Elektromanyetik Alan Teorisi

BÖLÜM 2 - VEKTÖR ANALİZ

2.3 - VEKTÖRLERİN ÇARPIMI

-SKALER ÇARPIM

$\vec{A} \cdot \vec{B} \rightarrow$ VEKTÖR X VEKTÖR ÇARPIMI

SKALER İLE VEKTÖR ÇARPIMI $\rightarrow k.\vec{A} = \hat{a}_N (kA)$

2.3.1 - SKALER VEYA NOKTA ÇARPIM

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta \rightarrow$ SONUÇ SKALER

$\theta =$ İKİ VEKTÖR ARASINDAKİ KÜÇÜK AÇI

* $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

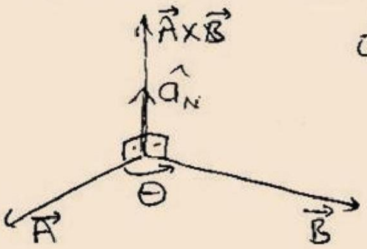
* $\vec{A}.\vec{B} = A^2 \qquad A = \sqrt{\vec{A}.\vec{A}}$

2.3.2 - VEKTÖREL VEYA ÇAPRAZ ÇARPIM

$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{a}_N AB\sin\theta \rightarrow$ SONUÇ VEKTÖR

$\theta \rightarrow$ İKİ VEKTÖR ARASINDAKİ KÜÇÜK AÇI

$\hat{a}_N \rightarrow \vec{A}$ VE $\vec{B}$ NİN BULUNDUĞU DÜZLEME DİK OLAN BİRİM VEKTÖR

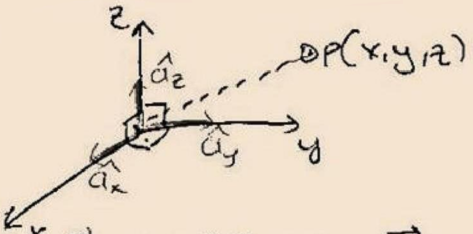


$\hat{a}_N$ BİRİM VEKTÖRÜNÜN YÖNÜ SAĞ-EL KURALI İLE BULUNUR.

* $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times A$

2.4 - ORTOGONAL KOORDİNAT SİSTEMLERİ

2.4.1 - KARTEZYEN KOORDİNAT SİSTEMİ

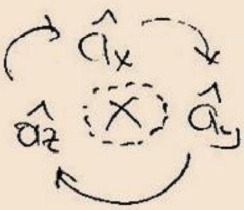


* $\vec{A}$ VEKTÖRÜ $\rightarrow \vec{A} = \hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z$

* BİRİM VEKTÖRLER $\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z$

$\hat{a}_x \times \hat{a}_y = \hat{a}_N . 1 . 1 . \sin 90 = \hat{a}_N = \hat{a}_z$

$\hat{a}_y \times \hat{a}_z = \hat{a}_N . 1 . 1 . \sin 90 = \hat{a}_x$



$$\hat{a}_x \times \hat{a}_x = \hat{a}_y \times \hat{a}_y = \hat{a}_z \times \hat{a}_z = 0$$

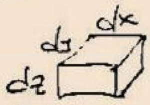
$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_y = \hat{a}_y \cdot \hat{a}_z = \hat{a}_x \cdot \hat{a}_z = 0$$

* DİFERANSİYEL UZUNLUK

$$\vec{dl} = \hat{a}_x\, dx + \hat{a}_y\, dy + \hat{a}_z\, dz$$

* DİFERANSİYEL HACİM

$$dv = dx\, dy\, dz$$



* $\vec{A}$ 'NÜN BÜYÜKLÜĞÜ

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

*İKİ VEKTÖRÜN SKALER ÇARPIMI

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z) \cdot (\hat{a}_x B_x + \hat{a}_y B_y + \hat{a}_z B_z)$$

$$= \hat{a}_x \cdot \hat{a}_x A_x B_x + \hat{a}_x \cdot \hat{a}_y A_y B_y + \dots + \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z A_z B_z$$

$$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

*İKİ VEKTÖRÜN VEKTÖREL ÇARPIMI

$$\vec{A} \times \vec{B} = (\hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z) \times (\hat{a}_x B_x + \hat{a}_y B_y + \hat{a}_z B_z)$$

$$= \hat{a}_x \times \hat{a}_x A_x B_x + \hat{a}_x \times \hat{a}_y A_x B_y + \dots + \hat{a}_z \times \hat{a}_z A_z B_z$$

$$= \hat{a}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \hat{a}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \hat{a}_z (A_x B_y - A_y B_x)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \longrightarrow \text{SARRUS'TAN...}$$

ÖRNEK 2.3 - KARTEZYEN KOORDİNATLARDA ;

$$\vec{A} = -\hat{a}_x + \hat{a}_y 2 - \hat{a}_z 2$$

a) $A = ?$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

b) $\vec{A}$ YÖNÜNDEKİ $\hat{a}_A$ BİRİM VEKTÖRÜ = ?

$$\vec{A} = \hat{a}_A \cdot A \qquad \hat{a}_A = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{1}{3}(-\hat{a}_x + \hat{a}_y 2 - \hat{a}_z 2)$$

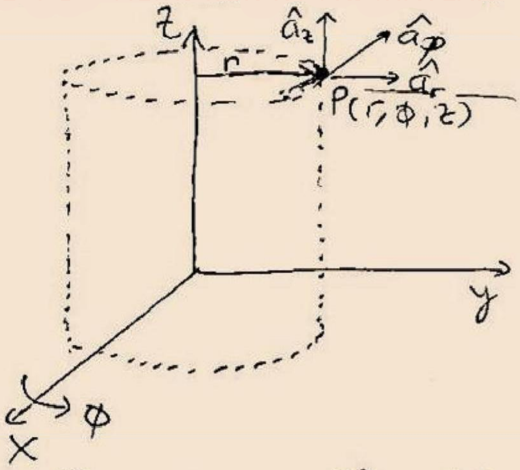
c) $\vec{A}$ VEKTÖRÜNÜN Z EKSENİYLE YAPTIĞI AÇI=?

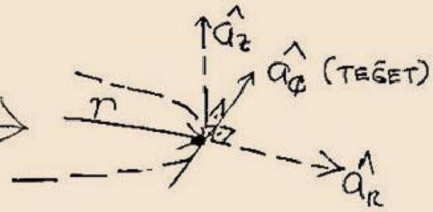
$$\vec{A} \cdot \hat{a}_z = A.1.\cos\theta$$

$$(-\hat{a}_x + \hat{a}_y 2 - \hat{a}_z 2) \cdot \hat{a}_z = 3.1.\cos\theta$$

$$\frac{-2}{3} = \cos\theta \qquad \theta = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = 131,81^\circ$$

2.4.1 - SİLİNDİRİK KOORDİNATLAR





* $\vec{A}$ VEKTÖRÜ $\longrightarrow \vec{A} = \hat{a}_r A_r + \hat{a}_\phi A_\phi + \hat{a}_z A_z$

* BİRİM VEKTÖRLER $\hat{a}_r$, $\hat{a}_\phi$, $\hat{a}_z$

$$\hat{a}_r \times \hat{a}_\phi = \hat{a}_z \qquad\qquad \hat{a}_r \rightarrow \hat{a}_\phi \rightarrow \hat{a}_z \;\; (\times)$$

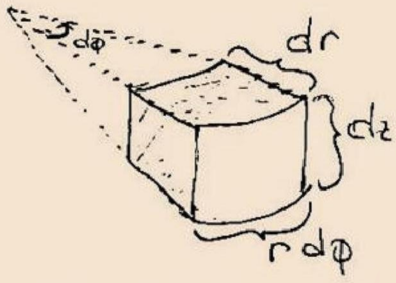
$$\hat{a}_r \times \hat{a}_z = -\hat{a}_\phi$$

* VEKTÖR DİFERANSİYEL UZUNLUK

$$d\vec{l} = \hat{a}_r\, dr + \hat{a}_\phi\, r\, d\phi + \hat{a}_z\, dz$$

* DİFERANSİYEL HACİM

$$dv = r\, dr\, d\phi\, dz$$



* $A = |\vec{A}| = \sqrt{A_r^2 + A_\phi^2 + A_z^2}$

* SİLİNDİRİK-KARTEZYEN DÖNÜŞÜMÜ

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \\ z &= z \end{aligned}$$

∗KARTEZYEN-SİLİNDİR DÖNÜŞÜMÜ

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad z = z$$

ÖRNEK 2.6 - $\vec{A} = \hat{a}_r(3\cos\varphi) - \hat{a}_\varphi 2r + \hat{a}_z z$ BİR VEKTÖR ALAN.

a) $P(4, 60°, 5)$ NOKTASINDAKİ ALAN DEĞERİ NEDİR?

$P(r,\varphi,z) \Rightarrow r=4 \;,\; \varphi = 60° \;,\; z=5$

$\vec{A}_p = \hat{a}_r(3\cos 60°) - \hat{a}_\varphi 8 + \hat{a}_z 5$

$$\boxed{\vec{A}_P = \hat{a}_r \frac{3}{2} - \hat{a}_\varphi 8 + \hat{a}_z 5}$$

b) P' DEKİ $\vec{A}_P$ ALANINI KARTEZYEN KOORDİNATLARDA YAZINIZ.

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60° & -\sin 60° & 0 \\ \sin 60° & \cos 60° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

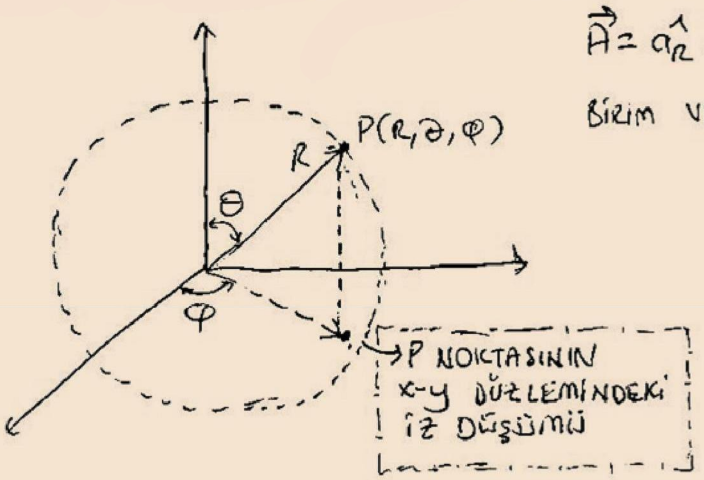
$\vec{A}_P = \hat{a}_x 7{,}68 + \hat{a}_y(-2{,}7) + \hat{a}_z 5$

c) P NOKTASINI KARTEZYEN KOORDİNATLARDA YAZINIZ.

$P(x,y,z)=?\quad x = r\cos\varphi = 2 \qquad y = r\sin\varphi = 2\sqrt{3} \qquad z=5$

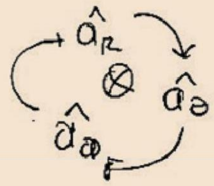
$= P(2, 2\sqrt{3}, 5)$

2.4.3 - KÜRESEL KOORDİNATLAR



$\vec{A} = \hat{a}_R A_R + \hat{a}_\theta A_\theta + \hat{a}_\varphi A_\varphi$

BİRİM VEKTÖRLER $\hat{a}_R,\ \hat{a}_\theta,\ \hat{a}_\varphi$



$\hat{a}_R \cdot \hat{a}_R = 1 \qquad \hat{a}_R \cdot \hat{a}_\theta = 0$

$\hat{a}_R \times \hat{a}_\varphi = -\hat{a}_\theta$

* VEKTÖR DİFERANSİYEL UZUNLUK

$$d\vec{l} = \hat{a}_R dR + \hat{a}_\theta R d\theta + \hat{a}_\phi R\sin\theta\, d\phi$$

* DİFERANSİYEL HACİM

$$dv = R^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\phi$$

* KÜRESEL-KARTEZYEN DÖNÜŞÜMÜ

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= R\sin\theta\cos\phi \\ y &= R\sin\theta\sin\phi \\ z &= R\cos\theta \end{aligned}$$

* KARTEZYEN-KÜRESEL DÖNÜŞÜMÜ

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} R &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \cos^{-1}\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \\ \phi &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

* KÜRESEL-SİLİNDİR DÖNÜŞÜMÜ

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} r &= R\sin\theta \\ \phi &= \phi \\ z &= R\cos\theta \end{aligned}$$

* SİLİNDİRİK-KÜRESEL DÖNÜŞÜMÜ

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} R &= \sqrt{r^2+z^2} \\ \theta &= \tan^{-1}(r/z) \\ \phi &= \phi \end{aligned}$$

ÖRNEK 2.8 - $P(4, \frac{2\pi}{3}, 3)$ NOKTASINI

a) KARTEZYEN KOORD. b) KÜRESEL KOORDİNATLARDA YAZINIZ.

a: $P(r,\phi,z) = P(4, \frac{2\pi}{3}, 3)$ .... $P(x,y,z) = ?$

$$x = r\cos\phi = 4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2$$

$$y = r\sin\phi = 4\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3,5$$

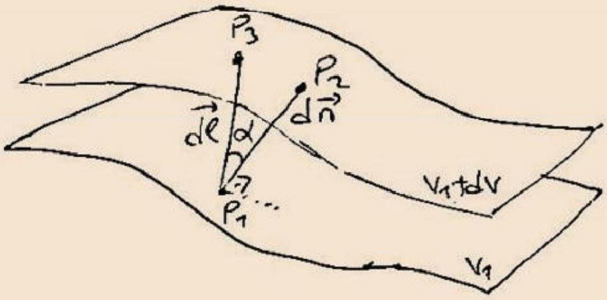
$$z = z = 3$$

b) $P(R,\theta,\varphi)=?$

$R=\sqrt{4^2+3^2}=5 \qquad \theta=53{,}1^\circ \qquad \varphi=2\pi/3$

2.5 - BİR SKALER ALANIN GRADYANTI

SKALER ELEKTRİK POTANSİYEL V DÜŞÜNÜLÜRSE,



dV : V'DEKİ KÜÇÜK DEĞİŞİM

P_1 = V_1 YÜZEYİNDE BİR NOKTA

P_2 = $\vec{dn}$ NORMAL VEKTÖRÜ BOYUNCA İLERLENDİĞİNDE V_1+dV YÜZEYİNDE KARŞILIK GELEN NOKTA

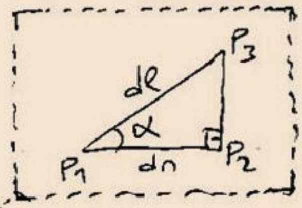
P_3 = BİR $\vec{dl}\,(\neq \vec{dn})$ VEKTÖRÜ BOYUNCA İLERLENDİĞİNDE V_1+dV YÜZEYİNDE KARŞILIK GELEN NOKTA

* $\frac{dV}{dl}$,.. UZAY DEĞİŞİM HIZI. $\vec{dn}$ BOYUNCA MAKSİMUM OLUR. ÇÜNKÜ dn V_1 İLE V_1+dV ARASINDAKİ EN KISA UZAKLIK.

* BİR SKALER ALANIN MAKSİMUM UZAY ARTIŞ HIZININ BÜYÜKLÜĞÜNÜ VE YÖNÜNÜ GÖSTEREN VEKTÖR, O SKALER ALANIN GRADYANTI OLARAK TANIMLANIR.

$\vec{\nabla} \rightarrow$ DEL OPERATÖRÜ / NABLA OPERATÖRÜ

$$\boxed{\begin{aligned} \text{grad}\,V &= \hat{a}_n \frac{dV}{dn} \\ \vec{\nabla} V &= \hat{a}_n \frac{dV}{dn} \end{aligned}}$$



* $\frac{dV}{dl}=\frac{dV}{dn}\cdot\frac{dn}{dl}=\frac{dV}{dn}\cdot\cos\alpha=\frac{dV}{dn}\,\hat{a}_n\cdot\hat{a}_l$

$=(\vec{\nabla}V)\cdot\hat{a}_l$

$\vec{dl}=\hat{a}_l\cdot dl$ İSE ; $\boxed{dV=(\vec{\nabla}V)\cdot\vec{dl}}$

* dl_1, dl_2 VE dl_3 VEKTÖR YER DEĞİŞİMİNİN SEÇİLEN BİR KOORDİNAT SİSTEMİNDEKİ BİLEŞENLERİ OLMAK ÜZERE;
V'NİN KONUM DEĞİŞİKLİĞİNDEN KAYNAKLANAN TOPLAM DİFERANSİYELİ =

$dV=\frac{\partial V}{\partial l_1}dl_1+\frac{\partial V}{\partial l_2}dl_2+\frac{\partial V}{\partial l_3}dl_3$ OLARAK YAZILABİLİR.

