ELEKTRİK DEVRELERİ

SEKİZİNCİ BASKIDAN ÇEVİRİ

ELEKTRİK DEVRELERİ

SEKİZİNCİ BASKIDAN ÇEVİRİ

James W. Nilsson

Emekli Profesör
Iowa State Üniversitesi

Susan A. Riedel

Marquette Üniversitesi

Türkçesi:

Adnan Köksal (Ed.), Cenk Toker
Şölen Kumbay Yıldız, Sevda Özdemir
Hıdır Aşkar, Gürhan Bulu, Haluk Doğuş Sezer

Hacettepe Üniversitesi
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü

PALME YAYINCILIK
ANKARA, 2012

PALME YAYINLARI : 672
ELEKTRİK DEVRELERİ, Sekizinci Baskıdan Çeviri
Yazarlar : James W. Nilsson – Susan A. Riedel
Türkçesi : Adnan Köksal (Ed.), Cenk Toker, Şölen Kumbay Yıldız, Sevda Özdemir, Hıdır Aşkar, Gürhan Bulu, Haluk Doğuş Sezer
Yayın Koordinatörü : H. İbrahim Somyürek
Yayına Hazırlama : PALME Dizgi-Grafik Tasarım
ISBN : 978-605-355-031-0
Yayıncı Sertifika No : 14142
Palme Yayıncılık © 2012
Baskı : MRK Baskı Hizmetleri
Basımevi Sertifika No : 14338

Kitabın Özgün Adı : ELECTRIC CIRCUITS, EIGHTH EDITION
Yazarlar : James W. Nilsson, Susan A. Riedel
Yayıncı Firma : Authorized translation from the English language edition, entitled ELECTRIC CIRCUITS, 8th Edition by JAMES NILSSON; SUSAN RIEDEL, published by Pearson Education, Inc, publishing as Prentice Hall, One Lake Street, Upper Saddle River, New Jersey 07458 Copyright © 2008.
Orijinal ISBN : 13: 978-0-13-198925-2
10: 0-13-198925-1
Türkçe Basım : TURKISH language edition published by PALME YAYINCILIK, Copyright © 2011

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

Bu kitabın Türkiye'deki her türlü yayın hakkı Palme Yayıncılık Ltd. Şti.'ne aittir, tüm hakları saklıdır. Kitabın tamamı ya da bir kısmı 5846 sayılı yasanın hükümlerine göre, kitabı yayınlayan firmanın önceden izni olmadan elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemiyle çoğaltılamaz, yayınlanamaz, depolanamaz.

PALME
YAYIN, DAĞITIM, PAZARLAMA, İÇ VE DIŞ TİCARET LTD. ŞTİ.
Merkez: A. Adnan Saygun Cad. No: 10/A Sıhhiye-ANKARA
Tel: 0.312-433 37 57 • Fax: 0.312-433 52 72
e-mail: palmeyayin@superonline.com, palmeyayincilik@yahoo.com.tr
http://www.palmeyayinevi.com

Ankara Şubesi : Olgunlar Sok. No: 4/5 Bakanlıklar/ANKARA Tel: 0.312 417 95 28 Faks: 0.312 419 69 64
İzmir Şubesi : Kazım Dirik Mah. Ankara Cad. No: 259/C Bornova/İZMİR Tel: 0.232 343 10 77 Faks: 0.232 343 10 78

Anna'ya

Fotoğraflar

Kapak Resmi: Corbis/RF.

2. Bölüm Pratik Bakış Açısı: Corbis/NY, Ron Chapple.

Şekil 2-9: Corbis/NY, Thom Lang.

3. Bölüm Pratik Bakış Açısı: Getty Images/Creative Express.

4. Bölüm Pratik Bakış Açısı: Getty Images/Creative Express.

5. Bölüm Pratik Bakış Açısı: Getty Images/Photodisc Red, Akira Kaede.

6. Bölüm Pratik Bakış Açısı: Getty Images/Photodisc Red, Ron Rovtar.

7. Bölüm Pratik Bakış Açısı: Getty Images/Photodisc Green.

8. Bölüm Pratik Bakış Açısı: Getty Images/Image Source Pink.

9. Bölüm Pratik Bakış Açısı: Getty Images/Photodisc Green, Steve Cole.

10. Bölüm Pratik Bakış Açısı: Alamy Images.

11. Bölüm Pratik Bakış Açısı: Corbis/NY, Rolf Vennenbernd.

13. Bölüm Pratik Bakış Açısı: Getty Images/Photodisc Blue.

14. Bölüm Pratik Bakış Açısı: Corbis/RF, Tom Grill.

15. Bölüm Pratik Bakış Açısı: Corbis/NY, Dana Hoff.

Kısa İçerik

	Örnek Listesi	xiii
	Önsöz	xvii
1. Bölüm	Devre Değişkenleri	2
2. Bölüm	Devre Elemanları	22
3. Bölüm	Basit Direnç Devreleri	56
4. Bölüm	Devre Analiz Teknikleri	92
5. Bölüm	İşlemsel Yükselteç	154
6. Bölüm	Endüktans, Kapasitans ve Karşılıklı Endüktans	186
7. Bölüm	Birinci Mertebeden *RL* ve *RC* Devrelerinin Tepkileri	228
8. Bölüm	*RLC* Devrelerinin Doğal ve Basamak Tepkileri	284
9. Bölüm	Sinüzoidal Durgun Durum Analizi	330
10. Bölüm	Sinüzoidal Durgun Durum Güç Hesaplamaları	390
11. Bölüm	Dengeli Üç Fazlı Devreler	432
12. Bölüm	Laplace Dönüşümüne Giriş	466
13. Bölüm	Devre Analizinde Laplace Dönüşümü	506
14. Bölüm	Frekans Seçici Devrelere Giriş	566
15. Bölüm	Aktif Filtre Devreleri	606
16. Bölüm	Fourier Serisi	656
17. Bölüm	Fourier Dönüşümü	698
18. Bölüm	İki Kapılı Devreler	730
Ek A	Ortak Doğrusal Denklemlerin Çözümü	759
Ek B	Kompleks Sayılar	781
Ek C	Manyetik Bağlaşık Bobinler ve İdeal Trafolar Hakkında Ek Bilgi	787
Ek D	Desibel	781
Ek E	Bode Grafikleri	799
Ek F	Trigonometrik Özdeşliklerin Kısa Bir Tablosu	817
Ek G	İntegrallerin Kısa Bir Tablosu	819
Ek H	Seçilmiş Problemlerin Cevapları	821
	Dizin	839

İçindekiler

Örnek Listesi xiii
Önsöz xvii

1. Bölüm Devre Değişkenleri 2

1.1 Elektrik Mühendisliği: Genel Bakış *3*
1.2 Uluslararası Birimler Sistemi *8*
1.3 Devre Analizi: Genel Bakış *10*
1.4 Gerilim ve Akım *11*
1.5 İdeal Temel Devre Elemanı *12*
1.6 Güç ve Enerji *14*
Özet 16
Problemler 17

2. Bölüm Devre Elemanları 22

Pratik Bakış Açısı: Elektriksel Güvenlik *23*
2.1 Gerilim ve Akım Kaynakları *24*
2.2 Elektriksel Direnç (Ohm Yasası) *28*
2.3 Bir Devre Modelinin Oluşturulması *32*
2.4 Kirchhoff Yasaları *36*
2.5 Bağımlı Kaynaklar İçeren Bir Devrenin Analizi *42*
Pratik Bakış Açısı: Elektriksel Güvenlik *46*
Özet 47
Problemler 48

3. Bölüm Basit Direnç Devreleri 56

Pratik Bakış Açısı: Arka Cam Buz Çözücüsü *57*
3.1 Seri Dirençler *58*
3.2 Paralel Dirençler *59*
3.3 Gerilim Bölücü ve Akım Bölücü Devreler *62*
3.4 Gerilim Bölünmesi ve Akım Bölünmesi *65*
3.5 Gerilim ve Akım Ölçümü *68*
3.6 Direnç Ölçümü--Wheatstone Köprüsü *71*
3.7 Delta - Y (π - T) Eşdeğer Devreler *73*
Pratik Bakış Açısı: Arka Cam Buz Çözücüsü *76*
Özet 79
Problemler 80

4. Bölüm Devre Analiz Teknikleri 92

Pratik Bakış Açısı: Gerçekçi Direnç Devreleri *93*
4.1 Terminoloji *94*
4.2 Düğüm Gerilimi Yöntemine Giriş *97*
4.3 Düğüm Gerilimi Yöntemi ve Bağımlı Kaynaklar *100*
4.4 Düğüm Gerilimi Yöntemi: Bazı Özel Durumlar *101*
4.5 Ağ Akımı Yöntemine Giriş *105*
4.6 Ağ Akımı Yöntemi ve Bağımlı Kaynaklar *107*
4.7 Ağ Akımı Yöntemi: Bazı Özel Durumlar *109*
4.8 Düğüm Gerilimi Yöntemine Karşı Ağ Akımı Yöntemi *112*
4.9 Kaynak Dönüşümleri *116*
4.10 Thévenin ve Norton Eşdeğerleri *119*
4.11 Thévenin Eşdeğer Hakkında Ek Bilgi *123*
4.12 Maksimum Güç Aktarımı *126*
4.13 Üst Üste Bindirme *129*
Pratik Bakış Açısı: Gerçekçi Direnç Devreleri *133*
Özet 137
Problemler 138

5. Bölüm İşlemsel Yükselteç 154

Pratik Bakış Açısı: Gerinim Ölçerler *155*
5.1 İşlemsel Yükselteç Terminalleri *156*
5.2 Terminal Gerilim ve Akımları *156*
5.3 Eviren Yükselteç Devresi *161*
5.4 Toplayan Yükselteç Devresi *163*
5.5 Evirmeyen Yükselteç Devresi *164*
5.6 Fark Yükselteç Devresi *165*
5.7 Gerçekçi İşlemsel Yükselteç Modeli *170*
Pratik Bakış Açısı: Gerinim Ölçerler *173*
Özet *175*
Problemler *176*

6. Bölüm Endüktans, Kapasitans ve Karşılıklı Endüktans 186

Pratik Bakış Açısı: Yakınlık Anahtarları 187
6.1 İndüktör *188*
6.2 Kapasitör *195*
6.3 Endüktans ve Kapasitansın Seri ve Paralel Bağlantıları *200*
6.4 Karşılıklı Endüktans *203*
6.5 Karşılıklı Endüktansa Detaylı Bakış *207*
Pratik Bakış Açısı: Yakınlık Anahtarları 214
Özet 217
Problemler 218

7. Bölüm Birinci Mertebeden *RL* ve *RC* Devrelerinin Tepkileri 228

Pratik Bakış Açısı: Flaşör Devresi 229
7.1 *RL* Devresinin Doğal Tepkisi *230*
7.2 *RC* Devresinin Doğal Tepkisi *236*
7.3 *RL* ve *RC* Devrelerinin Basamak Tepkisi *240*
7.4 Basamak ve Doğal Tepkilerin Genel Çözümü *248*
7.5 Sıralı Anahtarlama *254*
7.6 Sınırsız Tepki *258*
7.7 İntegral Alıcı Yükselteç *260*
Pratik Bakış Açısı: Flaşör Devresi Devresi 262
Özet 265
Problemler 265

8. Bölüm *RLC* Devrelerinin Doğal ve Basamak Tepkileri 284

Pratik Bakış Açısı: Ateşleme Devresi 285
8.1 Paralel *RLC* Devresinin Doğal Tepkisine Giriş *286*
8.2 Paralel *RLC* Devresinin Doğal Tepkilerinin Biçimleri *291*
8.3 Paralel *RLC* Devresinin Basamak Tepkisi *301*
8.4 Seri *RLC* Devresinin Doğal ve Basamak Tepkisi *308*
8.5 İki İntegral Alıcı Yükselteçli Devre *312*
Pratik Bakış Açısı: Ateşleme Devresi 317
Özet 320
Problemler 321

9. Bölüm Sinüzoidal Durgun Durum Analizi 330

Pratik Bakış Açısı: Ev İçi Dağıtım Devresi 331
9.1 Sinüzoidal Kaynak *332*
9.2 Sinüzoidal Tepki *335*
9.3 Fazör *337*
9.4 Frekans Bölgesinde Pasif Devre Elemanları *342*
9.5 Frekans Bölgesinde Kirchhoff Yasaları *346*
9.6 Seri, Paralel ve Δ-Y Sadeleştirmeleri *348*
9.7 Kaynak Dönüşümleri ve Thevenin Norton Eşdeğer Devreleri *355*
9.8 Düğüm Gerilimi Yöntemi *359*
9.9 Ağ Akımı Yöntemi *360*
9.10 Trafo *361*
9.11 İdeal Trafo *365*
9.12 Fazör Diyagramları *372*
Pratik Bakış Açısı: Ev İçi Dağıtım Devresi 375
Özet 375
Problemler 376

10. Bölüm Sinüzoidal Durgun Durum Güç Hesaplamaları 390

Pratik Bakış Açısı: Isıtıcı Gereçler 391
10.1 Anlık Güç *392*
10.2 Ortalama ve Reaktif Güç *394*
10.3 rms Değeri ve Güç Hesaplamaları *399*
10.4 Kompleks Güç *401*
10.5 Güç Hesaplamaları *403*
10.6 Maximum Güç Aktarımı *410*
Pratik Bakış Açısı: Isıtıcı Gereçler 417
Özet 419
Problemler 420

11. Bölüm Dengeli Üç Fazlı Devreler 432

Pratik Bakış Açısı: Elektrik Gücün İletim ve Dağıtımı 433
11.1 Dengeli Üç Faz Gerilimler *434*
11.2 Üç Fazlı Gerilim Kaynakları *435*
11.3 Y-Y Devrenin Analizi *436*
11.4 Y-Δ Devrenin Analizi *442*
11.5 Dengeli Üç Fazlı Devrelerde Güç Hesaplamaları *445*

11.6 Üç Fazlı Devrelerde Ortalama Gücün Ölçümü *452*
Pratik Bakış Açısı: Elektrik Gücün İletim ve Dağıtımı 455
Özet 456
Problemler 457

12. Bölüm Laplace Dönüşümüne Giriş 466

12.1 Laplace Dönüşümünün Tanımı *467*
12.2 Basamak Fonksiyonu *468*
12.3 Dürtü Fonksiyonu *470*
12.4 Fonksiyonel Dönüşümler *474*
12.5 İşlemsel Dönüşümler *475*
12.6 Laplace Dönüşümünün Uygulanması *481*
12.7 Ters Dönüşümler *482*
12.8 *F(s)*'nin Kutup ve Sıfırları *494*
12.9 Başlangıç ve Son Değer Teoremleri *495*
Özet 498
Problemler 499

13. Bölüm Devre Analizinde Laplace Dönüşümü 506

Pratik Bakış Açısı: Ani Dalgalanma Bastırıcılar 507
13.1 *s* Bölgesinde Devre Elemanları *508*
13.2 *s* Bölgesinde Devre Analizi *511*
13.3 Uygulamalar *512*
13.4 Aktarım Fonksiyonu *526*
13.5 Kısmi Kesir Açılımı ve Aktarım Fonksiyonu *528*
13.6 Aktarım Fonksiyonu ve Evrişim İntegrali *531*
13.7 Aktarım Fonksiyonu ve Durgun Durum Sinüzoidal Tepki *537*
13.8 Devre Analizinde Dürtü Fonksiyonu *540*
Pratik Bakış Açısı: Ani Dalgalanma Bastırıcılar 548
Özet 549
Problemler 550

14. Bölüm Frekans Seçici Devrelere Giriş 566

Pratik Bakış Açısı: Tuşlu Telefon Devreleri 567
14.1 Ön Bilgiler *568*
14.2 Alçak Geçiren Filtreler *570*
14.3 Yüksek Geçiren Filtreler *577*
14.4 Bant Geçiren Filtreler *582*
14.5 Bant Durduran Filtreler *593*
Pratik Bakış Açısı: Tuşlu Telefon Devreleri 598
Özet 599
Problemler 599

15. Bölüm Aktif Filtre Devreleri 606

Pratik Bakış Açısı: Bas Şiddet Kontrolü 607
15.1 Birinci Mertebeden Alçak Geçiren ve Yüksek Geçiren Filtreler *608*
15.2 Ölçeklendirme *612*
15.3 Op Amp Bant Geçiren ve Bant Durduran Filtreler *615*
15.4 Yüksek Mertebeden Op Amp Filtreler *622*
15.5 Darbant Bant Geçiren ve Bant Durduran Filtreler *636*
Pratik Bakış Açısı: Bas Şiddet Kontrolü 642
Özet 644
Problemler 646

16. Bölüm Fourier Serisi 656

16.1 Fourier Serisi Analizi: Genel Bakış *658*
16.2 Fourier Katsayıları *659*
16.3 Simetrinin Fourier Katsayıları Üzerindeki Etkisi *662*
16.4 Fourier Serisinin Alternatif Trigonometrik Biçimi *668*
16.5 Bir Uygulama *670*
16.6 Periyodik Fonksiyonlarla Ortalama Güç Hesabı *675*
16.7 Bir Periyodik Fonksiyonun rms Değeri *678*
16.8 Fourier Serisinin Üstel Biçimi *679*
16.9 Genlik ve Faz Spektrumu *682*
Özet 685
Problemler 686

17. Bölüm Fourier Dönüşümü 698

17.1 Fourier Dönüşümünün Çıkarımı *699*
17.2 Fourier İntegralinin Yakınsaması *701*
17.3 Laplace Dönüşümünü Kullanarak Fourier Dönüşümünün Bulunması *703*
17.4 Limit Durumunda Fourier Dönüşümleri *706*
17.5 Bazı Matematiksel Özellikler *708*
17.6 İşlemsel Dönüşümler *710*

17.7 Devre Uygulamaları *714*
17.8 Parseval Teoremi *717*
Özet 724
Problemler 725

18. Bölüm İki Kapılı Devreler 730
18.1 Terminal Denklemleri *731*
18.2 İki Kapı Parametreleri *732*
18.3 Sonlandırılmış İki Kapılı Devre Analizi *741*
18.4 Arabağlantılı İki Kapılı Devreler *747*
Özet 751
Problemler 752

Ek A Ortak Doğrusal Denklemlerin Çözümü 759
A.1 Ön Adımlar *759*
A.2 Cramer Metodu *760*
A.3 Karakteristik Determinant *760*
A.4 Pay Determinantı *760*
A.5 Bir Determinantın Hesaplanması *761*
A.6 Matrisler *764*
A.7 Matris Cebiri *765*
A.8 Birim, Ek ve Ters Matrisler *770*
A.9 Bölünmüş Matrisler *772*
A.10 Uygulamalar *776*

Ek B Kompleks Sayılar 781
B.1 Gösterim *781*
B.2 Kompleks Sayıların Grafik Gösterimi *782*
B.3 Aritmetik İşlemler *783*
B.4 Yararlı Özdeşlikler *785*
B.5 Bir Kompleks Sayının Tamsayı Kuvvetleri *785*
B.6 Bir Kompleks Sayının Kökleri *786*

Ek C Manyetik Bağlaşık Bobinler ve İdeal Trafolar Hakkında Ek Bilgi 787
C.1 Manyetik Bağlaşık Bobinlerin Eşdeğer Devreleri *787*
C.2 Eşdeğer Devrelerde İdeal Trafo İhtiyacı *792*

Ek D Desibel 797

Ek E Bode Grafikleri 799
E.1 Birinci Mertebeden Reel Kutuplar ve Sıfırlar *799*
E.2 Düz Doğru Genlik Grafikleri *800*
E.3 Daha Doğru Genlik Grafikleri *804*
E.4 Düz Doğru Faz Açısı Grafikleri *805*
E.5 Bode Diyagramları: Kompleks Kutuplar ve Sıfırlar *807*
E.6 Genlik Grafikleri *809*
E.7 Düz Doğru Genlik Grafiklerinin Düzeltilmesi *810*
E.8 Faz Açısı Grafikleri *813*

Ek F Trigonometrik Özdeşliklerin Kısa Bir Tablosu 817

Ek G İntegrallerin Kısa Bir Tablosu 819

Ek H Seçilmiş Problemlerin Cevapları 821

Dizin 839

Örnek Listesi

2. Bölüm
2.1 İdeal Kaynakların Bağlantılarının Kontrolü *26*
2.2 İdeal Bağımsız ve Bağımlı Kaynakların Bağlantılarının Kontrolü *27*
2.3 Basit Bir Direnç Devresinde Gerilim, Akım ve Güç Hesabı *31*
2.4 Bir El Fenerinin Devre Modelinin Oluşturulması *33*
2.5 Terminal Ölçümlerine Dayanarak Devre Modelinin Oluşturulması *35*
2.6 Kirchhoff Akım Yasasının Kullanımı *39*
2.7 Kirchhoff Gerilim Yasasının Kullanımı *39*
2.8 Bilinmeyen Bir Akımı Bulmak İçin Ohm Yasası ve Kirchhoff Yasalarının Uygulanması *40*
2.9 Terminal Ölçümlerine Dayanarak Devre Modeli Oluşturulması *41*
2.10 Bilinmeyen Bir Gerilimi Bulmak İçin Ohm Yasası ve Kirchhoff Yasalarının Uygulanması *44*
2.11 Ohm Yasasının ve Kirchhoff Yasasının Bir Yükselteç Devresine Uygulanması *45*

3. Bölüm
3.1 Seri-Paralel Sadeleştirmesinin Uygulanması *61*
3.2 Gerilim Bölücü Devrenin Analizi *63*
3.3 Akım Bölücü Devrenin Analizi *64*
3.4 Bir Devreyi Çözerken Gerilim Bölünmesi ve Akım Bölünmesinin Kullanılması *67*
3.5 D'Arsonval Ampermetrenin Kullanılması *69*
3.6 D'Arsonval Voltmetrenin Kullanılması *70*
3.7 Δ-Y Dönüşümün Uygulanması *75*

4. Bölüm
4.1 Bir Devrede Düğüm, Dal, Ağ ve Döngünün Belirlenmesi *95*
4.2 Düğüm Gerilimi Yönteminin Kullanılması *99*
4.3 Düğüm Gerilimi Yönteminin Bağımlı Kaynaklarla Birlikte Kullanımı *100*
4.4 Ağ Akımı Yönteminin Kullanılması *106*
4.5 Ağ Akımı Yönteminin Bağımlı Kaynaklarla Birlikte Kullanımı *108*
4.6 Ağ Akımı Yöntemine Karşı Düğüm Gerilimi Yönteminin Anlaşılması *113*
4.7 Düğüm Gerilimi ve Ağ Akımı Yöntemlerinin Karşılaştırılması *115*
4.8 Bir Devrenin Çözümünde Kaynak Dönüşümlerinin Kullanılması *117*
4.9 Özel Kaynak Dönüşüm Tekniklerinin Kullanılması *118*
4.10 Bağımlı Kaynak İçeren Bir Devrenin Thevenin Eşdeğerinin Bulunması *122*
4.11 Bir Test Kaynağı Kullanarak Thevenin Eşdeğerin Bulunması *124*
4.12 Maksimum Güç Aktarımı Koşulunun Bulunması *126*
4.13 Bir Devrenin Çözümünde Üst Üste Bindirme'nin Kullanılması *132*

5. Bölüm
5.1 Bir Op Amp Devresinin Analizi *160*

6. Bölüm
6.1 Akım Verildiğinde Bir İndüktörün Terminal Geriliminin Belirlenmesi *189*
6.2 Terminal Gerilimi Verildiğinde Bir İndüktörün Akımının Belirlenmesi *191*
6.3 Bir İndüktörün Akım, Gerilim, Güç ve Enerjisinin Belirlenmesi *193*
6.4 Bir Kapasitörün Akım, Gerilim, Güç ve Enerjisinin Belirlenmesi *197*
6.5 Üçgen Darbe Akım ile Bir Kapasitörde İndüklenen v, p ve w'nun bulunması *198*
6.6 Manyetik Bağlaşık Bobin İçeren Bir Devrede Ağ Akımı Denklemlerinin Bulunması *206*

7. Bölüm
7.1 *RL* Devresinin Doğal Tepkisinin Belirlenmesi *234*
7.2 Paralel İndüktörlü *RL* Devresinin Doğal Tepkisinin Belirlenmesi *235*
7.3 *RC* Devresinin Doğal Tepkisinin Belirlenmesi *238*

7.4 Seri Kapasitörlü *RC* Devresinin Doğal Tepkisinin Belirlenmesi *239*
7.5 *RL* Devresinin Basamak Tepkisinin Belirlenmesi *244*
7.6 *RC* Devresinin Basamak Tepkisinin Belirlenmesi *247*
7.7 *RC* Devresinin Basamak Tepkisinin Genel Çözüm Yöntemi ile Bulunması *250*
7.8 Başlangıç Koşulunun Sıfır Olduğu Durumda Genel Çözüm Yönteminin Kullanılması *251*
7.9 *RL* Devresinin Basamak Tepkisinin Genel Çözüm Yöntemi İle Bulunması *252*
7.10 Manyetik Bağlaşık Bobin İçeren Bir Devrenin Basamak Tepkisinin Belirlenmesi *253*
7.11 Sıralı Anahtarlamalı *RL* Devresinin Analizi *255*
7.12 Sıralı Anahtarlamalı *RC* Devresinin Analizi *257*
7.13 *RC* Devresinde Sınırsız Tepkinin Bulunması *259*
7.14 İntegral Alıcı Yükseltecin Analizi *261*
7.15 Sıralı Anahtarlamalı İntegral Alıcı Yükseltecin Analizi *262*

8. Bölüm

8.1 Bir Paralel *RLC* Devrenin Karakteristik Denkleminin Köklerinin Bulunması *290*
8.2 Bir Paralel *RLC* Devrenin Aşırı Sönümlü Doğal Tepkisinin Bulunması *293*
8.3 Bir Paralel *RLC* Devrenin Doğal Tepkisinde Dal Akımlarının Hesaplanması *294*
8.4 Bir Paralel *RLC* Devrenin Eksik Sönümlü Doğal Tepkisinin Bulunması *297*
8.5 Bir Paralel *RLC* Devrenin Kritik Sönümlü Doğal Tepkisinin Bulunması *300*
8.6 Bir Paralel *RLC* Devrenin Aşırı Sönümlü Basamak Tepkisinin Bulunması *304*
8.7 Bir Paralel *RLC* Devrenin Eksik Sönümlü Basamak Tepkisinin Bulunması *305*
8.8 Bir Paralel *RLC* Devrenin Kritik Sönümlü Basamak Tepkisinin Bulunması *305*
8.9 Üç Basamak Tepki Biçiminin Karşılaştırılması *306*
8.10 Başlangıçta Depolanmış Enerjisi Olan Bir Parallel *RLC* Devrenin Basamak Tepkisinin Bulunması *306*
8.11 Bir Seri *RLC* Devrenin Aşırı Sönümlü Doğal Tepkisinin Bulunması *310*
8.12 Bir Seri *RLC* Devrenin Eksik Sönümlü Basamak Tepkisinin Bulunması *311*
8.13 Art Arda Bağlı İki İntegral Alıcı Yükseltecin Analizi *313*
8.14 Art Arda Bağlı, Geribesleme Direnci İçeren İki İntegral Alıcı Yükseltecin Analizi *316*

9. Bölüm

9.1 Sinüzoidal Akımın Özelliklerinin Bulunması *334*
9.2 Sinüzoidal Gerilimin Özelliklerinin Bulunması *334*
9.3 Sinüs İfadesinin Kosinüs İfadesine Dönüştürülmesi *334*
9.4 Üçgen Dalgabiçiminin rms Değerinin Hesaplanması *335*
9.5 Fazör Kullanarak Kosinüslerin Toplanması *341*
9.6 Seri Empedansların Birleştirilmesi *349*
9.7 Seri ve Paralel Empedansların Birleştirilmesi *351*
9.8 Delta-Y Dönüşümünün Frekans Bölgesinde Kullanılması *353*
9.9 Frekans Bölgesinde Kaynak Dönüşümlerinin Yapılması *356*
9.10 Frekans Bölgesinde Thevenin Eşdeğerin Bulunması *357*
9.11 Frekans Bölgesinde Düğüm Gerilimi Yönteminin Kullanılması *359*
9.12 Frekans Bölgesinde Ağ Akımı Yönteminin Kullanılması *360*
9.13 Doğrusal Trafonun Frekans Bölgesinde Analizi *364*
9.14 Bir İdeal Trafo Devresinin Frekans Bölgesinde Analizi *370*
9.15 Devre Analizinde Fazör Diyagramlarının Kullanılması *372*
9.16 Kapasitif Yükleme Etkilerinin Fazör Diyagramlarla Analizi *373*

10. Bölüm

10.1 Ortalama ve Reaktif Gücün Hesaplanması *396*
10.2 Ev Gereçleri ile İlgili Güç Hesaplamaları *398*
10.3 Sinüzoidal Gerilimin Bir Dirence İlettiği Ortalama Gücün Belirlenmesi *400*

10.4 Kompleks Gücün Hesaplanması *402*
10.5 Ortalama ve Reaktif Gücün Hesaplanması *406*
10.6 Paralel Yüklerde Gücün Hesaplanması *407*
10.7 Bir AC Devrede İletilen ve Soğurulan Güçlerin Dengelenmesi *408*
10.8 Yük Kısıtlamaları Olmadığında Maksimum Güç Aktarımı *413*
10.9 Yük Empedans Kısıtlaması Varken Maksimum Güç Aktarımı *414*
10.10 Empedans Açısı Kısıtlayıcı Maksimum Güç Aktarımı *414*
10.11 İdeal Trafonu Bir Devrede Maksimum Güç Aktarımının Bulunması *415*

11. Bölüm

11.1 Y-Y Devrenin Analizi *440*
11.2 Y-Delta Devrenin Analizi *444*
11.3 Üç Fazlı Y-Y Devrede Güç Hesabı *449*
11.4 Üç Fazlı Y-Delta Devrede Güç Hesabı *450*
11.5 Yük Belirtilmediğinde Üç Faz Güç Hesabı *450*
11.6 Üç Fazlı Devrelerde Wattmetre Okumalarının Hesaplanması *454*

12. Bölüm

12.1 Sonlu Süreli Bir Fonksiyonun Temsilinde Basamak Fonksiyonunun Kullanılması *470*

13. Bölüm

13.1 Bir Devrenin Aktarım Fonksiyonunun Çıkarımı *527*
13.2 Bir Devrenin Aktarım Fonksiyonunun Analizi *529*
13.3 Çıkış Sinyalini Bulmak İçin Evrişim İntegralinin Kullanılması *535*
13.4 Aktarım Fonksiyonunun Durgun Durum Sinüzoidal Tepkiyi Bulmada Kullanılması *539*

14. Bölüm

14.1 Alçak Geçiren Filtre Tasarımı *574*
14.2 Alçak Geçiren Seri *RC* Filtre Tasarımı *575*
14.3 Yüksek Geçiren Seri *RL* Filtre Tasarımı *579*
14.4 Yüksek Geçiren Seri *RL* Filtrenin Yüklenmesi *580*
14.5 Bant Geçiren Filtre Tasarımı *587*
14.6 Bant Geçiren Paralel *RLC* Filtre Tasarımı *588*
14.7 İdeal Olmayan Gerilim Kaynağının Bant Geçiren *RLC* Filtre Üzerindeki Etkisinin Belirlenmesi *589*
14.8 Bant Durduran Seri *RLC* Filtre Tasarımı *596*

15. Bölüm

15.1 Alçak Geçiren Op Amp Filtre Tasarımı *609*
15.2 Yüksek Geçiren Op Amp Filtre Tasarımı *611*
15.3 Seri *RLC* Devrenin Ölçeklendirilmesi *613*
15.4 Prototip Alçak Geçiren Op Amp Filtrenin Ölçeklendirilmesi *614*
15.5 Genişbant, Bant Geçiren Op Amp Filtre Tasarımı *618*
15.6 Genişbant, Bant Durduran Op Amp Filtre Tasarımı *621*
15.7 Dördüncü Mertebeden Alçak Geçiren Op Amp Filtre Tasarımı *625*
15.8 Butterworth Aktarım Fonksiyonlarının Hesaplanması *628*
15.9 Dördüncü Mertebeden Alçak Geçiren Butterworth Filtre Tasarımı *631*
15.10 Bir Butterworth Filtrenin Mertebesinin Belirlenmesi *634*
15.11 Bir Butterworth Filtrenin Mertebesinin Belirlenmesinde Alternatif Yaklaşım *634*
15.12 Yüksek-Q Bant Geçiren Filtre Tasarımı *638*
15.13 Yüksek-Q Bant Durduran Filtre Tasarımı *641*

16. Bölüm

16.1 Simetrik Olmayan Bir Üçgen Dalgabiçiminin Fourier Serisinin Bulunması *660*
16.2 Bir Simetrik Tek Fonksiyonun Fourier Serisinin Bulunması *667*
16.3 Periyodik Gerilimin Trigonometrik Fourier Serisi Biçiminin Hesaplanması *669*
16.4 Periyodik Gerilim Kaynaklı Bir Devrede Ortalama Güç Hesabı *677*
16.5 Bir Periyodik Fonksiyonun rms Değerinin Kestirimi *679*
16.6 Fourier Serisinin Üstel Biçiminin Bulunması *681*

17. Bölüm

17.1 Geçici Tepkiyi Bulmak İçin Fourier Dönüşümünün Kullanılması *715*
17.2 Sinüzoidal Durgun Durum Tepkisini Bulmak İçin Fourier Dönüşümünün Kullanılması *716*
17.3 Parseval Teoreminin Uygulanması *719*
17.4 Parseval Teoreminin İdeal Bant Geçiren Filtreye Uygulanması *720*
17.5 Parseval Teoreminin Alçak Geçiren Filtreye Uygulanması *721*

18. Bölüm

18.1 İki Kapılı Bir Devrenin *z* Parametrelerinin Bulunması *733*
18.2 Ölçümlerden a Parametrelerinin Bulunması *735*
18.3 Ölçümlerden ve Tablo 18.1'den *h* Parametrelerinin Bulunması *738*
18.4 Sonlandırılmış İki Kapılı Devre Analizi *746*
18.5 Art Arda İki Kapılı Devrelerin Analizi *750*

Önsöz

Elektrik Devreleri'nin sekizinci baskısı geçtiğimiz 25 yıl boyunca en çok kullanılan devreler kitabının dikkatlice planlanmış bir revizyonudur. Bu kitap yıllar üzerinden öğrencilerin değişen öğrenme stillerine göre değişmekle birlikte, temelindeki öğretim yaklaşımları ve felsefesi değişmemiştir. Kitabın hedefleri,

- Kavramların ve fikirlerin, daha önce öğrenilenler cinsinden anlaşılmasını sağlamak,
- Kavramsal anlayış ile problem çözme yaklaşımları arasındaki ilişkiyi vurgulamak ve
- Öğrencilere güçlü bir mühendislik bakışı kazandırmaktır.

YENİ BASKININ NEDENİ

Elektrik Devreleri'nin sekizinci baskısını planlarken, bu klasik ders kitabını önceki baskıların başarısını geçmek ve sekizinci baskıyı birinci baskı kadar çekici yapmak için dikkatle çabışılmıştır. Yeni baskının planı, halen *Elektrik Devreleri*'ni kullanan eğitici ve öğrencileri ve diğer ders kitaplarını kullananları içeren detaylı bir gözden geçirme ile oluşturulmuştur. Bu çalışmadan, eğiticiler ve öğrenciler için neyin en önemli olduğunun açık bir resmi ortaya çıkmıştır. Bu geribeslemeyi akılda tutarak aşağıdaki değişiklikleri yaptık:

- Problem çözme, devre analizi konusunda temel oluşturur. Yazarlar öncelikli çabayı, bölüm sonu problemlerini güncellemeye ve yeni problemler eklemeye harcamıştır. Sonuç, önceki baskı ile karşılaştırıldığında yaklaşık olarak %80 yeni veya değiştirilmiş problem içeren yeni bir ders kitabıdır. Ödev vermek ve çalışmak için birçok yeni problemin olması, herhangi bir devreler dersinde anahtardır.
- Sekizinci baskıda kitapta önemli bir yeniden tasarım vardır. Materyalin - konu, şekiller ve resimler - öğrenmeyi kolaylaştıracak ve okumayı teşvik edecek şekilde nasıl sunulduğuna büyük önem verilmiştir. Yedinci baskı, bugünün öğrencisinin değişen ihtiyaçlarının farkında olan, modern ve dört renkli tasarıma sahip giriş devreler ders kitaplarının ilkidir. Sekizinci baskı bu renk kullanımını, pedagojik olarak daha uyumlu bir sunum sağlayacak biçimde geliştirmiştir.
- Bölüm hedeflerine sayfa numaraları eklenerek, isimlerin daha önemli olduğu yerlerde sembollere daha az dayanarak ve bölüm sonu problemlerinde kısım belirtilerek kitapta gezinti iyileştirilmiştir. Ayrıca, yerleşim geliştirilerek örneklerin birçok sayfa kapsadığı durumlar sınırlandırılmıştır.
- Tüm resimler, fotoğraflar ve şekiller, anahtar bileşenlerin ve devre analizi uygulamalarının daha net sergilenmesini sağlayacak biçimde geliştirilmiş ve modernleştirilmiştir.

- Giderek daha fazla ek kaynak kullanımı ve çevrim içi sınıfa hazırlanma ve çalışma gereksinimi fark edildiğinden, sekizinci baskıda yedinci baskıya göre önemi ölçüde çevrim içi kaynak eklenmiştir. Çevrim içinden, otomatik notlandırılan ödevlere, yardımcı çalışma materyali ve bir e-kitaba kadar tüm herşey öğrenciler ve eğiticilere kolay gezinimli bir web sitesi üzerinden sunulmaktadır.

Üniversite ders kitapları karmaşık konuları açık ve doğrudan sunma konusunda mükemmelleşmektedir. Yazarlar ve basımevleri, öğrenciler için en iyi yardımcı öğrenme materyalini ve eğiticiler için de en iyi yardımcı eğitim materyalini geliştirmek için sayısız saat harcamaktadır. Prentice Hall, daha iyi öğretim ve öğrenci öğrenimi sağlayacak ders kitapları ve yardımcı kaynaklar yaratmak için yazarlarla çalışmaya kendini adamıştır. *Elektrik Devreleri*'nin sekizinci baskısı bu konuda bir örnektir. Kitap, devreler eğitimi standartlarını 25 yıl önce ortaya koymuş ve bugün de aynı yolda devam etmektedir.

AYIRICI ÖZELLİKLER

Bölüm Problemleri

Elektrik Devreleri'nin kullanıcıları, Bölüm Problemlerinin kitabın en çekici özelliklerinden biri olduğunu tutarlı bir şekilde değerlendirmiştir. Sekizinci baskıda, yaklaşık %80'i yeni veya bir önceki baskıdan revize edilmiş 1000'den fazla problem vardır. Problemler her bölümün sonunda Kısımlara göre ayrılmıştır.

Pratik Bakış Açıları

Sekizinci baskı, bölüm girişlerindeki Pratik Bakış Açısı kullanımına devam etmektedir. Bunlar gerçek cihazlardan alınan gerçek devrelere örnekler vermektedir. Çoğu bölüm, izleyen konunun pratik bir uygulamasının kısa bir açıklaması ile başlamaktadır. Konular sunulduktan sonra bölüm, uygulamanın nicel analizi ve bir Pratik Bakış Açısı problemi ile sonlanmaktadır. Bu da sizin, bölüm içeriğinin bir gerçek dünya probleminin çözümüne nasıl uygulanıldığını anlamanızı sağlamaktadır.

Değerlendirme Problemleri

Her bölüm bir bölüm hedefleri listesi ile başlamaktadır. Bölümdeki anahtar noktalarda durmanız ve ilgili hedefi kavrayışınızı değerlendirmeniz için bir veya daha çok değerlendirme problemini çözmeniz istenmektedir. Eğer verilen bir hedefle ilgili değerlendirme problemini çözebilirseniz, konuyu kavramış ve o hedefe ulaşmışsınız demektir.

Örnekler

Her bölüm, kitapta sunulan kavramları nümerik bir örnek biçiminde sergileyen birçok örnek içermektedir. Bu kitapta 130'un üzerinde örnek vardır. Bu örnekler belirli bir kavramın uygulamasını sergilemek ve iyi bir problem çözme becerisi kazanmayı teşvik etmek amacını taşır.

Temel Denklemler ve Kavramlar

Kitap boyunca, ana yazından ayrı tutulmuş olan temel denklemler ve kavramlar göreceksiniz. Bunun yapılmasının amacı sizin elektrik devrelerindeki bazı anahtar noktalara odaklanmanıza yardımcı olmak ve önemli kavramlar arasında rahat gezinmenizi sağlamaktır.

Bilgisayar Araçlarının İntegrasyonu

Bilgisayar araçları bir devrenin davranışının görsel sunumunu sağlayarak, hesaplanmış bir çözümü değerlendirerek, kompleks devrelerin hesaplama zorluğunu azaltarak ve parametre değişimi ile istenen çözüme doğru iterasyon yaparak öğrencilere öğrenme sürecinde yardımcı olabilir. Bu hesaplamalı destek, tasarım sürecinde çok değerlidir. Sekizinci baskı popüler bir bilgisayar aracı olan PSpice desteğine sahiptir. PSpice kullanımına uygun problemler işaretlenmiştir.

Tasarım Vurgusu

Sekizinci baskı devrelerin tasarımı üzerindeki vurguyu desteklemeye birçok yolla devam etmektedir. Birinci olarak, Pratik Bakış Açısı tartışmalarının birçoğu devre tasarımı üzerine odaklanmıştır. Bölüm Problemleri bu Pratik örneklerdeki tasarım konularının tartışmasına devam etmektedir. İkinci olarak tasarıma yönelik Bölüm Problemleri açıkça belirtilmiştir. Bu şekilde, öğrenci ve eğiticilerin tasarım odaklı soruları belirlemesine yardımcı olunmuştur. Üçüncü olarak, PSpice kullanımına uygun problemlerin işaretlenmesi, bu yazılımı kullanarak tasarım yapma fırsatı önermektedir.

Doğruluk

Sekizinci baskıdaki tüm yazım ve problemler, olabildiğince az hata içeren bir kitap garanti etmek için bizim üç aşamalı özel doğruluk testimizden geçmiştir.

ÖĞRENCİ VE EĞİTİCİLER İÇİN KAYNAKLAR

www.prenhall.com/nilsson

Elektrik Devreleri'nin sekizinci baskısı, Prentice Hall'un yeni öğrenci ve eğitici çevrim içi kaynakları ile birlikte sunulmaktadır.

Öğrenciler İçin:

- Anında geribeslemeli çevrim içi ödev ve pratik ve PH Grade Assist kullanan entegre e-kitap
- Elektrik devrelerinin anahtar kavramlarını öne çıkaran Çevrim İçi Çalışma Rehberi
- Kitaba ve derse özel diğer özel kaynaklar

Eğiticiler İçin:

- Verilmeye hazır, otomatik notlandırmalı, PH Grade Assist ile çevrim içi ödev
- Kitabın tüm şekillerinin sayısal versiyonu
- Interactive Learning'in sınıf kullanımı için PowerPoint yansıları
- Örnek Bölüm Testleri
- Diğer kitaba ve derse özel kaynaklar

DİĞER ÇEVRİM DIŞI KAYNAKLAR

Öğrenciler İçin:

- Öğrenci Çalışma Paketi — Bu yeni kaynak, öğrencilere kitapta verilen problemleri çözmek için teknikler öğretir. Kavramlara göre düzenlenmiş olan bu kaynak her seviyeden öğrenciler için değerli bir problem çözme kaynağıdır.
- PSpice'a Giriş Kılavuzu — Sekizinci baskıda güncellenen bu kılavuz, yazılımın en son versiyonu ile aynı CD üzerinde gelmektedir.

Eğiticiler İçin:

- Eğitici Çözüm Kılavuzu — Bölüm sonu problemlerinin tam çözümleri.
- Eğitici Problem Bankası — Kitapta bulunmayan birçok ek problem ve çözümlerini içeren büyük bir yeni kaynak. Bu, ödev ve sınav hazırlamak için iyi bir kaynaktır.

Sipariş Seçenekleri:

Elektrik Devreleri ve PH Grade Assist Çevrim İçi Ödev Erişimi: ISBN 0-13-514291-1

Elektrik Devreleri ve Öğrenci Çalışma Paketi: ISBN 0-13-514290-3

Elektrik Devreleri ve PSpice'a Giriş Kılavuzu: ISBN 0-13-514292-X

ÖN KOŞULLAR

Kitabın ilk 12 bölümünü yazarken okuyucunun diferansiyel ve integral hesaptan temel bir ders aldığını kabul ettik. Ayrıca okuyucunun lisede veya üniversite seviyesinde, enerji, güç, elektrik yük, elektrik akımı, elektrik potansiyel ve elektromanyetik alanlara giriş yapan bir fizik dersi aldığını da kabul ettik. Son altı bölümü yazarken öğrencinin diferansiyel denklemler konusunda bir giriş dersini aldığını veya almakta olduğunu kabul ettik.

DERS SEÇENEKLERİ

Kitap, bir dönem, iki dönem veya üç çeyrek dönemlik derslerde kullanılmak üzere tasarlanmıştır.

- *Tek dönemlik ders:* 1-4 ve 6-10 Bölümleri işledikten (Kısım 7.7 ve 8.5'i atlayarak) sonra eğitici istediği vurguyu yapmak üzere 5.Bölümden (işlemsel yükselteçler), 11. Bölümden (üç fazlı devreler), 13. ve 14. Bölümden (Laplace yöntemleri) istediği konuları seçebilir.
- *İki dönemlik ders:* Haftada üç ders kabul edilirse, ilk dönemde kitabın ilk dokuz bölümü işlenebilir. 18. Bölüme kadarki kısım ise ikinci dönem işlenebilir.
- *Çeyrek dönemlik plan:* Kitap üç kısma bölünebilir: 1-6. Bölümler, 7-12. Bölümler ve 13-18. Bölümler.

İşlemsel yükselteçlere giriş, okuyucunun sonraki bölümleri çalışmasını etkilemeden atlanabilir. Örneğin, eğer 5. Bölüm atlanırsa, eğitici Kısım 7.7, Kısım 8.5 ve 15. Bölümü ve 5. Bölümü izleyen bölümlerdeki işlemsel yükselteçlerle ilgili olan problemleri atlayabilir.

Okuyucuların matematik temellerini etkin bir biçimde kullanmalarına yardımcı olmak için kitabın sonunda birçok ek vardır. Ek A, ortak doğrusal denklemlerin Cramer metodu ile çözümünü ve basit matris cebirini tekrar etmektedir. Kompleks sayılar Ek B'de tekrar edilmiştir. Ek C, manyetik bağlaşık bobinler ve ideal trafolar hakkında ek bilgi vermektedir. Ek D, kısa bir desibel tartışması içerir. Ek E, Bode diyagramlarına ayrılmıştır. Devre analizinde yararlı trigonometrik özdeşliklerin kısa bir tablosu Ek F'de, yararlı integrallerinki ise Ek G'de verilmiştir. Ek H, seçilmiş problemlerin cevaplarını içermektedir.

TEŞEKKÜR

Worcester Polytechnic Enstitüsünden Norman Wittels'e katkılarından dolayı minnettarlığımızı ifade etmek isteriz. Pratik Bakış Açılarına katkıları, bu ve önceki iki baskıyı büyük ölçüde zenginleştirmiştir. Ames Municipal Electric System'da iletim ve dağıtım mühendisi olan Jacob Chacko da Pratik Bakış Açılarına katkıda bulunmuştur. Robert Yahn (USAF), Stephen O'Conner (USAF) ve William Oliver'a (Boston Üniversitesi) kitaba olan ilgilerinin devamı ve önerileri için özel teşekkürlerimizi sunarız.

Sekizinci baskıda çabaları için teşekkür ve minnetimizi hak eden ve basımcımızda perde arkasında olan birçok çalışkan kişi vardır. Prentice Hall'dan, Michael McDonald, Rose Kernan, Xiaohong Zhu, Lisa McDowell, Jonathan Boylan, David A. George, Tim Galligan ve Scott Disanno'ya devamlı destekleri ve bir ton gerçekten ağır iş için teşekkür ederiz. Yazarlar ayrıca GEX Publishing Services çalışanlarına bu kitabın dizimindeki odaklı ve ağır çalışma için teşekkür eder.

Kitabın revizyonları, profesörlerin dikkatli ve detaylı incelemeleri ile yönlendirilmiştir. Aşağıdaki profesörlere yürekten teşekkürlerimizi sunarız.

- Paul Panayotatos, *Rutgers Üniversitesi*
- Evan Goldstein, *Washington Üniversitesi*
- Kalpathy B. Sundaram, *Central Florida Üniversitesi*
- Andrew K. Chan, *Texas A&M Üniversitesi*
- A. Safaai-Jazi, *Virginia Polytechnic Enstitüsü ve Eyalet Üniversitesi*
- Clifford H. Grigg, *Rose-Hulman Teknoloji Enstitüsü*

. Karl Böhringer, *Washington Üniversitesi*
. Carl Wells, *Washington Eyalet Üniversitesi*
. Aydin I. Karsilayan, *Texas A&M Üniversitesi*
. Ramakant Srivastava, *Florida Üniversitesi*
. Michel M. Maharbiz, *Michigan Üniversitesi, Ann Arbor*
. Christopher Hoople, *Rochester Teknoloji Enstitüsü*
. Sannasi Ramanan, *Rochester Teknoloji Enstitüsü*
. Gary A. Hallock, *Texas Üniversitesi, Austin*

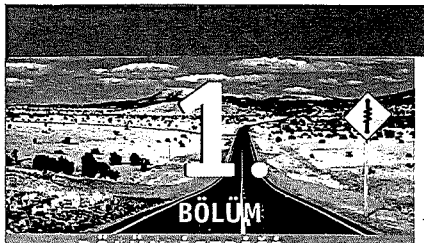
Yazarlar olarak ayrıca, sekizinci baskıda tüm kitabın ve tüm problemlerin kontrolündeki yardımlarından dolayı Gex Publishing Services'teki Doğruluk Kontrolü Takımına ve Florida Üniversitesinden Ramakant Srivastava'ya teşekkür etmek isteriz.

Kitabın iyileşmesi için olumlu geribesleme veren ve önerilerde bulunan birçok eğiticiye ve öğrenciye derin minnet duymaktayız. İçeriği, pedagojiyi ve sunumu iyileştirmeye devam etmek için bu önerilerin mümkün olduğu kadar çoğunu kullanmaktayız. Bu kitabın sayfalarını çeviren geleceğin binlerce mühendisinin eğitim deneyimini etkileme fırsatına sahip olduğumuz için onur duymaktayız.

JAMES W. NILSSON
SUSAN A. RIEDEL

ELEKTRİK DEVRELERİ

SEKİZİNCİ BASKIDAN ÇEVİRİ



BÖLÜM İÇERİĞİ

1.1 Elektrik Mühendisliği: Genel Bakış *sf. 3*
1.2 Uluslararası Birimler Sistemi *sf. 8*
1.3 Devre Analizi: Genel Bakış *sf. 10*
1.4 Gerilim ve Akım *sf. 11*
1.5 İdeal Temel Devre Elemanı *sf. 12*
1.6 Güç ve Enerji *sf. 14*

BÖLÜM HEDEFLERİ

1 SI birimlerini ve 10'un kuvvetleri için standart ön ekleri anlamak ve kullanabilmek.
2 Gerilim ve akımın tanımını bilmek ve kullanabilmek.
3 Güç ve enerjinin tanımını bilmek ve kullanabilmek.
4 Gerilim ve akımı verildiğinde bir ideal temel devre elemanının gücünü hesaplamak için pasif işaret kabullenmesini kullanabilmek.

Devre Değişkenleri

Elektrik mühendisliği, uygulamalı bilimler ve matematiğe içten ilgisi ve yeteneği olan herkes için heyecan verici ve zorlu bir meslektir. Geçtiğimiz yüz elli yıl boyunca elektrik mühendisleri insanların nasıl yaşadığını ve çalıştığını değiştiren sistemlerin geliştirilmesinde baskın bir rol oynadılar. Uydu haberleşme ağları, telefon, sayısal bilgisayar, televizyon, tanı ve cerrahi amaçlı tıbbi cihazlar, üretim hattı robotları ve elektrikli güç cihazları, modern teknolojik toplumları tanımlayan bileşenlerden bazılarıdır. Bir elektrik mühendisi olarak, devamlı değişen toplum ihtiyaçlarını karşılamak için varolan sistemleri geliştirerek ve yeni sistemler keşfedip geliştirerek bu teknolojik devrime katkıda bulunabilirsiniz.

Devre analizi konusuna başlarken bu konunun, elektrik mühendisliğine giriş oluşturan konular içinde nerede olduğunu hissetmeniz gerekir. Bu nedenle, elektrik mühendisliğine genel bir bakış, devre analizi ile ilgili olarak mühendislik bakış açısı hakkında bazı fikirler ve uluslararası birimler sistemi ile başlayacağız.

Daha sonra genel olarak devre analizinin ne olduğunu açıklayacağız. Ardından, gerilim ve akım kavramlarını tanıtacağız. Bu kavramları, ideal temel devre elemanı ve bir kutupluk referans sistemine olan ihtiyaç tartışmaları takip edecektir. Bölümü, akım ve gerilimin, güç ve enerjiye nasıl bağlı olduğunu açıklayarak bitireceğiz.

1.1 Elektrik Mühendisliği: Genel Bakış

Elektrik mühendisliği, elektrik sinyallerini üreten, ileten ve ölçen sistemlerle ilgili meslektir. Elektrik mühendisliği, pratik ihtiyaçları karşılayan sistemler üretmek için, fizikçinin doğal olaylar için modelleri ile, bu modelleri işlemek için matematikçinin araçlarını birleştirir. Elektriksel sistemler hayatımızda her yerdedir: Evlerimiz, okullar, iş yerleri ve ulaşım araçları bu sistemlerle doludur. Aşağıdaki beş önemli elektriksel sistem sınıfından birkaç örnek vererek başlayacağız.

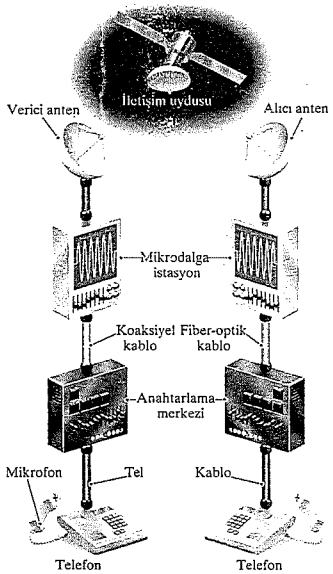
- İletişim sistemleri
- Bilgisayar sistemleri
- Kontrol sistemleri
- Güç sistemleri
- Sinyal işleme sistemleri

Daha sonra elektrik mühendislerinin bu sistemleri nasıl inceleyip tasarladığını açıklayacağız.

İletişim sistemleri bilgi üreten, ileten ve dağıtan elektriksel sistemlerdir. Çok bilinen örnekler televizyon, fotoğraf makinesi, vericiler, alıcılar ve VCR'ler, evreni keşfetmek için kullanılan radyo teleskobu, diğer gezegenlerin ve bizimkinin görüntülerini yollayan uydu sistemleri, uçak uçuşlarını koordine etmek için kullanılan radarlar sistemleri ve telefon sistemleridir.

Şekil 1.1 modern bir telefon sisteminin temel bileşenlerini göstermektedir. Şeklin solundan başlayarak, telefonun içinde bir mikrofon ses dalgalarını elektrik sinyallerine çevirir. Bu sinyaller onlar, yüzler hatta binlerce diğer telefondan gelen sinyallerle birleştirildiği bir anahtarlama merkezine taşınır. Birleştirilen sinyal anahtarlama merkezini terk eder; biçimi gitmesi gereken mesafeye bağlıdır. Örneğimizde sinyaller, yeraltı koaksiyel kabloları ile bir mikrodalga iletim istasyonuna yollanır. Burada sinyaller mikrodalga frekanslarına dönüştürülür ve bir iletim anteni ile hava ve uzaydan geçerek bir iletişim uydusu aracılığıyla bir alıcı antene ulaşır. Mikrodalga alıcı istasyon mikrodalga sinyalleri daha ileri iletime müsait bir biçime çevirir. Örneğin bu biçim, fiber optik kablo ile yollanan ışık darbeleri olabilir. İkinci anahtarlama merkezine geldiğinde birleşik sinyaller birbirinden ayrılır ve her biri uygun telefona yönlendirilir. Telefondaki kulaklık bir hoparlör gibi davranarak alınan elektrik sinyallerini ses dalgalarına geri çevirir. Sürecin her bir aşamasında elektrik devreleri sinyaller üzerinde çalışır. Her bir devreyi, aynı anda gerçekleşen yüzbinlerce aramanın yüksek kalitede bağlantıya sahip olmasını garanti edecek şekilde tasarlama, yapma ve çalıştırmanın zorluğunu hayal ediniz.

Bilgisayar sistemleri elektrik sinyallerini kullanarak kelime işlemden matematiksel hesaplamalara kadar değişebilen alanda bilgiyi işler. Sistemlerin boyutu ve gücü hesap makinesinden kişisel bilgisayarlara ve hava verilerini işleme ve kompleks organik moleküllerin kimyasal etkileşimlerini modelleyen süperbilgisayarlara kadar uzanır. Bu sistemler mikrodevrelerin ağlarını veya tümleşik devreleri içerir. Yüzlerce, binlerce veya milyonlarca elektriksel bileşenin birleşimi olan posta pulu büyüklüğündeki bu yapılar, sık-



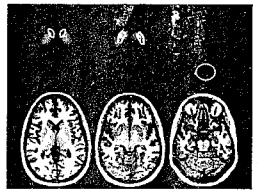
Şekil 1.1 ▲ Bir telefon sistemi.

hıkla ışık hızını ve termodinamik yasaları da içeren temel fiziksel limitlere yakın hız ve güç seviyelerinde çalışır.

Kontrol sistemleri süreçleri kontrol etmek için elektriksel sinyalleri kullanır.Örnekler, bir petrol rafinerisinde sıcaklık, basınç ve akış hızlarının, yakıt enjeksiyonlu araba motorunda yakıt-hava karışımının, asansörlerde motor, kapı ve ışıkların ve Panama kanalında kilitlerin kontrolünü içerir. Uçakların uçuş ve inişine yardımcı olan oto-pilot ve oto-iniş sistemleri de tanıdık kontrol sistemlerindendir.

Güç sistemleri elektrik gücünü üretir ve dağıtır. Teknoloji temelli yaşamımızın temeli olan elektrik gücü genellikle nükleer, hidroelektrik ve termal (kömür, akaryakıt veya gazlı sistemler) jeneratörlerle büyük miktarlarda üretilir. Güç, ülkeleri saran bir iletkenler ağı ile dağıtılır. Böyle bir sistemi tasarlayıp çalıştırmadaki temel zorluk, herhangi bir kısım cihazın bozulmasının bir şehri veya bir bölgeyi tamamen güçten yoksun bırakmayacak şekilde yeterli fazlalık ve kontrol sağlamaktır.

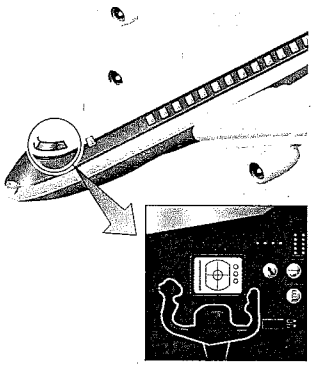
Sinyal işleme sistemleri bilgiyi temsil eden elektriksel sinyaller üzerinde çalışır. Bunlardaki bilgi sinyal işleme yoluyla daha uygun bir biçime dönüştürülür. Sinyalleri ve bilgilerini işlemenin birçok farklı yolu vardır. Örneğin görüntü işleme sistemleri yörüngedeki hava uydularından büyük miktarda veri toplar, veri miktarını yönetilebilir bir seviyeye indirger ve kalan veriyi akşam haberleri yayını için bir video görüntüsü haline getirir. Bir bilgisayarlı tomografi (BT) sistemi görüntü işleme sistemlerine bir başka örnektir. Özel bir X-ışını cihazında üretilen sinyalleri alır ve Şekil 1.2'de gösterilen gibi bir görüntüye çevirir. Başlangıçtaki X-ışını sinyalleri doktora daha az yararlıdır ancak veri anlaşılabilir bir görüntü haline dönüştükten sonra taşıdığı bilgi hastalıkların ve yaralanmaların tanısında kullanılabilir.



Şekil 1.2 ▲ Bir erişkinin kafa BT taraması.

Bu beş sınıf sistemi tasarlayan ve işletenler mühendislik disiplinleri arasında önemli miktarda etkileşim gerçekleşir. Örneğin iletişim mühendisleri sayısal bilgisayar kullanarak bilgi akışını kontrol ederler. Bilgisayarlar kontrol sistemleri içerir. öte yandan kontrol sistemleri de bilgisayar içerir. Güç sistemleri, bir kıtaya dahi yayılmış olabilecek bileşenlerinin emniyetli ve güvenilir koordinasyonu için yoğun iletişim sistemlerine gerek duyar. Bir sinyal işleme sistemi bir iletişim ağı, bir bilgisayar ve bir kontrol sistemi içerebilir.

Sistemler arasındaki etkileşimin iyi bir örneği Şekil 1.3'te gösterilen gibi bir uçaktır. Gelişmiş bir iletişim sistemi pilotun ve hava trafik kontrolörünün uçağın konumunu gözlemesine yardımcı olur. Bu sistem ayrıca hava trafik kontrolörünün tüm yakın uçaklar için emin bir uçuş rotası belirlemesine ve pilotun uçağı bu rota üzerinde tutmasına yardımcı olur. En yeni ticari uçaklarda bir bilgisayar sistemi motor fonksiyonlarının yönetiminde, seyrüsefer ve uçuş kontrol sistemlerinin gerçekleştirilmesinde ve kokpitteki video bilgi ekranlarının oluşturulmasında kullanılır. Bir kompleks kontrol sistemi, kokpit komutlarını kullanarak uçağın konum ve hızını ayarlar. Bu amaçla, motorlara ve kontrol yüzeylerine (kanat flapları, aileronlar ve dümen) uygun sinyaller üreterek uçağın havada güvende ve istenen uçuş rotasında olmasını sağlar. Uçağın havada kalabilmesi ve kabin ışıklarını açık tutmada, kahve yapmada ve film göstermede gerekli elektrik gücü üretip dağıtabilmesi için kendi güç sisteminin olması gereklidir. Sinyal işleme sistemleri hava trafik iletişimindeki gürültüyü azaltır ve uçağın konumu ile ilgili bilgiyi daha anlamlı olan, kokpitteki video ekranı haline dönüştürür. Bu sistemlerin her birinin tasarımında ve entegrasyonunda birçok mühendislik zorluğu vardır. Örneğin bu sistemler çok farklı ve tahmin edilemeyen çevre koşullarında çalışmalıdır. Bu sistemlerdeki belki de en önemli mühendislik zorluğu yolcuların zamanında ve emin bir şekilde istedikleri yere ulaşmasını garanti etmek için yeterince fazlalığın tasarıma katılmasıdır.



Şekil 1.3 ▲ Bir uçak.

Elektrik mühendisleri birincil olarak bir alanla ilgilenebilir. Ancak o konu ile etkileşen diğer alanlar hakkında da bilgi sahibi olmaları gerekir. Bu etkileşim, elektrik mühendisliğini zorlu ve çekici bir meslek yapan unsurlardan biridir. Mühendislikteki vurgu bir şeyleri çalıştırma üzerindedir. Bu nedenle bir mühendis, işini yapmak için herhangi bir alandan herhangi bir tekniği alıp kullanmakta özgürdür.

Devre Teorisi

Elektrik mühendisliği kadar geniş bir konuda, dallarının hepsinin ortak bir noktasının olup olmadığını sorabilirsiniz. Cevap evettir: Elektrik devreleri. Bir **elektrik devresi** gerçek bir elektriksel sistemin davranışını yaklaştıran bir matematiksel modeldir. Bu nedenle az önce anlatılan gibi sistemlerin tasarımı ve çalıştırılmasını daha sonraki derslerinizde ve mühendislik yaşamınızda öğrenmeniz açısından önemli bir temel sağlar. Devre teorisinin modelleri, matematiksel teknikleri ve dili, ileriki mühendislik çalışmalarınız için bir çerçeve oluşturacaktır.

Elektrik devresi teriminin yaygın olarak hem gerçek elektriksel sistem, hem de onu temsil eden model için kullanıldığına dikkat ediniz. Bu kitapta bir elektrik devre hakkında konuştuğumuzda, aksini söylemedikçe her zaman bir model kastedeceğiz. Devre teorisinin modelleme yönü mühendislik disiplinlerinde geniş uygulama alanları bulur.

Devre teorisi, durağan ve hareketli elektrik yüklerinin konusu olan elektromanyetik teorinin özel bir durumudur. Genelleştirilmiş alan teorisi elektrik sinyalleri incelemeye başlamak için uygun bir başlangıç noktası olarak görünmekle birlikte uygulanmasının zorluğunun yanı sıra ileri matematik kullanımı da gerektirir. Sonuç olarak, elektromanyetik alan teorisi dersleri bu kitaptaki materyali anlamak için ön koşul değildir. Bununla birlikte elektrik ve manyetik olayların tartışıldığı bir giriş fizik dersi almış olduğunuzu kabul edeceğiz.

Üç temel kabullenme, bir elektrik devresi ile modellenen bir fiziksel sistemin elektromanyetik teori yerine devre teorisi ile çalışılmasına izin verir. Bu kabullenmeler aşağıda verilmiştir.

1. *Elektriksel etkiler bir sistemin her yerinde aynı anda oluşur.* Bu kabullenmeyi yapabiliriz çünkü elektriksel sinyallerin ışık hızında veya yakınında ilerlediğini biliyoruz. Böylece, eğer sistem fiziksel olarak küçükse, elektrik sinyalleri sistem boyunca o kadar çabuk ilerler ki bunların sistemin her yerini aynı anda etkilediğini düşünebiliriz. Bu kabullenmenin yapılabileceği kadar küçük olan bir sisteme bir **toplu parametreli sistem** denir.

2. *Sistemdeki her eleman üzerindeki net yük her zaman sıfırdır.* Böylece hiçbir bileşen yük fazlasına sahip olamaz. Ancak bazı bileşenler, ileride öğreneceğiniz gibi, eşit ama ters işaretli yük barındırabilir.
3. *Bir sistemdeki bileşenler arasında manyetik bağlaşım yoktur.* Daha sonra göstereceğimiz gibi manyetik bağlaşım bir elemanın *içinde* olabilir.

Hepsi bu kadardır; daha fazla kabullenmeye ihtiyaç yoktur. Devre teorisini kullanmak, eğer elektromanyetik teoriyi kullansaydık ümitsizce karmaşıklaşacak problemlere basit çözümler (yeterli doğrulukta) getirir. Bu yararlar o kadar büyüktür ki mühendisler bazen özel olarak sistemleri bu kabullenmelerin sağlanacağı şekillerde tasarlar. Kabullenme 2 ve 3'ün önemi temel devre elemanlarını tanıttıktan ve birbirine bağlı elemanların analiz kurallarını gösterdikten sonra anlaşılacaktır.

Ancak, 1. kabullenmeye daha yakından bakmalıyız. Soru şudur: Bir fiziksel sistem toplu-parametreli sistem olarak kabul edilmek için ne kadar küçük olmalıdır? Bu soruya elektrik sinyallerinin dalga olarak ilerlediğini düşünerek cevaplayabiliriz. Eğer sinyalin dalgaboyu sistemin fiziksel boyutlarına göre büyükse toplu parametreli bir sistem söz konusudur. Dalgaboyu λ, hızın sinyalin tekrarlama hızına yani **frekansına** oranıdır ve $\lambda = c/f$ ile verilir. f frekansı hertz (Hz) ile ölçülür. Örneğin A.B.D.'deki güç sistemleri 60 Hz'te çalışır. Eğer yayılma hızı olarak ışık hızını ($c = 3 \times 10^8$ m/s) kullanırsak dalgaboyu 5×10^6 m bulunur. Eğer ilgi duyulan güç sistemi fiziksel olarak bu dalgaboyundan küçükse toplu parametreli bir sistem olarak kabul edilebilir ve davranışı devre teorisi ile incelenebilir. *Daha küçük* nasıl tanımlanır? İyi bir kural 1/10 kuralıdır: Eğer sistemin boyutu dalgaboyunun onda biri veya daha küçükse eldeki sistem toplu parametrelidir. Böylece, güç sisteminin fiziksel boyutu 5×10^5'den daha küçükse, sistemi toplu parametreli bir sistem olarak düşünebiliriz.

Diğer taraftan, radyo sinyallerinin yayılım frekansı 10^9 Hz mertebesindedir. Böylece dalgaboyu 0.3 m mertebesinde olur. 1/10 kuralını kullanırsak, toplu parametreli sayılabilmesi için radyo sinyalleri yollayıp alan bir iletişim sisteminin ilgili boyutları 3 cm'den küçük olmalıdır. İncelenen sistemin fiziksel boyutları sinyallerinin dalgaboyuna yaklaştığında elektromanyetik teori kullanılmalıdır. Bu kitap boyunca toplu parametreli sistemlerden çıkarılan devreleri çalışacağız.

Problem Çözme

Bir mühendis olarak size zaten çözülmüş olan sorular sorulmayacaktır. İster yeni bir sistem üzerinde, isterse varolan bir sistemin geliştirilmesi için çalışıyor olun, çözülmemiş problemler üzerinde çalışıyor olacaksınız. Ancak bir öğrenci olarak dikkatinizin çoğunu daha önce çözülmüş olan problemlere vereceksiniz. Bu problemlerin geçmişte nasıl çözüldüğü hakkında okuyup tartışarak ve ilgili ödev ve sınav sorularını çözerek, çözülmemiş problemleri başarıyla çözmek için gerekli yetenekleri geliştireceksiniz.

Bazı genel problem çözme teknikleri burada verilecektir. Bunların çoğu, hesaplama yapmaya başlamadan önce çözüm hakkında düşünmek ve stratejinizi organize etmekle ilgilidir.

1. *Verilenleri ve bulunması istenenleri belirleyiniz.* Problem çözmede, rota çizebilmek için gidilecek yerin bilinmesi gerekir. Problem bize neyin çözümünü soruyor veya neyi bulmamızı istiyor? Bazen problemin hedefi açıktır; diğer zamanlarda tekrar okumak ve bilinenlerle bilinmeyenlerin liste veya tablosunu yaparak hedeflerinizi bulmanız gerekir.

   Problemin ifadesi ayıklamanız gereken fazla bilgi içerebilir. Öte yandan, eksik ilgi verilebilir veya elinizdeki yöntemlerle halledebileceğinizden daha fazla karmaşıklık bulunabilir. Bu durumda eksik bilgiyi tamamlamak için kabullenmeler yapmak veya problem içeriğini sadeleştirmek zorunda olacaksınız. Hesaplamalarınız tıkanırsa veya anlamlı gözükmeyen bir cevap bulursanız, geri dönmeye ve fazla varsayılan bilgiyi ve/veya kabullenmelerinizi tekrar incelemeye hazırlıklı olmalısınız.
2. *Bir devre şeması veya bir başka görsel model çiziniz.* Sözel bir problem tanımını bir görsel modele çevirmek çözüm sürecinde çoğu zaman yararlı bir adımdır. Eğer bir devre şeması zaten verildiyse ona etiketler, değerler veya referans yönler gibi bazı bilgiler eklemeniz gerekebilir. Ayrıca devreyi daha basit ancak eşdeğer bir biçimde yeniden çizmeyi de isteyebilirsiniz. Bu kitapta ileriki kısımlarda böyle sadeleştirilmiş eşdeğer devreleri geliştirme yöntemlerini öğreneceksiniz.
3. *Birçok çözüm yöntemi hakkında düşününüz ve bunların arasında nasıl seçim yapacağınıza karar veriniz.* Bu ders size bir analitik araç koleksiyonu sağlayacaktır ve bir probleme bunların birçoğu uygulanabilir. Ancak bir yöntem diğerine göre daha az sayıda denklem verebilir veya çözüm hesap yerine sadece cebir gerektirebilir. Bu verimlilikler, eğer tahmin edebilirseniz, hesaplamalarınızı oldukça hızlandırır. Aklınızda bir alternatif çözüm yönteminin olması, eğer birinci çözümünüz tıkanırsa gidilecek bir yol verir.
4. *Bir çözüm hesaplayınız.* Bu noktaya kadarki planlamalarınız iyi bir analitik yöntem ve problemin doğru denklemlerini belirlemenize yardımcı olmuş olmalıdır. Şimdi bu denklemlerin çözümü gelir. Devre analizinin gerçek hesaplamalarını yaparken, kağıt-kalem, hesap makinesi ve bilgisayar yöntemlerinin hepsi kullanılabilir. Verim ve eğitmeninizin tercihleri hangi araçları kullanacağınızı belirleyecektir.
5. *Yaratıcılığınızı kullanınız.* Eğer cevabınızın yanlış olduğunu sezerseniz veya hesaplamalarınız sizi çözüme yaklaştırmaksızın uzayıp giderse durup alternatifleri düşünmelisiniz. Kabullenmelerinizi yeniden gözden geçirmek veya farklı bir çözüm yöntemi kullanmak gerekebilir. Veya çözümden geriye doğru gitmek gibi daha az yaygın bir çözüm yöntemi kullanmanız gerekebilir. Bu kitap tüm değerlendirme problemlerinin ve çoğu Bölüm Probleminin çözümünü vermektedir. Böylece tıkandığınızda cevaptan geriye doğru çalışabilirsiniz. Gerçek dünyada size cevaplar önceden verilmeyecektir ancak aklınızda istenen bir sonuç bulunacaktır ve geriye doğru çalışmak için kullanılabilir. Diğer yaratıcı yaklaşımlar başarıyla çözdüğünüz problem tipleri ile paralellikler aramak, nasıl ilerleye-

ceğiniz konusunda sezinizi veya içgüdünüzü kullanmak ve basitçe problemi bir kenara koyup bir süre sonra tekrar ele almaktır.

6. *Çözümünüzü test ediniz.* Elde ettiğiniz çözümün anlamlı olup olmadığını düşününüz. Cevabın genliği mantıklı gözüküyor mu? Çözüm fiziksel olarak gerçekleştirilebilir mi? Problemi alternatif bir yöntemle yeniden çözmeyi isteyebilirsiniz. Böyle yapmak, hem baştaki cevabınızın doğruluğunu test etmenize hem de farklı çözüm yöntemlerini çeşitli problemlerde verim açısından karşılaştırmanızı sağlar. Gerçek dünyada, emniyet açısından kritik tasarımlar birçok bağımsız yolla denenir. Çözümünüzü kontrol etme alışkanlığı edinmek size hem öğrenci, hem de mühendis olarak yardımcı olacaktır.

Bu problem çözme adımları bu derste veya bir diğerinde her problemi çözmek için bir tarif olarak kullanılamaz. Belli bir problemi çözerken bazı adımları atlayabilir, sıralarını değiştirebilir veya bazılarını değiştirebilirsiniz. Bu adımları, size uygun problem çözme stilini geliştirmeye yardımcı olarak kullanınız.

1.2 Uluslararası Birimler Sistemi

Mühendisler teorik sonuçları deneysel sonuçlarla karşılaştırır ve yarışan mühendislik tasarımlarını nicel ölçütler kullanarak karşılaştırırlar. Modern mühendislik, mühendislik takımlarının projeler üzerinde birlikte çalıştıkları çok konulu bir meslektir. Bu takımlar sadece eğer aynı ölçüm birimlerini kullanıyorlarsa sonuçlarını anlamlı bir şekilde birbirlerine iletebilir. Uluslararası Birimler Sistemi (SI) dünyadaki önemli mühendislik camiaları ve çoğu mühendis tarafından kullanılır. Bu nedenle bu kitapta biz de SI birimlerini kullanacağız.

SI birimleri aşağıdaki yedi *tanımlı* niceliğe dayanır:

- Uzunluk
- Kütle
- Zaman
- Elektrik akımı
- Termodinamik sıcaklık
- Madde miktarı
- Aydınlanma şiddeti

TABLO 1.1 Uluslararası Birimler Sistemi (SI)

Nicelik	Temel Birim	Sembol
Uzunluk	metre	m
Kütle	kilogram	kg
Zaman	saniye	s
Elektrik akımı	amper	A
Termodinamik sıcaklık	Kelvin derecesi	K
Madde miktarı	mole	mol
Aydınlanma şiddeti	kandil	cd

Bu nicelikler, temel birimleri ve sembolleri ile Tablo 1.1'de listelenmiştir. Tam olarak SI birimi olmamakla birlikte tanıdık zaman birimleri dakika (60 s), saat (3600 s) ve diğerleri sıklıkla mühendislik hesaplamalarında kullanılır. Ek olarak, tanımlı nicelikler birleştirilerek **çıkarılan** birimler oluşturulur. Bunlardan kuvvet, enerji, güç ve elektrik yükü gibi bazılarını daha önceki fizik derslerinden biliyorsunuz. Tablo 1.2 bu kitapta kullanılan çıkarılan birimleri listelemektedir.

Çoğu durumda SI birimi uygun şekilde kullanmak için ya çok küçük, ya da çok büyüktür. O zaman birimle birlikte Tablo 1.3'te listelenen standart ön ekler kullanılır. Bu ön eklerin tümü doğrudur ama mühendisler çoğunlukla 3'ün katları olan güçleri kullanırlar. Bu nedenle santi, desi, deka ve hekto nadiren kullanılır. Ayrıca mühendisler sıklıkla taban sayıyı 1 ile 1000 arasında tutan ön ekleri seçerler. Bir zaman hesaplamasının 10^{-5} s yani 0.00001 s sonucunu verdiğini varsayınız. Çoğu mühendis bu niceliği 0.01 ms veya 10,000,000 ps yerine 10 μs yani $10^{-5} = 10 \times 10^{-6}$ olarak verir.

✓ DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 1 – SI birimlerini ve 10'un kuvvetleri için standart ön ekleri anlamak ve kullanabilmek

1.1 Yıllık 100 milyar TL bütçe açığını kapatmak için hükümet bir milisaniyede kaç TL toplamalıdır?

Cevap: 3.17 TL/ms.

1.2 Eğer bir sinyal bir kabloda ışık hızının %80'i hızla ilerliyorsa 1 ns'ye karşılık kablo uzunluğu kaç inçtir?

Cevap: 9.45".

NOT: Ayrıca Bölüm Problemleri 1.1, 1.3 ve 1.6'yı da çözmeyi deneyiniz.

TABLO 1.2 SI Birimleriyle Çıkarılan Birimler

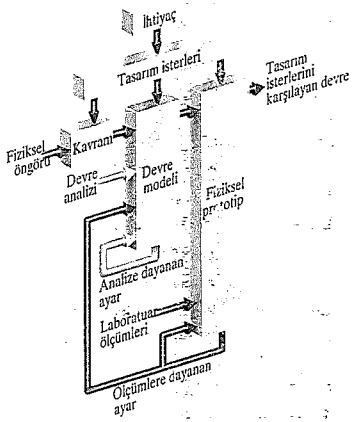
Nicelik	Birimin Adı (Sembolü)	Formülü
Frekans	hertz (Hz)	s^{-1}
Kuvvet	newton (N)	$kg \cdot m/s^2$
Enerji veya iş	joule (J)	$N \cdot m$
Güç	watt (W)	J/s
Elektrik yükü	coulomb (C)	$A \cdot s$
Elektrik potansiyel	volt (V)	J/C
Elektrik direnç	ohm (Ω)	V/A
Elektrik iletkenlik	siemens (S)	A/V
Elektrik kapasitans	farad (F)	C/V
Manyetik akı	weber (Wb)	$V \cdot s$
Endüktans	henry (H)	Wb/A

TABLO 1.3 10'un Kuvvetlerini Gösteren Standart Ön Ekler

Ön Ek	Sembol	Kuvvet
atto	a	10^{-18}
femto	f	10^{-15}
piko	p	10^{-12}
nano	n	10^{-9}
mikro	μ	10^{-6}
mili	m	10^{-3}
senti	c	10^{-2}
desi	d	10^{-1}
deka	da	10
hekto	h	10^{2}
kilo	k	10^{3}
mega	M	10^{6}
giga	G	10^{9}
tera	T	10^{12}

1.3 Devre Analizi: Genel Bakış

Devre analizinin detaylarına girmeden önce, mühendislik tasarımına, özel olarak da elektrik devreleri tasarımına geniş bir bakış atmamıza ihtiyaç vardır. Bu genel bakışın amacı, devre tasarımında devre analizinin nereye oturduğunu görmenizdir. Bu kitap devre analizine odaklanmakla birlikte, uygun olduğunda devre tasarımı fırsatları sağlamaya çalışacağız.



Şekil 1.4 ▲ Elektrik mühendisliği tasarımının kavramsal bir modeli.

Tüm mühendislik tasarımları, Şekil 1.4'te gösterildiği gibi bir ihtiyaçla başlar. Bu ihtiyaç, varolan bir tasarımı geliştirmek için olabilir veya tamamen yeni olabilir. İhtiyacın dikkatle değerlendirilmesi, önerilen tasarımın ölçülebilir özellikleri olan tasarım isterlerini verir. Tasarım önerildikten sonra, tasarım isterleri bizim tasarımın gerçekten ihtiyacı karşılayıp karşılamadığını belirlememize izin verir.

Daha sonra tasarım kavramı gelir. Kavram, eğitim ve deneyimle gelişen, ihtiyaç hakkındaki öngörü ile tasarım isterlerinin tamamen anlaşılmasından çıkarılır. Kavram bir çizim, bir yazılı açıklama veya bir başka biçimde olabilir. Sıklıkla bir sonraki adım, kavramı bir matematiksel model haline çevirmektir. Elektriksel sistemler için yaygın kullanılan bir model **devre modeli**dir.

Devre modelini oluşturan elemanlara **ideal devre bileşenleri** denir. Bir ideal devre bileşeni, bir akü veya bir ampul gibi gerçek bir elektriksel bileşenin matematiksel bir modelidir. Bir devre modelinde kullanılan bir ideal devre bileşeninin, gerçek elektriksel bileşenin davranışını kabul edilebilir bir seviyede temsil etmesi önemlidir. Daha sonra, bu kitabın odak noktası olan **devre analizi** araçları devreye uygulanır. Devre analizi matematiksel tekniklere dayanır ve devre modelinin ve ideal devre bileşenlerinin davranışını tahmin etmek için kullanılır. Tasarım isterlerinden bulunan istenen davranış ile devre analizinden tahmin edilen davranışın karşılaştırılması devre modelinde ve ideal devre bileşenlerinde ayarlamalara yol açabilir. İstenen ve tahmin edilen davranışlar uyumlu olduğunda, bir fiziksel prototip oluşturulabilir.

Fiziksel prototip, gerçek elektriksel bileşenlerden yapılmış gerçek bir elektriksel sistemdir. Ölçüm teknikleri kullanılarak bu fiziksel sistemin gerçek, nicel davranışı belirlenir. Bu gerçek davranış, tasarım isterlerinden elde edilen istenen davranış ve devre analizinden bulunan tahmin edilen davranış ile karşılaştırılır. Karşılaştırmalar fiziksel prototipte veya devre modelinde veya her ikisinde ayarlamalara neden olabilir. Sonuç olarak modellerin, bileşenlerin ve sistemlerin devamlı ayarlandığı bu iteratif süreç tasarım isterlerine uyan ve dolayısıyla ihtiyacı karşılayan bir tasarım üretebilir.

Bu açıklamadan, devre analizinin tasarım sürecinde çok önemli bir rol oynadığı açıktır. Devre analizi devre modellerine uygulandığından, mühendisler olgunlaşmış devre modelleri kullanarak tasarım isterlerini ilk iterasyonda sağlamaya çalışırlar. Bu kitapta, 20 ile 100 yıl arasında test edilmiş modelleri kullanacağız; bunların olgunlaşmış olduğunu kabul edebilirsiniz. Gerçek elektriksel sistemleri, ideal devre elemanlarını kullanarak modelleyebilme yeteneği devre teorisini mühendisler açısından çok yararlı kılar.

İdeal devre elemanlarının bir bağlantısının, bir sistemin davranışını nicel olarak tahmin etmek için kullanılabileceğini söylemek, bağlantıyı matematiksel denklemlerle açıklayabileceğimiz anlamına gelir. Matematiksel denklemlerin yararlı olabilmesi için ölçülebilir nicelikler cinsinden yazılmaları gerekir. Devreler durumunda nicelikler Kısım 1.4'te tartışacağımız gerilim ve akımdır. Devre analizi konusu her bir devre elemanının davranışının gerilim ve akım cinsinden anlaşılmasını ve ideal elemanların bağlantılarının sonucunda gerilim ve akım üzerinde oluşan kısıtların anlaşılmasını içerir.

1.4 Gerilim ve Akım

Elektrik yük kavramı tüm elektriksel olayların açıklanmasında temeldir. Şimdi elektrik yükünün bazı özelliklerini gözden geçireceğiz.

- Yük iki kutupludur, bu da elektriksel etkilerin pozitif ve negatif yükler cinsinden açıklandığı anlamına gelir.
- Elektrik yükü, elektron yükü olan 1.6022×10^{-19} C'un tam katları olan ayrık nicelikler halinde bulunur.
- Elektriksel etkiler yüklerin birbirinden ayrılmasından ve hareketli yüklerden oluşur.

Devre teorisinde yükün ayrılması bir elektrik kuvveti (gerilim) oluşturur. Yüklerin hareketi ise elektrik akışına (akım) neden olur.

Gerilim ve akım mühendislik bakışı açısından yararlıdır çünkü bunlar nicel olarak ifade edilebilir. Pozitif ve negatif yük birbirinden ayrıldığı zaman enerji harcanır. **Gerilim**, ayrılmadan dolayı oluşan birim yük başına enerjidir. Bu oranı diferansiyel oran olarak

$$v = \frac{dw}{dq}. \qquad (1.1)$$ ◁ **Gerilimin tanımı**

biçiminde ifade ederiz. Burada

v = volt cinsinden gerilim,
w = joule cinsinden enerji ve
q = coulomb cinsinden yüktür.

Hareketli yüklerin neden olduğu elektriksel etkiler yük akışı hızına bağlıdır. Yükün akış hızı **elektrik akımı** olarak bilinir ve

$$i = \frac{dq}{dt}. \qquad (1.2)$$ ◁ **Akımın tanımı**

olarak ifade edilir. Burada,

i = amper cinsinden akım,
q = coulomb cinsinden yük ve
t = saniye cinsinden zamandır.

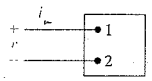
Eş. 1.1 ve 1.2, sırasıyla gerilim ve akım genliklerinin tanımıdır. Elektrik yükünün iki kutuplu yapısı, bu değişkenlere kutupluk atamamızı gerektirir. Bunu Kısım 1.5'te yapacağız.

Akım ayrık, hareketli elekronlardan oluşmakla birlikte, bunları tek tek düşünmek gerekli değildir çünkü sayıları çok fazladır. Daha ziyade, elektronları ve onlara karşılık gelen yükü tek ve düzgün akan bir dağılım olarak düşünmeliyiz. Bu nedenle i sürekli bir değişken olarak ele alınır.

Devre modelleri kullanmanın bir avantajı, bir bileşenin, terminallerindeki gerilim ve akım ile modellenebilir olmasıdır. Böylece fiziksel olarak farklı iki sistem, terminal gerilimi ile terminal akımı arasında aynı bağıntıya sahip olabilir. Eğer durum buysa, devre analizi amaçları açısından bu iki sistem özdeştir. Bir bileşenin terminal davranışını bildiğimizde, bir devre içindeki davranışını inceleyebiliriz. Ancak devre modelleri oluştururken bir bileşenin iç davranışı ile ilgileniyiz. Örneğin yük iletiminin bir metalin kristal örgü yapısı içinde hareket eden serbest elektronlardan veya bir yarıiletken malzemenin kovalent bağları arasında hareket eden elektronlardan kaynaklandığını bilmek isteyebiliriz. Ancak bu sorunlar devre teorisi gerçeğinin dışındadır. Bu kitapta daha önce geliştirilmiş olan devre modellerini kullanacağız ve bileşen modellerinin nasıl geliştirildiğini tartışmayacağız.

1.5 İdeal Temel Devre Elemanı

Bir **ideal temel devre elemanının** üç özelliği vardır: (1) Sadece iki terminali vardır ve diğer devre bileşenlerine bu bağlantı noktalarından bağlanır. (2) Matematiksel olarak akım ve/veya gerilim cinsinden açıklanır. (3) Diğer elemanlara bölünemez. *İdeal* kelimesini kullanmamızın nedeni, bir temel devre elemanının gerçekleştirilebilir bir fiziksel bileşen olarak var olmamasıdır. Ancak, Kısım 1.3'te tanıştığımız gibi, ideal elemanlar gerçek cihaz ve sistemleri modelleyecek şekilde bağlanabilir. *Temel* kelimesini kullanmamızın nedeni devre elemanının diğer elemanlara bölünemediğini veya indirgenemediğini belirtmek içindir. Böylece temel devre elemanları devre modellerinin temel bloklarını oluşturur ancak kendileri başka bir eleman tipi ile modellenemez.



Şekil 1.5 Bir ideal temel devre elemanı.

Şekil 1.5 bir temel devre elemanının gösterimidir. Kutu boştur çünkü şu anda devre elemanının tipi hakkında bir karar vermiyoruz. Şekil 1.5'te kutunun terminalleri arasındaki gerilim v ile ve devre elemanındaki akım da i ile gösterilmiştir. Gerilimin kutupluk referansı artı ve eksi işaretleri ile, akımın referans yönü ise akımın yanında yer alan bir okla gösterilmiştir. v ve i'nin pozitif ve negatif nümerik değerleri için bu referansların yorumu Tablo 1.4'te verilmiştir. Cebirsel olarak bir yönde akan pozitif yükün, ters yönde akan negatif yük akışına eşdeğer olduğuna dikkat ediniz.

TABLO 1.4 Şekil 1.5'teki Referans Yönlerin Yorumu

	Pozitif Değer	Negatif Değer
v	terminal 1'den terminal 2'ye gerilim düşüşü	terminal 1'den terminal 2'ye gerilim artışı
	veya	*veya*
	terminal 2'den terminal 1'e gerilim artışı	terminal 2'den terminal 1'e gerilim düşüşü
i	terminal 1'den terminal 2'ye pozitif yük akışı	terminal 2'den terminal 1'e pozitif yük akışı
	veya	*veya*
	terminal 2'den terminal 1'e negatif yük akışı	terminal 1'den terminal 2'ye negatif yük akışı

Gerilim için referans kutupluğun ve akım için referans yönün atanması tamamen gelişigüzeldir. Ancak, bir kez referansları atadıktan sonra tüm denklemleri bu referanslara göre yazmalıyız. Bu referanslara uygulanan en yaygın kabullenme pasif işaret kabullenmesidir ve bu kitapta da kullanılacaktır. Pasif işaret kabullenmesi aşağıda verilmiştir:

Bir elemandaki akımın referans yönü eleman üzerindeki gerilim düşüşünün referans yönü ile aynı ise (Şekil 1.5'te olduğu gibi), gerilimi akıma bağlayan her ifadede pozitif işaret kullanılır. Aksi durumda negatif işaret kullanılır.

◁ **Pasif işaret kabullenmesi**

Bundan sonraki tüm analizlerde bu kabullenmeye uyacağız. Bu kabullenmeyi farklı temel devre elemanlarını dahi göstermeden önce vermemizin amacı, kutupluk referanslarının ve pasif işaret kabullenmesinin ne temel devre elemanlarının ne de bu elemanlarla yapılan bağlantıların bir fonksiyonu olmamasıdır. Güç hesaplamaları için pasif işaret kabullenmesinin uygulama ve yorumunu Kısım 1.6'da sunacağız.

✓ DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 2 – Gerilim ve akımın tanımını bilmek ve kullanabilmek

1.3 Şekil 1.5'teki elemanın terminallerindeki akım

$$i = 0, \qquad t < 0;$$

$$i = 20e^{-5000t}\ \text{A}, \quad t \geq 0.$$

ile verilmektedir. Elemana üst terminalinden giren toplam yükü (mikrocoulomb cinsinden) hesaplayınız.

Cevap: 4000 μC.

1.4 Şekil 1.5'teki elemanın üst terminaline giren yükün ifadesi

$$q = \frac{1}{\alpha^2} - \left(\frac{t}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha t}\ \text{C}.$$

ile verilmektedir. Eğer $\alpha = 0.03679\ \text{s}^{-1}$ ise terminale giren maksimum akım değerini bulunuz.

Cevap: 10 A.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemi 1.9'u da çözmeyi deneyiniz.

1.6 Güç ve Enerji

Devre analizinde güç ve enerji hesaplamaları da önemlidir. Bunun bir nedeni, gerilim ve akımın elektriğe dayanan sistemlerin tasarımında önemli değişkenler olmakla birlikte sistemin yararlı çıkışının genellikle elektriksel olmaması ve bu çıkışın güç veya enerji cinsinden kolaylıkla ifade edilmesidir. Bir diğer neden tüm pratik cihazların işleyebileceği maksimum gücün sınırlı olmasıdır. Sonuç olarak tasarım sürecinde sadece gerilim ve akım hesaplamaları yeterli değildir.

Şimdi güç ve enerjiyi gerilim ve akım ile ilişkilendirecek ve aynı zamanda güç hesaplamalarını kullanarak pasif işaret gösterimini sergileyeceğiz. Temel fizikten, gücün enerjinin zamanda harcanma hızı olduğunu hatırlayınız. (75 kW anma değerli bir su pompası bir saniyede, 7.5 kW anma değerliden daha fazla litre su verebilir.) Matematiksel olarak birim zaman başına enerji bir türev olarak

Gücün tanımı ▷

$$p = \frac{dw}{dt}, \tag{1.3}$$

halinde ifade edilir. Burada

p = watt cinsinden güç,

w = joule cinsinden enerji,

t = saniye cinsinden zamandır.

Böylece 1 W, 1 J/s'ye eşdeğerdir.

Yük akışı ile ilgili güç, Eş. 1.1 ve 1.2'deki gerilim ve akımın tanımından doğrudan

$$p = \frac{dw}{dt} = \left(\frac{dw}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dt}\right),$$

veya

Gücün tanımı ▷

$$p = vi \tag{1.4}$$

ile verilir. Burada

p = watt cinsinden güç,

v = volt cinsinden gerilim ve

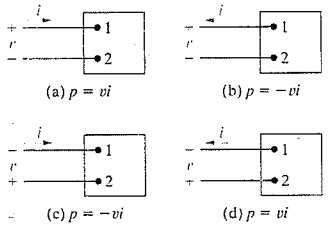
i = amper cinsinden akımdır.

Eş. 1.4 bir temel devre elemanı ile ilgili gücün basitçe, elemandaki akım ile eleman üzerindeki gerilimin çarpımı olduğunu gösterir. Sonuç olarak güç, iki terminalle ilgili bir niceliktir ve hesaplamamızın sonucunda gücün terminallere aktarıldığını veya terminallerden alındığını söyleyebilmeliyiz. Bu bilgi, pasif işaret kabullenmesinin doğru uygulanması ve yorumlanmasından elde edilir.

Eğer pasif işaret kabullenmesini kullanırsak, akımın referans yönü terminaller üzerindeki referans gerilim düşüşü yönünde ise Eş. 1.4 doğrudur. Diğer durumda Eş. 1.4 eksi işareti ile yazılmalıdır. Bir başka deyişle eğer akımın referans yönü terminaller üzerindeki referans gerilim artışı yönünde ise güç ifadesi

$$p = -vi \tag{1.5}$$

olarak yazılır. Gücün cebirsel işareti gerilim çıkış ve düşüşlerindeki yük hareketine bağlıdır. Pozitif yükler bir gerilim düşüşünden geçerken enerji kaybeder ve bir gerilim çıkışından geçerken enerji kazanır. Şekil 1.6 gerilim ve akım için kutupluk referansı ile güç ifadesi arasındaki ilişkiyi özetlemektedir.



Şekil 1.6 Kutupluk referansları ve güç ifadesi.

Şimdi gücün cebirsel işaretinin yorumu için kuralı vereceğiz.

Gücün cebirsel işaretinin yorumu ◁

Eğer güç pozitifse (yani $p > 0$ ise) kutunun içindeki devreye güç aktarılmaktadır. Eğer güç negatifse (yani $p < 0$ ise) kutunun içindeki devreden güç alınmaktadır.

Örneğin, kutupluk referanslarını Şekil 1.6(b)'deki gibi seçtiğimizi varsayalım. Akım ve gerilim hesaplamalarımızın aşağıdaki nümerik sonuçları verdiğini de kabul edelim.

$$i = 4 \text{ A} \quad \text{ve} \quad v = -10 \text{ V}.$$

O halde, terminal 1, 2 ile ilgili güç

$$p = -(-10)(4) = 40 \text{ W}.$$

olarak bulunur. Böylece kutunun içindeki devre 40 W soğurmaktadır.

Bu analizi bir adım daha ileri götürmek için, bir meslektaşınızın da aynı problemi çözdüğünü ancak Şekil 1.6(c)'deki referans kutuplukları kullandığını kabul edelim. Sonuçta,

$$i = -4 \text{ A}, \quad v = 10 \text{ V} \quad \text{ve} \quad p = 40 \text{ W}$$

nümerik değerleri bulunur. Bu sonuçların referans sistemi cinsinden yorumunun daha önce elde ettiğimiz sonucun aynısını, yani kutunun içindeki devrenin 40 W soğurduğu sonucunu verdiğine dikkat ediniz. Gerçekte Şekil 1.6'daki referans sistemlerinin hepsi aynı sonucu verir.

✓ DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 3 – Güç ve enerjinin tanımını bilmek ve kullanabilmek; Hedef 4 – Pasif işaret kabullenmesini bilmek ve kullanabilmek

1.5 Bir eleman üzerinde terminal 2'den terminal 1'e 20 V gerilim düşmesi olduğunu ve 4 A akımın terminal 2'den girdiğini kabul ediniz.

a) Şekil 1.6(a)-(d)'de gösterilen kutupluk referansları için v ve i değerlerini belirtiniz.

b) Kutunun içindeki devrenin güç soğurduğunu veya aktardığını belirtiniz.

c) Devre ne kadar güç soğurmaktadır?

Cevap: (a) Devre 1.6(a): $v = -20$ V, $i = -4$ A;
devre 1.6(b): $v = -20$ V, $i = 4$ A;
devre 1.6(c): $v = 20$ V, $i = -4$ A;
devre 1.6(d): $v = 20$ V, $i = 4$ A;
(b) soğurur;
(c) 80 W.

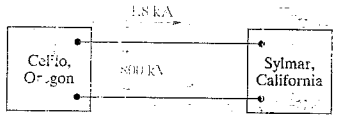
1.6 Şekil 1.5'teki elemanın terminallerinde Değerlendirme Problemi 1.3'teki akıma karşılık aşağıdaki gerilimin bulunduğunu kabul ediniz.

$$v = 0, \qquad t < 0;$$
$$v = 10e^{-500t}\ \text{kV}, \qquad t \geq 0.$$

Devre elemanına aktarılan toplam enerjiyi (joule cinsinden) hesaplayınız.

Cevap: 20 J.

1.7 Celilo, Oregon ile Sylmar, California arasında çalışan 800 kV ve 1800 A'lik bir yüksek gerilim doğru akım (dc) iletim hattı şekilde gösterilmektedir. Hattın Oregon uçundaki gücü (megawatt cinsinden) hesaplayınız ve gücün akış yönünü belirtiniz.



Cevap: 1440 MW, Celilo'dan Sylmar'a.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 1.12, 1.17, 1.24 ve 1.26'yı da çözmeyi deneyiniz.

Özet

- Uluslararası Birimler Sistemi (SI) mühendislerin nicel sonuçlar hakkında anlamlı bir şekilde iletişimini sağlar. Tablo 1.1 temel SI birimlerini özetlemekte, Tablo 1.2 ise bazı yararlı çıkarılan SI birimlerini sunmaktadır. (Bkz. Sf. 8 ve 9.)
- Devre analizi gerilim ve akım değişkenlerine dayanır. (Bkz. Sf. 11.)
- Gerilim yüklerin ayrılmasından kaynaklanan birim yük başına enerjidir ve volt SI birimine sahiptir ($v = dw/dq$). (Bkz. Sf. 11.)
- Akım, yükün akış hızıdır ve amper SI birimine sahiptir ($i = dq/dt$). (Bkz. Sf. 11.)
- İdeal temel devre elemanı daha fazla bölünemeyen iki terminalli bir bileşendir. Matematiksel olarak terminal gerilim ve akımı ile açıklanabilir. (Bkz. Sf. 12)
- Pasif işaret kabullenmesi, elemandaki akımın referansı, eleman üzerindeki referans gerilim düşüşü ile aynı yönde olduğunda, elemanın terminallerinde gerilim ve akımı ilişkilendiren ifadede pozitif işaret kullandırır. (Bkz. Sf. 13)
- Güç, birim zaman başına enerjidir ve terminal gerilimi ile akımının çarpımına eşittir. Birimi ise watt'tır ($p = dw/dt = vi$). (Bkz. Sf. 14.)
- Gücün cebirsel işareti aşağıdaki gibi yorumlanır:
  - Eğer $p > 0$ ise devreye veya devre bileşenine güç verilmektedir.
  - Eğer $p < 0$ ise devre veya devre bileşeninden güç alınmaktadır. (Bkz. Sf. 15.)

Problemler

Kısım 1.2

1.1 A.B.D'de yaklaşık 250 milyon kayıtlı binek araç vardır. Ortalama bir araçtaki akünün 440 watt-saat (Wh) enerji depoladığını kabul ediniz. A.B.D.'deki araçlarda depolanan toplam enerjiyi (gigawatt-saat cinsinden) tahmin ediniz.

1.2 Değerlendirme Problemi 1.7'de anlatılan hattın uzunluğu 845 mildir. Hat her birinin 1000 ft'i 2526 lb olan dört iletken içermektedir. Hatta kaç kilogram iletken vardır?

1.3 Bir MP3 oynatıcının 4 giga-byte (GB=10^9 byte) flaş bellek yongası 32 mm × 24 mm × 2.1 mm'dir. Bu bellek yongası 1000 tane üç dakikalık şarkı tutmaktadır.

a) Kenarları 1 mm olan bir küp kaç saniye müzik tutar?

b) Kenarları 100 μm olan bir küpte kaç byte bellek depolanabilir?

1.4 Bir elde taşınabilen video oynatıcı, videonun her bir çerçevesinde 320 × 240 resim elemanı (piksel) görüntülemektedir. Her piksel 2 byte bellek gerektirir. Videolar saniyede 30 çerçeve hızla gösterilmektedir. 10 gigabyte belleğe kaç dakika video sığar?

1.5 Bazı bambu cinsleri günde 250 mm büyüyebilir. Bitkideki hücrelerin 10 μm uzunluğunda olduğunu kabul ediniz.

a) Ortalama olarak bir bambu çubuğunun 1 hücre boyu uzaması ne kadar zaman alır?

b) Bir haftada ortalama olarak kaç hücre eklenir?

1.6 Bir litre (L) boya yaklaşık olarak 10 m^2 duvarı kaplamıştır. Kurumadan önce boya tabakasının kalınlığı nedir? (*İpucu:* 1 L = 1 × 10^6 mm^3.)

Kısım 1.4

1.7 Daire kesitli (yarıçap=1.5 mm) bir bakır tel 1200 A akım taşımaktadır. Akım, telde v metre/saniye ortalama hızla hareket eden serbest elektronlardan kaynaklanmaktadır. Eğer serbest elektron konsantrasyonu kübik metre başına 10^{29} ise ve bunlar telde düzgün dağılmış ise bir elektronun ortalama hızı nedir?

1.8 Elektronik devrelerde mikroamper aralığında akımlarla karşılaşmak olağan dışı değildir. Elektron akışından kaynaklanan 35 μA'lik bir akım kabul ediniz. Elektron akışına dik bir kesitten saniyede ortalama kaç elektron geçer?

1.9 Şekil 1.5'in üst terminaline giren akım

$$i = 24 \cos 4000t \text{ A}.$$

verilmektedir. Akımın maksimumunu geçtiği anda üst terminaldeki yükün sıfır olduğunu kabul ediniz. $q(t)$'nin ifadesini bulunuz.

1.10 6 V'luk bir pilin pozitif terminalinden negatif terminaline akan bir elektrondan ne kadar enerji elde edilir? Cevabınızı attojoule cinsinden veriniz.

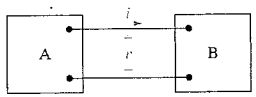
Kısım 1.5-1.6

1.11 9 V'luk bir pil bir kamp el fenerine 100 mA sağlamaktadır. Pil 5 saatte ne kadar enerji verir?

1.12 A ve B kutuları ile temsil edilen iki elektrik devresi Şekil P1.12'de gösterildiği gibi bağlanmıştır. Bağlantıda i akımının referans yönü ve v geriliminin referans kutupluğu Şekil P1.12'de gösterilmiştir. Aşağıdaki her bir nümerik değer kümesi için bağlantıdaki gücü hesaplayınız ve gücün A'dan B'ye mi yoksa ters yönde mi aktığını belirtiniz.

a) $i = 5$ A, $v = 120$ V
b) $i = -8$ A, $v = 250$ V
c) $i = 16$ A, $v = -150$ V
d) $i = -10$ A, $v = -480$ V

Şekil P1.12



1.13 Bir devre elemanının terminallerindeki gerilim ve akımın referansları Şekil 1.6(d)'de gösterildiği gibidir. v ve i'nin nümerik değerleri 40 V ve −10 A'dir.

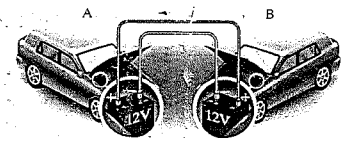
a) Terminallerdeki gücü hesaplayınız ve kutunun içindeki elemanın gücü soğurduğunu veya ürettiğini belirtiniz.

b) Akımın elektron akışından kaynaklandığı biliniyorsa, elektronların terminal 2'ye girdiğini veya ondan çıktığını belirtiniz.
c) Elektronlar kutudaki elemandan geçerken enerji kazanırlar mı, kaybederler mi?

1.14 Problem 1.13'ü –60 V gerilim için tekrar çözünüz.

1.15 Bir arabanın pili öldüğü zaman sıklıkla başka bir arabanın aküsü akü terminallerine bağlanarak çalıştırılabilir. Bunun için pozitif terminaller ve negatif terminaller birbirine bağlanır. Bağlantı Şekil P1.15'te gösterilmiştir. Şekil P1.15'teki i akımının ölçüldüğünü ve 30 A bulunduğunu kabul ediniz.
a) Hangi arabanın aküsü ölüdür?
b) Eğer bu bağlantı 1 dakika korunursa, ölü aküye ne kadar enerji aktarılır?

Şekil P1.15



1.16 9 V kuru hücre el feneri pili üreticisi pilin 80 sürekli saat boyunca 20 mA vereceğini söylemektedir. Bu zaman süresince gerilim 9 V'tan 6 V'a düşmektedir. Gerilimin zamanla doğrusal değiştiğini kabul ediniz. Bu 80 saat boyunca pil ne kadar enerji verir?

1.17 Şekil 1.5'teki devre elemanının terminallerindeki gerilim ve akım $t < 0$ için sıfırdır. $t \geq 0$ için gerilim ve akım

$$v = e^{-500t} - e^{-1500t}\ \text{V},$$
$$i = 30 - 40e^{-500t} + 10e^{-1500t}\ \text{mA}$$

olarak verilmektedir.
a) t=1 ms'deki gücü bulunuz.
b) 0 ve 1 ms arasında devre elemanına ne kadar enerji aktarılır?
c) Elemana aktarılan toplam enerjiyi bulunuz.

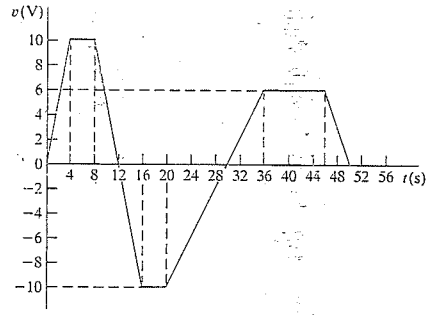
1.18 PSPICE Şekil 1.5'teki devre elemanının terminallerindeki gerilim ve akım $t < 0$ için sıfırdır. $t \geq 0$ için gerilim ve akım

$$v = 400e^{-100t} \sin 200t\ \text{V},$$
$$i = 5e^{-100t} \sin 200t\ \text{A}$$

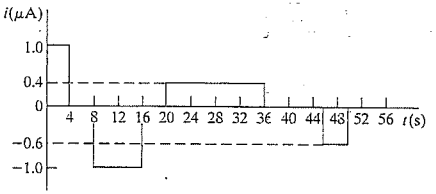
olarak verilmektedir.
a) t = 10ms'de eleman tarafından soğurulan gücü bulunuz.
b) Elemana aktarılan toplam enerjiyi bulunuz.

1.19 Şekil 1.5'teki devre elemanının terminallerindeki gerilim ve akım Şekil P1.19'da verilmiştir.
a) t'ye karşı gücü $0 \leq t \leq 50$ s için çiziniz.
b) t = 4, 12, 36 ve 50 s'de devre elemanına ne kadar enerji aktarılır?

Şekil P1.19



(a)



(b)

1.20 PSPICE Şekil 1.5'teki devre elemanının terminallerindeki gerilim ve akım $t < 0$ için sıfırdır. $t \geq 0$ için gerilim ve akım

$$v = 75 - 75e^{-1000t}\ \text{V},$$
$$i = 50\, e^{-1000t}\ \text{mA}$$

olarak verilmektedir.
a) Devreye aktarılan maksimum gücü bulunuz.
b) Devreye aktarılan toplam enerjiyi bulunuz.

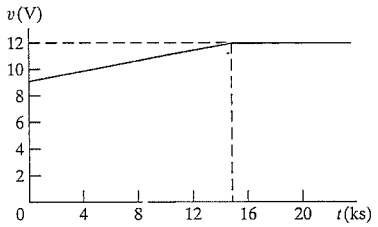
1.21 PSPICE Şekil 1.5'teki elemanın terminallerindeki gerilim ve akım

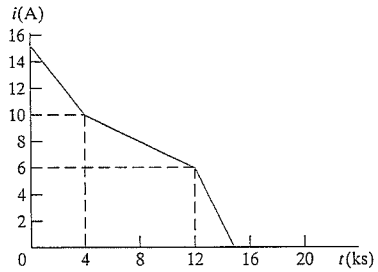
$$v = 36 \sin 200\pi t\ \text{V}, \quad i = 25 \cos 200\pi t\ \text{A}$$

olarak verilmektedir.
a) Elemana iletilen gücün maksimum değerini bulunuz.
b) Elemandan alınan gücün maksimum değerini bulunuz.
c) $0 \leq t \leq 5$ ms aralığında p'nin ortalama değerini bulunuz.
d) $0 \leq t \leq 6.25$ ms aralığında p'nin ortalama değerini bulunuz.

1.22 PSPICE Bir araba aküsünün doldurma çevrimi sırasında terminallerindeki gerilim ve akım Şekil P1.22'de verilmektedir.
a) Aküye iletilen toplam yükü bulunuz.
b) Aküye iletilen toplam enerjiyi bulunuz.

Şekil P1.22





1.23 PSPICE Şekil 1.5'teki devre elemanının terminallerindeki gerilim ve akım $t < 0$ için sıfırdır. $t > 0$ için gerilim ve akım

$$v = (16{,}000t + 20)e^{-800t}\ \text{V},$$
$$i = (128t + 0.16)e^{-800t}\ \text{A}$$

olarak verilmektedir.
a) Hangi anda elemana iletilen güç maksimumdur?
b) Maksimum gücü watt cinsinden bulunuz.
c) Elemana iletilen toplam enerjiyi milijoule cinsinden bulunuz.

1.24 PSPICE Şekil 1.5'teki devre elemanının terminallerindeki gerilim ve akım $t < 0$ ve $t > 3$ s için sıfırdır. 0 ile 3 s arasındaki aralık için gerilim ve akım ifadeleri

$$v = t(3 - t)\ \text{V}, \quad 0 < t < 3\ \text{s};$$
$$i = 6 - 4t\ \text{mA}, \quad 0 < t < 3\ \text{s}$$

olarak verilmektedir.
a) Hangi anda devre elemanına iletilen güç maksimumdur?
b) (a)'da bulduğunuz andaki güç nedir?
c) Hangi anda devre elemanından alınan güç maksimumdur?
d) (c)'de bulduğunuz andaki güç nedir?
e) Devreye 0, 1, 2 ve 3 s'de aktarılan net enerjiyi hesaplayınız.

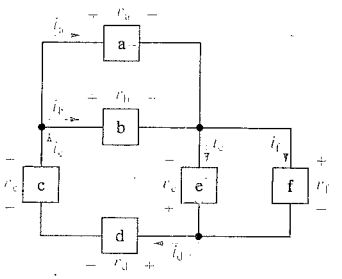
1.25 PSPICE Şekil 1.5'teki devre elemanının terminallerindeki gerilim ve akım $t < 0$ için sıfırdır. $t > 0$ için gerilim ve akım

$$v = (10{,}000t + 5)e^{-400t}\ \text{V}, \quad t \geq 0;$$
$$i = (40t + 0.05)e^{-400t}\ \text{A}, \quad t \geq 0$$

olarak verilmektedir.
a) Elemana iletilen gücün maksimum olduğu zamanı milisaniye cinsinden bulunuz.
b) Maksimum p değerini miliwatt cinsinden bulunuz.
c) Elemana iletilen toplam enerjiyi milijoule cinsinden bulunuz.

1.26 Şekil P1.26'daki devrenin gerilim ve akım değerleri Tablo P1.26'da verilmiştir. Devrede üretilen toplam gücü bulunuz.

Şekil P1.26



TABLO P1.26

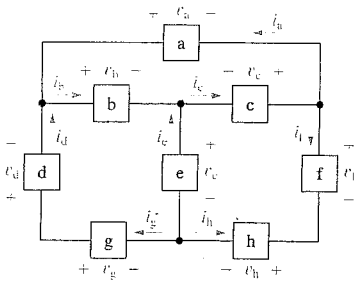
Eleman	Gerilim (mV)	Akım (A)
a	150	0.6
b	150	−1.4
c	100	−0.8
d	250	−0.8
e	300	−2.0
f	−300	1.2

1.27 Bir projeden sorumlu mühendis olduğumuzu ve grubunuzdaki mühendislerden birinin Şekil P1.27'deki devrede verilen bağlantının güç kontrolünü geçemediğini söze rapor ettiğini kabul ediniz. Bağlantının verileri Tablo P1.27'de verilmiştir.

a) Çalışanınız haklı mı? Cevabımızı açıklayınız.

b) Çalışanınız haklı ise verilerdeki hatayı bulabilir misiniz?

Şekil P1.27

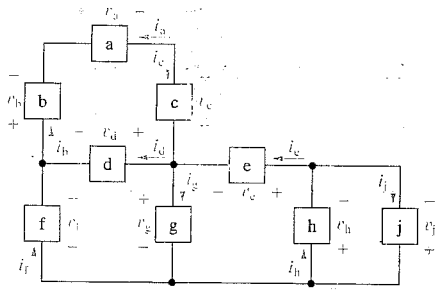


TABLO P1.27

Eleman	Gerilim (mV)	Akım (A)
a	5.0	−150
b	2.0	250
c	3.0	200
d	−5.0	400
e	1.0	−50
f	4.0	350
g	−2.0	400
h	−6.0	−350

1.28 Şekil P1.28'de gösterilen bağlantının gerilim ve akımlarının nümerik değerleri Tablo P1.23'de verilmiştir. Bağlantı güç kontrolünü sağlar mı?

Şekil P1.28

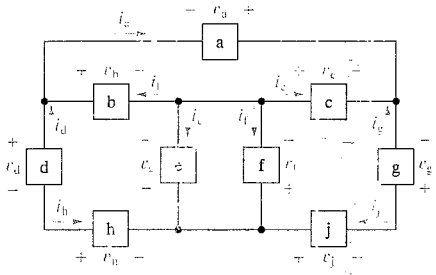


TABLO P1.28

Eleman	Gerilim (mV)	Akım (μA)
a	36	250
b	44	−250
c	28	−250
d	−108	100
e	−32	150
f	60	−350
g	−48	−200
h	80	−150
j	80	−300

1.29 Bağlı devre elemanlarını içeren hesaplamaları kontrol etmenin bir yöntemi, toplam üretilen gücün toplam harcanan güce eşit olduğunu (enerjinin korunumu ilkesi) görmektir. Bu düşünce ile Şekil P1.29'daki bağlantıyı kontrol ediniz ve bu güç kontrolünden geçip geçmediğini belirtiniz. Her bir elemanın akım ve gerilim değerleri Tablo P1.29'da verilmiştir.

Şekil P1.29



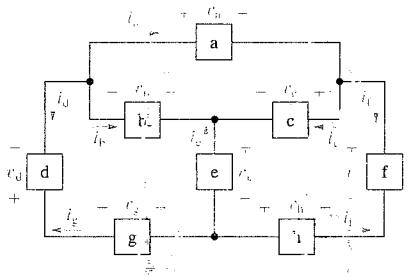
TABLO P1.29

Eleman	Gerilim (V)	Akım (mA)
a	1.6	80
b	2.6	60
c	−4.2	−50
d	1.2	20
e	1.8	30
f	−1.8	−40
g	−3.6	−30
h	3.2	−20
j	−2.4	30

1.30 a) Şekil P1.30'daki devrede, pasif işaret gösterimini kullanarak hangi elemanların güç aktardığını, hangilerinin de güç soğurduğunu belirleyiniz.

b) Her bir elemanın gerilim ve akımının nümerik değerleri Tablo P1.30'da verilmiştir. Devrede toplam ne kadar güç soğurulur ve üretilir?

Şekil P1.30



TABLO P1.30

Eleman	Gerilim (V)	Akım (μA)
a	300	25
b	−100	10
c	−200	15
d	−200	−35
e	350	−25
f	200	10
g	−250	35
h	50	−10

Devre Elemanları

BÖLÜM İÇERİĞİ

2.1 **Gerilim ve Akım Kaynakları** *s. 24*

2.2 **Elektriksel Direnç** *s. 28*

2.3 **Bir Devre Modelinin Oluşturulması** *s. 32*

2.4 **Kirchhoff Yasaları** *s. 36*

2.5 **Bağımlı Kaynaklar İçeren Bir Devrenin Analizi** *s. 42*

✓ BÖLÜM HEDEFLERİ

1. Aşağıdaki temel ideal devre elemanlarının sembollerini ve davranışlarını anlamak: Bağımsız gerilim ve akım kaynakları, bağımlı gerilim ve akım kaynakları ve dirençler.
2. Ohm yasasını, Kirchhoff gerilim yasasını ve Kirchhoff akım yasasını verebilmek ve basit devrelerin analizinde bunları kullanabilmek.
3. Basit bir devrede her bir eleman için gücün ve tüm devrede gücün nasıl hesaplanacağını bilmek ve tüm devrede gücün dengelenip dengelenmediğini belirleyebilmek.

Beş temel ideal devre elemanı vardır: Gerilim kaynakları, akım kaynakları, dirençler, indüktörler ve kapasitörler. Devre analizine başlamak için bu küçük bir sonuç görünse de birçok pratik sistem sadece kaynaklar ve dirençlerle modellenebilir. Görece basitliklerinden dolayı da bunlar iyi bir başlangıç noktasıdır; kaynaklarda ve dirençlerde gerilim ile akım arasındaki matematiksel ilişki cebirseldir. Böylece devre analizinin temel tekniklerini sadece cebirsel işlemlerle öğrenmeye başlayabileceksiniz.

İndüktör ve kapasitörlere girişi 6. Bölüme bırakacağız çünkü bunların kullanımı integral ve diferansiyel denklem çözmenizi gerektirir. Ancak indüktör ve kapasitör devrelerinin çözümü için olan analitik teknikler bu bölümde anlatılacak olanlarla aynıdır. Böylelikle daha zor denklemlerle çalışmanız gerektiğinde, onları yazma teknikleri ile aşina olacaksınız.

Pratik Bakış Açısı

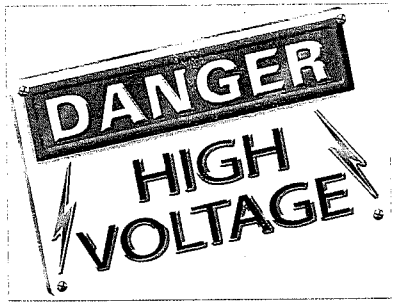
Elektriksel Güvenlik

"Dikkat-Yüksek Gerilim". Sıkça görülen bu uyarı yanıltıcıdır. Elektriksel enerji de dahil olmak üzere enerjinin tüm biçimleri tehlikeli olabilir. Ancak zarar veren sadece gerilim değildir. Bir halıda yürüyüp kapı koluna dokunduğunuzda aldığınız şok can sıkıcıdır ama sizi yaralamaz. Bununla birlikte o kıvılcım, zarara neden olabilecek gerilimlerden yüzlerce veya binlerce kat büyüktür.

Gerçekte yaralanmaya neden olabilecek elektriksel enerji elektrik akımından kaynaklanır ve vücutta nasıl aktığına bağlıdır. O zaman neden yüksek gerilim işareti vardır? Elektrik gücün üretim ve dağıtım yönteminden dolayı, gerilimi belirlemek akımdan daha kolaydır. Ayrıca çoğu elektriksel kaynak, belirtilen sabit bir gerilim üretir. Yani işaretler ölçümü kolay olan konusunda uyarmaktadır. Bir kaynağın hangi koşullar altında tehlikeli olabilecek akımlar üreteceğini belirlemek daha zordur çünkü elektrik mühendisliğinin anlaşılmasını gerektirir.

Elektriksel güvenliğin bu yönünü öğrenmeden önce gerilim ve akımların nasıl üretildiğini ve aralarındaki ilişkiyi öğrenmeliyiz. İnsan vücudu gibi nesnelerin elektriksel davranışı oldukça karmaşıktır ve sıklıkla tam olarak çözülmemiştir. Elektriksel olayları tahmin ve kontrol edebilmek için sadeleştirici modeller kullanırız. Bu modeller gerçek nesnelerdeki gerilim ve akım arasındaki ilişkileri bazı matematiksel modellerle yaklaştırır. Böyle modeller ve analitik yöntemler elektrik mühendisliği tekniklerinin özünü oluşturur ve elektriksel güvenlik de dahil olmak üzere tüm elektriksel olayları anlamamıza izin verir.

Bu bölümün sonunda insanların neden elektrik akımından zarar gördüğünü açıklamak için basit bir elektrik devre modeli kullanacağız. Hiçbir zaman insan vücudunun elektriksel davranışının doğru bir açıklamasını geliştiremezsek de basit devre modelleri kullanarak yakın bir yaklaştırma elde edebiliriz. Böylelikle elektriksel sistem ve cihazları değerlendirip güvenliğini artırabiliriz. Mükemmel olmayan bir anlayış sağlayan ancak pratik problemleri çözmek için yeterli olan modelleri geliştirmek mühendisliğin temelinde yatar. Elektrik mühendisliği sanatının çoğu, zor problemlerin ne zaman ve nasıl basit modellerle çözüleceğini bilmekte yatar. Siz bunu deneyimlerinizle geliştireceksiniz.



2.1 Gerilim ve Akım Kaynakları

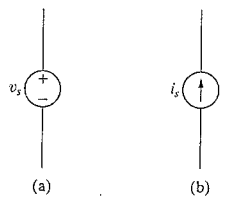
İdeal gerilim ve akım kaynaklarını tartışmadan önce, elektriksel kaynakların genel doğasını incelememiz gerekir. Bir **elektriksel kaynak**, elektriksel olmayan enerjiyi elektrik enerjisine çeviren (veya tersi) bir cihazdır. Boşalmakta olan bir akü kimyasal enerjiyi elektrik enerjisine çevirir. Öte yandan dolmakta olan bir akü, elektrik enerjisini kimyasal enerjiye çevirir. Bir dinamo, mekanik enerjiyi elektrik enerjisine çeviren (veya tersi) bir makinadır. Mekanıkten elektriğe çevrim modunda bu cihaz üreteç olarak adlandırılır. Ters yönde çevrim yapan cihaza motor denir. Bu kaynaklar hakkında hatırlanmaz gereken önemli konu, bunların elektrik güç verdiği veya aldığı ve genel olarak gerilimi veya akımı sabit tutmalarıdır. Bu davranış özellikle devre teorisi açısından ilgi çekicidir ve temel devre elemanı olarak ideal gerilim ve ideal akım kaynaklarının gelişmesine yol açmıştır. Zorluk, pratik kaynakların ideal devre elemanları ile modellenmesindedir.

Bir **ideal gerilim kaynağı**, terminalleri arasında akan akımdan bağımsız olarak terminalleri arasında belli bir gerilimi koruyan bir devre elemanıdır. Benzer şekilde, bir **ideal akım kaynağı**, terminalleri arasındaki gerilimden bağımsız olarak terminallerinde belli bir akımı koruyan bir devre elemanıdır. Bu devre elemanları pratik cihazlar olarak yoktur ve gerçek gerilim ve akım kaynaklarının idealleştirilmiş modelleridir.

Akım ve gerilim kaynakları için ideal model kullanımı, bunları matematiksel olarak nasıl ifade edeceğimiz konusuna önemli bir kısıtlama getirmektedir. Bir ideal gerilim kaynağı, üzerindeki akım değişse de sabit bir gerilim sağladığından, bir ideal gerilim kaynağında akımı gerilimin fonksiyonu olarak ifade etmek imkansızdır. Aynı şekilde, bir ideal akım kaynağı ile ilgili tek bilgi sağladığı akım ise bu akım kaynağı üzerindeki gerilimin belirlenmesi imkansızdır. Pratik bir kaynakta gerilim ve akımı ilişkilendirme yeteneğimizi devre analizinde ideal kaynak kullanmanın basitliği için feda etmiş olduk.

İdeal gerilim ve akım kaynakları bağımsız kaynaklar ve bağımlı kaynaklar olarak da verilebilir. Bir **bağımsız kaynak** bir devrede bir gerilim veya akımı, devrenin bir başka yerindeki gerilim veya akıma dayanmaksızın oluşturur. Sağlanan gerilim veya akım değeri sadece bağımsız kaynak değeri ile belirtilir. Öte yandan, bir **bağımlı kaynak**, değeri devrenin bir başka yerindeki gerilim veya akıma bağlı olan bir gerilim veya akım sağlar. Bağımlı olduğu gerilim veya akımın değerini bilmeden bir bağımlı kaynağın değerini belirtemeyiz.

İdeal bağımsız kaynakların devre sembolleri Şekil 2.1'de gösterilmiştir. Bir bağımsız kaynağın bir daire ile temsil edildiğine dikkat ediniz. Bir devrede ideal bir bağımsız gerilim kaynağını tam olarak belirtebilmek için Şekil 2.1(a)'da gösterildiği gibi sağlanan gerilim değeri ve referans kutupluk verilmelidir. Benzer şekilde ideal bir bağımsız akım kaynağını tam olarak belirtebilmek için Şekil 2.1(b)'de gösterildiği gibi sağlanan akım değerini ve referans yönünü vermelisiniz.



Şekil 2.1 (a) ideal bağımsız gerilim kaynağının ve (b) ideal bağımsız akım kaynağının devre sembolü.

İdeal bağımlı kaynakların devre sembolleri Şekil 2.2'de gösterilmektedir. Bağımlı kaynakları göstermek için karo şekil kullanılmaktadır. Bağımlı akım ve gerilim kaynaklarının her ikisi de devrenin bir başka yerindeki akım veya gerilim tarafından kontrol edilebilir. Böylelikle Şekil 2.2'deki sembollerce gösterildiği gibi dört olası durum vardır. Bağımlı kaynaklar bazen **kontrollü kaynaklar** olarak da adlandırılır.

Bir ideal bağımlı gerilim kontrollü gerilim kaynağını tamamen tanımlayabilmek için, kontrol eden gerilimi, kontrol eden gerilimden kaynak gerilimini hesaplamaya izin veren denklemi ve kaynak geriliminin referans kutupluğunu belirlemek gerekir. Şekil 2.2(a)'da kontrol eden gerilim v_x olarak adlandırılmıştır. Kaynak gerilimi v_s'yi belirleyen denklem

$$v_s = \mu v_x$$

olarak verilir ve v_s'nin referans kutupluğu gösterildiği gibidir. μ'nun birimsiz bir çarpım sabiti olduğuna dikkat ediniz.

Diğer ideal bağımlı kaynakların tamamen belirlenmesi için de benzer gerekler vardır. Şekil 2.2(b)'de kontrol akımı i_x'tir; v_s kaynak geriliminin denklemi

$$v_s = \rho i_x$$

ile verilir ve referans kutupluk gösterildiği gibidir. Çarpım sabiti ρ volt bölü amper birimine sahiptir. Şekil 2.2(c)'de kontrol gerilimi v_x'tir; i_s kaynak akımının denklemi

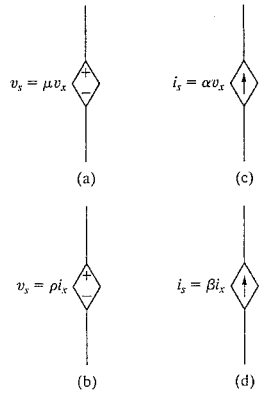
$$i_s = \alpha v_x$$

ile verilir ve referans yön gösterildiği gibidir. Çarpım sabiti α amper bölü volt birimine sahiptir. Şekil 2.2(d)'de kontrol akımı i_x'tir; i_s kaynak akımının denklemi

$$i_s = \beta i_x$$

ile verilir ve referans kutupluk gösterildiği gibidir. Çarpım sabiti β birimsizdir.

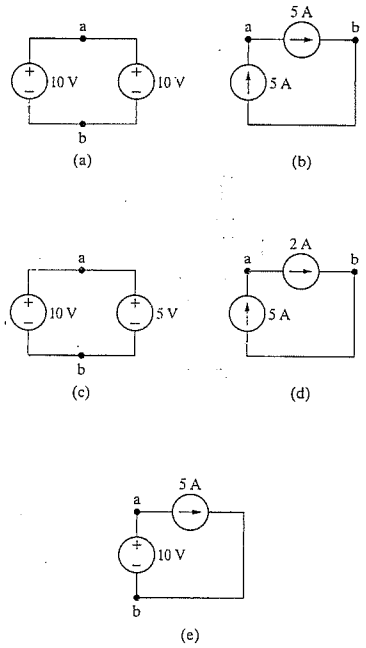
İdeal kaynak tartışmamızda son olarak bunların aktif devre elemanı örnekleri olduğuna dikkat edilmelidir. Bir **aktif eleman**, elektrik enerjisi üretebilecek bir cihazı modeller. **Pasif elemanlar** elektrik enerjisi üretemeyen fiziksel cihazları modeller. Direnç, indüktör ve kapasitör pasif devre elemanı örnekleridir. Örnek 2.1 ve 2.2, ideal bağımsız ve bağımlı kaynakların özelliklerinin izin verilen kaynak bağlantılarını nasıl sınırladığını sergilemektedir.



Şekil 2.2 Devre sembolleri: (a) İdeal bağımlı gerilim kontrollü gerilim kaynağı, (b) ideal bağımlı akım kontrollü gerilim kaynağı, (c) ideal bağımlı gerilim kontrollü akım kaynağı ve (d) ideal bağımlı akım kontrollü akım kaynağı.

Örnek 2.1 İdeal Kaynakların Bağlantılarının Kontrolü

İdeal bağımsız gerilim ve akım kaynaklarının tanımlarını kullanarak, Şekil 2.3'teki bağlantıların hangilerine izin verildiğini ve hangilerinin ideal kaynakların koyduğu kısıtları ihlal ettiğini belirtiniz.



Şekil 2.3 Örnek 2.1'in devreleri.

Çözüm

(a) bağlantısı geçerlidir. Her iki kaynak a, b ile işaretli olan aynı terminal çiftine gerilim sağlamaktadır. Bu da her bir kaynağın, aynı kutuplukla aynı gerilimi vermesini gerektirir ki durum budur.

(b) bağlantısı geçerlidir. Her iki kaynak a, b ile işaretli olan aynı terminal çifti üzerine akım sağlamaktadır. Bu da her bir kaynağın, aynı yönde aynı akımı vermesini gerektirir ki durum budur.

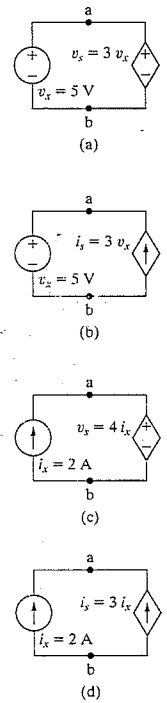
(c) bağlantısına izin verilmez. Her iki kaynak a, b ile işaretli olan aynı terminal çiftine gerilim sağlamaktadır. Bu da her bir kaynağın, aynı kutuplukla aynı gerilimi vermesini gerektirir ki durum buna uymamaktadır.

(d) bağlantısına izin verilmez. Her iki kaynak a, b ile işaretli olan aynı terminal çifti üzerine akım sağlamaktadır. Bu da her bir kaynağın, aynı yönde aynı akımı vermesini gerektirir ki durum buna uymamaktadır.

(e) bağlantısı geçerlidir. Gerilim kaynağı a, b ile işaretli olan terminal çiftine gerilim sağlamaktadır. Akım kaynağı aynı terminal çifti üzerine akım sağlamaktadır. İdeal bir gerilim kaynağı akımdan bağımsız olarak aynı gerilimi sağladığı ve ideal bir akım kaynağı gerilimden bağımsız olarak aynı akımı sağladığı için bu bağlantı izin verilen bir durumdur.

Örnek 2.2 İdeal Bağımsız ve Bağımlı Kaynakların Bağlantılarının Kontrolü

İdeal bağımsız ve bağımlı kaynakların tanımlarını kullanarak, Şekil 2.4'teki bağlantıların hangilerine izin verildiğini ve hangilerinin ideal kaynakların koyduğu kısıtları ihlal ettiğini belirtiniz.



Şekil 2.4 Örnek 2.2'nin devreleri.

Çözüm

(a) bağlantısına izin verilmez. Hem bağımsız, hem de bağımlı kaynak a, b ile işaretli olan aynı terminal çiftine gerilim sağlamaktadır. Bu da her iki kaynağın, aynı kutuplukla aynı gerilimi vermesini gerektirir. Bağımsız kaynak 5 V, bağımlı kaynak ise 15 V sağlamaktadır.

(b) bağlantısı geçerlidir. Bağımsız gerilim kaynağı a, b ile işaretli olan terminal çiftine gerilim sağlamaktadır. Bağımlı akım kaynağı aynı terminal çifti üzerine akım sağlamaktadır. İdeal bir gerilim kaynağı akımdan bağımsız olarak aynı gerilimi sağladığı ve ideal bir akım kaynağı gerilimden bağımsız olarak aynı akımı sağladığı için bu bağlantı izin verilen bir durumdur.

(c) bağlantısı geçerlidir. Bağımsız akım kaynağı a, b ile işaretli olan terminal çifti üzerine akım sağlamaktadır. Bağımlı gerilim kaynağı aynı terminal çiftine gerilim sağlamaktadır. İdeal bir akım kaynağı gerilimden bağımsız olarak aynı akımı sağladığı ve ideal bir gerilim kaynağı akımdan bağımsız olarak aynı gerilimi sağladığı için bu bağlantı izin verilen bir durumdur.

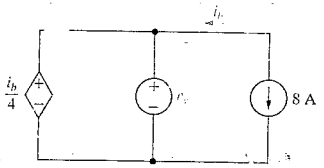
(d) bağlantısına izin verilmez. Hem bağımsız, hem de bağımlı kaynak a, b ile işaretli olan aynı terminal çifti üzerine akım sağlamaktadır. Bu da her bir kaynağın, aynı yönde aynı akımı vermesini gerektirir. Bağımsız akım kaynağı 2 A vermekte iken bağımlı kaynak ters yönde 6 A vermektedir.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 1–Temel devre elemanlarını anlamak

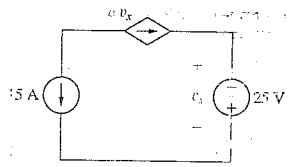
2.1 Şekilde gösterilen devrede
a) Bağlantının geçerli olması için v_g değeri ne olmalıdır?
b) Bu v_g değeri için 8 A kaynakla ilişkili gücü bulunuz.

Cevap: (a) –2 V;
(b) –16 W (16 W aktarılan)



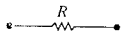
2.2 Şekilde gösterilen devrede,
a) bağlantının geçerli olması için α değeri ne olmalıdır?
b) (a) şıkkında hesapladığınız α değeri için 25 V kaynakla ilgili gücü bulunuz.

Cevap: (a) 0.6 A/V;
(b) 375 W (375 W soğurur).



NOT: Ayrıca Bölüm Problemleri'nden 2.2 ve 2.3'ü de çözmeyi deneyiniz.

2.2 Elektriksel Direnç (Ohm Yasası)



Şekil 2.5 Direnci R olan bir direncin devre sembolü.

Direnç, malzemelerin akım akışına veya daha özel olarak elektrik yükün akışına karşı koyma kapasitesidir. Bu davranışı modellemek için kullanılan devre elemanı **dirençtir**. Şekil 2.5 direncin devre sembolünü göstermektedir. Burada R, direncin değeridir.

Kavramsal olarak eğer elektrik akımını oluşturan elektronlara, içinde hareket ettiği malzemenin atomik yapısı tarafından direnildiğini düşünürsek direnci anlayabiliriz. Bu etkileşmeler sırasında bir miktar elektrik enerjisi ısıl enerjiye dönüşür ve ısı şeklinde harcanır. Bu etki istenmeyebilir. Ancak soba, tost makinesi, ütü ve havalandırmalı ısıtıcı gibi birçok yararlı elektrik cihazı direnç prensibine dayanır.

Çoğu malzeme akıma karşı ölçülebilir bir direnç sergiler. Direncin miktarı malzemeye bağlıdır. Bakır ve alüminyum gibi metaller düşük direnç değerine sahiptir ve bu nedenle elektrik akımı iletmek için uygun seçimdir. Gerçekte bir devre şeması çizilirken bakır veya alüminyum teller direnç olarak gösterilmez. Tellerin dirençleri devredeki diğer elemanların direncine göre o kadar küçüktür ki devre şemasını basitleştirmek için ihmal edilir.

Devre analizi açısından dirençteki akımı, terminalleri arasındaki gerilime bağlamalıyız. Bunu iki şekilde yapabiliriz. Bir yol

direnç üzerinde düşen gerilim yönünde, diğeri ise artan gerilim yönünde yapmaktır. Bu iki yöntem Şekil 2.6'da gösterilmektedir. İlk yolu seçersek gerilim ve akım arasındaki ilişki

$$v = iR, \tag{2.1}$$

olur. Burada,

v = volt cinsinden gerilim

i = amper cinsinden akım

R = ohm cinsinden direnç

ile verilir. Eğer ikinci yöntemi seçersek

$$v = -iR \tag{2.2}$$

yazmalıyız. Burada v, i ve R daha önce olduğu gibi sırasıyla volt, amper ve ohm cinsindendir. Eş. 2.1 ve 2.2'deki cebirsel işaretler 1. Bölümde tanıtılan pasif işaret kabullenmesinin doğrudan bir sonucudur.

Eş. 2.1 ve 2.2 bu yasayı ondokuzuncu yüzyılın başında bulan Alman fizikçi Georg Simon Ohm'a ithafen Ohm yasası olarak bilinir. Ohm yasası bir dirençte gerilim ve akım arasındaki cebirsel bağıntıdır. SI birimlerinde direnç ohm ile ölçülür. Ohm'un standart sembolü Yunan harfi omegadır (Ω). 8 Ω direnç için devre şeması sembolü Şekil 2.7'de gösterilmiştir.

Ohm yasası gerilimi akımın bir fonksiyonu olarak ifade eder. Ancak akımı gerilimin bir fonksiyonu olarak ifade etmek de yararlıdır. Böylece Eş. 2.1'den

$$i = \frac{v}{R} \tag{2.3}$$

veya Eş. 2.2'den

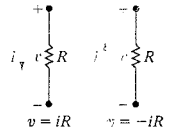
$$i = -\frac{v}{R} \tag{2.4}$$

yazılabilir. Direncin tersi iletkenlik olarak bilinir, G sembolü ile gösterilir ve siemens (S) cinsinden ölçülür. Böylece

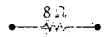
$$G = \frac{1}{R}\ \text{S} \tag{2.5}$$

verilir. 8 Ω direnç, 0.125 S iletkenliğe sahiptir. Çoğu mühendislik kitabında iletkenlik için kullanılan birim mho'dur (ohm'un tersten yazılmış hali); sembol olarak da ters çevrilmiş omega (℧) kullanılır. Dolayısıyla 8 Ω'luk bir direnci 0.125 mho (℧) iletkenliğe sahip olarak da açıklayabiliriz.

◀ Ohm Yasası



Şekil 2.6 ▲ Bir direncin terminallerindeki akım ve gerilim için iki olası referans seçimi ve sonuçta bulunan denklemler.



Şekil 2.7 ▲ 8 Ω direncin devre sembolü.

Devre analizinde ideal dirençler kullanarak fiziksel cihazların davranışını modelleyebiliriz. Burada ideal sıfatının kullanımı bize, direnç modelinin gerçek cihaz davranışı hakkında birçok basitleştirici kabullenme yaptığını hatırlatır. Bu kabullenmelerin en önemlisi ideal direncin değerinin sabit olduğu ve zamanla değişmediğidir. Çoğu gerçek direncin değeri sabit değildir ve zamanla değişir. İdeal direnç modeli devre analizinde direnci ilgi duyulan zaman aralığında belli bir sabit etrafında olup çok değişmeyen fiziksel cihazları modellemek için kullanılır. Bu kıtapta direnç kabullenmelerinin geçerli olduğunu kabul edeceğiz ve böylece devre analizinde ideal dirençleri kullanacağız.

Bir direncin terminallerindeki gücü birçok yolla hesaplayabiliriz. İlk yöntem, tanımlayıcı denklemi kullanmak ve basitçe terminal akımı ile geriliminin çarpımını hesaplamaktır. Şekil 2.6'da gösterilen referans sistemleri için $v = iR$ olduğunda

$$p = vi \tag{2.6}$$

ve $v = iR$ olduğunda

$$p = -vi \tag{2.7}$$

yazarız.

Bir direncin terminallerinde gücü ifade etmenin ikinci yolu gücü akım ve direnç cinsinden ifade eder. Eş. 2.1'i Eş. 2.6'da yerine koyarsak

$$p = vi = (iR)i$$

elde ederiz ve böylece

Akım cinsinden direnç gücü ▶

$$p = i^2 R. \tag{2.8}$$

bulunur. Benzer şekilde Eş. 2.2, Eş. 2.7'de yerine konursa

$$p = -vi = -(-iR)i = i^2 R \tag{2.9}$$

elde edilir. Eş. 2.8 ve 2.9 özdeştir ve gerilim kutupluğu ve akım yönünden bağımsız olarak bir direncin terminallerindeki gücün pozitif olduğunu açık gösterir. Dolayısıyla bir direnç devreden güç soğurur.

Bir direncin teminallerindeki gücü ifade etmenin üçüncü yolu gerilimi ve direnci kullanır. İfade, kutupluk referansından bağımsızdır ve

Gerilim cinsinden direnç gücü ▶

$$p = \frac{v^2}{R}. \tag{2.10}$$

ile verilir.

Bazen bir direncin değeri direnç yerine iletkenlik ile ifade edilir. Eş. 2.5'te verilen iletkenlik ve direnç arasındaki ilişkiyi kullanarak Eş. 2.9 ve 2.10'u iletkenlik cinsinden

$$p = \frac{i^2}{G}, \tag{2.11}$$

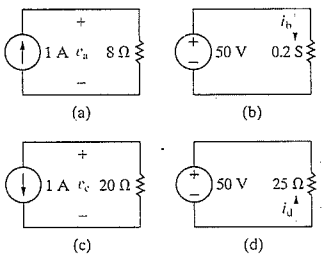
$$p = v^2 G \tag{2.12}$$

olarak yazabiliriz. Eş. 2.6 – 2.12, bir direnç tarafından soğurulan gücü hesaplamanın çeşitli yollarını verir. Bunların hepsi aynı sonuca ulaşır. Bir devreyi incelerken verilen bilgilere bakıp, bunları doğrudan kullanan güç denklemini seçiniz.

Örnek 2.3 ideal bir kaynak ve bir direnç için Ohm yasasının uygulanmasını sergilemektedir. Bu örnekte bir direncin terminallerindeki gücün hesabı da sergilenmektedir.

Örnek 2.3 Basit Bir Direnç Devresinde Gerilim, Akım ve Güç Hesabı

Şekil 2.8'deki her bir devrede v veya i'nin değeri bilinmemektedir.



Şekil 2.8 ▲ Örnek 2.3'ün devreleri.

a) v ve i değerlerini hesaplayınız.
b) Her bir dirençte harcanan gücü bulunuz.

Çözüm

a) Şekil 2.8 (a)'daki v_a gerilimi, dirençteki akım yönünde bir düşüştür. Dolayısıyla

$$v_a = (1)(8) = 8 \text{ V}$$

bulunur.

Şekil 2.8 (b)'deki 0.2 S iletkenliğe sahip dirençteki i_b akımı, dirençteki gerilim düşmesi yönündedir. Buradan

$$i_b = (50)(0.2) = 10 \text{ A}$$

yazılır. Şekil 2.8 (c)'deki v_c gerilimi dirençteki akım yönünde bir artıştır. Böylece,

$$v_c = -(1)(20) = -20 \text{ V}$$

bulunur. Şekil 2.8 (d)'deki 25 Ω direnç üzerindeki i_d akımı dirençteki gerilim artışı yönündedir. Dolayısıyla,

$$i_d = \frac{-50}{25} = -2 \text{ A}$$

elde edilir.

b) Her bir dirençte harcanan güç aşağıda hesaplanmıştır.

$$p_{8\Omega} = \frac{(8)^2}{8} = (1)^2(8) = 8 \text{ W},$$

$$p_{0.2S} = (50)^2(0.2) = 500 \text{ W},$$

$$p_{20\Omega} = \frac{(-20)^2}{20} = (1)^2(20) = 20 \text{ W},$$

$$p_{25\Omega} = \frac{(50)^2}{25} = (-2)^2(25) = 100 \text{ W}.$$

İdeal kaynakların ve dirençlerin genel özelliklerini tanıtıktan sonra şimdi bu elemanları kullanarak pratik bir sistem için devre modelinin nasıl yapılacağını göstereceğiz.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

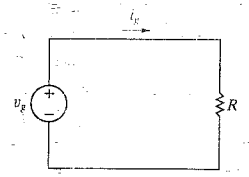
Hedef 2 - Ohm yasasını bilmek ve kullanabilmek.

2.3 Şekilde gösterilen devrede,

a) $v_g = 1$ kV ve $i_g = 5$ mA ise R değerini ve direncin soğurduğu gücü bulunuz.

b) Eğer $i_g = 75$ mA ve kaynağın verdiği güç 3 W ise v_g, R ve direncin soğurduğu gücü bulunuz.

c) Eğer $R = 300\ \Omega$ ve R'nin soğurduğu güç 480 mW ise i_g ve v_g'yi bulunuz.



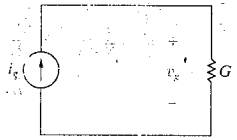
Cevap (a) 200 kΩ, 5 W;
(b) 40 V, 533.33 Ω, 3 W;
(c) 40 mA, 12 V.

2.4 Şekil gösterilen devrede,

a) Eğer $i_g = 0.5$A ve $G = 50$ mS ise v_g'yi ve akım kaynağınca verilen gücü bulunuz.

b) Eğer $v_g = 15$ V ve iletkenliğe aktarılan güç 9 W ise G iletkenliğini ve i_g kaynak akımı bulunuz.

c) Eğer $G = 200\ \mu$S ise ve iletkenliğe 8 W aktarıyorsa i_g ve v_g'yi bulunuz.



Cevap (a) 10 V, 5 W;
(b) 40 mS, 0.6 A;
(c) 40 mA, 200 V.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 2.6 ve 2.8'i de çözmeyi deneyiniz.

2.3 Bir Devre Modelinin Oluşturulması

Temel devre elemanlarına duyulan ilginin bir nedeninin bunların pratik sistemlerin devre modelini kurmada kullanılmaları olduğunu daha önce belirtmiştik. Bir cihaz ya da sistemin devre modelini kurmak için gereken yetenek, bulunan devreyi çözmek için gereken kadar karmaşıktır. Bu kitap devre çözüm yeteneğini vurgulamakla birlikte elektrik mühendisliği çalışmalarınızda diğer yeteneklere de ihtiyaç duyacaksınız. Bunların en önemlilerinden biri modellemedir.

Sonraki iki örnekte devre modeli geliştireceğiz. Örnek 2.4'te, sistem bileşenlerinin davranış bilgisine ve bileşenlerin nasıl bağlandığına dayanarak bir devre modeli kuracağız. Örnek 2.5'te bir cihazın terminal davranışını ölçerek bir devre modeli oluşturacağız.

Örnek 2.4 Bir El Fenerinin Devre Modelinin Oluşturulması

Bir el fenerinin devre modelini oluşturunuz.

Şekil 2.9 ▲ Bir el feneri elektriksel bir sistem olarak görülebilir.

Çözüm

Pratik bir sistem sergilemek için bir el fenerini seçtik çünkü bileşenleri çok tanıdıktır. Şekil 2.9 yaygın olarak bulunan bir el fenerinin fotoğrafını göstermektedir.

Bir el feneri elektriksel bir sistem olarak değerlendirildiğinde birincil önemi olan bileşenler piller, ampul, konnektör, gövde ve anahtardır. Şimdi her bir bileşen için devre modelini inceleyeceğiz.

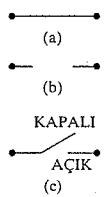
Bir kuru hücreli pil eğer akım ihtiyacı çok aşırı değilse sabit bir terminal gerilimini uzun süre korur. Böylece eğer kuru hücreli pil amaçlanan limitler içerisinde çalışıyorsa onu bir ideal gerilim kaynağı ile modelleyebiliriz. O zaman kaynak gerilimi sabittir ve iki kuru hücre değerinin toplamına eşittir.

Ampulün son çıkışı ışık enerjisidir. Bu da ampuldeki flamanı görünür bölgede yayınıma neden olacak kadar yüksek bir sıcaklığa kadar ısıtarak elde edilir. Ampulü bir ideal direnç ile modelleyebiliriz. Bu durumda direnç ısıl enerjiye çevrilen elektrik enerjisi miktarını açıklamakla birlikte ısıl enerjinin ne kadarının ışık enerjisine çevrildiğini açıklamaz. Ampulü modelleyen direnç pillerden çekilen sabit akımı doğru bir şekilde tahmin eder ki bu da sistemin ilgi duyulan bir özelliğidir. Bu modelde R_l ampul direncini gösterir.

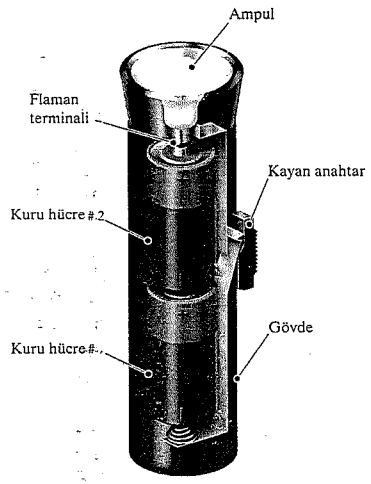
El fenerinde kullanılan konnektör iki amaca hizmet eder. Birinci olarak kuru hücreler ve gövde arasında elektriksel bir yol sağlar. İkinci olarak yaylı bir bobin şekline getirilir ve böylece pillerle ampül arasındaki temas yüzeyine mekanik basınç uygulayabilir. Bu basıncın nedeni kuru pillerin arasındaki ve kuru pillerle ampul arasındaki teması korumaktır. Buradan, konnektör için tel seçerken, el feneri tasarımında telin mekanik özelliklerinin, elektrik özelliklerinden daha önemli olduğunu görürüz. Elektriksel olarak konnektörü R_1 ile gösterilen bir ideal dirençle modelleyebiliriz.

Gövdenin de hem elektrik hem de mekanik görevi vardır. Mekanik olarak, diğer tüm elemanlar taşır ve taşıyan kişinin feneri tutması için imkan verir. Elektriksel olarak, el fenerindeki diğer elemanlar arasında bir temas sağlar. Eğer gövde metalse, pillerle ampul arasında akım iletir. Eğer plastik ise, gövdenin içindeki metal bir şerit bobin konnektörü anahtara bağlar. Her iki durumda, gövdenin sağladığı elektriksel bağlantı, R_c ile gösterilen bir ideal dirençle modellenir.

Son bileşen anahtardır. Elektriksel olarak anahtar iki durumlu bir cihazdır: Ya açıktır, ya da kapalı. İdeal bir anahtar açık iken akıma hiç direnç göstermez ama kapalı iken akıma sonsuz direnç gösterir. Bu iki durum bir direnin uç değerleridir. Yani, açık durum nümerik değeri sıfır olan bir direnc, kapalı durum ise nümerik değeri sonsuz olan bir direnc karşılık gelir. Bu iki uç değerin açıklayıcı **kısa devre** ($R = 0$) ve **açık devre** ($R = \infty$) isimleri vardır. Şekil 2.10(a) ve (b), sırasıyla bir kısa devrenin ve bir açık devrenin grafik gösterimini vermektedir. Şekil 2.10(c)'de gösterilen sembol, bir anahtarın, temaslarının konumuna bağlı olarak bir kısa devre veya bir açık devre olabileceğini temsil etmektedir.

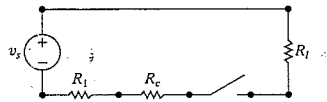


Şekil 2.10 ▲ Devre sembolleri. (a) Kısa devre. (b) Açık devre. (c) Anahtar.



Şekil 2.11 ▲ El feneri bileşenlerinin düzeni.

Şimdi el fenerinin devre modelini oluşturacağız. Kuru hücreli pillerle başlayarak, ilk hücrenin pozitif terminali Şekil 2.11'de gösterildiği gibi ikinci hücrenin negatif terminaline bağlanır. İkinci hücrenin pozitif terminali ampulün bir terminaline bağlanır. Ampulün diğer terminali anahtarın bir tarafı ile temas halindedir. Anahtarın diğer tarafı ise metal gövdeye bağlıdır. Metal gövde de metal yay aracılığı ile ilk hücrenin negatif terminaline bağlıdır. Elemanların kapalı bir yol veya devre oluşturduğuna dikkat ediniz. Şekil 2.11'de birbirine bağlı elemanların kapalı bir yol oluşturduğunu görebilirsiniz. Şekil 2.12 el fenerinin devre modelini göstermektedir.



Şekil 2.12 ▲ Bir el fenerinin devre modeli.

El feneri örneğimizden yararlanarak modelleme hakkında bazı genel gözlemler yapabiliriz. Birincisi, bir devre modelini geliştirirken her bir fiziksel bileşenin elektriksel davranışı birincil derecede önemlidir. El feneri modelinde üç çok farklı devre bileşeni, ampul, bobin tel ve metal gövde aynı tip devre elemanı ile (direnç) modellenmiştir. Bunun nedeni, hepsindeki elektriksel olayın aynı olmasıdır. Hepsi devredeki akımın akışına direnç göstermektedir.

İkinci olarak, devre modellerinin, istenen elektriksel etkilerin yanı sıra istenmeyenleri de modellemesi gerekebilir. Örneğin ampuldeki dirençten dolayı oluşan ısı ışığı üretir; bu istenen bir etkidir. Ancak gövdedeki ve bobindeki dirençten dolayı ortaya çıkan ısı istenmeyen veya parazitik bir etkiyi temsil eder. Kuru hücreleri boşaltır ve yararlı bir çıktı vermez. Bu parazitik etkiler göz önüne alınmalıdır aksi takdirde sonuçta bulunan model sistemi yeterince temsil etmeyebilir.

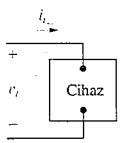
Son olarak, modelleme yaklaştırma gerektirir. El fenerini temsil eden temel sistemde dahi, devre modelini oluştururken basitleştirici yaklaştırmalar yaptık. Örneğin ideal anahtar kabul ettik.

Ancak pratik anahtarlarda temas direnci devrenin çalışmasını etkileyecek kadar yüksek olabilir. Modelimiz bu davranışı tahmin etmez. Ayrıca bobin konnektörün yeterince basınç uyguladığını ve kuru hücreler arasındaki temas direncini ortadan kaldırdığını kabul ettik. Modelimiz yetersiz basıncın etkisini modellememektedir. İdeal gerilim kaynağı modelimiz, kuru hücrelerin içindeki parazitik ısınmadan kaynaklanabilecek enerji harcanmasını ihmal eder. Bu etkiyi, kaynak ile ampul direnci arasına bir ideal direnç koyarak modelleyebilirdik. Modelimiz bu iç kaybın ihmal edilebilir olduğunu kabul etmektedir.

El fenerini bir devre olarak modellerken sistemin iç bileşenlerine erişimimiz ve haklarında temel anlayışımız vardı. Ancak bazen bir cihazın sadece terminal davranışını biliriz ve modeli bu bilgi ile kurmamız gerekir. Örnek 2.5 böyle bir modelleme problemini incelemektedir.

Örnek 2.5 Terminal Ölçümlerine Dayanarak Devre Modelinin Oluşturulması

Şekil 2.13(a)'daki cihazın terminallerinde gerilim ve akım ölçülmüş ve v_t ile i_t değerleri Şekil 2.13(b)'de tablo halinde verilmiştir. Kutu içindeki cihaz için bir devre modeli oluşturunuz.



(a)

v_t (V)	i_t (A)
−40	−10
−20	−5
0	0
20	5
40	10

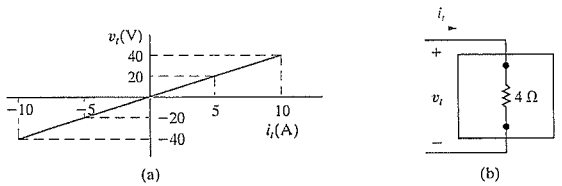
(b)

Şekil 2.13 ▲ Örnek 2.5'teki (a) cihaz ve (b) veri.

Çözüm

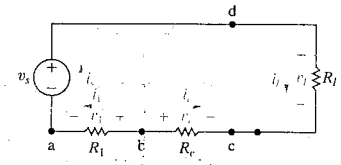
Gerilimin akımın fonksiyonu olarak çizimi Şekil 2.14(a)'daki grafiği verir. Bu şekildeki doğrunun denklemi terminal geriliminin terminal akımı ile doğru orantılı olduğunu ve $v_t = 4i_t$ olarak verildiğini gösterir. Ohm yasasına göre kutu içindeki cihaz 4 Ω direnç gibi davranmaktadır. Sonuç olarak kutunun içindeki cihazın devre modeli Şekil 2.14(b)'de gösterildiği gibi 4 Ω'luk bir dirençtir.

Devre modeli oluşturmak için terminal karakteristiklerini kullandığımız bu yönteme Kirchhoff yasalarını ve devre analizini gördükten sonra geri döneceğiz.



Şekil 2.14 ▲ (a) Şekil 2.13'teki cihaz için i_t'ye karşı v_t değerleri. (b) Şekil 2.13'teki cihazın devre modeli.

NOT: Bu örneği kavrayışınızı Bölüm Problemlerinden 2.10 ve 2.11'i çözmeyi deneyerek değerlendiriniz.



Şekil 2.15 Atanmış gerilim ve akım değişkenleri ile birlikte el fenerinin devre modeli.

2.4 Kirchhoff Yasaları

Her eleman üzerindeki gerilim ve içindeki akım belirlendiğinde bir devreye çözülmüş denir. Ohm yasası böyle çözümleri elde etmede önemli bir denklemdir. Ancak Ohm yasası tam bir çözüm vermek için yeterli olmayabilir. Örnek 2.4'teki el feneri devresini çözmeye çalışırken göreceğimiz gibi, çoğu devreyi çözmek için Kirchhoff yasaları olarak bilinen iki önemli cebirsel bağıntıya daha ihtiyaç duyarız.

Devreyi anahtar açık konumda iken Şekil 2.15'te gösterildiği gibi yeniden çizerek başlarız. Ayrıca her bir direnç ile ilgili gerilim ve akım değişkenini ve gerilim kaynağının akımını belirttiğimize dikkat ediniz. İşaretlemeye referans kutuplukları da dahil edilmiş ve bir direnç için kullanılan alt indis, o direncin gerilim ve akımında da kullanılmıştır. Şekil 2.15'te Şekil 2.12'de olan bazı terminal noktaları kaldırılmış ve düğümler eklenmiştir. Terminal noktaları bir elemanın başlangıcını ve bitimini gösterir. Bir **düğüm** ise iki veya daha fazla devre elemanının buluştuğu bir noktadır. Kirchhoff akım yasasını kullanmak için, az sonra göreceğimiz gibi düğümlerin belirlenmesi gereklidir. Şekil 2.15'te düğümler a, b, c ve d ile gösterilmiştir. d düğümü pille ampulü birbirine bağlar ve temel olarak şemanın en üstüne kadar uzanır. Ancak kolaylık için bu düğüm tek bir nokta ile gösterilir. Anahtarın her iki tarafındaki noktalar terminalleri gösterir ve bir düğüm belirtmek için sadece birine gerek vardır. Bu nedenle sadece biri c düğümü olarak işaretlenmiştir.

Şekil 2.15'te gösterilen devre için yedi bilinmeyen belirleyebiliriz: i_s, i_1, i_c, i_l, v_1, v_c ve v_l. v_s'nin bilinen bir gerilim olduğunu ve iki kuru hücrenin terminal gerilimlerinin toplamı olan 3 V'u temsil ettiğini hatırlayınız. Problem, bilinmeyen yedi değişkenin bulunmasıdır. Cebirden, n bilinmeyen niceliği bulmak için n ortak bağımsız denklem çözmenin gerektiğini biliyorsunuz. Kısım 2.2'deki Ohm yasası tartışmamızdan, gerekli üç denklemin

$$v_1 = i_1 R_1, \tag{2.13}$$

$$v_c = i_c R_c, \tag{2.14}$$

$$v_l = i_l R_l. \tag{2.15}$$

olduğunu biliyoruz. Diğer dört denklemi nasıl bulacağız?

Devre elemanlarının bağlantıları terminal gerilim ve akımları üzerine kısıtlar koyar. Bu kısıtlar, onları 1848 yılında basılan bir makalede ilk defa belirten Gustav Kirchhoff'a atfen Kirchhoff yasaları olarak bilinir. Kısıtları matematiksel biçimde veren iki yasaya Kirchhoff akım yasası ve Kirchhoff gerilim yasası denir.

Şimdi Kirchhoff akım yasasını vereceğiz:

Kirchhoff akım yasası (KCL) ▷ Bir devrede herhangi bir düğümdeki akımların cebirsel toplamı sıfıra eşittir.

Kirchhoff akım yasasını kullanmak için, düğümdeki her akıma belli bir referans yöne göre cebirsel bir işaret atanmalıdır. Düğümden çıkan bir akıma pozitif işaret atamak, düğüme giren akımlara negatif işaret atanmasını gerektirir. Öte yandan, düğümden çıkan bir akıma negatif işaret verilmesi düğüme giren akımlara pozitif işaret verilmesini gerektirir.

Düğümden çıkan akımların pozitif alındığı gösterime uyarak Şekil 2.15'teki dört düğüme Kirchhoff akım yasası uygulanırsa aşağıdaki dört denklem elde edilir:

$$\text{a düğümü} \quad i_s - i_1 = 0, \tag{2.16}$$

$$\text{b düğümü} \quad i_1 + i_c = 0, \tag{2.17}$$

$$\text{c düğümü} \quad -i_c - i_l = 0, \tag{2.18}$$

$$\text{d düğümü} \quad i_l - i_s = 0. \tag{2.19}$$

Eş. 2.16-2.19'un bağımsız bir küme olmadığına, çünkü dördünden herhangi birinin diğer üçünden çıkarılabileceğine dikkat ediniz. n düğümü olan herhangi bir devrede, Kirchhoff akım yasası ile n–1 bağımsız denklem çıkarılabilir[1]. Eş. 2.19'u göz ardı edelim; o halde Eş. 2.13-2.18 ile verilen altı bağımsız denklemimiz vardır. Bir taneye daha ihtiyacımız vardır ki onu da Kirchhoff gerilim yasası ile bulabiliriz.

Kirchhoff gerilim yasasını vermeden önce **kapalı yol** veya **döngüyü** tanımlamalıyız. Gelişigüzel seçilmiş bir düğümden başlayıp, herhangi bir düğümden bir kereden fazla geçmeden, seçilmiş elemanlar boyunca ilerleyerek kapalı bir yol çizelim ve başladığımız düğüme geri dönelim. Şekil 2.15'te gösterilen devrede sadece bir kapalı yol veya döngü vardır. Örneğin, a düğümünü başlangıç noktası olarak seçer ve devrede saat yönünde ilerlersek kapalı yolu d, c, b ve tekrar a düğümüne dönerek oluştururuz. Şimdi **Kirchhoff gerilim yasasını** verebiliriz.

Kirchhoff gerilim yasası (KVL) ◁ Bir devrede herhangi bir kapalı yol etrafındaki gerilimlerin cebirsel toplamı sıfıra eşittir.

Kirchhoff gerilim yasasını kullanmak için döngüdeki her gerilime bir cebirsel işaret (referans yön) atamalıyız. Bir kapalı yolu izlerken bir gerilim, ilerleme yönünde bir artış veya bir düşüş olarak gözükecektir. Gerilim artışına pozitif işaret atanması, gerilim düşüşüne negatif işaret atanmasını gerektirir. Diğer taraftan, gerilim artışına negatif işaret verilmesi, gerilim düşüşüne pozitif işaret verilmesini gerektirir.

Şimdi Şekil 2.15'te gösterilen devreye Kirchhoff gerilim yasasını uygulayacağız. Kapalı yolu saat yönünde izlemeyi ve gerilim düşüşlerine pozitif işaret atamayı seçtik. d düğümü ile başlamak

$$v_l - v_c + v_1 - v_s = 0 \tag{2.20}$$

ifadesini verir.

[1] 4. Bölümde bu gözlemle ilgili daha fazla konuşacağız.

Bu denklem daha önce anılan yedi bilinmeyen devre değişkenini bulmak için gereken yedinci bağımsız denklemdir.

Bir çift kuru pil tarafından bir el fenerine verilen akımı bulmak için yedi ortak denklemi çözmek zorunda olmak çok çekici değildir. Bu nedenle ileriki bölümlerde tek döngülü devreleri tek denklemle çözmenizi sağlayacak analitik yöntemleri göreceksiniz. Ancak bu devre tekniklerine geçmeden önce el feneri devresinin detaylı analizi hakkında birçok gözlem yapmak zorundayız. Genel olarak bu gözlemler doğrudur ve dolayısıyla gelecek bölümlerdeki tartışmalar açısından önemlidir. Bunlar ayrıca el feneri devresinin tek bir bilinmeyen tanımlayarak çözülebileceği düşüncesini de destekler.

Öncelikle, bir dirençteki akımı biliyorsanız aynı zamanda direnç üzerindeki gerilimi de bilirsiniz çünkü akım ve gerilim Ohm yasası aracılığıyla birbirine doğrudan ilişkilidir. Böylece her direnç için bir bilinmeyen değişken, akım veya gerilim, tanımlanabilir. Örneğin akımı bilinmeyen değişken olarak alalım. Sonra dirençteki bilinmeyen akımı çözdüğünüzde direnç üzerindeki gerilimi bulabilirsiniz. Genel olarak bir pasif elemanda akım bilinirse üzerindeki gerilim belirlenebilir. Bu da ortak denklem sayısını büyük ölçüde azaltır. Örneğin el feneri devresinde v_c, v_l ve v_1 gerilimleri bilinmeyen olmaktan çıkar. Böylece analitik işi yedi yerine dört ortak denklemin çözümüne indirgemiş olduk.

İkinci genel gözlem, bir düğüm oluşturmak için sadece iki elemanın bağlanmasının sonuçları ile ilgilidir. Kirchhoff akım yasasına göre, bir düğüme sadece iki eleman bağlandığında, elemanlardan birindeki akımı biliyorsak, ikincideki akımı da biliyoruz demektir. Bir başka deyişle, iki eleman için sadece bir bilinmeyen değişken tanımlamak yeterlidir. Tek bir düğüme sadece iki eleman bağlı ise bu elemanlara seri bağlı denir. Bu ikinci gözlemin önemi, Şekil 2.15'teki devrede her düğümün sadece iki elemana bağlı olduğuna dikkat edilirse açıkça ortaya çıkar. Böylece sadece tek bir bilinmeyen akım tanımlamak gereklidir. Bunun nedeni, Eş. 2.16-2.18'in doğrudan

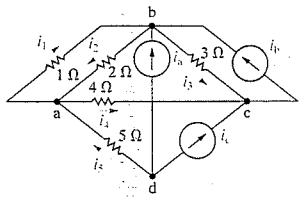
$$i_s = i_1 = -i_c = i_l \qquad (2.21)$$

vermesidir ki bu da eleman akımlarından birini biliyorsak tümünü biliyoruz anlamındadır. Örneğin bilinmeyen olarak i_s'nin seçilmesi i_1, i_c ve i_l'yi ortadan kaldırır. Problem tek bilinmeyeni, yani i_s'yi belirlemeye indirgenmiştir.

Örnek 2.6 ve 2.7 Kirchhoff yasalarına dayanarak devre denklemlerinin nasıl yazıldığını sergilemektedir. Örnek 2.8 bir bilinmeyen akımın Kirchhoff yasaları ve Ohm yasasıyla nasıl bulunduğunu göstermektedir. Örnek 2.9, Örnek 2.5'te sunulan tekniği terminal karakteristikleri bilinen bir cihaz için devre modeli oluşturmak için genişletir.

Örnek 2.6 Kirchhoff Akım Yasasının Kullanımı

Şekil P2.16'da gösterilen devrede her bir düğümde akımları toplayınız. Diyagramın merkezinde bağlantı noktası olmadığına dikkat ediniz: burada 4 Ω dal, ideal akım kaynağı i_a'yı içeren dalı geçmektedir.



Şekil 2.16 ▲ Örnek 2.6'nın devresi.

Çözüm

Denklemleri yazarken, düğümden çıkan akımları artı işaretli alacağız. Dört denklem,

a düğümü $\quad i_1 + i_4 - i_2 - i_5 = 0.$

b düğümü $\quad i_2 + i_3 - i_1 - i_b - i_a = 0.$

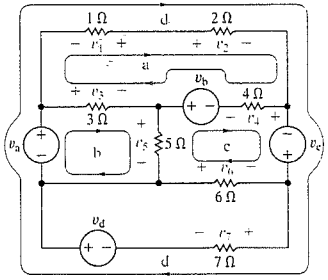
c düğümü $\quad i_b - i_3 - i_4 - i_c = 0.$

d düğümü $\quad i_5 + i_a + i_c = 0$

bulunur.

Örnek 2.7 Kirchhoff Gerilim Yasasının Kullanımı

Şekil 2.17'de gösterilen yollar çevresinde gerilimleri toplayınız.



Şekil 2.16 ▲ Örnek 2.7'nin devresi.

Çözüm

Denklemleri yazarken gerilim düşüşü için artı işareti kullanacağız. Dört denklem,

a düğümü $\quad -v_1 + v_2 + v_4 - v_b - v_3 = 0.$

b düğümü $\quad -v_a + v_3 + v_5 = 0.$

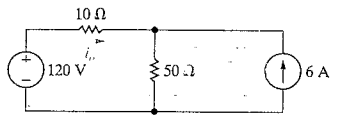
c düğümü $\quad v_b - v_4 - v_c - v_6 - v_5 = 0.$

d düğümü $\quad -v_a - v_1 + v_2 - v_c + v_7 - v_d = 0$

bulunur.

Örnek 2.8 Bilinmeyen Bir Akımı Bulmak İçin Ohm Yasası ve Kirchhoff Yasalarının Uygulanması

a) Kirchhoff yasaları ve Ohm yasasını kullanarak Şekil 2.18'de gösterilen devrede i_o akımını bulunuz.

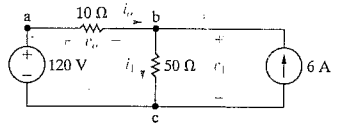


Şekil 2.18 Örnek 2.8'in devresi.

b) Toplam üretilen gücün toplam harcanan güce eşit olduğunu sağlayarak i_o çözümünüzü test ediniz.

Çözüm

a) Devreyi yeniden çizerek ve 50 Ω dirence bir bilinmeyen akım, 10 Ω ve 50 Ω dirençlere de birer bilinmeyen gerilim atayarak başlayacağız. Şekil 2.19 devreyi göstermektedir. Düğümler tartışmaya yardımcı olması için a, b ve c olarak adlandırılmıştır.



Şekil 2.19 Şekil 2.18'de gösterilen devre ve i_1, v_o ve v_1 bilinmeyenlerinin tanımı.

i_o aynı zamanda 120 V kaynaktaki akım olduğundan iki bilinmeyen akımımız vardır ve bu nedenle i_o ve i_1'i içeren iki ortak denklem çıkarmamız gerekir. Denklemlerin birini b veya c düğümüne Kirchhoff'un akım yasasını uygulayarak elde ederiz. b düğümündeki akımları toplar ve düğümü terk eden akımlara pozitif işaret atarsak

$$i_1 - i_o - 6 = 0$$

elde ederiz. İkinci denklemi Kirchhoff'un gerilim yasası ile Ohm yasasından elde ederiz. Ohm yasasından v_o'nun $10i_o$ ve v_1'in $50i_1$ olduğuna dikkat ederek cabc kapalı yolu etrafındaki gerilimleri toplarsak

$$-120 + 10i_o + 50i_1 = 0.$$

elde ederiz. Bu denklemi yazarken saat yönündeki gerilim düşüşlerini pozitif aldık. Bu iki denklemin i_o ve i_1 için çözümü

$$i_o = -3 \text{ A ve } i_1 = 3 \text{ A}$$

verir.

a) 50 Ω dirençte harcanan güç

$$p_{50\Omega} = (3)^2(50) = 450 \text{ W}.$$

bulunur. 10 Ω dirençte harcanan güç ise

$$p_{10\Omega} = (-3)^2(10) = 90 \text{ W}.$$

elde edilir. 120 V kaynağa iletilen güç

$$p_{120V} = -120i_o = -120(-3) = 360 \text{ W}.$$

ve 6 A kaynağa iletilen güç

$$p_{6A} = -v_1(6) \text{ ama } v_1 = 50i_1 = 150\text{V'tur.}$$

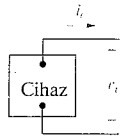
Dolayısıyla

$$p_{6A} = -150(6) = -900 \text{ W}.$$

olur. 6 A kaynak 900 W iletmektedir ve 120 V kaynak 360 W soğurmaktadır. Toplam soğurulan güç 360+450+90=900 W'tır. Sonuç olarak çözüm, iletilen gücün soğurulan güce eşit olduğunu sağlamaktadır.

Örnek 2.9 Terminal Ölçümlerine Dayanarak Devre Modeli Oluşturulması

Şekil 2.20(a)'da gösterilen cihazın terminal gerilim ve akımı ölçülmüş ve v_t ve i_t değerleri Şekil 2.20(b)'de tablo halinde verilmiştir.



(a)

v_t (V)	i_t (A)
30	0
15	3
0	6

(b)

Şekil 2.20 (a) Cihaz. (b) Örnek 2.9'un verileri.

a) Kutunun içindeki cihazın devre modelini oluşturunuz.

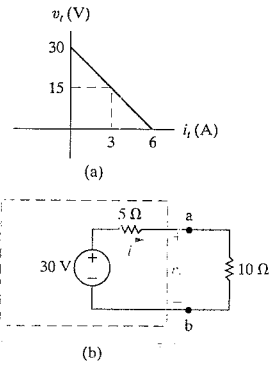
b) Bu devre modelini kullanarak bu cihazın 10 Ω'luk bir dirence vereceği gücü bulunuz.

Çözüm

a) Gerilimin akımın bir fonksiyonu olarak çizimi Şekil 2.21(a)'da gösterilen grafiği verir. Çizilen doğrunun denklemi

$$v_t = 30 - 5i_t$$

ile verilir. Şimdi gerilim ve akım arasında aynı bağıntıyı verecek bir devre modelinin bileşenlerini bulacağız. Kirchhoff gerilim yasasına göre iki seri bileşen üzerindeki gerilim düşüşü toplanır. Denklemden, bu iki elemandan birinin akımdan bağımsız olarak 30 V düşüşe sahip olduğunu biliyoruz. Bu bileşen, bir ideal gerilim kaynağı olarak modellenebilir. Diğer bileşen, i_t akımı yönünde pozitif bir gerilim düşmesi verir. Gerilim düşüşü akımla orantılı olduğu için, Ohm yasasına göre bu bileşeni 5 Ω değerli bir ideal dirençle modelleyebiliriz. Sonuçta bulunan devre modeli Şekil 2.21(b)'deki kesikli çizilmiş olan kutunun içindedir.



Şekil 2.21 (a) Şekil 2.20(a)'daki cihaz için i_t'ye karşı v_t grafiği. (b) 10 Ω dirence bağlanmış olan devre modeli.

b) Şimdi Şekil 2.21(b)'deki devreye 10 Ω'luk bir direnç bağlayarak devreyi tamamlayacağız. Kirchhoff akım yasasına ve Ohm yasasına göre, gerilim kaynağından başlayarak devrenin etrafındaki gerilim düşüşlerini saat yönünde ilerleyerek yazarsak

$$-30 + 5i + 10i = 0.$$

buluruz. i için çözersek,

$$i = 2 \text{ A}$$

elde ederiz. Bu 10 Ω dirençte akan akım olduğundan, $p=i^2R$ güç denklemini kullanarak bu dirence aktarılan gücü aşağıdaki gibi buluruz.

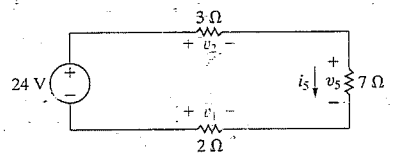
$$p_{10\Omega} = (2)^2(10) = 40 \text{ W}.$$

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 2–Ohm yasasını ve Kirchhoff gerilim ve akım yasalarını bilmek ve kullanabilmek

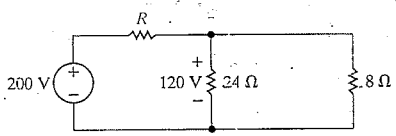
2.5 Şekilde gösterilen devrede (a) i_5, (b) v_1, (c) v_2, (d) v_5 değerlerini ve (e) 24 V kaynağın verdiği gücü hesaplayınız.

Cevap: (a) 2 A;
(b) –4 V;
(c) 6 V;
(d) 14 V;
(e) 48 W.



2.6 Şekilde gösterilen devrede R'nin değerini Ohm yasasını ve Kirchhoff yasalarını kullanarak bulunuz.

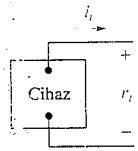
Cevap: $R = 4\ \Omega$.



2.7 a) Şekilde gösterilen cihazın terminal gerilimi ve terminal akımı ölçülmüştür. v_t ve i_t değerleri tabloda verilmiştir. Bu değerleri kullanarak v_t'nin i_t'ye karşı düz doğru çizimini oluşturunuz. Doğrunun denklemini bulunuz ve denklemi kullanarak cihaz için bir ideal gerilim kaynağı ve bir dirence sahip bir devre modeli oluşturunuz.

b) (a)'da oluşturulan modeli kullanarak cihazın 25 Ω'luk bir dirence aktaracağı gücü bulunuz.

Cevap: (a) 25 V bir kaynak ve ona seri 100 Ω direnç,
(b) 1 W.



(a)

v_t (V)	i_t (A)
25	0
15	0.1
5	0.2
0	0.25

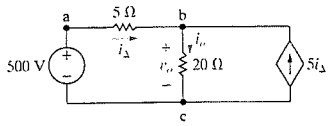
(b)

2.8 Problemi 2.7'yi tekrar çözünüz ve bu kez doğrunun denklemini kullanarak bir ideal akım kaynağı ve bir ideal dirençten oluşan devre modeli kurunuz.

Cevap: (a) 100 W'lık bir direncin terminalleri arasına bağlanmış 0.25 A'lik bir akım kaynağı.
(b) 1 W.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 2.14, 2.17, 2.18 ve 2.19'u da çözmeyi deneyiniz.

2.5 Bağımlı Kaynaklar İçeren Bir Devrenin Analizi



Şekil 2.22 Bağımlı kaynak içeren bir devre.

Temel devre analizine yaptığımız bu girişi, Şekil 2.22'de gösterildiği gibi bağımlı kaynak içeren bir devrenin tartışması ile bitireceğiz.

Bu devrede v_o ve i_o'yu bulmak için Kirchhoff yasalarını ve Ohm yasasını kullanacağız. Denklem yazmadan önce devre şemasını yakından incelemek iyi bir yaklaşımdır. Bu bizim bildiğimiz ve hesaplamamız gereken bilgileri netleştirmemize yardımcı olur. Ayrıca devreyi sadece birkaç hesaplama kullanarak çözmek için bir strateji geliştirmemize de yardımcı olabilir.

Şekil 2.22'deki devreden aşağıdaki gözlemler yapılabilir.

- i_o'yu bildiğimizde Ohm yasası ile v_o'yu hesaplayabiliriz.
- i_Δ'yı bildiğimizde, bağımlı kaynağın verdiği akımı da ($5\,i_\Delta$) biliriz.
- 500 V'luk kaynaktaki akım i_Δ'dır.

Böylece iki bilinmeyen akım i_Δ ve i_s vardır. v_o değerini bulmak için, bu akımları içeren iki bağımsız denklem oluşturup çözmeliyiz.

Devrede gerilim kaynağını, 5 Ω direnci ve 20 Ω direnci içeren kapalı yola dikkat ediniz. Bu kapalı yol etrafında Kirchhoff gerilim yasasını uygulayabiliriz. Sonuçta bulunan denklem sadece iki bilinmeyen akıma sahiptir:

$$500 = 5i_\Delta + 20i_o. \qquad (2.22)$$

Şimdi bu iki akımı içeren ikinci bir denklem oluşturacağız. 20 Ω direnç ve bağımlı akım kaynağının oluşturduğu kapalı yolu düşününüz. Eğer bu yola Kirchhoff gerilim yasasını uygulamaya çalışırsak kullanışlı bir denklem elde edemeyiz. Çünkü bağımlı akım kaynağı üzerindeki gerilimi bilmiyoruz. Gerçekte bağımlı kaynak üzerindeki gerilim, bilmediğimiz gerilim olan v_o'dur. Bu döngü için bir denklem yazmak bizi çözüme doğru ilerletmez. Aynı nedenle, gerilim kaynağı, 5 Ω direnç ve bağımlı kaynaktan oluşan kapalı yolu da kullanamayız.

Bu devrede üç düğüm vardır bu nedenle ikinci denklemi üretmek için Kirchhoff akım yasasına döneriz. a düğümü, daha önce gözlemlediğimiz gibi, gerilim kaynağı ile 5 Ω direnci bağlamaktadır ve bu iki elemandaki akım aynıdır. b düğümü veya c düğümü Kirchhoff akım yasasından ikinci denklemi üretmek için kullanılabilir. b düğümünü seçerek aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$i_o = i_\Delta + 5i_\Delta = 6i_\Delta. \qquad (2.23)$$

Eş. 2.22 ve 2.23'ün akımlar için çözümü

$$i_\Delta = 4\ \text{A},$$

$$i_o = 24\ \text{A} \qquad (2.24)$$

verir. Eş. 2.24'ü ve 20 Ω direnç için Ohm yasasını kullanarak v_o gerilimini

$$v_o = 20i_o = 480\ \text{V}$$

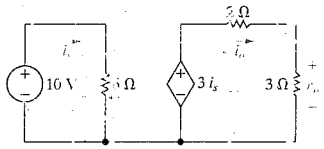
verir. Denklemleri yazmaya başlamadan önce bir devre analiz stratejisi hakkında düşünmek gerekir. Gösterdiğimiz gibi her kapalı yola Kirchhoff gerilim yasası uygulandığında kullanışlı bir denklem elde edilmez. Her düğüme de Kirchhoff akım yasası kullanışlı bir şekilde uygulanamaz. Problem hakkında biraz ön düşünce en yararlı yaklaşımın seçiminde ve özel bir problem için en yararlı analiz aracının belirlenmesinde yardımcı olur. İyi bir yak-

laşımın ve uygun araçların seçimi genellikle çözülecek denklem sayısını ve karmaşıklığını azaltır. Örnek 2.10 Ohm yasasının ve Kirchhoff yasalarının bağımlı kaynak içeren bir devreye bir diğer uygulamasını sergilemektedir. Örnek 2.11 çok daha karmaşık bir devre içerir ama dikkatli bir analiz araç seçimi ile analiz görece sadeleşecektir.

Örnek 2.10 Bilinmeyen Bir Gerilimi Bulmak İçin Ohm Yasası ve Kirchhoff Yasalarının Uygulanması

a) Şekil 2.23'te gösterilen v_o gerilimini Kirchhoff yasaları ve Ohm yasasını kullanarak bulunuz.

b) Çözümünüzün, devrede üretilen toplam gücün devrede harcanan toplam güce eşit olduğu kısıtıyla tutarlı olduğunu gösteriniz.



Şekil 2.23 Örnek 2.10'un devresi.

Çözüm

a) Şekil 2.23'teki devrenin yakından incelenmesi aşağıdakileri verir:

- İki kapalı yol vardır, soldakinde akım i_s'dir, sağdakinde ise i_o'dur.
- i_o bilindiğinde v_o hesaplanabilir.

İki akım için iki denkleme ihtiyaç vardır. İki kapalı yol olduğu ve her ikisinde de gerilim kaynağı olduğundan her birine Kirchhoff gerilim yasasını uygulayarak aşağıdaki iki denklemi buluruz:

$$10 = 6i_s,$$

$$3i_s = 2i_o + 3i_o.$$

Akımlar için çözüm

$$i_s = 1.67 \text{ A},$$

$$i_o = 1 \text{ A}$$

verir. 3 Ω dirence Ohm yasasının uygulanması istenen gerilimi verir.

$$v_o = 3i_o = 3 \text{ V}.$$

a) Gerilim kaynaklarına aktarılan gücü hesaplamak için $p = vi$ biçimindeki güç denklemini kullanacağız. Bağımsız gerilim kaynağına aktarılan güç

$$p = (10)(-1.67) = -16.7 \text{ W}$$

bulunur. Bağımlı gerilim kaynağına aktarılan güç ise

$$p = (3i_s)(-i_o) = (5)(-1) = -5 \text{ W}$$

olur. Her iki kaynak güç üretmektedir ve toplam üretilen güç 21.7 W'tır.

Dirençlere aktarılan gücü hesaplamak için $p = i^2R$ denklemini kullanacağız. 6 Ω dirence aktarılan güç

$$p = (1.67)^2(6) = 16.7 \text{ W}$$

olur. 2 Ω dirence aktarılan güç ise

$$p = (1)^2(2) = 2 \text{ W}$$

bulunur. 3 Ω dirence aktarılan güç ise

$$p = (1)^2(3) = 3 \text{ W}$$

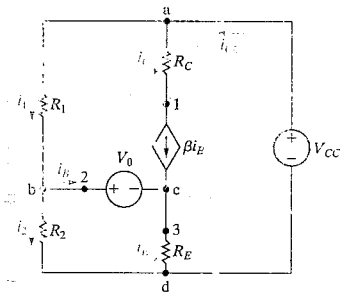
elde edilir. Dirençlerin tümü güç harcamaktadır ve toplam harcanan güç 21.7 W'tır ve kaynakların ürettiği güce eşittir.

Örnek 2.11 Ohm Yasasının ve Kirchhoff Yasasının Bir Yükselteç Devresine Uygulanması

Şekil 2.24 transistörlü yükselteçlerin analiz ve tasarımında yaygın görülen bir devreyi göstermektedir. Tüm devre elemanlarının (R_1, R_2, R_C, R_E, V_{CC} ve V_o) bilindiğini kabul ediniz.

a) Bu devrenin her bir elemanındaki akımı belirlemek için gerekli denklemleri bulunuz.

b) Bu denklemlerden, i_B'yi devre eleman değerleri cinsinden verecek bir formül çıkarınız.



Şekil 2.24 Örnek 2.11'in devresi.

Çözüm

Devrenin dikkatli bir incelemesi i_1, i_2, i_B, i_C, i_E ve i_{CC} olmak üzere altı bilinmeyen akım olduğunu gösterir. Bu altı bilinmeyen akımı tanımlarken, R_C'nin βi_B bağımlı kaynağı ile seri olduğu gözlemini kullandık. Şimdi bu altı bilinmeyen akımı içeren altı bağımsız denklem çıkarmalıyız.

a) a, b, c ve d düğümlerinden herhangi üçüne Kirchhoff akım yasasını uygulayarak üç denklem çıkarabiliriz. a, b ve c düğümlerini seçelim ve düğümlerden çıkan akımlara pozitif işaret atayalım:

$$(1) \quad i_1 + i_C - i_{CC} = 0,$$

$$(2) \quad i_B + i_2 - i_1 = 0,$$

$$(3) \quad i_E - i_B - i_C = 0.$$

Dördüncü denklem, R_C ve bağımlı kaynağın verdiği kısıt zorlanarak elde edilebilir:

$$(4) \quad i_C = \beta i_B.$$

Şimdi kalan iki denklemi çıkarmak için Kirchhoff gerilim yasasına döneceğiz. Kirchhoff gerilim yasasını kullanabilmek için iki kapalı yol seçmeliyiz. Bağımlı akım kaynağının üzerindeki gerilimin bilinmediğine ve kaynak akımı βi_B'den belirlenemediğine dikkat ediniz. Sonuç olarak, bu bağımlı akım kaynağını içermeyen iki yol seçmeliyiz.

bcdb ve badb kapalı yollarını seçer ve gerilim düşüşlerini pozitif alarak

$$(5) \quad V_0 + i_E R_E - i_2 R_2 = 0,$$

$$(6) \quad -i_1 R_1 + V_{CC} - i_2 R_2 = 0$$

buluruz.

b) i_B için bilinen devre değişkenleri cinsinden tek bir denklem elde etmek için aşağıdaki adımları izleriz.

- Eş. (6)'yı i_1 için çözüp bu çözümü Eş. (2)'de yerine koyarız.
- Yeni Eş. (2)'yi i_2 için çözüp bu i_2 çözümünü Eş. (5)'te yerine koyarız.
- Yeni Eş. (5)' i i_E için çözüp, bu i_E çözümünü Eş. (3)'te yerine koyarız. Eş. (4)'ü kullanarak Eş. (3)'ten i_C'yi yok ederiz.
- Yeni Eş. (3)'ü i_B için çözer ve terimleri düzenleyerek

$$i_B = \frac{(V_{CC}R_2)/(R_1 + R_2) - V_0}{(R_1R_2)/(R_1 + R_2) + (1 + \beta)R_E} \quad (2.25)$$

elde ederiz.

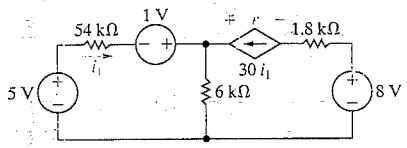
Problem 2.27 bu adımları sağlamanızı istemektedir. i_B bilindiğinde diğer akımların kolaylıkla bulunabileceğine dikkat ediniz.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 3–Basit bir devrede her elemanın gücünün nasıl hesaplanacağını bilmek

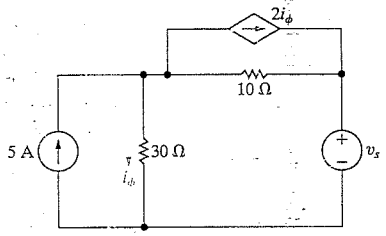
2.9 Şekilde gösterilen devrede (a) i_1 akımını mikroamper cinsinden, (b) v gerilimini volt cinsinden, (c) *toplam* üretilen gücü ve (d) toplam soğurulan gücü hesaplayınız.

Cevap: (a) 25 μA;
(b) –2 V;
(c) 6150 μW;
(d) 6150 μW;



2.10 Şekilde gösterilen devrede i_Φ akımı 2 A'dir.
a) v_s'yi,
b) bağımsız gerilim kaynağının soğurduğu gücü,
c) bağımsız akım kaynağının sağladığı gücü,
d) kontrollü akım kaynağının sağladığı gücü,
e) iki dirençte harcanan toplam gücü bulunuz.

Cevap: (a) 70 V;
(b) 210 W;
(c) 300 W;
(d) 40 W;
(e) 130 W;



NOT: Ayrıca Bölüm Problemleri 2.24 ve 2.28'i de çözünüz.

Pratik Bakış Açısı

Elektriksel Güvenlik

Bu bölümün başında, vücuttan geçen akımın yaralanmaya neden olabileceğini söylemiştik. Şimdi elektriksel güvenliğin bu yönünü inceleyelim.

Elektriksel yaralanmaların sadece yanıklar olduğunu düşünebilirsiniz. Ancak bu doğru değildir. En yaygın elektriksel yaralanma sinir sistemindedir. Sinirler elektrokimyasal sinyaller kullanır ve elektrik akımı bu sinyalleri bozar. Akımın yolu sadece iskelet kaslarını içerdiğinde etkiler geçici felç (sinir sinyallerinin yok olması) veya istemsiz kasılmalardır ve bunlar genel olarak hayati tehlike içermez. Ancak akım yolu beyne oksijen sağlanmasını kontrol eden sinir ve kasları içerdiğinde problem çok daha ciddidir. Bu kasların geçici felci kişinin nefes alış verişini durdurabilir ve ani bir kas kasılması kalp atımını düzenleyen sinyalleri bozabilir. Sonuç beyne oksijenlenmiş kan akışında duraksa-

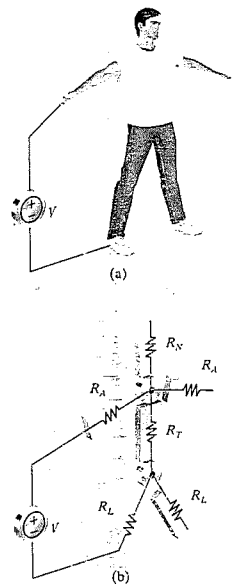
madır ve acil yardım hemen yapılmazsa birkaç dakika içinde ölüme neden olur. Tablo 2.1 çeşitli akım seviyelerine gösterilen fizyolojik tepkileri göstermektedir. Bu tablodaki sayılar yaklaşıktır. Bunlar kazaların analizinden elde edilmiştir çünkü insanlar üzerinde elektriksel deneyler yapmanın etik olmadığı açıktır. İyi elektriksel tasarım akımı her koşul altında birkaç miliamper veya daha azına sınırlar.

TABLO 2.1 İnsanların Akım Seviyelerine Fizyolojik Tepkisi

Fizyolojik Tepki	Akım
Kabaca hissedilir	3–5 mA
Aşırı acı	35–50 mA
Kas felci	50–70 mA
Kalp durması	500 mA

Not: Veri W. F. Cooper, *Electrical Safety Engineering* 2. Baskı (Londra Butterworth,1986) ve C.D Winburn, *Practical Electrical Safety* (Monticello, N.Y.: Marcel Dekker, 1988)'den alınmıştır.

Şimdi insan vücudunun basitleştirilmiş bir modelini geliştireceğiz. Vücut akım için bir iletken olarak davranır. Bu nedenle makul bir başlangıç, vücudu direnç kullanarak modellemektir. Şekil 2.25 tehlike olasılığı olan bir durumu göstermektedir. Bir insanın bir kolu ve bir bacağı arasında bir potansiyel farkı vardır. Şekil 2.25(b), Şekil 2.25(a)'daki insan vücudunun elektriksel modelini göstermektedir. Kollar, bacaklar, boyun ve gövde (göğüs ve karın) ayrı özel direnca sahiptir. Akımın yolunun, kalbi içeren gövde boyunca olduğuna dikkat ediniz; bu durum potansiyel olarak ölümcüldür.



Şekil 2.25 (a) Bir kolu ve bir bacağı arasında bir gerilim farkı olan bir insan vücudu. (b) Bir kolu ve bir bacağı arasında gerilim farkı olan insan vücudunun basitleştirilmiş modeli.

NOT: Pratik Bakış Açısını anlayışınızı, Bölüm Problemlerinden 2.34-2.38'i çözerek değerlendiriniz.

Özet

- Bu bölümde tanıtılan devre elemanları gerilim kaynakları, akım kaynakları ve dirençlerdir.
  - Bir **ideal gerilim kaynağı** cihazdaki akımdan bağımsız olarak belli bir gerilimi korur. Bir **ideal akım kaynağı** cihaz üzerindeki gerilimden bağımsız olarak belli bir akım verir. Gerilim ve akım kaynakları ya **bağımsız**dırlar yani devredeki herhangi bir akım veya gerilimden etkilenmezler veya **bağımlı**dırlar ve devredeki bazı akım veya gerilim tarafından belirlenirler (bkz. Sf. 24 ve 25).
- Bir **direnç** gerilim ve akımını birbiri ile orantılı olmaya kısıtlar. Gerilimi akıma bağlayan orantı sabitinin değeri **direnç**tir ve ohm ile ölçülür (bkz. Sf. 28).
- **Ohm yasası** bir dirençte gerilim ve akım arasındaki ilişkiyi verir. Eğer dirençteki akım akışı, üzerindeki gerilim düşüşü yönündeyse bu ilişki

$$v = iR \qquad (2.26)$$

ile ve eğer akım dirençte gerilim artışı yönünde akıyorsa

$$v = -iR \qquad (2.27)$$

ile verilir. (Bkz. Sf.29.)

- Güç denklemi $p = vi$ ile Ohm yasasını birleştirerek bir direncin soğurduğu gücü hesaplayabiliriz:

$$p = i^2R = v^2/R. \qquad (2.28)$$

(Bkz. Sf. 30.)

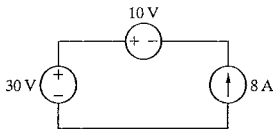
- Devreler düğümler ve kapalı yollarla açıklanır. Bir düğüm, iki veya daha çok elemanın birleştiği yerdir. Sadece iki eleman bir düğüm oluşturduğunda bunlara seri denir. Bir kapalı yol, başlandığı düğümde bitecek ve aradaki düğümlerden sadece bir kez geçilecek şekilde elemanları birleştiren bir döngüdür. (Bkz. Sf. 36-38.)
- Birbirine bağlı devre elemanlarının gerilim ve akımları Kirchhoff yasalarına uyar.
- **Kirchhoff akım yasası** bir devrede herhangi bir düğümdeki tüm akımların cebirsel toplamının sıfıra eşit olduğunu belirtir. (Bkz. Sf. 36.)
- **Kirchhoff gerilim yasası** bir devredeki herhangi bir kapalı yol etrafındaki gerilimlerin cebirsel toplamının sıfıra eşit olduğunu belirtir. (Bkz. Sf. 37.)
- Bir devre, tüm elemanlarındaki akım ve gerilim değerleri belirlendiğinde çözülmüştür denir. Bağımsız ve bağımlı kaynakların, Ohm yasasının ve Kirchhoff yasalarının anlayışını birleştirerek birçok basit devreyi çözebiliriz.

Problemler

Kısım 2.1

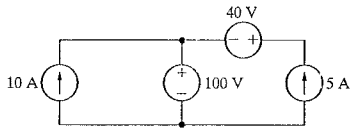
2.1 a) Şekil P2.1'deki ideal kaynak bağlantısı geçerli midir? Açıklayınız.
b) Hangi kaynakların güç üretip, hangilerinin güç soğurduğunu belirtiniz.
c) Devrede üretilen toplam gücün soğurulan toplam güce eşit olduğunu gösteriniz.
d) 10 V kaynağın kutupluğunu ters çevirerek (a)-(c)'yi tekrar çözünüz.

Şekil P2.1



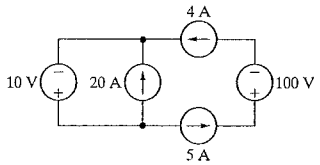
2.2 Eğer Şekil P2.2'deki bağlantı geçerli ise akım kaynaklarının verdiği gücü bulunuz. Eğer bağlantı geçerli değilse nedenini açıklayınız.

Şekil P2.2



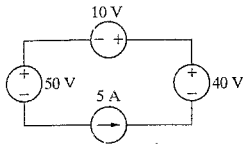
2.3 Eğer Şekil P2.3'teki bağlantı geçerli ise gerilim kaynaklarının verdiği gücü bulunuz. Eğer bağlantı geçerli değilse nedenini açıklayınız.

Şekil P2.3



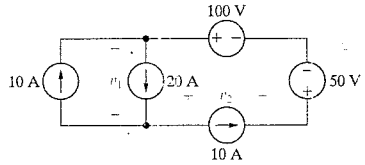
2.4 Eğer Şekil P2.4'teki bağlantı geçerli ise devrede üretilen toplam gücü bulunuz. Eğer bağlantı geçersizse nedenini açıklayınız.

Şekil P2.4



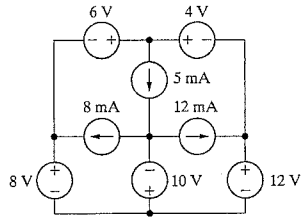
2.5 İdeal kaynakların bağlantıları belirsiz bir çözüme neden olabilir. Bu düşünceyi akılda tutarak Şekil P2.5'teki devrede v_1 ve v_2 çözümlerinin neden tek olmadığını açıklayınız.

Şekil P2.5



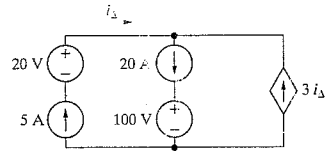
2.6 Eğer Şekil P2.6'daki bağlantı geçerli ise devrede üretilen toplam gücü bulunuz. Eğer bağlantı geçersizse nedenini açıklayınız.

Şekil P2.6



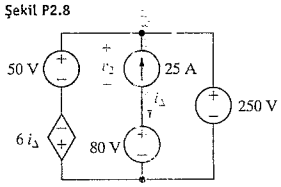
2.7 a) Şekil P2.7'deki bağlantı geçerli midir? Açıklayınız.
b) Devrede üretilen toplam gücü bulabilir misiniz? Açıklayınız.

Şekil P2.7



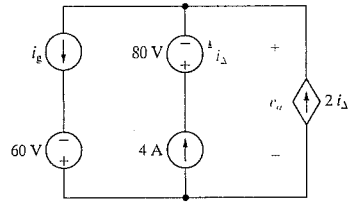
2.8 Eğer Şekil P2.8'deki bağlantı geçerli ise devrede üretilen toplam gücü bulunuz. Eğer bağlantı geçersizse nedenini açıklayınız.

Şekil P2.8



2.9 Eğer $v_o = 100$ V ve $i_g = 12$ A ise Şekil P2.9'daki devrede üretilen toplam gücü bulunuz.

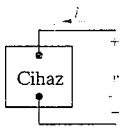
Şekil P2.9



Kısım 2.2-2.3

2.10 Şekil P2.10(a)'da gösterilen devrede terminal gerilimi ve terminal akımı ölçülmüştür. v ve i değerleri Şekil P2.10(b)'deki tabloda verilmiştir. Tablodaki değerleri kullanarak cihazın tek bir direnç içeren bir devre modelini oluşturunuz.

Şekil P2.10



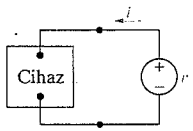
(a)

i (mA)	v (V)
−20	−160
−10	−80
10	80
20	160
30	240

(b)

2.11 Şekil P2.11(a)'da gösterilen devreye birçok değişik gerilim kaynağı değeri uygulanmıştır. Cihazın her gerilim değeri için soğurduğu güç Şekil P2.11(b)'deki tabloda verilmiştir. Tablodaki değerleri kullanarak cihazın tek bir direnç içeren bir devre modelini oluşturunuz.

Şekil P2.11



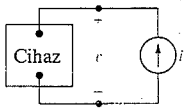
(a)

v (V)	p (mW)
−10	25.0
−5	6.25
5	6.25
10	25.0
15	56.25
20	100

(b)

2.12 Şekil P2.12(a)'da gösterilen devreye birçok değişik akım kaynağı değeri uygulanmıştır. Cihazın her akım değeri için soğurduğu güç Şekil P2.12(b)'deki tabloda verilmiştir. Tablodaki değerleri kullanarak cihazın tek bir direnç içeren bir devre modelini oluşturunuz.

Şekil P2.12



(a)

i (A)	p (W)
2	100
4	400
6	900
8	1600
10	2500
12	3600

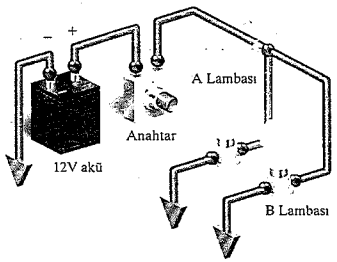
(b)

2.13 Bir çift otomobil farı Şekil P2.13'teki düzenleme ile 12 V'luk bir aküye bağlanmıştır. Şekilde üçgensel ▼ sembolü terminalin doğrudan arabanın metal şasesine bağlandığını göstermek amacıyla kullanılmıştır.

a) Bir bağımsız gerilim kaynağı ve dirençler içeren bir devre modeli oluşturunuz.

b) İdeal devre elemanı ve temsil ettiği sembol bileşen arasındaki eşlemeyi belirtiniz.

Şekil P2.13

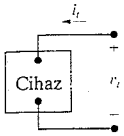


2.14 Şekil P2.14(a)'da gösterilen devrede terminal gerilimi ve terminal akımı ölçülmüştür. Ölçüm değerleri Şekil P2.14(b)'deki tabloda verilmiştir.

a) Tablodaki değerleri kullanarak cihazın bir ideal akım kaynağı ve bir direnç içeren bir devre modelini oluşturunuz.

b) Modeli kullanarak cihazın 5 Ω'luk bir dirence aktaracağı gücü tahmin ediniz.

Şekil P2.14



(a)

v_t (V)	i_t (A)
100	0
180	4
260	8
340	12
420	16

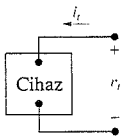
(b)

2.15 Şekil P2.15(a)'da gösterilen devrede terminal gerilimi ve terminal akımı ölçülmüştür. Sonuçlar Şekil P2.15(b)'deki tabloda verilmiştir.

a) Bu cihazın bir ideal gerilim kaynağı ve bir direnç içeren bir devre modelini oluşturunuz.

b) Modeli kullanarak v_t sıfırken i_t değerini tahmin ediniz.

Şekil P2.15



(a)

v_t (V)	i_t (A)
50	0
58	2
66	4
74	6
82	8
90	10

(b)

2.16 Şekil P2.16(a)'daki tablo, Şekil P2.16(b)'deki pratik sabit akım kaynağının terminal akımı ve gerilimi arasındaki bağıntıyı vermektedir.

a) v_s'ye karşı i_s'yi çiziniz.

b) (a) şıkkında çizdiğiniz doğru denklemine dayanarak bu akım kaynağı için $0 \leq v_s \leq 30$ V için geçerli olan bir devre modelini oluşturunuz.

c) Devrenizi kullanarak 3 kΩ'luk bir dirence verilen akımı tahmin ediniz.

d) Devrenizi kullanarak akım kaynağının açık devre gerilimini tahmin ediniz.

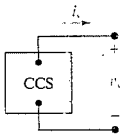
e) Gerçek açık devre gerilimi nedir?

f) (d) ve (e) şıklarının cevaplarının neden aynı olmadığını açıklayınız.

Şekil P2.16

i_s (mA)	v_s (V)
40	0
35	10
30	20
25	30
18	40
8	50
0	55

(a)



(b)

2.17 Şekil P2.17(a)'daki tablo, Şekil P2.17(b)'deki pratik sabit gerilim kaynağının terminal akımı ve gerilimi arasındaki bağıntıyı vermektedir.

a) i_s'ye karşı v_s'yi çiziniz.

b) (a) şıkkında çizdiğiniz doğru denklemine dayanarak bu pratik kaynak için $0 \leq i_s \leq 225$ mA için geçerli olan bir devre modelini oluşturunuz. (Bir ideal gerilim kaynağı ve ona seri bir ideal direnç kullanınız.)

c) Devrenizi kullanarak pratik kaynağın terminallerine bağlanan 400 Ω'luk bir dirence verilen akımı tahmin ediniz.

d) Devrenizi kullanarak pratik kaynağın terminallerine bağlanan bir kısa devreye verilen akımı tahmin ediniz.

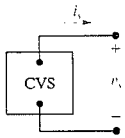
e) Gerçek kısa devre akımı nedir?

f) (d) ve (e) şıklarının cevaplarının neden aynı olmadığını açıklayınız.

Şekil P2.17

v_s (V)	i_s (mA)
75	0
60	75
45	150
30	225
20	300
10	400
0	500

(a)

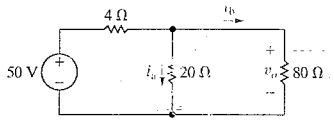


(b)

Kısım 2.4

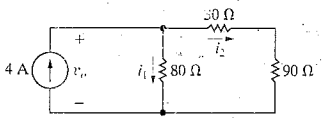
2.18 PSPICE Şekil P2.18'de verilen devrede,
a) i_a değerini,
b) i_b değerini,
c) v_o değerini,
d) her bir dirençte harcanan gücü,
e) 50 V kaynağın verdiği gücü bulunuz.

Şekil P2.18



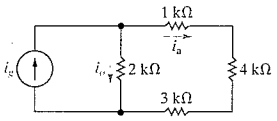
2.19 PSPICE a) Şekil P2.19'daki devrede i_1 ve i_2'yi bulunuz.
b) v_o gerilimini bulunuz.
c) Üretilen toplam gücün harcanan toplam güce eşit olduğunu gösteriniz.

Şekil P2.19



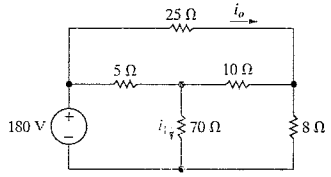
2.20 PSPICE Şekil P2.20'de gösterilen devredeki i_a akımı 2 mA'dir. (a) i_o'yu, (b) i_g'yi ve (c) bağımsız akım kaynağınca aktarılan gücü bulunuz.

Şekil P2.20



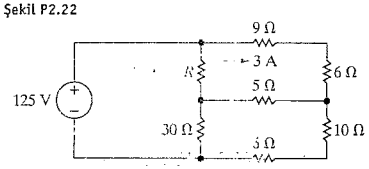
2.21 PSPICE Şekil P2.21'de verilen devredeki i_o akımı 4 A'dir.
a) i_1'i bulunuz.
b) Her bir dirençte harcanan gücü bulunuz.
c) Devrede harcanan toplam gücün 180 V kaynakça üretilen güce eşit olduğunu gösteriniz.

Şekil P2.21



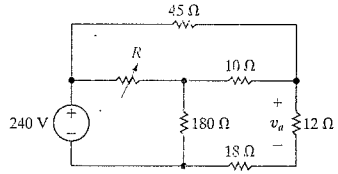
2.22 PSPICE Şekil P2.22'de gösterilen devrede (a) R'yi ve (b) 125 V kaynağın sağladığı gücü bulunuz.

Şekil P2.22



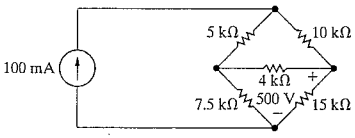
2.23 PSPICE Şekil P2.23'teki değişken R direnci v_a 60 V olacak şekilde ayarlanıyor. R'nin değerini bulunuz.

Şekil P2.23



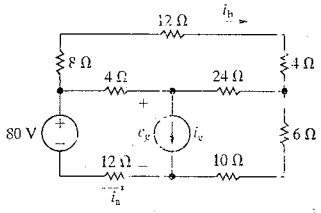
2.24 PSPICE Şekil P2.24'teki devrede 15 kΩ direnç üzerindeki gerilim, üst terminal pozitif alındığında 500 V'tur.
a) Her bir dirençte harcanan gücü bulunuz.
b) 100 mA'lik ideal akım kaynağının sağladığı gücü bulunuz.
c) Üretilen gücün toplam harcanan güce eşit olduğunu gösteriniz.

Şekil P2.24



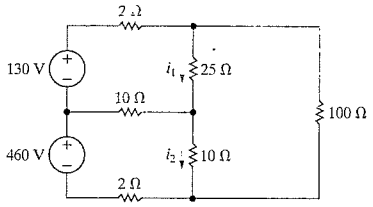
2.25 PSPICE Şekil P2.25'teki devrede i_a ve i_b akımları, sırasıyla 4 A ve 2 A'dir.
a) i_g'yi bulunuz.
b) Her bir dirençte harcanan gücü bulunuz
c) v_g'yi bulunuz.
d) Akım kaynağınca sağlanan gücün tüm diğer elemanlarca soğurulan güce eşit olduğunu gösteriniz.

Şekil P2.25



2.26 Şekil P2.26'daki devrede i_1 ve i_2 akımları, sırasıyla 10 A ve 25 A'dir.
a) Her bir gerilim kaynağının sağladığı gücü bulunuz.
b) Sağlanan toplam gücün dirençlerde harcanan toplam güce eşit olduğunu gösteriniz.

Şekil P2.26

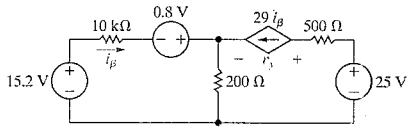


Kısım 2.5

2.27 Eş 2.25'i çıkarınız. *İpucu:* Örnek 2.11'deki Eş. (3) ve (4)'ü, i_E'yi i_B'nin bir fonksiyonu olarak ifade etmek için kullanınız. Eş. (2)'yi i_2 için çözünüz ve sonucu Eş. (5) ve (6)'nın her ikisinde de kullanınız. Yeni Eş. (6)'yı i_1 için çözünüz ve sonucu yeni Eş. (5)'te yerine koyunuz. Yeni Eş. (5)'te i_E'yi yeniden yazıp, i_B için çözünüz. i_{CC} sadece Eş. (1)'de göründüğü için i_B çözümünün sadece beş denklemle uğraşılmasını gerektirdiğine dikkat ediniz.

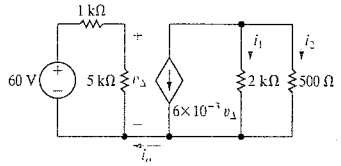
2.28 PSPICE a) Şekil P2.28'deki devrede v_y'yi bulunuz.
b) Devrede üretilen toplam gücün soğurulan toplam güce eşit olduğunu gösteriniz.

Şekil P2.28



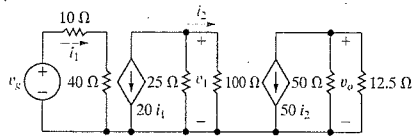
2.29 PSPICE Şekil P2.29'daki devrede, (a) i_o'yu, (b) i_1'i ve (c) i_2'yi bulunuz.

Şekil P2.29



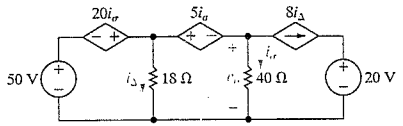
2.30 PSPICE Şekil P2.30'daki devrede v_o 250 mV'a eşit olduğunda v_1 ve v_g'yi bulunuz. (*İpucu:* Devrenin sağ ucundan başlayıp geriye doğru v_g'ye kadar çalışınız.)

Şekil P2.30



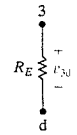
2.31 PSPICE Şekil P2.31'de verilen devrede, (a) i_Δ ve v_Δ'yı hesaplayınız ve (b) üretilen gücün harcanan güce eşit olduğunu gösteriniz.

Şekil P2.31



2.32 PSPICE Şekil P2.24'teki devrede R_1=20 kΩ, R_2=80 kΩ, R_C=500 Ω, R_E=100 Ω, V_{CC}=15 V, V_o=200 mV ve β=39'dur. i_B, i_C, i_E, v_{3d}, v_{bd}, i_2, i_1, v_{ab}, i_{CC} ve v_{13}'ü hesaplayınız. *Not:* Gerilim değişkenlerinin ikili altindis gösteriminde ilk altindis ikinciye göre pozitiftir. Bkz. Şekil P2.32.)

Şekil P2.32



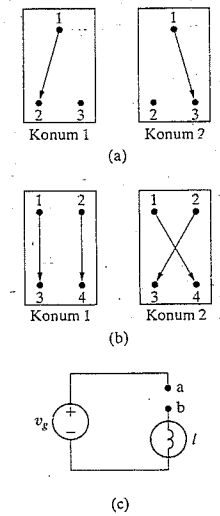
Kısım 2.1-2.5

2.33 TASARIM PROBLEMİ Elektrik kablo döşeme tasarımında sıklıkla bir cihazın iki ayrı yerden kontrolü istenir. Buna merdivenin iki ucundan kontrol edilmesi istenen aydınlanma verilebilir. Bazı ev kablolama sistemlerinde bu tip kontrol üç yollu veya dört yollu anahtarlarla gerçekleştirilir. Üç yollu bir anahtar üç terminalli, iki konumlu bir anahtardır. Dört yollu bir anahtar ise dört terminalli iki konumlu bir anahtardır. Anahtarlar şematik olarak üç yollu anahtarı gösteren P2.33(a)'da ve dört yollu anahtarı gösteren P2.33(b)'de gösterilmiştir.

a) Şekil 2.33(c)'deki devrede üç yollu iki anahtarın a ve b arasına nasıl bağlanarak *l* lambasının iki konumdan da açılıp kapanabileceğini gösteriniz.

b) Eğer lamba (cihaz) iki noktadan daha fazla yerden kontrol edilmek isteniyorsa bu, üç yollu anahtarlarla dört yollu anahtarlar birlikte kullanılarak gerçekleştirilebilir. İkiden daha çok her konum için bir dört yollu anahtar gerekir. Şekil P2.33(c)'de bir dört yollu ve iki üç yollu anahtarın nasıl a ve b arasına bağlanarak lambanın üç konumdan kontrol edilebileceğini gösteriniz. (*İpucu:* Dört yollu anahtar üç yollu anahtarların arasına konmalıdır.)

Şekil P2.33



2.34 PRATİK BAKIŞ AÇISI Güç şirketinin bir insana 250 V şok verebilecek bir cihazı monte ettiğini varsayınız. Sonuçtaki akım bir ikaz işareti asıp böyle bir şoku önlemek için başka önlemler alacak kadar yüksek midir? Kaynak 250 V iken kolun direncinin 400 Ω, gövdenin 50 Ω ve bacağın 200 Ω olduğunu kabul ediniz. Şekil 2.25(b)'de verilen modeli kullanınız.

2.35 PRATİK BAKIŞ AÇISI Şekil 2.25'teki model ve devreye dayanarak, iki ayağı kaynağın negatif terminalinde iken iki elle diğer kaynak terminalini tutan bir insan vücudunda akım yolu için bir devre modeli çiziniz.

2.36 PRATİK BAKIŞ AÇISI a) Problem 2.34'te verilen kol, bacak ve gövde direnç değerlerini kullanarak kol, bacak ve gövdede harcanan gücü bulunuz.

b) Suyun öz ısısı 4.18 × 10^3 J/kg C°'dir. Böylece kütlesi M (kg) olan su P (W) güç ile ısıtılırsa

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2.39 \times 10^{-4} P}{M} \text{C°/s.}$$

ile verilen bir hızla ısınır. Bir kolun kütlesinin 4 kg, bacağın kütlesinin 10 kg, gövdenin kütlesinin 25 kg ve insan vücudunun çoğunlukla su olduğunu kabul ederek kol, bacak ve gövdenin canlı hücrelere tehlike sınırı olan 5 C°'ye çıkması kaç saniye alır?

c) (b)'de hesapladığınız değerlerin, beyin hasarına yol açan oksijen yoksunluğunun birkaç dakikası ile karşılaştırmasını yapınız.

2.37 PRATİK BAKIŞ AÇISI Bir kişi yanlışlıkla her biri bir elinde olmak üzere bir dc kaynağın iki iletkenini tutuyor.

a) Problem 2.34'te insan vücudu için verilen direnç değerlerini kullanarak, felce neden olacak ve kişinin iletkenleri bırakmasını engelleyecek kadar elektrik şoku oluşturacak minimum kaynak gerilimi nedir?

b) Tipik olarak 5 V ve 12 V'luk kaynaklara sahip olan bir kişisel bilgisayarı tamir ederken bu tip bir kaza olma olasılığı var mıdır?

2.38 PRATİK BAKIŞ AÇISI Gerilim seviyesinin, elektrik şok ile tek başına yaralanmayı belirlemediğini anlamak için bu bölümün başındaki Pratik Bakış Açısında anlatılan statik elektrik şoku durumunu düşününüz. Ayağınızı halıya sürttüğünüz zaman vücudunuz yüklenir. Bu yükün etkisi tüm vücudunuzun bir gerilim potansiyeline sahip olmasıdır. Bir metal kapı koluna dokunduğunuz zaman kol ile vücudunuz arasında bir gerilim farkı oluşur ve akım akar. Ancak akımın iletim ortamı vücudunuz değil, havadır!

Eliniz ile kapı kolu arasındaki boşluğun modelinin 1 MΩ'luk bir direnç olduğunu varsayınız. Eğer hafif şoka neden olan akım 3 mA ise elinizle kapı kolu arasındaki gerilim farkı nedir?

Basit Direnç Devreleri

BÖLÜM İÇERİĞİ

3.1 **Seri Dirençler** *s. 58*

3.2 **Paralel Dirençler** *s. 59*

3.3 **Gerilim Bölücü ve Akım Bölücü Devreler** *s. 62*

3.4 **Gerilim Bölünmesi ve Akım Bölünmesi** *s. 65*

3.5 **Gerilim ve Akım Ölçümü** *s. 68*

3.6 **Direnç Ölçümü – Wheatstone Köprüsü** *s. 71*

3.7 **Delta – Y (π – T) Eşdeğer** *s. 73*

✓ BÖLÜM HEDEFLERİ

1. Seri ve paralel bağlı dirençleri belirleyebilmek ve seri ve paralel bağlı dirençlerin birleşim kurallarını kullanarak eşdeğer direnci bulabilmek.
2. Basit gerilim bölücü ve akım bölücü devrelerin nasıl tasarlandığını bilmek.
3. Gerilim bölünmesi ve akım bölünmesini kullanarak basit devreleri çözebilmek.
4. Akım ölçmek üzere bir devreye eklenen bir ampermetrenin ve gerilim ölçmek üzere bir devreye bağlanan bir voltmetrenin okumasını belirleyebilmek.
5. Bir Wheatstone köprüsünün direnç ölçmek için nasıl kullanıldığını bilmek.
6. Basit devrelerin çözümünde delta – Y eşdeğer devrelerin ne zaman ve nasıl kullanılacağını bilmek.

Şimdi **analitik araçlarımıza** Ohm yasası ve Kirchhoff yasaları dahildir. 2. Bölümde bu araçları basit devre çözmek için kullandık. Bu bölümde bu araçları kullanmaya devam edeceğiz ancak daha karmaşık devreleri inceleyeceğiz. Karmaşıklık daha fazla eleman sayısından ve karmaşık bağlantılardan kaynaklanmaktadır. Bu bölüm böyle devreleri daha basit, eşdeğer devrelere indirgenmeye odaklanacaktır. Görece basit devrelere odaklanmaya iki nedenle devam edeceğiz: (1) Bizim daha gelişmiş yöntemlerin altında yatan yasaları detaylıca anlamamıza izin verirler ve (2) önemli mühendislik uygulamaları olan bazı devreleri tanımamıza imkan sağlarlar.

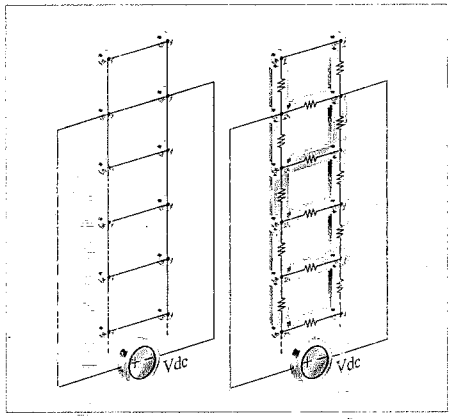
Bu bölümde tartışılan devrelerdeki kaynaklar sabit gerilim veya sabit akım sağlayan gerilim ve akım kaynakları ile sınırlıdır. Yani gerilimleri ve akımları zamanla değişmeyen kaynaklar kullanacağız. Sabit kaynaklar sıklıkla **dc kaynak** olarak adlandırılır. DC *doğru akım* demektir. Bu terimin şimdi yanıltıcı görülebilir tarihsel bir kaynağı vardır. Tarihsel olarak doğru akım, bir sabit gerilim kaynağı tarafından üretilen akım olarak tanımlanır. Bundan dolayı bir sabit gerilim, doğru veya dc gerilim olarak biline gelmiştir. *Sabit* yerine doğru kullanımı kalmış ve *doğru akım* ve *doğru gerilim* terimleri, bilim ve mühendislikte evrensel olarak sabit akım ve sabit gerilim olarak kabul edilmiştir.

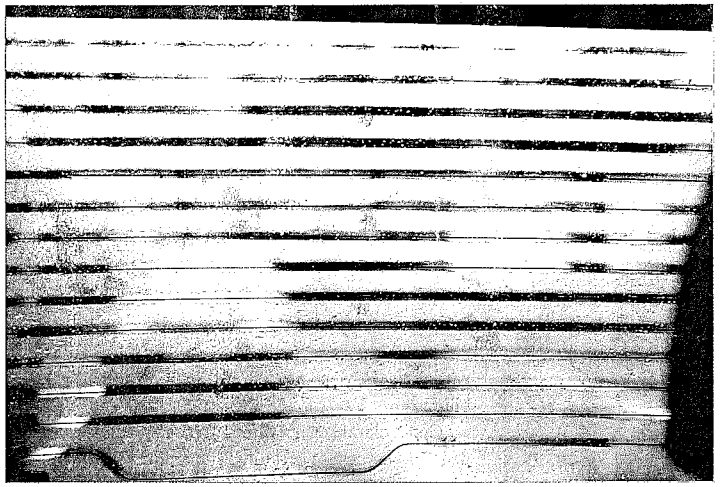
Pratik Bakış Açısı

Arka Cam Buz Çözücüsü

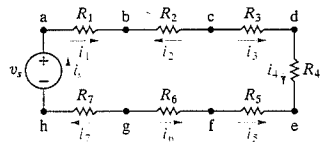
Bir otomobildeki arka cam buz çözücü ağı, yararlı bir işlevi olan direnç devrelerine bir örnektir. Böyle bir ağ yapısı şekilin solunda gösterilmektedir. Ağ iletkenleri şeklin sağında gösterildiği gibi dirençlerle modellenebilir. Yatay iletken sayısı, aracın yılı ve modeline göre değişmekle birlikte tipik olarak 0 ve 16 arasındadır.

Ağ arka camdaki buzu nasıl çözer? Ağın özellikleri nasıl belirlenir? Bu soruları bölümün sorundaki Pratik Bakış Açısı'nda cevaplayacağız. Bu soruları cevaplamak için gereken devre analizi, yatay ve dikey yönlerde düzgün çözülme sağlama hedefinden kaynaklanmaktadır.





3.1 Seri Dirençler

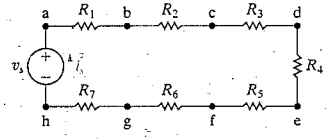


Şekil 3.1 ▲ Seri bağlı dirençler.

2. Bölümde iki eleman sadece bir düğümde birbirine bağlı ise seri olduklarını söylemiştik. Seri bağlı devre elemanları aynı akımı taşır. Şekil 3.1'de gösterilen devredeki dirençler seri bağlanmıştır. Bu dirençlerin aynı akımı taşıdığını devredeki her bir düğümü Kirchhoff akım yasasını uygulayarak gösterebiliriz. Şekil 3.1'deki seri bağlantı

$$i_s = i_1 = -i_2 = i_3 = i_4 = -i_5 = -i_6 = i_7 \tag{3.1}$$

olmasını gerektirir. Bu da eğer yedi akımdan herhangi birini bilirsek hepsini bildiğimiz anlamına gelir. Böylece sadece i_s akımını gösteren Şekil 3.1'i, Şekil 3.2'de gösterildiği gibi çizebiliriz.



Şekil 3.2 ▲ Tek i_s bilinmeyenli seri dirençler.

i_s'yi bulmak için tek kapalı döngü etrafında Kirchhoff'un gerilim yasasını uygularız. Her bir direnç üzerindeki gerilimi i_s yönünde düşüş olarak tanımlarsak

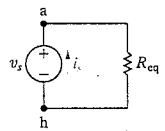
$$-v_s + i_sR_1 + i_sR_2 + i_sR_3 + i_sR_4 + i_sR_5 + i_sR_6 + i_sR_7 = 0 \tag{3.2}$$

veya

$$v_s = i_s(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7) \tag{3.3}$$

bulunur. i_s'nin hesaplanmasında Eş. 3.3'ün önemi, yedi direncin, nümerik değeri dirençlerin tek tek değerlerinin toplamı olan tek bir dirençle değiştirilebilir olmasıdır. Yani,

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7 \tag{3.4}$$



Şekil 3.3 ▲ Şekil 3.2'de gösterilen devrenin sadeleştirilmiş hali.

ve

$$v_s = i_sR_{eq} \tag{3.5}$$

yazılabilir. Böylece Şekil 3.2'yi Şekil 3.3'te gösterildiği gibi çizebiliriz.

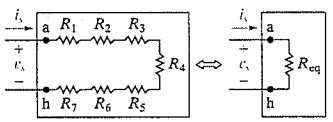
Genel olarak, eğer k direnç seri bağlanmış ise, eşdeğer direncin değeri k direncin değerlerinin toplamına eşittir ve

Dirençlerin seri birleşimi ▶

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{k} R_i = R_1 + R_2 + \cdots + R_k. \tag{3.6}$$

yazılır. Seri bağlantıda eşdeğer direncin, bağlantıdaki en büyük dirençten her zaman daha büyük olduğuna dikkat ediniz.

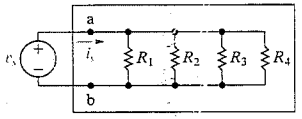
Eşdeğer direnç kavramı üzerinde düşünmenin bir diğer yolu direnç dizisinin bir kara kutu içinde olduğunu düşünmektir. (Bir elektrik mühendisi **kara kutu** terimini şeffaf olmayan yeni içi gözükmeyen bir kutu anlamında kullanır. Mühendis kutunun içini, terminallerindeki gerilim ve akımı arasındaki ilişkiyi çalışarak modellemeyi amaçlar.) Kutunun k tane veya tek eşdeğer direnç barındırdığını belirlemek imkansızdır. Şekil 3.4, Şekil 3.2'deki devrenin bu yöntemle çalışılmasını sergilemektedir.



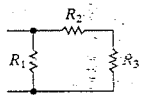
Şekil 3.4 ▲ Şekil 3.2'de gösterilen devrenin kara kutu eşdeğeri.

3.2 Paralel Dirençler

İki eleman bir düğüm çiftinde birbirine bağlı ise paralel elemanlardır denir. **Paralel bağlı devre elemanlarının** üzerindeki gerilim aynıdır. Şekil 3.5'te gösterilen devre paralel bağlı dirençleri sergilemektedir. İki devre elemanının, devre diyagramında paralel çizildiği için paralel bağlı olduklarını kabul etme hatasına düşmeyiniz. Paralel bağlı elemanların tanımlayıcı özelliği üzerlerindeki gerilimin aynı olmasıdır. Şekil 3.6'da R_1 ve R_3'ün paralel bağlı olmadıklarını görebilirsiniz. Çünkü karşılıklı terminalleri arasında belli bir gerilim düşmesine neden olan bir başka direnç vardır.



Şekil 3.5 ▲ Paralel dirençler.



Şekil 3.6 ▲ Paralel olmayan dirençler.

Paralel dirençler Kirchhoff akım yasası ve Ohm yasası kullanılarak tek bir eşdeğer dirence indirgenebilir. Şekil 3.5'teki devrede i_1, i_2, i_3 ve i_4 akımlarını R_1, R_2, R_3 ve R_4 dirençlerindeki akımlar olarak alalım. Ayrıca her bir direnç akımının pozitif yönü, dirençte aşağı doğru yani a düğümünden b düğümüne doğru olsun. Kirchhoff akım yasasından,

$$i_s = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 \tag{3.7}$$

olur. Dirençlerin paralel bağlı olması her bir direnç üzerindeki gerilimin aynı olduğu anlamına gelir. Böylece Ohm yasasından,

$$i_1R_1 = i_2R_2 = i_3R_3 = i_4R_4 = v_s \tag{3.8}$$

yazılır. Sonuç olarak

$$i_1 = \frac{v_s}{R_1},$$

$$i_2 = \frac{v_s}{R_2},$$

$$i_3 = \frac{v_s}{R_3} \quad \text{ve}$$

$$i_4 = \frac{v_s}{R_4} \tag{3.9}$$

elde edilir.

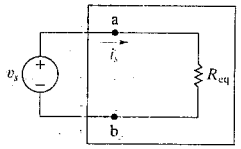
Eş. 3.9'un Eş. 3.7'de yerine konması

$$i_s = v_s\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) \tag{3.10}$$

verir ve buradan da

$$\frac{i_s}{v_s} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \tag{3.11}$$

elde edilir. Eş. 3.11 göstermek istediğimiz sonuçtur; Şekil 3.5'te gösterilen devredeki dört direnç tek bir eşdeğer dirençle değiştirilebilir. Şekil 3.7'deki devre bu eşdeğerliği göstermektedir. Paralel bağlı k direnç için



Şekil 3.7 ▲ Şekil 3.5'teki dört paralel direncin tek eşdeğer dirençle değiştirilmesi.

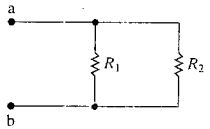
Paralel dirençlerin birleşimi ▶

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_k} \tag{3.12}$$

yazılabilir. Eşdeğer direncin, her zaman paralel bağlı dirençlerin en küçüğünden daha küçük olduğuna dikkat ediniz. Bazen paralel dirençlerle uğraşırken iletkenlik kullanmak daha uygundur. O durumda Eş. 3.12

$$G_{eq} = \sum_{i=1}^{k} G_i = G_1 + G_2 + \cdots + G_k \tag{3.13}$$

haline gelir. Çoğu zaman sadece iki direnç paralel bağlıdır. Şekil 3.8 bu özel durumu sergilemektedir. Eşdeğer direnci Eş. 3.12'den hesaplarız.



Şekil 3.8 ▲ İki paralel bağlı direnç.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \tag{3.14}$$

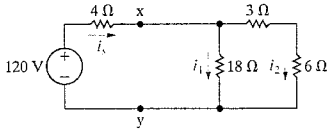
ve

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \tag{3.15}$$

Böylece sadece iki paralel direnç için eşdeğer direnç, dirençlerin çarpımının dirençlerin toplamına oranıdır. Bu sonucu sadece iki paralel bağlı direnç için kullanabileceğinizi unutmayınız. Örnek 3.1 bu sonuçların kullanışlılığını göstermektedir.

Örnek 3.1 Seri-Paralel Sadeleştirmesinin Uygulanması

Şekil 3.9'da gösterilen devrede i_s, i_1 ve i_2'yi bulunuz.



Şekil 3.9 ▲ Örnek 3.1'in devresi.

Çözüm

3 Ω direncin 6 Ω direnç ile seri olduğuna dikkat ederek başlarız. Dolayısıyla bu seri birleşimi bir 9 Ω direnç ile değiştirerek devreyi Şekil 3.10 (a)'daki devreye indirgeriz. Şimdi 9 Ω ve 18 Ω dirençlerin paralel birleşimini (18 × 9)/ (18 + 9) veya 6 Ω ile değiştirebiliriz. Şekil 3.10(b) bu indirgemeyi göstermektedir. Tüm çizimlerde işaretli olan x ve y düğümleri devrenin indirgenmesinin takibini kolaylaştırmaktadır.

Şekil 3.10(b)'den i_s'nin 120/10 ve 12 A'e eşit olduğunu sağlayabilirsiniz. Şekil 3.11 analizin bu noktasında sonucu göstermektedir. Aşağıdaki tartışmayı açık yapmak için v_1 gerilimi eklenmiştir. Ohm yasasını kullanarak v_1 gerilimini

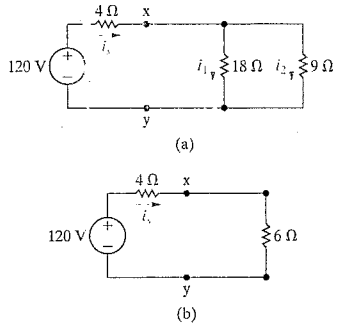
$$v_1 = (12)(6) = 72 \text{ V} \tag{3.16}$$

hesaplarız. Ancak v_1 düğüm x'ten düğüm y'ye gerilim düşmesidir. Bu nedenle Şekil 3.10(a)'daki devreye dönebilir ve yine Ohm yasasını kullanarak i_1 ve i_2'yi hesaplayabiliriz. Bu yolla,

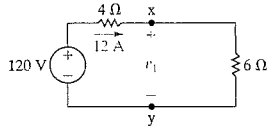
$$i_1 = \frac{v_1}{18} = \frac{72}{18} = 4 \text{ A} \tag{3.17}$$

$$i_2 = \frac{v_1}{9} = \frac{72}{9} = 8 \text{ A} \tag{3.18}$$

bulunur. Böylece istenen üç akımı, seri-paralel indirgemelerle Ohm Yasasını birlikte kullanarak bulduk.



Şekil 3.10 ▲ Şekil 3.9'daki devrenin sadeleştirilmesi.



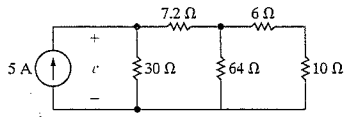
Şekil 3.11 ▲ i_s'nin nümerik değerini gösteren Şekil 3.10 (b)'deki devre.

Örnek 3.1'i bitirmeden önce, çözümün her düğümde Kirchhoff akım yasasını ve her kapalı döngü çevresinde Kirchhoff'un gerilim yasasını sağladığını göstermenizi öneririz. (Kontrol edilecek üç kapalı yol olduğuna dikkat ediniz.) Gerilim kaynağınca aktarılan gücün, dirençlerde harcanan güç toplamına eşit olduğunu göstermek de önerilir. (Bkz. Problem 3.3 ve 3.4.)

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 1 - Seri ve paralel bağlı dirençleri belirleyebilmek

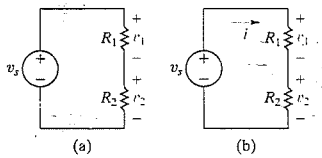
3.1 Şekilde gösterilen devrede, (a) v gerilimini, (b) akım kaynağından devreye aktarılan gücü ve (c) 10 Ω dirençte harcanan gücü bulunuz.



Cevap: (a) 60 V;
(b) 300 W;
(c) 57.6 W.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 3.1, 3.2, 3.5 ve 3.6'yı da çözmeyi deneyiniz.

3.3 Gerilim Bölücü ve Akım Bölücü Devreler



Şekil 3.12 ▲ (a) Bir gerilim bölücü devre ve (b) i akımının gösterildiği gerilim bölücü devre.

Bazen-özellikle elektronik devrelerde-tek bir gerilim kaynağından, birden fazla gerilim seviyesi elde etmek gerekli olur. Bunu yapmanın bir yolu Şekil 3.12'de gösterilen gibi bir **gerilim bölücü devresi** kullanmaktır.

Bu devreyi Ohm yasası ve Kirchhoff yasalarını doğrudan uygulayarak inceleyeceğiz. Analize yardımcı olması için i akımını Şekil 3.12 (b)'de görüldüğü gibi tanımlarız. Kirchhoff gerilim yasasının uygulanması

$$v_s = iR_1 + iR_2 \tag{3.19}$$

ve

$$i = \frac{v_s}{R_1 + R_2} \tag{3.20}$$

verir. Şimdi Ohm yasasını kullanarak v_1 ve v_2'yi hesaplayabiliriz.

$$v_1 = iR_1 = v_s\frac{R_1}{R_1 + R_2}, \tag{3.21}$$

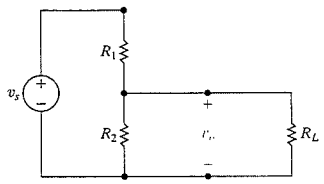
$$v_2 = iR_2 = v_s\frac{R_2}{R_1 + R_2}. \tag{3.22}$$

Eş. 3.21 ve 3.22, v_1 ve v_2'nin v_s'nin oranı olduğunu göstermektedir. Her bir oran, üzerinde bölünmüş gerilimin tanımladığı direncin iki direncin toplamına oranıdır. Bu oran her zaman 1.0'dan küçük olduğu için bölünmüş v_1 ve v_2 gerillimleri her zaman v_s kaynak geriliminden küçüktür.

Eğer v_s verilir ve belli bir v_2 değeri istenirse, sonsuz sayıda R_1 ve R_2 birleşimi uygun oranı verir. Örneğin v_s'nin 15 V'a eşit olduğunu ve v_2'nin 5V istendiğini varsayalım. O halde $v_2/v_s = \frac{1}{3}$ olur

ve Eş. 3.22'den, $R_2 = = \frac{1}{2} R_1$ olduğunda bu oranın elde edildiğini buluruz. R_1'in ve dolayısıyla R_2'nin seçimini etkileyen diğer faktörler, kaynak geriliminin bölünmesinde oluşan güç kayıpları ve gerilim bölücü devreyi diğer devre elemanlarına bağlamanın etkileridir.

Bir R_L direncinin Şekil 3.13'te gösterdiği gibi R_2'ye paralel bağlandığını düşününüz. R_L direnci gerilim bölücü devreye bir yük olarak davranır. Herhangi bir devre üzerindeki bir **yük**, devrenin güç çeken bir veya daha çok elemandan oluşur. R_L yükü bağlı iken çıkış geriliminin ifadesi



Şekil 3.13 ▲ R_L yüküne bağlı bir gerilim bölücü.

$$v_o = \frac{R_{eq}}{R_1 + R_{eq}} v_s \tag{3.23}$$

olur. Burada

$$R_{eq} = \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} \tag{3.24}$$

ile verilir. Eş. 3.24'ün, Eş. 3.23'te yerine konması

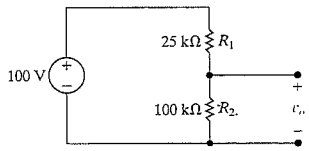
$$v_o = \frac{R_2}{R_1[1 + (R_2/R_L)] + R_2} v_s \tag{3.25}$$

verir. Eş. 3.25'in $R_L \to \infty$ için, olması gerektiği gibi Eş. 3.22'ye indirgendiğine dikkat ediniz. Eş. 3.25, $R_L \gg R_2$ oldukça v_0/v_s gerilim oranın yükün eklenmesinden temel olarak etkilenmediğini gösterir.

Gerilim bölücü devrenin bir diğer özelliği, dirençlerin toleranslarına olan duyarlılığıdır. *Tolerans* ile, bir olası değer aralığını kastediyoruz. Ticari dirençlerin direnç değeri zamanla belirtilen değerin belli bir yüzde aralığında değişir. Örnek 3.2 direnç toleranslarının gerilim bölücü devreye etkisini sergilemektedir.

Örnek 3.2 **Gerilim Bölücü Devrenin Analizi**

Şekil 3.14'te gösterilen gerilim bölücü devrede kullanılan dirençler ±%10 toleransa sahiptir. v_o'nun maksimum ve minimum değerini bulunuz.



Şekil 3.14 ▲ Örnek 3.2'nin devresi.

Çözüm

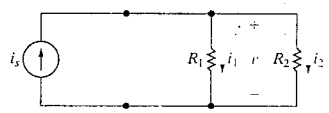
Eş. 3.22'den v_o'nun maksimum değeri R_2 %10 yüksek ve R_1 %10 düşükken, minimum değeri ise R_2 %10 düşük ve R_1 %10 yüksekken oluşur. Dolayısıyla,

$$v_o(\max) = \frac{(100)(110)}{110 + 22.5} = 83.02 \text{ V},$$

$$v_o(\min) = \frac{(100)(90)}{90 + 27.5} = 76.60 \text{ V}$$

yazabiliriz. Böylece bu gerilim bölücüde %10 dirençleri kullanma kararını verirken, yük olmadığı durumdaki çıkış geriliminin 76.60 ve 83.02 V arasında olacağını biliyoruz.

Akım Bölücü Devre



Şekil 3.13 ⚠ Akım bölücü devre.

Şekil 3.15'te gösterilen **akım bölücü devre,** bir akım kaynağına paralel bağlı iki dirençten oluşur. Akım bölücü i_s akımını R_1 ve R_2 arasında bölecek şekilde tasarlanır. i_s akımı ile dirençlerdeki akım i_1 ve i_2 arasındaki ilişki Ohm yasası ve Kirchhoff akım yasası doğrudan uygulanarak bulunur. Paralel dirençler üzerindeki gerilim

$$v = i_1R_1 = i_2R_2 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}i_s \tag{3.26}$$

bulunur. Eş. 3.26'dan

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}i_s \tag{3.27}$$

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}i_s \tag{3.28}$$

elde edilir. Eş. 3.27 ve 3.28, bir dirençteki akımı, paralel birleşime gelen akımın diğer dirençle çarpımının toplam dirence oranı olduğunu gösterir. Örnek 3.3 akım bölücü denkleminin kullanımını göstermektedir.

Örnek 3.3 Akım Bölücü Devrenin Analizi

Şekil 3.16'da gösterilen 6 Ω dirençte harcanan gücü bulunuz.

Çözüm

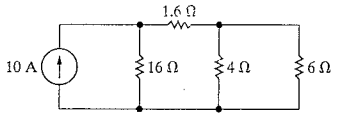
Öncelikle devreyi seri-paralel indirgemeler ile sadeleştirerek dirençteki akımı bulmalıyız. Böylece Şekil 3.16'da gösterilen devre Şekil 3.17'de gösterilene indirgenir. i_o akımını, akım bölümü formülü ile bulacağız:

$$i_o = \frac{16}{16 + 4}(10) = 8 \text{ A}$$

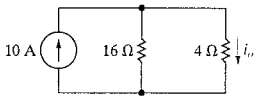
i_o'nun Şekil 3.16'da 1.6 Ω direnç üzerindeki akım olduğuna dikkat ediniz. Şimdi i_o'yu 6 Ω ve 4 Ω arasında da

$$i_6 = \frac{4}{6 + 4}(8) = 3.2 \text{ A}$$

bölebiliriz. 6 Ω dirençteki akım ve harcanan güç ise $p = (3.2)^2\,(6) = 61.44$ W'tur.



Şekil 3.16 ⚠ Örnek 3.3'ün devresi.

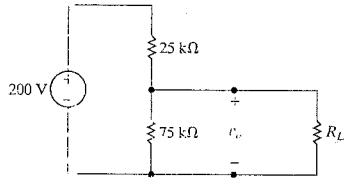


Şekil 3.17 ⚠ Şekil 3.16'da gösterilen devrenin sadeleştirilmiş hali.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

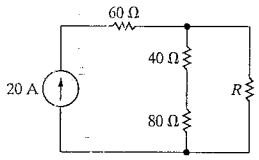
Hedef 2 – Basit gerilim bölücü ve akım bölücü devrelerin nasıl tasarlandığını bilmek.

3.2 a) Gösterilen devrede v_o'nun yüksüz durum değerini bulunuz.
b) R_L 150 kΩ iken v_o'yu bulunuz.
c) Eğer yük terminalleri yanlışlıkla kısa devre edilirse 25 kΩ dirençte ne kadar güç harcanır?
d) 75 kΩ dirençte harcanan maksimum güç nedir?



Cevap: (a) 150 V;
(b) 133.33 V;
(c) 1.6 W;
(d) 0.3 W.

3.3 a) Gösterilen devrede 80 Ω direnç üzerinden 4 A akım geçmesini sağlayacak R değerini bulunuz.
b) (a)'daki R direncinin ne kadar güç harcaması gerekir?
c) (a)'da bulunan R değeri için, akım kaynağı ne kadar güç üretmelidir?



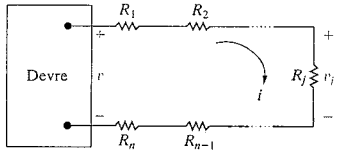
Cevap: (a) 30 Ω;
(b) 7680 W;
(c) 33,600 W.

NOT: Ayrıca bölüm Problemlerinden 3.13, 3.15 ve 3.21'i de çözmeyi deneyiniz.

3.4 Gerilim Bölünmesi ve Akım Bölünmesi

Şimdi Şekil 3.12'deki gerilim bölücü devreden ve Şekil 3.15'teki akım bölücü devreden bulunan sonuçları genelleştirebiliriz. Genelleştirmeler, **gerilim bölünme** ve **akım bölünme** olarak bilinen iki yeni ve çok kullanışlı devre analiz tekniği üretecektir. Şekil 3.18'de gösterilen devreyi düşününüz.

Soldaki kutu, şekilde gösterilen v gerilimini veren tek bir gerilim kaynağı veya temel devre elemanlarının bir birleşimini içerebilir. Kutunun sağında seri bağlı n direnç vardır. Herhangi bir R_j direnci üzerindeki v_j gerilim düşmesini bulmakla ilgileniyoruz. Ohm yasası ile tüm seri dirençlerdeki i akımını, v gerilimi ve n direnç cinsinden hesaplayarak başlayacağız:



Şekil 3.18 ⚠ Gerilim bölünmesini sergilemek için kullanılan devre.

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2 + \cdots + R_n} = \frac{v}{R_{eq}} \tag{3.29}$$

R_{eq} eşdeğer direnci n direnç değerinin toplamıdır çünkü bu dirençler Eş. 3.6'da gösterildiği gibi seridir. İkinci kez Ohm yasasını uygulayarak R_j üzerindeki gerilim düşmesini, Eş. 3.29'da hesaplanan i'yi kullanarak bulacağız:

Gerilim bölünmesi denklemi ▶

$$v_j = iR_j = \frac{R_j}{R_{eq}}v. \tag{3.30}$$

Eş. 3.30'un sağ tarafını elde etmek için Eş. 3.29'u kullandığımıza dikkat ediniz. Eş. 3.30 gerilim bölünmesi denklemidir. Bu denklem, seri bağlı dirençlerden biri olan R_j üzerindeki v_j gerilim düşüşünün, v toplam gerilimiyle orantılı olduğunu söyler. Orantı sabiti, R_j tek direncinin, tüm dirençlerin toplamı eşdeğer R_{eq} direncine olan R_j/R_{eq} oranıdır.

Şimdi Şekil 3.19'daki devreyi düşününüz. Soldaki kutu bir akım kaynağını veya i akımını veren basit devre elemanlarının bir birleşimini barındırabilir. Kutunun sağında paralel bağlı n dirençten biri olan R_j direncindeki i_j akımını i akımı cinsinden bulmak istiyoruz. Önce Ohm yasasını kullanarak paralel dirençler üzerinde v gerilim düşüşünü i akımı ve n direnci cinsinden hesaplayacağız:

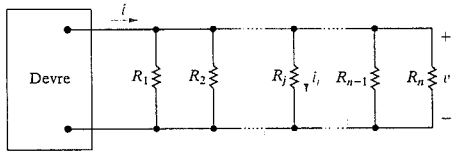
$$v = i(R_1\|R_2\|\ldots\|R_n) = iR_{eq} \tag{3.31}$$

n paralel direncin R_{eq} eşdeğeri Eş. 3.12 kullanılarak hesaplanabilir. R_j direncindeki i_j akımı, Eş. 3.31'de hesaplanan v gerilimini kullanarak ikinci kez Ohm yasasının uygulanmasıyla

Akım bölünmesi denklemi ▶

$$i_j = \frac{v}{R_j} = \frac{R_{eq}}{R_j}i. \tag{3.32}$$

olarak bulunur. Eş. 3.32'nin sağ tarafını elde ederken Eş. 3.31'i kullandığımıza dikkat ediniz. Eş. 3.32 akım bölünmesi denklemidir. Bu denklem, paralel bağlı dirençlerden R_j'nin üzerinden geçen akımın, tüm paralel bağlı dirençlere sağlanan i toplam akımı ile orantılı olduğunu söyler. Orantı sahibi paralel bağlı direnç se-

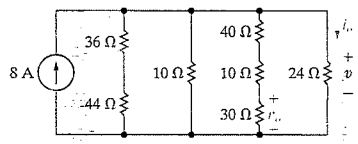


Şekil 3.19 ▲ Akım bölünmesini sergilemekte kullanılan devre.

tinin eşdeğer direncinin tek dirence oranıdır ve R_{eq}/R_j ile verilir. Akım bölünmesi denklemindeki orantı sabitinin, gerilim bölünmesi denklemindeki orantı sabitinin tersi olduğuna dikkat ediniz.

Örnek 3.4 Bir Devreyi Çözerken Gerilim Bölünmesi ve Akım Bölünmesinin Kullanılması

Şekil 3.20'deki devrede i_o akımını akım bölünmesini, v_o gerilimini de gerilim bölünmesini kullanarak bulunuz.



Şekil 3.20 ▲ Örnek 3.4'ün devresi.

Çözüm

Eş. 3.32'yi kullanmak için direnç içeren dört dalın eşdeğer direncini bulabiliriz. Sembolik olarak

$$R_{eq} = (36 + 44)\|10\|(40 + 10 + 30)\|24$$

$$= 80\|10\|80\|24 = \frac{1}{\frac{1}{80} + \frac{1}{10} + \frac{1}{80} + \frac{1}{24}} = 6\ \Omega$$

bulunur. Eş. 3.32 kullanılırsa,

$$i_o = \frac{6}{24}(8\text{ A}) = 2\text{ A}$$

elde edilir. 24 Ω direnç üzerindeki gerilim düşüşünü Ohm yasası ile bulabiliriz:

$$v = (24)(2) = 48\text{ V}.$$

Bu aynı zamanda 40 Ω, 10 Ω, ve 30 Ω dirençleri içeren dalın da gerilim düşüşüdür. Seri bağlı bir dirençle üzerindeki düşüşü bildiğimizde Eş. 3.30'u kullanarak gerilim bölünmesi ile 30 Ω üzerindeki v_o düşmesini belirleyebiliriz. Bunun için, seri bağlı dirençlerin eşdeğer direncinin 40 + 10 + 30 = 80 Ω olduğunu hatırlarız. O halde

$$v_o = \frac{30}{80}(48\text{ V}) = 18\text{ V}$$

bulunur.

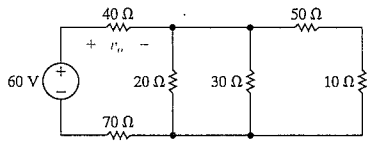
✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 3 – Gerilim Bölünmesi ve Akım Bölünmesini Kullanarak Basit Devreleri Çözebilmek

3.4 a) Şekildeki devrede 40 Ω direnç üzerindeki v_o gerilimini gerilim bölünmesini kullanarak belirleyiniz.

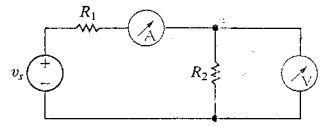
b) (a) şıkkındaki v_o'yu kullanarak 40 Ω dirençteki akımı bulunuz. Sonra bu akımı ve akım bölünmesini kullanarak 30 Ω dirençteki akımı hesaplayınız.

c) 50 Ω direnç ne kadar güç harcar?

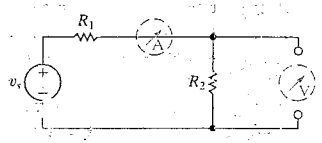


Cevap: (a) 150 V; (b) 133.33 V; (c) 1.6 W.

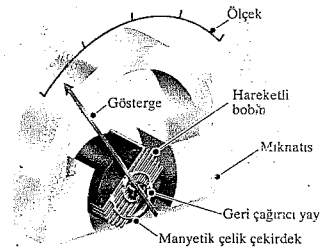
NOT: Ayrıca Bölüm Problemleri 3.22 ve 3.23'ü de çözmeyi deneyiniz.



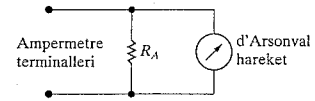
Şekil 3.21 R_1'deki akımı ölçmek için bağlanmış bir ampermetre ve R_2'deki gerilimi ölçmek için bağlanmış bir voltmetre.



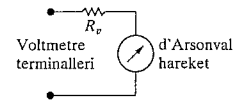
Şekil 3.22 İdeal ampermetrenin kısa devre modeli ve ideal voltmetrenin açık devre modeli.



Şekil 3.23 Bir d'Arsonval metre hareketinin şematik diyagramı.



Şekil 3.24 Bir dc ampermetre devresi.



Şekil 3.25 Bir dc voltmetre devresi.

3.5 Gerilim ve Akım Ölçümü

Gerçek devrelerle çalışırken sıklıkla gerilim ve akım ölçmeniz gerekecektir. Burada ve bir sonraki kısımda birçok ölçüm cihazını tartışmaya zaman ayıracağız. Çünkü bunların analizi görece kolaydır ve henüz çalıştığımız akım ve gerilim bölücü devrelerin pratik örnekleridir.

Bir **ampermetre**, akım ölçmek için tasarlanan bir cihazdır ve akımı ölçülecek devre elemanı ile seri yerleştirilir. Bir **voltmetre**, gerilim ölçmek için tasarlanan bir cihazdır ve gerilimi ölçülecek devre elemanı ile paralel yerleştirilir. İdeal bir voltmetre veya ampermetrenin ölçmek için tasarlandığı devre elemanı üzerinde hiçbir etkisi yoktur. Yani, bir ideal ampermetre 0 Ω eşdeğer empedansa sahiptir ve akımı ölçülecek elemana seri bir kısa devre gibi davranır. Bir ideal voltmetre sonsuz eşdeğer empedansa sahiptir ve gerilimi ölçülecek elemana paralel bir açık devre gibi davranır. Şekil 3.21, R_1'deki akımı ölçmek için kullanılan bir ampermetreyi ve R_2'deki gerilimi ölçmek için kullanılan bir voltmetreyi göstermektedir. Bu metrelerin aynı devre içinde ideal modelleri Şekil 3.22'de gösterilmiştir.

Sürekli gerilim ve akımı ölçmek için kullanılan metrelerin iki geniş kategorisi vardır: Sayısal metreler ve analog metreler. **Sayısal metreler** sürekli gerilim veya akım sinyalini, örnekleme zamanı denen zamanda ayrık noktalarda ölçer. Sinyal böylece, zamanda sürekli olan bir analog sinyalden, sadece belli ayrık zamanlarda var olan bir sayısal sinyale çevrilmiş olur. Sayısal metrelerin çalışmasının daha detaylı açıklaması bu dersin ve kitabın amaçları dışındadır. Ancak büyük ihtimalle lab ortamında sayısal metreleri görüp kullanacaksınız çünkü bunlar analog metrelere göre birçok avantaja sahiptir: Bağlandıkları devrelere daha az direnç katarlar, bağlanmaları kolaydır ve ölçüm hassasiyeti okuma mekanizmasına bağlı olarak daha yüksektir.

Analog metreler okuma mekanizmasını gerçekleştiren d'Arsonval metre hareketine dayanır. Bir d'Arsonval metre hareketi, bir sabit mıknatısın alanına yerleştirilmiş hareketli bir bobinden oluşur. Bobinde akım aktığında bobin üzerinde bir tork oluşur ve bobinin dönmesine neden olarak ölçekli bir skaladaki göstergeyi hareket ettirir. Tasarımdan, göstergenin sapma miktarı, hareketli bobindeki akım ile doğru orantılıdır. Bobin, hem akım hem de gerilim anma değeri ile tanımlanır. Örneğin, ticari bir metre hareketi 50 mV'ta 1 mA anma değerlidir. Bu da, bobin 1 mA akım taşırken bobin üzerindeki gerilim düşmesinin 50 mV olduğunu ve göstergenin tam ölçek konumuna saptığını anlatır. Şekil 3.23, bir d'Arsonval metre hareketini şematik olarak göstermektedir.

Bir analog ampermetre, Şekil 3.24'te gösterildiği gibi bir dirençle paralel olan bir d'Arsonval metre hareketinden oluşur. Paralel direncin amacı, akımın bir kısmını R_A üzerinden geçirerek hareketin bobinindeki akımı sınırlamaktır. Bir analog voltmetre, Şekil 3.25'te gösterildiği gibi bir dirençle seri bağlı bir d'Arsonval metre hareketinden oluşur. Burada direnç metrenin bobinindeki gerilimi sınırlamak için kullanılmaktadır. Her iki metrede eklenen direnç, metre hareketinin tam ölçek okumasını belirler.

Bu açıklamalardan, gerçek metrelerin ideal olmadığını, hem eklenen direncin, hem de metre hareketinin metrenin bağlandığı devreye direnç eklediğini görebiliriz. Gerçekte fiziksel ölçüm yapmak için kullanılan herhangi bir cihaz ölçüm yaparken sistemden enerji alır. Cihazın sistemden aldığı enerji arttıkça ölçüm daha fazla bozulur. Bir gerçek ampermetrenin eşdeğer direnci sıfır değildir ve böylece etkin olarak akımını ölçtüğü elemana seri bir direnç katar. Bir gerçek voltmetre sonsuz olmayan bir eşdeğer dirence sahiptir ve böylelikle etkin olarak devreye gerilimini ölçtüğü elemana parallel bir direnç katar.

Bu metrelerin ölçtüğü devreyi ne kadar değiştirdiği, devredeki dirence göre metrenin eşdeğer direncinin ne kadar olduğuna bağlıdır. Örneğin 1/10 kuralını kullanarak, bir ampermetrenin etkin direnci, devredeki dirençlerin en küçüğünün 10'da 1'inden büyük olmamalıdır. Bu durumda ölçülen akım, ampermetre varken veya yokken yaklaşık olarak aynı olur. Ancak bir analog metrede direnç değeri, yapmak istediğiniz tam ölçek okumaya bağlıdır ve gelişigüzel seçilemez. Aşağıdaki örnekler bir analog ampermetre veya voltmetrede gereken direncin belirlenmesindeki hesaplamaları sergilemektedir. Örnekler aynı zamanda, metre bir devreye bağlandığında elde edilen etkin direnci de incelemektedir.

Örnek 3.5 D'Arsonval Ampermetrenin Kullanılması

a) 50 mV, 1 mA'lik bir d'Arsonval hareketi, tam ölçek okuması 10 mA olan bir ampermetrede kullanılıyor. R_A'yı belirleyiniz.

b) (a)'yı 1 A tam ölçek okuması için tekrar çözünüz.

c) Akımı ölçmek için 10 mA ampermetre devreye bağlandığında devreye ne kadar direnç eklenir?

d) (c) şıkkını 1 A ampermetre için tekrar ediniz.

Çözüm

a) Problemin ifadesinden, ampermetrenin terminallerindeki akım 10 mA olduğunda metre bobininde 1mA akmaktadır ve bu da R_A'ya 9 mA akımın yönlendirilmesi gerektiğini gösterir. Ayrıca hareket 1 mA akım taşıdığında terminalleri arasındaki gerilim 50 mV'tur. Ohm yasası

$$9 \times 10^{-3} R_A = 50 \times 10^{-3}$$

veya

$$R_A = 50/9 = 5.555\ \Omega$$

verir.

b) Ampermetrenin tam ölçek sapması 1 A olduğunda hareket 1 mA taşırken R_A 999 mA taşımalıdır. O halde bu durumda,

$$999 \times 10^{-3} R_A = 50 \times 10^{-3}$$

veya

$$R_A = 50/999 \approx 50.05\ \text{m}\Omega$$

bulunur.

c) R_m ampermetrenin eşdeğer direncini göstersin. 10 mA ampermetre için,

$$R_m = \frac{50\ \text{mV}}{10\ \text{mA}} = 5\ \Omega,$$

veya diğer bir yolla

$$R_m = \frac{(50)(50/9)}{50 + (50/9)} = 5\ \Omega$$

bulunur.

d) 1 A ampermetre için,

$$R_m = \frac{50\ \text{mV}}{1\ \text{A}} = 0.050\ \Omega$$

veya diğer bir yolla

$$R_m = \frac{(50)(50/999)}{50 + (50/999)} = 0.050\ \Omega$$

bulunur.

Örnek 3.6 **D'Arsonval Voltmetrenin Kullanılması**

a) Bir 50 mv, 1 mA d'Arsonvar kol, tam ölçek okumanın 150 V olduğu bir voltmetrede kullanılacaktır. R_v'yi belirleyiniz.

b) (a) şıkkını, 5V tam ölçek okuma için tekrar ediniz.

c) 150 V metre devreye ne kadar direnç katar?

d) (c)'yi 5 V metre için tekrar ediniz.

Çözüm

a) Tam ölçek sapma, metre kolu üzerinde 50 mV gerektirir ve kolun direnci 50 Ω'dur. Dolayısıyla $R_1 = R_v$, $R_2 = 50$, $v_s = 150$ ve $v_2 = 50$ mV ile Eş. 3.22'yi uygularız:

$$50 \times 10^{-3} = \frac{50}{R_v + 50}(150).$$

R_v için çözüm

$$R_v = 149{,}950\ \Omega$$

verir.

b) 5 V tam ölçek okuma için

$$50 \times 10^{-3} = \frac{50}{R_v + 50}(5)$$

veya

$$R_v = 4950\ \Omega$$

elde edilir.

c) Eğer R_m metrenin eşdeğer direncini gösteriyorsa

$$R_m = \frac{150\ \text{V}}{10^{-3}\ \text{A}} = 150{,}000\ \Omega$$

veya

$$R_m = 149{,}950 + 50 = 150{,}000\ \Omega$$

bulunur.

d) O halde,

$$R_m = \frac{5\ \text{V}}{10^{-3}\ \text{A}} = 5000\ \Omega$$

veya

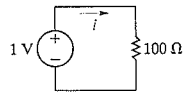
$$R_m = 4950 + 50 = 5000\ \Omega$$

elde edilir.

✓ DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

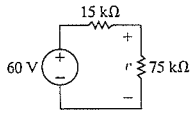
Hedef 4 - Ampermetreyi ve voltmetreyi okuyabilmek

3.5 a) Şekildeki devrede akımı bulunuz.
b) Eğer Örnek 3.5 (a)'daki ampermetre akımı ölçmek için kullanılsaydı ne bulunurdu?



Cevap: (a) 10 mA;
(b) 9.524 mA.

3.6 a) Şekildeki devrede 75 kΩ direnç üzerindeki gerilimi bulunuz.
b) Eğer Örnek 3.6 (a)'daki voltmetre gerilimi ölçek için kullanılsaydı ne ölçerdi?

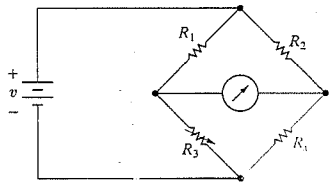


Cevap: (a) 50 V;
(b) 46.15 V.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 3.30 ve 3.33'ü de çözmeyi deneyiniz.

3.6 Direnç Ölçümü - Wheatstone Köprüsü

Direnç ölçümü için birçok farklı devre yapısı kullanılır. Burada sadece birisi üzerine, Wheatstone köprüsüne odaklanacağız. Wheatstone köprüsü, orta aralıkta 1 Ω ile 1 mΩ arasındaki dirençlerin hassas ölçümü için kullanılan bir devredir. Wheatstone köprüsünün ticari modellerinde ±%0.1 doğruluk mümkündür. Köprü devresi dört direnç, bir dc gerilim kaynağı ve bir seziciden oluşur. Dört dirençten birinin direnci Şekil 3.26'da R_3 üzerindeki ok ile belirtildiği gibi değiştirilebilir. DC gerilim kaynağı çoğunlukla bir pildir. Bu durum Şekil 3.26'da gerilim kaynağı için pil sembolü kullanılarak gösterilmiştir. Sezici, genellikle mikroamper seviyesinde bir d'Arsonval harakettir. ve galvanometre olarak adlandırılır. Şekil 3.26 dirençlerin, pilin ve sezicinin devre düzenlemesini göstermektedir. burada R_1, R_2 ve R_3 bilinen dirençler ve R_x ise bilinmeyen dirençtir.

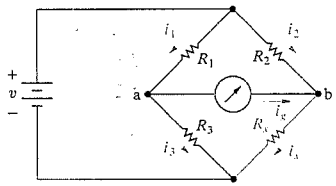


Şekil 3.26 ⚠ Wheatstone köprü devresi.

R_x'in değerini bulmak için, R_3 değişken direncini galvanometre akımını sıfır yapacak şekilde ayarlarız. Sonra bilinmeyen direnci, basit

$$R_x = \frac{R_2}{R_1}R_3 \tag{3.33}$$

ifadesi ile hesaplarız. Eş. 3.33, Kirchhoff yasalarının köprü devresine uygulanması ile doğrudan bulunur. Köprü devresini, Eş. 3.33'ün çıkarımına uygun akımları gösterir biçimde Şekil 3.27 olarak yeniden çizeceğiz. i_g sıfır olduğunda, yani köprü dengede iken Kirchhoff akım yasasına göre



Şekil 3.27 ⚠ Dengelenmiş bir Jheatstone köprüsü ($i_g = 0$).

$$i_1 = i_3 \tag{3.34}$$

$$i_2 = i_x \tag{3.35}$$

sağlanmalıdır. Şimdi i_g sıfır olduğundan sezici üzerinde gerilim düşmesi yoktur ve dolayısıyla a ve b noktaları aynı potansiyeldedir. Böylece köprü dengede iken Kirchhoff gerilim yasasına göre

$$i_3R_3 = i_xR_x \tag{3.36}$$

$$i_1R_1 = i_2R_2 \tag{3.37}$$

olmalıdır. Eş. 3.34 ve 3.35'in, Eş. 3.36 ile birleştirilmesi

$$i_1R_3 = i_2R_x \tag{3.38}$$

verir. Eş. 3.38'in, Eş. 3.37 ile bölümü ve sonra bulunan ifadenin R_x için çözümü

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_x}{R_2} \tag{3.39}$$

verir ve buradan da

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3 \qquad (3.40)$$

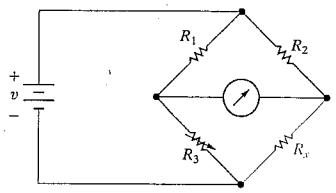
bulunur. Eş. 3.33'ün doğruluğunu sağladığımıza dikkat ediniz. Sonuç hakkında birkaç yorum gereklidir. Öncelikle eğer R_2/R_1 oranı birse, bilinmeyen R_x direnç R_3'e eşittir. Bu durumda R_3, R_x değerini kapsayan bir aralıkta değişmelidir. Örneğin eğer bilinmeyen direnç 1000 Ω olsaydı ve R_3 0 Ω ile 100 Ω arasında değiştirilebilseydi köprü hiçbir zaman dengelenmezdi. Dolayısıyla geniş bir bilinmeyen direnç aralığını taramak için R_2/R_1 oranını değiştirebilmeliyiz. Bir ticari Wheatstone köprüsünde R_1 ve R_2, köprü devresine anahtarlanabilecek dirençlerin ondalık değerlerinden oluşur. Normal olarak ondalık değerler 1, 10, 100 ve 1000 Ω'dur öyle ki R_2/R_1 oranı ondalık adımlarla 0.001'den 1000'e değiştirilebilir. R_3 ayarlanabilir direnci genellikle 1 ile 11.000 Ω arasındaki tam direnç değerlerinden oluşur.

Eş. 3.33 R_x'in sıfırdan sonsuza değişebileceğini ima etsede R_x'in pratik aralıkları yaklaşık olarak 1 Ω ile 1 M Ω arasındadır. Bir standart Wheatstone köprüsünde daha küçük dirençlerin ölçümü zordur. Bunun nedeni farklı metal eklemlerinden oluşan elektrik gerilimleri ve ısıl ısıtma yani i^2R etkileridir. Yüksek dirençlerin doğru okunmasının zorluğu kaçak akımlardır. Bir başka deyişle eğer R_x büyükse, elektriksel yalıtımdaki kaçak akım, köprü devresinin dallarındaki akım ile karşılaştırılabilir olabilir.

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 5 – Bir Wheatstone köprüsünün direnç ölçme için nasıl kullanıldığını bilmek

3.7 Şekildeki köprü devresi, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 1000\ \Omega$ ve $R_3 = 150\ \Omega$ olduğunda dengededir. Köprü, 5 V'luk bir dc kaynakla beslenmektedir.



a) R_x'in değeri nedir?

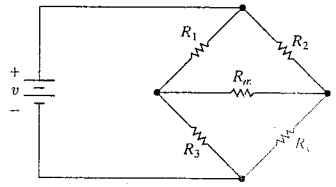
b) Her bir köprü direncinin 250 mW harcayabileceğini varsayınız. Dirençlerin güç harcama kapasitesini aşmadan veya köprü zarar görmeden köprü denge durumunda bırakılabilir mi?

Cevap: (a) 1500 Ω; (b) evet.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemi 3.48'i de çözmeyi deneyiniz.

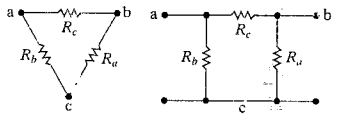
3.7 Delta-Y (Pi-T) Eşdeğer Devreler

Şekil 3.26'daki köprü yapısı daha ileri tartışmayı gerektiren bir direnç arabağlantısına sahiptir. Eğer galvanometreyi eşdeğer direnci R_m ile değiştirirsek Şekil 3.28'de gösterilen devreyi çizebiliriz. Eğer bu bölümün başında gösterilen seri ve paralel eşdeğer dirençlerle sınırlı olursak, bu devrenin arabağlı dirençlerini pilin terminallerine bağlı tek bir eşdeğer dirence indirgeyemeyiz. Arabağlı dirençler, bir Δ-Y veya π-T eşdeğer devresi[1] ile tek bir dirence indirgenebilir.



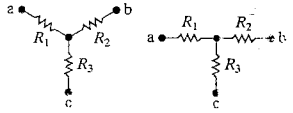
Şekil 3.28 Wheatstone köprü devresi ile oluşturulan bir direnç devresi.

Şekil 3.28'de gösterilen devredeki R_1, R_2 ve R_m (veya R_3, R_m ve R_x) dirençleri bir delta (Δ) arabağlantısı olarak adlandırılır çünkü arabağlantı Yunan alfabesindeki Δ'ya benzemektedir. Buna π arabağlantısı da denir çünkü bir Δ, iki yapının elektriksel eşdeğerliği bozulmadan bir π şekline getirilebilir. Δ ve π arabağlantılar arasındaki elektriksel eşdeğerlik Şekil 3.29'da açıktır.



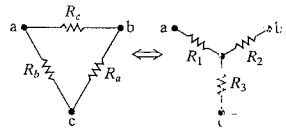
Şekil 3.29 Bir Δ yapının bir π yapı olarak görülmesi.

Şekil 3.28'de gösterilen devredeki R_1, R_m ve R_3 (veya R_2, R_m ve R_x) dirençleri bir Y arabağlantısı olarak adlandırılır çünkü arabağlantı Y harfine benzemektedir. Arabağlantı Şekil 3.30'daki gibi çizildiğinde, Y şeklini görmek daha kolaydır. Y yapısına T ara ağlantısı da denir çünkü Y yapısı, iki yapının elektriksel eşdeğerliği bozulmadan bir T yapısı haline getirilebilir. Y ve T arabağlantılar arasındaki elektriksel eşdeğerlik Şekil 3.30'da açıkça görülmektedir.



Şekil 3.30 Bir Y yapının bir T yapı olarak görülmesi.

Şekil 3.31 Δ-Y (veya π-T) eşdeğer devre dönüşümlerini sergilemektedir. Basitçe bağlantıların şeklini değiştirerek bir Δ arabağlantısını bir Y yapısına dönüştüremeyeceğimize dikkat ediniz. Δ bağlı devrenin Y bağlı devreye eşdeğer olduğunu söylemek, Δ yapısının, iki yapının terminal davranışını özdeş yapacak şekilde bir Y yapısı ile değiştirilebileceği anlamına gelir. Böylece, bu iki devre birer kara kutu içine konursa dış ölçümler ile kutunun delta bağlı dirençler mi yoksa Y bağlı dirençler mi içerdiğini söyleyemeyiz. Bu durum, sadece her bir kutuda karşılıklı terminal çiftleri arasındaki direnç aynı ise doğrudur. Örneğin, a ve b terminalleri arasındaki direnç, delta bağlı veya Y bağlı devre de kullansak aynı olmalıdır.



Şekil 3.31 Δ-Y dönüşümü.

[1] Δ ve Y yapılar sadece direnç devrelerinde değil, birçok yararlı devrede kullanılır. Bu nedenle Δ-Y dönüşümü devre analizinde önemli bir araçtır.

Δ bağlı devrede her bir terminal çifti için eşdeğer direnç seri ve paralel sadeleştirmeler kullanılarak hesaplanabilir:

$$R_{ab} = \frac{R_c(R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c} = R_1 + R_2, \tag{3.41}$$

$$R_{bc} = \frac{R_a(R_b + R_c)}{R_a + R_b + R_c} = R_2 + R_3, \tag{3.42}$$

$$R_{ca} = \frac{R_b(R_c + R_a)}{R_a + R_b + R_c} = R_1 + R_3. \tag{3.43}$$

Eş. 3.41 - 3.43'ün doğrudan cebirsel işlenmesi ile Δ–Y eşdeğer devre için gerekcn Y bağlı dirençler Δ bağlı dirençler cinsinden ifade edilir:

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}, \tag{3.44}$$

$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c}, \tag{3.45}$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}. \tag{3.46}$$

Δ – Y dönüşümünü ters çevirmek de mümkündür. Yani Y yapı ile başlayıp eşdeğeri Δ yapı ile değiştirebiliriz. Üç Δ bağlı direncin Y bağlı dirençler cinsinden ifadeleri

$$R_a = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1}, \tag{3.47}$$

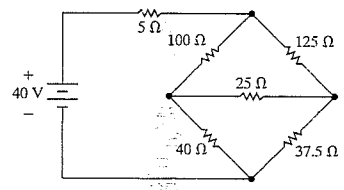
$$R_b = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2}, \tag{3.48}$$

$$R_c = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3} \tag{3.49}$$

bulunur. Örnek 3.7 bir devrenin analizini basitleştirmek için Δ – Y dönüşümünün kullanımını sergilemektedir.

Örnek 3.7 Δ–Y Dönüşümün Uygulanması

Şekil 3.32'de gösterilen devrede 40 V kaynak tarafından verilen akım ve gücü bulunuz.



Şekil 3.32 Örnek 3.7'nin devresi.

Çözüm

Sadece 40 V kaynaktan çekilen akım ve güçle ilgileniyoruz. Bu nedenle kaynak terminallerindeki eşdeğer direnci bulduğumuzda problem çözülmüş olacaktır. Bu eşdeğer direnci, üst Δ'yı (100, 125, 25 Ω) veya alt Δ'yı (40, 25, 37.5 Ω) eşdeğer Y'si ile değiştirerek kolaylıkla bulabiliriz. Üst Δ'yı değiştireceğiz. Bunun için şekil 3.33'te tanımlanan ve Eş. 3.44'ten 3.46'ya verilen üç Y direncini hesaplayacağız. Bu şekilde,

$$R_1 = \frac{100 \times 125}{250} = 50\ \Omega,$$

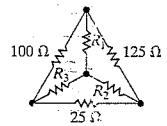
$$R_2 = \frac{125 \times 25}{250} = 12.5\ \Omega,$$

$$R_3 = \frac{100 \times 25}{250} = 10\ \Omega$$

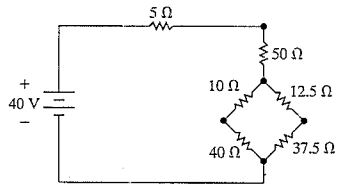
bulunur. Şekil 3.32'deki devrede Y dirençlerin yerine konması Şekil 3.34'te gösterilen devreyi oluşturur. Şekil 3.34'ten 40 V kaynağın terminalleri arasındaki direnç seri-paralel sadeleştirmelerle kolaylıkla

$$R_{eq} = 55 + \frac{(50)(50)}{100} = 80\ \Omega$$

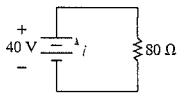
olarak bulunur. Son adım, devrenin 40 V kaynağa bağlı 80 Ω dirence indirgendiğine dikkat etmektir. Bu durum Şekil 3.35'te gösterilmiştir. Bu devreden, 40 V kaynağın 0.5 A ve 20 W verdiği açıktır.



Şekil 3.33 Eşdeğer Y dirençler.



Şekil 3.34 Şekil 3.32'deki devrenin dönüştürülmüş hali.

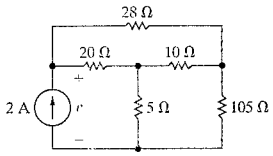


Şekil 3.35 Şekil 3.32'deki devrenin sadeleştirilmesindeki son adım.

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

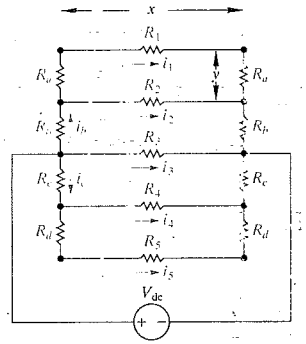
Hedef 6 – Δ-Y eşdeğer devrelerin ne zaman ve nasıl kullanılacağını bilmek

3.8 Şekildeki devrede v gerilimini bulmak için Y - Δ dönüşümü kullanınız.



Çözüm: 35 V.

NOT: Ayrıca bölüm Problemlerinden 3.52, 3.53 ve 3.54'ü de çözmeyi deneyiniz.



Şekil 3.36 ▲ Bir buz çözücü ağın modeli.

Pratik Bakış Açısı

Arka Cam Buz Çözücüsü

Buz çözücü bir ağın modeli Şekil 3.36'da gösterilmiştir. Burada x ve y ağ elemanlarının yatay ve dikey aralıklarını göstermektedir. Ağın boyutları verildiğinden, her bir iletkende birim uzunluk başına harcanan gücü aynı yapacak şekilde direnç ifadelerini bulmamız gerekir. Bu, arka camın x ve y yönlerinde düzgün ısınmasını garanti edecektir. Burada, aşağıdaki bağıntıları sağlayan ağ direnç değerlerini bulmamız gerekir.

$$i_1^2\left(\frac{R_1}{x}\right) = i_2^2\left(\frac{R_2}{x}\right) = i_3^2\left(\frac{R_3}{x}\right) = i_4^2\left(\frac{R_4}{x}\right) = i_5^2\left(\frac{R_5}{x}\right), \tag{3.50}$$

$$i_1^2\left(\frac{R_a}{y}\right) = i_1^2\left(\frac{R_1}{x}\right), \tag{3.51}$$

$$i_1^2\left(\frac{R_a}{y}\right) = i_b^2\left(\frac{R_b}{y}\right) = i_c^2\left(\frac{R_c}{y}\right) = i_5^2\left(\frac{R_d}{y}\right), \tag{3.52}$$

$$i_5^2\left(\frac{R_d}{y}\right) = i_5^2\left(\frac{R_5}{x}\right). \tag{3.53}$$

Ağın analizine, yapısından yararlanarak başlanır. Eğer devrenin alt kısmını (R_c, R_d, R_4 ve R_5 dirençleri) ayırırsak, i_1, i_2, i_3 ve i_b akımları etkilenmez. Böylelikle Şekil 3.36'daki devreyi incelemek yerine Şekil 3.37'deki daha basit devreyi inceleyebiliriz.

Ayrıca Şekil 3.37'deki devrede R_1, R_2, R_3, R_a ve R_b'yi bulduktan sonra, diğer dirençlerin değerini de bulduğumuza dikkat ediniz. Bunun nedeni

$$\begin{aligned} R_4 &= R_2, \\ R_5 &= R_1, \\ R_c &= R_b, \\ R_d &= R_a \end{aligned} \tag{3.54}$$

olmasıdır. Şekil 3.37'deki ağ devresinin analizine i_1, i_2, i_3 ve i_b akımlarının ifadelerini yazarak başlayacağız. i_b'yi bulmak için R_3 ile paralel olan eşdeğer direnci bulalım:

$$\begin{aligned} R_e &= 2R_b + \frac{R_2(R_1 + 2R_a)}{R_1 + R_2 + 2R_a} \\ &= \frac{(R_1 + 2R_a)(R_2 + 2R_b) + 2R_2R_b}{(R_1 + R_2 + 2R_a)} \end{aligned} \tag{3.55}$$

Kolaylık için Eş. 3.55'in payını

$$D = (R_1 + 2R_a)(R_2 + 2R_b) + 2R_2R_b \tag{3.56}$$

olarak tanımlayalım. Sonuç olarak

$$R_e = \frac{D}{(R_1 + R_2 + 2R_a)} \tag{3.57}$$

bulunur. Buradan doğrudan,

$$\begin{aligned} i_b &= \frac{V_{dc}}{R_e} \\ &= \frac{V_{dc}(R_1 + R_2 + 2R_a)}{D} \end{aligned} \tag{3.58}$$

olur. i_1 ve i_2 ifadeleri i_b'den akımın bölünmesi ile doğrudan elde edebilir. Böylece

$$i_1 = \frac{i_bR_2}{R_1 + R_2 + 2R_a} = \frac{V_{dc}R_2}{D} \tag{3.59}$$

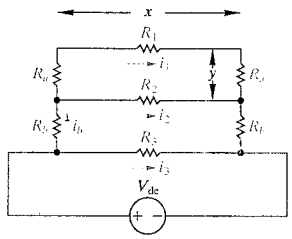
ve

$$i_2 = \frac{i_b(R_1 + 2R_a)}{(R_1 + R_2 + 2R_a)} = \frac{V_{dc}(R_1 + 2R_a)}{D} \tag{3.60}$$

bulunur. i_3'ün ifadesi basitçe

$$i_3 = \frac{V_{dc}}{R_3} \tag{3.61}$$

çıkar.



Şekil 3.37 ▲ Buz çözücü ağın basitleştirilmiş bir modeli.

Şimdi Eş. 3.50-3.52'deki kısıtları kullanarak R_a, R_b, R_2 ve R_3'ün ifadelerini R_1'in fonksiyonu olarak çıkaracağız. Eş. 3.51'den

$$\frac{R_a}{y} = \frac{R_1}{x}$$

veya

$$R_a = \frac{y}{x}R_1 = \sigma R_1$$

bulunur, burada

$$\sigma = y/x \tag{3.62}$$

ile verilir. Eş. 3.50'den,

$$R_2 = \left(\frac{i_1}{i_2}\right)^2 R_1 \tag{3.63}$$

bulunur. (i_1/i_2) oranı Eş. 3.59 ve 3.60'dan doğrudan elde edilir:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1 + 2R_a} = \frac{R_2}{R_1 + 2\sigma R_1}. \tag{3.64}$$

Eş. 3.64, Eş 3.63'te yerine konduğunda biraz cebirsel işlemden sonra (Bkz. Problem 3.69)

$$R_2 = (1 + 2\sigma)^2 R_1 \tag{3.65}$$

bulunur. R_b'nin R_1'in fonksiyonu olarak ifadesi Eş. 3.52'den

$$R_b = \left(\frac{i_1}{i_b}\right)^2 R_a \tag{3.66}$$

olarak çıkarılır. (i_1/i_b) oranı Eş. 3.58 ve 3.59'dan çıkarılır. Böylece

$$\frac{i_1}{i_b} = \frac{R_2}{(R_1 + R_2 + 2R_a)} \tag{3.67}$$

elde edilir. Eş. 3.67 Eş. 3.66'da yerine konduğunda bazı cebirsel işlemlerden sonra (Bkz. Problem 3.69),

$$R_b = \frac{(1 + 2\sigma)^2 \sigma R_1}{4(1 + \sigma)^2} \tag{3.68}$$

elde edilir. Son olarak R_3'ün ifadesi Eş. 3.50'de verilen kısıttan elde edilir;

$$R_3 = \left(\frac{i_1}{i_3}\right)^2 R_1. \tag{3.69}$$

Burada

$$\frac{i_1}{i_3} = \frac{R_2 R_3}{D}$$

geçerlidir. Yine cebirsel işlemlerden sonra (Bkz. Problem 3.70) R_3'ün ifadesi

$$R_3 = \frac{(1 + 2\sigma)^4}{(1 + \sigma)^2} R_1 \tag{3.62}$$

haline indirgenebilir. Analiz sonuçlarınız Tablo 3.1'de özetlenmiştir.

NOT: Pratik Bakış Açısını kavrayışınızı Bölüm Problemlerinden 3.71 - 3.73'ü çözmeyi deneyerek değerlendiriniz.

TABLO 3.1 Buz Çözücü Ağın Direnç Denklemleri Özeti

Direnç	İfade
R_a	σR_1
R_b	$\frac{(1 + 2\sigma)^2 \sigma R_1}{4(1 + \sigma)^2}$
R_2	$(1 + 2\sigma)^2 R_1$
R_3	$\frac{(1 + 2\sigma)^4}{(1 + \sigma)^2} R_1$

burada $\sigma = y/x$'dir.

Özet

- **Seri dirençler** aşağıdaki denkleme göre tek bir direnç elde edecek şekilde birleştirilebilir.

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{k} R_i = R_1 + R_2 + \cdots + R_k.$$

(Bkz. sf. 58.)

- **Paralel dirençler** aşağıdaki denkleme göre tek bir direnç elde edecek şekilde birleştirilebilir.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_k}.$$

Sadece iki direnç paralel olduğunda, eşdeğer direnç ifadesi sadeleşerek

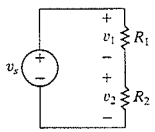
$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

haline gelir. (Bkz. Sf. 59-60.)

- Gerilim şekilde gösterildiği gibi seri dirençler üzerinde bölünürse, her bir direnç üzerindeki gerilim aşağıdaki denklemlerle bulunabilir.

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s,$$

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s.$$

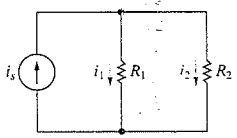


(Bkz. Sf. 62.)

- Akım paralel dirençler arasında, şekilde gösterildiği gibi bölündüğünde her bir dirençteki akım aşağıdaki denklemlerle bulunabilir.

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_s,$$

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s.$$



(Bkz. Sf. 64.)

- **Gerilim bölünmesi**, seri bağlı bir direnç dizisi üzerindeki gerilim düşüşü bilindiğinde, dizideki tek bir direnç üzerindeki gerilim düşmesini bulmak için kullanılan bir devre analiz aracıdır:

$$v_j = \frac{R_j}{R_{eq}} v.$$

Burada v_j, R_j direnci üzerindeki gerilim düşmesi ve v de eşdeğer direnci R_{eq} olan direnç dizisi üzerindeki toplam gerilim düşmesidir. (Bkz. Sf. 66.)

- **Akım bölünmesi,** bir paralel bağlı direnç grubunda gruba giren akım bilindiğinde tek bir direnç üzerindeki akımın bulunması için kullanılan bir devre analiz aracıdır:

$$I_j = \frac{R_{eq}}{R_j} i.$$

Burada i_j, R_j direncindeki akımdır ve i de paralel bağlı ve eşdeğeri R_{eq} olan gruba giren akımdır. (Bkz. Sf. 66.)

- Bir **voltmetre** gerilimi ölçer ve ölçeceği gerilime paralel yerleştirilmelidir. İdeal bir voltmetrenin iç direnci sonsuzdur ve bu nedenle ölçülen gerilimi değiştirmez. (Bkz. Sf. 68.)

- Bir **ampermetre** akımı ölçer ve ölçeceği akım ile seri yerleştirilmelidir. İdeal bir ampermetrenin iç direnci sıfırdır ve bu nedenle ölçülen akımı değiştirmez. (Bkz. Sf. 68.)

- **Sayısal ve analog metrelerin** iç direnci vardır ve bu da ölçülen devre değişkenini etkiler. D'Arsonval metre hareketine dayanan metreler kasti olarak iç direnç içerirler ve bu yolla hareketin bobinindeki akımı sınırlarlar. (Bkz. Sf. 68.)

- **Wheatstone köprüsü,** dört direnç, bir dc kaynak ve bir galvanometre kullanarak hassas direnç ölçümleri yapan bir devredir. Bir Wheatstone köprüsü, dirençler Eş. 3.33'ü sağladığı zaman dengededir ve bu durumda galvanometre okuması 0 A olur. (Bkz. Sf. 71.)

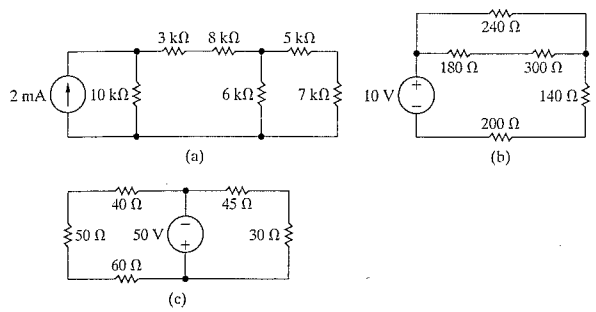
- **Üç dirençli** ve Δ yapısında (veya π yapısında) bağlı bir devre, üç Y bağlı (veya T bağlı) dirençten oluşan bir eşdeğer devreye dönüştürülebilir. Δ – Y dönüşümü Eş. 3.44-3.46 ile verilmiştir; Y – Δ dönüşümü ise Eş. 3.47 – 3.49 ile verilir. (Bkz. Sf. 74.)

Problemler

Kısım 3.1-3.2

3.1 Şekil P3.1'de gösterilen her devre için
a) Seri bağlı dirençleri belirleyiniz,
b) seri bağlı dirençleri eşdeğer dirençle değiştirerek devreyi sadeleştiriniz.

Şekil P3.1



3.2 Şekil P3.2'deki devrelerin her biri için
a) Paralel bağlı dirençleri belirleyiniz,
b) paralel bağlı dirençleri eşdeğer dirençlerle değiştirerek devreyi sadeleştiriniz.

3.3 PSPICE a) Şekil 3.9'da gösterilen devredeki her bir dirençte harcanan gücü bulunuz.
b) 120 V kaynağın taşıdığı gücü bulunuz.
c) Taşınan gücün harcanan güce eşit olduğunu gösteriniz.

3.4 PSPICE a) Şekil 3.9'daki devrenin çözümünün (Bkz. Örnek 3.1), x ve y düğümlerinde Kirchhoff akım yasasını sağladığını gösteriniz.
b) Şekil 3.9'daki devrenin çözümünün, her kapalı döngüde Kirchhoff gerilim yasasını sağladığını gösteriniz.

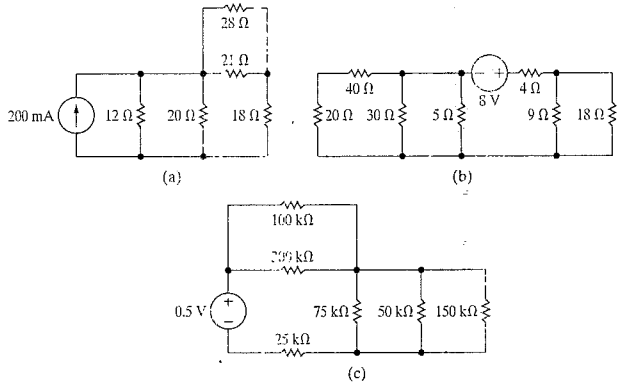
3.5 Problem 3.1'deki devrelerin her birinde kaynağın gördüğü eşdeğer direnci bulunuz.

3.6 Problem 3.2'deki devrelerin her birinde kaynağın gördüğü eşdeğer direnci bulunuz.

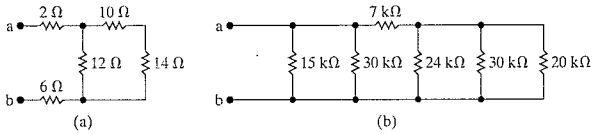
3.7 PSPICE Şekil P3.7'deki her bir devrede R_{ab} eşdeğer direncini bulunuz.

3.8 PSPICE Şekil P3.8'deki her bir devrede R_{ab} eşdeğer direncini bulunuz.

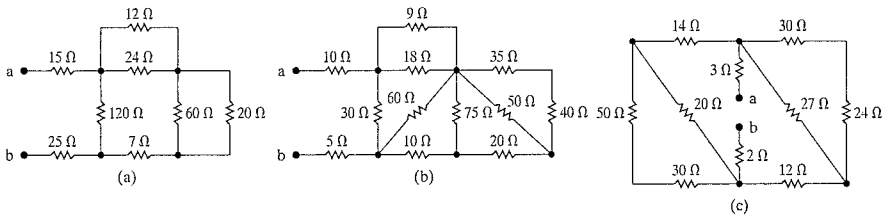
Şekil P3.2



Şekil P3.7



Şekil P3.8

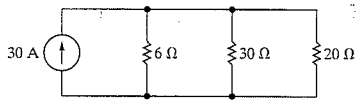


3.9 PSPICE a) Şekil P3.9 (a)–(c)'deki devrelerde R_{ab} eşdeğer direncini bulunuz.
b) Her bir devrede kaynağın sağladığı gücü bulunuz.
c) (b)'nin sonuçlarını kullanarak, 1 k Ω dirençlerle eşdeğer direnci ?? olan bir direnç devresi kurunuz.
d) (b)'nin sonuçlarını kullanarak, 2 k Ω dirençlerle eşdeğer direnci 5.5 k Ω olan bir direnç devresi kurunuz.

Kısım 3.3-3.4

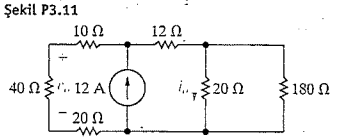
3.10 PSPICE Şekil P3.10'daki devrede 30 Ω direncin harcadığı gücü bulunuz.

Şekil P3.10



3.11 PSPICE Şekil P3.11'deki devrede
a) v_o ve i_o'yu
b) 12 Ω dirençte harcanan gücü,
c) Akım kaynağınca verilen gücü bulunuz.

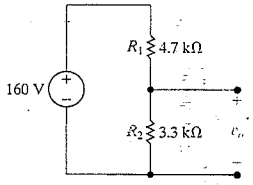
Şekil P3.11



3.12 a) R değerli paralel iki direncin eşdeğer direncinin ifadesini bulunuz.
b) R değerli paralel n direncin eşdeğer direncinin ifadesini bulunuz.

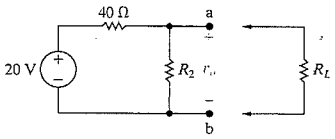
3.13 TASARIM PROBLEMİ PSPICE a) Şekil P3.13'te gösterilen gerilim bölücü devrede yüksüz durumda v_o gerilimini bulunuz.
b) R_1 ve R_2'de harcanan gücü bulunuz.
c) Sadece 0.5 W direnç bulunduğunu kabul ediniz. Yüksüz gerilim (a)'daki ile aynı isteniyor. R_1 ve R_2'nin en küçük ohmik değerlerini belirtiniz.

Şekil P3.13

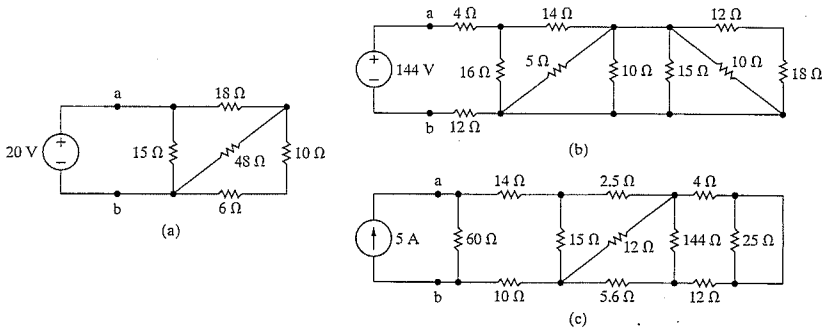


3.14 PSPICE Şekil P3.14'te gösterilen gerilim bölücü devresinde v_o'nun yüksüz değeri 4 V'tur. R_L yük direnci a ve b terminalleri arasına bağlandığında v_o 3 V'a düşmektedir. R_L'yi bulunuz.

Şekil P3.14

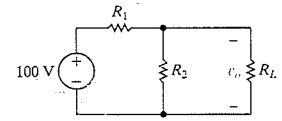


Şekil P3.9



3.15 TASARIM PROBLEMİ PSPICE Şekil P3.15'te gösterilen gerilim bölücü devredeki yüksüz gerilim 20 V'tur. Bölücüye bağlanacak en küçük yük direnci ise 48 kΩ'dur. Bölücü yüklendiğinde, v_o'nun 16 V'un altına düşmemesi gerekmektedir.
a) Yukarıdaki gereksinimlere göre bölücü devresini tasarlayınız. R_1 ve R_2'nin nümerik değerini veriniz.
b) Eldeki ticari dirençlerin güç anma değerlerinin 1/16, 1/8, 1/4, 1 ve 2 W olduğunu kabul ediniz. Hangi güç anma değerini belirtirdiniz?

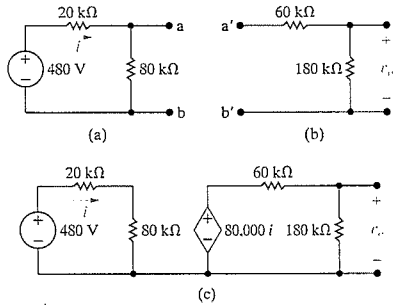
Şekil P3.15



3.16 Şekil P3.15'teki gerilim bölücünün 0.15 W dirençlerle yapıldığını kabul ediniz. Bölücüdeki dirençlerden biri güç harcama sınırına ulaşana kadar R_L ne kadar azaltılabilir?

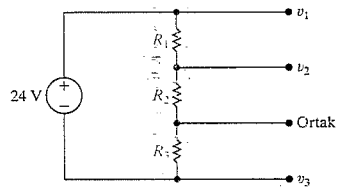
3.17 PSPICE a) Şekil P3.17(a)'daki gerilim bölücü, Şekil P3.17(b)'deki gerilim bölücü ile yüklenmiştir, yani a terminali a' terminaline ve b de b''ne bağlanmıştır. v_o'yu bulunuz.
b) Şimdi Şekil 3.17(b)'deki gerilim bölücünün, Şekil P3.17(c)'de gösterildiği gibi bir akım kontrollü gerilim kaynağı aracılığıyla Şekil P3.17(a)'daki gerilim bölücüye bağlandığını kabul ediniz. v_o'yu bulunuz.
c) Bağımlı gerilim kaynağını eklemenin, 480 V kaynağa bağlı olan gerilim bölücü üzerindeki etkisi nedir?

Şekil P3.17



3.18 TASARIM PROBLEMİ Sıklıkla bir gerilim bölücü kullanarak birden fazla gerilim üretmek gerekir. Örneğin birçok kişisel bilgisayarın bellek bileşenleri, ortak bir referans terminaline göre, –12 V, 5 V ve +12 V gerilimlerine ihtiyaç duyar. Şekil P3.18'deki R_1, R_2 ve R_3 değerlerini aşağıdaki tasarım gereklerini sağlayacak şekilde seçiniz.
a) Bölücü yüksüzken 24 V kaynak tarafından bölücüye sağlanan toplam güç 80 W'tır.
b) Tümü ortak bir referansa göre ölçülen üç gerilim v_1 = 12 V, v_2 = 5 V ve v_3 = –12 V'tur.

Şekil P3.18



3.19 TASARIM PROBLEMİ Şekil P3.13'teki gibi bir gerilim bölücü, yüksüzken ($R_L = 8$) $v_o = kv_s$ ve tam yüklü iken ($R_L = R_o$) $v_o = \alpha v_s$ olacak şekilde tasarlanacaktır. Tanım gereği $\alpha < k < 1$ olduğuna dikkat ediniz.
a)

$$R_1 = \frac{k - \alpha}{\alpha k} R_o$$

ve

$$R_2 = \frac{k - \alpha}{\alpha(1 - k)} R_o$$

olduğunu gösteriniz.
b) Eğer $k = 0.85$, $\alpha = 0.80$ ve $R_o = 34$ kΩ ise R_1 ve R_2'nin nümerik değerlerini belirtiniz.
c) Eğer v_s=60 V ise R_1 ve R_2'de harcanacak maksimum gücü belirtiniz.
d) Yük direncinin kazara kısa devre edildiğini kabul ediniz. R_1 ve R_2'de ne kadar güç harcanır?

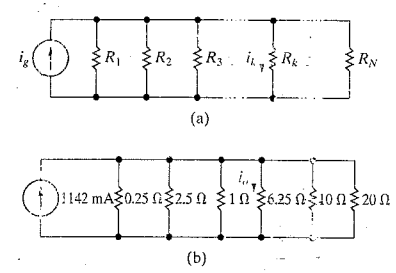
3.20 PSPICE Şekil P3.20 (a)'daki devrede k-yinci daldaki akımın i_g kaynak akımı ile k-yinci dalın iletkenliğinin çarpımının iletkenlikler toplamına bölümüne eşit olduğunu yani,

$$i_k = \frac{i_g G_k}{G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_k + \cdots + G_N}$$

olduğunu gösteriniz.

b) (a)'da çıkarılan sonucu kullanarak Şekil P3.20(b)'deki devrede 6.25 Ω direnç üzerindeki akımı hesaplayınız.

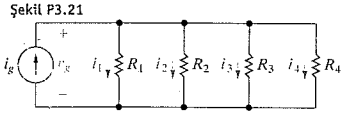
Şekil P3.20



3.21 TASARIM PROBLEMİ Şekil P3.21'deki devrede dirençleri aşağıdaki tasarım ölçütleri sağlanacak şekilde bulunuz.

$$i_g = 5\text{ mA};\ v_g = 1\text{ V};\ i_1 = 4i_2;$$
$$i_2 = 8i_3;\ \text{and } i_3 = 5i_4.$$

Şekil P3.21



3.22 Şekil P3.1(a)'daki devreye bakınız.

a) Akım bölünmesini kullanarak 10 kΩ dirençte yukarıdan aşağı doğru akan akımı bulunuz.

b) (a)'daki sonucunuzu kullanarak 10 kΩ direnç üzerindeki gerilim düşmesini bulunuz. Üst taraf pozitiftir.

c) (b)'deki sonucunuzu ve gerilim bölünmesini kullanarak, pozitif solda ise 5 kΩ direnç üzerindeki gerilim düşmesini bulunuz.

3.23 Şekil P3.1(b)'deki devreye bakınız.

a) Gerilim bölünmesi kullanarak, pozitif solda ise 240 Ω direnç üzerindeki gerilim düşmesini bulunuz.

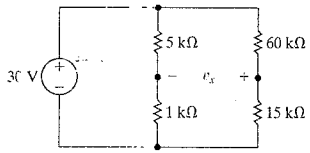
b) (a)'daki sonucunuzu kullanarak 240 Ω dirençte soldan sağa akan akımı bulunuz.

c) (b)'deki sonucunuzu ve akım bölünmesini kullanarak 140 Ω dirençteki akımı bulunuz.

3.24 PSPICE a) Şekil P3.24'teki devrede v_x'i bulunuz.

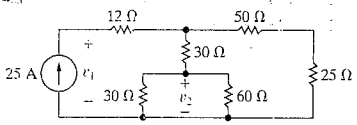
b) 30 V kaynağı genel bir v_s gerilim kaynağı ile değiştiriniz ve üst terminali pozitif kabul ediniz. v_x'i v_s'nin fonksiyonu olarak bulunuz.

Şekil P3.24



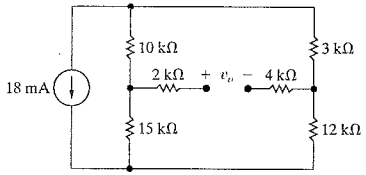
3.25 PSPICE Şekil P3.25'te v_1 ve v_2'yi bulunuz.

Şekil P3.25



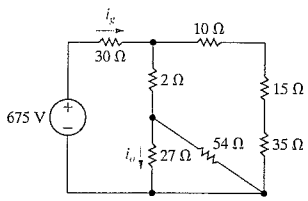
3.26 PSPICE Şekil P3.26'daki devrede v_o'yu bulunuz.

Şekil P3.26



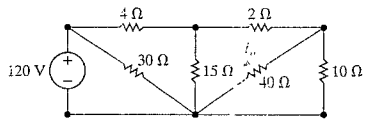
3.27 PSPICE Şekil P3.27'deki devrede i_o ve i_g'yi bulunuz.

