SORU ①: $f(x)=\sqrt{x^2-4x}+\ln\frac{x+1}{x-3}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.

Çözüm: $f_1(x)=\sqrt{x^2-4x}$, $f_2(x)=\ln\frac{x+1}{x-3}$ denilirse

f fonksiyonunun tanım aralığı f_1 ve f_2 fonksiyonlarının tanım aralıklarının arakesitidir. Buna göre

f_1 fo.nu $x^2-4x\geqslant 0$ için tanımlı olup

$x^2-4x=x(x-4)\geqslant 0$ dan

x		0		4	
x^2-4x	+	0	—	0	+
	$-\infty<x\leq 0$				$4\leq x<\infty$

f_1 fo.nunun tanım aralığı $T.A_1=(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$ dur.

f_2 fo.nu $\frac{x+1}{x-3}>0$ için tanımlı olup

x		-1		3	
$\frac{x+1}{x-3}$	+	0	—	‖	+
	$-\infty<x\leq -1$				$3<x<+\infty$

f_2 fo.nunun tanım aralığı $T.A_2=(-\infty,-1]\cup(3,+\infty)$ dur.

f fo.nunun $T.A.=T.A_1\cap T.A_2=(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$ dur.

Not;

x	$-\infty$	-1		0		3		4	∞
x^2-4x				0				0	
$\frac{x+1}{x-3}$		0				‖			
f nin tanım Ara	$-\infty<x\leq 0$								$4\leq x<\infty$

SORU ②: $f(x)=\sqrt{\frac{4-x^2}{x}}+\operatorname{Arcsin}\left(\log\frac{x}{10}\right)$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.

Çözüm: $f_1(x)=\sqrt{\frac{4-x^2}{x}}$ ve $f_2(x)=\operatorname{Arcsin}\left(\log\frac{x}{10}\right)$ denilirse,

f f.nunun tanım aralığı f_1 ve f_2 fonksiyonlarının tanım aralıklarının arakesitidir.

f_1 f.nu $\frac{4-x^2}{x}\geqslant 0$ için tanımlıdır.

$$\frac{4-x^2}{x}=\frac{(2+x)(2-x)}{x}\geqslant 0 \Rightarrow$$

x		-2		0		2	
$\frac{4-x^2}{x}$	+	0	−	‖	+	0	−

f_1 f.nunun tanım aralığı $T.A_1=(-\infty,-2]\cup(0,2]$ dir.

f_2 f.nunun tanımlı olması için $-1\leq\log\frac{x}{10}\leq 1$ ve $\frac{x}{10}>0$ olmalıdır. Yani $x>0$ iken $-1\leq\log\frac{x}{10}\leq 1$ olmalıdır.

$$-1\leq\log\frac{x}{10}\leq 1 \Rightarrow -\log 10\leq\log\frac{x}{10}\leq\log 10 \Rightarrow$$

$$\log 10^{-1}\leq\log\frac{x}{10}\leq\log 10 \Rightarrow \frac{1}{10}\leq\frac{x}{10}\leq 10 \text{ dan}$$

$1\leq x\leq 100$ olup f_2 nin tanım aralığı $T.A_2=[1,100]$ dür.

f nin tanım aralığı $T.A=T.A_1\cap T.A_2=[1,2]$ dir.

Not: f_1 f.nunun tanım aralığı için ek açıklama:

$$\frac{4-x^2}{x}\geqslant 0 \Rightarrow \frac{(2-x)(2+x)}{x}\geqslant 0 \text{ dan}$$

x		-2		0		2	
$2-x$	+		+		+	0	−
$2+x$	−	0	+		+		+
x	−		−	0	+		+
$\frac{4-x^2}{x}$	+	0	−	‖	+	0	−

SORU ③: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos 2x)\cdot \ln(1+\sqrt{x})}{(e^{2\sqrt{x}}-1)\cdot(\tan 3x)^2} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos 2x)\cdot \ln(1+\sqrt{x})}{(e^{2\sqrt{x}}-1)\cdot \tan^2 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 x \cdot \ln(1+\sqrt{x})}{\tan^2 3x\cdot(e^{2\sqrt{x}}-1)} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\tan^2 3x}\cdot\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{e^{2\sqrt{x}}-1}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0} 2\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{=2}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{9\cdot\tan^2 3x}\cdot \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}_{=1}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{x}}{2\cdot(e^{2\sqrt{x}}-1)} =$$

$$= 2\cdot 1\cdot \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{9}\left(\frac{3x}{\tan 3x}\right)^2}_{=\frac{1}{9}}\cdot \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{x}}{e^{2\sqrt{x}}-1}\right)}_{=\frac{1}{2}} = 2\cdot 1\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{9}$$

Not: $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ dir.

