# Sürekli-zaman İşaretlerin Ayrık İşlenmesi

- Bir sürekli-zaman işaretin sayısal işlenmesi üç adımdan oluşmaktadır:

  1. Sürekli-zaman işaretinin bir ayrık-zaman işaretine dönüştürülmesi
  2. Ayrık-zaman işaretin işlenmesi
  3. İşlenmiş ayrık-zaman işaretin tekrar bir sürekli-zaman işarete çevrilmesi

- Bir sürekli-zaman işaretin sayısal hale çevrilmesi ANALOG-SAYISAL (A/D) dönüştürücüyle yapılır.

- Sayısal bir işaretin analog bir işarete dönüştürülmesi ters işlemi ise SAYISAL-ANALOG (D/A) dönüştürücüyle yapılır.

# Sürekli-zaman İşaretlerin Ayrık İşlenmesi

- A/D dönüştürme işlemi sonlu bir zaman aldığından dönüşüm tamamlanıncaya kadar A/D dönüştürücünün girişindeki işaretin genliğinin sabit kalmasını garantileyip sayısal temsilindeki hatayı en küçük yapmak amacıyla bir ÖRNEKLE-ve -TUT (S/H) devresi kullanılır.

- Örtüşmeyi önlemek amacıyla S/H devresinden önce bir analog ÖRTÜŞME ÖNLEYİCİ filtre kullanılır.

- D/A dönüştürücünün basamak şeklindeki dalgaşekline sahip çıkışını yumuşatmak aamacıyla bir analog YENİDEN OLUŞTURMA filtresi kullanılır.

# Sürekli-zaman İşaretlerin Ayrık İşlenmesi


- Anlatılanlar ışığında toplam blok diyagram gösterilimi yukarıda verilmiştir.

- Örtüşme önleyici ve yeniden oluşturma filtreleri analog alçak geçiren olduğundan, sayısal filtre tasarımından önce analog alçak geçiren filtre tasarımını ele alacağız.

- Ayrıca, en sık kullanılan IIR sayısal filtre tasarım yöntemi, prototip bir analog alçak geçiren filtrenin dönüştürülmesine dayalıdır.

# Sürekli-zaman İşaretlerin Ayrık İşlenmesi

- Önceden belirtildiği gibi, çoğu uygulamada ayrık-zaman işaretler sürekli-zaman işartetlerin örneklenmesiyle oluşturulur.

- Değişik birden fazla sürekli-zaman işaretin örneklenmesi aynı ayrık-zaman işaretini verebilir. Aslında, örneklendiğinde aynı ayrık-zaman işaretini veren sonsuz sayıda sürekli-zaman işareti vardır.

- Ancak, bazı koşullar altında verilen bir ayrık-zaman işaretine karşılık gelen tek bir sürekli-zaman işareti bulmak mümkündür.

- Bu koşullar sağlandığında, örneklenmiş işaretten orijinal sürekli-zaman işaretini yeniden oluşturma mümkündür. Şimdi, bu ilişkiyi ve karşılık gelen koşulları belirleyeceğiz.

# Örneklemenin Frekans Uzayındaki Etkisi

- $g_a(t)$, $t = nT$ anlarında örneklenip $g[n] = g_a(nT)$ dizisini oluşturan bir sürekli-zaman işareti olsun. Burada, $T$ ÖRNEKLEME PERİYODUNU göstermektedir.

- $T$'nin tersine ÖRNEKLEME FREKANSI denir ve $F_T$ ile gösterilir.

- $g_a(t)$'nin frekans uzayı gösterilimi sürekli-zaman Fourier dönüşümüyle (CTFT) verilir:

$$G_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t) e^{-j\Omega t} dt$$

- Benzer şekilde, $g[n]$ 'nin frekans uzayı gösterilimi ayrık-zaman Fourier dönüşümüyle (DTFT) verilir:

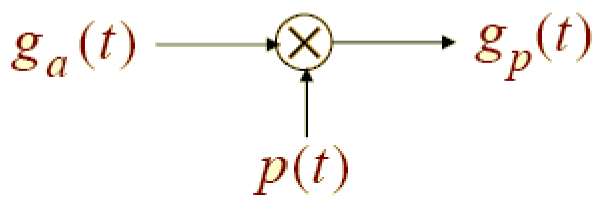
$$G(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n] e^{-j\omega n}$$

# Örneklemenin Frekans Uzayındaki Etkisi

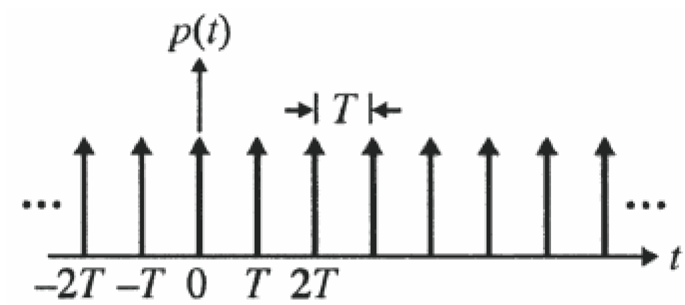
- Amacımız $G_a(j\Omega)$ ile $G(e^{j\omega})$ arasındaki ilişkiyi bulmaktır. Bu amaçla, örnekleme işlemini matematiksel olarak $g_a(t)$ ile

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

eşitliğiyle tanımlanan periyodik impuls dizisi $p(t)$'nin çarpımı olarak ele alırız.




