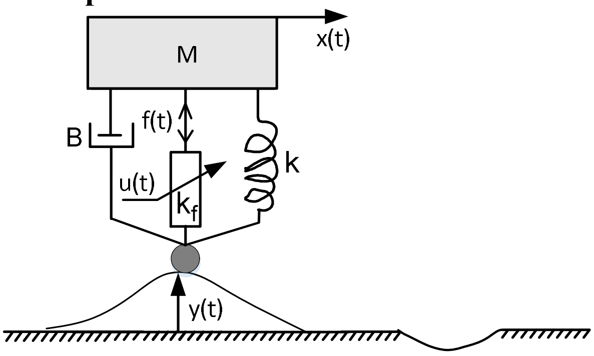
DİJİTAL KONTROL YIL İÇİ SINAVI   16/11/2016

S-1 30p



Yeni araçlarda aktif süspansiyon sistemleri yaygın olarak kullanılmaktadır. Aktif süspansiyon, şok emici ve yaydan oluşan aracın pasif süspansiyonuna destek olur. Şekilde Aktif süspansiyon kuvveti $f(t) = k_f u(t)$ ile üretilen bir çeyrek araç modeli verilmiştir. $y(t)$ yoldaki tümsek ve/veya çukurlardan oluşmaktadır. $x(t)$ araç kasasının konumudur. Şekilde verilen sistemi tanımlayan diferansiyel denklem,

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} = B\left(\frac{dy(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt}\right) + k(y(t) - x(t)) + f(t)$$

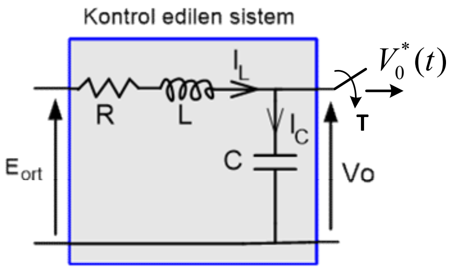
olarak verilmektedir. $k_f = 1, M = 1, k = 0.5\ ve\ B = 0.5$ birim olarak verilmektedir.

a) $U(s)$ ve $Y(s)$ girişler için çıkış ifadesi $X(s)$ 'i elde ediniz. (Y(s) bozucu ve U(s) kontrol işaret giriş)

b) $X(s)$ 'in kaplı çevrim kontrolü için **PD** kontrol kuralı uygulanacaktır. İstenen ikinci derece karakteristik denklemde parametreler $\zeta = 0.707$ ve $w_n = 2.22$ rad/sn olduğuna göre karakteristik denklem metodu ile K_p ve K_d katsayılarını hesap ediniz.

c) Tüm sisteme ait kapalı-çevrim kontrol blok diyagramını çiziniz.

S-2 20p



a-Şekilde verilen R-L-C devresinde $\frac{V_0(s)}{E_{ort}(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$ olarak verilmektedir.L=0.1 H, C=5F, R=0.3oHm ve T=0.05 sn için $\frac{V_0(z)}{E_{ort}(z)}$ elde ediniz. (**!!!! ZOH' suz çevrim yapılacak**).

b-Ayrık zaman durum ve çıkış denklemlerini faz kanonik formda yazınız.

S-3 20p $y(k+2) - 2y(k+1) + y(k) = u(k+1)$ fark denklemi ile verilen sisteme ait a-Transfer fonksiyonunu yazınız. **b-** Sembolik dilde programlayınız (**!!!!** doğrudan prog. yöntemi ile).

