

Hafta 1: İşaretler ve Sistemler

1

Ele Alınacak Ana Konular

- Sürekli-zaman ve ayrik-zaman işaretler
- Bağımsız değişkenin dönüştürülmesi
- Üstel ve sinüzoidal işaretler
- İmpuls ve birim basamak fonksiyonları
- Sürekli-zaman ve ayrik-zaman sistemler
- Sistemlerin temel özellikler

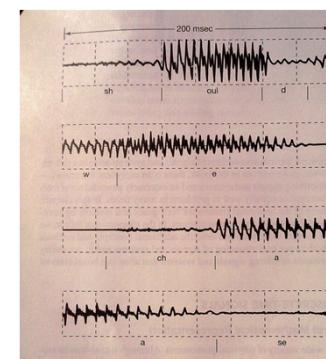
2

Sürekli-zaman ve ayrik-zaman işaretler

- İşaretler bir olayın davranışı veya doğası hakkında bilgi içermektedir.
- İşaretler, matematiksel olarak bir veya daha fazla bağımsız değişkenin fonksiyonu biçiminde temsil edilir.
- Örneğin, ses işaretinin zamanın fonksiyonu olarak akustik basınçla belirtilir. Benzer şekilde, bir görüntü iki konum değişkeninin fonksiyonu olarak parlaklığa tanımlanır.
- Bu derste, aksi belirtildiği sürece bir bağımsız değişkenli işaretleri inceleyeceğiz ve bağımsız değişkene ZAMAN diyeceğiz. Ancak, tüm fiziksel olaylarda bağımsız değişkenin zaman olmadığı hatta tutulmalıdır. Örneğin, meteorolojik araştırmalarda yüksekliğe bağlı olarak hava basıncı, sıcaklık ve rüzgar hızının değişimi hakkında bilgi önemlidir. Bu durumda bağımsız değişken yüksekliktir. İncelenen işaretler ise hava basıncı, sıcaklık ve rüzgar hızıdır.

3

Sürekli-zaman ve ayrik-zaman işaretler



Bir ses kaydı. İşaret, "should we chase" kelimelerini, zamana bağlı olarak akustik basınç değişimleri şeklinde temsil etmektedir. Üst satır "should", ikinci satır "we" ve son iki satır "chase" kelimebine karşılık gelmektedir.

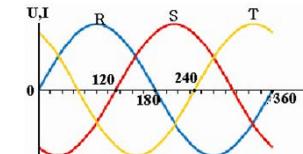
4

Sürekli-zaman ve ayrik-zaman işaretler

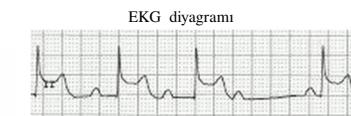
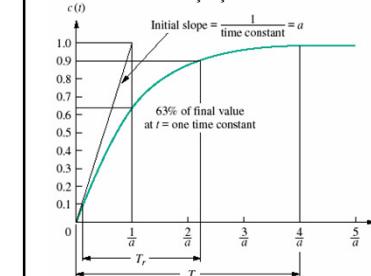
- Bu derste, sürekli-zaman ve ayrik-zaman şeklinde sıfırlanılan temel iki tür işaretin inceleyeceğiz. Sürekli-zaman işaret durumunda, bağımsız değişken sürekli ve dolayısıyla işaret **bağımsız değişkenin tüm değerleri** için tanımlıdır. Diğer yandan, ayrik-zaman işaretler sadece **belirli zamanlarda** tanımlıdır ve bağımsız değişken ayrik değerler alır.
- Zamanın fonksiyonu olarak ses işareti ve yüksekliğin fonksiyonu olarak atmosferik basıncı sürekli-zaman işaretlere örnektir. İstanbul Menkul Kiyimetler Borsası (İMKB) haftalık endeksi ve dünyadaki ülkelerde göre toplam nüfus ayrik-zaman işaretlere örnektir.
- Sürekli-zaman ve ayrik-zaman işaretlerini birbirile karıştırılmamak amacıyla, sürekli ve ayrik durumlarda bağımsız değişken için sırasıyla t ve n ; işaretler için de $x(t)$ ve $x[n]$ notasyonlarını kullanacağız.

5

Sürekli-zaman işaretler

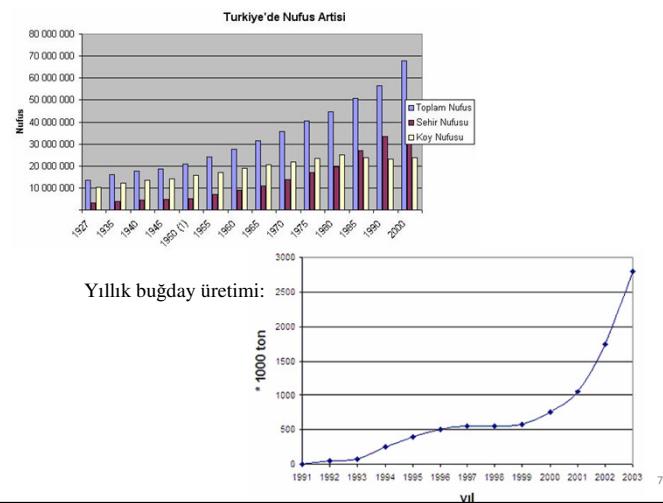


1.dereceden sistemin açık çevrim cevabı



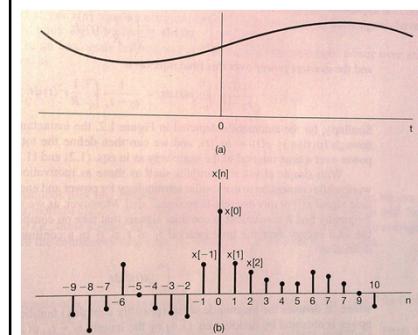
6

Ayrik-zaman işaretler



7

Sürekli-zaman ve ayrik-zaman işaretler



(a) Sürekli-zaman ve (b) ayrik-zaman işaretlerinin grafik gösterilimi.

2.5 kişiden oluşan bir aile için ortalama kazançtan söz etmenin anlamsız olması gibi bir ayrik-zaman işaretinin 3.5. örneği hakkında söz etmek de anlamlı değildir. Bu yüzden, kaynağı ne olursa olsun, ayrik-zaman işaretlerinin n 'nin tam sayı değerleri için tanımlı olduğunu dikkat ediniz.

8

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretler

Enerji - Güç

- İşaretler çeşitli fiziksel olayları temsil edebilir. Çoğu uygulamada, ilgilenilen işaret bir fiziksel sistemdeki güç ve enerjiyi belirten fiziksel büyüklüklerle doğrudan ilişkilidir.
- Bir sürekli-zaman işareti $x(t)$ 'de $t_1 \leq t \leq t_2$ aralığında ve bir ayrık-zaman işareti $x[n]$ 'de $n_1 \leq n \leq n_2$ aralığındaki TOPLAM ENERJİ, l'di sayının genliğini göstermek üzere

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt, \quad \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

ilişkilerinden hesaplanır. ORTALAMA GÜÇ, sonuçlar ilgili aralıkların boyuna bölünerek (sürekli durumda $t_2 - t_1$; ayrık durumda $n_2 - n_1 + 1$) elde edilir.

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt, \quad \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

9

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretler

Enerji - Güç

- Sınırlı bir aralık $\{(t_2-t_1)(n_2-n_1)\}$ için yukarıda verilen ilişkileri sonsuz aralık durumuna genelleştirmek mümkündür. Arahın sonsuza gittiği limit durumunda aşağıda verilen tanımlar elde edilir:

$$E_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad E_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

$$P_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad P_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

10

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretler

Enerji - Güç

- Enerji ve güç içeriğine göre işaretler üç sınıfa ayrılabilir.
- Sonlu enerjiye sahip ($E_x < \infty$) işaretlere ENERJİ İŞARETİ denir. Enerji işaretlerinin gücü sıfır olmalıdır. Bir örnek vermek gerekirse, $[0,1]$ aralığında 1, diğer zamanlarda sıfıra eşit olan bir sürekli-zaman işaretinin enerji işaretini olduğunu göstermek zor değildir.
- Sonlu güçe sahip işaretlere ($P_x < \infty$) GÜÇ İŞARETİ denir. Güç işaretlerinin enerjisi sonsuz olmalıdır. Örneğin; değeri 4 olan sabit bir ayrık-zaman işareti (tüm n değerleri için $x[n] = 4$) güç işaretidir.
- Diğer bir grup işaretler için ne enerji ne de güç sonlu bir değere sahiptir. Örneğin; $x(t) = t$ şeklinde bir işaret bu gruba girmektedir.

11

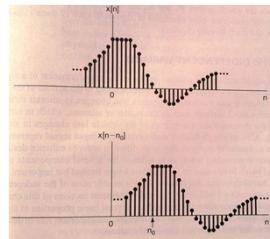
Bağımsız değişkenin dönüşümü

- İşaret ve sistem analizindeki önemli bir kavram bir işaretin dönüştürülmesidir.
- Örneğin, bir uçak kontrol sisteminde pilotun eylemlerine karşılık işaretler elektriksel ve mekanik sistemler aracılığıyla uçağın hız veya konumundaki değişikliklere dönüştürülür.
- Diğer bir örnek olarak, bir ses sisteminde kaset veya CD'ye kaydedilmiş müziği temsil eden bir giriş işaretini istenilen karakteristikleri iyileştirme, kaydetme gürültüsünü gidermek amacıyla değiştirebilir.
- Aşağıda, bağımsız değişkene yapılan basit değişikliklerden oluşan dönüşümleri ele alacağız.
- Bu basit dönüşümler, isaretler ve sistemlerin temel özelliklerini tanımlamamıza imkan verecektir.

12

Bağımsız değişkenin dönüşümü

- ZAMANDA ÖTELEME:** $x(t)$ işaretinin zaman domeninde t_0 kadar ötelemesi ile elde edilen işaret $x(t-t_0)$ şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde n_0 kadar ötelemiş ayrık zaman $x[n]$ işaretide $x[n-n_0]$ şeklinde ifade edilir. Orijinal $\{x(t)\}$ veya $\{x[n]\}$ ve ötelemiş işaretlerin $\{x(t-t_0)\}$ veya $\{x[n-n_0]\}$ şeklinde aymadır ancak işaretler bağımsız değişken domeninde birbirlerine göre kaymıştır.

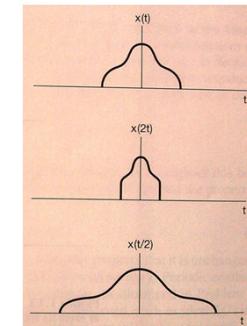


- Öteleme işlemi ile radar, sonar ve sismik işaret işleme uygulamalarında karşılaştırılır. Bu uygulamalarda, farklı konumlardaki alıcılar bir ortamdan iletlenen bir işaretin algıları. İşaretin alıcılara ulaşma süreleri arasındaki farktan ötürü alıcılardaki işaretler birbirine göre ötelemiş olmaktadır.

13

Bağımsız değişkenin dönüşümü

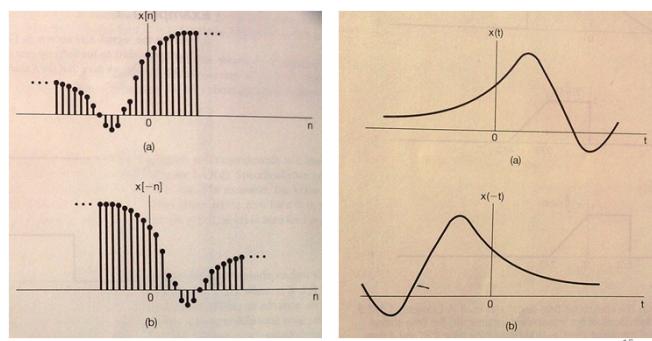
- Bağımsız değişkene yapılabilecek ikinci dönüşüm **ÖLÇEKLEME** dir ve sürekli zamanda $x(\alpha t)$ ayrık zamanda ise $x[\alpha n]$ biçiminde temsil edilir. α 'ya ölçekleme katısayısı denir. $\alpha > 1$ durumunda orijinal işaret $\{x(t)\}$ veya $\{x[n]\}$ α kadar daraltılarak ölçeklenmiş işaret elde edilir. $\alpha < 1$ durumunda ise, orijinal işaret zaman domeninde α 'nın tersi kadar genişletilir.



14

Bağımsız değişkenin dönüşümü

- Bağımsız değişkene yapılabilecek üçüncü bir dönüşüm **ZAMANI TERSİNE ÇEVİRME** dir ve sürekli zamanda $x(-t)$ (ayrık zamanda $x[-n]$) şeklinde ifade edilir. Orijinal işaretin dikey ekseni ($t = 0$) etrafında 180° döndürülmesiyle zamanda tersine çevrilmiş işaret elde edilir.



15

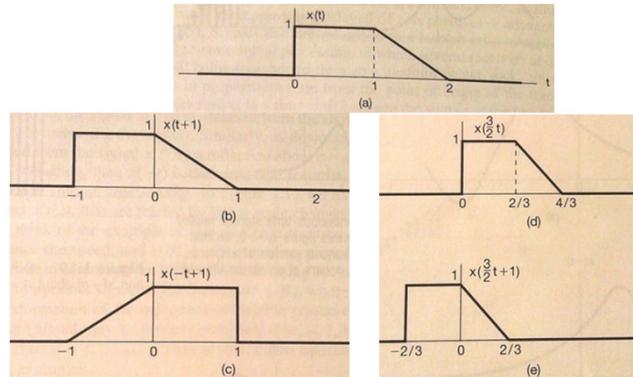
Bağımsız değişkenin dönüşümü

- Şimdi orijinal işarete bu üç temel dönüşümün birlikte uygulanmasını ele alacağız. Genel dönüşüm $x(\alpha t + \beta)$ şeklinde ifade edilebilir. Orijinal işaretten dönüştürülmüş işaret bulmak için, işaret ilk önce β kadar öteleñir, daha sonra ötelemiş işaret α ile ölçeklenir. α 'nın negatif olması durumunda ayrıca zaman tersine çevrilir.

16

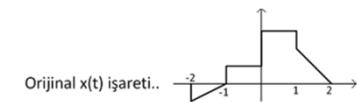
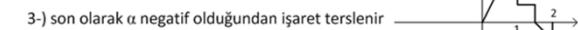
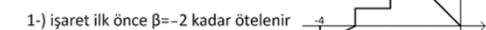
Bağımsız değişkenin dönüşümü

Aşağıda, bir sürekli-zaman işareti $x(t)$ için, $x(t+1)$, $x(-t+1)$, $x(3/2t)$ ve $x(3/2t+1)$ işaretleri çizilmiştir.



17

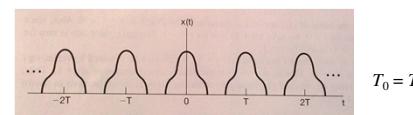
Örnek:

 $x(-2t+2)$ işaretini elde edelim..

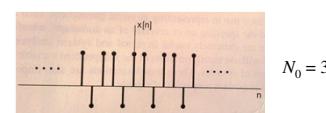
18

Periyodik İşaret

TANIM: Bir sürekli-zaman işareti t nin değerinden bağımsız olarak $x(t) = x(t+T)$ eşitliğini pozitif bir T değeri için sağlıyorsa T periyodu ile periyodiktir. Eşitliğin geçerli olduğu en küçük T değerine temel periyod (T_0) denir. Periyodik olmayan işaretlere aperiodik denir.

 $T_0 = T$

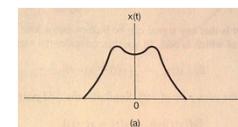
TANIM: Bir ayrık-zaman işareti n nin değerinden bağımsız olarak $x[n] = x[n+N]$ eşitliğini pozitif bir tam sayı N değeri için sağlıyorsa N periyodu ile periyodiktir. Eşitliğin geçerli olduğu en küçük N değerine temel periyod (N_0) denir.

 $N_0 = 3$.

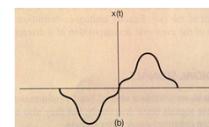
19

Çift ve Tek İşaretler

TANIM: Bir işaret zaman tersine çevrilmiş haline eşitse ($x(t) = x(-t)$) ÇİFT; zaman tersine çevrilmiş halinin negatifine eşitse ($x(t) = -x(-t)$) TEK işaretti.



çift işaret



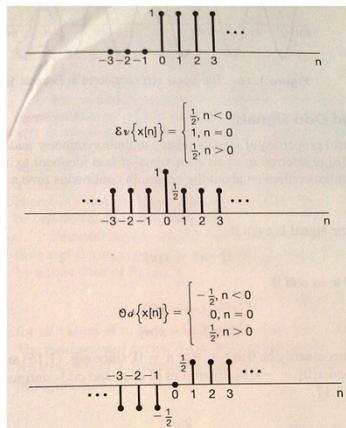
tek işaret

TANIM: Bir işaret ile zaman tersine çevrilmiş halinin toplamının yarısına işaretin ÇİFT PARÇASI denir. Bener şekilde, işaret ile zaman tersine çevrilmiş halinin farkının yarısına işaretin TEK PARÇASI denir.

$$Ev\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad Od\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

20

Bir aynır-zaman işareti ile işaretin çift ve tek parçaları aşağıda verilmiştir.

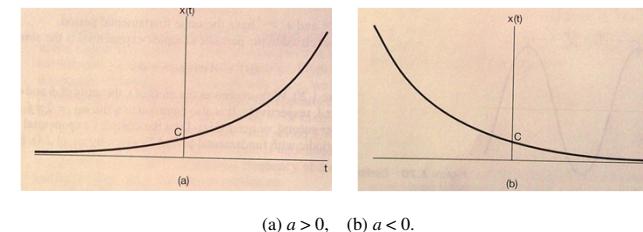


21

Sürekli-zaman Üstel ve Sinüzoidal işaretler

- Sürekli-zaman karmaşık üstel işaretin genel ifadesi, **C ve a karmaşık sayılar** olmak üzere $x(t) = Ce^{at}$, dir. Bu iki parametrenin değerine bağlı olarak karmaşık üstel işaret farklı davranış gösterir.

- 1-) Aşağıda gösterildiği gibi **C ve a gerçel** ise, iki durum vardır. a pozitif ise $x(t)$ artan, aksi halde azalan işaretdir. Ayrıca, $a = 0$ olduğunda, $x(t)$ sabit değer olacaktır.

(a) $a > 0$, (b) $a < 0$.

22

Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- 2-) **C gerçel** bir sayı (kolaylık olması açısından $C=1$ olsun) **a ise gerçel kısmı sıfır** olan karmaşık bir sayı ($a = jw_0t$), yani $x(t) = e^{jw_0t}$ olsun.

Bu durumda $x(t)$ işareti periyodiktir!

- Periyodiklik tanımından, $x(t)$ 'nin periyodik olması için $e^{jw_0(t+T)} = e^{jw_0t}$ eşitliğini sağlayan pozitif bir T değeri bulunabilmelidir. Üstel sayıların özelliğinden

$$e^{jw_0(t+T)} = e^{jw_0t} e^{jw_0 T}$$

olduğundan, periyodiklik için $e^{jw_0 T} = 1$ olmalıdır.

- T 'nin alacağı değer w_0 'a bağlıdır. $w_0 = 0$ ise, $x(t) = 1$ olup T 'nin herhangi bir değeri için periyodiktir. $w_0 \neq 0$ ise, en küçük pozitif T değeri (temel periyod) için

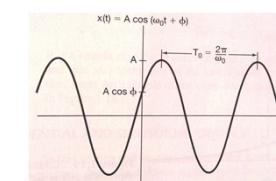
$$T_0 = \frac{2\pi}{|w_0|}$$

bulunur. O halde, e^{jw_0t} ve e^{-jw_0t} işaretleri aynı temel periyoda sahiptir.

23

Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Periyodik karmaşık üstel işaretle yakından ilişkili bir işaret $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ şeklinde tanımlanan sinüzoidal işaretdir.
- t 'nin birimi saniye ise, ϕ ve ω_0 'ın birimleri radyan ve saniye başına radyandır (rad/s). $\omega_0 = 2\pi f_0$ yazılırsa f_0 'nın birimi, saniye başına değişim sayısı veya hertz (Hz)'dır.
- Sinüzoidal işaret periyodik olup temel periyodu $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$ şeklidindedir.



24

Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Euler ilişkisi kullanılarak, karmaşık üstel ve sinüzoidal işaretler birbirini cinsinden yazılabilir. İlişkiler aşağıda verilmiştir:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$$

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 t}$$

- Eşdeğer olarak, sinüzoidal işaretler, karmaşık üstel işaretin gerçel ve sanal kısmı şeklinde ifade edilebilir:

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \operatorname{Re}\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\}$$

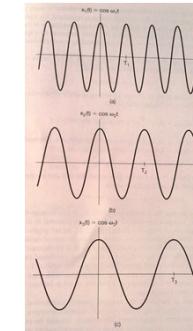
$$A \sin(\omega_0 t + \phi) = A \operatorname{Im}\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\}$$

- Üstel işaretler atomik patlamalardaki zincir reaksiyonları, karmaşık kimyasal işlemler, radyoaktif bozunuş, RC devrelerinin ve sönümlü mekanik sistemlerin yanıtı modellemede kullanılır. Benzer şekilde, sinüzoidal işaretler enerjinin korunduğu fiziksel sistemlerde karşımıza çıkar. Örneğin, bir LC devresinin doğal yanıt ve bir müzik tonuna karşılık gelen akustik basınç değişimleri sinüzoidalıdır.

25

Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Bir sürekli-zaman sinüzoidal veya periyodik karmaşık üstel işaretin temel periyodu T_0 , TEMEL AÇISAL FREKANS olarak adlandırılan ω_0 ile ters orantılıdır.



- $\omega_0 = 0$ ise, $x(t)$ sabit olup herhangi bir pozitif T için periyodiktir. O halde, sabit bir işaretin temel periyodu tanımsızdır. Ancak, sabit bir işaretin temel periyodunu sıfır kabul edebiliriz (sabit bir işaretin değişim hızı sıfırdır).

26

Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Periyodik karmaşık üstel ve sinüzoidal işaretlerin **güç işaretini** olduğu gösterilebilir.
- Periyodik karmaşık üstel işaretlerden çoğu diğer işaret üretilebilir.
- Ortak bir periyod ile periyodik olan periyodik üstel işaretler kümese HARMONİK İLİŞKİLİ KARMAŞIK ÜSTEL KÜMESİ denir.
- $e^{j\omega_0 t}$ işaretinin T_0 ile periyodik olabilmesi için $\omega_0 T_0 = 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ olmalıdır. $\omega_0 = 2\pi / T_0$ olarak tanımlanırsa, $\omega_0 T_0 = 2\pi k$ koşulunun sağlanması için ω , ω_0 'nın katı olmalıdır. O halde, harmonik ilişkili bir karmaşık üstel kümlesi, pozitif bir ω_0 frekansının katlarına eşit temel frekansa sahip periyodik üstel işaretler kümnesidir:

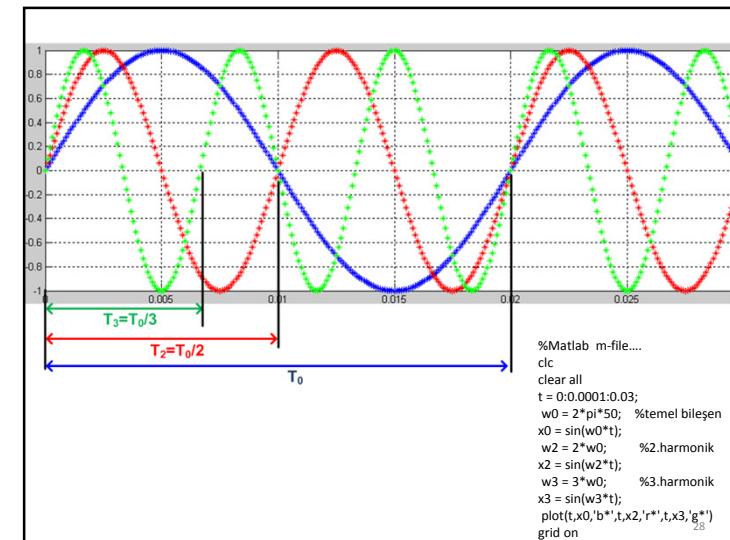
$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- $k = 0$ için $\phi_k(t)$ sabittir, herhangi bir diğer k değeri için $\phi_k(t)$, $|k|\omega_0$ temel frekansıyla veya

$$\frac{2\pi}{|k|\omega_0} = \frac{T_0}{|k|}$$

temel periyodu ile periyodiktir. $\phi_k(t)$ 'ye k . HARMONİK denir.

27



Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

3-) Sürekli-zaman karmaşık üstel işaretin genel ifadesi, **C ve α karmaşık sayılar** olmak üzere $Ce^{\alpha t}$ ile verildiğini hatırlayınız. C, kutupsal koordinatlarda $C = |C|e^{j\theta}$, α ise kartezyen koordinatlarda $\alpha = r + j\omega_0$ şeklinde ifade edilsin.

- C ve α yerine konulup Euler ilişkisi konulursa karmaşık üstel işaret

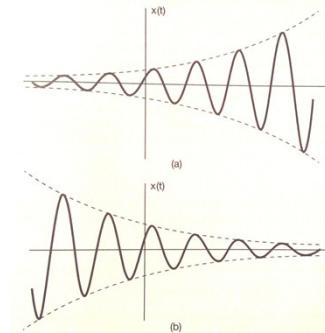
$$\begin{aligned} Ce^{\alpha t} &= |C| e^{j\theta} e^{(r+j\omega_0)t} = |C| e^{rt} e^{j(\omega_0 t + \theta)} \\ &= |C| e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta) + j |C| e^{rt} \sin(\omega_0 t + \theta) \end{aligned}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Bu ilişkiden aşağıdaki gözlemler yapılabilir.

- Karmaşık üstel işaretin genliği $|Ce^{\alpha t}|$ 'dir.
- $r = 0$ ise, karmaşık üstelin gerçek ve sanal kısımları sinüzoidalıdır.
- $r > 0$ ise, gerçel ve sanal kısımlar artan üstel işaret, $r < 0$ ise azalan üstel işaret ile çarpılır. Azalan üstel işaret ile çarplılan sinüzoidal işaretlere SÖNÜMLÜ sinüzoidal denir. Sönümlü sinüzoidal işaretlerle RLC devrelerinde ve mekanik sistemlerde karşılaşılır. Bu tür sistemler, zamanla azalan salınımlı enerji üretir.

29

Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler



(a) Artan sinüzoidal işaret $x(t) = Ce^rt \cos(\omega_0 t + \theta)$, $r > 0$.
(b) Azalan sinüzoidal işaret $x(t) = Ce^rt \cos(\omega_0 t + \theta)$, $r < 0$.

Şekillerde kesikli eğriler $|Ce^{\alpha t}|$ fonksiyonlarına karşılık gelmektedir.

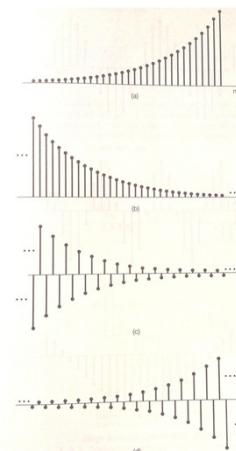
30

Ayrik-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Ayrik-zaman karmaşık üstel işaretin genel ifadesi, C ve α karmaşık sayılar olmak üzere $x[n] = Ca^n$ dir. $\alpha = e^{j\theta}$ olmak üzere, üstel işaret $x[n] = Ce^{jn\theta}$ şeklinde de yazılabilir. C ve α 'nın aldığı değerlere göre işaretin şekli değişir.
- C ve α gerçel ise, aşağıdaki durumlar mümkündür:
 - $|\alpha| > 1$ ise, işaretin genliği n arttıkça üstel olarak artar.
 - $|\alpha| < 1$ ise, işaretin genliği n arttıkça üstel olarak azalır.
 - α pozitif ise, işaretin tüm değerleri aynı işaretre (hepsi pozitif veya negatif) sahiptir.
 - α negatif ise, $x[n]$ 'nin işaretti örnekten örneğe değişir.
 - $\alpha = 1$ ise, $x[n]$ sabittir ($x[n] = C$).
 - $\alpha = -1$ ise, $x[n]$ dönüştürülmüş olarak C ve $-C$ değerlerini alır.
- Ayrik-zaman gerçel üstel işaret doğum oranına bağlı olarak nüfus artışı ve zamana (gün, ay, yıl vb) bağlı olarak yatırım sonucunda elde edilen kar gibi olayları modellemede kullanılır.

31

Ayrik-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler



Ayrik-zaman gerçel üstel işaret $x[n] = Ca^n$
(a) $\alpha > 1$
(b) $0 < \alpha < 1$.
(c) $-1 < \alpha < 0$.
(d) $\alpha < -1$

32

Ayrik-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Sürekli durumda olduğu gibi, karmaşık üstel işaretle yakından ilişkili bir işaret $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$ şeklinde tanımlanan sinüzoidal işaretettir.
- n boyutlu ise, ϕ ve ω_0 'nın birimleri radyandır.
- Euler ilişkisi kullanılarak ayrik-zaman karmaşık üstel ve sinüzoidal işaretler birbirleri cinsinden yazılabilir:

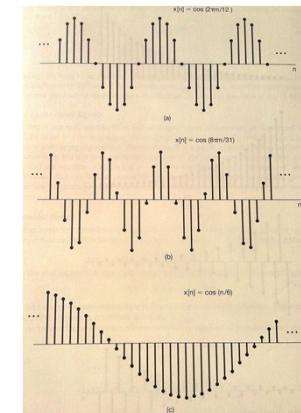
$$e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j \sin(\omega_0 n)$$

$$A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}$$

- Ayrik-zaman karmaşık üstel ve sinüzoidal işaretlerin, sürekli durumda olduğu gibi güç işaretleri olduğunu göstermek zor değildir.

33

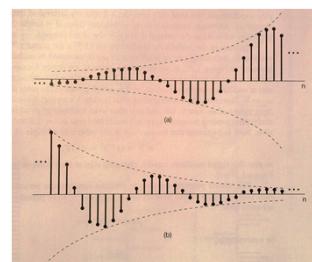
Ayrik-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler



34

Ayrik-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- C ve α için kutupsal koordinatlarda $C = |C|e^{j\theta}$, $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$ yazılıp $C\alpha^n$ ifadesinde yerine konulursa ayrik-zaman karmaşık üstel işaret aşağıdaki gibi yazılabilir:
$$C\alpha^n = |C|\|\alpha\|^n \cos(\omega_0 n + \theta) + j|C|\|\alpha\|^n \sin(\omega_0 n + \theta)$$
- $|\alpha| = 1$ ise, karmaşık üstel işaretin gerçek ve sanal kısımları sinüzoidaldır. $|\alpha| < 1$ ise, sinüzoidal işaretler azalan bir üstel işarette, aksi halde ise artan bir üstel işarette çarpılmaktadır.

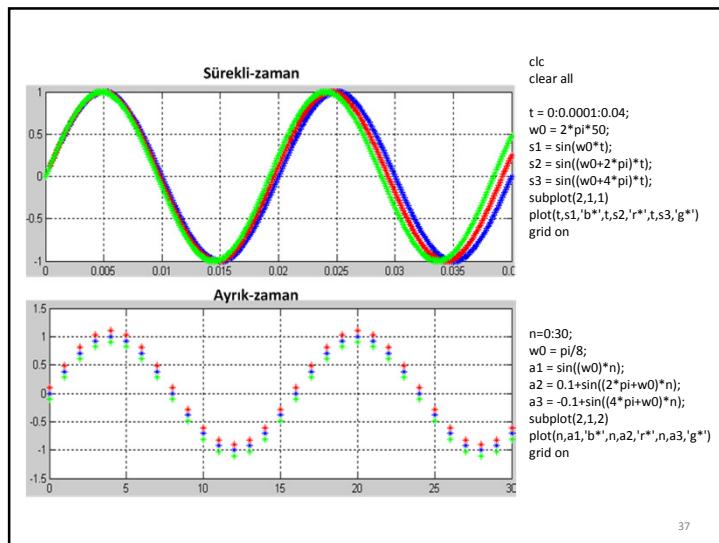


35

Ayrik-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Sürekli-zaman ve ayrik-zaman işaretler arasında önemli farklar vardır. **Birinci fark** olarak, aşağıda gösterildiği gibi $e^{j\omega_0 n}$, 2π ile periyodiktir:
$$e^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = e^{j2\pi n} e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}$$
- Sürekli durumda ω_0 'nın farklı değerleri için $e^{j\omega_0 n}$ farklı işaretler olmasına karşın, ayrik-durumda $e^{j\omega_0 n}$ işaretinde ω_0 yerine $\omega_0 + 2\pi$, $\omega_0 + 4\pi$, $\omega_0 + 6\pi\dots$ yazıldığında aynı sonuç elde edilmektedir. Bu yüzden, ayrik-zaman karmaşık üstel işaretleri 2π uzunlığundaki bir frekans aralığında incelemek yeterlidir. Genelde $0 \leq \omega_0 < 2\pi$ veya $-\pi \leq \omega_0 < \pi$ seçilir.

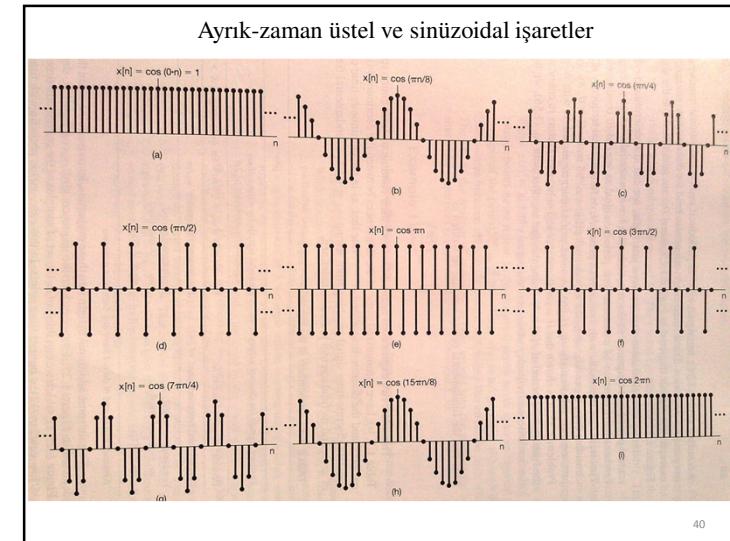
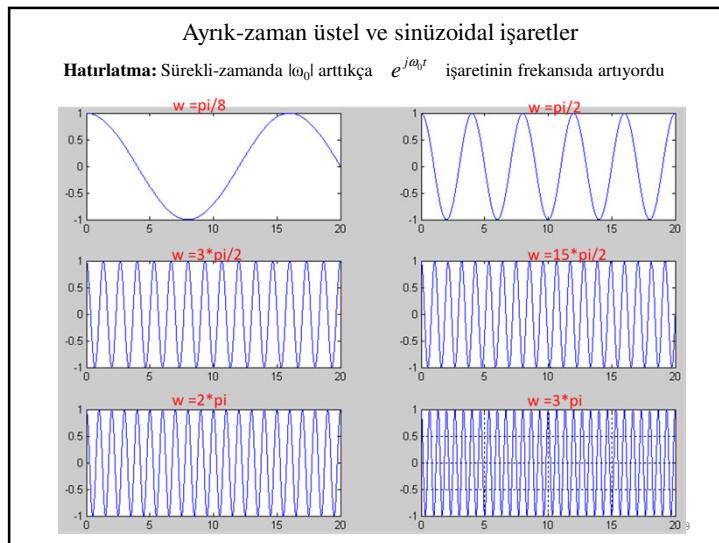
36



Ayırık-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Sürekli-zamanda ω_0 arttıkça $e^{j\omega_0 t}$ işaretinin temel frekansı artıyordu. Ayırık-zamanda bu durum geçerli değildir. ω_0 , 0'dan π 'ye doğru artarken $e^{j\omega_0 n}$ işaretinin birim zamandaki salınım sayısı (frekans değeri) artarken ω_0 π 'den 2π 'ye doğru artarken salınımları azalır. O halde, ayırık-zaman karmaşık üstel işaret, ω_0 'ın 0 veya π 'nin çift katlarına yakınlığından dolayı düşük frekanslı, π 'nin tek katlarına yakınlığından dolayı yüksek frekanslıdır.

