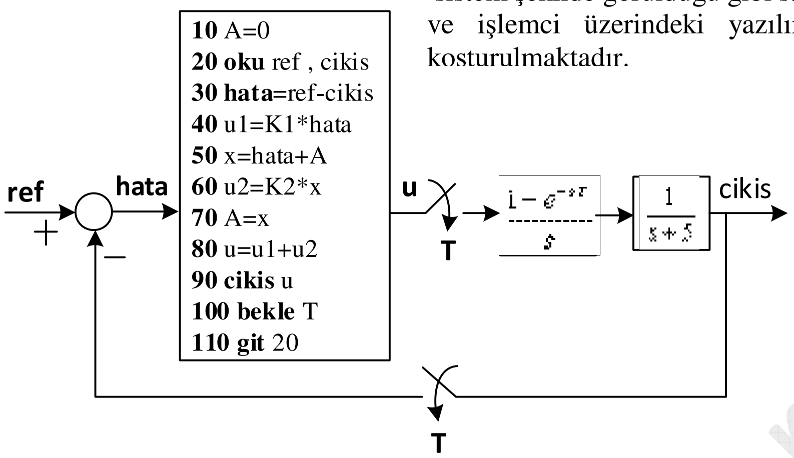
DİJİTAL KONTROL VİZE SINAVI 25/11/2015

S.1

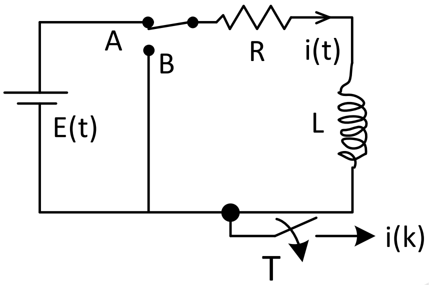
Açık çevrim transfer fonksiyonu $G(s)=\dfrac{1}{s+5}$ olarak verilen sistem şekilde görüldüğü gibi sayısal işlemci ile kontrol edilmektedir ve işlemci üzerindeki yazılım **T=0.02** sn. örnekleme zamanı ile kosturulmaktadır.



a-Yazılımı adım adım koşturarak kullanılan kontrolcünün transfer fonksiyonu D(z) elde ediniz.

b-%2 kriterine göre yerleşme zamanı **ts=1.8** sn ve $\zeta=0.7156$ olması istenmektedir. Kontrol kuralına ait K1 ve K2 katsayılarını hesaplatınız. (**İstenilen yöntem kullanabilir**.)

S.2



Verilen **E(t)-R-L** devresinde anahtar A konumunda çok uzun süre (yeteri kadar süre) kaldıktan sonra B konumuna alınmaktadır. **E(t)=5, L=R=1** ve **T=0.1** sn olarak verilmektedir.

a-Sisteme ait **yaklaşık** ayrık zaman durum denklem(ler)ini elde ediniz.

b-Anahtar **B** konumuna alındıktan sonra örneklenen **i(k)** akımının **k=3** için değerini hesaplayınız.(Serbest davranış için çözüm, **i(0)=E(t)/R**)

S.3 $y(k)-0.5032y(k-1)+0.04979y(k-2)=u(k-2)$ diferans (fark) denklemi ile verilen sistemde **(ilk koşullar sıfır)** **a)** Sisteme ait durum denklemlerini gözlenebilir kanonik formda yazınız.
b) Sisteme ait durum denklemlerini köşegen kanonik formda yazınız (basit kesire ayırarak yapınız)

S.4 Ayrık-zaman durum denklemleri $x(k+1)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(k)$ ve $y(k)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x(k)$ olan sistemin transfer fonksiyonunu elde ediniz.

