tmmob
makina mühendisleri odası
İstanbul Şubesi

Matematik-I

Tarih:....../....../20....

Fonksiyon

A ve B boştan farklı iki küme olsun. A'daki her elemanı B'deki bir ve yalnız bir elemana eşleyen bağıntıya fonksiyon denir.

⇒ Karenin alanı, çevresinin bir fonksiyonu mudur?

$A = f(x) = x^2$ Evet, çünkü her x değeri için farklı bir değer karşılık gelir.
$Ç = 4x$

⇒ Dikdörtgenin alanı, çevresinin bir fonksiyonu mudur?

4, 6 ; 2, 8

$A = f(x,y) = x.y$
Çevresi 20 olan bir dikdörtgen düşünelim
Bir çevre uzunluğunun değerine karşılık, birden fazla alan karşılık geldiğinden fonksiyon değildir.

Ters Fonksiyon

Bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için 1-1 ve örten olmalıdır. Sinüs fonksiyonunun tersi yoktur.

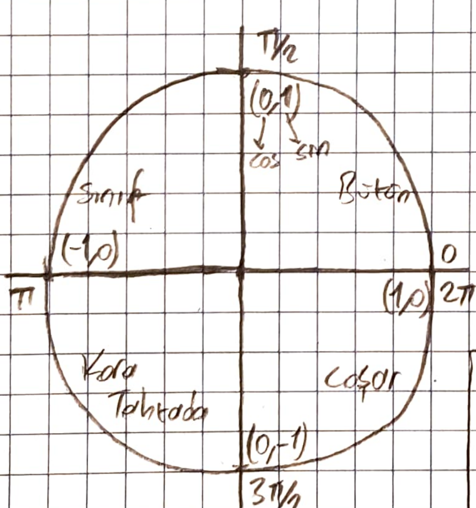
$f: A \to B \Rightarrow f^{-1}: B \to A$

$f(x) = \sin x \begin{cases} f: R \to [-1,1] \\ f^{-1}: [-1,1] \to R \end{cases}$

⇒ $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = A$ olsun

$\sin\left[\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \sin A$

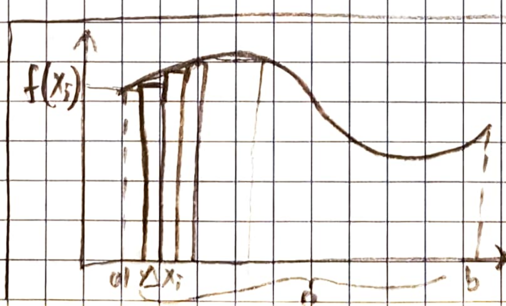
$\sin A = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ → 3. bölge $A = 225°$
→ 4. bölge $A = 315°$



$\sin 210° = \sin(\pi + 30) = -\sin 30$
$\tan 330° = \tan(2\pi - 30) = -\tan 30$
$\sin 135° = \sin(\pi/2 + 45) = +\cos 45$
$\cot 240° = \cot(3\pi/2 - 30) = +\tan 30$

	30	45	60
sin	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 20 = \sin 70$
$\tan 5 = \cot 85$



$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i \rightarrow \int$

$\lim_{n\to\infty} \sum \frac{x_i}{2}$

Fonksiyonların Tanım Kümeleri

⇒ $y = x^5 - 3x^2 + 1 \longrightarrow T.K. = \mathbb{R}$

⇒ $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} \longrightarrow T.K. = \mathbb{R} - \{2, 3\}$

⇒ $y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{\dfrac{x-2}{1-x}} \longrightarrow \dfrac{x-2}{1-x} \geq 0$

x		1		2	
x-2	−		−	•	+
1-x	+	•	−		−
	−		+		−

$T.K. = (1, 2]$

Tanım: $a > 0$ ve $a \neq 1$ $f(x) = a^x$ için ters fonksiyonuna logaritma fonksiyonu denir.

$$\log_a b = x \Longleftrightarrow a^x = b$$

⇒ $\log_e \left| \dfrac{3x+1}{2x} \right| \Rightarrow T.A. = ?$ $\quad \dfrac{3x+1}{2x} > 0$

$-1/3 \quad 0$

$+ \quad - \quad +$

$(-\infty, -1/3) \cup (0, \infty)$

⇒ $f(x) = \underbrace{\sqrt{\dfrac{4-x^2}{x}}}_{f_1} + \underbrace{\arcsin\left(\log \dfrac{x}{10}\right)}_{f_2} \Rightarrow T.A. = ?$

$\dfrac{4-x^2}{x} \geq 0$

$-2 \quad 0 \quad 2$

$+ \quad - \quad + \quad -$

$f_1 \Rightarrow T.K. = (-\infty, -2] \cup (0, 2]$

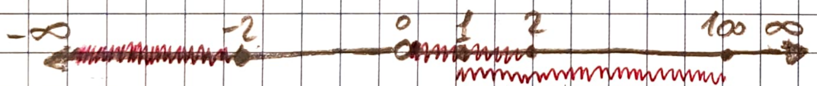
$f_2 \Rightarrow \arcsin\left(\log \dfrac{x}{10}\right)$

$-1 \leq \log \dfrac{x}{10} \leq 1$

$-\log 10 \leq \log \dfrac{x}{10} \leq \log 10$

$\dfrac{1}{10} \leq \dfrac{x}{10} \leq 10$

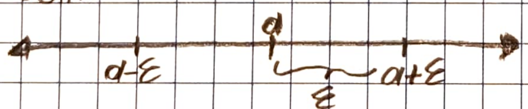
$1 \leq x \leq 100$



$T.K. = [1, 2]$

LİMİT

Tanım: Sabit bir a reel sayısı ve $\varepsilon > 0$ için $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ aralığına a'nın komşuluğu denir.



Burada a'nın kendisi çıkarılırsa bu komşuluğa "delinmiş komşuluk" denir. X reel sayıları için geçerli olan ve $-\infty < x < +\infty$ eşitsizliğinde kullanılan $-\infty$ ve $+\infty$ sembolleri bir rakam değil, sadece sonsuz uzaklığa atılmış noktayı ifade eder.

Bir fonksiyonun tanımlı olduğu bir $x=a$ noktasındaki değerinin $f(a)$ olduğunu biliyoruz. $f(a)$'nın değeri bize sadece fonksiyonun $x=a$'da tanımlı olduğunu gösterir ve daha fazlasını vermez. Bu yüzden fonksiyonun bir a noktasındaki davranışı incelemek için;

X değişkeninin a noktasına yaklaşırken aldığı değere karşılık, f(x)'in aldığı değerin yığıldığı bir nokta olup olmaması önemlidir. X'in a'ya yaklaşması $x \to a$ ile gösterilir. Şimdi; $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+1$ fonksiyonunu ele alalım.

x	0,8	0,9	0,99	0,999999	1,0000000001	1,0001	1,01	1,1
f(x)	2,6	2,8	2,88	2,999998	3,0000000002	3,0002	3,02	3,2

Tabloda görüldüğü gibi, X sayısı 1'e, 1'den küçük ve ya büyük değerlerle yaklaşırken f(x)'de 3 sayısına yığılmaktadır. Buna sezgisel olarak;

"X, 1'e yaklaşırken f(x)'in limiti 3'tür." denir ve $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$ ile gösterilir.

Teorem: Limitler delinmiş komşuluklarda tanımlıdır. Bir fonksiyonun bir noktada limiti olması için o noktada tanımlı olması gerekmez. Yani tanımsız olduğu noktada limit olabilir.

Teorem: Delinmiş komşuluklarda tanımlı sayı ekseninde X sayısı a'ya a'dan küçük (büyük) değerlerle yaklaşıyorsa "X, a'ya soldan (sağdan) yaklaşıyor." denir ve $x \to a^-$ ($x \to a^+$) ile gösterilir.

⇒ $\lim_{x \to 1} \frac{|1-x^2|-3}{|x-1|-1}$

x		-1	$\rightarrow$	1 $\leftarrow$	
$1-x^2$	$-$	•	$+$	•	$-$
$1-x$	$-$		$-$	•	$+$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-(1-x^2)-3}{+(x-1)-1}, & x > 1 \\[2ex] \dfrac{+(1-x^2)-3}{-(x-1)-1}, & x < 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3 = \lim_{x \to 1^-} f(x)$

1

⇒ $\lim_{x \to 0} \frac{|\sin x|}{\sin x} + \frac{\cos x}{\cos|x|} = ?$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\cos x}{\cos(+x)} = 2$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{-\sin x}{\sin x} + \frac{\cos x}{\cos(-x)} = 0$

⇒ $\lim_{x \to \pi/2} \tan x = ?$

$\lim_{x \to \pi/2^+} \tan x = -\infty$

$\lim_{x \to \pi/2^-} \tan x = +\infty$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos 2x}} = ?$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-(1-2\sin^2 x)}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{\sin^2 x}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{|\sin x|}$$

NOT: $\sin(a+b) = \sin a . \cos b + \cos a . \sin b$

$\underbrace{\cos(a+b) = \cos a . \cos b - \sin a . \sin b}$

$\sin 2x = 2 . \sin x . \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\Downarrow$

$\sin^2 x = 1/2 . (1-\cos 2x)$

$\cos^2 x = 1/2 . (1+\cos 2x)$

• $\int \sqrt{1-\cos 5x}\, dx = \int \sqrt{2 . \sin^2 \frac{5x}{2}}$

$$\lim_{x\to 1} 5^{\frac{1}{x-1}} = ?$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1+0) = 5^{\frac{1}{1+0-1}} = 5^{+\infty} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1-0) = 5^{\frac{1}{1-0-1}} = 5^{-\infty} = \frac{1}{5^{\infty}} = 0$$

Belirsizlik Halleri

$\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ kümesine genişletilmiş reel sayılar kümesi denir. $1^{\infty}, 0^0, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, 0.\infty$ ifadeleri sonuç değil belirsizliktir.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{0}{0} \text{ Belirsizliği}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \frac{0}{0} \text{ Belirsizliği}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x-1).(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{1}{3}$$

NOT: $a^3-b^3 = (a-b).(a^2+ab+b^2)$

$a-b = (\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}).(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$

• $x-1 = (\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{1^3}).(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x.1^3}+\sqrt[3]{1^6})$

$$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \frac{0}{0} \text{ Belirsizliği}$$

$\{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{4^3}).(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x.4^3}+\sqrt[3]{4^6}) = x-4^3\}$

$$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x.4^3}+\sqrt[3]{4^6}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x.4^3}+\sqrt[3]{4^6}} \cdot \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+8} \Rightarrow \lim_{x\to 64} \frac{(x-64).\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x.4^3}+\sqrt[3]{4^6}}{(x-4^3).(\sqrt{x}+8)} = \frac{3.4^2}{8+8} = 3$$

~~IV~~ ekok$(2,3)=6$

$u^6=x$

$x\to 64$ iken $u\to 2$

$$\lim_{u\to 2}\frac{u^3-8}{u^2-4}=\frac{0}{0} \text{ Belirsizliği}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\frac{\infty}{\infty} \text{ Belirsizliği}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x.(1-3^{-2x})}{3^x.(1+3^{-2x})}=1$$

$$\frac{3^{-x}}{3^x}=3^{-x}.3^{-x}=3^{-2x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{3^x-2^{x+1}+5^{x-1}}{3^{x+1}+2^{2x+1}+5^x}=\frac{\infty}{\infty} \text{ Belirsizliği}$$

NOT: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^x=\infty \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^x=0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^x\left[\left(\frac{3}{5}\right)^x-2.\left(\frac{2}{5}\right)^x+5^{-1}\right]}{5^x\left[3.\left(\frac{3}{5}\right)^x+2\left(\frac{4}{5}\right)^x+1\right]}=\frac{5^{-1}}{1}$$

2-6

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left[x-\sqrt{x^2-x-2}\right]=\infty-\infty \text{ Belirsizliği}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-\sqrt{x^2-x-2}\right].\frac{x+\sqrt{x^2-x-2}}{x+\sqrt{x^2-x-2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x+2}{x+\sqrt{x^2-x-2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x+\sqrt{x^2.\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x+|x|.\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x.\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x.\left(1+\sqrt{1-1/x-2/x^2}\right)}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^3-8}\right]=\infty-\infty \text{ Belirsizliği}$$

(x^2+2x+4)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+3}{x^3-8}=0$$

7-10

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 7x}.\frac{7}{7}=\frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\frac{3}{5}$$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{3x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{3/2 \cdot \sin^{3x/2}}{3/2\, x}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 1 = 9/4$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x}$ $\quad \cos 2x \rightarrow 1-2\sin^2 x$

$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{\sin^2 3x} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{6x-\sin 2x}{2x-3\sin 4x} = \frac{0}{0}$ Belirsizdir

$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\left[6-\frac{\sin 2x}{x}\right]}{x\cdot\left[2-\frac{3\sin 4x}{x}\right]} = \frac{4}{14}$

★ $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$ olduğunu gösteriniz.

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\overset{1}{\sin x} \cdot \sin x}{x \cdot (1+\cos x)} = 1 \cdot \frac{0}{2} = 0$

★ $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$ olduğunu gösteriniz.

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 \cdot (1+\cos x)} = 1^2 \cdot 1/2 = 1/2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2} = ?$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos 3x}{1+\cos 3x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2 \cdot (1+\cos x)} = 3^2 \cdot 1/2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 9x}{x^2} = ?$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 9x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos 9x}{1+\cos 9x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 9x}{x^2 \cdot (1+\cos 9x)} = 9^2 \cdot \frac{1}{2}$

★ $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos mx}{x^2} = m^2 \cdot 1/2$

★ $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ olduğunu gösteriniz?

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} \cdot \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x \cdot (\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x \cdot (\cos x + 1)} = 0$

⇒ $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -1/2$ olduğunu gösteriniz?