38



Ayrik-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- $e^{j\omega_0 n}$ işaretinin periyodik olması için $e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}$ veya $e^{j\omega_0 N} = 1$ eşitliğini sağlayan pozitif bir tamsayı N değeri bulunabilmeliydi. Karmaşık üstel işaretin 1 değerini alması için üs 2π 'nin katı olmalıdır. O halde, **m bir tamsayı olmak üzere** periyodiklik şartı olarak $\omega_0/2\pi$ 'nin rasyonel bir sayı olması gerektiğini belirtene

$$\omega_0 N = 2\pi m \Rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

yazılabilir (**ikinci fark: sürekli işaret ω_0 'nın herhangi bir değeri için periyodiktir!**). Bu koşul, ayrik-zaman sinüzoidal işaretler için de geçerlidir.

- Ayrik-zaman karmaşık üstel işaretin temel periyodu N ise, temel frekansı $2\pi/N$ 'dir. O halde, $e^{j\omega_0 n}$ işaretinin temel frekansı

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{\omega_0}{m}$$

olacaktır.

41

Ayrik-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
ω_0 'ın farklı değerleri için farklı işaretler	2π ile periyodik
ω_0 'ın herhangi bir değeri için periyodik	$N > 0$ ve m tamsayıları için $\omega_0 = 2\pi m/N$ ise periyodik
Temel frekans: ω_0	Temel frekans: ω_0/m
Temel periyod: $\omega_0=0$ ise tanımsızdır $\omega_0 \neq 0$ ise $2\pi/\omega_0$	Temel periyod: $\omega_0=0$ ise tanımsızdır $\omega_0 \neq 0$ ise $m(2\pi/\omega_0)$

- Son olarak, harmonik ilişkili bir ayrik-zaman karmaşık üstel kümesi, ortak bir periyod N 'ye sahip periyodik üstel işaretler kümesidir:

$$\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- Sürekli durumdan farklı olarak, periyodiklikten ötürü kümede N adet işaret olduğuna dikkat ediniz (**sürekli durumda kümede sonsuz işaret vardı!**).

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

42

Hafta 2
İşaretler ve **Sistemler**

1

Ele Alınacak Ana Konular

- Sürekli-zaman ve ayrik-zaman işaretler
 - Bağımsız değişkenin dönüştürülmesi
 - Üstel ve sinüzoidal işaretler
 - **İmpuls ve birim basamak fonksiyonları**
 - Sürekli-zaman ve ayrik-zaman sistemler
 - Sistemlerin temel özellikleri

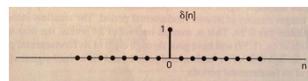
2

Ayrık-zaman impuls ve birim basamak dizileri

TANIM: Ayrık-zaman İMPULS dizisi $\delta[n]$ aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

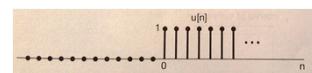
Dizinin grafik gösterilimi:



TANIM: Ayrık-zaman BİRİM BASAMAK dizisi $u[n]$ aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

Dizinin grafik gösterilimi:



37

Ayrik-zaman impuls ve birim basamak dizileri

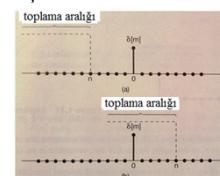
- Ayrik-zaman impuls ve birim basamak dizileri arasında aşağıdaki ilişkiler vardır:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

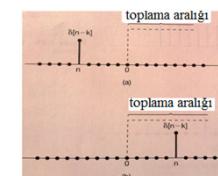
$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] \quad (1. \text{ gösterilim})$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k] \quad (2. \text{ gösterilim})$$

- Toplama işlemlerinin pozitif ve negatif n değerleri için hesaplanması aşağıda gösterilmiştir:



1. gösterelim, a) $n < 0$, b) $n > 0$



2. gösterilim, a) $n < 0$, b) $n > 0$

4

Ayrik-zaman impuls ve birim basamak dizileri

- Ayrik-zaman impuls dizisi, bir işaretin $n = 0$ anındaki değerini örneklemede kullanılabılır:
- $x[n] \delta[n] = x[0] \delta[n]$
- Daha genel ifadeyle, $n = n_0$ anındaki bir impuls işaretin n_0 anındaki değerini örneklemede kullanılabılır:
- $x[n] \delta[n - n_0] = x[n_0] \delta[n - n_0]$
- İmpuls dizisinin örnekleme özelliği, doğrusal ve zamanla değişimyen sistemlerin analizi ile sürekli-zaman işaretlerin ayırt edildiği örnekleme konularında sıkça kullanılacaktır.

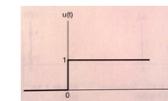
5

Sürekli-zaman birim basamak ve impuls fonksiyonları

TANIM: Sürekli-zaman birim basamak fonksiyonu $u(t)$ aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Fonksiyonun grafik gösterilimi:



TANIM: Sürekli-zaman impuls fonksiyonu $\delta(t)$ aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Not: $u(t)$, $t = 0$ anında sürekli olmayıp türevi hesaplanamayacağından $\delta(t)$ 'nin tanımı aslında geçerli değildir. Ancak, limit durumda birim basamak fonksiyonuna eşit olan yumuşak geçişli işaretler kullanılsa tanımları geçerli olacaktır.

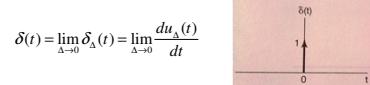
6

Sürekli-zaman impuls ve birim basamak fonksiyonları

- Aşağıda, $\Delta \rightarrow 0$ limit durumunda $u(t)$ 'ye eşit olan, türevi tüm noktalarda hesaplanabilir bir fonksiyon $u_\Delta(t)$ ve fonksiyonun türevi $\delta_\Delta(t)$ verilmiştir.



- $\delta_\Delta(t)$, Δ 'nın değerinden bağımsız olarak altındaki alan 1 olan kısa süreli bir darbedir. $\Delta, 0$ 'a yaklaştıkça $\delta_\Delta(t)$ dırılaşır dikkat edilecek ancak altında kalan alan hep 1 olacaktır. $\Delta \rightarrow 0$ limit durumunda darbenin süresi sıfır, yüksekliği sonsuz olacaktır. Bu durum grafiksel olarak şöyle gösterilir:



7

Sürekli-zaman impuls ve birim basamak fonksiyonları

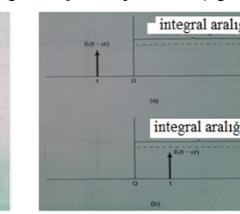
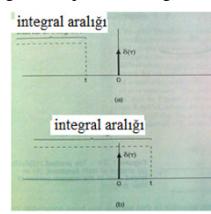
- Genel olarak, altındaki alan k olan ölçeklenmiş impuls fonksiyonu $k\delta(t)$ ile gösterilir ve grafik gösteriminde okun yanına 1 yerine k yazılır.

- $\delta(t)$, $u(t)$ 'nın türevi olduğundan, $u(t) \delta(t)$ 'nın integralidir. İntegral eşdeğer iki şekilde yazılabilir:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (1. \text{ gösterilim})$$

$$u(t) = \int_0^\infty \delta(t - \tau) d\tau \quad (2. \text{ gösterilim})$$

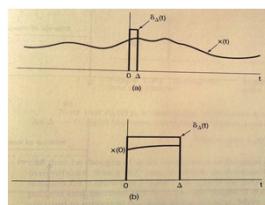
- İntegallerin pozitif ve negatif t değerleri için hesaplanması aşağıda gösterilmiştir:



8

Sürekli-zaman impuls ve birim basamak fonksiyonları

- Sürekli-zaman impuls fonksiyonunun da örnekleme özelliği vardır. Aşağıda, keyfi bir $x(t)$ için, $x_1(t) = x(t)\delta_\Delta(t)$ çarpımı ve çarpının sıfırdan farklı olduğu kısmın büyütülmüş hali gösterilmiştir.



- Yeterince küçük Δ için $0 \leq t \leq \Delta$ aralığında $x(t)$ yaklaşık olarak sabit olduğundan $x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t)$ yazılabilir. $\Delta \rightarrow 0$ limit durumunda $\delta_\Delta(t)$, $\delta(t)$ 'ye eşit olduğundan impulsun örnekleme özelliği $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$ elde edilir.
- Benzer adımları kullanarak, $t = 0$ yerine $t = t_0$ anındaki bir impuls için örnekleme özelliği $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$ şeklinde olur.

9

Sürekli-zaman impuls ve birim basamak fonksiyonları

- Gerçek bir fiziksel sistem, eylemsizlik sahiptir ve uygulanan girişlere aniden yanıt veremez. Dolayısıyla, sistemin yanıtı uygulanan darbenin süresi veya şeklinden ziye darbenin altındaki alandan (darbenin toplam etkisinden) etkilenecektir.
- Hızlı davranış gösteren sistemler için darbenin süresi, yanıt darbenin şekli veya süresinden etkilenmeyecek şekilde küçük olmalıdır. Herhangi bir gerçek fiziksel sistem için süresi yeterince küçük bir darbe bulabiliriz. Impuls fonksiyonu, bu kavramın idealleştirilmişidir (**herhangi bir sistem için yeterince küçük süreli darbe!**).
- İmpuls ve ilişkili fonksiyonlara **TEKİL** veya **GENELLEŞTİRİLMİŞ** fonksiyonlar denilmektedir. Daha fazla bilgi aşağıdaki kaynaklardan edinilebilir:

A. H. Zemanian, *Distribution theory and transform analysis*, NY, McGraw-Hill, 1965.
R. F. Hoskins, *Generalised functions*, NY, Halsted Press, 1979.
M. J. Lighthill, *Fourier analysis and generalized functions*, NY, Cambridge University Press, 1958.

10

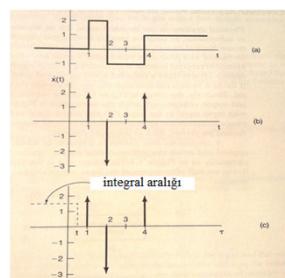
Sürekli-zaman impuls ve birim basamak fonksiyonları

- Süreksizlik içeren sürekli-zaman işaretlerinin türevi impuls fonksiyonu kullanılarak hesaplanabilir. Süreksizlik noktalarındaki türev impuls fonksiyonu oluşturur ve impulsun genliğini süreksizlik noktasındaki sıçrama miktarı belirler. Aşağıda bir örnek verilmiştir.

Türev doğru ise, b)'deki işaretin integrali a)'daki işaretin vermemlidir. c)'de herhangi bir t değeri için integral aralığı gösterilmiştir. Integral işleminin sonucu

$$\begin{aligned} t < 0 \text{ ise } 0 \\ 1 \leq t < 2 \text{ ise } 2, \\ 2 \leq t < 4 \text{ ise } -1, \\ t \geq 4 \text{ ise } 1 \end{aligned}$$

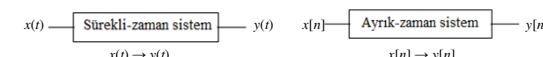
olup gerçekten de a)'daki işaret elde edilir.



11

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

- SİSTEM**, girişine uygulanan bir işaretin çıkışında başka bir işaretin dönüştürmen bir süreç olarak değerlendirilebilir.
- Sürekli-zaman sistemlerde giriş ve çıkış işaretleri sürekliken; ayrık-zaman sistemlerde ayrıktır. Sistemler grafiksel olarak aşağıdaki şekilde gösterilir:

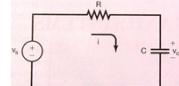


- Bir işaret, başka bir işaret haline dönüştürmek istendiğinde bir sürekli-zaman sistemi tasarlanabilir (**analog çözüm**). Ancak, işaret örnekleip ayrık-zaman haline getirildikten sonra aynı işlem bir ayrık-zaman sistem tasarlanarak da yapılabilir (**sayısal çözüm**). Sayısal çözümde elde edilen sonuçın tekrar sürekli hale getirilmesi gerektiğine dikkat ediniz.
- Sayısal çözümün analog çözümüne göre üstünlükleri oldukça fazladır. Bu konu **SAYISAL İŞARET İŞLEME** dersinde ele alınmaktadır.

12

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

Örnek: Bir sürekli-zaman sistemine örnek olarak, aşağıda verilen RC devresinde giriş işaretini $v_s(t)$ ile çıkış işaretini $v_c(t)$ arasındaki ilişkiyi bulalım.



Ohm yasasından, direnç üzerinden geçen akım, direnç üzerindeki gerilimin dirençin değerine bölünmesiyle elde edilir:

$$i(t) = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{R}$$

$$\text{Kapasitenin tanımımdan } i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

Bu iki eşitlikten, giriş ile çıkış arasındaki ilişki aşağıda verilen diferansiyel denklem olarak elde edilir:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = \frac{1}{RC} v_s(t)$$

13

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

Örnek: Bir ayrık-zaman sistemine örnek olarak, ay sonunda banka hesabındaki para miktarını ele alalım. $x[n]$ ay boyunca net para girişi (yatırılan-çekilen) ve $y[n]$ ay sonunda hesaptaki para olmak üzere, $y[n]$ 'nin aşağıda verilen fark denklemiyle belirlendiğini varsayıyalım:

$$y[n] = 1.01y[n-1] + x[n]$$

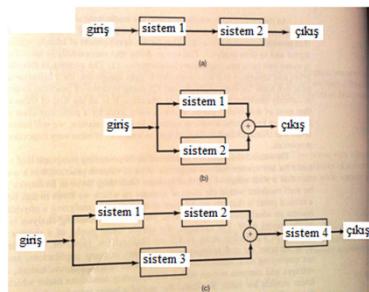
Modeldeki $1.01y[n-1]$ terimi, ilgili ayda % 1 oranında faizi modellemektedir.

- Yukarıda verilen basit iki örnek, daha karmaşık sistemlere uyarlanabilir. Genelde, giriş ile çıkış arasındaki ilişki, sürekli-zaman sistemlerde diferansiyel denklemlerle, ayrık-zaman sistemlerde ise fark denklemleriyle verilir.
- Bu derste, sistemleri analiz edebilmek için etkili yöntemler (Fourier dönüşümü, z-dönüştümü vb) tanıtılacaktır.

14

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

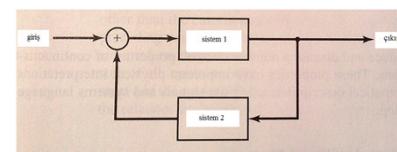
- Çoğu gerçek sistem, birkaç alt sistemden oluşmaktadır. Diğer bir deyişle, basit sistemler birleştirilerek karmaşık sistemler oluşturulabilir.
- Sistemleri çok değişik biçimlerde birbirleriyle bağlamak mümkün değildir. Ancak, sıkılıkla kullanılan bağlama biçimleri SERİ, PARALEL ve SERİ-PARALEL olup bunlara karşılık gelen blok diyagramları aşağıda verilmiştir.



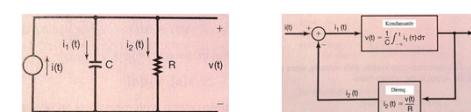
15

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

- Diğer önemli bir sınıf, aşağıda gösterilen GERİBESLEMELİ bağlamadır.



- Geribesleme sistemleri birçok uygulamada kullanılmaktadır. Örneğin, sayısal olarak kontrol edilen bir uçak sisteminde gerçek ve gerekli hız, yön ve yükseklik arasındaki farklar gerekli düzeltmeler yapmak üzere geri besleme işaretleri olarak kullanılır. Elektrik devrelerinde de geribesleme mevcuttur. Aşağıda bir elektrik devresi ve karşılık gelen blok diyagramı verilmiştir



16

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

- Herhangi bir andaki çıkışı, sadece o andaki girişine bağlı olan sistemlere HAFIZASIZ, aksi halde HAFIZALI denir.
- Hafızasız sistemler:

$$\begin{aligned}y[n] &= (2x[n] - x^2[n])^2 \\y(t) &= R x(t)\end{aligned}$$

- Hafızalı sistemler:

$$\begin{aligned}y[n] &= \sum_{k=-\infty}^n x[k] \\y(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\end{aligned}$$

- Hafızalı sistemlerde, girişi çıkışın hesaplandığı an dışındaki zamanlarda saklayan mekanizmalar olmalıdır. Çoğu fiziksel sisteme, hafıza enerjinin depolanması ile doğrudan ilişkilidir. Örneğin, kondansatör elektriksel yük biriktirerek enerji saklar.

17

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

- Herhangi bir andaki çıkışı, girişin geçmişteki veya o andaki değerlerine bağlı olan sistemlere NEDENSEL denir.

- Nedensel sistemler:

$$\begin{aligned}y[n] &= \sum_{k=-\infty}^n x[k] \\y(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\end{aligned}$$

- Nedensel olmayan sistemler:

$$\begin{aligned}y[n] &= x[n] - x[n+1] \\y(t) &= x(t+1)\end{aligned}$$

- Bir sistemin nedensel olup olmadığı belirlenirken giriş-çıkış arasındaki ilişki tüm anlarda incelenmelidir. Ayrıca, giriş-çıkış arasındaki ilişkide girişten hariç diğer fonksiyonlar dikkate alınmamalıdır.

18

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

- Sınırlı girişler için sınırlı çıkışlar oluşturan sistemlere KARARLI, aksi halde KARARSIZ denir.

- Kararlı sistemler:

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x[n-k]$$

$$y(t) = e^{xt(t)}$$

- Kararsız sistemler:

$$\begin{aligned}y[n] &= \sum_{k=-\infty}^n x[k] \\y(t) &= tx(t)\end{aligned}$$

- Bir sistemin kararsız olduğunu göstermek için iyi bir yaklaşım, sonsuz bir çıkış üreten sonlu bir giriş bulmaktır. Ancak, bu herzaman mümkün olmayıpabilir. Bu gibi durumlarda, giriş işaretinden bağımsız olarak çalışan bir yöntem kullanılmalıdır.

19

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

- Bir sistemde, giriş işaretine uygulanan bir öteleme çıkış işaretinde de aynı miktarda ötelemeye neden oluyorsa sisteme ZAMANLA DEĞİŞMEYEN, aksi halde zamanla değişen denir.

- Örnek:** Giriş-çıkış ilişkisi

$$y(t) = \sin[x(t)]$$

ile verilen sistemi ele alalım. Giriş işaretine t_0 kadar bir öteleme uygulayalım, yani $x_2(t) = x(t-t_0)$ olsun. Sistemin $x_2(t)$ 'ye yanıtı, $y_2(t) = \sin[x_2(t)] = \sin[x(t-t_0)]$ 'dır. Çıkışın t_0 kadar ötelelenmiş, $y(t-t_0) = \sin[x(t-t_0)]$ 'dır. Giriş işaretine uygulanan öteleme, çıkışta da aynı miktarda ötelemeye sebep olup bu sistem zamanla değişmeyen bir sistemdir.

- Örnek:** Giriş-çıkış ilişkisi

$$y[n] = nx[n]$$

olan sistemin zamanla değiştiği, benzer işlemler takip edilerek gösterilebilir.

20

Sürekli-zaman ve ayrik-zaman sistemler

- İki veya daha fazla işaretin toplamından oluşan bir girişe olan yanıt, giriş işaretini oluşturan bileşenlere yanıtlarının toplamına eşit olan sistemlere DOĞRUSAL denir.
- Doğrusallığın matematiksel tanımı, sürekli-zaman sistemleri için aşağıda verilmiştir. Tam, ayrik-zaman durumunda da geçerlidir.
- Bir sisteme uygulan $x_k(t)$ girişlerine karşılık gelen çıkışlar $y_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$ olsun. a_k 'lar katsayı olmak üzere, sistemin

$$x(t) = \sum_k a_k x_k(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + a_3 x_3(t) + \dots$$

girişine yanıt

$$y(t) = \sum_k a_k y_k(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + a_3 y_3(t) + \dots$$

ise, sistem doğrusaldır.

21

Sürekli-zaman ve ayrik-zaman sistemler

Örnek: Giriş-çıkış ilişkisi $y(t) = tx(t)$ olan sistemin doğrusal olup olmadığını belirleyelim. Sistemin, keyfi iki giriş işaretti $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ 'ye olan yanıtı

$$\begin{aligned} x_1(t) &\rightarrow y_1(t) = tx_1(t) \\ x_2(t) &\rightarrow y_2(t) = tx_2(t) \end{aligned}$$

olsun. a ve b katsayılar olmak üzere, $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ 'nin ağırlıklı toplamı $x_3(t)$ olsun:

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

Sistemin $x_3(t)$ 'ye olan yanıtı

$$\begin{aligned} y_3(t) &= tx_3(t) \\ &= t(ax_1(t) + bx_2(t)) \\ &= atx_1(t) + btx_2(t) \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

şeklinde olup sistem doğrusaldır.

22

Sürekli-zaman ve ayrik-zaman sistemler

Örnek: Giriş-çıkış ilişkisi $y(t) = x^2(t)$ olan sistemin doğrusal olup olmadığını belirleyelim. Sistemin, keyfi iki giriş işaretti $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ 'ye olan yanıtı

$$\begin{aligned} x_1(t) &\rightarrow y_1(t) = x_1^2(t) \\ x_2(t) &\rightarrow y_2(t) = x_2^2(t) \end{aligned}$$

olsun. a ve b katsayılar olmak üzere, $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ 'nin ağırlıklı toplamı $x_3(t)$ olsun:

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

Sistemin $x_3(t)$ 'ye olan yanıtı

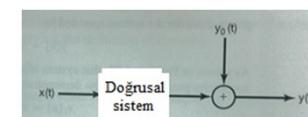
$$\begin{aligned} y_3(t) &= x_3^2(t) \\ &= (ax_1(t) + bx_2(t))^2 \\ &= a^2 x_1^2(t) + b^2 x_2^2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) \\ &= a^2 y_1(t) + b^2 y_2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) \end{aligned}$$

olup sistem doğrusal değildir.

23

Sürekli-zaman ve ayrik-zaman sistemler

Örnek: Giriş-çıkış ilişkisi $y[n] = 2x[n] + 3$ olan sistemin doğrusal olmadığını göstermek zor değildir. Giriş-çıkış ilişkisi doğrusal olmasına rağmen, sistemin doğrusal olmaması ilginçtir. Bu sistemin çıkışı, aşağıda gösterildiği gibi doğrusal bir sistemin çıkışıyla sistemin SIFIR-GİRİŞ yanıtına eşit olan bir işaretin toplamı olarak düşünülebilir:



Örneğimizde doğrusal sistem $x[n] \rightarrow 2x[n]$, sifir-giriş yanıtı $y_0[n] = 3$ 'dür. Böyle sistemlerde, iki girişe olan yanıtlar arasındaki fark, girişlerin farkının doğrusal bir fonksiyonudur:

$$y_1[n] - y_2[n] = 2x_1[n] + 3 - (2x_2[n] + 3) = 2(x_1[n] - x_2[n])$$

Bu tür sistemlere ARTIŞSAL DOĞRUSAL sistem denilmektedir.

24

Hafta 3:
Doğrusal ve Zamanla Değişmeyen Sistemler
(Linear Time Invariant, LTI)

1

Ele Alınacak Ana Konular

- Ayrık-zaman işaretlerin impuls dizisi cinsinden ifade edilmesi
- Ayrık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi
- Sürekli-zaman işaretlerin impuls fonksiyonu cinsinden ifade edilmesi
- Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

2

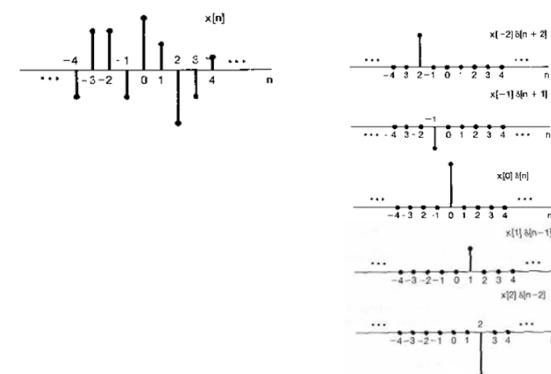
Ayrık-zaman işaretlerin impuls dizisi cinsinden ifade edilmesi

- **Doğrusallık** ve **zamanla değişmezlik** özellikleri iki açıdan çok önemlidir: (i) çoğu fiziksel sistem bu iki özelliğe sahip olup doğrusal ve zamana değişmeyen (Linear Time Invariant, LTI) sistem olarak modellenebilir, (ii) LTI sistemleri incelemek amacıyla geliştirilmiş güçlü matematiksel yöntemler (Laplace ve Z-dönüştümü) mevcuttur.
- LTI bir sistemin girişine uygulanan herhangi bir işaret, temel bazı işaretlerin toplamı cinsinden yazabilsek, sistemin çıkışını temel işaretlere olan yanıtlarının toplamına eşit olacaktır.
- Aşağıda gösterileceği gibi, sürekli-zaman işaretleri impuls fonksiyonu, ayrık-zaman işaretleri ise impuls dizisi cinsinden ifade edilebilir. O halde, **sistemin impuls işaretine olan yanıtı bilişinde herhangi bir girişe olan yanıtını hesaplanabilir.**
- Sistemin impuls işaretine olan yanıtına **IMPULS YANITI** denir. Giriş-çıkış ilişkisi ayrık-zaman durumunda **KONVOLÜSYON TOPLAMI**, sürekli-zaman durumda ise **KONVOLÜSYON İNTEGRALİ** ile verilir.

3

Ayrık-zaman işaretlerinin impuls cinsinden ifade edilmesi

- Bir ayrık-zaman işaretin impulslarının toplamı şecline düşünülebilir. Aşağıda bir ayrık-zaman işaretinin [-2, 2] aralığındaki bileşenlerinin impuls dizisi karşılıkları verilmiştir.



4

Ayırık-zaman işaretlerinin impuls cinsinden ifade edilmesi

- Şekilden, beş bileşenin toplamının $-2 \leq n \leq 2$ aralığında $x[n]$ 'ye eşit olduğu görülmektedir. Genelleştirme yaparsak, bir ayırık-zaman işaret $x[n]$ impuls dizisi cinsinden şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned} x[n] &= \dots + x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] \\ &\quad + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + \dots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \end{aligned}$$

- Yani, herhangi bir ayırık-zaman işaret öteleme impulsların ağırlıklı toplamı olup ağırlıklar işaretin değerleridir. Örnek olarak, $x[n] = u[n]$ olsun. $k < 0$ için $u[k] = 0$ ve $k \geq 0$ için $u[k] = 1$ olduğundan, daha önce tartıştığımız ilişki elde edilir:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

5

Ayırık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

- Bir ayırık-zaman LTI sistemin keyfi bir $x[n]$ girişine olan yanıtını bulmaya çalışalım. Giriş,

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

şeklinde yazabiliriz.

- Sistemin $\delta[n-k]$ 'ya olan yanıtını $h_k[n]$ ile belirtelim. Sistem doğrusal olduğundan, sistemin $x[n]$ 'ye yanıtı

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

olacaktır.

- O halde, ayırık-zaman LTI sistemin $-\infty < k < \infty$ için $\delta[n-k]$ 'ya olan yanları ($h_k[n]$ 'ler) biliniyorsa, sistemin herhangi bir girişe olan yanıtı hesaplanabilir.

6

Ayırık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

- Sistem zamanla değişmez olduğundan, $h_k[n] = h_0[n-k]$ ilişkisi geçerli olmalıdır.
- Çünkü, $h_k[n]$ sistemin $\delta[n-k]$ 'ya; $h_0[n]$ ise $\delta[n]$ 'ye olan yanıdır. Zamanla değişmeyen bir sisteme giriş hangi miktarda ötelemişse çıkışda aynı miktarda ötelebilir. Girişler arasında k kadar öteleme olduğuna göre, çıkışlar arasında da k kadar öteleme, yani $h_k[n] = h_0[n-k]$ olmalıdır.
- Notasyon kolaylığı için $h[n] = h_0[n]$ yazacak ve $h[n]$ 'e sistemin IMPULS YANITI (sisteme $\delta[n]$ uygulandığında elde edilen yanıt) diyeceğiz.
- Sonuç olarak, bir ayırık-zaman LTI sistemin impuls yanımı $h[n]$ ve sisteme uygulanan giriş $x[n]$ ise, sistemin yanımı

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

ilişkisinden hesaplanır. Bu ilişkiye KONVOLÜSYON TOPLAMI denir ve kısaca $y[n] = x[n] * h[n]$ şeklinde gösterilir.

7

Ayırık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

ÖRNEK: Bir ayırık-zaman LTI sistemin impuls yanımı $h[n]$ ve sisteme uygulanan giriş aşağıda verilmiştir. Sistemin çıkışını hesaplayınız.



ÇÖZÜM: Giriş işaretinde sadece iki terim sıfırdan farklı olduğundan konvolüsyon toplamı iki terimin toplamından oluşur:

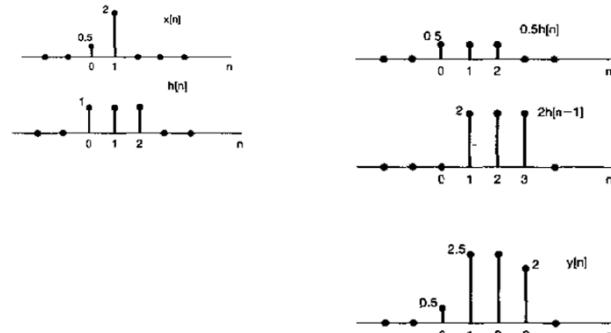
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \Rightarrow y[n] = x[0]h[n-0] + x[1]h[n-1] = 0.5h[n] + 2h[n-1]$$

Bu örnek için, impuls yanımı $x[0]=0.5$ ile çarpılır, 1 birim sağa ötelebilir $x[1]=2$ ile çarpılır. İki işlemen elde edilen sonuçların toplamı çıkışa eşit olur. İlgili işlemler ve sonuç aşağıda verilmiştir.

8

Ayırık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \Rightarrow y[0] = x[0]h[0] + x[1]h[-1] = 0.5h[0] + 2h[-1]$$



9

Ayırık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

- Giriş ve/veya impuls yanıtı sonsuz değer alındığında konvolüsyon toplamı etkin bir şekilde hesaplanmalıdır. Çıkışın herhangi bir n anındaki değerinin konvolüsyon toplamından hesaplandığı hatırlayınız:

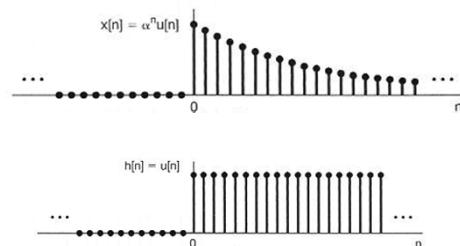
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

- İlk önce, $x[k]$ ve $h[n-k]$ işaretleri k 'nın fonksiyonu olarak çizilir. Bu iki fonksiyon çarpılarak $g[k] = x[k] h[n-k]$ dizisi elde edilir.
- Daha sonra, $g[k]$ dizisi tüm k değerleri üzerinden toplanarak $y[n]$ bulunur.
- Çıkışı bulmak için bu işlem tüm n değerleri için tekrarlanır.
- Bu işlem yapılrken $h[n-k]$ 'nın $h[k]$ 'nın zaman tersine çevrilmiş ve n kadar öteleme halı olduğu hatırlatılmalıdır.

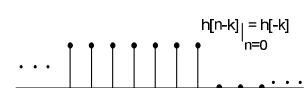
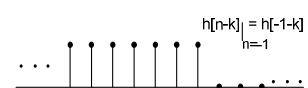
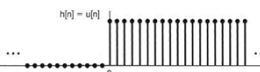
10

Ayırık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

ÖRNEK: Bir ayırık-zaman LTI sistemin impuls yanımı $h[n] = u[n]$ ve sisteme uygulanan giriş, $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $x[n] = \alpha^n u[n]$ olarak verilmiştir. Sistemin çıkışını hesaplayınız.



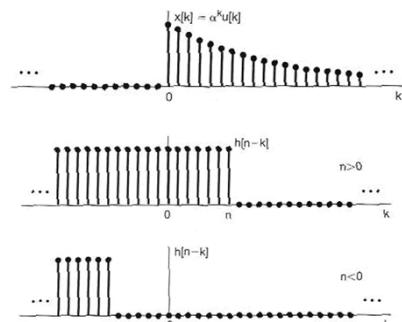
11



12

Ayırık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

ÇÖZÜM: Aşağıda $x[k]$ ve $h[n-k]$ $n < 0$ ve $n \geq 0$ için çizilmiştir.



13

Ayırık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

- Şekillerden $n < 0$ ise, $x[k]$ ile $h[n-k]$ dizilerinin kesişmemip $x[k] h[n-k]$ çarpımının sıfır eşit olduğu görülmektedir. O halde, $n < 0$ ise $y[n] = 0$.
- $n \geq 0$ ise, diziler $0 \leq k \leq n$ aralığında kesiştiğinden $x[k] h[n-k]$ çarpımı şöyle olur:

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

- $y[n]$ 'yi belirlemek için konvolüsyon toplamı hesaplanmalıdır.

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^n x[k]h[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \end{aligned}$$

$$\text{Hatırlatma: } \sum_{k=n_1}^{n_2} q^k = \frac{q^{n_1} - q^{n_2+1}}{1-q}, \quad 1 \neq q$$

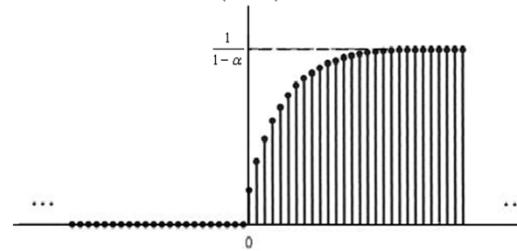
14

Ayırık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

Özetle,

$$y[n] = \begin{cases} 1 - \alpha^{n+1}, & n \geq 0 \\ 1 - \alpha, & n < 0 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$y[n] = \left(\frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right) u[n]$$

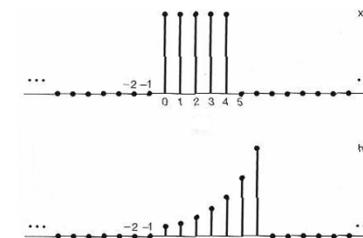


15

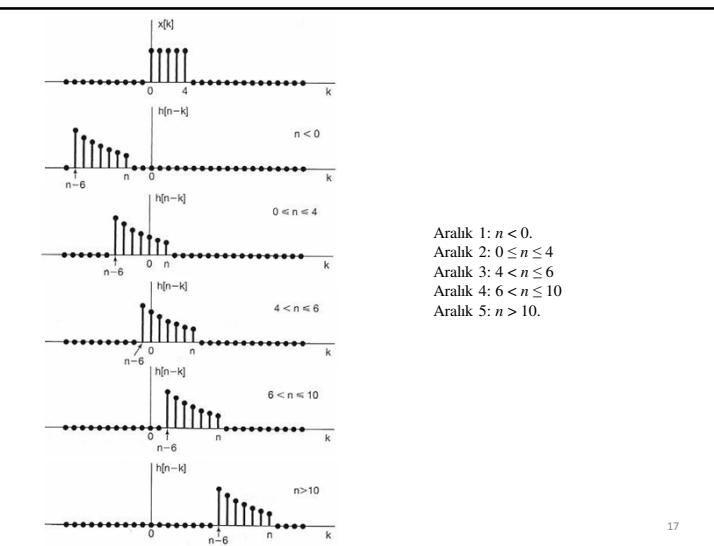
Ayırık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

ÖRNEK: Bir ayırık-zaman LTI sistemin impuls yanımı $h[n]$ ve sisteme uygulanan giriş $x[n]$ aşağıda verilmiştir. Sistemin çıkışını hesaplayınız.