(KARTEZYEN KOORDİNATLAR İÇİN dl_1, dl_2 VE dl_3 ; dx, dy VE dz DİR.)

dV, iki vektörün nokta çarpımı şeklinde yazılabilir.

$$dV = \left(\hat{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}\right) \cdot \left(\hat{a}_x dx + \hat{a}_y dy + \hat{a}_z dz\right)$$

$$\boxed{dV = \left(\hat{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}\right) \cdot d\vec{\ell}}$$

* İki sonuç karşılaştırılırsa

$$\vec{\nabla} V = \hat{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + a_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} V = V\left(\hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

* Bir vektör diferansiyel operatör olarak $\vec{\nabla}$; kartezyen koordinatlarda:

$$\vec{\nabla} = \hat{a}_x \frac{d}{dx} + \hat{a}_y \frac{d}{dy} + \hat{a}_z \frac{d}{dz}$$

Silindirik koordinatlarda:

$$\vec{\nabla} = \hat{a}_r \frac{d}{dr} + \hat{a}_\phi \frac{1}{r} \frac{d}{d\phi} + \hat{a}_z \frac{d}{dz}$$

Küresel koordinatlarda:

$$\vec{\nabla} = \hat{a}_R \frac{d}{dR} + \hat{a}_\theta \frac{1}{R} \frac{d}{d\theta} + \hat{a}_\phi \frac{1}{R\sin\theta} \frac{d}{d\phi}$$

ÖRNEK 2.9 - $\vec{E}$ elektrostatik alan modeli, V skaler elektrik potansiyelinin negatif gradyanı olarak çıkarılabilir. ($\vec{E} = -\vec{\nabla} V$)

(0,1,0) 'deki $\vec{E} = ?$

a) $V = V_0 e^{-x} \sin\frac{\pi y}{4}$ b) $V = E_0 R \cos\theta$

a: $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

$$= -\left(\hat{a}_x \frac{d}{dx} + \hat{a}_y \frac{d}{dy} + \hat{a}_z \frac{d}{dz}\right)\left(V_0 e^{-x} \sin\frac{\pi y}{4}\right)$$

$$= -\left(\hat{a}_x (-1) V_0 e^{-x} \sin\frac{\pi y}{4} + \hat{a}_y V_0 e^{-x} \frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi y}{4} + 0\right)$$

$$= \left(\hat{a}_x \sin\frac{\pi y}{4} - \hat{a}_y \frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi y}{4}\right) V_0 e^{-x} \Rightarrow \vec{E}(x,y,z)$$

$$\vec{E}(0,1,0) = \left(\hat{a}_x - \hat{a}_y \frac{\pi}{4}\right) \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

b: $-\vec{\nabla}V = \vec{E}$

$$= -\left(\hat{a}_R \frac{d}{dR} + \hat{a}_\theta \frac{1}{R}\frac{d}{d\theta} + \hat{a}_\phi \frac{1}{R\sin\theta}\frac{d}{d\phi}\right) E_0 R\cos\theta$$

$$= -\hat{a}_R(E_0\cos\theta) - \hat{a}_\theta \frac{1}{R}(-E_0 R\sin\theta) - \hat{a}_\phi \frac{1}{R\sin\theta}.(0)$$

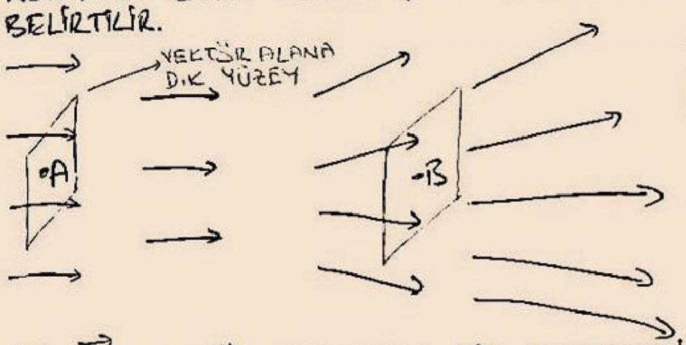
$$\vec{E} = -(\hat{a}_R\cos\theta - \hat{a}_\theta \sin\theta)E_0$$

KARTEZYEN KOORDİNATLARDA $\vec{E}$:

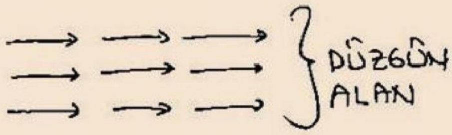
$$\vec{E} = -\hat{a}_z E_0 \longrightarrow \vec{E}(0,1,0) = E_0(-\hat{a}_z) = -\hat{a}_z E_0$$

2.6 - BİR VEKTÖR ALANIN DİVERJANSI

* AKI ÇİZGİLERİ : HER NOKTADA VEKTÖR ALANIN YÖNÜNÜ BELİRTEN YÖNLÜ DOĞRU PARÇALARI VEYA EĞRİLERDİR. ALANIN BİR NOKTADAKİ BÜYÜKLÜĞÜ NOKTANIN ETRAFINDAKİ ÇİZGİ YOĞUNLUĞU VEYA ÇİZGİLERİN UZUNLUĞU İLE BELİRTİLİR.



VEKTÖR ALAN ŞİDDETİ VEKTÖRE DİK BİRİM YÜZEYDEN GEÇEN ÇİZGİ SAYISI İLE BELİRLENİR.



BİR $\vec{A}$ VEKTÖR ALANININ BİR NOKTADAKİ DİVERJANSI NOKTA ETRAFINDAKİ HACİM SIFIRA GİDERKEN BİRİM HACİM BAŞINA $\vec{A}$ NIN NET DIŞARI AKISI OLARAK TANIMLANIR.

$$\text{div}\,\vec{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{s}}{\Delta v}$$

$\boxed{\oint \vec{A}.d\vec{s}}$ → $\vec{A}$ VEKTÖR ALANININ NET DIŞARI AKISINI GÖSTERİR.

$$d\vec{s} = \hat{a}_n\, ds$$

$$\text{div}\,\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A}$$

* $\vec{\nabla}.\vec{A}$ KARTEZYEN KOORDİNATLARDA ;

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

SİLİNDİRİK KOORDİNATLARDA :

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

KÜRESEL KOORDİNATLARDA :

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 A_R) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

ÖRNEK 2.11 - $\vec{B} = \hat{a}_\phi \frac{k}{r}$ ISE $\vec{\nabla}.\vec{B} = ?$

→ DİVERJANS İÇİN SİLİNDİRİK KOORDİNAT SİSTEMİ SEÇİLSİN.

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\left.\begin{array}{l} B_r = 0 \\ B_\phi = \frac{k}{r} \\ B_z = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \vec{\nabla}.\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}B_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{k}{r}\right) \\ \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \end{array}$$

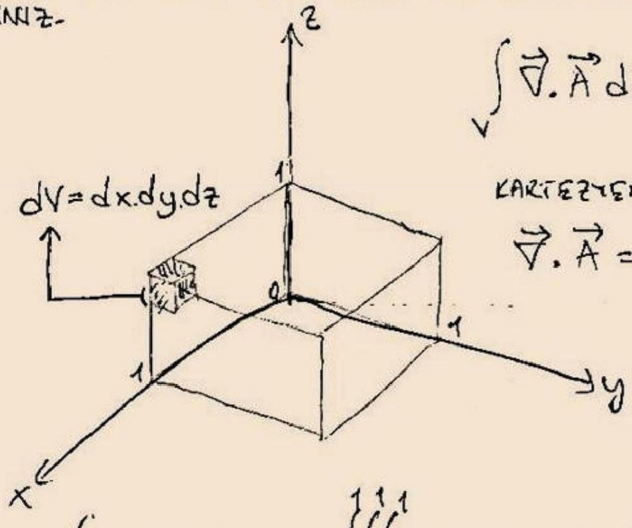
* DİVERJANSI SIFIR OLAN ALAN "SOLENOİD" OLARAK ADLANDIRILIR.

2.7 - DİVERJANS TEOREMİ

"BİR VEKTÖR ALANIN DİVERJANSININ HACİM İNTEGRALİ, O VEKTÖRÜN BÖLGEYİ SINIRLAYAN YÜZEYDEKİ TOPLAM DIŞA DOĞRU AKISINA EŞİTTİR."

$$\boxed{\int_V \vec{\nabla}.\vec{A}\, dV = \oint_S \vec{A}.\vec{ds}}$$

ÖRNEK 2.12 - $\vec{A} = \hat{a}_x x^2 + \hat{a}_y xy + \hat{a}_z yz$ İÇİN HER KENARI BİRİM UZUNLUĞA SAHİP ŞEKİLDEKİ KÜP ÜZERİNDE DİVERJANS TEOREMİNİ UYGULAYINIZ.



$$\int_V \vec{\nabla}.\vec{A}\, dv \stackrel{?}{=} \oint_S \vec{A}.\vec{ds}$$

KARTEZYEN KOORD. DA DİVERJANS:

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \text{ İDİ}$$

$$= 2x + x + y$$

$$= 3x + y$$

$$\int_V (3x+y)\,dv = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (3x+y)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 2\,dz = \underline{\underline{2}}$$

$$\oint_S \vec{A}.\vec{ds} = \int_{\text{ÖNYÜZ}} \ldots + \int_{\text{ARKAYÜZ}} \ldots + \int_{\text{ÜST}} \ldots + \int_{\text{ALT}} \ldots + \int_{\text{SAĞ}} \ldots + \int_{\text{SOL}} \ldots$$

$$\iint_{\text{ÖN YÜZ}} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_0^1\int_0^1 \vec{A}\cdot(\hat{a}_x\, dy dz) = \int_0^1\int_0^1 x^2\, dy dz = 1$$

$$\iint_{\text{ARKA YÜZ}} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_0^1\int_0^1 \vec{A}\cdot(-\hat{a}_x\, dy dz) = \iint -x^2\, dy dz = -x^2\Big|_{x=0} = 0$$

$$\iint_{\text{SAĞ YÜZ}} \vec{A}\cdot(\hat{a}_y\, dx dz) = \int_0^1\int_0^1 xy\, dx dz = \int\left[\frac{x^2}{2}y\right]_0^1 dz = \int_0^1 \frac{y}{2}\, dz = \frac{y}{2}\Big|_{y=1} = \frac{1}{2}$$

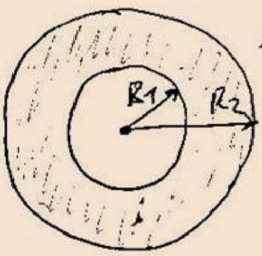
$$\iint_{\text{SOL YÜZ}} \vec{A}\cdot(-\hat{a}_y\, dx dz) = 0$$

$$\iint_{\text{ÜST YÜZ}} \vec{A}\cdot(\hat{a}_z\, dx dy) = \int_0^1\int_0^1 yz\, dx dy = \frac{1}{2}$$

$$\iint_{\text{ALT YÜZ}} \vec{A}\cdot(-\hat{a}_z\, dx dy) = 0$$

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = 1 + 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + 0 = 2$$

ÖRNEK 2.13 - $\vec{F} = \hat{a}_R\, kR$ İÇİN DİVERJANS TEOREMİNİN MERKEZLERİ ŞEKİLDEKİ GİBİ ORİJİNDE OLAN $R=R_1$ VE $R=R_2$ $(R_2>R_1)$ KÜRELERİ İLE SINIRLI BÖLGEDE SAĞLANIP SAĞLANMADIĞINI GÖSTERİNİZ.



$\vec{F} = \hat{a}_R\, kR$ $\qquad \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F} \overset{?}{=} \oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}(R^2 F_R)$$

$$= \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}(kR^3)$$

$$= \frac{1}{R^2}3kR^2$$

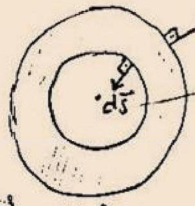
$$= 3k$$

$$\int_V (3k)\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{R_1}^{R_2}(3k)\,R^2\sin\theta\,dR\,d\theta\,d\phi$$

$$= 3k\underbrace{\int_{R_1}^{R_2}R^2\,dR}_{R^3/3}\;\underbrace{\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta}_{2}\;\underbrace{\int_0^{2\pi}d\phi}_{2\pi}$$

$$\boxed{=4\pi k\,(R_2^3-R_1^3)}$$

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{\text{DIŞ YÜZEY}} --- \; + \int_{\text{İÇ YÜZEY}}$$



$d\vec{s} = \hat{a}_r R^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$ (DIŞ YÜZEY)

$d\vec{s} = -\hat{a}_r R^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$ (İÇ YÜZEY)

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{s} =$$

$$= \iint_{\text{DIŞ YÜZEY}}(\hat{a}_R kR)\cdot(\hat{a}_R R^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi) = kR^3\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\phi$$

$$= 4\pi k R^3\Big|_{R=R_2} = 4\pi k R_2^3$$

$$\iint_{\text{İÇ YÜZEY}}(\hat{a}_R kR)\cdot(-\hat{a}_R R^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi) = -4\pi k R^3\Big|_{R=R_1} = -4\pi k R_1^3$$

$$\boxed{\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = 4\pi k\,(R_2^3-R_1^3)}$$

2.8 - BİR VEKTÖR ALANIN ROTASYONELİ (DÖNELİ VEYA CURL'Ü)

* GİRDAP KAYNAĞI
BİR VEKTÖR ALANINI ETRAFINDA DOLAŞIMINA NEDEN OLAN KAYNAK TİPİ.

* BİR VEKTÖR ALANIN BİR KAPALI YOL ETRAFINDAKİ NET DOLAŞIMI, VEKTÖRÜN YOL ÜZERİNDEKİ SKALER ÇİZGİ İNTEGRALİ İLE TANIMLANIR.

$\vec{A}$'NIN C YOLU ETRAFINDAKİ DOLAŞIMI $= \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}$

* $\vec{A}$ VEKTÖR ALANIN ROTASYONELİ, BÜYÜKLÜĞÜ BİRİM ALAN BAŞINA, ALAN SIFIRA GİDERKEN $\vec{A}$'NIN EN BÜYÜK NET DOLAŞIMI OLAN VEKTÖRDÜR. ROTASYONELİN YÖNÜ, ALAN DOLAŞIMI EN BÜYÜK YAPACAK ŞEKİLDE YERLEŞTİRİLDİĞİNDE, ALANIN NORMALİ İLE AYNIDIR.

$$\text{Curl } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s} \left[\hat{a}_n \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l} \right]_{max}$$

* KARTEZYEN KOORDİNATLARDA :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

* SİLİNDİRİK KOORDİNATLARDA :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\varphi r & \hat{a}_z \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ A_r & rA_\varphi & A_z \end{vmatrix} \frac{1}{r}$$

* KÜRESEL KOORDİNATLARDA :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_R & \hat{a}_\theta R & \hat{a}_\varphi R\sin\theta \\ \partial/\partial R & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ A_R & RA_\theta & R\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix} \frac{1}{R^2\sin\theta}$$

* ROTASYONELİ SIFIR OLAN VEKTÖR ALANA "İRROTASYONEL" VEYA "KORUNUMLU" ALAN DENİR.

ÖRNEK 2.15 - AŞAĞIDAKİ DURUMLARDA $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ OLDUĞUNU GÖSTERİNİZ.

a) SİLİNDİRİK KOORDİNATLARDA k BİR SABİT OLMAK ÜZERE

$$\vec{A} = \hat{a}_\varphi \frac{k}{r}$$

b) KÜRESEL KOORDİNATLARDA $f(R)$, RADYAL R UZAKLIĞININ BİR FONKSİYONU OLMAK ÜZERE

$$\vec{A} = \hat{a}_R f(R)$$

ÇÖZÜM:

a: $\vec{A} = \hat{a}_\varphi \underbrace{\frac{k}{r}}_{A_\varphi}$ $\quad \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\varphi r & \hat{a}_z \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ 0 & k & 0 \end{vmatrix}$

b:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_R & \hat{a}_\theta R & \hat{a}_\phi R\sin\theta \\ d/dR & d/d\theta & d/d\phi \\ F(R) & 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{R^2\sin\theta}$$

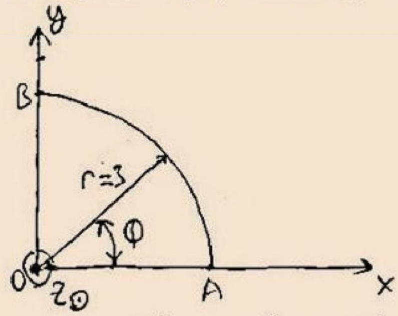
2.9 - STOKES TEOREMİ

"BİR VEKTÖR ALANININ ROTASYONELİNİN BİR AÇIK YÜZEY İNTEGRALİ, YÜZEYİ SINIRLAYAN YOL BOYUNCA VEKTÖRÜN KAPALI ÇİZGİ İNTEGRALİNE EŞİTTİR."

$$\boxed{\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}}$$

$$* \oint_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{s} = 0$$

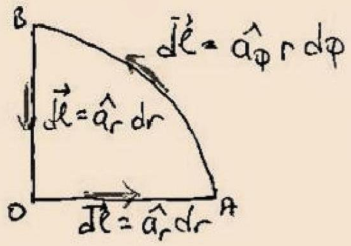
ALIŞTIRMA 2.14 : $\vec{F} = \hat{a}_r \sin\phi + \hat{a}_\phi 3\cos\phi$ VE ŞEKİLDEKİ ÇEYREK DAİRE BÖLGE İÇİN STOKES TEOREMİNİN SAĞLANDIĞINI GÖSTERİNİZ.



$$\int \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{F})}_{\text{SİLİNDİRİK KOORDİNAT ROTASYONELİ}}\cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

$$d\vec{s} = \hat{a}_z\, r\, dr\, d\phi$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = \oint_{OABO} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$



$$\int_{\substack{OA\\0}}^{3} \vec{F}\cdot(\hat{a}_r dr) + \int_{\substack{AB\\0}}^{\pi/2} \vec{F}\cdot(\hat{a}_\phi r\, d\phi) + \underbrace{\int_{\substack{BO\\3}}^{0} \vec{F}\cdot(\hat{a}_r dr)}_{}$$

($\hat{a}_r$ NİN İŞARETİ GÖZARDI EDİLDİĞİ İÇİN SINIRLAR OK YÖNÜNDE OLDU.)

$$= 6$$

2.10 - İKİ SIFIR ÖZDEŞLİĞİ

I-) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla} V) = 0$

II-) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$

2.11 - HELMHOLTZ TEOREMİ

"BİR VEKTÖR ALANI, EĞER HER YERDE HEM DİVERJANSI HEM DE ROTASYONELİ VERİLİRSE BULUNABİLİR."

