i. Yazıcı
c. Vural

Sakarya Üniversitesi
Elektrik- Elektronik Mühendisliği
EEM 305- İşaretler ve Sistemler

Final Sınavı

1. (a) Frekans yanıtı $H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+3}$ olan nedensel bir sürekli-zaman LTI sistemi ele alalım. Bir $x(t)$ girişi için sistemin yanıtının
$$y(t)=e^{-3t}u(t)-e^{-4t}u(t)$$
olduğu bilinmektedir $x(t)$'yi bulunuz [15p]
(b) (a) şıkkında bulduğunuz işaretin Fourier dönüşümü $X(j\omega)$ ile belirtilsin. Aşağıdaki işaretlerin Fourier dönüşümünü $X(j\omega)$ cinsinden belirleyiniz [10p]
(i) $x_1(t)=x(1-t)+x(-1-t)$, (ii) $x_2(t)=x(3t-6)$

2. Kararlı ve nedensel bir ayrık-zaman LTI sistemin giriş-çıkış ilişkisi aşağıdaki fark denklemiyle verilmektedir:
$$y[n]-\frac{1}{6}y[n-1]-\frac{1}{6}y[n-2]=x[n]$$
(a) Sistemin frekans yanıtı $H(e^{j\omega})$'yı belirleyiniz. [10p]
(b) Sistemin impuls yanıtı $h[n]$'yi bulunuz [15p]

3. Sağ taraflı iki işaret $x(t)$ ve $y(t)$ aşağıda verilen diferansiyel denklem çiftiyle ilişkilidir:
$$\frac{dx(t)}{dt}=-2y(t)+\delta(t)$$
$$\frac{dy(t)}{dt}=2x(t)$$
$Y(s)$ ve $X(s)$'yi yakınsaklık bölgelerini belirterek belirleyiniz. (ipucu: Laplace dönüşümünün türev alma özelliğini kullanın!) [25p]

4. (a) Bir işaretin z-dönüşümü
$$X(z)=\frac{1+z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$
olsun z-dönüşümünün yakınsaklık bölgesinin $|z|>\frac{1}{3}$ olduğunu varsayalım. Ters z-dönüşümünü elde ederek işaretin $x[0]$, $x[1]$ ve $x[2]$ değerlerini belirleyiniz [5p]

(b) $x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le 5\\ 0, & \text{aksi halde}\end{cases}$, $g[n]=x[n]-x[n-1]$ olsun

$X(z)$'yi ve ardından da z-dönüşümünün öteleme özelliğini kullanarak $G(z)$'yi belirleyiniz. [15p]

(c) Kararlı bir ayrık-zaman LTI sistemin transfer fonksiyonu aşağıda verilmiştir. Sistemin nedensel olup olmadığını ters z-dönüşümünü hesaplamadan belirleyiniz [5p]
$$H(z)=\frac{1-\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}{z^{-1}(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

BAŞARILAR...

Sınav süresi 90 dakikadır.

Final Sınavı Çözümleri 03/01/2012

C.1a)

$H(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega+3}$, $y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$, $x(t) = ?$

$H(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \Rightarrow X(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{H(j\omega)}$, $Y(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega+3} - \dfrac{1}{j\omega+4} = \dfrac{1}{(j\omega+3)(j\omega+4)}$

$X(j\omega) = \dfrac{\frac{1}{(j\omega+3)(j\omega+4)}}{\frac{1}{(j\omega+3)}} = \dfrac{1}{j\omega+4}$, $\boxed{x(t) = F^{-1}\{X(j\omega)\} = e^{-4t}u(t)}$

b)

i) $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$ $\quad x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-j\omega)$ $\quad x(-t+1) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega}X(-j\omega)$ $\quad x(-t-1) \longleftrightarrow e^{j\omega}X(-j\omega)$

$x_1(t) = x(-t+1) + x(-1-t) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega}X(-j\omega) + e^{j\omega}X(-j\omega) = X(-j\omega)\underbrace{\left[e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right]}_{=2\cos(\omega)}$