HatırlatmaLar aşağıda veriLmişTir:

$$X(z)=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[(s-s_i)^m X(s)\frac{z}{z-e^{sT}}\right]\Bigg|_{s=s_i}\right\}$$

$$t_s=\frac{4}{\xi w_n} \quad (\%\ 2 \text{ kriteri})$$

$$s_{1,2}=-\xi w_n \pm j w_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$K_i=-\frac{\sin\psi}{|G_p(z_1)|}\,\frac{|z_1|-2\cos\beta+\dfrac{1}{|z_1|}}{\sin\beta}$$

$$z_1=|z_1|e^{j\beta}$$

$$G_p(z_1)=|G_p(z_1)|e^{j\psi}$$

$$\phi(t)=L^{-1}\left\{[sI-A]^{-1}\right\}$$

$$H=e^{AT}\left[\int_0^T e^{-A\tau}\,d\tau\right]B$$

$$K_p=-\frac{\cos\psi}{|G_p(z_1)|}-2K_i|z_1|\frac{|z_1|-\cos\beta}{|z_1|^2-2|z_1|\cos\beta+1}+\frac{-|z_1|\sin\psi+\cos\beta\sin\psi}{|G_p(z_1)|\sin\beta}$$

$$\phi(k)=Z^{-1}\left\{z[zI-G]^{-1}\right\}$$

$$x(kT)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_i)^m X(z)z^{k-1}\right]_{z=z_i}$$

Başarılar..
Prof. Dr. Ayhan ÖZDEMİR
Süre 100 dk

a) $u_1(z) = K_1 * hata(z) \rightarrow \dfrac{u_1(z)}{hata(z)} = K_1$ Oransal Kontrol Kuralı (P kontrolör)

$$x(z) = hata(z) + A$$
$$u_2(z) = K_2 * x(z)$$
$$A = z^{-1}x(z) \rightarrow x(z) = hata(z) + z^{-1}x(z) \rightarrow hata(z) = x(z) - z^{-1}x(z)$$

Transfer fonksiyonu ise, $\dfrac{u_2(z)}{hata(z)} = \dfrac{K_2 * x(z)}{x(z) - z^{-1}x(z)}$ düzenlenir ise, $\dfrac{u_2(z)}{hata(z)} = \dfrac{K_2 * \cancel{x(z)}}{\cancel{x(z)} - z^{-1}\cancel{x(z)}}\dfrac{z}{z}$

$\dfrac{u_2(z)}{hata(z)} = K_2\dfrac{z}{z-1}$ İntegral Kontrol Kuralı (I kontrolör) olarak elde edilir.

Çıkış kontrol işareti, $u(z) = u_1(z) + u_2(z)$ olduğundan

$D(z) = \dfrac{u(z)}{hata(z)} = K_1 + K_2\dfrac{z}{z-1}$ Kontrol Kuralı Oransal Integral (**PI kontrolör**) olarak elde edilir.

b)

$$G(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{s+5}\right\} = \left(1-e^{-sT}\right)\left\{\cancel{s}\frac{1}{\cancel{s}(s+5)}\frac{z}{z-e^{sT}}\bigg|_{s=0} + \cancel{(s+5)}\frac{1}{s\,\cancel{(s+5)}}\frac{z}{z-e^{sT}}\bigg|_{s=-5}\right\}$$

$$G(z) = \left(1-z^{-1}\right)\left\{\frac{1}{(0+5)}\frac{z}{z-e^{0*0.02}} + \frac{1}{-5}\frac{z}{z-e^{-5*0.02}}\right\} \rightarrow \left(\frac{z-1}{\cancel{z}}\right)\left\{\frac{1}{5}\frac{\cancel{z}}{z-1} - \frac{1}{5}\frac{\cancel{z}}{z-0.9048}\right\}$$

$$G(z) = \frac{1}{5}(z-1)\left\{\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-0.9048}\right\} \rightarrow G(z) = \frac{1}{5}\left\{1 - \frac{z-1}{z-0.9048}\right\} \rightarrow G(z) = \frac{1}{5}\left\{\frac{\cancel{z} - 0.9048 \cancel{-z} + 1}{z-0.9048}\right\}$$

$G(z) = \dfrac{0.019}{z-0.9048}$ Kontrol edilen sistemin ZOH'lu açık çevrim transfer fonksiyonu.