Şekil P3.27



3.28 PSPICE Şekil P3.28'deki devre için (a) i_o'yu ve (b) 15 Ω dirençte harcanan gücü bulunuz.

Şekil P3.28

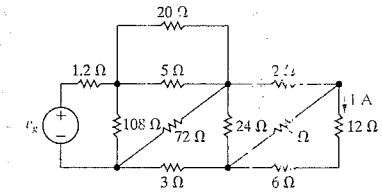


3.29 PSPICE Şekil P3.29'da gösterilen devredeki 12 Ω dirençteki akım tek 1 A'dir.

a) v_g'yi bulunuz.

b) 20 Ω dirençte harcanan gücü bulunuz.

Şekil P3.29



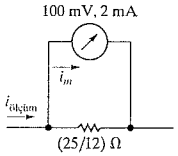
Kısım 3.5

3.30 a) Şekil P3.30'daki ampermetre devresinde, d'Arsonval hareketteki akımın, her zaman ölçülen akımın 25'te 1'i olduğunu gösteriniz.

b) Eğer 100 mV, 2 mA hareket bir 5 A ampermetrede kullanılsa oran ne olurdu?

c) Bir dc d'Arsonval metrede düzgün bir ölçek bekler misiniz?

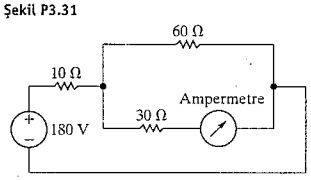
Şekil P3.30



3.31 Şekil P3.31'deki devrede ampermetrenin direnci 0.5 Ω'dur. Eğer hata aşağıdaki gibi tanımlanıyorsa metre okumasındaki yüzde hata nedir?

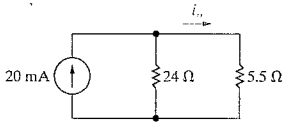
$$\%\text{hata} = \left(\frac{\text{ölçme değeri}}{\text{gerçek değer}} - 1\right) \times 100$$

Şekil P3.31



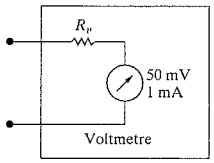
3.32 Problem 3.31'de gösterilen ampermetre, Şekil P3.32'deki devrede i_o akımını ölçmek için kullanılmaktadır. Ölçülen değerdeki yüzde hata nedir?

Şekil P3.32



3.33 Şekil P3.33'te bir d'Arsonval voltmetre gösterilmektedir. Aşağıdaki tam ölçek okumaların her biri için R_v değerini bulunuz. (a) 100 V, (b) 5 V, (c) 100 mV

Şekil P3.33



3.34 Problem 3.33'te verilen d'Arsonval voltmetrenin, Şekil P3.32'deki 24 Ω direnç üzerindeki gerilimi ölçmek için kullanıldığını varsayınız.

a) Voltmetre ne okur?

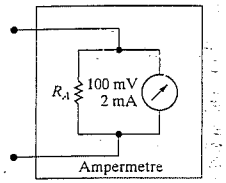
b) Problem 3.31'de verilen yüzde okuma hatası tanımı kullanılırsa, voltmetre okumasındaki yüzde hata nedir?

3.35 Paralel bir direnç ve bir 50 mV, 1 mA d'Arsonval hareket 10 A'lik bir ampermetre yapmak için kullanılmaktadır. 0.015 Ω bir direnç ampermetrenin terminalleri arasına bağlanmıştır. Ampermetrenin yeni tam ölçek okuma aralığı nedir?

3.36 TASARIM PROBLEMİ Bir d'Arsonval hareket 1 mA ve 50 mV anma değerlidir. 0.5 W hassas dirençlerin parallel kullanım için var olduğunu kabul ediniz. Ampermetrenin tasarlanabileceği en yüksek tam ölçek okuma nedir? Açıklayınız.

3.37 TASARIM PROBLEMİ Şekil P3.37 bir d'Arsonval ampermetre göstermektedir. Aşağıdaki tam ölçek akım okumaları yapabilecek bir d'Arsonval ampermetre seti tasarlayınız: (a) 5 A, (b) 2 A, (c) 1 A ve (d) 50 mA. Her bir ampermetre için R_A parallel direncini belirtiniz.

Şekil P3.37



3.38 PSPICE Şekil 2.24'teki devrede eleman değerleri, R_1=20 kΩ, R_2=80 kΩ, R_C=0.82 kΩ, R_E=0.2 kΩ, V_{CC}=7.5 V, V_0=0.6 V ve β=39 olarak verilmiştir.

a) i_B'nin mikroamper cinsinden değerini hesaplayınız.

b) DC ampermetre olarak kullanıldığında bir sayısal çoklu metrenin 1 kΩ dirence sahip olduğunu kabul ediniz. Eğer bu metre, i_B akımını okumak üzere b ve 2 terminalleri arasına bağlanırsa ne okur?

c) (a) şıkkında hesaplanan i_B değeri doğru değer alınırsa ölçümdeki hata yüzdesi nedir?

3.39 Şekil P3.39'daki gerilim bölücü devre, yüksüz durumdaki çıkış gerilimi giriş geriliminin 7/9'u olacak şekilde tasarlanmıştır. 100 Ω/V duyarlılığa sahip ve tam ölçek okuması 200 V olan bir d'Arsonval voltmetre devrenin çalışmasını kontrol etmek için kullanılmaktadır.

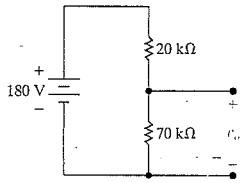
a) 180 V kaynak terminalleri arasına bağlanırsa voltmetre ne okur?

b) 70 kΩ direnç üzerine bağlanırsa voltmetre ne okur?

c) 20 kΩ direnç üzerine bağlanırsa voltmetre ne okur?

d) (b) ve (c) şıklarındaki voltmetre okumalarının toplamı (a) şıkkındakini verir mi? Açıklayınız.

Şekil P3.39



3.40 Bir güç kaynağının dc geriliminin 500 V civarında oldu size söylenmiştir. DC voltmetre almak üzere cihaz deposuna gittiğinizde sadece iki dc voltmetrenin bulunduğunu görüyorsunuz. Voltmetreler 400 V tam ölçek anma değerlidir ve duyarlılıkları 1000 Ω/V'tur.

a) İki voltmetreyi kullanarak güç kaynağının gerilimini nasıl kontrol edersiniz?

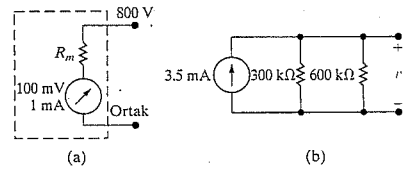
b) Ölçülebilecek maksimum gerilim nedir?

c) Eğer güç kaynağı gerilimi 504 V ise her bir voltmetre ne okur?

3.41 Problem 3.40'ta açıklanan iki voltmetreye ek olarak 50 kΩ'luk bir hassas direncin de olduğunu kabul ediniz. 50 kΩ direnç, seri bağlı voltmetrelere seri olarak bağlanmıştır. Sonra bu devre, güç kaynağı terminalleri arasına bağlanmıştır. Voltmetrelerdeki okuma 328 V'tur. Güç kaynağının gerilimi nedir?

3.42 Şekil P3.42(a)'da gösterilen voltmetre 800 V tam ölçek okuma değerine sahiptir. Metre hareketi 100 mV ve 1 mA anma değerlidir. Eğer metre Şekil P3.42(b)'deki devrede v gerilimini ölçmek için kullanılırsa metre okumasındaki yüzde hata nedir?

Şekil P3.42

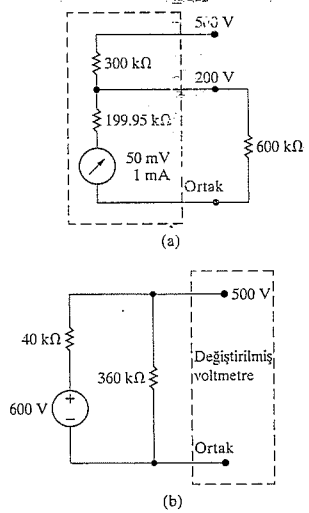


3.43 İki ölçekli bir voltmetrenin 200 V terminali ile ortak terminali arasına Şekil P3.43(a)'da görüldüğü gibi 600 kΩ bir direnç bağlanmıştır. Daha sonra bu değiştirilmiş voltmetre ile Şekil P3.43(b)'deki 360 kΩ direnç üzerindeki gerilim ölçülmüştür.

a) Metrenin 500 V ölçeğindeki okuma nedir?

b) Ölçülen gerilimdeki yüzde hata nedir?

Şekil P3.43

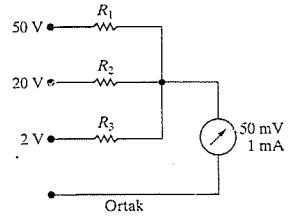


3.44 TASARIM PROBLEMİ Şekil P3.44'teki voltmetreyi tasarlarken metre hareketinin direncini ihmal ettiğinizi kabul ediniz.

a) R_1, R_2 ve R_3'ün değerlerini belirtiniz.

b) Her bir aralık için bu tasarım stratejisinin neden olduğu hata yüzdesini bulunuz.

Şekil P3.44

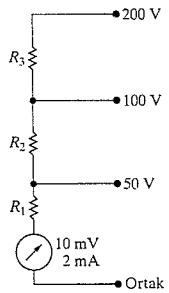


3.45 TASARIM PROBLEMİ Şekil P3.45'teki üç gerilim aralığına sahip olan bir d'Arsonval voltmetre tasarlayınız.

a) R_1, R_2 ve R_3 değerlerini belirtiniz.

b) 100 V terminali ile ortak terminal arasına 500 kΩ direnç bağlanmış olsun. Daha sonra voltmetre, ortak ve 200 V terminali kullanılarak bilinmeyen bir gerilime bağlanıyor ve 188 V okuyor. Bilinmeyen gerilim nedir?

Şekil P3.45

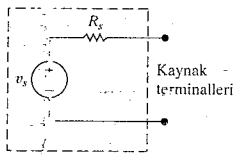


3.46 Bir dc gerilim kaynağının devre modeli Şekil P3.46'da gösterilmiştir. Kaynak terminallerinde aşağıdaki gerilim ölçümleri yapılmıştır. (1) Kaynak terminalleri açık iken gerilim 80 mV ölçülmüştür ve (2) kaynak terminallerine 10 MΩ direnç bağlı iken gerilim 72 mV olarak ölçülmüştür. Tüm ölçümler metre direnci 10 MΩ olan bir sayısal voltmetre ile yapılmıştır.

a) Kaynağın kilo ohm cinsinden iç direnci (R_s) nedir?

b) Kaynağın milivolt cinsinden iç gerilimi (v_s) nedir?

Şekil P3.46



Kısım 3.6-3.7

3.47 Şekil 3.26'daki ideal gerilim kaynağının bir ideal akım kaynağı ile değiştirildiğini kabul ediniz. Eş. 3.33'ün hâlâ geçerli olduğunu gösteriniz.

3.48 PSPICE Şekil 3.26'da gösterilen köprü devresi 21 V dc kaynak ile beslenmektedir. Köprü, R_1=800 Ω, R_2=1200 Ω ve R_3=600 Ω iken dengelenmektedir.

a) R_x'in değeri nedir?

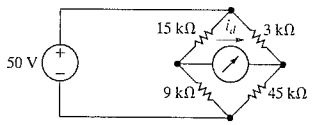
b) DC kaynak ne kadar (miliamper cinsinden) akım verir?

c) Devredeki hangi direnç en çok gücü çeker? Bu direnç ne kadar güç harcar?

d) Hangi direnç en az güç çeker? Bu gücün değeri nedir?

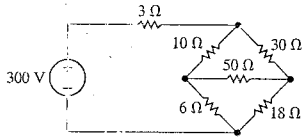
3.49 PSPICE Şekil P3.49'daki dengelenmemiş köprüde sezici üzerindeki gerilim düşüşü ihmal edilebilir ise i_d sezici akımını bulunuz.

Şekil P3.49



3.50 PSPICE Şekil P3.50'deki devrede 18 Ω dirençte harcanan gücü bulunuz.

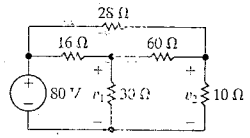
Şekil P3.50



3.51 PSPICE Şekil 3.26'da gösterilen Wheatstone köprüsünde R_2/R_1 oranı 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100 ve 1000 değerlerine ayarlanabilmektedir. R_3 direnci 1'den 1110 Ω'a 1 Ω adımla değiştirilebilmektedir. Bilinmeyen bir direncin 4 ve 5 Ω arasında olduğu bilinmektedir. R_2/R_1 oranının ayarı ne olmalıdır ki bilinmeyen direnç dört anlamlı basamağa kadar ölçülebilsin?

3.52 PSPICE Şekil P3.52'deki devrede v_1 ve v_2 gerilimlerini bir Δ-Y dönüşümü kullanarak bulunuz.

Şekil P3.52

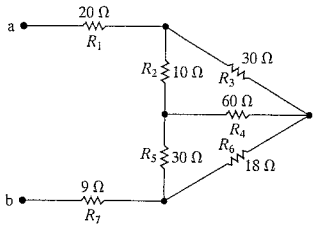


3.53 PSPICE a) R_2, R_3 ve R_4 dirençlerini içeren bir Δ-Y dönüşümü kullanarak Şekil P3.53'teki devrede R_{ab} eşdeğer direncini bulunuz.

b) (a) şıkkını R_2, R_4 ve R_5 dirençlerini içeren bir Y-Δ dönüşümü kullanarak tekrar ediniz.

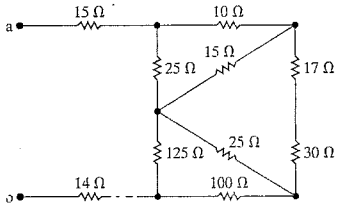
c) R_{ab}'yi bulmak için kullanılabilecek iki ek Δ-Y veya Y-Δ dönüşüm veriniz.

Şekil P3.53



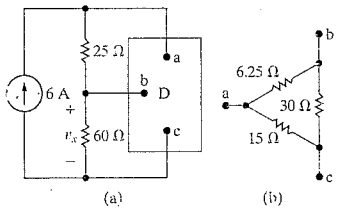
3.54 PSPICE Şekil P3.54'teki devrede R_{ab} eşdeğer direncini bulunuz.

Şekil P3.54



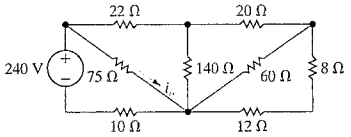
3.55 PSPICE Şekil P3.55(a)'daki devrede D ile işaretli cihaz, Şekil P3.55(b)'de eşdeğer devresi gösterilen bir elemanı temsil etmektedir. D'nin terminallerindeki etiketler cihazın devreye nasıl bağlandığını göstermektedir. v_x'i ve cihazın soğurduğu gücü bulunuz.

Şekil P3.55



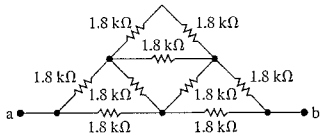
3.56 PSPICE Şekil P3.56'daki devrede 140 Ω dirençte harcanan gücü ve i_o'yu bulunuz.

Şekil P3.56



3.57 PSPICE Şekil P3.57'deki devrede R_{ab}'yi bulunuz.

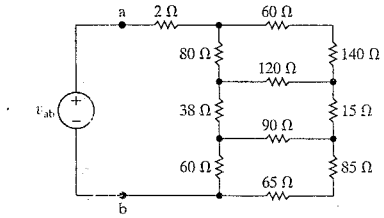
Şekil P3.57



3.58 PSPICE a) Şekil P3.58'deki ideal gerilim kaynağınca görülen direnci bulunuz.

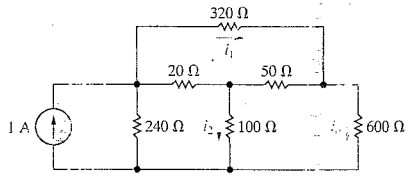
b) Eğer v_{ab} 600 V ise 15 Ω dirençte ne kadar güç harcanır?

Şekil P3.58



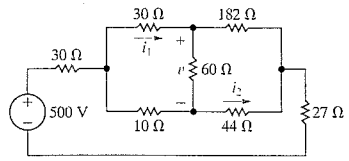
3.59 PSPICE Y - Δ dönüşümü kullanarak Şekil P3.59'daki devrede (a) i_o; (b) i_1; (c) i_2 değerlerini ve (d) ideal akım kaynağının aktardığı gücü bulunuz.

Şekil P3.59



3.60 PSPICE Şekil P3.60'ta gösterilen devrede (a) i_1'i; (b) v'yi; (c) i_2'yi ve (d) gerilim kaynağınca sağlanan gücü bulunuz.

Şekil P3.60



3.61 Eş. 3.44–3.49'u Eş. 3.41-3.43'ten çıkarınız. Aşağıdaki iki ipucu doğru yönde başlamanıza yardımcı olacaktır.

a) R_1'i R_a, R_b ve R_c'nin fonksiyonu olarak bulmak için Eş. 3.42'yi Eş. 3.43'ten çıkarıp sonucu Eş. 3.39'a ekleyiniz. R_2 ve R_3'ü R_a, R_b ve R_c'nin fonksiyonu olarak bulmak için benzer işlemler kullanınız.

b) R_b'yi, R_1, R_2 ve R_3'ün fonksiyonu olarak bulmak için, ipucu (1) ile elde edilen çıkarımlarda yararlanınız. (Eş. 3.44-3.46). Bu denklemler bölünerek

$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{R_c}{R_b} \quad \text{veya} \quad R_c = \frac{R_2}{R_3}R_b.$$

ve

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_b}{R_a} \quad \text{veya} \quad R_a = \frac{R_2}{R_1}R_b$$

elde edilir. Şimdi bu oranlar Eş. 3.43'te kullanarak R_a ve R_c yok edilir. Benzer işlemlerle R_a ve R_c'yi R_1, R_2 ve R_3'ün fonksiyonu olarak bulunuz.

3.62 Δ iletkenliklerinin Y iletkenlikleri cinsinden ifadelerinin

$$G_a = \frac{G_2G_3}{G_1 + G_2 + G_3},$$

$$G_b = \frac{G_1G_3}{G_1 + G_2 + G_3},$$

$$G_c = \frac{G_1G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$$

ile verildiğini gösteriniz. Burada

$$G_a = \frac{1}{R_a}, \quad G_1 = \frac{1}{R_1} \text{ v.d.}$$

geçerlidir.

Kısım 3.1 - 3.7

3.63 PSPICE Direnç devreleri bazen ses kontrol devreleri olarak kullanılır. Bu uygulamada direnç zayıflatıcı ve tampon olarak adlandırılır. Tipik bir basit zayıflatıcı tampon tasarlarken devre tasarımcı R_1 ve R_2 değerlerini öyle seçmelidir ki v_o/v_i oranı ve giriş gerilimince görülen R_{ab} direnci istenen değerlere sahip olsun.

a) Eğer $R_{ab} = R_L$ ise o halde

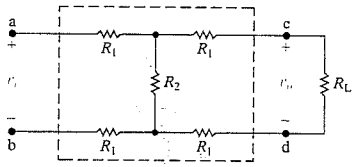
$$R_L^2 = 4R_1(R_1 + R_2),$$

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2}{2R_1 + R_2 + R_L}$$

olduğunu gösteriniz.

b) R_1 ve R_2 değerlerini öyle seçiniz ki $R_{ab} = R_L = 600\ \Omega$ ve $v_o/v_i = 0.6$ olsun.

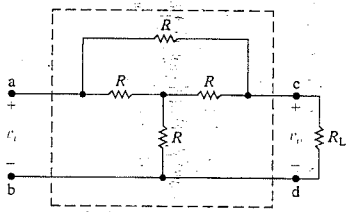
Şekil P3.63



3.64 TASARIM PROBLEMİ a) Şekil P3.64'teki sabit zayıflatıcı tampon bir köprülü T'dir. Bir Y-Δ dönüşümü kullanarak eğer $R = R_L$ ise $R_{ab} = R_L$ olduğunu gösteriniz.

b) $R = R_L$ iken v_o/v_i gerilim oranının 0.50 olduğunu gösteriniz.

Şekil P3.64



3.65 TASARIM PROBLEMİ Şekil P3.65'teki köprülü T zayıflatıcı devresinin tasarım denklemleri

$$R_2 = \frac{2RR_L^2}{3R^2 - R_L^2},$$

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{3R - R_L}{3R + R_L}$$

ile verilir.

a) $R_L = 600\ \Omega$ iken $v_i = 3\,v_o$ olacak şekilde bir sabit zayıflatıcı tasarlayınız.

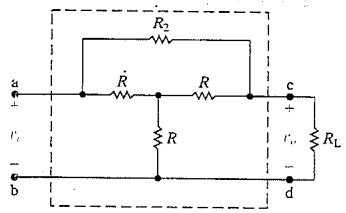
b) (a)'da tasarlanan zayıflatıcının girişine 180 V uygulanıyor. Zayıflatıcıdaki hangi direnç en büyük gücü harcar?

c) (b)'deki direnç ne kadar güç harcar?

d) Zayıflatıcıda hangi direnç en az güç harcar?

e (d)'deki direnç ne kadar güç harcar?

Şekil P3.65



3.66 PSPICE a) Şekil P3.66'da gösterilen devrede köprü $\Delta R = 0$ olduğunda dengededir. Eğer $\Delta R \ll R_0$ ise köprü çıkış geriliminin yaklaşık olarak

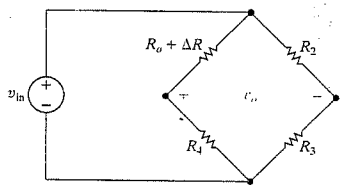
$$v_o \approx \frac{-\Delta R R_4}{(R_o + R_4)^2} v_{in}$$

olduğunu gösteriniz.

b) $R_2 = 1$ kΩ, $R_3 = 500\ \Omega$, $R_4 = 5$ kΩ ve $v_{in} = 6$ V veriliyor. Eğer ΔR, R_o'nun %3'ü ise yaklaşık köprü çıkış gerilimi nedir?

c) (b)'de v_o'nun gerçek değerini bulunuz.

Şekil P3.66



3.67 a) Eğer yüzde hata

$$\%\text{hata} = \left(\frac{\text{yaklaşık değer}}{\text{gerçek değer}} - 1\right) \times 100$$

ile tanımlanıyorsa, Problem 3.66'daki yüzde hatanın

$$\%\text{hata} = \frac{(\Delta R)R_3}{(R_2 + R_3)R_4} \times 100$$

olduğunu gösteriniz.

b) Problem 3.66(b)'deki değerleri kullanarak v_o'daki hatayı hesaplayınız.

3.68 TASARIM PROBLEMİ Şekil P3.66'daki köprü devresinde v_o'daki hatanın %0.5'i aşmaması gerektiğini kabul ediniz. R_o'da izin verilen en büyük yüzde değişim nedir?

3.69 PRATİK BAKIŞ AÇISI a) Eş. 3.65'i çıkarınız.
b) Eş. 3.68'i çıkarınız.

3.70 PRATİK BAKIŞ AÇISI Eş. 3.70'i çıkarınız.

3.71 Şekil 3.36'daki ağ yapının 1m genişliğinin olduğunu ve yatay beş ağ hattının dikey aralığının 0.025 m olduğunu varsayınız. 12 V güç kaynağı kullanarak 120 W/m düzgün güç harcama elde etmek için R_1–R_5 ve R_a–R_d'nin nümerik değerlerini veriniz. (*İpucu:* Önce σ'yı, sonra R_3, R_1, R_a, R_b ve R_2'yi bu sırada hesaplayınız.)

3.72 PRATİK BAKIŞ AÇISI PSPICE 12 V kaynağın verdiği gücün toplam harcanan güce eşit olduğunu göstererek Problem 3.71'in sonucunu kontrol ediniz.

3.73 PRATİK BAKIŞ AÇISI TASARIM PROBLEMİ PSPICE a) Beş yatay iletkenli Şekil P3.36'daki buz çözücü ağını şu istenenlerle tasarlayınız. Ağ 1.25 m genişliğe sahip olmalı, iletkenler arası dikey aralık 0.05 m ve kaynak gerilim 12 V olduğunda güç harcaması 150 W/m olmalıdır.

b) Çözümünüzü kontrol edip tasarım gereksinimlerini sağladığına emin olunuz.

Devre Analiz Teknikleri

BÖLÜM İÇERİĞİ

4.1 **Terminoloji** *s. 94*
4.2 **Düğüm Gerilimi Yöntemine Giriş** *s. 97*
4.3 **Düğüm Gerilimi Yöntemi ve Bağımlı Kaynaklar** *s. 100*
4.4 **Düğüm Gerilimi Yöntemi: Bazı özel Durumlar** *s. 101*
4.5 **Ağ Akımı Yöntemine Giriş** *s. 105*
4.6 **Ağ Akımı Yöntemi ve Bağımlı Kaynaklar** *s. 107*
4.7 **Ağ Akımı Yöntemi: Bazı Özel Durumlar** *s. 109*
4.8 **Düğüm Gerilimi Yöntemine Karşı Ağ Akımı Yöntemi** *s. 112*
4.9 **Kaynak Dönüşümleri** *s. 116*
4.10 **Thévenin ve Norton Eşdeğerleri** *s. 119*
4.11 **Thévenin Eşdeğer Hakkında Ek Bilgi** *s. 123*
4.12 **Maksimum Güç Aktarımı** *s. 126*
4.13 **Üst Üste Bindirme** *s. 129*

BÖLÜM HEDEFLERİ

1. Düğüm gerilimi yöntemini anlamak ve kullanabilmek.
2. Ağ akımı yöntemini anlamak ve kullanabilmek.
3. Verilen bir devre için düğüm gerilimi ya da ağ akımı yöntemlerinden hangisinin doğru yaklaşım olduğuna karar verebilmek.
4. Kaynak dönüşümünü anlamak ve kullanabilmek
5. Thévenin ve Norton eşdeğer devre kavramını anlamak ve verilen bir devrenin Thévenin veya Norton eşdeğerini bulabilmek.
6. Bir yük direncine aktarılabilecek maksimum güç koşulunu bilmek ve bu koşulu sağlayan yük direnci değerini hesaplayabilmek.

Buraya kadar, Kirchhoff ve Ohm yasalarını kullanarak oldukça basit direnç devrelerini inceledik. Bu yaklaşımı bütün devreler için kullanabilirik fakat devreler daha çok eleman içerip, karmaşıklaşınca bu doğrudan yöntem kullanışsız hale gelir. Bu bölümde karmaşık devrelerin çözümünde kullanılan iki güçlü teknik gösterilecektir, bunlar düğüm gerilimi yöntemi ve ağ akımı yöntemidir. Bu teknikler, devreleri en az sayıda ortak denklem ile ifade eden iki sistematik yöntemdir.

Bu bölümde; bu iki genel analitik yönteme ek olarak devre sadeleştirme yöntemlerinden de söz edeceğiz. Daha öncü seri–paralel indirgemeyi ve Δ–Y dönüşümünün nasıl kullanılacağını göstermiştik. Şimdi bu tekniklere kaynak dönüşümlerini ve Norton ve Thévenin eşdeğer devrelerini ekleyeceğiz.

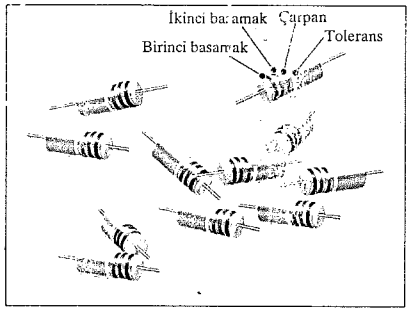
Devre analizinde rol alan iki önemli konuyu göz önünde bulunduracağız. Biri, maksimum güç aktarımı; direnç yüke iletilen gücü maksimum yapan koşulların sağlandığını gözetir. Maksimum güç transferi sağlanırken Thévenin eşdeğer devreleri kullanılır. Bu bölümdeki son konu ise birden çok bağımsız kaynağa sahip olan devrelerin analizinde kullanılan üst üste bindirmedir.

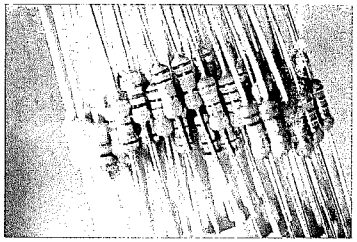
Pratik Bakış Açısı

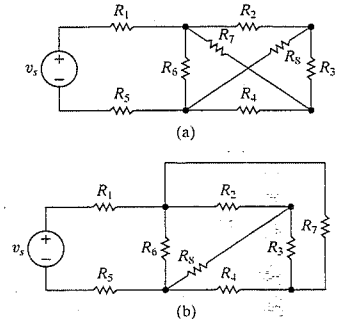
Gerçekçi Direnç Devreleri

Bir önceki bölümde, kesin olmayan direnç değerlerinin devre performansı üzerindeki etkisini özellikle gerilim bölücü performansında araştırmaya başladık. Dirençler sadece belirli değerlerde üretilir ve aynı değerde üretilen dirençler belirli bir tolerans değerleri ile farklıdır. Düşük toleranslı dirençler daha pahalıdır. Örneğin %1 toleransa sahip olan dirençler %10 toleranslı olanlardan daha pahalıdır. Bu nedenle, çok dirençli bir devrede, beklenen devre performansını en çok hangi direncin etkilediğini bilmek önemlidir. Başka bir deyişle, her direnç değerinin değişiminin devre performansına olan etkisini kestirmek isteriz. Eğer belirli bir direncin verilen değerine çok yakın olması gerekiyorsa daha fazla para harcayarak o direnç için daha küçük tolerans değerine ulaşabiliriz.

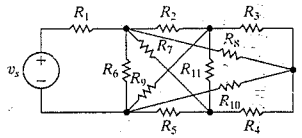
Bir devre elemanının değerinin o devrenin çıktısına olan etkisinin araştırılması **duyarlılık analizi** olarak bilinir. Duyarlılık analizi konusu diğer devre analizi teknikleri gösterildikten sonra incelenecektir.







Şekil 4.1 (a) Düzlemsel devre. (b) Devrenin düzlemsel olduğunu kanıtlamak için tekrar çizilmiş hali.



Şekil 4.2 Düzlemsel olmayan devre.

4.1 Terminoloji

Daha kapsamlı devre analizi yöntemlerinden bahsetmeden önce bazı terimleri tanımlamamız gerekiyor. Şu ana kadar gösterilen bütün devreler **düzlemsel devrelerdi.** Bu tür devreler kesişen dallar olmadan bir düzlem üzerine çizilebilir. Kesişen dallar ile çizilmiş bir devre kesişen dallar olmadan tekrar çizilebilir, iki devre eşdeğerdir çünkü düğüm bağlantıları korunmuştur. Bu nedenle, Şekil 4.1(a) düzlemsel bir devredir. Şekil 4.2'deki devre ise düzlemsel olmayan bir devredir. Dallar kesişmeyecek ve düğüm bağlantıları korunacak şekilde tekrar çizilemez. Düğüm gerilimi yöntemi hem düzlemsel hem de düzlemsel olmayan devrelere uygulanabilirken ağ akımı yöntemi sadece düzlemsel devrelere uygulanabilir.

Bir Devrenin Açıklanması – Terimler

Kısım 1.5'te ideal bir temel devre elemanı tanımladık. Temel devre elemanları birbirlerine, bir devre oluşturacak şekilde bağlandıktan sonra oluşan ara bağlantılar düğümler, yollar, dallar, döngüler ve ağlar ile tarif edilir. Düğüm ve kapalı yol (döngü) Kısım 2.4'de tanımlanmıştı. Bu terimleri yeniden ifade edip daha sonra yol, dal ve ağ terimlerini tanımlayacağız. Bu tanımlar Tablo 4.1'de verilmiştir. Ayrıca Örnek 4.1'de geliştirilen Şekil 2.3'teki devre kullanılarak örnekler de Tablo 4.1'de verilmiştir.

Tablo 4.1 Devreleri Açıklayıcı Terimler

İsim	Tanım	Örnek
düğüm	İki veya daha çok devre elemanının bağlandığı nokta	a
temel düğüm	Üç veya daha çok devre elemanının bağlandığı nokta	b
yol	Birbirine bağlı elemanların üzerinden bir kere geçen yol	$v_1 - R_1 - R_5 - R_6$
dal	İki düğümü bağlayan yol	R_1
temel dal	İki temel düğümü, temel bir düğümden geçmeden bağlayan yol	$v_1 - R_1$
döngü	Başlangıç ve bitiş düğümü aynı olan yol	$v_1 - R_1 - R_5 - R_6 - R_4 - v_2$
ağ	İçinde başka döngü bulundurmayan döngü	$v_1 - R_1 - R_5 - R_3 - R_2$
düzlemsel devre	Dalları kesişmeden bir düzlem üzerine çizilebilen devre	Şekil 4.3 düzlemsel bir devredir. Şekil 4.2 düzlemsel bir devre değildir.

Örnek 4.1 Bir Devrede Düğüm, Dal, Ağ ve Döngünün Belirlenmesi

Şek. 4.3'de gösterilen devre için aşağıdakileri tanımlayınız:

a) Bütün düğümleri,

b) bütün temel düğümleri,

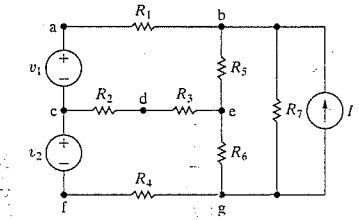
c) bütün dalları,

d) bütün temel dalları,

e) bütün ağları,

f) döngü ya da temel dal olmayan iki yolu,

g) ağ olmayan iki döngüyü.



Şekil 4.3 Düğümleri, dalları, ağları, yolları ve döngüleri gösteren bir devre.

Çözüm

a) a, b, c, d, e, f ve g düğümlerdir.

b) b, c, e ve g temel düğümlerdir.

c) $v_1, v_2, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7$ ve I dallardır.

d) $v_1, v_2, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7$ ve I temel dallarıdır.

e) $v_1 - R_1 - R_2 - R_3 - R_2 -$, $v_2 - R_2 - R_3 - R_6 - R_4$, $R_5 - R_7 - R_6$ ve $R_7 - I$ ağlardır.

f) $R_1 - R_5 - R_6$ bir yoldur, fakat bir döngü değildir (Çünkü başlangıç ve bitiş düğümleri aynı değildir.), temel dalda değildir (Çünkü iki temel döngü bağlamıyor.) Aynı sebeplerden $v_2 - R_2$ de ne bir döngüdür ne de bir temel dal.

g) $v_1 - R_2 - R_5 - R_6 - R_4 - v_2$ bir döngüdür ama içinde iki döngü bulundurduğu için bir ağ değildir. $I - R_5 - R_6$ da bir döngüdür, ağ değildir.

NOT: Konuyu kavrayışınızı Bölüm Problemlerinden 4.2 ve 4.3'ü de çözmeyi deneyerek değerlendiriniz.

Ortak Denklemler – Kaç Tane?

Bir devrede bilinmeyen akımların sayısı o devredeki akımı bilinmeyen dal sayısı olan b'ye eşittir. Örnek olarak Şekil 4.3'de gösterilen devrenin dokuz tane akımı bilinmeyen dalı vardır. Bilinmeyen b tane akımlı bir devre için b tane bağımsız denklem gerekir. Devredeki düğüm sayısı n ise, Kirchhoff akım yasasını herhangi $n - 1$ tane düğüme uygularsak $n - 1$ tane bağımsız denklem elde ederiz. (Akım yasasını n'yinci düğüme uyguladığımızda bulduğumuz denklem bağımsız olmaz çünkü bu denklemi, $n - 1$ tanesini kullanarak bulabiliriz. Bkz. Problem 4.5.) Verilen bir devreyi açıklamak için b denklem gerektiğinden ve bunların $n - 1$ tanesini Kirchhoff akım yasasından bulabileceğimizden geriye kalan $b - (n - 1)$ tane denklemi Kirchhoff gerilim yasasını döngülere veya ağlara uygulayarak bulmalıyız.

Böylece akımları bilinmeyen yolları, düğümleri ve ağları sayarak, bir devreyi çözmek için gereken sayıda denklemi yazmak için sistematik bir yöntem belirledik. Özellikle Kirchhoff akım yasasını n–1 düğüme ve Kirchhoff gerilim yasasını $b - (n - 1)$ döngüye (ya

da ağa) uyguluyoruz. Bu gözlemler, temel düğümler ve temel dallar açısından da geçerlidir. Bu nedenle, akımları bilinmeyen temel düğüm sayısı n_e ve temel dal sayısı b_e olmak üzere, Kirchhoff akım yasasını $n_e - 1$ düğüme ve Kirchhoff gerilim yasasını $b_e-(n_e-1)$ döngü ya da ağa uygulayabiliriz. Devrelerde, temel düğüm sayısı, toplam düğüm sayısına eşit veya daha azdır ve temel dal sayısı da toplam dal sayısına eşit veya daha azdır. Bu yüzden, devre analizinde temel düğüm ve temel dalları kullanmak, genellikle daha az bağımsız denklem ortaya çıkardığı için, daha elverişlidir.

Bir devre bağlantısız parçalardan oluşabilir. Böyle bir devre Problem 4.3'de incelenmiştir. Kirchhoff akım yasasından elde edilebilecek olan $n - 1$ denklem ve gerilim yasasından elde edilecek $b - (n - 1)$ denklem bağlantılı devreler için geçerlidir. Bir devre n düğüm, b dal ve s parçadan oluşuyorsa akım yasası $n - s$ kere ve gerilim yasası ise $b - n + s$ kere uygulanabilir. Herhangi iki ayrı parça tek bir iletken ile bağlanabilir. Bu bağlantı her zaman iki düğümden bir düğüm oluşturur. Tek bir iletkende akım var olmayacağından s tane bağlantısız parçalı devre, bağlantılı bir tane devreye indirgenebilir.

Sistematik Yaklaşım – Bir Örnek

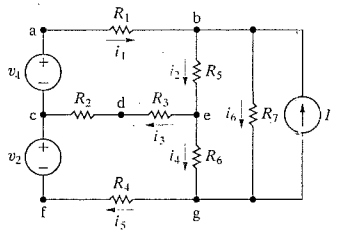
Şekil 4.4'te gösterilen devre ile bu sistematik yaklaşımı göstereceğiz. Denklemleri temel düğümlere ve temel dallara dayanarak yazacağız. Devrede 4 temel düğüm ve akımı bilinmeyen ve $i_1 - i_6$ ile gösterilen 6 temel dal vardır.

İhtiyacımız olan altı denklemden üçünü Kirchhoff akım yasasını 4 temel düğümden herhangi üçüne uygulayarak bulabiliriz. Aşağıdaki denklemler b, c ve e düğümlerini kullanarak elde edilebilir:

$$-i_1 + i_2 + i_6 - I = 0,$$

$$i_1 - i_3 - i_5 = 0,$$

$$i_3 + i_4 - i_2 = 0. \qquad (4.1)$$



Şekil 4.4 ▲ Şekil 4.3'teki bilinmeyen altı dal akımı.

Geriye kalan diğer üç denklemi ise Kirchhoff gerilim yasasını ağlara uygulayarak bulabiliriz. Devrede dört ağ olduğu için birini çıkarmalıyız. I üzerindeki gerilimi bilmediğimiz için $R_7 - I$ ağını seçiyoruz[1].

Diğer üç ağı kullanarak kalan denklemler elde edilebilir:

$$R_1 i_1 + R_5 i_2 + i_3(R_2 + R_3) - v_1 = 0,$$

$$-i_3(R_2 + R_3) + i_4 R_6 + i_5 R_4 - v_2 = 0,$$

$$-i_2 R_5 + i_6 R_7 - i_4 R_6 = 0. \qquad (4.2)$$

[1]Kısım 4.7'de bu seçimden daha çok bahsedeceğiz.

Çözümlerini kolaylaştırmak için 4.1 ve 4.2'deki denklemler yeniden düzenlenince

$$-i_1 + i_2 + 0i_3 + 0i_4 + 0i_5 + i_6 = I,$$

$$i_1 + 0i_2 - i_3 + 0i_4 - i_5 + 0i_6 = 0,$$

$$0i_1 - i_2 + i_3 + i_4 + 0i_5 + 0i_6 = 0,$$

$$R_1 i_1 + R_5 i_2 + (R_2 + R_3)i_3 + 0i_4 + 0i_5 + 0i_6 = v_1,$$

$$0i_1 + 0i_2 - (R_2 + R_3)i_3 + R_6 i_4 + R_4 i_5 + 0i_6 = v_2,$$

$$0i_1 - R_5 i_2 + 0i_3 - R_6 i_4 + 0i_5 + R_7 i_6 = 0 \qquad (4.3)$$

elde edilir. n'yinci düğümdeki akımları toplayınca (bu örnekte g düğümü)

$$i_5 - i_4 - i_6 + I = 0 \qquad (4.4)$$

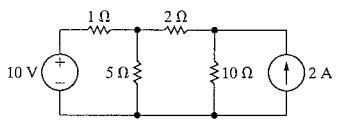
elde edilir. Eş. 4.4 bağımsız değildir çünkü Eş. 4.1'deki denklemleri toplayıp "–1" ile çarpınca Eş. 4.4'ü elde ederiz. Bu yüzden Eş. 4.4 Eş. 4.1'deki denklemlerin lineer birleşimidir ve bağımsız değildir. Yöntemi bir adım daha ileri götüreceğiz. Yeni değişkenler tanımlayarak, bir devreyi sadece $n - 1$ veya $b - (n - 1)$ denklem ile ifade edebiliriz. Bu yani değişkenler sayesinde daha az denklemle uğraşarak çözüm elde edebiliriz. Bilgisayar ile nümerik bir çözüm uygulanacak olsa bile bu istenen bir hedeftir.

Yeni değişkenler düğüm gerilimleri ve ağ akımlarıdır. Düğüm gerilimi yöntemi ile devreleri $n_e - 1$ denklem ile; ağ akımı yöntemi ile $b_e - (n_e - 1)$ tane denklem ile ifade edebiliriz.

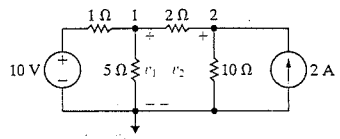
NOT: Bu konuyu kavrayışınızı Bölüm Problemlerinden 4.1 ve 4.4'ü de çözmeyi deneyerek değerlendiriniz.

4.2 Düğüm Gerilimi Yöntemine Giriş

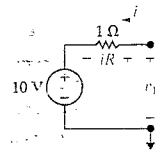
Düğüm gerilimi yönteminin devrenin temel düğümlerini kullanarak gösterebiliriz. İlk önce devre, herhangi bir dal diğerinin üzerinden geçmeyecek şekilde yeniden çizilir ve temel düğümler işaretlenir (bkz. Şekil 4.5). Bu devrede üç temel düğüm olduğu için ($n_e = 3$) devreyi iki ($n_e - 1$) düğüm gerilimi denklemiyle ifade edebiliriz. İşaretlenen düğümlerden bir tanesi referans düğümü olarak seçilir. Teorik olarak referans düğümü seçimi rastgele yapılabilse de, genelde seçilmesi gereken düğüm açıkça görülebilir. Örneğin en çok dalın bağlandığı düğüm genelde iyi bir seçimdir.



Şekil 4.5 ▲ Devre analizinde düğüm gerilimi yöntemini göstermek için kullanılan devre.



Şekil 4.6 ▲ Şekil 4.5'teki devrenin referans düğümü ve düğüm gerilimleri ile gösterimi.



Şekil 4.7 ▲ i dal akımının hesaplanması.

Bu yöntemi kullandıkça ideal referans düğümü (eğer varsa) seçimi daha kolay yapılır. Şekil 4.5'te gösterilen devrede, en çok dalın bağlandığı düğüm alttaki düğüm olduğu için referans düğüm olarak seçilmiştir. Referans düğümü olarak seçilen düğüm "▼" ile işaretlenir (Bkz. Şekil 4.6.).

Referans düğümü seçildikten sonra, devre şeması üzerinde düğüm gerilimleri tanımlanır. Bir düğüm ile referans düğümü arasındaki gerilime **düğüm gerilimi** denir. Bu devre için tanımlamamız gereken iki düğüm gerilimi Şekil 4.6'da v_1 ve v_2 olarak gösterilmiştir.

Şimdi düğüm gerilimi denklemlerini çıkarmak için hazırız. Referans düğümü dışında seçtiğimiz bir düğüme bağlanan bütün dallardan çıkan akımları düğüm gerilimlerinin bir fonksiyonu olarak yazarız ve bu akımları Kirchhoff akım yasasına göre toplayıp sıfıra eşitleriz. Şekil 4.6'da gösterilen devrede 1 Ω direnç üzerinden geçen akım direnç üzerindeki gerilim farkının direnç değerine bölünmesi ile bulunur (Ohm yasası). Düğümden çıkan akım yönünde 1 Ω direnç üzerindeki gerilim farkı $v_1 - 10$'dur. Bu yüzden 1 Ω direnç üzerindeki akım $(v_1-10)/1$ olur. Şekil 4.7'de 10 V – 1 Ω dalı ve o dal üzerindeki akım ve gerilimler gösterilmiştir.

Bu yolla akımı bilinmeyen bütün dallardaki akımları bulabiliriz. Böylece 1. düğümden çıkan 5 Ω üzerindeki akım $v_1/5$, 2 Ω üzerindeki akım ise $(v_1 - v_2)/2$ olur. 1. düğümden çıkan bu üç akımın toplamı sıfıra eşit olmalıdır; o halde 1. düğümden çıkarılan düğüm gerilimi denklemi

$$\frac{v_1 - 10}{1} + \frac{v_1}{5} + \frac{v_1 - v_2}{2} = 0 \qquad (4.5)$$

bulunur. 2. düğümden çıkarılan düğüm gerilimi denklemi ise

$$\frac{v_2 - v_1}{2} + \frac{v_2}{10} - 2 = 0 \qquad (4.6)$$

olur. Dikkat edilmelidir ki Eş. 4.6'daki birinci terim 2. düğümden 2 Ω'a doğru giden akımı, ikinci terim 2. düğümden 10 Ω'a doğru giden akımı ve üçüncü terim ise 2. düğümden akım kaynağına doğru giden akımı göstermektedir.

Eş. 4.5 ve 4.6, Şekil 4.6'da gösterilen devreyi düğüm gerilimleri v_1–v_2 cinsinden ifade eden ortak denklemlerdir. v_1 ve v_2 için çözüm

$$v_1 = \frac{100}{11} = 9.09 \text{ V}$$

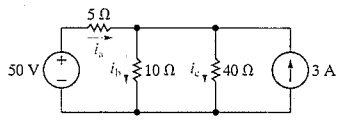
$$v_2 = \frac{120}{11} = 10.91 \text{ V}$$

verir. Düğüm gerilimleri bulunduktan sonra bütün dallardaki akımlar hesaplanabilir. Bu bilgiler elde edildikten sonra dal gerilimleri ve güçleri hesaplanabilir. Örnek 4.2'de düğüm gerilimi yönteminin kullanımı sergilenmiştir.

Örnek 4.2 Düğüm Gerilimi Yönteminin Kullanılması

a) Şekil 4.8'de gösterilen i_a, i_b ve i_c dal akımlarını düğüm gerilimi yöntemini kullanarak bulunuz.

b) Her kaynak ile ilgili gücü bulunuz ve kaynağın güç aktardığını veya soğurduğunu belirtiniz.



Şekil 4.8 ▲ Örnek 4.2 için devre.

Çözüm

a) İlk önce devrede iki temel düğüm olduğuna dikkat ederiz. Bu nedenle bir tane düğüm gerilimi denklemi yazmamız gerekir. Aşağıdaki düğümü referans düğümü olarak seçip bilinmeyen düğüm gerilimini de v_1 olarak tanımlayalım. Bu seçimler Şekil 4.9'da gösterilmiştir. 1 düğümden çıkan akımları topladığımızda

$$\frac{v_1 - 50}{5} + \frac{v_1}{10} + \frac{v_1}{40} - 3 = 0$$

düğüm gerilimi denklemini elde ederiz. v_1 için çözdüğümüzde

$$v_1 = 40 \text{ V}$$

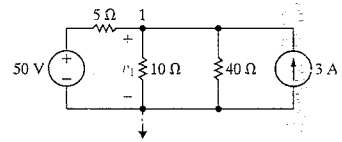
buluruz. Sonuç olarak

$$i_a = \frac{50 - 40}{5} = 2 \text{ A},$$

$$i_b = \frac{40}{10} = 4 \text{ A},$$

$$i_c = \frac{40}{40} = 1 \text{ A}$$

elde edilir.



Şekil 4.9 ▲ Şekil 4.8'deki devrede referans düğümünün ve bilinmeyen düğüm gerilimi v_1'in gösterilmesi.

b) 50 V ile ilgili güç

$$p_{50V} = -50i_a = -100 \text{ W (iletilen)}$$

bulunur. 3A kaynak ile ilgili güç ise

$$P_{3A} = -3v_1 = -3(40) = -120 \text{ W (iletilen)}$$

elde edilir. İletilen toplam gücün 220 W olduğunu dikkate alarak hesaplamalarımızı kontrol edeceğiz. Dirençler tarafından soğurulan güç 4(5) + 16(10) + 1(40) daha önce hesaplandığı ve olması gerektiği gibi 220 Watt'tır.

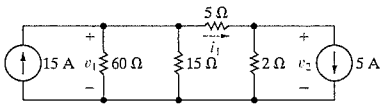
✓ DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 1 – Düğüm gerilimi yöntemini anlamak ve kullanabilmek

4.1 a) Düğüm gerilimi yöntemini kullanarak gösterilen devrede v_1, v_2 ve i_1'i bulunuz.

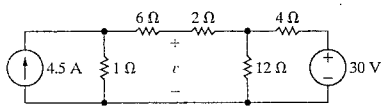
b) 15 A kaynaktan devreye ne kadar güç aktarılmıştır?

c) 5 A kaynak için (b)'yi tekrar çözünüz.



Cevap: (a) 60 V, 10 V, 10 A;
(b) 900 W;
(c) –50 W.

4.2 Düğüm gerilimi yöntemini kullanarak gösterilen devrede v gerilimini bulunuz.



Cevap: 15 V.

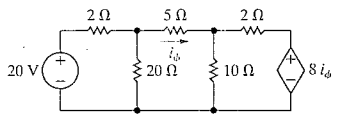
NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 4.6, 4.9 ve 4.10'u da çözmeyi deneyiniz.

4.3 Düğüm Gerilimi Yöntemi ve Bağımlı Kaynaklar

Eğer devrede bağımlı kaynaklar var ise, bu kaynaklar tarafından oluşturulan kısıt denklemleri de eklenerek düğüm gerilimi denklemleri yazılmalıdır. Bağımlı kaynak bulunan bir devrede düğüm gerilimi yönteminin uygulanması Örnek 4.3'te gösterilmiştir.

Örnek 4.3 **Düğüm Gerilimi Yönteminin Bağımlı Kaynaklarla Birlikte Kullanım**

Düğüm gerilimi yöntemini kullanarak Şekil 4.10'da gösterilen devrede 5 Ω direnç üzerinde harcanan gücü bulunuz.



Şekil 4.10 ▲ Örnek 4.3 için devre.

Çözüm

İlk önce devrede 3 temel düğüm olduğuna dikkat ederiz. Bu nedenle devreyi 2 düğüm gerilimi denklemi ile ifade edebiliriz. 4 dal aşağıdaki düğümde sonlandığı için onu referans düğümü olarak seçeriz. Bilinmeyen düğüm gerilimleri Şekil 4.11'de gösterildiği gibi tanımlanmıştır. Düğüm 1'den çıkan akımları toplayınca

$$\frac{v_1 - 20}{2} + \frac{v_1}{20} + \frac{v_1 - v_2}{5} = 0$$

denklemini elde ederiz. Düğüm 2'den çıkan akımların toplanması ise

$$\frac{v_2 - v_1}{5} + \frac{v_2}{10} + \frac{v_2 - 8i_\phi}{2} = 0$$

verir.

Görüldüğü gibi, iki denklemde v_1, v_2 ve i_ϕ olmak üzere üç bilinmeyen vardır. Bunlardan i_ϕ'nin elenmesi için v_1 ve v_2 cinsinden yazılması gerekir:

$$i_\phi = \frac{v_1 - v_2}{5}.$$

Bu bağıntıyı düğüm 2'den elde ettiğimiz denklemde kullanırsak, iki düğüm gerilimi denklemi

$$0.75v_1 - 0.2v_2 = 10,$$

$$-v_1 + 1.6v_2 = 0$$

olarak bulunur. v_1 ve v_2 için çözüm

$$v_1 = 16 \text{ V}$$

ve

$$v_2 = 10 \text{ V}$$

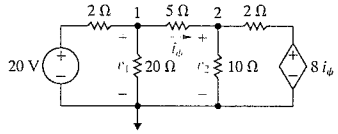
verir.

Sonra

$$i_\phi = \frac{16 - 10}{5} = 1.2 \text{ A},$$

$$p_{5\Omega} = (1.44)(5) = 7.2 \text{ W}$$

bulunur. Düğüm 2'nin referans düğüm olarak seçildiği durum için örneği tekrar gözden geçiriniz. Bu seçim devre analizini kolaylaştırdı mı, zorlaştırdı mı?



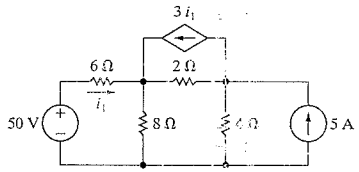
Şekil 4.11 ▲ Şekil 4.10'daki devrenin referans düğüm ve düğüm gerilimleri ile gösterimi.

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 1 – Düğüm gerilimi yöntemini anlamak ve kullanabilmek

4.3 a) Düğüm gerilimi yöntemini kullanarak her kaynak ile ilgili gücü bulunuz.

b) Kaynağın devreye güç aktardığını veya devreden güç soğurduğunu belirtiniz.

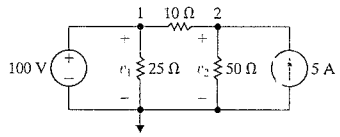


Cevap: (a) $p_{50V} = -150$ W $p_{3i_1} = -144$ W. $p_{5A} = -80$ W;
(b) bütün kaynaklar devreye güç iletiyor.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 4.19 ve 4.20'yi de çözmeyi deneyiniz.

4.4 Düğüm Gerilimi Yöntemi: Bazı Özel Durumlar

Gerilim kaynağının iki temel düğüm arasındaki tek eleman olduğu durumlarda, düğüm gerilimi yöntemi basitleşir. Örnek olarak Şekil 4.12'deki devreye bakınız. Devrede üç temel düğüm olduğu için iki ortak denklem gereklidir. Üç temel düğümden biri referans düğümü olarak seçilmiş diğerleri de isimlendirilmiştir. Gerilim kaynağı düğüm 1 ve referans düğüm arasındaki gerilimi 100 V'a zorlamıştır. Bu da bilinmeyen bir tane düğüm gerilimi (v_2) var demektir. Bu yüzden bu devrenin çözümü bir düğüm gerilimi denklemi içerir:



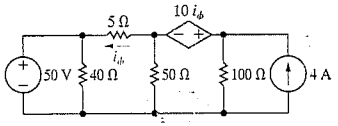
Şekil 4.12 ▲ Bilinen düğüm gerilimli devre.

$$\frac{v_2 - v_1}{10} + \frac{v_2}{50} - 5 = 0. \qquad (4.7)$$

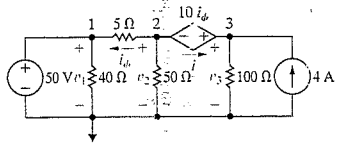
$v_1 = 100$ V olduğu için Eş. 4.7 v_2 için çözülerek

$$v_2 = 125 \text{ V} \qquad (4.8)$$

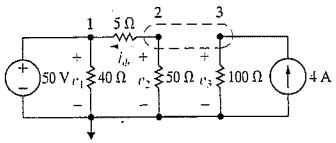
bulunur. v_2 bilindiğinde bütün dallardaki akımları hesaplayabiliriz. Gerilim kaynağının bulunduğu daldan düğüm 1'e giren akımın 1.5 A olduğunun doğrulanması size bırakılmıştır.



Şekil 4.13 ▲ Düğümleri arasına bağımlı gerilim kaynağı bağlanmış bir devre.



Şekil 4.14 ▲ Şekil 4.13'te gösterilen devrenin seçilmiş düğüm gerilimleri tanımlanmış hali.



Şekil 4.15 ▲ İkinci ve üçüncü düğümlerin üst düğüm olarak düşünülmesi.

Genellikle, iki temel düğüm arasında gerilim kaynağı bulunan devrelerin çözümünde düğüm gerilimi yöntemi kullanıldığında bilinmeyen düğüm gerilimi sayısı bir azalır. Bunun nedeni ise, iki temel düğüm arasına gerilim kaynağı bağlandığında, o iki düğüm arasındaki gerilim farkının kaynağın gerilimine eşit olmaya zorlanmasıdır.

Şekil 4.13'teki devrenin analizinin düğüm gerilimi yöntemi ile yapılacağını düşünelim. Devrede dört temel düğüm bulunduğu için 3 düğüm gerilimi denklemi yazmayı bekleriz. İki temel düğüm bir bağımsız gerilim kaynağı ile ve diğer iki düğüm de akım kontrollü bağımlı gerilim kaynağı ile bağlı olduğu için, aslında bilinmeyen bir tane düğüm gerilimi olduğu görülmektedir.

Referans düğüm seçimi bir kaç olasılık içermektedir. Bağımlı gerilim kaynağının her iki yanındaki düğümler iyi birer seçim olarak görünmektedir. Soldaki düğümü seçersek sağdaki düğüm gerilimi $+10i_\phi$ veya sağdaki düğümü seçersek soldaki düğüm gerilimi $-10i_\phi$ olur. Düğüm gerilimlerinden birinin doğrudan doğruya bilinmesi (50 V) ve beş dalın da orada sonlanması nedeniyle aşağıdaki düğüm daha iyi bir seçim olarak görünmektedir. Bu yüzden aşağıdaki düğümün seçilmesine karar verilmiştir.

Şekil 4.14'te devrenin, referans düğümü işaretlenmiş ve düğüm gerilimleri tanımlanmış olarak, yeniden çizilmiş hali bulunmaktadır. Ayrıca bağımlı gerilim kaynağından geçen akımı düğüm gerilimleri v_2 ve v_3'ün bir fonksiyonu olarak ifade edemediğimiz için i akımı tanımlanmıştır. Böylece düğüm 2'de:

$$\frac{v_2 - v_1}{5} + \frac{v_2}{50} + i = 0 \tag{4.9}$$

ve düğüm 3'te

$$\frac{v_3}{100} - i - 4 = 0 \tag{4.10}$$

yazılır. Eş. 4.9 ve Eş. 4.10'u toplayarak i akımını yok edebiliriz.

$$\frac{v_2 - v_1}{5} + \frac{v_2}{50} + \frac{v_3}{100} - 4 = 0. \tag{4.11}$$

Üst Düğüm Kavramı

Eş. 4.11, Eş. 4.9 ve Eş. 4.10 ile ifade edilen ara adımı atlayarak, doğrudan yazılabilir. Bunun için düğüm 2 ve 3'ü tek bir düğüm olarak düşünüp, düğümden çıkan akımları v_2 ve v_3 cinsinden yazıp toplayacağız. Şekil 4.15 bu yaklaşımı göstermektedir.

İki düğüm arasında bir gerilim kaynağı bulunduğunda, o iki düğümü birleştirip **üst düğüm** oluşturabiliriz. Açıkça, Kirchhoff'un akım yasası üst düğüm için sağlanmak zorundadır. Şekil 4.15'te 5 Ω direncin bulunduğu daldan başlayarak ve saatin tersi yönünde üst düğüm etrafında hareket ederek aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\frac{v_2 - v_1}{5} + \frac{v_2}{50} + \frac{v_3}{100} - 4 = 0. \tag{4.12}$$

Düğüm 2 ve 3'ten üst düğüm oluşturulması devre analizini kolaylaştırmıştır. Denklem yazmaya başlamadan kısaltmaları görmek için ayrılan süreye her zaman değerdir.

Eş. 4.12 çıkarıldıktan sonraki adım ifadenin tek bilinmeyene indirgenmesidir. $v_1 = 50$ V olduğu için ilk önce v_1'i eleriz. v_3, v_2'nin fonksiyonu olarak yazılabilir:

$$v_3 = v_2 + 10i_\phi. \tag{4.13}$$

Bağımlı gerilim kaynağını kontrol eden akım ise düğüm gerilimleri cinsinden

$$i_\phi = \frac{v_2 - 50}{5} \tag{4.14}$$

biçiminde yazılabilir. Eş. 4.13, Eş. 4.14 ve $v_1 = 50$ V kullanılarak Eş. 4.12 aşağıdaki denkleme indirgenir:

$$v_2\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{5} + \frac{1}{100} + \frac{10}{500}\right) = 10 + 4 + 1.$$

$$v_2(0.25) = 15,$$

$$v_2 = 60 \text{ V}.$$

Eş. 4.13 ve 4.14'ten

$$i_\phi = \frac{60 - 50}{5} = 2 \text{ A},$$

$$v_3 = 60 + 20 = 80 \text{ V}$$

elde edilir.

Yükselteç Devresinin Düğüm Gerilimi Analizi

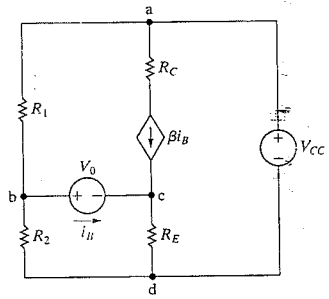
İlk olarak Kısım 2.5'te verilen ve tekrar Şekil 4.16'da gösterilen devreyi düğüm gerilimi yöntemi kullanarak çözelim.

Kısım 2.5'te gösterilen dal akımı yöntemi kullanıldığında, altı ortak denklemin yazılması ve çözülmesi gerekir. Burada düğüm analizinin çözümü ne kadar kolaylaştırdığını göstereceğiz.

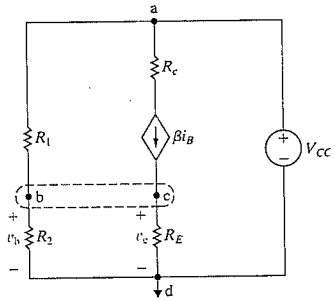
Devrede dört temel düğüm vardır. Düğüm b ve c'nin olduğu gibi düğüm a ve d de bağımsız gerilim kaynağı ile bağlıdır. Bu yüzden problem tek bir bilinmeyen düğüm gerilimini bulmaya indirgenmektedir: $(n_e - 1) - 2 = 1$. Şekil 4.17'de gösterildiği gibi d referans düğümü seçilip b ve c düğümleri birleştirilerek üst düğüm oluşturulmuş, R_2 üzerindeki gerilim v_b ve R_E üzerindeki gerilim ise v_L olarak adlandırılmıştır. O halde

$$\frac{v_b}{R_2} + \frac{v_b - V_{CC}}{R_1} + \frac{v_c}{R_E} - \beta i_B = 0 \tag{4.15}$$

yazılabilir.



Şekil 4.16 ▲ Şekil 2.24'te gösterilen transistör yükselteç devresi.



Şekil 4.17 ▲ Şekil 4.16'daki devrenin üst düğüm ve düğüm gerilimleri tanımlanmış gösterimi.

Aşağıdaki ifadeler dikkate alınarak v_c ve i_B Eş. 4.15'ten yok edilebilir.

$$v_c = (i_B + \beta i_B)R_E, \tag{4.16}$$

$$v_c = v_b - V_0. \tag{4.17}$$

Eş. 4.16 ve 4.17 Eş. 4.15'te kullanılınca

$$v_b\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{(1+\beta)R_E}\right] = \frac{V_{CC}}{R_1} + \frac{V_0}{(1+\beta)R_E} \tag{4.18}$$

elde edilir. Eş 4.18 v_b için çözüldüğünde

$$v_b = \frac{V_{CC}R_2(1+\beta)R_E + V_0R_1R_2}{R_1R_2 + (1+\beta)R_E(R_1+R_2)} \tag{4.19}$$

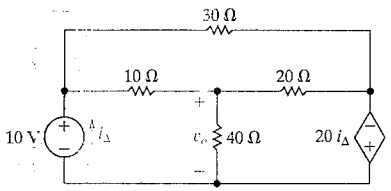
bulunur.

Düğüm gerilimi yöntemi'nin kullanılmasıyla devrenin analizi altı ortak denklemin (bkz. Problem 2.27) çözümünden üç ortak denklemin çözümüne indirgenmiştir. Eş. 4.19 Eş. 4.16 ve 4.17 ile birleştirildiğinde bulunan çözümün Eş. 2.25'teki i_B çözümü ile aynı olduğunun doğrulanması size bırakılmıştır (Bkz. Problem 4.30).

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

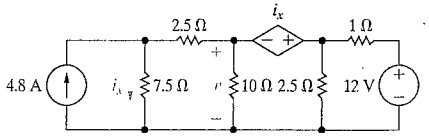
Hedef 1– Düğüm gerilimi yöntemini anlamak ve kullanabilmek

4.4 Şekilde gösterilen devrede v_o'yu bulmak için düğüm gerilimi yöntemini kullanınız.



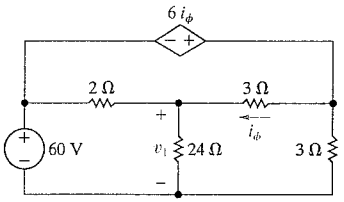
Cevap: 24 V.

4.5 Şekilde gösterilen devrede v_1'i bulmak için düğüm gerilimi yöntemini kullanınız.



Cevap: 8 V.

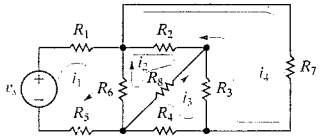
4.6 Şekilde gösterilen devrede v_1'i bulmak için düğüm gerilimi yöntemini kullanınız.



Cevap: 48 V.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 4.21, 4.26 ve 4.27'i de çözmeyi deneyiniz.

4.5 Ağ Akımı Yöntemine Giriş



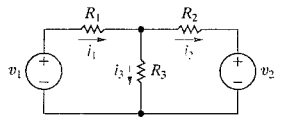
Şekil 4.18 ▲ Şekil 4.1(b)'de gösterilen devrenin ağ akımları tanımlanmış gösterimi.

Kısım 4.1'de belirtildiği gibi, devre analizinde ağ akımı yöntemi bir devreyi $b_e - (n_e - 1)$ denklem ile ifade etmemizi sağlar. Ağın, içinde başka döngü bulunmayan bir döngü olduğunu hatırlayınız. Şekil 4.1(b) her döngünün içinde akım okları açıkça gösterilmiş olarak Şekil 4.18'de yeniden verilmiştir. Ayrıca ağ akımı yönteminin sadece düzlemsel devrelere uygulanabildiğini unutmayınız. Şekil 4.18'deki devrede akımın bilinmediği yedi temel dal ve dört temel düğüm bulunmaktadır. O halde bu devreyi ağ akımı yöntemiyle çözmek için $[7 - (4 - 1)]$ ağ akımı denklemi yazmamız gerekmektedir.

Ağ akımı, sadece bir ağın çevresinde var olan akımdır. Devre şemasında ağın çevresini takip eden kapalı veya neredeyse kapalı bir eğri olarak görünür. Şekil 4.18, Şekil 4.1(b)'de gösterilen devreyi ifade eden dört ağ akımını göstermektedir. Ağ akımının tanımından dolayı Kirchhoff akım yasasını sağladığına dikkat ediniz. Verilen bir ağ akımı devredeki herhangi bir düğüme, hem girer hem de çıkar.

Şekil 4.18 aynı zamanda bir ağ akımını dal akımıyla tanımlamanın her zaman mümkün olmadığını da gösterir. Örnek olarak i_2 ağ akımı herhangi bir dal akımına eşit değildir fakat i_1, i_3 ve i_4 dal akımları ile tanımlanabilir. Bir ağ akımını ölçmek her zaman mümkün değildir; i_2 akımını ölçmek için ampermetrenin yerleştirilebileceği bir yer olmadığına dikkat ediniz. Ağ akımının hayali bir nicelik olması, önemsiz bir kavram olduğu anlamına gelmez. Tam tersine, ağ akımı yöntemi dal akımı denklemlerinden gelişmiştir.

Ağ akımı tekniğinin gelişimini göstermek için Şekil 4.19'da gösterilen devreyi kullanabiliriz. Bağımsız denklem kümesinin çıkarımı için dal akımlarını (i_1, i_2 ve i_3) kullanarak başlayabiliriz. Bu devre için, $b_e = 3$, $n_e = 2$'dir. Sadece bir tane bağımsız akım denklemi yazabileceğimiz için iki tane de bağımsız gerilim denklemine ihtiyacımız vardır. Yukarıdaki düğüme Kirchhoff akım yasasını uygulayıp iki ağ etrafında Kirchhoff gerilim yasasını uyguladığımızda aşağıdaki denklem kümesini elde ederiz:



Şekil 4.19 ▲ Devre analizinde ağ akımı yönteminin gelişiminin anlatımında kullanılan devre.

$$i_1 = i_2 + i_3, \tag{4.20}$$

$$v_1 = i_1R_1 + i_3R_3, \tag{4.21}$$

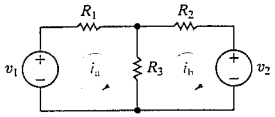
$$-v_2 = i_2R_2 - i_3R_3. \tag{4.22}$$

Eş. 4.20 i_3 için çözülüp Eş. 4.21 ve 4.22'de yerine koyulursa denklem kümesi, üç denklemden iki denkleme indirgenir:

$$v_1 = i_1(R_1 + R_3) - i_2R_3, \tag{4.23}$$

$$-v_2 = -i_1R_3 + i_2(R_2 + R_3). \tag{4.24}$$

Eş. 4.23 ve 4.24 i_1 ve i_2 için çözülebilir. Böylece üç ortak denklemin çözümünü iki ortak denklemin çözümüyle değiştirebiliriz. $(n_e - 1)$ akım denklemini $(b_e - (n_e - 1))$ gerilim denkleminin içinde yerine koyarsak Eş. 4.23 ve 4.24'ü çıkarmış oluruz. Ağ akımı



Şekil 4.20 ▲ Ağ akımları i_a ve i_b.

yönteminin önemi, ağ akımlarını tanımladığımızda $n_e - 1$ akım denkleminin kendiliğinden yok olmasıdır. Ağ akımı yöntemi, $n_e - 1$ akım denkleminin $b_e - (n_e - 1)$ gerilim denkleminde yerine koyulmasına denktir. i_3'ü Eş. 4.21 ve 4.22'den yok etmeye eşit olan Şek. 4.19'daki ağ akımları Şekil 4.20'de gösterilmiştir. Dirençlerin üzerindeki gerilimleri ağ akımları cinsinden ifade edip, ağlar etrafında Kirchhoff gerilim yasasını uygulayınca aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$v_1 = i_a R_1 + (i_a - i_b)R_3, \tag{4.25}$$

$$-v_2 = (i_b - i_a)R_3 + i_b R_2. \tag{4.26}$$

Eş. 4.25 ve 4.26'da i_a ve i_b'nin katsayılarını gruplarsak

$$v_1 = i_a(R_1 + R_3) - i_b R_3, \tag{4.27}$$

$$-v_2 = -i_a R_3 + i_b(R_2 + R_3). \tag{4.28}$$

bulunur. Eş. 4.27 ve 4.28'in Eş. 4.23 ve 4.24'te i_a ve i_b ağ akımlarının i_1 ve i_2 dal akımlarıyla yer değiştirmiş hali olduğuna dikkat ediniz. Ayrıca Şekil 4.19'da gösterilen dal akımları Şekil 4.20'de gösterilen ağ akımları cinsinden ifade edilebilir:

$$i_1 = i_a, \tag{4.29}$$

$$i_2 = i_b, \tag{4.30}$$

$$i_3 = i_a - i_b. \tag{4.31}$$

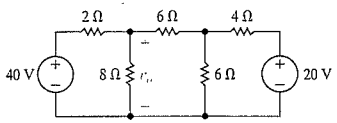
Eş. 4.29 – 4.31'de gösterilen denklemleri gözlem ile yazmak ağ akımı yönteminin çok önemli bir noktasıdır. Ağ akımlarını bildiğinizde dal akımlarını da biliyorsunuz demektir. Dal akımlarını bildiğinizde ise ilgili güç ve gerilimleri hesaplayabilirsiniz.

Örnek 4.4 kaynak gücünü ve dal gerilimini ağ akımı yöntemi ile bulmayı göstermektedir.

Örnek 4.4 **Ağ Akımı Yönteminin Kullanılması**

a) Şekil 4.21'de gösterilen devrede her gerilim kaynağı ile ilgili gücü ağ akımı yöntemini kullanarak bulunuz.

b) 8 Ω üzerindeki v_o gerilimini hesaplayınız.



Şekil 4.21 ▲ Örnek 4.4 için devre.

Çözüm

a) Her kaynak ile ilgili gücü bulmak için bunların akımını bilmemiz gerekir. Devrede kaynak akımlarının ağ akımlarına eşit olduğu görülmektedir. Ayrıca devrede beş düğüm ve akımı bilinmeyen yedi dal olduğuna dikkat ediniz. Bu nedenle, devreyi tanımlamak için $[b - (n - 1)] = 7 - (5-1)]$ ağ akımı denklemine ihtiyaç vardır. Şekil 4.22 devreyi tanımlamak için gerekli üç ağ akımını

göstermektedir. Eğer gerilim düşümlerinin pozitif olduğunu varsayarsak üç ağ denklemi

$$-40 + 2i_a + 8(i_a - i_b) = 0,$$

$$8(i_b - i_a) + 6i_b + 6(i_b - i_c) = 0,$$

$$6(i_c - i_b) + 4i_c + 20 = 0 \tag{4.26}$$

olarak bulunur. Hesap makinası veya bilgisayar ile bu denklemleri çözebilirsiniz. Üç veya daha fazla ortak denklemin çözümünde Cramer yöntemi çok yararlı bir araçtır. Bu önemli aracı Ek A'da gözden geçirebilirsiniz. Eş. 4.32'yi hesap makinası, bilgisayar veya Cramer yöntemi ile çözmek üzere yeniden düzenlersek

$$10i_a - 8i_b + 0i_c = 40;$$

$$-8i_a + 20i_b - 6i_c = 0;$$

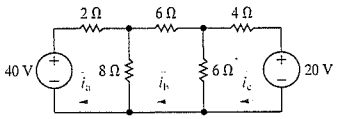
$$0i_a - 6i_b + 10i_c = -20 \tag{4.26}$$

buluruz. Üç ağ akımı da aşağıdaki gibi bulunur:

$$i_a = 5.6 \text{ A},$$

$$i_b = 2.0 \text{ A},$$

$$i_c = -0.80 \text{ A}.$$



Şekil 4.22 ▲ Şekil 4.21'deki devrenin analizinde kullanılan ağ akımlarının gösterimi.

Ağ akımı i_a 40 V kaynağın bulunduğu dalın akımı ile aynıdır. Bu kaynakla ilgili güç ise

$$p_{40V} = -40i_a = -224 \text{ W}$$

bulunur. Eksi işareti bu kaynağın devreye güç ilettiği anlamına gelir. 20 V kaynağın akımı da ağ akımı i_c'ye eşittir. Böylece

$$p_{20V} = 20i_c = -16 \text{ W}.$$

bulunur. 20 V kaynak da devreye güç iletmektedir.

b) 8 Ω direncin gerilim düşüşü yönündeki dal akımı $i_a - i_b$'dir. Böylece

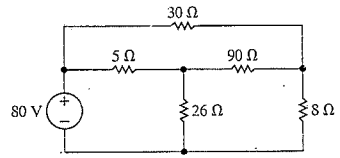
$$v_o = 8(i_a - i_b) = 8(3.6) = 28.8 \text{ V}$$

elde edilir.

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 2– Ağ akımı yöntemini anlamak ve kullanabilmek.

4.7 Ağ akımı yöntemini kullanarak (a) 80 V kaynak tarafından devreye aktarılan gücü ve (b) 8 Ω üzerinde harcanan gücü bulunuz.



Cevap: (a) 400 W;
(b) 50 W.

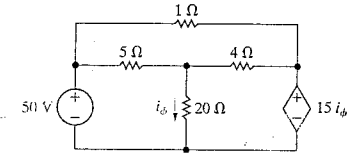
NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 4.31 ve 4.32'yi de çözmeyi deneyiniz.

4.6 Ağ Akımı Yöntemi ve Bağımlı Kaynaklar

Eğer devrede bağımlı kaynaklar varsa ağ akımı denklemleri uygun kısıt denklemleri ile tamamlanmalıdır. Örnek 4.5 devrede bağımlı kaynak varken ağ akımı yönteminin uygulanmasını göstermektedir.

Örnek 4.5 **Ağ Akımı Yönteminin Bağımlı Kaynaklarla Birlikte Kullanımı**

Şekil 4.23'te gösterilen devrede 4 Ω üzerinde harcanan gücü ağ akımı yöntemini kullanarak bulunuz.



Şekil 4.23 ▲ Örnek 4.5 için devre.

Çözüm

Devrede dört düğüm ve akımı bilinmeyen altı dal bulunmaktadır. Devreyi açıklamak için üç ağ akımı gereklidir. Şekil 4.24 bu üç akımı göstermektedir. Üç ağ akımı denklemi

$$50 = 5(i_1 - i_2) + 20(i_1 - i_3),$$

$$0 = 5(i_2 - i_1) + 1i_2 + 4(i_2 - i_3),$$

$$0 = 20(i_3 - i_1) + 4(i_3 - i_2) + 15i_\phi \qquad (4.34)$$

ile verilir. Şimdi bağımlı gerilim kaynağını kontrol eden dal akımını ağ akımları cinsinden ifade edersek denklem kümesinde bağımlı kaynağın etkisini tamamlayıcı ifadeyi bulmuş oluruz:

$$i_\phi = i_1 - i_3. \qquad (4.35)$$

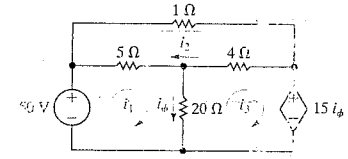
Eş. 4.35'i Eş. 4.34'te yerine koyarsak

$$50 = 25i_1 - 5i_2 - 20i_3,$$

$$0 = -5i_1 + 10i_2 - 4i_3,$$

$$0 = -5i_1 - 4i_2 + 9i_3$$

denklem kümesini elde ederiz.



Şekil 4.24 ▲ Şekil 4.23'te verilen devrenin ağ akımları ile birlikte gösterimi.

4 Ω üzerinde harcanan gücü bulmak istediğimiz için i_2 ve i_3'ü hesaplayalım:

$$i_2 = 26 \text{ A},$$

$$i_3 = 28 \text{ A}.$$

4 Ω üzerinden geçen akım, soldan sağa doğru, $i_3 - i_2$ veya 2 A'dir. Böylece harcanan güç

$$p_{4\Omega} = (i_3 - i_2)^2(4) = (2)^2(4) = 16 \text{ W}$$

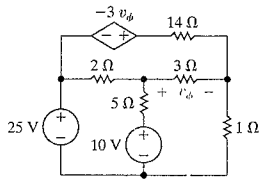
bulunur. Eğer soruda ağ akımı yöntemi kullanınız denmeseydi ne yapardınız? Düğüm gerilimi yöntemini seçer miydiniz? O durumda temel düğümler arasında iki gerilim kaynağı olduğu için problem bir tane bilinmeyen düğüm gerilimi bulmaya indirgenirdi. Bu tip seçimler üzerinde daha sonra duracağız.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

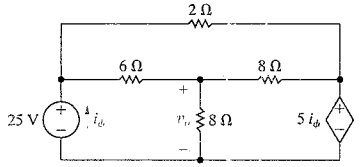
Hedef 2 – Ağ akımı yöntemini anlamak ve kullanabilmek

4.8 a) Şekilde verilen devrenin çözümü için kaç tane ağ akımı denklemi gerektiğini belirleyiniz.
b) Bağımlı gerilim kaynağına aktarılan gücü bulmak için ağ akımı yöntemini kullanınız.

Cevap: (a) 3; (b) –36 W.



4.9 Şekilde gösterilen devrede ağ akımı yöntemini kullanarak v_o gerilimini bulunuz.



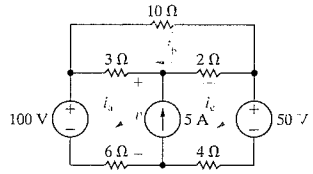
Cevap: 16 V.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 4.37 ve 4.38'i de çözmeyi deneyiniz.

4.7 Ağ Akımı Yöntemi: Bazı Özel Durumlar

Ağ akımı yöntemi, bir dal akım kaynağı içerdiğinde bazı ek işlemler gerektirir. Şekil 4.25'te gösterilen devre bu problemin doğasını göstermektedir.

Ağ akımları i_a, i_b ve i_c'yi tanımladıktan sonra 5 A akım kaynağı üzerindeki gerilimi de tartışmaya yardımcı olması için tanımladık. Dikkat edilmelidir ki devrede dört temel düğüm ve akımın bilinmediği beş temel dal bulunmaktadır. Bu yüzden devreyi çözmek için [5–(4–1)] ağ akımı denklemi yazmamız gerekir. Akım kaynağının varlığı i_a ve i_c arasındaki farkı 5 A olarak kısıtladığı için bilinmeyen ağ akımı sayısı üçten ikiye düşer. Eğer i_a'yı bilirsek i_c'yi de biliriz veya tam tersi de geçerlidir.



Şekil 4.25 ▲ Bir dalda bağımsız akım kaynağı bulunduğunda ağ analizini gösteren devre.

a ağı ya da c ağı etrafındaki gerilimleri toplamaya çalıştığımızda, 5 A akım kaynağı üzerindeki bilinmeyen gerilimi de denklemlere dahil etmeliyiz. Böylece a ağı için

$$100 = 3(i_a - i_b) + v + 6i_a \qquad (4.36)$$

ve c ağı için

$$-50 = 4i_c - v + 2(i_c - i_b) \qquad (4.37)$$

buluruz.

Şimdi v'yi yok etmek için Eş. 4.36 ve 4.37'yi toplarız ve aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$50 = 9i_a - 5i_b + 6i_c. \tag{4.38}$$

b ağı etrafındaki gerilimleri toplamak

$$0 = 3(i_b - i_a) + 10i_b + 2(i_b - i_c) \tag{4.39}$$

verir. Aşağıdaki kısıtı kullanarak Eş. 4.38 ve 4.39'u iki bilinmeyenli iki denklem haline getiririz.

$$i_c - i_a = 5. \tag{4.40}$$

Eş. 4.38 ve 4.39 Eş. 4.40 ile birleştirildiğinde aşağıdaki akımların bulunduğunun sağlaması size bırakılmıştır.

$$i_a = 1.75\text{ A}, \quad i_b = 1.25\text{ A} \quad \text{ve} \quad i_c = 6.75\text{ A}.$$

Üst Ağ Kavramı

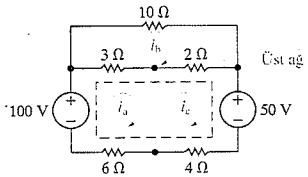
Üst ağ kavramını kullanarak bilinmeyen y gerilimini denkleme dahil etmeden Eş. 4.38'i doğrudan çıkarabiliriz. Üst ağ yaratmak için ağ akımı denklemlerini yazarken akım kaynağının bağlı olduğu dalı görmezden geliriz. Üst ağın etrafındaki gerilimleri baştaki ağ akımları cinsinden ifade ederiz. Şekil 4.26 üst ağ kavramını göstermektedir. Üst ağ (kesikli çizgi ile gösterilen) etrafındaki gerilimleri topladığımızda

$$-100 + 3(i_a - i_b) + 2(i_c - i_b) + 50 + 4i_c + 6i_a = 0 \tag{4.41}$$

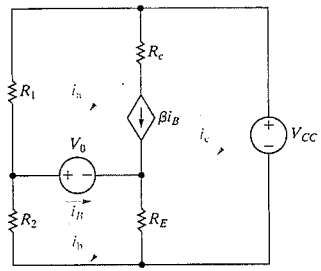
elde ederiz. Sonuç olarak,

$$50 = 9i_a - 5i_b + 6i_c \tag{4.42}$$

bulunur. Dikkat edilmelidir ki Eş. 4.42 ve 4.38 özdeştir. Böylece üst ağ, akım kaynağı üzerindeki bilinmeyen gerilimi kullanma ihtiyacını ortadan kaldırmıştır. Bu tip kısa yolları bulmak için harcadığımız zaman devre analizini sadeleştirmede büyük bir fayda sağlar.



Şekil 4.26 ▲ Şekil 4.25'teki devre üzerinde üst ağ kavramının gösterilmesi.



Şekil 4.27 ▲ Şekil 2.24'teki devrenin ağ akımları i_a, i_b ve i_c ile gösterimi.

Yükselteç Devresinin Ağ Akımı Analizi

Bir dalda bağıl akım kaynağı bulunduğunda ağ akımı yönteminin nasıl uygulandığını göstermek için ilk olarak Kısım 2.5'te verilen (Şekil 2.24) devreyi kullanabiliriz. Şekil 4.27 aynı devrenin üç ağ akımı i_a, i_b ve i_c ile gösterilmiş halidir. Devrede dört temel düğüm ve akımın bilinmediği beş temel dal bulunmaktadır. O halde devrenin analizi için [5–(4–1)] yani iki ağ akımı denklemi gerekmektedir. Şekil 4.27'de üç ağ akımı tanımlamamıza rağmen bağımlı akım kaynağı i_a ve i_c arasında bir kısıt getirdiği için aslında sadece iki bilinmeyen ağ akımı vardır. Üst ağ kavramını kullanarak Şekil 4.28'de gösterildiği gibi devreyi yeniden çizebiliriz.

Üst ağ etrafındaki gerilimleri i_a, i_b ve i_c ağ akımları cinsinden yazıp topladığımızda

$$R_1 i_a + v_{CC} + R_E(i_c - i_b) - V_0 = 0 \tag{4.43}$$

buluruz. b ağı denklemi ise

$$R_2 i_b + V_0 + R_E(i_b - i_c) = 0 \tag{4.44}$$

ile verilir. Bağıl akım kaynağı tarafından zorlanan kısıt

$$\beta i_B = i_a - i_c \tag{4.45}$$

olarak yazılabilir. Ağ akımları cinsinden bağıl akım kaynağını kontrol eden dal akımı

$$i_B = i_b - i_a \tag{4.46}$$

ile verilir. Eş. 4.45 ve 4.46'dan da

$$i_c = (1 + \beta)i_a - \beta i_b \tag{4.47}$$

elde edilir. Eş. 4.43 ve 4.44'ten i_c'yi yok etmek için Eş. 4.47'yi kullandığımızda

$$[R_1 + (1 + \beta)R_E]i_a - (1 + \beta)R_E i_b = V_0 - V_{CC}. \tag{4.48}$$

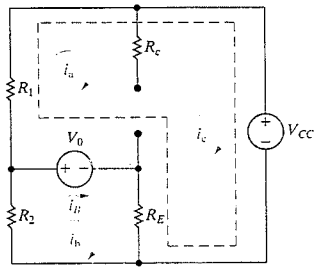
$$-(1 + \beta)R_E i_a + [R_2 + (1 + \beta)R_E]i_b = -V_0 \tag{4.49}$$

buluruz. Eş. 4.48 ve 4.49 i_a ve i_b için çözüldüğünde aşağıdakilerin elde edildiğini doğrulamalısınız.

$$i_a = \frac{V_0 R_2 - V_{CC}R_2 - V_{CC}(1 + \beta)R_E}{R_1 R_2 + (1 + \beta)R_E(R_1 + R_2)}, \tag{4.50}$$

$$i_b = \frac{-V_0 R_1 - (1 + \beta)R_E V_{CC}}{R_1 R_2 + (1 + \beta)R_E(R_1 + R_2)}. \tag{4.51}$$

Eş. 4.50 ve 4.51 i_B'nin bulunmasında kullanıldığında sonucun Eş. 2.25'te verilen ile aynı olduğunu doğrulamayı da size bırakıyoruz.

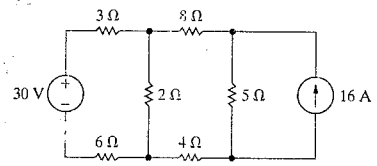


Şekil 4.28 ▲ Şekil 4.27'deki devrede bağımlı kaynak varlığında oluşturulan üst ağın gösterimi.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

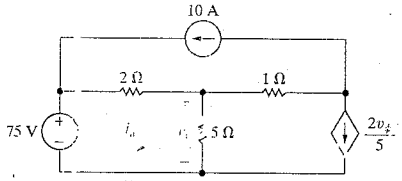
Hedef 2: Ağ akımı yöntemini anlamak ve kullanabilmek

4.10 Şekilde verilen devrede 2 Ω üzerinde harcanan gücü ağ akımı yöntemini kullanarak bulunuz.



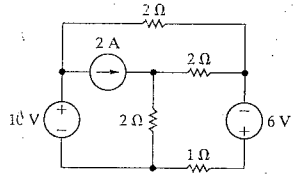
Cevap: 72 W.

4.11 Şekilde verilen devrede ağ akımı i_a'yı ağ akımı yöntemini kullanarak bulunuz.



Cevap: 15 A.

4.12 Şekilde verilen devrede 1 Ω üzerinde harcanan gücü ağ akımı yöntemini kullanarak bulunuz.



Cevap: 36 W.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 4.41, 4.42, 4.47 ve 4.50'yi de çözmeyi deneyiniz.

4.8 Düğüm Gerilimi Yöntemine Karşı Ağ Akımı Yöntemi

Hem düğüm gerilimi hem de ağ akımı yönteminin en büyük avantajı işlem yapılması gereken ortak denklemlerin sayısının azalmasıdır. Bunların her ikisi de denklemleri yazmada ve düzenlemede oldukça sistematik olmayı gerektirir. Ne zaman düğüm gerilimi yönteminin ağ akımı yöntemine tercih edileceğini ya da tersi durumu sormak doğaldır. Tahmin edebileceğiniz gibi bu sorunun kesin bir cevabı yoktur. Çözüm sürecine geçmeden önce bazı sorular sormak daha etkili yöntemi bulmanıza yardımcı olur:

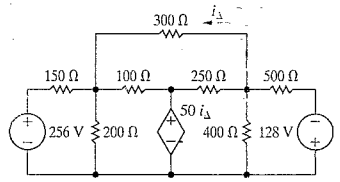
- Yöntemlerden biri daha az ortak denklem ile sonuçlanıyor mu?
- Devrede üst düğüm var mı? Eğer varsa düğüm gerilimi yöntemi çözülmesi gereken denklem sayısını azaltır.

- Devrede üst ağ var mı? Eğer varsa ağ akımı yöntemi çözülmesi gereken denklem sayısını azaltmaya yardımcı olur.
- Devrenin sadece bir kısmının çözümü istenen çözümü veriyor mu? Eğer veriyorsa hangi yöntem devrenin ilgili kısmının çözümesinde en etkili yöntemdir?

Herhangi bir durum için belki de en önemli gözlem çeşitli analitik yaklaşımlarla problemin bağlantısı hakkında düşünmektir. Örnek 4.6 ve 4.7 düğüm gerilimi ve ağ akımı yöntemleri arasındaki seçim sürecini göstermektedir.

Örnek 4.6 Ağ Akımı Yöntemine Karşı Düğüm Gerilimi Yönteminin Anlaşılması

Şekil 4.29'da verilen devrede 300 Ω üzerinde harcanan gücü bulunuz.



Şekil. 4.29 ▲ Örnek 4.6 için devre.

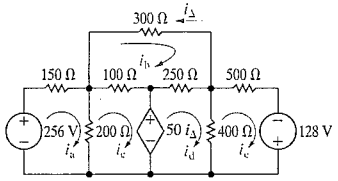
Çözüm

300 Ω üzerinde harcanan gücü bulmak için ya içinden geçen akımı ya da üzerindeki gerilimi bulmamız gerekir. Ağ akımı yöntemi direncin üzerindeki akımı verir; Şekil 4.30'da gösterildiği gibi bu yaklaşım beş ortak ağ denkleminin çözümünü gerektirir. Beş denklemi yazarken $i_\Delta = -i_b$ kısıtını da dahil etmeliyiz.

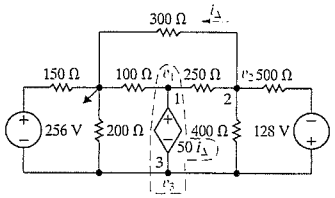
Daha ileri gitmeden devreye düğüm gerilimi yöntemi açısından bakalım. Dikkat edilmelidir ki gerilimleri bildiğimizde 300 Ω içindeki akımı veya üzerindeki gerilimi hesaplayabiliriz. Devrede dört temel düğüm bulunmaktadır ve bu yüzden sadece iki düğümdeki akımları toplamamız gerekir. Böylece problem iki düğüm gerilimi denklemi ve bir kısıt denklemi yazmaya indirgenir. Düğüm gerilimi yöntemi sadece üç ortak denklem gerektirdiğinden daha cazip bir yaklaşımdır.

Düğüm gerilimi yönteminin kullanılmasına karar verildikten sonraki adım referans düğümü seçmektir. Şekil 4.29'daki devrede iki temel düğümü göz önünde bulundurmaya değerdir. İlki Şekil 4.31'deki referans düğümüdür. Eğer bu düğüm seçilirse bilinmeyen düğüm gerilimlerinden biri 300 Ω üzerindeki Şekil 4.31'de gösterilen v_2 gerilimidir. Bu gerilimi bildikten sonra aşağıdaki ifadeyi kullanarak 300 Ω üzerindeki gücü bulabiliriz:

$$p_{300\Omega} = v_2^2/300.$$



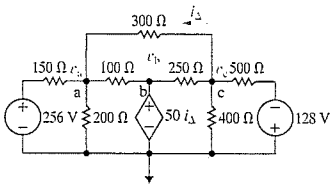
Şekil 4.30 ▲ Şekil 4.29'daki devrenin beş ağ akımı ile gösterimi.



Şekil 4.31 ▲ Şekil 4.29'daki devrenin referans düğümü ile gösterimi.

Dikkat edilmelidir ki referans düğümü seçimine ek olarak üç düğüm gerilimi v_1, v_2 ve v_3'ü tanımladık ve düğüm 1 ve 3'ün bağımlı gerilim kaynağı ile bağlı olduğu için bir üst düğüm oluşturduklarını belirttik. Bir düğüm gerilimi referans düğümüne bağlı artış olduğu için gerilim kutuplarını Şekil 4.31'de belirtmedik.

Şekil 4.32'de gösterildiği gibi referans düğümü olarak göz önünde bulundurmaya değen ikinci düğüm aşağıdaki düğümdür. Bu düğüm en çok dalın bağlı olduğu düğüm olduğu için düğüm gerilimi denklemlerinin yazılması daha kolaydır ve bu nedenle daha caziptir. Fakat 300 Ω üzerindeki gerilimi veya akımı bulmak için düğüm gerilimleri v_a ve v_c bulunduktan sonra ek hesaplama gerekir. Örneğin 300 Ω üzerindeki akım $(v_c - v_a)/300$ iken bu direnç üzerindeki gerilim $v_c - v_a$'dır.



Şekil. 4.32 ▲ Şekil 4.29'daki devrenin bir diğer referans düğümü ile gösterimi.

Bu iki olası referans düğümünü aşağıdaki denklem kümeleri yardımıyla karşılaştırabiliriz. İlk küme Şekil 4.31'de gösterilen devre ile ilgiliyken ikinci küme Şekil 4.32'de gösterilen devreye dayanmaktadır.

- Küme 1 (Şekil 4.31)

  Üst düğümde,

$$\frac{v_1}{100} + \frac{v_1 - v_2}{250} + \frac{v_3}{200} + \frac{v_3 - v_2}{400} + \frac{v_3 - (v_2 + 128)}{500} + \frac{v_3 + 256}{150} = 0$$

yazılır. v_2'de ise

$$\frac{v_2}{300} + \frac{v_2 - v_1}{250} + \frac{v_2 - v_3}{400} + \frac{v_2 + 128 - v_3}{500} = 0$$

bulunur. Üst düğüm kullanılarak elde edilen kısıt denklemi

$$v_3 = v_1 - 50i_\Delta = v_1 - \frac{v_2}{6}$$

ile verilir.

- Küme 2 (Şekil 4.32)

  v_a'da

$$\frac{v_a}{200} + \frac{v_a - 256}{150} + \frac{v_a - v_b}{100} + \frac{v_a - v_c}{300} = 0$$

ve v_c'de

$$\frac{v_c}{400} + \frac{v_c + 128}{500} + \frac{v_c - v_b}{250} + \frac{v_c - v_a}{300} = 0$$

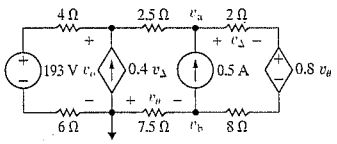
yazılır. Üst düğüm kullanılarak elde edilen kısıt denklemi ise

$$v_b = 50i_\Delta = \frac{50(v_c - v_a)}{300} = \frac{v_c - v_a}{6}$$

ile verilir. Herhangi bir kümenin çözümünde 300 Ω üzerinde harcanan gücün 16.5 W olarak bulunduğunu doğrulamalısınız.

Örnek 4.7 Düğüm Gerilimi ve Ağ Akımı Yöntemlerinin Karşılaştırılması

Şekil 4.33'de gösterilen devredeki v_o gerilimini bulunuz.

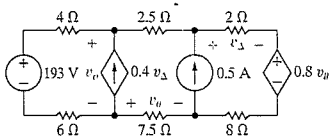


Şekil 4.35 ▲ Şekil 4.33'teki devrenin üç ağ akımı ile gösterimi.

Çözüm

İlk bakışta düğüm gerilimi yöntemi öne çıkmaktadır. Çünkü bağımlı akım kaynağının aşağıdaki terminali referans düğümü olarak seçilip bilinmeyen gerilim bir düğüm gerilimi olarak tanımlanabilir. Devrede dört temel düğüm ve iki gerilim kontrollü bağımlı kaynak bulunmaktadır. Bu yüzden düğüm gerilimi yöntemi üç düğüm gerilimi denklemi ve iki kısıt denkleminin işlenmesine gerektirir.

v_o'yu bulmak için şimdi ağ akımı yöntemini ele alalım. Devre üç ağ içermektedir ve en soldakini v_o'yu hesaplamak için kullanabiliriz. En soldaki ağ akımını i_a ile gösterirsek $v_o = 193 - 10\,i_a$ olur. İki akım kaynağının varlığı problemi tek bir üst ağ denklemi ve iki kısıt denkleminin işlenmesine indirger. Bu yüzden burada ağ akımı yöntemi daha cazip olan tekniktir.



Şekil 4.33 ▲ Örnek 4.7 için devre.

İki yaklaşımı karşılaştırabilmeniz için iki yöntemi de özetleyeceğiz. Ağ akımı denklemleri Şekil 4.34'te gösterilen devreye dayanmaktadır; düğüm gerilimi denklemleri ise Şekil 4.35'te gösterilen devreye dayanmaktadır:

$$193 = 10i_a + 10i_b + 10i_c + 0.8v_\theta.$$

Kısıt denklemleri

$$i_b - i_a = 0.4v_\Delta = 0.8i_c;$$
$$v_\theta = -7.5i_b; \text{ ve}$$
$$i_c - i_b = 0.5$$

ile verilir. Üst ağ denklemlerini i_a cinsinden yazmak için kısıt denklemlerini kullanırsak,

$$160 = 80i_a, \quad \text{or} \quad i_a = 2 \text{ A}.$$
$$v_o = 193 - 20 = 173 \text{ V}$$

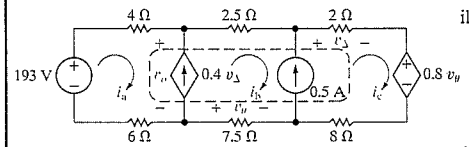
buluruz. Düğüm gerilimi denklemleri,

$$\frac{v_o - 193}{10} - 0.4v_\Delta + \frac{v_o - v_a}{2.5} = 0.$$
$$\frac{v_a - v_o}{2.5} - 0.5 + \frac{v_a - (v_b + 0.8v_\theta)}{10} = 0.$$
$$\frac{v_b}{7.5} + 0.5 + \frac{v_b + 0.8v_\theta - v_a}{10} = 0$$

ile verilir. Kısıt denklemleri,

$$v_\theta = -v_b, \quad v_\Delta = \left[\frac{v_a - (v_b + 0.8v_\theta)}{10}\right]2$$

olur. Düğüm gerilimi denklemlerini v_o, v_a ve v_b'yi içeren üç ortak denkleme indirgemek için kısıt denklemlerini kullanırız. Düğüm gerilimi yaklaşımının da $v_o = 173$ V sonucunu verdiğini doğrulamalısınız.

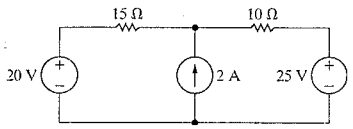


Şekil: 4.34 ▲ Şekil 4.33'teki devrenin üç ağ akımı ile gösterimi.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

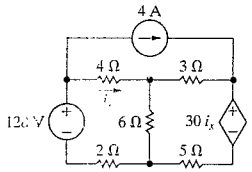
Hedef 3–Düğüm gerilimi ve ağ akımı yöntemleri arasında karar verme

4.13 Şekilde verilen devrede 2 A akım kaynağı tarafından devreye aktarılan gücü bulunuz.



Cevap: 70 W.

4.14 Şekilde verilen devrede 4 A akım kaynağı tarafından devreye aktarılan gücü bulunuz.

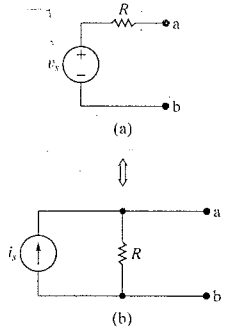


Cevap: 40 W

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 4.54 ve 4.56'yı da çözmeyi deneyiniz.

4.9 Kaynak Dönüşümleri

Devre çözümünde düğüm gerilimi ve ağ akımı yöntemleri güçlü teknikler olsa da hâlâ devreleri basitleştirebilecek yöntemlerle ilgilenmekteyiz. Seriden paralele indirgeme ve Δ – Y dönüşümleri zaten sadeleştirme tekniklerimiz arasındaydı. Bu listeyi genişletmeye kaynak dönüşümleri ile başlayalım. Şekil 4.36'da görüldüğü gibi gerilim kaynağı ile seri bir direncin, bir akım kaynağına paralel aynı dirençle değiştirilmesine, ya da tam tersine, kaynak dönüşümü denir. Çift yönlü ok kaynak dönüşümünün çift yönlü olduğunu vurgulamaktadır. Bu da herhangi bir yapıdan başlayıp diğerlerini çıkarabileceğimiz anlamına gelir.



Şekil: 4.36 ▲ Kaynak dönüşümleri.

Şekil 4.36'da gösterilen bu iki yapının a ve b düğümlerine göre eşdeğer olduğunu garantileyen v_s ve i_s arasındaki ilişkiyi bulmamız gerekmektedir. Eşdeğerlik, bir R_L direnci Şekil 4.36 (a) veya Şekil (4.36 (b)'de gösterilen a ve b düğümleri arasına bağlandığında aynı akım akışına ve dolayısıyla aynı gerilim düşüşüne maruz kaldığında sağlanır.

Varsayalım ki R_L Şekil 4.36(a)'daki a ve b düğümleri arasına bağlanmış olsun. Ohm yasası kullanılarak R_L üzerindeki akım,

$$i_L = \frac{v_s}{R + R_L} \tag{4.52}$$

bulunur. Şimdi de aynı R_L direncinin Şekil 4.36(b)'deki a ve b düğümleri arasına bağlanmış olduğunu varsayalım. Akım bölünmesini kullanarak R_L üzerindeki akım,

$$i_L = \frac{R}{R + R_L} i_s \tag{4.53}$$

elde edilir. Eğer Şekil 4.36'daki devreler eşdeğerse direnç akımları eşit olmalıdır. Eş 4.52 ve 4.53'ün sağ taraflarını eşitleyip sadeleştirdiğimizde

$$i_s = \frac{v_s}{R} \tag{4.54}$$

buluruz.

Eş 4.54 Şekil 4.36'daki devreler için sağlandığında, R_L üzerindeki akım bütün R_L değerleri için her iki devrede de aynıdır. Her iki devrede de R_L üzerindeki akım aynıysa R_L üzerindeki gerilim düşüşü de aynıdır ve devreler a ve b düğümlerinde eşdeğerdir.

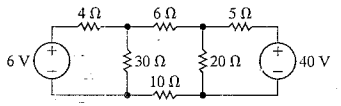
Eğer v_s geriliminin kutupluğu ters çevrilirse eşdeğerliği korumak için i_s'nin de yönelimi ters çevrilmelidir.

Örnek 4.8 devre analiz problemini kolaylaştırmak için kaynak dönüşümü yapmanın yararını göstermektedir.

Örnek 4.8 Bir Devrenin Çözümünde Kaynak Dönüşümlerinin Kullanılması

a) Şekil 4.37'de gösterilen devrede 6 V kaynak ile ilişkili gücü bulunuz.

b) 6 V kaynağın güç aktardığını veya soğurduğunu belirtiniz.

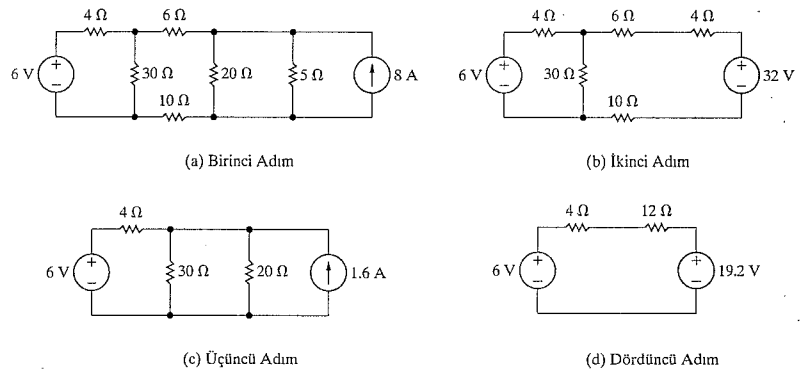


Şekil 4.37 ▲ Örnek 4.8 için devre.

Çözüm

a) Şekil 4.37'de gösterilen devrede 6 V kaynakla ilgili güç ile ilgileniyorsak çeşitli yaklaşımlar akla gelir. Devrede dört temel düğüm ve akımı bilinmeyen altı temel dal bulunmaktadır. 6 V kaynağın bulunduğu daldaki akımı bulmak için ya üç [6–(4–1)] ağ akımı denklemi ya da üç [4–1] düğüm gerilimi denklemi çözmemiz gerekmektedir. Ağ akımı yaklaşımını seçmek 6 V kaynağın bulunduğu dal akımına karşılık gelen ağ akımını çözmeyi içerir. Düğüm gerilimi yaklaşımını seçmek ise 30 Ω üzerindeki gerilimi çözmeyi içerir ve bundan da 6 V kaynağın bulunduğu daldaki akım hesaplanabilir. Sadece bir dal akımı üzerine yoğunlaşarak devreyi kaynak dönüşümleri ile sadeleştirebiliriz.

Devreyi 6 V kaynağın bulunduğu dalın kimliğini koruyacak şekilde indirgemeliyiz. 40 V'un bulunduğu dalın kimliğini korumak için hiç bir nedenimiz bulunmamaktadır. Bu daldan başlayarak 40 V kaynak ile seri 5 Ω direnç dönüştürülebilir. Bu durum Şekil 4.38 (a)'da gösterilmiştir.



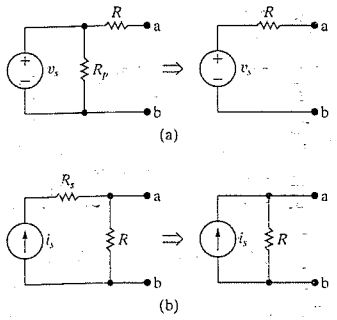
Şekil 4.38 ▲ Şekil 4.37'deki devrenin adım adım sadeleştirilmesi.

Ardından 20 Ω ve 5 Ω'un paralel birleşimini 4 Ω ile değiştirebiliriz. Bu 4 Ω direnç 8 A kaynak ile paraleldir ve dolayısıyla 32 V kaynakla seri bağlı bir 4 Ω ile yer değiştirebilir. Bu durum Şekil 4.38 (b)'de gösterilmiştir. Şekil 4.38 (c)'de gösterildiği gibi 32 V kaynak ile seri 20 Ω 1.6 A akım kaynağı ile paralel 20 Ω ile değiştirilebilir. 20 Ω ile paralel 30 Ω, 12 Ω dirence indirgenebilir. 1.6 A akım kaynağı ve 12 Ω direncin paralel birleşimi 19.2 V gerilim kaynağı ve ona seri 12 Ω direnç ile yer değiştirilebilir. Bu son dönüşümün sonucu Şekil 4.38 (d)'de gösterilmektedir. 6 V kaynağın üzerindeki gerilim düşüşü yönündeki akım (19.2–6)/16 veya 0.825 A'dir. Böylece 6 V kaynak ile ilgili güç,

$$p_{6V} = (0.825)(6) = 4.95 \text{ W}$$

elde edilir.

b) Gerilim kaynağı güç sağlamaktadır.



Şekil 4.39 ▲ Gerilim kaynağı ile paralel direnç bulunduran veya akım kaynağı ile seri direnç bulunduran eşdeğer devreler.

Şekil 4.38'de gösterilen kaynak dönüşümünden ortaya şu soru çıkmaktadır: Gerilim kaynağına paralel bir R_p direnci veya akım kaynağına seri bir R_s direnci varsa ne olur? İki durumda da direncin, a ve b terminallerine göre davranışı öngören eşdeğer devre üzerinde bir etkisi yoktur. Şekil 4.39 bu gözlemi özetlemektedir.

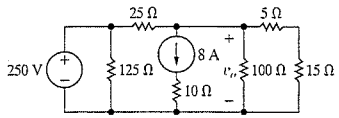
Şekil 4.39(a)'da gösterilen iki devre birbirine a ve b terminallerine göre eşdeğerdir çünkü a ve b düğümleri arasına yerleştirilecek herhangi bir R_L direnci ile aynı akım ve gerilimi üretir. Aynı sonuç Şekil 4.39(b)'de gösterilen devreler için de söylenebilir. Örnek 4.9 Şekil 4.39'da verilen eşdeğer devrelerin uygulamasını göstermektedir.

Örnek 4.9 Özel Kaynak Dönüşüm Tekniklerinin Kullanılması

a) Şekil 4.40'da gösterilen devrede v_o'yu kaynak dönüşümleri kullanarak bulunuz.

b) 250 V gerilim kaynağı ile ilgili gücü bulunuz.

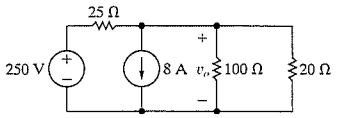
c) 8 A akım kaynağı ile ilgili gücü bulunuz.



Şekil 4.40 ▲ Örnek 4.9 için devre.

Çözüm

a) 125 Ω ve 10 Ω'u kaldırarak çözüme başlıyoruz çünkü 125 Ω direnç 250 V gerilim kaynağına paralel ve 10 Ω direnç de 8 A akım kaynağına seri bağlanmıştır. Ayrıca seri bağlanmış dirençleri de tek 20 Ω direnç halinde birleştiririz. Şekil 4.41 sadeleştirilmiş devreyi göstermektedir.



Şekil 4.41 ▲ Şekil 4.40'taki devrenin sadeleştirilmiş hali.

Şekil 4.42'de görüldüğü gibi, 250 V ve 25 Ω direnci 10 A kaynağa paralel 25 Ω direnç ile yer değiştirebiliriz. Şekil 4.42'de görüldüğü gibi Kirchhoff akım yasasını kullanarak paralel akım kaynaklarını tek bir kaynakta birleştirebiliriz. Şekil 4.43 sonucu göstermektedir. Böylece $v_o = 20$ V olduğunu buluruz.

b) 250 V tarafından sağlanan akım 125 Ω üzerindeki akım artı 25 Ω üzerindeki akımdır. Böylece denklem,

$$i_s = \frac{250}{125} + \frac{250 - 20}{25} = 11.2 \text{ A}$$

olur. O halde gerilim kaynağı ile ilgili güç,

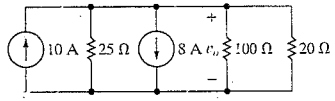
$$p_{250V} \text{ (aktarılan)} = (250)(11.2) = 2800 \text{ W}$$

bulunur.

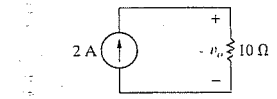
c) 8 A ile ilgili gücü bulmak için önce kaynak üzerindeki gerilimi buluruz. v_s kaynak üzerindeki gerilimi temsil ederse, kaynağın yukarı terminali pozitif iken aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$v_s + 8(10) = v_o = 20 \quad \text{veya} \quad v_s = -60 \text{ V}.$$

8 A kaynak ile ilgili güç 480 W'tır. Dikkat edilmelidir ki 125 Ω ve 10 Ω dirençler v_o değerini etkilemez fakat güç hesaplamalarını etkiler.



Şekil 4.42 ▲ Kaynak dönüşümünden sonra Şekil 4.41'deki devrenin gösterimi.



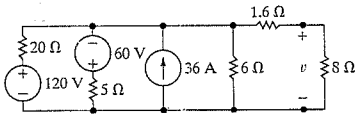
Şekil 4.43 ▲ Kaynakları ve dirençleri birleştirdikten sonra Şekil 4.42'deki devrenin gösterimi.

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 4 – Kaynak dönüşümünü anlamak

4.15 a) Şekilde verilen devrede kaynak dönüşümlerini kullanarak v gerilimini bulunuz.

b) 120 V kaynak devreye ne kadar güç aktarır?



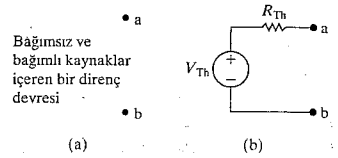
Cevap: (a) 48 V;

(b) 374.4 W.

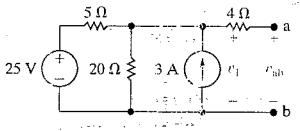
NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 4.59 ve 4.69'u da çözmeyi deneyiniz.

4.10 Thévenin ve Norton Eşdeğerleri

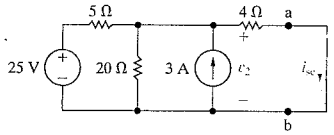
Bazen devre analizinde, belirli bir terminal çiftinde ne olduğuna odaklanmak isteriz. Örneğin tost makinesini bir çıkış noktasına bağladığımızda öncelikle tost makinesinin terminallerindeki akım ve gerilim ile ilgileniriz. Çıkış noktasını besleyen devredeki diğer yerlerdeki akım ve voltaj değerleri ile neredeyse hiç ilgilenmeyiz. Bu terminal davranışı üzerine olan ilgimizi her birinin farklı miktarda güç gerektirdiği bir cihaz kümesine genişletebiliriz. Daha sonra cihazları değiştirdikçe çıkış noktasındaki akım ve gerilimin nasıl değiştiği ile ilgileniriz. Başka bir değişle, çıkış noktasını besleyen devreye sadece çıkış terminallerinde odaklanmak istiyoruz.



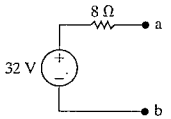
Şekil 4.44 ▲ (a) Genel bir devre (b) Thévenin eşdeğeri devre.



Şekil 4.45 ▲ Thévenin eşdeğerini gösteren devre.



Şekil 4.46 ▲ Şekil 4.45'te gösterilen devrenin a ve b terminallerinin kısa devre yapılmış hali.



Şekil 4.47 ▲ Şekil 4.45'te gösterilen devrenin Thévenin eşdeğeri.

Thévenin ve Norton eşdeğerleri terminal davranışına odaklanılan devreyi sadeleştirme tekniklerdir. Bu yüzden analizde çok değerli yardımları vardır. Burada direnç devreleri üzerinden tartışsak da Thévenin ve Norton eşdeğerler doğrusal elemanlardan oluşan herhangi bir devreyi temsil etmek için kullanılabilir.

Kaynaklarından (hem bağımsız hem bağımlı) ve dirençlerden oluşan bir devreyi temsil eden Şekil 4.44'ü referans alarak Thévenin eşdeğer devresini açıklayabiliriz. a ve b harfleri ilgilendiğimiz terminal çiftini temsil eder. Şekil 4.44(b) Thévenin eşdeğerini gösterir. Böylece bir Thévenin eşdeğer devresi, birbirine bağlı bir çok kaynak ve direncin yerine geçen, bağımsız bir gerilim kaynağı V_{Th} ve onu seri bir R_{Th} direncidir. Bu seri V_{Th} ve R_{Th} birleşimi baştaki devreye a ve b terminallerine göre eşdeğerdir. Bu da iki devrenin de a ve b terminallerine aynı yük bağlanırsa bu terminallerde aynı akım ve gerilim değeri elde edilir demektir. Bu eşdeğerlik tüm olası yük dirençleri için geçerlidir.

Baştaki devreyi Thévenin eşdeğeri ile temsil etmek için Thévenin gerilimi V_{Th} ve Thévenin direnci R_{Th}'yi belirleyebilmeliyiz. İlk olarak eğer son derece büyük bir yük direnci varsa açık devre durumu olduğunu dikkate alırız. Şekil 4.44(b)'de gösterilen devrede a, b terminallerinde açık devre gerilimi V_{Th}'dir. Varsayım gereği baştaki devrenin a, b terminallerinde de aynı açık devre gerilimini elde etmeliyiz. O halde Thévenin gerilimi V_{Th}'yi hesaplamak için baştaki devrede açık devre gerilimini hesaplarız.

Yük direncini sıfıra indirmek bize kısa devre durumunu verir. Thévenin eşdeğeri devrede a ve b arasını kısa devre yaparsak a'dan b'ye yönetilmiş kısa devre akımı

$$i_{sc} = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} \tag{4.55}$$

bulunur. Varsayım gereği bu kısa devre akımı baştaki devrede a ve b terminalleri arasına kısa devre konulduğunda var olan akımla özdeştir. Eş. 4.55'ten

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{i_{sc}} \tag{4.56}$$

elde edilir. O halde Thévenin direnci açık devre geriliminin kısa devre akımına oranıdır.

Thévenin Eşdeğerin Bulunması

Şekil 4.45'te gösterilen devrenin Thévenin eşdeğerini bulabilmek için ilk olarak v_{ab}'nin açık devre gerilimini hesaplamalıyız. Dikkat edilmelidir ki a, b terminalleri açık olduğunda 4 Ω üzerinden akım geçmez. Bu yüzden açık devre gerilimi v_{ab}, 3A akım kaynağı üzerindeki v_1 ile gösterilen gerilime eşittir. Gerilimi tek bir düğüm gerilimi denklemi çözerek buluruz. Aşağıdaki düğümü referans düğümü olarak seçince

$$\frac{v_1 - 25}{5} + \frac{v_1}{20} - 3 = 0 \tag{4.57}$$

buluruz. Bu denklemi v_1 için çözdüğümüzde

$$v_1 = 32 \text{ V} \tag{4.58}$$

elde ederiz. Sonuç olarak bu devre için Thévenin gerilimi 32 V'tur.

Sonraki adım terminaller arasını kısa devre yapıp sonuç olarak ortaya çıkan kısa devre akımını hesaplamaktır. Şekil 4.46 kısa devre bağlanmış devreyi göstermektedir. Dikkat edilmelidir ki kısa devre akımı a, b terminallerindeki açık devre gerilim düşüşü ile aynı yöndedir. Eğer kısa devre akımı terminaller arasındaki açık devre gerilim yükselişi ile aynı yönde ise Eş. 4.56'ya eksi işareti eklenmelidir.

v_2 bilindiğinde kısa devre akımı (i_{sc}) kolaylıkla bulunur. Bu nedenle problem kısa devre durumunda v_2'yi bulmaya indirgenir. Yeniden aşağıdaki düğümü referans düğümü olarak kullanınca v_2 için denklem

$$\frac{v_2 - 25}{5} + \frac{v_2}{20} - 3 + \frac{v_2}{4} = 0 \tag{4.58}$$

bulunur. Eş. 4.59'u v_2 için çözersek,

$$v_2 = 16 \text{ V} \tag{4.58}$$

elde edilir. Sonuç olarak, kısa devre akımı

$$i_{sc} = \frac{16}{4} = 4 \text{ A} \tag{4.58}$$

olur. Eş. 4.58 ve 4.61'deki sayısal sonuçları Eş. 4.56'da yerine koyarsak Thévenin direncini bulabiliriz:

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{i_{sc}} = \frac{32}{4} = 8\ \Omega \tag{4.58}$$

Şekil 4.47 Şekil 4.45'te gösterilen devrenin Thévenin eşdeğerini göstermektedir.

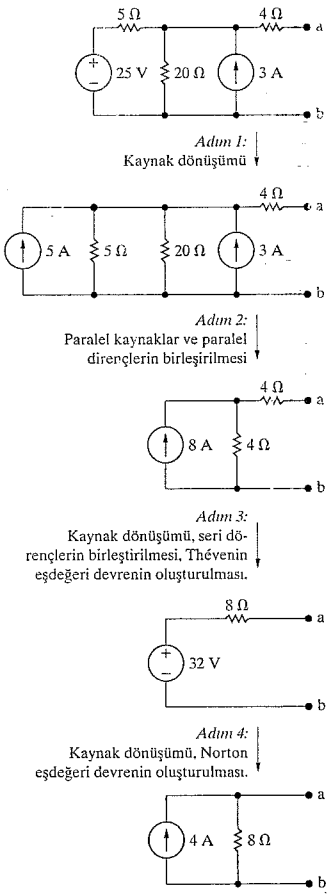
Şekil 4.45'te a, b terminalleri arasına 24 Ω bağlansaydı direnç üzerindeki gerilim 24 V ve direnç üzerinden geçen akım 1 A olacaktı. Şekil 4.47'deki Thévenin devresi için de durumun aynı olacağını doğrulamasınız. Şekil 4.45 ve 4.47 arasındaki bu eşdeğerlik a ve b düğümleri arasına bağlanacak herhangi bir direnç için geçerlidir.

Norton Eşdeğeri

Norton eşdeğer devresi, bir bağımsız akım kaynağına paralel bir Norton eşdeğer direncinden oluşur. Bu eşdeğer devre, Thévenin eşdeğeri devreye kaynak dönüşümü uygulanarak kolayca çıkarılabilir. Böylece Norton akımı ilgilenilen terminallerdeki kısa devre akımına eşit olup Norton direnci ile Thévenin direnci özdeştir.

Kaynak Dönüşümlerinin Kullanımı

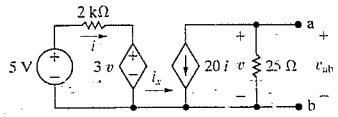
Bazen Thévenin ve Norton eşdeğer devrelerini, kaynak dönüşümlerinin etkili bir şekilde kullanarak çıkarabiliriz. Örneğin Şekil 4.48'de gösterildiği gibi Şekil 4.45'te gösterilen devrenin Thévenin ve Norton eşdeğerlerini bir dizi kaynak dönüşümü kullanarak çıkarabiliriz. Bu teknik, devre sadece bağımlı kaynaklar içerdiğinde en kullanışlıdır. Bağımlı kaynakların varlığı kontrol gerilim ve akımlarının özelliklerini korumasını gerektirir. Bu kısıt genelde devrenin kaynak dönüşümleri ile sürekli indirgenmesini engeller. Bir devrede bağımlı kaynaklar bulunduğunda Thévenin eşdeğeri bulma problemini Örnek 4.10'da tartışacağız.



Şekil 4.48 ▲ Şekil 4.45'te gösterilen devrenin Thévenin ve Norton eşdeğerlerinin oluşturulmasının adım adım gösterimi.

Örnek 4.10 Bağımlı Kaynak İçeren Bir Devrenin Thevenin Eşdeğerinin Bulunması

Şekil 4.49'daki bağımlı kaynaklar içeren devrenin Thévenin eşdeğerini bulunuz.



Şekil 4.49 ▲ Devrede bağımlı kaynaklar bulunduğunda Thévenin eşdeğerini bulmayı gösteren devre.

Çözüm

Şekil 4.49'daki devrenin analizindeki ilk adım i_x olarak adlandırılan akımın sıfır olduğunu fark etmektir. (i_x'in devrenin sol tarafına geri dönmesi için bir yolun olmadığına dikkat ediniz) Açık devre ya da Thévenin gerilimi, 25 Ω direncin üzerindeki gerilimdir. $i_x = 0$ ise

$$V_{Th} = v_{ab} = (-20i)(25) = -500i$$

olur. i akımı

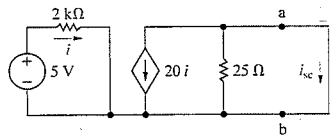
$$i = \frac{5 - 3v}{2000} = \frac{5 - 3V_{Th}}{2000}$$

bulunur. i için denklemi yazarken, Thévenin geriliminin kontrol gerilimine özdeş olduğunu görürüz. Bu iki denklemi birleştirdiğimizde

$$V_{Th} = -5 \text{ V}$$

elde edilir. Kısa devre akımını hesaplamak için a ve b arasını kısa devre yaparız. a ve b terminalleri arası kısa devre olunca, kontrol gerilimi v sıfıra iner. Şekil 4.49'da gösterilen devre, kısa devre durumunda Şekil 4.50'de gösterilen devreye dönüşür. 25 Ω direnç kısa devre ile paralel olunca bağımlı akım kaynağından gelen bütün akım, kısa devreden geçer:

$$i_{sc} = -20i.$$



Şekil 4.50 ▲ Şekil 4.49'da gösterilen devrenin a ve b terminalleri kısa devre yapılmış hali.

Bağımlı gerilim kaynağını kontrol eden gerilim sıfıra indiği için bağımlı akım kaynağını kontrol eden akım

$$i = \frac{5}{2000} = 2.5 \text{ mA}$$

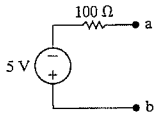
olur. Bu iki denklemi birleştirince, kısa devre akımı

$$i_{sc} = -20(2.5) = -50 \text{ mA}$$

bulunur. i_{sc} ve V_{Th}'den

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{i_{sc}} = \frac{-5}{-50} \times 10^3 = 100\ \Omega$$

elde edilir. Şekil 4.51, Şekil 4.49'daki devrenin Thévenin eşdeğerini göstermektedir. Dikkat edilmelidir ki Thévenin gerilim kaynağının üzerindeki referans kutup işaretleri, önceki V_{Th} denklemi ile uyuşmaktadır.

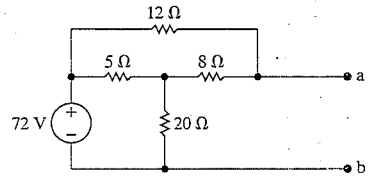


Şekil 4.51 ▲ Şekil 4.49'da gösterilen devrenin Thévenin eşdeğeri.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

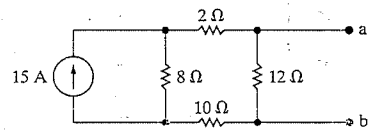
Hedef 5 – Thévenin ve Norton Eşdeğerlerini Anlamak

4.16 Şekilde verilen devrenin a, b terminallerine göre Thévenin eşdeğerini bulunuz.



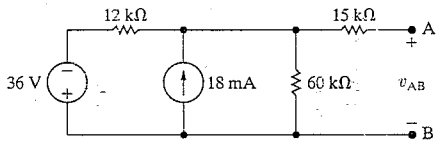
Cevap: $V_{ab} = V_{Th} = 64.8$ V, $R_{Th} = 6\ \Omega$.

4.17 Şekilde verilen devrenin a, b terminallerine göre Norton eşdeğerini bulunuz.



Cevap: $I_N = 6$A (a'ya doğru) $R_N = 7.5\ \Omega$.

4.18 İç direnci 100 kΩ olan bir voltmetre v_{AB} gerilimini ölçüyor. Voltmetrenin okuduğu değer nedir?



Cevap: 120 V.

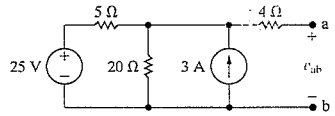
NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 4.63, 4.66 ve 4.67'yi de çözmeyi deneyiniz.

4.11 Thévenin Eşdeğer Hakkında Ek Bilgi

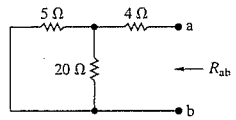
Kısım 4.10'da tartıştığımız R_{Th} bulma tekniği her zaman en kolay yöntem değildir. Diğer iki yöntem genelde daha basittir. İlki, devre sadece bağımsız kaynaklardan oluşuyorsa kullanmalıdır. Böylece bir devre için R_{Th} hesaplanırken, önce bütün bağımsız kaynakları öldürürüz ve daha sonra belirlenmiş terminal çiftinden devreye bakınca görülen direnci hesaplarız. Gerilim kaynağını öldürmek için bir kısa devre ile yer değiştiririz. Akım kaynağını öldürmek için ise açık devre ile yer değiştirilir. Örneğin Şekil 4.52'de gösterilen devreyi ele alalım. Bağımsız kaynaklar öldürüldükten sonra Şekil 4.53'te gösterilen devre elde edilir. a, b terminallerine bakıldığında görülen direnç R_{ab} olarak gösterilmiştir. R_{ab}, 5 Ω ve 20 Ω dirençlerinin paralel birleşimi ile seri bir 4 Ω dirençten oluşur. Böylece,

$$R_{ab} = R_{Th} = 4 + \frac{5 \times 20}{25} = 8\ \Omega \qquad (4.63)$$

elde edilir. Dikkat edilmelidir ki R_{Th}'nin Eş. 4.63 ile çıkarımı Eş. 4.57–4.62 ile çıkarımından çok daha kolaydır.



Şekil 4.52 ▲ Thévenin eşdeğerini sergilemek için bir devre.



Şekil 4.53 ▲ Şekil 4.52'deki devrenin bağımsız kaynakları öldürüldükten sonraki hali.

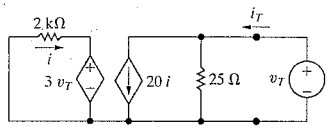
Eğer devre bağımlı kaynaklar barındırıyorsa Thévenin direnci R_{Th}'yi bulmak için başka bir yöntem şu şekildedir: Önce bütün bağımsız kaynakları öldürürüz. Sonra Thévenin terminalleri a, b'ye test gerilim kaynağı veya test akım kaynağı uygularız. Thévenin direnci, test kaynağının üzerindeki gerilimin test kaynağından çıkan akıma oranıdır. Örnek 4.11, Örnek 4.10 ile aynı devreyi kullanarak bu alternatif R_{Th} bulma yöntemini göstermektedir.

Örnek 4.11 Bir Test Kaynağı Kullanarak Thevenin Eşdeğerin Bulunması

Şekil 4.49'daki devrenin Thévenin direnci R_{Th}'yi anlatılan alternatif yöntemi kullanarak bulunuz.

Çözüm

İlk önce devredeki bağımsız gerilim kaynağını öldürürüz. Sonra devreye a, b terminallerinden test akım kaynağı veya test gerilim kaynağı uygularız. Eğer test gerilim kaynağı uygularsak bağımlı gerilim kaynağının gerilimini biliriz ve sonuç olarak kontrol akımı i'yi buluruz. Bu yüzden test gerilim kaynağını seçeceğiz. Şekil 4.54 Thévenin direncinin hesaplanması için kullanılan devreyi göstermektedir.



Şekil 4.54 ▲ Thévenin direncinin alternatif yöntem ile hesaplanması.

Dışarıdan uygulanan test gerilim kaynağı v_T, devreye aktardığı akım ise i_T ile isimlendirilmiştir. Thévenin direncini bulmak için Şekil 4.54'te gösterilen devreyi test kaynağındaki gerilimin akıma oranı $R_{Th} = v_T/i_T$ için çözeriz. Şek. 4.54'ten

$$i_T = \frac{v_T}{25} + 20i, \tag{4.64}$$

$$i = \frac{-3v_T}{2} \text{ mA} \tag{4.65}$$

bulunur. Eş. 4.65'i Eş. 4.64'te yerine koyduğumuzda ortaya çıkan denklemi v_T/i_T oranı için çözersek

$$i_T = \frac{v_T}{25} - \frac{60v_T}{2000}, \tag{4.66}$$

$$\frac{i_T}{v_T} = \frac{1}{25} - \frac{6}{200} = \frac{50}{5000} = \frac{1}{100} \tag{4.67}$$

elde ederiz. Eş. 4.66 ve 4.67'den

$$R_{Th} = \frac{v_T}{i_T} = 100\ \Omega \tag{4.68}$$

bulunur.

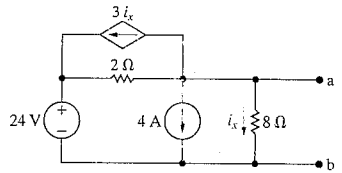
Genelde, bu tür hesaplamalar, kısa devre akımı hesaplaması içerenlerden daha kolaydır. Dahası sadece direnç ve bağımlı kaynakların bulunduğu bir devrede Thévenin geriliminin kısa devre akımına oranı belirsiz yani 0/0 olduğu için alternatif yöntemi kullanmak zorundasınız.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 5: Thévenin ve Norton Eşdeğerlerini Anlamak

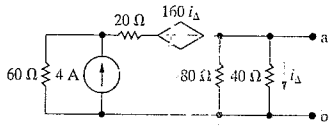
4.19 Şekilde verilen devrenin a, b terminallerine göre Thévenin eşdeğerini bulunuz.

Cevap: $V_{Th} = v_{ab} = 8$ V, $R_{Th} = 1\ \Omega$.



4.20 Şekilde verilen devrenin a, b terminallerine göre Thévenin eşdeğerini bulunuz. (*İpucu:* En soldaki düğüm gerilimini v olarak tanımlayınız ve V_{Th} sağ düğüm gerilimi olmak üzere iki düğüm denklemi yazınız.)

Cevap: $V_{Th} = v_{ab} = 30$ V, $R_{Th} = 10\ \Omega$.



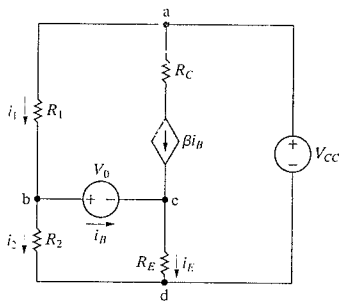
NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 4.71 ve 4.77'yi de çözmeyi deneyiniz.

Yükselteç Devrelerinde Thévenin Eşdeğerlerinin Kullanılması

Bazen devrenin bir parçasını küçültmek için Thévenin eşdeğerini kullanmak geniş bir devrenin analizini fazlasıyla sadeleştirir. İlk olarak kısım 2.5'te verilen ve daha sonrasında Kısım 4.4 ve 4.7'de analizi yapılan devreye geri dönelim. Tartışmaya yardımcı olması için Şekil 4.55'te görüldüğü gibi, devreyi yeniden çizdik ve ilgilendiğimiz dal akımlarını tanımladık

Daha önce analizlerimizden gördüğümüz gibi i_B'iyi bulduktan sonra diğer dal akımlarını kolayca bulabiliriz. Devrenin V_0'dan sol tarafını Thévenin eşdeğeri ile yer değiştirmek için Şekil 4.56'da görüldüğü gibi yeniden çizeriz. Bu değişimin dal akımları i_1, i_2, i_B ve i_E üzerinde hiçbir etkisi olmadığına dikkat edilmelidir.

Şimdi V_{CC}, R_1 ve R_2'den oluşan devreyi b, d terminallerine göre Thévenin eşdeğeriyle değiştirelim. Thévenin gerilimi ve direnci

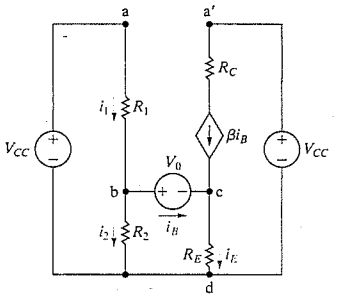


Şekil 4.55 ▲ Devre analizinde Thévenin eşdeğerinin uygulanması.

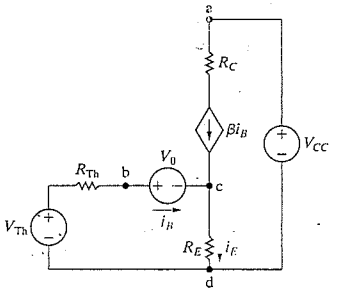
$$V_{Th} = \frac{V_{CC}R_2}{R_1 + R_2}, \tag{4.69}$$

$$R_{Th} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \tag{4.70}$$

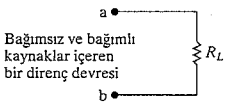
olarak bulunur.



Şekil 4.56 ▲ Şekil 4.55'te gösterilen devrenin değiştirilmiş hali.



Şekil 4.57 ▲ Şekil 4.56'daki devrenin Thévenin eşdeğeri uygulanmış hali.



Şekil 4.58 ▲ Maksimum güç aktarımını açıklayan devre.

Şekil 4.56'daki devre Thévenin eşdeğeri ile birlikte Şekil 4.57'de gösterilen devreye dönüşür.

Sol ağ etrafındaki gerilimleri toplayarak i_B için bir denklem çıkarırız. Bu ağ denklemini yazarken $i_E = (1 + \beta)\, i_B$ olduğuna dikkat edilmelidir. Böylece,

$$V_{Th} = R_{Th} i_B + V_0 + R_E(1 + \beta) i_B \tag{4.71}$$

yazılır. Eş. 4.71'i i_B için çözersek

$$i_B = \frac{V_{Th} - V_0}{R_{Th} + (1 + \beta) R_E} \tag{4.72}$$

buluruz. Eş. 4.69 ve 4.70'i Eş. 4.72'de yerine koyduğumuzda Eş. 2.25'teki ifadenin aynısını elde ederiz. Dikkat edilmelidir ki Thévenin eşdeğerini baştaki devrede kullandığımız zaman i_B için çözümü tek bir denklem yazarak elde ederiz.

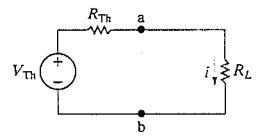
4.12 Maksimum Güç Aktarımı

Devre analizi bir kaynaktan bir yüke güç aktarmak için tasarlanmış devrelerin analizinde önemli bir rol oynar. Güç aktarımını iki temel sistem tipi için tartışacağız. Bunlardan ilki güç aktarımının verimliliği üzerinde yoğunlaşır. Güç sistemleri büyük miktarda elektrik gücünün üretimi, aktarımı ve dağıtımı ile ilgilendiklerinden, bu tip sistemlere iyi bir örnektir. Eğer bir güç sistemi verimsizse üretilen gücün büyük kısmı aktarım ve dağıtım kısmında kaybolur yani boşa gider.

Diğer bir sistem çeşidi de aktarılan gücün miktarına yoğunlaşır. Bilginin elektrik sinyalleri ile aktarımı sırasında verici devrede veya sezicide kullanılabilecek güç sınırlı olduğundan, haberleşme ve enstrümantasyon sistemleri bu tipin iyi örnekleridir. Böylece bu gücün olabildiğince çoğunun alıcıya veya yüke aktarımı istenir. Bu tip uygulamalarda aktarılacak güç miktarı az olduğundan aktarım verimliliği en çok ilgilendiğimiz konu değildir. Şimdi, tamamen dirençlerle modellenebilir devreler için maksimum güç aktarımını tartışacağız.

Maksimum güç aktarımı en iyi Şekil 4.58'de gösterilen devre ile anlatılabilir. Bağımlı ve bağımsız kaynakların bulunduğu dirençlerden oluşan bir devrenin a, b terminallerine R_L yükünün bağlı olduğunu varsayacağız. Problem, R_L yüküne maksimum güç aktarımını sağlayacak R_L değerini bulmaktır. Bu işlemde ilk adım

dirençlerden oluşan bir devrenin her zaman Thévenin eşdeğeri ile yer değiştirilebileceğini fark etmektir. Bu yüzden Şekil 4.58'de gösterilen devreyi Şekil 4.59'da gösterildiği gibi yeniden çizeriz. Baştaki devreyi Thévenin eşdeğeri ile yer değiştirmek R_L bulma görevini büyük oranda basitleştirir. R_L çıkarımı, R_L üzerinde harcanan gücü üç devre parametresi V_{Th}, R_{Th} ve R_L'nin bir fonksiyonu olarak ifade etmeyi gerektirir. Böylece,



Şekil 4.59 ▲ Maksimum güç aktarımı sağlayacak R_L değerini bulmak için kullanılan devre.

$$p = i^2 R_L = \left(\frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L}\right)^2 R_L \tag{4.73}$$

bulunur. Ardından verilen bir devre için V_{Th} ve R_{Th} değerlerinin sabit olduğunun farkına varırız. Bu nedenle harcanan güç bir tek R_L'nin fonksiyonudur. Gücü en büyük yapan R_L değerini bulmak için temel hesap kullanırız. p'nin R_L'ye göre türevini alarak denklemi yazmaya başlarız:

$$\frac{dp}{dR_L} = V_{Th}^2 \left[\frac{(R_{Th} + R_L)^2 - R_L \cdot 2(R_{Th} + R_L)}{(R_{Th} + R_L)^4}\right]. \tag{4.74}$$

p'nin maksimum olduğu yerde türevi sıfırdır. Böylece,

$$(R_{Th} + R_L)^2 = 2R_L(R_{Th} + R_L) \tag{4.75}$$

bulunur. Eş. 4.75 çözüldüğünde,

$$R_L = R_{Th}. \tag{4.76}$$

◀ **Maksimum güç aktarımı koşulu**

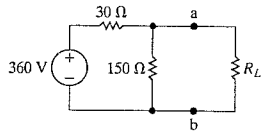
elde edilir. Böylece maksimum aktarımı yük direnci R_L Thévenin direnci R_{Th}'ye eşit olduğunda gerçekleşir. R_L'ye aktarılan maksimum gücü bulmak için Eş. 4.76'yı Eş. 4.73'te yerine koyarız:

$$p_{max} = \frac{V_{Th}^2 R_L}{(2R_L)^2} = \frac{V_{Th}^2}{4R_L}. \tag{4.77}$$

Yük direnci maksimum güç aktarımı için ayarlanmış olan bir devrenin analizi Örnek 4.12'de sergilenmektedir.

Örnek 4.12 **Maksimum Güç Aktarımı Koşulunun Bulunması**

a) Şekil 4.60'ta gösterilen devre için R_L'ye aktarılan gücü maksimum yapan R_L değerini bulunuz.



Şekil 4.60 ▲ Örnek 4.12 için devre.

b) R_L'ye aktarılabilecek maksimum gücü bulunuz.

c) R_L maksimum güç transferi için ayarlandığında 360 V kaynaktan aktarılan gücün ne kadarı R_L'ye ulaşır?

Çözüm

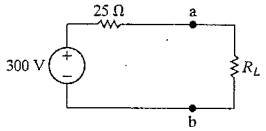
a) a, b terminallerinin solunda kalan Thévenin gerilimi,

$$V_{Th} = \frac{150}{180}(360) = 300 \text{ V}$$

bulunur. Thévenin direnci ise

$$R_{Th} = \frac{(150)(30)}{180} = 25\ \Omega$$

elde edilir. a, b terminallerinin solunda kalan devre Thévenin eşdeğeri ile değiştirildiğinde Şekil 4.61'de gösterilen devre elde edilir. Bu da makimum güç aktarımı için R_L'nin 25 Ω olması gerektiğini belirtir.



Şekil 4.61 ▲ Şekil 4.60'ta gösterilen devrenin Thévenin eşdeğeriyle indirgenmesi.

b) R_L'ye aktarılabilecek maksimum güç

$$p_{max} = \left(\frac{300}{50}\right)^2(25) = 900 \text{ W}$$

bulunur.

c) R_L 25 Ω'ker. v_{ab} gerilimi

$$v_{ab} = \left(\frac{300}{50}\right)(25) = 150 \text{ V}$$

elde edilir. Şekil 4.60'tan v_{ab} 150 V olduğunda gerilim kaynağındaki gerilim yükselişi yönündeki akım

$$i_s = \frac{360 - 150}{30} = \frac{210}{30} = 7 \text{ A}$$

bulunur. O halde kaynak devreye 2520 W güç aktarmaktadır. Ya da,

$$p_s = -i_s(360) = -2520 \text{ W}.$$

Yüke aktarılan gücün yüzdesi,

$$\frac{900}{2520} \times 100 = 35.71\%$$

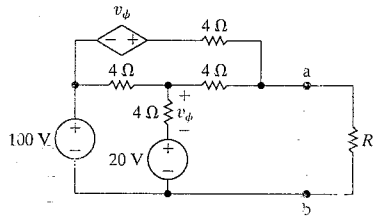
olur.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 6: Direnç yüke maksimum güç aktarımı koşulunu bilmek ve hesaplamak

4.21 a) Şekilde verilen devrede a, b terminallerine maksimum güç aktarımına izin veren R değerini bulunuz.

b) R'ye aktarılan maksimum gücü bulunuz.



Cevap: (a) 3 Ω;
(a) 1.2 kW.

4.22 Değerlendirme Problemi 4.21'deki devrenin yük direnci R'ye maksimum güç aktardığını varsayınız.

a) 100 V kaynak devreye ne kadar güç aktarır?

b) (a) şıkkını bağımlı gerilim kaynağı için çözünüz.

c) Bu iki kaynaktan üretilen gücün yüzde kaçı yük direnci R'ye aktarılır?

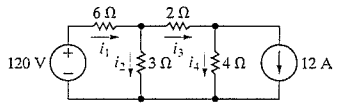
Cevap: (a) 3000 W;
(b) 800 W;
(c) %31.58.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 4.79 ve 4.80'i de çözmeyi deneyiniz.

4.13 Üst Üste Bindirme

Doğrusal bir sistem üst üste bindirme ilkesine uyar. Doğrusal bir sistem birden fazla bağımsız enerji kaynağı tarafından beslendiğinde veya sürüldüğünde toplam sistem tepkisi her kaynağın tek başına oluşturduğu tepkilerin toplamına eşittir. Birbirine bağlanmış doğrusal elemanlardan oluşan devrelerle uğraştığımız için bu devreler birden fazla enerji kaynağı tarafından sürüldüğünde üst üste bindirme ilkesini doğrudan uygulayabiliriz. Şimdilik basit direnç devrelerini ele alsakta, bu ilke tüm doğrusal devreler için kullanılabilir.

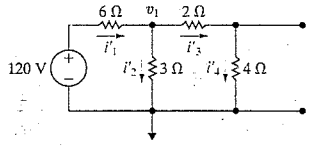
Üst üste bindirme, hem devre analizinde hem de devre tasarımında kullanılır. Birçok akım ve gerilim kaynağının bulunduğu bir devrenin analizinde, her bağımsız kaynağın etkisini teker teker incelediğimizde çözmemiz gereken denklemler daha az ve daha basittir. Üst üste bindirme kullanımı devre analizini basitleştirebilir. Bazen üst üste bindirme ilkesinin uygulanmasının, başka bir yöntemle daha az denklem ile çözülebilecek bir devrenin analizini daha çok denklem üreterek karmaşıklaştırabileceğine dikkat ediniz. Üst üste bindirme, sadece devredeki bağımsız kaynaklar temel olarak farklı olduğunda gereklidir. Bu ilk bölümlerde bütün bağımsız kaynaklar dc kaynak olduğu için üst üste bindirme gerekli değildir. Üst üste bindirme daha sonraki bölümlerde kullanılması gerekeceği öngörüsü ile bu bölümde verilmiştir.



Şekil 4.62 ▲ Üst üste bindirme ilkesini sergilemek için devre.

Üst üste bindirme, tek bir kaynakla elde edilemeyen, istenen devre tepkisi sentezinin tasarlanmasında kullanılır. Eğer istenen devre tepkisi, iki veya daha çok terimin toplamı şeklinde yazılabiliyorsa, her terim için bir kaynak kullanarak gerçekleştirilebilir. Karmaşık tepkilere sahip olan devrelerin tasarımında bu yaklaşım, bir tane karmaşık tasarım yerine, birkaç basit tasarımın göz önünde bulundurulmasını sağlar.

Üst üste bindirme ilkesini Şekil 4.62'de gösterilen devrede dal akımlarını bularak göstereceğiz. 120 V gerilim kaynağından oluşan dal akımlarını bularak başlarız. Bu akımlar tek üs ile işaretlenmiştir. Şekil 4.63'te görüldüğü gibi ideal akım kaynağını açık devre ile değiştirmek bu kaynağı öldürür. Bu devredeki dal akımları sadece gerilim kaynağı ile ilgilidir.



Şekil 4.63 ▲ Şekil 4.62'deki devrede akım kaynağı öldürüldüğündeki durum.

Şekil 4.63'teki devrede 3 Ω direnç üzerindeki düğüm gerilimi bilinirse dal akımları kolaylıkla bulunabilir. Bu gerilimi v_1 ile gösterirsek

$$\frac{v_1 - 120}{6} + \frac{v_1}{3} + \frac{v_1}{2+4} = 0 \tag{4.78}$$

olur ve buradan

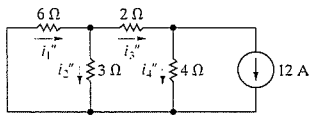
$$v_1 = 30 \text{ V} \tag{4.79}$$

elde edilir. Dal akımları $i'_1 - i'_4$ doğrudan aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$i'_1 = \frac{120 - 30}{6} = 15 \text{ A}, \tag{4.80}$$

$$i'_2 = \frac{30}{3} = 10 \text{ A}, \tag{4.81}$$

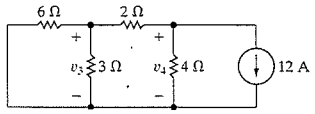
$$i'_3 = i'_4 = \frac{30}{6} = 5 \text{ A}. \tag{4.82}$$



Şekil 4.64 ▲ Şekil 4.62'deki devrede gerilim kaynağı öldürüldüğündeki durum.

Akım kaynağından oluşan dal akımı bileşenlerini bulmak için ideal gerilim kaynağını öldürüp Şekil 4.64'te gösterilen devreyi çözeriz. Çift üs ile işaretlenen akımlar ideal akım kaynağı ile ilgili akım bileşenleridir.

Şekil 4.64'te gösterilen devredeki dal akımlarının 3 Ω ve 4 Ω üzerindeki düğüm gerilimlerini çözerek bulabiliriz. Şekil 4.65 bu iki düğüm gerilimini göstermektedir. Devreyi açıklayan düğüm gerilimi denklemleri



Şekil 4.65 ▲ Şekil 4.64'teki devrenin v_3 ve v_4 gerilimlerini gösteren hali.

$$\frac{v_3}{3} + \frac{v_3}{6} + \frac{v_3 - v_4}{2} = 0, \tag{4.83}$$

$$\frac{v_4 - v_3}{2} + \frac{v_4}{4} + 12 = 0 \tag{4.84}$$

ile verilir.

Eş. 4.83 ve 4.84'ü v_3 ve v_4 için çözdüğümüzde,

$$v_3 = -12 \text{ V}, \tag{4.85}$$

$$v_4 = -24 \text{ V} \tag{4.86}$$

buluruz. $i''_1 - i''_4$ dal akımlarını düğüm gerilimleri v_3 ve v_4 cinsinden

$$i''_1 = \frac{-v_3}{6} = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}, \tag{4.87}$$

$$i''_2 = \frac{v_3}{3} = \frac{-12}{3} = -4 \text{ A}, \tag{4.88}$$

$$i''_3 = \frac{v_3 - v_4}{2} = \frac{-12 + 24}{2} = 6 \text{ A}, \tag{4.89}$$

$$i''_4 = \frac{v_4}{4} = \frac{-24}{4} = -6 \text{ A} \tag{4.90}$$

halinde yazabiliriz. Baştaki devredeki dal akımlarını, Şekil 4.62'deki i_1, i_2, i_3 ve i_4'ü bulmak için Eş. 4.87 – 4.90 ve Eş. 4.80 – 4.82'de verilen akımları toplarız:

$$i_1 = i'_1 + i''_1 = 15 + 2 = 17 \text{ A}, \tag{4.91}$$

$$i_2 = i'_2 + i''_2 = 10 - 4 = 6 \text{ A}, \tag{4.92}$$

$$i_3 = i'_3 + i''_3 = 5 + 6 = 11 \text{ A}, \tag{4.93}$$

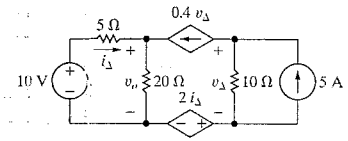
$$i_4 = i'_4 + i''_4 = 5 - 6 = -1 \text{ A}. \tag{4.94}$$

Şekil 4.62'de gösterilen devre için Eş. 4.91 – 4.94'te verilen akımların doğru dal akımı değerleri olduğunu sağlamalısınız.

Hem bağımlı hem de bağımsız kaynakların bulunduğu bir devreye üst üste bindirme uygulanırken bağımlı kaynakların hiçbir zaman öldürülmediğini hatırlamalısınız. Örnek 4.13 hem bağımlı hem bağımsız kaynakların bulunduğu bir devreye üst üste bindirme uygulanmasını göstermektedir.

Örnek 4.13 Bir Devrenin Çözümünde Üst Üste Bindirme'nin Kullanılması

Şekil 4.66'da gösterilen devrede üst üste bindirme ilkesini kullanarak v_o'yu bulunuz.



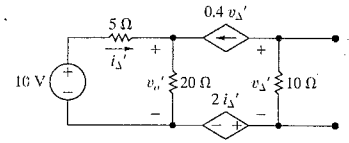
Şekil 4.66 ▲ Örnek 4.13 için devre.

Çözüm

10 V kaynak ile ilgili v_o bileşenini bularak başlarız. Şekil 4.67 bu devreyi göstermektedir. 5 A kaynak öldürülduğünde $v'\Delta = (-0.4\ v'\Delta)\ (10)$ olmalıdır. Bundan dolayı $v'\Delta$ sıfır olmalıdır. İki bağımlı kaynağın bulunduğu dal açık devredir. O halde

$$v_o' = \frac{20}{25}(10) = 8 \text{ V}$$

bulunur.



Şekil 4.67 ▲ Şekil 4.66'da gösterilen devrenin 5 A kaynak öldürülmüş hali.

10 V kaynak öldürüldüğünde devre Şekil 4.68'de gösterilene indirgenir. Referans düğümü ve a, b, c düğümleri yardımcı olması için işaretlenmiştir. Düğüm a'dan dışarı çıkan akımları topladığımızda,

$$\frac{v_o''}{20} + \frac{v_o''}{5} - 0.4v_\Delta'' = 0 \quad \text{or} \quad 5v_o'' - 8v_\Delta'' = 0$$

bulunur. Düğüm b'den dışarı çıkan akımları topladığımızda ise

$$0.4v_\Delta'' + \frac{v_b - 2i_\Delta''}{10} - 5 = 0 \text{ veya}$$

$$4v_\Delta'' + v_b - 2i_\Delta'' = 50$$

elde edilir. v_Δ'''yı bulmak için

$$v_b = 2i_\Delta'' + v_\Delta''$$

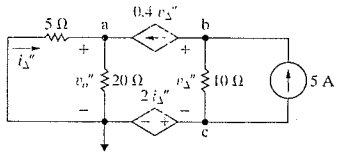
kullanacağız. Böylece

$$5v_\Delta'' = 50 \text{ veya } v_\Delta'' = 10 \text{ V}$$

olur. a düğümü eşitliğinden

$$5v_o'' = 80 \text{ veya } v_o'' = 16 \text{ V}$$

çıkar ve v_o, v_o' ve v_o'''ın toplamı olarak 24 V bulunur.



Şekil 4.68 ▲ Şekil 4.66'da gösterilen devrenin 10 V kaynak öldürülmüş hali.

Pratik Bakış Açısı

Gerçekçi Direnç Devreleri

Tamamıyla özdeş devre elemanları üretmek mümkün değildir. Örneğin, aynı imal sürecinden geçerek üretilen dirençlerin değerleri, %20'ye kadar değişiklik gösterebilir. Bu yüzden tasarımcı elektriksel bir sistem oluştururken eleman değişikliğinin sistem performansına etkisini göz önünde bulundurmalıdır. Bu etkiyi değerlendirmenin bir yolu duyarlılık analizidir. Duyarlılık analizi, tasarımcının eleman değerlerindeki değişkenliğin sistem performansına olan etkisini hesaplamasını sağlar. Bu bilginin bir tasarımcının her sistem elemanı için kabul edilebilir bir tolerans değeri belirlemesine nasıl yardımcı olduğunu göreceğiz.

Şekil 4.69'da gösterilen devre üzerinde duracağız. Duyarlılık analizinin gösterimi için, düğüm gerilimleri v_1 ve v_2'nin R_1 direncinin değişimlerine olan duyarlılığını hesaplayacağız. Düğüm analizi ile v_1 ve v_2 ifadelerini devre dirençleri ve kaynak akımları cinsinden çıkarabiliriz. Sonuçlar Eş. 4.95 ve 4.96'da verilmiştir:

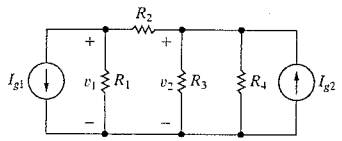
$$v_1 = \frac{R_1\{R_3R_4I_{g2} - [R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4]I_{g1}\}}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_3R_4}, \tag{4.95}$$

$$v_2 = \frac{R_3R_4[(R_1 + R_2)I_{g2} - R_1I_{g1}]}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_3R_4}. \tag{4.96}$$

v_1'in R_1'e olan duyarlılığını Eş. 4.95'in R_1'e göre türevini alarak bulabiliriz. Aynı şekilde v_2'nin R_1'e olan duyarlılığını Eş. 4.96'nın R_1'e göre türevini olarak bulabiliriz:

$$\frac{dv_1}{dR_1} = \frac{[R_3R_4 + R_2(R_3 + R_4)]\{R_3R_4I_{g2} - [R_3R_4 + R_2(R_3 + R_4)]I_{g1}\}}{[(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_3R_4]^2}, \tag{4.97}$$

$$\frac{dv_2}{dR_1} = \frac{R_3R_4\{R_3R_4I_{g2} - [R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4]I_{g1}\}}{[(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_3R_4]^2}. \tag{4.98}$$



Şekil 4.69 ▲ Duyarlılık analizi gösterimi için devre.

Eş. 4.97 ve 4.98'in kullanımını göstermek için gerçekçi eleman değerlerine sahip bir örneği ele alalım.

ÖRNEK

Şekil 4.69'daki devrenin nominal değerlerinin $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $R_3 = 50\ \Omega$; $R_4 = 75\ \Omega$, $I_{g1} = 16$ A olduğunu varsayınız. R_1'in nominal değerinden %10 farklı olduğu durum için v_1 ve v_2 değerlerini duyarlılık analizi kullanarak tahmin ediniz.

Çözüm

Eş. 4.95 ve 4.96'dan v_1 ve v_2'nin nominal değerlerini buluruz.

Böylece

$$v_1 = \frac{25\{2750(16) - [5(125) + 3750]12\}}{30(125) + 3750} = 25\text{ V} \quad (4.99)$$

ve

$$v_2 = \frac{3750[30(16) - 25(12)]}{30(125) + 3750} = 90\text{ V} \quad (4.100)$$

olur. Şimdi Eş. 4.97 ve 4.98'den v_1 ve v_2'nin R_1'deki değişimlere olan duyarlılığını bulabiliriz. Böylece,

$$\frac{dv_1}{dR_1} = \frac{[3750 + 5(125)] - \{3750(16) - [3750 + 5(125)]12\}}{[(30)(125) + 3750]^2}$$

$$= \frac{7}{12}\text{ V}/\Omega, \quad (4.101)$$

ve

$$\frac{dv_2}{dR_1} = \frac{3750\{3750(16) - [5(125) + 3750]12\}]}{(7500)^2}$$

$$= 0.5\text{ V}/\Omega. \quad (4.102)$$

bulunur. Eş. 4.101 ve 4.102'de verilen sonuçları nasıl kullanırız? R_1'in nominal değerinden %10 daha az olduğunu yani $R_1 = 22.5\ \Omega$ olduğunu varsayınız. Öyleyse $\Delta R_1 = -2.5\ \Omega$ bulunur ve Eş. 4.101 Δv_1'i aşağıdaki gibi tahmin eder:

$$\Delta v_1 = \frac{7}{12}(-2.5) = -1.4583\text{ V}. \quad (4.83)$$

Bu nedenle eğer R_1 nominal değerinden %10 daha azsa, analizimiz v_1'in aşağıdaki değeri alacağını tahmin eder.

$$v_1 = 25 - 1.4583 = 23.5417\text{ V}. \quad (4.103)$$

Benzer olarak Eş. 4.102'için

$$\Delta v_2 = 0.5(-2.5) = -1.25\text{ V},$$

$$v_2 = 90 - 1.25 = 88.75\text{ V} \quad (4.104)$$

elde edilir. Eş. 4.103 ve 4.104'te verilen sonuçları Eş. 4.95 ve 4.96'da $R_1 = 22.5\ \Omega$ değerini yerine koyarak doğrulayabiliriz:

$$v_1 = 23.4780\text{ V}, \quad (4.105)$$

$$v_2 = 88.6960\text{ V}. \quad (4.106)$$

Neden duyarlılık analizinden elde ettiğimiz değerlerle R_1'i denklemlerde yerine koyarak elde ettiğimiz kesin değerler farklı çıktı? Eş. 4.97 ve 4.98'den görebileceğimiz gibi v_1 ve v_2'nin R_1'e duyarlılığı R_1'in bir fonksiyonudur. Bu da R_1 değiştikce duyarlılığın da değişeceği anlamına gelir. Böylece Eş. 4.97 ve 4.98'in R_1'deki büyük değişimler için kesin sonuçlar vermesini bekleyemeyiz. Dikkat edilmelidir ki R_1'deki %10 değişim için, v_1 ve v_2'nin tahmin edilen değerleri ile kesin değerleri arasındaki fark küçüktür. Özel olarak, v_1 için hata %0.2713 ve v_2 için hata ise %0.0676'dır.

Bu örnekten görülebileceği gibi v_1 ve v_2'nin kalan devre elemanlarına (R_2, R_3, R_4, I_{g1} ve I_{g2}) göre duyarlılığını belirlememiz için oldukça çok çalışma gerekir. Neyse ki PSpice duyarlılık analizlerini bizim için yapabilir. PSpice'in bu özelliği iki çeşit duyarlılık hesaplar. Bunlardan ilki bir birim duyarlılık ikincisi de %1 duyarlılık olarak bilinir. Örnek devrede bir dirençteki bir birim değişim 1 Ω ve bir akım kaynağındaki bir birim değişim ise 1 A'dir. Diğer taraftan %1 duyarlılık analizi direnç veya kaynakların değerlerinin, nominal değerlerinden %1 değiştiği durumdaki etkisini belirler.

Şekil 4.69'daki devrenin PSpice duyarlılık analizi sonuçları Tablo 4.2'de gösterilmiştir. Doğrusal bir devrenin analizini yaptığımız için birden fazla elemanın değerinin değişmesi durumunda üst üste bindirme uygulayarak v_1 ve v_2 değerlerini tahmin edebiliriz. Örnek olarak R_1'in 24 Ω'a ve R_2'nin 4 Ω'a düştüğünü varsayınız. Tablo 4.2'den v_1'in R_1 ve R_2'deki değişikliklere olan birim duyarlılıklarını birleştirirsek

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta R_1} + \frac{\Delta v_1}{\Delta R_2} = 0.5833 - 5.417 = -4.8337\text{ V}/\Omega$$

buluruz. Benzer şekilde,

$$\frac{\Delta v_2}{\Delta R_1} + \frac{\Delta v_2}{\Delta R_2} = 0.5 + 6.5 = 7.0\text{ V}/\Omega$$

olur. Böylece eğer R_1 ve R_2 1 Ω azalırsa tahminlerimiz aşağıdaki gibi olur:

$$v_1 = 25 + 4.8227 = 29.8337\text{ V},$$

$$v_2 = 90 - 7 = 83\text{ V}.$$

TABLO 4.2 Pspice Duyarlılık Analizi Sonuçları

Eleman Adı	Eleman Değeri	Eleman Duyarlılığı (Volt/Yüzde)	Normalize Duyarlılık (Volt/Yüzde)
(a) Düğüm Gerilimi V1'in DC Duyarlılıkları			
R1	25	0.5833	0.1458
R2	5	-5.417	-0.2708
R3	50	0.45	0.225
R4	75	0.2	0.15
IG1	12	-14.58	-1.75
IG2	16	12.5	2
(b) V2 Çıktısının Duyarlılıkları			
R1	25	0.5	0.125
R2	5	6.5	0.325
R3	50	0.54	0.27
R4	75	0.24	0.18
IG1	12	-12.5	-1.5
IG2	16	15	2.4

Eş. 4.95 ve 4.96'da $R_1 = 24\ \Omega$ ve $R_2 = 4\ \Omega$'u kullanırsak,

$$v_1 = 29.793\ \text{V},$$
$$v_2 = 82.759\ \text{V}.$$

İki durumda da tahminlerimiz gerçek düğüm gerilimlerine çok yakındır.

Devre tasarımcıları, duyarlılık analizi sonuçlarını kullanarak hangi elemanın değer değişkenliğinin devre çıktısına en büyük etkiyi yaptığını belirler. Tablo 4.2'deki PSpice duyarlılık analizinden de görebileceğimiz gibi düğüm gerilimleri v_1 ve v_2 R_1'den çok R_2'deki değişimlere duyarlıdır. Özellikle belirtmek gerekirse v_1, R_2'deki değişimlere göre R_1'deki değişimlere (5.417/0.5833) yani yaklaşık 9 kat daha duyarlıdır. v_2'de R_2'deki, değişimlere R_1'deki değişimlere göre (6.5/0.5) yani 13 kat daha duyarlıdır. Bundan dolayı örnek devrede v_1 ve v_2'yi nominal değerlerine yakın tutmak önemliyse R_2'nin toleransı R_1'den daha düşük olmalıdır.

NOT: Pratik bakış açısıyla ilgili bilginizi Bölüm Problemleri 4.105–4.107'yi çözmeyi deneyerek değerlendiriniz.

Özet

- Bu bölümdeki konular için bazı basit terimleri ve temsil ettikleri kavramları çok iyi anlamak ve kullanabilmek gereklidir. Bu terimler; düğüm, temel düğüm, yol, dal, temel dal, ağ ve düzlemsel devredir. Tablo 4.1 bu tanımlar ve örneklerini vermektedir (Bkz. Sf. 94.).
- İki yeni devre analizi tekniği verilmiştir:
  - **Düğüm gerilimi yöntemi** hem düzlemsel hem de düzlemsel olmayan devrelerde kullanılabilir. Temel düğümlerden biri referans düğüm olarak seçilir. Gerilim değişkenleri kalan temel düğümlerde tanımlanır ve her gerilim değişkeni için Kirchhoff akım yasası kullanılarak bir denklem yazılır. Denklem sayısı, n_e temel düğüm sayısı iken, $(n_e - 1)$'dir. (Bkz. Sf. 97.)
  - Ağ akımı yöntemi ise sadece düzlemsel devrelerde kullanılabilir. Her ağa bir ağ akımı atanır ve Kirchhoff gerilim yasası kullanılarak her ağ için bir denklem yazılır. Denklem sayısı, b akımı bilinmeyen dal sayısı ve n düğüm sayısı iken $b - (n - 1)$'dir. Ağ akımları dal akımlarını bulmada kullanılır. (Bkz. Sf. 105.)
- Bu bölümde yeni birkaç devre sadeleştirme tekniği verilmiştir:
  - **Kaynak dönüşümleri** ile gerilim kaynağına (v_s) seri bir direnç (R) birleşimi ile akım kaynağına (i_s) paralel bir direnç birleşimini (R) yer değiştirebiliriz, tam tersi de geçerlidir. Bu birleşimler terminal gerilimi ve akımı yönünden birbirine eşit olmalıdır. Terminal eşdeğerliği aşağıdaki koşul ile sağlanır:

$$i_s = \frac{v_s}{R}.$$

(Bkz. Sf. 116.)

  - **Thévenin ve Norton eşdeğerleri,** birçok kaynak ve dirençten oluşan bir devreyi bir gerilim kaynağı ve ona seri bir dirence (Thévenin) ya da bir akım kaynağı ve ona paralel bir dirence (Norton) sadeleştirmemizi sağlar. Sadeleştirilen devre ile baştaki devre terminal akım ve gerilimleri yönünden denk olmalıdır. Böylece (1) Thévenin geriliminin (V_{Th}) baştaki devrenin terminalleri arasındaki açık devre gerilimi olduğu, (2) Thévenin direncinin (R_{Th}) Thévenin geriliminin baştaki devrenin terminallerindeki kısa devre akımına oranı olduğu ve (3) Norton eşdeğerin Thévenin eşdeğere kaynak dönüşümü uygulanarak bulunduğu unutulmamalıdır. (Bkz. Sf. 119.)
- **Maksimum güç aktarımı** bir R_L yüküne aktarılabilecek maksimum p değerini hesaplama tekniğidir. Maksimum güç aktarımı R_L direnci tarafından görülen Thévenin direnci R_L'ye eşit olduğu zaman gerçekleşir, yani $R_L = R_{Th}$ olmalıdır. Maksimum güç aktarımı denklemi

$$p = \frac{V_{Th}^2}{4R_L}$$

ile verilir. (Bkz Sf. 126.)

- Birçok bağımsız kaynağın bulunduğu bir devrede üst üste bindirme sayesinde her kaynak ile ilgili gerilimleri ve akımları bulabiliriz. Bu gerilimleri ve akımları topladığımızda bütün kaynakların varlığında olan akım ve gerilimleri buluruz. Üst üste bindirme uygulanırken bağımlı kaynaklar hiçbir zaman öldürülmez. (Bkz. Sf. 129.)

Problemler

Kısım 4.1

4.1 Şekil P4.1'de gösterilen devrede i_g akımının bilindiğini varsayınız. Ayrıca $R_1 - R_5$ dirençleri de biliniyor.

a) Kaç tane bilinmeyen akım vardır?

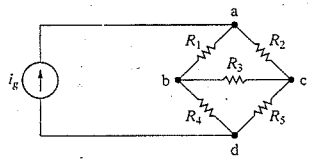
b) Kirchhoff akım yasısı (KCL) kullanılarak kaç tane bağımsız denklem yazılabilir?

c) Bağımsız bir KCL denklem seti yazınız.

d) Kirchhoff gerilim yasasından (KVL) kaç tane bağımsız denklem çıkarılabilir.

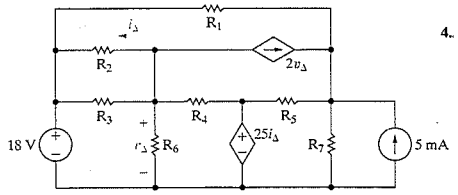
e) Bağımsız bir KVL denklem kümesi yazınız.

Şekil P4.1



4.2 Şekil P4.2'de gösterilen devrede aşağıdakilerden kaç tane olduğunu belirtiniz. a) Dal, b) akımı bilinmeyen dal, c) temel dal, d) akımı bilinmeyen temel dal, e) düğüm, f) temel düğüm, g) ağ.

Şekil P4.2



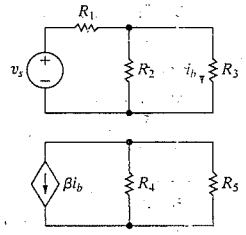
4.3 a) Şekil P4.3'teki devrede kaç tane ayrı parça vardır?

b) Kaç tane düğüm vardır?

c) Kaç tane dal vardır?

d) Her iki devrenin aşağıdaki düğümlerinin bir iletken ile birbirine bağlandığını varsayınız ve (a) – (c)'deki hesaplamaları tekrar yapınız.

Şekil P4.3



4.4 a) Şekil P4.2'de gösterilen devrede sadece temel düğümler ve dallar tanımlanmışsa devreyi açıklamak için kaç tane ortak denkleme gerek vardır?

b) Bu denklemlerden kaç tanesi Kirchhoff akım yasası kullanılarak çıkarılabilir?

c) Kaç tanesi Kirchhoff gerilim yasası kullanılarak çıkarılmalıdır?

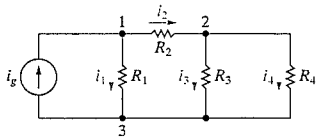
d) Gerilim yasası kullanılırken hangi iki ağdan kaçınılmalıdır?

4.5 Düğümden çıkan akım pozitif olarak tanımlanmıştır.

a) Şekil P4.5'te gösterilen devrede her düğümdeki akımları toplayınız.

b) (a)'da bulunan denklemlerin herhangi birinin diğer iki denklemden çıkarılabildiğini gösteriniz.

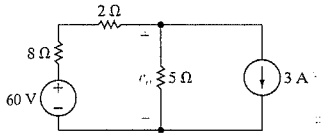
Şekil P4.5



Kısım 4.2

4.6 PSPICE Şekil P4.6'daki devrede v_o gerilimini düğüm gerilimi yöntemini kullanarak bulunuz.

Şekil P4.6



4.7 PSPICE a) Şekil P4.6'da 3 A akım kaynağı tarafından üretilen gücü bulunuz.

b) Şekil P4.6'da 60 V gerilim kaynağı tarafından üretilen gücü bulunuz.

c) Üretilen toplam gücün harcanan toplam güce eşit olduğunu doğrulayınız.

4.8 PSPICE Şekil P4.6'da gösterilen devrede 3 A akım kaynağına seri bir 10 Ω direnç bağlanmıştır.

a) v_o'yu bulunuz.

b) 3 A akım kaynağı tarafından oluşturulan gücü bulunuz.

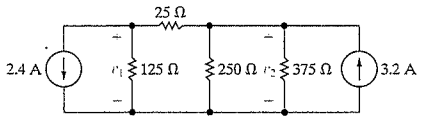
c) 60 V gerilim kaynağı tarafından oluşturulan gücü bulunuz.

d) Oluşan toplam gücün harcanan toplam güce eşit olduğunu doğrulayınız.

e) 3 A akım kaynağına bağlanan sonlu bir direncin v_o değerine etkisi nedir?

4.9 PSPICE Şekil P4.9'da gösterilen devrede düğüm gerilimi yöntemini kullanarak v_1 ve v_2'yi bulunuz.

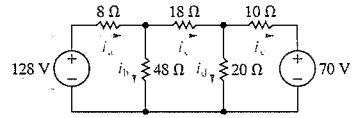
Şekil P4.9



4.10 PSPICE a) Şekil P4.10'da gösterilen devrede düğüm gerilimi yöntemini kullanarak i_a ve i_e'yi bulunuz.

b) Devrede üretilen toplam gücü bulunuz.

Şekil P4.10

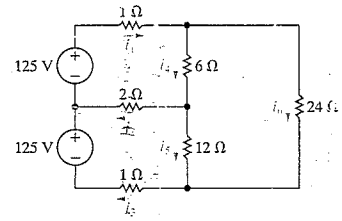


4.11 PSPICE Şekil P4.11'de gösterilen devre meskun güç dağıtım devresinin bir modelidir.

a) Düğüm gerilimi yöntemini kullanarak $i_1 - i_6$ dal akımlarını bulunuz.

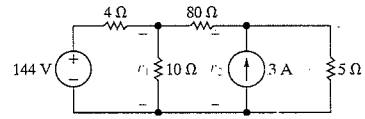
b) Dal akımları için çözümünüzü harcanan gücün üretilen güce eşit olduğunu göstererek kontrol ediniz.

Şekil P4.11



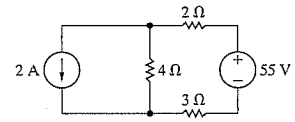
4.12 PSPICE Şekil P4.12'deki devrede düğüm gerilimi yöntemini kullanarak v_1 ve v_2'yi bulunuz.

Şekil P4.12



4.13 PSPICE Şekil P4.13'teki devrede düğüm gerilimi yöntemini kullanarak 2 A kaynağın devreden ne kadar güç çektiğini bulunuz.

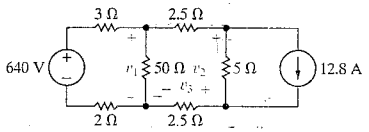
Şekil P4.13



4.14 PSPICE a) Şekil P4.14'teki devrede düğüm gerilimi yöntemini kullanarak v_1, v_2 ve v_3'ü bulunuz.

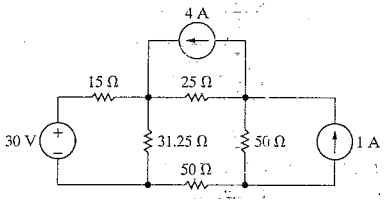
b) 640 V gerilim kaynağı devreye ne kadar güç aktarır?

Şekil P4.14



4.15 PSPICE Şekil P4.15'teki devrede düğüm gerilimi yöntemini kullanarak toplam harcanan gücü bulunuz.

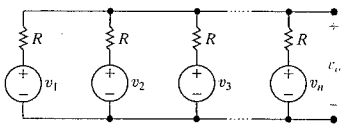
Şekil P4.15



4.16 PSPICE a) Şekil P4.16'daki devrede düğüm gerilimi yöntemini kullanarak çıkış gerilimi v_o'nun kaynak gerilimlerinin ortalamasına eşit olduğunu gösteriniz.

b) v_o'yu $v_1 = 150$ V, $v_2 = 200$ V ve $v_3 = -50$ V olduğu durum için bulunuz.

Şekil P4.16



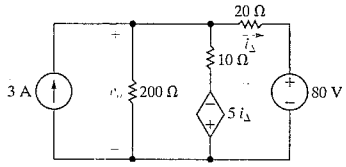
Kısım 4.3

4.17 PSPICE a) Şekil P4.17'deki devrede düğüm gerilimi yöntemini kullanarak v_o'yu bulunuz.

b) Bağımlı kaynak tarafından soğurulan gücü bulunuz.

c) Bağımlı kaynaklar tarafından üretilen toplam gücü bulunuz.

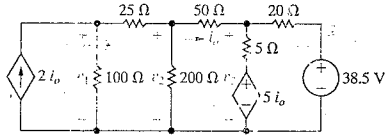
Şekil P4.17



4.18 PSPICE a) Şekil P4.18'deki devrede düğüm gerilimleri v_1, v_2 ve v_3'ü bulunuz.

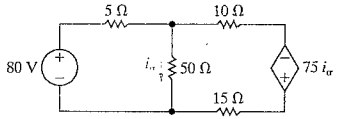
b) Devrede toplam harcanan gücü bulunuz.

Şekil P4.18



4.19 PSPICE Şekil P4.19'daki devrede düğüm gerilimi yöntemini kullanarak bağımlı gerilim kaynağı tarafından aktarılan gücü hesaplayınız.

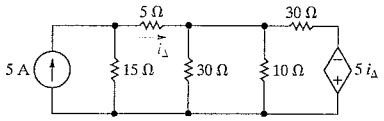
Şekil P4.19



4.20 PSPICE a) Şekil P4.20'deki devrede düğüm gerilimi yöntemini kullanarak üretilen toplam gücü bulunuz.

b) Devrede soğurulan toplam gücü bularak cevabınızı kontrol ediniz.

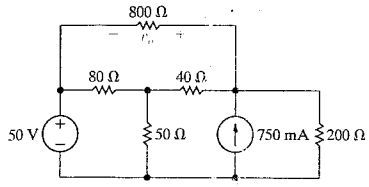
Şeki. P4.20



Kısım 4.4

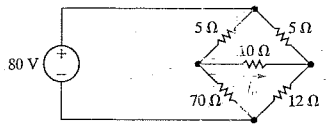
4.21 PSPICE Şekil P4.21'deki devrede düğüm gerilimi yöntemini kullanarak v_o'nun değerini bulunuz.

Şekil P4.21



4.22 PSPICE Şekil P4.22'deki devrede düğüm gerilimi yöntemini kullanarak i_o'yu bulunuz.

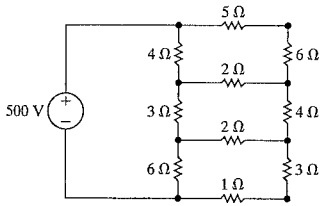
Şekil P4.22



4.23 a) Şekil P4.23'teki devrede 5 Ω direnç üzerinde harcanan gücü düğüm gerilimi yöntemini kullanarak bulunuz.

b) 500 V kaynak tarafından sağlanan gücü bulunuz.

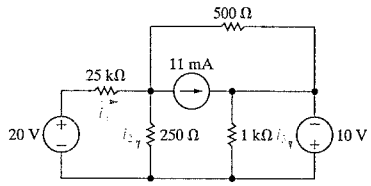
Şekil P4.23



4.24 PSPICE a) Şekil P4.24'teki devrede düğüm gerilimi yöntemini kullanarak dal akımları i_1, i_2 ve i_3'ü bulunuz.

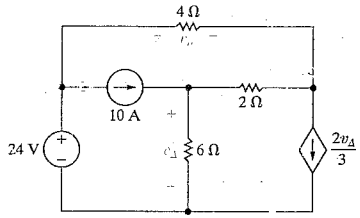
b) i_1, i_2, i_3 için bulduğunuz sonuçları devrede harcanan gücün üretilen güce eşit olduğunu göstererek doğrulayınız.

Şekil P4.24



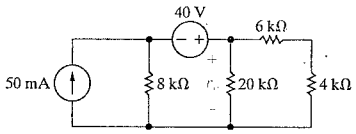
4.25 PSPICE Şekil P4.25'teki devrede düğüm gerilimi yöntemini kullanarak v_o'yu bulunuz.

Şekil P4.25



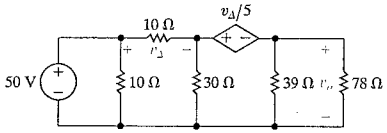
4.26 PSPICE Şekil P4.26'daki devrede düğüm gerilimi yöntemini kullanarak v_o'yu ve 40 V gerilim kaynağı tarafından sağlanan gücü bulunuz.

Şekil P4.26



4.27 PSPICE Şekil P4.27'deki devrede düğüm gerilimi yöntemini kullanarak v_o'yu bulunuz.

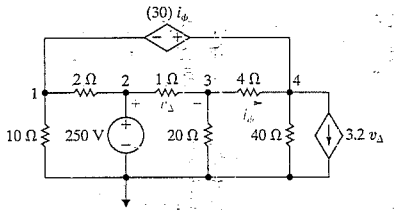
Şekil P4.27



4.28 PSPICE Proje mühendisi olduğunuzu ve takımınızdan birinin Şekil P4.28'deki devrenin analizi ile görevi olduğunu varsayınız. Şekil üzerindeki referans düğüm ve düğüm numaraları analizci tarafından verilmiştir. Analiz sonuçları v_3 = 235 V ve v_4 = 222 V'tur.

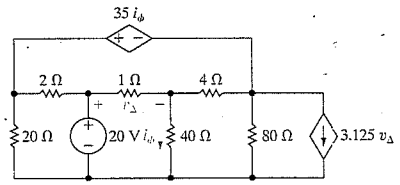
Bu değerleri, üretilen toplam güce karşı harcanan güçle test ediniz. Analizci tarafından bulunan sonuçlara katılıyor musunuz?

Şekil P4.28



4.29 PSPICE Şekil P4.29'daki devrede düğüm gerilimi yöntemini kullanarak 20 V kaynak tarafından üretilen gücü bulunuz.

Şekil P4.29



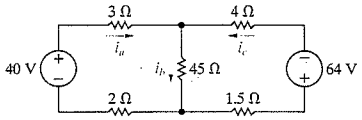
4.30 Eş. 4.16, 4.17 ve 4.19 i_B için çözüldüğünde sonucun Eş. 2.25'te verilen ile özdeş olduğunu gösteriniz.

Kısım 4.5

4.31 PSPICE a) Şekil P4.31'deki devrede ağ akımı yöntemini kullanarak dal akımları i_a, i_b ve i_c'yi bulunuz.

b) 64 V kaynağın kutupları ters çevrildiği durum için (a)'yı tekrarlayınız.

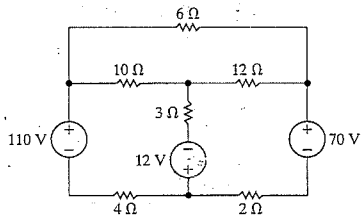
Şekil P4.31



4.32 PSPICE a) Şekil P4.32'deki devrede ağ akımı yöntemini kullanarak oluşturulan toplam gücü bulunuz.

b) Toplam üretilen güç ile toplam harcanan gücün eşit olduğunu göstererek cevaplarınızı doğrulayınız.

Şekil P4.32



4.33 Problem 4.10'u ağ akımı yöntemini kullanarak çözünüz.

4.34 Problem 4.11'i ağ akımı yöntemini kullanarak çözünüz.

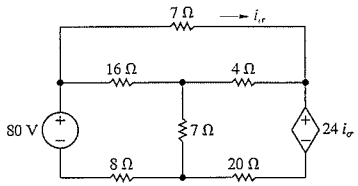
4.35 Problem 4.22'yi ağ akımı yöntemini kullanarak çözünüz.

4.36 Problem 4.23'yi ağ akımı yöntemini kullanarak çözünüz.

Kısım 4.6

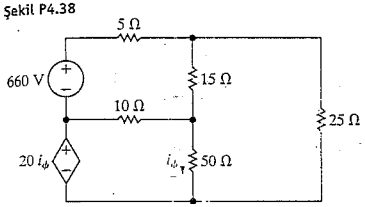
4.37 PSPICE Şekil P4.37'deki devrede 8 Ω direnç üzerinde harcanan gücü ağ akımı yöntemini kullanarak bulunuz.

Şekil P4.37



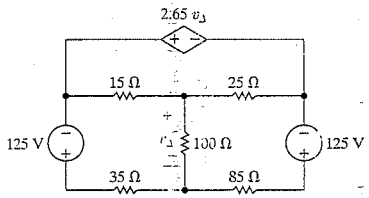
4.38 PSPICE Şekil P4.38'de görülen devrede ağ akımı yöntemini kullanarak bağımlı gerilim kaynağı tarafından aktarılan gücü bulunuz.

Şekil P4.38



4.39 PSPICE Şekil P4.39'daki devrede ağ akımı yöntemini kullanarak bağımlı gerilim kaynağı tarafından üretilen gücü bulunuz.

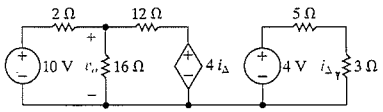
Şekil P4.39



4.40 PSPICE a) Şekil P4.40'taki devrede ağ akımı yöntemini kullanarak v_o'yu bulunuz.

b) Bağımlı kaynak tarafından aktarılan gücü bulunuz.

Şekil P4.40



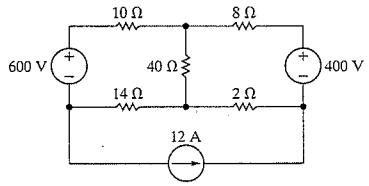
Kısım 4.7

4.41 PSPICE a) Şekil P4.41'deki devrede ağ akımı yöntemini kullanarak 12 A akım kaynağının ne kadar güç aktardığını bulunuz.

b) Devreye aktarılan toplam gücü bulunuz.

c) Hesaplamalarınızı, üretilen toplam gücün harcanan toplam güce eşit olduğunu göstererek doğrulayınız.

Şekil P4.41

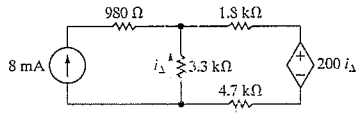


4.42 PSPICE a) Şekil P4.42'deki devrede ağ akımı yöntemini kullanarak i_Δ'yı bulunuz.

b) Bağımsız akım kaynağı tarafından aktarılan gücü bulunuz.

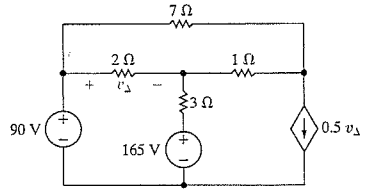
c) Bağımlı gerilim kaynağı tarafından aktarılan gücü bulunuz.

Şekil P4.42



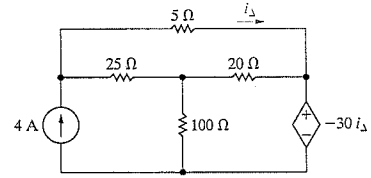
4.43 PSPICE Şekil P4.43'teki devrede ağ akımı yöntemini kullanarak üretilen toplam gücü bulunuz.

Şekil P4.43



4.44 PSPICE Şekil P4.44'teki devrede ağ akımı yöntemini kullanarak üretilen toplam gücü bulunuz.

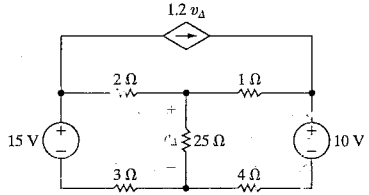
Şekil P4.44



4.45 PSPICE a) Şekil P4.45'teki devrede ağ akımı yöntemini kullanarak 2 Ω dirence aktarılan gücü bulunuz.

b) Devrede oluşturulan toplam gücün yüzde kaçı 2 Ω dirence aktarılmıştır?

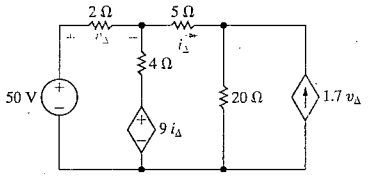
Şekil P4.45



4.46 PSPICE a) Şekil P4.46'daki devrede ağ akımı yöntemini kullanarak hangi kaynakların güç ürettiğini belirleyiniz.

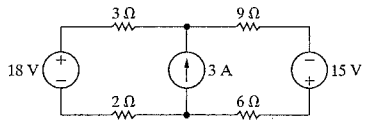
b) Devrede harcanan toplam gücü bulunuz.

Şekil P4.46



4.47 PSPICE Şekil P4.47'deki devrede ağ akımı yöntemini kullanarak harcanan toplam gücü bulunuz.

Şekil P4.47



4.48 PSPICE Şekil P4.47'deki devredeki 18 V kaynağın 100 V'a çıkarıldığını varsayınız. Devrede harcanan toplam gücü bulunuz.

4.49 a) Şekil P4.47'deki devredeki 18 V kaynağın −10 V'a değiştirildiğini varsayınız. Devrede harcanan toplam gücü bulunuz.

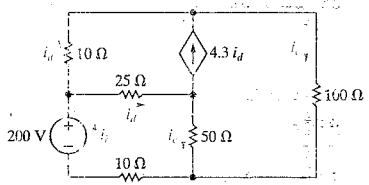
b) 3A akım kaynağının kısa devre olduğu durumda (a)'yı tekrar çözünüz.

c) (a) ve (b)'nin cevaplarının neden aynı olduğunu açıklayınız.

4.50 PSPICE a) Şekil P4.50'deki devrede ağ akımı yöntemini kullanarak dal akımları $i_a - i_e$'yi bulunuz.

b) Çözümünüzü harcanan toplam gücün üretilen toplam güce eşit olduğunu göstererek doğrulayınız.

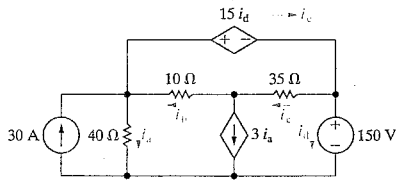
Şekil P4.50



4.51 PSPICE a) Şekil P4.51'de gösterilen devrede dal akımları $i_a - i_e$'yi bulunuz.

b) Çözümünüzü, harcanan toplam gücün üretilen toplam güce eşit olduğunu göstererek doğrulayınız.

Şekil P4.51



Kısım 4.8

4.52 PSPICE Şekil P4.52'deki devre tipik üç telli dağıtım sisteminin doğru akım durumudur. R_a, R_b ve R_c dirençleri R_1, R_2 ve R_3 yüklerini 110/220 V gerilim kaynağına bağlayan iletkenin dirençleridir. R_1 ve R_2 dirençleri 110 V devresine bağlı olan yükleri temsil ederken R_3 ise 220 V devresine bağlı olan yükü temsil eder.

a) Hangi devre analiz yöntemini kullanacaksınız? Neden?

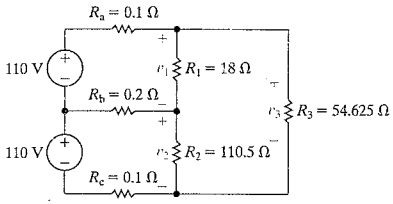
b) v_1, v_2, v_3'ü hesaplayınız.

c) R_1, R_2 ve R_3'e aktarılan gücü hesaplayınız.

d) Kaynaklar tarafından oluşturulan toplam gücün yüzde kaçı yüklere aktarılmıştır?

e) Dağıtım devresinde R_b dalı nötr iletkeni temsil eder. Nötr iletken açık devre yapılırsa hangi kötü etki ortaya çıkar? (*İpucu:* v_1 ve v_2'yi hesaplayınız. Bu devrede kullanılan cihazlar ya da yüklerin 110 V civarında gerilimle çalışmak üzere tasarlandıklarına dikkat ediniz.)

Şekil P4.52



4.53 Şekil P4.52'deki devrede $R_1 = R_2$ olduğu durumda nötr iletken akımının sıfır olduğunu gösteriniz. (*İpucu:* Nötr iletken akımını R_1 ve R_2'nin bir fonksiyonu alarak çözünüz.)

4.54 PSPICE Şekil P4.54'teki devrede 1 kΩ direnç üzerinde harcanan gücü bulmanızın istendiğini varsayınız.

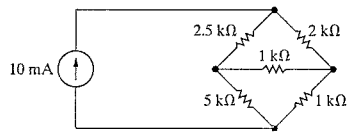
a) Devre analizinde hangi yöntemi kullanmayı tavsiye edersiniz? Açıklayınız.

b) 1 kΩ direnç üzerinde harcanan gücü tavsiye ettiğiniz yöntemi kullanarak bulunuz.

c) Eğer problem 10 mA akım kaynağı tarafından oluşturulan gücü bulmak olsaydı tavsiyenizi değiştir miydiniz? Açıklayınız.

d) 10 mA akım kaynağı tarafından aktarılan gücü bulunuz.

Şekil P4.54



4.55 PSPICE Şekil P4.54'teki devrede 10 mA akım kaynağına paralel olacak şekilde 4 kΩ bağlanmıştır. Akım kaynağı tarafından üretilen gücü hesaplamanız istendiğini varsayınız.

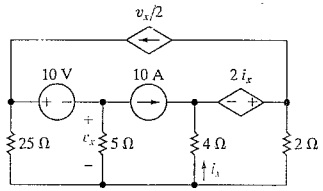
a) Hangi devre analiz yöntemini kullanacaksınız? Neden?

b) Akım kaynağı tarafından üretilen gücü hesaplayınız.

4.56 PSPICE a) Şekil P4.56'daki devrede 10 V kaynak tarafından soğurulan gücü bulmak için düğüm gerilimi mi yoksa ağ akımı yöntemini mi kullanırdınız? Seçiminizi açıklayınız.

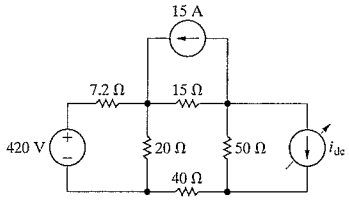
b) (a)'da seçtiğiniz yöntem ile gücü hesaplayınız.

Şekil P4.56



4.57 PSPICE Şekil P4.57'deki devrede değişken dc akım kaynağı 15 A akım kaynağı tarafından oluşturulan güç 3750 W olacak şekilde ayarlanmıştır. i_{dc} değerini bulunuz.

Şekil P4.57

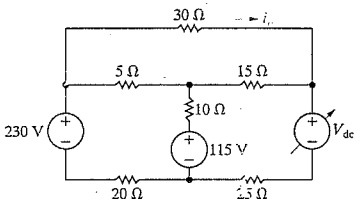


4.58 PSPICE Şekil P4.58'deki devrede değişken dc gerilim kaynağı i_o sıfır olacak şekilde ayarlanmıştır.

a) V_{dc} değerini bulunuz.

b) Çözümünüzü, üretilen gücün harcanan güce eşit olduğunu göstererek doğrulayınız.

Şekil P4.58

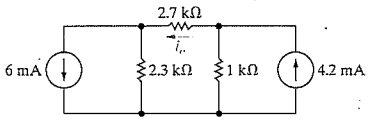


Kısım 4.9

4.59 PSPICE a) Şekil P4.59'daki devrede i_o akımını bulmak için bir dizi kaynak dönüşümü uygulayınız.

b) Çözümünüzü düğüm gerilimi yöntemi kullanarak i_o'yu bulup doğrulayınız.

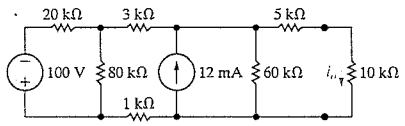
Şekil P4.59



4.60 PSPICE a) Şekil P4.60'taki devrede 10 kΩ direnç üzerindeki akımı bir dizi uygun kaynak dönüşümü uygulayarak bulunuz.

b) (a)'da bulduğunuz sonucu kullanarak, devrede geri giderek 100 V kaynak tarafından oluşturulan gücü bulunuz.

Şekil P4.60



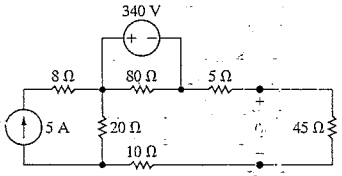
4.61 PSPICE a) Şekil P4.61'deki devrede v_o'yu kaynak dönüşümleri uygulayarak bulunuz.

b) 340 V kaynak tarafından üretilen gücü bulunuz.

c) 5 A akım kaynağı tarafından üretilen gücü bulunuz.

d) Üretilen toplam gücün harcanan toplam güce eşit olduğunu doğrulayınız.

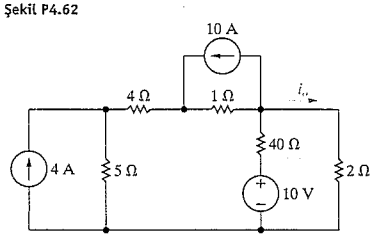
Şekil P4.61



4.62 PSPICE a) Şekil P 4.62'deki devrede bir dizi uygun kaynak dönüşümü kullanarak i_o'yu bulunuz.

b) Ağ akımı yöntemini kullanarak i_o'yu bulup çözümünüzü doğrulayınız.

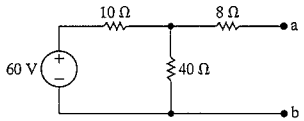
Şekil P4.62



Kısım 4.10

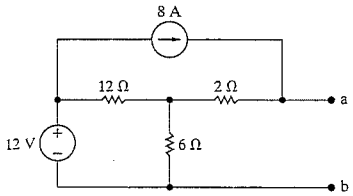
4.63 PSPICE Şekil P4.63'teki devrenin a, b terminallerine göre Thévenin eşdeğerini bulunuz.

Şekil P4.63



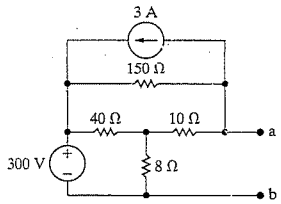
4.64 PSPICE Şekil P4.64'teki devrenin a, b terminallerine göre Thévenin eşdeğerini bulunuz.

Şekil P4.64



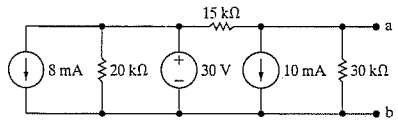
4.65 PSPICE Şekil P4.65'teki devrenin a, b terminallerine göre Thévenin eşdeğerini bulunuz.

Şekil P4.65



4.66 PSPICE Şek. P4.66'daki devrenin a, b terminallerine göre Norton eşdeğerini bulunuz.

Şekil P4.66

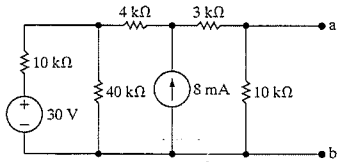


4.67 PSPICE Şek P4.67'deki devrede direnci 100 kΩ olan bir voltmetre v_{ab} gerilimini ölçmede kullanılmıştır.

a) Voltmetre ne okur?

b) Hata yüzdesi [(ölçülen–gerçek değer)/gerçek değer)] × 100 şeklinde tanımlanırsa voltmetre yüzde kaç hata ile okuma yapar?

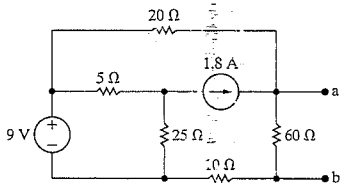
Şekil P4.67



4.68 PSPICE a) Şek. P.468'deki devrede a, b terminallerine göre açık devre gerilimini bularak Thévenin eşdeğerini bulunuz

b) Bağımsız kaynakları kaldırarak Thévenin direncini bulunuz ve sonucunuzu (a) şıkkındaki Thévenin direnci ile karşılaştırınız.

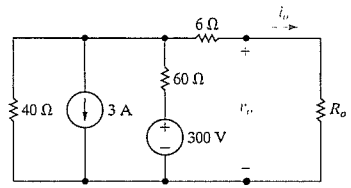
Şekil P4.68



4.69 Bir araba aküsü, araba radyosuna bağlandığında 12.5 V gerilim sağlar. Araba farına bağlandığında ise 11.7 V gerilim sağlar. Radyo 6.25 Ω direnç ile modellenirken farlar 0.65 Ω ile modellenir. Akü için Thévenin ve Norton eşdeğerleri nedir?

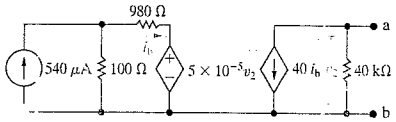
4.70 PSPICE Şekil P4.70'te gösterilen devre için i_o ve v_o değerlerini R_o 0, 2, 4, 10, 15, 20, 30, 50, 60 ve 70 Ω iken bulunuz.

Şekil P4.70



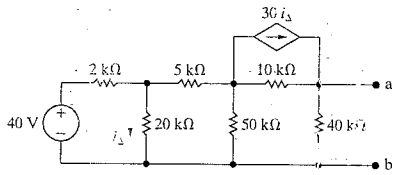
4.71 PSPICE Şekil P4.71'de gösterilen devrenin a, b terminallerine göre Thévenin eşdeğerini belirleyiniz.

Şekil P4.71



4.72 PSPICE Şekil P4.72'de görülen devrenin a, b terminallerine göre Thévenin eşdeğerini bulunuz.

Şekil P4.72

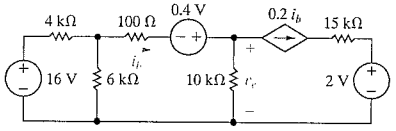


4.73 PSPICE Şekil P4.73'teki v_e gerilimi bir voltmetre ile 7.5 V olarak okunmaktadır.

a) Voltmetrenin direnci nedir?

b) Bu gerilim ölçümünde yüzde kaç hata vardır?

Şekil P4.73

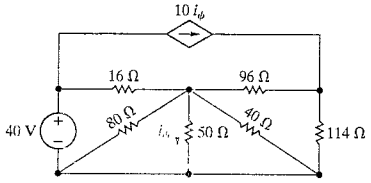


4.74 PSPICE Şekil P4.74'te gösterilen devrede i_ϕ akımı bir ampermetre ile ölçüldüğünde 10 A bulunmuştur.

a) Ampermetrenin direnci nedir?

b) Bu akım ölçümünde yüzde kaç hata vardır?

Şekil P4.74



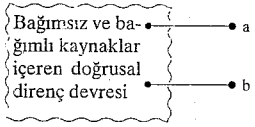
4.75 Thévenin eşdeğeri ilgilenilen terminal çiftinde yapılacak ölçümlerle de belirlenebilir. Şekil P4.75'teki devrede a, b terminallerinde aşağıdaki ölçümler yapılmıştır.

a, b terminallerine 15 kΩ direnç bağlandığında v_{ab} gerilimi ölçülmüş ve 45 V bulunmuştur.

a, b terminallerine 5 kΩ direnç bağlandığında gerilim ölçülmüş ve 25 V bulunmuştur.

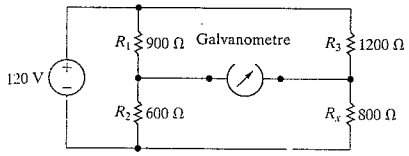
a, b terminallerine göre devrenin Thévenin eşdeğerini bulunuz.

Şekil P4.75



4.76 PSPICE Şekil P4.76'da gösterilen Wheatstone köprüsü R_3 direnci 1200 Ω olduğunda dengededir. Köprü, R_3 = 1204 Ω ile dengesizken, 30 Ω iç direnci olan galvanometre ne kadar akım okur? (*İpucu*: R_3 = 1204 Ω iken galvanometre terminallerine göre Thévenin eşdeğerini bulunuz. Dikkat edilmelidir ki bu Thévenin eşdeğerini bulduktan sonra galvanometre dalındaki dengesiz akım miktarını değişik galvanometre hareketleri için bulmamız kolaydır.)

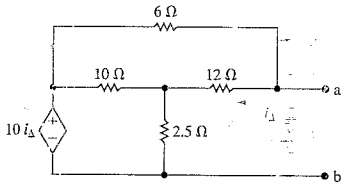
Şekil P4.76



Kısım 4.11

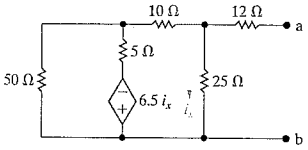
4.77 PSPICE Şekil P4.77'deki devrenin a, b terminallerine göre Thévenin eşdeğerini bulunuz.

Şekil P4.77



4.78 PSPICE Şekil P4.78'de görülen devrenin a, b terminallerine göre Thévenin eşdeğerini bulunuz.

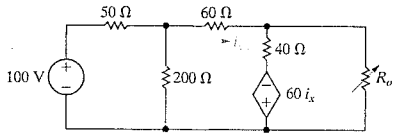
Şekil P4.78



Kısım 4.12

4.79 PSPICE Şekil P4.79'daki devrede değişken direnç (R_o) üzerinde harcanan güç 1.5 W olana kadar direnç ayarlanmıştır. Bu durumu sağlayan R_o değerlerini bulunuz.

Şekil P4.79

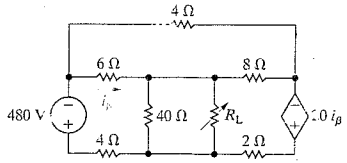


4.80 PSPICE Şekil P4.80'deki devredeki değişken direnç (R_L) maksimum güç aktarımı için ayarlanmıştır.

a) R_L değerini bulunuz.

b) R_L'ye aktarılan maksimum gücü bulunuz.

Şekil P4.80

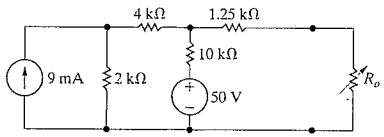


4.81 PSPICE Şek. P4.81'deki devrede değişken direnç (R_o) maksimum güç aktarımı için ayarlanmıştır.

a) R_o değerini bulunuz.

b) R_o'ya aktarılabilecek maksimum gücü bulunuz.

Şekil P4.81



4.82 PSPICE Şekil P4.81'deki devrede R_o maksimum güç aktarımı için ayarlandığında devrede oluşturulan gücün yüzde kaçı R_o'ya aktarılır?

4.83 PSPICE Şekil P4.72'deki devrede a, b terminallerine R_o değişken direnci bağlanmıştır. Değişken direnç R_o'ya aktarılan güç maksimum olacak şekilde ayarlanmıştır.

a) R_o değerini bulunuz.

b) R_o'ya aktarılan maksimum gücü bulunuz.

c) Devrede oluşturulan gücün yüzde kaçı R_o'ya aktarılmıştır?

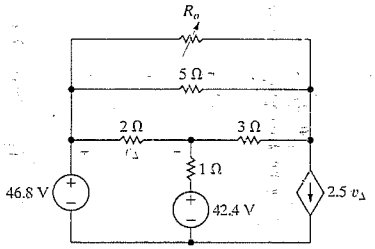
4.84 a) Problem 4.70'te kullanılan her R_o değeri için aktarılan gücü bulunuz.

b) R_o'ya aktarılan güce karşı R_o grafiğini çiziniz.

c) R_o'nun hangi değerinde R_o'ya aktarılan güç maksimumdur?

4.85 PSPICE Şekil P4.85'teki devrede değişken direnç (R_o) kendisine aktarılan güç maksimum olacak şekilde ayarlanmıştır. Devrede oluşturulan gücün yüzde kaçı R_o'ya aktarılmıştır?

Şekil P4.85

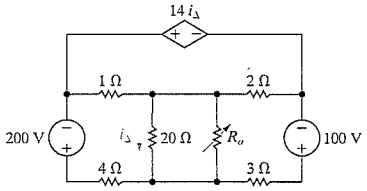


4.86 PSPICE Şekil P4.86'daki devrede değişken direnç (R_o) kendisine aktarılan güç maksimum olacak şekilde ayarlanmıştır.

a) R_o değerini bulunuz.

b) R_o'ya aktarılabilecek maksimum gücü bulunuz.

Şekil P4.86



4.87 PSPICE Şekil P4. 86'daki devrede üretilen gücün yüzde kaçı R_o'ya aktarılmıştır?

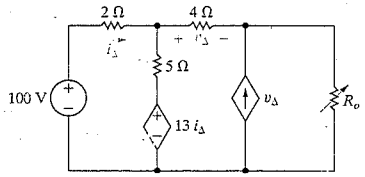
4.88 PSPICE Şekil P4. 88'deki devrede değişken direnç (R_o) devreden maksimum gücü soğuracak şekilde ayarlanmıştır.

a) R_o değerini bulunuz.

b) Maksimum gücü bulunuz.

c) Devrede oluşturulan gücün yüzde kaçı R_o'ya aktarılmıştır?

Şekil P4.88



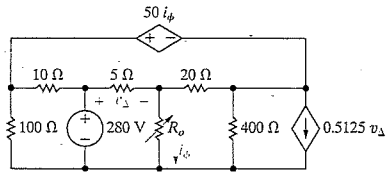
4.89 PSPICE Şekil P4.89'daki devrede değişken direnç R_o kendisine aktarılan güç maksimum olacak şekilde ayarlanmıştır.

a) R_o değerini bulunuz.

b) R_o'ya aktarılan maksimum gücü bulunuz.

c) R_o (a)'da bulunan değere ayarlandığında 280 V kaynak devreye ne kadar güç aktarır?

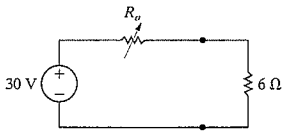
Şekil P4.89



4.90 PSPICE a) Şekil P4.90'daki devrede 6 Ω direnç üzerinde harcanan gücü maksimum yapan R_o değişken direnç değerini bulunuz. (*İpucu:* Aceleci kararlar kariyerinize zararlı olabilir.)

b) 6 Ω dirence aktarılabilecek maksimum güç nedir?

Şekil P4.90

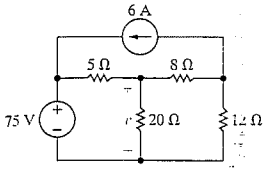


Kısım 4.13

4.91 a) Şekil P4.91'deki devrede üst üste bindirme ilkesini kullanarak v gerilimini bulunuz.

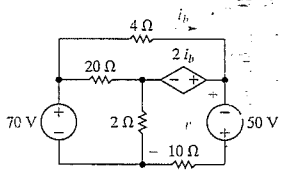
b) 20 Ω dirençte harcanan gücü bulunuz.

Şekil P4.91



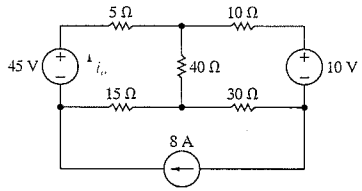
4.92 Şekil P4.92'deki devrede üst üste bindirme ilkesini kullanarak v gerilimini bulunuz.

Şekil P4.92



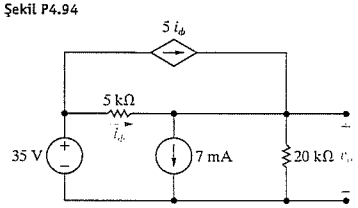
4.93 PSPICE Şekil P4.93'teki devrede üst üste bindirme ilkesini kullanarak i_o akımını bulunuz.

Şekil P4.93



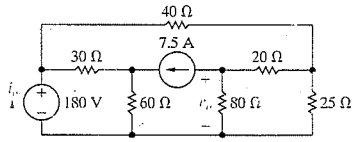
4.94 PSPICE Şekil P4.94'teki devrede üst üste bindirme ilkesini kullanarak v_o'yu bulunuz.

Şekil P4.94



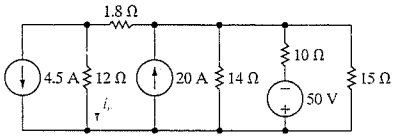
4.95 PSPICE Şekil P4.95'teki devreyi üst üste bindirme ilkesini kullanarak i_o ve v_o için çözünüz.

Şekil P4.95



4.96 PSPICE Şekil P4.96'daki devrede üst üste bindirme ilkesini kullanarak i_o akımını bulunuz.

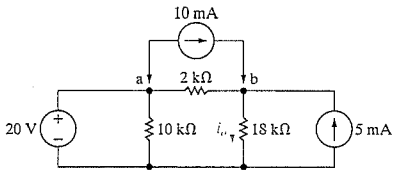
Şekil P4.96



4.97 PSPICE a) Şekil P4.97'deki devrede 10 mA akım kaynağı bağlanmadan önce a, b terimlerindeki i_o akımı 1.5 mA olarak hesaplamıştır. Üst üste bindirme kullanarak akım kaynağı bağlandıktan sonra i_o değerini bulunuz.

b) Üç kaynak da aynı anda çalıştığında i_o değerini bularak çözümünüzü doğrulayınız.

Şekil P4.7



Kısım 4.1 - 4.13

4.98 Bir dc gerilim kaynağına uygulanan laboratuar ölçümleri sonucunda a, b terminallerindeki gerilim yük bağlı değilken 75 V, 20 Ω yük bağlıyken 60 V olarak bulunmuştur.

a) DC gerilim kaynağının terminallerine göre Thévenin eşdeğeri nedir?

b) Kaynağın Thévenin direncinin aşağıdaki ifade ile verildiğini gösteriniz.

$$R_{Th} = \left(\frac{v_{Th}}{v_o} - 1\right)R_L,$$

v_{Th} = Thévenin gerilimi,

v_o = Yük direnci R_L'nin varlığındaki terminal gerilimi.

4.99 Şekil P4.99'da gösterildiği gibi iki ideal dc gerilim kaynağı r Ω/m dirence sahip iletkenler ile bağlanmıştır. R Ω dirence sahip bir yük iki gerilim kaynağı arasında hareket edebilmektedir. x kaynak ile yük arasındaki mesafe, L ise kaynaklar arasındaki mesafe olsun.

a)
$$v = \frac{v_1RL + R(v_2 - v_1)x}{RL + 2rLx - 2rx^2}.$$

olduğunu gösteriniz.

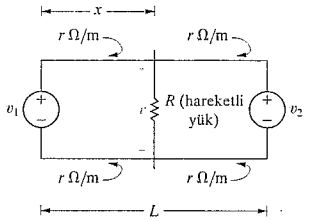
b) Aşağıdaki ifade sağlandığında v geriliminin minimum olacağını gösteriniz.

$$x = \frac{L}{v_2 - v_1}\left[-v_1 \pm \sqrt{v_1v_2 - \frac{R}{2rL}(v_1 - v_2)^2}\right].$$

c) $L = 16$ km, $v_1 = 1000$ V, $v_2 = 1200$ V, $R = 3.9$ Ω ve $r = 5 \times 10^{-5}$ Ω/m ile x'i bulunuz.

d) (c)'de verilen değerler için v geriliminin minimum değeri nedir?

Şekil P4.99

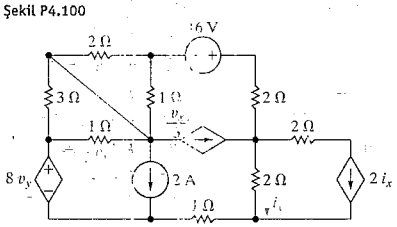


4.100 Şekil P4.100'deki devrede yöneticinizin 16 V kaynak tarafından oluşturulan gücü bulmanızı istediğini varsayınız. 16 V kaynak tarafından oluşturulan gücü hesaplamaya başlamadan önce yöneticiye probleme nasıl yaklaşacağını anlatan bir önerge göndermenizi istemiştir. Dahası önerdiğiniz yöntemi neden seçtiğinizi de anlatmanız isteniyor.

a) Probleme yaklaşımınızı nedenleriyle beraber açıklayınız.

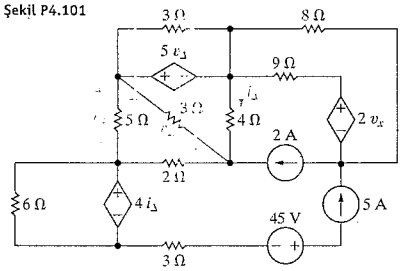
b) (a) da anlattığınız yöntemi kullanarak 16 V kaynağın oluşturduğu gücü bulunuz.

Şekil P4.100



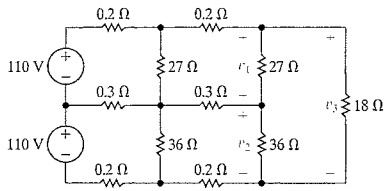
4.101 PSPICE Şekil P4.101'deki devrede 2 A akım kaynağı tarafından soğurulan gücü bulunuz.

Şekil P4.101



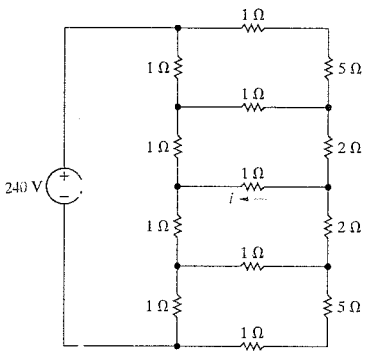
4.102 PSPICE Şekil P4.102'deki devrede v_1, v_2 ve v_3'ü bulunuz.

Şekil P4.102



4.103 PSPICE Şekil P4.103'teki devrede i'yi bulunuz.

Şekil P4.103



4.104 TASARIM PROBLEMİ Şekil 4.69'daki devrede v_1 ve v_2'nin I_{g1} ve I_{g2}'deki değişikliklere olan duyarlılık ifadesini çıkarınız.

4.105 PRATİK BAKIŞ AÇISI PSPICE Şek. 469'daki devredeki elemanların nominal değerlerinin $R_1 = 25$ Ω, $R_2 = 5$ Ω, $R_3 =$ Ω, $R_4 = 75$ Ω, $I_{g1} = 12$ A ve $I_{g2} = 16$ A olduğunu varsayınız. I_{g1}'in 11 A düştüğü ve diğer elemanların değerlerinin değişmediği durumlarda v_1 ve v_2 değerlerini tahmin ediniz. Tahminlerinizi MATLAB ya da PSpice gibi bir araçla kontrol ediniz.

4.106 PRATİK BAKIŞ AÇISI PSPICE Problem 4.1051'i I_{g2}'yi 17 A'e çıktığı ve diğer elemanların değerlerinin aynı kaldığı durum için tekrarlayınız. Tahminlerinizi MATLAB ya da PSpice gibi bir araçla kontrol ediniz.

4.107 PRATİK BAKIŞ AÇISI PSPICE Problem 4105'i I_{g1}'in 11 A'e düştüğü ve I_{g2}'nın 17 A'e çıktığı durum için tekrarlayınız. Tahminlerinizi MATLAB ya da PSpice gibi bir araçla kontrol ediniz.

4.108 PRATİK BAKIŞ AÇISI Tablo 4.2'deki değerleri kullanarak R_1 ve R_3'ün norminal değerlerinin %10 altına düştüğü durum için v_1 ve v_2 değerlerini tahmin ediniz. Tahminlerinizi v_1 ve v_2'nin gerçek değerleri ile karşılaştırınız.

İşlemsel Yükselteç

BÖLÜM İÇERİĞİ

5.1 **İşlemsel Yükselteç Terminalleri** *s. 156*
5.2 **Terminal Gerilim ve Akımları** *s. 156*
5.3 **Eviren Yükselteç Devresi** *s. 161*
5.4 **Toplayan Yükselteç Devresi** *s. 163*
5.5 **Evirmeyen Yükselteç Devresi** *s. 164*
5.6 **Fark Yükselteç Devresi** *s. 165*
5.7 **Gerçekçi İşlemsel Yükselteç Modeli** *s. 170*

BÖLÜM HEDEFLERİ

1. İşlemsel yükseltecin beş terminalini öğrenmek, akım ve gerilim kısıtları ile bunların sadeleştirilmesi sonucu ortaya çıkan ideal işlemsel yükselteç kavramını tanımlayabilmek ve kullanabilmek.
2. İdeal işlemsel yükselteç içeren basit devreleri analiz edebilmek, eviren, toplayan, evirmeyen ve fark yükselteç devrelerini ayırt edebilmek.
3. Gerçekçi işlemsel yükselteç modelini anlamak ve bu modeli kullanarak işlemsel yükselteç içeren basit devreleri analiz edebilmek.

İşlemsel yükselteç adı verilen elektronik devreler giderek daha çok önem kazanmaktadır. Ancak bu devrelerin daha ayrıntılı analiz edilebilmesi için diyot ve transistör gibi elektronik aygıtlar hakkında bilgi sahibi olunması gerekir. Neden devrenin elektronik bileşenlerini açıklamadan devrenin kendisini tanıttığımızı merak edebilirsiniz. Bunun birkaç nedeni bulunmaktadır: İlk olarak, yalnızca terminalleri dikkate alınarak, işlemsel yükseltecin devrelerde nasıl bir yapı taşı olarak kullanılabileceği anlaşılabilir. İşlemsel yükseltecin terminal davranışının kavranması için yükselteci oluşturan elektronik bileşenlerin çalışma biçimlerinin tümüyle bilinmesine gerek yoktur. İkinci bir neden, işlemsel yükselteç modelinin bağımlı bir kaynak içermesidir. Böylece bu tür bir kaynak soyut bir devre elemanı olmak yerine uygulamalı bir devrenin parçası olarak karşımıza çıkmaktadır. Diğer bir neden, işlemsel yükseltecin dirençlerle beraber kullanılarak ölçeklendirme, toplama, işaret değiştirme ve fark alma gibi farklı işlevler yerine getirmesini sağlanabilmesidir. Son olarak, 6. Bölümde indüktör ve kapasitör kavramlarının anlaşılmasının ardından, işlemsel yükselteçlerin tümlevsel ve türevsel devrelerin tasarımında nasıl kullanılabileceğini gösterebiliriz.

İşlemsel yükseltecin terminal davranışı üzerine odaklanmaktaki amaç, yükseltecin iç yapısının ve bu yapıdaki akım ve gerilimlerin dikkate alınmamasıdır. Burada akılda tutulması gereken nokta, yükseltecin iç yapısının davranışının terminallerde kabul edilen gerilim ve akım kısıtlarını belirlediğidir. (Şimdilik bu kısıtların okuyucu tarafından sorgulanmadan kabullenilmesi beklenmektedir.)

Pratik Bakış Açısı

Gerinim Ölçerler

Aşağıdaki şekildeki gibi bir metal çubuğun eğilme miktarını çubuğa temas etmeden nasıl ölçebilirsiniz? Bir gerinim ölçer kullanmak uygun yöntemlerden biri olabilir. Gerinim ölçer bir tür **dönüştürücüdür.** Dönüştürücüler bir niceliği ölçerek başka bir biçime çeviren cihazlardır. Metal çubukta ölçmek istediğimiz nicelik eğilme açısıdır, ancak doğrudan eğilme açısını ölçmek oldukça zor, hatta tehlikeli olabilir. Bunun yerine çizimde görüldüğü gibi metal çubuğa bir gerinim ölçer tutturulur. Gerinim ölçer, uzunlukları değiştikçe dirençleri de aşağıdaki gibi değişen ince tellerden oluşan bir cihazdır:

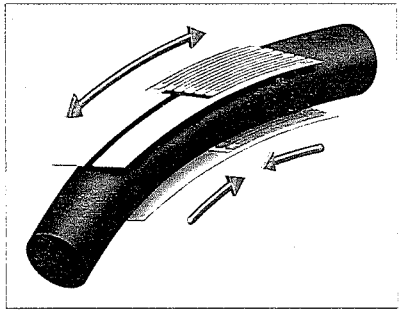
$$\Delta R = 2R\frac{\Delta L}{L}$$

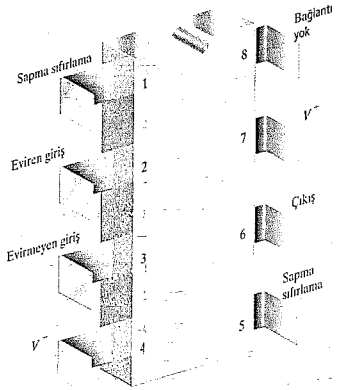
Burada R ölçerin yüksüz durumdaki direncini, $\Delta L/L$ ölçerin kesirli uzama miktarını (yani "gerinimi"), 2 üreticiye özgü ölçüm katsayısını, ΔR ise çubuktaki eğilmeden kaynaklanan direnç farkını ifade etmektedir. Genellikle gerinim ölçerler çiftler halinde çubuğun karşılıklı yüzlerine tutturulur. Çubuk eğildiğinde gerinim ölçer çiftlerinden biri uzayıp incelir ve bunun sonucunda direnci artar. Diğer çift gerinim ölçerin içindeki teller ise kısalır ve kalınlaşır, yani dirençleri azalır.

Acaba direnç miktarındaki değişiklik ölçülebilir mi? Bir yöntem direnç ölçer kullanmaktır. Ancak gerinim ölçerlerde oluşan direnç değişimi direnç ölçerlerle yeterince hassas ölçülemeyecek kadar küçüktür. Genellikle gerinim ölçer çiftleri bir Wheatstone köprüsü oluşturacak biçimde bağlanır ve köprünün iki bacağı arasındaki potansiyel farkı ölçülür. Hassas bir ölçüm yapabilmek amacıyla potansiyel farkını yükseltmek için işlemsel yükselteç kullanılır. İşlemsel yükselteç ve ilgili bazı önemli devreleri tanıttıktan sonra, metal çubuğun eğilme miktarını ölçmek için kullanılan gerinim ölçerli bir devre anlatılacaktır.

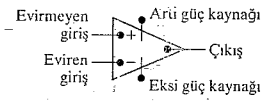
İşlemsel yükselteç devresi ilk olarak analog bilgisayarda kullanılan bir yapı taşı olarak karşımıza çıkmaktadır. Türev, integral, toplama, işaret değiştirme ve ölçeklendirme gibi matematiksel işlemleri gerçekleştirmek için kullanıldığından işlemsel adını almıştır. Geçtiğimiz yıllarda uygulama alanları matematiksel işlemlerin ötesine geçmiş olsa da devrenin özgün ismi aynı kalmıştır. Mühendisler ve teknisyenler teknik sözlük yaratma eğilimindedir. Bu nedenle işlemsel yükselteç yerine yaygın olarak **op amp*** terimi kullanılmaktadır.

* İşlemsel yükselteç teriminin İngilizce karşılığı olan "operational amplifier" sözcüklerinin kısaltmasıdır. Metnin geri kalanında işlemsel yükselteç yerine bu terim kullanılacaktır.

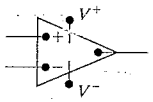


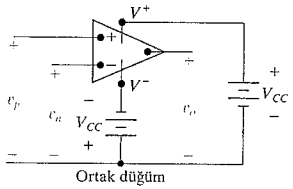


Şekil 5.1 ▲ Sekiz bacaklı DIP (üstten bakış).



Şekil 5.2 ▲ İşlemsel yükselteç (op amp) devre simgesi.





Şekil 5.3 ▲ Terminal gerilim değişkenleri.

5.1 İşlemsel Yükselteç Terminalleri

İşlemsel yükseltecin (op amp) terminal davranışı üzerinde duracağımızdan öncelikle ticari bir cihazın terminallerini tanıyarak başlayabiliriz. 1968 yılında Fairchild Semiconductor firması, geniş bir kullanım alanı bulan μA 741 isimli işlemsel yükselteci piyasaya sürdü. (μA öntakısı yükseltecin bir mikro devre biçiminde üretildiğini anlatmaktadır.) Bu yükselteç değişik paketler halinde üretilmiştir. Bu bölümde sekiz bacaklı DIP[1] paketi ele alınacaktır. Paketin üstten görünüşü terminal isimleriyle beraber Şekil 5.1'de görülmektedir. Üzerinde durulacak terminaller şunlardır:

- eviren giriş
- evirmeyen giriş
- çıkış
- artı güç kaynağı (V^+)
- eksi güç kaynağı (V^-)

Diğer üç terminal üzerinde şu an için durulmayacaktır. Sapma sıfırlama terminalleri, eksime ve kapanma sonucu oluşabilecek bozulmaları yardımcı bir devre aracılığıyla gidermek için kullanılabilir. Ancak bu bozulmalar genellikle ihmal edilebilir seviyede olduğundan sapma terminalleri çoğu zaman kullanılmaz. Terminal 8, yükselteç devresine bağlı olmadığından kullanılmamaktadır.

Beş ana terminali içeren ve sıklıkla kullanılan op amp devre simgesi Şekil 5.2'de görülmektedir. Devre şemalarında terminalleri sözcüklerle göstermek elverişli olmadığından terminal gösterimleri şu şekilde basitleştirilir: Evirmeyen geriş (+), eviren giriş ise (–) ile gösterilir. Güç kaynağı terminalleri her zaman üçgenin dışına çizilir ve V^+ ve V^- biçiminde gösterilir. Üçgenin tepesindeki terminal daima çıkışı ifade eder. Bu basitleştirilmiş işlemsel yükselteç simgesi Şekil 5.3'te görülmektedir.

5.2 Terminal Gerilim ve Akımları

Op amp'ın çalışmasını açıklayan terminal gerilim ve akımlarını tanımak için artık hazırız. Gerilim değişkenleri ortak bir referans düğümünden[2] ölçülmektedir. Şekil 5.4 gerilim değişkenlerini ve bunların referans kutuplarını göstermektedir.

[1] İngilizce *dual in-line package* sözcüklerinin kısaltmasıdır. Paketin her iki yanında bulunan terminallerin karşılıklı sıralı olduğu anlamına gelir.

[2] Ortak düğüm op amp'ın dışındadır. Op amp'ın gömülü olduğu devrenin referans terminalidir.

Tüm gerilimler ortak düğüm referans alınarak ölçülür. Bu yaklaşım düğüm gerilimi devre analizi yöntemindekiyle aynıdır. V^+ ile ortak düğüm arasına artı güç kaynağı (V_{CC}) bağlanır. Eviren giriş ile ortak düğüm arasındaki gerilim v_n ile gösterilirken, evirmeyen giriş ile ortak düğüm arasındaki gerilim v_p ile ifade edilir. Çıkış terminali ile ortak düğüm arasındaki gerilim v_o olarak adlandırılır.

Akım değişkenleri ve yönleri Şekil 5.5'te gösterilmiştir. Görüldüğü gibi akım yönleri terminallerden içeri doğru kabul edilmiştir. Burada i_n eviren giriş, i_p evirmeyen giriş, i_o ise çıkış terminal akımını ifade etmektedir. i_{c+} artı güç kaynağı terminalindeki, i_{c-} ise eksi güç kaynağı terminalindeki akımı göstermektedir.

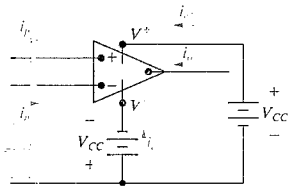
Op amp'ın doğrusal bir devre elemanı olarak davranabilmesi giriş gerilimleri ve akımları üzerindeki kısıtlara bağlıdır. Gerilim kısıtı, Şekil 5.6'da gösterilen gerilim aktarım özelliğinden türetilir.

Gerilim aktarım grafiği, çıkış geriliminin giriş gerilimine bağlı olarak nasıl değiştiğini, yani gerilimin girişten çıkışa nasıl aktarıldığını göstermektedir. Op amp için çıkış gerilimi, giriş gerilimleri arasındaki farkın yani $v_p - v_n$'nin bir fonksiyonudur. Gerilim aktarım denklemleri

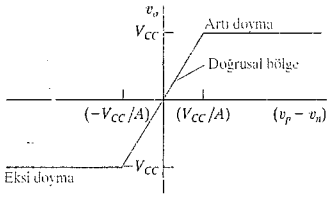
$$v_o = \begin{cases} -V_{CC} & A(v_p - v_n) < -V_{CC}, \\ A(v_p - v_n) & -V_{CC} \le A(v_p - v_n) \le +V_{CC}, \\ +V_{CC} & A(v_p - v_n) > +V_{CC} \end{cases} \qquad (5.1)$$

ile verilir. Şekil 5.6 ve Eş. 5.1'den de görüldüğü gibi op amp'ın üç farklı çalışma bölgesi bulunmaktadır. Giriş gerilimleri farkının büyüklüğünün ($|v_p - v_n|$) küçük olduğu durumlarda op amp doğrusal bir cihaz olarak davranır. Doğrusal bölgenin dışında ise yükseltecin çıkışı doyuma ulaşır. Çıkış gerilimi giriş gerilimlerinin doğrusal bir fonksiyonu olmadığından op amp bu bölgelerde doğrusal olmayan bir devre elemanı olarak çalışır. Doğrusal bölgede çalışırken yükseltecin çıkış gerilimi, giriş gerilimleri arasındaki farkın bir **kazanç** katsayısı (A) ile çarpımına eşittir.

Giriş gerilimleri v_p ve v_n üzerine bazı kısıtların konmasıyla yükseltecin doğrusal bölgede çalışması sağlanabilir. Bu kısıtlar Eş. 5.1'de de görüldüğü gibi V_{CC} ve A'nın sayısal değerlerine bağlıdır. Pek çok durumda tavsiye edilen güç kaynağı gerilimi 20 V'u aşmamaktadır. A katsayısı genellikle 10^4'ten büyüktür. Şekil 5.6 ve Eş. 5.1'den de görülebileceği gibi, giriş gerilimleri farkının büyüklüğünün ($|v_p - v_n|$) $20/10^4$'ten yeni 2 mV'tan küçük olması gerekmektedir.



Şekil 5.5 ▲ Terminal akım değişkenleri.



Şekil 5.6 ▲ Op amp için gerilim aktarım karakteristiği.

İncelediğimiz devrelerde düğüm gerilimleri tipik olarak 2m V'tan büyüktür, dolayısıyla 2 mV veya daha küçük bir gerilim farkı iki gerilimin aslında eşit kabul edilebileceği anlamına gelir. Bu nedenle op amp doğrusal bölgede çalıştırıldığında ve düğüm gerilimleri 2 mV'tan çok daha büyük olduğunda giriş gerilimleri kısıtı

İdeal op amp için giriş gerilimi kısıtı ▶

$$v_p = v_n. \tag{5.2}$$

şeklindedir. Eş. 5.2 ideal, yani kazancı (A) sonsuz bir op amp'ın giriş gerilimleri arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

Eş. 5.2'de verilen giriş gerilimi kısıtı, yükseltecin girişlerinde *sanal kısa devre* durumu olarak adlandırılır. Op amp devre içerisinde kullanılırken girişindeki sanal kısa devrenin nasıl oluştuğu ve böylece doğrusal bölgede çalışmasının nasıl sağlandığı sorusu akla gelebilir. Bu sorunun cevabı, bir sinyalin çıkış terminalinden eviren terminale geribeslenmesidir. Çıkıştan geri beslenen sinyal giriş sinyalinden çıkarıldığından bu yapı **negatif geribesleme** olarak adlandırılır. Negatif geribesleme girişteki gerilim farkının azalmasını sağlar. Çıkış gerilimi giriş gerilimlerinin farkı ile doğru orantılı olduğundan, çıkış gerilimi de azalır; böylece yükselteç doğrusal bölgede çalışır.

Op amp'ın çıkışından eviren girişine negatif geribesleme bulunmayan devrelerde yükselteç normal olarak doyuma ulaşır. Doyuma ulaşmaması için giriş sinyalleri arasındaki farkın çok küçük olması gerekir. Ancak geribeslemenin olması da yükseltecin doğrusal bölgede çalışmasını garanti etmez. Bu durumda op amp'ın doğrusal bölgede çalıştığından nasıl emin olabiliriz?

Op amp'ın doğrusal bölgede çalıştığından kesin olarak emin olamayız. Bu ikilemi çözmek için öncelikle yükseltecin doğrusal bölgede çalıştığını varsayarak devreyi analiz eder, daha sonra sonuçların tutarlı olup olmadığını kontrol ediniz. Diyelim ki analiz ettiğimiz bir devrede, V_{CC} 6 V olmasına rağmen yükseltecin çıkış gerilimini 10 V olarak hesapladık. Bu çelişki op amp'ın aslında doğrusal bölgede çalışmadığını gösterir. Çünkü çıkış gerilimi V_{CC}'den büyük olamaz, 6 V'ta doyuma ulaşır.

Bu kısımda, op amp'ın doğrusal bölgede çalıştığı ve tipik V_{CC} ve A değerlerine sahip olduğu varsayımlarından ve yükseltecin gerilim aktarım özelliğinden yola çıkarak, giriş gerilimleri üzerinde bir kısıt tanımlandı. Eş. 5.3 sonsuz kazanca sahip yani ideal bir op amp'ın gerilim kısıtını ifade etmektedir.

Bir sonraki adımda giriş akımları üzerindeki kısıtlardan bahsedilecektir.

Op amp içeren devrelerin analizi, yükseltecin giriş terminallerinden bakıldığında görülen eşdeğer direncin oldukça büyük (1 MΩ veya daha büyük) olduğunu göstermektedir. İdeal olarak eşdeğer giriş direnci sonsuz kabul edilir, böylece aşağıdaki akım kısıtı ortaya çıkar:

$$i_p = i_n = 0. \tag{5.3}$$

◀ İdeal op amp için giriş akımı kısıtı

Akım kısıtı, gerilim kısıtından farklı olarak op amp'ın doğrusal bölgede çalıştığı varsayımına dayanmamaktadır. Eş. 5.2 ve Eş 5.3 ideal op amp'ın terminal davranışını modelleyen denklemlerdir.

Kirchhoff'un akım yasasından da bilindiği gibi op amp'a giren akımların toplamı sıfırdır.

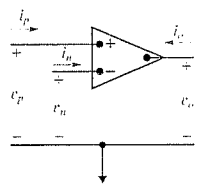
$$i_p + i_n + i_o + i_{c^+} + i_{c^-} = 0. \tag{5.4}$$

Eş. 5.3'te verilen akım kısıtı Eş. 5.4'te yerine konulduğunda

$$i_o = -(i_{c^+} + i_{c^-}) \tag{5.5}$$

denklemi elde edilir. Eş. 5.5 göstermektedir ki, giriş terminallerindeki akımlar ihmal edildiği halde yükseltecin çıkışında hâlâ belli bir miktar akım bulunmaktadır.

Op amp içeren devrelerin analizine başlamadan önce yükseltece ait devre simgesi biraz daha sadeleştirilebilir. Op amp doğrusal bölgede çalıştığında $\pm V_{CC}$ gerilimleri denklemlere dahil olmayacaktır. Bu nedenle Şekil 5.7'de de görüldüğü gibi güç kaynağı terminalleri devre simgesinden çıkarılabilir. Ancak dikkat edilmelidir ki, güç kaynağı terminalerinin devre simgesinde gösterilmemesi, $i_p + i_n + i_o = 0$ olduğu anlamına gelmez. Yukarıda da verildiği gibi $i_p + i_n + i_o + i_{c+} + i_{c-} = 0$ denklemi hâlâ geçerlidir. Bir başka deyişle ideal op amp için verilen akım kısıtı $i_p = i_n = 0$, çıkış akımının sıfır olduğu ($i_o = 0$) anlamına gelmez.



Şekil 5.7 ▲ Güç kaynağı terminalleri çıkarılmış op amp simgesi.

Artı ve eksi güç kaynağı gerilimlerinin büyüklükleri aynı olmak zorunda değildir. Doğrusal çalışma bölgesinde, v_o iki güç kaynağı değerinin arasında olmalıdır. Örneğin $V^+ = 15$ V ve $V^- = -10$ V ise, $-10\text{ V} \le v_o \le 15\text{ V}$ eşitsizliği sağlanmalıdır. A kazanç katsayısının tüm çalışma koşulları için sabit olmadığı da unutulmamalıdır. Ancak şimdilik A'nın sabit olduğu kabul edilecektir. A'nın değerinin nasıl ve neden değişebileceği konusu yükselteci oluşturan elektronik cihaz ve bileşenler öğrenildiğinde daha iyi anlaşılabilir.

Eş. 5.2 ve Eş. 5.3'ün nasıl kullanılabileceğine dair bir örnek Örnek 5.1'de verilmiştir. Op amp içeren bir devreyi bu denklemlerden faydalanarak çözdüğümüzde aslında ideal op amp modeli kullanılmaktadır.

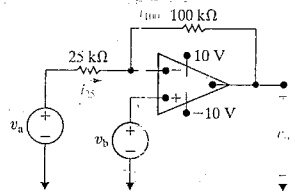
Örnek 5.1 **Bir Op Amp Devresinin Analizi**

Şekil 5.8'de görülen devredeki op amp idealdir.

a) $v_a = 1$ V ve $v_b = 0$ V ise v_o'yu hesaplayınız.

b) $v_a = 1$ V ve $v_b = 2$ V ise v_o'yu hesaplayınız.

c) $v_a = 1.5$ V ise yükseltecin doyuma ulaşmaması için v_b'nin alabileceği değer aralığını bulunuz.



Şekil 5.8 ◄ Örnek 5.1'e ait devre.

Çözüm

a) Op amp'ın çıkışından eviren girişine doğru bir negatif geribesleme bulunduğundan op amp'in doğrusal bölgede çalıştığı varsayılır. Yükseltecin eviren giriş ucunda düğüm gerilimi denklemleri yazılır. Bağlı gerilim kaynağından, $v_p = v_b = 0$ ve $v_n = v_p$ (gerilim kısıtı) olduğundan eviren girişteki gerilim de 0'dır. v_n noktasındaki düğüm gerilimi denklemi

$$i_{25} = i_{100} = i_n$$

olur. Ohm yasası kullanılarak aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$i_{25} = (v_a - v_n)/25 = \frac{1}{25}\text{ mA},$$

$$i_{100} = (v_o - v_n)/100 = v_o/100\text{ mA}.$$

Akım kısıtı $i_n = 0$ olmasını gerektirmektedir. Bu üç akımın değerleri düğüm gerilimi denkleminde yerine konulduğunda

$$\frac{1}{25} + \frac{v_o}{100} = 0.$$

elde edilir. Buradan $v_o = -4$ V olarak hesaplanır. v_o değeri ±10 V aralığında yer aldığından op amp doğrusal bölgede çalışmaktadır.

b) (a) şıkkında kullanılan yaklaşım tekrarlandığında

$$v_p = v_b = v_n = 2\text{ V},$$

$$i_{25} = \frac{v_a - v_n}{25} = \frac{1-2}{25} = -\frac{1}{25}\text{ mA},$$

$$i_{100} = \frac{v_o - v_n}{100} = \frac{v_o - 2}{100}\text{ mA},$$

$$i_{25} = -i_{100}$$

denklemleri elde edilir. Burada $v_o = 6$ V olarak hesaplanır. Elde edilen v_o değeri yine ±10 V aralığındadır.

c) Önceden olduğu gibi, $v_n = v_p = v_b$ ve $i_{25} = -i_{100}$ denklemleri geçerlidir. $v_a = 1.5$ V olduğundan

$$\frac{1.5 - v_b}{25} = -\frac{v_o - v_b}{100}$$

denklemi elde edilir v_b, v_o cinsinden aşağıdaki gibi yazılır.

$$v_b = \frac{1}{5}(6 + v_o).$$

Yükseltecin doğrusal bölgede çalışması için $-10\text{ V} \le v_o \le 10$ V koşulu sağlanmalıdır. Bu sınırlar yukarıdaki denklemde v_b yerine konulduğunda,

$$-0.8\text{ V} \le v_b \le 3.2\text{ V}$$

sonucuna ulaşılır.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 1 – İdeal op amp devresinde gerilim ve akım kısıtlarının kullanılması

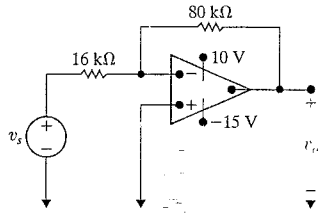
5.1 Şekilde verilen devredeki işlemsel yükselteç idealdir.

a) $v_s = 0.4, 2.0, 3.5, -0{,}6, -1.6$ ve -2.4 V değerleri için v_o'yu hesaplayınız.

b) Yükseltecin doyuma ulaşması için gerekli v_s aralığını bulunuz.

Cevap: (a) $-2, -10, -15, 3.8$ ve 10 V

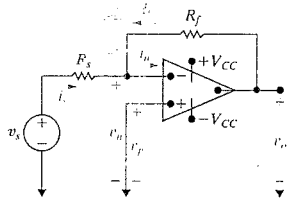
(b) $-2\text{ V} \le v_s \le 3\text{V}$



NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 5.1-5.3'ü de çözmeyi deneyiniz.

5.3 Eviren Yükselteç Devresi

Bu bölümde, yükseltecin çalışmasını modellemek için Eş. 5.2 ve 5.3 kullanılarak, bazı önemli op amp devreleri incelenecektir. Eviren yükselteç devresi Şekil 5.9'da gösterilmiştir. Op amp'ın doğrusal bölgede çalıştığı varsayılmaktadır. Görüldüğü üzere, devrede op amp'ın dışında iki adet direnç (R_f ve R_s), bir gerilim kaynağı (v_s) ve evirmeyen giriş terminali ile ortak düğüm arasında bir kısa devre bağlantısı bulunmaktadır.



Şekil 5.9 ◄ Eviren yükselteç devresi.

Devrenin analizi, op amp'ın ideal olduğu varsayılarak yapılacaktır. Hedef, çıkış gerilimi v_o için kaynak gerilimi v_s cinsinden bir ifade elde etmektir. Eviren terminalde düğüm gerilimi denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$i_s + i_f = i_n. \tag{5.6}$$

Eş.5.2'de verilen gerilim kısıtı kullanıldığında, $v_p = 0$ olduğundan $v_n = 0$ elde edilir. Buradan aşağıdaki denklemlere ulaşılır.

$$i_s = \frac{v_s}{R_s}, \tag{5.7}$$

$$i_f = \frac{v_o}{R_f}. \tag{5.8}$$

Eş. 5.3 ile verilen akım kısıtını, yani

$$i_n = 0. \tag{5.9}$$

denklemini kullanacağız. Eş. 5.7 - 5.9 Eş. 5.6'da yerine konulduğunda

$$v_o = \frac{-R_f}{R_s} v_s. \tag{5.10}$$

◄ **Eviren yükselteç denklemi**

sonucuna varılır.

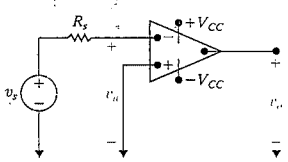
Görüldüğü gibi çıkış gerilimi giriş geriliminin evrilmiş ve ölçeklendirilmiş halidir. Yükselteç, *eviren* ismini çıkıştaki işaret değişikliğinden dolayı almıştır. Burada ölçeklendirme oranı yani kazanç R_f/R_s'dir.

Eş. 3.10'da verilen sonuç yalnızca Şekil 5.9'da gösterilen op amp ideal olduğunda, yani A ve giriş direncinin sonsuz olduğu durumda geçerlidir. Eş. 5.10 gerçek bir op amp için yaklaşık bir sonuç vermektedir ve bu yaklaşık sonuç genellikle gerçeğe oldukça yakındır. (Bu konu üzerinde daha sonra ayrıntılı olarak durulacaktır.) Bu denklem, eğer op amp'ın kazancı A yeterince büyükse, bu kazancın R_f ve R_s dirençleri cinsinden ifade edilebileceği anlamını taşır. Kazancın, yani R_f/R_s'nin üst sınırı güç kaynağı gerilimleri ve v_s tarafından belirlenir. Güç kaynağı gerilimlerinin büyüklüklerinin eşit olduğu ($V^+ = -V^- = V_{CC}$) varsayıldığında,

$$|v_o| \le V_{CC}, \quad \left|\frac{R_f}{R_s}v_s\right| \le V_{CC}, \quad \frac{R_f}{R_s} \le \left|\frac{V_{CC}}{v_s}\right| \qquad (5.11)$$

denklemlerine ulaşılır. Örneğin $V_{CC} = 15$ V ve $v_s = 10$ mV olduğunda R_f/R_s oranı 1500'den az olmalıdır.

Şekil 5.9'da gösterilen eviren yükselteç devresinde R_f direnci negatif geribeslemeyi oluşturmakta, yani çıkış terminalini eviren girişe bağlamaktadır. R_f devreden çıkarılırsa geribesleme yolu açılır ve yükselteç *açık döngü* durumunda çalışır. Açık döngü çalışan yükselteç Şekil 5.10'da görülmektedir.



Şekil 5.10 ▲ Açık döngü çalışan eviren yükselteç.

Geribesleme yolunu açmak yükseltecin çalışmasını önemli ölçüde değiştirir. Daha önce olduğu gibi $V^+ = -V^- = V_{CC}$ kabul edildiğinde çıkış gerilimi

$$v_o = -Av_n \qquad (5.12)$$

denklemi ile ifade edilir. Buradan, op amp'ın doğrusal bölgede çalışması için $|v_n| < V_{CC}/A$ koşuluna ulaşılır. Eviren giriş akımı yaklaşık sıfır olduğundan R_s üzerindeki gerilim de sıfırdır ve eviren giriş gerilimi yaklaşık olarak v_s'ye eşittir ($v_n \approx v_s$). Yani yalnızca $|v_s| < V_{CC}/A$ koşulu sağlandığı sürece op amp doğrusal bölgede çalışabilir. $|v_s| > V_{CC}/A$ olduğunda op amp doyuma ulaşır. $v_s < -V_{CC}/A$ ise op amp $\pm V_{CC}$ değerinde doyuma ulaşır. Eş. 5.12 yalnızca geribeslemenin olmadığı durumlarda geçerli olduğundan A katsayısı **açık döngü kazancı** olarak adlandırılır.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 2- İdeal op amp içeren basit devreleri analiz edebilmek

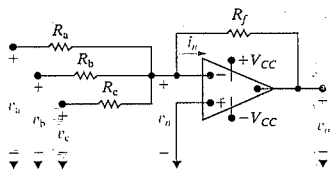
5.2 Değerlendirme Problemi 5.1'de verilen devredeki v_s kaynak gerilimi –640 mV'tur. 80 kΩ'luk geribesleme direnci değişken R_x direnci ile değiştirilmiştir. Eviren yükseltecin doğrusal bölgede çalışması için R_x hangi aralıkta olmalıdır?

Cevap: $0 \le R_x \le 250$ k Ω.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 5.8 ve 5.9'u da çözmeyi deneyiniz.

5.4 Toplayan Yükselteç Devresi

Toplayan yükseltecin çıkış gerilimi, girişine uygulanan gerilimlerin evrilmiş ve ölçeklendirilmiş toplamına eşittir. Üç girişli bir toplayan yükselteç Şekil 5.11'de görülmektedir.



Şekil 5.11 ▲ Toplayan yükselteç.

Eviren girişten çıkan akımların toplanmasıyla çıkış gerilimi v_o ile giriş gerilimleri v_a, v_b ve v_c arasındaki ilişki aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{v_n - v_a}{R_a} + \frac{v_n - v_b}{R_b} + \frac{v_n - v_c}{R_c} + \frac{v_n - v_o}{R_f} + i_n = 0. \qquad (5.13)$$

Op amp ideal kabul edildiğinde, akım ve gerilim kısıtları kullanılarak $v_n = v_p = 0$ ve $i_n = 0$ olduğu görülür. Böylece Eş. 5,13

$$v_o = -\left(\frac{R_f}{R_a}v_a + \frac{R_f}{R_b}v_b + \frac{R_f}{R_c}v_c\right). \qquad (5.14)$$

◁ **Eviren toplayan yükselteç denklemi**

biçiminde yeniden yazılabilir. Eş. 5.14 yükseltecin çıkışının giriş gerilimlerinin ölçeklendirilerek toplanmış haline eşit olduğunu ifade etmektedir.

$R_a = R_b = R_c = R_s$ olduğunda

$$v_o = -\frac{R_f}{R_s}(v_a + v_b + v_c) \qquad (5.15)$$

denklemi elde edilir. Son olarak $R_f = R_s$ seçildiğinde çıkış gerilimi giriş gerilimlerinin evrilmiş toplamına eşit olur:

$$v_o = -(v_a + v_b + v_c). \qquad (5.16)$$

İhtiyaç durumunda toplayan yükseltecin giriş sayısı arttırılabilir. Örneğin tek bir ses sinyali oluşturmak için 16 ayrı ses sinyalinin toplanması gerektiğinde, Şekil 5.11'de gösterilen toplayan yükselteç yapısı 16 girişli olacak şekilde kullanılabilir. Girişlerde kullanılacak farklı direnç değerleri, her giriş sinyalinin farklı bir yükseltme katsayısıyla çarpılarak toplama yansıtılmasını sağlar. Toplayan yükselteç bu örnekte ses karıştırıcı görevi görmektedir. Ölçeklendirme katsayıları, eviren yükselteç devrelerinde olduğu gibi toplayan yükselteç devrelerinde de R_f, R_a, R_b, R_c, ..., R_n dirençleri tarafından belirlenir.

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

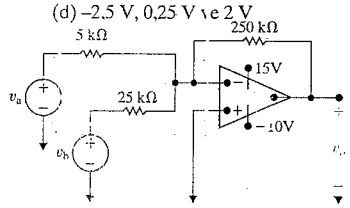
Hedef 2- İdeal op amp içeren basit devreleri analiz edebilmek

5.3 a) Verilen devrede $v_a = 0.1$ V ve $v_b = 0.25$ V ise v_o'yu hesaplayınız.

b) $v_b = 0.25$ V ise op amp doyuma ulaşmadan v_a'nın alabileceği en büyük değer nedir?

c) $v_a = 0.10$ V ise op amp doyuma ulaşmadan v_b'nin olabilceği en büyük değer nedir?

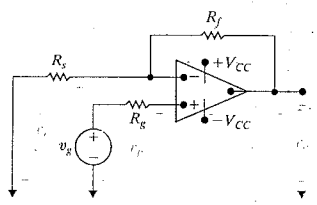
d) v_b'nin işaretini değiştirerek (a), (b) ve (c) şıklarını tekrarlayınız.



Cevap: (a) −7.5 V
(b) 0.15 V
(c) 0,5 V
(d) −2.5 V, 0,25 V ve 2 V

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 5.12, 5.13 ve 5.15'i de çözmeyi deneyiniz.

5.5 Evirmeyen Yükselteç Devresi



Şekil 5.12 Evirmeyen yükselteç.

Evirmeyen yükselteç devresi Şekil 5.12'de gösterilmiştir. Sinyal kaynağı v_g ile gösterilmiş olup R_g direnci ile seri bağlanmıştır. Çıkış gerilimini kaynak gerilimi cinsinden ifade etmek için op amp'ın ideal olduğu ve doğrusal bölgede çalıştığı varsayılacaktır. Daha önce olduğu gibi bu çıkarımda da Eş. 5.2 ve Eş. 5.3 esas alınacaktır. Yükseltecin giriş akımı sıfır olduğundan $v_p = v_g$ eşitliği yazılabilir. Eş. 5.2'den yola çıkılarak $v_n = v_g$ sonucuna varılır. Giriş akımının sıfır olması nedeniyle ($i_n = i_p = 0$), R_f ve R_s dirençleri v_o üzerinde yüksüz bir gerilim bölücü oluştururlar. Bu nedenle

$$v_n = v_g = \frac{v_o R_s}{R_s + R_f} \tag{5.17}$$

denklemi yazılabilir. Eş. 5.17 v_o için çözüldüğünde

Evirmeyen yükselteç denklemi ➤

$$v_o = \frac{R_s + R_f}{R_s} v_g. \tag{5.18}$$

sonucuna ulaşılır. Doğrusal bölgede çalışma koşulu

$$\frac{R_s + R_f}{R_s} < \left|\frac{V_{CC}}{v_g}\right|$$

biçimindedir. Op amp'ın ideal olduğu varsayıldığından çıkış gerilim, giriş gerilimi ile R_s ve R_f dirençlerinin bir fonksiyonu olarak ifade edilebilmiştir.

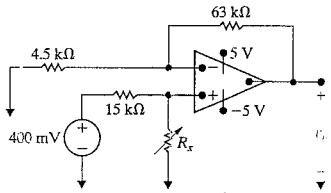
DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 2- İdeal op amp içeren basit devreleri analiz edebilmek

5.4 Yandaki devrede verilen op amp idealdir.

a) Değişken direnç 60 kΩ olarak ayarlandığında çıkış gerilimi ne olur?

b) Yükselteç doyuma ulaşmadan önce R_x'in olabileceği en büyük değer nedir?



Cevap: (a) 4.8 V;
(b) 75 kΩ.

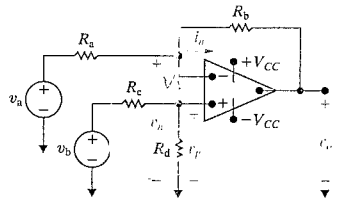
NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 5.17 ve 5.18'i de çözmeyi deneyiniz.

5.6 Fark Yükselteç Devresi

Fark yükseltecinin çıkışı, girişlerindeki gerilimlerin farkı ile doğru orantılıdır. Şekil 5.13'te görülen fark yükselteci devresinde op amp'ın ideal olduğu ve doğrusal bölgede çalıştığı kabul edilmiştir. Eviren girişten çıkan akımlar toplandığında, çıkış gerilimi v_o ve giriş gerilimleri v_a ve v_b arasındaki ilişki

$$\frac{v_n - v_a}{R_a} + \frac{v_n - v_o}{R_b} + i_n = 0. \tag{5.19}$$

biçiminde ifade edilir. Op amp ideal kabul edildiğinden akım ve gerilim kısıtları geçerlidir:



Şekil 5.13 Fark yükselteci.

$$i_n = i_p = 0, \tag{5.20}$$

$$v_n = v_p = \frac{R_d}{R_c + R_d} v_b. \tag{5.21}$$

Eşitlikler 5.19, 5.20 ve 5.21 bir arada kullanıldığında istenen ilişki,

$$v_o = \frac{R_d(R_a + R_b)}{R_a(R_c + R_d)} v_b - \frac{R_b}{R_a} v_a \tag{5.22}$$

olarak bulunur. Eş. 5.22, çıkış gerilimi v_o'nun, ölçeklendirilmiş giriş gerilimleri v_b ile v_a'nın farkı ile doğru orantılı olduğunu göstermektedir. Genel durumda v_a ve v_b'nin ölçeklendirilme oranları aynı değildir.

Ancak

$$\frac{R_a}{R_b} = \frac{R_c}{R_d} \tag{5.23}$$

seçilerek her iki ölçeklendirmenin eşit olması sağlanabilir.

Eş. 5.23 sağlandığında çıkış gerilimi ifadesi

Basitleştirmiş fark yükselteci denklemi ▶

$$v_o = \frac{R_b}{R_a}(v_b - v_a). \tag{5.24}$$

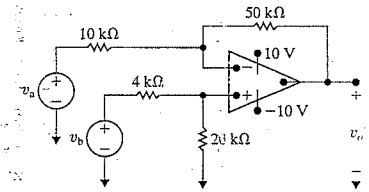
biçiminde sadeleşir. Bu denklem, çıkış geriliminin giriş gerilimleri v_b ve v_a arasındaki farkın ölçeklendirilmiş hali olduğunu ifade eder. Önceki op amp devrelerinde olduğu gibi burada da ölçeklendirme miktarı dirençler tarafından belirlenir. Bunun yanısıra, çıkışa sıfırdan farklı bir yük bağlanması giriş ile çıkış gerilimleri arasındaki bağıntıyı etkilemez.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 2- İdeal op amp içeren basit devreleri analiz edebilmek

5.5 a) Şekilde görülen fark yükseltecinde $v_b = 4.0$ V'tur. Yükseltecin doğrusal bölgede çalışabilmesi için v_a hangi aralıkta olmalıdır?

b) 20 kΩ'luk direnç yerine 8 kΩ kullanarak (a) şıkkını tekrarlayınız.



Cevap: (a) $2\text{ V} \le v_a \le 6\text{ V}$;
(b) $1.2\text{ V} \le v_a \le 5.2\text{ V}$.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 5.24–5.26'yı da çözmeyi deneyiniz.

Fark Yükselteci – Başka Bir Bakış Açısı

Giriş gerilimlerini iki farklı gerilim cinsinden yeniden tanımlayarak fark yükseltecini daha ayrıntılı incelemek mümkündür. Bunlardan ilki **fark modu**, yani Şekil 5.13'te görülen iki girişin farkıdır:

$$v_{dm} = v_b - v_a. \tag{5.25}$$

Diğer giriş **ortak mod**, yani giriş gerilimlerinin ortalamasıdır

$$v_{cm} = (v_a + v_b)/2. \tag{5.26}$$

Eş. 5.25 ve 5.26 kullanılarak, giriş gerilimleri fark modu ve ortak mod cinsinden

$$v_a = v_{cm} - \frac{1}{2}v_{dm}. \tag{5.27}$$

$$v_b = v_{cm} + \frac{1}{2}v_{dm} \tag{5.28}$$

halinde ifade edebilir. Bu denklemler Eş. 5.22'de yerine konulduğunda, fark yükseltecinin çıkışı fark modu ve ortak mod cinsinden

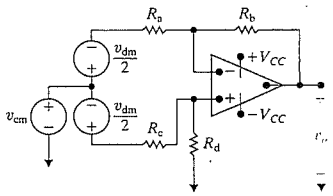
$$v_o = \left[\frac{R_aR_d - R_bR_c}{R_a(R_c + R_d)}\right]v_{cm} + \left[\frac{R_d(R_a + R_b) + R_b(R_c + R_d)}{2R_a(R_c + R_d)}\right]v_{dm}, \tag{5.29}$$

$$= A_{cm}v_{cm} + A_{dm}v_{dm} \tag{5.30}$$

olarak bulunur. Burada A_{cm} ortak mod kazancını, A_{dm} ise fark modu kazancını göstermektedir. Eş. 5.23 sağlanacak biçimde $R_c = R_a$ ve $R_d = R_b$ seçildiğinde çıkış gerilimi aşağıdaki gibi olur:

$$v_o = (0)v_{cm} + \left(\frac{R_b}{R_a}\right)v_{dm}. \tag{5.31}$$

Görüldüğü gibi ideal fark yükselteci, girişin ortak modunu ortadan kaldırmakta ve yalnızca fark modunu yükseltmektedir. Yani A_{cm} katsayısı sıfırdır. v_a ve v_b yerine girişlerinde ortak ve fark modları bulunan fark yükselteci Şekil 5.14'te gösterilmiştir.



Şekil 5.14 ▲ Girişlerinde fark modu ve ortak mod bulunan fark yükselteci.

Eş. 5.30 fark yükseltecinin önemli bir işlevini ortaya koymaktadır. Pek çok uygulamada bilgi içeren sinyaller fark modunda iken ortak mod çoğunlukla gürültü bileşenlerini içerir. Örneğin, bir EKG elektrodu vücudun kalp akışını düzenlemek için ürettiği gerilimleri ölçer. Elektrodun ölçtüğü sinyaller, çevredeki ışık ve elektrik ekipmanları gibi diğer kaynaklar nedeniyle oluşan gürültü sinyallerine göre çok küçük genliğe sahiptir. Bu gürültü ölçülen gerilimin ortak modu olarak ortaya çıkar, kalp atışını sağlayan gerilim ise sinyalin fark modunu oluşturur. Yani ideal bir fark yükselteci ölçülmek istenen gerilimi yükseltirken gürültü sinyallerini de bastırır.

Fark Yükseltecinin Başarımının Ölçülmesi-Ortak Mod Bastırma Oranı

İdeal bir yükselteç, sıfır ortak mod kazancına ve sıfırdan farklı (genellikle büyük) fark modu kazancına sahiptir. İdeal ortak mod kazancına etki eden iki ana etmen bulunur. Bunlar, direnç uyuşmazlığı (Yeni Eş. 5.23'ün sağlanmaması) ve ideal olmayan op amp'tır (yani Eş. 5.20'nin sağlanmaması). Bu kısımda, direnç uyuşmazlığının fark yükseltecinin başarımına etkisi üzerinde durulacaktır.

R_a, R_b, R_c ve R_d dirençlerinin değerlerinin Eş. 5.23'ü sağlamadığı varsayılsın. Bunun yerine dirençler

$$\frac{R_a}{R_b} = (1 - \epsilon)\frac{R_c}{R_d}$$

şeklinde seçilsin. Burada ϵ çok küçük bir sayıdır ve direnç değerleri,

$$R_a = (1 - \epsilon)R_c \quad \text{ve} \quad R_b = R_d \tag{5.32}$$

veya

$$R_d = (1 - \epsilon)R_b \quad \text{ve} \quad R_a = R_c \tag{5.33}$$

denklem gruplarından birini sağlamaktadır. Eş. 5.33, Eş. 5.29'da yerine konulduğunda, direnç uyuşmazlığının, fark yükseltecinin ortak mod kazancı üzerindeki etkisi görülebilir. Elde edilen denklem A_{cm} için çözüldüğünde

$$A_{cm} = \frac{R_a(1 - \epsilon)R_b - R_aR_b}{R_a[R_a + (1 - \epsilon)R_b]} \tag{5.34}$$

$$= \frac{-\epsilon R_b}{R_a + (1 - \epsilon)R_b} \tag{5.35}$$

$$\approx \frac{-\epsilon R_b}{R_a + R_b} \tag{5.36}$$

ifadesine ulaşılır. ϵ çok küçük olduğundan $(1-\epsilon)$ yaklaşık 1'e eşittir ve Eş. 5.35 yaklaşık olarak Eş. 5.36'daki gibi yazılabilir. Direnç değerleri Eş. 5.23'ü sağlayacak şekilde seçildiğinde $\epsilon = 0$ olur ve Eş. 5.36'dan $A_{cm} = 0$ bulunur.

Eş. 5.33, Eş. 5.29'da yerine konulduğunda ve A_{dm} için çözüldüğünde, direnç uyuşmazlığının fark modu kazancı üzerindeki etkisi aşağıdaki gibi görülür.

$$A_{dm} = \frac{(1 - \epsilon)R_b(R_a + R_b) + R_b[R_a + (1 - \epsilon)R_b]}{2R_a[R_a + (1 - \epsilon)R_b]} \tag{5.37}$$

$$= \frac{R_b}{R_a}\left[1 - \frac{(\epsilon/2)R_a}{R_a + (1 - \epsilon)R_b}\right] \tag{5.38}$$

$$\approx \frac{R_b}{R_a}\left[1 - \frac{(\epsilon/2)R_a}{R_a + R_b}\right]. \tag{5.39}$$

Eş 5.39'da verilen yaklaşık ifadenin elde edilmesinde, A_{cm} için kullanılan yaklaşımın aynısı kullanılmıştır. Dirençler Eş. 5.23'teki gibi seçildiğinde $\epsilon = 0$ olacağından Eş. 39'dan $A_{dm} = R_b/R_a$ buluruz.

Ortak mod bastırma oranı (CMRR), fark yükseltecinin ideale ne kadar yakın olduğunu belirlemek için kullanılır. Fark modu kazancının ortak mod kazancına oranı olarak tanımlanır:

$$\text{CMRR} = \left|\frac{A_{dm}}{A_{cm}}\right|. \tag{5.40}$$

CMRR ne kadar büyük olursa yükselteç ideale o kadar yakındır. Direnç uyuşmazlığının CMRR üzerindeki etkisi Eş. 5.36 ve Eş. 5.39'un Eş. 5.40'ta yerine konulması ile görülebilir:

$$\text{CMRR} \approx \left|\frac{\frac{R_b}{R_a}[1 - (R_a\epsilon/2)/(R_a + R_b)]}{-\epsilon R_b/(R_a + R_b)}\right| \tag{5.41}$$

$$\approx \left|\frac{R_a(1 - \epsilon/2) + R_b}{-\epsilon R_a}\right| \tag{5.42}$$

$$\approx \left|\frac{1 + R_b/R_a}{-\epsilon}\right|. \tag{5.43}$$

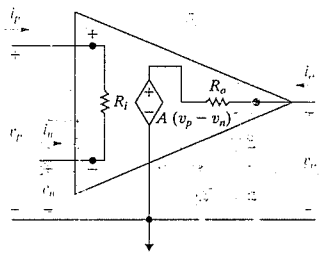
Eş. 5.43'ten de görüldüğü gibi fark yükseltecindeki dirençler uyumlu seçildiğinde $\epsilon = 0$ ve CMRR $= \infty$ olur. Dirençlerin uyumlu olmadığı durumda fark modu kazancı çok büyük seçilerek uyuşmazlığın CMRR üzerindeki etkisini azaltmak, yani CMRR'yi büyütmek mümkündür.

Ortak mod kazancının sıfır olmamasının diğer nedeni, ideal olmayan op amp'tır. Doğrusal çalışma bölgesindeyken, çıkış gerilimi ile girişler arasındaki ilişki $v_o = A\,(v_p - v_n)$ olduğundan, op amp'ın kendisi de bir fark yükselteci gibi davranır. İdeal olmayan op amp'ın çıkışı yalnızca girişleri arasındaki fark (fark modu girişi) ile doğru orantılı değildir, ortak mod sinyalleri de içerir. Fark yükseltecinde olduğu gibi, bileşik devre içerisindeki bileşenlerin uyuşmazlığı da op amp'ın davranışının ideal olmamasına neden olur. İdeal olmayan op amp'lar bu kitabın konuları dahilinde değildir, ancak bilinmelidir ki CMRR, op amp'ın ideale ne kadar yakın olduğunu belirlemek için de kullanılır. Gerçek uygulamalarda, CMRR op amp'ların değerlendirilmesinde kullanılan önemli bir ölçüttür.

NOT: Bu kısımdaki konuyu kavrayışınızı Bölüm Problemlerinden 5.32 ve 5.33'ü de çözmeyi deneyerek değerlendiriniz.

*Ortak mod bastırma oranı İngilizce karşılığı olan *common mode rejection ratio* sözcüklerinin kısaltılmış halidir.

5.7 Gerçekçi İşlemsel Yükselteç Modeli



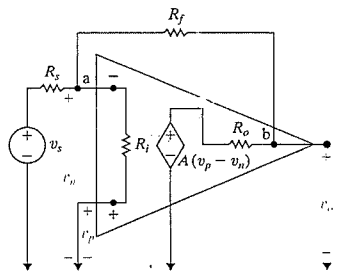
Şekil 5.15 ▲ İşlemsel yükseltecin eşdeğer devresi.

Bu bölümde, işlemsel yükseltecin doğrusal bölgedeki başarımını daha iyi tanımlayan gerçekçi bir model üzerinde durulacaktır. Bu model, ideal op amp modelinden üç ana unsur ile ayrılır: (1) sonlu iç direnç R_i; (2) sonlu açık devre kazancı A ve (3) sıfırdan farklı çıkış direnci R_o. Daha gerçekçi olan bu model Şekil 5.15'te gösterilmiştir.

Şekil 5.15'te verilen eşdeğer devrenin kullanılması Eş. 5.2'de verilen $v_n = v_p$ ve Eş. 5.3'te verilen $i_n = i_p = 0$ varsayımlarının geçersiz olduğu anlamına gelir. Çıkış direnci R_o sıfırdan farklı olduğundan Eş. 5.1 de geçerli değildir. Konuya tersten yaklaşıldığında eşdeğer devre daha iyi anlaşılabilir. $R_i \to \infty$, $A \to \infty$ ve $R_o \to 0$ olduğunda eşdeğer devre ideal modele indirgenir. μA741 işlemsel yükselteci için R_i, A ve R_o'nun tipik değerleri sırasıyla 2M Ω, 105 ve 75 Ω'dur.

R_i ve R_o dirençlerinin varlığı op amp içeren devrelerin analizini zorlaştırıyor gibi görünse de, bu analizlerin anlaşılması oldukça kolaydır. Örnek teşkil etmesi açısından eviren ve evirmeyen yükselteç devreleri Şekil 5.15'te görülen eşdeğer devre kullanılarak analiz edilecektir. İlk olarak eviren yükselteç devresi incelenecektir.

Gerçekçi İşlemsel Yükselteç Modeli Kullanarak Eviren Yükselteç Devresi Analizi



Şekil 5.16 ▲ Eviren yükselteç devresi.

Şekil 5.15'te verilen eşdeğer devre kullanılarak oluşturulan eviren yükselteç devresi Şekil 5.16'da görülmektedir. Daha önce de olduğu gibi burada da amaç, çıkış gerilimi v_o'yu kaynak gerilimi v_s'nin bir fonksiyonu olarak ifade etmektir. İki farklı düğüm gerilimi denklemi yazarak bunların v_o için çözülmesi ile istenen ifadeye ulaşılabilir. Bu iki düğüm Şekil 5.16'da a ve b olacak işaretlenmiştir. Evirmeyen girişteki kısa devre bağlantısı nedeniyle $v_p = 0$'dır. Düğüm gerilim denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{v_n - v_s}{R_s} + \frac{v_n}{R_i} + \frac{v_n - v_o}{R_f} = 0, \tag{5.44}$$

$$\frac{v_o - v_n}{R_f} + \frac{v_o - A(-v_n)}{R_o} = 0. \tag{5.45}$$

Cramer yöntemi kullanılarak v_o'nun elde edilebilmesi için Eş. 5.44 ve Eş. 5.45 aşağıdaki gibi yeniden düzenlenir.

$$\left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_f}\right)v_n - \frac{1}{R_f}v_o = \frac{1}{R_s}v_s, \tag{5.46}$$

$$\left(\frac{A}{R_o} - \frac{1}{R_f}\right)v_n + \left(\frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_o}\right)v_o = 0. \tag{5.47}$$

Bu denklemler v_o için çözüldüğünde,

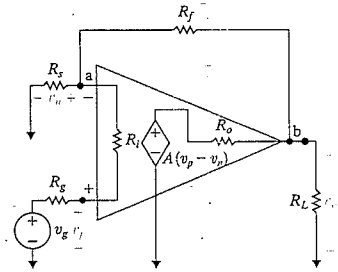
$$v_o = \frac{-A + (R_o/R_f)}{\frac{R_s}{R_f}\left(1 + A + \frac{R_o}{R_i}\right) + \left(\frac{R_s}{R_i} + 1\right) + \frac{R_o}{R_f}} v_s. \tag{5.48}$$

sonucuna ulaşılır. $R_o \to 0$, $R_i \to \infty$ ve $A \to \infty$ varsayımları yapıldığında Eş. 548 Eş. 5.10'a indirgenir. Şekil 5.16'da verilen eviren yükseltecin çıkışına bir R_L yük direnci bağlandığında, v_o ile v_s arasındaki ilişki aşağıdaki gibi olur.

$$v_o = \frac{-A + (R_o/R_f)}{\frac{R_s}{R_f}\left(1 + A + \frac{R_o}{R_i} + \frac{R_o}{R_L}\right) + \left(1 + \frac{R_o}{R_L}\right)\left(1 + \frac{R_s}{R_i}\right) + \frac{R_o}{R_f}} v_s. \tag{5.49}$$

Gerçekçi İşlemsel Yükselteç Modeli Kullanarak Evirmeyen Yükselteç Devresi Analizi

Şekil 5.15'te verilen eşdeğer devre kullanılarak oluşturulan evirmeyen yükselteç devresi Şekil 5.17'de gösterilmiştir. R_g direnci ile seri bağlanan v_g gerilim kaynağı, sinyal kaynağını ifade eder. Yükseltece bağlı yük R_L ile ifade edilmiştir. Burada amaç v_o'yu v_g cinsinden ifade etmektir. Bunun için a ve b düğüm noktalarında düğüm gerilim denklemleri yazılmalıdır. a noktasındaki denklem



Şekil 5.17 ▲ Evirmeyen yükselteç devresi.

$$\frac{v_n}{R_s} + \frac{v_n - v_g}{R_g + R_i} + \frac{v_n - v_o}{R_f} = 0, \tag{5.50}$$

b noktasındaki denklem ise

$$\frac{v_o - v_n}{R_f} + \frac{v_o}{R_L} + \frac{v_o - A(v_p - v_n)}{R_o} = 0 \tag{5.51}$$

bulunur. R_g ve R_i dirençleri üzerindeki akımlar aynı olduğundan

$$\frac{v_p - v_g}{R_g} = \frac{v_n - v_g}{R_i + R_g} \tag{5.52}$$

yazılabilir.

Eş. 5.52'den v_p için bulunacak ifade Eş. 5.51'de yerine konulduğunda v_n ve v_g gerilimlerini içeren iki denklem

$$v_n\left(\frac{1}{R_s}+\frac{1}{R_g+R_i}+\frac{1}{R_f}\right)-v_o\left(\frac{1}{R_f}\right)=v_g\left(\frac{1}{R_g+R_i}\right), \quad (5.53)$$

$$v_n\left[\frac{AR_i}{R_o(R_i+R_g)}-\frac{1}{R_f}\right]+v_o\left(\frac{1}{R_f}+\frac{1}{R_o}+\frac{1}{R_L}\right)$$

$$=v_g\left[\frac{AR_i}{R_o(R_i+R_g)}\right] \quad (5.54)$$

olarak elde edilir. Bu denklemler v_o için çözüldüğünde

$$v_o=\frac{[(R_f+R_s)+(R_sR_o/AR_i)]v_g}{R_s+\frac{R_o}{A}(1+K_r)+\frac{R_fR_s+(R_f+R_s)(R_i+R_g)}{AR_i}} \quad (5.55)$$

ifadesine ulaşılır. Burada

$$K_r=\frac{R_s+R_g}{R_i}+\frac{R_f+R_s}{R_L}+\frac{R_fR_s+R_fR_g+R_gR_s}{R_iR_L}$$

ile verilir. $R_o \to 0$, $A \to \infty$ olduğunda Eş. 5.55'in Eş. 5.18'e indirgendiği görülmektedir. Evirmeyen yükseltecin yüksüz olduğu durumda ($R_L=\infty$) Eş. 5.55

$$v_o=\frac{[(R_f+R_s)+R_sR_o/AR_i]v_g}{R_s+\frac{R_o}{A}\left(1+\frac{R_s+R_g}{R_i}\right)+\frac{1}{AR_i}[R_fR_s+(R_f+R_s)(R_i+R_g)]}. \quad (5.56)$$

biçiminde sadeleşir. Görüldüğü gibi K_r değişkeni de $(R_s+R_g)/R_i$ halinde sadeleşmiştir.

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 3- Gerçekçi op amp modelini anlamak

5.6 Şekilde görülen devredeki eviren yükseltecin giriş direnci 500 kΩ, çıkış direnci 5 kΩ, açık devre kazancı ise 300,000'dir. Yükseltecin doğrusal bölgede çalıştığı varsayılmaktadır.

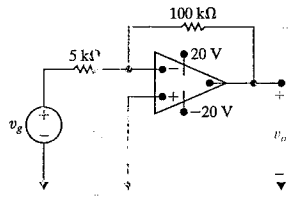
a) Yükseltecin gerilim kazancını (v_o/v_g) hesaplayınız.

b) $v_g = 1$ V olduğunda v_n değerini mikrovolt cinsinden hesaplayınız.

c) Sinyal kaynağı (v_g) tarafından görülen direnci hesaplayınız.

d) (a), (b), (c) şıklarını ideal işlemsel yükselteç modeli kullanarak tekrarlayınız.

Cevap: (a) −19/.9985; (b) 69.995 μV; (c) 5000.35 Ω; (d) −20.0 μV, 5 kΩ.



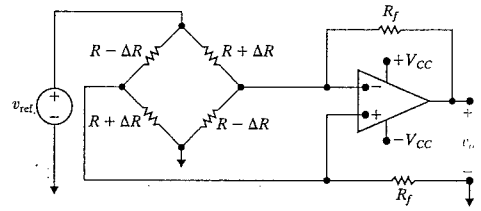
NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 5.42 ve 5.43'ü de çözmeyi deneyiniz.

Pratik Bakış Açısı

Gerinim Ölçerler

Dış kuvvetlerin etkisi altında olduğunda bükülen, esneyen veya eğilen yapılar tasarlayan mühendisler için, elastik katılarda meydana gelen biçim değişiklikleri oldukça önemli bir konudur. Bir uçak gövdesi, elastik gerinimin mühendisler tarafından dikkatle ele alınması gereken yapılara önemli bir örnektir. Gerinim ölçerlerin doğru biçimde kullanılabilmesi için ölçerin fiziksel yapısı, ölçüm yapılan yapıya uygulanacak kuvvetlere göre olan yönelimi hakkında ayrıntılı bilgi sahibi okunması gerekir. Kısacası gerinim ölçerler mühendislik uygulamalarında oldukça önemli bir yere sahiptir ve doğru kullanılabilmeleri açısından elektrik devreleri bilgisi çok önemlidir.

Bu bölümün başında tarif edilene benzer bir gerinim ölçerdeki direnç değişikliğini ölçmekte kullanılabilecek bir devre, Şekil 5.18'de görülmektedir.



Şekil 5.18 Gerinim ölçer direncindeki değişikliği ölçmek için kullanılan op amp devresi.

Görüldüğü gibi bu devre önceki kısımlardan tanıdığımız fark yükselteci-dir. Gerinim ölçer köprüsü, farkları yükseltilen iki gerilimi sağlamaktadır. Çubuk eğildiğinde boyları uzayan gerinim ölçer çiftinin değerleri $R + \Delta R$ iken, kısayan çiftin değerleri $R - \Delta R$'dir. Bu devre, çıkış gerilimi v_o ile dirençteki değişim yani ΔR arasındaki ilişkiyi bulmak üzere analiz edilecektir.

Öncelikle op amp'ın ideal olduğu varsayılacaktır. Eviren ve evirmeyen giriş terminallerinde Kirchhoff akım kuralı denklemleri yazıldığında

$$\frac{v_{\text{ref}} - v_n}{R + \Delta R} = \frac{v_n}{R - \Delta R} + \frac{v_n - v_o}{R_f}, \tag{5.57}$$

$$\frac{v_{\text{ref}} - v_p}{R - \Delta R} = \frac{v_p}{R + \Delta R} + \frac{v_p}{R_f} \tag{5.58}$$

ifadeleri elde edilir. Eş. 5.58 yeniden düzenlenerek evirmeyen terminaldeki gerinim için aşağıdaki ifade bulunur.

$$v_p = \frac{v_{\text{ref}}}{(R - \Delta R)\left(\dfrac{1}{R + \Delta R} + \dfrac{1}{R - \Delta R} + \dfrac{1}{R_f}\right)}. \tag{5.59}$$

Çoğunlukla olduğu gibi op amp'ın ideal bölgede çalıştığı varsayılmaktadır. Yani $v_p = v_n$ olduğundan Eş. 5.59'daki ifade aynı zamanda v_n'yi de vermektedir. Dolayısıyla, Eş. 5.57'de v_n yerine Eş. 5.59'daki denklemin sağ tarafı koyularak v_o için çözülebilir. Gerekli işlemlerden sonra v_o;

$$v_o = \frac{R_f(2\Delta R)}{R^2 - (\Delta R)^2} v_{\text{ref}} \tag{5.60}$$

olarak bulunur. Gerinim ölçer dirençlerinde meydana gelen değişiklikler çok küçük yani $(\Delta R)^2 << R^2$ olduğundan $R^2 - (\Delta R)^2 \approx R^2$ varsayılabilir. Böylece Eş. 5.60

$$v_o \approx \frac{R_f}{R} 2\delta v_{\text{ref}} \tag{5.61}$$

biçimini alır. Burada $\delta = \Delta R/R$ ile verilmektedir.

NOT: Bu pratik bakış açısında öğrendiklerinizi Bölüm Problemi 5.48'i çözmeyi deneyerek değerlendiriniz.

Özet

- İdeal op amp'ın gerilim aktarım karakteristiğini tanımlayan denklem

$$v_o = \begin{cases} -V_{CC}, & A(v_p - v_n) < -V_{CC}, \\ A(v_p - v_n), & -V_{CC} \le A(v_p - v_n) \le +V_{CC} \\ +V_{CC}, & A(v_p - v_n) > +V_{CC}, \end{cases}$$

biçimindedir. Burada A, açık döngü kazancı olarak bilinen oransal bir katsayıdır. V_{CC} güç kaynağı gerilimlerini ifade etmektedir. (Bkz. Sf. 157.)

- Op amp'ın çıkışı ile eviren girişi arasına konulan bir geribesleme, op amp'ın çıkışını doğrusal çalışma bölgesinde kalacak şekilde kısıtlayabilir. Bu bölgede çıkış gerilimi $v_o = A(v_p - v_n)$ ile ifade edilir. (Bkz. Sf. 157.)
- Op amp doğrusal bölgede çalışacak şekilde kısıtlandığında, V_{CC} ve A'nın tipik değerleri için bir gerilim kısıtı bulunur. İdeal modellerde kısıtları kullanıldığında, yani A sonsuz kabul edildiğinde, ideal op amp modelini temsil eden gerilim kısıtı

$$v_p = v_n$$

şeklindedir. (Bkz. Sf. 158.)

- İdeal op amp devresinin giriş direnci sonsuz olduğundan, ideal op amp modelinde bir de akım kısıtı bulunmaktadır. Bu kısıt

$$i_p = i_n = 0$$

biçimindedir. (Bkz. Sf. 159.)

- Bu bölümde hem basit ideal op amp modeli, hem de daha gerçekçi bir model ele alınmıştır. Bu iki model arasındaki farklar şöyledir:

Basitleştirilmiş Model	Gerçekçi Model
Sonsuz giriş direnci	Sonlu giriş direnci
Sonsuz açık döngü kazancı	Sonlu açık döngü kazancı
Sıfır çıkış direnci	Sıfırdan farklı çıkış direnci

Bkz. Sf. 170.)

- Eviren yükselteç, girişin evirilmiş ve ölçeklendirilmiş halini çıkışa veren bir op amp devresidir. (Bkz. Sf. 161.)
- Toplayan yükselteç, giriş gerilimlerinin toplamını ölçeklendirerek çıkışa veren bir op amp devresidir. (Bkz. Sf. 163.)
- Evirmeyen yükselteç, giriş gerilimini ölçeklendirerek çıkışa veren bir op amp devresidir. (Bkz. Sf. 164.)
- Fark yükselteci, giriş gerilimleri arasındaki farkı ölçeklendirerek çıkışa veren bir op amp devresidir. (Bkz. Sf. 165.)
- Fark yükseltecinin girişleri kullanılarak ortak mod ve fark modu giriş gerilimleri v_{cm} ve v_{dm} hesaplanabilir. Fark yükseltecinin çıkışı

$$v_o = A_{cm}v_{cm} + A_{dm}v_{dm}$$

olarak ifade edilebilir. Burada A_{cm} ortak mod kazancı, A_{dm} ise fark modu kazancıdır. (Bkz. Sf. 167.)

- İdeal fark yükseltecinde $A_{cm} = 0$'dır. Fark yükseltecinin ideale ne kadar yakın olduğunu ölçmek için ortak mod bastırma oranı (CMRR) kullanılır:

$$\text{CMRR} = \left|\frac{A_{dm}}{A_{cm}}\right|.$$

İdeal fark yükseltecinin ortak mod bastırma oranı sonsuzdur. (Bkz. Sf. 169.)

Problemler

Kısım 5.1 ve 5.2

5.1 PSPICE Şekil P5.1'de görülen op amp idealdir.

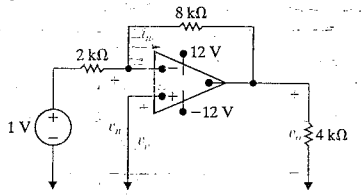
a) Beş op amp terminalini gösteriniz.

b) i_n değerini hangi ideal op amp kısım belirler? Bu değer nedir?

c) $(v_p - v_n)$ değerini hangi ideal op amp kısıtı belirler? Bu değer nedir?

d) v_o'yu hesaplayınız.

Şekil P5.1



5.2 PSPICE Şekil P5.2'de verilen op amp idealdir.

a) $v_a = 1.5$ V ve $v_b = 0$ V ise v_o'yu hesaplayınız.

b) $v_a = 3$ V ve $v_b = 0$ V ise v_o'yu hesaplayınız.

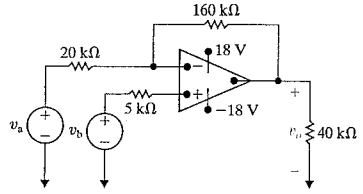
c) $v_a = 1$ V ve $v_b = 2$ V ise v_o'yu hesaplayınız.

d) $v_a = 4$ V ve $v_b = 2$ V ise v_o'yu hesaplayınız.

e) $v_a = 6$ V ve $v_b = 8$ V ise v_o'yu hesaplayınız.

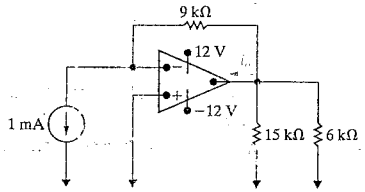
f) $v_b = 4.5$ V ise yükselteçin doyuma oluşmaması için v_a hangi aralıkta olmalıdır?

Şekil P5.2



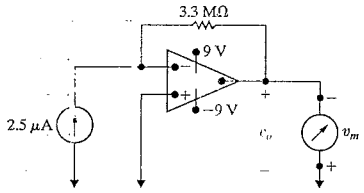
5.3 PSPICE Şekil P5.3'teki op amp ideal ise i_o'yu hesaplayınız.

Şekil P5.3



5.4 PSPICE Şekil P5.4'te verilen devrede çıkış gerilimi, göstergesi 10 V olan bir voltmetre ile ölçülmektedir. Voltmetrede okunan değer nedir? Op amp'ın ideal olduğunu varsayınız.

Şekil P5.4



5.5 PSPICE Şekil P5.5'teki op amp idealdir. Aşağıdaki değerleri hesaplayınız.

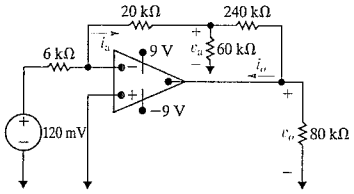
a) v_a

b) v_o

c) i_a

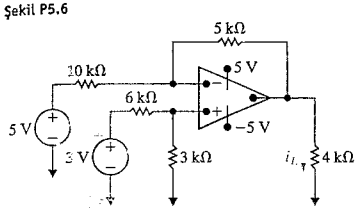
d) i_o

Şekil P5.5



5.6 PSPICE Şekil P.5.6'daki i_L akımını mikroamper cinsinden bulunuz.

Şekil P5.6

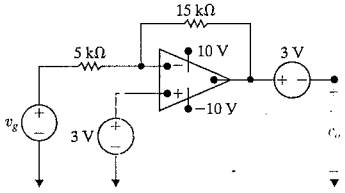


5.7 PRATİK BİR BAKIŞ PSPICE Bir devre tasarımcısı Şekil P5.7'de verilen devrenin, v_g 0 ve 6 V arasında değişirken çıkış gerilimin ±9V aralığında olacağını iddia ediyor. Op amp'ın ideal olduğunu varsayınız.

a) $0 \le v_g \le 6$ V aralığında çıkış gerilimini v_o'nun v_g'ye karşı grafiğini çiziniz.

b) Tasarımcının iddiasına katılıyor musunuz?

Şekil P5.7



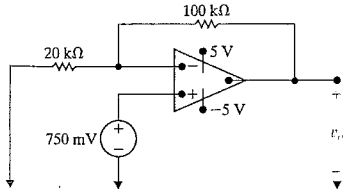
Kısım 5.3

5.8 PSPICE Şekil P5.8'deki op amp idealdir.

a) Bu op amp devresi hangi yapıdadır?

b) v_o'yu hesaplayınız.

Şekil P5.8



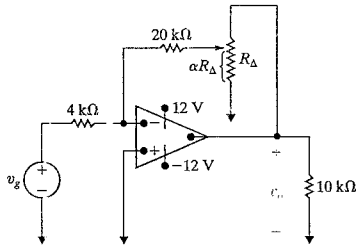
5.9 TASARIM PROBLEMİ a) Kazancı 4 olan ideal bir op amp kullanarak bir eviren yükselteç devresi tasarlayınız. Yalnızca 10 kΩ'luk dirençler kullanınız.

b) (a) şıkkında tasarlanan yükselteç ile 2.5 V'luk bir giriş sinyalini yükseltmek için kullanabileceğiniz en küçük güç kaynağı sinyalleri nedir?

5.10 PSPICE a) Şekil 5.10'da görülen op amp idealdir. Ayarlanabilir direnç R_Δ'nın en büyük değeri 120 kΩ'dur. α değişkeni $0.25 \le \alpha \le 0.8$ aralığındadır. $v_g = 40$ V ise v_o hangi aralıktadır?

b) α parametresi kısıtlanmadığında, hangi α değeri için yükselteç doyuma ulaşır?

Şekil P5.10

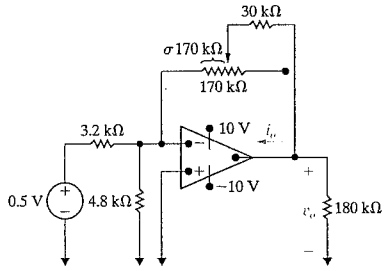


5.11 PSPICE Şekil P5.11'deki op amp idealdir.

a) Yükseltecin doyuma ulaşmaması için σ hangi aralıkta olmalıdır?

b) $\sigma = 0.12$ için i_o'yu mikroamper cinsinden hesaplayınız.

Şekil P5.11



Kısım 5.4

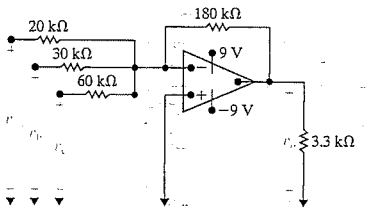
5.12 PSPICE Şekil P5.12'deki op amp idealdir.

a) Şekilde görülen devre hangi yapıdadır?

b) $v_a = 0.5$ V, $v_b = 1.5$ V ve $v_c = -25$ V için v_o'yu bulunuz.

c) $v_a = 0.5$ ve $v_b = 1.5$ V olduğunda op amp'ın doğrusal bölgede çalışabilmesi için v_c hangi aralıkta olmalıdır?

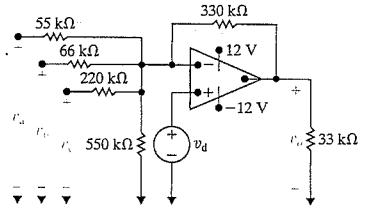
Şekil P5.12



5.13 PSPICE a) Şekil P5.13'te verilen op amp idealdir. $v_a = 16$ V, $v_b = 12$ V, $v_c = -6$ V ve $v_d = 10$ V ise v_o'yu bulunuz.

b) v_o, v_c ve v_d'nin değerleri (c) şıkkındaki gibidir. Op amp'in doğrusal bölgede çalışabilmesi için v_c hangi aralıkta olmalıdır?

Şekil P5.13



5.14 PSPICE Şekil P5.13'teki 330 kΩ'luk direnç R_f değişken direnci ile değiştirilir, v_a, v_b, v_c, v_d değerleri Problem 5.13'teki gibi olursa,

a) R_f'nin hangi değeri için yükselteç doyuma ulaşır? ($0 \le R_f < \infty$)

b) R_f (a) şıkkında hesaplanan değeri aldığında op amp'ın çıkış terminali üzerindeki akım mikroamper cinsinden ne olur?

5.15 TASARIM PROBLEMİ PSPICE Çıkışı aşağıdaki gibi olan toplayan yükselteç devresi tasarlayınız.

$$v_o = -(3v_a + 5v_b + 4v_c + 2v_d).$$

R_f geribesleme direnci 60 kΩ seçilirse ortaya çıkan devre şemasını çiziniz, R_a, R_b, R_c ve R_d değerlerini belirtiniz.

5.16 PSPICE Şekil 5.11'de verilen devredeki op amp idealdir. $R_a = 4$ kΩ, $R_b = 5$ kΩ, $R_c = 20$ kΩ, $v_a = 200$ mV, $v_b = 150$ mV, $v_c = 400$ mV ve $V_{CC} = \pm 6$ V ise op amp'ın doğrusal bölgede çalışabilmesi için R_f hangi aralıkta olmalıdır?

Kısım 5.5

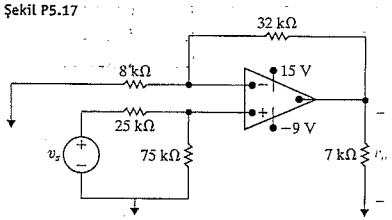
5.17 Şekil P5. 17'deki op amp idealdir.

a) Şekilde görülen devre hangi yapıdadır.

b) v_o'yu v_s cinsinden bulunuz.

c) v_o'nun doyuma ulaşmaması yani op amp'ın doğrusal bölgede kalması için v_s hangi değerler arasında olmalıdır?

Şekil P5.17



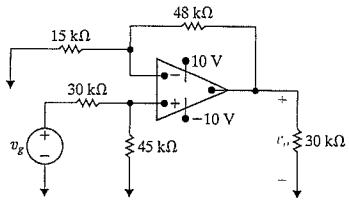
5.18 Şekil P5.18'de görülen op amp idealdir.

a) $v_g = 3$ V ise v_o nedir?

b) Op amp'ın doğrusal bölgede çalışması için v_g hangi aralıkta olmalıdır?

c) $v_g = 5$ V iken 48 kΩ'luk direnç değişken bir dirençle değiştirilirse, bu değişken direncin hangi değeri op amp'ın çıkışını doyuma ulaştırır?

Şekil P5.18



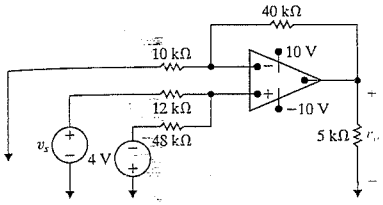
5.19 PSPICE Şekil P5.19'da görülen op amp idealdir.

a) Bu devre hangi yapıdadır?

b) v_o'yu v_s cinsinden bulunuz.

c) v_o'nun doyuma ulaşmaması ve op amp'ın doğrusal çalışma bölgesinde kalması için v_s hangi değerler arasında olmalıdır?

Şekil P5.19



5.20 PSPICE Şekil P5.20'de verilen op amp idealdir. $v_a = 500$ mV ve $v_b = 1200$ mV'tur

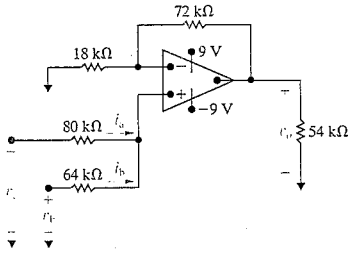
a) Bu devre hangi yapıdadır?

b) v_o'yu volt cinsinden bulunuz.

c) i_a ve i_b'yi mikroamper cinsinden hesaplayınız.

d) v_a ve v_b'nin ağırlıklandırma katsayıları kaçtır?

Şekil P5.20

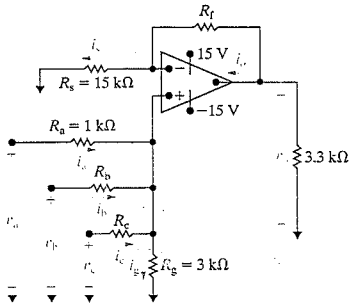


5.21 PSPICE Şekil P5.21'de görülen evirmeyen toplayan yükselteçteki op amp idealdir.

a) $v_o = 6v_a + 3v_b + 4v_c$ denklemi sağlayan R_f, R_b ve R_c değerlerini bulunuz.

b) $v_a = 0.5$ V, $v_b = 2.2$ V ve $v_c = 1$ V ise (c) şıkkında bulunan R_f, R_b ve R_c değerlerini kullanarak i_a, i_b, i_c, i_g ve i_s akımlarını mikroamper cinsinden hesaplayınız.

Şekil P5.21



5.22 TASARIM PROBLEMİ PSPICE Şekil P5.22'de bir evirmeyen toplayan yükselteç devresi gösterilmektedir. Op amp'ın ideal olduğunu varsayarak

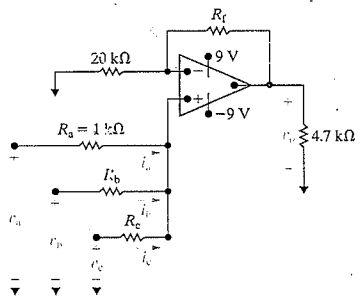
$$v_o = 4v_a + v_b + 2v_c$$

denklemini sağlayacak bir devre tasarlayınız.

a) R_b, R_c ve R_f değerlerini belirtiniz.

b) $v_a = 0.75$ V, $v_b = 1$ V ve $v_c = 1.5$ V ise (a) şıkkında bulunan R_b, R_c ve R_f değerlerini kullanarak i_a, i_b ve i_c akımlarını mikroamper cinsinden hesaplayınız.

Şekil P5.22



Kısım 5.6

5.23 PSPICE a) Üst üste bindirme ilkesini kullanarak Eş. 5.22'yi çıkarınız.

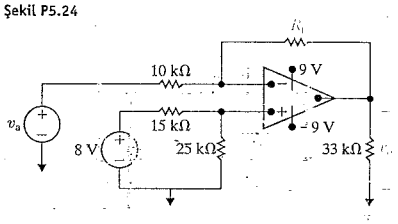
b) Eş. 5.23 ve Eş. 5.24'ü çıkarınız.

5.24 PSPICE Şekil P5.24'teki op amp idealdir. Bu devrede, hangi R_f değeri için

$$v_o = 15 - 2v_a$$

denklemi sağlanır?

Şekil P5.24

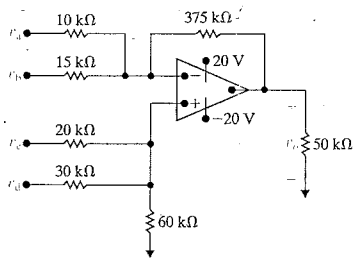


5.25 PSPICE Şekil P5.25'teki toplama çıkarma devresinde kullanılan op amp idealdir.

a) $v_a = 0.4$ V, $v_b = 0.8$ V, $v_c = 0.2$ V ve $v_d = 0.6$ ise v_o kaçtır?

b) v_a, v_c ve v_d değerleri sabit tutulduğunda hangi v_b değeri için op amp'ın çıkışı doyuma ulaşır?

Şekil P5.25



5.26 PSPICE Şekil P5.26'da görülen fark yükselteç devresinde $R_a = 20$ kΩ, $R_b = 80$ kΩ, $R_c = 47$ k Ω ve $R_d = 33$ kΩ'dur. v_a ve v_b değerleri sırasıyla 0.45 ve 0.9 V, V_{CC} ise ±9 V'tur.

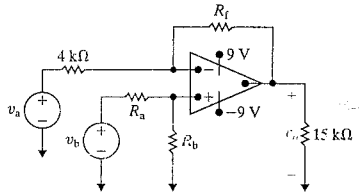
a) v_o'yu bulunuz.

b) Sinyal kaynağı v_a tarafından görülen direnç nedir?

c) Sinyal kaynağı v_b tarafından görülen direnç nedir?

5.27 TASARIM PROBLEMİ PSPICE Şekil P5.27'de verilen fark yükseltecini, $v_o = 7.5(v_b - v_a)$ ve gerilim kaynağı v_b'nin gördüğü direnç 170 kΩ olacak şekilde tasarlayınız. R_a, R_b ve R_f değerlerini belirtiniz. İdeal op amp modeli kullanınız.

Şekil P5.25

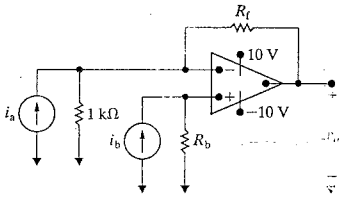


5.28 TASARIM PROBLEMİ PSPICE Şekil P5,28'de görülen devrede

$$v_o = 4000(i_b - i_a)$$

denkleminin sağlanabilmesi için R_b ve R_f kaç olmalıdır? Op amp idealdir.

Şekil P5.28



5.29 TASARIM PROBLEMİ PSPICE Şekil 5.13'te görülen fark yükseltecinde, $v_o = 0$ iken sinyal kaynağı v_b tarafından görülen direnç 600 kΩ, v_a tarafından görülen direnç ise 18 kΩ'dur. $v_o = 2v_b - 5v_c$ denkleminin sağlanması için R_a, R_b, R_c ve R_d değerleri ne olmalıdır?

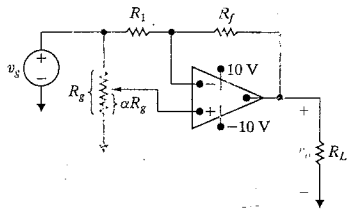
5.30 Şekil P5.30'da görülen op amp idealdir.

a) $R_f = 4R_1$ ve $v_g = 2$ V iken α'ya karşı v_o'yu çiziniz. α'yı her adımda 0.1 arttırınız. α değişkeni $0 \le \alpha \le 1.0$ aralığındadır.

b) (a) şıkkında çizdiğiniz doğrunun denklemini yazınız. Doğrunun eğimi ve eksenleri kestiği noktalar ile v_g ve R_f/R_1 arasında nasıl bir bağlantı vardır?

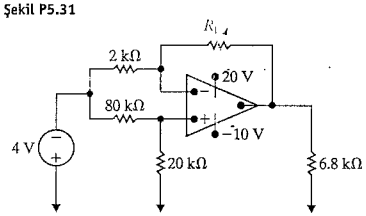
c) (b) şıkkında bulunduğunuz sonuçları kullanarak $v_o = -6\alpha + 4$ olacak şekilde v_g ve R_f/R_1 değerlerini seçiniz.

Şekil P5.30



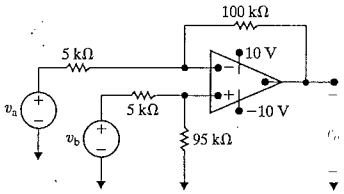
5.31 PSPICE Şekil P5.31'de görülen devrede R_f direnci, ideal op amp doyuma ulaşacak şekilde ayarlanmıştır. R_f değerini kiloohm cinsinden bulunuz.

Şekil P5.31



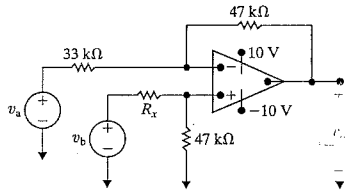
5.32 Şekil P5.32'de görülen fark yükseltecinde (a) fark modu kazancını, (b) ortak mod kazancını, ve (c) CMRR'yi hesaplayınız.

Şekil P5.32



5.33 Şekil P5.33'teki fark yükseltecinde, CMRR ≥ 750 olması için R_x hangi aralıkta olmalıdır?

Şekil P5.33



Kısım 5.1 – 5.6

5.34 a) Şekil P5.34'te görülen ideal op amp doğrusal bölgede çalıştığında

$$i_a = \frac{3v_g}{R}$$

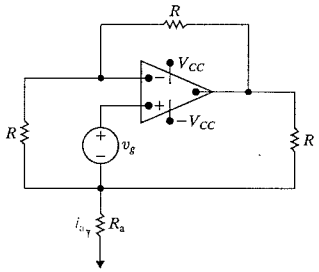
olduğunu gösteriniz.

b) İdeal op amp'ın

$$R_a = \frac{R(\pm V_{CC} - 2v_g)}{3v_g}$$

olduğunda doyuma ulaşacağını gösteriniz.

Şekil P5.34



5.35 PSPICE Şekil P5.35'te görülen devredeki taralı alan, R_L belirli bir aralıktayken sabit bir akım kaynağıdır.

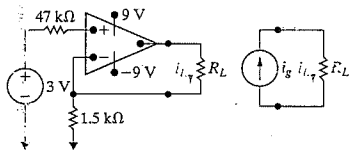
a) $R_L = 2.5$ kΩ iken i_L nedir?

b) i_L'nin (a) şıkkında bulunan değeri alabilmesi için R_L'nin alabileceği en büyük değer nedir?

c) $R_L = 6.5$ kΩ iken devrenin nasıl çalıştığını anlatınız. Tüm çalışma koşulları için $i_n = i_p \approx 0$ kabul edilebilir.

d) $0 \le R_L \le 6.5$ kΩ aralığında R_L'ye karşı i_L grafiğini çiziniz.

Şekil P5.35

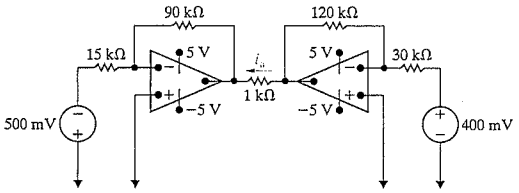


5.36 PSPICE Şekil P5.36'daki op amp'lar idealdir.

a) i_a'yı bulunuz.

b) i_a'yı sıfır yapan sağdaki gerilim kaynağı değerini bulunuz.