LAPLASYEN OPERATÖRÜ

SKALER V FONKSİYONUNUN GRADYANTININ DİVERJANSI, "V'NİN LAPLASYENİ" OLARAK ADLANDIRILIR.

$$\nabla^2 V = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} V) \qquad \nabla^2 \rightarrow \text{DEL KARE (LAPLASYEN OPERATÖRÜ)}$$

$$= \left(\hat{a}_x \frac{d}{dx} + \hat{a}_y \frac{d}{dy} + \hat{a}_z \frac{d}{dz}\right) \cdot \left(\hat{a}_x \frac{d}{dx} + \hat{a}_y \frac{d}{dy} + \hat{a}_z \frac{d}{dz}\right)$$

$$= \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2}$$

* KARTEZYEN KOORDİNATLARDA :

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2}$$

* SİLİNDİRİK KOORDİNATLARDA :

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dV}{dr}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 V}{d\Phi^2} + \frac{d^2 V}{dz^2}$$

* KÜRESEL KOORDİNATLARDA :

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{dV}{dR}\right) + \frac{1}{R^2 \sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dV}{d\theta}\right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta} \frac{d^2 V}{d\Phi^2}$$

BÖLÜM 3 - STATİK ELEKTRİK ALANLAR

3.2 - BOŞ UZAYDA ELEKTROSTATİĞİN TEMEL YASALARI

* ELEKTRİK ALAN ŞİDDETİ ($\vec{E}$)

ÇOK KÜÇÜK DURAĞAN BİR TEST YÜKÜ, ELEKTRİK ALANININ VAR OLDUĞU BİR BÖLGEYE YERLEŞTİRİLDİĞİNDE ÜZERİNE ETKİ EDEN BİRİM YÜK BAŞINA KUVVET:

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q} \quad (V/m)$$

* BİR $\vec{E}$ ELEKTRİK ALANI İÇİNDEKİ DURGUN YÜKE ETKİ EDEN KUVVET:

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (N)$$

* BOŞ UZAYDA ELEKTROSTATİĞİN 2 TEMEL YASASI :(DİFERANSİYEL BİÇİM)

I) $\boxed{\nabla . \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}}$ II) $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0}$

ρ_v : SERBEST YÜKLERİN HACİM YÜK YOĞUNLUĞU (C/m^3)

ε_0 : BOŞLUĞUN ELEKTRİK GEÇİRGENLİĞİ : $\left[\begin{array}{ll} \varepsilon_0 = (1/36\pi).10^{-9} & (F/m) \\ \varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12} & (F/m) \end{array}\right]$

*2 TEMEL YASANIN İNTEGRAL BİÇİMLERİ :

(I) NOLU DENKLEMİN HER İKİ TARAFININ HERHANGİ BİR V HACMİ ÜZERİNDEN İNTEGRALİNİ ALIP, SOL TARAFINA DİVERJANS TEOREMİNİ UYGULARIZ:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dv = \int_V \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}\,dv = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_v\,dv = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dV \longrightarrow \text{DİVERJANS TEOREMİ (SF:9)} \Rightarrow \boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

→ DENKLEM, GAUSS YASASININ BİR BİÇİMİ

Q : S YÜZEYİ TARAFINDAN KAPSANAN V HACMİ İÇİNDEKİ TOPLAM YÜK MİKTARI.

(II) NOLU DENKLEMİN HER İKİ TARAFININ HERHANGİ BİR AÇIK YÜZEY ÜZERİNDEN İNTEGRALİ ALINIP SOL TARAFA STOKES TEOREMİ UYGULANIR:

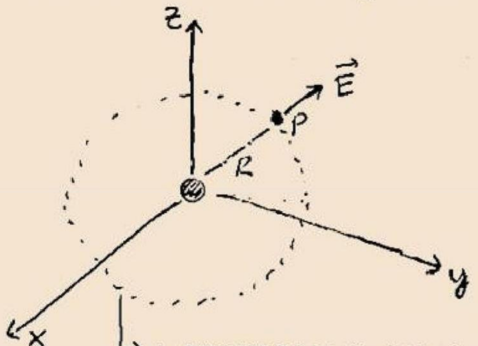
$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{s} = 0$$

↓ STOKES TEO. UYGULANIRSA:

$$\boxed{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0}$$

3.3 - COULOMB YASASI

SINIRSIZ BOŞ UZAYDA HAREKETSİZ DURAN TEK BİR q YÜKÜNÜN OLUŞTURDUĞU ELEKTRİK ALAN ŞİDDETİ ($\vec{E}$)



q MERKEZDE OLACAK ŞEKİLDE RASTGELE SEÇİLMİŞ R YARIÇAPLI KAPALI YÜZEY (GAUSS YÜZEYİ)

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow \text{(YALNIZCA q YÜKÜ OLDUĞU İÇİN.)}$$

$$\vec{E} = \hat{a}_R E_R$$

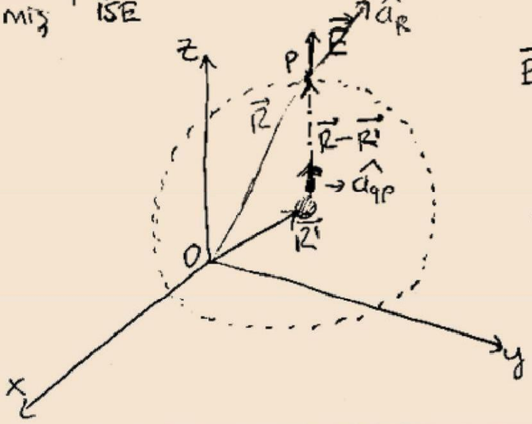
$$d\vec{s} = \hat{a}_R R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\hat{a}_R E_R)\cdot(\hat{a}_R R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$= E_R R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$\Rightarrow E_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \longrightarrow \boxed{\vec{E} = \hat{a}_R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad (V/m)}$$

* q YÜKÜ SEÇİLEN KOORDİNAT SİSTEMİNİN MERKEZİNE YERLEŞTİRİLMEMİŞ İSE

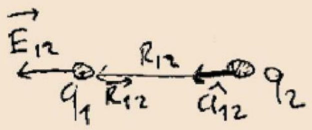


$$\vec{E} = \hat{a}_{qP}\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{R}-\vec{R'}|^2}$$

$$\hat{a}_{qP} = \frac{\vec{R}-\vec{R'}}{|\vec{R}-\vec{R'}|}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q(\vec{R}-\vec{R'})}{|\vec{R}-\vec{R'}|^3}\quad (V/m)}$$ (GENEL)

* İKİ YÜKÜN (q_1 VE q_2) BULUNDUĞU ORTAM.



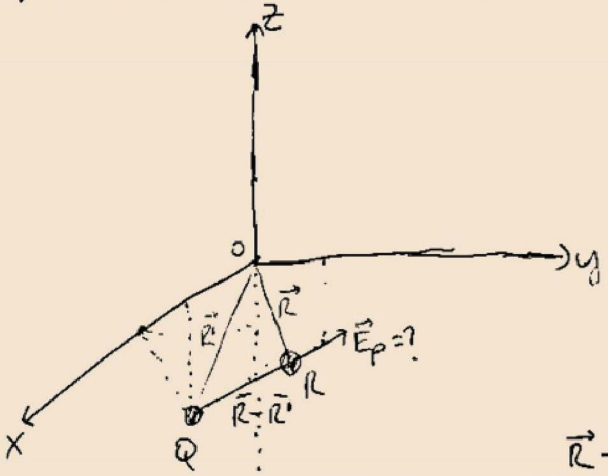
$$\boxed{\vec{F}_{12} = \hat{a}_{12}\,\frac{c\cdot q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}^2}}$$

↓

COULOMB YASASI

q_2 NOKTASAL YÜKÜ, BİR BAŞKA q_1 YÜKÜNÜN ALANINA YERLEŞTİRİLİRSE q_1'İN q_2'NİN KONUMUNDA OLUŞTURDUĞU ELEKTRİK ALAN ŞİDDETİ. $\vec{E}_{12}$ DEN DOLAYI BİR $\vec{F}_{12}$ KUVVETİNİN ETKİSİNDE KALIR.

ÖRNEK 3.1 - HAVADA +5 (nC)'LUK Q(0,2 , 0,1 , −2,5) NOKTASINA YERLEŞTİRİLMİŞ BİR NOKTA YÜK SEBEBİYLE P(−0,2 , 0, −2,3) NOKTASINDA OLUŞAN $\vec{E}$=? (BOYUT → METRE)



$$\vec{E} = \frac{q(\vec{R}-\vec{R'})}{4\pi\varepsilon_0|\vec{R}-\vec{R'}|^3}$$

P NOKTASININ KONUM VEKTÖRÜ

$$\vec{R} = \vec{OP} = -\hat{a}_x\,0{,}2 - \hat{a}_z\,2{,}3$$

Q NOKTASININ KONUM VEKTÖRÜ

$$\vec{R'} = \vec{OQ} = \hat{a}_x 0{,}2 + \hat{a}_y\,0{,}1 + \hat{a}_z 2{,}5$$

$$\vec{R}-\vec{R'} = -\hat{a}_x 0{,}4 - \hat{a}_y 0{,}1 + \hat{a}_z 0{,}2$$

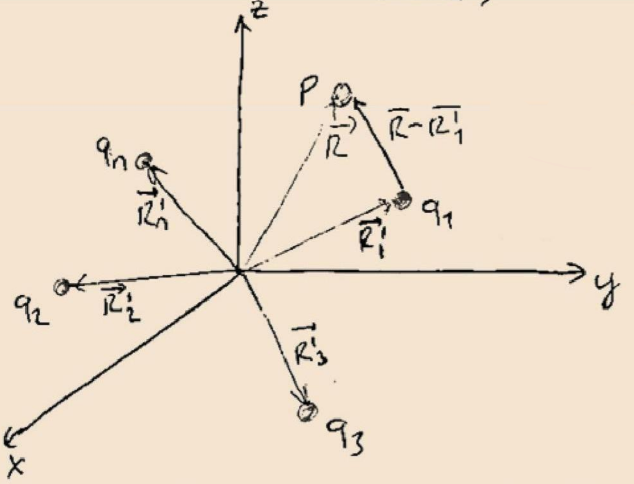
$$|\vec{R}-\vec{R'}| = \sqrt{(-0{,}4)^2+(-0{,}1)^2+(0{,}2)^2} = 0{,}458\ (m)$$

$$\vec{E}_P = \frac{(5.10^{-9}).(9.10^9)}{(0{,}458)^3}\,(-\hat{a}_x\,0{,}4 - \hat{a}_y\,0{,}1 + \hat{a}_z\,0{,}2)\quad [V/m]$$

3.3.1 - AYRIK YÜKLERİN OLUŞTURDUĞU ELEKTRİK ALAN

FARKLI KONUMLARA YERLEŞTİRİLMİŞ n TANE AYRIK NOKTA YÜKÜN OLUŞTURDUĞU GRUP TARAFINDAN MEYDANA GETİRİLEN ELEKTROSTATİK ALAN

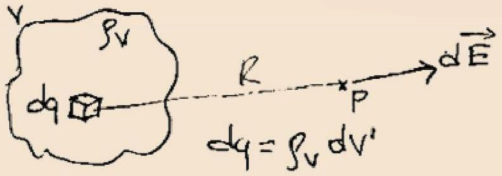
$q_1, q_2, q_3 \ldots q_n$ YÜKLERİNİN KONUMLARI $\vec{R}'_1, \vec{R}'_2, \vec{R}'_3 \ldots \vec{R}'_n$ OLMAK ÜZERE ;



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1(\vec{R}-\vec{R}'_1)}{|\vec{R}-\vec{R}'_1|^3} + \frac{q_2(\vec{R}-\vec{R}'_2)}{|\vec{R}-\vec{R}'_2|^3} + \cdots + \frac{q_n(\vec{R}-\vec{R}'_n)}{|\vec{R}-\vec{R}'_n|^3}\right]$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k(\vec{R}-\vec{R}'_k)}{|\vec{R}-\vec{R}'_k|^3} \quad (V/m)}$$

3.3.2 - SÜREKLİ YÜK DAĞILIMLARININ OLUŞTURDUĞU ELEKTRİK ALAN



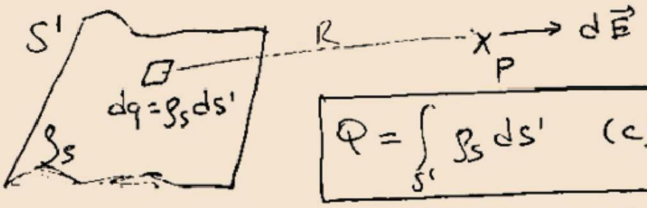
P ALAN NOKTASINDAKİ ELEKTRİK ALAN ŞİDDETİNE DİFERANSİYEL BİR HACİM ELEMANI (dV') İÇİNDEKİ YÜKLERİN ($\rho_v dV'$) KATKISI :

$$d\vec{E} = \hat{a}_R \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \hat{a}_R \frac{\rho_v dV'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

SÜREKLİ YÜK DAĞILIMININ NEDEN OLDUĞU ELEKTRİK ALAN :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \hat{a}_R \frac{\rho_v}{R^2} dv' \quad (V/m)}$$

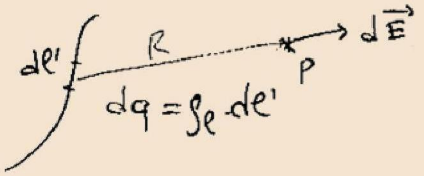
* EĞER YÜKLER ρ_s (C/m^2) YÜZEY YÜK YOĞUNLUĞU İLE BİR YÜZEYDE DAĞILMIŞ İSE ;



$$\boxed{Q = \int_{S'} \rho_s \, ds' \quad (C)}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S'} \hat{a}_R \frac{\rho_s}{R^2} \, ds' \quad (V/m)}$$

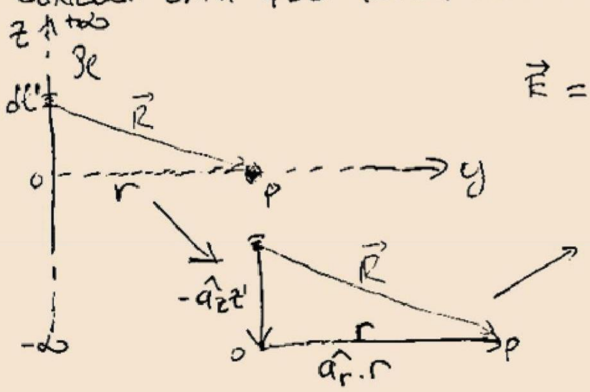
* ÇİZGİ YÜK YOĞUNLUĞU ρ_ℓ (C/m) İÇİN ;



$$\boxed{Q = \int_{L'} \rho_\ell \, d\ell' \quad (C)}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{L'} \hat{a}_R \frac{\rho_\ell}{R^2} \, d\ell' \quad (V/m)}$$

ÖRNEK 3.3 - SONSUZ UZUNLUKTA VE BİR DOĞRU ÜZERİNDE ρ_ℓ DÜZGÜN YOĞUNLUĞA SAHİP ÇİZGİ YÜKÜN HAVADAKİ ELEKTRİK ALAN ŞİDDETİNİ BULUNUZ.



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{L'} \hat{a}_R \frac{\rho_\ell}{R^2} \, dz'$$

$$\vec{R} = \hat{a}_r . r - \hat{a}_z z'$$

$$R = \sqrt{r^2 + z'^2}$$

$$d\ell' = dz'$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{a}_r r - \hat{a}_z z'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} \, dz'$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0} \left[\int \hat{a}_r \frac{r}{(r^2+z'^2)^{3/2}} dz' - \underbrace{\int \hat{a}_z \frac{z'}{(r^2+z'^2)^{3/2}} dz'}_{\text{SİMETRİDEN DOLAYI SIFIR}} \right]$$

$$\vec{E} = \hat{a}_r \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0} r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{(r^2+z'^2)^{3/2}} \qquad \int \frac{dx}{(c^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{c^2(c^2+x^2)^{1/2}}$$

$$\boxed{\vec{E} = \hat{a}_r \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad (V/m)}$$

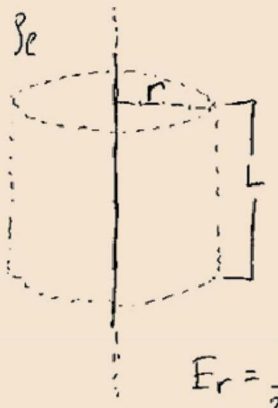
3.4 - GAUSS YASASI VE UYGULAMALARI

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

"BOŞ UZAYDA BİR KAPALI YÜZEY ÜZERİNDE $\vec{E}$ ALANIN TOPLAM DIŞA DOĞRU AKISI, YÜZEY TARAFINDAN KAPSANAN YÜKÜN ε_0'A BÖLÜMÜNE EŞİT."

