvolüsyon toplamı $\{y[n]\}$'i bulmak için yukarıda verilen işlemleri tüm n değerleri için tekrarla

Konvolüsyon Toplamı

Konvolüsyon toplamının şematik gösterilimi:



Konvolüsyon toplamı kullanılarak çıkışın hesaplanması çarpımlar toplamıdır.

Konvolüsyon toplamının hesaplanması çarpma, toplama ve öteleme gibi basit işlemler gerektirir.

Konvolüsyon Toplamı

Konvolüsyon toplamının nasıl yapıldığını göstermek amacıyla aşağıdaki işaretleri kullanacağız.

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 5 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

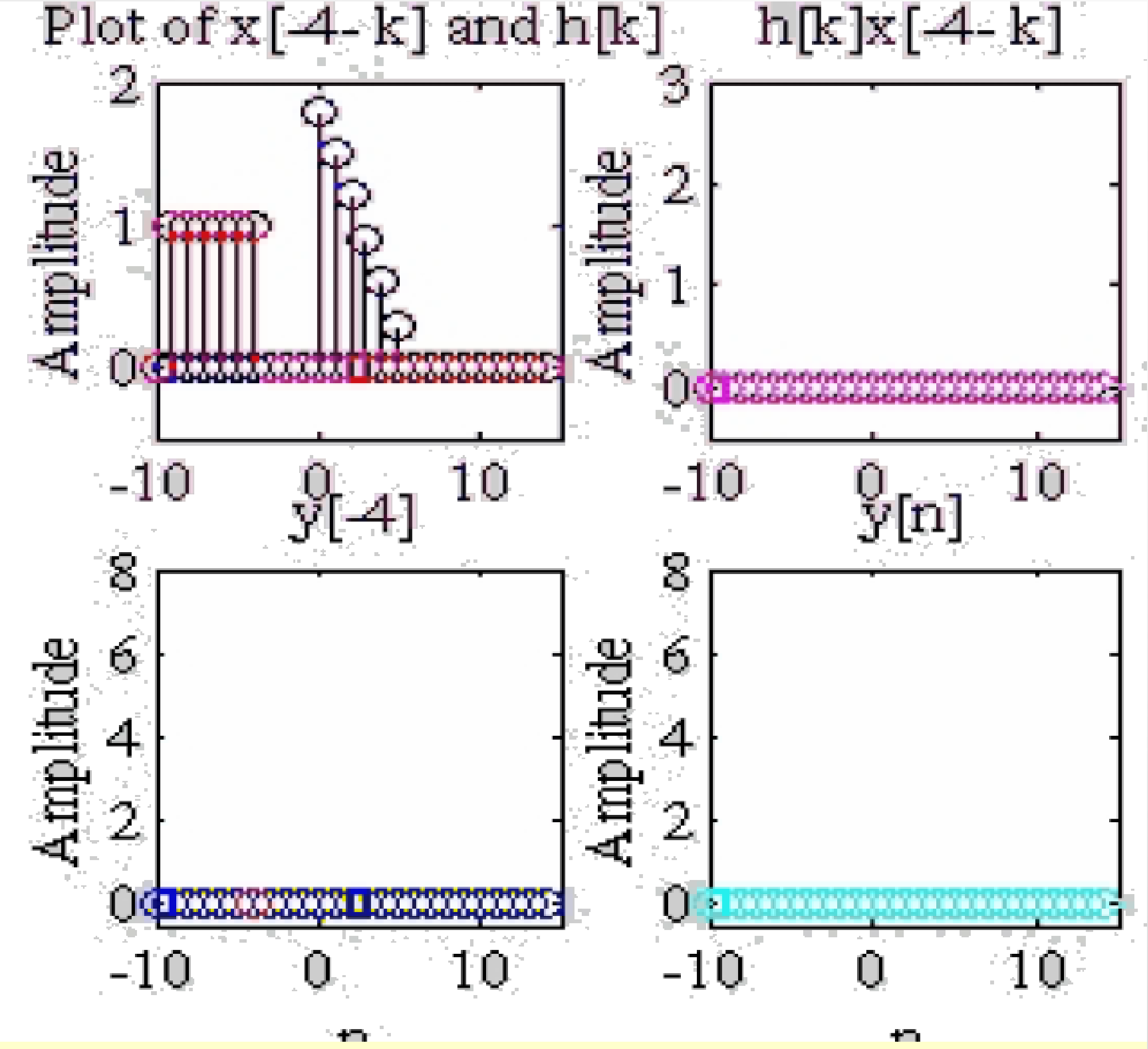
$$h[n] = \begin{cases} 1.8 - 0.3n, & 0 \le n \le 5 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Aşağıda gösterilen eğriler

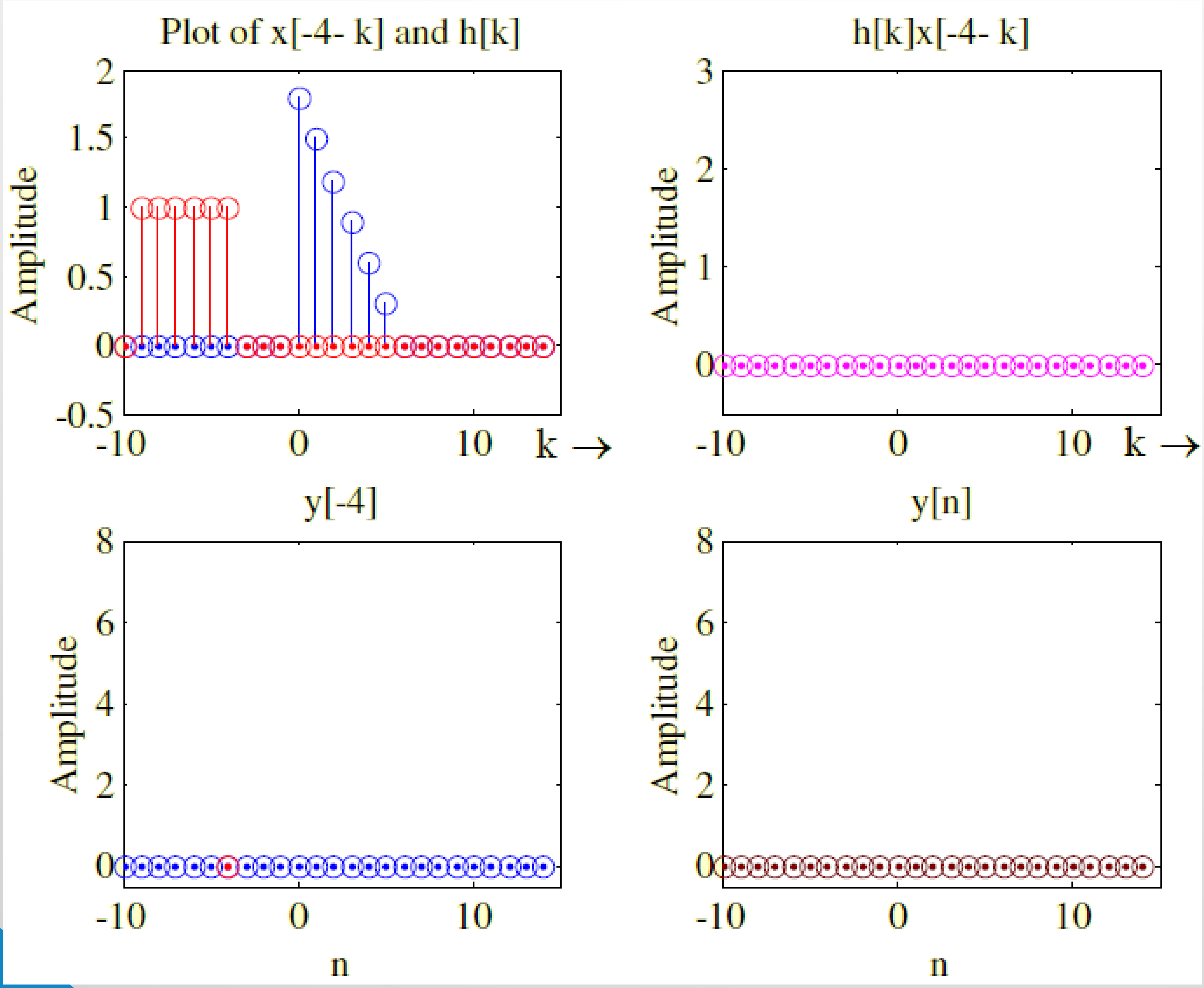
$$y[n] = x[n] \circledast h[n]$$

konvolüsyon toplamının hesaplanmasındaki adımları göstermektedir.