$\zeta = 0.7156$ verilmiştir. $t_s = \dfrac{4}{\zeta\, w_n}$ ise $w_n = \dfrac{4}{\zeta t_s} = \dfrac{4}{0.7156*1.8} \rightarrow w_n = 3.1052$

İstenen kontrol kutupları: $s_{1,2} = -\xi w_n \pm j w_n\sqrt{1-\xi^2}$ $s_{1,2} = -0.7156*3.1052 \pm j3.1052\sqrt{1-0.7156^2}$

$s_{1,2} = -2.222 \pm j2.1689$ $\rightarrow$ sürekli zaman kontrol kutupları

T örnekleme zamanına göre ayrık zaman kontrol kutupları:

$$z = e^{sT} \rightarrow z_{1,2} = e^{s_{1,2}T} \rightarrow z_{1,2} = e^{(-2.222 \pm j2.1689)0.02}$$

$z_{1,2} =$ 0.9556 $\pm$ 0.0415j olarak elde edilir.

$$|z_1| = \sqrt{0.0556^2 + 0.0415^2} \rightarrow |z_1| = 0.9556 \qquad \angle z_1 = \beta = \tan^{-1}\frac{0.0415}{0.9556} \rightarrow \beta = 0.0434\ (rad)$$

$$G(z) = \frac{0.019}{z-0.9048} \rightarrow G(z_1) = G(z)\big|_{z=z_1} = \frac{0.019}{z_1 - 0.9048} \rightarrow G(z_1) = \frac{0.019}{0.9556 + 0.0415j - 0.9048}$$

$$G(z_1) = \frac{0.019}{0.0508 + 0.0415j} \rightarrow G(z_1) = 0.2243 - 0.1832j$$

$$|G(z_1)| = 0.2902 \qquad \angle G(z_1) = \psi = \tan^{-1}\frac{-0.1832}{0.2243} \rightarrow \psi = -0.6848\ (rad)$$

NOT: Aşağıda çözümlerde bulunan katsayılar, $K_P = K_1 \quad K_i = K_2$ *dir.*

Parametrik Denklemlerden PI Katsayı Tasarımı

$$K_i = -\frac{\sin\psi}{|G_p(z_1)|}\frac{|z_1| - 2\cos\beta + \frac{1}{|z_1|}}{\sin\beta} = -\frac{\sin(-0.6848)}{0.2902}\frac{0.9556 - 2\cos(0.0434) + \frac{1}{0.9556}}{\sin(0.0434)}$$

$$K_i = 0.1938$$

$$K_p = -\frac{\cos(-0.6848)}{0.2902} - 2*0.1938*0.9556\frac{0.9556 - \cos(0.0434)}{0.9556^2 - 2*0.9556\cos(0.0434) + 1} + \frac{-0.9556\sin(-0.6848) + \cos(0.0434)\sin(-0.6848)}{0.2902\sin(0.0434)}$$

$$K_p = -0.5312$$

2.YOL ***PI kontrol kurallı kapalı çevrim transfer fonksiyona ait karakteristik denklem,***

$F(z) = 1 + G_{PI}(z)G_P(z) = 0$ *ifade edilir.* $1 + \left(K_p + K_i\frac{z}{z-1}\right)\frac{0.019}{z-0.9048} = 0$

Karakteristik denklem bilinenler eşitliğin bir tarafına bilinmeyenler diğer tarafta olacak şekilde düzenlenirse,

$$G_{PI}(z) = \frac{-1}{G_P(z)} \quad \Rightarrow \quad \left.\left(K_p + K_i\frac{z}{z-1}\right)\right|_{z=0.9556+0.0415j} = -\left.\frac{1}{\frac{0.019}{z-0.9048}}\right|_{z=0.9556+0.0415j}$$

$$\left(K_p + K_i\frac{0.9556+0.0415j}{(0.9556+0.0415j)-1}\right) = -\frac{1}{\frac{0.019}{0.9556+0.0415j-0.9048}}$$

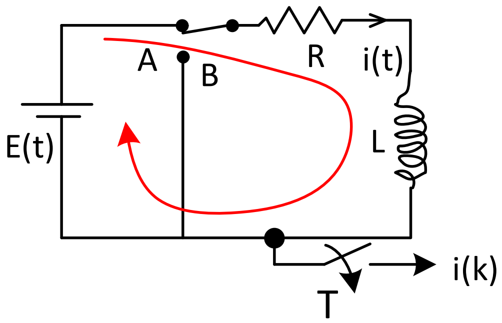
$$\left(K_p + K_i\frac{0.9556+0.0415j}{-0.0444+0.0415j}\right) = -\frac{0.0508+0.0415j}{0.019} \rightarrow K_p + K_i(-11.02-11.23j) = -2.6737-2.1842j$$

ifadesinde ara işlemler yapılıp her iki taraftaki reel ve sanal kısımlar birbirine eşitlenirse,

$$-2.1842 = -11.23K_i \quad \Rightarrow \quad K_i = 0.1945$$

$$K_p = -2.6737 + 11.02K_i = -2.6737 + 11.02*0.1945 \quad \Rightarrow K_p = -0.5279$$

C 2.