$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u} = 1$, $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$,

$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u} = 1$ ve $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\tan u}{u} = 1$ birer özel limittir.

SORU ④: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+6}{x+3}\right)^{2x+1} = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+6}{x+3}\right)^{2x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+3+3}{x+3}\right)^{2x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x+3}\right)^{2x+1} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{3}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{3}}\right]^{\frac{3}{x+3}\cdot(2x+1)} = \lim_{x\to\infty} \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{3}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{3}}}_{\to e}\Bigg]^{\overbrace{\frac{6x+3}{x+3}}^{\to 6}} =$$

$= e^6$ dır.

Not: $\lim\limits_{u\to\infty} \left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = e$ dir (özel limit.)

$\lim\limits_{u\to 0} (1+u)^{1/u} = e$ dir (özel limit)

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x+3}{x+3} = \frac{6}{1} = 6$ dır.

Soru ⑤: $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = ?$

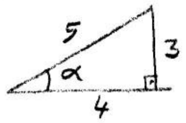
Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}} =$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \Bigg[\underbrace{\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}}_{\to e}\Bigg]^{\frac{-2\overbrace{\sin^2\frac{x}{2}}^{\to 1}}{4\cdot\frac{x^2}{4}}} = e^{-\frac{2}{4}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

dir.

SORU ⑥: $\sin\left(\mathrm{Arctan}\frac{1}{7}+\mathrm{Arcsin}\frac{3}{5}\right)=?$

Çözüm: $\mathrm{Arcsin}\frac{3}{5}=\alpha$ denilirse 

$\tan\alpha=\frac{3}{4}$

olup $\alpha=\mathrm{Arctan}\frac{3}{4}$ dür. Yani $\mathrm{Arcsin}\frac{3}{5}=\mathrm{Arctan}\frac{3}{4}$ tür.

Öte yandan $\mathrm{Arctan}\frac{1}{7}+\mathrm{Arcsin}\frac{3}{5}=\mathrm{Arctan}\frac{1}{7}+\mathrm{Arctan}\frac{3}{4}=$

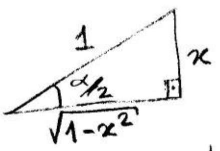
$$=\mathrm{Arctan}\frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{4}}=\mathrm{Arctan}\frac{\frac{4+21}{28}}{\frac{28-3}{28}}=\mathrm{Arctan}\frac{25/28}{25/28}=$$

$=\mathrm{Arctan}\,1=\frac{\pi}{4}$ olduğundan

$\sin\left(\mathrm{Arctan}\frac{1}{7}+\mathrm{Arcsin}\frac{3}{5}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ // dir.

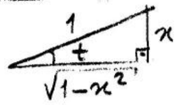
SORU ⑦: $\tan(2\mathrm{Arcsin}x)$ in x türünden eşidi?

Çözüm: $2\mathrm{Arcsin}x=\alpha$ denilirse $\mathrm{Arcsin}x=\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\sin\frac{\alpha}{2}=x$ den



olup $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ den

$$\tan\alpha=\frac{2\,\frac{x}{1}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{1}}{\frac{1-x^2}{1}-\frac{x^2}{1}}=\frac{2\cdot x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$$ dir.

Not: II. bir yol $\mathrm{Arcsin}x=t$ denilip 

$$\tan 2t=\frac{2\tan t}{1-\tan^2 t}=\frac{2\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\frac{x^2}{1-x^2}}$$ den

$$\tan 2\alpha=\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1-x^2}{1-2x^2}=\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$$ dir.