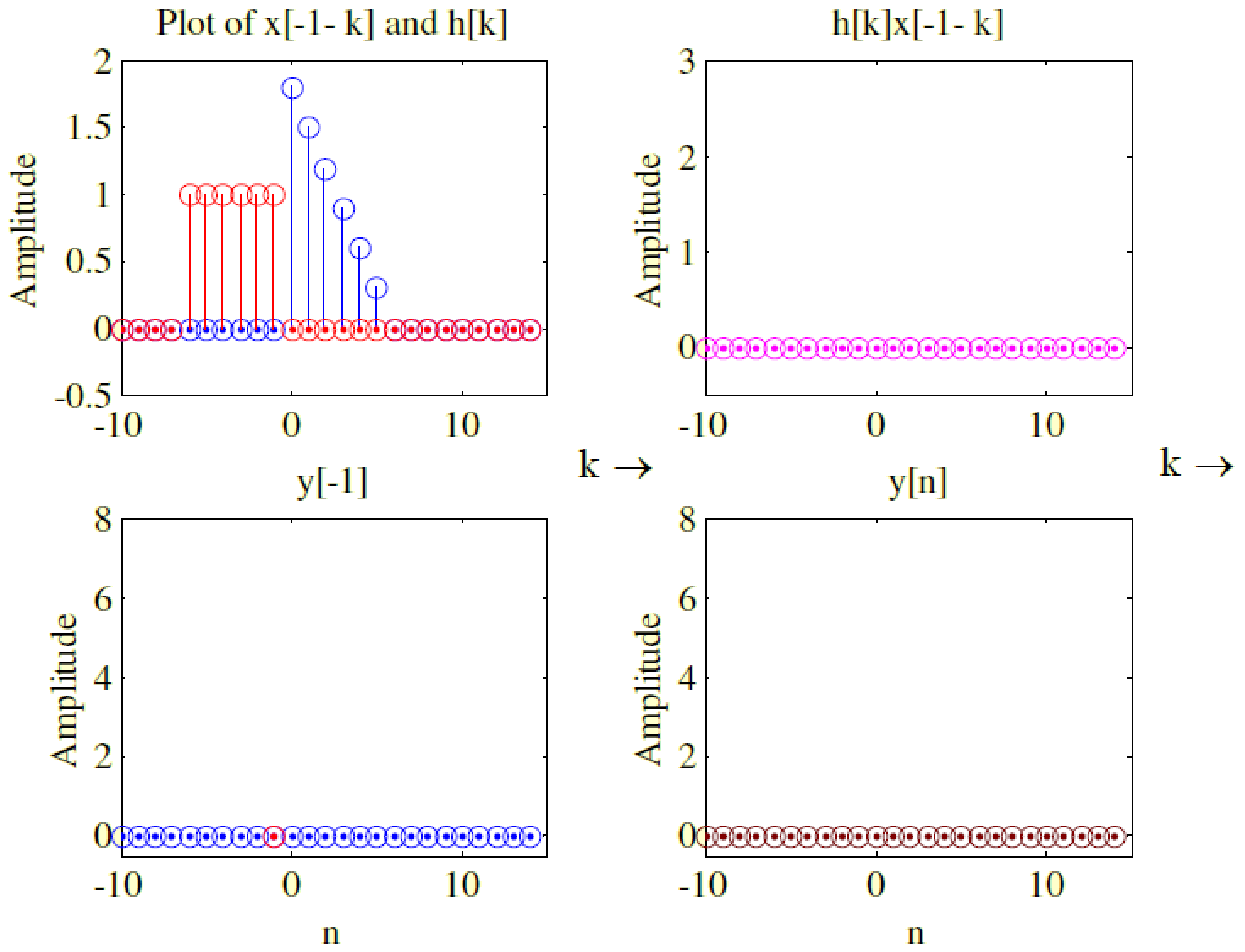
Konvolüsyon Toplamı



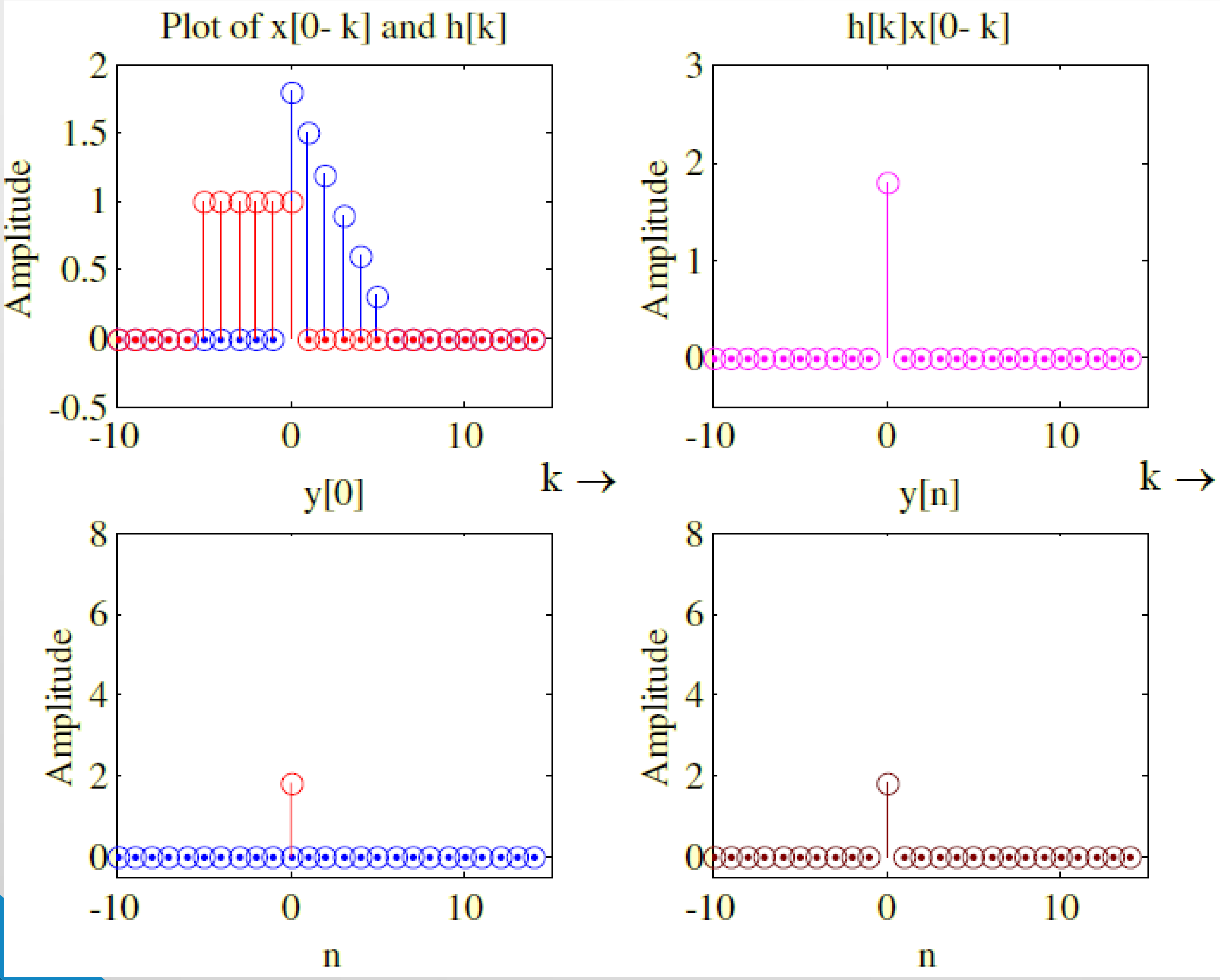
Konvolüsyon Toplamı



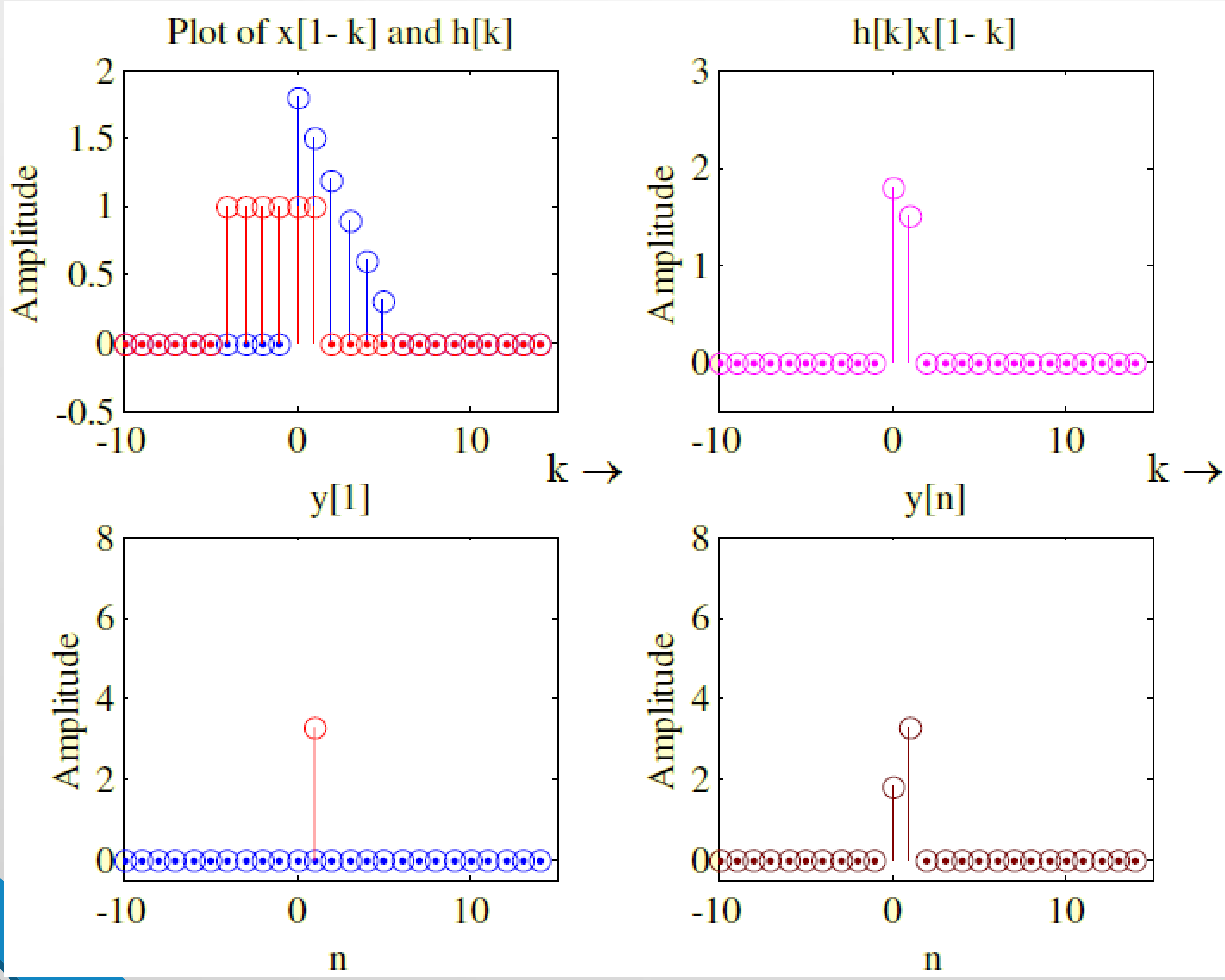
Konvolüsyon Toplamı



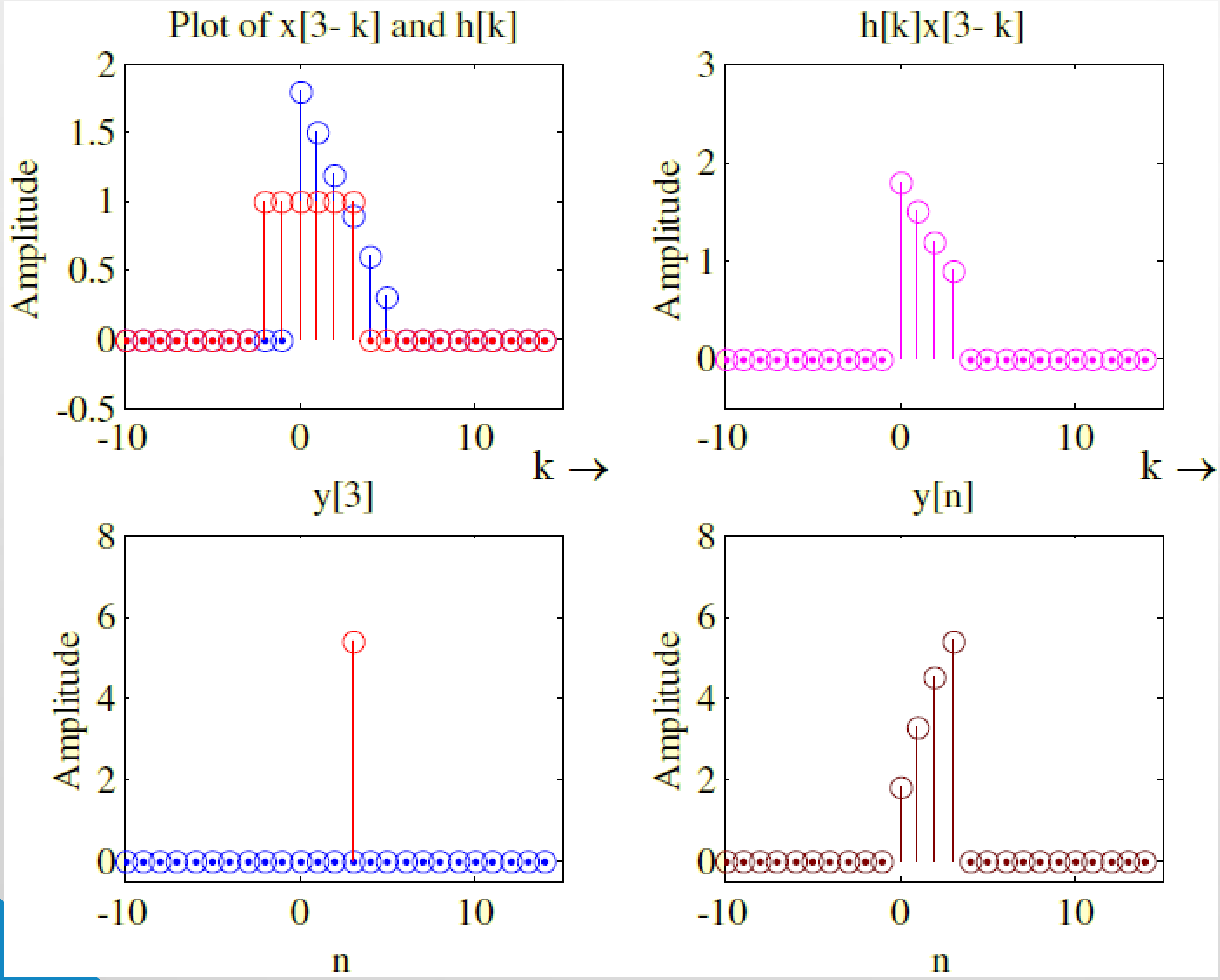