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2 \cdot (\cos x + 1)} = -1/2$

★ $\lim_{x\to 0} \frac{\cos mx - 1}{x^2} = -m^2 \cdot 1/2$

⇒ $\lim_{x\to 0} \frac{1 - 2\cos x + \cos 2x}{x^2} = ?$

$\lim_{x\to 0} \frac{1 - 2\cos x + 2\cos^2 x - 1}{x^2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x \overbrace{(\cos x - 1)}^{-1/2}}{x^2} = 2 \cdot 1 \cdot (-1/2)$

⇒ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\cos x - 1)}{x^2} = \frac{0}{0}$ Belirsizliği

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\cos x - 1) \cdot \overbrace{\cos x - 1}^{-1/2}}{x^2 \cdot \underbrace{\cos x - 1}_{1}} = 1 \cdot -1/2$

⇒ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \frac{0}{0}$ Belirsizliği

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^3}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \cos x - \sin x}{x^3 \cdot \cos x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{(\cos x - 1)}{x^2 \cdot \cos x} = 1 \cdot (-1/2) \cdot 1$

Değişken Değiştirme

⇒ $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ $\quad \left(\begin{matrix} u = \arcsin x \Rightarrow x = \sin u \\ x \to 0 \text{ için } u \to 0 \end{matrix} \right)$

$\lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin u} = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = ?$

$\left(\begin{array}{lll} u = \arctan x & & x = \tan u \\ x \to 0 & \text{için} & u \to 0 \end{array} \right)$

$\lim_{u \to 0} \frac{u}{\tan u} = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin 3x}{\arctan 7x} = 3/7$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1$

$\left(\begin{array}{lll} u = x-1 & \Rightarrow & x = 1+u \\ x \to 1 & \text{için} & u \to 0 \end{array} \right)$

$\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = -1$ olduğunu gösterin

$\left(\begin{array}{lll} u = x - \pi & \Rightarrow & x = \pi + u \\ x \to \pi & \text{için} & u \to 0 \end{array} \right)$

$\lim_{u \to 0} \frac{\sin[\pi + u]}{u}$

$\lim_{u \to 0} \frac{-\sin u}{u} = -1$

$\Rightarrow \lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\pi/2 - x} = \frac{0}{0}$ Belirsizliği

$\left(\begin{array}{lll} u = x - \pi/2 & \Rightarrow & x = \pi/2 + u \\ x \to \pi/2 & \text{için} & u \to 0 \end{array} \right)$

$\lim_{u \to 0} \frac{1 - \sin[\pi/2 + u]}{-u}$

$\lim_{u \to 0} \frac{1 - \cos u}{-u} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x} = \frac{0}{0}$ Belirsizliği

$\left(\begin{array}{lll} u = x-1 & \Rightarrow & x = 1+u \\ x \to 1 & \text{için} & u \to 0 \end{array} \right)$

$\lim_{u \to 0} \frac{1 - (1+u)^2}{\sin[\pi . (1+u)]}$

$\lim_{u \to 0} \frac{-u^2 - 2u}{\sin[\pi + \pi u]}$

$\lim_{u \to 0} \frac{-u . (u+2)}{-\sin \pi u}$

$\lim_{u \to 0} \frac{\overset{1}{\pi u} . (u+2)}{\pi . \sin \pi u} = \frac{2}{\pi}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{2-x}$ $\left(\begin{array}{lll} u=x-2 & \Rightarrow & x=2+u \\ x\to 2 & \text{için} & u\to 0 \end{array}\right)$

$\lim_{u\to 0} \dfrac{\cos\left[\pi/4\cdot(2+u)\right]}{-u}$

$\lim_{u\to 0} \dfrac{\cos\left[\pi/2+\pi u/4\right]}{-u}$

$\lim_{u\to 0} \dfrac{-\sin\frac{\pi u}{4}}{-u}$

$\lim_{u\to 0} \dfrac{\pi/4 \cdot \sin\frac{\pi u}{4}}{\frac{\pi u}{4}} \; 1 = \pi/4$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \dfrac{\tan\pi x}{x-2} = \frac{0}{0}$ Belirsizliği $\left(\begin{array}{lll} u=x-2 & \Rightarrow & x=2+u \\ x\to 2 & \text{için} & u\to 0 \end{array}\right)$

$\lim_{u\to 0} \dfrac{\tan\left[\pi.(2+u)\right]}{u}$

$\lim_{u\to 0} \dfrac{\tan\left[2\pi+\pi u\right]}{u}$

$\lim_{u\to 0} \dfrac{\tan\pi u}{u} = \pi$

★ $\lim_{x\to \pi/3} \dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x} = \frac{0}{0}$ Belirsizliği $\left(\begin{array}{lll} u=x-\pi/3 & \Rightarrow & x=\pi/3+u \\ x\to \pi/3 & \text{için} & u\to 0 \end{array}\right)$

$\lim_{u\to 0} \dfrac{1-2\cos(\pi/3+u)}{\pi-3.(\pi/3+u)}$

$\lim_{u\to 0} \dfrac{1-2\cos(\pi/3+u)}{-3u}$ → Toplam-Fark $\underbrace{\cos\pi/3}_{1/2}.\cos u-\underbrace{\sin\pi/3}_{\sqrt{3}/2}.\sin u$

1^∞ Belirsizlik Hali

Tanım: e sayısı doğal sayı değişkenli $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ fonksiyonu için $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718$ şeklinde tanımlanmıştır. Bu limit sürekli değişkenler için de mevcuttur. Yani; $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ dir. Burada $\left(\begin{array}{lll} u=1/x & \Rightarrow & x=\frac{1}{u} \\ x\to\infty & \text{için} & u\to 0 \end{array}\right)$ değişken değiştirmesi yapılırsa $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ eşitliğinin varlığınıda görmüş oluruz.

Teorem: $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ olmak üzere $\lim_{x\to 0}\left[1+f(x)\right]^{g(x)} = e^{\lim_{x\to 0}[f(x).g(x)]}$ dır.

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{2}{x}} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim_{x\to 0}\sin x.\frac{2}{x}} = e^2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} \overset{1^\infty}{=} \lim_{x\to 0}(1-1+\cos x)^{1/x^2} = e^{\lim_{x\to 0}(-1+\cos x).\frac{1}{x^2}} = e^{-1/2}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+2} \overset{1^\infty}{=} ?$ $\left\{ \begin{array}{r|l} 2x+1 & 2x-1 \\ -/2x-1 & 1 \\ \hline 2 & \end{array} \quad 1+\frac{2}{2x-1} \right\}$

$\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{2}{2x-1}\right]^{3x+2} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2x-1}.3x+2} = e^3$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x \overset{1^\infty}{=} ?$

$= \lim_{x\to\infty}\left[1-1+\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right]^x = e^{\lim_{x\to\infty}\left[-1+\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right].x} = e^{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}+\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right]}$

$= e^{0+1}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = 1^\infty$ Belirsizlik hali

$\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1-1} = \infty\right\}$

$= \lim_{x\to 0}\left[1-1+\frac{\sin x}{x}\right]^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$

$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x}.\frac{\sin x}{x-\sin x}}$

$= e^{-1}$

11-13

★ $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ olduğunu gösteriniz?

$= \lim_{x\to 0} x^{-1}.\log_a(1+x)$

$= \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x}$

$= \log_a\Big[\underbrace{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{e}\Big]$

$= \log_a e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+7x)}{x} = \dfrac{0}{0}$ Belirsizlik hali

$= \lim\limits_{x\to 0} x^{-1} \cdot \ln(1+7x)$

$= \ln\left[\lim\limits_{x\to 0} (1+7x)^{1/x}\right]$

$= \ln e^{7} = 7$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-3x)}{x} \cdot \dfrac{-3}{-3} = -3$

NOT: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ln e = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-7 \cdot x}{-7 \cdot \ln(1-7x)} = -\dfrac{1}{7}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-\sin 7x)}{x} = \dfrac{0}{0}$ Belirsizliği

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-\sin 7x)}{x}^{1} \cdot \dfrac{-\sin 7x}{-\sin 7x} = -7$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+7x)}{\ln(1-5x)} = \dfrac{0}{0}$ Belirsizlik hali

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+7x)}{7x}^{1} \cdot 7x \cdot \dfrac{\overset{1}{-5x}}{-5x \cdot \ln(1-5x)} = -\dfrac{7}{5}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(2\tan x)}{\ln(1+2x)} = \dfrac{0}{0}$ Belirsizliği

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(2\tan x)}{2\tan x} \cdot 2\tan x \cdot \dfrac{1}{\ln(1+2x)} \cdot \dfrac{2x}{2x} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(1+5x)} = \dfrac{0}{0}$ Belirsizliği

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(1+5x)} \cdot \dfrac{5x}{5x} = \dfrac{1}{5} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x}$

I. Y

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^{-1} \cdot \ln(\cos x) = \ln\left[\underbrace{\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}}_{1^{\infty}}\right] = \ln\left[\lim\limits_{x\to 0} (1-1+\cos x)^{\frac{1}{x}}\right]$

$= \ln\left[e^{\lim\limits_{x\to 0}(-1+\cos x) \cdot \frac{1}{x}}\right] = \ln e^{0} = \ln 1 = 0$

II. Y

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln[1-1+\cos x]}{x} \cdot \dfrac{\cos x - 1}{\cos x - 1} = 0$

★ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\dfrac{0}{0}$ Belirsizliği $\quad\left(\begin{array}{ll} u=x-1 \Rightarrow x=1+u \\ x\to1 \text{ için } u\to0\end{array}\right)$

$=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$

⇒ $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{x-e}{\ln x-1}=\dfrac{0}{0}$ Belirsizliği $\quad\left(\begin{array}{ll} u=x-e \Rightarrow x=u+e \\ x\to e \text{ için } u\to0\end{array}\right)$

$=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{u}{\ln(u+e)-1}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{u}{\ln(u+e)-\ln e}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{u}{\ln\left(\dfrac{u+e}{e}\right)}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{1/e\ \ u}{1/e\ \ln\left(1+\dfrac{u}{e}\right)}=e$

⇒ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\log_a x-1}{x-a}=\dfrac{0}{0}$ Belirsizliği

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{\ln x}{\ln a}-1}{x-a}=\dfrac{1}{\ln a}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\ln(a+u)-\ln a}{u}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{1/a\ \ln\left(1+\dfrac{u}{a}\right)}{1/a\ \ u}=\dfrac{1}{a}$

✳⇒ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-x^2)+\ln(1+x^2)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-x^4)}{x^4}=-1$

★ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ olduğunu gösteriniz?

$\left(\begin{array}{l} u=a^x-1 \Rightarrow a^x=u+1 \\ \qquad \ln a^x=\ln(1+u) \\ \qquad x=\dfrac{\ln(1+u)}{\ln a} \\ x\to0 \text{ için } u\to0\end{array}\right)$

$\lim\limits_{u\to0}\dfrac{u}{\dfrac{\ln(1+u)}{\ln a}}$

$\ln a \lim\limits_{u\to0}\dfrac{u}{\ln(1+u)}=\ln a$

⇒ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^x-1}{x}=\ln 3$ olduğunu gösteriniz?

$\left(\begin{array}{l} u=3^x-1 \Rightarrow 3^x=u+1 \\ \qquad \ln 3^x=\ln(u+1) \\ \qquad x=\dfrac{\ln(u+1)}{\ln 3} \\ x\to0 \text{ için } u\to0\end{array}\right)$

$\lim\limits_{u\to0}\dfrac{u}{\dfrac{\ln(u+1)}{\ln 3}}$

$\ln 3.\lim\limits_{u\to0}\dfrac{u}{\ln(u+1)}=\ln 3$

NOT: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^{bx}-1}{x}=\ln a^b$

⇒ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{5x}-1}{x}=5\ln 3$ olduğunu gösteriniz?

$\left(\begin{array}{l} u=3^{5x}-1 \quad 3^{5x}=u+1 \\ \qquad \ln 3^{5x}=\ln(u+1) \\ \qquad x=\dfrac{\ln(u+1)}{5\ln 3} \\ x\to0 \text{ için } u\to0\end{array}\right)$

$\lim\limits_{u\to0}\dfrac{u}{\dfrac{\ln(1+u)}{5\ln 3}}$

$5\ln 3.\lim\limits_{u\to0}\dfrac{u}{\ln(1+u)}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{5^x-1} = \dfrac{1}{\ln 5}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{3^{7x}-1} = \dfrac{1}{\ln 3^7}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{5x}-1}{5x} = \ln 2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{5x}-1}{x} = \ln 2^5$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = \ln e = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{\sin 7x}-1}{x} = ?$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{\sin 7x}-1}{x} \cdot \dfrac{\sin 7x}{\sin 7x} = 7\ln 3$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{9x}-1}{5^{7x}-1} \cdot \dfrac{x}{x} = \dfrac{\ln 2^9}{\ln 5^7}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x}{x} = ?$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x-1+1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a^x-1}{x} - \dfrac{b^x-1}{x}\right] = \ln a - \ln b = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = ?$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos x-1+1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\underbrace{\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}}_{1} + \underbrace{\dfrac{1+\cos x}{x^2}}_{1/2}\right] = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{1-\cos x}-1}{x.(\sqrt{1+x}-1)} = \dfrac{0}{0}$ Belirsizliği

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{1-\cos x}-1}{1-\cos x} \cdot (1-\cos x) \cdot \dfrac{1}{x.(\sqrt{1+x}-1)} \cdot \dfrac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$

$= \ln 3 . \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x).(\sqrt{1+x}+1)}{x^2}$

$= \dfrac{1}{2} . 2 . \ln 3$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax - \sin bx} = \dfrac{0}{0}$ Belirsizliği

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} +1-1}{\frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin bx}{x}} = \frac{1}{a-b} \cdot \lim_{x\to 0} \left[\underbrace{\frac{(e^{ax}-1)}{x}}_{\ln e^{a}} - \underbrace{\frac{(e^{bx}-1)}{x}}_{\ln e^{b}} \right] = \frac{a-b}{a-b} = 1$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \sqrt[3]{x} \cdot \ln(1-3x)}{\arctan^2 \sqrt{x} \cdot (e^{5\sqrt[3]{x}}-1)} = \dfrac{0}{0}$ Belirsizliği

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}}_{1} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \underbrace{\frac{\ln(1-3x)}{(-3x)}}_{1} \cdot (-3x) \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{x}}{\arctan\sqrt{x}}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{x}}{\arctan\sqrt{x}}}_{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} \cdot \underbrace{\frac{5\sqrt[3]{x}}{(e^{5\sqrt[3]{x}}-1)}}_{\ln e = 1} \cdot \frac{1}{5\sqrt[3]{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} \cdot (-3x)}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot 5\sqrt[3]{x}} = -\frac{3}{5}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos 4x) \cdot \ln(1+3x^2)}{x^2 \cdot (5^{3x}-1) \cdot \arctan 2x} = ?$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{(1-\cos 4x)}{x^2}}_{4^2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\ln(1+3x^2)}{3x^2}}_{1} \cdot 3x^2 \cdot \underbrace{\frac{3x}{5^{3x}-1}}_{\frac{1}{\ln 5}} \cdot \frac{1}{3x} \cdot \underbrace{\frac{2x}{\arctan 2x}}_{1} \cdot \frac{1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{8 \cdot 3x^3}{3x \cdot 2x \cdot \ln 5}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4x}{\ln 5} = 0$$

0.∞ Belirsizlik Hali

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \cot x \overset{0.\infty}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x} \overset{0/0}{=} 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to \infty} x \cdot \sin\dfrac{1}{x} \overset{0.\infty}{=} \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin 1/x}{1/x}$

$$\left(\begin{array}{l} u = 1/x \Rightarrow x = \frac{1}{u} \\ x\to\infty \Rightarrow u\to 0 \end{array} \right)$$

$= \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x \cdot (a^{1/x}-1) \overset{0.\infty}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{1/x}-1}{1/x} = \ln a$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} (x-3)\operatorname{cosec}\pi x = 0.\infty$ Belirsizlik Hali

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sin \pi x} = \frac{0}{0} \text{ Belirsizlik Hali} \qquad \begin{pmatrix} u = x-3 \Rightarrow x = 3+u \\ x\to 3 \Rightarrow u \to 0 \end{pmatrix}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin[\pi(3+u)]} \rightarrow \sin[3\pi + \pi u]$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\pi u}{\pi(-\sin \pi u)} = \frac{-1}{\pi}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} (1-x).\tan\frac{\pi x}{2} = 0.\infty$ Belirsizlik Hali

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\cot\frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{0} \text{ Belirsizlik Hali} \qquad \begin{pmatrix} u = x-1 \Rightarrow x = 1+u \\ x\to 1 \Rightarrow u\to 0 \end{pmatrix}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{-u}{\cot[\pi/2(1+u)]} \rightarrow \cot\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi u}{2}\right]$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\pi/2\,(-u)}{\pi/2\left(-\tan\frac{\pi u}{2}\right)} = \frac{2}{\pi}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}.\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 0.\infty$ Belirsizlik Hali

I. Y

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad \boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{1} - \underbrace{\frac{\ln(1-x)}{x}}_{-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1-(-1)\right] = 1$$

II. Y

$$= \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}$$

$$= \ln\Big[\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}}_{1^\infty}\Big]$$

$$= \ln\left[\lim_{x\to 0}\left(1 - 1 + \frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\right]$$

$$= \ln\left[e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{1-x}\cdot\frac{1}{2x}}\right]$$

$$= \ln e^1 = 1$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(e^{x^2} + 2\sqrt{x})}{\tan\sqrt{x}} = \frac{0}{0}$ Belirsizlik Hali

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(e^{x^2}+2\sqrt{x})}{\tan\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \;{}^{1} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^{x^2}+2\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{0}{0} \text{ Belirsizlik Hali}$$

tmmob
makina mühendisleri odası
İstanbul Şubesi

Tarih:....../....../20....