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \quad h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$



16



Aralık 1: $n < 0$.
 Aralık 2: $0 \leq n \leq 4$
 Aralık 3: $4 < n \leq 6$
 Aralık 4: $6 < n \leq 10$
 Aralık 5: $n > 10$.

Ayırık-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

- **ÇÖZÜM:** $x[k]h[n-k]$ çarpımı 5 aralıkta farklı değerler alduğundan, çıkış her aralıktı ayrı ayrı hesaplanmalıdır.

- **Aralık 1 ($n < 0$):** $x[k]h[n-k]$ çarpımı sıfır olup $y[n] = 0$.

- **Aralık 2 ($0 \leq n \leq 4$):**

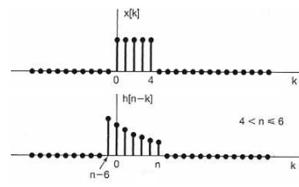
$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^n x[k]\alpha^{n-k}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} = \alpha^n \sum_{k=0}^n (\alpha^{-1})^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

Hatırlatma: $\sum_{k=n_1}^{n_2} q^k = \frac{q^{n_1} - q^{n_2+1}}{1-q}$, $1 \neq q$

- **Aralık 3 ($4 < n \leq 6$):**



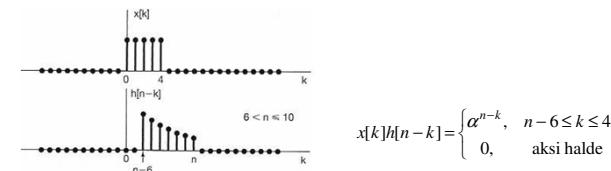
$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^4 \alpha^{n-k} = \alpha^n \sum_{k=0}^4 (\alpha^{-1})^k = \alpha^n \frac{1 - (\alpha^{-1})^5}{1 - \alpha^{-1}} = \alpha^n \frac{1 - \alpha^{-5}}{1 - \alpha}$$

$$\text{Hatırlatma: } \sum_{k=n_1}^{n_2} q^k = \frac{q^{n_1} - q^{n_2+1}}{1-q}, \quad 1 \neq q$$

19

- **Aralık 4 ($6 < n \leq 10$):**



$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & n-6 \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=n-6}^4 \alpha^{n-k} = \sum_{r=0}^{10-n} \alpha^{6-r} = \alpha^6 \sum_{r=0}^{10-n} (\alpha^{-1})^r = \alpha^6 \left(\frac{1 - \alpha^{n-11}}{1 - \alpha^{-1}} \right) = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}$$

$$\text{Hatırlatma: } \sum_{k=n_1}^{n_2} q^k = \frac{q^{n_1} - q^{n_2+1}}{1-q}, \quad 1 \neq q$$

- **Aralık 5 ($n > 10$):** $x[k]h[n-k]$ çarpımı sıfır olup $y[n] = 0$.

20

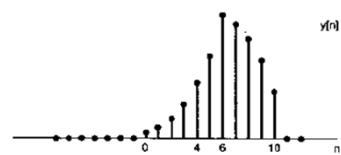
Ayrik-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon toplamı gösterilimi

Özetle,

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \quad h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$\text{olmak üzere, } y[n] = x[n] * h[n] \rightarrow y[n] = \begin{cases} \frac{0}{1-\alpha}, & n < 0 \\ \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1-\alpha}, & 4 < n \leq 6 \\ \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1-\alpha}, & 6 < n \leq 10 \\ 0, & n > 10 \end{cases}$$

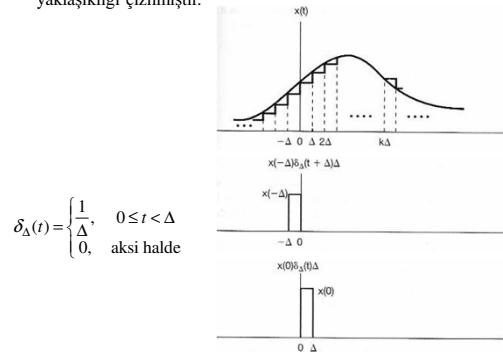
$y[n]$ grafiksel gösterilimi:



21

Sürekli-zaman işaretlerin impuls cinsinden ifade edilmesi

Bir sürekli-zaman işaretti ötelenmiş darbelerin toplamı biçiminde yaklaşık olarak yazılabilir. Aşağıda bir sürekli-zaman işaretin $-\Delta \leq t \leq \Delta$ aralığındaki darbe yaklaşılığı çizilmiştir.



22

Sürekli-zaman işaretlerin impuls cinsinden ifade edilmesi

- $\delta_\Delta(t)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t < \Delta \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

- Sürekli-zaman $x(t)$ işaretini yaklaşık olarak şöyle yazılabilir:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_\Delta(t - k\Delta) \Delta$$

- Δ küçüldükçe yaklaşım iyileşir ve $\Delta \rightarrow 0$ limit durumunda $x(t)$ elde edilir. Yani,

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{x}(t) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_\Delta(t - k\Delta) \Delta \end{aligned}$$

23

Sürekli-zaman işaretlerin impuls cinsinden ifade edilmesi

- $\Delta \rightarrow 0$ limit durumunda toplama integrale eşit olur (Riemann integral tanımını hatırlayınız!).

- Ayrıca, $\Delta \rightarrow 0$ limit durumunda $\delta_\Delta(t)$ fonksiyonu $\delta(t)$ 'ye eşit olur. O halde,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

- Örnek olarak, $x(t) = u(t)$ olsun. $t < 0$ için $u(t) = 0$ ve $t \geq 0$ için $u(t) = 1$ olduğundan $u(t)$ ile $\delta(t)$ arasında daha önce verdığımız aşağıda verilen ilişki elde edilir:

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

24

Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

- Bir sürekli-zaman LTI sistemin keyfi bir $\hat{x}(t)$ girişine olan yanıtını bulmaya çalışalım. Giriş,

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta$$

şeklinde yazabiliriz.

- Sistemin $\delta_{\Delta}(t-k\Delta)$ 'ya olan yanımı $\hat{h}_{k\Delta}(t)$ ile belirtelim. Sistem doğrusal olduğundan, $\hat{x}(t)$ 'ye yanıt aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \hat{h}_{k\Delta}(t) \Delta$$

- $\Delta \rightarrow 0$ limit durumunda $x(t) = \hat{x}(t)$ ve doayısıyla $y(t) = \hat{y}(t)$ olur. Yani,

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{y}(t) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \hat{h}_{k\Delta}(t) \Delta = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_r(t) d\tau \end{aligned}$$

25

Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

- Sistem zamanla değişmez olduğundan

$$h_r(t) = h_0(t - \tau)$$

ilişkisi geçerli olmalıdır.

- Notasyon kolaylığı için $h(t) = h_0(t)$ yazacak ve $h(t)$ 'ye sistemin IMPULS YANITI (sisteme $\delta(t)$ uygulandığında elde edilen yanıt) diyeceğiz.
- Sonuç olarak, bir sürekli-zaman LTI sistemin impuls yanımı $h(t)$ ve sisteme uygulanan giriş $x(t)$ ise, sistemin yanımı

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

ilişkisinden hesaplanır. Bu ilişkiye KONVOLÜSYON INTEGRALİ denir ve kısaca $y(n) = x(t) * h(t)$ şeklinde gösterilir.

26

Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

- Çıkışın herhangi bir t anındaki değerinin konvolüsyon integralinden hesaplandığını hatırlayınız:

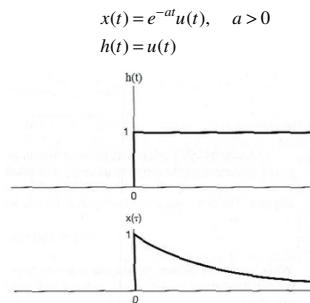
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

- İlk önce, $x(\tau)$ ve $h(t-\tau)$ işaretleri τ 'nun fonksiyonu olarak çizilir. Bu iki fonksiyon çarpılarak $g(\tau) = x(\tau)h(t-\tau)$ işaretini elde edilir.
- Daha sonra, $g(\tau)$ işaretinin τ değerleri üzerinden integrali alınarak $y(t)$ bulunur.
- Çıkış bulmak için bu işlem tüm t değerleri için tekrarlanır.
- Bu işlem yapılrken $h(t-\tau)$ 'nın $h(\tau)$ 'nın zaman tersine çevrilmiş ve t kadar öteleşen hali olduğu hatırlatılmalıdır.

27

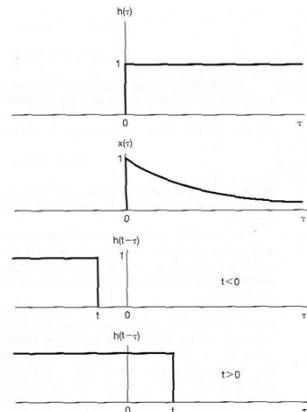
Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

ÖRNEK: Bir sürekli-zaman LTI sistemin impuls yanımı $h(t)$ ve sisteme uygulanan giriş $x(t)$ aşağıda verilmiştir. Sistemin çıkışını hesaplayınız.



28

ÇÖZÜM: Aşağıda $x(\tau)$ ve $h(t-\tau)$ işaretleri $t < 0$ ve $t \geq 0$ için çizilmiştir.



29

- Şekillerden $t < 0$ ise, $x(\tau)$ ve $h(t-\tau)$ işaretlerinin kesişmemip $x(\tau)h(t-\tau)$ çarpımının sıfır eşit olduğu görülmektedir. O halde, $t < 0$ ise $y(t) = 0$.

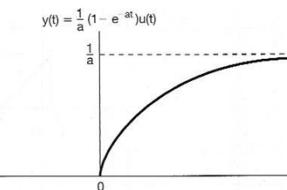
- $t \geq 0$ ise, işaretler $0 \leq \tau \leq t$ aralığında kesiştiğinden $x(\tau)h(t-\tau)$ çarpımı şöyle olur:

$$x(\tau)h(t-\tau) = e^{-a\tau}$$

- $y(t)$ 'yi belirlemek için konvolüsyon integrali hesaplanmalıdır.

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-at} \Big|_0^t = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$$

- Özette, $y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})u(t)$

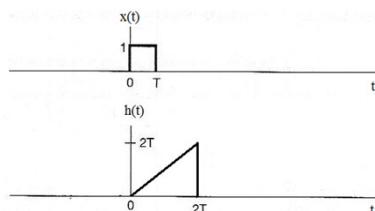


30

Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

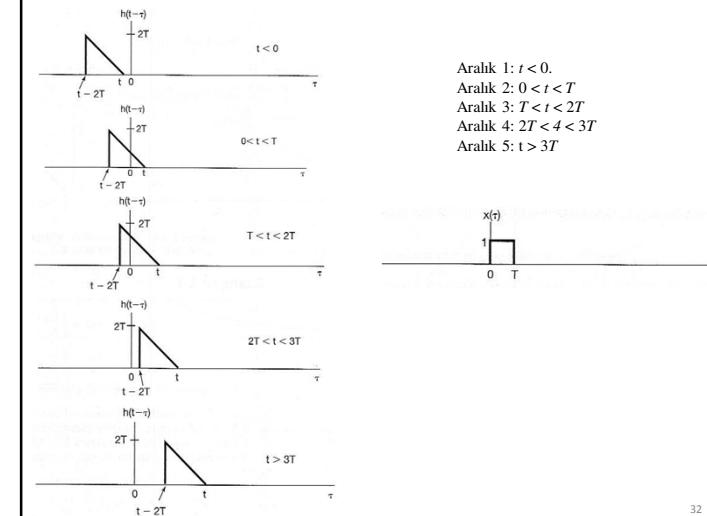
ÖRNEK: Bir sürekli-zaman LTI sistemin impuls yanımı $h(t)$ ve sisteme uygulanan giriş $x(t)$ aşağıda verilmiştir. Sistemin çıkışını hesaplayınız.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2T \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$



31

- Aralık 1: $t < 0$.
Aralık 2: $0 < t < T$.
Aralık 3: $T < t < 2T$.
Aralık 4: $2T < t < 3T$.
Aralık 5: $t > 3T$.

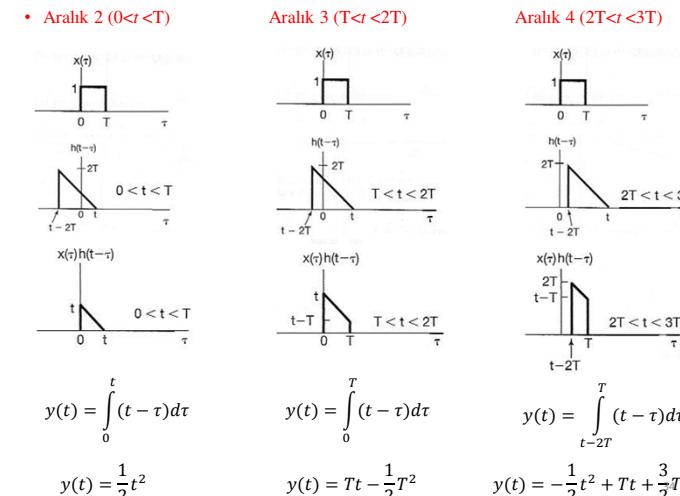


32

Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

- CÖZÜM:** $x(\tau)h(t-\tau)$ çarpımı 5 aralıktaki farklı değerler alındıktan sonra, çıkış her aralıktaki ayrı ayrı hesaplanmalıdır.
- Aralık 1 ($t < 0$):** $x(\tau)h(t-\tau)$ çarpımı sıfır olup $y(t) = 0$.
- Aralık 5 ($t > 3T$):** $x(\tau)h(t-\tau)$ çarpımı sıfır olup $y(t) = 0$.

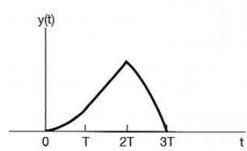
33



Sürekli-zaman LTI sistemlerin konvolüsyon integrali gösterilimi

Çıktısı bulmak için $x(\tau)h(t-\tau)$ çarpımının ilgili aralıklardaki integrali hesaplanır. Sonuç ve çıkış işaretinin grafiği aşağıda verilmiştir.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0 < t < T \\ Tt - \frac{1}{2}T^2, & T < t < 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2, & 2T < t < 3T \\ 0, & t > 3T \end{cases}$$



35

Hafta 4:
Doğrusal ve Zamanla Değişmeyen Sistemler

4.Hafta

1

Ele Alınacak Ana Konular

- LTI sistemlerin özellikleri
- Diferansiyel denklemelerle tanımlanmış sürekli-zaman nedensel LTI sistemler
- Fark denklemleriyle tanımlanmış ayrik-zaman nedensel LTI sistemler
- Tekil fonksiyonlar

4.Hafta

2

LTI Sistemlerin Özellikleri

- Konvolüsyon işlemi, **değişme özelliğine** sahiptir. Matematiksel olarak,

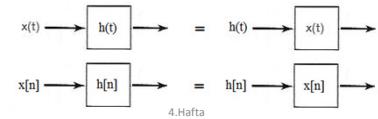
$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Bu ilişkiler, basit değişken dönüştürmeyle ispatlanabilir. Örneğin, ayrik-zaman durumunda $r = n-k$ değişken dönüştümü yapılır.

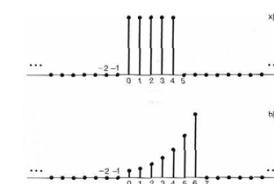
$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-r]h[r] = h[n] * x[n]$$

- Özette, bir LTI sisteme giriş ve impuls yanıtının rolleri değiştirilirse çıkış aynı kalmaktadır:



3

Hatırlatma: $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$ $h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$

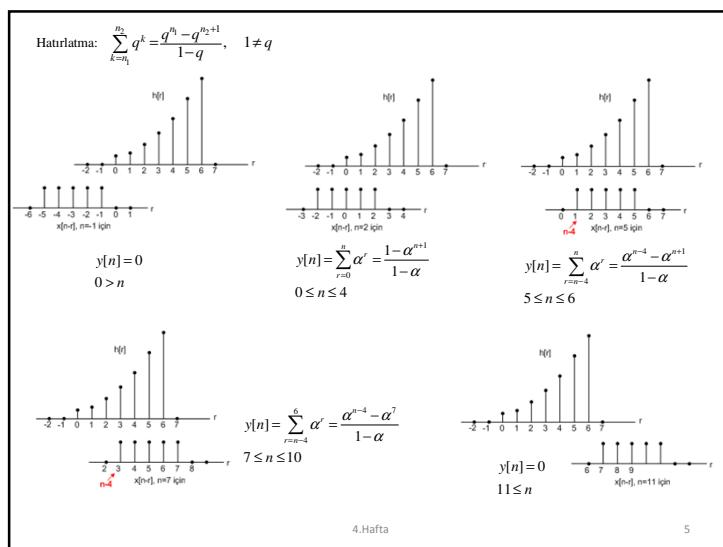


olmak üzere, $y[n] = x[n] * h[n] \rightarrow y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, & 0 \leq n \leq 4 \\ \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, & 4 < n \leq 6 \\ \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^7}{1-\alpha}, & 6 < n \leq 10 \\ 0, & n > 10 \end{cases}$

olarak hesaplanmıştır. (3.hafta)
Örnek üzerinde

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-r]h[r] = h[n] * x[n]$$

olduğunu gösterelim.



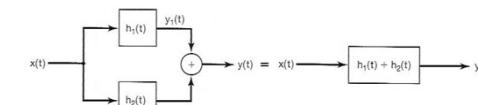
LTI Sistemlerin Özellikleri

- Konvolüsyon işlemi, **dağılma özelliğine** sahiptir. Matematiksel olarak,

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

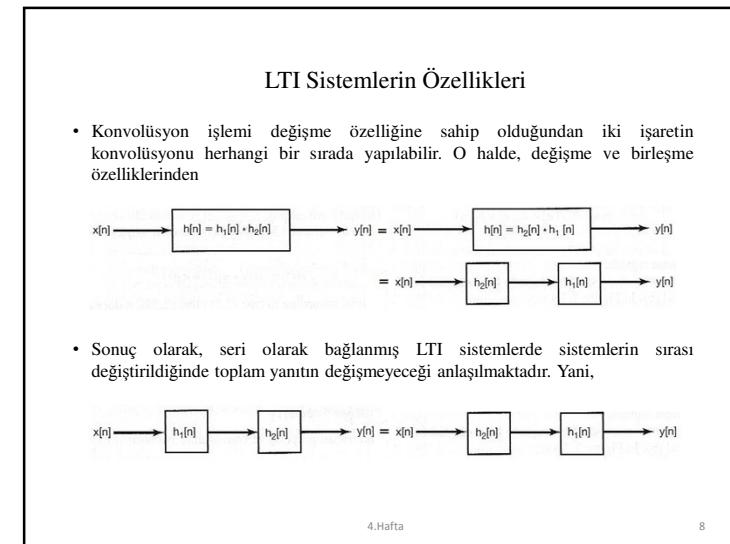
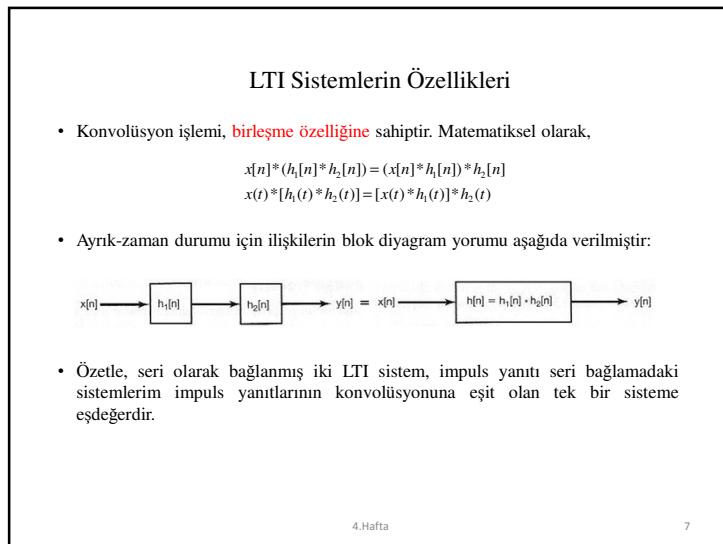
- Bu ilişkileri ispatlamak zor değildi. Sürekli-zaman durumu için ilişkilerin blok diyagram yorumu aşağıda verilmiştir:



- Özetle, paralel olarak bağlanmış LTI sistemler, impuls yanıtı parellel bağlamadaki LTI sistemlerin impuls yanıtlarının toplamına eşit olan tek bir sisteme eşdeğerdir.

4.Hafta

6



LTI Sistemlerin Özellikleri

- Hafızasız sistem tanımından, LTI sistemlerin hafızasız olabilmesi için ayrık-zaman durumunda $n \neq 0$ için $h[n] = 0$, sürekli-zaman durumunda ise $t \neq 0$ için $h(t) = 0$ olmalıdır. Yani,

$$\begin{aligned} h[n] &= K\delta[n] \\ h(t) &= K\delta(t) \end{aligned}$$

- $K = 1$ durumunda konvolüsyon toplamı ve konvolüsyon integrali aşağıdaki sonuçları verecektir:

$$\begin{aligned} x[n]*\delta[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n] \Rightarrow x[n]*\delta[n] = x[n] \\ x(t)*\delta(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \Rightarrow x(t)*\delta(t) = x(t) \end{aligned}$$

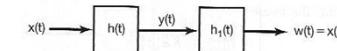
- Toplama işleminde, herhangi bir sayının sıfır ile toplamı kendine; çarpma işleminde herhangi bir sayının 1 ile çarpımı kendine eşittir. Konvolüsyon işleminde ise, bir işaretin impuls ile konvolüsyonu kendine eşit olmaktadır. O halde, konvolüsyon işleminin **BİRİM OPERATÖRÜ** impuls fonksiyonudur.

4.Hafta

9

LTI Sistemlerin Özellikleri

- Herhangi bir LTI sistemin tersinin de LTI olacağı gösterilebilir.
- Bir işaret, sisteme uygulanıp sistemin çıkışı da ters sisteme uygulandığında tekrar işaret geri elde edilir. Bu gözlem, sürekli-durumda aşağıda özetlenmiştir:



- O halde, sistem ve tersinin seri bağlanmasıından oluşan toplam sistemin impuls yanıt impuls fonksiyonuna eşit olmalıdır. Sistemin ve tersinin impuls yanıtları sırasıyla h ve h_1 ile gösterilsin. Impuls yanıtları arasındaki ilişki

$$h(t)*h_1(t) = \delta(t)$$

$$h[n]*h_1[n] = \delta[n]$$

eşitlikleriyle verilir.

4.Hafta

10

LTI Sistemlerin Özellikleri

ÖRNEK: Bir sürekli-zaman LTI sistemin girişi ile çıkışındaki ilişki $y(t) = x(t-t_0)$ ile verilmektedir. Ters sistemin impuls yanımı bulunuz.

CÖZÜM: Sistemin impuls yanımı bulmak için girişine $\delta(t)$ uygulanmalıdır. O halde,

$$h(t) = \delta(t-t_0)$$

Sisteme $x(t)$ uygulandığında çıkış

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0).$$

olup sistem girişi t_0 kadar ötelemektedir. Çıkış, ters yönde t_0 kadar ötelenirse giriş geri elde edilecektir. Yani, ters sistemin impuls yanımı $h_1(t) = \delta(t+t_0)$ olmalıdır. Yanımızı kontrol edelim:

$$\begin{aligned} h(t)*h_1(t) &= \delta(t-t_0)*\delta(t+t_0) \\ &= \delta(t+t_0-t_0) \\ &= \delta(t) \end{aligned}$$

4.Hafta

11

LTI Sistemlerin Özellikleri

- Bir LTI sistemin nedensel olabilmesi (çıkışın girişin gelecekteki değerlerine bağlı olmaması) için impuls yanımı bağımsız değişkenin negatif değerleri için sıfır olmalıdır. Yani,

$$\begin{aligned} h[n] &= 0, & n < 0 \\ h(t) &= 0, & t < 0. \end{aligned}$$

- O halde, nedensel bir LTI sisteme giriş belirli bir ana kadar sıfır ise çıkış da o ana kadar sıfır olacaktır.

- Nedensel LTI sistemler için konvolüsyon denklemleri aşağıdaki gibi olur:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

4.Hafta

12

LTI Sistemlerin Özellikleri

- Bir LTI sistemin kararlı olabilmesi için impuls yanıtının sağlaması gereken koşulu ayrık-zamanda çkaralım. Sürekli-zamanda adımlar benzer olduğundan sadece sonuç verilecektir.
- B bir sabit olmak üzere, impuls yanıt $h[n]$ olan sistemin girişine tüm n değerleri için $|x[n]| < B$ koşulunu sağlayan herhangi bir giriş uygulandığında çıkışın genliği konvolüsyon toplamı kullanılarak bulunabilir:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right|$$

- Sonsuz tane sayının toplamının mutlak değeri, sayıların mutlak değerlerinin toplamından küçük (veya eşit) ve iki sayının çarpımının mutlak değeri sayıların mutlak değerlerinin çarpımına eşit olduğundan

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]|$$

4.Hafta

13

LTI Sistemlerin Özellikleri

- En son toplamada, girişin genliği tüm anlarda B' den küçük olduğundan, girişin genliği yerine B yazılırsa toplamanın değeri daha fazla büyüyeceğinden

$$|y[n]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

- Son eşitsizlikten, çıkışın sonlu ($|y[n]| < \infty$) ve dolayısıyla sistemin kararlı olabilmesi için impuls yanıtının mutlak toplanabilir olması gereği sonucu çıkmaktadır:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

- Benzer şekilde, bir sürekli-zaman LTI sistemin kararlı olabilmesi için impuls yanıtının mutlak integrallenebilir olması gereği gösterilebilir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

4.Hafta

14

LTI Sistemlerin Özellikleri

ÖRNEK: İmpuls yanları aşağıda verilen sistemlerin kararlılığını belirleyiniz.

- (a) $h[n] = \delta(n-n_0)$, (b) $h(t) = \delta(t-t_0)$, (c) $h[n] = u(n)$, (d) $h(t) = u(t)$.

ÇÖZÜM:

(a) Sistem kararlıdır çünkü $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta[n-n_0]| = 1 < \infty$

(b) Sistem kararlıdır çünkü $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\delta(t-t_0)| dt = 1 < \infty$

(c) Sistem kararsızdır çünkü $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u[n]| = \infty$

(d) Sistem kararsızdır çünkü $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt = \infty$

4.Hafta

15

LTI Sistemlerin Özellikleri

- LTI sistemlerin davranışını belirlemek için **BİRİM BASAMAK YANITI** (sisteme birim basamak uygulandığında elde edilen yanıt) da kullanılabilir. Bu nedenle, impuls yanımı ile birim basamak yanımı arasındaki ilişkiyi bulmak faydalı olabilir.

- Ayrık-durumda sistemin birim basamak yanımı $s[n]$ ile gösterelim. $h[n]$ ile $s[n]$ arasındaki ilişki konvolüsyon toplamı kullanılarak belirlenebilir:

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

- Yukarıdaki ilişki eşdeğer olarak, $h[n] = s[n] - s[n-1]$ şeklinde de yazılabilir.

- Sürekli-durumda $h(t)$ ile $s(t)$ arasındaki ilişki konvolüsyon integralinden bulunur:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau \\ \Rightarrow h(t) &= \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t) \end{aligned}$$

4.Hafta

16

Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- $y(t)$ çıkış, $x(t)$ giriş olmak üzere, bir sürekli-zaman sisteminde giriş-çıkış ilişkisi aşağıdaki gibi olsun:
$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$
- Diferansiyel denklem giriş ile çıkış arasında bir kısıt vermektedir, ancak bu kısıt çözüm için yeterli değildir. Çözüm için başlangıç koşulları da belirtilmelidir.
- Bu derste, nedensel sürekli-zaman LTI sistemleri tanımlamada diferansiyel denklemler kullanacağız. Nedensel LTI sistemler için başlangıç koşulları özel bir şekildedir.
- Diferansiyel denklemi, K gerçel bir sayı olmak üzere $x(t) = K e^{3t} u(t)$ giriş'i için çözelim. $y(t)$, özel ($y_p(t)$) ve homojen çözümün ($y_h(t)$) toplamına eşittir:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

4.Hafta

17

Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- Özel çözüm diferansiyel denklemi sağlayan bir çözüm, homojen çözüm ise giriş sifirken diferansiyel denklemi çözümüdür.
- Özel çözümün girişe aynı forma sahip olduğu ancak parametrelerinin bilinmediği varsayılar. Yani, A bilinmeyen bir sabit olmak üzere $y_p(t) = Ae^{3t}$. Çözüm, diferansiyel denklemde yerine konulursa:
$$3Ae^{3t} + 2Ae^{3t} = Ke^{3t}, \quad t > 0 \Rightarrow A = \frac{K}{5}, \quad y_p(t) = \frac{K}{5}e^{3t}$$
- Hojojen çözümün, B ve s sabitler olmak üzere $y_h(t) = Be^{st}$ şeklinde olduğu varsayılar. $y_h(t)$ diferansiyel denklemde yerine konulursa, aşağıdaki sonuč bulunur:

$$sBe^{st} + 2Be^{st} = e^{st}(s+2) = 0$$

- $s = -2$ olmalıdır ve homojen çözüm herhangi bir B için Be^{-2t} dir. Sonuç olarak,

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Be^{-2t} + \frac{K}{5}e^{3t}, \quad t > 0.$$

4.Hafta

18

Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- Göründüğü gibi, soruda verilen bilgiler B sabitinin değerini belirlemek için yeterli değildir.
- Sistemin nedensel olduğu varsayılsa, $t < t_0$ için $x(t) = 0$ ise, $t < t_0$ için $y(t) = 0$ olmalıdır. Örneğimizde $t < 0$ için $x(t) = 0$ olup $t < 0$ için $y(t) = 0$ olacaktır. Çözüm $t = 0$ 'da hesaplanıp sıfır eşitlenirse B hesaplanabilir:

$$0 = B + \frac{K}{5} \Rightarrow B = -\frac{K}{5}$$

- O halde, çözüm tam olarak aşağıdaki gibi olur.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{K}{5}(e^{3t} - e^{-2t}), & t > 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = \frac{K}{5}(e^{3t} - e^{-2t})u(t)$$

4.Hafta

19

Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- Genelleştirme yaparsak, N . Dereceden sabit katsılılı diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde verilir:
$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$
- Çıkışın en yüksek dereceden türévine diferansiyel denklemin derecesi denir. Çözüm, homojen ve özel çözümlerin toplamına eşittir.
- Diferansiyel denklem tek başına çözüm için yeterli değildir. Başlangıç koşulları da belirtilmelidir. Farklı başlangıç koşulları farklı çözümler verir.
- Ancak, sistem nedensel ise $t < t_0$ için $x(t) = 0$ ise, $t < t_0$ için $y(t) = 0$ olacağinden başlangıç koşulları bulunabilir ve $t > t_0$ için $y(t)$ hesaplanabilir. İlgili başlangıç koşulları şöyledir:

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \frac{d^2y(t_0)}{dt^2} = \dots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0.$$

4.Hafta

20

Fark Denklemleriyle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- N . dereceden sabit katsayılı bir fark denklemi aşağıdaki şekilde verilir:
$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$
- Çözüm, homojen ve özel çözümlerin toplamına eşittir.
- Fark denklemi tek başına çözüm için yeterli değildir. Başlangıç koşulları da belirtilmelidir. Fark denklemi şu şekilde de düzenlenebilir:
$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right)$$
- O halde, $y[n]$ 'nin hesaplanabilmesi için $y[n-1], y[n-2], \dots, y[n-N]$ başlangıç koşullarının bilinmesine gerek vardır.
- Sürekli durumda olduğu gibi sistemin nedensel olduğu biliniyorsa başlangıç koşulları belirlenebilir ve fark denklemi çözülebilir.

4.Hafta

21

Fark Denklemleriyle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- Fark denkleminin N 'nin sıfırdan farklı olup olmamasına göre iki şekli vardır:

$$y[n] = \begin{cases} \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k], & N \neq 0, \\ \sum_{k=0}^M \left(\frac{b_k}{a_0} \right) x[n-k], & N = 0. \end{cases}$$

- $N = 0$ durumunda, çıkış sadece girişe bağlı olup çözüm için başlangıç koşulları gerekli değildir. Bu tür denklemelere **YİNELEMELİ OLMAYAN** denklem denilir.
- Yinelemeli olmayan fark denkleminde $x[n] = \delta[n]$ yapılsa sistemin impuls yanıtı elde edilir:
$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$
- İmpuls yanıtı, sonlu sayıda değer alındıktan yinelemeli olmayan fark denklemleriyle tanımlanan LTI sistemlere **SONLU İMPULS YANITLI (FIR)** sistem denilir.

4.Hafta

22

Fark Denklemleriyle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- $N \neq 0$ durumunda, çıkış hem giriş hem çıkışa bağlı olup için başlangıç koşullarına gerek vardır. Bu tür fark denklemelere **YİNELEMELİ** fark denklemi denilir.
- ÖRNEK:** Giriş-çıkış ilişkisi aşağıdaki fark denklemiyle verilen ayrik-zaman nedensel LTI sistemi ele alalım:

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2} y[n-1]$$

- Gördüğü gibi, çıkışın herhangi bir andaki değerinin hesaplanabilmesi için bir önceki değeri bilinmelidir.
- $x[n] = K\delta[n]$ olsun. $n < 0$ için giriş sıfır olduğundan $n < 0$ için $y[n] = 0$ olmalıdır. Bu nedenle, $n < 0$ için çıkışın hesaplanması gereklidir.
- $n \geq 0$ için başlangıç koşulu olarak $y[-1] = 0$ seçip hesaplama başlayabiliriz.

4.Hafta

23

Fark Denklemleriyle Tanımlanmış Nedensel LTI Sistemler

- $$y[0] = x[0] + \frac{1}{2} y[-1] = K$$
- $$y[1] = x[1] + \frac{1}{2} y[0] = \frac{1}{2} K$$
- $$y[2] = x[2] + \frac{1}{2} y[1] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 K$$
- $$\vdots$$
- $$y[n] = x[n] + \frac{1}{2} y[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n K$$
- $K = 1$ için $x[n] = \delta[n]$ olup sistemin impuls yanıtı $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ olur.
 - İmpuls yanıtı, sonsuz sayıda değer alındıktan yinelemeli fark denklemleriyle tanımlanan LTI sistemlere **SONSUZ İMPULS YANITLI (IIR)** sistem denilir.

4.Hafta

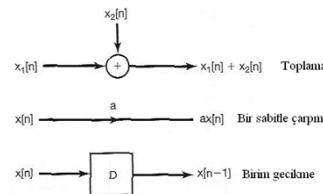
24

Birinci Dereceden Fark Denklemleriyle Tanımlanmış Ayrık-Zaman LTI Sistemlerin Blok Diyagram Gösterilimi

- Aşağıdaki fark denklemiyle tanımlanan basit bir ayrık-zaman nedensel LTI sistemi ele alalım:

$$y[n] = bx[n] - ay[n-1]$$

- Bu sisteme karşılık gelen blok diyagram gösterimini elde etmek için toplama, bir sabitle çarpma ve birim gecikme operatörleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

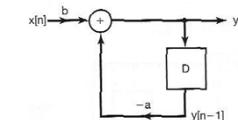


4.Hafta

25

Birinci Dereceden Fark Denklemleriyle Tanımlanmış Ayrık-Zaman LTI Sistemlerin Blok Diyagram Gösterilimi

- O halde, fark denklemi aşağıda verilen blok diyagramla temsil edilebilir.



- Blok diyagram, sistemin gerçekleştirilebilmesi için hafiza elemanına ve başlangıç koşullarının bilinmesine gerek olduğunu göstermektedir.

- Birim gecikme elemanı hafiza görevini görüp hesaplamalar için gerekli bir önceki çıkış değerini saklamaktadır. Sistem nedensel ise, giriş uygulanmaya kadar hafiza elemanında saklanan değer sıfırdır.