Konvolüsyon Toplamı



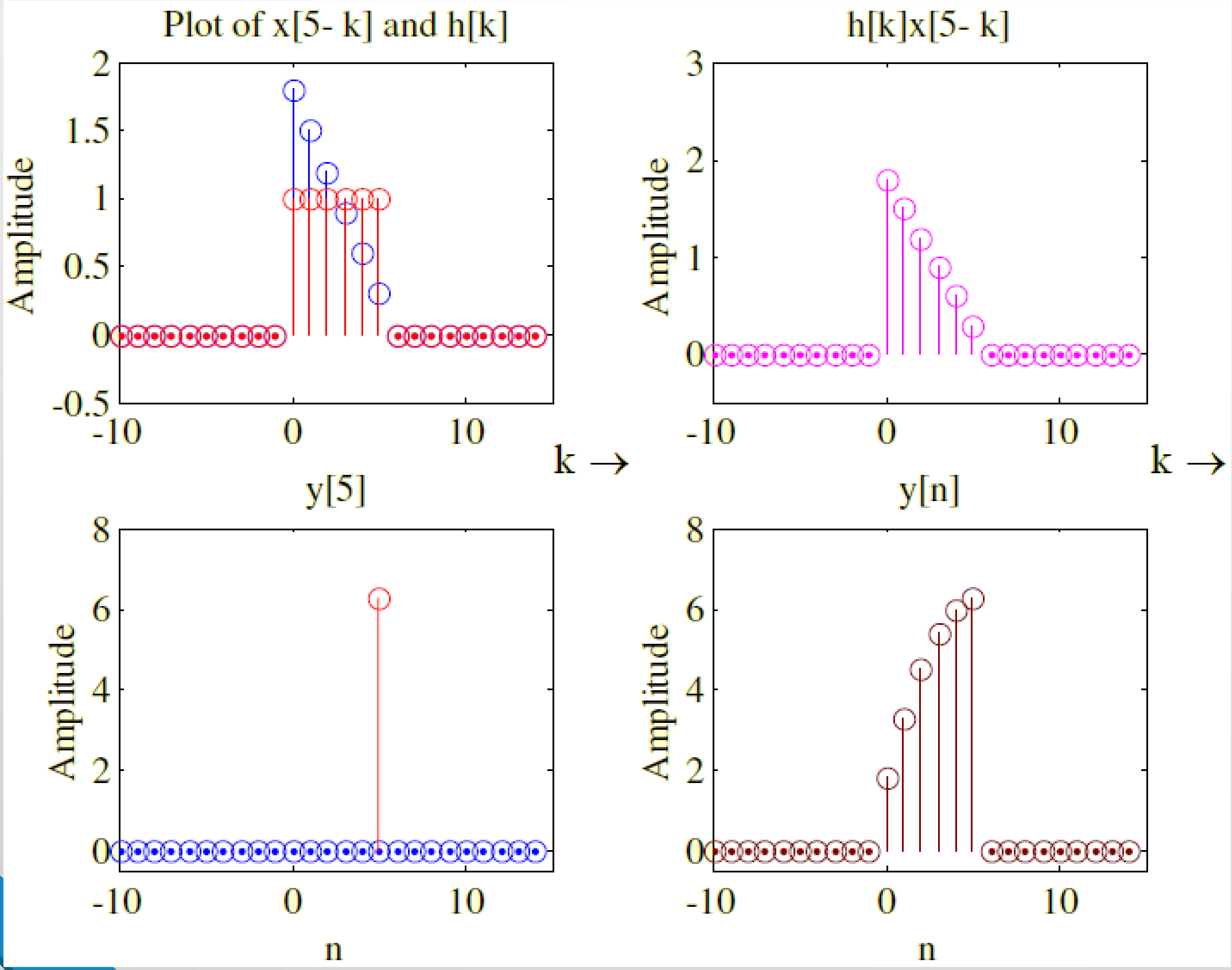
Konvolüsyon Toplamı



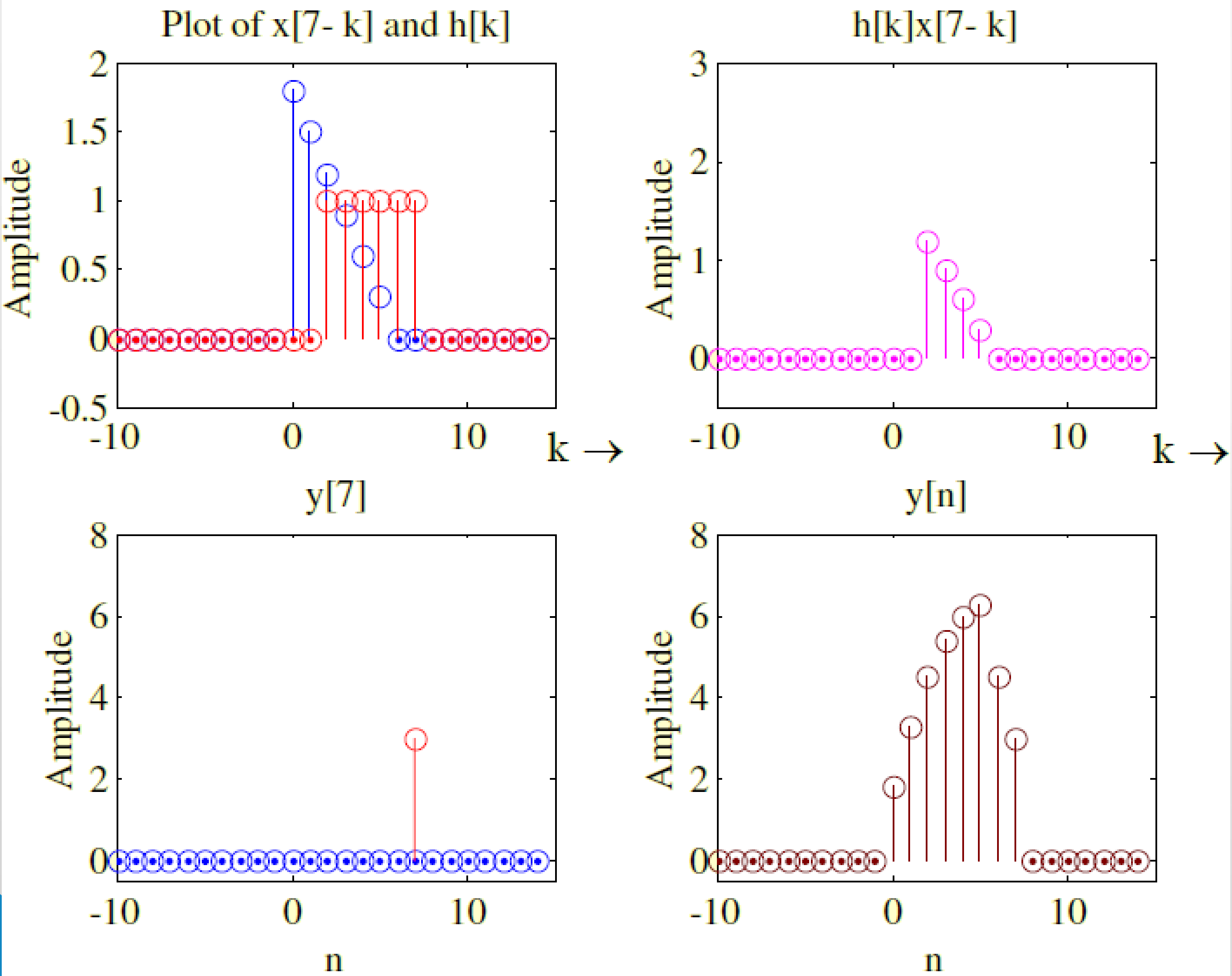
Konvolüsyon Toplamı



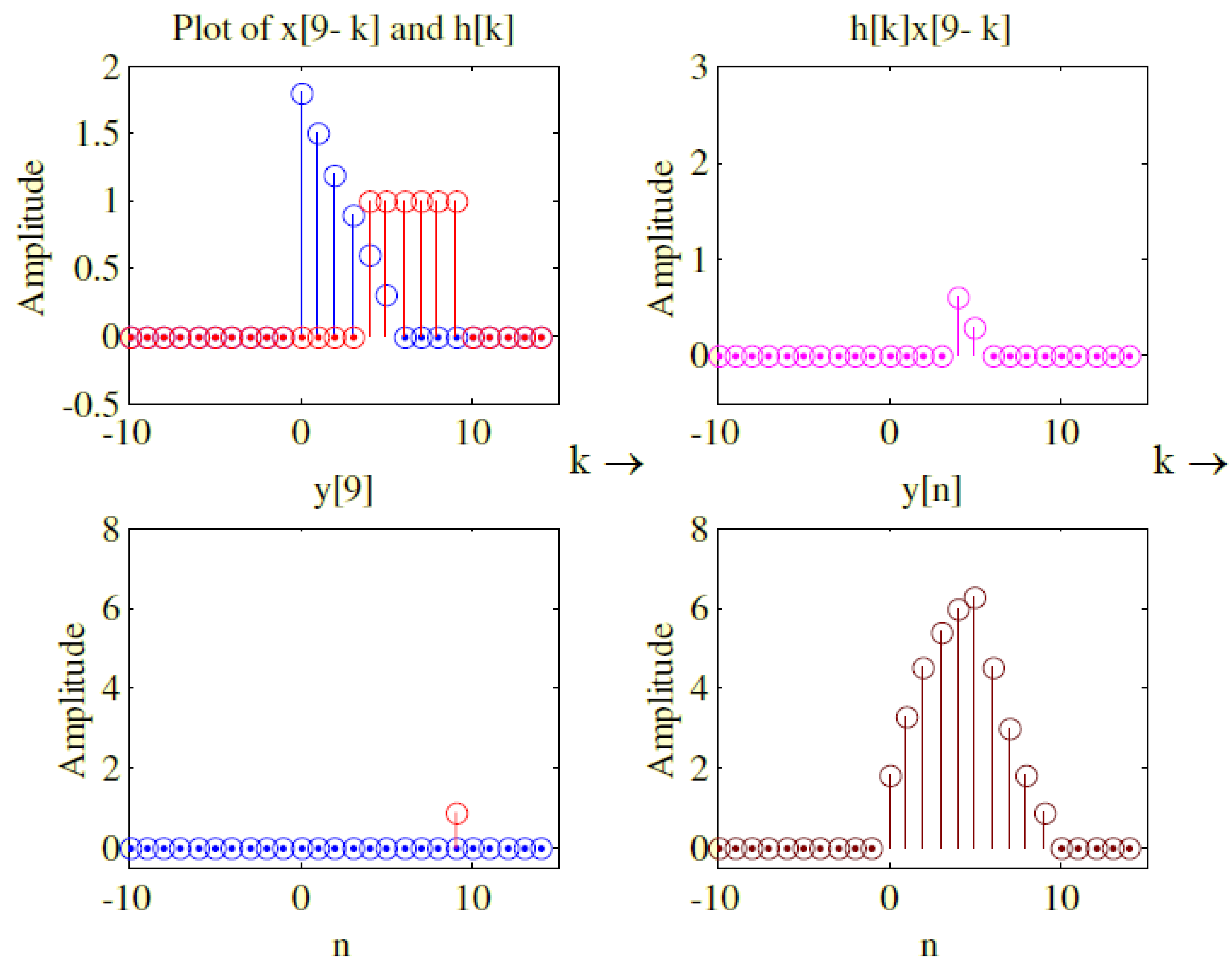
Konvolüsyon Toplamı



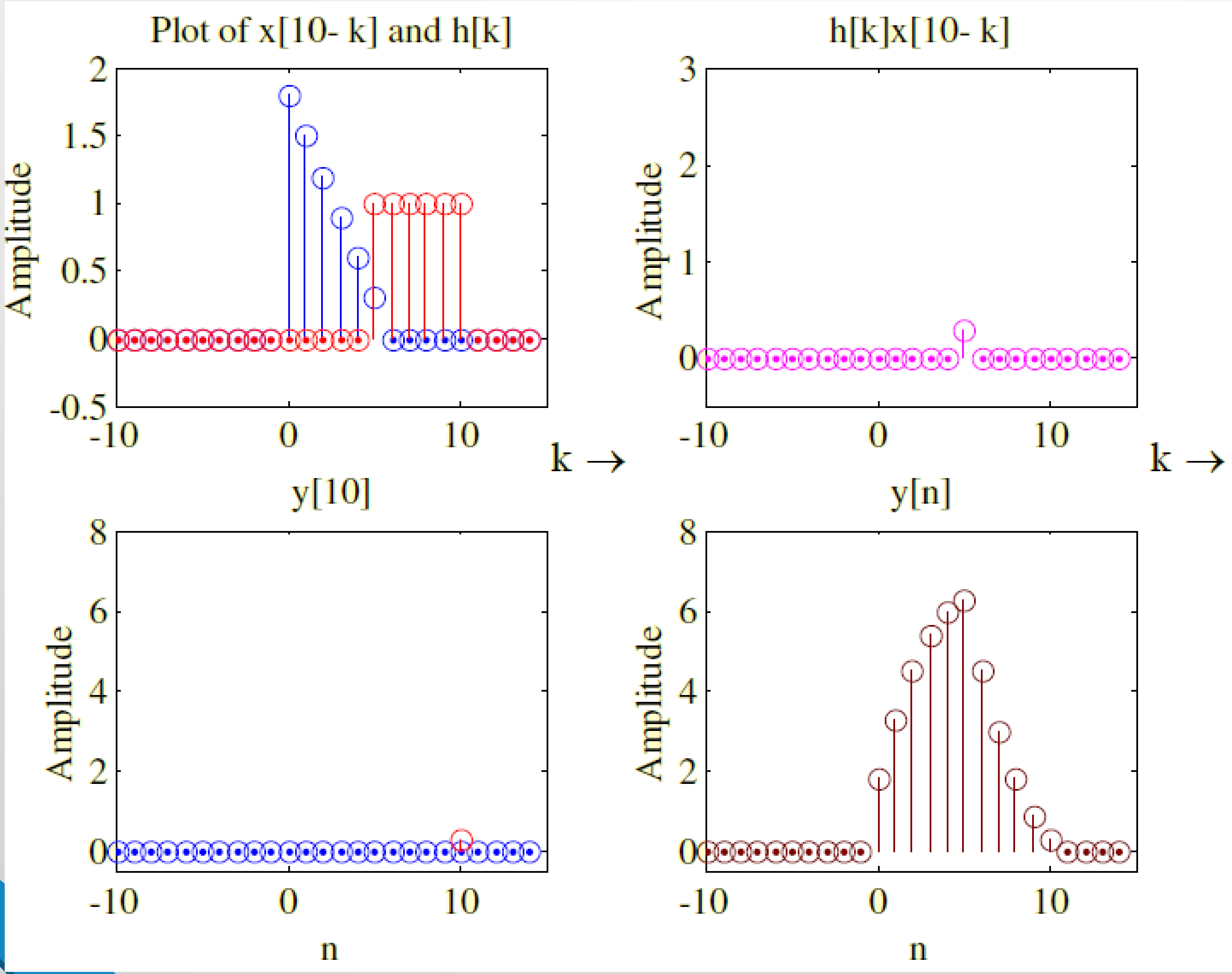