~~IX~~ $= \lim_{x\to 0} \ln\left(e^{x^2}+2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

$= \ln\left[\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(e^{x^2}+2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}_{1^\infty}\right]$

$= \ln\left[\lim_{x\to 0}\left(1-1+e^{x^2}+2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right]$

$= \ln\left[e^{\lim_{x\to 0}\left(e^{x^2}-1+2\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}\right]$

$= \ln\left[e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)}\right]$

$= \ln\left(e^{0+2}\right) = 2$

~~IX~~ $= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(e^{x^2}+2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = \frac{0}{0}$ Belirsizlik Hali

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1-1+e^{x^2}+2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1-1+e^{x^2}+2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{x^2}-1+2\sqrt{x}}{e^{x^2}-1+2\sqrt{x}}$ $\quad 1$

$= \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{x^2}-1}{\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right] = 2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{a^x-a}{x-1} = a\ln a$ olduğunu gösteriniz?

$\left(\begin{array}{ll} u=x-1 & \Rightarrow x=1+u \\ x\to 1 & \Rightarrow u\to 0 \end{array}\right)$

$= \lim_{u\to 0}\frac{a^{1+u}-a}{u}$

$= \lim_{u\to 0}\frac{a\cdot\left(a^u-1\right)}{u} \longrightarrow \ln a$

$= a\ln a$

15-18

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{0}{0}$ B.H.

$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}\cdot\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)} = \frac{1}{2.2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x} = \frac{0}{0}$ B.H.

$\left(\begin{array}{ll} u=x-\frac{\pi}{6} & \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+u \\ x\to \pi/6 & \Rightarrow u\to 0 \end{array}\right)$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{6}+u\right)} : \frac{u}{u} = \frac{0}{0} \text{ BH.}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos u - \frac{1}{2}\sin u\right]}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\cos u\right) + \frac{1}{2}\sin u}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{\frac{u}{u}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\underbrace{\frac{1-\cos u}{u}}_{0} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\sin u}{u}}_{1}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$\Rightarrow \lim_{x \to \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x} = \frac{0}{0}$ BH.

$$\lim_{x \to \pi/4} \frac{(\sin x - \cos x) \cdot \cos x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \to \pi/4} (-\cos x) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1} (x^2-1) \cdot \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \cdot \infty$ BH.

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^2-1)}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \qquad \left(\begin{array}{ll} u = x-1 & \Rightarrow x = 1+u \\ x \to 1 & \Rightarrow u \to 0 \end{array}\right)$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{(1+u)^2 - 1}{\cot\left[\underbrace{\frac{\pi}{2}(1+u)}_{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi u}{2}}\right]} = \lim_{u \to 0} \frac{\overset{1}{\frac{\pi}{2}} u (u+2)}{-\tan \frac{\pi u}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2 \cdot \left(\frac{-2}{\pi}\right) = \frac{-4}{\pi}$$

$\Rightarrow$

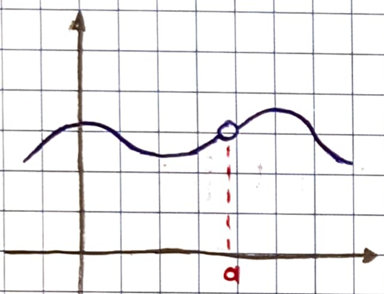
$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos 5x}\right) \cdot \left(3^{5x} - 7^{9x}\right)}{\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right) \cdot \log_3(1-2x)} = \frac{0}{0} \text{ Belirsizlik Hali}$$

19-21

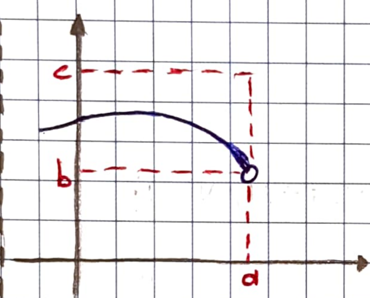
SÜREKLİLİK

Tanım: $f=\{(x,y) \mid y=f(x),\ x\in\mathbb{R}\}$ fonksiyonu tanım kümesinin bir a noktasında reel bir limite sahipse ve bu limit $f(x)$'in a'daki değerine eşitse yani $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ ise $f(x)$, $x=a$'da süreklidir.

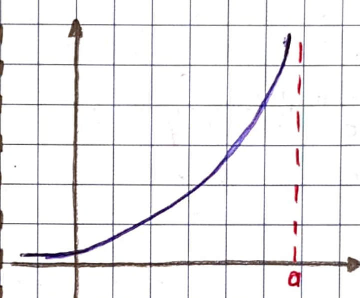
Bu tanıma göre fonksiyon tanımsız olduğu her noktada süreksizdir. $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{a^x-1}{x}$, $\frac{\ln(1+x)}{x}$ gibi fonksiyonlar, $x=0$'da tanımlı olmadıkları için bu noktada sürekli değiller ancak limitleri var ve 1'dir.



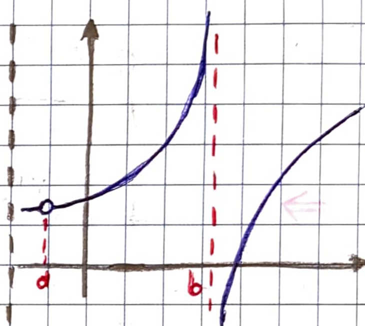
$x=a$'da tanımlı olmadığı için $x=a$'da sürekli değildir.



$f(a)=f(c)$ fakat $\lim_{x\to a} f(x)=b$ olduğundan sürekli değildir.

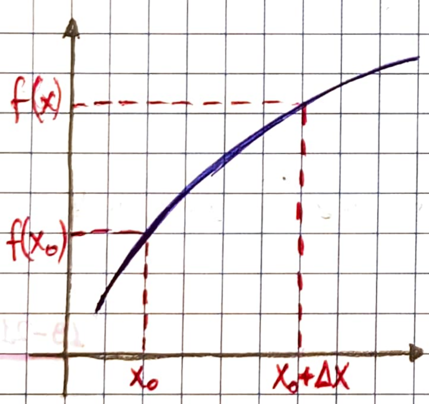


$\lim_{x\to a} f(x)$ mevcut değil sürekli değil.



$x=a$'da tanımlı olmadığından ve $x=b$'de limit mevcut olmadığından bu noktalarda süreksizdir.

Süreklilik için eş değer başka bir tanım daha kullanılır.



$\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ olsun, Δx ve Δy sırasıyla değişkenin ve fonksiyonun x_0 noktasındaki artımıdır. Buna göre $x = x_0 + \Delta x$, $f(x) = f(x_0) + \Delta y$ ve ya $f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \Delta y$ şeklinde yazılabilir.

Tanım: $f(x)$, x_0 noktasında tanımlı iken $\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\right] = 0$ ise $f(x)$, x_0 noktasında süreklidir.

Bu tanıma göre; bir fonksiyonun bir x_0 noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart, değişkenin x_0 noktasındaki artımı sıfıra yaklaşırken, fonksiyonun artımının da sıfıra yaklaşmasıdır.

- Sabit fonksiyon tüm reel eksende süreklidir. Çünkü $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oranı sıfırdır.

• Doğrusal fonksiyon tüm reel eksende süreklidir.
Çünkü $\lim_{\Delta x \to 0}\left[a.(x+\Delta x)-b-(ax+b)\right]=0$ olur.

• $f(x)=\sin x$ fonksiyonu tanımlı olduğu bölgede süreklidir. Gösteriniz.

$\lim_{\Delta x \to 0}\left[\sin(x+\Delta x)-\sin x\right]=0$ olduğunu göstermeliyiz.

NOT: $\sin a+\sin b = 2.\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$ olduğunu gösteriniz.

$$\begin{array}{l} \sin(a+b)=\sin a.\cos b+\sin b.\cos a \\ + \ \sin(a-b)=\sin a.\cos b-\sin b.\cos a \\ \hline \sin(\underbrace{a+b}_{u})+\sin(\underbrace{a-b}_{v}) = 2.\sin a.\cos b \end{array}$$

$$\begin{array}{l} u=a+b \\ + \ v=a-b \end{array} \Rightarrow a=\frac{u+v}{2} \quad b=\frac{u-v}{2}$$

$$\sin u+\sin v = 2.\sin\left(\frac{u+v}{2}\right).\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[\sin(x+\Delta x)-\sin x\right]=0$$

$$=\lim_{\Delta x \to 0}\left[2.\sin\left(\frac{x+\Delta x-x}{2}\right).\cos\left(\frac{x+\Delta x+x}{2}\right)\right]$$

$$=\lim_{\Delta x \to 0}\left[2.\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right).\cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)\right]$$

$$=2\sin 0.\cos x=0$$

Sürekli Fonksiyonun Özellikleri

$f(x)$ ve $g(x)$, $x=a$'da sürekli iseler aşağıdaki fonksiyonlarda $x=a$'da süreklidir.

i) $f+g,\ f-g,\ f.g,\ \frac{f}{g}\ (g\neq 0)$

ii) $k, l \in \mathbb{R}$ olmak üzere $k.f \mp l.g$

iii) m ve n tek sayı olmak üzere $f^{\frac{m}{n}}$

iv) $f\circ g,\ g\circ f$

v) $\lim_{x\to a}\sqrt[k]{f}=\sqrt[k]{\lim_{x\to a} f}$

Kapalı Aralıkta Süreklilik

Tanım: $a<b$ iken $f(x)$ aşağıdaki koşulları aynı anda sağlıyorsa $f(x)$, $[a,b]$ kapalı aralığında süreklidir denir.

i) $f(x)$, (a,b) açık aralığında süreklidir.

ii) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ olmalı, (Sağdan sürekli)

iii) $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ olmalı, (soldan sürekli)

→ $f(x)=\sqrt{5x-x^2-4}$ fonksiyonun sürekli olduğu aralığı bulunuz?

x		1		4	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

i) $(1,4)$ açık aralığında süreklidir.

ii) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0=f(1)$ (Sağdan süreklidir)

iii) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=0=f(4)$ (soldan süreklidir)

Sürekli olduğu aralık $[1,4]$ aralığıdır.

Teorem (Ekstremum Değer Teoremi):

$f(x)$, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve tanımlı ise $[a,b]$ kapalı aralığındaki her x için;

$f(x_1) \geq f(x)$ olacak şekilde en az bir $x_1 \in [a,b]$ ve
$f(x_2) \leq f(x)$ olacak şekilde en az bir $x_2 \in [a,b]$ vardır.

Bu teorem; kapalı aralıkta sürekli bir fonksiyonun mutlak maximum ve mutlak minimuma sahip olduğunu söyler ancak bunların nasıl bulunacağına dair herhangi bir iddia da bulunmaz.

Mesela $y=x^3-1$ fonksiyon $(1,2)$ açık aralığında süreklidir. Ancak aralık açık olduğu için mutlak maximum var denemez.

Teorem (Weierstrass):

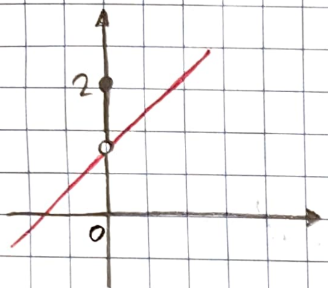
$f(x)$ fonksiyonu bir $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ise $f(x)$ bu aralıkta sınırlıdır.

Bu teoreme göre; $f(x)$, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ise bu aralığa tüm noktalarında fonksiyon sonlu değerler almaktadır. Ve öyle bir $M>0$ sayısı vardır ki fonksiyonun grafiği $y=-M$ ve $y=M$ doğruları arasında bulunmaktadır.

SÜREKSİZLİK ÇEŞİTLERİ

I. Çeşit Süreksizlik: Fonksiyonun süreksiz olduğu noktalarda limitleri vardır. İki türü vardır;

i) Sağdan ve soldan limitler var ve birbirine eşitse bu tür süreksizliğe "Kaldırılabilir" süreksizlik denir.

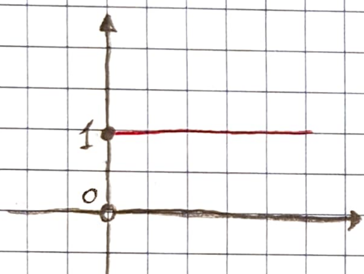


$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq f(0)$$

Burada $f(0)=2$ değil de $f(0)=1$ olsaydı sürekli olurdu.

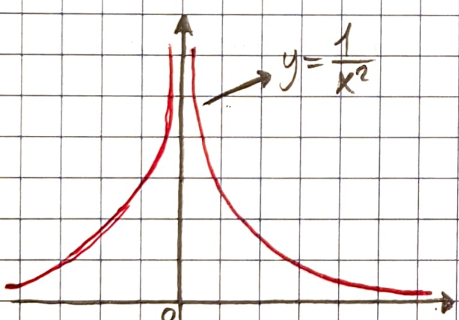
ii) Sıçrama Süreksizliği: Sağdan ve soldan limitler var (sonlu) ve birbirine eşit değilse bu süreksizliğe sıçrama süreksizliği denir. Ve sıçraması

$\left|\lim_{x\to 0^+} f(x) - \lim_{x\to 0^-} f(x)\right|$ 'dir.



$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

II. Çeşit Süreksizlik: Sağdan ve ya soldan limitlerden en az birinin mevcut olmaması ve ya sonsuz olması halinde, bu süreksizliğe II. çeşit süreksizlik denir.



$x=0$ noktası "sonsuz süreksizlik noktası" dır.

➔ $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ fonksiyonu için $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \neq f(0)$ olduğundan $x=0$'da kaldırılabilir süreksizlik vardır. Bu fonksiyon yeniden

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa süreksizlik kaldırılmış olur.

⇒ Aşağıda verilen fonksiyonların karşılarında verilen noktadaki süreksizlik çeşidini inceleyiniz?

i) $f(x) = 3^{\frac{1}{x-1}}$; $x=1$

Ç: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1+0) = 3^{\frac{1}{1+0-1}} = 3^{\infty} = \infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1-0) = 3^{\frac{1}{1-0-1}} = 3^{-\infty} = 0$

$x=1$'de II. çeşitten "sonsuz süreksizlik" vardır.

ii) $f(x) = \dfrac{|3x-5|}{3x-5}$; $x = 5/3$

Ç: x | $\rightarrow 5/3 \leftarrow$; $-$ | $+$

$\lim\limits_{x\to 5/3^+} f(x) = 1 \neq -1 = \lim\limits_{x\to 5/3^-} f(x)$ olduğundan

$x=5/3$ de I. çeşitten sıçrama süreksizliği vardır ve sıçraması

$\left|\lim\limits_{x\to 5/3^+} f(x) - \lim\limits_{x\to 5/3^-} f(x)\right| = |1-(-1)| = 2$ 'dir

iii) $f(x) = \dfrac{1}{2+3^{1/x}}$; $x=0$

Ç: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(+0) = \dfrac{1}{2+3^{1/+0}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(-0) = \dfrac{1}{2+3^{-\infty}} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow$ $x=0$ 'da sıçrama süreksizliği vardır ve sıçraması $\left|\frac{1}{2}-0\right| = \frac{1}{2}$ dir

iv) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{\pi x}{2} & , 0<x<1 \\ 1+\ln x & , 1<x<2 \\ 2 & , x=1 \end{cases}$; $x=1$

Ç: $\lim\limits_{x\to 1^+} (1+\ln x) = 1 = \lim\limits_{x\to 1^-} \sin\frac{\pi x}{2} \neq 2 = f(1)$

$x=1$'de I. çeşitten kaldırılabilir süreksizlik vardır.