4.Hafta

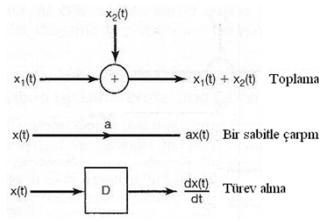
26

Birinci Dereceden Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Sürekli-Zaman LTI Sistemlerin Blok Diyagram Gösterilimi

- Aşağıdaki fark denklemiyle tanımlanan basit bir ayrık-zaman nedensel LTI sistemi ele alalım:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t) \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{a} \frac{dy(t)}{dt} + bx(t)$$

- Bu sisteme karşılık gelen blok diyagram gösterimini elde etmek için toplama, bir sabitle çarpma ve türev alma operatörleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

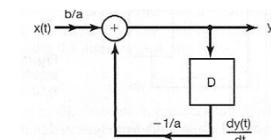


4.Hafta

27

Birinci Dereceden Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Sürekli-Zaman LTI Sistemlerin Blok Diyagram Gösterilimi

- O halde, diferansiyel denklem aşağıda verilen blok diyagramla temsil edilebilir.



- Türevin gerçekleştirilmesi zordur ve türev işlemi gürültü ile hatalara karşı oldukça duyarlıdır.

- Integral işleminin gerçekleştirilmesi ise kolaydır. Bu nedenle blok diyagram gösteriminde integratör kullanılması tercih edilir.

4.Hafta

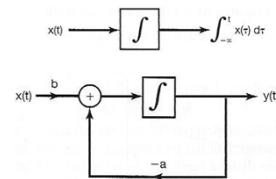
28

Birinci Dereceden Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Sürekli-Zaman LTI Sistemlerin Blok Diyagram Gösterilimi

- Diferansiyel denklemin her iki tarafının integrali alınırsa eşdeğer gösterilim elde edilir:

$$\frac{dy(t)}{dt} = bx(t) - ay(t) \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t [bx(\tau) - ay(\tau)] d\tau$$

- Bu sisteme karşılık gelen blok diyagramını elde etmek için toplama, bir sabitle çarpma ve integral alma işlemleri gereklidir. Integratör tanımı ve sistemin blok diyagram gösterilimi aşağıda verilmiştir:



4.Hafta

29

Birinci Dereceden Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanmış Sürekli-Zaman LTI Sistemlerin Blok Diyagram Gösterilimi

- İntegratörler, işlemel kuvvetlendiriciler kullanılarak gerçekleştirilebilir.
- Bu nedenle, sürekli-zaman sistemlere karşılık gelen blok diyagram gösterilimi modern analog hesaplayıcılara temel teşkil etmektedir.
- İntegratör hafıza görevini görüp hesaplamalar için gerekli başlangıç değerini saklamaktadır. Bunu görmek için, integral işleminin aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenebileceğine dikkat ediniz:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t [bx(\tau) - ay(\tau)] d\tau \Rightarrow y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t [bx(\tau) - ay(\tau)] d\tau$$

- İntegratör $y(t_0)$ başlangıç değerini saklamaktadır.
- Hem ayrik hem de sürekli durumda yüksek dereceden sistemlere karşılık gelen blok diyagramları benzer şekilde elde edilebilir.

4.Hafta

30

Hafta 5:
Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

1

Ele Alınacak Ana Konular

- LTI sistemlerin karmaşık üstel işaretlere yanıtı
- Sürekli-zaman periyodik işaretlerin Fourier serisi gösterilimi
- Fourier serisinin yakınsaklılığı
- Sürekli-zaman Fourier serisinin özellikleri

2

LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

- LTI sistemlerin analizinde faydalı bir yaklaşım, işaretleri aşağıdaki iki özelliği sağlayan temel işaretlerin doğrusal kombinasyonu şeklinde temsil etmektedir:
 1. Temel işaretler, geniş ve faydalı bir işaret kümesini oluşturabilmelidir.
 2. Bir LTI sistemin temel bir işaretin yanıtını basit olmalıdır. Böylece, LTI sistemin bir girişe yanıtını, basit yanıtların doğrusal kombinasyonu olacaktır.
- Bu iki özelliği, hem sürekli hem de ayrik durumda karmaşık üstel işaretler sağlamaktadır.
- LTI bir sistemin çıkışı $\{y(t)\}$ veya $\{y[n]\}$, girişin $\{x(t)\}$ veya $\{x[n]\}$, karmaşık bir sabitle çarpımına eşitse girişe **SİSTEMİN ÖZFONKSİYONU**, karmaşık sabite **SİSTEMİN ÖZDEĞERİ** denilir.
- s ve z karmaşık sayılar olmak üzere, aşağıda gösterildiği gibi sürekli-zamanda e^{st} , ayrik-zamanda z^n LTI sistemlerin özfonksiyonudur.

3

LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

- İmpuls yanıtı $h(t)$ olan bir sürekli-zaman LTI sistemin girişine $x(t)=e^{st}$ uygulandığında sistemin çıkışı $y(t)$ konvolüsyon integralinden hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \\ &= e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \end{aligned}$$

- Eşitliğin sağındaki integralin yakınsadığını varsayılm. Integralin değeri s 'e bağlıdır ve karmaşık bir sayıdır. İntegralin sonucunu $H(s)$ ile gösterelim:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

- O halde, $y(t) = H(s)e^{st}$ (çıkış, girişin karmaşık bir sayı $H(s)$ ile çarpımına eşittir). Böylece, karmaşık üstel e^{st} işaretinin sürekli-zaman LTI sistemlerin özfonksiyonu olduğu gösterilmiş olur.

4

LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

- Benzer işlemler ayrık-zamanda yapılabilir. İmpuls yanıtı $h[n]$ olan bir ayrık-zaman LTI sistemin z^n girişine olan yanıtın konvolusyonu toplamından hesaplanır:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} \\ &= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \end{aligned}$$

- Eşitliğin sağındaki toplamanın yakınsadığını varsayılmı. Toplamanın değeri z 'ye bağlıdır ve karmaşık bir sayıdır. Toplamanın sonucunu $H(z)$ ile gösterelim:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

- O halde, $y[n] = H(z)z^n$ (çıkış, girişin karmaşık bir sayı ile çarpımına eşittir). Yani, karmaşık üstel z^n işaretinin ayrık-zaman LTI sistemlerin özfonksiyonu olduğunu göstermiş olduk.

5

LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

- İmpuls yanıtı $h(t)$ olan bir sürekli-zaman LTI sisteme üç adet karmaşık üstel işaretin toplamına eşit olan bir giriş uygulayalım.

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}$$

- Özfonksiyon özelliğinden, sistemin karmaşık üstel işaretlere yanıtı şöyledir:

$$\begin{aligned} a_1 e^{s_1 t} &\rightarrow a_1 H(s_1) e^{s_1 t} \\ a_2 e^{s_2 t} &\rightarrow a_2 H(s_2) e^{s_2 t} \\ a_3 e^{s_3 t} &\rightarrow a_3 H(s_3) e^{s_3 t} \end{aligned}$$

- Sistem doğrusal olduğundan, karmaşık üç üstel işaretin toplamından oluşan girişe olan yanıtı üstel işaretlere olan yanıtlarının toplamına eşittir:

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

6

LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

- Yukarıdaki sonucu genelleştirebiliriz. Bir sürekli-zaman LTI sistemin girişini $x(t)$, karmaşık üstel işaretlerin ağırlıklı toplamı (doğrusal kombinasyonu) olsun:

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$$

- Doğrusallık ve özfonksiyon özelliklerinden, sistemin çıkışı aşağıdaki gibi olur:

$$y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

- Benzer şekilde, bir ayrık-zaman LTI sistemin girişini $x[n]$, ayrık-zaman karmaşık üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu olsun:

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n$$

- Sistemin çıkışı aşağıdaki gibi olur:

$$y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

7

LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

- GÖZLEM:** Bir LTI sistemin girişi karmaşık üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu ise, çıkışı da aynı üstel işaretlerin doğrusal bir kombinasyonudur. Çıkış işaretinin gösterilimindeki katsayılar, giriş işaretinin gösterilimindeki katsayılar ile karmaşık üstel işaretlere karşılık gelen sistem özdeğerlerinin çarpımına eşittir.

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \quad y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

- Bu gözlem, Fourier ve kendisinden sonra gelenlerin herhangi bir işaretin karmaşık üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu şeklinde nasıl yazılabileceğini hakkında araştırma yapmalarına ön ayak olmuştur.

- Bu ve öümüzdeki haftalar, soruyu sırasıyla sürekli ve ayrık-zaman periyodik işaretler için yanıtlayacak, daha sonraki haftada periyodik olmayan işaretler durumunu ele alacağız.

- s ve z herhangi bir karmaşık sayı olabilir. Ancak, Fourier analizinde s ve z sırasıyla $s = j\omega$ ve $z = e^{j\omega}$ varsayılmaktadır. Laplace ve z -dönüştüm konularında s ve z herhangi bir karmaşık sayıya genelleştirilecektir.

8

LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

ÖRNEK: Bir sürekli-zaman LTI sistemin girişi ile çıkışları arasındaki ilişki $y(t)=x(t-3)$ ve sisteme uygulanan giriş $x(t) = e^{j2t}$ olsun. Sistemin çıkışını söyleyiniz.

$$y(t) = e^{j2(t-3)} = e^{-j6}e^{j2t}$$

Uygulanan giriş bir özfonksiyon olduğundan bu sonucu aslında bekliyorduk. Girişin karşılık gelen özdeğeri hesaplayalım. Sistemin impuls yanıtının $h(t) = \delta(t-3)$ olduğu açıkta. O halde,

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-3) e^{-s\tau} d\tau = e^{-3s}$$

Örneğimizde $s = j2$ olduğundan, girişin karşılık gelen özdeğeri $H(j2) = e^{j6}$ olarak elde edilir. Görüldüğü gibi çıkış, giriş ile girişin karşılık gelen özdeğeri çarpımına eşittir.

9

Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Harmonik ilişkili karmaşık üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu şeklinde yazılan bir sürekli-zaman işaret ele alalım:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

- Harmonik ilişkili üstel işaretlerin herbirinin T ile periyodik olduğunu görmüştük. O halde, $x(t)$ 'de T ile periyodiktir. (Bknz. 1.hafta slayt 27-28)
- $k = 0$ için, toplamdaki üstel işaret sabittir. $k = \pm 1$ için üstel işaretlerin temel frekansı ω_0 'dır ve bu terimlere TEMEL veya BİRİNCİ HARMONİK bileşenler denir. $k = \pm 2$ için üstel işaretlerin temel frekansı $2\omega_0$ 'dır ve bu terimlere ikinci harmonik bileşenler denir. Genel olarak, $k = \pm N$ için toplamda karmaşık üstel işaretlere N . HARMONİK bileşenler denir.
- Periyodik bir işaretin yukarıdaki gibi toplam serisi şeklinde ifade edilmesine **FOURIER SERİSİ** gösterilimi denir.

10

Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

ÖRNEK: Temel frekansı 2π olan bir sürekli-zaman periyodik işaretin Fourier serisi gösterilimi aşağıda verilmiştir:

$$x(t) = \sum_{k=-3}^3 a_k e^{jk2\pi t}$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}, \quad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

Katsayılar toplamada yerine konularak işaretin analitik ifadesi elde edilebilir:

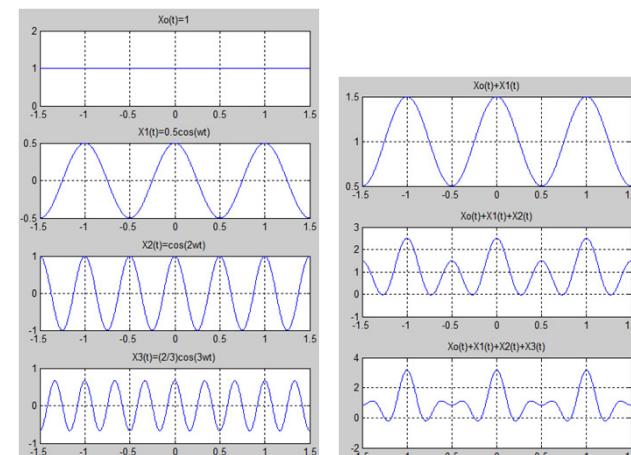
$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t})$$

Euler ilişkisi kullanılarak, işaret trigonometrik fonksiyonlar cinsinden de yazılabilir:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t)$$

11

Harmonik bileşenlerin işaretin nasıl oluşturduğu aşağıda gösterilmiştir.



Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Sürekli-zaman gerçel periyodik işaretler için Fourier serisinin diğer bir gösterilimi vardır. Gerçel bir işaret için $x(t) = x^*(t)$ olduğundan

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

- Son ifade, Fourier serisi gösterilimi ile karşılaştırılırsa $a_k = a_{-k}^*$ veya eşdeğer olarak $a_k^* = a_{-k}$ sonucu çıkar. Bu sonuçtan yararlanılarak Fourier serisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}] \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t}] \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \{ a_k e^{jk\omega_0 t} \} \end{aligned}$$

13

Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Son ifadede a_k kutupsal koordinatlarda $A_k e^{j\theta_k}$ şeklinde yazılsa aşağıda verilen eşdeğer trigonometrik gösterilim elde edilir:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \{ A_k e^{j\theta_k} e^{jk\omega_0 t} \} \\ &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \end{aligned}$$

- a_k kartezyen koordinatlarda $B_k + jC_k$ şeklinde yazılsa aşağıda verilen diğer bir trigonometrik gösterilim elde edilir:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \{ (B_k + jC_k) e^{jk\omega_0 t} \} \\ &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t)) \end{aligned}$$

14

Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Şimdi de, periyodik bir işaret için Fourier serisi katsayılarının a_k nasıl hesaplanabileceğini tartışacağız.
- Fourier serisi gösteriminde, eşitliğin her iki tarafı $e^{-jn\omega_0 t}$ ile çarpıldıkten sonra çarpının $[0, T]$ aralığında integrali almışsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt &= \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[\int_0^T e^{j[k-n]\omega_0 t} dt \right] \end{aligned}$$

- Köşeli parantez içindeki ifade Euler formülü kullanılarak yeniden düzenlenebilir:

$$\int_0^T e^{j[k-n]\omega_0 t} dt = \int_0^T \cos[(k-n)\omega_0 t] dt + j \int_0^T \sin[(k-n)\omega_0 t] dt$$

15

Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- $k \neq n$ için $\cos[(k-n)\omega_0 t]$ ve $\sin[(k-n)\omega_0 t]$ işaretleri $T/k\cdot n!$ temel periyodu ile periyodiktir. Integralin alındığı aralık T uzunlığında olup temel periyodon $|k-n|$ katıdır.

- Sinüs ve kosinüs işaretlerinin bir periyodunda, işaretlerin sıfırın üstünde ve altında kalan kısımları aynı alana sahip olup bu işaretlerin bir periyod ve dolasıyla da bir periyodun tamsayı katı uzunlığındaki bir aralıktaki integrali sıfır eşittir. Özetle, $k \neq n$ için her iki integral sıfır eşittir.

- $k = n$ için, integral 1 olup integralin sonucu T ye eşittir. Sonuç olarak,

$$\int_0^T e^{j[k-n]\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

- O halde, seri gösterimindeki katsayılar şöyle hesaplanır:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

16

Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Yukarıda bulunan sonucun, T uzunluklu herhangi bir aralık için geçerli olduğunu dikkat ediniz. T uzunluklu herhangi bir aralık boyunca integral \int_T notasyonu ile gösterilmek üzere, sürekli-zaman periyodik işaretin Fourier serisine açılımı ve açılımdaki katsayıların hesabı aşağıdaki eşitliklerde verilmiştir:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk(2\pi/T)t} dt$$

- İşaretin seri şeklinde gösterimine SENTEZ, katsayıların nasıl hesaplanacağını veren eşitlige ise ANALİZ denklemi denilir. a_0 katsayısi, işaretteki sabit veya DC bileşen olup işaretin bir periyod boyunca ortalama değeridir:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$$

17

Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- İlk önce a_0 'ı belirleyelim.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$$

Diger katsayılar (a_k , $k \neq 0$) benzer şekilde hesaplanır:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt$$

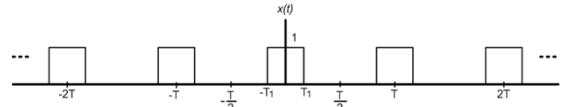
$$a_k = \frac{2}{k\omega_0 T} \left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j} \right] = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\sin(k \frac{2\pi}{T} T_1)}{k\pi}$$

a_k katsayıları sabit bir T_1 ve değişik T değerleri için aşağıda çizilmiştir. Bu örnek için katsayılar gerçek çıktılarından katsayılar için tek bir grafik (genlik grafiği) yeterli olmuştur. Katsayıların karmaşık sayı olması halinde iki grafiğin (genlik ve faz) gerekli olacağına dikkat ediniz.

19

Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- ÖRNEK:** Temel periyodu T ve temel frekansı $\omega_0 = 2\pi/T$ olan periyodik kare dalgaının Fourier serisi gösterimini elde ediniz.



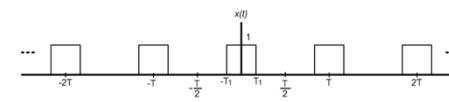
ÇÖZÜM: İşaretin bir periyodunun matematiksel ifadesi şöyledir:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 \leq |t| < T/2 \end{cases}$$

Fourier serisi katsayılarını bulmak için T uzunluklu herhangi bir aralık seçilebilir. İşaret, $t = 0$ etrafında simetrik olduğundan aralık olarak $-T/2 \leq t \leq T/2$ seçilmesi mantıklıdır.

18

$T=4T_1$ için a_k katsayılarını hesaplayalım.



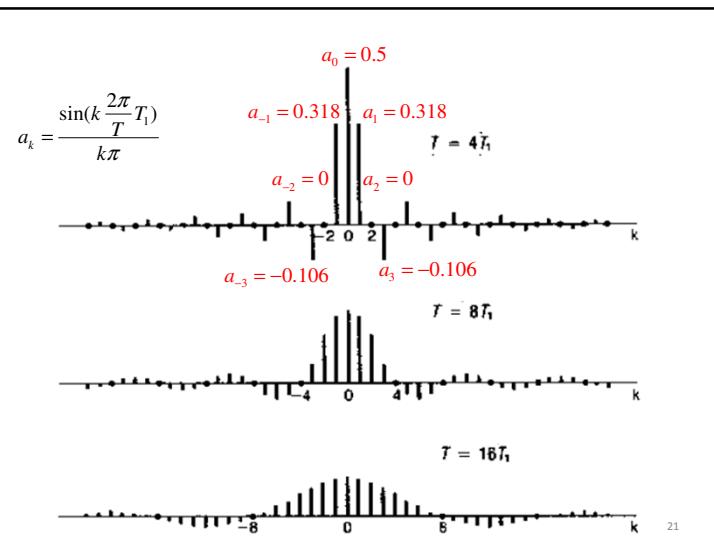
$$a_0 = \frac{2T_1}{T} = \frac{2T_1}{4T_1} = 0.5$$

$$k = 1 \text{ için } a_1 = \frac{\sin(1 \cdot \frac{2\pi}{4T_1} T_1)}{1\pi} = 0.318 \quad k = -1 \text{ için } a_{-1} = \frac{\sin(-1 \cdot \frac{2\pi}{4T_1} T_1)}{-1\pi} = 0.318$$

$$k = 2 \text{ için } a_2 = \frac{\sin(2 \cdot \frac{2\pi}{4T_1} T_1)}{2\pi} = 0 \quad k = -2 \text{ için } a_{-2} = \frac{\sin(-2 \cdot \frac{2\pi}{4T_1} T_1)}{-2\pi} = 0$$

$$k = 3 \text{ için } a_3 = \frac{\sin(3 \cdot \frac{2\pi}{4T_1} T_1)}{3\pi} = -0.106 \quad k = -3 \text{ için } a_{-3} = \frac{\sin(-3 \cdot \frac{2\pi}{4T_1} T_1)}{-3\pi} = -0.106$$

20



Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

ÖRNEK: Sinüzoidal işaretler için Fourier serisi doğrudan hesaplanabilir. Aşağıda verilen işaretin Fourier serisi gösterilimini elde edelim.

$$x(t) = 1 + \sin(\omega_0 t) + 2 \cos(\omega_0 t) + \cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})$$

Çözüm: Euler ilişkisinden işaret karmaşık üstel işaretlerin toplam şeklinde yazılabilir:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) + (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) + \frac{1}{2} (e^{j(2\omega_0 t + \pi/4)} + e^{-j(2\omega_0 t + \pi/4)}) \\ &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2j}\right) e^{j\omega_0 t} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right) e^{-j\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2} e^{j\pi/4}\right) e^{j2\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2} e^{-j\pi/4}\right) e^{-j2\omega_0 t} \end{aligned}$$

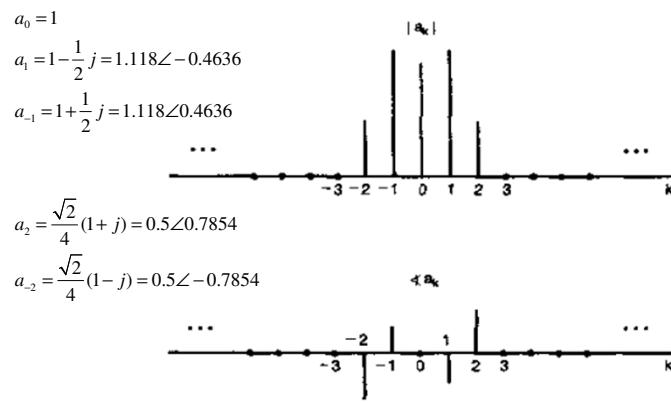
O halde $x(t)$ 'nin Fourier serisi katsayıları ifadeye bakılarak doğrudan yazılabilir

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \quad a_1 = 1 + \frac{1}{2j} = 1 - \frac{1}{2}j, \quad a_{-1} = 1 - \frac{1}{2j} = 1 + \frac{1}{2}j \\ a_2 &= e^{j\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+j), \quad a_{-2} = e^{-j\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-j) \\ a_k &= 0, \quad k \geq 3. \end{aligned}$$

22

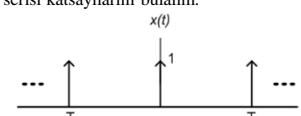
Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

Katsayıların genliği ve fazı, k ye bağlı olarak aşağıda çizilmiştir.



Sürekli-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

ÖRNEK: Örneklemde bahsedilecek periyodik impuls dizisinin $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ Fourier serisi katsayılarını bulalım.



ÇÖZÜM: İşaret, analiz denkleminde yerine konularak katsayılar hesaplanabilir. İşaret simetrik olduğundan integral aralığı olarak $-T/2 \leq t \leq T/2$ almak uygundur.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt \\ -T/2 \leq t \leq T/2 \text{ aralığında } x(t) &= \delta(t) \text{ olduğundan, } a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T} e^{-jk\frac{2\pi}{T}0} = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

Not: Yukarıdaki sonucu bulurken şu özelliği kullandık: $\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)f(t)dt = f(0)$

24

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Yakınsaklılığı

- Kare dalgada süreksizlikler vardır. Halbuki seri gösterimindeki harmonik ilişkili karmaşık üstel işaretlerin hepsi sürekli dir. Süreksiz bir işaretin sürekli işaretlerle temsil edilebileceğine şüpheyelik bakılmıştır.
- Fourier'in tespitleri dönemin usta matematikçisi Lagrange tarafından veto edilmiştir. Hatta, dönemin diğer matematikçileri Lacroix, Monge ve Laplace' in Fourier'e desteği bile araştırmaların yayınlanması için yeterli olmamıştır. Fourier'in araştırmaları vefatından sonra yayınlanabilmiştir.
- Fourier serisinin geçerliliğini göstermek için, bir sürekli-zaman periyodik işaretin sonlu sayıda harmonik ilişkili karmaşık üstel işaretle temsilini ele alalım:

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t}$$

- $e_N(t)$ yaklaşılık hatasını göstersin: $e_N(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t}$

25

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Yakınsaklılığı

- Farklı yaklaşılıkları birbiriley karşılaştırılabilme için, yaklaşılık hatasının boyutunu veren bir ölçüt kullanmamız gereklidir. Ölçüt olarak, bir periyot boyunca hatanın enerjisini kullanacağız.

$$E_N = \int_T |e_N(t)|^2 dt$$

- Hatanın enerjisini minimum yapan katsayıları

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

olduğu gösterilebilir (ödevlerin birinde bu sonuç ispatlanacaktır!). Yani, hatayı minimum yapan katsayılar Fourier serisi katsayılarına eşittir. O halde, $x(t)$ 'nin Fourier serisi gösterilimi varsa, N büyükçe hata azalır ve $N \rightarrow \infty$ limit durumunda E_N sıfır eşit olur.

- Şimdi de periyodik bir işaretin hangi koşullar altında Fourier serisi gösterilimine sahip olacağını belirlemeye çalışalım.

26

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Yakınsaklılığı

- İki durumla karşılaşmak mümkündür: (i) katsayıların hesaplanmasına imkan veren integral yakınsayabilir (bazi katsayılar sonsuz olabilir), (ii) katsayıların hepsi sonlu olsa bile, bu katsayılar sentez denkleminde yerine konulduğunda elde edilen seri orijinal işareti vermeyebilir.
- Periyodik bir işaret, bir periyod boyunca sonlu enerjiye sahip, yani $\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$ ise, Fourier serisi katsayılarının sonlu olacağı gösterilebilir. Bu durumda, işaret ile Fourier serisi gösterilimi arasındaki hatanın enerjisi bir periyot boyunca sıfır olacak.

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow \int_T |e(t)|^2 dt = 0$$

- Bu sonuc, Fourier serisi gösteriliminin işarette eşit olduğu anlamına gelmediğini, ancak ikisi arasındaki farkta enerji olmadığını belirtmektedir.
- Fiziksel sistemler, işaretin enerjisine yanıt verdiğiinden, bu anlamda işaret ile Fourier serisi gösterilimi eşdeğerdir. İlgiendiğimiz çoğu periyodik işaretin enerjisi sonlu olup bu işaretler için Fourier serisi gösterilimi mevcuttur.

27

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Yakınsaklılığı

- Dirichlet, periyodik bir işaret ile Fourier serisi gösteriliminin, işaretin süreksiz olduğu noktalar hariç eşit olabilmesi için koşulları belirlemiştir. Süreksizlik noktalarında seri, işaretin süreksizlik noktasında soldan ve sağdan limitlerinin ortalamasına eşit olur. Dirichlet koşulları aşağıda verilmiştir.

- Koşul 1:** İşaret bir periyod boyunca mutlak integrallenebilir olmalıdır:

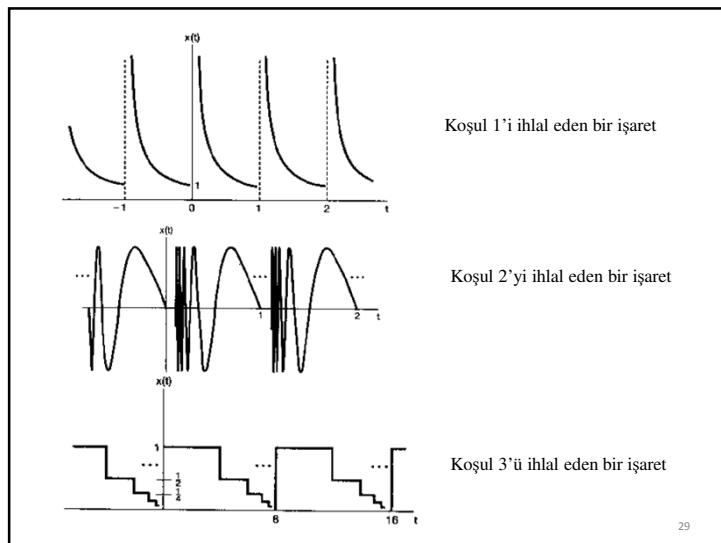
$$\int_T |x(t)| dt < \infty$$

- Koşul 2:** Bir periyot boyunca, işaretin sonlu sayıda minimum ve maksimumu olmalıdır.

- Koşul 3:** Sonlu bir aralıktaki işarette sonlu sayıda süreksizlik olmalı ve ayrıca süreksizlik noktalarında işaretin değeri de sonlu olmalıdır.

- Dirichlet koşullarını ihlal eden işaretler örnekler aşağıda verilmiştir.

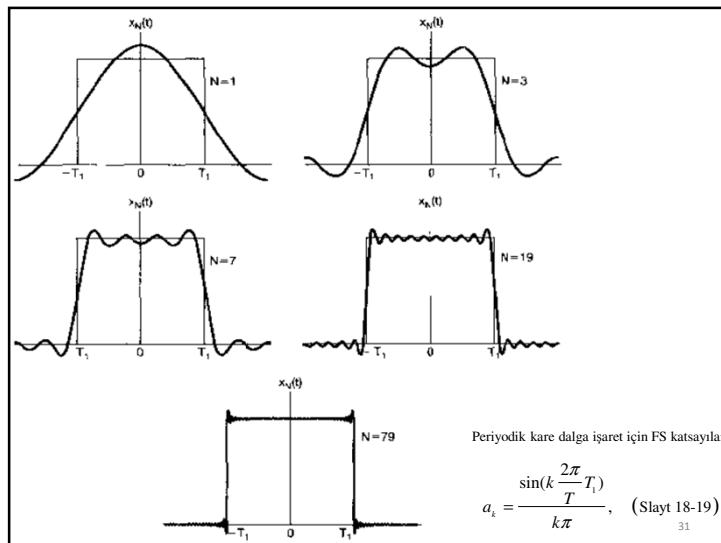
28



Sürekli-zaman Fourier Serisinin Yakınsaklısı

- Dirichlet koşullarını sağlamayan işaretlerin fiziksel sistemlerde karşımıza çıkma olasılığının oldukça az olduğu örneklerden görülmektedir.
- 1898 yılında, Amerikan fizikçi Albert Michelson, sonlu Fourier serisini $N = 80$ 'e kadar hesaplayan bir aygit (modern adıyla harmonik analizör) geliştirmiştir.
- Michelson, aygitin pek çok periyodik işaret için test etmiştir. Michelson, kare dalga için ummadığı sonuçlar elde edince geliştirdiği aygitın hatalı olabileceğini düşünmüştür ve konuyu matematsel fizikçi Josiah Gibbs ile paylaşmıştır.
- Gibbs, problemi derinlemesine incelemiştir ve düşüncelerini 1899 yılında Michelson ile paylaşmıştır.
- Periyodik kare dalga, Dirichlet koşullarını sağladığından, sonlu serideki terim sayısı sonsuza giderken süreksizlik noktalarında serinin limiti süreksizlik değerinin ortalamasına eşit olmalıdır. Diğer noktalarda, seri işarette yakınsamalıdır. Çeşitli N değerleri için yaklaşık işaret ve kare dalga aşağıda çizilmiştir.

30



Sürekli-zaman Fourier Serisinin Yakınsaklısı

- Michelson'un Gözleme: Sonlu seri, süreksizlik noktalarında dalgalanmalar vermektedir. Dalgalanmaların tepe genliği N 'den bağımsızdır ve N arttıkça azalmamaktadır.
- Gibbs'in Açıklaması: İşaretin süreksiz olmadığı bir t_1 noktası süreksizlik noktasına yaklaşıkça hatanın küçük olması için N büyük olmalıdır. Bu nedenle, N arttıkça dalgalanmalar süreksizlik noktası etrafında yoğunlaşır ancak dalgalanmanın maksimum genliği sabit kahr.
- Bu gözleme GIBBS OLAYI denir. Yani, süreksiz bir işaretin sonlu terimli Fourier serisi yaklaşılığı yüksek frekanslı dalgalanmalar içerir ve süreksizlik noktasında işaretten daha yüksek değer alır.
- Sonlu terimli Fourier serisi kullanılacaksa, dalgalanmalarındaki toplam enerji ihmal edilebilecek kadar küçük olacak şekilde yeterince büyük N değeri seçilmelidir. Limit durumunda, hatasının enerjisi sıfır olur ve Fourier serisi yakınsar.

32

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

- Temel periyodu T ve temel frekansı $\omega_0 = 2\pi/T$ olan periyodik bir işaretin Fourier serisi katsayılarının a_k olduğunu belirtmek için

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

notasyonunu kullanacağız.

- Sürekli-zaman Fourier serisinin aşağıda verilen özellikleri aracılığıyla, Fourier serisi katsayıları bilinen işaretler yardımıyla çoğu işaretin Fourier serisi açılımını elde etmek kolaylaşmaktadır.
- Fourier dönüşümü konusunda da göreceğimiz gibi, çoğu özellik Fourier dönüşümünün özelliklerinden elde edilebilir. Bu nedenle, sadece en önemli özellikleri sıralayacak ve yorumlayacağız.

33

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Özellik 1 (Zamanda öteleme): $x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$ ise, $x(t-t_0) \xleftrightarrow{FS} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k = e^{-jk(2\pi/T)t_0} a_k$

İspat: Periyodik bir işaret, zamanda ötelendirse periyodikliği korunur ve periyodu değişmez. Ötelemiş $y(t) = x(t-t_0)$ işaretinin Fourier serisi katsayıları b_k olsun:

$$b_k = \frac{1}{T} \int_T y(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T x(t-t_0) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Integralde, $\tau = t-t_0$ değişken dönüştürüp yapalım. t , uzunluğu T olan bir aralıktır. τ 'da uzunluğu T olan bir aralıktır. O halde,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0(\tau+t_0)} d\tau = e^{-jk\omega_0 t_0} \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \\ &= e^{-jk\omega_0 t_0} a_k = e^{-jk(2\pi/T)t_0} a_k \end{aligned}$$

Yorum: $|e^{-jk(2\pi/T)t_0}| = 1$ olduğundan, $|b_k| = |a_k|$.

(Periyodik bir işaret ötelendiğinde Fourier serisi katsayılarının genliği değişmez!)

34

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Özellik 2 (Zamanda tersine çevirme): $x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$ ise, $x(-t) \xleftrightarrow{FS} a_{-k}$

İspat: Periyodik bir işaret, zamanda tersine çevrilirse periyodikliği korunur ve periyodu değişmez. Fourier serisi açılımdan $x(-t)$ işaretini

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk2\pi/T}$$

şeklinde yazılabilir. Toplamada, $k = -m$ değişken dönüştürülürse

$$x(-t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m} e^{jm2\pi/T}$$

Son eşitlik, $x(-t)$ işaretinin Fourier serisi açılımı olup açılımdaki katsayılar a_{-k} 'dır.

Yorum: Bir sürekli-zaman periyodik işaret zamanda tersine çevrilirse, karşılık gelen Fourier serisi katsayıları da tersine çevrilir. O halde, çift işaretlerin ($x(t)=x(-t)$) Fourier serisi katsayıları çift ($a_k=a_{-k}$), tek işaretlerinkileri ise tek ($a_k=-a_{-k}$) olacaktır.

35

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Özellik 3 (Zamanda ölçekleme): $x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$ ise, $x(\alpha t) \xleftrightarrow{FS} a_{k/\alpha}$

İspat: Periyodik bir işaret, ölçeklendiğinde periyodu değişir. $x(t)$ 'nin temel periyodu T ve temel frekansı $\omega_0 = 2\pi/T$ ise, $x(\alpha t)$ 'nın temel periyodu T/α ve temel frekansı $\alpha\omega_0$ 'dır. $x(t)$ 'nın Fourier serisi açılımda t yerine αt yazılırsa

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\alpha\omega_0 t)}$$

Son eşitlik, temel frekansı $\alpha\omega_0$ olan işaretin Fourier serisi gösterilimi olup açılımdaki katsayılar $a_{k/\alpha}$ 'dır.

Yorum: Bir sürekli-zaman periyodik işaret zamanda ölçekleme Fourier serisi katsayılarını değiştirmez.