- $p(t)$, aşağıda gösterildiği gibi T aralıklı ideal impulslardan oluşan bir işarettir.

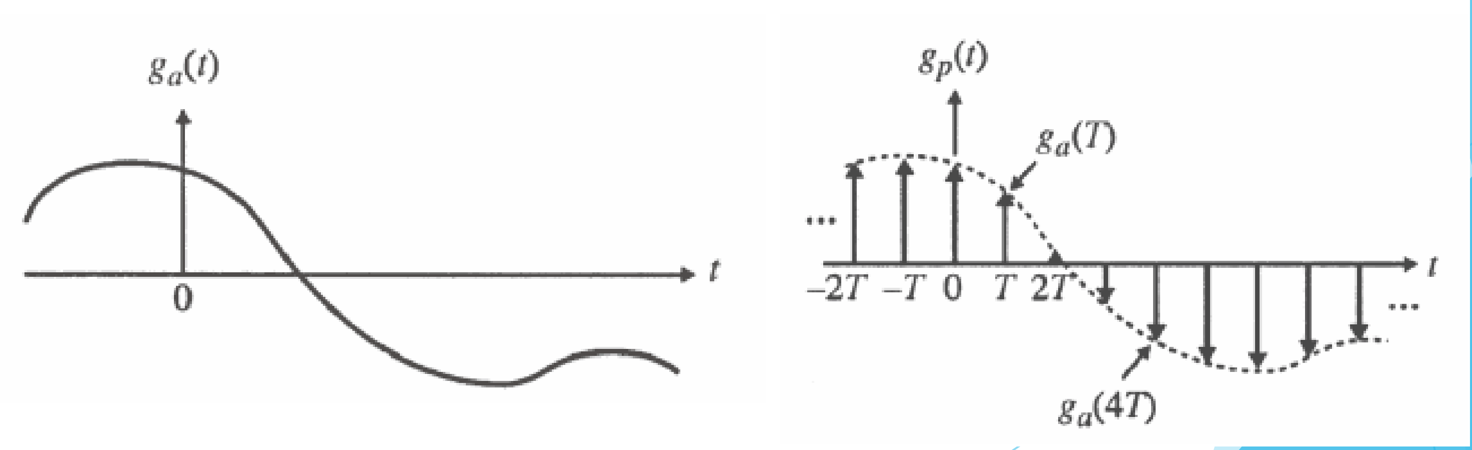


# Örneklemenin Frekans Uzayındaki Etkisi

- Çarpma işlemi sonucunda $g_p(t)$ ile gösterilen bir impuls dizisi oluşur:

$$g_p(t) = g_a(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_a(nT)\delta(t - nT)$$

- $g_p(t)$, $t = nT$ anlarında impulslardan oluşan bir sürekli-zaman işaretidir. İmpulsların genliğini, örneklenecek analog işaret $g_a(t)$'nin örnek değerleri $g_a(nT)$ belirler. Aşağıda bir analog işaret $g_a(t)$ ve buna karşılık gelen impuls dizisi $g_p(t)$ gösterilmiştir.



# Örneklemenin Frekans Uzayındaki Etkisi

- $G_p(j\Omega)$'nın eşdeğer iki ifadesi vardır. Birincisi, $\delta(t\text{-}nT)$'nin ağrlıklı toplamı ile verilir:

$$G_p(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_a(nT)\, e^{-j\Omega nT}$$

- İkinci ifade, POISSON formülünden yaralanılarak elde edilir. Bir $\phi(t)$ işareti için Poisson formülü, $\Omega_T = 2\pi/T$ ve $\Phi(j\Omega)$ işaretin CTFT'si olmak üzere

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(t+nT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(jk\Omega_T)\, e^{jk\Omega_T t}$$

ilişkisiyle verilir. Poisson formülü, $t = 0$ için aşağıda verilen eşitlik olur:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(nT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(jk\Omega_T)$$

# Örneklemenin Frekans Uzayındaki Etkisi

- CTFT'nin frekans öteleme özelliğinden $g_a(t)\, e^{-j\Psi t}$'nin CTFT'si $G_a(j(\Omega+\Psi))$ olacaktır. $t = 0$ için verilen Poisson formülünde $\phi(t) = g_a(t)\, e^{-j\Psi t}$ yazılırsa, aşağıda verilen ilişkiyi elde ederiz:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_a(nT)e^{-j\Psi nT} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_a(j(k\Omega_T + \Psi))$$

- Yukarıdaki ifadede $\Psi$ yerine $\Omega$ yazılırsa $G_p(j\Omega)$'nın

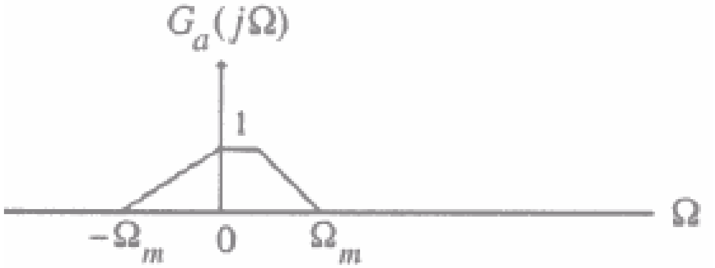
$$G_p(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_a(j(\Omega - k\Omega_T))$$