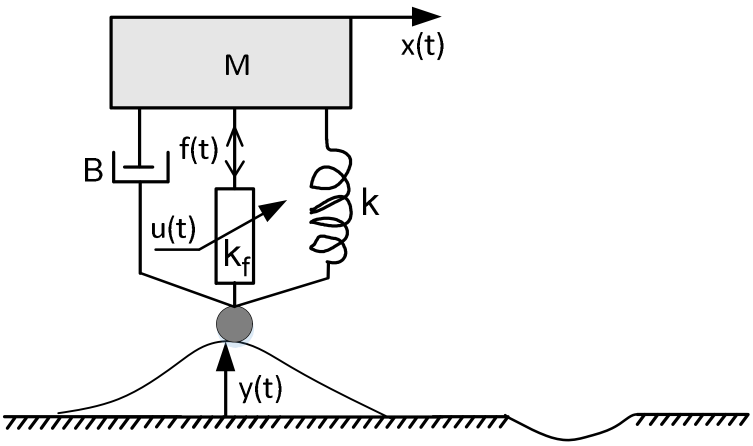
S-4 30p $G(s) = \frac{0.85}{0.2s+1}$ ile verilen sistem sayısal **PID** ile kontrol edilecektir. Örnekleme zamanı $T = 0.02$ **sn**, %2 kriterine göre yerleşme zamanı $t_s = 1.6\ sn$ ve $\zeta = 0.707$ ve hız hatasının $e_{ss} = 0.4$ olması istenmektedir. K_p , K_d ve K_i katsayılarını hesap ediniz.

$$K_d = \frac{|z_1|}{\sin\beta}\left\{\frac{K_i \sin\beta}{|z_1| - 2\cos\beta + \frac{1}{|z_1|}} + \frac{\sin\psi}{|G_p(z_1)|}\right\}$$

$$X(z) = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[(s-s_i)^m X(s)\frac{z}{z-e^{sT}}\right]\Bigg|_{s=s_i}\right\}$$

$$K_p = -\frac{\cos\psi}{|G_p(z_1)|} - 2K_i|z_1|\frac{|z_1| - \cos\beta}{|z_1|^2 - 2|z_1|\cos\beta + 1} + \frac{-|z_1|\sin\psi + \cos\beta\sin\psi}{|G_p(z_1)|\sin\beta}$$

Prof.Dr. Ayhan Özdemir
Süre 100 dak.
Başarılar



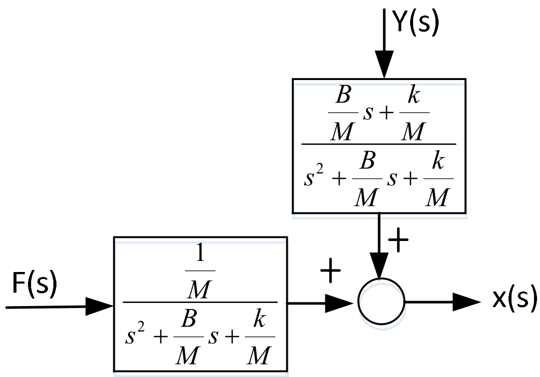
a) $M\frac{d^2x(t)}{dt^2} = B(\frac{dy(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt}) + k(y(t) - x(t)) + f(t)$ verilmiş olan diferansiyel denklemden Laplace dönüşümü yapılır (Transfer fonksiyonu için **ilk koşullar sıfır alınarak**).

$$Ms^2x(s) = Bs(y(s) - x(s)) + k(y(s) - x(s)) + F(s)$$

$$(Ms^2 + Bs + k)x(s) = (Bs + k)y(s) + F(s)$$

$x(s) = \frac{(Bs+k)y(s)+F(s)}{Ms^2+Bs+k}$ denlklemi düzenlenir ise,

$x(s) = \frac{\left(\frac{Bs+k}{M}\right)}{s^2+\frac{B}{M}s+\frac{k}{M}}\, y(s) + \frac{\frac{1}{M}}{s^2+\frac{B}{M}s+\frac{k}{M}}\, F(s)$ olarak elde edilir. Blok diyagram olarak aşağıda verilmiştir.