Konvolüsyon Toplamı



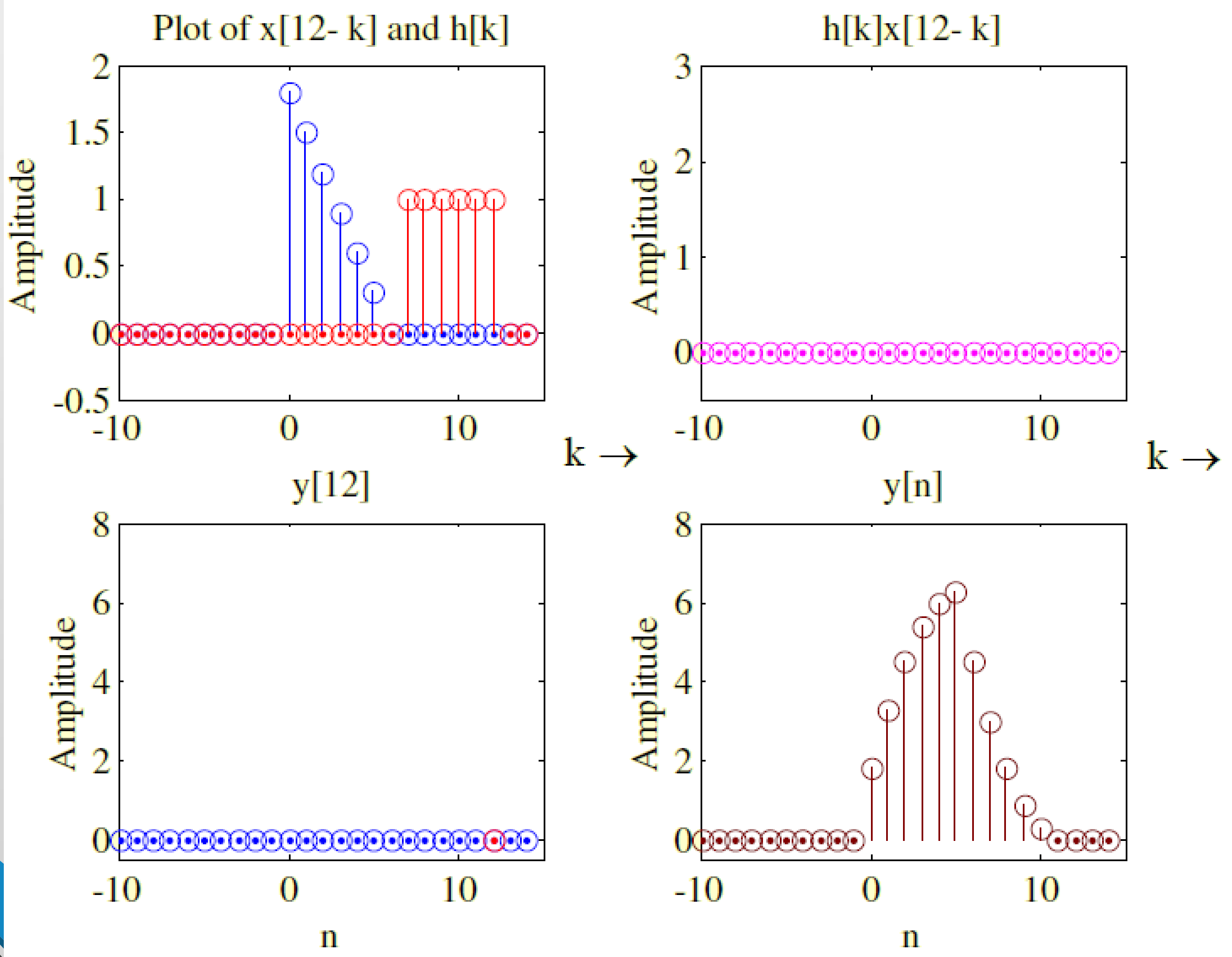
Konvolüsyon Toplamı



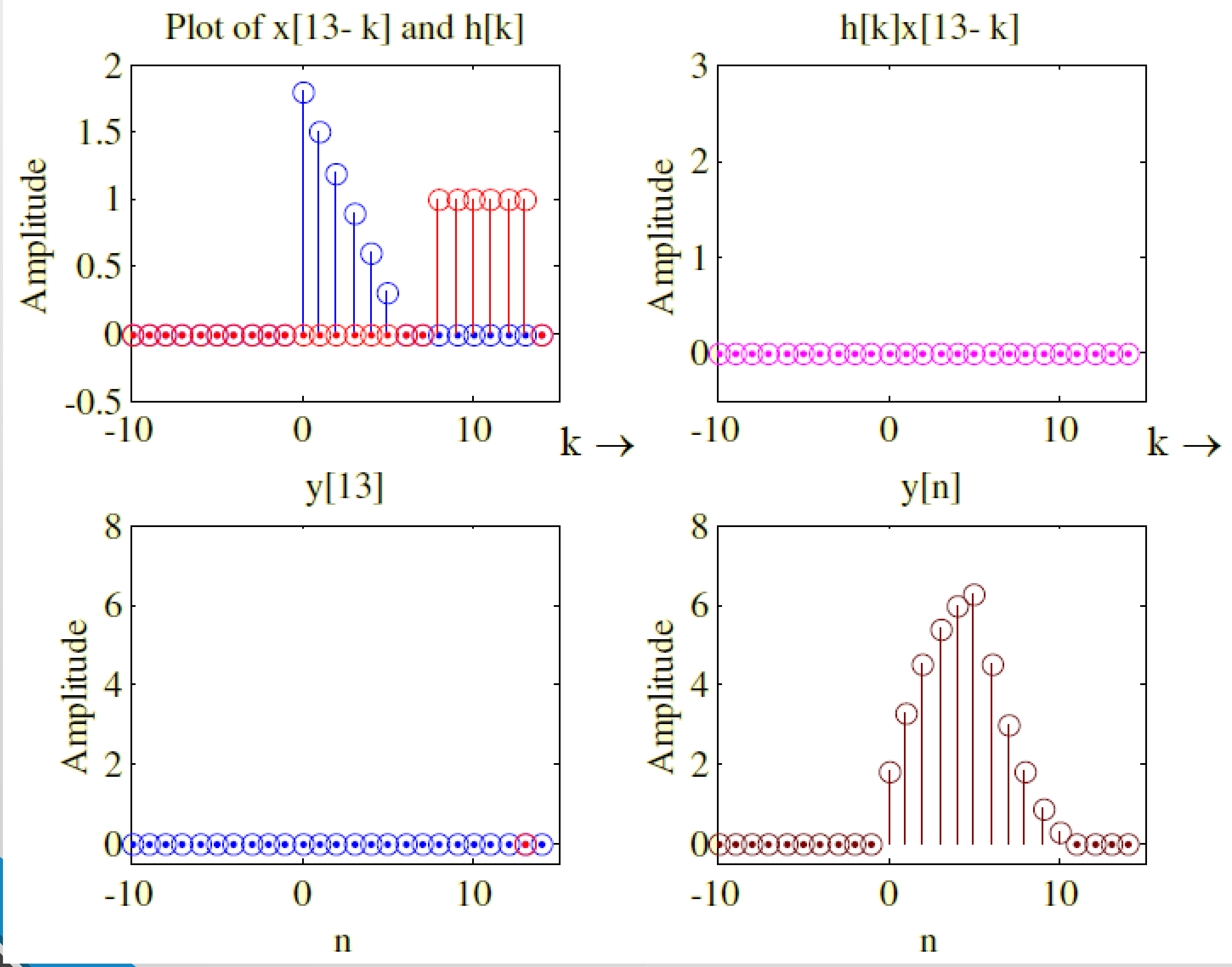
Konvolüsyon Toplamı



Konvolüsyon Toplamı



Konvolüsyon Toplamı



Ayrık-Zaman LTI Sistemlerin Zaman Uzayı Gösterilimi