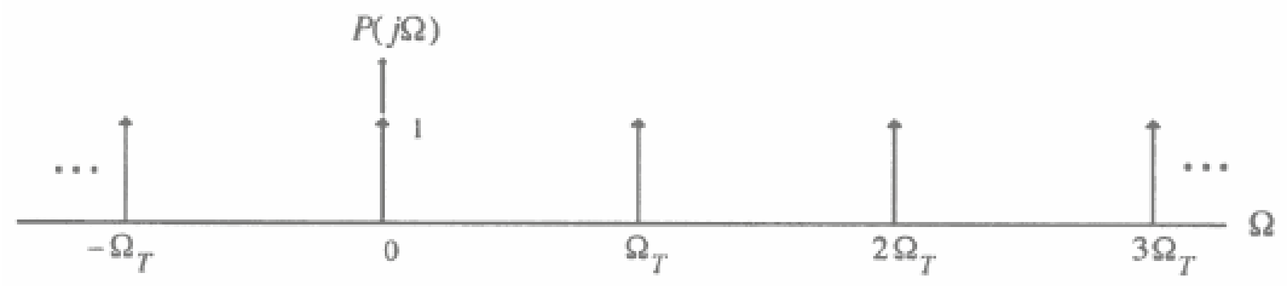
ile verilen ikinci gösterilimi elde edilir.

- $G_p(j\Omega)$'nın ifadesinden bu işaretin periyodik bir fonksiyon olduğu görülmektedir. $G_a(j\Omega)$'nın $\Omega_T$'nin tam katlarına ötelenmiş ve $1/T$ ile ölçeklenmiş kopyalarının toplamı $G_p(j\Omega)$ işaretini oluşturmaktadır.

# Örneklemenin Frekans Uzayındaki Etkisi

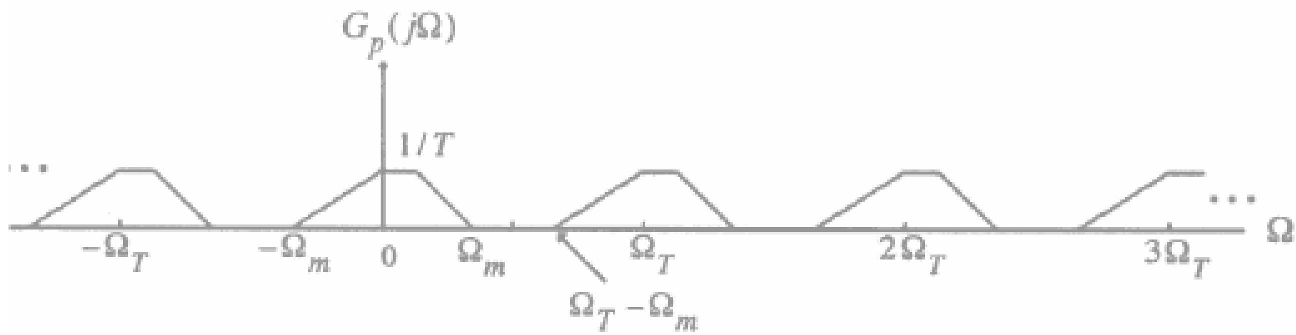
- $G_p(j\Omega)$ eşitliğinin sağ tarafındaki toplamada $k$=0 için bulunan terim, $G_p(j\Omega)$'nın TEMELBAND kısmı, diğer tüm $k$ değerleri için bulunan terimler ise $G_p(j\Omega)$'nın frekans ötelenmiş kısımlarıdır.
- $-\Omega_T/2 \leq \Omega \leq \Omega_T/2$ frekans aralığına TEMELBAND veya NYQUIST bandı denir.
- $g_a(t)$'nin bandsınırlı bir işaret olduğunu varsayalım. $T = 2\pi/\Omega_T$ olmak üzere, aşağıda örnek bir $G_a(j\Omega)$ ve periyodik impuls dizisi $p(t)$'nin CTFT'si $P(j\Omega)$ çizilmiştir.