Şekil P5.36



5.37 PSPICE Şekil P5.37'de görülen ideal op amp doğrusal bölgede çalışmaktadır.

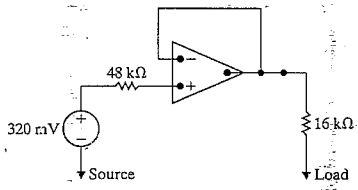
a) 16 kΩ direnceye aktarılan gücü hesaplayınız.

b) Op amp'ın devreden çıkarıldığı, yani 16 kΩ'luk direncin gerilim kaynağı ve 48 kΩ'luk direnceye seri bağlandığı durum için (a) şıkkını tekrarlayınız.

c) (a) ve (b) şıklarında bulunan güçlerin oranını bulunuz.

d) Kaynak ile yük arasına op amp konmasının bir yararı var mıdır? Açıklayınız.

Şekil P5.37



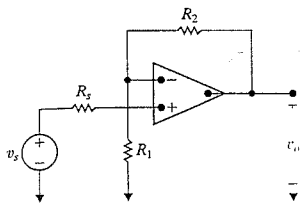
5.38 Şekil P5.38'deki devrede görülen ideal op amp doğrusal bölgede çalışmaktadır.

a) $v_o = [(R_1 + R_2)/R_1]\, v_s$ olduğunu gösteriniz.

b) $R_1 \to \infty$ ve $R_2 \to 0$ ise ne olur?

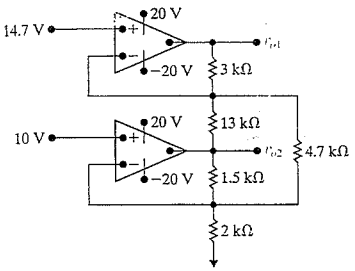
c) $R_1 = \infty$ ve $R_2 = 0$ olduğunda bu devreye neden gerilim izleyici dendiğini açıklayınız.

Şekil P5.38



5.39 PSPICE Şekil P5.39'da verilen op amp'lar idealdir. v_{o1} ve v_{o2}'yi hesaplayınız.

Şekil P5.39



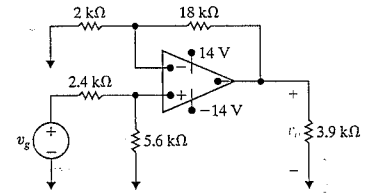
5.40 PSPICE Şekil P5.40'ta görülen devredeki v_g sinyal gerilimi

$$v_g = 0, \qquad t \le 0,$$

$$v_g = 4\sin(5\pi/3)t \text{ V}, \qquad 0 \le t \le \infty$$

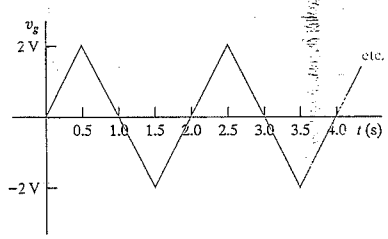
denklemleriyle ifade edilmektedir. Op amp'ın ideal olduğunu varsayarak t'ye karşılık v_o'yu çiziniz.

Şekil P5.40

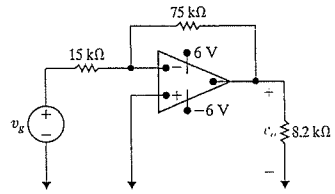


5.41 PSPICE Şekil P5.41(a)'da görülen v_g gerilimi Şekil P5.41(b)'deki eviren yükseltece uygulanmaktadır. Op amp'ın ideal olduğunu varsayarak t'ye karşı v_o grafiğini çiziniz.

Şekil P5.41



(a)



(b)

Kısım 5.7

5.42 PSPICE Eviren yükseltece 500 Ω'luk bir yük bağlandığını düşünerek Değerlendirme Problemi 6'yı tekrarlayınız.

5.43 PSPICE Şekil P5.43'teki evirmeyen yükselteç devresindeki op amp'ın giriş direnci 440 Ω, çıkış direnci 5 kΩ ve açık döngü kazancı ise 100.000'dir. Op amp doğrusal bölgede çalışmaktadır.

a) Gerilim kazancı v_o/v_g'yi hesaplayınız.

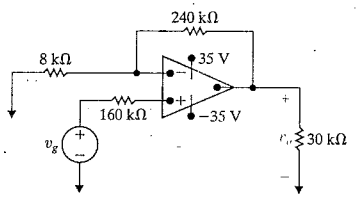
b) $v_g = 1$ V olduğunda eviren ve evirmeyen giriş gerilimleri v_n ve v_p'yi milivolt cinsinden bulunuz.

c) $v_g = 1$ V iken $v_p - v_n$ gerilim farkını mikrovolt cinsinden bulunuz.

d) $v_g = 1$V iken sinyal kaynağı v_g tarafından çekilen akımı picoamper cinsinden bulunuz.

e) Yukarıdaki şıkları ideal op amp için tekrarlayınız.

Şekil P5. 43

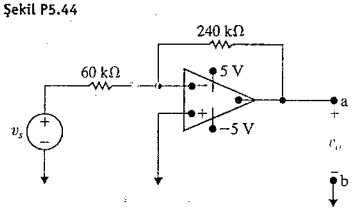


5.44 PSPICE a) Şekil P5.44'teki eviren yükseltec devresinin a ve b noktalarına göre Thévenin eşdeğerini bulunuz. DC sinyal kaynağı 150 mV, op amp'ın giriş direnci 50 kΩ, çıkış direnci 750 Ω, açık döngü kazancı 50,000'dir.

b) Eviren yükseltecin çıkış direnci kaçtır?

c) a ve b terminalleri arasına 150 Ω'luk yük bağlandığında sinyal kaynağı v_s'nin gördüğü direnç ne kadardır?

Şekil P5.44



5.45 PSPICE Op amp'ın ideal olduğunu varsayarak 5.44'ü tekrarlayınız.

5.46 PSPICE Şekil P5.46'daki op-amp'ın giriş direncinin sonsuz, çıkış direncinin ise sıfır olduğunu varsayınız.

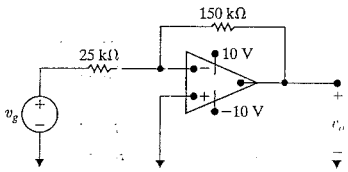
a) v_o'yu, v_g'nin ve açık döngü kazancı A'nın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

b) $v_g = 0.5$ V ve $A = 150$ ise v_o nedir?

c) $v_g = 0.5$ V ve $A = \infty$ ise v_o nedir?

d) v_o'nun (c)'deki değerinin %98'i kadar olması için A kaç olmalıdır?

Şekil P5.46



5.47 Eş. 5.60'taki denklemi çıkarınız.

Kısım 5.1-5.7

5.48 PRATİK BAKIŞ AÇISI Şekil 5.18'de gördüğümüz köprüdeki gerinim ölçerlerin 120 Ω±%1 değerinde olduğunu varsayalım. Op amp'ların güç kaynakları ±15V'tur ve referans gerilimi v_{ref} de pozitif güç kaynağından alınmaktadır.

a) Uzayan gerinim ölçer maksimum uzunluğuna ulaştığında çıkış geriliminin 5 V olması için gereken R_f değerini hesaplayınız.

b) 50 mV hassasiyetle ölçüm yapabildiğimizi varsayalım. Gerinim ölçer direncinde gözlenebilecek en küçük değişim milivolt cinsinden nedir?

5.49 PRATİK BAKIŞ AÇISI PSPICE a) Şekil P5.49'daki devrede, $\Delta R << R$ olduğunda op-amp çıkış geriliminin yaklaşık olarak

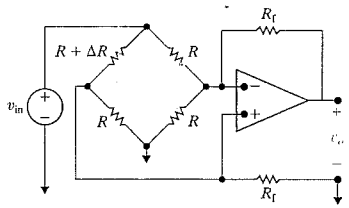
$$v_o \approx \frac{R_f}{R^2}\frac{(R + R_f)}{(R + 2R_f)}(-\Delta R)v_{in}$$

biçiminde ifade edilebildiğini gösteriniz.

b) $R_f = 470$ kΩ, $R = 10$ kΩ, $\Delta R = 95$ Ω ve $v_{in} = 15$ V ise v_o'yu bulunuz.

c) (b) şıkkındaki v_o'nun gerçek değerini bulunuz.

Şekil P5.49



5.50 PRATİK BAKIŞ AÇISI PSPICE a) Yüzde hata

$$\%\ \text{hata} = \left[\frac{\text{yaklaşık değer}}{\text{gerçek değer}} - 1\right] \times 100,$$

şekilde tanımlandığında, Problem 5.49'da v_o'nun yüzde hatasının

$$\%\ \text{hata} = \frac{\Delta R}{R}\frac{(R + R_f)}{(R + 2R_f)} \times 100$$

olduğunu gösteriniz.

b) Problem 5.49'da v_o'nun yüzde hatasını hesaplayınız.

5.51 PRATİK BAKIŞ AÇISI PSPICE Şekil P5.49'da görülen devredeki v_o'nun yüzde hatasının %1'i aşmaması gerektiğini varsayınız. R'de olabilecek en büyük yüzde değişim ne kadar olabilir?

5.52 PRATİK BAKIŞ AÇISI PSPICE Şekil P5.49'daki köprü devresinde değişken kol direncinin $R - \Delta R$ ile ifade edildiğini varsayınız.

a) $\Delta R << R$ ise v_o ifadesi nedir?

b) v_o'nun yüzde hata ifadesi R, R_f ve ΔR cinsinden nedir?

c) Şekil P5.49'daki köprü devresinin değişken kolundaki direncin 9810 Ω, R, R_f ve v_{in}'in değerlerinin de Problem 5.49(b)'deki gibi olduğunu varsayınız. v_o'nun yaklaşık değeri nedir?

d) Değişken koldaki direnç 9810 Ω olduğunda v_o'nun yaklaşık değerinin yüzde hatası nedir?

Endüktans, Kapasitans ve Karşılıklı Endüktans

BÖLÜM İÇERİĞİ

6.1 **İndüktör** *s. 188*

6.2 **Kapasitör** *s. 195*

6.3 **Endüktans ve Kapasitansın Seri ve Paralel Bağlantıları** *s. 200*

6.4 **Karşılıklı Endüktans** *s. 203*

6.5 **Karşılıklı Endüktansa Detaylı Bakış** *s. 207*

✓ BÖLÜM HEDEFLERİ

1. İndükterdeki gerilim, akım, güç ve enerji için gerekli denklemleri bilmek ve kullanabilmek; indüktörün sabit akım altında nasıl davrandığını bilmek ve indüktördeki akımın sürekli olması gerekliliğini anlamak.
2. Kapasitördeki gerilim, akım, güç ve enerji için gerekli denklemleri bilmek ve kullanabilmek; kapasitörün sabit gerilim altında nasıl davrandığını bilmek ve kapasitördeki akımın sürekli olması gerekliliğini anlamak.
3. Seri ve paralel bağlı, başlangıç durumu olan indüktörlerden, eşdeğer ve tek başlangıç durumu olan indüktöre dönüştürebilmek; seri ve paralel bağlı, başlangıç durumu olan kapasitörlerden tek başlangıç durumu olan eşdeğer kapasitör elde etmek.
4. Karşılıklı endüktans kavramını anlayabilmek ve manyetik olarak birbirine bağlı sarımların olduğu devrelerde nokta gösterimini kullanarak ağ akım denklemlerini yazabilmek.

Bu bölüme, 2. Bölümde bahsedilen iki ideal devre elemanı, indüktör ve kapasitörden bahsederek başlayacağız. 3. ve 4. Bölümde anlatılan analiz teknikleri indüktör ve kapasitör içeren devrelerde kullanılabilmektedir. Bu elemanların akım ve gerilim davranışlarını anladığınızda, diğer devre elemanlarıyla olan bağlantıları tanımlamak için kullanabilirsiniz. Diğer devre elemanları gibi indüktör ve kapasitörleri, elektromanyetik alan değişkenleri yerine devre değişkenleri olarak tanımlamak daha kolaydır. Bununla birlikte, devre tanımlarını yapmadan önce, bu devre elemanlarının alan tanımlarını inceleyeceğiz.

İndüktör, elektrik akımındaki herhangi bir değişime karşı koyan elektriksel bir cihazdır. Manyetik veya manyetik olmayan bir çekirdeğin etrafında sarılı tellerden oluşan bir bobinden oluşmaktadır. İndüktörün çalışma ilkesi, manyetik alanla ilgili bir olaya bağlıdır. Manyetik alanın kaynağı hareketli yük veya akımdır. Akım zamanla değişirse, manyetik alan da zamanla değişir. Zamanla değişen manyetik alan herhangi bir iletkende gerilim indükler. **Endüktans**, indüklenen gerilimin akımla arasındaki bağıntıyı verir. Bu ilişkiyi, Kısım 6.1'de inceleyeceğiz.

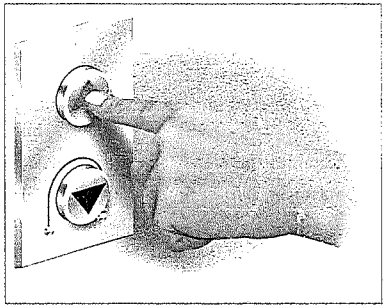
Kapasitör, bir yalıtkan veya dielektrik malzemeyle birbirinden ayrılmış iki iletkenden oluşmaktadır. Kapasitör, pil gibi elektrik yükü depolayan bir elemandır. Kapasitörün çalışma ilkesi, elektrik alanla ilgili bir olaya bağlıdır. Elektrik alanın kaynağı, yüklerin birbirinden ayrılması veya gerilimdir. Gerilim zamanla değişirse, elektrik alan da zamanla değişir. Zamanla değişen elektrik alan yer değiştirme akımı üretir. **Kapasitans**, yer değiştirme akımıyla gerilim arasındaki bağıntıyı verir. Yer değiştirme akımı kapasitörün uçları arasındaki iletim akımına eşittir. Bu ilişkiyi, Kısım 6.2'de inceleyeceğiz.

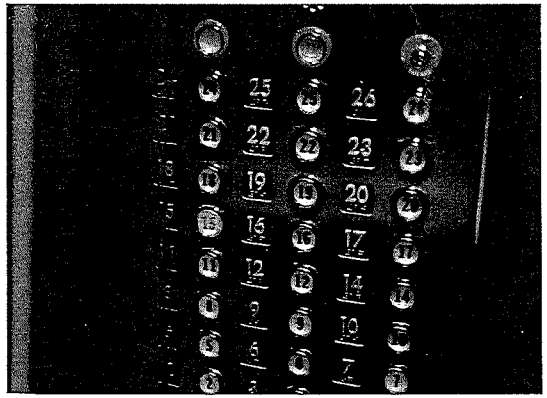
Pratik Bakış Açısı

Yakınlık Anahtarları

Günlük hayatımızda kullandığımız makinaların birçok anahtarı vardır. 2. Bölümde bahsedilen el fenerindeki gibi birçok anahtar mekaniktir. Mekanik anahtarlar, itilerek, çekilerek, kaydırılarak veya döndürülerek iki iletken parçanın birbirine değip kısa devre yapmasını sağlayan bir düzenek kullanırlar. Tasarımcılar, ürünlerindeki güvenliği, dayanıklılığı, rahatlığı veya orijinalliği artırmak için bazen anahtarı hareketsiz parçalarla kullanmayı tercih ederler. Bu anahtarlar yakınlık anahtarı olarak adlandırılır. Yakınlık anahtarları birçok sensör teknolojisi kullanabilir. Örneğin, bazı asansör kapıları ışık gelmedikçe açılmaz.

Yakınlık anahtarlarındaki diğer bir sensör teknolojisi insanların elektrik alanda yarattıkları bozulmaları algılar. Bu tipteki yakınlık anahtarı, dokunulduğunda açılan veya kapanan bazı masa lambalarında ve hareketsiz parçalardan oluşan asansör düğmelerinde kullanılır (Şekilde görüldüğü gibi). Anahtarın temeli bir kapasitöre dayanmaktadır. Bu bölümde göreceğiniz gibi, kapasitör, karakteristiği elektrik alanlarla belirlenen bir devre elemanıdır. Kapasitif bir yakınlık anahtarına dokunduğunuzda, kapasitörün değerini değiştirirsiniz. Bu da anahtarı çalıştıran gerilim değişimine neden olur. Kapasitif dokunma duyarlı anahtarın tasarımı, bu bölümün en sonundaki örnektedir.





Kısım 6.3'te, seri veya paralel bağlı indüktör veya kapasitörlü devreleri basitleştirmek için kullanılan yöntemler anlatılmaktadır.

Manyetik ve elektrik alanlarda enerji depolanabilir. Bu yüzden indüktör ve kapasitörlerde enerji depolandığına şaşırmamamız gerekir. Örneğin; indüktör içinde enerji depolanabilir ve bujiyi ateşlemek için kullanılır. Enerji, kapasitör içinde depolanabilir ve flaş ampülünü yakmak için kullanılır. İdeal indüktör ve kapasitörlerden sadece depolandığı kadar enerji çıkabilir. Çünkü indüktör ve kapasitörler enerji üretemezler ve **pasif elemanlar** olarak sınıflandırılırlar.

Kısım 6.4 ve 6.5'te, iki devrenin manyetik alanla birbirine bağlanmasını yani manyetik olarak bağlaşık olduğunu göreceğiz. Bu durumda, ikinci devrede indüklenen gerilim, birinci devrede zamanla değişen akıma, **karşılıklı endüktans** olarak bilinen parametre ile ilişkilendirilebilir. Karşılıklı endüktansa özel akım, gerilim, güç ve çeşitli yeni parametreleri öğrenirken, manyetik bağlaşım, bu konuların açıklanmasına yardımcı olacaktır. Bu bağlantıları burada tanıtacağız ve 9. ve 10. Bölümde transformatör adlı cihazda yararını açıklayacağız.

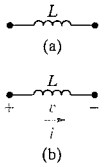
6.1 İndüktör

Endüktans, indüktörü tanımlamak için kullanılan devre parametresidir. L ile gösterilir, birimi ise henry (H)'dir. İndüktör, grafiksel olarak bir sarımla gösterilir ki bu da endüktansın manyetik alanla bağlaşık bir iletkenin sonucu olduğunu hatırlatır. Şekil 6.1(a)'da bir indüktör gösterilmektedir. Referans akım yönünü belirledikten sonra, indüktörün uçları arasındaki gerilim düşüşü (Şekil 6.1(b)'de gösterildiği gibi)

İndüktör için $v - i$ denklemi ▶

$$v = L\frac{di}{dt}, \tag{6.1}$$

ile elde edilir. v'nin birimi volt, L'nin birimi henry, i'nin birimi amper ve t'nin birimi saniyedir. Eş. 6.1, Şekil 6.1(b)'de görülen pasif işaret gösterimine göre yazılmıştır. Yani akımın yönü, gerilim düşüşü yönündedir. Akımın yönü, gerilim artışı yönünde olsaydı. Eş. 6.1 eksi işareti ile yazılırdı.

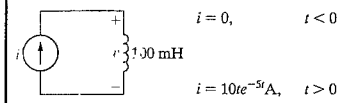


Şekil 6.1 ▲ (a) L henry değerindeki indüktörün grafik sembolü. (b) Pasif işaret gösterimini kullanarak, indüktördeki referans gerilim ve akımların atanması.

Eş. 6.1'e bakıldığında indüktörün uçları arasındaki gerilimin, akımın zamanla değişim hızına orantılı olduğu görülecektir. Burada iki önemli saptama yapabiliriz. Birincisi, akım sabitse ideal indüktör üzerindeki gerilim sıfır olacaktır. Bu durumda, sabit yani doğru akım varken indüktördeki akım ani olarak değişemez. Eş. 6.1, anlık değişim olsaydı, gerilimin sonsuz olacağını göstermektedir ve bu durumun olması da imkansızdır. Endüktif bir devrede anahtar açıldığında, akım anahtar üzerinde havadan akmaya başlar ve bu olay *ark* olarak adlandırılır. Anahtar üzerindeki ark akımın aniden sıfıra düşmesini önler. Endüktif devrelerde anahtarlama önemli bir mühendislik problemidir, çünkü ekipmanın zarar görmemesi için ark ve ani gerilim artışlarının denetim altında olması gerekir. Bu problemin doğasını anlamada ilk adım, bu ve takip eden iki bölümde anlatılan konuları anlamaktır. Örnek 6.1, Eş. 6.1'in basit bir devreye uygulanışını göstermektedir.

Örnek 6.1 **Akım Verildiğinde Bir İndüktörün Terminal Geriliminin Belirlenmesi**

Şekil 6.2'de gösterilen devrede bağımsız akım kaynağı $t < 0$ için sıfırdır, $t > 0$ için ise $10te^{-5t}$A'lik akım üretmektedir.



Şekil 6.2 ▲ Örnek 6.1 için devre şeması.

a) Akım dalgabiçimi grafiğini çiziniz.

b) Akım hangi anda en yüksek değerdedir?

c) 100 mH'lik indüktörün uçları arasındaki gerilimi, zaman fonksiyonu olarak bulunuz.

d) Gerilim dalgabiçimi grafiğini çiziniz.

e) Akım ve gerilim aynı anda maksimum değerde midir?

f) Gerilim hangi anda kutupluğunu değiştirmektedir?

g) İndüktör üzerinde ani gerilim değişimi olmuş mudur? Olmuşsa hangi anda olmuştur?

Çözüm

a) Şekil 6.3 akım dalgabiçimi grafiğini göstermektedir.

b) $di/dt = 10\,(-5te^{-5t} + e^{-5t}) = 10e^{-5t}(1 - 5t)$ A/s; $di/dt = 0$ ($t = \frac{1}{5}$ s.) (Şekil 6.3'e bakınız.)

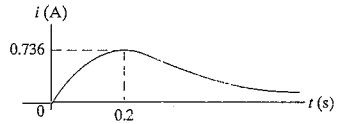
c) $v = L\,di/dt = (0.1)10e^{-5t}(1 - 5t) = e^{-5t}(1 - 5t)$ V, $t > 0$; $v = 0$, $t < 0$.

d) Şekil 6.4 gerilim dalgabiçimi grafiğini göstermektedir.

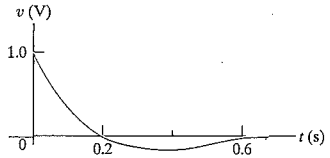
e) Hayır; gerilim i ile değil di/dt ile orantılıdır.

f) $t = 0.25$'te. Bu anda di/dt sıfırdan geçmektedir ve işareti değişmektedir.

g) Evet, $t = 0$ anında. İndüktör üzerindeki gerilimin ani olarak değiştiğine dikkat ediniz.



Şekil 6.3 ▲ Örnek 6.1 için akım dalgabiçimi grafiği.



Şekil 6.4 ▲ Örnek 6.1 için gerilim dalgabiçimi grafiği.

İndüktör Gerilimi Cinsinden İndüktör Akımının Bulunması

Eş. 6.1 indüktör üzerindeki gerilimi, indüktör üzerindeki akımın fonksiyonu olarak ifade etmektedir. Akımın, gerilimin fonksiyonu olarak da ifade edilmesi istenmektedir. i'yi v'nin fonksiyonu olarak bulmak için, Eş. 6.1'de eşitliğin her iki yanını dt ile çarpalım:

$$v\,dt = L\left(\frac{di}{dt}\right)dt. \tag{6.2}$$

i'nin t'ye göre değişim hızını diferansiyel zaman ile çarpmak i'deki deferansiyel değişimi verir. Böylece Eş. 6.2'yi

$$v\,dt = L\,di \tag{6.3}$$

olarak yazarız. Eş. 6.3'ün her iki tarafının integralini alalım. Eşitliğin iki tarafının yerlerini değiştirip yeniden yazarsak,

$$L\int_{i(t_0)}^{i(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v\,d\tau \tag{6.4}$$

elde ederiz. x ve τ integral değişkenleri, i ve t'yi integral sınırları olarak kullandık. Eş. 6.4'ten

İndüktörde $i - v$ denklemi ▶

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i(t_0) \tag{6.5}$$

bulunur. Burada $i(t)$, t anındaki akım, $i(t_0)$ integrasyonun başladığı t_0 anındaki indüktör akımıdır. Çoğu pratik uygulamada t_0 sıfırdır ve Eş. 6.5

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v\,d\tau + i(0) \tag{6.6}$$

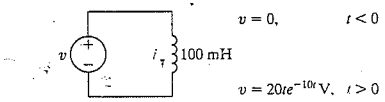
haline gelir. Eş. 6.1 ve Eş. 6.5 indüktörün uçları arasındaki gerilim ve akım arasındaki bağıntıyı verir. Eş. 6.1 gerilimi, akımın fonksiyonu olarak gösterirken, Eş. 6.5 akımı, gerilimin fonksiyonu olarak gösterir. Her iki eşitlikte de akımın yönü uçlardaki gerilim düşüşü yönündedir. $i(t_0)$'ın kendi işaretini taşıdığına dikkat ediniz. i, referans akımı ile aynı yöndeyse, ilk akım pozitif bir değerdir. İlk akım ters yöndeyse, negatif bir değerdir. Örnek 6.2, Eş. 6.5 ile ilgili bir uygulamayı açıklamaktadır.

Örnek 6.2 Terminal Gerilimi Verildiğinde Bir İndüktörün Akımının Belirlenmesi

Şekil 6.5'te görülen 100 mH'lik indüktöre uygulanan gerilim $t < 0$ için sıfırdır ve $t > 0$ için

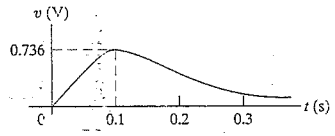
$$v(t) = 20te^{-10t}\ \text{V}$$

olarak verilmiştir. $t \le 0$ için $i = 0$ olduğunu varsayınız.



Şekil 6.5 ▲ Örnek 6.2 için devre şeması.

a) Gerilimi zamanın fonksiyonu olarak çiziniz.
b) İndüktördeki akımı zamanın fonksiyonu olarak bulunuz.
c) Akımı zamanın fonksiyonu olarak çiziniz.



Şekil 6.6 ▲ Örnek 6.2 için gerilim dalgabiçimi grafiği.

Çözüm

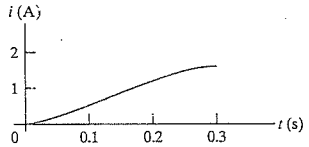
a) Gerilim, zamanın fonksiyonu olarak Şekil 6.6'da gösterilmiştir.
b) İndüktördeki akım $t = 0$ anında sıfırdır. Bu yüzden $t > 0$ için akım

$$i = \frac{1}{0.1}\int_0^t 20\tau e^{-10\tau}d\tau + 0$$

$$= 200\left[\frac{-e^{-10\tau}}{100}(10\tau + 1)\right]\Bigg|_0^t,$$

$$= 2(1 - 10te^{-10t} - e^{-10t})\ \text{A}, \qquad t > 0$$

bulunur.



Şekil 6.7 ▲ Örnek 6.2 için akım dalgabiçimi grafiği.

c) Şekil 6.7 akımı zamanın fonksiyonu olarak göstermektedir.

Örnek 6.2'de t arttıkça akımın sabit 2 A değerine yaklaştığına dikkat ediniz. İndüktörde, depolanan enerjiden bahsettikten sonra bu sonuç hakkında daha fazla şey söyleyeceğiz.

İndüktörde Güç ve Enerji

İndüktördeki güç ve enerji bağıntıları akım ve gerilim bağıntılarından elde edilebilir. Akımın yönü, uçlardaki gerilim düşüşü yönünde ise, güç

$$p = vi \tag{6.7}$$

ile verilir.

Güç biriminin watt, gerilim biriminin volt, akım biriminin amper olduğunu hatırlayınız. İndüktör gerilimini, indüktör akımının fonksiyonu olarak ifade edersek, Eş. 6.7

İndöktürdeki güç ▶

$$p = Li\frac{di}{dt}. \tag{6.8}$$

haline gelir. Benzer şekilde akımı da gerilim cinsinden ifade edebiliriz:

$$p = v\left[\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i(t_0)\right]. \tag{6.9}$$

Eş. 6.8, indüktörde depolanan enerjiyi ifade etmek için kullanışlıdır. Güç, birim zamanda harcanan enerji olduğundan

$$p = \frac{dw}{dt} = Li\frac{di}{dt} \tag{6.10}$$

eşitliğini elde ederiz. Eş. 6.10'un her iki tarafını dt diferansiyel zamanı ile çarparsak aşağıdaki bağıntıyı verir:

$$dw = Li\,di. \tag{6.11}$$

Şimdi Eş 6.11'in her iki tarafının integrali alınacaktır. İndüktördeki sıfır akım, sıfır enerji demektir. Böylece,

$$\int_0^w dx = L\int_0^i y\,dy,$$

İndüktördeki enerji ▶

$$w = \frac{1}{2}Li^2. \tag{6.12}$$

elde edilmiş olur. İntegral alırken, integral limitleri ile karışıklık olmaması için farklı integral değişkenleri kullandık. Eş. 6.12'de enerji birimi joule, endüktans birimi henry ve akım birimi amperdir. Eş. 6.7-6.12'nin kullanımını sergilemek için Örnek 3'te Örnek 6.1 ve 6.2'ye yeniden göz atacağız.

Örnek 6.3 Bir İndüktörün Akım, Gerilim, Güç ve Enerjisinin Belirlenmesi

a) Örnek 6.1 için, i, v, p ve ω'yı zamana karşı çiziniz.

b) Hangi zaman aralığında indüktörde enerji depolanmaktadır?

c) Hangi zaman aralığında indüktördeki enerji açığa çıkmaktadır?

d) İndüktörde depolanan maksimum enerji ne kadardır?

e) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız ve önemi hakkında yorum yapınız.

$$\int_0^{0.2} p\,dt \quad \text{ve} \quad \int_{0.2}^{\infty} p\,dt$$

f) (a) – (c) şıklarını Örnek 6.2 için tekrarlayınız.

g) Örnek 6.2'de, neden gerilim sıfıra giderken, indüktörde hala akım bulunmaktadır?

Çözüm

a) Örnek 6.1'de i ve v bağıntılarını kullanarak i, v, p ve ω grafikleri çizilmiş ve Şekil 6.8'de gösterilmiştir. $p = vi$, $\omega = (\frac{1}{2})\,Li^2$)'dir.

b) Artan enerji eğrisi, enerjinin depolandığını göstermektedir. Bundan hareketle 0 ve 0.25 aralığında enerji depolanmaktadır. Bunun $p > 0$ aralığına denk düştüğüne dikkat ediniz.

c) Azalan enerji eğrisi, açığa çıkan enerjiyi göstermektedir. Buradan hareketle, 0.2 s ve ∞ aralığında enerji açığa çıkmaktadır. Bunun, $p < 0$ aralığına denk düştüğüne dikkat edin.

d) Eş. 6.12'den, akım maksimumken enerjinin maksimum olduğunu görüyoruz. Grafikler de bunu doğrulamaktadır. Örnek 6.1'de maksimum akım = 0.736 A'dir. Bu nedenle ω_{max} = 27.07 mJ'dür.

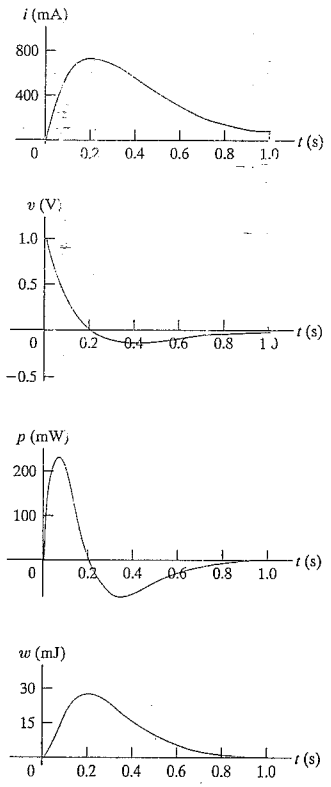
e) Örnek 6.1'de

$$i = 10te^{-5t}\ \text{A} \quad \text{ve} \quad v = e^{-5t}(1 - 5t)\ \text{V}$$

bulunur. Bu nedenle

$$p = vi = 10te^{-10t} - 50t^2e^{-10t}\ \text{W}$$

elde edilir.



Şekil 6.8 ▲ Örnek 6.1 için, zamana karşı i, v, p ve ω değişkenleri.

$$\int_0^{0.2} p\,dt = 10\left[\frac{e^{-10t}}{100}(-10t-1)\right]_0^{0.2}$$

$$-50\left\{\frac{t^2e^{-10t}}{-10} + \frac{2}{10}\left[\frac{e^{-10t}}{100}(-10t-1)\right]\right\}_0^{0.2}$$

$$= 0.2e^{-2} = 27.07 \text{ mJ},$$

$$\int_{0.2}^{\infty} p\,dt = 10\left[\frac{e^{-10t}}{100}(-10t-1)\right]_{0.2}^{\infty}$$

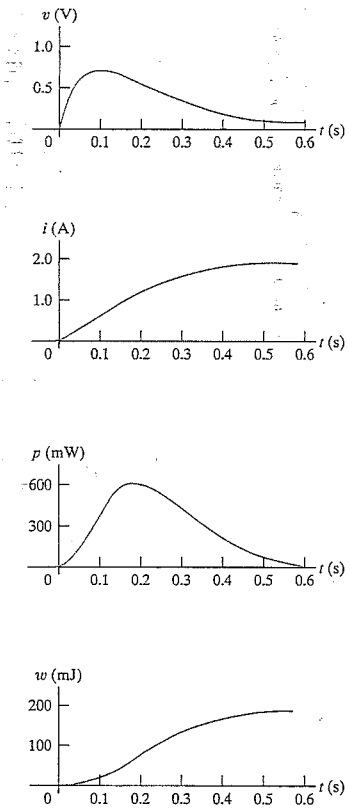
$$-50\left\{\frac{t^2e^{-10t}}{-10} + \frac{2}{10}\left[\frac{e^{-10t}}{100}(-10t-1)\right]\right\}_{0.2}^{\infty}$$

$$= -0.2e^{-2} = -27.07 \text{ mJ}.$$

p'nin tanımından, $p - t$ grafiğinin altında kalan alan integrasyon aralığında harcanan enerjiyi göstermektedir. Bu nedenle 0 ve 0.2 s aralığındaki gücün integrali, bu aralıkta indüktörde depolanan enerjiyi göstermektedir. 0.2 s ile $-\infty$ aralığında p'nin integrali ise açığa çıkan enerjidir. Bu aralıkta depolanan enerjinin tamamının harcandığına ve başka tepe akımı olmadığından indüktörde depolanan enerji olmadığına dikkat ediniz.

f) Örnek 6.2'de verilen v ve i bağıntılarından v, i, p ve ω grafikleri Şekil 6.9'da gösterilmektedir. Bu durumda gücün hep pozitif olduğuna ve bundan dolayı uygulanan gerilim süresince enerjinin daima depolandığına dikkat ediniz.

g) Uygulanan gerilim nedeniyle indüktörde enerji depolanmaktadır. İndüktör ideal olduğundan, bu enerji, gerilim sıfıra düşse bile harcanamaz. Bu nedenle, akım devrede sürekli dolaşmaktadır. Gerçek devrelerde indüktörler için bir direnç gerekmektedir. (Daha fazla bilgi ileride verilecektir.)

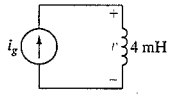


Şekil 6.9 ▲ Örnek 6.2 için, zamana karşı v, i, p ve ω değişkenleri.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 1 – İndüktördeki gerilim, akım, güç ve enerji ile ilgili denklemleri bilmek ve kullanabilmek

6.1 Şekildeki devrede akım kaynağı,



$$i_g(t) = 0, \qquad t < 0,$$

$$i_g(t) = 8e^{-300t} - 8e^{-1200t}\ \text{A} \qquad t \geq 0.$$

akımını üretmektedir. (a) $v(0)$'ı; (b) sıfırdan farklı bir anda gerilimin sıfır olduğu zamanı (c) indüktöre gelen güç ile ilgili bağıntıyı; (d) indüktöre ulaşan gücün maksimum olduğu an; (e) maksimum gücü; (f) enerjinin maksimum olduğu anı ve (g) indüktörde depolanan maksimum enerjiyi bulunuz.

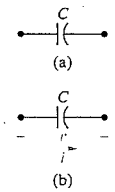
Çözüm: (a) 28.8 V; (b) 1.54 ms; (c) $-76.8e^{-600t} + 384e^{-1500t} - 307.2e^{-2400t}$ W, $t \geq 0$; (d) 411.05 μs; (e) 32.72 W; (f) 1.54 ms.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 6.1 ve 6.3'ü de çözmeyi deneyiniz.

6.2 Kapasitör

Kapasitansın devre parametresi C harfi ile gösterilir, farad (F) cinsinden ölçülür ve Şekil 6.10 (a)'daki gibi, iki kısa paralel iletken plaka ile grafiksel olarak gösterilir. Farad, kapasitans birimi olarak büyük bir nicelik olduğundan kapasitörler genelde pikofarad (pF) ve mikrofarad (μF) aralığında olur.

Elektriksel iletkenler dielektrik veya yalıtkan maddelerle ayrıldıysa, kapasitans oluşur ve kapasitörün grafiksel sembolü de bunu anımsatmaktadır. Bu koşul, elektrik yükünün kapasitör tarafından iletilmediğini açıkça belirtmektedir. Kapasitörün uçlarına gerilim uygulanmasına rağmen, yük dielektrik üzerinden hareket etmez, dielektrik içindeki bir yükle yer değiştirir. Gerilim zamanla değiştikçe, yükün yer değiştirmesi de zamanla değişecektir ve bu da **yerdeğiştirme akımının** oluşmasına neden olacaktır.



Şekil 6.10 ▲ (a) Kapasitör için devre sembolü. (b) Kapasitörün referans gerilim ve akımını, pasif işaret gösterimi ile belirleme.

Terminallerden bakıldığında, yerdeğiştirme akımı, iletim akımından farksızdır. Akım, kapasitörün geriliminin değişim hızı ile orantılıdır, yani matematiksel olarak

$$i = C\frac{dv}{dt}, \qquad (6.13)$$

◁ **Kapasitör $i - v$ eşitliği**

yazılabilir. i'nin birimi amper, C'nin farad, v'nin volt ve t'nin birimi ise saniyedir.

Eşitlik 6.13, Şekil 6.10(b)'de gösterilen pasif işaret gösterimine göre yazılmıştır. Yani, akımın referans yönü kapasitörün gerilim düşüşü yönündedir. Akım referansı gerilim artışı yönünde olsaydı Eş. 6.13'e bir eksi işareti eklenecekti.

Eş. 6.13'te iki önemli gözlem yapılabilir. İlki, kapasitörün terminallerindeki gerilim anlık olarak değişemez. Eş. 6.13, böyle bir değişimde sonsuz akım olacağını gösterir ki bu da fiziksel olarak imkansızdır. İkincisi, terminaller arasındaki gerilim sabitse kapasitör akımı sıfırdır. Bunun nedeni kapasitörün dielektrik kısmında, iletim akımının üretilememesidir. Sadece zamanla değişen gerilim yerdeğiştirme akımı üretebilir. Bu nedenle sabit gerilim altında kapasitör açık devre gibi davranır.

Eş. 6.13, kapasitör akımını kapasitör geriliminin fonksiyonu olarak verir. Gerilimi akımın fonksiyonu olarak ifade etmek de mümkündür. Bunu yapmak için Eş. 6.13'ün her iki tarafını diferansiyel zaman dt ile çarpar ve bulunan diferansiyellerin integralini alırız:

$$i\,dt = C\,dv \qquad \text{ve} \qquad \int_{v(t_0)}^{v(t)} dx = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,d\tau.$$

İkinci denklemin sol kısmındaki integrali alırsak,

Kapasitör $v - i$ eşitliği ▶

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,d\tau + v(t_0). \tag{6.14}$$

sonucunu elde ederiz. Birçok pratik uygulamada Eş. 6.14'te başlangıç zamanı t_0 sıfırdır. Böylece eşitlik

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i\,d\tau + v(0) \tag{6.15}$$

haline gelir. Kapasitör için güç ve enerji bağıntılarını kolayca yazabiliriz. Güç tanımından yola çıkarak

Kapasitör güç eşitliği ▶

$$p = vi = Cv\frac{dv}{dt}, \tag{6.16}$$

veya

$$p = i\left[\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,d\tau + v(t_0)\right] \tag{6.17}$$

bulunur. Eş. 6.16'yı enerji tanımı ile birleştirirsek

$$dw = Cv\,dv$$

olur ve buradan da

$$\int_0^w dx = C\int_0^v y\,dy$$

veya

$$w = \frac{1}{2}Cv^2. \tag{6.18}$$

elde ederiz. Eş. 6.18 bulunurken, sıfır enerji referansı sıfır gerilime karşılık gelmektedir.

Örnek 6.4 ve 6.5 kapasitör için akım, gerilim güç ve enerji bağıntılarının uygulanmasını göstermektedir.

Örnek 6.4 Bir Kapasitörün Akım, Gerilim, Güç ve Enerjisinin Belirlenmesi

0.5 μF'lık kapasitörün terminalleri arasındaki gerilim aşağıdaki eşitliklerle verilmiştir:

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0\text{ s}; \\ 4t\text{ V}, & 0\text{ s} \le t \le 1\text{ s}; \\ 4e^{-(t-1)}\text{ V}, & t \ge 1\text{ s}. \end{cases}$$

a) Kapasitörün akım, güç ve enerji ifadelerini hesaplayınız.

b) Gerilim, akım, güç ve enerji grafiklerini zamanın fonksiyonu olarak çiziniz. Grafikleri düşey olarak alt alta getiriniz.

c) Enerjinin kapasitörde depolandığı zaman aralığını belirleyiniz.

d) Enerjinin kapasitörden bırakıldığı zaman aralığını belirleyiniz.

e) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız ve önemleri hakkında yorum yapınız.

$$\int_0^1 p\,dt \qquad \text{ve} \qquad \int_1^\infty p\,dt.$$

Çözüm

a) Eş. 6.13'ten

$$i = \begin{cases} (0.5\times10^{-6})(0) = 0, & t < 0\text{s}; \\ (0.5\times10^{-6})(4) = 2\,\mu\text{A}, & 0\text{ s} < t < 1\text{ s}; \\ (0.5\times10^{-6})(-4e^{-(t-1)}) = -2e^{-(t-1)}\,\mu\text{A}, & t > 1\text{ s} \end{cases}$$

elde edilir. Eş. 6.16'yı kullanarak güç bağıntısı

$$p = \begin{cases} 0, & t \le 0\text{ s}; \\ (4t)(2) = 8t\,\mu\text{W}, & 0\text{ s} \le t < 1\text{ s}; \\ (4e^{-(t-1)})(-2e^{-(t-1)}) = -8e^{-2(t-1)}\,\mu\text{W}, & t > 1\text{ s} \end{cases}$$

olarak bulunur. Eş. 6.18'den, enerji bağıntısı

$$w = \begin{cases} 0 & t \le 0\text{ s}; \\ \frac{1}{2}(0.5)16t^2 = 4t^2\mu\text{J}, & 0\text{ s} \le t \le 1\text{ s}; \\ \frac{1}{2}(0.5)16e^{-2(t-1)} = 4e^{-2(t-1)}\,\mu\text{J}, & t \ge 1\text{ s} \end{cases}$$

olur.

b) Şekil 6.11, gerilim, akım, güç ve enerjiyi zamanın fonksiyonu olarak göstermektedir.

c) Güç pozitifken kapasitörde enerji depolanmaktadır. Bu nedenle, 0 – 1 s aralığında enerji depolanmaktadır.

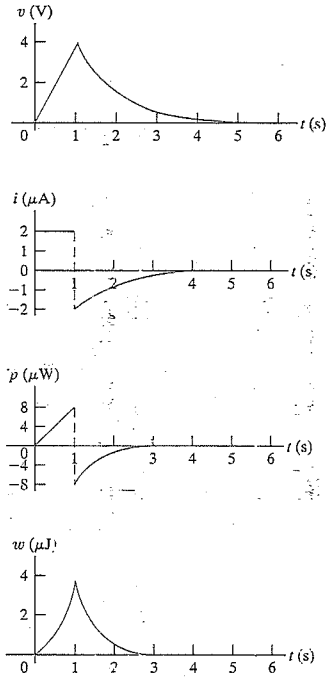
d) Güç negatifken, kapasitördeki enerji açığa çıkmaktadır. Bu nedenle, t 1 s'den büyükken enerji açığa çıkmaktadır.

e) $p\,dt$'nin integrali, integralin limitleriyle ilgili zaman aralığındaki enerjidir. Bu nedenle, birinci integral 0 ve 1 s arasında kapasitörde toplanan enerjiyi, ikinci integral ise 1 ve ∞ arasında, kapasitörden geri verilen veya açığa çıkan enerjiyi göstermektedir.

$$\int_0^1 p\,dt = \int_0^1 8t\,dt = 4t^2\Big|_0^1 = 4\ \mu\text{J},$$

$$\int_1^\infty p\,dt = \int_1^\infty (-8e^{-2(t-1)})dt = (-8)\frac{e^{-2(t-1)}}{-2}\Big|_1^\infty = -4\ \mu\text{J}.$$

Kapasitöre uygulanan gerilim zaman sınırsızca artarsa sıfıra düşmektedir. Bu yüzden bu ideal kapasitörden alınan enerji depolanan enerjiye eşit olmalıdır.



Şekil 6.11 ▲ Örnek 6.4 için zamana karşı v, i, p ve ω değişkenleri.

Örnek 6.5 Üçgen Darbe Akım ile Bir Kapasitörde İndüklenen v, P ve ω'nun bulunması

Yüklenmemiş 0.2 μF'lık bir kapasitör üçgen akım ile sürülmüştür. Akım

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0; \\ 5000t\ \text{A}, & 0 \le t \le 20\ \mu\text{s}; \\ 0.2 - 5000t\ \text{A}, & 20 \le t \le 40\ \mu\text{s}; \\ 0, & t \ge 40\ \mu\text{s} \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır.

a) Akımı tanımlamak için gerekli dört zaman aralığında kapasitör gerilimini, güç ve enerji bağıntılarını bulunuz.

b) i, v, p ve ω'yı t'ye karşı çiziniz. Önceki örnekte olduğu gibi grafikleri sıraya diziniz.

c) Akım sıfıra düştükten sonra kapasitörde neden hâlâ gerilim vardır?

Çözüm

a) $t \le 0$ için, v, p ve ω sıfırdır. $0 \le t \le 20\ \mu$s için

$$v = 5 \times 10^6 \int_0^t (5000\tau)\,d\tau + 0 = 12.5 \times 10^9 t^2\ \text{V},$$

$$p = vi = 62.5 \times 10^{12} t^3\ \text{W},$$

$$w = \frac{1}{2}Cv^2 = 15.625 \times 10^{12} t^4\ \text{J}$$

olur. $20\ \mu\text{s} \le t \le 40\ \mu$s için ise

$$v = 5 \times 10^6 \int_{20\mu\text{s}}^t (0.2 - 5000\tau)\,d\tau + 5$$

bulunur. (5 V'un bir önceki zaman aralığının sonundaki kapasitör gerilimi olduğuna dikkat ediniz.)

$$v = (10^6 t - 12.5 \times 10^9 t^2 - 10)\ \text{V},$$

$$p = vi,$$

$$= (62.5 \times 10^{12} t^3 - 7.5 \times 10^9 t^2 + 2.5 \times 10^5 t - 2)\ \text{W},$$

$$w = \frac{1}{2}Cv^2,$$

$$= (15.625 \times 10^{12} t^4 - 2.5 \times 10^9 t^3 + 0.125 \times 10^6 t^2 - 2t + 10^{-5})\ \text{J}.$$

$t \ge 40\ \mu$s için

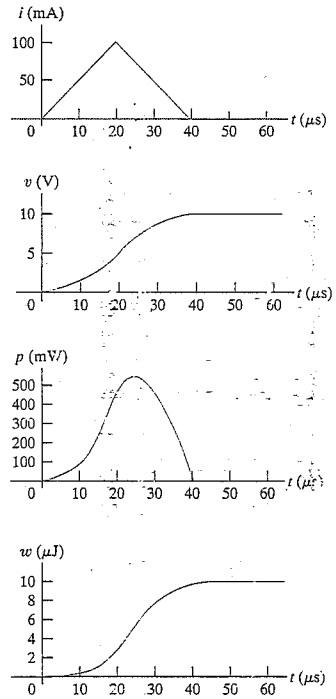
$$v = 10\ \text{V},$$

$$p = vi = 0,$$

$$w = \frac{1}{2}Cv^2 = 10\ \mu\text{J}.$$

b) Uyarım akımı ve bunun sonucunda oluşan gerilim, akım, güç ve enerji grafikleri Şekil 6.12'de gösterilmiştir.

c) Verilen akım darbesi boyunca gücün pozitif olduğuna dikkat ediniz. Bu, kapasitör üzerinde devamlı olarak enerji depolanması demektir. Akım sıfıra düştüğünde depolanan enerji içerde kalmıştır çünkü ideal kapasitör kesinlikle enerji tüketemez. Bu nedenle i sıfıra düştükten sonra, kapasitör üzerinde gerilim kalmıştır.

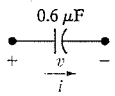


Şekil 6.12 ▲ Zamana karşı i, v, p ve ω değişkenleri.

✓ DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 2 – Kapasitördeki gerilim, akım, güç ve enerji eşitliklerini bilmek ve kullanabilmek

6.2 Şekilde görülen 0.6 μ F'lık kapasitörün terminallerindeki gerilim $t < 0$ için 0 ve $t \ge 0$ için $40e^{-15000t}$ sin $30000t$ V'tur. (a) $i(0)$ değerini; (b) $t = \pi/80$ ms'deki gönderilen gücü bulunuz. (c) $t = \pi/80$ms anında kapasitörde depolanan enerjiyi bulunuz.



Cevap: (a) 0.72 A; (b) –649.2 mW; (c) 126.13 μJ.

6.3 Değerlendirme Problemi 6.2'deki kapasitör akımı $t < 0$ için 0, $t \ge 0$ için 3 cos $50000t$ A'dır. (a) $v(t)$'yi; (b) herhangi bir anda kapasitörden bırakılan maksimum gücü bulunuz. (c) Herhangi bir anda kapasitörde depolanan maksimum enerjiyi bulunuz.

Cevap: (a) 100 sin $50{,}000t$ V, $t \ge 0$; (b) 150 W; (c) 3 mJ.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 6.14 ve 6.15'i de çözmeyi deneyiniz.

6.3 Endüktans ve Kapasitansların Seri-Paralel Bağlantıları

Şekil 6.13 ▲ Seri bağlı indüktörler.

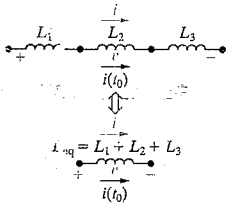
Seri-paralel bağlı dirençlerin tek eşdeğer direnç olarak gösterilmesi gibi, seri-paralel bağlı indüktör ve kapasitörler de tek bir indüktör veya kapasitöre dönüştürebilir. Şekil 6.13 seri bağlı indüktörleri göstermektedir. Burada, indüktörler aynı akımı taşımaktadırlar, böylece seri bağlama için tek bir akım tanımlarız. Her bir indüktördeki gerilim düşüşü

$$v_1 = L_1\frac{di}{dt}, \qquad v_2 = L_2\frac{di}{dt} \quad \text{ve} \quad v_3 = L_3\frac{di}{dt}$$

bulunur. Seri bağlantı üzerindeki gerilim ise

$$v = v_1 + v_2 + v_3 = (L_1 + L_2 + L_3)\frac{di}{dt}$$

yazılabilir. Buradan, seri bağlı indüktörlerin eşdeğeri, tüm endüktansların toplamıdır. n tane seri bağlı indüktör için eşdeğer



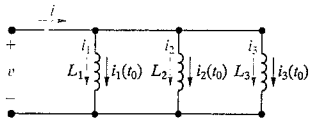
Şekil 6.14 ▲ Başlangıç akımı $i(t_0)$ olan seri bağlı indüktörler için eşdeğer devre.

İndüktörlerin seri bağlanması ▶

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n. \tag{6.19}$$

olur. Baştaki indüktörler $i(t_0)$ ilk akımını taşıyorsa, eşdeğer indüktör de aynı ilk akımı taşıyacaktır. Şekil 6.14 ilk akım taşıyan seri bağlı indüktörlerin eşdeğer devresini göstermektedir.

Paralel bağlı indüktörler aynı gerilimdedirler. Eşdeğer devrede her indüktördeki akım, terminal gerilimlerinin ve indüktörlerin ilk akımlarının bir fonksiyonudur. Şekil 6.15'teki gibi paralel bağlı üç indüktör için her bir indüktörün akımı,



Şekil 6.15 ▲ Paralel bağlı üç indüktör.

$$i_1 = \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i_1(t_0),$$

$$i_2 = \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i_2(t_0),$$

$$i_3 = \frac{1}{L_3}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i_3(t_0) \tag{6.20}$$

yazılabilir.

Paralel bağlı üç indüktörün terminallerindeki akım her bir indüktörün akımlarının toplamıdır:

$$i = i_1 + i_2 + i_3. \tag{6.21}$$

Eş. 6.20'yi, Eş. 6.21 içine yerleştirirsek

$$i = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}\right)\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0) \tag{6.22}$$

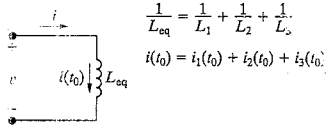
elde ederiz. Eş. 6.22'yi tek bir indüktör olarak ifade edebiliriz:

$$i = \frac{1}{L_{eq}}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i(t_0). \tag{6.23}$$

Eş. 6.23'ü, Eş. 6.22 ile karşılaştırırsak

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \tag{6.24}$$

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0) \tag{6.25}$$



Şekil 6.16 ▲ Paralel bağlı üç indüktörün eşdeğer devresi.

buluruz. Şekil 6.16, Şekil 6.15'te gösterilen paralel bağlı üç indüktörün eşdeğer devresidir.

Eş. 6.24 ve 6.25'te verilen sonuçlar n tane paralel bağlı indüktör için

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n} \tag{6.26}$$

◀ İndüktörlerin paralel bağlanması

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + \cdots + i_n(t_0). \tag{6.27}$$

◀ Eşdeğer indüktörün ilk akımı

halinde yazılabilir. Seri bağlı kapasitörler tek bir eşdeğer kapasitöre indirgenebilir. Eşdeğer kapasitansın tersi tek tek kapasitörlerin terslerinin toplamıdır. Eğer her kapasitör kendi başlangıç gerilimine sahipse, eşdeğer kapasitördeki başlangıç gerilimi her bir kapasitördeki başlangıç gerilimlerinin toplamına eşittir.

Şekil 6.17 ve aşağıdaki denklemler, bu açıklamaları özetlemektedir.

Kapasitörlerin seri bağlanması ▶

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}, \tag{6.28}$$

Eşdeğer kapasitansın ilk gerilimi ▶

$$v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_n(t_0). \tag{6.29}$$

Seri bağlı kapasitörlerin eşdeğer devrelerinin çıkarımını alıştırma olarak bırakıyoruz (Bkz. Problem 6.30.)

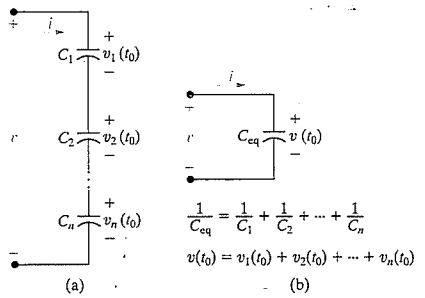
Paralel bağlı kapasitörlerin eşdeğer kapasıtansı, her bir kapasitörün kapasitans değerlerinin toplamıdır (Şekil 6.18) ve aşağıdaki eşitlik bunu göstermektedir:

Kapasitörlerin paralel bağlanması ▶

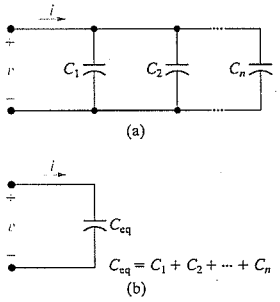
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n. \tag{6.30}$$

Paralel bağlı kapasitörler aynı gerilimi taşımak zorundadır. Bu nedenle, asıl problemde birbirine paralel bağlı kapasitörlerdeki ilk gerilim, eşdeğer kapasitans C_{eq} üzerinde de aynı olacaktır. Paralel bağlı kapasitörlerin eşdeğer devresini bulma problemi alıştırma olarak bakılmıştır. (Bkz. Problem 6.31.)

Seri-paralel bağlı indüktörlerin ve kapasitörlerin eşdeğer devreleriyle ilgili 7. Bölümde daha çok bilgi vereceğiz.



Şekil 6.17 ▲ Seri bağlanmış kapasitörlerin eşdeğer devresi. (a) Seri bağlı kapasitörler. (b) Eşdeğer devre.



Şekil 6.18 ▲ Paralel bağlanmış kapasitörlerin eşdeğer devresi. (a) Paralel bağlı kapasitörler. (b) Eşdeğer devre.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 3– Seri ve paralel bağlı indüktör ve kapasitörleri, tek bir eşdeğer indüktör veya kapasitör oluşturmak üzere birleştirebilmek.

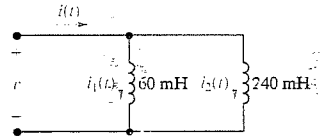
6.4 Şekildeki devrede i_1 ve i_2 akımları, sırasıyla +3 A ve –5 A'dir. Paralel bağlı indüktörlerin terminallerindeki gerilim, $t \geq 0$ için $-30e^{-5t}$ mV'tur.

a) Paralel bağlı indüktörler tek bir indüktör ile yer değiştirseydi, değeri ne olurdü?

b) Eşdeğer indüktördeki ilk akım ve yönü nedir?

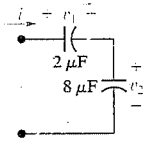
c) $i(t)$'yi bulmak için eşdeğer indüktörü kullanınız.

d) $i_1(t)$ ve $i_2(t)$'yi bulunuz. $i_1(t)$, $i_2(t)$ ve $i(t)$'yi kullanarak Kirchhoff'un akım yasasının sağlandığını doğrulayınız.



Cevap: (a) 48 mH
(b) 2 A, yukarı;
(c) $0.125e^{-5t} - 2.9$ A, $t \geq 0$,
(d) $i_1(t) = 0.1e^{-5t} + 2.9$ A, $t \geq 0$,
$i_2(t) = 0.025e^{-5t} - 5.025$ A, $t \geq 0$.

6.5 İki kapasitörün terminallerindeki akım, $t \geq 0$ için 240^{-10t} μA'dir. v_1 ve v_2'nin ilk değerleri, sırasıyla –10 V ve –5 V'tur. $t \to \infty$ iken kapasitörlerde tutulan toplam enerjiyi hesaplayınız. (*İpucu:* Seri bağlı kapasitörlerin eşdeğerini bulmayınız. Önce her birinde tutulan enerjiyi bulunuz ve sonra toplayınız.)



Cevap: 20μJ.

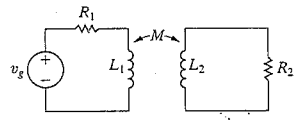
NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 6.21, 6.22, 6.26 ve 6.27'yi de çözmeyi deneyiniz.

6.4 Karşılıklı Endüktans

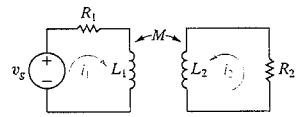
Kısım 6.1'de incelediğimiz indüktörlerdeki manyetik alan, tek bir devre ile sınırlıydı. Endüktansın, aynı devre içinde zamanla değişen akımı, gerilime bağlayan bir parametre olduğunu söyledik. Böylece endüktans, daha net bir ifadeyle öz endüktans olarak tanımlanabilir.

Şimdi, iki devrenin manyetik alanla bağlaşması durumunu inceleyeceğiz. Bu durumda, ikinci devrede indüklenen gerilim, birinci devrede zamanla değişen akıma, karşılıklı endüktans olarak bilinen parametre ile bağlıdır. Şekil 6.19'da bulunan devre, manyetik olarak birbirine bağlı iki sarımı göstermektedir. İki sarımın öz endüktansları L_1 ve L_2, karşılıklı endüktans ise M ile gösterilmiştir. M'ye bitişik olan çift taraflı ok, bu karşılıklı empedansa sahip sarım çiftini işaret etmektedir. Bu işaretlerle gösterme sistemi, özellikle manyetik olarak birbirine bağlanmış sarımların birden fazla olduğu devreler için gereklidir.

Karşılıklı empedans içeren devreleri incelemenin en kolay yolu, ağ akımlarını kullanmaktır. Problem, devreyi sarım akımlarını kullanmaktır. Problem, devreyi sarım akımları cinsinden tanımlayan devre eşitliklerini yazmaktır. İlk olarak, her sarım akımı için referans yönü seçilir. Şekil 6.20 rastgele seçilmiş referans akımlarını göstermektedir. i_1 ve i_2 için referans yönleri seçtikten sonra, her kapalı yol için gerilimler toplanır. Karşılıklı endüktans M yüzünden her bir sarım üzerinde iki gerilim olacaktır: Öz endüklenmiş gerilim ve karşılıklı endüklenmiş gerilim.

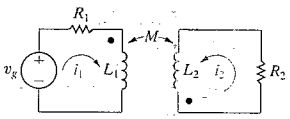


Şekil 6.19 ▲ Manyetik olarak bağlaşmış iki sarım.



Şekil 6.20 ▲ Şekil 6,19'da gösterilen devreyi tanımlamak için kullanılan i_1 ve i_2 sarım akımları.

Öz endüklenmiş gerilim, sarımın öz endüktansı ve o sarımdaki akımın birinci türevinin çarpımıdır. Karşılıklı endüklenmiş gerilim ise, sarımın karşılıklı endüktansı ve diğer sarımın akımının birinci türevinin çarpımıdır. Şekil 6.20'nin solunda, öz endüktansı L_1 olan sarıma bakınız. Bu sarım üzerinde, öz endüklenmiş gerilim (di_1/dt) ve bu sarım üzerinde karşılıklı endüklenmiş dış gerilim $M(di_2/dt)$ dir. Peki bu gerilimlerin işaretleri hakkında ne söylenebilir?



Şekil 6.21 ▲ Karşılıklı endüklenmiş gerilimlerin işaretlerini gösteren ve sarımlara eklenmiş noktalarla Şekil 6.20'deki devre.

Pasif işaret gösterimini kullanarak, öz endüklenmiş gerilim, gerilim üreten akım yönündeki gerilim düşüşüdür. Karşılıklı endüklenmiş gerilimin işareti, sarım akımlarının yönüyle ilgilidir. Genelde, karşılıklı bağlanmış sarımların detaylarını göstermek oldukça karışıktır. Bunun yerine, nokta gösterimi olarak bilinen yöntemi kullanırız. Bu kuralda, Şekil 6.21'de gösterildiği gibi, nokta her sarımın bir terminaline yerleştirilir. Bu noktalar işaret bilgisini içerir. Bu gösterim, çekirdek yapıda nasıl sarım yapıldığını göstermek yerine, sarımları, şematik olarak çizebilmemizi sağlar.

Nokta kuralını kullanarak karşılıklı indüklenmiş gerilimlerin işaretlerini belirleme yöntemi şu şekilde özetlenebilir:

Karşılıklı endüklenmiş sarımlar için nokta kuralı ▶

Akımın referans yönü, sarımın noktalı bulunan terminaline giriyorsa, diğer sarımda indüklenen gerilimin referans işareti, noktalı terminalde pozitiftir.

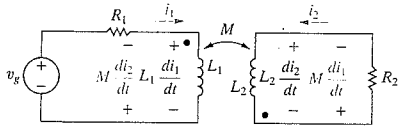
Veya alternatif olarak,

Karşılıklı endüklenmiş sarımlar için nokta kuralı (alternatif) ▶

Akımın referans yönü, sarımın noktalı bulunan terminalinden çıkıyorsa, diğer sarımda indüklenen gerilimin referans işareti, noktalı terminalde negatiftir.

verilebilir. Bu kısımda, çoğunlukla nokta işaretlemeleri sizin için yapılacaktır. Burada önemli olan, size anlatılmış olan karşılıklı endüktans ve nokta kuralını kullanarak devre için uygun eşitlikleri yazabilmektir. İşaret (kutupluk) noktaları verilmediğinde, noktaların nereye yerleştirileceğini gerçek bir devreye bakarak veya laboratuarda test ederek anlamak mümkündür. Noktaların kullanımı hakkında konuştuktan sonra bu yöntemle ilgili tartışacağız.

Şekil 6.21'de, nokta kuralına göre, i_2 tarafından 1. sarımda indüklenen gerilimin referans kutupluğu, 1. sarımın noktalı ucunda negatiftir. Bu Mdi_2/dt gerilimi, i_1'e göre bir gerilim artışıdır. i_1 tarafından 2. sarımda indüklenen gerilim Mdi_1/dt'dir ve referans kutupluğu 2. sarımın noktalı terminaline pozitiftir. Bu gerilim, i_2 yönünde bir gerilim artışıdır. Şekil 6.22, 1. ve 2. sarımların kutupluğuna göre öz ve karşılıklı indüklenmiş gerilimleri göstermektedir.



Şekil 6.22 ▲ Şekil 6.21'de gösterilen sarımlar üzerinde oluşan öz ve karşı indüklenmiş gerilimler.

Şimdi, her bir kapalı döngüdeki gerilim toplamlarına bakalım. Eş. 6.31 ve 6.32'de akımın referans yönündeki gerilim artışları negatiftir:

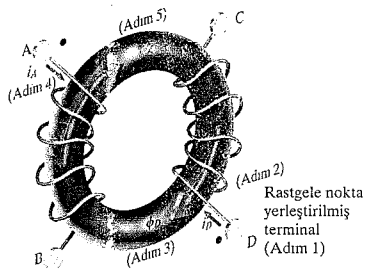
$$-v_g + i_1R_1 + L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} = 0, \qquad (6.31)$$

$$i_2R_2 + L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} = 0. \qquad (6.32)$$

Nokta İşaretlemelerini Belirleme Yöntemi

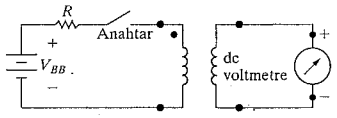
Nokta işaretlemelerini belirlemek için iki yöntem uygulayabiliriz. İlk yöntem, manyetik olarak birbirine bağlanmış devrede her iki bobinin fiziksel durumu ve her bir sarımın modunu bildiğimizi varsayar. Şekil 6.23'e göre uygulanan aşağıdaki altı adım nokta işaretlemesini belirler:

a) Bobinin rasgele bir terminalini seçiniz-örneğin D terminali ve bir nokta ile işaretleyiniz.
b) Noktalı terminal doğru giren bir akım atayınız ve i_D olarak adlandırınız.
c) Birbirine bağlanmış bobinlerin içinde i_D tarafından oluşturulan manyetik alanın yönünü belirlemek için sağ el kuralını uygulayınız ve bu akıyı ϕ_A olarak adlandırınız.
d) İkinci bobinde rastgele bir terminal seçiniz –örneğin, A terminali–ve bu terminale giren bir akım tanımlayıp i_A olarak gösteriniz.
e) Birbirine bağlanmış bobinlerin içinde i_A tarafından oluşan akının yönünü belirlemek için sağ el kuralını kullanınız ve ϕ_A akısı olarak adlandırınız.
f) ϕ_D ve ϕ_A akılarının yönünü karşılaştırınız. Akıların yönü aynıysa, test akımının (i_A) girdiği, 2. bobinin ucuna bir nokta koyunuz. (Şekil 6.23'te, ϕ_D ve ϕ_A akılarının yönü aynıdır ve bu yüzden nokta A terminaline yerleştirilmiştir.) Akıların yönü farklıysa, 2. bobinde test akımının çıktığı terminale bir nokta koyunuz.



Şekil 6.23 ▲ Nokta işaretlemelerini belirleme yöntemini gösteren bobinler.

Manyetik olarak bağlaşık bobinlerin kutupluğu deneysel olarak da belirlenebilir. Bazı durumlarda, bobinlerin nasıl sarıldığını bilmek imkansız olduğundan, bu yetenek önemlidir. Deneysel yöntemlerden biri, Şekil 6.24'te görüldüğü gibi bobin çiftine dc gerilim kaynağı, bir direnç, bir anahtar ve dc voltmetre bağlamaktadır. Koyu renkle taranmış olan bobinleri fiziksel olarak incelemek mümkün değildir. R direnci dc gerilim kaynağının sağladığı akımın genliğini limitlemektedir.



Şekil 6.24 ▲ Kutupluk işaretleri için deneysel set.

Şekil 6.24'te de görüldüğü gibi, dc kaynağın pozitif ucuna, anahtar ve limitleyici direnç ile bağlanan bobinin terminaline kutupluk işareti konur. Anahtar kapatıldığında anlık sapma artıyorsa voltmetrenin pozitif terminaline bağlı bobin terminaline kutupluk işareti konur. Sapma miktarı azalıyorsa, voltmetrenin negatif ucuna bağlı bobin ucuna kutupluk işareti konur.

Örnek 6.6, manyetik olarak birbirine bağlanmış devrelerde, devre eşitliklerini elde etmek için nokta işaretlemelerinin nasıl kullanıldığını göstermektedir.

[1]207. sayfadaki Faraday Yasası ile ilgili bölüme bakınız.

Örnek 6.6 **Manyetik Bağlaşık Bobin İçeren Bir Devrede Ağ Akımı Denklemlerinin Bulunması**

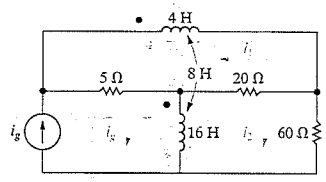
a) Şekil 6.25'te verilen devrede ağ akımı eşitliklerini, i_1 ve i_2 akımları cinsinden yazınız.

b) $t = 0$ anında enerji depolanmamışsa ve $i_g = 16 - 16e^{-5t}$ A ise i_1 ve i_2 için çözümlerin

$$i_1 = 4 + 64e^{-5t} - 68e^{-4t} \text{ A},$$

$$i_2 = 1 - 52e^{-5t} + 51e^{-4t} \text{ A}$$

olduğunu kanıtlayınız.



Şekil 6.25 ▲ Örnek 6.6 için devre şeması.

Çözüm

a) i_1 ağındaki gerilimlerin toplamı

$$4\frac{di_1}{dt} + 8\frac{d}{dt}(i_g - i_2) + 20(i_1 - i_2) + 5(i_1 - i_g) = 0$$

bulunur. i_2 ağı için eşitlik ise

$$20(i_2 - i_1) + 60i_2 + 16\frac{d}{dt}(i_2 - i_g) - 8\frac{di_1}{dt} = 0$$

yazılır. $(i_g - i_2)$ akımı yüzünden 4 H'lik bobinde oluşan, yani $8d(i_g - i_2)/dt$ olan gerilim i_1 yönünde gerilim düşüşüdür. i_1 akımı yüzünden 16 H'lik bobin üzerinde oluşan, yani $8di/dt$ olan gerilim, i_2 akımı yönünde gerilim artışıdır.

b) i_1 ve i_2'nin doğruluğunu kanıtlamak için i_1 ve i_2'nin ilk ve son değerlerini test ederek başlıyoruz. Varsayım olarak $i_1(0) = i_2(0) = 0$ olduğunu biliyoruz. Verilen çözümlerden,

$$i_1(0) = 4 + 64 - 68 = 0,$$

$$i_2(0) = 1 - 52 + 51 = 0$$

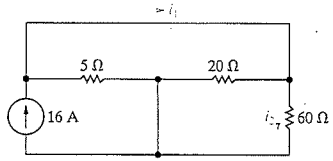
elde edilir. Şimdi, t sonsuza giderken kaynak akımının (i_g) 16 A'lik sabit bir değere yaklaştığını gözlemliyoruz. Bu nedenle manyetik olarak bağlaşık devreler kısa devre gibi davranır. Böylece $t \to \infty$'dayken devre Şekil 6.26'daki hale dönüşür. Eşdeğer direnç 3.75 Ω'dur ve 16 A'lik akım kaynağının üzerindeki gerilim de 60 V'tur.

$$i_1(\infty) = \frac{60}{20} + \frac{60}{60} = 4 \text{ A},$$

$$i_2(\infty) = \frac{60}{60} = 1 \text{ A}.$$

Bu sonuçlar, i_1 ve i_2 için verilen çözümlerin son değerleriyle uyuşmaktadır.

Son olarak, sonuçların, (a) şıkkında bulunan diferansiyel eşitlikleri sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim. Bu son kontrol işini Problem 6.37 ile okuyucuya bırakacağız.



Şekil 6.26 ▲ $t = \infty$ iken, Örnek 6.6 için devre şeması.

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 4 – Manyetik olarak birbirine bağlaşmış bobinlerde ağ akımı eşitliklerini yazabilmek için nokta kuralını kullanabilme

6.6 a) Örnek 6.6'daki devrede 4H'lik indüktör üzerindeki nokta, sağ terminalde olsaydı, i_g'nin yönü değiştirilseydi ve 60 Ω resistor 780 Ω'a çıkarılsaydı, ağ akımı eşitliklerini yeniden yazınız.

b) $t = 0$ anında enerji depolanmamışsa ve $i_g = 1.96 - 1.96e^{-4t}$ A olsa, Değerlendirme Probleminin (a) şıkkında bulunan diferansiyel denklemlerin çözümünün,

$$i_1 = -0.4 - 11.6e^{-4t} + 12e^{-5t} \text{ A},$$

$$i_2 = -0.01 - 0.99e^{-4t} + e^{-5t} \text{ A}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Cevap: (a) $4(di_1/dt) + 25i_1 + 8(di_2/dt) - 20i_2 = -5i_g - 8(di/dt)$ ve $9(di_1/dt) - 20i_1 + 16(di_2/dt) + 800i_2 = -16\,(di_g/dt)$; (b) doğrulama.

NOT: Ayrıca, Bölüm Problemlerinden 6.34'ü de çözmeyi deneyiniz.

6.5 Karşılıklı Endüktansa Detaylı Bakış

Devre parametresi olan karşılıklı empedansı tamamen açıklayabilmek ve Kısım 6.4'te yapılan taştışmalardaki sınırlamaları ve tahminleri inceleyebilmek için, daha önce yaptığımız öz endüktans tanımından daha nicel bir tanımla başlıyoruz.

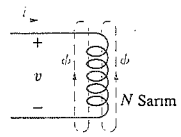
Öz Endüktansın Gözden Geçirilmesi

Endüktans kavramı, 1800'lü yılların başında, bu alana öncülük yapan Michael Faraday'a dayanır. Faraday, manyetik alanın, akım taşıyan iletkenin çevresinde güç çizgilerinden oluştuğunu öne sürmüştür. Bu güç çizgilerini, kendileri üzerine kapanan enerji depolayan esnek bantlar olduğunu düşününüz. Akım artıp azaldıkça, bu esnek bantlar (güç çizgileri) iletken etrafında dağılır ve sönerler. İletkende indüklenen gerilim, iletkende sönen veya iletkeni kesen çizgilerin sayısıyla orantılıdır. Faraday kanunu ile açıklanan, bu indüklenmiş gerilim

$$v = \frac{d\lambda}{dt} \tag{6.33}$$

ile verilir. Burada λ, akı bağlaşımı olarak adlandırılır ve weber-sarım olarak ölçülür.

Faraday Kanunu'ndan, Kısım 6.1'de bahsedilen endüktans tanımına nasıl geçeceğiz? Şekil 6.27'yi kullanarak bu bağlantıyı açıklamaya başlayabiliriz.



Şekil 6.27 ▲ N-sarımlı bobinle bağlaşan manyetik alanın gösterimi.

N sarımdan geçen ve ϕ ile tanımlanan çizgiler, manyetik kuvvet çizgilerini göstermektedir. Manyetik alanın gücü, akımın gücüne bağlıdır ve alanın uzaysal yönelimi de akımın yönüne bağlıdır. Sağ el kuralı ile akımın yönüne bağlı olan alan yönelimi bulunabilir: Sağ elin parmakları bobinin etrafını saracak ve parmaklar akım yönünde olacak şekilde tutulursa, baş parmak sarımın içindeki manyetik alanın yönünü gösterir. Akı bağlaşımı, birimi Weber (Wb) olan manyetik alanla ilgili sarım sayısının (N) çarpımına eşittir.

$$\lambda = N\phi. \tag{6.34}$$

Akının büyüklüğü ϕ, bobindeki akımın büyüklüğüne

$$\phi = \mathcal{P}Ni \tag{6.35}$$

ile bağlıdır. Burada N bobindeki sarım sayısı, $\mathcal{P}$ ise akımın bulunduğu ortamın manyetik geçirgenliğidir. Manyetik geçirgenlik, ortamın manyetik özelliklerini belirler ve aslında manyetik geçirgenlik konusunun detayları bu kitabın amaçları dışındadır. Burada, ihtiyacımız olan akı bulunan ortam manyetik maddelerden (demir, nikel, kobalt gibi) oluşuyorsa, geçirgenliğin akıya bağlı olduğu ve bu nedenle ϕ ve i arasında doğrusal olmayan bir ilişki olduğunu bilmemizdir. Fakat, ortam manyetik olmayan maddelerden oluşuyorsa, manyetik geçirgenlik sabittir ve ϕ ve i arasında doğrusal bir ilişki vardır. Eş. 6.35'e bakarak, akımın bobindeki sarım sayısıyla da orantılı olduğuna dikkat ediniz.

Burada, çekirdek malzemesinin – akımın bulunduğu ortam– manyetik olmadığını varsayıyoruz. Eş. 6.34 ve 6.35'i, Eş. 6.33'e yerleştirirsek,

$$v = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d(N\phi)}{dt}$$

$$= N\frac{d\phi}{dt} = N\frac{d}{dt}(\mathcal{P}Ni)$$

$$= N^2\mathcal{P}\frac{di}{dt} = L\frac{di}{dt} \tag{6.36}$$

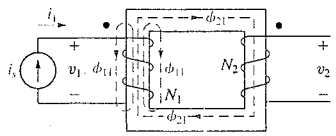
elde ederiz. Bu eşitlik, öz indüktansın sarım sayısının karesiyle orantılı olduğunu gösterir. Bu sonucu daha sonra kullanacağız.

Şekil 6.27'deki devrede indüklenen gerilimin kutupluğu alanın, alanı yaratan akıma etkisini yansıtmaktadır. Örneğin, i artarken, di/dt pozitiftir ve v de pozitiftir. Böylece, manyetik alanı oluşturmak için enerji gerekmektedir. vi çarpımı hangi hızla enerji depolandığını gösterir. Alan söndüğünde, di/dt negatiftir ve indüklenen gerilimin kutupluğu da değişimin tersi yönündedir. Bobin etrafında alan sönerse, enerji devreye tekrar döner.

Öz endüktans kavramı hakkındaki bu bilgileri unutmadan, karşılıklı endüktans konusuna dönüyoruz.

Karşılıklı Endüktans Kavramı

Şekil 6.28, manyetik olarak bağlaşık iki bobini göstermektedir. Her iki bobindeki nokta işaretlerinin, bobinlerdeki sarımların ve akımların yönü ile uyumlu olduğunu kontrol etmelisiniz. Her bobindeki sarım sayısı sırasıyla N_1 ve N_2'dir. Bobin 1, N_1 sarımda i_1 akımını üreten, zamanla değişen akım kaynağı ile beslenmektedir. Bobin 2, beslenmemektedir ve açık devredir. Bobinler manyetik olmayan çekirdek üzerine sarılmışır. i_1 tarafından üretilen akı, ϕ_{11} ve ϕ_{21} olarak adlandırılan iki bileşene ayrılır. ϕ_{11} akısı, sadece N_1 sarımı ile bağlaşan i_1 tarafından üretilmiş akı bileşenidir. ϕ_{21} bileşeni, N_2 sarımı ve N_1 sarımı birbirine bağlaştıran i_1'in ürettiği akıdır. Akıdaki indisin ilk kısmı bobin numarasını, ikinci kısım da bobin akımını belirtmektedir. Buradan hareketle, ϕ_{11} bobin 1 ile bağlaşan akıdır ve bobin 1'deki akım tarafından üretilmiştir. ϕ_{21} bobin 2'ye bağlaşan akıdır ve bobin 1'deki akım tarafından üretilmiştir.



Şekil 6.28 Manyetik olarak bağlaşmış iki bobin.

Bobin 1'in ürettiği toplam akı ϕ_{11} ve ϕ_{21}'in toplamıdır:

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{21}. \tag{6.37}$$

ϕ_1 akısı ve bileşenleri ϕ_{11} ve ϕ_{21}, i_1 bobin akımına aşağıdaki şekilde bağlıdır:

$$\phi_1 = \mathcal{P}_1 N_1 i_1, \tag{6.38}$$

$$\phi_{11} = \mathcal{P}_{11} N_1 i_1, \tag{6.39}$$

$$\phi_{21} = \mathcal{P}_{21} N_1 i_1. \tag{6.40}$$

Burada $\mathcal{P}_1$, ϕ_1'in bulunduğu ortamın manyetik geçirgenliği, $\mathcal{P}_{11}$, ϕ_{11}'in bulunduğu ortamın manyetik geçirgenliği ve $\mathcal{P}_{21}$, ϕ_{21}'in bulunduğu ortamın manyetik geçirgenliğidir. Eş. 6.38, 6.39 ve 6.40'ı, Eş. 6.37'de yerine koyarsak, ϕ_1 toplam akısının bulunduğu ortamın manyetik geçirgenliği ile, bileşenleri olan ϕ_{11}, ϕ_{21}'in bulunduğu ortamın manyetik geçirgenliği arasında bir bağıntı olacaktır:

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{21}. \tag{6.41}$$

v_1 ve v_2 için bağıntılar Faraday Kanunu'nu kullanarak

$$v_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{d(N_1\phi_1)}{dt} = N_1\frac{d}{dt}(\phi_{11} + \phi_{21})$$

$$= N_1^2(\mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{21})\frac{di_1}{dt} = N_1^2\mathcal{P}_1\frac{di_1}{dt} = L_1\frac{di_1}{dt} \tag{6.42}$$

ve

$$v_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{d(N_2\phi_{21})}{dt} = N_2\frac{d}{dt}(\mathcal{P}_{21}N_1 i_1)$$

$$= N_2 N_1 \mathcal{P}_{21}\frac{di_1}{dt} \tag{6.43}$$

olarak elde edilir.

Eş 6.42'deki di/dt'nin katsayısı bobin 1'in öz endüktansıdır. Eş. 6.43'teki di/dt'nin katsayısı bobin 1 ve 2'nin arasındaki karşılıklı endüktanstır.

$$M_{21} = N_2 N_1 \mathcal{P}_{21}. \tag{6.44}$$

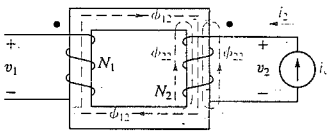
M'deki altindis, bobin 1 akımı yüzünden bobin 2'de indüklenen gerilime ait endüktansı belirtmektedir.

Karşılıklı endüktans katsayısı

$$v_2 = M_{21}\frac{di_1}{dt} \tag{6.45}$$

verir. Nokta gösteriminin, Şekil 6.28'deki v_2'ye kutupluk referansı atamak için kullanıldığına dikkat ediniz. Aynı şekilde, v_1 de nokta kuralına göre belirlenmiştir.

Şekil 6.38'deki bağlaşık bobinlerde, zaman değişen akım kaynağı tarafından uyarılan 2. bobin ve akımın çıktığı 1. bobin, Şekil 6.29'daki devre düzeneğini oluşturmaktadır. v_1'e atanan kutupluk referansı, nokta gösterimine uygun şekilde yapılmıştır.



Şekil 6.29 ◁ Şekil 6.28'deki manyetik olarak bağlaşmış bobinler; Bobin 2 uyarılmış, bobin 1 açık.

Bobin 2'ye bağlaşan toplam akı,

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{12} \tag{6.46}$$

bulunur. ϕ_2 akısı ve bileşenleri ϕ_{22} ve ϕ_{12}, i_2 bobin akımına aşağıdaki gibi bağlıdır:

$$\phi_2 = \mathcal{P}_2 N_2 i_2, \tag{6.47}$$

$$\phi_{22} = \mathcal{P}_{22} N_2 i_2, \tag{6.48}$$

$$\phi_{12} = \mathcal{P}_{12} N_2 i_2. \tag{6.49}$$

v_1 ve v_2 gerilimleri,

$$v_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = N_2^2 \mathcal{P}_2 \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt}, \tag{6.50}$$

$$v_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{d}{dt}(N_1\phi_{12}) = N_1 N_2 \mathcal{P}_{12}\frac{di_2}{dt} \tag{6.51}$$

ile verilir. Bobin 2'deki zamanla değişen akımın, bobin 1'de indüklediği gerilime ait karşılıklı endüktansın katsayısı Eş. 6.51'deki di_2/dt'nin katsayısıdır:

$$M_{12} = N_1 N_2 \mathcal{P}_{12}. \tag{6.52}$$

Manyetik olmayan malzemeler için $\mathcal{P}_{12}$ ve $\mathcal{P}_{21}$ birbirine eşittir ve

$$M_{12} = M_{21} = M \tag{6.53}$$

ile verilir. Bu nedenle, manyetik olarak birbirine bağlaşık bobinlerin olduğu doğrusal devrelerde, karşılıklı endüktansların katsayılarına altindis eklemeye gerek yoktur.

Öz Endüktans Cinsinden Karşılıklı Endüktans

Karşılıklı endüktans değeri, öz endüktansların bir fonksiyonudur. Bu ilişkiyi şu şekilde bulabiliriz. Eş. 6.42 ve 6.50'yi sırasıyla kullanarak,

$$L_1 = N_1^2 \mathcal{P}_1, \tag{6.54}$$

$$L_2 = N_2^2 \mathcal{P}_2 \tag{6.55}$$

elde ederiz. Eş. 6.54 ve 6.55'ten

$$L_1 L_2 = N_1^2 N_2^2 \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \tag{6.56}$$

bulunur. Şimdi Eş. 6.41 ve buna bağlı $\mathcal{P}_2$'nin ifadesini

$$L_1 L_2 = N_1^2 N_2^2 (\mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{21})(\mathcal{P}_{22} + \mathcal{P}_{12}) \tag{6.57}$$

yazmak için kullanırız. Fakat, doğrusal bir sistemde $\mathcal{P}_{21} = \mathcal{P}_{12}$ olduğundan, Eş. 6.57

$$L_1 L_2 = (N_1 N_2 \mathcal{P}_{12})^2 \left(1 + \frac{\mathcal{P}_{11}}{\mathcal{P}_{12}}\right)\left(1 + \frac{\mathcal{P}_{22}}{\mathcal{P}_{12}}\right)$$

$$= M^2 \left(1 + \frac{\mathcal{P}_{11}}{\mathcal{P}_{12}}\right)\left(1 + \frac{\mathcal{P}_{22}}{\mathcal{P}_{12}}\right) \tag{6.58}$$

haline gelir. Manyetik geçirgenlikleri içeren iki terimi bir basitle değiştirince, Eş. 6.58 daha anlamı olur:

$$\frac{1}{k^2} = \left(1 + \frac{\mathcal{P}_{11}}{\mathcal{P}_{12}}\right)\left(1 + \frac{\mathcal{P}_{22}}{\mathcal{P}_{12}}\right). \tag{6.59}$$

Eş. 6.59'u, Eş. 6.58'de yerine koyarsak,

$$M^2 = k^2 L_1 L_2$$

veya

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}, \tag{6.60}$$

◁ **Bağlaşım katsayısını kullanarak öz endüktans ve karşılıklı endüktans arasındaki ilişkiyi bulma.**

elde ederiz. k katsayısı, bağlaşım katsayısıdır. Eş. 6.59'a göre $1/k^2$ 1'den büyük olmalıdır. Bu da k'nin 1'den küçük olması demektir. Gerçekten, bağlaşım katsayısı 0 ile 1 arasında olmalıdır.

$$0 \le k \le 1 \tag{6.61}$$

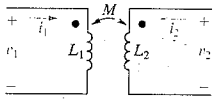
İki bobin arasında ortak bir akı olmadığında bağlaşım katsayısı 0'dır, yani $\phi_{12} = \phi_{21} = 0$'dır. Bu durumda $\mathcal{P}_{12} = 0$ ve Eş. 6.59'da $1/k^2 = \infty$ veya $k = 0$'dır. Bobinler arasında akı bağlaşımı yoksa M 0'dır.

Bağlaşım katsayısı, ϕ_{11} ve ϕ_{22} 0 olduğunda 1'e eşittir. Bu durumda, bobin 1'e bağlaşan bütün akı, bobin 2'ye de bağlaşmaktadır. Eş. 6.59'da $\mathcal{P}_{11} = \mathcal{P}_{21} = 0$ olmaktadır ve bu ideal durumda olur. Gerçekte, aynı akıyı paylaşan iki bobin yapmak fiziksel olarak imkansızdır. Manyetik malzemeler (demir, kobalt ve nikel alaşımları gibi) yüksek manyetik geçirgenliği olan ortamlar yaratır ve bire yakınlaşan bağlaşım katsayıları oluşturmak için kullanılır. (9. Bölümde manyetik malzemelerin bu önemli özelliği için daha fazla şey söyleyeceğiz).

NOT: Bölüm Problemlerinden 6.42 ve 6.43'ü de çözmeyi deneyerek bu konuyu kavrayışınızı sınayınız.

Enerji Hesaplamaları

Karşılıklı endüktans ile ilgili bu kısmı, manyetik olarak bağlaşmış bobinlerdeki toplam enerjiye bakarak bitiriyoruz. Bunu yaparken önceden yaptığımız iki gözlemimizi de kullanacağız: Doğrusal manyetik bağlaşımlarda, (1) $M_{12} = M_{21} = M$ ve (2) $M = k\sqrt{L_1L_2}$, $0 \le k \le 1$.



Şekil 6.30 ▲ Temel enerji hesaplamaları için kullanılan devre şeması.

Doğrusal olarak birbirine bağlaşmış devrelerde oluşan manyetik alanda depolanan toplam enerjiyi bulmak için Şekil 6.30'da gösterilen devreyi kullanbiliriz. Hiç akım yokken bobinlerde enerji depolanmadığını ve i_1 ve i_2 akımlarının sıfır olduğunu varsayarak başlarız. i_1 akımını sıfırdan I_1 değerine çıkaralım ve $i_1 = I_1$ iken depolanan enerjiyi hesaplayalım. $i_2 = 0$ olduğundan, bobin çiftlerindeki toplam güç v_1i_1'dir ve depolanan enerji,

$$\int_0^{W_1} dw = L_1 \int_0^{I_1} i_1 di_1,$$

$$W_1 = \frac{1}{2}L_1I_1^2 \qquad (6.62)$$

bulunur. Şimdi i_1'i I_1'de sabitleyip i_2'yi sıfırdan I_2 değerine çıkarıyoruz. Bu zaman aralığında, bobin 2'de i_1 akımı tarafından indüklenen gerilim $M_{12}di_2/dt$'dir. Bu nedenle bobin çiftine verilen güç,

$$p = I_1M_{12}\frac{di_2}{dt} + i_2v_2$$

olur. $i_2 = I_2$ iken bobinlerde depolanan toplam enerji

$$\int_{W_1}^{W} dw = \int_0^{I_2} I_1M_{12}di_2 + \int_0^{I_2} L_2i_2di_2$$

veya

$$W = W_1 + I_1I_2M_{12} + \frac{1}{2}L_2I_2^2,$$

$$= \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + I_1I_2M_{12} \qquad (6.63)$$

bulunur.

Bu işlem sırasını değiştirisek-yani; önce i_2'yi sıfırdan I_2'ye, sonra i_1'i sıfırdan I_1'e artırsak depolanan toplam enerji

$$W = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + I_1I_2M_{21} \qquad (6.64)$$

olurdu. Eşitlik 6.63 ve 6.64, doğrusal olarak birbirine bağlaşmış bobin çiftinde depolanan enerjinin, bobin akımlarının, öz endüktansların ve karşılıklı endüktansın bir fonksiyonu olduğunu açıklamaktadır. Bu denklemler arasındaki tek farkın akım çarpımları, I_1, I_2'nin katsayısı olduğuna dikkat ediniz. Eş. 6.63'ü, ilk i_1 oluştuğunda, Eş. 6.64'ü ise ilk i_2 oluştuğunda kullanıyoruz.

Bağlaşım ortamı doğrusalsa, I_1 ve I_2'den hangisinin önce oluştuğuna bakılmaksızın, toplam enerji aynıdır. Bunun sebebi, doğrusal bağlaşımda, oluşan manyetik akı, i_1 ve i_2 akımlarının, son değerlerine nasıl ulaştığına değil, son değerlerine bağlıdır. Oluşan manyetik akı aynıysa, depolanan enerji de aynıdır. Doğrusal bağlaşım için $M_{12} = M_{21}$'dir. I_1 ve I_2 sırasıyla i_1 ve i_2'nin gelişigüzel değerleri olduğundan, sarım akımlarını i_1 ve i_2 anlık değerleriyle göstereceğiz. Böylece, bobinlerde depolanan enerji, herhangi bir anda

$$w(t) = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 + Mi_1i_2 \qquad (6.65)$$

olur. Eş. 6.65 hesaplanırken, bobin akımlarının kutupluk işaretli terminallere girdiği varsayılmıştır. Akımlardan biri kutupluk işaretli terminale girerken diğer akım terminalden çıkıyorsa, Mi_1i_2 teriminin işaretinin değiştiğini bulma işi size bırakılmıştır. Genel bir ifade yazacak olursak,

$$w(t) = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 \pm Mi_1i_2 \qquad (6.66)$$

elde ederiz.

M değerinin $\sqrt{L_1L_2}$ değerinden daha fazla olamayacağını, Eş. 6.66'yı kullanarak gösterebiliriz. Manyetik olarak birbirine bağlaşık bobinler pasif elemanlardır, bu nedenle toplam enerji negatif olamaz. $\omega(t)$ negatif olamazsa, Eş. 6.66,

$$\frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 - Mi_1i_2$$

ifadesinin sıfıra eşit veya sıfırdan büyük olduğunu göstermektedir. i_1 ve i_2'nin pozitif veya negatif olması farketmez. i_1 ve i_2'nin pozitif veya negatif olması farketmez. M'nin limit değerini bulmak için bu ifade sıfıra eşitlenmelidir:

$$\frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 - Mi_1i_2 = 0. \qquad (6.67)$$

M'nin limit değerini bulmak için Eş. 6.67'nin sol tarafına $i_1i_2\sqrt{L_1L_2}$ terimini ekleyip çıkarırız. Bunu yaparak tam kare ifade elde ederiz.

$$\left(\sqrt{\frac{L_1}{2}}i_1 - \sqrt{\frac{L_2}{2}}i_2\right)^2 + i_1i_2\left(\sqrt{L_1L_2} - M\right) = 0. \qquad (6.68)$$

Eş. 6.68'deki tam kare ifade negatif olamaz ama sıfır olabilir. Bu nedenle $\omega(t) \geq 0$ sadece

$$\sqrt{L_1 L_2} \geq M \tag{6.69}$$

iken olabilir. Bir başka deyişle

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \qquad (0 \leq k \leq 1)$$

bulunur. Eş. 6.69'u i_1 ve i_2 aynı anda pozitif veya negatifken hesapladık. Bununla birlikte, i_1 ve i_2 farklı işaretlerde olsalar bile aynı sonucu elde ederiz, çünkü bu durumda M'nin limit değerini seçmek için Eş. 6.66'da artı işaretini seçmeliyiz.

NOT: Bu konuyu kavrayışınızı, Bölüm Problemlerinden 6.47 ve 6.48'i de çözmeyi deneyerek sınayınız.

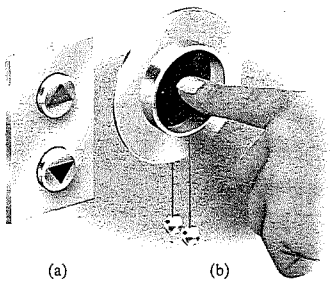
Pratik Bakış Açısı

Yakınlık Anahtarı

Bu bölümün başında, kapasitif yakınlık anahtarı konusunu anlatmıştık. Bu anahtarın iki türü vardır. Bunlardan biri tek elektotlu anahtardır ve masa lambalarında kullanılır. Bununla ilgili çalışma Problem 6.50'de sizin incelemenize bırakılmıştır. Buradaki örnekte, asansör çağrı düğmelerinde kullanılan iki elektrotlu anahtarı inceleyeceğiz.

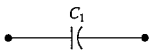
ÖRNEK

Asansör çağrı düğmesi, Şekil 6.31'de gösterildiği gibi, parmakla basılabilen küçük bir kapaktır. Bu kapak, birbirinden yalıtılmış, bir metal halka elektrot ve bir dairesel plaka elektrottan yapılmıştır. Bazen, bunun yerine, yalıtkan plastiklere gömülü iki tane eşmerkezli halka kullanılır. Elektrotlar, metalle doğrudan bağlantıyı engellemek için yalıtkan bir tabakayla kaplanır (Şekil 6.32'de görüldüğü gibi).



(a) (b)

Şekil 6.31 ▲ Asansör çağrı düğmesi. (a) Ön görünüm. (b) Yan görünüm.



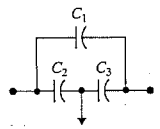
Şekil 6.32 ▲ Asansör çağrı düğmelerinde kullanılan iki-elektrotlu yakınlık anahtarının kapasitör modeli.

Birçok kapasitörün tersine, kapasitif yakınlık anahtarı elektrotlar arasına, parmak gibi nesnelerin girmesine izin verir. Parmağınız elektrotu kaplayan elektrotun yalıtkan kaplamasından çok daha fazla iletken olduğundan devre sanki toprağa bağlanmış bir diğer elektrot varmış gibi tepki gösterir. Sonuç, Şekil 6.63'te gösterildiği gibi üç tane kapasitörün olduğu üç terminalli devredir.

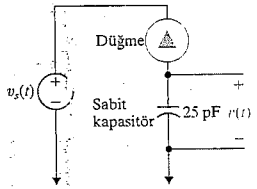
Şekil 6.32 ve 6.33'te görülen kapasitörlerin gerçek değerleri 10 ile 50 pF arasındadır ve anahtarın geometrisine, parmağın nasıl basıldığına, eldiven giyilip giyilmediğine vb göre değişir. Aşağıdaki problemler için, bütün kapasitörlerin 25 pF değerinde olduğunu varsayınız. Ayrıca, asansör çağrı düğmesinin gerilim-bölücü devrenin kapasitif eşdeğeri içerisine yerleştirildiğini düşününüz (Şekil 6.34'te görüldüğü gibi.)

a) Parmakla basılmadığında çıkış gerilimini hesaplayınız.

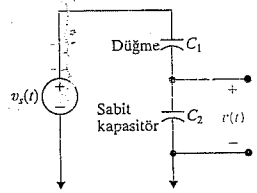
b) Parmakla basıldığında çıkış gerilimini hesaplayınız.



Şekil 6.33 ▲ Parmak basıldığında kapasitif yakınlık anahtarının devre modeli.



Şekil 6.34 ▲ Asansör çağrı düğmesinin devre şeması.



Şekil 6.35 ▲ Asansör çağrı düğmesinin parmakla basılmadığında modeli.

Çözüm

a) Şekil 6.34'teki devreyi, Şekil 6.32'de kapasitif modeliyle yer değiştirmiş olan çağrı düğmesiyle yeniden çizerek başlayacağız. Devrenin son hali Şekil 6.35'te görülmektedir. Tek düğümdeki akım eşitliğini yazarsak

$$C_1 = \frac{d(v - v_s)}{dt} + C_2\frac{dv}{dt} = 0 \tag{6.70}$$

buluruz. $v(t)$ çıkış gerilimi için, diferensiyal denklem yazmak amacıyla bu denklemi

$$\frac{dv}{dt} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\frac{dv_s}{dt} \tag{6.71}$$

halinde düzenleyebiliriz. Son olarak çıkış gerilimini bulmak için Eş. 6.75'in integralini alınız:

$$v(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2}v_s(t) + v(0). \tag{6.72}$$

Eş. 6,72'deki sonuç göstermektedir ki, Şekil 6.35'teki seri bağlı kapasitör devresi, 3. Bölüm'deki seri bağlı direnç devresi gibi, gerilim bölücü devresi olmuştur. Her iki gerilim bölücü devresinde de, çıkış gerilimi elemanların değerine değil, oranlarına bağlıdır. Burada, $C_1 = C_2 = 25$ pF ise kapasitör oranı $C_1/C_2 = 1$'dir. Bu nedenle çıkış gerilimi,

$$v(t) = 0.5v_s(t) + v(0) \tag{6.73}$$

olur. Eş. 6.73'teki sabit terim, kapasitördeki başlangıç yükünden kaynaklanır. Çıkış gerilimini sezen devre başlangıç yükünü etkisini ortadan kaldırdığı için $v(0) = 0$ V kabul edebiliriz. Dolayısıyla sezilen çıkış gerilimi

$$v(t) = 0.5v_s(t) \tag{6.74}$$

bulunur.

b) Şimdi de, Şekil 6.34'teki çağrı düğmesini, Şekil 6.33'teki model ile değiştiriyoruz. Sonuç, Şekil 6.36'da gösterilmiştir. Çıkış düğümünden çıkan akımları yeniden hesaplarsak

$$C_1\frac{d(v - v_s)}{dt} + C_2\frac{dv}{dt} + C_3\frac{dv}{dt} = 0 \qquad (6.75)$$

elde ederiz. $v(t)$ için diferansiyel denklemi yeniden düzenlersek,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3}\frac{dv_s}{dt} \qquad (6.76)$$

buluruz. Son olarak, Eş. 6.67'deki diferansiyel denklemi çözersek,

$$v(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3}v_s(t) + v(0).$$

If $C_1 = C_2 = C_3 = 25$ pF, (6.77)

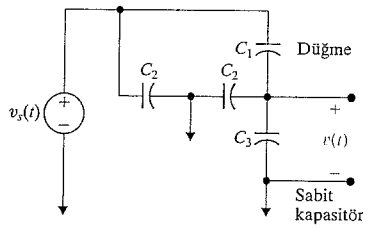
$$v(t) = 0.333v_s(t) + v(0) \qquad (6.78)$$

olduğunu görürüz. Daha önce olduğu gibi sezici devre $v(0)$'ı yok eder ve algılanan çıkış gerilimi

$$v(t) = 0.333v_s(t) \qquad (6.79)$$

olur. Eş. 6.74 ve 6.79'u karşılaştırırsak düğmeye basıldığında, çıkış gerilimi, giriş geriliminin üçte birdir. Düğmeye basılmadığında, çıkış gerilimi giriş geriliminin yarısı kadardır. Çıkış gerilimindeki herhangi bir değişim asansörün denetleme bilgisayarı tarafından algılanır ve asansör uygun kata ulaşır.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 6.49 ve 6.51'i çözmeye çalışarak Pratik Bakış Açısı bölümünde anlatılan konuyu kavrayışınızı sınayınız.



Şekil 6.36 Parmakla çalıştırıldığında asansör çağrı düğmesinin modeli.

Özet

- **Endüktans,** zamanla değişen manyetik alanın indüklediği gerilimi, alan üreten akıma bağlayan bir doğrusal devre parametresidir. (Sayfa 188'e bakınız.)
- **Kapasitans** zamanla değişen elektrik alanın indüklediği akımı, alanı üreten gerilime bağlayan bir doğrusal devre parametresidir. (Sayfa 195'e bakınız.)
- İndüktör ve kapasitörler pasif elemanlardır; enerji depolayabilir ve bırakabilirler, fakat enerji üretemez veya harcayamazlar. (Sayfa 18'e bakınız.)
- İndüktör veya kapasitörün uçlarındaki anlık güç pozitif veya negatif olabilir. Bu, enerjinin elemanda depolanmasına veya elemandan alınmasına bağlıdır.
- İndüktör,
- Terminallerindeki akımın anlık olarak değişmesine izin vermez.
- Terminallerindeki gerilimin anlık olarak değişmesine izin verir.
- Sabit akım altında kısa devre gibi davranır. (188-189. sayfalara bakınız.)
- Kapasitör,
- Terminallerindeki gerilimin anlık olarak değişmesine izin vermez.
- Terminallerindeki akımın anlık olarak değişmesine izin verir.
- Sabit gerilim altında açık devre gibi davranır (196. sayfaya bakınız.)
- İdeal indüktör ve kapasitörlerdeki gerilim, akım, güç ve enerji denklemleri Tablo 6.1'de verilmiştir.
- Seri veya paralel bağlı indüktörler eşdeğer bir indüktör ile değiştirilebilir. Seri veya paralel bağlı kapasitörler eşdeğer bir kapasitör ile değiştirilebilir. Eşitlikler Tablo 6.2'de özetlenmiştir. İndüktör veya kapasitör bulunan, seri ve paralel bağlı eşdeğer devrelerde başlangıç koşullarının nasıl kullanıldığı Kısım 6.3'te anlatılmıştır.

TABLO 6.1 İdeal İndüktör ve Kapasitörler İçin Terminal Denklemleri

İndüktörler	
$v = L\frac{di}{dt}$	(V)
$i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i(t_0)$	(A)
$p = vi = Li\frac{di}{dt}$	(W)
$w = \frac{1}{2}Li^2$	(J)
Kapasitörler	
$v = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,d\tau + v(t_0)$	(V)
$i = C\frac{dv}{dt}$	(A)
$p = vi = Cv\frac{dv}{dt}$	(W)
$w = \frac{1}{2}Cv^2$	(J)

TABLO 6.2 Seri ve Paralel Bağlı İndüktör ve Kapasitörler İçin Denklemler

Seri Bağlı
$L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$
$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$
Paralel Bağlı
$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$
$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$

- **Karşılıklı Endüktans,** M, bir devrede indüklenen gerilimi, bir başka devrede zamanla değişen akıma bağlayan devre parametresidir. Denklem halinde

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M_{12}\frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M_{21}\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$$

verilebilir.

Burada v_1 ve i_1 devre 1'deki gerilim ve akım, v_2 ve i_2 devre 2'deki gerilim ve akımdır. Manyetik olmayan çekirdeklere sarılmış bobinlerde $M_{12} = M_{21} = M$ (sayfa 210'a bakınız.) olur.

- Nokta gösterimi, karşılıklı indüklenmiş gerilimlerin kutupluğunu belirler.

  Akımın referans yönü, bobinin noktalı terminline giriyorsa, diğer bobinde indüklenen gerilimin referans kutupluğu, noktalı terminalde pozitiftir.

  Veya alternatif olarak,

  Akımın referans yönü, bobinin noktalı terminalinden çıkıyorsa, diğer bobinde indüklenen gerilimin referans kutupluğu, noktalı terminalde negatiftir.

  (Sayfa 204'e bakınız.)

- Her sarımının öz endüktansı ve sarımlar arasındaki karşılıklı endüktans arasındaki ilişki,

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

ile verilir. **Bağlaşım katsayısı,** k, manyetik bağlaşımın bir ölçütüdür. Tanım olarak, $0 \le k \le 1$'dir. (Sayfa 211'e bakınız.)

- Doğrusal bir ortamda manyetik olarak bağlaşmış bobinlerde depolanan enerji, bobin akımları ve endüktanslara

$$w = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2$$

ile bağlıdır. (Sayfa 213'e bakınız.)

Problemler

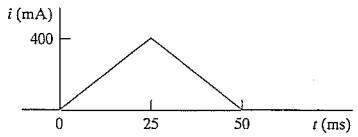
Kısım 6.1

6.1 PSPICE Şekil P6.1'de görülen üçgen akım dalgası 375 mH'lik bir indüktöre uygulanmıştır.

a) $i(t)$'yi $t < 0$ iken, $0 \le t \le 25$ ms iken, 25ms $\le t \le 50$ ms iken ve $t > 50$ ms iken tanımlayan bağıntıları yazınız.

b) İndüktör gerilimi, gücü ve enerjisi için bağıntıları bulunuz. Pasif işaret kuralı kullanınız.

Şekil P6.1

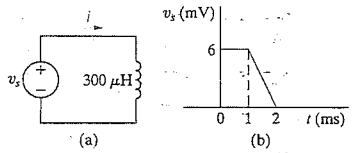


6.2 PSPICE Şekil P6.2(a)'daki devrede 300 μH'lik indüktörün uçlarındaki gerilim Şekil P6.2(b)'de gösterilmiştir. İndüktör akımı i'nin $t \le 0$ için sıfır olduğu bilinmektedir.

a) $t \ge 0$ için i'nin ifadesini çıkarınız.

b) $0 \le t \le \infty$ aralığında t'ye karşı i'yi çiziniz.

Şekil P6.2

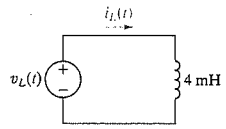


6.3 PSPICE Şekil P6.3'teki 4 mH'lik indüktördeki akımın $t < 0$ için 2.5 A olduğu bilinmektedir. $t \ge 0$ iken indüktördeki gerilim için verilen bağıntı aşağıdadır:

$$v_L(t) = 30e^{-3t}\ \text{mV}, \quad 0^+ \le t < \infty.$$

$0 \le t \le \infty$ aralığında $v_L(t)$ ve $i_L(t)$'yi çiziniz.

Şekil P6.3



6.4 PSPICE 100 μH'lik bir indüktördeki akım

$$i_L = 20te^{-5t}\ \text{A} \quad t \ge 0 \text{ için}$$

olarak bilinmektedir.

a) $t > 0$ için indüktördeki gerilimi bulunuz. (Pasif işaret kuralı olduğunu varsayınız.)

b) $t = 100$ ms anında indüktörün terminallerindeki gücü (mikrowatt olarak) bulunuz.

c) 100 ms anında, indüktör gücü almakta veya vermekte midir?

d) İndüktörde, 100 ms anında depolanan enerjiyi (mikrojoule olarak) bulunuz.

e) İndüktörde depolanan maksimum enerjiyi (mikrojoule olarak) ve maksimum enerji anını (mikrosaniye olarak) bulunuz.

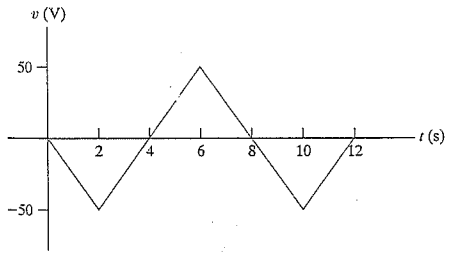
6.5 PSPICE 2.5 H'lik bir indüktördeki akım ve gerilim $t \le 0$ için sıfırdır. İndüktör üzerindeki gerilim, $t \ge 0$ için Şekil P6.5'te verilmektedir.

a) $0 \le t \le 2$ s, 2 s $\le t \le 6$ s, 6 s $\le t \le 10$ s, 10 s $\le t \le 12$ s ve 12 s $\le t \le \infty$ aralıklarında zamanın fonksiyonu olarak akımla ilgili bağlantıyı bulunuz.

b) $t > 0$ için, gerilim sıfırken indüktördeki akım nedir?

c) $0 \le t < \infty$ aralığında i'yi t'ye karşı çiziniz.

Şekil P6.5



6.6 PSPICE $t \ge 0$ için, 20 mH'lik bir indüktördeki akım $7 + (15\sin 140 + -35\cos 140t)e^{-20t}$ olarak bilinmektedir. Pasif işaret kuralı olduğunu varsayınız.

a) Hangi anda indüktördeki gerilim maksimumdur?

b) Maksimum gerilim nedir?

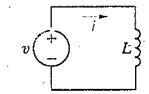
6.7 PSPICE a) Şekil P6.7'deki devrede bulunan indüktör akımını bulunuz.

$v = 250 \sin 1000\,t$ V, $L = 50$ mH ve $i(0) = -5$ A'dir.

b) v, i, p ve ω'yi zamana karşı çiziniz.

c) Gücün indüktör tarafından emildiği 0 ve 2π ms zaman aralığının alt aralıklarını bulunuz. Aynı işlemi gücün indüktörden bırakıldığı zaman aralıkları için tekrarlayınız.

Şekil P6.7



6.8 15 mH'lik bir indüktördeki akım

$$i = 1\text{A}, \qquad t \le 0;$$

$$i = A_1 e^{-2{,}000t} + A_2 e^{-8{,}000t}\ \text{A}, \qquad t \ge 0$$

olarak bilinmektedir. İndüktör üzerindeki gerilim (pasif işaret kuralına göre) $t = 0$ anında 60 V'tur.

a) $t > 0$ için indüktör üzerindeki gerilimi bulunuz.

b) İndüktörün terminallerindeki akımın sıfır olduğu anı bulunuz ($t > 0$).

6.9 Problem 6.8'de verilen indüktör üzerindeki gerilimin $t = 0$ anında 60 V yerine -300 V olduğunu farzediniz.

a) i ve v için $t \ge 0$ iken nümerik ifadeleri bulunuz.

b) İndüktörün enerji depoladığı veya enerji bıraktığı zaman aralıklarını bulunuz.

c) İndüktörde depolanan enerjinin, indüktörden bırakılan enerjiye eşit olduğunu gösteriniz.

6.10 2 H'lik bir indüktördeki akım

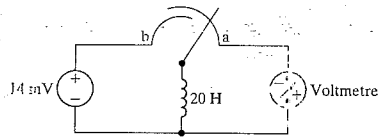
$$i = 25\ \text{A}, \qquad t \le 0;$$

$$i = (B_1 \cos 5t + B_2 \sin 5t)e^{-t}\ \text{A}, \qquad t \ge 0$$

veriliyor. İndüktör üzerindeki gerilim (pasif işaret kuralına göre) $t = 0$ anında 100 V'tur. $t = 0.5$ s. anında indüktörün terminallerindeki gücü hesaplayınız. İndüktörün gücü emdiğini veya bıraktığını belirleyiniz.

6.11 Voltmetrenin uçlarına yerleştirildiğinde Şekil P6.11'de görülen devredeki 20 H'lik indüktörde başlangıçta enerji depolanmamıştır. $t = 0$ anında, indüktör aniden b noktasına getiriliyor ve a noktasına getirilmeden 1.2 s bırakılıyor. d'Arsonval voltmetresinin 25 V'luk tam gösterge okuması ve 1000 Ω/V'luk duyarlılığı vardır. d'Arsonval hareketinin eylemsizliği önemsiz kabul edilirse, anahtar a noktasına getirildiğinde voltmetrenin okuduğu değer ne olacaktır?

Şekil P6.11



6.12 Örnek 6.2 için

$$\int_0^\infty p\,dt$$

integralini hesaplayınız. Sonucun önemi hakkında yorumda bulununuz.

6.13 Örnek 6.5'te cebirsel bağıntıların işlenmesini ve integrasyonları içeren bağıntılar gerilim, güç ve enerji için bulunmuştu. Bir mühendis olarak, böyle sonuçları kanıt olmadan kabullenemezsiniz. "Bu sonuçlar, bilinen devre davranışlarını açısından anlamlı mı?" Bu düşünceler ışığında Örnek 6.5'te verilen bağıntılar için şu kontrolleri yapınız.

b) Her bir zaman aralığı için rastgele bir zamanı seçerek, v ve i çarpımının aynı sonuç verip vermediğini güç bağıntısıyla kontrol ediniz. Örneğin 10 ve 30 μs'de test ediniz.

c) Her zaman aralığında rastgele bir zaman seçerek enerji denkleminin $\frac{1}{2}Cv^2$ ile aynı sonuç verip vermediğini görmek için enerji bağıntısını kontrol ediniz. 10 ve 30 μs'yi test noktaları olarak kullanınız.

Kısım 6.2

6.14 0.5 μF'lık kapasitör 2 s'liğine gerilime maruz bırakılmıştır. Gerilim aşağıdaki eşitlikle tanımlanmıştır:

$$v_c(t) = \begin{cases} 40t^3\ \text{V}, & 0 \le t \le 1\ \text{s}; \\ 40(2-t)^3\ \text{V}, & 1\ \text{s} \le t \le 2\ \text{s}; \\ 0 & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

2 s zaman aralığında kapasitörde bulunan akım darbesini çiziniz.

6.15 PSPICE Şekil P6.15'te gösterilen dikdötgen şekilli akım dalgası 0.2 μF'lık bir kapasitöre uygulanmıştır. Kapasitördeki ilk gerilim 40 V'tur ve referans akım yönündebir gerilim düşüşüdür. (a) – (c) şıklarındaki zaman aralıklarında kapasitör gerilimi ifadesini bulunuz.

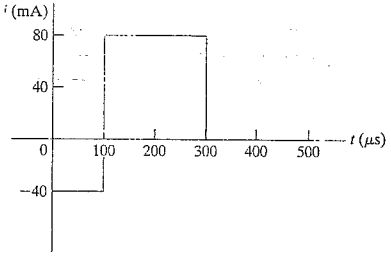
a) $0 \le t \le 100\ \mu$s;

b) $100\ \mu\text{s} \le t \le 300\ \mu$s;

c) $300\ \text{ms} \le t < \infty$;

d) $v(t)$'yi $-100\mu\text{s} \le 500\mu\text{s}$ aralığında çiziniz.

Şekil P6.15



6.16 PSPICE Şek. 6.10'daki kapasitörün terminallerindeki gerilim

$$v = \begin{cases} -30\ \text{V}, & t \le 0; \\ 10 - 10e^{-1000t}(4\cos 3000t + \sin 3000t)\ \text{V} & t \ge 0 \end{cases}$$

verilmektedir. $C = 0.5\ \mu$F olduğunu varsayınız.

a) $t < 0$ için kapasitördeki akımı bulunuz.

b) $t > 0$ için kapasitördeki akımı bulunuz.

c) $t = 0$ anında kapasitördeki gerilimde ani bir değişim olmuş mudur?

d) $t = 0$ anında akımda ani bir değişim olmuş mudur?

e) $t = \infty$ anında kapasitörde depolanan enerji ne kadardır (mikrojoule cinsinden)?

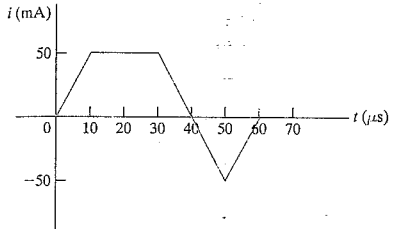
6.17 PSPICE Şekil P6.17'de gösterilen akım 0.25μF'lık bir kapasitöre uygulanmıştır. Kapasitördeki başlangıç gerilimi sıfırdır.

a) $t = 30\ \mu$s'de kapasitördeki yükü bulunuz.

b) $t = 50\ \mu$s'de kapasitördeki gerilimi bulunuz.

c) Bu akımdan dolayı kapasitörde depolanan enerji ne kadardır?

Şekil P6.17

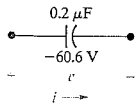


6.18 PSPICE Şekil P6.18 (a)'da gösterilen kapasitördeki başlangıç gerilimi −60.6 V'tur. Kapasitör akımı Şekil P6.18(b)'de gösterilen dalgabiçimidir.

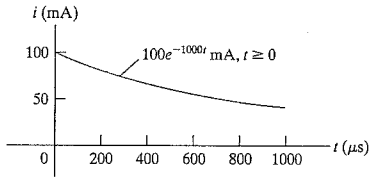
a) $t = 250\ \mu$s anında kapasötürde depolanan enerji kaç mikrojoule'dür?

b) (a) şıkkını $t = \infty$ için tekrarlayınız.

Şekil P6.18



(a)



(b)

6.19 PSPICE 0.4 μF'lık bir kapasitörün terminallerindeki gerilim

$$v = \begin{cases} 25\ \text{V}, & t \le 0; \\ A_1te^{-1500t} + A_2e^{-1500t}\text{V}, & t \ge 0 \end{cases}$$

veriliyor. Kapasitördeki başlangıç akımı 90 mA'dir. Pasif işaret kuralı olduğunu varsayınız.

a) Kapasitörde başlangıçta depolanan enerji nedir?

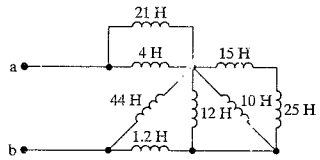
b) A_1 ve A_2 katsayılarını hesaplayınız.

c) Kapasitör akımı için bağıntıyı bulunuz.

Kısım 6.3

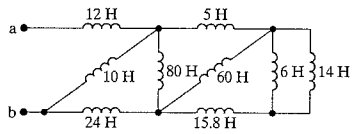
6.20 Şekil P6.20'deki indüktörlerde başlangıçta depolanan enerjinin sıfır olduğunu kabul ediniz. a, b terminalleri arasındaki eşdeğer endüktansı bulunuz.

Şekil P6.20



6.21 Şekil P6.21'deki indüktörlerde depolanan enerjinin başlangıçta sıfır olduğunu kabul ediniz. a, b terminalleri arasındaki eşdeğer indüktörü bulunuz.

Şekil P6.21



6.22 Paralel bağlı iki indüktör, Şekil P6.22'deki kapalı kutunun terminallerine bağlanmıştır. $t > 0$ için gerilimin $-1800e^{-20t}$ V olduğu bilinmektedir. $i_1(0) = 4$ A ve $i_2(0) = -14$ A olduğu da bilinmektedir.

a) Baştaki indüktörleri eşdeğer indüktör ile değiştiriniz ve $t \geq 0$ için $i(t)$'yi bulunuz.

b) $i_1(t)$'yi $t \geq 0$ için bulunuz.

c) $i_2(t)$'yi $t \geq 0$ için bulunuz.

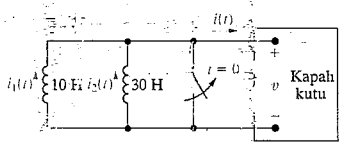
d) $0 < t < \infty$ aralığında kapalı kutuya gönderilen enerji ne kadardır?

e) Başlangıçta paralel indüktörlerde depolanan enerji ne kadardır?

f) İdeal indüktörler tarafından depolanan enerji ne kadardır?

g) i_1 ve i_2 için bulunan sonuçların (f) şıkkının sonuçlarıyla uyuştuğunu gösteriniz.

Şekil P6.22



6.23 Şekil P6.23'teki üç indüktör kapalı kutunun terminallerine $t = 0$ anında bağlanmıştır. $t > 0$ için gerilimin

$$v_o = 1250e^{-25t} \text{ V}$$

olduğu bilinmektedir. $i_1(0) = 10$ A ve $i_2(0) = -5$ A ise,

a) $i_o(0)$;

b) $i_o(t), t \geq 0$;

c) $i_1(t), t \geq 0$;

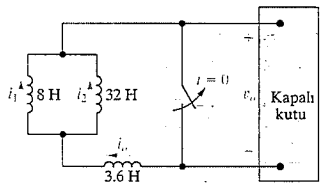
d) $i_2(t), t \geq 0$;

e) üç indüktörde başlangıçta depolanan enerji;

f) kapalı kutuya gönderilen toplam enerji ve

g) ideal indüktörlerde kalan enerji nedir?

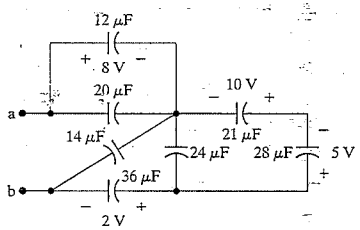
Şekil P6.25



6.24 Şekil P6.23'te gösterilen devrede, anahtar açıldıktan kaç milisaniye sonra toplam enerjinin %80'i kapalı kutuya ulaşmıştır?

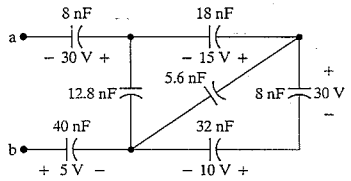
6.25 Şekil P6.25'te gösterilen devrede a, b terminalleri arasındaki eşdeğer kapasitansı bulunuz.

Şekil P6.25



6.26 Şekil P6.26'da gösterilen devrede a, b terminalleri arasındaki eşdeğer kapasitansı bulunuz.

Şekil P6.26



6.27 Şekil P6.27'deki seri bağlı iki kapasitör $t = 0$ anında kapalı kutunun terminallerine bağlanmıştır. $t > 0$ için oluşan akımın $900e^{-2500t}$ μA olduğu bilinmektedir.

a) Kapasitörleri eşdeğer kapasitörle değiştiriniz ve $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

b) $v_1(t)$'yi $t \geq 0$ için bulunuz.

c) $v_2(t)$'yi $t \geq 0$ için bulunuz.

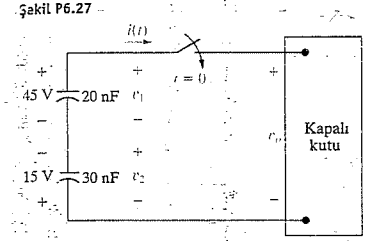
d) $0 \leq t < \infty$ aralığında kapalı kutuya gönderilen enerji ne kadardır?

e) Başlangaçta seri bağlı kapasitörlerde depolanan enerji ne kadardır?

f) İdeal kapasitörlerde kalan enerji ne kadardır?

g) Bulunan v_1 ve v_2 çözümlerinin (f) şıkkındaki cevapla uyuştuğunu gösteriniz.

Şekil P6.27

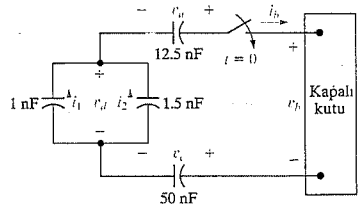


6.28 Şekil P6.28'deki devrede bulunan dört adet kapasitör kapalı kutuya $t = 0$ anında bağlanmıştır. $t > 0$ için i_b akımının

$$i_b = 50e^{-250t} \mu\text{A}$$

olduğu bilinmektedir. $v_a(0) = 15$ V, $v_c(0) = -45$ V ve $v_d(0) = 40$ V ise, şu ifadeleri $t \geq 0$ için bulunuz: (a) $v_b(t)$; (b) $v_a(t)$; (c) $v_c(t)$; (d) $v_d(t)$; (e) $i_1(t)$ ve (f) $i_2(t)$.

Şekil P6.28



6.29 Şekil P6.28'deki devre için,

a) kapasitörlerde başlangıçta depolanan enerjiyi;

b) kapasitörlerde en sonda depolanan enerjiyi;

c) kapalı kutuya gönderilen toplam enerjiyi;

d) başlangıçta depolanan enerjinin % kaçının kapalı kutuya ulaştığını ve

e) kapalı kutuya 5μJ ulaşması için gereken zamanı (milisecand olarak) bulunuz.

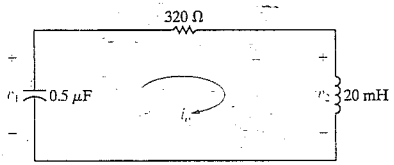
6.30 Seri bağlı ideal kapasitörler için eşdeğer devreyi bulunuz. Her kapasitörün kendi ilk gerilimi olduğunu varsayınız. Bu ilk gerilimleri $v_1(t_0)$, $v_2(t_0)$, vb diye adlandırınız. (*İpucu:* Kapasitörlerin üzerindeki gerilimleri toplayınız. Seri bağlamanın her kapasitördeki akımı aynı olmaya zorladığını unutmayınız.)

6.31 Paralel bağlı ideal kapasitörler için eşdeğer devreyi bulunuz. Paralel bağlı kapasitörlerde başlangıç geriliminin $v(t_0)$ olduğunu varsayınız. (*İpucu:* Kapasitör akımlarını toplayınız. Paralel bağlamada her kapasötür üzerindeki gerilimin aynı olmaya zorlandığını hatırlayınız.)

Kısım 6.1 – 6.3

6.32 Şek. P6.32'deki devrenin akımı $t \geq 0$ için $10 = 50e^{-8000t}(\cos 6000t + 2 \sin 6000t)$ mA olarak bilinmektedir. $v_1(0^+)$'yı bulunuz.

Şekil P6.32

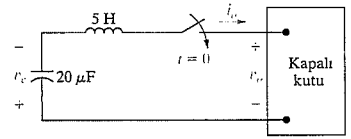


6.33 $t = 0$ anında, kapalı bir kutunun uçlarına seri bağlı kapasitör ve bir indüktör yerleştirilmiştir. (Şekil P6.33). $t > 0$ için

$$i_o = -e^{-80t} \sin 60t \text{ A}$$

olduğu bilinmektedir. $v_c(0) = -300$ V ise v_o'yu $t \geq 0$ için bulunuz.

Şekil P6.33



Kısım 6.4

6.34 Şekil P6.34'teki devrede, anahtar açıldığında enerji depolanmamıştır.

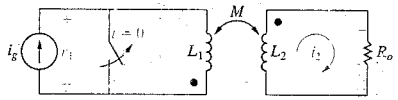
a) $L_1 = 10$ H, $L_2 = 40$ H, $M = 5$ H, ve $R_o = 90\ \Omega$ ise i_2 için diferansiyel denklemi bulunuz.

b) $i_g = 10e^{-t} - 10$A, $t \geq 0$ olduğunda, (a)'da bulunan diferansiyel denklemin çözümünün $i_2 = e^{-t} - 5e^{-2.25t}$ A, $t \geq 0$ olduğu225nu gösteriniz.

c) Akım kaynağı üzerindeki v_1 gerilimini bulunuz.

d) v_1'in başlangıç değeri nedir? Bu, devre davranışı için anlamlı mıdır?

Şekil P6.34



6.35 Şekil P6.25'teki devrede bulunan 16 H'lik indüktördeki gerilime v_o diyelim. v_o'nun nokta tarafından pozitif olduğunu farzediniz. Örnek 6.6'da olduğu gibi, $i_g = 16 - 16e^{-5t}$ A'dir.

a) v_o'yu, akım bağıntılarının türevini almadan da bulabilir misiniz? Açıklayınız.

b) v_o bağıntısını bulunuz.

c) (b)'deki cevabınızı, uygun akım türevleri ve endüktansları kullanarak kontrol ediniz.

6.36 Şekil P6.25'teki devrede bulunan akım kaynağı üzerindeki gerilimi v_g ile gösterelim. v_g için referans, akım kaynağının yukarı ucunda pozitiftir.

a) $i_g = 16 - 16e^{-5t}$ A olduğunda v_g'yi zamanın fonksiyonu olarak bulunuz.

b) v_g'nin başlangıç değeri nedir?

c) Akım kaynağı tarafından üretilen güç bağıntısını bulunuz.

d) t sonsuzken akım kaynağı ne kadarlık güç üretmektedir?

e) t sonsuzken herbir dirençte harcanan gücü hesaplayınız.

6.37 a) Örnek 6.6(a)'da bulunan diferansiyel denklemin aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenebileceğini gösteriniz.

$$4\frac{di_1}{dt} + 25i_1 - 8\frac{di_2}{dt} - 20i_2 = 5i_g - 8\frac{di_g}{dt};$$

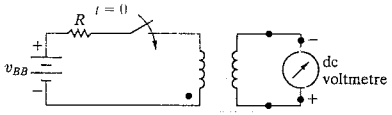
$$-8\frac{di_1}{dt} - 20i_1 + 16\frac{di_2}{dt} + 80i_2 = 16\frac{di_g}{dt}.$$

b) Örnek 6.6(b)'de bulunan i_1 ve i_2 çözümlerinin (a)'daki denklemi sağladığını gösteriniz.

6.38 Şekil P638'de (sayfa 225'e bakınız) manyetik olarak bağlaşık dört parçalı bobin gösterilmiştir. Manyetik akının her yapıdaki çekirdek malzemesince hapsedildiğini varsayınız. Her bobin çiftindeki nokta işaretlemeleri için olası iki durumu da gösteriniz.

6.39 İki bobinde nokta işaretlemeleri deneysel olarak belirlenmektedir. Deney seti Şekil P6.39'da gösterilmiştir. Bataryanın negatif terminaline bağlanmış terminalde kutupluk işareti olduğunu varsayınız. Anahtar kapatıldığında dc voltmetrenin göstergesi artmaktadır. Voltmetreye bağlanmış bobinin kutupluk işareti nereye yerleştirilmelidir?

Şekil P6.39

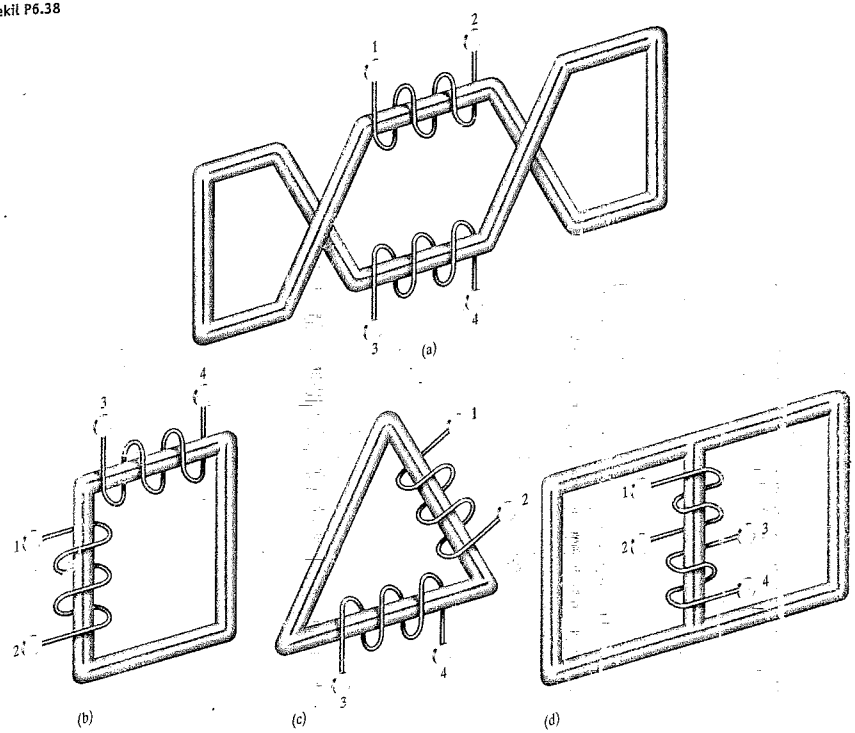


6.40 a) Şekil P6.40'ta gösterilen birbirine bağlaşık bobinlerin, endüktansı $L_{ab} = 4 + L_2 + 2M$ olan tek bir bobinle değiştirilebileceğini gösteriniz. (*İpucu:* v_{ab}'yi, i_{ab}'nin fonksiyonu olarak ifade ediniz.

b) L_2 isimli bobinin bağlantı uçları ters yerleştirilirse, $L_{ab} = L_1 + L_2 - 2M$ olacağını gösteriniz.

Şekil P6.40

Şekil P6.38



6.41 a) Şekil P6.41'de gösterilen manyetik olarak bağlaşık bobinlerin, indüktansı

$$L_{ab} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

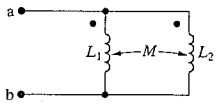
olan tek bir bobinle değiştirilebileceğini gösteriniz. (*İpucu:* i_1 ve i_2, Şekil P6.41'deki "pencerelerin" sağ ve solundaki ağ akımları olsun. Her ağdaki gerilimleri toplayınız. Ağ 1'de v_{ab} bilinmeyen gerilim olsun. di_1/dt'yi v_{ab}'nin fonksiyonu olarak çözünüz.)

b) Bobin 2'deki manyetik kutupluk değitirilirse,

$$L_{ab} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

olacağını gösteriniz.

Şekil P6.41



Kısım 6.5

6.42 Manyetik olarak bağlaşık iki bobin manyetik olmayan bir çekirdeğe sarılmıştır. Bobin 1'in öz endüktansı 250 mH, karşılıklı endüktans 100 mH, bağlaşım katsayısı 0.5 ve bobinlerin fiziksel yapısı $\mathcal{P}_{11} = \mathcal{P}_{22}$ olacak şekildedir.

a) L_2'yi ve N_1/N_2 sarım oranını bulunuz.

b) $N_1 = 1000$ ise $\mathcal{P}_1$ ve $\mathcal{P}_2$'nin değerlerini bulunuz.

6.43 Manyetik olarak bağlaşık iki bobinin öz endüktansları $L_1 = 400$ mH ve $L_2 = 900$ mH'dir. Bağlaşım ortamı manyetik değildir. Bobin 1 250 sarımlı ve bobin 2 500 sarımlıysa, bağlaşım katsayısı 0.75 iken $\mathcal{P}_{11}$ ve $\mathcal{P}_{22}$'yi bulunuz.

6.44 Manyetik olarak bağlaşık iki bobinin öz endüktansları sırasıyla 52 mH ve 13 mH'dir. Bobinler arasındaki karşılıklı endüktans 19.5 mH'dir.

a) Bağlaşım katsayısı nedir?

b) Bu bobinler için, M'nin en büyük değeri ne olabilir?

c) Birbirine bağlı bu bobinlerin yapısını $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ olarak varsayınız. N_1 52 mH bobinin sarım sayısı ise N_1/N_2 sarım oranı nedir?

6.45 Manyetik olarak birbirine bağlaşık iki bobinin öz endüktansları sırasıyla 288 mH ve 162 mH'dir. 288 mH'lik bobinin sarım sayısı 1/3'tür. Bağlaşım ortamı manyetik değildir. Bobin 1 uyarıldığında ve bobin 2 açıkken,

a) bobin 2'nin sarım sayısı kaçtır?

b) $\mathcal{P}_2$'nin değeri nanoweber/amper cinsinden nedir?

c) $\mathcal{P}_1$'nin nanoweber/amper cinsinden değeri nedir?

d) ϕ_{22}/ϕ_{12} oranı nedir?

6.46 a) Eş. 6.59'dan başlayarak bağlaşım katsayısının

$$k = \sqrt{\left(\frac{\phi_{21}}{\phi_1}\right)\left(\frac{\phi_{12}}{\phi_2}\right)}$$

halinde de ifade edebildiğini gösteriniz.

b) ϕ_{21}/ϕ_1 ve ϕ_{12}/ϕ_2 oranlarını göz önünde bulundurarak, k'nin neden 1'den küçük olduğunu açıklayınız.

6.47 Şekil 6.30'da verilen bobinlerin öz endüktansları $L_1 = 25$ mH ve $L_2 = 100$ mH'dir. Bağlaşım katsayısı 0.8 ise, milijoule cinsinden sistemde depolanan enerjiyi (a) $i_1 = 10$ A, $i_2 = 15$ A; (b) $i_1 = -10$ A, $i_2 = -15$ A i(c) $i_1 = -10$ A, $i_2 = 15$ A ve (d) $i_1 = 10$ A, $i_2 = -15$ A olduğu durumlar için bulunuz.

6.48 Problem 6.47'deki bağlaşım katsayısı 1.0 yapılmıştır.

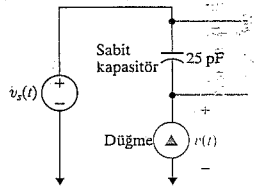
a) i_1 10 A'e eşitse, depolanan enerjiyi sıfır yapacak bir i_2 değeri var mıdır?

b) Depolanan enerjiyi negatif yapacak bir fiziksel i_2 değeri var mıdır?

Kısım 6.1 – 6.5

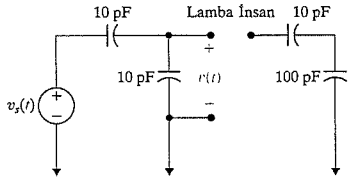
6.49 PRATİK BAKIŞ AÇISI Pratik Bakış Açısı'nda anlatılan örneği yeniden çalışınız. Ancak bu sefer düğmeyi bölücü devrenin alt kısmına yerleştiriniz. Parmakla basıldığında $v(t)$ çıkış gerilimini hesaplayınız.

Şekil P6.49



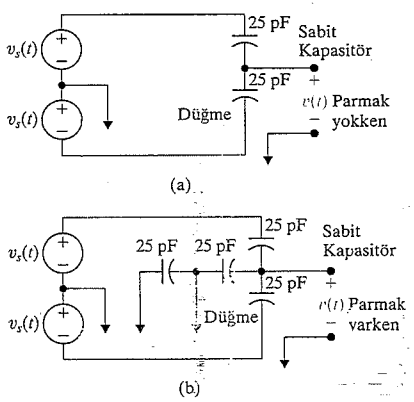
6.50 PRATİK BAKIŞ AÇISI Baza dokunulduğunda bazı lambalar açılabilir veya kapatılabilir. Bu lambalar, Pratik Bakış Açısı'nda anlatılan kapasitif anahtar devrelerinin tek terminal olan çeşidini kullanırlar. Şekil P6.50 bu tip lambaların devre modelini göstermektedir. Biri lambaya dokunduğunda $v(t)$ gerilimindeki değişimi hesaplayınız. Başlangıçta tüm kapasitörlerin yüksüz olduğunu farzediniz.

Şekil P6.50



6.51 PRATİK BAKIŞ AÇISI Bu pratik bakış açısı örneğinde, gerilim bölücü devresinde asansör düğmesi üstte bulunan kapasitör olduğunda oluşan çıkış gerilimi hesaplanmaktadır. Problem 6.49'da bölücü devrede bulunan düğmenin alttaki kapasitör olduğu durumdaki gerilim değeri hesaplanmıştı ve aynı sonuç elde edilmişti. Bu sonuç tüm benzer gerilim bölücülerde aynı olacak mı diye bize düşündürebilir. 2 adet aynı gerilim kaynağının kullanıldığı Şekil P6.51(a) ve P6.51(b)'de bulunan devreler için gerilim farkını (parmakla basıldığında ve basılmadığında hesaplayınız.)

Şekil 6.51



Birinci Mertebeden *RL* ve *RC* Devrelerinin Tepkileri

BÖLÜM İÇERİĞİ

7.1 *RL* Devresinin Doğal Tepkisi *s. 230*
7.2 *RC* Devresinin Doğal Tepkisi *s. 236*
7.3 *RL* ve *RC* Devrelerinin Basamak Tepkisi *s. 240*
7.4 Basamak ve Doğal Tepkilerin Genel Çözümü *s. 248*
7.5 Sıralı Anahtarlama *s. 254*
7.6 Sınırsız Tepki *s. 258*
7.7 İntegral Alıcı Yükselteç *s. 260*

BÖLÜM HEDEFLERİ

1. *RL* ve *RC* devrelerinin doğal tepkilerini belirleyebilmek.
2. *RL* ve *RC* devrelerinin basamak tepkilerini belirleyebilmek.
3. Sıralı anahtarlamalı devrelerin nasıl analiz edileceğini bilmek.
4. Dirençler ve tek bir kapasitör içeren op amp devrelerini analiz edebilmek.

6. Bölümde, kapasitör ve indüktörlerin en önemli özelliklerinden birinin enerji depolayabildikleri olduğunu vurgulamıştık. Bir DC gerilim veya akım kaynağında oluşan ani değişiklikler sonucu bir indüktör veya kapasitör enerji saldığında veya depolandığında ortaya çıkan akımı ve gerilimleri artık belirleyebilecek düzeydeyiz. Bu bölümde, kaynaklar ve dirençler ile birlikte yalnızca indüktör veya yalnızca kapasitör (her ikisi birden değil) içeren devreler üzerindeki duracağız. Bu yapılar kısaca ***RL*** (direnç-indüktör) ve ***RC*** (direnç-kapasitör) **devreleri** olarak adlandırılırlar.

RL ve *RC* devrelerinin analizi üç evreden oluşmaktadır. İlk evrede, bir indüktör veya kapasitör tarafından depolanmış enerjinin aniden bir direnç devresine salınması ile oluşan akım ve gerilimler üzerinde durulacaktır. Bu durum, indüktör veya kapasitörün DC kaynaktan aniden ayrılması ile meydana gelir. Bu durumda devreyi, sayfa 230'daki Şekil 7.1'de görülen iki eşdeğer biçimden birine indirgeyebiliriz. Bu yapıda ortaya çıkan akım ve gerilimler devrenin **doğal tepkisi** olarak adlandırılır. Devrenin davranışı dış kaynaklar tarafından değil kendi doğal yapısı tarafından belirlenir.

Analizin ikinci evresinde, bir DC akım veya gerilim kaynağının aniden devreye uygulanması ile indüktör veya kapasitör tarafından kazanılan enerji sonucu ortaya çıkan akım ve gerilimleri inceleyeceğiz. Bu tepki **basamak tepkisi** olarak adlandırılır. Doğal ve basamak tepkisinin bulunması için izlenen yol ayrıdır; bu nedenle analizin üçüncü evresinde, *RL* ve *RC* devrelerinin, bir DC akım veya gerilim kaynağındaki ani değişikliğe verdikleri tepkiyi bulmak için kullanılacak genel bir yöntem geliştireceğiz.

Sayfa 230'daki Şekil 7.2, dört olası *RL* ve *RC* devresi yapısını göstermektedir. Görüldüğü gibi, devrede bağımsız bir kaynak olmadığında, Thévenin gerilimi veya Norton akımı sıfır olmaktadır ve devre, Şekil 7.1'deki yapılardan birine indirgenmektedir. Yani bir doğal tepki problemine dönüşür. *RL* ve *RC* devrelerinde, gerilim ve akımlar birinci mertebeden diferansiyel denklemler ile ifade edildiklerinden aynı zamanda **birinci mertebeden devreler** olarak adlandırılırlar. Bir devre ne kadar karmaşık görünürse görünsün, eğer eş-

Pratik Bakış Açısı

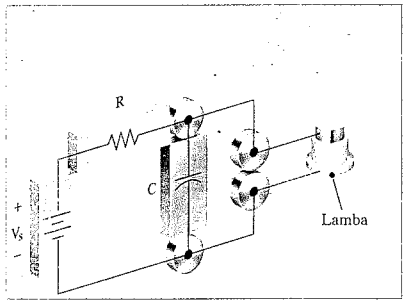
Flaşör Devresi

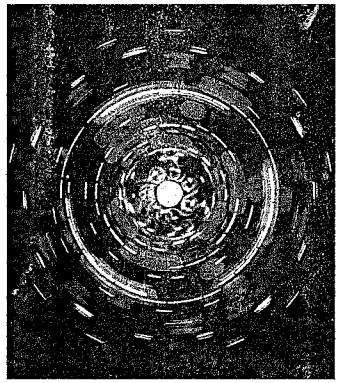
Bir flaşör devresine ihtiyaç duyacak pek çok uygulama aklınıza getirebilirsiniz. Az ışık bulunan ortamlarda resim çekmek için kullanılan sabit bir kamera, yalnızca resmi filme kaydetmeye yetecek kadar bir süre boyunca ortamı aydınlatmak için parlak ve ani bir ışık yani flaş kullanır. Genellikle, flaş devresi "yeniden şarj" olana dek, kamera başka resim çekemez.

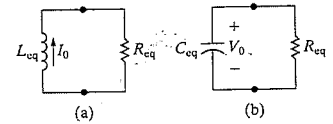
Yüksek anten kuleleri, inşaat alanları ve güvenlik bölgeleri gibi uygulama alanlarında, yanıp sönen ışıklar tehlikelere karşı uyarı amacıyla kullanılırlar. Flaşör devresi tasarlayacak olan mühendis uygulamanın neler gerektirdiğini bilmelidir. Örneğin, ışığın muhtemel olarak bir anahtarı kontrol ettiğini veya otomatik olarak önceden belirlenmiş bir hızda mı çalışması gerektiğini bilmelidir. Mühendis ayrıca ışığın sabit bir konumda mı (antende olduğu gibi) yoksa geçici bir kuruluşunun mu olacağını (inşaat alanı gibi) bilmek zorundadır.

Yanıtlanması gereken bir diğer soru, bir güç kaynağının hazır bulunup bulunmayacağıdır.

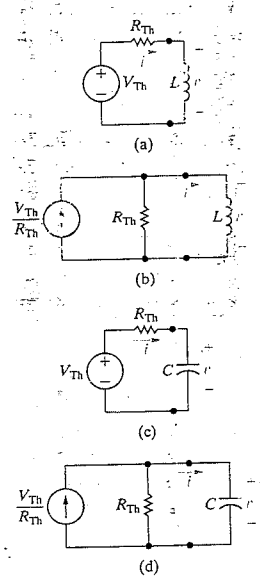
Günümüzde kullanılan flaşörler genellikle elektronik devreler ile kontrol edilir ve bu tip devreler bu kitabın konusu dışındadır. Yine de, bir dc gerilim kaynağı, bir direnç, bir kapasitör ve belli bir eşik geriliminde ani ışık vermek üzere tasarlanmış bir lamba kullanarak tasarlanan bir flaşör devresini analiz ederek bu tür devreler hakkında daha iyi bir fikir sahibi olabiliriz. Bu tip bir devre şekilde gösterilmiştir. Bölümün sonunda bu devreyi ayrıntılı biçimde inceleyeceğiz.



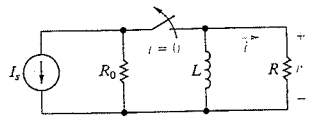




Şekil 7.1 Devrelerin doğal tepkisi için iki biçim. (a) *RL* devresi; (b) *RC* devresi.



Şekil 7.2 Dört olası birinci mertebeden devre.
(a) Thévenin eşdeğerine bağlı indüktör.
(b) Norton eşdeğerine bağlı indüktör.
(c) Thévenin eşdeğerine bağlı kapasitör.
(d) Norton eşdeğerine bağlı kapasitör.



Şekil 7.3 *RL* devresi.

değer bir indüktör veya kapasitörün terminallerine bağlanmış bir Thévenin veya Norton eşdeğerine indirgenebiliyorsa, birinci mertebeden bir devredir. (Eğer devrede birden fazla indüktör veya kapasitör varsa, tek bir eşdeğer eleman halinde gösterilebilecek şekilde birbirlerine bağlı olmak zorundadır.)

Birinci mertebeden devrelerin doğal ve basamak tepkilerini analiz etmek için gerekli teknikleri tanıdıkları sonra bazı özel durumları inceleyeceğiz. Bunlardan ilki sıralı anahtarlama, yani iki veya daha çok anda anahtarlamanın gerçekleştiği devreler; diğeri ise sınırsız tepkidir. Son olarak integral alıcı yükselteç adı verilen oldukça kullanışlı bir devre üzerinde duracağız.

7.1 *RL* Devresinin Doğal Tepkisi

RL devresinin doğal tepkisi, en iyi Şekil 7.3 kullanılarak ifade edilebilir. Bağımsız akım kaynağının I_s A büyüklüğünde sabit akım ürettiğini ve anahtarın uzun bir süre kapalı kaldığını varsayalım. *Uzun bir süre*nin ne anlama geldiğini bu kısmın sonunda daha ayrıntılı bir biçimde açıklayacağız. Şimdilik, tüm akım ve gerilimlerin sabit bir değere ulaştığı anlamına geliyor. Yani, anahtarın açılmasından önce devrede yalnızca sabit veya dc akımlar bulunmakta, bu nedenle de depolanmış enerji salınmadan önce indüktör kısa devre ($L di/dt = 0$) gibi davranmaktadır.

İndüktör kısa devre gibi göründüğünden indüktörün bulunduğu koldaki akım sıfırdır ve R_0 ve R üzerinden akımı geçemez. Bu nedenle, kaynak akımı I_s'nin tümü indüktörün bulunduğu koldadır. Devrenin doğal tepkisinin bulunması, anahtar açıldıktan sonra yani kaynağın bağlantısı kesildikten ve indüktör depoladığı enerjiyi bırakmaya başladıktan sonra direnç terminallerinde oluşan akım ve gerilimleri bulmayı gerektirir. Anahtarın açıldığı anı $t = 0$ olarak kabul edersek, problem $t \geq 0$ için $v(t)$ ve $i(t)$'yi bulmaya dönüşür. Şekil 7.3'teki devre $t \geq 0$ için Şekil 7.4'teki devreye indirgenir.

Akım İfadesinin Çıkarılması

$i(t)$ akımını i, R ve L cinsinden ifade edebilmek için Kirchhoff gerilim kuralını kullanalım. Pasif işaret gösterimini kullanarak kapalı döngüdeki gerilimleri topladığımızda

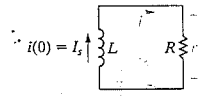
$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \tag{7.1}$$

denklemini elde ederiz. Bilinmeyen niceliğin birinci türevini, yani di/dt, içerdiğinden Eş. 7.1 birinci mertebeden adi diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Denklemdeki en yüksek mertebeli türevin derecesi 1 olduğundan **birinci mertebeden** terimi kullanılır.

Bu denklemi tanımlamak için bir adım daha ileri gidebiliriz. Denklemdeki R ve L katsayıları sabittir, yani bağımlı değişkenler i veya t'nin bir fonksiyonu değildir. Bu nedenle söz konusu denklem, sabit katsayılara sahip adi diferansiyel denklem olarak da adlandırılabilir.

Eş. 7.1'i çözmek için önce L'ye böler, i'yi içeren terimi ters çevirip eşitliğin sağ tarafına alır, sonra da her iki tarafı diferansiyel zaman dt ile çarparız. Elde edilen sonuç aşağıdadır:

$$\frac{di}{dt}dt = -\frac{R}{L}i\,dt. \tag{7.2}$$



Şekil 7.4 $t \geq 0$ için Şekil 7.3'te görülen devre.

Eşitliğin sol tarafının i akımındaki diferansiyel değişim yani di olduğunu görüyoruz. Her iki tarafı i'ye böldüğümüzde

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt \tag{7.3}$$

denklemini elde ederiz. i'yi, t'ye bağlı bir fonksiyon olarak ifade edebilmek için her iki tarafın integralini alırız. İntegral değişkenleri olarak x ve y kullandığımızda

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}\int_{t_0}^{t} dy \tag{7.4}$$

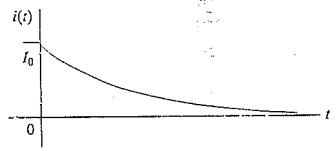
ifadesine ulaşırız. Burada $i(t_0)$, t_0 anındaki akımı, $i(t)$ ise t anındaki akımı göstermektedir. $t_0 = 0$ olarak kabul edip integrali aldığımızda

$$\ln\frac{i(t)}{i(0)} = -\frac{R}{L}t \tag{7.5}$$

denklemini buluruz. Doğal logaritma tanımından

$$i(t) = i(0)e^{-(R/L)t} \tag{7.6}$$

ifadesini elde ederiz. 6. Bölümden hatırlayacağımız gibi, indüktör akımında ani değişiklikler meydana gelemez. Bu nedenle, anahtarın açıldığı ilk anda indüktör üzerindeki akım değişmez. Anahtar açılmasından hemen önceki anı 0^-, açıldığı anın hemen sonraki anı da 0^+ ile ifade edecek olursak



Şekil 7.5 Şekil 7.4'te görülen devre için akım tepkisi.

$$i(0^-) = i(0^+) = I_0,$$

◀ **İndüktör akımının ilk değeri**

denklemini yazabiliriz. Burada I_0, Şekil 7.1'de olduğu gibi indüktör üzerindeki ilk akım değerini ifade eder. İndüktör üzerindeki ilk akım ile i'nin referans yönü aynı olduğundan Eş. 7.6

$$i(t) = I_0e^{-(R/L)t}, \quad t \geq 0, \tag{7.7}$$

◀ ***RL* devresinin doğal tepkisi**

biçiminde yazılabilir. Bu denklem akımın ilk değer olan I_0'dan başlayıp t arttıkça üstel olarak azaldığını ve sıfıra yaklaştığını gösterir. Bu tepki Şekil 7.5'te görülmektedir.

Şekil 7.4'teki direnç üzerindeki gerilimi akım yasasını uygulayarak bulabiliriz:

$$v = iR = I_0Re^{-(R/L)t}, \quad t \geq 0^+. \tag{7.8}$$

Eş. 7.7'de verilen akım ifadesinin tersine, gerilim yalnızca $t > 0$ için tanımlıdır. $t = 0$ için ise tanımlı değildir. Bunun nedeni, sıfır anında gerilimde bir basamak değişikliğinin meydana gelmesidir. $t < 0$ için akımın türevi sıfır olduğundan gerilim de sıfırdır. (Bu durum $v = L\,di/dt$ denkleminden kaynaklanmaktadır.) Dolayısıyla

$$v(0^-) = 0. \tag{7.9}$$

$$v(0^+) = I_0 R \tag{7.10}$$

denklemleri yazılabilir. Burada $v(0^+)$ Eş. 7.8'de $t = 0^+$[1] konularak elde edilmiştir. Bu anlık basamak değişikliği sebebiyle $t = 0$ anındaki gerilim değeri bilinmemektedir. Bu nedenle, çözümlerin geçerlilik bölgesini tanımlarken $t \geq 0^+$ koşulunu kullanıyoruz.

Aşağıdaki ifadelerden herhangi birini kullanarak direnç üzerinde harcanan güç miktarı bulabiliriz.

$$p = vi, \quad p = i^2 R \quad \text{veya} \quad p = \frac{v^2}{R}. \tag{7.11}$$

Yukarıdaki denklemlerden hangisi kullanılırsa kullanılsın ortaya çıkan ifade

$$p = I_0^2 R e^{-2(R/L)t}, \quad t \geq 0^+ \tag{7.12}$$

biçimindedir. Anahtar açıldıktan sonraki bir zaman aralığında dirence aktarılan enerji ise

$$w = \int_0^t p\,dx = \int_0^t I_0^2 R e^{-2(R/L)x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2(R/L)} I_0^2 R\left(1 - e^{-2(R/L)t}\right)$$

$$= \frac{1}{2} L I_0^2 \left(1 - e^{-2(R/L)t}\right), \quad t \geq 0 \tag{7.13}$$

bulunur. Görüldüğü gibi t sonsuza gittikçe direnç üzerinde harcanan enerji, indüktör üzerinde depolanan enerji miktarına yaklaşmaktadır.

Zaman Sabitinin Önemi

Eş. 7.7'deki $i(t)$ ve Eş. 7.8'deki $v(t)$ ifadeleri $e^{-(R/L)t}$ biçiminde bir terim içermektedir. t'nin katsayısı, yani R/L, akımın veya gerilimin sıfıra yaklaşma hızını belirlemektedir. Bu oranın tersi, devrenin zaman sabiti olarak isimlendirilir ve

***RL* devresinin zaman sabiti ▶**

$$\tau = \text{zaman sabiti} = \frac{L}{R}. \tag{7.14}$$

biçiminde gösterilir.

[1] 0^+ ve 0^- ifadelerini daha ayrıntılı tanımlayabiliriz. $x(0^-)$ ifadesi, x değişkeninin, t sıfıra soldan, yani negatif zamandan yaklaşırken elde edilen limit değerini verir. $x(0^+)$ ise x değişkeninin, t sıfıra sağdan, yani pozitif zamandan yaklaşırken ulaşılan limitini ifade eder.

Zaman sabiti kavramını kullanarak akım, gerilim, güç ve enerji ifadelerini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0, \tag{7.15}$$

$$v(t) = I_0 R e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0^+, \tag{7.16}$$

$$p = I_0^2 R e^{-2t/\tau}, \quad t \geq 0^+, \tag{7.17}$$

$$w = \frac{1}{2} L I_0^2 \left(1 - e^{-2t/\tau}\right), \quad t \geq 0. \tag{7.18}$$

Zaman sabiti birinci mertebeden devreler için önemli bir parametredir. Bu nedenle bazı özelliklerden bahsetmek yararlı olacaktır. İlk olarak, anahtarın açılmasından sonra geçen süreyi τ'nun tam katları cinsinden ifade etmek kolaylık sağlar. Örneğin, indüktör depoladığı enerjiyi direnç üzerine çekmeye başladıktan bir zaman sabiti sonra, akım miktarı ilk değerinin e^{-1} katına, yani yaklaşık 0.37'sine düşecektir.

1'den 10'a kadar τ'nun tam katları için $e^{-t/\tau}$ teriminin aldığı değerler Tablo 7.1'de verilmiştir. Görüldüğü gibi beş zaman sabiti sonrası akım değeri ilk değerinin %1'inden daha azdır. Bu nedenle, pek çok pratik uygulamada, anahtarlamadan beş zaman sabiti sonra akım ve gerilimlerin son değerine ulaştığı kabul edilir. %1 hassasiyetli tek zaman sabitli devreler (birinci mertebeden devreler) için **uzun bir zaman** ifadesi beş zaman sabiti veya daha fazla zaman geçtiği anlamına gelecektir. Yani Şekil 7.1(e)'de görülen *RL* devresinde akımın varlığı anlık bir olaydır ve geçici tepki olarak adlandırılır. Anahtarlama gerçekleştikten uzun bir zaman sonra devam eden tepki ise durgun durum tepkisi olarak isimlendirilir. **Uzun bir zaman** ifadesi aynı zamanda devrenin durgun duruma ulaşması için gereken süreyi belirtir.

Tablo 7.1 t τ'nun tam katları iken $e^{-t/\tau}$ teriminin değerleri

t	$e^{-t/\tau}$	t	$e^{-t/\tau}$
τ	3.6788×10^{-1}	6τ	2.4788×10^{-3}
2τ	1.3534×10^{-1}	7τ	9.1188×10^{-4}
3τ	4.9787×10^{-2}	8τ	3.3546×10^{-4}
4τ	1.8316×10^{-2}	9τ	1.2341×10^{-4}
5τ	6.7379×10^{-3}	10τ	4.5400×10^{-5}

Herhangi bir birinci mertebeden devre, kısmen de olsa zaman sabitinin değeriyle tanımlanabilir. Böyle bir devrenin zaman sabitini hesaplayamıyorsak (örneğin devrenin bileşenlerinin değerlerini bilmiyorsak) devrenin doğal tepkisinin grafiğinden faydalanarak zaman sabitini belirleyebiliriz. Çünkü zaman sabitinin diğer bir önemli özelliği, akım ilk hızıyla değişmeye devam ediyorsa, akımının son değerine ulaşması için gereken süreyi vermesidir. Bu durumu göstermek için di/dt'yi 0^+ anında hesaplayalım ve akımın bu hızda değişmeye devam ettiğini varsayalım.

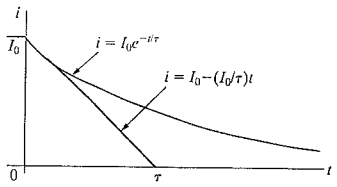
$$\frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{R}{L} I_0 = -\frac{I_0}{\tau}. \tag{7.19}$$

Akım I_0'dan başlayarak saniyede I_0/τ amper sabit hızla azaldığından i ifadesi

$$i = I_0 - \frac{I_0}{\tau} t \tag{7.20}$$

biçimini alır.

Eş 7.20'nin τ saniye sonra son değerine yani sıfıra ulaşacağını gösterir. Devrenin doğal tepkisinin grafiğinden faydalanılarak bu grafik gösterim sayesinde zaman sabitinin nasıl kestirilebileceği Şekil 7.6'da gösterilmiştir. Böyle bir grafik, çıkış akımının bir osiloskop ile ölçülmesiyle oluşturulabilir. Doğal tepki grafiğinin $t = 0$ anındaki teğetinin zaman eksenini kestiği nokta τ değerini verir.



Şekil 7.6 ▲ Şekil 7.4'te görülen *RL* devresinin zaman sabitinin grafiksel hesabı.

Bir *RL* devresinin doğal tepkisini hesaplama süreci şu şekilde özetlenebilir:

RL devresinin doğal tepkisinin hesaplanması ▶

1. İndüktördeki ilk akım değeri I_0'ı bulunuz.
2. Devrenin zaman sabitini ($\tau = L/R$) bulunuz.
3. Eş. 7.15'i kullanarak I_0 ve τ'dan $i(t)$'yi oluşturunuz.

$i(t)$ bulunduktan sonra diğer tüm hesaplar kolaylıkla yapılabilir. *RL* devrelerinin doğal tepkileri ile ilgili nümerik hesaplar Örnek 7.1 ve Örnek 7.2'de gösterilmiştir.

Örnek 7.1 *RL* Devresinin Doğal Tepkisinin Belirlenmesi

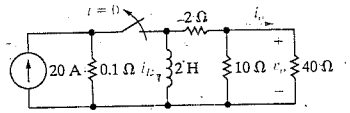
Şekil 7.7'deki devrede görülen anahtar $t = 0$ anında açılmadan önce uzun süre kapalı tutulmuştur.

a) $t \geq 0$ için $i_L(t)$'yi,

b) $t \geq 0^+$ için $i_o(t)$'yi,

c) $t \geq 0^+$ için $v_o(t)$'yi,

d) 2 H'lik indüktör üzerinde depolanan toplam enerjinin yüzde kaçının 10 Ω'luk direnç üzerinde harcandığını bulunuz.



Şekil 7.7 ▲ Örnek 7.1'e ait devre.

Çözüm

a) Anahtar $t = 0$ anından önce uzun bir süre kapalı kaldığından indüktör üzerindeki gerilimin $t = 0^-$ anında sıfır olduğunu biliyoruz. Bu nedenle $t = 0^-$ anında indüktörün üzerindeki akımın ilk değeri 20 A'dir. İndüktör akımı anlık değişemeyeceğinden $i_L(0^+)$ da 20 A'dir. İndüktörün terminallerine bağlı direnç devresini 10 Ω'luk tek bir dirençle değiştirelim:

$$R_{eq} = 2 + (40 \parallel 10) = 10\,\Omega.$$

Devrenin zaman sabiti L/R_{eq} yani 0.2 s'dir. Bu durumda indüktör akımı ifadesi

$$i_L(t) = 20e^{-5t}\text{ A}, \quad t \geq 0$$

şeklindedir.

b) Akım bölücü kullanarak 40 Ω'luk direnç üzerindeki akımı kolaylıkla buluruz.

$$i_o = -i_L\frac{10}{10 + 40}.$$

$t = 0^-$ anında $i_o = 0$ olduğundan bu ifade yalnızca $t \geq 0^+$ için geçerlidir. Anahtar açılmadan önce indüktör kısa devre gibi davrandığından i_o akımında ani bir değişikliğe neden olur. Bu durumda i_o aşağıdaki gibi bulunur.

$$i_o(t) = -4e^{-5t}\text{ A}, \quad t \geq 0^+.$$

c) Ohm yasasını doğrudan uygulayarak v_o'yu bulabiliriz:

$$v_o(t) = 40i_o = -160e^{-5t}\text{ V}, \quad t \geq 0^+.$$

d) 10 Ω'luk direnç üzerinde harcanan güç

$$p_{10\Omega}(t) = \frac{v_o^2}{10} = 2560e^{-10t}\text{ W}, \quad t \geq 0^+$$

olur. 10 Ω üzerinde harcanan toplam enerji

$$w_{10\Omega}(t) = \int_0^\infty 2560e^{-10t}\,dt = 256\text{ J}$$

bulunur. 2 H'lik indüktör depolanan ilk enerji

$$w(0) = \frac{1}{2}Li^2(0) = \frac{1}{2}(2)(400) = 400\text{ J}$$

ve enerjinin 10 Ω üzerinde harcanan yüzdesi

$$\frac{256}{400}(100) = 64\%$$

elde edilir.

Örnek 7.2 Paralel İndüktörlü *RL* Devresinin Doğal Tepkisinin Belirlenmesi

Şekil 7.8'de verilen devrede L_1 ve L_2 indüktörlerinin üzerindeki ilk akımlar bilinmeyen kaynaklar tarafından oluşturulmuştur.

Anahtar $t = 0$ anında açılmıştır.

a) $t \geq 0$ için i_1, i_2 ve i_3'lü bulunuz.

b) Paralel indüktörlerde depolanan enerjiyi bulunuz.

c) $t \to \infty$ iken indüktörlerde depolaması enerji miktarını bulunuz.

d) Direnç devresine aktarılan toplam enerji miktarının (b) ve (c) şıklarında bulunan sonuçların farkı olduğunu gösteriniz.

Çözüm

a) i_1, i_2 ve i_3 akımlarını bulmak için öncelikle $v(t)$'yi bilmek gerekir. Şekil 7.8'deki devreyi Şekil 7.9'daki eşdeğer biçime çevirirsek $v(t)$'yi kolaylıkla bulabiliriz. Paralel indüktörler 4 H'lik bir eşdeğer indüktöre indirgenir ve üzerinde 12 A'lik bir ilk akım bulunur. Direnç devresi 8 Ω'luk tek bir direnç haline getirilir. Bu durumda $i(t)$'nin ilk değeri 12 A, zaman sabiti ise 4/8, yani 0.5'tir. Buradan

$$i(t) = 12e^{-2t}\text{ A}, \quad t \geq 0$$

bulunur. $v(t)$ basitçe $8i$ çarpımına eşittir.

$$v(t) = 96e^{-2t}\text{ V}, \quad t \geq 0^+.$$

$t = 0^-$ anında $v(t) = 0$ olduğundan $v(t)$ ifadesi $t \geq 0^+$ için geçerlidir. i_1, i_2 ve i_3 akımları aşağıdaki gibi bulunur.

$$i_1 = \frac{1}{5}\int_0^t 96e^{-2x}\,dx - 8$$

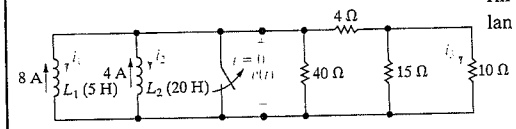
$$= 1.6 - 9.6e^{-2t}\text{ A}, \quad t \geq 0,$$

$$i_2 = \frac{1}{20}\int_0^t 96e^{-2x}\,dx - 4$$

$$= -1.6 - 2.4e^{-2t}\text{ A}, \quad t \geq 0,$$

$$i_3 = \frac{v(t)}{10}\frac{15}{25} = 5.76e^{-2t}\text{ A}, \quad t \geq 0^+.$$

İndüktör akımları i_1 ve i_2'ye ait ifadeler $t \geq 0$ için geçerliyken i_3 ifadesi $t \geq 0^+$ için geçerlidir.



Şekil 7.8 ▲ Örnek 7.2'ye ait devre.

Şekil 7.9 ▲ Şekil 7.8'de gösterilen devrenin basitleştirilmiş hali.

b) İndüktörde depolanan enerjinin ilk değeri

$$w = \frac{1}{2}(5)(64) + \frac{1}{2}(20)(16) = 320\text{ J}$$

hesaplanır.

c) $t \to \infty$ iken $i_1 \to 1.6$ A ve $i_2 \to -1.6$ A'dir. Bu nedenle anahtar açıldıktan uzun bir süre sonra indüktörlerde depolanan enerji

$$w = \frac{1}{2}(5)(1.6)^2 + \frac{1}{2}(20)(-1.6)^2 = 32\text{ J}$$

bulunur.

d) Direnç devresine aktarılan toplam enerjiyi, anlık güç ifadesinin sıfırdan sonsuza integralini alarak buluruz:

$$w = \int_0^\infty p\,dt = \int_0^\infty 1152e^{-4t}\,dt$$

$$= 1152\frac{e^{-4t}}{-4}\bigg|_0^\infty = 288\text{ J}.$$

Bu sonuç ilk depolanan enerji (320 J) ile paralel indüktörler üzerinde kalan enerjinin (32 J) farkına eşittir. Paralel indüktörlere eşdeğer olan indüktörün (paralel birleşimin terminal davranışını öngörür) ilk enerjisi 288 J'dür. Yani eşdeğer indüktörde depolanan enerji, baştaki indüktörlerin terminallerine bağlı direnç devresine aktarılan enerji miktarına eşittir.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 1- *RL* ve *RC* devrelerinin doğal tepkilerini belirleyebilmek

7.1 Aşağıdaki devrede görülen anahtar uzun bir süre kapalı tutulduktan sonra $t = 0$ anında açılmıştır.

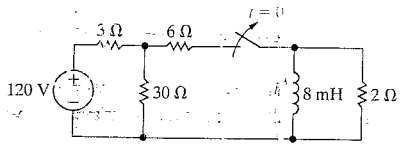
a) i'nin başlangıç değerini hesaplayınız.

b) İndüktörde depolanan ilk enerji miktarını hesaplayınız.

c) $t > 0$ için $i(t)$'nin nümerik ifadesi nedir?

d) $t \geq 0$ için $i(t)$'nin nümerik ifadesi nedir?

e) Anahtar açıldıktan 5 ms sonra, depolanan ilk enerjinin yüzde kaçı 2 Ω'luk direnç üzerinde harcanmıştır?

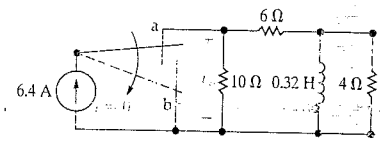


Cevap: (a) – 12.5 A;
(b) 625 mJ;
(c) 4 ms;
(d) $-12.5e^{-250t}$ A, $t \geq 0$;
(e) %91.8.

7.2 Aşağıdaki devrede görülen anahtar $t = 0$ anında a konumundan b konumuna getiriliyor.

a) $t \geq 0^+$ için v_o'yu hesaplayınız.

b) İndüktörde depolanan ilk enerjinin yüzde kaçı 4 Ω'luk direnç üzerinde harcanır?



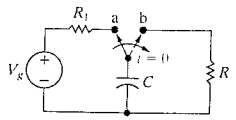
Cevap: (a) $-8e^{-10t}$ V, $t \geq 0$;
(b) %80.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 7.1–7.3'ü de çözmeyi deneyiniz.

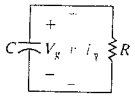
7.2 *RC* Devresinin Doğal Tepkisi

Kısım 7.1'de de bahsedildiği gibi *RC* devresinin doğal tepkisi *RL* devresininkine benzerdir. Bu sebepten *RC* devresi üzerinde *RL* devresinde olduğu kadar ayrıntılı durmayacağız.

RC devresinin doğal tepkisi Şekil 7.10'da verilen devre yardımıyla oluşturulur. Anahtarın, dc gerilim kaynağı V_g, direnç R_1 ve kapasitör C'nin durgun duruma ulaşmasına yetecek kadar uzun süre kapalı kaldığını varsayıyoruz. 6. Bölüm'den hatırlayacağınız gibi, kapasitör sabit gerilim altında açık devre gibi davranır. Yani gerilim kaynağı üzerinden akım geçmez ve kaynak gerilimi kapasitör terminalleri üzerinde görülür. Kapasitör geriliminin dc gerilim kaynağının durgun durum değerine nasıl ulaştığını Kısım 7.3'te inceleyeceğiz. Şimdilik önemli olan nokta, anahtar a konumundan b konumuna geçirildiğinde kapasitör geriliminin V_g'ye eşit olduğudur. Kapasitör geriliminde ani değişiklikler olamayacağından, problem artık Şekil 7.11'de görülen devreyi çözmektir.



Şekil 7.10 *RC* devresi.



Şekil 7.11 Anahtarlamadan sonra Şekil 7.10'da görülen devre.

Gerilim İfadesinin Çıkarılması

Düğüm gerilimleri üzerinden düşünerek $v(t)$ gerilimini kolaylıkla bulabiliriz. R ile C arasındaki alt bağlantıyı referans düğümü olarak kullanıp üst bağlantı noktasından çıkan gerilimleri topladığımızda

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \qquad (7.21)$$

denklemini elde ederiz. Eş. 7.21, Eş. 7.1 ile karşılaştırıldığında, $v(t)$'ye ulaşmak için aynı matematiksel tekniklerin kullanılabileceği görülmektedir. $v(t)$ gerilimi ifadesinin

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC}, \quad t \geq 0 \qquad (7.22)$$

biçiminde olduğunu göstermeyi size bırakıyoruz. Gördüğünüz gibi, kapasitör üzerindeki gerilimin ilk değeri gerilim kaynağı değeri V_g'ye eşittir:

$$v(0^-) = v(0) = v(0^+) = V_g = V_0, \qquad (7.23)$$

◁ **Kapasitör geriliminin başlangıç değeri**

Burada V_0 kapasitör geriliminin başlangıç değerini ifade etmektedir. *RC* devresinin zaman sabiti direnç ile kapasitörün çarpımına eşittir.

$$\tau = RC. \qquad (7.24)$$

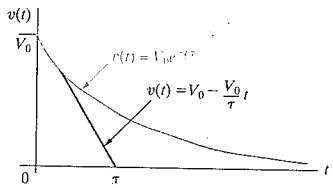
◁ ***RC* devresinin zaman sabiti**

Eşitlikler 7.23 ve 7.24 Eş. 7.22'de yerlerine konduğunda

$$v(t) = V_0e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0, \qquad (7.25)$$

◁ ***RC* devresinin doğal tepkisi**

denklemi elde edilir. Bu denklem, *RC* devresinin doğal tepkisinin, başlangıç geriliminin üstel bir biçimde azalması olduğunu göstermektedir. Azalma hızı zaman sabiti *RC* tarafından belirlenir. Eş. 7.25'in grafiği ve zaman sabitinin grafiksel gösterimi şekil 7.12'de görülmektedir.



Şekil 7.12 *RC* devresinin doğal tepkisi.

$v(t)$'nin belirlenmesinin ardından i, p ve ω ifadeleri kolayca çıkarılabilir:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R}e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0^+, \qquad (7.26)$$

$$p = vi = \frac{V_0^2}{R}e^{-2t/\tau}, \quad t \geq 0^+, \qquad (7.27)$$

$$w = \int_0^t p\,dx = \int_0^t \frac{V_0^2}{R}e^{-2x/\tau}dx$$

$$= \frac{1}{2}CV_0^2(1 - e^{-2t/\tau}), \quad t \geq 0. \qquad (7.28)$$

RC devresinin doğal tepkisinin nasıl bulunacağı aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1. Kapasitör geriliminin ilk değeri V_0'ı bulunuz.
2. Devrenin zaman sabiti $\tau = RC$'yi bulunuz.
3. V_0 ve τ'yu kullanarak Eş. 7.25'ten $v(t)$'yi bulunuz.

Diğer tüm niceliklerin hesabı $v(t)$ bulunduktan sonra kolayca gerçekleştirilebilir. Örnek 7.3 ve 7.4 *RC* devresinin doğal tepkisiyle ilgili nümerik hesaplar içermektedir.

Örnek 7.3 *RC* Devresinin Doğal Tepkisinin Belirlenmesi

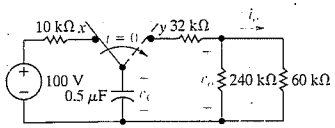
Şekil 7.13'te görülen anahtar x konumunda uzun bir süre bekletilmiştir. $t = 0$ anında anahtar aniden y konumuna getirilmiştir.

a) $t \geq 0$ için $v_c(t)$'yi,

b) $t \geq 0^+$ için $v_o(t)$'yi,

c) $t \geq 0^+$ için $i_o(t)$'yi,

d) 60 kΩ üzerinde harcanan toplam güç miktarını bulunuz.



Şekil 7.13 ▲ Örnek 7.3'e ait devre.

Çözüm

a) Anahtar x konumunda uzun bir süre tutulduğundan, kapasitör üst terminali pozitif olacak biçimde 100 V'a kadar dolmuştur. Kapasitöre bağlı direnç devresini $t = 0^+$ akımdan itibaren eşdeğer direnç 80 kΩ ile değiştirebiliriz. Bu durumda devrenin zaman sabiti $(0.5 \times 10^{-6})(80 \times 10^3)$ yani 40 ms olur. Buradan

$$v_C(t) = 100e^{-25t}\ \text{V}, \quad t \geq 0$$

denklemine ulaşılır.

b) $v_o(t)$'yi bulmanın en kolay yolu, devredeki dirençlerin kapasitör terminalleri arasında bir gerilim bölücü işlemi gördüğünü fark etmektir. Yani,

$$v_o(t) = \frac{48}{80}v_C(t) = 60e^{-25t}\ \text{V}, \quad t \geq 0^+$$

denklemi yazılabilir. $v_o(0^-)$ sıfır olduğundan yukarıdaki ifade $t \geq 0^+$ için geçerlidir. Dolayısla 240 kΩ'luk direnç üzerinde anlık bir gerilim değişikliği oluşur.

c) Ohm yasasını kullanarak $i_o(t)$'yi bulabiliriz.

$$i_o(t) = \frac{v_o(t)}{60 \times 10^3} = e^{-25t}\ \text{mA}, \quad t \geq 0^+.$$

d) 60 kΩ'luk direnç üzerinde harcanan güç miktarı

$$p_{60\text{k}\Omega}(t) = i_o^2(t)(60 \times 10^3) = 60e^{-50t}\ \text{mW}, \quad t \geq 0^+$$

bulunur. Harcanan toplam enerji ise

$$w_{60\text{k}\Omega} = \int_0^\infty i_o^2(t)(60 \times 10^3)\,dt = 1.2\ \text{mJ}$$

hesaplanır.

Örnek 7.4 Seri Kapasitörlü *RC* Devresinin Doğal Tepkisinin Bulunması

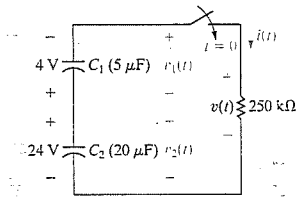
Şekil 7.14'te görülen C_1 ve C_2 kapasitörleri üzerindeki ilk gerilimler bilinmeyen bir kaynak tarafından oluşturulmuştur. Anahtar $t = 0$ anında kapanmıştır.

a) $t \geq 0$ için $v_1(t)$, $v_2(t)$ ve $v(t)$'yi, $t \geq 0^+$ için $i(t)$'yi bulunuz.

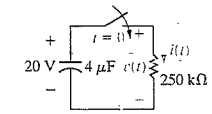
b) C_1 ve C_2 kapasitörleri üzerinde depolanan enerjinin ilk değerini hesaplayınız.

c) $t \to \infty$ iken kapasitörler üzerinde ne kadar enerji depolandığını bulunuz.

d) 250 kΩ'luk dirence aktarılan enerjinin (b) ve (c) şıkkında bulunan sonuçların farkı olduğunu gösteriniz.



Şekil 7.14 ▲ Örnek 7.4'e ait devre.



Şekil 7.15 ▲ Şekil 7.14'teki devrenin basitleştirilmiş hali.

Çözüm

a) $v(t)$'yi bulduktan sonra Ohm yasasını kullanarak $i(t)$'yi bulabiliriz. Kapasitör gerilimi üzerindeki akımın bir fonksiyonu olduğundan $i(t)$'yi belirledikten sonra $v_1(t)$ ve $v_2(t)$'yi hesaplayabiliriz. $v(t)$'yi elde edebilmek için seri bağlanan kapasitörler yerine eşdeğer bir kapasitör koyabiliriz. Eşdeğer kapasite değeri 4 μF'tır ve 20 V ile yüklüdür. Böylece Şekil 7.14'teki devre Şekil 7.15'te görülen devreye indirgenir. Bu durumda $v(t)$'nin başlangıç değerinin 20 V, devrenin zaman sabitinin de (4) (250) $\times 10^{-3}$ yani 1 s olduğu görülür. $v(t)$ ifadesi

$$v(t) = 20e^{-t}\ \text{V}, \quad t \geq 0$$

bulunur. $i(t)$ akımı ise

$$i(t) = \frac{v(t)}{250{,}000} = 80e^{-t}\ \mu\text{A} \quad t \geq 0^+$$

olarak hesaplanır. Buradan $v_1(t)$ ve $v_2(t)$ gerilimleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$v_1(t) = -\frac{10^6}{5}\int_0^t 80 \times 10^{-6}e^{-x}\,dx - 4$$
$$= (16e^{-t} - 20)\ \text{V}, \quad t \geq 0,$$
$$v_2(t) = -\frac{10^6}{20}\int_0^t 80 \times 10^{-6}e^{-x}\,dx + 24$$
$$= (4e^{-t} + 20)\ \text{V}, \quad t \geq 0.$$

b) C_1'de depolanan ilk enerji

$$w_1 = \frac{1}{2}(5 \times 10^{-6})(16) = 40\ \mu\text{J}$$

bulunur. C_2'de depolanan ilk enerji

$$w_2 = \frac{1}{2}(20 \times 10^{-6})(576) = 5760\ \mu\text{J}$$

ve iki kapasitörde depolanan toplam enerji

$$w_o = 40 + 5760 = 5800\ \mu\text{J},$$

hesaplanır.

c) $t \to \infty$ iken

$$v_1 \to -20\ \text{V} \quad \text{ve} \quad v_2 \to +20\ \text{V}$$

olur ve iki kapasitörde depolanan toplam enerji

$$w_\infty = \frac{1}{2}(5 + 20) \times 10^{-6}(400) = 5000\ \mu\text{J}$$

bulunur.

d) 250 kΩ'luk dirence aktarılan toplam enerji

$$w = \int_0^\infty p\,dt = \int_0^\infty \frac{400e^{-2t}}{250{,}000}\,dt = 800\ \mu\text{J}$$

bulunur. (b) ve (c) şıklarında elde edilen sonuçlar

$$800\ \mu\text{J} = (5800 - 5000)\ \mu\text{J})$$

olduğunu göstermektedir.

Şekil 7.15'teki eşdeğer kapasitörde depolanan enerji miktarı $\frac{1}{2}(4 \times 10^{-6})$ (400) yani 800 μJ'dır. Eşdeğer kapasitör seri bağlı baştaki kapasitörlerin terminal davranışını gösterdiğinden, bu kapasitörde depolanan enerji 250 kΩ'luk dirence aktarılan enerjiye eşittir.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 1 – *RL* ve *RC* devrelerinin doğal tepkisini belirleyebilmek

7.3 Devrede görülen anahtar uzun bir süre kapalı tutulduktan sonra $t = 0$ anında açılıyor.

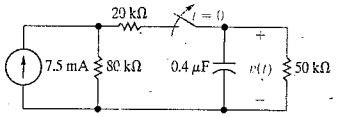
a) $v(t)$'nin ilk değerini,

b) $t > 0$ için zaman sabitini,

c) anahtar açıldıktan sonraki $v(t)$ ifadesini,

d) kapasitör üzerinde depolanan enerjinin ilk değerini,

e) başlangıçta depolanan enerjinin %75'inin harcanması için gereken süreyi bulunuz.

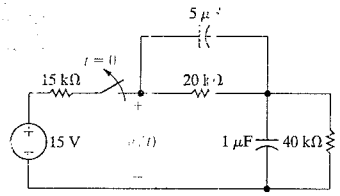


Cevap: (a) 200 V;
(b) 20 ms;
(c) $200e^{-50t}$ V, $t \geq 0$;
(d) 8 mJ;
(e) 13.86 ms.

7.4 Devrede görülen anahtar $t = 0$ anında açılmadan önce uzun bir süre kapalı tutulmuştur.

a) $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

b) Anahtar açıldıktan 60 ms sonra devrede depolanmış olan enerjinin yüzde kaçı harcanmış olur?



Cevap: (a) $8e^{-7.5t} + 4e^{-10t}$ V, $t \geq 0$;
(b) %87.05.

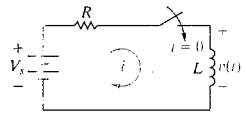
NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 7.21 ve 7.24'ü de çözmeyi deneyiniz.

7.3 *RL* ve *RC* Devrelerinin Basamak Tepkisi

Birinci mertebeden *RL* ve *RC* devrelerine aniden dc gerilim veya akım kaynakları uygulandığında ortaya çıkan akım ve gerilimleri bulma problemi için artık hazırız. Sabit bir gerilim veya akım kaynağına maruz kalan bir devrenin tepkisi devresi basamak tepkisi olarak adlandırılır. Basamak tepkisini incelerken kapasitör ve indüktör üzerinde enerji depolandığında devrenin nasıl davranacağını göstereceğiz. İlk olarak *RL* devresinin basamak tepkisi ile başlayacağız.

RL Devresinin Basamak Tepkisi

Öncelikle Şekil 7.2(a)'da görülen devreye bir anahtar ekleyerek başlayalım. *RL* devresinin basamak tepkisini bulurken Şekil 7.16'da görülen bu devreyi kullanacağız. Anahtarın kapandığı anda indüktör üzerinde depolanmış olan enerji sıfırdan farklı ilk akım değeri olan $i(0)$ cinsinden ifade edilir. Amaç, anahtar kapandıktan sonra, indüktör üzerinde oluşan akım ve gerilim ifadelerini bulmaktır. İzlenen yol Kısım 7.1'deki ile aynıdır. Devreyi tanımlayan diferansiyel denklemi bulmak için devreyi analiz edecek ardından bu denklemi çözmek için temel cebir kullanacağız.



Şekil 7.16 Birinci mertebeden *RL* devresinin basamak tepkisini bulmak için kullanılan devre.

Şekil 7.16'da görülen anahtar kapandıktan sonra Kirchhoff gerilim kuralından

$$V_s = Ri + L\frac{di}{dt} \tag{7.29}$$

denklemi yazılabilir. i ve t değişkenleri birbirinden ayrılıp her iki tarafın integrali alınarak bu denklem çözülür. Eş. 7.29 ilk önce di/dt için çözülür:

$$\frac{di}{dt} = \frac{-Ri + V_s}{L} = \frac{-R}{L}\left(i - \frac{V_s}{R}\right). \tag{7.30}$$

Ardından denklemin her iki tarafı diferansiyel zaman dt ile çarpılır. Bu adım sonucunda denklemin sol tarafı akımdaki diferansiyel değişimi göstermiş olur. Buradan,

$$\frac{di}{dt}dt = \frac{-R}{L}\left(i - \frac{V_s}{R}\right)dt \tag{7.31}$$

veya

$$di = \frac{-R}{L}\left(i - \frac{V_s}{R}\right)dt$$

denklemlerine ulaşır. Sonraki adımda Eş. 7.31'deki değişkenleri ayırarak

$$\frac{di}{i - (V_s/R)} = \frac{-R}{L}dt \tag{7.32}$$

denklemine ulaşırız.

İntegral parametreleri olarak x ve y'yi kullanarak Eş. 7.32'nin her iki tarafının integralini aldığımızda

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{dx}{x - (V_s/R)} = \frac{-R}{L}\int_0^t dy \tag{7.33}$$

denklemini elde ederiz. Burada I_0 $t = 0$ anındaki akım, $i(t)$ ise $t > 0$ için t anındaki akımı ifade eder. Eş. 7.23'teki integrali aldığımızda

$$\ln\frac{i(t) - (V_s/R)}{I_0 - (V_s/R)} = \frac{-R}{L}t \tag{7.34}$$

ifadesine ulaşırız. Buradan

$$\frac{i(t) - (V_s/R)}{I_0 - (V_s/R)} = e^{-(R/L)t}$$

veya

RL devresinin basamak tepkisi ▷

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right)e^{-(R/L)t}. \tag{7.35}$$

sonucu elde edilir. İndüktörde depolanan ilk enerji sıfır ise I_0 da sıfır olur. Böylece Eş. 7.35

$$i(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R}e^{-(R/L)t} \tag{7.36}$$

biçiminde sadeleşir.

Eş. 7.36 anahtar kapandığında akımın üstel olarak sıfırdan son değeri V_s/R'ye yükseldiğini ifade etmektedir. Devrenin zaman sabiti L/R yükselme hızını belirler. Anahtar kapandıktan bir zaman sabiti sonra akım, son değerinin %63'üne ulaşır. Bu sonuca

$$i(\tau) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R}e^{-1} \approx 0.6321\frac{V_s}{R} \tag{7.37}$$

şeklinde ulaşılır. Eğer akım başlangıç anındaki hızıyla artmaya devam etseydi $t = \tau$ anında son değerine ulaşırdı.

$$\frac{di}{dt} = \frac{-V_s}{R}\left(\frac{-1}{\tau}\right)e^{-t/\tau} = \frac{V_s}{L}e^{-t/\tau} \tag{7.38}$$

olduğundan $i(t)$'nin artma hızı

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{V_s}{L} \tag{7.39}$$

halinde yazılabilir. Akım bu hızla artmaya devam etseydi i ifadesi

$$i = \frac{V_s}{L}t, \tag{7.40}$$

biçiminde olurdu. $t = \tau$ anında bu ifade

$$i = \frac{V_s}{L}\frac{L}{R} = \frac{V_s}{R} \tag{7.41}$$

halini alırdı. Eşitlikler 7.36 ve 7.40'a ait grafikler Şekil 7.17'de görülmektedir. Eş. 7.37 ve Eş. 7.41'den elde edilen değerler de bu grafik üzerinde belirtilmiştir.

İndüktör gerilimi $L\,di/dt$ olduğundan $t \geq 0^+$ için Eş. 7.35'ten

$$v = L\left(\frac{-R}{L}\right)\left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right)e^{-(R/L)t} = (V_s - I_0R)e^{-(R/L)t} \tag{7.42}$$

ifadesi elde edilir. Anahtar kapanmadan önce indüktör üzerindeki gerilim sıfırdır. Eş. 7.42 anahtarı kapandığı anda indüktör geriliminin $V_s - I_0R$ değerine sıçradığını ve üstel bir biçimde sıfıra düştüğünü göstermektedir.

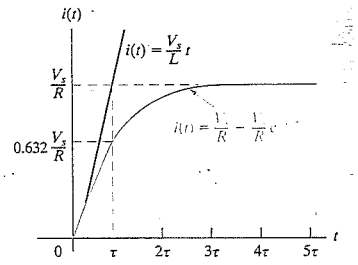
Acaba $t = 0^+$ anında v'nin aldığı değer mantıklı mıdır? Akımın ilk değeri I_0 olduğundan ve de indüktör ani akım değişikliklerini engellediğinden, anahtar kapandığı andaki akım değeri de I_0 olur. Direnç üzerindeki gerilim I_0R'ye, indüktör üzerindeki gerilim ise kaynak gerilimi eksi direnç üzerindeki gerilime, yani $V_s - I_0R$'ye eşit olur.

İndüktör akımının ilk değeri sıfır olduğunda Eş. 7.42

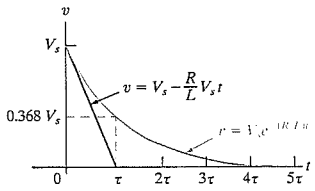
$$v = V_s e^{-(R/L)t} \tag{7.43}$$

biçiminde sadeleşir. Bu durumda indüktör gerilimi V_s'ye sıçrar. Devredeki akım V_s/R sabit değerine yaklaşacağından, t arttıkça indüktör geriliminin sıfıra yaklaşmasını bekleriz. Eş. 7.43'ün grafiği Şekil 7.18'de görülmektedir. Zaman sabiti ile gerilimin ilk azalma hızı arasındaki ilişki de aynı şekilde gösterilmiştir.

Eş. 7.35 indüktör üzerinde bir ilk akım bulunduğu durum için çözümü vermektedir. İlk akımın yönü ile i'nin yönü aynı ise I_0'ın işareti pozitif, aksi takdirde negatiftir. Eş. 7.33'ün bir devreye nasıl uygulandığı Örnek 7.5'te gösterilmiştir.



Şekil 7.17 ▲ $I_0 = 0$ iken Şekil 7.16'da görülen *RL* devresinin basamak tepkisi.



Şekil 7.18 ▲ Zamana karşı indüktör gerilimi.

Örnek 7.5 *RL* Devresinin Basamak Tepkisinin Belirlenmesi

Şekil 7.19'da görülen devredeki anahtar bu konumda uzun bir süre tutulmuştur ve $t = 0$ anında a konumundan b konumuna getirilmektedir. Anahtar, kesmeden temaslı anahtar tipindedir, yani b konumundaki bağlantı a konumundaki bağlantı kapanmadan önce sağlanmıştır. Böylece indüktör akımının kesintiye uğraması engellenmiştir.

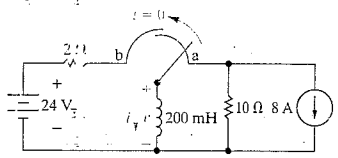
a) $t \geq 0$ için $i(t)$ ifadesini bulunuz.

b) Anahtar b konumuna getirildiği anda indüktör gerilimini ilk değeri nedir?

c) Anahtar konum değiştirdikten kaç ms sonra indüktör gerilimi 24 V olur?

d) Devrenin davranışı açısından ilk gerilim değeri mantıklı mıdır?

e) t'ye karşı $i(t)$ ve $v(t)$'yi çiziniz.



Şekil 7.19 ▲ Örnek 7.5'e ait devre.

Çözüm

a) Anahtar a konumunda uzun süre kaldığından 200 mH'lik indüktör 8 A'lik akım kaynağına kısa devredir. Bu nedenle 8 A'lik bir ilk akım taşımaktadır. Bu akımın yönü i'ye ters olduğundan I_0 değeri −8 A'dir. Anahtar b konumuna getirildiğinde i'nin son değeri 24/2, yani 12 A olacaktır. Devrenin zamanı sabiti 200/2, yani 100 ms'dir. Bu değerleri Eş. 7.35'te yerine koyduğumuzda

$$i = 12 + (-8 - 12)e^{-t/0.1}$$

$$= 12 - 20e^{-10t}\text{ A}, \quad t \geq 0$$

sonucuna ulaşırız.

b) İndüktör üzerindeki gerilim aşağıdaki gibidir:

$$v = L\frac{di}{dt}$$

$$= 0.2(200e^{-10t})$$

$$= 40e^{-10t}\text{ V}, \quad t \geq 0^+.$$

İndüktör geriliminin ilk değeri buradan

$$v(0^+) = 40\text{ V}$$

olarak bulunur.

c) Evet. Anahtar b konumuna getirildiği anda, yeni oluşan kapalı hat üzerinde indüktör, saat yönünün tersinde 8 A'lik bir akım taşımaktadır. Bu akım 2 Ω luk direnç üzerinde 16 V'luk bir gerilime sebep olur. Bu gerilim ile gerilim kaynağı birbirine eklendiğinde indüktör üzerinde 40 V'luk bir gerilim oluştu.

d) Aşağıdaki denklemi çözerek indüktör geriliminin 24 V'a eşit olduğu zamanı bulabiliriz.

$$24 = 40e^{-10t}$$

Buradan t

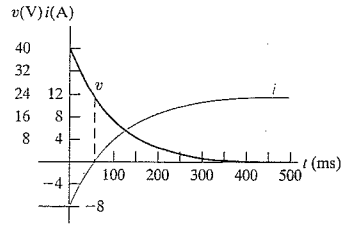
$$t = \frac{1}{10}\ln\frac{40}{24}$$

$$= 51.08 \times 10^{-3}$$

$$= 51.08\text{ ms}$$

olarak hesaplanır.

e) $i(t)$ ve $v(t)$'nin t'ye karşı grafikleri Şekil 7.20'de görülmektedir. Kirchhoff gerilim yasasından da bulunabileceği gibi akımın sıfıra eşit olduğu an indüktör geriliminin kaynak gerilimine eşit olduğu an ile aynıdır.



Şekil 7.20 ▲ Örnek 7.5 için akım ve gerilim grafikleri.

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 2 – *RL* ve *RC* devrelerinin basamak tepkilerini belirleyebilmek

7.5 Şekil 7.19'da görülen devredeki anahtarın b konumunda uzun bir süre kaldığını ve $t = 0$ anında a konumuna getirildiğini varsayınız.

(a) $i(0^+)$'yı, (b) $v(0^+)$'yı, (c) $t > 0$ için τ'yu, (d) $t \geq 0$ için $i(t)$'yi ve (e) $t \geq 0^+$ için $v(t)$'yi bulunuz.

Cevap: (a) 12 A; (b) −200 V; (c) 20 ms; (d) $-8 + 20e^{-50t}$ A, $t \geq 0$; (e) $-200e^{-50t}$ V, $t \geq 0^+$.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 7.33–7.35'i de çözmeyi deneyiniz.

Şekil 7.16'daki $v(t)$ indüktör gerilimini yalnızca indüktör akımı cinsinden değil doğrudan da ifade edebiliriz. Direnç üzerindeki gerilim, kaynak gerilimi ile indüktör gerilimi arasındaki far olduğundan

$$i(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{v(t)}{R} \tag{7.44}$$

denklemini yazabiliriz. Burada V_s sabittir. Her iki tarafın zamana göre türevini aldığımızda

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{dv}{dt} \tag{7.45}$$

denklemine ulaşırız. Eş. 7.45'in her iki tarafını indüktans değeri L ile çarptığımızda denklemin sol tarafında indüktör gerilimini elde ederiz:

$$v = -\frac{L}{R}\frac{dv}{dt}. \tag{7.46}$$

Eş. 7.46'yı standart biçimde yeniden

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{L}v = 0 \tag{7.47}$$

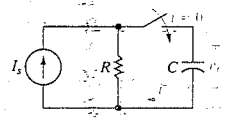
olarak yazalım. Eş. 7.47'nin çözümünün Eş. 7.42'ninki ile aynı olduğunu göstermek size bırakılmıştır (Problem 7.40).

Bu noktada, *RL* devresinin basamak tepkisi ile ilgili bir gözlem uygun olacaktır. (Bu gözlem daha sonra faydalı olacaktır.) İndüktör akımını ifade eden diferansiyel denklemi çıkarırken Eş. 7.29'u elde etmiştik. Eş. 7.29'u aşağıdaki gibi yeniden düzenleyelim.

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V_s}{L}. \tag{7.48}$$

Görüldüğü gibi Eş. 7.47 ve 7.48 aynı biçime sahiptir. Yani her ikisinde de değişkenin birinci türevi, değişkenin bir sabitle çarpımı ile toplanarak bir sabite eşitlenmiştir. Eş. 7.47'nin sağ tarafındaki sabit sıfır olduğundan bu denklem, Kısım 7.1'deki doğal tepki

denklemi ile aynı biçimdedir. Eş. 7.47 ve 7.48'in her ikisinde de bağımlı değişkenin önündeki sabit çarpan, zaman sabitinin tersine, yani $R/L = 1/\tau$'ye eşittir. *RC* devresinin basamak tepkisi çıkarımında da benzer bir durumla karşılaşmaktayız. Bu gözlemleri kullanarak Kısım 7.4'te *RL* ve *RC* devrelerinin doğal basamak tepkilerini bulmak için genel bir yaklaşım geliştireceğiz.



Şekil 7.21 Birinci mertebeden *RC* devresinin basamak tepkisini bulmak için kullanılan devre.

RC Devresinin Basamak Tepkisi

Birinci mertebeden *RC* devresinin basamak tepkisini Şekil 7.21'deki devreyi analiz ederek bulabiliriz. Matematiksel olarak kolaylık sağlaması için devrenin, eşdeğer kapasitöre bağlı Norton eşdeğerini kullanmayı tercih ediyoruz. Şekil 7.21'deki üst düğümden çıkan akımları topladığımızda

$$C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} = I_s \tag{7.49}$$

diferansiyel denklemini elde ederiz. Bu denklemi *C*'ye böldüğümüzde

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{I_s}{C} \tag{7.50}$$

ifadesine ulaşırız. Eş. 7.50 ve Eş. 7.48'i karşılaştırdığımızda v_C'nin çözümü ile indüktif devredeki akımın çözümünün aynı biçimde yani Eş. 7.35'teki gibi olduğunu görmekteyiz. Bu nedenle, uygun değişken ve katsayıları yerine koyarak v_C'nin çözümünü doğrudan yazabiliriz. Bunun için V_s yerine I_s, *L* yerine *C*, *R* yerine $1/R$ ve I_0 yerine V_0 koymalıyız. Elde edeceğimiz v_C ifadesi aşağıda verilmiştir.

RC devresinin basamak tepkisi ➤

$$v_C = I_sR + (V_0 - I_sR)e^{-t/RC}, \quad t \geq 0. \tag{7.51}$$

Kapasitör akımının çıkarımı için benzer yol takip edildiğinde

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = 0 \tag{7.52}$$

diferansiyel denklemine ulaşılır. Eş. 7.52 Eş 7.47 ile aynı biçimde olduğundan Eş. 7.50'yi çözmek için yaptığımız değişiklikleri burada da yaparak *i* ifadesini yazabiliriz:

$$i = \left(I_s - \frac{V_0}{R}\right)e^{-t/RC}, \quad t \geq 0^+. \tag{7.53}$$

Burada V_0 kapasitör gerilimi v_C'nin ilk değeridir.

Eş. 7.51 ve Eş. 7.53'ü indüktif devrenin basamak tepkisi ile olan matematiksel benzerlikten faydalanarak elde ettik. *RC* devresine ait bu çözümlerin bilinen devre davranışı açısından mantıklı olup olmadıklarına bakalım. Eş. 7.51'den kapasitör geriliminin ilk değerinin V_0, son değerinin I_sR ve devrenin zaman sabitinin *RC*

olduğu anlaşılmaktadır. v_C'nin çözümü $t \geq 0$ için geçerlidir. Bu gözlemler, dirence paralel bağlı bir kapasitörün sabit akım kaynağı ile beslendiği durumu ile tutarlıdır.

Eş. 7.53 $t = 0^+$ anındaki kapasitör akımının $I_s - V_0/R$ olduğunu göstermektedir. Kapasitör gerilimi aniden değişmeyeceğinden bu gösterim anlamlıdır. Bu nedenle direnç üzerindeki akımın ilk değeri V_0/R'dir. Kapasitörün bulunduğu koldaki akım $t = 0^-$ anında aniden 0'dan başlayıp $t = 0^+$ anında $I_s - V_0/R$ değerine ulaşır. $t = \infty$'da kapasitör akımı sıfırdır. Kapasitör geriliminin son değeri ise $v = I_sR$'dir.

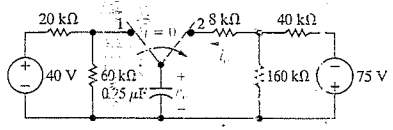
Birinci mertebeden *RC* devresinin basamak tepkisini bulmak için, Eş. 7.51 ve Eş. 7.53'ün nasıl kullanılacağı Örnek 7.6'da gösterilmiştir.

Örnek 7.6 *RC* Devresinin Basamak Tepkisinin Belirlenmesi

Şekil 7.22'de görülen devredeki anahtar uzun bir süre 1 konumunda kalmıştır. $t = 0$ anında anahtar 2 konumuna getirilmiştir.

a) $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi ve

b) $t \geq 0^+$ için $i_o(t)$'yi bulunuz.



Şekil 7.22 Örnek 7.6'ya ait devre.

Çözüm

a) Anahtar 1 konumunda uzun bir süre kaldığından v_o'nun ilk değeri 40(60/80) yani 30 V'tur. Eş. 7.51 ve Eş. 7.53'ten faydalanabilmek amacıyla devrenin $t \geq 0$ için kapasitör terminaline göre Norton eşdeğerini buluruz. Bunun için önce, –75 V'luk kaynak geriliminin 40 kΩ ve 160 kΩ'luk dirençler üzerine bölünmesiyle oluşan açık devre gerilimini buluruz.

$$V_{oc} = \frac{160 \times 10^3}{(40 + 160) \times 10^3}(-75) = -60 \text{ V}.$$

Ardından, –75 V'luk kaynağı kısa devre yaparak ve dirençlerin seri ve paralel birleşimlerden faydalanarak kapasitörün sağ tarafından görülen Thévenin direncini buluruz.

$$R_{Th} = 8000 + 40{,}000 \parallel 160{,}000 = 40 \text{ k}\Omega.$$

Norton akım kaynağının değeri açık devre geriliminin Thévenin direncine oranı, yani $-60/(40 \times 10^3) = -1.5$ mA'dir. Oluşan eşdeğer Norton devresi Şekil 7.23'te gösterilmiştir. Buradan $I_sR = -60$ V ve $RC = 10$ ms olduğu görülmektedir. $v_o(0) = 30$ V olduğunu daha önce belirlemiştik. Dolayısıyla v_o aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$v_o = -60 + [30 - (-60)]e^{-100t}$$
$$= -60 + 90e^{-100t} \text{ V}, \quad t \geq 0.$$

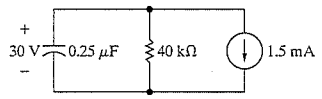
b) i_o ifadesini doğrudan Eş. 7.53'te $I_s = 1.5$ mA ve $V_o/R = (30/40) \times 10^{-3} = 0.75$ mA koyarak yazabiliriz.

$$i_o = -2.25e^{-100t} \text{ mA}, \quad t \geq 0^+.$$

v_o ve i_o ifadelerinin tutarlılığını aşağıdaki gibi kontrol edebiliriz.

$$i_o = C\frac{dv_o}{dt} = (0.25 \times 10^{-6})(-9000e^{-100t})$$
$$= -2.25e^{-100t} \text{ mA}.$$

$dv_o(0^-)/dt = 0$ olduğundan i_o ifadesi sadece $t \geq 0^+$ için geçerlidir.



Şekil 7.23 $t > 0$ için Şekil 7.22'deki devrenin eşdeğer devresi.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 2 – *RL* ve *RC* devrelerinin basamak tepkilerini belirleyebilmek

7.6 a) Şekil 7.22'de verilen devrede 160 kΩ'luk direnç üzerindeki gerilimin ifadesini bulunuz. Bu gerilimi v_A olarak adlandırınız ve gerilimin referans kutupluğunun direncin üst terminalinde pozitif olduğunu varsayınız.

b) (a) şıkkında bulduğunuz ifadenin geçerli olduğu zaman aralığını belirtiniz.

Cevap: (a) $-60 + 72e^{-100t}$ V;
(b) $t \geq 0^+$.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 7.50 ve 7.51'i de çözmeyi deneyiniz.

7.4 Basamak ve Doğal Tepkilerin Genel Çözümü

Şekil 7.24'te görülen birinci mertebeden *RL* ve *RC* devrelerinin basamak veya doğal tepkilerini bulma yaklaşımları, diferansiyel denklemlerin aynı biçime sahip olmaları temeline dayanır (Eş. 7.48 ve Eş. 7.50). Bu dört olası devrenin çözümünü genelleştirmek amacıyla bilinmeyen niceliği $x(t)$ seçersek, $x(t)$ nin dört olası değeri olabilir. Bu nicelik, kapasitör veya indüktör üzerindeki akım veya gerilimi temsil edebilir. Eşitlikler 7.47, 7.48, 7.50 ve 7.52'den gördüğümüz gibi, Şekil 7.24'teki dört devreyi de tanımlayan diferansiyel denklem

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = K \tag{7.54}$$

biçimindedir. K sabiti sıfır olabilir. Devredeki kaynaklar sabit akım ve/veya gerilim kaynakları olduğundan x'in son değeri de sabit olacaktır; yani x'in son değeri Eş. 7.54'ü sağlamalıdır. x son değerine ulaştığında dx/dt türevi de sıfır olmalıdır. Yani

$$x_f = K\tau \tag{7.55}$$

denklemi sağlanmalıdır. Burada x_f sembolü x değişkeninin son değerini ifade eder.

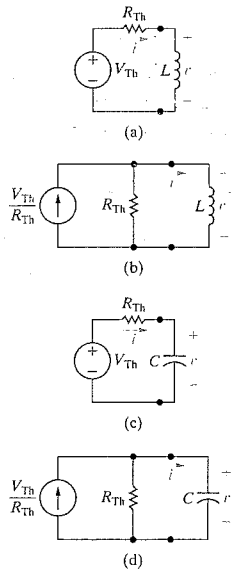
Eş. 7.54'ü, değişkenleri ayırıp birinci türevi elde ederek çözeriz:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-x}{\tau} + K = \frac{-(x - K\tau)}{\tau} = \frac{-(x - x_f)}{\tau}. \tag{7.56}$$

Eş. 7.56'yı yazarken Eş. 7.55'ten faydalanarak x_f yerine $K\tau$ koyduk. Şimdi denklemin her iki tarafını dt ile çarpıp $x - x_f$'ye bölerek

$$\frac{dx}{x - x_f} = \frac{-1}{\tau}dt \tag{7.57}$$

buluruz.



Şekil 7.24 ▲ Dört olası birinci mertebeden devre.
(a) Thévenin eşdeğerine bağlı indüktör.
(b) Norton eşdeğerine bağlı indüktör.
(c) Thévenin eşdeğerine bağlı kapasitör.
(d) Norton eşdeğerine bağlı kapasitör.

Sonraki adımda Eş. 7.57'nin integralini alırken mümkün olduğunca genel bir çözüm elde edebilmek için integralin alt sınırını t_0, üst sınırını ise t olarak alırız. t_0 anahtarlamanın veya başka bir değişikliğin yapıldığı zamanı gösterir. Daha önce $t_0 = 0$ olarak kabul etmiştik ancak şimdiki gösterim anahtarlamanın herhangi bir zamanda yapılmasına izin vermektedir. İntegral değişkenleri olarak u ve v'yi kullandığımızda

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{du}{u - x_f} = -\frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t} dv \tag{7.58}$$

denklemini yazabiliriz. Eş. 7.58'deki integrali aldığımızda

$$x(t) = x_f + [x(t_0) - x_f]e^{-(t-t_0)/\tau}. \tag{7.59}$$

◁ ***RL* ve *RC* devrelerinin doğal ve basamak tepkileri için genel çözüm**

sonucuna ulaşırız. Eş. 7.59'u sözcüklerle ifade ettiğimizde önemini daha iyi anlayabiliriz.

$$\begin{matrix}\text{bilinmeyen değişkenin} \\ \text{zamana bağlı} \\ \text{fonksiyonu}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{değişkenin} \\ \text{son} \\ \text{değeri}\end{matrix}$$

$$+\begin{bmatrix}\text{değişkenin} & \text{değişkenin} \\ \text{başlangıç} & - \text{son} \\ \text{değeri} & \text{değeri}\end{bmatrix} \times e^{\frac{-[t-(\text{anahtarlama zamanı})]}{(\text{zaman sabiti})}} \tag{7.60}$$

Pek çok durumda t_0 anahtarlama zamanı sıfırdır.

Devrelerin basamak ve doğal tepkilerini hesaplarken aşağıdaki adımları takip etmek faydalı olabilir.

1. Devrede hesaplanmak istenen değişkeni belirleyiniz. *RC* devrelerinde kapasitör gerilimini seçmek uygunken, *RL* devrelerinde indüktör akımını seçmek daha elverişli olacaktır.
2. Değişkenin başlangıç değerini yani t_0 anındaki değerini belirleyiniz. Değişken olarak kapasitör gerilimini veya indüktör akımını seçtiyseniz her ikisi de sürekli değişken olduğundan, $t = t_0^-$ ve $t = t_0^+$[2] ayrımını yapmamıza gerek yoktur. Başka bir değişken seçtiyseniz başlangıç değerinin $t = t_0^+$'da tanımlandığını hatırlayınız.
3. Değişkenin son değerini ($t \to \infty$ iken) hesaplayınız.
4. Devrenin zaman sabitini hesaplayınız.

◁ ***RL* ve *RC* devrelerinin doğal ve basamak tepkilerinin hesaplanması.**

Yukarıda bulunan nicelikleri Eş. 7.60'ta yerine koyarak, ilgili değişkenin zamana bağlı fonksiyonunu elde edebilirsiniz. Ardından, 3 ve 4. Bölümde anlatılan devre analiz yöntemlerini kullanarak veya yukarıdaki adımları takip ederek, devredeki diğer değişkenlere ait denklemlere ulaşabilirsiniz.

Örnek 7.7-7.9, *RL* ve *RC* devrelerinin basamak tepkisini bulmak için Eş. 7.60'ın nasıl kullanıldığını göstermektedir.

[2] t_0^- ve t_0^+, 0^- ve 0^+'ya benzer ifadelerdir. $x(t_0^-)$, $x(t)$'nin t t_0'a soldan yaklaşırken limitini, $x(t_0^+)$ ise t t_0'a sağdan yaklaşırken limit değerini ifade eder.

Örnek 7.7 *RC* Devresinin Basamak Tepkisinin Genel Çözüm Yöntemi İle Bulunması

Şekil 7.25'teki devrede görülen anahtar uzun bir süre a konumunda bekletilmiştir. $t = 0$ anında anahtar b konumuna alınmıştır.

a) v_C'nin başlangıç değeri nedir?

b) v_C'nin son değeri nedir?

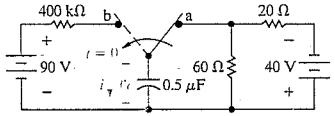
c) Anahtar b konumundayken devrenin zaman sabiti nedir?

d) $t \geq 0$ için $v_C(t)$ ifadesi nedir?

e) $t \geq 0^+$ için $i(t)$ ifadesi nedir?

f) Anahtar b konumuna getirildikten ne kadar süre sonra kapasitör gerilimi sıfırlanır?

g) t'ye karşı $v_C(t)$ ve $i(t)$'yi çiziniz.



Şekil 7.25 ▲ Örnek 7.7'ye ait devre.

Çözüm

a) Anahtar a konumunda uzun bir süre kaldığından kapasitör açık devre gibi davranır. Bu nedenle kapasitör gerilimi aynı zamanda 60 Ω'luk direnç üstündeki gerilimdir. Gerilim bölme kuralından 60 Ω'luk direnç üzerindeki gerilim, 40 × [60/(60 + 20)] yani 30 V olarak hesaplanır. v_C üst terminalde pozitif olarak gösterildiğinden $v_C(0) = -30$ V'tur.

b) Anahtar b konumunda uzun bir süre kaldıktan sonra kapasitör 90 V'luk kaynak karşısında açık devre gibi davranır. Bu nedenle kapasitör geriliminin son değeri +90 V'tur.

c) Zaman sabiti,

$$\tau = RC = (400 \times 10^3)(0.5 \times 10^{-6}) = 0.2 \text{ s}$$

olarak hesaplanır.

d) v_f, $v(0)$ ve t Eş. 7.60'ta yerine konduğunda,

$$v_C(t) = 90 + (-30 - 90)e^{-5t} = 90 - 120e^{-5t} \text{ V}, \quad t \geq 0$$

sonucuna ulaşılır.

e) Burada τ'nun değeri aynı olduğundan, yalnızca akımın başlangıç ve son değerlerini bulmamız gerekir. Kapasitör akımı anlık olarak değişebildiğinden, başlangıç değeri olarak $i(0^+)$'yı almalıyız. Bu akım, direnç üzerindeki akım ile aynıdır ve Ohm Yasası'ndan $[90-(-30)]/(4000 \times 10^{-3}) = 300\ \mu$A olarak bulunur. Ohm Yasası'nı uygularken kapasitör geriliminin aniden değişmeyeceğine dikkat ettik. $i(t)$'nin son değeri sıfırdır. Buna göre

$$i(t) = 0 + (300 - 0)e^{-5t} = 300e^{-5t}\ \mu\text{A}, \quad t \geq 0^+$$

bulunur. (d)'de bulunan çözümün türevini alıp kapasite ile çarparak aynı sonuca ulaşabilirdik. Bu yolu kendiniz deneyiniz. Bu alternatif yaklaşım da $t = 0$ anında bir süreksizlik olduğunu göstermektedir.

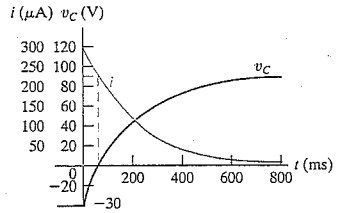
f) Anahtar b konumuna getirildikten ne kadar süre sonra kapasitör geriliminin sıfır olduğunu bulmak için (d)'de bulunan denklemi $v_C(t) = 0$ iken çözmeliyiz.

$$120e^{-5t} = 90 \text{ veya } e^{5t} = \frac{120}{90},$$

$$t = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{4}{3}\right) = 57.54 \text{ ms}.$$

$v_C = 0$ iken $i = 225\ \mu$A'dir ve 400 kΩ'luk direnç üzerindeki gerilim 90 V'tur.

g) t'ye karşı $v_C(t)$ ve $i(t)$ grafikleri Şekil 7.26'da görülmektedir.



Şekil 7.26 ▲ Örnek 7.7 için akım ve gerilim grafikleri.

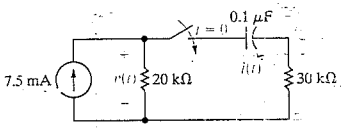
Örnek 7.8 Başlangıç Koşulunun Sıfır Olduğu Durumda Genel Çözüm Yönteminin Kullanılması

Şekil 7.27'deki devrede bulunan anahtar uzun bir süre açık kalmıştır. Kapasitör üzerindeki yükün başlangıç değeri sıfırdır. $t = 0$ anında anahtar kapatılmıştır.

a) $t \geq 0^+$ için $i(t)$ ve

b) $t \geq 0^+$ için $v(t)$

ifadelerini bulunuz.



Şekil 7.27 ▲ Örnek 7.8'e ait devre.

Çözüm

a) Kapasitör üzerindeki başlangıç gerilimi sıfır olduğundan, anahtar kapatıldığı anda 30 kΩ'luk direncin bulunduğu koldaki akım

$$i(0^+) = \frac{(7.5)(20)}{50} = 3 \text{ mA}$$

olur. Kapasitör dc akım altında açık devre gibi davranacağından kapasitör akımının son değeri sıfır olacaktır. Yani $i_f = 0$'dır. Devrenin zaman sabiti, (kapasitör tarafından görülen) Thévenin direnci ile kapasitesinin çarpımına eşittir. Yani, $\tau = (20 + 30)10^3(0{,}1) \times 10{-}6 = 5$ ms'dir.

Bu değerleri Eş. 7.60'ta yerine koyduğumuzda

$$i(t) = 0 + (3 - 0)e^{-t/5\times10^{-3}} = 3e^{-200t} \text{ mA}, \quad t \geq 0^+$$

ifadesine ulaşırız.

b) $v(t)$, kapasitör gerilimi ile 30 kΩ'luk direnç üzerindeki gerilimin toplamına eşittir. Kapasitör geriliminin (akım yönünde gerilim düşer) başlangıç değeri sıfır, son değeri ise (7.5)(20), yani 150 V'tur. Zaman sabiti daha önce olduğu gibi 5 ms'dir. Eş. 7.60'ı kullandığımızda,

$$v_C(t) = 150 + (0 - 150)e^{-200t} = (150 - 150e^{-200t}) \text{ V}, \quad t \geq 0$$

ifadesini elde ederiz. Buradan $v(t)$,

$$v(t) = 150 - 150e^{-200t} + (30)(3)e^{-200t} = (150 - 60e^{-200t}) \text{ V}, \quad t \geq 0^+$$

olarak bulunur. Bulduğumuz bu ifadeyi kontrol etmek amacıyla, 20 kΩ'luk direnç üzerindeki gerilimin ilk değerinin 150–60, yani 90 V olduğuna dikkat edelim. Anahtar kapatıldığı anda 20 kΩ üzerindeki akım (7.5)(30/50), yani 4.5 mA olur. Bu da 20 kΩ üzerinde 90 V'luk bir gerilim düşmesine neden olur. Böylece bulduğumuz çözümün doğru olduğunu görmüş oluruz.

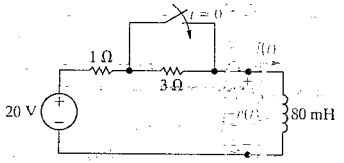
Örnek 7.9 *RL* Devresinin Basamak Tepkisinin Genel Çözüm Yöntemi İle Bulunması

Şekil 7.28'de görülen devredeki anahtar uzun bir süre açık kalmıştır. $t = 0$ anında anahtar kapatılmıştır.

a) $t \geq 0^+$ için $v(t)$ ve

b) $t \geq 0$ için $i(t)$

ifadelerini bulunuz.



Şekil 7.28 Örnek 7.9'a ait devre.

Çözüm

a) Anahtar uzun süre açık kaldığından indüktör akımının başlangıç değeri 5 A, akımın yönü ise yukarıdan aşağıya doğrudur. Anahtar kapandıktan hemen sonra akımın değeri yine 5 A'dir. Bu nedenle indüktör üzerindeki gerilimin başlangıç değeri 20 – 5(1) = 15 V'tur. İndüktör geriliminin son değeri ise 0 V'tur. Anahtar kapalıyken devrenin zaman sabiti 80/1 yani 80 ms olarak bulunur. $v(t)$ ifadesini yazmak için Eş. 7.60'ı kullandığımızda

$$v(t) = 0 + (15 - 0)e^{-t/80\times10^{-3}}$$

$$= 15e^{-12.5t}\ \text{V}, \quad t \geq 0^+$$

sonucunu elde ederiz.

b) İndüktör akımının başlangıç değerinin 5 A olduğunu bulmuştuk. Anahtar kapandıktan uzun bir süre sonra indüktör akımının değeri 20/1 yani 20 A'e ulaşır. Zaman sabiti 80 ms olduğundan $i(t)$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$i(t) = 20 + (5 - 20)e^{-12.5t}$$

$$= (20 - 15e^{-12.5t})\ \text{A}, \quad t \geq 0.$$

$v(t)$ ve $i(t)$ için bulunan çözümlerin tutarlı olduğunu aşağıdaki gibi test edebiliriz.

$$v(t) = L\frac{di}{dt}$$

$$= 80 \times 10^{-3}[15(12.5)e^{-12.5t}]$$

$$= 15e^{-12.5t}\ \text{V}, \quad t \geq 0^+.$$

NOT: Genel çözüm yöntemini kavrayışınızı Bölüm Problemlerinden 7.53 ve 7.54'ü de çözmeyi deneyerek sınayınız.

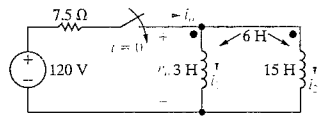
Örnek 7.10, manyetik bağlaşık bobin içeren devrelerin basamak tepkisini bulmak için Eş. 7.60'ın nasıl kullanılacağını göstermektedir.

Örnek 7.10 Manyetik Bağlaşık Bobin İçeren Bir Devrenin Basamak Tepkisinin Bulunması

Şekil 7.29'daki devrede bulunan anahtar kapatıldığı anda devrede depolanmış enerji bulunmamaktadır.

a) i_o, v_o, i_1 ve i_2'yi bulunuz.

b) (a)'da bulunan sonuçların devre davranışı bakımından anlamlı olduğunu gösteriniz.



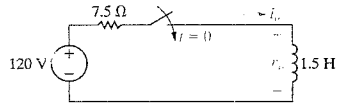
Şekil 7.29 Örnek 7.10'a ait devre.

Çözüm

a) Şekil 7.29'daki manyetik bağlaşık bobinler yerine indüktansı

$$L_{eq} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} = \frac{45 - 36}{18 - 12} = 1.5\ \text{H}$$

olan tek bir bobin konulabilir. (Bkz. Problem 6.41). Böylece Şekil 7.29'da görülen devre Şekil 7.30'daki gibi basitleştirilebilir.



Şekil 7.30 Şekil 7.29'daki devrenin, manyetik bağlaşık bobinler yerine eşdeğer bobin konulmuş hali.

i_o'nın başlangıç değeri sıfır olarak kabul edildiğinde, i_o'nun son değeri 120/7.5, yani 16 A olarak hesaplanır. Devrenin zaman sabiti 1.5/7.5 = 0.2 s'dir. Eş. 7.60'tan

$$i_o = 16 - 16e^{-5t}\ \text{A}, \quad t \geq 0$$

denklemi yazılabilir. Kirchhoff gerilim yasasına göre v_o aşağıdaki gibi bulunur.

$$v_o = 120 - 7.5i_o$$
$$= 120e^{-5t}\ \text{V}, \quad t \geq 0^+.$$

i_1 ve i_2'yi bulmak için öncelikle

$$3\frac{di_1}{dt} + 6\frac{di_2}{dt} = 6\frac{di_1}{dt} + 15\frac{di_2}{dt}$$

veya

$$\frac{di_1}{dt} = -3\frac{di_2}{dt}$$

denklemi yazılır. $i_o = i_1 + i_2$ olduğundan aşağıdaki denkleme ulaşılır.

$$\frac{di_o}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}.$$

Buradan

$$80e^{-5t} = -2\frac{di_2}{dt}$$

denklemi yazılır.

$i_2(0)$ sıfır olduğundan

$$i_2 = \int_0^t -40e^{-5x}dx$$
$$= -8 + 8e^{-5t}\ \text{A}, \quad t \geq 0$$

sonucu elde edilir. Kirchhoff akım yasasından i_2 ifadesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$i_1 = 24 - 24e^{-5t}\ \text{A}, \quad t \geq 0.$$

b) Anahtar kapandığı anda devre enerjisiz olduğundan $i_o(0)$, $i_1(0)$ ve $i_2(0)$ sıfırdır. $i_o(0) = 0$ olduğundan $v_o(0^+) = 120$ V bulunur.

Aşağıdaki denklemler i_1 ve i_2'ye ait çözümler ile v_o'ya ait çözümün tutarlı olduğunu göstermektedir.

$$v_o = 3\frac{di_1}{dt} + 6\frac{di_2}{dt}$$
$$= 360e^{-5t} - 240e^{-5t}$$
$$= 120e^{-5t}\ \text{V}, \quad t \geq 0^+,$$

veya

$$v_o = 6\frac{di_1}{dt} + 15\frac{di_2}{dt}$$
$$= 720e^{-5t} - 600e^{-5t}$$
$$= 120e^{-5t}\ \text{V}, \quad t \geq 0^+.$$

i_1 ve i_2'nin son değerleri akı bağlaşımlarını kullanarak kontrol edilebilir. 3 H'lik bobindeki akı (λ_1), 15 H'lik bobindeki akıya (λ_2) eşit olmalıdır. Bunun sebebi

$$v_o = \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{d\lambda_2}{dt}$$

denklemleridir.

$$\lambda_1 = 3i_1 + 6i_2 \text{ Wb-turns}$$

$$\lambda_2 = 6i_1 + 15i_2 \text{ Wb-turns.}$$

Yukarıdaki ifadelerden herhangi birini kullandığımızda

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 24 - 24e^{-5t} \text{ Wb-turns}$$

ifadesine ulaşırız. Görüldüğü gibi λ_1 ve λ_2'ye ait çözümler v_o'ya ait çözümler ile tutarlıdır.

1. veya 2. bobindeki akı bağlaşımının son değeri 24 Wb–turn'dür, yani

$$\lambda_1(\infty) = \lambda_2(\infty) = 24 \text{ Wb-turns.}$$

i_1'in son değeri

$$i_1(\infty) = 24 \text{ A,}$$

i_2'nin son değeri ise

$$i_2(\infty) = -8 \text{ A}$$

olarak bulunur. Bu değerler ile akı bağlaşımlarının son değerlerinin tutarlı olduğu aşağıdaki ifadelerden anlaşılabilir:

$$\lambda_1(\infty) = 3i_1(\infty) + 6i_2(\infty)$$

$$= 3(24) + 6(-8) = 24 \text{ Wb-turns,}$$

$$\lambda_2(\infty) = 6i_1(\infty) + 15i_2(\infty)$$

$$= 6(24) + 15(-8) = 24 \text{ Wb-turns.}$$

i_1 ve i_2'nin son değerlerinin akı bağlaşımları aracılığıyla kontrol edilebilmesinin sebebi $t = \infty$'da her iki bobinin de ideal kısa devre olarak davranmalarıdır. İdeal kısa devreler arasındaki akım bölümü Ohm Yasası kullanılarak bulunamaz.

NOT: Bu kısımda öğrendiklerinizi Bölüm Problemleri 7.65 ve 7.67'yi çözerken genel çözüm yöntemini kullanarak sınayınız.

7.5 Sıralı Anahtarlama

Bir devrede birden fazla anahtarlama gerçekleşiyorsa buna sıralı anahtarlama denir. Örneğin iki konumlu tek bir anahtar açılıp kapanabilir veya birden fazla anahtar sırayla açılıp kapanabilir. Tüm bu anahtarlamaların referans anı $t = 0$ olamaz. Sıralı anahtarlamanın gerçekleştiği durumlarda ortaya çıkan akım ve gerilimleri önceki kısımlarda anlatılan tekniklerle belirleyebiliriz. Anahtar veya anahtarların ilk pozisyonları için $v(t)$ ve $i(t)$ ifadesini bulduktan sonra bu çözümleri, sonraki anahtar pozisyonları için başlangıç koşullarını bulurken kullanacağız.

Sıralı anahtarlama problemlerinde başlangıç değeri $x(t_0)$'ı bulmak önemli bir yer tutar. Bildiğimiz gibi indüktör akımı ve kapasitör gerilimi dışındaki tüm nicelikler anahtarlama sırasında anlık olarak değişebilir. Bu nedenle öncelikle indüktör akımları ve kapasitör gerilimlerini bulmak, sıralı anahtarlamalı devrelerde daha da büyük önem taşır. Her zaman aralığına karşılık gelen devreyi çözmek de genellikle çözüm açısından faydalıdır.

Örnek 7.11 ve 7.12, sıralı anahtarlamalı devreler için analiz tekniklerini göstermektedir.

Örnek 7.11 Sıralı Anahtarlamalı *RL* Devresinin Analizi

Şekil 7.31'deki devrede görülen anahtarlar uzun bir süre kapalı konumda kalmışlardır. $t = 0$ anında 1. anahtar, 35 ms sonra ise 2. anahtar açılmıştır.

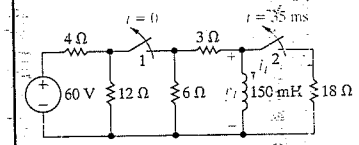
a) $0 \le t \le 35$ ms için $i_L(t)$'yi bulunuz.

b) $t \ge 35$ ms için i_L'yi bulunuz.

c) 150 mH'lik indüktörde depolanan enerjinin yüzde kaçı 18 Ω'luk direnç üzerinde harcanmaktadır?

d) 3 Ω için (c)'yi tekrarlayınız.

e) 6 Ω için (c)'yi tekrarlayınız.

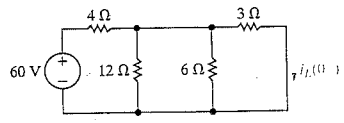


Şekil 7.31 Örnek 7.11'e ait devre.

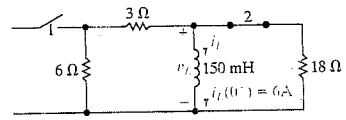
Çözüm

a) $t < 0$ iken her iki anahtar da kapalı olduğundan 150 mH'lik indüktör kısa devre durumundadır. Eşdeğer devre Şekil 7.32'de gösterilmiştir. Şekil 7.32'deki devrede $i_L(0^-)$'yi hesaplayarak indüktör akımının başlangıç değerini bulabiliriz. Birkaç kaynak dönüşümünden sonra $i_L(0^-)$ akımını 6 A olarak buluruz. $0 \le t \le 35$ ms aralığında 1. anahtar açıktır (2. anahtar kapalı konumdadır), yani 60 V'luk gerilim kaynağı ile 4 Ω ve 12 Ω'luk dirençler devreden ayrılmıştır. (DC kaynak artık devrede olmadığından indüktör artık kısa devre olarak davranmaz, dolayısıyla 18 Ω'luk direnç de artık kısa devre değildir. Bu duruma ait eşdeğer devre Şekil 7.33'te gösterilmiştir. Görüldüğü gibi indüktör terminalleri arasındaki eşdeğer direnç, 9, 18 ve 6 Ω'luk dirençlerin paralel birleşimidir. Devrenin zaman sabiti $(150/6) \times 10^{-3}$, yani 25 ms'dir. Buradan i_L ifadesi aşağıdaki gibi yazılır.

$$i_L = 6e^{-40t} \text{ A}, \quad 0 \le t \le 35 \text{ ms.}$$



Şekil 7.32 $t < 0$ için Şekil 7.31'de görülen devre.



Şekil 7.33 $0 \le t \le 35$ ms için Şekil 7.31'de görülen devre.

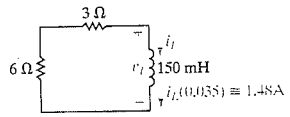
b) $t = 35$ ms iken indüktör akımı

$$i_L = 6e^{-1.4} = 1.48 \text{ A}$$

bulunur. 2. Anahtar açıldığında, devre Şekil 7.34'te görüldüğü gibidir ve zaman sabiti $(150/9) \times 10^{-3}$, yani 16.67 ms olarak değişir. Bu durumda i_L ifadesi

$$i_L = 1.48e^{-60(t-0.035)} \text{ A}, \quad t \ge 35 \text{ ms}$$

biçimindedir. Görüldüğü gibi üstel ifade zamanda 35 ms kaymıştır.



Şekil 7.34 $t \ge 35$ ms Şekil 7.31'de görülen devre.

c) 18 Ω'luk direnç anahtarlama serisinin yalnızca ilk 35 ms'sinde devrededir. Bu aralıkta direnç üzerindeki gerilim aşağıdaki gibidir.

$$v_L = 0.15\frac{d}{dt}(6e^{-40t})$$

$$= -36e^{-40t} \text{ V}, \quad 0 < t < 35 \text{ ms.}$$

18 Ω'luk direnç üzerinde tüketilen güç miktarı

$$p = \frac{v_L^2}{18} = 72e^{-80t}\ \text{W}, \quad 0 < t < 35\ \text{ms}$$

olur. Bu durumda harcanan enerji ise

$$w = \int_0^{0.035} 72e^{-80t}\,dt$$

$$= \frac{72}{-80}e^{-80t}\Big|_0^{0.035}$$

$$= 0.9(1 - e^{-2.8})$$

$$= 845.27\ \text{mJ}$$

olarak bulunur.

Başlangıçta 150 mH'lik indüktör üzerinde depolanan enerji miktarı

$$w_i = \frac{1}{2}(0.15)(36) = 2.7\ \text{J} = 2700\ \text{mJ}$$

hesaplanır. Buradan, 150 mH'lik indüktör üzerinde depolanan enerjinin (845.27/2700) × 100, yani %31.31'in 18 Ω'luk direnç üzerinde harcandığı görülmektedir.

d) $0 < t < 35$ ms aralığında 3 Ω'luk direnç üzerindeki gerilim

$$v_{3\Omega} = \left(\frac{v_L}{9}\right)(3)$$

$$= \frac{1}{3}v_L$$

$$= -12e^{-40t}\ \text{V}$$

bulunur. İlk 35 ms'de 3 Ω üzerinde harcanan enerji

$$w_{3\Omega} = \int_0^{0.035} \frac{144e^{-80t}}{3}\,dt$$

$$= 0.6(1 - e^{-2.8})$$

$$= 563.51\ \text{mJ}$$

ve $t > 35$ ms için 3 Ω'luk direnç üzerindeki akım

$$i_{3\Omega} = i_L = (6e^{-1.4})e^{-60(t-0.035)}\ \text{A}$$

bulunur. Bu durumda $t > 35$ ms için 3 Ω'luk direnç üzerinde harcanan enerji

$$w_{3\Omega} = \int_{0.035}^{\infty} i_{3\Omega}^2 \times 3\,dt$$

$$= \int_{0.035}^{\infty} 3(36)e^{-2.8}e^{-120(t-0.035)}\,dt$$

$$= 108e^{-2.8} \times \frac{e^{-120(t-0.035)}}{-120}\Big|_{0.035}^{\infty}$$

$$= \frac{108}{120}e^{-2.8} = 54.73\ \text{mJ}$$

hesaplanır. 3 Ω'luk direnç üzerinde harcanan toplam enerji ise

$$w_{3\Omega}(\text{toplam}) = 563.51 + 54.73$$

$$= 618.24\ \text{mJ}$$

bulunur. 3 Ω'luk direnç üzerinde harcanan toplam enerjinin başlangıçta depolanan enerjiye oranı

$$\frac{618.24}{2700} \times 100 = 22.90\%$$

elde edilir.

e) 6 Ω'luk direnç 3 Ω'luk dirence seri bağlı olduğundan üzerinde harcanan enerji ve bu enerjinin başlangıçta depolanan enerjiye oranı 3 Ω'luk direncinkinden 2 kat fazladır.

$$w_{6\Omega}(\text{toplam}) = 1236.48\ \text{mJ}.$$

Harcanan enerji başlangıçta depolanan enerjinin %45.80'idir. Hesapları aşağıdaki gibi kontrol edebiliriz.

$$1236.48 + 618.24 + 845.27 = 2699.99\ \text{mJ}$$

ve

$$31.31 + 22.90 + 45.80 = \%100.01.$$

Toplamdaki ufak tutarsızlık yapılan yuvarlamalardan kaynaklanmaktadır.

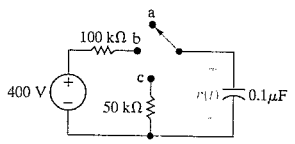
Örnek 7.12 Sıralı Anahtarlamalı *RC* Devresinin Analizi

Şekil 7.35'teki devrede görülen yüksüz kapasitör başlangıçta üç konumlu anahtarın a terminaline bağlıdır. $t = 0$ anında anahtar b konumuna getirilip burada 15 ms bekletilmiştir. 15 ms'nin ardından anahtar c konumuna getirilip burada bırakılmıştır.

a) Kapasitör üzerindeki gerilime ait nümerik ifadeyi çıkarınız.

b) Zamana karşı kapasitör gerilimini çiziniz.

c) Kapasitör gerilimi ne zaman 200 V'a eşit olur?



Şekil 7.35 ▲ Örnek 7.12'ye ait devre.

Çözüm

a) Anahtar b konumuna getirildiği anda kapasitör gerilimi sıfırdır. Anahtar sürekli b konumunda bırakılsaydı kapasitör gerilimi 400 V'a kadar çıkardı. Anahtar b konumundayken devrenin zaman sabiti 10 ms'dir. Buradan $t_0 = 0$ kabul ederek Eş. 7.59 yardımıyla kapasitör gerilimini yazabiliriz.

$$v = 400 + (0 - 400)e^{-100t}$$

$$= (400 - 400e^{-100t})\ \text{V}, \quad 0 \le t \le 15\ \text{ms}.$$

Anahtar b konumunda yalnızca 15 ms kaldığından bu ifade 0 ile 15 ms aralığında geçerlidir. 15 ms'nin sonunda kapasitör gerilimi,

$$v(15\ \text{ms}) = 400 - 400e^{-1.5} = 310.75\ \text{V}$$

olarak hesaplanır. Yani anahtar c konumuna getirildiğinde kapasitör geriliminin başlangıç değeri 310.75 V'tur. Anahtar c konumunda iken kapasitör geriliminin son değeri sıfır, devrenin zaman sabiti ise 5 ms'dir. Kapasitör gerilimini yazmak için yine Eş. 7.59'dan faydalanabiliriz.

$$v = 0 + (310.75 - 0)e^{-200(t-0.015)}$$

$$= 310.75e^{-200(t-0.015)}\ \text{V}, \quad 15\ \text{ms} \le t.$$

v ifadesini yazarken $t_0 = 15$ ms kabul ettik. Bu ifade yalnızca $t \ge 15$ ms için geçerlidir.

b) t'ye karşı v grafiği Şekil 7.36'da gösterilmiştir.

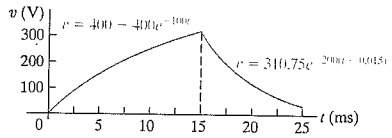
c) Şekil 7.36'da görülen grafik, kapasitör geriliminin iki ayrı zamanda 200 V'a eşit olduğunu göstermektedir. Bunlardan ilki 0 ile 15 ms aralığında, diğeri ise 15 ms'den sonradır. İlk zamanı aşağıdaki denklemi çözerek bulabiliriz.

$$200 = 400 - 400e^{-100t_1}.$$

Buradan $t_1 = 6.93$ ms olarak hesaplanır. İkinci zamana ise aşağıdaki denklemi çözerek ulaşabiliriz.

$$200 = 310.75e^{-200(t_2-0.015)}.$$

Bu durumda $t_2 = 17.20$ ms olarak bulunur.



Şekil 7.36 ▲ Örnek 7.12 için kapasitör gerilimi.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 3– Sıralı anahtarlamalı devrelerin nasıl analiz edileceğini bilmek

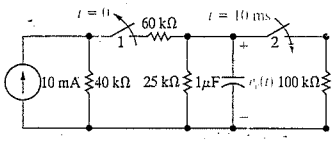
7.7 Şekilde görülen devrede 1. anahtar kapalı, 2. anahtar ise açık konumda uzun bir süre kalmıştır. $t = 0$ anında 1. anahtar açılmış, 10 ms sonra 2. anahtar kapatılmıştır.

a) $0 \le t \le 0.01$ s için $v_c(t)$'yi,

b) $t \ge 0.01$ s için $v_c(t)$'yi,

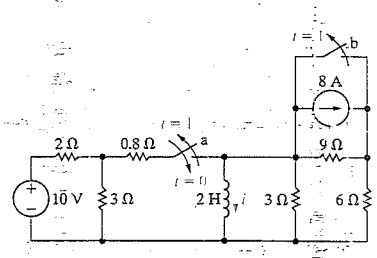
c) 25 kΩ'luk direnç üzerinde harcanan toplam enerjiyi,

d) 100 kΩ'luk direnç üzerinde harcanan toplam enerjiyi bulunuz.



Cevap: (a) $80e^{-40t}$ V;
(b) $53.63e^{-50}(t - 0.01)$ V;
(c) 2.91 mJ;
(d) 0.29 mJ.

7.8 Şekildeki devrede görülen anahtar a açık, anahtar b ise kapalı konumda uzun bir süre kalmıştır. $t = 0$ anında anahtar a kapatılmış, 1 s kapalı kaldıktan sonra yeniden açılmıştır. Aynı anda anahtar b de açılmış ve her iki anahtar da açık konumda bırakılmıştır. (a) $0 \le t \le 1$ s ve (b) $t \ge 1$ s için indüktör akımı ifadesini bulunuz.



Cevap: (a) $(3 - 3e^{-05t})$ A, $0 \le t \le 1$ s;
(b) $(-4.8 + 5.98e^{-1.25}(t-1)$ A, $t \ge 1$ s.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 7.72 ve 7.76'yı da çözmeyi deneyiniz.

7.6 Sınırsız Tepki

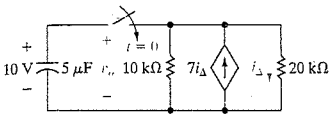
Bir devrenin tepkisi giderek azalmak yerine zamana bağlı olarak üstel bir biçimde büyüyebilir. **Sınırsız tepki** adı verilen bu tür bir tepki ancak devrede bağımlı kaynaklar mevcutsa mümkün olabilir. Bu durumda bir indüktör veya kapasitörün terminallerinden görülen Thévenin eşdeğer direnci negatif olabilir. Bu negatif direnç negatif bir zaman sabitine neden olur, böylece ortaya çıkan akım ve gerilimler sınırsız bir biçimde artar. Gerçek bir devrede, devre bileşenlerinden biri bozulunca veya bir doyum haline ulaşınca tepki de bir sınır değere ulaşır, böylelikle akım ve gerilimler daha fazla büyümez.

Sınırsız tepkiler ele alındığında son değer kavramı yanıltıcı olabilir. Bu nedenle, Eş. 7.59'da verilen basamak tepkisi çözümünü kullanarak yerine, negatif direnç içeren devreyi tanımlayan diferansiyel denklemi çıkarıp ardından bu denklemi değişkenleri ayırma tekniği ile çözeceğiz. Örnek 7.13 üstel olarak artan bir kapasitör gerilimini sergilemektedir.

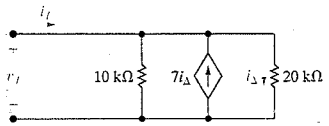
Örnek 7.13 *RC* Devresinde Sınırsız Tepkinin Bulunması

a) Şekil 7.37'de görülen devredeki anahtarın kapandığı anda kapasitör gerilimi 10 V'tur. $t \ge 0$ için v_o ifadesini bulunuz.

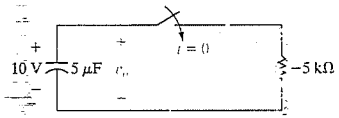
b) Terminal voltajı 150 V'a ulaştığında kapasitörün kısa devre olduğunu varsayınız. Kapasitör kısa devre olmadan önce kaç milisaniye geçer?



Şekil 7.37 ▲ Örnek 7.13'e ait devre.



Şekil 7.38 ▲ R_{Th}'yi bulmak için kullanılan test yöntemi.



Şekil 7.39 ▲ Şekil 7.37'de görülen devrenin basitleştirilmiş biçimi.

Çözüm

a) Kapasitör terminallerinden görülen Thévenin eşdeğer direncini bulmak için 4. Bölüm'de anlatılan test kaynağı yöntemini kullanacağız. Ortaya çıkan devre Şekil 7.38'de görülmektedir. Burada v_T test gerilimi, i_T ise test akımıdır. Aşağıdaki denklemde v_T volt cinsinden yazılmıştır.

$$i_T = \frac{v_T}{10} - 7\left(\frac{v_T}{20}\right) + \frac{v_T}{20} \text{ mA}.$$

Bu denklemi v_T/i_T oranı için çözdüğümüzde Thévenin direncini

$$R_{Th} = \frac{v_T}{i_T} = -5 \text{ k}\Omega$$

olarak buluruz. Bu sonucu kullanarak Şekil 7.37'de görülen devreyi şekil 7.39'daki gibi sadeleştirebiliriz.

$t \ge 0$ için Şekil 7.39'da görülen devreyi tanımlayan diferansiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$(5 \times 10^{-6})\frac{dv_o}{dt} - \frac{v_o}{5} \times 10^{-3} = 0.$$

Denklemi birinci türevin katsayısına böldüğümüzde

$$\frac{dv_o}{dt} - 40v_o = 0$$

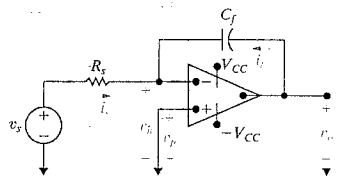
denklemini elde ederiz. Şimdi $v_o(t)$'yi bulmak için değişkenleri ayırma tekniğini kullanalım:

$$v_o(t) = 10e^{40t} \text{ V}, \quad t \ge 0.$$

b) $e^{40t} = 15$ olduğunda $v_o = 150$ V olur. Buradan, $40t = \ln 15$ ve $t = 67.70$ ms bulunur.

NOT: Bu kısımda öğrendiklerinizi Bölüm Problemleri 7.86 ve 7.87'yi çözerek sınayınız.

Birbirine bağlı devre elemanlarının sürekli artan akım ve gerilimlere yol açabilmesi mühendisler açısından oldukça önemlidir. Bu tür bağlantılar kasıtsız olarak yapıldığında, ortaya çıkan devrede, beklenmeyen ve muhtemelen tehlikeli bileşen hataları meydana gelebilir.



Şekil 7.40 ▲ İntegral alıcı yükselteç.

7.7 İntegral Alıcı Yükselteç

5. Bölüm'ün giriş kısmından hatırlayacağınız gibi işlemsel yükselteç üzerinde durmamızın önemli nedenlerinden biri integral alıcı yükselteç olarak kullanılabilmesidir. Şekil 7.40'ta görülen integral alıcı yükselteci analiz etmeye artık hazırız. Bu devrenin amacı giriş geriliminin integrali ile orantılı bir çıkış gerilimi oluşturmaktır. Analize yardımcı olması için Şekil 7.40'a i_f ve i_s akımları ile düğüm gerilimleri v_n ve v_p'yi ekledik.

İntegral alıcı yükseltecin ideal olduğunu varsayıyoruz. Bu yüzden aşağıdaki kısıtlardan faydalanabiliriz.

$$i_f + i_s = 0, \tag{7.61}$$

$$v_n = v_p. \tag{7.62}$$

$v_p = 0$ olduğundan

$$i_s = \frac{v_s}{R_s}. \tag{7.63}$$

$$i_f = C_f \frac{dv_o}{dt} \tag{7.64}$$

denklemlerini yazabiliriz. Eşitlikler 7.61, 7.63 ve 7.64'ü kullandığımızda

$$\frac{dv_o}{dt} = -\frac{1}{R_sC_f} v_s \tag{7.65}$$

denklemine ulaşırız. Denklemin her iki tarafını diferansiyel zaman dt ile çarpıp, t_0'dan t'ye kadar integralini aldığımızda

$$v_o(t) = -\frac{1}{R_sC_f}\int_{t_0}^{t} v_s\,dy + v_o(t_0) \tag{7.66}$$

elde ederiz. Bu denklemde t_0 integralin alınmaya başlandığı anı ifade eder. Yani $v_o(t_0)$ bu andaki çıkış gerilimidir. Ayrıca $v_n = v_p = 0$ olduğundan $v_o(t_0)$ geribesleme kapasitörü C_f üzerindeki gerilimin başlangıç değerine eşittir.

Eş. 7.66, integral alıcı yükseltecin çıkış geriliminin kapasitör geriliminin başlangıç değeri ile giriş geriliminin evrilmiş (eksi işareti) ve ($1/R_sC_f$ ile ölçeklendirilmiş integralinin toplamına eşit olduğunu göstermektedir. İntegral işleminin başladığı sırada kapasitörde enerji depolanmamış ise Eş. 7.66 aşağıdaki gibi basitleşir.

$$v_o(t) = -\frac{1}{R_sC_f}\int_{t_0}^{t} v_s\,dy. \tag{7.67}$$

v_s basamak tipi bir dc gerilim ise çıkış gerilimi zamanla doğrusal olarak değişir. Örneğin giriş geriliminin Şekil 7.41'deki gibi bir kare dalga olduğunu kabul edelim. Ayrıca v_s'nin 0'dan V_m'ye yükseldiği anda $v_o(t)$'nin başlangıç değerinin sıfır olduğunu varsayalım. Eş. 7.66'yı doğrudan uyguladığımızda

$$v_o = -\frac{1}{R_sC_f} V_m t + 0, \quad 0 \le t \le t_1 \tag{7.68}$$

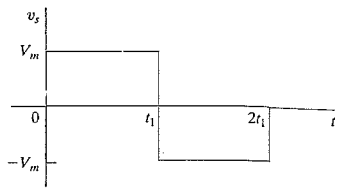
sonucunu elde ederiz. t, t_1 ile t_2 arasındayken

$$v_o = -\frac{1}{R_sC_f}\int_{t_1}^{t} (-V_m)\,dy - \frac{1}{R_sC_f} V_m t_1$$

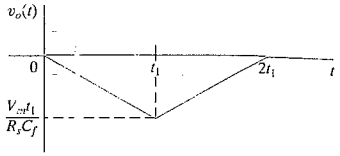
$$= \frac{V_m}{R_sC_f} t - \frac{2V_m}{R_sC_f} t_1, \quad t_1 \le t \le 2t_1 \tag{7.69}$$

denklemi geçerlidir. Şekil 7.42 t'ye karşı $v_o(t)$ grafiğini göstermektedir. Çıkış geriliminin, girişi geriliminin integralinin evrilmiş ve ölçeklenmiş hali olduğu açıkça görülmektedir.

Çıkış gerilimi, yalnızca op amp doğrusal bölgede çalışırken yani doyuma ulaşmamışken giriş geriliminin integraline eşittir. Örnek 7.14 ve 7.15 integral alıcı yükseltecin analizini daha ayrıntılı bir biçimde göstermektedir.



Şekil 7.41 ▲ Giriş gerilim sinyali.



Şekil 7.42 ▲ İntegral alıcı yükseltecin çıkış gerilimi.

Örnek 7.14 İntegral Alıcı Yükseltecin Analizi

Şekil 7.41'deki gerilimin nümerik değerinin $V_m = 50$ mV = t_1 ve 1s olduğunu kabul ediniz. Bu gerilim sinyali Şekil 7.40'ta görülen integral alıcı yükseltece uygulanmıştır. Yükselteç devresinin parametreleri $R_s = 100$ kΩ, $C_f = 0.1$ μF ve $V_{CC} = 6$ V olarak verilmiştir. Kapasitör geriliminin başlangıç değeri sıfırdır.

a) $v_o(t)$'yi hesaplayınız.

b) t'ye karşı $v_o(t)$'yi çiziniz.

Çözüm

a) $0 \le t \le 1$ s aralığında

$$v_o = \frac{-1}{(100 \times 10^3)(0.1 \times 10^{-6})} 50 \times 10^{-3} t + 0$$

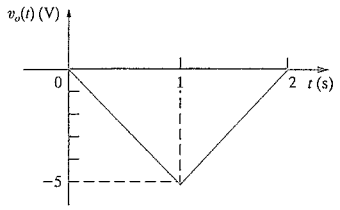
$$= -5t \text{ V}, \quad 0 \le t \le 1 \text{ s}$$

bulunur. $1 \le t \le 2$ s aralığında

$$v_o = (5t - 10) \text{ V}$$

elde edilir.

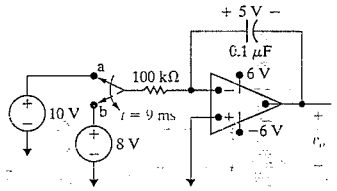
b) t'ye karşı $v_o(t)$ grafiği Şekil 7.43'te görülmektedir.



Şekil 7.43 ▲ Örnek 7.14 için çıkış gerilimi.

Örnek 7.15 **Sıralı Anahtarlamalı İntegral Alıcı Yükseltecin Analizi**

Şekil 7.44'te görülen devrede, anahtarın a terminaline temas ettiği anda 0.1 μF'lık kapasitör üzerindeki gerilim 5 V'tur. Anahtar a terminalinde 9 ms kaldıktan sonra aniden b terminaline temas ettikten kaç milisaniye sonra işlemsel yükselteç doyuma ulaşır?



Şekil 7.44 ▲ Örnek 7.15'e ait devre.

Çözüm

Anahtar a terminalinde iken çıkış gerilimi ifadesi

$$v_o = -5 - \frac{1}{10^{-2}}\int_0^t (-10)\,dy$$
$$= (-5 + 1000t)\ \text{V}$$

bulunur.

Anahtar a terminaline temas ettikten 9 ms sonra çıkış gerilimi $-5 + 9$, yani 4 V'tur.

Anahtar b terminaline geçtikten sonra çıkış gerilimi ifadesi

$$v_o = 4 - \frac{1}{10^{-2}}\int_{9\times10^{-3}}^{t} 8\,dy$$
$$= 4 - 800(t - 9\times10^{-3})$$
$$= (11.2 - 800t)\ \text{V}$$

elde edilir. Bu zaman aralığında gerilim azalmaktadır ve işlemsel yükselteç sonuç olarak −6 V'ta doyuma ulaşacaktır. Bu nedenle, t_s'yi bulmak için v_o'yu −6 V'a eşitleyelim.

$$11.2 - 800t_s = -6.$$

Buradan

$$t_s = 21.5\ \text{ms}$$

olarak hesaplanır. İşlemsel yükselteç b terminali ile temas ettikten 21.5 ms sonra doyuma ulaşır.

Örneklerden görüldüğü gibi, op amp'ın doyuma ulaşmasını önleyecek bölgelerde, integral alıcı yükselteç integral işlemini oldukça iyi bir biçimde gerçekleştirmektedir. Geribesleme kapasitörü üzerindeki yük birikmesinden dolayı op amp doyuma ulaşmaktadır. Op amp'ın doyuma ulaşmasını önlemek için kapasitöre paralel bir direnç koyabiliriz. Bu tür bir devreyi 8. Bölüm'de inceleyeceğiz.

Giriş direnci R_s ile geribesleme kapasitörü C_f'nin yeri değiştirilerek integral alıcı yükselteç türev alıcı yükseltece dönüştürülebilir. Bu durumda çıkış gerilimi

$$v_o = -R_s C_f \frac{dv_s}{dt} \qquad (7.70)$$

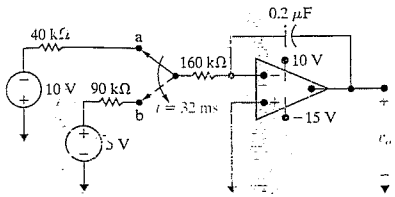
denklemi ile ifade edilir. Eş. 7.70'in çıkarımını alıştırma amacıyla size bırakıyoruz. İstenmeyen gürültüleri yükselttiğinden türev alıcı alıcı yükselteç pratikte çok sık kullanılmamaktadır.

Son olarak, integral alıcı ve türev alıcı yükselteçleri kapasitör yerine indüktör kullanarak da tasarlayabiliriz. Ancak tümleşik devre cihazlarda kapasitör üretmek daha kolay olduğundan indüktörler integral alıcı yükselteç tasarımında oldukça seyrek kullanılmaktadır.

✓ DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 4-Dirençler ve tek bir kapasitör içeren op amp devrelerini analiz edebilmek

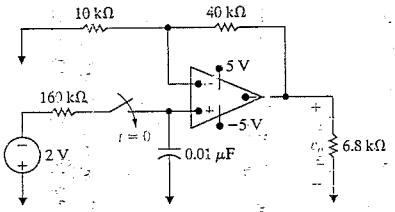
7.9 Aşağıdaki devrede anahtar a terminaline temas ettiği anda kapasitör enerjisizdir. Anahtar a konumunda 32 ms kaldıktan sonra aniden b konumuna geçmiştir. Op amp a terminaline temas ettikten kaç ms sonra doyuma ulaşır?



Cevap: 262 ms.

7.10 a) Aşağıdaki devrede, anahtar kapatıldığı anda kapasitör enerjisizdir. Op amp ne kadar süre sonra doyuma ulaşır?

b) Kapasitör geriliminin başlangıç değeri 1 V iken (a) şıkkını tekrarlayınız. (Gerilim üst terminalde pozitiftir.)



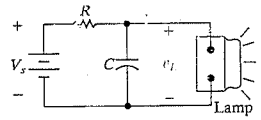
Cevap: (a) 1.11 ms
(b) 1.76 ms.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 7.92 ve 7.93'ü de çözmeyi deneyiniz.

Pratik Bakış Açısı

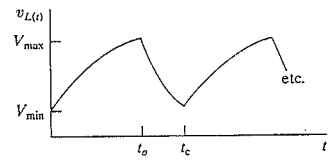
Flaşör Devresi

Şekil 7.45'te görülen bu bölümün başında tanıtılan devreyi analiz etmeye artık hazırız. Devredeki lamba gerilim V_{max} değerine ulaştığı zaman iletime geçer. Bu süre içerisinde lamba, değeri R_L olan bir direnç olarak modellenebilir. Gerilimin değeri V_{min}'e düşene dek lamba iletimde kalmaya devam eder. İletmediği zaman ise açık devre gibi davranır.



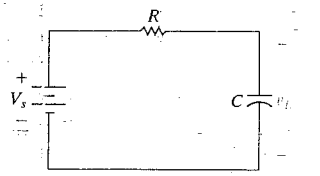
Şekil 7.45 ▲ Flaşör devresi.

Devrenin davranışını tanımlayan analitik ifadeleri çıkarmadan önce devrenin çalışma biçimini anlamaya çalışalım. İlk olarak, lamba açık devre gibi davranırken, dc gerilim kaynağı kapasitörün R üzerinden V_s volta kadar dolmasını sağlar. Ancak lambanın gerilimi V_{max} değerine ulaştığında lamba iletime geçer ve kapasitör gerilimi kapasitör terminallerinden görülen Thévenin gerilimine kadar düşmeye başlar. Kapasitör gerilimi sınır değer olan V_m'ye ulaştığında lamba yine açık devre gibi davranır ve kapasitör yeniden dolmaya başlar. Kapasitörün dolma ve boşalma döngüsü Şekil 7.46'da gösterilmiştir.



Şekil 7.46 ▲ Şekil 7.45'te görülen devredeki lamba geriliminin zamana karşı grafiği.

Şekil 7.46'da kapasitörün dolmaya başladığı an $t = 0$ olarak alınmıştır. Lambanın iletmeye başladığı an t_o, bir tam döngünün bittiği an ise t_c ile gösterilmiştir.



Şekil 7.47 Lamba iletimde değilken $t = 0$ anında flaşör devresi.

Ayrıca, Şekil 7.46'daki grafik oluşturulurken, devrenin işlevinin kendini tekrar eden aşamasına ulaşmış olduğu varsayılmıştır. Flaşör devresi tasarımımız için $v_L(t)$'yi 0 ile t_0 ve t_0 ile t_c aralıklarında, V_{max}, V_{min}, V_s, R, C ve R_L'ye bağlı bir fonksiyon olarak ifade etmeliyiz.

Analize başlarken devrenin uzun bir süre çalıştığını kabul ediyoruz. Lambanın iletmemeye başladığı an $t = 0$ olsun. Yani $t = 0$ anında lamba açık devre olarak modellenebilir. Bu durumda lamba üzerindeki gerilim Şekil 7.47'de görüldüğü gibi V_{min}'dir.

Şekil 7.47'deki devreden aşağıdaki denklemleri bulabiliriz.

$$v_L(\infty) = V_s$$
$$v_L(0) = V_{min}$$
$$\tau = RC.$$

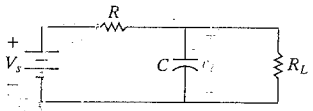
Yani lamba açık devre iken,

$$v_L(t) = V_s + (V_{min} - V_s)e^{-t/RC}$$

denklemi geçerlidir. Acaba lambanın iletime geçmesi için ne kadar süre gereklidir? Bu süreyi bulmak için $v_L(t)$'yi V_{max}'a eşitleyip t için çözeriz. Bu ana t_0 dersek, t_0

$$t_o = RC \ln \frac{V_{min} - V_s}{V_{max} - V_s}$$

olarak bulunur. Şekil 7.48'de de görüldüğü gibi, lamba iletmeye başladığında değeri R_L olan bir direnç ile modellenebilir. Bu devrede kapasitör üzerindeki gerilimi bulmak için kapasitör terminallerinden görülen Thévenin eşdeğerini bulmalıyız. Lamba iletimde iken $v_L(t)$ ifadesinin aşağıdaki gibi olduğunu göstermeyi size bırakıyoruz. (Problem 7.106).



Şekil 7.48 Lamba iletimdeyken $t = t_0$ anında flaşör devresi.

$$v_L(t) = V_{Th} + (V_{max} - V_{Th})e^{-(t-t_o)/\tau}.$$

Burada V_{Th} ve τ

$$V_{Th} = \frac{R_L}{R + R_L}V_s$$

ve

$$\tau = \frac{RR_LC}{R + R_L}$$

ile verilir. Lambanın ne kadar süre iletimde kaldığını bulmak için yukarıdaki $v_L(t)$ ifadesini V_{min}'e eşitleyip $(t_c - t_0)$ için çözmeliyiz. Elde edilen sonuç aşağıdadır.

$$(t_c - t_o) = \frac{RR_LC}{R + R_L} \ln \frac{V_{max} - V_{Th}}{V_{min} - V_{Th}}.$$

NOT: Pratik Bakış Açısı kısmında öğrendiklerinizi Bölüm Problemleri 7.103 – 7.105'i çözerek sınayınız.

Özet

- Birinci mertebeden bir devre, tek bir eşdeğer indüktör veya kapasitöre bağlı Thévenin (veya Norton) eşdeğer devresine indirgenebilir. (Bkz. Sayfa 230).
- **Doğal tepki**, önceden depolanmış enerjinin bağımsız kaynak içermeyen bir devreye salınması sonucu ortaya çıkan akım ve gerilimlerdir.
- Bir *RL* devresinin **zaman sabiti**, eşdeğer indüktansın, indüktör terminallerinden görülen Thévenin direncine bölümüne eşittir. (Bkz. Sayfa 232.)
- Bir *RC* devresinin **zaman sabiti**, eşdeğer kapasitans ile kapasitör terminallerinden görülen Thévenin direncinin çarpımına eşittir. (Bkz. Sayfa 237.)
- **Basamak tepkisi**, devreye bağlı dc kaynaklardaki ani değişiklikler sonucu ortaya çıkan akım ve gerilimlerdir. Ani değişiklikler esnasında devrede önceden depolanmış enerji olabilir veya olmayabilir. (Bkz. Sayfa 240.)
- *RL* ve *RC* devrelerinin doğal ve basamak tepkilerini bulmak için söz konusu akım ve gerilimlerin başlangıç ve son değerleri ile devrenin zaman sabiti hesaplanmalıdır. Eşitlikler 7.59 ve 7.60 bu yaklaşımı özetlemektedir. (Bkz. Sayfa 249.)
- Birinci mertebeden **sıralı anahtarlamalı** devrelerin analizi, her anahtar konumuna karşılık gelen zaman aralığını ayrı ayrı inceleyerek gerçekleştirilir. Bu zaman aralıklarına ait başlangıç değerleri bir önceki aralığa ait çözümlerden elde edilir. (Bkz. Sayfa 254.)
- Thévenin direnci negatif olduğunda **sınırsız tepki** ortaya çıkar. Bu durum bağımlı kaynak içeren birinci mertebeden devrelerde görülür. (Bkz. Sayfa 258.)
- İntegral alıcı yükselteç ideal bir op amp, geribesleme kolu üzerinde bir kapasitör ve sinyal kaynağına seri bağlı bir dirençten oluşur. Giriş sinyalinin integrali, op amp'ı doyuma ulaştırmayacak sınırlar içerisinde, çıkışa yansıtılır. (Bkz. Sayfa 260.)

Problemler

Kısım 7.1

7.1 Şekil P7.1'de görülen devrede anahtar a konumundan ayrılır ayrılmaz b noktası ile temas etmiştir. Daha önceden de bahsedildiği gibi bu anahtar, kesmeden temaslı anahtar olarak adlandırılır ve indüktif devredeki akımı kesmemek amacıyla tasarlanmıştır. "Temas" ve "kesme" arasındaki zaman ihmal edilebilecek kadar kısadır. Anahtar a konumunda uzun bir süre bekletildikten sonra $t = 0$ anında b konumuna alınmıştır.

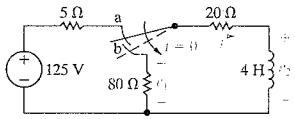
a) İndüktör akımının başlangıç değerini bulunuz.

b) $t > 0$ için devrenin zaman sabitini bulunuz.

c) $t \geq 0$ için i, v_1 ve v_2'yi bulunuz.

d) Anahtar a konumundan b konumuna alındıktan 12 ms sonra indüktör üzerinde önceden depolanmış enerjinin yüzde kaçı 20 Ω'luk direnç üzerinde harcanmıştır?

Şekil P7.1



7.2 PSPICE Şekil P7.2'de görülen devredeki anahtar uzun bir süre kapalı kaldıktan sonra $t = 0$ anında açılmıştır.

a) $i_1(0^-)$ ve $i_2(0^-)$'yi bulunuz.

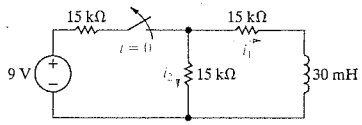
b) $i_1(0^+)$ ve $i_2(0^+)$'yi bulunuz.

c) $t \geq 0$ için $i_1(t)$'yi bulunuz.

d) $t \geq 0^+$ için $i_2(t)$'yi bulunuz.

e) Neden $i_2(0^-) \neq i_2(0^+)$ olduğunu açıklayınız.

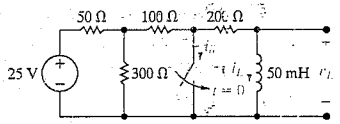
Şekil P7.2



7.3 Şekil P7.3'te görülen anahtar uzun bir süre açık kaldıktan sonra $t = 0$ anında kapatılmıştır.

a) $i_o(0^-)$'yi bulunuz.
b) $i_L(0^-)$'yi bulunuz.
c) $i_o(0^+)$'yı bulunuz.
d) $i_L(0^+)$'yı bulunuz.
e) $i_o(\infty)$'u bulunuz.
f) $i_L(\infty)$'u bulunuz.
g) $i_L(t)$ için $t \geq 0$ ifadesini yazınız.
h) $v_L(0^-)$'yı bulunuz.
i) $v_L(0^+)$'yı bulunuz.
j) $v_L(\infty)$'u bulunuz.
k) $v_L(t)$ için $t \geq 0^+$ ifadesini yazınız.
l) $i_o(0^+)$ için $t \geq 0^+$ ifadesini yazınız.

Şekil P7.3



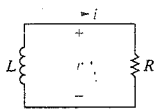
7.4 Şekil P7.4'te görülen devredeki gerilim ve akım ifadeleri aşağıdaki gibidir.

$$v = 100e^{-80t}\ \text{V}, \quad t \geq 0^+;$$

$$i = 4e^{-80t}\ \text{A}, \quad t \geq 0.$$

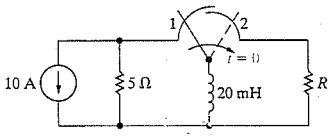
a) R'yi,
b) τ'yu (milisaniye cinsinden),
c) L'yi,
d) indüktör üzerinde depolanan enerjinin başlangıç değerini,
e) depolanan enerjinin %80'inin harcanması için gereken süreyi bulunuz.

Şekil P7.4



7.5 Şekil P7.5'te görülen devredeki anahtar 1 konumunda uzun bir süre kalmış, $t = 0$ anında 2 konumuna getirilmiştir. 20 mH'lik indüktör üzerinde depolanmış enerjinin %50'sinin 10 ms'de R üzerinde harcanabilmesi için gerekli R değerini bulunuz.

Şekil P7.5



7.6 Şekil P7.5'teki devrede I_g dc akım kaynağını, σ indüktör üzerinde depolanmış enerjinin t_0 saniyede harcanan kısmını, L'ise indüktansı göstersin.

a) $R = \dfrac{L \ln[1/(1-\sigma)]}{2t_o}$

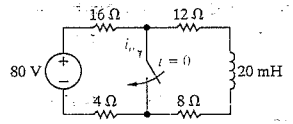
olduğunu gösteriniz.

b) (a) şıkkında çıkarılan ifadeyi, Problem 7.5'te sorulan R değerini bularak test ediniz.

7.7 PSPICE Şekil P7.7'de görülen devredeki anahtar uzun bir süre açık kaldıktan sonra $t = 0$ anında kapatılmıştır.

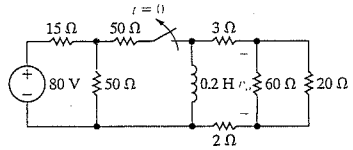
a) $i_0(0^+)$ ve $i_0(\infty)$'u bulunuz.
b) $t \geq 0^+$ için $i_0(t)$'yi bulunuz.
c) Anahtar kapatıldıktan kaç milisaniye sonra anahtar üzerindeki akım 3.8 A'e eşit olur?

Şekil P7.7



7.8 PSPICE Şekil P7.8'de görülen devredeki anahtar uzun bir süre kapalı kalmış, $t = 0$ anında açılmıştır. $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P7.8

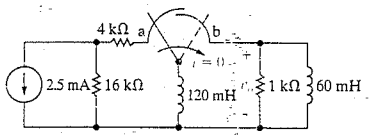


7.9 Şekil P7.8'de görülen devredeki anahtar bir zaman sabiti boyunca açık kalmıştır. Bu anda, 0.2 H'lik indüktör üzerinde depolanan enerjinin yüzde kaçı 20 Ω'luk direnç üzerinde harcanmıştır?

7.10 PSPICE Şekil 7.10'da görülen devredeki anahtar a konumunda uzun bir süre kaldıktan sonra $t = 0$'da aniden b konumuna alınmıştır.

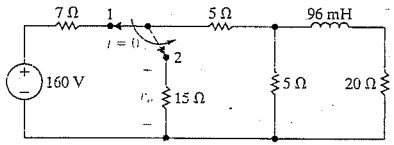
a) $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.
b) 1 kΩ'luk dirence aktarılan toplam enerji ne kadardır?
c) (b)'de bulunan enerjinin %55'ini aktarmak için kaç zaman sabiti süreye gerek vardır?

Şekil P7.10



7.11 PSPICE Şekil P7.11'de görülen devredeki anahtar 1 konumunda uzun bir süre kaldıktan sonra $t = 0$'da aniden 2 konumuna alınmıştır. $t \geq 0^+$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P7.11

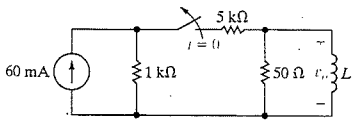


7.12 Şekil P4.11'de görülen devrede, indüktör üzerinde depolanmış enerjinin yüzde kaçı 20 Ω'luk direnç üzerinde harcanır?

7.13 Şekil P7.13'te görülen devredeki anahtar uzun bir süre kapalı kalmış, $t = 0$ anında açılmıştır.

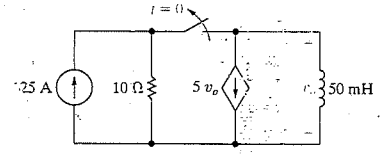
a) $t = 5$ ms anında $v_o(t)$'nin $0.25\ v_o(0^+)$'ya eşit olması için L ne olmalıdır?
b) $t = 5$ ms anında devrede depolanan enerjinin yüzde kaçı 50 Ω'luk direnç üzerinde harcanmıştır?

Şekil P7.13



7.14 PSPICE Şekil P7.14'te görülen devredeki anahtar $t = 0$ anında açılmadan önce uzun bir süre kapalı kalmıştır. $t \geq 0^+$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

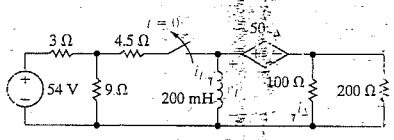
Şekil P7.14



7.15 Şekil P7.15'te görülen devredeki anahtar $t = 0$ anında açılmadan önce uzun bir süre kapalı kalmıştır.

a) $t \geq 0$ için $i_L(t)$'yi,
b) $t \geq 0^+$ için $v_L(t)$'yi,
c) $t \geq 0^+$ için $i_\Delta(t)$'yi bulunuz.

Şekil P7.15

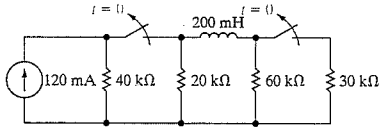


7.16 Şekil P7.15'teki devrede, indüktör üzerinde depolanan enerjinin yüzde kaçı akım kontrollü gerilim kaynağı üzerinde harcanmıştır?

7.17 Şekil P7.17'de görülen devredeki anahtarlar eş zamanlı hareket etmektedir. Anahtarlar uzun süre kapalı kaldıktan sonra $t = 0$ anında açılmıştır.

a) Anahtarlar açıldıktan kaç milisaniye sonra 200 mH'lik indüktör üzerinde depolanmış enerjinin %25'i 60 kΩ'luk direnç üzerinde harcanır?
b) (a) şıkkında hesaplanan anda indüktör üzerinde depolanan enerjinin yüzde kaçı harcanmıştır?

Şekil P7.17



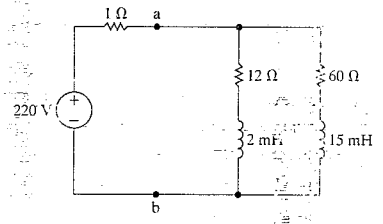
7.18 PSPICE Şekil P7.18'de görülen devredeki 220 V, 1 Ω'luk kaynak a ve b terminallerinde istenmeyerek kısa devre olmadan önce kaynak devrede uzun bir süre kalmıştır.

a) a ve b terminaleleri arasındaki kısa devre akımı i_{ab}'nin başlangıç değeri nedir?

b) i_{ab}'nin son değeri nedir?

c) Kısa devre meydana geldikten kaç mikrosaniye sonra kısa devre akımı 210 A olur?

Şekil P7.18

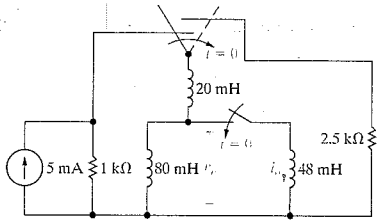


7.19 PSPICE Şekil P7.19'da görülen devredeki anahtarlar eş zamanlı çalışmaktadır. $t = 0$'dan önce anahtarlar bulundukları konumda uzun bir süre kalmıştır. $t = 0$ anında her iki anahtar da yeni konumlarına alınmıştır.

a) $t \geq 0^+$ için $v_o(t)$'yi,

b) $t \geq 0$ için $i_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P7.19



7.20 Şekil P7.19'da görülen devrede

a) 2.5 kΩ'luk direnç üzerinde harcanan toplam enerjiyi,

b) ideal indüktörlerde depolanan enerjiyi bulunuz.

Kısım 7.2

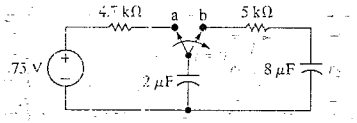
7.21 Şekil P7.21'de görülen devredeki anahtar a konumunda uzun bir süre kalmıştır ve $v_2 = 0$ V'tur. $t = 0$ anında anahtar b konumuna alınmıştır.

a) $t \geq 0^-$ için i, v_1 ve v_2'yi,

b) $t = 0$ anında kapasitörde depolanan enerjiyi,

c) anahtar b konumunda sürekli olarak bırakıldığında devrede hapsolan enerjiyi ve 5 kΩ'luk direnç üzerinde harcanan toplam enerjiyi bulunuz.

Şekil P7.21



7.22 Şekil P7.22'de görülen devrede akım ve gerilim ifadeleri aşağıda verilmiştir.

$$v = 100e^{-1000t}\ \text{V}, \quad t \geq 0;$$

$$i = 5e^{-1000t}\ \text{mA}, \quad t \geq 0^+.$$

a) R'yi,

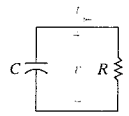
b) C'yi,

c) τ'yu (milisaniye cinsinden)

d) kapasitörde depolanan enerjinin başlangıç değerini,

e) kapasitörde depolanan enerjinin % 80'inin harcanması için kaç mikrosaniye geçmesi gerektiğini bulunuz.

Şekil P7.22



7.23 PSPICE Şekil P7.23'te görülen devrede anahtar uzun bir süre açık kaldıktan sonra $t = 0$ anında kapatılmıştır.

a) $i_1(0^-)$ ve $i_2(0^-)$'yi bulunuz.

b) $i_1(0^+)$ ve $i_2(0^+)$'yı bulunuz.

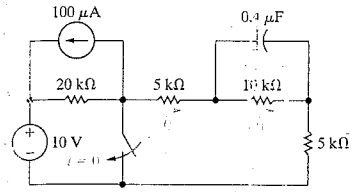
c) Neden $i_1(0^-) = i_1(0^+)$ olduğunu açıklayınız.

d) Neden $i_2(0^-) \neq i_2(0^+)$ olduğunu açıklayınız.

e) $t \geq 0$ için $i_1(t)$'yi bulunuz.

f) $t \geq 0^+$ için $i_2(t)$'yi bulunuz.

Şekil P7.23

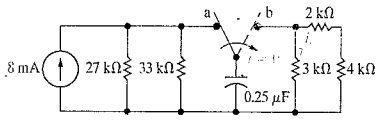


7.24 Şekil P7.24'te görülen devrede anahtar a konumunda uzun bir süre kalmıştır. $t = 0$ anında anahtar b konumuna getirilmiştir.

a) $t \geq 0^+$ için $i_o(t)$'yi bulunuz.

b) Anahtar b konumuna getirildikten 250 μs sonra, kapasitörde depolanan enerjinin yüzde kaçı 4 kΩ'luk direnç üzerinde harcanır?

Şekil P7.24



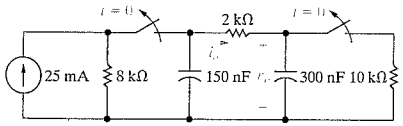
7.25 PSPICE Şekil P7.25'te görülen devredeki her iki anahtar da uzun süre kapalı kalmıştır. Anahtarlar $t = 0$ anında eş zamanlı olarak açılmıştır.

a) $t \geq 0^+$ için $i_o(t)$'yi bulunuz.

b) $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

c) Devrede hapsolan enerjiyi mikojoule cinsinden hesaplayınız.

Şekil P7.25

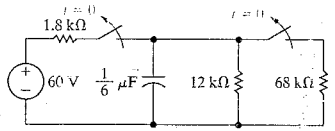


7.26 Şekil P7.26'da görülen devredeki anahtarlar eş zamanlı çalışmaktadır. Anahtarlar $t = 0$ anında açılmadan önce uzun süre kapalı kalmıştır.

a) Anahtarlar açıldıktan 2 ms sonra 12 kΩ'luk direnç üzerinde kaç mikrojoule enerji harcanmıştır?

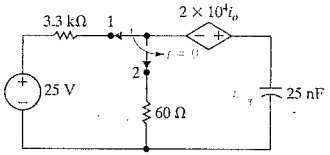
b) Başlangıçta depolanan enerjinin %55'inin harcanması için ne kadar süre geçmelidir?

Şekil P7.26



7.27 PSPICE Şekil P7.25'te görülen devrede anahtar 1 konumunda uzun bir süre kaldıktan sonra $t = 0$ anında 2 konumuna getirilmiştir. $t \geq 0^-$ için $i_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P7.25

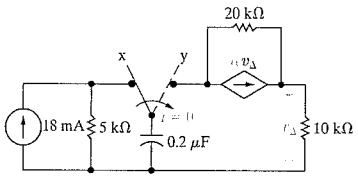


7.28 Şekil P7.28'de görülen devredeki anahtar uzun süre x konumunda kaldıktan sonra $t = 0$'da aniden y konumuna getirilmiştir.

a) $t > 0$ bölgesinde zaman sabitinin 1 ms olması için α kaç olmalıdır?

b) (a)'da bulunan α değeri için v_Δ'yı bulunuz.

Şekil P7.28



7.29 a) Problem 7.28'de, kapasitör gerilimi 0 V'a düşene dek bağımlı akım kaynağı kaç mikrojoule enerji üretir?

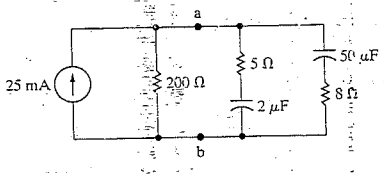
b) $t \geq 0$ için kapasitif devrede depolanan ve üretilen enerjinin toplam harcanan enerjiye eşit olduğunu gösteriniz.

7.30 PSPICE Şekil P7.30'da görülen devre uzun bir süre çalıştıktan sonra bir tornavida istenmeden a ve b terminallerine temas etmiştir. Tornavidanın direnci ihmal edilebilecek kadar küçüktür.

a) $t = 0^+$ ve $t = \infty$ anlarında tornavida üzerindeki akımı bulunuz.

b) $t \geq 0^+$ için tornovida üzerindeki akım ifadesini çıkarınız.

Şekil P7.30



7.31 Şekil P7.31'de görülen devrede, anahtar kapandığı anda kapasitörler yüklüdür.

a) $t \geq 0^+$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

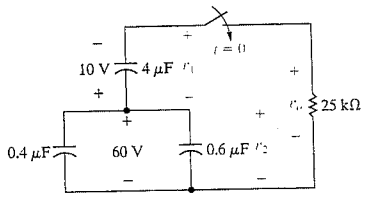
b) Kapasitörlerde depolanan enerjinin yüzde kaçı 25 kΩ'luk direnç üzerinde harcanır?

c) $t \geq 0$ için $v_1(t)$'yi bulunuz.

d) $t \geq 0$ için $v_2(t)$'yi bulunuz.

e) İdeal kapasitörlerde hapsolan enerjiyi milijoule cinsinden bulunuz.

Şekil P7.31



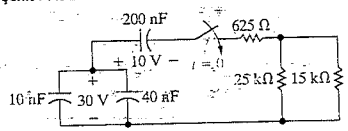
7.32 Şekil P7.32'de görülen devrede anahtar kapatıldığı anda paralel kapasitörler üzerindeki gerilim 30 V, 200 *n*F'lık kapasitör üzerindeki gerilim ise 10 V'tur.

a) Kapasitörler üzerinde depolanan toplam enerjinin yüzde kaçı 25 kΩ'luk direnç üzerinde harcanır?

b) (a) şıkkını 625 Ω ve 15 kΩ'luk dirençler için tekrarlayınız.

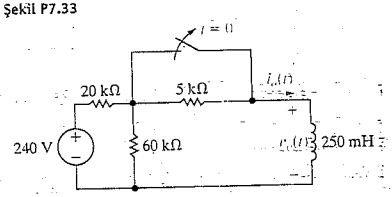
c) Başlangıçta depolanan enerjinin yüzde kaçı kapasitörler içerisinde hapsolur?

Şekil P7.32



7.33 PSPICE Şekil P7.33'te görülen devredeki anahtar uzun bir süre kapalı kalmış ve $t = 0$ anında açılmıştır. $t \geq 0^+$ için $i_o(t)$ ve $v_o(t)$'nin nümerik ifadelerini bulunuz.

Şekil P7.33



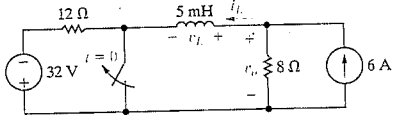
Kısım 7.3

7.34 PSPICE Şekil P7.34'te görülen devrede, anahtar uzun bir süre kapalı kaldıktan sonra $t = 0$ anında açılmıştır.

a) $t \geq 0$ için $i_L(t)$ ve $v_o(t)$'nin nümerik ifadelerini bulunuz.

b) $v_L(0^+)$ ve $v_o(0^+)$'nın nümerik değerlerini bulunuz.

Şekil P7.34

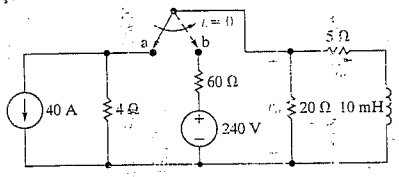


7.35 PSPICE Şekil P7.35'te görülen devrede anahtar a konumunda uzun bir süre kaldıktan sonra b konumuna alınmıştır.

a) $t \geq 0$ için $i_o(t)$'nin nümerik ifadesini bulunuz.

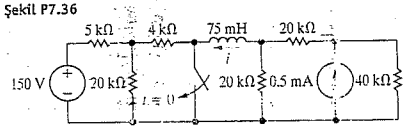
b) $t \geq 0$ için $v_o(t)$'nin nümerik ifadesini bulunuz.

Şekil P7.35



7.36 Şekil P7.36'da görülen devrede anahtar uzun bir süre açık kaldıktan sonra $t = 0$ anında kapatılmıştır. (a) i'nin başlangıç değerini, (b) i'nin son değerini, (c) $t \geq 0$ için zaman sabitini ve (d) $t \geq 0$ için $i(t)$'nin nümerik ifadesini bulunuz.

Şekil P7.36



7.37 Şekil 7.16'da görülen devrede indüktör terminallerindeki akım ve gerilimler söyledir.

$$i(t) = (10 - 10e^{-500t})\ \text{A}, \quad t \geq 0;$$

$$v(t) = 200e^{-500t}\ \text{V}, \quad t \geq 0^+.$$

a) V_s, R, I_0 ve L'nin numerik değerlerini bulunuz.

b) Anahtar kapandıktan kaç milisaniye sonra indüktörde depolanan enerji son değerinin %25'ine ulaşır?

7.38 Şekil P7.38'de görülen devrede anahtar uzun süre kapalı kaldıktan sonra $t = 0$ anında açılmıştır. $t \geq 0^+$ için;

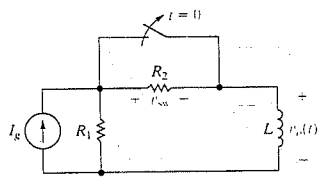
a) $v_o(t)$'yi I_g, R_1, R_2 ve L'nin bir fonksiyonu olarak bulunuz.

b) R_2 giderek arttığında $v_o(t)$'ye ne olacağını açıklayınız.

c) v_{sw}'yu I_g, R_1, R_2 ve L'nin bir fonksiyonu olarak bulunuz.

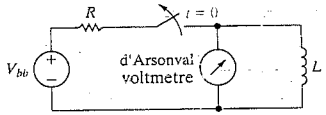
d) R_2 giderek arttığında v_{sw}'ye ne olacağını açıklayınız.

Şekil P7.38



7.39 Şekil P7.39'da görülen devrede anahtar uzun bir süre kapalı kalmıştır. Bir öğrenci istemeden anahtarı açmış ve eğitmenine, anahtar açıldığı anda gözle görülür bir kıvılcım meydana geldiğini ve indüktöre bağlı bulunan voltmetrenin hasar gördüğünü söylemiştir. Problem 7.38'de yaptığımız analizi temel alarak öğrenciye bu durumunu neden ortaya çıktığını açıklayabilir misiniz?

Şekil P7.39

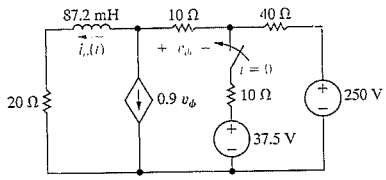


7.40 a) Şekil 7.16'daki Thévenin eşdeğerini Norton eşdeğerine çevirip ardından üst düğümden çıkan akımları toplayarak Eş. 7.47'yi çıkarınız. İlgili değişken olarak indüktör gerilimi v'yi kullanınız.

b) Değişkenleri ayırma tekniğini kullanarak Eş. 7.47'yi çözünüz. Sonucunuzu Eş. 7.42 ile karşılaştırarak doğruluğunu sınayınız.

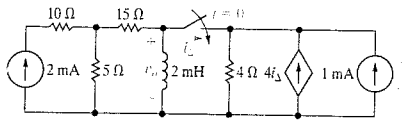
7.41 PSPICE Şekil P7.41'de verilen devrede anahtar uzun bir süre açık kaldıktan sonra $t = 0$ anında kapatılmıştır. $t \geq 0$ için $i_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P7.41



7.42 PSPICE Şekil P7.42'de görülen devrede anahtar $t = 0$ anında kapanmadan önce uzun süre açık kalmıştır. $t \geq 0^+$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P7.42

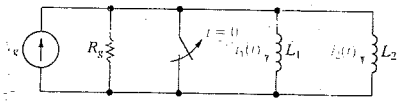


7.43 Şekil P7.43'teki devrede anahtar kapandığı anda L_1 ve L_2 indüktörleri enerjisizdir.

a) $t \geq 0$ için $i_1(t)$ ve $i_2(t)$ ifadelerini çıkarınız.

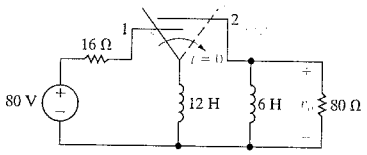
b) (a)'da bulunan ifadeleri kullanarak $i_1(\infty)$ ve $i_2(\infty)$'u bulunuz.

Şekil P7.43



7.44 PSPICE Şekil P7.44'te görülen devrede anahtar 1 konumunda uzun süre kalmıştır. $t = 0$ anında anahtar aniden 2 konumuna getirilmiştir. Anahtar hareket ettirildikten kaç milisaniye sonra v_o –80 V'a eşit olur?

Şekil P4.44



7.45 Şekil P7.44'teki devrede

a) 80 Ω'luk direnç üzerinde harcanan toplam enerjiyi,

b) indüktörlerde hapsolan enerjiyi,

c) başlangıçta indüktörler üzerinde depolanmış enerjiyi milijoule cinsinden bulunuz.

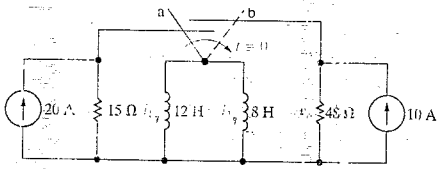
7.46 PSPICE Şekil P7.46'da görülen devredeki kesmeden temaslı anahtar a konumunda uzun süre kaldıktan sonra $t = 0$'da aniden b konumuna getirilmiştir.

a) $t \geq 0^+$ için $v_o(t)$'yi,

b) $t \geq 0$ için $i_1(t)$'yi,

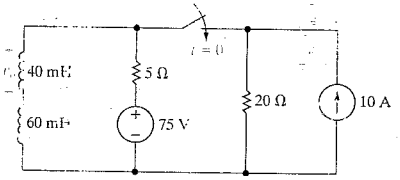
c) $t \geq 0$ için $i_2(t)$'yi bulunuz.

Şekil P7.46



7.47 PSPICE Şekil P7.47'de görülen devredeki anahtar $t = 0$ anında kapatılmadan önce uzun süre açık kalmıştır. $t \geq 0^+$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P7.47

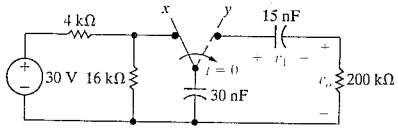


7.48 PSPICE Şekil P7.48'de görülen devrede anahtar x konumunda uzun bir süre kalmıştır. 15 nF'lık kapasitör üzerindeki yükün başlangıç değeri sıfırdır. $t = 0$ anında anahtar aniden y konumuna getirilmiştir.

a) $t \geq 0^+$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

b) $t \geq 0$ için $v_1(t)$'yi bulunuz.

Şekil P7.48



7.49 Şekil P4.48'deki devrede

a) 200 kΩ'luk dirence aktarılan enerjiyi,

b) kapasitörlerde hapsolan enerjiyi,

c) kapasitörlerde depolanan enerjinin başlangıç değerini mikrojoule cinsinden bulunuz.

7.50 PSPICE Şekil P7.50'deki görülen devredeki anahtar $t = 0$ anında açılmadan önce uzun bir süre kapalı kalmıştır. $t \geq 0^+$ için

a) $v_o(t)$'yi,

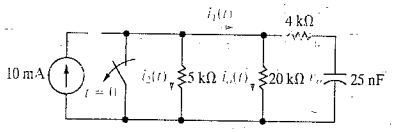
b) $i_o(t)$'yi,

c) $i_1(t)$'yi

d) $i_2(t)$'yi,

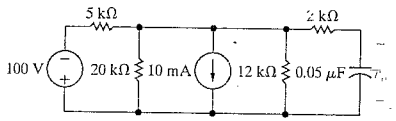
e) $i_1(0^+)$'yı bulunuz.

Şekil P7.50



7.51 PSPICE Şekil P7.51'de görülen devre uzun bir süre çalışmıştır. $t = 0$ anında gerilim kaynağının değeri 100 V'tan 25 V'a düşürülmüş ve akım kaynağı yön değiştirmiştir. $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P7.51



7.52 Şekil 7.21'deki kapasitörün terminallerindeki akım ve gerilim aşağıda verilmiştir.

$$i(t) = 50e^{-2500t}\ \text{mA}, \qquad t \geq 0^+;$$

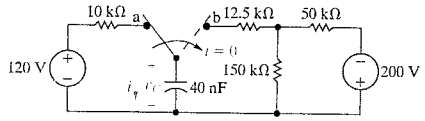
$$v(t) = (80 - 80e^{-2500t})\ \text{V}, \qquad t \geq 0.$$

a) I_s, V_0, R, C ve τ'yu bulunuz.

b) Anahtar kapandıktan kaç mikrosaniye sonra kapasitörde depolanan enerji son değerinin %64'üne ulaşır?

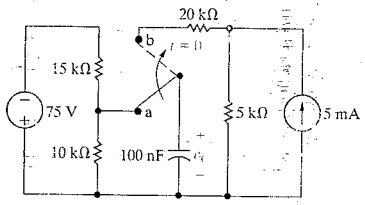
7.53 Şekil P7.53'te görülen devredeki anahtar uzun bir süre a konumunda kaldıktan sonra $t = 0$'da b konumuna getirilmiştir. (a) $v_C(0^+)$'yi; (b) $v_C(\infty)$'u; (c) $t > 0$ için τ'yu; (d) $i(0^+)$'yı; (e) $t \geq 0$ için v_C'yi ve (f) $t \geq 0^+$ için i'yi bulunuz.

Şekil P7.53



7.54 Şekil P7.54'te görülen devrede anahtar a konumunda uzun bir süre kalmış, $t = 0$'da b konumuna getirilmiştir. (a) Kapasitör geriliminin başlangıç değerini; (b) kapasitör geriliminin son değerini; (c) $t > 0$ için mikrosaniye cinsinden zaman sabitini ve (d) anahtar b konumuna alındıktan sonra kapasitör gerilimini sıfırlanması için gereken süreyi mikrosaniye cinsinden hesaplayınız.

Şekil P7.54



7.55 PSPICE Şekil P7.55'te görülen devredeki anahtar $t = 0$ anında açılmadan önce uzun bir süre kapalı kalmıştır.

a) $i_o(t)$'nin başlangıç değeri nedir?

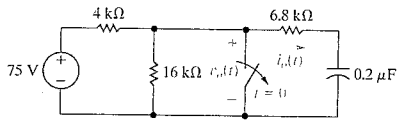
b) $i_o(t)$'nin son değeri nedir?

c) $t \geq 0$ için devrenin zaman sabiti nedir?

d) $t \geq 0^+$ için $i_o(t)$'nin nümerik ifadesi nedir?

e) $t \geq 0^+$ için $v_o(t)$'nin nümerik ifadesi nedir?

Şekil P7.55



7.56 PSPICE Şekil P7.56'da görülen devrede anahtar a konumunda uzun bir süre kalmıştır. Anahtar $t = 0$'da aniden b konumuna getirilmiştir. $t \geq 0^+$ için,

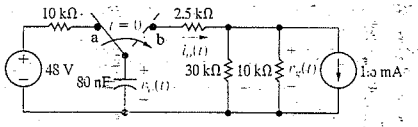
a) $v_o(t)$'yi,

b) $i_o(t)$'yi,

c) $v_g(t)$'yi,

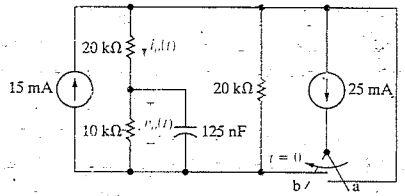
d) $v_s(0^+)$'yı bulunuz.

Şekil P7.56



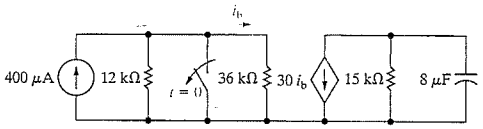
7.57 PSPICE Şekil P7.57'de görülen devrede anahtar a konumunda uzun bir süre kalmış, $t = 0$'da aniden b konumuna alınmıştır. $t \geq 0^+$ için $v_o(t)$ ve $i_o(t)$'yı bulunuz.

Şekil P7.57



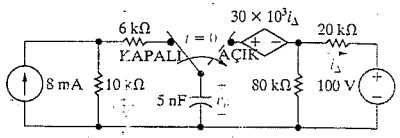
7.58 PSPICE Şekil P7.58'de görülen devrede anahtar uzun bir süre kapalı kaldıktan sonra $t = 0$ anında açılmıştır. Anahtar açıldıktan kaç milisaniye sonra kapasitörde depolanan enerji son değerinin %90'ına ulaşır?

Şekil P7.58



7.59 PSPICE Şekil P7.59'da görülen devrede anahtar KAPALI konumda uzun bir süre kalmıştır. $t = 0$'da anahtar aniden AÇIK konuma getirilmiştir. $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P7.59



7.60 PSPICE Şekil 7.59'da görülen devrede anahtar uzun süre AÇIK konumda kaldıktan sonra $t = 0$'da aniden KAPALI konuma getirildiğini varsayınız. $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

7.61 a) Şekil 7.21'deki Norton eşdeğer devresini önce Thévenin eşdeğerine çevirip ardından kapalı döngü gerilimlerini toplayarak Eş. 7.52'yi çıkarınız.

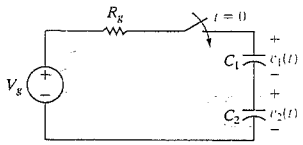
b) Değişkenleri ayırma tekniğini kullanarak Eş. 7.52'yi çözünüz. Elde ettiğiniz sonucu Eş. 7.53 ile karşılaştırarak doğruluğunu sınayınız.

7.62 Şekil P7.62'de görülen devrede anahtar kapatıldığı anda C_1 ve C_2 kapasitörleri yüksüzdür.

a) $t \geq 0$ için $v_1(t)$ ve $v_2(t)$ ifadelerini bulunuz.

b) (c) şıkkında bulduğunuz ifadeleri kullanarak $v_1(\infty)$ ve $v_2(\infty)$'u bulunuz.

Şekil P7.62



7.63 PSPICE Şekil P7.63'te görülen devrede anahtar a konumunda uzun bir süre kalmıştır. $t = 0$'da anahtar aniden b konumuna alınmıştır. $t \geq 0^+$ için

a) $v_o(t)$'yi,

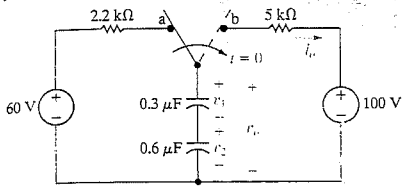
b) $i_o(t)$'yi,

c) $v_1(t)$'yi,

d) $v_2(t)$'yi,

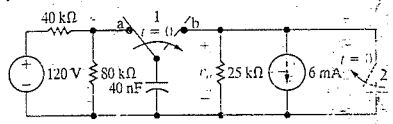
e) $t \to \infty$ iken kapasitörlerde hapsolan toplam enerjiyi bulunuz.

Şekil P7.63



7.64 PSPICE Şekil P7.64'te görülen devrede anahtar a konumunda uzun bir süre kalmıştır. $t = 0$'da anahtar aniden b konumuna alınmıştır. Anahtar b terminali ile temas ettiği anda 2. anahtar açılmıştır. $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P7.64



Kısım 7.4

7.65 Şekil P7.65'te görülen devrede anahtar kapandığı anda depolanmış enerji bulunmamaktadır.

a) $t \geq 0$ için $i_o(t)$'yi bulunuz.

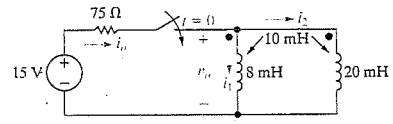
b) $t \geq 0^+$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

c) $t \geq 0$ için $i_1(t)$'yi bulunuz.

d) $t \geq 0$ için $i_2(t)$'yi bulunuz.

e) Cevaplarınız bilinen devre çalışması ile uyumlu mu?

Şekil P7.65



7.66 Karşılıklı indüktansın sıfıra indirildiği durum için Örnek 7.10'daki (a) ve (b) şıklarını tekrarlayınız.

7.67 PSPICE Şekil P7.67'de görülen devre anahtar kapatıldığı anda enerjisizdir

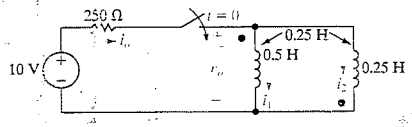
a) $t \geq 0$ için $i(t)$'yi bulunuz.

b) $t \geq 0^+$ için $v_1(t)$'yi bulunuz.

c) $t \geq 0$ için $v_2(t)$'yi bulunuz.

d) Cevaplarımız bilinen devre davranışı ile uyumlu mu?

Şekil P7.67



7.68 PSPICE Şekil P7.68'de görülen devrede anahtar kapatıldığı anda enerjisizdir.

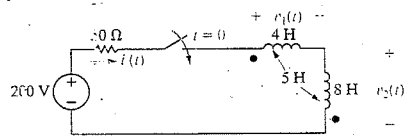
a) $t \geq 0$ için $i(t)$'yi bulunuz.

b) $t \geq 0^+$ için $v_1(t)$'yi bulunuz.

c) $t \geq 0$ için $v_2(t)$'yi bulunuz.

d) Cevaplarımız bilinen devre davranışı ile uyumlu mu?

Şekil P7.68

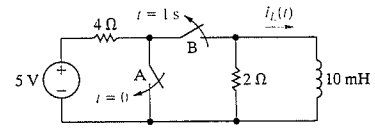


7.69 PSPICE 8 H'lik bobin üzerindeki noktanın bobinin üst tarafında olduğu durum için Problem 7.68'i tekrarlayınız.

Kısım 7.5

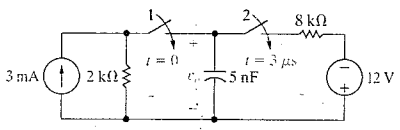
7.70 PSPICE Şekil P7.70'te görülen devrede anahtar A açık konumda, anahtar B ise kapalı konumda uzun bir süre kalmıştır. $t = 0$ anında anahtar A kapatılmıştır. Anahtar A kapandıktan 1 s sonra anahtar B açılmıştır. $t \geq 0$ için $i_L(t)$'yi bulunuz.

Şekil P7.70



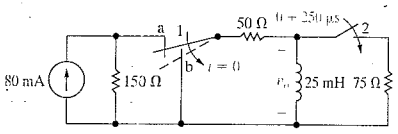
7.71 PSPICE Şekil P7.71'de görülen devredeki kapasitör, $t = 0$'da 1. anahtar kapatıldığında enerjisizdir. Üç mikrosaniye sonra 2. anahtar kapatılmıştır. $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P7.71



7.72 PSPICE Şekil P7.72'de görülen devredeki iki anahtarın hareketleri şu şekildedir: $t < 0$ için 1. anahtar a konumunda, 2. anahtar ise açık konumdadır. Bu durum uzun bir süre devam etmiştir. $t = 0$'da 1. anahtar aniden b konumuna alınmıştır. 250 μs sonra 2. anahtar kapatılmış, 400 μs kapalı kaldıktan sonra yeniden açılmıştır. 1. Anahtar b konumuna alındıktan 1 ms sonra $v_o(t)$ ifadesini bulunuz.

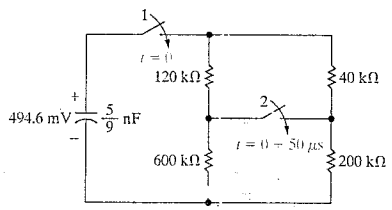
Şekil P7.72



7.73 Şekil P7.72'de görülen devrede 1. anahtar b konumuna getirildikten kaç milisaniye sonra indüktörde depolanan enerji başlangıç değerinin %4'üne eşit olur?

7.74 PSPICE Şekil P7.74'te görülen devredeki kapasitör 494.6 mV ile yüklenmiştir. $t = 0$'da 1. anahtar kapanarak kapasitörün direnç devresine boşalmasına neden olmuştur. 1. anahtar kapandıktan 50 μs sonra 2. anahtar üzerinden geçen akımın büyüklüğünü ve yönünü bulunuz.