SORU 8: $2\,\mathrm{Arctan}\frac{1}{3}+\mathrm{Arctan}\frac{1}{7}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm:

$$2\,\mathrm{Arctan}\frac{1}{3}+\mathrm{Arctan}\frac{1}{7}=\mathrm{Arctan}\frac{1}{3}+\left(\mathrm{Arctan}\frac{1}{3}+\mathrm{Arctan}\frac{1}{7}\right)=$$

$$=\mathrm{Arctan}\frac{1}{3}+\mathrm{Arctan}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}}=\mathrm{Arctan}\frac{1}{3}+\mathrm{Arctan}\frac{10/21}{20/21}=$$

$$=\mathrm{Arctan}\frac{1}{3}+\mathrm{Arctan}\frac{1}{2}=\mathrm{Arctan}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\mathrm{Arctan}\frac{5/6}{5/6}=$$

$$=\mathrm{Arctan}\,1=\frac{\pi}{4}$$ bulunur. (Not: $\mathrm{Arctan}\,a+\mathrm{Arctan}\,b=\mathrm{Arctan}\frac{a+b}{1-a\cdot b}$)

SORU 9: $$\lim_{x\to 2}\left(\ln\frac{x}{2}\right)\cdot\tan\frac{\pi x}{4}\overset{0\cdot\infty}{=}\lim_{x\to 2}\frac{\ln\frac{x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{4}}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}-1\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{4}\right)}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 2}\sin\frac{\pi x}{4}}_{=1}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)}{\sin\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)}{\sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2-x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)}{-\sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x-2}{2}}=-\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)}{\frac{x-2}{2}}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x-2}{2}}{\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\frac{x-2}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$$ bulunur.

SORU (10): $f(x) = \dfrac{|\cos 2x|}{4x-\pi}$ fonksiyonunun $x \to \frac{\pi}{4}$ için soldan ve sağdan limitini bulunuz.

Çözüm:
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x) \underset{\substack{x=\frac{\pi}{4}-p \\ p>0}}{=} \lim_{p\to 0} \frac{|\cos 2(\frac{\pi}{4}-p)|}{4(\frac{\pi}{4}-p)-\pi} =$$

$$= \lim_{p\to 0} \frac{|\cos(\frac{\pi}{2}-p)|}{\cancel{\pi}-4p-\cancel{\pi}} = \lim_{p\to 0} \frac{\overbrace{|\sin 2p|}^{(+)}}{-4p} = \lim_{p\to 0} \frac{\sin 2p}{-2\cdot 2p} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \text{ dir.}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x) \underset{\substack{x=\frac{\pi}{4}+p \\ p>0}}{=} \lim_{p\to 0} \frac{|\cos 2(\frac{\pi}{4}+p)|}{4(\frac{\pi}{4}+p)-\pi} = \lim_{p\to 0} \frac{|\cos(\frac{\pi}{2}+2p)|}{\cancel{\pi}+4p-\cancel{\pi}} =$$

$$= \lim_{p\to 0} \frac{|\cancel{\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos 2p} - \overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{1}\cdot\sin 2p|}{4p} = \lim_{p\to 0} \frac{|-\sin 2p|}{4p} = \lim_{p\to 0} \frac{|\sin 2p|}{4p} =$$

$$= \lim_{p\to 0} \frac{\sin 2p}{2\cdot 2p} = \frac{1}{2} \quad \text{dir.}$$

Yani $f(\frac{\pi}{4}-0) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x) = -\frac{1}{2}$; $f(\frac{\pi}{4}+0) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x) = \frac{1}{2}$ dir.

Not: $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha$, $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin\alpha$ dır.