GAUSS YASASINI UYGULAYABİLMEK İÇİN;
I- SİMETRİ DURUMUNUN BULUNMASI,
II- VERİLEN BİR YÜK DAĞILIMINDAN KAYNAKLANAN $\vec{E}$'NİN DİK BİLEŞENİNİN SABİT OLACAĞI BİR YÜZEYİN (GAUSS YÜZEYİ) SEÇİLEBİLMESİ, GEREKİR.

ÖRNEK 3.4 - ÖRNEK 3.3'Ü GAUSS YASASINI KULLANARAK ÇÖZÜNÜZ. $\vec{E}=?$



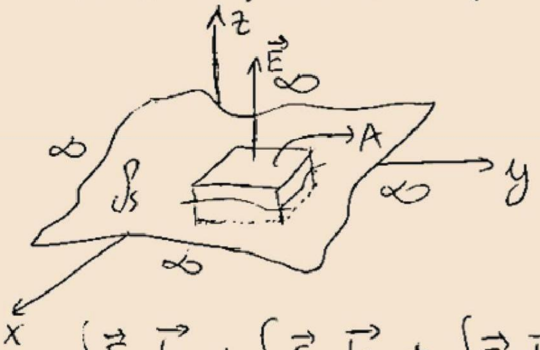
$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\int_0^L\int_0^{2\pi} (\hat{a}_r E_r)\cdot(\hat{a}_r r\, d\phi\, dz) = \frac{\rho_l \cdot L}{\varepsilon_0}$$

$$E_r 2\pi r \cancel{L} = \frac{\rho_l \cdot \cancel{L}}{\varepsilon_0}$$

$$E_r = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \hat{a}_r \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

ÖRNEK 3.5 - DÜZGÜN YÜZEY YÜK YOĞUNLUĞU ρ_s'YE SAHİP SONSUZ DÜZLEM YÜKÜN OLUŞTURDUĞU $\vec{E}=?$



$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad Q = \rho_s \cdot A$$

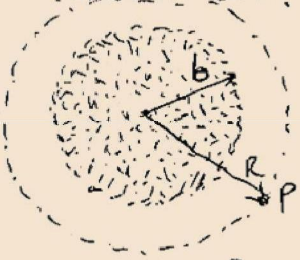
$$= \int_{\text{ÜST}} \vec{E}\cdot\vec{ds} + \int_{\text{ALT}} \vec{E}\cdot\vec{ds} + \int_{\text{YAN YÜZEYLER }(0)} \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{\rho_s \cdot A}{\varepsilon_0}$$

$$\oint (\hat{a}_z E_z)\cdot(\hat{a}_z\, ds) + \int (-\hat{a}_z E_z)\cdot(-\hat{a}_z\, ds) = \frac{\rho_s A}{\varepsilon_0}$$

$$E_z \cdot 2\cancel{A} = \frac{\rho_s \cancel{A}}{\varepsilon_0} \qquad E_z = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}(z) = \begin{cases} \hat{a}_z \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}, & z>0 \\ -\hat{a}_z \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}, & z<0 \end{cases}}$$

ÖRNEK 3.6 - HACİMSEL YÜK YOĞUNLUĞU $0 \leq R \leq b$ ARASINDA $\rho_v = -\rho_0$ VE $R>b$ 'DE $\rho_v = 0$ OLAN KÜRESEL BİR ELEKTRON BULUTUNUN OLUŞTURDUĞU $\vec{E} = ?$



$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\hat{a}_R E_R)\cdot(\hat{a}_R R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_v \frac{4}{3}\pi b^3$$

$$E_R = \frac{\rho_v . b^3}{3\varepsilon_0 R^2}$$

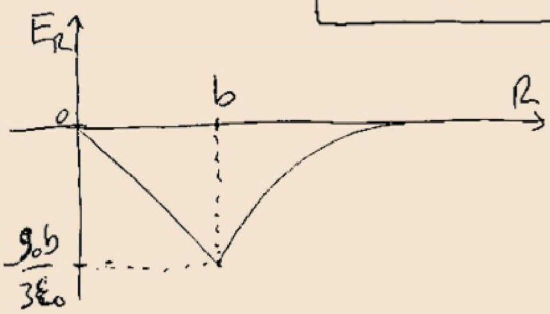
$0 \leq R \leq b$ İÇİN:

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

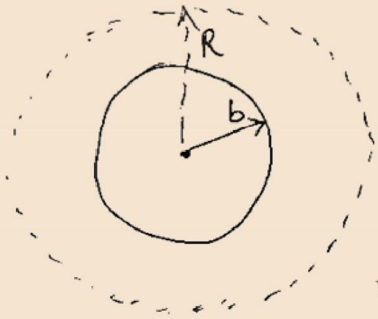
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\hat{a}_R E_R)(\hat{a}_R R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_v \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$E_R = \frac{\rho_v R}{3\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} -\hat{a}_R \dfrac{\rho_0 R}{3\varepsilon_0}, & 0 \leq R \leq b \\ -\hat{a}_R \dfrac{\rho_v b^3}{3\varepsilon_0 R^2}, & R>b \end{cases}}$$



ÖRNEK : Bir pozitif Q yükü havada b yarıçaplı çok ince bir küresel kabuk üzerine düzgün olarak dağıtılmıştır. Her yerde $\vec{E}=?$
$|\vec{E}|-R$ grafiği=?



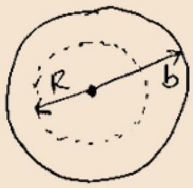
$R>b$ için;

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\hat{a}_R E_R)\cdot(\hat{a}_R R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E_R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

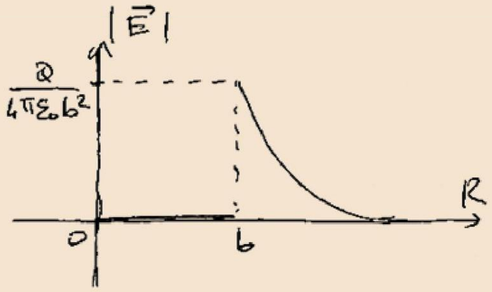
$R<b$ için;



$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\hat{a}_R E_R)\cdot(\hat{a}_R R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi)$$

$$E_R = 0$$

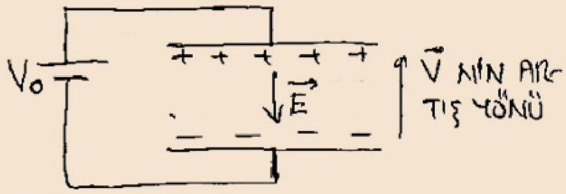
$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & , R<b \\ \hat{a}_R \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} & , R>b \end{cases}$$



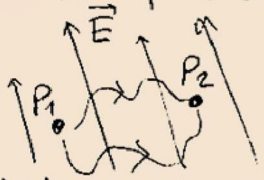
3.5 - ELEKTRİK POTANSİYEL

* Rotasyoneli olmayan bir vektörün her zaman bir skalerin gradyantı olarak ifadesi vardır.

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}V) &= 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} &= 0 \end{aligned}\right\} \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}V}$$



* Bir q yükünü P_1 den P_2 ye taşımak:



$$\frac{W}{q} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$\frac{W}{q}$ yoldan bağımsızdır.

$$V_{21} = V_2 - V_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

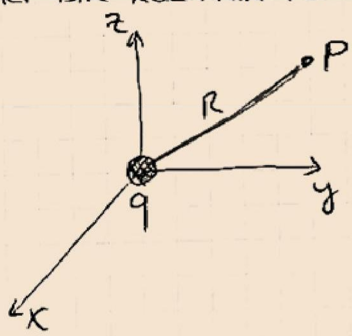
* Bir noktanın mutlak potansiyelini belirlemek için sıfır potansiyele sahip referans noktası gerekir. Bu referans noktası genellikle sonsuzda seçilir. Sonsuzdan farklı bir nokta seçilirse

BELİRTİLMELİDİR.

* ∇V NİN YÖNÜ SABİT V YÜZEYLERİNE DİKTİR. $\vec{E}$ ALANI HER YERDE EŞPOTANSİYEL YÜZEY VEYA ÇİZGİLERE DİKTİR.

3.5.1 - BİR YÜK DAĞILIMININ OLUŞTURDUĞU ELEKTRİK POTANSİYEL

* SONSUZ REFERANS ALINARAK BİR NOKTA q YÜKÜNDEN r KADAR UZAKTAKİ BİR NOKTANIN POTANSİYELİ :



$$V = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad d\vec{l} \to \hat{a}_R\, dR \qquad \vec{E} \to \hat{a}_R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$V = -\int_{\infty}^{R} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\, dR = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

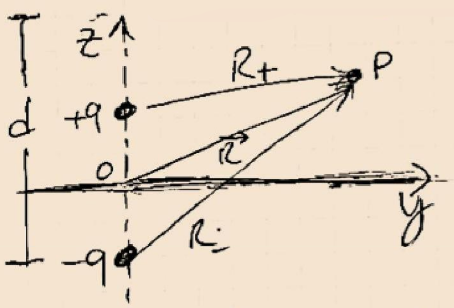
* q'DAN R_1 VE R_2 UZAKLIKTAKİ P_1 VE P_2 NOKTALARI ARASINDAKİ POTANSİYEL FARKI

$$V_{21} = V_{P_2} - V_{P_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

* $\vec{R_1'}, \vec{R_2'}, \ldots \vec{R_n'}$ KONUMLARINA YERLEŞTİRİLMİŞ n TANE AYRIK $q_1, q_2, \ldots q_n$ YÜKTEN OLUŞAN YÜK SİSTEMİNİN r KONUMUNDA OLUŞTURDUĞU POTANSİYEL :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{|\vec{R} - \vec{R_k'}|}$$

ÖRNEK 3.7- BİR ELEKTRİK DİPOL ŞEKİLDEKİ GİBİ İKİ EŞ VE TERS İŞARETLİ NOKTA YÜK +q VE -q 'NUN BİRBİRİNDEN "d" KADAR KISA BİR UZAKLIĞA YERLEŞTİRİLMESİNDEN OLUŞMUŞTUR.



$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right)$$

R >> d İSE

$Q_+ \simeq Q_- \simeq Q$

$R_+ \simeq R - \frac{d}{2}\cos\theta$

$R_- \cong R + \frac{d}{2}\cos\theta$

$$V \cong \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R-\frac{d}{2}\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(R + d/2\cos\theta - R_+\right)$$

* $V \cong V = \frac{\vec{q}\cdot\hat{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ YAZILABİLİR

$\vec{p} = q\vec{d}$ ----- ELEKTRİK POTANSİYEL

$$\overset{P=}{V} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_+} - \frac{q}{R}\right)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

$$\simeq -\left(\hat{a}_R \frac{\partial V}{\partial R} + \hat{a}_\theta \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{a}_\phi \frac{1}{R\sin\theta}\underbrace{\frac{\partial V}{\partial \phi}}_{=0}\right)$$

$$= \hat{a}_R 2\frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \hat{a}_\theta \frac{1}{R}\left(\frac{-qd\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\hat{a}_R 2\cos\theta + \hat{a}_\theta \sin\theta\right)$$

VEYA

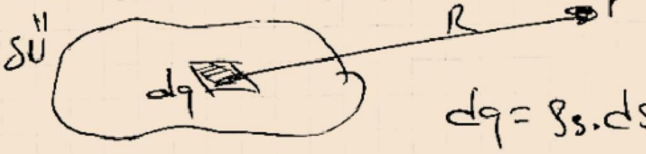
$$\vec{E} = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\hat{a}_R 2\cos\theta + \hat{a}_\theta \sin\theta\right)$$

* VERİLEN BİR BÖLGEDEKİ SÜREKLİ YÜK DAĞILIMINDAN OLUŞAN ELEKTRİKSEL POTANSİYEL,
HACİM YÜK UZUNLUĞU İÇİN;

$dq = \rho_v \, dV$

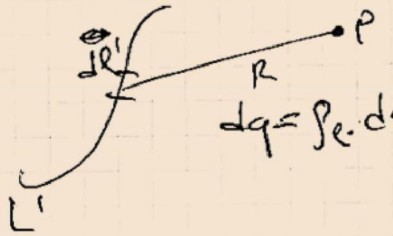
$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho_v \, dv'}{4\pi\varepsilon_0}$$

YÜZEY YÜK YOĞUNLUĞU İÇİN ;



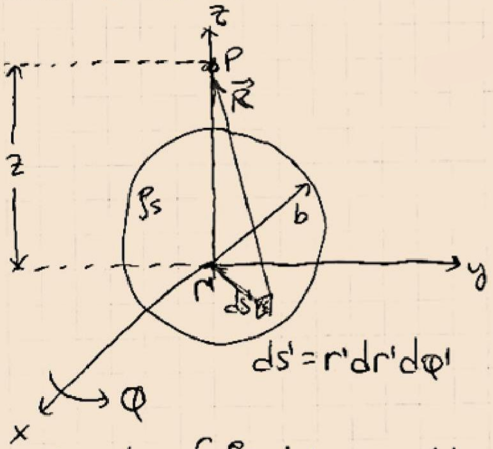
$$dq = \rho_s . ds'$$

ÇİZGİSEL YÜK YOĞUNLUĞU İÇİN



$$dq = \rho_\ell . d\ell' \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{L'} \frac{\rho_\ell}{R} d\ell'$$

ÖRNEK : DÜZGÜN BİR YÜZEY YÜK YOĞUNLUĞU ρ_s'yi TAŞIYAN "b" YARIÇAPLI DAİRESEL DİSKİN EKSENİ ÜZERİNDEKİ $\vec{E} = ?$



$ds' = r'dr'd\varphi'$

1. GAUSS YASASI (SİLİNDİRDE "$\vec{E}$", HER YERDE EŞİT OLMAZ)

2. $\vec{E} = \hat{a}_R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_s}{R^2} ds' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_s \vec{R}}{R^3} ds'$

3. $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_s}{R} ds' \longrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V$

$$\vec{R} = -\hat{a}_r r' + \hat{a}_z z$$

$$R = \sqrt{r'^2 + z^2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_s}{R} ds' \longrightarrow V = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{b} \frac{r'dr'd\varphi'}{\sqrt{r'^2+z^2}} \Rightarrow V = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \int_0^{b} \frac{r'dr'}{\sqrt{r'^2+z^2}}$$

$$V = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{z^2+b^2} - |z| \right] \ (V)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$= -\left(\underbrace{\hat{a}_r \frac{\partial V}{\partial r}}_{0} + \underbrace{\hat{a}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi}}_{0} + \hat{a}_z \frac{\partial V}{\partial z} \right) = -\hat{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

3.6 - STATİK ELEKTRİK ALANDA MALZEME ORTAMI

* İLETKENLER
* YALITKANLAR VEYA DİELEKTRİKLER
* YARI İLETKENLER

3.6.1 - STATİK ELEKTRİK ALANDA İLETKENLER

İLETKEN İÇERİSİNDE; (STATİK KOŞULLAR ALTINDA)

$\rho_v = 0 \qquad \vec{E} = 0$

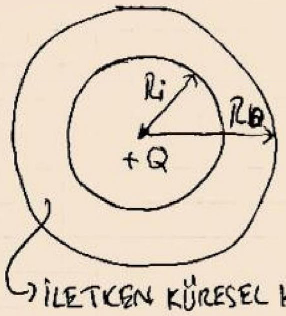
* İLETKEN İÇERİSİNDE SERBEST YÜK YOKSA $\rho_v = 0$

$\vec{E} = 0$ (GAUSS YASASI)

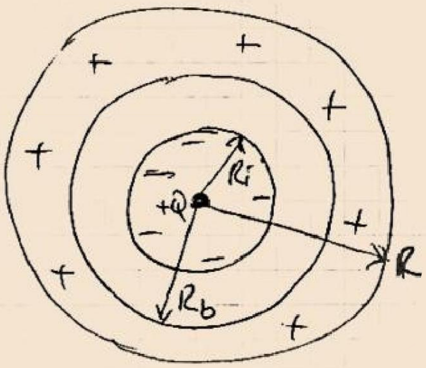
* STATİK KOŞUL ALTINDA; BİR İLETKEN YÜZEYİNDEKİ $\vec{E}$ ELEKTRİK ALANI, HER YERDE YÜZEYE DİKTİR. YÜZEYE TEĞET BİLEŞENİ YOKTUR. İLETKENİN YÜZEYİ BİR EŞPOTANSİYEL YÜZEYDİR. BÜTÜN İLETKEN AYNI ELEKTROSTATİK POTANSİYELDİR.

Başka sanat bilmeyiz karşımızda dururken
Söylenmemiş bir destan gibi Anadolumuz
Arkadaş, biz bu yolda türküler tuttururken
Sana uğurlar olsun... ayrılıyor yolumuz.