TÜREV

$y=f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında ve onun komşuluklarında tanımlı olsun. x_0'ın Δx artımına $(x_0+\Delta x)$ karşılık, $f(x)$'in artımının $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

oranına $f(x)$'in x_0 noktasındaki "farklar oranı" denir. Görüldüğü gibi, belli bir x_0 için farklar oranı Δx'in bir fonksiyonudur ve $\Delta x = 0$ hariç tüm Δx'ler için tanımlanmıştır.

Tanım: Δx sıfıra yaklaşırken $(\Delta x \to 0)$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ farklar oranının limiti varsa bu limite $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi denir. Ve

$$f'(x_0) = f(x_0) = \frac{df}{dx_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ile gösterilir. Biz kolaylık olsun diye

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eşitliğini kullanacağız.

Bu tanım şu şekilde de verilir

Tanım: $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti bir reel sayı ise bu limite $f(x)$'in x_0 noktasındaki türevi denir.

Şimdi temel türev alma kurallarını tanımdan hareketle elde edelim:

$\Rightarrow f(x) = c = sbt \Rightarrow f'(x) = 0$

$\Delta y = f(x+h) - f(x) = c - c = 0$ olduğundan $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = 0$ dır.

$\Rightarrow y = x^n \Rightarrow y' = n.x^{n-1}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h-x).\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}.x + (x+h)^{n-3}.x^2 + \dots + (x+h)^1.x^{n-1}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \Big[\underbrace{(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}.x + \dots}_{n \text{ tane}}\Big]$$

$$= n.x^{n-1}$$

II

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n\left(1+\frac{h}{x}\right)^n - x^n}{h} = x^n.\lim_{h \to 0} \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^n - 1}{h} \cdot \frac{1/x}{1/x} = \frac{n.x^n}{x} = n.x^{n-1}$$

$\Rightarrow u = f(x) \mp g(x) \Rightarrow u' = f'(x) \mp g'(x)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(f+g).(x+h) - (f+g).(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$\Rightarrow u = f(x).g(x) \Rightarrow u' = f'g + g'h$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f.g(x+h) - f.g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h).g(x+h) - f(x).g(x) - g(x+h).f(x) + g(x+h).f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h).[f(x+h)-f(x)]}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x).[g(x+h)-g(x)]}{h}$$

$f'(x)$ $\quad$ $g'(x)$

$$= f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$$

$\Rightarrow u = \frac{f}{g} \Rightarrow u' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f}{g}(x+h) - \frac{f}{g}(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).g(x) - f(x).g(x+h) + f(x+h).g(x+h) - f(x+h).g(x+h)}{g(x+h).g(x).h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h).[f(x+h)-f(x)]}{g(x+h).g(x).h} - \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).[g(x+h)-g(x)]}{g(x+h).g(x).h}$$

$$\boxed{-f(x).g(x)+f(x).g(x) \text{ eklenebilir}}$$

$$= \frac{g(x).f'(x)}{g(x).g(x)} - \frac{f(x).g'(x)}{g(x).g(x)}$$

$$= \frac{f'g - g'f}{[g(x)]^2}$$

$\Rightarrow y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

$\Rightarrow y = a^x \Rightarrow y' = a^x.\ln a$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x.(a^h - 1)}{h} = a^x.\ln a$$

$\Rightarrow y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x.\cos h + \sin h.\cos x - \sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\,(\cos h-1)^{0}}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\sin h^{1}}{h}.\cos x$$

$$=\sin x.0+1.\cos x=\cos x$$

$\Rightarrow y=\tan x \Rightarrow y'=1+\tan^2 x=\sec^2 x$ olduğunu gösteriniz?

NOT: $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\tan x+\tan h}{1-\tan x.\tan h}-\tan x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\tan x+\tan h-\tan x+\tan^2 x.\tan h}{h.(1-\tan x.\tan h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\tan h.(1+\tan^2 x)}{h.(1-\tan x.\tan h)}$$

$$=(1+\tan^2 x).\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\tan x.\underbrace{\tan h}_{\to 0}}=1+\tan^2 x$$

II.

NOT: $\tan(a-b)=\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h).\cos x-\sin x.\cos(x+h)}{h.\cos(x+h).\cos x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h-x)^{1}}{h.\cos(x+h).\cos x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

$\Rightarrow y=a^{x^2} \Rightarrow y'=?$ (tanımdan)

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{(x+h)^2}-a^{x^2}}{h}=\frac{0}{0}\ \text{B.H.}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x^2+2hx+h^2}-a^{x^2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x^2}.a^{2xh+h^2}-a^{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x^2}\left[a^{2xh+h^2}-1\right]}{h}$$

$$= a^{x^2} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^{2xh+h^2}-1}{h} \cdot \frac{2xh+h^2}{2xh+h^2} \quad \ln a$$

$$= a^{x^2}\ln a \cdot \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = a^{x^2} \cdot \ln a \cdot 2x$$

$\Rightarrow y = x.\ln x \Rightarrow y' = ?$ (tanımdan)

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h).\ln(x+h) - x.\ln x}{h} = \frac{0}{0} \text{ B.H.}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x\ln(x+h) + h\ln(x+h) - x.\ln x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x\left[\ln(x+h) - \ln x\right]}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{h.\ln(x+h)}{h}$$

$$= 1 + \ln x$$

Türev Alma Kuralları

i) Sabit Türevi: $\quad y(a) = x^y \Rightarrow y'(a) = 0$

ii) $y = x^n \Rightarrow y' = n.x^{n-1}$

- $y = \sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} x^{-1/2}$
- $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5x^2+8x+7}} \qquad y = (5x^2+8x+7)^{-1/3} \qquad y' = -\frac{1}{3}(5x^2+8x-7)^{-\frac{4}{3}}.(10x+8)$

iii) $u = u(x)$ olmak üzere $\Rightarrow y = \ln u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}$

- $y = \ln 3x \Rightarrow y' = \dfrac{3}{3x}$
- $y = \ln\sqrt{x} \Rightarrow y' = \dfrac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}}$
- $y = \ln^3 x^5 = (\ln x^5)^3 \qquad y' = 3.(\ln x^5)^2.\dfrac{5x^4}{x^5}$
- $y = \ln^3(\ln^7 x^8) \Rightarrow y' = ?$

  $y = \left\{\ln(\ln x^8)^7\right\}^3 \qquad y' = 3\left\{\ln(\ln x^8)^7\right\}^2 \cdot \dfrac{7(\ln x^8)^6 \frac{8x^7}{x^8}}{(\ln x^8)^7}$

iv) $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x . 1$

$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x . 1$

- $y = \sin^3 x^2 = (\sin x^2)^3$

  $y' = 3.(\sin x^2)^2.\cos x^2.2x$

- $y = \sin(\cos \ln x)$
  $y' = \cos(\cos \ln x) \cdot (-\sin \ln x) \cdot \dfrac{1}{x}$
- $y = \sin^5(\cos^3 \ln^7 x^9)$ $\quad y = \left\{\sin\left[\cos(\ln x^9)^7\right]^3\right\}^5$

$$y' = 5 \cdot \left\{\sin\left[\cos(\ln x^9)^7\right]^3\right\}^4 \cdot \cos\left[\cos(\ln x^9)^7\right]^3 \cdot 3 \cdot \left[\cos(\ln x^9)^7\right]^2 \cdot \left[-\sin(\ln x^9)^7\right] \cdot 7(\ln x^9)^6 \cdot \frac{9x^8}{x^9}$$

DİKKAT! 30.11.15 tarihinde MAT-I VİZE-I sınav soruları çözümlenmiştir.

V) $y = \tan x \Rightarrow y' = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

- $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow y' = \dfrac{\cos^2 x - (-\sin^2 x)}{\cos^2 x}$ $\rightarrow = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
  $\rightarrow = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$y = \cot x \Rightarrow y' = -(1 + \cot^2 x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

Vi) $y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \cdot \tan x$
$y = \operatorname{cosec} x \Rightarrow y' = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$

- $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow y' = \dfrac{0 - (-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}$
  $= \sec x \cdot \tan x$

- $y = \tan^3(\cot^5 x^7) = \left\{\tan\left[\cot x^7\right]^5\right\}^3$

$$y' = 3 \cdot \left\{\tan\left[\cot x^7\right]^5\right\}^2 \cdot \sec^2\left[\cot x^7\right]^5 \cdot 5 \cdot \left[\cot x^7\right]^4 \cdot \left[-\operatorname{cosec}^2 x^7\right] \cdot 7x^6$$

$\Rightarrow y = \sec(\ln \operatorname{cosec}\sqrt{x}) \Rightarrow y' = ?$

$$y' = \sec(\ln \operatorname{cosec}\sqrt{x}) \cdot \tan(\ln \operatorname{cosec}\sqrt{x}) \cdot \frac{-\operatorname{cosec}\sqrt{x} \cdot \cot\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\operatorname{cosec}\sqrt{x}}$$

Bileşke Fonksiyonun Türevi

$$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

$\Rightarrow \left.\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2+1} \\ g(x) &= \sqrt{x} \end{aligned}\right\} (g \circ f)'(x) = ?$

$$(g \circ f)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$$

Zincir Kuralı

$y = y(x)$
$x = x(t)$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

vii) Üstel Fonksiyonun Türevi

$y = a^x \Rightarrow y' = ?$

$$\left(\begin{array}{l} \ln y = \ln a^x \\ \ln y = x \ln a \end{array} \right) \qquad \frac{y'}{y} = \ln a \Rightarrow y' = y \ln a \Rightarrow y' = a^x . \ln a$$

- $y = 5^{3x^2} \Rightarrow y' = 5^{3x^2} . 6x . \ln 5$

$\Rightarrow y(t) = x^{t^2} \Rightarrow y' = x^{t^2} . 2t . \ln x$

$\Rightarrow y = (\sin x)^{x^3} \Rightarrow y' = ?$

$\ln y = \ln (\sin x)^{x^3}$

$\ln y = x^3 . \ln (\sin x)$

$\frac{y'}{y} = 3x^2 . \ln(\sin x) + \frac{\cos x}{\sin x} . x^3$

$y' = (\sin x)^{x^3} . [3x^2 . \ln(\sin x) + x^3 . \cot x]$

★ ...

$\Rightarrow y(x) = (x)^{x^x} \Rightarrow y' = ?$

$\ln y = x^x . \ln x$

$\frac{y'}{y} = (x^x)' . \ln x + \frac{1}{x} . x^x$

$y' = (x)^{x^x} . [x^x . (1 + \ln x) . \ln x + x^{x-1}]$

$$\left(\begin{array}{l} u = x^x \Rightarrow \ln u = x \ln x \\ \frac{u'}{u} = 1 . \ln x + \frac{1}{x} . x \\ u' = x^x . (1 + \ln x) \end{array} \right)$$

$\Rightarrow y(x) = \tan^x (x^{\sin x}) \Rightarrow y' = ?$

$y = [\tan (x^{\sin x})]^x$

$\ln y = x . \ln [\tan (x^{\sin x})]$

$\frac{y'}{y} = 1 . \ln [\tan (x^{\sin x})] + \frac{\sec^2 (x^{\sin x}) . (x^{\sin x})'}{\tan (x^{\sin x})} . x$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x^{\sin x} \Rightarrow \ln u = \ln x^{\sin x} \\ \qquad \ln u = \sin x . \ln x \\ \qquad \frac{u'}{u} = \cos x . \ln x + \frac{1}{x} . \sin x \\ \qquad u' = x^{\sin x} . [\cos x . \ln x + \frac{1}{x} . \sin x] \end{array} \right\}$$

Parametrik Fonksiyonların Türevleri

$$\left.\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}\right\} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \text{ dır.}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x(t) = b.(t.\sin t + \cos t) \\ y(t) = a.(t.\cos t + \cos t) \end{matrix}\right\} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}\tan t$$

NOT: Parametrik fonksiyonların daha yüksek mertebeden türevleri de hesaplanabilir. Bunun için türev alınırken "y" yerine dy/dx yazmak yeterlidir. Burada şu hataya düşmemek gerekir.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dx^2}} \text{ değildir.} \quad \bigstar \ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} \text{ dır.}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 - 3t \end{matrix}\right\} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ? \qquad \left\{ \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3(t^2-1)}{2t} \right\}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{3(t^2-1)}{2t}\right)}{2t} = \frac{3(t^2+1)}{8t^3}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x(t) = \ln t \\ y(t) = t^a \end{matrix}\right\} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ? \qquad \left\{ \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = a.t^a \right\}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(a.t^a)}{\frac{1}{t}} = a^3.t^a$$

$$\boxed{(t+a^n).t^a}$$

Ters Fonksiyonun Türevi

$A, B \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \to B$ fonksiyonu birebir ve örten olsun. $f(x)$, x_0'da türevlenebilir ve $f'(x_0) \neq 0$ ise $f^{-1}: B \to A$ fonksiyonu da $y_0 = f(x_0)$ noktasında türevlenebilir ve

$$f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ dır.}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^7 + 3x^3 - x \Rightarrow [f^{-1}(4)]' = ?$$

$f^{-1}(x_0) = y_0 \iff f(y_0) = x_0$

$f^{-1}(4) = x_0 \Rightarrow f(x_0) = 4$

$2x_0^7 + 3x_0^3 - x_0 = 4$

$2x_0^7 + 3x_0^3 - x_0 - 4 = 0$

$x_0 = 1$ için $0 = 0$

$f'(x) = 14x^6 + 9x^2 - 1$

$$[f^{-1}(4)]' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{14.1^6 + 9.1^2 - 1} = \frac{1}{22}$$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{x}{x+3} \Rightarrow \left[f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right]' = ?$

$f^{-1}(1/4) = x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = 1/4$

$\dfrac{x_0}{x_0+3} = 1/4 \Rightarrow x_0 = 1$

$f'(x) = \dfrac{x+3-x}{(x+3)^2} \Rightarrow f'(1/4) = \dfrac{3}{16}$

$$\left[f^{-1}(1/4)\right]' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(1/4)} = \frac{16}{3}$$

Ters Trigonometrik Fonksiyonlar ve Türevleri

Sinüs fonksiyonunun tersi var mıdır? Hayır. Aslında hiçbir trigonometrik fonksiyonun tersi yoktur. Fakat birebir ve örten oldukları aralıklarda tanım kümeleri yeniden tanımlanarak tersleri olan ters trigonometrik fonksiyonlar tanımlaya biliriz.

Sinüs fonksiyonunu tanım kümesi:

$f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ alındığında fonksiyon örten ancak birebir değildir. Tanım aralığı $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olarak alınırsa $f(x) = \sin x$ fonksiyonu birebir ve örten olur. Buna göre sinüs fonksiyonunun ters fonksiyonu

$f^{-1}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f^{-1}(x) = \sin^{-1}x = \arcsin x$ şeklinde tanımlanır.