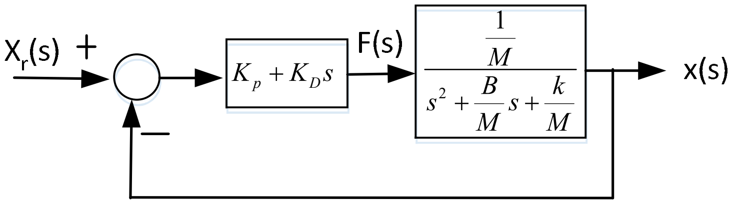


b) 1. YOL: Karaktersitik denklemleri eşitleyerek

İstenen karakteristik denklem örnek ikinci dereceden sistemin karakteristik denklemidir. (parametreler $\zeta = 0.707$ ve $w_n = 2.22$ rad/sn)

$$T(s) = \frac{w_n^2}{s^2+2\boldsymbol{\zeta w_n}s+w_n^2} = \frac{2.22^2}{s^2+20.707*2.22\ \ s+2.22^2} = \frac{4.938}{s^2+3.1391s+4.938}$$

Y(S)=0 için PD kontrolcülü sistemin kontrol blok diyagramı aşağıda verilmiştir.



karakteristik denklemi,

Kontrol blok diyagramından, $\frac{X(s)}{X_r(s)} = \dfrac{(K_p + K_d s)\left(\frac{\frac{1}{M}}{s^2+\frac{B}{M}s+\frac{k}{M}}\right)}{1+(K_p + K_d s)\left(\frac{\frac{1}{M}}{s^2+\frac{B}{M}s+\frac{k}{M}}\right)} = \dfrac{\frac{\frac{1}{M}(K_p+K_d s)}{s^2+\frac{B}{M}s+\frac{k}{M}}}{\frac{\left(s^2+\frac{B}{M}s+\frac{k}{M}\right)+\frac{1}{M}(K_p+K_d s)}{s^2+\frac{B}{M}s+\frac{k}{M}}} =$

$\dfrac{\frac{1}{M}(K_p+K_d s)}{\left(s^2+\frac{B}{M}s+\frac{k}{M}\right)+\frac{1}{M}(K_p+K_d s)} = \dfrac{\frac{1}{M}(K_p+K_d s)}{s^2+\left(\frac{B+K_D}{M}\right)s+\left(\frac{k+K_p}{M}\right)}$

PD kontrolcülü sitem karakteristik denklemi istenen karakteristik denkleme eşitlenir.

$$s^2 + \left(\frac{B+K_D}{M}\right)s + \left(\frac{k+K_p}{M}\right) = s^2 + 2\zeta w_n s + {w_n}^2$$

K_p ve K_D için çözüm yapılır ise, parametreler $\zeta = 0.707$ ve $w_n = 2.22$ rad/sn $M = 1, k = 0.5\ ve\ B = 0.5$ olmak üzere,

$\frac{B+K_D}{M} = 2\zeta w_n \quad \rightarrow\ K_D = 2\zeta w_n M - B \quad K_D = 2 * 0.707 * 2.22 * 1 - 0.5 \quad K_D = 2.639$

$\frac{k+K_p}{M} = {w_n}^2 \quad \rightarrow \quad K_p = {w_n}^2 M - k \qquad K_p = 2.22^2 * 1 - 0.5 \qquad K_p = 4.4383$

olarak elde edilir.

2. Yol: Karakteristik denklemden yerine koyarak;

$G_{PD}(s).G_p(s)$ =*PD kontrol kurallı kapalı çevrim transfer fonksiyona ait karakteristik denklem,*

$F(s) = 1 + G_{PD}(s)G_p(s) = 0$ *olarak ifade edilir.*

$1 + (K_p + K_D s)G_P(s) = 0$

İstenen örnek ikinci dereceden sistemin karakteristik denklem kökleri

$s_{1,2} = -\zeta w_n \pm J w_n \sqrt[2]{1-\zeta^2} \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = -1.57 \pm J1.57 \quad olarak\ elde\ edilir.$

Karakteristik denklem bilinenler eşitliğin bir tarafına bilinmeyenler diğer tarafta olacak şekilde düzenlenirse,

$$G_{PD}(s) = \frac{-1}{G_p(s)} \quad \Longrightarrow \quad (K_P + K_D s) \quad = -\frac{1}{\frac{1}{s^2+0.5s+0.5}}$$