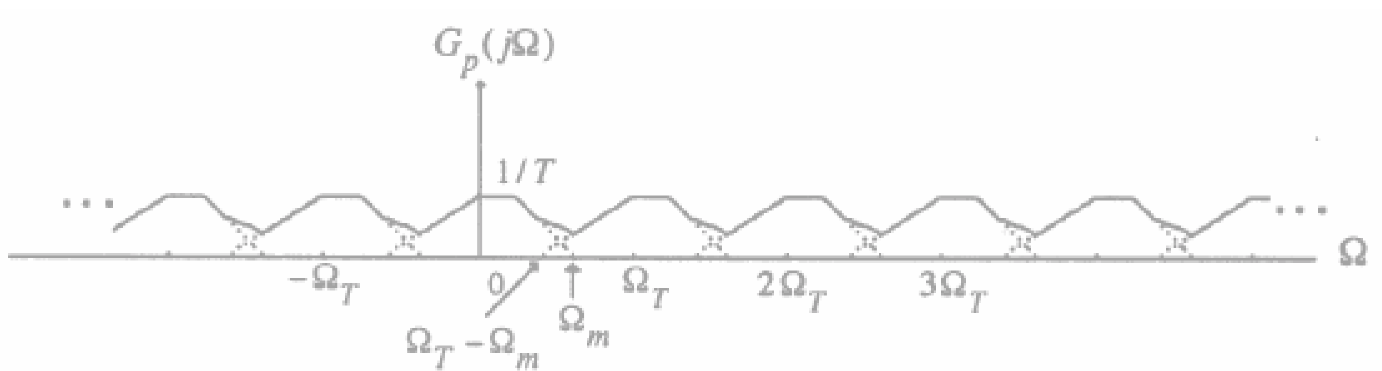


# Örneklemenin Frekans Uzayındaki Etkisi

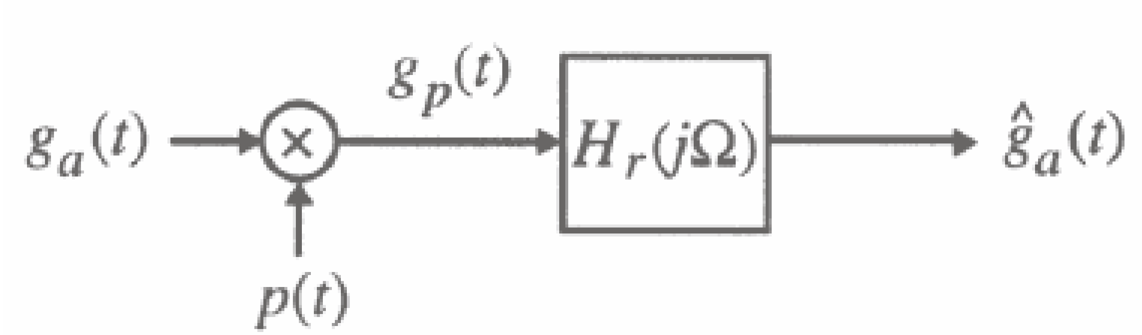
$\Omega_T$'nin farklı iki değeri için $G_p(j\Omega)$ aşağıda çizilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi, $\Omega_T > 2\,\Omega_m$ durumunda, $G_p(j\Omega)$'yı oluşturan ötelenmiş kopyalar arasında kesişme yoktur. Diğer yandan, $\Omega_T < 2\,\Omega_m$ durumunda, $G_p(j\Omega)$'yı oluşturan ötelenmiş kopyalar arasında kesişme vardır. Bu olaya ÖRTÜŞME denir.



# Örneklemenin Frekans Uzayındaki Etkisi

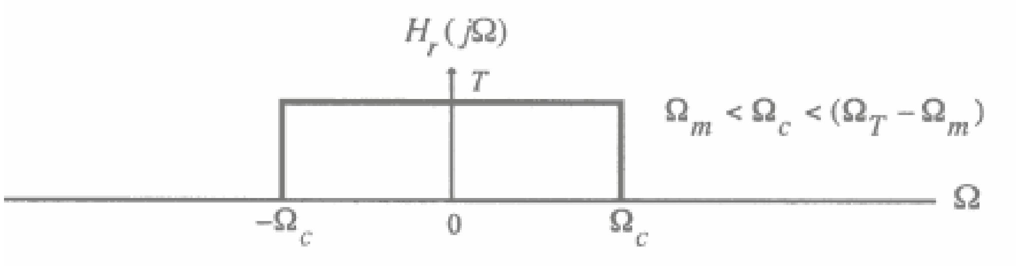
- Aşağıda gösterildiği gibi $\Omega_T > 2\Omega_m$ ise, örneklenmiş işaret $g_p(t)$, $T$ kazançlı ve $\Omega_\mathrm{m} < \Omega_\mathrm{c} < \Omega_T\text{-}\Omega_m$ eşitsizliklerini sağlayan $\Omega_c$ kesim frekanslı ideal bir alçak geçiren filtreden geçirilerek analog işaret $g_a(t)$ hatasız bir şekilde yeniden oluşturulabilir.

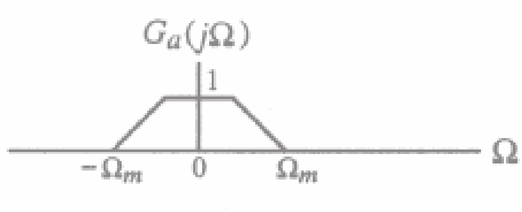


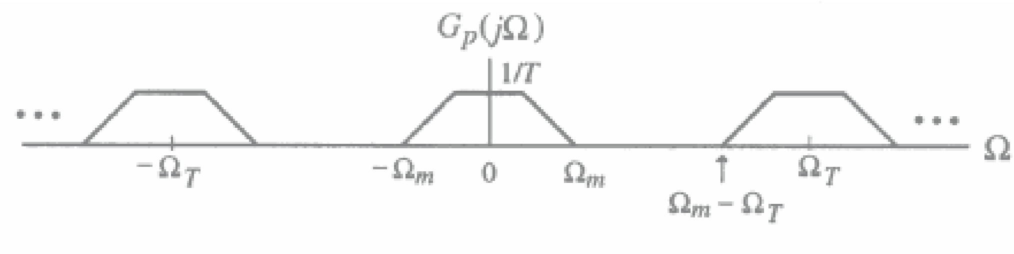

- Diğer yandan, $\Omega_\mathrm{T} < 2\Omega_m$ ise, $G_\mathrm{a}(j\Omega)$'nın kesişen ötelenmiş kopyalarından dolayı filtreleme aracılığıyla analog işaret $g_a(t)$ hatasız bir şekilde yeniden oluşturulamaz.