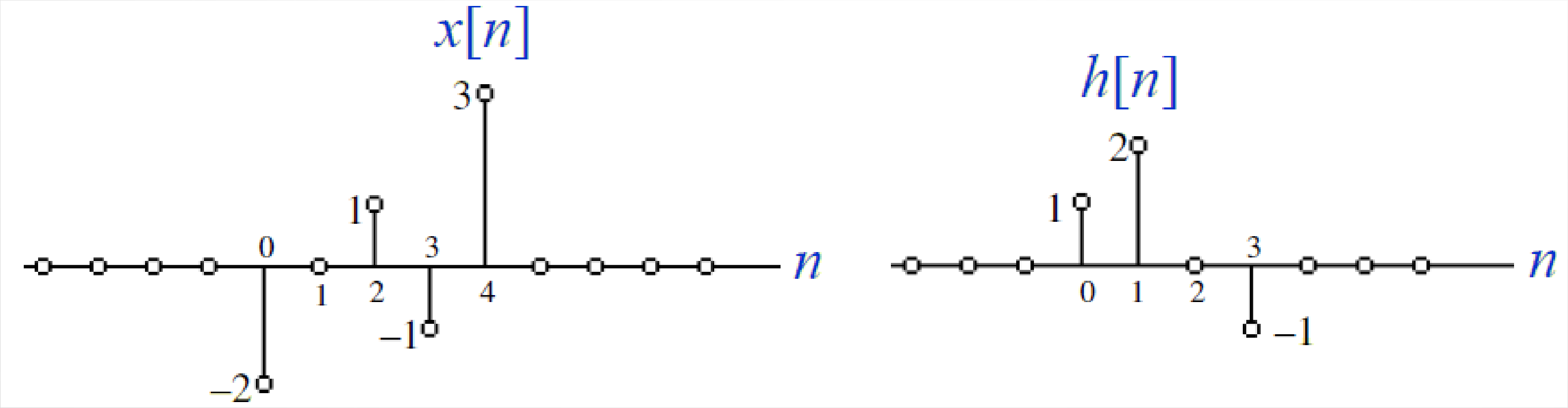
Ya giriş ya da impuls yanıtı sonlu uzunluklu bir dizi ise, konvolüsyon toplamı sonlu sayıda çarpımın toplamına eşit olduğundan çıkış örneklerini hesaplamada kullanılabilir.