Yukarıdaki eşitlikte $S = S_1$ yerine koyulur ise $S_1 = -1.57 + \mathrm{j}1.57$

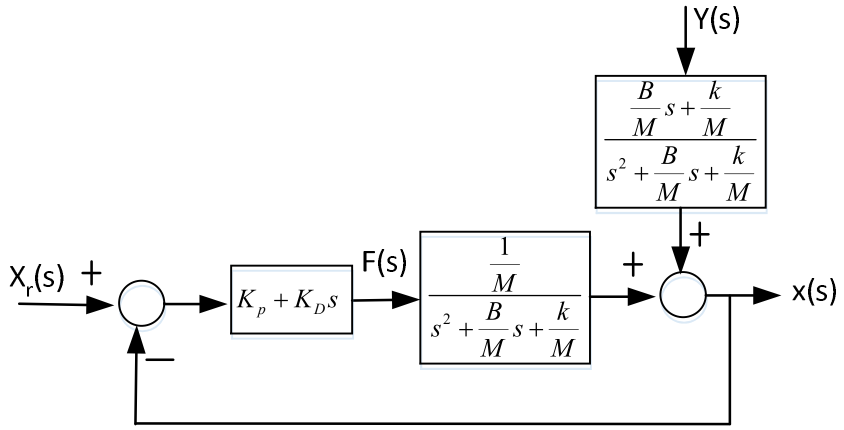
$$\left(K_P + K_D(-1.57 + \mathrm{j}1.57)\right) = -\frac{1}{\frac{1}{(-1.57 + \mathrm{j}1.57)^2 + 0.5(-1.57 + \mathrm{j}1.57) + 0.5}}$$

ifadesinde ara işlemler yapılıp her iki taraftaki reel ve sanal kısımlar birbirine eşitlenirse,

$$j1.57K_D = j4.1448 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_D = 2.64}$$

$$K_P = 1.57K_D + 0.285 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_P = 4.4455}$$

c) **PD** Kontrolcülü tüm sisteme ait kapalı çevrim kontrol blok diyagramı aşağıda verilmiştir.



C-2 a) $\frac{V_0(s)}{E_{ort}(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$ tarnsfer fonksiyonu L=0.1 H, C=5F, R=0.3 oHm parametreleri yerlerine koyulur ise, $\frac{V_0(s)}{E_{ort}(s)} = \frac{2}{s^2+3s+2} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$ olarak elde edilir.

Rezidü yöntemi uygulanarak z-dönüşümü yapılır.

$$\frac{V_0(z)}{E_{ort}(z)} = \mathbf{Z}\left\{\frac{2}{(s+1)(s+2)}\right\}$$
$$= (s+1)\,\frac{2}{(s+1)(s+2)}\frac{z}{z-e^{sT}}\bigg|_{s=-1} + (s+2)\,\frac{2}{(s+1)(s+2)}\frac{z}{z-e^{sT}}\bigg|_{s=-2}$$

$$= \frac{\mathbf{2}}{(-\mathbf{1}+\mathbf{2})}\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{e}^{-\mathbf{0.05}}} + \frac{\mathbf{2}}{(-\mathbf{2}+\mathbf{1})}\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{e}^{-\mathbf{0.1}}}$$

$$\frac{V_0(z)}{E_{ort}(z)} = \frac{0.004639\, z}{z^2 - 1.856\, z + 0.8607}$$

olarak elde edilir.

b) Ayrık zaman durum ve çıkış denklemlerinin faz kanonik form için,

$$\frac{V_0(z)}{E_{ort}(z)} = \frac{0.004639\, z}{z^2 - 1.856\, z + 0.8607}\frac{x(z)}{x(z)}$$

yapılır ve düzenlenir ise,

$$E_{ort}(z) = (z^2 - 1.856\, z + 0.8607)\, x(z)$$

$$E_{ort}(z) = z^2 x(z) - 1.856\, zx(z) + 0.8607\, x(z) \quad \rightarrow$$

$\boxed{z^2 x(z) = 1.856\, zx(z) - 0.8607\, x(z) + E_{ort}(z)}$ $\boxed{V_0(z) = 0.004639\, z\, x(z)}$

Durum değişkenleri tanımlanır.