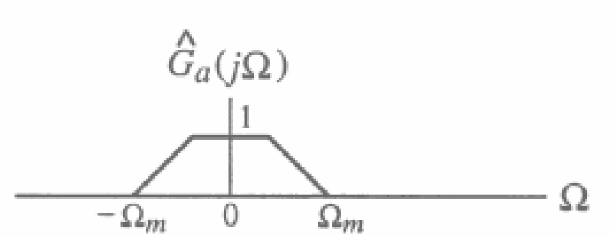
# Örneklemenin Frekans Uzayındaki Etkisi

Yeniden oluşturma filtresinin ve ilgili işaretlerin spektrumları aşağıda verilmiştir.



# Örneklemenin Frekans Uzayındaki Etkisi

**Örnekleme Teoremi**: $g_a(t)$, CTFT'si $|\Omega| > |\Omega_m|$ için $G_a(j\Omega) = 0$ olan bandsınırlı bir işaret olsun. $\Omega_T = 2\pi/T$ olmak üzere, $\Omega_T > 2\Omega_m$ ise, $g_a(t)$ örnek değerler $g_a(nT)$'den tek olarak belirlenebilir. $\{g_a(nT)\}$ verildiğinde,

$$g_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_a(nT)\delta(t-nT)$$

ile verilen bir impuls dizisi oluşturup diziyi $T$ kazançlı ve $\Omega_m < \Omega_c < \Omega_T - \Omega_m$ eşitsizliklerini sağlayan $\Omega_c$ kesim frekanslı ideal bir alçak geçiren filtre $H_r(j\Omega)$'den geçirerek $g_a(t)$'yi hatasız olarak yeniden oluşturabiliriz.

Yorumlar:

1. $\Omega_T > 2\Omega_m$ koşuluna NYQUIST koşulu denir.
2. $\Omega_T/2$ frekansına KATLAMA frekansı denir.
3. $g_a(t)$'de minimum örnekleme frekansını belirleyen en yüksek frekansa NYQUIST denir.
4. $2\Omega_m$ frekansına NYQUIST hızı denir.

# Örneklemenin Frekans Uzayındaki Etkisi

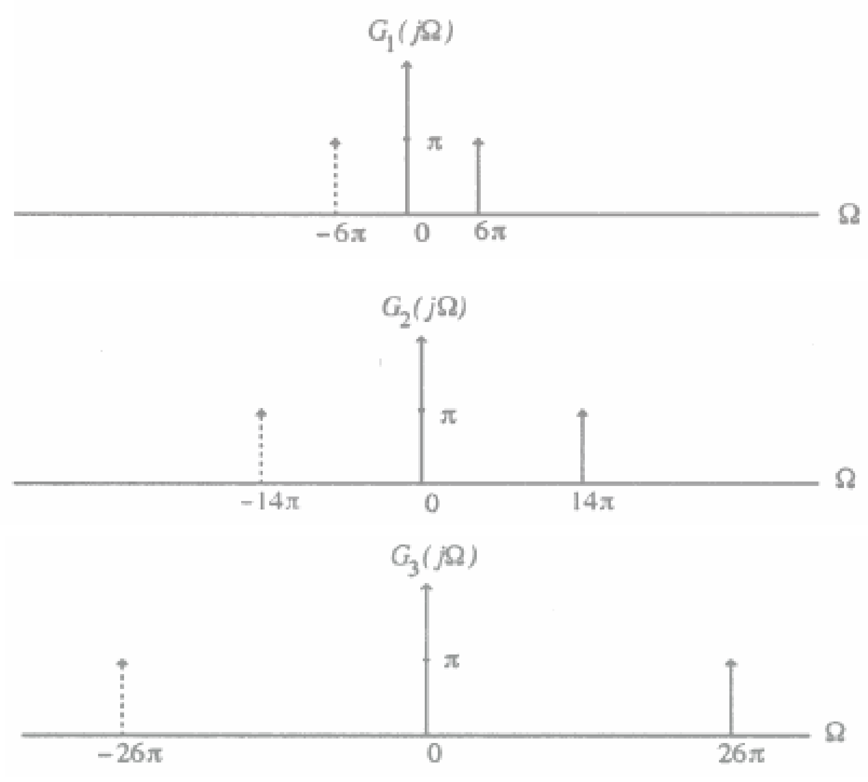
- Sayısal telefonda 3.8 kHz işaret bandgenişliği kabul edilebilirdir. Bu nedenle, sayısal telefon haberleşmesinde ses işaretinin bandgenişliğinin iki katından daha büyük olan 8 kHz örnekleme frekansı kullanılır.

- Yüksek kaliteli analog müzik işareti işlemede ise 20 kHz bandgenişiliğinin yeterli olduğu tespit edilmiştir. Kompakt disk (CD) müzik sistemlerinde işaret bandgenişliğinin iki katından biraz daha büyük olan 44.1 kHz örnekleme frekansı kullanılmaktadır.