Şekil P7.74



7.75 PSPICE Şekil P7.75'te görülen devrede anahtar a konumunda uzun bir süre kalmıştır. $t = 0$ anında anahtar b konumuna alınmış ve burada 100 μs tutulduktan sonra c konumuna getirilerek burada bırakılmıştır.

a) $i(0^+)$'yı,

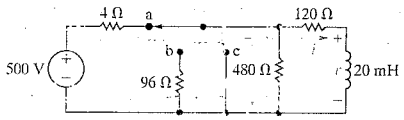
b) $i(25\ \mu s)$'yi,

c) $i(200\ \mu s)$'yi

d) $v(100^-\ \mu s)$'yi

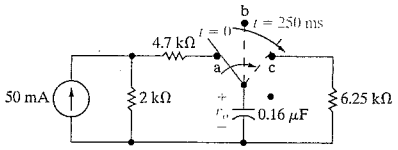
e) $v(100^+\ \mu s)$'yi bulunuz.

Şekil P7.75



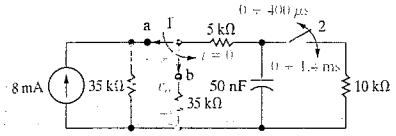
7.76 PSPICE Şekil P7.76'da görülen devrede anahtar a konumunda uzun bir süre kalmıştır. $t = 0$'da anahtar b konumuna getirilmiş, burada 250 ms kaldıktan sonra c konumuna getirilmişir. $t \geq 0$ için v_o'yu bulunuz.

Şekil P7.76



7.77 PSPICE Şekil P7.77'de görülen devrede 1. anahtar a konumunda, 2. anahtar ise kapalı konumda uzun bir süre kalmıştır. $t = 0$'da 1. anahtar aniden b konumuna getirilmiştir. 400 μs sonra 2. anahtar açılmış, 1ms açık kaldıktan sonra tekrar kapatılmıştır. 1. anahtar b terminaliyle temas ettikten 1.6 ms sonra v_o nedir?

Şekil P7.77



7.78 Şekil P7.77'deki devrede 50 μF'lık kapasitör üzerince depolanan enerjinin yüzde kaçı 10 kΩ'luk direnç üzerinde harcanır?

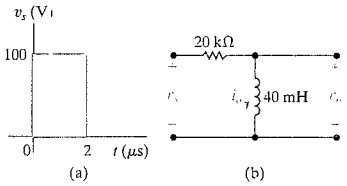
7.79 PSPICE Şekil P7.79(a)'da görülen gerilim Şekil P7.79(b)'de görülen devreye uygulanmıştır. İndüktör üzerindeki ilk akım sıfırdır.

a) $v_o(t)$'yi hesaplayınız.

b) t'ye karşı $v_o(t)$'yi çiziniz.

c) $t = 4\ \mu s$'de i_o'yu bulunuz.

Şekil P7.79



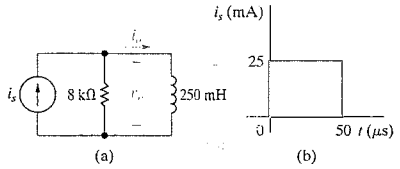
7.80 PSPICE Şekil P7.80(a)'da görülen devredeki akım kaynağı Şekil P7.80(b)'deki gibi bir akım sinyali üretmektedir. $t = 0$ anında depolanmış enerji bulunmamaktadır.

a) $t < 0, 0 < t < 50$ ms ve 50 ms $< t < \infty$ aralıkları için $v_o(t)$'nin nümerik ifadesini bulunuz.

b) $v_o(50^-\mu s)$ ve $v_o(50^+\ \mu s)$'yi hesaplayınız.

c) $i_o(50^-\mu s)$ ve $i_o(50^+\ \mu s)$'yi hesaplayınız.

Şekil P7.80

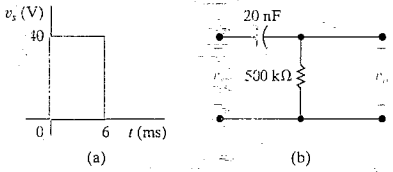


7.81 PSPICE Şekil P7.81(a)'da görülen gerilim sinyali Şekil P7.81(b)'deki devreye uygulanmıştır. Kapasitör geriliminin başlangıç değeri sıfırdır.

a) $v_o(t)$'yi hesaplayınız

b) t'ye karşı $v_o(t)$'yi çiziniz.

Şekil P7.81



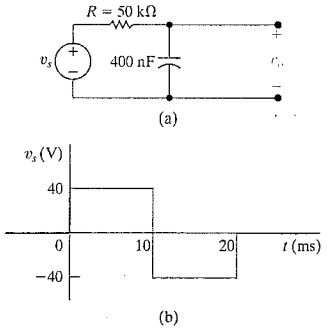
7.82 PSPICE Şekil P7.82(a)'da görülen devredeki gerilim kaynağı Şekil P7.82(b)'deki gibi bir gerilim sinyali üretmektedir. $t = 0$ anında depolanmış enerji bulunmamaktadır.

a) $t < 0$; $0 \leq t \leq 10$ ms; 10 ms $\leq t \leq 20$ ms ve 20 ms $\leq t < \infty$ aralıkları için $v_o(t)$ ifadesini bulunuz.

b) v_o ve v_s'yi aynı koordinat eksenleri üzerine çiziniz.

c) R'nin 10 kΩ'a düşürüldüğü durum için (a) ve (b)'yi tekrarlayınız.

Şekil P7.82



7.83 PSPICE Şekil P7.83(a)'da görülen devredeki akım kaynağının ürettiği sinyal Şekil P7.83(b)'de görülmektedir. $t = 0$ anında depolanmış enerji bulunmamaktadır.

a) $t < 0$; $0 < t < 0.5$ ms ve 0.5 ms $< t < \infty$ aralıkları için $i_o(t)$ ve $v_o(t)$ ifadelerini bulunuz.

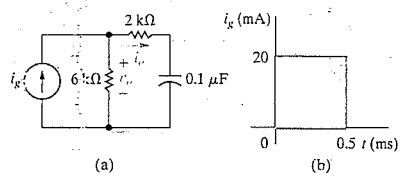
b) $i_o(0^-)$; $i_o(0^+)$; $i_o(0.0005^-)$ ve $i_o(0.0005^+)$'yı hesaplayınız.

c) $v_o(0^-)$; $v_o(0^+)$; $v_o(0.0005^-)$ ve $v_o(0.0005^+)$'yı hesaplayınız.

d) -2 ms $< t < 2$ ms aralında t'ye karşı $i_o(t)$'yi çiziniz.

e) -2 ms $< t < 2$ ms aralığında t'ye karşı $v_o(t)$'yi çiziniz.

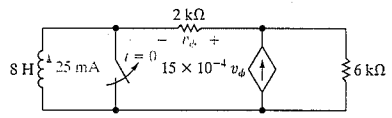
Şekil P7.83



Kısım 7.6

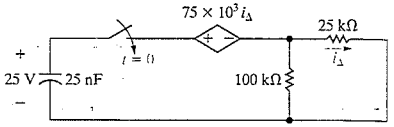
7.84 PSPICE Şekil P7.84'te görülen devredeki indüktör akımı, anahtar açıldığı anda 24 mA'dir. İndüktör akımı 12 A veya üzeri bir değer aldığında indüktör bozulmaktadır. Anahtar açıldıktan ne kadar süre sonra indüktör bozulur?

Şekil P7.84



7.85 PSPICE Şekil P7.85'te görülen devredeki kapasitör gerilimi, anahtar kapandığı anda 25 V'tur. Kapasitör gerilimi 50 kV veya üzeri olduğunda kapasitör bozulduğuna göre anahtar kapandıktan ne kadar süre sonra kapasitör bozulur?

Şekil P7.85

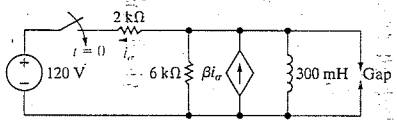


7.86 PSPICE Şekil 7.86'da görülen devredeki boşluk üzerindeki gerilim 36 kV'a ulaştığında kıvılcım çıkarmaktadır. İndüktör akımı başlangıta sıfırdır. β değeri indüktör terminallerinden görülen Thévenin direnci $-3\ \Omega$ olarak şekilde ayarlanmıştır.

a) β kaçtır?

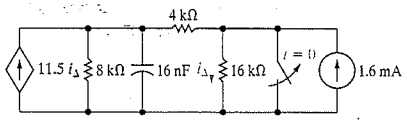
b) Anahtar kapandıktan kaç mikrosaniye sonra kıvılcım çıkar?

Şekil P7.86



7.87 PSPICE Şekil P7.87'de görülen devrede anahtar uzun bir süre kapalı kalmıştır. 17 nF'lık kapasitörün üzerinde oluşabilecek gerilimin maksimum değeri 930 V'tur Anahtar açıldıktan ne kadar süre sonra kapasitör gerilimi maksimuma ulaşır?

Şekil P7.87



7.88 Şekil P7.88'de görülen devre, a ve b terminalleri arasındaki anahtarı önceden belirlenmiş bir süre boyunca kapatmak için kullanmaktadır. Elektrik rölesinin kolları röle gerilimi 5 V'un üzerinde olduğu sürece aşağıda durmaktadır. Röle, gerilim 5 V olduğunda yayın mekanik hareketi sayesinde başlangıç konumuna dönmektedir. Başlangıçta basmalı düğmeye basılarak a ve b arasındaki anahtar kapatılmıştır. Düğmeye basıldığı anda kapasitör tam yüklüdür.

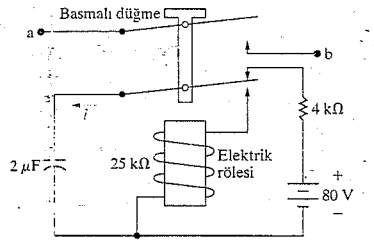
Röle bobininin direnci 25 kΩ'dur. Bobinin indüktansı ise ihmal edilebilir.

a) a ve b arasındaki anahtar ne kadar süre kapalı kalır?

b) Röle uçlarının açılmasından kapasitörün tam yüklenmesine kadar geçen süre için i'nin ifadesini bulunuz.

c) a ve b arasındaki temas kesildikten kaç milisaniye sonra kapasitör gerilimi son değerinin %85'ine ulaşır?

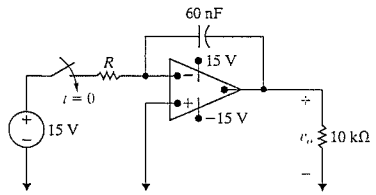
Şekil P7.88



Kısım 7.7

7.89 PSPICE Şekil P7.89'da görülen devrede anahtar kapandığı anda kapasitörde depolanan enerji sıfırdır. İdeal op amp 3 ms'de doyuma ulaşmaktadır. R'nin değeri kilo-ohm cinsinden nedir?

Şekil P7.89



7.90 Şekil P7.89'da görülen devrede anahtar kapatıldığı anda, kapasitör gerilimi sağ terminali pozitif olacak şekilde 5 V'tur. İdeal op amp 8 ms'de doyuma ulaşıyorsa R ne olmalıdır?

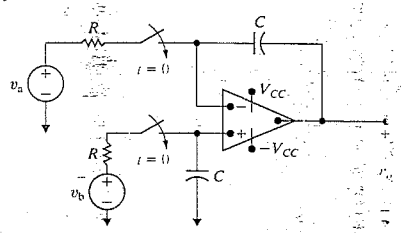
7.91 PSPICE Şekil P7.91'de görülen devrede anahtarlar kapatıldığı anda kapasitörler yüksüzdür.

a) v_o'yu v_a, v_b, R ve C'nin bir fonksiyonu olarak bulunuz.

b) (a)'da bulduğumuz sonuca dayanarak devrenin çalışma biçimini anlatınız.

c) $v_a = 10$ mV; $v_b = 60$ mV; $R = 40$ kΩ; $C = 25$ nF ve $V_{CC} = 12$ V ise yükselteç ne kadar süre sonra doyuma ulaşır?

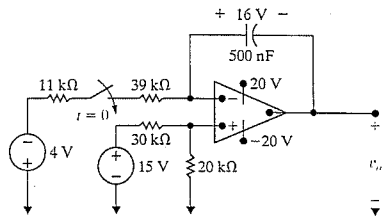
Şekil P7.91



7.92 PSPICE Şekil P7.92'deki anahtar kapatıldığı anda kapasitör gerilimi 16 V'tur.

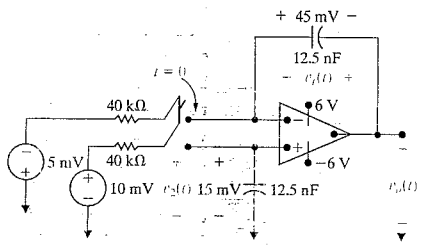
İşlemsel yükseltecin ideal olduğunu varsayınız. Anahtar kapatıldıktan kaç milisaniye sonra v_o çıkış gerilimi sıfır olur?

Şekil P7.92



7.93 PSPICE Şekil P7.93'te görülen devredeki çift kutuplu anahtar kapatıldığı anda kapasitörler üzerindeki gerilimler 45 mV ve 15 mV'tur. İdeal op amp'ın doğrusal bölgede çalıştığı süre için geçerli olan $v_o(t)$, $v_2(t)$ ve $v_f(t)$ ifadelerini bulunuz.

Şekil P7.93



7.94 PSPICE Şekil P7.94(a)'da görülen gerilim sinyali Şekil P7.94(b)'deki ideal integral alıcı yükseltece uygulanmıştır. $v_o(0)$ ise aşağıdaki aralıklar için $v_o(t)$ ifadesini bulunuz.

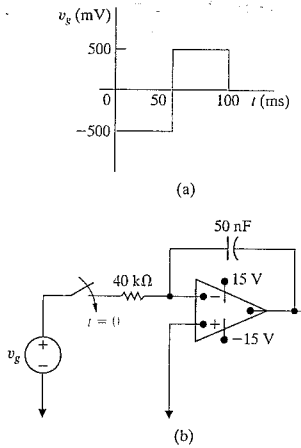
a) $t < 0$,

b) $0 \le t \le 50$ ms,

c) 50 ms $\le t \le$ 100 ms,

d) 100 ms $\le t < \infty$.

Şekil P7.94



7.95 PSPICE 50 nF'lık kapasitöre paralel 4 mΩ'luk bir direncin bağlandığı durum için Problem 7.94'ü tekrarlayınız.

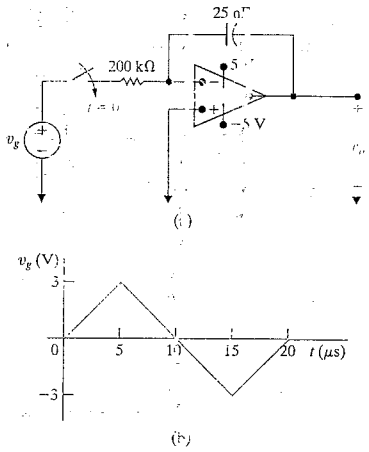
7.96 PSPICE Şekil P4.96(a)'da görülen devredeki gerilim kaynağı Şekil P7.96(b)'de görülen üçgen dalga sinyalini üretmektedir. $t = 0$'da kapasitörde depolanmış enerjinin sıfır olduğunu kabul ediniz.

a) $0 \le t \le 5$ μs; 5 μs $\le t \le$ 15 μs ve 15 μs $\le t \le$ 20 μs aralıkları için $v_o(t)$ ifadelerini bulunuz.

b) Çıkış sinyalini 0 ve 20 μs aralığında çiziniz.

c) Üçgen dalga $t >$ 20 μs için kendini tekrar ederse çıkış gerilimini nasıl oluşmasını beklersiniz? Açıklayınız.

Şekil P7.96



Kısım 7.1 – 7.9

7.97 Şekil P7.97'de görülen devre kararsız çoklu titreşim devresidir ve darbe devrelerinde geniş bir kullanım alanı bulunmaktadır. Bu problemin amacı kapasitörün dolma ve boşalmasını devrenin çalışmasıyla bağdaştırmaktır. Devreyi analiz edebilmek için öncelikle ideal transistör anahtarları T_1 ve T_2'nin çalışma biçimini anlamak gerekir. Anahtar otomatik olarak AÇIK ve KAPALI konumları arasında gidip gelecek şekilde tasarlanmıştır. T_1 KAPALI iken T_2 AÇIK, T_1 AÇIK iken T_2 KAPALI konumdadır. Yani, analiz esnasında anahtarların ya AÇIK ya da KAPALI konumda olduklarını kabul edeceğiz. Aynı zamanda ideal transistör anahtarların aniden durum değiştirebildiklerini, yani AÇIK konumdan KAPALI konuma vaya KAPALI konumdan AÇIK konuma aniden geçebildiklerini varsayacağız. Bir transistör anahtarı AÇIK iken, (1) baz akımı i_b sıfırdan büyüktür, (2) terminal gerilimi v_{be} sıfırdır ve (3) terminal gerilimi v_{ce} sıfırdır. Yani bir transistör anahtar AÇIK ise b, e ve c, e terminalleri arası kısa devredir. Bir transistör anahtar KAPALI ise (1) terminal gerilimi v_{be} negatiftir, (2) baz akımı sıfırdır ve (3) c, e terminalleri arasında açık devredir. Yani bir transistör anahtarı KAPALI ise b, e ve c, e terminalleri arası açık devredir. T_2'nin açık iken KAPALI, T_1'in ise kapalı iken AÇIK konuma yeni geçtiğini varsayınız. Bu anda C_2'nin V_{CC} ile yüklü, C_1'in ise yüksüz olduğunu kabul edebilirsiniz. Ayrıca $C_1 = C_2$ ve $R_1 = R_2 = 10\ R_L$ kabul ediniz.

a) T_2 KAPALI iken v_{be2} ifadesini bulunuz.

b) T_2 KAPALI iken v_{ce2} ifadesini bulunuz.

c) T_2'nin KAPALI kaldığı süreyi bulunuz.

d) T_2'nin KAPALI olduğu sürenin sonunda v_{ce2}'nin değerini bulunuz.

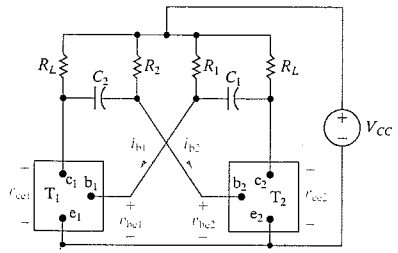
e) T_2 KAPALI iken i_{b1} ifadesini bulunuz.

f) T_2'nin KAPALI olduğu sürenin sonunda i_{b1}'in değerini bulunuz.

g) T_2'nin KAPALI olduğu aralıkta t'ye karşı v_{ce2}'yi çiziniz.

h) T_2'nin KAPALI olduğu aralıkta t'ye karşı i_{b1}'i çiziniz.

Şekil P7.87



7.98 Şekil P7.97'de görülen devrede $V_{CC} = 9$ V; $R_L = 3$ kΩ, $C_1 = C_2 = 2$ nF ve $R_1 = R_2 = 18$ kΩ'dur.

a) Bir çalışma döngüsü içerisinde T_2 ne kadar süre KAPALI konumda kalır?

b) Bir çalışma döngüsü içerisinde T_2 ne kadar süre AÇIK konumda kalır?

c) (a)'yı T_1 için tekrarlayınız.

d) (b)'yi T_1 için tekrarlayınız.

e) T_1'in AÇIK konuma geçtiği anda i_{b1} değeri nedir?

f) T_1'in KAPALI konuma geçtiği anda i_{b1} değeri nedir?

g) T_2'nin AÇIK konuma geçtiği anda v_{ce2} değeri nedir?

7.99 $C_1 = 3$ nF ve $C_2 = 2.8$ nF için Problem 7.98'i tekrarlayınız. Diğer devre elemanlarının değeri aynı kalmıştır.

7.100 Şekil P7.97'de görülen kararsız çoklu titreşim devresi şu koşulları sağlamaktadır: (1) Bir transistör anahtar her çalışma döngüsünde 48 μs AÇIK ve 36 ms KAPALI konumda kalmaktadır; (2) $R_1 = R_2$'dir ve (3) $6\ R_L \le R_1 \le 50\ R_L$ eşitsizliği geçerlidir. C_1 ve C_2 kapasitörlerinin sınır değerleri nedir?

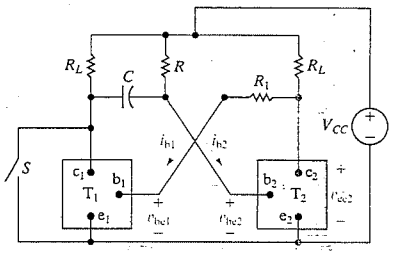
7.101 Şekil P7.101'de görülen devre tek kararlı çoklu titreşim devresidir. Tek kararlı ifadesi, devrenin tek bir kararlı durumunun olduğu anlamına gelmektedir. Yani, devreye dışarıdan müdahale olmadıkça elekronik anahtar T_1 AÇIK, T_2 ise KAPALI konumda kalmaktadır. (İdeal transistör anahtarının çalışma biçimi Problem 7.97'de anlatıldığı gibidir.) S anahtarı kapatılarak T_2 KAPALI konuma getirilebilir. S açık konuma döndüğünde T_2 de AÇIK konumuna geri döner.

a) T_2 AÇIK iken T_1'in KAPALI olduğunu ve hep KAPALI kaldığını gösteriniz.

b) S anlık olarak kapatıldığında T_2'nin neden KAPALI konuma geçtiğini açıklayınız.

c) T_2'nin RC ln2 s boyunca KAPALI kaldığını gösteriniz.

Şekil P7.101



7.102 Şekil P7.101'de $V_{CC} = 6$ V; $R_1 = 5$ k Ω; $R_L = 20$ kΩ; $C = 250$ pF ve $R = 23.083$ Ω'dur.

a) S'nin anlık olarak kapatıldığını ve devre kararlı durumuna dönene dek açık kaldığını varsayarak, t'ye karşı v_{ce2}'yi çiziniz. S'nin $t = 0$'da kapatıldığını kabul ediniz. Çiziminizi $-5 \le t \le 10$ μs aralığında yapınız.

b) t'ye karşı i_{b2} grafiği için (a)'yı tekrarlayınız.

7.103 PRATİK BAKIŞ AÇISI Şekil 7.45'te görülen devrenin taşınabilir bir flaşör devresini modellediğini varsayınız. Devreye 1.5 V'luk 4 adet pilin enerji sağladığını ve kapasitör değerinin 10 μF olduğunu kabul ediniz. Lamba gerilimi 4 V'a ulaştığında lambanın iletime geçtiğini, 1 V'un altına düşürdüğünde ise açık devre olduğunu varsayınız. İletim anında lambanın direnci 20 kΩ, iletmediği zaman ise sonsuzdur.

a) Yanıp sönmeler arasında 10 s'den fazla beklemek istemediğinizi kabul edelim. Bu zaman kısıtını sağlayan R değeri nedir?

b) (a)'da bulunan R değeri için lamba ne kadar süre yanar?

7.104 PRATİK BAKIŞ AÇISI PSPICE Şekil 7.45'teki devrede lamba gerilimi 15 V'a ulaştığında lamba iletime geçmektedir. Bu sürede lamba 10 kΩ'luk bir direnç olarak modellenebilir. Lamba gerilimi 5V'a düşene kadar iletime devam etmektedir. Lamba iletimde olmadığı zaman ise açık devre gibi davranmaktadır. $V_s = 40$ V; $R = 800$ kΩ ve $C = 25$ μF'tır.

a) Lamba dakikada kaç kere yanar?

b) 800 kΩ'luk direnç değişken bir R direnci ile değiştirilmiştir. R değeri lamba dakikada 12 kere yanacak şekilde ayarlanmıştır. R kaçtır?

7.105 PRATİK BAKIŞ AÇISI PSPICE Şekil 7.45'teki flaşör devresinde lamba iletimdeyken 1.3 kΩ'luk bir dirençte modellenebilir. Lamba 900 V'ta yanıp 300 V'ta sönmektedir.

a) $V_s = 1000$ V, $R = 3.7$ kΩ, $C = 250$ μF ise lamba dakikada kaç kez yanar?

b) Kaynak tarafından üretilen akımın ortalama kaç miliamperdir?

c) Flaşörün günde 24 saat çalıştırıldığını varsayınız. Gücün kilowatt-saati 7 cent ise flaşörü bir yıl çalıştırmanın maliyeti nedir?

7.106 PRATİK BAKIŞ AÇISI a) Şekil 7.48'deki flaşör devresinde lamba iletimdeyken kapasitör geriliminin aşağıdaki gibi olduğunu gösteriniz.

$$v_L(t) = V_{Th} + (V_{max} - V_{Th})e^{-(t-t_0)/\tau}$$

$$V_{Th} = \frac{R_L}{R + R_L}V_s$$

$$\tau = \frac{RR_LC}{R + R_L}.$$

b) Şekil 7.48'deki flaşör devresinde lambanın iletimde kaldığı sürenin aşağıdaki ifadeyle verildiğini gösteriniz.

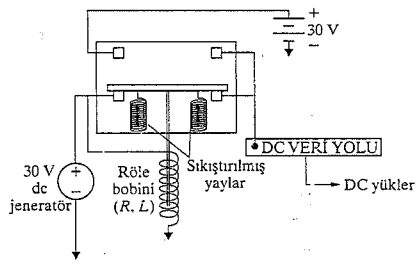
$$(t_c - t_o) = \frac{RR_LC}{R + R_L}\ln\frac{V_{max} - V_{Th}}{V_{min} - V_{Th}}.$$

7.107 PRATİK BAKIŞ AÇISI Şekil P7.107'de görülen devrede bulunan röle, üzerindeki akım 0.4 A ve üzeri olduğu sürece 30 V'luk dc jeneratörü dc veri yoluna bağlamaktadır. Röle akımı 0.4 A'in altına düştüğünde yay ile yüklü röle sargısının direnci 60 Ω'dur, indüktansı ise hesaplanacaktır.

a) 30 V dc jeneratörü süren motorun aniden yavaşladığını, bulun sonucunda üretilen gerilimin 21 V'a düştüğünü varsayınız. Yedek pilin 0.5 s'de dc veri yoluna bağlanmasını sağlayacak L değeri nedir?

b) (a)'da bulunan L değerini kullanarak, üretilen gerilim sıfıra düştüğünde rölenin çalışmasının ne kadar süreceğini hesaplayınız.

Şekil P7.107



RLC Devrelerinin Doğal ve Basamak Tepkileri

BÖLÜM İÇERİĞİ

8.1 **Paralel *RLC* Devresinin Doğal Tepkisine Giriş** *s. 286*

8.2 **Paralel *RLC* Devresinin Doğal Tepkisinin Biçimleri** *s. 291*

8.3 **Paralel *RLC* Devresinin Basamak Tepkisi** *s. 301*

8.4 **Seri *RLC* Devresinin Doğal ve Basamak Tepkisi** *s. 308*

8.5 **İki İntegral Alıcı Yükselteçli Devre** *s. 312*

BÖLÜM HEDEFLERİ

1. Paralel *RLC* devrelerinin doğal ve basamak tepkisini belirleyebilmek.
2. Seri *RLC* devrelerinin doğal ve basamak tepkisini belirleyebilmek.

Bu bölümde, indüktör ve kapasitör içeren devrelerin doğal ve basamak tepkileriyle ilgili konu anlatımı basit iki yapı ile sınırlandırılmıştır: Paralel *RLC* ve seri *RLC*. Paralel *RLC* devresinin doğal tepkisini bulmak için, indüktör veya kapasitör veya her ikisi üzerinde depolanan enerjinin açığa çıkmasıyla paralel dallarda oluşan gerilimi bulmak gerekir. Bu iş, Sayfa 286 Şekil 8.1'deki devre üzerinde tanımlanmıştır. Kapasitördeki başlangıç gerilimi V_0, başlangıçta kapasitörde depolanan enerjiyi göstermektedir. İndüktördeki başlangıç akımı I_0, başlangıçta indüktörde depolanan enerjiyi göstermektedir. Her bir dalda tanımlanan akımları bulmanız gerekiyorsa, terminal gerilimini bulduktan sonra akımları bulabilirsiniz.

Paralel *RLC* devresinin basamak tepkisini Sayfa 284'deki Şekil 8.2'yi kullanarak bulacağız. DC akım kaynağının anlık olarak paralel dallara uygulanmasıyla oluşan gerilimle ilgileniyoruz. Akım kaynağı uygulandığında, devrede enerji depolanabilir veya depolanmayabilir.

Seri *RLC* devresinin doğal tepkisini bulmak için, indüktör veya kapasitör veya her ikisi üzerinde depolanan enerjinin açığa çıkmasıyla seri bağlı elemanlarda oluşan akımları bulmak gerekir. Bu iş, Sayfa 286 Şekil 8.3'teki devre üzerinde tanımlanmıştır. Önceden olduğu gibi, I_0 indüktör akımı ve V_0 kapasitör gerilimi başlangıçta depolanan enerjiyi göstermektedir. Her elemanda tanımlanan gerilimleri bulmanız gerekiyorsa, akımı bulduktan sonra gerilimleri de bulabilirsiniz.

Seri *RLC* devresinin basamak tepkisini, Şekil 8.4'teki devreyi kullanarak tanımlayacağız. DC gerilim kaynağının aniden devreye uygulanmasıyla oluşan akımla ilgileniyoruz. Anahtar kapatıldığında devrede enerji depolanmış veya depolanmamış olabilir.

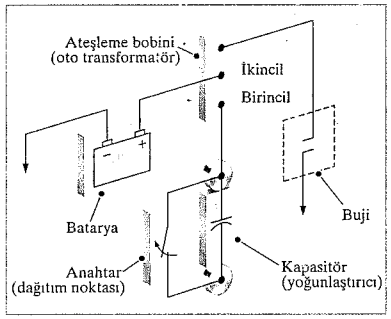
Adi diferansiyel denklemler konusunda bilgi sahibi değilseniz, paralel ve seri bağlı *RLC* devrelerinin doğal ve basamak tepkisini anlayabilmek zorlaşır. Bununla birlikte, sonuçlar şu anda sunulmayı gerektiren öneme sahiptir. Paralel *RLC* devresinin doğal tepkisi ile konuya başlayacak ve konuyu iki kısımda işleyeceğiz: Biri, devreyi tanımlayan diferansiyel denklemin çözümünü bulmak, diğeri çözümün alabileceği üç değişik biçimi tartışmaktır. Birbirinden farklı

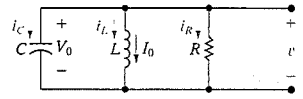
Pratik Bakış Açısı

Ateşleme Devresi

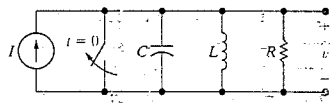
Bu bölümde *RLC* devrenin basamak tepkisini anlatacağız. Otomobildeki ateşleme devresi *RLC* devresinin geçici durum tepkisine dayanır. Böyle bir devrede, anahtarlama işlemi ateşleme bobini olarak bilinen endüktif sarımdaki akımın ani değişmesine neden olur. Ateşleme bobini seri bağlı manyetik bağlaşık iki bobinden oluşmaktadır. Bu seri bağlantı oto transformatör olarak bilinir. Bataryaya bağlanan bobin birincil sarım, bujiye bağlanan bobin ise ikincil sarım olarak adlandırılır. Birincil sarımda akımdaki ani değişim manyetik bağlaşım ile (karşılıklı endüktans) ikincil sarımda çok yüksek gerilim indükler. 20 ile 40 kV arasında olan bu gerilim bujideki yarık üzerinde bir kıvılcım ateşlemek için kullanılır. Kıvılcım silindirdeki hava-benzin karışımını ateşler.

Şematik resimde ateşleme devresinin temel elemanları gösterilmektedir. Günümüz otomobillerinde, elektronik (mekanik anahtarlamanın tersine) anahtarlama birincil sarımdaki akımda ani değişim yaratmak için kullanılmaktadır. Elektronik anahtarlama devrelerini anlamak için burada anlatılanların ötesinde bilgi sahibi olmak gerekir. Bununla birlikte, eski geleneksel ateşleme devresinin analizini anlamak uygun devre tasarımlarında karşılaşılan sorunları anlamada yardımcı olacaktır.

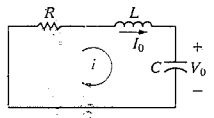




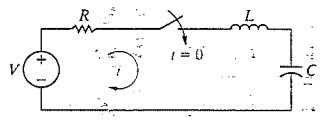
Şekil 8.1 ▲ Paralel *RLC* devresinin doğal tepkisini göstermek için kullanılan devre.



Şekil 8.2 ▲ Paralel *RLC* devresinin basamak tepkisini göstermek için kullanılan devre.



Şekil 8.3 ▲ Seri *RLC* devresinin doğal tepkisini göstermek için kullanılan devre.



Şekil 8.4 ▲ Seri *RLC* devresinin basamak tepkisini göstermek için kullanılan devre.

bu üç biçimi tanıttıktan sonra, bu biçimlerin paralel *RLC* devresinin basamak tepkisine uygulanabildiği gibi seri *RLC* devresinin doğal ve basamak tepkisine de uygulanabildiğini göstereceğiz.

8.1 Paralel *RLC* Devresinin Doğal Tepkisine Giriş

Şekil 8.1'deki devrenin doğal tepkisini bulmak için ilk adımda v geriliminin sağladığı diferansiyel denklem bulunur. Her elemanda aynı olduğundan ilk olarak gerilimi buluruz. Daha sonra, dal akımları, ilgili bileşenin gerilim-akım bağıntısı kullanılarak bulunur. Üst düğümden çıkan akımları toplayarak gerilim için diferansiyel denklemi kolaylıkla

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v\,d\tau + I_0 + C\frac{dv}{dt} = 0 \qquad (8.1)$$

olarak buluruz. Eş. 8.1'deki integrali yok etmek için t'ye göre türev alırız ve I_0 sabit olduğundan

$$\frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} + C\frac{d^2v}{dt^2} = 0 \qquad (8.2)$$

eşitliğini elde ederiz. Eş. 8.2'yi kapasitans değeri C'ye böler ve türevleri azalan bir sıradan yeniden düzenlersek

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0 \qquad (8.3)$$

olur. Eşitlik 8.3'ü 7. Bölümde elde edilen diferansiyel denklemlerle karşılaştırınca, eşitliğin ikinci mertebeden türev içerdiği görülmektedir. Eş. 8.3 sabit katsayıları olan ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemdir. Bu bölümdeki devreler indüktör ve kapasitör içerdiğinden bu devrelerin diferansiyel denklemi de ikinci mertebedendir. Bu nedenle, bu tip devreleri bazen **ikinci mertebeden devreler** olarak adlandırmaktayız.

İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Genel Çözümü

7. Bölümde yaptığımız gibi, değişkenleri ayırarak ve integral olarak Eş. 8.3'ü çözemeyiz. Eş. 8.3'ü çözmek için klasik yaklaşım çözümün üstel biçimde olduğunu kabul etmektir. Yani gerilim

$$v = Ae^{st} \qquad (8.4)$$

olarak yazılır. Burada A ve s bilinmeyen sabitlerdir.

Bu varsayımın Eş.8.3'ün çözümünü verdiğini göstermeden önce, bu çözümün mantıklı olduğunu göstermemiz gerekir. Eş. 8.4 için yapabileceğimiz en güçlü ispat, Eş. 8.3'ün, çözümün ikinci türevi, birinci türevinin bir sabitle çarpımı ve çözümün kendisi çarpı bir sabitin toplamı olduğuna ve tüm t değerleri için bu toplamın sıfır olduğuna dikkat etmektir. Bu durum, sadece çözümün yüksek mertebeden türevleri çözümle aynı biçime sahip olduğunda olabilir. Üstel fonksiyon bu kriteri sağlamaktadır. Eş. 8.4 için ikinci destek ise 7. Bölümde birinci mertebeden denklemlerin çözümünün üstel olduğudur. İkinci mertebeden denklemin çözümünün de üstel olduğunu düşünmek oldukça mantıklı gelmektedir.

Eş. 8.4, Eş. 8.3'ün çözümü ise, bütün t değerleri için Eş. 8.3'ü sağlamalıdır. Eş. 8.4'ü, 8.3'e yerleştirirsek

$$As^2e^{st} + \frac{As}{RC}e^{st} + \frac{Ae^{st}}{LC} = 0$$

veya

$$Ae^{st}\left(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right) = 0 \qquad (8.5)$$

elde ederiz. Bu eşitlik bütün t değerleri için sadece A veya parantez içindeki terimler sıfır olduğunda sağlanabilir. st'nin bütün değerleri için $e^{st} \neq 0$'dır. $A = 0$'ı genel çözüm olarak kullanamayız çünkü bunu yapmak için gerilimin her zaman sıfır olması gerekir ki, bu da indüktör veya kapasitör enerji depoladığında imkansızdır. Bu nedenle, Eş. 8.4'ün Eş. 8.3'ün çözümü olması için Eş. 8.5'deki parantez içindeki terimin sıfır olması gerekir:

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0. \qquad (8.6)$$

◁ **Paralel *RLC* devresinin karakteristik denklemi**

Bu ikinci mertebeden denklemin kökleri $v(t)$'nin matematiksel biçimini belirlediğinden, Eş. 8.6 diferansiyel denklemin **karakteristik denklemi** olarak adlandırılır.

Eş. 8.6'nın kökleri

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}, \qquad (8.7)$$

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \qquad (8.8)$$

bulunur.

Her iki kök de Eş. 8.4'e yerleştirilirse, varsayılan bu çözüm Eş. 8.3'teki diferansiyel denklemi sağlamaktadır. Bu sonucun A'nın değerine bakılmaksızın Eş. 8.5'i sağladığına dikkat ediniz. Bu nedenle,

$$v = A_1 e^{s_1 t} \text{ ve}$$

$$v = A_2 e^{s_2 t}$$

çözümlerinin her ikisi de Eş. 8.3'ü sağlamaktadır. Bu çözümlere v_1 ve v_2 dersek, toplamlarının da bir çözüm olduğunu gösterebiliriz:

$$v = v_1 + v_2 = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{8.9}$$

$$\frac{dv}{dt} = A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t}, \tag{8.10}$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = A_1 s_1^2 e^{s_1 t} + A_2 s_2^2 e^{s_2 t}. \tag{8.11}$$

Eş. 8.9–8.11'i 8.3'te yerine koyarsak,

$$A_1 e^{s_1 t}\left(s_1^2 + \frac{1}{RC}s_1 + \frac{1}{LC}\right) + A_2 e^{s_2 t}\left(s_2^2 + \frac{1}{RC}s_2 + \frac{1}{LC}\right) = 0 \tag{8.12}$$

elde ederiz. Fakat her iki parantez içindeki terim de sıfırdır. Zaten tanım olarak s_1 ve s_2 karakteristik denklemin kökleriydi. Bu yüzden Şekil 8.1'de göserilen paralel *RLC* devresinin doğal tepkisi

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{8.13}$$

biçimindedir. Eş. 8.13, Eş. 8.9'da yapılan varsayımın bir tekrarıdır. v_1'in bir çözüm olduğunu, v_2'nin bir çözüm olduğunu ve $v_1 + v_2$'nin bir çözüm olduğunu göstermiş olduk. Bu nedenle, Eş. 8.3'ün genel çözümü Eş. 8.13'te verilen biçimdedir. Karakteristik denklemin kökleri (s_1 ve s_2) devre parametreleri olan R, L, C ile belirlenmektedir. Başlangıç koşulları A_1 ve A_2 katsayılarını belirlemektedir. s_1 ve s_2 kökleri eşit olduğunda Eş. 8.13'ün değiştirilmesi gerektiğine dikkat ediniz. Kısım 8.2'de kritik sönümlü gerilim tepkisini incelediğimizde bu değişim hakkında tartışacağız.

$v(t)$'nin davranışı s_1 ve s_2 değerlerine göre değişir. Bu yüzden, doğal tepkiyi bulmak için ilk adım karakteristik denklemin köklerini belirlemektir. Eş. 8.7 ve 8.8'i, literatürde sıkça kullanılan gösterimiyle yeniden yazalım:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \tag{8.14}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \tag{8.15}$$

Burada,

$$\alpha = \frac{1}{2RC}, \tag{8.16}$$

◁ **Neper frekansı, paralel *RLC* devresi.**

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{8.17}$$

◁ **Rezonans radyan frekansı, paralel *RLC* devresi.**

ile tanımlamıştır. Bu sonuçlar Tablo 8.1'de özetlenmiştir.

e'nin kuvveti birimsiz olmalı, yani s_1 ve s_2 (ve sonuçta α ve ω_0) zamanın tersi veya frekans boyutunda olmalıdır. s_1, s_2, α ve ω_0 frekanslarını birbirinden ayırmak için şu terminoloji kullanıyoruz: s_1 ve s_2 *karmaşık frekans*, α *neper frekansı* ve ω_0 *rezonans radyan frekansı* olarak adlandırılır. Bu terminolojinin önemi ilerleyen bölümlerde yavaş yavaş ortaya çıkacaktır. Bu frekansların hepsi açısal frekans/zaman boyutundadırlar. Karmaşık frekanslar, neper frekansı ve rezonans radyan frekansı için *radyan bölü saniye* (*rad/s*) birimini kullanacağız. s_1 ve s_2'nin durumu α ve ω_0 değerlerine bağlıdır. Bunun için üç olasılık vardır: İlki, $\omega_0^2 < \alpha^2$ ise, her iki kök de gerçek ve birbirinden farklıdır. Bu gerilim tepkisine, daha sonra da anlatılacağı gibi **aşırı sönümlü** denir. İkinci olarak $\omega_0^2 = \alpha^2$ ise s_1 ve s_2'nin ikisi de karmaşıktır ve birbirinin kamaşık eşleniğidir. Bu durumda, gerilim tepkisine **eksik sönümlü** denir. Üçüncü olası sonuçta ise $\omega_0^2 > \alpha^2$'dir. Bu durumda s_1 ve s_2 gerçek ve birbirine eşittir. Bu gerilim tepkisine **kritik sönümlü** denir. Sonra da göreceğimiz gibi, sönümlenme, gerilim tepkisinin son durumuna (veya durgun duruma) ulaşma şeklini etkilemektedir. Her durumu, Kısım 8.2'de ayrı ayrı inceleyeceğiz.

Örnek 8.1 s_1 ve s_2'nin sayısal değerlerinin R, L ve C değerleri ile nasıl belirlendiğini göstermektedir.

TABLO 8.1 Paralel *RLC* Devresinin Doğal Tepki Parametreleri

Parametre	Terminoloji	Doğal Tepkideki Değeri
s_1, s_2	Karakteristik kökler	$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ $s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$
α	Neper frekansı	$\alpha = \frac{1}{2RC}$
ω_0	Rezonans radyan frekansı	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

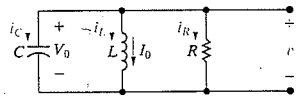
Örnek 8.1 **Bir Paralel *RLC* Devrenin Karakteristik Denkleminin Köklerinin Bulunması**

a) $R = 200\ \Omega$, $L = 50$ mH ve $C = 0.2\ \mu$F ise Şekil 8.5'te gösterilen gerilimin geçici tepkisinin karakteristik denkleminin köklerini bulunuz.

b) Tepki aşırı sönümlü, eksik sönümlü veya kritik sönümlü müdür?

c) (a) ve (b) şıklarını $R = 312.5\ \Omega$ için tekrarlayınız.

d) R'nin hangi değeri için tepki, kritik sönümlü olur?



Şekil 8.5 Paralel *RLC* devresinin doğal tepkisini göstermek için kullanılan devre

Çözüm

a) Verilen R, L, C değerleri için

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{10^6}{(400)(0.2)} = 1.25 \times 10^4 \text{ rad/s},$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{(10^3)(10^6)}{(50)(0.2)} = 10^8 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

bulunur. Eş. 8.14 ve 8.15'i kullanarak

$$s_1 = -1.25 \times 10^4 + \sqrt{1.5625 \times 10^8 - 10^8}$$

$$= -12{,}500 + 7500 = -5000 \text{ rad/s},$$

$$s_2 = -1.25 \times 10^4 - \sqrt{1.5625 \times 10^8 - 10^8}$$

$$= -12{,}500 - 7500 = -20{,}000 \text{ rad/s}$$

elde ederiz.

b) Gerilim tepkisi aşırı sönümlüdür. Çünkü $\omega_0^2 < \alpha^2$'dir.

c) $R = 312.5\ \Omega$ için

$$\alpha = \frac{10^6}{(625)(0.2)} = 8000 \text{ rad/s},$$

$$\alpha^2 = 64 \times 10^6 = 0.64 \times 10^8 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

olur. ω_0^2, 10^8 rad^2/s^2'dir ve değişmemiştir.

$$s_1 = -8000 + j6000 \text{ rad/s},$$

$$s_2 = -8000 - j6000 \text{ rad/s}.$$

(Elektrik mühendisliğinde $\sqrt{-1}$ karmaşık sayısı j harfi ile gösterilir, çünkü i harfi akımı göstermektedir.)

Bu durumda, gerilim tepkisi eksik görünümlüdür çünkü $\omega_0^2 > \alpha^2$'dir.

d) Kritik sönüm için, $\alpha^2 = \omega_0^2$ olduğundan

$$\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 = \frac{1}{LC} = 10^8$$

veya

$$\frac{1}{2RC} = 10^4$$

ve sonuçta

$$R = \frac{10^6}{(2 \times 10^4)(0.2)} = 250\ \Omega.$$

olarak bulunur.

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 1 – Paralel *RLC* devresinin doğal ve basamak tepkisini belirleyebilmek.

8.1 Şekil 8.5'teki devrede, direnç ve endüktans sırasıyla 100 Ω ve 20 mH'dir.

a) Gerilim tepkisinin kritik sönümlü olması için C'nin değerini bulunuz.

b) C, neper frekansı 5 krad/s olacak şekilde ayarlanmışsa, C'nin değerini ve karakteristik denklemin köklerini bulunuz.

c) C, rezonans frekansı 20 krad/s olacak şekilde ayarlanmışsa, C'nin değerlerini ve karakteristik denklemin köklerini bulunuz.

Cevap: (a) 500 nF;

(b) $C = 1\ \mu$F, $s_1 = -5000 + j5000$ rad/s, $s_2 = -5000 - j5000$ rad/s;

(c) $C = 125$ nF, $s_1 = -5359$ rad/s, $s_2 = -74{,}641$ rad/s.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemi 8.1'i de çözmeyi deneyiniz.

8.2 Paralel *RLC* Devresinin Doğal Tepkilerinin Biçimleri

İkinci mertebeden *RLC* devresinin davranışının, R, L, C devre parametrelerine bağlı olan s_1 ve s_2 değerlerine bağlı olduğunu görmüştük. Bu yüzden, devrenin doğal tepkisini hesaplamak için bu değerler bulunmalı ve tepkinin aşırı sönümlü, eksik sönümlü veya kritik sönümlü olup olmadığı belirlenmelidir.

Doğal tepki tanımını tamamlayabilmek için Eş. 8.13'teki A_1 ve A_2 bilinmeyen katsayılarının bulunması gereklidir. Bu yöntemi kullanırken doğal tepkinin çözümü, devrede oluşan başlangıç koşullarıyla eşleştirilir. Bu koşullar, akımın (veya gerilimin) başlangıç değeri ve akımın (veya gerilimin) birinci türevinin başlangıç değeridir. Bu başlangıç koşulları ve değişkenin son değerinin ikinci mertebeden devrenin basamak tepkisini bulurken gerekli olacağını unutmayınız.

Bu kısımda, aşırı sönümlü durumdan başlayarak, doğal tepkinin her sönümlenme biçimini inceleyeceğiz. Tepki denklemlerinin ve bilinmeyen katsayıları bulmak için kullanılan denklemlerin üç sönümlenme durumu için de birbirinden farklı olduğunu göreceğiz. Bu nedenle, problemin başında tepkinin aşırı, eksik veya kritik sönümlü olup olmadığını belirlemeye çalışacağız.

Aşırı Sönümlü Gerilim Tepkisi

Karakteristik denklemin kökleri gerçek ve birbirinden farklı olduğunda paralel *RLC* devresinin aşırı sönümlü olduğu söylenir. Gerilim için çözüm

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}, \tag{8.18}$$

biçimindedir.

◁ **Gerilim doğal tepkisi – aşırı sönümlü paralel *RLC* devre**

Burada s_1 ve s_2 karakteristik denklemin kökleridir. A_1 ve A_2 sabitleri başlangıç koşulları ile bulunabilir. Kapasitör üzerindeki başlangıç gerilimi, V_0 ve indüktördeki başlangıç akımı, I_0 kullanılarak $v(0^+)$ ve $dv(0^+)/dt$ de bulunabilir.

Sonra, A_1 ve A_2'yi bulmak için kapasitördeki başlangıç gerilimi ve indüktördeki başlangıç akımının nasıl kullanılacağını göstereceğiz. Eş. 8.18'e bakarak

$$v(0^+) = A_1 + A_2, \tag{8.19}$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = s_1A_1 + s_2A_2. \tag{8.20}$$

olduğuna dikkat ediniz. s_1 ve s_2 bulunursa, A_1 ve A_2'yi bulmak için geriye $v(0^+)$ ve $dv(t)/dt$'yi bulmak kalır. $v(0^+)$'nın değeri kapasitörün üzerindeki başlangıç gerilimi olan v_0'dır. dv/dt'nin başlangıç değerini kapasitör dalındaki akımın $t = 0^+$ anındaki değeriyle bulabiliriz:

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C}. \tag{8.21}$$

Kapasitörün olduğu daldaki başlangıç akımını bulabilmek için Kirchhoff'un akım yasasını kullanırız. $t = 0^+$ anında üç daldaki akımların toplamının sıfır olması gerektiğini biliyoruz. $t = 0^+$ anında direncin olduğu daldaki akım başlangıç gerilimi V_0'ın dirence bölümüdür ve indüktörün olduğu daldaki akım da I_0'dır. Şekil 8.5'teki referans sistemi bakarak

$$i_C(0^+) = \frac{-V_0}{R} - I_0 \tag{8.22}$$

elde ederiz. $i_C(0^+)$'nın sayısal değerini bulduktan sonra, dv/dt değerini bulmak için Eş. 8.21'i kullanırız.

Aşırı sönümlü tepkiyi bulma yöntemini aşağıdaki şekilde özetleyebiliriz:

1. R, L ve C değerlerini kullanarak, karakteristik denklemin kökleri s_1 ve s_2'yi bulunuz.
2. Devre analizini kullanarak $v(0^+)$ ve $dv(0^+)/dt$'yi bulunuz.
3. Eş. 8.23 ve 8.24'ü çözerek A_1 ve A_2 değerlerini bulunuz.

$$v(0^+) = A_1 + A_2, \tag{8.23}$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = s_1A_1 + s_2A_2. \tag{8.24}$$

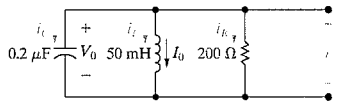
4. s_1, s_2, A_1 ve A_2 değerlerini, $t \geq 0$ anında $v(t)$ bağıntısını bulmak için Eş. 8.18'e yerleştiriniz.

Örnek 8.2 ve 8.3, paralel *RLC* devresinin aşırı sönümlü tepkisinin nasıl bulunduğunu göstermektedir.

Örnek 8.2 Bir Paralel *RLC* Devrenin Aşırı Sönümlü Doğal Tepkisinin Bulunması

Şekil 8.6'daki devrede, $v(0^+) = 12$ V ve $i_L(0^+) = 30$ mA'dır.

a) Devrenin her dalındaki başlangıç akımını bulunuz.
b) dv/dt'nin başlangıç değerini bulunuz.
c) $v(t)$ için bağıntıyı bulunuz.
d) $v(t)$'yi $0 \leq t \leq 250$ μs aralığında çiziniz.



Şekil 8.6 Örnek 8.2 için devre şeması.

Çözüm

a) İnduktör, akımda ani değişimleri önlediğinden, indüktör akımının başlangıç değeri 30 mA'dır.

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 30 \text{ mA}.$$

Kapasitör paralel elemanlar üzerindeki başlangıç gerilimini 12 V'ta tutar. Böylece direncin olduğu daldaki başlangıç akımı 12/200, yani 60 mA'dır. Kirchhoff'un akım yasasına göre ana düğümden ayrılan bütün akımların toplamı her zaman sıfırdır. Öyleyse

$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) - i_R(0^+)$$
$$= -90 \text{ mA}$$

bulunur. İndüktör akımı ve kapasitör geriliminin dc değerlerine, enerji birakıldığı anda ulaştığını varsayarsak, $i_C(0^-) = 0$ olduğuna dikkat ediniz. Başka bir deyişle, kapasitör akımı $t = 0$'da anlık olarak değişmektedir.

b) $i_C = C(dv/dt)$ olduğundan,

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{-90 \times 10^{-3}}{0.2 \times 10^{-6}} = -450 \text{ kV/s}$$

elde edilir.

c) Karakteristik denklemin kökleri R, L ve C değerlerinden elde edilmektedir. Verilen değerler ve Eş. 8.14 ve 8.15'le birlikte 8.16 ve 8.17 kullanılarak

$$s_1 = -1.25 \times 10^4 + \sqrt{1.5625 \times 10^8 - 10^8}$$
$$= -12{,}500 + 7500 = -5000 \text{ rad/s},$$
$$s_2 = -1.25 \times 10^4 - \sqrt{1.5625 \times 10^8 - 10^8}$$
$$= -12{,}500 - 7500 = -20{,}000 \text{ rad/s}$$

bulunur. Kökler gerçek ve birbirinden farklı olduğundan, tepkinin aşırı sönümlü olduğunu ve dolayısıyla Eş. 8.18'deki biçimde olduğunu biliyoruz. A_1 ve A_2 katsayılarını Eş. 8.23 ve 8.24 ile buluruz. s_1, s_2, $v(0^+)$ ve $dv(0^+)/dt$'yi bulduğumuza göre

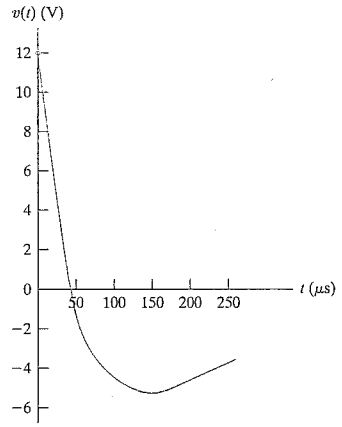
$$12 = A_1 + A_2$$
$$-450 \times 10^3 = -5000A_1 - 20{,}000A_2$$

yazabiliriz. A_1 ve A_2 için iki denklemi çözerek, $A_1 = -14$ V ve $A_2 = 26$ V elde ederiz. Bu değerleri Eş. 8.18'e yerleştirerek aşırı sönümlü gerilim tepkisini elde ederiz.

$$v(t) = (-14e^{-5000t} + 26e^{-20{,}000t}) \text{ V}, \quad t \geq 0.$$

Hesaplamaların doğruluğunu kontrol etmek için, $v(0) = 12$ V ve $dv(0^+)/dt = -450{,}000$ V/S olduğuna dikkat ediniz.

d) Şekil 8.7, t'ye karşı $v(t)$ grafiğini $0 \leq t \leq 250$ μs aralığında göstermektedir.



Şekil 8.7 Örnek 8.2 için gerilim tepkisi.

Örnek 8.3 **Bir Paralel *RLC* Devrenin Doğal Tepkisinde Dal Akımlarının Hesaplanması**

Depolanan enerji bırakıldığı süre içinde Örnek 8.2'deki (Şekil 8.6) üç daldaki i_R, i_L ve i_C akımlarıyla ilgili bağıntıları bulunuz.

Çözüm

Örnek 8.2'nin çözümünden üç daldaki gerilimi de biliyoruz:

$$v(t) = (-14e^{-5000t} + 26e^{-20{,}000t})\ \text{V}, \quad t \geq 0.$$

Direncin olduğu daldaki akım,

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{200} = (-70e^{-5000t} + 130e^{-20{,}000t})\ \text{mA}, \quad t \geq 0$$

olacaktır. İndüktörün olduğu daldaki akımı bulmanın iki yolu vardır. Bunlardan biri, indüktörün terminalindeki akım ve gerilim arasındaki

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(x)\,dx + I_0.$$

integral bağıntısını kullanmaktır. İkinci yaklaşım kapasitörün olduğu daldaki akımı bulmak ve sonra $i_R + i_L + i_C = 0$ durumunu kullanmaktır. Bu yaklaşımı kullanırsak, kapasitif daldaki akım

$$\begin{aligned} i_C(t) &= C\frac{dv}{dt} \\ &= 0.2 \times 10^{-6}(70{,}000e^{-5000t} - 520{,}000e^{-20{,}000t}) \\ &= (14e^{-5000t} - 104e^{-20{,}000t})\ \text{mA}, \quad t \geq 0^+ \end{aligned}$$

bulunur. $i_C(0^+) = -90$ mA olduğuna dikkat ediniz. Bu sonuç Örnek 8.2 ile uyumludur.

Şimdi indüktörün olduğu daldaki akımı, $i_R + i_C + i_L = 0$ ilişkisini kullanarak bulalım.

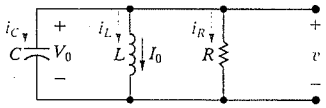
$$\begin{aligned} i_L(t) &= -i_R(t) - i_C(t) \\ &= (56e^{-5000t} - 26e^{-20{,}000t})\ \text{mA}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Verilen integral ilişkisi ile aynı sonucun bulunduğunu göstermeyi Değerlendirme Problemi 8.2'de size bırakıyoruz. i_L bağıntısının indüktörün başlangıç akımıyla uyumlu olduğuna dikkat ediniz.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 1 – Paralel *RLC* Devrelerinin doğal ve basamak tepkisini belirleyebilmek A

8.2 i_L ve v arasındaki integral ilişkisini kullanarak Şekil 8.6'daki i_L için gerekli ifadeyi bulunuz.



Çözüm: $i_L(t) = (56e^{-5000t} - 26e^{-20{,}000t})$ mA, $t \geq 0$).

8.3 Verilen devrede $R = 2$ kΩ, $L = 250$ mH ve $C = 10$ nF'dır. İndüktördeki başlangıç akımı –4A ve kapasitördeki başlangıç gerilimi 0 V'tur. Çıkış sinyali gerilimi v'dir. (a) $i_R(0^+)$; (b) $i_C(0^+)$; (c) $dv(0^+)/dt$; (d) A_1; (e) A_2 ve (f) $t \geq 0$ iken $v(t)$'yi bulunuz.

Çözüm: (a) 0;
(b) 4 A;
(c) 4×10^8 V/s;
(d) 13,333 V;
(e) –13,333 V;
(f) $13{,}333(e^{-10{,}000t} - e^{-40{,}000t})$ V.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 8.2, 8.5 ve 8.19'u da çözmeyi deneyiniz.

Eksik Sönümlü Gerilim tepkisi

$\omega_0^2 > \alpha^2$ iken, karakteristik denklemin kökleri karmaşıktır ve tepki de eksik sönümlüdür. Kolaylık için, s_1 ve s_2 köklerini aşağıdaki şekilde ifade edeceğiz.

$$\begin{aligned} s_1 &= -\alpha + \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} \\ &= -\alpha + j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \\ &= -\alpha + j\omega_d \end{aligned} \tag{8.25}$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d. \tag{8.26}$$

Burada,

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \tag{8.27}$$

◄ **Sönümlü radyan frekansı**

ile verilmektedir. ω_d terimi, sönümlü radyan frekansı olarak adlandırılır. Bu terminoloji için açıklamayı daha sonra yapacağız.

Paralel *RLC* devresinin eksik sönümlü gerilim tepkisi

$$v(t) = B_1e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2e^{-\alpha t}\sin\omega_d t, \tag{8.28}$$

◄ **Eksik sönümlü gerilim doğal tepkisi- paralel *RLC* devreleri**

şeklindedir. Eş. 8.18'den Eş. 8.28'e geçiş yapabilmek için Euler özdeşliğini kullanırız.

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta. \tag{8.29}$$

Böylece,

$$\begin{aligned} v(t) &= A_1e^{(-\alpha+j\omega_d)t} + A_2e^{-(\alpha+j\omega_d)t} \\ &= A_1e^{-\alpha t}e^{j\omega_d t} + A_2e^{-\alpha t}e^{-j\omega_d t} \\ &= e^{-\alpha t}(A_1\cos\omega_d t + jA_1\sin\omega_d t + A_2\cos\omega_d t - jA_2\sin\omega_d t) \\ &= e^{-\alpha t}[(A_1 + A_2)\cos\omega_d t + j(A_1 - A_2)\sin\omega_d t] \end{aligned}$$

elde ederiz.

Eş. 8.18'den 8.28'e geçerken, gelişigüzel $A_1 + A_2$ ve $j(A_1 - A_2)$ sabitlerini gelişigüzel yeni katsayılar olan B_1 ve B_2 ile değiştiririz.

$$v = e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$$

$$= B_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} \sin \omega_d t.$$

B_1 ve B_2 sabitleri gerçektir, karmaşık değildir çünkü gerilim gerçek bir fonksiyondur. $B_2 = j(A_1 - A_2)$ yüzünden yanılmayınız. Eksik sönümlü durumda, A_1 ve A_2 birbirlerinin karmaşık eşleniğidir ve bu nedenle B_1 ve B_2 gerçektir. (Problem 8.13 ve 8.14'e bakınız.) Eksik sönümlü gerilimi B_1 ve B_2 katsayılarıyla tanımlamanın nedeni, v gerilimi için daha basit bir ifade elde etmemizdir.

Eksik sönümlü durumda, B_1 ve B_2'yi bulmak için iki denklem aşağıdadır:

$$v(0^+) = V_0 = B_1, \tag{8.30}$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2. \tag{8.31}$$

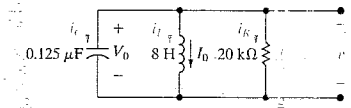
Eksik sönümlü tepkinin genel durumuna bir bakalım. Öncelikle, trigometrik fonksiyonlar bu tepkinin salınımlı olduğunu göstermektedir. Yani gerilim artı ve eksi değerler arasında değişmektedir. Gerilimin salınım oranı ω_d'ye bağlıdır. İkinci olarak salınımın genliği üstel olarak azalmaktadır. Gençliğin düşme oranı da α ile belirlenir. α salınımların ne kadar çabuk indiğini belirlediğinden; **sönümlenme faktörü** veya **sönümlenme katsayısı** olarak adlandırılır. Bu ω_d'nin neden sönümlü radyan frekansı olarak adlandırıldığını açıklar. Herhangi bir sönüm olmazsa $\alpha = 0$'dır ve salınımın frekansı ω_0'dır. Devrede tüketici eleman R olduğunda α sıfır değildir ve salınım frekanslı ω_d, ω_0'dan küçüktür. Bu nedenle α sıfır değilse salınımın frekansı sönümlüdür denir.

Bu salınım, devredeki iki tip enerji depolama elemanı ile mümkündür: İndüktör ve kapasitör. (Bu elektrik devresi ile mekanik arasında benzetim yapacak olursak, kütleye asılı yayda, yay ve hareket eden kütlenin ikisinde de enerji depolanabildiğinden salınım olması mümkündür.) Örnek 8.44'te tepkinin eksik sönümlü olduğu devreyi inceledikten sonra eksik sönümlü tepki hakkında daha fazla şey söyleyebiliriz. Özetle, eksik sönümlü tepkiyi bulmak için yöntem aşırı sönümlü durumla aynı, ancak tepki denklemleri ve sabitleri bulmak için kullanılan denklemler tamamen farklıdır.

Örnek 8.4 Bir Paralel *RLC* Devrenin Eksik Sönümlü Doğal Tepkisinin Bulunması

Şekil 8.8'de görülen devrede, $V_0 = 0$ ve $I_0 = -12.25$ mA'dır.

a) Karakteristik denklemin köklerini hesaplayınız.
b) $t = 0^+$'da, v ve dv/dt'yi hesaplayınız.
c) $t \geq 0$ için gerilim tepkisini hesaplayınız.
d) $0 \leq t \leq 11$ ms aralığında t'ye karşı $v(t)$ grafiğini çiziniz.



Şekil 8.8 Örnek 8.4 için devre şeması.

Çözüm:

a)

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{10^6}{2(20)10^3(0.125)} = 200 \text{ rad/s},$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{10^6}{(8)(0.125)}} = 10^3 \text{ rad/s}$$

olduğundan

$$\omega_0^2 > \alpha^2$$

bulunur. Bu nedenle tepki eksik sönümlüdür. Şimdi,

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{10^6 - 4 \times 10^4} = 100\sqrt{96}$$

$$= 979.80 \text{ rad/s},$$

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d = -200 + j979.80 \text{ rad/s},$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d = -200 - j979.80 \text{ rad/s}$$

hesaplarız. Eksik sönümlü durum için, s_1 ve s_2'yi genellikle çözmeyiz çünkü bu halde onları açıkça kullanmayız. Bununla birlikte s_1 ve s_2'nin neden karmaşık frekans olarak adlandırıldığını bu örnek göstermektedir.

b) v, kapasitörün terminallerindeki gerilim olduğundan

$$v(0) = v(0^+) = V_0 = 0$$

bulunur. $v(0^+) = 0$ olduğu için, $t = 0^+$ anında direncin olduğu daldaki akım sıfırdır. Bu yüzden $t = 0^+$ anında kapasitör akımı, indüktör akımının negatifidir:

$$i_C(0^+) = -(-12.25) = 12.25 \text{ mA}.$$

Dolayısıyla türevin başlangıç değeri

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{(12.25)(10^{-3})}{(0.125)(10^{-6})} = 98{,}000 \text{ V/s}$$

elde edilir.

c) Eş. 8.30 ve 8.31'den, $B_1 = 0$ ve

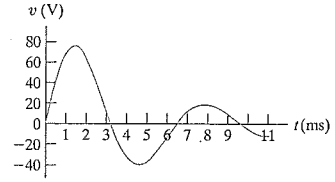
$$B_2 = \frac{98{,}000}{\omega_d} \approx 100 \text{ V}$$

çıkar. α, ω_d, B_1 ve B_2'nin nümerik değerlerini, $v(t)$ bağıntısında yerine koyarsak

$$v(t) = 100e^{-200t} \sin 979.80t \text{ V}, \quad t \geq 0$$

denklemini elde ederiz.

d) Şekil 8.9, enerji bırakıldıktan sonraki ilk 11 ms için t'ye karşı $v(t)$ grafiğini göstermektedir. Bu şekil, eksik sönümlü tepkinin sönümlü salınım haline açıkça işaret etmektedir. $v(t)$ gerilimi son değerine, son değerden daha büyük ya da daha küçük değerler arasında değişerek ulaşmaktadır. Ayrıca, son değerin etrafındaki bu salınımlar zamanla üstel olarak azalmaktadır.



Şekil 8.9 Örnek 8.4 için gerilim tepkisi.

Eksik Sönümlü Tepkinin Karakteristiği

Eksik sönümlü tepkinin birçok önemli karakteristiği vardır. İlki, devrede tüketici kayıplar azaldıkça, salınımın devam etmesi artmakta ve salınım frekansı ω_0'a yaklaşmaktadır. Diğer bir deyişle, $R \to \infty$ iken Şekil 8.8'deki devrede kayıp sıfıra yaklaşmaktadır çünkü $p = v^2/R$'dir ve $R \to \infty$ için $\alpha \to 0$ olmaktadır. Bu durumda $\omega_d \to \omega_0$'a yaklaşmaktadır. $\alpha = 0$ iken, gerilimin en büyük değeri sabit kalmaktadır; böylece ω_0'da salınım devamlı olmaktadır. Örnek 8.4'te, R sonsuz olsaydı, $v(t)$ için çözüm

$$v(t) = 98 \sin 1000t \text{ V}, \quad t \geq 0$$

olurdu. Böylece bu durumda salınım devamlı olurdu, gerilimin en yüksek değeri 98 V ve frekansı 1000 rad/s olurdu.

Şimdi eksik sönümlü ve aşırı sönümlü tepki arasındaki farkı daha iyi açıklayabiliriz. Eksik sönümlü durumda, tepki son değeri etrafında salınmakta, yani yaylanmaktadır. Bu salınım çınlama olarak da adlandırılmaktadır. Aşırı sönümlü bir sistemde tepki son değerine salınım veya çınlama yapmadan ulaşır. İkinci mertebeden bir sistemin istenen tepkisini belirlerken, son değerine en kısa zamanda ulaşmasını isteyebilirsiniz ve son değerin etrafındaki küçük salınımlar önemli olmayabilir. Eğer öyleyse, sistem elemanlarıyla eksik sönümlü bir tepki oluşturmak için tasarım yapabilirsiniz. Öte yandan, elemanların yanmasını önlemek için tepkinin, son değerini aşmamasını isteyebilirsiniz. Bu durumda, aşırı sönümlü tepki oluşturmak için tasarım yapabilirsiniz ancak son değere ulaşmak için tepki süresinin yavaşlamasını kabullenmelisiniz.

✓ DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 1 – Paralel *RLC* Devrelerin Doğal ve Basamak Tepkisini Belirleyebilmek

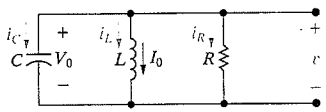
8.4 10 mH indüktör, 1 μF kapasitör ve değişken bir direnç, devredeki gibi paralel bağlanmıştır. Direnç karakteristik denklemin kökleri $-8000 \pm j\,6000$ rad/s olacak şekilde ayarlanmıştır. Kapasitördeki başlangıç gerilimi 10 V ve indüktördeki başlangıç akımı 80 mA'dir.

a) R;

b) $dv(0^+)/dt$

c) v için B_1 ve B_2 ve

d) $i_L(t)$ değerini bulunuz.



Cevap: (a) 62.5 Ω;
(b) −240,000 V/s;
(c) $B_1 = 10$ V, $B_2 = -80/3$ V;
(d) $i_L(t) = 10e^{-8000t}$ [8 cos 6000t + (82/3) sin 6000t] mA, $t \geq 0$ için.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 8.3 ve 8.20'yi de çözmeyi deneyiniz.

Kritik Sönümlü Gerilim Tepkisi

Şekil 8.8'deki, ikinci mertebeden denklem, $\omega_0^2 = \alpha^2$ veya $\omega_0 = \alpha$ olduğunda kritik sönümlüdür. Bir devre kritik sönümlü olduğunda salınım yapmak üzeredir. Ayrıca, karakteristik denklemin kökleri gerçektir ve birbirine eşittir, yani

$$s_1 = s_2 = -\alpha = -\frac{1}{2RC} \tag{8.32}$$

bulunur. Bu durum olduğunda, gerilim için çözüm, artık Eş. 8.18'deki biçimde olmayacaktır. Bu denklem $s_1 = s_2 = \alpha$ olduğu için artık kullanılmaz ve gerilimin

$$v = (A_1 + A_2)e^{-\alpha t} = A_0 e^{-\alpha t} \tag{8.33}$$

şeklinde olduğunu öngörür. Burada A_0 bir sabittir. Eşitlik 8.33 sadece tek bir A_0 sabitiyle, iki farklı başlangıç koşulunu (V_0, I_0) sağlayamaz. Devre parametreleri R ve C'nin α'yı ayarladığını hatırlayınız.

Bu çıkmaz için çözümün Eş. 8.18'deki biçimi aldığı varsayımı ile başlayabiliriz. Karakteristik denklemin kökleri eşitse, diferansiyel denklemin çözümü başka bir biçim alacaktır, yani

$$v(t) = D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t}. \tag{8.34}$$

◄ **Kritik sönümlü gerilim doğal tepkisi– paralel *RLC* devre**

olacaktır. Böylece katlı kök olması durumunda, çözümde basit bir üstel terim ile doğrusal ve üstel terimlerin çarpımının toplamı olacaktır. Eş. 8.34'ün doğrulanması diferansiyel denklemler hakkındaki bir dersin konusudur. Çözümü bulurken, D_1 ve D_2'yi elde etmek için aşırı ve eksik sönümlü durumlardaki yöntem aynen kullanılır: D_1 ve/veya D_2'yi içeren iki denklemi yazmak için gerilim ve gerilimin zamana göre türevinin başlangıç koşullarını kullanırız.

Eş. 8.34'ten, D_1 ve D_2'yi bulmak için gerekli iki denklem,

$$v(0^+) = V_0 = D_2, \tag{8.35}$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = D_1 - \alpha D_2 \tag{8.36}$$

şeklindedir.

Gördüğümüz gibi, kritik sönümlü tepki durumunda, $v(t)$ ile D_1 ve D_2 sabitlerini bulmak için kullanılan denklemler aşırı ve eksik sönümlü tepkilerden farklıdır ancak genel yöntem aynıdır. Kritik sönümlü sistemlerle pratikte karşılaşmak zordur çünkü, ω_0 tam olarak α'ya eşit olmalıdır. Her iki değer de, devre parametrelerine bağlıdır ve gerçek bir devrede bu eşitlik ilişkisini sağlayan devre bileşenlerini bulmak çok zordur.

Örnek 8.5, paralel *RLC* devresinin kritik sönümlü tepkisini bulma yöntemini anlatmaktadır.

Örnek 8.5 **Bir Paralel *RLC* Devrenin Kritik Sönümlü Doğal Tepkisinin Bulunması**

a) Örnek 8.4'deki devrede (Şekil 8.8), kritik sönümlü gerilim tepkisi olması için R'nin değerini bulunuz.

b) $t \geq 0$ için $v(t)$'yi bulunuz.

c) $0 \leq t \leq$ tms aralığında t'ye karşı $v(t)$ grafiğini çiziniz.

Çözüm

a) Örnek 8.4'te $\omega_0^2 = 10^6$ olduğunu biliyoruz. Bu nedenle, kritik sönüm için

$$\alpha = 10^3 = \frac{1}{2RC}$$

veya

$$R = \frac{10^6}{(2000)(0.125)} = 4000\ \Omega$$

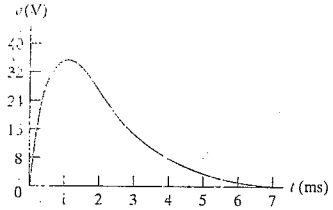
olmalıdır.

b) Örnek 8.4'ün çözümünde, $v(0^+) = 0$ ve $dv(0^+)/dt = 98000$ V/s olduğunu biliyoruz. Eş. 8.35 ve 8.36'dan, $D_2 = 0$ ve $D_1 = 98000$ V/s'dir. α, D_1 ve D_2 değerlerini Eş. 8.34'e yerleştirirsek

$$v(t) = 98{,}000te^{-1000t}\ \text{V}, \quad t \geq 0$$

değerini verir.

c) Şekil 8.10 $0 \leq t \leq 7$ ms aralığında t'ye karşı $v(t)$ grafiğini göstermektedir.



Şekil 8.10 ▲ Örnek 8.5 için gerilim tepkisi

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 1 - Paralel RLC devrelerinin doğal ve basamak tepkisini belirleyebilmek.

8.5 Değerlendirme Problemi 8.4'teki devrede bulunan direnç kritik sönüm için ayarlanmıştır. Endüktans ve kapasitans değerleri sırasıyla 0.4 H ve 10 μF'dır. Devrede başlangıçta depolanan enerji 25 mJ'dür ve kapasitör ile indüktör arasında eşit paylaştırılmıştır. (a) R; (b) V_0; (c) I_0; (d) v için D_1 ve D_2 ve (e) i_R, $t \geq 0^+$ değerlerini bulunuz.

Cevap: (a) 100 Ω; (b) 50 V; (c) 250 mA; (d) –50,000 V/s, 50 V; (e) $i_R(t) = (-500te^{-500t} + 050e^{-500t})$ A, $t \geq 0^+$.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 8.4 ve 8.21'i de çözmeyi deneyiniz.

Sonuçların Özeti

Paralel *RLC* devrelerinin doğal tepkisiyle ilgili konuyu, sonuçların kısa bir özeti ile bitiriyoruz. Doğal tepkiyi bulmak için ilk adım, karakteristik denklemin köklerini hesaplamaktır. Böylece, tepkinin aşırı sönümlü, eksik sönümlü veya kritik sönümlü olduğunu hemen bilebilirsiniz.

Kökler gerçek ve birbirinden farklıysa ($\omega_0^2 < \alpha^2$), tepki aşırı sönümlüdür ve gerilim

$$v(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$$

ile verilir.

Burada

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2},$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2},$$
$$\alpha = \frac{1}{2RC},$$
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

ile tanımlıdır. A_1 ve A_2 değerleri aşağıdaki denklemlerin çözümüyle belirlenir:

$$v(0^+) = A_1 + A_2,$$
$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = s_1A_1 + s_2A_2.$$

Kökler karmaşıksa ve $\omega_0^2 > \alpha^2$ sağlanıyorsa, tepki eksik sönümlüdür ve gerilim

$$v(t) = B_1e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2e^{-\alpha t}\sin\omega_d t$$

bulunur, burada,

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

ile verilir. B_1 ve B_2 değerleri aşağıdaki denklemlerin çözümüyle bulunur:

$$v(0^+) = V_0 = B_1,$$
$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2.$$

Karakteristik denklemin kökleri gerçek ve birbirine eşitse ($\omega_0^2 = \alpha^2$), gerilim tepkisi

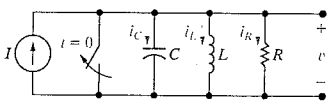
$$v(t) = D_1te^{-\alpha t} + D_2e^{-\alpha t}$$

olur ve α diğer çözüm biçimlerinde olduğu gibidir. D_1 ve D_2 sabitlerinin değerini bulmak için aşağıdaki denklemler çözülür:

$$v(0^+) = V_0 = D_2,$$
$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = D_1 - \alpha D_2.$$

8.3 Paralel *RLC* Devresinin Basamak Tepkisi

Paralel *RLC* devresinin basamak tepkisini bulurken, paralel dallardaki gerilim veya dc akım kaynağının aniden devreye uygulanmasıyla bireysel dallardaki akım bulunur. Akım kaynağı uygulandığında devrede enerji depolanmış olabilir veya olmayabilir. Bu durum, Şekil 8.11'deki devrede gösterilmiştir. İkinci mertebeden denklemin basamak tepkisini bulmak için genel bir yöntem geliştirmek amacıyla endüktif daldaki akımı (i_L) bulmaya odaklanırız.



Şekil 8.11 ▲ Paralel *RLC* devresinin basamak tepkisini belirlemek için kullanılan devre şeması.

Bu akım, t arttıkça sıfır olmadığından önemlidir. Ayrıca anahtar açıldıktan uzun süre sonra indüktör akımı, dc akım kaynağına (I) eşit olmaktadır. Basamak tepkisini bulmak için odaklandığımızdan, devrede başlangıçta depolanan enerjinin sıfır olduğunu kabul ediyoruz. Bu kabullenme hesaplamaları basitleştirmektedir ve temel yöntemi değiştirmemektedir. Örnek 8.10'da başlangıçta depolanan enerjinin genel yönteme nasıl dahil edildiğini göreceğiz.

İndüktör akımı i_L'yi bulmak için sürücü fonksiyonu I'ya eşit olan ikinci mertebeden denklemi çözmeliyiz. Bu denklemi şu şekilde elde ederiz. Kirchhoff akım yasasını kullanarak

$$i_L + i_R + i_C = I$$

veya

$$i_L + \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} = I \tag{8.37}$$

elde ederiz.

$$v = L\frac{di_L}{dt} \tag{8.38}$$

olduğundan

$$\frac{dv}{dt} = L\frac{d^2i_L}{dt^2} \tag{8.39}$$

bulunur. Eş. 8.38 ve 8.39'u, Eş. 8.37'ye yerleştirirsek

$$i_L + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + LC\frac{d^2i_L}{dt^2} = I \tag{8.40}$$

denklemini verir. Kolaylık için denklemi L_C'ye böleriz ve terimleri yeniden düzenleriz:

$$\frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = \frac{I}{LC}. \tag{8.41}$$

Eş. 8.41'i, Eş. 8.3'le karşılaştırınca, eşitliğin sağ tarafında sıfır olmayan terimin işlemleri değiştirdiği ortaya çıkmaktadır. Eş. 8.41'in nasıl çözüldüğünü göstermeden önce çözümü dolaylı olarak elde edeceğiz. Eş. 8.41'in çözümünü bilirsek, doğrudan çözümü açıklamak daha kolay olacaktır.

Dolaylı Yaklaşım

Gerilim v'yi önce bularak i_L'yi dolaylı olarak çözebiliriz. Bunu Kısım 8.2'de anlatılan tekniklerle yapabiliriz, çünkü v'nin sağladığı diferansiyel denklem Eş. 8.3 ile özdeştir. Bunu görmek için Eş. 8.37'ye dönüp i_L'yi v'nin fonksiyonu olarak ifade edeceğiz.

$$\frac{1}{L}\int_0^t v\,d\tau + \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} = I. \tag{8.42}$$

Eş. 8.42'nin t'ye göre türevini alırsak, eşitliğin sağ tarafı sıfır olur, çünkü I_0 bir sabittir. Böylece

$$\frac{v}{L} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + C\frac{d^2v}{dt^2} = 0$$

veya

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0 \tag{8.43}$$

olur. Kısım 8.2'de anlatıldığı gibi, v'nin çözümü karakteristik denklemin köklerine bağlıdır. Olası üç çözüm şu şekildedir:

$$v = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}, \tag{8.44}$$

$$v = B_1e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2e^{-\alpha t}\sin\omega_d t, \tag{8.45}$$

$$v = D_1te^{-\alpha t} + D_2e^{-\alpha t}. \tag{8.46}$$

Dikkat: $t > 0$ için devrede bir kaynak olduğundan, Eş. 8.44 - 8.46'daki katsayıları bulurken $t = 0^+$'da kaynak akımının etkisini de hesaba katmalısınız.

i_L'nin olası üç çözümünü bulmak için, Eş. 8.44 – 8.46'yı Eş. 8.37'ye yerleştiririz. Bunu yaptığınızda i_L'nin üç çözümünün de aşağıdaki gibi olduğunu kanıtlayabilirsiniz.

$$i_L = I + A_1'e^{s_1t} + A_2'e^{s_2t}, \tag{8.47}$$

$$i_L = I + B_1'e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2'e^{-\alpha t}\sin\omega_d t, \tag{8.48}$$

$$i_L = I + D_1'te^{-\alpha t} + D_2'e^{-\alpha t}. \tag{8.49}$$

Burada A_1', A_2', B_1', B_2', D_1', D_2' gelişigüzel sabitlerdir.

Her durumda, bu sabitler gerilim çözümünden gelen gelişigüzel katsayılar cinsinden bulunabilir. Bununla birlikte, bu yaklaşım oldukça elverişsizdir.

Doğrudan Yaklaşım

Katsayıları, tepki fonksiyonunun başlangıç değerleri cinsinden, doğrudan bulmak daha kolaydır. Tartışılan bu devre için, üslü katsayıları, $i_L(0)$ ve $di_L(0)/dt$ değerlerini kullanarak bulabiliriz.

Sabit uyarım fonksiyonlu, ikinci mertebeden diferansiyel denklemin çözümü, uyarım fonksiyonu ve doğal tepki ile özdeş biçimli tepki fonksiyonunun toplamına eşittir. Bu nedenle basamak tepkisinin çözümünü şu biçimde yazabiliriz.

$$i = I_f + \left\{\begin{matrix}\text{doğal tepki ile aynı}\\ \text{biçimdeki fonksiyon}\end{matrix}\right\}, \tag{8.50}$$

veya

$$v = V_f + \left\{ \begin{array}{l} \text{doğal tepki ile aynı} \\ \text{biçimde fonksiyon} \end{array} \right\}, \qquad (8.51)$$

Burada I_f ve V_f tepki fonksiyonunun son değerini göstermektedir. Şekil 8.8'deki gerilim gibi son değer sıfır olabilir.

Örnek 8.6-8.10 paralel *RLC* devresinin basamak tepkisini doğrudan yaklaşım kullanarak bulma tekniklerini açıklamaktadır.

Örnek 8.6 Bir Paralel *RLC* Devrenin Aşırı Sönümlü Basamak Tepkisinin Bulunması

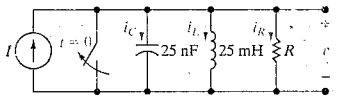
Şekil 8.12'deki devrede depolanan enerji başlangıçta sıfırdır. $t = 0$ anında 24 mA'lık akım kaynağı devreye uygulanmıştır. Direncin değeri 400 Ω'dur.

a) i_L'nin başlangıç değeri nedir?

b) di_L/dt'nin başlangıç değeri nedir?

c) Karakteristik denklemin kökleri nelerdir?

d) $t \geq 0$ iken, $i_L(t)$'nin nümerik ifadesi nedir?



Şekil 8.12 Örnek 8.6 için devre şeması.

Çözüm

a) DC akım kaynağı devreye uygulanmadan önce devrede enerji depolanmamıştır. Bu yüzden indüktördeki başlangıç akımı sıfırdır. İndüktör, indüktör akımının anlık değişmesini önlediğinden, anahtar açıldıktan hemen sonra $i_L(0) = 0$'dır.

b) Kapasitördeki başlangıç gerilimi anahtar açılmadan önce sıfırdır. Bu nedenle açıldıktan hemen sonra da sıfır olacaktır. $v = L\,di_L/dt$ olduğundan

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = 0$$

bulunur.

c) Devre elemanlarını kullanarak

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{10^{12}}{(25)(25)} = 16 \times 10^8,$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{10^9}{(2)(400)(25)} = 5 \times 10^4 \text{ rad/s},$$

veya

$$\alpha^2 = 25 \times 10^8$$

elde ederiz. $\omega_0^2 < \alpha^2$ olduğundan, karakteristik denklemin kökleri gerçek ve farklıdır.

$$s_1 = -5 \times 10^4 + 3 \times 10^4 = -20{,}000 \text{ rad/s},$$

$$s_2 = -5 \times 10^4 - 3 \times 10^4 = -80{,}000 \text{ rad/s}.$$

d) Karakteristik denklemin kökleri gerçek ve farklı olduğu için, indüktör akımının tepkisi aşırı sönümlüdür. Bu nedenle, $i_L(t)$ Eş. 8.47'deki biçimi alır, yani,

$$i_L = I_f + A_1' e^{s_1 t} + A_2' e^{s_2 t}.$$

▷ İndüktör akımının aşırı sönümlü paralel *RLC* devresindeki basamak tepkisi

Bu çözümden, A_1' ve A_2''yü belirlemek için aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$i_L(0) = I_f + A_1' + A_2' = 0,$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = s_1 A_1' + s_2 A_2' = 0.$$

A'_1 ve A'_2'yi çözersek

$$A_1' = -32 \text{ mA} \quad \text{ve} \quad A_2' = 8 \text{ mA}$$

elde ederiz. $i_L(t)$'nin nümerik çözümünü de

$$i_L(t) = (24 - 32e^{-20{,}000t} + 8e^{-80{,}000t}) \text{ mA}, \quad t \geq 0$$

olarak buluruz.

Örnek 8.7 Bir Paralel *RLC* Devrenin Eksik Sönümlü Basamak Tepkisinin Bulunması

Örnek 8.6'daki devrede bulunan direnç (Şekil 8.12) 625 Ω'a çıkarılmıştır. $t \geq 0$ için i_L'yi bulunuz.

Çözüm

L ve C değişmediğinden, ω_0^2 Örnek 8.6'daki değerle aynıdır, yani $\omega_0^2 = 16 \times 10^8$'dir. R'yi 625 Ω'a çıkarmak, α'yı 3.2×10^4rad/s'ye düşürür. $\omega_0^2 > \alpha^2$ olduğundan, karakteristik denklemin kökleri karmaşıktır.

$$s_1 = -3.2 \times 10^4 + j2.4 \times 10^4 \text{ rad/s},$$

$$s_2 = -3.2 \times 10^4 - j2.4 \times 10^4 \text{ rad/s}.$$

Akım tepkisi eksik sönümlüdür ve Eş. 8.48 ile

$$i_L(t) = I_f + B_1' e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2' e^{-\alpha t} \sin \omega_d t.$$

olarak verilmiştir.

▷ İndüktör akımının eksik sönümlü paralel *RLC* devresindeki basamak tepkisi

Burada, α 32,000 rad/s, ω_d 24,000 rad/s ve I_f ise 24 mA'dir.

Örnek 8.6'da olduğu gibi B_1' ve B_2' sabitleri başlangıç koşullarıyla belirlenir. Denklemler aşağıdaki şekildedir:

$$i_L(0) = I_f + B_1' = 0,$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = \omega_d B_2' - \alpha B_1' = 0.$$

O halde

$$B_1' = -24 \text{ mA}$$

ve

$$B_2' = -32 \text{ mA}$$

bulunur. $i_L(t)$'nin nümerik çözümü ise

$$i_L(t) = (24 - 24e^{-32{,}000t} \cos 24{,}000t - 32e^{-32{,}000t} \sin 24{,}000t) \text{ mA}, \quad t \geq 0$$

elde edilir.

Örnek 8.8 Bir Paralel *RLC* Devrenin Kritik Sönümlü Basamak Tepkisinin Bulunması

Örnek 8.6'daki devrede bulunan direnç (Şekil 8.12) 500 Ω'a ayarlandığında, $t \geq 0$ için i_L'yi bulunuz.

Çözüm

ω_0^2'nin 16×10^8 olarak kaldığını biliyoruz. R, 500 Ω'a ayarlandığında, α 4×10^{-4} s^{-1} olur. Bu durumda tepki kritik sönümlüdür. Bu nedenle $i_L(t)$ Eş. 8.49'daki biçimi alır:

$$i_L(t) = I_f + D_1' t e^{-\alpha t} + D_2' e^{-\alpha t}.$$

▷ İndüktör akımın kritik sönümlü paralel *RLC* devresindeki basamak tepkisi

D_1' ve D_2' yine başlangıç koşulları ile hesaplanır.

$$i_L(0) = I_f + D_2' = 0,$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = D_1' - \alpha D_2' = 0.$$

Böylece

$$D_1' = -960{,}000 \text{ mA/s} \quad \text{ve} \quad D_2' = -24 \text{ mA}$$

bulunur. $i_L(t)$ için nümerik çözüm,

$$i_L(t) = (24 - 960{,}000te^{-40{,}000t} - 24e^{-40{,}000t}) \text{ mA}, \quad t \geq 0$$

elde edilir.

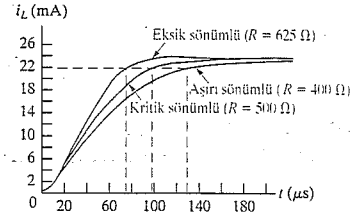
Örnek 8.9 Üç Basamak Tepki Biçiminin Karşılaştırılması

a) Örnek 8.6-8.8'de hesaplanan aşırı sönümlü, eksik sönümlü ve kritik sönümlü tepkileri, aralığı 0'dan 220 μs'ye kadar değişen grafiğe çiziniz.

b) (a) şıkkı için çizdiğiniz grafikleri kullanarak i_L'nin son değerinin %90'ına ulaşması için gereken süreyi bulunuz.

c) (b)'de elde ettiğiniz verilere dayanarak bir tasarımda, çıkışın son durumunun %90'ına en kısa sürede ulaşması için hangi tepkiyi kullanırdınız?

d) Bir tasarımda akımın son durumunun aşılmamasını garanti altına almak için hangi tepkiyi seçerdiniz?



Şekil 8.13 ▲ Örnek 8.9 için akım grafikleri.

Çözüm

a) Şekil 8.13'e bakınız.

b) i_L'nin son değeri 24 mA olduğundan, i_L = 21.6 mA değeri için zamanı okuyabiliriz. t_{od} = 130 μs, t_{cd} = 97 ms ve t_{ud} = 74 μs'dir.

c) Eksik sönümlü tepki, son durumun %90'ına en kısa sürede ulaşmaktadır. Tasarım belirlerken en önemli parametre zamansa bu tepki, istenen tepki türü olacaktır.

d) Grafiğe bakarak, kritik sönümlü ve aşırı sönümlü tepkilerin 24 mA'den fazla akım üretmediğini görebilirken, eksik sönümlü tepkinin akımın son değerini aştığını görebilirsiniz. İki tepki de tasarım özelliklerini karşılamakla birlikte, aşırı sönümlü tepkiyi kullanmak en iyisidir. Kritik sönümlü tepki olabilmesi için gerçek devre elemanlarıyla tasarımı gerçekleştirmek pratikte pek mümkün değildir.

Örnek 8.10 Başlangıçta Depolanmış Enerjisi Olan Bir Parallel *RLC* Devrenin Basamak Tepkisinin Bulunması

DC akım kaynağı uygulandığı anda Örnek 8.8'deki devrede (Şekil 8.12, R = 500 Ω) enerji depolanmıştır. İndüktörün başlangıç akımı 29 mA ve kapasitörün başlangıç gerilimi 50 V'tur. (a) $i_L(0)$; (b) $di_L(0)/dt$; (c) $i_L(t)$, $t \geq 0$; (d) $v(t)$, $t \geq 0$ değerlerini bulunuz.

Çözüm

a) İndüktör akımı aniden değişemeyeceği için dc akım kaynağı uygulandığı anda i_L'nin başlangıç değeri 29 mA olmak zorundadır.

b) Kapasitör indüktör başlangıç gerilimini 50 V'ta tutmaktadır. Dolayısıyla,

$$L\frac{di_L}{dt}(0^+) = 50,$$

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{50}{25} \times 10^3 = 2000 \text{ A/s}$$

bulunur.

c) Örnek 8.8'in çözümlerinde, akım tepkisinin kritik sönümlü olduğunu biliyoruz. Öyleyse,

$$i_L(t) = I_f + D_1'te^{-\alpha t} + D_2'e^{-\alpha t}$$

olur. Burada,

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 40{,}000 \text{ rad/s} \quad \text{ve} \quad I_f = 24 \text{ mA}$$

olarak verilmiştir. Başlangıç koşullarıyla elde edilen D_1' ve D_2' sabitlerinin hesaplanmasında başlangıçta depolanmış enerjinin etkisine dikkat ediniz. Önce, indüktör akımın başlangıç değerini kullanacağız:

$$i_L(0) = I_f + D_2' = 29 \text{ mA}.$$

Buradan

$$D_2' = 29 - 24 = 5 \text{ mA}$$

i elde ederiz. D_1''nin çözümü

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = D_1' - \alpha D_2' = 2000$$

veya

$$D_1' = 2000 + \alpha D_2'$$

$$= 2000 + (40{,}000)(5 \times 10^{-3})$$

$$= 2200 \text{ A/s} = 2.2 \times 10^6 \text{ mA/s}$$

bulunur.

Böylece $i_L(t)$'nin nümerik ifadesi şu şekilde olur:

$$i_L(t) = (24 + 2.2 \times 10^6 te^{-40{,}000t} + 5e^{-40{,}000t}) \text{ mA}, \quad t \geq 0.$$

d) $t \geq 0$ için $v(t)$ bağıntısını, indüktördeki akım ve gerilim arasındaki ilişkiyi kullanarak elde edebiliriz.

$$v(t) = L\frac{di_L}{dt}$$

$$= (25 \times 10^{-3})[(2.2 \times 10^6)(-40{,}000)te^{-40{,}000t} + 2.2 \times 10^6 e^{-40{,}000t} + (5)(-40{,}000)e^{-40{,}000t}] \times 10^{-3}$$

$$= -2.2 \times 10^6 te^{-40{,}000t} + 50e^{-40{,}000t} \text{ V}, \quad t \geq 0.$$

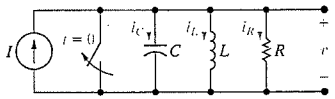
Bu sonucu kontrol etmek için, indüktördeki başlangıç geriliminin 50 V olduğunu kanıtlayalım:

$$v(0) = -2.2 \times 10^6(0)(1) + 50(1) = 50 \text{ V}.$$

✓ DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

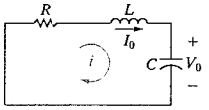
Hedef 1–Paralel RLC devresinin doğal ve basamak tepkisini belirleyebilmek

8.6 Verilen devrede, R = 500 Ω, L = 0.64 H, C = 1 μF ve I = –1 A'dir. Kapasitördeki başlangıç gerilim düşüşü 40 V'tur ve indüktörün başlangıç akımı 0.5 A'dir. (a) $i_R(0^+)$; (b) $i_C(0^+)$; (c) $di_L(0^+)/dt$; (d) s_1, s_2; (e) $i_L(t)$, $t \geq 0$; ve (f) $v(t)$, $t \geq 0$ ifadelerini bulunuz.



Çözüm: (a) 80 mA;
(b) –1.58 A;
(c) 62.5 A/s;
(d) (–1000 + j750) rad/s;
(–1000 – j750) rad/s;
(e) $[-1 + e^{-1000t}[1.5 \cos 750t + 2.0833 \sin 750t]$ A, için $t \geq 0$;
(f) $e^{-1000t}(40 \cos 750t - 2053.33 \sin 750t)$ V, $t \geq 0^+$ için.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 8.25–8.27'yi de çözmeyi deneyiniz.



Şekil 8.14 ▲ Seri *RLC* devresinin doğal tepkisini göstermek için kullanılan devre şeması.

8.4 Seri *RLC* Devrelerin Doğal ve Basamak Tepkisi

Seri *RLC* devrelerin doğal ve basamak tepkisini bulma yöntemi paralel *RLC* devrelerin doğal ve basamak tepkisini bulmak ile aynıdır. Çünkü her iki devrenin de diferansiyel denklemleri aynı biçimdedir. Şekil 8.14'te gösterilen devrede, kapalı yol üzerinde gerilimleri toplayarak başlarız:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,d\tau + V_0 = 0. \tag{8.52}$$

Eş. 8.52'nin t'ye göre türevini alırsak

$$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0 \tag{8.53}$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemi yeniden düzenlersek

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 \tag{8.54}$$

elde ederiz. Eş. 8.54'ü, Eş. 8.3'le karşılaştırırsak, her ikisinin de aynı biçimde olduğunu görürüz. Bu nedenle, Eş. 8.54'ün çözümünü bulmak amacıyla Eş. 8.3'ün çözümü için kullanılan yönetimi takip ederiz.

Eş. 8.54'ten, seri *RLC* devresinin karakteristik denklemini

Karakteristik denklem-seri *RLC* devre ▶

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0. \tag{8.55}$$

olarak buluruz. Karakteristik denklemin kökleri

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{8.56}$$

veya

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \tag{8.57}$$

bulunur. Seri *RLC* devre için neper frekansı (α)

Neper frekansı - seri *RLC* devre ▶

$$\alpha = \frac{R}{2L} \text{ rad/s}, \tag{8.58}$$

olur ve rezonans radyan frekansının ifadesi ise

Rezonans radyan frekansı–seri *RLC* devre ▶

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/s}. \tag{8.59}$$

bulunur. Seri *RLC* devresinin neper frekansının, paralel *RLC* devresinden farklı olduğuna, fakat rezonans radyan frekanslarının aynı olduğuna dikkat ediniz.

Akım tepkisi, sırasıyla $\omega_0^2 < \alpha^2$, $\omega_0^2 > \alpha^2$ veya $\omega_0^2 = \alpha^2$ durumlarına göre aşırı sönümlü, eksik sönümlü veya kritik sönümlü olabilir. Bu nedenle, akım için olası üç çözüm aşağıdadır:

$$i(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} \text{ (aşırı sönümlü)}, \tag{8.60}$$

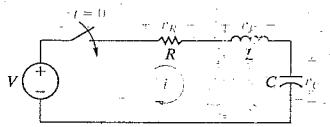
$$i(t) = B_1e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2e^{-\alpha t}\sin\omega_d t \text{ (eksik sönümlü)}, \tag{8.61}$$

$$i(t) = D_1te^{-\alpha t} + D_2e^{-\alpha t} \text{ (kritik sönümlü)}. \tag{8.62}$$

◀ Seri *RLC* devrelerinde akımın doğal tepkisi

Doğal akım tepkisini elde ettiğinizde, herhangi bir devre elemanı üzerindeki doğal gerilim tepkisini bulabilirsiniz.

Seri *RLC* devresinin basamak tepkisini bulma yöntemini açıklamak için paralel *RLC* devresiyle aynı yöntemi kullanırız. Şekil 8.15'teki kapasitör gerilimini tanımlayan diferansiyel denklemin, Şekil 8.11'deki indüktör akımını tanımlayan diferansiyel denklem ile aynı biçimde olduğunu gösteririz. Kolaylık için, anahtar kapandığı anda devrede enerji depolanmadığını varsayıyoruz.



Şekil 8.15 ▲ Seri *RLC* devresinin basamak tepkisini göstermek için kullanılan devre şeması.

Kirchhoff gerilim yasasını Şekil 8.15'teki devreye uygularsak,

$$V = Ri + L\frac{di}{dt} + v_C \tag{8.63}$$

denklemini verir. Akım (i), kapasitör gerilimine (v_C)

$$i = C\frac{dv_C}{dt} \tag{8.64}$$

ile bağlıdır. Buradan

$$\frac{di}{dt} = C\frac{d^2v_C}{dt^2} \tag{8.65}$$

denklemini elde ederiz. Eş. 8.64 ve 8.65'i Eş. 8.63'e yerleştirince, aşağıdaki sonuç ortaya çıkacaktır:

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = \frac{V}{LC}. \tag{8.66}$$

Eş. 8.66, Eş. 8.41 ile aynı biçimdedir. Bu nedenle, v_C'yi bulma yöntemiyle i_L'yi bulma yöntemi paralellik göstermektedir. v_C için olası üç çözüm aşağıdadır:

$$v_C = V_f + A_1'e^{s_1t} + A_2'e^{s_2t} \text{ (aşırı sönümlü)}, \tag{8.67}$$

$$v_C = V_f + B_1'e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2'e^{-\alpha t}\sin\omega_d t \text{ (eksik sönümlü)}, \tag{8.68}$$

$$v_C = V_f + D_1'te^{-\alpha t} + D_2'e^{-\alpha t} \text{ (kritik sönümlü)}. \tag{8.69}$$

◀ Seri *RLC* devrelerinde kapasitör gerilimin basamak tepkisi

Burada V_f, v_C'nin son değeridir. Şekil 8.15'te gösterilen devreden v_C'nin son değeri, dc kaynağın gerilimi V'dir.

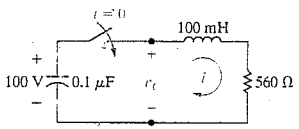
Örnek 8.11 ve 8.12 seri *RLC* devresinin doğal ve basamak tepkisini bulma tekniğini anlatmaktadır.

Örnek 8.11 Bir Seri *RLC* Devrenin Aşırı Sönümlü Doğal Tepkisinin Bulunması

Şekildeki devrede gösterilen 0.1 μF'lık kapasitör 100 V ile yüklenmiştir. $t = 0$ anında, 100 mH indüktör ve 560 Ω direncin seri bağlanması ile boşaltılmıştır.

a) $t \geq 0$ için $i(t)$'yi bulunuz.

b) $t \geq 0$ için $v_C(t)$'yi bulunuz.



Şekil 8.16 ▲ Örnek 8.11 için devre şeması.

Çözüm

a) $i(t)$'yi bulmak için ilk adım karakteristik denklemin köklerini hesaplamaktır. Verilen elemanların değerleri için,

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$= \frac{(10^3)(10^6)}{(100)(0.1)} = 10^8,$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$= \frac{560}{2(100)} \times 10^3$$

$$= 2800 \text{ rad/s}$$

bulunur. Sonra, ω_0^2 ve α^2'yi karşılaştırırız ve $\omega_0^2 > \alpha^2$ olduğunu görürüz.

$$\alpha^2 = 7.84 \times 10^6$$

$$= 0.0784 \times 10^8.$$

Bu noktada, tepkinin eksik sönümlü olduğunu ve $i(t)$'nin çözümünün

$$i(t) = B_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} \sin \omega_d t,$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. Buradan $\alpha = 2800$ rad/s ve $\omega_d = 9600$ rad/s bulunur. B_1 ve B_2'nin nümerik değerleri başlangıç koşullarından gelmektedir. İndüktör akımı anahtar kapanmadan önce sıfırdır, dolayısıyla kapandıktan hemen sonra da sıfırdır.

$$i(0) = 0 = B_1.$$

B_2'yi bulmak için $di(0^+)/dt$'yi buluruz. Devrede anahtar kapandıktan hemen sonra $i(0) = 0$ olduğu için, direnç üzerinde gerilim düşüşü olmadığına dikkat ediyoruz. Bu nedenle kapasitör üzerindeki başlangıç gerilimi indüktörün terminallerinde belirir ve bu da şu ifadeyi elde etmenizi sağlar:

$$L\frac{di(0^+)}{dt} = V_0$$

veya

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{V_0}{L} = \frac{100}{100} \times 10^3$$

$$= 1000 \text{ A/s}.$$

$B_1 = 0$ olduğundan

$$\frac{di}{dt} = 400 B_2 e^{-2800t}(24 \cos 9600t - 7 \sin 9600t)$$

olur. Böylece

$$\frac{di(0^+)}{dt} = 9600 B_2,$$

$$B_2 = \frac{1000}{9600} \approx 0.1042 \text{ A}$$

elde edilir. $i(t)$'nin çözümü

$$i(t) = 0.1042 e^{-2800t} \sin 9600t \text{ A}, \quad t \geq 0$$

şeklindedir.

b) $v_C(t)$'yi bulmak için aşağıdaki bağıntılardan birini kullanabiliriz:

$$v_C = -\frac{1}{C}\int_0^t i\,d\tau + 100 \text{ or}$$

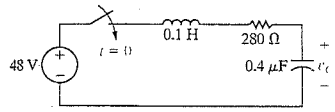
$$v_C = iR + L\frac{di}{dt}.$$

Hangi ifade kullanılırsa kullanılsın (ikincisi önerilir), sonuç aşağıdaki biçimde olacaktır:

$$v_C(t) = (100 \cos 9600t + 29.17 \sin 9600t)e^{-2800t} \text{ V}, \quad t \geq 0.$$

Örnek 8.12 Bir Seri RLC Devrenin Eksik Sönümlü Basamak Tepkisinin Bulunması

Şekil 8.17'deki anahtar kapatıldığında 100 mH'lik indüktörde veya 0.4 mF'lık kapasitörde enerji depolanmamıştır. $t \geq 0$ için $v_C(t)$'yi bulunuz.



Şekil 8.17 ▲ Örnek 8.12 için devre şeması.

Çözüm

Karakteristik denklemin kökleri

$$s_1 = -\frac{280}{0.2} + \sqrt{\left(\frac{280}{0.2}\right)^2 - \frac{10^6}{(0.1)(0.4)}}$$

$$= (-1400 + j4800) \text{ rad/s},$$

$$s_2 = (-1400 - j4800) \text{ rad/s}.$$

bulunur.

Kökler karmaşık olduğundan gerilim tepkisi eksik sönümlüdür. Dolayısıyla,

$$v_C(t) = 48 + B_1' e^{-1400t} \cos 4800t$$

$$+ B_2' e^{-1400t} \sin 4800t, \quad t \geq 0$$

olur. Başlangıçta devrede enerji depolanmadığından $v_C(0)$ ve $dv_C(0^+)/dt$ sıfırdır. O halde,

$$v_C(0) = 0 = 48 + B_1',$$

$$\frac{dv_C(0^+)}{dt} = 0 = 4800B_2' - 1400B_1'$$

bulunur. B_1' ve B_2''nün çözümüyle

$$B_1' = -48 \text{ V},$$

$$B_2' = -14 \text{ V}$$

elde ederiz. Bu nedenle $v_C(t)$'nin çözümü

$$v_C(t) = (48 - 48e^{-1400t} \cos 4800t$$

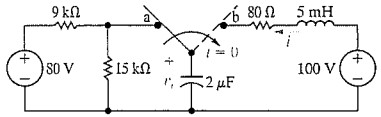
$$- 14e^{-1400t} \sin 4800t) \text{ V}, \quad t \geq 0$$

bulunur.

✓ DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 2 – Seri *RLC* devrelerin doğal ve basamak tepkisini belirleyebilmek

8.7 Şekildeki anahtar uzun bir süre a konumundadır. $t = 0$ anında, b konumuna getirilmiştir. (a) $i(0^+)$; (b) $v_C(0^+)$ (c) $di(0^+)/dt$; (d) s_1, s_2 ve (e) $t \geq 0$ için $i(t)$'yi bulunuz.



Cevap: (a) 0;
(b) 50 V;
(c) 10,000 A/s;
(d) (−8000 + *j*6000) rad/s,
(−8000 − *j*6000) rad/s,
(e) $(1.67e^{-8000t} \sin 6000t)$ A $t \geq 0$ için.

8.8 Değerlendirme Problemi 8.7'de gösterilen devre için $t \geq 0$ anında $v_C(t)$'yi bulunuz.

Cevap: $[100 - e^{-8000t}(50 \cos 6000t + 66.67 \sin 6000t)]$ V $t \geq 0$ için.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 8.45 ve 8.47'yi de çözmeyi deneyiniz.

8.5 İki İntegral Alıcı Yükselteçli Devre

Ardarda bağlanmış iki integral alıcı yükselteç içeren devre de ikinci mertebeden bir devredir. Yani, ikinci integral alıcının çıkış gerilimi birincinin giriş gerilimine ikinci mertebeden diferansiyel denklem ile bağlıdır. Seri bağlı iki yükselteç içeren devrenin analizine Şekil 8.18'deki devre ile başlıyoruz.

Op ampların ideal olduğunu varsayıyoruz. Amaç, v_o ve v_g arasında oluşan diferansiyel denklemi bulmaktır. Bu işleme, birinci integral alıcının eviren giriş terminalindeki akımları yazarak başlıyoruz. Op amplar ideal olduğundan,

$$\frac{0 - v_g}{R_1} + C_1\frac{d}{dt}(0 - v_{o1}) = 0 \tag{8.70}$$

yazılır. Eş. 8.70'ten

$$\frac{dv_{o1}}{dt} = -\frac{1}{R_1C_1}v_g \tag{8.71}$$

elde ederiz. Şimdi, ikinci integral alıcı yükseltecin giriş terminalinden çıkan akımları toplarsak

$$\frac{0 - v_{o1}}{R_2} + C_2\frac{d}{dt}(0 - v_o) = 0 \tag{8.72}$$

veya

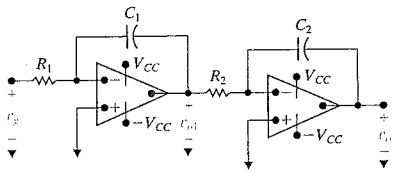
$$\frac{dv_o}{dt} = -\frac{1}{R_2C_2}v_{o1} \tag{8.73}$$

buluruz. Eş. 8.73'ün türevini alınca

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} = -\frac{1}{R_2C_2}\frac{dv_{o1}}{dt} \tag{8.74}$$

denklemini verir. v_o ve v_g arasındaki bağıntıyı veren diferansiyel denklemi, Eş. 8.71'i, Eş. 8.74'e yerleştirerek elde ederiz:

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} = \frac{1}{R_1C_1}\frac{1}{R_2C_2}v_g. \tag{8.75}$$



Şekil 8.18 ▲ Ardarda bağlanmış iki integral alıcılı yükselteç.

Ardarda bağlamada, birinci yükseltecin çıkış sinyali (v_{o1}, Şekil 8.18) ikinci yükseltecin giriş sinyalidir.

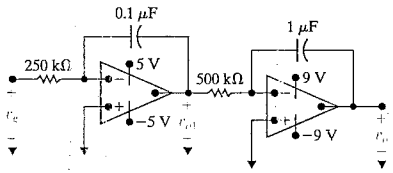
Örnek 8.13, ardarda bağlanmış iki yükselteç içeren devrenin basamak tepkisini göstermektedir.

Örnek 8.13 Art Arda Bağlı İki İntegral Alıcı Yükseltecin Analizi

v_g'nin giriş gerilimi aniden 0'dan 25 mV'a atladığında Şekil 8.19'daki devrede enerji depolanmamıştır.

a) $0 \le t \le t_{sat}$ için $v_o(t)$ bağıntısını bulunuz.

b) Devrenin doyuma ulaşması ne kadar sürer?



Şekil 8.19 ▲ Örnek 8.13 için devre şeması.

Çözüm

a) Örnek 8.19, yükselteçlerin ölçekleme katsayılarının

$$\frac{1}{R_1C_1} = \frac{1000}{(250)(0.1)} = 40,$$

$$\frac{1}{R_2C_2} = \frac{1000}{(500)(1)} = 2$$

olduğunu göstermektedir. $t > 0$ için $v_g = 25$ mV olduğundan, Eş. 8.75

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} = (40)(2)(25 \times 10^{-3}) = 2$$

haline gelir. v_o'yu çözmek için

$$g(t) = \frac{dv_o}{dt}$$

alalım. Sonra,

$$\frac{dg(t)}{dt} = 2 \quad \text{ve} \quad dg(t) = 2dt$$

olur. Buradan

$$\int_{g(0)}^{g(t)} dy = 2\int_0^t dx$$

bulunur ve sonra

$$g(t) - g(0) = 2t$$

elde edilir. Bununla birlikte

$$g(0) = \frac{dv_o(0)}{dt} = 0$$

sağlanır çünkü başlangıçta devrede depolanan enerji sıfırdır ve op amplar idealdir. (Problem 8.53'e bakınız.) Böylece

$$\frac{dv_o}{dt} = 2t \quad \text{ve} \quad v_o = t^2 + v_o(0)$$

bulunur ve $v_o(0) = 0$ olduğundan, v_o ifadesi

$$v_o = t^2, \quad 0 \le t \le t_{sat}$$

haline gelir.

b) İkinci yükselteç v_o 9 V veya $t = 3$ s olduğunda doyuma ulaşır. Ancak birinci yükseltecin $t = 3$ s'den önce doyuma ulaşması olasıdır. Bu olasılığı araştırmak için, dv_{o1}/dt yi bulmak gerekir. Bunun için Eş. 8.71'i kullanırız:

$$\frac{dv_{o1}}{dt} = -40(25) \times 10^{-3} = -1.$$

v_{o1}'i çözerek

$$v_{o1} = -t$$

elde ederiz. $t = 3$ s'de, $v_{o1} = -3$ V'tur. Birinci yükseltecin güç kaynağı gerilimi ±5 V olduğundan, devre ikinci yükselteç doyuma ulaştığında doyuma ulaşır. Op amplardan biri doyuma ulaştığında, devrenin davranışı tahmin etmek için doğrusal modeli artık kullanamayız.

NOT: Bu konuyu kavrayışınızı Bölüm Problemlerinden 8.58'i çözerek değerlendiriniz.

Geribesleme Dirençleriyle İki İntegral Alıcı Yükselteç

Şekil 8.20, Şekil 8.18'de gösterilen devrenin bir değişimidir. Kısım 7.7'den, integral alıcı yükselteçteki op ampın doyuma ulaşmasının nedeninin, geribesleme kapasitöründeki yüklerin birikmesi olduğunu hatırlayınız. Bu sorunu halletmek için, her geribesleme kapasitörü (C_1 ve C_2) ile paralel bir direnç yerleştirilir. Çıkış gerilimi v_o'yu yeniden buluruz ve bu geribesleme dirençlerinin etkisini Örnek 8.13'teki integral alıcı yükselteçler üzerinde belirleriz.

v_{o1}'i v_g'ye bağlayan ikinci mertebeden diferansiyel denklemin elde edilişine, birinci integral alıcının eviren giriş düğümündeki akımları toplayarak başlıyoruz:

$$\frac{0 - v_g}{R_a} + \frac{0 - v_{o1}}{R_1} + C_1\frac{d}{dt}(0 - v_{o1}) = 0. \tag{8.76}$$

Eş. 8.76'yı sadeleştirirsek

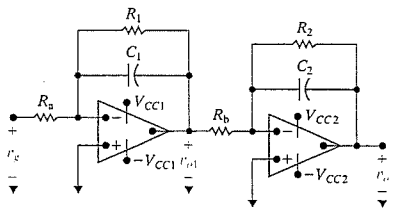
$$\frac{dv_{o1}}{dt} + \frac{1}{R_1C_1}v_{o1} = \frac{-v_g}{R_aC_1} \tag{8.77}$$

elde ederiz. Kolaylık için $\tau_1 = R_1C_1$ olsun ve Eş. 8.77'yi

$$\frac{dv_{o1}}{dt} + \frac{v_{o1}}{\tau_1} = \frac{-v_g}{R_aC_1} \tag{8.78}$$

halinde yazalım. Sonraki adım, ikinci integral alıcının eviren giriş terminalindeki akımları toplamaktır:

$$\frac{0 - v_{o1}}{R_b} + \frac{0 - v_o}{R_2} + C_2\frac{d}{dt}(0 - v_o) = 0. \tag{8.79}$$



Şekil 8.20 ▲ Geribesleme dirençleriyle ardarda bağlanmış integral alıcı yükselteçler.

Eş. 8.79'u

$$\frac{dv_o}{dt} + \frac{v_o}{\tau_2} = \frac{-v_{o1}}{R_bC_2} \tag{8.80}$$

halinde yeniden yazarız. Burada $\tau_2 = R_2C_2$'dir. Eş. 8.80'in türevini alırsak

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + \frac{1}{\tau_2}\frac{dv_o}{dt} = -\frac{1}{R_bC_2}\frac{dv_{o1}}{dt} \tag{8.81}$$

elde ederiz. Eş. 8.78'den

$$\frac{dv_{o1}}{dt} = \frac{-v_{o1}}{\tau_1} - \frac{v_g}{R_aC_1} \tag{8.82}$$

ve Eş. 8.80'den

$$v_{o1} = -R_bC_2\frac{dv_o}{dt} - \frac{R_bC_2}{\tau_2}v_o \tag{8.83}$$

denklemleri bulunur. Eş. 8.82 ve 8.83'ü, Eş. 8.81'den dv_{o1}/dt'yi elemek için kullanırız ve istenen bağıntıyı buluruz:

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)\frac{dv_o}{dt} + \left(\frac{1}{\tau_1\tau_2}\right)v_o = \frac{v_g}{R_aC_1R_bC_2}. \tag{8.84}$$

Eş. 8.84'ten, karakteristik denklem

$$s^2 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)s + \frac{1}{\tau_1\tau_2} = 0 \tag{8.85}$$

bulunur. Karakteristik denklemin kökleri gerçektir ve

$$s_1 = \frac{-1}{\tau_1}, \tag{8.86}$$

$$s_2 = \frac{-1}{\tau_2} \tag{8.87}$$

olarak bulunur. Örnek 8.14, geribesleme kapasitörleri, geribesleme dirençleriyle paralel bağlandığında, ardarda bağlanmış iki integral alıcı yükseltecin basamak tepkisinin analizini göstermektedir.

Örnek 8.14 **Art Arda Bağlı, Geribesleme Direnci İçeren İki İntegral Alıcı Yükseltecin Analizi**

Şekil 8.20'de gösterilen devre için parametreler $R_a = 100\ \text{k}\Omega$, $R_1 = 500\ \text{k}\Omega$, $C_1 = 0.1\ \mu\text{F}$, $R_b = 25\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 100\ \text{k}\Omega$ ve $C_2 = 1\ \mu\text{F}$'dır. Her op amp için güç kaynağı gerilimi ±6 V'tur. Ardarda bağlanmış integral alıcı yükselteçlerin sinyal gerilimi (v_g) 0'dan 250 mV'a atlamaktadır. Sinyal uygulandığı anda geribesleme kapasitörlerinde enerji depolanmamıştır.

a) v_o için diferansiyel denklemin nümerik ifadesini bulunuz.

b) $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

c) v_{o1} için diferansiyel denklemin nümerik ifadesini bulunuz.

d) $t \geq 0$ için $v_{o1}(t)$'yi bulunuz.

Çözüm

a) Devre parametrelerinin nümerik değerlerinden, $\tau_1 = R_1C_1 = 0.05$ s, $\tau_2 = R_2C_2 = 0.10$ s ve $v_g/R_aC_1R_bC_2 = 1000\ \text{V/s}^2$'dir. Bu değerleri Eş. 8.84'e yerleştirirsek

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + 30\frac{dv_o}{dt} + 200v_o = 1000$$

denklemini verir.

b) Karakteristik denklemin kökleri $s_1 = -20$ rad/s ve $s_2 = -10$ rad/s'dir. v_o'nun son değeri giriş gerilimi çarpı her katmanın kazancıdır. Çünkü $t \to \infty$ iken kapasitörler açık devre gibi davranır. Böylece,

$$v_o(\infty) = (250 \times 10^{-3})\frac{(-500)}{100}\frac{(-100)}{25} = 5\ \text{V}$$

olur.

Bu nedenle v_o'nun çözümü

$$v_o = 5 + A_1'e^{-10t} + A_2'e^{-20t}$$

haline gelir. $v_o(0) = 0$ ve $dv_o(0)/dt = 0$ olduğundan A_1' ve A_2''nün nümerik değerleri $A_1' = -10$ V ve $A_2' = 5$ V'tur. v_o'nun çözümü

$$v_o(t) = (5 - 10e^{-10t} + 5e^{-20t})\ \text{V}, \quad t \geq 0$$

olur. Çözümde her iki op ampın da doyuma ulaşmadığı varsayılmıştır. v_o'nun son değerinin 5 V olduğunu yani 6 V'tan küçük olduğunu, bu yüzden ikinci op ampın doyuma ulaşmadığını zaten not etmiştik. v_{o1}'in son değeri de $(250 \times 10^{-3})(-500/100)$ veya -1.25 V'tur. Böylece birinci op amp da doyuma ulaşmaz ve varsayımımız ile çözümümüz doğrudur.

c) Parametrelerin sayısal değerlerini Eş. 8.78'e yerleştirirsek istenen diferansiyel denklemi oluşturur:

$$\frac{dv_{o1}}{dt} + 20v_{o1} = -25.$$

d) v_{o1}'in başlangıç ve son değerlerini zaman sabiti τ_1 ile birlikte bulmuştuk. Böylece Kısım 7.4'te geliştirilen teknik doğrultusunda çözümü yazabiliriz:

$$v_{o1} = -1.25 + [0 - (-1.25)]e^{-20t}$$

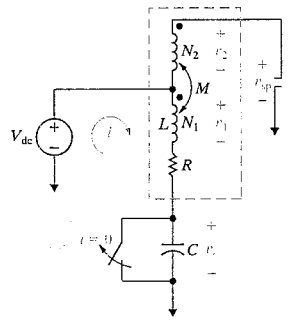
$$= -1.25 + 1.25e^{-20t}\ \text{V}, \quad t \geq 0.$$

NOT: Bu konuyu kavrayışınızı Bölüm Problemi 8.59'u çözmeyi deneyerek değerlendiriniz.

Pratik Bakış Açısı

Ateşleme Devresi

Şimdi, bölümün başında anlatılan geleneksel ateşleme devresine dönelim. Sistemin devre şeması Şekil 8.21'de gösterilmiştir. Silindirdeki yakıt-hava karışımını ateşlemek için enerjiyi sağlayan devre karakteristiğini göz önünde tutunuz. Birincisi, bujideki maksimum gerilim, v_{sp} yakıtı ateşlemek için yeterince büyük olmalıdır. İkincisi, kapasitördeki gerilim anahtar veya dağıtım noktaları üzerindeki arkı önlemek için sınırlı olmalıdır. Üçüncüsü, ototrasformatörün birinci sarımındaki akım, silindirdeki yakıt-hava karışımını ateşlemek için sistemde yeterli enerji depolanmasını sağlamalıdır. Anahtarlama yapıldığı anda, devrede depolanan enerjini birinci akımın karesiyle orantılı olduğunu hatırlayınız. Yani $w_0 = \frac{1}{2}Li^2(0)$'dır.



Şekil 8.21 Geleneksel otomobil ateşleme sisteminin devre şeması.

ÖRNEK

a) Şekil 8.21'deki devre için verilen aşağıdaki değerlerle bujideki maksimum gerilimi bulunuz. $V_{dc} = 12$ V, $R = 4\ \Omega$, $L = 3$ mH, $C = 0.4\ \mu$F ve $a = 100$.

b) Bujideki gerilim maksimum olduğu anda arkı önlemek için anahtar kontakları arasındaki uzaklık ne olmalıdır?

Çözüm

a) Buji gerilimi v_{sp} için gerekli ifadeyi bulurken, Şekil 8.21'deki devreyi analiz ediyoruz. Analizimizi bujiyi ateşlemeden önce devredeki gerilimin araştırılması ile sınırlayacağız. Birinci sarımdaki akımın, anahtarlama anında olası en büyük değerinde (V_{dc}/R) olduğunu varsayıyoruz. Burada R birinci devredeki toplam dirençtir. Ayrıca, ikinci gerilimin (v_2) birinci gerilime (v_1) oranı sarım oranı N_2/N_1 ile aynıdır. Bu varsayımın doğruluğunu şu şekilde kanıtlayabiliriz. İkinci devre açık devre olduğunda, ikinci sarımda indüklenen gerilim

$$v_2 = M\frac{di}{dt} \tag{8.88}$$

ve birinci sarımda indüklenen gerilim

$$v_1 = L\frac{di}{dt} \tag{8.89}$$

bulunur. Eş. 8.88 ve 8.89'dan

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{M}{L} \tag{8.90}$$

elde ederiz.

Ototransformatördeki demir çekirdek içindeki ϕ_{11} ve ϕ_{21} akıları için manyetik iletkenliğin aynı olduğunu kabul etmek oldukça mantıklıdır. Böylece, Eş. 8.90

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_1 N_2 \mathcal{P}}{N_1^2 \mathcal{P}} = \frac{N_2}{N_1} = a \tag{8.91}$$

haline gelir. Şimdi, ateşleme devresindeki gerilimin analizini yapmak için hazırız. R, L ve C değerlerinden dolayı anahtar açıldığında birinci bobindeki akım tepkisi eksik sönümlüdür. Kısım 8.4'te anlatılan teknikleri kullanarak ve $t = 0$ anında anahtar açıldığında, birinci bobin akımın ifadesi

$$i = \frac{V_{dc}}{R} e^{-\alpha t}\left[\cos\omega_d t + \left(\frac{\alpha}{\omega_d}\right)\sin\omega_d t\right] \tag{8.92}$$

elde edilir. Burada,

$$\alpha = \frac{R}{2L},$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$$

ile verilir. (Problem 8.62(a)'ya bakınız.) Ototransformatörün birinci sarımında indüklenen gerilim

$$v_1 = L\frac{di}{dt} = \frac{-V_{dc}}{\omega_d RC} e^{-\alpha t}\sin\omega_d t \tag{8.93}$$

bulunur. (Problem 8.62 (b)'ye bakınız.) Eş. 8.91'e bakarak

$$v_2 = \frac{-aV_{dc}}{\omega_d RC} e^{-\alpha t}\sin\omega_d t \tag{8.94}$$

elde ederiz. Kapasitör üzerindeki gerilim

$$v_c = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dx + v_c(0) \tag{8.95}$$

ilişkisini kullanarak veya birinci sarımda ağ etrafındaki gerilimlerin toplamı ile bulunabilir:

$$v_c = V_{dc} - iR - L\frac{di}{dt}. \tag{8.96}$$

Her iki durumda da

$$v_c = V_{dc}[1 - e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + Ke^{-\alpha t}\sin\omega_d t] \tag{8.97}$$

buluruz.

Burada

$$K = \frac{1}{\omega_d}\left(\frac{1}{RC} - \alpha\right)$$

ile verilir. (Problem 8.62 (c)'ye bakınız.) Şekil 8.21'den de görüldüğü gibi, buji üzerindeki gerilim

$$\begin{aligned} v_{sp} &= V_{dc} + v_2 \\ &= V_{dc} - \frac{aV_{dc}}{\omega_d RC} e^{-\alpha t}\sin\omega_d t \\ &= V_{dc}\left[1 - \frac{a}{\omega_d RC} e^{-\alpha t}\sin\omega_d t\right] \end{aligned} \tag{8.98}$$

bulunur. v_{sp}'nin maksimum değerini bulmak için, dv_{sp}/dt sıfırken, t'nin en küçük pozitif değerini buluruz ve bu anda v_{sp}'nin değerini hesaplarız. t_{mak} için ifade

$$t_{max} = \frac{1}{\omega_d}\tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{\alpha}\right). \tag{8.99}$$

elde edilir. (Problem 8.63'e bakınız.) Problemin tanımlanmasında kullanılan elemanların değerleriyle

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{4 \times 10^3}{6} = 666.67 \text{ rad/s}$$

ve

$$\omega_d = \sqrt{\frac{10^9}{1.2} - (666.67)^2} = 28{,}859.81 \text{ rad/s}$$

değerlerini elde ederiz. Bu değerleri Eş. 8.99'a yerleştirince

$$t_{max} = 53.63\ \mu\text{s}$$

değerini verir. Şimdi, bujideki maksimum gerilimi $v_{sp}(t_{mak})$ bulabilmek için Eş. 8.98'i kullanacağız:

$$v_{sp}(t_{max}) = -25{,}975.69 \text{ V}.$$

b) t_{mak} anında kapasitör üzerindeki gerilim Eş. 8.97'den

$$v_c(t_{max}) = 262.15 \text{ V}$$

olarak elde edilir. Havanın dielektrik kuvveti yaklaşık olarak 3×10^6 V/m olduğundan, bu sonuç bize t_{max} anında arkı önlemek için anahtar kontaklarının arasındaki uzaklığın $262.15/3 \times 10^6$ veya 87.38 μm olması gerektiğini gösterir.

Ateşleme devrelerinin tasarım ve testlerinde, bir örnek olmayan yakıt-hava karışımlarına, ateşleme eletrotlarındaki aşınmadan dolayı zamanla buji açıklığının genişlemesine; uygun buji gerilimi ve motor hızı arasındaki ilişkiye; anahtar kapandıktan sonra birinci akımın başlangıç değerine ulaşması için gerekli bakım miktarına dikkat etmek gerekir.

Geleneksel ateşleme sistemleriyle ilgili yapmış olduğumuz analizi kullanarak, günümüz otomobillerinde mekanik anahtarlamanın neden elektronik anahtarlama ile yer değiştirdiğini açıklayabiliriz. Birincisi, yakıt ekonomisindeki akımın önemi ve egzoz emisyonlarından dolayı daha geniş açıklıklı buji gerekmektedir. Bu da, daha yüksek buji gerilimi demektir. Bu yüksek gerilimler (40 kV'a kadar) mekanik anahtarlama ile sağlanamaz. Elektronik anahtarlama da ototransformatörün birinci sarımında daha yüksek başlangıç akımının olmasına izin verir. Bu da sistemde başlangıçta depolanan enerjinin daha büyük olması demektir ve daha geniş yakıt-hava karışımı aralığı ve çalışma şartları elde edilebilir. Sonuçta, elektronik anahtarlama nokta kontaklarına olan gerekliliği ortadan kaldırır. Bunun anlamı, nokta kontağındaki arkların zararlı etkilerinin sistemde oluşmamasıdır.

NOT: Pratik Bakış Açısını kavrayışınızı Bölüm Problemlerinden 8.64 ve 8.65'i çözmeyi deneyerek değerlendiriniz.

Özet

- Paralel ve seri *RLC* devreleri için **karakteristik denklemin** biçimi

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

şeklindedir. Burada, paralel devre için $\alpha = 1/2RC$, seri devre için $\alpha = R/2L$ ve paralel ve seri devreler için $\omega_0^2 = 1/LC$'dir. (287. ve 308. sayfalara bakınız.)

- Karakteristik denklemin kökleri

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

biçimindedir. (288. sayfaya bakınız.)

- Seri ve paralel *RLC* devrelerin doğal ve basamak tepkilerinin biçimleri α^2 ve $\omega_0{}^2$'ye bağlıdır. Bu tepkiler **aşırı sönümlü, eksik sönümlü** veya **kritik sönümlü** olabilir. Bu terimler tüketici elemanın (R) tepki üzerindeki etkisini belirler. **Neper frekansı** α, R'nin etkisini yansıtır. (289. sayfaya bakınız.)
- İkinci mertebeden devrenin tepkisi Tablo 8.2'de gösterildiği gibi, aşırı sönümlü, eksik sönümlü vaya kritik sönümlüdür.
- İkinci mertebeden devrenin **doğal tepkisini** belirlerken, öncelikle, tepkinin aşırı, eksik veya kritik sönümlü olup olmadığını belirleriz. Sonra Tablo 8.3'te gösterilen uygun denklemleri çözeriz.
- İkinci mertebeden devrenin **basamak tepkisini** belirlerken, Tablo 8.4'te gösterilen uygun denklemleri, sönüm türüne göre uygularız.
- İdeal op amp'lı iki integral alıcı yükselteç ardarda bağlandığında, ikinci intgeral alıcının çıkış gerilimi, birinci integral alıcının giriş gerilimine ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem ile bağlıdır. Bu nedenle, bu bölümde anlatılan teknikler ardarda bağlanmış integral alıcının davranışını analiz etmek için kullanılabilir. (312. sayfaya bakınız.)
- Geribesleme kapasitöründe biriken yüklerden dolayı op ampın doyama ulaşması basit bir integral alıcı yükselteci sınırlamaktadır ve bu sınırlamayı ortadan kaldırmak için geribesleme yoluna kapasitörle paralel bir direnç yerleştiririz. (314. sayfaya bakınız.)

TABLO 8.2 Aşırı Sönümlü, Eksik Sönümlü veya Kritik Sönümlü İkinci Mertebeden Devre Tepkileri.

Devre	Koşul	Tepkinin Niteleyici Yapısı
Aşırı Sönümlü	$\alpha^2 > \omega_0^2$	Gerilim veya akım son değerine salınım yapmadan ulaşır.
Eksik Sönümlü	$\alpha^2 < \omega_0^2$	Gerilim veya akım son değeri etrafında salınır.
Kritik Sönümlü	$\alpha^2 = \omega_0^2$	Gerilim veya akım son değeri etrafında salınım yapma eşiğindedir.

TABLO 8.3 İkinci Mertebe Devrenin Doğal Tepkisini Belirlemede, Önce Tepkinin Aşırı, Eksik veya Kritik Sönümlü Olduğu Belirlenir ve Sonra Uygun Denklemler Çözülür.

Sönümlenme	Doğal Tepki Denklemleri	Katsayı Denklemleri
Aşırı Sönümlü	$x(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$	$x(0) = A_1 + A_2$; $dx/dt(0) = A_1s_1 + A_2s_2$
Eksik Sönümlü	$x(t) = (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)e^{-\alpha t}$	$x(0) = B_1$; $dx/dt(0) = -\alpha B_1 + \omega_d B_2$, where $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$
Kritik Sönümlü	$x(t) = (D_1t + D_2)e^{-\alpha t}$	$x(0) = D_2$, $dx/dt(0) = D_1 - \alpha D_2$

TABLO 8.4 İkinci Mertebe Devrenin Basamak Tepkisini Belirlerken, Sönümlenmeye Göre Uygun Denklemler Uygulanır.

Sönümleme	Basamak Tepkisi Denklemleri [a]	Katsayı Denklemleri
Aşırı Sönümlü	$x(t) = X_f + A_1' e^{s_1t} + A_2' e^{s_2t}$	$x(0) = X_f + A_1' + A_2'$; $dx/dt(0) = A_1' s_1 + A_2' s_2$
Eksik Sönümlü	$x(t) = X_f + (B_1' \cos \omega_d t + B_2' \sin \omega_d t)e^{-\alpha t}$	$x(0) = X_f + B_1'$; $dx/dt(0) = -\alpha B_1' + \omega_d B_2'$
Kritik Sönümlü	$x(t) = X_f + D_1' te^{-\alpha t} + D_2' e^{-\alpha t}$	$x(0) = X_f + D_2'$; $dx/dt(0) = D_1' - \alpha D_2'$

[a] Burada X_f $x(t)$'nin son değeridir.

Problemler

Kısım 8.1-8.2

8.1 Bir paralel *RLC* devresinde direnç, endüktans ve kapasitans sırasıyla 5000 Ω, 1.25 H ve 8 nF'dır.

a) Devrenin gerilim tepkisini belirleyen karakteristik denklemin köklerini hesaplayınız.

b) Tepki, aşırı, eksik veya kritik sönümlü mü olacaktır?

c) R'nin hangi değeri için sönümlenme frekansı 6 krad/s olacaktır?

d) (c)'de bulunan R değeri için karakteristik denklemin kökleri nelerdir?

e) R'nin hangi değeri kritik sönümlü tepki oluşturacaktır?

8.2 Şekil 8.1'de gösterilen devredeki kapasitörün 0.05 μF değerinde ve başlangıç geriliminin 15 V olduğunu kabul ediniz. İndüktördeki başlangıç akımı sıfırdır. $t \geq 0$ için gerilim tepkisi,

$$v(t) = -5e^{-5000t} + 20e^{-20{,}000t}\ \text{V}$$

olmaktadır.

a) R, L, α ve ω_0'ın nümerik değerlerini bulunuz.

b) $t \geq 0^+$ için $i_R(t)$, $i_L(t)$ ve $i_C(t)$'yi hesaplayınız.

8.3 Şekil 8.1'deki devrenin doğal gerilim tepkisi kapasitör 50 nF iken

$$v(t) = 125e^{-4000t}(\cos 3000t - 2\sin 3000t)\text{V}, \quad t \geq 0$$

şeklindedir. (a) L; (b) R; (c) V 0; (d) I_0 ve (e) $i_L(t)$'yi bulunuz

8.4 Şekil 8.1'deki devrenin gerilim tepkisinin

$$v(t) = D_1te^{-4000t} + D_2e^{-4000t}, \quad t \geq 0$$

olduğu bilinmektedir. İndüktördeki başlangıç akımı (I_0) 5 mA ve kapasitördeki başlangıç gerilimi (V_0) 25 V'tur. İndüktörün endüktansı 5 H'dir.

a) R, C, D_1 ve D_2 değerlerini bulunuz.

b) $t \geq 0^+$ için $i_C(t)$'yi bulunuz.

8.5 Şekil 8.1'deki devrede gerilim v'nin başlangıç değeri sıfırdır ve kapasitörün başlangıç değeri, $i_C(0^+)$ 15 mA'dir. R 200 Ω ise kapasitör akımı için ifadenin

$$i_c(t) = A_1e^{-160t} + A_2e^{-40t}, \quad t \geq 0^+$$

olduğu bilinmektedir.

a) α, ω_0, L, C, A_1 ve A_2'nin değerlerini,

$$\left(\textit{İpucu:}\ \frac{di_C(0)}{dt} = \frac{di_L(0)}{dt} - \frac{di_R(0)}{dt} = \frac{v(0)}{L} - \frac{1}{R}\frac{i_C(0^+)}{C}\right)$$

b) $v(t)$ ifadesini ($t \geq 0$),

c) $i_R(t)$ ifadesini ($t \geq 0$),

d) $i_L(t)$ ifadesini ($t \geq 0$) bulunuz.

8.6 PSPICE Şekil 8.1'deki devrede, devre elemanları $R = 2$ kΩ, $C = 10$ nF ve $L = 250$ mH'dir. İndüktörün başlangıç akımı –30 mA ve kapasitörün başlangıç gerilimi 90 V'tur.

a) Devrenin her dalındaki başlangıç akımını hesaplayınız.

b) $t \geq 0$ için $v(t)$'yi bulunuz.

c) $t \geq 0$ için $i_L(t)$'yi bulunuz.

8.7 PSPICE Problem 8.6'daki direnç 2.5 kΩ'a çıkarılmıştır. $t \geq 0$ için $v(t)$ ifadesini bulunuz.

8.8 PSPICE Problem 8.6'daki direnç 12,500/3'e çıkarılmıştır. $t \geq 0$ için $v(t)$ ifadesini bulunuz.

8.9 Şekil 8.1'de gösterilen devre için doğal tepkinin

$$v(t) = -12(e^{-200t} + e^{-1800t})\ \text{V}, \quad t \geq 0$$

olduğu bilinmektedir. $C = 18$ μF ise, $i_L(0^+)$'i miliamper cinsinden bulunuz.

8.10 PSPICE Şekil 8.1'de gösterilen devrede 5 H'lik indüktör, 8 nF'lik kapasitör ve R direnciyle kritik sönüm olacak şekilde paralel bağlanmıştır. $V_0 = -25$ V ve $I_0 = -4$ mA'dir.

a) R'nin nümerik değerini hesaplayınız.

b) $t \geq 0$ için $v(t)$'yi bulunuz.

c) $i_C(t) = 0$ iken $v(t)$'yi bulunuz.

d) Başlangıçta depolanan enerjinin yüzde kaçı $i_C(t)$ sıfır olduğu anda devrede kalmıştır?

8.11 PSPICE Şekil 8.1'deki devrede, $R = 2$ Ω, $L = 0.4$ H, $C = 0.25$ F, $V_0 = 0$ V ve $I_0 = -3$ A'dir.

a) $t \geq 0$ için $v(t)$'yi bulunuz.

b) dv/dt sıfır olduğu durumlarda t'nin ilk üç değerini bulunuz. t'nin bu değerlerini t_1, t_2 ve t_3 olarak adlandırınız.

c) $t_3 - t_1 = T_d$ olduğunu gösteriniz.

d) $t_2 - t_1 = T_d/2$ olduğunu gösteriniz.

e) $v(t_1)$, $v(t_2)$, $v(t_3)$'ü hesaplayınız.

f) $0 \leq t \leq t_2$ için t'ye karşı $v(t)$ grafiğini çiziniz.

8.12 PSPICE a) Problem 8.11'deki devrede bulunan 2 Ω'luk direnç devreden kaldırılırsa $t \geq 0$ için $v(t)$'yi bulunuz.

b) $v(t)$'nin frekansını hertz cinsinden bulunuz.

c) $v(t)$'nin maksimum genliğini volt cinsinden bulunuz.

8.13 Şekil 8.1'deki devrenin eksik sönümlü gerilim tepkisinin

$$v(t) = (A_1 + A_2)e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + j(A_1 - A_2)e^{-\alpha t}\sin\omega_d t$$

olduğu varsayınız. İndüktör akımının başlangıç değeri I_0 ve kapasitör geriliminin başlangıç değeri V_0'dır. A_2'nin A_1'in eşleniği olduğunu gösteriniz. (*İpucu:* A_1 ve A_2'yi bulmak için anlatılan yöntemin aynısını kullanınız.)

8.14 Problem 8.13'te elde edilen A_1 ve A_2 ifadelerinin Eş. 8.30 ve 8.31 ile tutarlı olduğunu gösteriniz.

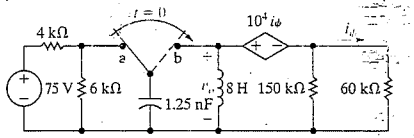
8.15 PSPICE Örnek 8.4'teki devrede yer alan direnç $4000/\sqrt{2}$ Ω olarak değiştirilmiştir.

a) $t \geq 0$ iken, $v(t)$'nin nümerik ifadesini bulunuz.

b) $0 \leq t \leq 7$ ms aralığında, t'ye karşı $v(t)$ grafiğini çiziniz. Bu tepkiyi Örnek 8.4 ($R = 20$ kΩ) ve Örnek 8.5 ($R = 4$ kΩ)'teki tepkiler ile karşılaştırınız. Özellikle, $v(t)$'nin tepe değerlerini ve bu değerlerin ne zaman olduğunu karşılaştırınız.

8.16 PSPICE Şekil P8.16'daki devrede bulunan anahtar uzun bir süre boyunca a konumundadır. $t = 0$'da, anahtar aniden b konumuna getiriliyor. $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P8.16

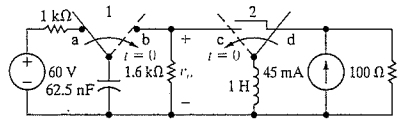


8.17 Şekil P8.16'daki devrede bulunan kapasitör 1 nF'a düşürülmüş ve indüktör 10 H'ye çıkarılmıştır. $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

8.18 Şekil P8.16'daki devrede bulunan kapasitör 800 pF'a düşürülmüş ve indüktör 12.5 H'ye çıkarılmıştır. $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

8.19 PSPICE Şekil P8.19'da gösterilen devredeki iki anahtar eşzamanlı çalışmaktadır. Anahtar 1 a konumundayken, anahtar 2 d konumundadır. Anahtar 1 b konumuna geçtiğinde, anahtar 2 de c konumuna geçmektedir. Anahtar 1 a konumunda uzun bir süre kalmıştır. $t = 0$'da anahtarlar diğer konumlarına geçmiştir. $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P8.19



8.20 PSPICE Şekil P8.19'daki devrede bulunan direnç 1.6 kΩ'dan 2 kΩ'a çıkarılmış ve indüktör 1 H'den 640 mH'ye düşürülmüştür. $t > 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

8.21 PSPICE Şekil P8.19'daki devrede bulunan direnç 1.6 kΩ'dan 800 Ω'a düşürülmüş ve indüktör 1 H'den 160 mH'ye düşürülmüştür. $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

Kısım 8.3

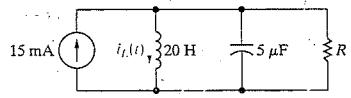
8.22 PSPICE Örnek 8.6'daki devre için, $t \geq 0$ iken (a) $v(t)$; (b) i_R ve (c) $i_C(t)$'yi bulunuz.

8.23 PSPICE Örnek 8.7'deki devre için $t \geq 0$ iken (a) $v(t)$; (b) $i_C(t)$'yi bulunuz.

8.24 PSPICE Örnek 8.8'deki devre için, $t \geq 0$ iken $v(t)$'yi bulunuz.

8.25 PSPICE Şekil P8.25'teki devreye 15 mA'lik dc akım kaynağı uygulandığında, 20 H'lik indüktördeki başlangıç akımının –30 mA ve başlangıç geriliminin 60 V (üst terminalde pozitif) olduğunu varsayınız. $R = 800$ Ω ise $t \geq 0$ için $i_L(t)$ ifadesini bulunuz.

Şekil P8.25

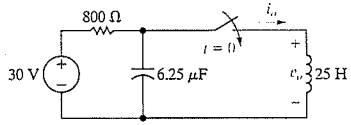


8.26 PSPICE Şekil P8.25'teki devrede bulunan direnç 1250 Ω olarak değiştirilmiştir. $t \geq 0$ için $i_L(t)$'yi bulunuz.

8.27 PSPICE Şekil P8.25'teki devrede bulunan direnç 1000 Ω olarak değiştirilmiştir. $t \geq 0$ için $i_L(t)$'yi bulunuz.

8.28 PSPICE Şekil P8.28'deki devrede bulunan anahtar $t = 0$'da kapatılmadan önce uzun bir süre açık bırakılmıştır. $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P8.28

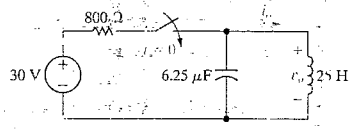


8.29 PSPICE a) Şekil P8.28'deki devre için, $t \geq 0$ iken i_o'yu bulunuz.

b) i_o için bulunduğunuz çözümün problem 8.28'deki v_o çözümü ile uyumlu olduğunu gösteriniz.

8.30 PSPICE $t = 0$ anında anahtar kapatıldığında Şekil P8.30'daki devrede enerji depolanmamıştır. $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P8.30

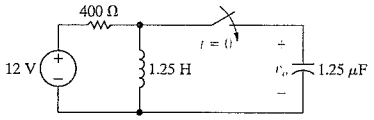


8.31 PSPICE a) Şekil P8.30'daki devre için $t \geq 0$ iken i_o'yu bulunuz.

b) i_o için bulduğunuz çözümün Problem 8.30'daki v_o çözümü ile uyumlu olduğunu gösteriniz.

8.32 PSPICE Şekil P8.32'deki devrede bulunan anahtar $t = 0$'da kapatılmadan önce uzun bir süre açık bırakılmıştır. Anahtar kapandığı anda kapasitörde enerji depolanmamıştır. $t \geq 0$ için v_o'yu bulunuz.

Şekil P8.32

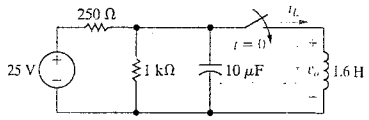


8.33 PSPICE Şekil P8.33'teki devrede bulunan anahtar $t = 0$ anında kapatılmadan önce uzun bir süre açık bırakılmıştır.

a) $t \geq 0^+$ için $v_o(t)$'yi

b) $t \geq 0$ için $i_L(t)$'yi bulunuz.

Şekil P8.33



8.34 PSPICE Şekil P8.33'teki devreyi kullanınız.

a) İndüktöre aktarılan toplam enerjiyi bulunuz.

b) Eşdeğer dirence aktarılan toplam enerjiyi bulunuz.

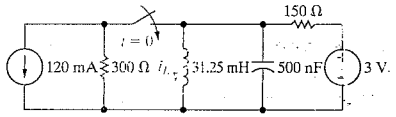
c) Kapasitöre aktarılan toplam enerjiyi bulunuz.

d) Eşdeğer akım kaynağından bırakılan toplam enerjiyi bulunuz.

e) (a)'dan (d)'ye kadar olan kısımları enerjinin korunumunu ilkesine göre kontrol ediniz.

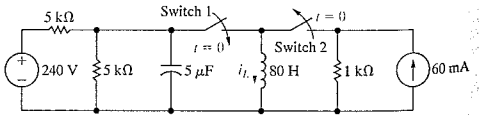
8.35 PSPICE Şekil P8.35'teki devrede bulunan anahtar $t = 0$ anında kapatılmadan önce uzun süre açık bırakılmıştır. $t \geq 0$ için $i_L(t)$'yi bulunuz.

Şekil P8.35



8.36 PSPICE Şekil P8.36'daki devrede bulunan anahtar 1 ve 2 eş zamanlıdır. Anahtar 1 açıldığında anahtar 2 kapanmaktadır ve tersi de doğrudur. Anahtar 1, $t = 0$ anında kapanmadan önce uzun süre açık bırakılmıştır. $t \geq 0$ için $i_L(t)$'yi bulunuz.

Şekil P8.36



Kısım 8.4

8.37 Şekil P8.37'deki devrede bulunan 50 nF'lık kapasitörde başlangıçta depolanan enerji 90 μJ'dür. İndüktörde başlangıçta enerji depolanmamıştır. i akımının doğal davranışını belirleyen karakteristik denklemin kökleri $-1000\ s^{-1}$ ve $-4000\ s^{-1}$'dir.

a) R ve L'nin nümerik değerlerini bulunuz.

b) $i(0)$ ve $di(0)/dt$'nın nümerik değerlerini anahtar kapatıldıktan hemen sonra bulunuz.

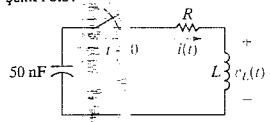
c) $t \geq 0$ için $i(t)$'yi bulunuz.

d) Anahtar kapandıktan kaç mikrosaniye sonra akım en büyük değerine ulaşır?

e) i'nin miliamper olarak en büyük değeri nedir?

f) $t \geq 0$ için $v_L(t)$'yi bulunuz.

Şekil P8.37



8.38 Şekil 8.3'teki devrede akım

$$i = B_1e^{-800t}\cos 600t + B_2e^{-800t}\sin 600t, \quad t \geq 0$$

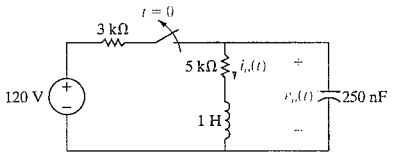
olarak biliniyor. Kapasitörün değeri 500 μF, başlangıç akım değeri sıfır ve kapasitördeki başlangıç gerilimi 12 V'tur. R, L, B_1 ve B_2 değerlerini bulunuz. 500 mF'lık kapasitör gerilimi için referans kutupluğunun üst terminalde pozitif olduğunu varsayınız.

8.40 PSPICE Şekil P8.40'ta gösterilen devredeki anahtar uzun süre kapalı tutulmuştur. $t = 0$ anında anahtar açılmıştır.

a) $t \geq 0$ için $i_o(t)$'yi

b) $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P8.40



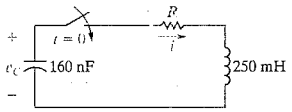
8.41 PSPICE Şekil P8.41'deki devrede, direnç kritik sönüm için ayarlanmıştır. Kapasitör başlangıç gerilimi 90 V ve indüktör başlangıç akımı 24 mA'dir.

a) R'nin nümerik değerini bulunuz.

b) Anahtar kapanır kapanmaz i ve di/dt'nin nümerik değerini bulunuz.

c) $t \geq 0$ için $v_C(t)$'yi bulunuz.

Şekil P8.41



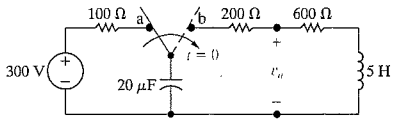
8.42 PSPICE Şekil P8.42'deki devrede bulunan anahtar a konumunda uzun süre bekletilmiştir. $t = 0$ anında anahtar aniden b konumuna getirilmiştir.

a) v_a'nın başlangıc değeri nedir?

b) dv_a/dt'nin başlangıç değeri nedir?

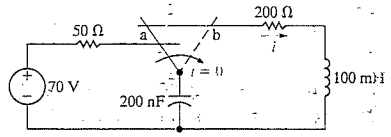
c) $t \geq 0$ için $v_a(t)$'nin nümerik ifadesi nedir?

Şekil P8.42



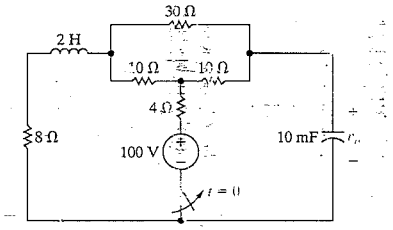
8.43 PSPICE Şekil P8.43'te gösterilen devredeki anahtar a konumunda uzun süre bekletilmiştir. $t = 0$ anında, anahtar aniden b konumuna alınmaktadır. $t \geq 0$ için $i(t)$'yi bulunuz.

Şekil P8.43



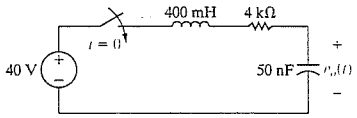
8.44 PSPICE Şekil P8.44'te gösterilen devredeki anahtar uzun süre kapalı tutulmuştur. Anahtar $t = 0$ anında açılmaktadır. $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P8.44



8.45 PSPICE Şekil P8.45'teki devrede başlangıçta depolanan enerji sıfırdır. $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P8.45



8.46 Şekil P8.45'te gösterilen devrede kapasitör 100 nF olarak değiştirilmiştir. Başlangıçta depolanan enerji hâlâ sıfır ise $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

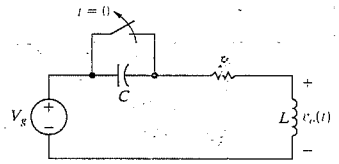
8.47 Şekil P8.45'te gösterilen devredeki kapasitör 156.25 nF olarak değiştirilmiştir. Başlangıçta depolanan enerji hâlâ sıfırdır. $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

8.48 Şekil P8.48'de gösterilen devredeki anahtar $t = 0$ anında açılmadan önce uzun süre kapalı tutulmuştur. Devre parametrelerinin, tepki eksik sönümlü olarak şekilde seçildiğini varsayınız.

a) $v_o(t)$ ifadesini v_g, a, v_d, C ve R'nin fonksiyonu olarak bulunuz ($t \geq 0$).

b) v_o'nun büyüklüğü maksimumken t değeri için ifadeyi bulunuz.

Şekil P8.48



8.49 PSPICE Şekil P8.48'deki devrede bulunan devre parametreleri $R = 120\ \Omega$, $L = 5$ mH, $C = 500$ nF ve $v_g = -600$ V'tur.

a) $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi nümerik olarak ifade ediniz.

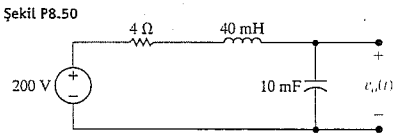
b) Anahtar açıldıktan kaç mikrosaniye sonra indüktör gerilimi maksimumdur?

c) İndüktör geriliminin maksimum değeri nedir?

d) R 12 Ω'a düşürülürse (a)–(c) şıklarını yeniden çözünüz.

8.50 PSPICE Şekil P8.50'de gösterilen devre uzun süredir çalışmaktadır. $t = 0$ anında kaynak gerilimi aniden 100 V'a düşürülüyor. $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz

Şekil P8.50



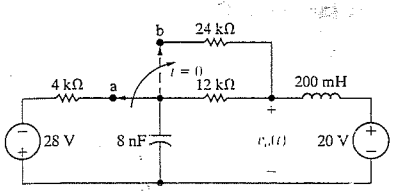
8.51 PSPICE Şekil P8.51'deki devrede anahtar a konumunda uzun süre bekletilmiştir. $t = 0$ anında anahtar aniden b konumuna getirilmiştir.

a) $v_o(0^+)$'ı,

b) $dv_o(0^+)/dt$'yi

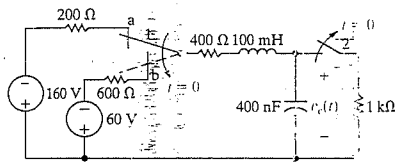
c) $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P8.51



8.52 PSPICE Şekil P8.52'de gösterilen devredeki iki anahtar eşzamanlı çalışmaktadır. Anahtar 1 a konumundayken anahtar 2 kapalıdır. Anahtar 1 b konumundayken anahtar 2 açıktır. Anahtar 1 a durumunda uzun süre bekletilmiş ve $t = 0$ anında, b durumuna getirilmiştir. $t \geq 0$ için $v_C(t)$'yi bulunuz.

Şekil P8.52



8.53 Şekil 8.15'teki devrede kapasitör geriliminin eksik sönümlü olduğunu varsayınız. Anahtar kapandığında enerji depolanmamış olduğunu da varsayınız.

a) $dv_C/dt = (\omega_0^2/\omega_d)Ve^{-\alpha t}\sin \omega_d t$ olduğunu gösteriniz.

b) $t = n\pi/\omega_d$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) iken $dv_C/dt = 0$ olduğunu gösteriniz.

c) $t = n\pi/v_d$ alırsak, $v_C(t_n) = V - V(-1)^n e^{-\alpha n\pi/\omega d}$ olduğunu gösteriniz.

d) $T_d = t_3 - t_1$ olmak üzere $\alpha = \dfrac{1}{T_d}\ln\dfrac{v_C(t_1) - V}{v_C(t_3) - V}$ olduğunu gösteriniz.

8.54 Şekil 8.15'teki devrede 200 nF kapasitör üzerindeki gerilim şu şekilde tanımlanmıştır: Anahtar kapatıldıktan birkaç saniye sonra, gerilim 50 V'ta sabittir. Gerilim 50 V'u ilk geçtiğinde en yüksek değeri olan 63.5050 V'a ulaşmaktadır. Bu olay anahtar kapatıldıktan $\pi/12$ ms sonra olmaktadır. Gerilim ikinci defa 50 V'u geçtiğinde, en yüksek değeri olan 50.985 V'a ulaşmaktadır. Bu ikinci en yüksek değer anahtar kapatıldıktan $\pi/4$ ms sonra olmaktadır. Anahtar kapatıldığı anda indüktör ve kapasitör üzerinde enerji depolanmamıştır. R ve L'nin nümerik değerlerini bulunuz. (*İpucu:* Önce Problem 8.53 üzerinde çalışınız.)

8.55 v_g değerinde sıçrama olduğu anda Şekil 8.19'daki devrede enerji depolanmamışsa dv_o/dt'nin $t = 0$ anında sıfır olduğunu gösteriniz.

8.56 a) $v_{o1}(0) = 5$ V ve $v_o(0) = 8$ V ise, Şekil 8.9'da gösterilen devrede $0 \leq t \leq t_{sat}$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

b) Devrenin doyuma ulaşması ne kadar sürer?

8.57 a) Geribesleme dirençleri R_1 ve R_2 kaldırılırsa Örnek 8.14'ü yeniden çözünüz.

b) Örnek 8.14'ü $v_{o1}(0) = -2$ V ve $v_o(0) = 4$ V değerleriyle yeniden çözünüz.

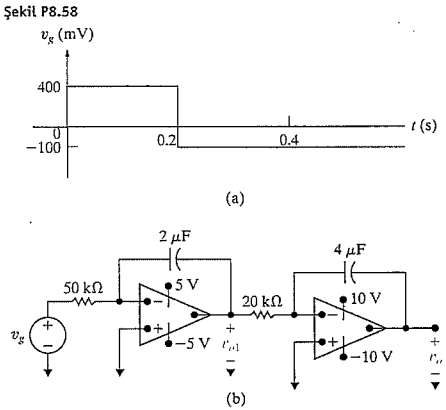
Kısım 8.5

8.58 PSPICE Şekil P8.58(a)'daki gerilim sinyali Şekil P8.58(b)'deki ardarda bağlanmış integral alıcı yükselteçlere uygulanmıştır. Sinyal uygulandığı anda kapasitörlerde enerji depolanmamıştır.

a) $0 \leq t \leq 0.2$ s ve 0.2 s $\leq t \leq t_{sat}$ zaman aralıklarında $v_o(t)$ ve $v_{o1}(t)$ için nümerik ifadeleri elde ediniz.

b) t_{sat} değerini hesaplayınız.

Şekil P8.58



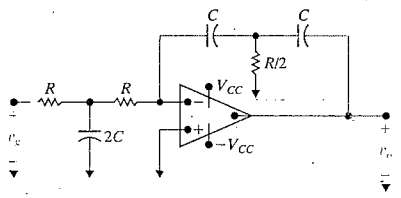
8.59 PSPICE Şekil P8.58(b)'deki devrede, 2 mF'lık kapasitöre 250 kΩ'luk direnç paralel olarak eklenmiş ve 4 mF'lık kapasitöre 250 kΩ'luk direnç paralel olarak eklenmiştir. Problem 8.58'deki gibi, sinyal uygulandığı anda kapasitörlerde enerji depolanmamıştır. $0 \le t \le 0.2$ s ve $t \ge 0.2$ s aralıkları için $v_o(t)$ ve $v_{o1}(t)$'nin nümerik ifadelerini elde ediniz.

8.60 a) Şekil P8.60'ta gösterilen devre için çıkış gerilimini giriş gerilimine bağlayan diferansiyel denklemi elde ediniz.

b) Şekil 8.18'de $R_1 C_1 = R_2 C_2 = RC$ olduğunda Eş. 8.75 ile sonucu karşılaştırınız.

c) Şekil P8.60'ta gösterilen devrenin avantajı nedir?

Şekil P8.60



8.61 Şimdi, diferansiyel denklemleri çözmek için, op amp devrelerin nasıl bağlandığını göstereceğiz.

a) Şekil 8.61 (a)'da gösterilen yay-kütle sistemi için diferansiyel denklemin çıkarımını yapınız (Sayfa 329'a bakınız.) Yay tarafından uygulanan kuvvetin yayın yer değiştirmesiyle doğru orantılı olduğunu, kütlenin sabit olduğunu ve sürtünme kuvvetinin hareket eden kütlenin hızıyla doğru orantılı olduğunu varsayınız.

b) Yüksek mertebeden türev, denklemde verilen diğer terimler cinsinden ifade edilebildiğinden, (a)'da elde edilen diferansiyel denklemi yeniden yazınız. Şimdi, gerilimin d^2x/dt^2 olduğunu ve ardışık integrallerin dx/dt ve x'i ürettiğini varsayınız. Denklemlerdeki katsayıları, yükselteçleri ayarlayarak sentezleyebilir ve katsayıları birleştirmek ve dx^2/dt^2'yi üretmek için gerekli bu terimleri toplayıcı yükselteç kullanarak elde edebiliriz. Bu fikirlerle, Şekil P8.61(b)'de gösterilen bağlantıyı analiz ediniz. Devrede taralı her bölgenin amacını açıklayınız ve A'da gösterilen sinyalin dx^2/dt^2 olduğunu varsayarak, B, C, D, E ve F ile gösterilen noktalardaki sinyalleri tanımlayınız. Ayrıca, R, R_1, C_1, R_2, C_2, R_3, R_4, R_5, R_6 ve R_7, R_8 terimlerini diferansiyel denklemin katsayıları cinsinden tartışınız.

Kısım 8.1 – 8.5

8.62 PRATİK BAKIŞ AÇISI a) Eş. 8.92'yi elde ediniz.

b) Eş. 8.93'ü elde ediniz.

c) Eş. 8.97'yi elde ediniz.

8.63 PRATİK BAKIŞ AÇISI Eş. 8.99'u elde ediniz.

8.64 PRATİK BAKIŞ AÇISI a) Pratik Bakış Açısı bölümünde anlatılan örnekteki aynı nümerik değerleri kullanarak, kapasitör üzerindeki gerilimin maksimum olduğu anı bulunuz.

b) v_C'nin maksimim değerini bulunuz.

c) (a) ve (b)'de elde edilen değerlerle t_{max} ve $v_C(t_{max})$ değerlerini karşılaştırınız.

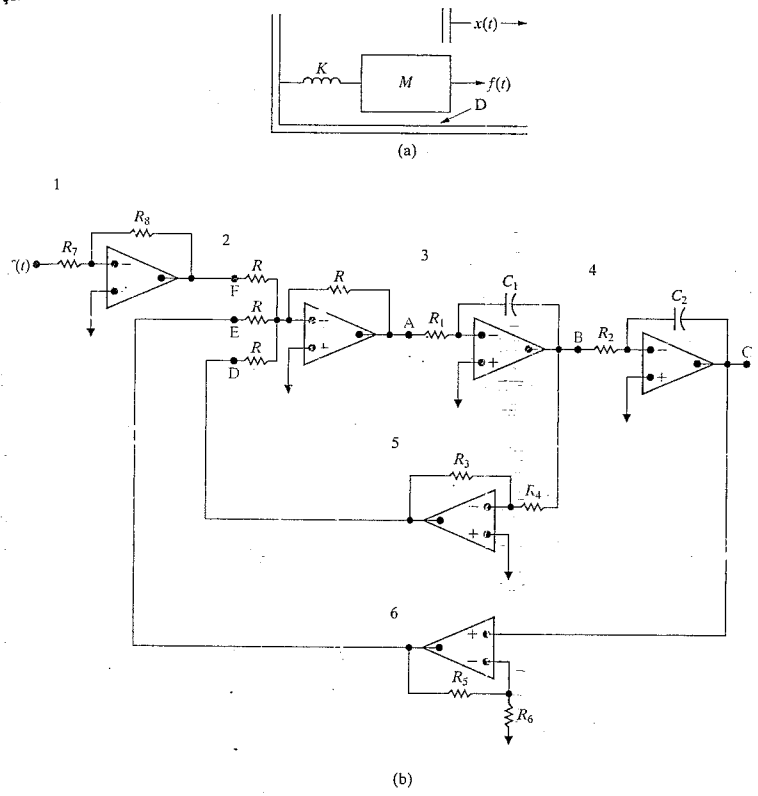
8.65 PRATİK BAKIŞ AÇISI Şekil 8.21'de verilen devredeki parametrelerin değerleri $R = 3\ \Omega$; $L = 5$ mH; $C = 0.25$ mF; $V_{dc} = 12$ V ve a = 50'dir. Birinci sarımın akımı 4 A iken anahtarın açıldığını varsayınız.

a) $t = 0^+$ anında devrede ne kadar enerji depolanmıştır?

b) Bujinin yanmadığını varsayınız. Bujideki maksimim gerilim ne kadardır?

c) Bujideki gerilim maksimum olduğunda kapasitördeki gerilim nedir?

Şekil P8.61



Sinüzoidal Durgun Durum Analizi

BÖLÜM İÇERİĞİ

9.1 Sinüzoidal kaynak *s. 332*
9.2 Sinüzoidal Tepki *s. 335*
9.3 Fazör *s. 337*
9.4 Frekans Bölgesinde Pasif Devre Elemanları *s. 342*
9.5 Frekans Bölgesinde Kirchhoff Yasaları *s. 346*
9.6 Seri, Paralel ve Δ - Y Sadeleştirmeleri *s. 348*
9.7 Kaynak dönüşümleri ve Thévenin Norton Eşdeğer Devreleri *s. 355*
9.8 Düğüm Gerilimi Yöntemi *s. 359*
9.9 Ağ Akımı Yöntemi *s. 360*
9.10 Trafo *s. 361*
9.11 İdeal Trafo *s. 365*
9.12 Fazör Diyagramları *s. 372*

✓ BÖLÜM HEDEFLERİ

1. Fazör kavramının anlaşılması, fazör ve ters fazör dönüşümlerinin yapılabilmesi.
2. Fazör kavramları kullanılarak sinüzoidal kaynak içeren devrelerin frekans alanına dönüştürülebilmesi.
3. Frekans alanındaki bir devreyi çözmek için aşağıdaki devre analiz tekniklerinin nasıl kullanılacağının bilinmesi.
   - Kirchhoff yasaları;
   - Seri, paralel ve Δ-Y sadeleştirmeleri,
   - Gerilim ve akım bölümü,
   - Thévenin Norton eşdeğerleri;
   - Düğüm gerilimi yöntemi ve
   - Ağ akımı yöntemi
4. Fazör yöntemi kullanarak doğrusal trafo içeren devrelerin analiz edilebilmesi.
5. İdeal trafo kısıtlarının anlaşılması ve fazör yöntemi kullanarak ideal trafo içeren devrelerin analiz edilebilmesi.

Şimdiye dek sabit kaynaklar içeren devreler üzerine odaklandık. Bu bölümde artık zamanla değişen gerilim ve akım kaynakları içeren devreler üzerinde durmaya hazırız. İlgi alanımız öncelikli olarak gerilim ve akım değerleri sinüzoidal olarak değişen kaynaklar olacaktır. Sinüzoidal kaynaklar ve bunların devre davranışı üzerindeki etkileri, birkaç nedenden dolayı önemli bir çalışma alanı oluşturmaktadır. Bunlardan ilki, elektrik enerjisinin üretimi, iletimi, dağıtımı ve tüketiminin aslında sinüzoidal durgun durum koşulları altında gerçekleşmesidir. İkinci bir neden, sinüzoidal davranışın anlaşılmasının, sinüzoidal olmayan kaynaklar içeren devrelerin davranışının öngörülmesini kolaylaştırmasıdır. Diğer bir neden ise durgun durum sinüzoidal davranışın çoğunlukla elektrik sistem tasarımını kolaylaştırmasıdır. Yani, tasarımcı gerekli koşulları istenen durgun durum sinüzoidal tepki cinsinden tanımlayıp, devreyi veya sistemi bu özelliklere göre tasarlayabilir. Eğer cihaz gerekli koşulları sağlıyorsa tasarımcı, devrenin sinüzoidal olmayan girişler için de tatmin edici tepkiyi vereceğinden emin olabilir.

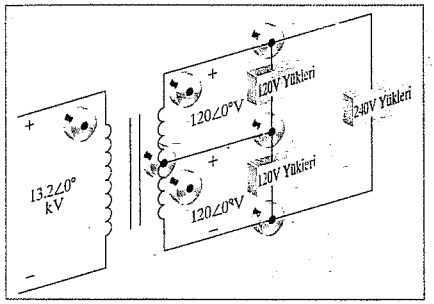
Kitabın bundan sonraki bölümleri büyük ölçüde, sinüzoidal kaynaklar tarafından sürülen devrelerin analiz edilmesi için ihtiyaç duyulan tekniklerin iyi anlaşılması üzerine kurulmuştur. 1. 4. Bölümler arasında verilen devre analizi ve sadeleştirme teknikleri, dc kaynaklar için olduğu gibi sinüzoidal kaynaklar için de geçerli olduğundan, bu bölümde yer verilen konulardan bazıları size tanıdık gelecektir. Sinüzoidal analize başlangıçtaki zorlukların başında uygun modelleme denklemlerinin geliştirilmesi ve karmaşık sayılar ile hesap yapılması gelmektedir.

Pratik Bakış Açısı

Ev İçi Dağıtım Devresi

Elektrik enerjisi üreten, ileten ve dağıtan güç sistemleri sinüzoidal durgun durumda çalışacak şekilde tasarlanmıştır. Birleşik Devletler'de kullanılan standart ev içi dağıtım devresi, yandaki şekilde de görüldüğü gibi, üç telli 240/120 V devresidir.

Hizmet dağıtıcı gerilimini 13.2 kV'tan 240 V'a düşürmek için trafo kullanılır. İkincil sarımın ortasındaki bağlantı 120 V'luk hizmeti sağlamaktadır. Birleşik Devletler'deki çalışma frekansı 60 Hz'dir. Birleşik Devletler dışında hem 50 Hz hem de 60 Hz'de çalışan sistemler bulunmaktadır.



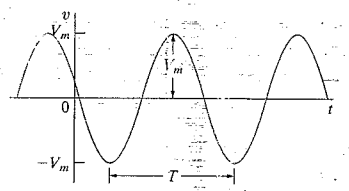
Yukarıda bahsedilen gerilimler rms değerleridir. Zamanla değişen sinyaller için rms değeri tanımlama gerekçesi 10. Bölüm'de anlatılacaktır.

9.1 Sinüzoidal Kaynak

Sinüzoidal gerilim kaynağı, (bağımsız ve bağımlı) zamanla sinüzoidal olarak değişen bir gerilim üretir. **Sinüzoidal akım kaynağı** (bağımsız veya bağımlı) zamanla sünizoidal olarak değişen bir akım üretir. Sinüzoidal fonksiyonları incelerken gerilim kaynağı kullanacağız, ancak gözlemlerimiz akım kaynakları için de geçerli olacaktır.

Sinüzoidal değişen bir fonksiyonu sinüs veya kosinüs fonksiyonuyla ifade edebiliriz. Her ikisi de aynı derecede kullanışlı olmasına rağmen iki fonksiyon biçimini eş zamanlı kullanamayız. Konunun geri kalanı boyunca kosinüs fonksiyonu kullanacağız. Bu nedenle, sinüzoidal değişen bir gerilimi aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$v = V_m \cos(\omega t + \phi). \tag{9.1}$$



Şekil 9.1 ▲ Sinüzoidal gerilim.

Eş. 9.1'de geçen parametreleri daha iyi anlamak için Şekil 9.1'de gösterilen zamana karşı gerilim grafiğinden faydalanabiliriz.

Sinüzoidal fonksiyonun düzenli aralıklarla kendini tekrar ettiği görülmektedir. Bu tür fonksiyonlara periyodik adı verilir. Önemli parametrelerden biri, sinüzoidal fonksiyonun mümkün olan tüm değerleri alması için gereken süredir. Bu süre fonksiyonun **periyodu** olarak adlandırılır ve T ile gösterilir. Periyot saniye cinsinden ölçülür. T'nin tersi, kosinüs fonksiyonunun saniyedeki devir sayısını, yani frekansını verir ve f ile gösterilir.

$$f = \frac{1}{T}. \tag{9.2}$$

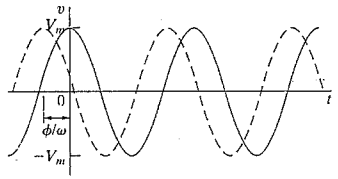
Saniyedeki devir sayısı hertz ile ifade edilir ve Hz olarak kısaltılır. (Saniyedeki devir ifadesi günümüz teknik metinlerinde nadiren kullanılmaktadır.) Eş. 9.1'de t'nin katsayısı T ve f'nin nümerik değerini içermektedir. Omega (ω) ise sinüzoidal fonksiyonun açısal frekansını temsil eder ve

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T \text{ (radyan/saniye)} \tag{9.3}$$

ile verilir. Eş. 9.3 kosinüs (veya sinüs) fonksiyonunun argümanı ωt'nin her 2π rad (360°)'dan geçişinde alabileceği tüm değerleri aldığını ifade etmektedir. Ayrıca, t ne zaman T'nin tam katı değerini alırsa, argüman ωt de 2π'rad'ın tam katı artış gösterir.

V_m'nin katsayısı sinüzoidal fonksiyonun maksimum genliğini verir. Kosinüs fonksiyonu ±1 ile sınırlı olduğundan genlik de $\pm V_m$ ile sınırlıdır. Bu özellikler Şekil 9.1'de görülmektedir.

Eş. 9.1'deki ϕ açısı sinüzoidal gerilimin **faz açısı** olarak adlandırılır. Faz açısı, sinüzoidal fonksiyonun $t = 0$ anındaki değerini belirler, yani zamanı ölçmeye başladığımız anda periyodik dalganın aldığı değeri ifade eder. Faz açısının değiştirilmesi sinüzoidal fonksiyonu zaman ekseni üzerinde kaydırır ancak genlik (V_m) veya açısal frekansı (ω) etkilemez. Örneğin, ϕ sıfıra düşürüldüğünde, Şekil 9.1'de görülen sinüzoidal fonksiyon, Şekil 9.2'de görüldüğü gibi ϕ/ω zaman birimi sağa kayacaktır. ϕ pozitif olduğunda sinüzoidal fonksiyon sola kayarken, ϕ negatifken sağa kayar (Bkz. Problem 9.4.)



Şekil 9.2 ▲ Şekil 9.1'de görülen sinüzoidal gerilimin $\phi = 0$ iken sağa kaymış hali.

Bu noktada faz açısı ile ilgili bir açıklama uygun olacaktır; ωt ve ϕ sinüzoidal fonksiyonun argümanı içerisinde toplandığından aynı birime sahip olmalıdır. ωt radyan cinsinden ifade edilmişse ϕ de öyle olmalıdır. Ancak ϕ genellikle derece cinsinden verilir. Bu nedenle, toplanmadan önce ωt radyandan dereceye çevrilir. Faz açısını derece ile ifade ederek biz de bu gösterim biçimine uyacağız. Trigonometri derslerinizden hatırlayacağımız gibi, radyandan dereceye dönüşüm aşağıdaki gibi yapılır.

$$(\text{derece}) = \frac{180^\circ}{\pi}(\text{radyan}). \tag{9.4}$$

Sinüzoidal gerilimin (veya akımın) diğer bir önemli özelliği **rms[1] değeridir.** Periyodik bir fonksiyonun rms değeri, fonksiyonun karesinin ortalama değerinin kare kökü olarak tanımlanır. Buna göre, $v = V_m \cos(\omega t + \phi)$ ise v'nin rms değeri

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)\, dt} \tag{9.5}$$

olarak verilir. Eş. 9.5'ten görüldüğü gibi, gerilimin karesinin ortalama değerini, v^2'nin bir periyot boyunca (yani t_0'dan $t_0 + T$'ye kadar) integralini alıp, sonucu integral aralığı T'ye bölerek buluruz. İntegralin başlangıç noktası t_0 gelişigüzel seçilebilir.

Kök işaretinin altında kalan ifade $V_m^2/2$'ye indirgenir. (Bkz. Problem 9.6). Bu nedenle v'nin rms değeri

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}. \tag{9.6}$$

◁ **Sinüzoidal gerilim kaynağının rms değeri**

olarak elde edilir. Sinüzoidal gerilimin rms değeri yalnızca v'nin maksimum değerine yani V_m'ye bağlıdır. Rms değeri frekansın veya faz açısının bir fonksiyonu değildir. 10. Bölümdeki güç hesaplarında kullanılacağından rms değerinin önemine dikkat edilmelidir (Bkz. Kısım 10.3.).

Frekansını, faz açısını ve genliğini (maksimum veya rms değeri) bildiğimiz bir sinüzoidal sinyali tam olarak ifade edebiliriz. Örnekler 9.1, 9.2 ve 9.3 sinüzoidal fonksiyonun bu basit özelliklerine açıklık getirmektedir. Örnek 9.4'te periyodik bir fonksiyonun rms değerini bularak *kare ortalamasının kare kökü* ifadesine açıklık getireceğiz.

[1]İngilizce'de kare ortalamasının kare kökü anlamına gelen "*root mean square*" ifadesinin baş harflerinden oluşmaktadır.

Örnek 9.1 **Sinüzoidal Akımın Özelliklerinin Bulunması**

Bir sinüzoidal akmın maksimum genliği 20 A'dir. Akım bir devrini 1 ms'de tamamlamaktadır. Zaman sıfırken akımın aldığı değer 10 A'dir.

a) Akımının frekansı hertz cinsinden nedir?

b) Frekans radyan/saniye cinsinden nedir?

c) $i(t)$ ifadesini kosinüs fonksiyonu olarak yazınız.

d) Akımın rsm değeri nedir?

Çözüm

a) Problemin ifadesinden anlaşıldığı üzere $T = 1$ ms; yani $f = 1/T = 1000$ Hz'dir.

b) $\omega = 2\pi f = 2000\pi$ rad/s.

c) $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) = 20 \cos(2000\,\pi t + \phi)$ $i(t) = 10$A olduğundan, $10 = 20 \cos \phi$, yani $\phi = 60°$'dir. $i(t)$ ifadesi aşağıdaki biçimi alır:

$$i(t) = 20 \cos(2000\,\pi t + 60°).$$

d) Eş. 9.6'nın ispatından hatırlanacağı gibi sinüzoidal akımın $I_m/\sqrt{2}$ rms değeri $20/\sqrt{2}$ yani 14.14 A olarak hesaplanır

Örnek 9.2 **Sinüzoidal Gerilimin Özelliklerinin Bulunması**

Bir sinüzoidal gerilim $v = 300 \cos(120\pi t + 30°)$ olarak verilmiştir.

a) Gerilimin periyodu milisaniye cinsinden nedir?

b) Frekans hertz cinsinden nedir?

c) $t = 2.778$ ms iken v'nin büyüklüğü nedir?

d) v'nin rms değeri nedir?

Çözüm

a) v ifadesinden $\omega = 120\,\pi$ rad/s olarak bulunur. $\omega = 2\pi/T$ olduğundan $\omega = 2\pi/T$, $T = 2\pi/\omega = \frac{1}{60}$ s veya 16.667 ms'dir.

b) Frekans $1/T$ yani 60 Hz'dir.

c) (a)'dan $\omega = 2\pi/16.667$ olduğu görülür. $t = 2.778$ ms'de ωt yaklaşık 1.047 rad yani 60° değerini alır. Buradan $v(2.778) = 300 \cos(60° + 30°) = 0$ V bulunur.

d) $V_{rms} = 300/\sqrt{2} = 212.13$ V.

Örnek 9.3 **Sinüs İfadesinin Kosinüs İfadesine Dönüştürülmesi**

Sinüs fonksiyonunun argümanından 90 ($\pi/2$ rad) çıkararak kosinüs fonksiyonuna dönüştürebiliriz.

a) $\sin(\omega t + \theta) = \cos(\omega t + \theta - 90°)$ olduğunu göstererek dönüşümü doğrulayınız.

b) (a)'da bulunan sonucu kullanarak $\sin(\omega t + 30°)$ ifadesini kosinüs fonksiyonu olarak yazınız.

Çözüm

a) Aşağıdaki trigonometrik özdeşliği kullanarak denklemin doğruluğunu kanıtlayabiliriz.

$$\cos(\alpha = \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$\alpha = \omega t + \beta$ ve $\beta = 90°$ kabul edelim. Cos 90° = 0 ve sin 90° = 1 olduğundan

$$\cos(\alpha - \beta) = \sin\alpha = \sin(\omega t + \theta) = \cos(\omega t + \theta - 90°)$$

denklemini elde ederiz.

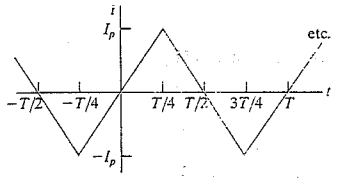
b) (a)'daki sonucu kullanarak

$$\sin(\omega t + 30°) = \cos(\omega t + 30° - 90°) = \cos(\omega t - 60°)$$

sonucuna ulaşırız.

Örnek 9.4 **Üçgen Dalgabiçiminin rms Değerinin Hesaplanması**

Şekil 9.3'te görülen periyodik üçgen akım sinyalinin rms değerini hesaplayınız. Cevabınızı akımın tepe değeri I_p cinsinden ifade ediniz.



Şekil 9.3 ▲ Periyodik üçgen akım sinyali.

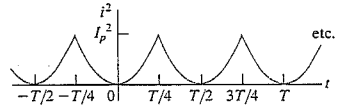
Çözüm

Eş. 9.5 kullanılarak i akımının rms değeri

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2 dt}$$

olarak yazılabilir. Kök işaretinin altında kalan integrali, bir periyot aralığında kare fonksiyonunun altında kalan alan olarak yorumlamak rms değerinin hesaplanmasını kolaylaştırır. Kare fonksiyonunun 0 ile T aralığında altında kalan alan taranmış olarak Şekil 9.4'te gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi bir periyotta kare fonksiyonun altında kalan alan, 0 ile $T/4$ aralığında akımın karesinin altında kalan alanın dört katına eşittir:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} i^2 dt = 4\int_0^{T/4} i^2 dt.$$



Şekil 9.4 ▲ t'ye karşı i^2.

i'nin 0 ile $T/4$ arasındaki analitik ifadesi

$$i = \frac{4I_p}{T}t, \quad 0 < t < T/4$$

biçimindedir. Bir periyotta kare fonksiyonunun altında kalan alan ise

$$\int_{t_0}^{t_0+T} i^2 dt = 4\int_0^{T/4} \frac{16I_p^2}{T^2} t^2 dt = \frac{I_p^2 T}{3}.$$

bulunur. Fonksiyonun ortalama değeri bir periyotluk alanın periyoda bölünmesi ile elde edilir:

$$i_{mean} = \frac{1}{T}\frac{I_p^2 T}{3} = \frac{1}{3}I_p^2.$$

Akımın rms değeri bu ortalama değerin kare köküne eşittir.

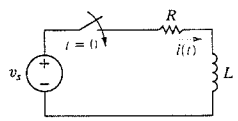
$$I_{rms} = \frac{I_p}{\sqrt{3}}.$$

NOT: Bu kısımda öğrendiklerinizi Bölüm Problemlerinden 9.1, 9.5 ve 5.8'i de çözmeyi deneyerek sınayınız.

9.2 Sinüzoidal Tepki

Sinüzoidal kaynakların durgun durum tepkisine geçmeden önce daha genel bir problem olan toplam tepki üzerinde duracağız. Böylece durgun durum çözümünün daha iyi anlaşılmasını sağlayacağız. Şekil 9.5'te görülen devre, problemin genel yapısını tanımlamaktadır. Burada v_s sinüzoidal bir gerilimdir:

$$v_s = V_m \cos(\omega t + \phi). \tag{9.7}$$



Şekil 9.5 ▲ Sinüzoidal gerilim kaynağı ile uyarılan RL devresi.

Kolaylık acısından devredeki akımın başlangıçta sıfır olduğunu kabul edelim ve zamanı anahtar kapandığı andan itibaren ölçmeye başlayalım. Amacımız $t \geq 0$ için $i(t)$ ifadesini çıkarmaktır. Bu işlem 7. Bölümde olduğu gibi RL devresinin basamak tepkisini bulma işlemi ile benzerlik gösterir. Tek fark bu kez gerilim kaynağının sabit yani dc değil, zamanla değişen sinüzoidal bir gerilim kaynağı olmasıdır. Kirchhoff gerilim yasası Şekil 9.5'te görülen devreye uygulandığında aşağıdaki adi diferansiyel denkleme ulaşılır.

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos(\omega t + \phi). \tag{9.8}$$

Bu tür denklemlerin çözümü, giriş niteliğinde diferansiyel denklem derslerinde öğretilmektedir. Henüz diferansiyel denklemlerle çalışmadıysanız i'nin çözümünün aşağıdaki gibi olduğunu kabul ediniz.

$$i = \frac{-V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\phi - \theta) e^{-(R/L)t} + \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \phi - \theta), \tag{9.9}$$

Burada θ, teğet $\omega L/R$ olan açı olarak tanımlanmıştır. Böylece, frekansı bilinen bir sinüzoidal kaynak tarafından sürülen bir devrede θ'yı kolaylıkla belirleyebiliriz.

Eş. 9.9'un doğruluğunu, $t \geq 0$ için Eş. 9.8'i sağladığını göstererek kanıtlayabiliriz. Bu alıştırmayı Problem 9.10'u çözerken yapmanız için size bırakıyoruz.

Eş. 9.9'un sağ tarafındaki ilk terim, zamanla giderek küçüldüğünden, **geçici tepki bileşeni olarak** adlandırılır. Sağ taraftaki ikinci terim ise çözümün **durgun durum bileşeni** olarak adlandırılır. Anahtar kapalı kaldığı ve sinüzoidal kaynak çalışmaya devam ettiği sürece bu terim varolmaya devam eder. Bu bölümde, diferansiyel denklemi çözmeden, doğrudan durgun durum tepkisini hesaplamak için bir yöntem geliştireceğiz. Ancak bu yöntemi kullanarak geçici bileşeni veya geçici ve durgun durum tepkilerinin toplamı olan toplam tepkiyi hesaplayamayız.

Bu andan itibaren Eş. 9.9'un durgun durum kısmı üzerinde duracağız. Bu noktada aşağıda listelenen durgun durum çözümü özelliklerini hatırlamak faydalı olacaktır.

1. Durgun durum çözümü sinüzoidal bir fonksiyondur.
2. Tepki sinyalinin frekansı kaynak sinyalinin frekansı ile aynıdır. Bu durum, devre parametreleri R, L ve C'nin sabit olduğu tüm doğrusal devreler için geçerlidir. (Eğer tepki sinyalindeki frekanslar kaynak sinyalinden farklı ise devrede doğrusal olmayan bir eleman var demektir.)
3. Durgun durum tepkisinin maksimum genliği, genellikle kaynağın maksimum genliğinden farklıdır. Üzerinde tartışılan devre için tepki sinyalinin maksimum genliği $V_m/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$, sinyal kaynağının maksimum genliği ise V_m'dir.
4. Tepki sinyalinin faz açısı genelikle kaynağın faz açısından farklıdır. Üzerinde tartıştığımız devre için akımın faz açısı $\phi - \theta$, gerilim kaynağınınki ise ϕ'dir.

Kısım 9.3'te bahsedeceğimiz fazör yöntemini daha iyi anlayabilmemiz açısından yukarıda saydığımız özellikleri hatırlamamız önemlidir. Özellikle, yalnızca durgun durum tepkisini bulmak istediğimizde yapmamız gereken şey tepki sinyalinin maksimum genliği ile faz açısını bulmaktır. Dalgabiçimi ve frekans zaten bilinmektedir.

NOT: Bu bölümde öğrendiklerinizi sınamak için Bölüm Problemi 9.9'u çözmeyi deneyiniz.

9.3 Fazör

Fazör, sinüzoidal bir fonksiyonun genlik ve faz açısı bilgilerini içeren karmaşık bir sayıdır[1]. Fazör kavramı, üstel fonksiyonu trigonometrik fonksiyon ile ilişkilendiren Euler eşitliğine dayanmaktadır:

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta. \tag{9.10}$$

Eş. 9.10 sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını farklı bir şekilde ifade etmemizi sağladığından oldukça önemlidir. Kosinüs fonksiyonunu üstel fonksiyonun gerçek kısmı, sinüs fonksiyonunu ise sanal kısmı olarak düşünebiliriz. Yani;

$$\cos\theta = \Re\{e^{j\theta}\} \tag{9.11}$$

ve

$$\sin\theta = \Im\{e^{j\theta}\} \tag{9.12}$$

yazabiliriz. Burada $\Re$ "gerçek kısmı" $\Im$ ise "Sanal kısmı" ifade etmektedir.

Durgun durum analizinde kullanmak üzere kosinüs fonksiyonunu seçtiğimizden (Bkz. Kısım 9.1), Eş. 9.11'i doğrudan uygulayabiliriz. Eş. 9.1'de verilen sinüzoidal gerilimi Eş. 9.11'de gösterilen biçimde yazdığımızda aşağıdaki denklemlere ulaşırız.

$$\begin{aligned} v &= V_m \cos(\omega t + \phi) \\ &= V_m \Re\{e^{j(\omega t + \phi)}\} \\ &= V_m \Re\{e^{j\omega t} e^{j\phi}\}. \end{aligned} \tag{9.13}$$

Fonksiyonunu gerçek kısmının argümanındaki V_m katsayısını sonucu etkilemeden dışarı çıkarabiliriz. Aynı zamanda argümanın içerisindeki üstel fonksiyonların sırasını değiştirerek Eş. 9.13'ü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$v = \Re\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\}. \tag{9.14}$$

[1]Karmaşık sayılar konusunda kendinizi yeterli bulmuyorsanız Ek B'den faydalanabilirsiniz.

Eş. 9.14'te görüldüğü gibi $V_m e^{j\phi}$ verilen sinüzoidal fonksiyonun genliğini ve faz açısını içeren karmaşık bir sayıdır. Bu karmaşık sayı verilen sinüzoidal fonksiyonun **fazör gösterimi** veya **fazör dönüşümü** olarak adlandırılır. Bu dönüşüm

Fazör dönüşümü ▶

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi} = \mathcal{P}\{V_m \cos(\omega t + \phi)\}, \tag{9.15}$$

biçiminde gösterilir. Buradaki $\mathcal{P}\{(V_m \cos(\omega t + \phi)\}$ ifadesi $V_m \cos(\omega t + \phi)$'nin fazör dönüşümü olarak okunur. Yani, fazör dönüşümü sinüzoidal fonksiyonu zaman bölgesinden karmaşık sayı bölgesine aktarmaktadır. Tepki genel olarak ω'ya bağlı olduğundan bu bölge **frekans bölgesi** olarak da adlandırılır. Eş. 9.15'te olduğu gibi, fazör değişkenleri koyu harfle ifade ediyoruz.

Eş. 9.15 fazörün kutupsal gösterimidir ancak fazörü Kartezyen biçimde göstermek de mümkündür. Bu durumda Eş. 9.15'i

$$\mathbf{V} = V_m \cos\phi + jV_m \sin\phi \tag{9.16}$$

biçiminde yeniden yazabiliriz. Kutupsal ve Kartezyen gösterimlerin her ikisi de fazör kavramının devre uygulamalarında kullanılmaktadır.

Bu noktada Eş. 9.15 üzerine bir yorum daha eklemek faydalı olacaktır. $e^{j\phi}$ fonksiyonunun çok sık karşımıza çıkması yaygın olarak kabul görmüş bir gösterime yol açmıştır. Bu gösterim aşağıdaki gibidir:

$$1\angle\phi^\circ \equiv 1e^{j\phi}.$$

Bu gösterim bundan sonra işlenecek konularda sıkça kullanılacaktır.

Ters Fazör Dönüşümü

Şu ana dek sinüzoidal fonksiyonun fazör dönüşümü üzerinde durduk. Ancak bu işlemi tersine de çevirebiliriz, yani verilen bir fazör ifadesi için sinüzoidal fonksiyonu yazabiliriz. Sinüzoidler için kosinüs fonksiyonunu kullanmaya karar verdiğimizden, $\mathbf{V} = 100\angle -26^\circ$, için v ifadesi $100\cos(\omega t - 26^\circ)$ olarak yazılır. Görüldüğü gibi v'nin değerini fazör ifadesinden çıkarmak mümkün değildir. Fazör yalnızca genlik ve faz bilgisi taşır. Fazör dönüşümünden zaman bölgesindeki ifadeye geçiş adımı ters fazör dönüşümü olarak adlandırılır ve

$$\mathcal{P}^{-1}\{V_m e^{j\phi}\} = \Re\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\} \tag{9.17}$$

olarak verilir.

Burada $\mathcal{P}^{-1}\{V_m e^{j\phi}\}$ gösterimi "$V_m e^{j\phi}$"nin ters fazör dönüşümü olarak okunur. Eş. 9.17'den anlaşılabileceği gibi ters fazör dönüşümünü bulabilmek için fazör $e^{j\omega t}$ ile çarpılarak elde edilen çarpım gerçek ve sanal kısımlarına ayrılır.

Sinüzoidal durgun durum tepkisinin maksimum genliğini ve faz açısını karmaşık sayılar cinsinden basitçe ifade etmeye yaradığından, fazör dönüşümü devre analizi için oldukça faydalı bir araçtır. Aşağıda verilen tespitler bu sonucu desteklemektedir.

1. Geçici tepki bir süre sonra sıfırlanmaktadır, bu nedenle çözümün durgun durum bileşeni diferansiyel denklemi sağlamalıdır. (Bkz. Problem 9.10[b].)
2. Sinüzoidal kaynaklar tarafından beslenen doğrusal bir devrede, durgun durum tepkisi de sinüzoidaldir ve bu tepkinin frekansı kaynağın frekansı ile aynıdır.
3. Eş. 9.11'de verilen gösterim kullanıldığında durgun durum çözümü $\Re\{Ae^{j\beta}e^{j\omega t}\}$ olarak bulunur. Burada A tepkinin maksimum genliğini, β ise tepkinin faz açısını ifade eder.
4. Yukarıda verilen çözüm diferansiyel denklemde yerine konduğunda $e^{j\omega t}$ terimi sadeleşir, geriye A ve β'nın karmaşık sayılar bölgesinde çözülmesi kalır.

Yukarıda verilen gözlemleri Şekil 9.5'te verilen devre üzerinde açıklayalım. i akımı için durgun durum çözümünün

$$i_{ss}(t) = \Re\{I_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\} \tag{9.18}$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. Burada "ss" indisi durgun durum çözümü ile ilgilenildiğini göstermektedir. 9.18'i Eş. 9.8'de yerine koyarsak

$$\Re\{j\omega L I_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\} + \Re\{R I_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\} = \Re\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\} \tag{9.19}$$

ifadesine ulaşırız. Eş. 9.19'u çıkarırken türev alma ve sabitle çarpma işlemlerinin, işlemin gerçek kısmına dahil edilebileceği bilgisinden faydalandık. Aynı zamanda Eş. 9.8'in sağ tarafını Eş. 9.19'un gösterimini kullanarak yeniden yazdık. Kompleks sayı cebirinden, gerçek kısımların toplamının, toplamın gerçek kısmı olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla Eş. 9.19'un sol tarafını aşağıdaki gibi tek bir terime indirgeyebiliriz.

$$\Re\{(j\omega L + R) I_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\} = \Re\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\}. \tag{9.20}$$

Devrenin sinüzoidal durgun durum tepkisini analiz etmek için kosinüs fonksiyonunu kullanmaya karar verdiğimizden Eş. 9.20'ye

ulaşmak için $\Im$ operatörünü kullandık. Bunun yerine sinüzoidal durgun durum analizinde sinüs fonksiyonunu kullansaydık Eş. 9.11 yerine doğrudan Eş. 9.12'yi kullanır, aşağıdaki sonuca ulaşırdık.

$$\Im\{(j\omega L + R)I_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\} = \Im\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\}. \tag{9.21}$$

Görüldüğü gibi Eş. 9.21'in her iki tarafındaki karmaşık ifadeler Eş. 9.20'nin iki tarafındakiler ile aynıdır. Karmaşık ifadelerin hem gerçek hem de sanal kısmı eşitse ifadelerin kendileri de birbirine eşit demektir. Bu nedenle Eş. 9.20 ve Eş. 9.21 kullanılarak

$$(j\omega L + R)I_m e^{j\beta} = V_m e^{j\phi}$$

ya da

$$I_m e^{j\beta} = \frac{V_m e^{j\phi}}{R + j\omega L} \tag{9.22}$$

yazılabilir. Görüldüğü gibi $e^{j\omega t}$ terimi tepkinin hem genlik (I_m) hem de faz açısı (β) ifadelerinde sadeleşmiştir. Bu nedenle I_m ve β'yı bulmak için $V_m e^{j\phi}$ ve $R + j\omega L$ karmaşık ifadeleri ile cebirsel işlemler yapmak gerekmektedir. Hatırlayacağınız gibi hem kutupsal hem de Kartezyen gösterimler ile daha önce karşılaşmıştık.

Bu noktada önemli bir uyarı yararlı olacaktır: Fazör ve ters fazör dönüşümleri zaman ve frekans bölgelerine geçiş yapabilmeyi sağlar. Bu nedenle, bir çözüm bulduğunuzda ya zaman ya da frekans bölgesindesiniz demektir. Aynı anda her iki bölge de birden olamazsınız. Zaman ve fazör bölgelerinde karışık terimler içeren çözümler anlamsızdır.

Fazör dönüşümü, sinüzoidal fonksiyonların toplam ifadelerine doğrudan uygulanabildiğinden devre analizi için oldukça faydadır. Devre analizi akım ve gerilimlerin toplamlarını içerdiğinden bu tespitin önemi açıktır. Bu özelliği aşağıdaki gibi formüle edebiliriz: Eğer

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n \tag{9.23}$$

eşitliğinde, sağ taraftaki gerilimlerin hepsi aynı frekansa sahip sinüzoidal gerilimler ise

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{V}_n \tag{9.24}$$

eşitliği geçerlidir. Yani toplamın fazör gösterimi, terimlerin fazörlerinin toplamına eşittir. Eş. 9.24'ün çıkarımına Kısım 9.5'te değineceğiz.

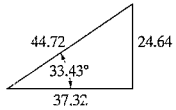
Fazör dönüşümünü devre analizine uyarlamadan önce, dönüşümün faydasını, size yabancı olmayan bir pobleme uygulayarak sınayacağız: Trigometrik eşitlikler yardımıyla sinüzoidal fonksiyonların toplanması. Örnek 9.5, fazör dönüşümünün bu tip problemleri ne kadar kolaylaştırdığını göstermektedir.

Örnek 9.5 **Fazör Kullanarak Kosinüslerin Toplanması**

$y_1 = 20\cos(\omega t - 30°)$ ve $y_2 = 40\cos(\omega t + 60°)$ ise $y = y_1 + y_2$'yi tek bir sinüzoidal fonksiyon olarak ifade ediniz.

a) Problemi trigometrik özdeşliklerden faydalanarak çözünüz.

b) Problemi fazör kavramını kullanarak çözünüz.



Şekil 9.6 y'nin çözümü için kullanılan dik üçgen.

Çözüm

a) Öncelikle y_1 ve y_2'yi iki açının toplamının kosinüsü olarak açalım.

$$y_1 = 20\cos\omega t\cos 30° + 20\sin\omega t\sin 30°,$$

$$y_2 = 40\cos\omega t\cos 60° - 40\sin\omega t\sin 60°.$$

y_1 ve y_2'yi toplayarak

$$\begin{aligned} y &= (20\cos 30 + 40\cos 60)\cos\omega t \\ &\quad + (20\sin 30 - 40\sin 60)\sin\omega t \\ &= 37.32\cos\omega t - 24.64\sin\omega t \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu iki terimi birleştirebilmek için kosinüs ve sinüs terimlerinin katsayılarını Şekil 9.6'da gösterildiği gibi bir dik üçgenin kenarları olarak düşünelim. Sağ tarafı hipotenüsle çarpıp ardından hipotenüse bölelim. Elde ettiğimiz y ifadesi

$$\begin{aligned} y &= 44.72\left(\frac{37.32}{44.72}\cos\omega t - \frac{24.64}{44.72}\sin\omega t\right) \\ &= 44.72(\cos 33.43°\cos\omega t - \sin 33.43°\sin\omega t) \end{aligned}$$

haline gelir. İki açının toplamının kosinüsü eşitliğinden faydalanarak aşağıdaki ifadeye ulaşırız.

$$y = 44.72\cos(\omega t + 33.43°).$$

b) Fazörleri kullanarak aynı problemi aşağıdaki şekilde çözebiliriz:

$$y = y_1 + y_2$$

olduğundan, Eş 9.24'ü kullanarak

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 \\ &= 20\angle{-30°} + 40\angle{60°} \\ &= (17.32 - j10) + (20 + j34.64) \\ &= 37.32 + j24.64 \\ &= 44.72\angle{33.43°} \end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşırız. $\mathbf{Y}$ fazörünü bulduktan sonra ters fazör dönüşümünü kullanarak y ifadesini

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{P}^{-1}\{44.72e^{j33.43}\} = \Re\{44.72e^{j33.43}e^{j\omega t}\} \\ &= 44.72\cos(\omega t + 33.43°) \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Fazör yönteminin sinüzoidal sinyalleri toplamadaki üstünlüğü oldukça açıktır. Görüldüğü gibi bu yöntem karmaşık sayılarda kutupsal ve Kartezyen (dikdörtgen) biçimler arasında geçişleri gerektirmektedir.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 1 - Fazör kavramının anlaşılması, fazör ve ters fazör dönüşümlerinin yapılabilmesi

9.1 Aşağıdaki trigometrik fonksiyonların fazör dönüşümlerini bulunuz.

a) $v = 170\cos(377t - 40°)$ V.

b) $i = 10\sin(1000t + 20°)$ A.

c) $i = [5\cos(\omega t + 36.87°) + 10\cos(\omega t - 53.13°)]$ A.

d) $v = [300\cos(20{,}000\pi t + 45°) - 100\sin(20{,}000\pi t + 30°)]$ mV.

Cevap: (a) $170\angle -40°$ V; (b) $10\angle -70°$ A; (c) $11.18\angle -26.57°$ A; (d) $339.90\angle 61.51°$ mV.

9.2 Aşağıdaki fazörlerin zaman bölgesindeki karşılıklarını bulunuz.

a) $\mathbf{V} = 18.6\angle -54°$ V.

b) $\mathbf{I} = (20\angle 45° - 50\angle -30°)$ mA.

c) $\mathbf{V} = (20 + j80 - 30\angle 15°)$ V.

Cevap: (a) $18.6\cos(\omega t - 54°)$ V; (b) $48.81\cos(\omega t + 126.68°)$ mA; (c) $72.79\cos(\omega t + 97.08°)$ V.

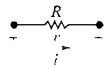
NOT: Ayrıca Bölüm Problemi 9.12'yi de çözmeyi deneyiniz.

9.4. Frekans Bölgesinde Pasif Devre Elemanları

Fazör dönüşümünün devre analizine sistematik bir şekilde uygulanması iki adımdan oluşur. Öncelikle pasif devre elemanlarının terminallerindeki fazör akımı ve fazör gerilimi arasındaki ilişkiyi kurmalıyız. Ardından, Kısım 9.5'te bahsedeceğimiz Kirchhoff yasalarının fazör bölgesindeki karşılıklarını bulmalıyız. Bu kısımda, direnç, indüktör ve kapasitör terminallerindeki fazör akımı ve gerilimi arasındaki ilişkiyi çıkaracağız. Önce direnç ile başlayacağız. Tüm çıkarımlarda pasif işaret yaklaşımı kullanılacaktır.

Direnç İçin V – I İlişkisi

Bir dirençten geçen akım zamanla sinüzoidal bir biçimde değişiyorsa, yani $i = I_m \cos(\omega_t + \theta_i)$ biçiminde ise, direncin terminallerindeki gerilim (Bkz. Şekil 9.7)



Şekil 9.7 ▲ Sinüzoidal akım taşıyan bir direnç elemanı.

$$v = R[I_m \cos(\omega t + \theta_i)]$$

$$= RI_m[\cos(\omega t + \theta_i)] \qquad (9.25)$$

biçimindedir. Burada I_m, amper cinsinden akımın maksimum değerini, θ_i ise akımın faz açısını göstermektedir.

Bu gerilim ifadesinin fazör dönüşümü şöyledir.

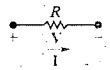
$$\mathbf{V} = RI_m e^{j\theta_i} = RI_m\angle\theta_i. \qquad (9.26)$$

$I_m\angle\theta_i$ sinüzoidal akımın fazör gösterimi olduğundan Eş. 9.26'yı

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I}. \qquad (9.27)$$

◀ **Direnç için fazör gerilimi ve fazör akımı arasındaki ilişki**

halinde yazabiliriz. Görüldüğü gibi direncin terminallerindeki fazör gerilimi, direnç değeri ile fazör akımının çarpımına eşittir. Direnç elemanın frekans bölgesindeki devre sembolü Şekil 9.8'de gösterilmiştir.



Şekil 9.8 ▲ Direncin frekans alanındaki eşdeğer devresi.

Eş. 9.25 – 9.27 bir başka önemli bilgiyi daha içermektedir. Direnç terminallerinde, akım ile gerilim arasında bir faz kayması olmamaktadır. Şekil 9.9'da bu faz ilişkisi, faz açıları 60° olan akım ve gerilim grafikleriyle gösterilmiştir. Bu sinyaller belli değerlere (örneğin tepe noktalarına) eş zamanlı olarak ulaştıklarından **eş fazlı** olarak adlandırılırlar.

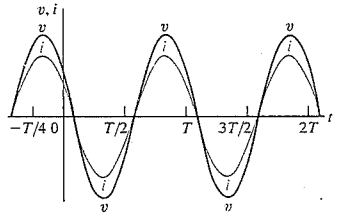
İndüktör İçin V - I İlişkisi

İndüktör üzerinden sinüzoidal akım geçtiğini kabul ederek, $L di/dt$ formülü yardımıyla, indüktör terminallerindeki fazör akımı ve fazör gerilimi arasındaki ilişkiyi çıkaracağız. $i = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$ için gerilim ifadesi

$$v = L\frac{di}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t + \theta_i) \qquad (9.28)$$

biçimindedir. Şimdi kosinüs fonksiyonu kullanarak Eş. 9.28'i yeniden yazalım:

$$v = -\omega L I_m \cos(\omega t + \theta_i - 90°). \qquad (9.29)$$

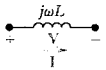


Şekil 9.9 ▲ Direnç terminallerindeki akım ve gerilimin eş fazlı olduğunu gösteren grafik.

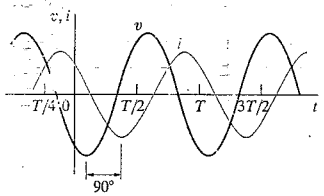
Eş. 9.29'daki gerilim ifadesinin fazör gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= -\omega L I_m e^{j(\theta_i - 90°)} \\ &= -\omega L I_m e^{j\theta_i} e^{-j90°} \\ &= j\omega L I_m e^{j\theta_i} \\ &= j\omega L\mathbf{I}.\end{aligned} \qquad (9.30)$$

◀ **İndüktör için fazör gerilimi ve fazör akımı arasındaki ilişki.**



Şekil 9.10 ⚠ İndüktörün frekans bölgesindeki eşdeğer devresi.



Şekil 9.11 ⚠ İndüktör terminallerindeki akım ve gerilim arasındaki faz ilişkisini gösteren grafik ($\theta_i = 60°$).

Eş. 9.30'daki ifadeyi çıkarmak için aşağıdaki eşitliği kullandık.

$$e^{-j90°} = \cos 90° - j \sin 90° = -j.$$

Eş. 9.30, indüktör terminallerindeki fazör geriliminin $j\omega L$ çarpı fazör akımına eşit olduğunu ifade etmektedir. İndüktör için frekans bölgesindeki eşdeğer devre Şekil 9.10'da gösterilmiştir. Dikkat edilmelidir ki, indüktör üzerindeki fazör akımı ve fazör gerilimi arasındaki ilişki, karşılıklı bağlaşık iki bobinin birinden geçen akım nedeniyle diğer bobinde oluşan karşılıklı endüktans için de geçerlidir. Yani, karşılıklı bağlaşık bobinlerden birinin üzerindeki fazör gerilimi, diğeri üzerindeki fazör akımı ile $j\omega M$'nin çarpımına eşittir.

Eş. 9.30 aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$\mathbf{V} = (\omega L \angle 90°) I_m \angle \theta_i$$

$$= \omega L I_m \angle (\theta_i + 90)°. \qquad (9.31)$$

Buna göre akım ve gerilim arasında tam olarak 90° faz farkı bulunmaktadır. Daha açık bir ifadeyle, gerilim akımın 90° önündedir veya akım gerilimin 90° gerisindedir. Şekil 9.11, gerilimin akımın önünde veya akımın gerilimin gerisinde olması kavramlarını göstermektedir. Örneğin, gerilim negatif tepe noktasına, akımın kendi negatif tepe noktasına ulaşmasından tam 90° önce ulaşmaktadır. Benzer bir gözlem sinyallerin yatay ekseni kestiği noktalar veya pozitif tepe noktaları için de yapılabilir.

Faz kaymasını saniyeler cinsinden ifade etmek de mümkündür. 90°'lik bir faz kayması çeyrek periyoda karşılık gelmektedir. Yani gerilim, akımın $T/4$ veya $\frac{1}{4f}$ saniye önündedir.

Kapasitör İçin V–I İlişkisi

Kapasitör terminallerindeki fazör akımı ve fazör gerilimi arasındaki ilişkiyi Eş. 9.30'un çıkarımından faydalanarak elde edeceğiz. Diğer bir deyişle,

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

ilişkisini ve

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$$

ifadesini kullanarak aşağıdaki fazör akımı ifadesine ulaşabiliriz.

$$\mathbf{I} = j\omega C \mathbf{V}. \qquad (9.32)$$

Eş. 9.32'yi gerilimi akımın bir fonksiyonu biçiminde bulmak için çözdüğümüzde

$$\mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I}. \qquad (9.33)$$

◀ **Kapasitör için fazör gerilimi ve akımı arasındaki ilişki**

ifadesine ulaşırız. Eş. 9.33'e göre, kapasitörün fazör bölgesindeki eşdeğer devresi Şekil 9.12'deki gibidir.

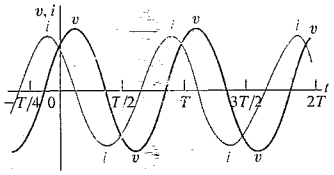
Şekil 9.12 ⚠ Kapasitörün frekans bölgesindeki eşdeğer devresi.

Kapasitör terminallerindeki gerilim, akımın tam olarak 90° gerisindedir. Bu ilişkiyi Eş. 9.33'ü aşağıdaki gibi yeniden yazarak kolayca gösterebiliriz.

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\omega C}\angle -90° I_m \angle \theta_i$$

$$= \frac{I_m}{\omega C}\angle (\theta_i - 90)°. \qquad (9.34)$$

Eş. 9.34'te verilen faz ilişkisinin diğer bir ifadesi akımın gerilimin 90° önünde olduğudur. Kapasitör terminallerindeki akım ve gerilim arasındaki faz ilişkisi Şekil 9.13'te görülmektedir.



Şekil 9.13 ⚠ Kapasitör terminallerindeki fazör akımı ve gerilimi arasındaki faz ilişkisini gösteren grafik ($\theta_i = 60°$).

Empedans ve Reaktans

Frekans bölgesindeki pasif elemanlar konusunu önemli bir gözlem ile sonlandırıyoruz. Eş. 9.27, 9.30 ve 9.33'ü karşılaştırdığımızda hepsinin

$$\mathbf{V} = Z\mathbf{I}. \qquad (9.35)$$

◀ **Empedans tanımı**

biçiminde olduğunu görebiliriz. Burada Z devre elemanının **empedansını** temsil etmektedir. Eş. 9.35'i Z için çözdüğümüzde, empedansın, devre elemanının fazör geriliminin fazör akımına oranı olduğunu görebiliriz. Buna göre direncin empedansı R, indüktörün $j\omega L$, karşılıklı endüktansın $j\omega M$ ve kapasitörün empedansı ise $1/j\omega C$'dir. Empedans her durumda ohm cinsinden ölçülür. Empedans karmaşık bir sayı olmasına rağmen fazör değildir. Hatırlayacağımız gibi fazör, $e^{j\omega t}$'nin katsayısı olan bir karmaşık sayı olarak karşımıza çıkar. Yani, tüm fazörler karmaşık sayılardır ancak her karmaşık sayı fazör değildir.

Frekans bölgesinde empedans zaman bölgesindeki direnç, kapasitans ve indüktansa karşılık gelir. Empedansın sanal kısmı **reaktans** olarak adlandırılır. Devre elemanlarına ait empedans ve reaktans değerleri Tablo 9.1'de özetlenmiştir.

Son olarak bir hatırlatma uygun olacaktır. Pasif bir devre elemanının içinden geçen akımın referans yönü gerilim artış yönüne doğru ise, gerilim ile akım arasındaki ilişkiyi belirten denklemin önüne eksi işareti koymalısınız.

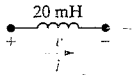
TABLO 9.1 Empedans ve Reaktans Değerleri

Devre Elemanı	Empedans	Reaktans
Direnç	R	—
İndüktör	$j\omega L$	ωL
Kapasitör	$j(-1/\omega C)$	$-1/\omega C$

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

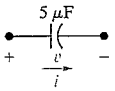
Hedef 2 – Fazör kavramları kullanılarak sinüzoidal kaynak içeren bir devrenin frekans bölgesine dönüştürülebilmesi.

9.3 20 mH'lik bir indüktörden geçen akım 10 cos $(10000t + 30°)$ mA'dir. (a) İndüktif reaktansı; (b) indüktörün empedansını; (c) fazör gerilimi **V**'yi ve (d) $v(t)$'nin durgun durum ifadesini hesaplayınız.



Cevap: (a) 200 Ω;
(b) $j200$ Ω;
(c) $2\angle 120°$ V;
(d) $2\cos(10{,}000t + 120°)$ V.

9.4 5 μF'lık bir kapasitör üzerindeki gerilim 30 cos $(4000t + 25°)$ V'tur. (a) Kapasitif reaktansı; (b) kapasitörün empedansını; (c) fazör akımı **I**'yı; ve (d) $i(t)$ için durgun durum ifadesini hesaplayınız.



Cevap: (a) −50 Ω;
(b) $-j50$ Ω;
(c) $0.6\angle 115°$ A;
(d) $0.6\cos(4000t + 115°)$ A.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 9.13 ve 9.15'i de çözmeyi deneyiniz.

9.5 Frekans Bölgesinde Kirchhoff Yasaları

Sinüzoidal fonksiyonların toplamına uyarlanabildiği için fazör dönüşümünün devre analizinde ne kadar faydalı olduğuna, Eş. 9.23 ve 9.24 yardımıyla Kısım 9.3'te değinmiştik. Şimdi bu gözlememizi, frekans bölgesinde Kirchhoff yasalarını çıkararak analitik biçimde ifade edeceğiz.

Frekans Bölgesinde Kirchhoff Gerilim Yasası

Öncelikle, bir devrede kapalı bir yoldaki gerilimlerin $v_1 - v_n$ ile gösterildiğini varsayalım. Aynı zamanda devrenin sinüzoidal durgun durumda çalıştığını kabul edelim. Kirchhoff gerilim yasasına göre

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0 \tag{9.36}$$

olmalıdır. Sinüzoidal durgun durumda bu ifade karmaşık olacaktır.

$$V_{m_1}\cos(\omega t + \theta_1) + V_{m_2}\cos(\omega t + \theta_2) + \cdots + V_{m_n}\cos(\omega t + \theta_n) = 0. \tag{9.37}$$

Euler özdeşliğini kullanarak Eş. 9.37'yi aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\Re\{V_{m_1}e^{j\theta_1}e^{j\omega t}\} + \Re\{V_{m_2}e^{j\theta_2}e^{j\omega t}\} + \cdots + \Re\{V_{m_n}e^{j\theta_n}e^{j\omega t}\}. \tag{9.38}$$

Yukarıdaki denklem

$$\Re\{V_{m_1}e^{j\theta_1}e^{j\omega t} + V_{m_2}e^{j\theta_2}e^{j\omega t} + \cdots + V_{m_n}e^{j\theta_n}e^{j\omega t}\} = 0 \tag{9.39}$$

biçiminde de yazılabilir. Bu ifadeyi $e^{j\omega t}$ parantezine aldığımızda

$$\Re\{(V_{m_1}e^{j\theta_1} + V_{m_2}e^{j\theta_2} + \cdots + V_{m_n}e^{j\theta_n})e^{j\omega t}\} = 0$$

ifadesini veya

$$\Re\{(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{V}_n)e^{j\omega t}\} = 0 \tag{9.40}$$

denklemini elde ederiz. Ancak $e^{j\omega t} \neq 0$ olduğundan

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{V}_n = 0, \tag{9.41}$$

◁ **Frekans bölgesinde Kirchhoff gerilim yasası**

sonucuna ulaşırız. Bu ifade Kirchhoff gerilim yasasının fazör gerilimlerine uygulanmış halidir. Bir başka deyişle, Eş. 9.36 zaman bölgesindeki sinüzoidal gerilimlere ait bir ifadeyken Eş. 9.41 bu ifadenin frekans bölgesindeki karşılığıdır.

Frekans Bölgesinde Kirchhoff Akım Yasası

Benzer bir ispat sinüzoidal akımlar için de yapılabilir.

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_n = 0 \tag{9.42}$$

denkleminden

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \cdots + \mathbf{I}_n = 0, \tag{9.43}$$

◁ **Frekans bölgesinde Kirchhoff akım yasası.**

ifadesine ulaşırız. Burada $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \ldots, \mathbf{I}_n$ sırasıyla $i_1, i_2, \ldots, i_n$ akımlarının fazör gösterimleridir

Eş. 9.35, 9.41 ve 9.43 frekans bölgesinde devre analizinin temelini oluşturmaktadır. Eş. 9.35 Ohm yasası ile aynı biçime sahiptir; Eş. 9.41 ve Eş. 9.43 ise fazör nicelikler için Kirchhoff yasalarını göstermektedir. Bu nedenle direnç devrelerini analiz etmek için geliştirilen tüm teknikleri fazör akım ve gerilimlerini bulmak için kullanabilirsiniz. Bunların dışında herhangi bir analiz tekniği öğrenmenize gerek yoktur. 2. ve 4. Bölüm'de anlatılan basit devre analizi ve sadeleştirme yöntemleri frekans bölgesinde de kullanılabilir. Fazör devre analizi iki temel aşamadan oluşur: (1) Devrenin frekans bölgesindeki modelini oluşturabilmelisiniz; (2) karmaşık sayılarla ve/veya niceliklerle hesaplama yapabilmelisiniz. Seri, paralel ve delta – Y dönüşümlerinden başlayarak devre analizinin değişik yönlerine bir sonraki kısımda değineceğiz.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 3 - Frekans bölgesinde bir devreyi çözebilmek için gerekli analiz tekniklerinin nasıl kullanılacağının bilinmesi

9.5 Dört dal bir düğümde birleşmektedir. Her daldaki akımın (i_1, i_2, i_3 ve i_4) referans yönü düğüme doğrudur. Eğer

$i_1 = 100\cos(\omega t + 25°)$ A,
$i_2 = 100\cos(\omega t + 145°)$ A ve
$i_3 = 100\cos(\omega t - 95°)$ A ise i_4'ü bulunuz.

Cevap: $i_4 = 0$.

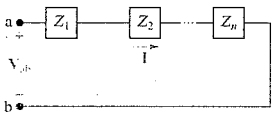
NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 9.14 ve 9.16'yı da çözmeyi deneyiniz.

9.6 Seri, Paralel ve Δ-Y Sadeleştirmeleri

Seri veya paralel yapıdaki empedansları bir araya getirme ve Δ-Y dönüşümleri yapma kuralları dirençler için geçerli kurallar ile aynıdır. Aradaki tek fark, empedanslar ile ilgili işlemlerin karmaşık sayılarla hesap yapmayı gerektirmesidir.

Seri ve Paralel Empedansların Birleştirilmesi

Seri biçimdeki empedanslar, bunların toplamına eşit tek bir empedans olarak sadeleştirilebilir. Şekil 9.14 bu problemi genel hatlarıyla yansıtmaktadır. $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ empedansları a ve b terminalleri arasında seri olarak bağlanmıştır. Empedanslar seri bağlandığında aynı fazör akımı **I**'yı taşırlar. Eş. 9.35'ten faydalanarak her bir empedansın üzerindeki gerilim $Z_1\mathbf{I}$, $Z_2\mathbf{I}$, ..., $Z_n\mathbf{I}$ olarak bulunur. Kirchhoff gerilim yasasına göre



Şekil 9.14 ▲ Seri bağlı empedanslar.

$$\mathbf{V}_{ab} = Z_1\mathbf{I} + Z_2\mathbf{I} + \cdots + Z_n\mathbf{I}$$

$$= (Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)\mathbf{I} \qquad (9.44)$$

sonucuna ulaşılır. O halde a ve b terminalleri arasındaki eşdeğer empedans

$$Z_{ab} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{I}} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n. \qquad (9.45)$$

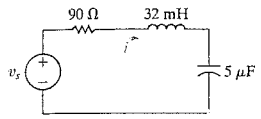
olarak bulunur. Eş. 9.45'in nümerik bir uygulaması Örnek 9.6'da verilmiştir.

Örnek 9.6 **Seri Empedansların Birleştirilmesi**

90 Ω'luk bir direnç, 32 mH değerindeki bir indüktör ve 5μF'lık bir kapasitör Şekil 9.15'te gösterildiği gibi sinüzoidal bir gerilim kaynağının terminallerine seri olarak bağlanmıştır. Gerilim kaynağı v_s'nin durgun durum ifadesi 750 cos(5000t + 30°) V'tur.

a) Frekans bölgesindeki eşdeğer devreyi oluşturunuz.

b) Durgun durum akımı i'yi fazör metodunu kullanarak hesaplayınız.



Şekil 9.15 ▲ Örnek 9.6'ya ait devre.

Çözüm

a) v_s ifadesinden $\omega = 5000$ rad/s olarak bulunur. Bu nedenle 32 mH'lik indüktörün empedansı

$$Z_L = j\omega L = j(5000)(32 \times 10^{-3}) = j160\ \Omega,$$

kapasitörünki ise

$$Z_C = j\frac{-1}{\omega C} = -j\frac{10^6}{(5000)(5)} = -j40\ \Omega$$

olarak hesaplanır,

v_s'nin fazör dönüşümü

$$\mathbf{V}_s = 750\angle 30°\ \text{V}$$

olur. Devrenin frekans bölgesindeki eşdeğeri Şekil 9.16'da gösterilmiştir.

b) Gerilim kaynağının gerilim değerini a ve b terminallerin arasındaki eşdeğer empedansa bölerek fazör akımını bulabiliriz. Eş. 9.45'i kullanarak eşdeğer empedans

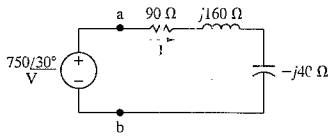
$$Z_{ab} = 90 + j160 - j40$$
$$= 90 + j120 = 150\angle 53.13°\ \Omega$$

olarak hesaplanır. Buradan fazör akımı

$$\mathbf{I} = \frac{750\angle 30°}{150\angle 53.13°} = 5\angle -23.13°\ \text{A}$$

olarak bulunur. Bu sonuçtan faydalanarak i'nin durgun durum ifadesini doğrudan yazabiliriz:

$$i = 5\cos(5000t - 23.13°)\ \text{A}.$$



Şekil 9.16 ▲ Şekil 9.15'te verilen devrenin frekans bölgesindeki eşdeğeri.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 3-Frekans bölgesinde bir devreyi çözebilmek için gerekli analiz tekniklerinin nasıl kullanılacağının bilinmesi

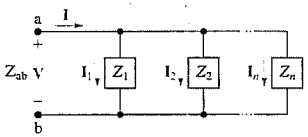
9.6 Şekil 9.15'te verilen devredeki direnç ve indüktans değerleri ile $\mathbf{V}_s = 125\angle -60°$ V ve $\omega = 5000$ rad/s değerlerini kullanarak

a) –105°'lik bir faz açısına sahip bir durgun durum (i) çıkış akımının oluşabilmesi için gerekli kapasitans değerini,

b) durgun durum akımı i'nin büyüklüğünü bulunuz.

Cevap: (a) 2.86 μF; (b) 0.982 A.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemi 9.21'i de çözmeyi deneyiniz.



Şekil 9.17 ▲ Paralel bağlı empedanslar.

Paralel bağlı empedanslar aşağıdaki ilişki sayesinde tek bir empedans olarak ifade edilebilir.

$$\frac{1}{Z_{ab}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n}. \tag{9.46}$$

Şekil 9.17 paralel bağlı empedansları göstermektedir. Empedanslar paralel bağlandığında hepsinin terminallerinde aynı gerilim bulunmaktadır. Şekil 9.17'den faydalanarak ve Kirchhoff akım yasası ile Ohm yasasının fazör bölgesindeki karşılığını yani Eş. 9.35'i bir arada kullanarak Eş. 9.46'yı çıkarabiliriz. Bu yolla,

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \cdots + \mathbf{I}_n,$$

veya

$$\frac{\mathbf{V}}{Z_{ab}} = \frac{\mathbf{V}}{Z_1} + \frac{\mathbf{V}}{Z_2} + \cdots + \frac{\mathbf{V}}{Z_n} \tag{9.47}$$

bulunur. Eş. 9.47'deki ortak **V** terimini sadeleştirdiğimizde Eş. 9.46'ya ulaşırız.

Eş. 9.46'dan birbirine paralel bağlı iki empedansın eşdeğeri

$$Z_{ab} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{9.48}$$

olarak bulunabilir. Eş. 9.46'yı, empedansın tersi olarak tanımlanan ve Y ile gösterilen **admitans** cinsinden de ifade edebiliriz.

$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB \text{ (siemens)}. \tag{9.49}$$

Doğal olarak admitans da bir karmaşık sayıdır. Gerçek kısmı G **iletkenlik,** sanal kısım B ise **hassasiyet** olarak adlandırılır. Admintans gibi hassasiyet ve iletkenlik de siemens (S) birimiyle ölçülür. Eş. 9.49'u eş. 94.6'da kullandığımızda

$$Y_{ab} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n. \tag{9.50}$$

sonucunu elde ederiz.

İdeal pasif devre elemanlarının admitans değerleri Tablo 9.2'de özetlenmiştir.

Eş. 9.49 ve 9.50'nin bir devreye uygulanışı Örnek 9.7'de gösterilmiştir.

TABLO 9.2 Admitans ve Hassasiyet Değerleri

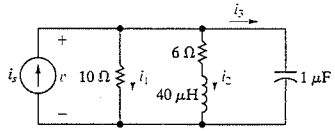
Devre Elemanı	Admitans (Y)	Hassasiyet
Direnç	G (iletkenlik)	—
İndüktör	$j(-1/\omega L)$	$-1/\omega L$
Kapasitör	$j\omega C$	ωC

Örnek 9.7 Seri ve Paralel Empedansların Birleştirilmesi

Şekil 9.18'de verilen devrede sinüzoidal akım kaynağı $i = 8 \cos 200{,}000t$ A değerinde akım üretmektedir.

a) Frekans bölgesindeki eşdeğer devreyi oluşturunuz.

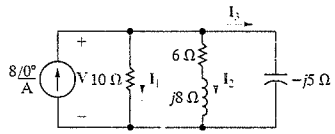
b) v, i_1, i_2 ve i_3'ün durgun durum ifadelerini bulunuz.



Şekil 9.18 ▲ Örnek 9.7'ye ait devre.

Çözüm

a) Akım kaynağının fazör dönüşümü $8\angle 0°$'dir. Dirençler frekans bölgesine doğrudan 10 ve 6 Ω olarak geçerler. 40 μH değerindeki indüktörün empedansı $j8$ Ω'dur. Verilen frekans değeri 200,000 rad/s olup 1 μF'lık kapasitörün bu frekanstaki empedansı $-j5$ Ω'dur. Frekans bölgesindeki eşdeğer devre ve bilinmeyen değişkenlerin fazör dönüşümleri Şekil 9.19'da gösterilmiştir.



Şekil 9.19 ▲ Frekans alanındaki eşdeğer devre.

b) Şekil 9.19'dan görülebileceği gibi üç paralel daldaki eşdeğer empedansı bildiğimiz takdirde akım kaynağı üzerindeki gerilimi kolayca bulabiliriz. **V**'yi hesapladıktan sonra fazör akımları $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ ve $\mathbf{I}_3$'ü Eş. 9.35'i kullanarak bulabiliriz. Paralel dallardaki eşdeğer empedansı bulmak için önce her dalın admitanslarını toplayarak eşdeğer admitans değerini bulalım. Birinci dalın admitansı

$$Y_1 = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ S},$$

ikinci dalınki

$$Y_2 = \frac{1}{6 + j8} = \frac{6 - j8}{100} = 0.06 - j0.08 \text{ S},$$

üçüncü dalın (admitans) değeri ise

$$Y_3 = \frac{1}{-j5} = j0.2 \text{ S}$$

olarak bulunur. Üç dalın (admitans) ise

$$\begin{aligned} Y &= Y_1 + Y_2 + Y_3 \\ &= 0.16 + j0.12 \\ &= 0.2\angle 36.87° \text{ S} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Akım kaynağının empedansı

$$Z = \frac{1}{Y} = 5\angle -36.87° \ \Omega$$

elde edilir.

V gerilimi ise

$$\mathbf{V} = Z\mathbf{I} = 40\angle -36.87° \text{ V}$$

bulunur. Buradan $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ ve $\mathbf{I}_3$ akımları aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\mathbf{I}_1 = \frac{40\angle -36.87°}{10} = 4\angle -36.87° = 3.2 - j2.4 \text{ A},$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{40\angle -36.87°}{6 + j8} = 4\angle -90° = -j4 \text{ A}$$

ve

$$\mathbf{I}_3 = \frac{40\angle -36.87°}{5\angle -90°} = 8\angle 53.13° = 4.8 + j6.4 \text{ A}.$$

Hesaplarımızın doğruluğunu aşağıdaki sağlamayı yaparak sınayabiliriz.

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}.$$

$$3.2 - j2.4 - j4 + 4.8 + j6.4 = 8 + j0.$$

Bulduğumuz ifadelerin zaman bölgesindeki durgun durum karşılıkları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} v &= 40 \cos(200{,}000t - 36.87°) \text{ V}, \\ i_1 &= 4 \cos(200{,}000t - 36.87°) \text{ A}, \\ i_2 &= 4 \cos(200{,}000t - 90°) \text{ A}, \\ i_3 &= 8 \cos(200{,}000t + 53.13°) \text{ A}. \end{aligned}$$

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 3 – Frekans bölgesindeki bir devreyi çözmek için gerekli devre analiz tekniklerinin nasıl kullanılacağının bilinmesi

9.7 20 Ω'luk bir direnç 5mH değerindeki bir indüktör ile paralel bağlanmıştır. Bu paralel birleşim 5 Ω'luk bir direnç ve 25 μF'lık bir kapasitöre seri olarak bağlanmıştır.

a) Frekans 2 krad/s olduğuna göre bu yapının eşdeğer empedansını hesaplayınız.

b) 8 krad/s için (a)'yı tekrarlayınız.

c) Hangi sonlu frekans değeri için empedans değeri yalnızca dirençtir?

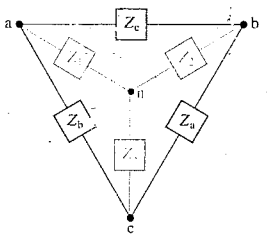
d) (c)'de bulunan frekans değeri için empedans değeri nedir?

Cevap: (a) $9 - j12\ \Omega$; (b) $21 + j3\ \Omega$; (c) 4 krad/s; (d) 15 Ω.

9.8 Değerlendirme Problemi 9.7'de bahsedilen yapı $v = 150 \cos 4000t$ V'luk bir gerilim kaynağına bağlanmıştır. 5 mH'lik indüktör üzerindeki akımın en büyük değeri nedir?

Cevap: 7.07 A.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemleri 9.26 - 9.28'i de çözmeyi deneyiniz.



Şekil 9.20 Δ - Y dönüşümü.

Δ – Y Dönüşümleri

Kısım 3.7'de direnç devreleri için anlatılan Δ – Y dönüşümleri empedanslar için de uygulanabilir. Şekil 9.20 Δ-biçiminde bağlı empedanslar ile bunların Y eşdeğer devresini göstermektedir. Y empedansları Δ empedanslarının fonksiyonları olarak

$$Z_1 = \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}, \tag{9.51}$$

$$Z_2 = \frac{Z_c Z_a}{Z_a + Z_b + Z_c}, \tag{9.52}$$

$$Z_3 = \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c} \tag{9.53}$$

ile verilir. Δ-Y dönüşümünün tersi de mümkündür. Yani Y yapısından yola çıkılarak eşdeğer bir Δ yapısına ulaşabiliriz. Δ empedanslarının Y empedans değerlerine bağlı fonksiyonları ise

$$Z_a = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_1}, \tag{9.54}$$

$$Z_b = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_2}, \tag{9.55}$$

$$Z_c = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_3} \tag{9.56}$$

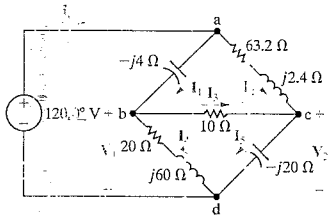
olarak bulunur.

Eş. 9.51 – 9.53 veya Eş. 9.54 – 9.56'nın çıkarımı için izlenen yol yalnızca dirençlerden oluşan devrelere ait denklemlerin çıkarımında izlenen yol ile aynıdır. Eş. 3.44 – 3.46'yı Eş. 9.51 – 9.53 ile, Eş. 3.47 – 3.49'u da Eş. 9.54–9.56 ile karşılaştırdığımızda R yerine Z simgesinin kullanıldığını görürüz. Δ–Y dönüşümünün çıkarımı ile ilgili olarak Problem 3.61'i yeniden inceleyebilirsiniz.

Örnek 9.8 Δ – Y dönüşümünün fazör devre analizindeki faydalarını göstermektedir.

Örnek 9.8 Δ – Y Dönüşümünün Frekans Bölgesinde Kullanılması

Şekil 9.21'de verilen devrede $\mathbf{I}_0$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$, $\mathbf{I}_4$, $\mathbf{I}_5$, $\mathbf{V}_1$ ve $\mathbf{V}_2$ değerlerini bulmak için Δ – Y dönüşümünü kullanınız.



Şekil 9.21 Örnek 9.8'e ait devre.

Çözüm:

Görüldüğü gibi devre şu anki haliyle seri veya paralel sadeleştirmelerin yapılabilmesi için uygun değildir. Δ – Y empedans dönüşümü, düğüm gerilimi veya ağ akımı yöntemlerine gerek kalmadan tüm dallardaki akımları bulmamıza yarayacaktır. Üst (abc) veya alt deltayı (bcd) Y eşdeğeriyle değiştirdiğimizde oluşacak devreyi seri-paralel birleşimler yardımıyla daha da basitleştirebiliriz. Hangi deltayı dönüştüreceğimizi belirlemek amacıyla her iki deltadaki toplam empedansa bakmak uygun olacaktır. Alt deltanın toplam empedansı $30 + j40\ \Omega$'dur. Bu toplamı devreden çıkaralım. b terminaline bağlı Y empedansı

$$Z_1 = \frac{(20 + j60)(10)}{30 + j40} = 12 + j4\Omega,$$

c terminaline bağlı Y empedansı

$$Z_2 = \frac{10(-j20)}{30 + j40} = -3.2 - j2.4\ \Omega$$

ve d terminaline bağlı Y empedansı

$$Z_3 = \frac{(20 + j60)(-j20)}{30 + j40} = 8 - j24\ \Omega$$

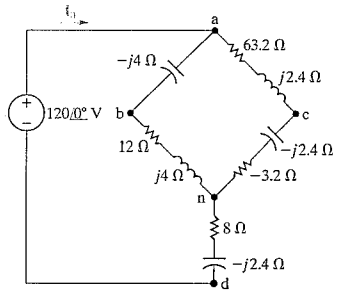
olarak hesaplanır. Bu eşdeğer Y empedanslarını devreye koyduğumuzda Şekil 9.22'deki devreyi elde ederiz. Elde ettiğimiz bu devreyi artık seri ve paralel indirgemeler kullanarak basitleştirebiliriz. abn dalının empedansını

$$Z_{abn} = 12 + j4 - j4 = 12\ \Omega,$$

acn dalındaki toplam empedansı ise

$$Z_{acn} = 63.2 + j2.4 - j2.4 - 3.2 = 60\ \Omega$$

olarak hesaplarız.



Şekil 9.22 Şekil 9.21'deki devrenin alt delta kısmının Y eşdeğeri ile değiştirilmiş hali.

abn ve ecn dalları birbirine paralel olduğundan yerlerine eşdeğer empedansları konabilir.

$$Z_{an} = \frac{(60)(12)}{72} = 10\ \Omega.$$

Bu empedansı n ve d düğümleri arasındaki empedansla birleştirdiğimizde Şekil 9.22'deki devre Şekil 9.23'te görülen devreye indirgenir. Buradan

$$\mathbf{I}_0 = \frac{120\angle 0^\circ}{18 - j24} = 4\angle 53.13^\circ = 2.4 + j3.2\ \text{A}$$

olarak bulunur. $\mathbf{I}_0$'dan yola çıkarak eşdeğer devreler yardımıyla baştaki devredeki dal akımlarını hesaplayabiliriz. Dikkat edileceği gibi $\mathbf{I}_0$, Şekil 9.22'deki devrenin nd kolunda akan akımdır. Bu nedenle

$$\mathbf{V}_{nd} = (8 - j24)\mathbf{I}_0 = 96 - j32\ \text{V}$$

olarak bulunur. Buradan $\mathbf{V}_{an}$'yi bulabiliriz, çünkü

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{nd}$$

ve $\mathbf{V}$ ve $\mathbf{V}_{nd}$ bilinmektedir.

$$\mathbf{V}_{an} = 120 - 96 + j32 = 24 + j32\ \text{V}.$$

Artık dal akımları $\mathbf{I}_{abn}$ ve $\mathbf{I}_{acn}$'yi hesaplayabiliriz.

$$\mathbf{I}_{abn} = \frac{24 + j32}{12} = 2 + j\frac{8}{3}\ \text{A},$$

$$\mathbf{I}_{acn} = \frac{24 + j32}{60} = \frac{4}{10} + j\frac{8}{15}\ \text{A}.$$

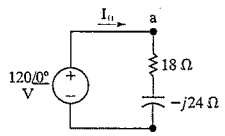
Şekil 9.21'de tanımlanan dal akımları dikkate alındığında

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{abn} = 2 + j\frac{8}{3}\ \text{A},$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{acn} = \frac{4}{10} + j\frac{8}{15}\ \text{A}$$

olduğu görülebilir. $\mathbf{I}_1$ ve $\mathbf{I}_2$'nin doğruluğunu aşağıdaki sağlamayı yaparak kontrol edebiliriz.

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 2.4 + j3.2 = \mathbf{I}_0.$$



Şekil 9.23 ▲ Şekil 9.22'de görülen devrenin sadeleşmiş hali.

Dal akımları $\mathbf{I}_3$, $\mathbf{I}_4$ ve $\mathbf{I}_5$'i bulabilmek için önce $\mathbf{V}_1$ ve $\mathbf{V}_2$ gerilimlerini hesaplamalıyız. Şekil 9.21'i dikkate aldığımızda

$$\mathbf{V}_1 = 120\angle 0^\circ - (-j4)\mathbf{I}_1 = \frac{328}{3} + j8\ \text{V},$$

$$\mathbf{V}_2 = 120\angle 0^\circ - (63.2 + j2.4)\mathbf{I}_2 = 96 - j\frac{104}{3}\ \text{V}$$

sonuçlarına ulaşırız. Buradan $\mathbf{I}_3$, $\mathbf{I}_4$ ve $\mathbf{I}_5$ akımlarını aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{10} = \frac{4}{3} + j\frac{12.8}{3}\ \text{A},$$

$$\mathbf{I}_4 = \frac{\mathbf{V}_1}{20 + j60} = \frac{2}{3} - j1.6\ \text{A},$$

$$\mathbf{I}_5 = \frac{\mathbf{V}_2}{-j20} = \frac{26}{15} + j4.8\ \text{A}.$$

Yukarıdaki hesapların doğruluğunu

$$\mathbf{I}_4 + \mathbf{I}_5 = \frac{2}{3} + \frac{26}{15} - j1.6 + j4.8 = 2.4 + j3.2 = \mathbf{I}_0,$$

$$\mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_4 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + j\frac{12.8}{3} - j1.6 = 2 + j\frac{8}{3} = \mathbf{I}_1,$$

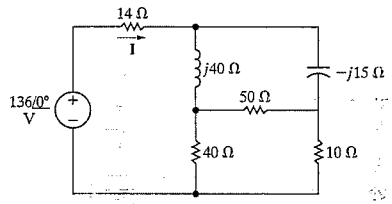
$$\mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{10} + j\frac{12.8}{3} + j\frac{8}{15} = \frac{26}{15} + j4.8 = \mathbf{I}_5$$

sağlamaları ile kontrol edebiliriz.

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 3-Frekans bölgesinde bir devreyi çözmek için gerekli analiz tekniklerinin nasıl kullanılacağının bilinmesi

9.9 Yandaki devrede **I** akımını bulmak için delta – Y dönüşümünü kullanınız.

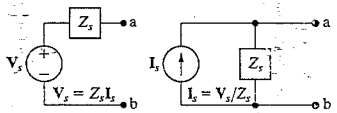


Cevap: $\mathbf{I} = 4\angle 28.07^\circ$ A.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemi 9.34'ü de çözünüz

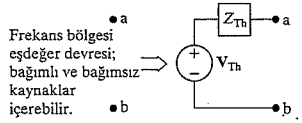
9.7 Kaynak Dönüşümleri ve Thévenin – Norton Eşdeğer Devreleri

Kısım 4.9'da anlatılan kaynak dönüşümleri ile Kısım 4.10'da anlatılan Thévenin-Norton eşdeğer devreleri, frekans bölgesindeki devrelere de uygulanabilir analitik tekniklerdir. Bu tekniklerin geçerliliğini kanıtlamak için Kısım 4.9 ve 4.10'da takip edilen yolun aynısını kullanacağız, ancak direnç (R) yerine empedans (Z) terimini koyacağız. Bir kaynak dönüşümü eşdeğer devresi, frekans bölgesi terimleriyle beraber Şekil 9.24'te gösterilmiştir.



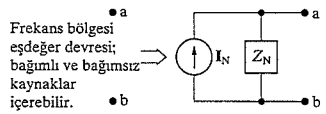
Şekil 9.24 ▲ Frekans bölgesinde kaynak dönüşümü.

Şekil 9.25'te Thévenin eşdeğer devresinin frekans bölgesindeki karşılığı görülürken Şekil 9.26 ise Norton eşdeğer devresinin frekans bölgesindeki karşılığını göstermektedir. Thévenin eşdeğer gerilimi ve empedansını bulmak için kullanılan teknikler, karmaşık niceliklerle hesap yapılması gerekliliği dışında direnç devreleri için kullanılan teknikler ile aynıdır. Aynı durum Norton eşdeğer akımı ve empedansı için de geçerlidir.



Şekil 9.25 ▲ Thévenin eşdeğer devresinin frekans bölgesindeki karşılığı.

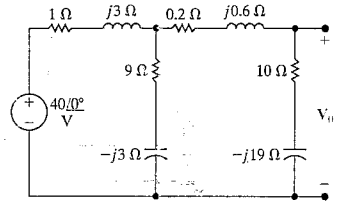
Örnek 9.9 kaynak dönüşümü yönteminin frekans bölgesinde nasıl uygulandığını göstermektedir. Örnek 9.10 ise Thévenin eşdeğer devresinin frekans bölgesinde bulunması ile ilgili ayrıntıları içermektedir.



Şekil 9.26 ▲ Norton eşdeğer devresinin frekans bölgesindeki karşılığı.

Örnek 9.9 Frekans Bölgesinde Kaynak Dönüşümlerinin Yapılması

Kaynak dönüşümü kavramını kullanarak Şekil 9.27'de gösterilen devrede $\mathbf{V}_0$ fazör gerilimini bulunuz.



Şekil 9.27 ▲ Örnek 9.9'un devresi.

Çözüm

Gerilim kaynağı ($40\angle 0°$) ve $1 + j3\ \Omega$ empedansın seri birleşimini, bir akım kaynağı ile $1 + j3\ \Omega$'un paralel birleşimi ile değiştirebiliriz. Kaynak akımı

$$\mathbf{I} = \frac{40}{1 + j3} = \frac{40}{10}(1 - j3) = 4 - j12\ \text{A}$$

bulunur. Böylece Şekil 9.27'de gösterilen devreyi Şekil 9.28'dekine değiştirebiliriz. 40 V kaynağın kutupluk referansının **I**'nın referans yönünü belirlediğine dikkat ediniz.

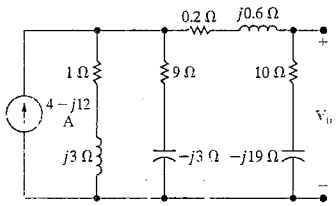
Sonra, iki paralel dalı tek bir empedans halinde

$$Z = \frac{(1 + j3)(9 - j3)}{10} = 1.8 + j2.4\ \Omega,$$

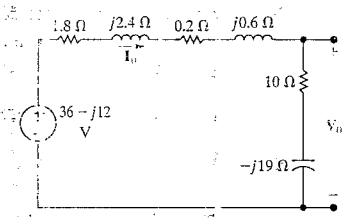
olarak birleştiririz ki bu da $4 - j12$ A akım kaynağı ile paraleldir. Bir diğer kaynak dönüşümü bu paralel birleşimi, bir gerilim kaynağı ve $1.8 + j2.4\ \Omega$ empedansın seri birleşimine çevirir. Gerilim kaynağının gerilimi

$$\mathbf{V} = (4 - j12)(1.8 + j2.4) = 36 - j12\ \text{V}$$

bulunur. Bu kaynak dönüşümünü kullanarak devreyi Şekil 9.29'daki gibi yeniden çizebiliriz. Gerilim kaynağının kutupluğuna dikkat ediniz. $\mathbf{V}_0$'ın çözümünü hızlandırmak için devreye $\mathbf{I}_0$ akımını da ekledik.



Şekil 9.28 ▲ Şekil 9.27'de gösterilen devrenin indirgenmesinde ilk adım.



Şekil 9.29 ▲ Şekil 9.27'de gösterilen devrenin indirgenmesinde ikinci adım.

Ayrıca devrenin basit bir seri devreye indirgendiğine dikkat ediniz. $\mathbf{I}_0$ akımını, kaynağın gerilimini toplam seri empedansa bölerek

$$\mathbf{I}_0 = \frac{36 - j12}{12 - j16} = \frac{12(3 - j1)}{4(3 - j4)}$$

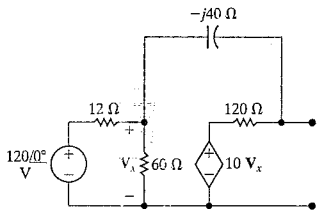
$$= \frac{39 + j27}{25} = 1.56 + j1.08\ \text{A}$$

olarak hesaplarız. Şimdi $\mathbf{V}_0$ değeri, $\mathbf{I}_0$ ile $10 - j9\ \Omega$ empedans çarpılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathbf{V}_0 = (1.56 + j1.08)(10 - j19) = 36.12 - j18.84\ \text{V}.$$

Örnek 9.10 Frekans Bölgesinde Thévenin Eşdeğerin Bulunması

Şekil 9.30'daki devrede a, b terminallerine göre Thévenin eşdeğer devresini bulunuz.



Şekil 9.30 ▲ Örnek 9.10'un devresi.

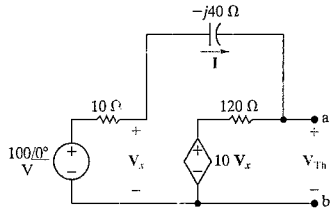
Çözüm

Önce Thévenin eşdeğer gerilimini belirleyeceğiz. Bu gerilim, a, b terminallerinde görülen açık devre gerilimidir. Thevenin geriliminin referansını a terminali pozitif olacak şekilde seçeceğiz. 120 V, 12 Ω ve 60 Ω devre elemanlarına bağlı olarak iki kaynak dönüşümü ile devrenin bu kısmını sadeleştirebiliriz. Aynı zamanda bu dönüşümler, bağımlı gerilim kaynağından dolayı $\mathbf{V}_x$ kontrol geriliminin tanımını da korumalıdır.

İki kaynak dönüşümünü belirlerken önce 120 V kaynak ve 12 Ω direncin seri birleşimini, 10 A akım kaynağı ile 12 Ω direncin paralel birleşimi ile değiştiririz. Sonra 12 ve 60 Ω dirençlerin paralel birleşimini tek bir 10 Ω ile değiştiririz. Son olarak, 10 A kaynakla 10 Ω direncin paralel bağlantısını, 10 Ω dirençle seri 100 V'luk bir kaynakla değiştiririz. Şekil 9.31 sonuçta bulunan devreyi göstermektedir.

Şekil 9.31'de **I** akımını ileriki tartışmaya yardımcı olması için ekledik. **I** akımını bildiğimizde Thévenin gerilimini hesaplayabileceğimize dikkat ediniz. **I** akımını, Şekil 9.31'deki devrede kapalı yol çevresindeki gerilimleri toplayarak buluruz. Böylece

$$100 = 10\mathbf{I} - j40\mathbf{I} + 120\mathbf{I} + 10\mathbf{V}_x = (130 - j40)\mathbf{I} + 10\mathbf{V}_x$$



Şekil 9.31 ▲ Şekil 9.30'da gösterilen devrenin basitleştirilmiş hali.

elde edilir. Kontrol gerilimi $\mathbf{V}_x$'i **I** akımına bağlamak için Şekil 9.31'den

$$\mathbf{V}_x = 100 - 10\mathbf{I}$$

olduğuna dikkat ederiz. O halde

$$\mathbf{I} = \frac{-900}{30 - j40} = 18\angle -126.87°\ \text{A}$$

bulunur. Şimdi $\mathbf{V}_x$ gerilimi

$$\mathbf{V}_x = 100 - 180\angle -126.87° = 208 + j144\ \text{V}$$

olarak hesaplarız. Son olarak Şekil 9.31'den

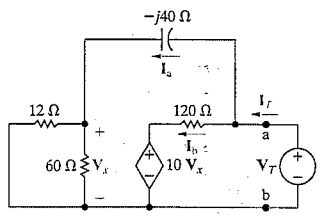
$$\mathbf{V}_{Th} = 10\mathbf{V}_x + 120\mathbf{I}$$

$$= 2080 + j1440 + 120(18)\angle -126.87°$$

$$= 784 - j288 = 835.22\angle -20.17°\ \text{V}$$

elde edilir.

Thévenin empedansını elde etmek için daha önce Thévenin direnci hesaplarken kullanılan tekniklerden herhangi biri kullanılabilir. Bu örnekte test kaynağı yöntemini sergileyeceğiz. Bu yöntemi kullanırken devredeki tüm bağımsız kaynakları öldürdüğümüzü ve sonra ilgili terminallere bir test gerilim kaynağı veya bir test akım kaynağı uyguladığımızı hatırlayınız. Kaynakta gerilimin akıma oranı Thévenin empedansıdır. Şekil 9.32, Şekil 9.30'daki devreye bu yöntemi uygulamanın sonucunu göstermektedir. $\mathbf{V}_T$ test gerilim kaynağı seçildiğine dikkat ediniz. Ayrıca $\mathbf{V}_x$'i koruduğumuza ve bağımsız gerilim kaynağını kısa devre ile öldürdüğümüze de dikkat edilmelidir.



Şekil 9.32 ▲ Thévenin eşdeğer empedansını hesaplamak için devre.

$$= \frac{-\mathbf{V}_T(9 + j4)}{120(1 - j4)},$$

$$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b$$

$$= \frac{\mathbf{V}_T}{10 - j40}\left(1 - \frac{9 + j4}{12}\right)$$

$$= \frac{\mathbf{V}_T(3 - j4)}{12(10 - j40)},$$

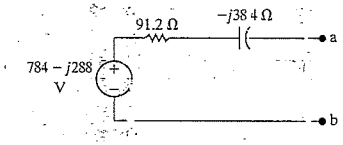
$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_T}{\mathbf{I}_T} = 91.2 - j38.4\ \Omega.$$

$\mathbf{I}_a$ ve $\mathbf{I}_b$ dal akımları, $\mathbf{I}_T$'nin hesaplanmasını sadeleştirmek için devreye eklenmiştir. Kirchhoff devre yasalarının doğrudan uygulanması ile aşağıdaki bağlantılar elde edilir:

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_T}{10 - j40}, \quad \mathbf{V}_x = 10\mathbf{I}_a,$$

$$\mathbf{I}_b = \frac{\mathbf{V}_T - 10\mathbf{V}_x}{120}$$

Şekil 9.33 Thévenin eşdeğer devresini göstermektedir.



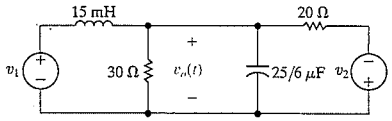
Şekil 9.33 ▲ Şekil 9.30'daki devrenin Thévenin eşdeğeri.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 3 – Bir devreyi frekans bölgesinde çözmek için devre analiz tekniklerinin nasıl kullanıldığını bilmek

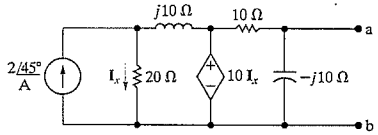
9.10 Şekilde gösterilen devrede kaynak dönüşümleri tekniğini kullanarak $v_o(t)$'nin durgun durum ifadesini bulunuz. Sinüzoidal gerilim kaynakları aşağıda verilmiştir.

$$v_1 = 240\cos(4000t + 53.13°)\ \text{V},$$
$$v_2 = 96\sin 4000t\ \text{V}.$$



Cevap: $48\cos(4000t + 36.87°)$ V.

9.11 Aşağıda gösterilen devrenin a, b terminallerine göre Thévenin eşdeğerini bulunuz.



Cevap: $\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_{ab} = 10\angle 45°$ V; $Z_{Th} = 5 - j5\ \Omega$.

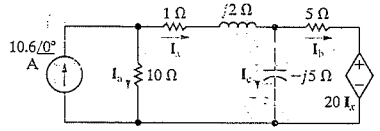
NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 9.40, 9.41 ve 9.47'yi de çözmeyi deneyiniz.

9.8 Düğüm Gerilimi Yöntemi

Kısım 4.2–4.4'te devre analizinde düğüm gerilimi yönteminin temel kavramlarını tanıttık. Aynı kavramlar, düğüm gerilimi yöntemini frekans bölgesi devrelerinde kullandığımızda da geçerlidir. Örnek 9.11 böyle bir devrenin düğüm gerilimi yöntemi ile çözümünü sergilemektedir. Değerlendirme Problemi 9.12 ve Bölüm Problemlerinin çoğu size durgun durum tepkisini çözmek için düğüm gerilimi yöntemini kullanma fırsatı verecektir.

Örnek 9.11 **Frekans Bölgesinde Düğüm Gerilimi Yönteminin Kullanılması**

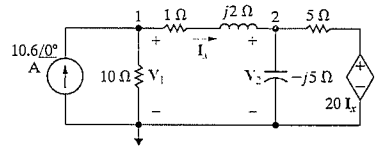
Düğüm gerilimi yöntemini kullanarak Şekil 9.34'teki $\mathbf{I}_a$, $\mathbf{I}_b$ ve $\mathbf{I}_c$ dal akımlarını bulunuz.



Şekil 9.34 ▲ Örnek 9-11'in devresi.

Çözüm

Devreyi iki düğüm gerilimi ile açıklayabiliriz çünkü devrede üç temel düğüm vardır. Şekil 9.34'ün altındaki temel düğümde dört dal sonlanmaktadır. Bu nedenle bu düğümü referans düğün olarak alırız. Kalan iki temel düğüm 1 ve 2 olarak adlandırılır ve düğüm gerilimleri de $\mathbf{V}_1$ ve $\mathbf{V}_2$ olarak etiketlenir. Şekil 9.35 referans düğümü ve terminal etiketlerini göstermektedir.



Şekil 9.35 ▲ Düğüm gerilimleri tanımı ile Şekil 9.34'te gösterilen devre.

Düğüm 1'den çıkan akımların toplanması

$$-10.6 + \frac{\mathbf{V}_1}{10} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{1 + j2} = 0$$

verir.

$1 + j2$ ile çarpınak ve $\mathbf{V}_1$ ile $\mathbf{V}_2$'nin katsayılarının toplanması ise

$$\mathbf{V}_1(1.1 + j0.2) - \mathbf{V}_2 = 10.6 + j21.2.$$

ifadesini üretir. Düğüm 2'den çıkan akımların toplanması da

$$\frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{1 + j2} + \frac{\mathbf{V}_2}{-j5} + \frac{\mathbf{V}_2 - 20\mathbf{I}_x}{5} = 0$$

verir. $\mathbf{I}_x$ kontrol akımı

$$\mathbf{I}_x = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{1 + j2}$$

bulunur. $\mathbf{I}_x$'in bu ifadesini düğüm 2 denkleminde yerine koyar, $1 + j2$ ile çarpar ve $\mathbf{V}_1$ ile $\mathbf{V}_2$'nin katsayılarını toplarsak

$$-5\mathbf{V}_1 + (4.8 + j0.6)\mathbf{V}_2 = 0.$$

buluruz. $\mathbf{V}_1$ ve $\mathbf{V}_2$'nin çözümü

$$\mathbf{V}_1 = 68.40 - j16.80\ \text{V},$$
$$\mathbf{V}_2 = 68 - j26\ \text{V}$$

verir. Buradan dal akımları

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_1}{10} = 6.84 - j1.68\ \text{A},$$

$$\mathbf{I}_x = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{1 + j2} = 3.76 + j1.68\ \text{A},$$

$$\mathbf{I}_b = \frac{\mathbf{V}_2 - 20\mathbf{I}_x}{5} = -1.44 - j11.92\ \text{A},$$

$$\mathbf{I}_c = \frac{\mathbf{V}_2}{-j5} = 5.2 + j13.6\ \text{A}$$

elde edilir. Sonucu kontrol etmek için aşağıdaki hesaplamalar yapılabilir.

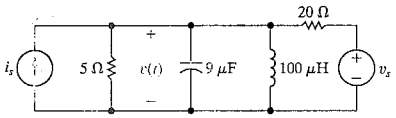
$$\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_x = 6.84 - j1.68 + 3.76 + j1.68 = 10.6\ \text{A},$$

$$\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = -1.44 - j11.92 + 5.2 + j13.6 = 3.76 + j1.68\ \text{A}.$$

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 3 – Devre analizi tekniklerini kullanarak frekans bölgesinde bir devrenin nasıl çözüleceğini bilmek

9.12 Düğüm gerilimi yöntemini kullanarak gösterilen devrede $v(t)$'nin durgun durum ifadesini bulunuz. Sinüzoidal kaynaklar $i_s = 10 \cos \omega t$ A, $v_s = 100 \sin \omega t$ V ve $\omega = 50$ krad/s'dir.



Cevap: $v(t) = 31.62 \cos(50{,}000t - 71.57°)$ V.

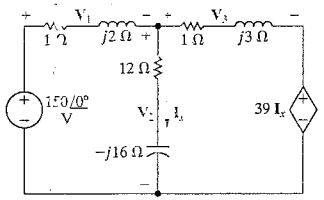
NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 9.51 ve 9.56'yı da çözmeyi deneyiniz.

9.9 Ağ Akımı Yöntemi

Frekans bölgesi devrelerinin analizinde ağ akımı yöntemini de kullanabiliriz. Frekans bölgesi uygulamalarında kullanılan yöntemler, direnç devresi analizinde kullanılanlarla aynıdır. Kısım 4-5 - 4.7'de ağ akımı yöntemi temel teknikleri tanıtılmıştı. Bu yöntemin frekans bölgesine genişletilmiş halini Örnek 9.12'de sergileyeceğiz.

Örnek 9.12 **Frekans Bölgesinde Ağ Akımı Yönteminin Kullanılması**

Şekil 9.36'da gösterilen devrede $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ ve $\mathbf{V}_3$ gerilimlerini bulmak için ağ akımı yöntemini kullanınız.



Şekil 9.36 ▲ Örnek 9.12'nin devresi.

Çözüm

Devrede iki ağ ve bir bağımlı gerilim kaynağı vardır. Bu nedenle iki ağ akımı denklemi ve bir kısıt denklemi yazmalıyız. $\mathbf{I}_1$ ve $\mathbf{I}_2$ ağ akımlarının referans yönü, Şekil 9.37'de gösterildiği gibi saat yönüdür. $\mathbf{I}_1$ ve $\mathbf{I}_2$'yi bildiğimiz zaman kolaylıkla bilinmeyen gerilimleri bulabiliriz. Ağ 1 çevresindeki gerilimlerin toplamı

$$150 = (1 + j2)\mathbf{I}_1 + (12 - j16)(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2)$$

veya

$$150 = (13 - j14)\mathbf{I}_1 - (12 - j16)\mathbf{I}_2$$

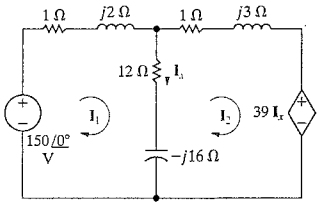
verir. Ağ 2 çevresindeki gerilimleri toplamı ise

$$0 = (12 - j16)(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + (1 + j3)\mathbf{I}_2 + 39\mathbf{I}_x$$

verir. Şekil 9.37, $\mathbf{I}_x$ kontrol akımının $\mathbf{I}_1$ ve $\mathbf{I}_2$ arasındaki fark olduğunu göstermektedir, yani kısıt

$$\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2$$

denklemidir.



Şekil 9.37 ▲ Şekil 9.36'da gösterilen devrenin çözümünde kullanılan ağ akımları.

Bu kısıtın Ağ 2 denkleminde yerine konması ve bulunan ifadenin sadeleştirilmesi

$$0 = (27 + j16)\mathbf{I}_1 - (26 + j13)\mathbf{I}_2$$

verir. $\mathbf{I}_1$ ve $\mathbf{I}_2$ için çözüm yapılırsa

$$\mathbf{I}_1 = -26 - j52 \text{ A},$$

$$\mathbf{I}_2 = -24 - j58 \text{ A},$$

$$\mathbf{I}_x = -2 + j6 \text{ A}$$

bulunur. O halde gerilimler

$$\mathbf{V}_1 = (1 + j2)\mathbf{I}_1 = 78 - j104 \text{ V},$$

$$\mathbf{V}_2 = (12 - j16)\mathbf{I}_x = 72 + j104 \text{ V},$$

$$\mathbf{V}_3 = (1 + j3)\mathbf{I}_2 = 150 - j130 \text{ V}$$

olur. Ayrıca

$$39\mathbf{I}_x = -78 + j234 \text{ V}$$

bulunur. Bu hesaplamaları, kapalı yolla çevresinde gerilimleri toplayarak kontrol edebiliriz:

$$-150 + \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = -150 + 78 - j104 + 72 + j104 = 0,$$

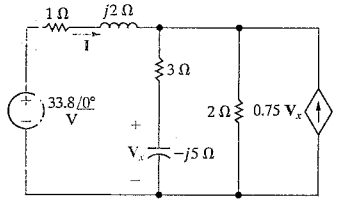
$$-\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + 39\mathbf{I}_x = -72 - j104 + 150 - j130 - 78 + j234 = 0,$$

$$-150 + \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_3 + 39\mathbf{I}_x = -150 + 78 - j104 + 150 - j130 - 78 + j234 = 0.$$

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 3 – Devre analizi tekniklerini kullanarak frekans bölgesinde bir devrenin nasıl çözüleceğini bilmek

9.12 Şekilde gösterilen devrede ağ akımı yöntemini kullanarak $\mathbf{I}$ fazör akımını bulunuz.



Cevap: $\mathbf{I} = 29 + j2 = 29.07\angle 3.95°$ A.

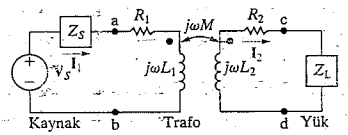
NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 9.58 ve 9.61'i de çözmeyi deneyiniz.

9.10 Trafo

Bir trafo manyetik bağlaşıma dayanan bir cihazdır. Trafolar hem iletişim hem de güç devrelerinde kullanılır. İletişim devrelerinde trafolar empedans uyumlamada ve sistemin diğer kısımlarında dc'yi yok etmek için kullanılır. Güç devrelerinde trafolar, elektrik gücü iletim, dağıtım ve tüketimi kolaylaştıracak ac gerilim seviyeleri elde etmek için kullanılır. Trafonun sinüzoidal durgun durum davranışının bilinmesi, hem iletişim hem de güç sistemlerinde gereklidir. Bu kısımda, birincil olarak iletişim sistemlerinde bulunan doğrusal trafonun sinüzoidal durgun durum davranışını tartışacağız. Kısım 9.11'de, güç sistemlerinde bulunan ferromanyetik trafoyu modellemekte kullanılan ideal trafoyu inceleyeceğiz.

Başlamadan önce yararlı bir gözlem yapacağız. Karşılıklı endüktans içeren devrelerin analizinde devre denklemlerini yazarken ağ veya döngü akım yöntemini kullanırız. Düğüm gerilimi yöntemi, karşılıklı endüktans durumunda karmaşıktır. Bunun nedeni, çeşitli sarımlardaki akımların gözlem yoluyla düğüm gerilimlerinin fonksiyonu olarak yazılamamasıdır.

Doğrusal Trafo Devresinin Analizi



Şekil 9.38 Bir yükü kaynağa bağlamak için kullanılan bir trafonun frekans bölgesi modeli.

İki bobin, manyetik bağlaşımı garanti etmek için aynı çekirdek üzerinde sarıldığında basit bir **trafo** elde edilir. Şekil 9.38, yükü kaynağa bağlamak için trafo kullanan bir sistemin frekans bölgesi modelini göstermektedir. Bu devreyi tartışırken, kaynağa bağlı trafo sarımını **birincil sarım**, yüke bağlı trafo sarımını ise **ikincil sarım** olarak adlandıracağız. Bu terminolojiye dayanarak trafo devre parametreleri aşağıdaki gibi verilir.

R_1 = birincil sarımın direnci,

R_2 = ikincil sarımın direnci,

L_1 = birincil sarımın öz endüktansı,

L_1 = ikincil sarımın öz endüktansı,

M = karşılıklı endüktans.

Sinüzoidal kaynağın iç gerilimi $\mathbf{V}_s$, iç empedansı ise Z_s'dir. Z_L empedansı, trafonun ikincil sarımına bağlanan yükü temsil etmektedir. $\mathbf{I}_1$ ve $\mathbf{I}_2$ akımları, sırasıyla trafonun birincil ve ikincil akımlarıdır.

Şekil 9.38'deki devrenin analizi, $\mathbf{I}_1$ ve $\mathbf{I}_2$'nin devre parametreleri $\mathbf{V}_s$, Z_s, R_1, L_2, L_2, R_2, M, Z_L ve ω cinsinden bulunmasından oluşur. Ayrıca trafonun a, b terminallerinden içine doğru bakıldığında görülen empedansı bulmakla ilgileniyoruz. $\mathbf{I}_1$ ve $\mathbf{I}_2$'yi bulmak için önce devreyi açıklayan iki ağ akımı denklemini yazarız.

$$\mathbf{V}_s = (Z_s + R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2, \tag{9.57}$$

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + Z_L)\mathbf{I}_2. \tag{9.58}$$

Eş 9.57 ve 9.58'in cebirsel işlenmesini kolaylaştırmak için

$$Z_{11} = Z_s + R_1 + j\omega L_1, \tag{9.59}$$

$$Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 + Z_L \tag{9.60}$$

alırız. Burada Z_{11}, trafonun birincil sarımını içeren ağın toplam öz empedansı, Z_{22}'de ikincil sarımı içeren ağın toplam empedansıdır. Eş. 9.59 ve 9.60'ta verilen gösterime dayanarak, $\mathbf{I}_1$, ve $\mathbf{I}_2$'nin Eş. 9.57 ve 9.58'den çözümü

$$\mathbf{I}_1 = \frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} + \omega^2M^2}\mathbf{V}_s, \tag{9.61}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{j\omega M}{Z_{11}Z_{22} + \omega^2M^2}\mathbf{V}_s = \frac{j\omega M}{Z_{22}}\mathbf{I}_1 \tag{9.62}$$

bulunur.

İç gerilim kaynağı $\mathbf{V}_s$'ye empedans, $\mathbf{V}_s / \mathbf{I}_1$ veya

$$\frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{I}_1} = Z_{\text{int}} = \frac{Z_{11}Z_{22} + \omega^2M^2}{Z_{22}} = Z_{11} + \frac{\omega^2M^2}{Z_{22}} \tag{9.63}$$

olarak görünür. Kaynak terminallerindeki empedans $Z_{\text{int}} - Z_s$'dir. Böylece

$$Z_{\text{ab}} = Z_{11} + \frac{\omega^2M^2}{Z_{22}} - Z_s = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2M^2}{(R_2 + j\omega L_2 + Z_L)} \tag{9.64}$$

yazılır. Z_{ab} empedansının trafonun manyetik kutupluğundan bağımsız olduğuna dikkat ediniz. Bunun nedeni karşılıklı endüktansın Eş. 9.64'te bir kare nicelik olarak gözükmesidir. Bu empedans özellikle önemlidir çünkü trafonun yük empedansının kaynakta görünüşünün nasıl etkilediğini gösterir. Trafo olmasaydı yük doğrudan kaynağa bağlı olurdu ve kaynak Z_L yük empedansını görürdü. Trafo varken yük kaynağa trafo aracılığı ile bağlanır ve kaynak yükün, Eş. 9.64'ün üçüncü teriminde görüldüğü gibi değiştirilmiş bir halini görür.

Yansıtılan Empedans

Eş. 9.64'teki üçüncü terim yansıtılan empedans (Z_r) olarak adlandırılır. Çünkü bu, ikincil sarım ve yük empedansının, trafonun birincil tarafına iletilen veya yansıtılan eşdeğer empedansıdır. Yansıtılan empedansın yanlızca karşılıklı endüktansın varlığından kaynaklandığına dikkat ediniz. Eğer iki sarım ayrılsaydı, M sıfır olur, Z_r sıfır olurdu ve Z_{ab} de birincil sarımın öz empedansına indirgenirdi.

Yansıtılan empedansı daha detaylı incelemek için önce yük empedansını Kartezyen biçimde ifade edeceğiz:

$$Z_L = R_L + jX_L. \tag{9.65}$$

Burada X_L yük reaktansı, kendi cebirsel işaretini taşır. Bir başka deyişle, eğer yük endüktif ise X_L pozitif bir sayı; eğer yük kapasitif ise negatif bir sayıdır. Şimdi yansıtılan empedansı Kartezyen biçimde yazmak için Eş. 9.65'i kullanalım.

$$\begin{aligned} Z_r &= \frac{\omega^2M^2}{R_2 + R_L + j(\omega L_2 + X_L)} \\ &= \frac{\omega^2M^2[(R_2 + R_L) - j(\omega L_2 + X_L)]}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 + X_L)^2} \\ &= \frac{\omega^2M^2}{|Z_{22}|^2}[(R_2 + R_L) - j(\omega L_2 + X_L)]. \end{aligned} \tag{9.66}$$

Eş. 9.66'nın çıkarımı, Z_L Kartezyen biçimde yazıldığında ikincil sarımı içeren ağın öz empedansının

$$Z_{22} = R_2 + R_L + j(\omega L_2 + X_L) \tag{9.67}$$

olduğu gerçeğinden yararlanır.

Şimdi Eş. 9.66'dan, ikincil devrenin öz empedansının birincil devreye $(\omega M/|Z_{22}|)^2$ ölçeği ile yansıtıldığına ve reaktif bileşen $(\omega L_2 + X_L)$'nin işaretinin değiştiğine dikkat ediniz. Böylece bir doğusal trafo, ikincil devrenin öz empedansının eşlendiğini (Z_{22}^*) bir ölçek ile birincil sarıma yansıtır. Örnek 9.13, bir doğrusal trafo içeren devrede ağ akımı yöntemini sergilemektedir.

Örnek 9.13 **Doğrusal Trafonun Frekans Bölgesinde Analizi**

Bir doğrusal trafonun parametreleri $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$ $L_1 = 9$ H, $L_2 = 4$ H ve $k = 0.5$'tir. Trafo, 800 Ω dirençle seri 1 μF kapasitörden oluşan bir empedansı bir sinüzoidal kaynağa bağlaştırmaktadır. 300 V(rms) kaynak 500 + j100 Ω iç empedansa ve 400 rad/s frekansa sahiptir.

a) Sistemin frekans bölgesi eşdeğer devresini oluşturunuz.

b) Birincil devrenin öz empedansını hesaplayınız.

c) İkincil devrenin öz empedansını hesaplayınız.

d) Birincil sarıma yansıtılan empedansı hesaplayınız.

e) Yansıtılan empedansın ölçek faktörünü hesaplayınız.

f) Trafonun birincil terminallerinden içeri bakıldığında görülen empedansı hesaplayınız.

g) c, d terminallerine göre Thévenin eşdeğeri hesaplayınız.

Çözüm

a) Şekil 9.39 frekans bölgesi eşdeğer devresini göstermektedir. Kaynağın iç geriliminin referans fazör olarak hizmet ettiğine ve $\mathbf{V}_1$ ile $\mathbf{V}_2$'nin trafonun terminal gerilimlerini gösterdiğine dikkat ediniz.

Şekil 9.39'daki devre oluşturulurken aşağıdaki hesaplamalar yapılmıştır:

$$j\omega L_1 = j(400)(9) = j3600\ \Omega,$$

$$j\omega L_2 = j(400)(4) = j1600\ \Omega,$$

$$M = 0.5\sqrt{(9)(4)} = 3\ \text{H},$$

$$j\omega M = j(400)(3) = j1200\ \Omega,$$

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{10^6}{j400} = -j2500\ \Omega.$$

b) Birincil devrenin öz empedansı

$$Z_{11} = 500 + j100 + 200 + j3600 = 700 + j3700\ \Omega$$

elde edilir.

c) İkincil devrenin öz empedansı ise

$$Z_{22} = 100 + j1600 + 800 - j2500 = 900 - j900\ \Omega$$

bulunur.

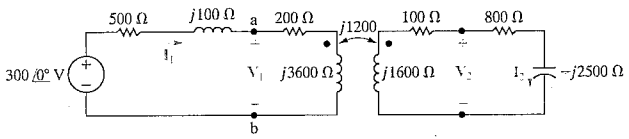
d) Birincil sarıma yansıtılan empedans

$$Z_r = \left(\frac{1200}{|900 - j900|}\right)^2 (900 + j900)$$

$$= \frac{8}{9}(900 + j900) = 800 + j800\ \Omega$$

olarak hesaplanır.

e) Z_{22}^*'nin yansıtılmasındaki ölçek faktörü 8/9'dur.



Şekil 9.39 Örnek 9.13 için frekans bölgesi eşdeğer devresi.

f) Trafo terminallerinden içeri bakıldığında görülen empedans, birincil sarımın empedansı artı yansıtılan empedanstır:

$$Z_{ab} = 200 + j3600 + 800 + j800 = 1000 + j4400\ \Omega.$$

g) Thévenin gerilimi, $\mathbf{V}_{cd}$'nin açık devre değerine eşit olacaktır. $\mathbf{V}_{cd}$'nin açık devre değeri, $\mathbf{I}_1$'in açık devre değerinin j1200 ile çarpımına eşit olacaktır. $\mathbf{I}_1$'in açık devre değeri

$$\mathbf{I}_1 = \frac{300\angle 0^\circ}{700 + j3700}$$

$$= 79.67\angle -79.29^\circ\ \text{mA}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\mathbf{V}_{Th} = j1200(79.67\angle -79.29^\circ) \times 10^{-3}$$

$$= 95.60\angle 10.71^\circ\ \text{V}$$

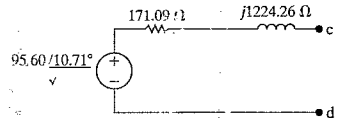
elde edilir.

Thévenin empedansı ikincil sarımın empedansı artı gerilim kaynağı kısa devre ile değiştirildiğinde birincilden yansıtılan empedanstır. Böylece

$$Z_{Th} = 100 + j1600 + \left(\frac{1200}{|700 + j3700|}\right)^2 (700 - j3700)$$

$$= 171.09 + j1224.26\ \Omega$$

bulunur. Thévenin eşdeğer Şekil 9.40'ta gösterilmiştir.

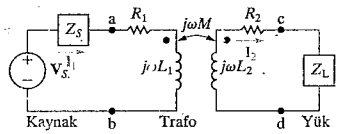


Şekil 9.40 Örnek 9.13 için Thevenin eşdeğer devresi.

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 4- Doğrusal trafo içeren devreleri fazör yöntemleri ile analiz edebilmek

9.14 Bir doğrusal trafo, 360 Ω direnç ve seri 0.25 H indüktörden oluşan bir yükü şekildeki gibi bir sinüzoidal kaynağa bağlaştırmaktadır. Gerilim kaynağının iç empedansı 184 + j0 Ω, maksimum gerilimi ise 245.20 V'tur ve 800 rad/s'de çalışmaktadır. Trafo parametreleri $R_1 = 100\ \Omega$, $L_1 = 0.5$ H, $R_2 = 40\ \Omega$, $L_2 = 0.125$ H ve $k = 0.4$'tür. (a) Yansıtılan empedansı, (b) birincil akımı (c) ikincil akımı hesaplayınız.



Cevap: (a) 10.24 − j7.68 Ω; (b) 0.5 cos(800t − 53.13°) A; (c) 0.08 cos 800t A.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 9.72 ve 9.73'ü de çözmeyi deneyiniz.

9.11 İdeal Trafo

Bir **ideal trafo** N_1 ve N_2 sarımı olan ve manyetik olarak bağlaşık iki bobinden oluşur ve aşağıdaki özellikleri sergiler.

1. Bağlaşım katsayısı birdir ($k = 1$)
2. Her iki bobinin öz endüktansı sonsuzdur ($L_1 = L_2 = \infty$)
3. Parazitik dirençten kaynaklanan bobin kayıpları ihmal edilebilir.

İdeal trafoların anlaşılması, bir doğrusal trafoya bağlı bir kaynağın terminallerindeki empedansı açıklayan Eş. 9.64 ile başlar. Bu denklemi aşağıda tekrar edip ileride daha derin inceleyeceğiz.

Sınır Değerlerin İncelenmesi

L_1 ve L_2 sonsuz büyük hale gelirken ve aynı zamanda bağlaşım katsayısı 1'e yaklaşırken giriş empedansı ile yük empedansı arasında Eş. 9.68'deki Z_{ab} ile verilen yararlı bir bağıntı ortaya çıkar:

$$Z_{ab} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} - Z_s$$

$$= R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{(R_2 + j\omega L_2 + Z_L)}. \qquad (9.68)$$

Ferromanyetik çekirdek üzerine sarılan trafolar bu koşula yaklaşabilir. Bu trafolar doğrusal olmamakla birlikte, doğrusal olmamayı ihmal ederek oluşturulan ideal bir model ile bazı yararlı bilgiler elde edebiliriz.

$k = 1$ iken ve L_1 ile L_2 sonsuza yaklaşırken Z_{ab}'nin nasıl değiştiğini göstermek için

$$Z_{22} = R_2 + R_L + j(\omega L_2 + X_L) = R_{22} + jX_{22}$$

gösterimini tanıtıp sonra Eş. 9.68'i

$$Z_{ab} = R_1 + \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} + j\left(\omega L_1 - \frac{\omega^2 M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2}\right)$$

$$= R_{ab} + jX_{ab} \qquad (9.69)$$

halinde yeniden düzenleriz. Bu noktada Eş. 9.69'da j'nin katsayısına dikkat etmeliyiz çünkü L_1 ve L_2 sonsuza yaklaşırken bu katsayı iki büyük nicelik arasında bir farktır. Bu nedenle, L_1 ve L_2'yi artırmadan önce katsayıyı

$$X_{ab} = \omega L_1 - \frac{(\omega L_1)(\omega L_2)X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} = \omega L_1\left(1 - \frac{\omega L_2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2}\right) \qquad (9.70)$$

olarak yazarız. Burada $k = 1$ iken $M_2 = L_1 L_2$ olduğunu kullandık. ωL_1'i çarpan terimi ortak paydada yazarsak,

$$X_{ab} = \omega L_1\left(\frac{R_{22}^2 + \omega L_2 X_L + X_L^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2}\right) \qquad (9.71)$$

bulunur.

Eş 9.71'de pay ve paydayı ωL_2 parantezine alırsak

$$X_{ab} = \frac{L_1}{L_2}\frac{X_L + (R_{22}^2 + X_L^2)/\omega L_2}{(R_{22}/\omega L_2)^2 + [1 + (X_L/\omega L_2)]^2} \qquad (9.72)$$

bulunur. k 1.0'a yaklaştıkça, L_1/L_2 oranı Eş. 6.54 ve 6.55'e göre sabit $(N_1/N_2)^2$ oranına yaklaşır. Bunun nedeni, bağlaşımın artmasıyla $\mathcal{P}_1$ ve $\mathcal{P}_2$ permeanslarının eşit hale gelmesidir. O zaman Eş. 9.72 $L_1 \to \infty$, $L_2 \to \infty$ ve $k \to 1.0$ için

$$X_{ab} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 X_L \qquad (9.73)$$

haline indirgenir.

Aynı yolla Eş. 9.69'da verilen yansıtılan empedans da

$$\frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} = \frac{L_1}{L_2}R_{22} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_{22} \qquad (9.74)$$

halinde sadeleşir. Eş. 9.73 ve 9.74'te verilen sonuçların Eş. 9.69'a uygulanması

$$Z_{ab} = R_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 (R_L + jX_L) \qquad (9.75)$$

verir. Bu sonucu Eş. 9.68'deki sonuç ile karşılaştırınız. Burada, bağlaşım katsayısı 1'e yaklaşırken ve bağlaşık bobinlerin öz endüktansları sonsuza giderken trafo, ikincil sarımın direncini ve yük empedansını birincil tarafa (N_1/N_2)'nin karesine eşit bir ölçek faktörü ile yansıtır. Böylece ideal trafonun terminal davranışını iki özellik cinsinden açıklayabiliriz. Birincisi, her iki bobin için sarım başına gerilim büyüklüğü aynıdır veya

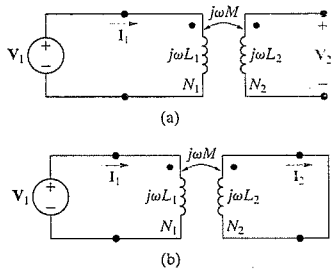
$$\left|\frac{\mathbf{V}_1}{N_1}\right| = \left|\frac{\mathbf{V}_2}{N_2}\right| \qquad (9.76)$$

geçerlidir. İkincisi, her iki bobin için amper-sarım büyüklüğü aynıdır ve

$$|\mathbf{I}_1 N_1| = |\mathbf{I}_2 N_2| \qquad (9.77)$$

yazılabilir. Eş. 9.76 ve 9.77'de mutlak değer işareti kullanmak zorunludur çünkü henüz akımlar ve gerilimler için referans kutupluklar belirlenmemiştir. Kısa süre sonra mutlak değerin kaldırılmasını tartışacağız.

Şekil 9.41 iki kayıpsız ($R_1 = R_2 = 0$) manyetik bağlaşık bobin göstermektedir. Eş. 9.76 ve 9.77'nin sağlanmasında Şekil 9.41 kullanılacaktır. Şekil 9.41(a)'da bobin 2 açıktır; Şekil 9.41(b)'de ise



Şekil 9.41 ▲ Bir ideal trafodaki sarım başına gerilim ve amper-sarım bağıntılarını sağlamak için kullanılan devreler.

kısa devredir. Aşağıdaki analizi sinüzoidal durgun durum çalışma için yapacağız. Ancak sonuçlar v ile i'nin anlık değerlerine de uygulanabilir.

Gerilim ve Akım Oranlarının Belirlenmesi

Şekil 9.41(a)'da açık devre bobinin terminallerindeki gerilimin, tamamıyla bobin 1'deki akımın sonucu olduğuna dikkat ediniz. Böylelikle,

$$\mathbf{V}_2 = j\omega M\mathbf{I}_1 \tag{9.78}$$

bulunur. Bobin 1'deki akım

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{j\omega L_1} \tag{9.79}$$

olarak hesaplanır. Eş. 9.78 ve 9.79'dan

$$\mathbf{V}_2 = \frac{M}{L_1}\mathbf{V}_1 \tag{9.80}$$

elde edilir. Birim bağlaşım için karşılıklı endüktans $\sqrt{L_1L_2}$'ye eşittir ve Eş. 9-80

$$\mathbf{V}_2 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\mathbf{V}_1 \tag{9.81}$$

haline gelir. Birim bağlaşım için, bobin 1'den geçen akı ile bobin 2'den geçen akı aynıdır. Bu nedenle bobinlerin öz endüktansını açıklamak için sadece bir permeansa ihtiyaç vardır. Böylece Eş. 9.81

$$\mathbf{V}_2 = \sqrt{\frac{N_2^2\mathcal{P}}{N_1^2\mathcal{P}}}\mathbf{V}_1 = \frac{N_2}{N_1}\mathbf{V}_1 \tag{9.82}$$

veya

İdeal bir trafonun gerilim bağıntısı ▶

$$\frac{\mathbf{V}_1}{N_1} = \frac{\mathbf{V}_2}{N_2}. \tag{9.83}$$

haline gelir. Şekil 9.41(b)'deki kısa devre bobinin çevresindeki gerilimlerin toplamı

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + j\omega L_2\mathbf{I}_2 \tag{9.84}$$

verir. Buradan da $k = 1$ için

$$\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} = \frac{L_2}{M} = \frac{L_2}{\sqrt{L_1L_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1} \tag{9.85}$$

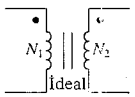
elde edilir.

Eş. 9.85,

$$\mathbf{I}_1N_1 = \mathbf{I}_2N_2. \tag{9.86}$$

◀ İdeal bir trafonun akım bağıntısı

denklemine eşdeğerdir. Şekil 9.42, bir ideal trafonun grafik sembolünü göstermektedir. Semboldeki dikey çizgiler, ferromanyetik çekirdeklerin sıklıkla yapıldığı gibi manyetik malzeme tabakalarını göstermektedir. Böylelikle sembol bize, ferromanyetik bir çekirdek etrafına sarılan bobinlerin ideal trafoya çok yakın davrandığını hatırlatmaktadır.



Şekil 9.42 ▲ Bir ideal trafonun grafik sembolü.

Bunun birçok nedeni vardır. Ferromanyetik malzeme yüksek permeanslı bir ortam yaratır. Böylece manyetik akının çoğu çekirdek malzemesinin içine hapsolur ve aynı çekirdeği paylaşan malzemeler arasında sıkı bir manyetik bağlaşım oluşturur. Yüksek permeans aynı zamanda yüksek öz endüktans anlamındadır çünkü $L = N^2\mathcal{P}$'dir. Son olarak, ferromanyetik olarak bağlaşık bobinler gücü verimli bir şekilde birbirine aktarır. %95'i aşan verimler yaygındır ve bu dan dolayı kayıpların ihmali çoğu uygulama için sınırlayıcı değildir.

Gerilim ve Akım Oranlarının Kutupluğunun Belirlenmesi

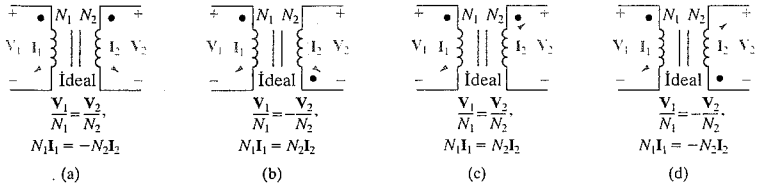
Şimdi Eş. 9.76 ve 9.77'den mutlak değer işaretinin kaldırılmasına döneceğiz. Bu büyüklük işaretlerinin Eş. 9.83 ve 9.86'nın çıkarımında gözükmediğine dikkat ediniz. Orada ihtiyaç olmamasının nedeni, gerilimler için referans kutupluk ve akımlar için ise referans yön kullanılmasıdır. Ayrıca, bağlaşık bobinlerin manyetik kutupluk noktaları da biliniyordu.

Eş. 9.76 ve 9.77'ye uygun işaret atamanın kuralları aşağıdadır: Eğer $\mathbf{V}_1$ ve $\mathbf{V}_2$ bobin gerilimleri, nokta işaretli terminalde birlikte pozitif veya negatifse Eş. 9.76'da artı işareti kullanılır. Aksi takdirde eksi işareti seçilir.

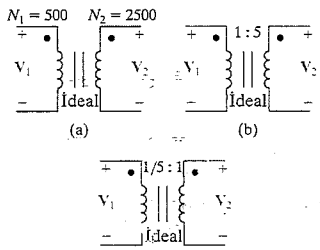
◀ İdeal trafolar için nokta gösterimi

Eğer $\mathbf{I}_1$ ve $\mathbf{I}_2$ sarım akımlarının her ikisi nokta işaretli terminalin içine veya dışına doğru ise Eş. 9.77'de eksi işareti kullanılır. Aksi takdirde artı işareti seçilir.

Şekil 9.43'teki dört devre bu kuralları sergilemektedir.



Şekil 9.43 ▲ Bir ideal trafonun terminal gerilimlerinin ve akımlarının uygun cebirsel işaretlerini gösteren devreler.



İki bobinin sarım oranı ideal trafonun önemli bir parametresidir. Sarım oranı N_1 / N_2 veya N_2 / N_1 olarak tanımlanır; bunların her ikisi de yaygın olarakkullanılır. Bu kitapta N_2 / N_1 oranını a ile göstereceğiz:

$$a = \frac{N_2}{N_1}. \tag{9.87}$$

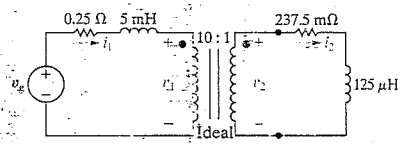
Şekil 9.44 bir ideal trafonun sarım oranını temsil etmenin üç yolunu göstermektedir. Şekil 9.44(a) her bir bobindeki sarım sayısını açık olarak göstermektedir. Şekil 9.44(b) N_2 / N_1 oranının 5'e 1 olduğunu ve Şekil 9.44(c), N_2/N_1 oranının 1'e $\frac{1}{5}$ olduğunu göstermektedir.

Örnek 9.14 ideal trafo içeren bir devrenin analizini sergilemektedir.

Örnek 9.14 Bir İdeal Trafo Devresinin Frekans Bölgesinde Analizi

Şekil 9.45'teki ideal trafonun ikincil sarımına, 237.5 mΩ direnç ile seri bağlı olan 125 μH indüktörden oluşan bir yük bağlıdır.

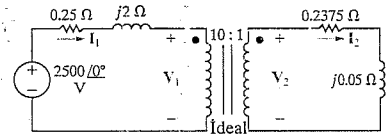
Eğer sinüzoidal gerilim kaynağı (v_g) 2500 cos 400t V üretiyorsa; (a) i_1; (b) v_1; (c) i_2 ve (d) v_2 için durgun durum ifadelerini bulunuz.



Şekil 9.45 ▲ Örnek 9.14'ün devresi.

Çözüm

a) Fazör bölgesi eşdeğer devresini oluşturarak başlayacağız. Gerilim kaynağı $2500\angle 0^\circ$ V haline gelir; 5 mH indüktör $j2$ Ω empedansa çevirilir ve 125 mH indüktör ise $j0.05$ Ω empedansa dönüşür. Fazör bölgesi eşdeğer devresi Şekil 9.46'da gösterilmiştir.



Şekil 9.46 ▲ Örnek 9.14'ün fazör bölgesi devresi.

Şekil 9.46'dan doğrudan,

$$2500\angle 0^\circ = (0.25 + j2)\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_1$$

ve

$$\mathbf{V}_1 = 10\mathbf{V}_2 = 10[(0.2375 + j0.05)\mathbf{I}_2]$$

yazılabilir.

$$\mathbf{I}_2 = 10\mathbf{I}_1$$

olduğundan

$$\mathbf{V}_1 = 10(0.2375 + j0.05)10\mathbf{I}_1$$
$$= (23.75 + j5)\mathbf{I}_1$$

yazılabilir. Sonuçta

$$2500\angle 0^\circ = (24 + j7)\mathbf{I}_1$$

veya

$$\mathbf{I}_1 = 100\angle -16.26^\circ \text{ A}$$

bulunur. Böylelikle i_1'in durgun durum ifadesi

$$i_1 = 100\cos(400t - 16.26^\circ) \text{ A}.$$

olarak elde edilir.

b) $\mathbf{V}_1 = 2500\angle 0^\circ - (100\angle -16.26^\circ)(0.25 + j2)$
$= 2500 - 80 - j185$
$= 2420 - j185 = 2427.06\angle -4.37^\circ$ V.

Buradan

$$v_1 = 2427.06\cos(400t - 4.37^\circ) \text{ V}$$

bulunur.

c) $\mathbf{I}_2 = 10\mathbf{I}_1 = 1000\angle -16.26^\circ$ A.

Buradan

$$i_2 = 1000\cos(400t - 16.26^\circ) \text{ A}$$

bulunur.

d) $\mathbf{V}_2 = 0.1\mathbf{V}_1 = 242.71\angle -4.37^\circ$ V,

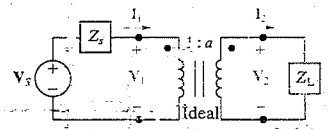
yazılır ve bu da

$$v_2 = 242.71\cos(400t - 4.37^\circ) \text{ V}$$

verir.

Bir İdeal Trafonun Empedans Uyumlama İçin Kullanımı

İdeal trafolar bir yükün empedans seviyesini artırmak veya azaltmak için de kullanılabilir. Pratik gerilim kaynağı (Z_s ile seri $\mathbf{V}_s$) tarafından görülen empedans $\mathbf{V}_1/\mathbf{I}_1$'dir. Yük empedansının terminallerindeki gerilim ve akım ($\mathbf{V}_2$ ve $\mathbf{I}_2$) $\mathbf{V}_1$ ve $\mathbf{I}_1$'e trafo sarım oranı ile bağlıdır.



Şekil 9.47 ▲ Bir yükü kaynağa bağlamak için ideal trafo kullanım.

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{V}_2}{a} \tag{9.88}$$

ve

$$\mathbf{I}_1 = a\mathbf{I}_2. \tag{9.89}$$

Böylece pratik kaynak tarafından görülen empedans

$$Z_{IN} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{1}{a^2}\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} \tag{9.90}$$

olur. Ancak $\mathbf{V}_1/\mathbf{I}_2$ oranı Z_L yük empedansı olduğundan Eş. 9.90

$$Z_{IN} = \frac{1}{a^2}Z_L \tag{9.91}$$

haline gelir. Sonuçta bir ideal trafonun ikincil bobini yük empedansını birincil bobine $1/a^2$ ölçek faktörü ile yansıtır.

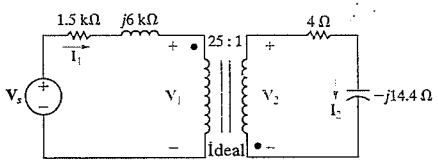
İdeal trafonun Z_L'nin genliğini değiştirdiğine ancak faz açısını etkilemediğine dikkat ediniz. Z_{IN}'nin Z_L'den büyük veya küçük olması a sarım oranına bağlıdır.

İdeal trafo – veya onun pratikteki karşılığı olan ferromanyetik çekirdekli trafo – Z_L'nin genliğini Z_s'nin genliğine uyumlamak için kullanılabilir. Bunun niçin istendiğini 10. Bölümde tartışacağız.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 5-İdeal trafolu devreleri analiz edebilmek

9.15 Şekilde verilen fazör bölgesi devresinde kaynak gerilimi $25\angle 0^\circ$ kV'tur. $\mathbf{V}_2$ ve $\mathbf{I}_2$'nin genlik ve faz açısını bulunuz.

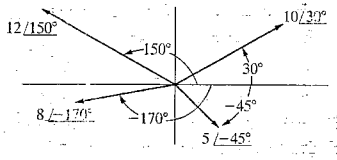


Cevap : $\mathbf{V}_2 = 1868.15\angle 142.39^\circ$ V;

$\mathbf{I}_2 = 125\angle 216.87^\circ$ A.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemi 9.77'yi de çözmeyi deneyiniz.

Görüldüğü gibi ideal trafolar bir kaynaktan yüke gerilimi artırmak veya azaltmak için kullanılır. Bu nedenle ideal trafolar, güç hattındaki gerilimi daha güvenli meskun gerilim seviyelerine indirmeye ihtiyaç duyulan elektrik hizmet endüstrisinde yaygın olarak kullanılır.

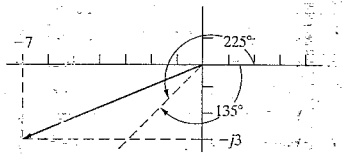


Şekil 9.48 ▲ Fazörlerin grafiksel bir yorumu.

9.12 Fazör Diyagramları

Bir devrenin sinüzoidal durgun durum çalışmasını fazör yöntemiyle incelerken fazör akım ve gerilimlerin diyagramı devrenin davranışının anlaşılmasına yardımcı olabilir. Bir fazör diyagramı her bir fazör niceliğin genliğini ve fazını kompleks düzlemde gösterir. Faz açıları pozitif reel eksenden saat yönünün tersinde, genlik ise eksenlerin orijininden ölçülür. Şekil 9.48, $10\angle 30^\circ$, $12\angle 150^\circ$, $5\angle -45^\circ$, $8\angle -170^\circ$. fazör niceliklerini örnek olarak göstermektedir.

Devre niceliklerinin fazör diyagramlarının oluşturulması genellikle hem akımı hem de gerilimleri içerir. Sonuç olarak, biri akımlar diğeri gerilimler için iki farklı ölçek gereklidir. Hesap makinası sonuçlarını kontrol ederken fazör niceliklerini kompleks düzlemde görmek yararlı olabilir. Tipik hesap makinaları girilen verilerin dökümünü izin vermez. Ancak hesaplanan açı gösterildiğinde aklımızdaki görüntü ile kontrol ederek doğru veri girişi yaptığınızı kontrol edebilirsiniz. Örneğin, $-7-j3$ kutupsal biçimini hesaplamak istediğinizi varsayalım. Hiçbir hesaplama yapmadan Şekil 9.49'da gösterildiği gibi 7'den büyük bir genlik ve üçüncü dörttebirlikte −135'ten daha negatif veya 225°'den daha az pozitif bir açı beklemelisiniz.

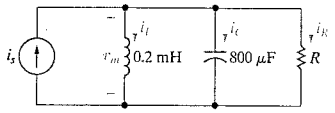


Şekil 9.47 ▲ $-7-j3 = 7.62\angle -156.80^\circ$. kompleks sayısı.

Örnek 9.15 ve 9.16 fazör diyagramların oluşturulması ve kullanımını sergilemektedir. İleriki bölümlerde, incelenen devrenin sinüzoidal durgun durum çalışmasına ek anlayış sağladıklarında bu diyagramları kullanacağız. Problem 9.76 faz kaydırıcı devrenin çalışmasını açıklarken fazör diyagramının nasıl yardımcı olduğunu sergilemektedir.

Örnek 9.15 Devre Analizinde Fazör Diyagramlarının Kullanılması

Şekil 9.50'deki devrede, bir fazör diyagramı kullanarak, $\omega = 5$ krad/s iken dirençteki i_R akımının i_s kaynak akımının 45° gerisinde olmasını sağlayacak R değerini bulunuz.



Şekil 9.50 ▲ Örnek 9.15'in devresi.

Çözüm

Kirchhoff akım yasasından, $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_L$ ve $\mathbf{I}_s$ akımlarının toplamı $\mathbf{I}_s$ kaynak akımına eşit olmalıdır. Eğer $\mathbf{V}_m$ geriliminin faz açısının sıfır olduğunu kabul edersek, her bir eleman için akım fazörünü çizebiliriz. İndüktörün akım fazörü

$$\mathbf{I}_L = \frac{V_m\angle 0^\circ}{j(5000)(0.2\times 10^{-3})} = V_m\angle -90^\circ$$

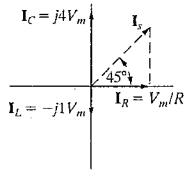
ile, kapasitörün akım fazörü ise

$$\mathbf{I}_C = \frac{V_m\angle 0^\circ}{-j/(5000)(800\times 10^{-6})} = 4V_m\angle 90^\circ$$

ile verilir. Son olarak direncin akım fazörü

$$\mathbf{I}_R = \frac{V_m\angle 0^\circ}{R} = \frac{V_m}{R}\angle 0^\circ$$

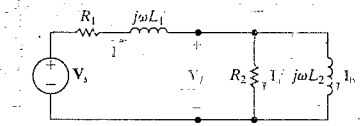
bulunur. Bu fazörler Şekil 9.51'de gösterilmiştir. Fazör diyagramı ayrıca kaynak akım fazörünü de kesikli olarak göstermektedir. Bu fazör, üç devre elemanının akım fazörleinin toplamı olmalı ve direncin akım fazöründen 45° daha pozitif bir açıya sahip olmalıdır. Göreceğiniz gibi fazörlerin toplamı ikizkenar bir üçgen verir. Böylece direncin akım fazörünün uzunluğu $3V_m$'ye eşit olmalıdır. Dolayısıyla direnci değeri $\frac{1}{3}\ \Omega$'dur.



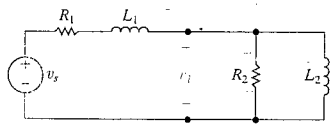
Şekil 9.51 ▲ Şekil 9.50'deki akımların fazör diyagramı.

Örnek 9.16 Kapasitif Yükleme Etkilerinin Fazör Diyagramlarla Analizi

Şekil 9.52'deki devre direnç ve indüktör birleşiminden oluşan bir yüke sahiptir. Eğer $\mathbf{V}_s$, $\mathbf{V}_L$'nin genliği sabit kalacak şekilde ayarlanıyorsa, yük terminalleri arasına bir kapasitör bağlamanın $\mathbf{V}_s$'nin genliği üzerindeki etkisini fazör diyagramlarını kullanarak inceleyiniz. Hizmet şirketleri, hatlar üzerinde gerilimin düşmesini bu tekniği kullanarak kontrol eder.



Şekil 9.52 ▲ Şekil 9.52'deki devrenin frekans bölgesi eşdeğeri.



Şekil 9.52 ▲ Örnek 9.16'nın devresi.

Çözüm

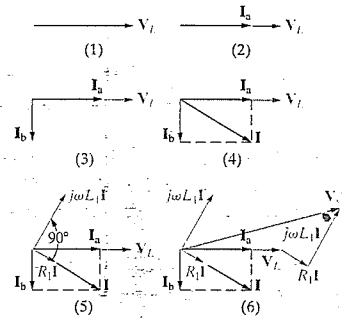
Yük üzerinde sıfır kapasitans kabul ederek başlayacağız. Sıfır kapasitans için fazör diyagramını oluşturduktan sonra kapasitörü ekleyip $\mathbf{V}_L$'yi sabit tutarak $\mathbf{V}_s$ üzerindeki etkiyi inceleyebiliriz. Şekil 9.53, Şekil 9.52'de gösterilen devrenin frekans bölgesi eşdeğerini göstermektedir. Tartışmaya yardımcı olmaları amacıyla $\mathbf{I}$, $\mathbf{I}_a$ ve $\mathbf{I}_b$ dal akımları da Şekil 9.53'e eklenmiştir.

Şekil 9.54 fazör diyagramının adım adım gelişimini göstermektedir. Bu örnekte özel fazör değerleri ve konumları ile ilgili olmadığımızı akılda tutunuz. Daha çok, yük terminalleri arasına bir kapasitör bağlamanın genel etkisi ile ilgiliyiz. Dolayısıyla, kapasitör eklenmeden önce ve sonra fazörlerin bağıl konumlarını bulmak istiyoruz.

Fazör diyagramı ile Şekil 9.53'te gösterilen devre ilişkilendirilince aşağıdaki noktalar ortaya çıkar:

a) Yük geriliminin genliğini sabit tuttuğumuzdan $\mathbf{V}_L$'yi referans olarak seçeriz. Kolaylık için bu fazörü pozitif reel eksen üzerine yerleştiririz.

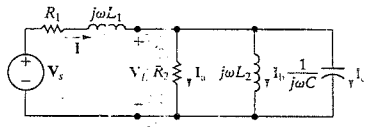
b) $\mathbf{I}_a$'nın $\mathbf{V}_L$ ile eş fazlı olduğunu ve büyüklüğünün $|\mathbf{V}_L|/R_2$ olduğunu biliyoruz. (Fazör diyagram



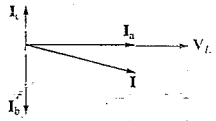
Şekil 9.54 ▲ Şekil 9.53'teki devrenin fazör diyagramının adım adım geliştirilmesi.

diyagramı bu gözlemleri göstermektedir. Kesikli fazörler kapasitör eklenmeden önce ilgili akım ve gerilimle temsil etmektedir.

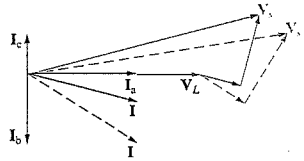
Böylece $\mathbf{I}$, R_1, $\mathbf{I}$, $j\omega L$, $\mathbf{I}$ ve $\mathbf{V}_s$'nin kesikli fazörlerini kesiksiz olanlarla karşılaştırmak, C'yi devreye eklemenin etkisini açıkça göstermektedir. Özel olarak, kaynak geriliminin geniliğinin azaldığına ancak hâlâ yük geriliminin genliğini koruduğuna dikkat ediniz. Pratik olarak bu sonuç, yük arttıkça (yani $\mathbf{I}_a$ ve $\mathbf{I}_b$ arttıkça) sisteme kapasitör ekleyebilir ($\mathbf{I}_c$'yi arttırabiliriz) ve böylece ağır yük koşulları altında kaynak geriliminin genliğini arttırmadan $\mathbf{V}_L$ seviyesini koruyabiliriz anlamına gelmektedir



Şekil 9.55 ▲ Şekil 9.53'teki devreye kapasitör eklenmesi.



Şekil 9.56 ▲ $\mathbf{I}_c$ kapasitör akımının $\mathbf{I}$ hat akımına etkisi.



Şekil 9.57 ▲ $\mathbf{V}_L$ sabit tutulduğunda, Şekil 9.53'te devreye yüke paralel bir kapasitör eklemenin devreye etkisi.