SORU 11: $f(x) = \dfrac{|\ln x|}{x-1}$ fo. nunun $x \to 1$ için soldan ve sağdan limitini bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \underset{\substack{x=1-p \\ p>0}}{=} \lim\limits_{p \to 0} \dfrac{|\overbrace{\ln(1-p)}^{(-)}|}{(1-p)-1} = \lim\limits_{p \to 0} \dfrac{-\ln(1-p)}{-p} = -1$ dir.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \underset{x=1+p,\ p>0}{=} \lim\limits_{p \to 0} \dfrac{|\ln(1+p)|}{\cancel{1}+p-\cancel{1}} = \lim\limits_{p \to 0} \dfrac{|\overbrace{\ln(1+p)}^{(+)}|}{p} = \lim\limits_{p \to 0} \dfrac{\ln(1+p)}{p} = 1$ dir

SORU 12: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2+3x+3}{x^2+1} \right)^{\frac{x}{2}} = ?$

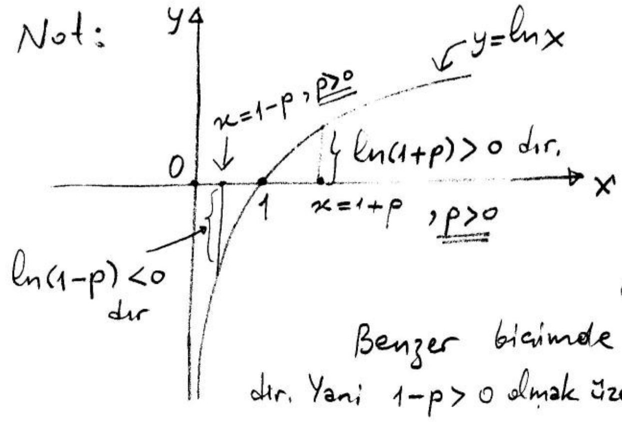
Çözüm: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2+3x+3}{x^2+1} \right)^{\frac{x}{2}} \overset{1^\infty}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2+1+3x+2}{x^2+1} \right)^{\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{3x+2}{x^2+1} \right)^{\frac{x}{2}} =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \left[\left(1 + \dfrac{3x+2}{x^2+1} \right)^{\frac{x^2+1}{3x+2}} \right]^{\frac{3x+2}{x^2+1} \cdot \frac{x}{2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \left[\underbrace{\left(1 + \dfrac{3x+2}{x^2+1} \right)^{\frac{x^2+1}{3x+2}}}_{\to e} \right]^{\overbrace{\frac{3x^2+2x}{2x^2+2}}^{\to \frac{3}{2}}} = e^{3/2}$ dir.

Not: $\lim\limits_{u \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{u} \right)^u = e$; $\lim\limits_{u \to 0} (1+u)^{1/u} = e$ dir.

Bunlar birer özel limittir.

Not:



Yani, $p>0$ için $1+p>1$ olup her iki yanın logaritması alınırsa $\ln(1+p) > \ln 1 = 0$ olup $\ln(1+p) > 0$ dır.

Benzer biçimde $1-p<1 \Rightarrow \ln(1-p) < \ln 1 = 0$ dır. Yani $1-p>0$ olmak üzere, $p>0$ için $\ln(1-p)<0$ dır.

SORU(13): $f(x) = \dfrac{x+1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktayı ve bu noktadaki süreksizliğin cinsini belirtiniz

Çözüm: $x=1$ için $f(1) = \dfrac{1+1}{1+2^{\frac{1}{1-1}}} = \dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{0}}}$ = tanımsız olduğundan $x=1$ de fo. tanımsızdır.

tanımsız

$x=1$ deki süreksizliğin cinsine gelince;

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \underset{\substack{x=1-p \\ p>0}}{=} \lim_{p\to 0} \frac{(1-p)+1}{1+2^{\frac{1}{(1-p)-1}}} = \lim_{p\to 0} \frac{2-p}{1+2^{-\frac{1}{p}}} = \frac{2}{1+0} = 2 \text{ dir.}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \underset{\substack{x=1+p \\ p>0}}{=} \lim_{p\to 0} \frac{(1+p)+1}{1+2^{\frac{1}{(1+p)-1}}} = \lim_{p\to 0} \frac{2+p}{1+2^{\frac{1}{p}}} = 0 \text{ dır.}$$

O halde $x=1$ de I. cins ani sıçramalı süreksizlik vardır.

Not: * $a>1$ için $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$;

$a<1$ için $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$ dır.

Örneğin, $\lim\limits_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{0}} = 2^{\infty} = \infty$ dur.