$x_1(t) \xleftrightarrow{F} 2X(-j\omega)\cos(\omega) = \dfrac{2}{4-j\omega}\cdot\cos(\omega)$

ii) $x(3t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{3}X(j\,\omega/3)$ $\qquad x(3(t-2)) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\omega}\frac{1}{3}X(j\,\omega/3)$

$x_2(t) = x(3t-6) = x(3(t-2)) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\omega}\dfrac{1}{3(4+j\omega/3)}$

C.2 a)

$\xrightarrow{x[n]} \boxed{S} \longrightarrow y[n]$ $\qquad H(e^{j\omega}) = \dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = ?$, $\quad h[n] = F^{-1}\{H(e^{j\omega})\} = ?$

$y[n] - \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = x[n]$

$Y(e^{j\omega}) - 1/6\, e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) - 1/6\, e^{-j2\omega}Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$

$Y(e^{j\omega})\left[1 - 1/6\, e^{-j\omega} - 1/6\, e^{-j2\omega}\right] = X(e^{j\omega})$

b) $H(e^{j\omega}) = \dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \dfrac{1}{1 - 1/6\, e^{-j\omega} - 1/6\, e^{-j2\omega}} = \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}$

$h[n] = F^{-1}\{H(e^{j\omega})\} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \dfrac{A}{1 - 1/2\, e^{-j\omega}} + \dfrac{B}{1 + 1/3\, e^{-j\omega}} \Rightarrow A = 3/5 \quad B = 2/5$

$h[n] = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

C.3

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2y(t) + \delta(t) \Rightarrow sX(s) = -2Y(s) + 1$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2x(t) \Rightarrow sY(s) = 2X(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{2X(s)}{s}$$

$$sX(s) = -2\left(\frac{2X(s)}{s}\right) + 1 \Rightarrow sX(s) + 4\frac{X(s)}{s} = 1$$

$$X(s)(s^2+4) = s \Rightarrow X(s) = \frac{s}{s^2+4}$$

$$Y(s) = 2\frac{X(s)}{s} = \frac{2}{s}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) = \frac{2}{s^2+4}$$

hem $x(t)$ hem de $y(t)$ sağ taraflı işaret olarak belirtilmiştir. Bu durumda $X(s)$ ve $Y(s)$ için ROC en sağdaki kutbun sağı olmalıdır.

$X(s)$ ve $Y(s)$'in kutupları $(s^2+4=0 \Rightarrow s_{1,2} = \mp 2j)$

Dolayısıyla $X(s)$ ve $Y(s)$ için ROC $\Rightarrow Re\{s\} > 0$ olarak bulunur.

C.4 a)

$$X(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} = A + \frac{B}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} \Rightarrow \begin{matrix} A=3 \\ B=-2 \end{matrix} \Rightarrow X(z) = 3 - \frac{2}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$x[n] = 3\delta[n] - 2\left(-\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] \Rightarrow x[0] = 1,\ x[1] = \frac{2}{3}\quad x[2] = -\frac{2}{9}$$

veya $$X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} + z^{-1}\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} = X_1(z) + z^{-1}X_1(z)$$

b)

$$x[n] = \left(-\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1]$$

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] + \delta[n-5]$$

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5}$$

$$g[n] = x[n] - x[n-1] \rightarrow G(z) = X(z) - z^{-1}X(z) = 1 - z^{-6},\ |z| > 0$$

c) $$H(z) = \frac{1 - \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{z^{-1}(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} \Rightarrow H(z) = \frac{z^3}{z^3}H(z) = \frac{z(z^2 - 4z/3 + 1/2)}{(z-1/2)(z-1/3)}$$

$H(z)$ ifadesinde payın derecesi$(=3)$, paydanın derecesinden $(=2)$ büyüktür. Dolayısıyla $H(z)$'in ∞'da 1 kutbu vardır. Bu durumda sistem nedensel değildir.