36

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Özellik 4 (Zamanda türev alma): $x(t) \xrightarrow{FS} a_k$ ise, $\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{FS} jk a_k a_{k-1}$

Ispat: Periyodik bir işaretin türevi alırsa yine periyodik olur ve periyodu değişmez. $x(t)$ 'nin Fourier serisi açılımında, eşitliğin her iki tarafının t 'ye göre türevi alırsa

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j k \omega_0 t} \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} [a_k e^{j k \omega_0 t}] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk \omega_0 a_k e^{j k \omega_0 t}\end{aligned}$$

Son eşitlik, temel frekansı $\omega_0 = 2\pi/T$ olan işaretin Fourier serisi gösterimini olup açılımdaki katsayılar $j k \omega_0 a_k = jk(2\pi/T)a_k$ olarak görülmektedir.

Yorum: Bir sürekli-zaman periyodik işaretin türevini almak, Fourier serisi katsayılarının hem genliğini hem de fazını değiştirmektedir.

37

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Özellik 5 (Parseval ilişkisi): $\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$

Ispat: Integralde, $|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$ yazıp, $x(t)$ ve $x^*(t)$ için Fourier serisi gösterimlerini kullanırsak

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt &= \frac{1}{T} \int_T x(t)x^*(t) dt = \frac{1}{T} \int_T \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^* e^{-jl\omega_0 t} \right] dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_k a_l^* \left[\frac{1}{T} \int_T e^{j(k-l)\omega_0 t} dt \right]\end{aligned}$$

Köşeli parantez içindeki integrali daha önce hesaplamıştık: $\int_T e^{j(k-l)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k=l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$

O halde, son eşitlikte sonsuz tane integral olmasına rağmen integrallerin sonunu sadece $l = k$ için T , diğer l değerlerinde 0'a eşittir. Sonuç olarak, iki toplama bir toplamaya indirgenir ve $l = k$ olur:

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k a_k^* \frac{1}{T} T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

38

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Parseval İlişkinin Yorumu:

- Bir işaretin farklı şekillerde temsil etmek aslında ilave bir bilgi vermemeştir.
- Bir büküş açısında gizli olan bir bilgi, diğer bir büküş açısında ortaya çıkabilir.
- İşaretin enerjisi kullanılan gösterimden bağımsızdır. Diğer bir deyişle, işaretin enerjisini zaman veya frekans uzayında hesaplamak aynı sonucu vermelidir.

Diger Özellikler:

- Sürekli-zaman Fourier serisinin ispatını vermediğimiz başka özellikler de vardır.
- Diğer özelliklerin ispatı benzer şekilde yapılabilir. Özelliklerin tümü aşağıdaki tabloda listelenmiştir.

39

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Özellik	Periyodik İşaret	Fourier Serisi Katsayıları
	$x(t) \quad \omega_0 = 2\pi/T$ temel frekansı ve $y(t) \quad T$ temel periyodu ile periyodik	a_k b_k
Doğrusallık	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Zamanda öteleme	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
Frekansa öteleme	$e^{jM\omega_0 t} x(t) = e^{jM(2\pi/T)t} x(t)$	a_{k-M}
Eşlenik alma	$x^*(t)$	a_{-k}^*
Zamanda tersine çevirme	$x(-t)$	a_{-k}
Zamanda ölçekleme	$x(\alpha t) \quad \alpha > 0$ (T/α ile periyodik)	a_k
Periyodik konvolusyon	$\int_T x(\tau) y(t-\tau) d\tau$	$T a_k b_k$
Zamanda çarpma	$x(t) y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{l-k}$

40

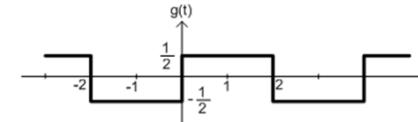
Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Özellik	Periyodik işaret	Fourier Serisi Katsayıları
Zamanda türev alma	$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_k a_k = jk \frac{2\pi}{T} a_k$
Zamanda integral alma	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$	$\left(\frac{1}{jk\omega_k} \right) a_k = \left(\frac{1}{jk(2\pi/T)} \right) a_k$
Gerçel işaretler için eşlenik simetriklilik	$x(t)$ gerçel	$a_k = a_k^*$ $\Re\{a_k\} = \Re\{a_{-k}\}$ $\Im\{a_k\} = -\Im\{a_{-k}\}$ $ a_k = a_{-k} $ $\prec a_k = -\prec a_{-k}$
Gerçel ve çift işaretler Gerçel ve tek işaretler	$x(t)$ gerçel ve çift $x(t)$ gerçel ve çift	a_k gerçel ve çift a_k saf karmaşık ve çift
Gerçel işaretlerin çift-tek ayrıştırması	$x_e(t) = \text{Ev}\{x(t)\}$ [x(t) gerçel] $x_o(t) = \text{Od}\{x(t)\}$ [x(t) gerçel]	$\Re\{a_k\}$ $j\Im\{a_k\}$
Periyodik İşaretler için Parseval İlişkisi		
$\frac{1}{T} \int_T x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k ^2$		

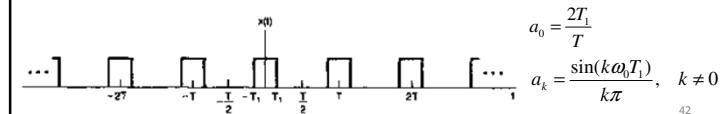
41

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

ÖRNEK: Sürekli-zaman Fourier serisinin özelliklerinden yararlanarak aşağıda verilen $g(t)$ işaretinin ($T = 4$ ile periyodik) Fourier serisi katsayılarını bulalım.

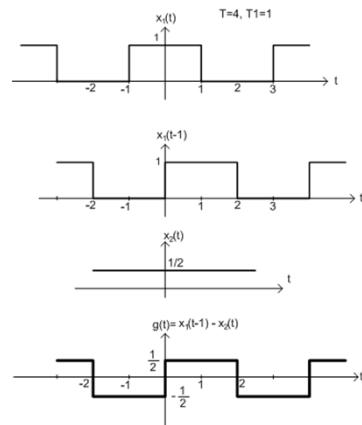


ÇÖZÜM: $g(t)$ işaretini analiz denkleminde yerine koymak, Fourier serisi katsayılarını belirleyebiliriz. Ancak, $g(t)$ işaretini daha önce Fourier serisini hesapladığımız periyodik simetrik kare dalga cinsinden ifade edip sonucu bulacağız. Kare dalga ve Fourier serisi katsayıları, hatırlatma amacıyla aşağıda verilmiştir:



42

Periyodik kare dalga işaretinde $T = 4$ ve $T_1 = 1$ alalım. Şekillerden, $g(t)$ ile $x(t)$ arasındaki ilişkinin $g(t) = x(t-1) - 1/2$ olduğu görülmektedir.



43

$x(t-1)$ işaretinin Fourier serisi katsayıları b_k olsun. Öteleme özelliğinden,

$$b_k = a_k e^{-jk\pi/2}$$

DC terimin (-1/2) Fourier serisi katsayıları c_k olsun. DC işaretin sıfırdan farklı bir Fourier serisi katsayısı vardır:

$$c_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ -1/2, & k = 0 \end{cases}$$

$g(t)$ işaretinin Fourier serisi katsayıları d_k olsun. Doğrusallık özelliğinden

$$d_k = b_k + c_k = \begin{cases} a_k e^{-jk\pi/2}, & k \neq 0 \\ a_0 - 1/2, & k = 0 \end{cases}$$

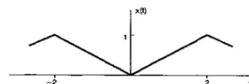
Son ifadede a_k yerine konulursa

$$d_k = \begin{cases} \frac{\sin(\pi k/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

44

Sürekli-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

ÖRNEK: Sürekli-zaman Fourier serisinin özelliklerinden yararlanarak aşağıda verilen $x(t)$ işaretinin ($T = 4$ ile periyodik) Fourier serisi katsayılarını bulalım.



ÇÖZÜM: Bu işaretin türevi, önceki örnekte ele alınan $g(t)$ işaretine eşittir. $g(t)$ ve $x(t)$ işaretlerinin Fourier serisi katsayılarını sırasıyla d_k ve e_k ile gösterelim. Türev özelliğinden,

$$d_k = jk(2\pi/4)e_k \Rightarrow e_k = \frac{2d_k}{jk\pi}$$

İfade, $k \neq 0$ için geçerlidir. d_k eşitlikteyere konulursa $e_k = \frac{2\sin(\pi k/2)}{j(k\pi)^2} e^{-jk\pi/2}$, $k \neq 0$

e_0 , bir periyot boyunca $x(t)$ 'nin altındaki alan periyoda bölünerek elde edilebilir:

$$e_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 x(t) dt = \frac{1}{2}$$

Hafta 6:
Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

1

Ele Alınacak Ana Konular

- Ayrık-zaman periyodik işaretlerin Fourier serisi gösterilimi
- Ayrık-zaman Fourier serisinin özellikleri
- Fourier serisi ve LTI sistemler



Jean Baptiste Joseph Fourier

2

Ayrık-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Ayrık-zaman Fourier serisindeki amaç, periyodik bir ayrık-zaman işaretin harmonik ilişkili ayrık-zaman karmaşık üstel işaretler cinsinden yazmaktır.
- Ancak, $\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk(2\pi/N)n}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ile verilen harmonik ilişkili karmaşık üstel kümelerde birbirinden farklı sadece N adet işaret olduğunu hatırlayın. (Bknz. 1. hafta slayt 42)
- N ile periyodik bir ayrık-zaman periyodik işaretin, harmonik ilişkili üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu şeklinde yazmaya çalışalım:

$$x[n] = \sum_k a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

- Birbirinden farklı N adet üstel işaret olduğundan, toplama N termi içermelidir. Toplamaya herhangi bir k değerinden başlanabilir (örneğin, $k = 0, 1, \dots, N-1$ veya $k = 3, 4, N+2$). Bu durumu belirtmek için $k = <N>$ notasyonu kullanılırsa

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

- Periyodik bir ayrık-zaman işaretin bu şekilde yazılmasına **ayırık-zaman Fourier serisi gösterilimi** ve a_k katsayılarına **Fourier serisi katsayıları** denir.

3

Ayrık-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Ayrık-zaman Fourier serisi katsayılarının hesaplanmasıında aşağıda verilen eşitliği kullanacağız.

$$\text{Hاتırlatma: } \sum_{n=<N>} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

- Fourier serisinin iki yanını $e^{-jr(2\pi/N)n}$ ile çarpıp, N termi üzerinden toplarsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n} &= \sum_{n=<N>} \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n} e^{-jr(2\pi/N)n} \\ &= \sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=<N>} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} \end{aligned}$$

- İçteki toplama $k = r$ için N , $k \neq r$ için 0'dır. O halde, iki toplama tek toplamaya indirgenir ve $k = r$ olur. Sonuç olarak,

$$\sum_{n=<N>} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{k=<N>} a_r N \Rightarrow a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n}$$

4

Ayırık-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

- Ayırık-zaman periyodik işaretin Fourier serisine açılımı ve açılımdaki katsayıların hesabı aşağıdaki eşitliklerde özetlenmiştir.

Sentez denklemi:	$x[n] = \sum_{k=-N}^{N-1} a_k e^{j k \omega_0 n} = \sum_{k=-N}^{N-1} a_k e^{j k (2\pi/N) n}$
Analiz denklemi:	$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^{N-1} x[n] e^{-j k \omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^{N-1} x[n] e^{-j k (2\pi/N) n}$

- $\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}$ olsun. Sentez denklemi, $k = 0, 1, \dots, N-1$ veya $k = 1, 2, \dots, N$ için yazılsa aynı sonucu vereceğinden

$$x[n] = a_0 \phi_0[n] + a_1 \phi_1[n] + \dots + a_{N-1} \phi_{N-1}[n]$$

$$x[n] = a_1 \phi_1[n] + a_2 \phi_2[n] + \dots + a_N \phi_N[n]$$

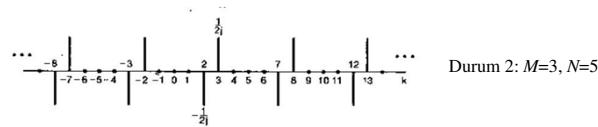
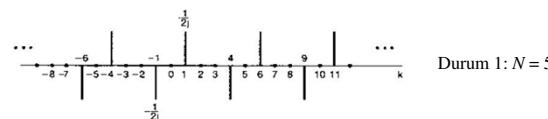
$$x[n] = a_2 \phi_2[n] + a_3 \phi_3[n] + \dots + a_{N+1} \phi_{N+1}[n]$$

- Ancak, $\phi_0[n] = \phi_N[n]$ olduğundan, yukarıdaki eşitliklerden $a_0 = a_N$ sonucu çıkar. Benzer işlemler, arka arakaya gelen N adet k için yapılrsa $a_k = a_{k+N}$ elde edilir. Yani, [periyodik bir ayırık-zaman işaretin Fourier serisi katsayıları da periyodiktir!](#)

Durum2: Euler ilişkisinden

$$x[n] = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}) = \frac{1}{2j} e^{jM(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-jM(2\pi/N)n} \Rightarrow a_M = \frac{1}{2j}, \quad a_{-M} = -\frac{1}{2j}, \quad a_k = 0, \quad k \neq \pm M$$

Fourier serisi katsayıları her iki durum için aşağıda çizilmiştir. Katsayıların periyodik olduğuna dikkat ediniz.



7

Ayırık-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

ÖRNEK: Sinüzoidal işaretler için Fourier serisi doğrudan hesaplanabilir. Aşağıda verilen işaretin Fourier serisi gösterilimini elde edelim.

$$x[n] = \sin(\omega_0 n)$$

Çözüm: $2\pi/\omega_0$ rasyonel bir sayı ise $x[n]$ periyodiktir. Bu koşulun sağlanması halinde iki durum vardır:

Durum 1: N bir tamsayı olmak üzere, $2\pi/\omega_0 = N$

Durum 2: N ve M tamsayılar olmak üzere, $2\pi/\omega_0 = N/M$

Durum1: Euler ilişkisinden

$$\begin{aligned} x[n] &= \sin(\omega_0 n) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}) \\ &= \frac{1}{2j} e^{j(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-j(2\pi/N)n} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}, \quad a_k = 0, \quad k \neq \pm 1 \end{aligned}$$

6

Ayırık-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

ÖRNEK: Aşağıdaki işaretin ayırık-zaman Fourier serisi gösterilimini elde edelim

$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)$$

ÇÖZÜM: İşaret N ile periyodiktir. Euler ilişkisinden

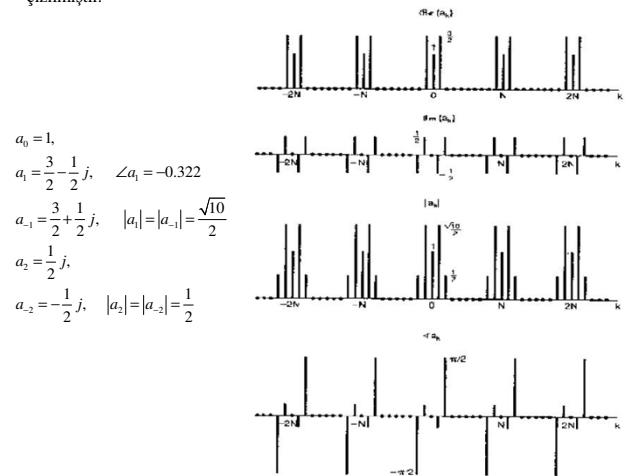
$$\begin{aligned} x[n] &= 1 + \frac{1}{2j} [e^{j(2\pi/N)n} - e^{-j(2\pi/N)n}] + \frac{3}{2} [e^{j(2\pi/N)n} + e^{-j(2\pi/N)n}] + \frac{1}{2} [e^{j(4\pi/N+\pi/2)n} + e^{-j(4\pi/N+\pi/2)n}] \\ &= 1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2j}\right) e^{j(2\pi/N)n} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j}\right) e^{-j(2\pi/N)n} + \left(\frac{1}{2} e^{j\pi/2}\right) e^{j2(2\pi/N)n} + \left(\frac{1}{2} e^{-j\pi/2}\right) e^{-j2(2\pi/N)n} \end{aligned}$$

Fourier serisi katsayıları doğrudan yazılabilir:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \quad a_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j, \quad a_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j \\ a_2 &= \frac{1}{2}j, \quad a_{-2} = -\frac{1}{2}j, \quad a_k = 0, \quad k \neq 0, \pm 1, \pm 2. \end{aligned}$$

8

Fourier serisi katsayılarının gerçel ve sanal kısımları, genliği ve fazı aşağıda çizilmiştir.



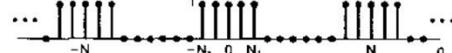
Ayırık-zaman Periyodik İşaretlerin Fourier Serisi Gösterilimi

ÖRNEK: Aşağıdaki verilen periyodik ayırık-zaman kare dalgaının Fourier serisi gösterimini elde edelim

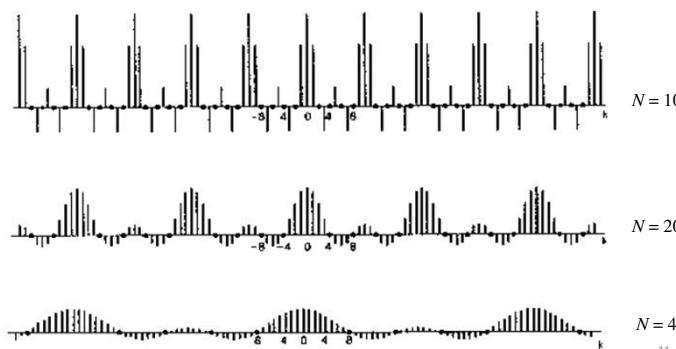
ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)} = \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)m} \\
 &= \frac{1}{N} e^{\frac{j2\pi}{N}N_1} \left(\frac{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1)}}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}} \right) = \frac{1}{N} \frac{e^{\frac{jk2\pi(2N_1+1)}{N}}}{e^{\frac{j2\pi(1)}{N}}} \left(\frac{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1)}}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}} \right) = \frac{1}{N} \frac{e^{\frac{jk2\pi(2N_1+1)}{N}} - e^{-jk\frac{2\pi(2N_1+1)}{N}}}{e^{\frac{j2\pi(1)}{N}} - e^{-jk\frac{2\pi(1)}{N}}} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\sin[k \frac{2\pi}{N}(N_1+1/2)]}{\sin[k \frac{2\pi}{N} \frac{1}{2}]}, & k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{2N_1+1}{N}, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

10



Verilen işaretin Fourier serisi katsayıları $2N_1+1=5$ ve $N=10, 20, 40$ için aşağıda çizilmiştir.



Ayırık-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

- Temel periyodu N ve temel frekansı $\omega_0 = 2\pi/N$ olan periyodik bir ayırık-zaman işaretin Fourier serisi katsayılarının a_k olduğunu belirtmek için

$$x[n] \stackrel{FS}{\leftrightarrow} a_k$$

notasyonunu kullanacağız.

- Ayırık-zaman Fourier serisinin aşağıda verilen özellikleri aracılığıyla, Fourier serisi katsayıları bilinen işaretler yardımıyla çoğu işaretin Fourier serisi açılımını elde etmek kolaylaşmaktadır.
- Özellikler, sürekli durumda benzer bir şekilde kolaylıkla ispatlanabilir.

12

Ayrık-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Özellik	Periyodik işaret	Fourier Serisi Katsayıları
	$x[n]$ $\omega_0 = 2\pi/N$ temel frekansı ve $y[n]$ N temel periyodu ile periyodik	a_k b_k
Doğrusallık	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
Zamanda öteleme	$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk\omega_0 n_0} = a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
Frekansa öteleme	$e^{jM\omega_0 t} x[n] = e^{jM(2\pi/N)t} x[n]$	a_{k-M}
Eşlenik alma	$x^*[n]$	a_{-k}^*
Zamanda tersine çevirme	$x[-n]$	a_{-k}
Zamanda ölçekleme	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & n, m \text{ nin tam katı} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$	$\frac{1}{m} a_k$
Periyodik konvolusyon	$\sum_{r=n-N}^n x[r] y[n-r]$	$Na_k b_k$
Zamanda çarpma	$x[n] y[n]$	$\sum_{l=n}^N a_l b_{k-l}$

13

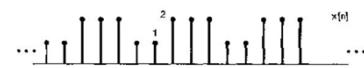
Ayrık-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

Özellik	Periyodik İşaret	Fourier Serisi Katsayıları
Zamanda fark alma	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-jk(2\pi/N)}) a_k$
Zamanda toplama	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\left(\frac{1}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}}\right) a_k$
Gerçel işaretler için eşlenik simetriklik	$x[n]$ gerçel	$a_k = a_k^*$ $\Re\{a_k\} = \Re\{a_{-k}\}$ $\Im\{a_k\} = -\Im\{a_{-k}\}$ $ a_k = a_{-k} $ $\prec a_k = -\prec a_{-k}$
Gerçel ve çift işaretler Gerçel ve tek işaretler	$x[n]$ gerçel ve çift $x[n]$ gerçel ve tek	a_k gerçel ve çift a_k saf karmaşık ve tek
Gerçel işaretlerin çift-tek ayrıştırması	$x_e[n] = \text{Ev}\{x[n]\}$ $[x[n]$ gerçel] $x_o[n] = \text{Od}\{x[n]\}$ $[x[n]$ gerçel]	$\Re\{a_k\}$ $j\Im\{a_k\}$
Periyodik İşaretler için Parseval İlişkisi		
$\frac{1}{N} \sum_{n=-N}^N x[n] ^2 = \sum_{k=-N}^N a_k ^2$		

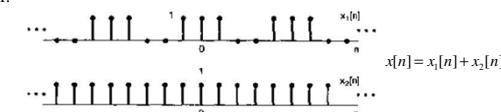
14

Ayrık-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

ÖRNEK: Ayrık-zaman Fourier serisinin özelliklerinden yararlanarak aşağıda verilen $x[n]$ işaretinin ($N = 5$ ile periyodik) Fourier serisi katsayılarını bulalım.



CÖZÜM: $x[n]$ işaretin, aşağıda gösterildiği gibi $x_1[n]$ ve $x_2[n]$ işaretlerinin toplamı olarak yazılabilir.



$x[n]$, $x_1[n]$ ve $x_2[n]$ işaretlerinin Fourier serisi katsayıları sırasıyla a_k , b_k ve c_k olsun. Doğrusallık özelliğinden $a_k = b_k + c_k$

15

$$b_k \text{ daha önce bulunmuştu } (N_1=1, N=5): \quad b_k = \begin{cases} \frac{1}{5} \frac{\sin(3\pi k/5)}{\sin(\pi k/5)}, & k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ \frac{3}{5}, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \end{cases}$$

$x_2[n]$ işaretin sabit (DC) olup sıfırdan farklı bir Fourier serisi katsayısına sahiptir:

$$c_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

Fourier serisi katsayıları 5 ile periyodik olduğundan $c_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ 1, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \end{cases}$

O halde,

$$a_k = b_k + c_k = \begin{cases} \frac{1}{5} \frac{\sin(3\pi k/5)}{\sin(\pi k/5)}, & k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ \frac{8}{5}, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \end{cases}$$

16

Ayrık-zaman Fourier Serisinin Özellikleri

ÖRNEK: Hakkında aşağıdaki bilgiler bilinen ayrık-zaman işareti bulunuz.

1. $x[n], N = 6$ ile periyodiktir,

$$2. \sum_{n=0}^5 x[n] = 2$$

$$3. \sum_{n=2}^7 (-1)^n x[n] = 1$$

4. Yukarıdaki üç koşulu sağlayan işaretler arasından, periyot başına en küçük enerjiye $x[n]$ sahiptir.

ÇÖZÜM: 2 nolu bilgiden $a_0 = 1/3$.

$$(-1)^n = e^{-j\pi n} = e^{-j(2\pi/6)3n} \text{ olduğundan, } 3 \text{ nolu bilgiden } a_3 = 1/6.$$

$$\text{Analiz denklemi: } a_k = \frac{1}{N} \sum_{n < N} x[n] e^{-jk\pi n} = \frac{1}{N} \sum_{n < N} x[n] e^{-jk(2\pi/6)n}$$

17

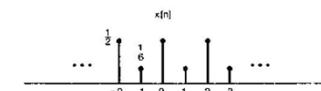
İşaretteki ortalama güç Parseval ilişkisi kullanılarak hesaplanabilir:

$$P = \sum_{k=0}^5 |a_k|^2$$

a_k katsayılarının her birinin P 'ye katkısı pozitif bir sayıdır. a_0 ve a_3 değerleri belli olduğundan, P 'nin en küçük olabilmesi için $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$ olmalıdır. Tüm katsayılar belirlendiğinden, sentez denklemi kullanılarak işaret belirlenebilir.

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=0}^5 a_k e^{jk(2\pi/6)n} = \sum_{k=0}^5 a_k e^{jk(2\pi/6)n} \\ &= a_0 + a_3 e^{j\pi n} = (1/3) + (1/6)(-1)^n \end{aligned}$$

Bir periyot boyunca işaretin değişimi aşağıda verilmiştir



18

Fourier Serisi ve LTI Sistemler

- İmpuls yanımı $h(t)$ olan bir sürekli-zaman LTI sistemin girişine e^{st} uygulandığında sistemin çıkışı $H(s)$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

olmak üzere, $y(t) = H(s)e^{st}$ ile veriliyordu.

- Benzer şekilde, impuls yanımı $h[n]$ olan bir ayrık-zaman LTI sistemin z^n girişine olan yanımı $H(z)$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}$$

olmak üzere, $y[n] = H(z)z^n$ eşitliğinden hesaplanmaktadır.

- s ve z genel karmaşık sayılar olduğunda $H(s)$ ve $H(z)$ 'ye **TRANSFER FONKSİYONU** (veya sistem fonksiyonu) denir.

19

Fourier Serisi ve LTI Sistemler

- $s = j\omega$ özel durumunda (giriş o frekanslı karmaşık üstel işaretse) sürekli-zaman sistem fonksiyonuna sistemin **FREKANS YANITI** denir ve $H(j\omega)$ ile gösterilir:

$$H(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

- Benzer şekilde, $z = e^{j\omega}$ ise, ayrık-zaman sistem fonksiyonuna frekans yanıtı denir ve $H(e^{j\omega})$ ile belirtilir:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

- LTI bir sistemin **periyodik bir işaret** yanıtı, sistemin frekans yanıtından kolaylıkla belirlenebilir. Adımlar aşağıda verilmiştir. (Bknz, 5.sunu slayt 7-8)

20

Fourier Serisi ve LTI Sistemler

- **Sürekli-zaman:** Periyodik $x(t)$ işaretini impuls yanıt $h(t)$ olan bir LTI sisteme uygulandığında çıkışı hesaplayalım.
- $x(t)$ periyodik olduğundan Fourier serisine açılabilir: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$
- Herhangi bir karmaşık üstel ($a_k e^{jk\omega_0 t}$) işaretinin yanıt: $a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$
- Sistem doğrusal olduğundan, sistemin karmaşık üstel işaretlerin toplamına olan yanıtı, karmaşık üstel işaretlere tek tek yanıtlarının toplamına eşittir.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

- **Gözlem:** Çıkış da periyodiktir. Girişin Fourier serisi katsayıları a_k ise çıkışın Fourier serisi katsayıları $H(jk\omega_0)a_k$ 'dır. Yani, giriş katsayıları frekans yanıtının karşılık gelen frekanstaki değeriyle çarpılmıştır.

21

Fourier Serisi ve LTI Sistemler

- **Ayrık-zaman:** Periyodik $x[n]$ işaretinin impuls yanıt $h[n]$ olan bir LTI sisteme uygulandığında çıkışı hesaplayalım.
- $x[n]$ periyodik olduğundan Fourier serisine açılabilir: $x[n] = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$
- Herhangi bir karmaşık üstel ($a_k e^{jk(2\pi/N)n}$) işaretinin yanıt: $a_k H(e^{j2\pi k/N}) e^{jk(2\pi/N)n}$
- Sistem doğrusal olduğundan, sistemin karmaşık üstel işaretlerin toplamına olan yanıtı, karmaşık üstel işaretlere tek tek yanıtlarının toplamına eşittir.

$$x[n] = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k H(e^{j2\pi k/N}) e^{jk(2\pi/N)n}$$

- **Gözlem:** Çıkış da periyodiktir. Girişin Fourier serisi katsayıları a_k ise çıkışın Fourier serisi katsayıları $H(e^{j2\pi k/N})a_k$ 'dır. Yani, giriş katsayıları frekans yanıtının karşılık gelen frekanstaki değeriyle çarpılmıştır.

22

Fourier Serisi ve LTI Sistemler

ÖRNEK: Aşağıda verilen sürekli-zaman periyodik işaret, impuls yanımı $h(t) = e^{-t} u(t)$ olan sisteme uygulandığında, çıkışın Fourier serisi katsayılarını bulunuz.

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t)$$

ÇÖZÜM: Giriş ve çıkışın katsayıları a_k ve b_k olsun. İlk önce frekans yanıtını hesaplayalım.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{1+j\omega}$$

Girişin temel periyodu $T = 1$ ($\omega_0 = 2\pi$) olduğundan çıkışın da temel periyodu 1'dir. Ayrıca, girişin $k \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ için Fourier serisi katsayıları sıfırdır. O halde,

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=-3}^3 b_k e^{jk2\pi t}, \quad b_k = a_k H(jk2\pi), \quad b_0 = 1, \\ b_1 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+j2\pi} \right), \quad b_{-1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-j2\pi} \right) \\ b_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+j4\pi} \right), \quad b_{-2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-j4\pi} \right) \\ b_3 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+j6\pi} \right), \quad b_{-3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-j6\pi} \right) \end{aligned}$$

23

Fourier Serisi ve LTI Sistemler

ÖRNEK: İmpuls yanımı $h[n] = \alpha^n u[n]$, ($-1 < \alpha < 1$) olan sisteme $x[n] = \cos(2\pi n/N)$ uygulandığında, çıkışın Fourier serisi katsayılarını bulunuz.

ÇÖZÜM: Çıkışın katsayıları b_k olsun. İlk önce frekans yanıtını hesaplayalım.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

$$\text{Euler ilişkisinden } x[n] = \frac{1}{2} e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} e^{-j(2\pi/N)n} \quad \text{Hاتırlatma: } \sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - q^{n+1}}{1-q}, \quad 1 \neq q$$

$$\begin{aligned} \text{O halde, } y[n] &= \frac{1}{2} H(e^{j2\pi/N}) e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} H(e^{-j2\pi/N}) e^{-j(2\pi/N)n} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j2\pi/N}} \right) e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{j2\pi/N}} \right) e^{-j(2\pi/N)n} \end{aligned}$$

$$\text{Diğer bir ifade ile, } b_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j2\pi/N}} \right), \quad b_{-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{j2\pi/N}} \right), \quad b_k = 0, \quad k \neq \pm 1$$

24

Hafta 7:
Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

1

Ele Alınacak Ana Konular

- Sürekli-zaman Fourier dönüşümü
- Sürekli-zaman periyodik işaretler için Fourier dönüşümü
- Sürekli-zaman Fourier dönüşümünün özellikleri
- Doğrusal, sabit katsayılı diferansiyel denklemlerle tanımlanan sistemler

2

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

- Periyodik olmayan (aperiyodik) bir işaretin, periyodu sonsuz olan periyodik bir işaret gibi düşünübiliriz.
- Periyodik bir işaretin periyodu büyükçe, temel frekans küçülür ve dolayısıyla Fourier serisi gösterimindeki harmonik ilişkili üstel işaretlerin frekansları yakınılaşır.
- Periyodon sonsuz olması limit durumunda frekans bileşenleri sürekli hale gelir ve Fourier serisi toplamı integrale eşit olur.

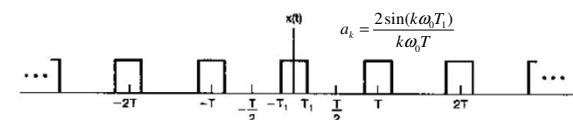
$$\text{Hatırlatma : Periyodik } x(t) \text{ işaretinin F.S açılımı: } \left\{ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t} \right\}$$

- Fourier serisinin, periyodon sonsuza gitmesi durumundaki limit haline FOURIER DÖNÜŞÜMÜ denir.

3

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

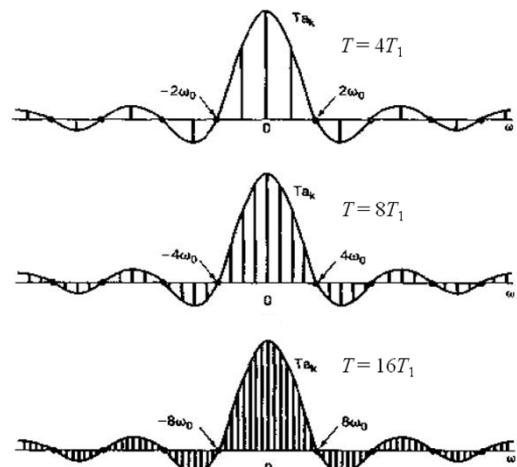
- Aşağıda verilen periyodik kare dalgaının Fourier serisi katsayılarını hesaplamışık



- Sabit bir T_1 ve değişik T değerleri için Fourier serisi katsayılarını çizersek, periyodon katsayılar üzerindeki etkisini belirlemiş oluruz.
- Alternatif olarak, $T a_k = \frac{2 \sin(k\omega_1 T)}{\omega}$ değerlerini çizebiliriz.
- $2\sin(\omega T_1)/\omega$ fonksiyonu, $T a_k$ 'nın zarfını temsil etmektedir ve a_k katsayıları bu zarfın eşit aralıklık örnekleridir.

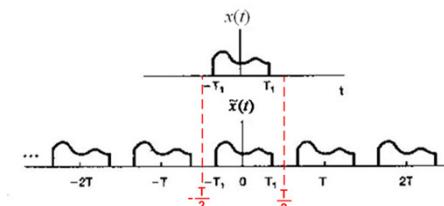
4

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü



Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

- T artıkça veya eşdeğer olarak temel frekans $\omega_0 = 2\pi/T$ azaldıkça, zarf daha sık örneklendirmektedir. $T \rightarrow \infty$ limit durumunda, orijinal periyodik kare dalga dikdörtgen darbeye ve T ile çarpılmış Fourier serisi katsayıları zarfa eşit olur.
- Bu örneği genelleştirmek mümkündür. Aperiódik bir işaret, periyodik bir işaretin periyod sonsuza giderken limit hali gibi düşünülebilir. Periyodik işaret Fourier serisine açılır ve periyodon sonsuza gitmesi durumunda serinin davranışını incelenir.
- Aşağıda, periyodik olmayan sonlu süreli bir işaret $x(t)$ ile bu işaretten türetilen ve bir periyodu sonlu süreli işarette eşit olan periyodik bir işaret $\tilde{x}(t)$ verilmiştir.



Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

- $\tilde{x}(t)$ Fourier serisine açılabilir. $|t| < T/2$ için, $x(t) = \tilde{x}(t)$ ve aralığın dışında $x(t) = 0$ olduğundan
$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

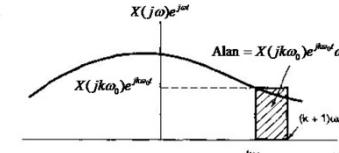
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$
- $T a_k$ 'nın zarfı $X(j\omega)$, $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ şeklinde tanımlansın.
- O halde, $a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0)$
- Zarf cinsinden bulunan katsayılar, Fourier serisinde yerine konulur ve $2\pi/T = \omega_0$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

7

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

- $\omega_0 \rightarrow 0$ iken, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi en son toplama integrale yakınsar.



- Toplamdaki her bir terim, yüksekliği $X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$ ve genişliği ω_0 olan bir dikdörtgenin alanıdır. $\omega_0 \rightarrow 0$ limit durumunda, toplama $X(j\omega)e^{j\omega t}$ fonksiyonunun integralline yakınsar. O halde, $T \rightarrow \infty$ için $\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$ gerçeğini kullanırsak, aşağıda verilen Fourier dönüşüm çiftini elde ederiz.

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \quad \rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

8

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

- Şimdiye kadar yapılan tartışmadan, periyodik bir işaretin Fourier serisi katsayılarının, işaretin bir periyodunun Fourier dönüşümü cinsinden ifade edilebileceği anlaşılmaktadır.