üzerinde, akım fazörlerinin genlik ölçeği gerilim fazörlerinin genlik ölçeğinden bağımsızdır.)

c) $\mathbf{I}_b$'nin $\mathbf{V}_L$'nin 90° gerisinde olduğunu ve genliğinin $|\mathbf{V}_L|/\omega L_2$ olduğunu biliyoruz.

d) $\mathbf{I}$ hat akımı, $\mathbf{I}_a$ ve $\mathbf{I}_b$'nin toplamına eşittir.

e) R_1 üzerindeki gerilim düşüşü hat akımı ile eş fazlıdır ve $j\omega L_1$ üzerindeki gerilim düşüşü hat akımının 90° önündedir.

f) Kaynak gerilimi, yük gerilimi ile hat üzerindeki düşüşün toplamıdır yani $\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_L + (R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}$.

Şekil 9.54'teki adım 6'da gösterilen tanımlanmış fazör diyagramı Şekil 9.53'teki tüm gerilim ve akımlar arasındaki ilişkileri açıkça göstermektedir.

Şimdi Şekil 9.55'te gösterilen kapasitör dalını ekleyelim. $\mathbf{V}_L$'yi sabit tuttuğumuz için Şekil 9.55'teki devrenin fazör diyagramını Şekil 9.54'teki adımlarla oluştururuz. Tek fark adım 4'te diyagrama $\mathbf{I}_c$ kapasitör akımının eklenmesidir. Böylelikle $\mathbf{I}_c$ $\mathbf{V}_L$'nin 90° önündedir ve genliği $|\mathbf{V}_L\omega C|$'dir. Şekil 9.56 $\mathbf{I}_c$'nin hat akımı üzerindeki etkisini göstermektedir. $\mathbf{I}$ hat akımının genlik ve faz açısı $\mathbf{I}_c$ akımı değiştikçe değişir. $\mathbf{I}$ değişince hattaki gerilim düşmesinin genlik ve faz açısı da değişir. Hattaki düşme değişince $\mathbf{V}_s$'nin genliği ve faz açısı da değişir. Şekil 9.57'deki fazör

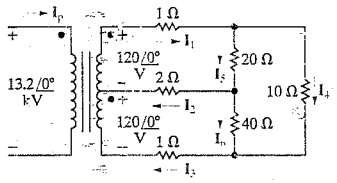
NOT: Bu konuyu kavrayışınızı Bölüm Problemleri 9.81 ve 9.82'yi çözmeyi deneyerek sınayınız.

Pratik Bakış Açısı

Bir Ev Dağıtım Devresi

Şimdi bölümün başında anlatılan ev dağıtım devresine döneceğiz. Devreyi biraz değiştirip trafonun ikincil tarafındaki iletkenlere direnç ekleyeceğiz. Böylelikle mesken bağlantı iletkenlerini daha doğru modellemiş olacağız. Değiştirilmiş devre Şekil 9.58'de gösterilmektedir. Problem 9.85'te dağıtım trafosunun ikincil tarafındaki altı dal akımını hesaplayacak ve sonra birincil sarımdaki akımın nasıl hesaplanacağını göstereceksiniz.

NOT: Bu Pratik Bakış Açısını Kavrayışınızı Bölüm Problemlerinden 9.85 ve 9.86'yı çözmeyi deneyerek sınayınız.



Şekil 9.58 ▲ Dağıtım devresi.

Özet

- Bir **sinüzoidal kaynağın** genel denklemi

$$v = V_m \cos(\omega t + \phi) \text{ (gerilim kaynağı)}$$

veya

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi) \text{ (akım kaynağı)}$$

ile verilir. Burada V_m (veya I_m) maksimum genlik, ω frekans ve ϕ faz açısıdır (bkz. sf. 332).

- Bir sinüzoidal tepkinin ω frekansı, devreyi süren sinüzoidal kaynak frekansı ile aynıdır. Genlik ve faz açısı ise çoğunlukla kaynağınkinden farklıdır (bkz. sf 335).
- Sinüzoidal kaynaklarla sürülen bir devrede durgun durum gerilim ve akımlarını bulmanın en iyi yolu, analizi frekans bölgesinde yapmaktır. Aşağıdaki matematiksel dönüşümler zaman ve frekans bölgeleri arasında geçişi sağlar.
- Fazör dönüşümü (zaman bölgesinden frekans bölgesine):

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi} = \mathcal{P}\{V_m \cos(\omega t + \phi)\}.$$

- Ters fazör dönüşümü (frekans bölgesinden zaman bölgesine):

$$\mathcal{P}^{-1}\{V_m e^{j\phi} = \Re\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\}.$$

(Bkz. sf. 337-338).

- Sinüzoidal değişen sinyallerle çalışırken, bir indük törün terminallerinde gerilimin akımın 90° önünde olduğunu, bir kapasitörün terminallerinde ise akımın gerilimin 90° önünde olduğunu hatırlayınız (Bkz. sf. 342–345).

- **Empedans** (Z) frekans bölgesinde, direnç, endüktans ve kapasitansın zaman bölgesinde oynadığı rolü oynar. Özet olarak direnç, indüktör ve kapasitörler için fazör akım ve fazör gerilim arasındaki bağıntı

$$\mathbf{V} = Z\mathbf{I}$$

ile verilir. Burada $\mathbf{I}$'nın referans yönü pasif işaret gösterimine uygundur. Empedansın tersi **admitanstır** (Y) ve böylece direnç, indüktör ve kapasitör için frekans bölgesinde bir diğer akım-gerilim bağıntısı

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}/Y$$

bulunur (bkz. sf. 345 ve 350).

- 2. – 4. Bölümlerde direnç devreler için geliştirilen devre analiz tekniklerinin tümü, frekans bölgesinde sinüzoidal durgun durum devreleri için de geçerlidir. Bu teknikler KVL, KCL, empedansların seri ve paralel birleşimleri, gerilim ve akımı bölünmesi, düğüm gerilimi ve ağ akımı yöntemleri, kaynak dönüşümleri ile Thévenin ve Norton eşdeğerleri içerir.

- İki sarımlı **doğrusal trafo** aynı manyetik olmayan çekirdeğe sarılı iki bobinden oluşan bir bağlaşım cihazıdır. **Yansıtılan empedans,** ikincil devre empedansının birincil devre terminallerinden görünen halidir ve tersi ve geçerlidir. Doğrusal bir trafoda birincil taraftan görünen yansıtılan empedans, ikinci devre öz empedansının eşleniğinin, $(\omega M/|Z_{22}|)^2$ çarpanı ile ölçeklenmiş halidir. (Bkz. sf. 361 ve 363.)

- İki sarımlı **ideal trafo** aşağıdaki özelliklere sahip olan bir doğrusal trafodur: Mükemmel bağlaşım ($k = 1$), her bobinde sonsuz öz endüktans ($L_1 = L_2 = \infty$) ve kayıpsız bobinler ($R_1 = R_2 = 0$). Devre davranışı $a = N_2/N_1$ sarım oranınca belirlenir. Özel olarak, her bir sarımdaki sarım başına volt aynıdır.

$$\frac{\mathbf{V}_1}{N_1} = \pm\frac{\mathbf{V}_2}{N_2}$$

ve her bir sarımın amper sarımı aynıdır.

$$N_1\mathbf{I}_1 = \pm N_2\mathbf{I}_2.$$

(Bkz. sf. 365 ve 366).

TABLO 9.3 Empedans ve İlgili Değerler

Eleman	Empedans (Z)	Reaktans	Admitans (Y)	Hassasiyet
Direnç	R (direnç)	—	G (iletkenlik)	—
Kapasitör	$j(-1/\omega C)$	$-1/\omega C$	$j\omega C$	ωC
İndüktör	$j\omega L$	ωL	$j(-1/\omega L)$	$-1/\omega L$

Problemler

Kısım 9.1

9.1 Bir sinüzoidal gerilim

$$v = 100\cos(240\pi t + 45^\circ)\ \text{mV}$$

ifadesi ile verilmektedir. Aşağıdakileri bulunuz. (a) hertz cinsinden f; (b) milisaniye cinsinden T; (c) V_m; (d) $v(0)$; (e) derece ve radyan olarak ϕ; (f) $v = 0$ olan en küçük pozitif t değeri ve (g) $dv/dt = 0$ olan en küçük pozitif t değeri.

9.2 Tek bir grafik üzerinde $v = 60\cos(\omega t = \phi)$'yi $\phi = -60^\circ, -30^\circ, 30^\circ$ ve 60° için ωt'ye karşı çiziniz

a) ϕ daha pozitif oldukça gerilim fonksiyonunun sağa mı yoksa sola mı kaydığını belirtiniz.

b) Eğer ϕ 0'dan -30°'ye değişirse kayma yönü nedir?

9.3 $t = -250/6\ \mu s$'de sinüzoidal bir gerilimin sıfır olduğu ve pozitif bölgeye geçtiği biliniyor. Gerilimin bir sonraki sıfırı $t = 1250/6\ \mu s$'dedir. Ayrıca $t = 0$'da gerilimin 75 V olduğu da biliniyor.

a) v'nin hertz cinsinden frekansı nedir?

b) v'nin ifadesi nedir?

9.4 Bir sinüzoidal akım $t = 150\ \mu s$'de sıfırdır ve $2 \times 10^4\ \pi$ A/s hızla artmaktadır. Gerilimin maksimum genliği 10 A'dir.

a) v'nin frekansı radyan bölü saniye olarak nedir?

b) v'nin ifadesi nedir?

9.5 $v(t) = 170\cos(120\pi t - 60^\circ)$ V sinüzoidal gerilimini düşününüz.

$$v(t) = 170\cos(120\pi t - 60^\circ)\ \text{V}.$$

a) Gerilimin maksimum genliği nedir?

b) Hertz cinsinden frekans nedir?

c) Radyan bölü saniye cinsinden frekans nedir?

d) Radyan cinsinden faz açısı nedir?

e) Derece cinsinden faz açısı nedir?

f) Milisaniye cinsinden periyot nedir?

g) t = 0'dan sonra ilk ne zaman v = 170 V olur?

h) Sinüzoidal fonksiyon zaman ekseninde 125/18 ms sağa kaymıştır. $v(t)$'nin ifadesi nedir?

i) $v(t)$'nin ifadesini $170\sin 120\pi t$ V yapmak için fonksiyon kaç milisaniye sağa kaymalıdır?

j) $v(t)$'nin ifadesini $170\sin 120\pi t$ V yapmak için fonksiyon en az kaç milisaniye sola kaymalıdır?

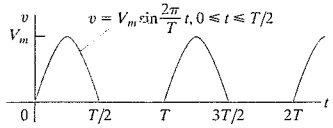
9.6 Aşağıdaki eşitliğin doğru olduğunu gösteriniz.

$$\int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2\cos^2(\omega t + \phi)dt = \frac{V_m^2 T}{2}$$

9.7 Bir Amerikan evinde bulunan sinüzoidal gerilimin rms değeri 120 V'tur. Gerilimin maksimum değeri nedir?

9.8 Aşağıdaki yarım dalga doğrultulmuş sinüzoidal gerilimin rms değerini bulunuz.

Şekil P9.8



Kısım 9.2

9.9 Şekil 9.5'teki devreye uygulanan gerilim t = 0'da $100\cos(400t + 60^\circ)$ V, devre direnci 40 Ω'dur ve 75 mH indüktördeki başlangıç akımı sıfırdır.

a) $t \ge 0$ için $i(t)$'yi bulunuz.

b) $i(t)$'nin geçici ve durgun durum ifadelerini yazınız.

c) Anahtar 1.875 ms kapalı kaldıktan sonra i'nin nümerik değerini bulunuz.

d) Durgun durum akımının maksimum genliği, frekansı (radyan bölü saniye) ve faz açısı nedir?

e) Gerilim ve durgun durum akımı fazları kaç derece farklıdır?

9.10 a) Eş. 9.9'un, Eş. 9.8'in çözümü olduğunu sağlayınız. Bu, Eş. 9.9'u Eş. 9.8'in sol tarafında yerine koyup $t > 0$ için sağ tarafa eşit olduğu gösterilerek yapılabilir. t = 0'da Eş. 9.9 akımın başlangıç değerine indirgenmelidir.

b) Geçici çözüm zamanla yok olduğundan ve çözümün diferansiyel denklemi tüm t için sağlaması gerektiğinden, durgun durum bileşeni Eş. 9.9'un Eş. 9.10 sağladığını göstererek bu gözlemi sağlayınız.

Kısım 93-94

9.11 Fazör kavramını kullanarak aşağıdaki sinüzoidal fonksiyonları tek bir trigonometrik ifadeye çeviriniz.

a) $y = 100\cos(300t + 45^\circ) + 500\cos(300t - 60^\circ)$,

b) $y = 250\cos(377t + 30^\circ) - 150\sin(377t + 140^\circ)$,

c) $y = 60\cos(100t + 60^\circ) - 120\sin(100t - 125^\circ) + 100\cos(100t + 90^\circ)$, and

d) $y = 100\cos(\omega t + 40^\circ) + 100\cos(\omega t + 160^\circ) + 100\cos(\omega t - 80^\circ)$.

9.12 t = 0'da maksimum genliği 340 V olan 50 Hz sinüzoidal gerilim, bir indüktörün terminallerinin uygulanıyor. İndüktördeki durgun durum akımının maksimum genliği 8.5 A'dir.

a) İndüktör akımının frekansı nedir?

b) Eğer gerilimin faz açısı sıfır ise akımın faz açısı nedir?

c) İndüktörün endüktif reaktansı nedir?

d) İndüktörün milihenry cinsinden endüktansı nedir?

e) İndüktörün empedansı nedir?

9.13 40 kHz frekanslı bir sinüzoidal gerilim sıfır faz açısına ve 2.5 mV maksimum genliğe sahiptir. Bu gerilim bir kapasitör üzerine uygulandığında sonuçtaki durgun durum akımının maksimum genliği 125.67 μA'dir.

a) Radyan bölü saniye cinsinden frekans nedir?

b) Akımın faz açısı nedir?

c) Kapasitörün kapasitif reaktansı nedir?

d) Mikrofarad cinsinden kapasitörün kapasitansı nedir?

e) Kapasitörün empedansı nedir?

9.14 Şekil P9.14'te görülen devrenin terminallerindeki durgun durum gerilimin ve akımın ifadesi aşağıda verilmiştir.

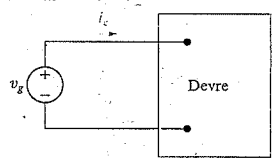
$$v_g = 150\cos(8000\pi t + 20^\circ)\ \text{V},$$

$$i_g = 30\sin(8000\pi t + 38^\circ)\ \text{A}.$$

a) Kaynağın gördüğü empedans nedir?

b) Akımın gerilimden faz farkı kaç mikrosaniyedir?

Şekil P9.14



Kısım 9.5 ve 9.6

9.15 PSPICE Bir 20 Ω direnç bir 1 μF kapasitör paralel bağlanmıştır. Bu paralel birleşim, bir 1 Ω direnç ve bir 40 μH indüktörün seri bağlantısı ile paraleldir. Bu üç paralel dal, akımı 20cos(50,000t − 20°) A olan bir sinüzoidal akım kaynağı ile sürülmektedir.

a) Frekans bölgesi eşdeğer devresini çiziniz.

b) Akım kaynağı üzerindeki gerilimi, kaynak akımı yönünde artıyor alıp fazör gerilimi bulunuz

c) $v(t)$'nin durgun durum ifadesini bulunuz.

9.16 PSPICE Bir 400 Ω direnç, bir 87.5 mH indüktör ve bir 312.5 nF kapasitör seri bağlanmıştır. Bu seri birleşim 500 cos(8000t + 60°) V gerilime sahip bir sinüzoidal gerilim kaynağı ile beslenmektedir.

a) Frekans bölgesi eşdeğer devresini çiziniz.

b) Akımın referansını kaynaktaki gerilim artış yönü olarak alınız ve fazör akımı bulunuz.

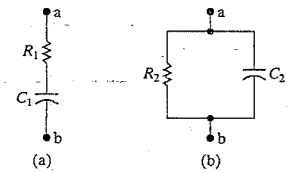
9.17 a) Aşağıda verilen eşitliklerin, Şekil P9.17(a) ve (b)'de verilen devrelerin ω frekansında, b terminalleri arasında aynı empedansa sahip olması için sağlanması gerektiğini gösteriniz.

$$R_1 = \frac{R_2}{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2},$$

$$C_1 = \frac{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2}{\omega^2 R_2^2 C_2}.$$

b) 80 krad/s'de paralel bağlı 500 Ω direnç ve 25 nF kapasitör ile aynı empedansa sahip olan seri bağlı direnç ve kapasitör değerini bulunuz.

Şekil P9.17



9.18 a) Şekil 9.17(a) ve (b)'deki devrelerin, ω frekansında a, b terminalleri arasında aynı empedansa sahip olması için aşağıdaki eşitliklerin sağlanması gerektiğini gösteriniz.

$$R_2 = \frac{1 + \omega^2 R_1^2 C_1^2}{\omega^2 R_1 C_1^2},$$

$$C_2 = \frac{C_1}{1 + \omega^2 R_1^2 C_1^2}.$$

(*İpucu:* İki devrenin empedansı aynı ise admitansı da aynıdır.)

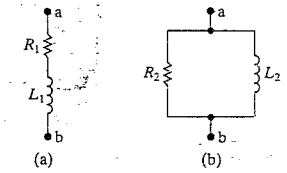
b) 20 krad/s'de seri bağlı 2 kΩ direnç ve 50 nF kapasitörle aynı empedansı verecek paralel bağlı direnç ve kapasitör değerini bulunuz.

9.19 a) Şekil P9.19(a) ve (b)'deki devrelerin, verilen bir ω frekansında a, b terminalleri arasındaki empedanslarının aşağıdaki koşul sağlanıyorsa aynı olduğunu gösteriniz.

$$R_1 = \frac{\omega^2 L_2^2 R_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}, \quad L_1 = \frac{R_2^2 L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}.$$

b) Seri bağlandığında 20 krad/s'de 50 kΩ direnç ve 2.5 H indüktörün paralel birleşimi ile aynı empedansı veren direnç ve indüktörü bulunuz.

Şekil P9.19



9.20 a) Şekil P9.19(a) ve (b)'deki devrelerin, verilen bir ω frekansında a, b terminalleri arasındaki empedanslarının aşağıdaki koşul sağlanıyorsa aynı olduğunu gösteriniz.

$$R_2 = \frac{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}{R_1}, \quad L_2 = \frac{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}{\omega^2 L_1}.$$

(*İpucu:* Devrelerin admitansı aynıysa empedansları da aynıdır.)

b) 10 krad/s'de seri bağlı 5 kΩ direnç ve 500 mH indüktör ile aynı empedansı verecek paralal bağlı direnç ve indüktör değerini bulunuz.

9.21 4 − j3 Ω, 16 + j12 Ω ve −j 100 Ω empedanslara sahip üç dal paralel bağlıdır. Bu paralel birleşimin, (a) admitansı, (b) iletkenliği ve (c) hassasiyeti milisiemens cinsinden nedir? (d) Eğer paralel dallar $i = 50\cos\omega t$ A olan bir akım kaynağı ile beslenirse tamamen kapasitif daldaki akımın maksimum genliği nedir?

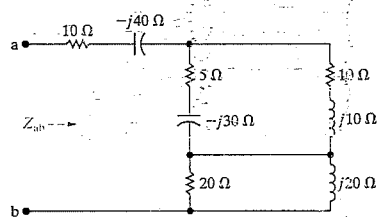
9.22 a) Şekil P9.22'deki devrede Z_{ab}'nin tamamen direnç olduğu frekansı (radyan/saniye olarak) bulunuz.

b) (a)'daki frekansta Z_{ab} değerini bulunuz.

Şekil P9.22

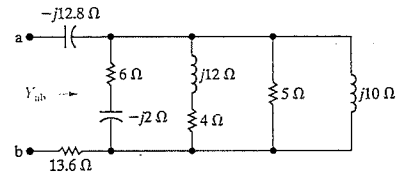
9.23 Şekil P9.23'teki devrede görülen empedansı hesaplayınız. Z_{ab}'yi kutupsal ve Kartezyen biçimde ifade ediniz.

Şekil P9.23



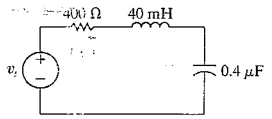
9.24 Şekil P9.24'te görülen devrede Y_{ab} admitansını bulunuz. Y_{ab}'yi kutupsal ve Kartezyen biçimde ifade ediniz. Y_{ab} değerini milisiemens cinsinden veriniz.

Şekil P9.24



9.25 PSPICE Şekil P9.25'teki devrede $v_s = 750 \cos 5000t$ mV ise $i_o(t)$'nin durgun durum ifadesini bulunuz.

Şekil P9.25

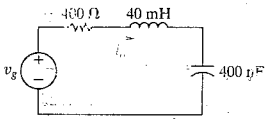


9.26 Şekil P9.26'da gösterilen devre sinüzoidal durgun durumda çalışmaktadır. Aşağıda verilenler için ω değerini bulunuz.

$i_o = 100 \sin(\omega t + 81.87°)$ mA,

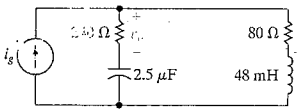
$v_o = 50 \cos(\omega t - 45°)$ V.

Şekil P9.26



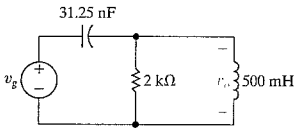
9.27 Şekil P9.27'deki devrede $i_g = 200 \cos 5000t$ mA ise v_o'nun durgun durum ifadesini bulunuz.

Şekil P9.27



9.28 PSPICE Şekil P9.28'deki devre sinüzoidal durgun durumda çalışmaktadıdb. Eğer $v_g = 64 \cos 8000t$ V ise $v_o(t)$'nin durgun durum ifadesini bulunuz.

Şekil P9.28

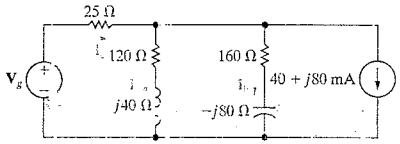


9.29 PSPICE Şekil P9.29'daki devrede $\mathbf{I}_a$ fazör akımı $40 \angle 0°$ mA'dir.

a) $\mathbf{I}_b$, $\mathbf{I}_c$ ve $\mathbf{V}_g$'yi bulunuz.

b) Eğer $v = 800$ rad/s ise $i_b(t)$, $i_c(t)$ ve v_s için durgun durum ifadelerini yazınız.

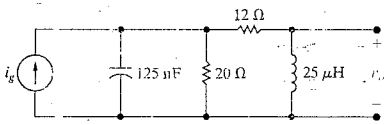
Şekil P9.29



9.30 PSPICE a) Şekil P9.30'daki devrede eğer $i_g = 2 \cos(8 \times 10^5 t)$ A ise v_o'nun durgun durum ifadesini bulunuz.

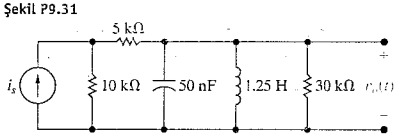
b) v_o gerilimi i_g'nin kaç nanosaniye gerisindedir?

Şekil P9.30



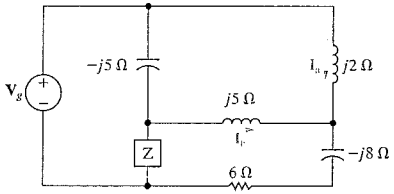
9.31 PSPICE Şekil P9.31'deki devre sinüzoidal durgun durumda çalışmaktadır. Eğer $i_s(t) = 15 \cos 8000t$ mA ise $v_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P9.31



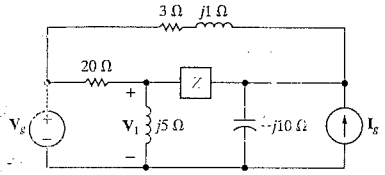
9.32 Şekil P9.32'deki devrede eğer $\mathbf{V}_g = 60 \angle 0°$ ve $\mathbf{I}_a = 5 \angle -90°$ A ise $\mathbf{I}_b$ ve Z'yi bulunuz.

Şekil P9.32



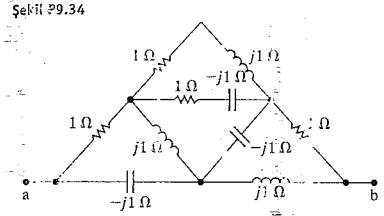
9.33 $\mathbf{V}_g = 100 - j50$ V, $\mathbf{I}_g = 20 + j30$ A ve $\mathbf{V}_1 = 40 + j30$ V için Şekil P9.33'teki devrede Z değerini bulunuz.

Şekil P9.33



9.34 Şekil P9.34'te gösterilen devrede Z_{ab}'yi bulunuz.

Şekil P9.34

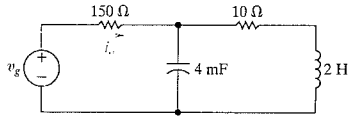


9.35 PSPICE Şekil P9.35'teki devrede, sinüzoidal gerilim kaynağının frekansı, i_o ve v_g eş fazlı olacak şekilde ayarlanmıştır.

a) Frekansı hertz cinsinden bulunuz.

b) $v_g = 10 \cos \omega t$ V ise (a)'da bulduğunuz frekansta i_o'nun durgun durum ifadesini bulunuz.

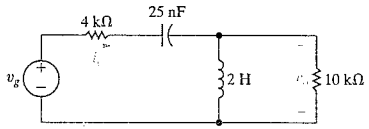
Şekil P9.35



9.36 PSPICE a) Şekil P9.36'daki devrede, gerilim kaynağının frekansı, i_g ile v_g eş fazlı olacak şekilde ayarlanmıştır. Radyan bölü saniye cinsinden ω nedir?

b) $v_g = 45 \cos \omega_t$ V ise (ω) (a)'da bulunan frekans olmak üzere), v_o'nun durgun durum ifadesi nedir?

Şekil P9.36

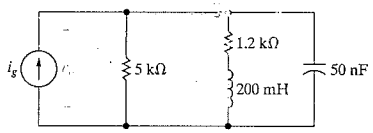


9.37 PSPICE Şekil P9.37'deki devrede, sinüzoidal akım kaynağının frekansı v_o ile i_g eş fazlı olacak şekilde ayarlanmıştır.

a) Radyan bölü saniye cinsinden ω'nın değeri nedir?

b) $i_g = 2.5 \cos \omega t$ mA (ω (a)'da bulunan frekans olmak uzere) ise, v_o'nun durgun durum ifadesini bulunuz.

Şekil P9.37

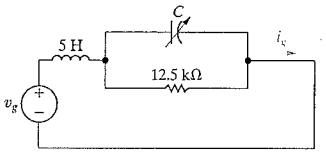


9.38 PSPICE Şekil P9.38'de gösterilen devre sinüzoidal durgun durumda çalışmaktadır. Kapasitör, i_g akımı v_g sinüzoidal gerilimi ile eş fazlı olacak şekilde ayarlanmıştır.

a) $v_g = 250 \cos 1000t$ V için kapasitans değerini mikrofarad cinsinden veriniz.

b) C'nin değeri (a)'da bulunan ise i_g'nin durgun durum ifadesini veriniz.

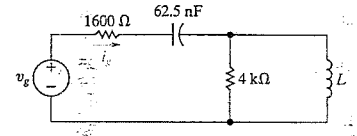
Şekil P9.38



9.39 PSPICE a) Şekil P9.39'daki gerilim kaynağı $v_g = 96 \cos 10{,}000t$ V'tur. Devre durgun durumda çalışırken i_g'yi v_g ile eş fazlı yapacak L değerlerini bulunuz.

b) (a)'da bulunan L için i_g'nin durgun durum ifadesini bulunuz.

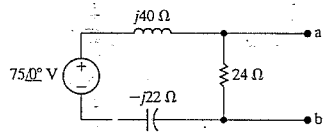
Şekil P9.39



Kısım 9.7

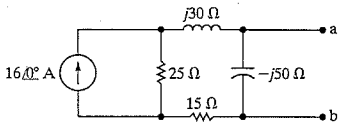
9.40 Şekil P9.40'taki devrede kaynak dönüşümleri kullanarak a, b terminallerine göre Thévenin eşdeğer devresini bulunuz.

Şekil P9.40



9.41 Şekil P9.41'deki devrede kaynak dönüşümleri kullanılarak a, b terminallerine göre Norton eşdeğer devresini bulunuz.

Şekil P9.41



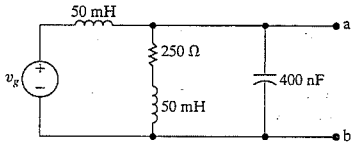
9.42 Şekil P9.42'deki sinüzoidal gerilim kaynağı $22.36 \cos(5000t + 26.565°)$ V gerilim yaratmaktadır.

a) a, b terminallerine göre Thévenin gerilimini bulunuz.

b) a, b terminallerine göre Thévenin empedansını bulunuz.

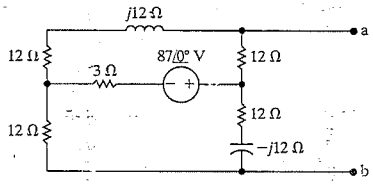
c) Thévenin eşdeğeri çiziniz.

Şekil P9.42



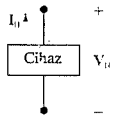
9.43 Şekil P9.43'te gösterilen devrede a, b terminallerine göre Thévenin eşdeğeri bulunuz.

Şekil P9.43



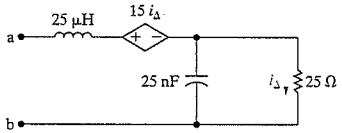
9.44 Şekil P9.44'teki devrede bulunan cihaz, frekans bölgesinde Norton eşdeğeri ile modellenmiştir. $j100$ Ω empedanslı bir indüktör cihaza paralel bağlanınca $\mathbf{V}_0$ değeri $100\angle 120°$ mV'tur. $-j100$ empedanslı bir kapasitör cihaza paralel bağlanınca $\mathbf{I}_0$ değeri $-3\angle 210°$ mA'dır. $\mathbf{I}_N$ Norton akımını ve Z_N Norton empedansını bulunuz.

Şekil P9.44



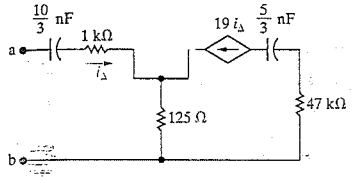
9.45 Şekil P9.45'teki devre 1.6 Mrad/s frekansında çalışıyorsa, Z_{ab}'yi bulunuz.

Şekil P9.45



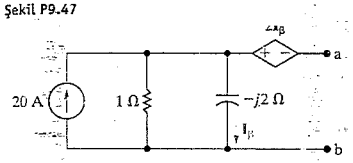
9.46 Şekil P4.46'daki devrede a, b terminallerinden içeri bakıldığında Thévenin empedansını bulunuz. Çalışma frekansı 25 krad/s'dir.

Şekil P9.46



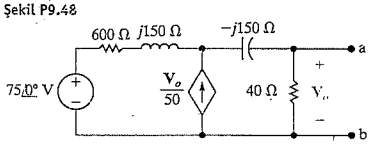
9.47 Şekil P9.47'deki devrede a, b terminallerine göre Norton eşdeğeri bulunuz.

Şekil P9.47



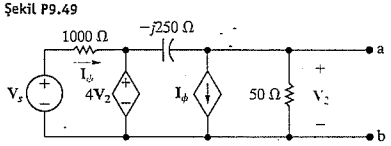
9.48 Şekil P9.48'de gösterilen devrenin a, b terminallerine göre Thévenin eşdeğer devresini bulunuz.

Şekil P9.48



9.49 $\mathbf{V}_s = 25\angle 0°$ V ise Şekil P9.49'da gösterilen devrenin a, b terminalllerine göre Norton eşdeğer devresini bulunuz.

Şekil P9.49



9.50 Şekil P9.50'de gösterilen devre 10 krad/s'de çalışmaktadır. α'nın reel olduğunu ve -50 ile $+50$ arasında bulunduğunu, yani $-50 \le \alpha \le 50$ kabul edelim.

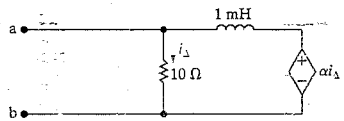
a) a, b terminallerinden içeri bakıldığındaki Thévenin empedansı tamamen direnç olacak şekilde α'yı bulunuz.

b) (a)'daki α değeri için Thévenin empedans değeri nedir?

c) α, Thévenin empedansı $5 + j5$ Ω'a eşit olacak şekilde ayarlanabilir mi? Evetse α değeri nedir.

d) Hangi α değerleri için Thévenin empedansı endüktif olur?

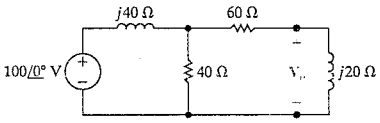
Şekil P9.50



Kısım 9.8

9.51 Şekil P9.51'deki devrede $\mathbf{V}_o$ gerilimini düğüm gerilimi yöntemiyle bulunuz.

Şekil P9.51

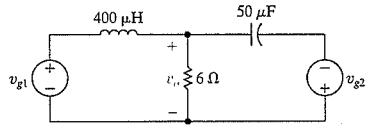


9.52 PSPICE Aşağıda verilen kaynaklar için Şekil P9.52'deki devrede $v_o(t)$'nin durgun durum ifadesini düğüm gerilimi yöntemiyle bulunuz.

$v_{g1} = 10 \cos(5000t + 53.13°)$ V,

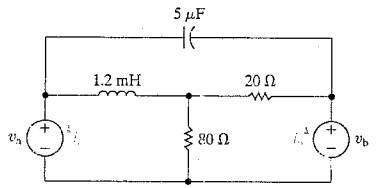
$v_{g2} = 8 \sin 5000t$ V.

Şekil P9.52



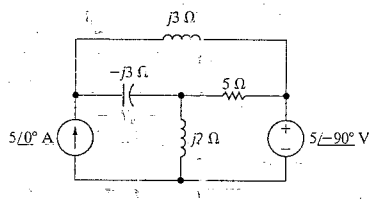
9.53 PSPICE Şekil P9.53'te görülen devrede $v_a = 100 \sin 10{,}000t$ V ve $v_b = 500 \cos 10{,}000t$ V ise, düğüm gerilimi yöntemini kullanarak i_a ve i_b dal akımlarının durgun durum ifadesini bulunuz.

Şekil P9.53



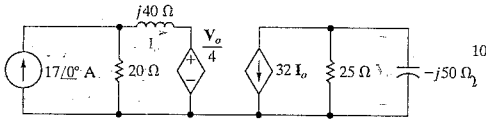
9.54 Düğüm gerilimi yöntemini kullanarak Şekil P9.54'te gösterilen devrede $\mathbf{V}_g$ fazörünü bulunuz.

Şekil P9.54



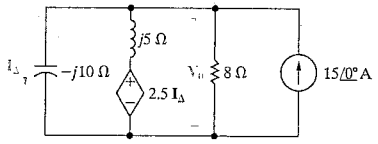
9.55 Düğüm gerilimi yöntemini kullanarak Şekil P9.55'te gösterilen devrede $\mathbf{V}_o$ ve $\mathbf{I}_o$'yu bulunuz.

Şekil P9.55



9.56 Düğüm gerilimi yöntemini kullanarak Şekil P9.56'da gösterilen devrede $\mathbf{V}_o$ fazör gerilimini bulunuz. Gerilimi, kutupsal ve Kartezyen koordinatların her ikisinde de ifade ediniz.

Şekil P9.56



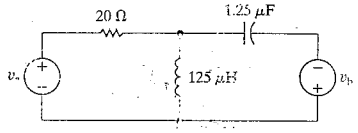
Kısım 9.9

9.57 Şekil P9.57'deki devrede, aşağıda verilenler için ağ akımı yöntemi ile $i_o(t)$'nin durgun durum ifadesini bulunuz.

$v_a = 60 \cos 40{,}000t$ V,

$v_b = 90 \sin (40{,}000t + 180°)$ V.

Şekil P9.57

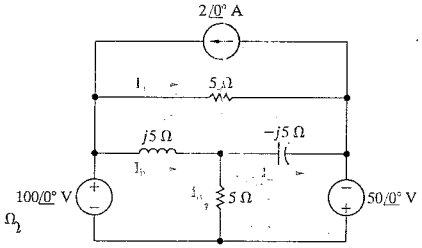


9.58 Ağ akımı yöntemini kullanarak Şekil P9.52'deki devrede $v_o(t)$'nin durgun durum ifadesini bulur.

9.59 Ağ akımı yöntemini kullanarak Şekil P9.54'te gösterilen devrede $\mathbf{I}_\ell$ fazör akımını bulunuz.

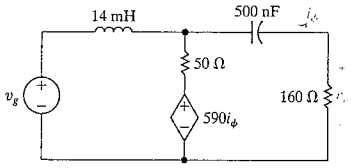
9.60 Şekil P9.60'ta gösterilen devrede ağ akımı yöntemini kullanarak $\mathbf{I}_\ell$, $\mathbf{I}_b$, $\mathbf{I}_c$ ve $\mathbf{I}_d$ dal akımlarını bulunuz.

Şekil P9.60



9.61 PSPICE Şekil P9.61'de görülen devrede eğer v_g 72 cos 5000t V'a eşitse ağ akımı yöntemini kullanarak v_o'nun durgun durum ifadesini bulunuz.

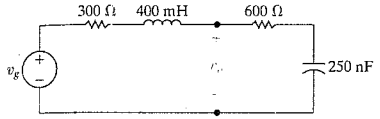
Şekil P9.61



Kısım 9.5-9.9

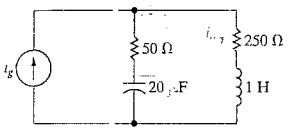
9.62 PSPICE Şekil P9.62'deki devrede $v_g = 75 \cos 5000t$ V ise gerilim bölünmesi kavramını kullanarak $v_o(t)$'nin durgun durum ifadesini bulunuz.

Şekil P9.62



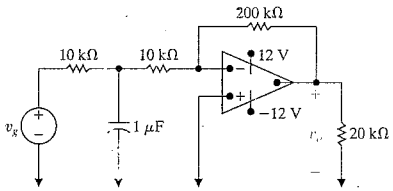
9.63 PSPICE Şekil P9.63'teki devrede $i_g = 125 \cos 5000t$ mA ise akım bölünmesi kavramını kullanarak i_o'nun durgun durum ifadesini bulunuz.

Şekil P9.63



9.64 PSPICE Şekil P9.64'teki sinüzoidal gerilim kaynağı $v_g = 1.2 \cos 100t$ V gerilimini üretmektedir. Eğer op amp idel is: $v_o(t)$'nin durgun durum ifadesi nedir?

Şekil P9.64



9.65 PSPICE Şekil P9.64'teki 1μF kapasitör, değişken bir kapasitörle değiştiriliyor ve çıkış gerilimi giriş geriliminin 120° önünde olacak şekilde ayarlanıyor.

a) C'yi mikrofarad cinsinden bulunuz.

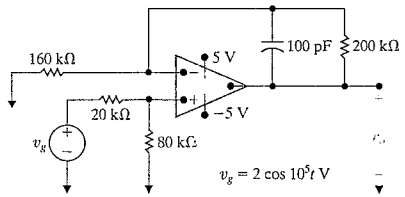
b) C (a)'da bulunan değerde iken $v_o(t)$'nin durgun durum ifadesini yazınız.

9.66 PSPICE Şekil P9.66'daki devrede op amp idealdir.

a) $v_o(t)$'nin durgun durum ifadesini bulunuz.

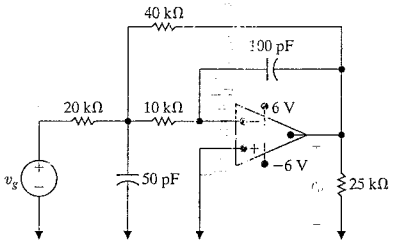
b) Yükselteç durgun duruma varmadan önce v_g'nin genliği ne kadar büyük olabilir?

Şekil P9.66



9.67 PSPICE Şekil P9.67'deki devrede görülen op amp idealdir. $v_g = 20 \cos 10^6 t$ V için $v_o(t)$'nin durgun durum ifadesini bulunuz.

Şekil P9.67

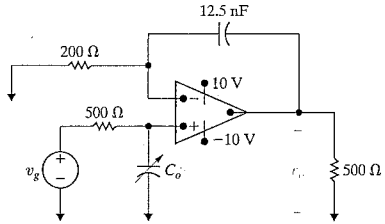


9.68 PSPICE Şekil P9.68'de gösterilen devredeki op amp idealdir. İdeal sinüzoidal kaynağın gerilimi $v_g = 10 \cos 2 \times 10^5 t$ V'tur.

a) Durgun durum çıkış gerilimi saf sinüzoidal dalgabiçimi olmaktan çıkmadan önce C_o ne kadar küçük olabilir?

b) (a)'daki C_o değeri için v_o'nun durgun durum ifadesini yazınız.

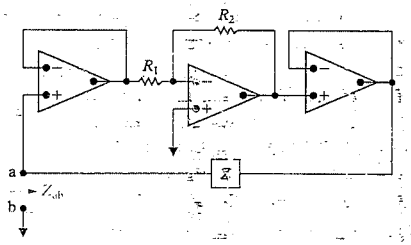
Şekil P9.68



9.69 a) Şekil P9.69'daki devrenin Z_{ab} giriş empedansını bulunuz. $K = (R_2/R_1)$ olmak üzere Z_{ab}'yi Z ve K'nin bir fonksiyonu olarak ifade ediniz.

b) Eğer Z tamamen kapasitif ise, a,b terminallerinde görülen kapasitans nedir?

Şekil P9.69



9.70 Şekil P9.57'deki devrede

$v_a = 5 \cos 80{,}000t$ V

$v_b = -2.5 \cos 320{,}000t$ V

alınız.

a) $i_o(t)$'nin durgun durum ifadesini bulmak için hangi devre analizi tekniği kullanılmalıdır?

b) $i_o(t)$'nin durgun durum ifadesini bulunuz.

9.71 Şekil P9.71'deki devrede

$v_1 = 20 \cos(2000t - 36.87°)$ V

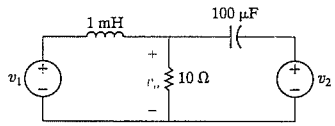
$v_2 = 10 \cos(5000t + 16.26°)$ V

alınız.

a) $v_o(t)$'nin durgun durum ifadesini bulmak için hangi devre analizi tekniği kullanılmalıdır?

b) $v_o(t)$'nin durgun durum ifadesini bulunuz.

Şekil P9.71



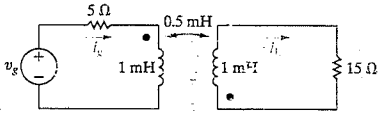
Kısım 9.10

9.72 PSPICE a) Şekil P9.72'deki devrede $v_g = 200 \cos 10{,}000t$ ise i_g ve i_L akımlarının durgun durum ifadesini bulunuz.

b) Bağlaşım katsayısını bulunuz.

c) $t = 50\pi$ μs'de manyetik olarak bağlaşık bobinlerde depolanan enerjiyi bulunuz.

Şekil P9.72

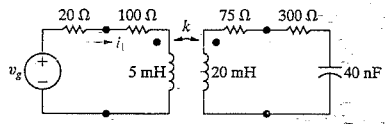


9.73 PSPICE Şekil P9.73'te görülen devredeki sinüzoidal gerilim kaynağı 50 krad/s frekansta çalışmaktadır. Bağlaşım katsayısı, i_1'in tepe genliği maksimum olacak şekilde ayarlanmıştır.

a) k'nin değeri nedir?

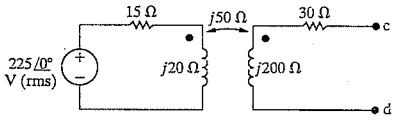
b) Eğer $v_g = 369 \cos (5 \times 10^4 t)$ V ise i_1'in tepe genliği nedir?

Şekil P9.73



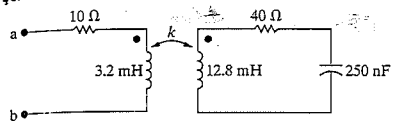
9.74 Şekil P9.74'teki devrede c, d terminallerine göre Thévenin eşdeğeri bulunuz.

Şekli P9.74



9.75 Şekil P9.75'teki devrede k değeri, $\omega = 25$ krad/s iken Z_{ab} saf direnç olacak şekilde ayarlanmıştır. Z_{ab}'yi bulunuz.

Şekil P9.75



9.76 150 Ω direnç ve 20 nF kapasitörün seri birleşimi bir doğrusal trafo ile sinüzoidal bir kaynağa bağlanmıştır. Kaynak 500 krad/s frekansta çalışmaktadır. Bu frekansta kaynağın iç empedansı $5 + j16$ Ω'dur. Kaynak yüklü değilken terminallerdeki rms gerilim 125 V'tur. Doğrusal trafonun parametreleri $R_1 = 12$ Ω, $L_1 = 80$ μH, $R_2 = 50$ Ω, $L_2 = 500$ μH ve $M = 100$ μH'dir.

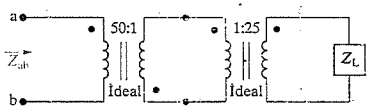
a) Birincile yansıtılan empedans değeri nedir?

b) Pratik kaynak terminallerinden görülen empedans değeri nedir?

Kısım 9.11

9.77 Şekil P9.77'deki devrede $Z_L = 200 + j150$ Ω ise Z_{ab} empedansını bulunuz.

Şekil P9.77



9.78 İlk bakışta Eş. 9.69'dan, endüktif bir yükün, trafonun birinciline bakıldığında görülen reaktansın (X_{ab}) kapasitif gözükmesini sağladığı düşünülebilir. Sezgisel olarak bunun imkansız olduğunu biliyoruz. Eğer X_L endüktif bir reaktans ise X_{ab}'nin hiçbir zaman negatif olamayacağını gösteriniz.

9.79 a) Şekil P9.79'daki devrenin a, b terminallerinden içeri bakıldığında görünen empedansın

$$Z_{ab} = \frac{Z_L}{\left(1 + \frac{N_1}{N_2}\right)^2}$$

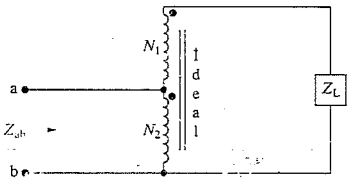
ifadesi ile verildiğini gösteriniz.

b) Eğer bobinlerden birinin kutupluğu değiştirilirse yeni ifadenin

$$Z_{ab} = \frac{Z_L}{\left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right)^2}$$

olduğunu gösteriniz.

Şekil P9.79



9.80 a) Şekil P9.80'deki devrenin a, b terminallerinden içeri bakıldığında görülen empedansın ifadesinin

$$Z_{ab} = \left(1 + \frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L$$

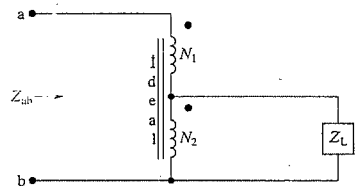
olduğunu gösteriniz.

b) Eğer bobinlerden birinin kutupluğu değiştirilirse yeni ifadenin

$$Z_{ab} = \left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L$$

olduğunu gösteriniz.

Şekil P9.80



Kısım 9.12

9.81 Şekil 9.53'te gösterilen devrede parametreler R_1=0.1 Ω, ωL_1=0.8 Ω, R_2=24 Ω, ωL_2=32 Ω ve $\mathbf{V}_L$=240+j0 V'tur.

a) $\mathbf{V}_s$ fazör gerilimini hesaplayınız.

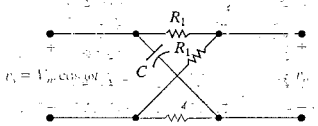
b) İndüktöre paralel bir kapasitör bağlayıp, $\mathbf{V}_L$'yi sabit tutarak, $\mathbf{I}$'nın genliği minimum olana kadar kapasitörü ayarlayınız. Kapasitif reaktans nedir? $\mathbf{V}_s$'nin değeri nedir?

c) $\mathbf{I}$'nın genliğini olabildiğince küçük tutan ve aşağıdaki eşitliği sağlayan kapasitif reaktans değerini bulunuz.

$$|\mathbf{V}_s| = |\mathbf{V}_L| = 240 \text{ V}.$$

9.82 PSPICE Şekil P9.82'deki devrede R_x sıfırdan sonsuza değişirken v_o geriliminin genlik ve fazına ne olduğunu bir fazör diyagramı kullanarak gösteriniz. R_x değişirken, kaynak gerilimin genliği ve faz açısı sabit tutulmaktadır.

Şekil P9.82

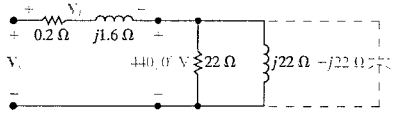


9.83 a) Şekil P9.83'te gösterilen devre için $\mathbf{V}_s$ ve $\mathbf{V}_l$'yi hesaplayınız.

b) $\mathbf{V}_s$, $\mathbf{V}_l$ ve yük gerilimi olan 440 $\angle 0°$ V arasındaki ilişkileri gösteren bir fazör diyagramı oluşturunuz.

c) (a) ve (b) şıklarını, yük geriliminin 440 $\angle 0°$ V'ta sabit kaldığı ve yük terminalleri arasına –22 Ω'luk kapasitif bir reaktans bağlandığı durum için tekrar çözünüz.

Şekil P9.83



Kısım 9.1-9.12

9.84 Mühendislik mezunu olarak, yaralanma veya maddi zarar içeren davalarda uzman olarak hizmet etme fırsatınız olabilir. Fikrinizin sorulabileceği problem tipine örnek olarak aşağıdaki olayı düşününüz. Bir çiftçi, arlada çalıştığı bir günün sonunda çiftliğine dönüyor ve ağılı kontrol ettiğinde tüm koyunların ölmüş olduğunu görüyor. Problemin nedeni, 240 V'luk havalandırma motorunun durmasına neden olan yanmış bir sigortaya bağlanıyor. Havalandırmanın olmaması ise hayvanların ölümüne neden oluyor. Atan sigorta, çiftliği servis hattına bağlayan ana anahtar üzerindedir. Sigorta şirketi ödeme yapmadan önce çiftliği besleyen elektrik devresinin düzgün çalıştığından emin olmak istemektedir. Sigorta şirketinin avukatlarını şaşırtan, hafif bir ameliyat sonrası evde yatan çiftçinin eşinin, aynı öğleden sonra TV seyredebilmiş olmasıdır. Dahası, akşam yemeğini hazırlamak için mutfağa gittiğinde elektrikli saat doğru zamanı göstermiştir. Avukatlar sizi, (1) ana anahtardaki sigorta attıktan sonra niçin elektrikli saatin ve TV'nin çalışmaya devam ettiğini ve (2) havalandırma motoru durduktan sonra niçin ana anahtardaki ikinci sigortanın atmadığını açıklamanız için tutmuşlardır. A sigortası atmadan önce üç hat dağıtım devresi üzerindeki yüklere emin olduktan sonra Sayfa 389, Şekil P9.84'teki devre modelini oluşturuyorsunuz. Hat iletkenlerinin ve nötr iletkenin empedansları ihmal edilmiştir.

a) A sigortası atmadan önceki $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$, $\mathbf{I}_4$, $\mathbf{I}_5$ ve $\mathbf{I}_6$ dal akımlarını hesaplayınız.

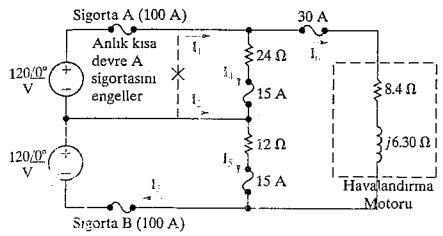
b) Dal akımlarını A sigortası attıktan sonra hesaplayınız. Duran havalandırma motorunun bir kısa devre gibi davrandığını kabul ediniz.

c) Saat ve TV'nin, A sigortasını attıran anlık kısa devreden neden etkilenmediğini açıklayınız.

d) Havalandırma motorunun, motor akımı aşırı artarsa motor devresini kesen bir ısıl kesmeye sahip olduğunu kabul ediniz. Bu durumda ısıl kesme çalışır mıydı? Açıklayınız.

e) Havalandırma motoru durduğunda neden B sigortasının atmadığını açıklayınız.

Şekil P9.84



9.85 PRATİK BAKIŞ AÇISI a) Şekil P9.58'deki devrede $\mathbf{I}_1$-$\mathbf{I}_6$ dal akımlarını hesaplayınız.

b) i_p birincil akımını bulunuz.

9.86 PRATİK BAKIŞ AÇISI Şekil P9.58'deki dağıtım devresinde 40 Ω direnç yerine 20 Ω direnç konuyor.

a) 20 Ω dirençteki $\mathbf{I}_2$ dal akımını tekrar hesaplayınız.

b) i_p birincil akımını tekrar hesaplayınız.

c) Cevaplarınıza dayanarak, bu iki 120 V yük direncinin eşit olması istenir mi?

9.87 PRATİK BAKIŞ AÇISI Bir evin elektrik planı Şekil P9.87'de gösterilmektedir. Bu modelde R_3 direnci 240 V'luk bir cihazı (elektrikli fırın gibi) modellemek için kullanılmıştır. R_1 ve R_2 dirençleri ise 120 V'luk cihazları (lamba, tost makinası ve ütü gibi) modellemek içindir. $\mathbf{I}_1$ ve $\mathbf{I}_2$ akımlarını taşıyan dallar devrede elektrikçilerin sıcak iletken dediği şeyi modellemekte ve $\mathbf{I}_n$'yi taşıyan dal ise nötr iletkeni modellemektedir. Bu devreyi incelemekteki amacımız, nötr iletkenin devrenin tatminkar çalışmasındaki önemini göstermek içindir. Devre analiz yönteminin seçimi size aittir.

a) Eğer R_1=R_2 ise $\mathbf{I}_n$'nin sıfır olduğunu gösteriniz.

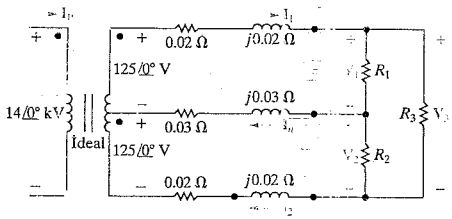
b) Eğer R_1=R_2 ise $\mathbf{V}_1$=$\mathbf{V}_2$ olduğunu gösteriniz.

c) Nötr dalını açınız ve R_1=60 Ω, R_2=600 Ω ve R_3=10 Ω ise $\mathbf{V}_1$ ve $\mathbf{V}_2$'yi hesaplayınız.

d) Nötr dalı kapatıp (c) şıkkını tekrar çözünüz.

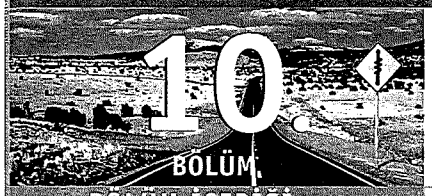
e) Hesaplamalarınıza dayanarak nötr iletkenin niçin sıcak iletkenlerde akım olduğunda açılacak şekilde sigortalanmadığını açıklayınız.

Şekil P9.87



9.88 PRATİK BAKIŞ AÇISI a) Problem 9.87, (c) ve (d)'de $\mathbf{I}_p$ birincil akımını bulunuz.

b) Sonuçlarınız devrenin bilinen davranışı açısından anlamlı mıdır?



Sinüzoidal Durgun Durum Güç Hesapları

BÖLÜM İÇERİĞİ

10.1 **Anlık Güç** *s. 392*

10.2 **Ortalama ve Reaktif Güç** *s. 394*

10.3 **Rms Değeri ve Güç Hesaplamaları** s. 398

10.4 **Kompleks Güç** *s. 399*

10.5 **Güç Hesaplamaları** *s. 403*

10.6 **Maksimum Güç Aktarımı** *s. 410*

✓ BÖLÜM HEDEFLERİ

1. Aşağıdaki ac güç kavramlarının, bunların birbirleriyle ilişkilerinin ve devre içinde nasıl hesaplanacaklarının anlaşılması.
   - Anlık güç;
   - Ortalama (gerçek) güç;
   - Reaktif güç;
   - Kompleks güç ve
   - Güç çarpanları.
2. AC devredeki bir yüke maksimum gerçek gücün hangi şartlar altında aktarılacağının anlaşılması ve bu yüke gerçek güç dağıtılması için gerekli yük empedans hesaplarının yapılabilmesi.
3. Doğrusal trafolu ve ideal trafolu devrelerde her türden ac gücün hesaplanabilmesi.

Güç mühendisliği zaman içinde elektrik mühendisliğinin önemli bir alt dalı olarak gelişmiştir. Güç mühendisliği iş yapabilmek için gerekli güç dağıtımı; elektrikli aletlerin güvenli ve verimli çalıştıkları nominal güç değerlerinin hesaplanması; konutlara ve endüstriyel şirketlere elektrik enerjisi sağlayan büyük jeneratör, trafo ve kablo dizilerinin tasarımı ve benzeri konularla ilgilenir.

Neredeyse dağıtılan enerjinin tamamı sinüzoidal akım ve gerilim biçimindedir. 9. Bölümde bahsettiğimiz sinüzoidal devrelerden sonra, sinüzoidal durgun durum güç hesaplarından bahsetmek için en mantıklı yer bu bölümdür. İlk olarak, sinüzoidal gerilim ve akımın sonucu olarak bir çift terminalin ucuna dağıtılan ya da buradan beslenen ortalama güç ile ilgileneceğiz. Reaktif güç, kompleks güç ve görünür güç gibi ölçütlerden de bahsedilebilecektir. 9. Bölümde kısaca anlatılan sinüzoidlerde rms değer kavramı özellikle güç hesaplamalarıyla ilgilidir.

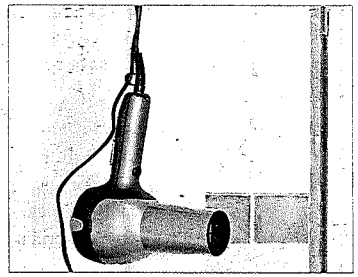
Daha önceki bölümlerden bildiğiniz iki kavram ile bu bölüme başlayacağız ve bu bölümü bitireceğiz: Bunlar, gücün temel eşitliği (Kısım 10.1) ve maksimum güç aktarımı (Kısım 10.6) konularıdır. Bunların arasında, sizin daha önce 1. ve 4. Bölümden hatırlayacağınız güç analizindeki genel süreçlerden bahsedeceğiz. Ayrıca dc sinyallerden farklı olarak, sinüzoidal sinyallerle işlem yapmak için birtakım matematiksel yöntemlere ihtiyaç duyulacaktır.

Pratik Bakış Açısı

Isıtıcı Gereçler

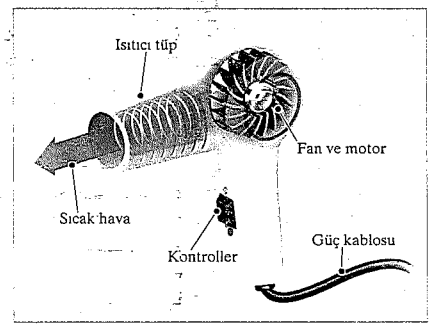
9. Bölümde sinüzoidal kaynaklarla beslenen devreler için durgun durum akım ve gerilim değerlerini hesaplamıştık. Bu bölümde bu tip devreler için güç hesaplamalarına değineceğiz. Geliştirdiğimiz teknikler günlük hayatta karşılaştığımız elektrikli aletlerin bir çoğunu analiz etmede çok yararlıdır. Çünkü sinüzoidal kaynaklar evlerimizde,okullarımızda ve işyerlerimizde elektrik temin etmenin yegâne yoludur.

Elektrik enerjisini ısı enerjisine çeviren ısıtıcılar elektrikli aletler içinde yaygın bir sınıftır. Bu sınıfa elektrikli ocaklar, fırınlar, tost makinaları, ütüler, elektrikli su ısıtıcıları, elektrikli sobalar, çamaşır kurutma makinaları ve saç kurutma makinaları örnek olarak verilebilir. Güç tüketimi ısıtıcılarda kritik tasarım parametrelerinden bir tanesidir. Güç iki sebepten ötürü önemlidir: Isıtıcı ne kadar fazla güç harcarsa onu çalıştırmak o kadar pahalıya mal olur ve o kadar çok ısı üretilir.

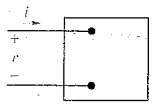


Bir çok elektrikli ısıtıcıda ısıtıcının dışarıya vereceği ısı miktarını ayarlamak için güç ayar düğmeleri mevcuttur. Burada bu güç ayarlarının çıkıştaki sıcaklık miktarı değişimine nasıl neden olduğunu merak edebilirsiniz. Bu bölümün sonunda Pratik Bakış Açısı üç değişik çalışma moduna sahip bir saç kurutma makinasının tasarımını irdelemektedir.

Burada bu tasarımın üç farklı güç seviyesine karşılık üç farklı çıkış sıcaklığını nasıl sağladığını göreceksiniz.



10.1 Anlık Güç



Şekil 10.1 ▲ Güç hesaplamada kullanılan bir devrenin kara kutu gösterimi.

Sinüzoidal güç hesaplamalarını incelemeye, önceden aşina olduğumuz Şekil 10.1'deki devreyle başlayabiliriz. Burada v ve i durgun durum sinüzoidal sinyallerdir. Pasif işaret gösterimini kullanarak zamanın herhangi bir anındaki güç

$$p = vi \tag{10.1}$$

olarak ifade edilir. Bu **anlık güçtür**. Eğer referans akım yönü gerilimin artış yönünde olsaydı Eş. 10.1'de eksi işaret olmalıydı. Gerilim volt, akım amper cinsinden ise anlık güç watt cinsinden ölçülür. Önce v ve i için açık ifadeler

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta_v), \tag{10.2}$$

$$i = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \tag{10.3}$$

biçiminde yazılır; burada θ_v gerilim faz açısı, θ_i ise akım faz açısıdır.

Sinüzoidal durgun durumda çalıştığımız için herhangi uygun bir zamanı sıfır anı olarak seçebiliriz. Yüksek güç aktarım bloklarını tasarlayan mühendisler akımın pozitif maksimum olduğu anı sıfır olarak seçmeyi uygun bulmuşlardır. Bu referans sistemi hem akımda hem de gerilimde θ_i kadar bir kaymaya neden olur. Bu durumda Eş 10.2 ve 10.3

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta_v - \theta_i), \tag{10.4}$$

$$i = I_m \cos \omega t \tag{10.5}$$

halini alır. Eş. 10.1'e, Eş 10.4 ve 10.5'teki akım ve gerilim değerleri konursa anlık güç

$$p = V_m I_m \cos(\omega t + \theta_v - \theta_i) \cos \omega t \tag{10.6}$$

biçiminde ifade edilir. Eş. 10.6'yı doğrudan ortalama gücü bulmak için kullanabiliriz. Yine de birkaç basit trigometrik özdeşlik kullanarak Eş. 10.6'yı daha açık bir hale getirebiliriz.

Bu işleme

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$$

trigonometrik özdeşliğiyle başlayabiliriz. Burada $\alpha = \omega t + \theta_v - \theta_i$ ve $\beta = \omega t$ olarak yerine konursa güç

$$p = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{V_m I_m}{2}\cos(2\omega t + \theta_v - \theta_i) \tag{10.7}$$

biçiminde elde edilir.

Bundan sonra

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

trigonometrik özdeşliği, Eş. 10.7'de sağdan ikinci terimi açmak için kullanılabilir ve sonuçta

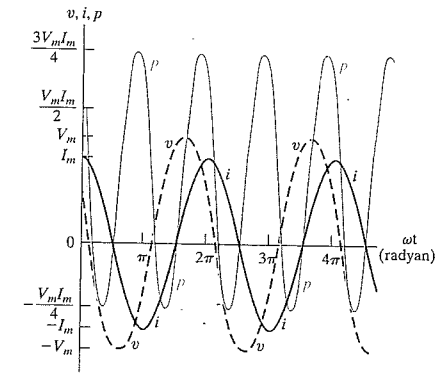
$$p = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i)\cos 2\omega t$$

$$- \frac{V_m I_m}{2}\sin(\theta_v - \theta_i)\sin 2\omega t \tag{10.8}$$

elde edilir.

Şekil 10.2'de $\theta_v = 60°$ ve $\theta_i = 0°$ farzedilerek, v, i ve p arasındaki temsili ilişki gösterilmektedir. Burada anlık gücün frekansının gerilim ya da akımın frekansının iki katı olduğunu görebiliriz. Bu gözlem Eş 10.8'in sağdan son iki terimine de uymaktadır. Bu gözlem Eş. 10.8'in sağ tarafındaki ikinci iki terimden de doğrudan gerçekleştirilebilir. Dolayısıyla, gerilim ya da akımın her bir döngüsü için anlık güç iki döngü ilerlemektedir. Ayrıca terminallerin arasındaki devre pasif bile olsa, her döngünün bir kısmında anlık gücün negatif olabileceğine dikkat edilmelidir. Tamamen pasif bir ağda; negatif güçten, kapasitör veya indüktörde depolanan enerjinin harcandığı anlamı çıkarılır. Bir devrenin sinüzoidal durgun durum çalışması sırasında anlık gücün zamana bağlı değiştiği gerçeği, neden bazı motorlu ev gereçlerinde (buzdolabı gibi) sarsıntı gözlemlediğimiz ve aşırı sarsıntıyı önlemek için dayanıklı motor bağlantıları yaptığımızı açıklar.

Şimdi Şekil 10.1'de temsil edilen devrenin terminalleri arasındaki ortalama gücü bulmak için Eş 10.8'i kullanmaya ve reaktif güç konusuna giriş yapmaya hazırız.



Şekil 10.2 ▲ Sinüzoidal durgun durumda anlık güç, gerilim ve akımın radyan cinsinden açıya (ωt) karşı grafiği.

10.2 Ortalama ve Reaktif Güç

Eş. 10.8'in üç terimi olduğuna dikkat ederek başlayacak ve bu terimleri

$$p = P + P\cos 2\omega t - Q\sin 2\omega t \qquad (10.9)$$

olarak tanımlayacağız. Burada P ve Q

Ortalama (Gerçek) Güç ▶

$$P = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i), \qquad (10.10)$$

Reaktif Güç ▶

$$Q = \frac{V_m I_m}{2}\sin(\theta_v - \theta_i) \qquad (10.11)$$

biçiminde tanımlanır ve P **ortalama güç,** Q ise reaktif güç olarak adlandırılır. Ortalama güç bazen gerçek güç olarak da adlandırılabilir. Çünkü bu güç elektrik enerjisini elektrik olmayan enerji türüne çeviren devrelerdeki gücü de tanımlar. Bu iki terim birbirleri yerine geçmekle birlikte, biz bu kitapta öncelikle ortalama güç terimini kullanacağız.

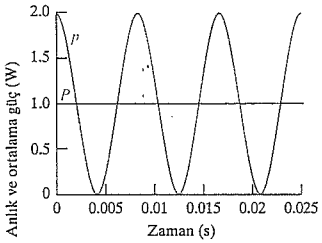
P'nin neden ortalama güç olarak adlandırıldığını görmek çok kolaydır. Sinüzoidal sinyallerde ortalama güç anlık gücün bir periyot boyunca ortalamasına eşittir ve eşitlik olarak

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p\,dt \qquad (10.12)$$

biçimde ifade edilir. Burada T sinüzoidal fonksiyonun bir periyodudur. Eş. 10.2'deki limitler, integral işlemini herhangi bir t_0 anında başlatabileceğimizi ama tam olarak bir periyot sonra mutlaka sonlandırmanız gerektiğini ifade eder. (Burada n bir tamsayı olmak üzere nT periyot üzerinde de integral alabiliriz ancak integrali $1/nT$ ile çarpmamız gerekir.)

Ortalama gücü Eş. 10.9'u Eş. 10.22'de yerine koyarak ve integrali alarak bulabiliriz. Ancak p'nin ortalama değeri, Eş. 10.9'un sağ tarafındaki ilk terimden hesaplanır çünkü $\cos 2\omega t$ ve $\sin 2\omega t$'li terimlerin bir periyot boyuca integralleri sıfırdır. Sonuçta ortalama güç Eş. 10.10'da verilmektedir.

Eş. 10.9'daki tüm terimlerin ve bunların birbirleriyle olan ilişkilerinin daha iyi anlaşılması için salt direnç, salt kapasitif ve salt indüktif devrelerde güç hesaplamalarının irdelenmesi gereklidir.



Şekil 10.3 ▲ Salt direnç devresi için anlık gerçek güç ve ortalama güç.

Salt Direnç Devrelerinde Güç Hesabı

Terminaller arasındaki devre salt direnç devresi ise, gerilim ve akım aynı fazdadır, bu da faz açılarının eşit olduğu anlamına gelir ($\theta_v = \theta_i$). Böylece Eş. 10.9

$$p = P + P\cos 2\omega t \qquad (10.13)$$

halini alır. Eş 10.13'teki anlık güç, anlık gerçek güç olarak adlandırılır. Şekil 10.3'te temsili bir direnç devresi için Eş. 10.13 kullanılarak çizilen bir grafik görülmektedir. Burada ω = 377 rad/s

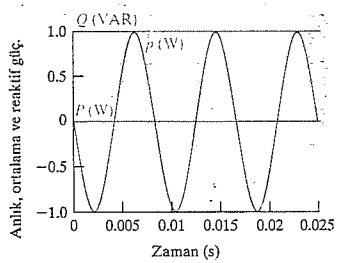
alınmıştır. Tanımdan yola çıkarak ortalama gücün (P) p'nin bir periyottaki ortalaması olduğu görülür. Böylelikle grafiğe bakılarak bu devre için $P = 1$ olduğu kolaylıkla söylenebilir. Eş. 10.13'e bakılırsa, anlık gerçek güç hiçbir zaman negatif olamaz, bu aynı zamanda Şekil 10.3'ten de görülebilir. Bir başka deyişle salt direnç devresinden güç çekilemez. Aksine tüm elektrik enerjisi ısıl enerji biçiminde harcanır.

Salt İndüktif Devrelerde Güç Hesabı

Salt indüktif devrelerin terminalleri arasındaki gerilim ve akım arasında 90°'lik bir faz farkı vardır. Bu durumda akım gerilimi 90° geriden takip eder ($\theta_i = \theta_v - 90°$ ya da $\theta_v - \theta_i = 90°$ olur). Böylelikle anlık güç ifadesi

$$p = -Q\sin 2\omega t \qquad (10.14)$$

haline gelir. Salt indüktif bir devrede ortalama güç sıfırdır. Dolayısıyla elektrik enerjisinden herhangi başka bir enerji türüne dönüşüm söz konusu değildir. Salt indüktif devrenin terminalleri arasındaki anlık güç, devre ile sürücü kaynak devresi arasında 2ω frekansında sürekli bir değişim geçirir. Bir başka deyişle P pozitif iken, enerji indüktif elemanlardaki manyetik alanlarda depolanır; p negatif iken de bu manyetik alanlardan alınır. Sall indüktif devrelerle ilgili güç ölçüsü reaktif güçtür ve Q ile gösterilir. Reaktif güç ismi indüktörün, reaktif eleman olarak sınıflandırılmasından gelir ve indüktörün empedansı salt reaktiftir. Ortalama gücün (P) ve reaktif gücün (Q) aynı birimde (boyutta) olduğuna dikkat ediniz. Ortalama güç ve reaktif güç arasında ayrım yapabilmek amacıyla ortalama güç için walt (W) ve reaktif güç için **var** (volt-amper reaktif, VAR) kullanacağız. Şekil 10.4'te temsili bir salt indüktif devre için ω = 377 rad/s ve Q = 1 VAR alınarak anlık güç çizilmiştir.



Şekil 10.4 ▲ Salt indüktif bir devre için anlık gerçek güç ve ortalama güç.

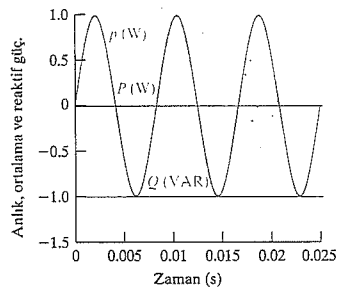
Salt Kapasitif Devrelerde Güç Hesabı

Terminaller arasındaki devre salt kapasitif ise gerilim ve akım arasında 90° faz farkı vardır. Bu durumda akım gerilimin 90° önündedir (bu da $\theta_i = \theta_v + 90°$ ya da başka bir gösterimde $\theta_v - \theta_i = -90°$ demektir). Bu durumda anlık güç ifadesi

$$p = -Q\sin 2\omega t \qquad (10.15)$$

halini alır. Bu durum için ortalama güç sıfırdır ve elektrik enerjisinden elektriksel olmayan başka bir enerji türüne dönüşüm yoktur. Salt kapasitif bir devrede güç, devreyi süren kaynak ile kapasitif elemanların üzerindeki elektrik alan arasında sürekli olarak değiştirilir. Şekil 10.5'te temsili bir salt kapasitif devre için ω = 377 rad/s ve Q = −1 VAR alınarak anlık güç çizilmiştir.

Burada akımın referans olarak alındığına ve bunun da indüktörlerde ($\theta_v - \theta_i = 90°$) Q'yu pozitif; kapasitörlerde ise ($\theta_v - \theta_i = -90°$) Q'yu negatif yaptığına dikkat etmek gerekir. Güç mühendisleri bu farkı Q'nun işaretine bakarak indüktörlerin mıknatıslayan



Şekil 10.5 ▲ Salt kapasitif bir devre için anlık gerçek güç ve ortalama güç.

güç (VAR) çektiği (emdikleri), kapasitörlerin ise mıknatıslayan güç verdikleri (dağıttıkları) biçiminde açıklar. Bu alışkanlık hakkında ileride daha fazla açıklama yapılacaktır.

Güç Çarpanı

$(\theta_v - \theta_i)$ açısı hem ortalama hem de reaktif güç hesabında rol oynadığı için **güç çarpanı açısı** olarak adlandırılır. Bu açının kosinüsü **güç çarpanı** olarak adlandırılır ve pf olarak kısaltılır, sinüsü ise reaktif çarpan olarak adlandırılır ve rf olarak kısaltılır. Buradan

Güç çarpanı ▶

$$\text{pf} = \cos(\theta_v - \theta_i), \tag{10.16}$$

$$\text{rf} = \sin(\theta_v - \theta_i) \tag{10.17}$$

eşitlikleri elde edilir. Ancak güç çarpanının değeri bize güç çarpanı açısını tam olarak vermez çünkü $\cos(\theta_v - \theta_i) = \cos(\theta_i - \theta_v)$ geçerlidir. Bu açıyı tam olarak tanımlamak için **geri güç çarpanı** ve **ileri güç çarpanı** ifadelerini kullanacağız. Geri güç çarpanı akımın gerilimi takip ettiğini yani indüktif bir yük olduğunu belirtir. İleri güç çarpanında ise akım gerilimin önündedir yani kapasitif bir yük söz konusudur. Güç çarpanı ve reaktif çarpanın ikisi birden elektriksel yüklerin tanımlanmasında kullanılan uygun tanımlamalardır.

Örnek 10.1 P ve Q'yu basit matematiksel hesaplamalar yoluyla anlamak için iyi bir örnektir.

Örnek 10.1 Ortalama ve Reaktif Gücün Hesaplanması

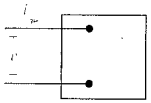
a) Şekil 10.6'da gösterilen devredeki ortalama gücü ve reaktif gücü hesaplayınız. Buradaki gerilim ve akım aşağıdaki gibidir:

$$v = 100\cos(\omega t + 15^\circ)\ \text{V},$$

$$i = 4\sin(\omega t - 15^\circ)\ \text{A}.$$

b) Bu kutunun içindeki devrenin ortalama gücü çektiğini mi yoksa dağıttığını mı belirtiniz.

c) Bu kutunun içindeki devrenin mıknatıslayan gücü çektiğini mi yoksa dağıttığını mı belirtiniz.



Şekil 10.6 Güç hesaplamalarında kullanılan terminal çifti.

Çözüm

a) Akım i sinüs cinsinden ifade edildiği için P ve Q'yu hesaplamak için ilk önce i'yi kosinüslü cinsten yazmamız gerekmektedir.

$$i = 4\cos(\omega t - 105^\circ)\ \text{A}.$$

Şimdi P ve Q'yu Eş. 10.10'a ve 10.11'i kullanarak hesaplayabiliriz. Buradan

$$P = \frac{1}{2}(100)(4)\cos[15 - (-105)] = -100\ \text{W},$$

$$Q = \frac{1}{2}100(4)\sin[15 - (-105)] = 173.21\ \text{VAR}$$

hesaplanır.

b) Şekil 10.6'dan pasif işaret gösterimi kullanıldığı görülmektedir. Bu yüzden P'nin –100 W değerini alması kutunun içindeki devrenin terminallere ortalama güç dağıttığı anlamına gelir.

c) Pasif işaret gösterimiyle birlikte Q'nun pozitif olması kutunun içindeki devrenin terminallerden mıknatıslayan gücü çektiği anlamına gelir.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 1-AC güç kavramlarının, bunların birbirleriyle olan ilişkilerinin ve nasıl hesaplanacağının anlaşılması

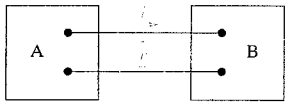
10.1 Aşağıdaki gerilim ve akım kümeleri için şekildeki devredeki A ve B devreleri arasındaki hatta gerçek ve reaktif gücü hesaplayınız. Her bir durum için güç akışının A'dan B'ye mi yoksa tam tersi mi olduğunu belirtiniz. Ayrıca VAR akışının A'dan B'ye mi yoksa tam tersi yönde mi olduğunu belirtiniz.

a) $v = 100\cos(\omega t - 45^\circ)$ V;
$i = 20\cos(\omega t + 15^\circ)$ A.

b) $v = 100\cos(\omega t - 45^\circ)$ V;
$i = 20\cos(\omega t + 165^\circ)$ A.

c) $v = 100\cos(\omega t - 45^\circ)$ V;
$i = 20\cos(\omega t - 105^\circ)$ A.

d) $v = 100\cos\omega t$ V;
$i = 20\cos(\omega t + 120^\circ)$ A.



Cevap: (a) $P = 500$ W (A'dan B'ye), $Q = -866.03$ VAR (B'den A'ya);

(b) $P = -866.03$ W (B'den A'ya), $Q = 500$ VAR (A'dan B'ye);

(c) $P = 500$ W (A'dan B'ye), $Q = 866.03$ VAR (A'dan B'ye);

(d) $P = -500$ W (B'den A'ya), $Q = -866.03$ VAR (B'den A'ya).

10.2 Gerilim ve akım değerleri Örnek 10.1'de verilen Şekil 10.6 için güç çarpanını ve reaktif çarpanı hesaplayınız.

İpucu: Güç çarpanı ve reaktif çarpanı hesaplamak için $-i$'yi kullanınız.

Cevap: pf = 0.5 önde; rf = –0.866.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemi 10.2'yi de çözmeyi deneyiniz.

Ev Gereçlerinin Güç Değerleri

Ev gereçlerinin güç ihtiyacı belirlenirken ortalama güç kullanılır. Tablo 10.1'de bazı çok kullanılan ev gereçlerinin ortalama gücü ve tahmini hesaplanan yıllık kilowatt-saat tüketim miktarları gösterilmektedir. Enerji tüketim miktarları, o ev gerecinin yıllık kullanım miktarı göz önüne alınarak elde edilmiştir. Örneğin bir kahve makinasının yıllık tüketim miktarı 140 kWsa ve çalışma sırasında çektiği ortalama güç ise 1.2 kW'tır. Böylece bir kahve makinasının yılda 116.67 (140/1.2) saat boyunca, günde ise yaklaşık 19 dakika boyunca çalıştığı varsayılmıştır.

Örnek 10.2'de Tablo 10.1 kullanılarak çok kullanılan dört ev gerecinin aynı anda çalışmasıyla evin akım taşıma kapasitesinin aşılıp aşılmayacağı belirlenmeye çalışılacaktır.

Örnek 10.2 **Ev Gereçleri ile İlgili Güç Hesaplamaları**

Tipik bir mutfağın prizlerini besleyen devre 12 numaralı kablo ile yapılmış ve 20 A'lık bir sigorta ile korunmuştur. 120 V ile çalışan aşağıdaki gereçlerin aynı anda çalıştığını varsayalım: Bir kahve makinası, yumurta pişirici, kızartma tenceresi (Firitöz) ve bir tost makinası. Bu devreyi (mutfağı) besleyen hattaki sigorta atar mı?

Çözüm

Bu dört ev gerecinin ihtiyaç duyduğu toplam ortalama güç Tablo 10.1'den

$P = 1200 + 516 + 1146 = 4058$ W olarak bulunur.

Sigorta üzerindeki toplam akım ise

$$I_{\text{eff}} = \frac{4058}{120} \approx 33.82 \text{ A.}$$

olarak hesaplanır. Bu sonuçtan yola çıkarak sigortanın devreyi keseceği sonucuna varılır.

TABLO 10.1 Elektrikli Ev Gereçlerinin Yıllık Enerji Gereksinimi

Ev gereci	Ortalama Watt	Tahmini yıllık (kWsa) tüketim miktarı[a]
Yemek Hazırlama		
Kahve makinası	1,200	140
Bulaşık makinası	1,201	165
Yumurta pişirici	516	14
Kızartma tavası (Fritöz)	1,196	100
Mikser	127	2
Mikrodalga fırın	1,450	190
Fırınlı ocak	12,200	596
Tost makinası	1,146	39
Çamaşır		
Çamaşır kurutucu	4,856	993
Otomatik çamaşır makinası	512	103
Su ısıtıcısı	2,475	4,219
Hızlı ısıtan tip	4,474	4,811
İklimlendirme		
Klima (oda)	860	860[b]
Nem alıcı	257	377
Fan (döner tip)	88	43
Isıtıcı (taşınabilir)	1,322	176
Sağlık ve bakım		
Saç kurutma makinası	600	25
Traş makinası	15	0.5
Işıldak	279	16
Ev eğlencesi		
Radyo	71	86
Televizyon, tüplü tip	240	528
Televizyon, yarı iletken tip	145	320
Ev eşyaları		
Saat	2	17
Elektrik süpürgesi	630	46

a) Normal kullanım temel alınmıştır. Bu rakamlar tahmin için kullanılacaksa, belirlenen aletin boyutu, kullanılan coğrafi bölge, kişiye özgün kullanım gibi çarpanlar göz önüne alınmalıdır. Tüm ev aletleri aynı anda çalışmadığı için güçlerin toplanmadığına dikkat ediniz.

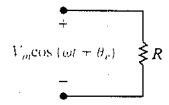
b) Yılda 1000 saat çalıştığı temel alınmıştır. Bu rakam kullanılan alana ve belirlenen aletin büyüklüğüne çok bağlıdır. Bulunduğunuz bölge için yapılan tahmin için EEI-Pub#76-2, "(Air Conditioning Usage Study)" bakınız.

Kaynak: Edison Elektrik Enstitüsü

NOT: Bu konuyu kavrayışınızı Bölüm Problemi 10.3'ü çözerek değerlendiriniz.

10.3 rms Değeri ve Güç Hesaplamaları

Kısım 9.1'de sinüzoidal gerilimin (veya akım) rms değerine giriş yapılırken, güç hesaplamalarında önemli rol oynayacağından bahsetmiştik, Şimdi bu rolü tartışacağız.



Şekil 10.7 ▲ Bir direncin terminallerine uygulanan sinüzoidal gerilim.

Şekil 10.7'deki gibi, bir direncin terminallerine sinüzoidal bir gerilim uygulandığını varsayalım ve bu durumda dirence dağıtılan ortalama gücü hesaplayalım. Eş. 10.12'den yola çıkılarak güç

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{V_m^2 \cos^2(\omega t + \phi_v)}{R} dt$$

$$= \frac{1}{R}\left[\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 \cos^2(\omega t + \phi_v) dt\right]. \qquad (10.18)$$

biçiminde elde edilir. Eş. 10.18 ile Eş. 9.5 karşılaştırıldığında R direncine iletilen ortalama gücün basitçe gerilimin rms değerinin karesinin R'ye bölümü veya

$$P = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} \qquad (10.19)$$

olduğu otaya çıkar. Eğer direncin üzerinden geçen akım $I_m \cos(\omega t + \phi_i)$ ise dirence iletilen ortalama güç

$$P = I_{\text{rms}}^2 R \qquad (10.20)$$

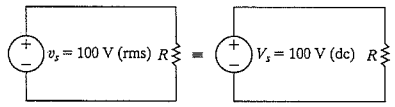
olur. rms değeri aynı zamanda sinüzoidal gerilimin (veya akımın) **etkin değeri** olarak da anılır. rms değeri çok ilginç bir özelliğe sahiptir: Verilen R eşdeğer direnç yükü ve T eşdeğer zaman periyodu için, sinüzoidal bir kaynağın ilettiği enerji, bu kaynağın rms değerine eşit bir dc kaynağın ilettiği enerji ile aynıdır. Örneğin, eşit yükte 100 V'luk bir dc kaynağın T saniyede ilettiği enerji, 100 V_{rms} değerine sahip sinüzoidal kaynağın ilettiği enerjiye eşittir. (Problem 10.11'e bakınız). Şekil 10.8 bu eşitliği açıkça göstermektedir. Enerji bakış açısından bu iki kaynağın etkileri eşittir. Bu da **etkin değer** ve **rms değer** terimlerinin birbirlerinin yerine kullanılmasına neden olmuştur.

Eş. 10.10'da verilen ortalama güç etkin değer cinsinden

$$P = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$= \frac{V_m}{\sqrt{2}}\frac{I_m}{\sqrt{2}}\cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta_v - \theta_i) \qquad (10.21)$$



Şekil 10.8 ▲ v_s'nin etkin değeri (100 V rms) R direncine V_s (100 V dc) dc gerilimi ile aynı gücü iletir.

biçiminde ve Eş. 10.11'de verilen reaktif güç de benzer şekilde atkin değer cinsinden

$$Q = V_{eff} I_{eff} \sin(\theta_v - \theta_i). \tag{10.22}$$

biçiminde yazılabilir. Sinüzoidal sinyalin etkin değeri güç hesaplamalarında o kadar sıklıkla kullanılmaktadır ki devrelerin gerilim ve akım değerleri ve güç ölçümlerinde kullanılan aletlerin değerleri rms cinsinden verilir. Örneğin evlerde kullanılan elektriğin değeri 240 V/120 V olarak verilir. Bu gerilim seviyeleri elektrik şirketinin sağladığı sinüzoidal gerilimin rms değerleridir şöyle ki düşük gerilimli (televizyon gibi) ve daha yüksek gerilimli gereçlere (elektrikli fırın gibi) iki gerilim seviyesinde güç sağlanır. Elektrikli lamba, ütü ve tost makinası gibi gereçler üzerlerinde rms cinsinden değerler yazan isim plakaları taşırlar. Örneğin bir 120 V ve 100 W değerlerine sahip lambanın direnç değeri $120^2/100$ ya da 144 Ω'dur. Aynı lamba 120/144 veya 0.833 A akım çeker ve bu akımın tepe değeri $0.833\sqrt{2}$ veya 1.18 A'dir.

Sinüzoidal fonksiyonun fazör dönüşümü de rms cinsinden ifade edilebilir. rms fazörünün büyüklüğü sinüzoidal fonksiyonun rms değerine eşittir. Eğer bir fazör rms değerini temel aldıysa bunu ya açıkça belirtiriz, ya da fazör niceliğin yanına parantez içinde "rms" yazar veya Eş. 10.21'de olduğu gibi "eff" alt indisini kullanırız.

Örnek 10.3'te güç hesaplamalarında rms değerlerinin kullanımını izah edeceğiz.

Örnek 10.3 Sinüzoidal Gerilimin Bir Dirence İlettiği Ortalama Gücün Bulunması

a) Maksimum genlik değeri 625 V olan bir sinüzoidal gerilim bir direncin terminallerine uygulanmıştır. Dirence iletilen ortalama gücü bulunuz.

b) (a)'yı önce direnç akımını bularak tekrarlayınız.

Çözüm:

a) Sinüzoidal gerilimin rms değeri $625/\sqrt{2}$ yani yaklaşık olarak 441.94 V'tur. Eş. 10.19'u kullanarak 50 Ω'luk dirence iletilen ortalama güç

$$P = \frac{(441.94)^2}{50} = 3906.25 \text{ W}$$

olarak hesaplanır.

b) Dirençten geçen akımın maksimum değeri 625/50 yani 12.5 A'dir. Bu akımın rms değeri $12.5/\sqrt{2}$ yani yaklaşık 8.84 A'dir. Buradan ortalama güç

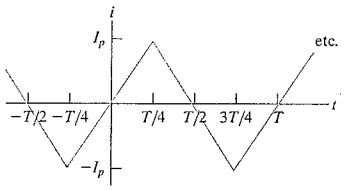
$$P = (8.84)^2 50 = 3906.25 \text{ W}$$

olarak bulunur.

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 1– AC güç kavramlarının, bunların birbirleriyle ilişkilerinin ve bir devre içinde nasıl hesaplanacaklarının anlaşılması

10.3 Örnek 9.4'teki periyodik üçgen akım burada tekrarlanmaktadır. Bu üçgen akım 180 mA tepe değerine sahiptir. 5 kΩ'luk dirence iletilen ortalama gücü bulunuz.



Cevap: 54 W.

NOT: Bölüm Problemi 10.13'ü de çözünüz.

10.4 Kompleks Güç

Sinüzoidal durgun durumda çalışan devrelerdeki çeşitli gerçek ve reaktif güç hesaplamalarında ilerlemeden önce, kompleks gücü tanımlamamız gerekmektedir. Kompleks güç, gerçek ile reaktif gücün kompleks

$$S = P + jQ. \tag{10.23}$$

◁ **Kompleks güç**

toplamına eşittir. Bir devrenin gerilim ve akım fazörlerinden kompleks gücün doğrudan hesaplanabileceğini ileride göreceksiniz. Eş. 10.23 ortalama gücü ve reaktif gücü hesaplamada kullanılabilir, çünkü $P = \Re\{S\}$ ve $Q = \Im\{S\}$ şeklinde hesaplanabilir.

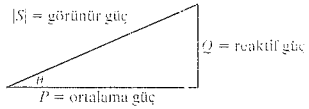
Boyut olarak kompleks güç, ortalama ve reaktif güçle aynıdır. Ancak, kompleks gücü hem ortalama güçten hem de reaktif güçten ayırabilmek için birim olarak **volt-amper** (VA) kullanırız. Tablo 10.2'de özetlendiği üzere kompleks güç için volt-amper, ortalama güç için watt ve reaktif güç için var kullanılır.

TABLO 10.2 Üç Güç Niceliği ve Birimleri

Nicelik	Birim
Kompleks Güç	volt-amp
Ortalama Güç	watt
Reaiktif Güç	var

Kompleks gücün kullanılmasındaki bir diğer avantaj da sağladığı grafiksel açıklıktır. Eş. 10.23 ile çalışırken, P, Q ve $|S|$'yi şekil 10.9'daki gibi bir dik üçgenin kenarları olarak düşünelim. Güç üçgenindeki Q'nun, güç çarpanı açısı $\theta_v - \theta_i$ olduğunu göstermek çok kolaydır. Şekil 10.9'daki dik üçgen için

$$\tan\theta = \frac{Q}{P} \tag{10.24}$$



Şekil 10.9 Güç üçgeni.

yazılabilir. Ancak P ve Q'nun tanımından yola çıkarak (Eş. 10.10 ve Eş. 10.11)

$$\frac{Q}{P} = \frac{(V_m I_m/2)\sin(\theta_v - \theta_i)}{(V_m I_m/2)\cos(\theta_v - \theta_i)}$$

$$= \tan(\theta_v - \theta_i) \tag{10.25}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $\theta = \theta_v - \theta_i$ olduğu kolayca görülür. Bu güç üçgeninin dört (üç tane kenar bir tane de güç çarpanı açısı) boyutu vardır. Bu dört boyuttan herhangi ikisi bilindiğinde geriye kalanlar hesaplanabilir.

Kompleks gücün büyüklüğü,

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}. \tag{10.26}$$

◁ **Görünür güç**

görünür güç olarak anılır. Görünür güç de kompleks güç gibi volt-amper cinsinden ölçülür. Elektrik enerjisini başka bir enerji türüne çevirmek için tasarlanmış bir aletin görünür güç veya volt-amper ihtiyacı, ortalama güç ihtiyacından çok daha önemlidir. Şöyle ki, ortalama güç enerji çeviren aletin kullanılabilir çıkış gücünü, görünür güç ise aletin, bu ortalama gücü verebilmesi için ihtiyacı olan volt-amper miktarını belirtir. Şekil 10.9'da da görüldüğü gibi, güç çarpanı açısı 0° olmadığı sürece (bu da aletin salt direnç oldu-

ğunu gösterir, pf = 1 ve $Q = 0$'dır. Cihazın ihtiyacı olan volt-amper kapasitesi, cihazca kullanılan ortalama güçten büyüktür. Bu nedenle, Örnek 10.6'da görüleceği üzere, cihazları güç çarpanları 1'e yakınken çalıştırmak daha mantıklıdır.

Pek çok faydalı ev gereci (buzdolabı, fan, klima, floresan aydınlatma armatürleri ve çamaşır makinası gibi) ve çoğu endüstriyel yük geri güç çarpanında çalışmaktadır. Bu yüklerin güç çarpanı bazen aletin kendisine kapasitör takarak bazen de yükü besleyen hattın ucuna kapasitör bağlayarak düzeltilebilir; bu ikinci yöntem sıklıkla büyük endüstriyel yükler için kullanılır. Bölüm Problemlerinin pek çoğu geri güç çarpanını düzeltmek ve devrenin işlevini artırmak amacıyla bazı hesaplamalar yapmanız için fırsat vermektedir.

Örnek 10.4'te elektriksel yük ile ilgili niceliklerin hesaplanmasında güç üçgeni kullanılmaktadır.

Örnek 10.4 **Kompleks Güç Hesabı**

Bir elektriksel yük 240 V rms ile çalışmaktadır. Yük 0.8 geri güç çarpanında 8 kW'lık ortalama güç çekmektedir.

a) Yükün kompleks gücünü hesaplayınız.

b) Yükün empedansını hesaplayınız.

Çözüm

a) Bahsedilen güç çarpanı geridir. Bu yüzden yükün indüktif ve reaktif gücün cebirsel işaretinin pozitif olduğunu biliyoruz. Şekil 10.10'daki güç üçgeninden

$$P = |S|\cos\theta,$$

$$Q = |S|\sin\theta$$

elde edilir. Şimdi $\cos\theta = 0.8$ ve $\sin\theta = 0.6$ olduğunu bildiğimize göre

$$|S| = \frac{P}{\cos\theta} = \frac{8\text{ kW}}{0.8} = 10\text{ kVA},$$

$$Q = 10\sin\theta = 6\text{ kVAR}$$

ve

$$S = 8 + j6\text{ kVA}$$

elde edilir.

b) Kompleks güç hesabından $P = 8$ kW olduğu görülür ve Eş. 10.21 kullanılarak

$$P = V_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$= (240)I_{\text{eff}}(0.8)$$

$$= 8000\text{ W}$$

elde edilir.

Buradan I_{eff}

$$I_{\text{eff}} = 41.67\text{ A}$$

olarak hesaplanır. Yük empedansının açısını biliyoruz çünkü bu açı güç çarpanı açısına eşittir:

$$\theta = \cos^{-1}(0.8) = 36.87^\circ$$

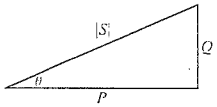
Ayrıca θ'nın pozitif olduğunu da biliyoruz. Çünkü güç çarpanı geridir ve bu da yükün indüktif olduğunu belirtir. Yük empedansının büyüklüğünü de tanımından yani gerilim büyüklüğünün akım büyüklüğüne bölümünden

$$|Z| = \frac{|V_{\text{eff}}|}{|I_{\text{eff}}|} = \frac{240}{41.67} = 5.76$$

olarak bulabiliriz. Buradan da

$$Z = 5.76\angle 36.87^\circ\ \Omega = 4.608 + j3.456\ \Omega$$

bulunur.



Şekil 10.10 ▲ Güç üçgeni.

10.5 Güç Hesaplamaları

Şimdi gerçek, reaktif ve kompleks gücü hesaplamak için ek eşitliklerin çıkarımına hazırız. Eş. 10.10, 10.11 ve 10.23'ü birleştirerek

$$S = \frac{V_mI_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i) + j\frac{V_mI_m}{2}\sin(\theta_v - \theta_i)$$

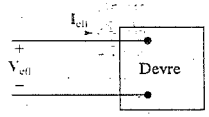
$$= \frac{V_mI_m}{2}[\cos(\theta_v - \theta_i) + j\sin(\theta_v - \theta_i)]$$

$$= \frac{V_mI_m}{2}e^{j(\theta_v-\theta_i)} = \frac{1}{2}V_mI_m\angle(\theta_v - \theta_i) \qquad (10.27)$$

elde ederiz. Eğer sinüzoidal gerilim ve akım için etkin değerleri kullanırsak Eş. 10.27

$$S = V_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\angle(\theta_v - \theta_i) \qquad (10.28)$$

halini alır. Eş. 10.27 ve Eş. 10.28 güç hesaplamalarında önemli eşitliklerdir. Çünkü bir terminal çifti için fazör akım ve fazör gerilim biliniyor ise, terminallerin uçları arasındaki kompleks güç, gerilim ve akımın eşleniğinin çarpımının yarısına ya da rms fazör gerilim ile rms fazör akımının eşleniğinin çarpımına eşittir. Bunu Şekil 10.11'deki fazör gerilim ve akım için



Şekil 10.11 ▲ Bir çift terminalin ucundaki fazör gerilim ve akım.

$$S = V_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\angle(\theta_v - \theta_i)$$

$$= V_{\text{eff}}I_{\text{eff}}e^{j(\theta_v-\theta_i)}$$

$$= V_{\text{eff}}e^{j\theta_v}I_{\text{eff}}e^{-j\theta_i}$$

$$= \mathbf{V}_{\text{eff}}\mathbf{I}^*_{\text{eff}} \qquad (10.29)$$

◀ **Kompleks güç**

biçiminde gösterebiliriz. Burada

$$\mathbf{I}^*_{\text{eff}} = I_{\text{eff}}e^{-j\theta}$$

eşitliği, Euler özdeşliği ve $(\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ ve $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ trigometrik özdeşlikleri kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$I_{\text{eff}}e^{-j\theta_i} = I_{\text{eff}}\cos(-\theta_i) + jI_{\text{eff}}\sin(-\theta_i)$$

$$= I_{\text{eff}}\cos(\theta_i) - jI_{\text{eff}}\sin(\theta_i)$$

$$= \mathbf{I}^*_{\text{eff}}.$$

Benzer çıkarım teknikleri Eş. 10.27'ye uygulanarak

$$S = \frac{1}{2}\mathbf{V}\mathbf{I}^* \tag{10.30}$$

elde edilir. Eş. 10.29 ve Eş. 10.30'un ikisi birden pasif işaret gösterimini temel alır. Eğer akımın referans yönü terminallerin arasındaki gerilim artışı yönünde kabul edilseydi, her bir eşitliğin sağ tarafının başına eksi (–) işareti koymamız gerekirdi.

Eş. 10.30'un güç hesaplamalarındaki kullanımını açıklamak için Örnek 10.1'deki devreyi kullanalım. Terminaller arasındaki gerilim ve akım fazör olarak

$$\mathbf{V} = 100\,\underline{/15^\circ}\ \text{V},$$

$$\mathbf{I} = 4\underline{/-105^\circ}\ \text{A}$$

biçiminde ifade edildiğinde, kompleks güç

$$S = \frac{1}{2}(100\,\underline{/15^\circ})(4\,\underline{/+105^\circ}) = 200\,\underline{/120^\circ}$$

$$= -100 + j173.21\ \text{VA}$$

olarak hesaplanır. Bir kez kompleks güç elde edildiğinde gerçek ve reaktif gücün ikisi birden buradan okunabilir. Böylece gerçek ve reaktif güç

$$P = -100\ \text{W},$$

$$Q = 173.21\ \text{VAR}$$

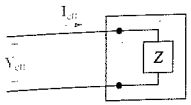
biçiminde elde edilir. Burada elde edilen sonuçlar ve P ve Q'nun işaretleri Örnek 10.1'deki sonuçlarla tamamen aynıdır.

Kompleks Gücün Alternatif Biçimleri

Eşitlik 10.29 ve 10.30'un bazı değişik biçimleri vardır. Biz burada bu eşitliklerin rms biçimini kullanacağız. Çünkü rms değer, güç hesaplamalarında en çok kullanılan gerilim ve akım gösterim biçimidir.

Eş. 10.29'daki birinci değişiklik gerilimin, akım ve empedansın çarpımıyla değiştirilmesidir. Bir başka deyişle Eş. 10.11'deki kutunun içini her zaman bir eşdeğer empedansla Şekil 10.12'deki gibi değiştirebiliriz. Böylece etkin gerilim

$$\mathbf{V}_{\text{eff}} = Z\mathbf{I}_{\text{eff}} \tag{10.31}$$



Şekil 10.12 Şekil 10.11'deki genel devrenin eşdeğer empedansla değiştirilmiş hali.

biçiminde ifade edilebilir. Eş. 10.31, Eş. 10.29'da yerine konduğunda

$$\begin{aligned} S &= Z\mathbf{I}_{\text{eff}}\mathbf{I}^*_{\text{eff}} \\ &= |\mathbf{I}_{\text{eff}}|^2 Z \\ &= |\mathbf{I}_{\text{eff}}|^2(R + jX) \\ &= |\mathbf{I}_{\text{eff}}|^2 R + j|\mathbf{I}_{\text{eff}}|^2 X = P + jQ \end{aligned} \tag{10.32}$$

elde edilir. Buradan da gerçek ve reaktif güç

$$P = |\mathbf{I}_{\text{eff}}|^2 R = \frac{1}{2}I_m^2 R, \tag{10.33}$$

$$Q = |\mathbf{I}_{\text{eff}}|^2 X = \frac{1}{2}I_m^2 X \tag{10.34}$$

olarak bulunur. Eş. 10.34'teki X, devrenin eşdeğer indüktansını veya eşdeğer kapasitansını temsil eden reaktansıdır. Reaktansla ilgili önceki irdelemelerimizden yola çıkarak reaktans değerinin indüktif devreler için pozitif, kapasitif devreler için ise negatif olduğunu görebiliriz.

Eş. 10.29'daki ikinci kullanışlı değişik ise akımın yerine, gerilimin empedansa bölümünün konmasıyla elde edilir ve bu durumda kompleks güç,

$$S = \mathbf{V}_{\text{eff}}\left(\frac{\mathbf{V}_{\text{eff}}}{Z}\right)^* = \frac{|\mathbf{V}_{\text{eff}}|^2}{Z^*} = P + jQ \tag{10.35}$$

biçiminde elde edilir. Eğer Z salt direnç ise gerçek güç

$$P = \frac{|\mathbf{V}_{\text{eff}}|^2}{R} \tag{10.36}$$

olur. Eğer Z salt reaktif ise

$$Q = \frac{|\mathbf{V}_{\text{eff}}|^2}{X} \tag{10.37}$$

bulunur. Eş. 10.37'deki X indüktör için pozitif, kapasitör için ise negatiftir.

Takip eden örneklerde sinüzoidal durgun durumdaki devreler için çeşitli güç hesaplamaları gösterilmektedir.

Örnek 10.5 Ortalama ve Reaktif Gücün Hesaplanması

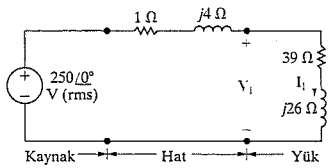
Şekil 10.13'teki devrede, $39 + j26\ \Omega$ empedansa sahip bir yük, $1 + j4\ \Omega$ empedansa sahip bir hat üzerinden beslenmektedir. Kaynak geriliminin etkin veya rms değeri 250 V'tur.

a) Yük akımı $\mathbf{I}_L$ ve yük gerilimi $\mathbf{V}_L$'yi hesaplayınız.

b) Yüke iletilen ortalama ve reaktif gücü hesaplayınız.

c) Hatta iletilen ortalama ve reaktif gücü hesaplayınız.

d) Kaynak tarafından sağlanan ortalama ve reaktif gücü hesaplayınız.



Şekil 10.13 ▲ Örnek 10.5'in devresi.

Çözüm

a) Hat ve yük empedansları kaynak gerilimine seri olarak bağlanmıştır. Böylece yük akımı kaynak geriliminin toplam empedansa bölümü, yani

$$\mathbf{I}_L = \frac{250\angle 0^\circ}{40 + j30} = 4 - j3 = 5\angle -36.87^\circ \text{ A (rms)}$$

olarak hesaplanır. Gerilim rms cinsinden verildiği için akım da rms cinsindendir. Yük gerilimi ise, yük akımı ve yük empedansının çarpımı ile

$$\mathbf{V}_L = (39 + j26)\mathbf{I}_L = 234 - j13$$

$$= 234.36\angle -3.18^\circ \text{ V (rms)}$$

olarak bulunur.

b) Yüke iletilen ortalama ve reaktif güç, önce Eş. 10.29 yardımıyla kompleks güç

$$S = \mathbf{V}_L\mathbf{I}_L^* = (234 - j13)(4 + j3)$$

$$= 975 + j650 \text{ VA}$$

hesaplanarak bulunabilir. Böylece yükün çektiği ortalama güç 975 W ve reaktif güç de 650 VAR'dır.

c) Hatta iletilen ortalama ve reaktif gücün Eş. 10.33 ve 10.34 kullanılarak hesaplanması çok kolaydır çünkü hat akımı bilinmektedir. Buradan ortalama ve reaktif güç

$$P = (5)^2(1) = 25 \text{ W},$$

$$Q = (5)^2(4) = 100 \text{ VAR}$$

olarak hesaplanır. Bu arada hattın reaktif gücünün pozitif olduğuna dikkat ediniz çünkü hattın reaktansı indüktiftir.

d) Kaynak tarafından verilen ortalama ve reaktif güç, hatta ve yüke iletilen kompleks güçler toplanarak

$$S = 25 + j100 + 975 + j650$$

$$= 1000 + j750 \text{ VA}$$

hesaplanabilir. Kaynağın sağladığı kompleks güç doğrudan Eş. 10.29 kullanılarak

$$S_s = -250\mathbf{I}_L^*$$

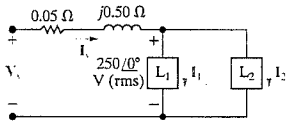
bulunabilir. Buradaki eksi işaret, akım referansının gerilimin artış yönünde olmasından kaynaklanır. Buradan kompleks güç

$$S_s = -250(4 + j3) = -(1000 + j750) \text{ VA}$$

olarak hesaplanır. Buradaki eksi işaret ortalama gücün ve reaktif gücün ikisinin birden kaynak tarafından sağlandığını gösterir. Bu sonuç önceki kompleks güç hesabıyla olması gerektiği gibi uyuşmaktadır. Çünkü hat ve yük tarafından çekilen tüm güç kaynak tarafından sağlanmalıdır.

Örnek 10.6 Paralel Yüklerde Gücün Hesaplanması

Şekil 10.14'te gösterilen devredeki iki yük şöyle tanımlanmıştır: Yük 1 0.8 ileri güç çarpanı ile 8 kW güç çekmekte, Yük 2 ise 0.6 geri güç çarpanı ile 20 kVA çekmektedir.



Şekil 10.14 ▲ Örnek 10.6'nın devresi.

a) Paralel bu iki yükün güç çarpanını bulunuz.

b) Yükleri beslemek için gerekli görünür gücü, $\mathbf{I}_s$ akımının büyüklüğünü ve iletim hattındaki ortalama güç kaybını bulunuz.

c) Kaynağın frekansı 60 Hz olarak verildiğinde, güç çarpanını 1 yapmak için bu iki yüke paralel bağlanacak kapasitörün değerini bulunuz. Düzeltilmiş güç çarpanı için (b) şıkkındaki değerleri yeniden hesaplayınız.

Çözüm

a) Bu problemdeki tüm gerilim ve akım fazörlerinin etkin değerler olduğu varsayılır. Şekil 10.14'teki devreden $\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$ olduğu görülür. İki yükün çektiği toplam güç

$$S = (250)\mathbf{I}_s^*$$

$$= (250)(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)^*$$

$$= (250)\mathbf{I}_1^* + (250)\mathbf{I}_2^*$$

$$= S_1 + S_2$$

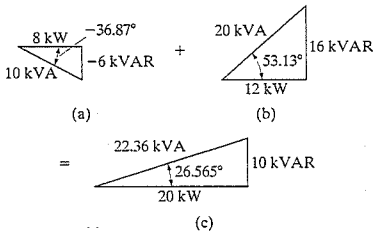
biçiminde ifade edilebilir. Toplam kompleks güç, Şekil 10.15'teki gibi her bir yükün güç üçgenleri kullanılarak kompleks güçlerin geometrik olarak toplanmasıyla elde edilebilir. Buradan,

$$S_1 = 8000 - j\frac{8000(.6)}{(.8)}$$

$$= 8000 - j6000 \text{ VA},$$

$$S_2 = 20{,}000(.6) + j20{,}000(.8)$$

$$= 12{,}000 + j16{,}000 \text{ VA}$$



Şekil 10.15 ▲ (a) Yük 1 için güç üçgeni. (b) Yük 2 için güç üçgeni. (c) Güç üçgenlerinin toplamı.

bulunur ve toplam kompleks güç

$$S = 20{,}000 + j10{,}000 \text{ VA}$$

olur. Buradan akımı bulmak için

$$\mathbf{I}_s^* = \frac{20{,}000 + j10{,}000}{250} = 80 + j40 \text{ A}$$

hesaplanır ve akım

$$\mathbf{I}_s = 80 - j40 = 89.44\angle -26.57^\circ \text{ A}$$

olarak bulunur. Birleştirilmiş yük için güç çarpanı

$$\text{pf} = \cos(0 + 26.57^\circ) = 0.8944 \text{ geride.}$$

olarak bulunur. Paralel iki yük için güç çarpanı geridedir. Çünkü net reaktif güç pozitiftir.

b) Bu yüklere iletilmesi gereken görünür güç,

$$|S| = |20 + j10| = 22.36 \text{ kVA}$$

olarak hesaplanır. Görünür gücü sağlayan akımın büyüklüğü ise

$$|\mathbf{I}_s| = |80 - j40| = 89.44 \text{ A}$$

bulunur. Hatta kaybolan ortalama güç ise hat direnci üzerinden geçen akımın sonucu olarak

$$P_{\text{line}} = |\mathbf{I}_s|^2R = (89.44)^2(0.05) = 400\ W$$

biçiminde hesaplanır. Yükün 20000 W güce gereksinimi varken, sağlanan toplam gücün 20000 + 400 = 20400 W olduğuna dikkat edilmelidir.

c) Şekil 10.15(c)'den görebileceğimiz gibi, yüklere paralel 10 kVAR mıknatıslayan reaktif güç verebilecek bir kapasitör bağlarsak güç çarpanımı 1 yapabiliriz. Bu kapasitörün değeri aşağıdaki gibi hesaplanabilir. Önce Eş. 10.37 kullanılarak kapasitif reaktans

$$X = \frac{|V_{eff}|^2}{Q} = \frac{(250)^2}{-10{,}000} = -6.25\ \Omega$$

hesaplanır. Kapasitörün reaktif empedansı $-1/\omega C$ kullanılarak hesaplanacaktır. Burada ω kaynak frekansı 60 Hz olduğundan $\omega = 2\pi\ (60) = 376.99$ rad/s olarak hesaplanır ve sonuçta kapasitörün değeri

$$C = \frac{-1}{\omega X} = \frac{-1}{(376.99)(-6.25)} = 424.4\ \mu F$$

olarak bulunur. Kapasitörün üçüncü yük olarak eklenmesiyle iki güç üçgeninin toplanması geometrik olarak Şekil 10.16'da gösterilmiştir. Güç çarpanı 1 iken görünür güç ile ortalama güç Şekil 10.16(c)'de görüleceği gibi aynıdır. Böylece güç çarpanı düzeltildikten sonra görünür güç

$$|S| = P = 20\ \text{kVA}$$

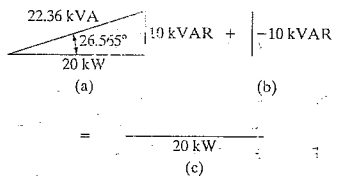
olarak bulunur. Bu görünür gücü besleyen akım ise

$$|I_s| = \frac{20{,}000}{250} = 80\ \text{A}$$

olarak hesaplanır. Böylece hatta kaybolan enerji miktarı düşerek

$$P_{line} = |\mathbf{I}_s|^2 R = (80)^2(0.05) = 320\ W$$

olur. Bu durumda sağlanan toplam güç 20000 + 320 = 20320 W olur. Eklenen kapasitörün hat kaybını 400 W'tan 320 W'a düşürdüğüne dikkat ediniz.



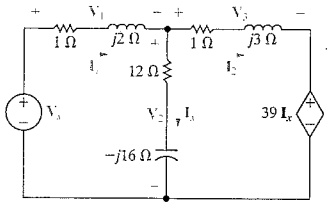
Şekil 10.16 ▲ (a) Yük 1 ve Yük 2'nin güç üçgenlerinin toplamı. (b) 424.4 μF'lık kapasitör için güç üçgeni. (c) (a) ve (b)'deki güç üçgenlerinin toplamı.

Örnek 10.7 Bir AC Devresinde İletilen ve Soğurulan Güçlerin Dengelenmesi

a) Şekil 10.17'de gösterilen devredeki her bir empedansa iletilen toplam ortalama ve reaktif gücü hesaplayınız.

b) Devredeki her kaynak için ortalama ve reaktif gücü hesaplayınız.

c) İletilen ortalama gücün soğurulan ortalama güce ve iletilen mıknatıslayan reaktif gücün de soğurulan mıknatıslayan reaktif güce eşit olduğunu gösteriniz.



$\mathbf{V}_s = 150\angle 0°$ V

$\mathbf{V}_1 = (78 - j104)$ V $\quad \mathbf{I}_1 = (-26 - j52)$ A

$\mathbf{V}_2 = (72 + j104)$ V $\quad \mathbf{I}_x = (-2 + j6)$ A

$\mathbf{V}_3 = (150 - j130)$ V $\quad \mathbf{I}_2 = (-24 - j58)$ A

Şekil 10.17 ▲ Örnek 10.7'de kullanılan devre ve çözümler.

Çözüm

a) $(1 + j2)\ \Omega$'luk empedansa iletilen kompleks güç

$$S_1 = \frac{1}{2}\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^* = P_1 + jQ_1$$

$$= \frac{1}{2}(78 - j104)(-26 + j52)$$

$$= \frac{1}{2}(3380 + j6760)$$

$$= 1690 + j3380\ \text{VA}$$

olarak bulunur. Bu empedans 1690 W ortalama güç ve 3380 VAR reaktif güç çekmektedir. $(12 - j16)\ \Omega$'luk empedansa iletilen kompleks güç de

$$S_2 = \frac{1}{2}\mathbf{V}_2\mathbf{I}_x^* = P_2 + jQ_2$$

$$= \frac{1}{2}(72 + j104)(-2 - j6)$$

$$= 240 - j320\ \text{VA}$$

olarak hesaplanır. Dikey daldaki bu empedans 240 W güç çeker ve 320 VAR güç verir. $(1 + j3)\ \Omega$'luk empedansa iletilen güç ise

$$S_3 = \frac{1}{2}\mathbf{V}_3\mathbf{I}_2^* = P_3 + jQ_3$$

$$= \frac{1}{2}(150 - j130)(-24 + j58)$$

$$= 1970 + j5910\ \text{VA}$$

bulunur. Bu empedans 1970 W ve 5910 VAR güç çeker.

b) Bağımsız güç kaynağının kompleks gücü

$$S_s = -\frac{1}{2}\mathbf{V}_s\mathbf{I}_1^* = P_s + jQ_s$$

$$= -\frac{1}{2}(150)(-26 + j52)$$

$$= 1950 - j3900\ \text{VA}$$

olarak hesaplanır. Bu kaynağın 1950 W ortalama güç çektiğine ve 3900 VAR reaktif güç ilettiğine dikkat ediniz. Akım kontrollü gerilim kaynağının kompleks gücü ise

$$S_x = \frac{1}{2}(39\mathbf{I}_x)(\mathbf{I}_2^*) = P_x + jQ_x$$

$$= \frac{1}{2}(-78 + j234)(-24 + j58)$$

$$= -5850 - j5070\ \text{VA}$$

bulunur. Bu bağımlı kaynak ortalama ve reaktif güçlerin ikisini de iletmektedir.

c) Pasif empedanslar ve bağımsız gerilim kaynağının çektiği toplam güç

$$P_{çekilen} = P_1 + P_2 + P_3 + P_s = 5850\ \text{W}$$

olarak hesaplanır. Bağımlı güç kaynağı ise devrede güç veren tek kaynaktır ve bunun büyüklüğü de

$$P_{iletilen} = 5850\ \text{W}$$

hesaplanmıştı. Yatay dalların çektiği reaktif güç

$$Q_{iletilen} = Q_1 + Q_3 = 9290\ \text{VAR}$$

biçiminde hesaplanır. Bağımsız gerilim kaynağı, dikey daldaki kapasitör ve bağımlı güç kaynağı tarafından iletilen reaktif güç ise

$$Q_{iletilen} = 9290\ \text{VAR}$$

olarak hesaplanır.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Amaç 1-AC güç kavramlarının, bunların birbirleriyle ilişkilerinin ve devre içinde nasıl hesaplanacağının anlaşılması.

10.4 Şekildeki devrede yüke paralel, –52 Ω kapasitif reaktans değerine sahip bir kapasitör bağlanmıştır. Bu durumda aşağıdakileri hesaplayınız.

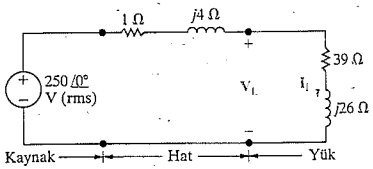
a) $\mathbf{V}_L$ ve $\mathbf{I}_L$'nin rms fazörleri,

b) (39 + *j*26) Ω'luk yük empedansının çektiği ortalama güç ve reaktif güç,

c) (1 + *j*4) Ω'luk hat empedansının çektiği ortalama güç ve reaktif güç,

d) Kaynak tarafından dağıtılan ortalama güç ve reaktif güç,

e) Paralel kapasitörün illettiği reaktif güç.

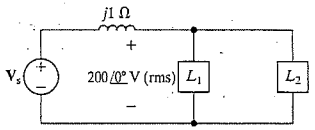


Cevap: (a) 252.20 $\angle -4.54°$ V (rms), 5.38 $\angle -38.23°$ A (rms);
(b) 1129.09 W, 752.73 VAR;
(c) 23.52 W, 94.09 VAR;
(d) 1152.62 W, – 376.36 VAR;
(e) 1223.18 VAR.

10.5 Bir yükün uçları arasındaki rms gerilim 250 V'tur. Bu yük 4 kW'lık bir ortalama güç çekmekte ve 30 k VAR'lık bir reaktif güç iletmektedir. Bu yük için iki eşdeğer empedans modeli bulunuz.

Cevap: Birinci, 1 Ω'luk direnç ile seri 0.75 Ω'luk kapasitif reaktans; ikincisi 1.5625 Ω'luk direnç ile paralel 2.083 Ω'luk kapasitif reaktans.

10.6 Şekildeki devredeki L_1 yükü 0.6 geri güç çarpanı ile 15 kVA ve L_2 yükü ise 0.8 ileri güç çarpanı ile 6 kVA güç çekiyorsa $\mathbf{V}_s$(rms) fazör gerilimini bulunuz ve kutupsal biçimde yazınız.

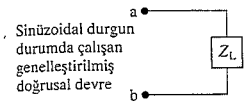


Cevap: 251.64 $\angle 15.91°$ V.

NOT: Bölüm Problemlerinden 10.17, 10.21 ve 10.22'yi de çözmeyi deneyiniz.

10.6 Maksimum Güç Aktarımı

4. Bölümü hatırlarsak, bazı sistemlerin, örneğin elektrik sinyalleri ile bilgi iletenlerin kaynaktan yüke maksimum güç aktarımına dayandığını görürüz. Biz şu anda sinüzoidal durgun durum devreleri bağlamında maksimum güç aktarımını Şekil 10.18'den başlayarak yeniden irdeleyeceğiz. a, b terminallerine maksimum güç aktarımını sağlayacak Z_L yük empedansını belirlememiz gerekmektedir. Herhangi doğrusal bir devre yükün uçlarının Thévenin eşdeğer devresiyle görülebilir. Bu durumda işlem Şekil 10.19'da görülen devredeki Z_L'ye maksimum ortalama güç aktarımı yapılacak şekilde Z_L'nin değerini hesaplamaya indirgenmiştir.



Şekil 10.18a ▲ Maksimum güç aktarımını açıklayan devre.

Maksimum güç aktarımı için Z_L'nin Thevenin empedansının eşleniğine eşit olması, yani

$$Z_L = Z_{Th}^*. \tag{10.38}$$

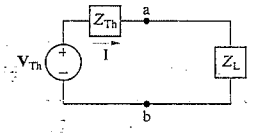
◀ **Maksimum güç aktarımı için gerekli koşul**

gereklidir. Eş. 10.38'i basit matematiksel işlemler kullanarak çıkarabiliriz. Bu işleme Z_{Th} ve Z_L'yi Kartezyen biçimde

$$Z_{Th} = R_{Th} + jX_{Th}, \tag{10.39}$$

$$Z_L = R_L + jX_L \tag{10.40}$$

olarak yazmamız gerekir. Eş. 10.39 ve 10.40'ın her ikisindeki reaktans terimleri kendi cebirsel işaretlerini-indüktans için pozitif, kapasitans için negatif-taşır. Çünkü biz burada ortalama güç hesabı yapmaktayız ve Thévenin geriliminin büyüklüğünün rms değeri cinsinden ifade edildiğini varsayıyoruz. Aynı zamanda Thévenin gerilimini fazör referansı alarak da kullanacağız. O halde Şekil 10.19'dan **I** yük akımının rms değeri



Şekil 10.19 ▲ Şekil 10.18'de gösterilen devrenin Thévenin eşdeğeriyle değiştirilmiş hali.

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{(R_{Th} + R_L) + j(X_{Th} + X_L)} \tag{10.41}$$

olarak ifade edilir. Yüke iletilen ortalama güç

$$P = |\mathbf{I}|^2 R_L \tag{10.42}$$

bulunur. Eş. 10.41 Eş. 10.42'de yerine konursa güç

$$P = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2 R_L}{(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2} \tag{10.43}$$

haline gelir. Eş. 10.43 ile çalışırken, V_{Th}, R_{Th} ve X_{Th}'nin her zaman sabit olduğunu R_L ve X_L'nin ise bağımsız değişkenler olduğunu hatırlayınız. Böylelikle P'yi maksimum yapmak için $\partial P/\partial R_L$ ve $\partial P/\partial X_L$'nin ikisini birden sıfır yapan R_L ve X_L değerlerini bulmamız gerekir. Eş. 10.43'ten

$$\frac{\partial P}{\partial X_L} = \frac{-|\mathbf{V}_{Th}|^2 2R_L(X_L + X_{Th})}{[(R_L + R_{Th})^2 + (X_L + X_{Th})^2]^2}, \tag{10.44}$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2[(R_L + R_{Th})^2 + (X_L + X_{Th})^2 - 2R_L(R_L + R_{Th})]}{[(R_L + R_{Th})^2 + (X_L + X_{Th})^2]^2} \tag{10.45}$$

elde edilir.

Eş. 10.44'teki $\partial P/\partial X_L$ ancak

$$X_L = -X_{Th} \tag{10.46}$$

ise sıfırdır. Eş. 10.45'teki $\partial P/\partial R_L$ ise

$$R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + (X_L + X_{Th})^2} \tag{10.47}$$

koşulu sağlandığı zaman sıfır olur. Eş. 10.46'yı ve 10.47'yi birleştirdiğimizde her iki türevin de $Z_L = Z^*_{Th}$ olduğu zaman sıfır olduğu görülür.

Harcanan Maksimum Ortalama Güç

Z_L'ye iletilebilecek maksimum ortalama güç, Z_L'nin Şekil 10.19'daki devreden doğrudan hesaplanan Z_{Th}'nin eşleniğine eşit seçilmesiyle gerçekleşebilir. $Z_L = Z^*_{Th}$ iken rms yük akımı $\mathbf{V}_{Th}/2R_L$'dir ve yüke dağıtılacak maksimum ortalama güç

$$P_{max} = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2 R_L}{4R_L^2} = \frac{1}{4}\frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{R_L} \tag{10.48}$$

olur. Eğer Thévenin gerilimi, rms büyüklüğü yerine maksimum genlik cinsinden ifade edilirse Eş. 10.48

$$P_{max} = \frac{1}{8}\frac{\mathbf{V}_m^2}{R_L} \tag{10.49}$$

halini alır.

Z Kısıtlandığı Zaman Maksimum Güç Aktarımı

Z_L'ye maksimum güç transferi, ancak Z_L'nin Z_{Th}'nin eşleniğine eşit seçilmesiyle gerçekleşebilir. Bunun mümkün olmadığı durumlar söz konusudur. Birincisi, R_L ve X_L sınırlı değerler aralığında kısıtlanmış olabilir. Bu durumda R_L ve X_L için en iyi durum X_L'yi $-X_{Th}$'e olabildiğince yakın seçmek ve daha sonra da R_L'yi mümkün olduğunca $\sqrt{R_{Th}^2 + (X_L + X_{Th})^2}$ değerine yakın seçmektir. (Örnek 10.9'a bakınız).

İkinci tip kısıtlama ise Z_L'nin büyüklüğünün değiştirilebildiği ancak açısının değiştirilemediği durumdur. Bu kısıt altında yüke en büyük güç transferi ancak Z_L'nin büyüklüğünün Z_{Th}'nin büyüklüğüne eşit seçilmesi durumunda

$$|Z_L| = |Z_{Th}| \tag{10.50}$$

gerçekleşir. Eş. 10.50'nin ispatı Problem 10.40'ta size bırakılmıştır.

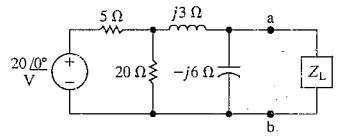
Salt direnç devrelerinde maksimum güç aktarımı ancak yük direncinin Thévenin direncine eşit seçilmesiyle gerçekleşir. Bu sonucu 4. Bölümdeki maksimum güç aktarımına giriş başlığında çıkardığımıza dikkat ediniz.

Örnek 10.8 ile 10.11 arasındaki sorularda biraz önce tartıştığımız maksimum güç aktarımına ait problemler çözülecektir.

Örnek 10.8 Yük Kısıtlamaları Olmadığında Maksimum Güç Aktarımı

a) Şekil 10.20'de gösterilen devrede Z_L empedansına maksimum güç aktarılabilmesi için Z_L'nin değerini bulunuz.

b) (a) şıkkında belirlenen yük empedansı için aktarılan maksimum güç nedir?



Şekil 10.20 ▲ Örnek 10.8'de kullanılan devre.

Çözüm

a) a ve b yük terminallerine göre Thévenin eşdeğerini belirleyerek başlarız. 5 Ω'luk ve 20 Ω'luk dirençler üzerinden iki kaynak dönüşümü yapıldığında Şekil 10.20'deki devre Şekil 10.21'deki gibi sadeleştirilir. Buradan Thévenin gerilimi

$$\mathbf{V}_{Th} = \frac{16\angle 0^\circ}{4 + j3 - j6}(-j6)$$
$$= 19.2\angle -53.13^\circ = 11.52 - j15.36 \text{ V}$$

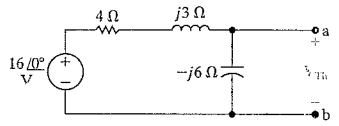
olarak bulunur. Thévenin eşdeğer empedansı bağımsız kaynak çıkarıldıktan sonra a ve b terminallerinden bakıldığında görülen empedans olarak

$$Z_{Th} = \frac{(-j6)(4 + j3)}{4 + j3 - j6} = 5.76 - j1.68\ \Omega$$

bulunur. Maksimum güç aktarımı için yük empedansı Z_{Th}'nin eşleniği olarak

$$Z_L = 5.76 + j1.68\ \Omega$$

seçilir.

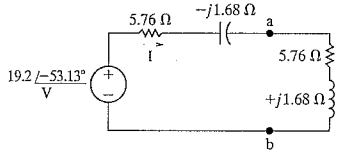


Şekil 10.21 ▲ Şekil 10.20'deki devrenin kaynak dönüşümleri ile sadeleştirilmesi.

b) Z_L'ye iletilen maksimum ortalama gücü, ilk halini, Thévenin eşdeğeriyle değiştirdiğimiz Şekil 10.22'de görülen devreyi kullanarak hesaplayabiliriz. Şekil 10.22'den yük akımının (**I**) büyüklüğü

$$I_{eff} = \frac{19.2/\sqrt{2}}{2(5.76)} = 1.1785 \text{ A}$$

olarak hesaplanır.



Şekil 10.22 ▲ Şekil 10.20'deki devrenin Thévenin eşdeğeriyle değiştirilmiş hali.

Yüke iletilen ortalama güç ise

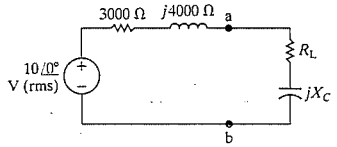
$$P = I_{eff}^2(5.76) = 8 \text{ W}$$

bulunur.

Örnek 10.9 Yük Empedans Kısıtlaması Varken Maksimum Güç Aktarımı

a) Şekil 10.23'te gösterilen devrede Z_L'nin hangi değeri için yüke maksimum güç aktarımı yapılabilir? İletilen maksimum güç miliwatt cinsinden nedir?

b) Yük direncinin 0 ile 4000 Ω ve yükün kapasitif reaktansının 0 ile –2000 Ω arasında değiştiği varsayılmıştır. R_L ve X_L'nin hangi değerleri yüke maksimum güç aktarımı sağlar? Bu kısıtlar altında gerçekleşen maksimum güç aktarımı ne kadardır?



Şekil 10.23 ▲ Örnek 10.9 ve 10.10'da kullanılan devre.

Çözüm

a) Eğer R_L ve X_L üzerinde hiçbir kısıt olmasaydı yük empedansı, çıkış veya Thévenin eşdeğerinin kompleks eşleniği olarak seçilirdi. Böylelikle

$$R_L = 3000\ \Omega \quad \text{ve} \quad X_L = -4000\ \Omega$$

veya

$$Z_L = 3000 - j4000\ \Omega$$

alırız. Kaynak gerilimi rms olarak verildiği için, Z_L'ye iletilen ortalama güç

$$P = \frac{1}{4}\frac{10^2}{3000} = \frac{25}{3}\text{ mW} = 8.33\text{ mW}$$

bulunur.

b) R_L ve X_L kısıtlandığı için, önce X_L'yi mümkün olduğunca –4000 Ω'a yakın seçmeliyiz; bu durumda $X_L = -2000\ \Omega$ olur. Daha sonra R_L mümkün olduğunca

$\sqrt{R_{Th}^2 + (X_L + X_{Th})^2}$'ye yakın seçilmelidir.

Dolayısıyla

$$R_L = \sqrt{3000^2 + (-2000 + 4000)^2} = 3605.55\ \Omega$$

seçilir.

Şimdi R_L 0 ile 4000 Ω arasında değiştiği için R_L 3605.55 Ω olarak seçilebilir. Böylece yük empedansı

$$Z_L = 3605.55 - j2000\ \Omega$$

olarak bulunur. Z_L'nin bu değeri için yük akımının değeri

$$\mathbf{I}_{eff} = \frac{10\ \angle 0^\circ}{6605.55 + j2000} = 1.4489\ \angle -16.85^\circ\text{ mA}$$

olarak hesaplanır. Buradan da iletilen ortalama güç

$$P = (1.4489 \times 10^{-3})^2(3605.55) = 7.57\text{ mW}.$$

bulunur.

Bu değer R_L ve X_L üzerinde kısıtlar varken yüke aktarılabilecek maksimum güç miktarını gösterir. Bu değerin herhangi bir kısıt olmadığı (a) şıkkındaki değerden daha küçük olduğuna dikkat edilmelidir.

Örnek 10.10 Empedans Açısı Kısıtlıyken Maksimum Güç Aktarımı

–36.87° sabit faz açısına sahip bir yük empedansı Şekil 10.23'te görülen devrenin a ve b yük terminallerine bağlanmıştır. Z_L'nin değeri verilen kısıtlar altında maksimum güç aktarımı elde etmek için değiştirilmektedir.

a) Z_L'yi Kartezyen biçimde bulunuz.

b) Z_L'ye aktarılan ortalama gücü hesaplayınız.

Çözüm

a) Eş. 10.50'den Z_L'nin büyüklüğünün Z_{Th}'nin büyüklüğüne eşit olması gerektiğini biliyoruz. Bu nedenle

$$|Z_L| = |Z_{Th}| = |3000 + j4000| = 5000\ \Omega$$

olur.

Buradan sonra Z_L'nin faz açısının –36.87° olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$Z_L = 5000\ \angle -36.87^\circ = 4000 - j3000\ \Omega$$

olarak bulunur.

b) Z_L, 4000 – j3000 Ω olarak seçildiğinde akım

$$\mathbf{I}_{eff} = \frac{10}{7000 + j1000} = 1.4142\ \angle -8.13^\circ\text{ mA}$$

olur ve yüke iletilen ortalama güç ise

$$P = (1.4142 \times 10^{-3})^2(4000) = 8\text{ mW}$$

olarak hesaplanır. Bu değer yük empedansının açısı –36.87° de sabit iken yüke dağıtılan maksimum güç değeridir. Bu değer de Z_L üzerinde herhangi bir kısıt olmadığı durumdaki değerden küçüktür.

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 2- Bir ac devrede yüke maksimum güç iletilmesi için gerekli şartların anlaşılması

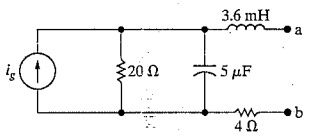
10.7 Şekildeki devrede kaynak akımının değeri 3 cos 5000 t A'dir.

a) Maksimum güç aktarımı için, a ve b terminalleri arasına ne kadarlık bir empedans bağlanmalıdır?

b) (a) şıkkındaki empedansa iletilen ortalama güç ne kadardır?

c) Yükün salt direnç olduğu varsayıldığında, a ve b terminallerine bağlanacak ne kadarlık bir direnç maksimum güç aktarımı sağlar?

d) (c) şıkkındaki dirence iletilen ortalama güç ne kadardır?



Cevap: (a) 20 – j10 Ω; (b) 18 W; (c) 22.36 Ω; (d) 17.00 W.

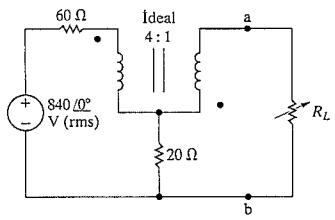
NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 10.41, 10.42 ve 10.49'u da çözmeyi deneyiniz.

Örnek 10.11 İdeal Trafolu Bir Devrede Maksimum Güç Aktarımının Bulunması

Şekil 10.24'te görülen devredeki değişken direnç R_L'ye maksimum güç iletimi için ayarlanıyor.

a) R_L'nin ohm cinsinden değeri nedir?

b) R_L'ye iletilen maksimum ortalama gücü watt cinsinden bulunuz.



Şekil 10.24 ▲ Örnek 10.11'de kullanılan devre.

Çözüm

a) Öncelikle R_L'nin terminallerine göre Thévenin eşdeğerini bulmamız gerekiyor. Açık devre gerilimini bulmak için kullanılan devre Şekil 10.25'te görülmektedir. $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{I}_1$ ve $\mathbf{I}_2$ değişkenleri tartışmayı kolaylaştırmak için eklenmiştir.

Öncelikle ideal trafo $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{I}_1$ ve $\mathbf{I}_2$ değişkenlerine aşağıdaki kısıtları

$$\mathbf{V}_2 = \frac{1}{4}\mathbf{V}_1, \qquad \mathbf{I}_1 = -\frac{1}{4}\mathbf{I}_2$$

getirir. $\mathbf{I}_2$'nin açık devre değeri sıfırdır, böylece $\mathbf{I}_1$ de sıfır olur. Bu da

$$\mathbf{V}_1 = 840\angle 0^\circ \text{ V}, \qquad \mathbf{V}_2 = 210\angle 0^\circ \text{ V}$$

sonuçlarını doğurur. Şekil 10.25'ten $\mathbf{V}_{Th}$'nin $\mathbf{V}_2$'nin negatif değerlisi olduğu görülür ve böylece

$$\mathbf{V}_{Th} = -210\angle 0^\circ \text{ V}$$

olur. Şekil 10.26'daki devre ise kısa devre akımlarını bulmak için kullanılır. $\mathbf{I}_1$ ve $\mathbf{I}_2$ ağ akımları olarak alındığında bu ağ akımları

$$840\angle 0^\circ = 80\mathbf{I}_1 - 20\mathbf{I}_2 + \mathbf{V}_1,$$

$$0 = 20\mathbf{I}_2 - 20\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_2$$

olarak bulunur. Bu iki ağ akımı eşitliği kısıt eşitlikleriyle birleştirildiğinde

$$840\angle 0^\circ = -40\mathbf{I}_2 + \mathbf{V}_1,$$

$$0 = 25\mathbf{I}_2 + \frac{\mathbf{V}_1}{4}$$

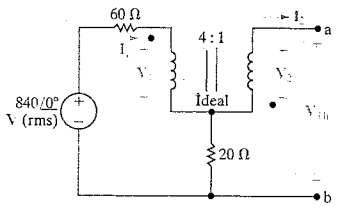
elde edilir. $\mathbf{I}_2$'nin kısa devre değeri çözüldüğünde

$$\mathbf{I}_2 = -6 \text{ A}$$

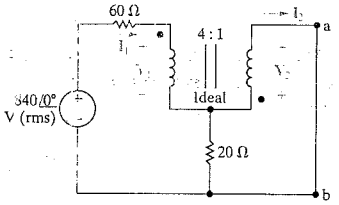
olarak elde edilir. Böylece Thévenin direnci

$$R_{Th} = \frac{-210}{-6} = 35\ \Omega$$

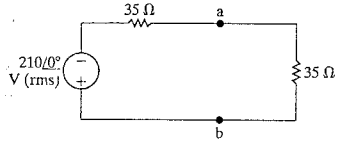
olarak bulunur. $R_L = 35\ \Omega$ olduğunda kendisine maksimum güç aktarılır.



Şekil 10.25 Thévenin gerilimini bulmak için kullanılan devre.



Şekil 10.26 Kısa devre akımını bulmak için kullanılan devre.



Şekil 10.27 Maksimum güç aktarımı için yüklenen Thevenin eşdeğeri.

b) R_L'ye iletilen maksimum gücü, Thévenin eşdeğerlerini kullanarak bulmak çok kolaydır. Şekil 10.27'de kullanılan devreden maksimum güç

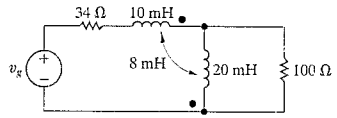
$$P_{max} = \left(\frac{-210}{70}\right)^2(35) = 315 \text{ W}$$

olarak bulunur.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 3 Doğrusal ve ideal trafolu ac devrelerde her çeşit ac gücün hesaplanabilmesi

10.8 Şekilde gösterilen devredeki 100 Ω'luk dirence iletilen ortalama gücü $v_g = 660 \cos 5000t$ V iken hesaplayınız.

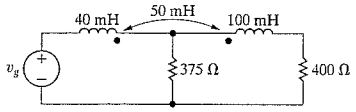


Cevap: 612.5 W

10.9 a) Şekilde gösterilen 400 Ω'luk dirence iletilen ortalama gücü, $v_g = 248 \cos 10{,}000t$ V iken hesaplayınız.

b) 375 Ω dirence iletilen maksimum gücü bulunuz.

c) İdeal gerilim kaynağınca sağlanan gücü bulunuz. Üretilen gücün harcanana eşit olduğunu göstererek sonuçlarınızı kontrol ediniz.



Cevap: (a) 50 W;
(b) 49.2 W;
(c) 99.2 W, 50 + 49.2 = 99.2 W.

10.10 Örnek 10.11'i a terminalindeki kutupluk noktası üstte iken yeniden çözünüz.

Cevap: (a) 15 Ω;
(b) 735 W.

10.11 Örnek 10.11'i gerilim kaynağı 146 ∠0°'ye düşürüldüğü ve sarım oranı 1:4 olacak biçimde ters döndürüldüğü durum için yeniden çözünüz.

Cevap: (a) 1460 Ω;
(b) 58.4 W.

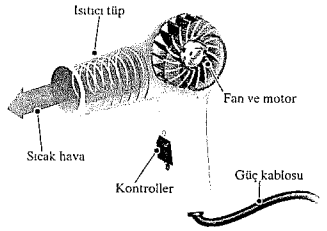
NOT: Bölüm Problemleri 10.44, 10.45, 10.58 ve 10.59'u da çözünüz.

Pratik Bakış Açısı

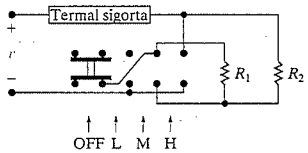
Isıtıcı Gereçler

Bir el tipi saç kurutma makinası, üzerinden geçen sinüzoidal akımla ısınan sade bir dirençten meydana gelen bir ısıtıcı eleman içerir. Ayrıca direnç etrafında ısınan havayı öne doğru iten bir fana da sahiptir. Bunlar Şekil 10.28'de şematik olarak gösterilmiştir. Bu şekildeki ısıtıcı tüp Nikel-krom tel yaydan yapılmış bir dirençtir. Nikel-krom, demir, krom ve nikelden oluşturulmuş bir alaşımdır. Bu alaşımın ısıtıcılarda kullanılmasını sağlayan iki özelliği vardır: Birincisi diğer tüm metallerden daha dirençlidir, bu yüzden istenilen direnci elde etmek için daha az madde kullanılır. Bu da ısıtıcının küçük yapılabilmesini sağlar. İkinci ise, diğer metallerin aksine krom-nikel kızaracak kadar ısıtıldığında havaya oksitlenmez. Bu da ısıtıcı elemanının ömrünü uzatır.

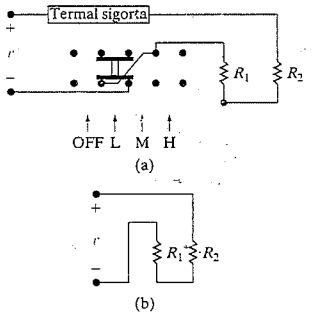
Saç kurutma makinası kontrollerinin devre şeması Şekil 10.29'da gösterilmiştir. Bu da size ısı ayarlamalarında kontrol sahibi olabilmeniz için saç kurutma makinası üzerinde verilen tek bölgedir. Devrenin geri kalan kısmı fan motorunu kontrol etmek için güç verir ancak burada onunla ilgilenmeyeceğiz. Isıtıcı tüpü oluşturan sarımlı telin üzerinde teli ikiye bölen bir iz vardır. Biz bunu Şekil 10.29'daki gibi iki seri direnç (R_1 ve R_2) olarak modelleyebiliriz. Kurutma makinası-



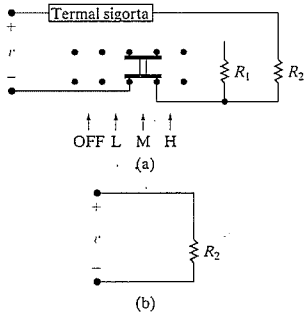
Şekil 10.28 El tipi saç kurutma makinasının şematik gösterimi.



Şekil 10.29 ▲ Saç kurutma makinası kontrolleri için devre şeması.



Şekil 10.30 ▲ DÜŞÜK anahtar ayarı için Şekil 10.29'un yeniden çizilmiş hali: (b) a'daki devrenin sadeleştirilmiş hali.

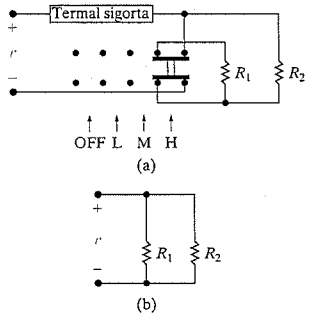


Şekil 10.31 ▲ (a) ORTA anahtar ayarı için Şekil 10.29'un yeniden çizilmiş hali. (b) a'daki devrenin sadeleştirilmiş hali.

nı çalıştıracak ve sıcaklık ayarını seçecek dört konumlu bir anahtar, devrenin iki terminal ucunu kısa devre yapacak bir metal bar üzerinde kaymaktadır. Anahtarın konumu devrenin hangi terminal çiftinin kısa devre olduğunu belirler. Bu metal barların arasında bir yalıtkan vardır, böylece kısa devre yapılan uçlar arasında herhangi bir iletim yoktur.

Şekil 10.29'daki devrede bir termal sigorta vardır. Bu normal zamanda kısa devre olarak davranan bir koruyucu elemandır. Eğer ısıtıcının etrafındaki sıcaklık tehlikeli olacak biçimde artarsa bu termal sigorta açık devre olur ve akımın akmasını durdurur, böylece yangın ve yaralanma riskini düşürür. Bu termal sigorta, fon motoru durduğunda veya hava akımı engellendiğinde koruma sağlar. Koruma sisteminin tasarlanması bu örneğin bir parçası olmamakla birlikte, elektrik mühendislerinin çalışmasında güvenlik analizinin önemli bir yer kapladığını belirtmek gerekir.

Şimdiye kadar saç kurutma makinasının kontrollerini modelledik. Şimdi üç anahtarlı durum için devre elemanlarını belirleyelim. Başlamak için öncelikle Şekil 10.29'daki devrenin DÜŞÜK anahtar ayarı için Şekil 10.30a'da yeniden çizilmesi gerekir. Açıklık için açık devre olan teller kaldırılmış ve sadeleştirilmiş eşdeğer devre Şekil 10.30(b)'de gösterilmiştir. Benzer şekil çiftleri ORTA anahtar ayarı için Şekil 10.31'de YÜKSEK anahtar ayarı için ise şekil 10.32'de verilmiştir. Bu üç şekilden DÜŞÜK ayar için gerilim kaynağı R_1 ve R_2 dirençlerini seri, ORTA ayar için sadece R_2 direncini ve YÜKSEK ayar için ise aynı dirençleri paralel olarak görür.



Şekil 10.32 ▲ (a) YÜKSEK anahtar ayarı için Şekil 10.29'un yeniden çizilmiş hali. (b) a'daki devrenin sadeleştirilmiş hali.

NOT: Bu Pratik Bakış Açısını kavrayışınızı Bölüm Problemleri 10.66–10.68'i çözerek değerlendiriniz.

Özet

- **Anlık güç,** anlık terminal gerilim ve akımının çarpımına yani $p = \pm vi$'ye eşittir. Artı işareti, akımın referans yönünün, gerilimin pozitif kutupluk referansından negatifine doğru olduğunda kullanılır. Anlık gücün frekansı gerilimin veya akımın frekansının iki katıdır.

- **Ortalama güç,** anlık gücün bir periyot boyunca ortalamasıdır. Ortalama güç elektrikten elektriksel olmayan enerji türüne (ya da tam tersi) dönüştürülen güçtür. Ortalama güce aynı zamanda gerçek güç de denmesinin nedeni de işte bu çevrimdir. Pasif işaret uzlaşımına göre ortalama güç

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)$$
$$= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

biçiminde tanımlanır. (Sayfa 394'e bakınız)

- **Reaktif Güç,** bir indüktörün manyetik alanı ile onu süren kaynak arasındaki elektrik gücü değişimidir. Pasif işaret uzlaşımına göre reaktif güç

$$Q = \frac{1}{2}V_m I_m \sin(\theta_v - \theta_i)$$
$$= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\theta_v - \theta_i)$$

biçiminde tanımlanır. Ortalama gücün ve reaktif gücün ikisi birden tepe değerler (V_m, I_m) cinsinden ya da etkin değerler (V_{eff}, I_{eff}) cinsinden tanımlanabilir. Etkin değerler evlerde ve endüstriyel uygulamalarda sıklıkla kullanılır. Etkin değer ve rms değer birbirlerinin cinsine çevrilebilirler.

- **Güç çarpanı,** gerilim ile akım arasındaki faz açısının kosinüsüdür.

$$\text{pf} = \cos(\theta_v - \theta_i).$$

- Güç çarpanı tanımına ileri ve geri terimlerinin eklenmesi akımın gerilimin ilerisinde mi yoksa gerisinde mi olduğunu belirtmek böylece yükün endüktif mi yoksa kapasitif mi olduğunu anlatmak için kullanılır. (Sayfa 396'ya bakınız.)

- **Reaktif çarpan** ise gerilim ile akım arasındaki faz açısının sinüsü olarak tanımlanır.

$$\text{rf} = \sin(\theta_v - \theta_i).$$

(Sayfa 396'ya bakınız)

- **Kompleks güç,** gerçek ve reaktif güçlerin kompleks toplamına eşittir.

$$S = P + jQ$$
$$= \frac{1}{2}\mathbf{V}\mathbf{I}^* = \mathbf{V}_{\text{eff}}\mathbf{I}^*_{\text{eff}}$$
$$= I^2_{\text{eff}} Z = \frac{V^2_{\text{eff}}}{Z^*}.$$

(Sayfa 401'e bakınız.)

- **Görünür Güç,** kompleks gücün büyüklüğüdür.

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

(Sayfa 401'e bakınız.)

- **Watt** birimi anlık gücün ve gerçek gücün ikisi için de kullanılır. **VAR** (volt amper reaktif) birimi reaktif güç için kullanılır. **Volt-amp** (VA) birimi ise kompleks ve görünür güç için kullanılır. (Sayfa 401'e bakınız.)

- **Maksimum güç aktarımı** ise sinüzoidal durgun durumda çalışan devrelerde, yük empedansının, yükün terminallerinden görülen Thévenin eşdeğer empedansın eşleniğine eşit seçilmesiyle gerçekleşir (Sayfa 410'a bakınız).

Problemler

Kısım 10.1-10.2

10.1 Eş. 10.9'da verilen anlık gücün maksimum değerinin $P + \sqrt{P^2 + Q^2}$ ve minimum değerinin $P - \sqrt{P^2 + Q^2}$ olduğunu gösteriniz.

10.2 Aşağıdaki v ve i değer kümeleri Şekil 10.1'de görülen devreye aittir. Her bir küme için P ve Q değerlerini hesaplayınız ve devrenin içindeki kutunun çektiği ya da ilettiği (1) ortalama gücü ve (2) reaktif gücü belirtiniz.

a) $v = 340\cos(\omega t + 60°)$ V,
$i = 20\cos(\omega t + 15°)$ A.

b) $v = 75\cos(\omega t - 15°)$ V,
$i = 16\cos(\omega t + 50°)$ A.

c) $v = 625\cos(\omega t + 40°)$ V,
$i = 4\sin(\omega t + 240°)$ A.

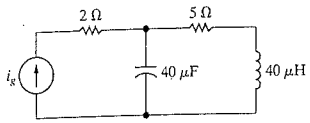
d) $v = 180\sin(\omega t + 220°)$ V,
$i = 10\cos(\omega t + 20°)$ A.

10.3 a) Bir üniversite öğrencisi kahve yaptığı sırada radyo da dinlemektedir. Aynı zamanda oda arkadaşı da yarı iletken televizyonda futbol maçı seyretmektedir. Tüm bu gereçler 20 A'lik sigortaya sahip 120 V'luk bir daldan beslenmektedir. Eğer oda arkadaşı bir elektrikli ısıtıcı çalıştırırsa sigorta atar mı?

b) Eğer kahve makinası fişten çekilirse oda arkadaşı ısıtıcıyı kullanabilir mi?

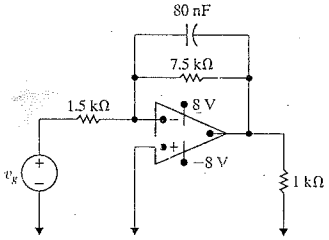
10.4 PSPICE Eğer Şekil P10.4'te gösterilen devredeki ideal akım kaynağının değeri $i_g = 30\cos 25{,}000t$ mA ise iletilen ortalama gücü bulunuz.

Şekil P10.4



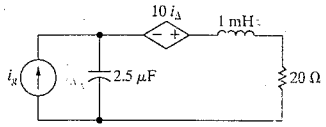
10.5 PSPICE Şekil P10.5'te gösterilen devredeki op amp idealdir. 1 kΩ'luk dirence iletilen gücü $v_g = 4\cos 5000t$ V iken hesaplayınız.

Şekil P10.4



10.6 PSPICE Şekil P10.6'da görülen devredeki 20 Ω'luk direncin harcadığı ortalama gücü $i_g = 15\cos 10{,}000t$ A iken hesaplayınız.

Şekil P10.6

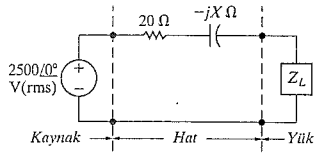


10.7 Şekil P10.7'deki yük empedansı 40 kW ve 30 kvar çekmektedir. Sinüzoidal gerilim kaynağı ise 50 kW iletmektedir.

a) Bu koşulları sağlayan hat kapasitif reaktans değerlerini bulunuz.

b) (a) şıkkında bulunan her bir hat reaktans değeri için üretilen ve soğurulan reaktif güçlerin eşit olduğunu gösteriniz.

Şekil P10.7



10.8 1350 Ω'luk bir dirence paralel 405 mH'lık bir indüktörden oluşan bir yük, $v_g = 90\cos 2500t$ V değerli bir sinüzoidal gerilim kaynağının terminallerine bağlanıyor.

a) Kaynağın ilettiği anlık gücün tepe değeri nedir?

b) Kaynağın çektiği anlık gücün tepe değeri nedir?

c) Yüke iletilen ortalama güç nedir?

d) Yüke iletilen reaktif güç nedir?

e) Bu yük reaktif güç çeker mi üretir mi?

f) Yükün güç çarpanı nedir?

g) Yükün reaktif çarpanı nedir?

10.9 a) Şekil P9.56'daki devredeki her bir devre elemanı için gerçek ve reaktif gücü hesaplayınız.

b) Üretilen ortalama gücün harcanan ortalama güce eşit olduğunu doğrulayınız.

c) Üretilen ve harcanan reaktif gücün eşit olduğunu doğrulayınız.

10.10 Problem 10.9'u Şekil P9.57'deki devre için tekrarlayınız.

Kısım 10.3

10.11 V_{dc} V değerine sahip bir dc gerilim R Ω dirence uygulanmıştır. v_s V değerine sahip sinüzoidal gerilim de R Ω direncine uygulanmaktadır. Eğer V_{dc} v_s'nin rms değerine eşitse, dc gerilim T saniyede (T sinüzoidal gerilimin periyodudur) sinüzoidal gerilim kadar enerji ilettiğini gösteriniz. (*İpucu:* Dirence iletilen enerji miktarlarını eşitleyiniz).

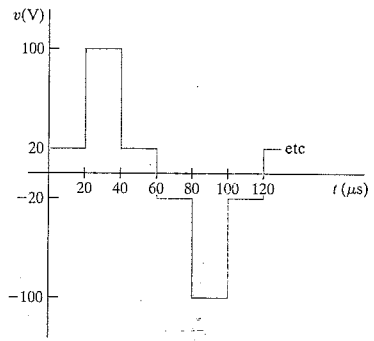
10.12 a) Bir kişisel bilgisayar monitörü ve klavyesi ile birlikte 110 V'ta 60 W güce ihtiyaç duymaktadır. Bilgisayarın kablosunun taşıdığı rms akım değerini hesaplayınız.

b) Bir lazer yazıcı 110 V'ta 80 W olarak sınıflandırılmıştır. Eğer bu yazıcı, bilgisayarla aynı prize takılırsa bu prizden çekilen rms akım değeri nedir?

10.13 a) Şekil P10.13'te gösterilen periyodik gerilimin rms değerini bulunuz.

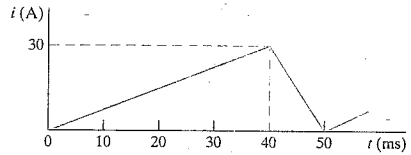
b) Eğer bu gerilim 12 Ω'luk bir direncin uçlarına bağlanırsa, bu dirence iletilen ortalama güç nedir?

Şekil P10.13



10.14 Şekil P10.14'te gösterilen periyodik akımın rms değerini hesaplayınız.

Şekil P10.14

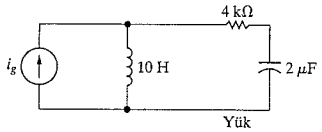


10.15 Şekil P10.14'te gösterilen periyodik akım bir dirence 24 kW'lık bir ortalama güç aktarmaktadır. Bu direncin değeri nedir?

Kısım 10.4-10.5

10.16 PSPICE Şekil P10.16'da verilen devredeki i_g 30 cos 100t mA ise, yükün çektiği ortalama gücü, reaktif gücü ve görünür gücü bulunuz.

Şekil P10.16

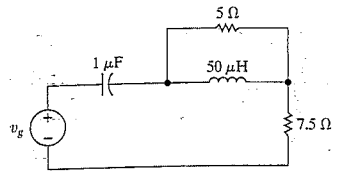


10.17 PSPICE a) Şekil P10.17'deki devre için $v_g = 50 \cos 10^5 t$ V ise ortalama gücü reaktif gücü ve görünür gücü bulunuz.

b) (a) şıkkındaki cevaplarınızı $P_{dev} = \sum P_{abs}$ olduğunu göstererek kontrol ediniz.

c) (a) şıkkındaki cevaplarınızı $Q_{dev} = \sum Q_{abs}$ olduğunu göstererek kontrol ediniz.

Şekil P10.17



10.18 Şekil P10.18'deki frekans bölgesi devresi için $\mathbf{V}_g$ gerilimi $340\angle 0°$ V (rms)'tir

a) Gerilim kaynağı için ortalama ve reaktif gücü bulunuz.

b) Bu gerilim kaynağı ortalama güç çekmekte mi yoksa iletmekte midir?

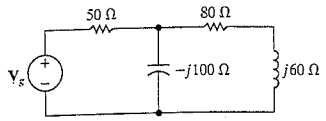
c) Bu gerilim kaynağı reaktif güç çekmekte mi yoksa iletmekte mıdır?

d) Devrdeki her bir empedans dalı için ortalama gücü ve reaktif gücü bulunuz.

e) İletilen ve çekilen ortalama güç dengesini kontrol ediniz.

f) İletilen ve çekilen reaktif güç dengesini kontrol ediniz.

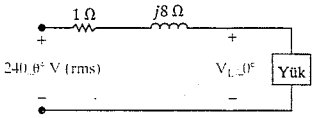
Şekil P10.18



10.19 a) Şekil P10.19'daki devre 0.6 geri güç çarpanı ile 250 VA güç çekiyorsa V_L(rms) ve θ'yı bulunuz.

b) (a) şıkkındaki her çözüm için bir fazör diyagramı oluşturunuz.

Şekil P10.19



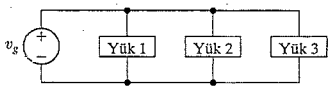
10.20 İki tane 660 V(rms)'lik yük paralel bağlanmıştır. Bu iki yük 0.8 ileri güç çarpanında toplam 52 800 W güç çekmektedir. Yüklerden biri 0.96 geri güç çarpanında 40 kVA güç çekiyor ise diğer yükün güç çarpanı nedir?

10.21 Şekil P10.21'deki üç yük şu şekilde tanımlanıyor: Yük 1, 12 Ω'luk direnç ile seri 15 mH'lik bir indüktör; yük 2, 16 μF'lık bir kapasitör ile seri 80 Ω'luk bir direnç; yük 3 ise 20 H'lık indüktör ve 5 μF'lık kapasitörün paralel birleşiminin 400 Ω'luk dirençle seri bağlanmasıyla elde edilmiştir. Güç kaynağının frekansı 60 Hz'tir.

a) Her yük için güç ve reaktif çarpan değerlerini bulunuz.

b) Güç kaynağı tarafından görülen toplam yük için güç ve reaktif çarpan değerlerini bulunuz.

Şekil P10.21

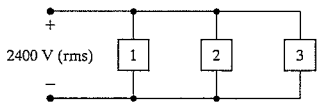


10.22 Şekil P10.22'de görüldüğü gibi üç tane yük 2400 V'luk hatta paralel bağlanmıştır. Yük 1, 18 kW ve 124 kVAR çekmektedir. Yük 2, 0.6 ileri güç çarpanında 60 kVA çekmektedir. Yük 3 ise güç çarpanı 1 iken 18 kW güç çekmektedir.

a) Bu paralel üç yüke eşdeğer empedansı bulunuz

b) Hattın uçları arasından görülen eşdeğer yük için güç çarpanını bulunuz.

Şekil P10.22



10.23 Problem 10.22'deki üç yük, 0.2 + j1.6 Ω'lık empedansa sahip bir hattan beslenmektedir.

a) Hattın gönderim ucundaki gerilimin ($\mathbf{V}_s$) rms değerini hesaplayınız.

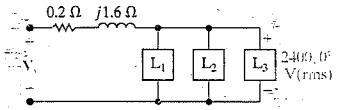
b) Yük empedansı için ortalama ve reaktif güç değerlerini hesaplayınız.

c) Hattın gönderim ucundaki ortalama ve reaktif güç değerlerini hesaplayınız.

d) Hattın verimliliğini hesaplayınız. Verimlilik aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

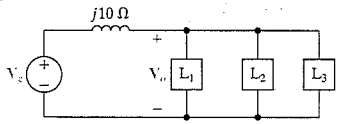
$$\eta = (P_{load}/P_{sending\ end}) \times 100.$$

Şekil P10.23



10.24 Şekil P10.24'teki üç yük şu şekilde tanımlanmaktadır. Yük 1, 24 kW ortalama güç ve 18 kVAR reaktif güç çekmekte; yük 2, 48 kW ortalama güç çekmekte ve 30 kVAR reaktif güç vermekte; yük 3 ise 60 Ω'luk direncin 480 Ω'luk bir endüktif reaktansla paralelinden oluşmaktadır. $\mathbf{V}_o$ gerilimi $2400\angle 0°$ (rms) ise $\mathbf{V}_g$ gerilimin rms büyüklüğünü ve faz açısını hesaplayınız.

Şekil P10.24



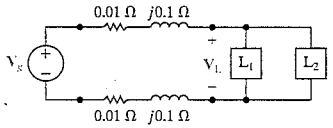
10.25 Şekil P10.25'teki iki yük şu şekilde tanımlanmaktadır. Yük 1, 24.96 kW ortalama güç ve 47.04 kVAR reaktif güç çekmektedir. Yük 2 ise 5 − j5 Ω'luk bir empedansa sahiptir. Yüklerin terminalleri arasındaki gerilim ise $480\sqrt{2}\cos 120\pi t$ V'tur.

a) Kaynak geriliminin rms değerini bulunuz.

b) Yük gerilimi ile kaynak gerilimi arasında kaç mikrosaniye faz farkı vardır?

c) Yük gerilimi kaynak geriliminin ilerisinde midir? Gerisinde midir?

Şekil P10.25

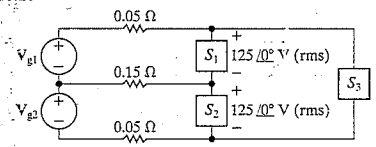


10.26 Şekil P10.26'daki üç yüke ait güç değerleri şöyledir: $S_1 = 5 + j2$ kVA, $S_2 = 3.75 + j1.5$ kVA ve $S_3 = 8 + j0$ kVA.

a) Her bir güç kaynağının kompleks gücünü hesaplayınız.

b) Kaynakların ilettiği toplam gerçek ve reaktif gücün devre tarafından çekilen toplam gerçek ve reaktif güce eşit olduğunu doğrulayınız.

Şekil P10.26



10.27 Şekil P10.27'deki üç yük şu şekilde tanımlanmaktadır: Yük 1, 1.8 kW ve 600 VAR çekmekte; yük 2, 0.8 ileri güç çarpanında 1.5 kVA güç çekmekte ve yük 3 ise 12 Ω'luk bir direncin 48 Ω'luk indüktörle paralel bağlanmasıyla oluşmuştur.

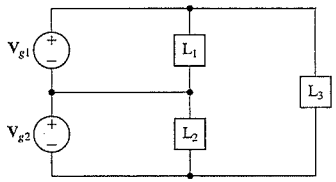
a) Eğer $\mathbf{V}_{g1} = \mathbf{V}_{g2} = 120\angle 0°$ V ise her bir kaynağın dağıttığı ortalama gücü ve reaktif gücü hesaplayınız.

b) Sonuçlarınızın tutarlılığını aşağıdaki eşitliklerle karşılaştırarak kontrol ediniz.

$$\sum P_{dev} = \sum P_{abs}$$

$$\sum Q_{dev} = \sum Q_{abs}.$$

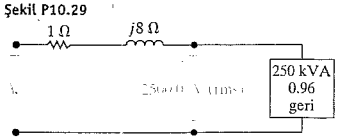
Şekil P10.27



10.28 Şekil P10.27'de gösterilen devrenin bir konutun elektrik dağıtım devresi olduğunu ve dağıtım elemanlarının empedansının ihmal edildiğini varsayınız. Devrede $\mathbf{V}_{g1} = \mathbf{V}_{g2} = 120\ \underline{/0^\circ}$ V (rms)'dir. Bu üç yük, L_1 (kahve makinası, kızartma tenceresi-Firitöz ve yumurta pişirici), L_2 (saç kurutma makinası, ışıldak, fan ve otomatik çamaşır makinası) ve L_3'tür (su ısıtıcısı ve ocaklı fırın). Tüm bu ev gereçlerinin hepsinin aynı anda çalıştığını varsayınız. Servis iletkenleri 100 A'lik bir sigorta ile korunmaktadır. Bu verilen elektrik servisi kesintiye uğrar mı? (Sigorta atar mı?)

10.29 Şekil P10.29'da görülen devrede yük ile hattın gönderim ucu arasında durgun durumdaki gerilim düşüşü haddinden fazladır. 250 kVA'lık yüke paralel bir kapasitör yerleştirilerek durgun durumda hattın gönderim ucundaki gerilim, yükün üzerindeki 2500 V(rms) gerilime eşit olana kadar bu kapasitör ayarlanmaktadır. 250 kVA'lık yük 0.96 geri güç çarpanında çalışmaktadır. Eğer bu devre 60 Hz'te çalışıyorsa, bu kapasitörün büyüklüğünü mikrofarad cinsinden hesaplayınız. Kapasitörü seçerken hattaki kaybı makul bir seviyede tutmayı aklınızda tutunuz.

Şekil P10.29



10.30 a) Şekil P10.30'daki hatta harcanan ortalama gücü bulunuz.

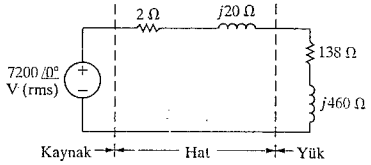
b) Yüke paralel bağlanarak, yükün salt direnç görünmesini sağlayacak kapasitif reaktansı bulunuz.

c) (b) şıkkındaki yükün eşdeğer empedansı nedir?

d) Yüke paralel kapasitif reaktans bağlandığı zaman hatta harcanan ortalama gücü bulunuz.

e) (d) şıkkında bulduğunuz kaybı (a) şıkkında bulduğunuz kaybın yüzdesi olarak ifade ediniz.

Şekil P10.30



10.31 Bir grup küçük ev aleti 60 Hz'te 0.96 geri güç çarpanında 25 kVA'e ihtiyaç duymaktadır. Bu gereçleri süren besleyicinin empedansı 0.006 + j0.048 Ω'dur. Yük ucundaki gerilim 125 V (rms)'dir.

a) Besleyicinin ucundaki gerilimin rms büyüklüğü nedir?

b) Besleyicideki ortalama güç kaybı nedir?

c) Yükün güç çarpanını bir yapabilmek için besleyicinin yük ucuna ne kadarlık bir kapasitör (mikroforad cinsinden) bağlamamız gerekir?

d) Kapasitör yerleştirildikten sonra yük geriliminin 125 V (rms)'ta kalabilmesi için besleyicinin kaynak tarafındaki gerilim kaç olmalıdır?

e) (d) şıkkında ortalama güç kaybı ne kadardır?

10.32 Bir fabrika 0.6 geri güç çarpanında 1800 kW elektrik yüküne sahiptir. Buna ek olarak değişken güç çarpanlı bir yük eklenecektir. Yeni yük fabrikanın gerçek yükünü 600 kW artıracaktır. Eklenen yükün güç çarpanı fabrikanın genel güç çarpanını 0.96 geri olacak şekilde ayarlanmıştır.

a) Eklenen yükteki reaktif gücü bulunuz.

b) Eklenen yük reaktif var çekmekte midir? Yoksa iletmekte midir?

c) Eklenen yükün güç çarpanı nedir?

d) Fabrikanın girişindeki gerilimin 4800 V (rms) olduğunu varsayalım. Değişken güç çarpanlı yük eklenmeden önce fabrikaya giren akımın büyüklüğü (rms) nedir?

e) Değişken güç çarpanlı yük eklendikten sonra fabrikaya giren akmın rms büyüklüğü nedir?

10.33 Problem 10.32'de bahsedilen fabrikanın 002 + j0.16 Ω empedansa sahip bir hattan beslendiğini varsayalım. Fabrikadaki gerilim ise 4800 V (rms) ta tutulmaya devam edilmektedir.

a) Yük eklenmeden önceki ve eklendikten sonraki ortalama güç kayıplarını bulunuz.

b) Yük eklenmeden önceki ve eklendikten sonraki hattın gönderim ucundaki gerilim büyüklüğünü bulunuz.

10.34 Problem 9.76'daki devreyi göz önüne alarak

a) Yük empedansının uçları arasındaki gerilimin rms cinsinden büyüklüğü nedir?

b) Kaynak tarafından iletilen gücün yüzde kaçı yük empedansına iletilmiştir?

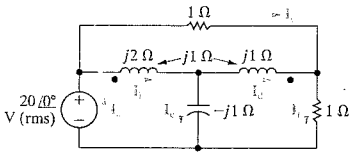
10.35 a) Şekil P10.35'te görülen devredeki altı dal akımını ($\mathbf{I}_a - \mathbf{I}_f$) bulunuz.

b) Devrenin her bir dalındaki kompleks gücü bulunuz.

c) Harcanan ortalam gücün, üretilen ortalama güce eşit olduğunu doğrulayarak hesaplamalarınızı kontrol ediniz.

d) Üretilen reaktif var'ın dağıtılan reaktif var'a eşit olduğunu doğrulayarak hesaplamalarınızı kontrol ediniz.

Şekil P10.30



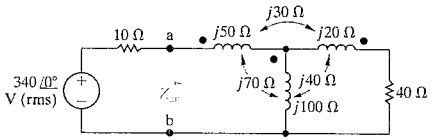
10.36 a) Şekil P10.36'da görülen devredeki 40 Ω'luk dirence iletilen ortalama gücü bulunuz.

b) İdeal sinüzoidal gerilim kaynağı tarafından iletilen ortalama gücü bulunuz.

c) Z_{ab}'yi bulunuz.

d) Üretilen ortalama gücün iletilen ortalama güce eşit olduğunu gösteriniz.

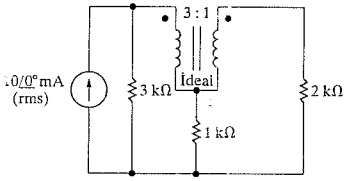
Şekil P10.36



10.37 a) Şekil P10.37'de görülen devredeki sinüzoidal akım kaynağı tarafından iletilen ortalama gücü bulunuz.

b) 1 kΩ'luk dirence iletilen ortalama gücü bulunuz.

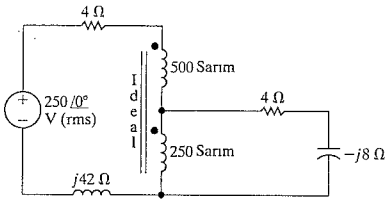
Şekil P10.37



10.38 a) Şekil P10.38'deki her bir dirençte harcanan ortalama gücü bulunuz.

b) Toplam üretilen gücün, toplam çekilen güce eşit olduğunu göstererek cevabınızı kontrol ediniz.

Şekil P10.38



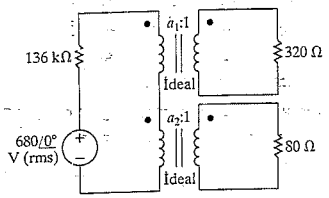
10.39 Şekil P10.39'da görülen devredeki sinüzoidal gerilim kaynağı 680 V (rms)'lik gerilim vermektedir. 80 Ω'luk yük 320 Ω'luk yükün çektiği yükten 16 kat fazla güç çekmektedir. Her iki yük de iç empedansı 136 $\angle 0^\circ$ kΩ olan sinüzoidal kaynak ile uyumludur.

a) a_1 ve a_2'nin nümerik değerlerini bulunuz.

b) 80 Ω'luk dirence iletilen gücü hesaplayınız.

c) 320 Ω'luk direncin üzerindeki gerilimin rms değerini hesaplayınız.

Şekil P10.39



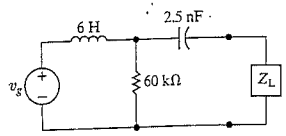
Kısım 10.6

10.40 Eğer sadece yük empedansı büyüklüğü değiştirilebiliyorsa, yüke en çok güç aktarımının $|Z_L| = |Z_{Th}|$ olduğu zaman yapıldığını ispatlayınız. (*İpucu*: Ortalama yük gücü ifadesi çıkarılırken (Z_L) yük empedansını $Z_L = |Z_L| \cos\theta + j|Z_L| \sin\theta$ biçiminde yazınız, sadece $|Z_L|$'nin değişebildiğini göz önüne alınız.)

10.41 a) Şekil P10.41'deki devrede ω = 10 krad/s iken yüke maksimum ortalama güç aktarımının yapıldığı yük empedansını bulunuz.

b) $v_g = 90 \cos 10{,}000t$ V ise (a) şıkkındaki yüke iletilen maksimum ortalama gücü bulunuz.

Şekil P10.41

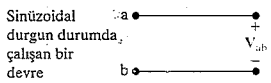


10.42 a, b uçları arasına herhangi bir dış yük bağlanmadığı zaman, Şekil P10.42'de gösterilen devredeki fazör gerilimin $\mathbf{V}_{ab} = 480\angle 0^\circ$ V(rms) olduğu biliniyor. a, b terminallerine 100 + j100 Ω'luk bir empedans bağlandığında, $\mathbf{V}_{ab}$'nin değeri 240 – j80 V (rms) olmuştur.

a) Maksimum güç aktarımı için, a, b uçları arasına bağlanacak empedansı bulunuz.

b) (a) şıkkında bulduğunuz yük için maksimum ortalama gücü bulunuz.

Şekil P10.42

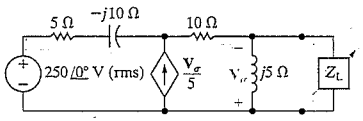


10.43 Şekil P10.43'te gösterilen devredeki Z_L yük empedansı kendisine maksimum güç iletilecek biçimde ayarlanmıştır.

a) Z_L'ye iletilen maksimum gücü bulunuz.

b) Devrede üretilen enerjinin yüzde kaçı Z_L'ye iletilmiştir?

Şekil P10.43



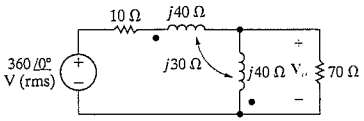
10.44 Şekil P10.44'teki frekans bölgesi devresi için aşağıdakileri hesaplayınız.

a) $\mathbf{V}_o$'nun rms büyüklüğü,

b) 70 Ω'luk dirençte harcanan ortalama güç,

c) ideal gerilim kaynağı tarafından üretilen enerjinin yüzde kaçının 70 Ω'luk dirence iletildiği.

Şekil P10.44



10.45 Şekil P10.44'teki 70 Ω'luk direnç Z_o, kendisine maksimum ortalama güç iletilecek biçimde ayarlanmıştır.

a) Z_o'ya iletilecek maksimum ortalama güç nedir?

b) Z_o'ya maksimum güç iletildiği zaman, ideal gerilim kaynağının ilettiği ortalama güç ne kadardır?

10.46 Şekil P9.74'te gösterilen devredeki c, d uçları arasına devrenin Thévenin empedansının eşleniğine eşit bir empedans bağlanmıştır.

a) Sinüzoidal gerilim kaynağı tarafından üretilen ortalama gücü bulunuz.

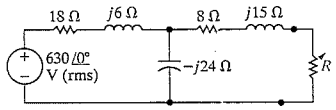
b) Kaynak tarafından üretilen gücün yüzde kaçı doğrusal trafoda kaybolmuştur?

10.47 Şekil P10.47'de gösterilen devredeki değişken direnç maksimum güç çekecek biçimde ayarlanmıştır.

a) R'yi bulunuz.

b) Maksimum ortalama gücü bulunuz.

Şekil P10.47



10.48 Şekil P10.48'de gösterilen devredeki değişken R_o direnci, kendisine maksimum güç iletilene kadar ayarlanmıştır.

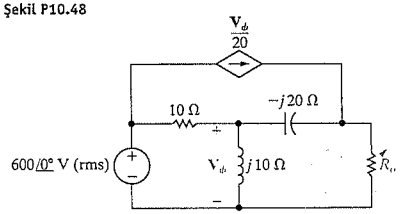
a) R_o'nun ohm cinsinden değeri nedir?

b) R_o'ya iletilen ortalama gücü hesaplayınız.

c) Eğer R_o, değişken Z_o empedansıyla değiştirilirse, Z_o'ya iletilebilecek maksimum ortalama güç ne kadardır?

d) (c) şıkkında devre tarafından üretilen gücün yüzde kaçı Z_o'ya iletilmiştir?

Şekil P10.48



10.49 PSPICE Şekil P10.49'da görülen devredeki sinüzoidal gerilim kaynağının tepe genlik değeri $150\sqrt{2}$ V ve periyodu da 200π μs'dır. Yük direnci 0 ile 20 Ω arasında ve yük indüktörü ise 1 ve 8 mH arasında değişebilmektedir.

a) R_o = 10 Ω ve L_o = 6 mH iken yüke iletilen ortalama gücü hesaplayınız.

b) R_o direncine en çok ortalama güç iletilmesini sağlayacak R_o ve L_o değerlerini belirleyiniz.

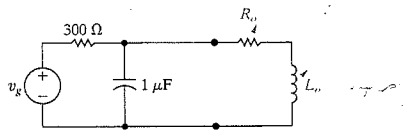
c) (b) şıkkındaki maksimum güç ne kadardır? (a) şıkkındaki güçten büyük müdür?

d) Eğer R_o ve L_o üzerinde herhangi bir kısıtlama olmasaydı, yüke aktarılabilecek maksimum ortalama güç ne kadardır?

e) (d) şıkkındaki durum için R_o ve L_o değerleri nedir?

f) (d) şıkkında hesaplanan ortalama güç (c) şıkkında hesaplanandan büyük müdür?

Şekil P10.49



10.50 PSPICE a) Şekil P10.49'daki R_o direncinin 0 ile 50 Ω arasında değiştiğini varsayınız ve Problem 10.49'un (b) ve (c) şıklarını tekrarlayınız.

b) (a) şıkkında hesaplanan yeni ortalama güç, Problem 10.49(a)'da hesaplanandan büyük müdür?

c) (a) şıkkında hesaplanan yeni ortalama güç 10.49(d)'dekinden küçük müdür?

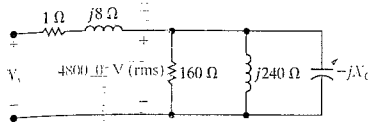
10.51 Şekil P10.51'de görülen devredeki gönderim ucu-gerilimi, yük geriliminin rms değeri her zaman 4800 V olacak biçimde ayarlanmıştır. Değişken kapasitör hat direncinde harcanan gücü minimum yapacak şekilde ayarlanmıştır.

a) Sinüzoidal kaynağın frekansı 60 Hz ise, kapasitörün mikrofarad cinsinden değeri nedir?

b) Eğer devreden kapasitör çıkarılırsa yükteki gerilimi 4800 V'ta tutabilmek için, $\mathbf{V}_s$'nin büyüklüğü yüzde kaç artmalıdır?

c) Kapasitör devreden çıkarılırsa hat kaybındaki artış yüzde kaç olur?

Şekil P10.51



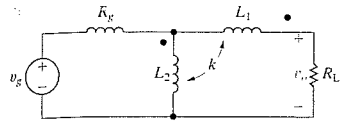
10.52 Şekil 10.52'de görülen devredeki parametrelerin değeri L_1 = 40 mH, L_2 = 10 mH, k = 0.75, R_g = 20 Ω ve R_L = 140 Ω'dur. Eğer $v_g = 240\sqrt{2}$ cos 4000t V ise, aşağıdakileri bulunuz.

a) v_c'nun rms büyüklüğü,

b) R_L'ye iletilen ortalama güç,

c) ideal gerilim kaynağı tarafından üretilen ve R_L'ye aktarılan ortalama gücün yüzdesi.

Şekil P10.52



10.53 Şekil P10.52'de görülen devredeki yük direncinin (R_L) ayarlanabilir olduğunu varsayınız.

a) R_L'nin hangi değeri kendisine maksimum güç iletilmesini sağlar?

b) İletilen maksimum güç değeri nedir?

10.54 Şekil 10.52'deki L_1'in kutupluk noktası değiştirildiğinde

a) v_o'yu sıfır yapan k'nın değerini bulunuz.

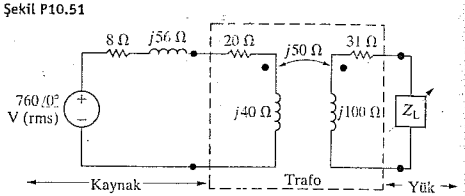
b) (a) şıkkında bulunan k değeri için kaynak tarafından üretilen gücü bulunuz.

10.55 Şekil P10.55'te görülen devredeki Z_L empedansı, kendisine maksimum güç iletilecek biçimde ayarlanmıştır. Sinüzoidal gerilim kaynağının iç empedansı 8 + j56 Ω ise:

a) Z_L'ye aktarılan maksimum ortalama güç nedir?

b) Doğrusal trafoya aktarılan ortalama gücün yüzde kaçı Z_L'ye aktarılmıştır?

Şekil P10.51



10.56 PSPICE a) Şekil P10.56'daki i_g ve i_L akımlarının durgun durum ifadelerini, v_g = 70 cos 5000t V için bulunuz.

b) Bağlaşım katsayısını bulunuz.

c) Manyetik olarak bağlaşık bobinlerde yüklenen enerjiyi $t = 100\pi$ μs ve $t = 2000\pi$ μs anlarında bulunuz.

d) 30 Ω'luk dirence aktarılan gücü bulunuz.

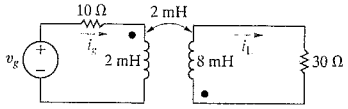
e) Eğer 30 Ω'luk direnç R_L değişken direnci ile değiştirilirse, R_L'nin hangi değeri kendisine maksimum ortalama güç aktarımını sağlar?

f) (e) şıkkındaki maksimum ortalama güç nedir?

g) 30 Ω'luk direncin Z_L değişken empedansıyla değiştirildiğini varsayalım. Z_L'nin hangi değeri kendisine maksimum güç aktarımını sağlar?

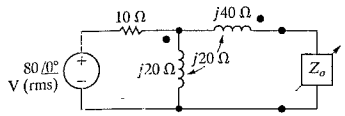
h) (g) şıkkındaki maksimum ortalama güç nedir?

Şekil P10.51



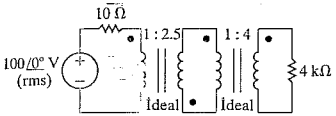
10.57 Şekil P10.57'deki devrede Z_o kendisine maksimum güç iletimi sağladığı durumda, ideal gerilim kaynağı tarafından görülen empedansı bulunuz.

Şekil P10.57



10.58 Şekil P10.58'de görülen devredeki 4 kΩ'luk dirence aktarılan ortalama gücü bulunuz.

Şekil P10.58



10.59 Problem 10.58'deki 4 kΩ'luk dirence bağlanan ideal trafo sarım oranı 1:a olan bir ideal trafo ile değiştirilmiştir.

a) a'nın hangi değeri, 4 kΩ'luk dirence maksimum ortalama güç aktarılmasını sağlar?

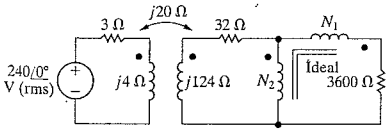
b) Aktarılan maksimum ortalama güç nedir?

10.60 a) Şekil P10.60'ta görünen devrede N_1, 1500 sarıma eşitse 3600 Ω'luk yüke maksimum ortalama güç aktarımı yapabilmek için, ideal trafodaki N_2 sarımının ne olması gerekir?

b) 3600 Ω'luk dirence aktarılan ortalama gücü bulunuz.

c) İdeal gerilim kaynağı tarafından aktarılan ortalama gücün yüzde kaçı doğrusal trafoda harcanmıştır?

Şekil P10.60



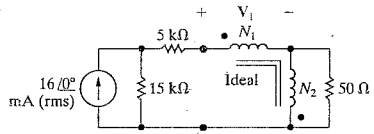
10.61 a) Şekil P10.61'de görülen devredeki ideal trafonun birincil sarımı N_1, 2520'ye eşit ise 50 Ω'luk yüke maksimum ortalama güç aktarımının yapılması için N_2'ye kaç sarım yapılması gerekir?

b) 50 Ω'luk dirence aktarılan ortalama gücü bulunuz.

c) $\mathbf{V}_1$ gerilimini bulunuz.

d) İdeal akım kaynağı tarafından aktarılan gücün yüzde kaçı 50 Ω'luk dirence aktarılmıştır?

Şekil P10.61



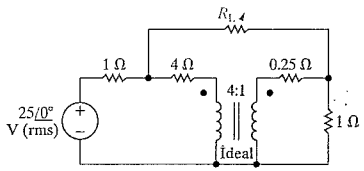
10.62 PSPICE Şekil P10.62'de gösterilen devredeki R_L direnci kendisine maksimum ortalama güç aktarılacak biçimde ayarlanmıştır.

a) Maksimum ortalama gücü bulunuz.

b) R_L maksimum ortalama güç çektiği zaman, ideal gerilim kaynağı tarafından üretilen gücün yüzde kaçı R_L'ye aktarılmıştır?

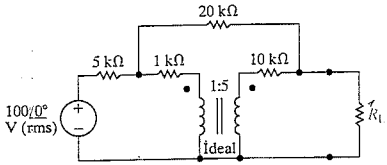
c) Çözümünüzü, ideal gerilim kaynağı tarafından aktarılan gücün, devrede harcanan güce eşit olduğunu göstererek test ediniz.

Şekil P10.62



10.63 PSPICE Problem 10.62'yi Şekil P10.63'teki devre için tekrar ediniz.

Şekil P10.63



10.64 Şekil P10.64'teki sinüzoidal gerilim kaynağı 50 krad/s frekansında çalışmaktadır. Devredeki ayarlanabilir kapasitans 160 Ω'luk dirence olabildiğince fazla ortalama güç aktarıncaya kadar ayarlanmıştır.

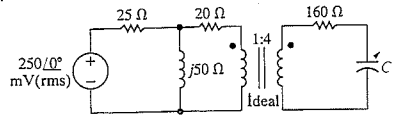
a) C'nin değerini mikroforad cinsinden bulunuz.

b) C'nin değeri (a) şıkkında bulunan değere eşitse, 160 Ω'luk dirence iletilen ortalama güç nedir?

c) 160 Ω'luk direnci R_o değişken direnciyle değiştiriniz. R_o'nun değerini kendisine maksimum güç aktarılacak biçimde bulunuz.

d) R_o'ya aktarılacak maksimum ortalama güç ne kadardır?

Şekil P10.63

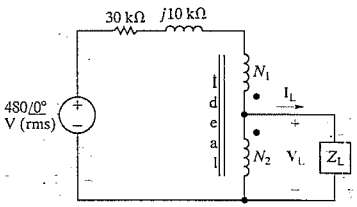


10.65 Şekil P10.65'te görülen devredeki Z_L yük empedansı, kendisine maksimum güç iletilene kadar ayarlanmıştır.

a) Eğer N_1 = 15,000 sarım ve N_2 = 5000 sarım ise, Z_L'nin değerini bulunuz.

b) Z_L maksimum ortalama güç çekiyorken, $\mathbf{I}_L$ ve $\mathbf{V}_L$ değerlerini belirleyiniz.

Şekil P10.65



Kısım 101-10.6

10.66 PRATİK BAKIŞ AÇISI Pratik Bakış Açısındaki saç kurutma makinası 60 Hz'te 120 rms değerine sahip bir sinüzoidal gerilim kullanmaktadır. Isıtıcı eleman DÜŞÜK konumda iken 250 W, ORTA konumda 500 W ve YÜKSEK konumda ise 1000 W güç harcamalıdır.

a) Şekil 10.31'i kullanarak, ORTA konumdaki belirtimleri kullanarak R_2 direncinin değerini bulunuz.

b) DÜŞÜK konum belirtimlerini ve (a) şıkkındaki sonuçları kullanarak R_1 direncinin değerini bulunuz.

c) YÜKSEK konum ayarları için belirtimler sağlanmış mıdır?

10.67 PRATİK BAKIŞ AÇISI PSPICE Problem 10.66'da görüldüğü gibi saç kurutma makinasının ısıtıcı elemanı iki dirençten oluşuyor ise sadece iki bağımsız güç belirtimi tanımlayabiliriz.

a) YÜKSEK gücün ifadesinin

$$P_H = \frac{P_M^2}{P_M - P_L},$$

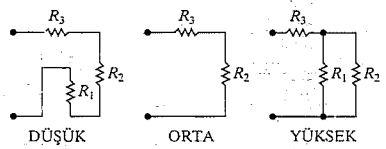
olduğunu P_M = ORTA güç ve P_L = DÜŞÜK güç iken gösteriniz.

b) Eğer P_L = 250 W ve P_M = 750 W ise YÜKSEK güç belirtimi ne olmalıdır?

10.68 PRATİK BAKIŞ AÇISI PSPICE Şekil 10.29'daki saç kurutma makinası devresi için düşük güç belirtimi 240 W ve yüksek güç belirtimi 1000 W ise R_1 ve R_2'nin değerlerini belirleyiniz. Besleyici gerilimin 120 V (rms) olduğunu varsayınız. (*İpucu:* Önce problem 10.67'yi çözünüz)

10.69 PRATİK BAKIŞ AÇISI PSPICE Şekil 10.29'daki saç kurutma makinası devresine üçüncü bir direnç eklenirse, üç tane bağımsız güç belirtimi vermek mümkün olur. Eğer R_3 direnci termal sigortaya seri biçimde eklenirse ilgili DÜŞÜK, ORTA ve YÜKSEK güç devre sonuçları Şekil 10.69'daki gibi olur. Eğer bu üç güç ayarı sırasıyla olur. Eğer bu üç güç ayarı sırasıyla 600 W, 900 W ve 1200 W ve kullanılan güç kaynağı 120 V (rms) ise, kullanılması gereken direnç değerleri nedir?

Şekil P10.69



10.70 PRATİK BAKIŞ AÇISI TASARIM PROBLEMİ PSPICE Problem 10.66'da açıklanan saç kurutma makinasının İngiltere'de kullanılmak üzere yeniden tasarlanma işi size verilmiştir. İngiltere'deki standart gerilim kaynağı 220 V(rms)'tir. Aynı güç belirtimleri için kullanacağınız direnç değerleri nedir?

Dengeli Üç Fazlı Devreler

BÖLÜM İÇERİĞİ

11.1 **Dengeli Üç Faz Gerilimler** *s. 434*

11.2 **Üç Fazlı Gerilim Kaynakları** *s. 435*

11.3 **Y-Y Devrenin Analizi** s. 436

11.4 **Y - Δ Devrenin Analizi** *s. 442*

11.5 **Dengeli Üç Fazlı Devrelerde Güç Hesaplamaları** *s. 445*

11.6 **Üç Fazlı Devrelerde Ortalama Gücün Ölçümü** *s. 452*

✓ BÖLÜM HEDEFLERİ

1. Y-Y bağlanmış, dengeli üç faz bir devrenin nasıl analiz edileceğini bilmek.
2. Y-Δ bağlanmış, dengeli üç faz bir devrenin nasıl analiz edileceğini bilmek.
3. Herhangi bir üç fazlı devrede gücü (ortalama, reaktif ve kompleks) hesaplayabilmek.

Büyük miktarda elektrik gücün **üretimi, iletimi, dağıtımı ve kullanımı** üç fazlı devrelerle gerçekleştirilir. Bu sistemlerin detaylı analizinin kendisi bir çalışma alanıdır. Bu nedenle bir bölümde bu konuyu kapsamayı umamayız. Şanslıyızki güç sistemlerinde özelleşmeyen mühendisler için, dengeli üç fazlı devrelerin sinüzoidal durgun durum davranışının anlaşılması yeterlidir. Dengeli bir devre ile ne kastettiğimizi tartışmanın ilerisinde tanımlayacağız. Önceki bölümlerdeki devre analiz teknikleri dengesiz veya dengeli üç fazlı devrelere uygulanabilir. Burada bu tanıdık teknikleri kullanarak dengeli üç fazlı devrelerin analizinde birçok kestirme geliştireceğiz.

Ekonomik nedenlerden dolayı üç fazlı sistemler genellikle dengeli durumda çalışacak şekilde tasarlanır. Böylelikle bu giriş niteliğindeki incelememizde sadece dengeli devreleri ele almamızı açıklayabiliriz. Eğer daha sonraki derslerde elektrik güç üzerine çalışırsanız göreceğiniz dengesiz üç fazlı devrelerin analizi, büyük ağırlıkla dengeli devrelerin anlaşılmasına dayanır.

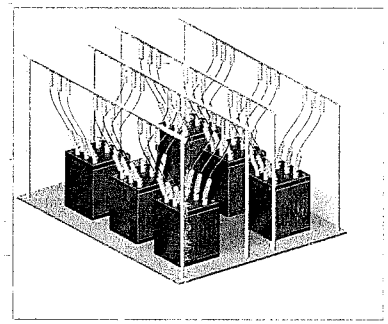
Üç fazlı bir sistemin temel yapısı, trafolar ve iletim hatları ile yüklere bağlanan gerilim kaynaklarından oluşur. Böyle bir devreyi analiz etmek için, devreyi bir hat ile yüke bağlı bir gerilim kaynağına indirgeyebiliriz. Trafonun dahil edilmemesi, ilgili hesaplamaların anlaşılmasını tehlikeye atmadan tartışmayı basitleştirir. Sayfa 434'teki Şekil 11.1 basit bir devre göstermektedir. Dengeli bir üç faz devrenin tanımlayıcı bir özelliği, kaynağında dengeli bir üç faz gerilim kümesi içermesidir. Bu kaynakları inceleyerek başlayacağız ve daha sonra Y-Y ve Y–Δ devrelerinin gerilim ve akımlarını inceledikten sonra güç ve güç ölçümü kısımları ile bölümü bitireceğiz.

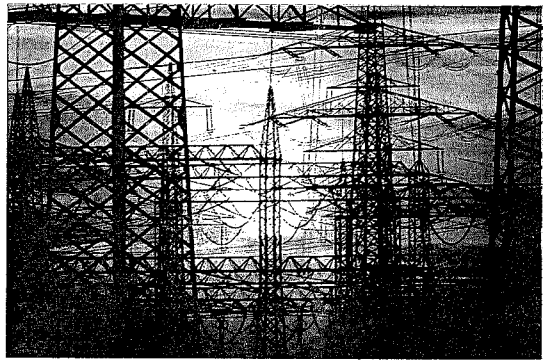
Pratik Bakış Açısı

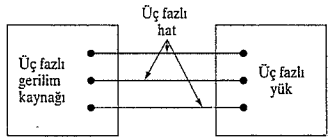
Elektrik Gücün İletim ve Dağıtımı

Bu bölümde büyük elektrik güçlerini işleyebilecek devreleri tanıtacağız. Bunlar, elektrik gücünü üretim yerinden endüstriyel ve meskun müşterilere iletmek için kullanılan devrelerdir. Birleşik Devletlerdeki tipik meskun müşteri devresini 9. Bölümde tasarım bakış açısı olarak tanıtmıştık. Şimdi bir meskun alt bölgeye elektrik güç taşımada kullanılan devreyi tanıtacağız.

Bir elektrik hizmet şirketi tasarlayıp çalıştırmanın kısıtlarından biri, elektrik hizmet şirketinin müşterinin mülkündeki rms gerilimi koruma gereksinimidir. İster 3:00 am'deki gibi hafif yüklü, isterse sıcak, nemli bir günün öğleden sonrasındaki gibi ağır yüklü olsun, hizmet şirketi aynı rms gerilimi sağlamak zorundadır. 10. Bölümden, bir kapasitörün mıknatıslayan var kaynağı olarak düşünülebileceğini hatırlayınız. Böylece bir hizmet sisteminde gerilim seviyelerini korumanın bir yolu, dağıtım şebekesindeki stratejik yerlere kapasitör koymaktır. Bu tekniğin altındaki fikir, mıknatıslayan varları onlara ihtiyaç duyan yüklere jeneratörden hatlar boyunca yollamaktansa, yakından sağlamaktır. Bu kavramı, dengeli üç faz devrelerin analizini gösterdikten sonra sergileyeceğiz.







Şekil 11.1 ▲ Temel üç fazlı devre.

11.1 Dengeli Üç Faz Gerilimler

Bir dengeli üç faz gerilim kümesi, özdeş genliğe sahip olan ancak birbirleri ile tam olarak 120° faz farkı olan üç sinüzoidal gerilimden oluşur. Standart uygulama, üç fazı a, b ve c olarak adlandırmak ve a fazını referans olarak kullanmaktır. Üç gerilime, **a faz gerilimi, b faz gerilimi** ve **c faz gerilimi** denir.

a faz gerilimi ile b ve c faz gerilimleri arasında sadece iki olası faz bağıntısı vardır. Bir olasılık b faz geriliminin a faz geriliminin 120° gerisinde olmasıdır. Bu durumda c faz gerilimi a'nın 120° önünde olmalıdır. Bu faz bağıntısı **abc** (veya **pozitif**) **faz sırası** olarak bilinir. Diğer tek olasılık b faz geriliminin a'nınkinin 120° önünde olmasıdır. Bu durumda ise c faz gerilimi a'nın 120° gerisinde olmalıdır. Bu faz bağıntısı da **acb** (veya **negatif**) **faz sırası** olarak bilinir. Fazör gösteriminde olası iki faz gerilim kümesi

$$\mathbf{V}_a = V_m \angle 0^\circ,$$

$$\mathbf{V}_b = V_m \angle -120^\circ,$$

$$\mathbf{V}_c = V_m \angle +120^\circ, \qquad (11.1)$$

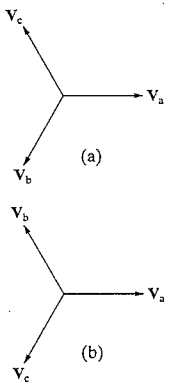
ve

$$\mathbf{V}_a = V_m \angle 0^\circ,$$

$$\mathbf{V}_b = V_m \angle +120^\circ,$$

$$\mathbf{V}_c = V_m \angle -120^\circ \qquad (11.2)$$

olarak verilir. Denklem (11.1) abc veya pozitif faz sırası içindir. Denklem (11.2) ise acb veya negatif sıra içindir. Şekil 11.2, Denklem (11.1) ve (11.2)'deki gerilim kümelerinin fazör diyagramlarını göstermektedir. Faz sırası, $\mathbf{V}_a$'dan başlayarak alt indislerin saat yönündeki sırasıdır. Üç fazlı bir devrenin iki faz sırasından birine sahip olabileceği gerçeği, böyle iki devre paralel olarak çalıştığında göz önüne alınmalıdır. Devreler sadece aynı faz sırasına sahip olduklarında paralel çalışabilirler.



Şekil 11.2 ▲ Dengeli üç faz gerilimlerin fazör diyagramları. (a) abc (pozitif) sıra. (b) acb (negatif) sıra.

Bir dengeli üç faz gerilim kümesinin bir diğer özelliği, gerilimlerin toplamının sıfır olmasıdır. Böylece Eş. 11.1 veya 11.2'den

$$\mathbf{V}_a + \mathbf{V}_b + \mathbf{V}_c = 0. \qquad (11.3)$$

olur. Fazör gerilimlerin toplamı sıfır olduğundan anlık gerilimlerin toplamı da sıfırdır; yani

$$v_a + v_b + v_c = 0. \qquad (11.4)$$

geçerlidir. Şimdi dengeli üç faz gerilim kümesinin doğasını bildiğimizden, bu bölümün girişinde işaret edilen analitik kestirme yollardan birini verebiliriz. Eğer faz sırasını ve kümenin bir gerilimini bilirsek, tüm gerilimleri bulabiliriz. Çünkü tek faz niceliğini bulduğumuzda diğerleri de belirlenmiş demektir.

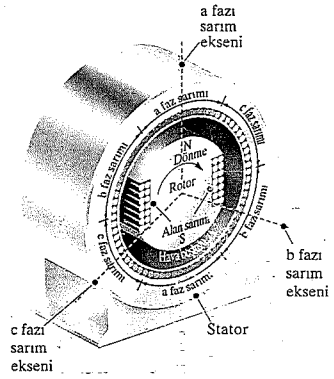
NOT: Üç faz gerilimleri kavrayışınızı Bölüm Problemleri 11.1 ve 11.2'yi çözmeyi deneyerek değerlendiriniz.

11.2 Üç Fazlı Gerilim Kaynakları

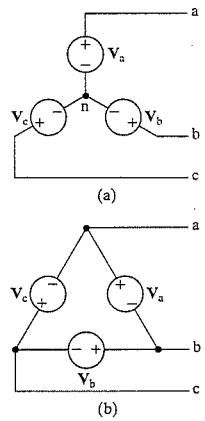
Üç fazlı bir gerilim kaynağı, statorunun çevresinde üç ayrı sarım bulunan bir jeneratördür. Jeneratörün motoru, buhar veya gaz türbini gibi bir hareket ettirici tarafından senkron hızla döndürülen bir elektrikli mıknatıstır. Mıknatısın dönüşü her bir sarımda sinüzoidal bir gerilim oluşturur. Faz sarımları öyle ayarlanmıştır ki, üzerlerinde indüklenen gerilimin genliği aynıdır ve aralarında 120° faz farkı vardır. Faz sarımları dönen mıknatısa göre durağandır. Böylece sarımlarda indüklenen gerilimin frekansı aynıdır. Şekil 11.3 iki kutuplu üç fazlı bir kaynak göstermektedir.

Ayrı faz gerilimlerini üç fazlı bir kaynak oluşturmak üzere bağlamanın iki yolu vardır: Y ve Δ (delta) yapısı. Şekil 11.4 bu iki yapıyı, üç fazlı jenaratörün faz sarımlarını ideal gerilim kaynağı kabul ederek göstermektedir. Y-bağlı kaynaktaki ortak terminal Şekil 11.4 (a)'da *n* ile gösterilmiştir ve kaynağın **nötr terminali** olarak adlandırılır. Nötr terminal dış bağlantıya açık veya kapalı olabilir.

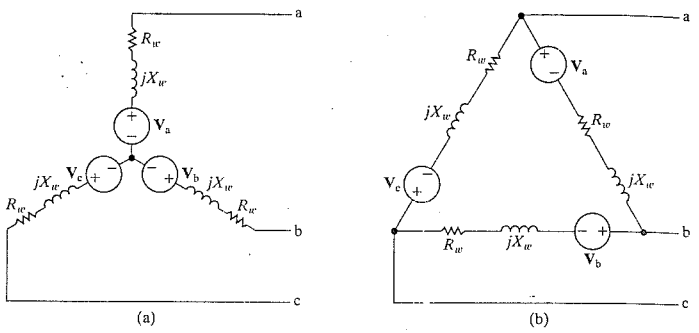
Bazen faz sarımlarındaki empedans öyle küçüktür ki (devrenin diğer empedansları ile karşılaştırıldığında) jeneratörü modellerken ihmal edilebilir. Model, Şekil 11.4'te olduğu gibi sadece ideal gerilim kaynaklarından oluşur. Ancak faz empedansları ihmal edilebilir değilse, sarım empedansını ideal gerilim kaynağı ile seri yerleştiririz. Tüm sarımlar aynı yapıdadır o nedenle sarım empedanslarını özdeş kabul ederiz. Üç fazlı bir jenaratörün sarım empedansı endüktiftir. Şekil 11.5 böyle bir makinanın modelini göstermektedir. Burada R_ω sarım direnci ve X_ω da sarımın endüktif reaktansıdır.



Şekil 11.3 ▲ Üç fazlı bir gerilim kaynağının çizimi.



Şekil 11.4 ▲ Bir ideal üç fazlı kaynağın iki temel yapısı. (a) Y-bağlı bir kaynak. (b) Δ-bağlı bir kaynak.



Şekil 11.5 Üç fazlı bir kaynağın sarım empedansı ile birlikte modeli: (a) Y- bağlı bir kaynak ve (b) Δ-bağlı bir kaynak.

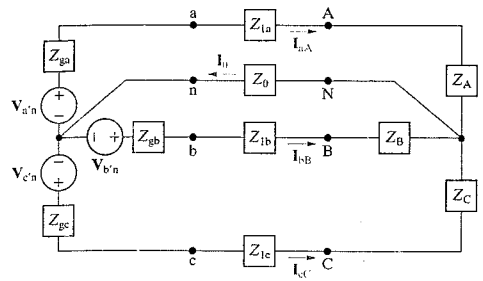
Üç fazlı kaynaklar ve yükler Y-bağlı veya Δ-bağlı olabildiğinden, Şekil 11.1'deki temel devre dört olası yapıyı temsil eder:

Kaynak	Yük
Y	Y
Y	Δ
Δ	Y
Δ	Δ

Y-Y devreyi inceleyerek başlayacağız. Kalan üç yapı Y-Y eşdeğer devreye indirgenebilir. Bu nedenle Y-Y devrenin analizi tüm dengeli üç fazlı yapıların çözümünde anahtardır. Y-Δ yapının indirgenmesini gösterecek, Δ-Y ve Δ-Δ yapılarınkini ise Problemlerde size bırakacağız.

11.3 Y-Y Devrenin Analizi

Şekil 11.6 genel bir Y-Y devre göstermektedir. Burada kaynağın nötrünü yükün nötrüne bağlayan dördüncü bir iletken de dahil edilmiştir. Dördüncü iletken sadece Y-Y yapıda mümkündür. (Daha sonra bu konu incelenecektir.) Uygunluk için Y bağlantılar T'ye dönüştürülmüştür. Şekil 11.6'da Z_{ga}, Z_{gb} ve Z_{gc} kaynağının her bir sarımının iç empedansını göstermektedir. Z_{1a}, Z_{1b} ve Z_{1c} kaynak fazlarını yük fazlarına bağlayan hatların empedansını; Z_0, kaynağın nötrünü yükün nötrüne bağlayan nötr hattın empedansını; Z_A, Z_B ve Z_C ise yükün her bir fazının empedansını göstermektedir.



Şekil 11.6 Üç fazlı Y-Y sistemi.

Bu devreyi tek bir düğüm gerilimi denklemiyle açıklayabiliriz. Kaynağın nötrünü referans olarak kullanıp N ve n düğümleri arasındaki gerilimi $\mathbf{V}_{nN}$ ile gösterirsek, düğüm gerilimi denkleminin

$$\frac{\mathbf{V}_{nN}}{Z_0} + \frac{\mathbf{V}_{nN} - \mathbf{V}_{a'n}}{Z_A + Z_{1a} + Z_{ga}} + \frac{\mathbf{V}_{nN} - \mathbf{V}_{b'n}}{Z_B + Z_{1b} + Z_{gb}} + \frac{\mathbf{V}_{nN} - \mathbf{V}_{c'n}}{Z_C + Z_{1c} + Z_{gc}} = 0 \tag{11.5}$$

olduğunu buluruz. Bu, Şekil 11.6'daki Y-Y yapısına sahip herhangi bir devrenin genel denklemidir. Ancak şimdi dengeli üç fazlı bir devrenin tanımını düşünürsek, Eş. 11.5'i önemli ölçüde sadeleştirebiliriz. Böyle bir devre aşağıdaki ölçütleri sağlar.

1. Gerilim kaynakları, dengeli bir üç faz gerilim kümesi oluşturur. Bu da, Şekil 11.6'daki $\mathbf{V}_{a'n}$, $\mathbf{V}_{b'n}$ ve $\mathbf{V}_{c'n}$ gerilimlerinin dengeli bir üç faz gerilim kümesi olduğu anlamına gelir.
2. Her bir gerilim kaynağının empedansı aynıdır. Şekil 11.6'da bu $Z_{ga} = Z_{gb} = Z_{gc}$ anlamına gelir.
3. Her bir hat (veya faz) iletkeninin empedansı aynıdır. Şekil 11.6'da bu, $Z_{1a} = Z_{1b} = Z_{1c}$ anlamına gelir.
4. Yükün her bir fazının empedansı aynıdır. Şekil 11.6'da bu, $Z_A = Z_B = Z_C$ anlamına gelir.

◀ **Dengeli üç fazlı devre koşulları**

Nötr iletkenin empedansı üzerinde bir kısıt yoktur ve değeri sistemin dengesini etkilemez.

Eğer Şekil 11.6'daki devre dengeli ise Eş. 11.5

$$\mathbf{V}_N\left(\frac{1}{Z_0} + \frac{3}{Z_\phi}\right) = \frac{\mathbf{V}_{a'n} + \mathbf{V}_{b'n} + \mathbf{V}_{c'n}}{Z_\phi} \tag{11.6}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$Z_\phi = Z_A + Z_{1a} + Z_{ga} = Z_B + Z_{1b} + Z_{gb} = Z_C + Z_{1c} + Z_{gc}$$

ile verilir.

Eş. 11.6'nın sağ tarafı sıfırdır çünkü hipotezden pay bir dengeli üç faz gerilim kümesidir ve Z_ϕ sıfırdan farklıdır. Eş. 11.6'yı sağlayan tek $\mathbf{V}_N$ değeri sıfırdır. Dolayısıyla bir dengeli üç fazlı devrede

$$\mathbf{V}_N = 0 \tag{11.7}$$

geçerlidir. Eş. 11.7 çok önemlidir. Eğer $\mathbf{V}_N$ sıfırsa, kaynak nötrün ile yük nötrü N arasında potansiyel yoktur ve nötr iletkendeki akım sıfırdır. Böylece dengeli bir Y-Y yapıdan nötr iletkeni çıkarabiliriz ($\mathbf{I}_0 = 0$) veya yerine n ve N düğümlerini birleştiren bir kısa devre ($\mathbf{V}_n = 0$) koyabiliriz. Dengeli üç fazlı devreleri modellerken her iki eşdeğer devre de yararlıdır.

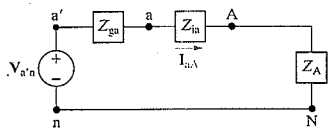
Şimdi denge koşullarının üç hat akımı üzerindeki etkisine bakalım Şekil 11.6'yı kullanarak, sistem dengede olduğunda üç hat akımı

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{a'n} - \mathbf{V}_N}{Z_A + Z_{la} + Z_{ga}} = \frac{\mathbf{V}_{a'n}}{Z_\phi}, \tag{11.8}$$

$$\mathbf{I}_{bB} = \frac{\mathbf{V}_{b'n} - \mathbf{V}_N}{Z_B + Z_{lb} + Z_{gb}} = \frac{\mathbf{V}_{b'n}}{Z_\phi}, \tag{11.9}$$

$$\mathbf{I}_{cC} = \frac{\mathbf{V}_{c'n} - \mathbf{V}_N}{Z_C + Z_{lc} + Z_{gc}} = \frac{\mathbf{V}_{c'n}}{Z_\phi}. \tag{11.10}$$

olarak yazılabilir. Üç hat akımının, dengeli bir üç faz akım kümesi oluşturduğu görülmektedir. Yani her bir hattaki akımın genlik ve frekansı diğerlerine eşittir ancak fazı diğer iki hat akımından 120° farklıdır. Böylece eğer $\mathbf{I}_{aA}$ akımını hesaplarsak ve faz sırasını biliyorsak $\mathbf{I}_{bB}$ ve $\mathbf{I}_{cC}$'yi kısa yoldan bulabiliriz. Bu yöntem, a fazı kaynak geriliminden b ve c fazı kaynak gerilimlerini bulurken kullanılan kısa yola benzerdir.



Şekil 11.6 Tek faz eşdeğer devresi.

Eş. 11.8'i kullanarak, dengeli Y-Y devrenin a fazı için bir eşdeğer devre oluşturabiliriz. Bu denkleme göre a fazı iletken hattındaki akım, basitçe generatörün a faz sarımında üretilen gerilimin, devrenin a fazındaki toplam empedansa bölümüne eşittir. Böylelikle Eş. 11.8, nötr iletkenin mükemmel bir kısa devre ile değiştirildiği Şekil 11.7'deki devreyi verir. Şekil 11.7'deki devre, dengeli bir üç faz devrenin **tek faz eşdeğer devresi** olarak anılır. Fazlar arasındaki bağıntılardan dolayı bu devreyi çözer çözmez diğer iki fazdaki gerilim ve akımları kolaylıkla yazabiliriz. Sonuç olarak, üç fazlı bir devrenin analizinde tek faz eşdeğer devrenin çizilmesi önemli bir başlangıç adımıdır.

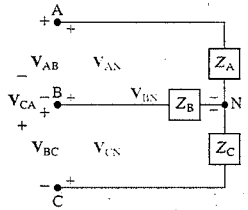
Dikkatli olunması gereken bir nokta, Şekil 11.7'deki nötr iletken akımının $\mathbf{I}_{aA}$ olduğu ve bunun da dengeli üç faz devrenin nötr iletkenindeki

$$\mathbf{I}_o = \mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{cC} \tag{11.10}$$

akımından farklı olduğudur. Sonuç olarak Şekil 11.7'deki devre doğru hat akımını verir ancak nötr akımının sadece a fazı bileşenini içerir. Bu tek faz eşdeğer devre uygulanabilir olduğunda

hat akımları dengeli bir üç faz küme oluşturur ve Eş. 11.11'in sağ tarafının toplamı sıfır verir.

Şekil 11.7'deki hat akımı bilindiğinde, herhangi bir istenen gerilimin hesaplanması daha basittir. Özel olarak, hatlar arası gerilimlerle, hatlarla nötr arasındaki gerilimler arası bağıntı ilgi konusudur. Bu bağıntıyı yük terminallerinde elde edeceğiz ama gözlemlerimiz kaynak terminallerinde de geçerli olacaktır. Yük terminallerindeki hatlar arası gerilimler Şekil 11.8'de görülebilir. Bunlar $\mathbf{V}_{AB}$, $\mathbf{V}_{BC}$ ve $\mathbf{V}_{CA}$'dır. Buradaki çift alt indis gösterimi, ilk verilen düğümle ikinci arasındaki gerilim düşüşünü göstermektedir. (Dengeli durumla ilgilendiğimizden, Şekil 11.8'den nötr iletken çıkarılmıştır.)



Şekil 11.8 Hat-hat ve hat-nötr gerilimleri.

Hat-nötr gerilimleri $\mathbf{V}_{AN}$, $\mathbf{V}_{BN}$ ve $\mathbf{V}_{CN}$'dir. Şimdi hat-hat gerilimlerini hat-nötr gerilimleri cinsinden ifade etmek için Kirchhoff gerilim yasasını kullanacağız:

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AN} - \mathbf{V}_{BN}, \tag{11.12}$$

$$\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{BN} - \mathbf{V}_{CN}, \tag{11.13}$$

$$\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{CN} - \mathbf{V}_{AN}. \tag{11.14}$$

Hat-hat gerilimleri ile hat-nötr gerilimleri arasındaki bağıntıyı göstermek için pozitif veya abc sırası kabul edeceğiz. a fazının hat-nötr gerilimini referans olarak alırsak

$$\mathbf{V}_{AN} = V_\phi \angle 0^\circ, \tag{11.15}$$

$$\mathbf{V}_{BN} = V_\phi \angle -120^\circ, \tag{11.16}$$

$$\mathbf{V}_{CN} = V_\phi \angle +120^\circ \tag{11.17}$$

bulunur. Burada V_ϕ, hat-nötr geriliminin büyüklüğünü göstermektedir. Eş. 11.15-11.17'nin sırasıyla Eş. 11.12-11.14'te yerine konması

$$\mathbf{V}_{AB} = V_\phi \angle 0^\circ - V_\phi \angle -120^\circ = \sqrt{3}V_\phi \angle 30^\circ, \tag{11.18}$$

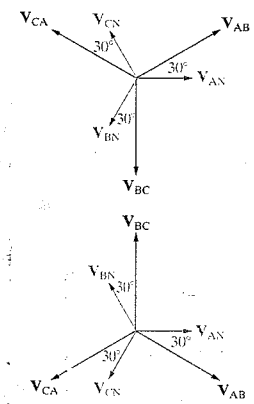
$$\mathbf{V}_{BC} = V_\phi \angle -120^\circ - V_\phi \angle 120^\circ = \sqrt{3}V_\phi \angle -90^\circ, \tag{11.19}$$

$$\mathbf{V}_{CA} = V_\phi \angle 120^\circ - V_\phi \angle 0^\circ = \sqrt{3}V_\phi \angle 150^\circ \tag{11.20}$$

verir. Eş. 11.18 - 11.20'den aşağıdakiler görülür.

1. Hat-hat gerilimlerinin büyüklüğü, hat-nötr geriliminin büyüklüğünün $\sqrt{3}$ katıdır.
2. Hat-hat gerilimleri dengeli bir üç faz gerilim kümesi oluşturur.
3. Hat-hat gerilimler kümesi, hat-nötr gerilimler kümesinin 30° önündedir.

Negatif faz sırası için tek farkın, hat-hat gerilimler kümesinin hat-nötr gerilimler kümesinin 30° gerisinde olduğunu göstermeyi size



Şekil 11.9 ▲ Bir dengeli sistemde hat-hat gerilimler ile hat-nötr gerilimler arasındaki bağıntıyı gösteren fazör diyagramları. (a) abc sırası. (b) acb sırası.

bırakıyoruz. Şekil 11.9'daki fazör diyagramları bu gözlemleri özetlemektedir. Burada yine dengeli bir sistemin analizi için kısa bir yol vardır. Devrede bir yerde hat-nötr gerilimi biliniyorsa o noktadaki hat-hat gerilimi kolaylıkla bulunabilir, tersi de geçerlidir.

Şimdi terminoloji tartışmak için duraklayacağız. **Hat gerilimi** herhangi bir çift hat arasındaki gerilimi, **faz gerilimi** ise tek bir fazdaki gerilimi gösterir. **Hat akımı** tek bir hattaki akımı, **faz akımı** ise tek bir fazdaki akımı gösterir. Bir Δ bağıntıda hat ve faz gerilimlerinin, bir Y bağlantıda da hat ve faz akımlarının özdeş olduğuna dikkat edilmelidir.

Üç faz sistemler büyük güç işlemek üzere tasarlandığından tüm gerilim ve akım belirtimleri rms değerler olarak verilir. Gerilim anma değerleri verildiğinde özel olarak hat gerilimi anma değeri anlamındadır. Böylece üç fazlı bir iletim hattı 345 kV anma değerli ise, hat-hat rms nominal değer 345,000 V'tur. Bu bölümde tüm gerilim ve akımları rms nominal değerler olarak vereceğiz.

Son olarak phi (ϕ) Yunan harfi, literatürde yaygın olarak faz niceliklerini göstermek için kullanılır. Böylelikle $\mathbf{V}_\phi$, $\mathbf{I}_\phi$, Z_ϕ, P_ϕ ve Q_ϕ, sırasıyla, gerilim/faz, akım/faz, empedans/faz, güç/faz ve reaktif güç/faz olarak yorumlanır.

Örnek 11.1, şimdiye kadar yapılan gözlemlerin dengeli, üç fazlı bir Y-Y devrenin çözümünde nasıl kullanıldığını göstermektedir.

Örnek 11.1 Y-Y Devrenin Analizi

Bir dengeli, üç fazlı ve Y-bağlı, pozitif faz sırası olan bir jeneratörün empedansı $0.2 + j0.5\ \Omega/\phi$ ve iç gerilimi $120\ \text{V}/\phi$'dir. Jeneratör, üç fazlı, Y-bağlı, dengeli ve $39 + j28\ \Omega/\phi$ empedanslı bir yükü beslemektedir. Jeneratörü yüke bağlayan hattın empedansı $0.8 + j1.5\ \Omega/\phi$'dir. Jeneratörün a fazı iç gerilimi referans fazörü olarak belirtilmiştir.

a) Sistemin a fazının eşdeğer devresini oluşturunuz.

b) $\mathbf{I}_{aA}$, $\mathbf{I}_{bB}$ ve $\mathbf{I}_{cC}$ hat akımlarını hesaplayınız.

c) Yükteki üç faz gerilimi $\mathbf{V}_{AN}$, $\mathbf{V}_{BN}$ ve $\mathbf{V}_{CN}$'yi hesaplayınız.

d) Yük terminallerinde $\mathbf{V}_{AB}$, $\mathbf{V}_{BC}$ ve $\mathbf{V}_{CA}$ hat gerilimlerini hesaplayınız.

e) Jeneratör terminallerinde $\mathbf{V}_{an}$, $\mathbf{V}_{bn}$ ve $\mathbf{V}_{cn}$ faz gerilimlerini hesaplayınız.

f) Jeneratör terminallerinde $\mathbf{V}_{ab}$, $\mathbf{V}_{bc}$ ve $\mathbf{V}_{ca}$ hat gerilimlerini hesaplayınız.

g) (a) –(f) şıklarını negatif faz sırası için tekrarlayınız.

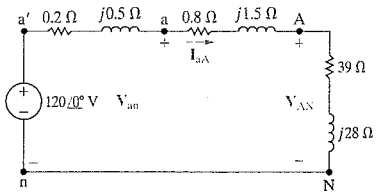
Çözüm

a) Şekil 11.10 tek faz eşdeğer devresini göstermektedir.

b) a fazı hat akımı

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{120\angle 0^\circ}{(0.2 + 0.8 + 39) + j(0.5 + 1.5 + 28)} = \frac{120\angle 0^\circ}{40 + j30} = 2.4\angle -36.87^\circ\ \text{A}$$

olarak bulunur.



Şekil 11.10 ▲ Örnek 11.1'in tek faz eşdeğer devresi.

Pozitif faz sırası için

$$\mathbf{I}_{bB} = 2.4\angle -156.87^\circ\ \text{A},$$

$$\mathbf{I}_{cC} = 2.4\angle 83.13^\circ\ \text{A}$$

bulunur.

c) Yükün A terminalindeki faz gerilimi

$$\mathbf{V}_{AN} = (39 + j28)(2.4\angle -36.87^\circ) = 115.22\angle -1.19^\circ\ \text{V}$$

olur. Pozitif faz sırası için

$$\mathbf{V}_{BN} = 115.22\angle -121.19^\circ\ \text{V},$$

$$\mathbf{V}_{CN} = 115.22\angle 118.81^\circ\ \text{V}$$

elde edilir.

d) Pozitif faz sırası için hat gerilimleri faz gerilimlerinin 30° önündedir. Buradan

$$\mathbf{V}_{AB} = (\sqrt{3}\angle 30^\circ)\mathbf{V}_{AN} = 199.58\angle 28.81^\circ\ \text{V},$$

$$\mathbf{V}_{BC} = 199.58\angle -91.19^\circ\ \text{V},$$

$$\mathbf{V}_{CA} = 199.58\angle 148.81^\circ\ \text{V}$$

hesaplanır.

e) Kaynağın a terminalindeki faz gerilimi

$$\mathbf{V}_{an} = 120 - (0.2 + j0.5)(2.4\angle -36.87^\circ) = 120 - 1.29\angle 31.33^\circ = 118.90 - j0.67 = 118.90\angle -0.32^\circ\ \text{V}$$

bulunur. Pozitif faz sırası için

$$\mathbf{V}_{bn} = 118.90\angle -120.32^\circ\ \text{V},$$

$$\mathbf{V}_{cn} = 118.90\angle 119.68^\circ\ \text{V}$$

elde edilir.

f) Kaynak terminallerindeki hat gerilimleri

$$\mathbf{V}_{ab} = (\sqrt{3}\angle 30^\circ)\mathbf{V}_{an} = 205.94\angle 29.68^\circ\ \text{V},$$

$$\mathbf{V}_{bc} = 205.94\angle -90.32^\circ\ \text{V},$$

$$\mathbf{V}_{ca} = 205.94\angle 149.68^\circ\ \text{V}$$

olarak bulunur.

g) Faz sırasının değiştirilmesinin tek faz eşdeğer devre üzerinde bir etkisi yoktur. Üç hat akımı

$$\mathbf{I}_{aA} = 2.4\angle -36.87^\circ\ \text{A},$$

$$\mathbf{I}_{bB} = 2.4\angle 83.13^\circ\ \text{A},$$

$$\mathbf{I}_{cC} = 2.4\angle -156.87^\circ\ \text{A}$$

olarak yazılır. Yükteki faz gerilimleri ise

$$\mathbf{V}_{AN} = 115.22\angle -1.19^\circ\ \text{V},$$

$$\mathbf{V}_{BN} = 115.22\angle 118.81^\circ\ \text{V},$$

$$\mathbf{V}_{CN} = 115.22\angle -121.19^\circ\ \text{V}$$

hesaplanır. Negatif faz sırası için, hat gerilimleri faz gerilimlerinin 30° gerisinde olduğundan,

$$\mathbf{V}_{AB} = (\sqrt{3}\angle -30^\circ)\mathbf{V}_{AN} = 199.58\angle -31.19^\circ\ \text{V},$$

$$\mathbf{V}_{BC} = 199.58\angle 88.81^\circ\ \text{V},$$

$$\mathbf{V}_{CA} = 199.58\angle -151.19^\circ\ \text{V}$$

yazılabilir. Jeneratörün terminallerindeki faz gerilimleri

$$\mathbf{V}_{an} = 118.90\angle -0.32^\circ\ \text{V},$$

$$\mathbf{V}_{bn} = 118.90\angle 119.68^\circ\ \text{V},$$

$$\mathbf{V}_{cn} = 118.90\angle -120.32^\circ\ \text{V}$$

bulunur. Jeneratör terminallerindeki hat gerilimleri ise

$$\mathbf{V}_{ab} = (\sqrt{3}\angle -30^\circ)\mathbf{V}_{an} = 205.94\angle -30.32^\circ\ \text{V},$$

$$\mathbf{V}_{bc} = 205.94\angle 89.68^\circ\ \text{V},$$

$$\mathbf{V}_{ca} = 205.94\angle -150.32^\circ\ \text{V}$$

olarak elde edilir.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 1-Dengeli, üç fazlı bir Y-Y devrenin nasıl inceleneceğini bilmek.

11.1 Bir dengeli üç faz devrede A'dan N'ye gerilim $240\angle{-30^\circ}$ V'tur. Eğer faz sırası pozitif ise $\mathbf{V}_{BC}$'nin değeri nedir?

Cevap: $415.69\angle{-120^\circ}$ V.

11.2 Bir Y bağlı dengeli üç faz sistemde c fazının gerilimi $450\angle{-25^\circ}$ V'tur. Eğer faz sırası negatif ise $\mathbf{V}_{AB}$ değeri nedir?

Cevap: $779.42\angle{65^\circ}$ V.

11.3 Y bağlı dengeli üç fazlı bir yükün terminallerindeki faz gerilimi 2400 V'tur. yükün empedansı $16 + j12\ \Omega/\phi$'dir ve $0.10 + j0.80\ \Omega/\phi$ empedanslı bir hattan beslenmektedir. Hattın gönderen ucundaki Y bağlı kaynak, acb faz sırasına ve $0.02 + j0.16\ \Omega/\phi$ iç empedansa sahiptir. yükteki a faz gerilimini referans alarak, (a) $\mathbf{I}_{aA}$, $\mathbf{I}_{bB}$ ve $\mathbf{I}_{cC}$ hat akımlarını; (b) kaynaktaki $\mathbf{V}_{ab}$, $\mathbf{V}_{bc}$ ve $\mathbf{V}_{ca}$ hat gerilimlerini ve (c) kaynaktaki iç faz-nötr gerilimleri $\mathbf{V}_{a'n}$, $\mathbf{V}_{b'n}$ ve $\mathbf{V}_{c'n}$'yi hesaplayınız.

Cevap:
(a) $\mathbf{I}_{aA} = 120\angle{-36.87^\circ}$ A,
$\mathbf{I}_{bB} = 120\angle{83.13^\circ}$ A, ve
$\mathbf{I}_{cC} = 120\angle{-156.87^\circ}$ A;
(b) $\mathbf{V}_{ab} = 4275.02\angle{-28.38^\circ}$ V,
$\mathbf{V}_{bc} = 4275.02\angle{91.62^\circ}$ V, ve
$\mathbf{V}_{ca} = 4275.02\angle{-148.38^\circ}$ V;
(c) $\mathbf{V}_{a'n} = 2482.05\angle{1.93^\circ}$ V,
$\mathbf{V}_{b'n} = 2482.05\angle{121.93^\circ}$ V, ve
$\mathbf{V}_{c'n} = 2482.05\angle{-118.07^\circ}$ V.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 11.8-11.10'u da çözmeyi deneyiniz.

11.4 Y-Δ Devrenin Analizi

Eğer üç fazıl bir devrede yük Δ bağlı ise, Kısım 9.6'da tartışılan Δ-Y dönüşümü ile Y'ye dönüştürülebilir. Yük dengeli olduğunda, Y'nin her bir ayağının empedansı, Δ'nın her bir ayağının empedansıdır veya

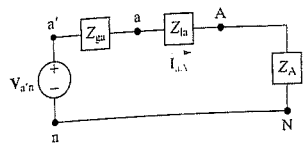
Üç fazlı delta-bağlı ve Y bağlı empedanslar arasındaki bağıntı ▶

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}, \tag{11.21}$$

geçerlidir. Bu denklem Eş. 9.51-9.53'ten doğrudan takip eder. Δ yük, Y eşdeğeri ile değiştirildikten sonra a fazı, Şekil 11-11'de gösterilen tek faz eşdeğer devre ile modellenebilir.

Bu devreyi kullanarak hat akımlarını hesaplayacağız. Sonra hat akımlarını kullanarak baştaki Δ yükün her bir ayağındaki akımı bulacağız. Hat akımları ile delta'nın her bir ayağındaki akımlar arasındaki bağıntı Şekil 11.12'deki devre kullanılarak çıkarılabilir.

Yük (veya kaynak) delta bağlı olduğunda, delta'nın her bir ayağındaki akım faz akımı ve her bir ayak üzerindeki gerilim de faz gerilimidir. Şekil 11.12, Δ yapısında faz geriliminin hat gerilimi ile özdeş olduğunu göstermektedir.



Şekil 11.11 ▲ Tek faz eşdeğer devre.

Faz akımları ile hat akımları arasındaki bağıntıyı sergilemek için pozitif faz sırası kabul edelim ve I_ϕ faz akımının genliğini göstersin. O halde,

$$\mathbf{I}_{AB} = I_\phi\angle{0^\circ}, \tag{11.22}$$

$$\mathbf{I}_{BC} = I_\phi\angle{-120^\circ}, \tag{11.23}$$

$$\mathbf{I}_{CA} = I_\phi\angle{120^\circ} \tag{11.24}$$

yazılabilir. Bu denklemleri yazarken $\mathbf{I}_{AB}$'yi referans fazör aldık.

Hat akımlarını faz akımları cinsinden yazmak, Kirchhoff akım yasasının doğrudan uygulanması ile mümkündür.

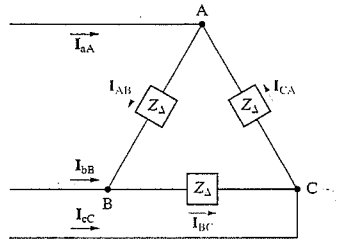
$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{aA} &= \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA}\\ &= I_\phi\angle{0^\circ} - I_\phi\angle{120^\circ}\\ &= \sqrt{3}I_\phi\angle{-30^\circ},\end{aligned} \tag{11.25}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{bB} &= \mathbf{I}_{BC} - \mathbf{I}_{AB}\\ &= I_\phi\angle{-120^\circ} - I_\phi\angle{0^\circ}\\ &= \sqrt{3}I_\phi\angle{-150^\circ},\end{aligned} \tag{11.26}$$

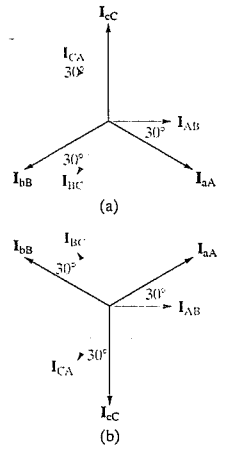
$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{cC} &= \mathbf{I}_{CA} - \mathbf{I}_{BC}\\ &= I_\phi\angle{120^\circ} - I_\phi\angle{-120^\circ}\\ &= \sqrt{3}I_\phi\angle{90^\circ}.\end{aligned} \tag{11.27}$$

Eş. 11.25-11.27 ile Eş. 11.22 - 11.24'ün karşılaştırılması, hat akımlarının faz akımlarından genlikçe $\sqrt{3}$ kat fazla olduğunu ve hat akımları kümesinin faz akımları kümesinden 30° geride olduğunu gösterir.

Negatif faz sırası için, hat akımlarının faz akımlarından $\sqrt{3}$ kat büyük olduğunu ancak bu kez faz akımlarının 30° önünde olduğunu göstermeyi size bırakıyoruz. Böylelikle, Δ bağlı bir dengeli üç faz yük için hat akımlarını faz akımlarından (veya tersi) hesaplamak için bir kısa yol vardır. Şekil 11.13 bu kısa yolu grafiksel olarak göstermektedir. Örnek 11.2, Y bağlı kaynağa ve Δ bağlı yüke sahip olan dengeli bir üç fazlı devrede analizin içerdiği hesaplamaları sergilemektedir.



Şekil 11.12 ▲ Dengeli Δ yükte hat akımları ile faz akımları arasındaki bağıntıyı bulmak için kullanılan devre.

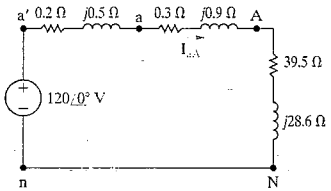


Şekil 11.13 ▲ Δ bağlı yükte hat akımları ile faz akımları arasındaki bağıntıyı gösteren fazör diyagramları. (a) Pozitif sıra, (b) Negatif sıra.

Örnek 11.2 **Y-Delta Devrenin Analizi**

Örnek 11.1'deki Y bağlı kaynak, empedansı 0.3 + $j0.9\ \Omega/\phi$ olan bir dağıtım hattı ile Δ bağlı bir yükü beslemektedir. Yük empedansı $118.5 + j85.8\ \Omega/\phi$'dir. Jeneratörün a fazı iç gerilimini referans olarak kullanınız.

a) Üç faz sistemin tek faz eşdeğer devresini oluşturunuz.
b) $\mathbf{I}_{aA}$, $\mathbf{I}_{bB}$ ve $\mathbf{I}_{cC}$ hat akımlarını hesaplayınız.
c) Yük terminallerindeki faz gerilimlerini hesaplayınız.
d) Yükün faz akımlarını hesaplayınız.
e) Kaynak terminallerindeki hat gerilimlerini hesaplayınız.



Şekil 11.14 Örnek 11.2'nin tek faz eşdeğer devresi.

Çözüm

a) Şekil 11.14 tek faz eşdeğer devreyi göstermektedir. Y eşdeğerin yük empedansı

$$\frac{118.5 + j85.8}{3} = 39.5 + j28.6\ \Omega/\phi$$

bulunur.

b) a fazı hat akımı

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{120\angle 0^\circ}{(0.2 + 0.3 + 39.5) + j(0.5 + 0.9 + 28.6)} = \frac{120\angle 0^\circ}{40 + j30} = 2.4\angle -36.87^\circ\ \text{A}$$

hesaplanır. Buradan

$$\mathbf{I}_{bB} = 2.4\angle -156.87^\circ\ \text{A},$$
$$\mathbf{I}_{cC} = 2.4\angle 83.13^\circ\ \text{A}$$

bulunur.

c) Yük Δ bağlı olduğundan faz gerilimleri hat gerilimleri ile aynıdır. Hat gerilimlerini hesaplamak için önce $\mathbf{V}_{AN}$'yi hesaplarız:

$$\mathbf{V}_{AN} = (39.5 + j28.6)(2.4\angle -36.87^\circ) = 117.04\angle -0.96^\circ\ \text{V}.$$

Faz sırası pozitif olduğundan $\mathbf{V}_{AB}$ hat gerilimi

$$\mathbf{V}_{AB} = (\sqrt{3}\angle 30^\circ)\,\mathbf{V}_{AN} = 202.72\angle 29.04^\circ\ \text{V}$$

bulunur. Buradan da

$$\mathbf{V}_{BC} = 202.72\angle -90.96^\circ\ \text{V},$$
$$\mathbf{V}_{CA} = 202.72\angle 149.04^\circ\ \text{V}$$

elde edilir.

d) Yükün faz akımları, doğrudan hat akımlarından hesaplanabilir:

$$\mathbf{I}_{AB} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\angle 30^\circ\right)\mathbf{I}_{aA} = 1.39\angle -6.87^\circ\ \text{A}.$$

$\mathbf{I}_{AB}$'yi bildiğimiz zaman diğer yük faz akımlarını da yazabiliriz:

$$\mathbf{I}_{BC} = 1.39\angle -126.87^\circ\ \text{A},$$
$$\mathbf{I}_{CA} = 1.39\angle 113.13^\circ\ \text{A}.$$

$\mathbf{I}_{AB}$ hesabını, daha önce hesaplanan $\mathbf{V}_{AB}$ ile Δ bağlı yük empedansını kullanarak kontrol edilebilir. Böylelikle,

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{Z_\phi} = \frac{202.72\angle 29.04^\circ}{118.5 + j85.8} = 1.39\angle -6.87^\circ\ \text{A}$$

elde edilir ki bu da önceki sonucun aynısıdır.

e) Kaynak terminallerindeki hat gerilimini hesaplamak için önce $\mathbf{V}_{an}$'yi hesaplarız. Şekil 11.14, $\mathbf{V}_{an}$'nin hat empedansı ve yük empedansı üzerindeki gerilim düşüşü olduğunu göstermektedir. Böylece,

$$\mathbf{V}_{an} = (39.8 + j29.5)(2.4\angle -36.87^\circ) = 118.90\angle -0.32^\circ\ \text{V}$$

bulunur. $\mathbf{V}_{ab}$ hat gerilimi ise

$$\mathbf{V}_{ab} = (\sqrt{3}\angle 30^\circ)\mathbf{V}_{an},$$

veya

$$\mathbf{V}_{ab} = 205.94\angle 29.68^\circ\ \text{V}$$

olur. Buradan da

$$\mathbf{V}_{bc} = 205.94\angle -90.32^\circ\ \text{V},$$
$$\mathbf{V}_{ca} = 205.94\angle 149.68^\circ\ \text{V}$$

elde edilir.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 2 – Y-Δ bağlanmış, dengeli üç faz bir devrenin nasıl analiz edileceğini bilmek.

11.4 Dengeli üç fazlı ve Δ bağlı bir yükte $\mathbf{I}_{CA}$ akımı $8\angle -15^\circ$ A'dir. Eğer faz sırası pozitif ise $\mathbf{I}_{cC}$ değeri nedir?

Cevap: $13.86\angle -45^\circ$ A.

11.5 Δ bağlı, dengeli bir üç faz yük, dengeli bir üç faz devreden beslenmektedir. b faz akımı için referans yüke doğrudur. b fazındaki akımın değeri $12\angle 65^\circ$ A'dir. Eğer faz sırası negatif ise $\mathbf{I}_{AB}$'nin değeri nedir?

Cevap: $6.93\angle -85^\circ$ A.

11.6 Δ bağlı dengeli bir üç faz yükün terminallerindeki $\mathbf{V}_{AB}$ hat gerilimi $4160\angle 0^\circ$ V.'tur. $\mathbf{I}_{aA}$ hat akımı ise $69.28\angle -10^\circ$'dir.

a) Eğer faz sırası pozitif ise yükün faz başına empedansını hesaplayınız.
b) (a) şıkkını negatif faz sırası için tekrarlayınız.

Cevap: (a) $104\angle -20^\circ\ \Omega$;
(b) $104\angle +40^\circ\ \Omega$.

11.7 Δ bağlı, dengeli bir yükün terminallerindeki hat gerilimi 110 V'tur. Yükün her bir fazı 3.667 Ω direnç ve buna paralel 2.75 Ω endüktif empedanstan oluşmaktadır. Yükü besleyen hattaki akımın büyüklüğü nedir?

Cevap: 86.60 A.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 11.14-11.16'yı da çözmeyi deneyiniz.

11.5 Dengeli Üç Fazlı Devrelerde Güç Hesaplamaları

Dengeli üç fazlı devrelerin analizinde şimdiye kadar akım ve gerilimlerin belirlenmesi ile ilgilendik. Şimdi üç faz güç hesaplamalarını tartışacağız. Dengeli, Y bağlı bir yüke aktarılan ortalama gücü inceleyerek başlayacağız.

Dengeli Y Yükte Ortalama Güç

Şekil 11.15 ilgili akım ve gerilimlerle birlikte Y bağlı bir yükü göstermektedir. 10. Bölümde anlatılan teknikleri kullanarak herhangi bir fazın ortalama gücünü hesaplayacağız. Eş. 10.21'i başlangıç noktası alarak a fazına karşılık ortalama gücü

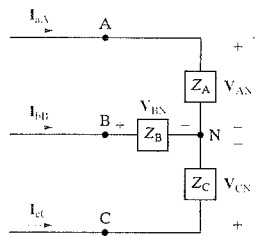
$$P_A = |\mathbf{V}_{AN}||\mathbf{I}_{aA}|\cos(\theta_{vA} - \theta_{iA}) \qquad (11.28)$$

olarak hesaplarız. Burada θ_{vA} ve θ_{iA} sırasıyla $\mathbf{V}_{AN}$ ve $\mathbf{I}_{aA}$'nın faz açılarını göstermektedir. Eş. 11.28'de verilen gösterimi kullanarak b ve c fazlarının güçlerini

$$P_B = |\mathbf{V}_{BN}||\mathbf{I}_{bB}|\cos(\theta_{vB} - \theta_{iB}); \qquad (11.29)$$

$$P_C = |\mathbf{V}_{CN}||\mathbf{I}_{cC}|\cos(\theta_{vC} - \theta_{iC}) \qquad (11.30)$$

olarak buluruz. Eş. 11.28 – 11.30'daki tüm fazör akımlar ve gerilimler, temsil ettikleri sinüzoidal fonksiyonun rms değeri cinsinden yazılmıştır.



Şekil 11.15 Üç fazlı devrelerde ortalama güç hesaplamalarını incelemek için kullanılan dengeli Y yük.

Dengeli üç fazlı bir sistemde hat-nötr gerilimlerinin büyüklüğü, faz akımlarının büyüklükleri gibi birbirine eşittir. Ayrıca üç fazın tümünde kosinüs fonksiyonlarının argümanı da aynıdır. Bu gözlemler, aşağıdaki gösterim kullanılarak vurgulanır:

$$V_\phi = |\mathbf{V}_{AN}| = |\mathbf{V}_{BN}| = |\mathbf{V}_{CN}|, \tag{11.31}$$

$$I_\phi = |\mathbf{I}_{aA}| = |\mathbf{I}_{bB}| = |\mathbf{I}_{cC}| \tag{11.32}$$

ve

$$\theta_\phi = \theta_{vA} - \theta_{iA} = \theta_{vB} - \theta_{iB} = \theta_{vC} - \theta_{iC}. \tag{11.33}$$

Dahası, dengeli bir sistem için yükün her bir fazına aktarılan yük de aynıdır. Böylece

$$P_A = P_B = P_C = P_\phi = V_\phi I_\phi \cos\theta_\phi \tag{11.34}$$

yazılabilir. Burada P_ϕ, faz başına ortalama gücü göstermektedir

Y bağlı, dengeli yüke aktarılan toplam ortalama güç basitçe faz başına gücün üç katı veya

$$P_T = 3P_\phi = 3V_\phi I_\phi \cos\theta_\phi \tag{11.35}$$

ile verilir. Toplam gücün hat gerilim ve akımının rms büyüklüğü cinsinden ifade edilmesi istenebilir. Eğer V_L ve I_L sırasıyla hat gerilim ve akımını gösterirse Eş. 11.35

Dengeli üç fazlı yükün toplam gerçek gücü ▶

$$P_T = 3\left(\frac{V_L}{\sqrt{3}}\right) I_L \cos\theta_\phi$$

$$= \sqrt{3} V_L I_L \cos\theta_\phi. \tag{11.36}$$

biçiminde değiştirilebilir. Eş. 11.36'yı çıkarırken, Y bağlı dengeli bir yük için faz gerilimi büyüklüğünün, hat gerilimi büyüklüğünün $\sqrt{3}$'e bölümü olduğunu ve hat akım büyüklüğünün faz akım büyüklüğüne eşit olduğunu kullandık. Yüke aktarılan toplam gücü hesaplamak için Eş. 11.36'yı kullanırken, θ_ϕ'nin faz gerilimi ile faz akımı arasındaki faz açısı olduğunu unutmayınız.

Dengeli Y yükte Kompleks Güç

10. Bölümde anlatılan teknikleri kullanarak Y bağlı bir yükün herhangi bir fazı ile ilgili reaktif ve kompleks gücü de hesaplayabiliriz. Dengeli bir yük için reaktif güç ifadeleri

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin\theta_\phi, \tag{11.37}$$

Dengeli üç fazlı bir yükün toplam reaktif gücü ▶

$$Q_T = 3Q_\phi = \sqrt{3} V_L I_L \sin\theta_\phi. \tag{11.38}$$

olarak verilir.

Eş. 10.29 herhangi bir fazın kompleks gücünü ifade etmek için temel oluşturur. Dengeli bir yük için

$$S_\phi = \mathbf{V}_{AN}\mathbf{I}^*_{aA} = \mathbf{V}_{BN}\mathbf{I}^*_{bB} = \mathbf{V}_{CN}\mathbf{I}^*_{cC} = \mathbf{V}_\phi \mathbf{I}^*_\phi \tag{11.39}$$

geçerlidir. Burada $\mathbf{V}_\phi$ ve $\mathbf{I}_\phi$, aynı fazın gerilimi ve akımıdır. Böylece genel olarak

$$S_\phi = P_\phi + jQ_\phi = \mathbf{V}_\phi \mathbf{I}^*_\phi, \tag{11.40}$$

$$S_T = 3S_\phi = \sqrt{3} V_L I_L \angle \theta_\phi. \tag{11.41}$$

◀ Dengeli üç faz yükün toplam kompleks gücü

elde edilir.

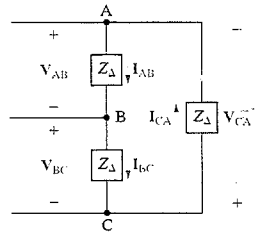
Dengeli Delta Yükte Güç Hesaplamaları

Yük Δ bağlı olduğunda reaktif veya kompleks gücün hesaplanması temel olarak Y bağlı yükünki ile aynıdır. Şekil 11.16, ilgili akım ve gerilimlerle birlikte Δ bağlı bir yükü göstermektedir. Her bir fazın gücü

$$P_A = |\mathbf{V}_{AB}||\mathbf{I}_{AB}| \cos(\theta_{vAB} - \theta_{iAB}), \tag{11.42}$$

$$P_B = |\mathbf{V}_{BC}||\mathbf{I}_{BC}| \cos(\theta_{vBC} - \theta_{iBC}), \tag{11.43}$$

$$P_C = |\mathbf{V}_{CA}||\mathbf{I}_{CA}| \cos(\theta_{vCA} - \theta_{iCA}) \tag{11.44}$$



Şekil 11.16 ▲ Güç hesabı tartışmasında kullanılan Δ bağlı yük.

ile verilir. Dengeli bir yük için

$$|\mathbf{V}_{AB}| = |\mathbf{V}_{BC}| = |\mathbf{V}_{CA}| = V_\phi, \tag{11.45}$$

$$|\mathbf{I}_{AB}| = |\mathbf{I}_{BC}| = |\mathbf{I}_{CA}| = I_\phi, \tag{11.46}$$

$$\theta_{vAB} - \theta_{iAB} = \theta_{vBC} - \theta_{iBC} = \theta_{vCA} - \theta_{iCA} = \theta_\phi \tag{11.47}$$

ve

$$P_A = P_B = P_C = P_\phi = V_\phi I_\phi \cos\theta_\phi \tag{11.48}$$

bulunur. Eş. 11.48'in Eş. 11.34 ile aynı olduğuna dikkat ediniz. Böylece Y ve Δ bağlı olmasından bağımsız olarak dengeli bir yük için faz başına ortalama güç, faz geriliminin rms büyüklüğü, faz akımının rms büyüklüğü ve faz gerilimi ile akımı arasındaki açının kosinüsünün çarpımına eşittir.

Δ bağlı dengeli bir yüke aktarılan toplam güç

$$P_T = 3P_\phi = 3V_\phi I_\phi \cos\theta_\phi$$

$$= 3V_L\left(\frac{I_L}{\sqrt{3}}\right)\cos\theta_\phi$$

$$= \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta_\phi \qquad (11.49)$$

bulunur. Eş. 11.49'un eş. 11.36 ile aynı olduğuna dikkat ediniz. Reaktif güç ve kompleks güç ifadeleri de Y yük için geliştirilenlerle aynı biçime sahiptir:

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin\theta_\phi; \qquad (11.50)$$

$$Q_T = 3Q_\phi = 3V_\phi I_\phi \sin\theta_\phi; \qquad (11.51)$$

$$S_\phi = P_\phi + jQ_\phi = V_\phi I_\phi^*; \qquad (11.52)$$

$$S_T = 3S_\phi = \sqrt{3}V_L I_L \angle\theta_\phi. \qquad (11.53)$$

Üç Fazlı Devrelerde Anlık Güç

Birincil olarak ortalama, reaktif ve kompleks güç hesaplamaları ile ilgilenmemizle birlikte toplam anlık gücün hesaplanması da önemlidir. Dengeli üç fazlı bir devrede bu gücün ilginç bir özelliği vardır: Toplam anlık güç zamanla değişmez! Böylece üç fazlı bir motorun şaftında oluşan tork sabittir ve bu da üç fazlı motorlarla sürülen makinaların daha az titremesi demektir.

v_{AN} anlık hat-nötr gerilimini referans alalım ve θ_ϕ, $\theta_{vA} - \theta_{iA}$ faz açısı olsun. O halde, pozitif faz sırası için her bir fazdaki anlık güç

$$p_A = v_{AN}i_{aA} = V_m I_m \cos\omega t \cos(\omega t - \theta_\phi),$$

$$p_B = v_{BN}i_{bB} = V_m I_m \cos(\omega t - 120^\circ)\cos(\omega t - \theta_\phi - 120^\circ),$$

$$p_C = v_{CN}i_{cC} = V_m I_m \cos(\omega t + 120^\circ)\cos(\omega t - \theta_\phi + 120^\circ)$$

bulunur. Burada V_m ve I_m sırasıyla faz gerilimi ve hat akımının maksimum genliğini göstermektedir. Toplam anlık güç, anlık faz güçlerinin toplamıdır ve 1.5 $V_m I_m \cos\theta_\phi$ veya

$$p_T = p_A + p_B + p_C = 1.5V_m I_m \cos\theta_\phi$$

olarak elde edilir.

Bu sonucun $V_m = \sqrt{2}V_\phi$ ve $I_m = \sqrt{2}I_\phi$ olduğu için (bkz. Problem 11.29), Eş. 11.35 ile tutarlı olduğuna dikkat ediniz.

Örnek 11.3 – 11.5 dengeli üç fazlı devrelerde güç hesaplamalarını sergilemektedir.

Örnek 11.3 Üç Fazlı Y-Y Devrede Güç Hesabı

a) Örnek 11.1'deki Y-bağlı yükün her fazı için aktarılan ortalama gücü hesaplayınız.

b) Yüke aktarılan toplam ortalama gücü hesaplayınız.

c) Hattaki toplam ortalama kayıp gücü hesaplayınız.

d) Jeneratörde kaybedilen toplam ortalama gücü hesaplayınız.

e) Yük tarafından soğurulan toplam mıknatıslanma var miktarını bulunuz.

f) Kaynağın aktardığı toplam kompleks gücü hesaplayınız.

Çözüm

a) Örnek 11.1'den, $V_\phi = 115.22$ V, $I_\phi = 2.4$ A ve $\theta_\phi = -1.19 - (-36.87) = 35.68^\circ$. Buradan,

$$P_\phi = (115.22)(2.4)\cos 35.68^\circ$$

$$= 224.64 \text{ W}$$

bulunur. Faz başına güç, $I_\phi^2 R_\phi$'den hesaplanabilir:

$$P_\phi = (2.4)^2(39) = 224.64 \text{ W}.$$

b) Yüke aktarılan toplam ortalama güç, $P_T = P_\phi = 673.92$ W'tır. Örnek 11.1'de hat gerilimini hesaplamıştık. Böylece Eş. 11.36'yı kullanabiliriz.

$$P_T = \sqrt{3}(199.58)(2.4)\cos 35.68^\circ$$

$$= 673.92 \text{ W}.$$

c) Hatta kaybedilen toplam güç

$$P_{line} = 3(2.4)^2(0.8) = 13.824 \text{ W}$$

bulunur.

d) Jeneratörde kaybedilen toplam güç

$$P_{gen} = 3(2.4)^2(0.2) = 3.456 \text{ W}$$

hesaplanır.

e) Yükçe soğurulan mıknatıslanma var miktarı

$$Q_T = \sqrt{3}(199.58)(2.4)\sin 35.68^\circ$$

$$= 483.84 \text{ VAR}$$

elde edilir.

f) Kaynağın toplam kompleks gücü

$$S_T = 3S_\phi = -3(120)(2.4)\angle 36.87^\circ$$

$$= -691.20 - j518.40 \text{ VA}$$

bulunur. Burada eksi işareti, iç gücün ve mıknatıslanma reaktif gücün devreye aktarıldığını gösterir. Bu sonucu, devre tarafından soğurulan toplam ve reaktif gücü hesaplayarak kontrol edebiliriz.

$$P = 673.92 + 13.824 + 3.456$$

$$= 691.20 \text{ W (sağlıyor)}$$

$$Q = 483.84 + 3(2.4)^2(1.5) + 3(2.4)^2(0.5)$$

$$= 483.84 + 25.92 + 8.64$$

$$= 518.40 \text{ VAR (sağlıyor)}$$

Örnek 11.4 Üç Fazlı Y–Δ Devrede Güç Hesabı

a) Örnek 11.2'deki Δ bağlı yüke aktarılan toplam kompleks gücü hesaplayınız.

b) Hattın gönderen tarafındaki ortalama gücün yüzde kaçı yüke aktarılır?

Çözüm

a) Örnek 11.2'deki a fazı değerlerini kullanarak

$$\mathbf{V}_\phi = \mathbf{V}_{AB} = 202.72\angle 29.04^\circ \text{ V},$$
$$\mathbf{I}_\phi = \mathbf{I}_{AB} = 1.39\angle -6.87^\circ \text{ A}$$

elde ederiz. Eş. 11.52 ve 11.53'ü kullanarak

$$S_T = 3(202.72\angle 29.04^\circ)(1.39\angle 6.87^\circ)$$
$$= 682.56 + j494.21 \text{ VA}$$

buluruz.

b) Dağıtım hattının gönderen ucundaki toplam güç, yüke aktarılan toplam güç ile hatta kaybedilen gücün toplamıdır. Dolayısıyla,

$$P_{\text{input}} = 682.56 + 3(2.4)^2(0.3)$$
$$= 687.74 \text{ W}$$

elde edilir. Yüke ulaşan ortalama gücün yüzdesi 682.56/687.74 ve %99.25'tir. Girişteki ortalama gücün %100'e yakını yüke aktarılmıştır çünkü hattın empedansı yük empedansı ile karşılaştırıldığında oldukça küçüktür.

Örnek 11.5 Yük Belirtilmediğinde Üç Faz Güç Hesabı

Dengeli, üç fazlı bir yük, gecikmeli 0.8 güç çarpanında 480 kW güce gereksinim duymaktadır. Yük, empedansı $0.005 + j0.025\ \Omega/\phi$ olan bir hatla beslenmektedir. Yük terminallerindeki hat gerilimi 600 V'tur.

a) Sistemin tek faz eşdeğer devresini oluşturunuz.

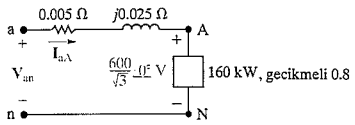
b) Hat akımının büyüklüğünü hesaplayınız.

c) Hattın gönderen ucunda hat geriliminin büyüklüğünü hesaplayınız.

d) Hattın gönderen ucundaki güç çarpanını hesaplayınız.

Çözüm

a) Şekil 11.17 tek faz eşdeğer devreyi göstermektedir. Yükteki hat-nötr gerilimini gelişigüzel bir şekilde referans olarak seçtik.



Şekil 11.17 Örnek 11.5 için tek faz eşdeğer devre.

b) $\mathbf{I}^*_{aA}$ hat akımı

$$\left(\frac{600}{\sqrt{3}}\right)\mathbf{I}^*_{aA} = (160 + j120)10^3$$

veya

$$\mathbf{I}^*_{aA} = 577.35\angle 36.87^\circ \text{ A}$$

ile verilir. Sonuç olarak $\mathbf{I}_{aA} = 577.35\angle -36.87^\circ$ elde edilir. Hat akımının genliği $\mathbf{I}_{aA}$ akımının genliğidir:

$$I_L = 577.35 \text{ A}.$$

I_L için başka yolla bir çözüm için güç,

$$P_T = \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta_p$$
$$= \sqrt{3}(600)I_L(0.8)$$
$$= 480{,}000 \text{ W}$$

bulunur. Bu ifadeden de

$$I_L = \frac{480{,}000}{\sqrt{3}(600)(0.8)}$$
$$= \frac{1000}{\sqrt{3}}$$
$$= 577.35 \text{ A}$$

olarak bulunabilir.

c) Gönderen uçtaki hat geriliminin büyüklüğünü hesaplamak için önce $\mathbf{V}_{an}$'yi hesaplarız. Şekil 11.17'den

$$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{AN} + Z_\ell \mathbf{I}_{aA}$$
$$= \frac{600}{\sqrt{3}} + (0.005 + j0.025)(577.35\angle -36.87^\circ)$$
$$= 357.51\angle 1.57^\circ \text{ V}$$

bulunur ve böylece

$$V_L = \sqrt{3}|\mathbf{V}_{an}|$$
$$= 619.23 \text{ V}$$

elde edilir.

d) Hattın gönderen ucundaki güç çarpanı, $\mathbf{V}_{an}$ ile $\mathbf{I}_{aA}$ arasındaki faz açısının kosinüsüdür:

$$\text{pf} = \cos[1.57^\circ - (-36.87^\circ)]$$
$$= \cos 38.44^\circ$$
$$= 0.783 \text{ geridedir.}$$

Güç çarpanını hesaplamanın bir diğer yolu, önce hattın gönderen ucundaki kompleks gücü hesaplamaktır.

$$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{AN} + Z_\ell \mathbf{I}_{aA}$$
$$= \frac{600}{\sqrt{3}} + (0.005 + j0.025)(577.35\angle -36.87^\circ)$$
$$= 357.51\angle 1.57^\circ \text{ V}$$

Güç çarpanı

$$\text{pf} = \cos 38.44^\circ$$
$$= 0.783 \text{ ve geridedir.}$$

Son olarak, eğer gönderen uçtaki toplam kompleks gücü önce hat akımının büyüklüğünü bulup hesaplarsak, bu değeri V_L'yi bulmak için aşağıdaki gibi kullanabiliriz.

$$\sqrt{3}V_L I_L = 3(206.41) \times 10^3,$$
$$V_L = \frac{3(206.41) \times 10^3}{\sqrt{3}(577.35)},$$
$$= 619.23 \text{ V}.$$

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 3–Herhangi bir üç fazlı devrede (ortalama, reaktif ve kompleks) gücü hesaplayabilme

11.8 Bir ana sistem bilgisayarının merkezi işlemci ünitesinin (CPU) üç faz ortalama güç anma değeri 22,659 W'tır. Bilgisayarı besleyen üç fazlı hattın hat geriliminin anma değeri 208 V(rms)'tir. Bilgisayar mıknatıslayan VAR soğurmaktadır.

a) CPU tarafından soğurulan toplam mıknatıslayan reaktif gücü hesaplayınız.

b) Güç çarpanını hesaplayınız.

Cevap: (a) 13,909.50 VAR;
(b) 0.852, geride

11.9 Dengeli bir yükün her bir fazının kompleks gücü $384 + j288$ kVA'dır. Yükün terminallerindeki hat gerilimi 4160 V'tur.

a) Yükü besleyen hat akımının büyüklüğü nedir?

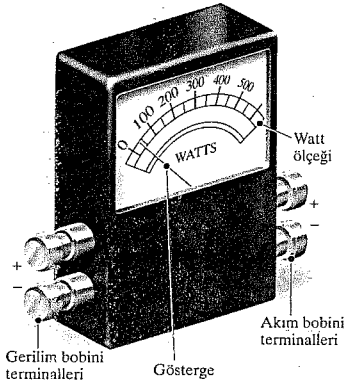
b) Yük delta bağlıdır ve her bir empedansı bir reaktansla paralel bir dirençten oluşmaktadır. R ve X'i hesaplayınız.

c) Yük Y bağlıdır ve her bir fazın empedansı bir reaktansla seri bir dirençten oluşmaktadır. R ve X'i hesaplayınız.

Cevap: (a) 199.95 A;
(b) $R = 45.07\ \Omega$, $X = 60.09\ \Omega$;
(c) $R = 9.61\ \Omega$, $X = 7.21\ \Omega$.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 11.24 ve 11.25'i de çözmeyi deneyiniz.

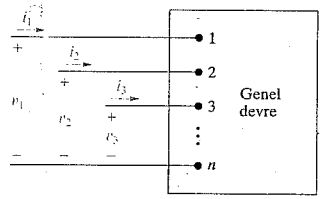
11.6 Üç Fazlı Devrelerde Ortalama Gücün Ölçümü



Şekil 11.18 Elektrodinamometre wattmetrenin önemli özellikleri.

Üç fazlı devrelerde güç ölçmek için kullanılan temel cihaz elektrodinamometre wattmetre'dir. Cihazın iki bobini vardır. **Akım bobini** denen bir bobin hareketsizdir ve yük akımıyla orantılı bir akım taşıyacak şekilde tasarlanır. **Gerilim bobini** denen ikinci bobin hareketlidir ve yük gerilimiyle orantılı bir akım taşır. Wattmetrenin önemli özellikleri Şekil 11.18'de gösterilmiştir.

Hareketli bobine bağlı olan göstergenin ortalama sapması, akım bobinindeki akımın etkin değeri, gerilim bobininde indüklenen gerilimin etkin değeri ve gerilimde akım arasındaki faz açısının kosinüsünün çarpımına eşittir. Göstergenin sapma yönü akım bobini akımının ve gerilim bobini geriliminin anlık kutupluğuna bağlıdır. Sonuç olarak her bobinin bir terminalinde kutupluk işareti - çoğunlukla artı işareti - vardır. Ancak bazen çift kutupluk işareti ± kullanılır. Wattmetre, (1) akım bobininin kutupluk işaretli terminali kaynağa doğru olduğunda ve (2) gerilim bobininin kutupluk işaretli terminali akım bobininin bağlandığı hatta bağlı olduğunda yukarı yönde sapar.



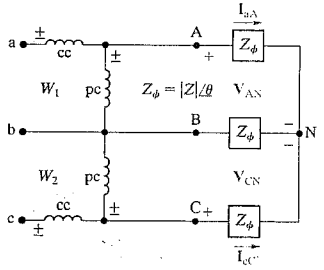
Şekil 11.19 Gücü n iletken ile sağlanan genel bir devre.

İki Wattmetre Yöntemi

Bir kutunun içinde genel bir devre ve kutuyu besleyen n iletken hat düşününüz. Böyle bir sistem Şekil 11.19'da gösterilmiştir.

Eğer kutunun terminallerindeki toplam gücü ölçmek istersek, $n - 1$ akım ve gerilim bilmemiz gerekir. Bunun nedeni, bir terminal referans olarak seçildiğinde sadece $n - 1$ bağımsız gerilimin bulunmasıdır. Benzer şekilde, kutuya giren n iletkende $n - 1$ bağımsız akım vardır. Sonuçta toplam güç, $n - 1$ çarpım teriminin toplamıdır, yani $p = v_1 i_1 + v_2 i_2 + \cdots + v_{n-1} i_{n-1}$ yazılır.

Bu genel gözlemi uygulayarak, üç iletkenli bir devrede, ister dengeli ister dengesiz olsun, toplam gücü ölçmek için sadece iki wattmetreye ihtiyaç vardır. Dört iletkenli bir devrede, eğer üç faz devre dengesiz ise üç wattmetreye, dengeli ise sadece iki wattmetreye ihtiyaç vardır. Çünkü dengeli durumda nötr iletkendeki akım sıfırdır. Böylece herhangi bir dengeli üç faz sistemde toplam ortalama gücü ölçmek için sadece iki wattmetreye ihtiyaç vardır.



Şekil 11.20 Dengeli bir yüke aktarılan ortalama gücü ölçmede iki wattmetre yöntemini incelemek için kullanılan devre.

İki wattmetre yöntemi, her bir wattmetrede ölçülen ortalama gücün büyüklüğünü ve cebirsel işaretini belirlemeye indirgenir. Temel problemi, iki wattmetrenin gölgeli kutularla gösterilip W_1 ve W_2 ile belirtildiği Şekil 11.20'deki devre ile açıklayabiliriz. cc ve pc bobin gösterimi, sırasıyla akım bobinini ve gerilim bobinini gösterir. Wattmetrelerin akım bobinlerini aA cC hatlarına yerleştirmeyi seçtik. Böylece bB hatı iki gerilim bobini için referans hattır. Yük Y bağlıdır ve faz başına yük empedansı, $Z_\phi = |Z|\angle\theta$ ile gösterilmiştir. Bu, genel bir gösterimdir çünkü herhangi bir Δ bağlı yük, Y eşdeğeri ile temsil edilebilir. Dahası, dengeli durumda θ empedans açısı Δ - Y dönüşümünden etkilenmez.

Şimdi iki wattmetre okuması için genel denklemleri geliştireceğiz. Wattmetrenin gerilim bobinince çekilen akımın, akım bobini tarafından ölçülen hat akımına kıyasla ihmal edilebilir olduğunu kabul edeceğiz. Ayrıca yüklerin pasif devre elemanları ile modelenebildiğini ve bu yüzden yük empedansının faz açısının –90° (saf kapasitans) ve + 90° (saf endüktans) arasında olacağını da kabul edeceğiz. Son olarak, pozitif faz sırası kabul edeceğiz.

Wattmetrenin ortalama sapması hakkındaki giriş tartışmamızdan, wattmetre 1'in $|\mathbf{V}_{AB}|$, $|\mathbf{I}_{aA}|$ ve $\mathbf{V}_{AB}$ ile $\mathbf{I}_{aA}$ arasındaki açının kosinüsünün çarpımına tepki göstereceğini görebiliriz. Eğer bu wattmetre okumasını W_1 ile gösterirsek

$$W_2 = |\mathbf{V}_{CB}||\mathbf{I}_{cC}| \cos\theta_2$$

$$= V_L I_L \cos\theta_2 \tag{11.54}$$

yazılabiliriz. Buradan, benzer şekilde

$$W_2 = |\mathbf{V}_{CB}||\mathbf{I}_{cC}| \cos\theta_2$$

$$= V_L I_L \cos\theta_2 \tag{11.55}$$

bulunur. Eş. 11.54'te θ_1, $\mathbf{V}_{AB}$ ile $\mathbf{I}_{aA}$ arasındaki faz açısıdır. Eş. 11.55'teki θ_2 ise $\mathbf{V}_{CB}$ ile $\mathbf{I}_{cC}$ arasındaki faz açısıdır.

W_1 ve W_2'yi hesaplamak için θ_1 ve θ_2'yi, faz gerilimi ve akımı arasındaki faz farkı olan θ cinsinden ifade edeceğiz. Pozitif bir faz sırası için,

$$\theta_1 = \theta + 30^\circ = \theta_\phi + 30^\circ, \tag{11.56}$$

$$\theta_2 = \theta - 30^\circ = \theta_\phi - 30^\circ \tag{11.57}$$

bulunur. Eş. 11.56 ve 11.57'nin çıkarımı alıştırma olarak bırakılmıştır (Bkz. Problem 11.32). Eş. 11.56 ve 11.57 Eş. 11.54 ve 11.55'te yerine konduğunda

$$W_1 = V_L I_L \cos(\theta_\phi + 30^\circ), \tag{11.58}$$

$$W_2 = V_L I_L \cos(\theta_\phi - 30^\circ) \tag{11.59}$$

elde ederiz. Toplam gücü, W_1 ve W_2'yi toplayarak

$$P_T = W_1 + W_2 = 2V_L I_L \cos\theta_\phi \cos 30^\circ$$

$$= \sqrt{3} V_L I_L \cos\theta_\phi \tag{11.60}$$

buluruz. Bu ifade üç fazlı bir devredeki toplam gücün ifadesidir. Böylelikle, iki wattmetre okuması toplamının toplam ortalama gücü verdiğini sağlamış olduk.

Eş. 11.58 ve 11.59'un yakından incelenmesi, iki wattmetre okuması hakkında aşağıdaki bilgileri verir:

1. Eğer güç çarpanı 0.5'ten büyükse, her iki wattmetre pozitif okur.
2. Eğer güç çarpanı 0.5 ise bir wattmetre sıfır okur.
3. Eğer güç çarpanı 0.5'ten küçükse bir wattmetre negatif okur.
4. Faz sırasını ters çevirmek, iki wattmetrenin okumalarını değiştirir.

Bu gözlemler aşağıdaki örnekte ve Problem 11.43-11.51'de sergilenmektedir.

Örnek 11.6 **Üç Fazlı Devrelerde Wattmetre Okumalarının Hesaplanması**

Şekil 11.20'de yükteki faz gerilimi 120 V ve (a) $Z_\phi = 8 + j6\ \Omega$; (b) $Z_\phi = 8 - j6\ \Omega$; (c) $Z_\phi = 5 + j5\sqrt{3}\ \Omega$ ve (d) $Z_\phi = 10\ \angle{-75^\circ}\ \Omega$ ise her bir wattmetre okumasını hesaplayınız. (e) (a)-(d) için wattmetre okumaları toplamının yüke aktarılan toplam güce eşit olduğunu sağlayınız.

Çözüm

a) $Z_\phi = 10\ \angle{36.87^\circ}\ \Omega$, $V_L = 120\sqrt{3}$ V
$I_L = 120/10 = 12$ A.

$$W_1 = (120\sqrt{3})(12)\cos(36.87^\circ + 30^\circ) = 979.75 \text{ W},$$

$$W_2 = (120\sqrt{3})(12)\cos(36.87^\circ - 30^\circ) = 2476.25 \text{ W}.$$

b) $Z_\phi = 10\ \angle{-36.87^\circ}\ \Omega$, $V_L = 120\sqrt{3}$ V
$I_L = 120/10 = 12$ A.

$$W_1 = (120\sqrt{3})(12)\cos(-36.87^\circ + 30^\circ) = 2476.25 \text{ W},$$

$$W_2 = (120\sqrt{3})(12)\cos(-36.87^\circ - 30^\circ) = 979.75 \text{ W}.$$

c) $Z_\phi = 5(1 + j\sqrt{3}) = 10\ \angle{60^\circ}\ \Omega$, $V_L = 120\sqrt{3}$ V, ve $I_L = 12$ A.

$$W_1 = (120\sqrt{3})(12)\cos(60^\circ + 30^\circ) = 0,$$

$$W_2 = (120\sqrt{3})(12)\cos(60^\circ - 30^\circ) = 2160 \text{ W}.$$

d) $Z_\phi = 10\ \angle{-75^\circ}\ \Omega$, $V_L = 120\sqrt{3}$ V ve $I_L = 12$ A.

$$W_1 = (120\sqrt{3})(12)\cos(-75^\circ + 30^\circ) = 1763.63 \text{ W},$$

$$W_2 = (120\sqrt{3})(12)\cos(-75^\circ - 30^\circ) = -645.53 \text{ W}.$$

e) $P_T(a) = 3(12)^2(8) = 3456$ W,

$$W_1 + W_2 = 979.75 + 2476.25 = 3456 \text{ W},$$

$$P_T(b) = P_T(a) = 3456 \text{ W},$$

$$W_1 + W_2 = 2476.25 + 979.75 = 3456 \text{ W},$$

$$P_T(c) = 3(12)^2(5) = 2160 \text{ W},$$

$$W_1 + W_2 = 0 + 2160 = 2160 \text{ W},$$

$$P_T(d) = 3(12)^2(2.5882) = 1118.10 \text{ W},$$

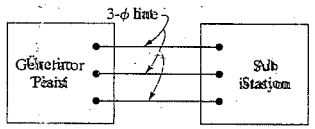
$$W_1 + W_2 = 1763.63 - 645.53 = 1118.10 \text{ W}.$$

NOT: Bölüm Problemlerinden 11.41 ve 11.42'yi çözmeyi deneyerek iki wattmetre yöntemini anlayışınızı değerlendiriniz.

Pratik Bakış Açısı

Elektrik Gücün İletim ve Dağıtımı

Bu bölümün başında, hizmet şirketlerinin müşterinin mülkünde rms gerilim seviyesini koruma zorunluluğuna işaret etmiştik. Değişik amaçlar için, nominal seviyeden kabul edilebilir sapma farklı olmakla birlikte, tartışma açısından izin verilebilir toleransı % ± 5.8 olduğunu kabul edeceğiz. Böylece 120 V nominal rms gerilim, 113 V ile 127 V arasında değişebilir. Ayrıca, sistemde stratejik olarak yerleştirilmiş kapasitörlerin gerilim seviyelerini desteklemek için kullanılabileceğine de işaret etmiştik.



Şekil 11.21 ▲ Üç fazlı hat ile güç tesisine bağlanmış olan bir alt istasyon.

Şekil 11.21'deki devre bir orta-batı belediye sisteminde bir alt istasyonu temsil etmektedir. Sistemin dengeli olduğunu, alt istasyondaki hatlar arası gerilimin 13.8 kV olduğunu, dağıtım hattının empedansının $0.6 + j4.8\ \Omega$ olduğunu ve alt istasyonda sıcak nemli bir Temmuz gününde öğleden sonar saat 3'te yükün 3.6 MW ve 3.6 mıknatıslayan MVAR olduğunu kabul edeceğiz.

Alt istasyondaki hat-nötr gerilimini referans alarak Şekil 11.21'deki sistemin tek faz-eşdeğer devresi Şekil 11.22'deki gibi elde edilir. Hat akımı, alt istasyondaki kompleks güç ifadesinden nesaplanabilir. Böylelikle,

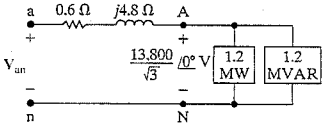
$$\frac{13{,}800}{\sqrt{3}}\mathbf{I}_{aA}^* = (1.2 + j1.2)10^6$$

olur. Buradan

$$\mathbf{I}_{aA}^* = 150.61 + j150.61 \text{ A}$$

veya

$$\mathbf{I}_{aA} = 150.61 - j150.61 \text{ A}$$



Şekil 11.22 ▲ Şekil 11.21'deki sistemin tek faz eşdeğer devresi.

elde edilir. Üretim tesisindeki hat-nötr gerilimi

$$\mathbf{V}_{an} = \frac{13{,}800}{\sqrt{3}}\angle{0^\circ} + (0.6 + j4.8)(150.61 - j150.61)$$

$$= 8780.74 + j632.58$$

$$= 8803.50\ \angle{4.12^\circ} \text{ V}$$

bulunur. Sonuç olarak üretim tesisindeki hat gerilimi

$$|\mathbf{V}_{ab}| = \sqrt{3}(8803.50) = 15{,}248.11 \text{ V}$$

elde edilir. Şirketin, gerilim seviyesini nominal değerin % ± 5.8'i içinde tutması gerektiğini kabul ediyoruz. Bu, güç tesisindeki hatlar arası gerilimin 14.6 kV'u aşmaması veya 13 kV'tan az olmaması gerektiği anlamına gelir. Dolayısıyla, üretim tesisindeki hat gerilim büyüklüğü müşteriler açısından soruna neden olabilir.

Mıknatıslayan var'lar, alt istasyon ana hattına bağlı bir kapasitör yığıtı ile sağlanıyorsa, $\mathbf{I}_{aA}$ hat akımı

$$\mathbf{I}_{aA} = 150.61 + j0 \text{ A}$$

haline gelir.

Dolayısıyla alt istasyonda 13,800 V'luk hat-hat gerilimi sağlamak için gereken üretim tesisi gerilimi

$$\mathbf{V}_{an} = \frac{13{,}800}{\sqrt{3}}\ \underset{13{,}800\ \mathrm{V}}{\angle 0^\circ} + (0.6 + j4.8)(150.61 + j0)$$
$$= 8057.80 + j722.94$$
$$= 8090.17\ \underline{/5.13^\circ}\ \mathrm{V}$$

olur. Buradan,

$$|\mathbf{V}_{ab}| = \sqrt{3}(8090.17) = 14{,}012.58\ V$$

elde edilir. Bu gerilim seviyesi, kabul edilebilir 13 kV–14.6 kV aralığındadır.

NOT: Bu Pratik Bakış Açısını kavrayışınızı, Bölüm Problemlerinden 11.52 (a) - (b) ve 11.53-11.55'i de çözmeyi deneyerek değerlendiriniz.

Özet

- Dengeli üç fazlı devrelerin analizinde ilk adım, tüm Δ bağlantıları Y haline geçirmektir. Böylece tüm devre Y-Y yapıda olur. (Bkz. Sf. 336.)
- Bir **tek faz eşdeğer devre**, Y-Y yapının hat akımını ve bir fazının gerilimini bulmak için kullanılır. Normalde bu amaç için a fazı seçilir. (Bkz. Sf. 438.)
- a fazı eşdeğer devresinde hat akımını ve faz gerilimini bildikten sonra, aşağıdaki gerçeklere dayanarak dengeli bir üç fazlı devrede herhangi bir akımı veya gerilimi analitik kısayollarla bulabiliriz.
  - b ve c fazı gerilim ve akımları 120° faz farkı dışında a fazınınkiler ile aynıdır. Pozitif sıralı bir devrede b fazı a fazının 120° gerisinde ve c fazı ise a'nın 120° ilerisindedir. Negatif faz sıralı bir devrede b ve c fazlarının a fazına göre yeri değişir.
  - Hat gerilimlerinin kümesi, faz gerilimleri kümesinden ±30° faz farklıdır. Artı ve eksi işareti, sırasıyla pozitif ve negatif sıraya karşılık gelir.
  - Bir Y-Y devrede hat geriliminin büyüklüğü faz gerilimi büyüklüğünün $\sqrt{3}$ katıdır.
  - Δ bağlı kaynak ve yük durumunda hat akımları kümesi faz akımları kümesinden ∓ 30° farklıdır. Eksi ve artı işareti sırasıyla pozitif ve negatif sıraya karşılık gelir.
  - Δ bağlı kaynak veya yükte, hat akımı büyüklüğü faz akımı büyüklüğünün $\sqrt{3}$ katıdır. (Bkz. Sf. 439 ve 443.)
- Faz başına ortalama güç, reaktif güç ve kompleks gücün hesaplanması yöntemleri 10. Bölümde tanıtılan yöntemlerle aynıdır. (Bkz. Sf. 445.)
- Toplam gerçek, reaktif ve kompleks güç, faz başına niceliği $\sqrt{3}$ ile çarparak veya hat akımı ve gerilimine dayanan Eş. 11.36, 11.38 ve 11.41'deki ifadeler kullanarak belirlenebilir. (Bkz. Sf. 446 ve 447.)
- Dengeli üç fazlı bir devrede toplam anlık güç sabittir ve faz başına ortalama gücün 1.5 katıdır. (Bkz Sayfa 448.)
- Bir wattmetre yüke aktarılan ortalama gücü, yükle seri bağlanan bir akım bobini ve yüke paralel bağlanan bir gerilim bobini kullanarak ölçer. (Bkz. Sf. 452.)
- Dengeli üç fazlı bir devrede ortalama güç, devrenin iki farklı fazına bağlanan iki wattmetrenin okuması toplanarak ölçülebilir. (Bkz. Sf. 452.)

Problemler

Aşağıdaki problemlerde tüm fazör gerilimler rms değer cinsinden verilmiştir.

Kısım 11.1

11.1 Aşağıdaki gerilim kümelerinin faz sırası nedir?

a) $v_a = 120\cos(\omega t + 54^\circ)$ V,
$v_b = 120\cos(\omega t - 66^\circ)$ V,
$v_c = 120\cos(\omega t + 174^\circ)$ V.

b) $v_a = 3240\cos(\omega t - 26^\circ)$ V,
$v_b = 3240\cos(\omega t + 94^\circ)$ V,
$v_c = 3240\cos(\omega t - 146^\circ)$ V.

11.2 Aşağıdaki gerilim kümelerinin, dengeli bir üç faz küme oluşturup oluşturmadığını belirtiniz. Eğer küme dengeli ise faz sırasının pozitif veya negatif olduğunu belirtiniz. Eğer küme dengesiz ise nedenini açıklayınız.

a) $v_a = 339\cos 377t$ V,
$v_b = 339\cos(377t - 120^\circ)$ V,
$v_c = 339\cos(377t + 120^\circ)$ V.

b) $v_a = 622\sin 377t$ V,
$v_b = 622\sin(377t - 240^\circ)$ V,
$v_c = 622\sin(377t - 240^\circ)$ V.

c) $v_a = 933\sin 377t$ V,
$v_b = 933\sin(377t + 240^\circ)$ V,
$v_c = 933\cos(377t + 30^\circ)$ V.

d) $v_a = 170\sin(\omega t + 60^\circ)$ V,
$v_b = 170\sin(\omega t + 180^\circ)$ V,
$v_c = 170\cos(\omega t - 150^\circ)$ V.

e) $v_a = 339\cos(\omega t + 30^\circ)$ V,
$v_b = 339\cos(\omega t - 90^\circ)$ V,
$v_c = 393\cos(\omega t + 240^\circ)$ V.

f) $v_a = 3394\sin(\omega t + 70^\circ)$ V,
$v_b = 3394\cos(\omega t - 140^\circ)$ V,
$v_c = 3394\cos(\omega t + 180^\circ)$ V.

11.3 Eş. 11.3'ün, Eş. 11.1 veya Eş. 11.2 için doğru olduğunu sağlayınız.

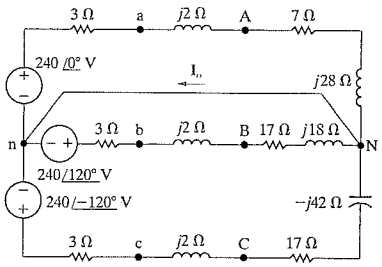
Kısım 11.2

11.4 Şekil 11.5(b)'deki devreye bakınız. a, b, c terminallerine dış bağlantı olmadığını kabul ediniz. Ayrıca üç sarımın dengeli bir üç faz jeneratörden olduğunu da kabul ediniz. Δ bağlı jeneratörde ne kadar akım dolaşır?

Kısım 11.3

11.5 PSPICE a) Şekil P11.5'teki devre, dengeli bir üç faz sistem midir? Açıklayınız.
b) $\mathbf{I}_o$'yu bulunuz.

Şekil P11.5



11.6 PSPICE a) Şekil P11.6'daki devrede $\mathbf{I}_o$'yu bulunuz.
b) $\mathbf{V}_{AN}$'yi bulunuz.
c) $\mathbf{V}_{AB}$'yi bulunuz.
d) Devre dengeli bir üç faz sistem midir?

11.7 PSPICE Şekil P.11.7'deki dengesiz üç faz devrede $\mathbf{I}_o$'nun rms değerini bulunuz.

11.8 Y bağlı bir yükün terminallerindeki hat-nötr gerilimlerinin zaman bölgesi ifadeleri

$$v_{AN} = 7967 \cos \omega t \text{ V},$$
$$v_{BN} = 7967 \cos (\omega t + 120°) \text{ V},$$
$$v_{CN} = 7967 \cos (\omega t - 120°) \text{ V}$$

verilmiştir. Üç hat-hat gerilim v_{AB}, v_{BC} ve v_{CA} için zaman bölgesi ifadelerini bulunuz.

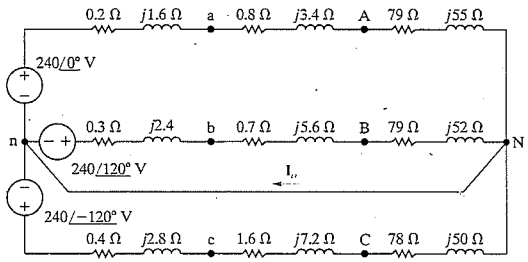
11.9 Y bağlı bir dengeli yükün terminallerindeki hat gerilimi büyüklüğü 12,800 V'tur. Yük empedansı $216 + j63\ \Omega/\phi$'dir. Yük, empedansı $0.25 + j2\ \Omega/\phi$ olan bir hatla beslenmektedir.
a) Hat akımının genliği nedir?
b) Kaynaktaki hat gerilim genliği nedir?

11.10 Bir ideal, dengeli üç fazlı bir kaynağın faz gerilim genliği 4800 V'tur. Kaynak, empedansı $2 + j16\ \Omega/\phi$ olan bir hatla Y bağlı bir dengeli yüke bağlıdır. Yük empedansı $190 + j40\ \Omega/\phi$'dir. Kaynağın faz sırası acb'dir. Kaynağın a fazı gerilimini referans olarak kullanınız. Aşağıdaki niceliklerin genlik ve faz açılarını bulunuz: (a) Üç hat akımı, (b) kaynaktaki üç hattın gerilimi, (c) yükteki üç faz gerilim ve (d) yükteki üç hat gerilimini bulunuz.

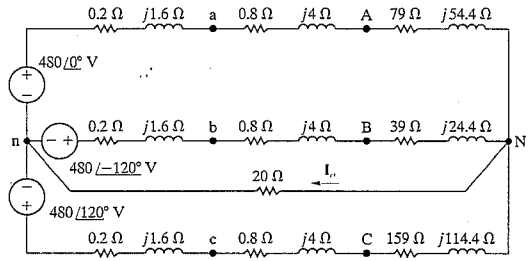
11.11 Dengeli üç fazlı bir devre aşağıdaki özelliklere sahiptir:
- Y-Y bağlıdır.
- Yükteki V_{ab} hat gerilimi $120\sqrt{3}\angle 0°$'tur.
- Faz sırası pozitiftir.
- Hat empedansı $2 + j3\ \Omega/\phi$'dir.
- Yük empedansı $28 + j37\ \Omega/\phi$'dir.

a) a fazının tek faz eşdeğer devresini çiziniz.
b) a fazının hat akımını hesaplayınız.
c) a fazının yükteki hat gerilimini hesaplayınız.

Şekil P11.6



Şekil P11.7



11.12 Δ bağlı dengeli bir yükün empedansı $360 + j105\ \Omega/\phi$'dir. Yük, $0.1 + j1\ \Omega/\phi$ empedansa sahip bir hatla beslenmektedir. Yük terminallerindeki faz gerilimi 33 kV'tur. Faz sırası pozitiftir. V_{AB}'yi referans olarak kullanınız.
a) Yükte üç fazın akımlarını hesaplayınız.
b) Üç hat akımını hesaplayınız.
c) Hattın gönderen ucundaki üç hat gerilimini hesaplayınız.

11.13 Empedansı $96 - j28\ \Omega/\phi$ olan Y bağlı bir yük, Δ bağlı, dengeli ve empedansı $144 + j42\ \Omega/\phi$ olan bir yükle paralel bağlanmıştır. Paralel bu yükler empedansı $j1.5\ \Omega/\phi$ olan bir hatla beslenmektedir. Y yükün hat-nötr geriliminin genliği 7500 V'tur.
a) Yükleri besleyen hattaki akımın genliğini hesaplayınız.
b) Δ bağlı yükte faz akımının genliğini bulunuz.
c) Y bağlı yükte faz akımının genliğini bulunuz.
d) Hattın gönderen ucundaki hat geriliminin genliğini hesaplayınız.

11.14 Dengeli bir üç faz sistem aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:
- Y - Δ bağlıdır.
- b fazındaki kaynak gerilim $20\angle -90°$ V'tur
- Kaynak faz sırası acb'dir.
- Hat empedansı $1 + j3\ \Omega/\phi$'dir.

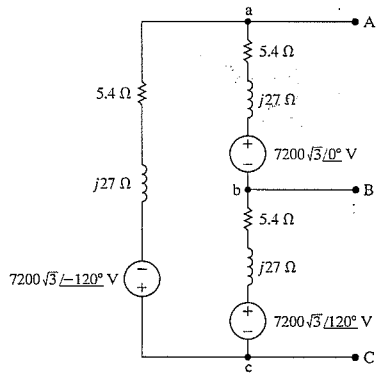
a) a fazının tek faz eşdeğer devresini çiziniz.
b) a fazının hat akımını hesaplayınız.
c) Üç faz yükün a fazının hat gerilimini hesaplayınız.

11.15 Dengeli, üç fazlı bir sistemde kaynak abc faz sıralı, dengelidir ve $\mathbf{V}_{ab} = 208\angle 50°$ hat gerilimine sahiptir. Yük, dengeli bir Δ ile paralel bağlı dengeli bir Y'dir. Y'nin faz empedansı $4 + j3\ \Omega/\phi$ ve Δ'nınki ise $3 - j9\ \Omega/\phi$'dir. Hat empedansı $1.4 + j\,0.8\ \Omega/\phi$'dir. Tek faz eşdeğer devreyi çiziniz ve bunu kullanarak yükte a fazının hat gerilimini bulunuz.

11.16 abc faz sıralı, dengeli üç faz Y bağlı bir kaynak, empedansı $12 + j9\ \Omega/\phi$ olan dengeli üç faz Δ bağlı bir yüke güç sağlamaktadır. a fazında kaynak gerilimi $120\angle 80°$ V'tur. Hat empedansı $1 + j1\ \Omega/\phi$'dir. a fazı için tek faz eşdeğer devreyi çiziniz ve onu kullanarak yükün a fazındaki akımı bulunuz.

11.17 Şekil P11.17 dengeli, üç fazlı ve Δ bağlı bir kaynağı göstermektedir.
a) Y bağlı eşdeğer devreyi bulunuz.
b) Y bağlı eşdeğer devrenin baştaki Δ bağlı kaynakla aynı açık devre gerilimi oluşturduğunu gösteriniz.
c) A, B ve C terminallerine dışarıdan kısa devre uygulayınız. Δ bağlı kaynağı kullanarak $\mathbf{I}_{aA}$, $\mathbf{I}_{bB}$ ve $\mathbf{I}_{cC}$ hat akımlarını bulunuz.
d) Y eşdeğer kaynak ile (c)'yi tekrarlayıp, istenen üç hat akımını bulunuz.

Şekil P11.17



11.18 Problem 11.17'deki Δ bağlı kaynak, dengeli bir üç faz hat ile Y bağlı bir yüke bağlanmıştır. Yük empedansı 957 + *j*259 Ω/ϕ'dir ve hat empedansı 1.2 + *j*12 Ω/ϕ verilmiştir.

a) Sistemin tek faz eşdeğer devresini oluşturunuz.

b) Yük terminallerinde hat gerilim genliğini belirleyiniz.

c) Δ kaynakta faz akım genliğini belirleyiniz.

d) Kaynak terminallerinde hat gerilim genliğini belirleyiniz.

11.19 Üç fazlı, Δ bağlı bir jeneratörün iç empedansı 0.6 + *j*4.8 Ω/ϕ'dir. Yük jeneratörden çıkarıldığında terminal gerilim genliği 34,500 V'tur. Jeneratör, empedansı 0.8 + *j*6.4 Ω/ϕ olan bir iletim hattı ile Δ bağlı bir yükü beslemektedir. Yükün faz başına empedansı 2877 - *j*864 Ω'dur.

a) Tek faz eşdeğer devreyi oluşturunuz.

b) Hat akımının genliğini hesaplayınız.

c) Yük terminallerinde hat gerilim genliğini bulunuz.

d) Kaynak terminallerinde hat gerilim genliğini bulunuz.

e) Yükte faz akımı büyüklüğünü bulunuz.

f) Kaynakta faz akımı büyüklüğünü bulunuz.

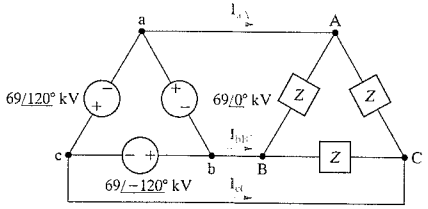
11.20 Şekil P11.20'deki dengeli üç faz devredeki Z empedansı 600 + *j*450 Ω'dur. Aşağıdakileri bulunuz.

a) $\mathbf{I}_{AB}$, $\mathbf{I}_{BC}$ ve $\mathbf{I}_{CA}$

b) $\mathbf{I}_{aA}$, $\mathbf{I}_{bB}$ ve $\mathbf{I}_{cC}$

c) $\mathbf{I}_{ba}$, $\mathbf{I}_{cb}$ ve $\mathbf{I}_{ac}$.

Şekil P11.20



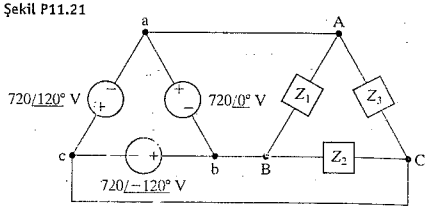
11.21 PSPICE Şekil P11.21'deki devrede

a) $\mathbf{I}_{AB}$, $\mathbf{I}_{BC}$ ve $\mathbf{I}_{CA}$ faz akımlarını,

b) $\mathbf{I}_{aA}$, $\mathbf{I}_{bB}$ ve $\mathbf{I}_{cC}$ hat akımlarını bulunuz.

$Z_1 = 4.8 + j1.4\ \Omega$, $Z_2 = 16 - j12\ \Omega$ ve $Z_3 = 25 + j25\ \Omega$ alınız.

Şekil P11.21



Kısım 11.5

11.22 Dengeli üç fazlı bir kaynak, iki dengeli Y bağlı paralel yüke 0.8 gecikme çarpanı ile 90 kVA sağlıyor. Kaynağı yüke bağlayan dağıtım hattının empedansı ihmal edilebilir seviyededir. Yük saf dirençtir ve 60 kW soğurmaktadır. Eğer hat gerilimi 415.69 V ise ve empedans bileşenleri seri bağlanmışsa 2. yükün faz başına empedansını bulunuz.

11.23 Dengeli, üç fazlı, Y-Δ bir sistemde toplam görünen güç 3600 VA'dir. Hat gerilimi 208 V'tur. Eğer hat empedansı ihmal edilebilir ve yükün güç çarpan açısı 25° ise yükün empedansını bulunuz.

11.24 Dengeli bir üç faz sistemde kaynak abc sıralıdır, Y bağlıdır ve $\mathbf{V}_{an} = 120\angle 20°$ V'tur. Kaynak, her ikisi de Y bağlı olan iki yükü beslemektedir. Yük 2'nin a fazındaki kompleks güç $600\angle 36°$ VA'dir ve yük 1 empedansı 8 + *j*6Ω/ϕ'dir. Kaynak tarafından sağlanan toplam kompleks gücü bulunuz.

11.25 Üç fazlı pozitif sıralı Y bağlı bir kaynak, Y bağlı ve Δ bağlı iki yükün paralel birleşimine 0.75 gecikmeli güç çarpanı ile 14 kVA sağlamaktadır. Y bağlı yük gecikmeli 0.6 güç çarpanı ile 9 kVA kullanmakta ve $10\angle -30°$ A a faz akımını taşımaktadır.

a) Δ bağlı yükte faz başına kompleks yükü bulunuz.

b) Hat geriliminin genliğini bulunuz.

11.26 Problem 11.21'deki dengesiz yükün her bir fazındaki kompleks gücü hesaplayınız.

11.27 Üç dengeli üç faz yük paralel bağlıdır. Yük 1 Y bağlı ve empedansı 300 + *j*100 Ω/ϕ; yük 2 Δ bağlı ve empedansı 5400 − *j*2700 Ω/ϕ ve yük 3'ün değeri 112.32 + *j*95.04 kVA verilmiştir. Bu yükler empedansı 1 + *j*10 Ω/ϕ olan bir dağıtım hattı ile beslenmektedir. Hattın yük ucunda hat-nötr geriliminin genliği 7.2 kV'tur.

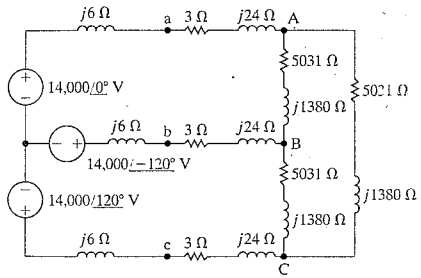
a) Hattın gönderen ucundaki toplam kompleks gücü hesaplayınız.

b) Hattın gönderen uundaki ortalama gücün yüzde kaçı yüklere aktarılır?

11.28 PSPICE a) Şekil P11.28'de gösterilen devrelerde $\mathbf{I}_{CA}$'nın rms genliğini ve faz açısını bulunuz.

b) Üç faz kaynağın taşıdığı ortalama gücün yüzde kaçı üç faz yükte harcanır?

Şekil P11.28



11.29 Dengeli üç fazlı bir devrede toplam anlık gücün sabit olduğunu ve V_m ve I_m faz gerilim ve akımının maksimum genliklerini göstermek üzere $1.5\, V_m I_m \cos\theta_\phi$'ye eşit olduğunu gösteriniz.

11.30 Dengeli bir üç faz dağıtım hattının empedansı 1 + *j*5 Ω/ϕ'dir. Bu hat, paralel bağlı üç dengeli üç faz yükü beslemek için kullanılmaktadır. Üç yük 0.96 önde pf ile L_1 = 75 kVA, 0.8 geride pf ile L_2 = 150 kVA ve L_3 = 168 kW ve 36 kVAR'dır. Yük terminallerindeki hat geriliminin genliği $2500\sqrt{3}$ V'tur.

a) Hattın gönderen ucundaki hat gerilim genliği nedir?

b) Ortalama güç açısından dağıtım hattının yüzde verimi nedir?

11.31 Aşağıda açıklanan üç bilgisayar ekipmanı, bir hesaplama merkezinin parçaları olarak kurulmuştur. Her bir ekipman, anma değeri 208 V olan dengeli üç faz bir yüktür. (a) Bu üç cihazı besleyen hat akımı genliğini, (b) birleşik yükün güç çarpanını bulunuz.

- Sabit Disk Sürücü: 0.82 geride pf ile 5.742 kW.
- CD/DVD sürücü: 0.93 geride pf ile 18.566 kVA
- CPU: 81.6 A hat akımı, 11.623 kVAR.

11.32 Üç faz bir hattın empedansı 0.5 + *j*4 Ω/ϕ'dir. Hat, paralel bağlı iki dengeli üç faz yükü beslemektedir. İlk yük toplam 691.2 kW soğurmakta ve 201.6 kVAR mıknatıslayan var aktarmaktadır. İkinci yük Δ bağlıdır ve empedansı 622.08 + *j*181.44 Ω/ϕ'dir. Hattın kaynak ucundaki hat gerilimi 7200 V'tur. Hattın kaynak ucundaki hat gerilim genliği nedir?

11.33 Tam yükü iken, 200 hp, üç faz bir indüksiyon motoru, %96 verimle çalışmaktadır ve 0.92 geride güç çarpanına sahiptir. Motor, hat gerilimi anma değeri 208 V olan bir üç faz çıkıştan beslenmektedir.

a) 208 V'luk çıkıştan çekilen hat akımının genliği nedir? (1 hp = 746 W.)

b) Motorun sağladığı reaktif gücü hesaplayınız.

11.34 Şekil P11.34'te (sayfa 462) gösteren dengeli üç faz yükün terminallerindeki hat-nötr gerilimi 480 V'tur. Bu gerilimde yük 0.8 geride pf ile 60 kVA soğurmaktadır.

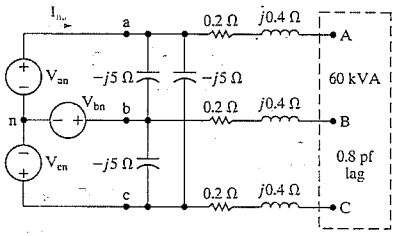
a) $\mathbf{V}_{AN}$'yi referans olarak kullanınız ve $\mathbf{I}_{na}$'yı kutupsal biçimde ifade ediniz.

b) İdeal üç faz kaynakla ilgili kompleks gücü hesaplayınız.

c) Toplam iletilen ortalama gücün toplam soğurulan ortalama güce eşit olduğunu gösteriniz.

d) Toplam iletilen reaktif gücün, toplam soğurulan reaktif güce eşit olduğunu sağlayınız.

Şekil P11.34



11.35 Dengeli bir üç faz kaynak, 0.96 önde pf ile, paralel iki Y bağlı yüke 1800 kVA sağlamaktadır. Kaynağı yüke bağlayan dağıtım hattının empedansı ihmal edilebilir küçüklüktedir. Yük 1'deki güç $192 + j1464$ kVA'dır.

a) Eğer hat gerilimi $6400\sqrt{3}$ V ve empedans bileşenleri seri bağlı ise yük 2'nin faz başına empedansını belirleyiniz.

b) Empedans bileşenlerini paralel olarak (a) şıkkını tekrar çözünüz.

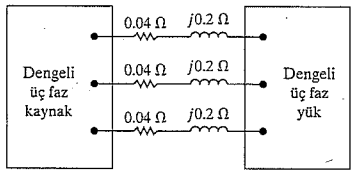
11.36 Dengeli bir üç faz yük, yük terminallerindeki hat gerilimi 13,800 V iken 0.8 önde güç çarpanı ile 190.44 kVA soğuruyor. Bu yükü modellemek için kullanılabilecek dört eşdeğer devreyi bulunuz.

11.37 Şekil P11.37'deki pozitif sıralı, dengeli üç faz kaynağın çıkışı 0.8 önde güç çarpanı ile 78 kVA'dir. Kaynaktaki hat gerilimi $208\sqrt{3}$ V'tur.

a) Yükte hat gerilim genliğini bulunuz.

b) Yük terminallerindeki toplam kompleks gücü bulunuz.

Şekil P11.37



11.38 Dengeli üç faz bir yüke $6600\sqrt{3}$ V hat gerilimi ile çalışırken iletilen güç, geride 0.6 pf ile 1188 kW'tır. Yüke besleyen dağıtım hattının empedansı $0.5 + j4\,\Omega/\theta$'dir. Bu çalışma koşulları altında hattın gönderen uç ile yük ucu arasındaki hat gerilim genliği düşüşü çak fazladır. Telafi için, yüke paralel Δ bağlı bir kapasitör yığıtı yerleştirilmiştir. Kapasitör yığıtı, $6600\sqrt{3}$ V hat geriliminde çalışırken 1920 kVAR nukratıslayan reaktif güç verecek şekilde tasarlanmıştır.

a) Yük $6600\sqrt{3}$ V hat gerilimi ile kapasitör yığıtı bağlanmamış durumda çalıştığında, hattın gönderen ucundaki gerilim genliği nedir?

b) Kapasitör yığıtı bağlı iken (a) şıkkını tekrar çözün

c) (a) şıkkında hattın ortalama güç verimi nedir?

d) (b) şıkkında hattın ortalama güç verimi nedir?

e) Eğer sistem 60 Hz'te çalışıyorsa her bir kapasitörü mikrofarad cinsinden boyutu nedir?

11.39 Delta bağlı ve dengeli bir kapasitör yığıtı, Değerlendirme Problemi 11.9'da açıklanan yüke paralel bağlanmıştır. Bunun etkisi, her fazda yüke paralel bir kapasitör yerleştirmektedir. Böylece yük terminallerindeki hat gerilimi 4160 V'ta kalmaktadır. Devre 60 Hz frekansta çalışmaktadır. Kapasitörler, yük ve kapasitör yığıtının paralel birleşimini besleyen hat akımını minimum yapacak şekilde seçilmiştir.

a) Kapasitörlerin mikrofarad cinsinden değeri nedir?

b) Y bağlı kapasitörler için (a)'yı tekrar çözünüz.

c) Hat akımının genliği nedir?

Kısım 11.6

11.40 Eş. 11.56 ve 11.57'yi çıkarınız.

11.41 Örnek 11.1'de yük ucundaki güç, iki wattmetre yöntemiyle ölçülmektedir. Her bir wattmetrenin ne okuyacağını hesaplayınız.

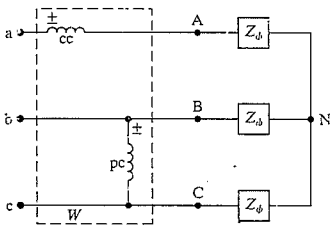
11.42 Şekil 11.20'deki iki wattmetre yükün toplam reaktif gücünü ölçmek için kullanılabilir.

a) $\sqrt{3}(W_2 - W_1) = \sqrt{3}V_L I_L \sin\theta_\phi$ olduğunu göstererek bu cümleyi ispat ediniz.

b) Örnek 11.16'daki her yük için wattmetre okumalarından toplam reaktif gücü hesaplayınız. Hesaplamalarınızı, toplam reaktif gücü doğrudan verilen gerilim ve empedanstan hesaplayarak kontrol ediniz.

11.43 Şekil P11.43'te gösterilen dengeli üç faz devrede wattmetrenin akım bobini aA hattına, gerilim bobini ise b ve c hatları arasına bağlanmıştır. Wattmetre okumasının $\sqrt{3}$ katının yükün toplam reaktif gücü olduğunu gösteriniz. Faz sırası pozitiftir.

Şekil P11.43



11.44 Şekil P11.43'teki devrede hat-nört gerilimi 720 V, faz sırası pozitif ve yük empedansı $96 + j72\ \Omega/\phi$'dir.

a) Wattmetre okumasını hesaplayınız.

b) Yükün toplam reaktif gücünü hesaplayınız.

11.45 a) Problem 11.20'deki dengeli yükün her bir fazına karşılık gelen kompleks gücü hesaplayınız.

b) Eğer yüke iletilen gücü ölçmek için iki wattmetre yöntemi kullanılsaydı, her bir metrenin ölçümü ne olurdu?

11.46 Şekil P11.46'da gösterilen dengeli üç faz yük, dengeli pozitif sıralı, Y bağlı bir üç faz kaynaktan beslenmektedir. Kaynağı yüke bağlayan hattın empedansı ihmal edilebilir seviyededir. Kaynağın hat-nötr gerilimi 4800 V'tur.

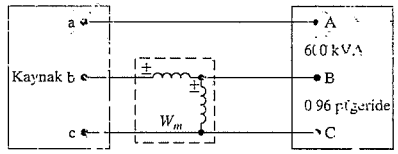
a) Wattmetrenin okumasını watt cinsinden bulunuz.

b) İki wattmetre toplam gücü ölçecek şekilde ikinci bir wattmetreyi devreye nasıl bağlayacağınızı açıklayınız.

c) İkinci wattmetrenin okumasını hesaplayınız.

d) İki wattmetre okuması toplamının yüke aktarılan toplam ortalama güce eşit olduğunu sağlayınız.

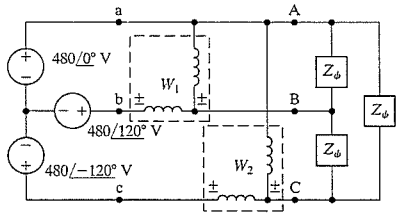
Şekil P11.46



11.47 a) Şekil P11.47'deki devrede wattmetrelerin okumasını hesaplayınız. Z_ϕ'nin değeri $80\angle 30°\ \Omega$'dır.

b) İki wattmetre ölçüm toplamının, Δ bağlı yüke iletilen toplam ortalama güce eşit olduğunu sağlayınız.

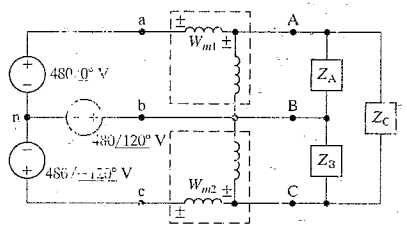
Şekil P11.47



11.48 a) $Z_A = 60\angle{-30^\circ}\ \Omega$, $Z_B = 24\angle{30^\circ}\ \Omega$ ve $Z_C = 80\angle{0^\circ}\ \Omega$ için Şekil P11.48'deki her bir wattmetrenin okumasını bulunuz.

b) İki wattmetrenin okumalarının toplamının, dengesiz üç faz yüke aktarılan toplam ortalama güce eşit olduğunu gösteriniz.