$x(z)$ şimdiki durum ise, $x(z) \rightarrow x(k) = x_1(k)$

$z\, x(z)$ bir sonraki durum $z\, x(z) \rightarrow x(k+1) = x_2(k) \rightarrow \boxed{x_1(k+1) = x_2(k)}$ **1.Durum denklemi**

$z^2 x(z)$ iki önceki durum $z^2 x(z) = x_2(k+1)$ olur. Bu tanımlamalar ,

$$z^2 x(z) = 1.856\, zx(z) - 0.8607\, x(z) + E_{ort}(z) \quad \text{denkleminde}$$

yerlerine koyulur ise,

$$\boxed{x_2(k+1) = 1.856\, x_2(k) - 0.8607\, x_1(k) + E_{ort}(k)}$$ **2.Durum denklemi**

$\boxed{V_0(\mathrm{k}) = \mathrm{y}(\mathrm{k}) = A}$ Çıkış denklemi.

Vektör matris formunda aşağıda verildiği gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.8607 & 1.856 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} E_{ort}(k)$$

$$\mathrm{y(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

S-3 a) $\mathrm{y}(\boldsymbol{k}+\mathbf{2}) - 2\mathrm{y}(\mathrm{k}+1) + \mathrm{y}(\mathrm{k}) = \mathrm{u}(\mathrm{k}+1)$ fark denklemi ile verilen sisteme ait Transfer fonksiyonunu yazılır iken ilk koşullar sıfır alınır.

$z^2 Y(z) - 2\, zY(z) + Y(z) = zU(z)$ ise

$$\frac{Y(z)}{\mathrm{U}(z)} = \frac{z}{z^2 - 2\, z + 1}$$

olarak elde edilir.

b) Sembolik dilde doğrudan prog. yöntemi ile programlanması,

$$\frac{Y(z)}{\mathrm{U}(z)} = \frac{z}{z^2 - 2\,z + 1}\,\frac{x(z)}{x(z)}\,\frac{z^{-2}}{z^{-2}}$$

yapılır ve düzenlenir ise,

$$\mathrm{U}(z) = (z^2 - 2\,z + 1)\,x(z)z^{-2}$$

$$\mathrm{U}(z) = x(z) - 2\,x(z)\,z^{-1} + x(z)\,z^{-2} \quad \rightarrow$$

$$\boxed{x(z) = 2\,x(z)\,z^{-1} - x(z)\,z^{-2} + \mathrm{U}(z)}$$

$$Y(z) = \; z\,x(z)\,z^{-2} \quad \rightarrow$$

$$\boxed{Y(z) = x(z)\,z^{-1}}$$

Atama için değişkenler tanımlanır.

$x(z)$ şimdiki durum ise, bir önceki durum $x(z)\,z^{-1} = A$

İki önceki durum $x(z)\,z^{-2} = B$

olsun. Denklemler

$x = 2\,A - B + \mathrm{u}$

$\mathrm{y} = A$

olarak basit formda düzenlenir.

Sembolik dilde yazılım aşağıda verilmiştir.

```
10 A=0;
20 B=0;
30 oku u
40 x=2*A-B+u
50 y=A
60 B=A
70 A=x
80 out y
90 Bekle T kadar
100 giT 30
```