Eğer hem giriş hem de impuls yanıtı sonlu uzunluklu diziler ise, konvolüsyon toplamı sonsuz sayıda çarpımın toplamına eşit olduğundan çıkış örneklerini hesaplamada kullanılamaz.

Sonlu uzunluklu impuls yanıtlı sistemler için sonlu sayıda çarpımın toplamını içeren alternatif bir gösterilim elde edeceğiz.

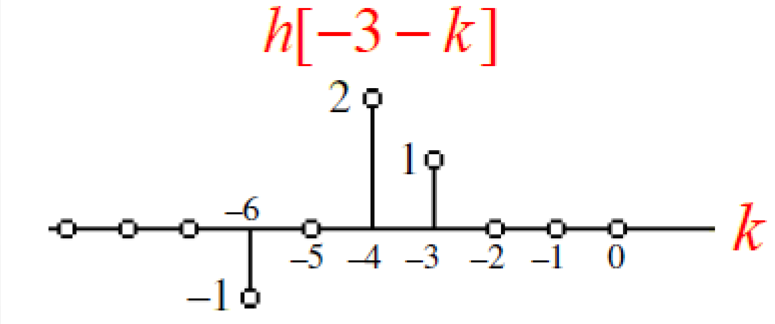
Ayrık-Zaman LTI Sistemlerin Zaman Uzayı Gösterilimi

Aşağıda verilen dizilerle oluşturulan konvolüsyon toplamını oluşturmak istediğimizi varsayalım.



Ayrık-Zaman LTI Sistemlerin Zaman Uzayı Gösterilimi

Aşağıda, örnek olması bakımından *n* = -3 için gösterilen grafikten görülebileceği gibi *n* < 0 ise {*x*[*k*]} veya {*h*[*n*-*k*]}'nın *k*. örneği herhangi bir *k* değeri için sıfır olacaktır.

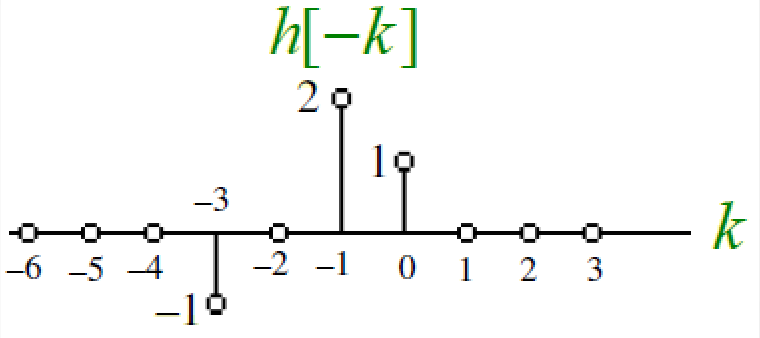


Sonuç olarak, *n* < 0 ise {*x*[*k*]} ve {*h*[*n*-*k*]} dizilerinin *k*. örneği daima sıfır olacak çıkış sıfıra eşit olacaktır:

$$y[n] = 0, \quad n < 0$$

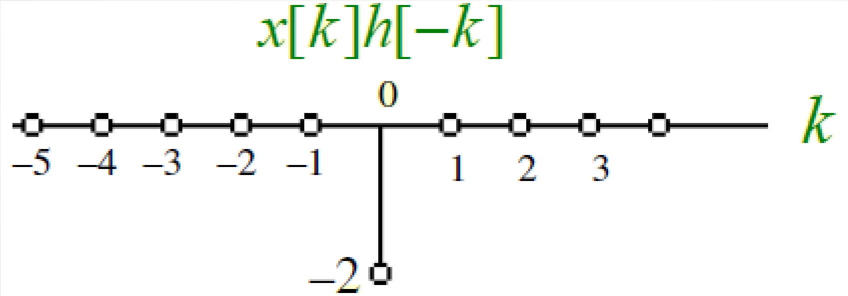
Ayrık-Zaman LTI Sistemlerin Zaman Uzayı Gösterilimi

Şimdi $y[0]$'ın hesaplanmasını ele alalım.



$\{h[-k]\}$ dizisi sağ tarafta verilmiştir.

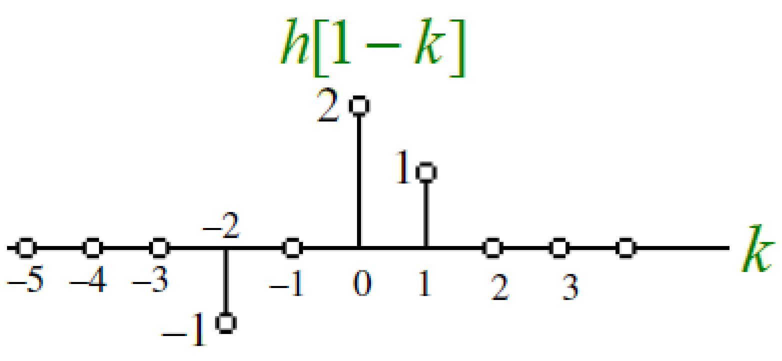
Aşağıda verilen $\{x[k]h[-k]\}$ çarpım dizisinin sıfırdan farklı sadece bir elemanı vardır.

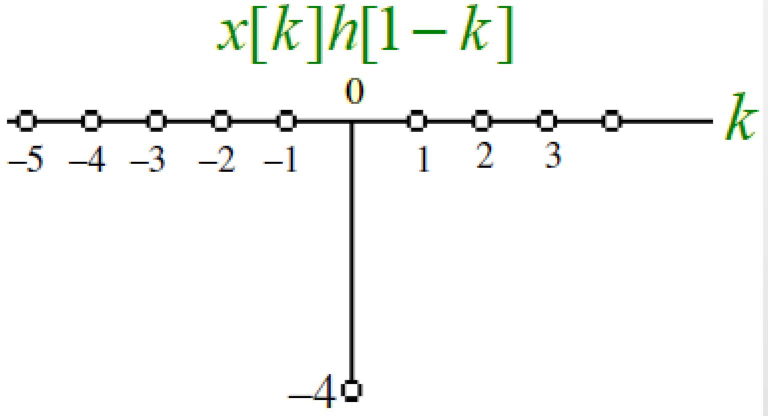


O halde, $y[0] = x[0]h[0] = -2$.

Ayrık-Zaman LTI Sistemlerin Zaman Uzayı Gösterilimi

y[1]'i hesaplamak için {h[-k]} dizisi bir birim sağa kaydırılarak {h[1-k]} dizisi oluşturulur. Daha sonra {x[k]h[1-k]} çarpım dizisi tüm k değerleri üzerinden toplanarak y[1] hesaplanır. İşlemler aşağıda gösterilmiştir.



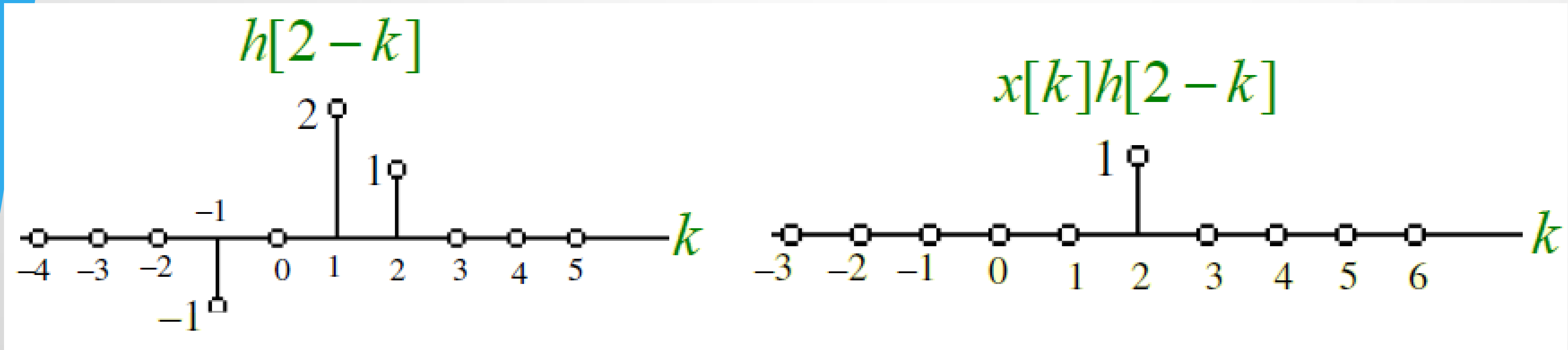


O halde,

$$y[1] = x[0]h[1] + x[1]h[0] = -4 + 0 = -4$$

Ayrık-Zaman LTI Sistemlerin Zaman Uzayı Gösterilimi

y[2]’yi hesaplamak için {*h*[-k]} dizisi iki birim sağa kaydırılarak {*h*[2-k]} dizisi oluşturulur. Daha sonra {*x*[*k*]*h*[2-k]} çarpım dizisi tüm *k* değerleri üzerinden toplanarak *y*[2] hesaplanır. İşlemler aşağıda gösterilmiştir.