Şekil P11.48



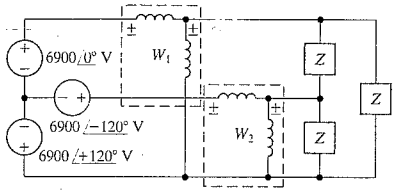
11.49 Şekil 11.20'deki iki wattmetre $W_1 = 114{,}291.64$ W ve $W_2 = 618{,}486.24$ W okumaktadır. Hat gerilim genliği $7600\sqrt{3}$ V V'tur ve faz sırası pozitiftir. Z_ϕ'yi bulunuz.

11.50 a) $Z = 276 - j207\ \Omega$ için Şekil P11.50'deki wattmetrelerin okumasını hesaplayınız.

b) İki wattmetre okuması toplamının, yüke aktarılan toplam yüke eşit olduğunu kontrol ediniz.

c) $\sqrt{3}(W_1 - W_2)$'nin yüke iletilen toplam mıknatıslayan var'a eşit olduğunu gösteriniz.

Şekil P11.50



11.51 İki wattmetre yöntemi Problem 11.21'deki devrede gücü ölçmek için kullanılmaktadır. Wattmetre 1'in akım bobini aA hattına, wattmetre 2'ninki ise bB hattına yerleştirilmiştir.

a) Wattmetre 1'in okumasını hesaplayınız.

b) Wattmetre 2'nin okumasını hesaplayınız.

c) İki wattmetre okuması toplamının, dengesiz yüke aktarılan toplam güce eşit olduğunu gösteriniz.

Kısım 11.4-11.6

11.52 Pratik Bakış Açısı örneğini göz önüne alınız.
PRATİK BAKIŞ AÇISI

a) Kapasitörler hatta bağlanmadan önce alt istasyon yükü için güç üçgenini oluşturunuz.

b) (a) şıkkını kapasitörler bağlı iken tekrarlayınız.

c) Alt istasyondaki hat-nötr gerilimini referans olarak, kapasitörler eklenmeden önce $\mathbf{V}_{AN}$ ve $\mathbf{V}_{an}$ arasındaki ilişkiyi gösteren bir fazör diyagramı oluşturunuz.

d) Pozitif faz sırası kabul ediniz ve $\mathbf{V}_{AB}$ ile $\mathbf{V}_{ab}$ arasındaki ilişkiyi gösteren bir fazör diyagramı çiziniz.

11.53 Pratik Bakış Açısı örneğini göz önüne alınız. Frekansın 60 Hz olduğunu kabul ediniz.
PRATİK BAKIŞ AÇISI

a) Kapasitörler delta bağlı ise, her bir kapasitörün μF cinsinden anma değeri nedir?

b) Kapasitörler Y bağlı ise her bir kapasitörün μF cinsinden anma değeri nedir?

11.54 Pratik Bakış Açısı örneğinde, eğer alt istasyon 13.8 kV'ta tutulur, alt istasyon yükü sıfıra indirilir ve kapasitör yığıtı bağlı tutulursa, üretim tesisindeki gerilim seviyesi ne olur?
PRATİK BAKIŞ AÇISI

11.55 Pratik Bakış Açısı örneğinde, kapasitörler alt istasyon hattına bağlanmadan önce ve sonra toplam hat kaybını kW cinsinden hesaplayınız.
PRATİK BAKIŞ AÇISI

11.56 Pratik bakış Açısı örneğinde alt istasyon hattı üzerindeki yükün 240 kW ve 600 mıknatıslayan kVAR'a düştüğünü ve kapasitörlerin alt istasyona bağlı kaldığını kabul ediniz.
PRATİK BAKIŞ AÇISI

a) Alt istasyonda 13.8 kV hat-hat gerilimini korumak için gereken üretim tesisi hat-hat gerilim genliği nedir?

b) Güç tesisindeki bu gerilim seviyesi diğer müşteriler için bir problem oluşturur mu?

11.57 Problem 11.56'da yük 240 kW ve 600 mıknatıslayan kVAR'a düştüğünde alt istasyondaki kapasitör bankasının bağlantısının kesildiğini kabul ediniz. Ayrıca alt istasyonda hatlar arası gerilimin 13.8 kV'ta tutulduğunu da kabul ediniz.
PRATİK BAKIŞ AÇISI

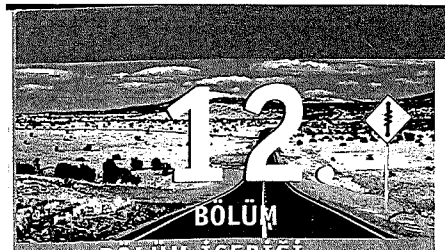
a) Üretim santralinde hatlar arası gerilimin büyüklüğü nedir?

b) (a)'da bulunan gerilim seviyesi kabul edilebilir değişim aralığı içinde midir?

c) Yük 240 + j600 kVA'ya düştükten sonra da kapasitörler hatta kalırsa kW cinsinden toplam hat kaybı nedir?

d) Kapasitörler yük 240 + j600 kVA'ya düştüğünde kaldırılırsa, kW cinsinden toplam hat kaybı nedir?

e) Hesaplamalarınıza dayanarak yük 240 + j600 kVA'ya düştünce kapasitörlerin bağlantısının kesilmesini önerir misiniz? Açıklayınız.



BÖLÜM İÇERİĞİ

12.1 Laplace Dönüşümünün Tanımı s. 467
12.2 Basamak Fonksiyonu s. 468
12.3 Dürtü Fonksiyonu s. 470
12.4 Fonksiyonel Dönüşümler s. 474
12.5 İşlemsel Dönüşümler s. 475
12.6 Laplace Dönüşümünün Uygulanması s. 481
12.7 Ters Dönüşümler s.482
12.8 F(s)'nin Kutup ve Sıfırları s.494
12.9 Başlangıç ve Son Değer Teoremleri s. 495

BÖLÜM HEDEFLERİ

1 Laplace dönüşümünün tanımı, Laplace dönüşümü tablosu ve/veya bir işlemsel dönüşümler tablosu kullanarak bir fonksiyonun Laplace dönüşümünü hesaplayabilmek.
2 Kısmi kesirler açılımı ve Laplace dönüşümü tablosu kullanarak ters Laplace dönüşümünü hesaplayabilmek.
3 Başlangıç ve son değer teoremlerinin nasıl kullanılacağını anlamak.

Laplace Dönüşümüne Giriş

Şimdi, doğrusal ve toplu parametreli devrelerin davranışını incelemek için sıklıkla kullanılan güçlü bir analitik tekniği tanıtacağız. Kısım 12.1'de matematiksel olarak tanımlanacak olan bu yöntem Laplace dönüşümüne dayanmaktadır. Fakat, bundan önce, neden başka bir analitik tekniğe ihtiyacımız olduğunu açıklamamız gerekmektedir. Öncelikle, tanımlayıcı denklemlerinin birden fazla düğüm gerilimi veya ağ akımı diferansiyel denklemi içeren devrelerin geçici davranışlarını göz önüne almayı arzu ediyoruz. Başka bir deyişle, doğrusal diferansiyel denklem kümeleriyle tanımlanan çoklu düğüm ve çoklu ağ devrelerini göz önüne almak istiyoruz.

İkinci olarak, 7. ve 8. Bölümde incelenen basit dc seviye atlamalarından daha karmaşık şekillerde sinyal kaynakları olan devrelerin geçici tepkisini belirlemeyi arzu ediyoruz. Üçüncü olarak, sinüzoidal kaynağın frekansının değiştiği durumlarda, bir devrenin durgun durum sinüzoidal tepkisini analiz etmek için yararlanacağımız aktarım fonksiyonu kavramını tanımlamak için Laplace dönüşümünü kullanacağız. Aktarım fonksiyonunu 13. Bölümde tartışacağız. Son olarak, bir devrenin zaman bölgesi davranışını frekans bölgesi davranışıyla sistematik bir şekilde ilişkilendirmeyi arzu ediyoruz. Laplace dönüşümünü kullanmak devrenin işleyişinin derinlemesine anlaşılmasını sağlayacaktır.

Bu bölümde, Laplace dönüşümünü tanıtıp, karakteristiklerini tartışacak ve frekans bölgesini zaman bölgesine dönüştürmek için sistematik bir yöntem sunacağız.

12.1 Laplace Dönüşümünün Tanımı

$L\{f(t)\}$ sembolünün "$f(t)$'nin Laplace dönüşümü" olarak seslendirildiği, bir fonksiyonun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt, \qquad (12.1)$$

◄ **Laplace dönüşümü**

ifadesi ile verilir.

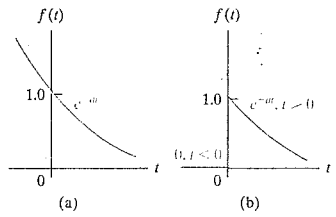
$f(t)$'nin Laplace dönüşümü aynı zamanda $F(s)$ ile de gösterilir, yani

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}. \qquad (12.2)$$

Bu gösterim Eş. 12.1'deki integralin alınmasında ortaya çıkan ifadenin s'nin bir fonksiyonu olduğuna vurgu yapmaktadır. Uygulamalarımızda, t zaman bölgesini temsil etmekte, ayrıca Eş. 12.1'deki integraldeki e'nın kuvvetinin boyutsuz olması gerektiği için s zamanın tersi veya frekans boyutuna sahip olmalıdır. Laplace dönüşümü, problemi zaman bölgesinden frekans bölgesine taşımaktadır. Bilinmeyen için frekans bölgesi ifadesinin bulunmasından sonra sonuç ters dönüşüm ile zaman bölgesine geri taşınmaktadır.

Laplace dönüşümünün arkasındaki düşünce yabancı geliyorsa, başka bir tanıdık matematiksel dönüşümü düşünmek yararlı olabilir. Logaritmalar, A = BC gibi bir çarpım veya bölüm işlemini daha basit toplama veya çıkarma işlemine dönüştürmekte kullanılmaktadır: log A = log BC = log B + log C. Antiloglar ters işlemin yürütülmesinde kullanılmaktadır. Fazör bir başka dönüşümdür; 9. Bölümden bildiğimiz gibi, fazör bir sinüzoidal sinyali, devre değerlerinin basitçe, cebirsel hesaplanabilmesi için bir karmaşık sayıya çevirmektedir. Bir sinyalin fazör değerini saptadıktan sonra, zaman bölgesi ifadesine geri dönüştürüyoruz. Her iki örnek de matematiksel dönüşümlerin başlıca özelliğini göstermektedir: Dönüşümler matematiksel işlemleri basitleştiren yeni bir bölge yaratmak için tasarlanmaktadır. Yeni bölgede bilinmeyeni bulduktan sonra, ters dönüşümü kullanarak baştaki bölgeye geri döneriz. Devre analizinde, Laplace dönüşümünü zaman bölgesindeki bir integrodiferansiyel denklem kümesini, frekans bölgesindeki bir cebirsel denklem kümesine dönüştürmek için kullanırız. Dolayısıyla, bilinmeyen bir niceliğin çözümünü, bir cebirsel denklem kümesinin çözülmesi işlemine basitleştirmiş oluruz.

Laplace dönüşümünün bazı önemli özelliklerini açıklamadan önce, bazı genel yorumları vermekte yarar vardır. İlk olarak, Eş. 12.1'deki integralin üst sınırının sonsuz olması nedeniyle düzgün olmadığı kaydedilmelidir. Dolayısıyla, integralin yakınsayıp yakınsamadığı sorusuyla karşı karşıyayız. Başka bir deyişle, verilen bir $f(t)$'nin Laplace dönüşümü bulunmakta mıdır? Açıkçası, mühendislik analizinin temel ilgi alanındaki fonksiyonların Laplace



Şekil 12.1 Orijinde sürekli ve süreksiz olan fonksiyonlar. (a) $f(t)$ orijinde süreklidir. (b) $f(t)$ orijinde süreksizdir.

dönüşümü bulunmaktadır; aksi takdirde bu dönüşümle ilgilenmezdik. Doğrusal devre analizinde, devreleri Laplace dönüşümü olan kaynaklarla uyarmaktayız. Burada, Laplace dönüşümü olmayan t^t veya e^{t^2} gibi uyarım fonksiyonları ile ilgilenmiyoruz.

İkinci olarak, integralin alt sınırının sıfır olması nedeniyle, Laplace dönüşümü t'nin negatif değerleri için $f(t)$'yi gözardı etmektedir. Başka bir bakış açısıyla, $F(s)$, $f(t)$'nin sadece pozitif t değerlerindeki davranışı tarafından belirlenmektedir. Alt sınırın sıfır olduğunu vurgulamak için, Eş. 12.1 sıklıkla **tek taraflı** veya **tek yanlı Laplace dönüşümü** olarak adlandırılır. Çift taraflı veya çift yanlı, Laplace dönüşümünde alt sınır $-\infty$'dur. Burada çift yanlı biçimi kullanmayacağız; dolayısıyla $F(s)$ denildiğinde tek taraflı dönüşüm anlaşılmalıdır.

Alt sınıra ait başka bir nokta, $f(t)$'nin orijinde süreksizliğe sahip olması ile ilgilidir. Eğer $f(t)$ orijinde sürekliyse, -örn. Şekil 12.1(a)'da olduğu gibi- $f(0)$ belirsiz değildir. Ancak, eğer $f(t)$ orijinde bir sonlu süreksizliğe sahipse, -örn. Şekil 12.1(b)'de olduğu gibi- Laplace dönüşümü integralinin bu süreksizliği içermesinin gerekip gerekmediği sorusu ortaya çıkmaktadır. Başka bir deyişle, alt sınırı 0^- yaparak süreksizliği içermeli miyiz, yoksa alt sınırı 0^+ yaparak süreksizliği dışarıda mı bırakmalıyız? (0^- ve 0^+ gösterimini, sırasıyla orijinin hemen solundaki ve sağındaki değerler için kullanmaktayız.) Aslında, tutarlı olduğumuz sürece her ikisini de seçebiliriz. Daha sonra açıklanacak nedenler yüzünden, burada alt sınırı 0^- olarak seçiyoruz.

Alt sınırı 0^- olarak kullanmamız nedeniyle, hemen 0^-'den 0^+'ya integralin sıfır olacağını not etmeliyiz. Bunun tek istisnası, Kısım 12.3'te tartışacağımız bir durum olan, orijindeki süreksizliğin bir dürtü fonksiyonu olmasıdır. Burada önemli olan nokta, Şekil 12.1'de gösterilen iki fonksiyonun da orijinde bir dürtü fonksiyonu olmaması nedeniyle aynı tek yanlı Laplace dönüşümüne sahip olmalarıdır.

Tek taraflı Laplace dönüşümü $t < 0^-$ için $f(t)$'yi gözardı eder. 0^-'den önce olanlar başlangıç koşulları tarafından tanımlanır. Dolayısıyla, Laplace dönüşümünü, başlangıç koşullarının oluşmasından sonraki bir etkiye karşı tepkiyi kestirmek için kullanırız.

Takip eden tartışmada, Laplace dönüşümlerini iki sınıfa ayıracağız: fonksiyonel dönüşümler ve işlemsel dönüşümler. Bir **fonksiyonel dönüşüm**, $\sin \omega t$, t, e^{-at} vs. gibi, belirli bir fonksiyonun Laplace dönüşümüdür. Bir **işlemsel dönüşüm**, $f(t)$'nin türevinin dönüşümünün bulunması gibi, Laplace dönüşümünün bir genel matematiksel özelliğini tanımlar. Fakat, fonksiyonel ve işlemsel dönüşümleri incelemeden önce basamak ve dürtü fonksiyonlarını tanımlamamız gerekir.

12.2 Basamak Fonksiyonu

Orijinde süreksizlik veya atlamalara sahip fonksiyonlarla karşılaşabiliriz. Örneğin, geçici davranışla ilgili önceki tartışmalardan biliyoruz ki, anahtarlama işlemleri gerilim ve akımlarda ani değişiklikler yaratmaktadır. Bu süreksizlikleri basamak ve dürtü fonksiyonları sayesinde matematiksel olarak ifade edebiliriz.

Şekil 12.2 basamak fonksiyonunu göstermektedir. Basamak fonksiyonunun sembolü $Ku(t)$'dir. Basamak fonksiyonunun matematiksel tanımı şöyledir:

$$Ku(t) = 0, \quad t < 0,$$

$$Ku(t) = K, \quad t > 0. \tag{12.3}$$

Eğer $K = 1$ ise Eş. 12.3 ile tanımlanan fonksiyon birim basamak olarak adlandırılır.

Basamak fonksiyonu $t = 0$ için tanımsızdır. 0^- ile 0^+ arasındaki geçişi tanımlamamız gereken durumlarda, doğrusallığı ve

$$Ku(0) = 0.5K \tag{12.4}$$

olduğunu varsayarız. Önceden olduğu gibi, 0^- ve 0^+ orijine soldan ve sağdan keyfi miktarda yakın simetrik noktaları temsil etmektedir. Şekil 12.3 0^-'den 0^+'ya doğrusal geçişi göstermektedir.

$t = 0$'dan farklı bir zamanda, örneğin sıralı anahtarlamada, bir süreksizlik oluşabilir. $t = a$'da oluşan bir basamak $Ku(t-a)$ ile ifade edilir. Dolayısıyla,

$$Ku(t - a) = 0, \quad t < a,$$

$$Ku(t - a) = K, \quad t > a. \tag{12.5}$$

Eğer $a > 0$ ise, basamak orijinin sağında oluşur ve eğer $a < 0$ ise basamak orijinin solunda oluşur. Şekil 12.4 Eş. 12.5'i resmetmektedir. Basamak fonksiyonunun $t-a$ negatif olduğunda 0 olduğu, bu argüman pozitif olduğunda ise K olduğu kaydedilmelidir.

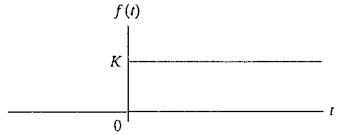
$t < a$ için K'ya eşit olan bir basamak fonksiyonu $Ku(a-t)$ olarak yazılır:

$$Ku(a - t) = K, \quad t < a,$$

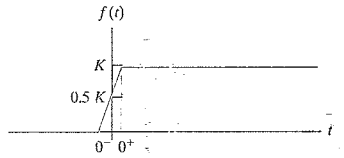
$$Ku(a - t) = 0, \quad t > a. \tag{12.6}$$

$a < 0$ için süreksizlik orijinin sol tarafına doğrudur. Eş. 12.6 Şekil 12.5'te gösterilmektedir.

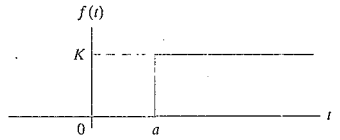
Basamak fonksiyonunun bir uygulaması, sonlu bir süre sıfırdan farklı ancak tüm pozitif zamanlar için tanımlı olan bir fonksiyonun matematiksel ifadesinin yazılmasında kullanılmasıdır. Devre analizinde kullanılan bir örnek, iki basamak fonksiyonunun toplanması ile yaratılan bir sonlu genişlikte darbedir. $K[u(t-1)-u(t-3)]$ fonksiyonu $1 < t < 3$ için K değerine, diğer yerlerde ise 0 değerine sahiptir, yani, yüksekliği K olan, $t = 1$'de başlayıp $t = 3$'te biten sonlu genişlikte bir darbedir. Bu darbeyi tanımlarken basamak fonksiyonunu kullanırken, $u(t-1)$ basamağının $t = 1$'de K sabit değerini "açtığı"nı, $-u(t-3)$ basamağının ise $t = 3$'te K sabit değerini "kapattığı"nı düşünmekte yarar vardır. Örnek 12.1'de basamak fonksiyonlarını doğrusal fonksiyonları istenilen zamanlarda açmak ve kapatmak için kullanıyoruz.



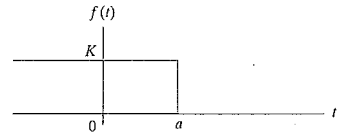
Şekil 12.2 Basamak fonksiyonu.



Şekil 12.3 Basamak fonksiyonunun doğrusal yaklaştırması.



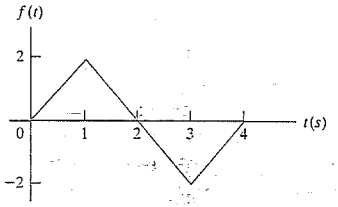
Şekil 12.4 $a > 0$ iken $t = a$ oluşan bir basamak fonksiyonu.



Şekil 12.5 $a > 0$ için $Ku(a-t)$ basamak fonksiyonu.

Örnek 12.1 **Sonlu Süreli bir Fonksiyonun Temsilinde Basamak Fonksiyonunun Kullanılması**

Şekil 12.6'da gösterilen fonksiyon için basamak fonksiyonlarını kullanarak bir ifade yazınız.



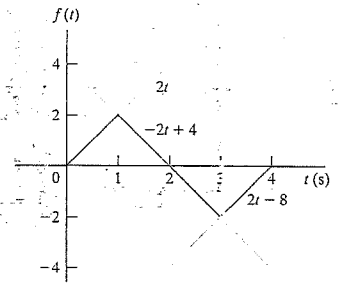
Şekil 12.6 ▲ Örnek 12.1 için fonksiyon.

Çözüm

Şekil 12.6'da gösterilen fonksiyon 0, 1, 3 ve 4 s'de kırılım noktaları olan doğrusal parçalardan oluşmaktadır. Bu fonksiyonu oluşturmak için uygun eğimdeki doğrusal fonksiyonları toplayıp çıkarmamız gerekmektedir. Bu doğrusal parçaları uygun zamanlarda başlatıp sonlandırmak için basamak fonksiyonunu kullanacağız. Başka bir deyişle, şu denklemlerdeki doğru çizgileri açıp kapatmak için basamak fonksiyonunu kullanacağız: $+2t$, $t = 0$'da açılıp $t = 1$'de kapanır, $-2t+4$, $t = 1$'de açılıp $t = 3$'de kapanır ve $+2t-8$, $t = 3$'te açılıp $t = 4$'te kapanır. Bu doğru çizgi parçaları ve denklemleri Şekil 12.7'de gösterilmiştir. $f(t)$ için ifade

$$f(t) = 2t[u(t) - u(t-1)] + (-2t+4)[u(t-1) - u(t-3)] + (2t-8)[u(t-3) - u(t-4)]$$

olacaktır.



Şekil 12.7 ▲ Şekil 12.6'da gösterilen fonksiyonu oluşturan üç doğru parçasının basamak fonksiyonları ile açılıp kapanmasının tanımı.

Not: *Basamak fonksiyonlarını kavrayışınızı Bölüm Problemleri 12.1 ve 12.2 ile sınayınız.*

12.3 Dürtü Fonksiyonu

Şekil 12.1(b)'deki gibi bir sonlu süreksizliğimiz olduğunda, fonksiyonun türevi süreksizlik noktasında tanımsızdır. Bir dürtü fonksiyonu[1] kavramı süreksizliklerde türevi, dolayısıyla bu türevin Laplace dönüşümünü tanımlamamıza yardımcı olur. Bir **dürtü** sonsuz genlik ve sıfır süreye sahip bir sinyaldir. Doğada bu tür sinyaller bulunmaz ancak bazı devre sinyalleri bu tanıma yaklaşmaya çok yakındır, yani bir dürtünün matematiksel modelini yararlı bulmaktayız. Dürtüsel gerilimler ve akımlar devre analizinde, ya bir anahtarlama işlemi nedeniyle veya devrenin bir dürtüsel kaynak ile uyarılmasından ötürü ortaya çıkmaktadır. Bu durumları 13. Bölümde analiz edeceğiz. Ancak burada genel olarak dürtü fonksiyonunu tanımlamaya odaklanmaktayız.

[1] Dürtü fonksiyonu aynı zamanda Dirac delta fonksiyonu olarak da bilinmektedir.

Bir süreksizlikte bir fonksiyonun türevini tanımlamak için, öncelikle, Şekil 12.8'de gösterildiği gibi fonksiyonun süreksizlik boyunca doğrusal olarak değiştiğini varsayarız; burada $\epsilon \to 0$ iken orijinde anlık bir süreksizlik oluştuğunu gözlenmektedir. Fonksiyonun türevini aldığımızda, türev $-\epsilon$ ve ϵ aralığında $1/2\epsilon$ sabit değerine sahiptir. $t > \epsilon$ için ise türev $-ae^{-a(t-\epsilon)}$'dur. Şekil 12.9 bu gözlemleri grafiksel olarak göstermektedir. ϵ sıfıra ulaştıkça $f'(t)$'nin değeri $\pm\epsilon$ arasında sonsuza ulaşmaktadır. Aynı zamanda, bu yüksek değerin süresi de sıfıra ulaşmaktadır. Dahası, $\epsilon \to 0$ iken $\pm\epsilon$ aralığında $f'(t)$'nin altındaki alan sabit kalmaktadır. Bu örnekte bu alan bir birimdir. ϵ sıfıra ulaştıkça, $\pm\epsilon$ arasında fonksiyonun $\delta(t)$ ile gösterilen bir birim dürtü fonksiyonuna dönüştüğünü söyleriz. Dolayısıyla, ϵ sıfıra ulaştıkça $f(t)$'nin türevi orijinde bir birim dürtü fonksiyonuna ulaşmaktadır veya

$$f'(0) \to \delta(t) \quad \epsilon \to 0 \text{ için}$$

yazılır. Eğer dürtü fonksiyonunun altındaki alan bir birimden farklı ise, dürtü fonksiyonu $K\delta(t)$ ile gösterilir, burada K alandır. K genellikle dürtü fonksiyonunun **gücü** olarak anılır.

Özetle, dürtü fonksiyonu parametresi sıfıra ulaşan bir değişken parametreli fonksiyondan yaratılır. Bu değişken parametreli fonksiyon parametre sıfıra giderken aşağıdaki üç özelliğe sahip olmalıdır:

1. Genlik sonsuza ulaşmalı,
2. Fonksiyonun süresi sıfıra ulaşmalı,
3. Parametre değiştikçe fonksiyon altında kalan alan sabit olmalıdır.

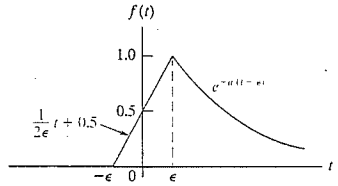
Çok sayıda değişik değişken parametreli fonksiyon bu özelliklere sahiptir. Şekil 12.8'de bir doğrusal fonksiyon kullandık: $f(t) = 0.5t/\epsilon + 0.5$. Başka bir değişken parametreli fonksiyon örneği üstel fonksiyondur:

$$f(t) = \frac{K}{2\epsilon} e^{-|t|/\epsilon}. \tag{12.7}$$

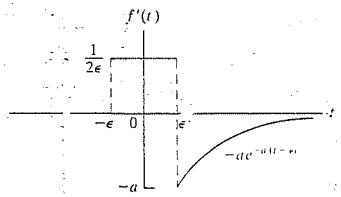
ϵ sıfıra ulaştıkça, fonksiyon orijinde sonsuza ulaşmaktadır ve aynı zamanda sonsuz küçük bir zaman aralığında sıfıra inmektedir. Şekil 12.10 $\epsilon \to 0$ iken $f(t)$'nin karakteristiğini göstermektedir. $\epsilon \to 0$ iken bir dürtünün yaratıldığını göstermek için fonksiyon altındaki alanın ϵ'dan bağımsız olduğunu göstermeliyiz. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{K}{2\epsilon} e^{t/\epsilon}\,dt + \int_{0}^{\infty} \frac{K}{2\epsilon} e^{-t/\epsilon}\,dt \\ &= \frac{K}{2\epsilon} \cdot \frac{e^{t/\epsilon}}{1/\epsilon}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{K}{2\epsilon} \cdot \frac{e^{-t/\epsilon}}{-1/\epsilon}\bigg|_{0}^{\infty} \\ &= \frac{K}{2} + \frac{K}{2} = K \end{aligned} \tag{12.8}$$

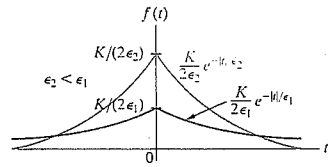
bulunur. Bu ifade bize eğri altında kalan alanın sabit olduğunu ve K birim olduğunu söylemektedir. Dolayısıyla, $\epsilon \to 0$ iken $f(t) \to K\delta(t)$ yazılır.



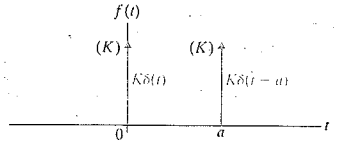
Şekil 12.8 ▲ $-\epsilon$ ile $+\epsilon$ arasında doğrusal geçiş olduğu varsayımıyla, Şekil 12.1(b)'deki süreksizliğin büyütülmüş görüntüsü.



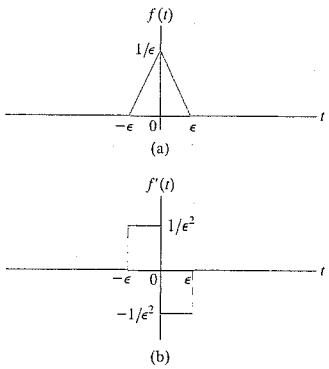
Şekil 12.9 ▲ Şekil 12.8'de gösterilen fonksiyonun türevi.



Şekil 12.10 ▲ Bir dürtü fonksiyonu yaratmakta kullanılan değişken parametreli bir fonksiyon.



Şekil 12.11 $K\delta(t)$ ve $K\delta(t-a)$ dürtülerinin grafiksel temsili.



Şekil 12.12 Dürtü fonksiyonunun ilk türevi. (a) Dürtü üretici fonksiyon dürtünün ilk türevini tanımlamakta kullanılır. (b) Dürtü üretici fonksiyonunun ilk türevi, $\epsilon \to 0$ iken $\delta'(t)$'ye ulaşır.

Matematiksel olarak, dürtü fonksiyonu

$$\int_{-\infty}^{\infty} K\delta(t)dt = K; \tag{12.9}$$

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \tag{12.10}$$

ile tanımlanır. Eş. 12.9 dürtü fonksiyonunun altında kalan alanın sabit olduğunu bildirir. Bu alan dürtünün gücünü temsil eder. Eş. 12.10 dürtünün $t = 0$ harici her yerde sıfır olduğunu bildirir. $t = a$'da oluşan bir dürtü $K\delta(t-a)$ ile belirtilir.

Dürtü fonksiyonu için kullanılan grafik sembolü bir oktur. Dürtünün gücü ok başının yanında parantez içinde belirtilir. Şekil 12.11 $K\delta(t)$ ve $K\delta(t-a)$ dürtülerini göstermektedir.

Dürtü fonksiyonunun önemli bir özelliği

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a) \tag{12.11}$$

ile ifade edilen **eleme özelliğidir**. Burada, $f(t)$ fonksiyonunun $t = a$'da, yani dürtünün olduğu yerde sürekli olduğu varsayılmaktadır. Eş. 12.11, dürtü fonksiyonunun $t = a$ dışında tüm zamanlarda $f(t)$'nin değerini elediğini göstermektedir. Eş. 12.11'in geçerliliği, $\delta(t-a)$'nın $t = a$ dışında tüm zamanlarda sıfır olmasından gelmektedir. Dolayısıyla integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(t)\delta(t-a)dt \tag{12.12}$$

olarak yazılabilir. Fakat, $f(t)$ a'da devamlı olduğu için, $t \to a$ iken $f(a)$ değerini alır, dolayısıyla

$$\begin{aligned} I &= \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(a)\delta(t-a)dt = f(a)\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(t-a)dt \\ &= f(a). \end{aligned} \tag{12.13}$$

elde edilir. Eleme özelliğini, devre analizinde çok işimize yarayacak bir Laplace dönüşümü çifti olan dürtü tepkisinin Laplace dönüşümünü bulmakta kullanabiliriz:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \tag{12.14}$$

Dürtü tepkisinin türevlerini ve bu türevlerin Laplace dönüşümlerini de tanımlayabiliriz. Burada dönüşümü ile birlikte birinci türevi tartışacak ve yüksek mertebeden türevler için sonuçları açıklayacağız.

Şekil 12.12(a)'da betimlenen fonksiyon, $\epsilon \to 0$ iken bir dürtü fonksiyonu üretmektedir. Şekil 12.12(b), bu dürtü üretici fonksiyonun türevini göstermektedir. Bu türev, $\epsilon \to 0$ iken $[\delta'(t)]$ dürtü türevi olarak tanımlanır. Dürtü fonksiyonunun türevinden bazen moment fonksiyonu veya birim doublet olarak olarak sözedilir.

$\delta'(t)$'nin Laplace dönüşümünü bulmak için, basitçe Şekil 12.12(b)'de gösterilen fonksiyonu tanımlayıcı integralde yerine koyarız ve integralden sonra $\epsilon \to 0$ olmasına izin veririz:

$$\begin{aligned} L\{\delta'(t)\} &= \lim_{\epsilon \to 0}\left[\int_{-\epsilon}^{0^-} \frac{1}{\epsilon^2}e^{-st}dt + \int_{0^+}^{\epsilon}\left(-\frac{1}{\epsilon^2}\right)e^{-st}dt\right] \\ &= \lim_{\epsilon \to 0}\frac{e^{s\epsilon} + e^{-s\epsilon} - 2}{s\epsilon^2} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0}\frac{se^{s\epsilon} - se^{-s\epsilon}}{2\epsilon s} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0}\frac{s^2e^{s\epsilon} + s^2e^{-s\epsilon}}{2s} \\ &= s. \end{aligned} \tag{12.15}$$

Eş. 12.15'i çıkarırken 0/0 belirsiz biçimini değerlendirmek için iki kere L'Hopital kuralını kullanmak zorundayız.

Yüksek mertebeden türevler birinci türevi üretmek için kullanılan yola benzer bir yolla üretilebilir (bkz. Problem 12.11) ve daha sonra tanımlayıcı integral bu türevlerin Laplace dönüşümünü bulmakta kullanılabilir. Dürtü fonksiyonunun n–yinci türevi için, Laplace dönüşümünün basitce s^n olduğunu buluruz, yani,

$$\mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t)\} = s^n \tag{12.16}$$

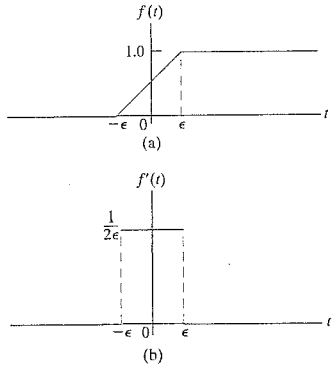
olur. Son olarak, bir dürtü fonksiyonu bir basamak fonksiyonunun türevi olarak düşünülebilir, yani,

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}. \tag{12.17}$$

Şekil 12.13 Eş. 12.17'nin grafiksel yorumunu sunmaktadır. Şekil 12.13(a)'da gösterilen fonksiyon, $\epsilon \to 0$ iken bir birim basamak fonksiyonuna ulaşır. Şekil 12.13(b)'de gösterilen fonksiyon –Şekil 12.13(a)'daki fonksiyonun türevi– $\epsilon \to 0$ iken bir birim dürtüye ulaşır.

Dürtü fonksiyonu devre analizinde çok kullanışlı bir kavramdır ve takip eden bölümlerde hakkında daha fazla şey söyleyeceğiz. Burada bu kavramı, Laplace dönüşümünü tanımlarken orijindeki devamsızlıkları hesaba katabilmek için sunduk.

NOT: Dürtü fonksiyonunu kavrayışınızı Bölüm Problemleri 12.5–12.7'yi deneyerek sınayınız.

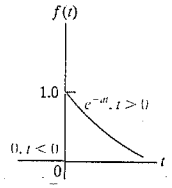


Şekil 12.13 Basamak fonksiyonunun türevi olarak dürtü fonksiyonu: (a) $\epsilon \to 0$ iken $f(t) \to u(t)$. (b) $\epsilon \to 0$ iken $f'(t) \to \delta(t)$.

12.4 Fonksiyonel Dönüşümler

Bir fonksiyonel dönüşüm basitçe, t'nin belirli bir fonksiyonunun Laplace dönüşümüdür.

Laplace dönüşümü tanımımızı tek taraflı veya tek yanlı olarak sınırladığımız için, tüm fonksiyonları $t < 0^-$ için sıfır olarak tanımlarız.



Şekil 12.14 ▲ Azalan bir üstel fonksiyon.

Bir fonksiyonel dönüşüm çiftini, birim dürtü fonksiyonunun Laplace dönüşümünün 1'e eşit olduğunu gösterdiğimiz (bkz. Eş. 12.14) Kısım 12.3'te tanımlamıştık. İkinci bir örnek ise, Şekil 12.13(a)'daki birim basamak fonksiyonudur:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_{0^+}^{\infty} 1e^{-st}dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s}. \tag{12.18}$$

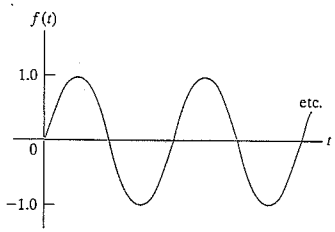
Eş. 12.18 birim basamak fonksiyonunun Laplace dönüşümünün $1/s$ olduğunu göstermektedir.

Şekil 12.14'te verilen, azalan bir üstel fonksiyonun Laplace dönüşümü ise şöyledir:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_{0^+}^{\infty} e^{-at}e^{-st}\,dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-(a+s)t}\,dt = \frac{1}{s+a}. \tag{12.19}$$

Eş. 12.18 ve 12.19'u çıkarırken orijindeki süreksizlik üzerinden alınan integralin sıfır olduğu gerçeğini kullandık.

Üçüncü bir örnek, Şekil 12.15'te gösterilen sinüzoidal fonksiyonun fonksiyonel dönüşümünü bulmaktır. $t > 0^-$ için $f(t)$'nin ifadesi $\sin\omega t$'dir, dolayısıyla Laplace dönüşümü şöyledir:



Şekil 12.15 ▲ t > 0 için bir sinüzoidal fonksiyon.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin\omega t\} &= \int_{0^-}^{\infty} (\sin\omega t)e^{-st}\,dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right)e^{-st}\,dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty} \frac{e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t}}{2j}\,dt \\
&= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) \\
&= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.
\end{aligned} \tag{12.20}$$

Tablo 12.1, Laplace dönüşüm çiftlerinin kısa bir listesini vermektedir. Bu liste, devre uygulamaları ile ilgili bir giriş dersini çok ilgilendiren fonksiyonları içermektedir.

TABLO 12.1 Laplace Dönüşüm Çiftlerinin Kısa Bir Listesi

Tür	$f(t)$ $(t > 0-)$	$F(s)$
(dürtü)	$\delta(t)$	1
(basamak)	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
(eğim)	t	$\frac{1}{s^2}$
(üstel)	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
(sinüs)	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
(kosinüs)	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
(zayıflatılmış eğim)	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
(zayıflatılmış sinüs)	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
(zayıflatılmış kosinüs)	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 1 – Laplace dönüşüm tanımını kullanarak bir fonksiyonun Laplace dönüşümünü alabilme.

12.1 Tanım integralini kullanarak
a) $\cosh\beta t$'nin Laplace dönüşümünü bulunuz,
b) $\sinh\beta t$'nin Laplace dönüşümünü bulunuz.

Cevap: (a) $s/(s^2 - \beta^2)$; (b) $\beta/(s^2 - \beta^2)$.

NOT: Bölüm Problemi 12.13'ü de çözmeyi deneyiniz.

12.5 İşlemsel Dönüşümler

İşlemsel dönüşümler $f(t)$ veya $F(s)$ üzerinde gerçekleştirilen matematiksel işlemlerin öbür bölgeye nasıl yansıdığını belirtir. İlgimizi çeken başlıca dönüşümler (1) bir sabitle çarpma; (2) toplama (çıkarma); (3) türev alma; (4) integral alma; (5) zaman bölgesinde kaydırma; (6) frekans bölgesinde kaydırma ve (7) ölçek değiştirmedir.

Bir Sabitle Çarpma

Tanımlayıcı integralden, eğer

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

ise

$$\mathcal{L}\{Kf(t)\} = KF(s) \tag{12.21}$$

olduğu görülmektedir.

Dolayısıyla, $f(t)$'nin bir sabit ile çarpılması, $F(s)$'in de aynı sabitle çarpılmasına karşılık gelmektedir.

Toplama (Çıkarma)

Zaman bölgesinde toplama (çıkarma) frekans bölgesinde da toplamaya (çıkarmaya) karşılık gelmektedir. Dolayısıyla, eğer

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s),$$

$$\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s),$$

$$\mathcal{L}\{f_3(t)\} = F_3(s)$$

ise

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t) - f_3(t)\} = F_1(s) + F_2(s) - F_3(s) \qquad (12.22)$$

ifadesi, zaman bölgesi fonksiyonların toplamının tanımlayıcı integralde yerine konulması ile basitçe elde edilir.

Türev Alma

Zaman bölgesinde türev alma, $F(s)$'in s ile çarpılması ve $f(t)$'nin ilk değerinin –yani $f(0^-)$'nin– bu çarpımdan çıkarılmasına karşılık gelir:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-). \qquad (12.23)$$

Bu ifade, Laplace dönüşümü tanımından doğrudan çıkarılmaktadır, yani

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]e^{-st}\,dt \qquad (12.24)$$

olur. Eş. 12.24'teki integral kısmi integrasyon tekniği ile hesaplanmıştır. $u = e^{-st}$ olmasına izin verildiğinde $dv = [df(t)/dt]$ olur ve

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = e^{-st}f(t)\Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} f(t)(-se^{-st}dt) \qquad (12.25)$$

sonucuna ulaşılır. $f(t)$'nin Laplace dönüşümünün alınabildiğini varsaydığımız için $e^{-st}f(t)$'nin $t = \infty$'daki değeri sıfır olmaktadır. Dolayısıyla Eş. 12.15'in sağ tarafı

$$-f(0^-) + s\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0^-)$$

ifadesine indirgenmektedir

Bu gözlemle Eş. 12.23'ün çıkarımı sona ermiştir. Bu önemli bir sonuçtur, çünkü zaman bölgesinde türev almanın s bölgesinde bir cebirsel işleme indirgendiğini belirtmektedir.

Yüksek mertebeden türevlerin Laplace dönüşümünü Eş. 12.23'ü başlangıç noktası alarak bulabiliriz. Örneğin, $f(t)$'nin ikinci türevinin Laplace dönüşümünü bulmak için, ilk önce

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt} \qquad (12.26)$$

olarak tanımlarız. Daha sonra, Eş. 12.23'ü kullanarak

$$G(s) = sF(s) - f(0^-) \qquad (12.27)$$

yazarız. Fakat,

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{d^2f(t)}{dt^2}$$

olduğu için

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dg(t)}{dt}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = sG(s) - g(0^-) \qquad (12.28)$$

olarak yazabiliriz. Eş. 12.26, 12.27 ve 12.28'i birleştirmek

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = s^2F(s) - sf(0^-) - \frac{df(0^-)}{dt} \qquad (12.29)$$

verecektir.

n–yinci türevin Laplace dönüşümünü yukarıdaki işlemi tekrarlayarak buluruz, bu da bizi aşağıdaki genel sonuca ulaştırır:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}\frac{df(0^-)}{dt}$$

$$- s^{n-3}\frac{d^2f(0^-)}{dt^2} - \dots - \frac{d^{n-1}f(0^-)}{dt^{n-1}}. \qquad (12.30)$$

İntegral Alma

Zaman bölgesinde integral alma s bölgesinde s ile bölmeye karşılık gelmektedir. Önceden olduğu gibi ilişkiyi tanımlayıcı integral ile kurabiliriz:

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} f(x)\,dx\right\} = \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_{0^-}^{t} f(x)\,dx\right]e^{-st}\,dt. \qquad (12.31)$$

Eş. 12.31'in sağ tarafındaki integrali kısmi integrasyon tekniği ile çözeriz, öncelikle

$$u = \int_{0^-}^{t} f(x)\,dx,$$

$$dv = e^{-st}\,dt$$

seçildiğinde,

$$du = f(t)\,dt,$$

$$v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

olacaktır. Kısmi integrasyon formülü

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} f(x)\,dx\right\} = -\frac{e^{-st}}{s}\int_{0^-}^{t} f(x)\,dx\Big|_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty}\frac{e^{-st}}{s}f(t)\,dt \quad (12.32)$$

sonucunu verecektir. Eş. 12.32'nin sağ tarafındaki ilk terim hem üst hem de alt sınırda sıfırdır. Alt sınırdaki değerinin sıfır olması açıktır. Üst sınırdaki değeri de sıfırdır çünkü $f(t)$'nin Laplace dönüşümünün olduğunu varsaymaktayız. Eş. 12.32'nin sağ tarafındaki ikinci terim ise $F(s)/s$'tir, dolayısıyla

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} f(x)\,dx\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad (12.33)$$

elde edilir. Bu sonuç, zaman bölgesindeki integral alma işleminin, s bölgesindeki $1/s$ ile çarpma cebirsel işlemine dönüştüğünü açığa çıkarmaktadır. Eş. 12.33 ve Eş. 12.30, daha önce belirtilmiş olan, Laplace dönüşümünün bir integro-diferansiyel denklemler kümesini, bir cebirsel denklemler kümesine dönüştürdüğü ifadesinin temellerini oluşturmaktadır.

Zaman Bölgesinde Kaydırma

Herhangi bir $f(t)u(t)$ fonksiyonu ile başladığımızda, aynı fonksiyonun zamanda a sabiti kadar kaydırılmış halini $f(t-a)u(t-a)$ ile[2] ifade edebiliriz. Zamanda kaydırma frekans bölgesinde bir üstel fonksiyon ile çarpıma karşılık gelmektedir. Böylece

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad a > 0 \quad (12.34)$$

olur. Örneğin

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

olduğunu bilirsek,

[2] Bundan sonra herhangi bir $f(t)$ fonksiyonunu birim basamak fonksiyonu $u(t)$ ile çarpmamız, ortaya çıkan fonksiyonun tüm pozitif zamanlar için tanımlı olmasını garanti etmektedir.

Eş. 12.34, $(t-a)u(t-a)$'nın Laplace dönüşümünü doğrudan yazmamıza izin verir:

$$\mathcal{L}\{(t-a)u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s^2}.$$

Eş. 12.34'ün ispatı tanımlayıcı integralden gelmektedir:

$$\mathcal{L}\{(t-a)u(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} u(t-a)f(t-a)e^{-st}\,dt$$

$$= \int_{a}^{\infty} f(t-a)e^{-st}\,dt. \quad (12.35)$$

Eş. 12.35'i yazarken, $t \geq a$ için $u(t-a) = 1$ gerçeğini kullandık. Şimdi integral değişkenini değiştirelim ve $x = t-a$ alalım. Bu durumda, $t = a$ iken $x = 0$'dır, $t = \infty$ iken $x = \infty$ ve $dx = dt$'dir. Dolayısıyla, ispatı tamamlamak için, Eş. 12.35'teki integrali alarak,

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_{0}^{\infty} f(x)e^{-s(x+a)}\,dx$$

$$= e^{-sa}\int_{0}^{\infty} f(x)e^{-sx}\,dx$$

$$= e^{-as}F(s),$$

elde ederiz.

Frekans Bölgesinde Kaydırma

Frekans bölgesinde kaydırma, zaman bölgesinde bir üstel fonksiyon ile çarpmaya karşılık gelir:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a). \quad (12.36)$$

Bu ifade tanımlayıcı integralden çıkmaktadır. Eş. 12.36'nın çıkarımı Problem 12.16'ya bırakılmıştır.

Eş. 12.36'daki ilişkiyi yeni dönüşüm çiftleri türetmekte kullanabiliriz. Dolayısıyla,

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

olduğunu bildiğimizde, Eş. 12.36'yı

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\cos\omega t\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

olduğu sonucuna varmakta kullanabiliriz.

Ölçek Değiştirme

Ölçek değiştirme özelliği zaman değişkeni bir pozitif sabit ile çarpıldığında $f(t)$ ve $F(s)$ arasındaki ilişkiyi verir:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0. \quad (12.37)$$

Bu ifadenin ispatı Problem 12.22'ye bırakılmıştır. Ölçek değiştirme özelliği, özellikle zaman ölçeği değişimlerinin bir sistemin modelini inşa etmekte kullanıldığı deneysel çalışmalarda kullanışlıdır.

Eş. 12.37'yi yeni dönüşüm çiftleri yazmakta kullanabiliriz. Böylece,

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

olduğunu bildiğimizde, Eş. 12.37'den

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \frac{1}{\omega}\frac{s/\omega}{(s/\omega)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

sonucuna varabiliriz. Tablo 12.2 işlemsel dönüşümlerin kısa bir listesini vermektedir.

NOT: İşlemsel dönüşümler konusunu kavrayışınızı Bölüm Problemleri 12.24 ve 12.25'i deneyerek sınayınız.

TABLO 12.2 İşlemsel Dönüşümlerin Kısa Bir Listesi

İşlem	$f(t)$	$F(s)$
Bir sabitle çarpma	$Kf(t)$	$KF(s)$
Toplama/çıkarma	$f_1(t) + f_2(t) - f_3(t) + \cdots$	$F_1(s) + F_2(s) - F_3(s) + \cdots$
Birinci türev (zamanda)	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
İkinci türev (zamanda)	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0^-) - \frac{df(0^-)}{dt}$
n–yinci türev (zamanda)	$\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}\frac{df(0^-)}{dt} - s^{n-3}\frac{df^2(0^-)}{dt^2} - \cdots - \frac{d^{n-1}f(0^-)}{dt^{n-1}}$
Zaman integrali alma	$\int_0^t f(x)\,dx$	$\frac{F(s)}{s}$
Zamanda kaydırma	$f(t-a)u(t-a), a > 0$	$e^{-as}F(s)$
Frekansta kaydırma	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
Ölçek değiştirme	$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
İlk türev (s)	$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
n–yinci türev (s)	$t^nf(t)$	$(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$
s bölgesinde integral alma	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u)\,du$

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 1 – Bir fonksiyonun Laplace dönüşümünü, Laplace dönüşüm tabloları veya bir işlemsel dönüşümler tablosu kullanarak hesaplayabilmek.

12.2 Aşağıdaki fonksiyonların Laplace dönüşümünü Tablo 12.2'den uygun işlemsel dönüşümleri kullanarak bulunuz:

a) t^2e^{-at};

b) $\frac{d}{dt}(e^{-at}\sinh\beta t)$;

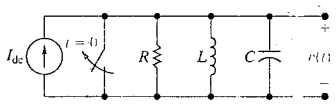
c) $t\cos\omega t$.

Cevap: (a) $\frac{2}{(s+a)^3}$; (b) $\frac{\beta s}{(s+a)^2 - \beta^2}$; (c) $\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$.

NOT: Bölüm Problemleri 11.17 ve 11.18'i de çözmeyi deneyiniz.

12.6 Laplace Dönüşümünün Uygulanması

Şimdi, toplu parametreli devrelerinin davranışını tanımlayan adi integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde Laplace dönüşümünün nasıl kullanılacağını göstereceğiz. Şekil 12.16'da gösterilen devreyi göz önüne alalım. DC akım kaynağını kısa devre yapan anahtarın açıldığı ilk anda devrede ilk enerjinin olmadığını varsayalım. Problem, $v(t)$ için zaman bölgesi ifadesini $t \geq 0$ değerleri için bulmaktır.



Şekil 12.16 Bir paralel *RLC* devresi.

$v(t)$'nin sağlaması gerektiği integro-diferansiyel denklemleri yazarak başlayalım. Devreyi tanımlamak için sadece bir tane düğüm gerilimi denklemine ihtiyaç vardır. Devrenin üst düğümünden dışarı çıkan akımları toplamak

$$\frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v(x)\,dx + C\frac{dv(t)}{dt} = I_{dc}u(t) \qquad (12.38)$$

denklemini üretecektir.

Eş. 12.38'i yazarken anahtarın açılmasını, kaynak akımının sıfırdan I_{dc}'ye basamak atlayışı ile gösterdiğimiz not edilmelidir.

İntegro-diferansiyel denklemleri türettikten sonra (bu örnekte sadece bir tane var), denklemleri s bölgesine dönüştürürüz. Dönüşüm adımlarının detaylarının üzerinden geçmeyeceğiz, çünkü 13. Bölümde bu adımları nasıl atlayabileceğimizi ve s bölgesi denklemlerini nasıl doğrudan üretebileceğimizi keşfedeceğiz. Yine de kısaca anlatmak gerekirse, Eş. 12.38'de üç işlemsel ve bir fonksiyonel dönüşüm kullanarak, $V(s)$'nin bilinmeyen değişken olduğu

$$\frac{V(s)}{R} + \frac{1}{L}\frac{V(s)}{s} + C[sV(s) - v(0^-)] = I_{dc}\left(\frac{1}{s}\right) \qquad (12.39)$$

cebirsel denklemini elde ederiz. Devre parametreleri R, L ve C'nin yanı sıra kaynak akımı I_{dc}'nin de bilindiğini, ayrıca devrede saklanan ilk enerjinin sıfır olması nedeniyle kapasitör üzerindeki ilk gerilim $v(0^-)$'nin sıfır olduğunu varsayıyoruz. Dolayısıyla, problemi bir cebirsel denklemin çözülmesine indirgemiş bulunmaktayız.

Sırada, (mevcut örnekte yine bir) bilinmeyen için cebirsel denklemleri çözeceğiz. Eş. 12.39'u çözmek, $V(s)$ için

$$V(s)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC\right) = \frac{I_{dc}}{s},$$

$$V(s) = \frac{I_{dc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)} \qquad (12.40)$$

sonucunu vermektedir. $v(t)$'yi bulmak için $V(s)$ ifadesinin ters dönüşümünü almamız gerekir. Bu ters dönüşümü

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\} \qquad (12.41)$$

ile gösteririz. Analizdeki sonraki adım, Kısım 12.7'nin konusu olan s bölgesindeki ifadenin ters dönüşümünü bulmaktır. Bu bölümde son ve kritik bir basamak tanıtacağız: Elde edilen zaman bölgesi ifadelerinin geçerliliğini sınama. Böyle bir sınamaya duyulan ihtiyaç Laplace dönüşümüne düzgün değildir; ihtiyatlı ve özenli mühendisler herhangi bir türetilen çözümün bilinen sistem davranışı bakımından geçerliliğini her zaman test ederler.

Şimdi gösterimi basitleştirmek avantajlıdır. Bunu zaman bölgesi ifadelerindeki t parantezini ve frekans bölgesi ifadelerindeki s parantezini düşürerek yaparız. Tüm zaman bölgesi değişkenlerini göstermek için küçük harfleri, s bölgesine ait değişkenleri göstermek için ise büyük harfleri kullanırız. Sonuçta

$$\mathcal{L}\{v\} = V \text{ veya } v = \mathcal{L}^{-1}\{V\},$$

$$\mathcal{L}\{i\} = I \text{ veya } i = \mathcal{L}^{-1}\{I\},$$

$$\mathcal{L}\{f\} = F \text{ veya } f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$$

ifadelerini kullanabiliriz.

NOT: Bu konuyu kavrayışınızı Bölüm Problemi 12.26'yı çözmeyi deneyerek sınayınız.

12.7 Ters Dönüşümler

Eş. 12.40'taki $V(s)$ için verilen ifade s'nin **kesirli** bir fonksiyonudur. Yani, $V(s)$ öyle iki polinomun oranı olarak ifade edilebilir ki, bu polinomlarda s'nin tamsayı olmayan kuvvetleri bulunmaz. Aslında, bileşen değerleri sabit olan, doğrusal, toplu parametreli devrelerde bilinmeyen gerilim ve akımlar için elde edilen s bölgesi ifadeleri her zaman s'nin kesirli fonksiyonlarıdır. (Bu gözlemi Problemler 12.27–12.30'u çalışarak doğrulayabilirsiniz.) Eğer s'nin bir kesirli fonksiyonunun ters dönüşümünü alabilirsek, gerilim ve akımlar için zaman bölgesi ifadelerini çözebiliriz. Bu kısmın amacı, bir kesirli fonksiyonun ters dönüşümünü bulmak için doğrudan ve sistematik bir tekniği tanıtmaktır.

Genellikle,

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \qquad (12.42)$$

biçimine sahip bir fonksiyonun ters dönüşümünü bulmamız gerekir. Katsayılar a ve b gerçek sabitlerdir ve m ve n kuvvetleri pozitif tamsayılardır. $N(s)/D(s)$ oranı, $m > n$ ise bir **düzgün kesirli fonksiyon**, $m \leq n$ ise bir **düzgün olmayan kesirli fonksiyon** olarak anılır. Sadece bir düzgün kesirli fonksiyon kısmi kesirlerin toplamı olarak açılabilir. Bu kısmın sonunda göreceğimiz gibi, bu kısıt bir problem yaratmaz.

Kısmi Kesirlerle Açılım: Düzgün Kesirli Fonksiyonlar

Bir düzgün kesirli fonksiyon, $D(s)$'in her köküne karşılık gelen bir terim veya terimler dizisi yazarak bir kısmi kesirler toplamı olarak açılır. Dolayısıyla, kısmi kesirlerle açılım yapabilmemizden önce $D(s)$'in çarpanlarına ayrılabilir durumda olması gerekmektedir. $D(s)$'in her tekrar etmeyen ayrı kökü için kısmi kesirler toplamında bir terim ortaya çıkar. $D(s)$'nin tekrar eden r katlı her kökü için, açılım r terim içerir. Örneğin,

$$\frac{s+6}{s(s+3)(s+1)^2}$$

kesirli fonksiyonunda, paydada dört terim vardır. Bu köklerden ikisi tekrar etmeyen ayrı köklerdir – $s = 0$ ve $s = -3$. 2 katlı olan bir kök $s = -1$'de yer alır. Dolayısıyla, bu fonksiyonun kısmi kesirlerle açılımı

$$\frac{s+6}{s(s+3)(s+1)^2} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+3} + \frac{K_3}{(s+1)^2} + \frac{K_4}{s+1} \qquad (12.43)$$

halinde olur. Ters dönüşümü bulurken kısmi kesirlerle açılım tekniğinin anahtarı, kısmi kesirler toplamındaki her terimin ters dönüşümünü tanımaktır. Tablo 12.1'den,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+6}{s(s+3)(s+1)^2}\right\}$$

$$= (K_1 + K_2 e^{-3t} + K_3 t e^{-t} + K_4 e^{-t})u(t) \qquad (12.44)$$

olduğunu görebiliyor olmanız gerekir.

Geriye kalan, kısmi kesirler açılımı sırasında ortaya çıkan (K_1, K_2, K_3, ...) katsayılarını bulmaya yarayacak bir tekniği oluşturmaktır. Bu problemin alabileceği dört değişik durum vardır. $D(s)$'nin kökleri (1) gerçek ve ayrıdır; (2) kompleks ve ayrıdır; (3) gerçektir ve katlıdır; (4) kompleks ve katlıdır. Her durumu sırasıyla incelemeden önce, bazı genel yorumlara yer vereceğiz.

Eş. 12.43'te özdeşlik işaretini (≡), bir kesirli fonksiyon ile kısmi kesirler toplamına açılmasının, bir özdeşlik denklemi oluşturduğunu vurgulamak için kullandık. Sonuç olarak denklemin her iki tarafını, değişken s'nin tüm değerleri için eşit olması gerekmektedir. Ayrıca, bu özdeşlik ilişkisinin, denklemin her iki tarafının da aynı matematiksel işleme maruz kalması durumunda geçerliliğini sürdürmesi gerekmektedir. Göreceğimiz gibi, bu özellikler katsayıların bulunmasında kullanılacaktır.

Kesirli fonksiyonun düzgün olduğunu teyit ettiğinizden emin olunuz. Bu kontrol önemlidir, çünkü eğer fonksiyon düzgün değilse K'ların bulunmasında kullanacağımız yordam sırasında yanlış çıkabilecek sonuçlar hakkında hiçbirsey sizi uyarmayacaktır. K'ları kontrol etmek için bir yordam sunacağız, ancak "$F(s)$ bir düzgün kesirli fonksiyon mu?" sorusunu sorma alışkanlığını kazanmak sizi boş yere emek harcamaktan kurtaracaktır.

Kısmi Kesirlerle Açılım: $D(s)$'nin Ayrı Gerçek Kökleri

İlk olarak $D(s)$'in tüm köklerinin gerçek ve ayrı oldukları durumda kısmi kesirlerle açılımın katsayılarını bulmayı değerlendireceğiz. $D(s)$'in bir ayrı kökü nedeniyle ortaya çıkan bir terime ait katsayıyı bulmak için, özdeşliğin her iki tarafını da, bulmayı istediğimiz K katsayısının altındaki paydadaki terime eşit bir terimle çarparız. Sonra, çarpım terimine karşılık gelen kökte özdeşliğin her iki tarafının da değerini hesapladığımızda, sağ taraf daima istenen K terimini, sol taraf ise bir sayısal değeri vermektedir. Örneğin,

$$F(s) = \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \equiv \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+8} + \frac{K_3}{s+6} \qquad (12.45)$$

olsun. K_1 değerini bulmak için, her iki tarafı s ile çarpar ve $s = 0$'daki değerini hesaplarız:

$$\left.\frac{96(s+5)(s+12)}{(s+8)(s+6)}\right|_{s=0} \equiv K_1 + \left.\frac{K_2 s}{s+8}\right|_{s=0} + \left.\frac{K_3 s}{s+6}\right|_{s=0}$$

veya

$$\frac{96(5)(12)}{8(6)} \equiv K_1 = 120. \qquad (12.46)$$

K_2 değerini bulmak için özdeşliğin her iki tarafını $s + 8$ ile çarpar $s = -8$'deki değerini buluruz:

$$\left.\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+6)}\right|_{s=-8}$$

$$\equiv \left.\frac{K_1(s+8)}{s}\right|_{s=-8} + K_2 + \left.\frac{K_3(s+8)}{(s+6)}\right|_{s=-8},$$

veya

$$\frac{96(-3)(4)}{(-8)(-2)} = K_2 = -72. \qquad (12.47)$$

Daha sonra K_3 benzer şekilde

$$\left.\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)}\right|_{s=-6} = K_3 = 48 \qquad (12.48)$$

olarak bulunur. Eş. 12.45'ten ve bulunan K değerlerinden,

$$\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \equiv \frac{120}{s} + \frac{48}{s+6} - \frac{72}{s+8} \qquad (12.49)$$

yazılır. Bu noktada, hesaplama hatalarına karşı sonucu sınamak iyi bir fikirdir. Daha önce belirttiğimiz gibi kısmi kesirlerle açılım bir özdeşlik yaratır; dolayısıyla Eş. 12.49'un iki tarafı da tüm s değerleri için aynı olmalıdır. Test değerlerinin seçimi tümüyle serbesttir, dolayısıyla sınaması kolay olan değerleri seçmeliyiz. Örneğin, Eş. 12.49'da, testi –5 veya –12'de gerçekleştirmek çekici bir seçimdir, çünkü her iki durumda da sol taraf sıfıra indirgenir. –5'i seçmek

$$\frac{120}{-5} + \frac{48}{1} - \frac{72}{3} = -24 + 48 - 24 = 0$$

sonucunu verir, –12'yi seçmek de

$$\frac{120}{-12} + \frac{48}{-6} - \frac{72}{-4} = -10 - 8 + 18 = 0$$

sonucunu verir. Şimdi, katsayıların sayısal değerlerinin doğru olduğundan emin olarak, ters dönüşümü bulmaya geçebiliriz:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)}\right\} = (120 + 48e^{-6t} - 72e^{-8t})u(t) \qquad (12.40)$$

✓ DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 2 – Kısmi kesirlerle açılımı ve Laplace dönüşüm tablosunu kullanarak ters Laplace dönüşümünü hesaplayabilmek.

12.3 $F(s) = \dfrac{6s^2 + 26s + 26}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

ise, $f(t)$'yi bulunuz.

Cevap: $f(t) = (3e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-3t})u(t)$.

12.4 $F(s) = \dfrac{7s^2 + 63s + 134}{(s+3)(s+4)(s+5)}$

ise $f(t)$'yi bulunuz.

Cevap: $f(t) = (4e^{-3t} + 6e^{-4t} - 3e^{-5t})u(t)$.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemleri 12.40(a) ve (b)'yi de çözmeyi deneyiniz.

Kısmi Kesirlerle Açılım: $D(s)$'nin Ayrı Kompleks Kökleri

Ayrı kompleks köklere ait katsayıları bulmak ile ayrı gerçek köklere ait katsayıları bulmak arasında tek fark, birincisinde işlemlerin kompleks sayıları da içermesidir. Şu kesirli fonksiyonu açarak örneklendirelim:

$$F(s) = \frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}. \tag{12.51}$$

$F(s)$'in düzgün bir kesirli fonksiyon olduğuna dikkat ederek başlıyoruz. Daha sonra, $s^2+6s+25$ karesel ifadesinin köklerini bulmamız gerekmektedir:

$$s^2+6s+25 = (s+3-j4)(s+3+j4). \tag{12.52}$$

Paydanın çarpanlarına ayrılmış haliyle, daha önce yaptığımız gibi ilerleriz:

$$\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)} =$$

$$\frac{K_1}{s+6} + \frac{K_2}{s+3-j4} + \frac{K_3}{s+3+j4}. \tag{12.53}$$

K_1, K_2 ve K_3'ü bulmak için daha önceki yordamın aynısını kullanırız:

$$K_1 = \left.\frac{100(s+3)}{s^2+6s+25}\right|_{s=-6} = \frac{100(-3)}{25} = -12, \tag{12.54}$$

$$K_2 = \left.\frac{100(s+3)}{(s+6)(s+3+j4)}\right|_{s=-3+j4} = \frac{100(j4)}{(3+j4)(j8)}$$

$$= 6 - j8 = 10e^{-j53.13^\circ}, \tag{12.55}$$

$$K_3 = \left.\frac{100(s+3)}{(s+6)(s+3-j4)}\right|_{s=-3-j4} = \frac{100(-j4)}{(3-j4)(-j8)}$$

$$= 6 + j8 = 10e^{j53.13^\circ}. \tag{12.56}$$

Bunu takiben,

$$\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)} = \frac{-12}{s+6} + \frac{10\angle -53.13^\circ}{s+3-j4}$$

$$+ \frac{10\angle 53.13^\circ}{s+3+j4} \tag{12.57}$$

hesaplanır.

Tekrar bazı gözlemler yapmamız gereklidir. İlk olarak, fiziksel olarak gerçekleştirilebilen devrelerde, kompleks kökler daima eşlenik çiftler olarak bulunurlar. İkinci olarak, bu eşlenik çiftlerle ilişkili katsayıların kendileri de eşleniktir. Örneğin, K_3 (Eş. 12.56), K_2'nin (Eş. 12.55) eşleniğidir. Sonuç olarak, kompleks eşlenik kökler için aslında katsayıların sadece yarısını hesaplamamız gerekmektedir.

Eş. 12.57'nin ters dönüşümünü almadan önce, kısmi kesirlerle açılımı sayısal olarak kontrol ederiz. Testi -3'te gerçekleştirmek çekicidir çünkü denklemin sol tarafı bu değerde sıfıra indirgenir:

$$F(s) = \frac{-12}{3} + \frac{10\angle -53.13^\circ}{-j4} + \frac{10\angle 53.13^\circ}{j4}$$

$$= -4 + 2.5\angle 36.87^\circ + 2.5\angle -36.87^\circ$$

$$= -4 + 2.0 + j1.5 + 2.0 - j1.5 = 0.$$

Şimdi Eş. 12.57'nin ters dönüşümünü gerçekleştirebiliriz:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}\right\} = (-12e^{-6t} + 10e^{-j53.13^\circ}e^{-(3-j4)t}$$

$$+ 10e^{j53.13^\circ}e^{-(3+j4)t})u(t). \tag{12.58}$$

Genellikle zaman bölgesinde fonksiyonların kompleks bileşenler içermesi istenmeyen bir durumdur. Neyse ki, kompleks bileşenler içeren terimlerin daima eşlenik çiftler halinde bulunmaları nedeniyle sanal bileşenleri, çiftleri toplayarak kolaylıkla ortadan kaldırabiliriz:

$$10e^{-j53.13^\circ}e^{-(3-j4)t} + 10e^{j53.13^\circ}e^{-(3+j4)t}$$

$$= 10e^{-3t}(e^{j(4t-53.13^\circ)} + e^{-j(4t-53.13^\circ)})$$

$$= 20e^{-3t}\cos(4t - 53.13^\circ). \tag{12.59}$$

Böylece Eş. 12.58,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}\right\}$$

$$= [-12e^{-6t} + 20e^{-3t}\cos(4t - 53.13^\circ)]u(t) \tag{12.60}$$

halinde basitleştirilmiş olur.

Toplu parametreli devrelerde ayrı kompleks köklerin sıklıkla karşımıza çıkmaları nedeniyle, bu sonuçları yeni bir dönüşüm çifti ile özetlemeye ihtiyacımız vardır.

$D(s)$ ayrı kompleks kökler – yani, $(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)$ biçiminde çarpanlar – içerdiğinde

$$\frac{K}{s+\alpha-j\beta}+\frac{K^*}{s+\alpha+j\beta} \tag{12.61}$$

biçiminde bir terimler çifti, kısmı kesirler katsayılarının genellikle bir kompleks sayı olduğu kısmi kesirler açılımında belirmektedir. Kutupsal biçimde

$$K = |K|e^{j\theta} = |K|\angle\theta^\circ \tag{12.62}$$

olmaktadır. Burada $|K|$ kompleks katsayının büyüklüğünü ifade etmektedir. Dolayısıyla,

$$K^* = |K|e^{-j\theta} = |K|\angle-\theta^\circ \tag{12.63}$$

olur. Eş. 12.61'deki kompleks eşlenik çiftin ters dönüşümü daima

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s+\alpha-j\beta}+\frac{K^*}{s+\alpha+j\beta}\right\}$$

$$= 2|K|e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta) \tag{12.64}$$

olacaktır. Eş. 12.64'ün uygulanması sırasında, K'nin paydadaki $s+\alpha-j\beta$ terimi ile ilişkilendirilen katsayı ve K^*'ın paydadaki $s+\alpha+j\beta$ terimi ile ilişkilendirilen katsayı olduğunu belirtmek önemlidir.

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 2 – Kısmi kesirlerle açılımı ve Laplace dönüşüm tablosunu kullanarak ters Laplace dönüşümünü hesaplayabilmek

12.5 $F(s) = \dfrac{10(s^2+119)}{(s+5)(s^2+10s+169)}$ **Cevap:** $f(t) = (10e^{-5t} - 8.33e^{-5t}\sin 12t)u(t)$.

ise $f(t)$'yi bulunuz.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemleri 12.40(c) ve (d)'yi de çözmeyi deneyiniz.

Kısmi Kesirlerle Açılım: $D(s)$'nin Katı Gerçek Kökleri

r katlı bir kök tarafından oluşturulan terimlerle ilgili katsayıları bulmak için, ifadenin her iki tarafını katlı kökün r'yinci kuvveti ile çarparız. İfadenin her iki tarafını kökün değerinde hesaplayarak, köke ait ilgili terimin r'yinci kuvvetinin payında yer alan K katsayısını hesaplarız. Geriye kalan $(r-1)$ tane katsayıyı bulmak için, terimin her iki tarafının da $(r-1)$ kere türevini alırız. Her türev almanın sonunda, ifadenin her iki tarafını kökün değerinde

hesaplarız. İfadenin sağ tarafında daima istenen K ve sol tarafında ise her zaman bir sayısal değer yer alır. Örneğin,

$$\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3} = \frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{(s+5)^3}+\frac{K_3}{(s+5)^2}+\frac{K_4}{s+5} \tag{12.65}$$

olsun. K_1'i daha önce anlatıldığı gibi buluruz, yani,

$$K_1 = \left.\frac{100(s+25)}{(s+5)^3}\right|_{s=0} = \frac{100(25)}{125} = 20 \tag{12.66}$$

buluruz. K_2'yi bulmak için, her iki tarafı $(s+5)^3$ ile çarpıp –5 değerinde hesaplarız:

$$\left.\frac{100(s+25)}{s}\right|_{s=-5} = \left.\frac{K_1(s+5)^3}{s}\right|_{s=-5} + K_2 + K_3(s+5)|_{s=-5}$$

$$+ \left.K_4(s+5)^2\right|_{s=-5}, \tag{12.67}$$

$$\frac{100(20)}{(-5)} = K_1\times 0 + K_2 + K_3\times 0 + K_4\times 0$$

$$= K_2 = -400. \tag{12.68}$$

K_3'ü bulmak için ilk olarak Eş. 12.65'in her iki tarafını $(s+5)^3$ ile çarparız. Daha sonra her iki tarafın s'ye göre bir kere türevini alıp ifadenin –5'teki değerini hesaplarız:

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{100(s+25)}{s}\right]_{s=-5} = \frac{d}{ds}\left[\frac{K_1(s+5)^3}{s}\right]_{s=-5}$$

$$+\frac{d}{ds}[K_2]_{s=-5}$$

$$+\frac{d}{ds}[K_3(s+5)]_{s=-5}$$

$$+\frac{d}{ds}[K_4(s+5)^2]_{s=-5}, \tag{12.69}$$

$$100\left[\frac{s-(s+25)}{s^2}\right]_{s=-5} = K_3 = -100. \tag{12.70}$$

K_4'ü bulmak için öncelikle Eş. 12.65'in her iki tarafını $(s+5)^3$ ile çarparız. Daha sonra her iki tarafını s'ye göre ikişer kere türevini alıp ifadenin her iki tarafın -5'teki değerini hesaplarız. Birinci türevi sadeleştirdikten sonra, ikinci türev

$$100\frac{d}{ds}\left[-\frac{25}{s^2}\right]_{s=-5} = K_1\frac{d}{ds}\left[\frac{(s+5)^2(2s-5)}{s^2}\right]_{s=-5}$$

$$+ 0 + \frac{d}{ds}[K_3]_{s=-5} + \frac{d}{ds}[2K_4(s+5)]_{s=-5}$$

veya

$$-40 = 2K_4 \tag{12.71}$$

olur. Eş. 12.71'i K_4 için çözmek

$$K_4 = -20 \tag{12.72}$$

değerini verir. Sonuç olarak,

$$\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3} = \frac{20}{s} - \frac{400}{(s+5)^3} - \frac{100}{(s+5)^2} - \frac{20}{s+5} \tag{12.73}$$

yazılabilir. Bu noktada açılımımızı Eş. 12.73'ün her iki tarafını $s = -25$'te test ederek kontrol edebiliriz. Eş. 12.73'ün iki tarafının da $s = -25$'te sıfır değerini vermesi kısmi kesirlerle açılımın doğruluğundan emin olmamızı sağlar. Eş. 12.73'ün ters dönüşümü

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3}\right\}$$

$$= [20 - 200t^2e^{-5t} - 100te^{-5t} - 20e^{-5t}]u(t) \tag{12.74}$$

verir.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 2 – Kısmi kesirlerle açılımı ve Laplace dönüşüm tablosunu kullanarak ters Laplace dönüşümünü hesaplayabilmek

12.5 $F(s) = \dfrac{(4s^2+7s+1)}{s(s+1)^2}$ **Cevap:** $f(t) = (1 + 2te^{-t} + 3e^{-t})u(t)$.

ise $f(t)$'yi bulunuz.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemleri 12.41(a), (b) ve (d)'yi de çözmeyi deneyiniz.

Kısmi Kesirlerle Açılım: $D(s)$'nin Katlı Kompleks Kökleri

Katlı kompleks kökleri, katlı gerçek köklerle aynı şekilde ele alırız; cebirin kompleks sayılar içermesi tek farktır. Kompleks köklerin daima eşlenik çiftler halinde bulunması ve bir eşlenik çifte karşılık gelen katsayıların da eşlenik olması akılda tutulmalıdır, bunun sonucu olarak K'ların sadece yarısının hesaplanması gereklidir. Örneğin,

$$F(s) = \frac{768}{(s^2+6s+25)^2} \tag{12.75}$$

alalım. Paydadaki polinomu çarpanlara ayırdıktan sonra,

$$F(s) = \frac{768}{(s+3-j4)^2(s+3+j4)^2}$$

$$= \frac{K_1}{(s+3-j4)^2} + \frac{K_2}{s+3-j4}$$

$$+ \frac{K_1^*}{(s+3+j4)^2} + \frac{K_2^*}{s+3+j4} \tag{12.76}$$

yazarız. Şimdi, sadece K_1 ve K_2'yi hesaplamamız gerekmektedir çünkü K_1^* ve K_2^* bunların eşleniğidir. K_1'in değeri

$$K_1 = \left.\frac{768}{(s+3+j4)^2}\right|_{s=-3+j4}$$

$$= \frac{768}{(j8)^2} = -12 \tag{12.77}$$

bulunur. K_2'nin değeri ise

$$K_2 = \frac{d}{ds}\left[\frac{768}{(s+3+j4)^2}\right]_{s=-3+j4}$$

$$= -\left.\frac{2(768)}{(s+3+j4)^3}\right|_{s=-3+j4}$$

$$= -\frac{2(768)}{(j8)^3}$$

$$= -j3 = 3\angle{-90^\circ} \tag{12.78}$$

hesaplanır.

Eş. 12.77 ve 12.78'den

$$K_1^* = -12, \tag{12.79}$$

$$K_2^* = j3 = 3\angle 90^\circ \tag{12.80}$$

bulunur. Kısmi kesirlerle açılımı eşlenik terimleri de katarak gruplayarak

$$F(s) = \left[\frac{-12}{(s+3-j4)^2} + \frac{-12}{(s+3+j4)^2}\right]$$

$$+\left(\frac{3\angle -90^\circ}{s+3-j4} + \frac{3\angle 90^\circ}{s+3+j4}\right) \tag{12.81}$$

ifadesini elde ederiz. Şimdi $F(s)$'nin ters dönüşümünü yazabiliriz:

$$f(t) = [-24te^{-3t}\cos 4t + 6e^{-3t}\cos(4t - 90^\circ)]u(t). \tag{12.82}$$

Eğer $F(s)$'nin paydasında katı r olan bir gerçek kök, a, olursa, kısmi kesirlerle açılımdaki terimin biçimi

$$\frac{K}{(s+a)^r}$$

olacaktır. Bu terimin ters dönüşümü

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(s+a)^r}\right\} = \frac{Kt^{r-1}e^{-at}}{(r-1)!}u(t) \tag{12.83}$$

verir. Eğer $F(s)$'nin paydasında katı r olan bir kompleks kök, $\alpha + j\beta$ olursa, kısmi kesirlerle açılımdaki terimin biçimi

$$\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^r} + \frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^r}$$

eşlenik çifti olacaktır. Bu terimin ters dönüşümü ise

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^r} + \frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^r}\right\}$$

$$= \left[\frac{2|K|t^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta)\right]u(t) \tag{12.84}$$

verir.

Eş. 12.83 ve 12.84, herhangi bir kısmi kesirlerle açılımın ters dönüşümünü gözlemle alabilmek için önemli özelliğe sahiptir. Bu denklemlerle ilgili önemli diğer bir nokta şudur: Çoğu devre analiz probleminde, r nadiren 2'den büyüktür. Dolayısıyla, kesirli fonksiyonların ters dönüşümleri dört dönüşüm çifti ile ele alınabilir. Tablo 12.3 bu çiftleri listelemektedir.

TABLO 12.3 Dört Yararlı Dönüşüm

Çift Sayısı	Köklerin Yapısı	$F(s)$	$f(t)$
1	Ayrı gerçek	$\frac{K}{s+a}$	$Ke^{-at}u(t)$
2	Katlı gerçek	$\frac{K}{(s+a)^2}$	$Kte^{-at}u(t)$
3	Ayrı kompleks	$\frac{K}{s+\alpha-j\beta} + \frac{K^*}{s+\alpha+j\beta}$	$2\lvert K\rvert e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta)u(t)$
4	Katlı kompleks	$\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^2} + \frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^2}$	$2t\lvert K\rvert e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta)u(t)$

Not: 1 ve 2'inci çiftlerde, K gerçek değere sahiptir, 3 ve 4'üncü çiftlerde ise K komplekstir $|K|\angle\theta$.

✓ DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 2 – Kısmi kesirlerle açılımı ve Laplace dönüşüm tablosunu kullanarak ters Laplace dönüşümünü hesaplayabilmek

12.5 $F(s) = \dfrac{40}{(s^2+4s+5)^2}$ **Cevap:** $f(t) = (-20te^{-2t}\cos t + 20e^{-2t}\sin t)u(t)$.

ise $f(t)$'yi bulunuz.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemi 12.41(a)'yi de çözmeyi deneyiniz.

Kısmi Kesirlerle Açılım: Düzensiz Kesirli Fonksiyonlar

Kısmi kesirlerle açılım ile ilgili tartışmamızı bu kısmın başında yaptığımız bir gözleme – yani, düzensiz kesirli fonksiyonların ters dönüşümünü bulma sırasında önemli bir sorun ortaya çıkarmadığına – geri dönerek bitirmek istiyoruz. Bir düzensiz kesirli fonksiyon her zaman bir düzenli kesirli fonksiyona ek bir polinom olarak açılabilir. Bu polinom daha sonra dürtü tepkileri ve türevlerine ters dönüştürülür. Düzenli kesirli fonksiyon bu kısımda anlatılacak tekniklerle ters dönüştürülür. Bu yöntemi açıklamak için

$$F(s) = \frac{s^4 + 13s^3 + 66s^2 + 200s + 300}{s^2 + 9s + 20} \tag{12.85}$$

fonksiyonunu kullanalım. Payı, kalan bir düzenli kesirli fonksiyon olana kadar paydaya bölmek

$$F(s) = s^2 + 4s + 10 + \frac{30s + 100}{s^2 + 9s + 20} \tag{12.86}$$

kalanın $(30s + 100)/(s^2 + 9s + 20)$ olduğu ifadeyi verir.

Daha sonra düzenli kesirli fonksiyonu kısmi kesirlerin toplamı olarak açarız:

$$\frac{30s + 100}{s^2 + 9s + 20} = \frac{30s + 100}{(s + 4)(s + 5)} = \frac{-20}{s + 4} + \frac{50}{s + 5}. \qquad (12.87)$$

Eş. 12.87'yi Eş. 12.86'da yerine koyarsak

$$F(s) = s^2 + 4s + 10 - \frac{20}{s + 4} + \frac{50}{s + 5} \qquad (12.88)$$

verir. Şimdi Eş. 12.88'in ters dönüşümünü gözlem ile alabiliriz. Sonuç olarak

$$f(t) = \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} + 4\frac{d\delta(t)}{dt} + 10\delta(t) - (20e^{-4t} - 50e^{-5t})u(t) \qquad (12.89)$$

bulunur.

✓ DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 2 – Kısmi kesirlerle açılımı ve Laplace dönüşüm tablosunu kullanarak ters Laplace dönüşümünü hesaplayabilmek

12.8 $F(s) = \dfrac{(5s^2 + 29s + 32)}{(s + 2)(s + 4)}$

ise $f(t)$'yi bulunuz.

Cevap: $f(t) = 5\delta(t) - (3e^{-2t} - 2e^{-4t})u(t).$

12.9 $F(s) = \dfrac{(2s^3 + 8s^2 + 2s - 4)}{(s^2 + 5s + 4)}$

ise $f(t)$'yi bulunuz.

Cevap: $f(t) = 2\dfrac{d\delta(t)}{dt} - 2\delta(t) + 4e^{-4t}u(t).$

NOT: Ayrıca Bölüm Problemi 12.42(c)'yi de çözmeyi deneyiniz.

12.8 $F(s)$'nin Kutup ve Sıfırları

Eş. 12.42'deki kesirli fonksiyon çarpanlarına ayrılmış iki polinomun oranları olarak da ifade edilebilir. Başka bir deyişle, $F(s)$'yi, K'nın a_n / b_m sabiti olduğu

$$F(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\cdots(s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2)\cdots(s + p_m)} \qquad (12.90)$$

olarak yazabiliriz. Örneğin,

$$F(s) = \frac{8s^2 + 120s + 400}{2s^4 + 20s^3 + 70s^2 + 100s + 48}$$

fonksiyonunu

$$F(s) = \frac{8(s^2 + 15s + 50)}{2(s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24)} = \frac{4(s + 5)(s + 10)}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)(s + 4)} \qquad (12.91)$$

olarak da yazabiliriz.

Payda polinomunun kökleri, yani, $-p_1, -p_2, -p_3, \ldots, -p_m$, **$F(s)$'nin kutupları** olarak anılır ve $F(s)$'nin sonsuz büyük olduğu s değerleridir. Eş. 12.91 ile tanımlanan fonksiyonda $F(s)$'nin kutupları –1, –2, –3 ve –4'tür.

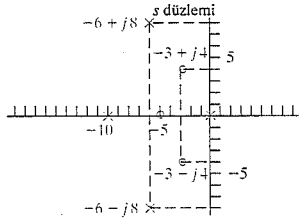
Pay polinomunun kökleri, yani, $-z_1, -z_2, -z_3, \ldots, -z_n$, **$F(s)$'in sıfırları** olarak anılır ve $F(s)$'nin sıfır olduğu s değerleridir. Eş. 12.91 ile tanımlanan fonksiyonda $F(s)$'nin kutupları –5 ve –10'dur.

Sıradaki tartışmada, $F(s)$'nin kutup ve sıfırlarını s düzleminde noktalar olarak gözlemeyi yararlı bulabilirsiniz. Kompleks bir düzlem gerekmektedir, çünkü polinomların kökleri kompleks olabilir. Kompleks s düzleminde, yatay ekseni s'nin gerçek değerlerini ve dikey ekseni s'nin sanal değerlerini çizmekte kullanırız.

$F(s)$'nin kutup ve sıfırlarını çizmek için bir örnek olarak, aşağıdaki fonksiyonu ele alalım:

$$F(s) = \frac{10(s + 5)(s + 3 - j4)(s + 3 + j4)}{s(s + 10)(s + 6 - j8)(s + 6 + j8)}. \qquad (12.92)$$

$F(s)$'nin kutupları 0, –10, –6 + j8, –6 – j8'dedir. Sıfırlar –5, –3 + j4 ve –3 – j4'tedir. Şekil 12.17 bu kutup ve sıfırları s düzleminde göstermektedir.



Şekil 12.17 ▲ Kutup ve sıfırların s düzleminde çizilmesi.

Eş. 12.17'nin sıfır ve kutuplarının sonlu s düzleminde olduğuna dikkat ediniz. $F(s)$ sonsuzda r–yinci mertebeden kutup veya r–yinci mertebeden sıfır da içerebilirdi. Örneğin, Eş. 12.91 tarafından tanımlanan fonksiyon sonsuzda bir ikinci mertebeden sıfıra sahiptir, çünkü s'nin büyük değerleri için fonksiyon $4/s^2$'ye indirgenir ve $s = \infty$ iken $F(s) = 0$ olur. Mevcut tartışmada sonlu s düzlemi üzerindeki kutup ve sıfırlarla ilgileneceğiz. Sonuç olarak, s'nin bir kesirli fonksiyonunun kutup ve sıfırlarından bahsettiğimizde, sonlu kutup ve sıfırları göz önüne alacağız.

12.9 Başlangıç ve Son Değer Teoremleri

Başlangıç ve son değer teoremleri, $F(s)$'den $f(t)$'nin 0 ve ∞'daki davranışını belirlememize yardımcı oldukları için yararlıdır. Dolayısıyla, $F(s)$'nin ters dönüşümünü daha almadan önce, $f(t)$'nin başlangıç ve son değerlerini kontrol ederek bilinen devre davranışı ile uyumlu olup olmadıklarını gözleyebiliriz.

Başlangıç değeri teoremi

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s), \qquad (12.93)$$

◁ **Başlangıç değer teoremi**

ve son değer teoremi

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s). \qquad (12.94)$$

◁ **Son değer teoremi**

değerlerini verir. Başlangıç değer teoremi $f(t)$'nin dürtü fonksiyonu içermediği varsayımına dayanır. Eş. 12.94'te, $F(s)$'nin kutuplarının, orijinde birinci mertebeden bir kutup hariç, s düzleminin sol tarafında yer alması kısıtı altında teoremin geçerli olduğunu belirtmek gerekir.

Eş. 12.93'ü ispat etmek için birinci türevin işlemsel dönüşümü ile başlayalım:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt. \qquad (12.95)$$

Şimdi, $s \to \infty$ iken limit alırsak

$$\lim_{s\to\infty} [sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s\to\infty} \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt \qquad (12.96)$$

Eş. 12.96'nın sağ tarafının

$$\lim_{s\to\infty}\left(\int_{0^-}^{0^+} \frac{df}{dt} e^{0} dt + \int_{0^+}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt \right)$$

olarak yazılabildiği gözlemini yapabiliriz. $s \to \infty$ iken $(df/dt)e^{-st} \to 0$'dır; dolayısıyla ikinci integral limitte yok olur. Birinci integral, s'den bağımsız olan $f(0^+) - f(0^-)$ değerine indirgenir. Böylece Eş. 12.96'nın sağ tarafı

$$\lim_{s\to\infty} \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt = f(0^+) - f(0^-) \qquad (12.97)$$

haline dönüşür. $f(0^-)$ s'den bağımsız olduğu için, Eş. 12.96'nın sol tarafı

$$\lim_{s\to\infty} [sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s\to\infty} [sF(s)] - f(0^-) \qquad (12.98)$$

olarak yazılabilir. Eş. 12.97 ve 12.98'den, ispatı tamamlamak üzere

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$$

bulunur. Son değer teoreminin ispatı için de Eş.12.95'ten başlanır. Burada limiti $s \to 0$ için alırız:

$$\lim_{s\to 0} [sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s\to 0}\left(\int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt \right). \qquad (12.99)$$

İntegralin t'ye ve limit işleminin s'ye göre alınması durumunda Eş.12.99'un sağ tarafı

$$\lim_{s\to 0}\left(\int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt \right) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt}\, dt \qquad (12.100)$$

sonucuna indirgenir. İntegral üzerindeki üst sınır sonsuz olduğu için, bu integral bir limit işlemi olarak da yazılabilir:

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt}\, dt = \lim_{t\to\infty} \int_{0^-}^{t} \frac{df}{dy}\, dy. \qquad (12.101)$$

Burada y sembolünü integral alma sırasında, integralin üst sınırı ile ilgili karışıklığı engellemek için kullandık. İntegrali gerçekleştirmek

$$\lim_{t\to\infty} [f(t) - f(0^-)] = \lim_{t\to\infty} [f(t)] - f(0^-) \qquad (12.102)$$

sonucunu verir. Eş. 12.102'yi Eş. 12.99'da yerine koyarak

$$\lim_{s\to 0} [sF(s)] - f(0^-) = \lim_{t\to\infty} [f(t)] - f(0^-) \qquad (12.103)$$

buluruz. $f(0^-)$ her iki tarafta da olduğu için, Eş. 12.103 son değer teoremine indirgenir, yani

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$$

olur. Son değer teoremi sadece $f(\infty)$ mevcut ise yararlıdır. Bu koşul sadece $F(s)$'nin tüm kutuplarının, orijinde basit bir kutup hariç, s düzleminin sol tarafında yer alması durumunda geçerlidir.

Başlangıç ve Son Değer Teoremlerinin Uygulanması

Başlangıç ve son değer teoremlerinin uygulanmasını örneklendirmek için, her ikisini de kısmi kesirlerle açılıma örnek verdiğimiz bir fonksiyona uygulayalım. Eş. 12.90'da verilen dönüşüm çiftini göz önüne alalım. Başlangıç değeri teoremi

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{100s^2[1 + (3/s)]}{s^3[1 + (6/s)][1 + (6/s) + (25/s^2)]} = 0,$$

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = [-12 + 20\cos(-53.13^\circ)](1) = -12 + 12 = 0$$

verecektir. Son değer teoremi ise

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \frac{100s(s + 3)}{(s + 6)(s^2 + 6s + 25)} = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} [-12e^{-6t} + 20e^{-3t}\cos(4t - 53.13^\circ)]u(t) = 0$$

verir.

Teoremleri Eş.12.90'a uygularken, aslında hazırda zaman bölgesi ifadesine sahiptik ve kavrayışımızı sınadık. Fakat, başlangıç ve son değer teoremlerinin asıl önemi, ters dönüşümleri hesaplamadan s bölgesi ifadelerinden testi doğrudan yapabilmemizde yatmaktadır. Örneğin, Eş. 12.40'ta verilen $V(s)$ ifadesini göz önüne alalım. Aslında $v(t)$'yi devre parametreleri belirlenmeden hesaplayamayız, ancak $V(s)$'nin $v(0^+)$ ve $v(\infty)$ için doğru değeri kestirip kestiremediğini kontrol edebiliriz. $V(s)$'yi üreten problemin tanımından $v(0^+)$'nın sıfır olduğunu biliyoruz. $v(\infty)$'un da sıfır olması gerektiğini biliyoruz, çünkü ideal indüktörün dc akım kaynağı olan bir devrede mükemmel bir kısa devre olduğunu biliyoruz. Son olarak, $V(s)$'nin kutuplarının s düzleminin sol tarafında yer almaları gerektiğini biliyoruz çünkü R, L ve C değerleri birer pozitif sabittir. Sonuç olarak, $sV(s)$'nin kutupları da s düzleminin sol tarafında yer alacaktır.

Başlangıç değer teoremini uygulamak

$$\lim_{s\to\infty} sV(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s(I_{dc}/C)}{s^2[1 + 1/(RCs) + 1/(LCs^2)]} = 0$$

verir. Son değer teoremini uygulamak ise

$$\lim_{s\to 0} sV(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s(I_{dc}/C)}{s^2 + (s/RC) + (1/LC)} = 0.$$

verir. $V(s)$ için türetilen ifade $v(t)$'nin başlangıç ve son değerlerini doğru şekilde öngörmektedir.

✓ DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 3 – Başlangıç ve son değer teoremlerini anlamak ve nasıl kullanılacaklarını bilmek

12.10 Başlangıç ve son değer teoremlerini kullanarak Değerlendirme Problemleri 12.4, 12.6 ve 12.7'deki $f(t)$'nin başlangıç ve son değerlerini bulunuz. **Cevap:** 7, 0; 4, 1 ve 0, 0.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemi 12.47'yi de çözmeyi deneyiniz.

Özet

- **Laplace dönüşümü** zaman bölgesi denklemleri frekans bölgesi denklemlere, aşağıdaki genel tanıma göre

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = F(s)$$

dönüştürmeye yarayan bir araçtır. Burada $f(t)$ zaman bölgesindeki ifade, $F(s)$ ise frekans bölgesindeki ifadedir. (Bkz. sf. 467.)

- **Basamak fonksiyonu** $Ku(t)$, zamanda belirli bir noktada sabit bir seviyeden bir başkasına süreksizlik gösteren bir fonksiyonu tanımlar. K atlamanın büyüklüğünü verir. $K = 1$ ise $Ku(t)$ **birim basamak fonksiyonudur.** (Bkz. sf. 469.)
- **Dürtü fonksiyonu** $K\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K\delta(t)dt = K,$$
$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

ile tanımlanır. K dürtünün gücüdür; $K = 1$ ise $K\delta(t)$ birim dürtü fonksiyonudur. (Bkz. sf. 471.)

- Bir **fonksiyonel dönüşüm** belirli bir fonksiyonun Laplace dönüşümüdür. Önemli fonksiyonel dönüşümler Tablo 12.1'de özetlenmiştir. (Bkz. sf. 474.)
- **İşlemsel dönüşümler** Laplace dönüşümünün genel matematiksel özelliklerini tanımlar. Önemli işlemsel dönüşüm çiftleri Tablo 12.2'de özetlenmiştir. (Bkz. sf. 475.)
- Doğrusal toplu parametreli devrelerde, $F(s)$ s'nin bir kesirli fonksiyonudur. (Bkz. sf. 482.)
- Eğer $F(s)$ bir düzgün kesirli fonksiyon ise, ters dönüşümü kısmi kesirlerle açılım ile bulunur. (Bkz. sf. 483.)
- Eğer $F(s)$ bir düzgün olmayan kesirli fonksiyon ise, ters dönüşümü $F(s)$'yi öncelikle bir polinom ve bir düzgün kesirli fonksiyonun toplamı olarak yazarak bulunur. (Bkz. sf. 493.)
- $F(s)$, iki çarpanlarına ayrılmış polinomun oranı olarak yazılabilir. Paydanın kökleri kutuplar olarak anılır ve kompleks s düzleminde ×'larla gösterilir. Payın kökleri sıfırlar olarak anılır ve kompleks s düzleminde o'larla gösterilir. (Bkz. sf. 495.)

- Başlangıç değeri teoremi:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s).$$

Teorem $f(t)$'nin dürtü fonksiyonu içermediğini varsaymaktadır. (Bkz. sf. 495.)

- Son değer teoremi:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0^+} sF(s).$$

Teorem sadece $F(s)$'nin kutuplarının s düzleminin sol tarafında olması, orijindeki birinci mertebeden bir kutup hariç, durumunda geçerlidir. (Bkz. sf. 495.)

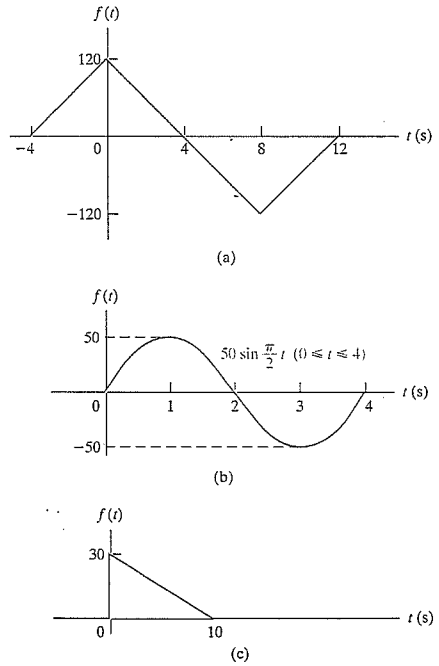
- Başlangıç ve son değer teoremleri, $f(t)$'nin başlangıç ve son değerlerini bir s bölgesi ifadesinden öngörmemizi sağlamaktadır. (Bkz. sf. 497.)

Problemler

Kısım 12.2

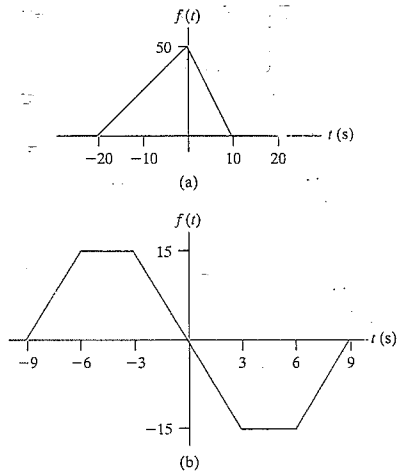
12.1 Basamak fonksiyonlarını Şekil P12.1'de gösterilen fonksiyonları yazmak için kullanınız.

Şekil P12.1



12.2 Basamak fonksiyonlarını Şekil P12.2'de gösterilen fonksiyonları yazmak için kullanınız.

Şekil P12.2



12.3 Aşağıda verilen $f(t)$ fonksiyonunu $-25\text{ s} \le t \le 25$ s aralığında çiziniz.

$$f(t) = -(20t + 400)u(t + 20) + (40t + 400)u(t + 10) + (400 - 40t)u(t - 10) + (20t - 400)u(t - 20)$$

12.4 Basamak fonksiyonları bir *pencere* fonksiyonunu tanımlamak için kullanılabilir. Dolayısıyla, $u(t-1) - u(t-4)$ yüksekliği 1 birim genişliği 3 birim olan ve zaman ekseninde 1 ve 4 arasında yer alan bir pencere tanımlar.

Bir $f(t)$ fonksiyonu aşağıda tanımlanmıştır:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= 0, & t &\le 0\\
&= 30t, & 0 &\le t \le 2\text{ s}\\
&= 60, & 2\text{ s} &\le t \le 4\text{ s}\\
&= 60\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \pi\right), & 4\text{ s} &\le t \le 8\text{ s};\\
&= 30t - 300 & 8\text{ s} &\le t \le 10\text{ s}\\
&= 0, & 10\text{ s} &\le t \le \infty.
\end{aligned}
$$

a) $f(t)$'yi $-2\text{ s} \le t \le 12\text{ s}$ aralığında çiziniz.

b) Pencere fonksiyonu kavramını kullanarak $f(t)$ için bir ifade yazınız.

Kısım 12.3

12.5 a) Şekil 12.12(a)'da gösterilen fonksiyonun altındaki alanı bulunuz.

b) $\epsilon = 0$ iken fonksiyonun süresi ne kadardır?

c) $\epsilon = 0$ iken $f(0)$'ın değeri nedir?

12.6 Aşağıdaki integralleri hesaplayınız:

a) $I = \int_{-2}^{4} (t^3 + 4)[\delta(t) + 4\delta(t-2)]\,dt.$

b) $I = \int_{-3}^{4} t^2[\delta(t) + \delta(t+2.5) + \delta(t-5)]\,dt.$

12.7 $f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$

ve

$$F(\omega) = \frac{3 + j\omega}{4 + j\omega}\pi\delta(\omega)$$

ise $f(t)$'yi bulunuz.

12.8 $\epsilon \to 0$ iken aşağıdaki fonksiyonun neden bir dürtü fonksiyonu ürettiğini açıklayınız:

$$f(t) = \frac{\epsilon/\pi}{\epsilon^2 + t^2}, \quad -\infty \le t \le \infty.$$

12.9 Kısım 12.3'te dürtü fonksiyonunun elek özelliğini $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ olduğunu göstermek için kullanmıştık. Aynı sonucu, Şekil 12.9'da verilen $\pm\epsilon$ arasındaki bir dikdörtgen darbenin Laplace dönüşümünü aldıktan sonra bu dönüşümün $\epsilon \to 0$ limitini alarak da bulabileceğimizi gösteriniz.

12.10 a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t-a)\,dt = -f'(a).$

olduğunu gösteriniz. (*İpucu:* Kısmi integrasyon kullanınız.)

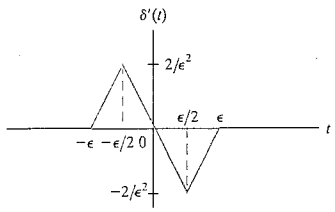
b) (a)'daki formülü kullanarak

$$\mathcal{L}\{\delta'(t)\} = s.$$

olduğunu gösteriniz.

12.11 Şekil 12.11'de gösterilen üçgen darbeler Şekil 12.12(b)'de gösterilen dikdörtgen darbelere eşdeğerdir, çünkü her ikisi de aynı alana $(1/\epsilon)$ sahiptir ve her ikisi de $\epsilon \to 0$ iken $1/\epsilon^2$'ye orantılı olarak sonsuza gitmektedir. $\delta''(t)$'nin Laplace dönüşümünü bulmak için $\delta'(t)$ için verilen bu üçgen darbe gösterimini kullanınız.

Şekil P12.11



12.12 $\mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t)\} = s^n$

olduğunu gösteriniz.

Kısım 12.4–12.5

12.13 Aşağıdaki fonksiyonların Laplace dönüşümlerini bulunuz:

a) $f(t) = te^{-at}$;

b) $f(t) = \sin \omega t$;

c) $f(t) = \sin(\omega t + \theta)$;

d) $f(t) = t$;

e) $f(t) = \cosh(t + \theta)$.

(*İpucu:* Değerlendirme Problemi 12.1'e bakınız.)

12.14 a) te^{-at}'nin Laplace dönüşümünü bulunuz.

b) Eş. 12.23'de verilen işlemsel dönüşümü kullanarak $\frac{d}{dt}(te^{-at})$'nin Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

c) (b)'deki cevabınızı önce ilk türevi alıp daha sonra dönüşümü gerçekleştirerek kontrol ediniz.

12.15 Aşağıdaki yöntemleri kullanarak, Şekil 12.8'de gösterilen üstel fonksiyonun türevinin Laplace dönüşümünü ($\epsilon \to 0$ iken) bulunuz:

a) Önce fonksiyonun türevini alıp daha sonra elde edilen fonksiyonun dönüşümünü bulunuz.

b) Eş. 12.23'te verilen işlemsel dönüşümü kullanınız.

12.16 $\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s + a)$ olduğunu gösteriniz.

12.17 a) $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_{0-}^{t} e^{-ax}\,dx\right\}$'i bulunuz.

b) $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_{0-}^{t} y\,dy\right\}$'i bulunuz.

c) (a) ve (b)'deki cevaplarınızı önce türev alıp daha sonra dönüşümü gerçekleştirerek kontrol ediniz.

12.18 a) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{d}{dt}\sin \omega t\right\}$'i bulunuz.

b) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{d}{dt}\cos \omega t\right\}$'i bulunuz.

c) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{d^3}{dt^3}t^2\right\}$'i bulunuz.

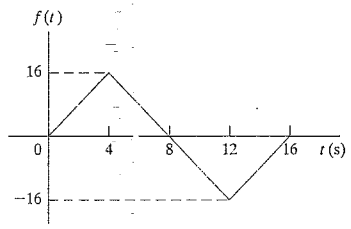
d) (a), (b) ve (c) 'deki cevaplarınızı önce türev alıp daha sonra dönüşümü gerçekleştirerek kontrol ediniz.

12.19 a) Şekil P12.19'da gösterilen fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulunuz.

b) Şekil P12.19'da gösterilen foksiyonun birinci türevinin Laplace dönüşümünü bulunuz.

c) Şekil P12.19'da gösterilen foksiyonun ikinci türevinin Laplace dönüşümünü bulunuz.

Şekil P12.19



12.20 a) $\displaystyle\int_{0^-}^{t} x\,dx$ 'in

Laplace dönüşümünü önce integrali alıp daha sonra dönüşümü gerçekleştirerek bulunuz.

b) (a)'da bulunan sonucu Eş. 12.33'te verilen işlemsel dönüşümü kullanarak bulunuz.

12.21 Aşağıdaki fonksiyonların Laplace dönüşümünü bulunuz:

a) $f(t) = -20e^{-5(t-2)}u(t-2)$.

b) $f(t) = (8t - 8)[u(t-1) - u(t-2)] + (24 - 8t)[u(t-2) - u(t-4)] + (8t - 40)[u(t-4) - u(t-5)]$.

12.22 $\mathcal{L}\{f(at)\} = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$ olduğunu gösteriniz.

12.23 (a) ve (b)'nin Laplace dönüşümlerini bulunuz.

a) $f(t) = \dfrac{d}{dt}(e^{-\alpha t}\sin \omega t)$.

b) $f(t) = \displaystyle\int_{0^-}^{t} e^{-ax}\cos \omega x\, dx$.

c) (a) ve (b)'de elde edilen sonuçları öncelikle belirtilen matematiksel işlemi gerçekleştirip daha sonra Laplace dönüşümünü gerçekleştirerek sağlayınız.

12.24 a) $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ise

$$-\frac{dF(s)}{ds} = \mathcal{L}\{tf(t)\}.$$

olduğunu gösteriniz.

b) $(-1)^n\dfrac{d^nF(s)}{ds^n} = \mathcal{L}\{t^nf(t)\}$.

olduğunu gösteriniz.

c) (b)'deki sonucu kullanarak $\mathcal{L}\{t^5\}$, $\mathcal{L}\{t \sin \beta t\}$, ve $\mathcal{L}\{te^{-t}\cosh t\}$'yi bulunuz.

12.25 a) $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ise ve $\{f(t)/t\}$'nin Laplace dönüşümü alınabiliyorsa

$$\int_s^\infty F(u)du = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

olduğunu gösteriniz. (*İpucu:* Tanım integralini kullanarak

$$\int_s^\infty F(u)du = \int_s^\infty \left(\int_{0^-}^\infty f(t)e^{-ut}dt\right)du$$

yazınız ve integrallerin sırasını değiştiriniz.)

b) $\mathcal{L}\{t \sin \beta t\}$ için Problem 12.24(c)'de bulunan sonuç ile başlayarak ve bu sorunun (a) şıkkındaki işlemsel dönüşümü kullanarak $\mathcal{L}\{t \sin \beta t\}$'yi bulunuz.

Kısım 12.6

12.26 Şekil 12.16'da gösterilen devrede, dc akım kaynağı 5 cos 10t A akım veren bir sinüzoidal kaynak ile değiştirilmektedir. Devre bileşenleri $R = 1\ \Omega$, $C = 25$ mF ve $L = 625$ mH'dir. $V(s)$ için matematiksel ifadeyi bulunuz.

12.27 Şekil P12.27'deki devrede anahtar uzun süredir açıktır. $t = 0$'da anahtar kapanır.

a) $t \geq 0$ için gerilim v_o'nun davranışını belirleyen integro-diferansiyel denklemi çıkarınız.

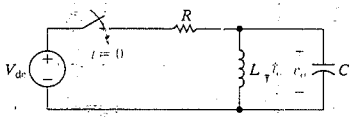
b) $V_o(s) = \dfrac{V_{dc}/RC}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}$

olduğunu gösteriniz.

c) $I_o(s) = \dfrac{V_{dc}(1/RLC)}{s[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]}$

olduğunu gösteriniz.

Şekil P12.27



12.28 Şekil P12.28'de gösteriler devrede anahtar açıldığı sırada depolanmış enerji yoktur.

a) Gerilim v_o'nun davranışını belirleyen integro-diferansiyel denklemi çıkarınız.

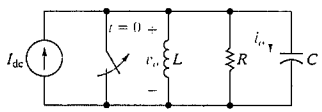
b) $V_o(s) = \dfrac{I_{dc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}$

olduğunu gösteriniz.

c) $I_o(s) = \dfrac{sI_{dc}}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}$

olduğunu gösteriniz.

Şekil P12.28



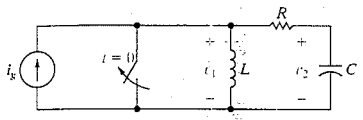
12.29 Şekil P12.29'da gösterilen devrede anahtar açıldığı sırada depolanmış enerji yoktur.

a) Düğüm gerilimleri v_1 ve v_2'nin davranışlarını belirleyen integro-diferansiyel denklemleri çıkarınız.

b) $V_2(s) = \dfrac{sI_g(s)}{C[s^2 + (R/L)s + (1/LC)]}$

olduğunu gösteriniz.

Şekil P12.29



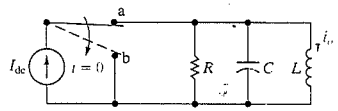
12.30 Şekil P12.30'daki devrede anahtar uzun süredir a konumundadır. Anahtar $t = 0$'da aniden b konumuna geçirilir.

a) $t \geq 0^+$ için i_o akımının davranışını belirleyen integro-diferansiyel denklemi çıkarınız.

b) $I_o(s) = \dfrac{I_{dc}[s + (1/RC)]}{[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]}$

olduğunu gösteriniz.

Şekil P12.30



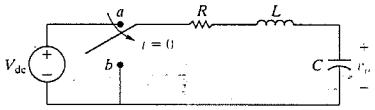
12.31 Şekil P12.31'daki devrede anahtar uzun süredir a konumundadır. Anahtar $t = 0$'da aniden b konumuna geçirilir.

a) $t \geq 0^+$ için v_o geriliminin davranışını belirleyen integro-diferansiyel denklemi çıkarınız.

b) $V_o(s) = \dfrac{V_{dc}[s + (R/L)]}{[s^2 + (R/L)s + (1/LC)]}$

olduğunu gösteriniz.

Şekil P12.31

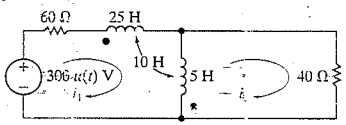


12.32 PSPICE a) Şekil P12.32'de gösterilen devreyi ağ akımları i_1 ve i_2 cinsinden açıklayan iki ortak diferansiyel denklemi yazınız.

b) (a)'da çıkarılan denklemlerin Laplace dönüşümünü bulunuz. Devrede depolanan ilk enerjinin sıfır olduğunu varsayınız.

c) (b)'deki $I_1(s)$ ve $I_2(s)$ için bulunan denklemleri çözünüz.

Şekil P12.32



Kısım 12.7

12.33 Problem 12.26'da $v(t)$'yi bulunuz.

12.34 PSPICE Şekil P12.27'de devre parametreleri $R = 10$ kΩ, $L = 800$ mH ve $C = 100$ nF'dır. $V_{dc} = 70$ V ise aşağıdakileri bulunuz:

a) $t \geq 0$ için $v_o(t)$,

b) $t \geq 0$ için $i_o(t)$.

12.35 PSPICE Şekil 12.28'de görülen devre parametreleri $R = 4$ kΩ, $L = 2.5$ H, $C = 25$ nF ve $I_{dc} = 3$mA değerlerine sahiptir.

a) $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz,

b) $t \geq 0$ için $i_o(t)$'yi bulunuz.

c) $i_o(t)$ için bulduğunuz çözümün $t = 0$'da anlamı var mıdır? Neden?

12.36 PSPICE Şekil 12.29'da devre parametreleri $R = 2500\ \Omega$, $L = 500$ mH ve $C = 0.5$ μF'dır. $i_g(t) = 15\ u(t)$ mA ise $v_2(t)$'yi bulunuz.

12.37 PSPICE Şekil 12.30'da devre parametreleri $R = 50\ \Omega$, $L = 31.25$ mH ve $C = 2\ \mu$F'dır. $I_{dc} = 100$ mA ise $t \geq 0$ için $i_o(t)$'yi bulunuz.

12.38 Şekil 12.31'de devre parametreleri $R = 5000\ \Omega$, $L = 1$ H ve $C = 0.25\ \mu$F'dır. $V_{dc} = 15$ V ise $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

12.39 Problem 12.32'deki sonuçları ve Şekil P12.32'deki devreyi kullanarak

a) $i_1(t)$ ve $i_2(t)$'yi bulunuz,

b) $i_1(\infty)$ ve $i_2(\infty)$'u bulunuz,

c) i_1 ve i_2 için bulduğunuz çözümlerin anlamı var mı? Açıklayınız.

12.40 Aşağıdaki fonksiyonlar için $f(t)$'yi bulunuz.

a) $F(s) = \dfrac{18s^2 + 66s + 54}{(s+1)(s+2)(s+3)}$.

b) $F(s) = \dfrac{8s^3 + 89s^2 + 311s + 300}{s(s+2)(s^2 + 8s + 15)}$.

c) $F(s) = \dfrac{11s^2 + 172s + 700}{(s+2)(s^2 + 12s + 100)}$.

d) $F(s) = \dfrac{56s^2 + 112s + 5000}{s(s^2 + 14s + 625)}$.

12.41 Aşağıdaki fonksiyonlar için $f(t)$'yi bulunuz.

a) $F(s) = \dfrac{8(s^2 - 5s + 50)}{s^2(s+10)}$.

b) $F(s) = \dfrac{10(3s^2 + 4s + 4)}{s(s+2)^2}$.

c) $F(s) = \dfrac{s^3 - 6s^2 + 15s + 50}{s^2(s^2 + 4s + 5)}$.

d) $F(s) = \dfrac{s^2 + 6s + 5}{(s+2)^3}$.

e) $F(s) = \dfrac{16s^3 + 72s^2 + 216s - 128}{(s^2 + 2s + 5)^2}$.

12.42 Aşağıdaki fonksiyonlar için $f(t)$'yi bulunuz.

a) $F(s) = \dfrac{10s^2 + 85s + 95}{s^2 + 6s + 5}$.

b) $F(s) = \dfrac{5(s^2 + 8s + 5)}{s^2 + 4s + 5}$.

c) $F(s) = \dfrac{s^2 + 25s + 150}{s + 20}$.

12.43 Aşağıdaki fonksiyonlar için $f(t)$'yi bulunuz.

a) $F(s) = \dfrac{100(s+1)}{s^2(s^2 + 2s + 5)}$.

b) $F(s) = \dfrac{20s^2}{(s+1)^3}$.

c) $F(s) = \dfrac{40(s+2)}{s(s+1)^3}$

d) $F(s) = \dfrac{5(s+2)^2}{s^4(s+1)}$

12.44 Eş. 12.64 ile verilen dönüşüm çiftini çıkarınız.

12.45 a) Eş. 12.83 ile verilen dönüşüm çiftini çıkarınız.

b) Eş. 12.84 ile verilen dönüşüm çiftini çıkarınız.

Kısım 12.8–12.9

12.46 a) Başlangıç değer teoremini kullanarak Problem 12.26'da v'nin ilk değerini bulunuz.

b) Son değer teoremi v'nin kalıcı durum değerini hesaplamak için kullanılabilir mi? Neden?

12.47 Problem 12.40'taki her dönüşüm çifti için başlangıç ve son değer teoremlerini uygulayınız.

12.48 Problem 12.41'deki her dönüşüm çifti için başlangıç ve son değer teoremlerini uygulayınız.

12.49 Problem 12.42'deki her dönüşüm çifti için başlangıç ve son değer teoremlerini uygulayınız.

12.50 Başlangıç ve son değer teoremlerini Problem 12.27'deki akım ve gerilimlerin başlangıç ve son değerlerini kontrol etmek için kullanınız.

12.51 Başlangıç ve son değer teoremlerini Problem 12.28'deki akım ve gerilimlerin başlangıç ve son değerlerini kontrol etmek için kullanınız.

12.52 Başlangıç ve son değer teoremlerini Problem 12.30'daki akımın başlangıç ve son değerlerini kontrol etmek için kullanınız.

12.53 Problem 12.43'teki her dönüşüm çifti için başlangıç ve son değer teoremlerini uygulayınız.

Devre Analizinde Laplace Dönüşümü

BÖLÜM İÇERİĞİ

13.1 *s* Bölgesinde Devre Elemanları *s. 508*

13.2 *s* Bölgesinde Devre Analizi *s. 511*

13.3 Uygulamalar s. 512

13.4 Aktarım Fonksiyonu *s. 526*

13.5 Kısmi Kesir Açılımı ve Aktarım Fonksiyonu *s. 528*

13.6 Aktarım Fonksiyonu ve Evrişim İntegrali *s. 531*

13.7 Aktarım Fonksiyonu ve Durgun Durum Sinüzoidal Tepki *s. 537*

13.8 Devre analizinde Dürtü Fonksiyonu *s. 540*

✓ BÖLÜM HEDEFLERİ

1. Laplace dönüşümü kullanarak bir devreyi *s* bölgesine dönüştürebilmek. Başlangıç koşullarının, *s* bölgesinde enerji depolayan elemanlar üzerinde nasıl temsil edildiğini anlamak.
2. *s* bölgesinde devre analiz yapmayı ve *s* bölgesi çözümünü zaman bölgesine geri dönüştürmeyi bilmek.
3. Aktarım fonksiyonunun tanım ve önemini anlamak ve *s* bölgesi tekniklerini kullanarak bir devrenin aktarım fonksiyonunu hesaplayabilmek.
4. Bir devrenin aktarım fonksiyonunu kullanarak devrenin birim dürtü tepkisini, birim basamak tepkisini ve sinüzoidal bir giriş için durgun durum tepkisini hesaplayabilmek.

Laplace dönüşümünü devre analizinde çekici kılan iki özelliği vardır. Birinci olarak, doğrusal, sabit katsayılı diferansiyel denklemler kümesini, çözümü daha kolay olan polinomsal denklemler kümesine çevirir. İkinci özelliği, akım ve gerilimin başlangıç koşulları dönüşüm işleminin doğal bir parçasıdır. (Bu, başlangıç değerlerinin bilinmeyen katsayıların bulunmasında kullanıldığı klasik diferansiyel denklem çözüm yaklaşımı ile terstir.)

Bu bölüme, zaman bölgesi integro-diferansiyel denklemini yazmayı ve *s* bölgesine dönüştürmeyi nasıl atlayabileceğimizi göstererek başlayacağız. Kısım 13.1'de dirençler, indüktörler ve kapasitörler için *s* bölgesi devre modellerini geliştireceğiz. Böylelikle tüm devreler için *s* bölgesi denklemlerini doğrudan yazabileceğiz. Kısım 13.2'de Ohm ve Kirchhoff yasalarını *s* bölgesi bağlamında tekrar edeceğiz. Bu temelleri oluşturduktan sonra Kısım 13.3'te Laplace dönüşüm yöntemini çeşitli devre problemlerine uygulayacağız.

Daha önce direnç devreleri için anlatılan analitik teknikler ve sadeleştirme yöntemleri – ağ akımı ve düğüm gerilimi yöntemleri ve kaynak dönüşümleri – *s* bölgesinde de kullanılabilir. Devre tepkisini *s* bölgesinde bulduktan sonra, kısmi kesir açılımı kullanılarak zaman bölgesine geri dönüşüm yapılır (önceki bölümde sergilendiği gibi.) Son zaman bölgesi denklemlerinin, başlangıç koşulları ve son değerler için kontrol edilmesi daha önce olduğu gibi çözüm sürecinin önemli bir adımıdır.

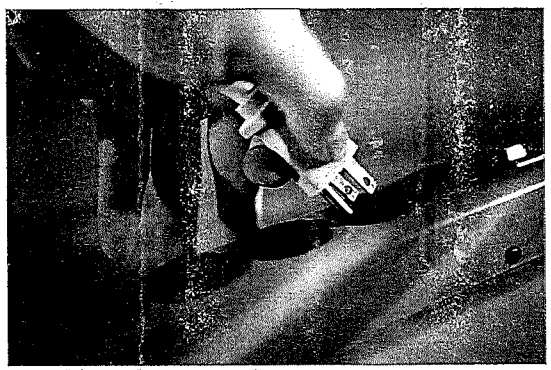
Devre giriş ve çıkışlarının *s* bölgesi tanımları bizi Kısım 13.4'teki aktarım fonksiyonu kavramına götürür. Bir devre için aktarım fonksiyonu, çıkışın Laplace dönüşümünün girişin Laplace dönüşümüne oranıdır. 14. ve 15. Bölümlerde aktarım fonksiyonunun tasarım açısından kullanımını inceleyeceğiz. Ancak bu bölümde, analitik bir araç olarak kullanımına odaklanacağız. Bölüme, kısmi kesir açılımı (Kısım 13.5) ve

Pratik Bakış Açısı

Ani Dalgalanma Bastırıcılar

Kişisel ev bilgisayarlarının, modemlerin, faks makinelerinin ve diğer hassas elektronik cihazların gelişmesi ile, anahtarlamadan dolayı bir ev ortamında oluşabilecek ani gerilim dalgalanmalarından korunma sağlanması gerekli hale gelmiştir. Aşağıdaki şekilde ticari bir dalgalanma bastırıcı gösterilmektedir.

Bir lambayı veya saç kurutucuyu açıp kapatmak nasıl gerilim dalgalanması oluşturur? Bu bölümün sonunda bu soruyu, devre analizi için Laplace dönüşüm tekniklerini kullanarak cevaplayacağız. Sinüzoidal durgun durumda çalışan bir devrede direnç yük anahtarlanarak kaldırıldığında nasıl gerilim dalgalanması olduğunu sergileyeceğiz.



evrişim integralinin (Kısım 13.6), devre analizinde aktarım fonksiyonu kullanırken rolünü inceleyerek devam edeceğiz. Bölümü, devre analizinde dürtü fonksiyonuna bakış ile sonlandıracağız.

13.1 s Bölgesinde Devre Elemanları

Her bir devre elemanı için s bölgesi eşdeğer devresinin geliştirilmesi kolay bir işlemdir. Önce terminal gerilimini terminal akımına bağlayan zaman bölgesi denklemini yazarız. Sonra bu zaman bölgesi denklemin in Laplace dönüşümünü alırız. Bu adım, s bölgesi akım ve gerilimi arasında cebirsel bir ilişki verir. Dönüştürülmüş gerilimin volt-saniye, akımın da amper-saniye birimine sahip olduğuna dikkat ediniz. s bölgesinde gerilimin akıma oranı, volt bölü amper birimini taşır. s bölgesinde empedans ohm ile, admitans da siemens ile ölçülür. Son olarak s bölgesi akım ve gerilimi arasındaki ilişkiyi sağlayan bir devre modeli oluştururuz. Tüm çıkarımlarda pasif işaret kabullenmesini kullanacağız.

s Bölgesinde Direnç

Direnç elemanı ile başlayacağız Ohm yasasından,

$$v = Ri \tag{13.1}$$

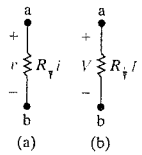
yazılır. R bir sabit olduğundan Eş. 13.1'in Laplace dönüşümü

$$V = RI \tag{13.2}$$

olur, burada

$$V = \mathcal{L}\{v\} \quad \text{ve} \quad I = \mathcal{L}\{i\}$$

olarak tanımlıdır. Eş. 13.2, bir direncin s bölgesi eşdeğerinin basitçe I amper-saniye akım taşıyan ve V volt-saniye terminal gerilimine sahip olan R ohm direnç olduğunu gösterir. Zaman bölgesinden frekans bölgesine geçmenin direnç elemanı değiştirmediğine dikkat ediniz.



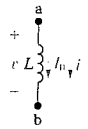
Şekil 13.1 ▲ Direnç eleman. (a) Zaman bölgesi. (b) Frekans bölgesi.

s Bölgesinde İndüktör

Şekil 13.2, I_0 başlangıç akımı taşıyan bir indüktör göstermektedir. Terminal gerilimini terminal akımına bağlayan zaman bölgesi denklemi

$$v = L\frac{di}{dt} \tag{13.3}$$

olarak verilir.



Şekil 13.2 ▲ I_0 amper başlangıç akımı taşıyan L henry indüktör.

Eş 13.3'ün Laplace dönüşümü

$$V = L[sI - i(0^-)] = sLI - LI_0 \tag{13.4}$$

verir. Eş. 13.4 iki farklı devre yapısınca sağlanır. Bunların ilki, Şekil 13.3'te gösterildiği gibi sL ohm empedansın, LI_0 volt-saniye bağımsız gerilim kaynağı ile seri bağlanmasından oluşur. LI_0 gerilim kaynağı üzerindeki kutupluk işaretlerinin Eş. 13.4'teki eksi işaretle uyumlu olduğuna dikkat ediniz. Ayrıca LI_0'ın kendi işaretini taşıdığına, yani i'nin başlangıç değeri, i'nin referans yönünün tersine doğru ise I_0'ın negatif değerli olacağına da dikkat ediniz.

Eş. 13.4'ü sağlayan ikinci s bölgesi eşdeğer devresi, Şekil 13.4'te gösterildiği gibi sL ohm empedans ile I_0/s amper-saniye bağımsız akım kaynağının paralel bağlantısından oluşur. Bu devreyi birçok yolla çıkarabiliriz. Bir yol, Eş. 13.4'ü I akımı için çözmek ve sonra sonuçtaki denklemi sağlayacak devreyi oluşturmaktır. Böylece

$$I = \frac{V + LI_0}{sL} = \frac{V}{sL} + \frac{I_0}{s} \tag{13.5}$$

bulunur. Diğer iki yol, (1) Şekil 13.3'teki devrenin Norton eşdeğerinin bulunması ve (2) indüktör geriliminin fonksiyonu olarak indüktör akımı ile başlanıp, bulunan denklemin Laplace dönüşümünün alınmasıdır. Bu iki yaklaşımı Problem 13.1 ve 13.2'ye bırakacağız.

Eğer indüktörde depolanmış olan başlangıç enerjisi sıfırsa, yani $I_0 = 0$ ise, indüktörün s bölgesi eşdeğeri sL ohm empedanslı bir indüktöre indirgenir. Şekil 13.5 bu devreyi göstermektedir.

s Bölgesinde Kapasitör

Başlangıçta yüklü bir kapasitörün de iki s bölgesi eşdeğer devresi vardır. Şekil 13.6 başlangıçta V_0 volt yüklü bir kapasitör göstermektedir. Terminal akımı

$$i = C\frac{dv}{dt} \tag{13.6}$$

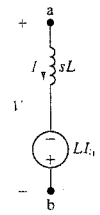
bulunur. Eş. 13.6'nın dönüşümü

$$I = C[sV - v(0^-)]$$

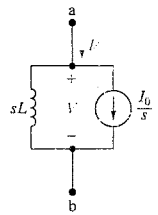
veya

$$I = sCV - CV_0 \tag{13.7}$$

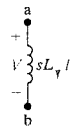
verir ki bu da s bölgesi akımının iki dal akımının toplamı olduğunu gösterir. Bir dal sC siemens admitanstan oluşur. İkinci dal ise CV_0 amper-saniye bağımsız akım kaynağıdır. Şekil 13.7 bu paralel eşdeğer devreyi göstermektedir.



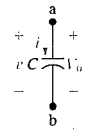
Şekil 13.3 ▲ I_0 amper başlangıç akım taşıyan L henry indüktörün seri eşdeğer devresi.



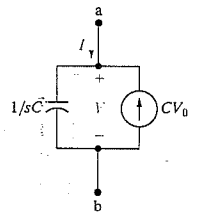
Şekil 13.4 ▲ I_0 amper başlangıç akımı taşıyan L henry indüktörün paralel eşdeğer devresi.



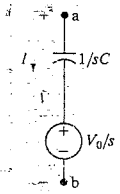
Şekil 13.5 ▲ Başlangıç akımı sıfır olduğunda bir indüktörün s bölgesi devresi.



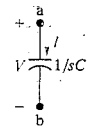
Şekil 13.6 ▲ Başlangıçta V_0 volt yüklü C farad kapasitör.



Şekil 13.7 ▲ Başlangıç gerilimi V_0 volt olan bir kapasitörün paralel eşdeğer devresi.



Şekil 13.8 ▲ Başlangıç gerilimi V_0 volt olan bir kapasitörün seri eşdeğer devresi.



Şekil 13.9 ▲ Başlangıç gerilimi sıfır olduğunda kapasitörün s bölgesi devresi.

Yüklü kapasitör için seri eşdeğer devreyi, Eş. 13.7'yi V için çözerek çıkarabiliriz.

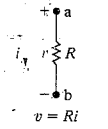
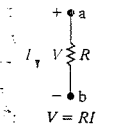
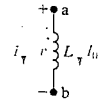
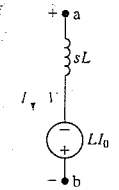
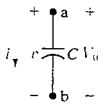
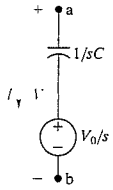
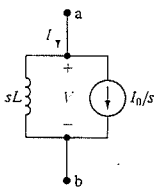
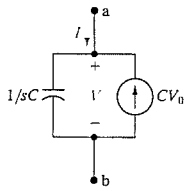
$$V = \left(\frac{1}{sC}\right)I + \frac{V_0}{s}. \tag{13.8}$$

Şekil 13.8, Eş. 13.8'i sağlayan devreyi göstermektedir.

Şekil 13.7 ve 13.8'de gösterilen eşdeğer devrelerde V_0 kendi işaretini taşır. Diğer bir deyişle, eğer V_0'ın kutupluğu v'nin referans kutupluğunun tersi ise V_0 negatif bir niceliktir. Eğer kapasitör üzerindeki başlangıç gerilimi sıfır ise, her iki eşdeğer devre Şekil 13.9'da gösterildiği gibi $1/sC$ ohm empedansa indirgenir.

Bu bölümde indüktör ve kapasitörler birlikte var olduğunda verilecek önemli bir başlangıç problem çözme adımı, paralel veya seri eşdeğer devre seçimidir. Biraz düşünme ve deneyimle doğru seçim sıklıkla çok rahat bulunur. Eşdeğer devreler Tablo 13.1'de özetlenmiştir.

TABLO 13.1 s **Bölgesi Eşdeğer Devrelerinin Özeti**

ZAMAN BÖLGESİ	FREKANS BÖLGESİ
 $v = Ri$	 $V = RI$
 $v = L\,di/dt$, $i = \frac{1}{L}\int_{0^-}^{t} v\,dx + I_0$	 $V = sLI - LI_0$
 $i = C\,dv/dt$, $v = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i\,dx + V_0$	 $V = \frac{1}{sC} + \frac{V_0}{s}$
	 $I = \frac{V}{sL} + \frac{I_0}{s}$
	 $I = sCV - CV_0$

13.2 s Bölgesinde Devre Analizi

Analizde s bölgesi eşdeğer devrelerinin nasıl kullanıldığını sergilemeden önce bazı hazırlıklar yapmamız gerekir.

Öncelikle eğer kapasitör veya indüktörde hiç enerji depolanmamaşsa, her bir pasif eleman için terminal gerilimi ve akımı arasındaki bağıntı

$$V = ZI, \tag{13.9}$$

s bölgesinde Ohm yasası

halini alır. Burada Z, elemanın s bölgesi empedansını gösterir. Böylece bir direnç R ohm empedansa, bir indüktör sL empedansa ve bir kapasitör $1/sC$ empedansa sahiptir. Eş. (13.9)'da içerilen bağıntı, Şekil 13.1(b), 13.5 ve 13.9'da da içerilir. Eş. 3.9 bazen s bölgesi Ohm yasası olarak anılır.

Empedansın tersi admitanstır. Dolayısıyla bir direncin s bölgesi admitansı $1/R$ siemens, bir indüktörünki $1/sL$ siemens ve bir kapasitörünki sC siemenstir.

s bölgesinde empedansları ve admitansları birleştirme kuralları frekans bölgesi devrelerinki ile aynıdır. Dolayısıyla seri-paralel sadeleştirmeler ve Δ'dan Y'ye çevrimler s bölgesi analizinde de kullanılabilir.

Ayrıca Kirchhoff yasaları s bölgesi gerilim ve akımları için de geçerlidir. Bunların uygulanabilirliği, zaman bölgesinde bir fonksiyon toplamının Laplace dönüşümünün, fonksiyonların ayrı ayrı dönüşümlerinin toplamı olduğunu belirten işlemsel dönüşümden gelir (Bkz. Tablo 12.2). Zaman bölgesinde bir düğümde akımların toplamı sıfır olduğundan, dönüştürülmüş akımların da toplamı sıfırdır. Benzer ifade, kapalı bir yol etrafındaki gerilim dönüşümlerinin cebirsel toplamı için de geçerlidir. Kirchhoff yasalarının s bölgesi versiyonu

$$\text{alg} \sum I = 0, \tag{13.10}$$

$$\text{alg} \sum V = 0 \tag{13.11}$$

ile verilir.

Bir pasif elemanın terminallerindeki gerilim ve akım cebirsel bir denklemle bağlı olduğundan ve Kirchhoff yasaları sağlandığından dolayı, saf direnç devreleri için geliştirilen tüm analiz teknikleri s bölgesi analizinde de kullanılabilir. Böylece düğüm gerilimleri, ağ akımları, kaynak dönüşümleri ve Thévenin-Norton eşdeğerlerinin hepsi, kapasitör ve indüktörlerde başlangıçta depolanmış enerji olduğunda da geçerli tekniklerdir. Başlangıçta varolan depolanmış enerji, Eş. 13.9'un, eleman empedansına seri veya paralel bağımsız kaynak eklenerek değiştirilmesini gerektirir. Bu kaynakların eklenmesi Kirchhoff yasalarına uygun olmalıdır.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 1 - Laplace dönüşümü kullanarak bir devreyi *s* bölgesine dönüştürebilmek

13.1 500 Ω direnç, 16 mH indüktör ve 25 nF kapasitör paralel bağlanmıştır.

a) Bu paralel bağlantının admitansını *s*'nin kesirli bir fonksiyonu olarak ifade ediniz.

b) Sıfırların ve kutupların nümerik değerlerini hesaplayınız.

Cevap: (a) $25 \times 10^{-9}(s^2 + 80{,}000s + 25 \times 10^8)/s$;
(b) $-z_1 = -40{,}000 - j30{,}000$;
$-z_2 = -40{,}000 + j30{,}000$; $p_1 = 0$.

13.2 Değerlendirme Problemi 13.1'deki paralel devre 2000 Ω direnç ile seri bağlanıyor.

a) Bu seri birleşimin empedansını *s*'nin kesirli bir fonksiyonu olarak ifade ediniz.

b) Sıfırların ve kutupların nümerik değerlerini hesaplayınız.

Cevap: (a) $2000(s - 50{,}000)^2/(s^2 + 80{,}000s + 25 \times 10^8)$;
(b) $-z_1 = -z_2 = -50{,}000$;
$-p_1 = -40{,}000 - j30{,}000$,
$-p_2 = -40{,}000 + j30{,}000$.

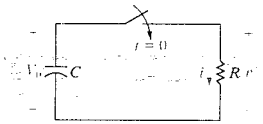
NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 13.4 ve 13.5'i de çözmeyi deneyiniz.

13.3 Uygulamalar

Şimdi Laplace dönüşümünün, birçok doğrusal toplu elemanlı devrenin geçici davranışını belirlemede nasıl kullanıldığını sergileyeceğiz. 7. ve 8. Bölümdeki tanıdık devrelerin analizi ile başlayacağız. Çünkü bunlar basit bir başlangıç noktası sağlar ve Laplace dönüşüm yaklaşımı sonuçları rahatlıkla sınanır. Tüm örneklerde diferansiyel denklemler yerine cebirsel denklemlerle uğraşmanın rahatlığı açıkça görülecektir.

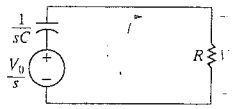
RC Devrenin Doğal Tepkisi

İlk başta bir *RC* devrenin (Şekil 13.10) doğal tepkisini, Laplace dönüşüm teknikleri ile tekrar bulacağız. (Kısım 7.2'de aynı devre için verilen klasik analizi gözden geçirmek isteyebilirsiniz.)



Şekil 13.10 Kapasitör boşaltma devresi.

Kapasitör başlangıçta V_0 volt doldurulmuştur ve biz *i* ve *v*'nin zaman bölgesi ifadeleri ile ilgileniyoruz. *i*'yi bularak başlayacağız. Şekil 13.10'daki devreyi *s* bölgesine taşırken, yüklü kapasitör için iki eşdeğer devre seçeneğimiz vardır. Akımla ilgilendiğimiz için seri eşdeğer devre daha uygundur. Çünkü frekans bölgesinde tek ağlı bir devre verir. Böylece Şekil 13.11'de gösterilen *s* bölgesi devresini elde ederiz.



Şekil 13.11 Şekil 13.10'da gösterilen devrenin *s* bölgesindeki eşdeğeri.

Ağ çevresindeki gerilimlerin toplamı

$$\frac{V_0}{s} = \frac{1}{sC}I + RI \tag{13.12}$$

ifadesini verir. Eş. 13.12 *I* için çözülürse

$$I = \frac{CV_0}{RCs + 1} = \frac{V_0/R}{s + (1/RC)} \tag{13.13}$$

elde edilir.

I'nın ifadesinin, *s*'nin düzgün bir kesirli fonksiyonu olduğuna ve gözlemle ters dönüştürülebileceğine dikkat ediniz. Bu şekilde

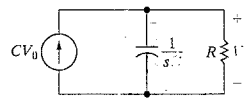
$$i = \frac{V_0}{R}e^{-t/RC}u(t) \tag{13.14}$$

bulunur ki bu da akımın, 7. Bölümde tartışılan klasik yöntemlerle bulunan ifadesine eşdeğerdir. O bölümde akım Eş. 7.26 ile verilmiştir ve *RC* yerine ifadede τ kullanılmıştır.

i'yi bulduktan sonra *v*'yi belirlemenin en kolay yolu Ohm yasasını uygulamaktır. Böylece devreden

$$v = Ri = V_0e^{-t/RC}u(t) \tag{13.15}$$

bulunur. Şimdi önce *i*'yi bulmadan, devreden *v*'yi bulmanın bir yolunu sergileyeceğiz. Bu alternatif yaklaşımda Şekil 13.10'daki devreye döner ve onu, yüklü kapasitör için paralel eşdeğer devreyi kullanarak *s* bölgesine aktarırız. Bu durumda paralel eşdeğer devreyi kullanmak daha çekicidir çünkü sonuçta bulunan devre tek bir düğüm gerilimi cinsinden açıklanabilir.



Şekil 13.12 Şekil 13.10'da gösterilen devrenin *s* bölgesindeki eşdeğer devresi.

Yeni devreyi açıklayan düğüm gerilim denklemi

$$\frac{V}{R} + sCV = CV_0 \tag{13.16}$$

olur. Eş. 13.16'nın *V* için çözümü

$$V = \frac{V_0}{s + (1/RC)} \tag{13.17}$$

verir. Eş. 13.17'nin ters dönüşümü *v* için, Eş. 13.15'te verilenle aynı olan aşağıdaki sonucu verir:

$$v = V_0e^{-t/RC} = V_0e^{-t/\tau}u(t). \tag{13.18}$$

Dönüşüm yönteminin doğrudan kullanımı ile çıkarım yapmamızdaki amaç, *s* bölgesi eşdeğer devresi seçiminin ilgilenilen sinyale bağlı olduğunu göstermektir.

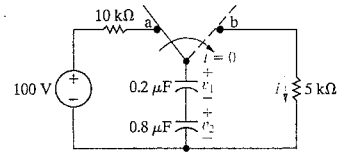
DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 1-*s* bölgesinde devre analizi yapmayı ve *s* bölgesi çözümünü zaman bölgesine geri dönüştürmeyi bilmek.

13.3 Şekildeki devredeki anahtar uzun zamandır aynı konumdadır. $t = 0$'da anahtar b konumuna getirilmektedir.

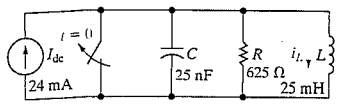
a) I, V_1 ve V_2'yi *s*'nin kesirli fonksiyonları halinde bulunuz.

b) i, v_1 ve v_2'nin zaman bölgesi ifadelerini bulunuz.

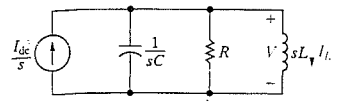


Cevap: (a) $I = 0.02/(s + 1250)$,
$V_1 = 80/(s + 1250)$,
$V_2 = 20/(s + 1250)$;
(b) $i = 20e^{-1250t}u(t)$ mA,
$v_1 = 80e^{-1250t}u(t)$ V,
$v_2 = 20e^{-1250t}u(t)$ V.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 13.9 ve 13.10'u da çözmeyi deneyiniz.



Şekil 13.13 ▲ Paralel *RLC* devresinin basamak tepkisi.



Şekil 13.14 ▲ Şekil 13.13'te gösterilen devrenin *s* bölgesi eşdeğer devresi.

Paralel Devrenin Basamak Tepkisi

Şimdi, daha önce Örnek 8.7'de incelediğimiz, Şekil 13.13'te gösterilen paralel *RLC* devresini inceleyeceğiz. Problem, sabit akım kaynağı paralel elemanlar üzerine anahtarlandıktan sonra i_L'nin ifadesini bulmaktır. Devrede başlangıçta depolanan enerji sıfırdır.

Önceki gibi, Şekil 13.14'te gösterilen *s* bölgesi eşdeğer devresini oluşturarak başlayacağız. Bağımsız bir kaynağın, zaman bölgesinden frekans bölgesine nasıl kolaylıkla dönüştürülebildiğine dikkat ediniz. Kaynağı, zaman bölgesi fonksiyonunun Laplace dönüşümünü belirleyerek basitçe *s* bölgesine dönüştürebiliriz. Dolayısıyla *s* bölgesi akım kaynağı $\mathcal{L}\{I_{dc}u(t)\}$ veya I_{dc}/s olur. I_L'yi bulmak için V'yi bulur ve sonra I_L'nin *s* bölgesi ifadesini elde etmek için

$$I_L = \frac{V}{sL} \tag{13.19}$$

denklemini kullanırız. Üst düğümden çıkan akımların toplanması

$$sCV + \frac{V}{R} + \frac{V}{sL} = \frac{I_{dc}}{s} \tag{13.20}$$

ifadesini üretir. Eş. 13.20'nin V için çözümü

$$V = \frac{I_{dc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)} \tag{13.21}$$

verir. Eş. 13.21'in Eş. 13.19'da yerine konmasıyla

$$I_L = \frac{I_{dc}/LC}{s[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]} \tag{13.22}$$

elde edilir. R, L, C ve I_{dc}'nin nümerik değerleri Eş. 13.22'de yerlerine konursa

$$I_L = \frac{384 \times 10^5}{s(s^2 + 64{,}000s + 16 \times 10^8)} \tag{13.23}$$

bulunur. Eş. 13.23'ü kısmi kesirler toplamı olarak açmadan önce paydadaki kuadratik terim çarpanlarına ayrılır:

$$I_L = \frac{384 \times 10^5}{s(s + 32{,}000 - j24{,}000)(s + 32{,}000 + j24{,}000)} \tag{13.24}$$

Şimdi, son değer teoreminin $t = \infty$'a doğru i_L değerini tahmin edip etmediğini kontrol ederek I_L'nin *s* bölgesi ifadesini sınayabiliriz. I_L'nin orijinde bulunan birinci mertebeden kutubu dışındaki tüm kutupları *s* düzleminin sol yarısındadır ve böylelikle teorem uygulanabilir. Devrenin davranışından, anahtar uzun süre açık kaldıktan sonra indüktörün akım kaynağını kısa devre edeceğini biliyoruz. Dolayısıyla i_L'nin son değeri 24 mA olmadır. $s \to 0$ için sI_L'nin limiti

$$\lim_{s \to 0} sI_L = \frac{384 \times 10^5}{16 \times 10^8} = 24 \text{ mA} \tag{13.25}$$

bulunur. (*s* bölgesi akımları amper-saniye birimini taşır, böylece sI_L'nin birimi amperdir.) Böylelikle *s* bölgesi ifademiz doğrudur.

Şimdi Eş. 13.24'ün kısmi kesirler açılımı ile devam edeceğiz.

$$I_L = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 32{,}000 - j24{,}000} + \frac{K_2^*}{s + 32{,}000 + j24{,}000}. \tag{13.26}$$

Kısmi kesir katsayıları

$$K_1 = \frac{384 \times 10^5}{16 \times 10^8} = 24 \times 10^{-3}, \tag{13.27}$$

$$K_2 = \frac{384 \times 10^5}{(-32{,}000 + j24{,}000)(j48{,}000)} = 20 \times 10^{-3}\underline{/126.87^\circ} \tag{13.28}$$

olarak bulunur. K_1 ve K_2'nin nümerik değerleri Eş. 13.26'da yerine konur ve bulunan ifadenin ters dönüşümü alınırsa

$$i_L = [24 + 40e^{-32{,}000t}\cos(24{,}000t + 126.87^\circ)]u(t)\text{mA} \tag{13.29}$$

elde edilir. Eş. 13.29 ile verilen cevap, Örnek 8.7'de verilenle aynıdır. Çünkü,

$$40\cos(24{,}000t + 126.87^\circ) = -24\cos 24{,}000t - 32\sin 24{,}000t.$$

Eğer önceki bir çözümü kontrol amaçlı kullanıyor olmasaydık, Eş. 13.29'u, $i_L(0)$'ın verilen başlangıç koşullarını sağladığına ve $i_L(\infty)$'un devrenin bilinen davranışını sağladığına bakarak kontrol ederdik.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 2 - *s* bölgesinde devre analizi yapmayı ve *s* bölgesi çözümünü zaman bölgesine geri dönüştürmeyi bilmek.

13.4 Şekildeki devrede anahtar kapandığı anda devrede depolanan enerji sıfırdır.

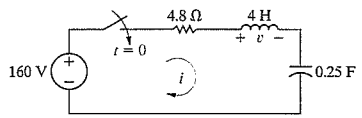
a) I'nın *s* bölgesi ifadesini bulunuz.

b) $t > 0$ için i'nin zaman bölgesi ifadesini bulunuz.

c) V'nin *s* bölgesi ifadesini bulunuz.

d) $t > 0$ için v'nin zaman bölgesi ifadesini bulunuz.

Cevap: (a) $I = 40/(s^2 + 1.2s + 1)$;
(b) $i = (50e^{-0.6t}\sin 0.8t)u(t)$ A;
(c) $V = 160s/(s^2 + 1.2s + 1)$;
(d) $v = [200e^{-0.6t}\cos(0.8t + 36.87^\circ)]u(t)$ V.



NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 13.15 ve 13.16'yı da çözmeyi deneyiniz.

Paralel *RLC* Devrenin Geçici Tepkisi

Bir devrenin geçici tepkisini bulmada Laplace dönüşümü kullanmanın bir diğer örneği, Şekil 13.13'te gösterilen devredeki dc akım kaynağı sinüzoidal bir akım kaynağı ile değiştirildiğinde ortaya çıkar. Yeni akım kaynağı

$$i_g = I_m \cos \omega t \text{ A} \tag{13.30}$$

ile verilir. Burada $I_m = 24$ mA ve $\omega = 40{,}000$ rad / s'dir. Daha önce olduğu gibi devrede depolanan başlangıç enerjisinin sıfır olduğunu kabul edeceğiz.

Akım kaynağının s bölgesi ifadesi

$$I_g = \frac{sI_m}{s^2 + \omega^2} \tag{13.31}$$

bulunur. Paralel elemanlar üzerindeki gerilim

$$V = \frac{(I_g/C)s}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)} \tag{13.32}$$

olur. Eş. 13.31'in Eş. 13.32'de yerine konması

$$V = \frac{(I_m/C)s^2}{(s^2 + \omega^2)[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]} \tag{13.33}$$

verir ve buradan da

$$I_L = \frac{V}{sL} = \frac{(I_m/LC)s}{(s^2 + \omega^2)[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]} \tag{13.34}$$

elde edilir. I_m, ω, R, L ve C'nin nümerik değerlerinin Eş. 13.34'te yerine konması

$$I_L = \frac{384 \times 10^5 s}{(s^2 + 16 \times 10^8)(s^2 + 64{,}000s + 16 \times 10^8)} \tag{13.35}$$

verir. Şimdi paydayı çarpanlara ayırarak

$$I_L = \frac{384 \times 10^5 s}{(s - j\omega)(s + j\omega)(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)} \tag{13.36}$$

yazarız. Burada $\omega = 40{,}000$, $\alpha = 32{,}000$ ve $\beta = 24{,}000$'dir.

i_L'nin son değerini, son değer teoremi ile kontrol edemeyiz. Çünkü I_L sanal eksen üzerinde bir çift kutuba sahiptir. Bunlar $\pm j4 \times 10^4$'tür. Bu nedenle önce i_L'yi bulmalı ve sonra ifadenin doğruluğunu devrenin bilinen davranışını kullanarak kontrol etmeliyiz.

Eş. 13.36'yı kısmi kesirler toplamı olarak açarsak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$I_L = \frac{K_1}{s - j40{,}000} + \frac{K_1^*}{s + j40{,}000} + \frac{K_2}{s + 32{,}000 - j24{,}000} + \frac{K_2^*}{s + 32{,}000 + j24{,}000}. \tag{13.37}$$

K_1 ve K_2'nin nümerik değerleri

$$K_1 = \frac{384 \times 10^5(j40{,}000)}{(j80{,}000)(32{,}000 + j16{,}000)(32{,}000 + j64{,}000)}$$

$$= 7.5 \times 10^{-3}\angle{-90^\circ}, \tag{13.38}$$

$$K_2 = \frac{384 \times 10^5(-32{,}000 + j24{,}000)}{(-32{,}000 - j16{,}000)(-32{,}000 + j64{,}000)(j48{,}000)}$$

$$= 12.5 \times 10^{-3}\angle{90^\circ} \tag{13.39}$$

olarak bulunur. Eş. 13.38 ve 13.39'dan nümerik değerler Eş. 13.37'de yerine konur ve bulunan ifadenin ters dönüşümü alınırsa

$$i_L = [15 \cos(40{,}000t - 90^\circ) + 25e^{-32{,}000t} \cos(24{,}000t + 90^\circ)] \text{ mA},$$

$$= (15 \sin 40{,}000t - 25e^{-32{,}000t} \sin 24{,}000t)u(t) \text{ mA} \tag{13.40}$$

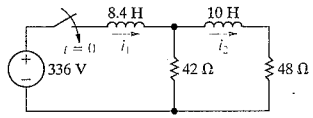
elde edilir. Şimdi Eş. 13.40'ı, verilen başlangıç koşulları ve anahtar uzun süre açık kaldıktan sonraki bilinen devre davranışı açısından kontrol edeceğiz. Eş. 13.40 $t = 0$'da sıfır başlangıç akımı tahmin etmektedir ve bu da devrede depolanan başlangıç enerjisinin sıfır olması ile uyumludur. Eş. 13.40 durgun durum akımını

$$i_{L_{ss}} = 15 \sin 40{,}000t \text{ mA} \tag{13.41}$$

olarak tahmin eder ki bu da fazör yöntemi ile sağlanabilir (9. Bölüm).

Çok Ağlı Bir Devrenin Basamak Tepkisi

Şimdiye kadar, iki veya daha çok düğüm gerilimi veya ağ akımı denklemi gerektiren devrelerden kaçındık. Çünkü ortak diferansiyel denklemlerin çözüm teknikleri bu kitabın kapsamı dışındadır. Ancak Laplace tekniklerini kullanarak, Şekil 13.15'teki gibi çok ağlı bir devrenin ortaya koyduğu gibi bir problemi çözebiliriz.



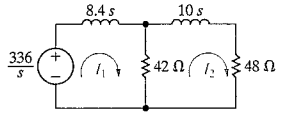
Şekil 13.15 ▲ Çok ağlı *RL* devresi.

Burada 336 V dc gerilim kaynağı aniden devreye uygulandığında oluşan i_1 ve i_2 dal akımlarını bulmak istiyoruz. Devrede depolanan başlangıç enerjisi sıfırdır. Şekil 13.16, Şekil 13.15'teki devrenin s bölgesi eşdeğer devresini göstermektedir. İki ağ akımı

$$\frac{336}{s} = (42 + 8.4s)I_1 - 42I_2, \tag{13.42}$$

$$0 = -42I_1 + (90 + 10s)I_2 \tag{13.43}$$

olarak bulunur.



Şekil 13.16 ▲ Şekil 13.15'te gösterilen devrenin s bölgesindeki eşdeğer devresi.

I_1 ve I_2'yi bulmak için Cramer metodunu kullanarak

$$\Delta = \begin{vmatrix} 42 + 8.4s & -42 \\ -42 & 90 + 10s \end{vmatrix}$$

$$= 84(s^2 + 14s + 24)$$

$$= 84(s + 2)(s + 12), \tag{13.44}$$

$$N_1 = \begin{vmatrix} 336/s & -42 \\ 0 & 90 + 10s \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3360(s + 9)}{s}, \tag{13.45}$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} 42 + 8.4s & 336/s \\ -42 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{14{,}112}{s}. \tag{13.46}$$

elde ederiz. Eş 13.44–13.46'ya dayanarak

$$I_1 = \frac{N_1}{\Delta} = \frac{40(s + 9)}{s(s + 2)(s + 12)}, \tag{13.47}$$

$$I_2 = \frac{N_2}{\Delta} = \frac{168}{s(s + 2)(s + 12)} \tag{13.48}$$

bulunur. I_1 ve I_2'nin kısmi kesirler toplamı halinde açılması

$$I_1 = \frac{15}{s} - \frac{14}{s + 2} - \frac{1}{s + 12}, \tag{13.49}$$

$$I_2 = \frac{7}{s} - \frac{8.4}{s + 2} + \frac{1.4}{s + 12} \tag{13.50}$$

verir. i_1 ve i_2 ifadeleri, sırasıyla Eş. 13.49 ve 13.50'nin ters dönüşümü alınarak elde edilir:

$$i_1 = (15 - 14e^{-2t} - e^{-12t})u(t) \text{ A}, \tag{13.51}$$

$$i_2 = (7 - 8.4e^{-2t} + 1.4e^{-12t})u(t) \text{ A}. \tag{13.52}$$

Şimdi çözümleri kontrol edip, devre açısından anlamlı olup olmadıklarına bakacağız. Anahtar kapatıldığında devrede depolanmış enerji olmadığından $i_1(0^-)$ ve $i_2(0^-)$'nin her ikisi de sıfır olmalıdır. Çözümler bu başlangıç değerleri ile uyumludur. Anahtar uzun süre kapalı kaldıktan sonra iki indüktör kısa devre olarak görünecektir. Sonuç olarak i_1 ve i_2'nin son değerleri

$$i_1(\infty) = \frac{336(90)}{42(48)} = 15 \text{ A}, \tag{13.53}$$

$$i_2(\infty) = \frac{15(42)}{90} = 7 \text{ A} \tag{13.54}$$

bulunur. Son bir test, üslerin nümerik değerlerini ve 42 Ω direnç üzerindeki gerilim düşüşünün üç farklı yöntemle hesaplanmasını içerir. Devreden, 42 Ω direnç üstündeki gerilim (üstte pozitif)

$$v = 42(i_1 - i_2) = 336 - 8.4\frac{di_1}{dt} = 48i_2 + 10\frac{di_2}{dt} \tag{13.55}$$

bulunur. Eş. 13.55'in hangi biçiminin kullandığından bağımsız olarak gerilimin

$$v = (336 - 235.2e^{-2t} - 100.80e^{-12t})u(t) \text{ V}$$

olduğunu sağlamalısınız. Böylece i_1 ve i_2 çözümlerimizin doğru olduğuna eminiz.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 2 - *s* bölgesinde devre analizi yapmayı ve *s* bölgesi çözümünü zaman bölgesine geri dönüştürmeyi bilmek.

13.5 DC akım ve gerilim, şekilde gösterilen devreye aynı anda uygulanıyor. Uygulama anında devrede depolanmış bir enerji yoktur.

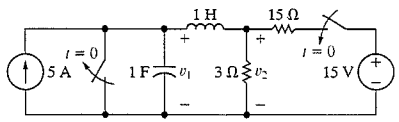
a) V_1 ve V_2'nin s bölgesi ifadelerini çıkarınız.

b) $t > 0$ için v_1 ve v_2'nin zaman bölgesi ifadelerini çıkarınız.

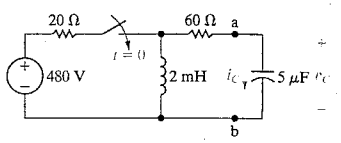
c) $v_1(0^+)$ ve $v_2(0^+)$ değerlerini hesaplayınız.

d) v_1 ve v_2'nin durgun durum değerlerini hesaplayınız.

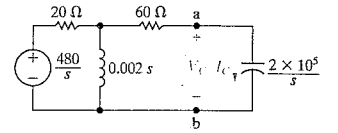
Cevap: (a) $V_1 = [5(s + 3)]/[s(s + 0.5)(s + 2)]$, $V_2 = [2.5(s^2 + 6)]/[s(s + 0.5)(s + 2)]$; (b) $v_1 = (15 - \frac{50}{3}e^{-0.5t} + \frac{5}{3}e^{-2t})u(t)$ V, $v_2 = (15 - \frac{125}{6}e^{-0.5t} + \frac{25}{3}e^{-2t})u(t)$ V; (c) $v_1(0^+) = 0$, $v_2(0^+) = 2.5$ V; (d) $v_1 = v_2 = 15$ V.



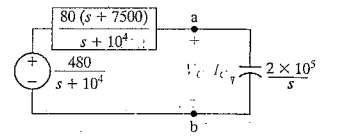
NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 13.26 ve 13.27'yi de çözmeyi deneyiniz.



Şekil 13.17 ▲ s bölgesinde Thèvenin eşdeğer kullanılarak incelenecek olan devre.



Şekil 13.18 ▲ Şekil 13.17'de gösterilen devrenin s bölgesi modeli.



Şekil 13.19 ▲ Şekil 13.18'deki devrenin, Thèvenin eşdeğer kullanılarak sadeleştirilmiş hali.

Thévenin Eşdeğerin Kullanımı

Bu kısımda Thèvenin eşdeğerin s bölgesinde nasıl kullanılacağını göstereceğiz. Şekil 13.17 incelenecek devreyi göstermektedir. Problem, anahtarın kapatılmasından dolayı oluşan kapasitör akımını bulmaktır. Anahtar kapandığı anda devrede depolanmış olan enerji sıfırdır.

i_C'yi bulmak için önce devrenin s bölgesi eşdeğerini oluşturacak ve sonra bu devrenin Thèvenin eşdeğerini kapasitör terminallerine göre bulacağız. Şekil 13.18 s bölgesi devresini göstermektedir.

Thévenin gerilimi, a, b terminalleri arasındaki açık devre gerilimidir. Açık devre koşullarında, 60 Ω direnç üzerinde gerilim yoktur. Böylece

$$V_{Th} = \frac{(480/s)(0.002s)}{20 + 0.002s} = \frac{480}{s + 10^4} \tag{13.56}$$

bulunur. a ve b terminallerinden görülen Thévenin empedansı, 20 Ω dirençle 2 mH indüktörün paralel birleşimine seri bir 60 Ω dirence eşittir. Buradan,

$$Z_{Th} = 60 + \frac{0.002s(20)}{20 + 0.002s} = \frac{80(s + 7500)}{s + 10^4} \tag{13.57}$$

elde edilir. Thévenin eşdeğeri kullanarak Şekil 13.18'de gösterilen devreyi Şekil 13.19'da gösterilene indirgeriz. Bu devre, I_C kapasitör akımının, Thévenin geriliminin toplam seri empedansa bölümüne eşit olduğunu göstermektedir. Böylece

$$I_C = \frac{480/(s + 10^4)}{[80(s + 7500)/(s + 10^4)] + [(2 \times 10^5)/s]} \tag{13.58}$$

bulunur. Eş. 13.58'i

$$I_C = \frac{6s}{s^2 + 10{,}000s + 25 \times 10^6} = \frac{6s}{(s + 5000)^2} \tag{13.59}$$

halinde sadeleştirebiliriz. Eş. 13.59'un kısmi kesirler açılımı

$$I_C = \frac{-30{,}000}{(s + 5000)^2} + \frac{6}{s + 5000}, \tag{13.60}$$

verir ve bunun da ters dönüşümü

$$i_C = (-30{,}000te^{-5000t} + 6e^{-5000t})u(t) \text{ A} \tag{13.61}$$

hesaplanır. Şimdi Eş. 13.61'i, bilinen devre davranışına uyum açısından kontrol edeceğiz. Eş. 13.61'den,

$$i_C(0) = 6 \text{ A} \tag{13.62}$$

elde edilir. Bu sonuç, Şekil 13.17'deki devreden hesaplanan başlangıç kapasitör akımı ile aynıdır. Başlangıç indüktör akımı ve başlangıç kapasitör gerilimi sıfırdır ve böylece başlangıç kapasitör akımı 480 / 80 veya 6 A'dir. Akımın son değeri sıfırdır ve bu da Eş. 13.61 ile uyumludur. Ayrıca bu denklemden, t 6 / 30,000 yani 200 μs'yi aştığında akımın işaret değiştirdiğine dikkat ediniz. i_C'nin işaret değiştirdiği gerçeği anlamlıdır çünkü anahtar ilk kapandığında kapasitör dolmaya başlar. Sonuçta bu yük sıfıra iner çünkü indüktör $t = \infty$'da kısa devredir. i_C'nin işaret değişimi kapasitörün dolma ve boşalmasını yansıtır.

Kapasitör üzerindeki v_C gerilimiyle de ilgilendiğimizi kabul edelim. i_C'yi bilirsek v_C'yi zaman bölgesinde integrasyonla

$$v_C = 2 \times 10^5 \int_{0^-}^{t} (6 - 30{,}000x)e^{-5000x}\,dx \tag{13.63}$$

olarak buluruz. Eş. 13.63'teki integral zor olmamakla birlikte, önce V_c'nin s bölgesi ifadesini bulup sonra v_C'yi ters dönüşüm ile bularak integrasyondan tamamen kurtulabiliriz. Buradan,

$$V_C = \frac{1}{sC}I_C = \frac{2 \times 10^5}{s}\,\frac{6s}{(s + 5000)^2}$$

$$= \frac{12 \times 10^5}{(s + 5000)^2} \tag{13.64}$$

bulunur ve bundan da

$$v_C = 12 \times 10^5 te^{-5000t}u(t) \tag{13.65}$$

elde edilir. Eş. 13.65'in Eş. 13.63 ile tutarlı olduğunu ve i_C'nin davranışına yönelik gözlemleri desteklediğini sağlamalısınız. (Bkz. Problem 13.33.)

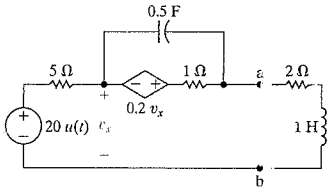
✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 2 – s bölgesinde devre analizi yapmayı ve s bölgesi çözümünü zaman bölgesine geri dönüştürmeyi bilmek.

13.6 Şekilde gösterilen devrede başlangıçta kapasitör üzerindeki yük sıfırdır.

a) a ve b terminallerine göre s bölgesi Thèvenin eşdeğer devresini bulunuz.

b) 2 Ω direnç ile 1 H indüktörün seri birleşiminden oluşan yüke devrenin verdiği akımın s bölgesi ifadesini bulunuz.

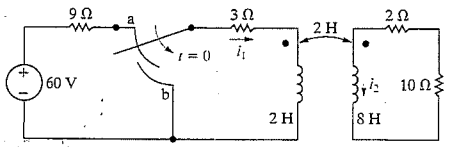


Cevap: (a) $V_{Th} = V_{ab} = [20(s + 2.4)]/[s(s + 2)]$, $Z_{Th} = 5(s + 2.8)/(s + 2)$; (b) $I_{ab} = [20(s + 2.4)]/[s(s + 3)(s + 6)]$.

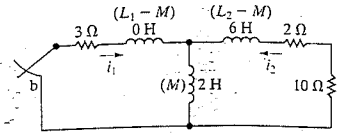
NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 13.35'i de çözmeyi deneyiniz.

Karşılıklı Endüktanslı Bir Devre

Bir sonraki örnek, karşılıklı endüktans içeren bir devrenin geçici tepkisinin Laplace dönüşümü ile nasıl bulunabileceğini sergilemektedir. Şekil 13.20 devreyi göstermektedir. Devredeki kesmeden temaslı anahtar uzun zamandır aynı konumdadır. $t = 0$'da anahtar aniden b konumuna geçmektedir Problem, i_2'nin zaman bölgesi ifadesini çıkarmaktır.



Şekil 13.20 ▲ Manyetik bağlaşık bobinler içeren devre.



Şekil 13.21 ▲ Manyetik bağlaşık bobinler T eşdeğer devre ile değiştirildiğinde Şekil 13.20'deki devre.

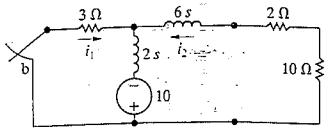
Şekil 13.20'deki devreyi, anahtar b konumunda iken ve manyetik bağlaşık bobinler T eşdeğer devre[1] ile değiştirildiğinde yeniden çizerek başlayacağız. Şekil 13.21 yeni devreyi göstermektedir.

Şimdi bu devreyi s bölgesine dönüştüreceğiz. Bunu yaparken

$$i_1(0^-) = \frac{60}{12} = 5 \text{ A}, \tag{13.66}$$

$$i_2(0^-) = 0 \tag{13.67}$$

olduğuna dikkat ediniz. s bölgesinde ağ analizi kullanmayı planladığımızdan, başlangıç akımı taşıyan indüktör için seri eşdeğer devreyi kullanırız. Şekil 13.22 s bölgesi devresini göstermektedir. Sadece bir tane bağımsız gerilim kaynağı olduğuna dikkat ediniz. Bu kaynak, 2 H indüktördeki $i_1(0^-) + i_2(0^-)$ veya 5A başlangıç akımını hesaba katmak için T'nin dik ayağında yer almaktadır. i_1'i taşıyan dalda gerilim kaynağı yoktur çünkü $L_1 - M = 0$'dur.



Şekil 13.22 ▲ Şekil 13.21'de gösterilen devrenin s bölgesi eşdeğer devresi.

Şekil 13.22'deki devreyi açıklayan iki s bölgesi ağ denklemi

$$(3 + 2s)I_1 + 2sI_2 = 10 \tag{13.68}$$

$$2sI_1 + (12 + 8s)I_2 = 10 \tag{13.69}$$

olarak verilir. I_2 için çözüm yapılarak

$$I_2 = \frac{2.5}{(s+1)(s+3)} \tag{13.70}$$

elde edilir. Eş. 13.70'in kısmi kesirler toplamı olarak açılaması

$$I_2 = \frac{1.25}{s+1} - \frac{1.25}{s+3} \tag{13.71}$$

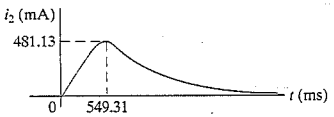
verir. O halde,

$$i_2 = (1.25e^{-t} - 1.25e^{-3t})u(t) \text{ A} \tag{13.72}$$

elde edilir.

[1]Bkz. Ek C

Eş. 13.72, anahtar b konumuna geldikten sonra i_2'nin 549.31 ms içinde sıfırdan 481.13 mA tepe değerine çıktığını belirtir. Sonrasında i_2 üstel olarak sıfıra doğru azalır. Şekil 13.23 i_2'nin t'ye karşı grafiğini göstermektedir. Bu tepki, manyetik bağlaşık bobinlerin bilinen fiziksel davranışı açısından anlamlıdır. L_2 indüktöründe bir akım, sadece L_1 indüktöründe zamanla değişen bir akım varsa varolabilir. i_1, 5 A başlangıç akımından azalırken i_2 sıfırdan başlayarak artar ve sonra i_1 sıfıra yaklaşırken o da sıfıra yaklaşır.



Şekil 13.23 ▲ Şekil 13.20'deki devrede i_2'nin t'ye karşı grafiği.

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 2-s bölgesinde devre analizi yapmayı ve s bölgesi çözümünü zaman bölgesine geri dönüştürmeyi bilmek.

13.7 a) Eş. 13.72'den, i_2'nin $t = 549.31$ ms'de 481.13 mA tepe değerine ulaştığını sağlayınız.

b) Şekil 13.20'deki devrede $t > 0$ için i_1'i bulunuz.

c) i_2 tepe değerinde iken di_1/dt'yi hesaplayınız.

d) i_2 tepe değerinde iken i_2'yi di_1/dt'nin fonksiyonu olarak ifade ediniz.

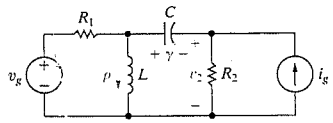
e) (c) ve (d)'de bulunan sonuçları kullanarak i_2'nin tepe değerini hesaplayınız.

Cevap: (a) $di_2/dt = 0$ when $t = \frac{1}{2}\ln 3$ (s); (b) $i_1 = 2.5(e^{-t} + e^{-3t})u(t)$ A; (c) -2.89 A/s; (d) $i_2 = -(M\,di_1/dt)/12$; (e) 481.13 mA.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 13.36 ve 13.37'yi de çözmeyi deneyiniz.

Üst Üste Bindirmenin Kullanımı

Doğrusal, toplu parametreli devreleri incelediğimizden, üst üste bindirmeyi kullanabilir ve tepkiyi, belirli kaynaklar ve başlangıç koşulları ile tanımlanan bileşenlere ayırabiliriz. Bu bileşenleri ayırabilmek, bir sonraki kısımda tanıtacağımız aktarım fonksiyonunu kullanabilmek için gereklidir.

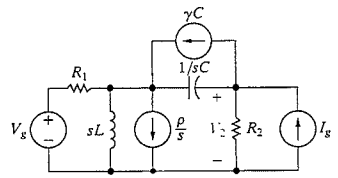


Şekil 13.24 ▲ s bölgesi analizinde üst üste bindirme kullanımını gösteren devre.

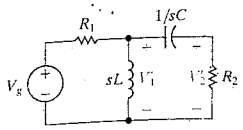
Şekil 13.24 örnek devremizi göstermektedir. İki kaynağın devreye uygulandığı anda indüktör akımının ρ amper, kapasitör geriliminin de γ volt olduğunu kabul edeceğiz. Devrede istenen tepki R_2 direnci üstündeki v_2 gerilimidir.

Şekil 13.25 s bölgesi eşdeğer devresini göstermektedir. L ve C için paralel eşdeğerleri kullandık çünkü V_2'yi düğüm gerilimi yöntemiyle çözmeyi umuyoruz.

V_2'yi üst üste bindirme ile bulmak için, her bir kaynak tek başına çalışırken oluşturduğu V_2 bileşenini hesaplar ve sonra bu bileşenleri toplarız. V_g tek başına iken başlayacağız. Üç akım kaynağı açık devre yapılarak ortadan kaldırılır. Şekil 13.26 sonuçtaki devreyi göstermektedir. Analize yardımcı olması için V_1' gerilimi de eklenmiştir. V_1 ve V_2 üstündeki üs işaretleri, bunların,



Şekil 13.25 ▲ Şekil 13.24'deki devrenin s bölgesi eşdeğeri.



Şekil 13.26 △ V_g tek başına aktif iken Şekil 13.25'te gösterilen devre.

V_g tek başına varken bulunan V_1 ve V_2 bileşenleri olduğunu gösterir. Şekil 13.26'daki devreyi açıklayan iki denklem

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} + sC\right)V_1' - sCV_2' = \frac{V_g}{R_1}, \tag{13.73}$$

$$-sCV_1' + \left(\frac{1}{R_2} + sC\right)V_2' = 0 \tag{13.74}$$

olarak bulunur. Kolaylık için,

$$Y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} + sC; \tag{13.75}$$

$$Y_{12} = -sC; \tag{13.76}$$

$$Y_{22} = \frac{1}{R_2} + sC \tag{13.77}$$

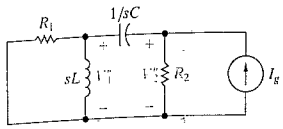
gösterimini kullanacağız. Eş. 13.75 – 13.77, Eş. 13.73 ve 13.74'te yerlerine konursa

$$Y_{11}V_1' + Y_{12}V_2' = V_g/R_1, \tag{13.78}$$

$$Y_{12}V_1' + Y_{22}V_2' = 0 \tag{13.79}$$

elde edilir. Eş. 13.78 ve 13.79 V_2' için çözülürse

$$V_2' = \frac{-Y_{12}/R_1}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}V_g \tag{13.80}$$



Şekil 13.27 △ I_g tek başına aktif iken Şekil 13.25'te gösterilen devre.

bulunur. I_g akım kaynağı tek başına çalışırken, Şekil 13.25'te gösterilen devre Şekil 13.27'deki devreye indirgenir. Burada V_1'' ve V_2'', V_1 ve V_2'nin I_g'den kaynaklanan bileşenleridir. Eş. 13.75 – 13.77'de verilen gösterimi kullanırsak Şekil 13.27'deki devreyi açıklayan iki düğüm gerilim denklemi

$$Y_{11}V_1'' + Y_{12}V_2'' = 0 \tag{13.81}$$

ve

$$Y_{12}V_1'' + Y_{22}V_2'' = I_g \tag{13.82}$$

olur. Eş. 13.81 ve 13.82 V_2'' için çözülürse

$$V_2'' = \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}I_g \tag{13.83}$$

elde edilir.

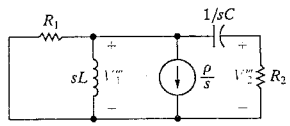
İndüktörde başlangıçta depolanan enerjiden kaynaklanan V_2 bileşenini (V_2''') bulmak için Şekil 13.28'de gösterilen devreyi çözmeliyiz. Buradan,

$$Y_{11}V_1''' + Y_{12}V_2''' = -\rho/s, \tag{13.84}$$

$$Y_{12}V_1''' + Y_{22}V_2''' = 0 \tag{13.85}$$

yazılır. Çözüm

$$V_2''' = \frac{Y_{12}/s}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}\rho \tag{13.86}$$



Şekil 13.28 △ Dolu indüktörün tek başına çalıştığı durumda Şekil 13.25'i gösterilen devre.

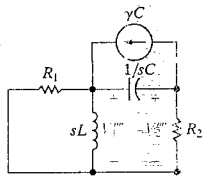
verir. Kapasitörde depolanmış olan başlangıç enerjisinden kaynaklanan V_2 bileşenini (V_2'''') bulmak için Şekil 13.29'da gösterilen devreyi kullanırız. Bu devreyi açıklayan düğüm gerilim denklemleri

$$Y_{11}V_1'''' + Y_{12}V_2'''' = \gamma C, \tag{13.87}$$

$$Y_{12}V_1'''' + Y_{22}V_2'''' = -\gamma C \tag{13.88}$$

olarak bulunur. V_2'''' için çözüm

$$V_2'''' = \frac{-(Y_{11} + Y_{12})C}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}\gamma \tag{13.89}$$



Şekil 13.29 △ Dolu kapasitörün tek başına çalıştığı durumda Şekil 13.25'i gösterilen devre.

verir. Sonuçta V_2 ifadesi

$$\begin{aligned} V_2 &= V_2' + V_2'' + V_2''' + V_2'''' \\ &= \frac{-(Y_{12}/R_1)}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}V_g + \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}I_g \\ &\quad + \frac{Y_{12}/s}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}\rho + \frac{-C(Y_{11} + Y_{12})}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}\gamma \end{aligned} \tag{13.90}$$

olarak elde edilir. V_2'yi, üst üste bindirme kullanmadan, Şekil 13.25'te gösterilen devreyi açıklayan iki düğüm gerilimi denklemini çözerek bulabiliriz. Böylelikle

$$Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 = \frac{V_g}{R_1} + \gamma C - \frac{\rho}{s}, \tag{13.91}$$

$$Y_{12}V_1 + Y_{22}V_2 = I_g - \gamma C. \tag{13.92}$$

yazılır. Problem 13.43'te Eş.13.91 ve 13.92'nin çözümünün Eş. 13.90 ile aynı sonucu verdiğini sağlayacaksınız.

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 2 - *s* bölgesinde devre analizi yapmayı ve *s* bölgesi çözümünü zaman bölgesine geri dönüştürmeyi bilmek.

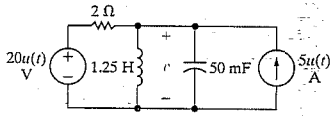
13.8 Şekildeki devrede iki kaynak açıldığı anda devrede depolanmış olan enerji sıfırdır.

a) $t > 0$ için v'nin gerilim kaynağından oluşan bileşenini bulunuz.

b) $t > 0$ için v'nin akım kaynağından oluşan bileşenini bulunuz.

c) $t > 0$ için v'nin ifadesini bulunuz.

Cevap: (a) $[(100/3)e^{-2t} - (100/3)e^{-8t}]u(t)$ V;
(b) $[(50/3)e^{-2t} - (50/3)e^{-8t}]u(t)$ V;
(c) $[50e^{-2t} - 50e^{-8t}]u(t)$ V.



NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 13.42'yi de çözmeyi deneyiniz.

13.4 Aktarım Fonksiyonu

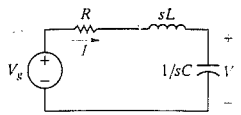
Aktarım fonksiyonu, *s* bölgesindeki çıkışın (tepkinin) Laplace dönüşümünün girişin (kaynak) Laplace dönüşümüne oranı olarak tanımlanır. Aktarım fonksiyonunu incelerken dikkatimizi tüm başlangıç koşullarının sıfır olduğu devrelere sınırlayacağız. Eğer bir devrede birden fazla bağımsız kaynak varsa her bir kaynak için aktarım fonksiyonunu bulabilir ve üst üste bindirmeyi kullanarak tüm kaynakların tepkisini buluruz.

Aktarım fonksiyonu

Aktarım fonksiyonunun tanımı ▶

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}, \tag{13.93}$$

olarak bulunur. Burada $Y(s)$ çıkış sinyalinin Laplace dönüşümü ve $X(s)$ de giriş sinyalinin Laplace dönüşümüdür. Aktarım fonksiyonunun, çıkış sinyalinin nasıl tanımlandığına bağlı olduğuna dikkat ediniz. Örneğin, Şekil 13.30'da gösterilen seri devrenin tepki sinyali akım olarak tanımlanırsa



Şekil 13.30 ▲ Seri *RLC* devresi.

$$H(s) = \frac{I}{V_g} = \frac{1}{R + sL + 1/sC} = \frac{sC}{s^2LC + RCs + 1} \tag{13.94}$$

elde edilir. Eş. 13.94'ü çıkarırken, I'nın $Y(s)$ çıkışına ve V_g'nin $X(s)$ girişine karşılık geldiğini kabul ettik.

Eğer kapasitör üzerindeki gerilim, Şekil 13.30'da gösterilen devrenin çıkış sinyali olarak tanımlanırsa aktarım fonksiyonu

$$H(s) = \frac{V}{V_g} = \frac{1/sC}{R + sL + 1/sC} = \frac{1}{s^2LC + RCs + 1} \tag{13.95}$$

olarak bulunur.

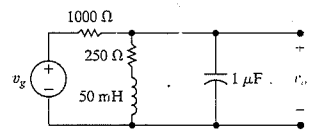
Devrelerin çoklu kaynağı olabileceğinden ve ilgilenilen çıkış sinyali değişebileceğinden, tek bir devrenin birçok aktarım fonksiyonu olabilir. Çoklu kaynak durumunda tek bir aktarım fonksiyonunun çıkışı temsil edemeyeceğini hatırlayınız. Tüm kaynaklara karşılık aktarım fonksiyonları üst üste bindirilerek toplam tepki bulunmalıdır. Örnek 13.1, bilinen R, L ve C nümerik değerleri için aktarım fonksiyonunun hesaplanmasını sergilemektedir.

Örnek 13.1 **Bir Devrenin Aktarım Fonksiyonunun Çıkarımı**

Şekil 13.31'de gösterilen devre v_g tarafından sürülmektedir. Tepki sinyali, kapasitör üzerindeki v_o gerilimidir.

a) Aktarım fonksiyonunun nümerik ifadesini hesaplayınız.

b) Aktarım fonksiyonunun kutuplarını ve sıfırlarını nümerik olarak hesaplayınız.



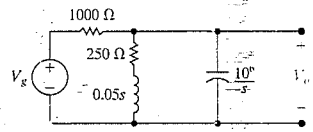
Şekil 13.31 ▲ Örnek 13.1'in devresi.

Çözüm

a) Aktarım fonksiyonunu bulmada ilk adım, Şekil 13.32'de gösterildiği gibi *s* bölgesi eşdeğer devresini oluşturmaktır. Tanımdan, aktarım fonksiyonu V_o/V_g oranıdır ve tek bir düğüm gerilim denklemi ile hesaplanabilir. Üst düğümden çıkan akımların toplanması

$$\frac{V_o - V_g}{1000} + \frac{V_o}{250 + 0.05s} = \frac{V_o s}{10^6} = 0$$

verir.



Şekil 13.32 ▲ Şekil 13.31'de gösterilen devrenin *s* bölgesi eşdeğer devresi.

V_o için çözüm

$$V_o = \frac{1000(s + 5000)V_g}{s^2 + 6000s + 25 \times 10^6}$$

verir. Buradan aktarım fonksiyonu

$$H(s) = \frac{V_o}{V_g} = \frac{1000(s + 5000)}{s^2 + 6000s + 25 \times 10^6}$$

bulunur.

b) $H(s)$'nin kutupları, payda polinomunun kökleridir. Böylelikle

$$-p_1 = -3000 - j4000,$$

$$-p_2 = -3000 + j4000$$

bulunur. $H(s)$'nin sıfırları, pay polinomunun kökleridir. Buradan $H(s)$'nin sıfırı

$$-z_1 = -5000$$

olarak elde edilir.

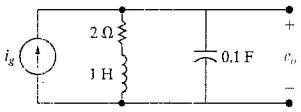
✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 3- Aktarım fonksiyonun tanım ve önemini anlamak; aktarım fonksiyonunu çıkarabilmek.

13.9 a) Şekildeki devrede V_o/I_g aktarım fonksiyonunun nümerik ifadesini çıkarınız.

b) $H(s)$'nin her bir kutup ve sıfırının nümerik değerini hesaplayınız.

Cevap: (a) $H(s) = 10(s + 2)/(s^2 + 2s + 10)$; (b) $-p_1 = -1 + j3$, $-p_2 = -1 - j3$, $-z = -2$.



NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 13.49'u da çözmeyi deneyiniz.

H(s)'nin Kutuplarının ve Sıfırlarının Yerleşimi

Doğrusal, toplu parametreli devrelerde $H(s)$ ner zaman s'nin bir kesirli fonksiyonudur. Kompleks kutuplar ve sıfırlar her zaman eşlenik çiftler olarak var olur. Sınırlı bir kaynağa (değerleri belli sonlu sınırlar içinde olan) olan tepkinin sınırlı olması için $H(s)$'nin kutupları s düzleminin sol yarısında olmalıdır.

Bu genel özellikleri akılda tutarak, tepki fonksiyonunun belirlenmesinde $H(s)$'nin rolünü tartışacağız. $y(t)$'nin bulunması için kısmi kesirlerle açılım tekniği ile başlayacağız.

13.5 Kısmi Kesir Açılımı ve Aktarım Fonksiyonu

Eş. 13.93'ten, devrenin çıkışını, aktarım fonksiyonu ile sürücü fonksiyonun çarpımı olarak yazabiliriz:

$$Y(s) = H(s)X(s). \tag{13.96}$$

Daha önce $H(s)$'nin kesirli bir fonksiyon olduğunu belirtmiştik. Tablo 13.1'in incelenmesi, devre analizinde ilgi duyulan çoğu besleme fonksiyonu için $X(s)$'nin de s'nin kesirli bir fonksiyonu olduğunu gösterir.

Eş. 13.96'nın sağ tarafının kısmi kesirler toplamı olarak açılması, $H(s)$'nin her bir kutubu için bir terim verir. 12. Bölümden, kutupların payda polinomunun, sıfırların ise pay polinomunun kökleri olduğunu hatırlayınız. $H(s)$'nin kutupları tarafından üretilen terimler, toplam tepkinin geçici bileşenini oluşturur. Öte yandan $X(s)$'nin kutuplarının ürettiği terimler tepkinin durgun durum bileşenini oluşturur. Durun durum tepkisi ile, geçici bileşenler ihmal edilebilir olduktan sonra var olan tepkiyi kastediyoruz. Örnek 13.2 bu genel gözlemleri sergilemektedir.

Örnek 13.2 **Bir Devrenin Aktarım Fonksiyonunun Analizi**

Örnek 13.1'deki devre (Şekil 13.31), gerilimi zamanla doğrusal olarak $v_g = 50tu(t)$ biçiminde doğrusal artan bir gerilim kaynağı ile sürülmektedir.

a) Aktarım fonksiyonunu kullanarak v_o'yu bulunuz.

b) Tepkinin geçici bileşenini belirleyiniz.

c) Tepkinin durgun durum bileşenini belirleyiniz.

d) v_o'yu $0 \le t \le 1.5$ ms için t'ye karşı çiziniz.

Çözüm

a) Örnek 13.1'den

$$H(s) = \frac{1000(s + 5000)}{s^2 + 6000s + 25 \times 10^6}$$

olduğunu biliyoruz. Sürücü gerilimin dönüşümü $50 / s^2$'dir. Böylelikle çıkış geriliminin s bölgesi ifadesi

$$V_o = \frac{1000(s + 5000)}{(s^2 + 6000s + 25 \times 10^6)} \frac{50}{s^2}$$

bulunur. V_o'nun kısmi kesirler açılımı

$$V_o = \frac{K_1}{s + 3000 - j4000} + \frac{K_1^*}{s + 3000 + j4000} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3}{s}$$

olarak elde edilir. K_1, K_2 ve K_3 katsayıları, Kısım 12.7'de açıklanan teknikler kullanılarak elde edilir.

$K_1 = 5\sqrt{5} \times 10^{-4}\underline{/79.70°}$;

$K_1^* = 5\sqrt{5} \times 10^{-4}\underline{/-79.70°}$,

$K_2 = 10$,

$K_3 = -4 \times 10^{-4}$.

v_0'nun zaman bölgesi ifadesi

$$v_o = [10\sqrt{5} \times 10^{-4}e^{-3000t} \cos(4000t + 79.70°) + 10t - 4 \times 10^{-4}]u(t) \text{ V}$$

olarak elde edilir.

b) v_o'nun geçici bileşeni

$$10\sqrt{5} \times 10^{-4}e^{-3000t} \cos(4000t + 79.70°)$$

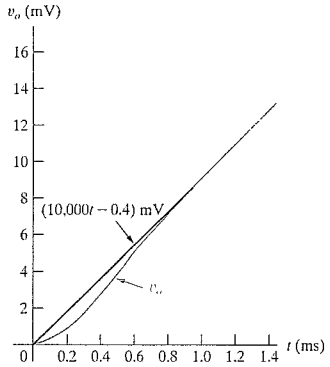
bulunur. Bu terimin, aktarım fonksiyonunun kutupları olan $(-3000 + j4000)$ ve $(-3000 - j4000)$ tarafından üretildiğine dikkat ediniz.

c) Tepkinin durgun durum bileşeni

$$(10t - 4 \times 10^{-4})u(t)$$

bulunur. Bu iki terim, sürücü gerilimin ikinci mertebeden kutubu (K / s^2) tarafından üretilir.

d) Şekil 13.33 v_o'nun t'ye karşı grafiğini göstermektedir. Yaklaşık 1 ms'den sonra, durgun durum çözümü olan $10{,}000t - 0.4$ mV'tan sapmanın farkedilmeyecek seviyede olduğuna dikkat ediniz.



Şekil 13.33 Örnek 13.2'de v_o'nun t'ye karşı grafiği.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 4- Bir devrenin aktarım fonksiyonu kullanarak dürtü tepkisini, birim basamak tepkisini ve sinüzoidal bir giriş için durgun durum tepkisini hesaplayabilmek.

13.10 Değerlendirme Problemi 13.9'daki devrenin (a) birim basamak ve (b) birim dürtü tepkisini hesaplayınız.

Cevap: (a) $[2 + (10/3)e^{-t}\cos(3t + 126.87°)]u(t)$ V; (b) $10.54e^{-t}\cos(3t - 18.43°)u(t)$ V.

13.11 Bir devrenin dürtü tepkisi, $\tan\theta = \frac{7}{24}$ olmak üzere, $v_o(t) = 10{,}000e^{-70t}\cos(240t + \theta)$ V verilmektedir.

a) Devrenin aktarım fonksiyonunu bulunuz.

b) Devrenin birim basamak tepkisini bulunuz.

Cevap: (a) $9600s/(s^2 + 140s + 62{,}500)$; (b) $40e^{-70t}\sin 240t$ V.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 13.76 (a) ve (b)'yi de çözmeyi deneyiniz.

$H(s)$'nin Devre Analizinde Kullanımına İlişkin Gözlemler

Örnek 13.2, aktarım fonksiyonu $H(s)$'nin, kısmi kesirler açılımı aracılığıyla bir devrenin tepkisi ile nasıl ilişkili olduğunu açıkça sergilemektedir. Ancak örnek, bir devreyi çıkışta artan bir eğim fonksiyonu üreten, artan bir eğim fonksiyonu ile sürmenin kullanımı hakkında sorulara neden olabilir. Sonuçta aşırı gerilimden devre elemanları bozulacak ve bu olduğunda doğrusal modelimiz artık geçerli olmayacaktır. Eğim fonksiyonu, sonlu bir zaman aralığında eğim fonksiyonunun maksimum değerine ulaştığı pratik uygulamalarda ilgi çekicidir. Eğer bu maksimum değere ulaşmak için gereken zaman, devrenin zaman sabitleri ile karşılaştırıldığında çok büyükse, sınırlanmamış bir eğim fonksiyonu kabul ederek bulunan çözüm, bu sonlu zaman aralığı için geçerli olur.

Eş. 13.96 ile ilgili iki gözlem daha yapacağız. Birinci olarak gecikmiş bir giriş için devrenin tepkisine bakalım. Eğer giriş a saniye gecikmiş ise

$$\mathcal{L}\{x(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}X(s)$$

olur ve Eş. 13.96'dan tepki

$$Y(s) = H(s)X(s)e^{-as} \tag{13.97}$$

haline gelir. Eğer $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)X(s)\}$ ise, o halde Eş.13.97'den

$$y(t-a)u(t-a) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)X(s)e^{-as}\} \tag{13.98}$$

bulunur. Böylece girişin a saniye geciktirilmesi basitçe çıkışı da a saniye geciktirir. Bu özelliğe sahip bir devreye **zamanla değişmeyen** denir.

İkinci olarak, eğer devreyi bir birim dürtü kaynağı sürerse, devrenin tepkisi aktarım fonksiyonunun ters dönüşümüne eşit olur. Yani eğer

$$x(t) = \delta(t) \text{ ise } X(s) = 1$$

ve

$$Y(s) = H(s) \tag{13.99}$$

olur.

Böylece Eş. 13.99'dan

$$y(t) = h(t) \tag{13.100}$$

bulunur. Burada aktarım fonksiyonunun ters dönüşümü, devrenin birim dürtü tepkisine eşittir. Bunun aynı zamanda devrenin doğal tepkisi olduğuna dikkat ediniz. Çünkü bir dürtü kaynağın uygulanması devrede anlık olarak enerji depolanmasına eşdeğerdir (bkz. Kısım 13.8). Depolanan bu enerjinin bırakılması doğal tepkiyi oluşturur (bkz. Problem 13.86).

Gerçekte bir devrenin birim dürtü tepkisi $h(t)$, devrenin herhangi bir kaynağa olan tepkisini bulmak için yeterli bilgi içerir. Bir devrenin herhangi bir kaynak için tepkisi, bir sonraki kısımda gösterildiği gibi evrişim integrali ile bulunur.

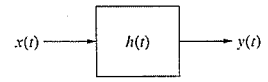
13.6 Aktarım Fonksiyonu ve Evrişim İntegrali

Evrişim integrali, doğrusal ve zamanda değişmez bir devrenin çıkışı $y(t)$'yi devrenin girişi $x(t)$ ve devrenin dürtü tepkisi $h(t)$ ile ilişkilendirir. İntegral bağıntı iki şekilde ifade edilebilir:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\lambda)x(\lambda)\,d\lambda \tag{13.101}$$

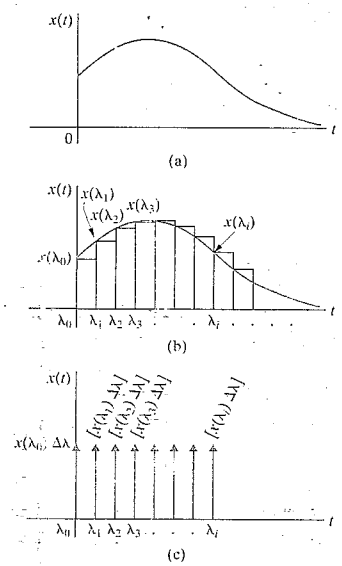
Evrişim integrali ile birçok nedenle ilgileniriz. Birincisi, tamamen zaman bölgesinde çalışmamıza izin verir. Bunu yapmak, $x(t)$ ve $h(t)$ sadece deneysel veriler aracılığıyla bilindiğinde yararlıdır. Bu durumlarda dönüşüm yöntemi zor ve hatta imkansız olabilir çünkü deneysel verilerin Laplace dönüşümünü almamızı gerektirir. İkincisi, evrişim integrali analize bellek ve ağırlık fonksiyonu kavramlarını getirir. Bellek kavramının, dürtü tepkisine (veya ağırlık fonksiyonuna) bakarak, çıkış dalga biçiminin giriş dalga biçimini ne kadar yakın takip ettiğini belirlememize nasıl izin verdiğini göstereceğiz. Son olarak, evrişim integrali, Laplace dönüşümlerinin çarpımlarının ters dönüşümünü bulmak için bir yöntem sağlar.

Eş. (13.101)'in çıkarımını, devrenin doğrusal ve zamanda değişmez olduğu kabullenmesine dayandırdık. Devre doğrusal olduğundan üst üste bindirme geçerlidir ve devre zamanda değişmez olduğundan, tepkideki gecikme miktarı tam olarak girişteki gecikmeye eşittir. Şimdi, $h(t)$'yi içeren bloğun dürtü tepkisi bilinen herhangi bir doğrusal, zamanda değişmez bir devreyi gösterdiği, $x(t)$'nin uyarım fonksiyonunu ve $y(t)$'nin istenen çıkış sinyalini gösterdiği Şekil 13.34'ü düşünelim.

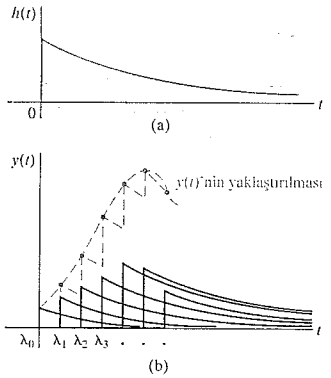


Şekil 13.34 Genel bir devrenin blok diyagramı.

$x(t)$'nin Şekil 13.35(a)'da gösterilen genel uyarım sinyali olduğunu kabul edeceğiz. Uygunluk için $t < 0^-$ olduğunda $x(t) = 0$ olduğunu da kabul edeceğiz. $t < 0^-$ için $x(t) = 0$ kabul edilerek çıkarılan evrişim integrali görüldüğünde, bunun tüm zaman bölgesinde var olan fonksiyonlara genişletilmesi açık olacaktır. Bunların dışında $x(t)$'de orijinde bir süreksizliğe, yani 0^- ile 0^+ arasında bir sıçramaya da izin verdiğimize dikkat ediniz.



Şekil 13.35 ▲ $x(t)$ uyarım sinyali. (a) Genel uyarım sinyali. (b) $x(t)$'nin bir darbe serisi ile yaklaştırılması. (c) $x(t)$'nin dürtü serisi ile yaklaştırılması.



Şekil 13.36 ▲ $y(t)$'nin yaklaştırılması. (a) Şekil 13.34'te gösterilen kutunun dürtü tepkisi. (b) Dürtü tepkilerinin toplanması.

Şimdi $x(t)$'yi, düzgün $\Delta\lambda$ genişlikli dikdörtgen darbelerin bir serisi ile Şekil 13.35(b)'de gösterildiği gibi yaklaştıracağız. Böylece

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) + \cdots + x_i(t) + \cdots \tag{13.102}$$

yazılabilir. Burada $x_i(t)$, λ_i ve λ_{i+1} arasında $x(\lambda_i)$'ye eşit olan ve diğer her yerde sıfır olan bir dikdörtgen darbedir. i-yinci darbenin basamak fonksiyonları cinsinden

$$x_i(t) = x(\lambda_i)\{u(t - \lambda_i) - u[t - (\lambda_i + \Delta\lambda)]\}$$

olarak yazılabildiğine dikkat ediniz. Yaklaştırmada ikinci adım, $\Delta\lambda$'yı, i-yinci bileşen $x(\lambda_i)\Delta\lambda_i$ şiddetinde bir dürtü fonksiyonu ile modellenebilecek kadar küçük yapmaktır. Şekil 13.35(c) dürtü temsilini göstermektedir. Burada her bir dürtünün şiddeti okun yanında köşeli parantez içinde verilmiştir. $x(t)$'nin dürtü temsili

$$x(t) = x(\lambda_0)\Delta\lambda\delta(t - \lambda_0) + x(\lambda_1)\Delta\lambda\delta(t - \lambda_1) + \cdots$$
$$+ x(\lambda_i)\Delta\lambda\delta(t - \lambda_i) + \cdots \tag{13.103}$$

olarak verilir. Şimdi $x(t)$ dürtü fonksiyonlarının (her biri eşit aralıklı zamanlarda yani $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$'de bulunan) bir serisi ile temsil edildiğinde, $y(t)$ tepki fonksiyonu, düzgün gecikmeli dürtü tepkilerinin seri toplamından oluşur. Her bir tepkinin şiddeti, devreyi süren dürtünün şiddetine bağlıdır. Örneğin, Şekil 13.34'teki kutunun içindeki devrenin birim dürtü tepkisinin, Şekil 13.36(a)'daki üstel azalan fonksiyon olduğunu kabul edelim. O halde $y(t)$'nin yaklaştırması Şekil 13.36(b)'de gösterilen dürtü tepkilerinin toplamıdır.

Analitik olarak $y(t)$'nin ifadesi

$$y(t) = x(\lambda_0)\Delta\lambda h(t - \lambda_0) + x(\lambda_1)\Delta\lambda h(t - \lambda_1)$$
$$+ x(\lambda_2)\Delta\lambda h(t - \lambda_2) + \cdots$$
$$+ x(\lambda_i)\Delta\lambda h(t - \lambda_i) + \cdots \tag{13.104}$$

olarak verilir. $\Delta\lambda \to 0$ iken Eş. 13.104'teki toplam sürekli bir integrasyona veya

$$\sum_{i=0}^{\infty} x(\lambda_i)h(t - \lambda_i)\Delta\lambda \to \int_0^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)\,d\lambda \tag{13.105}$$

ifadesine yaklaşır. Dolayısıyla

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)\,d\lambda \tag{13.106}$$

elde edilir. Eğer $x(t)$ tüm zaman ekseninde var ise o halde Eş. 13.106'daki alt limit $-\infty$ haline gelir. Böylece genel durum için,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)\,d\lambda \tag{13.107}$$

yazılır ki bu da Eş. 13.101'de verilen evrişim integralinin ikinci biçimidir. İntegralin birinci biçimini, integrasyon değişkenini değiştirerek Eş. 13.107'den çıkarırız. $u = t - \lambda$ alır ve sonra $du = -d\lambda$ olduğuna ve $\lambda = \infty$ iken $u = -\infty$ ve $\lambda = -\infty$ iken $u = +\infty$ olduğuna dikkat ederiz. Şimdi Eş. 13.107'yi

$$y(t) = \int_{\infty}^{-\infty} x(t - u)h(u)(-du)$$

veya

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - u)h(u)(du) \tag{13.108}$$

olarak yazabiliriz. Ancak u sadece bir integrasyon sembolü olduğundan, Eş. 13.108, evrişim integralinin birinci biçimi olan Eş. 13.101'e denktir.

Eş. 13.101'de ifade edilen $y(t)$, $h(t)$ ve $x(t)$ arasındaki integral bağıntı sıklıkla aşağıdaki kısa gösterimle yazılır.

$$y(t) = h(t) * x(t) = x(t) * h(t) \tag{13.109}$$

Burada yıldız, $h(t)$ ve $x(t)$ arasındaki integral bağıntıyı belirtir. Böylece $h(t) * x(t)$ "$h(t)$, $x(t)$ ile evriştirilir" diye okunur ve

$$h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t - \lambda)\,d\lambda$$

anlamına gelir, öte yandan $x(t) * h(t)$ "$x(t)$, $h(t)$ ile evriştirilir" diye okunur ve

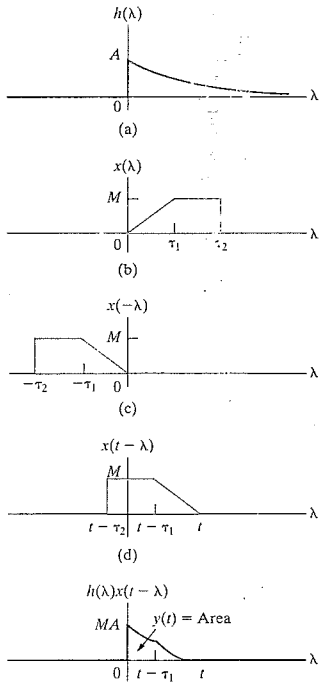
$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)\,d\lambda$$

anlamına gelir. Eş. 13.101'deki integraller iki fonksiyonun evrişimi için en genel bağıntıyı verir. Ancak evrişim integrali uygulamalarımızda, integralin alt limitini sıfıra, üst limitini ise t'ye değiştirebiliriz. Böylece Eş. 13.101'i

$$y(t) = \int_0^t h(\lambda)x(t - \lambda)\,d\lambda = \int_0^t x(\lambda)h(t - \lambda)\,d\lambda \tag{13.110}$$

olarak yazabiliriz. Limitleri iki nedenle değiştiririz. Birincisi, fiziksel olarak gerçekleştirilebilir devrelerde $t < 0$ için $h(t)$ sıfırdır. Bir başka deyişle, dürtü uygulanmadan önce dürtü tepkisi olamaz. İkincisi, zamanı $x(t)$ uyarımının açıldığı andan başlayarak ölçeriz; dolayısıyla $t < 0^-$ için $x(t) = 0$'dır.

Eş. 13.110'daki evrişim integrallerinin grafik yorumu, integralin bir hesaplama aracı olarak kullanımında önemlidir. Birinci integral ile başlayacağız. Tartışma açısından devremizin dürtü tepkisini Şekil 13.37(a)'daki üstel düşüş fonksiyonu, uyarım fonksiyonunu ise Şekil 13.37(b)'deki dalgabiçimi olarak kabul edeceğiz. Bu grafiklerin tümünde t yerine integrasyon sembolü λ'yı kullandık. λ'yı $-\lambda$ ile değiştirmek uyarım fonksiyonunu basitçe dikey eksen etrafında katlar. $-\lambda$ yerine $t - \lambda$ yazmak ise katlanmış fonksiyonu sağa kaydırır. Şekil 13.37(c) ve (d)'ye bakınız. Bu katlama işlemi

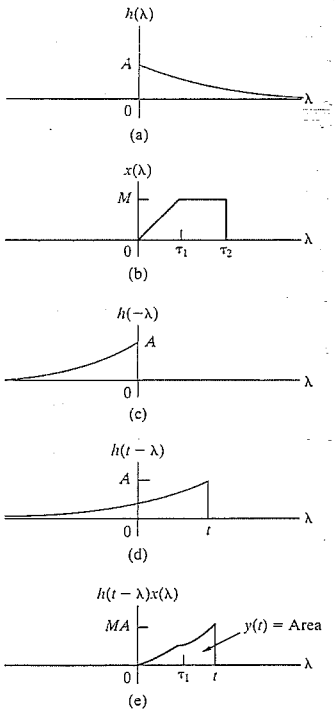


Şekil 13.37 ▲ Evrişim integrali $\int_0^t h(\lambda)x(t - \lambda)\,d\lambda$'nin grafik yorumu. (a) Dürtü tepkisi. (b) Uyarım fonksiyonu. (c) Katlanmış uyarım fonksiyonu. (d) t birim kaydırılmış katlanmış uyarım fonksiyonu. (e) $h(\lambda)x(t - \lambda)$ çarpımı.

evrişim terimine neden olmuştur. Belirtilen herhangi bir t anında $y(t)$ tepki fonksiyonu, $h(\lambda)x(t-\lambda)$ çarpım fonksiyonunun altındaki alandır. Bu grafikten, niçin alt limitin sıfır ve üst limitin t olduğu açık olmalıdır. $\lambda < 0$ için $h(\lambda)x(t-\lambda)$ çarpımı sıfırdır çünkü $h(\lambda)$ sıfırdır. $\lambda > t$ için $h(\lambda)x(t-\lambda)$ çarpımı yine sıfırdır çünkü bu kez $x(t-\lambda)$ sıfırdır.

Şekil 13.38 evrişim integralinin ikinci biçimini göstermektedir. Şekil 13.38(e)'deki çarpım fonksiyonu alt limit için sıfır ve üst limit için t kullanımını doğrulamaktadır.

Örnek 13.3 evrişim integralinin, birim dürtü tepkisi ile birlikte bir devrenin tepkisini bulmak için nasıl kullanıldığını sergilemektedir.



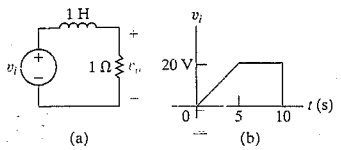
Şekil 13.38 ▲ $\int_0^t h(t-\lambda)x(\lambda)\,d\lambda$ evrişim integralinin grafik yorumu. (a) Dürtü tepkisi. (b) Uyarım fonksiyonu. (c) Katlanmış dürtü tepkisi. (d) t birim kaydırılmış katlanmış dürtü tepkisi. (e) $h(t-\lambda)x(\lambda)$ çarpımı.

Örnek 13.3 Çıkış Sinyalini Bulmak İçin Evrişim İntegralinin Kullanılması

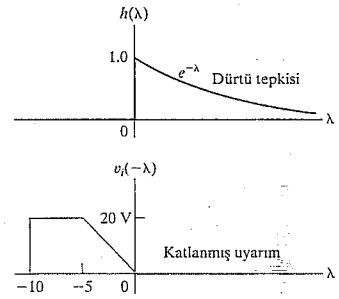
Şekil 13.39(a)'da gösterilen devrenin v_i uyarım gerilimi Şekil 13.39(b)'de verilmiştir.

a) Evrişim integralini kullanarak v_o'yu bulunuz.

b) v_o'yu $0 \le t \le 15$ s aralığında çiziniz.



Şekil 13.39 ▲ Örnek 13.3'ün devresi ve uyarım gerilimi. (a) Devre. (b) Uyarım gerilimi.



Şekil 13.40 ▲ Örnek 13.3'teki dürtü tepkisi ve katlanmış uyarım fonksiyonu.

Çözüm

a) Evrişim integralini kullanmada ilk adım, devrenin birim dürtü tepkisini bulmaktır. V_o'nun ifadesini Şekil 13.39(a)'daki devrenin s bölgesi eşdeğerinden buluruz:

$$V_o = \frac{V_i}{s+1} \quad (1)$$

v_i birim dürtü fonksiyonu $\delta(t)$ olduğunda

$$v_o = h(t) = e^{-t}u(t)$$

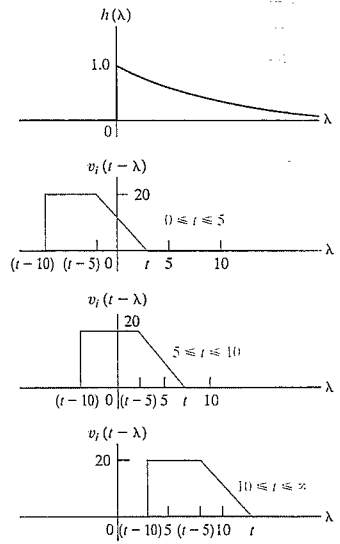
olur ve buradan da

$$h(\lambda) = e^{-\lambda}u(\lambda)$$

elde edilir. Evrişim integralinin Eş. 13.110'daki ikinci biçimi kullanılarak Şekil 13.40'ta gösterilen dürtü tepkisi ve katlanmış uyarım fonksiyonu oluşturulur. Bunlar, evrişim integralinin sınırlarını seçmede yararlıdır. Katlanmış uyarım fonksiyonunu sağa kaydırmak, integrasyonu üç aralığa bölmeyi gerektirir: $0 \le t \le 5$, $5 \le t \le 10$ ve $10 \le t \le \infty$. Uyarım fonksiyonundaki 0, 5 ve 10 s'deki kesimler bu kesim noktalarının nedenidir. Şekil 13.41 bu aralıkların her biri için katlanmış uyarım fonksiyonunun konumlanmasını göstermektedir. v_i'nin $0 \le t \le 5$ s aralığındaki analitik ifadesi

$$v_i = 4t, \quad 0 \le t \le 5 \text{ s}$$

ile verilir.



Şekil 13.41 ▲ $v_i(t-\lambda)$'nin üç farklı zaman aralığı için yer değiştirmesi.

Böylece $t-5 \le \lambda \le t$ aralığında katlanmış uyarım fonksiyonunun analitik ifadesi

$$v_i(t-\lambda) = 4(t-\lambda), \quad t-5 \le \lambda \le t$$

olur. Şimdi v_o için üç integral ifade yazabiliriz. $0 \le t \le 5$ s için,

$$v_o = \int_0^t 4(t-\lambda)e^{-\lambda}d\lambda$$

$$= 4(e^{-t} + t - 1)\ \text{V}$$

$5 \le t \le 10$ s için,

$$v_o = \int_0^{t-5} 20e^{-\lambda}d\lambda + \int_{t-5}^{t} 4(t-\lambda)e^{-\lambda}d\lambda$$

$$= 4(5 + e^{-t} - e^{-(t-5)})\ \text{V}$$

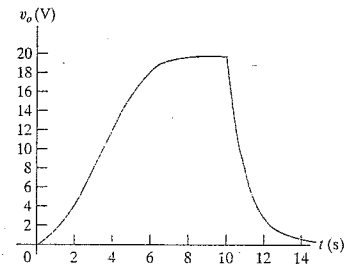
ve son olarak $10 \le t \le \infty$ s için

$$v_o = \int_{t-10}^{t-5} 20e^{-\lambda}d\lambda + \int_{t-5}^{t} 4(t-\lambda)e^{-\lambda}d\lambda$$

$$= 4(e^{-t} - e^{-(t-5)} + 5e^{-(t-10)})\ \text{V}$$

yazılır.

b) Uygun denklemi kullanarak v_o değerleri 1 s zaman aralıkları ile hesaplanmış ve sonuçlar Tablo 13.2'de ve grafiksel olarak Şekil 13.42'de gösterilmiştir.



Şekil 13.42 ▲ Örnek 13.3'te zamana karşı gerilim tepkisi.

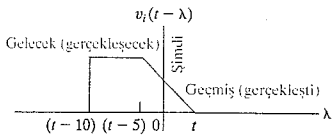
TABLO 13.2 $v_o(t)$'nin Nümerik Değerleri

t	v_o	t	v_o
1	1.47	9	19.93
2	4.54	10	19.97
3	8.20	11	7.35
4	12.07	12	2.70
5	16.03	13	0.99
6	18.54	14	0.37
7	19.56	15	0.13
8	19.80		

NOT: Evrişimi kavramanızı Bölüm Problemlerinden 13.57 ve 13.58'i de çözmeyi deneyerek değerlendiriniz.

Bellek ve Ağırlık Fonksiyonu Kavramları

Bu kısmın başında evrişim integralinin devre analizine bellek ve ağırlık fonksiyonu kavramlarını getirdiğini belirtmiştik. Evrişim integralinin grafiksel yorumu bu kavramları anlamaya başlamanın en kolay yoldur. Uyarım fonksiyonunun katlanmasını ve kaydırmasını zaman ölçeğinde geçmiş, şimdiki zaman ve gelecek olarak görebiliriz. Uyarım fonksiyonu $x(t)$'nin boyunca katlandığı dikey eksen şimdiki zaman değerini gösterir. $x(t)$'nin geçmiş değerleri dikey eksenin sağında, gelecek değerler ise solundadır. Şekil 13.43 $x(t)$'nin bu açıklamasını göstermektedir. Bu şekilde Örnek 13.3'teki uyarım fonksiyonunu kullandık.

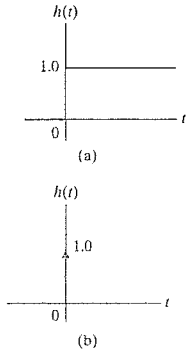


Şekil 13.43 ▲ Uyarım fonksiyonunun geçmiş, şimdiki ve gelecek değerleri.

$x(t-\tau)$'nun geçmiş, şimdiki ve gelecek değerlerini devrenin dürtü tepkisi ile birleştirdiğimizde, dürtü tepkisinin $x(t)$'yi şimdiki ve geçmiş değerlere göre ağırlıklandırdığını görürüz. Örneğin Şekil 13.41, Örnek 13.3'te dürtü tepkisinin, $x(t)$'nin geçmiş değerlerine şimdiki değerinden daha az ağırlık verdiğini göstermektedir. Bir başka deyişle, devre geçmiş değerlerini giderek daha az korur. Dolayısıyla Şekil 13.42'de, girişin şimdiki değeri sıfır olduğunda (yani $t > 10$ s) v_o hızlıca sıfıra yaklaşır. Bir başka deyişle, girişin

şimdiki değeri geçmiş değerlerinden daha çok ağırlıklandırıldığından, çıkış çabucak girişin şimdiki değerine yakınsar.

$x(t-\lambda)$'nın $h(\lambda)$ ile çarpılması, dürtü tepkisinin devrenin **ağırlık fonksiyonu** olarak adlandırılmasına neden olmuştur. Ağırlık fonksiyonu da devrenin ne kadar belleğinin olduğunu belirler. **Bellek**, devrenin tepkisinin girişi ile uyumlu olduğu bölgenin sınırına kadarki kısımdır. Örneğin dürtü tepkisi veya ağırlık fonksiyonu Şekil 13.44 (a)'daki gibi düz ise, $x(t)$'nin geçmiş ve şimdiki tüm değerlerine aynı ağırlığı verir. Böyle bir devrenin mükemmel bir belleği vardır. Ancak dürtü tepkisi, Şekil 13.44(b)'deki gibi bir dürtü fonksiyonu ise $x(t)$'nin geçmiş değerlerine hiç ağırlık vermez. Böyle bir devrenin belleği yoktur. Böylece bir devrenin ne kadar belleği varsa, uyarım fonksiyonunun dalgabiçimi ile tepki fonksiyonun dalgabiçimi arasında o kadar fark vardır. Bu ilişkiyi, devrenin hiç belleği olmadığını yani $h(t) = A\,\delta(t)$ olduğunu kabul ederek ve evrişim integralinden



Şekil 13.44 ▲ Ağırlık fonksiyonları. (a) Mükemmel bellek. (b) Belleksiz.

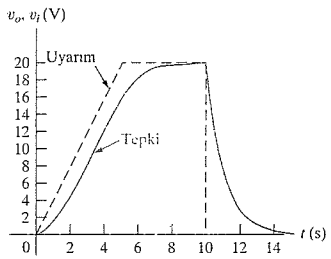
$$y(t) = \int_0^t h(\lambda)x(t-\lambda)\,d\lambda$$

$$= \int_0^t A\delta(\lambda)x(t-\lambda)\,d\lambda$$

$$= Ax(t) \qquad (13.111)$$

olarak gösterebiliriz. Eş. 13.111 eğer devrenin belleği yoksa çıkışın, girişin ölçeklenmiş bir kopyası olduğunu gösterir.

Örnek 3.3'teki devre, belli bir belleği olan bir devrede giriş ve çıkış arasındaki bozunumu sergilemektedir. Bu bozunum, giriş ve çıkış dalgabiçimleri Şekil 13.45'teki gibi aynı grafikte çizildiğinde daha açık görülür.



Şekil 13.45 ▲ Örnek 13.3 için giriş ve çıkış dalgabiçimi.

13.7 Aktarım Fonksiyonu ve Durgun Durum Sinüzoidal Tepki

Devrenin aktarım fonksiyonunu hesapladıktan sonra, devrenin durgun durum tepkisini belirlemek için ayrı bir fazör analizine gerek yoktur. Bunun yerine, durgun durum tepkisini uyarım kaynağına ilişkilendirmek için aktarım fonksiyonunu kullanırız. Önce

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad (13.112)$$

kabul eder ve sonra Eş. 13.96'dan yararlanarak $y(t)$'nin durgun durum çözümünü buluruz. $x(t)$'nin Laplace dönüşümünü bulmak için önce $x(t)$'yi

$$x(t) = A\cos\omega t\cos\phi - A\sin\omega t\sin\phi \qquad (13.113)$$

yazar ve buradan da

$$X(s) = \frac{(A\cos\phi)s}{s^2+\omega^2} - \frac{(A\sin\phi)\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$= \frac{A(s\cos\phi - \omega\sin\phi)}{s^2+\omega^2} \qquad (13.114)$$

elde ederiz. Eş. 13.114'ün Eş. 13.96'da yerine konması, tepkinin s bölgesi ifadesini verir:

$$Y(s) = H(s)\frac{A(s\cos\phi - \omega\sin\phi)}{s^2+\omega^2}. \qquad (13.115)$$

Şimdi Eş. 13.115'in kısmi kesirler açılımına bakacağız. Açılımdaki terim sayısı $H(s)$'nin kutuplarının sayısına bağlıdır. $H(s)$, fiziksel olarak gerçekleştirilebilir olmanın ötesinde belirlenmediğinden, Eş. 13.115'in açılımı

$$Y(s) = \frac{K_1}{s-j\omega} + \frac{K_1^*}{s+j\omega}$$

$$+ \sum H(s)\text{'nin kutupları tarafından üretilen terimler} \qquad (13.116)$$

verir. Eş. 13.116'da ilk iki terim sürücü kaynağın kompleks eşlenik kutuplarından kaynaklanır. Bunlar $s^2+\omega^2 = (s-j\omega)(s+j\omega)$ ile belirlenir. Ancak $H(s)$'nin kutuplarınca üretilen terimler $y(t)$'nin durgun durum tepkisine katkıda bulunmaz. Bunun nedeni, $H(s)$'nin tüm kutuplarının sol yarım s düzleminde yer almasıdır. Sonuç olarak, bunlara karşılık gelen zaman bölgesi terimleri t arttıkça sıfıra yaklaşır. Böylece Eş. 13.116'nın sağ tarafındaki ilk iki terim durgun durum tepkisini belirler. Problem, kısmi kesirler açılım katsayısı K_1'i bulmaya indirgenmiştir:

$$K_1 = \left.\frac{H(s)A(s\cos\phi - \omega\sin\phi)}{s+j\omega}\right|_{s=j\omega}$$

$$= \frac{H(j\omega)A(j\omega\cos\phi - \omega\sin\phi)}{2j\omega}$$

$$= \frac{H(j\omega)A(\cos\phi + j\sin\phi)}{2} = \frac{1}{2}H(j\omega)Ae^{j\phi}. \qquad (13.117)$$

Genel olarak $H(j\omega)$ kompleks bir niceliktir. Bunu, $H(j\omega)$'yı kutupsal biçimde

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)} \qquad (13.118)$$

halinde yazarak gösteririz. Eş. 13.118'den, aktarım fonksiyonunun hem $|H(j\omega)|$ genliğinin, hem de $\theta(\omega)$ faz açısının frekansla değiştiğine dikkat ediniz. Eş. 13.118 Eş.13.117'de yerine konduğunda K_1 ifadesi

$$K_1 = \frac{A}{2}|H(j\omega)|e^{j[\theta(\omega)+\phi]} \qquad (13.119)$$

halini alır.

$y(t)$'nin durgun durum çözümünü, Eş. 13.116'nın ters dönüşümünü alarak ve bu işlem sırasında $H(s)$'nin kutupları tarafından üretilen terimleri atarak buluruz. Böylece

$$y_{ss}(t) = A|H(j\omega)|\cos[\omega t + \phi + \theta(\omega)], \qquad (13.120)$$

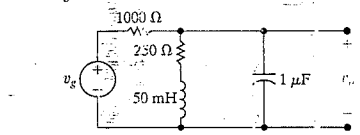
◁ **Aktarım fonksiyonu kullanılarak hesaplanan durgun durum sinüzoidal tepki.**

bulunur. Bu örnek, bir devrenin durgun durum sinüzoidal tepkisinin, aktarım fonksiyonu kullanılarak nasıl bulunacağını göstermektedir. Tepkinin genliği, kaynağın genliği A ile aktarım fonksiyonunun genliği $|H(j\omega)|$'nın çarpımıdır. Tepkinin faz açısı $\phi + \theta(\omega)$, kaynağın faz açısı ϕ ile aktarım fonksiyonunun faz açısı $\theta(\omega)$'nın toplamıdır.

Örnek 13.4, aktarım fonksiyonunun bir devrenin durgun durum sinüzoidal tepkisini bulmada nasıl kullanılacağını sergilemektedir.

Örnek 13.4 Aktarım Fonksiyonunun Durgun Durum Sinüzoidal Tepkiyi Bulmada Kullanılması

Örnek 13.1'deki devre Şekil 13.46'da gösterilmektedir. Sinüzoidal gerilim kaynağı 120 cos (5000t + 30°) V'tur. v_o'nun durgun durum ifadesini bulunuz.



Şekil 13.46 Örnek 13.4'ün devresi.

Çözüm

Örnek 13.1'den,

$$H(s) = \frac{1000(s+5000)}{s^2+6000s+25*10^6}$$

olduğunu biliyoruz.

Gerilim kaynağının frekansı 5000 rad / s'dir. Böylece $H(j5000)$ değerini hesaplayacağız:

$$H(j5000) = \frac{1000(5000+j5000)}{-25*10^6 + j5000(6000) + 25\times10^6}$$

$$= \frac{1+j1}{j6} = \frac{1-j1}{6} = \frac{\sqrt{2}}{6}\angle{-45°}.$$

Sonra Eş. 13.120'den

$$v_{o_{ss}} = \frac{(120)\sqrt{2}}{6}\cos(5000t + 30° - 45°)$$

$$= 20\sqrt{2}\cos(5000t - 15°)\text{ V}$$

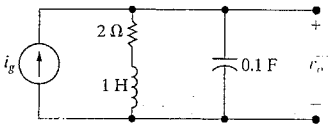
elde edilir.

Bir devrenin durgun durum sinüzoidal tepkisinin hesaplanmasında aktarım fonksiyonunun kullanılabilmesi önemlidir. Eğer $H(j\omega)$'yı biliyorsak, en azından teorik olarak $H(s)$'yi de biliriz. Bir başka deyişle, işlemi tersine çevirebiliriz: $H(s)$'yi kullanarak $H(j\omega)$'yı bulmak yerine, $H(j\omega)$'yı kullanarak $H(s)$'yi buluruz. $H(s)$'yi bilince diğer uyarım kaynaklarına olan tepkiyi de bulabiliriz. Bu uygulamada $H(j\omega)$'yı deneysel olarak belirleyip daha sonra verilerden $H(s)$'yi oluşturacağız. Pratik olarak bu deneysel yaklaşım her zaman olanaklı değildir ama bazı durumlarda $H(s)$'nin çıkarımı için kullanışlı bir yöntem sağlar. Teoride $H(s)$ ve $H(j\omega)$ arasındaki bağıntı, zaman bölgesi ve frekans bölgesi arasında bir bağıntı verir. Aktarım fonksiyonu, bir devrenin frekans tepkisi ile ilgili problemlerde de çok kullanışlı bir araçtır. Bu kavram, bir sonraki bölümde tanıtılacaktır.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 4 - Bir devrenin aktarım fonksiyonunu kullanarak devrenin dürtü tepkisini, birim basamak tepkisini ve sinüzoidal bir giriş için durgun durum tepkisini hesaplayabilmek.

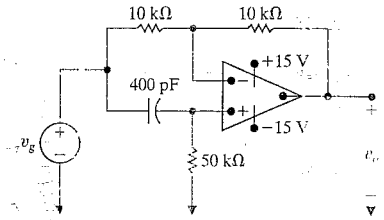
13.12 Gösterilen devredeki akım kaynağı 10 cos $4t$ A'dir. Aktarım fonksiyonunu kullanarak v_o'nun durgun durum ifadesini hesaplayınız.



Cevap: 44.7 cos(4t – 63.43°) V.

13.13 a) Aşağıdaki devrede v_g = 10 cos 50,000t V iken v_o'nun durgun durum ifadesini bulunuz.

b) 50 kΩ direnci bir değişken dirençle değiştiriniz ve v_o'nun v_g'nin 120° önünde olması için gereken direnç değerini hesaplayınız.

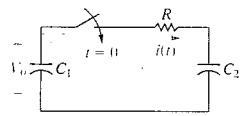


Cevap: (a) 10 cos (50,000t + 90°) V; (b) 28,867.51 Ω.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 13.74 ve 13.75'i de çözmeyi deneyiniz.

13.8 Devre Analizinde Dürtü Fonksiyonu

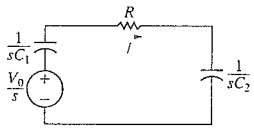
Devre analizinde, anahtarlama işleminden dolayı ve dürtüsel bir kaynak kullanıldığı için dürtü fonksiyonu ile karşılaşılır. Laplace dönüşümü, anahtarlama sırasında oluşan dürtüsel akım ve gerilimleri veya bir devrenin dürtüsel bir kaynağa tepkisini bulmada kullanılabilir. Tartışmamıza, anahtarlama işlemi ile bir dürtü fonksiyonunun nasıl oluşturulduğunu göstererek başlayacağız.



Şekil 13.47 ▲ Bir dürtüsel akımın oluşmasını gösteren devre.

Anahtarlama İşlemleri

Bir anahtarlama işlemi ile bir dürtü fonksiyonunun nasıl oluşturulabileceğini sergilemek için iki farklı devre kullanacağız: Bir kapasitör devresi ve bir indüktör devresi.



Şekil 13.48 ▲ Şekil 13.47'de gösterilen devrenin s bölgesindeki eşdeğer devresi.

Kapasitör Devresi

Şekil 13.47'de gösterilen devrede C_1 kapasitörü anahtarın kapatıldığı anda V_0 başlangıç gerilimine doldurulmuştur. C_2 üzerindeki başlangıç yükü ise sıfırdır. Problem, $R \to 0$ için $i(t)$'nin ifadesini bulmaktır. Şekil 13.48 s bölgesi eşdeğer devresini göstermektedir.

Şekil 13.48'den

$$I = \frac{V_0/s}{R + (1/sC_1) + (1/sC_2)}$$

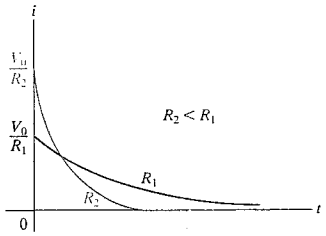
$$= \frac{V_0/R}{s + (1/RC_e)} \qquad (13.121)$$

bulunur. Burada eşdeğer kapasitans $C_1C_2 / (C_1 + C_2)$, C_e ile değiştirilmiştir.

Eş. 13.121'in gözlem yoluyla ters dönüşümünü alırsak

$$i = \left(\frac{V_0}{R}e^{-t/RC_e}\right)u(t) \qquad (13.122)$$

elde edilir. Bu da R azaldıkça, başlangıç akımının (V_0 / R) arttığını ve zaman sabitinin (RC_e) azaldığını gösterir. Böylece R küçüldükçe akım daha büyük bir başlangıç değerinden başlar ve sonra daha çabuk azalır. Şekil 13.49 i'nin bu özelliklerini göstermektedir.



Şekil 13.49 ▲ İki farklı R değeri için $i(t)$'nin t'ye karşı grafiği.

Açıkça R sıfıra yaklaştıkca i bir dürtü fonksiyonuna yaklaşmaktadır. Çünkü i'nin başlangıç değeri sonsuza ve i'nin süresi de sıfıra yaklaşır. Ancak hâlâ akım fonksiyonunun altındaki alanın R'den bağımsız olduğunu belirlemeliyiz. Fiziksel olarak t'ye karşı i grafiğinin altındaki toplam alan, anahtar kapandıktan sonra C_2'ye aktarılan toplam yükü verir. Böylece

$$\text{Area} = q = \int_{0^-}^{\infty} \frac{V_0}{R} e^{-t/RC_e} dt = V_0C_e \qquad (13.123)$$

bulunur ki bu da C_2'ye aktarılan toplam yükün R'den bağımsız ve V_0C_e coulomb olduğunu söyler. Yani R sıfıra yaklaştıkça akım V_0C_e dürtü şiddetine yaklaşır:

$$i \to V_0C_e\delta(t). \qquad (13.124)$$

Eş. 13.124'ün fiziksel yorumu, $R = 0$ olduğunda sonlu bir yükün anlık olarak C_2'ye aktarıldığıdır. Şekil 13.47'de gösterilen devrede R'yi sıfır yapmak, niçin anlık bir yük transferi olduğunu gösterir. $R = 0$ ile, anahtarı kapadığımızda bir tezat oluştururuz. Yani, sıfır başlangıç gerilimi olan bir kapasitöre bir gerilim uygularız. Kapasitör geriliminin anlık değişiminin tek yolu, anlık yük aktarımı olmasıdır. Anahtar kapandığında C_2 üzerindeki gerilim V_0'a değil, son değeri olan

$$v_2 = \frac{C_1V_0}{C_1 + C_2} \qquad (13.125)$$

değerine sıçrar. Eş. 13.125'in çıkarımını size bırakıyoruz (bkz. Problem 13.78).

Eğer R'yi başlangıçta sıfır yaparsak, Laplace dönüşüm analizi dürtüsel akım tepkisi verir. Böylece

$$I = \frac{V_0/s}{(1/sC_1) + (1/sC_2)} = \frac{C_1C_2V_0}{C_1 + C_2} = C_eV_0 \qquad (13.126)$$

bulunur.

Eş. 13.126'yı yazarken $t = 0^-$'deki kapasitör gerilimlerini kullanırız. Bir sabitin ters dönüşümü, sabit ile dürtü fonksiyonunun çarpımıdır. Dolayısıyla Eş. 13.126'dan

$$i \rightarrow V_0 C_e \delta(t) \tag{13.127}$$

bulunur. Laplace dönüşümünün bir dürtüsel tepkinin varlığını doğru biçimde tahmin etme yeteneği, doğrusal, toplu parametreli, zamanda değişmez devrelerin analizinde dönüşümün yaygın olarak kullanılmasının bir nedenidir.

Seri İndüktör Devresi

Şekil 13.50'de gösterilen devre, dürtüsel bir tepki oluşturan ikinci anahtarlama işlemini sergilemektedir. Problem, anahtar açıldıktan sonra v_o'nun zaman bölgesi ifadesini bulmaktır. Anahtarı açmanın L_2'nin akımında anlık değişime neden olduğunu ve bunun da v_o'nun dürtüsel bir bileşen içermesine neden olduğuna dikkat ediniz.

Şekil 13.51 anahtar açıkken s bölgesi eşdeğeri göstermektedir. Bu devrenin çıkarımında $t = 0^-$ anında 3 H indüktördeki akımın 10 A, 2 H indüktördeki akımın ise sıfır olduğunu kullandık. $t = 0^-$'de başlangıç koşullarını kullanmamız, Laplace dönüşümünün tanım integralinde alt limit olarak 0^- kullanmamızın doğrudan bir sonucudur.

V_o ifadesini bir tek düğüm gerilim denkleminden çıkarırız. 15 Ω direnç ile 30 V kaynak arasındaki düğümden çıkan akımların toplamı

$$\frac{V_o}{2s + 15} + \frac{V_o - [(100/s) + 30]}{3s + 10} = 0 \tag{13.128}$$

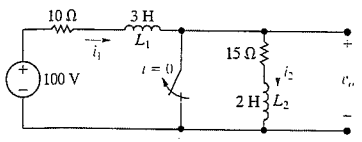
verir. Bunun V_o için çözümü yapılarak

$$V_o = \frac{40(s + 7.5)}{s(s + 5)} + \frac{12(s + 7.5)}{s + 5} \tag{13.129}$$

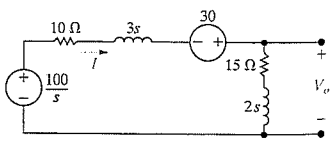
bulunur. v_o'nun bir dürtü terimi içermesini bekleriz çünkü Eş. 13.129'un sağ tarafındaki ikinci terim düzgün olmayan bir kesirli fonksiyondur. Düzgün olmayan bu kesiri, basitçe payını paydasına bölerek, bir sabit artı bir kesirli fonksiyon olarak , yani

$$\frac{12(s + 7.5)}{s + 5} = 12 + \frac{30}{s + 5} \tag{13.130}$$

biçiminde ifade edebiliriz.



Şekil 13.50 ▲ Bir dürtüsel gerilimin oluşturulmasını gösteren bir devre.



Şekil 13.51 ▲ Şekil 13.50'de gösterilen devrenin s bölgesi eşdeğer devresi.

Eş. 13.130'un Eş.13.129'un sağ tarafındaki birinci terim kısmi kesirler açılımı ile birleştirilmesi

$$V_o = \frac{60}{s} - \frac{20}{s + 5} + 12 + \frac{30}{s + 5}$$

$$= 12 + \frac{60}{s} + \frac{10}{s + 5} \tag{13.131}$$

verir ve buradan da

$$v_o = 12\delta(t) + (60 + 10e^{-5t})u(t) \text{ V} \tag{13.132}$$

elde edilir. Bu çözüm anlamlı mıdır? Bu soruyu cevaplamadan önce $t > 0^-$ iken akımın ifadesini çıkaralım. Anahtar açıldıktan sonra L_1'deki akım L_2'deki ile aynı olacaktır. Eğer akım referansını ağ çevresinde saat yönünde alırsak, s bölgesi ifadesi

$$I = \frac{(100/s) + 30}{5s + 25} = \frac{20}{s(s + 5)} + \frac{6}{s + 5}$$

$$= \frac{4}{s} - \frac{4}{s + 5} + \frac{6}{s + 5}$$

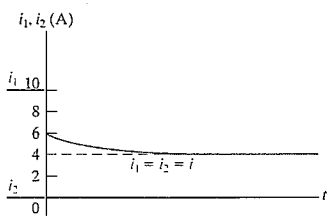
$$= \frac{4}{s} + \frac{2}{s + 5} \tag{13.133}$$

olur. Eş. 13.33'ün ters dönüşümü

$$i = (4 + 2e^{-5t})u(t) \text{ A} \tag{13.134}$$

verir. Anahtar açılmadan önce L_1'deki akım 10 A ve L_2'deki akım 0 A'dir. Eş. 13.134'ten $t = 0^+$ anında L_1 ve L_2'deki akımın 6 A olduğunu biliyoruz. O halde L_1'deki akım anlık olarak 10 A'den 6 A'e, L_2'deki ise 0 A'den 6A'e değişmektedir. Bu 6 A değerinden başlayarak akım, son değeri olan 4 A'e üstel olarak düşer. Son değer devreden kolaylıkla sağlanabilir ve 100 / 25 veya 4 A olarak bulunur. Şekil 13.52 i_1 ve i_2'nin bu özelliklerini göstermektedir.

İndüktör akımlarındaki bu ani sıçramaların, devrenin fiziksel davranışı açısından anlamlı olduğunu nasıl gösterebiliriz? Öncelikle, anahtarlama işleminin iki indüktörü seri hale getirdiğine dikkat edilmelidir. 3 H indüktör üzerindeki herhangi bir dürtüsel gerilim, 2 H üzerindeki bir dürtüsel gerilimle tam olarak dengelenmelidir. Çünkü kapalı bir yol çevresindeki dürtüsel gerilimlerin toplamı sıfıra eşit olmalıdır. Faraday yasası, indüklenen gerilimin



Şekil 13.52 ▲ Şekil 13.50'de gösterilen devrede t4ye karşı indüktör akımları.

akı bağlaşımındaki değişimle orantılı olduğunu belirtir ($v = d\lambda / dt$). Dolayısıyla akı bağlaşımındaki değişim toplamı sıfır olmalıdır. Bir başka deyişle, anahtarlamadan önceki toplam akı bağlaşımı ile anahtarlamadan sonraki aynıdır. Buradaki devre için, anahtarlamadan önceki akı bağlaşımı

$$\lambda = L_1 i_1 + L_2 i_2 = 3(10) + 2(0) = 30 \text{ Wb-sarım} \tag{13.135}$$

bulunur. Anahtarlamadan hemen sonra ise

$$\lambda = (L_1 + L_2) i(0^+) = 5i(0^+) \tag{13.136}$$

olur. Eş. 13.135 ve 13.136 birbirine eşit olduğundan

$$i(0^+) = 30/5 = 6 \text{ A} \tag{13.137}$$

elde edilir. Böylece i'nin çözümü, (Eş. 13.134), akı bağlaşımının korunumu ilkesi ile uyumludur.

Şimdi Eş. 13.132'nin geçerliliğini test edeceğiz. Önce 12 $\delta(t)$ dürtüsel terimini kontrol edeceğiz. $t = 0$'da i_2'deki 0'dan 6A'e olan ani sıçrama, i_2'nin türevinde $6\delta(t)$ şiddetinde bir dürtü oluşturur. Bu dürtü, 2 H indüktörün üzerinde $12\delta(t)$'ye neden olur. $t > 0^+$ için $di_2 / dt = -10e^{-5t}$ A / s'dir; dolayısıyla v_o gerilimi

$$v_o = 15(4 + 2e^{-5t}) + 2(-10e^{-5t})$$

$$= (60 + 10e^{-5t})u(t) \text{ V} \tag{13.138}$$

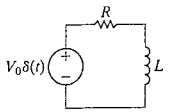
olur. Eş. 13.138, Eş. 13.132'nin sağ tarafındaki son iki terimle uyumludur. Böylece Eş. 13.132'nin devrenin bilinen davranışı açısından anlamlı olduğunu sağlamış olduk.

i_1 akımındaki 10 A'den 6 A'e olan ani düşüşü de inceleyebilirdik. Bu düşüş, i_1'in türevinde $-4\delta(t)$ dürtüsünü oluşturur. Dolayısıyla L_1 üzerindeki gerilim, orijinde $-12\,\delta(t)$ dürtüsünü içerir. Bu dürtü, L_2 üzerindeki dürtüyü tam olarak dengeler yani kapalı bir yol etrafında dürtüsel gerilimlerin toplamı sıfıra eşittir.

Dürtüsel Kaynaklar

Dürtü fonksiyonları, tepkilerde olduğu gibi kaynaklarda da görülebilir. Bu tip kaynaklara dürtüsel kaynaklar denir. Bir devreyi süren bir dürtüsel kaynak, devreye sonlu miktarda bir enerjiyi anlık olarak aktarır. Mekanik benzer olay, bir çanın dürtüsel bir darbe ile çalınmasıdır. Çana enerji aktarıldıktan sonra, çanın doğal tepkisi yayılacak ses tonunu (oluşacak ses dalgalarının frekansı) ve bu tonun süresini belirler.

Şekil 13.53'te gösterilen devrede, V_0 volt-saniye şiddeti olan bir dürtüsel gerilim kaynağı, bir direnç ve bir indüktörün seri bağlantısına uygulanmaktadır. Gerilim kaynağı uygulandığında, indüktördeki başlangıç enerjisi sıfırdır ve dolayısıyla başlangıç akımı sıfırdır. R üzerinde gerilim düşüşü yoktur. Bu nedenle dürtüsel gerilim kaynağı doğrudan L üzerinde görünür.



Şekil 13.53 ▲ Dürtüsel bir kaynakla uyarılan bir RL devresi.

Bir indüktörün terminallerindeki bir dürtüsel kaynak, anlık bir akım oluşturur. Bu akım

$$i = \frac{1}{L}\int_{0^-}^{t} V_0\delta(x)\,dx \tag{13.139}$$

ile verilir. $\delta(t)$'nin sıfırı içeren herhangi bir aralık üzerinde integrali 1 olduğundan, Eş. 13.139'un

$$i(0^+) = \frac{V_0}{L} \text{ A} \tag{13.140}$$

verdiğini buluruz. Böylece sonsuz küçük bir anda gerilim kaynağı indüktörde

$$w = \frac{1}{2}L\left(\frac{V_0}{L}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{L} \tag{13.141}$$

kadar enerji depolar.

Şimdi V_0 / L akımı devrenin doğal tepkisi ile uyumlu bir şekilde sıfıra düşer, yani

$$i = \frac{V_0}{L}e^{-t/\tau}u(t) \tag{13.142}$$

bulunur, burada $\tau = L / R$'dir. 7. Bölümden, doğal tepkinin sadece enerji harcayan veya depolayan pasif elemanlardan kaynaklandığını, kaynakların etkisinin olmadığını hatırlayınız. Bir devre sadece bir dürtüsel kaynakla sürüldüğünde toplam tepki tamamen doğal tepki ile tanımlanır. Dürtüsel kaynağın süresi o kadar kısadırki zorlanan tepkiye hiçbir katkısı olmaz.

Eş. 13.142'yi Laplace dönüşüm yöntemini doğrudan uygulayarak da elde edebiliriz. Şekil 13.54, Şekil 13.53'teki devrenin s bölgesi eşdeğerini göstermektedir.

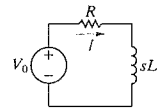
Buradan,

$$I = \frac{V_0}{R + sL} = \frac{V_0/L}{s + (R/L)}, \tag{13.143}$$

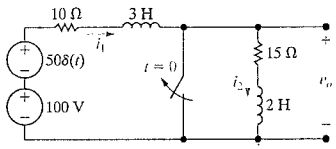
$$i = \frac{V_0}{L}e^{-(R/L)t} = \frac{V_0}{L}e^{-t/\tau}u(t) \tag{13.144}$$

bulunur. Sonuçta Laplace dönüşüm yöntemi $t \geq 0^+$ için doğru çözümü vermiştir.

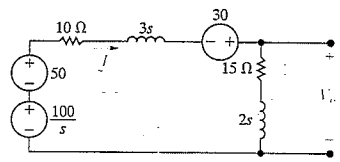
Son olarak, içte üretilen dürtülerle dıştan uygulanan dürtülerin aynı anda var olduğu bir durum inceleyeceğiz. Eğer s bölgesi eşdeğer devresi oluşturulurken $t = 0^-$'deki indüktör akımları ve kapasitör gerilimleri kullanılır ve dıştan uygulanan dürtüler dönüşümleri ile modellenirse, Laplace dönüşüm yöntemi $t > 0^+$ için doğru çözümü garanti eder. Örnek için, Şekil 13.50'deki devrede, 100 V kaynağa seri olarak $50\delta(t)$ dürtüsel kaynağını ekleyelim. Yeni yapı Şekil 13.55'te gösterilmiştir.



Şekil 13.54 ▲ Şekil 13.53'te gösterilen devrenin s bölgesi eşdeğer devresi.



Şekil 13.55 ▲ 100 V kaynağa seri bir dürtü gerilim kaynağı eklendiğinde Şekil 13.50'deki seri devre.



Şekil 13.56 ▲ Şekil13.55'teki devrenin s bölgesi eşdeğer devresi.

$t = 0^-$'de, $i_1(0^-) = 10$ A ve $i_2(0^-) = 0$ A'dir. $50\delta(t)$'nin Laplace dönüşümü 50'dir. Eğer bu değerleri kullanırsak s bölgesi eşdeğer devresi Şekil 13.56'da gösterildiği gibidir.

I'nın ifadesi

$$I = \frac{50 + (100/s) + 30}{25 + 5s}$$

$$= \frac{16}{s+5} + \frac{20}{s(s+5)}$$

$$= \frac{16}{s+5} + \frac{4}{s} - \frac{4}{s+5}$$

$$= \frac{12}{s+5} + \frac{4}{s} \qquad (13.145)$$

bulunur ve buradan da

$$i(t) = (12e^{-5t} + 4)u(t) \text{ A} \qquad (13.146)$$

elde edilir. V_o'nun ifadesi

$$V_o = (15 + 2s)I = \frac{32(s+7.5)}{s+5} + \frac{40(s+7.5)}{s(s+5)}$$

$$= 32\left(1 + \frac{2.5}{s+5}\right) + \frac{60}{s} - \frac{20}{s+5}$$

$$= 32 + \frac{60}{s+5} + \frac{60}{s} \qquad (13.147)$$

bulunur ve buradan da

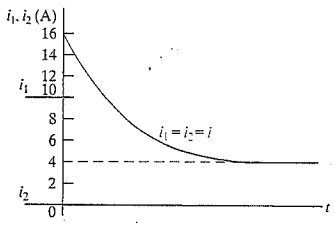
$$v_o = 32\delta(t) + (60e^{-5t} + 60)u(t) \text{ V} \qquad (13.148)$$

elde edilir.

Şimdi sonuçların anlamlı olup olmadığını kontrol edeceğiz. Eş.13.146'dan $t = 0^+$'da L_1 ve L_2'deki akımın 16 A olduğunu görürüz. Önceki durumda olduğu gibi anahtarlama işlemi i_1'in anlık olarak 10 A'dan 6 A'e düşmesine ve aynı zamanda i_2'nin 0'dan 6 A'e artmasına neden olmuştur. Bu değişimlerin üstüne, dürtüsel gerilim kaynağının L_1 ve L_2'de oluşturduğu 10 A yani

$$i = \frac{1}{3+2}\int_{0^-}^{t} 50\delta(x)\,dx = 10 \text{ A} \qquad (13.149)$$

eklenir. Sonuç olarak i_1 10'dan 16 A'e aniden artarken i_2 de 0'dan 16 A'e artar. i'nin son değeri 4 A'dir. Şekil 13.57 i_1, i_2 ve i'yi grafiksel olarak göstermektedir.



Şekil 13.57 ▲ Şekil 13.55'te gösterilen devredeki akımların zamanla değişimi.

i_1 ve i_2'deki ani değişimleri üst üste bindirme kullanmadan da bulabiliriz. L_1 (3 H) ve L_2 (2 H) üzerindeki dürtüsel gerilimlerin toplamı $50\delta(t)$'ye eşittir. Dolayısıyla akı bağlaşımındaki değişimlerin toplamı 50 olmalıdır:

$$\Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2 = 50. \qquad (13.150)$$

$\lambda = Li$ olduğundan Eş. 13.150'yi

$$3\Delta i_1 + 2\Delta i_2 = 50 \qquad (13.151)$$

halinde ifade edebiliriz. Anahtarlama gerçekleştikten sonra i_1 ve i_2'nin eşit olması gerektiğinden,

$$i_1(0^-) + \Delta i_1 = i_2(0^-) + \Delta i_2 \qquad (13.152)$$

bulunur. O halde,

$$10 + \Delta i_1 = 0 + \Delta i_2 \qquad (13.153)$$

elde edilir. Eş. 13.151 ve 13.153'ün Δi_1 ve Δi_2 için çözümü

$$\Delta i_1 = 6 \text{ A}, \qquad (13.154)$$

$$\Delta i_2 = 16 \text{ A} \qquad (13.155)$$

verilir. Bu ifadeler önceki kontrolle uyumludur.

Şekil 13.57, i_1 ve i_2'nin türevlerinin $t = 0$'da bir dürtü içerdiğini de göstermektedir. Özel olarak, i_1'in türevi $6\delta(t)$ dürtüsünü, 12'nin türevi ise $16\delta(t)$ dürtüsünü içerecektir. Şekil 13.58 (a) ve (b), sırasıyla i_1 ve i_2'nin türevlerini sergilemektedir.

Şimdi Eş. 13.148'e dönelim. $32\delta(t)$ dürtüsel bileşeni, di_2/dt'nin orijindeki $16\delta(t)$ dürtüsü ile uyumludur. $60e^{-5t} + 60$ terimleri, $t > 0^+$ için

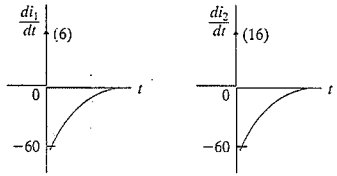
$$v_o = 15i + 2\frac{di}{dt}$$

olduğu gerçeği ile uyumludur.

di_1/dt'nin dürtüsel bileşeninin, L_1 üzerinde (3) $6\delta(t)$ veya 18 $\delta(t)$ dürtüsel gerilimini oluşturduğuna dikkat ederek kontrol edebiliriz. Bu gerilim, L_2 üzerindeki $32\delta(t)$ ile birlikte $50\delta(t)$ verir. Böylelikle ağ çevresindeki dürtüsel gerilimlerin toplamı sıfırdır.

Özetlersek, Laplace dönüşümü, anahtarlamadan dolayı oluşan dürtüsel akım ve gerilimleri doğru olarak tahmin eder. Ancak s bölgesi eşdeğer devreleri, $t = 0^-$'deki yani anahtarlamanın etkisinden önce varolan başlangıç koşullarına dayanarak oluşturulmalıdır. Laplace dönüşümünün, dürtüsel kaynakların oluşturduğu tepkiyi doğru tahmin etmesi için bu kaynakların s bölgesinde doğru dönüşümleri ile temsil edilmeleri yeterlidir.

NOT: Devre analizinde dürtü fonksiyonunu kavrayışınızı, Bölüm Problemleri 13.83 ve 13.84'ü de çözmeyi deneyerek değerlendiriniz.



Şekil 13.58 ▲ i_1 ve i_2'nin türevi.

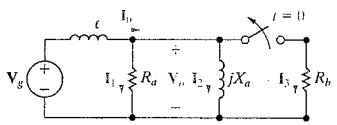
Pratik Bakış Açısı

Ani Dalgalanma Bastırıcılar

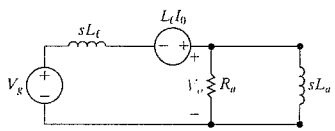
Bu bölümün başında söz edildiği gibi, sinüzoidal durgun durumda çalışan devrelerde gerilim dalgalanmaları görülebilir. Amacımız, bir meskûn devrede sinüzoidal durgun durum çalışma sırasında bir yük devre dışı bırakılırsa hat ve nötr iletkenler arasındaki gerilimde oluşacak bir dalgalanmanın Laplace dönüşümü ile analizini sergilemektir.

Üç yükü olan ve biri $t = 0$'da kaldırılan bir meskûn devreyi modelleyen Şekil 13.59'daki devreyi düşününüz. Analizi basitleştirmek için $\mathbf{V}_0$'nun standart bir ev gerilimi olan $120\angle 0°$ V (rms) olduğunu ve $t = 0$'da yük devre dışı kaldığında $\mathbf{V}_g$'nin değişmediğini kabul edeceğiz. Anahtar açıldıktan sonraki durum için s bölgesi devresini Şekil 13.60'taki gibi oluşturabiliriz. Endüktif yük üzerindeki gerilim faz açısı 0° olduğundan, endüktif yükteki başlangıç akımının 0 olduğuna dikkat ediniz. Dolayısıyla sadece hattaki endüktansın başlangıç koşulu sıfırdan farklıdır. Bu durum s bölgesi devresinde, Şekil 13.60'ta gösterildiği gibi $L_l I_0$ değerinde bir gerilim kaynağı ile modellenir.

$t = 0$'da anahtar açılmadan hemen önce her bir yükte $120\sqrt{2} = 169.7$ V tepe gerilimli bir durgun durum sinüzoidal gerilimi vardır. v_g gerilim kaynağından hatta akan tüm akım üç yük tarafından paylaşılır. Anahtar $t = 0$'da açıldığında, hattaki tüm akım, kalan direnç yük üstünden akar. Çünkü $t = 0$'da endüktif yük üzerindeki akım sıfırdır ve bir indüktörün akımı anlık değişemez. Dolayısıyla kalan diğer yükler üzerindeki gerilim, hat akımı direnç yüke yönlendiğinde bir dalgalanma yaşayabilir. Örneğin, eğer hattaki başlangıç akımı 25 A (rms) ve direnç yük 12 Ω ise, direnç üzerindeki gerilim anahtar açıldığında 169.7 V'tan (25)(25)$(\sqrt{2})$(12) = 424.3 V (12) = 424.3 V'a sıçrar. Eğer direnç yük bu gerilim miktarına dayanamazsa, bu bölümün başında gösterilen dalgalanma bastırıcılar gibi bir cihazla korunması gerekir.



Şekil 13.59 Anahtarlama dalgalanmasını göstermek için kullanılan devre.



Şekil 13.60 Sembolik s bölgesi devresi.

NOT: Bu Pratik Bakış Açısını kavrayışınızı Bölüm Problemlerinden 13.89 ve 13.90'ı da çözmeyi deneyerek değerlendiriniz.

Özet

- Devre elemanlarının hepsini, ilgili gerilim-akım denkleminin Laplace dönüşümünü alarak s bölgesi eşdeğer devresinde temsil edebiliriz.
  - Direnç: $V = RI$
  - İndüktör: $V = sLI - LI_0$
  - Kapasitör: $V = (1/sC)I + V_0/s$

  Bu denklemlerde $V = \mathcal{L}\{v\}$, $I = \mathcal{L}\{i\}$, I_0 indüktördeki başlangıç akımı ve V_0 da kapasitördeki başlangıç gerilimidir. (Bkz. sf. 508-509.)
- Her bir devre elemanını s bölgesi eşdeğeri ile değiştirerek s bölgesinde devre analizi yapabiliriz. Sonuçta bulunan eşdeğer devre, direnç devrelerinin analiz tekniklerini kullanarak cebirsel denklemlerin yazılmasıyla çözülür. Tablo 13.1, direnç, indüktör ve kapasitörün s bölgesindeki eşdeğer devrelerini göstermektedir. (Bkz. sf. 510).
- s bölgesinde devre analizi, başlangıç koşulları bilindiğinde, doğrusal toplu elemanlı devrelerde geçici tepkinin çözümünde özellikle avantajlıdır. Ayrıca, birden çok ağ akımı veya düğüm gerilimi denklemi içeren problemlerde de kullanışlıdır. Bunun nedeni problemleri diferansiyel denklemler yerine cebirsel denklemlere çevirmesidir. (Bkz. sf. 517-519.)
- **Aktarım fonksiyonu**, s bölgesinde bir devrenin çıkışının girişine oranıdır ve

  $$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

  ile gösterilir. Burada $Y(s)$ çıkış sinyalinin $X(s)$ de giriş sinyalinin Laplace dönüşümüdür. (Bkz. sf. 526.)
- $H(s)X(s)$ çarpımının kısmi kesirler açılımı, $H(s)$ ve $X(s)$'nin her bir kutbuna karşılık bir terim içerir. $H(s)$ terimleri toplam tepkinin durgun durum bileşenine, X(s) terimleri ise geçici bileşenine karşılık gelir (Bkz. sf. 528).
- Eğer bir devre bir dürtü ile sürülürse, yani $x(t) = \delta(t)$ ise, o zaman devrenin tepkisi aktarım fonksiyonunun ters Laplace dönüşümüne eşittir, yani $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t)$'dir. (Bkz. sf. 530-531.)
- **Zamanda değişmez** bir devre, girişi a saniye geciktiğinde çıkışın da a saniye geciktiği bir devredir. (Bkz. sf. 530.)
- Bir devrenin $y(t)$ çıkışı, $x(t)$ girişi ile devrenin dürtü tepkisi $h(t)$'nin evrişimi alınarak bulunur:

  $$y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^t h(\lambda)x(t-\lambda)\,d\lambda$$

  $$= x(t) * h(t) = \int_0^t x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda.$$

  Evrişim integralinin grafiksel yorumu sıklıkla $y(t)$'nin oluşturulması için daha kolay bir hesaplama yöntemi sağlar.
- Bir devrenin aktarım fonksiyonunu kullanarak devrenin sinüzoidal bir kaynağa olan durgun durum tepkisini hesaplayabiliriz. Bunun için $H(s)$'de $s = j\omega$ alınır ve sonuçtaki kompleks sayı genlik ve faz olarak ifade edilir. Eğer

  $$x(t) = A\cos(\omega t + \phi),$$

  $$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$$

  ise o halde

  $$y_{ss}(t) = A|H(j\omega)|\cos[\omega t + \phi + \theta(\omega)]$$

  olur. (Bkz. sf. 539.)
- Laplace dönüşüm analizi, anahtarlama ve dürtüsel kaynaklardan oluşan dürtüsel akım ve gerilimleri doğru tahmin eder. Ancak s bölgesi eşdeğer devrelerin $t = 0^-$'deki yani anahtarlamadan önceki başlangıç koşullarına dayandığından emin olmak gerekir. (Bkz. sf. 540.)

Problemler

Kısım 13.1

13.1 Şekil 13.3'te gösterilen devrenin Norton eşdeğerini bulunuz.

13.2 Şekil 13.6'daki devrede indüktör akımı i'yi terminal gerilimi v'nin fonksiyonu olarak ifade edip sonra bu zaman bölgesi integral denkleminin Laplace dönüşümünü olarak devrenin s bölgesi eşdeğerini çıkarınız.

13.3 Şekil 13.7'de gösterilen devrenin Thèvenin eşdeğerini bulunuz.

Kısım 13.2

13.4 10 kΩ bir direnç, 5 H indüktör ve 20 nF kapasitör seri bağlıdır.

a) Bu seri birleşimin s bölgesi empedansını bir kesirli fonksiyon olarak ifade ediniz.

b) Bu empedansın kutup ve sıfırlarının nümerik değerini veriniz.

13.5 Bir 5 kΩ direnç, bir 6.25 H indüktör ve bir 40 nF kapasitör paralel bağlıdır.

a) Bu paralel birleşimin s bölgesi empedansını bir kesirli fonksiyon olarak ifade ediniz.

b) Bu empedansın kutup ve sıfırlarının nümerik değerini veriniz.

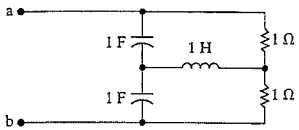
13.6 Bir 1 kΩ direnç, 500 mH'lik bir indüktörle seri bağlıdır. Bu seri birleşim, 0.4 μF'lık bir kapasitörle paralel bağlıdır.

a) Bu birleşimin s bölgesi empedansını bir kesirli fonksiyon olarak ifade ediniz.

b) Kutupların ve sıfırların nümerik değerini bulunuz.

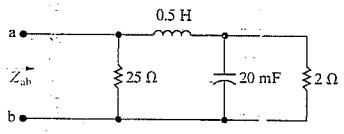
13.7 Şekil P13.7'de gösterilen devrenin a, b terminallerine bakarken görülen empedansın kutuplarını ve sıfırları bulunuz.

Şekil P12.7



13.8 Şekil P13.8'de gösterilen devrede a, b terminallerine doğru bakarken görülen empedansın kutuplarını ve sıfırlarını bulunuz.

Şekil P13.8



Kısım 13.3

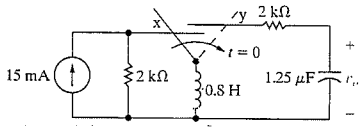
13.9 PSPICE Şekil P13.9'da gösterilen devredeki anahtar uzun zamandır x konumundadır. $t = 0$'da anahtar aniden y konumuna geçmektedir.

a) $t > 0$ için s bölgesi devresini oluşturunuz.

b) V_o'yu bulunuz.

c) v_o'yu bulunuz.

Şekil P13.9



13.10 PSPICE Şekil P13.10'da gösterilen devredeki anahtar uzun zamandır a konumundadır $t = 0$'da anahtar aniden b konumuna geçmektedir.

a) $t > 0$ için s bölgesi devresini oluşturunuz.

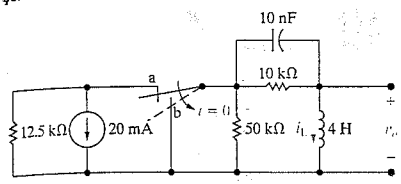
b) V_o'yu bulunuz.

c) I_L'yi bulunuz.

d) $t > 0$ için v_o'yu bulunuz.

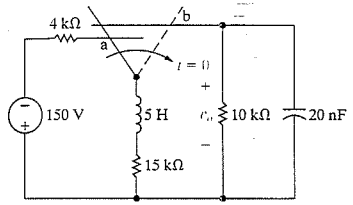
e) $t > 0$ için i_L'yi bulunuz.

Şekil P13.10



13.11 PSPICE Şekil P13.11'de gösterilen devredeki kesmeden temaslı anahtar uzun zamandır a konumundadır. $t = 0$'da anahtar aniden b konumuna geçmektedir. $t \geq 0$ için v_o'yu bulunuz.

Şekil P13.11



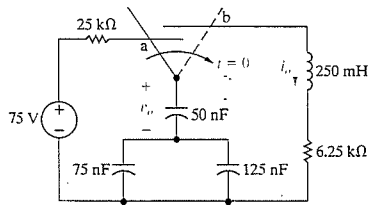
13.12 PSPICE Şekil P13.12'de görülen devredeki kesmeden temaslı anahtar uzun zamandır a konumundadır ve $t = 0$'da aniden b konumuna geçmektedir.

a) $t > 0$ için s bölgesi eşdeğer devresini oluşturunuz.

b) I_o ve i_o'yu bulunuz.

c) V_o ve v_o'yu bulunuz.

Şekil P13.12



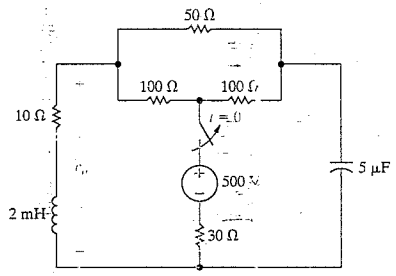
13.13 PSPICE Şekil P13.13'teki devrede gösterilen anahtar $t = 0$'da açılmadan önce uzun zaman kapalı kalmıştır.

a) $t > 0$ için s bölgesi eşdeğerini bulunuz.

b) V_o'yu bulunuz.

c) $t \geq 0$ için v_o'yu bulunuz.

Şekil P13.13

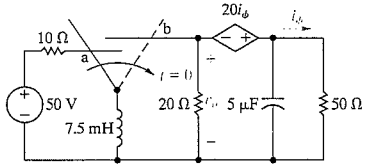


13.14 PSPICE Şekil P13.14'te görülen devredeki anahtar uzun zamandır a konumundadır. $t = 0$'da anahtar aniden b konumuna geçmektedir.

a) V_o'yu bulunuz.

b) v_o'yu bulunuz.

Şekil P13.14

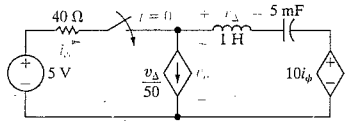


13.15 PSPICE Şekil P13.15'teki devrede anahtarın kapatıldığı anda depolanmış hiç enerji yoktur.

a) $t \geq 0$ için v_o'yu bulunuz.

b) Çözümünüz bilinen devre davranışı açısından anlamlı mı? Açıklayınız.

Şekil P13.15



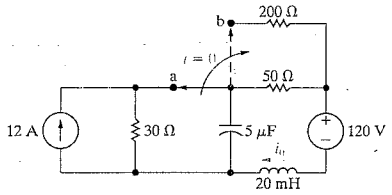
13.16 PSPICE Şekil P13.16'daki devrede gösterilen anahtar uzun zamandır a konumundadır. $t = 0$'da anahtar aniden b konumuna geçmektedir.

a) $t > 0$ için s bölgesi devresini oluşturunuz.

b) $I_o(s)$'yi bulunuz.

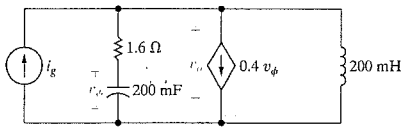
c) $t \geq 0$ için $i_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P13.16



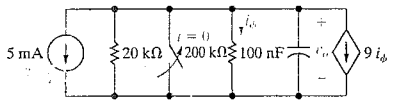
13.17 PSPICE $i_g = 15u(t)$ A için Şekil P13.17'deki devrede v_o'yu bulunuz. $t = 0$ anında devrede depolanan enerji yoktur.

Şekil P13.17



13.18 PSPICE Şekil P13.18'de gösterilen devredeki anahtar $t = 0$ anında açılmadan önce uzun süre kapalı kalmıştır. $t \geq 0$ için v_o'yu bulunuz.

Şekil P13.18

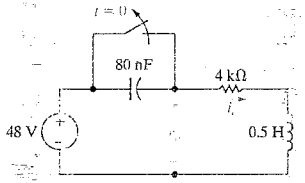


13.19 PSPICE Şekil P13.19'daki devrede anahtar uzun süredir kapalıdır. $t = 0$'da anahtar açılmaktadır.

a) $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

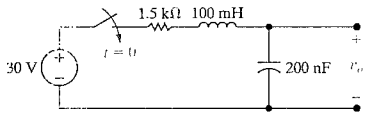
b) $t \geq 0$ için $i_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P13.19



13.20 PSPICE Şekil P13.20'deki devrede başlangıç enerjisi sıfır ise ve anahtar $t = 0$'da kapanıyorsa V_o ve v_o'yu bulunuz.

Şekil P13.20



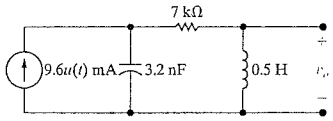
13.21 PSPICE Kapasitördeki başlangıç geriliminin alt terminalde pozitif ve 20 V olduğu durumda Problem 13.20'yi tekrarlayınız.

13.22 PSPICE a) Şekil P13.22'deki devrede V_o'nun s bölgesi ifadesini bulunuz.

b) (a)'da çıkarılan s bölgesi ifadesini kullanarak v_o'nun başlangıç ve son değerlerini bulunuz.

c) v_o'nun zaman bölgesi ifadesini bulunuz.

Şekil P13.22



13.23 PSPICE Şekil P13.22'deki kapasitör akımının zaman bölgesi ifadesini bulunuz. i_C'nin referans yönünü aşağıdaki doğru alınız.

13.24 PSPICE Şekil P13.24'teki devrede anahtar kapatıldığında kapasitörlerde depolanmış enerji yoktur.

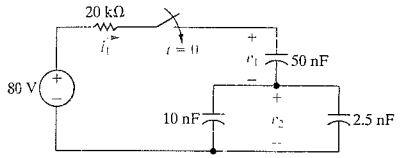
a) $t > 0$ için s bölgesi devresi oluşturunuz.

b) I_1, V_1 ve V_2'yi bulunuz.

c) i_1, v_1 ve v_2'yi bulunuz.

d) i_1, v_1 ve v_2 için cevaplarınız, devrenin bilinen davranışı açısından anlamlı mı? Açıklayınız.

Şekil P13.24

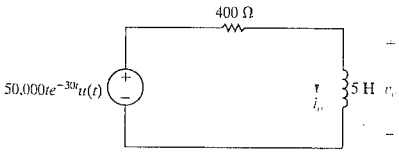


13.25 PSPICE Şekil P13.25'teki devrede gerilim kaynağı açıldığı anda depolanmış hiç enerji yoktur.

a) V_o ve I_o'yu bulunuz.

b) $t \geq 0$ için v_o ve i_o'yu bulunuz.

Şekil P13.25



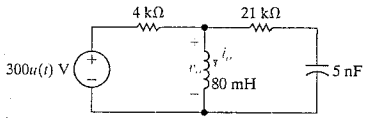
13.26 PSPICE Şekil P13.26'daki devrede $t = 0^-$'de depolanmış hiç enerji yoktur.

a) Düğüm gerilimi yöntemini kullanarak v_g'yu bulunuz.

b) i_o'nun zaman bölgesi ifadesini bulunuz.

c) (a) ve (b) şıkkındaki cevaplarınız devrenin bilinen davranışı açısında anlamlı mı? Açıklayınız.

Şekil P13.26



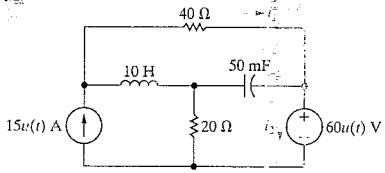
13.27 PSPICE Şekil P13.27'deki devrede kaynaklar açıldığında depolanmış enerji yoktur.

a) $I_1(s)$ ve $I_2(s)$'yi bulunuz.

b) Başlangıç ve son değer teoremlerini kullanarak $i_1(t)$ ve $i_2(t)$'in başlangıç ve son değerlerini kontrol ediniz.

c) $t \geq 0$ için $i_1(t)$ ve $i_2(t)$'yi bulunuz.

Şekil P13.27



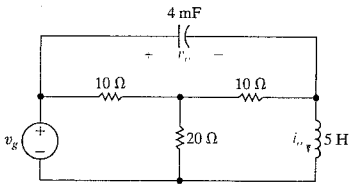
13.28 PSPICE Şekil P13.28'deki devrede gerilim kaynağı açıldığında depolanmış enerji yoktur ve $v_g = 75\,u(t)$ V'tur.

a) V_o ve I_o'yu bulunuz.

b) v_o ve i_o'yu bulunuz.

c) v_o ve i_o için olan çözümünüz, devrenin bilinen davranışı açısından anlamlı mı? Açıklayınız.

Şekil P13.28



13.29 PSPICE Şekil P13.29'daki devrede başlangıç enerjisi sıfırdır. İdeal gerilim kaynağı 600 $u(t)$ V'tur.

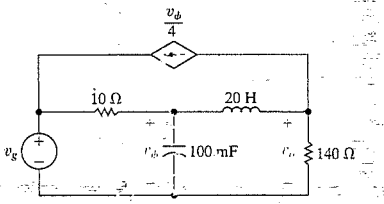
a) $V_o(s)$'yi bulunuz.

b) Başlangıç ve son değer teoremlerini kullanarak $v_o(t)$ ve $v_o(\infty)$'u bulunuz.

c) (b)'de bulduğunuz değerler bilinen devre davranışı ile uyumlu mu? Açıklayınız.

d) $v_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P13.29



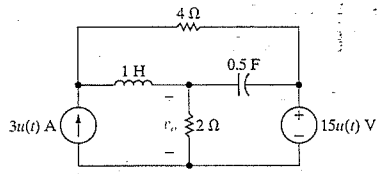
13.30 PSPICE Şekil P13.30'daki devrede $t = 0^-$ anında depolanan enerji sıfırdır.

a) V_o'yu bulunuz.

b) v_o'yu bulunuz.

c) v_o çözümünüz devrenin bilinen davranışı ile uyumlu mu? Açıklayınız.

Şekil P13.30



13.31 PSPICE Şekil P13.31'deki devrede akım kaynağı açıldığı anda depolanmış olan enerji sıfırdır.

a) I_a ve I_b'yi bulunuz.

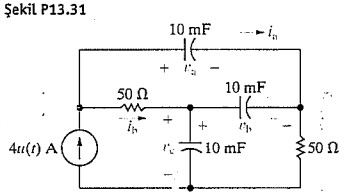
b) i_a ve i_b'yi bulunuz.

c) V_a, V_b ve V_c'yi bulunuz.

c) v_a, v_b ve v_c'yi bulunuz.

e) Bir kapasitörün, terminalleri arasındaki gerilim 1000 V olunca kırıldığını kabul ediniz. Buna göre, akım kaynağı açıldıktan ne kadar sonra kapasitörlerden biri kırılır?

Şekil P13.31



13.32 PSPICE Şekil P13.32'deki devrede akım kaynağı açıldığı anda depolanmış enerji sıfırdır. $i_g = 200\ u(t)$ A veriliyor.

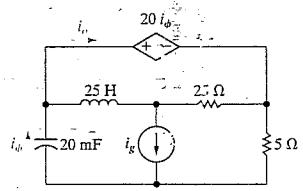
a) $I_o(s)$'yi bulunuz.

b) Başlangıç ve son değer teoremlerini kullanarak $i_o(0^+)$ ve $i_o(\infty)$ değerlerini bulunuz.

c) (b)'deki sonuçlarınızın devrenin bilinen davranışı ile uyumlu olup olmadığını belirleyiniz.

d) $i_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P13.32



13.33 Eş. 13.65 ile başlayarak, Şekil 13.19'dki kapasitör akımının $0 < t < 200\ \mu s$ için pozitif, $t > 200\ \mu s$ için ise negatif olduğunu gösteriniz. Ayrıca $t = 200\ \mu s$'de akımın sıfır olduğunu ve bunun dv_C/dt'nin sıfır olduğu zaman olduğunu gösteriniz.

13.34 Şekil P13.34'te gösterilen devredeki anahtar uzun zamandır açıktır. Sinüzoidal kaynağın gerilimi $v_g = V_m \sin(\omega t + \phi)$'dir. Anahtar $t = 0$'da kapanmaktadır. Gerilim ifadesindeki ϕ'nin anahtar kapandığındaki gerilimi belirlediğine, yani $v_g(0) = V_m \sin\phi$ olduğuna dikkat ediniz.

a) Laplace dönüşüm yöntemini kullanarak $t > 0$ için i'yi bulunuz.

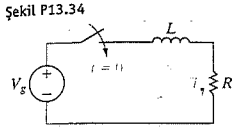
b) (a)'da çıkardığınız ifadeyi kullanarak, anahtar uzun süre kapalı kaldığında akımın ifadesini yazınız.

c) (a)'da çıkarılan ifadeyi kullanarak, i'nin geçici bileşeninin ifadesini yazınız.

d) i'nin durgun durum ifadesini fazör yöntemi ile bulunuz. İfadenizin (b)'dekine eşdeğer olduğunu sağlayınız.

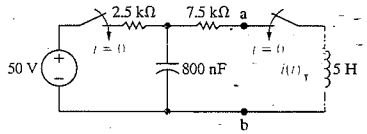
e) Devre anahtar kapandığı anda durgun durum çalışmaya geçecek şekilde ϕ'yi bulunuz.

Şekil P13.34



13.35 PSPICE Şekil P13.35'te gösterilen iki anahtar eşzamanlı çalışmaktadır. Anahtarlar kapandığında devrede depolanmış enerji yoktur. Önce a, b terminallerinin solundaki devrenin Thévenin eşdeğerini s bölgesinde bularak $t \geq 0^+$ için $i(t)$'yi bulunuz.

Şekil P13.35



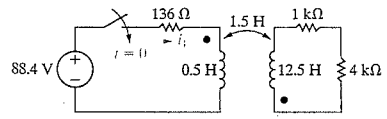
13.36 PSPICE Şekil P13.36'daki devrede anahtar kapandığında depolanmış enerji yoktur.

a) I_1'i bulunuz.

b) Başlangıç ve son değer teoremlerini kullanarak $i_1(0^+)$ ve $i(\infty)$'u bulunuz.

c) i_1'i bulunuz.

Şekil P13.36



13.37 PSPICE a) Şekil P13.36'daki devrede 4 kΩ direnç üzerindeki akımı bulunuz. Dirençteki akımın referans yönü aşağı doğrudur.

b) 12.5 H bobindeki noktanın ters döndüğü durum için (a)'yı tekrar çözünüz.

13.38 PSPICE Şekil P13.38'de görülen devredeki manyetik bağlaşık bobinler, gösterildiği gibi 3 A ve 2 A akım taşımaktadır.

a) Devrede başlangıçta depolanmış olan enerjiyi bulunuz.

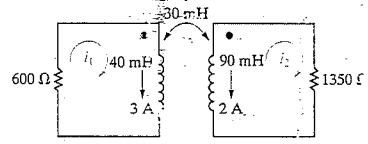
b) I_1 ve I_2'yi bulunuz.

c) i_1 ve i_2'yi bulunuz.

d) 600 Ω ve 1350 Ω dirençlerde harcanan toplam enerjiyi bulunuz.

e) (a)-(d)'yi, 90 mH indüktördeki noktanın alt terminalde olduğu durum için tekrarlayınız.

Şekil P13.38



13.39 PSPICE Şekil P13.39'daki devrede, Anahtar 1 $t = 0$'da kapanmakta ve kesmeden temaslı anahtar aniden a konumundan b konumuna geçmektedir.

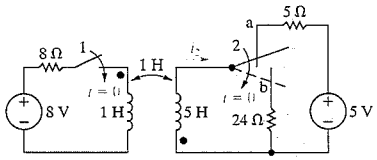
a) $t > 0$ için s bölgesi eşdeğer devresini oluşturunuz.

b) I_2'yi bulunuz.

c) Başlangıç ve son değer teoremlerini kullanarak i_2'nin başlangıç ve son değerini kontrol ediniz.

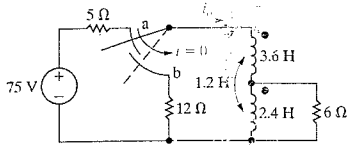
d) $t \geq 0^+$ için i_2'yi bulunuz.

Şekil P13.39



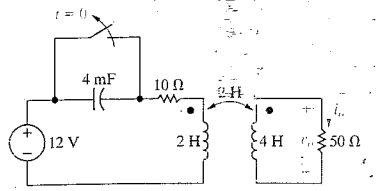
13.40 PSPICE Şekil P13.40'ta görülen devredeki kesmeden temaslı anahtar uzun zamandır a konumundadır. $t = 0$ anında anahtar aniden b konumuna geçmektedir. $t \geq 0$ için i_o'yu bulunuz.

Şekil P13.40



13.41 PSPICE Şekil P13.41'de görülen devredeki anahtar $t = 0$'da açılmadan önce uzun süre kapalı kalmıştır. Laplace dönüşüm yöntemini kullanarak i_o'yu bulunuz.

Şekil P13.41

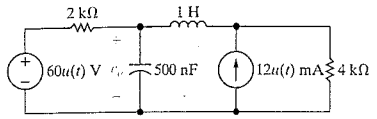


13.42 PSPICE Şekil P13.42'de görülen devredeki iki kaynak açıldığında devrede depolanmış enerji yoktur.

a) V_o'yu bulmak için üst üste bindirme ilkesini kullanınız.

b) $t > 0$ için v_o'yu bulunuz.

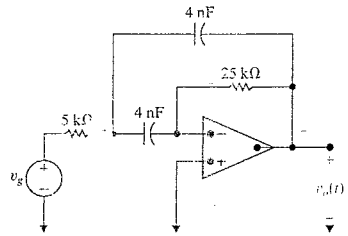
Şekil P13.42



13.43 Eş. 13.91 ve 13.92'nin V_2 için çözümünün, Eş. 13.90 ile bulunanla aynı olduğunu gösteriniz.

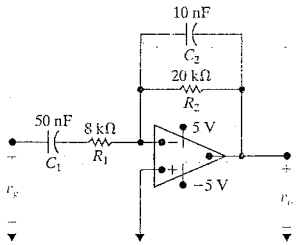
13.44 PSPICE Şekil P13.44'te gösterilen devredeki op amp doğrusal bölgesinde çalışıyor ve $v_g = 400u(t)$ mV ise $v_o(t)$'yi bulunuz.

Şekil P13.44



13.45 PSPICE Şekil P13.45'te gösterilen devredeki op amp idealdir. Devre açıldığında devrede depolanmış olan enerji sıfırdır. Eğer $v_g = 20{,}000t\,u(t)$ V ise (a) V_o'yu, (b) v_o'yu, (c) işlemsel yükselteci doyuma ulaştırmak için gereken zamanı ve (d) doyumu engellemek için v_g'nin artış hızının ne kadar küçük olması gerektiğini bulunuz.

Şekil P13.45

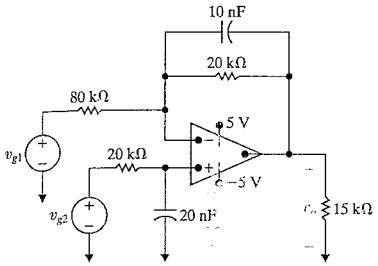


13.46 PSPICE Şekil P13.46'da gösterilen devredeki op amp idealdir. Devre çalıştırıldığında kapasitörlerde depolanmış enerji yoktur.

a) Eğer $v_{g1} = 16\,u(t)$ V ve $v_{g2} = 8u(t)$ V ise v_o'yu bulunuz.

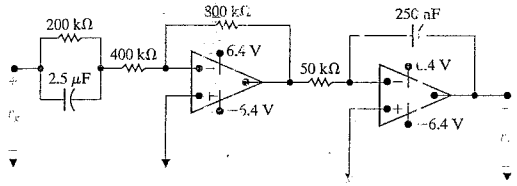
b) İki gerilim kaynağı açıldıktan kaç milisaniye sonra op amp doyuma ulaşır?

Şekil P13.46



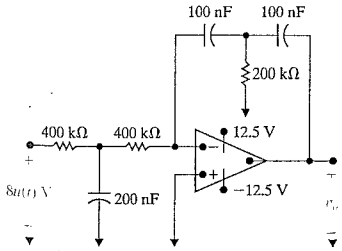
13.47 PSPICE Şekil 13.47'de gösterilen devredeki op amplar idealdir. $t = 0^-$'de kapasitörlerde depolanmış enerji yoktur. Eğer $v_g = 180u(t)$ mV ise op amp doyuma varmadan önce kaç milisaniye geçer?

Şekil P13.47



13.48 PSPICE Şekil P13.48'de görülen devredeki op amp idealdir. Devre çalıştırıldığında devrede depolanmış enerji yoktur. (a) V_o'yu, (b) v_o'yu ve (c) op amp doyurmak için gerekli zamanı bulunuz.

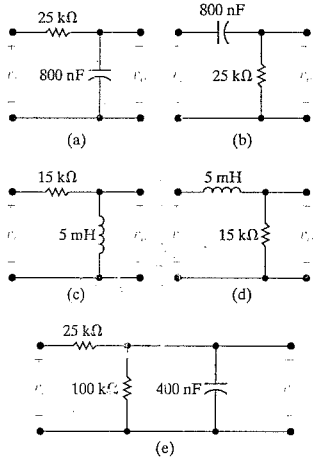
Şekil P13.48



Kısım 13.4-13.5

13.49 Şekil P13.49'daki her bir devrede (V_o/V_i) aktarım fonksiyonunun nümerik ifadesini bulunuz ve her bir aktarım fonksiyonunun kutuplarının ve sıfırlarının nümerik değerini veriniz.

Şekil P13.49

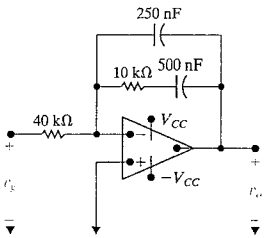


13.50 Şekil P13.50'deki devrede görülen op amp idealdir.

a) $H(s) = V_o/V_g$ aktarım fonksiyonunun nümerik ifadesini bulunuz.

b) $H(s)$'nin tüm kutup ve sıfırlarının nümerik değerini veriniz.

Şekil P13.50

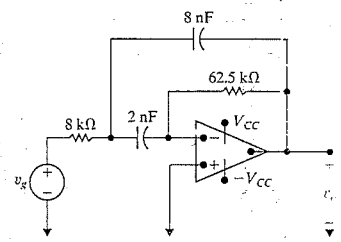


13.51 Şekil P13.51'de gösterilen devredeki işlemsel yükselteç idealdir.

a) Devrenin aktarım fonksiyonu $H(s) = V_o/V_g$'nin nümerik ifadesini çıkarınız.

b) $H(s)$'nin her bir kutup ve sıfırının nümerik değerini bulunuz.

Şekil P13.51

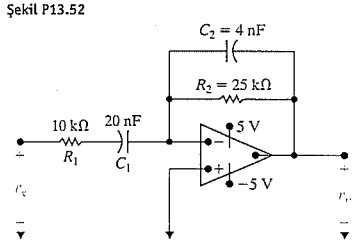


13.52 Şekil P13.52'deki devrede işlemsel yükselteç idealdir.

a) Aktarım fonksiyonu $H(s) = V_o/V_g$'nin nümerik ifadesini bulunuz.

b) $H(s)$'nin her kutup ve sıfırının nümerik değerini veriniz.

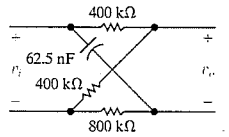
Şekil P13.52



13.53 a) Şekil P13.53'teki devrenin $H(s) = V_o/V_i$ aktarım fonksiyonunun nümerik ifadesini bulunuz.

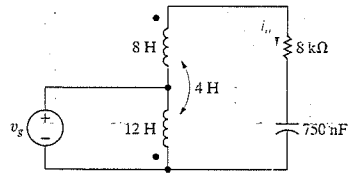
b) $H(s)$'nin her kutup ve sıfırının nümerik değerini veriniz.

Şekil P13.53



13.54 Şekil P13.54'teki devrede i_o çıkış sinyali, v_g ise giriş sinyalidir. Aktarım fonksiyonunun kutup ve sıfırlarını bulunuz.

Şekil P13.54



13.55 PSPICE Şekil P13.55'teki devrede anahtar açıldığında depolanmış hiç enerji yoktur. Sinüzoidal akım kaynağı 60 cos 4000t mA sinyalini üretmektedir. Çıkış tepkisi i_o akımıdır.

a) Aktarım fonksiyonu I_o/I_g'yi bulunuz.

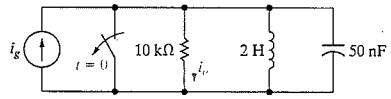
b) $I_o(s)$'yi bulunuz.

c) $i_o(t)$'yi çözmeden geçici bileşeninin yapısını tartışınız.

d) $i_o(t)$'yi çözmeden durgun durum bileşeninin yapısını tartışınız.

e) (c) ve (d)'de yaptığınız gözlemleri $i_o(t)$'yi çözerek sağlayınız.

Şekil P13.55

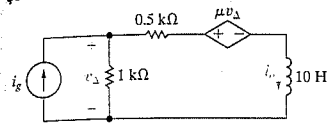


13.56 a) Şekil P13.56'da görülen devrede I_o/I_g aktarım fonksiyonunu μ'nun fonksiyonu olarak bulunuz.

b) Sınırlı bir giriş sinyali için sınırlı bir çıkış sinyali üretecek en büyük μ değerini bulunuz.

c) $\mu = -0.5, 0, 1, 1.5, 2$ ve $i_g = 10u(t)$ A için i_o'yu bulunuz.

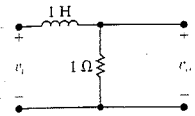
Şekil P13.56



Kısım 13.6

13.57 Bir dikdörtgen $v_i = [u(t) - u(t-1)]$V gerilim darbesi Şekil P13.57'deki devreye uygulanmaktadır. Evrişim integralini kullanarak v_o'yu bulunuz.

Şekil P13.57



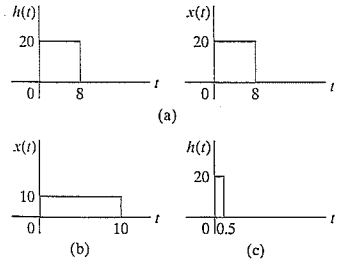
13.58 Problem 13.57'deki indüktör ve direnci yer değiştirip soruyu tekrar çözünüz.

13.59 a) $h(t)$ ve $x(t)$ Şekil P13.59 (a)'da gösterilen dikdörtgen darbeler ise $h(t) * x(t)$'yi bulunuz.

b) $x(t)$ Şekil P13.59(b)'deki darbe olduğunda (a)'yı tekrar çözünüz.

c) $h(t)$ şekil P13.59(c)'deki darbe ise (a)'yı tekrar çözünüz.

Şekil P13.59



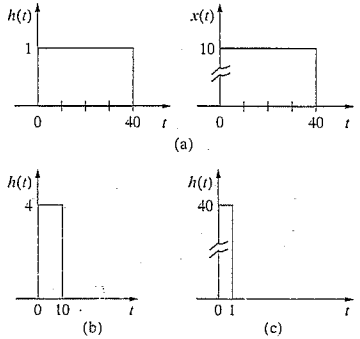
13.60 a) $h(t)$ ve $x(t)$ Şekil P13.60(a)'da gösterilen dikdörtgen darbeler ise $y(t) = h(t) * x(t)$'yi bulunuz.

b) $h(t)$ şekil P13.6(b)'deki dikdörtgen darbe olduğunda (a)'yı tekrar çözünüz.

c) $h(t)$ Şekil P13.60(c)'deki dikdörtgen darbe olduğunda (a)'yı tekrar çözünüz.

d) (a) – (c) için $y(t)$'yi t'ye karşı tek grafikte çiziniz.

Şekil P13.60

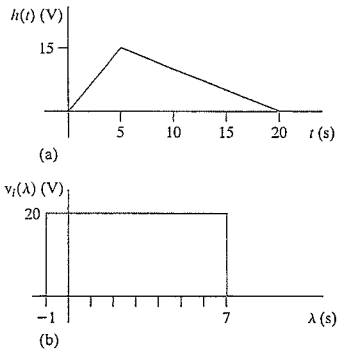


13.61 Bir devrenin gerilim dürtü tepkisi Şekil P13.61 (a)'da gösterilmektedir. Devrenin giriş sinyali Şekil P13.61(b)'de gösterilen dikdörtgen gerilim darbesidir.

a) Çıkış geriliminin denklemlerini çıkarınız. Her denklemin geçerli olduğu zaman aralığını not ediniz.

b) $0 \le t \le 27$ s için v_o'yu çiziniz.

Şekil P13.61



13.62 Bir devrenin gerilim dürtü tepkisinin Şekil P13.62'de gösterilen üçgensel dalga biçimi ile modellenebildiğini kabul ediniz. Bu devrenin gerilim giriş sinyali $4u(t)$ V basamak fonksiyonudur.

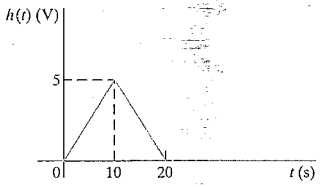
a) Evrişim integralini kullanarak çıkış gerilimini ifadesini çıkarınız.

b) Çıkış gerilimini 0'dan 25 s'ye çiziniz.

c) Eğer gerilim dürtü tepkisinin altındaki alan aynı kalır ama genişliği 5 s'ye daralırsa (a) ve (b) şıklarını tekrarlayınız.

d) Hangi çıkış dalga biçimi, giriş dalga biçimine daha yakındır? Açıklayınız.

Şekil P13.62



13.63 a) Bir devrenin gerilim dürtü tepkisinin

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 10e^{-4t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

olduğunu kabul ediniz. Eğer giriş sinyali $10u(t)$ V ise evrişim integralini kullanarak çıkış gerilimini bulunuz.

b) (a)'yı aşağıdaki gerilim dürtü tepkisi için tekrar çözünüz.

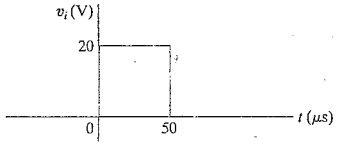
$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 10(1-2t), & 0 \leq t \leq 0.5 \text{ s}; \\ 0, & t \geq 0.5 \text{ s}. \end{cases}$$

c) (a) ve (b) şıklarında $0 \leq t \leq 1$ s için zamana karşı çıkış gerilimini çiziniz.

13.64 a) Şekil P13.49(d)'deki devrenin giriş gerilimi Şekil P13.64'te gösterilen dikdörtgen darbe ise, evrişim integralini kullanarak devrenin çıkış gerilimini bulunuz.

b) $v_o(t)$'yi, $0 \leq t \leq 100$ μs zaman aralığında zamana karşı çiziniz.

Şekil P13.64



13.65 a) Şekil P13.49(d)'deki devrede direncin 400 Ω'a arttığı durum için Problem 13.64'ü tekrar çözünüz.

b) Direnci artırmak devrenin belleğini artırdımı, azalttı mı?

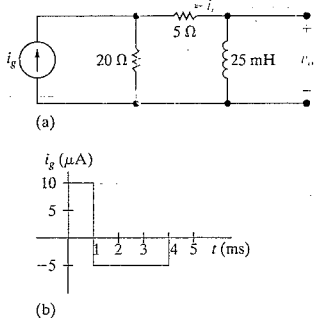
c) Hangi devre, giriş geriliminin kopyasını iletmeye daha yakındır?

13.66 a) Eğer i_g Şekil P13.66(b)'de gösterilen darbe ise Şekil P13.66(a)'daki devrede i_o'yu evrişim integrali yardımıyla bulunuz.

b) Evrişim integrali kullanarak v_o'yu bulunuz.

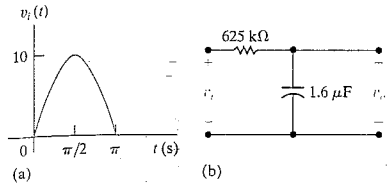
c) v_o ve i_o çözümlerinizin tutarlı olduğunu, v_o ve i_o'yu 1^- ms, 1^+ ms, 4^- ms ve 4^+ ms'de hesaplayarak gösteriniz.

Şekil P13.66



13.67 Şekil P13.67(a)'da gösterilen sinüzoidal gerilim darbesi Şekil P13.67(b)'de gösterilen devreye uygulanmaktadır. v_o'nun $t = 2.2$ s'deki değerini evrişim integrali yardımıyla bulunuz.

Şekil P13.67

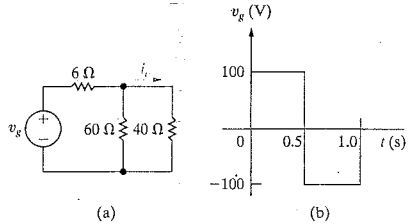


13.68 a) Şekil P13.68(a)'da gösterilen devrede v_g giriş sinyali, i_o ise çıkış sinyalidir. Devrenin dürtü tepkisini bulunuz.

b) v_g'nin dalgabiçimi Şekil P13.86(b)'de gösterilen ise evrişim integralini kullanarak i_o'yu bulunuz.

c) i_o'nun dalgabiçimi v_o ile aynı mı? Niçin?

Şekil P13.68



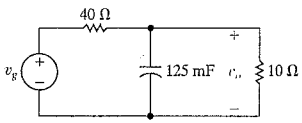
13.69 a) Şekil P13.69'da gösterilen devrede v_g giriş sinyali ve v_o da çıkış sinyalidir. Devrenin dürtü tepkisini bulunuz.

b) Gerilim kaynağının, Şekil P13.68(b)'de gösterilen dalgabiçimine sahip olduğunu kabul ediniz. Evrişim integralini kullanarak v_o'yu bulunuz.

c) $0 \leq t \leq 1.5$ s için v_o'yu çiziniz.

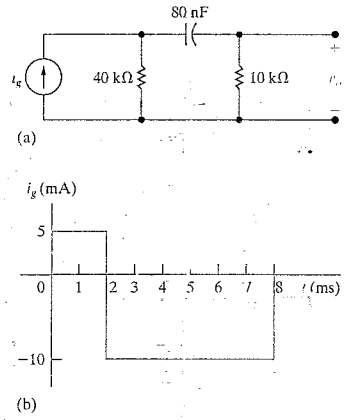
d) v_o'nun dalgabiçimi v_g'ninki ile aynı mı?

Şekil P13.69



13.70 Şekil P13.70(a)'da gösterilen devrede akım kaynağı Şekil P13.70(b)'de gösterilen dalgabiçimini üretmektedir. Evrişim integralini kullanarak $t = 7$ ms'de v_o'yu bulunuz.

Şekil P13.70

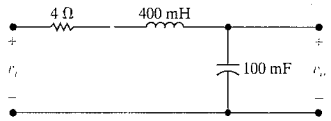


13.71 Şekil P13.71'de gösterilen devredeki giriş gerilim $v_i = 10\,[u(t) - u(t-0.1)]$ V'tur.

a) v_o'yu evrişim integrali yardımıyla bulunuz.

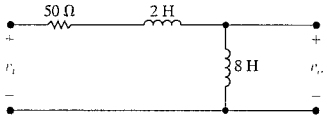
b) $0 \leq t \leq 1$ s için v_o'yu çiziniz.

Şekil P13.71



13.72 Şekil P13.72'de gösterilen devrede eğer $v_i = 75u(t)$ V ise evrişim integralini kullanarak v_o'yu bulunuz.

Şekil P13.72



13.73 a) Eğer $y(t) = h(t) * x(t)$ ise o halde $Y(s) = H(s)\,x(s)$ olduğunu gösteriniz.

b) (a)'daki sonucu kullanarak aşağıda dönüşümü verilen $f(t)$ fonksiyonunu bulunuz.

$$F(s) = \frac{a}{s(s+a)^2}.$$

Kısım 13.7

13.74 Doğrusal, zamanla değişmez bir devrenin aktarım fonksiyonu

$$H(s) = \frac{V_o}{V_g} = \frac{10^4(s + 6000)}{s^2 + 875s + 88 \times 10^6}$$

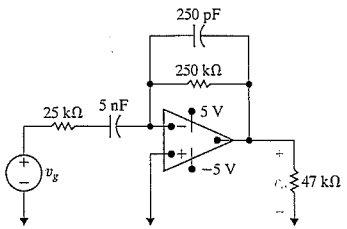
olarak verilmiştir. Eğer $v_g = 12.5 \cos 8000t$ V ise, v_o'nun durgun durum ifadesi nedir?

13.75 PSPICE Şekil P13.75'te görülen devredeki işlemsel yükselteç idealdir ve doğrusal bölgesinde çalışmaktadır.

a) V_o/V_g aktarım fonksiyonunu hesaplayınız.

b) Eğer $v_g = 200\sqrt{10}\cos 8000t$ mV ise v_o'nun durgun durum ifadesi nedir?

Şekil P13.75



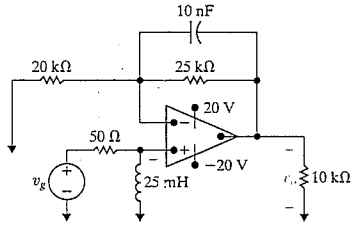
13.76 PSPICE Şekil P13.76'da görülen devredeki op amp idealdir.

a) V_o/V_g aktarım fonksiyonunu bulunuz.

b) Eğer $V_g = 10u(t)$ V ise v_o'yu bulunuz.

c) Eğer $v_g = 8 \cos 2000t\, u(t)$ ise v_o'nun durgun durum ifadesini bulunuz.

Şekil P13.76



13.77 Bir devreye $240\,u(t)$ V giriş gerilimi uygulandığında tepkinin

$$v_o = (75 - 100e^{-800t} + 25e^{-3200t})u(t) \text{ V}$$

olduğu biliniyor. Eğer $v_g = 40 \cos 16{,}000$ V ise durgun durum tepkisini bulunuz.

Kısım 13.8

13.78 Şekil 13.47'de gösterilen devrede C_1'den C_2'ye V_0C_e coulomb aktarıldıktan sonra her bir kapasitör üzerindeki gerilimin $C_1V_o/(C_1 + C_2)$ olduğunu gösteriniz. (*İpucu:* Yükün korunumu ilkesini kullanınız.)

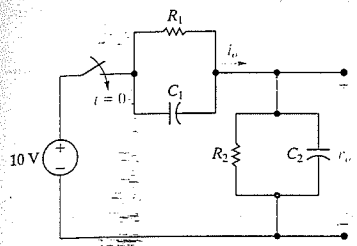
13.79 Şekil P13.79'da gösterilen devredeki paralel R_2 ve C_2 birleşimi, bir katot ışın osiloskobunun (CRO) giriş direncini temsil etmektedir. Paralel R_1 ve C_1 birleşimi CRO'yu kaynağa bağlamak için kullanılan devrenin modelidir. 10 V kaynağın CRO'ya telafi ucu aracılığıyla bağlandığı anda C_1 ve C_2'de depolanmış enerji yoktur. Devre değerleri $C_1 = 5$ pF, $C_2 = 20$ pF, $R_1 = 1$ MΩ ve $R_2 = 4$ MΩ'dur.

a) v_o'yu bulunuz.

b) i_o'yu bulunuz.

c) C_1 80 pF yapılırsa (a) ve (b)'yi tekrar ediniz.

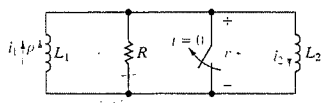
Şekil P13.79



13.80 Şekil P13.79'da gösterilen devrede eğer $R_1C_1 = R_2C_2$ ise v_o'nun kaynak geriliminin ölçeklenmiş bir kopyası olacağını gösteriniz.

13.81 Şekil P13.81'de gösterilen devredeki L_1 indüktörü, anahtarın açıldığı anda ρ A başlangıç akımı taşmaktadır (a) $v(t)$; (b) $i_1(t)$; (c) $i_2(t)$ ve (d) toplam akı bağlaşımı $\lambda(t)$ fonksiyonlarını bulunuz.

Şekil P13.81

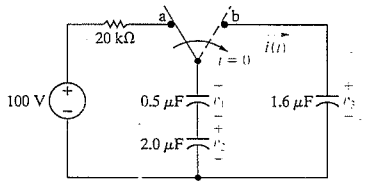


13.82 a) Şekil P13.81'deki devrede $R \to \infty$ alınız ve Problem 13.81'de çıkarılan çözümleri kullanarak $v(t)$, $i_1(t)$ ve $i_2(t)$'yi bulunuz.

b) Şekil P13.81'deki devrede $R = \infty$ alınız ve Laplace dönüşüm yöntemi kullanarak $v(t)$, $i_1(t)$ ve $i_2(t)$'yi bulunuz.

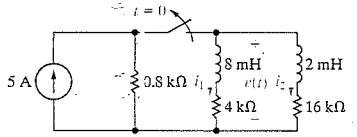
13.83 Şekil P13.83'te görülen devredeki anahtar uzun zamandır a konumundadır. $t = 0$'da anahtar b konumuna geçmektedir. (a) $v_1(0^-)$; (b) $v_2(0^-)$; (c) $v_3(0^-)$; (d) $i(t)$; (e) $v_1(0^+)$; (f) $v_2(0^+)$ ve (g) $v_3(0^+)$ değerlerini hesaplayınız.

Şekil P13.83



13.84 Şekil P13.84'te görülen devredeki anahtar uzun zamandır kapalıdır. Anahtar $t = 0$'da açılmaktadır. (a) $i_1(0^-)$; (b) $i_1(0^+)$; (c) $i_2(0^-)$; (d) $i_2(0^+)$; (e) $i_1(t)$; (f) $i_2(t)$ ve (g) $v(t)$ yi hesaplayınız.

Şekil P13.84

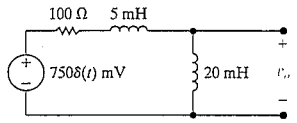


13.85 Şekil P13.85'teki devrede dürtü gerilimin uygulandığı anda depolanmış enerji yoktur.

a) $t \geq$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

b) Çözümünüz devrenin bilinen davranışı ile uyumlu mu? Açıklayınız.

Şekil P13.85



13.86 Örnek 13.1'deki gerilim kaynağı birim dürtüye yani $v_g = \delta(t)$'ye değiştiriliyor.

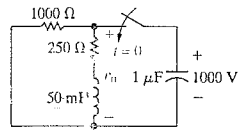
a) Dürtüsel gerilim kaynağı kapasitörde ne kadar enerji depolar?

b) İndüktörde ne kadar enerji depolar?

c) Aktarım fonksiyonunu kullanarak $v_o(t)$'yi bulunuz.

d) (c)'de bulunduğunuz tepkinin, kapasitörü önce 1000 V'a doldurup sonra yükün devreye Şekil P13.86'da gösterildiği gibi bırakıldığında üretilenle aynı olduğunu gösteriniz.

Şekil P13.86



13.87 Dürtü gerilimin uygulandığı anda Şekil P13.87'deki devrede depolanmış enerji yoktur.

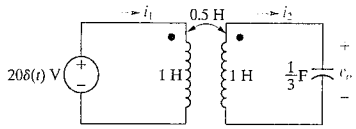
a) $t \geq 0^+$ için i_1'i bulunuz.

b) $t \geq 0^+$ için i_2'yi bulunuz.

c) $t \geq 0^+$ için v_o'yu bulunuz.

d) i_1, i_2 ve v_o için çözümleriniz bilinen devre davranışı açısından anlamlı mı? Açıklayınız.

Şekil P13.87

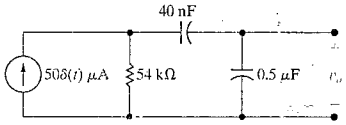


13.88 Dürtü akımın uygulandığı anda Şekil P13.88'deki devrede depolanmış enerji yoktur.

a) $t \geq 0^+$ için v_o'yu bulunuz.

b) Çözümünüz bilinen devre davranışı açısından anlamlı mı? Açıklayınız.

Şekil P13.88



Kısım 13.1–13.3

13.89 PSPICE Şekil 13.59'daki 60 Hz devrede hat-nötr gerilimi $\mathbf{V}_a$'nın $120\angle 0°$ V olduğunu kabul ediniz. R_a yükü 1200 W, R_b yükü 1800 W ve X_a yükü ise 350 VAR soğurmaktadır. Hattın endüktif reaktansı (X_1) 1 Ω'dur. $\mathbf{V}_g$'nin anahtar açıldıktan sonra değişmediğini kabul ediniz.

a) $i_2(t)$ ve $i_L(t)$'nin başlangıç değerini hesaplayınız.

b) Şekil 13.60'aki s bölgesi akımını kullanarak $\mathbf{V}_o$, $v_o(t)$ ve $v_o(0^+)$'yı bulunuz.

c) Fazör bölgesi analizini kullanarak v_o'nun durgun durum bileşenini kontrol ediniz.

d) İstediğiniz bir bilgisayar programı yardımıyla $0 \leq t \leq 20$ ms için v_o'yu t'ye karşı çiziniz.

13.90 PSPICE Şekil 13.59'daki anahtar, $v_o = 120\sqrt{2}\sin 120\pi t$ V sinüzoidal durgun durum gerilimi sıfırdan pozitife geçerken açılıyor.

a) $t \geq 0$ için $v_o(t)$'yi bulunuz.

b) İstediğiniz bir bilgisayar programı yardımıyla $0 \leq t \leq 20$ ms için t'ye karşı $v_o(t)$'yi çiziniz.

c) (a) şıkkı ile Problem 13.89'un (c) şıkkında elde edilen gerilimi karşılaştırınız.

13.91 PSPICE Bu problemin amacı, eğer R_b yükü tam olarak doğru zamanda devre dışı bırakılırsa, hat-hat geriliminin doğrudan durgun duruma gireceğini göstermektir. $V_m = 120\sqrt{2}$ olmak üzere $v_o = V_m \cos(120\pi t - 0°)$ V olsun. R_b devre dışı kaldıktan sonra v_g'nin değişmediğini kabul ediniz.

a) R_b devre dışı bırakıldığında v_o'nun doğrudan durgun duruma girmesi için gereken θ (derece olarak) değerini bulunuz.

b) (a) şıkkında bulunan θ için, $t \geq 0$ bölgesinde $v_o(t)$'yi bulunuz.

c) Seçtiğiniz bir bilgisayar programı ile -10 ms $\leq t \leq 10$ ms için R_b devre dışı bırakılmadan önce ve sonra $v_o(t)$'yi çiziniz.

Frekans Seçici Devrelere Giriş

BÖLÜM İÇERİĞİ

11.1 **Ön bilgiler** *s. 568*

14.2 **Alçak geçiren filtreler** *s. 570*

14.3 **Yüksek geçiren filtreler** *s. 577*

14.4 **Bant geçiren filtreler** *s. 582*

14.5 **Bant durduran filtreler** *s. 593*

BÖLÜM HEDEFLERİ

1 Alçak geçiren filtreler gibi davranan *RL* ve *RC* devre yapılarının bilinmesi ve belirlenmiş bir kesim frekansını karşılayacak *RL* ve *RC* devre elemanları değerlerinin tasarlanabilmesi.

2 Yüksek geçiren filtreler gibi davranan *RL* ve *RC* devre yapılarının bilinmesi ve belirli bir kesim frekansını karşılayacak *RL* ve *RC* devre elemanlarının değerlerinin tasarlanabilmesi.