C-4 1. YOL PARAMETRİK DENKLEMLERDEN:

i-Önce ayrık-zaman transfer fonksiyonu bulunur:

$$\mathrm{G(z)} = \mathrm{Z\{G_{zoh}(s)\;G(s)\}} \;\rightarrow\; \mathrm{G(z)} = \mathrm{Z}\left\{\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{sT}}}{\mathrm{s}}\,\frac{0.85}{0.2\mathrm{s}+1}\right\} = (1 - \mathrm{z}^{-1})\;\mathrm{Z}\left\{\frac{0.85}{\mathrm{s}(0.2\mathrm{s}+1)}\right\}$$

$$\mathrm{G(z)} = 4.25\,\frac{\mathrm{z}-1}{\mathrm{z}}\left\{\mathrm{s}\,\frac{1}{\mathrm{s(s+5)}}\,\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{z}-\mathrm{e}^{\mathrm{sT}}}\bigg|_{\mathrm{s}=0} + (\mathrm{s}+5)\,\frac{1}{\mathrm{s(s+5)}}\,\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{z}-\mathrm{e}^{\mathrm{sT}}}\bigg|_{\mathrm{s}=-5}\right\}$$

$$\mathrm{G(z)} = \frac{0.08089}{\mathrm{z} - 0.9048}$$

Ayrık-zaman transfer fonksiyonu, $\mathrm{G(z)} = \frac{0.08089}{\mathrm{z}-0.9048}$ olarak elde edilir.

ii- İntegral katsayısı $\mathrm{K_i}$, $\mathrm{e_{ss}} = 0.4$ olarak verilmiş olan hız katasıdan hesap edilir.

$$\mathrm{e_{ss}} = \frac{1}{\mathrm{K_v}} \;\rightarrow\; \mathrm{K_v} = \frac{1}{\mathrm{e_{ss}}} = \frac{1}{0.4} \;\rightarrow\; \mathrm{K_v} = 2.5 \;\; \text{dir.}$$

$$\mathrm{K_v} = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)\left(\mathrm{K_p} + \mathrm{K_i}\frac{z}{z-1} + \mathrm{K_d}\frac{z-1}{z}\right)\mathrm{G(z)}$$

$$K_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)\left(K_p + K_i\frac{z}{z-1} + K_d\frac{z-1}{z}\right)\frac{0.08089}{z-0.9048}$$

$2.5 = \frac{1}{0.02}K_i \ \frac{0.08089}{1-0.9048} \ \rightarrow \ K_i = 0.0588$

iii- **İlk sürekli zaman sonra Ayrık-zaman Kontrol kutupları hesap edilir.**

$t_s = \frac{4}{\zeta w_n} \rightarrow w_n = \frac{4}{t_s w_n} = \frac{4}{1.6 * 0.707} \rightarrow w_n = 3.53 \text{ rad/sn}$

$$s_{1,2} = -\zeta w_n \mp j\, w_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$s_{1,2} = -0.707 * 3.53 \mp j\, 3.53\sqrt{1-0.707^2}$$

$s_{1,2} = -2.5 \mp 2.5j$ sürekli zaman kontrol kutupları elde edilir.

Ayrık zaman kontrol kutupları, $z = e^{sT} \ \rightarrow \ z_{1,2} = e^{(-2.5 \mp 2.5j)\, 0.02}$

$$z_{1,2} = 0.95 \mp 0.047j$$

$$z = 0.95 \mp 0.047j \quad \rightarrow \quad z_1 = \sqrt{0.95^2 + 0.047^2}\ \tan^{-1}\frac{0.95}{0.047}$$

$$\rightarrow \quad z_1 = 0.9512 \lfloor 0.05 \text{ rad. (veya 2.8657 derece)}$$

$$|z_1| = 0.9512 \text{ ve } \beta = 0.05 \text{ rad.}$$

iii- Ayrık-zaman sistem genlik ve fazı hesap edilir:

$G(z_1) = G(z)|_{z=z_1} = \frac{0.08089}{z-0.9048}\Big|_{z_1=0.95+0.047j} G(z_1) = \frac{0.08089}{0.95+0.047j- \ .9048}$

$$G(z_1) = 0.8494 - 0.8936j$$

$G(z_1) = \sqrt{0.8494^2 + 0.8936}\tan^{-1}\frac{-0.8936}{0.8494} \rightarrow G(z_1) = 1.2328\lfloor -0.8108 \text{ rad. } (-46.45 \text{ derece})$

$$|G(z_1)| = 1.2328 \text{ ve } \psi = -0.8108 \text{ rad.}$$

iv- Bulunmuş olan $|z_1| = 0.9512$ ve $\beta = 0.05$ rad. $|G(z_1)| = 1.2328$ ve $\psi = -0.8108$ rad. değerleri formüllerde yerlerine koyulur, $K_i = 0.0588$ dir.