# Örneklemenin Frekans Uzayındaki Etkisi

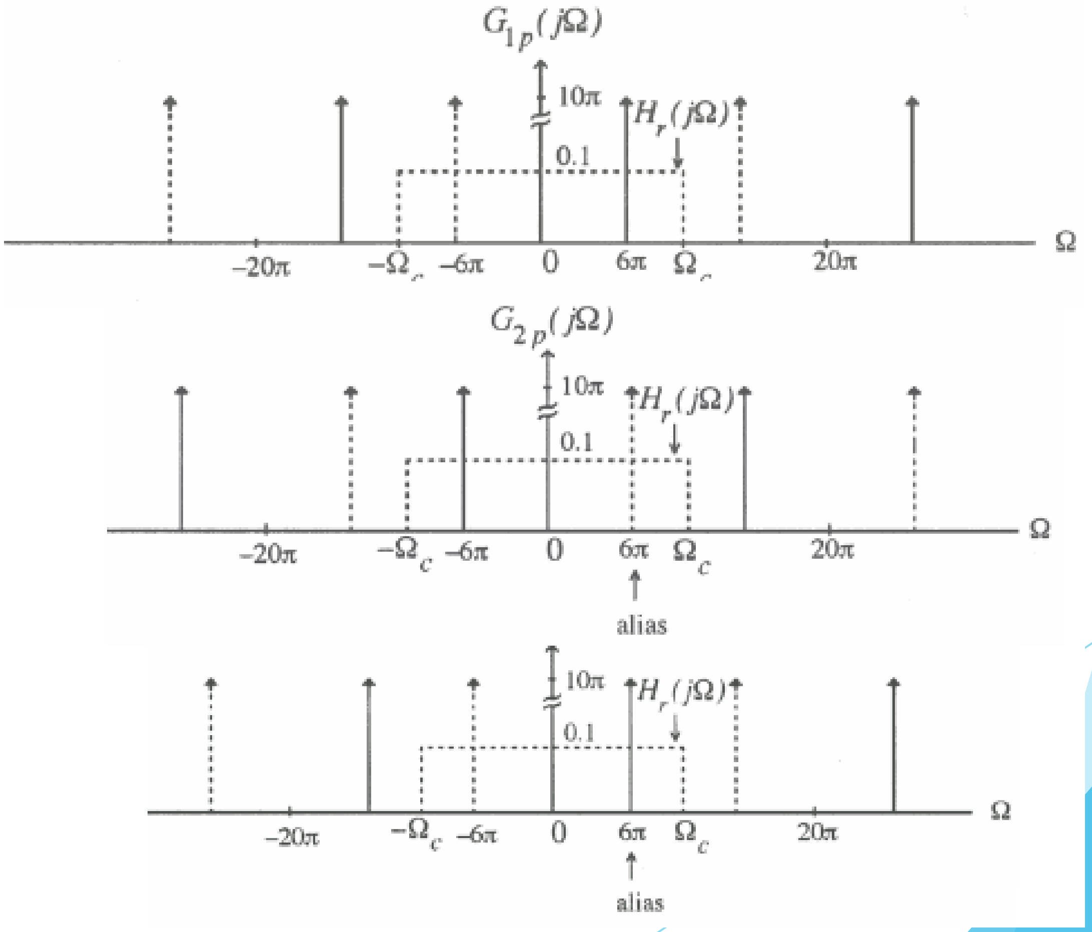
**Örnek:** Aşağıda zaman uzayında denklemleri ve karşılık gelen spektrumları verilen sinüzoidal üç işareti ele alalım.

$$g_1(t) = \cos(6\pi t) \qquad G_1(j\Omega) = \pi[\delta(\Omega - 6\pi) + \delta(\Omega + 6\pi)]$$
$$g_2(t) = \cos(14\pi t) \qquad G_2(j\Omega) = \pi[\delta(\Omega - 14\pi) + \delta(\Omega + 14\pi)]$$
$$g_3(t) = \cos(26\pi t) \qquad G_3(j\Omega) = \pi[\delta(\Omega - 26\pi) + \delta(\Omega + 26\pi)]$$



# Örneklemenin Frekans Uzayındaki Etkisi

Bu işaretler, $\Omega_T$=20π rad/s örnekleme frekansında ($T$=0.1s) örneklenmektedir. Örnekleme sonucunda, $G_{\ell p}(j\Omega) = 10\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_\ell\left(j(\Omega - k\Omega_T)\right),\quad 1 \le \ell \le 3$ ile verilen spektruma sahip üç adet sürekli-zaman impuls dizisi $g_{1p}(t)$, $g_{2p}(t)$, $g_{3p}(t)$ olşur. Dizilerin spektrumları aşağıda verilmiştir.



# Örneklemenin Frekans Uzayındaki Etkisi

- $g_1(t)$ durumunda, örnekleme freknası Nyquist koşulunu sağladığından örtüşme oluşmamıştır. Ayrıca, alçak geçiren filtre çıkışındaki işaret orijinal sürekli-zaman işarete eşittir.

- Diğer iki durumda, örnekleme freknası Nyquist koşulunu sağlamamaktadır. Her iki durumda da alçak geçiren filtre çıkışı $\cos(6\pi t)$'ye eşittir.

- $G_{2p}(j\Omega)$'da $\Omega = 6\pi$'de oluşan impuls, $G_2(j\Omega)$'da $\Omega = -14\pi$'deki impulsun örtüşmesinden kaynaklanmıştır.

- Benzer şekilde, $G_{3p}(j\Omega)$'da $\Omega = 6\pi$'de oluşan impuls, $G_3(j\Omega)$'da $\Omega = 26\pi$'deki impulsun örtüşmesinden kaynaklanmıştır.