O halde,

$$y[2] = x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] = 0 + 0 + 1 = 1$$

Ayrık-Zaman LTI Sistemlerin Zaman Uzayı Gösterilimi

Bu işlemlere devam edilerek

$$y[3] = x[0]h[3] + x[1]h[2] + x[2]h[1] + x[3]h[0]$$
$$= 2 + 0 + 0 + 1 = 3$$

$$y[4] = x[1]h[3] + x[2]h[2] + x[3]h[1] + x[4]h[0]$$
$$= 0 + 0 - 2 + 3 = 1$$

$$y[5] = x[2]h[3] + x[3]h[2] + x[4]h[1]$$
$$= -1 + 0 + 6 = 5$$

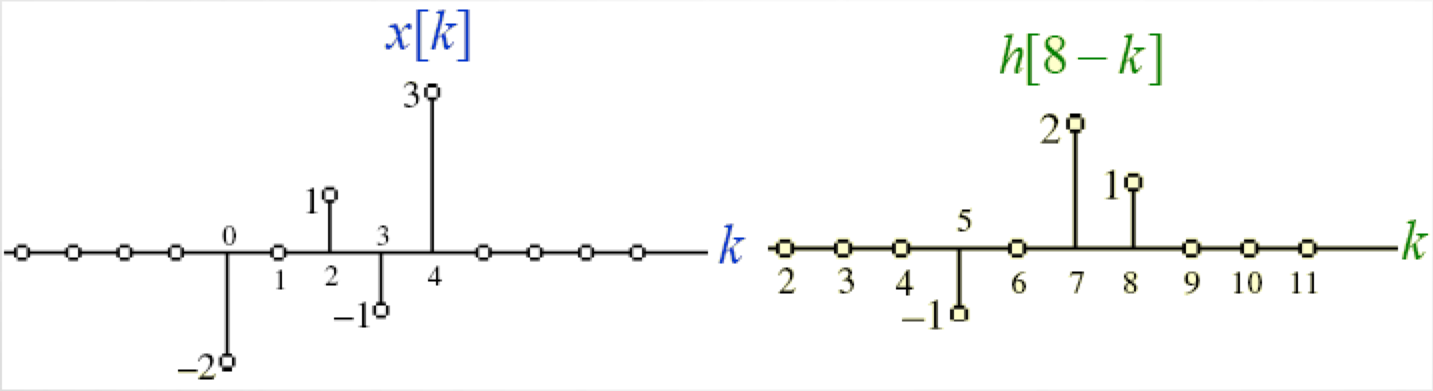
$$y[6] = x[3]h[3] + x[4]h[2] = 1 + 0 = 1$$

$$y[7] = x[4]h[3] = -3$$

elde edilir.

Ayrık-Zaman LTI Sistemlerin Zaman Uzayı Gösterilimi

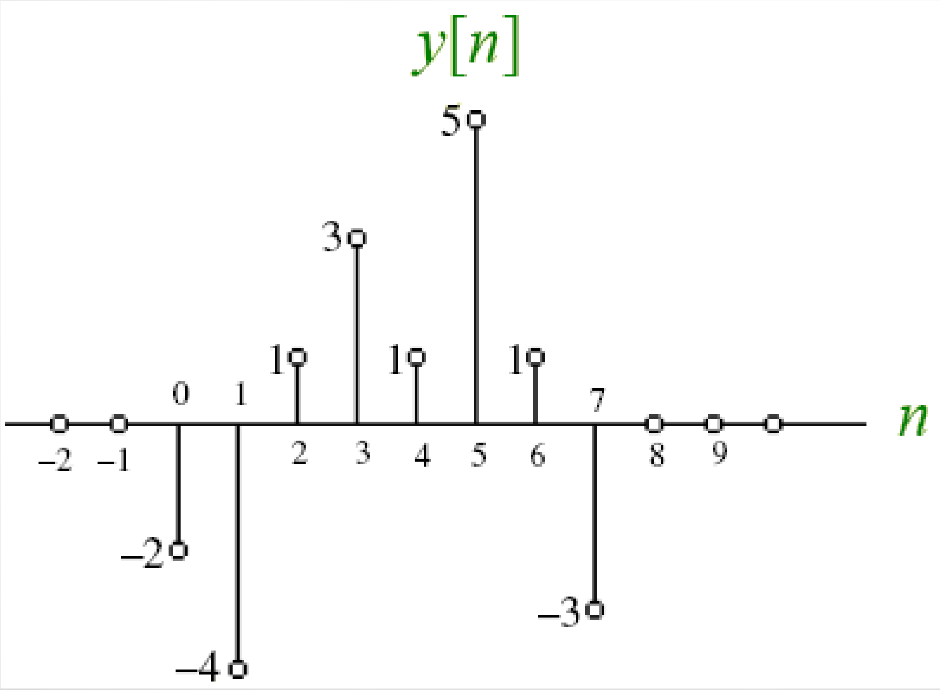
Aşağıda gösterilen $\{x[k]\}$ ve $\{h[n\text{-}k]\}$ grafiklerinden $n > 7$ için bu iki dizinin kesişmediği görülmektedir.



Sonuç olarak $n > 7$ ise $y[n] = 0$.

Ayrık-Zaman LTI Sistemlerin Zaman Uzayı Gösterilimi

Yukarıda yapılan işlemleri özetlersek, konvolüsyon işlemi sonucunda grafiği aşağıda verilen işaret elde edilmiş olur.



Ayrık-Zaman LTI Sistemlerin Zaman Uzayı Gösterilimi

- Çıkış dizisi hesaplanırken yapılan işlemlerde, konvolüsyon toplamı içindeki $\{x[k]h[n\text{-}k]\}$ çarpım dizisi terimlerinin indekslerinin toplamının, hesaplanmakta olan örneğin indeksi *n*'ye esşit olduğu görülmektedir.

- Örneğin, verilen örnekte $y[3]$ örneği , $x[0]h[3]$, $x[1]h[2]$, $x[2]h[1]$ ve $x[3]h[0]$ çarpımlarının toplamından oluşmaktadır.

- Çarpımdaki çarpanların indekslerinin toplamı 3' eşittir.

- Verilen örnekte 5-uzunluklu bir bir giriş dizisinin 4-uzunluklu bir impuls yanıtı ile konvolüsyonu 8-uzunluklu bir çıkış dizisiyle sonuçlanmıştır.

- Genel olarak, konvolüsyona giren iki dizinin uzunluğu *M* ve *N* ise, konvolüsyon işlemi sonucunda oluşan dizinin uzunluğu $M+N-1$ olacaktır.

Konvolüsyon Toplamının Tablo Yöntemiyle Hesaplanması

Tablo yöntemi, sonlu uzunluklu iki dizinin konvolüsyonunu hesaplamada kullanılır. Konuyu bir örnekle açıklayalım.

$0 \leq n \leq 3$ aralığında tanımlı $\{g[n]\}$ dizisi ile $0 \leq n \leq 2$ aralığında tanımlı $\{h[n]\}$ dizisinin konvolüsyonunu ele alalım. Dizilerden aşağıdaki tablo oluşturulur.

n:	0	1	2	3	4	5
$g[n]$:	$g[0]$	$g[1]$	$g[2]$	$g[3]$		
$h[n]$:	$h[0]$	$h[1]$	$h[2]$			
	$g[0]h[0]$	$g[1]h[0]$	$g[2]h[0]$	$g[3]h[0]$		
		$g[0]h[1]$	$g[1]h[1]$	$g[2]h[1]$	$g[3]h[1]$	
			$g[0]h[2]$	$g[1]h[2]$	$g[2]h[2]$	$g[3]h[2]$
$y[n]$:	$y[0]$	$y[1]$	$y[2]$	$y[3]$	$y[4]$	$y[5]$

Konvolüsyon toplamı $y[n]$'i bulmak için n nolu sütündaki çarpımlar toplanır.

Konvolüsyon Toplamının Tablo Yöntemiyle Hesaplanması

Yukarıda verilen örnek için {*y*[*n*]} dizisinin elemanları

$$y[0] = g[0]h[0]$$
$$y[1] = g[1]h[0] + g[0]h[1]$$
$$y[2] = g[2]h[0] + g[1]h[1] + g[0]h[2]$$
$$y[3] = g[3]h[0] + g[2]h[1] + g[1]h[2]$$
$$y[4] = g[3]h[1] + g[2]h[2]$$
$$y[5] = g[3]h[2]$$

eşitliklerinden hesaplanır.

Konvolüsyon Toplamının MATLAB ‘de Hesaplanması

conv M-dosyası sonlu iki uzunluklu dizinin konvolüsyonunu hesaplar.

Örneğin,

a = [-2 0 1 -1 3]

b = [1 2 0 -1]

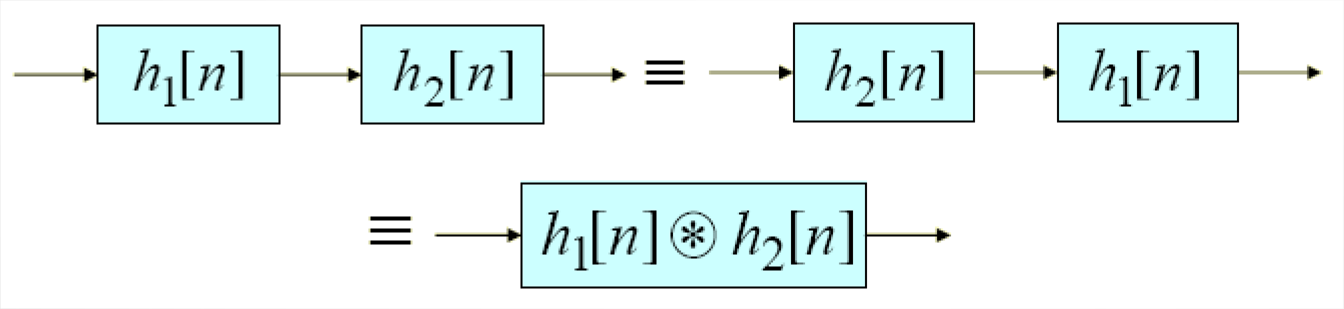
olsun. conv (a,b) komutunun çalıştırılması sonucunda

[-2 -4 1 3 1 5 1 -3]

elde edilir.