$K_d = \frac{|z_1|}{sin(\beta)}\left\{\frac{K_i\, sin(\beta)}{|z_1| - 2\,cos(\beta) + \frac{1}{|z_1|}} + \frac{sin(\psi)}{|G_p(z_1)|}\right\} \rightarrow$

$$\mathrm{K_d} = \frac{0.9512}{\sin(0.05)}\left\{\frac{0.0588\ \sin(0.05)}{0.9512 - 2\cos(0.05) + \frac{1}{0.9512}} + \frac{\sin(-0.8108)}{1.2328}\right\} \quad \rightarrow \quad \mathrm{K_d} = 0.0346$$

$$\mathrm{K_p} = -\frac{\cos(\psi)}{\left|G_p(z_1)\right|} - 2\mathrm{K_i}|z_1|\frac{|z_1| - \cos(\beta)}{|z_1|^2 - 2|z_1|\cos(\beta) + 1} + \frac{-|z_1|\sin(\psi) + \cos(\beta)\sin(\psi)}{\left|G_p(z_1)\right|\sin(\beta)}$$

$$\mathrm{K_p} = -\frac{\cos(-0.8108)}{1.2328} - 2 * 0.0588 * 0.9512\frac{0.9512 - \cos(0.05)}{0.9512^2 - 2 * 0.9512 * \cos(0.05) + 1}$$
$$+\frac{-|z_1|\sin(-0.8108) + \cos(0.05)\sin(-0.8108)}{1.2328\ *\ \sin(0.05)}$$
$$\rightarrow \qquad \mathrm{K_p} = 0.0011$$

2.YOL KARAKTERİSTİK DENKLEMDE YERİNE KOYARAK

$G_{PiD}(Z).G_p(z)$ =*PİD kontrol kurallı kapalı çevrim transfer fonksiyona ait karakteristik denklem,*

$F(z) = 1 + G_{PİD}(z)G_p(z) = 0$ *olarak ifade edilir.*

$$1 + \left(K_p + K_i\frac{z}{z-1} + K_D\frac{z-1}{z}\right)G_P(z) = 0$$

Ayrık zaman 2.derecen örnek sistemin kontrol kutupları ve K_i katsayısı parametrik denklem çözümünde elde edilmişti.

$z_{1,2} = 0.95 \mp 0.047j \qquad \mathrm{K_i} = 0.0588$ olarak bulunmuştu.

Karakteristik denklemde bilinenler eşitliğin bir tarafına bilinmeyenler diğer tarafta olacak şekilde düzenlenirse,

$$G_{PİD}(z) = \frac{-1}{G_p(z)} \Rightarrow \left(K_P + K_D\frac{z-1}{z}\right) = -\frac{1}{G_P(z)} - K_i\frac{z}{z-1}$$

Yukarıdaki eşitlikte $z = z_1$ yerine koyulur ise $z_1 = 0.95 + 0.047j$

$$\left(K_P + K_D \frac{z_1 - 1}{z_1}\right) = -\frac{1}{G_P(z_1)} - K_i \frac{z_1}{z_1 - 1}$$

ifadesinde ara işlemler yapılıp her iki taraftaki reel ve sanal kısımlar birbirine eşitlenirse

$$K_P + K_D(-0.0499 + 0.0525j) = -0.0006 + 0.0018j$$

$$0.0018j = 0.0525jK_D \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{K_D = 0.034}$$

$$K_P = -0.0006 + K_D 0.0499 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{K_P = 0.0011}$$