- $\tilde{x}(t)$, T ile periyodik olsun ve Fourier serisi katsayıları a_k ile gösterilsin. $\tilde{x}(t)$ nin bir periyoduna eşit sonlu süreli bir işaret $x(t)$ ve Fourier dönüşümü $X(j\omega)$ ile belirtilsin. O halde,

$$a_k = \frac{1}{T} X(j\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0}$$

- Tartışma, sonlu süreli işaretler için yapılmıştır. İşaret sonlu olmasa bile, analiz denklemindeki integral yakınsayabilir ve bu tür işaretler için Fourier dönüşümü bulunabilir.
- Fourier dönüşümünün yakınsaması için yeterli olan koşullara Dirichlet koşulları denir ve aşağıda listelenmiştir.

9

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

Sürekli-zaman Fourier dönüşümü için Dirichlet koşulları

Koşul 1: İşaret mutlak integrallenebilir olmalıdır:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Koşul 2: Herhangi bir sonlu aralıktı, işaretin sonlu sayıda minimum ve maksimumu olmalıdır.

Koşul 3: Herhangi bir sonlu aralıktı, işarette sonlu sayıda sürekli olmalı ve ayrıca sürekli noktalarda işaretin değeri de sonlu olmalıdır.

Özetle, mutlak integrallenebilir sürekli veya sonlu sayıda sürekli olma sahip işaretlerin Fourier dönüşümü hesaplanabilir.

10

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

ÖRNEK: $x(t) = e^{-at} u(t)$, $a > 0$ işaretinin Fourier dönüşümünü hesaplayınız, genlik ve faz spektrumunu çiziniz.

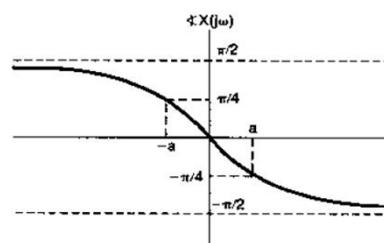
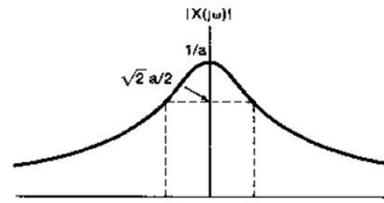
ÇÖZÜM: Fourier dönüşüm denkleminden

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0$$

Gördüğü gibi, işaret gerçel olmasına rağmen Fourier dönüşümü karmaşık değerli olabilmektedir. O halde, ω 'nın fonksiyonu olarak Fourier dönüşümünün genişliğini (genlik spektrumu) ve fazını (faz spektrumunu) belirleyebilir ve çizebiliriz.

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad \angle X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

11



12

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

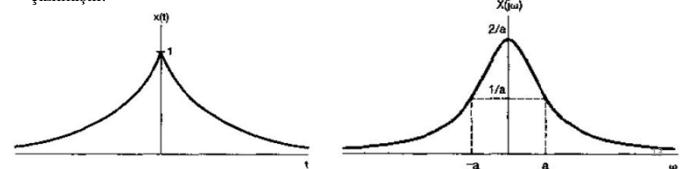
ÖRNEK: $x(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$ işaretinin Fourier dönüşümünü hesaplayınız ve frekansın fonksiyonu olarak çiziniz.

ÇÖZÜM: $x(t) = e^{-a|t|} = e^{at}u(-t) + e^{-at}u(t)$, $a > 0$

Fourier dönüşüm denkleminden

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-a|t|}e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-a|t|}e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Bu durumda Fourier dönüşümü gerçel çıkmıştır. İşaret ve Fourier dönüşümü aşağıda çizilmiştir.



Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

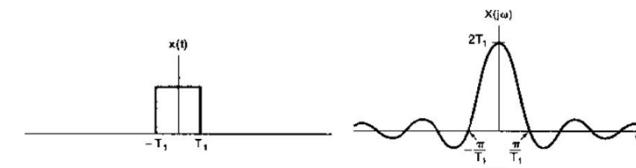
ÖRNEK: Sürekli-zaman impuls işaretinin Fourier dönüşümünü hesaplayınız

ÇÖZÜM: $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1$

İmpuls işaretinin Fourier dönüşümü tüm frekanslarda eşit bileşenlere sahiptir.

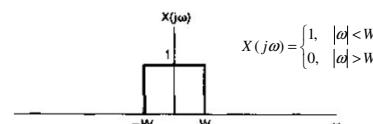
ÖRNEK: Dikdörtgen darbenin Fourier dönüşümünü hesaplayınız $x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$

ÇÖZÜM: $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = 2 \frac{\sin(\omega T_1)}{\omega}$



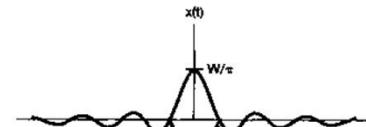
Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

ÖRNEK: Fourier dönüşümü aşağıda verilen sürekli-zaman işaretini bulunuz.



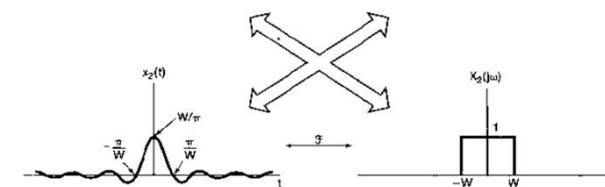
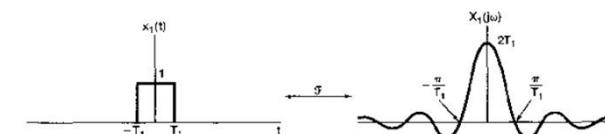
ÇÖZÜM: Ters Fourier dönüşüm denkleminden

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} e^{j\omega t} dw = \frac{\sin(Wt)}{\pi t}$$



15

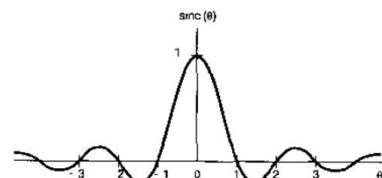
Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri



16

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

- Sürekli-zaman Fourier dönüşümü ve LTI sistemlerin analizinde $\sin(a\theta)/b\theta$ şeklinde özel bir fonksiyonla sıkılıkla karşılaşılır ve böyle fonksiyonlara sinc fonksiyonu denir.
- Sinc fonksiyonu matematiksel olarak şöyle tanımlanır: $\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta}$
- Sinc fonksiyonu aşağıda çizilmiştir.



17

Periyodik İşaretlerin için Fourier Dönüşümü

- Sürekli-zaman periyodik işaretlerin de Fourier dönüşümünü hesaplamak mümkündür. Görüğümüz gibi, periyodik işaretlerin Fourier dönüşümü impuls fonksiyonu içermek zorundadır.
- Fourier dönüşümü $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ olan işaretin, ters Fourier dönüşümü kullanarak rahatlıkla bulabiliriz.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

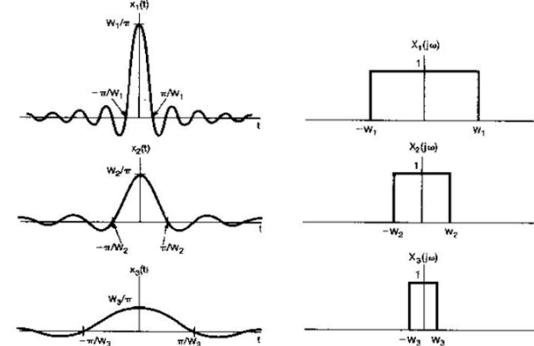
- Daha genel olarak, sonsuz adet impulsun toplamından oluşan bir Fourier dönüşümünün tersi, sonsuz adet üstel işaretin toplamı olmalıdır:

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega-k\omega_0) \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

- O halde, periyodik bir işaretin Fourier dönüşümü, şiddetleri işaretin Fourier serisi katsayıları ve konumları temel frekansın katları tarafından belirlenen impulslar içermektedir.

19

Aşağıda sinc(W) fonksiyonu ve Fourier dönüşümü, değişik W değerleri için çizilmiştir. W arttıkça Fourier dönüşümü genişlerken, sinc fonksiyonunun ana lobunun genişliği darlaşır. Yani, zaman uzayı ile frekans uzayı arasında ters bir ilişki vardır. Zamanda daha az yer kaplayan bir işaretin Fourier dönüşümü, daha fazla yer kaplayan bir işaretinkine göre daha geniş bir frekans aralığında frekans bileşenlerine sahipir.



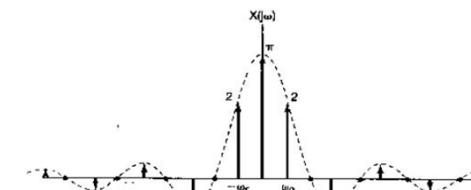
18

Periyodik İşaretlerin için Fourier Dönüşümü

ÖRNEK: Aşağıda verilen periyodik işaretin Fourier dönüşümünü hesaplayınız.

$$\dots \quad \begin{matrix} x(t) \\ \cdots \end{matrix} \quad \begin{matrix} -2T \\ -T \\ -\frac{T}{2} \\ -T_1 \\ T_1 \\ \frac{T}{2} \\ T \\ 2T \end{matrix} \quad \begin{matrix} \dots \end{matrix} \quad a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

$$\text{ÇÖZÜM: } X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega-k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k} \delta(\omega-k\omega_0)$$



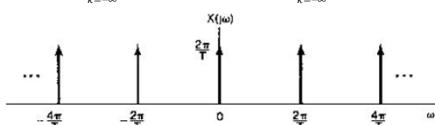
20

Periyodik İşaretlerin için Fourier Dönüşümü

ÖRNEK: Aşağıda verilen periyodik işaretin Fourier dönüşümünü hesaplayınız.



ÇÖZÜM: $X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$



Not: Zaman uzayı ile frekans uzayı arasındaki ters ilişkiye dikkat ediniz. İmpulslar zaman uzayında birbirinden uzaklaşırsa frekans uzayında yakınlasmaktadır.

$T \rightarrow \infty$ limit durumunda $x(t)$ işaretini ve Fourier dönüşümünü inceleyiniz.

21

Periyodik İşaretlerin için Fourier Dönüşümü

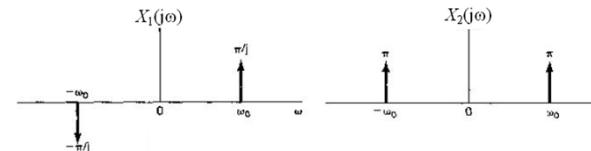
ÖRNEK: $x_1(t) = \sin(\omega_0 t)$ ve $x_2(t) = \cos(\omega_0 t)$ periyodik işaretlerinin Fourier dönüşümelerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $x_1(t) = \sin(\omega_0 t) \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2j}, a_{-1} = -\frac{1}{2j}, a_k = 0, k \neq \pm 1$

$$X_1(j\omega) = 2\pi a_1 \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi a_{-1} \delta(\omega + \omega_0) = \frac{\pi}{j} \delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j} \delta(\omega + \omega_0)$$

$$x_2(t) = \cos(\omega_0 t) \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}, a_{-1} = \frac{1}{2}, a_k = 0, k \neq \pm 1$$

$$X_2(j\omega) = 2\pi a_1 \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi a_{-1} \delta(\omega + \omega_0) = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$$



22

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümü

İşaret	Fourier Dönüşümü	Fourier Serisi Katsayıları
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$	$a_1 = 1, a_{-1} = 0, k \neq 1$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = 1/2, a_k = 0, k \neq \pm 1$
$\sin(\omega_0 t)$	$(\pi/j) [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = 1/2j, a_k = 0, k \neq \pm 1$
$x(t) = 1$	$2\pi \delta(\omega)$	$a_0 = 1, a_k = 0, k \neq 0$
Periyodik kare dalga $x(t) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & T_1 < t < T/2 \end{cases}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} = \frac{\omega_0 T_1}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$	$a_k = \frac{1}{T}, \forall k$

23

İşaret	Fourier Dönüşümü	Fourier Serisi Katsayıları
$x(t) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & t > T_1 \end{cases}$	$\frac{2\sin(aT_1)}{\omega}$	İşaret periyodik değil
$\frac{\sin(Wt)}{\pi}$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < W \\ 0, & \omega > W \end{cases}$	İşaret periyodik değil
$\delta(t)$	1	İşaret periyodik değil
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$	İşaret periyodik değil
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	İşaret periyodik değil
$e^{-at} u(t), \Re{a} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$	İşaret periyodik değil
$te^{-at} u(t), \Re{a} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	İşaret periyodik değil
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), \Re{a} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$	İşaret periyodik değil

24

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

- Kolaylık olması bakımından, sürekli-zaman Fourier dönüşümü ve tersini belirtmek için sırasıyla $F\{x(t)\}$ ve $F^{-1}\{X(j\omega)\}$ kısa gösterimini kullanacağız. Ayrıca, sürekli-zaman Fourier dönüşüm çiftini belirtmek için

$$x(t) \xleftarrow{F} X(j\omega)$$

notasyonunu kullanacağız.

- Sürekli-zaman Fourier dönüşümünün aşağıda verilen özellikleri aracılıyla, Fourier dönüşümü bilinen işaretlerden çoğu işaretin Fourier dönüşümünü elde etmek kolaylaşmaktadır.
- Aşağıda sadece en önemli özelliklerin ispatı verilecektir. Diğer özelliklerin ispatı benzer şekilde yapılabilir.

25

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Zamanda öteleme: $x(t) \xleftarrow{F} X(j\omega) \Rightarrow x(t-t_0) \xleftarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$

İspat: Ters Fourier dönüşüm denkleminden $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

Eşitliğin her iki tarafında t yerine $t-t_0$ yazılırsa

$$x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (X(j\omega) e^{-j\omega t_0}) e^{j\omega t} d\omega$$

Yorum: Bir sürekli-zaman işaret ötelendiğinde, Fourier dönüşümünün genliği değişmez, fazı ise öteleme ile doğru orantılı bir şekilde ötenir.

$$\begin{aligned} F\{x(t)\} &= X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)} \\ F\{x(t-t_0)\} &= e^{-j\omega t_0} X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j[\angle X(j\omega) - \omega t_0]} \end{aligned}$$

26

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Zaman-frekans ölçekleme: $x(t) \xleftarrow{F} X(j\omega) \Rightarrow x(at) \xleftarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$

İspat: Fourier dönüşüm denkleminden

$$F\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$

Integralde, $\tau = at$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$F\{x(at)\} = \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau, & a > 0 \\ -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau, & a < 0 \end{cases}$$

Yorum: Zaman uzayı ile frekans uzayı arasında ters bir ilişki vardır. Zamanda dar (geniş) yer kaplayan işaretlerin Fourier dönüşümü geniş (dar) bir aralıkta frekans bileşenlerine sahiptir. Ayrıca, $a = -1$ seçilirse, zamanda tersine çevrilmiş işaretin Fourier dönüşümünün de tersine çevrileceği anlaşılmaktadır.

27

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Zamanda türev alma: $x(t) \xleftarrow{F} X(j\omega) \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \xleftarrow{F} j\omega X(j\omega)$

İspat: Ters Fourier dönüşüm denkleminden $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

Eşitliğin her iki tarafında t 'ye göre türevi alırsak

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [j\omega X(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

Yorum: Zaman uzayında türev alma, frekans uzayında $j\omega$ ile çarpmaya karşılık gelmektedir. Bu özellik, sabit katsayılı diferansiyel denklemlerle tanımlanmış LTI sistemlerin analizinde çok önemli rol oynayacaktır. Çözümü zor olan **diferansiyel bir denklem, Fourier dönüşümünün bu özelliği sayesinde çözümü çok kolay olan bir cebirsel denklem haline getirilir**, denklem istenilen değişken için çözülür ve ters Fourier dönüşümü alınarak çözüm elde edilir.

28

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Konvolüsyon özelliği: $y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$

İspat: Konvolüsyon denkleminden $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

Eşitliğin her iki tarafının Fourier dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= F\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right\} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \right\} d\tau \end{aligned}$$

Zamanda öteleme özelliğinden parantez içindeki term $e^{-j\omega\tau} H(j\omega)$ dir. O halde,

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} H(j\omega) d\tau \\ &= H(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = X(j\omega)H(j\omega) \end{aligned}$$

Yorum: İki işaretin konvolüsyonunun Fourier dönüşümü, Fourier dönüşümlerinin çarpımına eşittir. Yani, iki işaretin konvolüsyonunu bulmak için, Fourier dönüşümleri çarpılır ve çarpının ters Fourier dönüşümü alınır.

29

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

ÖRNEK: $x(t) = e^{-bt}u(t)$ $b > 0$ ve $h(t) = e^{-at}u(t)$ $a > 0$ işaretlerinin konvolüsyonunu Fourier dönüşümünden yararlanarak hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $X(j\omega) = \frac{1}{b+j\omega}$, $H(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$, $Y(j\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)(b+j\omega)}$

$$Y(j\omega) \text{ basit kesirlere açılırsa } Y(j\omega) = \frac{A}{a+j\omega} + \frac{B}{b+j\omega} = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{b+j\omega} \right]$$

$y(t)$ 'yi elde etmek için ters Fourier dönüşümü almak yeterlidir.

$$\begin{aligned} y(t) &= F^{-1}\{Y(j\omega)\} = F^{-1}\left\{ \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{b+j\omega} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{b-a} \left[e^{-at}u(t) - e^{-bt}u(t) \right] \end{aligned}$$

30

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

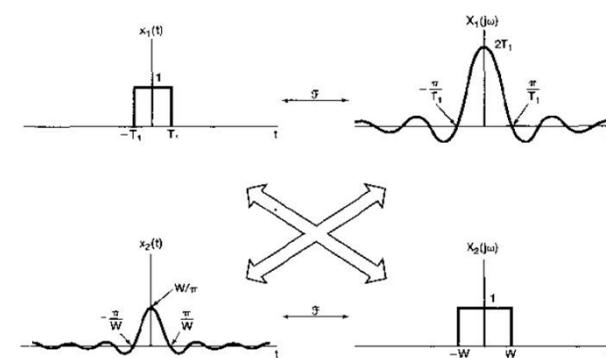
Carpma (modülasyon) özelliği: $r(t) = s(t)p(t) \xrightarrow{F} R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [S(j\omega) * P(j\omega)]$

Yorumlar:

1. Zaman uzayında çarpma, frekans uzayında konvolüsyona karşılık gelmektedir.
2. Zaman uzayında konvolüsyon frekans uzayında çarpımıya karşılık geldiğini hatırlayınız. Zaman ve frekans uzayları arasındaki bu ilişkiye DÜALLİK denilir. Duallığın nedeni, Fourier ve ters Fourier dönüşüm denklemlerinin eşit olmamakla birlikte oldukça benzer olmasıdır.
3. Verilen bir Fourier çifti için, zaman ve frekans değişkenlerinin rolleri değiştirilerek DÜAL çift elde edilir.
4. Düallik özelliğini kullanılarak, diğer pek çok özellik elde edilebilir. Örneğin, zaman uzayında türev almak $j\omega$ ile çarpımıya karşılık geldiğine göre, zaman uzayında integral alma $j\omega$ ile bölmeye karşılık gelmelidir.
5. Düallik özelliği, darbe ve sinc Fourier dönüşüm çifti için aşağıda verilmiştir ve diğer fonksiyon çiftlerine uygulanabilir.

31

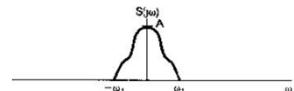
Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri



32

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

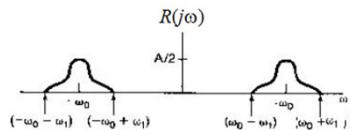
ÖRNEK: Bir $s(t)$ işaretinin spektrumu aşağıda verilmiştir. $p(t) = \cos(\omega_0 t)$ olmak üzere, $r(t) = s(t)p(t)$ işaretinin spektrumunu Fourier dönüşümünün çarpma (modülasyon) özelliğinden yararlanarak bulunuz.



ÇÖZÜM:

$$P(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [S(j\omega) * \{ \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \}] = \frac{1}{2} S(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2} S(j(\omega + \omega_0))$$



33

Sürekli-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Özellik	Aperiódik işaret	Fourier dönüşümü
	$x(t)$ $y(t)$	$X(j\omega)$ $Y(j\omega)$
Doğrusallık	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
Zamanda öteleme	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega_0 t} X(j\omega)$
Frekansta öteleme	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
Eşlenik alma	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Zamanda tersine çevirme	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Zaman ve frekans ölçek	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Konvolüsyon	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
Zamanda çarpma	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(j\omega)^* Y(j\omega)$

34

Özellik	Periyodik işaret	Fourier Serisi Katsayıları
Zamanda türev alma	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
Zamanda integral alma	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Frekansta türev alma	$tx(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$
Gerçel işaretler için eşlenik simetriklik	$x(t)$ gerçel	$\begin{cases} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \Re{X(j\omega)} = \Re{X(-j\omega)} \\ \Im{m[X(j\omega)]} = -\Im{m[X(-j\omega)]} \\ X(j\omega) = X(-j\omega) \\ \prec X(j\omega) = -\prec X(-j\omega) \end{cases}$
Gerçel ve çift işaretler Gerçel ve tek işaretler	$x(t)$ gerçel ve çift $x(t)$ gerçel ve tek	$X(j\omega)$ gerçel ve çift $X(j\omega)$ saf karmaşık ve tek
Gerçel işaretlerin çift-tek ayrıştırması	$x_r(t) = \text{Ev}[x(t)]$ [$x(t)$ gerçel] $x_s(t) = \text{Od}[x(t)]$ [$x(t)$ gerçel]	$\Re{X(j\omega)}$ $\Im{m[X(j\omega)]}$
Aperiódik işaretler için Parseval İlişkisi		
$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) ^2 d\omega$		

35

Doğrusal, Sabit Katsayılı Diferansiyel Denklemlerle Tanımlanan Sistemler

- Girişi-çıkış ilişkisi aşağıda verilen sürekli-zaman sistemin **frekans yanıtını** bulalım

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

- Konvolüsyon özelliğinden, $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

- Diferansiyel denklemin her iki tarafının Fourier dönüşümü alınır ve Fourier dönüşümünün türev özelliği kullanılırsa frekans yanıt bulunabilir:

$$\begin{aligned} F\left\{ \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} &= F\left\{ \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k F\left\{ \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} = \sum_{k=0}^M b_k F\left\{ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\} \\ \sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) &= \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(j\omega) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k} \end{aligned}$$

36

Doğrusal, Sabit Katsayılı Diferansiyel Denklemlerle
Tanımlanan Sistemler

ÖRNEK: Giriş-çıkış ilişkisi aşağıda verilen sistemin frekans yanıtını ve impuls yanıtını bulunuz.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

ÇÖZÜM: Her iki tarafın Fourier dönüşümü alırsak

$$(j\omega)^2 Y(j\omega) + 4(j\omega)Y(j\omega) + 3Y(j\omega) = (j\omega)X(j\omega) + 2X(j\omega)$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3}$$

$H(j\omega)$ 'nın ters Fourier dönüşümü alırsak impuls yantı elde edilir.

$$h(t) = F^{-1}\{H(j\omega)\} = F^{-1}\left\{\frac{1/2}{j\omega+1} + \frac{1/2}{j\omega+3}\right\}$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$

37

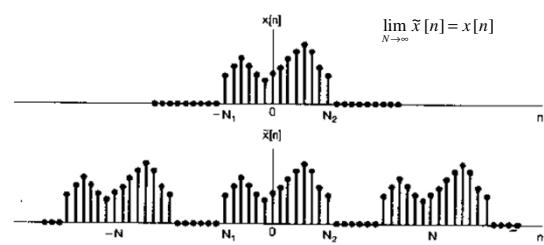
Hafta 8:
Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü

Ele Alınacak Ana Konular

- Ayrık-zaman Fourier dönüşümü
- Ayrık-zaman periyodik işaretler için Fourier dönüşümü
- Ayrık-zaman Fourier dönüşümünün özellikleri
- Doğrusal, sabit katsayılı fark denklemleriyle tanımlanan sistemler

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü

- Aperiyodik bir işaret, periyodik bir işaretin periyod sonsuza giderken limit hali gibi düşünülebilir. Periyodik işaret Fourier serisine açılır ve periyodon sonsuza gitmesi durumunda serinin davranışını incelenir.
- Aşağıda, periyodik olmayan sonlu süreli bir işaret $x[n]$ ile bu işaretten türetilen ve bir periyodu sonlu süreli işaretin eşit olan periyodik bir işaret $\tilde{x}[n]$ verilmiştir.



Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü

- $\tilde{x}[n]$ Fourier serisine açılabılır. $-N_1 \leq n \leq N_2$ için, $x[n] = \tilde{x}[n]$ ve aralığın dışında $x[n] = 0$ olduğundan

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

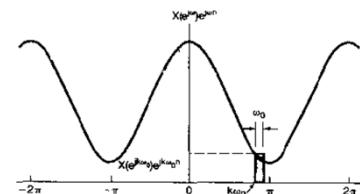
$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^{N} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega}$ şeklinde tanımlansın.

- O halde, $a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})$
- Bulunan katsayılar, Fourier serisinde yerine konulur ve $2\pi/N = \omega_0$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0$$

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü



- Son toplamadaki her bir terim, yüksekliği $X(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}$ ve genişliği ω_0 olan bir dikdörtgenin alamıdır. $\omega_0 \rightarrow 0$ limit durumunda, toplama $X(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ fonksiyonunun integraline yakınsar. O halde, $N \rightarrow \infty$ için $\tilde{x}[n] \rightarrow x[n]$ gerektiğini kullanırsak, aşağıda verilen ayrık-zaman Fourier dönüşüm çiftini elde ederiz.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü

- Sürekli-zaman ve ayrık-zaman Fourier dönüşümleri incelendiğinde önemli farklar olduğu göze çarpmaktadır.
- İlk olarak, sürekli-zaman durumunda analiz ve sentez denklemlerinin ikisi de integral olup, integral aralığı sonsuzdur. Ayrık-zaman durumunda, analiz denklemi sonsuz bir toplama iken sentez denklemi 2π aralığında sonlu bir integraldir.
- İkinci olarak, sürekli-zaman Fourier dönüşümü periyodik değilken (özel durumlar hariç), ayrık-zaman Fourier dönüşümü 2π ile periyodiktir.
- Bu farklılıkların nedeni, (ayırık-zamanda) harmonik ilişkili sonlu sayıda karmaşık üstel işaret olmasıdır.
- Ayrıca, ayrık-zamanda 0 veya 2π 'nın katlarına yakın frekanslar yavaş değişen işaretlerden, π 'nin katlarına yakın frekanslar ise hızlı değişen işaretlerden kaynaklanmaktadır.

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü

- Şimdije kadar yapılan tartışmadan, periyodik bir ayrık-zaman işaretin Fourier serisi katsayılarının, işaretin bir periyodunun ayrık-zaman Fourier dönüşümü cinsinden ifade edilebileceği anlaşılmaktadır.
- $\tilde{x}[n]$, N ile periyodik olsun ve Fourier serisi katsayıları a_k ile gösterilsin. $\tilde{x}[n]$ min bir periyoduna eşit sonlu süreli bir işaret $x[n]$ ve Fourier dönüşümü $X(e^{j\omega})$ ile belirtilsin. O halde,

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=k\omega_0}$$

- Tartışma, sonlu süreli işaretler için yapılmıştır. İşaret sonlu olmasa bile, analiz denklemindeki toplama yakınsayabilir ve bu tür işaretler için ayrık-zaman Fourier dönüşümü bulunabilir.
- Ayrık-zaman Fourier dönüşümünün yakınsaması için yeterli olan koşullar sürekli durumdan farklıdır.

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü

Ayrık-zaman Fourier dönüşümü için yakınsama koşulu

Koşul : İşaret mutlak toplanabilir veya sonlu enerjiye sahip olmalıdır:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

Sentez denklemi için yakınsama problemi yoktur çünkü sentez denklemi sonlu bir integraldir.

O halde, sentez denklemi hesaplanırken sürekli-zaman durumunda karşılaşılan Gibbs olayı ile ayrık-zaman durumunda karşılaşılmaz.

Ayrik-zaman Fourier Dönüşümü

ÖRNEK: $x[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$ işaretinin Fouier dönüşümünü hesaplayınız, genlik ve faz spektrumunu çiziniz.

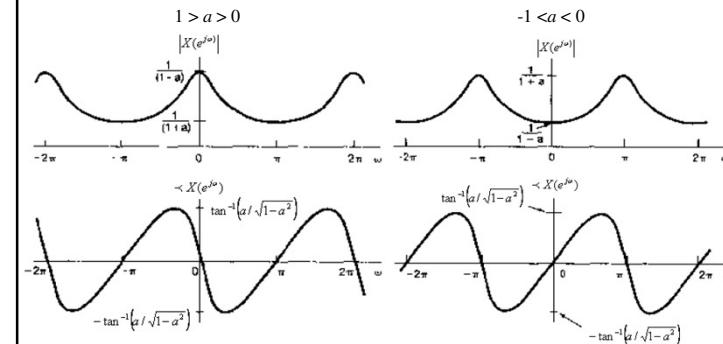
CÖZÜM: Fourier dönüşüm denkleminde

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Gördüğü gibi, işaret gerçel olmasına rağmen Fourier dönüşümü karmaşık değerli olabilmektedir. O halde, ω 'nın fonksiyonu olarak Fourier dönüşümünün genliğini (genlik spektrumu) ve fazını (faz spektrumunu) belirleyebilir ve çizebiliriz.

Pozitif ve negatif a değerleri için genlik ve faz spektrumları aşağıda çizilmiştir. Her iki durumda da spektrumların 2π ile periyodik olduğuna dikkat ediniz.

$$\text{Hاتırlatma: } \sum_{k=n_1}^{n_2} q^k = \frac{q^{n_1} - q^{n_2+1}}{1-q}, \quad 1 \neq q$$



$0 < a < 1$ için işaretin tüm değerleri pozitif olup işaret yavaş değişigidinden Fourier dönüşümü 0 ve 2π 'nin katlarında bileşenlere sahiptir. $-1 < a < 0$ için işaretin değeri bir pozitif, bir negatif olup işaret hızlı değişigidinden Fourier dönüşümü π 'nin katlarında frekans bileşenlerine sahiptir.

Ayrik-zaman Fourier Dönüşümü

ÖRNEK: $x[n] = a^{|n|}$, $|a| < 1$ işaretinin Fouier dönüşümünü hesaplayınız ve frekansın fonksiyonu olarak çiziniz.

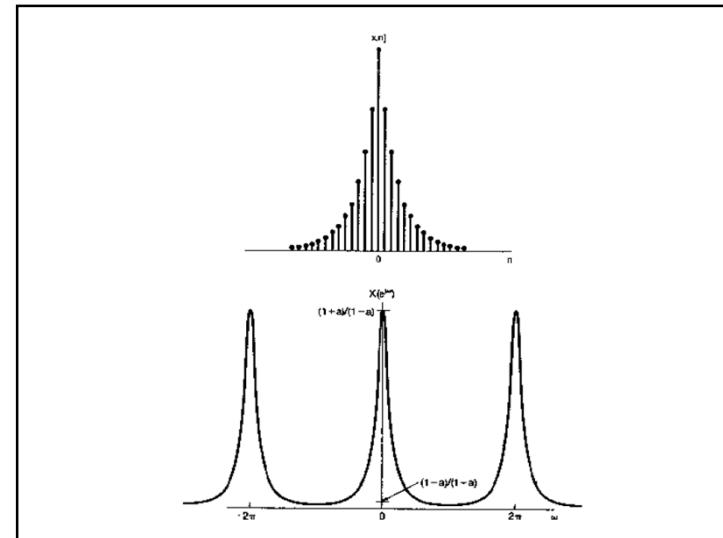
CÖZÜM: Fourier dönüşüm denkleminde

$$x[n] = a^{|n|}, \quad |a| < 1 \rightarrow x[n] = a^{-n} u[-n-1] + a^n u[n]$$

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n + \sum_{n=1}^{\infty} (ae^{j\omega})^n \\ &= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}} = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos(\omega) + a^2} \end{aligned}$$

Bu durumda Fourier dönüşümü gerçel çıkmıştır. İşaret ve Fourier dönüşümü aşağıda $0 < a < 1$ için çizilmiştir.

$$\text{Hاتırlatma: } \sum_{k=n_1}^{n_2} q^k = \frac{q^{n_1} - q^{n_2+1}}{1-q}, \quad 1 \neq q$$



Ayrık-zaman Fourier Dönüşümü

ÖRNEK: Ayrık-zaman impuls işaretinin Fourier dönüşümünü hesaplayınız

$$\text{ÇÖZÜM: } X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = 1e^{-j\omega 0} = 1$$

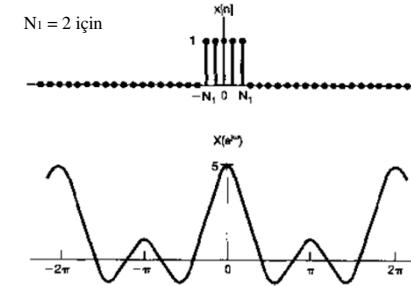
İmpuls işaretinin Fourier dönüşümü tüm frekanslarda eşit bileşenlere sahiptir.

ÖRNEK: Dikdörtgen darbenin Fourier dönüşümünü hesaplayınız

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| < N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

$$\text{ÇÖZÜM: } X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \begin{cases} \frac{e^{j\omega N_1} - e^{-j\omega(1+N_1)}}{1 - e^{-j\omega}}, & w \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \\ 2N_1 + 1, & w = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \end{cases}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega N_1} - e^{-j\omega N_1}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega N_1} e^{-j\omega(1+2N_1)/2}}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} = \frac{e^{j\omega(1+2N_1)/2} (e^{j\omega N_1} - e^{-j\omega N_1})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} = \frac{\sin[\omega(N_1 + 1/2)]}{\sin(\omega/2)}$$



Sürekli durumda olduğu gibi, darbenin Fourier dönüşümü sinc fonksiyonudur. Ancak, sürekli-zamanda yan lobların genliği devamlı azalırken ayrık-zamanda periyodiklikten dolayı bu durum geçerli değildir.

Periyodik İşaretlerin için Fourier Dönüşümü

- Ayrık-zaman periyodik işaretlerinde Fourier dönüşümünü hesaplamak mümkündür. periyodik işaretlerin Fourier dönüşümü impuls fonksiyonu içermek zorundadır.
- Fourier dönüşümü $X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m)$ olan işaretin bulalımları

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m) \right) e^{j\omega n} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega = e^{j\omega_0 n}$$

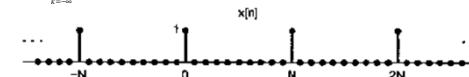
(integralin 2π $[-\pi, \pi]$ aralığında hesaplandığına dikkat ediniz...)

- Periyodik bir ayrık-zaman işaret Fourier serisine açılabilir: $x[n] = \sum_{k < N} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$
- Açılmımdaki karmaşık üstel terimlerin Fourier dönüşümü temel frekansın katlarında impulslardır. Doğrusallık özelliğinden, sonsuz adet işaretin toplamının Fourier dönüşümü, tek tek Fourier dönüşümlerinin toplamına eşittir. O halde, periyodik işaretlerin Fourier dönüşümü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right)$$

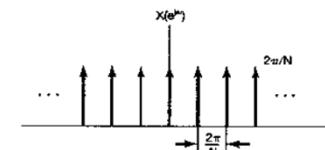
Periyodik İşaretlerin için Fourier Dönüşümü

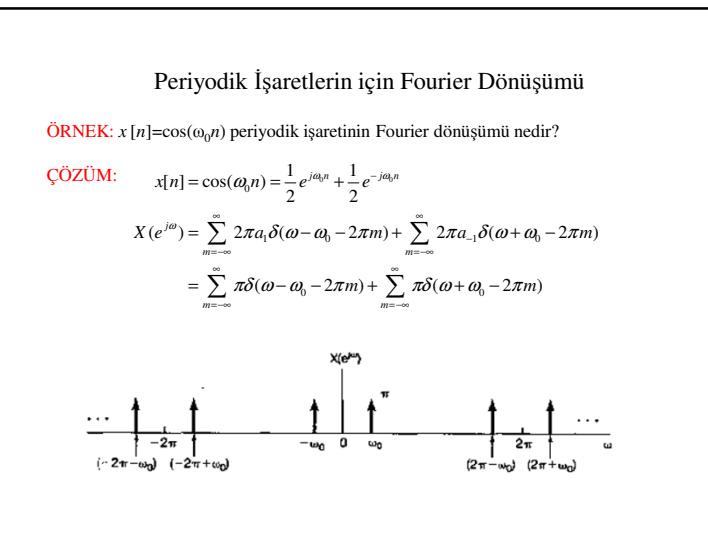
ÖRNEK: $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$ ile verilen periyodik işaretin Fourier dönüşümü nedir?