Benzer şekilde diğer trigonometrik fonksiyonların tanım kümelerini yeniden düzenleyip ters trigonometrik fonksiyonları tanımlaya biliriz.

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f^{-1}(x) = \arctan x$

$f^{-1}: [-1, 1] \to [0, \pi]$, $f^{-1}(x) = \arccos x$

$f^{-1}: \mathbb{R} \to (0, \pi)$, $f^{-1}(x) = \text{arccot}\, x$

$\Rightarrow$ Aşağıda verilen ifadelerin değerlerini bulunuz?

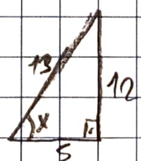
i) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = A \Rightarrow \cos A = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4}$

ii) $\arcsin(-1) = A \Rightarrow \sin A = -1 = -\pi/2$

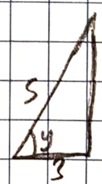
iii) $\arctan(1) = A \Rightarrow \tan A = 1 = \pi/4$

iv) $\sin\left(\underbrace{\arcsin\frac{12}{13}}_{x} + \underbrace{\arcsin\frac{4}{5}}_{y}\right)$

$x = \arcsin\frac{12}{13}$ $\sin x = \frac{12}{13}$



$y = \arcsin\frac{4}{5}$ $\sin y = \frac{4}{5}$



$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

$\frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5}$

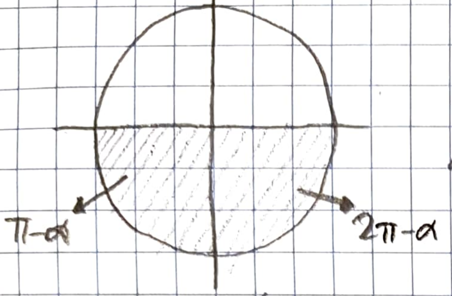
v) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$

vi) $\sin(2\underbrace{\arctan 3}_{x}) \Rightarrow \sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

• $\sin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ → III. Bölge $\pi + \pi/4$
→ IV. Bölge $2\pi - \pi/4$

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = A$ olsun

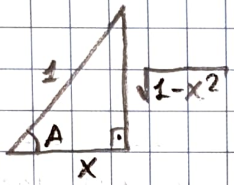
$\sin A = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{A = 2\pi - \frac{\pi}{4}}$



$\alpha = \pi/4$

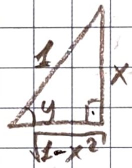
⇒ $|x| \leq 1$ için $\sin(\underbrace{\arccos x}_{A}) = \sin A = \sqrt{1-x^2}$

$\arccos x = A$
$\cos A = x$



⇒ $y = \arcsin x$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu elde ediniz?

$y = \arcsin x$ fonksiyonu $x = \sin y$



$y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

fonksiyonunun tersidir. Buna göre;

$y' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ elde edilir.

★ $y = \arcsin u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$y = \arccos u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

★ $y = \arctan u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$

$y = \text{arccot}\, u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$

★ $y = \text{arcsec}\, x \Rightarrow y' = \frac{1}{|x| \cdot \sqrt{x^2-1}}, \quad |x| \geq 1$

$y = \text{arccosec}\, x \Rightarrow y' = \frac{-1}{|x| \cdot \sqrt{x^2-1}}, \quad |x| \geq 1$

⇒ Aşağıda verilen fonksiyonların türevlerini bulunuz?

1) $y = \arcsin(2x^3 - x - 1) = ?$ $\quad y' = \frac{6x^2-1}{\sqrt{1-(2x^3-x-1)^2}}$

ii) $y=\arccos\left(\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right)=?$

iii) $y=\arctan\left(\dfrac{2x^4}{1+x^8}\right)=?$

iv) $y=\operatorname{arccot}^3 x^5=?$

v) $y=\arcsin\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)=?\quad\Rightarrow\quad y'=\dfrac{\left[\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right]'}{\sqrt{1+\dfrac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}}}$

$$\left\{\begin{array}{l} U=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \\ U'=\dfrac{\cos x.\sqrt{1+\sin^2 x}-\frac{1}{2}(1+\sin^2 x)^{-1/2}.2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\end{array}\right\}$$

★ vi) $y=\arctan^5(\arcsin^3 \ln^5 x)$

vii) $y=(\sin x)^{\arcsin x}$

Hiperbolik Fonksiyonlar ve Türevleri

Bir f fonksiyonu simetrik bir küme üzerinde tanımlı ise biri çift biri tek olan iki fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabilir:

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

$f(x)=e^x$ fonksiyonunun çift parçalarına → hiperbolik kosinüs
tek parçalarına → hiperbolik sinüs

fonksiyonları denir. Buna göre;

$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$; $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ dir. Buna göre: $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$$\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

Özellikleri

i) $\cosh^2 x+\sinh^2 x=1$

ii) $\cosh x+\sinh x=e^x$

iii) $\tanh x \,.\, \coth x=1$

iv) $\tanh^2 x+\operatorname{sech}^2 x=1$

v) $\coth^2 x-\operatorname{cosech}^2 x=1$

Türevleri

★ $y=\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\Rightarrow y'=\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

★ $y=\cosh x\Rightarrow y'=\sinh x$

★ $y=\tanh x\Rightarrow y'=\dfrac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x}=\dfrac{1}{\cosh^2 x}=\operatorname{sech}^2 x$

★ $y=\coth x\Rightarrow y'=\dfrac{\sinh^2 x-\cosh^2 x}{\sinh^2 x}=-\dfrac{1}{\sinh^2 x}=-\operatorname{cosech}^2 x$

⇒ $y=\cosh x^3\Rightarrow y'=3x^2.\sinh x^3$

⇒ $y=\sinh^5(\tanh^3 x)$

Kapalı Fonksiyonların Türevleri

$f(x,y)=0$ şeklinde yazılabilen denklemlere kapalı fonksiyon denir. Normal türev alınır. Dikkat edilmesi gereken tek husus

$\left[y^{(n)}\right]' = n.y^{n-1}.y'$ olduğudur.

⇒ Aşağıda verilen fonksiyonların türevlerini elde ediniz?

i) $xy^3 + y.\cos(xy) = 0$

- $1.y^3 + 3y^2.y'x + y'\cos(xy) + \left[-\sin(xy).(1.y + y'x)\right].y = 0$

ii) $y = x.e^y$

- $y' = 1.e^y + e^y.y'.\ln e.x$

iii) $x^y - 5x + 2 \Rightarrow f'(1,2) = ?$

- $u = x^y \Rightarrow \ln u = y\ln x$

$\frac{u'}{u} = y'.\ln x + \frac{1}{x}.y \Rightarrow u' = x^y.\left[y'\ln x + \frac{y}{x}\right]$

iv) $\ln(x^2+y^2) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

- $$\frac{2x + 2y.y'}{x^2+y^2} = \frac{\frac{y'x - 1.y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$

v) $(y^3-4)^5 = (4x^3y^2 - 5x^3 + 6y^2)$

- $5(y^3-4)^4.3y^2.y' = 12x^2.y^2 + 8y.y'.x^3 - 15x^2 + 12y.y'$

vi) $\sqrt[3]{x+y} = 5^{xy}$

- $\frac{1}{3}(x+y)^{-\frac{2}{3}}.(1+y') = 5^{xy}(1.y + y'x).\ln 5$

vii) $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 5 \Rightarrow f'(1,1) = ?$

- $-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{y^2}.y' = 0 \Rightarrow f'(1,1) = \frac{-1}{1^2} - \frac{3}{1^2} = -1 - 3 = -4$

⇒ $f(x,t) = x^2y + ty^3 \Rightarrow f'(x,t) \overset{(x)}{=} y2x + t'.y^3$

n-yinci Mertebeden Türev

$f^{(0)} = f$ olmak üzere $(n-1)$-inci mertebeden türevin türevine n-yinci mertebeden türev denir.

$$\frac{d^nf}{dx^n},\ D^nf,\ f^{(n)}$$

simgeleriyle gösterilir.

$\Rightarrow y=\ln x \Rightarrow y^{(n)}=?$

$$y'=\frac{1}{x}=x^{-1}$$

$$y''=(-1).x^{-2}$$

$$y'''=(-1).(-2).x^{-3}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}.(n-1)!.x^{-n}$$

$\Rightarrow y=\sin x \Rightarrow y^{(n)}=?$

$$y'=\cos x=\sin\left[1.\frac{\pi}{2}+x\right]$$

$$y''=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]=\sin\left[2.\frac{\pi}{2}+x\right]$$

$$y'''=\cos\left[2.\frac{\pi}{2}+x\right]=\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(2.\frac{\pi}{2}+x\right)\right]=\sin\left[3.\frac{\pi}{2}+x\right]$$

$$y=\sin x \Rightarrow y^{(n)}=\sin\left[n.\frac{\pi}{2}+x\right]$$

$\Rightarrow y=\cos x \Rightarrow y^{(n)}=?$

$$y'=-\sin x=\cos\left[\frac{\pi}{2}+x\right]$$

$$y''=-\sin\left[\frac{\pi}{2}+x\right]=\cos\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]=\cos\left[2.\frac{\pi}{2}+x\right]$$

$$y'''=-\sin\left[2.\frac{\pi}{2}+x\right]=\cos\left[\frac{\pi}{2}+\left(2.\frac{\pi}{2}+x\right)\right]=\cos\left[3.\frac{\pi}{2}+x\right]$$

$$y=\cos x \Rightarrow y^{(n)}=\cos\left[n.\frac{\pi}{2}+x\right]$$

$\Rightarrow y=\cos\frac{x}{2}+\sin 7x \Rightarrow y^{(n)}=\frac{1}{2^n}\cos\left[n\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right]+7^n.\sin\left[n.\frac{\pi}{2}+7x\right]$

$\Rightarrow y=\cos^2 3x \Rightarrow y^{(n)}=?$

$$y=\cos^2 3x=\tfrac{1}{2}(1+\cos 6x)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 6x$$

$$y^{(n)}=0+\tfrac{1}{2}.6^n.\cos\left[n\frac{\pi}{2}+6x\right]$$

NOT: $\sin^2 x=\tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$\cos^2 x=\tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$\Rightarrow y(x)=\cos ax.\sin bx \Rightarrow y^{(n)}=?$

$$y(x)=\tfrac{1}{2}\left[\sin(ax+bx)+\sin(ax-bx)\right]$$

$$y(x)=\tfrac{1}{2}\sin[x(a+b)]+\tfrac{1}{2}\sin[x(a-b)]$$

$$y^{(n)}(x)=\tfrac{1}{2}(a+b)^n.\sin\left[n\frac{\pi}{2}+x.(a+b)\right]+\tfrac{1}{2}(a-b)^n.\sin\left[n\frac{\pi}{2}+x(a-b)\right]$$

NOT: $\cos a.\sin b=\tfrac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$

Özellikler

i) $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(k.f)^{(n)} = k f^{(n)}$

ii) $(f \mp g)^{(n)} = f^{(n)} \mp g^{(n)}$

Leibnitz Formülü

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . f^{(n-k)} . g^{(k)} = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} . f^{(n)} . g^{(0)} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} f^{(n-1)} . g' + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n.(n-1)}{2}} . f^{(n-2)} . g'' + \dots + \binom{n}{n-1} . f' . g^{(n-1)}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n.(n-1).(n-2)}{6}$$

$\Rightarrow y(x) = e^{2x} . \cos 3x \Rightarrow y^{(n)} = ?$

$f = e^{2x}$ $\qquad g^{(0)} = \cos 3x$

$f' = 2e^{2x}$ $\qquad g^{(n)} = 3^n . \cos\left[n\frac{\pi}{2} + 3x\right]$

$f^{(n)} = 2^n . e^{2x}$

$$y^{(n)} = \binom{n}{0} . f^{(n)} . g^{(0)} + \binom{n}{1} . f^{(n-1)} . g' + \binom{n}{2} . f^{(n-2)} . g'' + \dots$$

$$y^{(n)} = 1.2^n.e^{2x}.\cos 3x + n.2^{n-1}.e^{2x}.3\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right) + \frac{n.(n-1)}{2}.2^{n-2}.e^{2x}.3^2.\cos\left(2\frac{\pi}{2}+3x\right) + \dots + \binom{n}{n}.e^{2x}.3^n.\cos\left[n\frac{\pi}{2}+3x\right]$$

$\Rightarrow y(x) = (x^3 + 2x^2 - 3).\sin(2x+5) \Rightarrow y^{(n)} = ?$

$$y^{(n)} = \binom{n}{0}.f^{(n)}.g^{(0)} + \binom{n}{1}.f^{(n-1)}.g' + \dots$$

$$y^{(n)} = 1.2^n.\sin\left[n\frac{\pi}{2} + (2x+5)\right](x^3+2x^2-3) + \binom{n}{1}.2^{n-1}.\sin\left[(n-1).\frac{\pi}{2} + (2x+5)\right].(3x^2+4x) + \binom{n}{2}.2^{n-2}.\sin\left[(n-2).\frac{\pi}{2} + (2x+5)\right].(6x+4) + \binom{n}{3}.2^{n-3}.\sin\left[(n-3).\frac{\pi}{2} + (2x+5)\right].6 + \dots$$

$\Rightarrow y(x) = \frac{2x}{x^2-4} \Rightarrow y^{(n)} = ?$

$$\frac{2x}{x^2-4} = \frac{2x}{(x-2).(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$2x = A(x+2) + B(x-2)$ $\qquad A = 1 \quad B = 1$

$$y(x) = \frac{2x}{x^2-4} = \underbrace{\frac{1}{x-2}}_{f} + \underbrace{\frac{1}{x+2}}_{g}$$

$f = \frac{1}{x-2} = (x-2)^{-1}$ $\qquad g = \frac{1}{x+2} = (x+2)^{-1}$

$f' = (-1).(x-2)^{-2}$ $\qquad g' = (-1).(x+2)^{-2}$

$f'' = (-1).(-2).(x-2)^{-3}$

$f''' = (-1).(-2).(-3).(x-2)^{-4}$

$\vdots$

$g^{(n)} = (-1)^n.n!.(x+2)^{-(n+1)}$

$f^{(n)} = (-1)^n.n!.(x-2)^{-(n+1)}$

27-31

Diferansiyellenebilir Fonksiyonların Özellikleri

Teorem: Bir a noktasında diferansiyellenebilir bir $f(x)$ fonksiyonu bu noktada süreklidir. Tersi her zaman doğru değildir.

$\Rightarrow$ $f(x) = |x-3|+2$ fonksiyonunun $x=3$ noktasındaki sürekliliğini ve diferansiyellenebilirliğini inceleyiniz.

$x=3$ sürekli mi?

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^+} |x-3|+2 = (x-3)+2 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} |x-3|+2 = -(x-3)+2 = 2 \end{array}\right\} \text{ olup } f(x)\ x=3 \text{ de süreklidir } \quad f(3)=2$$

$x=3$ de diferansiyellenebilir mi?

$$\lim_{h\to 0} \frac{\big[|(x+h)-3|+2\big]-\big[|x-3|+2\big]}{h} \overset{x=3\text{ de}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{|h|+2-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h} \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h}{h} = 1 \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h}{h} = -1 \end{cases}$$

olup $f(x)$ fonksiyonu $x=3$ noktasında diferansiyellenemez.

Teorem: Herhangi bir (a,b) aralığında sürekli ve diferansiyellenebilen $f(x)$'in bu aralıkta türevi pozitif (negatif) ise fonksiyon artan (azalan) dır.