ÖRNEK 3.9 -



HER YERDE
$\vec{E}(R) = ?$
$V(R) = ?$



$R > R_o$ İÇİN;

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\hat{a}_R E_R) \cdot (\hat{a}_R R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi) = \frac{+Q - Q + Q}{\varepsilon_0}$$

$$E_R \cdot R^2 \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta}_{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \hat{a}_R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$V = -\int_{\infty}^{R} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -\int_{\infty}^{R} \hat{a}_R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot \hat{a}_R \, dR$$

$$V = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{R}\right]_{\infty}^{R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$R_i < R < R_o$ için;

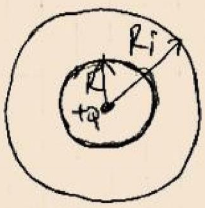
$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{-Q+Q}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \vec{E} = 0$$

$$V = -\int_{\infty}^{R} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -\int_{\infty}^{R_o} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} - \int_{R_o}^{R} \cancel{\vec{E}}^{\,0} \cdot \vec{d\ell}$$

$$V = -\int_{\infty}^{R_o} \hat{a}_R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \hat{a}_R \, dR - 0 \qquad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_o}$$

$R < R_i$ için;

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

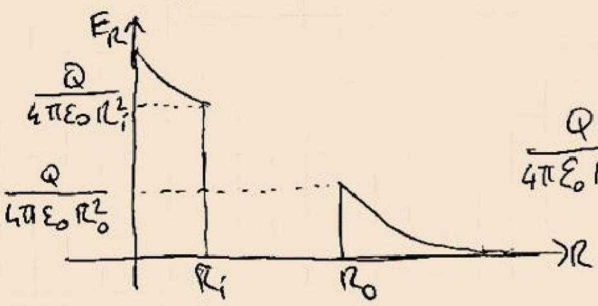


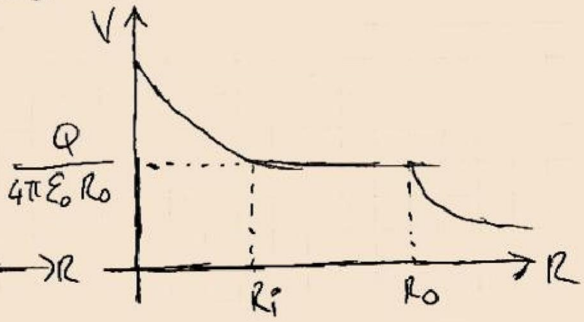
$$\vec{E} = \hat{a}_R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$V = -\int_{\infty}^{R_o} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} - \int_{R_o}^{R_i} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} - \int_{R_i}^{R} \vec{E} \cdot \vec{d\ell}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_o} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{R}\right]_{R_i}^{R}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_i}\right]$$

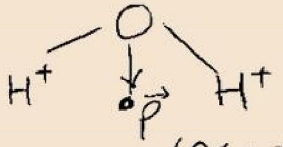




3.6.2 - STATİK ELEKTRİK ALANDA DİELEKTRİKLER

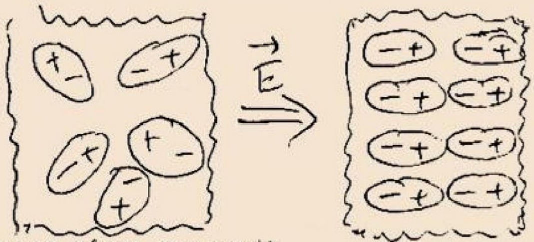
* KUTUPSAL OLMAYAN MOLEKÜLLER (SABİT DOĞAL MOMENTSİZ)

* KUTUPSAL MOLEKÜLLER (H_2O)



$(\cong 10^{-30}\ Cm)$

DIŞ $\vec{E}$ UYGULANIRSA ;



NET DİPOL MOMENT SIFIR

KUTUPLANMA VEKTÖRÜ

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} \vec{P}_k}{\Delta v}$$

n : BİRİM HACİM DEKİ MOLEKÜL SAYISI

→ ELEKTRİK DİPOL MOMENTİNİN HACİM YOĞUNLUĞU

* dv' NIN DİPOL MOMENTİ $\vec{dp}$

$$\vec{dp} = \vec{P}\, dv'$$

$$dV = \frac{\vec{dp} \cdot \hat{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\vec{P} \cdot \hat{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2} dv' \Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\vec{P} \cdot \hat{a}_R}{R^2} dv'}$$

$V \to V'$ HACMİNDEKİ KUTUPLANMIŞ DİELEKTRİĞİN OLUŞTURDUĞU POTANSİYEL

* $\vec{P}$ KUTUPLANMA VEKTÖRÜNÜN YÜZEY VE HACİM ETKİSİ

1- EŞDEĞER KUTUPLANMA YÜZEY YÜK YOĞUNLUĞU (ρ_{ps})

$$\boxed{\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{a}_n \quad \left(\frac{C}{m^2}\right)}$$

2- EŞDEĞER KUTUPLANMA HACİM YÜK YOĞUNLUĞU (ρ_{pv})

CİSMİN V HACMİNİ SINIRLAYAN S YÜZEYİNDEKİ TOPLAM YÜK :

$$Q = \oint_S \rho_{ps} \cdot ds$$

BU İNTEGRALİN TERS İŞARETLİSİ HACİMDEKİ TOPLAM YÜKÜ VERİR :

$$Q = -\oint_S \rho_{ps} \cdot ds$$

$$\int_V \rho_{PV} \cdot dv = -\oint_S \vec{P} \cdot \hat{a}_n \, ds \xrightarrow[\text{TEOREMİ}]{\text{DİVERJANS}} \int_V \rho_{PV} \cdot dv = \int_V -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \, dv$$

$$\boxed{\rho_{PV} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (C/m^3)}$$

*CİSİM BAŞLANGIÇTA YÜKSÜZ OLDUĞUNA GÖRE CİSMİN TOPLAM YÜKÜ KUTUPLANMADAN SONRA SIFIR KALMALIDIR.

$$\text{TOPLAM YÜK} = \oint_S \rho_{PS} \cdot ds + \int_V \rho_{PV} \, dv$$

$$= \oint_S \vec{P} \cdot \hat{a}_n \, ds + \int_V -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \, dv$$

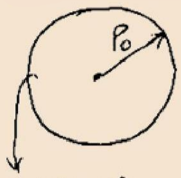
$$= 0$$

*KUTUPLANMA YÜK YOĞUNLUKLARI ρ_{PS} VE ρ_{PV} CİNSİNDEN KUTUPLANMIŞ DİELEKTRİKTEN OLUŞAN $\vec{E}$ VE V

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{S'} \frac{\rho_{PS}}{R} \, ds' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \rho_{PV} \cdot dv'$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

ÖRNEK 3.10



DİELEKTRİK KÜRE

$\vec{P} = \hat{a}_x P_0$

a) $\rho_{PS} = ?$ $\quad \rho_{PV} = ?$

b) YÜZEY ÜZERİNDE VE KÜRE İÇİNDE TOPLAM EŞDEĞER YÜK?

3.7- ELEKTRİK AKI YOĞUNLUĞU VE DİELEKTRİK SABİTİ

BOŞ UZAYDA $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$ İKEN ŞİMDİ $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_v + \rho_{pv})$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_v - \vec{\nabla}\cdot\vec{P})$$

$$\vec{\nabla}\cdot\underbrace{(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})}_{\vec{D}} = \rho_v$$

$\vec{D} \rightarrow$ "ELEKTRİK AKI YOĞUNLUĞU" YA DA "ELEKTRİK YERDEĞİŞTİRME"

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad (C/m^2)}$$

$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_v} \rightarrow$ İNTEGRAL BİÇİMİ $\rightarrow \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\,dV = \int_V \rho_v\,dV$ → DİVERJANS TEOREMİ

$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q}$ (GAUSS YASASININ BİR BİÇİMİ)

* $\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E}$ $\quad \chi$ = ELEKTRİKSEL HASSASİYET VEYA DOYGUNLUK → (BİRİMSİZ)

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \\ &= \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\chi_e\vec{E} \\ &= \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E} \\ &= \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} \\ \vec{D} &= \varepsilon\vec{E}\end{aligned}}$$

$\varepsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ (BİRİMSİZ)

→ ORTAMIN "DİELEKTRİK SABİTİ" VEYA "BAĞIL GEÇİRGENLİK"

$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r \left(\frac{F}{m}\right)$

→ ORTAMIN "MUTLAK GEÇİRGENLİĞİ" VEYA "GEÇİRGENLİK"

BOŞLUK: $\quad \varepsilon_r = 1$ VE $\varepsilon = \varepsilon_0$

HAVA İÇİN:

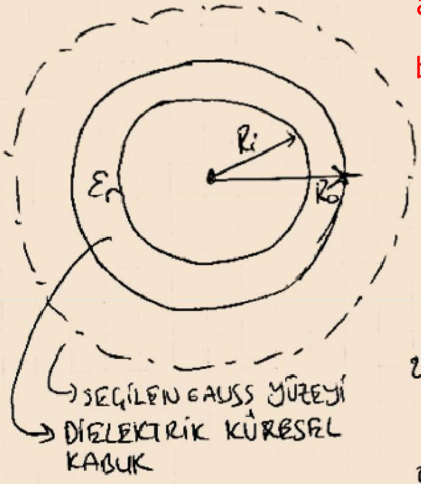
$$\varepsilon_r = 1{,}0059$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r \cong \varepsilon_0$$

3.7.1 - DİELEKTRİK MUKAVEMET

DİELEKTRİK MALZEMENİN KIRILMA OLMADAN DAYANABİLECEĞİ MAKSİMUM ELEKTRİK ALAN ŞİDDETİ: HAVA İÇİN = $3\ kV/mm$

ÖRNEK :



a) $\vec{D}(R)=?$ $\vec{E}(R)=?$ $V(R)=?$

b) $\vec{P}=?$ $\rho_{PS}=?$ $\rho_{PV}=?$

a:

TOPLAM EŞDEĞER YÜK =?

$R > R_o$ İÇİN;

$$\oint_S \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q$$

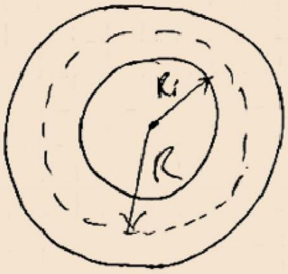
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\hat{a}_R D_R)\cdot(\hat{a}_R R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi) = +Q$$

$$\vec{D} = \hat{a}_R \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_o\varepsilon_r} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_o} \Rightarrow \vec{E} = \hat{a}_R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2}$$

$$V = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}\cdot\hat{a}_R \, dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}$$

$R_i < R < R_o$ İÇİN;



$$\oint_S \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q$$

$$\vec{D} = \hat{a}_R \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_o\varepsilon_r} \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \hat{a}_R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r R^2}$$

$$V = -\int_{\infty}^{R_o} \vec{E}\cdot\hat{a}_R \, dR - \int_{R_o}^{R} \vec{E}\cdot\hat{a}_R \, dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_o}\right]$$

$R < R_i$ İÇİN;

$$\oint_S \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q$$

$$\vec{D} = \hat{a}_R \frac{Q}{4\pi R^2} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} \qquad \vec{E} = \hat{a}_R \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R^2}$$

$$V = -\int_{\infty}^{R_o} \cdots - \int_{R_o}^{R_i} \cdots - \int_{R_i}^{R} \cdots$$

b:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Longrightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{P} = \frac{Q}{4\pi R^2} - \varepsilon_0 \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r R^2}$$

$$\vec{P} = \hat{a}_R \frac{Q}{4\pi R^2}\left[1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right]$$

$$\left(\rho_{ps}\right)\Big|_{\text{DIŞ YÜZEY}} = \vec{P}\cdot\hat{a}_n = \vec{P}\cdot\hat{a}_R = \frac{Q}{4\pi R_0^2}\left[1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right]$$

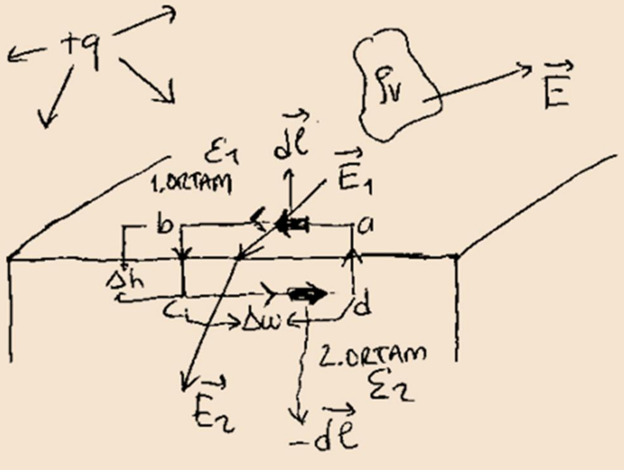
$$\left(\rho_{ps}\right)\Big|_{\text{İÇ YÜZEY}} = \vec{P}\cdot\hat{a}_n = \vec{P}\cdot(-\hat{a}_R)$$

$$= \frac{-Q}{4\pi R_i^2}\left[1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right]$$

$$\rho_{pv} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 P_R\right) = 0$$

$$\text{TOPLAM YÜK} = \oint_S \rho_{ps}\, ds + \int_V \rho_{pv}\, dv = 0$$

3.8 - ELEKTROSTATİK ALANLAR İÇİN SINIR KOŞULLARI



* abcd KAPALI YOLU İÇİN

$ab = cd = \Delta w$

$bc = da = \Delta h \to 0$

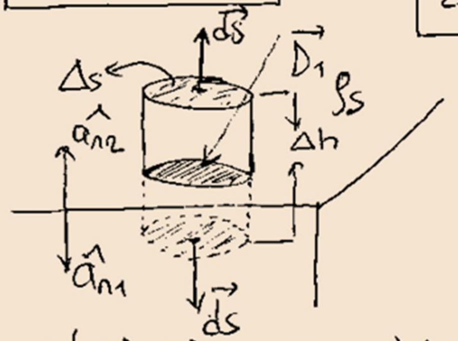
$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_{ab} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{cd} \vec{E}_2 \cdot (-d\vec{l}) = 0$$

$$E_{1t}\,\Delta w - E_{2t}\,\Delta w = 0$$

$$(E_{1t} - E_{2t})\,\Delta w = 0$$

$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}} \qquad \boxed{\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}}$$



* $$\oint \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q \qquad \Delta h \to 0$$

$$\int_{\text{ÜST}} \vec{D}_1 \cdot \vec{ds} + \int_{\text{ALT}} \vec{D}_2 \cdot \vec{ds} = \rho_s \Delta s$$

$$\int_{\text{ÜST}} \vec{D}_1 \cdot \hat{a}_{n2}\, ds + \int_{\text{ALT}} \vec{D}_2 \cdot \underset{(-a_{n2})}{a_{n1}}\, ds = \rho_s \Delta s$$

$$\vec{D}_1 \cdot \hat{a}_{n2} \Delta s - \vec{D}_2 \hat{a}_{n2} \Delta s = \rho_s \Delta s$$

$$\boxed{\hat{a}_{n2} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s} \qquad \boxed{\text{VEYA} \quad D_{1n} - D_{2n} = \rho_s}$$

*

2. ORTAM
İLETKEN

$\vec{E}_2 = 0 \Rightarrow E_{2t} = 0$ $\qquad D_{2n} = 0$

$E_{2n} = 0$ $\qquad D_{2t} = 0$

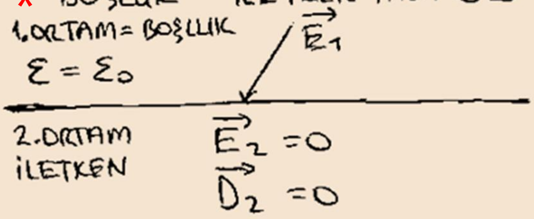
$\vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2 = 0$

$D_{1n} - \overset{\nearrow 0}{D_{2n}} = \rho_s$

$D_{1n} = \rho_s$

$E_{1n} = \dfrac{\rho_s}{\varepsilon_1}$

* BOŞLUK – İLETKEN ARAYÜZÜ



$$E_{1t} = E_{2t} = 0$$

$$D_{1n} - \underbrace{D_{2n}}_{0} = \rho_s$$

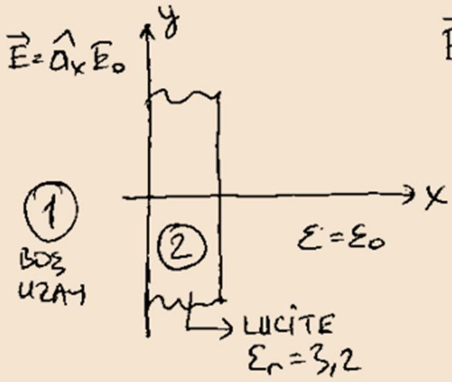
$$D_{1n} = \rho_s$$

$$E_{1n} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_1} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}$$

* ÖZET OLARAK :

TEĞET BİLEŞENLER	$E_{1t} = E_{2t}$
NORMAL BİLEŞENLER	$\hat{a}_{n2} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$

ÖRNEK 3.13 -



$$\vec{E}_1 = \hat{a}_x E_0 \Rightarrow E_{1t} = 0$$

$$E_{1n} = E_0$$

$$E_{1t} = E_{2t} = 0$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$$

$$D_{2n} = D_{1n} = \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_1 E_0$$

$$E_{2n} = \frac{D_{2n}}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_0$$

$$\vec{E}_2 = \hat{a}_x \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_0 = \hat{a}_x \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} E_0 = \hat{a}_x \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

$$\vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2 = \hat{a}_x \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_r} E_0 = \hat{a}_x \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\varepsilon_r} E_0 = \varepsilon_0 E_0 \hat{a}_x$$

$$\vec{P}_2 = \vec{D}_2 - \varepsilon_0 \vec{E}_2 \qquad \vec{P}_1 = \underbrace{\vec{D}_1}_{\varepsilon_0 \vec{E}_1} - \varepsilon_0 \vec{E}_1$$