ÇÖZÜM: Fourier serisi katsayıları tüm n değerleri için $1/N$ olarak bulunmuştur.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right)$$





İşaret	Fourier Dönüşümü	Fourier Serisi Katsayıları
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	a_k
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$	$\omega_0 = 2\pi n / N \Rightarrow$ periyodik $a_k = \begin{cases} 1, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$
$\cos(\omega_0 n)$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l))$	$\omega_0 = 2\pi n / N \Rightarrow$ periyodik $a_k = \begin{cases} 1/2, & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$
$\sin(\omega_0 n)$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l))$	$\omega_0 = 2\pi n / N \Rightarrow$ periyodik $a_k = \begin{cases} 1/2 j, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \dots \\ -1/2 j, & k = -m, -m \pm N, -m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$
$x[n] = 1$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$
Periyodik kare dalga $x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & N_1 < n < N/2 \end{cases}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \begin{cases} \frac{\sin[(2\pi k / N)(N_1 + 1/2)]}{N \sin(\pi k / N)}, & k \neq 0, \pm N, \dots \\ (2N_1 + 1)/N, & k = 0, \pm N, \dots \end{cases}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$	$a_k = \frac{1}{N}, \forall k$

İşaret	Fourier Dönüşümü	Fourier Serisi Katsayıları
$a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$	İşaret periyodik değil
$x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & n > N_1 \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(N_1 + 1/2)]}{\sin(\omega/2)}$	İşaret periyodik değil
$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq W \\ 0, & W < \omega \leq \pi \end{cases}$	İşaret periyodik değil
$\delta[n]$	1	İşaret periyodik değil
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k)$	İşaret periyodik değil
$\delta[n - n_0]$	e^{-jn_0}	İşaret periyodik değil
$(n+1)a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$	İşaret periyodik değil
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^r}$	İşaret periyodik değil

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

- Kolaylık olması bakımından, ayrık-zaman Fourier dönüşümü ve tersini belirtmek için sırasıyla $F\{x[n]\}$ ve $F^{-1}\{X(e^{j\omega})\}$ kısa gösterimlimini kullanacağız. Ayrıca, ayrık-zaman Fourier dönüşüm çiftini belirtmek için
$$x[n] \xleftarrow{F} X(e^{j\omega})$$

notasyonunu kullanacağız.

- Ayrık-zaman Fourier dönüşümünün aşağıda verilen özellikleri aracılığıyla, Fourier dönüşümü bilinen işaretlerden çoğu işaretin Fourier dönüşümünü elde etmek kolaylaşmaktadır.
- Aşağıda sadece en önemli özelliklerin ispatı verilecektir. Diğer özelliklerin ispatı benzer şekilde yapılabilir.

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Zamanda öteleme: $x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) \Rightarrow x[n-n_0] \xrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

İspat: Ters Fourier dönüşüm denkleminden $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

Eşitliğin her iki tarafında n yerine $n-n_0$ yazılırsa

$$x[n-n_0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega(n-n_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(X(e^{j\omega}) e^{-j\omega n_0} \right) e^{j\omega n} d\omega$$

Yorum: Bir sürekli-zaman işaret ötelendiğinde, Fourier dönüşümünün genliği değişmez, fazı ise öteleme ile doğru orantılı bir şekilde ötelenir.

$$\begin{aligned} F\{x[n]\} &= X\left(e^{j\omega}\right) = |X(e^{j\omega})|e^{j\omega X(e^{j\omega})} \\ F\{x[n-n_0]\} &= e^{-jn_0\omega} X\left(e^{j\omega}\right) = |X(e^{j\omega})|e^{j\omega[X(e^{j\omega}) - jn_0\omega]} \end{aligned}$$

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Frekansta türev alma: $x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) \Rightarrow nx[n] \xrightarrow{F} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

İspat: Fourier dönüşüm denkleminden $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega}$

Eşitliğin her iki tarafında ω 'ya göre türevi alırsak

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-jnx[n]) e^{-jn\omega}$$

Son eşitliğin her iki tarafı j ile çarpılırsa sonuç elde edilmiş olur.

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Konvolüsyon özelliği: $y[n] = x[n]*h[n] \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

İspat: Konvolüsyon denkleminden $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

$$\begin{aligned} \text{O halde, } Y(e^{j\omega}) &= F\{y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right] e^{-jn\omega} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k] e^{-jn\omega} \right] \end{aligned}$$

Zamanda öteleme özelliğinden parantez içindeki terim $e^{-j\omega k} H(e^{j\omega})$ dir. O halde,

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega k} H(e^{j\omega}) \\ &= H(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Yorum: İki işaretin konvolüsyonunun Fourier dönüşümü, Fourier dönüşümlerinin çarpımına eşittir. Yani, iki işaretin konvolüsyonunu bulmak için, Fourier dönüşümleri çarpılır ve çarpının ters Fourier dönüşümü alınır.

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

ÖRNEK: $x[n] = \beta^n u[n]$ $|\beta| < 1$ ve $h[n] = \alpha^n u[n]$ $|\alpha| < 1$ işaretlerinin konvolüsyonunu Fourier dönüşümünden yararlanarak hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\omega}}$, $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$, $Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \beta e^{-j\omega})(1 - \alpha e^{-j\omega})}$

$$Y(e^{j\omega}) \text{ basit kesirlere açılırsa } Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - \alpha e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \beta e^{-j\omega}} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha e^{-j\omega}} - \frac{\beta}{1 - \beta e^{-j\omega}} \right]$$

$y[n]$ 'yi elde etmek için ters Fourier dönüşümü almak yeterlidir.

$$\begin{aligned} y[n] &= F^{-1}\{Y(e^{j\omega})\} = F^{-1}\left\{ \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha e^{-j\omega}} - \frac{\beta}{1 - \beta e^{-j\omega}} \right] \right\} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \alpha^n u[n] - \frac{\beta}{\alpha - \beta} \beta^n u[n] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}] u[n] \end{aligned}$$

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

$$\text{Çarpma (modülasyon) özelliği: } y[n] = x_1[n]x_2[n] \xrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} [X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})]$$

Ispat: Fourier dönüşüm denkleminden $Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-jn\omega}$

$x_1[n]$ yerine ters Fourier dönüşüm ifadesi kullanılır ve toplama ile integralin sırası değiştirilirse

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta \right\} x_2[n] e^{-jn\omega} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] e^{-j(\omega-\theta)n} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} [X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})] \end{aligned}$$

Ayrık-zaman Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Özellik	Aperiyodik işaret	Fourier dönüşümü
	$x[n]$ $y[n]$	$X(e^{j\omega})$ $Y(e^{j\omega})$
Doğrusallık	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
Zamanda öteleme	$x[n - n_0]$	$e^{-jn_0\omega} X(e^{j\omega})$
Frekansta öteleme	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
Eşlenik alma	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Zamanda tersine çevirme	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
Zamanda ölçekleme	$x_k[n] = \begin{cases} x[n/k], & n, k \text{ nötrkat} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$
Konvolüsyon	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Zamanda çarpma	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} [X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega})]$

Özellik	Aperiyodik işaret	Fourier Dönüşümü
Zamanda fark alma	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
Zamanda toplama	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
Frekansta türev alma	$nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Gerçel işaretler için eşlenik simetriklik	$x[n]$ gerçel	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \Re{X(e^{j\omega})} = \Re{X(e^{-j\omega})} \\ \Im{X(e^{j\omega})} = -\Im{X(e^{-j\omega})} \\ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) \\ -X(e^{j\omega}) = -X(e^{-j\omega}) \end{cases}$
Gerçel ve çift işaretler Gerçel ve tek işaretler	$x(t)$ gerçel ve çift $x(t)$ gerçel ve tek	$X(e^{j\omega})$ gerçel ve çift $X(e^{j\omega})$ saf karmaşık ve tek
Gerçel işaretlerin çift-tek ayrıştırması	$x_e[n] = \text{Ev}\{x[n]\}$ [$x[n]$ gerçel] $x_o[n] = \text{Od}\{x[n]\}$ [$x[n]$ gerçel]	$\Re{X(e^{j\omega})}$ $j\Im{X(e^{j\omega})}$
Aperiyodik işaretler için Parseval İlişkisi		
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$		

Doğrusal, Sabit Katsayılı Fark Denklemleriyle Tanımlanan Sistemler

- Girişi-çıkış ilişkisi aşağıda verilen ayrık-zaman sistemin frekans yanıtını bulalım

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$\text{Konvolüsyon özelliğinden, } Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

- Fark denkleminin her iki tarafının Fourier dönüşümü alırmı ve Fourier dönüşümünün öteleme özelliği kullanılırsa frekans yanıt bulunabilir:

$$\begin{aligned} F\left\{ \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] \right\} &= F\left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k F\{y[n-k]\} = \sum_{k=0}^M b_k F\{x[n-k]\} \\ \sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega k} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega k} X(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega k}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega k}} \end{aligned}$$

**Doğrusal, Sabit Katsayılı Diferansiyel Denklemlerle
Tanımlanan Sistemler**

ÖRNEK: Giriş-çıkış ilişkisi aşağıda verilen sistemin frekans yanıtını ve impuls yanıtını bulunuz.

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$$

CÖZÜM: Her iki tarafın Fourier dönüşümü alınsa

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) - \frac{3}{4}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}Y(e^{j\omega}) &= 2X(e^{j\omega}) \\ \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} &= \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}} = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \end{aligned}$$

$H(e^{j\omega})$ 'nın ters Fourier dönüşümü alınsa impuls yantı elde edilir.

$$\begin{aligned} h[n] &= F^{-1}\{H(e^{j\omega})\} = F^{-1}\left\{\frac{A}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right\} = F^{-1}\left\{\frac{\frac{4}{2}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{\frac{2}{4}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right\} \\ \Rightarrow h[n] &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \end{aligned}$$

Hafta 9: Laplace Dönüşümü

1

Ele Alınacak Ana Konular

- Laplace dönüşümü
- Laplace dönüşümünün yakınsaklık bölgesi
- Ters Laplace dönüşümü
- Laplace dönüşümünün özellikleri
- Laplace dönüşümü kullanarak LTI sistemlerin analizi



Pierre-Simon Laplace

2

Laplace Dönüşümü

- İmpuls yanımı $h(t)$ olan bir LTI sistemin, e^{st} girişi olan yanıtının $y(t) = H(s) e^{st}$ olduğunu görmüştük. $H(s)$ aşağıdaki gibi hesaplamıştık:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$$

- $s=jw$ için yukarıda verilen integral ifadesi $h(t)$ 'nin Fourier dönüşümünü (**$H(jw) = sistemin frekans cevabı$**) verir. s 'in genel karmaşık değişken ($s = \sigma + jw$) olması durumunda integral ifadesine **Laplace dönüşümü** denir.
- s karmaşık bir sayı olmak üzere, bir sürekli-zaman işaret $x(t)$ 'nin Laplace dönüşümü

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

denklemiyle tanımlanır. Laplace dönüşümünü belirtmek için $\mathcal{L}\{x(t)\}$ kullanılacak ve işaret ile Laplace dönüşümü arasındaki ilişki, aşağıdaki şekilde belirtilecektir.

$$x(t) \xleftarrow{L} X(s)$$

3

Laplace Dönüşümü

- Laplace dönüşümü ile sürekli-zaman Fourier dönüşümü arasındaki ilişki aşağıda gösterilmiştir.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \xrightarrow{s=jw} X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt} dt$$

- $s=jw$ için, $X(s)|_{s=jw} = F\{x(t)\}$

- Dolayısı ile

$$s = \sigma + jw \text{ için, } X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \xrightarrow{s=\sigma+jw} X(\sigma + jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+jw)t} dt$$

$$X(\sigma + jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} e^{-jwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}] e^{-jwt} dt$$

Bu durumda eşitliğin sağ tarafının $x(t)e^{-\sigma t}$ 'nın Fourier dönüşümüne eşit olduğu görülür.

4

Laplace Dönüşümü

- Göründüğü gibi Laplace dönüşümü, karmaşık s -düzleminde $j\omega$ -eksenin üzerinde ($\sigma = 0$) hesaplandığında sürekli-zaman Fourier dönüşümünü verir. !!!

$$X(s)|_{s=j\omega} = F\{x(t)\}$$

- $x(t)e^{-\sigma t}$ işaretinin Fourier dönüşümü de $x(t)$ işaretinin Laplace dönüşümünü verir.

- Bu durumda:

1-) Bir $x(t)$ işaretinin Laplace dönüşümünün var olabilmesi için $x(t)e^{-\sigma t}$ işaretinin Fourier dönüşümü yakınsamalıdır. Verilen bir $x(t)$ işaret için, Laplace dönüşümünün var olduğu s değerleri küməsine **YAKINSAKLIK BÖLGESİ (Region of Convergence, ROC)** denir.

2-) Eğer ROC imajiner ekseni ($s=j\omega$) içeriyorsa, işaretin Fourier dönüşümü de vardır.

3-) Bazı işaretler için Fourier dönüşümü yakınsamaz iken Laplace dönüşümü yakınsayabilir.

5

Laplace Dönüşümü

ÖRNEK 1: $x(t) = e^{-at}u(t)$ işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Bu işaret için Fourier dönüşümü önceki haftalarda aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0$$

İşaretin Laplace dönüşümü ise,

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt$$

$$X(s)|_{s=\sigma+j\omega} = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+a)t}e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{(\sigma+a)+j\omega}, \quad \sigma+a > 0$$

$$\text{veya, } s = \sigma + j\omega \rightarrow X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

6

Laplace Dönüşümü

ÖRNEK 2: $x(t) = -e^{-at}u(-t)$ işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $X(s) = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}e^{-st}u(-t)dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t} dt$

$$-e^{-at}u(-t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} < -a$$

Not: Önceki örnekte,

$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

7

Laplace Dönüşümü

Örnekler incelediğinde farklı iki işaretin ait Laplace dönüşümlerinin cebirsel olarak birbirine eşit olduğu görülür.

$$-e^{-at}u(-t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} < -a$$

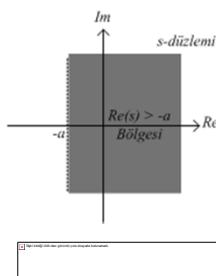
$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

Fakat eşitliklerin geçerli olduğu yakınsaklık bölgesinin $\{\text{Re}\{s\} < -a\}$ ve $\{\text{Re}\{s\} > -a\}$ birbirinden farklı olduğuna dikkat ediniz.

Bu durumda Laplace dönüşümü için cebirsel ifadenin yanı sıra yakınsaklık bölgesinde belirtilmelidir.

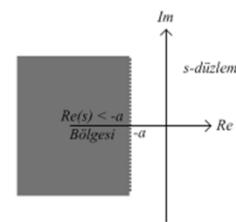
8

Laplace Dönüşümü



$$-e^{-at}u(-t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} < -a$$

9



Laplace Dönüşümü

ÖRNEK: $x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$ işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayınız..

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)] e^{-st} dt = 3 \int_0^{\infty} e^{-2t} e^{-st} dt - 2 \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-st} dt$$

$$e^{-2t}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \text{Re}\{s\} > -2$$

$$e^{-t}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$X(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1} = \frac{s-1}{s^2 + 3s + 2} \quad \text{Re}\{s\} > -1 \downarrow \text{her iki koşulun sağlandığı bölge...}$$

10

Laplace Dönüşümü

ÖRNEK: $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}(\cos 3t)u(t)$ işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayınız..

$$x(t) = \left[e^{-2t} + e^{-t} \left(\frac{e^{3jt} + e^{-3jt}}{2} \right) \right] u(t) = \left[e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-(1-3j)t} + \frac{1}{2} e^{-(1+3j)t} \right] u(t)$$

$$e^{-2t}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \text{Re}\{s\} > -2$$

$$e^{-(1-3j)t}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+(1-3j)}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$e^{-(1+3j)t}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+(1+3j)}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+(1+3j)} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+(1-3j)} = \frac{2s^2 + 5s + 12}{(s^2 + 2s + 10)(s+2)}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

11

Laplace Dönüşümü

Kutup-Sıfır Dağılımı

Örneklerden görüldüğü gibi reel veya karmaşık üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu olarak tanımlanan işaretin Laplace dönüşümü;

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

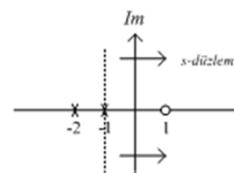
yapısındadır.

Pay $N(s)$ ve payda $D(s)$ için tanımlanan polinomlara ait köklerin s-düzleminde yerine yerleştirilmesi ve ROC bölgesinin tanımlanması Laplace dönüşümünün belirtilmesinde alternatif bir yöntemdir.

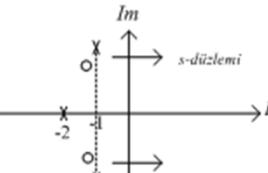
Bu tip gösterimde $N(s)$ 'in kökleri "o", $D(s)$ 'in kökleri ise "x" ile belirtilir.

12

Laplace Dönüşümü



$$X(s) = \frac{s-1}{s^2 + 3s + 2} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$



$$X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 12}{(s^2 + 2s + 10)(s + 2)}, \text{Re}\{s\} > -1$$

$N(s)$ 'in kökleri $X(s)$ 'in **sıfırları** olarak adlandırılır. Çünkü s 'in bu değerleri için $X(s) = 0$ değerini alır. $D(s)$ 'in kökleri ise **kutup** olarak adlandırılır ve $X(s) = \infty$ olur

13

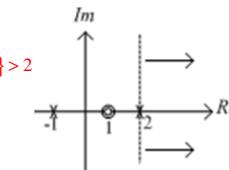
Laplace Dönüşümü

Örnek: $x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$ işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayınız..

$$\delta(t) \xrightarrow{L} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1 \quad \text{ROC ?}$$

$$e^{-t}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1 \quad e^{2t}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s-2}, \quad \text{Re}\{s\} > 2$$

$$X(s) = 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{s-2} = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)} \quad \text{Re}\{s\} > 2$$



Soru: $x(t)$ işaretinin Fourier dönüşümü için ne söylenebilir?

14

Laplace Dönüşümü

Özellik 1: Laplace dönüşümü $X(s)$ 'e ait ROC jw ekseniye paralel bir şerittir.

Daha önce belirtildiği gibi $s = \sigma + jw$ olmak üzere $x(t)$ nin Laplace dönüşümünün var olabilmesi için $x(t)e^{-\sigma t}$ işaretinin Fourier dönüşümü yakınsamalıdır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

Dolayısı ile koşul sadece $s = \sigma + jw$ 'in gerçel kısmına **σ** bağlıdır.

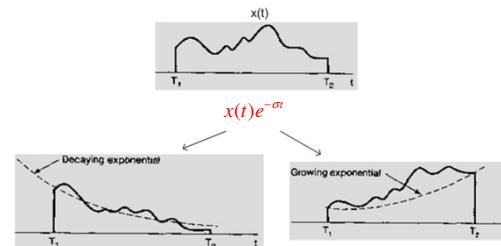
Özellik 2: $X(s)$ 'e ait ROC kutup içermez.

Kutup noktalarında **$X(s) = \infty$** olduğundan $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$ integrali yakınsayamayacaktır.

15

Laplace Dönüşümü

Özellik 3: $x(t)$ sonlu bir işaret ve mutlak integrallenebilir ise $X(s)$ 'e ait ROC tüm s -düzlemdir.



16

Laplace Dönüşümü

Örnek: $x(t) = \begin{cases} e^{-at} & 0 < t < T \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$ işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayıp ROC bölgесinin tüm s düzlemi olduğunu gösteriniz.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^T e^{-at}e^{-st} dt = \frac{1}{s+a} (1 - e^{-(s+a)T})$$

Gördüğü gibi $X(s)$ 'in $s=-a$ noktasında kutbu vardır. Kutup noktaları ROC'a dahil olamazdır! (Özellik 2).

Ancak $s=-a$ 'da $X(s)=0/0$ olduğundan $s=-a$ noktasındaki değeri L'Hôpital kurallı ile hesaplanır ise

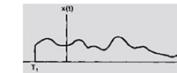
$$\lim_{s \rightarrow -a} X(s) = \lim_{s \rightarrow -a} \frac{\frac{d}{ds}(1 - e^{-(s+a)T})}{\frac{d}{ds}(s+a)} = \lim_{s \rightarrow -a} T e^{-aT} e^{-sT} = T$$

$X(-a)=T$ olduğundan ROC tüm s düzlemdir.

17

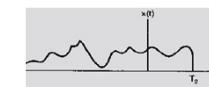
Laplace Dönüşümü

Özellik 4: $x(t)$ sağ tarafa dayalı bir işaret ise ve $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma_0$ ROC bölgesinde ise $\operatorname{Re}\{s\} > \sigma_0$ şartını sağlayan tüm s noktalarda ROC alanındadır.



$\int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$ ise $\sigma_0 < \sigma_1$ şartını sağlayan σ_1 içinde $\int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < \infty$ geçerli olacaktır.

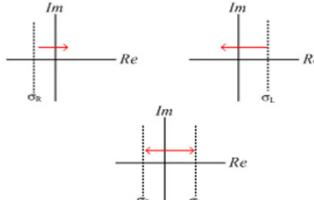
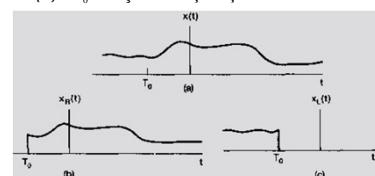
Özellik 5: $x(t)$ sol tarafa dayalı bir işaret ise ve $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma_0$ ROC bölgeinde ise $\operatorname{Re}\{s\} < \sigma_0$ şartını sağlayan tüm s noktalarda ROC alanındadır.



18

Laplace Dönüşümü

Özellik 6: $x(t)$ çift tarafa bir işaret ise ve $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma_0$ ROC bölgesinde ise $x(t)$ için ROC $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma_0$ da içeren bir şerit şeklidir.

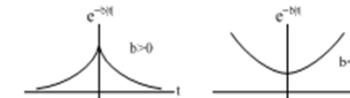


19

Laplace Dönüşümü

ÖRNEK: $x(t) = e^{-bt}|$ işaretinin Laplace dönüşümünü (mevcut ise) hesaplayınız.

$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t)$ şeklinde yeniden yazılır ve i) $b>0$ ii) $b<0$ durumlarına göre aşağıda gösterilen iki işaret elde edilir.



$$e^{-bt}u(t) \xleftarrow{L} \frac{1}{s+b} \quad \operatorname{Re}\{s\} > -b$$

$$e^{bt}u(-t) \xleftarrow{L} \frac{-1}{s-b} \quad \operatorname{Re}\{s\} < +b$$

$$e^{-|bt|} \xleftarrow{L} \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = \frac{-2b}{s^2 - b^2} \quad -b < \operatorname{Re}\{s\} < b$$

Gördüğü gibi ayrı ayrı bakıldığından b 'nin tüm değerleri için ($b>0$, $b<0$) hem sağ taraf hem de sol tarafa dayalı işaretin Laplace dönüşümü mevcuttur. Ancak $x(t)$ için sadece $b>0$ için Laplace dönüşümü mevcuttur.

20

Laplace Dönüşümü

Özellik 7: $x(t)$ 'ye ait Laplace dönüşümü oransal ise ROC ya kutuplar ile sınırlıdır veya sonsuza kadar uzanır.

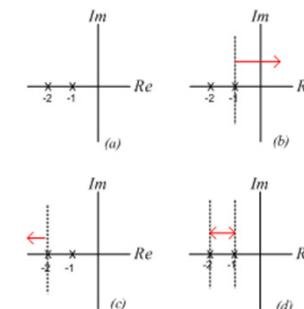
Özellik 8: $x(t)$ sağ tarafta dayalı ve Laplace dönüşümü oransal ise ROC en sağdaki kutubun sağ tarafıdır.

$x(t)$ sol tarafta dayalı ve Laplace dönüşümü oransal ise ROC en soldaki kutubun sol tarafıdır.

21

Laplace Dönüşümü

Örnek: $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ ifadesi için kutup sıfır dağılımını çiziniz ve mümkün olan ROC bölgelerini gösteriniz.



22

Ters Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü $X(s)$ olan $x(t)$ işaretini aşağıda belirtilen ters-Laplace ifadesi ile hesaplanabilir.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

Ancak yukarıda verilen integrali hesaplamak yerine $X(s)$ ifadesi basit kesirlere ayılarak her bir bileşeni için ayrı ayrı ters-Laplace dönüşümü tablodan bakılarak hesaplanması daha kolay bir yöntemdir.

Örnek: $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ $\text{Re}\{s\} > -1$ olarak verilmiştir. $x(t) = ?$

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)}$$

$$A = [(s+1)X(s)]_{s=-1} = 1 \quad B = [(s+2)X(s)]_{s=-2} = -1$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$$

23

Ters Laplace Dönüşümü

$$\text{Hاتırlatma: } -e^{-at}u(-t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} < -a$$

$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

Bu durumda $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$ $\text{Re}\{s\} > -1$ ifadesi için ters-laplace;

$$e^{-t}u(t) \xleftarrow{L} \frac{1}{(s+1)} \quad \text{Re}\{s\} > -1 \quad e^{-2t}u(t) \xleftarrow{L} \frac{1}{(s+2)} \quad \text{Re}\{s\} > -2$$

$$[e^{-t} - e^{-2t}]u(t) \xleftarrow{L} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

olarak hesaplanır.

24

Ters Laplace Dönüşümü

Örnek: $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ $\text{Re}\{s\} < -2$ olarak verilmiştir. $x(t) = ?$

$$-e^{-at}u(-t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} < -a \quad e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

Bu durumda $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$ $\text{Re}\{s\} < -2$ ifadesi için ters-laplace;

$$-e^{-t}u(-t) \xleftarrow{L} \frac{1}{(s+1)} \quad \text{Re}\{s\} < -1 \quad -e^{-2t}u(-t) \xleftarrow{L} \frac{1}{(s+2)} \quad \text{Re}\{s\} < -2$$

$$[-e^{-t} + e^{-2t}]u(-t) \xleftarrow{L} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \text{Re}\{s\} < -2$$

olarak hesaplanır.

25

Ters Laplace Dönüşümü

Örnek: $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ $-2 < \text{Re}\{s\} < -1$ olarak verilmiştir. $x(t) = ?$

$$-e^{-at}u(-t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} < -a \quad e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

Bu durumda $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$ $-2 < \text{Re}\{s\} < -1$ ifadesi için ters-laplace;

$$-e^{-t}u(-t) \xleftarrow{L} \frac{1}{(s+1)} \quad \text{Re}\{s\} < -1 \quad e^{-2t}u(t) \xleftarrow{L} \frac{1}{(s+2)} \quad \text{Re}\{s\} > -2$$

$$-e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t) \xleftarrow{L} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad -2 < \text{Re}\{s\} < -1$$

olarak hesaplanır.

26

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

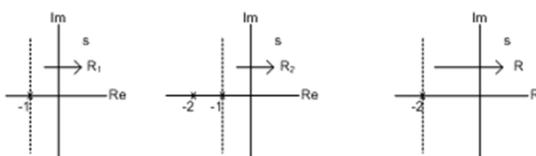
Özellik 1: Doğrusallık

$$x_1(t) \xrightarrow{L} X_1(s) \quad \text{ve} \quad \text{ROC}=R_1 \\ x_2(t) \xrightarrow{L} X_2(s) \quad \text{ve} \quad \text{ROC}=R_2 \quad ax_1(t)+bx_2(t) \xrightarrow{L} aX_1(s)+bX_2(s) \quad \text{ROC en az } R_1 \cap R_2$$

Örnek: $X_1(s) = \frac{1}{s+1}$ $\text{Re}\{s\} > -1$ ve $X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ $\text{Re}\{s\} > -1$ olsun.

$x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ olarak verildiğine göre $X(s) = ?$

$$X(s) = X_1(s) - X_2(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \quad \text{Re}\{s\} > -2$$



27

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Özellik 2: Zamanda Öteleme

$$x(t) \xrightarrow{L} X(s) \quad \text{ve} \quad \text{ROC}=R \quad \text{ise} \quad x(t-t_0) \xrightarrow{L} e^{-st_0}X(s) \quad \text{ve} \quad \text{ROC}=R$$

Özellik 3: Zamanda Tersleme !!!!!!!

$$x(t) \xrightarrow{L} X(s) \quad \text{ve} \quad \text{ROC}=R \quad \text{ise} \quad x(-t) \xrightarrow{L} X(-s) \quad \text{ve} \quad \text{ROC}=-R$$

Özellik 3: s-domeninde Öteleme

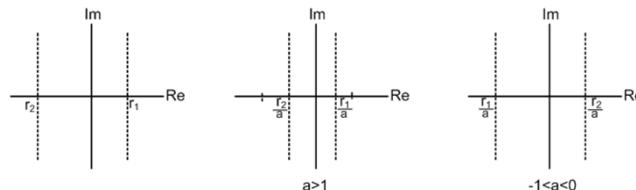
$$x(t) \xrightarrow{L} X(s) \quad \text{ve} \quad \text{ROC}=R \quad \text{ise} \\ e^{s_0 t}x(t) \xrightarrow{L} X(s-s_0) \quad \text{ve} \quad \text{ROC}=R+\text{Re}\{s_0\}$$

28

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Özellik 4: Zamanda Ölçekleme

$$x(t) \xrightarrow{L} X(s) \text{ ve } \text{ROC}=R \quad \text{ise} \quad x(at) \xrightarrow{L} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \text{ ve } \text{ROC } R_1 = \frac{R}{a}$$



29

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Özellik 5: Konvolüsyon Özelliği

$$\begin{aligned} x_1(t) &\xrightarrow{L} X_1(s) \text{ ve } \text{ROC}=R_1 \\ x_2(t) &\xrightarrow{L} X_2(s) \text{ ve } \text{ROC}=R_2 \end{aligned}$$

$$x_1(t)*x_2(t) \xrightarrow{L} X_1(s)X_2(s) \quad \text{ROC= en az } R_1 \cap R_2 \text{ içerir}$$

$$X_1(s) = \frac{s+2}{s+1} \quad \text{Re}\{s\} > -1 \quad \text{ve} \quad X_2(s) = \frac{s+1}{s+2} \quad \text{Re}\{s\} > -2$$

$$X_1(s)X_2(s) = 1 \quad \text{ROC = tüm } s - \text{düzlemi}$$

30

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Özellik 6: Zaman Domeninde Türev Özelliği

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{L} X(s) \text{ ve } \text{ROC}=R \quad \text{ise} \\ \frac{dx(t)}{dt} &\xrightarrow{L} sX(s) \text{ ve } \text{ROC } R' \text{yi içerir.} \end{aligned}$$

Özellik 7: s-domeninde Türev Özelliği

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{L} X(s) \text{ ve } \text{ROC}=R \quad \text{ise} \\ -tx(t) &\xrightarrow{L} \frac{dX(s)}{ds} \text{ ve } \text{ROC}=R \end{aligned}$$

31

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Örnek: $x(t) = te^{-at}u(t)$ Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

$$\begin{aligned} e^{-at}u(t) &\xrightarrow{L} \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} > -a \\ te^{-at}u(t) &\xrightarrow{L} -\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s+a} \right] = \frac{1}{(s+a)^2} \quad \text{Re}\{s\} > -a \end{aligned}$$

$$\text{Örnek: } X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 5}{(s+1)^2(s+2)} \quad \text{Re}\{s\} > -1 \quad x(t) = ?$$

$$X(s) = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)} + \frac{3}{(s+2)} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$x(t) = [2te^{-t} - e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t)$$

32

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Özellik 8: Zaman Domeninde İntegral Özellikti

$$x(t) \xrightarrow{L} X(s) \text{ ve } \text{ROC} = R \text{ ise}$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s) \text{ ve } \text{ROC} \cap \text{Re}\{s\} > 0$$

İlk Değer (Başlangıç) Teoremi: $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$

Son Değer Teoremi: $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

33

LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Nedensellik

Nedensel LTI sistem için impuls cevabı $h(t) = 0$ $t < 0$ 'dır.

Dolayısı ile nedensel sistemin impuls cevabı sağ tarafa dayalıdır. Bu durumda nedensel bir sistemin transfer fonksiyonu $H(s)$ için ROC sağ tarafındır.

Oransal bir transfer fonksiyonuna $H(s)$ sahip nedensel sistemin ROC'u en sağdaki kutbuñ sağ tarafıdır.

Örnek: İmpuls cevabı $h(t) = e^{-t} u(t)$ olan sistemi inceleyelim.

$h(t) = 0$ $t < 0$ olduğundan sistem nedenseldir.

$$\text{Transfer fonksiyonu } H(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

incelediğinde ROC'un en sağdaki kutbuñ sağ tarafı olduğu görülmektedir.

34

LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Örnek: İmpuls cevabı $h(t) = e^{-|t|}$ olan sistemi inceleyelim.

$h(t) \neq 0$ $t < 0$ olduğundan sistem nedensel değildir.

$$\text{Transfer fonksiyonu } H(s) = \frac{-2}{s^2 - 1} \quad -1 < \text{Re}\{s\} < 1 \quad (\text{Bknz, Slayt 20})$$

incelediğinde ROC'un en sağdaki kutbuñ sağ tarafı olmadığı görülmektedir.

35

LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Örnek: Transfer fonksiyonu $H(s) = \frac{e^s}{s+1}$ $\text{Re}\{s\} > -1$ olarak verilen sistemi inceleyelim.

Transfer fonksiyonu için ROC en sağdaki kutbuñ sağ tarafı olarak verilmiştir. Dolayısı ile impuls cevabı sağ taraflı olmalıdır.

$$\text{Önceki örneklerden } e^{-t} u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+1} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$\text{ve Laplace dönüşümü özelliklerinden, } e^{-(t+1)} u(t+1) \xrightarrow{L} \frac{e^s}{s+1} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

Bu durumda incelenen sistemin impuls cevabı $h(t) = e^{-(t+1)} u(t+1)$ olarak elde edilir. Dolayısı ile sistem nedensel değildir.

Nedensel sistem için ROC en sağdaki kutbuñ sağdır. Ancak ROC'un en sağdaki kutbuñ sağ olması sistemin nedensel olmasını garanti etmez. Sadece impuls cevabının sağ taraflı olduğunu kesinleştirir.

36

LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Kararlılık

LTI sistemin kararlı olabilmesi için impuls cevabının $h(t)$ mutlak integrallenebilir olması gereklidir. Başka bir ifade ile impuls cevabının Fourier dönüşümü yakınsamalıdır.

$$F\{x(t)\} = X(jw) = \{X(s)\}_{s=jw}$$

olduğundan,

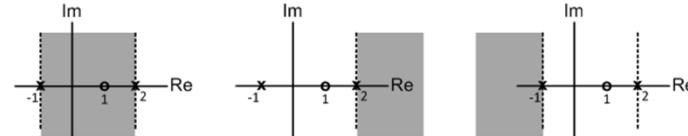
LTI bir sistemin kararlı olabilmesi için sistem transfer fonksiyonuna ait ROC bölgesi jw - eksenini kapsmalıdır.