$\Rightarrow$ $f(x) = x^2-3x+2$ için $f'(x) = 2x-3 = 0 \Rightarrow x = 3/2 \Rightarrow$

x		$3/2$	
$f(x)$	$-$		$+$
	azalan		artan

Tanım: $f(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebilir olsun. $c\in(a,b)$ olmak üzere eğer c noktasının yeterli kadar solunda $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) ve yeterli kadar sağında $f'(x)<0$ ($f'(x)>0$) ise c noktasında bir yerel maximum (yerel minimum) vardır. Yerel maximum ve yerel minimum noktalarının hepsine yerel extremum noktaları adı verilir.

Fermat Teoremi: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ verilsin. $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli, (a,b) de türevlenebilir ve bir $c\in(a,b)$ de yerel extremum değeri alıyorsa $f'(c)=0$ dır. Tersi her zaman doğru değildir.

$\Rightarrow$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ fonksiyonu için $f'(x)=3x^2=0 \Rightarrow x=0$ ve $f'(0)=0$ olmasına rağmen $x=0$ noktasında yerel ekstremum yoktur. Çünkü;

x		0	
$f'(x)$	$+$		$+$

$x=0$ noktasında işaret değişmiyor.

Tanım: $A\subset\mathbb{R}$ kümesinde tanımlı bir $f(x)$ için $f'(c)=0$ şartını sağlayan c noktalarına ve $f(x)$'i tanımsız yapan noktalara "kritik noktalar" ve ya "duraklama noktaları" denir.

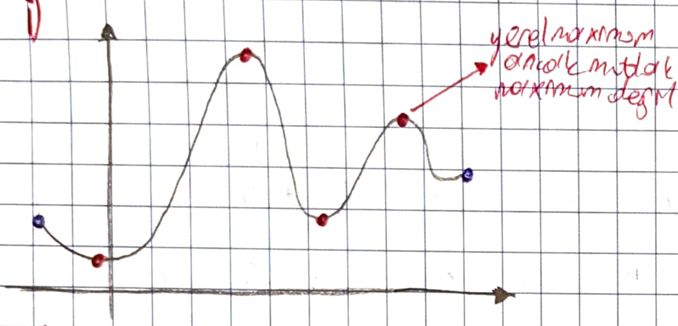
$\Rightarrow f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$ için; $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 1$

x		0		1	
$f'(x)$	$-$		$-$		$+$
	$\searrow$		$\searrow$	Yerel minimum var.	$\nearrow$

Kritik noktalar $\{0,1\}$ dir. Dikkat edilirse $f'(0)=0$ olduğu halde $c=0$ da yerel extremum yok.

Tanım: $A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall x \in A$ için $f(x) \leq f(c)$ olmak şartıyla $c \in (a,b)$ varsa $f(x)$ bu noktada mutlak maksimuma, $f(x) \geq f(c)$ oluyorsa mutlak minimuma sahiptir denir. Buna göre;

i)



Her mutlak maximum noktası aynı zamanda yerel maximum noktasıdır. Tersi doğru değildir.

ii) Yerel maksimum ve yerel minimum birden çok olabilir. Mutlak maksimum ve mutlak minimum varsa tektir.

iii) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ şeklinde verilen bir fonksiyonun mutlak maksimum ve mutlak minimum değerleri ya tanım aralığının uç noktalarından ya da yerel maksimum ve yerel minimum noktalarından yer alır.

Rolle Teoremi: $f(x)$, $[a,b]$ de sürekli ve $\forall x \in (a,b)$ de türevlene bilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise (a,b) aralığında $f'(c) = 0$ olmak şartıyla en az bir $c \in (a,b)$ vardır.

Bu teoremin sonucu olarak $f(x)$, $[a,b]$ de sürekli ve iç noktalarda türevli ise eğrinin en az bir noktasındaki teğetinin x-eksenine paralel olduğu sonucu çıkar. Ayrıca bu teoreme göre "kapalı aralıkta sürekli ve iç kısımlarda türevlene bilir bir fonksiyonun iki sıfır yeri (kökü) arasında türevinin sıfır olduğu en az bir yer vardır" sonucu ortaya çıkar.

$\Rightarrow f(x) = x^4 - 5x^2 + 2$ verilsin. $f'(x) = 0$ denkleminin kökleri için birer sınır bulunuz.

$f(x) = (x^2-1).(x^2-4) = (x-1).(x+1).(x-2).(x+2)$ olduğundan $f'(x)=0$ ın üç reel kökü vardır. Zira $f(-2) = f(-1) = 0$ olduğundan en az bir $x_1 \in (-2,-1)$ için $f'(x_1) = 0$ dır. Benzer şekilde $-1 < x_2 < 1$ ve $1 < x_3 < 2$ bağıntılarını sağlayan iki kök daha vardır. Gerçekten $x_1 = -\sqrt{5/2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{5/2}$ olur.

$f(x) = x^4 - 5x^2 + 2 \Rightarrow$ rolle teoreminden faydalanarak $5x^4 - 4x + 1 = 0$ denkleminin $(0,1)$ aralığında bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

$f(x) = x^5 - 2x^2 + x$ denirse $f'(x) = 5x^4 - 4x + 1$ dir. Ayrıca $f(0) = f(1) = 0$ olduğundan $f'(x) = 0$ olmak şartıyla en az bir $x \in (0,1)$ vardır. Dolayısıyla $5x^4 - 4x + 1 = 0$ olmak şartıyla en az bir $x \in (0,1)$ vardır.

Ortalama Değer Teoremi: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli ve $\forall x \in (a,b)$ için türevlenebilir olsun. Bu takdirde

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ olmak şartıyla en az bir x_0 noktası vardır.

$\Rightarrow$ $f:[-1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2+2x$ fonksiyonunun ortalama değerini hesaplayınız?

$$f'(x_0) = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} \Rightarrow 2x_0+2=3 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

→ Ortalama değer 3
→ adı geçen nokta $\frac{1}{2}$

Teorem: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I. ve II. türevlere sahip, $x_1, x_2 \in [a,b]$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

i) $\forall x \in (x_1-c, x_2+c)$ aralığı için $f''(x) > 0$ ise bu aralıkta $f(x)$'in grafiği konveks (Yukarı bükümlü)

ii) $\forall x \in (x_1-c, x_2+c)$ aralığı için $f''(x) < 0$ ise bu aralıkta $f(x)$'in grafiği konkav (aşağı bükümlü)

Tanım: $f(x)$ fonksiyonunun konvekslikten konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe geçiş yaptığı ve fonksiyonun sürekli olduğu noktaya $f(x)$'in "dönüşüm noktası" veya "büküm noktası" denir.

$\Rightarrow$ $f(x) = \frac{x^3}{6} + x^2 + 4$ fonksiyonu için;

$$f'(x) = \frac{3x^2}{6} + 2x \Rightarrow f''(x) = x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

x		-2	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
	konkav		konveks

$x=-2$ büküm noktası

L'Hospital Kuralı

$f(x)$ ve $g(x)$ türevli fonksiyonlar olsunlar

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ (veya } \infty) \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ (veya } \infty)$$

ve $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ise $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ dır.

$\Rightarrow$ Aşağıda verilen limitleri türev kullanarak hesaplayınız.

- $$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x+\ln x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\ln x+1)-1}{-1+\frac{1}{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\ln x)\cdot(1+\ln x) + \frac{1}{x}\cdot x^x}{-\frac{1}{x^2}} = -2$$

- $\lim\limits_{x\to\pi/3} \dfrac{1-2\cos x}{\sin(3x-\pi)} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x\to\pi/3} \dfrac{-2(-\sin x)}{3\cos(3x-\pi)} = \dfrac{2\cdot(\sqrt{3}/2)}{3}$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\tan x)}{\ln(\sin x)} \overset{\infty/\infty}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{\cos^2 x\cdot \sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}$

- $\lim\limits_{x\to a} (a^2-x^2)\cdot\tan\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right) \overset{0\cdot\infty}{=} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^2-x^2}{\cot\left(\frac{\pi x}{2a}\right)} = \dfrac{0}{0} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{-2x}{-\mathrm{cosec}^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\cdot\frac{\pi}{2a}} = \dfrac{-a}{\frac{\pi}{2a}\cdot(-1)}$

- $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x-1-\ln x}{\ln x\cdot(x-1)}\right) \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-1/x}{\frac{1}{x}(x-1)+\ln x} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{2}$

- $y = \lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$ $\quad \ln y = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln(1+x^2) = 0\cdot\infty$ $\quad \ln y = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} = \dfrac{0}{0}$

  $\ln y = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} \Rightarrow \log_e y = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1$ $\quad \{\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b\}$

- $y = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x = 1^\infty$ $\quad \ln y = \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \infty\cdot 0$ $\quad \ln y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}} = \dfrac{0}{0}$

  $\ln y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}}{-\frac{1}{x^2}} \Rightarrow \ln y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{(x+1)^2}\cdot\dfrac{x+1}{x-1}\cdot(-x^2)$

  $\ln y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^2}{x^2-1} \Rightarrow y = e^{-2}$

- $y = \lim\limits_{x\to\pi/2} (\tan x)^{\cos x} = \infty^0$ $\quad \ln y = \lim\limits_{x\to\pi/2} \cos x\ln(\tan x) = 0\cdot\infty$ $\quad \ln y = \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\cos x}} = \dfrac{\infty}{\infty}$ $\quad \frac{1}{\cos x} \to \sec x$

  $\ln y = \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{\sec x\cdot\tan x} = \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$

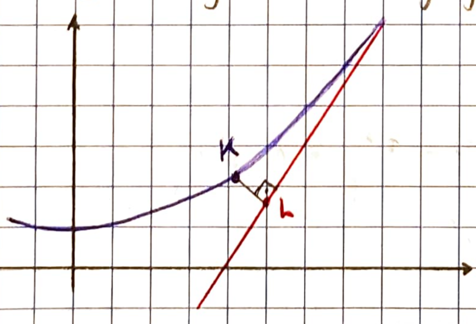
  $\sec x\cdot\tan x \to \dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}$

  $\ln y = \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{0}{1} = 0 \Rightarrow \log_e y = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1$

NOT: $\ln\infty = \infty$
$\ln 0 = \infty$
$\ln 1 = 0$

Asimptotlar

Tanım: $f: A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ in eğrisi üzerindeki bir nokta sonsuza doğru uzaklaştığında, bu noktanın sabit bir doğru veya eğriye olan uzaklığı sıfıra yaklaşıyorsa ya da teğet oluyorsa bu doğruya ya da eğriye "asimptot" denir.

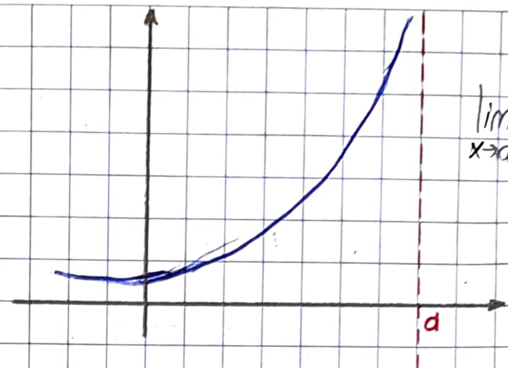


$\lim\limits_{x\to\infty} |KL| = 0$

Düşey Asimptot: $f: A \to \mathbb{R}$, $y=f(x)$ verilsin. $x=a$ için;

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \mp\infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = \mp\infty$

ifadelerinden en az biri gerçekleşiyorsa $x=a$ doğrusu $f(x)$'in düşey asimptotudur.



$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

Yatay Asimptot: $f: A\subset\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y=f(x)$ verilsin. Eğer $\lim_{x\to\infty} f(x) = b_1$ ve $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b_2$ ise $y=b_1$ ve $y=b_2$ doğrularına yatay asimptot denir.

$\Rightarrow f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$ için $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y=2$ doğrusu Yatay Asimptot

Eğik Asimptot: $f: A\subset\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y=f(x)$ verilsin. Eğer $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m_1$, $\lim_{x\to\infty} [f(x) - m_1 x] = n_1$ olmak şartıyla $m_1, n_1 \in \mathbb{R}$ varsa $y=m_1x+n_1$ doğrusuna $f(x)$'in birinci eğik asimptotu denir.
Eğer $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m_2$, $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - m_2 x] = n_2$ olmak şartıyla $m_2, n_2 \in \mathbb{R}$ varsa $y=m_2x+n_2$ doğrusuna $f(x)$'in ikinci eğik asimptotu denir.

NOT: Polinom bölmesi yapılarak $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ fonksiyonun eğik asimptotu bulunabilir.

NOT: $a>0$ olmak üzere $\sqrt{a^2x+bx+c}$ fonksiyonunun eğik asimptotları $x\to+\infty$ için $y=\sqrt{a}\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)$ ve $x\to-\infty$ için $y=-\sqrt{a}\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)$ dır.

$\Rightarrow f(x) = \frac{4x^4}{4x^2-1}$ fonksiyonunun tüm asimptotlarını bulunuz?

Düşey Asimptot $\Rightarrow 4x^2-1=0 \Rightarrow x^2 = 1/4 \Rightarrow x = \mp 1/2$ doğruları

Yatay Asimptot $\Rightarrow \lim_{x\to\mp\infty} \frac{4x^4}{4x^2-1} = \infty$ (Yatay Asimptot yok)

Eğik Asimptot $\Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 & 4x^2-1 \\ \hline -4x^4-x^2 & x^2+1/4 \\ x^2 & \\ -x^2+1/4 & \\ \hline \end{array}$$

$y = x^2 + 1/4$ eğrisidir.

$\Rightarrow y = \frac{2x+3}{x+1}$ Düşey Asimptot $\Rightarrow x=-1$ Doğrusu
Yatay Asimptot $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y=2$ doğrusu

$\Rightarrow y = \frac{x^3}{x^2-1}$ Düşey Asimptot $\Rightarrow x = \mp 1$
Eğik Asimptot $\Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2-1 \\ \hline -x^3+x & x \\ \hline x & \end{array}$$

$y=x$ doğrusu

$\Rightarrow y = \frac{x^4}{x^2+1}$ Düşey Asimptot $\Rightarrow$ YOK
Eğik Asimptot $\Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^2+1 \\ \hline x^4+x & x^2-1 \\ x^2 & \\ x^2-1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$\Rightarrow y = x^2-1$ eğrisidir.

$\Rightarrow y = 5^{\frac{3}{x}}$ Düşey Asimptot $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0^+} y = y(+0) = 5^{\frac{3}{+0}} = 5^{\infty} = \infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} y = y(-0) = 5^{\frac{3}{-0}} = 5^{-\infty} = 0$ $\quad$ $x=0$ doğrusu

Grafik Çizimi

1- Tanım kümesi bulunur.
2- Asimptotlar bulunur.
3- Eksenleri kestiği noktalar bulunur.
4- I. türevi alınır ve işareti incelenir.
5- Gerekirse II. türev alınır. Büküm noktası varsa tespit edilir.
6- Değişim tablosu yapılır. Bu tabloda bulunan tüm x değerleri olmalıdır.
7- Tabloya göre grafik çizilir.

$\Rightarrow y = 2x^3 - 3x^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz?