3 Bant geçiren filtreler gibi davranan *RLC* devre yapılarının bilinmesi, bant geçiren filtrelerin merkez frekansı, kesim frekansları, bant genişliği ve kalite çarpanının tanımlarının ve aralarındaki ilişkilerin anlaşılması, tasarım özelliklerine uyan *RLC* devre elemanları değerlerinin tasarlanabilmesi.

4 Bant durduran *RLC* devre yapılarının bilinmesi, bant durduran filtrenin merkez frekansı, kesim frekansları, bant genişliği ve kalite çarpanının tanımlarının ve aralarındaki ilişkilerin anlaşılması, tasarım özelliklerine uyan *RLC* devre elemanları değerlerinin tasarlanabilmesi.

Şimdiye kadar sinüzoidal devrelerle olan analizlerimizde kaynak frekansı sabit tutulmuştu. Bu bölümde, değişen kaynak frekansının devre gerilimleri ve akımları üzerindeki etkisini inceleyeceğiz. Bu analizin sonucu bir devrenin **frekans tepkisi**dir.

Önceki bölümlerde bir devrenin tepkisinin devredeki elemanlarının çeşidine, elemanların bağlanış biçimine ve elemanların empedansına bağlı olduğunu görmüştük. Sinüzoidal bir kaynağın frekansını değiştirmek elemanların çeşidini veya bağlanış biçimlerini değiştirmese de kapasitör ve indüktörlerin empedansını değiştirir, çünkü bu elemanların empedansı frekansın bir fonksiyonudur. Göreceğimiz gibi, devre elemanlarının ve değerlerinin dikkatli seçimi ve diğer elemanlarla bağlantıları bize çıkışa yalnızca istenen frekans aralığında kalan giriş sinyallerini geçirme olanağı verir. Bu devreler **frekans seçici devreler** olarak adlandırılır. Telefon, radyo, televizyon ve uydular gibi elektrik sinyalleriyle iletişim kuran birçok aygıt frekans seçici devreler kullanır.

Frekans seçici devreler belirli giriş sinyallerini süzme özellikleri dolayısıyla **filtre** olarak da adlandırılır. Sayfa 568'deki Şekil 14.1 bu özelliği en basit yolla gösterir. Daha doğru olmak gerekirse, hiçbir uygulanabilir frekans seçici devre seçilen frekansları mükemmel ve tamamen süzemez. Daha ziyade filtreler, belli bir frekans bandı dışında frekans içeriğine sahip herhangi bir giriş sinyalini **zayıflatır** (etkisini azaltır veya söndürür). Evinizdeki stereo sistemi, filtre devrelerinin bir araya toplandığı çok iyi bir örnek olan grafik dengeleyicisine sahip olabilir. Grafik dengeleyicisindeki her bir bant, bandın frekans aralığındaki sesleri (duyulabilen frekanslarda) yükselten ve bu bandın dışındaki frekansları zayıflatan bir filtredir. Böylece grafik dengeleyicisi ayrı frekans bantlarındaki sesin şiddetini değiştirmemize olanak verir.

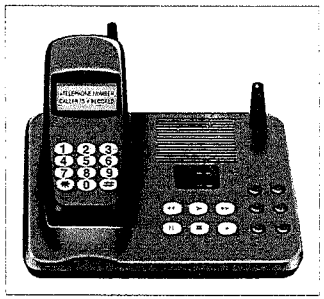
Pratik Bakış Açısı

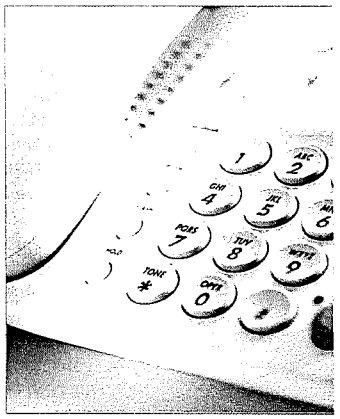
Tuşlu Telefon Devreleri

Bu bölümde, kaynak frekansının değiştiği devreleri inceleyeceğiz. Bu devrelerin davranışı kaynak frekansı değiştikçe değişir, çünkü reaktif elemanların empedansı kaynak frekansının bir fonksiyonudur. Frekansa bağlı bu devrelere **filtreler** denir ve birçok yaygın elektrik aygıtlarında kullanılırlar. Radyolarda filtreler diğer vericilerden farklı frekanslarda gönderilen sinyalleri bastırırken, belli bir radyo istasyonunun sinyalini seçmekte kullanılır. Stereo sistemlerde filtreler işitme bandındaki sinyallerin düşük ve yüksek frekans içerikli bileşenlerinin göreceli güçlerini ayarlamakta kullanılır. Filtreler ayrıca telefon sistemlerinde de kullanılır.

Tuşlu telefon, tuşa bastığınız zaman tonlar üretir. Bu tonlar hakkında merak etmiş olabilirsiniz. Tonlar telefon sistemine hangi tuşun basıldığını bildirmede nasıl kullanılır? Niçin hep tonlar kullanılır? Tonlar niçin müzikal ses verir? Telefon sistemi tuş tonuyla insanın normal konuşması veya şarkı söyleme sesleri arasındaki farkı nasıl anlar?

Telefon sistemi 300 Hz ile 3 kHz frekansları arasındaki ses sinyallerini işlemek için tasarlanmıştır. Böylece, sistemden kullanıcıya olan tüm sinyaller, çevirme tonu ve meşgul sinyali de dahil olmak üzere, duyulabilir olmak zorundadır. Benzer şekilde, kullanıcının tuşa basma sesi dahil olmak üzere kullanıcıdan sisteme olan tüm sinyalleri normal ses sinyalinden ayırmak önemlidir, bu yüzden çifte ton-çoklu frekans (DTMF) tasarım kullanılır. Bir rakam tuşuna basıldığında telefon tarafından telefon sistemine belirli frekanslarda özgün bir çift sinüzoidal ton gönderilir. DTMF frekans ve zamanlama özellikleri, kişi denese bile insan sesinin ton çiftlerini üretmesini imkansız kılar. Merkezi telefon tesisinde elektrik devreleri bir telefon numarasına işaret eden ton çiftlerini dinleyerek ses sinyalini gözlemler. Bölüm sonundaki Pratik Bakış Açısı örneğinde hangi tuşa basıldığını belirlemede kullanılan DTMF filtrelerinin tasarımını inceleyeceğiz.





Şekil 14.1 Filtrenin giriş sinyali üzerindeki etkisi çıkış sinyaliyle sonuçlanır.

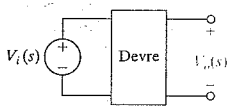
Bu bölüme dört ana sınıftaki filtrelerin devrelerini inceleyerek başlayacağız: Alçak geçiren, yüksek geçiren, bant geçiren ve bant durduran. Bir devrenin aktarım fonksiyonu frekans tepkisi analizinin başlangıç noktasıdır. Aynı filtreleme fonksiyonunu yerine getiren devrelerin aktarım fonksiyonları arasındaki benzerliklere önem veriniz. Bu benzerlikleri 15. Bölümde filtre devrelerini tasarlarken kullanacağız.

14.1 Ön Bilgiler

Kısım 13.7'den hatırlanacağı gibi bir devrenin aktarım fonksiyonu sinüzoidal bir girişe karşılık durgun durum tepkisini hesaplamada kolaylık sağlar. Orada sadece sabit frekanslı kaynakları ele almıştık. Bir devrenin frekans tepkisini çalışmak için sabit frekanslı sinüzoidal kaynağı, değişken frekanslı sinüzoidal kaynakla değiştireceğiz. Aktarım fonksiyonu hâlâ son derece önemli bir araçtır, çünkü çıkış sinyalinin genliği ve fazı sadece aktarım fonksiyonu $H(j\omega)$'nın genlik ve fazına bağlıdır.

Dikkat edilirse ana hatlarıyla ele alınan yaklaşım, sinüzoidal kaynağın genliğini ve faz açısını değiştirmeden frekansını değiştirebileceğimizi kabul eder. Böylece çıkışın genliği ve fazı yalnızca, sinüzoidal kaynağın frekansı değiştirilerek aktarım fonksiyonunun genlik ve fazının değişmesiyle değişir.

Frekans seçici devreleri bu ilk bakışı daha da sadeleştirmek istersek dikkatimizi Şekil 14.2'de gösterildiği gibi giriş ve çıkış sinyallerinin sinüzoidal gerilimler olduğu durumla sınırlandıracağız. Böylece istenen aktarım fonksiyonu çıkış geriliminin Laplace dönüşümünün giriş geriliminin Laplace dönüşümüne oranı veya $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$ olacaktır. Fakat, unutmamamız gerekir ki belirli bir uygulama için bir akım da istenen giriş veya çıkış sinyali olabilir.

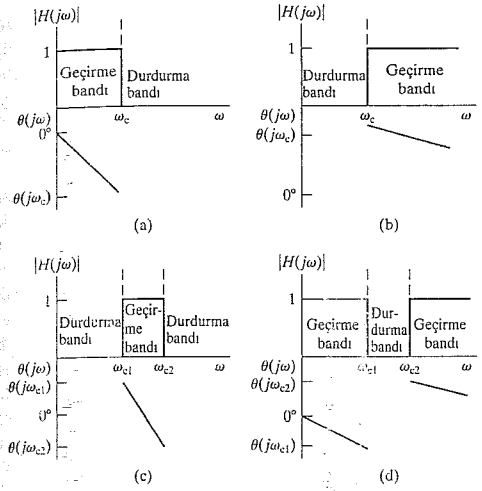


Şekil 14.2 Gerilim giriş ve çıkışıyla bir devre.

Girişten çıkışa aktarılan sinyaller **geçirme bandı** olarak adlandırılan frekans bandı aralığına düşer. Bu bandın dışındaki giriş gerilimlerinin genlikleri devre tarafından zayıflatılmıştır böylece devrenin çıkış uçlarına ulaşmaları önemli ölçüde engellenmiştir. Bir devrenin geçirme bandında olmayan frekanslar devrenin **durdurma bandı** kısmındadır. Frekans seçici devreler geçirme bandının bulunduğu yere göre sınıflandırılır.

Frekans seçici devrelerin türünü belirlemenin bir yolu da frekans tepkisi grafiğini incelemektir. Bir frekans tepkisi grafiği bir devrenin kaynak frekansının değişmesiyle aktarım fonksiyonunun (genlik ve fazının) değişimini gösterir. Frekans tepkisi grafiğinin iki kısmı vardır. Biri $|H(j\omega)|$'nın frekansa karşı grafiğidir. Grafiğin bu kısmına **genlik grafiği** denir. Diğer kısmı $\theta(j\omega)$'nin frekansa göre grafiğidir. Bu kısım ise **faz açısı grafiği** olarak adlandırılır.

Dört ana sınıftaki filtreler için ideal frekans tepkileri Şekil 14.3'te gösterilmiştir. (a) ve (b) kısımları sırasıyla alçak geçiren ve yüksek geçiren filtreler için ideal grafikleri gösterir. Filtrelerin ikisi de bantları ayıran **kesim frekansı** ile tanımlanan bir geçirme, bir de durdurma bandına sahiptir. *Alçak geçiren ve yüksek geçiren* filtre adları genlik grafiğinden türetilmiştir: **alçak geçiren filtre** girişten çıkışa kesim frekansından düşük frekansta olan sinyalleri geçirir. Yüksek **geçiren filtre** ise kesim frekansından yüksek



Şekil 14.3 Dört çeşit filtre devresinin ideal filtre tepkisi grafikleri. (a) İdeal alçak geçiren filtre. (b) İdeal yüksek geçiren filtre. (c) İdeal bant geçiren filtre. (d) İdeal bant durduran filtre.

frekanstaki sinyalleri geçirir. Böylece burada kullanılan *alçak* ve *yüksek* terimleri herhangi bir mutlak frekans değerine göre değil de kesim frekansına göre değerlere dayanır.

Bu iki filtrenin grafiklerinden de anlaşılacağı gibi (aynı şekilde yukarıdaki bant geçiren ve bant durduran filtreler için de) ideal bir filtrenin faz açısı grafiği, bant geçiren kısımda doğrusal olarak değişir. Bant geçiren kısmın dışında bunun hiç önemi yoktur çünkü orada genlik sıfırdır. Doğrusal faz değişimleri faz bozunumunu önlemek için gereklidir. (Bakınız 16. Bölüm, sayfa 770-773.)

Geriye kalan filtre sınıflarının her birinin iki tane kesim frekansı vardır. Şekil 14.3(c) kaynak gerilimini çıkışa, kaynak frekansı yalnızca iki kesim frekansıyla belirlenen bandın içerisinde olunca geçiren bir **bant geçiren filtre**nin ideal frekans tepkisini göstermektedir. Şekil 14.3(d) kaynak gerilimini çıkışa, kaynak frekansı yalnızca iki kesim frekansıyla belirlenen bandın dışında olunca geçiren bir **bant durduran filtre**nin ideal frekans tepkisini göstermektedir. Bant durduran filtre böylece kaynak gerilimini bastırarak veya durdurarak, frekans sadece iki kesim frekansıyla belirlenen bandın içerisinde olunca çıkışa ulaşmasını engeller.

Bu bölümdeki devreleri kullanarak uygulanabilir bir filtrenin belirlenmesinde genlik ve faz özelliklerinin birbirinden bağımsız olmadığını belirtmek önemlidir. Başka bir deyişle, belirli bir genlik grafiğiyle sonuçlanan bir devrenin özellikleri aynı zamanda faz açısı grafiğinin şeklini de belirleyecektir, bunun tersi de geçerlidir. Örneğin, bir devrenin genlik tepkisi için istenen bir şekil seçtiğimizde, faz açısı tepkisi de aynı zamanda belirlenmiş olacaktır. Başka bir durumda faz açısı tepkisi için belirli bir şekil seçersek,

genlik tepkisi de belirlenmiş olacaktır. Genlik ve faz açısı davranışları birbirinden bağımsız olarak belirlenebilen bazı frekans seçici devreler olmasına rağmen, bu devreler burada gösterilmemiştir.

İleriki kısımlar dört filtre sınıfından devrelerin örneklerini gösterir. Bunlar filtre olarak davranan birçok devrenin birkaçıdır. Bir devrenin hangi özelliklerinin onun davranışının filtre gibi olmasını belirlediğini saptamaya çalışmaya dikkatinizi yoğunlaştırmanız gerekir. Benzer filtre fonksiyonlarını gerçekleştiren devrelerin aktarım fonksiyonlarının yapısına dikkatlice bakınız. Bir filtrenin aktarım fonksiyonunun yapısının belirlenmesi sonuçta belirli uygulamalar için filtreleme devrelerinin tasarımında size yardımcı olacaktır.

Bu bölümde ele alacağımız bütün filtreler **pasif filtreler**dir, çünkü filtreleme yetenekleri sadece pasif öğelere bağlıdır: Dirençler, kapasitörler ve indüktörler. Bu gibi filtrelerin ulaşabilecekleri en yüksek genlik çıktısı genellikle 1'dir ve kaynakla seri veya yüke paralel bir empedans yerleştirilmesi bu genliği düşürecektir. Birçok pratik devre uygulamalarında çıkışın genliğini yükseltmek gerektiğinden, pasif filtrelerin bazı önemli dezavantajları vardır. Bu bölümde çıkışını yükseltebilen tanımlı tek pasif filtre seri RLC rezonant devresidir. Yükseltici filtrelerin daha fazla çeşidi 15. Bölümün konusu olan aktif filtre devreleri arasında verilecektir.

14.2 Alçak Geçiren Filtreler

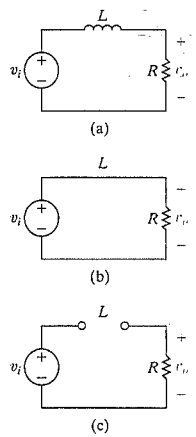
Burada, alçak geçiren filtreler gibi davranan seri RL ve RC devrelerini inceleyeceğiz ve bu devrelerin hangi özelliklerinin kesim frekansını belirlediğini öğreneceğiz.

Seri RL Devresi-Nitel Analiz

Seri bir RL devresi Şekil 14.4(a)'da gösterilmiştir. Devrenin girişi değişken frekanslı bir sinüzoidal gerilim kaynağıdır. Devrenin çıkışı direnç üzerindeki gerilim olarak tanımlanmıştır. Kaynağın frekansının çok düşük bir değerde başladığını ve yavaşça arttığını düşünelim. İdeal direncin davranışının değişmeyeceğini biliyoruz, çünkü empedansı frekanstan bağımsızdır. Fakat indüktörün davranışının nasıl değiştiğini düşünelim.

Hatırlayalım ki bir indüktörün empedansı $j\omega L$'dir. Düşük frekanslarda, direncin empedansıyla karşılaştırıldığında indüktörün empedansı çok düşüktür ve indüktör uygulamada kısa devre fonksiyonu görür. *Düşük frekans* terimi $\omega L \ll R$ sağlayan frekansları ifade eder. $\omega = 0$ için eşdeğer devre Şekil 14.4(b)'de gösterilmiştir. Bu eşdeğer devrede, giriş ve çıkış gerilimleri genlik ve faz açısı bakımından eşittir.

Frekans arttıkça, indüktörün empedansı dirence göre daha çok artar. İndüktörün empedansının artması, karşılığında indüktör üzerindeki gerilim düşüşünün artmasına ve çıkış geriliminin genliğinin azalmasına neden olur. İndüktörün empedansının artması ayrıca indüktörün gerilimi ve akımı arasındaki faz açısında kayma meydana getirir. Bu da giriş ve çıkış gerilimleri arasında faz açısı farkı oluşturur. Çıkış gerilimi giriş geriliminin gerisinde kalır ve frekans arttıkça, bu faz gecikmesi 90°'ye yaklaşır.

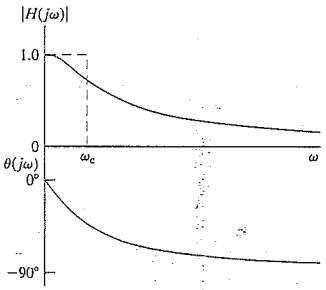


Şekil 14.4 ▲ (a) Seri RL alçak geçiren filtre. (b) $\omega = 0$'daki eşdeğer devre. (c) $\omega = \infty$'daki eşdeğer devre.

Yüksek frekanslarda, direncin empedansıyla karşılaştırıldığında indüktörün empedansı çok büyüktür ve böylece indüktör devre içindeki akımın geçişini büyük ölçüde kısıtlayarak açık devre işlevi görür. *Yüksek frekans* terimi $\omega L \gg R$ sağlayan frekansları ifade eder. $\omega = \infty$ için eşdeğer devre çıkış geriliminin genliğinin sıfır olduğu Şekil 14.4(c)'de gösterilmiştir. Çıkış geriliminin faz açısı giriş gerilimininkinden 90° daha negatiftir.

Çıkış geriliminin genliğinin davranışına bağlı olarak, bu seri RL devresi seçici olarak düşük frekanslı girişleri çıkışa aktarır ve yüksek frekanslı girişlerin çıkışa ulaşmasını engeller. Bu devrenin değişken giriş frekansına karşılık tepkisi böylece Şekil 14.5'te gösterilen biçime sahiptir. Şekil 14.5'teki bu iki grafik seri RL devresinin frekans tepkisi grafiğini oluşturur. Üstteki grafik $|H(j\omega)|$'nın frekansla nasıl değiştiğini gösterir. Alttaki grafik ise $|\theta(j\omega)|$'nın frekansın bir fonksiyonu olarak nasıl değiştiğini gösterir. Bu grafikleri oluşturmak için daha biçimsel bir yöntemi Ek E'de sunduk.

Ayrıca Şekil 14.3(a)'dan alçak geçiren filtre için ideal genlik tepkisi grafiğini Şekil 14.5'teki RL filtrenin genlik grafiğiyle üst üste getirdik. İdeal bir filtrenin genlik grafikleriyle gerçek bir RL filtrenin frekans tepkisi arasında açıkça bir fark vardır. İdeal filtre kesim frekansı ω_c'de genlikte süreksizlik sergiler, bu da geçirme bandının içine ve dışına ani bir geçiş oluşturur. Bu, ideal olarak filtrelerimizin nasıl işlemesini istediğimiz olsa da, bu ani geçişe sahip bir devreyi gerçek devre elemanları kullanarak oluşturmak mümkün değildir. Alçak geçiren filtre gibi davranan devreler geçirgen banttan durduran banda geçerken yavaşça değişen bir genlik tepkisine sahiptir. Böylece, gerçek bir devrenin genlik grafiği, kesim frekansı ω_c ile ne anlatmak istediğimizi tanımlamamızı gerektirir.



Şekil 14.5 ▲ Şekil 14.4(a)'daki seri RL devresinin frekans tepkisi grafiği.

Frekans Tepkisinin Tanımlanması

Genlik tepkisinin, geçirme bandını durdurma bandından ayıran tek bir frekansı belirlememize izin vermediği gerçekçi filtre devreleri için kesim frekansı ω_c'yi tanımlamamız gerekir. Kesim frekansının elektrik mühendislerince yaygın olarak kullanılan tanımı, aktarım fonksiyonunun genliğinin en yüksek değerinin $1/\sqrt{2}$ katı olduğu frekanstır:

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{max}, \tag{14.1}$$

◁ **Kesim frekansı tanımı**

H_{max} aktarım fonksiyonunun en yüksek genliğidir. Eşitlik 14.1'den görülebileceği gibi gerçekte uygulanabilir bir filtrenin geçirme bandı, çıkış geriliminin genliğinin, mümkün en yüksek genliğin en az %70.7'si olduğu frekans aralığı olarak tanımlanır.

$1/\sqrt{2}$ sabitinin kesim frekansının tanımlanmasında kullanımı keyfi bir seçim olarak görünebilir. Kesim frekansının başka bir sonucunun incelenmesi bu seçimin daha makul görünmesini sağlar. Kısım 10.5'ten hatırlanacağı gibi herhangi bir devreden yüke aktarılan ortalama güç V_L^2 ile orantılıdır, burada V_L yük üzerindeki gerilim düşüşünün genliğidir:

$$P = \frac{1}{2}\frac{V_L^2}{R}. \tag{14.2}$$

Eğer devrenin sinüzoidal bir $V_i(j\omega)$ gerilim kaynağı varsa, o halde yük gerilimi de sinüzoidaldir ve genliği ω frekansının bir fonksiyonudur. Yük geriliminin genliğinin en yüksek olduğu değerde yüke verilen ortalama gücün değeri olarak P_{max}'ı tanımlayalım.

$$P_{max} = \frac{1}{2}\frac{V_{Lmax}^2}{R}. \tag{14.3}$$

Sinüzoidal gerilim kaynağı $V_i(j\omega)$'nın frekansını değiştirirsek çıkış geriliminin en yüksek olduğu anda devrenin aktarım fonksiyonunun genliği de en yüksektir:

$$V_{Lmax} = H_{max}|V_i|. \tag{14.4}$$

Şimdi gerilim kaynağının frekansı ω_c olduğunda ortalama güce ne olacağını düşünelim. Eşitlik 14.1'i kullanarak, ω_c frekansında yük gerilimin genliğinin

$$\begin{aligned} |V_L(j\omega_c)| &= |H(j\omega_c)||V_i| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}H_{max}|V_i| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}V_{Lmax} \end{aligned} \tag{14.5}$$

olduğunu belirleriz.

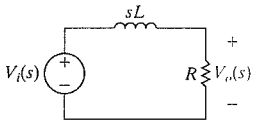
Eş. 14.5'i Eş. 14.2'de yerine koyarak,

$$\begin{aligned} P(j\omega_c) &= \frac{1}{2}\frac{|V_L^2(j\omega_c)|}{R} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}V_{Lmax}\right)^2}{R} \\ &= \frac{1}{2}\frac{V_{Lmax}^2/2}{R} \\ &= \frac{P_{max}}{2} \end{aligned} \tag{14.6}$$

buluruz. Eş. 14.6 kesim frekansı ω_c'de devre tarafından aktarılan ortalama gücün en yüksek ortalama gücün yarısı olduğunu gösterir. Bu yüzden ω_c **yarım güç frekansı** olarak da adlandırılır. Böylece, geçirme bandında, yüke verilen ortalama güç en yüksek ortalama gücün en az %50'sidir.

Seri *RL* Devresi-Nicel Analiz

Şimdi gerçek filtre devreleri için kesim frekansını tanımladığımıza göre bu alçak geçiren filtre için devre elemanları değerleriyle kesim frekansı arasındaki ilişkiyi bulmak için seri *RL* devreyi analiz edebiliriz. Şekil 14.4(a)'da başlangıç koşullarını sıfır varsayarak devrenin *s*-bölgesi eşdeğerini oluşturmakla başlarız. Eşdeğer devre Şekil 14.6'da gösterilmiştir.



Şekil 14.6 Şekil 14.4(a)'daki devrenin *s* bölgesi eşdeğeri.

Bu devre için gerilim aktarım fonksiyonu

$$H(s) = \frac{R/L}{s + R/L}\text{'dir.} \tag{14.7}$$

Frekans tepkisini çalışmak için Eş. 14.7'de $s = j\omega$ değişimini yaparız:

$$H(j\omega) = \frac{R/L}{j\omega + R/L}. \tag{14.8}$$

Şimdi Eş. 14.8'i iki eşitliğe ayırabiliriz. Birincisi frekansın bir fonksiyonu olarak aktarım fonksiyonunun genliğini; ikincisi de frekansın bir fonksiyonu olarak aktarım fonksiyonu faz açısını tanımlar:

$$|H(j\omega)| = \frac{R/L}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}}, \tag{14.9}$$

$$\theta(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right). \tag{14.10}$$

Eş. 14.9'un yakından incelenmesi Şekil 14.5'te gösterilen genlik grafiği için nicel desteği sağlar. $\omega = 0$ olduğunda, payda ve pay eşittir ve $|H(j0)| = 1$'dir. Bu $\omega = 0$ olduğunda giriş geriliminin çıkış uçlarına gerilim genliğinde bir değişim olmadan geçirildiği anlamına gelir.

Frekans arttıkça, Eş. 14.9'un payı değişmez fakat paydası artar. Böylece $|H(j\omega)|$ Şekil 14.5'teki grafikde gösterildiği gibi frekans arttıkça azalır. Aynı şekilde, frekans arttıkça Eş. 14.10'dan görüleceği gibi, faz açısı 0° olan dc değerinden değişir, daha negatif olur.

$\omega = \infty$ olduğunda, Eş. 14.9'un paydası sonsuzdur ve Şekil 14.5'ten görüleceği gibi $|H(j\infty)| = 0$'dır. $\omega = \infty$'da, faz açısı Eş. 14.10'dan ve Şekil 14.5'teki faz açısı grafiğinden görüleceği gibi −90° sınırına ulaşır.

Eş. 14.9'u kullanarak kesim frekansı ω_c'yi hesaplayabiliriz. Hatırlarsak $|H(j\omega_c)| = (1/\sqrt{2})H_{max}$ olarak tanımlanmıştı. Alçak geçiren filtre için, Şekil 14.5'te görüleceği gibi $H_{max} = |H(j0)|$'dır. Böylece Şekil 14.4(a)'daki devre için,

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|1| = \frac{R/L}{\sqrt{\omega_c^2 + (R/L)^2}} \tag{14.11}$$

olur. Eş. 14.11'i ω_c için çözersek,

$$\omega_c = \frac{R}{L}. \tag{14.12}$$

◁ ***RL* filtreleri için kesim frekansı**

elde ederiz.

Eş. 14.12 önemli bir sonuç verir. Kesim frekansı ω_c, belirlenen herhangi bir değere *R* ve *L* değerlerinin uygun seçimiyle ayarlanabilir. Böylece gerek duyulan herhangi bir kesim frekansında alçak geçiren bir filtre tasarlayabiliriz. Örnek 14.1 Eş. 14.12'nin tasarım potansiyelini gösterir.

Örnek 14.1 Alçak Geçiren Filtre Tasarımı

Elektrokardiyoloji kalp tarafından üretilen elektrik sinyallerinin çalışılmasıdır. Bu sinyaller kalbin ritmik atışının devamlılığını sağlar ve elektrokardiyograf denen aletle ölçülür. Bu alet frekansları 1 Hz (normal kalp hızı dakikada 72 atımdır) civarında olan periyodik sinyalleri tespit etme yeteneğine sahip olmalıdır. Alet etraftaki elektrik ortamından oluşan ve temel frekansı elektriksel gücün sağlandığı frekans olan 60 Hz'teki sinüzoidal gürültü varlığında çalışabilmelidir.

Şekil 14.4(a)'daki devre için R ve L değerlerini öyle bir seçiniz ki sonuçta devre elektrokardiyografta 10 Hz üzerindeki her gürültüyü filtrelemekte ve kalpten 1 Hz veya yakınındaki elektrik sinyallerini geçirmekte kullanılabilsin. Sonra filtrenin ne kadar iyi işlediğini görmek için V_o'nun genliğini 1 Hz, 10 Hz ve 60 Hz'de hesaplayınız.

Çözüm

Problem 10 Hz'lik kesim frekansında alçak geçiren filtreyi oluşturacak R ve L değerlerini seçmektir. Eş. 14.12'den, R ve L'nin ω_c'yi oluşturmak için bağımsız olarak seçilemeyeceğini görürüz. Bundan dolayı L için genelde bulunabilir bir değer olan 100 mH'yi seçelim. İstenen kesim frekansını elde etmede gerekli R değerini hesaplamak için Eş. 14.2'yi kullanmadan önce, kesim frekansını hertz'den radyan/saniye'ye çevirmemiz gerekir:

$$\omega_c = 2\pi(10) = 20\pi \text{ rad/s}.$$

Şimdi 10 Hz'lik kesim frekansına sahip alçak geçiren filtreyi $L = 100$ mH ile birlikte oluşturacak R değeri için çözüm yaparsak

$$\begin{aligned} R &= \omega_c L \\ &= (20\pi)(100 \times 10^{-3}) \\ &= 6.28\ \Omega \end{aligned}$$

buluruz.

V_o'nun genliğini $|V_o| = |H(j\omega)| \bullet |V_i|$ eşitliğini kullanarak hesaplayabiliriz:

$$|V_o(\omega)| = \frac{R/L}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}}|V_i|$$

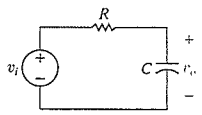
$$= \frac{20\pi}{\sqrt{\omega^2 + 400\pi^2}}|V_i|.$$

Tablo 14.1 1 Hz, 10 Hz ve 60 Hz için hesaplanan genlik değerlerini özetler. Beklendiği gibi, giriş ve çıkış gerilimleri düşük frekansta aynı değerlere sahiptir, çünkü devre alçak geçiren bir filtredir. Kesim frekansında, çıkış geriliminin genliği geçiş bandının birim genliğinden $1/\sqrt{2}$ oranında azaltılmıştır. 60 Hz'de çıkış geriliminin büyüklüğü yaklaşık 6 kat azaltılarak elektrokardiyografın ölçmesi için tasarlanmış sinyali bozacak gürültünün istenen zayıflama seviyesine ulaşılmıştır.

TABLO 14.1 Birkaç frekans için giriş ve çıkış gerilim genlikleri

f(Hz)	$\lvert V_i\rvert$ (V)	$\lvert V_o\rvert$ (V)
1	1.0	0.995
10	1.0	0.707
60	1.0	0.164

SERİ *RC* Devresi



Şekil 14.7 ▲ Seri *RC* alçak geçiren filtre.

Şekil 14.7'de gösterilen seri *RC* devresi aynı zamanda alçak geçiren filtre gibi davranır. Bunu önceden kullandığımız aynı nitel çözümlemeyle doğrulayabiliriz. Aslında, böyle bir nitel inceleme, filtreleri analiz ederken alışkanlık edinmeniz gereken önemli bir problem çözme adımıdır. Böyle yapmak filtre özelliklerini (alçak geçiren, yüksek geçiren vs.) ve böylece aktarım fonksiyonunun genel biçimini de öngörebilmenizi sağlar. Hesaplanan aktarım fonksiyonu nitel olarak öngörülen biçimle uyuşursa önemli bir doğruluk denetimine sahipsinizdir.

Devrenin çıkışının kapasitörün üzerindeki çıkış olarak tanımlandığını dikkate alalım. Önceki nitel analizde yaptığımız gibi, Şekil 14.7'deki seri *RC* devresinin davranışını oluşturmak için üç frekans bölgesi kullanırız:

1) *Sıfır frekansı* ($\omega = 0$): Kapasitörün empedansı sonsuzdur ve kapasitör açık devre gibi davranır. Böylece giriş ve çıkış gerilimleri aynıdır.
2) *Sıfırdan ortan frekanslar*: Kapasitörün empedansı direncinkine göre azalır, çıkış gerilimi de direnç ve kapasitör empedansları arasında paylaşılır. Böylece, çıkış gerilimi kaynak geriliminden daha düşüktür.
3) *Sonsuz frekans* ($\omega = \infty$): Kapasitörün empedansı sıfırdır ve kapasitör kısa devre gibi davranır. Çıkış gerilimi böylece sıfır olur.

Çıkış geriliminin frekansın bir fonksiyonu olarak nasıl değiştiğinin analizine dayalı olarak, seri *RC* devresi alçak geçiren filtre olarak işlev görür. Örnek 14.2 bu devreyi nicel olarak inceler.

Örnek 14.2 Alçak Geçiren Seri *RC* Filtre Tasarımı

Şekil 14.7'deki seri *RC* devresi için:

a) Kaynak gerilimiyle çıkış gerilimi arasındaki aktarım fonksiyonunu bulunuz.
b) Seri *RC* devrede kesim frekansı için bir eşitlik belirleyiniz.
c) R ve C için, 3 kHz'de kesim frekansına sahip alçak geçiren filtreyi oluşturacak değerleri seçiniz.

Çözüm

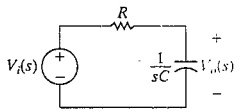
a) Aktarım fonksiyonuna bir ifade türetmek için önce, Şekil 14.8'de gösterildiği gibi, Şekil 14.7'deki devrenin s bölgesi eşdeğerini oluştururuz.

Eşdeğer devrede s bölgesi gerilim bölümünü kullanarak

$$H(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

bulunur. Şimdi, $s = j\omega$'yı yerine koyarak sonuçtaki kompleks ifadenin genliğini hesaplarız:

$$|H(j\omega)| = \frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}}.$$



Şekil 14.8 ▲ Şekil 14.7'deki devrenin s bölgesi eşdeğeri.

b) Kesim frekansı ω_c'de, $|H(j\omega)|$ $(1/\sqrt{2})H_{max}$'a eşittir. Alçak geçiren filtre için, $H_{max} = H(j0)$'dır ve Şekil 14.8'deki devre için $H(j0) = 1$'dir. O halde R, C ve ω_c değerleri arasındaki ilişkiyi tanımlayabiliriz:

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1) = \frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\omega_c^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}}.$$

Bu eşitliği ω_c için çözersek,

$$\omega_c = \frac{1}{RC}.$$

elde ederiz.

▶ ***RC* filtrelerinin kesim frekansı**

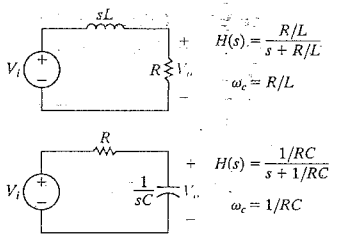
c) (b)'deki sonuçlardan kesim frekansının R ve C değerleriyle belirlendiğini görürüz. R ve C birbirinden bağımsız hesaplanamayacağı için $C = 1\ \mu F$ seçelim. Bir seçim hakkımız olduğunda, genellikle önce R veya L yerine C için bir değer belirleyeceğiz çünkü mevcut kapasitör değerleri direnç veya indüktör değerlerinden daha azdır. Belirlenen kesim frekansını 3 kHz'den (2π) (3) krad/s'ye çevirmemiz gerektiğini hatırlayarak R'yi bulabiliriz:

$$R = \frac{1}{\omega_c C} = \frac{1}{(2\pi)(3 \times 10^3)(1 \times 10^{-6})} = 53.05\ \Omega.$$

Şekil 14.9, incelediğimiz iki alçak geçiren filtre devresini özetler. Aktarım fonksiyonlarına dikkatle bakınız. Biçimce nasıl benzer olduklarını fark ediniz; sadece kesim frekansını belirleyen koşullarda farklıdırlar. Aslında, bu iki alçak geçiren filtrenin aktarım fonksiyonları için genel bir ifade biçimi belirleyebiliriz:

Alçak geçiren filtre için aktarım fonksiyonu ▶

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}. \tag{14.13}$$



Şekil 14.9 ▲ Aktarım fonksiyonları ve kesim frekanslarıyla birlikte iki alçak geçiren, seri RL ve seri RC filtre.

Eş. 14.13'teki gerilim oranına sahip herhangi bir devre, ω_c kesim frekansında bir alçak geçiren filtre gibi davranır. Bölümün sonundaki problemler bu gerilim oranında başka devre örnekleri vermektedir.

Frekans Bölgesini Zaman Bölgesiyle İlişkilendirmek

Sonuçta, bir başka önemli ilişkinin farkına varmışsınızdır. 6. Bölümde birinci mertebeden RL ve RC devrelerinin doğal tepkilerine ilişkin tartışmamızı hatırlayınız. Bu devreler için önemli bir değişken, zaman tepkisinin şeklini belirleyen zaman sabiti τ'dur. RL devresi için, zaman sabiti L/R değerine sahiptir (Eş. 7.14), RC devresi için, zaman sabiti RC değerine sahiptir (Eş. 7.24). Bu devreler için zaman sabitlerini kesim frekanslarıyla karşılaştırınız ve

$$\tau = 1/\omega_c \tag{14.14}$$

olduğunu görünüz.

Bu sonuç, Laplace dönüşümünde de belirtildiği gibi, bir devrenin zaman tepkisiyle frekans tepkisi arasındaki ilişkinin doğrudan sonucudur. Kısım 13.6'daki evrişim integralinde belirtildiği gibi bellek ve ağırlıklandırma tartışması, $\omega_c \to \infty$ için filtrenin belleksiz olduğunu ve çıkışın, girişin ağırlıklandırılmış bir kopyası olduğunu gösterir ki bu da filtreleme olmadığı anlamına gelir. $\omega_c \to 0$ için filtrenin artan bir belleği vardır ve çıkış gerilimi girişin bozulmuş bir halidir, çünkü filtreleme olmuştur.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 1 – Alçak geçiren filtre gibi davranan *RL* ve *RC* devre yapılarını bilmek.

14.1 Alçak geçiren, seri bir RC filtresinde 8 kHz'lik bir kesim frekansı istenmektedir. $R = 10\ k\Omega$ alınız ve gerekli C değerini hesaplayınız.

Cevap: 1.99 nF.

14.2 2 kHz kesim frekansında bir seri RL alçak geçiren filtreye ihtiyaç vardır. $R = 5\ k\Omega$ alarak (a) L; (b) 50 kHz'de $|H(j\omega)|$'yı ve c) 50 kHz'de $\theta(j\omega)$'yi hesaplayınız.

Cevap: (a) 0.40 H; (b) 0.04; (c) −87.71°.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 14.1 ve 14.2'yi de çözmeyi deneyiniz.

14.3 Yüksek Geçiren Filtreler

Yüksek geçiren filtreler gibi davranan iki devreyi inceleyeceğiz. Bu sefer de devreler seri RL ve RC devreleri olacaktır. Çıkış geriliminin tanımlandığı yere bağlı olarak, aynı seri devrenin alçak geçiren veya yüksek geçiren bir devre gibi davranabildiğini göreceğiz. Bu devrelerin devre elemanları değerleriyle kesim frekansı arasındaki ilişkiyi de belirleyeceğiz.

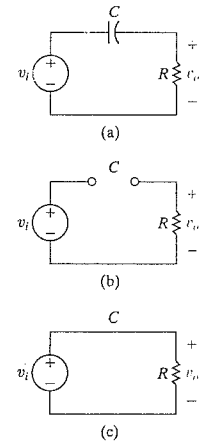
Seri *RC* devresi –Nicel Analiz

Seri bir RC devresi Şekil 14.10(a)'da gösterilmiştir. Şekil 14.7'deki benzerinin aksine, çıkış gerilimi kapasitör değil de direnç üzerinden tanımlanmıştır. Bu yüzden değişen kapasitif empedansın etkisi alçak geçiren yapıdakinden farklıdır.

$\omega = 0$'da, kapasitör açık devre gibi davranır, böylece direnç üzerinden akım geçmez. Bu, Şekil 14.10(b)'deki eşdeğer devrede gösterilmiştir. Bu devrede, direnç üzerinde gerilim yoktur ve devre alçak frekanslı kaynak gerilimini devrenin çıkışına ulaşmadan filtreler.

Kaynak geriliminin frekansı arttıkça, kapasitörün empedansı direncin empedansına göre daha çok azalır ve kaynak gerilimi kapasitör ve direnç arasında bölünür. Böylece çıkış geriliminin genliği artmaya başlar.

Kaynağın frekansı sonsuzken ($\omega = \infty$), kapasitör kısa devre gibi davranır ve böylece kapasitör üzerinde gerilim yoktur. Bu, Şekil 14.10(c)'deki eşdeğer devrede gösterilmiştir. Bu devrede giriş ve çıkış gerilimleri aynıdır. Kaynağın frekansı değiştikçe giriş ve çıkış gerilimleri arasındaki faz açısı farkı da değişir. $\omega = \infty$ için, giriş ve çıkış gerilimleri aynıdır, bu yüzden faz açısı farkı sıfırdır. Kaynağın

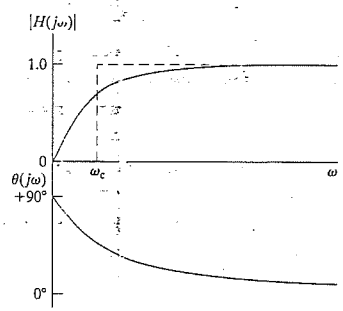


Şekil 14.10 ▲ (a) Seri RC yüksek geçiren filtre. (b) $\omega = 0$'daki eşdeğer devre. (c) $\omega = \infty$'daki eşdeğer devre.

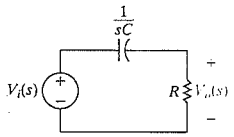
frekansı azaldıkça ve kapasitörün empedansı arttıkça, kapasitörde gerilim ve akım arasında faz kayması oluşur. Bu da kaynak ve çıkış gerilimleri arasında faz farkı yaratır. Çıkış geriliminin faz açısı kaynak gerilimininkinin önündedir. $\omega = 0$ olduğunda, bu faz açısı, farkı, en yüksek değeri olan +90°'ye ulaşır.

Nitel analizimizi temel alarak, çıkış direnç üzerindeki gerilim olarak tanımlandığında, seri *RC* devresi yüksek geçiren filtre gibi davranır. Devre elemanları ve bağlantılar alçak geçiren seri *RC* devresininkiyle aynıdır, fakat çıkışın seçimi farklıdır. Böylece, bir devrenin filtreleme özelliklerinin devre elemanları, değerleri ve bağlantılarına olduğu kadar çıkışın tanımına da bağlı olduğuna dair gözlemimizi de doğrulamış olduk.

Şekil 14.11 seri yüksek geçiren filtre için frekans tepkisi grafiğini gösterir. Referans olarak kesikli çizgiler ideal yüksek geçiren filtre için genlik grafiğini göstermektedir. Şimdi aynı devrenin nicel analizine dönelim.



Şekil 14.11 ▲ Şekil 14.10(a)'daki seri *RC* devresi için frekans tepkisi grafiği.



Şekil 14.12 ▲ Şekil 14.10(a)'daki devrenin *s* bölgesi eşdeğeri.

Seri *RC* devresi-Nicel Analiz

Başlangıçta Şekil 14.10(a)'daki devrenin *s* bölgesi eşdeğerini oluştururuz. Bu eşdeğer devre Şekil 14.12'de gösterilmiştir. Devreye *s* bölgesi gerilim bölümünü uygulayarak, aktarım fonksiyonunu yazarız:

$$H(s) = \frac{s}{s + 1/RC}.$$

$s = j\omega$'yı yerine koyarsak

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + 1/RC} \tag{14.15}$$

ile sonuçlanır. Sonra Eş. 14.15'i iki eşitliğe ayırırız. Birincisi aktarım fonksiyonunun genliğini, ikincisi de aktarım fonksiyonunun faz açısını tanımlar:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + (1/RC)^2}}, \tag{14.16}$$

$$\theta(j\omega) = 90° - \tan^{-1}\omega RC. \tag{14.17}$$

Eş. 14.16 ve 14.17'ye dikkatli bir bakış Şekil 14.11'deki frekans tepkisi grafiğinin şeklini doğrular. Eşitlik 14.16'yı kullanarak seri *RC* yüksek geçiren filtre için kesim frekansını hesaplayabiliriz. Kesim frekansında aktarım fonksiyonunun genliğinin $(1/\sqrt{2})H_{max}$ olduğunu hatırlayınız. Yüksek geçiren bir filtre için, Şekil 14.11'den de görüldüğü gibi $H_{max} = |H(j\omega)|_{\omega=\infty} = |H(j\infty)|$'dur. Eş. 14.16'nın solundaki ifadeyi $|H(j\infty)|$'a eşitleyerek, bu seri *RC* devre için $(1/\sqrt{2})|H(j\infty)| = 1$ olduğunu dikkate alarak, ω_c için bir eşitlik oluşturabiliriz:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 + (1/RC)^2}}. \tag{14.18}$$

Eşitlik 14.18'i ω_c için çözersek

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \tag{14.19}$$

elde ederiz. Eş. 14.19 benzer bir sonuç gösterir. Seri *RC* devresi için kesim frekansı Şekil 14.7'de alçak geçiren veya Şekil 14.10(a)'da yüksek geçiren filtre olarak yapılandırılsa da $1/RC$ değerine sahiptir. Bir devrenin kesim frekansı ω_c ve zaman sabiti τ arasında bir ilişki kurmuş olduğumuza göre belki de bu şaşırtıcı bir sonuç değildir.

Örnek 14.3 seri *RL* devresini bu sefer yüksek geçiren filtre olarak yapılandırılmış haliyle incelemektedir. Örnek 14.4 indüktöre paralel bir yük direnci eklemenin etkisini incelemektedir.

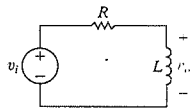
Örnek 14.3 Yüksek Geçiren Seri *RL* Filtre Tasarımı

Şekil 14.13'teki seri *RL* devresinin de yüksek geçiren filtre gibi davrandığını gösteriniz:

a) Devrenin aktarım fonksiyonu için bir ifade çıkarınız.

b) Seri *RL* devresinin kesim frekansını belirlemek için (a)'daki sonucu kullanınız.

c) 15 kHz'de kesim frekansı olan bir yüksek geçiren filtre elde etmek için *R* ve *L* değerlerini seçiniz.



Şekil 14.13 ▲ Örnek 14.3'teki devre.

Çözüm

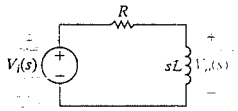
a) Şekil 14.14'te gösterildiği gibi seri *RL* devrenin *s* bölgesi eşdeğerini oluşturarak başlayacağız. Sonra aktarım fonksiyonunu oluşturmak için *s* bölgesi gerilim bölümünü kullanırız:

$$H(s) = \frac{s}{s + R/L}.$$

$s = j\omega$'yı yerine koyarsak,

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + R/L}$$

elde ederiz. Dikkat edersek bu eşitlik, Eş. 14.15'teki seri *RC* yüksek geçiren filtre ile aynı biçime sahiptir.



Şekil 14.14 ▲ Şekil 14.13'teki devrenin *s* bölgesi eşdeğeri.

b) Kesim frekansı eşitliğini bulmak için önce $H(j\omega)$'nın genliğini hesaplayalım:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}}.$$

Sonra, önceki gibi, eşitliğin sol tarafını kesim frekansı ω_c tanımına göre $(1/\sqrt{2})H_{max}$'a eşitleriz. Hatırlayalım ki yüksek geçiren filtre için $H_{max} = |H(j\infty)|$ ve seri *RL* devresi için $|H(j\infty)| = 1$'dir. Kesim frekansı için çözüm yaparsak

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 + (R/L)^2}}, \quad \omega_c = \frac{R}{L}$$

bulunur. Bu da seri *RL* alçak geçiren filtre için hesapladığımız kesim frekansının aynısıdır.

c) (b)'de hesaplanan ω_c eşitliğini kullanarak, *R* ve *L* için birbirinden bağımsız değerler belirlemenin mümkün olmadığını görürüz. O halde, *R* için keyfi 500 Ω değerini seçelim. Kesim frekansını rad/s'ye çevirmeyi hatırlayarak *L*'yi buluruz.

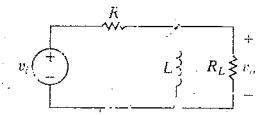
$$L = \frac{R}{\omega_c} = \frac{500}{(2\pi)(15{,}000)} = 5.31 \text{ mH}.$$

Örnek 14.4 Yüksek Geçiren Seri *RL* Filtrenin Yüklenmesi

Şekil 14.15'te gösterilen yüksek geçiren *RL* filtredeki indüktöre paralel bir yük direnci bağlanmasının etkisini inceleyiniz:

a) Şekil 14.15'teki devre için aktarım fonksiyonunu bulunuz.

b) Örnek 14.3(c)'deki devrede R, L değerlerini kullanarak ve $R_L = R$ olmak üzere yüklü yüksek geçiren *RL* filtresi için kabaca genlik grafiğini çiziniz. Aynı grafikte Örnek 14.3(c)'deki yüksüz yüksek geçiren *RL* filtrenin genlik grafiğini çiziniz.

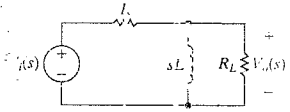


Şekil 14.15 ▲ Örnek 14.4'teki devre.

Çözüm

a) Şekil 14.15'teki devreyi s bölgesine Şekil 14.16'da gösterildiği gibi dönüştürerek başlarız. Aktarım fonksiyonunu hesaplamak için paralel bağlı indüktör ve yük direnci üzerinde gerilim bölünmesini kullanırsak

$$H(s) = \frac{\dfrac{R_L sL}{R_L + sL}}{R + \dfrac{R_L sL}{R_L + sL}} = \frac{\left(\dfrac{R_L}{R + R_L}\right)s}{s + \left(\dfrac{R_L}{R + R_L}\right)\dfrac{R}{L}} = \frac{Ks}{s + \omega_c}$$



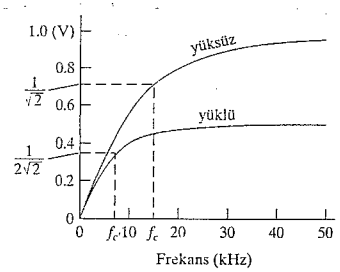
Şekil 14.16 ▲ Şekil 14.15'teki devrenin s bölgesi eşdeğeri.

olur. Burada

$$K = \frac{R_L}{R + R_L}, \quad \omega_c = KR/L$$

ile verilir. Unutmayınız ki ω_c, yüklü filtrenin kesim frekansıdır.

b) Örnek 14.3(c)'den yüksek geçiren yüksüz *RL* filtre için, geçirme bandı genliği 1'dir ve kesim frekansı 15 kHz'dir. Yüksek geçiren yüklü *RL* filtre için $R = R_L = 500\ \Omega$'dur. Bu nedenle $K = 1/2$ olur. Böylece, yüklü filtre için, geçirme bandı genliği (1)(1/2) = 1/2'dir ve kesim frekansı ise (15, 000)(1/2) = 7.5 kHz'dir. Yüklü ve yüksüz devrelerin genlik grafikleri Şekil 14.17'de gösterilmiştir.

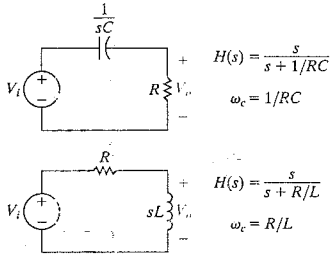


Şekil 14.17 ▲ Şekil 14.13'teki yüksüz ve Şekil 14.15'teki yüklü yüksek geçiren *RL* filtre için genlik tepkisi grafikleri.

Örnek 14.3'teki yüksüz filtre ile Örnek 14.4'teki yüklü filtrenin aktarım fonksiyonlarını karşılaştırmak bu noktada önemlidir. İki aktarım fonksiyonu da yüksüz filtre için $K = 1$ ve yüklü filtre için $K = R_L/(R + R_L)$ olmak üzere

$$H(s) = \frac{Ks}{s + K(R/L)}$$

biçimindedir. Dikkat edilirse $R_L = \infty$ olunca, yani yük direnci olmadığında, yüklü devre için K değeri yüksüz devrenin K değerine indirgenir. İki filtrenin kesim frekansları doğrudan aktarım fonksiyonlarından görülebilir. İki durumda da, $\omega_c = K(R/L)$'dir ve yüksüz filtre için $K = 1$ ve yüklü filtre için $K = R_L/(R + R_L)$'dir. Yine yüklü devre için kesim frekansı $R_L = \infty$ olduğunda yüksüz haldeki değerine indirgenir. $R_L/(R + R_L) < 1$ olduğu için, yük direncinin etkisi geçirme bandındaki genliği K kat azaltmak ve kesim frekansını aynı oranda azaltmaktır. Bu sonuçları bölümün başında tahmin etmiştik. Pasif bir yüksek geçiren filtrenin çıkışının ulaşabileceği en yüksek genlik 1'dir ve Örnek 14.4'te yaptığımız gibi filtreye bir yük eklemek genliği azaltmaya yaramaktadır. Geçirme bandındaki sinyalleri yükseltmek istediğimizde 15. Bölümde ele alındığı gibi aktif filtrelere başvurmalıyız.



Şekil 14.18 ▲ Aktarım fonksiyonları ve kesim frekanslarıyla birlikte iki yüksek geçiren, seri *RC* ve seri *RL* filtreler.

Yükün filtre aktarım fonksiyonuna etkisi devre tasarımında başka bir ikilem yaratır. Genellikle bir aktarım fonksiyonu özelliğiyle başlarız sonra da bu fonksiyonu oluşturacak filtreyi tasarlarız. Filtre üzerindeki yükün ne olacağını bilemeyebiliriz fakat her durumda, genellikle filtrenin aktarım fonksiyonunun, üzerindeki yüke bağlı olmaksızın aynı kalmasını isteriz. İstenen bu davranış bu bölümde ele alınan pasif filtrelerle elde edilemez.

Şekil 14.18 incelediğimiz yüksek geçiren filtre devrelerini özetler. $H(s)$ için olan ifadelere dikkatlice bakınız. Bu ifadelerin biçimce ne kadar benzer olduklarına dikkat ediniz; sadece kesim frekansını içeren paydada farklılık gösterirler. Eşitlik 14.13'te alçak geçiren filtrelerle yaptığımız gibi, bu iki yüksek geçiren filtre için genel bir biçim belirleyebiliriz:

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_c}. \tag{14.20}$$

◁ **Yüksek geçiren bir filtre için aktarım fonksiyonu**

Eş. 14.20'deki aktarım fonksiyonuna sahip herhangi bir devre ω_c kesim frekansında bir yüksek geçiren filtre gibi davranır. Bölüm sonundaki problemler bu gerilim oranında başka devre örnekleri de vermektedir.

Dikkatimizi bir diğer önemli ilişkiye çekmiştik. Seri *RC* devrenin alçak geçiren veya yüksek geçiren filtre olarak yapılandırılsa da aynı kesim frekansına sahip olacağını keşfettik. Aynısı seri *RL* devresi için de doğrudur. Bir filtrenin kesim frekansıyla aynı devrenin zaman sabiti arasındaki ilişkiye dikkatimizi verdiğimize göre kesim frekansının, değeri sadece devre elemanlarına, değerlerine ve bağlanış biçimlerine bağlı olan belirleyici bir özellik olmasını beklemeliyiz.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 2—Yüksek geçiren filtreler gibi davranan *RL* ve *RC* devre yapılarını bilmek.

14.3 Yüksek geçiren seri bir *RL* filtre $R = 5\ \text{k}\Omega$ ve $L = 3.5$ mH değerlerine sahiptir. Bu filtre için ω_c nedir?

Cevap: 1.43 Mrad/s.

14.4 Yüksek geçiren seri bir *RC* filtre $C = 1\ \mu\text{F}$ değerine sahiptir. Verilen *R* değerleri için kesim frekansını hesaplayınız: *R*: (a) 100 Ω; (b) 5 kΩ ve (c) 30 kΩ.

Cevap: (a) 10 krad/s;
(b) 200 rad/s;
(c) 33.33 rad/s.

14.5 Kapasitörüne paralel bağlı R_L direnci bulunan seri *RC* alçak geçiren filtrenin aktarım fonksiyonunu hesaplayınız.

Cevap: $H(s) = \dfrac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{KRC}}$, burada $K = \dfrac{R_L}{R + R_L}$.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 14.12'yi ve 14.13'ü de çözmeyi deneyiniz.

14.4 Bant Geçiren Filtreler

İnceleyeceğimiz bir sonraki filtreler bir frekans bandındaki gerilimleri çıkışa aktarırken bu frekans bandı dışındaki gerilimleri süzen filtrelerdir. Bu filtreler önceki kısımlardaki alçak geçiren ve yüksek geçiren filtrelerden bir bakıma daha karmaşıktır. Şekil 14.3(c)'de görmüş olduğumuz gibi, ideal bant geçiren filtreler geçirme bandını tanımlayan ω_{c1} ve ω_{c2} olmak üzere iki kesim frekansına sahiptir. Gerçekçi bant geçiren filtreler için, kesim frekansları yine aktarım fonksiyonunun genliğinin $(1/\sqrt{2})H_{max}$'a eşit olduğu frekanslar olarak tanımlanmıştır.

Merkez Frekansı, Bant Genişliği ve Kalite Çarpanı

Bant geçiren filtreyi niteleyen üç tane önemli özellik daha vardır. Birincisi bir devrenin aktarım fonksiyonunun sadece gerçek olduğu frekans olarak tanımlanan **merkez frekansı** ω_o'dır. Merkez frekansının diğer adı **rezonans frekansıdır**. Bu 8. Bölümdeki ikinci mertebeden devrelerin doğal tepkisini niteleyen frekansa verilen adın aynısıdır çünkü bunlar aynı frekanstır! Bir devre rezonans frekansında çalıştırıldığında, devre rezonanstadır denir çünkü aktarım fonksiyonunun frekansı devrenin doğal frekansıyla aynıdır. Merkez frekansı geçiş bandının geometrik ortasıdır, $\omega_o = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}$. Bant geçiren filtreler için, aktarım fonksiyonunun genliği merkez frekansında en yüksektir ($H_{max} = |H(j\omega_o)|$).

İkinci özellik geçirme bandının genişliği olan **bant genişliği**, β'dır.Son özellik ise merkez frekansının bant genişliğine oranı olan kalite çarpanıdır. **Kalite çarpanı** geçirme bandının genişliğinin frekans eksenindeki yerinden bağımsız olarak bir ölçütünü verir. Ayrıca frekanstan bağımsız olarak genlik grafiğinin şeklini tanımlar.

Bant geçiren filtreyi tanımlayan beş tane özellik olmasına rağmen $-\omega_{c1}, \omega_{c2}, \omega_o, \beta$ ve Q– beş taneden sadece ikisi bağımsız olarak belirlenebilir. Başka bir deyişle, bu özelliklerden iki tanesi için çözüm yapabildiğimizde, diğer üçü aralarındaki bağımlı ilişkilerden hesaplanabilir. Bant geçiren filtreyi inceledikten sonra bu nicelikleri daha ayrıntılı bir şekilde tanımlayacağız. Sonraki kısımda, bant geçiren filtre gibi işlev gören iki *RLC* devresini inceleyeceğiz, sonra da onları niteleyen tüm ifadeleri çıkaracağız.

Seri *RLC* Devresi—Nitel Analiz

Şekil 14.19(a) bir seri *RLC* devresini göstermektedir. Kaynak frekansının değişmesinin çıkış gerilimi üzerindeki etkisini ele almak istiyoruz. Önceki gibi, kaynak frekansındaki değişimler kapasitör ve indüktör empedanslarında bir değişime yol açar. Şimdi ise nitel inceleme bir bakıma daha karmaşıktır, çünkü devre indüktör ve kapasitöre sahiptir.

$\omega = 0$'da, kapasitör açık devre gibi davranır ve indüktör kısa devre gibi davranır. Eşdeğer devre Şekil 14.19(b)'de gösterilmiştir. Kapasitörün empedansını betimleyen açık devre akımın dirence ulaşmasını engeller ve sonuçta çıkış gerilimi sıfırdır.

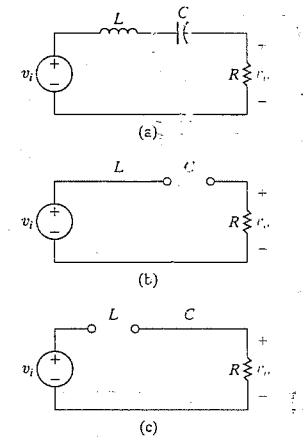
$\omega = \infty$'da, kapasitör kısa devre gibi davranır ve indüktör açık devre gibi davranır. Eşdeğer devre Şekil 14.19(c)'de gösterilmiştir. Şimdi ise indüktör akımın dirence ulaşmasını engeller ve çıkış gerilimi yine sıfırdır.

Fakat $\omega = 0$ ve $\omega = \infty$ arasındaki frekans bölgesinde ne olur? Bu iki uç nokta arasında, kapasitör ve indüktörün ikisi de sonlu empedanslara sahiptir. Bu bölgede, kaynak tarafından sağlanan gerilim indüktör ve kapasitörün üzerine düşecektir, fakat gerilimin bir kısmı dirence ulaşacaktır. Hatırlayınız ki kapasitörün empedansı negatiftir, oysaki indüktör pozitif empedansa sahiptir. Böylece, bir frekansta, kapasitör ve indüktörün empedansları eşit genliğe ve zıt işaretlere sahip olur; iki empedans birbirini yok eder, bu da çıkış geriliminin kaynak gerilimine eşit olmasını sağlar. Bu özel frekans merkez frekansı ω_o'dır. ω_o'nun iki yanında da çıkış gerilimi kaynak geriliminden küçüktür. Dikkat ediniz ki ω_o'da indüktör ve kapasitörün seri eşdeğeri kısa devre gibi görünür.

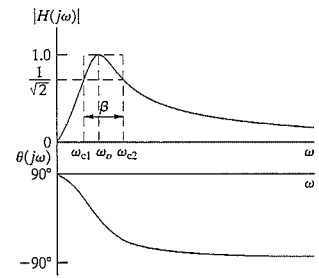
Gerilim genliğinin grafiği Şekil 14.20'de gösterilmiştir. Dikkat edilirse ideal bant geçiren filtrenin gerilim genlik oranı grafiği seri *RLC* aktarım fonksiyonu genliğiyle üst üste gösterilmiştir.

Şimdi çıkış geriliminin faz açısına ne olacağına bakalım. Kaynak ve çıkış geriliminin aynı olduğu frekansta faz açıları da aynıdır. Frekans azaldıkça, kapasitörün faz açısına katkısı indüktörünkinden daha fazla olur. Kapasitör pozitif bir faz açısı katkısı yaptığı için, çıkıştaki toplam faz açısı pozitiftir. Çok düşük frekanslarda, çıkıştaki faz açısı +90°'de en büyüktür.

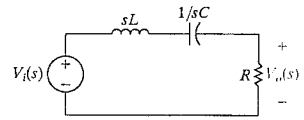
Diğer taraftan, frekans kaynak ve çıkış geriliminin aynı fazda olduğu frekanstan arttırılırsa, indüktörün faz açısına katkısı kapasitörünkinden daha fazla olur. İndüktör negatif faz açısı katkısı yapar, böylece çıkıştaki toplam faz açısı katkısı negatiftir. Çok yüksek frekanslarda, çıkıştaki faz açısı en yüksek negatif değeri olan –90°'ye ulaşır. Böylece faz açısı farkı grafiği Şekil 14.20'de gösterildiği biçimini alır.



Şekil 14.19 ▲ Bant geçiren seri *RLC* filtre; (b) $\omega = 0$ için eşdeğer devre ve (c) $\omega = \infty$ için eşdeğer devre.



Şekil 14.20 ▲ Şekil 14.19'daki bant geçiren seri *RLC* filtre için frekans tepkisi grafiği.



Şekil 14.21 △ Şekil 14.19(a)'daki devrenin s bölgesi eşdeğeri.

Seri *RLC* Devresi – Nicel Analiz

Şekil 14.21'de gösterildiği gibi seri RLC devresi için s bölgesi eşdeğerini çizmekle başlarız. s bölgesi gerilim bölünmesini kullanarak aktarım fonksiyonu için bir eşitlik yazarız:

$$H(s) = \frac{(R/L)s}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}. \tag{14.21}$$

Önceki gibi, Eş. 14.21'de $s = j\omega$'yı yerine koyarız ve aktarım fonksiyonunun genlik ve faz açısı eşitliklerini

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega(R/L)}{\sqrt{[(1/LC) - \omega^2]^2 + [\omega(R/L)]^2}}, \tag{14.22}$$

$$\theta(j\omega) = 90^\circ - \tan^{-1}\left[\frac{\omega(R/L)}{(1/LC) - \omega^2}\right] \tag{14.23}$$

olarak buluruz. Şimdi de bu bant geçiren RLC filtreyi niteleyen beş özelliği hesaplayalım. Merkez frekansı ω_o'nun devrenin aktarım fonksiyonunun sadece gerçek olduğu frekans olduğunu hatırlayınız. Şekil 14.19(a)'daki RLC devresinin aktarım fonksiyonu kaynak geriliminin frekansı kapasitör ve indüktör empedansları toplamlarını sıfır yaptığı zaman gerçek olacaktır:

$$j\omega_o L + \frac{1}{j\omega_o C} = 0. \tag{14.24}$$

Eş. 14.24' ω_o için çözersek

Merkez frekansı ▷

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \tag{14.25}$$

elde ederiz.

Sonra kesim frekansları ω_{c1} ve ω_{c2}'yı hesaplarız. Kesim frekanslarında, aktarım fonksiyonu genliğinin $(1/\sqrt{2})H_{max}$ olduğunu unutmayınız. $H_{max} = |H(j\omega_o)|$ olduğu için, H_{max}'ı Eş. 14.25'i Eş. 14.22'de yerine koyarak hesaplayabiliriz:

$$H_{max} = |H(j\omega_o)|$$

$$= \frac{\omega_o(R/L)}{\sqrt{[(1/LC) - \omega_o^2]^2 + (\omega_o R/L)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(1/LC)}(R/L)}{\sqrt{[(1/LC) - (1/LC)]^2 + \left[\sqrt{(1/LC)}(R/L)\right]^2}} = 1.$$

Şimdi Eş. 14.22'nin sol tarafını $(1/\sqrt{2})H_{max}$'a ($(1/\sqrt{2})$'ye eşittir) eşitler ve ω_c için çözüm yaparsak

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\omega_c(R/L)}{\sqrt{[(1/LC) - \omega_c^2]^2 + (\omega_c R/L)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{[(\omega_c L/R) - (1/\omega_c RC)]^2 + 1}} \tag{14.26}$$

buluruz. Eş. 14.26'nın iki tarafının paydalarını eşitlersek

$$\pm 1 = \omega_c \frac{L}{R} - \frac{1}{\omega_c RC}. \tag{14.27}$$

verir. Eş. 14.27'yi düzenlersek aşağıdaki ikinci dereceden eşitliği elde ederiz:

$$\omega_c^2 L \pm \omega_c R - 1/C = 0. \tag{14.28}$$

Eş. 14.28'in çözümü kesim frekansı için dört değer ortaya çıkarır. Bu değerlerden sadece ikisi pozitiftir ve fiziksel olarak anlamlıdır; bunlar, filtrenin geçirme bandını belirler:

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}, \tag{14.29}$$

◁ **Seri *RLC* filtrelerin kesim frekansları**

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}. \tag{14.30}$$

Eş. 14.29 ve 14.30'u merkez frekansı ω_o'nun iki kesim frekansının geometrik ortalaması olduğunu doğrulamak için kullanabiliriz:

◁ **Merkez frekansıyla kesim frekansları arasındaki ilişki**

$$\omega_o = \sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}}$$

$$= \sqrt{\left[-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}\right]\left[\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{LC}}. \tag{14.31}$$

Bant geçiren filtrenin bant genişliğinin, iki kesim frekansı arasındaki fark olarak tanımlandığını hatırlayalım. $\omega_{c2} > \omega_{c1}$ olduğu için bant genişliğini Eş. 14.30'dan 14.29'u çıkararak hesaplayabiliriz:

Bant genişliği ile kesim frekansları arasındaki ilişki ▷

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1}$$

$$= \left[\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}\right] - \left[-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}\right]$$

$$= \frac{R}{L}. \tag{14.32}$$

Tanımlayıcı beş özellikten sonuncusu, kalite çarpanı, merkez frekansının bant genişliğine oranı olarak tanımlanmıştır. Eş. 14.25'i ve 14.32'yi kullanarak

Kalite Çarpanı ▷

$$Q = \omega_o/\beta$$

$$= \frac{(1/LC)}{(R/L)}$$

$$= \sqrt{\frac{L}{CR^2}} \tag{14.33}$$

bulunur. Şimdi bant geçiren seri RLC filtreyi niteleyen beş özelliğimiz vardır: Geçirme bandını sınırlayan kesim frekansları ω_{c1} ve ω_{c2}, aktarım fonksiyonunun genliğinin en yüksek olduğu merkez frekansı ω_o; geçirme bandının genişliğinin bir ölçüsü olan bant genişliği β ve ikinci bir geçirme bandı genişliği ölçüsü olan kalite çarpanı Q. Önceden belirtildiği gibi, bir tasarımda bu özelliklerden sadece ikisi birbirinden bağımsız olarak belirlenebilir. Kalite çarpanının merkez frekansı ve bant genişliğiyle belirlendiğini gözlemlemiştik. Kesim frekansları eşitliklerini merkez frekansı ve bant genişliği cinsinden

$$\omega_{c1} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}, \tag{14.34}$$

$$\omega_{c2} = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2} \tag{14.35}$$

yazabiliriz. Bu eşitlikler için diğer biçimler, kesim frekanslarını kalite çarpanı ve merkez frekansı cinsinden ifade ederek,

$$\omega_{c1} = \omega_o \cdot \left[-\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\right], \tag{14.36}$$

$$\omega_{c2} = \omega_o \cdot \left[\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\right] \tag{14.37}$$

bulunur. Ayrıca bölüm sonundaki Problem 14.17'ye de bakınız.

İlerideki örnekler bant geçiren filtrelerin tasarımını betimleyecek, bant geçiren filtre gibi davranan başka bir RLC devresini tanıtacak ve kaynak direncinin seri RLC bant geçiren filtreyi niteleyen özellikler üzerindeki etkisini inceleyecektir.

Örnek 14.5 Bant Geçiren Filtre Tasarımı

Grafik denkleştiricisi farklı frekans bölgelerinde farklı yükseltme seviyeleri seçmenizi sağlayan bir ses yükseltecidir. Şekil 14.19(a)'daki seri RLC devresini kullanarak 1-10 kHz frekans bandındaki girişleri seçebilecek bant geçiren filtreyi oluşturacak R, L ve C değerlerini seçiniz. Böyle bir devre grafik denkleştiricisinde bu frekans bandını yükseltmeden önce daha geniş ses bandından (genellikle 0-20 kHz) seçmenizi sağlar.

Çözüm

1 kHz ve 10 kHz kesim fekanslarına sahip bant geçiren filtreyi oluşturacak R, L ve C değerlerini hesaplamamız gerekiyor. Çözüme birçok yönden gidilebilir. Örneğin, ω_{c1}'i ve ω_{c2}'yi R, L ve C cinsinden belirleyen Eş. 14.29 ve 14.30'u kullanabiliriz. Bu eşitliklerin biçimlerinden dolayı cebirsel işlemler karışık olabilir. Onun yerine, merkez frekansının kesim fekanslarının geometrik ortası olduğunu ω_o'yu hesaplamak için, sonra da Eşitlik 14.31'i ω_o'dan L ve C'yi bulmak için kullanacağız. Sonra kalite çarpanı tanımını Q'yu hesaplamak ve sonunda Eş. 14.33'ü R'yi hesaplamak için kullanacağız. Bu yöntem birbirinden bağımsız daha çok adım içerse de her hesaplama oldukça basittir.

Seçtiğimiz her yöntem bant geçiren filtre değişkenleri arasındaki bağımlılıklardan dolayı üç bilinmeyeni çözmek için yetersiz olan sadece iki eşitlik verir. Bu nedenle, R, L veya C için bir değer seçmeliyiz ve geriye kalan devre elemanları değerlerini hesaplamak için seçtiğimiz iki eşitliği kullanmalıyız. Burada, kapasitör değeri olarak 1 μF'ı seçtik, çünkü kapasitörler üzerinde dirençler ve indüktörlerden daha sıkı ticari kısıtlamalar mevcuttur.

Merkez frekansını kesim frekanslarının geometrik ortası olarak hesaplarız:

$$f_o = \sqrt{f_{c1}f_{c2}} = \sqrt{(1000)(10{,}000)} = 3162.28 \text{ Hz}.$$

Sonra, hesaplanan merkez frekansı ve seçilen C değerini kullanarak L değerini hesaplarız. Eş. 14.31'i kullanmadan önce merkez frekansını rad/s'ye çevirmeyi unutmamalıyız:

$$L = \frac{1}{\omega_o^2 C} = \frac{1}{[2\pi(3162.28)]^2(10^{-6})} = 2.533 \text{ mH}.$$

Kalite çarpanı, Q, merkez frekansının bant genişliğine oranı olarak tanımlanmıştı. Bant genişliği iki kesim frekansı değeri arasındaki farktır. O halde,

$$Q = \frac{f_o}{f_{c2} - f_{c1}} = \frac{3162.28}{10{,}000 - 1000} = 0.3514$$

bulunur. Şimdi R'yi hesaplamak için Eş. 14.33'ü kullanalım:

$$R = \sqrt{\frac{L}{CQ^2}} = \sqrt{\frac{0.0025}{(10^{-6})(0.3514)^2}} = 143.24\ \Omega.$$

Bu devre elemanları değerlerinin istediğimiz bant geçiren filtreyi oluşturup oluşturmadığını belirlemek için, değerleri Eş. 14.29 ve 14.30'da yerlerine koyarız. Bulduğumuz

$$\omega_{c1} = 6283.19 \text{ rad/s } (1000 \text{ Hz}),$$

$$\omega_{c2} = 62{,}831.85 \text{ rad/s } (10{,}000 \text{ Hz})$$

filtre için belirlenen kesim frekanslarıdır.

Bu örnek beş bant geçiren filtre değişkeninden sadece ikisinin diğerlerinden bağımsız olarak belirlenebileceğini hatırlatır. Diğer üç değişken, her zaman belirlenen iki değerden hesaplanabilir. Buna karşılık, bu beş değişken değeri, sadece ikisi bağımsız olarak belirlenebilen R, L ve C üç devre elemanı değerine bağlıdır.

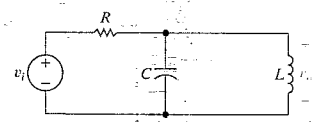
Örnek 14.6 Bant Geçiren Paralel *RLC* Filtre Tasarımı

a) Şekil 14.22'deki *RLC* devresinin aynı zamanda bant geçiren filtre olduğunu aktarım fonksiyonu $H(s)$ için bir ifade çıkararak gösteriniz.

b) Merkez frekansı, ω_o'yu hesaplayınız.

c) Kesim frekansları ω_{c1}'i ve ω_{c2}'yi, bant genişliği β'yı ve kalite çarpanı Q'yu hesaplayınız.

d) 5 μF'lık bir kapasitör kullanarak, merkez frekansı 5 kHz ve bant genişliği 200 Hz olan bir bant geçiren filtreyi oluşturacak R ve L değerlerini hesaplayınız.



Şekil 14.22 ▲ Örnek 14.6 için devre.

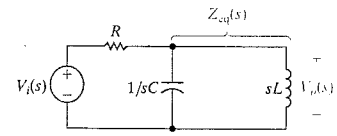
Çözüm

a) Şekil 14.23'te gösterildiği gibi Şekil 14.22'deki devrenin s-bölgesi eşdeğerini çizmekle başlayalım. Gerilim bölünmesini kullanarak, önce L ve C'nin Şekil 14.23'te $Z_{eq}(s)$ olarak belirlenmiş paralel eşdeğer empedansını hesaplarsak eşdeğer devre için aktarım fonksiyonunu hesaplayabiliriz:

$$Z_{eq}(s) = \frac{\dfrac{L}{C}}{sL + \dfrac{1}{sC}}.$$

Şimdi, aktarım fonksiyonunu yazabiliriz:

$$H(s) = \frac{\dfrac{s}{RC}}{s^2 + \dfrac{s}{RC} + \dfrac{1}{LC}}.$$



Şekil 14.23 ▲ Şekil 14.22'deki devrenin s bölgesi eşdeğeri.

b) Merkez frekansını hesaplamak için aktarım fonksiyonunun genliğinin nerede en yüksek olduğunu hesaplamamız gerekir. $H(s)$'de $s = j\omega$'yı yerine koyarsak,

$$|H(j\omega)| = \frac{\dfrac{\omega}{RC}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{RC}\right)^2}}$$

$$= \frac{}{\sqrt{1 + \left(\omega RC - \dfrac{1}{\omega \dfrac{L}{R}}\right)^2}}$$

bulurız. Bu aktarım fonksiyonunun genliği,

$$\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2$$

terimi sıfır olduğunda en yüksektir. O halde,

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

ve

$$H_{max} = |H(j\omega_o)| = 1$$

elde edilir.

c) Kesim frekanslarında, aktarım fonksiyonunun genliği $(1/\sqrt{2})H_{max} = 1/\sqrt{2}$'dir. Bu sabiti genlik eşitliğinin sol tarafında yerine koyar ve sadeleştirirsek,

$$\left[\omega_c RC - \frac{1}{\omega_c \dfrac{L}{R}}\right] = \pm 1$$

elde ederiz. Bu eşitliğin sol tarafının bir daha karesini alırsak kesim frekansları için dört çözümlü iki tane ikinci dereceden eşitlik elde ederiz. Köklerin sadece iki tanesi pozitiftir ve fiziksel olarak anlamlıdır:

$$\omega_{c1} = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}},$$

$$\omega_{c2} = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}.$$

➤ Paralel *RLC* filtrelerin kesim frekansları

Bant genişliğini kesim frekanslarından hesaplarız:

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1}$$

$$= \frac{1}{RC}.$$

Son olarak, Q'yu hesaplamak için kalite çarpanı tanımını kullanırız:

$$Q = \omega_o/\beta$$

$$= \sqrt{\frac{R^2C}{L}}.$$

Dikkat edilmelidir ki bu bant geçiren filtre için kesim fekanslarını merkez frekansı ve bant genişliği cinsinden belirleyebiliriz:

$$\omega_{c1} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2},$$

$$\omega_{c2} = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}.$$

d) R değerini hesaplamak için verilen 5 μF'lık kapasitansla (c)'deki bant genişliği eşitliğini kullanırız. Bant genişliğini uygun birimlere çevirmeyi hatırlayınız:

$$R = \frac{1}{\beta C}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)(200)(5 \times 10^{-6})}$$

$$= 159.15\ \Omega.$$

(c)'deki kapasitans değeri ve merkez frekansı eşitliğini kullanarak indüktör değerini hesaplarız.

$$L = \frac{1}{\omega_o^2 C}$$

$$= \frac{1}{[2\pi(5000)]^2(5 \times 10^{-6})}$$

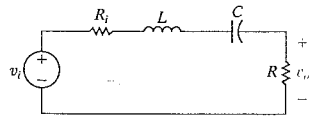
$$= 202.64\ \mu H.$$

Örnek 14.7 İdeal Olmayan Gerilim Kaynağının Bant Geçiren *RLC* Filtre Üzerindeki Etkisinin Belirlenmesi

Oluşturduğumuz her bant geçiren filtre için, her zaman ideal, yani seri direnci olmayan bir gerilim kaynağı olduğunu varsaydık. Bu varsayım çoğu zaman doğru olsa da, filtre tasarımının R, L ve C değerleriyle oluşturulan, eşdeğer empedans değerinin gerilim kaynağının gerçek eşdeğer empedansına yakın olduğu durumlarda geçerli değildir. Sıfır olmayan gerilim direnci R_i'nin bant geçiren *RLC* filtre üzerindeki etkisini inceleyiniz.

a) Şekil 14.24'teki devre için aktarım fonksiyonunu belirleyiniz.

b) Örnek 14.5'teki R, L ve C değerlerini kullanarak ve $R_i = R$ olmak üzere Şekil 14.24'teki devrenin genlik grafiğini çiziniz. Aynı grafikte, $R_i = 0$ olan Örnek14.5'teki devre için genlik grafiğini de çiziniz.

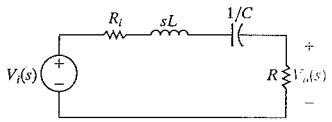


Şekil 14.24 ▲ Örnek 14.7'deki devre.

Çözüm

a) Şekil 14.25'te gösterildiği gibi Şekil 14.24'teki devreyi s bölgesi eşdeğerine dönüştürmekle başlayalım. Aktarım fonksiyonunu oluşturmak için gerilim bölümünü kullanırız:

$$H(s) = \frac{\dfrac{R}{L}s}{s^2 + \left(\dfrac{R + R_i}{L}\right)s + \dfrac{1}{LC}}.$$



Şekil 14.25 ▲ Şekil 14.24'teki devrenin s bölgesi eşdeğeri.

$s = j\omega$'yı yerine koyup aktarım fonksiyonunun genliğini hesaplayabiliriz.

$$|H(j\omega)| = \frac{\frac{R}{L}\omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\omega\frac{R + R_i}{L}\right)^2}}.$$

Merkez frekansı ω_o, aktarım fonksiyonunun genliğinin en yüksek olduğu frekanstır;

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Merkez frekansında en yüksek genlik

$$H_{max} = |H(j\omega_o)| = \frac{R}{R_i + R}\text{'dir.}$$

Kesim frekansları aktarım fonksiyonunun genliğinin $(1/\sqrt{2})H_{max}$'a eşitlenmesiyle hesaplanır:

$$\omega_{c1} = -\frac{R + R_i}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R + R_i}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}},$$

$$\omega_{c2} = \frac{R + R_i}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R + R_i}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}.$$

Bant genişliği kesim frekanslarından bulunur:

$$\beta = \frac{R + R_i}{L}.$$

Son olarak, kalite çarpanı merkez frekansı ve bant genişliğinden

$$Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R + R_i}$$

bulunur. Bu incelemeden sıfır olmayan kaynak direncine sahip bant geçiren seri *RLC* filtrenin aktarım fonksiyonunu şu şekilde yazabileceğimize dikkat ediniz:

$$H(s) = \frac{K\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2},$$

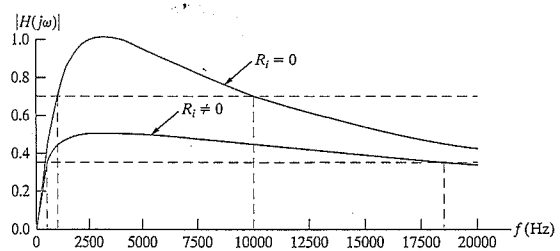
burada

$$K = \frac{R}{R + R_i}$$

ile verilir. Dikkat edilmelidir ki $R_i = 0$, $K = 1$ olduğunda aktarım fonksiyonu aşağıdaki şekildedir,

$$H(s) = \frac{\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}.$$

b) Örnek 14.25'teki devre 3162.28 Hz'lik merkez frekansına, 9 kHz bant genişliğine ve $H_{max} = 1$'e sahiptir. Şekil 14.24'teki devreyle aynı R, L ve C değerlerini kullanırsak ve $R_i = R$ olursa merkez frekansı 3162.28 Hz'de kalır, fakat $\beta = (R + R_i)/L = 18$ kHz ve $H_{max} = R/(R + R_i) = 1/2$ olur. Bu iki bant geçiren filtre için aktarım fonksiyonu genlikleri Şekil 14.26'da aynı grafikte çizilmiştir.



Şekil 14.26 ▲ Bant geçiren seri *RLC* filtrenin sıfır ve sıfır olmayan kaynak dirençli genlik grafikleri.

Niteleyici değişken değerlerini $R_i = 0$ olan filtre ile $R_i \neq 0$ olan filtre için karşılaştırırsak, şunları görürüz:

- Merkez frekansları aynıdır.
- $R_i \neq 0$ olan filtre için en yüksek aktarım fonksiyonu genliği $R_i = 0$ olan filtreninkinden daha küçüktür.
- $R_i \neq 0$ olan filtre için bant genişliği $R_i = 0$ olan filtreninkinden daha geniştir. Bu nedenle, bu iki devre için kesim frekansları ve kalite çarpanları da farklıdır.

Bant geçiren seri *RLC* filtreye sıfırdan farklı bir kaynak direnci eklemek merkez frekansını değiştirmez fakat geçirme bandını genişletir ve geçirme bandı genliğini düşürür.

Burada yüksek geçiren filtreye yük direnci eklenmesiyle aynı tasarım sorununu görürüz; gerilim kaynağının iç direncinden bağımsız olarak aynı filtreleme özelliklerine sahip olan bir bant geçiren filtre tasarlamak istiyoruz. Malesef, pasif devre elemanlarından oluşturulan filtrelerin filtreleme fonksiyonları kaynak direncinin eklenmesiyle değişir. 15. Bölümde aktif filtrelerin kaynak direncinin değişimlerinden etkilenmediğini ve dolayısıyla bunun önemli olduğu tasarımlara daha uygun olduklarını göreceğiz.

Şekil 14.27 çalıştığımız iki bant geçiren *RLC* filtreyi özetler. Devrelerin aktarım fonksiyonları ifadelerinin aynı biçime sahip olduklarına dikkat ediniz. Önceden yaptığımız gibi, bu iki bant geçiren filtre için genel bir ifade biçimi oluşturabiliriz:

$$H(s) = \frac{\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}. \tag{14.38}$$

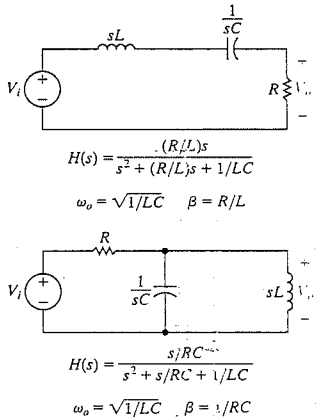
◀ **Bant geçiren *RLC* filtre için aktarım fonksiyonu**

Eş. 14.38'deki aktarım fonksiyonuna sahip herhangi bir devre merkez frekansı ω_o ve bant genişliği β olan bir bant geçiren filtre gibi davranır.

Örnek 14.7'de aktarım fonksiyonunun aşağıdaki şekilde de yazılabileceğini görmüştük:

$$H(s) = \frac{K\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}. \tag{14.39}$$

Burada K ve β değerleri gerilim kaynağının seri direncinin sıfır olup olmamasına bağlıdır.



Şekil 14.27 ▲ Aktarım fonksiyonu, merkez frekansı ve bant genişliği eşitlikleriyle birlikte iki bant geçiren *RLC* filtre.

Frekans Bölgesini Zaman Bölgesiyle İlişkilendirme

Bant geçiren *RLC* filtrelerin zaman ve frekans tepkilerini niteleyen değişkenler arasında bir ilişki tanımlayabiliriz. Şekil 14.19(a)'daki seri *RLC* devresini ele alalım. 8. Bölümde bu devrenin doğal tepkisinin neper frekansı (α) ve rezonans frekansı (ω_o) ile tanımlandığını gördük. Bu değişkenler kolaylık açısından burada belirtildiği

gibi Eş. 8.58'deki ve 8.59'daki devre elemanları cinsinden ifade edilmiştir:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \text{ rad/s}, \tag{14.40}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}} \text{ rad/s}. \tag{14.41}$$

Aynı ω_o değişkeninin zaman ve frekans tepkisini nitelemek için kullanıldığını görüyoruz. O yüzden merkez frekansı aynı zamanda rezonans frekansı olarak da adlandırılır. Bant genişliği ve neper frekansı aşağıdaki eşitlikle ilişkilendirilebilir:

$$\beta = 2\alpha. \tag{14.42}$$

Hatırlayınız ki seri *RLC* devrenin doğal tepkisi eksik sönümlü, aşırı sönümlü ve kritik sönümlü olabilir. Aşırı sönümden eksik sönüme geçiş $\omega_o^2 = \alpha^2$ olduğu zaman gerçekleşir. Eş. 14.42'den α ve β arasındaki ilişkiyi ve kalite çarpanı Q'yu ele alalım. Aşırı sönümden eksik sönüme geçiş $Q = 1/2$ olduğu zaman gerçekleşir. O halde, frekans tepkisi ω_o'da keskin bir tepe içeren, yüksek nitelik çarpanı ve dar bant genişliği olan bir devre eksik sönümlü doğal tepkiye sahip olacaktır. Aynı şekilde, frekans tepkisinde geniş bant genişliği ve düşük kalite çarpanı olan bir devre aşırı sönümlü doğal tepkiye sahip olacaktır.

✓ DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 3—Bant geçiren filtre gibi davranan *RLC* devre yapılarını bilmek

14.6 Şekil 14.19(a)'daki devreyi kullanarak kalite çarpanı 6, merkez frekansı 12 kHz olan bant geçiren filtreyi oluşturacak R ve L değerlerini hesaplayınız. 0.1 μF'lık bir kapasitör kullanınız.

Cevap: $L = 1.76$ mH, $R = 22.10\ \Omega$.

14.7 Şekil 14.22'deki devreyi kullanarak merkez frekansı 2 kHz, bant genişliği 500 Hz olan bant geçiren filtreyi oluşturacak C ve L değerlerini hesaplayınız. 250 Ω'luk bir direnç kullanınız.

Cevap: $L = 4.97$ mH, $C = 1.27\ \mu$F.

14.8 Örnek 14.6(d)'deki devre için 0.2 μF'lık kapasitör kullanarak frekans tepkisi değişmeyecek şekilde devre eleman değerlerini bir daha hesaplayınız.

Cevap: $L = 5.07$ mH, $R = 3.98$ kΩ.

14.9 Örnek 14.6(d)'deki devre için 0.2 μF'lık kapasitör kullanarak kalite çarpanı değişmeyecek fakat merkez frekansı 2 kHz'e taşınacak şekilde devre eleman değerlerini bir daha hesaplayınız.

Cevap: $R = 9.95$ k Ω, $L = 31.66$ mH.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 14.21 ve 14.22'yi de çözmeyi deneyiniz.

14.5 Bant Durduran Filtreler

Dört filtre sınıfının en sonuncusu olan bant durduran filtreye değineceğiz. Bu filtre çıkışa iki kesim frekansı arasındaki bandın dışında olan (geçirme bandı) kaynak gerilimlerini geçirir ve iki kesim frekansı arasındaki frekanslarda olan (durdurma bandı) kaynak gerilimlerini çıkışa ulaşmadan zayıflatır. Bu yüzden bant geçiren ve bant durduran filtreler frekans bölgesinde tümleyici fonksiyonlar sergiler.

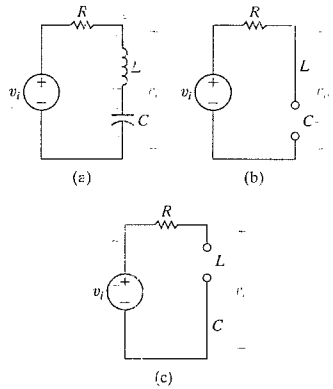
Bant durduran filtreler bant geçiren filtrelerle aynı değişkenler tarafından nitelenirler: İki kesim frekansı, merkez frekansı, bant genişliği ve kalite çarpanı. Yine, bu beş değişkenin sadece ikisi bağımsız bir şekilde belirlenebilir.

İleriki kısımlarda bant durduran filtre gibi davranan iki devreyi inceleyeceğiz, sonra da her devre için devre elemanları değerlerini niteleyici değişkenlere bağlayan eşitlikleri hesaplayacağız.

Seri *RLC* Devresi—Nitel Analiz

Şekil 14.28(a) seri *RLC* devresini göstermektedir. Devre elemanları ve bağlantıları Şekil 14.19(a)'daki bant geçiren seri *RLC* filtreninkiyle aynı olsa da, Şekil 14.28(a)'daki devre önemli bir farka sahiptir: Çıkış gerilimi şimdi indüktör-kapasitör ikilisi üzerinde tanımlanmıştır. Alçak ve yüksek geçiren filtrelerdeki durumlarda gördüğümüz gibi, çıkış geriliminin tanımına bağlı olarak aynı devre iki farklı filtreleme fonksiyonu sergileyebilir.

$\omega = 0$'da, indüktörün kısa devre, kapasitörün de açık devre gibi davrandığını biliyoruz, fakat $\omega = \infty$'da bu davranışlar değişir. Şekil 14.28(b) $\omega = 0$ için, Şekil 14.28(c) $\omega = \infty$ için eşdeğer devreyi göstermektedir. İki eşdeğer devrede, çıkış gerilimi açık devre üzerinde tanımlanmıştır, böylece çıkış ve giriş gerilimleri aynı genliğe sahiptir. Bu bant durduran seri *RLC* devre biri düşük kesim frekansının altında diğeri de yüksek kesim frekansının üstünde olmak üzere iki geçirme bandına sahiptir.

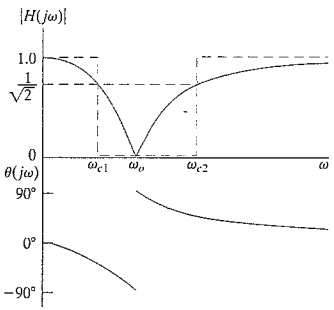


Şekil 14.28 (a) Bant durduran Seri *RLC* filtre. (b) $\omega = 0$ için eşdeğer devre. (c) $\omega = \infty$ için eşdeğer devre.

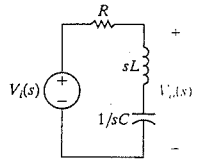
İki geçirme bandının arasında, kapasitör ve indüktörün sonlu değerde fakat zıt işaretli empedansları vardır. Frekans sıfırdan arttırıldığında, indüktörün empedansı artar ve kapasitörünki azalır. Böylece girişle çıkış arasındaki faz kayması $1/\omega C$ ωL'ye yaklaşırken $-90°$'ye yaklaşır. ωL, $1/\omega C$'yi aştığında, faz kayması $+90°$'ye zıplar, sonra da ω artırılmaya devam edildiğinde sıfıra yaklaşır.

Geçirme bantları arasındaki bir frekansta, indüktör ve kapasitörün empedansları eşit fakat zıt işaretlidir. Bu frekansta, kapasitör ve indüktörün seri eşdeğeri kısa devredir, o halde çıkış geriliminin genliği sıfır olmalıdır. Bu frekans bant durduran seri *RLC* filtrenin merkez frekansıdır.

Şekil 14.29, Şekil 14.28(a)'daki bant durduran seri *RLC* filtrenin frekans tepkisi grafiğini gösterir. Dikkat ediniz ki genlik grafiği Şekil 14.3(d)'deki ideal bant durduran filtreninkiyle üst üste çizilmiştir. Nitel incelememiz genlik ve faz açısı grafiklerini doğrulamıştır. Şimdi devrenin nicel incelemesiyle bu frekans tepkisini doğrulayacak ve bu tepkiyi niteleyen değişken değerlerini hesaplayacağız.



Şekil 14.29 Şekil 14.28(a)'daki bant durduran seri *RLC* devrenin frekans tepkisi grafiği.



Şekil 14.30 ▲ Şekil 14.28(a)'daki devrenin s bölgesi eşdeğeri.

Seri *RLC* Devresi – Nitel Analiz

Şekil 14.30'da görüldüğü gibi s bölgesine dönüşüm yapıldıktan sonra aktarım fonksiyonu eşitliğini oluşturmak için gerilim bölümünü kullanırız:

$$H(s) = \frac{sL + \frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}. \tag{14.43}$$

Eşitlik 14.43'te s yerine $j\omega$ koyup aktarım fonksiyonu genliği ve faz açısı için eşitlikler oluşturulursa

$$|H(j\omega)| = \frac{\left|\frac{1}{LC} - \omega^2\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega R}{L}\right)^2}}, \tag{14.44}$$

$$\theta(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\frac{\omega R}{L}}{\frac{1}{LC} - \omega^2}\right) \tag{14.45}$$

elde edilir. Eş. 14.44 ve 14.45'in nitel incelemenin sonucu olan Şekil 14.29'da gösterilen frekans tepkisi grafiğini doğruladığına dikkat ediniz.

Şekil 14.30'daki devreyi merkez frekansını hesaplamak için kullanırız. Bant durduran filtre için, merkez frekansı aynı şekilde kapasitör ve indüktörün empedanslarının toplamının sıfır olduğu frekans olarak tanımlanmıştır. Bant geçiren filtrede, merkez frekansındaki genlik en yüksekti, fakat bant durduran filtrede bu genlik en düşüktür. Çünkü bant durduran filtrede, merkez frekansı geçirme bandında değil de, durdurma bandındadır. Merkez frekansının aşağıdaki şekilde verildiğini göstermek kolaydır:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \tag{14.46}$$

Eş. 14.46'yı 14.44'te yerine koymak $|H(j\omega_o)| = 0$ olduğunu gösterir.

Kesim frekansları, bant genişliği ve kalite çarpanı bant geçiren filtreler için tanımlandığı gibi bant durduran filtreler için de tanımlanmıştır. Eşitlik 14.44'ün sol tarafını $(1/\sqrt{2})H_{max}$'a eşitleyerek kesim frekansları ω_{c1} ve ω_{c2}'yi hesaplarız. Bant durduran filtre

için, $H_{max} = |H(j0)| = |H(j\infty)|$ ve Şekil 14.28(a)'daki bant geçiren seri *RLC* filtre için $H_{max} = 1$ olduğuna dikkat ediniz. O halde,

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}, \tag{14.47}$$

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \tag{14.48}$$

bulunur. Bant genişliği β ifadesi için kesim frekanslarını kullanırız:

$$\beta = R/L. \tag{14.49}$$

Son olarak, merkez frekansı ve bant genişliği, kalite çarpanı Q için bir eşitlik oluşturur:

$$Q = \sqrt{\frac{L}{R^2C}}. \tag{14.50}$$

Yine, bant geçiren filtre için yaptığımız gibi iki kesim frekansını bant genişliği ve merkez frekansı cinsinden ifade edebiliriz:

$$\omega_{c1} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}, \tag{14.51}$$

$$\omega_{c2} = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}. \tag{14.52}$$

Bu eşitlikler için diğer biçimler, kesim frekanslarını kalite çarpanı ve merkez frekansı cinsinden ifade ederek

$$\omega_{c1} = \omega_o \cdot \left[-\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\right], \tag{14.53}$$

$$\omega_{c2} = \omega_o \cdot \left[\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\right] \tag{14.54}$$

bulunur. Örnek 14.8 bant durduran seri *RLC* filtrenin tasarımını göstermektedir.

Örnek 14.8 Bant Durduran Seri *RLC* Filtre Tasarımı

Şekil 14.28(a)'daki seri *RLC* devresini kullanarak 250 Hz bant genişliğine ve 750 Hz merkez frekansına sahip olacak bant durduran filtre için devre elemanları değerlerini hesaplayınız. 100 nF'lık bir kapasitör kullanınız. R, L, ω_{c1}, ω_{c2} ve Q değerlerini hesaplayınız.

Çözüm

Kalite çarpanı tanımını kullanarak bu filtre için Q değerini hesaplamakla başlarız:

$$Q = \omega_o/\beta = 3.$$

L'yi hesaplamak için Eş. 14.46'yı kullanırız, ω_o'yu rad/s'ye çevirmeyi hatırlarsak

$$L = \frac{1}{\omega_o^2 C}$$

$$= \frac{1}{[2\pi(750)]^2(100 \times 10^{-9})}$$

$$= 450 \text{ mH}$$

bulunur. Eş. 14.49'u R'yi hesaplamak için kullanırsak

$$R = \beta L$$

$$= 2\pi(250)(450 \times 10^{-3})$$

$$= 707\ \Omega$$

verir. Bant genişliği ve merkez frekansı değerleri Eş. 14.51 ve 14.52'de kesim frekanslarını hesaplamak için kullanılabilir:

$$\omega_{c1} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}$$

$$= 3992.0 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{c2} = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}$$

$$= 5562.8 \text{ rad/s}$$

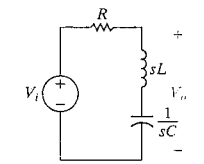
Kesim frekansları 635.3 Hz ve 885.3 Hz'tedir. Farkları 885.3 − 635.3 = 250 Hz istenen bant genişliğini sağlar. Geometrik ortalamaları olan $\sqrt{(635.3)(885.3)} = 750$ Hz değeri de istenen merkez frekansını sağlar.

Şimdi tahmin edeceğiniz gibi, bant durduran filtreyi oluşturacak bir diğer yapı da paralel *RLC* devresidir. Paralel *RLC* devresinin ayrıntılı incelenmesi Problem 14.32'ye bırakılmasına rağmen, bant durduran seri *RLC* filtreyle birlikte sonuçlar Şekil 14.31'de özetlenmiştir. Diğer filtre sınıflarına yaptığımız gibi, bant durduran filtrelerin aktarım fonksiyonları için genel bir ifade belirleyebiliriz, sabit terimleri β ve ω_o ile değiştirirsek

Bant durduran *RLC* filtre için aktarım fonksiyonu ▶

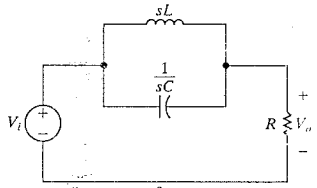
$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_o^2}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}. \tag{14.55}$$

bulunur. Eş. 14.55 filtre tasarımında işe yarar, çünkü bu biçimdeki aktarım fonksiyonuna sahip herhangi bir devre bant durduran filtre olarak kullanılabilir.



$$H(s) = \frac{s^2 + 1/LC}{s^2 + (R/L)s + 1/LC}$$

$$\omega_o = \sqrt{1/LC} \qquad \beta = R/L$$



$$H(s) = \frac{s^2 + 1/LC}{s^2 + s/RC + 1/LC}$$

$$\omega_o = \sqrt{1/LC} \qquad \beta = 1/RC$$

Şekil 14.31 ▲ Aktarım fonksiyonu, merkez frekansı ve bant genişliği eşitlikleriyle birlikte iki bant durduran *RLC* filtre.

✓ DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 4—Bant durduran filtre gibi davranan *RLC* devre yapılarını bilmek

14.10 Şekil 14.28(a)'daki bant durduran seri *RLC* filtre için devre elemanları değerlerini merkez frekansı 4 kHz ve kalite çarpanı 5 olacak şekilde tasarlayınız. 500 nF'lık bir kapasitör kullanınız.

Cevap: $L = 3.17$ mH.

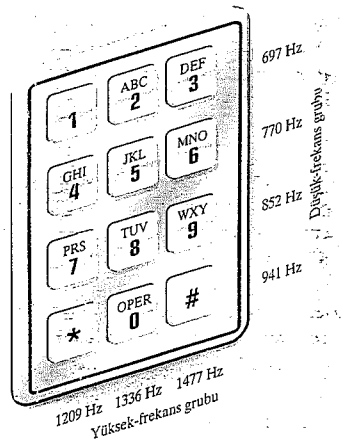
$R = 15.92\ \Omega$.

14.11 Değerlendirme Problemi 14.10'daki devre elemanları değerlerini 20 kHz merkez frekansına sahip bant durduran filtre elde edecek şekilde tekrar hesaplayınız. Filtrenin direnci 100 Ω, kalite çarpanı 5'tir.

Cevap: $L = 3.98$ mH.

$C = 15.92$ nF.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 14.33 ve 14.34'ü de çözmeyi deneyiniz.



Şekil 14.32 Tonlar telefon tuşlarının satır ve kolonu ile üretilir.

Pratik Bakış Açısı

Tuşlu Telefon Devreleri

Bölümün başındaki Pratik Bakış Açısında, tuşlu telefonda düğmeye basıldığı sinyalini veren çifte ton-çoklu frekans (DTMF) sisteminitanımladık. DTMF sisteminin anahtar elemanı DTMF alıcısı tuşa basılmasıyla üretilen tonların kodlarının çözülmesine yarayan ve hangi tuşa basıldığını belirleyen bir devredir.

Bir DTMF alıcısı tasarlamak için DTMF sistemini daha iyi anlamamız gerekir. Şekil 14.32'den görüldüğü gibi, telefon üzerindeki tuşlar satırlar ve kolonlar halinde düzenlenmiştir. Bir tuşa basıldığında üretilen ton çifti, tuşun bulunduğu satır ve kolona bağlıdır. Tuşun satırı düşük frekans tonunu, kolonu ise yüksek frekans tonunu belirler[1]. Örneğin "6" tuşuna basılması 770 Hz ve 1477 Hz fekanslarında sinüzoidal tonlar üretir.

Telefon anahtarlama tesisinde, DTMF alıcısındaki bant geçiren filtreler ilk önce düşük ve yüksek frekans gruplarının aynı anda mevcut olup olmadıklarını tespit eder. Bu test DTMF olmayan birçok ikincil ses sinyalinin bastırılmasını sağlar. Tonlar bantların ikisinde de mevcutsa, diğer filtreler her banttaki mümkün tonlar arasında seçim yapmak için kullanılırlar ve böylece frekanslar tek bir tuş sinyaline çevrilebilir. Yanlış tuş basımını önlemek için ek testler yapılır. Örneğin, her bir frekans bandı için tek bir tona izin verilir; yüksek ve düşük bant frekanslarının geçerli sayılabilmeleri için birinin diğerinden birkaç milisaniye önce başlaması ve bitmesi gerekir; ayrıca yüksek ve düşük bant sinyal genliklerinin birbirlerine yeterince yakın olması gerekir.

DTMF tonlarının yüksek frekans gruplarında yüksek geçiren filtre yerine niçin bant geçiren filtre ve düşük frekans grubu için alçak geçiren filtre kullanıldığını merak etmişsinizdir. Telefon sistemi, telefon zilinin çalması gibi diğer sinyal verme amaçlarından dolayı 300-3 kHz bandı dışındaki frekansları kullanır. Bant geçiren filtreler DTMF alıcısının bu gibi diğer sinyalleri yanlışlıkla almasını önler.

NOT: Bu Pratik Bakış Açısını kavrayışınızı Bölüm Problemleri 14.43-14.45'i çözmeye çalışarak değerlendiriniz.

1 Dördüncü yüksek frekans tonu için 1633 Hz tahsis edilmiştir. Bu ton sıklıkla kullanılmaz ve standart 12 tuşlu telefonlarda üretilmez.

Özet

- **Frekans seçici devre** veya **filtre**, belli frekanslardaki sinyallerin çıkışa ulaşmasını sağlar ve diğer frekanslardaki sinyalleri çıkışa ulaşmalarını engellemek için zayıflatır. **Geçirme bandı** geçirilen sinyallerin frekanslarını, **durdurma bandı** da zayıflatılan sinyallerin frekanslarını içerir. (Bkz. Sayfa 568.)
- **Kesim frekansı** ω_c, frekans ekseninde durdurma bandını geçirme bandından ayıran yeri belirler. Kesim frekansında, aktarım fonksiyonunun genliği $(1/\sqrt{2})H_{max}$'a eşittir. (Bkz. Sayfa 571.)
- **Alçak geçiren filtre** ω_c'nin altındaki frekansları geçirir ve üstündekileri zayıflatır. Aşağıdaki aktarım fonksiyonuna sahip herhangi bir devre

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

alçak geçiren filtre gibi davranır. (Bkz. Sayfa 576.)

- **Yüksek geçiren filtre** ω_c'nin üstündeki frekansları geçirir ve altındakileri zayıflatır. Aşağıdaki aktarım fonksiyonuna sahip herhangi bir devre

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_c}$$

yüksek geçiren filtre gibi davranır. (Bkz. Sayfa 581.)

- Bant geçiren ve bant durduran filtreler ω_{c1} ve ω_{c2}'de kesim frekanslarına sahiptirler. Bu filtreler **merkez frekansı** (ω_o), **bant genişliği** (β) ve **kalite çarpanı** (Q) ile nitelendirilir. Bu değişkenler şöyle tanımlanmıştır:

$$\omega_o = \sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}},$$
$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1},$$
$$Q = \omega_o/\beta.$$

(Bkz. Sayfa 585-586.)

- **Bant geçiren filtre** ω_{c1} ve ω_{c2} arasındaki frekanslar olan geçirme bandındaki gerilimleri geçirir. Bu bandın dışındaki frekansları bastırır. Aşağıdaki aktarım fonksiyonuna sahip herhangi bir devre

$$H(s) = \frac{\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}$$

bant geçiren filtre gibi davranır. (Bkz. Sayfa 591.)

- **Bant durduran filtre** ω_{c1} ve ω_{c2} arasındaki frekanslar olan durdurma bandındaki gerilimleri bastırır. Durdurma bandının dışındaki frekansları geçirir. Aşağıdaki aktarım fonksiyonuna sahip herhangi bir devre

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_o^2}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}$$

bant durduran filtre gibi davranır. (Bkz. Sayfa 596.)

- Pasif bir filtrenin çıkışına yük eklenmesi, geçirme bandının yerini ve genliğini değiştirerek filtreleme özelliklerini değiştirir. İdeal gerilim kaynağını kaynak direnci sıfır olmayan bir gerilim kaynağıyla değiştirmek aynı şekilde filtreleme özelliklerini değiştirir. (Bkz. Sayfa 589.)

Problemler

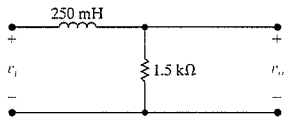
Kısım 14.2

14.1 a) Şekil P14.1'de gösterilen RL filtrenin kesim frekansını hertz cinsinden bulunuz.

b) $H(j\omega)$'yı ω_c, $0.3\omega_c$ ve $3\omega_c$'de hesaplayınız.

c) $v_i = 50 \cos \omega t$ V ise, v_o için durgun durum ifadesini $\omega = \omega_c$, $\omega = 0.3\ \omega_c$ ve $\omega = 3\omega_c$ iken yazınız.

Şekil P14.1



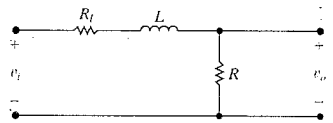
14.2 25 mH'lik bir indüktör kullanarak 2.5 kHz kesim frekansına sahip alçak geçiren, RL, pasif bir filtre tasarlayınız.
TASARIM PROBLEMİ PSPICE

a) Direncin değerini belirleyiniz.
b) Filtrenin çıkış uçlarına 750 Ω'luk bir direnç bağlanmıştır. Yüklü filtrenin hertz cinsinden köşe veya kesim frekansı nedir?

14.3 R_l ile gösterilen direnç Şekil 14.4(a)'daki devrede indüktöre seri bağlanmıştır. Yeni alçak geçiren filtre devresi Şekil P14.3'te gösterilmiştir.

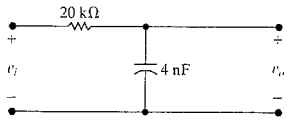
a) $H(s)$ ifadesini türetiniz, burada $H(s) = V_o/V_i$'dir.
b) Hangi frekansta $H(j\omega)$'nın genliği en yüksek olur?
c) $H(j\omega)$'nın en yüksek genliğinin değeri nedir?
d) Hangi frekansta $H(j\omega)$'nın genliği en yüksek değerinin $\sqrt{2}$'ye oranı olur?
e) Şekil P14.1'deki devrede 250 mH'lik indüktöre 75 Ω'luk direncin seri bağlandığını düşünelim. ω_c, $H(j0)$, $H(j\omega_c)$, $H(j0.3\omega_c)$ ve $H(j3\omega_c)$'yi bulunuz.

Şekil P14.3



14.4 a) Şekil P14.4'teki alçak geçiren filtrenin kesim frekansını (hertz cinsinden) bulunuz.
b) $H(j\omega)$'yı ω_c, $0.2\omega_c$ ve $8\omega_c$'de hesaplayınız.
c) $v_i = 480 \cos \omega t$ mV ise, v_o için durgun durum ifadesini $\omega = \omega_c$, $0.2\omega_c$ ve $8\omega_c$ iken yazınız.

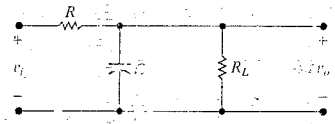
Şekil P14.4



14.5 R_L ile gösterilen direnç Şekil 14.7'deki devrede kapasitöre paralel bağlanmıştır. Yüklü alçak geçiren filtre devresi Şekil P14.5'te gösterilmiştir.

a) Gerilim aktarım fonksiyonu ifadesi V_o/V_i'yi türetiniz.
b) Hangi frekansta $H(j\omega)$'nın genliği en yüksek olur?
c) $H(j\omega)$'nın en yüksek genliğinin değeri nedir?
d) Hangi frekansta $H(j\omega)$'nın genliği en yüksek değerinin $\sqrt{2}$'ye oranı olur?
e) Şekil P14.4'teki devrede 4 nF'lık kapasitöre 800 kΩ'luk direncin paralel bağlandığını düşünelim. ω_c, $H(j0)$, $H(j\omega c)$, $H(j0.2\omega_c)$ ve $H(j8\omega_c)$'yi bulunuz.

Şekil P14.5



14.6 25 nF'lık bir kapasitör kullanarak 160 krad/s kesim frekansına sahip alçak geçiren pasif bir filtre tasarlayınız.
TASARIM PROBLEMİ PSPICE

a) Kesim frekansını hertz cinsinden belirleyiniz.
b) Filtre direncinin değerini belirleyiniz.
c) Kesim frekansının %8'den daha fazla artamayacağını düşünelim. Filtrenin çıkış uçlarına bağlanabilecek yük direncinin en küçük değeri nedir?
d) (c)'de bulunan direnç çıkış uçlarına bağlanırsa, $\omega = 0$ iken $H(j\omega)$'nın genliği ne olur?

14.7 50 nF'lık bir kapasitör kullanarak 500 Hz kesim frekansında pasif bir alçak geçiren RC filtre (bkz. Şekil 14.7) tasarlayınız.

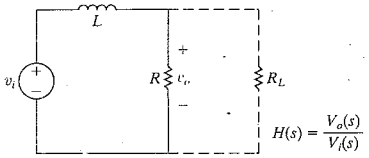
a) Rad/s cinsinden kesim frekansı nedir?
b) Direncin değeri nedir?
c) Devre elemanları değerleri ve çıkış gerilimini yazarak devrenizi çiziniz.
d) (c)'deki filtrenin aktarım fonksiyonu nedir?
e) (c)'deki filtre, değeri (b)'dekiyle aynı olan dirençle yüklenirse, yüklü filtrenin aktarım fonksiyonu ne olur?

f) (e)'deki yüklü filtrenin kesim frekansı nedir?
g) (e)'deki yüklü filtrenin geçirme bandındaki kazancı nedir?

14.8 Şekil P14.8'de gösterilen devreyi (yük direnci olmadan) çalışınız.

a) $\omega \to 0$ iken, indüktör nasıl bir devre elemanı gibi davranır? Çıkış gerilimi v_o hangi değeri alır?
b) $\omega \to \infty$ iken, indüktör nasıl bir devre elemanı gibi davranır? Çıkış gerilimi v_o hangi değeri alır?
c) (a) ve (b) kısımlarına bağlı olarak bu devre nasıl bir filtreleme özelliği gösterir?
d) Yüksüz filtrenin aktarım fonksiyonu nedir?
e) $R = 1$ kΩ ve $L = 20$ mH ise filtrenin rad/s cinsinden kesim frekansı nedir?

Şekil P14.8



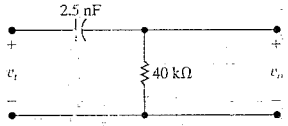
14.9 Şekil P14.8'de gösterilen devredeki dirence paralel bir yük direnci eklemek istediğimizi düşünelim.

a) Yüklü filtrenin aktarım fonksiyonu nedir?
b) Yüksüz filtre (Problem 14.8, kısım (d)) ile yüklü filtrenin (Problem 14.9, kısım (a)) aktarım fonksiyonlarını karşılaştırınız. Kesim frekansları farklı mı? Geçirme bandı kazançları farklı mı?
c) Kesim frekansı yüksüz filtreninkinden %10'dan daha fazla değişmeyecek şekilde Problem 14.8(e)'deki filtrenin çıkış uçlarına bağlanabilecek yük direncinin en küçük değeri nedir?

Kısım 14.3

14.10 a) Şekil P14.10'da gösterilen yüksek geçiren filtrenin kesim frekansını hertz cinsinden bulunuz.
b) $H(j\omega)$'yı ω_c, $0.1\omega_c$ ve $10\omega_c$'de hesaplayınız.
c) $v_i = 800 \cos \omega t$ mV ise, v_o için durgun durum ifadesini $\omega = \omega_c$, $\omega = 0.1\omega_c$ ve $\omega_c = 10\,\omega_c$ iken yazınız.

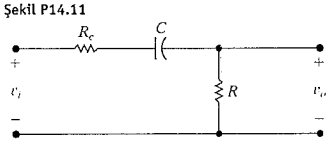
Şekil P14.10



14.11 R_c ile gösterilen direnç Şekil 14.10(a)'daki devrede kapasitöre seri bağlanmıştır. Yeni yüksek geçiren filtre devresi Şekil P14.11'de gösterilmiştir.

a) Gerilim aktarım fonksiyonu ifadesi $H(s) = V_o/V_i$'yi çıkarınız.
b) Hangi frekansta $H(j\omega)$'nın genliği en yüksek olur?
c) $H(j\omega)$'nın en yüksek genliğinin değeri nedir?
d) Hangi frekansta $H(j\omega)$'nın genliği en yüksek değerinin $\sqrt{2}$'ye oranı olur?
e) Şekil P14.10'daki devrede 2.5 nF'lık kapasitöre 10 Ω'luk direncin seri bağlandığını düşünelim. ω_c, $H(j\omega_c)$, $H(j0.1\omega_c)$ ve $H(j10\omega_c)$'yi bulunuz.

Şekil P14.11



14.12 20 nF'lık bir kapasitör kullanarak 800 Hz kesim frekansına sahip yüksek geçiren pasif bir RL filtresi tasarlayınız.
TASARIM PROBLEMİ PSPICE

a) Direncin değerini kiloohm cinsinden belirleyiniz.
b) Filtrenin çıkış uçlarına 68 kΩ'luk bir direnç bağlanmıştır. Yüklü filtrenin hertz cinsinden kesim frekansı nedir?

14.13 TASARIM PROBLEMİ PSPICE 25 mH'lik bir indüktör kullanarak 160 krad/s kesim frekansına sahip yüksek geçiren, *RL*, pasif bir filtre tasarlayınız.

a) Direncin değerini belirleyiniz.

b) Filtrenin çıkış uçlarına sadece bir direnç bağlanmıştır. Kesim frekansının 150 krad/s'nin altına düşmemesi istenmektedir. Filtrenin çıkış termenallerine bağlanabilecek en küçük yük direnci nedir?

14.14 100 nF'lık bir kapasitör kullanarak 300 Hz kesim frekansında pasif bir *RC* yüksek geçiren filtre (bkz. Şekil 14.10[a]) tasarlayınız.

a) Rad/s cinsinden kesim frekansı nedir?

b) Direncin değeri nedir?

c) Devre elemanları değerleri ve çıkış gerilimini yazarak devrenizi çiziniz.

d) (c)'deki filtrenin aktarım fonksiyonu nedir?

e) (c)'deki filtre değeri (b)'dekiyle aynı olan dirençle yüklenirse, yüklü filtrenin aktarım fonksiyonu ne olur?

f) (e)'deki yüklü filtrenin kesim frekansı nedir?

g) (e)'deki yüklü filtrenin geçirme bandındaki kazancı nedir?

14.15 Şekil P14.15'teki devreyi ele alınız.

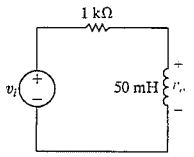
a) Şekilde gösterilen giriş ve çıkış gerilimlerine bakarak bu devre hangi tür filtre gibi davranır?

b) Bu filtrenin aktarım fonksiyonu $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$ nedir?

c) Bu filtrenin kesim frekansı nedir?

d) $s = j\omega_c$'de filtrenin aktarım fonksiyonunun genliği nedir?

Şekil P14.15



14.16 1 kΩ'luk yük direncinin Şekil P14.15'teki filtreye bağlandığını düşünelim.

a) Bu filtrenin aktarım fonksiyonu, $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$, nedir?

b) Bu filtrenin kesim frekansı nedir?

c) Yüklü fitreyle Şekil P14.15'teki yüksüz filtrenin kesim frekansları arasında nasıl fark vardır?

d) Bu iki filtre için başka ne gibi farklılıklar vardır?

Kısım 14.4

14.17 Kesim frekanslarının Eş. 14.36 ve 14.37'de verilen diğer ifade biçimlerinin Eş. 14.34 ve 14.35'ten çıkarılabileceğini gösteriniz.

14.18 Üst kesim frekansı 200 krad/s ve alt kesim frekansı 180 krad/s olan bant geçiren filtrenin merkez frekansı, bant genişliği ve kalite çarpanını hesaplayınız.

14.19 Bir bant geçiren filtrenin merkez veya rezonans frekansı 80 krad/s ve kalite çarpanı 8'dir. Bant genişliğini, üst ve alt kesim frekanslarını bulunuz. Tüm cevapları kilohertz cinsinden ifade ediniz.

14.20 TASARIM PROBLEMİ PSPICE 20 nF'lık bir kapasitör kullanarak Şekil 14.27'nin en üstünde gösterildiği gibi seri bir *RLC* bant geçiren filtre tasarlayınız. Filtrenin merkez frekansı 20 kHz ve kalite çarpanı 5'tir.

a) *R* ve *L* değerlerini belirleyiniz.

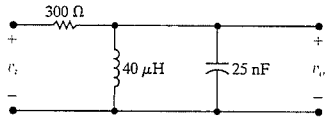
b) Alt kesim frekansı kilohertz cinsinden nedir?

c) Üst kesim frekansı kilohertz cinsinden nedir?

d) Fitrenin bant genişliği kilohertz cinsinden nedir?

14.21 Şekil P14.21'de gösterilen bant geçiren filtre için (a) ω_o, (b) f_o, (c) Q (d) ω_{c1}, (e) f_{c1}, (f) ω_{c2}, (g) f_{c2} ve (h) β'yı bulunuz.

Şekil P14.21



14.22 TASARIM PROBLEMİ PSPICE Şekil 14.22'deki bant geçiren filtre devresinde 25 nF'lık bir kapasitör kullanarak kalite çarpanı 10 ve merkez frekansı 50 krad/s olan bir filtre tasarlayınız.

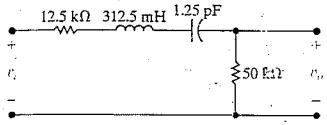
a) *R* ve *L*'nin sayısal değerlerini belirleyiniz.

b) Üst ve alt kesim frekanslarını kilohertz cinsinden hesaplayınız.

c) Bant genişliğini hertz cinsinden hesaplayınız.

14.23 PSPICE Şekil P14.23'te gösterilen bant geçiren filtre için (a) f_o; (b) Q; (c) f_{c1}; (d) f_{c2} ve β'yı hesaplayınız.

Şekil P14.23



14.24 Şekil P14.23'teki devrede giriş gerilimi 800 cos ωt mV ise çıkış gerilimini (a) $\omega = \omega_o$; (b) $\omega = \omega_{c1}$ ve (c) $\omega = \omega_{c2}$ iken hesaplayınız.

14.25 0.05 μF'lık bir kapasitör kullanarak 20 krad/s kesim frekansında seri bir *RLC* bant geçiren filtre (bkz. Şekil 14.19[a]) tasarlayınız.

a) Devre elemanları değerleri ve çıkış gerilimini yazarak devrenizi çiziniz.

b) (a) kısmındaki filtre için bant genişliğini ve iki kesim frekansı değerlerini hesaplayınız.

14.26 Problem 14.25'te tasarlanan seri *RLC* bant geçiren filtrenin girişi 200cosωt mV'tur. (a) $\omega = \omega_o$; (b) $\omega = \omega_{c1}$; (c) $\omega = \omega_{c2}$ (d) $\omega = 0.1\omega_o$; (e) $\omega = 10\,\omega_o$ iken direnç üzerindeki gerilim düşüşünü bulunuz.

14.27 Problem 14.25'te tasarlanan seri *RLC* bant geçiren filtrenin girişi 200cosωt mV'tur. (a) $\omega = \omega_o$; (b) $\omega = \omega_{c1}$; (c) $\omega = \omega_{c2}$ (d) $\omega = 0.1\omega_o$; (e) $\omega = 10\omega_o$ iken indüktör ve kapasitör seri eşdeğeri üzerindeki gerilim düşüşünü bulunuz.

14.28 Sinüzoidal gerilim kaynağı, seri *RLC* bant geçiren filtre ve bir yükten oluşan sistemin blok şeması Şekil P14.28'de gösterilmiştir. Sinüzoidal kaynağın iç direnci 36 + *j*0 Ω, yükün direnci 320 + *j*0 Ω'dur. Seri bant geçiren *RLC* filtrenin kapasitörü 5 nF, merkez frekansı 250 krad/s ve kalite çarpanı 10'dur.

a) Sistemin devre şemasını çiziniz.

b) Sistemin devre kısmındaki *R* ve *L*'nin sayısal değerlerini belirleyiniz.

c) Birbirine bağlı sistemin kalite çarpanı nedir?

d) Tüm sistemin hertz cinsinden bant genişliği nedir?

Şekil P14.28

14.29 Bu problemin amacı Şekil 14.19'da gösterilen bant geçiren filtrenin çıkış uçlarına bağlanan yük direncinin kalite çarpanını ve dolayısıyla filtreleme sisteminin bant genişliğini nasıl etkilediğini incelemektir. Yüklü filtre devresi Şekil P14.29'da gösterilmiştir.

a) Şekil P14.29'da gösterilen devrenin aktarım fonksiyonu V_o/V_i'yi hesaplayınız.

b) Sistemin bant genişliği ifadesi nedir?

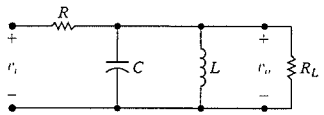
c) Yüklü haldeki bant genişliği (β_L)'nin yüksüz haldeki bant genişliği (β_U) cinsinden ifadesi nedir?

d) Sistemin kalite çarpanı ifadesi nedir?

e) Yüklü haldeki kalite çarpanı (Q_L)'nin yüksüz haldeki kalite çarpanı (Q_U) cinsinden ifadesi nedir?

f) Kesim frekansları ω_{c1} ve ω_{c2} ifadeleri nedir?

Şekil P14.29



14.30 PSPICE Şekil P14.30'daki devreyi ele alınız.

a) ω_o'yu bulunuz.

b) β'yı bulunuz.

c) Q'yu bulunuz.

d) $v_i = 750 \cos \omega_o t$ mV iken v_o için durgun durum ifadesini bulunuz.

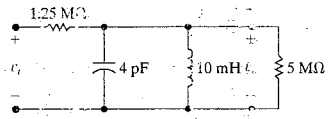
e) R_L megaohm'lar ile ifade edilirse Şekil P14.30'daki devrenin kalite çarpanının

$$Q = \frac{25}{1 + 1.25/R_L}$$

olduğunu gösteriniz.

f) R_L için $1\ \text{M}\Omega \le R_L \le 40\ \text{M}\Omega$'a karşılık Q'yu çiziniz.

Şekil P14.30



14.31 Şekil P14.30'daki devre için değişken değerleri $R = 100\ \text{k}\Omega$, $C = 4$ pF, ve $L = 400\ \mu$H'dir. Devrenin kalite çarpanının 9'un altına düşmemesi istenmektedir. Kabul edilebilecek en küçük R_L direnci değeri nedir?

Kısım 14.5

14.32 a) Şekil P14.32'deki devrenin bant durduran filtre olduğunu (nitel analizle) gösteriniz.

b) (a)'daki nitel incelemeyi gerilim aktarım fonksiyonunu bularak destekleyiniz.

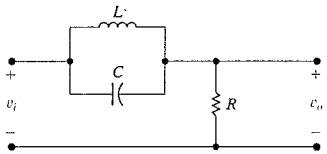
c) Filtrenin merkez frekansı için bir ifade çıkarınız.

d) Kesim frekansları ω_{c1} ve ω_{c2} ifadelerini çıkarınız.

e) Filtrenin bant genişliği ifadesi nedir?

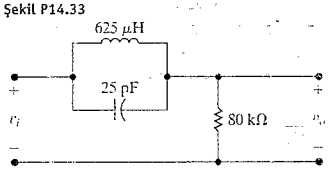
f) Devrenin kalite çarpanı ifadesi nedir?

Şekil P14.32



14.33 PSPICE Şekil P14.33'teki bant durduran filtre için (a) ω_o; (b) f_o; (c) Q; (d) ω_{c1}; (e) f_{c1}; (f) ω_{c2}; (g) f_{c2} ve (h) β'yı kilohertz cinsinden hesaplayınız.

Şekil P14.33



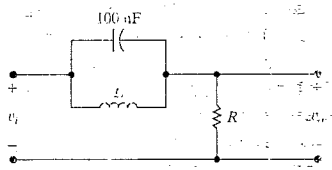
14.34 TASARIM PROBLEMİ PSPICE Şekil P14.34'teki bant durduran filtre devresinde 100 nF'lık bir kapasitör kullanarak nitelik çarpanı 8 ve merkez frekansı 50 kHz olan bir filtre tasarlayınız.

a) R ve L'nin sayısal değerlerini belirleyiniz.

b) Üst ve alt kesim frekanslarını kilohertz cinsinden hesaplayınız.

c) Filtrenin bant genişliğini hertz cinsinden hesaplayınız.

Şekil P14.34



14.35 PSPICE Problem 14.34'teki bant durduran filtrenin 932 Ω'luk dirençle yüklendiğini düşünelim.

a) Yüklü devrenin kalite çarpanı nedir?

b) Yüklü devrenin kilohertz cinsinden bant genişliği nedir?

c) Üst kesim frekansının kilohertz cinsinden değeri nedir?

d) Alt kesim frekansının kilohertz cinsinden değeri nedir?

14.36 80 nF'lık bir kapasitör kullanarak 2/3 kalite çarpanı ve 4 krad/s kesim frekansına sahip bir bant durduran RLC filtre (bkz. Şekil 14.28[a]) tasarlayınız.

a) Devre elemanları değerleri ve çıkış gerilimini yazarak devrenizi çiziniz.

b) (a)'daki filtrenin bant genişliğini ve iki kesim frekansını hesaplayınız.

14.37 Problem 14.36'da tasarlanan RLC bant durduran filtrenin girişi $125\cos\omega t$ mV'tur. (a) $\omega = \omega_o$; (b) $\omega = \omega_{c1}$; (c) $\omega = \omega_{c2}$ (d) $\omega = 0.1\omega_o$; (e) $\omega = 10\omega_o$ iken indüktör ve kapasitör seri eşdeğeri üzerindeki gerilim düşüşünü bulunuz.

14.38 Problem 14.36'da tasarlanan RLC bant durduran filtrenin girişi $125\cos\omega t$ mV'tur. (a) $\omega = \omega_o$; (b) $\omega = \omega_{c1}$; (c) $\omega = \omega_{c2}$ (d) $\omega = 0.1\omega_o$; (e) $\omega = 10\ \omega_o$ iken direnç üzerindeki gerilim düşüşünü bulunuz.

14.39 Bu problemin amacı Şekil 14.28(a)'da gösterilen bant durduran filtrenin çıkış uçlarına bağlanan yük direncinin filtre davranışını nasıl etkilediğini incelemektir. Yüklü filtre devresi Şekil P14.39'da gösterilmiştir.

a) Gerilim aktarım fonksiyonu V_o/V_i'yi hesaplayınız.

b) Sistemin merkez frekansının ifadesi nedir?

c) Sistemin bant genişliği ifadesi nedir?

d) Sistemin kalite çarpanı ifadesi nedir?

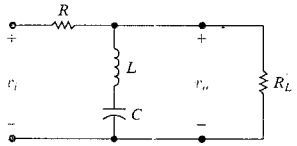
e) $H(j\omega 0)$'ı hesaplayınız.

f) $H(j0)$'ı hesaplayınız.

g) $H(j\infty)$'u hesaplayınız.

h) Köşe frekansları ω_{c1} ve ω_{c2} ifadeleri nedir?

Şekil P14.39



14.40 PSPICE Şekil P14.39'daki devrenin değişken değerleri $R = 5\ \text{k}\Omega$, $L = 400$ mH, $C = 250$ pF ve $R_L = 20\ \text{k}\Omega$'dur.

a) ω_o'yu (kilohertz cinsinden) ve Q'yu bulunuz.

b) $H(j0)$ ve $H(j\infty)$'u bulunuz.

c) f_{c2} ve f_{c1}'yi bulunuz.

d) R_L megaohm'lar ile ifade edilirse devrenin kalite çarpanının

$$Q = 8[1 + (5/R_L)]$$

olduğunu gösteriniz.

e) R_L için $2\ \text{k}\Omega \le R_L \le 50\ \text{k}\Omega$'a karşı Q'yu çiziniz.

14.41 PSPICE Şekil P14.39'da gösterilen bant durduran filtre devresinin yükü 36 kΩ'dur. Filtrenin merkez frekansı 1 Mrad/s ve kapasitörü 400 pF'tır. Çok yüksek ve çok düşük frekanslarda sinüzoidal çıkış geriliminin, sinüzoidal giriş geriliminin en az %96'sı olması istenmektedir.

a) R ve L'nin sayısal değerlerini belirleyiniz.

b) Devrenin kalite çarpanı nedir?

Kısım 14.1-14.5

14.42 Aşağıdaki gerilim aktarım fonksiyonu verilmektedir.

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{4 \times 10^6}{s^2 + 500s + 4 \times 10^6}.$$

a) Hangi frekanslarda (rad/s cinsinden) V_i/V_o oranı bire eşittir?

b) Hangi frekansta bu oran en yüksektir?

c) Oranın en yüksek değeri nedir?

14.43 PRATİK BAKIŞ AÇISI TASARIM PROBLEMİ Şekil 14.32'de gösterildiği gibi telefon tuşuna basılmasıyla üretilen düşük frekanslı tonu algılamak için seri bir RLC bant geçiren filtre (bkz. Şekil 14.27) tasarlayınız.

a) Kesim frekanslarını DTMF düşük frekans bandının uçlarına yerleştirecek L ve C değerlerini hesaplayınız. Standart telefon devrelerinde direncin her zaman $R = 600\ \Omega$ olduğuna dikkat ediniz.

b) Bant geçiren filtrenin en yüksek genliğine göre bu devrenin düşük bant frekanslarının ikisindeki çıkış genliği nedir?

c) Bu devrenin yüksek bant frekanslarının en düşüğündeki çıkış genliği nedir?

14.44 PRATİK BAKIŞ AÇISI TASARIM PROBLEMİ Problem 14.43'teki düşük bantlı filtre tasarımına benzer yüksek bantlı DTMF bant geçiren filtre tasarlayınız. Tasarımınıza dördüncü yüksek frekans tonu, 1633 Hz'i katmayı unutmayınız. Düşük frekanslı DTMF tonlarının en yükseği için filtrenizin tepki genliği nedir?

14.45 PRATİK BAKIŞ AÇISI TASARIM PROBLEMİ Telefonun zilini çalan 20 Hz'lik sinyalin yeterince yüksek zil sesi üretmesi için çok büyük bir genliğinin olması gerekir. Problem 14.43'teki filtrenin tepkisinin DTMF tonlarının en büyüğünün en çok yarısı kadar olması için düşük bant DMTF sinyaline göre çalma sinyalinin genliği en çok ne olabilir?

Aktif Filtre Devreleri

BÖLÜM İÇERİĞİ

15.1 Birinci Mertebeden Alçak Geçiren ve Yüksek Geçiren Filtreler *s. 608*

15.2 Ölçeklendirme *s. 612*

15.3 Op Amp Bant Geçiren ve Bant Durduran Filtreler *s. 615*

15.4 Yüksek Mertebeden Op Amp Filtreler *s. 622*

15.5 Darbant Bant Geçiren ve Bant Durduran Filtreler *s. 636*

BÖLÜM HEDEFLERİ

1 Op amp devrelerinin birinci mertebeden alçak geçiren ve yüksek geçiren filtreler olarak davrandığını bilmek ve bu devreler için bileşen değerlerini kesim frekansı ve geçirme bandı kazanç isterlerini karşılayacak şekilde hesaplayabilmek.

2 Bir prototip devreden başlayarak filtre devrelerini tasarlayabilmek ve ölçeklendirmeyi kullanarak istenen frekans tepki karakteristiklerine ve bileşen değerlerine ulaşabilmek

3 Art arda bağlanmış birinci ve ikinci mertebeden Butterworth filtrelerin nasıl kullanılacaklarını anlamak ve herhangi bir mertebeden alçak geçiren, yüksek geçiren, bant geçiren ve bant durduran filtreleri gerçekleyebilmek.

4 Arzu edilen filtre isterlerini sağlamak için prototip darbant, bant geçiren ve bant durduran filtrelerin bileşen değerlerini hesaplamak için tasarım denklemlerini kullanabilmek.

Şu ana kadar, sadece pasif filtre devrelerini, yani direnç, indüktör ve kapasitörlerden oluşan devreleri göz önüne aldık. Bunların uygulama alanları vardır, ancak op amp kullanan aktif devrelerin pasif devrelere göre belirli avantajları bulunmaktadır. Örneğin, aktif devreler indüktör kullanmadan bant geçiren ve bant durduran filtreler üretebilmektedir. Bu istenen bir özelliktir çünkü indüktörler genellikle ağırdır, pahalıdır ve arzulanan frekans tepki karakteristiklerini tehlikeye atabilecek elektromanyetik alan etkilerini ortaya çıkarabilir.

14. Bölümdeki tüm filtre devrelerinin aktarım fonksiyonlarını incelediğinizde en yüksek genliğin biri geçmediğini göreceksiniz. Pasif rezonant devrelerin resonans frekansında gerilim ve akım yükseltmesini sağlamalarına rağmen, pasif devrelerin genellikle yükseltme yetenekleri yoktur çünkü çıkış genliği giriş genliğini geçemez. Bu şaşırtıcı bir sonuç değildir, çünkü 14. Bölümde çıkarılan aktarım fonksiyonlarından çoğu gerilim veya akım bölücülerle türetilmektedir. Aktif filtre devreleri pasif filtre devrelerinde olmayan yükseltme üzerinde bir kontrol sağlamaktadır.

Son olarak, filtre çıkışına bir direnç eklenmesi sonucunda pasif devrelerin hem kesim frekansı hem de geçirme bandı genliklerinde değişiklik olduğunu hatırlayınız. Op ampların özellikleri nedeniyle bu, aktif filtrelerde görülen bir durum değildir. Sonuç olarak, tasarım isterlerinde kazanç, yüke bağlı değişkenlik ve fiziksel boyutlar önemli parametreler olduğunda, filtre tasarımlarını gerçeklerken aktif devreleri kullanırız.

Bu bölümde, op ampları kullanan pek çok filtre devresinden birkaçını inceleyeceğiz. Göreceğiniz gibi, bu op amp devreleri pasif filtre devrelerinin dezavantajlarını yenecektir. Ayrıca, belirli frekans tepkilerini yakalamak ve ideale daha yakın filtre tepkisi elde etmek için temel op amp devrelerinin nasıl birleştirilebileceğini göstereceğiz. Tüm bölüm boyunca her op ampın bir ideal op amp gibi davrandığını varsaydığımızı unutmayınız.

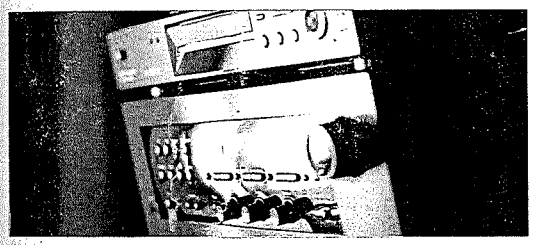
Pratik Bakış Açısı

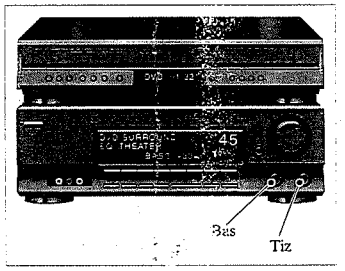
Bas Şiddet Kontrolü

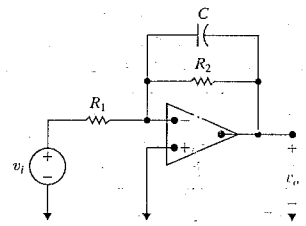
Bu bölümde frekans seçici devreleri incelemeye devam ediyoruz. 14. Bölümde anlatıldığı gibi bu, devrenin davranışının, girişindeki sinüzoidalın frekansına bağlı olduğu anlamına gelir. Burada sunulacak devrelerin çoğu 14. Bölümde tanımlanan dört kategoriden birisine aittir: Alçak geçiren filtreler, yüksek geçiren filtreler, bant geçiren filtreler ve bant durduran filtreler. Fakat, 14. Bölümde devreleri kaynaklar, dirençler, kapasitörler ve indüktörlerle kurmamıza karşılık bu bölümde op ampları da kullanacağız. Yakında op amp kullanarak kurulan filtre devrelerinin ne avantajlara sahip olduklarını göreceğiz.

Radyo, kaset çalar ve CD çalar gibi elektronik ses sistemleri sıklıkla "tiz" ve "bas" olarak adlandırılan iki şiddet kontrolü sunmaktadır. Bu kontroller kullanıcının yüksek frekanslı sinyallerin ("tiz") şiddetini, düşük frekanslı sinyallerin ("bas") şiddetinden bağımsız olarak ayarlamasını sağlar. Bu iki frekans bandındaki yükseltme veya zayıflatmanın bağımsız olarak ayarlanabilmesi, dinleyiciye sesi tek şiddet denetimine göre daha detaylı olarak kişiselleştirme olanağı tanımaktadır. Sonuç olarak yükseltme veya zayıflatma kontrol devresi ton kontrol devresi olarak da anılmaktadır.

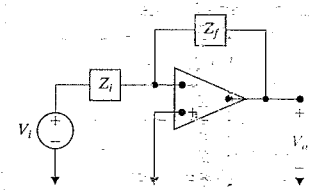
Bu bölümün sonundaki Pratik Bakış Açısı örneği, bir op amp ile direnç ve kapasitörlerden oluşan bas şiddet kontrolünü sağlayan bir devre sunmaktadır. Ayarlı bir direnç bas frekans erişimindeki gerekli yükseltmeyi sağlamaktadır.







Şekil 15.1 ▲ Birinci mertebeden alçak geçiren filtre.



Şekil 15.2 ▲ Genel op amp devresi.

15.1 Birinci Mertebeden Alçak Geçiren ve Yüksek Geçiren Filtreler

Şekil 15.1'deki devreyi göz önüne alınız. Nitelik açısından, kaynağın frekansı değiştirildiğinde sadece kapasitörün empedansı etkilenmektedir. Çok düşük frekanslarda kapasitör bir açık devre gibi davranır ve op amp devresi kazancı $-R_2 / R_1$ olan bir yükseltici olarak hareket eder. Çok yüksek frekanslarda kapasitör kısa devre gibi davranır, dolayısıyla op amp devresinin çıkışını toprağa bağlar. Sonuç olarak Şekil 15.1'deki op amp devresi geçirme bandı kazancı $-R_2 / R_1$ olan bir alçak geçiren filtre olarak görev yapar.

Bu niteliksel sıralamayı doğrulamak için aktarım fonksiyonu $H(s) = V_o(s) / V_i(s)$'yı hesaplayabiliriz. Şekil 15.1'deki devrenin, giriş yolundaki empedansın (Z_i) R_1 direncinin ve geribesleme yolundaki empedansın (Z_f) paralel bağlı R_2 direnci ve C kapasitörünün olduğu, Şekil 15.2'de gösterilen genel yapıya sahip olduğuna dikkat ediniz.

Şekil 15.2'deki devre 5. Bölümdeki eviren yükseltici devreye yakınlığı nedeniyle, devrenin aktarım fonksiyonu $-Z_f / Z_i$'dir. Dolayısıyla, Şekil 15.1'deki devre için aktarım fonksiyonu

$$H(s) = \frac{-Z_f}{Z_i} = \frac{-R_2 \| \left(\frac{1}{sC}\right)}{R_1} = -K\frac{\omega_c}{s + \omega_c} \tag{15.1}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$K = \frac{R_2}{R_1} \tag{15.2}$$

ve

$$\omega_c = \frac{1}{R_2 C} \tag{15.3}$$

ile verilir. Eş. 15.1'in önemli bir istisna dışında 14. Bölümde verilen alçak geçiren filtreler için genel denklemle aynı biçime sahip olduğuna dikkat ediniz: Geçirme bandındaki kazanç, K, R_2 / R_1 oranıyla belirlenmektedir. Dolayısıyla, op amp alçak geçiren filtre, geçirme bandı kazancının ve kesim frekansının ayrı ayrı belirlenmesine izin vermektedir.

Frekans Tepkisi Grafikleri Hakkında Bir Not

14. Bölümde sunulan frekans tepkisi grafikleri, bir filtre devresinin çalışması hakkında değerli bilgiler sunmaktadır. Dolayısıyla, bu bölümde de frekans tepkisi grafiklerini sıklıkla kullanacağız. 14. Bölümdeki frekans tepkisi grafikleri iki ayrı grafikten oluşmaktaydı: Aktarım fonksiyonu genliğinin frekansa karşı grafiği ve aktarım fonksiyonu faz açısının (derece cinsinden) frekansa karşılık grafiği. Her iki grafiği de kullandığımızda, genellikle üst üste çizilirler, böylece ikisi birden aynı frekans eksenini paylaşabilir.

Bu bölümde, frekans tepkisi grafiklerinin özel bir türü olan **Bode grafiklerini** kullanacağız. Bu grafiklerin elle yapılması hakkında da detaylı bilgi içeren, Bode grafiklerinin detayları Ek E'de tartışılmaktadır. Muhtemelen Bode grafiklerini yapmak için bir bilgisayar kullanacaksınız, dolayısıyla burada bu grafiklerin özel niteliklerini özetleyeceğiz. Bode grafikleri, 14. Bölümdeki frekans tepkisi grafiklerinden iki önemli bakımdan farklıdır.

İlk olarak, frekans değerleri için doğrusal eksen kullanmak yerine, bir Bode grafiği logaritmik eksen kullanır. Bu bize ilgilendiğimiz daha geniş bir frekans aralığını çizme fırsatı verir. Normal olarak, aktarım fonksiyonunun değiştiği frekans bölgesi olarak, frekansın üç veya dört onkatını çizeriz, örneğin 10^2 rad / s'den 10^6 rad / s'ye veya 1 kHz'den 1 MHz'e kadar. Eğer genlik ve faz açısı grafiklerini yapacaksak, bunlar yine aynı frekans eksenini paylaşır.

İkinci olarak, aktarım fonksiyonunun mutlak genliğini frekansa karşı çizmek yerine, Bode genliği, logaritmik frekans eksenine karşı desibel (dB) cinsinden çizilir. Desibel Ek D'de tartışılmaktadır. Kısaca, eğer bir aktarım fonksiyonunun genliği $|H(j\omega)|$ ise, desibel cinsinden değeri

$$A_{dB} = 20 \log_{10}|H(j\omega)|$$

olarak bulunur. $|H(j\omega)|$'nın işaretsiz bir büyüklük olmasına rağmen, A_{dB}'nin işaretli bir büyüklük olduğunu hatırlamak önemlidir. $A_{dB} = 0$ iken, aktarım fonksiyonu genliği 1'dir çünkü $20 \log_{10}(1) = 0$. $A_{dB} < 0$ iken, aktarım fonksiyonunun genliği 0 ve 1 arasındadır, ve $A_{dB} > 0$ iken, aktarım fonksiyonunun genliği 1'den büyüktür. Son olarak

$$20 \log_{10}|1/\sqrt{2}| = -3 \text{ dB}$$

olduğuna dikkat ediniz.

Filtrelerin kesim frekansını, aktarım fonksiyonunun genliğinin, en yüksek genliğinin $1/\sqrt{2}$'sine indiği frekans olarak tanımladığımızı hatırlayınız. Bu tanımı dB cinsinden genliğe çevirirsek, bir filtrenin kesim frekansını, aktarım fonksiyonunun genliğinin, dB cinsinden verilen en yüksek genliğine göre 3 dB azaldığı frekans olarak tanımlarız. Örneğin, bir alçak geçiren filtrenin geçirme bandındaki en yüksek genlik 26 dB ise, kesim frekansını bulmak için kullanılacak genlik 26 - 3 = 23 dB olacaktır.

Örnek 15.1'de, bir alçak geçiren filtre için arzu edilen geçirme bandı kazancı ve kesim frekansı isterlerini sağlayan bir tasarım gösterilmekte, ayrıca bu filtrenin Bode genlik grafiği de verilmektedir.

Örnek 15.1 Alçak Geçiren Op Amp Filtre Tasarımı

Şekil 15.1'de gösterilen devreyi kullanarak, $R_1 = 1$ Ω ile birlikte, geçirme bandında kazancı 1 olan ve 1 rad / s kesim frekansına sahip bir alçak geçiren filtre üretecek C ve R_2 değerlerini hesaplayınız. Bu filtre için aktarım fonksiyonunu bulunuz ve filtrenin frekans tepkisinin Bode genlik grafiğini yapmak için kullanınız.

Çözüm

Eş. 15.2 geçirme bandı kazancını R_1 ve R_2 cinsinden verir. Dolayısıyla R_2 için istenen değeri hesaplamamıza izin verir:

$$R_2 = KR_1 = (1)(1) = 1\ \Omega.$$

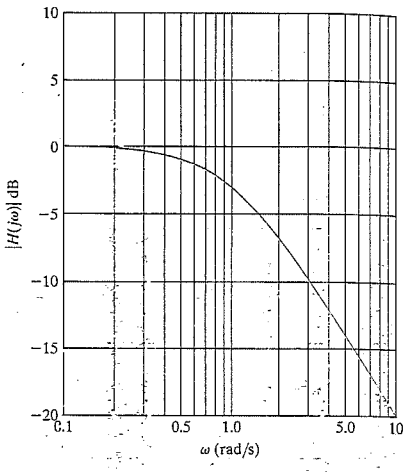
Eş. 15.3 istenen kesim frekansını karşılamak üzere C'yi hesaplamamızı sağlar:

$$C = \frac{1}{R_2\omega_c} = \frac{1}{(1)(1)} = 1\ \text{F}.$$

Alçak geçiren filtre için aktarım fonksiyonu Eş. 15.1 tarafından verilmektedir:

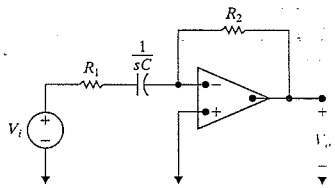
$$H(s) = -K\frac{\omega_c}{s + \omega_c} = \frac{-1}{s+1}.$$

$|H(j\omega)|$'in Bode grafiği Şekil 15.3'te gösterilmektedir. Bu devre **prototip** alçak geçiren op amp filtre olarak adlandırılır, çünkü 1 Ω direnç ve 1 F kapasitör değerlerini kullanır ve 1 rad / s kesim frekansı sağlar. Sonraki kısımda göreceğimiz gibi, daha gerçekçi bileşen değerleri kullanarak istenen bir frekans tepkisine ulaşmak için prototip filtreler kullanışlı bir başlangıç noktası sunmaktadır.



Şekil 15.3 ▲ Örnek 15.1'den alçak geçiren filtrenin Bode genlik grafiği.

Şekil 15.1'deki devrenin 7. Bölümde verilmiş olan integral alıcı yükselteç devresi olduğunu farketmiş olmalısınız. Gerçekten de bunlar aynı devredir, dolayısıyla zaman bölgesinde integral alma, frekans bölgesinde alçak geçiren süzmeye karşılık gelmektedir. İntegral alma ve alçak geçiren süzme arasındaki bu ilişki 12. Bölümde çıkarılan işlemsel Laplace dönüşümü ile de doğrulanmaktadır.



Şekil 15.4 ▲ Birinci mertebeden yüksek geçiren filtre.

Şekil 15.4'teki devre bir birinci mertebeden yüksek geçiren filtredir. Bu devre aynı zamanda Şekil 15.2'de verilen devre ile aynı biçime sahiptir, sadece şimdi giriş yolundaki empedans R_1 ve C'nin seri bileşimi, geribesleme yolundaki empedans ise R_2 direncidir. Dolayısıyla, Şekil 15.4'teki devre için aktarım fonksiyonu

$$H(s) = \frac{-Z_f}{Z_i} = \frac{-R_2}{R_1 + \frac{1}{sC}} = -K\frac{s}{s+\omega_c} \tag{15.4}$$

bulunur. Burada

$$K = \frac{R_2}{R_1} \tag{15.5}$$

ve

$$\omega_c = \frac{1}{R_1C} \tag{15.6}$$

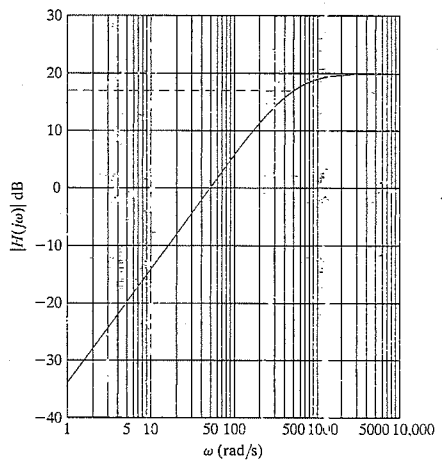
ile tanımlıdır.

Yine, Eş. 15.4'te verilen aktarım fonksiyonunun biçimi Eş. 14.20'de verilen, pasif yüksek geçiren filtre ile aynıdır. Ayrıca aktif filtre, geçirme bandı kazancının 1'den büyük olduğu tasarımlara izin vermektedir.

Örnek 15.2, bir Bode grafiğinde verilen frekans tepkisi isterlerini karşılayan bir aktif yüksek geçiren filtre tasarımını incelemektedir.

Örnek 15.2 Yüksek Geçiren Op Amp Filtre Tasarımı

Şekil 15.5 bir yüksek geçiren filtrenin Bode grafiğini göstermektedir. Şekil 15.4'teki aktif yüksek geçiren filtre devresini kullanarak, istenen genlik tepkisini üretmek için gerekli R_1 ve R_2 değerlerini hesaplayınız. 0.1 μF'lik bir kapasitör kullanınız. Bir 10 kΩ yük bu devreye eklendiğinde genlik tepkisi nasıl değişecektir?



Şekil 15.5 ▲ Örnek 15.2 için yüksek geçiren filtrenin Bode genlik grafiği.

Çözüm

Şekil 15.5'te gösterilen genlik grafiğine sahip aktarım fonksiyonunu yazarak başlarız. Bunu yapmak için, geçirme bandındaki kazancın 20 dB olduğunu gözleyiniz, dolayısıyla $K = 10$'dur. Ayrıca 3 dB noktasının 500 rad / s olduğuna dikkat ediniz. Eş. 15.4 bir yüksek geçiren filtre için aktarım fonksiyonudur, yani Şekil 15.5'te gösterilen genlik tepkisine sahip aktarım fonksiyonu

$$H(s) = \frac{-10s}{s + 500}$$

yazılabilir. Bu aktarım fonksiyonunu verecek R_1 ve R_2 değerlerini, aktarım fonksiyonunu Eş. 15.4'teki aktarım fonksiyonu ile eşitleyerek bulabiliriz:

$$H(s) = \frac{-10s}{s+500} = \frac{-(R_2/R_1)s}{s + (1/R_1C)}.$$

Pay ve paydaları eşitleyerek ve sadeleştirmeleri yaparak iki denklem elde ederiz:

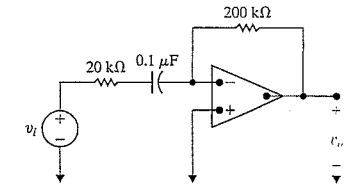
$$10 = \frac{R_2}{R_1}, \quad 500 = \frac{1}{R_1C}.$$

C için verilen değeri (0.1 μF) kullanarak

$$R_1 = 20\ \text{k}\Omega, \quad R_2 = 200\ \text{k}\Omega$$

buluruz. Devre Şekil 15.6'da gösterilmektedir.

Bu yüksek geçiren filtre devresindeki op ampın ideal olması varsayımını yaptığımız için herhangi bir yük direncinin –değerinden bağımsız olarak– eklenmesi, op ampın davranışı üzerinde hiç bir etkiye sahip olmayacaktır. Sonuç olarak, yük direnci olan bir yüksek geçiren filtre, yük direnci olmayan aynı devre ile Şekil 15.5'te gösterilen aktarım fonksiyonunun aynısına sahip olacaktır.



Şekil 15.6 ▲ Örnek 15.2 için yüksek geçiren filtre.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 1 – Birinci mertebeden alçak geçiren ve yüksek geçiren filtreler gibi davranan op amp devrelerini bilmek ve bileşen değerlerini hesaplayabilmek

15.1 $R_1 = 1\ \Omega$ ise, geçirme bandı kazancı 1 ve kesim frekansı 1 rad / s olan bir yüksek geçiren filtre tepkisi veren R_2 ve C değerlerini hesaplayınız.

Cevap: $R_2 = 1\ \Omega$, $C = 1$ F.

15.2 Aşağıdaki aktarım fonksiyonunu üretmek için, Şekil 15.1'deki alçak geçiren filtredeki direnç değerlerini hesaplayınız.

$$H(s) = \frac{-20{,}000}{s + 5000}.$$

Bir 5 μF kapasitör kullanınız.

Cevap: $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 15.4 ve 15.7'yi de çözmeyi deneyiniz.

15.2 Ölçeklendirme

Hem pasif hem de aktif filtre devrelerini tasarlarken ve analiz ederken 1 Ω, 1 H ve 1 F gibi değerlerle çalışmak kolaylık sağlar. Pratik bileşenlerin değerlerini belirlemede bunlar gerçekçi olmamakla birlikte, hesaplamaları büyük oranda kolaylaştırırlar. Bu R, L ve C değerleri ile tasarımı gerçekleştirdikten sonra, tasarımcı bu değerleri **ölçeklendirme** olarak bilinen bir süreç ile gerçekçi değerlere dönüştürebilir.

İki tür ölçeklendirme bulunmaktadır: **Genlik** ve **frekans**. Bir devreyi genlikte ölçeklendirmek için verilen bir frekanstaki empedansı ölçeklendirme çarpanı k_m ile çarparız. Yani, tüm direnç ve indüktörleri k_m ile, tüm kapasitörleri ise $1 / k_m$ ile çarparız. Eğer üssüz değişkenlerin parametrelerin ilk değerini temsil ettiğini, ve üslü değişkenlerin, ilgili değişkenlerin ölçeklenmiş değerlerini temsil ettiğini düşünürsek

$$R' = k_m R, \quad L' = k_m L, \quad \text{ve} \quad C' = C/k_m \tag{15.7}$$

olur. Tanım gereği k_m'nin birden küçük veya büyük bir pozitif gerçek sayı olabileceğine dikkat ediniz.

Frekans ölçeklendirmede devre parametrelerini, yeni frekansta her bileşenin empedansının baştaki frekanstakiler ile aynı olacak şekilde değiştiririz. Direnç değerlerinin frekanstan bağımsız olduğu varsayıldığı için dirençler frekans ölçeklendirmesinden etkilenmezler. Frekans ölçeklendirme çarpanının k_f olması halinde hem indüktörler hem de kapasitörler $1 / k_f$ ile çarpılır. Sonuç olarak frekans ölçeklendirmesi için

$$R' = R, \quad L' = L/k_f, \quad \text{ve} \quad C' = C/k_f \tag{15.8}$$

bulunur. Frekans ölçeklendirme çarpanı k_f de birden küçük veya büyük olabilen bir pozitif gerçek sayıdır.

Bir devre aynı anda hem genlikte hem de frekansta ölçeklenebilir. Baştaki değerler (üssüz) cinsinden ölçeklenmiş değerler (üslü) aşağıdadır:

$$R' = k_m R,$$
$$L' = \frac{k_m}{k_f} L,$$
$$C' = \frac{1}{k_m k_f} C. \tag{15.9}$$

◁ **Bileşen ölçek çarpanları**

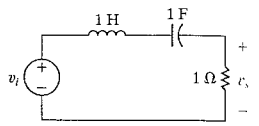
Ölçeklendirmenin Op Amp Filtrelerin Tasarımında Kullanılması

Op amp filtrelerin tasarımında ölçeklendirmeyi kullanmak için ilk olarak alçak veya yüksek geçiren filtre tasarlıyorsanız kesim frekansı ω_c'yi 1 rad / s olarak seçiniz; eğer bant geçiren veya durduran filtre tasarlıyorsanız merkez frekansı ω_o'yu 1 rad / s olarak seçiniz. Daha sonra, bir 1 F kapasitör seçerek istenen geçirme bandı kazancını ve 1 rad / s kesme veya merkez frekansını verecek şekilde dirençlerin değerlerini hesaplayınız. Son olarak, arzu edilen kesme veya merkez frekansını verecek şekilde daha gerçekçi bileşen değerlerini hesaplayınız.

Örnek 15.3 ölçeklendirme sürecini genel bir bakış açısı ile göstermektedir. Örnek 15.4 ise bir alçak geçiren filtre tasarımında ölçeklendirmenin kullanımını sunmaktadır.

Örnek 15.3 Seri RLC Devrenin Ölçeklendirilmesi

Şekil 15.7'de gösterilen seri RLC devresinin merkez frekansı $\sqrt{1/LC} = 1$ rad / s, bantgenişliği $R / L = 1$ rad / s ve dolayısıyla kalite faktörü 1'dir. Ölçeklendirme kullanarak, kalite faktörünün aynı kaldığı fakat merkez frekansının 500 Hz olduğu bir devre için R ve L'nin yeni değerleri hesaplayınız. 2 μF'lık bir kapasitör kullanınız.



Şekil 15.6 ▲ Örnek 15.3 için seri RLC devresi.

Çözüm

Merkez frekansını 1 rad / s'den 500 Hz'e kaydıran frekans ölçeklendirme çarpanını hesaplayarak başlarız. Üssüz değerler ölçeklendirmeden önceki, üslüler ise ölçeklendirmeden sonraki değerleri temsil etmektedir.

$$k_f = \frac{\omega_o'}{\omega_o} = \frac{2\pi(500)}{1} = 3141.59.$$

Şimdi, frekans ölçeklendirme çarpanının yanı sıra Eş. 15.9'u kullanarak 2 μF kapasitör değerini verecek genlik ölçeklendirme çarpanını da hesaplayalım:

$$k_m = \frac{1}{k_f}\frac{C}{C'} = \frac{1}{(3141.59)(2 \times 10^{-6})} = 159.155.$$

Eş. 15.9'u, R ve L'nin genlik ve frekans ölçeklenmiş değerlerini hesaplamakta kullanarak

$$R' = k_m R = 159.155\ \Omega,$$
$$L' = \frac{k_m}{k_f} L = 50.66\ \text{mH}$$

buluruz. Bu bileşen değerleri ile seri RLC devresinin merkez frekansı $\sqrt{1/LC} = 3141.61$ rad / s veya 500 Hz ve bantgenişliği $R / L = 3141.61$ rad / s veya 500 Hz'dir, dolayısıyla kalite faktörü hâlâ 1'dir.

Örnek 15.4 **Prototip Alçak Geçiren Op Amp Filtrenin Ölçeklendirilmesi**

Örnek 15.1'deki prototip alçak geçiren op amp filtreyi, ve genlik ve frekans ölçeklendirmesini kullanarak, kazancı 5 ve kesim frekansı 1000 Hz olan bir devreyi 0.01 μF geribesleme kapasitörü ile tasarlayınız. Elde ettiğiniz aktarım fonksiyonunun Bode grafiğini yapınız.

Çözüm

Başlangıç olarak, kesim frekansını 1000 Hz yapmak için frekans ölçeklendirmesini kullanırız:

$$k_f = \omega_c'/\omega_c = 2\pi(1000)/1 = 6283.185.$$

Burada üssüz değişken kesim frekansının eski, üslü olan ise yeni değeridir. Daha sonra, genlik ölçeklendirme çarpanını $k_f = 6283.185$ ile birlikte kapasitör 0.01 μF olacak şekilde hesaplarız:

$$k_m = \frac{1}{k_f}\frac{C}{C'} = \frac{1}{(6283.185)(10^{-8})} = 15{,}915.5.$$

Dirençler sadece genlik ölçeklendirmesi ile ölçeklendiği için,

$$R_1' = R_2' = k_m R = (15{,}915.5)(1) = 15{,}915.5\ \Omega$$

olur. Son olarak, geçirme bandı kazancı isterini sağlamamız gerekmektedir. R_1 veya R_2'nin ölçeklenmiş değerini ayarlayabiliriz, çünkü $K = R_2 / R_1$'dir. Eğer R_2'yi ayarlarsak kesim frekansını değiştiririz çünkü $\omega_c = 1 / R_2C$'dir. Dolayısıyla, R_1'in değerini ayarlayarak sadece geçirme bandı kazancını değiştirebiliriz:

$$R_1 = R_2/K = (15{,}915.5)/(5) = 3183.1\ \Omega.$$

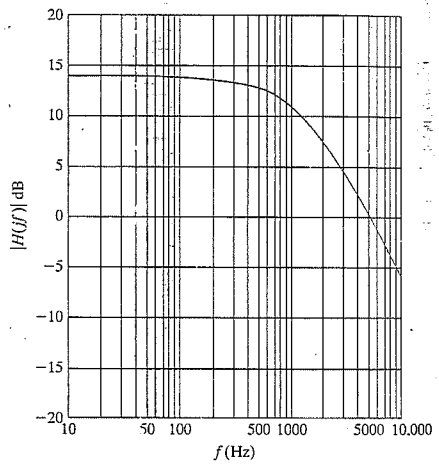
Son bileşen değerleri şöyledir:

$$R_1 = 3183.1\ \Omega,\quad R_2 = 15{,}915.5\ \Omega,\quad C = 0.01\ \mu\text{F}.$$

Filtrenin aktarım fonksiyonu ise

$$H(s) = \frac{-31{,}415.93}{s + 6283.185}$$

elde edilir. Bu aktarım fonksiyonunun genliğinin Bode grafiği Şekil 15.8'de gösterilmektedir.



Şekil 15.8 ▲ Örnek 15.4'teki alçak geçiren filtrenin Bode genlik grafiği.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 2 – Bir prototipten başlayarak filtre devrelerini tasarlayabilmek ve istenen frekans tepkisine ve bileşen değerlerine ulaşmak için ölçeklendirmeyi kullanmayı bilmek.

15.3 Prototip yüksek geçiren filtreyi 0.5 μF kapasitörü ve 10 kHz kesim frekansı olan bir yüksek geçiren filtreye dönüştürecek genlik ve frekans ölçeklendirme çarpanları nelerdir?

Cevap: $k_f = 62{,}831.85$, $k_m = 31.831$.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 15.13 ve 15.14'ü de çözmeyi deneyiniz.

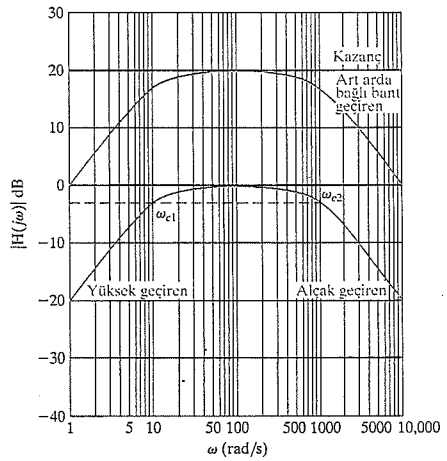
15.3 Op Amp Bant Geçiren ve Bant Durduran Filtreler

Şimdi de bant geçiren ve bant durduran filtre olarak çalışan op amp devrelerinin analiz ve tasarımını inceleyeceğiz. Bu tür op amp devrelerinin çok değişik şekillerde olmasına rağmen, başlangıç yaklaşımımız Şekil 15.9'da gösterilen Bode grafiği ile harekete geçmektir. Grafikten bant geçiren filtrenin üç ayrı bileşenden oluştuğunu görebiliriz:

1. Kesim frekansı ω_{c2} (iki kesim frekansından büyük olanı) olan birim kazançlı bir alçak geçiren filtre;
2. Kesim frekansı ω_{c1} (iki kesim frekansından küçük olanı) olan birim kazançlı bir yüksek geçiren filtre ve
3. Geçirme bandında istenen kazancı sağlamak için bir kazanç bileşeni.

Bu üç bileşen seri olarak art arda bağlanmaktadır. Bunlar, Bode grafiğinde eklenerek, bu nedenle de s bölgesinde çapılarak bir araya gelmektedir. Bu tür bant geçiren filtre tasarımı sırasında düşük olan kesim frekansının (ω_{c1}) yüksek olan kesim frekansından (ω_{c2}) daha küçük olması gerekmektedir. Ortaya çıkan filtre bir genişbant bant geçiren filtre olarak anılmaktadır, çünkü geçirilen frekansların bandı geniştir. Bir genişbant bant geçiren filtrenin genel tanımı iki kesim frekansının aşağıdaki denklemi sağlamasını gerektirir:

$$\frac{\omega_{c2}}{\omega_{c1}} \geq 2.$$



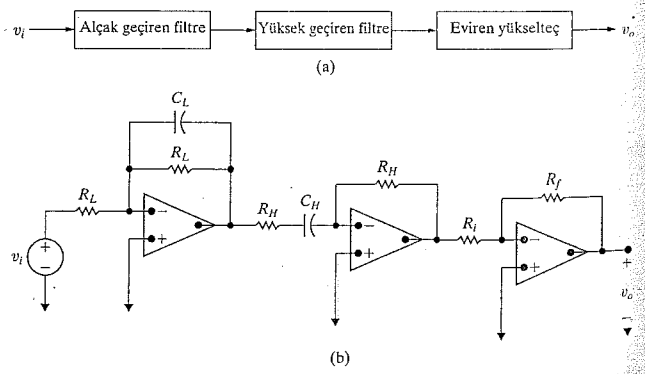
Şekil 15.9 ▲ Bir bant geçiren filtrenin Bode genlik grafiğinin oluşturulması.

Şekil 15.9'da gösterilen Bode grafiğinin oluşturulması sırasında, yüksek geçiren filtrenin genliğinin, alçak geçiren filtrenin kesim frekansında bir olmasını ve benzer şekilde alçak geçiren filtrenin genliğinin yüksek geçiren filtrenin kesim frekansında bir olmasını isteriz. O zaman, bant geçiren filtre alçak ve yüksek geçiren filtreler tarafından belirlenen kesim frekanslarına sahip olur. Kesim frekansları ω_{c1} ve ω_{c2} arasındaki ilişkiyi Şekil 15.9'da gösterilen gereksinimleri sağlayacak şekilde belirlememiz gerekir.

Üç bileşenin her birini sağlayacak bir devreyi, bir alçak geçiren op amp filtre, bir yüksek geçiren op amp filtre ve bir eviren yükselteci (bkz. Kısım 5.3) Şekil 15.10(a)'da gösterildiği şekilde art arda bağlayarak oluşturabiliriz. Şekil 15.10(a), **blok şeması** olarak adlandırılan bir temsil şeklidir. Her blok bir bileşen veya alt devreyi temsil eder ve gösterilen yönde bir bloğun çıkışı bir sonraki bloğun girişidir. Kesim frekansları ω_{c1} ve ω_{c2} arasındaki ilişkiyi her alt devrenin bağımsızca, diğer alt devreleri düşünmeden tasarlanabileceği şekilde oluşturmak isteriz. O zaman, bant geçiren filtrenin tasarımı, her biri birer basit devre olan bir birim kazançlı birinci mertebeden alçak geçiren filtre, bir birim kazançlı birinci mertebeden yüksek geçiren filtre ve bir eviren yükselteçe indirgenmiş olur.

Art arda bağlantılı bant geçiren filtrenin aktarım fonksiyonu her üç bileşenin aktarım fonksiyonlarının çarpımıdır:

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{V_o}{V_i} \\
&= \left(\frac{-\omega_{c2}}{s+\omega_{c2}}\right)\left(\frac{-s}{s+\omega_{c1}}\right)\left(\frac{-R_f}{R_i}\right) \\
&= \frac{-K\omega_{c2}s}{(s+\omega_{c1})(s+\omega_{c2})} \\
&= \frac{-K\omega_{c2}s}{s^2+(\omega_{c1}+\omega_{c2})s+\omega_{c1}\omega_{c2}}.
\end{aligned}
\tag{15.10}
$$



Şekil 15.10 Bir art arda bağlantılı op amp bant geçiren filtre. (a) Blok şeması, (b) Devre.

Eş. 15.10'un, 14. Bölümde tartışılan bir bant geçiren filtrenin aktarım fonksiyonunun standart

$$H_{BP} = \frac{\beta s}{s^2+\beta s+\omega_o^2}$$

biçimine sahip olmadığını doğrudan görebiliriz. Eş. 15.10'u bir bant geçiren filtre için standart aktarım fonksiyonu biçimine dönüştürmek için

$$\omega_{c2} \gg \omega_{c1} \tag{15.11}$$

olmasına ihtiyaç duyarız. Eş. 15.11 sağlandığı zaman

$$(\omega_{c1}+\omega_{c2}) \approx \omega_{c2}$$

ve art arda bağlantılı bant geçiren filtrenin Eş. 15.10'daki aktarım fonksiyonu

$$H(s) = \frac{-K\omega_{c2}s}{s^2+\omega_{c2}s+\omega_{c1}\omega_{c2}}$$

olur.

Bir kere Eş. 15.11'in arzu edilen bant geçiren filtre için kesim frekanslarında doğruluğunu teyit ettiğimizde, art arda bağlantılı devrenin her basamağını bağımsızca tasarlayabilir ve filtre isterlerini sağlayabiliriz. Alçak geçiren filtredeki R_L ve C_L'nin değerlerini, istenen yüksek kesim frekansı ω_{c2}'yi

$$\omega_{c2} = \frac{1}{R_L C_L} \tag{15.12}$$

verecek şekilde hesaplarız. Yüksek geçiren filtredeki R_H ve C_H'nin değerlerini, istenilen alçak kesim frekansı ω_{c1}'i

$$\omega_{c1} = \frac{1}{R_H C_H} \tag{15.13}$$

sağlayacak şekilde hesaplarız.

Daha sonra, eviren yükselteçteki R_i ve R_f değerlerini istenen geçirme bandı kazancını sağlayacak şekilde buluruz. Bunu yapmak için bant geçiren filtrenin aktarım fonksiyonunun, merkez frekansı ω_o'daki değerini göz önüne alırız:

$$
\begin{aligned}
|H(j\omega_o)| &= \left|\frac{-K\omega_{c2}(j\omega_o)}{(j\omega_o)^2+\omega_{c2}(j\omega_o)+\omega_{c1}\omega_{c2}}\right| \\
&= \frac{K\omega_{c2}}{\omega_{c2}} \\
&= K.
\end{aligned}
\tag{15.14}
$$

5. Bölümden, eviren yükseltecin kazancının R_f / R_i olduğunu hatırlayınız. Dolayısıyla,

$$|H(j\omega_o)| = \frac{R_f}{R_i} \tag{15.15}$$

olur. Eş. 15.15'i sağlayan herhangi bir direnç değeri seçimi istenen geçirme bandı kazancını üretecektir.

Örnek 15.5 bir art arda bağlantılı bant geçiren filtrenin tasarımını göstermektedir.

Örnek 15.5 Genişbant, Bant Geçiren Op Amp Filtre Tasarımı

Bir grafik denkleştirici için 100 ve 10,000 Hz frekansları arasındaki bant için 2 kat yükseltme sağlayan bir bant geçiren filtre tasarlayınız. 0.2 μF kapasitörler kullanınız.

Çözüm

Ancak Eş. 15.11 sağlandığında, art arda bağlantıdaki her alt devreyi tasarlayabilir ve kesim frekansları için belirlenen değerlere ulaşabiliriz. Mevcut durumda, $\omega_{c2} = 100\omega_{c1}$ olduğu için $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$ olduğunu söyleyebiliriz.

Alçak geçiren filtre ile başlayalım. Eş. 15.12'den

$$\omega_{c2} = \frac{1}{R_L C_L} = 2\pi(10000),$$

$$R_L = \frac{1}{[2\pi(10000)](0.2 \times 10^{-6})}$$

$$\approx 80\ \Omega$$

bulunur.

Daha sonra, yüksek geçiren filtreye bakalım. Eş. 15.13'ten,

$$\omega_{c1} = \frac{1}{R_H C_H} = 2\pi(100),$$

$$R_H = \frac{1}{[2\pi(100)](0.2 \times 10^{-6})}$$

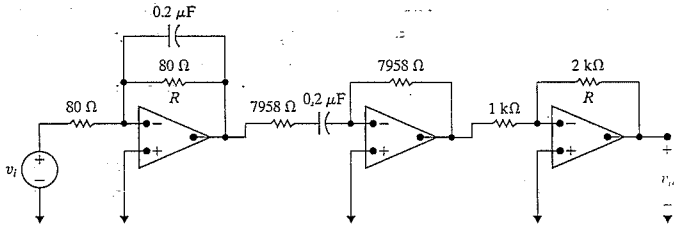
$$\approx 7958\ \Omega$$

buluruz. Son olarak, kazanç basamağına ihtiyaç duymaktayız. Eş. 15.15'ten iki bilinmeyen olduğu görülmektedir, dirençlerden biri gelişigüzel seçilebilir. R_i için bir 1 kΩ direnç seçelim. Dolayısıyla, Eş. 15.15'ten

$$R_f = 2(1000)$$

$$= 2000\ \Omega = 2\ \text{k}\Omega$$

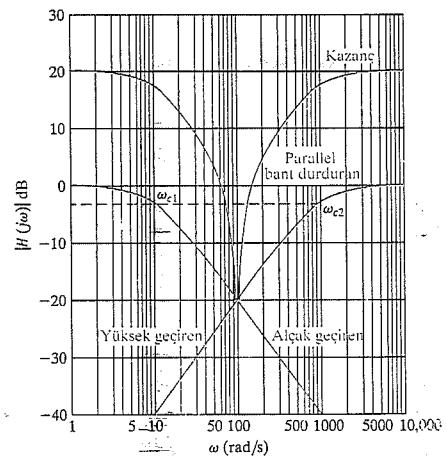
bulunur. Ortaya çıkan devre Şekil 15.11'de gösterilmektedir. Bu devrenin aktarım fonksiyonunun her iki kesim frekansında da $1/\sqrt{2}$ ile düştüğünü ve $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$ varsayımının geçerliliğini doğrulamayı size bırakıyoruz.



Şekil 15.10 ▲ Örnek 15.5'te tasarlanan art arda bağlantılı op amp bant geçiren filtre.

Şekil 15.12'de gösterildiği gibi, op amp bant durduran filtrelerin tasarımında da bileşen tabanlı bir yaklaşım izleyebiliriz. Bant geçiren filtre gibi, bant durduran filtre de üç ayrı bileşen içermektedir. Ancak arada önemli farklılıklar bulunmaktadır:

1. Birim kazanca sahip olan alçak geçiren filtrenin kesim frekansı (iki kesim frekansından küçük olanı) ω_{c1}'dir.
2. Birim kazanca sahip olan yüksek geçiren filtrenin kesim frekansı (iki kesim frekansından büyük olanı) ω_{c2}'dir.
3. Kazanç bileşeni geçirme bandında istenen kazanç seviyesini sağlar.



Şekil 15.12 ▲ Bir bant durduran filtrenin Bode genlik grafiğinin oluşturulması.

En önemli fark, üç bileşenin art arda bağlanamıyor olmasıdır, çünkü Bode grafiğinde toplanır şekilde birleşmezler. Bunun yerine, Şekil 15.13'te hem blok şeması formunda hem de devre olarak verildiği gibi bir paralel bağlantı ve bir toplayıcı yükselteç kullanırız. Yine, iki kesim frekansının da genişçe ayrıldığını varsaymaktayız, böylece ortaya çıkan filtre bir genişbant bant durduran filtredir ve $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$ sağlanır. Daha sonra, paralel tasarımın her bileşeni ayrı ayrı tasarlanır ve kesim frekansı isteri sağlanır. Elde edilen devrenin aktarım fonksiyonu alçak geçiren ve yüksek geçiren filtre aktarım fonksiyonlarının toplamıdır. Şekil 15.13(b)'den,

$$H(s) = \left(\frac{R_f}{R_i}\right)\left[\frac{-\omega_{c1}}{s + \omega_{c1}} + \frac{-s}{s + \omega_{c2}}\right]$$

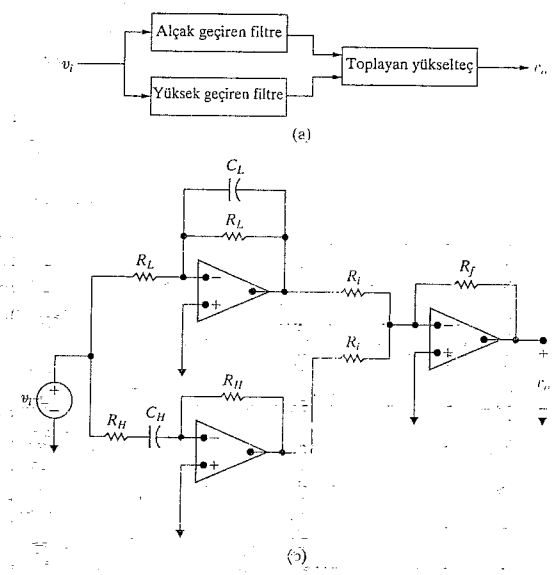
$$= \frac{R_f}{R_i}\left(\frac{\omega_{c1}(s + \omega_{c2}) + s(s + \omega_{c1})}{(s + \omega_{c1})(s + \omega_{c2})}\right)$$

$$= \frac{R_f}{R_i}\left(\frac{s^2 + 2\omega_{c1}s + \omega_{c1}\omega_{c2}}{(s + \omega_{c1})(s + \omega_{c2})}\right) \qquad (15.16)$$

bulunur. Bant geçiren art arda bağlantılı filtredeki ile aynı mantık çıkarımı kullanarak, Eş. 15.16'daki aktarım fonksiyonunun iki kesim frekansı ancak $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$ sağlanıyorsa ω_{c1} ve ω_{c2}'dir. Bu durumda, kesim frekansları aşağıdaki denklemler ile verilir:

$$\omega_{c1} = \frac{1}{R_L C_L}, \qquad (15.17)$$

$$\omega_{c2} = \frac{1}{R_H C_H}. \qquad (15.18)$$



Şekil 15.13 ▲ Bir paralel op amp bant durduran filtre. (a) Blok şeması. (b) Devre.

İki geçirme bandında ($s \to 0$ ve $s \to \infty$ iken) aktarım fonksiyonunun kazancı R_f / R_i'dir. Dolayısıyla

$$K = \frac{R_f}{R_i} \tag{15.19}$$

olur. Art arda bağlantılı bant geçiren filtrenin tasarımında olduğu gibi, altı bilinmeyen ve üç denklemimiz bulunmaktadır. Tipik olarak C_L ve C_H'nin değerleri için ticari olarak mevcut kapasitörlerin değerlerini seçeriz. Daha sonra, Eş. 15.17 ve 15.18 belirlenen kesim frekanslarını sağlamak üzere R_L ve R_H değerlerini hesaplamamıza izin verir. Son olarak, R_f veya R_i için bir değer seçeriz ve diğer direnci hesaplamak için Eş. 15.19'u kullanırız.

Eş. 15.16'daki aktarım fonksiyonunun $\omega_o = \sqrt{\omega_{c1}, \omega_{c2}}$ merkez frekansındaki değerinin

$$\begin{aligned} |H(j\omega_o)| &= \left| \frac{R_f}{R_i} \left(\frac{(j\omega_o)^2 + 2\omega_{c1}(j\omega_o) + \omega_{c1}\omega_{c2}}{(j\omega_o)^2 + (\omega_{c1} + \omega_{c2})(j\omega_o) + \omega_{c1}\omega_{c2}} \right) \right| \\ &= \frac{R_f}{R_i} \frac{2\omega_{c1}}{\omega_{c1} + \omega_{c2}} \\ &\approx \frac{R_f}{R_i} \frac{2\omega_{c1}}{\omega_{c2}} \end{aligned} \tag{15.20}$$

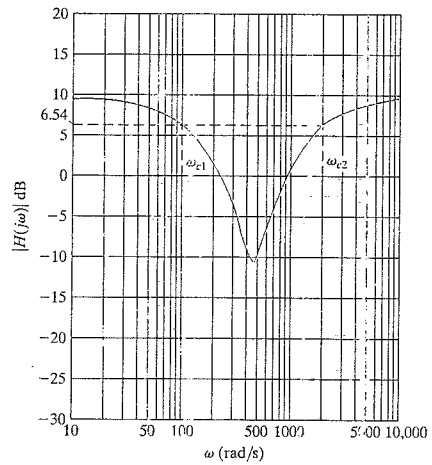
olduğuna dikkat ediniz. Eğer $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$ ise, $|H(j\omega_o)| << 2R_f/R_i$'dir. Dolayısıyla merkez frekansındaki genlik, geçirme bandındaki genlikten çok daha küçüktür.

Sonuç olarak, bant durduran filtre merkez frekansına yakın frekansları başarıyla durdurmaktadır. Paralel gerçekleştirmenin genişbant bant durduran tasarımlar için geçerli olduğu varsayımımız yeni doğrulanmıştır.

Örnek 15.6 bir paralel bant durduran filtrenin tasarımını göstermektedir.

Örnek 15.6 Genişbant, Bant Durduran Op Amp Filtre Tasarımı

Şekil 15.13(b)'deki paralel bant durduran op amp filtreye dayalı bir devre tasarlayınız. Bu filtrenin Bode genlik tepkisi Şekil 15.14'te gösterilmektedir. Tasarımınızda 0.5 μF kapasitörler kullanınız.



Şekil 15.14 ▲ Örnek 15.6'da tasarlanacak devrenin Bode genlik grafiği.

Çözüm

Şekil 15.14'teki Bode genlik grafiğinden bant durduran filtrenin 100 rad / s ve 2000 rad / s kesim frekanslarına ve geçirme bandında 3 kazanca sahip olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, $\omega_{c2} = 20\omega_{c1}$'dir ve $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$ varsayımında bulunabiliriz. Prototip alçak geçiren filtre ile başlayıp istenen kesim frekansı ve kapasitör değeri için ölçeklendirmeyi kullanırız. Kesim frekansını 1 Hz'den 100 Hz'e kaydıran k_f frekans ölçeklendirme çarpanı 100'dür. Bir 0.5 μF kapasitörü kullanmamızı sağlayan genlik ölçeklendirme çarpanı k_m ise 20,000'dir. Bu ölçeklendirme değerlerini kullanmak,

$$R_L = 20\ \text{k}\Omega,$$
$$C_L = 0.5\ \mu\text{F}$$

ölçeklenmiş bileşen değerlerini verir. Alçak geçiren filtre bileşeni için kesim frekansı

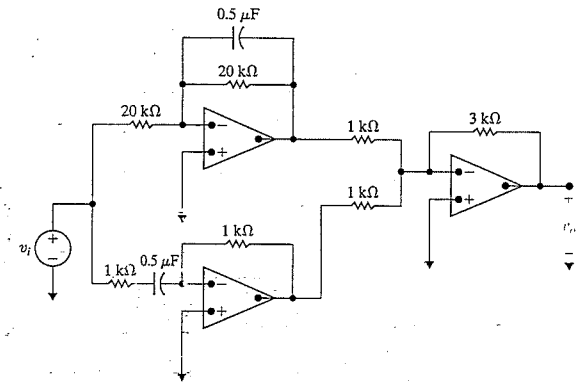
$$\begin{aligned} \omega_{c1} &= \frac{1}{R_L C_L} \\ &= \frac{1}{(20 \times 10^3)(0.5 \times 10^{-6})} \\ &= 100\ \text{rad/s} \end{aligned}$$

bulunur. Prototip yüksek geçiren op amp filtreden başlamak üzere, aynı yaklaşımı yüksek geçiren filtreyi tasarlamak için de kullanırız. Burada, frekans ölçeklendirme çarpanı $k_f = 2000$ ve genlik ölçeklendirme çarpanı $k_m = 1000$'dir ve

$$R_H = 1\ \text{k}\Omega,$$
$$C_H = 0.5\ \mu\text{F}$$

ölçeklendirilmiş bileşen değerlerini verir. Son olarak, kesim frekansları genişçe ayrıldığı için R_f/R_i oranını istenen geçirme bandı kazancı 3'ü elde etmek üzere kullanabiliriz. Halihazırda R_H için de aynı değeri kullandığımız için $R_i = 1$ kΩ seçelim. Dolayısıyla, $R_f = 3$kΩ ve $K = R_f / R_i = 3000 / 1000 = 3$'tür. Sonuçta bulunan paralel op amp bant durduran filtre devresi Şekil 15.15'te gösterilmektedir.

Şimdi $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$ varsayımımızı belirlenen kesim frekanslarında gerçek kazancı hesaplayarak kontrol edelim. Bunu $s = j2\pi(100)$ ve $s = j2\pi(2000)$ değerlerini paralel bant durduran devrenin Eş. 15.16'daki aktarım fonksiyonunda yerine koyup, oluşan genliği hesaplayarak yaparız. Belirlenen kesim frekanslarındaki genliğin, beklediğimiz genlik $3/\sqrt{2} = 2.12$'den daha küçük olan, 2.024 olduğunu doğrulamayı okuyucuya bırakıyoruz. Dolayısıyla, durdurulan bant problemde belirtilenden bir miktar daha geniştir.



Şekil 15.15 ▲ Örnek 15.6'da tasarlanan bant durduran filtre devresi.

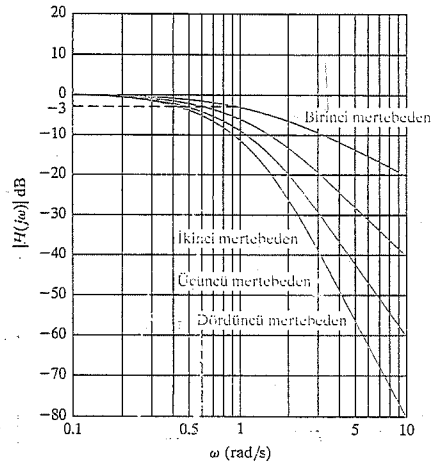
NOT: Bu konuyu kavrayışınızı Bölüm Problemleri 15.30 ve 15.31'i çözmeyi deneyerek sınayınız.

15.4 Yüksek Mertebeden Op Amp Filtreler

Muhtemelen şimdiye kadar incelediğimiz gerek pasif gerekse aktif filtre devrelerinin hepsinin ideal olmadığını farketmişsinizdir. 14. Bölümden, ideal bir filtrenin kesim frekansında geçirme bandını ve durdurma bandını keskin bir geçişle ayıran bir süreksizliğe sahip olduğunu hatırlayınız. Süreksiz frekans tepkisine sahip bir devreyi oluşturmayı ümit edemesek de, yine de kesim frekansında daha keskin ancak sürekli bir geçişe sahip devreler kurabiliriz.

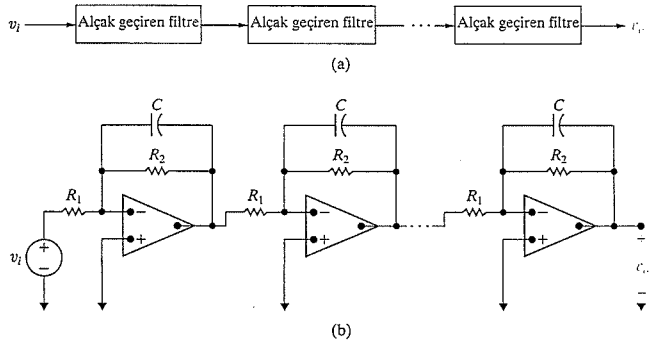
Özdeş Filtreleri Art Arda Bağlamak

Geçirme bandı ve durdurma bandı arasındaki keskin geçişi nasıl elde edebiliriz? Bir yaklaşım Şekil 15.16'daki Bode genlik grafikleri tarafından ortaya atılmaktadır. Bu şekil, art arda bağlanmış özdeş prototip alçak geçiren filtrelerin Bode genlik grafiklerini göstermektedir ve aynı zamanda tek filtrenin, art arda bağlı iki filtrenin, art arda bağlı üç filtrenin ve art arda bağlı dört filtrenin grafiklerini de vermektedir. Art arda bağlantıya daha fazla filtre eklendikçe, geçirme bandından durdurma bandına geçişin giderek keskinleştiği açıktır. Bode grafik kuralları (Ek E'den) bize tek filtrede geçişin asimtotik eğiminin onluk başına 20 dB (dB / onluk) olduğunu söylemektedir. Şekil 15.16'da görüldüğü gibi, art arda bağlı devrelerin Bode genlik grafiğinde toplanması nedeniyle, art arda bağlı iki filtre, 20 + 20 = 40 dB / onluk asimtotik eğimli geçişe sahiptir; üç filtre için asimtotik eğim 60 dB / onluk, dört filtre için ise 80 dB / onluk'tur.



Şekil 15.16 ▲ Art arda bağlı özdeş prototip birinci mertebeden filtrelerin Bode genlik grafiği.

Genelleştirirsek, n elemanlı art arda bağlı özdeş alçak geçiren filtrenin geçirme bandından durdurma bandına geçişlerinin eğimi $20n$ dB / onluk olacaktır. Böyle bir art arda bağlantının hem blok şeması hem de devre şeması Şekil 15.17'de gösterilmektedir. n prototip alçak geçiren filtrenin aktarım fonksiyonunun hesaplan-



Şekil 15.17 ▲ Birim kazanca sahip özdeş alçak geçiren filtrelerin art arda bağlanması. (a) Blok Şema. (b) Devre.

ması kolaydır – sadece bireysel aktarım fonksiyonlarını çarparız:

$$H(s) = \left(\frac{-1}{s+1}\right)\left(\frac{-1}{s+1}\right)\cdots\left(\frac{-1}{s+1}\right)$$
$$= \frac{(-1)^n}{(s+1)^n}. \qquad (15.21)$$

Bir filtrenin mertebesi aktarım fonksiyonunun paydasındaki kutupların sayısı tarafından belirlenir. Eş. 15.21'den birinci mertebeden alçak geçiren filtrelerin art arda bağlantısının yüksek mertebeli bir filtre ile sonuçlandığını görüyoruz. Aslında, n tane birinci mertebeden filtrenin art arda bağlantısı, aktarım fonksiyonunda n adet kutuba sahip, geçiş bandındaki son eğimi $20n$ dB / onluk olan bir n-yinci mertebeden filtre yaratır.

Şekil 15.16'ya daha detaylı baktığımızda görebileceğiniz gibi hâlâ çözülmesi gereken önemli bir nokta bulunmaktadır. Art arda bağlantıya prototip filtre eklendikçe artan alçak geçiren filtre mertebesi ile birlikte, kesim frekansı da değişmektedir. Örneğin, iki adet birinci mertebeden alçak geçiren filtrenin art arda bağlantısında, ortaya çıkan ikinci mertebeden filtrenin ω_c frekansındaki genliği –6 dB'dir, dolayısıyla ikinci mertebeden filtrenin kesim frekansı ω_c değildir. Gerçekte, kesim frekansı ω_c'den daha düşüktür.

Birinci mertebeden filtrelerin art arda bağlantısı ile oluşturulan yüksek mertebeli filtrelerin kesim frekanslarını hesaplayabildiğimiz sürece, frekans ölçeklendirmesini kesim frekansını istenen yere taşıyacak bileşen değerlerini hesaplamada kullanabiliriz. Eğer n tane prototip alçak geçiren filtrenin art arda bağlantısı ile başlarsak, ortaya çıkan n-yinci mertebeden alçak geçiren filtrenin kesim frekansını hesaplayabiliriz. Bunu, $|H(j\omega)| = 1/\sqrt{2}$'yi veren ω_{cn} değeri için çözerek yaparız:

$$H(s) = \frac{(-1)^n}{(s+1)^n},$$
$$|H(j\omega_{cn})| = \left|\frac{1}{(j\omega_{cn}+1)^n}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\frac{1}{(\sqrt{\omega_{cn}^2+1})^n} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\frac{1}{\omega_{cn}^2+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2/n},$$
$$\sqrt[n]{2} = \omega_{cn}^2 + 1,$$
$$\omega_{cn} = \sqrt{\sqrt[n]{2} - 1}. \qquad (15.22)$$

Eş. 15.22'nin kullanılışını göstermek için, dört tane art arda bağlı prototip alçak geçiren filtreden yapılan bir dördüncü mertebeden birim kazanca sahip alçak geçiren filtrenin kesim frekansını hesaplayalım:

$$\omega_{c4} = \sqrt{\sqrt[4]{2} - 1} = 0.435 \text{ rad/s}. \qquad (15.23)$$

Sonuç olarak, herhangi bir kesim frekansına sahip bir dördüncü mertebeden alçak geçiren filtreyi, prototip alçak geçiren filtreler içeren bir dördüncü mertebeden art arda bağlantı ile başladıktan sonra, kesim frekansını istenen ω_c değerine yerleştirmek için, bileşenleri $k_f = \omega_c / 0.435$ çarpanı ile ölçeklendiririz.

Birim kazançlı olmayan yüksek mertebeden alçak geçiren bir filtreyi, art arda bağlı yapıya bir eviren yükselteç ekleyerek elde edebileceğimize dikkat ediniz. Örnek 15.7, birim kazançlı olmayan dördüncü mertebeden bir alçak geçiren filtre tasarımını sergilemektedir.

Örnek 15.7 **Dördüncü Mertebeden Alçak Geçiren Op Amp Filtre Tasarımı**

Kesim frekansı 500 Hz, geçirme bandı kazancı 10 olan bir dördüncü mertebeden alçak geçiren filtre tasarlayınız. 1 μF kapasitörler kullanınız. Bu filtre için Bode genlik grafiklerini yapınız.

Çözüm

Tasarımımıza dört adet prototip alçak geçiren filtrenin art arda bağlantısı ile başlayalım. Eş. 15.23'ü daha önce ortaya çıkan dördüncü mertebeden alçak geçiren filtrenin kesim frekansını 0.435 rad / s olarak hesaplamakta kullanmıştık. $k_f = 7222.39$ frekans ölçeklendirme çarpanı bileşen değerlerini 500 Hz kesim frekansı verecek şekilde ölçeklendirecektir. $k_m = 138.46$ genlik ölçeklendirme çarpanı 1 μF kapasitörlerin kullanımını sağlayacaktır. Sonuçta ölçeklendirilmiş bileşen değerleri

$$R = 138.46\ \Omega;\ C = 1\ \mu\text{F}$$

olacaktır.

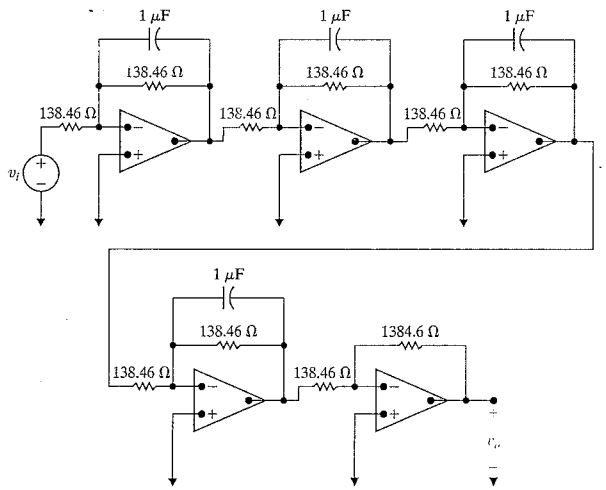
Son olarak, kazancı $R_f / R_i = 10$ olan bir eviren yükselteç katı ekleyelim. Her zamanki gibi, iki direnç değerinden birini gelişigüzel seçeriz. Zaten 138.46 Ω direnç değerini kullandığımız için $R_i = 138.46\ \Omega$ olsun; dolayısıyla

$$R_f = 10R_i = 1384.6\ \Omega$$

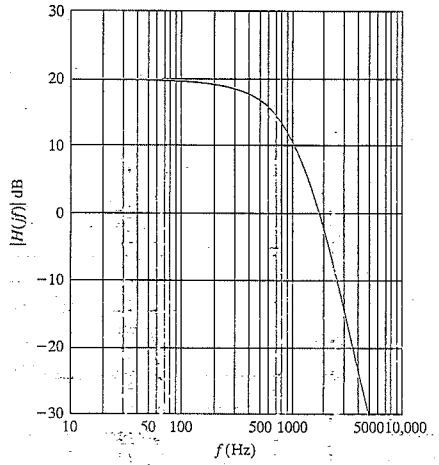
bulunur. Bu art arda bağlı dördüncü mertebeden alçak geçiren filtre için devre Şekil 15.18'de gösterilmektedir. Aktarım fonksiyonu ise

$$H(s) = -10\left[\frac{7222.39}{s + 7222.39}\right]^4$$

olur. Bu aktarım fonksiyonu için Bode genlik grafiği Şekil 15.19'da verilmektedir.



Şekil 15.17 ▲ Örnek 15.17'de tasarlanan dördüncü mertebeden alçak geçiren filtre için art arda bağlantılı devre.



Şekil 15.19 ▲ Örnek 15.17'de tasarlanan dördüncü mertebeden alçak geçiren filtrenin Bode genlik grafiği.

Özdeş alçak geçiren filtreleri art arda bağlayarak geçiş sırasındaki asimtotik eğimi arttırabilir ve kesim frekansının yerini kontrol edebiliriz, ancak yaklaşımımızın ciddi bir kusuru bulunmaktadır: Filtrenin kazancı sıfır ve kesim frekansı ω_c arasında sabit değildir. İdeal bir alçak geçiren filtrede kesim frekansından aşağıdaki tüm frekanslarda geçirme bandı genliğinin 1 olduğunu hatırlayınız. Fakat Şekil 15.16'da, kesim frekansından çok daha düşük frekanslarda genliğin 1'den (0 dB) küçük olduğunu görüyoruz.

Bu ideal olmayan geçirme bandı davranışını en iyi, birim kazançlı alçak geçiren n-yinci mertebeden art arda bağı bir filtrenin aktarım fonksiyonuna bakarak anlayabiliriz:

$$H(s) = \frac{\omega_{cn}^n}{(s + \omega_{cn})^n}$$

olduğundan genlik

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_{cn}^n}{\left(\sqrt{\omega^2 + \omega_{cn}^2}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{(\omega/\omega_{cn})^2 + 1}\right)^n} \qquad (15.24)$$

olarak verilir.

Eş. 15.24'ten görebileceğimiz gibi, $\omega << \omega_c$ iken payda yaklaşık olarak 1'dir ve aktarım fonksiyonunun genliği de hemen hemen 1'dir. Fakat $\omega \to \omega_c$ iken payda 1'den büyük hale gelir, dolayısıyla genlik 1'den daha küçük olur. Alçak geçiren filtrelerin art arda bağlantısı geçirme bandındaki bu ideal olmayan davranışa sebep olduğu için yüksek mertebeli filtrelerin tasarımında başka yaklaşımlar izlenmektedir. Sırada böyle bir yaklaşım incelenecektir.

Butterworth Filtreler

Bir birim kazançlı Butterworth alçak geçiren filtre, genliği

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}} \qquad (15.25)$$

ile verilen bir aktarım fonksiyonuna sahiptir. Burada n bir tamsayıdır ve filtrenin mertebesini belirtmektedir.[1]

Eş. 15.25'i incelerken aşağıdakilere dikkat ediniz:

1. Kesim frekansı, n'nin tüm değerleri için ω_c rad / s'dir.
2. Eğer n yeteri kadar büyükse, $\omega < \omega_c$ iken payda daima bire yakındır.
3. $|H(j\omega)|$ ifadesinde, ω / ω_c'nin kuvveti daima çifttir.

Bu son gözlem önemlidir, çünkü fiziksel olarak gerçekleştirilebilen bir devre için bir çift kuvvet gerekmektedir (bkz. Problem 15.24).

Aktarım fonksiyonunun genliği için bir denklem verildiğinde, $H(s)$'yi nasıl buluruz? $H(s)$'nin çıkarımı, bir prototip filtrenin kullanımı ile büyük oranda kolaylaşmaktadır. Dolayısıyla, Eş. 15.25'te ω_c'yi 1 rad / s'ye eşitleriz. Daha önce olduğu gibi, prototip filtreyi verilen filtre isterlerini sağlayan bir filtreye dönüştürmek için ölçeklendirmeyi kullanırız.

$H(s)$'yi bulmak için ilk olarak eğer N bir karmaşık nicelik ise, $|N|^2 = NN^*$ olduğuna dikkat ediniz, burada N^*, N'nin eşleniğidir. Bunu takiben

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega) \qquad (15.26)$$

yazılır. Fakat $s = j\omega$ olduğu için,

$$|H(j\omega)|^2 = H(s)H(-s) \qquad (15.27)$$

yazabiliriz. Şimdi $s^2 = -\omega^2$ olduğunu gözleyiniz. Sonuç olarak

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}}$$

$$= \frac{1}{1 + (\omega^2)^n}$$

$$= \frac{1}{1 + (-s^2)^n}$$

$$= \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}},$$

veya

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}} \qquad (15.28)$$

bulunur.

[1] Bu filtre, İngiliz mühendis S. Butterworth tarafından geliştirilmiş ve Wireless Engineering 7(1930): 536-541 yayını ile duyurulmuştur.

Verilen bir n değeri için $H(s)$'yi bulmakta izlenen yöntem şöyledir:

1. $1 + (-1)^n s^{2n} = 0$

   polinomunun köklerini bulunuz.
2. Sol yarı düzlemdeki kökleri $H(s)$'ye ve sağ yarı düzlemdeki kökleri $H(-s)$'ye atayınız.
3. $H(s)$'nin paydasındaki terimleri birinci ve ikinci mertebeden çarpanlar oluşturmak üzere birleştiriniz.

Örnek 15.8 bu süreci göstermektedir.

Örnek 15.8 Butterworth Aktarım Fonksiyonlarının Hesaplanması

$n = 2$ ve $n = 3$ için Butterworth aktarım fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm

$n = 2$ için,

$$1 + (-1)^2 s^4 = 0$$

polinomunun köklerini buluruz. Terimleri tekrar düzenleyerek,

$$s^4 = -1 = 1\angle 180^\circ$$

buluruz. Dolayısıyla, dört kök,

$$s_1 = 1\angle 45^\circ = 1/\sqrt{2} + j/\sqrt{2},$$

$$s_2 = 1\angle 135^\circ = -1/\sqrt{2} + j/\sqrt{2},$$

$$s_3 = 1\angle 225^\circ = -1/\sqrt{2} + -j/\sqrt{2},$$

$$s_4 = 1\angle 315^\circ = 1/\sqrt{2} + -j/\sqrt{2}$$

olarak elde edilir. Kökler s_2 ve s_3 sol yarı düzlemdedir. Sonuç olarak

$$H(s) = \frac{1}{(s + 1/\sqrt{2} - j/\sqrt{2})(s + 1/\sqrt{2} + j/\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{(s^2 + \sqrt{2}s + 1)}$$

yazılır.

$n = 3$ için,

$$1 + (-1)^3 s^6 = 0$$

polinomunun köklerini buluruz. Terimleri tekrar düzenleyerek,

$$s^6 = 1\angle 0^\circ = 1\angle 360^\circ$$

buluruz. Dolayısıyla, altı kök,

$$s_1 = 1\angle 0^\circ = 1,$$

$$s_2 = 1\angle 60^\circ = 1/2 + j\sqrt{3}/2,$$

$$s_3 = 1\angle 120^\circ = -1/2 + j\sqrt{3}/2,$$

$$s_4 = 1\angle 180^\circ = -1 + j0,$$

$$s_5 = 1\angle 240^\circ = -1/2 + -j\sqrt{3}/2,$$

$$s_6 = 1\angle 300^\circ = 1/2 + -j\sqrt{3}/2$$

bulunur. Kökler s_3, s_4 ve s_5 sol yarı düzlemdedir. Sonuç olarak

$$H(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 1/2 - j\sqrt{3}/2)(s + 1/2 + j\sqrt{3}/2)}$$

$$= \frac{1}{(s + 1)(s^2 + s + 1)}$$

elde edilir. Butterworth polinomunun köklerinin s düzleminde birim çemberin etrafında eşit aralıklı yer aldığına dikkat etmeliyiz. Butterworth filtrelerin tasarımına yardım etmek için Tablo 15.1 $n = 8$'e kadar Butterworth polinomlarını listelemektedir.

TABLO 15.1 Sekizinci Mertebeye kadar Normalize Edilmiş (ω_c = 1 rad/s olacak şekilde) Butterworth Polinomları

n	n-yinci Mertebeden Butterworth Polinomu
1	$(s + 1)$
2	$(s^2 + \sqrt{2}s + 1)$
3	$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 0.765s + 1)(s^2 + 1.848s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0.618s + 1)(s^2 + 1.618s + 1)$
6	$(s^2 + 0.518s + 1)(s^2 + \sqrt{2} + 1)(s^2 + 1.932s + 1)$
7	$(s + 1)(s^2 + 0.445s + 1)(s^2 + 1.247s + 1)(s^2 + 1.802s + 1)$
8	$(s^2 + 0.390s + 1)(s^2 + 1.111s + 1)(s^2 + 1.6663s + 1)(s^2 + 1.962s + 1)$

Butterworth Filtre Devreleri

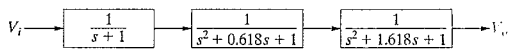
Bir Butterworth filtre devresinin aktarım fonksiyonunu nasıl belirleyeceğimizi (aktarım fonksiyonunun köklerini doğrudan hesaplayarak veya Tablo 15.1'i kullarak) bildiğimize göre şimdi problemi böyle bir aktarım fonksiyonunun devresini tasarlamaya döndürebiliriz. Tablo 15.1'deki Butterworth polinomlarının biçimlerine dikkat ediniz. Bunlar, birinci ve ikinci mertebeden çarpanların çarpımlarıdır. Sonuç olarak, her biri bu çarpanlardan birini verecek şekilde op amp devrelerini art arda bağlayarak paydasında Butterworth polinomu bulunan aktarım fonksiyonuna sahip devreyi oluşturabiliriz. Bir beşinci mertebeden Butterworth polinomunu kullanan böyle bir art arda bağlantının blok şeması Şekil 15.20'de gösterilmektedir.

Tüm tek mertebeli Butterworth polinomları $(s + 1)$ çarpanını içermektedir, yani tüm tek mertebeli Butterworth filtre devreleri, aktarım fonksiyonu $H(s) = 1 / (s + 1)$ olan bir altdevre içermek zorundadır. Bu, Şekil 15.1'deki prototip alçak geçiren filtrenin aktarım fonksiyonudur. Dolayısıyla geriye kalan, $H(s) = 1 / (s^2 + b_1 s + 1)$ biçiminde bir aktarım fonksiyonunu sağlayan bir devreyi bulmaktır.

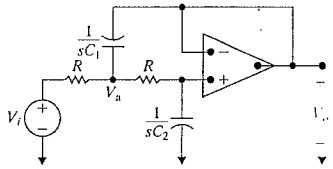
Böyle bir devre Şekil 15.21'de gösterilmektedir. Bu devrenin analizi op ampın evirmeyen terminalinde, V_a ile işaretlenmiş düğümde, s bölgesi düğüm denklemlerini yazarak başlar;

$$\frac{V_a - V_i}{R} + (V_a - V_o)sC_1 + \frac{V_a - V_o}{R} = 0, \qquad (15.29)$$

$$V_o sC_2 + \frac{V_o - V_a}{R} = 0. \qquad (15.30)$$



Şekil 15.20 $\omega_c = 1$ rad / s ile bir beşinci mertebeden alçak geçiren Butterworth filtreyi veren aktarım fonksiyonlarına ait birinci ve ikinci mertebeden devrelerin art arda bağlantısı.



Şekil 15.21 Butterworth filtrenin art arda bağlantısı için ikinci mertebeden aktarım fonksiyonunu sağlayan bir devre.

Eş. 15.29 ve 15.30'u basitleştirmek

$$(2 + RC_1s)V_a - (1 + RC_1s)V_o = V_i, \qquad (15.31)$$

$$-V_a + (1 + RC_2s)V_o = 0 \qquad (15.32)$$

sonucunu verir. Eş. 15.31 ve 15.32'yi Cramer kuralını kullanarak V_o için çözersek

$$V_o = \frac{\begin{vmatrix} 2+RC_1s & V_i \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+RC_1s & -(1+RC_1s) \\ -1 & 1+RC_2s \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{V_i}{R^2C_1C_2s^2 + 2RC_2s + 1} \qquad (15.33)$$

buluruz. Daha sonra, Şekil 15.21'deki devrede aktarım fonksiyonunu yazmak için Eş. 15.33'ü tekrar düzenleyerek

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\dfrac{1}{R^2C_1C_2}}{s^2 + \dfrac{2}{RC_1}s + \dfrac{1}{R^2C_1C_2}} \qquad (15.34)$$

elde edilir. Son olarak, Eş. 15.34'te $R = 1\ \Omega$ alınca

$$H(s) = \frac{\dfrac{1}{C_1C_2}}{s^2 + \dfrac{2}{C_1}s + \dfrac{1}{C_1C_2}} \qquad (15.35)$$

çıkar. Eş. 15.35'in Butterworth art arda bağlantısında istenen ikinci mertebeden devrenin şekline sahip olduğuna dikkat ediniz. Başka bir deyişle,

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + b_1s + 1}$$

biçiminde bir aktarım fonksiyonunu elde etmek için, Şekil 15.21'deki devreyi kullanırız ve kapasitör değerlerini

$$b_1 = \frac{2}{C_1} \quad \text{ve} \quad 1 = \frac{1}{C_1C_2} \qquad (15.36)$$

olarak seçeriz.

Sonuç olarak, kesim frekansı $\omega_c = 1$ rad / s ve geçirme bandı kazancı 1 olan bir n-yinci mertebeden Butterworth alçak geçiren filtrenin tasarım yönteminin ana hatlarını vermiş olduk. Başka bir kesim frekansını verecek şekilde gözden geçirilmiş kapasitör değerlerini hesaplamak için frekans ölçeklendirmesini; tasarımımızda daha gerçekçi bileşen değerleri elde etmek için ise genlik ölçeklendirmesini kullanabiliriz. Geçirme bandında 1'den farklı bir kazanç sağlamak için bir eviren yükselteci çıkışa bağlayabiliriz.

Örnek 15.9 bu tasarım sürecini göstermektedir.

Örnek 15.9 Dördüncü Mertebeden Alçak Geçiren Butterworth Filtre Tasarımı

Kesim frekansı 500 Hz ve geçirme bandı kazancı 10 olan bir dördüncü mertebeden Butterworth alçak geçiren filtre tasarlayınız. Mümkün olduğu kadar çok 1 kΩ direnç kullanınız. Bu Butterworth filtrenin Bode genlik grafiği ile Örnek 15.7'deki özdeş art arda bağlantınınkini karşılaştırınız.

Çözüm

Tablo 15.1'den dördüncü mertebeden Butterworth polinomunun

$$(s^2 + 0.765s + 1)(s^2 + 1.848s + 1)$$

olduğunu buluruz. Dolayısıyla, dördüncü mertebeden aktarım fonksiyonunu vermek için iki ikinci mertebeden filtrenin art arda bağlantısına; ayrıca geçirme bandı kazancı 10'u elde etmek için bir eviren yükselteç devresine ihtiyaç duyacağız. Devre Şekil 15.22'de gösterilmektedir.

Art arda bağlantının ilk basamağı, $(s^2 + 0.765s + 1)$ polinomu için aktarım fonksiyonunu gerçekleştirsin. Eş. 15.36'dan

$$C_1 = 2.61\ \text{F},$$

$$C_2 = 0.38\ \text{F}$$

bulunur. Art arda bağlantının ikinci basamağı da $(s^2 + 1.848s + 1)$ polinomu için aktarım fonksiyonunu gerçekleştirsin. Yine Eş. 15.36'dan

$$C_3 = 1.08\ \text{F},$$

$$C_4 = 0.924\ \text{F}$$

bulunur.

C_1, C_2, C_3 ve C_4'ün yukarıdaki değerleri kesim frekansı 1 rad / s olan bir dördüncü mertebeden Butterworth filtre oluşturur. Frekans ölçeklendirme çarpanı $k_f = 3141.6$ kesim frekansını 500 Hz'e taşır. Genlik ölçeklendirme çarpanı $k_m = 1000$ de 1 Ω dirençler yerine 1 kΩ dirençler kullanılmasına izin verir. Ortaya çıkan ölçeklenmiş bileşen değerleri

$$R = 1\ \text{k}\Omega,$$

$$C_1 = 831\ \text{nF},$$

$$C_2 = 121\ \text{nF},$$

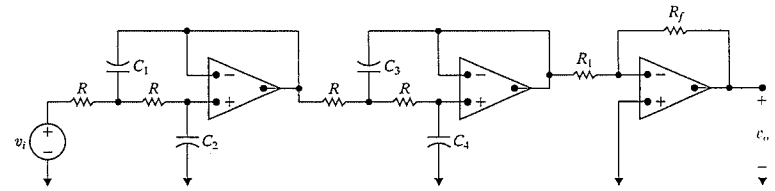
$$C_3 = 344\ \text{nF},$$

$$C_4 = 294\ \text{nF}$$

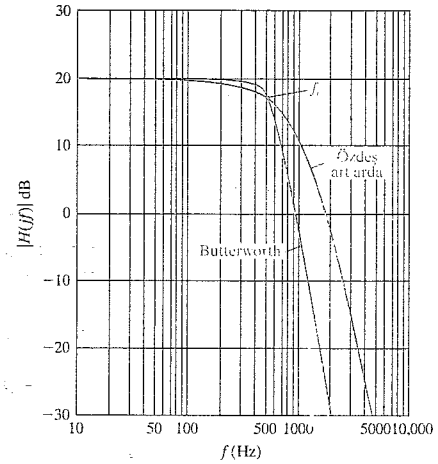
olarak verilir. Son olarak, eviren yükselteç katındaki direnç değerlerini, geçirme bandı kazancı 10 olacak şekilde belirlememiz gerekmektedir. $R_1 = 1$ kΩ olduğu zaman

$$R_f = 10R_1 = 10\ \text{k}\Omega$$

olur. Şekil 15.23 Örnek 15.7'den dördüncü mertebeden özdeş art arda bağlantılı filtre ile henüz tasarladığımız Butterworth filtrenin genlik tepkilerini karşılaştırmaktadır. Her iki filtrenin de geçirme bandı kazancı olarak 10 (20 dB) ve kesim frekansı olarak 500 Hz sağladığını, ancak Butterworth filtrenin daha düz geçirme bandı ve kesim frekansında daha dik bir düşüş ile ideal bir alçak geçiren filtreye daha yakın olduğuna dikkat ediniz. Sonuç olarak, Butterworth tasarım, özdeş art arda bağlantıya tercih edilmektedir.



Şekil 15.22 ▲ Birim olmayan kazançlı bir dördüncü mertebeden Butterworth filtre.

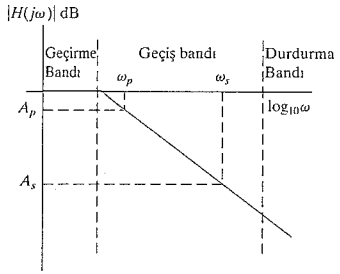


Şekil 15.23 ▲ Özdeş bağlantıları ve Butterworth tasarımını kullanan dördüncü mertebeden filtrelerin genlik tepkilerinin karşılaştırılması.

Bir Butterworth Filtrenin Mertebesi

Bu noktada Butterworth filtrenin mertebesi arttıkça, genlik karakteristiklerinin de bir ideal alçak geçiren filtreye ulaştığı açık olmalıdır. Başka bir deyişle, n arttıkça, genlik geçirme bandında bire yakın kalır, geçiş bandı daralır ve durdurma bandında genlik sıfıra yakın kalır. Aynı zamanda, mertebe arttıkça, devre bileşenlerinin sayısı da artar. Bunu takiben, bir filtrenin tasarımındaki temel problem olan filtre isterlerini sağlayacak en küçük n değerini belirleme ortaya çıkar.

Bir alçak geçiren filtrenin tasarımında, filtre isterleri genellikle Şekil 15.24'te gösterildiği gibi geçiş bölgesinin aniliği ile verilir. Bir kere A_p, ω_p, A_s ve ω_s belirlendiğinde Butterworth filtrenin mertebesi de belirlenebilir.



Şekil 15.24 ▲ Bir alçak geçiren filtre için geçiş bölgesinin tanımlanması.

Butterworth filtre için,

$$A_p = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\omega_p^{2n}}} = -10\log_{10}(1+\omega_p^{2n}), \tag{15.37}$$

$$A_s = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\omega_s^{2n}}} = -10\log_{10}(1+\omega_s^{2n}) \tag{15.38}$$

yazılabilir.

Logaritmanın tanımınından,

$$10^{-0.1A_p} = 1 + \omega_p^{2n}, \tag{15.39}$$

$$10^{-0.1A_s} = 1 + \omega_s^{2n} \tag{15.40}$$

elde edilir. Şimdi, $\omega_p{}^n$ ve $\omega_s{}^n$ için çözüp $(\omega_s / \omega_p)^n$ oranını oluşturabiliriz. σ_s ve σ_p sembollerinin rahatlık için tanımlandığı

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^n = \frac{\sqrt{10^{-0.1A_s}-1}}{\sqrt{10^{-0.1A_p}-1}} = \frac{\sigma_s}{\sigma_p} \tag{15.41}$$

ifadesini elde ederiz. Eş. 15.41'den

$$n\log_{10}(\omega_s/\omega_p) = \log_{10}(\sigma_s/\sigma_p)$$

yazabiliriz veya

$$n = \frac{\log_{10}(\sigma_s/\sigma_p)}{\log_{10}(\omega_s/\omega_p)} \tag{15.42}$$

olur. Eğer ω_p kesim frekansı ise, Eş. 15.42'yi basitleştirebiliriz, çünkü o zaman $A_p = -20\log_{10}\sqrt{2}$ olur ve $\sigma_p = 1$'dir. Dolayısıyla,

$$n = \frac{\log_{10}\sigma_s}{\log_{10}(\omega_s/\omega_p)} \tag{15.43}$$

bulunur. Bir sadeleştirme daha mümkündür. Dik bir geçiş bölgesi için bir Butterworth filtre kullanmaktayız. Sonuç olarak, filtre isterleri $10^{-0.1A_s} >> 1$ yapacaktır. Böylece,

$$\sigma_s \approx 10^{-0.05A_s}, \tag{15.44}$$

$$\log_{10}\sigma_s \approx -0.05A_s \tag{15.45}$$

olur. Sonuçta, n'nin hesaplanması için iyi bir yaklaşık değer

$$n = \frac{-0.05A_s}{\log_{10}(\omega_s/\omega_p)} \tag{15.46}$$

olarak elde edilir. $\omega_s / \omega_p = f_s / f_p$ olduğuna dikkat ediniz, yani n'yi hesaplamak için saniye başına radyan ile veya hertz ile çalışabiliriz.

Filtrenin mertebesi bir tamsayı olmalıdır, dolayısıyla Eş. 15.42 veya Eş. 15.46'yı kullanırken denklem tarafından verilen sonuca en yakın ve ondan büyük tamsayıyı seçmeliyiz. Sıradaki örnekler Eş. 15.42 ve 15.46'nın kullanışlılığını sergilemektedir.

Örnek 15.10 **Bir Butterworth Filtrenin Mertebesinin Belirlenmesi**

a) Kesim frekansı 1000 Hz olan ve 6000 Hz'de kazancı –50dB'den yüksek olmayan bir Butterworth filtrenin mertebesini belirleyiniz.

b) 6000 Hz'deki asıl kazanç ne kadardır?

Çözüm

a) Kesim frekansı verildiği için $\sigma_p = 1$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca isterlerden $10^{-0.1(-50)}$'nin 1'den çok büyük olduğunu da biliyoruz. Sonuç olarak Eş. 15.46'yı güvenle kullanabiliriz:

$$n = \frac{(-0.05)(-50)}{\log_{10}(6000/1000)} = 3.21.$$

Dolayısıyla, dördüncü mertebeden bir Butterworth filtreye ihtiyaç duymaktayız.

b) Eş. 15.25'i 6000 Hz'deki asıl kazancı hesaplamak için kullanabiliriz. Desibel cinsinden kazanç şöyledir:

$$K = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1+6^8}}\right) = -62.25 \text{ dB}.$$

Örnek 15.11 **Bir Butterworth Filtrenin Mertebesinin Belirlenmesinde Alternatif Yaklaşım**

a) 500 Hz'deki genliği geçirme bandındaki genlikten 10 dB düşük olan, 5000 Hz'deki genliği ise geçirme bandı genliğinden en az 60 dB düşük olan bir Butterworth filtrenin mertebesini belirleyiniz.

b) Filtrenin kesim frekansını belirleyiniz (Hz cinsinden).

c) Filtrenin 5000 Hz'deki asıl kazancı nedir (dB cinsinden)?

Çözüm

a) Kesim frekansı verilmediği için Eş. 15.42'yi filtre mertebesini belirlemek için kullanalım:

$$\sigma_p = \sqrt{10^{-0.1(-10)} - 1} = 3,$$

$$\sigma_s = \sqrt{10^{-0.1(-60)} - 1} \approx 1000,$$

$$\omega_s/\omega_p = f_s/f_p = 5000/500 = 10,$$

$$n = \frac{\log_{10}(1000/3)}{\log_{10}(10)} = 2.52.$$

Sonuç olarak isterleri sağlamak için üçüncü mertebeden bir Butterworth filtreye ihtiyacımız bulunmaktadır.

b) 500 Hz'deki kazancın –10 dB olduğunu bildiğimiz için kesim frekansını belirleyebiliriz. Eş. 15.25'ten

$$-10\log_{10}[1 + (\omega/\omega_c)^6] = -10$$

yazabiliriz. Burada $\omega = 1000\pi$ rad / s'dir. Bu nedenle

$$1 + (\omega/\omega_c)^6 = 10$$

ve

$$\omega_c = \frac{\omega}{\sqrt[6]{9}}$$

$$= 2178.26 \text{ rad/s}$$

bulunur ve kesim frekansı

$$f_c = 346.68 \text{ Hz}$$

hesaplanır.

c) Filtrenin 5000 Hz'deki asıl kazancı

$$K = -10\log_{10}[1 + (5000/346.68)^6]$$

$$= -69.54 \text{ dB}$$

olur.

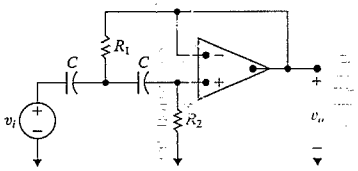
Butterworth Yüksek Geçiren, Bant Geçiren ve Bant Durduran Filtreler

Bir n-yinci mertebeden Butterworth yüksek geçiren filtre, n-yinci mertebeden Butterworth alçak geçiren filtrede olduğu gibi, paydasında n-yinci mertebeden Butterworth polinomu içeren bir aktarım fonksiyonuna sahiptir. Fakat alçak geçiren filtrede 1 olan aktarım fonksiyonunun payında, yüksek geçiren filtrede s^n vardır. Butterworth yüksek geçiren filtrenin tasarımında da art arda bağlantı yaklaşımını kullanabiliriz. Birinci mertebe çarpanı, art arda bağlantıya bir prototip yüksek geçiren filtre dahil ederek elde edilir (Şekil 15.4, $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$ ve $C = 1$ F iken).

Butterworth polinomunun ikinci mertebe çarpanlarını üretmek için, aktarım fonksiyonu

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + b_1 s + 1}$$

olan bir devreye ihtiyacımız vardır. Böyle bir devre Şekil 15.25'te gösterilmektedir.



Şekil 15.25 ▲ Bir ikinci mertebeden Butterworth yüksek geçiren filtre devresi.

Bu devre aşağıdaki aktarım fonksiyonuna sahiptir:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{2}{R_2C}s + \frac{1}{R_1R_2C^2}}. \tag{15.47}$$

$C = 1$ F yapmak

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{2}{R_2}s + \frac{1}{R_1R_2}} \tag{15.48}$$

sonucunu verir.

Böylece, bir Butterworth polinomundaki $(s^2 + b_1 s + 1)$ biçimindeki herhangi bir ikinci mertebeden çarpanı, Şekil 15.25'teki ikinci mertebeden devreyi Eş.15.49'u sağlayacak direnç değerleriyle art arda bağlantıya ekleyerek gerçekleştirebiliriz:

$$b_1 = \frac{2}{R_2} \quad \text{ve} \quad 1 = \frac{1}{R_1R_2}. \tag{15.49}$$

Bu noktada, Şekil 15.21 ve 15.25 ve bunların prototip aktarım fonksiyonları $1 / (s^2 + b_1 s + 1)$ ve $s^2 / (s^2 + b_1 s + 1)$ hakkında gözlemler yapmak üzere biraz duraklayalım. Bu gözlemler genellikle geçerli olmaları nedeniyle önemlidir. İlk olarak, Şekil 15.25'teki yüksek geçiren filtre, Şekil 15.21'deki alçak geçiren devrede direnç ve kapasitörlerin yerleri değiştirilerek elde edilmiştir. İkincisi, bir yüksek geçiren filtrenin prototip aktarım fonksiyonu, bir alçak geçiren filtreninkinden, alçak geçiren ifadesindeki $1 / s$'yi s ile değiştirerek elde edilebilir (bkz. Problem 15.46).

Frekans ve genlik ölçeklendirmelerini kullanarak pratik bileşen değerleri ve 1 rad / s'den başka bir kesim frekansına sahip bir Butterworth yüksek geçiren filtre tasarlayabiliriz. Art arda bağlantıya bir eviren yükselteç eklemek birim olmayan geçirme bandı kazancı elde etmemizi sağlayacaktır. Bölüm sonundaki problemler birkaç Butterworth yüksek geçiren filtre tasarımını içermektedir.

Şimdi, isteğe bağlı kesim frekansları ve geçirme bandı kazançlarına sahip n-yinci mertebeden hem alçak geçiren hem de yüksek geçiren Butterworth filtreler tasarlayabildiğimize göre, (Kısım 15.3'te yaptığımız gibi) bu filtreleri art arda bağlayarak n-yinci mertebeden Butterworth bant geçiren filtreler üretebiliriz. (Yine Kısım 15.3'te yaptığımız gibi) Bu filtreleri n-yinci mertebeden Butterworth bant durduran filtreler yapmak için bir toplayıcı yükselteç ile birleştirebiliriz. Bu bölümün problemleri Butterworth bant geçiren ve bant durduran filtre tasarımlarını da içermektedir.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 3 – Art arda bağlantılı birinci ve ikinci mertebeden Butterworth filtrelerin nasıl kullanıldığını anlamak

15.4 Şekil 15.25'te gösterilen devre için, R_1 ve R_2'nin bir ikinci mertebeden prototip Butterworth yüksek geçiren filtre oluşturan değerlerini hesaplayınız. **Cevap:** $R_1 = 0.707\ \Omega$, $R_2 = 1.41\ \Omega$.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 15.33, 15.36 ve 15.37'yi de çözmeyi deneyiniz.

15.5 Darbant Bant Geçiren ve Bant Durduran Filtreler

Daha basit alçak geçiren ve yüksek geçiren filtrelerden art arda ve paralel bağlantılı bileşenleri kullanarak bant geçiren ve bant durduran filtrelerin sentezlenmesi genişbant veya düşük Q, kısıtlamasına sahip filtrelere neden olacaktır. (Q, elbette, *kalite çarpanı* demektir.) Sınırlama temelde, art arda bağlantılı bant geçiren veya paralel bağlantılı bant durduran filtrelerin ayrık gerçek kutuplara sahip olmalarından kaynaklanmaktadır. Sentezleme teknikleri en çok genişçe ayrılmış kesim frekansları için çalışmaktadır ve dolayısıyla en düşük kalite çarpanına neden olmaktadır. Fakat, ayrık gerçek köklerle ulaşabildiğimiz en yüksek kalite çarpanı, kesim frekansları ve dolayısıyla kutup yerleri aynı olduğu zaman elde edilmektedir. Aşağıdaki aktarım fonksiyonunu gözönüne alalım:

$$H(s) = \left(\frac{-\omega_c}{s+\omega_c}\right)\left(\frac{-s}{s+\omega_c}\right)$$

$$= \frac{s\omega_c}{s^2 + 2\omega_c s + \omega_c^2}$$

$$= \frac{0.5\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_c^2}. \qquad (15.50)$$

Eş.15.50 bir bant geçiren filtrenin aktarım fonksiyonunun standart biçimine sahiptir. Dolayısıyla bant genişliğini ve merkez frekansını doğrudan belirleyebiliriz:

$$\beta = 2\omega_c, \qquad (15.51)$$

$$\omega_o^2 = \omega_c^2. \qquad (15.52)$$

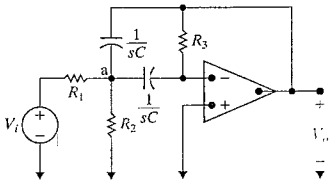
Eş. 15.51, 15.52 ve Q'nun tanımından

$$Q = \frac{\omega_o}{\beta} = \frac{\omega_c}{2\omega_c} = \frac{1}{2} \qquad (15.53)$$

olduğunu görürüz.

Sonuç olarak ayrık gerçek kutuplarla ulaşabildiğimiz en yüksek kaliteli bant geçiren (veya bant durduran) filtre, $Q = 1/2$'ye sahiptir.

Yüksek kalite çarpanlı aktif filtreler kurmak için kompleks eşlenik kutuplara sahip aktarım fonksiyonu üreten bir op amp devresine ihtiyacımız bulunmaktadır. Şekil 15.26 böyle bir devreyi analiz etmemiz için sunmaktadır. Op ampın eviren girişinde akımları toplayarak



Şekil 15.26 Bir aktif, yüksek Q bant geçiren filtre.

$$\frac{V_a}{1/sC} = \frac{-V_o}{R_3}$$

elde ederiz. V_a için çözüm

$$V_a = \frac{-V_o}{sR_3C} \qquad (15.54)$$

verir. a ile gösterilen düğümde akımları toplarsak

$$\frac{V_i - V_a}{R_1} = \frac{V_a - V_o}{1/sC} + \frac{V_a}{1/sC} + \frac{V_a}{R_2}$$

buluruz. V_i için çözüm

$$V_i = (1 + 2sR_1C + R_1/R_2)V_a - sR_1CV_o \qquad (15.55)$$

verir. Eş. 15.54'ü Eş. 15.55'te yerine koymanın ve ifadeyi tekrar düzenlemenin sonucunda, aktarım fonksiyonu V_o / V_i için

$$H(s) = \frac{\dfrac{-s}{R_1C}}{s^2 + \dfrac{2}{R_3C}s + \dfrac{1}{R_{eq}R_3C^2}} \qquad (15.56)$$

elde ederiz. Burada

$$R_{eq} = R_1 \| R_2 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

ile verilir. Eş. 15.56 bir bant geçiren filtre için aktarım fonksiyonunun standart biçiminde

$$H(s) = \frac{K\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}$$

ile verildiğinden terimleri eşitleyip, dirençlerin değerleri için çözebiliriz. Bu değerler, belirlenmiş bir merkez frekansı (ω_o), kalite çarpanı (Q) ve geçirme bandı kazancını (K) sağlayacaktır:

$$\beta = \frac{2}{R_3C}; \qquad (15.57)$$

$$K\beta = \frac{1}{R_1C}; \qquad (15.58)$$

$$\omega_o^2 = \frac{1}{R_{eq}R_3C^2}. \qquad (15.59)$$

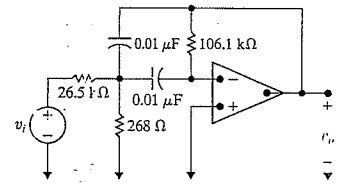
Bu noktada Şekil 15.25'teki devrenin prototipini $\omega_o = 1$ rad / s ve $C = 1$ F olan bir devre olarak tanımlamak uygundur. Bu durumda R_1, R_2 ve R_3 için ifadeler arzu edilen kalite çarpanı ve geçirme bandı kazancı cinsinden verilebilirler. Prototip devre için R_1, R_2 ve R_3 ifadelerinin

$$R_1 = Q/K,$$
$$R_2 = Q/(2Q^2 - K),$$
$$R_3 = 2Q$$

olduğunu göstermeyi size bırakıyoruz (Bkz. Problem 15.38). Devre bileşenleri için pratik değerleri belirlemede ölçeklendirme kullanılır. Bu tasarım süreci Örnek 15.12'de gösterilmektedir.

Örnek 15.12 **Yüksek-Q Bant Geçiren Filtre Tasarımı**

Şekil 15.26'daki devreyi kullanarak merkez frekansı 3000 Hz, kalite çarpanı 10 ve geçirme bandı kazancı 2 olan bir bant geçiren filtre tasarlayınız. Tasarımınızda 0.01 μF kapasitörler kullanınız. Devrenizin aktarım fonksiyonunu hesaplayınız ve genlik tepkisinin Bode grafiğini çiziniz.



Şekil 15.27 ▲ Örnek 15.12'de tasarlanan yüksek Q bant geçiren filtre.

Çözüm

$Q = 10$ ve $K = 2$ olduğu için, prototip devredeki R_1, R_2 ve R_3

$$R_1 = 10/2 = 5,$$
$$R_2 = 10/(200 - 2) = 10/198,$$
$$R_3 = 2(10) = 20$$

bulunur. Ölçeklendirme çarpanları $k_f = 6000\pi$ ve $k_m = 108 / k_f$'dir. Ölçeklendirme sonrasında

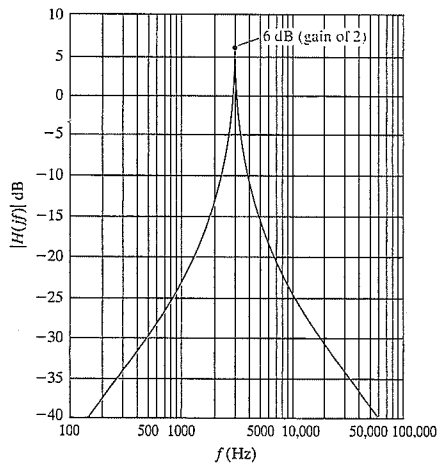
$$R_1 = 26.5\ \text{k}\Omega,$$
$$R_2 = 268.0\ \Omega,$$
$$R_3 = 106.1\ \text{k}\Omega$$

elde edilir. Devre Şekil 15.27'de gösterilmektedir.

Eş. 15.56'da direnç ve kapasitörlerin değerlerini yerlerine koymak devre için aşağıdaki aktarım fonksiyonunu verir:

$$H(s) = \frac{-3770s}{s^2 + 1885.0s + 355 \times 10^6}.$$

Bu aktarım fonksiyonunun örnekte tanımlanan bant geçiren filtrenin isterlerini sağladığını görmek kolaydır. Genlik tepkisinin Bode grafiği Şekil 15.28'de gösterilmektedir.



Şekil 15.28 ▲ Örnek 15.12'de tasarlanan yüksek Q bant geçiren filtrenin Bode genlik grafiği.

Alçak ve yüksek geçiren filtre bileşenlerini bir toplayıcı yükselteç ile birleştiren, bir bant durduran filtrenin paralel gerçeklenmesi de art arda bağlantılı bant geçiren filtredeki gibi düşük Q kısıtlamasına sahiptir. Şekil 15.29'daki devre, a ve b düğümlerindeki T şekilli iki bölümü nedeniyle, **ikiz T çentik filtresi** olarak bilinen bir aktif, yüksek Q bant durduran filtredir.

Bu devrenin analizine a düğümünden çıkan akımları toplayarak başlarsak,

$$(V_a - V_i)sC + (V_a - V_o)sC + \frac{2(V_a - \sigma V_o)}{R} = 0$$

veya

$$V_a[2sCR + 2] - V_o[sCR + 2\sigma] = sCRV_i \qquad (15.60)$$

bulunur b düğümünden çıkan akımları toplamak

$$\frac{V_b - V_i}{R} + \frac{V_b - V_o}{R} + (V_b - \sigma V_o)2sC = 0$$

veya

$$V_b[2 + 2RCs] - V_o[1 + 2\sigma RCs] = V_i \qquad (15.61)$$

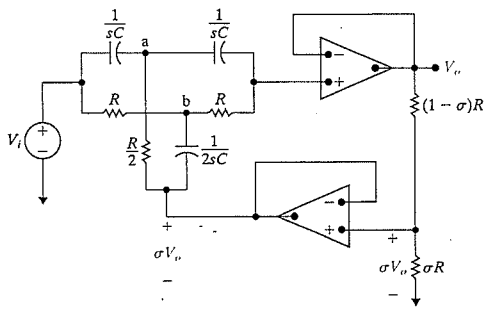
verir. Üstteki op ampın evirmeyen giriş terminalinden çıkan akımları toplamak ise

$$(V_o - V_a)sC + \frac{V_o - V_b}{R} = 0$$

veya

$$-sRCV_a - V_b + (sRC + 1)V_o = 0 \qquad (15.62)$$

verir.



Şekil 15.29 ▲ Bir yüksek Q bant durduran filtre.

Eş. 15.60-15.62'den V_o'yu çözmek için Cramer kuralını kullanabiliriz:

$$V_o = \frac{\begin{vmatrix} 2(RCs+1) & 0 & sCRV_i \\ 0 & 2(RCs+1) & V_i \\ -RCs & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(RCs+1) & 0 & -(RCs+2\sigma) \\ 0 & 2(RCs+1) & -(2\sigma RCs+1) \\ -RCs & -1 & RCs+1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(R^2C^2s^2+1)V_i}{R^2C^2s^2+4RC(1-\sigma)s+1}. \qquad (15.63)$$

Eş. 15.63'ü tekrar düzenleyip aktarım fonksiyonu için çözerek

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\left(s^2+\dfrac{1}{R^2C^2}\right)}{\left[s^2+\dfrac{4(1-\sigma)}{RC}s+\dfrac{1}{R^2C^2}\right]} \qquad (15.64)$$

buluruz. Bu ifade bir bant durduran filtrenin aktarım fonksiyonunun standart

$$H(s) = \frac{s^2+\omega_0^2}{s^2+\beta s+\omega_0^2} \qquad (15.65)$$

biçimindedir. Eş. 15.64 ve 15.65'i eşitlemek

$$\omega_o^2 = \frac{1}{R^2C^2}, \qquad (15.66)$$

$$\beta = \frac{4(1-\sigma)}{RC} \qquad (15.67)$$

sonucunu verir. Bu devrede üç parametre (R, C ve σ) ve iki tasarım kısıtımız (ω_o ve β) vardır. Böylece bir parametre keyfi seçilir; bu genellikle kapasitördür çünkü bu değer genellikle ticari olarak en az seçeneğe sahip olanıdır. C seçildikten sonra,

$$R = \frac{1}{\omega_o C}, \qquad (15.68)$$

ve

$$\sigma = 1 - \frac{\beta}{4\omega_o} = 1 - \frac{1}{4Q} \qquad (15.69)$$

hesaplanır. Örnek 15.13 bir yüksek Q bant durduran filtrenin tasarımını göstermektedir.

Örnek 15.13 Yüksek-Q Bant Durduran Filtre Tasarımı

Merkez frekans 5000 rad / s ve bant genişliği 1000 rad / s olan (Şekil 15.29'daki devreye dayalı) bir yüksek Q bant durduran filtre tasarlayınız. Tasarımınızda 1 μF kapasitörler kullanınız.

Çözüm

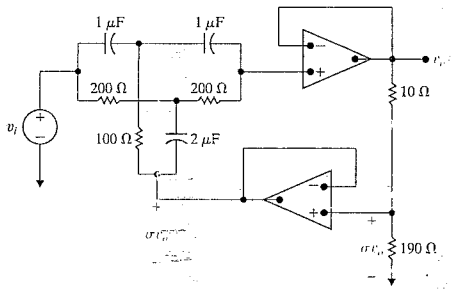
Bant durduran prototip filtrede $\omega_o = 1$ rad / s, $R = 1$ Ω ve $C = 1$ F'dır. Biraz önce tartıştığımız gibi, ω_o ve Q verildiğinde, C keyfi seçilebilir ve R ile σ Eş. 15.68 ve 15.69'dan bulunabilir. İsterlerden $Q = 5$'tir. Eş. 15.68 ve 15.69'u kullanarak

$$R = 200\ \Omega,$$

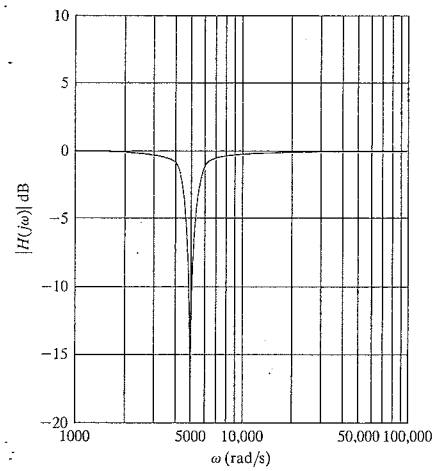
$$\sigma = 0.95$$

olduğunu görürüz.

Bu nedenle değerleri 200 Ω (R), 100 Ω ($R/2$), 190 Ω (σR) ve 10 Ω [$(1-\sigma)R$] olan dirençlere gerek vardır. Son tasarım Şekil 15.30'da çizilmiş, Bode genlik grafiği de Şekil 15.31'de gösterilmiştir.



Şekil 15.30 ▲ Örnek 15.13'te tasarlanan yüksek Q aktif bant durduran filtre.



Şekil 15.31 ▲ Örnek 15.31'de tasarlanan yüksek Q aktif bant durduran filtre için Bode genlik grafiği.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 4 – Prototip darbant, bant geçiren ve bant durduran filtreler için bileşen değerlerini hesaplamada tasarım denklemlerini kullanabilmek

15.5 $Q = 8$, $K = 5$ ve $\omega_o = 1000$ rad / s ile bir aktif bant geçiren filtre tasarlayınız. 1 μF kapasitörler kullanınız ve tüm dirençlerin değerlerini belirleyiniz.

Cevap: $R_1 = 1.6\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 65.04\ \Omega$, $R_3 = 16\ \text{k}\Omega$.

15.6 $\omega_o = 1000$ rad / s ve $Q = 4$ ile bir aktif birim kazançlı bant durduran filtre tasarlayınız. Tasarımınıza 2 μF kapasitörler kullanınız ve R ve σ'nın değerlerini belirleyiniz.

Cevap: $R = 500\ \Omega$, $\sigma = 0.9375$.

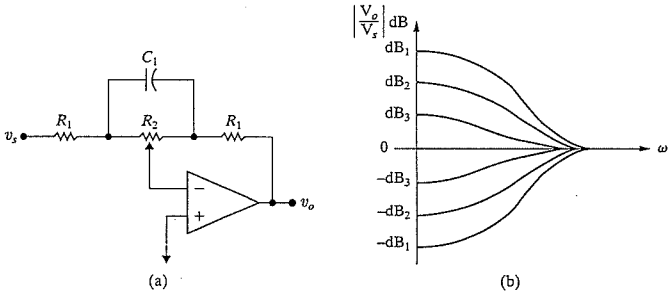
NOT: Ayrıca Bölüm Problemi 15.58'i de çözmeyi deneyiniz.

Pratik Bakış Açısı

Bas Şiddet Kontrolü

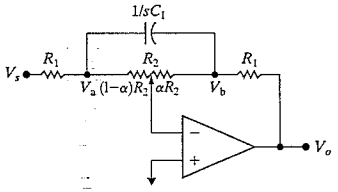
Şimdi bas bölgesindeki bir ses sinyalinin yükseltilmesinin kontrolünde kullanılabilecek bir op amp devresine bakalım. İşitilebilir frekans aralığı 20 Hz'den 20 kHz'e uzanan frekanslara sahip sinyallerden oluşur. Bas frekans aralığı 300 Hz'e kadar olan frekansları içerir. Şiddet kontrol devresi ve frekans tepkisi Şekil 15.12'de gösterilmektedir. Tepki eğrileri ailesinden belirli bir tepki eğrisi Şekil 15.32(a)'daki potansiyometreyi ayarlayarak seçilir.

Şekil 15.32(b)'deki frekans tepkisi eğrilerini incelerken şunlara dikkat ediniz. Birincisi, dB cinsinden kazanç pozitif veya negatif olabilir. Eğer kazanç pozitif ise, bas frekans aralığındaki bir sinyalin şiddeti yükseltilir. Kazanç negatif ise sinyal zayıflatılır veya kesilir. İkincisi, bas frekans aralığındaki tüm frekanslar için birim kazanç (0 dB) sağlayacak bir tepki karakteristiğini seçmek mümkündür. Birazdan göreceğimiz gibi, eğer potansiyometre orta noktasına ayarlanırsa, devrenin bas frekans aralığındaki sinyaller üzerinde hiç etkisi olmayacaktır. Son olarak, frekans arttıkça tüm karakteristik tepkiler sıfır dB'ye veya birim kazanca ulaşmaktadır. Dolayısıyla, şiddet kontrol devresinin ses frekanslarının üst tarafındaki veya tiz frekans aralığındaki sinyaller üzerinde hiç etkisi bulunmamaktadır.



Şekil 15.32 ▲ (a) Bas şiddeti kontrol devresi. (b) Bas şiddeti kontrol devresi frekans tepkisi.

Şekil 15.32(a)'daki devrenin frekans tepkisini analiz etmede ilk adım, aktarım fonksiyonu V_o / V_s'yi hesaplamaktır. Bu hesaba yardımcı olmak için s bölgesi eşdeğer devresi Şekil 15.33'te verilmiştir. Düğüm gerilimleri V_a ve V_b düğüm gerilimi analizini desteklemek üzere devrede işaretlenmiştir. Potansiyometrenin pozisyonu, Şekil 15.33'te not edildiği gibi, α sayısal değeri tarafından belirlenmektedir.



Şekil 15.33 ▲ Bas şiddet kontrolü için s bölgesi devresi. Potansiyometre ayarını α'nın belirlediğine dikkat ediniz, $0 \le \alpha \le 1$.

Aktarım fonksiyonunu bulmak için devreyi tanımlayan üç düğüm gerilim denklemini yazıp denklemleri gerilim oranı V_o / V_s için çözeriz. Düğüm gerilim denklemleri

$$\frac{V_a}{(1-\alpha)R_2} + \frac{V_a - V_s}{R_1} + (V_a - V_b)s\,C_1 = 0;$$

$$\frac{V_b}{\alpha R_2} + (V_b - V_a)s\,C_1 + \frac{V_b - V_o}{R_1} = 0;$$

$$\frac{V_a}{(1-\alpha)R_2} + \frac{V_b}{\alpha R_2} = 0$$

yazılır. Bu üç düğüm gerilim denklemi V_o'yu V_s'nin bir fonksiyonu olarak bulmak için çözülebilir ve sonuç olarak

$$H(s) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{-(R_1 + \alpha R_2 + R_1R_2C_1s)}{R_1 + (1-\alpha)R_2 + R_1R_2C_1s}.$$

elde edilir. Burada doğrudan

$$H(j\omega) = \frac{-(R_1 + \alpha R_2 + j\omega R_1R_2C_1)}{[R_1 + (1-\alpha)R_2 + j\omega R_1R_2C_1]}$$

olduğu görülebilir.

Şimdi bu aktarım fonksiyonunun Şekil 15.32(b)'de gösterilen frekans tepkisi eğrileri ailesini üretebildiğini doğrulayalım. İlk olarak $\alpha = 0.5$ iken, $H(j\omega)$'nın genliğinin tüm frekanslar için birim olduğuna dikkat ediniz. Böylece

$$|H(j\omega)| = \frac{|R_1 + 0.5R_2 + j\omega R_1R_2C_1|}{|R_1 + 0.5R_2 + j\omega R_1R_2C_1|} = 1$$

olur. $\omega = 0$ iken

$$|H(j0)| = \frac{R_1 + \alpha R_2}{R_1 + (1-\alpha)R_2}$$

bulunur. $|H(j0)|$'ın $\alpha = 1$'de $\alpha = 0$'daki $|H(j0)|$'ın tersi yani

$$|H(j0)|_{\alpha=1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = \frac{1}{|H(j0)|_{\alpha=0}}$$

olduğunu gözleyiniz. Biraz düşünme ile okuyucu bu ters bağıntının sadece $\omega = 0$ için değil, tüm frekanslar için geçerli olduğunu görebilir. Örneğin $\omega = 0.4$ ve $\omega = 0.6$, $\omega = 0.5$'e göre simetriktir ve

$$H(j\omega)_{\alpha=0.4} = \frac{-(R_1 + 0.4R_2) + j\omega R_1R_2C_1}{(R_1 + 0.6R_2) + j\omega R_1R_2C_1}$$

$$H(j\omega)_{\alpha=0.6} = \frac{-(R_1 + 0.6R_2) + j\omega R_1R_2C_1}{(R_1 + 0.4R_2) + j\omega R_1R_2C_1}.$$

olur.

Böylece

$$H(j\omega)_{\alpha=0.4} = \frac{1}{H(j\omega)_{\alpha=0.6}}$$

bulunur. α'nın değerine bağlı olarak şiddet kontrol devresinin giren sinyali ya yükselttiği ya da zayıflattığı ortaya çıkmaktadır.

R_1, R_2 ve C_1'in sayısal değerleri iki tasarım kararına dayanır. Birinci tasarım tercihi bas frekans aralığındaki ($\omega \to 0$) geçirme bandı yükseltmesi veya zayıflatmasıdır. İkinci tasarım seçimi ise bu geçirme bandı yükseltme veya zayıflatmasının hangi frekansta 3 dB değişeceğidir. Bu tasarım seçimlerini sağlayan bileşen değerleri α 0'a veya 1'e eşit iken hesaplanır.

Daha önce gözlediğimiz gibi, en yüksek kazanç $(R_1 + R_2) / R_1$ ve enyüksek zayıflatma $R_1 / (R_1 + R_2)$ olacaktır. Eğer $(R_1 + R_2) / R_1 >> 0$ olduğunu varsayarsak kazanç (veya zayıflatma) $\omega = 1 / R_2C_1$ olduğunda en yüksek değerinden 3 dB farklı olacaktır. Bu şıradan görülebilir:

$$\left| H\left(j\frac{1}{R_2C_1}\right) \right|_{\alpha=1} = \frac{|R_1 + R_2 + jR_1|}{|R_1 + jR_1|} = \frac{\left|\frac{R_1 + R_2}{R_1} + j1\right|}{|1 + j1|} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{R_1 + R_2}{R1}\right)$$

ve

$$\left| H\left(j\frac{1}{R_2C_1}\right) \right|_{\alpha=0} = \frac{|R_1 + jR_1|}{|R_1 + R_2 + jR_1|} = \frac{|1 + j1|}{\left|\frac{R_1 + R_2}{R_1} + j1\right|} \approx \sqrt{2}\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right).$$

NOT: Bu Pratik Bakış Açısını kavrayışımızı Bölüm Problemlerinden 15.59 ve 15.60'ı da çözmeyi deneyerek sınayınız.

Özet

- Aktif filtreler, op amplar, dirençler ve kapasitörler içerir. Bu filtreler, alçak geçiren, yüksek geçiren, bant geçiren ve bant durduran olarak yapılandırılabilir. Pasif filtrelerle ilişkili pek çok dezavantajı ortadan kaldırırlar. (Bkz. sf. 608.)
- Bir **prototip alçak geçiren filtre** $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$ ve $C = 1$ F bileşen değerlerine sahiptir ve birim geçirme bandı kazancı ve 1 rad / s kesim frekansı verir. **Prototip yüksek geçiren filtre** aynı bileşen değerlerine sahiptir ve yine birim geçirme bandı kazancı ve 1 rad / s kesim frekansı sağlar. (Bkz. sf. 609 ve 612.)
- **Genlik ölçeklendirmesi** bileşen değerlerini, devrenin frekans tepkisini değiştirmeden ayarlamak için kullanılabilir. Genlik ölçeklendirme çarpanı k_m için, ölçeklenmiş (üslü) direnç, kapasitans ve indüktans değerleri

$$R' = k_mR, \quad L' = k_mL \text{ ve } C' = C\ k_m$$

ile verilir. (Bkz. sf. 612.)
- **Frekans ölçeklendirmesi**, bir devrenin frekans tepkisinin şeklini değiştirmeden, bu tepkiyi bir frekans bölgesinden bir başkasına kaydırmakta kullanılabilir.

Frekans ölçeklendirme çarpanı k_f için, direnç, kapasitör ve indüktörün ölçeklenmiş (üslü) değerleri

$$R' = R, \quad L' = L/k_f \text{ ve } C' = C/k_f$$

ile verilir. (Bkz. sf. 612.)
- Bileşenler hem genlik hem de frekansta birlikte aşağıda verilen ölçeklenmiş (üslü) değerler ile ölçeklenebilir:

$$R' = k_mR, \quad L' = (k_m/k_f)L \text{ ve } C' = C/(k_mk_f).$$

(Bkz. sf. 613.)
- Aktif alçak geçiren ve yüksek geçiren filtrelerin tasarımı bir prototip filtre devresi ile başlayabilir. Daha sonra ticari olarak bulunabilecek bileşen değerleri kullanılmak üzere, devrenin frekans tepkisini istenen kesim frekansına kaydırmak için ölçeklendirme kullanılabilir.
- Bir aktif genişbant bant geçiren filtre, bu filtrenin üst kesim frekansında kesim frekansına sahip bir alçak geçiren filtre ile yine bant geçiren filtrenin alt kesim frekansında kesim frekansına sahip bir yüksek geçiren filtre ve birim olmayan bir kazanç elde etmek için (seçenek olarak kullanılabilecek) bir eviren yükseltecin art arda bağlantısından oluşturulabilir. Bu şekilde gerçekleştirilen bant geçiren filtreler, art arda bağlantının bileşenlerinin birbirinden bağımsız olarak belirlenebilmesi için genişbant filtre ($\omega_{c2} >> \omega_{c1}$) olmak zorundadır. (Bkz. sf. 616.)
- Bir aktif genişbant bant durduran filtre, bu filtrenin alt kesim frekansında kesim frekansına sahip bir alçak geçiren filtre ile yine bant durduran filtrenin üst kesim frekansında kesim frekansına sahip bir yüksek geçiren filtrenin paralel birleşiminden oluşturulabilir. Çıkışlar daha sonra geçirme bandında birim olmayan bir kazanç elde etmek için bir toplayan yükseltece girilebilir. Bu şekilde gerçekleştirilen bant durduran filtreler, alçak geçiren ve yüksek geçiren filtrelerin birbirinden bağımsız olarak tasarlanabilmesi için genişbant filtre ($\omega_{c2} >> \omega_{c1}$) olmak zorundadır. (Bkz. sf. 620.)
- Yüksek mertebeli aktif filtreler aktarım fonksiyonlarında birden çok kutuba sahiptir, böylece geçirme bandından durdurma bandına daha keskin bir geçiş, dolayısıyla ideal frekans tepkisine daha yakın bir frekans tepkisi elde edilir. (Bkz. sf. 622.)
- Kesim frekansı 1 rad / s olan bir n-yinci mertebeden Butterworth alçak geçiren filtrenin aktarım fonksiyonu aşağıdaki denklemden

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}}$$

  - paydadaki polinomun kökleri bulunarak,
  - sol yarı düzlemdeki kökleri $H(s)$'ye atayarak,
  - $H(s)$'nin paydasını birinci ve ikinci mertebeden çarpanların çarpımı olarak yazarak belirlenebilir.

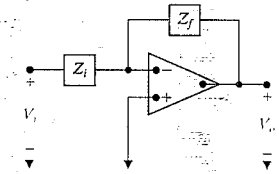
  (Bkz. sf. 627-628.)
- Bir Butterworth filtrenin tasarımındaki temel problem filtre mertebesinin belirlenmesidir. Filtre isterleri genellikle geçiş bandı keskinliğini şu parametreler cinsinden tanımlar: A_p, ω_p, A_s ve ω_s. Bu parametrelerden Eş. 15.42 veya Eş. 15.46'nın çözümünden büyük en küçük tamsayıyı hesaplarız. (Bkz. sf. 633.)
- 1 Ω dirençler ile değerleri Butterworth polinomundaki her çarpanı üretmek için seçilen kapasitörlerle yapılan ikinci mertebeden alçak geçiren op amp filtrelerin art arda bağlantısı çift mertebeli Butterworth alçak geçiren filtre oluşturacaktır. Bir prototip alçak geçiren op amp filtrenin eklenmesi tek mertebeli Butterworth alçak geçiren filtre üretecektir. (Bkz. sf. 629.).
- 1 F kapasitörler ile değerleri Butterworth polinomundaki her çarpanı üretmek için seçilen dirençlerle yapılan ikinci mertebeden yüksek geçiren op amp filtrelerin art arda bağlantısı çift mertebeli Butterworth yüksek geçiren filtre oluşturacaktır. Bir prototip yüksek geçiren op amp filtrenin eklenmesi tek mertebeli Butterworth yüksek geçiren filtre üretecektir. (Bkz. sf. 635.).
- Hem alçak, hem de yüksek geçiren Butterworth filtreler için frekans ve genlik ölçeklendirmesi, kesim frekansını 1 rad / s'den kaydırmakta ve gerçekçi bileşen değerlerini tasarıma dahil etmekte kullanılabilir. Bir eviren yükseltecin art arda bağması birim olmayan geçirme bandı kazancı sağlayacaktır. (Bkz. sf. 630.)
- Butterworth alçak geçiren ve yüksek geçiren filtreler, herhangi bir n mertebesine sahip Butterworth bant geçiren filtreler yaratmak için art arda bağlanabilir. Butterworth alçak geçiren ve yüksek geçiren filtreler bir toplayıcı yükselteçle, herhangi bir n mertebesine sahip Butterworth bant durduran filtre yaratmak için paralel olarak birleştirilebilir. (Bkz. sf. 635).
- Yüksek Q veya darbant bant geçiren veya bant durduran filtreye ihtiyaç duyulduğunda art arda bağlantılı veya paralel birleşim çalışmayacaktır. Bunlar yerine, Şekiller 15.26 ve 15.29'da gösterilen devreler, uygun tasarım denklemleri ile kullanılır. Tipik olarak, kapasitör değerleri ticari olarak mevcut değerlerden seçilir ve tasarım denklemleri direnç değerlerini belirlemek için kullanılır. (Bkz. sf. 637.)

Problemler

Kısım 15.1

15.1 Eğer Şekil P15.1'de gösterilen devrede, Z_f geribesleme devresinin eşdeğer empedansı, Z_i giriş devresinin eşdeğer empedansı ve işlemsel yükselteç ideal ise aktarım fonksiyonu V_o/V_i'yi bulunuz.

Şekil P15.1



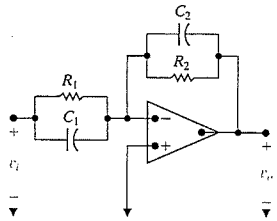
15.2 a) Problem 15.1'in sonuçlarını Şekil P15.2'de gösterilen devrenin aktarım fonksiyonunu bulmak için kullanınız.

b) Devrenin kazancı $\omega \to 0$ iken nedir?

c) Devrenin kazancı $\omega \to \infty$ iken nedir?

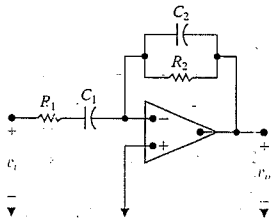
d) Bilinen devre davranışı bakımından (b) ve (c)'deki cevaplarınız anlamlı mıdır?

Şekil P15.2



15.3 Problem 15.2'yi Şekil P15.3'te gösterilen devreyi kullanarak tekrar çözünüz.

Şekil P15.3



15.4 TASARIM PROBLEMİ a) Şekil 15.1'deki devreyi kullanarak geçirme bandı kazancı 15 dB ve kesim frekansı 10 kHz olan bir alçak geçiren filtre tasarlayınız. 5 nF kapasitörün bulunabilir olduğunu varsayınız.

b) Devre şemasını çiziniz ve tüm bileşenleri belirtiniz.

15.5 Kesim frekansı 500 Hz ve geçirme kazancı 10 olan bir op amp alçak geçiren filtreyi 50 nF kapasitör kullanarak tasarlayınız.

a) Devrenizi, bileşen değerlerini ve çıkış gerilimini belirterek çiziniz.

b) Eğer devredeki geribesleme direncinin değeri değişseydi ama ileri yoldaki direncin değeri değişmeseydi, filtrenin hangi karakteristiği değişirdi?

15.6 Problem 15.5'te tasarlanan alçak geçiren filtrenin giriş gerilimi $200\cos\omega t$ mV'tur.

a) Güç kaynaklarının $\pm V_{cc}$ olduğunu düşününüz. Op ampın hâlâ doğrusal bölgesinde çalışmasını sağlayacak en düşük V_{cc} değeri nedir?

b) Çıkış gerilimini $\omega = \omega_c$ iken bulunuz.

c) Çıkış gerilimini $\omega = 0.1\omega_o$ iken bulunuz.

d) Çıkış gerilimini $\omega = 10\omega_o$ iken bulunuz.

15.7 TASARIM PROBLEMİ a) Şekil 15.4'teki devreyi kesim frekansı 40 kHz ve geçirme bandı kazancı 12 dB olan bir yüksek geçiren filtre tasarlamak için kullanınız. Tasarımınızda 680 pF kapasitör kullanınız.

b) Filtrenin devre şemasını çiziniz ve tüm bileşenleri belirtiniz.

15.8 Kesim frekansı 300 Hz ve geçirme bandı kazancı 5 olan ve op amp kullanan yüksek geçiren bir filtreyi 100 nF kapasitör kullanarak tasarlayınız.

a) Devrenizi, bileşen değerlerini ve çıkış gerilimini belirterek çiziniz.

b) Eğer devredeki geribesleme direncinin değeri değişseydi ama ileri yoldaki direncin değeri değişmeseydi, filtrenin hangi karakteristiği değişirdi?

15.9 Problem 15.8'de tasarlanan yüksek geçiren filtrenin giriş gerilimi $150\cos\omega t$ mV'tur.

a) Güç kaynaklarının $\pm V_{cc}$ olduğunu düşününüz. Op ampın hâlâ doğrusal bölgesinde çalışmasını sağlayacak en düşük V_{cc} değeri nedir?

b) Çıkış gerilimini $\omega = \omega_c$ iken bulunuz.

c) Çıkış gerilimini $\omega = 0.1\omega_c$ iken bulunuz.

d) Çıkış gerilimini $\omega = 10\omega_c$ iken bulunuz.

Kısım 15.2

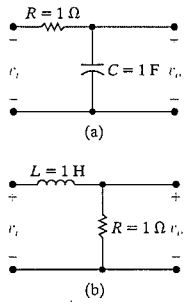
15.10 Şekil P15.10'da gösterilen alçak geçiren prototip filtrelerin her ikisinin de aktarım fonksiyonu

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

verilmiştir. Her iki devrenin de hem genlik hem de frekansta ölçeklendiğinde aktarım fonksiyonunun aşağıdaki gibi olacağını gösteriniz:

$$H'(s) = \frac{1}{(s/k_f)+1}.$$

Şekil P15.10



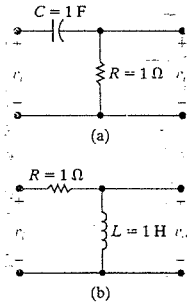
15.11 Şekil P15.11'da gösterilen yüksek geçiren prototip filtrelerin hepsinin aktarım fonksiyonu

$$H(s) = \frac{s}{s+1}$$

verilmiştir. Her iki devrenin de hem genlik hem de frekansta ölçeklendiğinde aktarım fonksiyonunun aşağıdaki gibi olacağını gösteriniz:

$$H'(s) = \frac{(s/k_f)}{(s/k_f)+1}.$$

Şekil P15.11



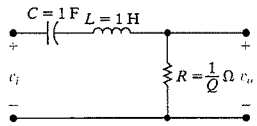
15.12 Şekil P15.12'de gösterilen bant geçiren prototip filtrenin aktarım fonksiyonu

$$H(s) = \frac{\left(\frac{1}{Q}\right)s}{s^2 + \left(\frac{1}{Q}\right)s + 1}$$

verilmiştir. Devrenin hem genlik hem de frekansta ölçeklendiğinde aktarım fonksiyonunun aşağıdaki gibi olacağını gösteriniz:

$$H'(s) = \frac{\left(\frac{1}{Q}\right)\left(\frac{s}{k_f}\right)}{\left(\frac{s}{k_f}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q}\right)\left(\frac{s}{k_f}\right) + 1}.$$

Şekil P15.12



15.13 a) Problem 15.12'de açıklanan prototip pasif bant geçiren filtrenin kalite çarpanı 25 ise bileşen değerlerini belirleyiniz.

b) Problem 15.12'de açıklanan bant geçiren filtrenin kalite çarpanı 25, merkez veya rezonant frekansı 100 krad / s ve rezonanstaki empedansı 3.6 kΩ ise bileşen değerlerini belirleyiniz.

c) Ölçeklenmiş filtrenin devre şemasını çiziniz ve tüm bileşenleri belirtiniz.

15.14 Şekil P15.12'de gösterilen prototip bant geçiren filtrenin bir alternatifi $\omega_o = 1$ rad / s, $R = 1$ Ω ve $L = Q$ Henry yapmaktır.

a) Prototip filtre devresindeki C'nin değeri nedir?

b) Prototip filtrenin aktarım fonksiyonu nedir?

c) Henüz anlatılan prototip devreyi kalite çarpanı 20, merkez frekansı 50 krad / s ve rezonanstaki empedansı 5 kΩ olan bir pasif bant geçiren filtre tasarlamakta kullanınız.

d) Ölçeklenmiş devrenin şemasını çiziniz ve tüm bileşen değerlerini belirtiniz.

e) Problem 15.12'de elde edilen sonuçları ölçeklenmiş devrenin aktarım fonksiyonunu yazmakta kullanınız.

15.15 TASARIM PROBLEMİ Şekil 14.22'de betimlenen pasif bant geçiren filtrenin iki prototip devresi bulunmaktadır. Birinci prototip devrede $\omega_o = 1$ rad / s, $C = 1$ F, $L = 1$ H ve $R = Q$ Ohm'dur. İkinci prototip devrede $\omega_o = 1$ rad / s, $R = 1$ Ω, $C = Q$ Farad ve $H = (1 / Q)$ Henry'dir.

a) Bu prototiplerden birisini (siz seçiniz) kalite çarpanı 16 ve merkez frekansı 80 krad / s olan bir pasif bant geçiren filtre tasarlamak için kullanınız. R direnci 80 kΩ'dur.

b) Ölçeklenmiş filtre için devre şeması çiziniz ve tüm bileşenleri belirtiniz.

15.16 Şekil 14.28(a)'da gösterilen bant durduran filtrenin aktarım fonksiyonu

$$H(s) = \frac{s^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}{s^2 + \left(\frac{R}{L}\right)s + \left(\frac{1}{LC}\right)}$$

verilmiştir. Devrenin hem genlik hem de frekansta ölçeklenmesi durumunda, ölçeklenmiş devrenin aktarım fonksiyonunun, ölçeklenmemiş devrenin aktarım fonksiyonunda s'nin s/k_f ile yer değiştirmiş hali olduğunu gösteriniz. Burada k_f frekans ölçeklendirme çarpanıdır.

15.17 Problem 15.16'da yapılan Şekil 14.28(a)'daki devrenin aktarım fonksiyonu ile ilgili gözlemin Şekil 14.31'deki (alt şekil) bant durduran filtre devresi için de geçerli olduğunu gösteriniz.

15.18 Şekil 14.28(a)'da betimlenen pasif bant durduran filtre Şekil P15.18'de gösterilen iki prototip devreye sahiptir.

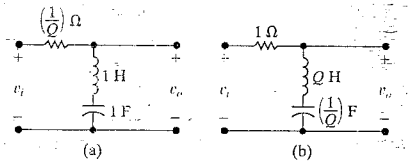
a) Her iki devrenin de aktarım fonksiyonunun

$$H(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + \left(\frac{1}{Q}\right)s + 1}$$

olduğunu gösteriniz.

b) Merkez frekansı 50 krad / s ve kalite çarpanı 5 olan bir bant durduran filtrenin aktarım fonksiyonunu yazınız.

Şekil P15.18



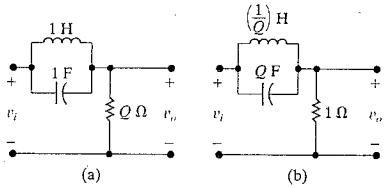
15.19 Şekil 14.31'de (alt şekil) gösterilen pasif bant durduran filtrenin iki prototip biçimi Şekil P15.19(a) ve (b)'de gösterilmiştir.

Her iki devrenin de aktarım fonksiyonunun

$$H(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + \left(\frac{1}{Q}\right)s + 1}$$

olduğunu gösteriniz.

Şekil P15.19



15.20 Problem 14.21'deki bant geçiren filtreyi merkez frekansı 250 kHz ve kalite çarpanı 7.5 olacak şekilde 10 nF kapasitör kullanarak ölçeklendiriniz. Ölçeklenmiş devrenin direnç, indüktör değerlerini ve iki kesim frekansını belirleyiniz.

15.21 Problem 14.33'teki bant durduran devreyi merkez frekansı 500 krad / s olacak şekilde 50 μH indüktör kullanarak ölçeklendiriniz. Ölçeklenmiş devrenin direnç, kapasitör değerleri ve bant genişliğini belirleyiniz.

15.22 Şekil 15.26'daki devre, 4 kΩ direnç 20 kΩ direnç ile ve 5 nF kapasitör 100 nF kapasitör ile değiştirilerek ölçeklenmiştir.

a) L'nin ölçeklenmiş değeri nedir?

b) Ölçeklenmiş devrede i_o'nun ifadesi nedir?

15.23 Problem 13.29'daki devreyi, 10 Ω direnç 1 kΩ'a çıkacak ve gerilim tepkisinin frekansı 1000 kat yükseltilecek şekilde ölçeklendiriniz. $v_o(t)$'yi bulunuz.

15.24 a) Şekil 15.1'de gösterilen alçak geçiren filtre devresi hem frekans hem de genlikte ölçeklendirildiğinde, ölçeklenmiş devrenin aktarım fonksiyonunun s'nin s / k_f ile değiştirilmesi dışında Eş. 15.1 ile aynı olduğunu gösteriniz. Burada k_f frekans ölçeklendirme çarpanıdır.

b) Şekil 15.1'deki alçak geçiren filtrenin prototip halinde, $\omega_c = 1$ rad / s, $C = 1$ F, $R_2 = 1$ Ω ve $R_1 = 1 / K$ Ohm'dur. Prototip devrenin aktarım fonksiyonu nedir?

c) (a)'da elde edilen sonucu kullanarak ölçeklenmiş filtrenin aktarım fonksiyonunu çıkarınız.

15.25 a) Şekil 15.4'te gösterilen yüksek geçiren filtre devresi hem frekans hem de genlikte ölçeklendirildiğinde, ölçeklenmiş devrenin aktarım fonksiyonunun s'nin s / k_f ile değiştirilmesi dışında Eş. 15.4 ile aynı olduğunu gösteriniz. Burada k_f frekans ölçeklendirme çarpanıdır.

b) Şekil 15.4'teki yüksek geçiren filtrenin prototip halinde, $\omega_c = 1$ rad / s, $R_1 = 1$ Ω, $C = 1$ F ve $R_2 = K$ Ohm'dur. Prototip devrenin aktarım fonksiyonu nedir?

c) (a)'da elde edilen sonucu kullanarak ölçeklenmiş filtrenin aktarım fonksiyonunu çıkarınız.

Kısım 15.3

15.26 TASARIM PROBLEMİ PSPICE a) 20 nF kapasitörler kullanarak, alçak kesim frekansı 2000 Hz, yüksek kesim frekansı 8000 Hz ve geçirme bandı kazancı 10 dB olan bir aktif genişbant birinci mertebeden bant geçiren filtre tasarlayınız. Tasarım sürecinde alçak geçiren ve yüksek geçiren filtrelerin prototip devrelerini kullanınız. (Bkz. Problemler 15.24 ve 15.25).

b) Ölçeklenmiş filtre için aktarım fonksiyonunu yazınız.

c) (b)'de bulunan aktarım fonksiyonunu $H(j\omega_o)$'yu bulmak için kullanınız. Burada w_o filtrenin merkez frekansıdır.

d) Filtrenin ω_o'daki geçirme bandı kazancı (desibel cinsinden) nedir?

e) Sizin seçeceğiniz bir bilgisayar programını kullanarak filtrenin Bode genlik grafiğini yapınız.

15.27 TASARIM PROBLEMİ PSPICE a) 5 nF kapasitörler kullanarak, alçak kesim frekansı 1000 Hz, yüksek kesim frekansı 5000 Hz ve geçirme bandı kazancı 10 dB olan bir aktif genişbant birinci mertebeden bant durduran filtre tasarlayınız. Tasarım sürecinde Problem 15.24 ve 15.25'te tanıtılan prototip filtre devrelerini kullanınız.

b) Filtrenin devre şemasını çiziniz ve tüm bileşenleri belirtiniz.

c) Ölçeklenmiş filtrenin aktarım fonksiyonu nedir?

d) (c)'de çıkarılan aktarım fonksiyonunun, filtrenin merkez frekansındaki değerini hesaplayınız.

e) Merkez frekansındaki kazanç (desibel cinsinden) nedir?

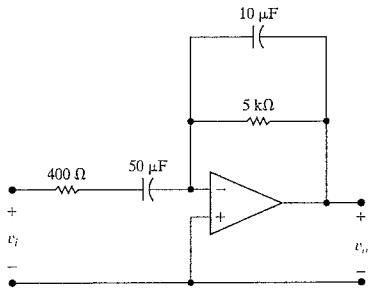
f) Sizin seçeceğiniz bir bilgisayar programını kullanarak filtrenin aktarım fonksiyonunun Bode genlik grafiğini çiziniz.

15.28 Şekil P15.28'deki devrenin bir bant geçiren filtre gibi davrandığını gösteriniz. (*İpucu:* Devre için aktarım fonksiyonunu bulunuz ve bir bant geçiren filtrenin aktarım fonksiyonu ile aynı biçimde olduğunu gösteriniz. Problem 15.1'deki sonuçları kullanınız.)

a) Bu bant geçiren filtre için merkez frekansı, bant genişliği ve kazancı bulunuz.

b) Bu bant geçiren filtre için kesim frekanslarını ve kalite çarpanını bulunuz.

Şekil P15.28

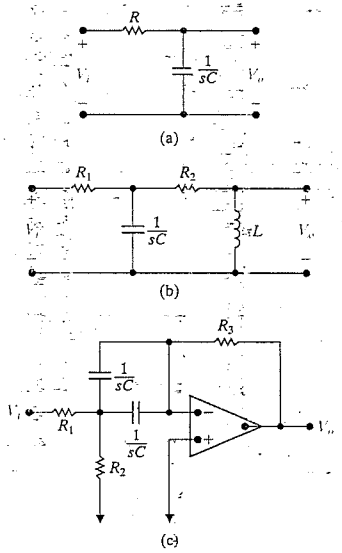


15.29 Dirençler, kapasitörler, indüktörler ve op amplardan oluşan devreler için, $|H(j\omega)|^2$ ω'nın sadece çift kuvvetlerini içerir. Bunu göstermek amacıyla Şekil P15.29'daki üç devre için

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i}$$

ise $|H(j\omega)|^2$'yi hesaplayınız.

Şekil P15.29



15.30 Merkez frekansı 50 krad / s ve bant genişliği 300 krad / s verecek bir birim kazanç bant geçiren filtreyi art arda bağlantı kullanarak tasarlayınız. 150 nF kapasitörler kullanınız. f_{c1}, f_{c2}, R_L ve R_H'yi belirleyiniz.

15.31 Merkez frekansı 5 kHz, bant genişliği 30 kHz ve geçirme bandı kazancı 4 olan bir paralel bant durduran filtreyi tasarlayınız. 250 nF kapasitörler kullanınız ve tüm direnç değerlerini belirleyiniz.

Kısım 15.4

15.32 Bu problemin amacı, bir n-yinci mertebeden alçak geçiren Butterworth filtrenin n özdeş alçak geçiren kısımların art arda bağlantısına göre avantajını, köşe frekansı ω_c'de her iki genlik grafiğinin de eğimini (onluk başına desibel olarak) hesaplayarak göstermektir. Bu hesaplamayı mümkün kılmak için, y grafiğin genliğini (desibel olarak) versin ve $x = \log 10\omega$ olsun. Her iki grafik için de ω_c'de dy/dx'i hesaplayınız.

a) Bir n-yinci mertebeden alçak geçiren prototip Butterworth filtrenin köşe frekansında ($\omega_c = 1$ rad / s)

$$\frac{dy}{dx} = -10n \text{ dB/onluk}$$

olduğunu gösteriniz.

b) n tane özdeş alçak geçiren prototip kısımların art arda bağlantısında, ω_c'deki eğimin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-20n(2^{1/n} - 1)}{2^{1/n}} \text{ dB/onluk}$$

olduğunu gösteriniz.

c) Her iki tip filtre için de $n = 1, 2, 3, 4$ ve ∞ için dy/dx'i hesaplayınız.

d) (c)'de elde edilen sonuçların önemini tartışınız.

15.33 a) Kesim frekansı 1000 Hz olan ve 4000 Hz'de en az –40 dB kazancı olan bir alçak geçiren Butterworth filtrenin mertebesini belirleyiniz.

b) 4000 Hz'deki asıl kazanç desibel cinsinden, nedir?

15.34 Şekil 15.21'de verilen devre, Eş. 15.34 ile verilen aktarım fonksiyonuna sahiptir. Şekil 15.21'de devre, hem genlik hem de frekansta ölçeklendirildiğinde, ölçeklenmiş devrenin aktarım fonksiyonunun

$$H'(s) = \frac{\dfrac{1}{R^2C_1C_2}}{\left(\dfrac{s}{k_f}\right)^2 + \dfrac{2}{RC_1}\left(\dfrac{s}{k_f}\right) + \dfrac{1}{R^2C_1C_2}}$$

olduğunu gösteriniz.

15.35 a) Problem 15.33(a)'da elde edilen prototip alçak geçiren Butterworth filtre için aktarım fonksiyonunu yazınız.

b) (a)'daki ölçeklenmiş filtre (bkz. Problem 15.34) için aktarım fonksiyonunu yazınız.

c) (b)'de çıkarılan ifadeyi 4000 Hz'deki kazancı (desibel olarak) hesaplayarak kontrol ediniz. Sonucunuzu Problem 15.33(b)'de bulunan ile karşılaştırınız.

15.36 TASARIM PROBLEMİ a) 2 kΩ dirençler ve ideal op amplar kullanarak Problem 15.33'te belirlenen alçak geçiren Butterworth filtreyi gerçekleştirecek bir devre tasarlayınız. Geçirme bandındaki kazanç birimdir.

b) Devre şemasını oluşturunuz ve tüm bileşen değerlerini belirtiniz.

15.37 TASARIM PROBLEMİ a) 25 nF kapasitörler ve ideal op amplar kullanarak kesim frekansı 5 kHz ve 1 kHz'deki kazancı en az –25 dB olan bir yüksek geçiren birim kazançlı Butterworth filtre tasarlayınız.

b) Filtrenin devre şemasını çiziniz ve tüm bileşen değerlerini belirtiniz.

15.38 Tablo 15.1'deki değerleri $n = 5$ ve $n = 6$ için doğrulayınız.

15.39 Şekil 15.25'teki devre Eş. 15.47 ile verilen aktarım fonksiyonuna sahiptir. Devrenin hem genlik hem de frekansta ölçeklendirilmesi durumunda ölçeklenmiş devrenin aktarım fonksiyonunun

$$H'(s) = \frac{\left(\dfrac{s}{k_f}\right)}{\left(\dfrac{s}{k_f}\right)^2 + \dfrac{2}{R_2C}\left(\dfrac{s}{k_f}\right) + \dfrac{1}{R_1R_2C^2}}.$$

olacağını gösteriniz. Sonuç olarak ölçeklenmiş devrenin aktarım fonksiyonu, ölçeklenmemiş devrenin aktarım fonksiyonunda basitçe s terimi yerine s / k_f yerleştirilerek elde edilir. Burada k_f frekans ölçeklendirme çarpanıdır.

15.40 TASARIM PROBLEMİ a) 3 kΩ dirençler ve ideal op amplar kullanarak kesim frekansı 20 kHz olan ve 100 kHz'te en az 25 dB zayıflatan bir alçak geçiren birim kazançlı Butterworth filtre tasarlayınız.

b) Filtrenin devre şemasını çiziniz ve tüm bileşenleri belirtiniz.

15.41 Problem 15.37'de tasarlanan yüksek geçiren filtre Problem 15.40'ta tasarlanan alçak geçiren filtre ile art arda bağlanmıştır.

a) Bu bağlantı ile oluşturulan filtrenin türünü açıklayınız.

b) Filtrenin kesim frekanslarını, merkez frekansını ve kalite çarpanını belirleyiniz.

c) Problemler 15.33 ve 15.38'deki sonuçları kullanarak filtrenin ölçeklenmiş aktarım fonksiyonunu çıkarınız.

d) (c)'deki çıkarımı $H(j\omega_o)$'yu hesaplayarak kontrol ediniz, ω_o filtrenin merkez frekansıdır.

15.42 TASARIM PROBLEMİ a) Şekil 15.26'daki devrede 300 pF kapasitörler kullanarak kalite çarpanı 20, merkez frekansı 8 kHz ve geçirme bandı kazancı 40 dB olan bir bant geçiren filtre tasarlayınız.

b) Filtrenin devre şemasını çiziniz ve tüm bileşenleri belirtiniz.

15.43 Şekil 15.26'daki devrede $\omega_o = 1$ rad / s ve $C = 1$ F olduğunda R_1, R_2 ve R_3'ün prototip değerlerinin aşağıdakiler olduğunu gösteriniz:

$$R_1 = \frac{Q}{K},$$

$$R_2 = \frac{Q}{2Q^2 - K},$$

$$R_3 = 2Q.$$

15.44 TASARIM PROBLEMİ a) Alt kesim frekansı 1000 Hz ve üst kesim frekansı 8000 Hz olan bir genişbant Butterworth bant geçiren filtre tasarlayınız. Filtrenin geçirme bandı kazancı 10 dB'dir. Kazanç 400 Hz ve 20 kHz'de en az 20 dB zayıflatılmalıdır. Yüksek geçiren devrede 50 nF kapasitörler ve alçak geçiren devrede 5 kΩ dirençler kullanınız.

b) Filtrenin devre şemasını çiziniz ve tüm bileşenleri belirtiniz.

15.45 a) Problem 15.44'te tasarlanan filtre için ölçeklenmiş aktarım fonksiyonunun ifadesini çıkarınız.

b) (a)'da çıkarılan ifadeyi kullanarak 500 Hz ve 5000 Hz'deki kazancı (desibel olarak) bulunuz.

c) (b)'de elde edilen değerler, Problem 15.44'te verilen filtre isterlerini sağlamakta mıdır?

15.46 Bir beşinci mertebeden yüksek geçiren Butterworth filtre için prototip aktarım fonksiyonunu, önce bir beşinci mertebeden Butterworth alçak geçiren filtrenin aktarım fonksiyonunu yazarak, daha sonra da alçak geçiren ifadedeki s'yi $1 / s$ ile değiştirerek çıkarınız.

15.47 Problem 15.46'daki beşinci mertebeden Butterworth filtre kesim frekansının 10 krad / s olduğu haliyle bir sistemde kullanılmaktadır.

a) Filtrenin ölçeklenmiş aktarım fonksiyonu nedir?

b) Bulgunuzu kesim frekansında kazancı (desibel olarak) bulup kontrol ediniz.

15.48 TASARIM PROBLEMİ Bu problemin amacı bir filtre devresindeki devre bileşenlerinin belirlenmesinde kullanılacak bir tasarım sürecini oluşturmakta gerekli olan analizde size yol göstermektir. Analiz edilecek devre Şekil P15.48'de gösterilmektedir.

a) Devreyi nitel olarak analiz ediniz ve kendinizi devrenin geçirme bandı kazancı R_2 / R_1 olan bir alçak geçiren devre olduğuna ikna ediniz.

b) Nitel analizinizi aktarım fonksiyonu V_o/V_i'yi çıkararak destekleyiniz. (*İpucu:* aktarım fonksiyonunu çıkarırken dirençleri eşdeğer iletkenlikleri ile, yani $G_1 = 1 / R_1$ vs. ile temsil ediniz.) Aktarım fonksiyonunu Tablo 15.1'deki değerler cinsinden kullanılabilir yapmak için şu şekle sokunuz:

$$H(s) = \frac{-Kb_o}{s^2 + b_1 s + b_o}.$$

c) Şimdi, beş devre bileşeni – R_1, R_2, R_3, C_1 ve C_2– ve üç aktarım fonksiyonu kısıtımız –K, b_1 ve b_0– olduğunu gözlemleyiniz. İlk bakışta, üç bileşen içinde iki serbest seçeneğimiz olduğu ortaya çıkmaktadır. Ancak, devre bileşenleri ile aktarım fonksiyonu kısıtları arasındaki ilişkiyi incelediğimizde, C_2 seçildiğinde $R_2(G_2)$'nin gerçeklenebilir olması için C_1 üzerinde bir üst sınır olduğunu görürüz. Bunu akılda tutarak, $C_2 = 1$ F olduğunda, üç iletkenlik değerinin aşağıdaki gibi olduğunu gösteriniz:

$$G_1 = KG_2;$$

$$G_3 = \left(\frac{b_o}{G_2}\right)C_1;$$

$$G_2 = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_o(1 + K)C_1}}{2(1 + K)}.$$

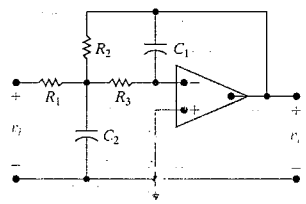
G_2'nin gerçeklenir olması için

$$C_1 \leq \frac{b_1^2}{4b_o(1 + K)}$$

olmalıdır.

d) (c)'de elde edilen sonuçlara dayanarak, bir kere K, b_0 ve b_1 bilindiğinde, devre bileşenlerini seçmek için bir tasarım sürecinin ana hatlarını çiziniz.

Şekil P15.48



15.49 TASARIM PROBLEMİ Problem 15.48'de analizi yapılan devrenin, geçirme bandı kazancı 8 olan bir üçüncü mertebeden alçak geçiren Butterworth filtrenin parçası olduğunu varsayınız.

a) Eğer prototip birinci mertebeden kısımda $C_2 = 1$ F ise C_1 üzerindeki üst sınır nedir?

b) Eğer C_1'in sınırlayan değeri seçilirse, R_1, R_2 ve R_3 için prototip değerleri nedir?

c) Eğer filtrenin köşe frekansı 50 kHz ise ve C_2 250 pF olarak seçilirse, C_1, R_1, R_2 ve R_3'ün ölçeklenmiş değerlerini hesaplayınız.

d) Filtrenin birinci mertebe kısmında direnç ve kapasitörlerin ölçeklenmiş değerlerini belirleyiniz.

e) Filtrenin devre şemasını oluşturunuz ve şemadaki tüm bileşen değerlerini belirtiniz.

15.50 TASARIM PROBLEMİ Şekil P15.48'deki R'leri ve C'leri yer değiştiriniz, yani R_1'i C_1, R_2'yi C_2, R_3'ü C_3, C_1'i R_1 ve C_2'yi R_2 yerine geçiriniz.

a) Bu yer değiştirme sonucunda gerçeklenen filtrenin türünü açıklayınız.

b) (a)'da açıklanan filtre türünü, aktarım fonksiyonu V_o / Vi'yi çıkararak teyit ediniz. Aktarım fonksiyonunu Tablo 15.1 ile uyumlu hale gelecek şekilde yazınız.

c) $C_2 = C_3 = 1$ F yapınız ve C_1, R_1 ve R_2 için ifadeleri K, b_1 ve b_0 cinsinden çıkarınız. (b_1 ve b_o'nun tanımı için Problem 15.48'e bakınız.)

d) (a)'da tanımlanan filtrenin, aynı türden geçirme bandı kazancı 8 olan üçüncü mertebeden Butterworth filtrede kullanıldığını varsayınız. $C_2 = C_3 = 1$ F olduğunda filtrenin ikinci mertebe kısmındaki C_1, R_1 ve R_2'nin prototip değerlerini hesaplayınız.

15.51 TASARIM PROBLEMİ a) Problemler 15.48 ve 15.50'de analizleri yapılan devreleri, geçirme bandı kazancı 20 dB, alt köşe frekansı 800 Hz ve üst köşe frekansı 7200 Hz olan, 1500 Hz ve 13.5 kHz'de en az 20 dB zayıflatan bir genişbant bant durduran filtreyi gerçeklemek için kullanınız. Mümkün olduğunca 50 nF kapasitörler kullanınız.

b) Filtrenin devre şemasını çiziniz ve tüm bileşenleri belirtiniz.

15.52 a) Problem 15.51'de betimlenen bant durduran filtre için aktarım fonksiyonunu çıkarınız.

b) (a)'da çıkarılan aktarım fonksiyonunu, filtrenin merkez frekansındaki zayıflatmayı (desibel olarak) bulmak için kullanınız.

15.53 TASARIM PROBLEMİ Bu problemin amacı Şekil P15.53'teki devre için tasarım denklemlerini geliştirmektir. (Tasarım denklemlerinin geliştirilmesi önerileri için Problem 15.48'e bakınız.)

a) Bir nitel analize dayalı olarak, devre tarafından gerçeklenen filtrenin türünü açıklayınız.

b) (a)'da varılan sonuçları, aktarım fonksiyonu V_o / V_i'yi çıkararak sağlayınız. Aktarım fonksiyonunu Tablo 15.1 ile uyumlu hale gelecek şekilde yazınız.

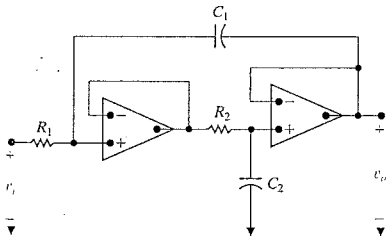
c) Devre bileşenlerinin seçiminde kaç tane serbest seçim bulunmaktadır?

d) İletkenlikler $G_1 = 1 / R_1$ ve $G_2 = 1 / R_2$ için ifadeleri C_1, C_2 ile b_o ve b_1 katsayıları cinsinden çıkarınız. (b_1 ve b_o'nun tanımı için Problem 15.48'e bakınız.)

e) C_1 ve C_2 üzerinde herhangi bir sınırlama var mıdır?

f) Şekil P15.53'teki devrenin bir dördüncü mertebeden alçak geçiren birim kazançlı Butterworth filtreyi tasarlamakta kullanıldığını varsayınız. Prototip devrede her ikinci mertebe kısımda 1 F kapasitörler kullanıldıysa R_1 ve R_2'nin prototip değerlerini belirleyiniz.

Şekil P15.53



15.54 TASARIM PROBLEMİ Problem 15.53'teki dördüncü mertebeden alçak geçiren birim kazançlı Butterworth filtre kesim frekansı 25 kHz iken bir sistemde kullanılmaktadır. Filtre 750 pF kapasitörlere sahiptir.

a) Filtrenin her kısmındaki R_1 ve R_2'nin sayısal değerlerini belirleyiniz.

b) Filtrenin devre şemasını çiziniz ve tüm bileşenleri belirtiniz.

15.55 TASARIM PROBLEMİ Şekil P15.53'teki R'leri ve C'leri yer değiştiriniz, yani R_1'i C_1, R_2'yi C_2, C_1'i R_1 ve C_2'yi R_2 yerine geçiriniz.

a) Devreyi nitel olarak analiz ediniz ve devre tarafından gerçeklenen filtrenin türünü tahmin ediniz.

b) (a)'da varılan sonuçları aktarım fonksiyonu V_o / V_i'yi çıkararak sağlayınız. Aktarım fonksiyonunu Tablo 15.1 ile uyumlu hale gelecek şekilde yazınız.

c) Devre bileşenlerinin seçiminde kaç tane serbest seçim bulunmaktadır?

d) R_1 ve R_2'yi b_o, b_1, C_1, C_2 cinsinden bulunuz.

e) C_1 ve C_2 üzerinde herhangi bir sınırlama var mıdır?

f) Devrenin (a)'da bulunan türden bir üçüncü mertebeden Butterworth filtrede kullanıldığını varsayınız. $C_1 = C_2 = 1$ F ise filtrenin ikinci mertebe kısmındaki R_1 ve R_2'nin prototip değerlerini belirleyiniz.

15.56 TASARIM PROBLEMİ a) Problem 15.55'teki devre, kesim frekansı 40 kHz olan bir üçüncü mertebeden yüksek geçiren Butterworth filtrede kullanılmaktadır. Devreyi oluşturmak için 360 pF kapasitörler bulunabiliyorsa R_1 ve R_2'nin değerlerini belirleyiniz.

b) Filtrenin birinci mertebe kısmındaki direnç ve kapasitör değerlerini belirleyiniz.

c) Devre şemasını çiziniz ve tüm bileşenleri belirtiniz.

d) Filtrenin ölçeklenmiş aktarım fonksiyonunun sayısal ifadesini veriniz.

e) (d)'de çıkarılan ölçeklenmiş aktarım fonksiyonunu kesim frekansındaki kazancı dB cinsinden bulmak için kullanınız.

Kısım 15.5

15.57 a) Bir prototip bant durduran filtrenin aktarım fonksiyonunun aşağıdaki gibi olduğunu gösteriniz:

$$H(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + (1/Q)s + 1}.$$

b) (a)'da bulunan sonucu Örnek 15.13'te tasarlanan filtrenin aktarım fonksiyonunu bulmakta kullanınız.

15.58 TASARIM PROBLEMİ a) Şekil 15.29'da gösterilen devreyi kullanarak, merkez frekansı 4 kHz, kalite çarpanı 15 olan bir darbant bant durduran devreyi tasarlayınız. Tasarımı C = 150 nF üzerine dayandırınız.

b) Filtrenin devre şemasını çiziniz ve tüm bileşen değerlerini şema üzerinde belirtiniz.

c) Filtrenin ölçeklenmiş aktarım fonksiyonu nedir?

Kısım 15.1-15.5

15.59 PRATİK BAKIŞ AÇISI TASARIM PROBLEMİ Şekil 15.32(a)'daki devreyi kullanarak en yüksek kazancı 20 dB olan ve 40 Hz frekansta 17 dB kazanç verecek bir şiddet kontrolü devresi tasarlayınız. Bir 11.1 kΩ direnç ve bir 100 kΩ potansiyometre kullanınız. Tasarımınızı, seçilen R_1, R_2 ve C_1 değerleri ile ω = 0'daki en yüksek kazancı ve $\omega = 1 / R_2C_1$'deki kazancı hesaplayarak test ediniz.

15.60 PRATİK BAKIŞ AÇISI TASARIM PROBLEMİ Şekil 15.32(a)'daki devreyi 50 Hz'de kazancı 3 dB düşen ve en yüksek kazancı 13.98 dB olan bir bas şiddet kontrol devresi tasarlamak için kullanınız.

15.61 Problem 15.59'da tasarlanan devre için ω = 0 olduğunda desibel cinsinden en yüksek kazancı α'ya karşı çiziniz. α'yı 0'dan 1'e 0.1 adımlarla arttırınız.

15.62 a) Şekil P15.62(a) ve (b)'deki devrelerin eşdeğer olduklarını gösteriniz.

b) Şekil P15.62(b)'de işaretlenen x ve y noktalarının daima aynı gerilimde olduğunu gösteriniz.

c) (a) ve (b)'deki bilgiyi kullanarak, Şekil 15.33'teki devrenin Şekil P15.62(b)'de gösterildiği gibi çizilebileceğini gösteriniz.

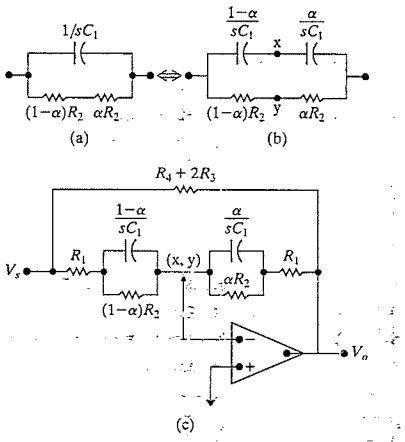
d) Şekil P15.62(c)'de devrenin

$$Z_i = \frac{R_1 + (1 - \alpha)R_2 + R_1R_2C_1s}{1 + R_2C_1s},$$

$$Z_f = \frac{R_1 + \alpha R_2 + R_1R_2C_1s}{1 + R_2C_1s}$$

olması durumunda Şekil 15.2'deki devre biçiminde olduğunu gösteriniz.

Şekil P15.62



15.63 PRATİK BAKIŞ AÇISI Bir mühendislik proje yöneticisi bir çalışanından Şekil P15.63'te gösterilen devrenin $R_4 >> R_1 + R_3 + 2R_2$ olduğunda bir tiz şiddeti kontrol devresi olarak kullanılabileceğini iddia eden bir öneri almıştır. Çalışan aynı zamanda devrenin gerilim aktarım fonksiyonunun

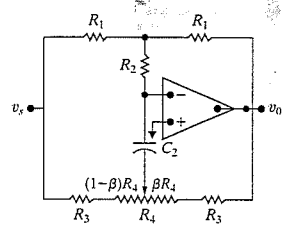
$$H(s) = \frac{V_o}{V_s}$$

$$= \frac{-\{(2R_3 + R_4) + [(1 - \beta)R_4 + R_o](\beta R_4 + R_3)C_2s\}}{\{(2R_3 + R_4) + [(1 - \beta)R_4 + R_3](\beta R_4 + R_o)C_2s\}}$$

olduğunu iddia etmektedir. Burada $R_o = R_1 + R_3 + 2R_2$'dir. Proje yöneticisi şans eseri bir stajyer elektronik mühendisliği öğrencisi ile çalışmaktadır ve sonuçta öğrenciden çalışanın iddiasını kontrol etmesini ister.

Öğrenciden, aktarım fonksiyonunun $\omega \to 0$ iken, $\omega \to \infty$ iken davranışı ile $\omega = \infty$ iken β'nın 0 ile 1 arasında değişmesi halindeki davranış sorulmaktadır. Aktarım fonksiyonunu sizin kontrol etmenize dayanarak devrenin bir tiz şiddeti kontrol devresi olarak kullanılabileceğini düşünüyor musunuz? Açıklayınız.

Şekil P15.63



15.64 PRATİK BAKIŞ AÇISI Şekil P15.63'ün devresinde bileşen değerleri $R_1 = R_2 = 20$ kΩ, $R_3 = 5.9$ kΩ, $R_4 = 500$ kΩ ve $C_2 = 2.7$ nF'tır.

a) En yüksek yükseltmeyi desibel cinsinden hesaplayınız.

b) En yüksek zayıflatmayı desibel cinsinden hesaplayınız.

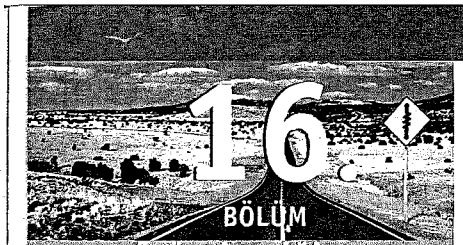
c) R_4, R_o'dan ciddi miktarda büyük müdür?

d) $\beta = 1$ ve $\omega = 1 / R_3C_2$ iken desibel cinsinden yükseltme ne kadardır?

e) $\beta = 0$ ve $\omega = 1 / R_3C_2$ iken desibel cinsinden zayıflatma ne kadardır?

f) (d) ve (e)'de elde edilen sonuçlara dayanarak, $R_4 >> R_o$ iken $1 / R_3C_2$ frekansının önemi nedir?

15.65 PRATİK BAKIŞ AÇISI Problem 15.64'te verilen bileşen değerlerini kullanarak, ω = 0 iken desibel cinsinden en yüksek kazancı β'ya karşı çiziniz. β'yı 0'dan 1'e 0.1 adımlarla arttırınız.



BÖLÜM İÇERİĞİ

16.1 **Fourier Serisi Analizi: Genel Bakış** *s. 658*

16.2 **Fourier Katsayıları** *s. 659*

16.3 **Simetrinin Fourier Katsayıları Üzerindeki Etkisi** *s. 662*

16.4 **Fourier Serisinin Alternatif Trigonometrik Biçimi** *s. 668*

16.5 **Bir Uygulama** *s. 670*

16.6 **Periyodik Fonksiyonlarla Ortalama Güç Hesabı** *s. 675*

16.7 **Bir Periyodik Fonksiyonun rms Değeri** *s. 678*

16.8 **Fourier Serisinin Üstel Biçimi** *s. 679*

16.9 **Genlik ve Faz Spektrumu** *s. 682*

✓ BÖLÜM HEDEFLERİ

1 Bir periyodik dalgabiçimi için Fourier katsayılarının trigonometrik biçimini, dalgabiçimi bir veya daha çok simetri tipine sahipse katsayıların tanımını kullanarak hesaplayabilmek.

2 Fourier katsayılarını ve üst üste bindirme kullanarak bir devrenin periyodik bir dalgabiçimine tepkisinin nasıl analiz edebileceğini bilmek.

3 Az sayıda Fourier katsayılarını kullanarak bir dirence aktarılan ortalama gücü kestirebilmek.

4 Bir periyodik dalgabiçimi için Fourier katsayılarının üstel biçimini hesaplayabilmek ve o dalgabiçiminin genlik ve faz spektrum çizimlerini üretmekte kullanabilmek.

Fourier Serisi

Önceki bölümlerde, önemli miktarda tartışmayı durgun durum sinüzoidal analizine adamıştık. Sinüzoidal uyarım fonksiyonuna bu ilginin bir sebebi, sinüzoidal olmayan, ama periyodik olan uyarımların durgun durum tepkisini bulmamızı sağlıyor olmasıdır. Bir **periyodik fonksiyon** kendisini her T saniyede tekrar eden fonksiyondur. Örneğin, sayfa 657, Şekil 16.1'de gösterilen üçgen dalga sinüzoidal değildir, ancak periyodik bir dalgabiçimidir.

Bir periyodik fonksiyon aşağıdaki ilişkiyi sağlar:

$$f(t) = f(t \pm nT). \tag{16.1}$$

Burada, n bir tamsayı (1, 2, 3, ...), ve T periyottur. Şekil 16.1'de gösterilen fonksiyon periyodiktir çünkü herhangi bir keyfi seçilmiş t_0 değeri için

$$f(t_0) = f(t_0 - T) = f(t_0 + T) = f(t_0 + 2T) = \cdots$$

sağlanır. Bir periyodik fonksiyonun kaydırılarak (iki yönden herhangi birinde) kendisine özdeş bir fonksiyon yaratacağı en küçük zaman aralığının T olduğuna dikkat ediniz.

Periyodik fonksiyonlara ilgi neden kaynaklanmaktadır? Bir neden çoğu pratik değeri olan elektriksel kaynak periyodik dalgabiçimleri üretmektedir. Örneğin, bir sinüzoidal kaynak tarafından sürülen süzülmemiş elektronik doğrultucular, sinüzoidal olmayan ancak periyodik olan doğrultulmuş sinüs dalgaları meydana getirir. Sayfa 657'de Şekiller 16.2(a) ve (b) sırasıyla tam dalga ve yarım dalga sinüzoidal doğrultucuların dalgabiçimlerini göstermektedir.

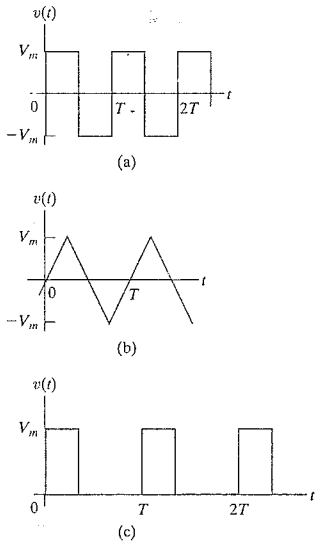
Bir katot ışını osiloskopunda elektron demetini kontrol etmekte kullanılan süpürme üreteci, Şekil 16.3'tekine benzer bir periyodik üçgen dalga üretir.

Ekipmanların laboratuar testinde yararlı olan elektronik osilatörler, sinüzoidal olmayan periyodik dalgabiçimleri üretmek için tasarlanmışlardır. Kare dalga, üçgen dalga, dikdörtgen darbe dalgabiçimlerini üretme yeteneğine sahip fonksiyon üreteçleri çoğu test laboratuarında bulunmaktadır. Şekil 16.4 tipik dalgabiçimlerini göstermektedir.