37

LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Örnek: Transfer fonksiyonu $H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$ olarak verilen sistemin kararlılığını inceleyelim.

ROC bölgesi belirtilmediği için mümkün olan tüm ROC bölgeleri için sistemin kararlılığını inceleyelim.



$$h(t) = \frac{2}{3}e^{-t}u(t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$$

Nedensel

$$h(t) = \frac{2}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$$

$$h(t) = -\frac{2}{3}e^{-t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$$

Nedensel bir sistemin kararlı olabilmesi için transfer fonksiyonunun tüm kutupları sol s-yarı düzleminde olmalıdır.

38

LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Giriş-çıkış ilişkisi diferansiyel denklem ile verilen LTI bir sistemin transfer fonksiyonu Laplace dönüşümü özellikleri kullanılarak doğrudan elde edilebilir.

$$\text{Örnek: } \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

$$sY(s) + 3Y(s) = X(s) \rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+3}$$

$$\text{Nedensel} \rightarrow \text{Re}\{s\} > -3 \rightarrow h(t) = e^{-3t}u(t)$$

$$\text{Anti-Nedensel} \rightarrow \text{Re}\{s\} < -3 \rightarrow h(t) = -e^{-3t}u(-t)$$

39

LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Örnek: $x(t) = e^{-3t}u(t)$ giriş işaretine karşılık cevabı $y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$

olan sistemin transfer fonksiyonunu elde ediniz. Sistemin giriş-çıkış ilişkisini tanımlayan diferansiyel denklemi yazınız. Sistemin nedenselliği ve kararlılığını belirtiniz.

$$X(s) = \frac{1}{s+3} \quad \text{Re}\{s\} > -3 \quad Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \quad \text{ROC ?}$$

$H(s)$ 'in ROC'u için 3 alternatif söz konusudur. Ancak, konvolüsyon özelliğinden $Y(s)$ 'in ROC'u nun $X(s)$ ve $H(s)$ 'in ROC'u nun kesişimini içermesi gerektiğini biliyoruz. Bu durumda $H(s)$ 'in ROC'u $\text{Re}\{s\} > -1$ olmalıdır. Dolayısı ile sistem nedensel ve kararlıdır.

Sistemin davranışını tanımlayan diferansiyel denklem:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

40

LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Örnek: Bir sistem hakkında aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

1. Sistem nedenseldir.
2. Transfer fonksiyonu oransaldır ve $s=-2$ ve $s=4$ 'te olmak üzere iki kutbu sahiptir.
3. $x(t) = 1$ için $y(t) = 0$ olarak elde edilmiştir.
4. İmpuls cevabı $t = 0^+ \rightarrow 4$ olarak hesaplanmıştır.

Buna göre $H(s) = ?$

$$H(s) = \frac{p(s)}{(s+2)(s-4)}$$

$x(t) = 1 = e^{0t}$ için $y(t)=0$ olabilmesi için $Y(s) = X(s)H(s)$

ilişkisinden $H(0)=0$ olması gerektiği anlaşılmıştır, $p(s) = sq(s)$

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 q(s)}{s^2 - 2s - 8} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks^2}{s^2 - 2s - 8} = 4 \Rightarrow K = 4$$

$$H(s) = \frac{4s}{(s+2)(s-4)}$$

41

Hafta 10:
 z -Dönüştümü

1

Ele Alınacak Ana Konular

- z -dönüştümü
- z -dönüştümünün yakınsaklık bölgesi
- Ters z -dönüştümü
- z -dönüştümünün özellikler
- z -dönüştümü kullanarak LTI sistemlerin analizi





Witold Hurewicz

John R. Ragazzini

Lotfi Aliasker Zadeh

2

z -Dönüştümü

- İmpuls yanıt $h[n]$ olan bir LTI sistemin, z^n girişine olan yanıtının $y[n] = H(z)z^n$ olduğunu görmüştük. $H(z)$ aşağıdaki gibi hesaplamıştı:
$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$
- $z = e^{j\omega}$ yani $|z| = 1$ için, yukarıda verilen toplam $h[n]$ 'nin ayrık-zaman Fourier dönüşümüdür. $|z| = 1$ olmak zorunda olmadığından, toplamaya z -dönüştümü denir.
- z karmaşık bir sayı olmak üzere, bir ayrık-zaman işaret $x[n]$ 'nin z -dönüştümü denklemiyle tanımlanır.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

z -dönüştümünü belirtmek için $Z\{x[n]\}$ kullanacak, işaret ile z -dönüştümü arasındaki ilişkiyi, aşağıdaki şekilde belirteceğiz.

$x[n] \xrightarrow{z} X(z)$

3

z -Dönüştümü

- Laplace dönüşümü ile sürekli-zaman Fourier dönüşümü arasında ilişki olduğu gibi, z -dönüştümü ile ayrık-zaman Fourier dönüşümü arasında ilişki vardır.
- z kutupsal koordinatlarda $z = re^{j\omega}$ şeklinde yazılabilir. O halde,
$$X(z) = X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{x[n]r^{-n}\} e^{-j\omega n}$$
- Görüldüğü gibi, $X(re^{j\omega})$, $x[n]$ ile r^{-n} dizilerinin çarpımının Fourier dönüşümüne eşittir. Yani,

$$X(re^{j\omega}) = F\{x[n]r^{-n}\}.$$

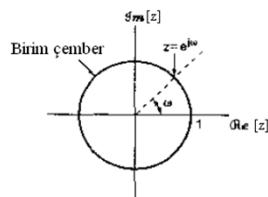
- $|z| = 1$ iken, toplama $x[n]$ işaretinin ayrık-zaman Fourier dönüşümüne eşit olur:

$$X(z)|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = F\{x[n]\}$$

4

z-Dönüştümü

- Laplace dönüşümü, karmaşık s -düzleminde $j\omega$ -ekseni üzerinde hesaplandığında sürekli-zaman Fourier dönüşümünü veriyordu.
- z -dönüşümü, karmaşık z -düzleminde birim çember ($|z|=1$) üzerinde hesaplandığında, ayrık-zaman Fourier dönüşümüne eşit olur.



- Bir $x[n]$ işaretinin z -dönüşümünün var olabilmesi için $x[n]r^n$ işaretinin ayrık-zaman Fourier dönüşümü yakınsamalıdır. Verilen bir işaret için, z -dönüşümünün var olduğu r değerleri kümnesi **YAKINSAKLIK BÖLGESİ (ROC)** denir. ROC, birim çember içeriyorsa, işaretin Fourier dönüşümü de vardır.

5

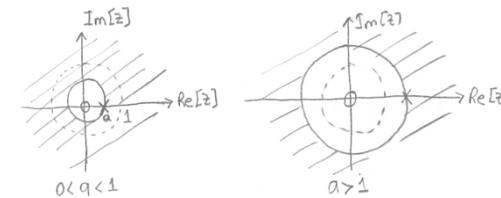
z-Dönüştümü

ÖRNEK: $x[n] = a^n u[-n-1]$ işaretinin z -dönüşümünü hesaplayınız, sifir-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

ÇÖZÜM: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$ Hatırlatma:
 $\sum_{k=n_1}^{n_2} q^k = \frac{q^{n_1} - q^{n_2+1}}{1-q}, \quad 1 \neq q$

Serinin yakınsaması için $|az^{-1}| < 1$ veya esdeğer olarak $|z| > |a|$ olmalıdır. O halde,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad \text{ROC: } |z| > |a|$$



6

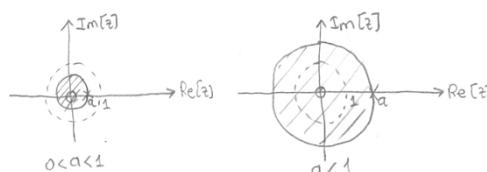
z-Dönüştümü

ÖRNEK: $x[n] = -a^n u[-n-1]$ işaretinin z -dönüşümünü hesaplayınız, sifir-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

ÇÖZÜM: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n$

Serinin yakınsaması için $|a^{-1}z| < 1$ veya esdeğer olarak $|z| < |a|$ olmalıdır. O halde,

$$X(z) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad \text{ROC: } |z| < |a|$$



7

z-Dönüştümü

ÖRNEK: Aşağıda verilen işaretin z -dönüşümünü hesaplayınız, sifir-kutup diyagramını ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

$$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

ÇÖZÜM: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \right] z^{-n} = 7\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n - 6\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n$

z -dönüşümünün var olabilmesi için iki seri de yakınsamalıdır Yani,

$$\left|\frac{1}{3}z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1/3 \quad \text{ve} \quad \left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1/2$$

O halde,

$$X(z) = \frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1-\frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{z\left(z-\frac{3}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2}$$

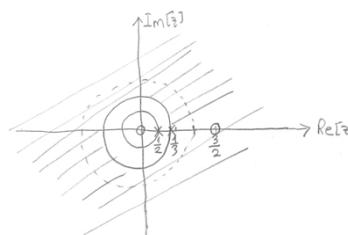
8

Aynı sonucu, önceki alıştırmaları kullanarak hesaplama yapmadan da bulabiliriz.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2}$$

$$7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2}$$



9

z -Dönüştümü

ÖRNEK: Aşağıda verilen işaretin z -dönüştümünü hesaplayınız, sıfır-kutup diyagramını ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[n] = \left\{ \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3} e^{j\pi/4} \right)^n - \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3} e^{-j\pi/4} \right)^n \right\} u[n]$$

ÇÖZÜM:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3} e^{j\pi/4} \right)^n - \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3} e^{-j\pi/4} \right)^n \right\} z^{-n} = \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} e^{j\pi/4} z^{-1} \right)^n - \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} e^{-j\pi/4} z^{-1} \right)^n$$

z -dönüştümünün var olabilmesi için iki seri de yakınsalıdır Yani,

$$\left| \frac{1}{3} e^{j\pi/4} z^{-1} \right| < 1 \Rightarrow |z| > 1/3 \quad \text{ve} \quad \left| \frac{1}{3} e^{-j\pi/4} z^{-1} \right| < 1 \Rightarrow |z| > 1/3$$

O halde,

$$X(z) = \frac{1}{2j} \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{j\pi/4} z^{-1}} - \frac{1}{2j} \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\pi/4} z^{-1}} = \frac{\frac{1}{3\sqrt{2}} z}{\left(z - \frac{1}{3} e^{j\pi/4} \right) \left(z - \frac{1}{3} e^{-j\pi/4} \right)}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{3}$$

10

z -Dönüştümü

ÖRNEK: Aşağıda verilen işaretlerin z -dönüştümünü hesaplayınız, sıfır-kutup diyagramını ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

- (i) $x[n] = \delta[n]$, (ii) $x[n] = \delta[n-1]$, (iii) $x[n] = \delta[n+1]$

ÇÖZÜM:

$$(i) \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = \delta[0] z^{-0} = 1, \quad \text{ROC: } \forall z$$

$$(ii) \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-1] z^{-n} = \delta[1-1] z^{-1} = z^{-1}, \quad \text{ROC: } \forall z, z \neq 0 \text{ hariç}$$

$$(iii) \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n+1] z^{-n} = \delta[-1+1] z^{-(-1)} = z, \quad \text{ROC: } \forall z, z \neq \infty \text{ hariç}$$

11

z -Dönüştümü

ÖRNEK: Aşağıda verilen işaretin z -dönüştümünü hesaplayınız, sıfır-kutup diyagramını ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}, \quad a > 0.$$

$$\text{ÇÖZÜM: } X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a}, \quad \text{ROC: } \forall z, z \neq 0 \text{ hariç}$$

Sıfırlar (pay polinomunun kökleri) $z_k = a_k e^{j(2\pi k/N)}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$

Kutuplar (payda polinomunun kökleri): $z = a, z = 0$ ($N-1$) katlı

$k=0$ için bulunan sıfır ile kutup birbirini götürür. Sonuç olarak,

Sıfırlar: $z_k = a_k e^{j(2\pi k/N)}$, $k = 1, \dots, N-1$

Kutuplar: $z=0$ ($N-1$) katlı

Hatırlatma:

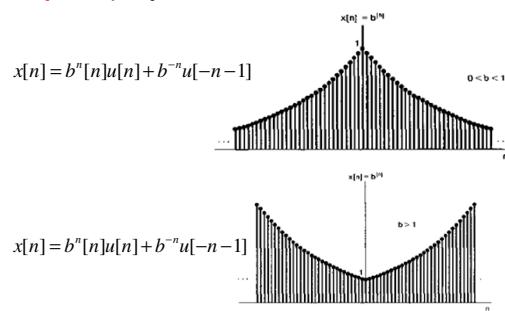
$$\sum_{k=n_1}^{n_2} q^k = \frac{q^{n_1} - q^{n_2+1}}{1-q}, \quad 1 \neq q$$

12

***z*-Dönüştümü**

Örnek: $x[n] = b^{|n|}$, $b > 0$ işaretinin *z*-dönüştümünü hesaplayınız, sıfır-kutup diyagramını ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

Çözüm: İşaret çift taraflı olup $b < 1$ ve $b > 1$ için şekli aşağıda verilmiştir.

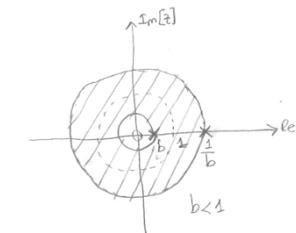


13

$$b^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-bz^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > b$$

$$b^{-n} u[-n-1] \xrightarrow{z} \frac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| < \frac{1}{b}$$

$$\begin{aligned} x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1] &\xrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} - \frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}}, \\ &= \frac{b^2-1}{b} \frac{z}{(z-b)(z-b^{-1})}, \quad \text{ROC: } b < |z| < \frac{1}{b} \end{aligned}$$



14

***z*-Dönüştümünün Yakınsaklık Bölgesinin Özellikleri**

1. Bir ayrık-zaman işaretini *z*-dönüştümünün ROC'si, *z*-düzleminde sıfır etrafında bir halkadır.
2. ROC herhangi bir kutup içermez.
3. Ayrık-zaman işaret sonlu süreli ise, *z*-dönüştümünün ROC'si muhtemelen $z = 0$ veya $z = \infty$ hariç, tüm *z*-düzlemidir.
4. Ayrık-zaman işaret sağ taraflı ve $|z|=r_0$ halkası *z*-dönüştümünün ROC'si içinde ise, $|z| > r_0$ eşitsizliğini sağlayan tüm *z* değerleri de ROC içindedir.
5. Ayrık-zaman işaret sol taraflı ve $|z|=r_0$ halkası *z*-dönüştümünün ROC'si içinde ise, $0 < |z| < r_0$ eşitsizliğini sağlayan tüm *z* değerleri de ROC içindedir.

15

***z*-Dönüştümünün Yakınsaklık Bölgesinin Özellikleri**

6. Ayrık-zaman işaret çift taraflı ve $|z|=r_0$ halkası *z*-dönüştümünün ROC'si içinde ise, ROC $|z|=r_0$ halkasını içeren bir halkadır.
7. Ayrık-zaman işaretin *z*-dönüştümü rasyonel ise, ROC kutuplarla sınırlıdır veya sonsuza kadar uzanır.
8. Ayrık-zaman işaretin *z*-dönüştümü rasyonel ve işaret sağ taraflı ise, ROC en dışındaki kutubun dışındaki bölge, yani en yüksek genlikli kutubun genliğine eşit halkanın dışıdır. İşaret aynı zamanda nedensel ise (sağ taraflı ve $n < 0$ için sıfır eşitse), $z = \infty$ ROC içindedir.
9. Ayrık-zaman işaretin *z*-dönüştümü rasyonel ve işaret sol taraflı ise, ROC en içteki kutubun içindeki bölge, yani en küçük genlikli kutubun genliğine eşit halkanın içidir. İşaret aynı zamanda nedensel değilse (sağ taraflı ve $n > 0$ için sıfır eşitse), $z = 0$ ROC içindedir.

16

z -Dönüştüm Çiftleri

İşaret	z -Dönüştümü	Yakınsaklık Bölgesi (ROC)
$\delta[n]$	1	Tüm z değerleri
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	$m > 0$ için 0 veya $m < 0$ için ∞ hariç tüm z değerleri
$\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z > \alpha $
$-\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z < \alpha $

17

z -Dönüştüm Çiftleri

İşaret	z -Dönüştümü	Yakınsaklık Bölgesi (ROC)
$n\alpha^n u[n]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z > \alpha $
$-n\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z < \alpha $
$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2 \cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{\sin(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2 \cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$r^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - r \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
$r^n \sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{r \sin(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$

18

Ters z -Dönüştümü

- $x[n]$ işaretinin z -dönüştümü $X(z) = X(re^{j\omega})$, $x[n]r^n$ işaretinin ayrık-zaman Fourier dönüsümü ise, $x[n]r^n$ işaret $X(re^{j\omega})$ 'nın ters Fourier dönüsümüdür. Yani,

$$\begin{aligned} X(re^{j\omega}) = F\{x[n]r^n\} &\Rightarrow x[n]r^n = F^{-1}\{X(re^{j\omega})\} \Rightarrow x[n] = r^n F^{-1}\{X(re^{j\omega})\} \\ &= r^n \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega}) (re^{j\omega})^n d\omega \end{aligned}$$

- $z = re^{j\omega}$ değişken dönüsümü yapılrsa, $dz = jre^{j\omega} d\omega = jz d\omega \Rightarrow d\omega = (1/j)z^{-1} dz$
- ω , 2π aralığında değişirken, z r yarıçaplı bir daire üzerinde değerler alır. Dolayısıyla, integral z cinsinden aşağıdaki gibi olur:

$$x[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint X(z) z^{n-1} dz \quad (\text{Ters } z\text{-dönüştümü})$$

- O, merkezi orijin olan, saat yönünün tersi yönde, r yarıçaplı kapalı bir eğriyi ifade etmektedir. Ters z -dönüştümü, karmaşık düzlemede integral alma yerine **basit kesirlere ayırma** ve **kuvvet serisine açma** yöntemleri kullanılarak belirlenir.

19

Ters z -Dönüştümü

Örnek (basit kesirlere ayırma): Aşağıda verilen z -dönüştümülerinin tersini bulunuz.

$$(i) \quad X(z) = \frac{3 - (5/6)z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{3}$$

- (ii) $X(z)$ asym, ROC: $1/4 < |z| < 1/3$,
 (iii) $X(z)$ asym, ROC: $|z| < 1/4$,

$$\text{Çözüm: } X(z) = \frac{A}{1 - (1/4)z^{-1}} + \frac{B}{1 - (1/3)z^{-1}} = \frac{1}{1 - (1/4)z^{-1}} + \frac{2}{1 - (1/3)z^{-1}}$$

- (i) bileşenler sağ taraflıdır: $(1/4)^n u[n] + 2(1/3)^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - (1/4)z^{-1}} + \frac{2}{1 - (1/3)z^{-1}}$

- (ii) $1/4$ kutbundan gelen bileşen sağ taraflı, $1/3$ kutbundan gelen bileşen sol taraflıdır:

$$(1/4)^n u[n] - 2(1/3)^n u[-n-1] \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - (1/4)z^{-1}} + \frac{2}{1 - (1/3)z^{-1}}$$

- (iii) bileşenler sol taraflıdır:

$$-(1/4)^n u[-n-1] - 2(1/3)^n u[-n-1] \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - (1/4)z^{-1}} + \frac{2}{1 - (1/3)z^{-1}}$$

Ters z -Dönüştümü

Örnek (kuvvet serisine açma): Aşağıdaki z -dönüştümünün tersini bulunuz.

$$X(z) = 4z^2 + 2 + 3z^{-1}, \text{ ROC: } 0 < |z| < \infty$$

Çözüm: z -dönüştümünün tanımını hatırlayalım:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Gördüğü gibi, z -dönüştümünde z 'nin kuvvetlerinin yanında gözüken sayılar işaretin değerleridir (z^0 yanındaki sayı $x[0]$, z^1 yanındaki sayı $x[1]$, z^2 yanındaki sayı $x[2]$, z^1 yanındaki sayı $x[-1]$, z^2 yanındaki sayı $x[-2]$, vb). O halde,

$$x[n] = \begin{cases} 4, & n = -2 \\ 2, & n = 0 \\ 3, & n = 1 \\ 0, & \text{diger } n \text{ değerleri için} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x[n] = 4\delta[n+2] + 2\delta[n] + 3\delta[n-1]$$

21

Ters z -Dönüştümü

Örnek (kuvvet serisine açma): Aşağıdaki z -dönüştümünün tersini bulunuz.

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \text{ ROC: } |z| > |a|$$

Çözüm: Önceki örneklerden işaretin sağ tarafı ve $x[n]=a^n u[n]$ olduğunu biliyoruz. Aynı sonucu verilen rasyonel z -dönüştümünü kuvvet serisine açarak da bulabiliriz. Polinom bölme işlemi, z 'nin negatif kuvvetleri olacak şekilde yapılır:

$$\frac{1}{1-az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots$$

O halde, $n < 0$ için $x[n] = 0$, $x[1] = a$, $x[2] = a^2$ veya genel olarak $x[n] = a^n u[n]$.

Not: ROC $|z| < |a|$ olsaydı, işaret sol tarafı olacağınından z 'nin pozitif kuvvetleri olacak şekilde polinom bölme işlemi yapılabilir:

$$\frac{1}{1-az^{-1}} = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 + \dots$$

Bu durumda, $n \geq 0$ için $x[n] = 0$, $x[-1] = -a^{-1}$, $x[2] = -a^{-2}$ veya genel olarak $x[n] = -a^n u[-n-1]$.

22

Ters z -Dönüştümü

Örnek (kuvvet serisine açma): Aşağıdaki z -dönüştümünün tersini bulunuz.

$$X(z) = \ln(1+az^{-1}), \text{ ROC: } |z| > |a|$$

Çözüm: $\ln(1+x)$ için seri açılımı aşağıda verilmiştir.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad |x| < 1$$

$\ln(1+x)$ için seri açılımında x yerine az^{-1} yazılırsa soruda $X(z)$ elde edilir:

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n}, \quad |az^{-1}| < 1$$

Açılmışta, z 'nin kuvvetlerinin yanında gözüken sayılar işaretin değerleri olduğundan

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n}, & n \geq 1 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1]$$

23

z -Dönüştümünün Özellikleri

- Kolaylık olması bakımından, z -dönüştümü ve tersini belirtmek için sırasıyla $Z\{x[n]\}$ ve $Z^{-1}\{X(z)\}$ kısa gösterimlimi kullanacağız. Ayrıca, z -dönüştüm çiftini belirtmek için

$$x[n] \xleftarrow{Z} X(z)$$

notasyonunu kullanacağız.

- z -dönüştümünün aşağıda verilen özellikleri aracılığıyla, z -dönüştümü bilinen işaretlerden çoğu işaretin z -dönüştümünü elde etmek kolaylaşmaktadır.
- Aşağıda sadece en önemli özelliklerin ispatı verilecektir. Diğer özelliklerin ispatı benzer şekilde yapılabilir.

24

z -Dönüştümünün Özellikleri

Zamanda öteleme: $x[n] \xleftarrow{Z} X(z) \Rightarrow x[n-n_0] \xleftarrow{Z} z^{-n_0} X(z)$

Ispat: z -dönüştüm denkleminden

$$Z\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0] z^{-n}$$

$n-n_0 = u$ değişken deönüştümü yapılrsa,

$$Z\{x[n-n_0]\} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} x[u] z^{-(u+n_0)} = z^{-n_0} \sum_{u=-\infty}^{\infty} x[u] z^{-u} = z^{-n_0} X(z)$$

$X(z)$ 'nin ROC'si R olsun. $n_0 > 0$ ise, z^{-n_0} ile çarpımdan dolayı, $z = 0$ 'da kutuplar oluşur ve bunlar $X(z)$ 'nin $z = 0$ 'daki sıfırlarını götürebilir. Dolayısıyla, $z = 0$, $z^{-n_0} X(z)$ 'nin kutbu olabilir. Bu durumda $x[n-n_0]$ 'ın ROC'si orijin hariç R' dir.

$n_0 < 0$ ise, z^{-n_0} ile çarpımdan dolayı, $z = 0$ 'da sıfırlar oluşur ve bunlar $X(z)$ 'nin $z = 0$ 'daki kutuplarını götürebilir. Dolayısıyla, $z = 0$, $z^{-n_0} X(z)$ 'nin sıfır olabilir. Bu durumda $x[n-n_0]$ 'ın ROC'si sonsuz hariç R' dir.

25

z -Dönüştümünün Özellikleri

z -uzayında ölçekleme: $x[n] \xleftarrow{Z} X(z) \Rightarrow z_0^n x[n] \xleftarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$

Ispat: $Z\{z_0^n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_0^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{z_0}\right)$

z , $X(z)$ 'nin yakınsaklık bölgesi içindeyse, $|z_0|z$, $X(z/z_0)$ 'nın yakınsaklık bölgesi içindeydir. O halde, $X(z)$ 'nin yakınsaklık bölgesi R ise, $X(z/z_0)$ 'nın yakınsaklık bölgesi $|z_0|R$ olur.

Özel durum: $z_0 = e^{j\omega_0} \Rightarrow e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftarrow{Z} X(e^{-j\omega_0} z)$

Diğer bir deyişle, bir işaretin zaman uzayında belirli frekanslı karmaşık üstel bir işaret ile çarpmak, z -dönüştümünün üstel işaretin frekansı kadar dönmesine neden olur. Yani, tüm sıfırlar ve kutuplar üstel işaretin frekansı kadar döner.

26

z -Dönüştümünün Özellikleri

Konvolüsyon özelliği: $y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow Y(z) = X(z)H(z)$

Ispat: Konvolüsyon denkleminden

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

$$Y(z) = Z\{y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \right] z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k] z^{-n} \right]$$

Zamanda öteleme özelliğinden parantez içindeki terim $z^{-k} H(z)$ dir. O halde,

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k} H(z) = H(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k} = X(z)H(z)$$

$X(z)$ 'nin ROC'si R_1 ve $H(z)$ 'nin ROC'si R_2 olsun. $Y(z) = X(z)H(z)$ olduğundan, $Y(z)$ 'in var olabilmesi için $X(z)$ ve $H(z)$ var olmalıdır. Yani, $Y(z)$ 'in ROC'si $R = R_1 \cap R_2$ olur. Ancak, çarpımda sıfır-kutup götürmesi olursa $Y(z)$ 'in ROC'si $R_1 \cap R_2$ kesişiminden de büyük olabilir.

27

z -Dönüştümünün Özellikleri

z -uzayında türev alma: $x[n] \xleftarrow{Z} X(z) \Rightarrow nx[n] \xleftarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz}$

Ispat: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \Rightarrow \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -nx[n] z^{-n-1}$

Eşitliğin her iki tarafı $-z$ ile çarpılsa

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n] z^{-n} = Z\{nx[n]\}$$

$X(z)$ 'in ROC'si R olsun. $-z$ ile çarpmaya ilave bir kutup getirmeyip, sıfır-kutup götürmesi olmaması durumunda $z = 0$ 'da bir sıfır oluşturur. Bu nedenle, bir ayrık-zaman işaretin zaman-uzayında n ile çarpmak z -dönüştümünün ROC'sini etkilemez. Yani, $-z(dX(z)/dz)$ 'in ROC'si de R' dir.

28

z -Dönüştümünün Özellikleri

Örnek: z -dönüştümü

$$X(z) = \ln(1+az^{-1}), |z| > a$$

olan işaretin, z -uzayında türev alma özelliğinden yararlanarak hesapyalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} nx[n] &\xleftarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} \\ a(-a)^n u[n] &\xleftarrow{z} \frac{a}{1+az^{-1}} \\ a(-a)^{n-1} u[n-1] &\xleftarrow{z} \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} \\ x[n] &= \frac{-a(-a)^{n-1} u[n-1]}{n} = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1] \end{aligned}$$

29

z -Dönüştümünün Özellikleri

Örnek: z -dönüştümü

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

olan işaretin, z -uzayında türev alma özelliğinden yararlanarak hesapyalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} a^n u[n] &\xleftarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}} \\ na^n u[n] &\xleftarrow{z} -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-az^{-1}} \right) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \end{aligned}$$

30

z -Dönüştümünün Özellikleri

Özellik	İşaret	z -dönüştümü	ROC
	$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	R R_1 R_2
Doğrusallık	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	En az $R_1 \cap R_2$
Zamanda öteleme	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0} X(z)$	Orijin dahil veya hariç R
z -uzayında ölçekleme	$e^{j\omega_0 n} x[n]$ $z_0^n x[n]$ $a^n x[n]$	$X(e^{-j\omega_0 z})$ $X\left(\frac{z}{z_0}\right)$ $X(a^{-1}z)$	R $z_0 R$ $ a R$
Zamanda tersine çevirme	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	$1/R$
Zamanda ölçekleme	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$	$X(z^k)$	$R^{1/k}$

31

z -Dönüştümünün Özellikleri

Özellik	İşaret	z -dönüştümü	ROC
Eşlenik alma	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
Konvolüsyon	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	En az $R_1 \cap R_2$
Fark alma	$x[n] - x[n-1]$	$(1-z^{-1})X(z)$	En az $R \cap (z > 0)$
Toplama	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{(1-z^{-1})} X(z)$	En az $R \cap (z > 1)$
z -uzayında türev alma	$n x[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R
İlk Değer Teoremi $n < 0$ için $x[n]=0$ ise $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$			

32

LTI Sistemlerin z -dönüşümü Kullanılarak İncelenmesi

- $X(z)$, $Y(z)$ ve $H(z)$, bir LTI sistemin sırasıyla girişinin, çıkışının ve impuls yanıtının z -dönüştürmeleri olmak üzere, konvolüsyon özelliğinden $Y(z) = H(z)X(z)$ olduğunu görmüştük. $H(z)$ 'ye sistemin **TRANSFER FONKSİYONU** denir.
- Bir LTI sistemin çoğu özelliği, transfer fonksiyonunun kutupları, sıfırları ve yakınsaklık bölgesiyle ilişkilidir.
- Bir sistem nedensel ise $n < 0$ için $h[n]=0$ olup impuls yanıtı sağ taraflıdır. O halde, $H(z)$ 'nin ROC'sı z -düzleminde bir çemberin dışından sonsuza doğru uzanmalıdır.
- Ayrıca, $H(z)$ rasyonel ise, sistemin nedensel olabilmesi için $H(z)$ 'nin ROC'sı en dıştaki kutubun dışında ve sonsuza içeren bir bölge olmalıdır. Yani, $z \rightarrow \infty$ limit durumunda $H(z)$ sonlu olmalıdır. Diğer bir deyişle, $H(z)$ 'nin pay polinomunun derecesi payda polinomunun derecesinden büyük olmamalıdır.

33

LTI Sistemlerin z -dönüşümü Kullanılarak İncelenmesi

Bir ayrık-zaman LTI sistemin nedensel olabilmesi için gerek ve yeter koşul, transfer fonksiyonunun yakınsaklık bölgesinin karmaşık z -düzleminde bir çemberin dışında ve sonsuza içeren bir bölge olmasıdır.

Rasyonel transfer fonksiyonlu bir ayrık-zaman LTI sistemin nedensel olabilmesi için gerek ve yeter koşul (a) transfer fonksiyonunun yakınsaklık bölgesi karmaşık z -düzleminde en dıştaki kutubun dışındaki bir bölge olmasıdır ve (b) $H(z)$ 'nin pay polinomunun derecesinin payda polinomunun derecesinden büyük olmamasıdır.

34

LTI Sistemlerin z -dönüşümü Kullanılarak İncelenmesi

Örnek: Transfer fonksiyonları aşağıda verilen ayrık-zaman LTI sistemlerin nedensel olup olmadıklarını belirleyiniz.

$$(i) \quad H(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + z}{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}} \quad (ii) \quad H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > 2$$

Çözüm:

(i) ROC hakkında bilgi sahibi olmamamızra rağmen sistemin nedensel olmadığını söyleyebiliriz çünkü pay polinomunun derecesi payda polinomunun derecesinden büyüktür.

$$(ii) \quad H(z) = \frac{\frac{2}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)} = \frac{2z^2 - \frac{5}{2}z}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}$$

$z=1/2$, $z=2$ 'de iki kutup vardır. Sistem nedenseldir çünkü ROC en dıştaki kutubun dışına doğrudur ve pay polinomunun derecesi payda polinomunkinden büyük değildir.

35

LTI Sistemlerin z -dönüşümü Kullanılarak İncelenmesi

• LTI bir ayrık-zaman sistemin kararlı olabilmesi için impuls yanıtı mutlak toplanabilir olmalıdır. Bu durumda, $h[n]$ 'nın ayrık-zaman Fourier dönüşümü var olup $H(z)$ 'nin ROC'sı karmaşık z -düzleminde birim çemberi içermelidir.

• LTI bir ayrık-zaman sistemin nedensel olduğu biliniyorsa, $H(z)$ 'nin ROC'sı en dıştaki kutubun dışına doğru olmalıdır. ROC'nın aynı zamanda birim çemberi de içermesi için, $H(z)$ 'nin kutuplarının tümü karmaşık z -düzleminde birim çemberin içinde olmalıdır.

Bir ayrık-zaman LTI sistemin kararlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul, $H(z)$ 'nın ROC'sının karmaşık z -düzleminde birim çemberi ($|z|=1$) içermesidir.

Rasyonel transfer fonksiyonlu nedensel bir ayrık-zaman LTI sistemin kararlı olabilmesi gerek ve yeter koşul $H(z)$ 'nın kutuplarının tümünün birim çember içinde (yani tümünün genliğinin birden küçük) olmasıdır.

36

LTI Sistemlerin z -dönüştümü Kullanılarak İncelenmesi

Örnek: Transfer fonksiyonları aşağıda verilen nedensel ayrık-zaman LTI sistemlerin kararlı olup olmadığını belirleyiniz.

$$(i) \quad H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (ii) \quad H(z) = \frac{1}{1 - 2r \cos(\theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Çözüm:

(i) $H(z)$ 'nin $z = a$ 'da bir kutbu vardır. Sistemin kararlı olabilmesi için kutup birim çember içinde olmalıdır. Yani, $|a| < 1$ ise sistem kararlı, aksi halde kararsızdır.

(ii) $H(z)$ 'nin $z_1 = re^{j\theta}$ ve $z_2 = re^{-j\theta}$ da iki kutbu vardır. $|r| < 1$ ise, kutuplar birim çember içinde, aksi halde dışındadır. O halde, sistemin kararlı olabilmesi için, $|r| < 1$ koşulu sağlanmalıdır.

37

Doğrusal, Sabit Katsayılı Fark Denklemleriyle Tanımlanan LTI Sistemler

- Giriş-çıkış ilişkisi aşağıda verilen ayrık-zaman sistemin transfer fonksiyonunu bulalım

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

- Konvolüsyon özelliğinden, $Y(z) = X(z)H(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

- Fark denkleminin her iki tarafının z -dönüştümü alırmış ve z -dönüştümünün zamanda öteleme özelliğini kullanırsak transfer fonksiyonunu bulunabilir:

$$\begin{aligned} Z\left\{\sum_{k=0}^N a_k y[n-k]\right\} &= Z\left\{\sum_{k=0}^M b_k x[n-k]\right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k Z\{y[n-k]\} = \sum_{k=0}^M b_k Z\{x[n-k]\} \\ \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) &= \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \end{aligned}$$

38

Doğrusal, Sabit Katsayılı Fark Denklemleriyle Tanımlanan LTI Sistemler

ÖRNEK: Giriş-çıkış ilişkisi aşağıda verilen sistemin transfer fonksiyonu ve impuls yanıtını bulunuz.

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1]$$

ÇÖZÜM: $Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$

$H(z)$ 'nın ters z -dönüştümü almırsa impuls yantı elde edilir.

$$h[n] = Z^{-1}\{H(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right\}$$

Ters z -dönüştümü yakınsaklık bölgESİne bağlıdır. İki durum vardır

(i) ROC: $|z| > 1/2$, impuls yanıtı sağ taraflı olup $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$

(ii) ROC: $|z| < 1/2$, impuls yanıtı sol taraflı olup $h[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[-n]$

39