1- Tanım Kümesi $= \mathbb{R}$
2- Polinomların Asimptotları yoktur.
3- $x=0 \Rightarrow y=0$
$y=0 \Rightarrow x^2.(2x-3)=0 \Rightarrow \boxed{x=0,\ x=3/2}$
4- $y' = 6x^2 - 6x = 0$
$6x.(x-1)=0 \quad x=0, \boxed{x=1}$
5- $y'' = 12x - 6 = 0$
$x = 1/2 \rightarrow$ Büküm Noktası

$x = 1/2$ için $y = -1/2$
$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ Büküm noktası

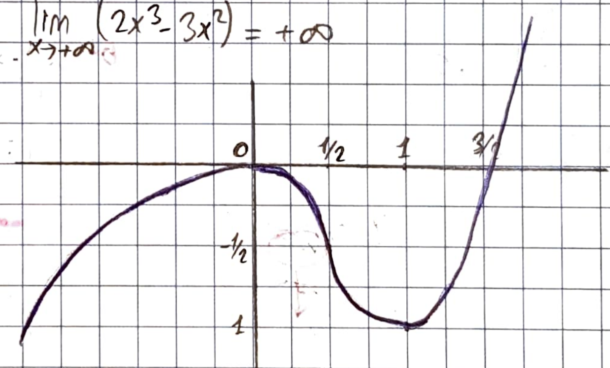
6-

x	$-\infty$		0		1		3/2		$+\infty$
y'		+		−		+		+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3 - 3x^2) = \lim\limits_{x\to-\infty} [x^2.(2x-3)] = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (2x^3 - 3x^2) = +\infty$

7-



$\Rightarrow y = \frac{2x}{x^2-1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz?

1- Tanım Kümesi $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
2- Düşey asimptot $\Rightarrow \boxed{x = \mp 1}$
Yatay asimptot $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$
3- $x=0 \Rightarrow y=0$
$y=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$
4- $y' = \dfrac{2(x^2-1) - 2x.2x}{(x^2-1)^2} = 0$

$y' = \dfrac{-(2x^2+2)}{(x^2-1)^2} = 0$

reel kök yoktur. fonksiyon daima azalandır.

6-

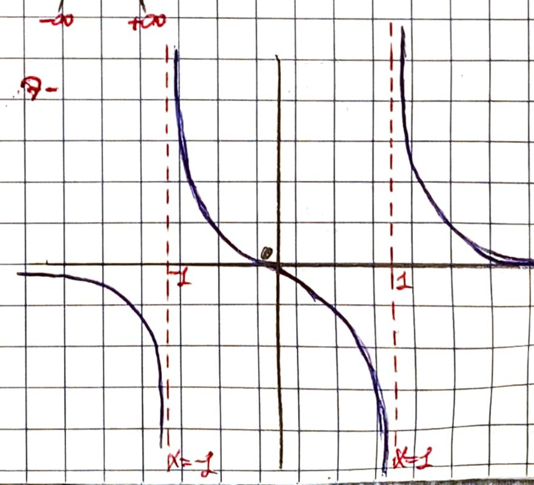
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		−		−		−		−	
y		↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0$

$\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{2x}{x^2-1} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{2x}{x^2-1} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2x}{x^2-1} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2x}{x^2-1} = -\infty$

7-



⇒ $y=\sqrt{x^2-4x+3}$ fonksiyonunu grafiğini çiziniz?

1- Tanım Kümesi = $(-\infty,1]\cup[3,\infty)$

$\sqrt{x^2-4x+3} \Rightarrow x^2-4x+3\geq 0$

x		1		3	
y	+	0	-	0	+

2- Düşey Asimptot ve Yatay Asimptot YOK

$\sqrt{ax^2+bx+c} \Rightarrow$ eğik asimptot $\mp\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$

I. Eğik Asimptot, $y=x-2$

II. Eğik Asimptot, $y=-x+2$

3- $\boxed{x=0} \Rightarrow y=\sqrt{3}$

$y=0 \Rightarrow \boxed{x=1}, \boxed{x=3}$

4- $y'=\frac{1}{2}(x^2-4x+3)^{-1/2}\cdot(2x-4)$

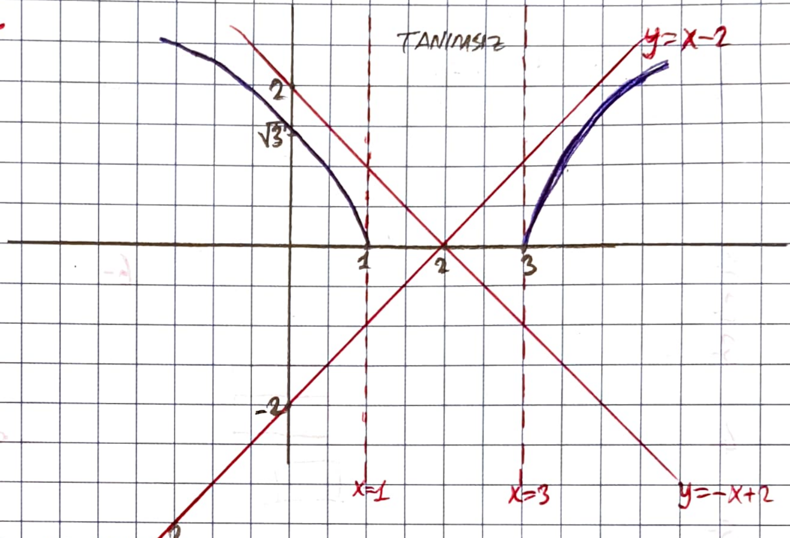
$y'=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$

6-

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y'		-		-		-		+		+	
y	$+\infty$	↘	$\sqrt{3}$	↘	0	Tanımsız			0	↗	$+\infty$

$\lim_{x\to\mp\infty} y=\sqrt{x.(x-4)+3}=+\infty$

7-



⇒ $y(x)=\frac{x^2-8x+19}{x-5}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz?

1- Tanım Kümesi = $\mathbb{R}-\{5\}$

2- Düşey Asimptot ⇒ $x-5=0$

$x=5$

$\lim_{x\to 5} f(x)=\infty$

Eğik Asimptot ⇒ $x^2-8x+19 \,|\, x-5$

$-x^2+5x$; $x-3$

$-3x+19$

$-3x+15$

$y=x-3$ doğrusu

3- $x=0 \Rightarrow y=-\frac{19}{5}$, $\left(0,-\frac{19}{5}\right)$

$y=0 \Rightarrow x^2-8x+19=0$ $\Delta=64-4.19<0$ x eksenini kesmez

4- $y'=\frac{(2x-8).(x-5)-(x^2-8x+19)}{(x-5)^2}$

$y'=\frac{x^2-10x+21}{(x-5)^2}=0$

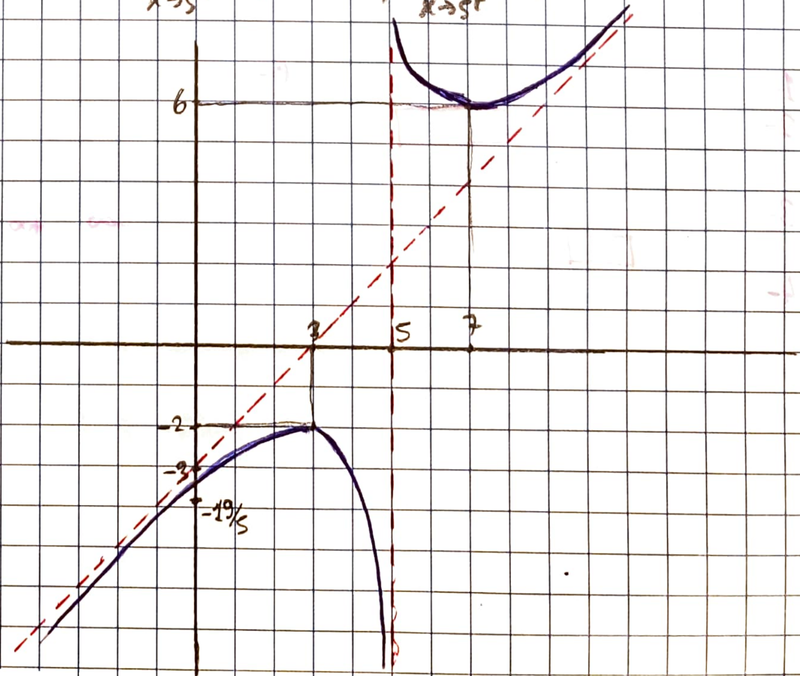
$x=3,\ x=7$

6-

x	$-\infty$		0		3		5		7		$+\infty$
y'		+		+		-		-		+	
y	$-\infty$	↗	$-19/5$	↗	-2	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

$\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=\mp\infty$

$\lim_{x\to 5^-} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to 5^+} f(x)=+\infty$



⇒ $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz?

1- Tanım Kümesi $=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

2- $\lim\limits_{x\to 1^-} y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\infty}=\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty}=0$ $\Big>$ $x=1$ Düşey Asimptot

$\lim\limits_{x\to -1^-} y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\infty}=0$

$\lim\limits_{x\to -1^+} y=\left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty}=\infty$ $\Big>$ $x=-1$ Düşey Asimptot

$\lim\limits_{x\to\mp\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{0}=1$ — $y=1$ Yatay Asimptot

3- $x=0$ $y=3$

$y=0 \Rightarrow x$ eksenini kesmez

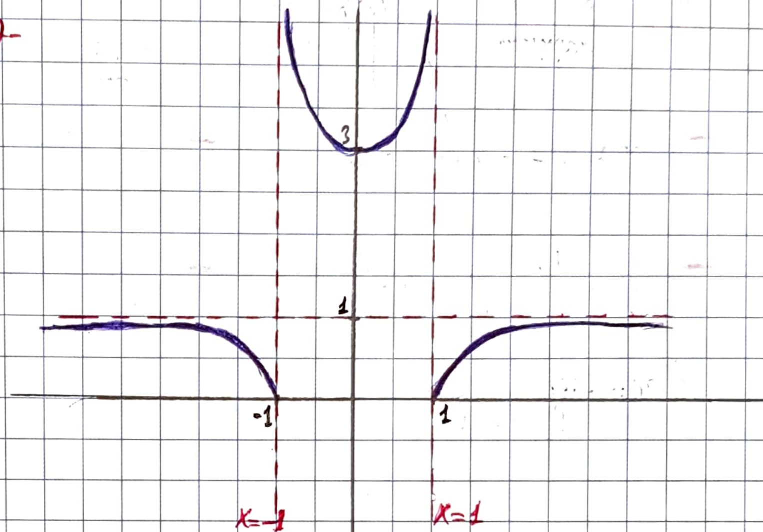
4- $y'=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}.\ln(3).\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

$y'=\dfrac{\ln(3).2x}{3^{x^2-1}.(x^2-1)}=0$ $\quad 2x=0$, $x=0$

6-

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$+$		$+$	
y	1 ↘		0 | ∞	↘	3	↗	∞ | 0	↗	1

7-



MATEMATİK ÖDEVLERİ (I. Yarıyıl)

1) $\lim\limits_{x\to 3} \arctan\left(\frac{1}{x-3}\right) = ?$

+2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1} = ?$ 3

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3^x-2^{x+1}+5^{x-1}}{3^{x+1}+2^{2x-1}+5^x} = ?$ ∞

4) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+1}{(x-1)^2} = ?$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1-\sqrt[3]{x^3+1}}{x} = ?$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{2x+\sqrt{3x}}{5x}} = ?$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x.(x+a)}-x\right) = ?$

8) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right) = ?$

9) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x.\sqrt{x^2+1}-x^2\right] = ?$

+10) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu ispatlayınız?

11) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x-1}{x.\ln x} = ?$

12) $\lim\limits_{x\to \pi/2} (1+\cos x)^{3\sec x} = ?$

13) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x} = ?$

14) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ olduğunu ispatlayınız?

+15) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = a$ olduğunu gösteriniz?

16) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot\left[\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}\right] = ?$ ∞

+17) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = ?$

+18) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(3-2\cos 3x)}{\ln^2(\sin 5x+1)} = ?$

19) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}\cdot\left(\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}\right)} = ?$

20) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{\sin x+2\cot x}{(\pi-x).\sin\frac{x}{2}} = ?$

+21) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = ?$ $-\frac{1}{12}$

+22) $y=\ln^x\left(\cos^5 3^{7x^2}\right) \Rightarrow y' = ?$

+23) $y=\sec^x\left[\cos^x\left(\ln^x (x)^{x^3}\right)\right] \Rightarrow y' = ?$

+24) $\tan\left(\arctan\frac{3}{4}+\operatorname{arccot}\frac{5}{8}\right)$ değeri nedir?

25) $\left.\begin{array}{l} f(x)=\arcsin\frac{x}{2} \\ g(x)=\operatorname{arccot}\left(\frac{x-1}{2}\right) \end{array}\right\} f\circ g^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$

26) $y=\frac{x^3+5x^2-4x+1}{x^2-4} \Rightarrow y^{(n)} = ?$

27) $y=\ln(x+1).\sin 5x \Rightarrow y^{(n)} = ?$

28) $y=\sin^2 bx \Rightarrow y^{(n)} = ?$

29) $y=(x^2+5x).3^{-7x} \Rightarrow y^{(n)} = ?$

30) $y=\frac{x^4+1}{x^3-x} \Rightarrow y^{(n)} = ?$

+(23-24) $f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ olduğunu ispatlayınız?

32) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{\cos x} = 0^0$ BH

32- Yolgösterme

$$\ln y = \lim_{x \to \pi/2} \cos x \cdot \ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

⋮

24- Yolgösterme

$$\left[f^{-1}(y_0)\right]' = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f(y)}{y - y_0}$$

⋮

1) $y(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

2) Aşağıda verilen limiti türev kullanmadan hesaplayınız.

$$\lim_{x \to 1} (2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

3) Aşağıda verilen limiti türev kullanarak elde ediniz.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x}$$

4) Aşağıda verilen fonksiyonların türevlerini elde ediniz.

a) $y(x) = \sec^4\left[\cos^7\left(\ln^3 \tan x\right)\right]$

b) $y^x + \arccos\left(\frac{x}{y}\right) = 3^{xy} \Rightarrow f'(x,y) = ?$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos mx}{x^2} = m^2 . \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos mx - 1}{x^2} = -m^2 . \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \left[1+a\right]^b = e^{\lim\limits_{x\to 0}(a.b)}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{bx}-1}{x} = \ln a^b$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos 5x}).(3^{5x} - 7^{3x})}{\sin^2(\frac{3x}{2}) . \log_3(1-2x)}$$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$(\sqrt{2} - \sqrt{2}.\cos x)$

$$\sqrt{2}.(1-\cos x) . \frac{\frac{3x}{2}}{\sin^2\frac{3x}{2}} . \frac{1}{\frac{3x}{2}} . \frac{-2x}{\ln(1-2x)} . \frac{1}{-2x} . \ln 3$$

$(3^{5x} - 7^{3x} + 1 - 1)$

$$5x . \frac{(3^{5x}-1)}{5x} - \frac{(7^{3x}-1)}{3x} . 3x$$

$5x . \ln 3^5 - 3x . \ln 7^3$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$y = \sin x \Rightarrow y^{(n)} = \sin\left[n\frac{\pi}{2} + x\right]$

$y = \cos x \Rightarrow y^{(n)} = \cos\left[n\frac{\pi}{2} + x\right]$

$$(f.g)^{(n)} = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . f^{(n-k)} . g^{(k)}} = \binom{n}{0} . f^{(n)} . g^{(0)} + \ldots$$

Grafik Çizimi

- Tanım kümesi
- Asimptot
- Eksenleri kestiği noktalar
- I. Türev (İşaret)
- II. Türev (Büküm Noktası)
- Değişim Tablosu
- Grafik çiz

$y = 2x^3 - 3x^2$

$TK = \mathbb{R}$

Polinomların asimptotu yoktur

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = 0 \Rightarrow x = 3/2$, $x = 0$