Ayrık-Zaman Sistemlerinin Bağlanma Biçimleri

Seri Bağlama



İmpuls yanıtları $h_1[n]$ ve $h_2[n]$ olan seri bağlı iki ayrık-zaman LTI sisteminin eşdeğer impuls yanıtı $h[n]$

$$h[n] = h_1[n] \circledast h_2[n]$$

ile verilir.

Ayrık-Zaman Sistemlerinin Bağlanma Biçimleri

- Konvolüsyon işleminin değişme özelliğinden dolayı seri bağlamada sistemlerin sırasının eşdeğer impuls yanıtı üzerinde etkisi yoktur.

- Kararlı iki sistemin seri bağlanmasından elde edilen eşdeğer sistem kararlıdır.

- Pasif (kayıpsız) iki sistemin seri bağlanmasından elde edilen eşdeğer sistem pasiftir (kayıpsızdır).

- Seri bağlamanın önemli bir uygulaması TERS SİSTEM kavramıdır. $h_1[n]$ ve $h_2[n]$ impuls yanıtlı iki sistem seri bağlansın. Impuls yanıtları

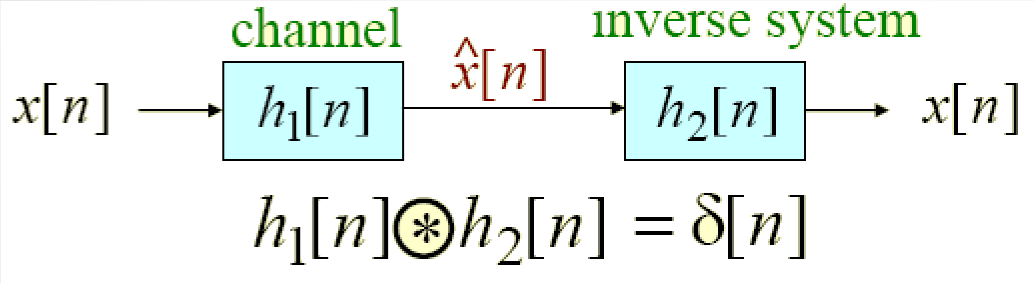
$$h_1[n] \circledast h_2[n] = \delta[n]$$

eşitliğini sağlıyorsa sistemler birbirinin tersidir denir.

Ayrık-Zaman Sistemlerinin Bağlanma Biçimleri

- Seri bağlamanın önemli bir uygulaması, bir iletim kanalının çıkışındaki bozuk işaretten gönderilen orijinal işaretin geri elde edilmesidir.

- İletim kanalının impuls yanıtı biliniyorsa, kanalın tersi tasarlanarak işaret geri elde edilebilir. Aşağıdaki şekil bu kavramı açıklamaktadır.



Ayrık-Zaman Sistemlerinin Bağlanma Biçimleri

İmpuls yanıtı $\mu[n]$ olan toplayıcının tersini hesaplayalım. Ters sistemin impuls yanıtı $h_2[n]$ olsun. Ters sistem

$$\mu[n] \circledast h_2[n] = \delta[n]$$

koşulunu sağlamalıdır. Yukarıdaki denklemden $n < 0$ için $h_2[n] = 0$, $h_2[0] = 1$ ve $n \geq 1$ için

$$\sum_{\ell=0}^{n} h_2[\ell] = 0$$

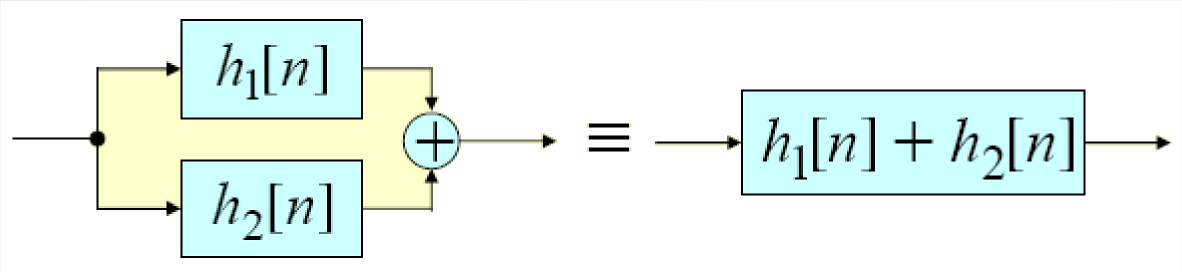
elde edilir. O halde, ayrık-zaman yoplayıcının ters sisteminin impuls yanıtı

$$h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

olup, ters sisteme GERİ YÖNDE FARK ALICI denilir.

Ayrık-Zaman Sistemlerinin Bağlanma Biçimleri

Paralel Bağlama



İmpuls yanıtları $h_1[n]$ ve $h_2[n]$ olan seri bağlı iki ayrık-zaman LTI sisteminin eşdeğer impuls yanıtı $h[n]$

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

ile verilir.

Basit Bağlama Biçimleri

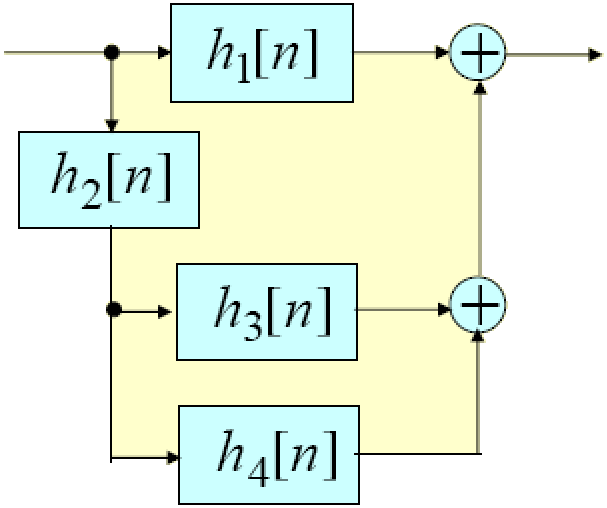
Aşağıda verilen ayrık-zaman sisteminin eşdeğer impuls yanıtını bulalım.

$$h_1[n] = \delta[n] + 0.5\delta[n-1],$$

$$h_2[n] = 0.5\delta[n] - 0.25\delta[n-1],$$

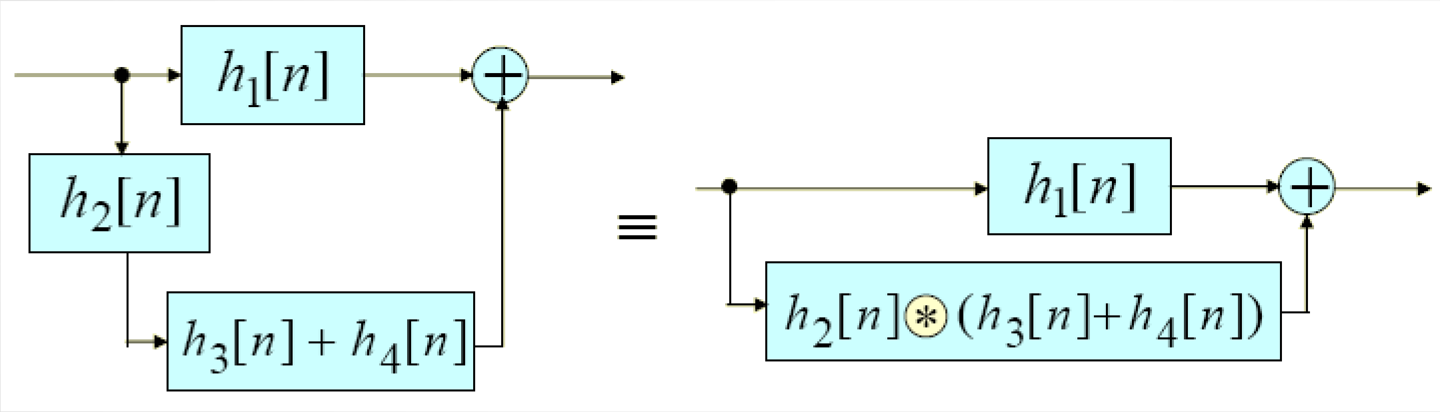
$$h_3[n] = 2\delta[n],$$

$$h_4[n] = -2(0.5)^n \mu[n]$$



Basit Bağlama Biçimleri

Seri ve paralel bağlamanın özelliklerinden yararlanarak sistemi aşağıda gösterildiği gibi basitleştirebiliriz.



Basit Bağlama Biçimleri

Eşdeğer impuls yanıtı *h*[*n*]

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n] \circledast (h_3[n] + h_4[n])$$
$$= h_1[n] + h_2[n] \circledast h_3[n] + h_2[n] \circledast h_4[n]$$

ile verilir. Yukarıdaki iki konvolüsyon terimini hesaplayalım.

$$h_2[n] \circledast h_3[n] = (\tfrac{1}{2}\delta[n] - \tfrac{1}{4}\delta[n-1]) \circledast 2\delta[n]$$
$$= \delta[n] - \tfrac{1}{2}\delta[n-1]$$

$$h_2[n] \circledast h_4[n] = (\tfrac{1}{2}\delta[n] - \tfrac{1}{4}\delta[n-1]) \circledast \left(-2(\tfrac{1}{2})^n \mu[n]\right)$$
$$= -(\tfrac{1}{2})^n \mu[n] + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2})^{n-1} \mu[n-1]$$
$$= -(\tfrac{1}{2})^n \mu[n] + (\tfrac{1}{2})^n \mu[n-1]$$
$$= -(\tfrac{1}{2})^n \delta[n] = -\delta[n]$$

O halde, $h[n] = \delta[n] + \tfrac{1}{2}\delta[n-1] + \delta[n] - \tfrac{1}{2}\delta[n-1] - \delta[n] = \delta[n]$