$\lim\limits_{x\to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} \to 0$ dır.

* Bu soruda h yerine, her zaman pozitifliğini de vurgulamak için p harfi kullanıldı. Zira sağdan, soldan limit çalışmalarındaki h daima pozitiftir. Tanımdan hareketle türevde kullanılan h ise pozitif ya da negatif olabilir. Biz bu h yerine de Δx almayı yeğliyoruz (tercih ediyoruz).

SORU(14): f fonksiyonu I aralığında tanımlı ve pozitif değerler alsın. f fonksiyonu artan ise $\frac{1}{f}$ fonksiyonunun azalan olduğunu gösteriniz.

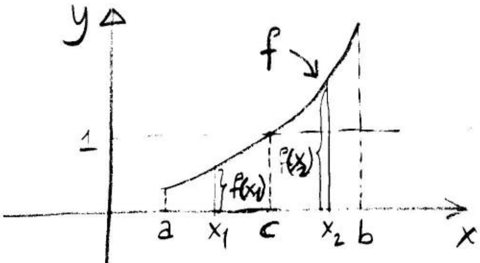
Çözüm: f f.nu I da artan olduğundan her $x_1, x_2 \in I$ ve $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ dir. Yani $f(x_1) - f(x_2) < 0$ dır.

$x_1 < x_2$ için $\frac{1}{f(x_1)} - \frac{1}{f(x_2)} = \frac{\overbrace{f_2(x) - f(x_1)}^{(+)}}{\underbrace{f(x_1) \cdot f(x_2)}_{(+)}} > 0$ dır. Yani

$\frac{1}{f(x_1)} - \frac{1}{f(x_2)} > 0$ dır, Yani $x_1 > x_2$ için $\frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)}$ dir

Bu ise $\frac{1}{f}$ f.nunun azalan olduğunu gösterir.

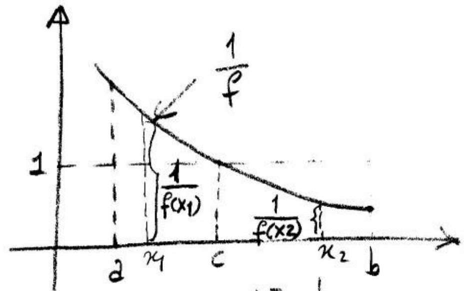
Not: Bu problem için aşağıdaki açıklayıcı grafikleri de çizebiliriz.



$I = [a,b]$

$[a,c]$ de $0 < f(x) \leq 1$
$[c,b]$ da $1 \leq f(x)$ dır.

$x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ dir.



$I = [a,b]$ de
$[a,c]$ için $1 \leq \frac{1}{f(x)}$ dir
$[c,b]$ için $0 < f(x) \leq 1$ dir.

$x_1 < x_2$ için $\frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)}$ dir.

NOT: Bu 14.soruda kısaca, “ $x_1 < x_2$ için $0 < f(x_1) < f(x_2)$ ise eşitsizlik özelliğinden $\dfrac{1}{f(x_1)} > \dfrac{1}{f(x_2)}$ dir.” denilebilirdi.

Ayrıca 10. sayfanın altıncı satırındaki son büyük kesrin payındaki ilk fonksiyon $f_2(x)$ değil $f(x_2)$ olacak. Düzeltir, özür dileriz. Gözden kaçan başka hataları bildirirseniz seviniriz.

Ayrıca 7. sayfanın dördüncü satırındaki ilk kesrin payındaki mutlak değerin içi $\cos(\frac{\pi}{2} - 2p)$ olacaktır.

Soru (15): $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\sqrt{9x^2+12x+5}+3x+4\right]=?$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=\lim\limits_{x\to\mp\infty}\sqrt{a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to\mp\infty}\sqrt{a}\cdot\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}}=\lim\limits_{x\to\mp\infty}\sqrt{a}\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=$

$=\lim\limits_{x\to\mp\infty}\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{a}\left[-\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right]\end{cases}$ dır.