Şekildeki devreden çevre akımı yazılır ise,

$E(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t)$ elde edilir. Buradan durum denklemi

$\dfrac{di(t)}{dt} = -\dfrac{R}{L}i(t) + \dfrac{1}{L}E(t)$ olarak yazılır. Standart durum denklem formu ile karşılaştırılır ise,

$\dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$ $A = -\dfrac{R}{L}$ ve $B = \dfrac{1}{L}$ $u(t) = E(t)$ dir.

Yaklaşık durum denklem ifadesi ise, $x(k+1) = (AT+I)x(k) + BTu(k)$ dir.

$AT + I = \left[-\dfrac{RT}{L} + 1\right]$ ve $BT = \dfrac{T}{L}$ olur. . **E(t)=5, L=R=1** ve **T=0.1** sn olarak verilmiş olan sayısal değerler yerlerine koyulur ise yaklaşık ayrık zaman durum denklemi

$x(k+1) = 0.9x(k) + 0.1u(k)$ olarak elde edilir.

$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$ genel formu göz önüne alınır ve Anahtar B konumunda iken $u(k) = E(k) = 0$ olduğu göz önünde bulundurulur.

1.YOL Durum denklem Genel Çözümüden

Ayrık zaman durum denklem çözümünde

$$x(k) = G^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{(k-1-j)} Hu(j) \quad u(j) = 0 \text{ yapılır ise } \quad x(k) = G^k x(0) \text{ olur.}$$

$$x(0) = i(0) = \frac{E(t)}{R} = \frac{5}{1} = 5\,A$$

$$x(k) = G^k x(0) \;\rightarrow\; x(3) = 0.9^3\, 5 = 3.645\, Amper$$

2.YOL Durum Geçiş Matrisinden

$$x(k) = Z^{-1}\left\{z\left[zI - G\right]^{-1}\right\} x(0) = \phi(k)x(0)$$

$$\phi(k) = Z^{-1}\left\{z\left[zI - G\right]^{-1}\right\} = Z^{-1}\left\{z\left[z - 0.9\right]^{-1}\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-0.9}\right\}$$

$$\phi(k) = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-0.9}\right\} = \cancel{z-0.9} \quad \frac{\cancel{z}}{\cancel{z-0.9}} z^{\cancel{k-1}}\Big|_{z=0.9} \rightarrow$$

$\phi(k) = 0.9^k$ olarak elde edilir.

$$x(k) = \phi(k)x(0) \quad \rightarrow \quad x(3) = 0.9^3\, 5 = 3.645\, Amper$$

C.3. $y(k) - 0.5032y(k-1) + 0.04979y(k-2) = u(k-2)$ verilen fark denkleminden z-domenine geçilir.

$Y(z) - 0.5032z^{-1}Y(z) + 0.04979z^{-2}Y(z) = z^{-2}U(z)$ $\quad Y(z)$ yalnız bırakılır.

$Y(z) = 0.5032z^{-1}Y(z) - 0.04979z^{-2}Y(z) + z^{-2}U(z)$ $\quad$ ve

$$\underbrace{Y(z) = z^{-1}\left\{0.5032Y(z) + \underbrace{z^{-1}\{-0.04979Y(z) + U(z)\}}_{x_1}\right\}}_{x_2}$$

z^{-1} çarpan olarak düzenlenir ve durum değişkenleri tanımlanır.