# Örneklemenin Frekans Uzayındaki Etkisi

- Şimdi, $g[n]$'nin DTFT'si ile $g_p(t)$'nin CTFT'si arasındaki ilişkiyi bulacağız. İki spektrumun tanımı aşağıda verilmiştir.

$$G(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n] e^{-j\omega n} \quad G_p(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_a(nT) e^{-j\Omega nT}$$

- Yukarıdaki denklemlerde, $g[n] = g_a(nT)$ ilişkisi kullanılırsa,

$$G_p(j\Omega) = G(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\Omega T}$$

elde edilir. Son olarak, $G_p(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_a\big(j(\Omega - k\Omega_T)\big)$ olduğu hatırlanırsa aşağıdaki sonuç bulunur

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_a(j\Omega - jk\Omega_T)\Big|_{\Omega=\omega/T}$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_a(j\tfrac{\omega}{T} - jk\Omega_T)$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_a(j\tfrac{\omega}{T} - j\tfrac{2\pi k}{T})$$

# Örneklemenin Frekans Uzayındaki Etkisi

- Bir önceki yansıda verilen spektrum alternatif olarak

$$G(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_a(j\Omega - jk\Omega_T)$$

şeklinde ifade edilebilir. $G_p(j\Omega) = G(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\Omega T}$ ilişkisi göz önünde bulundurulursa şu sonuç çıkar:

$G_p(j\Omega)$'da $\Omega = \omega/T$ yazılırsa, $G(e^{j\omega})$ elde edilir.

- $G_p(j\Omega)$, $\Omega_T = 2\pi/T$ periyodlu periyodik bir fonksiyondur.
- $\Omega = \omega/T$ ile verilen dönüşümden dolayı, $G(e^{j\omega})$'da periyodik bir fonksiyon olup periyodu $2\pi$'dir.

# Analog İşaretin Yeniden Oluşturulması

- Şimdi, ideal yeniden oluşturma filtresinin çıkışındaki işareti bulacağız. Sonuç, filtrenin impuls yanıtı ile giriş arasındaki konvolüsyon toplamına eşittir.
- Filtrenin impuls yanıtı, Hr(jΩ)'nın ters DTFT'si alınarak bulunabilir:

$$h_r(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_r(j\Omega)\, e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{T}{2\pi}\int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega t} d\Omega$$
$$= \frac{\sin(\Omega_c t)}{\Omega_T t/2}, \qquad -\infty \le t \le \infty$$

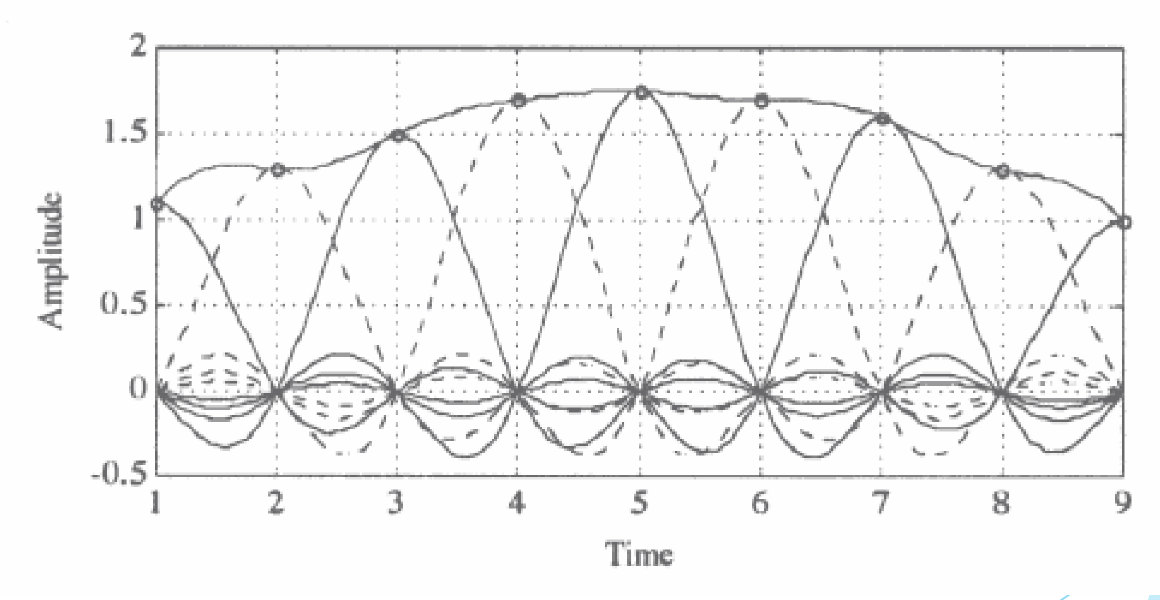
- Filtrenin girişinin $g_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]\delta(t-nT)$ olduğunu hatırlayınız.
- O halde, filtre çıkışı

$$\hat{g}_a(t) = h_r(t) \circledast g_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n] h_r(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

olarak elde edilir. ($\Omega_c = \Omega_T/2 = \pi / T$ olduğu varsayılmıştır.)

# Analog İşaretin Yeniden Oluşturulması

Yukarıda verilen denklem, bandsınırlı bir aradeğerleme işilemi olup denklemdeki sinüzoidal fonksiyonların analog işareti nasıl oluşturduğu aşağıda verilen şekilde açıklanmaya çalışılmıştır.



# Analog İşaretin Yeniden Oluşturulması

- $\Omega_c = \Omega_T/2$ ise, $h_r(0) = 1$ ve $n \neq 0$ için $h_r(nT) = 0$ olduğu gösterilebilir. Bu gözlem interpolasyon denkleminde kullanıldığında $-\infty < r < \infty$ aralığındaki tüm tamsayılar için

$$g_a(rT) = g[r] = g_a(rT)$$

sonucu çıkar.

- Yukarıdaki sonuç, örnekleme teoreminde verilen koşulun geçerli olup olmadığından bağımsız olarak doğrudur.