Buna göre;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{9x^2+12x+5}+3x+4\right]\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{9}\left|x+\frac{12}{2\cdot 9}\right|+3x+4\right]=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[3\left(-x-\frac{2}{3}\right)+3x+4\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x-2+\cancel{3x}+4\right)=4-2=2$ bulunur.

Not: II. yol: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{9x^2+12x+5}+3x+4\right]\cdot\frac{1}{\left[\sqrt{9x^2+12x+5}-(3x+4)\right]}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9x^2+12x+5-(9x^2+24x+16)}{\sqrt{9x^2+12x+5}-(3x+4)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-12x-11}{\underset{(-)}{|x|}\sqrt{9+\frac{12}{x}+\frac{5}{x^2}}-3x-4}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\left(12+\frac{11}{x}\right)}{-x\sqrt{9+\frac{12}{x}+\frac{5}{x^2}}-3x-4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\left(12+\frac{11}{x}\right)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{9+\frac{12}{x}+\frac{5}{x^2}}+3+\frac{4}{x}\right)}=$

$=\frac{12}{\sqrt{9}+3}=\frac{12}{3+3}=\frac{12}{6}=2$ bulunur.

Not: $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)$ dir.

SORU (16): $f(x)=\sec x$ fonksiyonunun türevinin $f'(x)=\sec x \cdot \tan x$ olduğunu türevin tanımından hareketle (limit yolundan) gösteriniz.

Çözüm:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sec(x+\Delta x)-\sec x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos(x+\Delta x)}-\frac{1}{\cos x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x-\cos(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\frac{x+(x+\Delta x)}{2}\cdot\sin\frac{x-(x+\Delta x)}{2}}{\Delta x\cdot\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\sin\frac{-\Delta x}{2}}{\Delta x\cdot\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{-2}\cdot\sin(x+\overset{\to 0}{\frac{\Delta x}{2}})\cdot\overset{\to 1}{\sin\frac{-\Delta x}{2}}}{\cancel{-2}\cdot\frac{-\Delta x}{2}\cdot\cos(x+\underset{\to 0}{\Delta x})\cdot\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x\cdot\cos x}=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=$$

$$=\sec x\cdot\tan x$$ bulunur.

Not: Bu soruyu Δx yerine h yazıp $h\to 0$ için limiti alınız. $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ dir, $\cos p-\cos k=-2\sin\frac{p+k}{2}\cdot\sin\frac{p-k}{2}$ dir.

SORU (17): $f(x)=a^x$ in, tanımdan hareketle, türevi nedir?

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}=a^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\ln a}{\ln(1+t)}=$$

$a^h-1=t$, $a^h=1+t$, $h.\ln a=\ln(1+t)$; $h\to 0$ için $t\to 0$

$$=a^x\cdot\lim_{t\to 0}\overset{\to 1}{\frac{t}{\ln(1+t)}}\cdot\ln a=a^x\cdot\ln a$$ bulunur.

Not: Bu soruda kitaptaki gibi h artma miktarı (poz. veya neg.) kullanılmıştır. Siz de aynı soruyu $h=\Delta x$ yazarak yeniden çözünüz.

SORU 18: $f(x)=\sin^2 x$ fonksiyonunun türevinin $f'(x)=\sin 2x$ olduğunu, türevin tanımından harekette (limit yolundan) gösteriniz

Çözüm: $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin^2(x+\Delta x)-\sin^2 x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[\sin(x+\Delta x)+\sin x]\cdot[\sin(x+\Delta x)-\sin x]}{\Delta x}=$$

$$=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}[\sin(x+\overset{\to 0}{\Delta x})+\sin x]}_{=2\sin x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=$$

$$=2\sin x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\frac{(x+\Delta x)+x}{2}\cdot\sin\frac{(x+\Delta x)-\cancel{x}}{2}}{\Delta x}=$$

$$=2\sin x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{2}\cos(x+\overset{\to 0}{\frac{\Delta x}{2}})\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\cancel{2}\cdot\frac{\Delta x}{2}}\overset{\to 1}{}=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$$ bulunur.

Not: $\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$ dir.