$Y(z) = x_2(z)$ ifadesinden çıkış denklemi $y(k) = x_2(k)$ yazılır. Aşağıdaki denklemlerde

$Y(z) = x_2(z)$ yazılır.

$$x_1(z) = z^{-1}\{-0.04979Y(z) + U(z)\} \rightarrow zx_1(z) = -0.04979x_2(z) + U(z)$$

$x_1(k+1) = -0.04979x_2(k) + u(k)$ $\qquad$ 1. Durum denklem

$$x_2(z) = z^{-1}\{0.5032x_2(z) + x_1(z)\} \rightarrow \quad zx_2(z) = 0.5032x_2(z) + x_1(z)$$

$x_2(k+1) = 0.5032x_2(k) + x_1(k)$ $\qquad$ 2. Durum denklem

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.04979 \\ 1 & 0.5032 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

b)

$y(k)-0.5032\,y(k-1)+0.04979\,y(k-2)=u(k-2)$ verilen fark denkleminden z-domenine geçilir.

$Y(z)-0.5032z^{-1}Y(z)+0.04979z^{-2}Y(z)=z^{-2}U(z)$ $\frac{Y(z)}{U(z)}$ yalnız bırakılır.

$$Y(z)\left\{1-0.5032z^{-1}+0.04979z^{-2}\right\}=z^{-2}U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z^{-2}}{1-0.5032z^{-1}+0.04979z^{-2}}\,\frac{z^{2}}{z^{2}}\;\rightarrow\;\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{1}{z^{2}-0.5032\,z+0.04979}$$

Köşegen form için önce basit kesirlere ayrılır.

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{1}{z^{2}-0.5032\,z+0.04979}=\frac{A}{z-0.3678}+\frac{B}{z-0.1354}\qquad A=4.3029\qquad B=-4.3029$$

$$Y(z)=4.3029\underbrace{\frac{U(z)}{z-0.3678}}_{x_1}-4.3029\underbrace{\frac{U(z)}{z-0.1354}}_{x_2}\;\rightarrow\;Y(z)=4.3029x_1(z)-4.3029x_2(z)$$

$$x_1(z)=\frac{U(z)}{z-0.3678}\;\rightarrow\;zx_1(z)-0.3678x_1(z)=U(z)\;\rightarrow\;zx_1(z)=0.3678x_1(z)+U(z)$$

$x_1(k+1)=0.3678x_1(k)+u(k)$ **1. Durum denklemi.**

$$x_2(z)=\frac{U(z)}{z-0.1354}\;\rightarrow\;zx_2(z)-0.1354x_2(z)=U(z)\;\rightarrow\;zx_2(z)=0.1354x_2(z)+U(z)$$

$x_2(k+1)=0.1354x_2(k)+u(k)$ **2. Durum denklemi.**

1 ve 2.durum denklemleri kullanılarak vektör matris form aşağıda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.3678 & 0\\0 & 0.5032\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(k)$$

$Y(z)=4.3029x_1(z)-4.3029x_2(z)$ ifadesinden,

$$y(k)=\begin{bmatrix}4.3029 & -4.3029\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}$$ çıkış denklemi elde edilir.

C.4 Ayrık-zaman durum denklemleri $x(k+1)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(k)$ ve $y(k)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x(k)$ ile verilmiş olan sistemde katsayılar matrisleri aşağıda verilmiştir.

$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$ ve $D=0$ dır.

$T(z)=C\left[zI-A\right]^{-1}B+D$ **dir**. $T(z)=C\,\dfrac{\overbrace{[cof\,(zI-A)]^{T}}^{AdjA}\,B}{\left|zI-A\right|}$

$$\left[zI-A\right]=\begin{bmatrix}z-2 & -1\\ 0 & z-1\end{bmatrix}\rightarrow\left[zI-A\right]^{-1}=\frac{1}{(z-2)(z-1)}\begin{bmatrix}z-1 & 1\\ 0 & z-2\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\left[zI-A\right]^{-1}=\frac{1}{z^{2}-3z+2}\begin{bmatrix}z-1 & 1\\ 0 & z-2\end{bmatrix}$$ Katsayılar matrisleri aşağıda yerlerine koyulur.

$$T(z)=C\left[zI-A\right]^{-1}B+D\rightarrow$$

$$T(z)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{z^{2}-3z+2}\begin{bmatrix}z-1 & 1\\ 0 & z-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}+0\rightarrow$$

$$T(z)=\frac{1}{z^{2}-3z+2}\begin{bmatrix}z-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\rightarrow$$ Ayrık-zaman Transfer fonksiyonu,

$$T(z)=\frac{z-2}{z^{2}-3z+2}$$ olarak elde edilir.