- Ancak, örnekleme frekansı $\Omega_T$ örnekleme teoremindeki koşulu sağlıyorsa, yeniden oluşturulan işaret sadece örnekleme anlarının katlarında değil, tüm $t$ değerleri için orijinal analog işarete eşit olur.

# Band Geçiren İşaretlerin Örneklenmesi

- Şimdiye kadar yapılan tartışmada sürekli-zaman işaretinin $\Omega_m$ frekansıyla bandsınırlı bir işaret olduğu varsayıldı. Böyle sürekli-zaman işaretlere ALÇAK GEÇİREN işaret denir.

- İşaretin daha yüksek bir $\Omega_L < |\Omega| < \Omega_H$ frekans aralığına bandsınırlı olduğu uygulamalar vardır. Böyle işaretlere BAND GEÇİREN işaret denir.

- Bandgeçiren işaretler örneklenirken $\Omega_T \geq 2\,\Omega_H$ seçilerek örtüşme önlenebilir. Ancak bu yaklaşımın önemli iki sınırlaması vardır: (i) örneklemeyle elde edilen ayrık-zaman işaretin spektrumunda spektral boşluklar olacaktır, (ii) $\Omega_L$ büyük bir değere sahipse gerekli örnekleme frekansı çok yüksek olup bazı uygulamalarda pratik olmayabilir.

- Aşağıda bandgeçiren işaretler için kullanılabilecek daha uygun bir yöntem tartışılmıştır.7

# Band Geçiren İşaretlerin Örneklenmesi

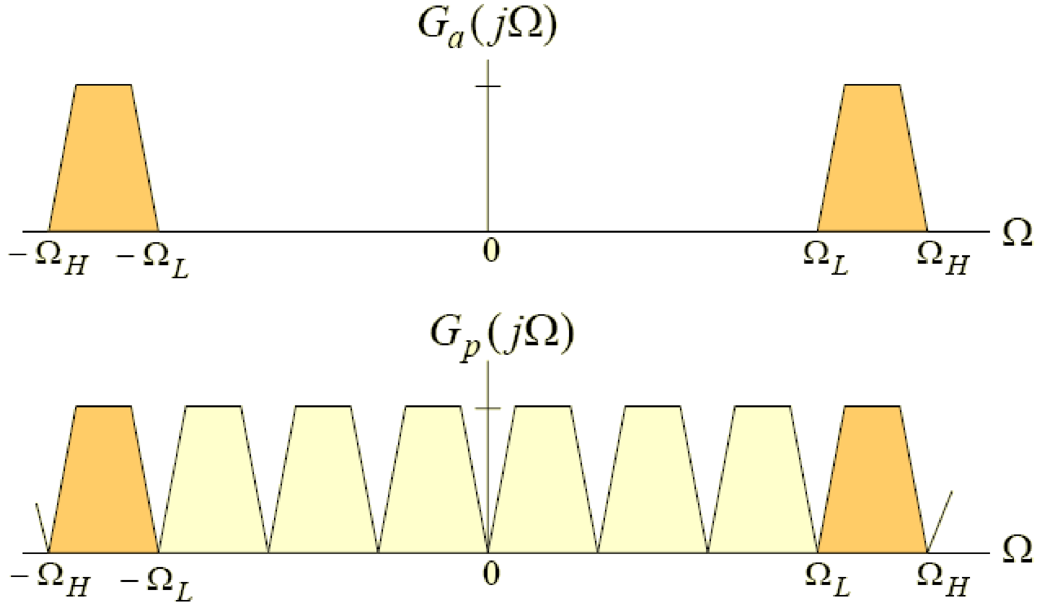
- $\Delta\Omega = \Omega_L - \Omega_H$ band geçiren işaretin bandgenişliğini tanımlasın.
- İşaretteki en yüksek frekans $\Omega_H$'ın bandgenişiliğinin bir tamsayı katı olduğunu varsayalım. Yani, $M$ bir tamsayı olmak üzere $\Omega_H = M(\Delta\Omega)$.
- Örnekleme frekansını $\Omega_T = 2(\Delta\Omega) = 2\Omega_H/\mathrm{M}$ olarak seçeriz (örnekleme frekansının Nyquist frekansının $M$'de birine eşit olduğuna dikkat ediniz).
- Örnekleme frekansının bu değeri $G_p(j\Omega)$ için daha önceden bulduğumuz eşitlikte yerine konulursa $G_p(j\Omega)$ aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$G_p(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_a\big(j\Omega - j2k(\Delta\Omega)\big)$$

- Alçak geçiren işaretlerin örneklenmesinde olduğu gibi, örnklenmiş işaret bandgeçiren işaretin spektrumunun ölçeklenmiş ve ötelenmiş kopyalarının toplamından oluşmaktadır.
- k'nın her değeri için ötelemenin miktarı kopyalar arasında kesişme olmayacağını garantilediğinden örtüşme oluşmaz.

# Band Geçiren İşaretlerin Örneklenmesi

Aşağıdaki şekil tartışmaya açıklık getirmektedir.




- Analog işaret $g_a(t)$, $g_p(t)$'nin geçirme bandı $\Omega_L < |\Omega| < \Omega_H$ ve kazancı $T$ olan bandgeçiren bir filtreden geçirilmesiyle elde edilebilir.
- Düşük frekans bandlarındaki herhangi bir kopyanın uygun bir bandgeçiren filtre kullanılarak oluşturulabileceğine dikkat ediniz.