$\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$ dir (özel limit)

Ek sorular: Aşağıdaki fonksiyonların herbirinin türevinin karşılarında yazılı f.lar olduğunu tanımdan harekette gösteriniz:

* $f(x)=\tan x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ dir.
* $f(x)=e^{3x} \Rightarrow f'(x)=3\cdot e^{3x}$ dir.
* $f(x)=2^{5x} \Rightarrow f'(x)=5\cdot 2^{5x}\cdot\ln 2$ dir.
* $f(x)=e^{\sin x} \Rightarrow f'(x)=\cos x\cdot e^{\sin x}$ dir.
* $f(x)=\mathrm{sh}x \Rightarrow f'(x)=\mathrm{ch}x$ dir.
* $f(x)=\mathrm{ch}x \Rightarrow f'(x)=\mathrm{sh}x$ dir.
* $f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x$ dir.

SORU (19): $f(x)=\log_a x$ in türevinin $f'(x)=\frac{1}{x\cdot \ln a}$ olduğunu türevin tanımından hareketle (limit yolu ile) gösteriniz

Çözüm:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{x\cdot\frac{\Delta x}{x}}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log_a\overbrace{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}}^{e}=$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\log_a e=\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\cdot\ln a}$$ dır.

Not: $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ dır. $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ dır.

Ek sorular: Aşağıdaki herbir fonksiyonun türevinin karşılarında yazılı f.lar olduğunu, tanımdan hareketle gösteriniz

* $f(x)=\tan^2 x \Rightarrow f'(x)=2\tan x\cdot(1+\tan^2 x)$ dır.
* $f(x)=\log_2 3x \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{3x\cdot\ln 2}=\frac{1}{x\cdot\ln 2}$ dır.
* $f(x)=\ln\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2x}$ dır.
* $f(x)=\ln(1+x) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x}$ dır.
* $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2x\cdot\sqrt{x}}$ dır.

SORU 20 : $f(x)=\sqrt{1+x}$ fonksiyonunun türevini, türevin tanımından hareketle (limit yolundan) bulunuz.

Çözüm:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+(x+\Delta x)}-\sqrt{1+x}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+(x+\Delta x)}-\sqrt{1+x}}{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{1+(x+\Delta x)}+\sqrt{1+x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{1}+(x+\Delta x)-(\cancel{1+x})}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{1+x+\Delta x}+\sqrt{1+x}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}^{1}}{\cancel{\Delta x}_{1}\cdot\left(\sqrt{1+x+\Delta x}+\sqrt{1+x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x+\underbrace{\Delta x}_{\to 0}}+\sqrt{1+x}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{1+x}}$$ bulunur.

SORU 21: $f(x)=\text{Arctan}\,x$ in türevinin $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ olduğunu türevin tanımından hareketle (limit yolundan) gösteriniz.

Çözüm:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{Arctan}(x+\Delta x)-\text{Arctan}\,x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{Arctan}\dfrac{\cancel{x}+\Delta x-\cancel{x}}{1+(x+\Delta x)\cdot x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{Arctan}\dfrac{\Delta x}{1+(x+\Delta x)\cdot x}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{Arctan}\dfrac{\Delta x}{1+(x+\Delta x)\cdot x}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overbrace{\text{Arctan}\dfrac{\Delta x}{1+(x+\Delta x)\cdot x}}^{\to 1}}{[1+(x+\underset{0}{\Delta x})\cdot x]\cdot\dfrac{\Delta x}{1+(x+\Delta x)\cdot x}}=\frac{1}{1+(x+0)\cdot x}=\frac{1}{1+x\cdot x}=\frac{1}{1+x^2}$$

bulunur.

Not: Bu soru, tanımdan hareketle değil de bileşke fonksiyonun türevi yolundan çözmek istenseydi;

$y=f(x)=\text{Arctan}\,x \Leftrightarrow \tan y = x$ olup her iki yanın x'e göre türevi alınırsa (y nin x'in bir fonksiyonu olduğu gözönünde tutularak)

$$\frac{d(\tan y)}{dx}=\frac{d(\tan y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{d(x)}{dx}\Rightarrow(1+\tan^2 y)\cdot y'=1 \text{ den}$$

$$y'=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

$\tan y = x$ old.

bulunurdu. Yani $(\text{Arctan}\,x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ dir.