$y' = 6x^2 - 6x = 0$

$6x.(x-1)$ $x = 0$, $x = 1$

$y'' = 12x - 6 = 0$

$x = 1/2$ $y = -1/2$ $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

x	$-\infty$	0	1	$3/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$0 \searrow$	$-1 \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty}(2x^3 - 3x^2) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}$

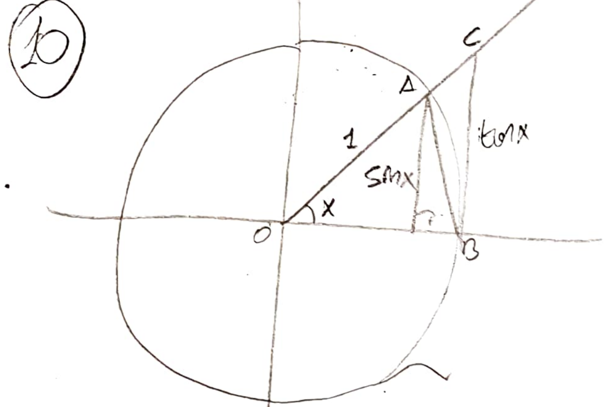
Asimptot → DA → Tanımsız olduğu aralık $[a,b]$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$

YA → $\lim\limits_{x\to \mp\infty} f(x)$

EA → polinom bölmesi veya $\sqrt{ax^2+bx+c} \Rightarrow \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right|$

$y = a^x \Rightarrow y' = a^x . \ln a . x'$

(10)



$A(A\hat{O}B) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x$

$A(\Delta\hat{O}B) = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi 1^2 = \frac{x}{2}$

$A(C\hat{O}B) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$

$A(A\hat{O}B) < A(\Delta\hat{O}B) < A(C\hat{O}B)$

$\frac{1}{2}|\sin x| < \frac{|x|}{2} < \frac{1}{2}|\tan x|$

$|\sin x| < |x| < |\tan x|$

$\frac{|\sin x|}{|\sin x|} < \frac{|x|}{|\sin x|} < \frac{|\tan x|}{|\sin x|}$

$1 < \frac{|x|}{|\sin x|} < \frac{1}{|\cos x|}$

$1 > \frac{|\sin x|}{|x|} > |\cos x|$

I. Bölgede $\sin x\ (+)\ x\ (+)$
IV " " $\sin x\ (-)\ x\ (-)$ > (+) [illegible]

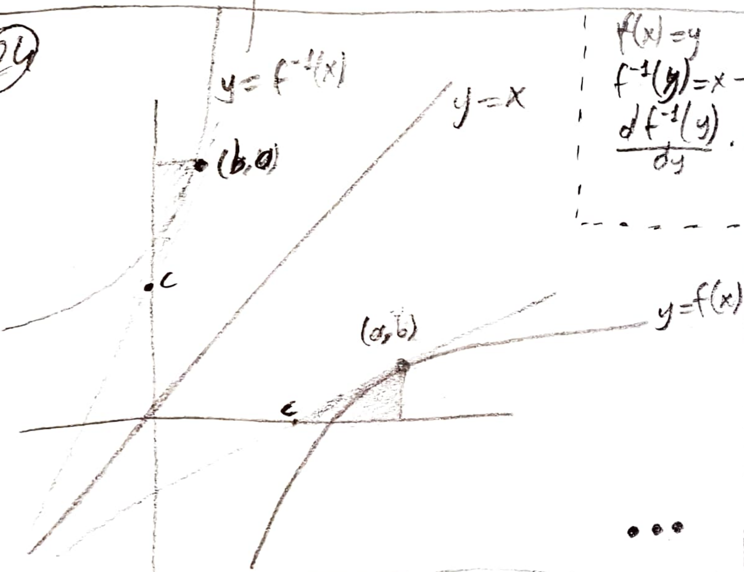
$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

$\lim_{x\to 0} 1 = 1$ $\quad$ $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

$\Downarrow$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(24)



$f(x) = y$

$f^{-1}(y) = x \rightarrow$ Her iki tarafın türevini al

$\frac{df^{-1}(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 \qquad \frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}$

...

(1) $\lim_{x\to 3^+} \arctan\left(\frac{1}{x-3}\right) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to 3^-} \arctan\left(\frac{1}{x-3}\right) = +\frac{\pi}{2}$

(?) Limit Yok

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1} = ?$

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{1}\right)}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{1}\right)}$

$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{1}\right)}{x} = 3$

(5) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1-\sqrt[3]{x^3+1}}{x} = ?$ $\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliği

$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1) - \sqrt[3]{x^3+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + x\cdot\frac{1}{x} - \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)x^3}}{x}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x} - \sqrt[3]{1+1/x^3}\right)}{x} = 0$

(6) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{2x+\sqrt{3x}}{5x}} = ?$ $\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliği

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x\cdot\left(2+\sqrt{\frac{3}{x}}\right)}}{\sqrt{5x}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$

(4) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 1}{(x-1)^2} = ?$ $\frac{0}{0}$ B.H.

$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{(x-1)^2} \cdot \frac{\left[(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1\right]^2}{\left[(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1\right]^2}$

$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 \cdot \left[(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1\right]^2}$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

(22) $y = \ln^x(\cos^5 3^{7x^2})$ $\quad y' = ?$

$\left[\ln(\cos 3^{7x^2})^5\right]^x \cdot \ln\left[\ln(\cos 3^{7x^2})^5\right] \cdot 1 \cdot 5\left[\ln(\cos 3^{7x^2})\right]^4 \cdot \frac{\sin 3^{7x^2}}{\cos 3^{7x^2}} \cdot 3^{7x^2} \cdot \ln 3 \cdot 14x \cdot (-\sin 3^{7x^2})$

(23) $y = \sec^x\left[\cos^x\left(\ln^x(x)^{x^3}\right)\right]$ $\quad y' = ?$

(7) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x\cdot(x+a)} - x\right) = ?$ $\infty - \infty$ B.H.

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+xa}-x}{\sqrt{x^2+xa}+x} \cdot \left(\sqrt{x^2+xa}+x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+xa-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{a}{x}\right)}+x}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{xa}{x\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1\right)} = a/2$

(26) $g(x) = \text{arc}\cot\left(\frac{x-1}{2}\right)$, $f(x) = \text{arc}\sin\frac{x}{2}$ $\Big\}$ $fog^{-1}(\pi/4) = ?$

$g^{-1}(x) = 2\cot x + 1$

$fog^{-1}(x) = \arcsin\left(\frac{2\cot x + 1}{2}\right)$

$fog^{-1}(\pi/4) = \arcsin(3/2)$

(12) $\lim_{x\to\pi/2} (1+\cos x)^{3\sec x} = ?$

1^∞ Belirsizliği var.

$= e^{\lim_{x\to\pi/2}(\cos x) 3\sec x}$

$= e^{\lim_{x\to\pi/2}(\cos x \cdot \frac{3}{\cos x})}$

$= e^3$

(28) $y = \ln(x+1) \cdot \sin 5x \Rightarrow y^{(n)} = ?$

$(-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (x+1)^{-n} \longrightarrow f$

$5^n \cdot \sin\left[n \cdot \frac{\pi}{2} + 5x\right] \longrightarrow g$

$\binom{n}{0} \cdot (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (x+1)^{-n} \cdot \sin 5x + (-1)^n \cdot (n-1)! \cdot (x+1)^{-n+1} \cdot n \cdot 5 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2} + 5x\right] \ldots$

(11) $\lim_{x\to 1} \frac{x^x - 1}{x \cdot \ln x} = ?$ $\quad \lim_{x\to 1} \frac{x^x-1}{\ln x^x} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x^x - 1}{\ln(x^x - 1 + 1)} = 1$

(13) $\lim_{x\to 0} (1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x} = ?$ $\quad 1^\infty$ Belirsizliği $\quad = e^{\lim_{x\to 0}(3\tan^2 x)\cot^2 x} = e^{\lim_{x\to 0}(3\tan^2 x \cdot \cot^2 x)} = e^3$

(9) $\lim_{x\to\infty} \left[x\sqrt{x^2+1} - x^2\right] = ?$ $\quad \infty - \infty$ BH.

$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x\sqrt{x^2+1} - x^2)}{x\sqrt{x^2+1} + x^2} (x\sqrt{x^2+1} + x^2)$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + x^2 - x^4}{x^2 \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1\right)} = 1/2$

(19) $\lim_{x\to\pi} \frac{1 - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{\pi}{2} \cdot (\cos\pi/4 - \sin\pi/4)} = ?$ $\quad \frac{0}{0}$ BH.

$\left\{ \begin{array}{ll} u = x - \pi & \Rightarrow x = \pi + u \\ x \to \pi & \Rightarrow u \to 0 \end{array} \right\}$

$\lim_{u\to 0} \frac{1 - \sin(\pi/2 + u/2)}{\cos\pi/2 \cdot \underbrace{\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{4}\right)\right]}_{A}}$

$A = \left[\cos\frac{u}{4} \cdot \cos\pi/4 - \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{u}{4}\right] - \left[\sin\frac{u}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{u}{4}\right]$

$A = -\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sin\frac{u}{4}$

$\Rightarrow \lim_{u\to 0} \frac{1 - \cos\frac{u}{2}}{\cos\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\frac{u}{4}} = ?$

(20) $\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin x + 2\cot x}{(\pi - x) \cdot \sin\frac{x}{2}} = ?$ $\quad = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin\pi/2 + 2\cot\pi/2}{\pi/2 \cdot \sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

(24) Eksik $\quad$ ~~(28)~~ Eksik $\quad$ (31) $\quad$ (32)

Ek

(29) $y = \sin^2 bx \quad y^{(n)} = ?$

$y = (\sin bx)^2$

$y' = 2\sin bx \cdot \cos bx = \sin 2bx$

$y'' = 2(\cos^2 bx - \sin^2 bx) = 2\cos 2bx$

$y^{(n)} = n! \cdot b' \cdot \sin\left[n \cdot \frac{\pi}{2} + 2bx\right]$

(22) $y=\left[\sec\left[\cos(\ln(x)^{x^3})^x\right]^x\right]^x$ $\quad y'=\left[\sec\left[\cos(\ln(x)^{x^3})^x\right]^x\right]^x.\ln\left(\sec\left[\cos(\ln(x)^{x^3})^x\right]^x\right).1.\ \sec\left[\cos(\ln(x)^{x^3})^x\right]^x.\ \tan\left[\cos(\ln(x)^{x^3})^x\right]^x.\ \left[\cos(\ln(x)^{x^3})^x\right]^x.\ \ln\left[\cos(\ln(x)^{x^3})\right]^x.1$

$.\left[\cos(\ln(x)^{x^3})\right]^x.\ln\left[\cos(\ln(x)^{x^3})\right].1.-\sin(\ln(x)^{x^3}).\ \dfrac{3(x^x)^2.(\ln x+1)}{x^{x^3}}$

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(3-2\cos 3x)}{\ln^2(\sin 5x+1)}=?$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2-2\cos 3x)}{\ln(\sin 5x+1).\ln(\sin 5x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2.(1-\cos 3x))}{\ln(\sin 5x+1).\ln(\sin 5x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4\sin^2\frac{3x}{2})}{\ln(\sin 5x+1).\ln(\sin 5x+1)}.\dfrac{4\sin^2\frac{3x}{2}}{4\sin^2\frac{3x}{2}}.\dfrac{\sin^2 5x}{\sin^2 5x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin^2\frac{3x}{2}}{\sin^2 5x}.\dfrac{(5x)^2}{(5x)^2}.\dfrac{(\frac{3x}{2})^2}{(\frac{3x}{2})^2}=\dfrac{4.\frac{9}{4}}{25}=\dfrac{9}{25}$

(25) $\tan(\operatorname{arc}\tan 3/4+\operatorname{arc}\cot 5/8)=?$

$\operatorname{arc}\tan 3/4=x$ $\quad \operatorname{arc}\cot 5/8=y$

$\tan x=3/4$ $\quad \cot y=5/8$

$\tan y=8/5$

$\bigstar\ \tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}$ $\quad \dfrac{3/4+8/5}{1-3/4.8/5}=\dfrac{-47}{4}$

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=a$ olduğunu gösteriniz?

$\begin{cases} u=(1+x)^a-1 & (u+1)=(1+x)^a \\ & (u+1)^{1/a}=(1+x) \\ & x=(u+1)^{1/a}-1 \\ x\to 0 \quad u\to 0 & \end{cases}$

$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u.\frac{1}{a}}{((u+1)^{1/a}-1).\frac{1}{a}}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\ln(u+1).1/a}=a$

$\bigstar\ \dfrac{x^a-1}{a}=\ln x$

(21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=?$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}.\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}+1-1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}.\dfrac{\sqrt{\cos x}+1}{\sqrt{\cos x}+1}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x^2}.\dfrac{\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{1^2}}{\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{1^2}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2.\sqrt{\cos x}+1}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2.(\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{1})}=(-1/2.1/2)-(-1/2.1/3)=-1/12$

(17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}.\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)=?$ $\quad =\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{1/x}$

$=\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{1/x}\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(1-1+\frac{2+x}{2-x}\right)^{1/x}\right]$

$=\ln\left[e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{2-x}.\frac{1}{x}}\right]=\ln e^1=1$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})=?$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3}).\dfrac{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+(\sqrt[3]{1-x^3})^2}{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+(\sqrt[3]{1-x^3})^2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1-x^3}{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+(\sqrt[3]{1-x^3})^2}=\dfrac{1}{\infty}=0$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x-2^{x+1}+5^{x-1}}{3^{x+1}+2^{2x-1}+5^x}=?$ $\quad \frac{0}{0}$ Belirsizlik Hali

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x\left[(\frac{3}{2})^x-2+\frac{1}{5}(\frac{5}{2})^x\right]}{2^x\left[3.(\frac{3}{2})^x+\frac{1}{2}2^x+(\frac{5}{2})^x\right]}=\infty$

(30) $y=(x^2+5x).3^{-7x}\Rightarrow y^{(n)}=?$ $\quad y^{(n)}=1.(-7)^n.(\ln 3)^n.3^{-7x}.(2x+5)+n.(-7)^{n-1}.(\ln 3)^{n-1}.3^{-7x}.2$

g $\quad f$

$g^0(x)=2x+5$ $\quad f^{(n)}(x)=(-7)^n.(\ln 3)^n.3^{-7x}$

$g'(x)=2$

$y^{(n)}=1+(-1)^n.(x-2)^{-n}+(-1)^{n-1}.(x-2)^{-n+1}.-1(x+1)^{-2}\ldots$

(27) $y=\dfrac{x^3+5x^2-4x+1}{x^2-4}\Rightarrow y^{(n)}=?$ $\quad y=(x+5)+\dfrac{21}{x^2-4}\Rightarrow(x+5)+21.\left(\dfrac{1}{x-2}.\dfrac{1}{x+2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2.(1-\cos 3x)}{\sin^2 5x}.\dfrac{(5x)^2}{25x^2}$ $\quad 9:1/2$

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}.\left[\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}\right]=?$ $\quad 0.\infty$ Belirsizliği

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}.\left[\frac{-x}{3x+3}\right]=-1/3$

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(3-2\cos 3x)}{\ln^2(\sin 5x+1)}=?$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2-2\cos 3x)}{\ln^2(\sin 5x+1)}.\dfrac{(\sin 5x)^2.(2-2\cos 3x)}{(2-2\cos 3x).(\sin 5x)^2}$ $\quad =\dfrac{2.\frac{1}{2}.9}{25}=9/25$

14