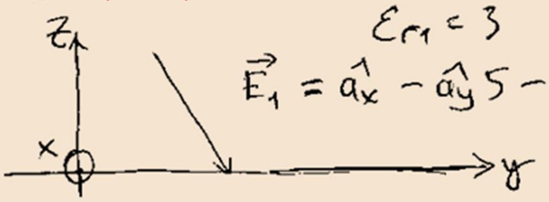
$$= \hat{a}_x \left(\varepsilon_0 E_0 - \varepsilon_0 \frac{E_0}{\varepsilon_r} \right)$$

$$= \hat{a}_x \, \varepsilon_0 E_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right)$$

ÖRNEK (ÖDEV) :

$$\varepsilon_{r1} = 3$$

$$\vec{E}_1 = \hat{a}_x - \hat{a}_y 5 - \hat{a}_z 4 \qquad \vec{E}_2 = ? \qquad \vec{D}_2 = ?$$



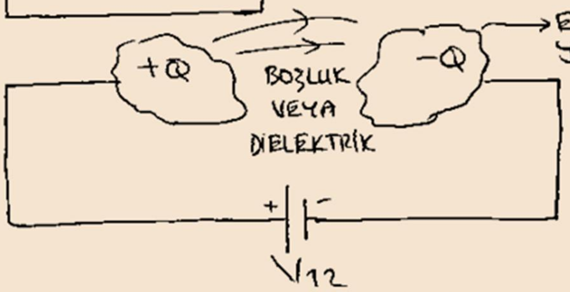
$$\varepsilon_{r2} = 2$$

3.9 - KAPASİTANS ve KAPASİTÖRLER

* İZOLE EDİLMİŞ BİR İLETKENİN POTANSİYELİ, ÜZERİNDEKİ TOPLAM YÜKLE DOĞRU ORANTILIDIR.

$$\boxed{Q = CV}$$

C ; ORANTI SABİTİ
İZOLE EDİLMİŞ İLETKENİN KAPASİTANSI



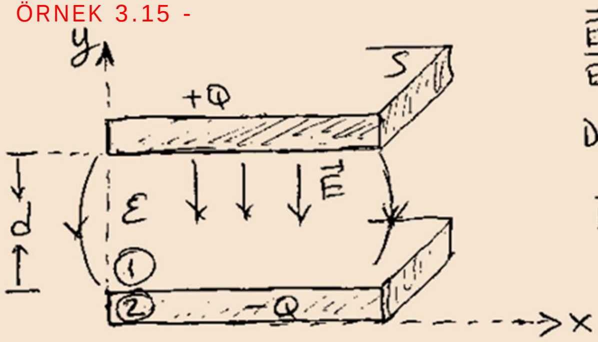
$$\boxed{C = \frac{Q}{V_{12}} \quad \left(\frac{C}{V} \text{ VEYA } F\right)}$$

C: KAPASİTÖRÜN ŞEKLİNE VE ORTAMIN GEÇİRGENLİĞİNE BAĞLIDIR.

* İKİ İLETKEN ARASINDAKİ C HESABINDA İZLENECEK YOL

1- UYGUN KOORDİNAT SİSTEMİ SEÇİLİR.
2- İLETKENLER ÜZERİNDE +Q VE −Q YÜKLERİ BULUNDUĞU VARSAYILIR.
3- $\vec{E}$ HESAPLANIR.
4- V HESAPLANIR. (−Q TAŞIYAN İLETKENDEN +Q TAŞIYAN İLETKENE $V_{12} = -\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}$)
5- Q/V_{12} ORANINDAN C BULUNUR.

ÖRNEK 3.15 -



$\vec{E}$ HESABI

$E_{1t} = E_{2t} = 0 \qquad \vec{E}_2 = 0 \quad \vec{D}_2 = 0$

$D_{1n} = \rho_S = \dfrac{Q}{S} \Rightarrow E_{1n} = \dfrac{Q}{\varepsilon_1 S}$

$\vec{E}_1 = -\hat{a}_y \dfrac{Q}{\varepsilon S}$

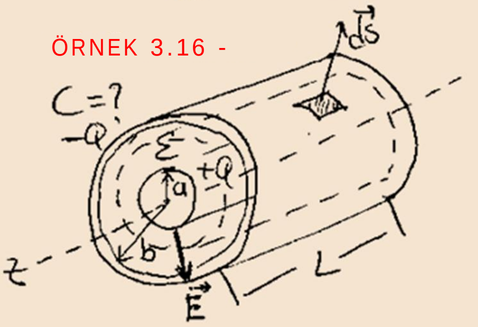
V_{12} HESABI

$$V_{12} = -\int_2^1 \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= -\int_0^d \left(-\hat{a}_y \frac{Q}{\varepsilon S}\right)\cdot\left(\hat{a}_y\, dy\right) = \frac{Qd}{\varepsilon S}$$

$$C = \frac{Q}{V_{12}} = \varepsilon \frac{S}{d}$$

ÖRNEK 3.16 -



− SİLİNDİRİK KOORDİNAT SİSTEMİ.

$\vec{E}$ HESABI =

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q$$

$$\int_0^L\int_0^{2\pi}(\hat{a}_r D_r)\cdot(\hat{a}_r\, r\, d\phi\, dz) = Q$$

$$D_r \cdot r\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^L dz = Q$$

$$\boxed{\vec{D} = \hat{a}_r\frac{Q}{2\pi L r}} \qquad \boxed{\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \hat{a}_r\frac{Q}{\varepsilon 2\pi L r}}$$

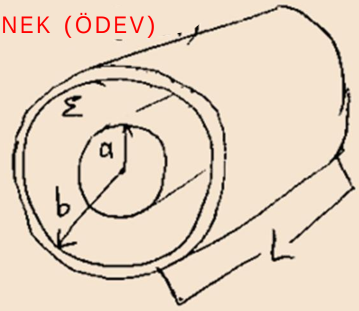
V_{12} HESABI :

$$V_{12} = -\int_2^1 \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = -\int_b^a\left(\hat{a}_r\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\right)\cdot(\hat{a}_r\, dr)$$

$$= \frac{-Q}{2\pi\varepsilon L}\int_b^a\frac{dr}{r} = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon L}\ln\left[\frac{a}{b}\right] = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\ln\left[b/a\right]$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_{12}} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\left[\frac{b}{a}\right]}}$$

ÖRNEK (ÖDEV)

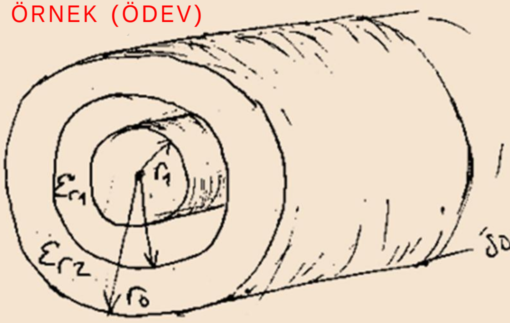


$\varepsilon_r = 1 + \alpha r \quad (\alpha = \text{SABİT})$

a) $C = ?$

b) SİLİNDİRİK YÜZEYLERE V_o POTANSİYEL FARKI UYGULANIRSA $\vec{E}$ VE $\vec{D}$, V_o CINSİNDEN NASIL İFADE EDİLİR?

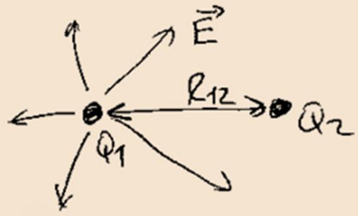
ÖRNEK (ÖDEV)



$$\frac{C}{L} = ?$$

3.10 - ELEKTROSTATİK ENERJİ ve KUVVET

* $\dfrac{W}{q} = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$



* $W_2 = Q_2 V_2$

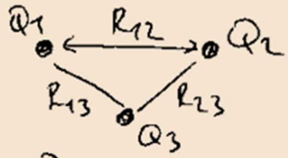
$$= Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}}$$

$$= Q_1 \underbrace{\left(\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}}\right)}_{V_1}$$

$$= Q_1 V_1$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\left(Q_1 V_1 + Q_2 V_2\right)$$

* $W_3 = W_2 + \Delta W$



$$W_3 = \frac{1}{2}\left(Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3\right)$$

* DURAĞAN N TANE AYRIK NOKTA YÜKÜN OLUŞTURDUĞU SİSTEMİN POTANSİYEL ENERJİSİ

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} Q_k V_k \quad (J)$$

V_k = Q_k NOKTASINDA DİĞER BÜTÜN YÜKLERDEN KAYNAKLANAN POTANSİYEL.

* BİR SÜREKLİ YÜK DAĞILIMINDA DEPOLANAN ELEKTRİK ENERJİSİ

$Q \rightarrow \rho\, dV$

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} \rho_v V \, dv \quad (J)}$$

3.10.1 - ALAN NİCELİKLERİ CİNSİNDEN ELEKTROSTATİK ENERJİ

$$\rho_v = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) V \, dv$$

$$\vec{\nabla} \cdot (V\vec{D}) = V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} + \vec{D} \cdot \vec{\nabla} V$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} \vec{\nabla} \cdot (V\vec{D}) \, dv - \frac{1}{2} \int_{V'} \vec{D} \cdot \vec{\nabla} V \, dv$$

$\downarrow$ DİVERJANS TEOREMİ

$$W_e = \underbrace{\frac{1}{2} \oint_{S'} V\vec{D} \cdot d\vec{s}}_{0} + \frac{1}{2} \int_{V'} \vec{D} \cdot \vec{E} \, dv$$

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \vec{D}\cdot\vec{E}\, dv \quad (J)$$

LINEER VE İZOTROPİK ORTAM İÇİN $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

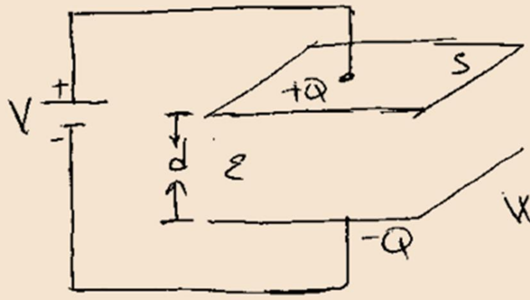
$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \varepsilon E^2\, dv \quad (J)}$$

$$W_e = \int_{V'} w_e\, dV$$

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \quad (J/m^3)$$

└→ ELEKTROSTATİK ENERJİ YOĞUNLUĞU

ÖRNEK 3.17 -



$W_e = ?$

$$E = \frac{V}{d}$$

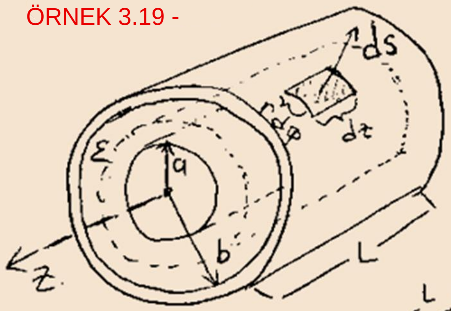
$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \varepsilon E^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{V}{d}\right)^2 \underbrace{\int_{V'} dV}_{Sd}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}V^2 = \frac{1}{2}CV^2$$

$$* \boxed{W_e = \frac{1}{2}CV^2 \quad (J)}$$

→ BİR KAPASİTÖRDE DEPOLANAN ELEKTRİK ENERJİ

ÖRNEK 3.19 -



$C = ?$ (ENERJİ FORMÜLLERİ KULLANILARAK)

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2 \qquad W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \varepsilon E^2 dV'$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon} \qquad \int_0^L\int_0^{2\pi} (\hat{a}_r E_r)\cdot \hat{a}_r\, r\, d\varphi\, dz = \frac{Q}{\varepsilon}$$

$$\vec{E} = \hat{a}_r \frac{Q}{2\pi\varepsilon L r}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\int_a^b\int_0^L\int_0^{2\pi} \varepsilon \frac{Q^2}{4\pi^2\varepsilon^2L^2r^2}\, r\, d\varphi\, dz\, dr$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{2\pi\varepsilon L}\Big[\ln r\Big]_a^b = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}C\left(\frac{Q}{C}\right)^2 = \frac{Q^2}{2C} \qquad C = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\left[\frac{b}{a}\right]}$$

3.10.2 - ELEKTROSTATİK KUVVET

YÜKLÜ BİR SİSTEM İÇİNDEKİ BİR CİSMİN ÜZERİNDEKİ KUVVETİ ELEKTROSTATİK ENERJİDEN HESAPLAMAK İÇİN "HAYALİ YER DEĞİŞTİRME İLKESİNE" DAYANAN BİR YÖNTEM KULLANILIR.

CİSİMLERDEN BİRİNİN YERİ KUVVETİN ETKİSİYLE "$d\ell$" KADAR YER DEĞİŞTİRİRSE SİSTEM TARAFINDAN YAPILAN MEKANİK İŞ :

$$dW = \vec{F}_Q \cdot d\vec{\ell}$$

BU MEKANİK İŞ SİSTEMİN ELEKTROSTATİK ENERJİSİNİN HARCANMASI PAHASINA GERÇEKLEŞİR :

$$dW = -dW_e = \vec{F}_Q \cdot d\vec{\ell} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{I})$$

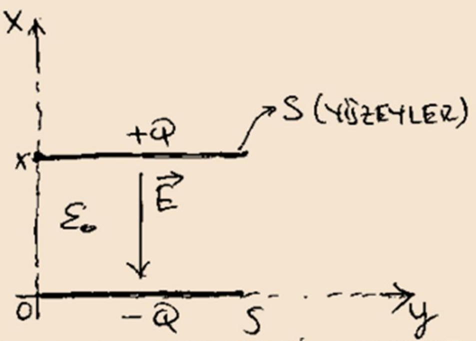
BİR SKALERİN "$d\ell$" KADAR KONUM DEĞİŞİMİNDEN KAYNAKLANAN DİFERANSİYEL DEĞİŞİMİ :

$$dW_e = (\vec{\nabla} W_e) \cdot d\vec{\ell} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{II})$$

(I) VE (II) EŞİTLİKLERİ KARŞILAŞTIRILARAK ;

$$\boxed{\vec{F}_Q = -\vec{\nabla} W_e \quad (\mathrm{N})}$$

ÖRNEK 3.20 -



$$\cancelto{0}{D_{1n}} - D_{2n} = \rho_s \qquad D_{2n} = -\rho_s$$

$$\varepsilon_2 E_{2n} = -\rho_s$$

$$E_{2n} = \frac{-\rho_s}{\varepsilon_0}$$

İLETKEN PLAKALARDAKİ KUVVET=?

$$\rho_s = \frac{Q}{S}$$

$$W_e = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q V$$

$$\vec{E} = -\hat{a}_x \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

$$V = -\int_0^x \left(-\hat{a}_x \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\right) \cdot (\hat{a}_x \, dx)$$

$$V = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} x = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} x$$

$$W_e = \frac{1}{2} Q \frac{Q}{\varepsilon_0 S} x = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} x$$

$$\vec{F}_Q = -\vec{\nabla} W_e$$

$$= -\hat{a}_x \frac{dW_e}{dx} - \hat{a}_y \cancel{\frac{dW_e}{dy}}^{\,0} - \hat{a}_z \cancel{\frac{dW_e}{dz}}^{\,0}$$

$$\boxed{\vec{F}_Q = -\hat{a}_x \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \quad (N)}$$

3.11 - ELEKTROSTATİK SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

İLETKEN - BOŞ UZAY (VEYA DİELEKTRİK) SINIRLARINDAKİ KOŞULLARI VERİLEN VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ OLARAK ADLANDIRILAN PROBLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ İNCELENECEK.

3.11.1 - POISSON ve LAPLACE DENKLEMLERİ

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (-\varepsilon \vec{\nabla} V) = \rho_v$$

(HOMOJEN)
BASİT ORTAM İÇİN ε SABİT VE DIŞARI TAŞINABİLİR:

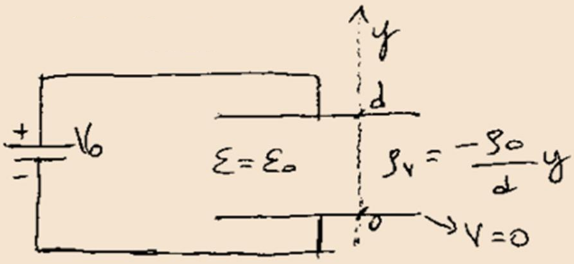
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}} \implies \text{POISSON DENKLEMİ}$$

*SERBEST YÜKLERİN OLMADIĞI ($\rho_v = 0$) BASİT ORTAMDA:

$$\boxed{\nabla^2 V = 0} \implies \text{LAPLACE DENKLEMİ}$$

3.11.2 - KARTEZYEN KOORDİNATLARDA SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ



SÜREKLİ ELEKTRON DAĞILIMI

KENARLARDAKİ SAÇAKLANMAYI İHMAL EDEREK;

a) PLAKALAR ARASINDA HERHANGİ BİR NOKTADA POTANSİYEL =?

b) PLAKALAR ÜZERİNDEKİ YÜZEY YÜK YOĞUNLUKLARI =?

a:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$$

$$\underbrace{\cancel{\frac{d^2 V}{dx^2}}}_{0} + \underbrace{\frac{d^2 V}{dy^2}}_{} + \cancel{\frac{d^2 V}{dz^2}} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$$

0 ⟶ (ÇÜNKÜ "V" YALNIZCA "y" YE BAĞLI) ⇒ $V(y)$

$$\frac{d^2 V(y)}{dy^2} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 d} y$$

$$\frac{d V(y)}{dy} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 d} y^2 + C_1$$

$$V(y) = \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0 d} y^3 + C_1 y + C_2$$

$y = 0 \quad V = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$y = d \quad V = V_0 \Rightarrow V_0 = \frac{\rho_0 d^2}{6\varepsilon_0} + C_1 d$

$$\boxed{C_1 = \frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0}}$$

$$V(y) = \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0 d} y^3 + \left(\frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0}\right) y$$

b:

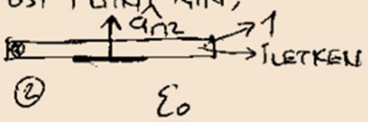
$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$= -\hat{a}_x \cancel{\frac{dV}{dx}} - \hat{a}_y \frac{dV}{dy} - \hat{a}_z \cancel{\frac{dV}{dz}}$$

$$= -\hat{a}_y \frac{dV(y)}{dy}$$

$$\vec{E}(y) = -\hat{a}_y \left[\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 d} y^2 + \frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0}\right]$$

ÜST PLAKA İÇİN;



$$\underbrace{\hat{a}_{n2}}_{\hat{a}_y} \left(\underbrace{\vec{D_1}}_{0} - \underbrace{\vec{D_2}}_{\varepsilon_0 \vec{E}(d)}\right) = (\rho_s)_{ÜST}$$

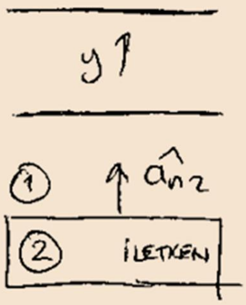
$$\vec{E}(d) = -\hat{a}_y \left[\frac{\rho_o d}{2\varepsilon_o} + \frac{V_o}{d} - \frac{\rho_o d}{6\varepsilon_o}\right]$$

$$= -\hat{a}_y \left[\frac{\rho_o d}{3\varepsilon_o} + \frac{V_o}{d}\right]$$

$$\hat{a}_y \cdot (-\varepsilon_o E(d)) = (\rho_s)_{ÜST}$$

$$\varepsilon_o E(d) = (\rho_s)_{ÜST}$$

$$(\rho_s)_{ÜST} = \frac{\rho_o d}{3} + \frac{\varepsilon_o V_o}{d}$$



$$\underbrace{\hat{a}_{n2}}_{\hat{a}_y} \cdot \left(\underbrace{\vec{D_1}}_{\varepsilon_o \vec{E}(o)} - \underbrace{\vec{D_2}}_{0}\right) = (\rho_s)_{ALT}$$

$$(\rho_s)_{ALT} = \frac{\rho_o d}{6} - \frac{\varepsilon_o V_o}{d}$$

3.11.3 - SİLİNDİRİK KOORDİNATLARDA SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

*SİLİNDİRİK KOORDİNATLARDA V' NİN LAPLACE DENKLEMİ;

$\nabla^2 V = 0$ SİLİNDİRİK SİMETRİ OLDUĞUNDA $\dfrac{d^2V}{d\varphi^2} = 0$

YARIÇAPLA KIYASLANDIĞINDA UZUNLUK ÇOK BÜYÜKSE;

$$\frac{d^2V}{dz^2} \cong 0$$

V, SADECE r' YE BAĞLI İSE $V(r)$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV(r)}{dr}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV(r)}{dr}\right) = 0 \Rightarrow r\frac{dV(r)}{dr} = C_1$$

$$\frac{dV(r)}{dr} = \frac{C_1}{r} \Rightarrow V(r) = C_1 \ln r + C_2$$

*V, r VE z YÖNÜNDE DEĞİŞMİYORSA ;

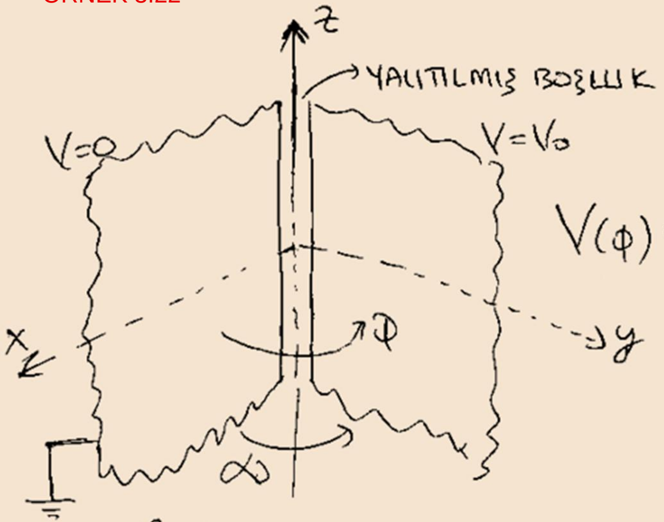
$V(\phi)$

$\nabla^2 V = 0$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d^2 V(\phi)}{d\phi^2} = 0 \text{ ......}$$

$$V(\phi) = C_1\phi + C_2$$

ÖRNEK 3.22 -



a) $0 < \phi < \alpha$

b) $\alpha < \phi < 2\pi$

BÖLGELERİNDE DAĞILIM=?

$V(\phi) \Rightarrow$ YALNIZCA ϕ'YE BAĞLI

$\nabla^2 V = 0$

$$V(\phi) = C_1\phi + C_2$$

a: $V(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$V(\alpha) = V_0 \Rightarrow C_1 = \frac{V_0}{\alpha}$

$$V(\phi) = \frac{V_0}{\alpha}\phi$$

b: $\phi = \alpha$, $V = V_0 \Rightarrow V_0 = C_1\alpha + C_2$

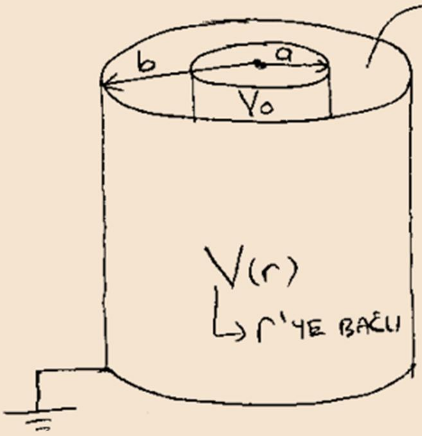
$\phi = 2\pi$, $V = 0 \Rightarrow 0 = C_1 2\pi + C_2$

BURDAN ;

$$C_1 = \frac{V_0}{(\alpha - 2\pi)} \qquad C_2 = -\frac{2\pi V_0}{(\alpha - 2\pi)}$$

$$\boxed{V(\phi) = \frac{V_0}{(2\pi - \alpha)}(2\pi - \phi)}$$

ÖRNEK (ÖDEV)

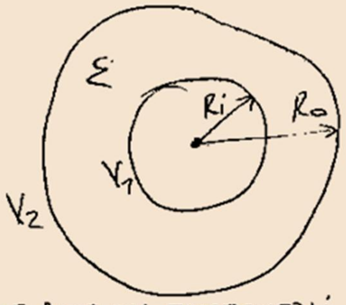


$$\rho_v = \frac{A}{r} \quad (A = \text{SABİT})$$

$a < r < b$ BÖLGESİNDE POTANSİYEL DAĞILIMI=?

3.11.4 - KÜRESEL KOORDİNATLARDA SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

ÖRNEK 3.23 -



İNCE, İLETKEN, EŞMERKEZLİ İKİ KÜRESEL KABUK

YALITKAN MALZEME İÇİNDEKİ POTANSİYEL DEĞİŞİMİ=?

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dV}{dR}\right) + \overbrace{\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dV}{d\theta}\right)}^{0} + \overbrace{\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{d^2V}{d\varphi^2}}^{0} = 0$$

$$\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dV}{dR}\right) = 0$$

$$R^2\frac{dV}{dR} = C_1 \implies \frac{dV}{dR} = \frac{C_1}{R^2}$$

$$\boxed{V(R) = -\frac{C_1}{R} + C_2}$$

SINIR DEĞERLER :

$$R = R_i \quad V = V_1 \implies V_1 = -\frac{C_1}{R_i} + C_2$$

$$R = R_o \quad V = V_2 \implies V_2 = -\frac{C_1}{R_o} + C_2$$

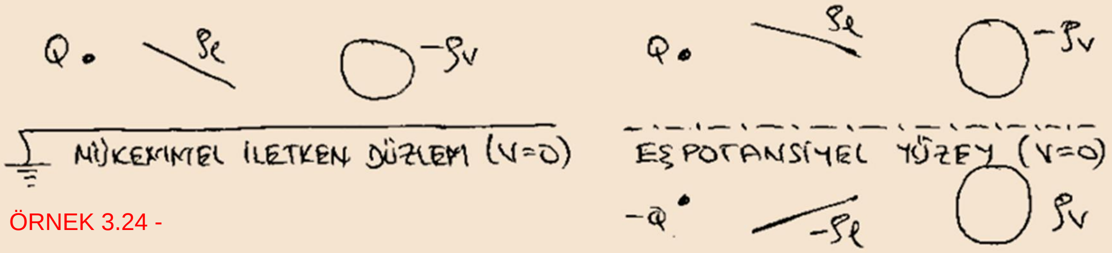
$$C_1 = -\frac{R_oR_i(V_1 - V_2)}{R_o - R_i} \qquad C_2 = \frac{R_oV_2 - R_iV_1}{R_o - R_i}$$

$$V(R) = \frac{1}{R_o - R_i}\left[\frac{R_oR_i}{R}(V_1 - V_2) + R_oV_2 - R_iV_1\right], \quad R_i \le R \le R_o$$

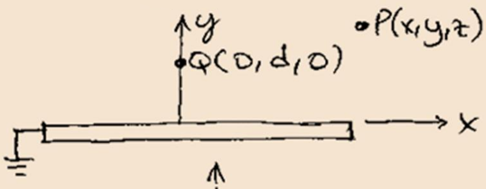
3.11.5 - GÖRÜNTÜ YÖNTEMİ

SINIRLAYAN YÜZEYLERDEKİ KOŞULLAR UYGUN SANAL GÖRÜNTÜ YÜKLERİLE OLUŞTURULARAK POTANSİYEL DAĞILIMLARI BELİRLENİR.

*MÜKEMMEL İLETKEN DÜZLEM ÜZERİNDE YÜK KONFİGÜRASYONLARI

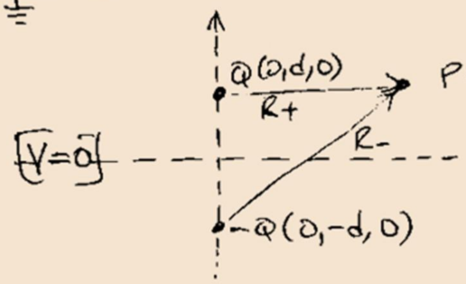


ÖRNEK 3.24 -



a) $y>0$ BÖLGESİNDE $P(x,y,z)$'DE $V(x,y,z)=?$

b) İLETKEN DÜZLEM YÜZEYİNDE İNDÜKLENEN YÜK YOĞUNLUĞU=?



a: $$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right]$$

$$R_+^2 = x^2 + (y-d)^2 + z^2$$

$$R_-^2 = x^2 + (y+d)^2 + z^2$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(x^2+(y-d)^2+z^2)^{1/2}} - \frac{1}{(x^2+(y+d)^2+z^2)^{1/2}}\right]$$

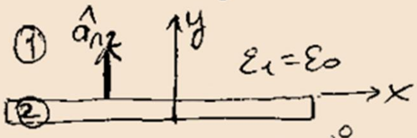
b: $$\vec{E} = -\nabla V$$

$$= -\hat{a}_x\frac{\partial V}{\partial x} - \hat{a}_y\frac{\partial V}{\partial y} - \hat{a}_z\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\hat{a}_x x + \hat{a}_y(y-d) + \hat{a}_z z}{[x^2+(y-d)^2+z^2]^{3/2}} - \frac{\hat{a}_x x + \hat{a}_y(y+d) + \hat{a}_z z}{[x^2+(y+d)^2+z^2]^{3/2}}\right]$$

VEYA =

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{R}_+}{R_+^3} - \frac{\vec{R}_-}{R_-^3}\right]$$



$$\hat{a}_{n2}\cdot(\vec{D}_1 - \cancel{\vec{D}_2}^{\,0}) = \rho_s$$

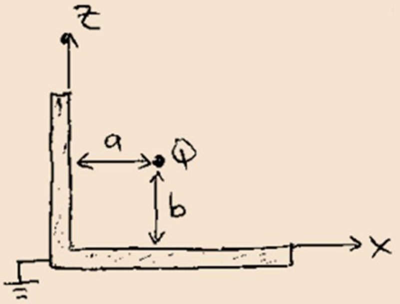
$$\hat{a}_y \cdot \varepsilon_1 \vec{E}_1 = \rho_s$$

$$\hat{a}_y \cdot \varepsilon_0 \vec{E}(y=0) = \rho_s$$

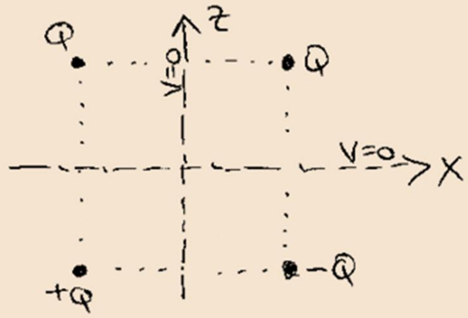
$$\hat{a}_y \cdot \varepsilon_0 \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} (-a\hat{y}) \frac{2d}{\left[x^2+d^2+z^2\right]^{3/2}} \right] = \rho_s$$

$$\boxed{\rho_s = \frac{-Qd}{2\pi\left[x^2+d^2+z^2\right]^{3/2}}}$$

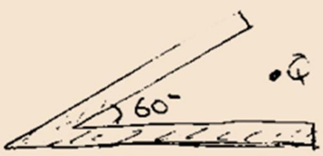
ÖRNEK -



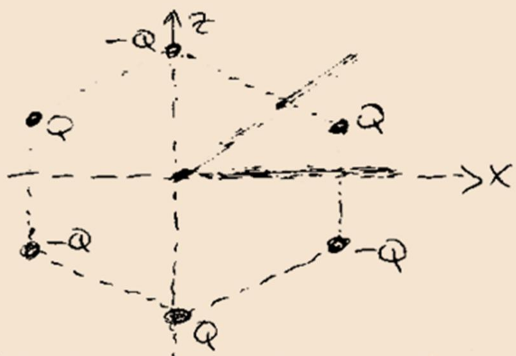
$\Rightarrow$



ÖRNEK -

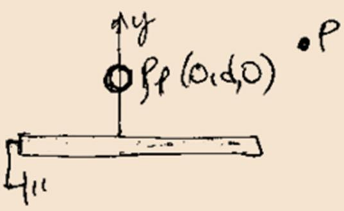


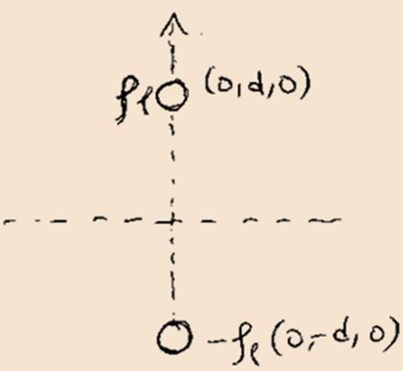
$\Rightarrow$



*ARALARINDA Φ AÇISI BULUNAN İKİ YARI-SONSUZ İLETKEN DÜZLEM ARASINDAKİ BİR NOKTA YÜKTEN OLUŞAN SİSTEM İÇİN GENEL OLARAK GÖRÜNTÜLERİN SAYISI

$$N = \left(\frac{360}{\Phi} - 1 \right)$$





BÖLÜM 4 - DURGUN ELEKTRİK AKIMI

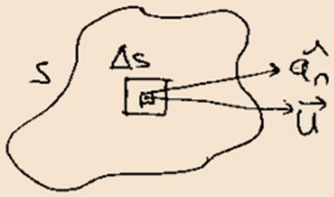
1 - KONVEKSİYON AKIMI
2 - İLETKENLİK AKIMI

KONVEKSİYON AKIMI: VAKUMDA VEYA SEYRELTİLMİŞ GAZLARDA YÜK TAŞIYICI-LARIN HAREKETİYLE OLUŞUR. OHM YASASI BU AKIMDA GEÇERLİ DEĞİLDİR.

İLETKENLİK AKIMI: VALANS VEYA İLETKENLİK e^- LARI SÜRÜKLENME HIZ-LARI $10^{-4} \sim 10^{-3}$ m/s MERTEBELERİNDEDİR. OHM YASASI GEÇERLİDİR.

4.2 - AKIM YOĞUNLUĞU ve OHM YASASI

A) KONVEKSİYON AKIMI



Δs YÜZEY ELEMANLARINDAN $\vec{u}$ HIZIYLA GEÇEN q YÜKLÜ TEK TİP YÜK TAŞIYICILARI İÇİN:

Δt ZAMAN ARALIĞINDA HER BİR YÜK TAŞIYICI $\vec{u}\Delta t$ KADAR İLERLERSE Δs YÜZEYİNDEN GEÇEN TOPLAM YÜK MİKTARI

N BİRİM HACİM BAŞINA YÜK TAŞIYICISI OLMAK ÜZERE

$$\Delta Q = Nq\,\underbrace{\vec{u}\Delta t \cdot \hat{a}_n \Delta s}_{\text{HACİM}}$$

* AKIM, YÜKÜN ZAMANLA DEĞİŞİM HIZI İSE

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Nq\,\vec{u}\cdot\hat{a}_n\Delta s = \underbrace{Nq\,\vec{u}}_{\vec{J}}\cdot\Delta s$$

* HACİM AKIM YOĞUNLUĞU VEYA AKIM YOĞUNLUĞU

$$\vec{J} = Nq\,\vec{u} \qquad (A/m^2)$$

$$\Delta I = \vec{J}\cdot\vec{\Delta s}$$

* HERHANGİ BİR S YÜZEYİNDEN GEÇEN TOPLAM I AKIMI

$$I = \int_S \vec{J}\cdot\vec{ds} \qquad (A)$$

* Nq BİRİM HACİMDEKİ SERBEST YÜK MİKTARI İSE

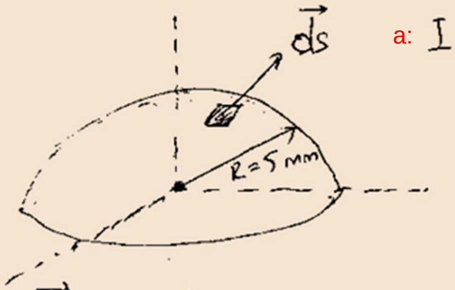
$$\vec{J} = Nq\,\vec{u}$$

$$\vec{J} = \rho_v\,\vec{u} \qquad (A/m^2)$$

ÖRNEK 4.1 - – BİR VAKUM TÜPÜNDE
– 0,3 (nC/mm^3) SERBEST YÜK YOĞUNLUĞU VARSA
– $\hat{a}_z$ 24 (A/mm^2) AKIM YOĞUNLUĞU İÇİN

a) $R = 5$ mm, $0 \le \theta \le \pi/2$ VE $0 \le \phi \le 2\pi$ İLE BELİRLENENİ YARIM KÜRE YÜZEYİNDEN GEÇEN TOPLAM AKIM =?

b) SERBEST YÜKLERİN HIZI =?



a: $$I = \int_s \vec{J} \cdot \vec{ds} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (-\hat{a}_z 24) \cdot (\hat{a}_R R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi)$$

$$= -24 R^2 \Big|_{R=5mm} 2\pi \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta}_{1/2}$$

b: $\vec{J} = \rho_v \vec{u}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{J}}{\rho_v} = \frac{-\hat{a}_z 24}{-0,3.10^{-9}} = 8.10^9 \ mm/s = 8.10^6 \ m/s$$

B) İLETKENLİK AKIMI

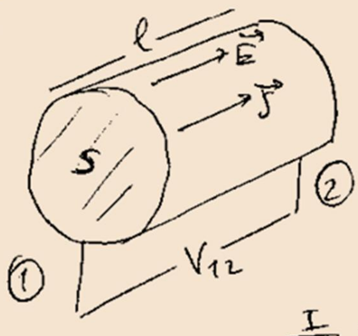
* YARI İLETKENLER İÇİN

$$\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h$$

* ÖZ DİRENÇ

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (\Omega m)$$

* DÜZGÜN KESİTLİ HOMOJEN MALZEME PARÇASININ GERİLİM–AKIM BAĞINTISI



$$V_{12} = E.\ell \Rightarrow E = \frac{V_{12}}{\ell}$$

$$I = \int_s \vec{J}.\vec{ds} = JS \Rightarrow J = \frac{I}{S}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{V_{12}}{\ell}$$

$$V_{12} = \left(\frac{\ell}{\sigma S}\right) I = RI$$

* DÜZGÜN KESİTLİ HOMOJEN VE DÜZ BİR MALZEME PARÇASININ DİRENCİ

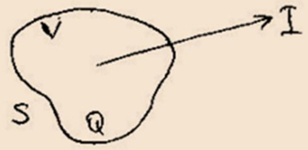
$$R = \frac{\ell}{\sigma S} \quad (\Omega)$$

İLETKENLİK (CONDUCTANCE)

$$G = \frac{1}{R} = \sigma \frac{S}{\ell} \quad (\Omega^{-1}) \text{ VEYA } (S)$$

4.3 - SÜREKLİLİK DENKLEMİ VE KIRSCHOFF AKIM YASASI

"YÜK KORUNUMU İLKESİ"



$$I = \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{s} = -\frac{dQ}{dt}$$

S YÜZEYİ İLE SINIRLI GELİŞİGÜZEL BİR V HACMİNDE Q_{NET} YÜKÜ VARSA, YÜZEYDEN DIŞARI NET BİR AKIM AKIYORSA HACİMDEKİ YÜK MİKTARI BU AKIMA EŞİT BİR HIZLA AZALMALIDIR. (TERSİ DE GEÇERLİDİR.)

$$\oint \vec{J}\cdot d\vec{s} = -\frac{dQ}{dt} \xrightarrow{\text{DİVERJANS TEOREMİ}} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho_v \, dv$$

$$\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{J}) = \int_V -\frac{d\rho_v}{dt} \, dv$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{d\rho_v}{dt}}$$ ⟶ SÜREKLİLİK DENKLEMİ

* DURGUN AKIMLAR İÇİN YÜK YOĞUNLUĞU ZAMANLA DEĞİŞMEZ.

$\frac{d\rho_v}{dt} = 0$ $\quad \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0}$ $\quad$ İNTEGRAL BİÇİMİ: $\boxed{\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{s} = 0}$

$$\boxed{\sum_j I_j = 0}$$ ⟶ KIRSCHOFF'UN AKIM YASASI

* DENGE KOŞULLARINDA İLETKEN İÇİNDE $\rho_v = 0$, $\vec{E} = 0$

DENGEYE ULAŞMAK İÇİN GEÇEN ZAMAN:

$$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{J}}_{\sigma\vec{E}} = -\frac{\partial\rho_v}{\partial t} \Rightarrow \sigma\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{\rho_v/\varepsilon} = -\frac{\partial\rho_v}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial\rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_v = 0$$

$$\boxed{\rho_v = \rho_0 e^{-\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)t} \quad (C/m^3)}$$ ρ_0: $(t=0)$ ANINDAKİ BAŞLANGIÇ YÜK YOĞUNLUĞU

* ρ_0 BAŞLANGIÇ DEĞERİNİN $\frac{1}{e}$ KATINA (VEYA %36,8) DÜŞMESİ İÇİN GEÇEN SÜRE =

$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ (s) ..... ["GEVŞEME ZAMANI"]

≡ BAKIR İÇİN GEVŞEME ZAMANI ≡

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= 5{,}8 \cdot 10^{7} \quad (S/m) \\ \varepsilon \cong \varepsilon_0 &= 8{,}85 \cdot 10^{-12} \quad (F/m) \end{aligned}\right\} \tau = 1{,}53 \cdot 10^{-19} \quad (s)$$

4.4 - GÜÇ HARCANMASI VE JOULE YASASI

TEK BİR q YÜKÜ $\Delta \ell$ KADAR HAREKET ETTİRİLİRSE $\vec{E}$ TARAFINDAN YAPILAN Δw İŞİ =

$$\Delta w = q\, \vec{E} \cdot \vec{\Delta \ell}$$

$\vec{u}$ SÜRÜKLENME HIZI İLE HAREKET EDİYORSA:

$$p = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = q\vec{E} \cdot \frac{\vec{\Delta \ell}}{\Delta t} = q\vec{E} \cdot \vec{u}$$

BİR dv HACMİNDEKİ TÜM YÜK TAŞIYICILARINA AKTARILAN GÜÇ =

$$dP = \sum_i p_i = \vec{E} \cdot \underbrace{\left(\sum_i N_i q_i \vec{u}_i\right)}_{\vec{J}} dv$$

$$dP = \vec{E} \cdot \vec{J}\, dv$$

VERİLEN V HACMİ İÇİN ISIYA DÖNÜŞEN TOPLAM GÜÇ =

$$\boxed{P = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J}\, dv \quad (W)}$$

* SABİT KESİTLİ BİR İLETKENDE:

$$P = \int E J\, dv = \iint E\, J\, ds\, d\ell = \int E\, d\ell \int J\, ds = V \cdot I = I^2 R$$

4.5 - DURGUN AKIM YOĞUNLUĞU DENKLEMLERİ

$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0}$ ..... $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \frac{1}{\sigma}\vec{J} = 0}$ .... DİFERANSİYEL BİÇİM

$\boxed{\oint \vec{J} \cdot \vec{ds} = 0}$ ..... $\boxed{\oint_c \frac{1}{\sigma} \vec{J} \cdot \vec{d\ell} = 0}$ .... İNTEGRAL BİÇİM

* SINIR KOŞULLARI

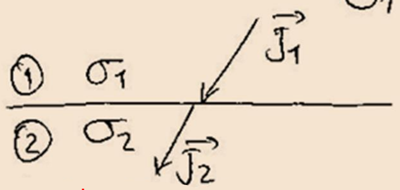
$E_{1t} = E_{2t}$

$\hat{a}_{n2} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$ VEYA $D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$

→ ELEKTROSTATİK ALANLAR İÇİN SINIR KOŞULLARI

AKIM YOĞUNLUĞU İÇİN SINIR KOŞULLARI =

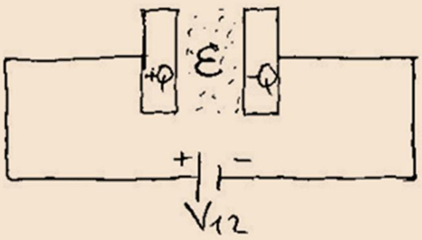
$$J_{1n} = J_{2n} \quad \ldots\ldots \quad \frac{J_{1t}}{\sigma_1} = \frac{J_{2t}}{\sigma_2} \quad \text{VEYA} \quad \frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$



4.6 - DİRENÇ HESAPLAMA

* GELİŞİGÜZEL ŞEKİLLERE SAHİP, ARALARINDA BİR DİELEKTRİK ORTAM OLAN İKİ İLETKEN ARASINDAKİ KAPASİTANS =

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_s \vec{D} \cdot \vec{ds}}{-\int_L \vec{E} \cdot \vec{dl}} = \frac{\oint_s \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{ds}}{-\int_L \vec{E} \cdot \vec{dl}} \quad \ldots\ldots \quad (I)$$



* DİELEKTRİK ORTAM KAYIPLI OLDUĞUNDA ($\sigma \neq 0$) (KÜÇÜK FAKAT SIFIRA YAKIN BİR ÖZ İLETKENLİĞE SAHİP OLDUĞUNDA) POZİTİF İLETKENDEN NEGATİF İLETKENE BİR AKIM AKACAK VE ORTAMDA BİR $\vec{J}$ OLUŞACAK. BU DURUMDA İLETKENLER ARASINDAKİ DİRENÇ =

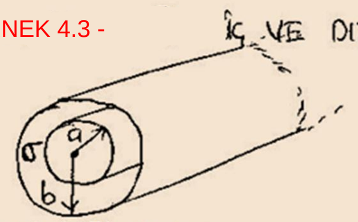
$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_L \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\oint_s \vec{J} \cdot \vec{ds}} = \frac{-\int_L \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\oint_s \sigma \vec{E} \cdot \vec{ds}} \quad \ldots\ldots \quad (II)$$

(I) VE (II) DENKLEMLERİ KULLANILARAK =

$$\boxed{RC = \frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma}}$$

ε VE σ AYNI UZAY BAĞIMLILIĞINA SAHİPSE VEYA ORTAM HOMOJEN İSE GEÇERLİDİR !!!

ÖRNEK 4.3 - İÇ VE DIŞ İLETKENLER ARASINDAKİ BİRİM UZUNLUK BAŞINA KAÇAK DİRENÇ = ?



KOAKSİYEL KABLO

$$C_\ell = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)} \quad (F/m)$$

$$R_\ell = \frac{1}{C_\ell} \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma}$$

* VERİLEN EŞPOTANSİYEL YÜZEYLER (VEYA TERMİNALLER) ARASINDAKİ BİR İLETKEN MALZEME PARÇASINDA DİRENCİN HESAPLANMASI =

1- UYGUN KOORDİNAT SİSTEMİ SEÇİLİR.
2- İLETKEN TERMİNALLERİ ARASINDA "V_0" POTANSİYEL FARKI OLDUĞU VARSAYILIR.
3- $\vec{E}$ (İLETKEN İÇİNDEKİ) HESAPLANIR.
(EĞER MALZEME SABİT "σ" İLETKENLİKLİ HOMOJEN BİR MALZEME İSE;

$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow V = 0$ SONRA "$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$"DEN "$\vec{E}$" BULUNUR.)

4- TOPLAM AKIM BULUNUR. $I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{ds} = \int_S \sigma \vec{E} \cdot \vec{ds}$

5- $\frac{V_0}{I}$ ORANINDAN "R" BULUNUR.

⇒ ÖRNEK 4.3 ' ÜN DEVAMI =

1. SİLİNDİRİK KOORDİNAT SİSTEMİ SEÇİLİR.
2. V_0 POTANSİYEL FARKI KABUL EDİLİR. ($r = a$'DA $V = V_0$ /// $r = b$'DE $V = 0$)
3. $V(r) = ?$ ($\nabla^2 V = 0$'DAN VE $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$'DAN $\vec{E}$'Yİ BUL.)
4. $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ VE $I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{ds}$'DEN TOPLAM I BULUNUR.

(KABLO BOYU SONSUZ UZUN VERİLDİĞİ İÇİN BOYUNA "L" DİYEBİLİRİZ.)
1. SİLİNDİRİK KOORDİNATLAR SEÇİLDİ.
2. İLETKEN KABUKLAR ARASI POTANSİYEL FARK "V_0" KABUL EDİLDİ.
SINIR ŞARTLARI: $r = a$ İÇİN $V = V_0$ /// $r = b$ İÇİN $V = 0$
3. V, YALNIZCA r'YE BAĞLI OLDUĞUNDAN $V \rightarrow V(r)$ DİR.
LAPLACE DENKLEMİNDEN;

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0$$

YALNIZCA SABİTİN TÜREVİ SIFIR OLDUĞU İÇİN;

$$r\frac{dV}{dr} = C_1 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = \frac{C_1}{r} \xrightarrow{\text{İNTEGRAL}} V(r) = C_1 . \ln(r) + C_2$$

SINIR ŞARTLARI YERİNE KOYULURSA;

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= C_1 \ln a + C_2 \\ 0 &= C_1 \ln b + C_2 \end{aligned}\right\} \quad V_0 = C_1\left(\ln\left(\tfrac{a}{b}\right)\right)$$

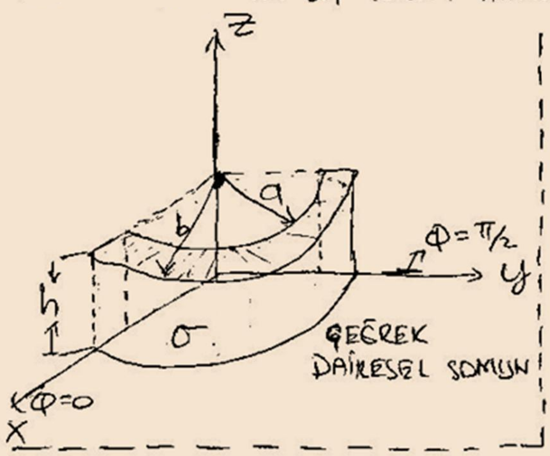
$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\left(-\hat{a}_r \frac{dV}{dr}\right) = \hat{a}_r \frac{d}{dr}(C_1 \ln r + C_2)$$

$$\vec{E} = \hat{a}_r \frac{C_1}{r}$$

4. $I = \int_S \sigma \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \sigma \left(\hat{a}_r \frac{C_1}{r}\right) \cdot (\hat{a}_r \, r \, d\phi \, dz) = \sigma C_1 2\pi L$

5. $\frac{V_0}{I} = R \qquad R = \frac{C_1 \ln(a/b)}{\sigma C_1 2\pi L} \qquad R = \frac{1}{2\pi L C_1 \sigma} \ln\left(\frac{a}{b}\right) \; \Omega$

ÖRNEK 4.4 - İKİ UÇ YÜZEY ARASINDAKİ DİRENÇ =?



1. SİLİNDİRİK KOORDİNATLAR SEÇİLDİ.
2. V_0 POTANSİYEL FARKI KABUL EDİLDİ.
3. $\nabla^2 V = 0$ V, ϕ'YE BAĞLIDIR.

$$V\phi = C_1 \phi + C_2$$

SINIR KOŞULLARI:

$\phi = 0$ İÇİN $V = 0$

$\underline{C_2 = 0}$

$\phi = \frac{\pi}{2}$ İÇİN $V = V_0$

$$C_1 = \frac{2V_0}{\pi}$$

$$V_\phi = \frac{2V_0}{\pi}\phi$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{a}_\phi \frac{1}{r}\frac{dV_\phi}{d\phi} \qquad \vec{E} = -\hat{a}_\phi \frac{2V_0}{\pi}\frac{1}{r}$$

4. $\vec{J} = \sigma \vec{E} = -\hat{a}_\phi \dfrac{2V_0\sigma}{\pi r}$

$$I = \iint \vec{J} \cdot \vec{ds} = \int_0^h \int_a^b \left(-\hat{a}_\phi \frac{2V_0\sigma}{\pi r}\right) \cdot \left(-\hat{a}_\phi \, dr \, dz\right)$$

$$I = \frac{2V_0 \sigma h}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

5. $R = \dfrac{V_0}{I} = \pi / 2\sigma h \ln(b/a) \ \Omega$

=SON=

HAKAN PAÇAL
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
ELEKTRİK - ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