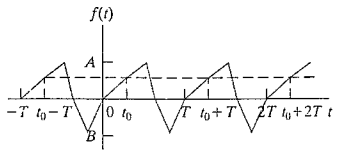
Periyodik fonksiyonlara ilgiyi tetikleyen başka bir pratik problem ise, bir sinüzoidal dalgabiçimi üretmek için tasarlanmalarına rağmen, güç üreteçlerinin pratikte bir saf sinüs dalgası üretecek şekilde yapılamamalarıdır. Öte yandan bozuk sinüzoidal dalga periyodiktir. Doğal olarak, mühendisler güç sistemlerini biraz bozulmuş sinüzoidal gerilim ile uyarmanın sonuçlarını araştırmaktadırlar.

Periyodik fonksiyonlara ilginin bir başka kaynağı ise, bir doğrusal devrede herhangi bir doğrusalsızlığın sinüzoidal olmayan bir periyodik fonksiyon yaratacağı genel gözlemidir. Daha önce değinilen doğrultucu devresi bu olgunun bir örneğidir. Hem makina hem de trafolarda karşımıza çıkan manyetik doyma da sinüzoidal olmayan bir periyodik fonksiyon üreten doğrusalsızlığa bir örnektir. Transistör doymasını kullanan bir elektronik kırpıcı devresi de bir başka örnektir.

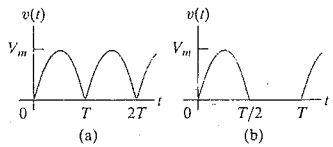
Dahası, sinüzoidal olmayan periyodik fonksiyonlar elektriksel olmayan sistemlerin analizinde de önemlidir. Mekanik titreşim, sıvı akışı ve ısı akışı içeren problemlerin tümü periyodik fonksiyonlardan yararlanmaktadır. Aslında, bir metal çubuktaki ısı akışının çalışılması ve analizi, Fransız matematikçi Jean Baptiste Joseph Fourier'i (1768-1830) bir periyodik fonksiyonun trigonometrik seri ile temsiline sevketmişti. Bu seri onun ismini taşımaktadır ve elektrik devrelerinin periyodik uyarım sonucundaki kalıcı durum tepkisinin bulunmasındaki başlangıç noktasıdır.



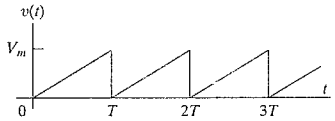
Şekil 16.4 ⚠ Laboratuvar testinde kullanılan fonksiyon üreteci tarafından oluşturulan dalgabiçimleri. (a) Kare dalga. (b) Üçgen dalga. (c) Dikdörtgen dalga.



Şekil 16.1 ⚠ Bir periyodik dalgabiçimi.



Şekil 16.2 ⚠ Bir süzülmemiş sinüzoidal doğrultucunun çıkış dalgabiçimleri. (a) Tam dalga doğrultma. (b) Yarım dalga doğrultma.



Şekil 16.3 ⚠ Bir katot ışını osiloskobun süpürme üretecinin üçgen dalgabiçimi.

16.1 Fourier Serisi Analizi: Genel Bakış

Fourier'in ısı akışı problemlerinde keşfettiği şey, bir periyodik fonksiyonun, harmonik ilişkiye sahip sinüs veya kosinüs fonksiyonlarının sonsuz toplamı ile temsil edilebileceğiydi. Başka bir deyişle, sonsuz serideki herhangi bir trigonometrik terimin periyodu, periyodik fonksiyonun T temel periyodunun bir tamsayı katı veya harmoniğidir. Böylece, periyodik bir $f(t)$ için, Fourier n 1, 2, 3, ... tamsayı dizisi iken $f(t)$'nin,

Bir periyodik fonksiyonun Fourier serisi temsili ▶

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t, \tag{16.2}$$

ile temsil edilebileceğini gösterdi.

Eş. 16.2'de a_v, a_n ve b_n **Fourier katsayıları** olarak bilinir ve $f(t)$'den hesaplanır. Periyodik fonksiyon $f(t)$'nin **temel frekansını** ω_0 ($2\pi/T$'ye eşit) terimi temsil eder. ω_0'ın tamsayı katları – yani $2\omega_0$, $3\omega_0$, $4\omega_0$ vs. – $f(t)$'nin **harmonik frekansları** olarak bilinir. Dolayısıyla, $2\omega_0$ $f(t)$'nin ikinci harmoniği, $3\omega_0$ üçüncü harmoniği ve $n\omega_0$ n'yinci harmoniğidir.

Fourier katsayılarının belirlenmesini Kısım 16.2'de tartışacağız. Fourier serisinin devre analizinde kullanılmasının detaylarına girmeden önce, sürece daha genel bakmalıyız. Uygulama bakış açısından, ilgilendiğimiz tüm periyodik fonksiyonları bir Fourier serisi cinsinden ifade edebiliriz. Matematiksel açıdan, $f(t)$ periyodik fonksiyonunun yakınsayan bir Fourier serisi olarak ifade edilebilmesi için (**Dirichlet koşulları** olarak bilinen) $f(t)$ üzerindeki koşullar aşağıdakilerdir:

1. $f(t)$ tek değerli olmalıdır.
2. $f(t)$, periyodik zaman aralığında sonlu sayıda devamsızlığa sahip olmalıdır.
3. $f(t)$, periyodik zaman aralığında sonlu sayıda tepe ve çukur değerlerine sahip olmalıdır.
4. $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|\,dt$ integrali var olmalıdır.

Fiziksel olarak gerçeklenebilir bir kaynak tarafından üretilen herhangi bir periyodik fonksiyon Dirichlet koşullarını sağlar. Bunlar **yeterli** koşullardır, ancak **gerekli** koşullar değildir. Sonuç olarak, eğer $f(t)$ bu isterleri sağlarsa bir Fourier serisi olarak ifade edebileceğimizi biliriz. Ancak, $f(t)$ bu isterleri sağlamasa bile, $f(t)$'yi hâlâ bir Fourier serisi olarak ifade edebiliriz. $f(t)$ üzerindeki gerekli koşullar bilinmemektedir.

$f(t)$'yi belirledikten ve Fourier katsayılarını (a_v, a_n ve b_n) hesapladıktan sonra periyodik kaynağı bir dc kaynak (a_v) ve sinüzoidal kaynakların toplamı (a_n ve b_n) olarak ayrıştırabiliriz. Periyodik kaynağın bir doğrusal devreyi sürmesi nedeniyle durgun durum tepkisini bulmak için üst üste bindirme ilkesini kullanabiliriz. Başka bir deyişle, $f(t)$'nin Fourier serisi temsili tarafından yaratılan her kaynak için önce tepkiyi hesaplarız, daha sonra toplam tepkiyi elde etmek için bireysel tepkileri toplarız. Belirli bir sinüzoidal kaynağa ait durgun durum tepkisi en kolay fazör yöntemiyle analiz kullanılarak yapılır.

Süreci izlemek kolaydır ve yeni bir devre analizi tekniği içermez. Süreç, durgun durum tepkisinin Fourier serisi temsilini oluşturur; bu nedenle tepkinin asıl şekli bilinmez. Dahası, tepki dalgabiçimi ancak yeterli sayıda terimi bir arada toplayarak kestirilebilir. Durgun durum tepkisini bulmak için Fourier serisi yaklaşımının bazı dezavantajları olmakla birlikte, bir problemle ilgili olarak sayısal sonuçlar almak kadar önemli olan bir düşünce tarzı ortaya çıkarır. Aslında, bazı durumlarda sayısal sonuçlardan çok kavramsal resim çok daha önemlidir.

16.2 Fourier Katsayıları

Bir periyodik fonksiyonu temel periyodu üzerinde tanımladıktan sonra, Fourier katsayılarını aşağıdaki ilişkilerle belirleriz:

$$a_v = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt, \tag{16.3}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt, \tag{16.4}$$

◀ Fourier katsayıları

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin k\omega_0 t\,dt. \tag{16.5}$$

Eş. 16.4 ve 16.5'te, k alt indisi tamsayı dizi 1, 2, 3, ...'deki k'yinci katsayıyı belirtir. a_v'nin, $f(t)$'nin ortalama değeri olduğunu, a_k'nın $f(t)\cos k\omega_0 t$'nin ortalama değerinin iki katı olduğuna ve b_k'nın $f(t)\sin k\omega_0 t$'nin ortalama değerinin iki katı olduğuna dikkat ediniz.

Eş. 16.3-16.5'i m ve n tamsayı iken Eş. 16.2'den, aşağıdaki integral ilişkilerini hatırlayarak kolayca çıkarırız.

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin m\omega_0 t\,dt = 0, \quad \text{her } m \text{ için} \tag{16.6}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos m\omega_0 t\,dt = 0, \quad \text{her } m \text{ için} \tag{16.7}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos m\omega_0 t \sin n\omega_0 t\,dt = 0, \quad \text{her } m \text{ ve } n \text{ için} \tag{16.8}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t\,dt = 0, \quad \text{her } m \neq n \text{ için}$$

$$= \frac{T}{2}, \quad m = n \text{ için} \tag{16.9}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t \, dt = 0, \quad \text{her } m \neq n \text{ için}$$

$$= \frac{T}{2}, \quad m = n \text{ için} \qquad (16.10)$$

Eş. 16.6-16.10'un doğrulanmasını Problem 16.5'te size bırakıyoruz.

Eş.16.3'ü çıkarmak için basitçe Eş. 16.2'nin her iki tarafının da integralini bir periyot üzerinde alırız:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt = \int_{t_0}^{t_0+T}\left(a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\right)dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+T} a_v dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t_0+T}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)\,dt$$

$$= a_v T + 0. \qquad (16.11)$$

Eş. 16.3, Eş. 16.11'den doğrudan gelmektedir.

a_n'nin *k-yinci* değerinin ifadesini çıkarmak için ilk olarak Eş.16.2'yi $\cos k\omega_0 t$ ile çarpıp, daha sonra her iki tarafın integralini $f(t)$'nin bir periyodu üzerinden alırız:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt = \int_{t_0}^{t_0+T} a_v \cos k\omega_0 t\, dt$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t_0+T}(a_n \cos n\omega_0 t \cos k\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \cos k\omega_0 t)\,dt$$

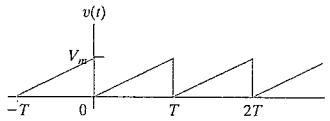
$$= 0 + a_k\left(\frac{T}{2}\right) + 0 \qquad (16.12)$$

Eş.16.12'yi a_k için çözmek Eş.16.4'teki ifadeyi verir.

b_n'nin *k-yinci* değeri için ifadeyi, ilk olarak Eş.16.2'yi $\sin k\omega_0 t$ ile çarpıp, daha sonra her iki tarafın integralini $f(t)$'nin bir periyodu üzerinden alarak elde ederiz. Örnek 16.1, belirli bir periyodik fonksiyonun Fourier katsayılarını bulmak için Eş. 16.3-16.5'in nasıl kullanılacağını göstermektedir.

Örnek 16.1 Simetrik Olmayan Bir Üçgen Dalgabiçiminin Fourier Serisinin Bulunması

Şekil 16.5'te gösterilen periyodik gerilim için Fourier serisini bulunuz.



Şekil 16.5 ▲ Örnek 16.1 için periyodik gerilim.

Çözüm

Eş. 16.3-16.5'i a_v, a_k, ve b_k'yı bulmak için kullanırken, t_0'ın değerini seçebiliriz. Şekil 16.5'in periyodik gerilimi için, t_0 için en iyi seçim sıfırdır. Başka bir seçim gerekli integral alma işlemlerini daha karmaşık hale getirecektir. 0 ve T arasında $v(t)$ için ifade

$$v(t) = \left(\frac{V_m}{T}\right)t$$

ile verilir.

a_v için denklem

$$a_v = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{V_m}{T}\right)t\,dt = \frac{1}{2}V_m$$

olur. Bu ifade açıkça Şekil 16.5'teki dalgabiçiminin ortalamasıdır.

a_n'nin *k-yinci* değeri için denklem şöyledir:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T \left(\frac{V_m}{T}\right)t \cos k\omega_0 t\,dt$$

$$= \frac{2V_m}{T^2}\left(\frac{1}{k^2\omega_0^2}\cos k\omega_0 t + \frac{t}{k\omega_0}\sin k\omega_0 t\right)\Bigg|_0^T$$

$$= \frac{2V_m}{T^2}\left[\frac{1}{k^2\omega_0^2}(\cos 2\pi k - 1)\right] = 0 \quad \text{tüm } k\text{'ler için.}$$

b_n'nin *k-yinci* değeri için denklem

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T \left(\frac{V_m}{T}\right) t \sin k\omega_0 t\,dt$$

$$= \frac{2V_m}{T^2}\left(\frac{1}{k^2\omega_0^2}\sin k\omega_0 t - \frac{t}{k\omega_0}\cos k\omega_0 t\right)\Bigg|_0^T$$

$$= \frac{2V_m}{T^2}\left(0 - \frac{T}{k\omega_0}\cos 2\pi k\right)$$

$$= \frac{-V_m}{\pi k}$$

olarak verilir. $v(t)$ için Fourier serisi aşağıda verilmiştir:

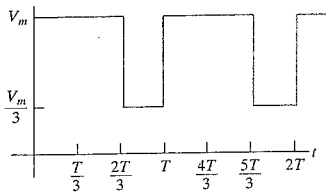
$$v(t) = \frac{V_m}{2} - \frac{V_m}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega_0 t$$

$$= \frac{V_m}{2} - \frac{V_m}{\pi}\sin \omega_0 t - \frac{V_m}{2\pi}\sin 2\omega_0 t - \frac{V_m}{3\pi}\sin 3\omega_0 t - \cdots.$$

✓ DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 1 – Bir periyodik dalgabiçimi için Fourier katsayılarının trigonometrik formunu hesaplayabilmek

16.1 $V_m = 9\pi$ V ise gösterilen periyodik gerilim fonksiyonu için a_v, a_k ve b_k için ifadelerini bulunuz.



Cevap: $a_v = 21.99$ V,

$a_k = \frac{6}{k}\sin\frac{4k\pi}{3}$ V,

$b_k = \frac{6}{k}(1 - \cos\frac{4k\pi}{3})$ V.

16.2 Değerlendirme Problemi 16.1'i göz önüne alınız.

a) Periyodik gerilimin ortalama değeri nedir?

b) $a_1 - a_5$ ve $b_1 - b_5$ için sayısal değerleri hesaplayınız.

c) $T = 125.66$ ms ise, temel frekans rad/s cinsinden nedir?

d) Üçüncü harmoniğin frekansı hertz cinsinden nedir?

e) Fourier serisini beşinci harmoniğe (dahil) kadar yazınız.

Cevap: (a) 21.99 V;
(b) −5.2 V, 2.6 V, 0 V, −1.3 ve 1.04 V; 9 V, 4.5 V, 0 V, 2.25 V ve 1.8 V;
(c) 50 rad/s;
(d) 23.87 Hz;
(e) $v(t) = 21.99 - 5.2\cos 50t + 9\sin 50t + 2.6\cos 100t + 4.5\sin 100t - 1.3\cos 200t + 2.25\sin 200t + 1.04\cos 250t + 1.8\sin 250t$ V.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 16.1 – 16.3'ü de çözmeyi deneyiniz.

Genellikle Fourier katsayılarını bulmak uzun ve yorucudur. Dolayısıyla işlemi basitleştirecek her şey çıkarımızadır. Neyse ki, bir periyodik fonksiyon, katsayıların bulunması sırasında gereken işi büyük oranda azaltacak belirli türlerde simetriye sahiptir. Kısım 16.3'te simetrinin bir Fourier serisindeki katsayıları nasıl etkilediğini tartışacağız.

16.3 Simetrinin Fourier Katsayıları Üzerindeki Etkisi

Fourier katsayılarını hesaplama işini basitleştirebilecek dört çeşit simetri kullanılabilir:

- çift fonksiyon simetrisi,
- tek fonksiyon simetrisi,
- yarım dalga simetrisi,
- çeyrek dalga simetrisi.

Her simetri türünün Fourier katsayıları üzerindeki etkisi takip eden kısımlarda tartışılmaktadır.

Çift Fonksiyon Simetrisi

Bir fonksiyon

Çift Fonksiyon ▶

$$f(t) = f(-t). \tag{16.13}$$

ise çift olarak tanımlanır. Eş. 16.13'ü sağlayan fonksiyonlara çift denir, çünkü sadece çift kuvvetlere sahip polinom fonksiyonlar bu karakteristiğe sahiptir. Çift periyodik fonksiyonlar için, Fourier katsayılarının denklemleri

$$a_v = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt, \tag{16.14}$$

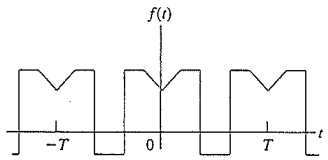
$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt, \tag{16.15}$$

$$b_k = 0, \quad \text{her } k \text{ için} \tag{16.16}$$

olarak bulunur. Eğer periyodik fonksiyon çift ise tüm b katsayılarının sıfır olduğuna dikkat ediniz. Şekil 16.6 bir çift periyodik fonksiyon göstermektedir. Eş. 16.14-16.16'nın çıkarımı Eş. 16.3-16.5'i doğrudan takip etmektedir. Her çıkarımda $t_0 = -T/2$ seçeriz ve sonra integral aralığını $-T/2$'den 0'a ve 0'dan $T/2$'ye ayırırız:

$$a_v = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)\,dt + \frac{1}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt. \tag{16.17}$$



Şekil 16.6 ▲ Bir çift periyodik fonksiyon, $f(t) = f(-t)$.

Şimdi Eş. 16.17'nin sağ tarafındaki ilk integralin integral değişkenini değiştireceğiz. Özel olarak, $t = -x$ yapacağız ve $f(t)$'nin çift olması nedeniyle $f(t) = f(-x) = f(x)$ olduğuna dikkat edeceğiz. Ayrıca $t = -T/2$ iken $x = T/2$ olduğunu ve $dt = -dx$ olduğunu da gözlemleyiniz. O zaman

$$\int_{-T/2}^{0} f(t)\,dt = \int_{T/2}^{0} f(x)(-dx) = \int_0^{T/2} f(x)\,dx \tag{16.18}$$

bulunur. Bu sonuç $-T/2$'den 0'a alınan integralin, 0'dan $T/2$'ye alınanla aynı olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla Eş. 16.17, Eş. 16.14 ile aynıdır. Eş. 16.15'in çıkarımı benzer şekilde yürütülür. Burada,

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt$$

$$+ \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt \tag{16.19}$$

yazılır ve

$$\int_{-T/2}^{0} f(t)\sin k\omega_0 t\,dt = \int_{T/2}^{0} f(x)\sin(-k\omega_0 x)(-dx)$$

$$= -\int_0^{T/2} f(x)\sin k\omega_0 x\,dx \tag{16.20}$$

olduğuna dikkat edilir. Daha önce olduğu gibi, $-T/2$'den 0'a alınan integral 0'dan $T/2$'ye alınanla özdeştir. Eş. 16.20'yi Eş. 16.19 ile birleştirmek Eş. 16.15'i verir.

$f(t)$ bir çift periyodik fonksiyon olduğu zaman tüm b katsayıları sıfırdır, çünkü $-T/2$'den 0'a alınan integral, 0'dan $T/2$'ye alınan integralin tam olarak negatifidir, yani

$$\int_{-T/2}^{0} f(t)\sin k\omega_0 t\,dt = \int_{T/2}^{0} f(x)\sin(-k\omega_0 x)(-dx)$$

$$= -\int_0^{T/2} f(x)\sin k\omega_0 x\,dx \tag{16.21}$$

geçerlidir. Eş. 16.14 ve 16.15'i Fourier katsayılarını bulmak için kullandığımızda integral aralığı 0 ve $T/2$ arası olmalıdır.

Tek Fonksiyon Simetrisi

Bir fonksiyon

$$f(t) = -f(-t). \tag{16.22}$$

◀ Tek fonksiyon

ise tek olarak tanımlanır.

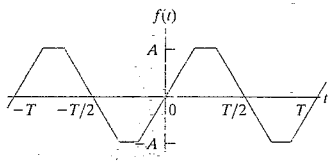
Eş. 16.22'yi sağlayan fonksiyonlara tek denir çünkü sadece tek kuvvetlere sahip polinom fonksiyonlar bu karakteristiğe sahiptir. Fourier katsayılarının ifadeleri bu durumda

$$a_v = 0; \tag{16.23}$$

$$a_k = 0, \quad \text{her } k \text{ için;} \tag{16.24}$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin k\omega_0 t\, dt \tag{16.25}$$

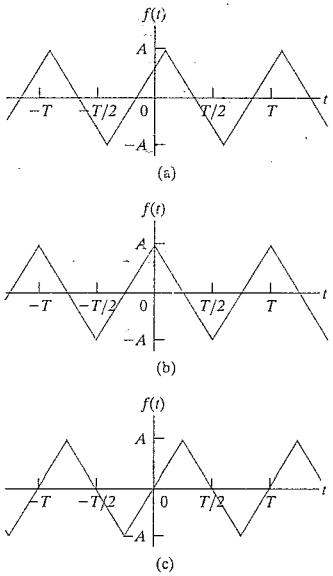
olarak bulunur. Periyodik fonksiyon tek ise tüm a katsayılarının sıfır olduğuna dikkat ediniz. Şekil 16.7 bir tek periyodik fonksiyonu göstermektedir.



Şekil 16.6 ▲ Bir tek periyodik fonksiyon $f(t) = -f(-t)$

Eş. 16.23-16.25'i çıkarmak için, Eş. 16.14-16.16'da kullandığımız aynı süreci kullanırız. Çıkarımı Problem 16.6'da size bırakıyoruz.

Bir periyodik fonksiyonun çiftliği veya teklıği fonksiyonu zaman ekseni boyunca kaydırmak suretiyle bozulabilir. Başka bir deyişle, $t = 0$'ın nerede olacağının akıllıca bir kararı bir periyodik sinyale çift veya tek simetri verebilir. Örneğin, Şekil 16.8(a)'da gösterilen üçgen fonksiyon ne çift ne de tektir. Ancak, fonksiyonu Şekil 16.8(b)'de gösterildiği gibi tek veya Şekil 16.8(c)'de gösterildiği gibi çift yapabiliriz.



Şekil 16.8 ▲ $t = 0$'ın nerede olacağı seçiminin bir periyodik fonksiyonu çift, tek veya hiçbiri yapması. (a) Ne çift ne de tek olan bir periyodik üçgen dalga. (b) (a)'daki üçgen dalganın t ekseni boyunca kaydırılarak çift yapılması. (c) (a)'daki üçgen dalganın t ekseni boyunca kaydırılarak tek yapılması.

Yarım dalga Simetrisi

Bir periyodik fonksiyon

$$f(t) = -f(t - T/2) \tag{16.26}$$

kısıtını sağlıyorsa yarım dalga simetrisine sahiptir. Eş. 16.26, bir periyodik fonksiyonun yarım periyot kaydırıldıktan ve ters çevrildikten sonra baştaki fonksiyona özdeş olması durumunda yarım dalga simetrisine sahip olduğunu belirtmektedir. Örneğin, Şekil 16.7 ve 16.8'de gösterilen fonksiyonlar yarım dalga simetrisine sahiptir, öte yandan Şekil 16.5 ve 16.6'dakiler değildir. Yarım dalga simetrinin, $t = 0$'ın nerede olduğundan bağımsız olmasına dikat ediniz.

Bir periyodik fonksiyon yarım dalga simetrisine sahipse, hem a_k hem de b_k, k'nın çift değerleri için sıfırdır. Dahası, a_v de sıfırdır, çünkü yarım dalga simetrili bir fonksiyonun ortalama değeri sıfırdır. Fourier katsayıları için ifadeler şöyledir:

$$a_v = 0, \tag{16.27}$$

$$a_k = 0, \quad \text{çift } k \text{ için;} \tag{16.28}$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt, \quad \text{tek } k \text{ için;} \tag{16.29}$$

$$b_k = 0, \quad \text{çift } k \text{ için;} \tag{16.30}$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin k\omega_0 t\, dt, \quad \text{tek } k \text{ için.} \tag{16.31}$$

Eş. 16.27-16.31'i Eş. 16.3-16.5'le başlayarak ve integral alma aralığını $-T/2$'den $T/2$'ye seçerek çıkarırız. Daha sonra bu aralığı, $-T/2$'den 0'a ve 0'dan $T/2$'ye kadar olan aralıklara böleriz. Örneğin, a_k için çıkarım aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt \\ &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt \\ &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt \\ &\quad + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt \end{aligned} \tag{16.32}$$

Şimdi Eş. 16.32'nin sağ tarafındaki ilk integralde değişken değiştirelim ve

$$t = x - T/2$$

alalım. O zaman

$$x = T/2, \qquad t = 0 \text{ iken}$$

$$x = 0, \qquad t = -T/2 \text{ iken}$$

$$dt = dx$$

bulunur. İlk integrali tekrar

$$\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt = \int_0^{T/2} f(x - T/2)\cos k\omega_0(x - T/2)\, dx \tag{16.33}$$

halinde yazarız. Burada

$$\cos k\omega_0(x - T/2) = \cos(k\omega_0 x - k\pi) = \cos k\pi \cos k\omega_0 x$$

olduğuna ve hipotez gereği

$$f(x - T/2) = -f(x)$$

olduğuna dikkat ediniz.

Dolayısıyla Eş.16.33

$$\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt = \int_0^{T/2} [-f(x)]\cos k\pi \cos k\omega_0 x\,dx \qquad (16.34)$$

haline gelir. Eş. 16.34'ü Eş. 16.32'ye katmak

$$a_k = \frac{2}{T}(1 - \cos k\pi)\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt \qquad (16.35)$$

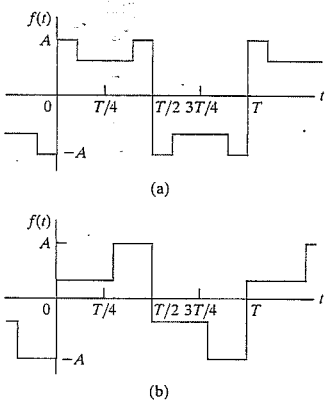
verir. Fakat $\cos k\pi$, k çift iken 1, tek iken –1'dir. Sonuç olarak Eş. 16.35 Eş. 16.28 ve 16.29'u üretir.

Aynı sürecin Eş. 16.30 ve 16.31'i çıkarmak için kullanılabileceğini doğrulamayı size bırakıyoruz (Bkz. Problem 16.7).

Gözlemlerimizi yarım dalga simetriye sahip bir periyodik fonksiyonun Fourier serisi temsilinin sıfır ortalama veya dc değere sahip olduğunu ve sadece tek harmonikler içerdiğini not ederek özetliyoruz.

Çeyrek dalga Simetrisi

Çeyrek dalga simetrisi terimi, yarım dalga simetrisine ek olarak pozitif ve negatif yarı devirlerin orta noktasına göre de simetriye sahip periyodik fonksiyonları tanımlar. Şekil 16.9(a)'da gösterilen fonksiyon pozitif ve negatif yarı devirlerin orta noktasına göre çeyrek dalga simetrisine sahiptir. Şekil 16.9(b)'deki şekil yarım dalga simetrisine sahip olmasına rağmen çeyrek dalga simetrisine sahip değildir.



Şekil 16.9 ▲ (a) Çeyrek dalga simetriye sahip bir fonksiyon. (b) Çeyrek dalga simetriye sahip olmayan bir fonksiyon.

Çeyrek dalga simetrisine sahip bir periyodik fonksiyon, $t = 0$'ın nerede olacağının uygun seçimi ile her zaman çift veya tek yapılabilir. Örneğin, Şekil 16.9(a)'da gösterilen fonksiyon tektir ve t ekseni boyunca $T/4$ birim sağa veya sola kaydırılarak çift yapılabilir. Öte yandan, Şekil 16.9(b)'deki fonksiyon hiçbir şekilde çift veya tek yapılamaz. Fourier katsayılarının hesaplanmasında çeyrek dalga simetrisinin avantajını sağlamak için, $t = 0$ olan noktayı fonksiyon çift veya tek olacak şekilde seçmelisiniz.

Fonksiyon çift yapılır ise,

$a_v = 0$, yarım dalga simetrisi nedeniyle,

$a_k = 0$, çift k için, yarım dalga simetrisi nedeniyle,

$$a_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt, \quad \text{tek } k \text{ için},$$

$$b_k = 0, \text{ tüm } k \text{ için, fonksiyon çift olduğu için,} \qquad (16.35)$$

elde edilir. Eş. 16.36 fonksiyonun çift olmasının yanı sıra çeyrek dalga simetrisinden ortaya çıkmaktadır. Çeyrek dalga simetrisinin yarım dalga simetrisinin üzerine eklendiğini hatırlayarak, çift k için a_v ve a_k'leri eleyebiliriz. Eş. 16.36'daki, tek k için, a_k ifadesini Eş. 16.29 ile karşılaştırmak, çeyrek dalga simetrisini çiftlik ile birleştirmenin integral alma aralığının 0'dan $T/2$'ye yerine 0'dan $T/4$'e kısaltılmasına izin verdiğini gösterir. Eş. 16.36'nın çıkarımını Problem 16.8'de size bırakıyoruz.

Fonksiyon tek yapılır ise,

$a_v = 0$, fonksiyon tek olduğu için,

$a_k = 0$, tüm k için, fonksiyon tek olduğu için,

$b_k = 0$, çift k için, yarım dalga simetrisi nedeniyle,

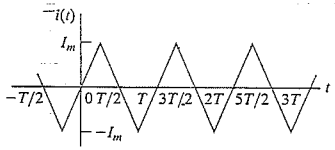
$$b_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\sin k\omega_0 t\,dt, \text{ tek } k \text{ için} \qquad (16.37)$$

olur. Eş. 16.47 çeyrek dalga simetrisinin ve tekliğin doğrudan sonucudur. Tekrar, çeyrek dalga simetrisi integral alma aralığının 0'dan $T/2$'ye yerine 0'dan $T/4$'e kısaltılmasına izin verir. Eş. 16.37'nin çıkarımını Problem 16.9'da size bırakıyoruz.

Örnek 16.2 Fourier katsayılarını bulma işini basitleştirmede simetrinin nasıl kullanılacağını göstermektedir.

Örnek 16.2 Bir Simetrik Tek Fonksiyonun Fourier Serisinin Bulunması

Şekil 16.10'da gösterilen akım dalgabiçimi için Fourier serisi temsilini bulunuz.



Şekil 16.10 ▲ Örnek 16.2 için periyodik dalgabiçimi.

Çözüm

Dalgabiçimindeki simetri türüne bakarak başlayalım. Fonksiyonun tek olmasının yanı sıra yarım dalga ve çeyrek dalga simetriye sahip olduğunu buluruz. Fonksiyon tek olduğu için tüm a katsayıları sıfırdır, yani, $a_v = 0$ ve $a_k = 0$, tüm k için sağlanır. Fonksiyon yarım dalga simetrisine sahip olduğundan k'nın çift değerleri için $b_k = 0$ olur. Fonksiyon çeyrek dalga simetrisine sahip olduğundan k'nın tek değerleri için b_k'nın ifadesi

$$b_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} i(t)\sin k\omega_0 t\,dt$$

bulunur.

$0 \le t \le T/4$ aralığında $i(t)$ için ifade

$$i(t) = \frac{4I_m}{T}t$$

yazılabilir. Sonuç olarak

$$b_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4}\frac{4I_m}{T}t\sin k\omega_0 t\,dt$$

$$= \frac{32I_m}{T^2}\left(\frac{\sin k\omega_0 t}{k^2\omega_0^2} - \frac{t\cos k\omega_0 t}{k\omega_0}\Bigg|_0^{T/4}\right)$$

$$= \frac{8I_m}{\pi^2 k^2}\sin\frac{k\pi}{2} \quad (k \text{ tektir.})$$

elde edilir ve $i(t)$ için Fourier serisi temsili aşağıdaki halde bulunur.

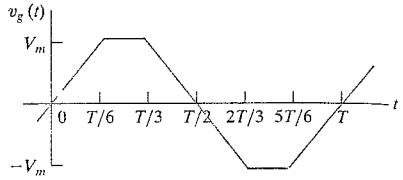
$$i(t) = \frac{8I_m}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin n\omega_0 t$$

$$= \frac{8I_m}{\pi^2}\left(\sin\omega_0 t - \frac{1}{9}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{25}\sin 5\omega_0 t - \frac{1}{49}\sin 7\omega_0 t + \cdots\right).$$

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 1 – Bir periyodik dalgabiçimi için Fourier katsayılarının trigonometrik formunu hesaplayabilmek

16.3 Gösterilen periyodik gerilim için Fourier serisini çıkarınız.



Cevap: $v_g(t) = \dfrac{12V_m}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \dfrac{\sin(n\pi/3)}{n^2} \sin n\omega_0 t.$

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 16.10 ve 16.11'i de çözmeyi deneyiniz.

16.4 Fourier Serisinin Alternatif Trigonometrik Biçimi

Fourier serisinin devre uygulamalarında rahatlık için serideki kosinüs ve sinüs terimlerini tek terimde birleştiririz. Böyle yapmak $v(t)$ veya $i(t)$'nin her bir harmoniğinin tek bir fazör olarak temsil edilmesine izin verir. Kosinüs ve sinüs terimleri ya bir kosinüs ifadesinde veya bir sinüs ifadesinde bir araya getirilebilir. Fazör yöntemi ile analizde (Bkz. 9. Bölüm) kosinüs gösterimini seçmemiz nedeniyle burada da serinin alternatif biçimi için kosinüs ifadesini seçiyoruz. Dolayısıyla Eş. 16.2'deki Fourier serisini şu şekilde yazarız:

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n). \qquad (16.38)$$

Burada A_n ve θ_n

$$a_n - jb_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\angle{-\theta_n} = A_n\angle{-\theta_n} \qquad (16.39)$$

olarak tanımlanır. Eş. 16.38 ve 16.39'u, Eş. 16.2'deki kosinüs ve sinüs terimlerini toplamak için fazör yöntemini kullanarak çıkarırız. Sinüs fonksiyonlarını kosinüs fonksiyonları halinde ifade ederek başlayalım ve Eş. 16.2'yi aşağıdaki şekilde yeniden yazalım:

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \cos(n\omega_0 t - 90^\circ). \qquad (16.40)$$

Toplama işlemi içindeki terimleri fazörleri kullanarak toplamak

$$\mathcal{P}\{a_n \cos n\omega_0 t\} = a_n \angle{0^\circ} \qquad (16.41)$$

sonucunu verir ve

$$\mathcal{P}\{b_n \cos(n\omega_0 t - 90^\circ)\} = b_n \angle{-90^\circ} = -jb_n \qquad (16.42)$$

olur. Sonra,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\{a_n \cos(n\omega_0 t + b_n \cos(n\omega_0 t - 90^\circ)\} &= a_n - jb_n \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\angle{-\theta_n} \\ &= A_n\angle{-\theta_n} \qquad (16.43)\end{aligned}$$

elde edilir.

Eş. 16.43'ün ters dönüşümünü aldığımızda

$$\begin{aligned}a_n \cos n\omega_0 t + b_n \cos(n\omega_0 t - 90^\circ) &= \mathcal{P}^{-1}\{A_n\angle{-\theta_n}\} \\ &= A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \qquad (16.44)\end{aligned}$$

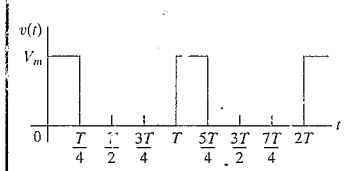
sonucuna varırız. Eş. 16.44'ü Eş. 16.40'ta yerine koymak Eş. 16.38'i verir. Denklem 16.43 Eş. 16.39'a karşılık gelmektedir. Periyodik fonksiyon çift veya tek ise, A_n ya a_n'ye (çift) veya b_n'ye (tek) indirgenir ve θ_n ya 0° (çift) ya da 90°'dir (tek).

Verilen bir periyodik fonksiyon için Fourier serisinin alternatif biçiminin çıkarımı Örnek 16.3'te gösterilmektedir.

Örnek 16.3 Periyodik Gerilimin Trigonometrik Fourier Serisi Biçiminin Hesaplanması

a) Şekil 16.11'de gösterilen periyodik fonksiyon için a_k ve b_k ifadelerini bulunuz.

b) Eş. 16.38'in formarını kullanarak $v(t)$'nin Fourier serisi temsilinin ilk dört terimini yazınız.



Şekil 16.11 ▲ Örnek 16.3 için periyodik fonksiyon.

Çözüm

a) Gerilim $v(t)$ ne çift ne tektir, ne de yarım dalga simetrisine sahiptir. Sonuç olarak a_k ve b_k'yı bulmak için Eş. 16.4 ve 16.5'i kullanırız. t_0'ı sıfır seçerek aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$a_k = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/4} V_m \cos k\omega_0 t\, dt + \int_{T/4}^{T} (0) \cos k\omega_0 t\, dt\right]$$

$$= \frac{2V_m}{T} \frac{\sin k\omega_0 t}{k\omega_0}\bigg|_0^{T/4} = \frac{V_m}{k\pi} \sin\frac{k\pi}{2}$$

ve

$$\begin{aligned}b_k &= \frac{2}{T}\int_0^{T/4} V_m \sin k\omega_0 t\, dt \\ &= \frac{2V_m}{T}\left(\frac{-\cos k\omega_0 t}{k\omega_0}\bigg|_0^{T/4}\right) \\ &= \frac{V_m}{k\pi}\left(1 - \cos\frac{k\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

b) $v(t)$'nin ortalama değeri

$$a_v = \frac{V_m(T/4)}{T} = \frac{V_m}{4}$$

bulunur. $k = 1$, 2 ve 3 için $a_k - jb_k$ değerleri

$$a_1 - jb_1 = \frac{V_m}{\pi} - j\frac{V_m}{\pi} = \frac{\sqrt{2}V_m}{\pi}\angle{-45^\circ},$$

$$a_2 - jb_2 = 0 - j\frac{V_m}{\pi} = \frac{V_m}{\pi}\angle{-90^\circ},$$

$$a_3 - jb_3 = \frac{-V_m}{3\pi} - j\frac{V_m}{3\pi} = \frac{\sqrt{2}V_m}{3\pi}\angle{-135^\circ}$$

elde edilir. Sonuç olarak $v(t)$'nin Fourier serisi temsilindeki ilk dört terim aşağıdadır:

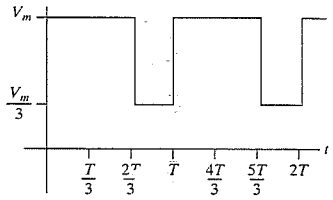
$$\begin{aligned}v(t) = \frac{V_m}{4} &+ \frac{\sqrt{2}V_m}{\pi}\cos(\omega_0 t - 45^\circ) + \frac{V_m}{\pi}\cos(2\omega_0 t - 90^\circ) \\ &+ \frac{\sqrt{2}V_m}{3\pi}\cos(3\omega_0 t - 135^\circ) + \cdots\end{aligned}$$

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 1 – Bir periyodik dalgabiçimi için Fourier katsayılarının trigonometrik biçimini hesaplayabilmek

16.4 a) Gösterilen periyodik fonksiyon için eğer $V_m = 9\pi$ V ise A_1–A_5 ve θ_1–θ_5 değerlerini hesaplayınız.

b) Eş. 16.38'in formatını kullanarak ve T = 125.66 ms varsayımı ile $v(t)$'nin Fourier serisinin ilk beş terimini yazınız.

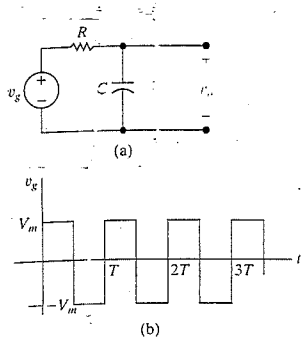


Cevap: (a) 10.4, 5.2, 0, 2.6, 2.1 V ve –120°, –60°, tanımsız, –120°, –60°;

(b) $v(t) = 21.99 + 10.4\cos(50t - 120°) + 5.2\cos(100t - 60°) + 2.6\cos(200t - 120°) + 2.1\cos(250t - 60°)$ V.

NOT: Ayrıca Bölün Problemi 16.18'i de çözmeyi deneyiniz.

16.5 Bir Uygulama



Şekil 16.12 Periyodik gerilim ile uyarılan bir *RC* devresi. (a) Seri *RC* devre. (b) Kare dalga gerilim.

Şimdi bir doğrusal devrenin durgun durum tepkisini bulmak için bir periyodik uyarım fonksiyonunun Fourier serisi temsilinin nasıl kullanılacağını göstereceğiz. Şekil 16.12(a)'da gösterilen *RC* devresi örneğimizdir. Devre Şekil 16.12(b)'de gösterilen periyodik kare dalga gerilimi ile enerjilenmektedir.

Durgun durum tepkisini bulmak için ilk adım periyodik uyarım kaynağını Fourier serisi ile temsil etmektir. Kaynağın tek, yarım dalga ve çeyrek dalga simetrisine sahip olduğuna dikkat ettikten sonra, Fourier katsayılarının tek tamsayı değerlere sınırlanmış k'ler için b_k'ye indirgendiğini biliyoruz:

$$b_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} V_m \sin k\omega_0 t\, dt = \frac{4V_m}{\pi k} \quad (k \text{ tek}). \tag{16.45}$$

O zaman v_g'nin Fourier serisi temsili

$$v_g = \frac{4V_m}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega_0 t \tag{16.46}$$

olacaktır. Seriyi genişletilmiş biçimde yazarak

$$v_g = \frac{4V_m}{\pi}\sin\omega_0 t + \frac{4V_m}{3\pi}\sin 3\omega_0 t + \frac{4V_m}{5\pi}\sin 5\omega_0 t + \frac{4V_m}{7\pi}\sin 7\omega_0 t + \cdots \tag{16.47}$$

elde ederiz.

Eş. 16.47 tarafından ifade edilen gerilim kaynağı, her birinin kendi genlik ve frekansının olduğu sonsuz tane seri bağlı sinüzoidal kaynağa eşdeğerdir. Her bir kaynağın çıkış gerilimine katkısını bulmak için üst üste bindirme ilkesini kullanırız.

Sinüzoidal kaynakların herhangi biri için çıkış geriliminin fazör bölgesi ifadesi

$$\mathbf{V}_o = \frac{\mathbf{V}_g}{1 + j\omega RC} \tag{16.48}$$

olur. Tüm gerilim kaynakları sinüs fonksiyonları olarak ifade edilir, böylece bir fazörü kosinüs yerine sinüs cinsinden yorumlayacağız. Başka bir deyişle, fazör bölgesinden zaman bölgesine geri gittiğimizde, zaman alanı ifadesini basitçe cos $(\omega t + \theta)$ yerine sin $(\omega t + \theta)$ olarak yazacağız.

Sinüzoidal kaynağın temel frekansına ait fazör çıkış gerilimi

$$\mathbf{V}_{o1} = \frac{(4V_m/\pi)\angle 0°}{1 + j\omega_0 RC} \tag{16.49}$$

olur. $\mathbf{V}_{o1}$'i kutupsal biçimde yazmak

$$\mathbf{V}_{o1} = \frac{(4V_m)\angle -\beta_1}{\pi\sqrt{1 + \omega_0^2R^2C^2}} \tag{16.50}$$

verir. Burada

$$\beta_1 = \tan^{-1}\omega_0 RC \tag{16.51}$$

ile verilir. Eş. 16.50'den v_o'nun temel frekans bileşeni için zaman bölgesi ifadesi

$$v_{o1} = \frac{4V_m}{\pi\sqrt{1 + \omega_0^2R^2C^2}}\sin(\omega_0 t - \beta_1) \tag{16.52}$$

bulunur. Çıkış geriliminin üçüncü harmonik bileşeni benzer şekilde bulunur. Üçüncü harmonik fazör gerilimi

$$\mathbf{V}_{o3} = \frac{(4V_m/3\pi)\angle 0°}{1 + j3\omega_0 RC} = \frac{4V_m}{3\pi\sqrt{1 + 9\omega_0^2R^2C^2}}\angle -\beta_3 \tag{16.53}$$

olur. Burada

$$\beta_3 = \tan^{-1}3\omega_0 RC \tag{16.54}$$

ile verilir. Üçüncü harmonik çıkış gerilimi için zaman bölgesi ifadesi ise

$$v_{o3} = \frac{4V_m}{3\pi\sqrt{1 + 9\omega_0^2R^2C^2}}\sin(3\omega_0 t - \beta_3) \tag{16.55}$$

elde edilir. Dolayısıyla, çıkış geriliminin k-yinci harmonik bileşeni için ifade

$$v_{ok} = \frac{4V_m}{k\pi\sqrt{1 + k^2\omega_0^2R^2C^2}}\sin(k\omega_0 t - \beta_k) \quad (k \text{ tektir}) \tag{16.56}$$

bulunur. Burada

$$\beta_k = \tan^{-1}k\omega_0 RC \quad (k \text{ tektir}) \tag{16.57}$$

ile tanımlanmıştır.

Şimdi çıkış geriliminin Fourier serisi temsilini yazalım:

$$v_o(t) = \frac{4V_m}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\sin(n\omega_0 t - \beta_n)}{n\sqrt{1 + (n\omega_0 RC)^2}}. \qquad (16.58)$$

Eş. 16.58'in çıkarımı zor değildi. Fakat, durgun durum çıkış için analitik bir ifadeye sahip olmamıza rağmen, $v_o(t)$'nin nasıl göründüğü Eş. 16.58'den kolaylıkla görünemeyebilir. Daha önce belirttiğimiz gibi, bu eksiklik Fourier serisi yaklaşımının bir sorunudur. Öte yandan Eş. 16.58 işe yaramaz değildir, çünkü eğer devrenin frekans tepkisi üzerinde yoğunlaşırsak, $v_o(t)$'nin durgun durum dalgabiçimi hakkında biraz bilgi vermektedir. Örneğin, eğer C büyük ise, $1/n\omega_0 C$ yüksek harmonikler için küçüktür. Sonuç olarak kapasitör giriş dalgabiçiminin yüksek frekans bileşenlerini kısa devre etmektedir ve Eş. 16.58'deki yüksek dereceli harmonikler düşük dereceli harmoniklerle karşılaştırıldıklarında gözardı edilebilirler. Denklem 16.58 bu durumu yüksek C için şöyle yansıtmaktadır:

$$v_o \approx \frac{4V_m}{\pi\omega_0 RC} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n\omega_0 t - 90^\circ)$$

$$\approx \frac{-4V_m}{\pi\omega_0 RC} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n\omega_0 t. \qquad (16.59)$$

Eş. 16.59 çıkıştaki harmoniğin genliğinin, $1/n$ ile düşen giriş harmonikleri ile karşılaştırıldığında $1/n^2$ ile düştüğünü göstermektedir. Eğer C sadece temel frekans anlamlı olacak kadar büyükse, bir yaklaştırma

$$v_o(t) \approx \frac{-4V_m}{\pi\omega_0 RC} \cos \omega_0 t \qquad (16.60)$$

ile verilir ve Fourier analizi bize kare dalga girişin bir sinüzoidal çıkışa deforme olduğunu göstermektedir.

Şimdi $C \to 0$ iken ne olduğunu görelim. Devre, kapasitif dalın tüm frekanslarda açık devre gibi görünmesi nedeniyle v_o ve v_g'nin $C = 0$ iken aynı olduklarını göstermektedir. Eş. 16.58 aynı sonucu öngörmektedir, çünkü $C \to 0$ iken

$$v_o = \frac{4V_m}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_0 t \qquad (16.61)$$

bulunur. Fakat Eş. 16.61 Eş. 16.46 ile özdeştir ve sonuç olarak $C \to 0$ iken $v_o \to v_g$ elde edilir.

Sonuçta, Eş. 16.58'in kullanışlı olduğu ortaya çıkmıştır, çünkü C büyükken çıkışın giriş dalgabiçiminin büyük oranda bozulmuş bir kopyası olacağını, C küçükken ise makul düzeyde bir kopyası olacağını öngörmemizi sağladı. 13. Bölümde giriş ve çıkış arasındaki bozulmaya, sistem ağırlıklandırma fonksiyonunun ne kadar hafızası olduğu açısından bakmıştık. Frekans bölgesinde, durgun durum giriş ve çıkış arasındaki bozulmaya genlik ve harmoniklerin fazlarının devre boyunca iletimleri sırasında ne kadar değiştikleri açısından bakarız. Ağ, çıkıştaki harmonikler arasındaki genlik ve faz ilişkilerini giriştekilere oranla ciddi miktarda değiştirdiği zaman, çıkış girişin bozulmuş bir halidir. Sonuç olarak, frekans bölgesinde genlik bozulmasından ve faz bozulmasından bahsederiz.

Buradaki devre için genlik bozulması vardır çünkü giriş harmonikleri $1/n$ ile düşerken çıkış harmonikleri

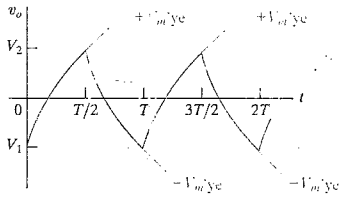
$$\frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1 + (n\omega_0 RC)^2}}$$

ile azalmaktadır. Devre ayrıca faz bozulması da sergilemektedir çünkü her giriş harmoniğinin faz açısı sıfırdır, ancak çıkış sinyalindeki *n-yinci* harmoniğin fazı $-\tan^{-1} n\omega_0 RC$'dir.

Doğrudan Yaklaşımın Durgun Durum Tepkisine Uygulanması

Şekil 16.12(a)'da gösterilen basit RC devresi durgun durum tepkisi için ifadeyi, uyarım fonksiyonunun Fourier serisi temsiline başvurmadan da çıkarabiliriz. Ancak burada bu fazladan analizi yapmak Fourier serisi yaklaşımını kavrayışımıza katkı sağlayacaktır.

v_o için durgun durum ifadesini doğrudan devre analizi ile bulmak için şu yolu izleyeceğiz. Kare dalga uyarım fonksiyonu kapasitörü $+V_m$ ve $-V_m$'e doğru dönüşümlü olarak şarj etmektedir. Devre durgun durum işleyişine ulaştıktan sonra dönüşümlü şarj etme periyodik hale gelir. Tek zaman sabitli RC devrelerinin analizinden (7. Bölüm) biliyoruz ki sürücü gerilimdeki ani değişiklere devrenin verdiği tepki üstel olmaktadır. Sonuçta Şekil 16.12(a)'da gösterilen devredeki kapasitörün üzerinde oluşan gerilimin durgun durum dalgabiçimi Şekil 16.13'te gösterilmektedir.



Şekil 16.13 Şekil 16.12(a)'daki devre için v_o'nın durgun durum dalgabiçimi.

$0 \le t \le T/2$ ve $T/2 \le t \le T$ zaman aralıklarında $v_o(t)$ için analitik ifade

$$v_o = V_m + (V_1 - V_m)e^{-t/RC}, \qquad 0 \le t \le T/2; \qquad (16.62)$$

$$v_o = -V_m + (V_2 + V_m)e^{-[t-(T/2)]/RC} \qquad T/2 \le t \le T \qquad (16.63)$$

ile verilir. Eş. 16.62 ve 16.63'ü, Eş. 7.60'ta özetlenen, 7. Bölümdeki yöntemlerle çıkarırız. Eş. 16.62'den

$$V_2 = V_m + (V_1 - V_m)e^{-T/2RC} \qquad (16.64)$$

ifadesini ve Eş. 16.63'ten

$$V_1 = -V_m + (V_2 + V_m)e^{-T/2RC} \qquad (16.65)$$

ifadesini çıkararak V_1 ve V_2'nin değerlerini elde ederiz. Eş. 16.64 ve 16.65'i V_1 ve V_2 için çözmek

$$V_2 = -V_1 = \frac{V_m(1 - e^{-T/2RC})}{1 + e^{-T/2RC}} \qquad (16.66)$$

verir. Eş. 16.66'yı Eş. 16.62 ve 16.63'te yerine koymak

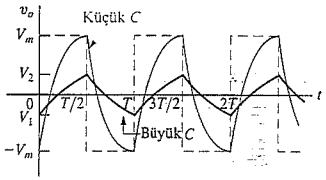
$$v_o = V_m - \frac{2V_m}{1 + e^{-T/2RC}} e^{-t/RC}, \quad 0 \le t \le T/2 \qquad (16.67)$$

ve

$$v_o = -V_m + \frac{2V_m}{1 + e^{-T/2RC}} e^{-[t-(T/2)]/RC}, \quad T/2 \le t \le T \qquad (16.68)$$

sonuçlarını verir.

Eş. 16.67 ve 16.68 $v_o(t)$'nin yarım dalga simetrisine sahip olduğunu belirtmektedir ve dolayısıyla v_o'ın ortalama değeri sıfırdır. Bu sonuç durgun durum tepkisinin Fourier serisi çözümü ile bağ-



Şekil 16.14 ⚠ Kapasitör büyüklüğünün durgun durum tepkisi üzerindeki etkisi.

daşmaktadır – yani, uyarım fonksiyon sıfır frekansında hiç bileşen içermediği için tepkinin de böyle bir bileşene sahip olamayacağı sonucu ile uyumludur. Eş. 16.67 ve 16.68 ayrıca kapasitörün büyüklüğünü değiştirmenin etkisini de göstermektedir. C küçük ise, üstel fonksiyon hızlıca yok olur, 0 ile $T/2$ arasında $v_o = V_m$ ve $T/2$ ile T arasında $v_o = -V_m$ bulunur. Eğer C büyükse, çıkış dalgabiçimi Şekil 16.14'ün gösterdiği gibi üçgen şekle dönüşür. Büyük C için üstel terimler $e^{-t/RC}$ ve $e^{-[t-(T/2)]/RC}$'yi, sırasıyla $1 - (t / RC)$ ve $1 - \{[t - (T/2)]/RC\}$ doğrusal terimleri ile yakınlaştırabiliriz. Denklem 16.59 bu üçgen dalgabiçiminin Fourier serisini vermektedir.

Şekil 16.14 sonuçları özetlemektedir. Şekil 16.14'teki kesikli çizgi giriş gerilimini, düz renkli çizgi C küçük iken çıkış gerilimini, düz siyah çizgi ise C büyük iken çıkış gerilimini göstermektedir.

Son olarak, Eş. 16.67 ve 16.68'deki durgun durum tepkisinin Eş. 16.58'deki Fourier serisi çözümüne eşdeğer olduğunu doğrulayacağız. Bunu yapmak için basitçe Eş. 16.67 ve 16.68 tarafından tarif edilen periyodik fonksiyonun Fourier serisi temsilini çıkaracağız. Periyodik gerilim tepkisinin yarım dalga simetriye sahip olduğunu zaten belirtmiştik. Dolayısıyla, Fourier serisi sadece tek harmonikler içermektedir. Tek k için,

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\left(V_m - \frac{2V_m e^{-t/RC}}{1 + e^{-T/2RC}}\right)\cos k\omega_0 t\, dt$$

$$= \frac{-8RCV_m}{T[1 + (k\omega_0 RC)^2]} \quad (k \text{ tektir}), \tag{16.69}$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\left(V_m - \frac{2V_m e^{-t/RC}}{1 + e^{-T/2RC}}\right)\sin k\omega_0 t\, dt$$

$$= \frac{4V_m}{k\pi} - \frac{8k\omega_0 V_m R^2C^2}{T[1 + (k\omega_0 RC)^2]} \quad (k \text{ tektir}) \tag{16.70}$$

buluruz. Eş. 16.69 ve 16.70'ten elde edilen sonuçların Eş. 16.58 ile tutarlı olduğunu göstermek için, aşağıdaki ifadeleri ispat etmemiz gerekir:

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{4V_m}{k\pi}\frac{1}{\sqrt{1 + (k\omega_0 RC)^2}}, \tag{16.71}$$

ve

$$\frac{a_k}{b_k} = -k\omega_0 RC. \tag{16.72}$$

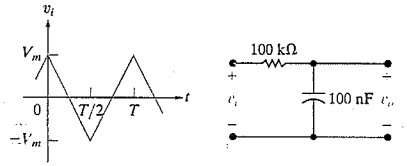
Eş. 16.69-16.72'yi ispat etmeyi Problemler 16.22 ve 16.23'te size bırakıyoruz. Eş. 16.71 ve 16.72 Eş. 16.38 ve 16.39 ile birlikte Eş. 16.58'deki Fourier serisi ifadesinin çıkarımında kullanılır; detayları Problem 16.24'te size bırakıyoruz.

Bu açıklayıcı örnekte, üst üste bindirme ilkesi ile birlikte Fourier serisinin bir periyodik uyarım fonksiyonuna karşılık durgun durum tepkisini elde etmekte nasıl kullanılacağını gösterdik. Fourier serisi yaklaşımının temel eksikliği, tepkinin dalgabiçimini belirlemekteki zorluktur. Öte yandan, devrenin frekans tepkisi açısından düşündüğümüzde, Fourier serisi temsilindeki sonlu sayıdaki uygun terimleri kullanarak durgun durum tepkisinin anlamlı bir yaklaşıklığını ortaya çıkarabiliriz. (Bkz. Problemler 16.28 ve 16.29.)

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 2 – Bir devrenin periyodik bir dalgabiçimine tepkisinin nasıl analiz edileceğini bilmek

16.5 Şekilde solda gösterilen periyodik üçgen dalga gerilim sağda gösterilen devreye uygulanmaktadır. $V_m = 281.25\pi^2$ V ve giriş geriliminin periyodu 200π ms ise durgun durum gerilimi v_o'yu temsil eden Fourier serisindeki sıfırdan büyük ilk üç terimi bulunuz.

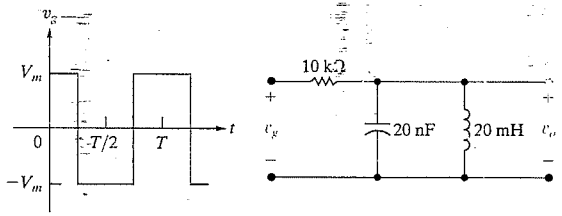


Cevap: 2238.83 cos(100t – 5.71°) + 239.46 cos(30t – 16.70°) + 80.50 cos(50t – 26.57°) + ... mV

16.6 Aşağıdaki şekilde solda gösterilen periyodik kare dalga sağda gösterilen devreye uygulanmaktadır.

a) $V_m = 210\pi$ V ve giriş geriliminin periyodu 0.2π ms ise durgun durum gerilimi v_o'yu temsil eden Fourier serisindeki sıfırdan büyük ilk dört terimi bulunuz.

b) Hangi harmonik çıkış geriliminde baskındır? Nedenini açıklayınız.



Cevap: (a) 17.5 cos(10,000t + 38.81°) + 26.14 cos(30,000t – 95.36°) + 168 cos(50,000t) + 17.32 cos(70,000t + 98.30°) + ··· V;

b) 10,000 rad/s'deki beşinci harmonik, çünkü devre merkez frekansı 50,000 rad/s ve kalite çarpanı 10 olan bir bant geçiren filtredir.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 16.27 ve 16.28'i de çözmeyi deneyiniz.

16.6 Periyodik Fonksiyonlarla Ortalama Güç Hesabı

Bir doğrusal toplu parametreli devrede bir çift terminaldeki gerilim ve akımın Fourier serisi temsilini biliyorsak, terminallerdeki ortalama gücü harmonik gerilim ve akımların bir fonksiyonu olarak kolaylıkla ifade edebiliriz. Eş. 16.38'deki Fourier serisinin trigonometrik biçimini kullanarak bir devrenin terminallerindeki periyodik gerilim ve akımı

$$v = V_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{vn}). \tag{16.73}$$

$$i = I_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{in}) \tag{16.74}$$

olarak yazabiliriz.

Eş. 16.73 ve 16.74'te kullanılan semboller şu şekilde tanımlanır:

V_{dc} = dc gerilim bileşeninin genliği,
V_n = n-yinci harmonik gerilimin genliği,
θ_{vn} = n-yinci harmonik gerilimin faz açısı,
I_{dc} = dc akım bileşeninin genliği,
I_n = n-yinci harmonik akımın genliği,
θ_{in} = n-yinci harmonik akımın faz açısı.

Akım referansının terminallerdeki referans gerilimin düşüş yönünde olduğunu (pasif işaret kuralını kullanarak) varsayarız. Böylece terminallerdeki anlık güç vi'dir. Ortalama güç ise

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p\,dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} vi\,dt \qquad (16.75)$$

ile ifade edilir. Ortalama güç ifadesini bulmak için Eş. 16.73 ve 16.74'ü Eş. 16.75'te yerine koyar ve integralini alırız. vi çarpımının iki sonsuz serinin çarpımı olması nedeniyle ilk bakışta bu işlem korkutucu gözükebilir. Ancak, varlığını sürdürecek yegâne terimler aynı frekansa sahip gerilim ve akımların çarpımlarıdır. Eş. 16.8-16.10'u gözden geçirmek sizi bu gözlemin doğruluğuna ikna etmelidir. Sonuç olarak Eş. 16.75

$$P = \frac{1}{T}V_{dc}I_{dc}t\Big|_{t_0}^{t_0+T} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} V_nI_n\cos(n\omega_0t - \theta_{vn}) \times \cos(n\omega_0t - \theta_{in})\,dt \qquad (16.76)$$

haline indirgenir. Şimdi,

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

trigonometrik özelliğini kullanarak Eş. 16.76'yı aşağıdaki şekilde basitleştiririz:

$$P = V_{dc}I_{dc} + \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_nI_n}{2}\int_{t_0}^{t_0+T}[\cos(\theta_{vn}-\theta_{in}) + \cos(2n\omega_0t - \theta_{vn} - \theta_{in})]dt. \qquad (16.77)$$

İntegral işaretinin içindeki ikinci terimin integrali sıfırdır, dolayısıyla

$$P = V_{dc}I_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_nI_n}{2}\cos(\theta_{vn}-\theta_{in}) \qquad (16.78)$$

elde edilir. Eş. 16.78 özellikle önemlidir çünkü bir periyodik gerilim ve karşılık gelen periyodik akım arasında etkileşim olması durumunda, toplam ortalama gücün aynı frekansa sahip gerilim ve akımlar arasındaki etkileşimden elde edilen ortalama güçlerin toplamı olduğunu belirtmektedir. Farklı frekanslardaki gerilim ve akımlar ortalama güç üretmek üzere etkileşmezler. Sonuçta, periyodik fonksiyonları içeren ortalama güç hesaplamalarında toplam ortalama güç, her harmonik gerilim ve akım ile bağlantılı ortalama güçlerin üst üste bindirilmesi ile bulunur. Örnek 16.4 bir periyodik gerilimi içeren ortalama gücün hesaplanmasını göstermektedir.

Örnek 16.4 Periyodik Gerilim Kaynaklı Bir Devrede Ortalama Güç Hesabı

Örnek 16.3'teki periyodik kare dalga geriliminin bir 15 Ω direncin terminallerine uygulandığını varsayınız. V_m'nin değeri 60 V ve T'ninki de 5 ms'dir.

a) $v(t)$'nin Fourier serisi temsilindeki sıfırdan farklı ilk beş terimi yazınız. Eş. 16.38'de verilen trigonometrik özelliği kullanınız.

b) (a)'daki her terimle ilişkili ortalama gücü hesaplayınız.

c) 15 Ω direnca aktarılan toplam ortalama gücü hesaplayınız.

d) Fourier serisindeki ilk beş terimle toplam gücün yüzde kaçı aktarılmıştır?

Çözüm

a) $v(t)$'nin dc bileşeni

$$a_0 = \frac{(60)(T/4)}{T} = 15\text{ V}$$

bulunur. Örnek 16.3'ten biliyoruz ki:

$A_1 = \sqrt{2}\,60/\pi = 27.01$ V,
$\theta_1 = 45°$,
$A_2 = 60/\pi = 19.10$ V,
$\theta_2 = 90°$,
$A_3 = 20\sqrt{2}/\pi = 9.00$ V,
$\theta_3 = 135°$,
$A_4 = 0$,
$\theta_4 = 0°$,
$A_5 = 5.40$ V,
$\theta_5 = 45°$,
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi(1000)}{5} = 400\pi$ rad/s.

Böylece, Fourier serisinde sıfırdan farklı ilk beş terimi kullanarak,

$$v(t) = 15 + 27.01\cos(400\pi t - 45°) + 19.10\cos(800\pi t - 90°) + 9.00\cos(1200\pi t - 135°) + 5.40\cos(2000\pi t - 45°) + \cdots\text{ V}$$

elde edilir.

b) Bu gerilim bir direncin terminallerine uygulanmıştır; dolayısıyla her terimle ilişkili gücü aşağıdaki şekilde buluruz:

$$P_{dc} = \frac{15^2}{15} = 15\text{ W},$$

$$P_1 = \frac{1}{2}\frac{27.01^2}{15} = 24.32\text{ W},$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\frac{19.10^2}{15} = 12.16\text{ W},$$

$$P_3 = \frac{1}{2}\frac{9^2}{15} = 2.70\text{ W},$$

$$P_5 = \frac{1}{2}\frac{5.4^2}{15} = 0.97\text{ W}.$$

c) 15 Ω direnca aktarılan toplam ortalama gücü elde etmek için, ilk önce $v(t)$'nin rms değerini hesaplarız:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{(60)^2(T/4)}{T}} = \sqrt{900} = 30\text{ V}.$$

15 Ω direnca aktarılan toplam ortalama güç

$$P_T = \frac{30^2}{15} = 60\text{ W}$$

bulunur.

d) Sıfırdan farklı ilk beş terim tarafından aktarılan toplam ortalama güç ise

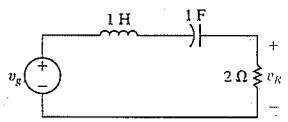
$$P = P_{dc} + P_1 + P_2 + P_3 + P_5 = 55.15\text{ W}$$

bulunur. Bu da toplam gücün (55.15/60) veya %91.92'sidir.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 3 – Az sayıda Fourier katsayısı kullanarak bir dirence aktarılan ortalama gücü kestirebilmek

16.7 Değerlendirme Problemi 16.3'teki trapezoid gerilim fonksiyonu şekilde gösterilen devreye uygulanmaktadır. Eğer $12V_m = 296.09$ V ve $T = 2094.4$ ms ise, 2 Ω direnca aktarılan ortalama gücü kestiriniz.



Cevap: 60.75 W.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 16.32 ve 16.33'ü de çözmeyi deneyiniz.

16.7 Bir Periyodik Fonksiyonun rms Değeri

Bir periyodik fonksiyonun rms değeri Fourier katsayıları türünden ifade edilebilir. Tanım gereği bu değer

$$F_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)^2\,dt} \tag{16.79}$$

ile verilir. $f(t)$'yi Fourier serisi ile ifade etmek

$$F_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[a_v + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)\right]^2 dt} \tag{16.80}$$

sonucunu verir. Karesi alınmış fonksiyonun integrali, bir periyot üzerinden alınan integral sonucunda varlığını sürdüren terimlerin, dc terimin çarpımı ile aynı frekanstan harmoniklerin çarpımı olması nedeniyle basitleşir. Tüm diğer terimlerin integrali sıfırdır. Sonuç olarak Eş. 16.80

$$\begin{aligned} F_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{T}\left(a_v^2 T + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{T}{2}A_n^2\right)} \\ &= \sqrt{a_v^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^2}{2}} \\ &= \sqrt{a_v^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{\sqrt{2}}\right)^2} \end{aligned} \tag{16.81}$$

haline indirgenir. Eş. 16.81, bir periyodik fonksiyonun rms değerinin, her harmoniğin rms değeri ile dc değerin karesini toplayarak elde edilen toplamın kare kökü olduğunu belirtir. Örneğin, bir periyodik gerilimin aşağıdaki sonlu toplam ile ifade edildiğini varsayalım:

$$\begin{aligned} v = {} & 10 + 30\cos(\omega_0 t - \theta_1) + 20\cos(2\omega_0 t - \theta_2) \\ & + 5\cos(3\omega_0 t - \theta_3) + 2\cos(5\omega_0 t - \theta_5). \end{aligned}$$

Bu gerilimin rms değeri

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{10^2 + (30/\sqrt{2})^2 + (20/\sqrt{2})^2 + (5/\sqrt{2})^2 + (2/\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{764.5} = 27.65 \text{ V} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Genellikle, bir periyodik fonksiyonu bir Fourier serisi ile temsil etmek için sonsuz tane terime ihtiyaç duyulur ve sonuçta Eş. 16.81 gerçek rms değerin bir kestirimini verir. Bu sonuç Örnek 16.5'te gösterilecektir.

Örnek 16.5 Bir Periyodik Fonksiyonun rms Değerinin Kestirimi

Eş. 16.81'i Örnek 16.4'teki gerilimin rms değerini kestirmek için kullanınız.

Çözüm

Örnek 16.4'ten, aşağıdakiler hesaplanabilir.

$V_{dc} = 15$ V,

$V_1 = 27.01/\sqrt{2}$ V, temel harmoniğin rms değeri,

$V_2 = 19.10/\sqrt{2}$ V, ikinci harmoniğin rms değeri,

$V_3 = 9.00/\sqrt{2}$ V, üçüncü harmoniğin rms değeri,

$V_5 = 5.40/\sqrt{2}$ V, beşinci harmoniğin rms değeri.

Sonuç olarak,

$$V_{rms} = \sqrt{15^2 + \left(\frac{27.01}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{19.10}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{9.00}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{5.40}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= 28.76 \text{ V}$$

bulunur. Örnek 16.4'ten gerçek rms değerinin 30 V olduğunu biliyoruz. Bu değere Eş. 16.81'de daha fazla terim ekleyerek ulaşırız. Örneğin, $k = 9$'a kadar harmonikleri eklersek, denklem 29.32 V değerini verir.

NOT: Bu konuyu kavrayışınızı Bölüm Problemleri 16.36 ve 16.37'yi de çözmeyi deneyerek sınayınız.

16.8 Fourier Serisinin Üstel Biçimi

Seriyi kısaca ifade etmemizi sağlaması nedeniyle Fourier serisinin üstel biçimi ile ilgileniriz. Serinin üstel biçimi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \tag{16.82}$$

ile verilir. Burada

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \tag{16.83}$$

tanımlanmıştır. Eş. 16.82 ve 16.83'ü çıkarmak için, Eş. 16.2'ye geri dönüp kosinüs ve sinüs terimlerini üstel eşdeğerleri ile değiştiriz:

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}, \tag{16.84}$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}. \tag{16.85}$$

Eş. 16.84 ve 16.85'i Eş. 16.2'de yerini koymak

$$\begin{aligned} f(t) &= a_v + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + \frac{b_n}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \\ &= a_v + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right)e^{jn\omega_0 t} + \left(\frac{a_n + jb_n}{2}\right)e^{-jn\omega_0 t} \end{aligned} \tag{16.86}$$

sonucunu verir.

Şimdi C_n'yi şöyle tanımlayalım:

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{A_n}{2}\angle -\theta_n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{16.87}$$

C_n'nin tanımından,

$$C_n = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt - j\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)(\cos n\omega_0 t - j\sin n\omega_0 t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \tag{16.88}$$

bulunur. Böylece Eş. 16.83'ün çıkarımı tamamlanır. Eş. 16.82'nin çıkarımını tamamlamak için ilk önce Eş. 16.88'den

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt = a_0 \tag{16.89}$$

olduğunu gözleriz. Daha sonra

$$C_{-n} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{jn\omega_0 t}\,dt = C_n^* = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \tag{16.90}$$

olduğuna dikkat ederiz. Eş. 16.87, 16.89 ve 16.90'ı Eş. 16.86'da yerine koymak

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n e^{jn\omega_0 t} + C_n^* e^{-jn\omega_0 t})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* e^{-jn\omega_0 t} \tag{16.91}$$

sonucunu verir. Eş. 16.91'in sağ tarafındaki ikinci toplamın $C_n e^{jn\omega_0 t}$'yi –1'den –∞'a toplamaya denk yani,

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \tag{16.92}$$

olduğunu gözleyiniz. Toplamın –1'den –∞'a olması ile –∞'dan –1'e olmasının aynı olması nedeniyle, Eş. 16.92'yi Eş. 16.91'i tekrar yazmakta kullanırsak

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{-\infty}^{-1} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \tag{16.93}$$

buluruz. Böylece Eş. 16.82'nin çıkarımı tamamlanmış olur.

Bir periyodik fonksiyonun rms değerini de karmaşık Fourier katsayıları cinsinden ifade edebiliriz. Eş. 16.81, 16.87 ve 16.89'dan

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}}, \tag{16.94}$$

$$|C_n| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}, \tag{16.95}$$

$$C_0^2 = a_0^2 \tag{16.96}$$

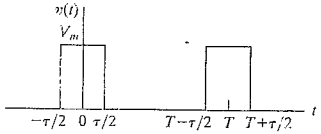
bulunur. Eş. 16.95 ve 16.96'yı Eş. 16.94'te yerine koymak istenen ifadeyi verir:

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{C_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2}. \tag{16.97}$$

Örnek 16.6 bir periyodik fonksiyonun üstel Fourier serisi temsilini bulma sürecini göstermektedir.

Örnek 16.6 Fourier Serisinin Üstel Biçiminin Bulunması

Şekil 16.15'te gösterilen periyodik gerilimin üstel Fourier serisini bulunuz.



Şekil 16.14 ▲ Örnek 16.6 için periyodik gerilim.

Çözüm

İntegral için -τ/2'yi başlangıç noktası olarak kullanarak, Eş. 16.83'ten

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_m e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$= \frac{V_m}{T}\left(\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\right)\Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$= \frac{jV_m}{n\omega_0 T}(e^{-jn\omega_0\tau/2} - e^{jn\omega_0\tau/2})$$

$$= \frac{2V_m}{n\omega_0 T}\sin n\omega_0\tau/2$$

buluruz. Burada, $v(t)$'nin çift simetriye sahip olması nedeniyle, tüm n için $b_n = 0$'dır ve dolayısıyla C_n'nin gerçek olmasını bekleriz. Dahası, C_n'yi

$$C_n = \frac{V_m\tau}{T}\frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}$$

olarak yeniden yazdığımızda ortaya çıktığı gibi, C_n'nin genliği bir $(\sin x)/x$ dağılımını izlemektedir.

Bu konu hakkında Kısım 16.9'da daha fazla şey söyleyeceğiz. $v(t)$'nin üstel seri temsili aşağıdadır.

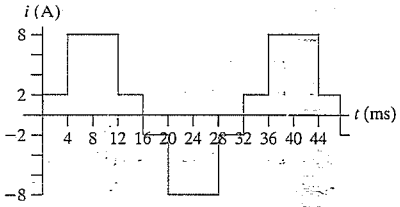
$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{V_m\tau}{T}\right)\frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \left(\frac{V_m\tau}{T}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}e^{jn\omega_0 t}.$$

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 4 – Bir periyodik dalgabiçimi için Fourier katsayılarının üstel biçimini hesaplayabilmek

16.8 Şekilde gösterilen periyodik fonksiyonun Fourier katsayıları C_n için ifadeyi bulunuz. *İpucu:* $C_n = (a_n - jb_n)/2$ bilgisini kullanarak simetriden yararlanınız.



Cevap: $C_n = -j\frac{4}{\pi n}(1 + 3\cos\frac{n\pi}{4})$, n tek.

16.9 a) Değerlendirme Problemi 16.8'deki periyodik akımın rms değerini hesaplayınız.
b) $C_1 - C_{11}$'i kullanarak, rms değeri kestiriniz.
c) (a)' bulunan gerçek değere bağlı olarak, (b)'de elde edilen değerdeki hatanın yüzdesi kaçtır?
d) Bu periyodik fonksiyon için, rms değeri kestirmede daha az terim kullanılırken, hâlâ hatanın %1'in altında kalacağı garanti edilebilir miydi?

Cevap: (a) $\sqrt{34}$ A;
(b) 5.777 A;
(c) −0.93 %;
(d) evet, eğer $C_1 - C_9$ kullanılırsa hata %−0.98'dir.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 16.44 ve 16.45'i de çözmeyi deneyiniz.

16.9 Genlik ve Faz Spektrumu

Bir periyodik fonksiyon Fourier katsayıları ve periyodu ile tanımlanır. Başka bir deyişle, a_n, a_n, b_n ve T'yi bildiğimiz zaman $f(t)$'yi en azından kuramsal olarak oluşturabiliriz. a_n ve b_n'yi bildiğimizde her harmoniğin genliğini (A_n) ve faz açısını ($-\theta_n$) da biliriz. Tekrar edersek, genellikle katsayıların ve faz açılarının tanımından periyodik fonksiyonun zaman bölgesinde nasıl gözükeceğini tasavvur edemeyebiliriz, yine de bu niceliklerin periyodik fonksiyonu tümüyle karakterize ettiğinin farkındayız. Böylece yeterince hesaplama süresi ile zaman bölgesi dalgabiçimini genlik ve faz açısı verisinden sentezleyebiliriz. Aynı zamanda, yüksek miktarda frekans seçici bir periyodik fonksiyon bir devreyi uyardığında, durgun durum tepkisinin Fourier serisinde sadece birkaç terim baskındır. Sonuç olarak tepkinin genlik ve faz açısı cinsinden betimlenmesi çıkış dalgabiçimi hakkında bilgi sağlayabilir.

Bir periyodik fonksiyonun betimlenmesini, $f(t)$'nin Fourier serisindeki her terimin genlik ve faz açısı türünden grafiksel olarak gösterebiliriz. Her terimin genliğinin frekansa karşılık çizimi $f(t)$'nin **genlik spektrumu**, faz açısının frekansa karşılık çizimi ise $f(t)$'nin **faz spektrumu** olarak adlandırılır. Genlik ve faz açısı verisi frekansın ayrık değerlerinde yer aldığı için (yani $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \ldots$'da) bu çizimlere **çizgi spektrumları** da denilir.

Genlik ve Faz Spektrumlarının Bir Gösterimi

Genlik ve faz spektrumları ya Eş. 16.38'e (A_n ve $-\theta_n$) veya Eş. 16.82'ye (C_n) dayalıdır. Eş. 16.82'ye odaklanacağız ve Eş. 16.38'e dayalı çizimleri Problem 16.48'e bırakacağız. Fourier serisinin üstel biçimine dayalı olarak genlik ve faz spektrumlarını göstermek için Örnek 16.6'nın periyodik gerilimini kullanalım. Tartışmaya yardımcı olması için, $V_m = 5$V ve $\tau = T/5$ varsayalım. Örnek 16.6'dan

$$C_n = \frac{V_m\tau}{T}\frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2} \tag{16.98}$$

buluruz. V_m ve τ'ın varsayılan değerleri için

$$C_n = 1\frac{\sin(n\pi/5)}{n\pi/5} \tag{16.99}$$

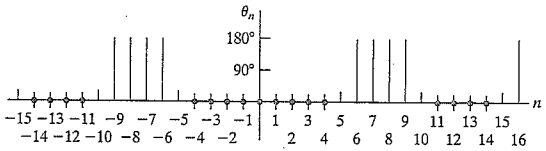
olur. Şekil 16.16, Eş. 16.99'dan C_n'nin büyüklüğünün çizimini $n = -10$'dan 10'a kadar göstermektedir. Şekil genlik spektrumunun $|(\sin x)/x|$'in zarfı ile sınırlandığını açıkça göstermektedir. Harmoniklerin derecesini frekans ölçeğinde kullandık çünkü T'nin sayısal değeri belirlenmemiştir. T'yi bildiğimizde, ω_0 ve her harmoniğe ait frekansı da biliriz.

Şekil 16.17 $|(\sin x)/x|$'in x'e karşı çizimini göstermektedir, burada x radyan cinsindendir. Grafik, x π'nin bir tamsayı katı olduğunda fonksiyonun sıfırdan geçtiğini göstermektedir. Eş. 16.98'den

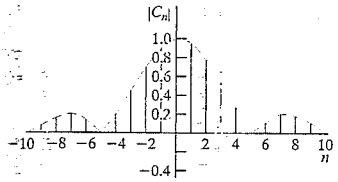
$$n\omega_0\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{n\pi\tau}{T} = \frac{n\pi}{T/\tau} \tag{16.100}$$

bulunur. Eş. 16.100'den $n\tau/T$'nin tamsayı olduğu zaman genlik spektrumunun sıfırdan geçtiği sonucuna varırız. Örneğin, grafikte τ/T 1/5'dir ve dolayısıyla zarf $n = 5, 10, 15$, vs.'de sıfırdan geçer. Başka bir deyişle, beşinci, onuncu, onbeşinci, ... harmoniklerin hepsi sıfırdır. t/T'nin tersi tamsayı olarak giderek büyüdüğünde, her π radyan arasındaki harmoniklerin sayısı da artar. Eğer $n\pi/T$ tamsayı değilse genlik spektrumu hala $|(\sin x)/x|$'i takip eder. Ancak zarf ω_0'ın tamsayı katlarında sıfır değildir.

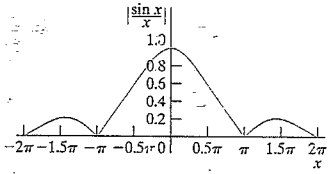
Tüm n için C_n gerçek olduğundan C_n ile ilişkili faz açısı, $|(\sin n\pi/5)/(n\pi/5)|$'in cebirsel işaretine bağlı olarak ya sıfır ya da 180°'dir. Örneğin, $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3$ ve ±4 için faz açısı sıfırdır. $n = \pm5$'te tanımlı değildir çünkü $C_{\pm5}$ sıfırdır. Faz açısı $n = \pm6, \pm7, \pm8$ ve ±8 için 180°'dir ve ±10'da tanımsızdır. Bu kalıp kendisini n daha büyük tamsayı değerler alırken de tekrarlar. Şekil 16.18, Eş. 16.98 ile verilen C_n'nin faz açısını göstermektedir.



Şekil 16.18 ▲ C_n'nin faz açısı.



Şekil 16.16 ▲ Örnek 16.6'daki periyodik gerilim için $\tau = T/5$ iken C_n'nin n'ye karşı çizimi.



Şekil 16.17 ▲ $(\sin x)/x$'in x'e karşı çizimi.

Şimdi, eğer $f(t)$ zaman ekseni boyunca kaydırılırsa genlik ve faz spektrumlarına ne olur? Ne olduğunu bulmak için, Örnek 16.6'daki periyodik gerilimi sağa doğru t_0 birim kaydıralım. Hipotez gereği

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \tag{16.101}$$

olur. Sonuç olarak orijinin kaydırılmasının genlik spektrumu üzerinde hiçbir etkisinin olmadığını söyleyen

$$v(t - t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0(t-t_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-jn\omega_0 t_0} e^{jn\omega_0 t} \tag{16.102}$$

ifadesi elde edilir, çünkü

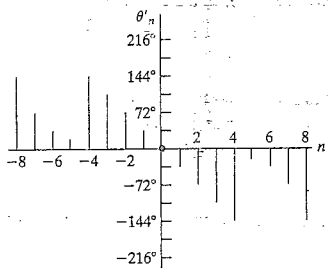
$$|C_n| = |C_n e^{-jn\omega_0 t_0}| \tag{16.103}$$

geçerlidir. Ancak, Eş. 16.87'e başvurmak faz spektrumunun $-(\theta + n\omega_0 t_0)$ radyana değiştiğini ortaya çıkarır. Örneğin, Örnek 16.1'deki periyodik fonksiyonu $\tau/2$ birim sağa kaydıralım. Önceden olduğu gibi $\tau = T/5$ varsayarsak, yeni faz açısı θ'

$$\theta'_n = -(\theta_n + n\pi/5) \tag{16.104}$$

olur. Eş. 16.104'ü Şekil 16.19'da $n = -8$'den $+8$'e kadar çizdik. Bir sıfır genlik katsayısı ile bir faz açısının eşleştirilmediğine dikkat ediniz.

Örnek 16.6'daki periyodik darbenin genlik spektrumuna neden bu kadar önem verdiğimizi merak edebilirsiniz. Sebep, bu özel periyodik dalgabiçiminin periyodik bir fonksiyonun Fourier serisinden periyodik olmayan bir fonksiyonun Fourier dönüşüm temsiline mükemmel bir geçiş sağlıyor olmasıdır. Fourier dönüşümünü 17. Bölümde tartışacağız.



Şekil 16.19 Eş. 16.104 için θ'_n'nin n'ye karşı çizimi.

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 4 – Bir periyodik dalgabiçimi için Fourier katsayılarının üstel biçimini hesaplayabilmek

16.10 Değerlendirme Problemi 16.8'deki fonksiyon zaman ekseni boyunca 8 ms sağa kaydırılmıştır. Periyodik akım için üstel Fourier serisini yazınız.

Cevap:

$$i(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=-\infty (\text{tek})}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1 + 3\cos\frac{n\pi}{4}\right) e^{-(j\pi/2)(n+1)} e^{jn\omega_0 t} \text{ A.}$$

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 16.48 ve 16.49'u da çözmeyi deneyiniz.

Özet

Bir **periyodik fonksiyon** kendisini her T saniyede bir tekrar eder.

- Bir periyot (T), bir periyodik fonksiyonun kendisine özdeş bir fonksiyonun üretilmesi için kaydırılabileceği en küçük zaman aralığıdır. (Bkz. sf. 656.)
- Fourier serisi, bir periyodik fonksiyonun temsili için kullanılan bir sonsuz seridir. Seri bir sabit terim ve harmonik ilişkisine sahip sonsuz kosinüs ve sinüs terimler içerir. (Bkz. sf. 658.)
- **Temel frekans** temel periyot tarafından belirlenen frekanstır ($f_0 = 1/T$ veya $\omega_0 = 2\pi f_0$). (Bkz. sf. 658.)
- **Harmonik frekans** temel frekansın tamsayı katlarıdır. (Bkz. sf. 658.)
- **Fourier katsayıları** sabit terim ve serideki her kosinüs ve sinüs teriminin katsayılarıdır. (Bkz Eş. 16.3-16.5) (Bkz. sf. 659.)
- Fourier katsayılarının hesabını basitleştirmek için beş tür simetri kullanılır:
  - serideki tüm sinüs terimlerinin sıfır olduğu *çift* simetri,
  - tüm kosinüs terimlerinin ve sabit terimin sıfır olduğu *tek* simetri,
  - tüm çift harmoniklerin sıfır olduğu *yarım dalga* simetri,
  - serinin sadece tek harmonik kosinüs terimlerini içerdiği, *çeyrek dalga, yarım dalga, çift* simetri,
  - serinin sadece tek harmonik sinüs terimlerini içerdiği, *çeyrek dalga, yarım dalga, tek* simetri

(Bkz. sf. 662.).

- Fourier serisinin alternatif biçiminde her harmonik bir kosinüs ve sinüs teriminin toplamının birleşimi olan $A_n \cos(n\omega_0 t - \omega_0)$ biçiminde bir terimle ifade edilir. (Bkz. sf. 668.)
- Durgun durum tepkisi için, tepki sinyalinin Fourier serisi ilk olarak giriş sinyalinin her bileşenine verilen tepkiyi bularak belirlenir. Tepki sinyalinin Fourier serisi için bireysel tepkiler toplanır (üst üste bindirilir.). Giriş serisindeki bireysel terimlere tepki ya frekans bölgesi veya s bölgesi analizi ile bulunur. (Bkz. sf. 670.)
- Bir bilgisayarın yardımı olmadan tepki sinyalinin dalgabiçimini elde etmek güçtür. Bazen devrenin frekans tepkisi (veya filtre) karakteristikleri çıkış dalgabiçiminin giriş dalgabiçimine ne kadar uyduğunu araştırmak için kullanılabilir. (Bkz. sf. 672.)
- Sadece aynı frekanstaki harmonikler ortalama güç oluşturmak için etkileşime girer. Toplam ortalama güç her frekansla bağlantılı ortalama güçlerin toplamıdır. (Bkz. sf. 675.)
- Bir periyodik fonksiyonun rms değeri Fourier katsayılarından kestirilebilir. (Bkz. Eş. 16.81, 16.94 ve 16.97.) (Bkz. sf. 678.)
- Fourier serisi, Euler özdeşliğinin kosinüs ve sinüs terimlerini üstel eşdeğerleri ile yerdeğiştirmek için kullanılması ile, üstel biçimde yazılabilir. (Bkz. sf. 679.)
- Bir sistem bir periyodik sinyal ile uyarıldığında, sistemin durgun durum tepkisini öngörmek için Fourier serisi kullanılır. Seri, analizi zaman bölgesinden frekans bölgesine aktararak durgun durum tepkisinin bulunmasına yardımcı olur.

Problemler

Kısım 16.1 – 16.2

16.1 Şekil P16.1'deki her periyodik fonksiyon için aşağıdakileri belirleyiniz:

a) saniye başına radyan cinsinden ω_o,

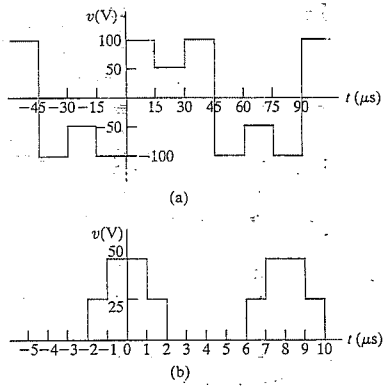
b) hertz cinsinden f_o,

c) a_v'nin değeri,

d) a_k ve b_k için denklemler,

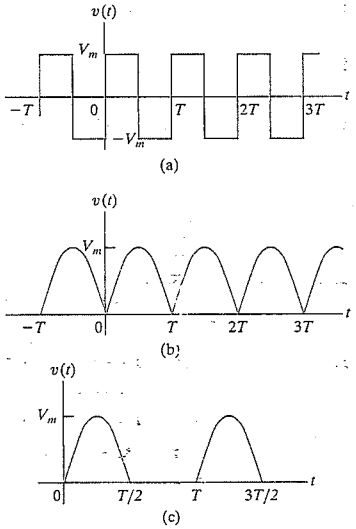
e) bir Fourier serisi olarak $v(t)$.

Şekil P16.1



16.2 Şekil P16.2'de gösterilen periyodik fonksiyonların Fourier serisi ifadelerini bulunuz. Şekil P16.2(a)'da kare dalga, Şekil P16.2(b)'de $v(t) = V_m \sin(\pi/T)t$, $0 \le t \le T$ için tam dalga doğrultulmuş sinüs dalga, Şekil P16.2(c)'de $v(t) = V_m \sin(\pi/T)t$, $0 \le t \le T$ için yarım dalga doğrultulmuş sinüs dalga gösterildiğine dikkat ediniz.

Şekil P16.2

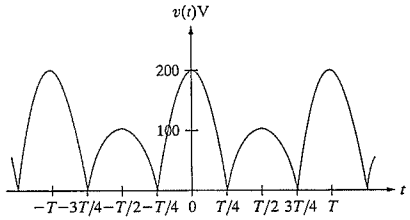


16.3 $v(t) = 200 \cos \frac{2\pi}{T} tV, \qquad \frac{-T}{4} \le t \le \frac{T}{4};$

$v(t) = -100 \cos \frac{2\pi}{T} tV, \qquad \frac{T}{4} \le t \le \frac{3T}{4}.$

verildiğinde, Şekil P16.3'te gösterilen periyodik gerilimin Fourier serisini bulunuz.

Şekil P16.3



16.4 Eş. 16.5'i çıkarınız.

16.5 a) Eş. 16.6 ve 16.7'yi doğrulayınız.

b) Eş. 16.8'i doğrulayınız. *İpucu*: $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$ trigonometrik özelliğini kullanınız.

c) Eş. 16.9'u doğrulayınız. *İpucu*: $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$ trigonometrik özelliğini kullanınız.

d) Eş. 16.10'u doğrulayınız. *İpucu*: $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$ trigonometrik özelliğini kullanınız.

Kısım 16.3

16.6 Bir tek periyodik fonksiyonun Fourier kaysayılarının ifadelerini çıkarınız. *İpucu*: Eş. 16.14-16.16'yı çıkarırken kullanılan tekniği kullanınız.

16.7 Eğer $f(t) = -f(t - T/2)$ ise Fourier katsayıları b_k'ların ifadesinin aşağıdaki gibi olduğunu gösteriniz

$b_k = 0$ çift k için;

$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega_o t \, dt,$ tek k için.

İpucu: Eş. 16.28 ve 16.29'u çıkarırken kullanılan tekniğin aynısını kullanınız.

16.8 Eş.ler 16.36'yı çıkarınız. *İpucu*: Eş. 16.29 ile başlayıp integral aralığını 0'dan $T/4$'e ve $T/4$'ten $T/2$'ye olacak şekilde bölünüz. Çiftlik ve çeyrek dalga simetrisi nedeniyle $0 \le t \le T/4$ aralığında $f(t) = -f(T/2-t)$ olduğuna dikkat ediniz. İkinci aralıkta $x = T/2 - t$ olsun ve elde edilen integrali 0 ve $T/4$ arasındaki ile birleştiriniz.

16.9 Eş. 16.37'yi çıkarınız. Problem 16.8'de verilen ipucunu, teklik ve çeyrek dalga simetri nedeniyle $T/4 \le t \le T/2$ aralığında $f(t) = f(T/2-t)$ olması dışında takip ediniz.

16.10 Bir periyodik fonksiyonun bir periyodu aşağıdaki denklemlerdeki gibi tanımlanmıştır:

$i(t) = 4000t$ A, $\quad 0 \le t \le 1.25$ ms;

$i(t) = 5$ A, $\quad 1.25$ ms $\le t \le 3.75$ ms;

$i(t) = 20 - 4000t$ A, $\quad 3.75$ ms $\le t \le 6.25$ ms;

$i(t) = -5$ A, $\quad 6.25$ ms $\le t \le 8.75$ ms;

$i(t) = -40 + 4000t$ A $\quad 8.75$ ms $\le t \le 10$ ms.

a) Hertz cinsinden temel frekans nedir?

b) Fonksiyon çift midir?

c) Fonksiyon tek midir?

d) Fonksiyon yarım dalga simetriye sahip midir?

e) Fonksiyon çeyrek dalga simetriye sahip midir?

f) a_v, a_k ve b_k için sayısal ifadeleri veriniz.

16.11 $-6 \le t \le 6$ s aralığında $v(t) = 20t \cos 0.25\pi t$ V olduğu verilmiştir. Fonksiyon kendini tekrar etmektedir.

a) Saniye başına radyan cinsinden temel frekans nedir?

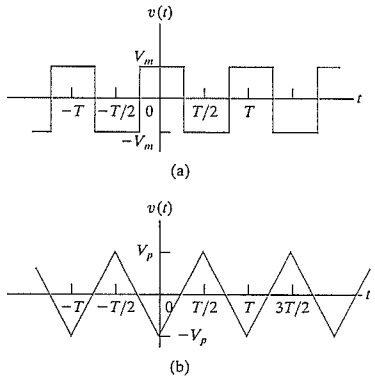
b) Fonksiyon çift midir?

c) Fonksiyon tek midir?

d) Fonksiyon yarım dalga simetriye sahip midir?

16.12 Şekil P16.12'de gösterilen her periyodik fonksiyonun Fourier serisini bulunuz.

Şekil P16.12



16.13 a) Şekil P16.13'te gösterilen periyodik gerilim için Fourier serisini çıkarınız.

b) Dikey referans ekseni $T/2$ birim sola kaydırıldığı durum için (a)'yı tekrarlayınız.

16.14 $-5 < t < 5$ aralığında $f(t) = 0.4t^2$ olarak verilmektedir.

a) Bu $f(t)$'yi -5 ve 5 s aralığında sağlayan, periyodu 20 s olan ve yarım dalga simetrisine sahip bir periyodik fonksiyon oluşturunuz.

b) Fonksiyon çift midir, tek midir?

c) Fonksiyon çeyrek dalga simetrisine sahip midir?

d) $f(t)$ için Fourier serisini çıkarınız.

e) Sağa 5 s kaydırıldığında $f(t)$ için Fourier serisini yazınız.

16.15 Problem 16.14'ü $-5 < t < 5$ aralığında $f(t) = 0.4t^3$ için tekrar ediniz.

16.16 Şekil P16.16'da gösterilen periyodik fonksiyon çifttir ve hem yarım dalga, hem de çeyrek dalga simetrisine sahiptir.

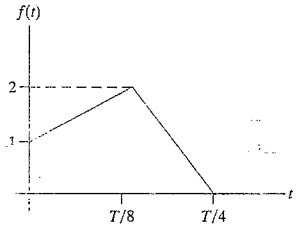
a) $-T/4 \le t \le T/4$ aralığı üzerinde fonksiyonun bir tam döngüsünü çiziniz.

b) Fourier katsayıları a_k için ifadeyi bulunuz.

c) Fourier serisi açılımının sıfırdan farklı ilk üç terimini yazınız.

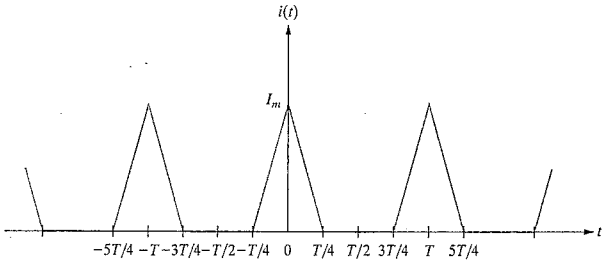
d) $f(t)$'nin sıfırdan farklı ilk üç terimini $f(T/8)$'i kestirmek için kullanınız.

Şekil P16.16

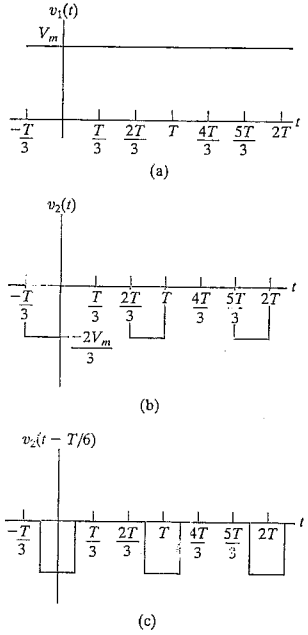


16.17 Bazıaki fonksiyon simetrik olmasa bile Fourier katsayılarını bulmak için simetriyi kullanmak bazen mümkündür. Bu durum aklınızdayken Değerlendirme Problemi 16.1'deki fonksiyonu gözönüne alınız. $v(t)$'nin Şekil P16.17 (a) ve (b)'de gösterilen iki fonksiyona bölünebileceğini gözleyiniz. Dahası, $v_2(t)$'yi $T/6$ birim sağa kaydırarak bir çift fonksiyon yapabiliriz. Bu, Şekil 16.17(c)'de gösterilmektedir. Bu noktada $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$ olduğuna ve $v_1(t)$'nin Fourier serisinin V_m'i içeren tek terimli bir seri olduğuna dikkat edilmelidir. $v_2(t)$'nin Fourier serisini bulmak için ilk olarak $v_2(t - T/6)$'nın Fourier serisini bulup daha sonra bu seriyi sola $T/6$ birim kaydırırız. Bu açıklanan tekniği Değerlendirme Problemi 16.2(e)'ye cevap olarak verilen Fourier serisini doğrulamak için kullanınız.

Şekil P 16.13



Şekil P 16.17

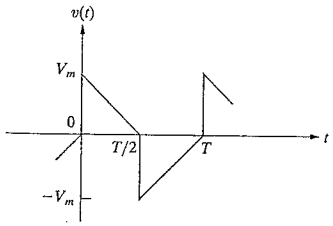


Kısım 16.4

16.18 a) $V_m = 378\pi$ V iken Şekil P16.18'de gösterilen periyodik fonksiyon için Fourier serisini bulunuz.

b) Sıfırdan farklı ilk beş terimi $v(T/8)$'i kestirmek için kullanınız.

Şekil P16.18



16.19 Şekil P16.1'deki her periyodik fonksiyon için Eş. 16.38'deki biçimi kullanarak Fourier serisini bulunuz.

16.20 Problem 16.10'da tarif edilen periyodik fonksiyon için Eş. 16.38'deki biçimi kullanarak Fourier serisini bulunuz.

16.21 Problem 16.14'te oluşturulan periyodik fonksiyon için Eş. 16.38'deki biçimi kullanarak Fourier serisini bulunuz.

Kısım 16.5

16.22 Eş. 16.69 ve 16.70'i çıkarınız.

16.23 a) Eş. 16.17'yi çıkarınız. *İpucu:* $b_k = 4V_m/\pi k + k\omega_0 RCa_k$ olduğuna dikkat ediniz. b_k için ifadeyi $a_k^2 + b_k^2$'yi a_k cinsinden bulmak için kullanınız. Daha sonra a_k için ifadeyi Eş. 16.17'yi çıkarmak için kullanınız.

b) Eş. 16.72'yi çıkarınız.

16.24 Eş.16.71 ve 16.72'yi Eş. 16.38 ve 16.39 ile birleştirdiğimizde sonucun Eş. 16.58 olduğunu gösteriniz. İpucu: β_k'nın ifadesinden

$$\frac{a_k}{b_k} = -\tan\beta_k$$

ve θ_k'nın ifadesinden

$$\tan\theta_k = -\cot\beta_k$$

olduğuna dikkat ediniz. Şimdi

$$\tan x = \cot(90 - x)$$

trigonometrik özelliğini kullanarak $\theta_k = (90 + \beta_k)$ olduğunu gösteriniz.

16.25 a) C'nin büyük değerleri için Eş. 16.67 yaklaşık olarak

$$v_o(t) \approx \frac{-V_m T}{4RC} + \frac{V_m}{RC} t$$

ile gösterilebilir: Bu ifadenin $0 \le t \le T/2$ için üçgen dalga denklemi olduğuna dikkat ediniz. *İpuçları*: (1) $e^{-t/RC} \approx 1 - (t/RC)$ ve $e^{-T/2RC} \approx 1 - (t/RC)$ alınız; (2) ortaya çıkan ifadeyi $2 - (T/2RC)$ ortak paydasına alınız; (3) payı basitleştiriniz ve (4) büyük C için $T/2RC$'nin 2'den çok daha küçük olduğunu kabul ediniz.

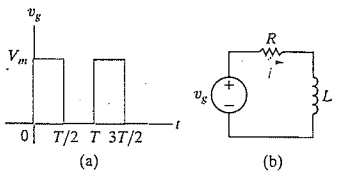
b) Üçgen dalganın tepe değerini Problem 16.12'nin çözümünde yerine koyunuz (Bkz. Şekil P16.12(b)) ve sonucun Eş. 16.59 olduğunu gösteriniz.

16.26 PSPICE Şekil P16.26(a)'da gösterilen kare dalga gerilim Şekil P16.26(b)'de gösterilen devreye uygulanmaktadır.

a) Durgun durum akımı i'nin Fourier serisi temsilini bulunuz.

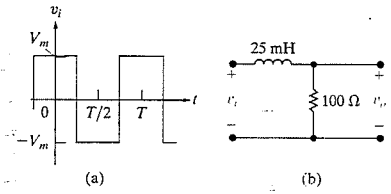
b) i için durgun durum ifadesini devre analizi ile bulunuz.

Şekil P16.26



16.27 Şekil P16.27(a)'da görülen periyodik kare dalga gerilim Şekil P16.27(b)'deki devreye uygulanmaktadır. Eğer $V_m = 60\pi$ V ve giriş geriliminin periyodu π ms ise, durgun durum gerilimi v_o'nun Fourier serisindeki sıfırdan farklı ilk üç terimi bulunuz.

Şekil P16.27

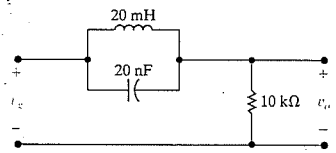


16.28 PSPICE Değerlendirme Problemi 16.6'da tarif edilen periyodik kare dalga gerilim Şekil P16.28'de gösterilen devreye uygulanmaktadır.

a) Durgun durum gerilimi v_o'yu temsil eden Fourier serisindeki sıfırdan farklı ilk dört terimi bulunuz.

b) Giriş gerilimindeki hangi frekans bileşeni çıkış geriliminde ortadan kaldırılmıştır? Nedenini açıklayınız.

Şekil P16.28

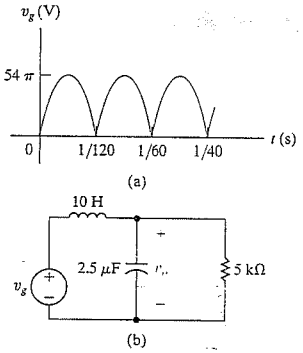


16.29 Şekil P16.29(a)'da gösterilen tam dalga doğrultulmuş sinüs dalga gerilim Şekil P16.29(b)'de gösterilen devreye uygulanmaktadır.

a) v_o'nun Fourier serisi temsilindeki sıfırdan farklı ilk dört terimi bulunuz.

b) v_o için çözümünüzün anlamı nedir? Açıklayınız.

Şekil P16.29



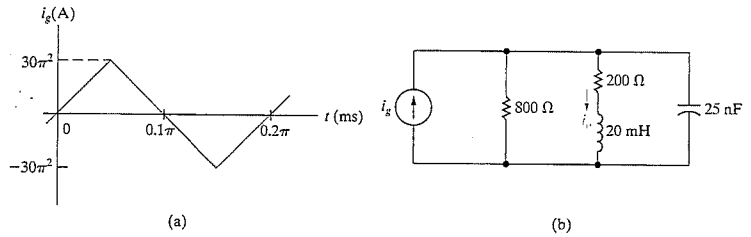
16.30 Şekil P16.30(a)'da gösterilen periyodik akım Şekil P16.30(b)'de gösterilen devreye enerji vermek için kullanılmaktadır. i_o ifadesinde beşinci harmonik akımın zaman bölgesi ifadesini yazınız.

16.31 Aşağıdaki Fourier serisi ile 0.1π ms periyoda sahip bir periyodik gerilim verilmektedir.

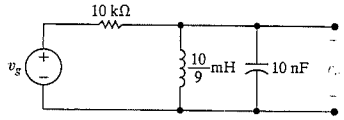
$$v_g = 45 \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2 - 8}{n^3} \sin\frac{n\pi}{2} \cos n\omega_o t \text{ V.}$$

Bu periyodik gerilim Şekil P16.31'de gösterilen devreye uygulanmıştır. v_o'nun 300 krad/s frekansa sahip bileşeninin genlik ve faz açısını bulunuz.

Şekil P16.30



Şekil P16.31



Kısım 16.6

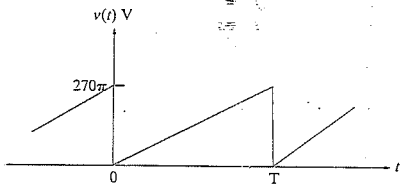
16.32 81 π^2 kΩ bir direncin üzerindeki gerilim Şekil P16.32'de gösterilmektedir.

a) $v(t)$'nin Fourier serisi temsilindeki sıfırdan farklı ilk dört terimi kullanarak dirençte harcanan ortalama gücü kestiriniz.

b) 81 π^2 kΩ direnç üzerinde harcanan gücün değerini tam olarak bulunuz.

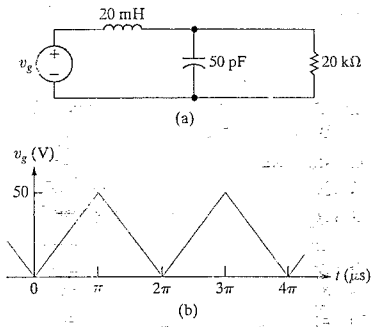
c) Harcanan ortalama gücün kestirilen değerindeki yüzde hata ne kadardır?

Şekil P16.32



16.33 Bir üçgen dalga gerilim kaynağı Şekil P16.33(a)'daki devreye uygulanmıştır. Üçgen dalga gerilim Şekil P16.33(b)'de gösterilmektedir. Devre durgun durum çalışmasında iken 20 kΩ'a aktarılan ortalama gücü kestiriniz.

Şekil P16.33



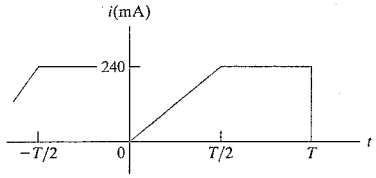
16.34 Şekil P16.34'te gösterilen periyodik akım bir 1kΩ direnca uygulanmaktadır.

a) $i(t)$'nin Fourier serisi temsilindeki sıfırdan farklı ilk üç terimi kullanarak 1 kΩ dirençte harcanan ortalama gücü kestiriniz.

b) 1 kΩ dirençte harcanan ortalama gücün değerini tam olarak bulunuz.

c) Ortalama gücün kestirilmiş değerindeki hata yüzdesi nedir?

Şekil P16.34



Kısım 16.7

16.35 Bir devrenin terminallerindeki gerilim ve akım

$$v = 80 + 200\cos(500t + 45°) + 60\sin 1500t \text{ V},$$

$$i = 10 + 6\sin(500t + 75°) + 3\cos(1500t + 30°) \text{ A}$$

verilmektedir. Akım terminallerdeki gerilimin dü,üş yönündedir.

a) Terminallerdeki ortalama güç nedir?

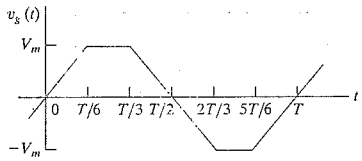
b) Gerilimin rms değeri nedir?

c) Akımın rms ·te·ğeri nedir?

16.36 a) V_m = 100 V için Şekil P16.36'da gösterilen gerilimin rms değerini bulunuz. Bu periyodik gerilim için Fourier serisinin Değerlendirme Problemi 16.3'te bulunduğuna dikkat ediniz.

b) $v_g(t)$'nin Fourier serisi temsilindeki sıfırdan farklı ilk üç terimi kullanarak gerilimin rms değerini kestiriniz.

Şekil P16.36



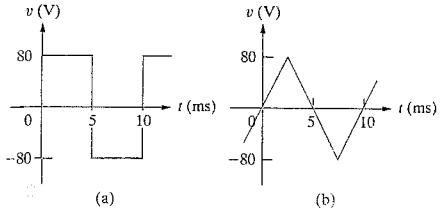
16.37 a) Şekil P16.37(a)'da gösterilen periyodik kare dalga gerilimin rms değerini, $v(t)$'nin Fourier serisi temsilinin sıfırdan farklı ilk beş terimini kullanarak kestiriniz.

b) $$\% \text{ hata} = \left[\frac{\text{kestirilen değer}}{\text{gerçek değer}} - 1\right] \times 100$$

ise kestirimdeki hatanın yüzdesini hesaplayınız.

c) Periyodik kare dalga gerilimin Şekil P16.37(b)'de gösterilen periyodik üçgen gerilim ile değiştirildiği durum için (a) ve (b)'yi tekrar ediniz.

Şekil P16.37

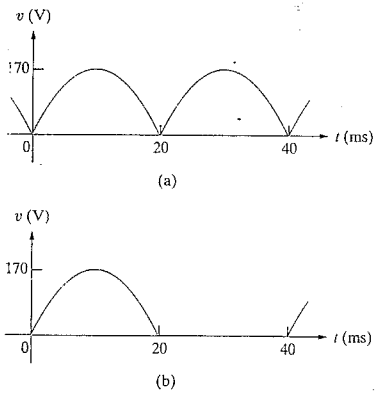


16.38 a) Şekil P16.38(a)'da gösterilen tam dalga doğrultulmuş sinüzoidal gerilimin rms değerini $v(t)$'nin Fourier serisi temsilinin sıfırdan farklı ilk üç terimini kullanarak kestiriniz.

b) Kestirimdeki hatanın yüzdesini hesaplayınız. (Bkz. Problem 16.37.)

c) Tam dalga doğrultulmuş sinüzoidal gerilimin Şekil P16.38(b)'de gösterilen yarım dalga doğrultulmuş sinüzoidal gerilim ile değiştirildiği durum için (a) ve (b)'yi tekrar ediniz.

Şekil P16.38



16.39 a) Şekil P16.39'da gösterilen periyodik akım için Fourier katsayıları ifadelerini bulunuz.

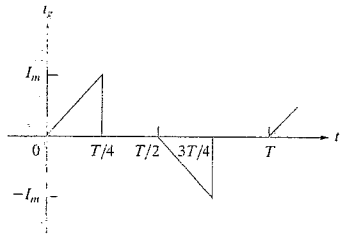
b) Eş. 16.39 ile verilen alternatif trigonometrik biçimi kullanarak bu serinin sıfırdan farklı ilk dört terimini yazınız.

c) (b)'de bulunan ifadenin sıfırdan farklı ilk dört terimini kullanarak i_g'nin rms değerini kestiriniz.

d) i_g'nin rms değerini tam olarak bulunuz.

e) Kestirilmiş rms değerdeki hatanın yüzdesini bulunuz.

Şekil P16.39

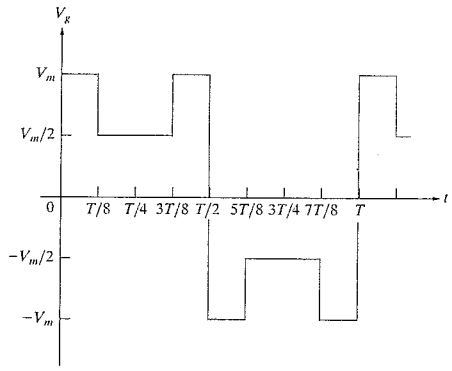


16.40 a) Şekil P16.40'ta gösterilen periyodik gerilimin Fourier serisi yaklaştırmasındaki sıfırdan farklı ilk dört terimi kullanarak rms değerini kestiriniz.

b) Gerilimin gerçek rms değerini hesaplayınız.

c) Kestirilmiş değerdeki hatanın yüzdesini hesaplayınız.

Şekil P16.40



16.41 Problem 16.16'da tarif edilen periyodik fonksiyonun tepe değeri 2 A olan i_g akımı olduğunu varsayınız.

a) Akımın rms değerini bulunuz.

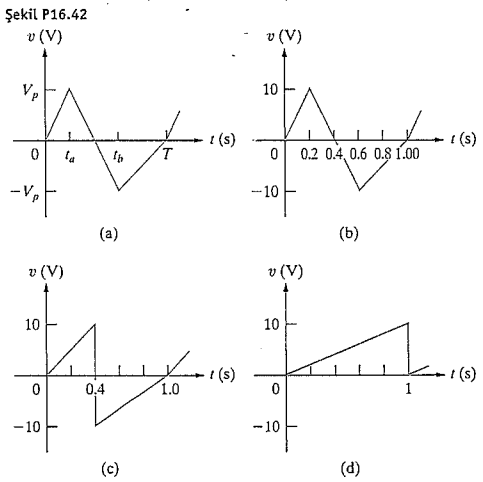
b) Akım 54 Ω bir dirençte ise, dirençte tüketilen ortalama güç nedir?

c) Eğer i_g, Fourier serisinin sadece temel frekans terimi ile yaklaşıklaştırılsaydı, 54 Ω direnceye aktarılan ortalama güç ne olurdu?

d) Harcanan gücün kestirimindeki hatanın yüzdesi nedir?

16.42 Şekil P16.42(a)'da betimlenen biçime sahip herhangi bir periyodik üçgen dalganın rms değeri t_a ve t_b'den bağımsızdır. Fonksiyonun tek değerli olması için $t_a \leq t_b$ olması gerektiğine dikkat ediniz. rms değer $V_p/\sqrt{3}$'e eşittir. Bu gözlemi Şekil P16.42(b)-(d)'de gösterilen üç dalgabiçiminin rms değerlerini bularak doğrulayınız.

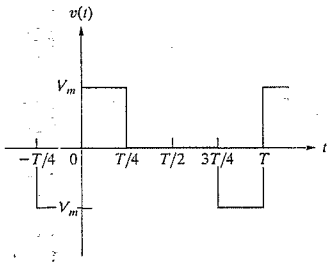
Şekil P16.42



Kısım 16.8

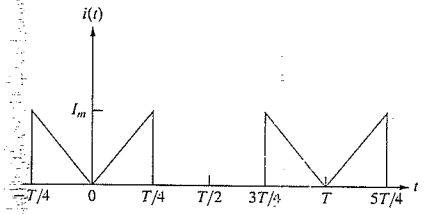
16.43 Fourier serisinin üstel biçimini kullanarak Şekil P16.43'te gösterilen gerilim için bir ifade yazınız.

Şekil P16.43



16.44 Şekil P16.44'te gösterilen periyodik akım için karmaşık Fourier katsayıları ifadesini bulunuz.

Şekil P16.44



16.45 a) Problem 16.44'teki periyodik akım bir 60 Ω direnceye uygulanmıştır. Eğer I_m = 20 A ise, direnceye aktarılan ortalama güç nedir?

b) $i(t)$'nin, Fourier serisinin sıfırdan farklı ilk yedi terimini, yani, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve 7 içeren kısaltmış üstel biçimi ile yaklaşıklaştırıldığını varsayınız. Bu yaklaşıklığı kullanırsanız, akımın rms değeri nedir?

c) Eğer (b)'deki yaklaşıklık i'yi temsil etmek için kullanılırsa, hesaplanan güçteki hatanın yüzdesi nedir?

16.46 Şekil P16.46(a)'da gösterilen devredeki periyodik gerilim kaynağı Şekil P16.46(b)'de gösterilen dalgabiçimine sahiptir.

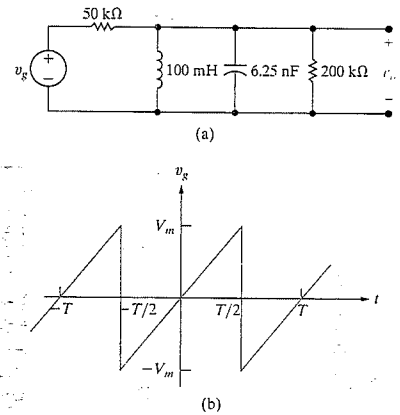
a) C_n ifadesini bulunuz.

b) Eğer $V_m = 72\pi$ V ve $T = 50\pi$ ms ise giriş gerilimi v_g için karmaşık katsayılar C_0, C_{-1}, C_1, C_{-2}, C_2, C_{-3}, C_3, C_{-4} ve C_4'ün değerlerini bulunuz.

c) (b)'yi v_o için tekrarlayınız.

d) (c)'de bulunan karmaşık katsayıları 200 kΩ direnceye aktarılan ortalama gücü kestirmek için kullanınız.

Şekil P16.46



16.47 a) Şekil P16.46(b)'deki periyodik gerilimin rms değerini bulunuz.

b) Problem P16.46(b)'de bulunan karmaşık katsayıları kullanarak v_g'nin rms değerini kestiriniz.

c) v_g'nin kestirilmiş rms değerindeki hatanın yüzdesi nedir?

Kısım 16.9

16.48 a) Eş. 16.38'e dayanarak Örnek 16.3'teki periyodik gerilim için genlik ve faz çizimlerini yapınız. V_m'nin 40 V olduğunu varsayınız. Hem genliği hem de fazı, n = 0, 1, 2, 3, ... iken $n\omega_0$'a karşı çiziniz.

b) (a)'yı tekrar ediniz, ancak çizimleri Eş. 16.82'ye dayandırınız.

16.49 a) Eş. 16.38'e dayanarak Problem 16.32'deki periyodik gerilim için genlik ve faz çizimlerini yapınız. Hem genliği hem de fazı, n = 0, 1, 2, 3, ... iken $n\omega_0$'a karşı çiziniz.

b) (a)'yı tekrar ediniz, ancak çizimleri Eş. 16.82'ye dayandırınız.

16.50 Bir periyodik gerilim kısaltılmış Fourier serisi ile temsil edilmektedir. Genlik ve faz spektrumları sırasıyla Şekil P16.50(a) ve (b)'de gösterilmektedir.

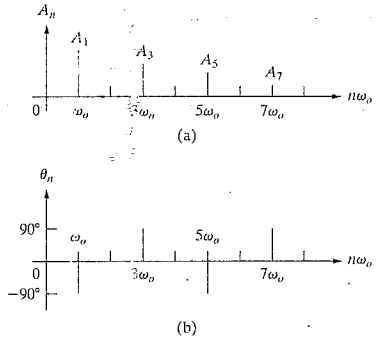
a) Eş.16.38 ile verilen biçimi kullanarak periyodik gerilim için bir ifade yazınız.

b) Gerilim t'nin fonksiyonu olarak çift midir, tek midir?

c) Gerilim yarım dalga simetrisine sahip midir?

d) Gerilim çeyrek dalga simetrisine sahip midir?

Şekil P16.50



16.51 Bir periyodik fonksiyon sonlu sayıda terime sahip bir Fourier serisi ile temsil edilmektedir. Genlik ve faz spektrumları sırasıyla Şekil P16.51(a) ve (b)'de gösterilmektedir.

a) Eş. 16.38 ile verilen biçimi kullanarak periyodik akımın ifadesini yazınız.

b) Akım t'nin fonksiyonu olarak çift midir, tek midir?

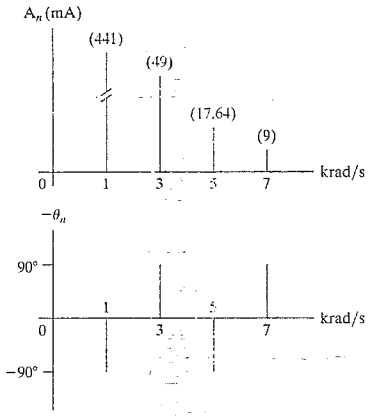
c) Akım yarım dalga simetrisine sahip midir?

d) Akımın rms değerini miliamper cinsinden hesaplayınız.

e) Fourier serisinin üstel biçimini yazınız.

f) Üstel seriye dayanarak genlik ve faz spektrumlarının çizimini yapınız.

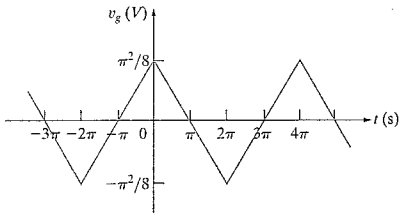
Şekil P16.51



Kısım 16.1-16.9

16.52 Bir üçüncü mertebeden alçak geçiren Butterworth filtrenin giriş sinyali, Şekil P16.52'de gösterilen periyodik üçgen dalga gerilimdir. Filtrenin köşe frekansı 1 rad/s'dir. Filtrenin durgun durum çıkış gerilimini temsil eden Fourier serisinin ilk üç terimini yazınız.

Şekil P16.52



16.53 İkinci mertebeden bir alçak geçiren Butterworth filtrenin giriş sinyali genliği 2.5π V ve temel frekansı 5000 rad/s olan bir tam dalga doğrultulmuş sinüs dalgasıdır. Filtrenin köşe frekansı 1 krad/s'dir. Filtrenin durgun durum çıkış gerilimini temsil eden Fourier serisinin ilk iki terimini yazınız.

16.54 Şekil P 16.54(a)'daki darbant bant geçiren filtre devresi için aktarım fonksiyonu (V_o / V_g)

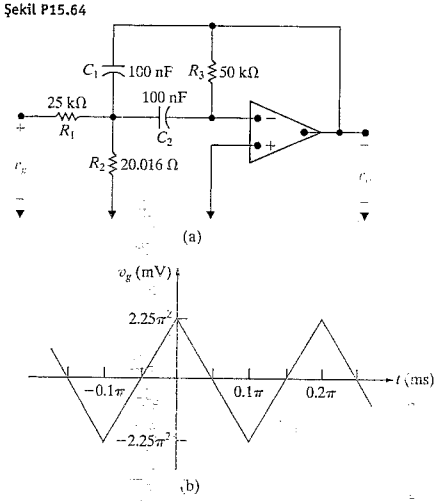
$$H(s) = \frac{-K_o \beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}$$

verilmiştir.

a) K_o, β ve ω_0^2'yi devre parametreleri R_1, R_2, R_3, C_1 ve C_2'nin fonksiyonları olarak bulunuz.

b) Eğer v_g Şekil P16.54(b)'de verilen periyodik gerilim ise v_o'ı temsil eden Fourier serisinin ilk üç terimini yazınız.

Şekil P15.64



BÖLÜM İÇERİĞİ

17.1 Fourier Dönüşümünün Çıkarımı s. 699
17.2 Fourier Integralinin Yakınsaması s. 701
17.3 Laplace Dönüşümünü Kullanarak Fourier Dönüşümünün Bulunması s. 703
17.4 Limit Durumunda Fourier Dönüşümleri s. 706
17.5 Bazı Matematiksel Özellikler s. 708
17.6 İşlemsel Dönüşümler s. 710
17.7 Devre Uygulamaları s. 714
17.8 Parseval Teoremi s. 717

✓ BÖLÜM HEDEFLERİ

1 Aşağıdakilerden birisini veya hepsini kullanarak bir fonksiyonun Fourier dönüşümünü hesaplayabilmek:
- Fourier dönüşümünün tanımı,
- Laplace dönüşümleri,
- Fourier dönüşümünün matematiksel özellikleri,
- İşlemsel dönüşümler.

2 Bir devrenin tepkisini bulmak için Fourier dönüşümünün nasıl kullanılacağını bilmek.

3 Parseval Teoremini anlamak ve belirli frekans bantlarında içerilen enerji hakkındaki soruları cevaplamada kullanabilmek.

Fourier Dönüşümü

16. Bölümde bir periyodik fonksiyonun bir Fourier serisi cinsinden temsil edilmesini tartışmıştık. Bu seri temsili periyodik fonksiyonu frekans bölgesi nitelikleri olan genlik ve faz cinsinden tanımlamamızı sağlamaktadır. Fourier dönüşümü bu frekans bölgesi tanımlamasını periyodik olmayan fonksiyonlara da genişletir. Laplace dönüşümü ile periyodik olmayan bir fonksiyonun zaman bölgesinden frekans bölgesine dönüşümü fikrini zaten ortaya atmıştık. O zaman, neden başka bir tür dönüşümün gerekli olduğunu merak edebilirsiniz. Kesin bir dille, Fourier dönüşümü yeni bir dönüşüm değildir. Çift taraflı Laplace dönüşümünde, karmaşık frekansın gerçek kısmının sıfıra eşit olduğu bir özel halidir. Öte yandan, fiziksel yorumla, Fourier dönüşümü Fourier serisinin limitteki durumu olarak görülebilir. Bu bakış açısını Kısım 17.1'de Fourier dönüşümü denklemlerini çıkarırken sunacağız.

Fourier dönüşümü belirli haberleşme kuramı ve sinyal işleme konularında Laplace dönüşümünden daha yararlıdır. Fourier dönüşümünü derinlikli olarak takip edemesek de, henüz Laplace dönüşümü ve Fourier serisi aklınızda taze iken burada tanıtımı uygun olacaktır.

17.1 Fourier Dönüşümünün Çıkarımı

Fourier dönüşümünün çıkarımına, bir Fourier serisinin limit durumuna bakarak ve serinin üstel biçimini kullanarak başlayacağız:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}. \tag{17.1}$$

Burada

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \tag{17.2}$$

ile verilmektedir. Eş. 17.2'de integrali $t_0 = -T/2$'de başlatmayı seçtik.

T temel periyodunun T sınırsız olarak artmasına izin vermek, bir periyodik fonksiyondan periyodik olmayana geçişi sağlar. Başka bir deyişle, eğer T sonsuz olursa, fonksiyon kendini hiçbir zaman tekrar etmez ve dolayısıyla periyodik değildir. T arttıkça, ardışık harmonik frekansları arasındaki ayrım gittikçe ufalır. Yani,

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{17.3}$$

ve T büyüdükçe, artımlı fark $\Delta\omega$ bir $d\omega$ diferansiyeline yakınlaşır. Eş. 17.3 ten

$$T \to \infty \text{ için } \frac{1}{T} \to \frac{d\omega}{2\pi} \tag{17.4}$$

yazılır. Periyot arttıkça, frekans bir ayrık değişken olmaktan bir sürekli değişken olmaya doğru ilerler veya

$$T \to \infty \text{ için } n\omega_0 \to \omega \tag{17.5}$$

olur. Eş. 17.2 bakımından, periyot arttıkça, Fourier katsayıları C_n gittikçe küçülür. Limitte, $T \to \infty$ iken $C_n \to 0$ olur. Bu sonuç anlamlıdır, çünkü fonksiyon periyodikliğini kaybettikçe Fourier katsayılarının sıfıra yaklaşmasını bekleriz. Öte yandan, C_nT çapımının sınır değerine yani

$$T \to \infty \text{ için } C_nT \to \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt \tag{17.6}$$

ifadesine dikkat ediniz. Eş. 17.6'yı yazarken Eş. 17.5'teki ilişkiyi kullandık. Eş. 17.6'daki integral $f(t)$'nin Fourier dönüşümüdür ve

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt. \tag{17.7}$$

◄ **Fourier Dönüşümü**

ile gösterilir.

Ters Fourier dönüşümü için açık bir ifadeyi Eş. 17.1'in $T \to \infty$ limit durumunu inceleyerek elde ederiz. T ile çarpıp bölerek başlayalım:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_n T) e^{jn\omega_0 t} \left(\frac{1}{T}\right). \tag{17.8}$$

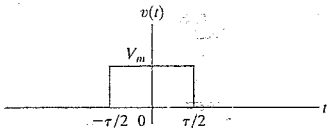
$T \to \infty$ iken toplama işlemi integral almaya yaklaşır, $C_n T \to F(\omega)$, $n\omega_0 \to \omega$ ve $1/T \to d\omega/2\pi$ olur. Sonuç olarak limitte Eş. 17.8 aşağıdaki hali alır:

Ters Fourier dönüşümü ▶

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{17.9}$$

Denklemler 17.7 ve 17.9 Fourier dönüşümünü tanımlar. Denklem 17.7 zaman bölgesi ifadesi $f(t)$'yi karşılık gelen frekans bölgesi ifadesi $F(\omega)$'ya dönüştürür. Denklem 17.9 $F(\omega)$'nın $f(t)$'ye dönüştüğü ters işlemi tanımlar.

Şimdi Şekil 17.1'de gösterilen darbenin Fourier dönüşümünü çıkaralım. Eğer $T \to \infty$'a izin verirsek bu darbenin Örnek 16.6'daki periyodik gerilime karşılık geldiğine dikkat ediniz. $v(t)$'nin Fourier dönüşümü Eş. 17.7'den doğrudan bulunur:



Şekil 17.1 ▲ Bir gerilim darbesi.

$$V(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_m e^{-j\omega t} dt$$

$$= V_m \frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$= \frac{V_m}{-j\omega} \left(-2j \sin \frac{\omega\tau}{2}\right) \tag{17.10}$$

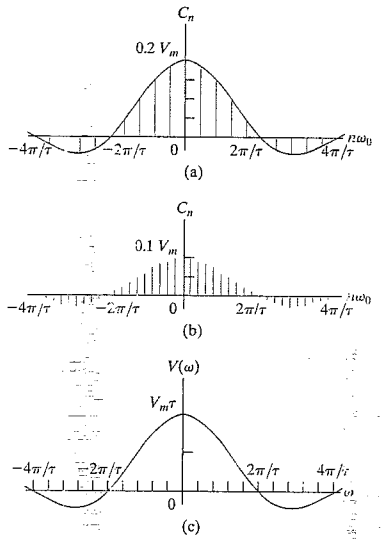
Bu ifade, pay ve paydası τ ile çarpılarak $(\sin x)/x$ biçimine sokulabilir. O zaman,

$$V(\omega) = V_m \tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} \tag{17.11}$$

elde edilir. Örnek 16.6'daki periyodik gerilim darbeleri dizisi için Fourier katsayılarının ifadesi

$$C_n = \frac{V_m \tau}{T} \frac{\sin n\omega_0\tau/2}{n\omega_0\tau/2} \tag{17.12}$$

idi. Eş. 17.11 ve 17.12'yi karşılaştırmak, zaman bölgesi ifadesinin periyodikten periyodik olmayana gittikçe, genlik spektrumunun bir ayrık çizgi spektrumundan bir sürekli spektruma gittiğini açıkça göstermektedir. Dahası, çizgi spektrumunun zarfı, sürekli spektrumunki ile aynı şekle sahiptir. Sonuç olarak, T arttıkça, spektrum çizgileri daha sıklaşır ve genlikler daha küçülür, ancak zarf şekil değiştirmez. Dolayısıyla, Fourier dönüşümü $V(\omega)$'nın fiziksel açıklaması, $v(t)$'nin frekans içeriğinin bir ölçütü olmasıdır. Şekil 17.2 bu gözlemleri betimlemektedir. Genlik spektrumu, τ'nin sabit kaldığı ve T'nin arttığı varsayımına dayanmaktadır.



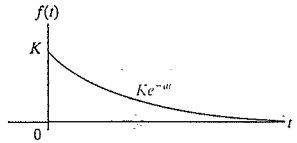
Şekil 17.2 ▲ $f(t)$ periyodikten periyodik olmayana gittikçe genlik spektrumunun değişimi. (a) C_n'e karşılık $n\omega_0$, $T/\tau = 5$; (b) C_n'e karşılık $n\omega_0$, $T/\tau = 10$; (c) $V(\omega)$'ya karşılık ω.

17.2 Fourier İntegralinin Yakınsaması

Zamanın bir fonksiyonu olan $f(t)$ eğer Eş. 17.7'deki integral yakınsarsa bir Fourier dönüşümüne sahiptir. Eğer $f(t)$ sonlu bir zaman aralığında sıfırdan farklı, iyi davranışlı bir fonksiyonsa yakınsama sorun oluşturmaz. İyi davranışlılığın anlamı, $f(t)$'nin tek değerli olması ve integralin alındığı aralıkta sonlu bir alanı kapsamasıdır. Pratik olarak, bizi ilgilendiren tüm sonlu süreye sahip darbeler iyi davranışlı fonksiyonlardır. Kısım 17.1'de tartışılan dikdörtgen darbenin Fourier dönüşümünün hesaplanması bu noktayı sergilemektedir.

Eğer $f(t)$ sonsuz bir aralıkta sıfırdan farklıysa, Fourier integralinin yakınsaması $f(t)$'nin $t \to \infty$ iken davranışına bağlıdır. Sonsuz bir aralıkta sıfırdan farklı olan bir tek değerli fonksiyon eğer aşağıdaki integral mevcutsa

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$$



Şekil 17.3 ▲ Azalan üstel fonksiyon $Ke^{-at}u(t)$.

ve eğer varsa $f(t)$'deki devamsızlıkların sonlu sayıda olması durumunda bir Fourier dönüşümüne sahiptir. Şekil 17.3'te gösterilen azalan üstel fonksiyon bunun bir örneğidir. $f(t)$'nin Fourier dönüşümü

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{0}^{\infty} Ke^{-at}e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \left.\frac{Ke^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right|_0^{\infty} = \frac{K}{-(a+j\omega)}(0-1)$$

$$= \frac{K}{a+j\omega}, \quad a > 0 \tag{17.13}$$

ile verilir. Büyük pratik öneme sahip fakat kesin anlamda bir Fourier dönüşümüne sahip olmayan üçüncü bir fonksiyonlar grubu vardır. Örneğin, Eş 17.7'deki integral $f(t)$ bir sabit ise yakınsamaz. Aynı şey, $f(t)$ bir sinüzoidal fonksiyon, $\cos \omega_0 t$ ise veya bir basamak fonksiyonu, $Ku(t)$ ise de söylenebilir. Bu fonksiyonlar devre analizi için çok önemlidir ancak bunları Fourier analizine katmak için bazı matematiksel hilelere başvurmamız gerekir. İlk olarak, Fourier dönüşümü olan, zaman alanında ve aynı zamanda ilgilendiğimiz fonksiyona keyfi miktarda yaklaştırılabilen bir fonksiyon yaratırız. Daha sonra, yaklaştırma fonksiyonunun Fourier dönüşümünü hesaplayıp, $F(\omega)$'nın bu fonksiyonun $f(t)$'ye ulaştığı limit değerlerini buluruz. Son olarak, $F(\omega)$'nın limitteki değerini $f(t)$'nin Fourier dönüşümü olarak tanımlarız.

Bu tekniği bir sabitin Fourier dönüşümünü bularak örnekleyelim. Bir sabiti aşağıdaki üstel fonksiyonla yaklaştırabiliriz:

$$f(t) = Ae^{-\epsilon|t|}, \quad \epsilon > 0. \tag{17.14}$$

$\epsilon \to 0$ iken $f(t) \to A$ elde edilir. Şekil 17.4 bu yaklaştırmayı grafiksel olarak göstermektedir. $f(t)$'nin Fourier dönüşümü

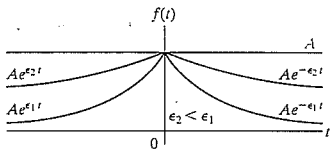
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{0} Ae^{\epsilon t}e^{-j\omega t}\,dt + \int_{0}^{\infty} Ae^{-\epsilon t}e^{-j\omega t}\,dt \tag{17.15}$$

ile verilir. Eş. 17.15'te verilen integrali hesaplamak

$$F(\omega) = \frac{A}{\epsilon - j\omega} + \frac{A}{\epsilon + j\omega} = \frac{2\epsilon A}{\epsilon^2 + \omega^2} \tag{17.16}$$

verir. Eş.17.16 ile verilen fonksiyon $\epsilon \to 0$ iken $\omega = 0$'da bir dürtü fonksiyonu üretir. Bu sonucu, (1) $\epsilon \to 0$ iken $F(\omega)$'nın $\omega = 0$'da sonsuza ulaştığını, (2) $\epsilon \to 0$ iken $F(\omega)$'nın sıfırdan farklı olduğu aralığın sıfıra ulaştığını ve (3) $F(\omega)$'nın altındaki alanın ϵ'dan bağımsız olduğunu göstererek doğrulayabilirsiniz. $F(\omega)$'nın altındaki alan dürtünün gücüdür ve şöyle hesaplanır:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\epsilon A}{\epsilon^2 + \omega^2}\,d\omega = 4\epsilon A \int_{0}^{\infty} \frac{d\omega}{\epsilon^2 + \omega^2} = 2\pi A. \tag{17.17}$$



Şekil 17.4 ▲ Bir sabitin bir üstel fonksiyon ile yaklaştırılması.

Limitte, $f(t)$ bir A sabitine ulaşır ve $F(\omega)$ bir dürtü fonksiyonu olan, $2\pi A\delta(\omega)$'ya ulaşır. Sonuç olarak bir A sabitinin Fourier dönüşümü $2\pi A\delta(\omega)$ olarak tanımlanır ve

$$\mathcal{F}\{A\} = 2\pi A\delta(\omega) \tag{17.18}$$

yazılır. Kısım 17.4'te bir limit süreci ile tanımlanan Fourier dönüşümleri hakkında daha fazla şey söyleyeceğiz. Bunu yapmadan önce, Kısım 17.3'te Fourier integralinin yakınsadığı fonksiyonların Fourier dönüşümünü bulmak için Laplace dönüşümünden nasıl yararlanacağımızı göreceğiz.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 1 – Bir fonksiyonun Fourier dönüşümünü hesaplayabilmek

17.1 Tanımlayıcı integrali aşağıdaki fonksiyonların Fourier dönüşümünü bulmak için kullanınız:

a) $f(t) = -A, \quad -\tau/2 \le t < 0;$
$f(t) = A, \quad 0 < t \le \tau/2;$
$f(t) = 0 \quad$ elsewhere.

b) $f(t) = 0, \quad t < 0;$
$f(t) = te^{-at}, \quad t \ge 0, a > 0.$

Cevap: (a) $-j\left(\frac{2A}{\omega}\right)\left(1 - \cos\frac{\omega\tau}{2}\right);$
(b) $\frac{1}{(a+j\omega)^2}.$

17.2 $f(t)$'nin Fourier dönüşümü

$F(\omega) = 0 \quad -\infty \le \omega < -3;$
$F(\omega) = 4, \quad -3 < \omega < -2;$
$F(\omega) = 1, \quad -2 < \omega < 2;$
$F(\omega) = 4, \quad 2 < \omega < 3;$
$F(\omega) = 0, \quad 3 < \omega \le \infty$

verildiğinde $f(t)$'yi bulunuz.

Cevap: $f(t) = \frac{1}{\pi t}(4\sin 3t - 3\sin 2t).$

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 17.2 ve 17.3'ü de çözmeyi deneyiniz.

17.3 Laplace Dönüşümünü Kullanarak Fourier Dönüşümünün Bulunması

Fourier integralinin yakınsadığı fonksiyonların Fourier dönüşümünü bulmak için, tek taraflı veya tek yanlı Laplace dönüşüm çiftlerinin olduğu bir tabloyu kullanabiliriz. Fourier integrali, $F(s)$'nin tüm kutuplarının s düzleminin sol tarafında olması durumunda yakınsar. $F(s)$'nin s düzleminin sağ tarafında veya sanal eksen üzerinde kutuba sahip olması durumunda $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|$ koşulunun sağlanmadığına dikkat ediniz.

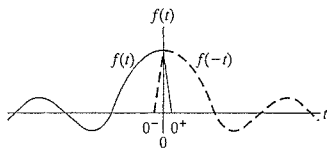
Aşağıdaki kural bu tür fonksiyonların Fourier dönüşümünü bulmakta kullanılır.

1. Eğer $f(t)$, $t \le 0^-$ için sıfır ise, $f(t)$'nin Fourier dönüşümünü basitçe $f(t)$'nin Laplace dönüşümündeki s'yi $j\omega$ ile değiştirerek elde ederiz. Böylece

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=j\omega}. \tag{17.19}$$

$$f(t) = 0, \qquad t \geq 0^+$$

$$f(t) = e^{at}\cos\omega_0 t, \qquad (t \leq 0^- \text{ için})$$



Şekil 17.5 Bir negatif zaman fonksiyonunun pozitif zaman bölgesine yansıması.

Örneğin,

$$f(t) = 0, \qquad t \leq 0^-;$$

$$f(t) = e^{-at}\cos\omega_0 t, \qquad t \geq 0^+$$

olsun. Dolayısıyla

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \left.\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}\right|_{s=j\omega} = \frac{j\omega+a}{(j\omega+a)^2+\omega_0^2}$$

olarak bulunur.

2. Fourier integralinin integral aralığı $-\infty$'dan $+\infty$'a kadar gittiği için, bir negatif zaman fonksiyonunun Fourier dönüşümü mevcuttur. Bir negatif zaman fonksiyonu zamanın negatif değerleri için sıfırdan farklı, zamanın pozitif değerleri için sıfırdır. Böyle bir fonksiyonun Fourier dönüşümünü bulmak için şöyle hareket ederiz. İlk olarak, negatif zaman fonksiyonunu pozitif zaman alanına yansıtırız ve sonra tek taraflı Laplace dönüşümünü bulurur. Baştaki fonksiyonun Fourier dönüşümünü s'yi $-j\omega$ ile değiştirerek buluruz. Sonuç olarak, $t \geq 0^+$ için $f(t) = 0$ iken,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(-t)\}_{s=-j\omega} \tag{17.20}$$

olur. Örneğin,

$$f(t) = 0, \qquad (t \geq 0^+ \text{ için});$$

$$f(t) = e^{at}\cos\omega_0 t, \qquad (t \leq 0^- \text{ için})$$

ise

$$f(-t) = 0, \qquad (t \leq 0^- \text{ için});$$

$$f(-t) = e^{-at}\cos\omega_0 t, \qquad (t \geq 0^+ \text{ için})$$

yazılır. $f(t)$ ve ayna yansımasının her ikisi de Şekil 17.5'te gösterilmiştir.

$f(t)$'nin Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(-t)\}_{s=-j\omega} = \left.\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}\right|_{s=-j\omega}$$

$$= \frac{-j\omega+a}{(-j\omega+a)^2+\omega_0^2}$$

bulunur.

3. Tüm zamanlar için sıfır olmayan fonksiyonlar, pozitif ve negatif zaman fonksiyonlarına ayrıştırılabilir. Eş. 17.19 ve 17.20'yi sırasıyla pozitif ve negatif zaman fonksiyonlarının Fourier dönüşümünü bulmak için kullanırız.

Baştaki fonksiyonun Fourier dönüşümü iki dönüşümün toplamıdır. Dolayısıyla eğer

$$f^+(t) = f(t) \qquad (t > 0 \text{ için}),$$

$$f^-(t) = f(t) \qquad (t < 0 \text{ için})$$

olmasına izin verirsek,

$$f(t) = f^+(t) + f^-(t)$$

ve

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{f^+(t)\} + \mathcal{F}\{f^-(t)\}$$

$$= \mathcal{L}\{f^+(t)\}_{s=j\omega} + \mathcal{L}\{f^-(-t)\}_{s=-j\omega}. \tag{17.21}$$

olacaktır.

Eş.17.21'i kullanmanın bir örneği, $e^{-a|t|}$'nin Fourier dönüşümünün bulunmasıdır. Baştaki fonksiyon için pozitif ve negatif zaman fonksiyonları aşağıdakilerdir.

$$f^+(t) = e^{-at} \quad \text{ve} \quad f^-(t) = e^{at}$$

ile verilir. O zaman,

$$\mathcal{L}\{f^+(t)\} = \frac{1}{s+a},$$

$$\mathcal{L}\{f^-(-t)\} = \frac{1}{s+a}$$

olur. Sonuç olarak, Eş. 17.21'den

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \left.\frac{1}{s+a}\right|_{s=j\omega} + \left.\frac{1}{s+a}\right|_{s=-j\omega}$$

$$= \frac{1}{j\omega+a} + \frac{1}{-j\omega+a}$$

$$= \frac{2a}{\omega^2+a^2}$$

elde edilir. Eğer $f(t)$ çiftse, Eş.17.21

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=j\omega} + \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=-j\omega} \tag{17.22}$$

haline indirgenir. Eğer $f(t)$ tekse, Eş.17.21

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=j\omega} - \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=-j\omega} \tag{17.23}$$

verir.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 1 – Bir fonksiyonun Fourier dönüşümünü hesaplayabilmek

17.3 Aşağıdaki fonksiyonların Fourier dönüşümünü bulunuz. Her durumda, a bir pozitif gerçek değerli sabittir.

a) $f(t) = 0, \quad t < 0,$
$f(t) = e^{-at}\sin\omega_0 t, \quad t \geq 0.$

b) $f(t) = 0, \quad t > 0,$
$f(t) = -te^{at}, \quad t \leq 0.$

c) $f(t) = te^{-at}, \quad t \geq 0,$
$f(t) = te^{at}, \quad t \leq 0.$

Cevap: (a) $\dfrac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$;

(b) $\dfrac{1}{(a-j\omega)^2}$;

(c) $\dfrac{-j4a\omega}{(a^2+\omega^2)^2}$.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 17.4'ü de çözmeyi deneyiniz.

17.4 Limit Durumunda Fourier Dönüşümleri

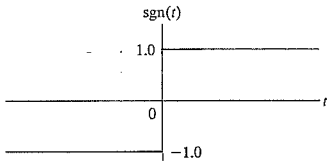
Kısım 17.2'de belirttiğimiz gibi, bazı pratik fonksiyonların Fourier dönüşümleri bir limit süreci ile tanımlanmalıdır. Şimdi bu tür fonksiyonlarla ilgileneceğiz ve dönüşümlerini gerçekleştireceğiz.

Bir İşaret Fonksiyonunun Fourier Dönüşümü

A sabitinin Fourier dönüşümünün $2\pi A\delta(\omega)$ olduğunu Eş. 17.18'de göstermiştik. Bir sonraki ilgileneceğimiz fonksiyon, $t > 0$ için +1 ve $t < 0$ için −1 olarak tanımlanan işaret fonksiyonudur. İşaret fonksiyonu sgn (t) olarak gösterilir ve birim basamak fonksiyonları cinsinden

$$\operatorname{sgn}(t) = u(t) - u(-t) \tag{17.24}$$

halinde ifade edilebilir. Şekil 17.6 fonksiyonu grafikle göstermektedir.

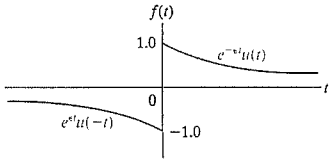


Şekil 17.6 ▲ İşaret fonksiyonu.

İşaret fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulmak için ilk olarak limitte işaret fonksiyonuna ulaşan bir fonksiyon buluruz:

$$\operatorname{sgn}(t) = \lim_{\epsilon\to 0}[e^{-\epsilon t}u(t) - e^{\epsilon t}u(-t)], \quad \epsilon > 0. \tag{17.25}$$

Şekil 17.7'de gösterilen, köşeli parantez içindeki fonksiyon bir Fourier dönüşümüne sahiptir çünkü Fourier integrali yakınsamaktadır. $f(t)$ bir tek sin olduğu için, Fourier dönüşümünü yaratıyoruz. için Eş. 17.23'ü kullanırız:



Şekil 17.7 ▲ ϵ sıfıra yaklaştıkça sgn(t)'ye yaklaşan bir fonksiyon.

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{s+\epsilon}\bigg|_{s=j\omega} - \frac{1}{s+\epsilon}\bigg|_{s=-j\omega}$$

$$= \frac{1}{j\omega+\epsilon} - \frac{1}{-j\omega+\epsilon}$$

$$= \frac{-2j\omega}{\omega^2+\epsilon^2}. \tag{17.26}$$

$\epsilon \to 0$ iken, $f(t) \to sgn(t)$ ve $\mathcal{F}\{f(t)\} \to 2/j\omega$. Dolayısıyla,

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(t)\} = \frac{2}{j\omega}. \tag{17.27}$$

Bir Birim Basamak Fonksiyonunun Fourier Dönüşümü

Bir birim basamak fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulmak için Eş. 17.18 ve 17.27'yi kullanırız. Bunu birim basamak fonksiyonunu aşağıdaki şekilde ifade edilebileceğini görerek yaparız:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t). \tag{17.28}$$

Sonuç olarak,

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)\right\}$$

$$= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \tag{17.29}$$

Bir Kosinüs Fonksiyonunun Fourier Dönüşümü

cos $\omega_0 t$'nin Fourier dönüşümünü bulmak için, Eş. 17.9'daki ters dönüşüm integraline bakarak aşağıdaki gözlemi yaparız:

$$F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0), \tag{17.30}$$

daha sonra

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[2\pi\delta(\omega-\omega_0)]e^{j\omega t}\,d\omega \tag{17.31}$$

yazılabilir. Bir dürtü fonksiyonunun eleme özelliğini kullanarak, Eş.17.31'i aşağıdakine indirgeriz:

$$f(t) = e^{j\omega_0 t}. \tag{17.32}$$

O zaman, Eş. 17.30 ve 17.32'den

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \tag{17.33}$$

bulunur. Şimdi Eş. 17.33'ü cos $\omega_0 t$'nin Fourier dönüşümünü bulmak için kullanabiliriz, çünkü

$$\cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \tag{17.34}$$

yazılabilir. Sonuç olarak,

$$\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2}(\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} + \mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t}\})$$

$$= \frac{1}{2}[2\pi\delta(\omega - \omega_0) + 2\pi\delta(\omega + \omega_0)]$$

$$= \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \qquad (17.35)$$

elde edilir. $\cos \omega_0 t$'nin Fourier dönüşümünün bulunması, Problem 17.5'e bıraktığımız benzer işlemler içermektedir. Tablo 17.1 önemli temel fonksiyonların dönüşüm çiftlerinin bir özetini sunmaktadır.

Şimdi, periyodik olmayan zaman bölgesi davranışını, frekans bölgesi davranışı olarak tanımlama yeteneğimizi geliştiren, Fourier dönüşümünün özelliklerine bakacağız.

TABLO 17.1 Temel Fonksiyonların Fourier Dönüşümleri

Tip	$f(t)$	$F(\omega)$
dürtü	$\delta(t)$	1
sabit	A	$2\pi A\delta(\omega)$
işaret	$\mathrm{sgn}(t)$	$2/j\omega$
basamak	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + 1/j\omega$
pozitif zaman üstel	$e^{-at}u(t)$	$1/(a + j\omega),\ a > 0$
negatif zaman üstel	$e^{at}u(-t)$	$1/(a - j\omega),\ a > 0$
pozitif ve negatif zaman üstel	$e^{-a\|t\|}$	$2a/(a^2 + \omega^2),\ a > 0$
karmaşık üstel	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
kosinüs	$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
sinüs	$\sin \omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

17.5 Bazı Matematiksel Özellikler

İlk inceleyeceğimiz matematiksel özellik, $F(\omega)$'nın bir karmaşık büyüklük olduğu ve dikdörtgen veya kutupsal koordinatlarda ifade edilebileceğidir. Tanım integralinden

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos \omega t - j \sin \omega t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t\,dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t\,dt \qquad (17.36)$$

yazılır. Şimdi

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t\,dt \qquad (17.37)$$

$$B(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t\,dt \qquad (17.38)$$

olsun. Dolayısıyla, Eş. 17.37 ve 17.38 ile verilen tanımları kullanarak

$$F(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |F(\omega)|e^{j\theta(\omega)} \qquad (17.39)$$

elde ederiz. $F(\omega)$ hakkında aşağıdaki gözlemler yapılabilir:

- $F(\omega)$'nın gerçek kısmı – yani $A(\omega)$ – ω'nın bir çift fonksiyonudur, başka bir deyişle $A(\omega) = A(-\omega)$.
- $F(\omega)$'nın sanal kısmı – yani $B(\omega)$ – ω'nın bir tek fonksiyonudur, başka bir deyişle $B(\omega) = -B(-\omega)$.
- $F(\omega)$'nın büyüklüğü – yani $\sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$ – ω'nın bir çift fonksiyonudur.
- $F(\omega)$'nın faz açısı – yani $\theta(\omega)=\tan^{-1}B(\omega)/A(\omega)$ – ω'nın bir tek fonksiyonudur.
- ω'yı $-\omega$ ile değiştirmek $F(\omega)$'nın eşleniğini üretir, bir başka deyişle, $F(-\omega) = F^*(\omega)$.

Dolayısıyla, eğer $f(t)$ bir çift fonksiyon ise, $F(\omega)$ gerçektir ve eğer $f(t)$ bir tek fonksiyon ise $F(\omega)$ sanaldır. Eğer $f(t)$ çiftse, Eş. 17.37 ve 17.38'den

$$A(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(t) \cos \omega t\,dt \qquad (17.40)$$

ve

$$B(\omega) = 0 \qquad (17.41)$$

bulunur. Eğer $f(t)$ tekse,

$$A(\omega) = 0 \qquad (17.42)$$

ve

$$B(\omega) = -2\int_{0}^{\infty} f(t) \sin \omega t\,dt \qquad (17.43)$$

olur. Eş. 17.40 –17.43'ün çıkarımını Problemler 17.10 ve 17.11'de size bırakıyoruz.

Eğer $f(t)$ bir çift fonksiyon ise, Fourier dönüşümü de bir çift fonksiyondur ve eğer $f(t)$ bir tek fonksiyon ise, Fourier dönüşümü de bir tek fonksiyondur. Dahası, eğer $f(t)$ bir çift fonksiyon ise, ters Fourier integralinden,

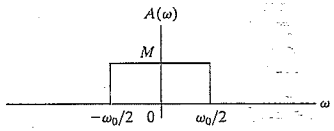
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)(\cos\omega t + j\sin\omega t)\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\cos\omega t\,d\omega + 0$$

$$= \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\infty} A(\omega)\cos\omega t\,d\omega \qquad (17.44)$$

bulunur. Şimdi, Eş. 17.44 ile Eş. 17.40'ı karşılaştırınız. Bir $1/2\omega$ faktörü dışında her iki eşitliğin de aynı biçime sahip olduğuna dikkat ediniz. Dolayısıyla, $A(\omega)$ ile $f(t)$'nin dalgabiçimleri, $f(t)$ bir çift fonksiyon ise birbiriyle değiştirilebilir hale gelmektedir. Örneğin, hali hazırda zaman bölgesindeki bir dikdörtgen darbenin $(\sin\omega)/\omega$ biçiminde bir frekans spektrumu ürettiğini gözlemiştik. Daha açık olarak, Eş. 17.11, Şekil 17.1'de gösterilen gerilim darbesinin Fourier dönüşümünü ifade etmektedir. Bundan dolayı, frekans bölgesindeki bir dikdörtgen darbe, $(\sin t)/t$ biçimindeki bir zaman bölgesi fonksiyonu tarafından üretilmelidir. Bu gereksinimi Şekil 17.8'de gösterilen frekans spektrumuna karşılık gelen zaman bölgesi fonksiyonu $f(t)$'yi bularak açıklayabiliriz. Eş. 17.44'ten



Şekil 17.8 ▲ Dikdörtgen frekans spektrumu.

$$f(t) = \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\omega_0/2} M\cos\omega t\,d\omega = \frac{2M}{2\pi}\left(\frac{\sin\omega t}{t}\right)\Bigg|_{0}^{\omega_0/2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(M\frac{\sin\omega_0 t/2}{t/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(M\omega_0\frac{\sin\omega_0 t/2}{\omega_0 t/2}\right) \qquad (17.45)$$

bulunur. Zaman bölgesindeki bir dikdörtgen darbenin frekans spektrumuna karşılık $(\sin t)/t$ 'nin frekans spektrumundan, Parseval teoremini tanıttıktan sonra daha fazla bahsedeceğiz.

17.6 İşlemsel Dönüşümler

Laplace dönüşümleri gibi, Fourier dönüşümleri de fonksiyonel ve işlemsel olarak sınıflandırılabilir. Şimdiye kadar fonksiyonel dönüşümlere odaklandık. Şimdi bazı önemli işlemsel dönüşümleri tartışacağız. Laplace dönüşümü ile karşılaştırıldıklarında, bu dönüşümler 12. Bölümde tartışılanlara benzemektedir. Dolayısıyla ispatlarını Problemler 17.12 – 17.19'da size bırakıyoruz.

Bir Sabitle Çarpım

Tanımlayıcı integralden, eğer

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega), \qquad (17.41)$$

ise

$$\mathcal{F}\{Kf(t)\} = KF(\omega) \qquad (17.46)$$

bulunur. Dolayısıyla, $f(t)$'nin bir sabitle çarpımı, $F(\omega)$'nın aynı sabitle çarpılmasına karşılık gelmektedir.

Toplama (Çıkarma)

Zaman bölgesinde toplama (çıkarma) frekans bölgesinde de toplamaya (çıkarmaya) denk gelmektedir. Dolayısıyla, eğer

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega),$$

$$\mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega),$$

$$\mathcal{F}\{f_3(t)\} = F_3(\omega)$$

ise

$$\mathcal{F}\{f_1(t) - f_2(t) + f_3(t)\} = F_1(\omega) - F_2(\omega) + F_3(\omega) \qquad (17.47)$$

olur. Bu sonuç, zaman bölgesi fonksiyonlarının cebirsel toplamlarının tanımlayıcı integralde yerine konulması ile elde edilmiştir.

Türev Alma

$f(t)$'nin birinci türevinin Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = j\omega F(\omega) \qquad (17.48)$$

ile verilir. $f(t)$'nin n –yinci türevi ise

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n F(\omega) \qquad (17.49)$$

verir. Eş. 17.48 ve 17.49, eğer $f(t)$ $\pm\infty$'da sıfır ise geçerlidir.

İntegral Alma

Eğer

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$

ise

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{F(\omega)}{j\omega} \tag{17.50}$$

bulunur. Eş. 17.50, eğer

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$$

doğru ise geçerlidir.

Ölçek Değişimi

Boyutsal açıdan zaman ve frekans birbirinin tersidir. Dolayısıyla, aşağıdaki fonksiyonel dönüşümden görülebileceği gibi

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a > 0 \tag{17.51}$$

zaman esnetildiğinde frekans sıkışır (veya tersi). $0 < a < 1.0$ iken zamanın esnetildiğine, öte yandan $a > 1.0$ iken sıkıştırıldığına dikkat ediniz.

Zaman Bölgesinde Kaydırma

Bir fonksiyonu zaman bölgesinde kaydırmanın etkisi, faz spektrumunu değiştirmek ve genlik spektrumuna dokunmamaktır. Dolayısıyla

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-j\omega a}F(\omega) \tag{17.52}$$

bulunur. Eğer Eş. 17.52'de a pozitif ise, zaman fonksiyonu geciktirilmiş, a negatif ise zamanda ilerletilmiş olur.

Frekans Bölgesinde Kaydırma

Frekans bölgesinde kaydırma, zaman bölgesinde karmaşık üstel fonksiyon ile çarpmaya karşılık gelir:

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}f(t)\} = F(\omega - \omega_0). \tag{17.53}$$

Kipleme

Genlik kipleme bir sinüzoidal taşıyıcının genliğini değiştirme işlemidir. Eğer kipleyen sinyal $f(t)$ ile gösterilirse, kiplenmiş taşıyıcı $f(t)\cos\omega_0 t$ olur. Bu taşıyıcının genlik spektrumu, $f(t)$'nin genlik spektrumunun halinin $\pm\omega_0$'ya yerleşmiş halidir, yani

$$\mathcal{F}\{f(t)\cos\omega_0 t\} = \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0). \tag{17.54}$$

Zaman Bölgesinde Evrişim

Zaman bölgesinde evrişim frekans bölgesinde çarpıma karşılık gelir. Başka bir deyişle

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda$$

aşağıdaki

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \tag{17.55}$$

ifadesine dönüşür. Eşitlik 17.55 Fourier dönüşümünün uygulamaları arasında önemlidir, çünkü tepki fonksiyonunun dönüşümü $Y(\omega)$'nın, giriş fonksiyonunun dönüşümü $X(\omega)$ ile sistem fonksiyonu $H(\omega)$'nın çarpımı olduğunu ifade eder. Bu ilişkiden Kısım 17.7'de daha fazla bahsedeceğiz.

Frekans Bölgesinde Evrişim

Frekans bölgesinde evrişim, iki zaman fonksiyonunun çarpımlarının Fourier dönüşümünü bulmaya denk gelir. Yani, eğer

$$f(t) = f_1(t)f_2(t),$$

ise

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u)\,du \tag{17.56}$$

olur. Tablo 17.2, bu on işlemsel dönüşümü ve Problem 17.18'de sunduğumuz diğer işlemsel dönüşümleri özetlemektedir.

TABLO 17.2 İşlemsel Dönüşümler

$f(t)$	$F(\omega)$
$Kf(t)$	$KF(\omega)$
$f_1(t) - f_2(t) + f_3(t)$	$F_1(\omega) - F_2(\omega) + F_3(\omega)$
$d^n f(t)/dt^n$	$(j\omega)^n F(\omega)$
$\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$	$F(\omega)/j\omega$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right),\ a > 0$
$f(t-a)$	$e^{-j\omega a}F(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
$f(t)\cos\omega_0 t$	$\frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0)$
$\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda$	$X(\omega)H(\omega)$
$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u)\,du$
$t^n f(t)$	$(j)^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 1 – Bir fonksiyonun Fourier dönüşümünü hesaplayabilmek

17.4 $f(t)$'nin aşağıdaki şekilde tanımlandığını farzediniz:

$$f(t) = \frac{2A}{\tau}t + A, \qquad -\frac{\tau}{2} \le t \le 0,$$

$$f(t) = -\frac{2A}{\tau}t + A, \qquad 0 \le t \le \frac{\tau}{2},$$

$f(t) = 0$, diğer durumda

a) $f(t)$'nin ikinci türevini bulunuz.

b) İkinci türevin Fourier dönüşümünü bulunuz.

c) (b)'de elde edilen sonucu (a)'daki fonksiyonun Fourier dönüşümünü bulmak için kullanınız.

(*İpucu*: Türev almanın işlemsel dönüşümünü kullanınız.)

Cevap: (a) $\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{2A}{\tau}\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \frac{4A}{\tau}\delta(t) + \frac{2A}{\tau}\delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$;

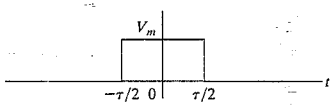
(b) $\frac{4A}{\tau}\left(\cos\frac{\omega\tau}{2} - 1\right)$;

(c) $\frac{4A}{\omega^2\tau}\left(1 - \cos\frac{\omega\tau}{2}\right)$.

17.5 Gösterilen dikdörtgen darbe iki basamak gerilimi arasındaki fark olarak

$$v(t) = V_m u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - V_m u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \text{V}.$$

halinde ifade edilebilir. Zaman alanında kaydırma işlemsel dönüşümünü kullanarak $v(t)$'nin Fourier dönüşümünü bulunuz.



Cevap: $V(\omega) = V_m\tau\frac{\sin(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)}$.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 17.19'u da çözmeyi deneyiniz.

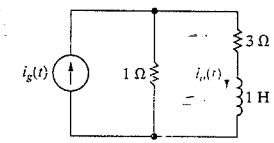
17.7 Devre Uygulamaları

Bir devrenin tepkisini bulmak için Laplace dönüşümü, iki nedenden ötürü Fourier dönüşümünden daha fazla kullanılır. Birincisi, Laplace dönüşümü integrali daha geniş sürücü fonksiyonlar kümesi için yakınsar. İkincisi ise, başlangıç koşullarının kullanımına izin verir. Laplace dönüşümünün avantajlarına rağmen, tepkiyi bulmak için Fourier dönüşümünü de kullanabiliriz. Geçici tepki analizinde Fourier dönüşümünü kullanmanın altında yatan temel ilişki, tepkinin dönüşümü $Y(\omega)$ ile girişin dönüşümü $X(\omega)$ ve devrenin aktarım fonksiyonu $H(\omega)$ arasındaki bağlantıyı veren Eş. 17.55'tir. $H(\omega)$'nın, s'nin $j\omega$ ile yer değiştirdiği durumda $H(s)$ ile benzediğine dikkat ediniz.

Örnek 17.1 bir devrenin tepkisini bulmak için Fourier dönüşümünün nasıl kullanılacağını açıklamaktadır.

Örnek 17.1 Geçici Tepkiyi Bulmak İçin Fourier Dönüşümünün Kullanılması

Şekil 17.9'da gösterilen devrede $i_o(t)$'yi bulmak için Fourier dönüşümünü kullanınız. Akım kaynağı $i_g(t)$, işaret fonksiyonu 20 sgn(t) A'dir.



Şekil 17.9 ▲ Örnek 17.1'in devresi.

Çözüm

Sürücü kaynağın Fourier dönüşümü

$$I_g(\omega) = \mathcal{F}\{20\,\text{sgn}(t)\}$$

$$= 20\left(\frac{2}{j\omega}\right)$$

$$= \frac{40}{j\omega}$$

ile verilir. Devrenin aktarım fonksiyonu I_o'nun I_g'ye oranıdır, yani

$$H(\omega) = \frac{I_o}{I_g} = \frac{1}{4 + j\omega}.$$

$i_o(t)$'nin Fourier dönüşümü ise

$$I_o(\omega) = I_g(\omega)H(\omega)$$

$$= \frac{40}{j\omega(4 + j\omega)}$$

bulunur. $I_o(\omega)$'yı kısmi kesirler toplamına açmak

$$I_o(\omega) = \frac{K_1}{j\omega} + \frac{K_2}{4 + j\omega}$$

sonucunu verir. K_1 ve K_2'yi hesaplamak

$$K_1 = \frac{40}{4} = 10,$$

$$K_2 = \frac{40}{-4} = -10$$

verir. Sonuç olarak

$$I_o(\omega) = \frac{10}{j\omega} - \frac{10}{4 + j\omega}$$

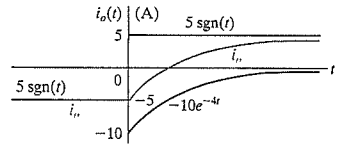
bulunur. Tepki ise

$$i_o(t) = \mathcal{F}^{-1}[I_o(\omega)]$$

$$= 5\,\text{sgn}(t) - 10e^{-4t}u(t)$$

elde edilir. Şekil 17.10 tepkiyi göstermektedir. Çözüm bilinen devre davranışları açısından anlam taşımakta mıdır? Aşağıdaki nedenlerden dolayı cevap evettir. Akım kaynağı devreye $-\infty$ ve 0 arasında –20 A sağlamaktadır. Her daldaki direnç –20 A'in iki dal arasında nasıl bölüneceğini belirlemektedir. Özellikle, –20 A'in dörtte biri i_o dalında belirmektedir, dolayısıyla $t < 0$ için i_o –5 A'dir. $t = 0$'da akım kaynağı –20 A'den 20 A'e sıçradığında i_o son değeri olan 5 A'e zaman sabiti $\frac{1}{4}$ s ile üstel olarak ulaşır.

Fourier dönüşümünün önemli bir özelliği bir sinüzoidal sürücü fonksiyona ait durgun durum tepkisini doğrudan verebilmesidir. Bunun nedeni, cos $\omega_0 t$'nin Fourier dönüşümünün, bu fonksiyonun tüm zaman boyunca var olduğu varsayımına dayanmaktadır. Örnek 17.2 bu özelliği betimlemektedir.



Şekil 17.10 ▲ $i_o(t)$'nin t'ye karşı çizimi.

Örnek 17.2 **Sinüzoidal Durgun Durum Tepkisini Bulmak İçin Fourier Dönüşümünün Kullanılması**

Örnek 17.1'deki (Şekil 17.9) devrede akım kaynağı bir sinüzoidal kaynak ile değiştirilmiştir. Akım ifadesi

$$i_g(t) = 50\cos 3t \text{ A}$$

verilmiştir. Fourier dönüşüm yöntemini kullanarak $i_o(t)$'yi bulunuz.

Çözüm

Sürücü fonksiyonun dönüşümü

$$I_g(\omega) = 50\pi[\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)]$$

ile verilir. Daha önce olduğu gibi, devrenin aktarım fonksiyonu

$$H(\omega) = \frac{1}{4 + j\omega}$$

bulunur. O zaman akım tepkisi

$$I_o(\omega) = 50\pi\frac{\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)}{4 + j\omega}$$

elde edilir. Dürtü fonksiyonunun filtre özelliği nedeniyle $I_o(\omega)$'nın ters dönüşümünü bulmanın en kolay yolu ters dönüşüm integralidir:

$$\begin{aligned} i_o(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{I_o(\omega)\} \\ &= \frac{50\pi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)}{4 + j\omega}\right]e^{j\omega t}\,d\omega \\ &= 25\left(\frac{e^{j3t}}{4 + j3} + \frac{e^{-j3t}}{4 - j3}\right) \\ &= 25\left(\frac{e^{j3t}e^{-j36.87}}{5} + \frac{e^{-j3t}e^{j36.87}}{5}\right) \\ &= 5[2\cos(3t - 36.87^\circ)] \\ &= 10\cos(3t - 36.87^\circ). \end{aligned}$$

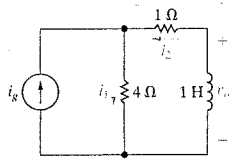
$i_o(t)$ için çözümün fazör analizi çözümü ile aynı olduğunu sağlamayı size bırakıyoruz.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 2 – Bir devrenin tepkisini bulmak için Fourier dönüşümünün nasıl kullanılacağını öğrenmek

17.6 Devrede gösterilen akım kaynağı 10 sgn (t) A akım sağlamaktadır. Tepki 1 H indüktör üzerindeki gerilimdir. Aşağıdakileri hesaplayınız:

(a) $I_g(\omega)$; (b) $H(j\omega)$; (c) $V_o(\omega)$; (d) $v_o(t)$; (e) $i_1(0^-)$; (f) $i_1(0^+)$; (g) $i_2(0^-)$; (h) $i_2(0^+)$; (i) $v_o(0^-)$ ve (j) $v_o(0^+)$.



Cevap: (a) $20/j\omega$;
(b) $4j\omega/(5 + j\omega)$;
(c) $80/(5 + j\omega)$;
(d) $80e^{-5t}u(t)$ V;
(e) −2 A;
(f) 18 A;
(g) 8 A;
(h) 8 A;
(i) 0 V;
(j) 80 V.

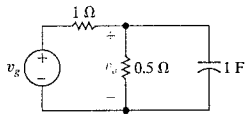
17.7 Şekildeki devrede gösterilen gerilim kaynağı

$$v_g = e^t u(-t) + u(t) \text{ V}.$$

gerilimini üretmektedir.

a) Fourier dönüşümü yöntemini kullanarak v_a'yı bulunuz.

b) $v_a(0^-)$, $v_a(0+)$ ve $v_a(\infty)$'u hesaplayınız.



Cevap: (a) $v_a = \frac{1}{4}e^t u(-t) - \frac{1}{12}e^{-3t}u(t) + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\text{sgn}(t)$ V;

(b) $\frac{1}{4}$ V, $\frac{1}{4}$ V, $\frac{1}{3}$ V.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 17.22, 17.28 ve 17.32'yi de çözmeyi deneyiniz.

17.8 Parseval Teoremi

Parseval teoremi sonlu enerjiye sahip bir zaman bölgesi fonksiyonunun enerjisinin, bu fonksiyonun Fourier dönüşümü ile arasındaki bağı kurar. Zaman bölgesi fonksiyonu $f(t)$'nin 1 Ω direncin ya üzerindeki gerilim ya da içindeki akım olduğunu düşününüz. O zaman bu fonksiyon ile ilişkili enerji

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt. \tag{17.57}$$

olacaktır. Parseval teoremi, aynı enerjinin frekans bölgesindeki bir integral alma ile de hesaplanabileceğini söyler ve daha açık olarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega \tag{17.58}$$

ile verilir. Dolayısıyla $f(t)$ ile bağlantılı enerji, ya $f(t)$'nin karesinin tüm zamanlar üzerinden integrali olarak ya da $f(t)$'nin Fourier dönüşümünün büyüklüğünün karesinin tüm frekanslar üzerinden integralinin $1/2\omega$ katı olarak hesaplanabilir. Parseval teoremi her iki integralin var olması durumunda geçerlidir.

Sınırlı enerjiye sahip zaman alanı sinyaller ile ilişkili ortalama güç, tüm zamanlar üzerinden ortalandığında sıfırdır. Dolayısıyla, bu tür sinyalleri karşılaştırırken sinyalin enerji içeriğine başvururuz. Enerji hesaplamaları için bir 1 Ω direnci temel almak, gerilim ve akım sinyallerinin enerji içeriğini karşılaştırmak için kullanışlıdır.

Eş. 17.58'in türetilmesine sol taraftaki integralin içini $f(t)$'nin kendisi ile çarpımı olarak yazarak başlarız ve daha sonra $f(t)$'yi bir ters dönüşüm integrali cinsinden ifade ederiz:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,f(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\right]dt. \end{aligned} \tag{17.59}$$

$f(t)$'yi içerdeki integralin içine kaydırabiliriz, çünkü içteki integral ω değişkenine göre alınmaktadır ve $1/2\omega$ sabiti her iki integralin de dışına konulabilmektedir. Sonuç olarak Eş. 17.59

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,f(t)e^{j\omega t}\,d\omega\right]dt \tag{17.60}$$

haline gelir. İntegral alma sırasını tersine çeviririz ve bunu yaparken $F(\omega)$'nın t'ye göre alınan integralin dışına çıkarılabileceğini gözlemleriz. Dolayısıyla,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}\,dt\right]d\omega. \tag{17.61}$$

İçerideki integral $F(-\omega)$'dır, böylece Eş. 17.61

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,F(-\omega)\,d\omega \tag{17.62}$$

haline indirgenir.

Kısım 17.6'da $F(-\omega) = F^*(\omega)$ olduğuna dikkat etmiştik. Dolayısıyla $F(\omega)F(-\omega)$ çarpımı basitçe $F(\omega)$'nın genliğinin karesidir ve Eş. 17.62 Eş. 17.58'e eşdeğerdir. Aynı zamanda $|F(\omega)|^2$'nin ω'nın bir çift fonksiyonu olduğuna da dikkat etmiştik. Sonuç olarak Eş. 17.58'i aşağıdaki şekilde de yazabiliriz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega. \qquad (17.63)$$

Parseval Teoreminin Bir Gösterimi

Eş. 17.63'ün geçerliliğinin gösterimini en iyi biçimde belirli bir örnekle sunabiliriz. Eğer

$$f(t) = e^{-a|t|}$$

ise, Eş. 17.63'ün sol tarafı

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|t|}\,dt &= \int_{-\infty}^{0} e^{2at}\,dt + \int_0^{\infty} e^{-2at}\,dt \\ &= \left.\frac{e^{2at}}{2a}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{-2at}}{-2a}\right|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{a} \qquad (17.64)\end{aligned}$$

haline dönüşür. $f(t)$'nin Fourier dönüşümü

$$F(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

bulunur ve dolayısıyla Eş. 17.63'ün sağ tarafı

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{4a^2}{(a^2+\omega^2)^2}\,d\omega &= \frac{4a^2}{\pi}\frac{1}{2a^2}\left.\left(\frac{\omega}{\omega^2+a^2} + \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{\omega}{a}\right)\right|_0^{\infty} \\ &= \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{\pi}{2a} - 0 - 0\right) \\ &= \frac{1}{a} \qquad (17.65)\end{aligned}$$

olur. Eş. 17.65 tarafından verilen sonucun Eş. 17.64 tarafından verilenle aynı olduğuna dikkat ediniz.

Parseval Teoreminin Açıklaması

Parseval teoremi, $|F(\omega)|^2$ Fourier dönüşümü genlik karesinin bir enerji yoğunluğu (hertz başına joule) olduğuna dair bir fiziksel açıklama getirmektedir. Bunu görmek için, Eş. 17.63'ün sağ tarafını

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} |F(2\pi f)|^2 2\pi\,df = 2\int_0^{\infty} |F(2\pi f)|^2\,df \qquad (17.66)$$

yazarız. Burada $|F(2\pi f)|^2 df$ sonsuz küçük bir df frekans bandındaki enerjidir ve $f(t)$ ile ilişkili toplam 1 Ω enerji $|F(2\omega f)|^2 df$'in tüm frekanslar üzerinden toplamıdır (integralidir). Toplam enerjinin bir kısmını belirli bir frekans bandı ile ilişkilendirebiliriz. Başka bir deyişle, ω_1'den ω_2'ye olan frekans bandındaki 1Ω enerji

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2\,d\omega \qquad (17.67)$$

ile verilir. İntegrali frekans alanında

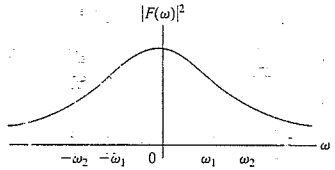
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega$$

yerine

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega$$

ile ifade etmek Eş. 17.67'nin aşağıdaki biçimde yazılmasına izin verir:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_2}^{-\omega_1} |F(\omega)|^2\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2\,d\omega. \qquad (17.68)$$



Şekil 17.11 Eş. 17.68'in grafiksel açıklaması.

Şekil 17.11, Eş. 17.68'in grafiksel açıklamasını vermektedir.

Örnekler 17.3 –17.5 Parseval teoremini içeren örnekleri sunmaktadır.

Örnek 17.3 Parseval Teoreminin Uygulanması

Bir 40 Ω dirençteki akım

$$i = 20e^{-2t}u(t)\ \text{A}$$

verilmektedir. Dirençte tüketilen toplam gücün yüzde kaçı $0 \le \omega \le 2\sqrt{3}$ rad/s frekans bandı ile ilişkilendirilebilir?

Çözüm

40 Ω dirençte tüketilen toplam güç

$$\begin{aligned}W_{40\Omega} &= 40\int_0^{\infty} 400e^{-4t}\,dt \\ &= 16{,}000\left.\frac{e^{-4t}}{-4}\right|_0^{\infty} = 4000\ \text{J}\end{aligned}$$

bulunur. Bu toplam enerji hesabının sağlamasını Parseval teoremi ile yapabiliriz:

$$F(\omega) = \frac{20}{2 + j\omega}.$$

Dolayısıyla

$$|F(\omega)| = \frac{20}{\sqrt{4+\omega^2}}$$

ve

$$\begin{aligned}W_{40\Omega} &= \frac{40}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{400}{4+\omega^2}\,d\omega \\ &= \frac{16{,}000}{\pi}\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\omega}{2}\Big|_0^{\infty}\right) \\ &= \frac{8000}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4000\ \text{J}\end{aligned}$$

bulunur. $0 \le \omega \le 2\sqrt{3}$ rad/s frekans bandı ile ilişkili enerji ise

$$\begin{aligned}W_{40\Omega} &= \frac{40}{\pi}\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{400}{4+\omega^2}\,d\omega \\ &= \frac{16{,}000}{\pi}\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\omega}{2}\Big|_0^{2\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{8000}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{8000}{3}\ \text{J}\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak bu frekans aralığı ile ilişkili toplam gücün yüzdesi

$$\eta = \frac{8000/3}{4000} \times 100 = 66.67\%$$

bulunur.

Örnek 17.4 Parseval Teoreminin İdeal Bant Geçiren Filtreye Uygulanması

Bir ideal bant geçiren filtrenin girişi

$$v(t) = 120e^{-24t}u(t)\ \text{V}$$

verilmiştir. Filtre 24 ve 48 rad/s arasındaki tüm frekansları zayıflatmadan geçirmekte ve bu geçirme bandı dışındaki tüm frekansları reddetmektedir.

a) Filtre giriş gerilimi olarak $|V(\omega)|^2$'yi çiziniz.

b) Filtre çıkış gerilimi olarak $|V_o(\omega)|^2$'yi çiziniz.

c) Filtre girişindeki toplam 1 Ω enerji içeriğinin yüzde kaçı çıkışta mevcuttur?

Çözüm

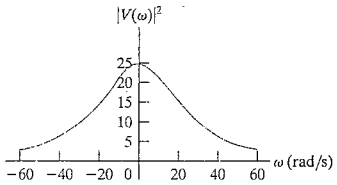
a) Filtre giriş geriliminin Fourier dönüşümü

$$V(\omega) = \frac{120}{24 + j\omega}$$

bulunur. Dolayısıyla

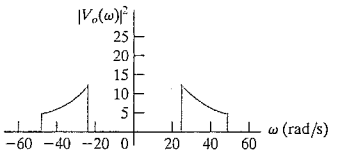
$$|V(\omega)|^2 = \frac{14{,}400}{576 + \omega^2}$$

yazılabilir. Şekil 17.12 $|V(\omega)|^2$'nin ω'ya karşı çizimini göstermektedir.



Şekil 17.12 Örnek 17.4 için $|V(\omega)|^2$'nin ω'ya karşı çizimi.

b) İdeal bant geçiren filtre geçirme bandı dışındaki tüm frekansları reddetmektedir, dolayısıyla $|V_o(\omega)|^2$'nin ω'ya karşı çizimi Şekil 17.13'te verildiği gibidir.



Şekil 17.13 Örnek 17.4 için $|V_o(\omega)|^2$'nin ω'ya karşı çizimi.

c) Filtrenin girişindeki toplam 1 Ω enerji

$$W_i = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{14{,}400}{576 + \omega^2}\,d\omega = \frac{14{,}400}{\pi}\left(\frac{1}{24}\tan^{-1}\frac{\omega}{24}\Big|_0^\infty\right)$$

$$= \frac{600}{\pi}\,\frac{\pi}{2} = 300\ \text{J}$$

bulunur.

Filtrenin çıkışındaki toplam 1 Ω enerji ise

$$W_o = \frac{1}{\pi}\int_{24}^{48} \frac{14{,}400}{576 + \omega^2}\,d\omega = \frac{600}{\pi}\tan^{-1}\frac{\omega}{24}\Big|_{24}^{48}$$

$$= \frac{600}{\pi}(\tan^{-1}2 - \tan^{-1}1) = \frac{600}{\pi}\left(\frac{\pi}{2.84} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 61.45\ \text{J}$$

olarak elde edilir. Giriş enerjisinin çıkış enerjisindeki mevcut yüzdesi

$$\eta = \frac{61.45}{300} \times 100 = 20.48\%$$

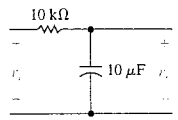
bulunur.

Örnek 17.5 Parseval Teoreminin Alçak Geçiren Filtreye Uygulanması

Parseval teoremi $v_o(t)$ için zaman bölgesi ifadesini bilmesek bile, filtre çıkışındaki enerjiyi hesaplayabilmemizi mümkün kılmaktadır. Şekil 17.14'teki alçak geçiren RC devresinin girişine

$$v_i(t) = 15e^{-5t}u(t)\ \text{V}$$

uygulandığını varsayınız.



Şekil 17.13 Örnek 17.5 için alçak geçiren RC filtre.

a) Filtre girişindeki toplam 1 Ω enerji içeriğinin yüzde kaçı çıkışta mevcuttur?

b) Çıkış enerjisinin yüzde kaçı $0 \le \omega \le 10$ rad/s frekans aralığı ile ilişkilidir?

Çözüm

a) Filtre girişindeki sinyalin 1 Ω enerjisi

$$W_i = \int_0^\infty (15e^{-5t})^2\,dt = 225\frac{e^{-10t}}{-10}\Big|_0^\infty = 22.5\ \text{J}$$

bulunur. Çıkış geriliminin Fourier dönüşümü ise

$$V_o(\omega) = V_i(\omega)H(\omega)$$

elde edilir. Burada

$$V_i(\omega) = \frac{15}{5 + j\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{1/RC}{1/RC + j\omega} = \frac{10}{10 + j\omega}$$

ile verilmiştir. Dolayısıyla

$$V_o(\omega) = \frac{150}{(5 + j\omega)(10 + j\omega)}$$

$$|V_o(\omega)|^2 = \frac{22{,}500}{(25 + \omega^2)(100 + \omega^2)}$$

bulunur. Filtre çıkışındaki sinyalde varolan 1 Ω enerjisi

$$W_o = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{22{,}500}{(25 + \omega^2)(100 + \omega^2)}\,d\omega$$

olarak yazılabilir. İntegralin içini kısmi kesirler toplamı halinde açarak integrali kolayca hesaplayabiliriz:

$$\frac{22{,}500}{(25 + \omega^2)(100 + \omega^2)} = \frac{300}{25 + \omega^2} - \frac{300}{100 + \omega^2}.$$

O zaman

$$W_o = \frac{300}{\pi}\left\{\int_0^\infty \frac{d\omega}{25 + \omega^2} - \int_0^\infty \frac{d\omega}{100 + \omega^2}\right\}$$

$$= \frac{300}{\pi}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{10}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 15\ \text{J}$$

hesaplanır. Dolayısıyla, giriş enerjisinin %66.67'si çıkış enerjisinde bulunmaktadır, yani

$$\eta = \frac{15}{22.5}(100) = 66.67\%.$$

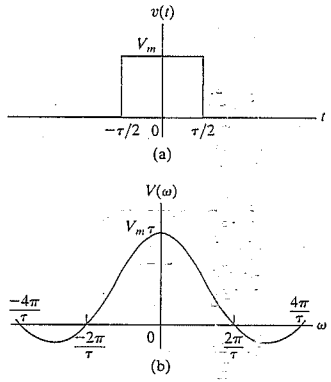
b) $0 \le \omega \le 10$ rad/s frekans aralığı ile ilişkili çıkış enerjisi

$$W_o' = \frac{300}{\pi}\left\{\int_0^{10} \frac{d\omega}{25 + \omega^2} - \int_0^{10} \frac{d\omega}{100 + \omega^2}\right\}$$

$$= \frac{300}{\pi}\left(\frac{1}{5}\tan^{-1}\frac{10}{5} - \frac{1}{10}\tan^{-1}\frac{10}{10}\right) = \frac{30}{\pi}\left(\frac{2\pi}{2.84} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 13.64\ \text{J}$$

hesaplanır. Çıkış sinyalindeki toplam 1 Ω enerjisi 15 J'dür, dolayısıyla $0 \le \omega \le 10$ rad/s frekans aralığı ile ilişkili yüzde %90.97'dir.



Şekil 17.15 ▲ Dikdörtgen gerilim darbesi ve Fourier dönüşümü. (a) Dikdörtgen gerilim darbesi. (b) $v(t)$'nin Fourier dönüşümü.

Bir Dikdörtgen Gerilim Darbesinde içerilen Enerji

Parseval teoremi ile ilgili tartışmamızı bir dikdörtgen gerilim darbesi ile bağlantılı enerjiyi hesaplayarak sonlandırıyoruz. Kısım 17.1'de gerilim darbesinin Fourier dönüşümünü

$$V(\omega) = V_m\tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} \tag{17.69}$$

olarak bulmuştuk. Tartışmamıza yardımcı olması için gerilim darbesi ve Fourier dönüşümü sırasıyla Şekil 17.15(a) ve (b)'de tekrar çizilmiştir. Bu şekiller, gerilim darbesinin genişliği (τ) daraldıkça, genlik spektrumunun baskın kısmının ($-2\omega/\tau$'dan $2\omega/\tau$'a kadar olan kısım) daha geniş bir frekans aralığına dağıldığını göstermektedir. Bu sonuç, daha önceki ölçek değişimini içeren işlemsel dönüşüm ile ilgili yorumlarımızla, yani zaman sıkıştırıldığında frekansın esnemesi ve tersi durum ile tutarlıdır. Tek dikdörtgen darbeyi yeterli doğrulukla iletmek için, sistemin bant genişliği en azından genlik spektrumunun baskın kısmını barındıracak kadar geniş olmalıdır. Dolayısıyla, kesim frekansı en az $2\omega/\tau$ rad/s veya $1/\tau$ Hz olmalıdır.

Parseval teoremini $v(t)$'nin $0 \le \omega \le 2\omega/\tau$ frekans aralığında kalan enerjisinin toplam enerjiye oranını hesaplarken de kullanabiliriz. Eş. 17.69'dan

$$W = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi/\tau} V_m^2\tau^2 \frac{\sin^2 \omega\tau/2}{(\omega\tau/2)^2}\, d\omega \tag{17.70}$$

bulunur. Eş. 17.70'te belirtilen integrali hesaplamak için

$$x = \frac{\omega\tau}{2} \tag{17.71}$$

olmasına izin verir ve

$$dx = \frac{\tau}{2}\, d\omega \tag{17.72}$$

ile

$$x = \pi, \quad \omega = 2\pi/\tau \text{ iken} \tag{17.73}$$

olduğuna dikkat ederiz. Eğer Eş. 17.71 –17.73 ile verilen yerine koymaları gerçekleştirirsek, Eş. 17.70

$$W = \frac{2V_m^2\tau}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx \tag{17.74}$$

haline dönüşür. Eş. 17.74'teki integrali kısmi integralle hesaplayabiliriz. Eğer

$$u = \sin^2 x \tag{17.75}$$

$$dv = \frac{dx}{x^2} \tag{17.76}$$

ise

$$du = 2\sin x\cos x\, dx = \sin 2x\, dx, \tag{17.77}$$

ve

$$v = -\frac{1}{x} \tag{17.78}$$

olur. Buradan

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = -\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{x}\sin 2x\, dx$$
$$= 0 + \int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{x}\, dx \tag{17.79}$$

elde edilir. Eş. 17.79'u Eş. 17.74'te yerine koymak

$$W = \frac{4V_m^2\tau}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{2x}\, dx \tag{17.80}$$

sonucunu verecektir. Eş. 17.80'deki integrali hesaplamak için ilk olarak ifadeyi $\sin y/y$ haline getiririz. Bunu $y = 2x$ olmasına izin vererek ve $dy = 2dx$ ve $x = \omega$ iken $y = 2\omega$ olduğuna dikkat ederek yaparız. Dolayısıyla Eş. 17.80

$$W = \frac{2V_m^2\tau}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin y}{y}\, dy \tag{17.81}$$

haline gelir. Eş. 17.81'deki integralin değeri bir sinüs integralleri tablosundan[1] bulunabilir ve değeri 1.41815'tir. Böylece

$$W = \frac{2V_m^2\tau}{\pi}(1.41815) \tag{17.82}$$

yazılır. $v(t)$ ile ilintili toplam 1 Ω enerji, ya zaman alanı integraliyle veya Eş. 17.81'in üst sınırını sonsuza eşitleyip hesaplayarak bulunabilir. Her iki durumda da, toplam enerji

$$W_t = V_m^2\tau \tag{17.83}$$

olarak bulunur. Toplam enerjinin, 0 ve $2\omega/\tau$ arasındaki frekans bandı ile ilişkili olan kısmının oranı

$$\eta = \frac{W}{W_t}$$
$$= \frac{2V_m^2\tau(1.41815)}{\pi(V_m^2\tau)}$$
$$= 0.9028 \tag{17.84}$$

bulunur. Sonuç olarak, $v(t)$ ile bağlantılı enerjinin yaklaşık %90'ı genlik spektrumunun baskın kısmında yer almaktadır.

[1] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover, 1965), s. 244.

✓ DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 3 – Parseval teoremini anlamak ve kullanabilmek

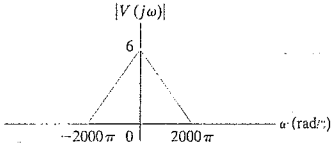
17.8 Bir 50 Ω direnç üzerindeki gerilim

$$v = 4te^{-t}u(t)\ \text{V}$$

verilmiştir. Direnç üzerinde harcanan toplam enerjinin yüzde kaçı $0 \le \omega \le \sqrt{3}$ rad/s frekans bandı ile ilişkilidir?

Cevap: %94.23

17.9 $v(t)$'nin Fourier dönüşümünün genliğinin bilindiğini varsayınız. Bu gerilim bir 6 kΩ dirence uygulanmaktadır. Dirence aktarılan toplam enerjiyi hesaplayınız.



Cevap: 4 J.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 17.39'u da çözmeyi deneyiniz.

Özet

- Fourier dönüşümü bir periyodik olmayan zaman bölgesi fonksiyonunun frekans bölgesi betimlemesini verir. Zaman bölgesi sinyalinin doğasına bağlı olarak, fonksiyonun Fourier dönüşümünü bulmak için aşağıdaki üç yaklaşımdan birisi kullanılabilir:
  - Eğer zaman bölgesi fonksiyon sınırlı süreye sahip bir iyi davranışlı darbe ise, Fourier dönüşümünü tanımlayan integral kullanılabilir.
  - Eğer $f(t)$'nin tek taraflı Laplace dönüşümü mevcutsa ve $F(s)$'nin tüm kutupları s düzleminin sol tarafındaysa, $F(\omega)$'yı bulmak için $F(s)$ kullanılabilir.
  - Eğer $f(t)$ bir sabit, bir işaret fonksiyonu, bir basamak fonksiyonu veya bir sinüzoid fonksiyon ise, Fourier dönüşümü limit sürecini kullanarak bulunur.

  (Bkz. sf. 699.)
- Devre analizinde yaralı olabilecek fonksiyonel ve işlemsel Fourier dönüşümleri Tablo 17.1 ve 17.2'de verilmektedir. (Bkz. sf. 708 ve 713.)
- Tepki sinyali $y(t)$'nin Fourier dönüşümü

  $$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

  ile verilir.
- Burada $X(\omega)$ giriş sinyalinin Fourier dönüşümü, ve $H(\omega)$ aktarım fonksiyonu $H(s)$'nin $s = j\omega$'da bulunmuş halidir. (Bkz. sf. 713.)
- Fourier dönüşümü hem negatif hem de pozitif zaman fonksiyonları için kullanılır ve dolayısıyla $t = -\infty$'da başlayan olayları tanımlayan problemler için uygundur. Tersine, tek taraflı Laplace dönüşümü başlangıç koşulları ve $t > 0$'da oluşan olayları tanımlamak için uygundur.
- Fourier dönüşümünün genliğinin karesi frekans alanındaki enerji yoğunluğunun (hertz başına joule) bir ölçütüdür (Parseval teoremi). Dolayısıyla Fourier dönüşümü $f(t)$'nin içerdiği toplam enerjinin bir kısmını belirli bir frekans bandıyla ilişkilendirmemizi sağlar. (Bkz. sf. 717.)

Problemler

Kısım 17.1 –17.2

17.1 Aşağıdaki fonksiyonların Fourier dönüşümlerini bulmak için tanımlayıcı integrali kullanınız:

a) $f(t) = A\sin\frac{\pi}{2}t, \quad -2 \le t < 2;$

$f(t) = 0$, diğer durumda.

b) $f(t) = \frac{2A}{\tau}t + A, \quad -\frac{\tau}{2} \le t \le 0;$

$f(t) = -\frac{2A}{\tau}t + A, \quad 0 \le t \le \frac{\tau}{2};$

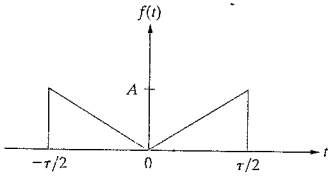
$f(t) = 0$, diğer durumda.

17.2 a) Şekil P17.2'de gösterilen fonksiyonun Fourier dönüşümünü bulunuz.

b) $\omega = 0$ iken $F(\omega)$'yı bulunuz.

c) ω'ya karşılık $F(\omega)$'yi $A = 2$ ve $\tau = 1$ iken çiziniz. *İpucu:* $F(\omega)$'nın $\omega = \pm1, \pm2, \pm3, ..., \pm15$'teki değerlerini hesaplayınız. Daha sonra $|F(\omega)|$'nın ω'nın çift fonksiyonu olduğu gerçeğini kullanınız.

Şekil P17.2



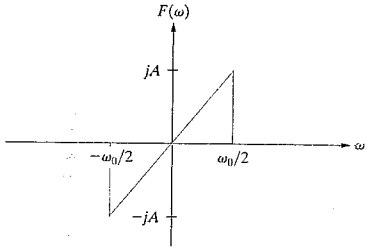
17.3 $f(t)$'nin Fourier dönüşümü Şekil P17.3'te gösterilmektedir.

a) $f(t)$'yi bulunuz.

b) $f(0)$'ı hesaplayınız.

c) $f(t)$'yi $-10 \le t \le 10$s için $A = 2\omega$ ve $\omega_0 = 2$ rad/s iken çiziniz. *İpucu:* $f(t)$'yi $t = 0, 1, 2, 3, ..., 10$ s için hesaplayınız ve daha sonra $f(t)$'nin bir çift fonksiyon olduğu gerçeğini kullanınız.

Şekil P17.3



Kısım 17.3 –17.5

17.4 Aşağıdaki fonksiyonların her birinin Fourier dönüşümünü bulunuz. Tüm fonksiyonlarda, a bir pozitif sabittir ve $-\infty \le t \le \infty$ geçerlidir.

a) $f(t) = |t|e^{-a|t|}$;

b) $f(t) = t^3e^{-a|t|}$;

c) $f(t) = e^{-a|t|}\cos\omega_0 t$;

d) $f(t) = e^{-a|t|}\sin\omega_0 t$;

e) $f(t) = \delta(t - t_0)$.

17.5 $\mathcal{F}\{\sin\omega_0 t\}$'yi çıkarınız.

17.6 Eğer $f(t)$ t'nin bir gerçek fonksiyonu ise, ters dönüşüm integralinin aşağıdaki ifadeye indirgendiğini gösteriniz

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A(\omega)\cos\omega t - B(\omega)\sin\omega t]\,d\omega.$$

17.7 Eğer $f(t)$ bir gerçek, t'nin tek fonksiyonu ise, ters dönüşüm integralinin aşağıdaki ifadeye indirgendiğini gösteriniz

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B(\omega)\sin\omega t\,d\omega.$$

17.8 Ters dönüşüm integralini (17.9) $\mathcal{F}^{-1}\{2/j\omega\} = \text{sgn}(t)$ olduğunu göstermek için kullanınız. *İpucu:* Problem 17.7'yi kullanınız.

17.9 ϵ bir pozitif gerçek sabit ise $\mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\}$'yi aşağıdaki yaklaşık fonksiyonu kullanarak bulunuz:

$$f(t) = e^{-\epsilon|t|}\cos\omega_0 t.$$

17.10 $f(t)$ bir çift fonksiyonsa

$$A(\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\cos\omega t\,dt,$$

$$B(\omega) = 0$$

olduğunu gösteriniz.

17.11 $f(t)$ bir tek fonksiyonsa

$$A(\omega) = 0,$$

$$B(\omega) = -2\int_0^\infty f(t)\sin\omega t\,dt$$

olduğunu gösteriniz.

Kısım 17.6

17.12 a) $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ ise $\mathcal{F}\{df(t)/dt\} = j\omega F(\omega)$ olduğunu gösteriniz. *İpucu:* Tanımlayıcı integrali kısmi integrasyon tekniği ile kullanınız.

b) Eğer (a)'da verilen sonuç geçerli ise $f(t)$ üzerindeki kısıtlama nedir?

c) $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ ise $\mathcal{F}\{d^n f(t)/dt^n\} = (j\omega)^n F(\omega)$ olduğunu gösteriniz.

17.13 a) $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ ise

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(x)dx\right\} = \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

olduğunu gösteriniz. *İpucu:* Tanımlayıcı integrali kısmi integrasyon tekniği ile kullanınız.

b) Eğer (a)'da verilen sonuç geçerli ise $f(x)$ üzerindeki kısıtlama nedir?

c) Eğer $f(x) = e^{-ax}u(x)$ ise, (a)'daki işlemsel dönüşüm kullanılabilir mi? Açıklayınız.

17.14 a) $\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a > 0$

olduğunu gösteriniz.

b) $a > 0$ için $f(at) = e^{-a|t|}$ verildiyse, $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(at)\}$'yi $a = 0.5$, 1.0 ve 2.0 için çiziniz. Çizimleriniz zaman alanında *sıkıştırma*nın frekans alanında *esnetme*ye karşılık geldiği gözlemini yansıtıyor mu?

17.15 Aşağıdaki işlemsel dönüşümleri çıkarınız.

a) $\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-j\omega a}F(\omega)$;

b) $\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}f(t)\} = F(\omega - \omega_0)$;

c) $\mathcal{F}\{f(t)\cos\omega_0 t\} = \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0)$.

17.16 $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda$

verildiyse, $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ ve $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ ise $Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = X(\omega)H(\omega)$ olduğunu gösteriniz. *İpucu:* Tanımlayıcı integrali

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda\right]e^{-j\omega t}\,dt$$

yazmak için kullanınız. Ardından integrallerin sırasını ters çeviriniz ve daha sonra integral değişkeni değişimi gerçekleştiriniz, yani $u = t - \lambda$ alınız.

17.17 $f(t) = f_1(t)f_2(t)$ verildiyse, $(1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u)\,du$ olduğunu gösteriniz. *İpucu:* İlk olarak tanımlayıcı integrali $F(\omega)$'yı

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

olarak ifade etmek için kullanınız. İkinci olarak, ters dönüşüm integralini

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)e^{ju t}\,du$$

yazmak için kullanınız. Üçüncü olarak, $f_1(t)$ için ifadeyi tanımlayıcı integralde yerine koyunuz ve daha sonra integrallerin sırasını değiştiriniz.

17.18 a) $(j)^n\left[\frac{d^nF(\omega)}{d\omega^n}\right] = \mathcal{F}\{t^n f(t)\}$

olduğunu gösteriniz.

b) (a)'daki sonucu aşağıdaki Fourier dönüşümlerini bulmak için kullanınız:

$$\mathcal{F}\{te^{-at}u(t)\},$$
$$\mathcal{F}\{|t|e^{-a|t|}\},$$
$$\mathcal{F}\{te^{-a|t|}\}.$$

17.19 $f_1(t) = \cos\omega_0 t,$

$f_2(t) = 1, \quad -\tau/2 < t < \tau/2;$

$f_2(t) = 0,$ diğer durumda.

iken $f(t) = f_1(t)f_2(t)$ olduğunu düşününüz.

a) $F(\omega)$'yı bulmak için frekans alanında evrişimi kullanınız.

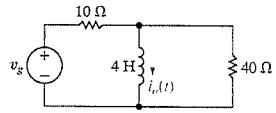
b) $f_2(t)$'nin genişliği $f(t)$ $f_1(t)$'nin daha fazla devirini içerek şekilde artarsa $F(\omega)$'ya ne olur?

Kısım 17.7

17.20 a) Şekil P17.20'de gösterilen devredeki $i_o(t)$ akımını bulmak için Fourier dönüşümünü kullanınız. $i_o(t)$'nin başlangıç değeri sıfırdır ve kaynak gerilimi 125 $u(t)$ V'tur.

b) $i_o(t)$'yi t'ye karşı çiziniz.

Şekil P17.20

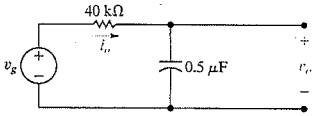


17.21 Problem 17.20'yi (v_g) giriş geriliminin 125 sgn(t)'ye değiştirildiği durum için tekrarlayınız.

17.22 a) Eğer $v_g(t) = 20\,\mathrm{sgn}(t)$ V ise, Şekil P17.22'de gösterilen devrede $v_o(t)$'yi bulmak için Fourier dönüşümü yöntemini kullanınız.

b) Çözümünüz bilinen devre davranışı bakımından anlamlı mıdır? Açıklayınız.

Şekil P17.22



17.23 Problem 17.22'yi $v_o(t)$'yi $i_o(t)$ ile yer değiştirerek tekrarlayınız.

17.24 Şekil P17.24'teki devrede gerilim kaynağı

$$v_g = 15\,\mathrm{sgn}(t)\ \mathrm{V}$$

olarak veriliyor.

a) $v_o(t)$'yi bulunuz.

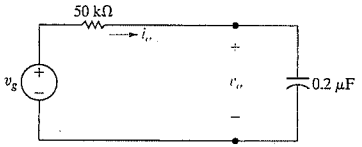
b) $v_o(0^-)$'nin değeri nedir?

c) $v_o(0^+)$'nın değeri nedir?

d) Laplace dönüşümü yöntemini, $t > 0^+$ için $v_o(t)$'yi bulmak için kullanınız.

e) (d)'de elde ettiğiniz çözüm (a)'daki $v_o(t)$ ile $t > 0^+$ için uyuşmakta mıdır?

Şekil P17.24

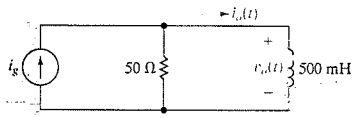


17.25 Problem 17.24'ü $v_o(t)$'yi $i_o(t)$ ile yer değiştirerek tekrarlayınız.

17.26 a) Eğer $i_g(t) = 2\,\mathrm{sgn}(t)$ A ise, Şekil P17.26'deki devrede v_o'yu bulmak için Fourier dönüşümünü kullanınız.

b) Çözümünüz bilinen devre davranışı bakımından anlamlı mıdır? Açıklayınız.

Şekil P17.26



17.27 Problem 17.24'ü i_o'yu v_o ile yer değiştirerek tekrarlayınız.

17.28 a) Eğer $v_g\ 30e^{-5|t|}$ V'a eşit ise, Şekil P17.28'deki v_o'yu bulmak için Fourier dönüşümünü kullanınız.

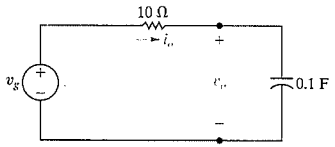
b) $v_o(0^-)$'yi bulunuz.

c) $v_o(0^+)$'yı bulunuz.

d) Laplace dönüşümü yöntemini, $t > 0$ için v_o'yu bulmak için kullanınız.

e) (d)'de elde ettiğiniz çözüm (a)'daki v_o ile $t > 0^+$ için uyuşmakta mıdır?

Şekil P17.28



17.29 a) Eğer $v_g\ 30e^{-5|t|}$ V'a eşit ise, Şekil P17.28'deki i_o'yu bulmak için Fourier dönüşümünü kullanınız.

b) $i_o(0^-)$'yi bulunuz.

c) $i_o(0^+)$'yı bulunuz.

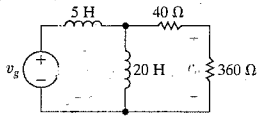
d) Laplace dönüşümü yöntemini, $t > 0$ için i_o'yu bulmak için kullanınız.

e) (d)'de elde ettiğiniz çözüm (a)'daki i_o ile $t > 0^+$ için uyuşmakta mıdır?

17.30 a) Eğer $v_g(t) = 125 \cos 75t$ V ise, Şekil P17.30'daki devrede v_o'yu bulmak için Fourier dönüşümünü kullanınız.

b) (a)'da elde edilen cevabı, fazör alanı analizini kullanarak v_o için durgun durum ifadesini bularak kontrol ediniz.

Şekil P17.30



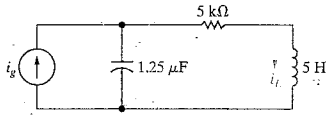
17.31 a) $i_g = -45e^{400t}u(-t) + 45e^{-400t}u(t)$ A iken Şekil P17.31'deki devrede v_o'yu bulmak için Fourier dönüşümü yöntemini kullanınız.

b) $i_L(0^-)$'yi bulunuz.

c) $i_L(0^+)$'yı bulunuz.

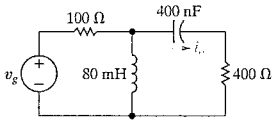
d) (b) ve (c)'de elde ettiğiniz cevaplar bilinen devre davranışı bakımından anlamlı mıdır? Açıklayınız.

Şekil P17.31



17.32 Eğer $v_g(t) = 200 \cos 2500t$ V ise, Şekil P17.32'deki devrede i_o'yu bulmak için Fourier dönüşümünü kullanınız.

Şekil P17.32



17.33 Şekil P17.33'teki devrede gerilim kaynağı

$$v_g = 18e^{4t}u(-t) - 12u(t) \text{ V}$$

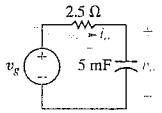
sinyalini üretmektedir.

a) $v_o(0^-)$ ve $v_o(0^+)$'yı bulunuz.

b) $i_L(0^-)$ ve $i_L(0^+)$'yı bulunuz.

c) v_o'yu bulunuz.

Şekil P17.33



17.34 a) Şekil P17.34'teki devrede v_o'yu bulmak için Fourier dönüşümünü kullanınız. Gerilim kaynağı

$$v_g = 90e^{-400|t|} \text{ V}$$

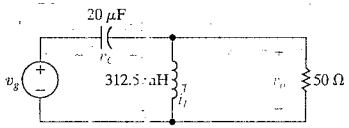
gerilimini üretmektedir.

b) $v_o(0^-)$, $v_o(0^+)$ ve $v_o(\infty)$'u bulunuz.

c) $i_L(0^-)$; $i_L(0^+)$; $v_C(0^-)$ ve $v_C(0^+)$'yı bulunuz.

d) (b)'de elde ettiğiniz sonuçlar bilinen devre davranışı bakımından anlamlı mıdır? Açıklayınız.

Şekil P17.34

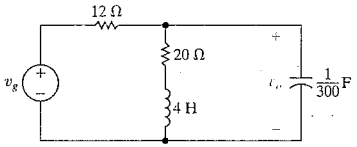


17.35 a) $v_g = 60e^{-t}u(-t) + 900te^{-5t}u(t)$ V iken Şekil P17.35'deki devrede v_o'yu bulmak için Fourier dönüşümü yöntemini kullanınız.

b) $v_o(0^-)$'yi bulunuz.

c) $v_o(0^+)$'yı bulunuz.

Şekil P17.35

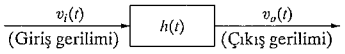


17.36 Şekil P17.36'te gösterilen sistemin giriş gerilimi $8u(t)$ V iken çıkış gerilimi

$$v_o = [60 - 40e^{-5t} + 20e^{-20t}]u(t) \text{ V}$$

verilmektedir. $v_i = 8 \text{ sgn}(t)$ V ise çıkış gerilimi nedir?

Şekil P17.46



Kısım 17.8

17.37 $F(\omega) = e^{\omega}u(-\omega) + e^{-\omega}u(\omega)$ verilmiş olsun.

a) $f(t)$'yi bulunuz.

b) $f(t)$ ile ilişkili 1 Ω enerjiyi zaman bölgesinde integral yoluyla bulunuz.

c) (b)'yi frekans bölgesinde integrali kullanarak tekrarlayınız.

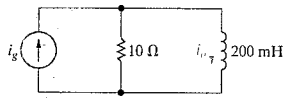
d) $f(t)$ %90 enerjisine $0 \le \omega \le \omega_1$ bandında sahipse ω_1 değerini bulunuz.

17.38 Şekil P17.38'de görülen devrenin giriş akım değeri

$$i_g = 3e^{-25t} \text{ A}, \quad t \ge 0^+$$

verilmiştir. 0'dan 10 rad/s'ye kadar olan frekans aralığında, toplam 1Ω enerji içeriğinin yüzde kaçı bulunmaktadır?

Şekil P17.38



17.39 Şekil P17.39'daki devrenin giriş gerilimi şöyledir $v_g = 50e^{-|5t|}u(t)$ V.

a) $v_o(t)$'yi bulunuz.

b) $-10 \le \omega \le 10$ rad/s için $|V_g(\omega)|$'yı çiziniz.

c) $-10 \le \omega \le 10$ rad/s için $|V_o(\omega)|$'yı çiziniz.

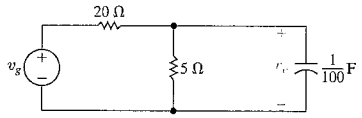
d) v_g'nin 1Ω enerji içeriğini hesaplayınız.

e) v_o'nun 1Ω enerji içeriğini hesaplayınız.

f) $0 \le \omega \le 10$ rad/s frekans aralığında, v_g'nin toplam 1Ω enerji içeriğinin yüzde kaçı bulunmaktadır?

g) (f)'yi v_o için tekrarlayınız.

Şekil P17.39



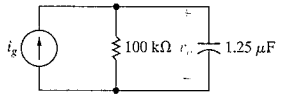
17.40 Şekil P17.40'ta gösterilen devre

$$i_g = 30e^{-2t}u(t) \ \mu\text{A}$$

akımı ile sürülmektedir.

$0 \le \omega \le 4$ rad/s frekans aralığında, v_o'nun toplam 1Ω enerji içeriğinin yüzde kaçı bulunmaktadır?

Şekil P17.40



17.41 Şekil P17.41'deki yüksek geçiren RC filtrenin giriş geriliminin genlik spektrumu

$$V_i(\omega) = \frac{200}{|\omega|}, \quad 100 \text{ rad/s} \le |\omega| \le 200 \text{ rad/s};$$

$$V_i(\omega) = 0, \quad \text{diğer durumda}$$

verilmiştir.

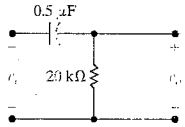
a) $-300 \le \omega \le 300$ rad/s için $|V_i(\omega)|^2$'yı çiziniz.

b) $-300 \le \omega \le 300$ rad/s için $|V_o(\omega)|^2$'yı çiziniz.

c) Filtrenin girişindeki sinyalde bulunan 1 Ω enerjiyi hesaplayınız.

d) Filtrenin çıkışındaki sinyalde bulunan 1 Ω enerjiyi hesaplayınız.

Şekil P17.41



17.42 Şekil P17.42'deki yüksek geçiren RC filtrenin giriş gerilimi

$$v_i(t) = Ae^{-at}u(t)$$

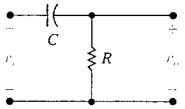
verilmiştir. Burada α filtrenin kesim frekansını ifade etsin, yani $\alpha = 1/RC$ olsun.

a) Eğer $\alpha = a$ ise, filtrenin çıkışındaki sinyalin enerjisinin yüzde kaçı $0 \le \omega \le \alpha$ frekans bandı ile ilişkilidir?

b) $\alpha = \sqrt{3}a$ verildiyse (a)'yı tekrarlayınız.

c) $\alpha = a/\sqrt{3}$ verildiyse (a)'yı tekrarlayınız.

Şekil P17.42



BÖLÜM İÇERİĞİ

18.1 **Terminal Denklemleri** s.731

18.2 **İki Kapı Parametreleri** s.732

18.3 **Sonlandırılmış İki Kapılı Devre Analizi** s.741

18.4 **Arabağlantılı İki Kapılı Devreler** s. 747

✓ BÖLÜM HEDEFLERİ

1 Aşağıdaki yöntemlerin herhangi birisiyle herhangi bir iki kapı parametre kümesini hesaplayabilmek.
- Devre analizi,
- Bir devrede yapılan ölçümler,
- Tablo 18.1'i kullanarak bir başka iki kapı parametre kümesinden çevirim.

2 Akımları, gerilimleri, empedansları ve merak edilen oranları Tablo 18.2'yi kullanarak analiz edebilmek.

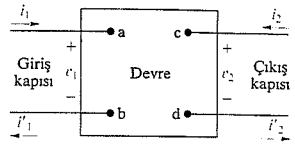
3 Art arda bağlı arabağlantılı iki kapılı devrelerin nasıl analiz edileceğini bilmek.

İki Kapılı Devreler

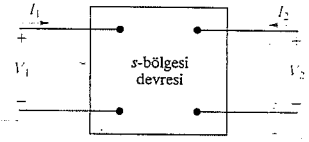
Şimdiye kadar, sıklıkla bir devrenin belirli bir terminal çiftindeki davranışına odaklandık. Thévenin ve Norton eşdeğer devrelerini, devre analizini basitleştirmek için sadece bir terminal çiftine göre ortaya attığımızı hatırlayınız. Bazı elektrik sistemlerini incelerken, iki terminal çiftine odaklanmak da faydalı olabilir. Bu özellikle, bir sinyal bir terminal çiftine uygulandığında ve daha sonra, sistem tarafından işlendikten sonra, ikinci bir terminal çiftinden dışarı verildiğinde faydalı olmaktadır. Terminal çiftleri, sinyallerin ya devreye uygulandıkları veya dışarı çıkarıldıkları noktalar olduğu için sistemin **kapıları** olarak adlandırılmaktadır. Bu bölümde, tartışmayı bir giriş, bir de çıkış kapısı olan devrelerle sınırlandıracağız. Sayfa 731'deki Şekil 18.1 temel iki kapı yapı bloğunu göstermektedir. Yapı bloğunun kullanılması çeşitli kısıtlamalara tabidir. İlk olarak, devrede depolanmış enerji olmamalıdır. İkincisi, devrede bağımsız kaynaklar olmamalıdır; ancak bağımlı kaynaklara izin verilmektedir. Üçüncü olarak, kapıya giren akımla çıkan akım eşit olmalıdır; yani, $i_1 = i_1'$ ve $i_2 = i_2'$. Dördüncü olarak, tüm dış bağlantılar ya giriş ya da çıkış kapısına yapılmalıdır; kapılar arasında bu tür bağlantılara izin verilmemektedir, yani a ve c, a ve d, b ve c veya b ve d terminalleri arasına bağlantı yapılamaz. Bu kısıtlamalar kısaca iki kapı formülasyonunun uygulabileceği devre problemlerini sınırlandırmaktadır.

Bir sistemin iki kapı modellemesinin altında yatan temel ilke, sadece terminal değişkenleri (i_1, v_1, i_2 ve v_2) ilgilenilmesidir. Devrenin içindeki akım ve gerilimlerin hesaplanması ile ilgilenmemekteyiz. Terminal davranışını hali hazırda işlemsel yükselteç devrelerinde vurgulamıştık. Bu bölümde, iki kapı parametrelerini tanıtarak bu yaklaşımı resmileştireceğiz.

18.1 Terminal Denklemleri



Şekil 18.1 İki kapılı yapı bloğu.



Şekil 18.2 s bölgesinde iki kapı temel yapı bloğu.

Bir devreyi bir iki kapılı devre olarak görerek, bir kapıdaki akım ve gerilimi diğer kapıdaki akım ve gerilim ile ilişkilendirmekle ilgilenmekteyiz. Şekil 18.1 terminal gerilimlerinin referans kutuplularını ve terminal akımlarının referans yönlerini göstermektedir. Her kapıdaki referanslar diğer kapıya göre simetriktir; yani, her kapıda akım üstteki kapıdan içeriye girmekte, her kapı gerilimi alttakinden üstteki terminale bir yükselişi vermektedir. Bu simetri bir iki kapılı devrenin analizini basitleştirmektedir ve evrensel literatürdeki kullanımın nedenidir.

İki kapılı devrenin en genel betimlemesi s bölgesinde yapılmaktadır. Tümüyle direnç içeren devrelerde, analiz direnç devrelerini çözmeye indirgenmektedir. Sinüzoidal durgun durum problemleri, ya ilk olarak uygun s bölgesi ifadeleri bularak ve daha sonra s'yi $j\omega$ ile yer değiştirerek yapılır, ya da frekans bölgesinde doğrudan analiz ile gerçekleştirilir. Burada, tüm denklemleri s bölgesinde yazacağız; direnç devreleri ve sinüzoidal durgun durum çözümleri birer özel hale dönüşecektir. Şekil 18.2 temel yapı bloğunu s bölgesi parametreleri I_1, V_1, I_2 ve V_2 cinsinden göstermektedir.

Bu dört terminal parametresinden sadece ikisi bağımsızdır. Dolayısıyla herhangi bir devre için, bu değişkenlerden ikisini bulduğumuzda diğer iki bilinmeyeni de bulabiliriz. Örneğin, V_1 ve V_2'yi ve kutu içindeki devreyi bilerek, I_1 ve I_2'yi belirleyebiliriz. Sonuç olarak bir iki kapılı devreyi sadece iki tane denklemle tanımlayabiliriz. Öte yandan, dört değişkeni birleştirmek için altı farklı yol bulunmaktadır:

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2,$$
$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2; \qquad (18.1)$$

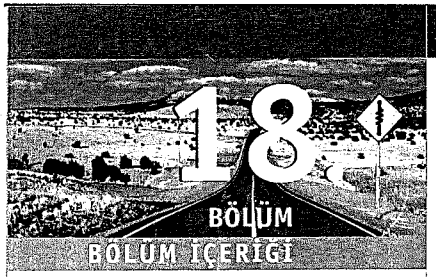
$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2,$$
$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2; \qquad (18.2)$$

$$V_1 = a_{11}V_2 - a_{12}I_2,$$
$$I_1 = a_{21}V_2 - a_{22}I_2; \qquad (18.3)$$

$$V_2 = b_{11}V_1 - b_{12}I_1,$$
$$I_2 = b_{21}V_1 - b_{22}I_1; \qquad (18.4)$$

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2,$$
$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2; \qquad (18.5)$$

$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2,$$
$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2. \qquad (18.6)$$



BÖLÜM İÇERİĞİ

18.1 **Terminal Denklemleri** s.731

18.2 **İki Kapı Parametreleri** s.732

18.3 **Sonlandırılmış İki Kapılı Devre Analizi** s.741

18.4 **Arabağlantılı İki Kapılı Devreler** s.747

BÖLÜM HEDEFLERİ

1. Aşağıdaki yöntemlerin herhangi birisiyle herhangi bir iki kapı parametre kümesini hesaplayabilmek:
   - Devre analizi,
   - Bir devrede yapılan ölçümler,
   - Tablo 18.1'i kullanarak bir başka iki kapı parametre kümesinden çevirim.
2. Akımları, gerilimleri, empedansları ve merak edilen oranları Tablo 18.2'yi kullanarak analiz edebilmek.
3. Art arda bağlı arabağlantılı iki kapılı devrelerin nasıl analiz edileceğini bilmek.

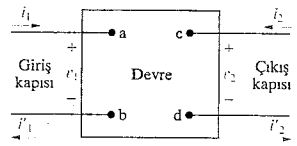
İki Kapılı Devreler

Şimdiye kadar, sıklıkla bir devrenin belirli bir terminal çiftindeki davranışına odaklandık. Thévenin ve Norton eşdeğer devrelerini, devre analizini basitleştirmek için sadece bir terminal çiftine göre ortaya attığımızı hatırlayınız. Bazı elektrik sistemlerini incelerken, iki terminal çiftine odaklanmak da faydalı olabilir. Bu özellikle, bir sinyal bir terminal çiftine uygulandığında ve daha sonra, sistem tarafından işlendikten sonra, ikinci bir terminal çiftinden dışarı verildiğinde faydalı olmaktadır. Terminal çiftleri, sinyallerin ya devreye uygulandıkları veya dışarı çıkarıldıkları noktalar olduğu için sistemin **kapıları** olarak adlandırılmaktadır. Bu bölümde, tartışmayı bir giriş, bir de çıkış kapısı olan devrelerle sınırlandıracağız. Sayfa 731'deki Şekil 18.1 temel iki kapı yapı bloğunu göstermektedir. Yapı bloğunun kullanılması çeşitli kısıtlamalara tabidir. İlk olarak, devrede depolanmış enerji olmamalıdır. İkincisi, devrede bağımsız kaynaklar olmamalıdır; ancak bağımlı kaynaklara izin verilmektedir. Üçüncü olarak, kapıya giren akımla çıkan akım eşit olmalıdır; yani, $i_1 = i_1'$ ve $i_2 = i_2'$. Dördüncü olarak, tüm dış bağlantılar ya giriş ya da çıkış kapısına yapılmalıdır; kapılar arasında bu tür bağlantılara izin verilmemektedir, yani a ve c, a ve d, b ve c veya b ve d terminalleri arasına bağlantı yapılamaz. Bu kısıtlamalar kısaca iki kapı formülasyonunun uygulabileceği devre problemlerini sınırlandırmaktadır.

Bir sistemin iki kapı modellemesinin altında yatan temel ilke, sadece terminal değişkenleri (i_1, v_1, i_2 ve v_2) ilgilenilmesidir. Devrenin içindeki akım ve gerilimlerin hesaplanması ile ilgilenmemekteyiz. Terminal davranışını hali hazırda işlemsel yükselteç devrelerinde vurgulamıştık. Bu bölümde, iki kapı parametrelerini tanıtarak bu yaklaşımı resmileştireceğiz.

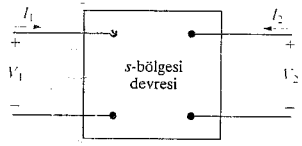
18.1 Terminal Denklemleri

Bir devreyi bir iki kapılı devre olarak görerek, bir kapıdaki akım ve gerilimi diğer kapıdaki akım ve gerilim ile ilişkilendirmekle ilgilenmekteyiz. Şekil 18.1 terminal gerilimlerinin referans kutuplularını ve terminal akımlarının referans yönlerini göstermektedir. Her kapıdaki referanslar diğer kapıya göre simetriktir; yani, her kapıda akım üstteki kapıdan içeriye girmekte, her kapı gerilimi alttakinden üstteki terminale bir yükselişi vermektedir. Bu simetri bir iki kapılı devrenin analizini basitleştirmektedir ve evrensel literatürdeki kullanımın nedenidir.



Şekil 18.1 ▲ İki kapılı yapı bloğu.

İki kapılı devrenin en genel betimlemesi s bölgesinde yapılmaktadır. Tümüyle direnç içeren devrelerde, analiz direnç devrelerini çözmeye indirgenmektedir. Sinüzoidal durgun durum problemleri, ya ilk olarak uygun s bölgesi ifadeleri bularak ve daha sonra s'yi $j\omega$ ile yer değiştirerek yapılır, ya da frekans bölgesinde doğrudan analiz ile gerçekleştirilir. Burada, tüm denklemleri s bölgesinde yazacağız; direnç devreleri ve sinüzoidal durgun durum çözümleri birer özel hale dönüşecektir. Şekil 18.2 temel yapı bloğunu s bölgesi parametreleri I_1, V_1, I_2 ve V_2 cinsinden göstermektedir.



Şekil 18.2 ▲ s bölgesinde iki kapı temel yapı bloğu.

Bu dört terminal parametresinden, sadece ikisi bağımsızdır. Dolayısıyla herhangi bir devre için, bu değişkenlerden ikisini bulduğumuzda diğer iki bilinmeyeni de bulabiliriz. Örneğin, V_1 ve V_2'yi ve kutu içindeki devreyi bilerek, I_1 ve I_2'yi belirleyebiliriz. Sonuç olarak bir iki kapılı devreyi sadece iki tane denklemle tanımlayabiliriz. Öte yandan, dört değişkeni birleştirmek için altı farklı yol bulunmaktadır:

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2,$$
$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2; \qquad (18.1)$$

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2,$$
$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2; \qquad (18.2)$$

$$V_1 = a_{11}V_2 - a_{12}I_2,$$
$$I_1 = a_{21}V_2 - a_{22}I_2; \qquad (18.3)$$

$$V_2 = b_{11}V_1 - b_{12}I_1,$$
$$I_2 = b_{21}V_1 - b_{22}I_1; \qquad (18.4)$$

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2,$$
$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2; \qquad (18.5)$$

$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2,$$
$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2. \qquad (18.6)$$

Bu altı denklem kümesi, üç adet karşılıklı ters ilişkili çift olarak da değerlendirilebilir. Birinci küme yani Eş. 18.1, giriş ve çıkış gerilimlerini giriş ve çıkış akımlarının fonksiyonları olarak vermektedir. İkinci küme, Eş. 18.2, tersi ilişkiyi vermektedir, yani, giriş ve çıkış akımları, giriş ve çıkış gerilimlerinin fonksiyonlarıdır. Eş. 18.3 ve 18.4, 18.5 ve 18.6 gibi ters ilişkileri gösterir.

Eş. 18.1-18.6'daki akım ve/veya gerilim değişkenlerinin katsayıları, iki kapılı devre **parametreleri** olarak anılmaktadır. Dolayısıyla, Eş. 18.1'i kullanırken, devrenin z-parametrelerine başvuracağız. Benzer şekilde, devrenin y parametreleri, a parametreleri, b parametreleri, h parametreleri ve g parametrelerini de kullanacağız.

18.2 İki Kapı Parametreleri

Bir devre için bu parametreleri hesaplama veya ölçme yoluyla belirleriz. Yapılacak hesaplama veya ölçüm, doğrudan parametre denklemlerinden gelmektedir. Örneğin, problemin bir devre için z parametrelerini bulmak olduğunu varsayalım. Eş. 18.1'den,

$$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} \Omega, \tag{18.7}$$

$$z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} \Omega, \tag{18.8}$$

$$z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} \Omega, \tag{18.9}$$

$$z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} \Omega. \tag{18.10}$$

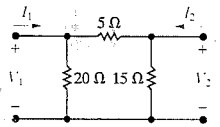
Eş. 18.7-18.10 bu dört z parametresinin aşağıdaki şekilde tanımlanabileceğini ortaya çıkarmaktadır:

- z_{11} kapı 2 açık iken kapı 1'e bakıldığında görülen empedanstır.
- z_{12} bir aktarım empedansıdır. Kapı 1 açıkken kapı 1 geriliminin kapı 2 akımına oranıdır.
- z_{12} bir aktarım empedansıdır. Kapı 2 açıkken kapı 2 geriliminin kapı 1 akımına oranıdır.
- z_{22} kapı 1 açık iken kapı 2'ye bakıldığında görülen empedanstır.

Sonuç olarak, empedans parametreleri, ilk olarak kapı 2'yi açıp V_1/I_1 ve V_2/I_1 oranlarını belirleyerek ve daha sonra kapı 1'i açıp V_1/I_2 ve V_2/I_2 oranlarını belirleyerek hesaplanmakta veya ölçülmektedir. Örnek 18.1 bir direnç devresi için z parametrelerinin belirlenmesini göstermektedir.

Örnek 18.1 **İki Kapılı Bir Devrenin z Parametrelerinin Bulunması**

Şekil 18.3'te gösterilen devre için z parametrelerini bulunuz.



Şekil 18.3 ▲ Örnek 18.1 için devre.

Çözüm

Devre tamamıyla dirençlerden oluşmuştur, dolayısıyla s bölgesindeki devre de tümüyle dirençlerden oluşmaktadır. Kapı 2 açıkken, yani, $I_2 = 0$ iken, kapı 1'e bakıldığında görülen direnç, 5 ve 15 Ω dirençlerin seri birleşimine paralel 20 Ω dirençtir. Dolayısıyla,

$$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{(20)(20)}{40} = 10\ \Omega.$$

I_2 sıfırken, V_2

$$V_2 = \frac{V_1}{15+5}(15) = 0.75V_1$$

bulunur ve sonuç olarak

$$z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{0.75V_1}{V_1/10} = 7.5\ \Omega$$

elde edilir. I_1 sıfırken, kapı 2'den bakıldığında görülen direnç, 5 ve 20 Ω dirençlerin seri birleşimine paralel 15 Ω dirençtir. Bundan dolayı

$$z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{(15)(25)}{40} = 9.375\ \Omega$$

olur. Kapı 1 açıkken, I_1 sıfırdır ve V_1 gerilimi şöyledir

$$V_1 = \frac{V_2}{5+20}(20) = 0.8V_2$$

bulunur. Kapı 1 açıkken, kapı 2'den içeri giren akım aşağıda verilmiştir.

$$I_2 = \frac{V_2}{9.375}.$$

Sonuçta

$$z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{0.8V_2}{V_2/9.375} = 7.5\ \Omega$$

bulunur.

Denklemler 18.7-18.10 ve Örnek 18.1, Eş. 18.1'deki parametrelerin neden z parametreleri olarak anıldığını göstermektedir. Her bir parametre bir gerilimin bir akıma oranıdır ve dolayısıyla birimi ohm olan bir empedanstır.

Aynı süreci, ya hesaplanan ya da ölçülen diğer kapı parametrelerini de bulmak için kullanırız. Bir kapı parametresi, bir kapıyı ya açık devre ya da kısa devre yaparak elde edilir. Dahası, bir kapı parametresi bir empedans, bir admitans ve bir birimsiz orandır. Birimsiz oran ya iki gerilimin ya da iki akımın oranıdır. Denklemler 18.11-18.15 bu gözlemleri özetlemektedir.

$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} \text{S}, \qquad y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} \text{S},$$

$$y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} \text{S}, \qquad y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} \text{S}. \tag{18.11}$$

$$a_{11} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0}, \qquad a_{12} = -\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0} \Omega,$$

$$a_{21} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \text{S}, \qquad a_{22} = -\left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0}. \tag{18.12}$$

$$b_{11} = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_1=0}, \qquad b_{12} = -\left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{V_1=0} \Omega,$$

$$b_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{I_1=0} \text{S}. \qquad b_{22} = -\left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_1=0}. \tag{18.13}$$

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} \Omega, \qquad h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0},$$

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0}, \qquad h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0} \text{S}. \tag{18.14}$$

$$g_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{I_2=0} \text{S}, \qquad g_{12} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_1=0},$$

$$g_{21} = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_2=0}, \qquad g_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{V_1=0} \Omega. \tag{18.15}$$

İki kapı parametreleri birbirinin tersi denklem kümeleriyle bağlantılı olarak da tanımlanırlar. Empedans ve admitans parametreleri immitans parametreleri olarak gruplandırılırlar. **İmmitans** terimi ya empedans ya da admitans olan bir büyüklüğü ifade eder. a ve b parametreleri **iletim** parametreleri olarak adlandırılırlar çünkü iki kapılı devrenin bir ucundaki akım veya gerilimi diğer uçtaki akım veya gerilim cinsinden tanımlarlar. İmmittans ve iletim parametreleri kapı değişkenlerini bağlantılandırmakta doğal seçimlerdir. Başka bir deyişle, bunlar ya gerilim ve akım değişkenlerini, ya da giriş çıkış değişkenlerini ilişkilendirirler. h ve g parametreleri çapraz değişkenleri yani, bir giriş gerilimi ve çıkış akımını, bir çıkış gerilimi ve giriş akımına ilişkilendirir. Bu nedenle h ve g parametrelerine **karma** parametreler denir.

Örnek 18.2 bir iki kapılı devrenin terminallerinde yapılan ölçüm kümesinin a parametrelerini hesaplamakta nasıl kullanılabileceğini göstermektedir.

Örnek 18.2 Ölçümlerden a Parametrelerinin Bulunması

Aşağıdaki ölçüm, sinüzoidal durgun durumda çalışan bir iki kapılı devreye aittir. Kapı 2 açıkken, kapı 1'e 150 cos 4000t V'a eşit bir gerilim uygulanmaktadır. Kapı 1'den içeri giren akım 25 cos (4000t –45°) A ve kapı 2 gerilimi 100 cos (4000t + 15°)V'tur. Kapı 2 kısa devre iken, kapı 1'e 30 cos 4000t V'a eşit bir gerilim uygulanmaktadır. Kapı 1'den içeri giren akım 1.5 cos (4000t + 30°)A ve kapı 2'den içeri giren akım 0.25 cos (4000t + 150°) A'dir. Devrenin sinüzoidal durgun durum davranışını belirleyen a parametrelerini bulunuz.

Çözüm

İlk ölçümler

$$\mathbf{V}_1 = 150\angle 0^\circ \text{ V}, \quad \mathbf{I}_1 = 25\angle -45^\circ \text{ A},$$

$$\mathbf{V}_2 = 100\angle 15^\circ \text{ V}, \quad \mathbf{I}_2 = 0 \text{ A}$$

vermektedir. Eş. 18.12'den

$$a_{11} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2}\right|_{I_2=0} = \frac{150\angle 0^\circ}{100\angle 15^\circ} = 1.5\angle -15^\circ,$$

$$a_{21} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2}\right|_{I_2=0} = \frac{25\angle -45^\circ}{100\angle 15^\circ} = 0.25\angle -60^\circ \text{S}$$

bulunur. İkinci ölçümler

$$\mathbf{V}_1 = 30\angle 0^\circ \text{ V}, \quad \mathbf{I}_1 = 1.5\angle 30^\circ \text{A},$$

$$\mathbf{V}_2 = 0 \text{ V}, \quad \mathbf{I}_2 = 0.25\angle 150^\circ \text{ A}.$$

vermektedir. Sonuç olarak

$$a_{12} = -\left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2}\right|_{V_2=0} = \frac{-30\angle 0^\circ}{0.25\angle 150^\circ} = 120\angle 30^\circ\ \Omega,$$

$$a_{21} = -\left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2}\right|_{V_2=0} = \frac{-1.5\angle 30^\circ}{0.25\angle 150^\circ} = 6\angle -60^\circ$$

elde edilir.

DEĞERLENDİRME PROBLEMLERİ

Hedef 1 – Herhangi iki kapı parametresi kümesini hesaplayabilme

18.1 Şekil 18.3'teki devre için y parametrelerini bulunuz.

Cevap: $y_{11} = 0.25$ S, $y_{12} = y_{21} = -0.2$ S, $y_{22} = \frac{4}{15}$ S.

18.2 Şekil 18.3'teki devre için g ve h parametrelerini bulunuz.

Cevap: $g_{11} = 0.1$ S; $g_{12} = -0.75$; $g_{21} = 0.75$; $g_{22} = 3.75\ \Omega$; $h_{11} = 4\ \Omega$; $h_{12} = 0.8$; $h_{21} = -0.8$; $h_{22} = 0.1067$ S.

18.3 İki kapılı bir direnç devresi üzerinde aşağıdaki ölçümler yapılmıştır. Kapı 1'e 50 mV uygulandığı ve kapı 2 açık devre yapıldığında, kapı 1'den içeri giren akım 5 μA ve kapı 2'deki gerilim 200 mV'tur. Kapı 1 kısa devre yapıldığında ve kapı 2'ye 10 mV uygulandığında, kapı 1'den içeri giren akım 2 μA ve kapı 2'den içeri giren akım 0.5 μA'dir. Devrenin g parametrelerini bulunuz.

Cevap: $g_{11} = 0.1$ mS; $g_{12} = 4$; $g_{21} = 4$; $g_{22} = 20$ kΩ.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 18.2, 18.4 ve 18.5'i de çözmeyi deneyiniz.

İki Kapı Parametreleri Arasındaki İlişki

Altı denklem kümesinin de aynı değişkenlerle ilişkili olması nedeniyle, herhangi bir denklem çiftiyle bağlantılı parametrelerin, diğer tüm çiftlerin parametreleri ile bağlantılı olması gerekmektedir. Başka bir deyişle, eğer bir parametre kümesini biliyorsak, diğer tüm kümeleri bilinen kümeden türetebiliriz. Bu türetimler sırasındaki işlemlerin miktarı yüzünden, sadece sonuçları Tablo 18.1'de listeliyoruz.

TABLO 18.1 Parametre Çevrim Tablosu

$z_{11} = \frac{y_{22}}{\Delta y} = \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{b_{22}}{b_{21}} = \frac{\Delta h}{h_{22}} = \frac{1}{g_{11}}$	$b_{21} = \frac{1}{z_{12}} = -\frac{\Delta y}{y_{12}} = \frac{a_{21}}{\Delta a} = \frac{h_{22}}{h_{12}} = -\frac{g_{11}}{g_{12}}$
$z_{12} = -\frac{y_{12}}{\Delta y} = \frac{\Delta a}{a_{21}} = \frac{1}{b_{21}} = \frac{h_{12}}{h_{22}} = -\frac{g_{12}}{g_{11}}$	$b_{22} = \frac{z_{11}}{z_{12}} = \frac{y_{22}}{y_{12}} = \frac{a_{11}}{\Delta a} = \frac{\Delta h}{h_{12}} = -\frac{1}{g_{12}}$
$z_{21} = \frac{-y_{21}}{\Delta y} = \frac{1}{a_{21}} = \frac{\Delta b}{b_{21}} = -\frac{h_{21}}{h_{22}} = \frac{g_{21}}{g_{11}}$	$h_{11} = \frac{\Delta z}{z_{22}} = \frac{1}{y_{11}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_{12}}{b_{11}} = \frac{g_{22}}{\Delta g}$
$z_{22} = \frac{y_{11}}{\Delta y} = \frac{a_{22}}{a_{21}} = \frac{b_{11}}{b_{21}} = \frac{1}{h_{22}} = \frac{\Delta g}{g_{11}}$	$h_{12} = \frac{z_{12}}{z_{22}} = -\frac{y_{12}}{y_{11}} = \frac{\Delta a}{a_{22}} = \frac{1}{b_{11}} = -\frac{g_{12}}{\Delta g}$
$y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta z} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = \frac{b_{11}}{b_{12}} = \frac{1}{h_{11}} = \frac{\Delta g}{g_{22}}$	$h_{21} = -\frac{z_{21}}{z_{22}} = \frac{y_{21}}{y_{11}} = -\frac{1}{a_{22}} = -\frac{\Delta b}{b_{11}} = -\frac{g_{21}}{\Delta g}$
$y_{12} = -\frac{z_{12}}{\Delta z} = -\frac{\Delta a}{a_{12}} = -\frac{1}{b_{12}} = -\frac{h_{12}}{h_{11}} = \frac{g_{12}}{g_{22}}$	$h_{22} = \frac{1}{z_{22}} = \frac{\Delta y}{y_{11}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{b_{21}}{b_{11}} = \frac{g_{11}}{\Delta g}$
$y_{21} = -\frac{z_{21}}{\Delta z} = -\frac{1}{a_{12}} = -\frac{\Delta b}{b_{12}} = \frac{h_{21}}{h_{11}} = -\frac{g_{21}}{g_{22}}$	$g_{11} = \frac{1}{z_{11}} = \frac{\Delta y}{y_{22}} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{b_{21}}{b_{22}} = \frac{h_{22}}{\Delta h}$
$y_{22} = \frac{z_{11}}{\Delta z} = \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{b_{22}}{b_{12}} = \frac{\Delta h}{h_{11}} = \frac{1}{g_{22}}$	$g_{12} = -\frac{z_{12}}{z_{11}} = \frac{y_{12}}{y_{22}} = -\frac{\Delta a}{a_{11}} = -\frac{1}{b_{22}} = -\frac{h_{12}}{\Delta h}$
$a_{11} = \frac{z_{11}}{z_{21}} = -\frac{y_{22}}{y_{21}} = \frac{b_{22}}{\Delta b} = -\frac{\Delta h}{h_{21}} = \frac{1}{g_{21}}$	$g_{21} = \frac{z_{21}}{z_{11}} = -\frac{y_{21}}{y_{22}} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{\Delta b}{b_{22}} = -\frac{h_{21}}{\Delta h}$
$a_{12} = \frac{\Delta z}{z_{21}} = -\frac{1}{y_{21}} = \frac{b_{12}}{\Delta b} = -\frac{h_{11}}{h_{21}} = \frac{g_{22}}{g_{21}}$	$g_{22} = \frac{\Delta z}{z_{11}} = \frac{1}{y_{22}} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{b_{12}}{b_{22}} = \frac{h_{11}}{\Delta h}$
$a_{21} = \frac{1}{z_{21}} = -\frac{\Delta y}{y_{21}} = \frac{b_{21}}{\Delta b} = -\frac{h_{22}}{h_{21}} = \frac{g_{11}}{g_{21}}$	$\Delta z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$
$a_{22} = \frac{z_{22}}{z_{21}} = -\frac{y_{11}}{y_{21}} = \frac{b_{11}}{\Delta b} = -\frac{1}{h_{21}} = \frac{\Delta g}{g_{21}}$	$\Delta y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$
$b_{11} = \frac{z_{22}}{z_{12}} = -\frac{y_{11}}{y_{12}} = \frac{a_{22}}{\Delta a} = \frac{1}{h_{12}} = -\frac{\Delta g}{g_{12}}$	$\Delta a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
$b_{12} = \frac{\Delta z}{z_{12}} = -\frac{1}{y_{12}} = \frac{a_{12}}{\Delta a} = \frac{h_{11}}{h_{12}} = -\frac{g_{22}}{g_{12}}$	$\Delta b = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$
	$\Delta h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$
	$\Delta g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$

Tablo 18.1'de listelenen tüm ilişkileri çıkarmayacak olmamıza rağmen, z ve y parametreleri arasındaki ve z ve a parametreleri arasındakileri çıkaracağız. Bu çıkarımlar bir parametre kümesini diğerleri ile ilişkilendirirken izlenen genel süreci belirtmektedir. y parametrelerinin fonksiyonu olarak z parametrelerini bulmak için, ilk olarak Eş. 18.2'yi V_1 ve V_2 için çözeriz. Daha sonra orta-

ya çıkan sonuçlardaki I_1 ve I_2'nin katsayılarını, Eş. 18.1'deki I_1 ve I_2'nin katsayıları ile karşılaştırırız. Eş. 18.2'den

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & y_{12} \\ I_2 & y_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}} = \frac{y_{22}}{\Delta y} I_1 - \frac{y_{12}}{\Delta y} I_2, \tag{18.16}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_{11} & I_1 \\ y_{21} & I_2 \end{vmatrix}}{\Delta y} = -\frac{y_{21}}{\Delta y} I_1 + \frac{y_{11}}{\Delta y} I_2 \tag{18.17}$$

bulunur. Eş. 18.16 ve 18.17'yi Eş. 18.1 ile karşılaştırmak

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{\Delta y}, \tag{18.18}$$

$$z_{12} = -\frac{y_{12}}{\Delta y}, \tag{18.19}$$

$$z_{21} = -\frac{y_{21}}{\Delta y}, \tag{18.20}$$

$$z_{22} = \frac{y_{11}}{\Delta y} \tag{18.21}$$

olduğunu gösterir.

z parametrelerini a parametrelerinin fonksiyonu olarak bulmak için, Eş.18.3'ü Eş. 18.1'in şeklinde yeniden düzenler ve daha sonra katsayıları karşılaştırırız. Eş. 18.3'ün ikinci denkleminden

$$V_2 = \frac{1}{a_{21}} I_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}} I_2. \tag{18.22}$$

elde edilir. Bundan ötürü, Eş. 18.22'yi Eş. 18.3'ün ilk denkleminde yerine koymak

$$V_1 = \frac{a_{11}}{a_{21}} I_1 + \left(\frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}} - a_{12}\right) I_2 \tag{18.23}$$

sonucunu verir. Eş. 18.23'ten

$$z_{11} = \frac{a_{11}}{a_{21}}, \tag{18.24}$$

$$z_{12} = \frac{\Delta a}{a_{21}} \tag{18.25}$$

bulunur. Eş. 18.22'den ise

$$z_{21} = \frac{1}{a_{21}}, \tag{18.26}$$

$$z_{22} = \frac{a_{22}}{a_{21}} \tag{18.27}$$

elde edilir. Örnek 18.3 parametre çevrim tablosunun faydasını göstermektedir.

Örnek 18.3 Ölçümlerden ve Tablo 18.1'den *h* Parametrelerinin Bulunması

İki kapılı bir direnç devresi üzerinde iki ölçüm yapılmıştır. Birincisi kapı 2 açıkken, ikincisi ise kapı 2 kısa devre iken yapılmıştır. Sonuçlar şöyledir:

Kapı 2 Açık Devre	Kapı 2 Kısa Devre
$V_1 = 10$ mV	$V_1 = 24$ mV
$I_1 = 10\ \mu$A	$I_1 = 20\ \mu$A
$V_2 = -40$ V	$I_2 = 1$ mA

Devrenin *h* parametrelerini bulunuz.

Çözüm

h_{11} ve h_{21}'i kısa devre testinden doğrudan bulabiliriz:

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} = \frac{24 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-6}} = 1.2\ \text{k}\Omega,$$

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} = \frac{10^{-3}}{20 \times 10^{-6}} = 50.$$

h_{12} ve h_{22} parametreleri açık devre testinden doğrudan elde edilemez. Ancak, Eş.18.7-18.15'e bakmak dört *a* parametresinin de test verisinden türetilebileceğini gösterir. Dolayısıyla, h_{12} ve h_{22} çevrim tablosundan elde edilebilir. Yani,

$$h_{12} = \frac{\Delta a}{a_{22}}$$

$$h_{22} = \frac{a_{21}}{a_{22}}.$$

a parametreleri

$$a_{11} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = \frac{10 \times 10^{-3}}{-40} = -0.25 \times 10^{-3},$$

$$a_{21} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = \frac{10 \times 10^{-6}}{-40} = -0.25 \times 10^{-6}\ \text{S},$$

$$a_{12} = -\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0} = -\frac{24 \times 10^{-3}}{10^{-3}} = -24\ \Omega,$$

$$a_{22} = -\left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0} = -\frac{20 \times 10^{-6}}{10^{-3}} = -20 \times 10^{-3}$$

olarak hesaplanır.

Δa'nın değeri

$$\Delta a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= 5 \times 10^{-6} - 6 \times 10^{-6} = -10^{-6}$$

bulunur.

Sonuç olarak

$$h_{12} = \frac{\Delta a}{a_{22}}$$

$$= \frac{-10^{-6}}{-20 \times 10^{-3}} = 5 \times 10^{-5},$$

$$h_{22} = \frac{a_{21}}{a_{22}}$$

$$= \frac{-0.25 \times 10^{-6}}{-20 \times 10^{-3}} = 12.5\ \mu\text{S}$$

elde edilir.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 1 – Herhangi iki kapı parametresi kümesini hesaplayabilmek

18.4 Bir iki kapılı direnç devresi üzerinde aşağıdaki ölçümler yapılmıştır: Kapı 1 açıkken, $V_2 = 15$ V, $V_1 = 10$ V ve $I_2 = 30$ A; kapı 1 kısa devre iken, $V_2 = 10$ V, $I_2 = 4$ A ve $I_1 = -5$A. *z* parametrelerini hesaplayınız.

Cevap: $z_{11} = (4/15)\ \Omega$; $z_{12} = (1/3)\ \Omega$; $z_{21} = -1.6\ \Omega$; $z_{22} = 0.5\ \Omega$.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemi 18.11'i de çözmeyi deneyiniz.

Karşılıklı İki Kapılı Devreler

Eğer bir iki kapılı devre karşılıklı ise, kapı parametreleri arasında aşağıdaki ilişkiler mevcuttur:

$$z_{12} = z_{21}, \tag{18.28}$$

$$y_{12} = y_{21}, \tag{18.29}$$

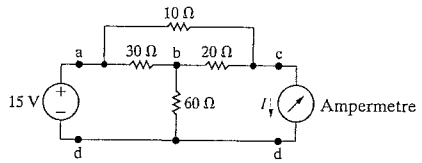
$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta a = 1, \tag{18.30}$$

$$b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = \Delta b = 1, \tag{18.31}$$

$$h_{12} = -h_{21}, \tag{18.32}$$

$$g_{12} = -g_{21}. \tag{18.33}$$

Bir iki kapılı devre, eğer bir kapıdaki bir ideal gerilim kaynağı ile diğer kapıdaki bir ideal ampermetrenin yer değiştirmesi aynı ampermetre ölçümünü veriyorsa, karşılıklıdır. Örneğin, Şekil 18.4'te gösterilen direnç devresini göz önüne alınız. Kapı ad'ye bir 15 V gerilim kaynağı uygulandığında, kapı cd'deki ampermetrede 1.75 A akım oluşturmaktadır.



Şekil 18.4 Bir karşılıklı iki kapılı devre.

V_{bd} gerilimini bildiğimiz zaman ampermetre akımı kolaylıkla belirlenir. Böylece

$$\frac{V_{bd}}{60} + \frac{V_{bd} - 15}{30} + \frac{V_{bd}}{20} = 0 \qquad (18.34)$$

ve $V_{bd} = 5$ V bulunur. Dolayısıyla

$$I = \frac{5}{20} + \frac{15}{10} = 1.75 \text{ A} \qquad (18.35)$$

olur. Eğer gerilim kaynağı ve ampermetre yer değiştirilirse, ampermetre hala 1.75 A okuyacaktır. Bunu Şekil 18.5'te gösterilen devreyi çözerek doğrulayabiliriz:

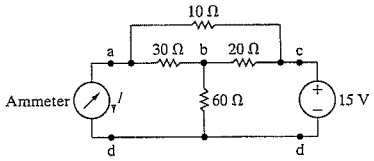
$$\frac{V_{bd}}{60} + \frac{V_{bd}}{30} + \frac{V_{bd} - 15}{20} = 0. \qquad (18.36)$$

Eş. 18.36'dan, $V_{bd} = 7.5$ V çıkar. I_{ad} akımı ise

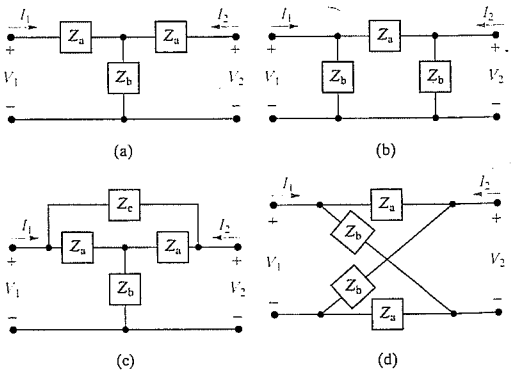
$$I_{ad} = \frac{7.5}{30} + \frac{15}{10} = 1.75 \text{ A} \qquad (18.37)$$

bulunur. Bir iki kapılı devre, bir kapıdaki akım kaynağı ile diğer kapıdaki bir ideal voltmetrenin yer değiştirmesinin aynı voltmetre ölçümünü vermesi durumunda da karşılıklıdır. Bir karşılıklı iki kapılı devrede bir parametre kümesini belirlemek için sadece üç hesaplama veya ölçüm gerekmektedir.

Bir karşılıklı iki kapılı devre, eğer kapıları terminal akım ve gerilimleri değişmeden yer değiştirebiliyorsa **simetrik**tir. Şekil 18.6 simetrik iki kapılı devrelerin dört örneğini göstermektedir.



Şekil 18.5 ▲ Şekil 18.4'te gösterilen devre, gerilim kaynağı ve ampermetre yer değiştirmiş iken.



Şekil 18.6 ▲ Simetrik iki kapılı devrelerin dört örneği. (a) Bir simetrik T. (b) Bir simetrik pi. (c) Bir simetrik köprülü T. (d) Bir simetrik kafes.

Böyle devrelerde, kapı parametreleri arasında aşağıdaki ek ilişkiler de mevcuttur:

$$z_{11} = z_{22}, \qquad (18.38)$$

$$y_{11} = y_{22}, \qquad (18.39)$$

$$a_{11} = a_{22}, \qquad (18.40)$$

$$b_{11} = b_{22}, \qquad (18.41)$$

$$h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = \Delta h = 1, \qquad (18.42)$$

$$g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = \Delta g = 1. \qquad (18.43)$$

Bir simetrik karşılıklı devrede tüm iki kapı parametrelerini belirlemek için sadece iki hesaplama veya ölçüm gereklidir.

✓DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 1 – Herhangi iki kapı parametresi kümesini hesaplayabilmek

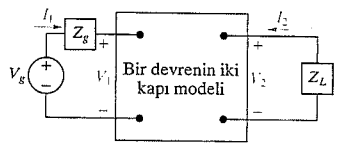
18.5 Simetrik ve karşılıklı olan bir iki kapılı direnç devresi üzerinde aşağıdaki ölçümler yapılmıştır: Kapı 2 açıkken, $V_1 = 95$ V ve $I_1 = 5$ A; kapı 2'de kısa devre varken, $V_1 = 11.52$ V, $I_2 = -2.72$ A. İki kapılı devrenin z parametrelerini hesaplayınız.

Cevap: $z_{11} = z_{22} = 19\ \Omega$, $z_{12} = z_{21} = 17\ \Omega$.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemi 18.12'yi de çözmeyi deneyiniz.

18.3 Sonlandırılmış İki Kapılı Devre Analizi

İki kapılı bir devrenin tipik uygulamasında, devre kapı 1'den sürülür ve kapı 2'den yüklenir. Şekil 18.7 tipik bir sonlandırılmış iki kapı modeli için s- şemasını göstermektedir. Burada, Z_g kaynağın iç empedansını, V_g kaynağın iç gerilimini ve Z_L yük empedansını temsil etmektedir. Bu devrenin analizi, terminal akımlarını ve gerilimlerini iki kapı parametreleri, V_g, Z_g ve Z_L'nin fonksiyonları olarak ifade etmeyi içermektedir.



Şekil 18.5 ▲ Bir sonlandırılmış iki kapı modeli.

Sonlandırılmış iki kapılı devrenin altı karakteristiği devrenin terminal davranışını belirlemektedir:

- giriş empedansı $Z_{in} = V_1/I_1$ veya admitansı $Y_{in} = I_1/V_1$
- çıkış akımı I_2
- kapı 2'ye göre Thévenin gerilim ve empedansı (V_{Th}, Z_{Th})
- akım kazancı I_2/I_1
- gerilim kazancı V_2/V_1
- gerilim kazancı V_2/V_g

z Parametreleri Cinsinden Altı Karakteristik

Bu altı karakteristiğin nasıl çıkarıldığını göstermek amacıyla, devrenin iki kapılı kısmını modellemek için z parametrelerini kullanan ifadeleri geliştireceğiz. Tablo 18.2 y, a, b, h ve g parametrelerini içeren ifadeleri özetlemektedir.

TABLO 18.2 Sonlandırılmış İki Kapılı Devre Denklemleri

z Parametreleri	y Parametreleri
$Z_{in} = z_{11} - \dfrac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + Z_L}$	$Y_{in} = y_{11} - \dfrac{y_{12}y_{21}Z_L}{1 + y_{22}Z_L}$
$I_2 = \dfrac{-z_{21}V_g}{(z_{11} + Z_g)(z_{22} + Z_L) - z_{12}z_{21}}$	$I_2 = \dfrac{y_{21}V_g}{1 + y_{22}Z_L + y_{11}Z_g + \Delta y Z_g Z_L}$
$V_{Th} = \dfrac{z_{21}}{z_{11} + Z_g}V_g$	$V_{Th} = \dfrac{-y_{21}V_g}{y_{22} + \Delta y Z_g}$
$Z_{Th} = z_{22} - \dfrac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_g}$	$Z_{Th} = \dfrac{1 + y_{11}Z_g}{y_{22} + \Delta y Z_g}$
$\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{-z_{21}}{z_{22} + Z_L}$	$\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{y_{21}}{y_{11} + \Delta y Z_L}$
$\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L + \Delta z}$	$\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{-y_{21}Z_L}{1 + y_{22}Z_L}$
$\dfrac{V_2}{V_g} = \dfrac{z_{21}Z_L}{(z_{11} + Z_g)(z_{22} + Z_L) - z_{12}z_{21}}$	$\dfrac{V_2}{V_g} = \dfrac{y_{21}Z_L}{y_{12}y_{21}Z_gZ_L - (1 + y_{11}Z_g)(1 + y_{22}Z_L)}$

a Parametreleri	b Parametreleri
$Z_{in} = \dfrac{a_{11}Z_L + a_{12}}{a_{21}Z_L + a_{22}}$	$Z_{in} = \dfrac{b_{22}Z_L + b_{12}}{b_{21}Z_L + b_{11}}$
$I_2 = \dfrac{-V_g}{a_{11}Z_L + a_{12} + a_{21}Z_gZ_L + a_{22}Z_g}$	$I_2 = \dfrac{-V_g\Delta b}{b_{11}Z_g + b_{21}Z_gZ_L + b_{22}Z_L + b_{12}}$
$V_{Th} = \dfrac{V_g}{a_{11} + a_{21}Z_g}$	$V_{Th} = \dfrac{V_g\Delta b}{b_{22} + b_{21}Z_g}$
$Z_{Th} = \dfrac{a_{12} + a_{22}Z_g}{a_{11} + a_{21}Z_g}$	$Z_{Th} = \dfrac{b_{11}Z_g + b_{12}}{b_{21}Z_g + b_{22}}$
$\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{-1}{a_{21}Z_L + a_{22}}$	$\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{-\Delta b}{b_{11} + b_{21}Z_L}$
$\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{Z_L}{a_{11}Z_L + a_{12}}$	$\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\Delta b Z_L}{b_{12} + b_{22}Z_L}$
$\dfrac{V_2}{V_g} = \dfrac{Z_L}{(a_{11} + a_{21}Z_g)Z_L + a_{12} + a_{22}Z_g}$	$\dfrac{V_2}{V_g} = \dfrac{\Delta b Z_L}{b_{12} + b_{11}Z_g + b_{22}Z_L + b_{21}Z_gZ_L}$

h Parametreleri	g Parametreleri
$Z_{in} = h_{11} - \dfrac{h_{12}h_{21}Z_L}{1 + h_{22}Z_L}$	$Y_{in} = g_{11} - \dfrac{g_{12}g_{21}}{g_{22} + Z_L}$
$I_2 = \dfrac{h_{21}V_g}{(1 + h_{22}Z_L)(h_{11} + Z_g) - h_{12}h_{21}Z_L}$	$I_2 = \dfrac{-g_{21}V_g}{(1 + g_{11}Z_g)(g_{22} + Z_L) - g_{12}g_{21}Z_g}$
$V_{Th} = \dfrac{-h_{21}V_g}{h_{22}Z_g + \Delta h}$	$V_{Th} = \dfrac{g_{21}V_g}{1 + g_{11}Z_g}$
$Z_{Th} = \dfrac{Z_g + h_{11}}{h_{22}Z_g + \Delta h}$	$Z_{Th} = g_{22} - \dfrac{g_{12}g_{21}Z_g}{1 + g_{11}Z_g}$
$\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{h_{21}}{1 + h_{22}Z_L}$	$\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{-g_{21}}{g_{11}Z_L + \Delta g}$
$\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{-h_{21}Z_L}{\Delta h Z_L + h_{11}}$	$\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{g_{21}Z_L}{g_{22} + Z_L}$
$\dfrac{V_2}{V_g} = \dfrac{-h_{21}Z_L}{(h_{11} + Z_g)(1 + h_{22}Z_L) - h_{12}h_{21}Z_L}$	$\dfrac{V_2}{V_g} = \dfrac{g_{21}Z_L}{(1 + g_{11}Z_g)(g_{22} + Z_L) - g_{12}g_{21}Z_g}$

İstenen ifadelerden herhangi birinin çıkarımı, sonlandırmalarla zorlanan iki kısıt denklemi ile birlikte iki kapı denklemlerinin cebirsel işlemlerini içermektedir. Eğer z parametre denklemlerini kullanırsak, Şekil 18.7'deki devreyi tanımlayan dört ifade

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2, \tag{18.44}$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2, \tag{18.45}$$

$$V_1 = V_g - I_1Z_g, \tag{18.46}$$

$$V_2 = -I_2Z_L \tag{18.47}$$

olarak verilir. Denklemler 18.46 ve 18.47 sonlandırmalarla uygulanan kısıtları vermektedir.

Kapı 1'den içeri bakıldığında görülen empedansı, yani $Z_{in} = V_1 / I_1$'i bulmak için şu şekilde devam ederiz. Eş. 18.45'te V_2'yi $-I_2Z_L$ ile değiştiririz ve ortaya çıkan ifadeyi I_2 için çözeriz:

$$I_2 = \frac{-z_{21}I_1}{Z_L + z_{22}}. \tag{18.48}$$

Daha sonra bu denklemi Eş. 18.44'te yerine koyup Z_{in} için çözeriz:

$$Z_{in} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + Z_L}. \tag{18.49}$$

Terminal akımı I_2'yi bulmak için ilk olarak V_1'i Eş. 18.46'nın sağ tarafı ile değiştirdikten sonra Eş. 18.44 I_1 için çözülür. Sonuç

$$I_1 = \frac{V_g - z_{12}I_2}{z_{11} + Z_g} \tag{18.50}$$

elde edilir. Şimdi Eş. 18.50 Eş. 18.48'de yerine konup ortaya çıkan denklem I_2 için çözülür:

$$I_2 = \frac{-z_{21}V_g}{(z_{11} + Z_g)(z_{22} + Z_L) - z_{12}z_{21}}. \tag{18.51}$$

Kapı 2'ye ait Thévenin gerilimi $I_2 = 0$ iken V_2'ye eşittir. $I_2 = 0$ iken Eş. 18.44 ve 18.45 birleştirilerek

$$V_2|_{I_2=0} = z_{21}I_1 = z_{21}\frac{V_1}{z_{11}} \tag{18.52}$$

bulunur. Fakat $V_1 = V_g - I_1Z_g$ ve $I_1 = V_g / (Z_g + z_{11})$'dir. Dolayısıyla sonuçları Eş. 18.52'de yerine koymak V_2'nin açık devre değerini

$$V_2|_{I_2=0} = V_{Th} = \frac{z_{21}}{Z_g + z_{11}}V_g \tag{18.53}$$

olarak verir. V_g bir kısa devre ile değiştirildiğinde, Thévenin veya çıkış empedansı V_2 / I_2 oranıdır. V_g sıfırken, Eş. 18.46

$$V_1 = -I_1Z_g \tag{18.54}$$

haline gelir. Eş. 18.54'ü Eş. 18.44'te yerine koymak

$$I_1 = \frac{-z_{12}I_2}{z_{11} + Z_g} \tag{18.55}$$

verir. Şimdi Eş. 18.55'i Eş.18.45'te I_1'in yerine kullanırsak sonuç

$$\left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{V_g=0} = Z_{Th} = z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_g} \tag{18.56}$$

olur. Akım kazancı I_2 / I_1 Eş. 18.48'den doğrudan

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-z_{21}}{Z_L + z_{22}} \tag{18.57}$$

bulunur.

Gerilim kazancı V_2 / V_1 ifadesini çıkarmak için, Eş. 18.45'te I_2'yi Eş. 18.47'deki değeri ile değiştirerek başlayalım, böylece

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}\left(\frac{-V_2}{Z_L}\right) \tag{18.58}$$

bulunur. Sonra, Eş.18.44 I_2 için V_1 ve V_2'nin bir fonksiyonu olarak çözülerek

$$z_{11}I_1 = V_1 - z_{12}\left(\frac{-V_2}{Z_L}\right)$$

veya

$$I_1 = \frac{V_1}{z_{11}} + \frac{z_{12}V_2}{z_{11}Z_L} \tag{18.59}$$

elde edilir. Şimdi Eş. 18.58'de I_1 Eş. 18.59 ile değiştirilip, ortaya çıkan ifade V_2/V_1 için çözülerek

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L + z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}$$

$$= \frac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L + \Delta z} \tag{18.60}$$

elde edilir. Gerilim oranı V_2 / V_g'yi çıkarmak için, ilk olarak Eş. 18.44, 18.46 ve 18.47'yi birleştirerek I_1'i V_2 ve V_g'nin bir fonksiyonu olarak

$$I_1 = \frac{z_{12}V_2}{Z_L(z_{11} + Z_g)} + \frac{V_g}{z_{11} + Z_g} \tag{18.61}$$

halinde yazabiliriz. Şimdi Eş. 18.61 ve 18.47, Eş. 18.45 ile birlikte sadece V_2 ve V_g içeren bir ifade çıkarmak için kullanılarak

$$V_2 = \frac{z_{21}z_{12}V_2}{Z_L(z_{11} + Z_g)} + \frac{z_{21}V_g}{z_{11} + Z_g} - \frac{z_{22}}{Z_L}V_2 \tag{18.62}$$

bulunur. Bunu istenen gerilim oranını elde etmek için işleyerek

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{z_{21}Z_L}{(z_{11} + Z_g)(z_{22} + Z_L) - z_{12}z_{21}} \tag{18.63}$$

elde ederiz. Tablo 18.2'de ilk girdiler, sonlandırılmış iki kapılı devrenin bu altı özelliğini özetlemektedir. Ayrıca karşılık gelen ifadeler y, a, b, h ve g parametreleri cinsinden de listelenmektedir.

Örnek 18.4 Tablo 18.2'de listelenen ilişkilerin faydalarını sergilemektedir.

Örnek 18.4 **Sonlandırılmış İki Kapılı Devre Analizi**

Şekil 18.8'de gösterilen iki kapılı devre değerleri aşağıda verilen b parametreleri ile tanımlanmaktadır:

$$b_{11} = -20, \quad b_{12} = -3000\ \Omega,$$
$$b_{21} = -2\ \text{mS}, \quad b_{22} = -0.2.$$

a) Fazör gerilimi $\mathbf{V}_2$'yi bulunuz.
b) 5 kΩ dirence aktarılan ortalama gücü bulunuz.
c) Giriş kapısına aktarılan ortalama gücü bulunuz.
d) Maksimum ortalama güç aktarımı için yük empedansını bulunuz.
e) (d)'de bulunan yüke aktarılan maksimum ortalama gücü bulunuz.

Çözüm

a) $\mathbf{V}_2$'yi bulmak için Tablo 18.2'deki girdilerden iki seçeneğimiz bulunmaktadır. $\mathbf{I}_2$'yi bulmayı seçebiliriz ve daha sonra $\mathbf{V}_2$'yi $\mathbf{V}_2 = -\mathbf{I}_2 Z_L$ ilişkisinden bulabiliriz veya gerilim kazancı $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_g$'yi bulabiliriz ve $\mathbf{V}_2$'yi bu kazançtan hesaplayabiliriz. Verilmiş b parametreleri için

$$\Delta b = (-20)(-0.2) - (-3000)(-2 \times 10^{-3})$$
$$= 4 - 6 = -2$$

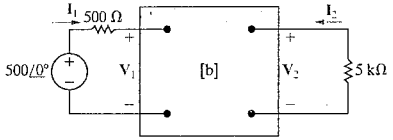
bulunur. Tablo 18.2'den

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_g} = \frac{\Delta b Z_L}{b_{12} + b_{11}Z_g + b_{22}Z_L + b_{21}Z_g Z_L}$$
$$= \frac{(-2)(5000)}{-3000 + (-20)500 + (-0.2)5000 + [-2 \times 10^{-3}(500)(5000)]}$$
$$= \frac{10}{19}$$

elde edilir. Daha sonra,

$$\mathbf{V}_2 = \left(\frac{10}{19}\right)500 = 263.16\angle 0^\circ\ \text{V}$$

bulunur.



Şekil 18.8 ▲ Örnek 18.4 için devre.

b) 5000 Ω dirence aktarılan ortalama güç

$$P_2 = \frac{263.16^2}{2(5000)} = 6.93\ \text{W}$$

olarak hesaplanır.

c) Giriş kapısına aktarılan ortalama gücü bulmak için öncelikle giriş empedansı Z_{in}'i buluruz. Tablo 18.2'den

$$Z_{in} = \frac{b_{22}Z_L + b_{12}}{b_{21}Z_L + b_{11}}$$
$$= \frac{(-0.2)(5000) - 3000}{-2 \times 10^{-3}(5000) - 20}$$
$$= \frac{400}{3} = 133.33\ \Omega$$

bulunur. Şimdi $\mathbf{I}_1$ doğrudan

$$\mathbf{I}_1 = \frac{500}{500 + 133.33} = 789.47\ \text{mA}$$

elde edilir. Giriş kapısına aktarılan ortalama güç ise

$$P_1 = \frac{0.789472^2}{2}(133.33) = 41.55\ \text{W}$$

hesaplanır.

d) Maksimum güç aktarımı için yük empedansı, kapı 2'den bakıldığında görülen Thévenin eşdeğer empedansının karmaşık eşleniği olmalıdır. Tablo 18.2'den

$$Z_{Th} = \frac{b_{11}Z_g + b_{12}}{b_{21}Z_g + b_{22}}$$
$$= \frac{(-20)(500) - 3000}{(-2 \times 10^{-3})(500) - 0.2}$$
$$= \frac{13{,}000}{1.2} = 10{,}833.33\ \Omega$$

bulunur ve dolayısıyla $Z_L = Z^*_{Th} = 10{,}833.33$ yazılır.

e) Z_L'ye aktarılan maksimum ortalama gücü bulmak için ilk olarak $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_g$ gerilim kazancı ifadesinden, $\mathbf{V}_2$'yi buluruz. Z_L 10,8333.33 Ω iken bu kazanç

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_g} = 0.8333$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\mathbf{V}_2 = (0.8333)(500) = 416.67\ \text{V}$$

ve

$$P_L(\text{maksimum}) = \frac{1}{2}\frac{416.67^2}{10{,}833.33}$$
$$= 8.01\ \text{W}$$

elde edilir.

✓ DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 2 – Akımları, gerilimleri ve ilgilenilen oranları bulmak için sonlandırılmış iki kapılı bir devreyi analiz edebilmek

18.6 Şekildeki iki kapılı devrenin a parametreleri $a_{11} = 5 \times 10^{-4}$, $a_{12} = 10\ \Omega$, $a_{21} = 10^{-6}$ S ve $a_{22} = -3 \times 10^{-2}$'dir. Devre, maksimum genliği 50 mV ve iç direnci $100 + j0\ \Omega$ olan bir sinüzoidal gerilim kaynağı ile sürülmektedir. Devre 5 kΩ bir direnç yük ile sonlandırılmıştır.

a) Yük direncine aktarılan ortalama gücü hesaplayınız.
b) Maksimum güç aktarımı için yük direncini hesaplayınız.
c) (b)'deki dirence aktarılan maksimum ortalama gücü hesaplayınız

Cevap: (a) 62.5 mW; (b) 70/6 kΩ; (c) 74.4 mW.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemlerinden 18.30, 18.32 ve 18.37'yi de çözmeyi deneyiniz.

18.4 Arabağlantılı İki Kapılı Devreler

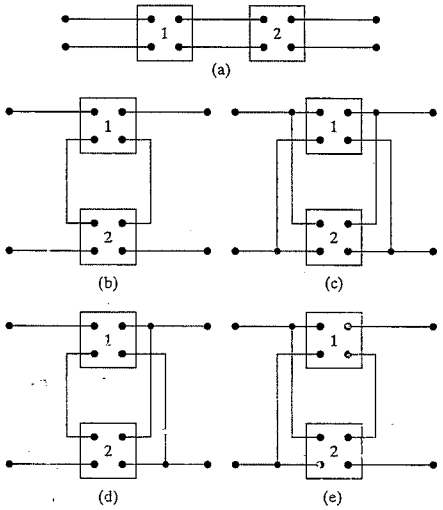
Büyük, karmaşık bir sistemi meydana getirmek genellikle ilk önce sistemin alt kısımlarını tasarlamarak basitleştirilebilir. Bu daha basit, tasarlaması kolay birimleri daha sonra birbirine bağlamak sistemi tamamlar. Eğer alt kısımlar iki kapılı devreler ile modellenirse, sistemin sentezlenmesi arabağlantılı iki kapılı devrelerin analizini içerir.

İki kapılı devreler birbirleriyle beş farklı şekilde bağlanabilir: (1) art arda, (2) seri, (3) paralel, (4) seri-paralel ve (5) paralel-seri Sayfa 748'deki Şekil 18.9 bu beş temel arabağlantıyı sergilemektedir.

Bu kısımda sadece art arda bağlantıyı inceleyeceğiz ve göstereceğiz. Ancak, diğer dört bağlantı belirli koşulları sağlıyorsa, arabağlantılı devreleri tanımlayan parametreleri basitçe bireysel devre parametrelerini toplayarak elde edebiliriz. Daha açıkça, z parametreleri seri bağlantıyı, y parametreleri paralel bağlantıyı, h parametreleri seri-paralel bağlantıyı ve g parametreleri paralel-seri bağlantıyı tanımlamaktadır.[1]

Art arda bağlantı önemlidir çünkü geniş sistemlerin modellenmesinde sıklıkla ortaya çıkmaktadır. Diğer dört temel arabağlantının tersine, arabağlantılı devrelerin parametrelerini elde etmede bireysel iki kapılı devrelerin parametrelerinin kullanılmasında bir kısıtlama yoktur. art arda bağlantıyı tanımlamada a parametreleri en uygunudur.

[1] Bu dört arabağlantının detaylı bir tartışması, Henry Ruston ve Joseph Bordogna, Electric Networks. Filters, Analysis, New York: Mc Graw-Hill, 1966, 4. Bölümde verilmiştir.



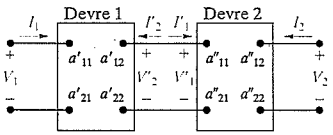
Şekil 18.9 ▲ İki kapılı devrelerde beş temel arabağlantı. (a) Art arda. (b) Seri. (c) Paralel. (d) Seri-Paralel. (e) Paralel-Seri.

Art arda bağlantıyı, tek üssün ilk şekildeki a parametrelerini, çift üssün ikinci şekildeki a parametrelerini belirttiği Şekil 18.10'da gösterilen devreyi kullanarak analiz edeceğiz. Birinci devrenin çıkış gerilim ve akımı V_2' ve I_2' ile ve ikinci devrenin giriş gerilim ve akımı V_1' ve I_1' ile etiketlenmiştir. Problem V_2 ve I_2'yi V_1 ve I_1'e ilişkilendiren a parametre denklemlerinin çıkarılmasıdır. Diğer bir deyişle, aşağıdaki parametre çiftlerini aramaktayız:

$$V_1 = a_{11}V_2 - a_{12}I_2 \tag{18.64}$$

$$I_1 = a_{21}V_2 - a_{22}I_2. \tag{18.65}$$

Burada a parametreleri, bireysel devrelerin a parametreleri cinsinden açıkça verilmiştir.



Şekil 18.10 ▲ Bir art arda bağlantı.

Çıkarımı Şekil 18.10'dan aşağıdakileri yazarak başlayalım.

$$V_1 = a'_{11}V'_2 - a'_{12}I'_2, \tag{18.66}$$

$$I_1 = a'_{21}V'_2 - a'_{22}I'_2. \tag{18.67}$$

Arabağlantı $V'_2 = V'_1$ ve $I'_2 = -I'_1$ anlamına gelir. Bu kısıtları Eş. 18.66 ve 18.67'de yerine koymak

$$V_1 = a'_{11}V'_1 + a'_{12}I'_1, \tag{18.68}$$

$$I_1 = a'_{21}V'_1 + a'_{22}I'_1 \tag{18.69}$$

sonuçlarını verir. V'_1 gerilimi ve I'_1 akımı V_2 ve I_2 ile ikinci devrenin a parametreleri yoluyla ilişkilidir:

$$V'_1 = a''_{11}V_2 - a''_{12}I_2, \tag{18.70}$$

$$I'_1 = a''_{21}V_2 - a''_{22}I_2. \tag{18.71}$$

V_1, I_1 ve V_2, I_2 arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmak için Eş.18.70 ve 18.71'i Eş.18.68 ve 18.69'da yerine koyalım:

$$V_1 = (a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21})V_2 - (a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22})I_2 \tag{18.72}$$

$$I_1 = (a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21})V_2 - (a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22})I_2. \tag{18.73}$$

Eş.18.72 ve 18.73'ü Eş.18.64 ve 18.65 ile karşılaştırarak, arabağlantılı devreler için istenen a parametrelerini

$$a_{11} = a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21}, \tag{18.74}$$

$$a_{12} = a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22}, \tag{18.75}$$

$$a_{21} = a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21}, \tag{18.76}$$

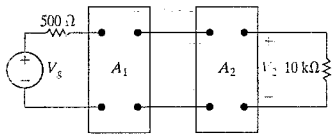
$$a_{22} = a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22} \tag{18.77}$$

olarak elde ederiz. Eğer ikiden fazla birim art arda bağlanacaksa, eşdeğer iki kapılı devrenin a parametreleri, iki kapılı devreler kümesinden her seferinde bir çift devrenin sırayla indirgenmesinden bulunabilir.

Örnek 18.5 Eş. 18.74-18.77'nin art arda bağlantılarda nasıl kullanıldığını iki yükselteç devresi üzerinde göstermektedir.

Örnek 18.5 Art Arda Bağlı İki Kapılı Devrelerin Analizi

Şekil 18.11'de gösterildiği gibi iki özdeş yükselteç art arda bağlanmıştır. Her yükselteç kendi h parametreleri cinsinden tanımlanmaktadır. Değerler, $h_{11} = 1000\ \Omega$, $h_{12} = 0.0015$, $h_{21} = 100$ ve $h_{22} = 100\ \mu S$ verilmektedir. Gerilim kazancı V_2 / V_g'yi bulunuz.



Şekil 18.10 Örnek 18.5 için devre.

Çözüm

V_2 / V_g yi bulmak için ilk adım h parametrelerini a parametrelerine dönüştürmektir. Yükselteçler özdeştir, dolayısıyla bir a parametreleri kümesi her iki yükselteci tanımlar:

$$a'_{11} = \frac{-\Delta h}{h_{21}} = \frac{+0.05}{100} = 5 \times 10^{-4},$$

$$a'_{12} = \frac{-h_{11}}{h_{21}} = \frac{-1000}{100} = -10\ \Omega,$$

$$a'_{21} = \frac{-h_{22}}{h_{21}} = \frac{-100 \times 10^{-6}}{100} = -10^{-6}\ S,$$

$$a'_{22} = \frac{-1}{h_{21}} = \frac{-1}{100} = -10^{-2}.$$

Daha sonra, Eş. 18.74-18.77'yi art arda bağlı yükselteçlerin a parametrelerini hesaplamak için kullanırız:

$$a_{11} = a'_{11}a'_{11} + a'_{12}a'_{21}$$

$$= 25 \times 10^{-8} + (-10)(-10^{-6})$$

$$= 10.25 \times 10^{-6},$$

$$a_{12} = a'_{11}a'_{12} + a'_{12}a'_{22}$$

$$= (5 \times 10^{-4})(-10) + (-10)(-10^{-2})$$

$$= 0.095\ \Omega,$$

$$a_{21} = a'_{21}a'_{11} + a'_{22}a'_{21}$$

$$= (-10^{-6})(5 \times 10^{-4}) + (-0.01)(-10^{-6})$$

$$= 9.5 \times 10^{-9}\ S,$$

$$a_{22} = a'_{21}a'_{12} + a'_{22}a'_{22}$$

$$= (-10^{-6})(-10) + (-10^{-2})^2$$

$$= 1.1 \times 10^{-4}.$$

Tablo 18.2'den

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{Z_L}{(a_{11} + a_{21}Z_g)Z_L + a_{12} + a_{22}Z_g}$$

$$= \frac{10^4}{[10.25 \times 10^{-6} + 9.5 \times 10^{-9}(500)]10^4 + 0.095 + 1.1 \times 10^{-4}(500)}$$

$$= \frac{10^4}{0.15 + 0.095 + 0.055}$$

$$= \frac{10^5}{3}$$

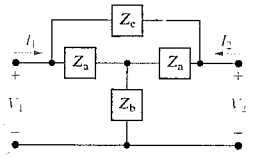
$$= 33{,}333.33$$

elde edilir. Sonuç olarak, 150 μV giriş sinyali 5 V çıkış sinyaline yükseltilir. Gerilim kazancı V_2/V_g'nin bulunması ile ilgili farklı bir yaklaşım için Problem 18.41'e bakınız.

DEĞERLENDİRME PROBLEMİ

Hedef 3 – İki kapılı devrelerin art arda arabağlantısının nasıl analiz edileceğini bilmek

18.7 Gösterilen simetrik köprülü T devresinde tüm elemanlar 15 Ω dirençtir. Bu köprülü T'lerden ikisi bir dc gerilim kaynağı ve bir direnç yük arasında art arda bağlanmıştır. DC gerilim kaynağının yüksüz gerilimi 100 V ve iç direnci 8 Ω'dur. Yük direnci yüke maksimum güç aktarılana kadar ayarlanmaktadır. (a) Yük direncini, (b) yük gerilimini, (c) yük gücünü hesaplayınız.



Cevap: (a) 14.44 Ω;
(b) 16 V;
(c) 17.73 W.

NOT: Ayrıca Bölüm Problemi 18.38'i de çözmeyi deneyiniz.

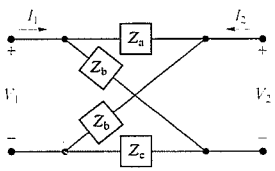
Özet

- **İki kapılı model,** giriş ve çıkış kapılarındaki gerilim ve akım cinsinden bir devrenin başarımını tanımlamada kullanılır. (Bkz. sf. 730.)
- Model aşağıdaki devrelerle sınırlıdır:
  - Devrenin içinde kapılar arasında bağımsız kaynak bulunamaz;
  - devrede kapılar arasında enerji depolanamaz;
  - kapıya giren akımla çıkan akım eşittir ve
  - giriş ve çıkış kapıları arasında dış bağlantı bulunamaz.

  (Bkz. sf. 730.)
- Dört terminal değişkeninden (V_1, I_1, V_2, I_2) ikisi bağımsızdır; dolayısıyla devreyi tanımlamak için dört değişkeni içeren iki ortak denkleme ihtiyaç vardır. (Bkz. sf. 731.)
- Dört terminal değişkenini içeren altı muhtemel denklem kümesi, z-, y-, a-, b-, h- ve g- parametre denklemleri olarak isimlendirilir. (Bkz. sf. 731.)
- Parametre denklemleri s bölgesinde yazılır. Parametrelerin dc değeri $s = 0$ ile sağlanır ve sinüzoidal durgun durum değerleri $s = j\omega$ ile elde edilir. (Bkz. sf. 731.)
- Herhangi bir parametre kümesi, giriş ve çıkış kapılarında uygun açık devre ve kısa devre koşullarını uygulayarak hesaplanabilir veya ölçülebilir. (Bkz. sf. 732 ve 734.)
- Altı parametre kümesi arasındaki ilişki Tablo 18.1 ile verilmektedir. (Bkz. sf. 736.)
- Bir iki kapılı devre, eğer bir kapıdaki ideal gerilim kaynağı ile diğer kapıdaki ideal ampermetre yer değiştirdiğinde aynı ampermetre ölçümünü veriyorsa karşılıklıdır. Karşılıklılığın iki kapı parametreleri üzerindeki etkisi Eş. 18.28-18.33 ile verilmektedir. (Bkz. sf. 739.)
- Bir karşılıklı iki kapılı devre, eğer kapıları terminal gerilim ve akımlarını değiştirmeden değiştirilebiliyorsa **simetrik**tir. Simetrinin iki kapı parametreleri üzerindeki diğer etkisi Eş. 18.38-18.43 ile verilmektedir. (Bkz. sf. 740 ve 741.)
- Bir Thévenin eşdeğer kaynak ve yüküne bağlanmış bir iki kapılı devrenin başarımı Tablo 18.2 ile verilen ilişkilerle özetlenmektedir. (Bkz. sf. 742.)
- Büyük devreler arabağlantılı iki kapılı devreler yoluyla alt kısımlara ayrılabilir. Bu bölümde art arda bağlantı, arabağlantılı iki kapılı devrelerin analizini sergilemek için kullanılmıştır. (Bkz. sf. 747.)

18.22 Şekil P18.22'de gösterilen iki kapılı devre simetrik midir? Cevabınızı açıklayınız.

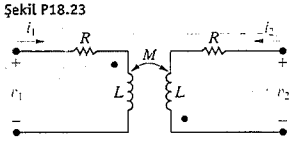
Şekil P18.22



18.23 a) Tanımlayıcı denklemleri, Şekil P18.23'teki devre için h parametrelerinin s bölgesi ifadelerini bulmakta kullanınız.

b) (a)'da bulunan cevapların, bir karşılıklı simetrik devrenin h parametreleri ile uyuştuğunu gösteriniz.

Şekil P18.23



Kısım 18.3

18.24 Şekil 18.7'deki devrenin giriş empedansı ($Z_{in} = V_1/I_1$) ifadesini b parametreleri cinsinden çıkarınız.

18.25 Şekil 18.7'deki devrenin akım kazancı I_2/I_1 ifadesini g parametreleri cinsinden çıkarınız.

18.26 Şekil 18.7'deki devrenin gerilim kazancı V_2/V_1 ifadesini y parametreleri cinsinden çıkarınız.

18.27 Şekil 18.7'deki devrenin gerilim kazancı V_2/V_g ifadesini h parametreleri cinsinden çıkarınız.

18.28 Şekil 18.7'deki devrenin ikinci kapısına göre Thévenin eşdeğer devresini, z parametreleri cinsinden bulunuz.

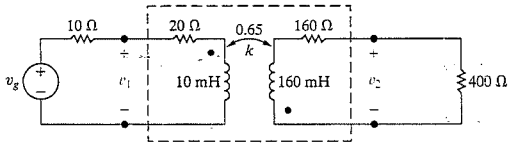
18.29 Şekil P18.29'da gösterilen devrede doğrusal trafonun bağlaşım katsayısı 0.65'tir. Trafo, iç gerilimi $v_g = 100 \cos 2000t$ V olan bir sinüzoidal gerilim kaynağı ile sürülmektedir. Kaynağın iç empedansı $10 + j0\ \Omega$'dur.

a) Doğrusal trafonun frekans bölgesi a parametrelerini bulunuz.

b) a parametrelerini, yük terminallerine göre Thévenin eşdeğer devresini çıkarmak için kullanınız.

c) v_2 için durgun durum zaman bölgesi ifadesini çıkarınız.

Şekil P18.29



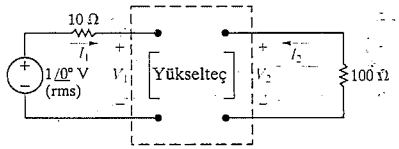
18.30 Şekil P18.30'da gösterilen devredeki yükseltecin y parametreleri

$$y_{11} = 25 \text{ mS}; \qquad y_{12} = -1 \text{ mS};$$

$$y_{21} = -250 \text{ mS}; \qquad y_{22} = -40 \text{ mS}$$

verilmiştir. Çıkış gücünün, ideal gerilim kaynağı tarafından sağlanan güce oranını bulunuz.

Şekil P18.30



18.31 Şekil P18.31'deki iki kapılı devre için g parametreleri

$$g_{11} = \frac{1}{6} - j\frac{1}{6}\text{ S}; \qquad g_{12} = -0.5 + j0.5;$$

$$g_{21} = 0.5 - j0.5; \qquad g_{22} = 1.5 + j2.5\ \Omega$$

verilmiştir. Yük empedansı Z_L, Z_L'ye maksimum güç aktarımı için ayarlanmıştır. İdeal gerilim kaynağı

$$v_g = 42\sqrt{2} \cos 5000t \text{ V}$$

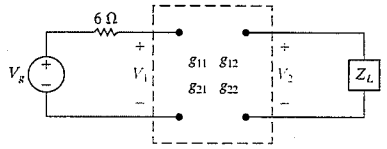
sinüzoidal gerilimini üretmektedir.

a) V_2'nin rms değerini bulunuz.

b) Z_L'ye aktarılan ortalama gücü bulunuz.

c) İdeal gerilim kaynağı tarafından üretilen gücün yüzde kaçı Z_L'ye aktarılmaktadır?

Şekil P18.31



18.32 Şekil P18.32'deki iki kapılı güç yükselteç devresi için y parametreleri

$$y_{11} = 2 \text{ mS}; \qquad y_{12} = -2\ \mu\text{S};$$

$$y_{21} = 100 \text{ mS}; \qquad y_{22} = -50\ \mu\text{S}$$

verilmiştir. Kaynağın iç empedansı $2500 + j0\ \Omega$ ve yük empedansı $70{,}000 + j0\ \Omega$'dur. İdeal gerilim kaynağı

$$v_g = 80\sqrt{2} \cos 4000t \text{ mV}$$

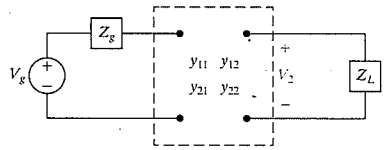
gerilimini üretmektedir.

a) V_2'nin rms değerini bulunuz.

b) Z_L'ye aktarılan ortalama gücü bulunuz.

c) İdeal gerilim kaynağı tarafından üretilen ortalama gücü bulunuz.

Şekil P18.32



18.33 Şekil P18.32'deki sonlandırılmış iki kapılı yükselteç devresi için aşağıdakileri bulunuz:

a) Z_L'ye maksimum güç aktarımı için Z_L'nin değeri,

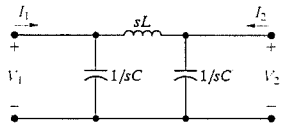
b) Z_L'ye aktarılan maksimum güç,

c) Z_L'ye maksimum güç aktarılırken ideal gerilim kaynağının ürettiği ortalama güç.

18.34 a) Şekil P18.34'teki devrenin h parametreleri için s bölgesi ifadelerini bulunuz.

b) Şekil P18.34'te kapı 2 800 Ω direnç ile sonlandırılmıştır ve kapı 1 bir basamak gerilim kaynağı $v_1(t) = 45\ u(t)$ V ile sürülmektedir. Eğer $C = 0.1\ \mu$F ve $L = 400$ mH ise $t > 0$ için $v_2(t)$'yi bulunuz.

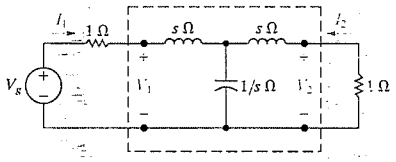
Şekil P18.34



18.35 a) Şekil P18.25'teki iki kapılı devre için z parametrelerini bulunuz.

b) $v_g = 50u(t)$ V iken $t > 0$ için v_2'yi bulunuz.

Şekil P18.35



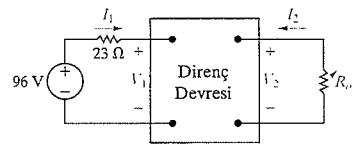
18.36 Bir iki kapılı direnç devresinde aşağıdaki ölçümler yapılmıştır. Kapı 2 açıkken ve kapı 1'e 100 V uygulanmışken, kapı 1 akımı 1.125A, ve kapı 2 gerilimi 104 V'tur. Kapı 1 açıkken ve kapı 2'ye 24 V uygulanmışken, kapı 1 gerilimi 20 V ve kapı 2 akımı 250 mA'dir. Kapı 1 bir 160 V dc ideal gerilim kaynağı ile sürülüyorken, bu iki kapılı devrenin kapı 2'deki direnç yüke aktardığı maksimum gücü (milliwatt) bulunuz.

18.37 Şekil P18.37'de gösterilen direnç devresinde aşağıdaki dc ölçümler yapılmıştır.

Ölçüm 1	Ölçüm 2
$V_1 = 25$ V	$V_1 = 41$ V
$I_1 = 1$ A	$I_1 = 1$ A
$V_2 = 0$ V	$V_2 = 20$ V
$I_2 = -500$ mA	$I_2 = 0$ A

Kapı 2'ye bir R_o ayarlı direnci bağlanmıştır ve R_o'ya maksimum güç aktarımı için ayar mıştır. Maksimum gücü bulunuz.

Şekil P18.37



Kısım 18.4

18.38 Şekil P18.38'deki iki kapılı direnç devreleri için g ve h parametreleri

$g_{11} = 10$ mS; $h_{11} = 150\ \Omega$;

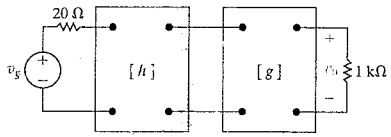
$g_{12} = -4$; $h_{12} = -0.05$;

$g_{21} = 20$; $h_{21} = -0.10$

$g_{22} = 24\ \text{k}\Omega$; $h_{22} = 100\ \mu\text{S}$;

olarak verilmiştir. $v_g = 109.5$V dc ise v_o'yu hesaplayınız.

Şekil P18.38



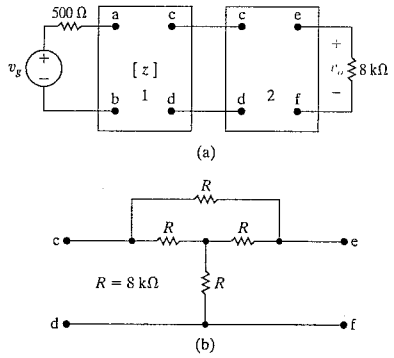
18.39 Şekil P18.39(a)'daki birinci iki kapılı devrenin z parametreleri

$z_{11} = 200\ \Omega$; $z_{12} = 20\ \Omega$;

$z_{21} = -1.6\ \text{M}\Omega$; $z_{22} = 40\ \text{k}\Omega$

verilmiştir. İkinci iki kapılı devrenin içindeki devre Şekil P18.39(b)'de gösterilmektedir ve $R = 8\ \text{k}\Omega$'dur. Eğer $v_g = 15$ mVdc ise v_o'yu bulunuz.

Şekil P18.39

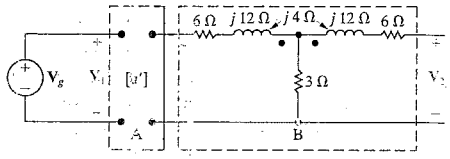


18.40 Şekil P18.40'taki devrede A ve B devreleri ters ve simetriktir. Devre A için $a_{11}' = 4$ ve $a_{12}' = 5\ \Omega$ olduğu bilinmektedir.

a) Devre B'nin a parametrelerini bulunuz.

b) $\mathbf{I}_2 = 0$ iken $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$'i bulunuz.

Şekil P18.40

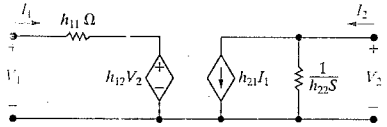


Kısım 18.1-18.4

18.41 a) Şekil P18.41'deki devrenin h parametre denklemleri tarafından sağlanan bir eşdeğer devre olduğunu gösteriniz.

b) (a)'nın h-parametresi eşdeğer devresini Şekil 18.41'deki devrede V_2/V_g gerilim kazancını bulmak için kullanınız.

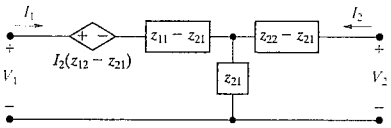
Şekil P18.41



18.42 a) Şekil P18.42'deki devrenin z parametre denklemleri tarafından sağlanan bir eşdeğer devre olduğunu gösteriniz.

b) Şekil P18.42'deki eşdeğer devrenin, iç empedansı Z_g ohm olan bir gerilim kaynağı tarafından sürüldüğünü varsayınız. Kapı 2'ye göre Thévenin eşdeğer devresini hesaplayınız. Sonuçlarınızı Tablo 18.2'nin uygun girdileri ile karşılaştırınız.

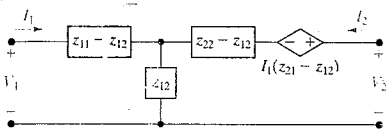
Şekil P18.42



18.43 a) Şekil P18.43'teki devrenin aynı zamanda z parametre denklemleri tarafından sağlanan bir eşdeğer devre olduğunu gösteriniz.

b) Şekil P18.43'teki eşdeğer devrenin kapı 2'de Z_L ohm ile sonlandırıldığını varsayınız. Giriş empedansı V_1/I_1'i bulunuz. Sonuçlarınızı Tablo 18.2'nin uygun girdisi ile karşılaştırınız.

Şekil P18.43



18.44 a) y-parametre denklemleri tarafından sağlanan iki eşdeğer devre çıkarınız. *İpucu:* Eş. 18.2 ile başlayınız. Kümenin birinci denklemine $y_{21}V_2$ toplayıp çıkarınız. Düğüm gerilimleri cinsinden düşünerek ortaya çıkan denklem kümesini sağlayan bir devre kurunuz. İlk olarak Eş. 18.2'nin ikinci denklemini değiştirerek bir başka eşdeğer devre çıkarınız.

b) Kapı 1'in iç empedansı Z_g olan bir gerilim kaynağı ile sürüldüğünü ve kapı 2'nin Z_L empedansı ile yüklendiğini varsayınız. Akım kazancı I_2/I_1'i bulunuz. Sonuçlarınızı Tablo 18.2'nin uygun girdisi ile karşılaştırınız.

18.45 a) g parametre denklemleri tarafından sağlanan bir eşdeğer devre çıkarınız.

b) (a)'da çıkarınız g-parametre eşdeğer devresini Problem 18.39'un çıkış gerilimini çözmek için kullanınız. *İpucu:* Problem 18.39'un ikinci iki kapılı devresini basitleştirmek için Problem 3.64'ü kullanınız.

Ek A Ortak Doğrusal Denklemlerin Çözümü

Devre analizi sıklıkla ortak doğrusal denklemlerin çözümünü gerektirir. Buradaki amacımız, determinantların böyle denklem kümelerinin çözümündeki kullanımını tekrar etmektir. Determinatların teorisi (uygulamaları ile birlikte) çoğu ortak seviyeli cebir kitabında bulunabilir. (Mühendislik öğrencileri için özellikle iyi bir kaynak, E. A. Guillemin'in *The Mathematics of Circuit Analysis*'inin 1. Bölümüdür [New York: Wiley, 1949]) Buradaki tekrarımızda tartışmamızı ortak denklemlerin determinantlarla çözümünün mekaniği ile sınırlayacağız.

A.1 Ön Adımlar

Bir ortak denklem kümesini determinantlarla çözmede ilk adım, denklemleri dikdörtgen (kare) biçiminde yazmaktır. Diğer bir deyişle, denklemler, her bir değişken her bir denklemde aynı yatay konumda olacak şekilde dikey diziler halinde düzenlenir. Örneğin Eş. A.1'de i_1, i_2 ve i_3 değişkenleri her bir denklemin sol tarafında sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü konumdadır.

$$\begin{aligned} 21i_1 - 9i_2 - 12i_3 &= -33, \\ -3i_1 + 6i_2 - 2i_3 &= 3, \\ -8i_1 - 4i_2 + 22i_3 &= 50. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Bir başka seçenek olarak bu denklem kümesi, i_1'in dizide ilk kolonda, i_2'nin ikinci kolonda ve i_3'ün üçüncü kolonda olduğu söylenerek de açıklanabilir.

Eğer verilen bir denklemde bir veya daha fazla değişken gözükmüyorsa, bunlar da basitçe katsayıları sıfır yapılarak dahil edilebilir. Bu yöntemle Eş. A.2, Eş. A.3'te gösterildiği gibi "kareye tamamlanabilir".

$$\begin{aligned} 2v_1 - v_2 &= 4, \\ 4v_2 + 3v_3 &= 16, \\ 7v_1 + 2v_3 &= 5; \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned} 2v_1 - v_2 + 0v_3 &= 4, \\ 0v_1 + 4v_2 + 3v_3 &= 16, \\ 7v_1 + 0v_2 + 2v_3 &= 5. \end{aligned} \tag{A.3}$$

A.2 Cramer Metodu

Denklemler kümesindeki her bilinmeyen değişkenin değeri, iki determinantın oranı olarak ifade edilebilir. Eğer N, uygun bir altindisle pay determinantını ve Δ da payda determinantını gösterirse, k-yinci bilinmeyen x_k

$$x_k = \frac{N_k}{\Delta} \tag{A.4}$$

ile verilir. Payda determinantı Δ her bilinmeyen değişken için aynıdır ve denklem kümesinin **karakteristik determinantı** olarak adlandırılır. N_k pay determinantı ise her bir değişken için farklıdır. Eş. A.4, ortak denklemlerin çözümü için **Cramer metodu** olarak bilinir.

A.3 Karakteristik Determinant

Ortak denklemler kümesi Eş. A.1 ve A.3'te sergilendiği gibi bir sıralı dizi halinde düzenlendiğinde karakteristik determinantın oluşturulması basit bir işlemdir. Bu determinant, bilinmeyen değişkenlerinin katsayılarından oluşan kare dizidir. Örneğin Eş. A.1 ve A.3'ün karakteristik determinantları, sırasıyla

$$\Delta = \begin{vmatrix} 21 & -9 & -12 \\ -3 & 6 & -2 \\ -8 & -4 & 22 \end{vmatrix} \tag{A.5}$$

ve

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} \tag{A.6}$$

olarak bulunur.

A.4 Pay Determinantı

N_k pay determinantı, karakteristik determinantın k-yinci kolonu, denklemlerin sağ tarafındaki değerlerin oluşturduğu kolonla değiştirilerek oluşturulur.

Örneğin Eş. A.1'deki i_1, i_2 ve i_3'ün hesaplanması için gereken pay determinantları

$$N_1 = \begin{vmatrix} -33 & -9 & -12 \\ 3 & 6 & -2 \\ 50 & -4 & 22 \end{vmatrix}, \tag{A.7}$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} 21 & -33 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \\ -8 & 50 & 22 \end{vmatrix} \tag{A.8}$$

ve

$$N_3 = \begin{vmatrix} 21 & -9 & -33 \\ -3 & 6 & 3 \\ -8 & -4 & 50 \end{vmatrix} \tag{A.9}$$

olarak yazılabilir. Eş. A.3'te v_1, v_2 ve v_3'ün hesaplanması için pay determinantları ise

$$N_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 16 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \tag{A.10}$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 16 & 3 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix} \tag{A.11}$$

ve

$$N_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 16 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} \tag{A.12}$$

olarak bulunur.

A.5 Bir Determinantın Hesaplanması

Bir determinantın değeri, determinant minörleri cinsinden açılarak bulunur. Bir determinantın herhangi bir elemanının minörü, o elamanın bulunduğu satır ve kolon atıldıktan sonra geride kalan determinanttır. Örneğin Eş. A.7'deki 6 elemanının minörü

$$\begin{vmatrix} -33 & -12 \\ 50 & 22 \end{vmatrix}$$

ile ve Eş. A.7'deki 22 elemanının minörü ise

$$\begin{vmatrix} -33 & -9 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

ile verilir. Bir elemanın **kofaktörü**, minörü ile i ve j sırasıyla elemanın bulunduğu satır ve kolonu göstermek üzere

$$-1^{(i+j)}$$

olarak belirlenen işaret kontrol katsayısının çarpımıdır. Böylece Eş. A.7'deki 6 elemanının kofaktörü

$$-1^{(2+2)}\begin{vmatrix} -33 & -12 \\ 50 & 22 \end{vmatrix}$$

ve 22 elemanının kofaktörü de

$$-1^{(3+3)}\begin{vmatrix} -33 & -9 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

bulunur. Bir elemanın kofaktörü **işaretli minörü** olarak da adlandırılır.

$-1^{(i+j)}$ işaret kontrol katsayısı, $i+j$'nin çift veya tek tamsayı olmasına bağlı olarak +1 veya –1'e eşit olacaktır. Böylelikle bir satır veya kolon boyunca ilerlerken kofaktörün cebirsel işareti +1 ve –1 değerlerini alarak değişir. Bir 3 × 3 determinant için artı ve eksi işaretleri aşağıdaki dama tahtası örüntüsünü verir.

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Bir determinant herhangi bir satırı veya kolonu boyunca açılabilir. Dolayısıyla açılım yaparken ilk adım, bir i satırı veya bir j kolonu seçmektir. Satır veya kolon seçildiğinde, o satır veya kolondaki her bir eleman işaretli minörü veya kofaktörü ile çarpılır. Determinantın değeri bu çarpımların toplamıdır. Örnek olarak Eş. A.5'teki determinantı ile kolonu boyunca açarak hesaplayalım. Az önce açıklanan kuralları takip ederek açılımı

$$\Delta = 21(1)\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 22 \end{vmatrix} - 3(-1)\begin{vmatrix} -9 & -12 \\ -4 & 22 \end{vmatrix} - 8(1)\begin{vmatrix} -9 & -12 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} \qquad \text{(A.13)}$$

olarak yazarız. Eş. A.13'teki 2 × 2 determinantlar da minörleri cinsinden açılabilir. Bir 2 × 2 determinantın minörü tek bir elemandır. Buradan açılımın, üst sol eleman ile alt sağ eleman çarpılıp, bu çarpımdan alt sol eleman ile üst

sağ elemanın çarpımı çıkarılarak bulunacağı görülür. Bu gözlemi kullanarak Eş. A.13

$$\Delta = 21(132 - 8) + 3(-198 - 48) - 8(18 + 72)$$

$$= 2604 - 738 - 720 = 1146 \qquad \text{(A.14)}$$

olarak hesaplanır. Eğer determinantı, elemanların ikinci satırı boyunca açmayı seçseydik hesaplamamız aşağıdaki gibi olurdu.

$$\Delta = -3(-1)\begin{vmatrix} -9 & -12 \\ -4 & 22 \end{vmatrix} + 6(+1)\begin{vmatrix} 21 & -12 \\ -8 & 22 \end{vmatrix} - 2(-1)\begin{vmatrix} 21 & -9 \\ -8 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-198 - 48) + 6(462 - 96) + 2(-84 - 72)$$

$$= -738 + 2196 - 312 = 1146. \qquad \text{(A.15)}$$

Eş A.7, A.8 ve A.9'da verilen N_1, N_2 ve N_3 determinantlarının nümerik değerleri

$$N_1 = 1146, \qquad \text{(A.16)}$$

$$N_2 = 2292, \qquad \text{(A.17)}$$

ve

$$N_3 = 3438 \qquad \text{(A.18)}$$

olarak bulunur. A.15 – A.18 denklemlerinden, Eş. A.1'deki i_1, i_2 ve i_3'ün çözümünün

$$i_1 = \frac{N_1}{\Delta} = 1\text{ A},$$

$$i_2 = \frac{N_2}{\Delta} = 2\text{ A}, \qquad \text{(A.19)}$$

ve

$$i_3 = \frac{N_3}{\Delta} = 3\text{ A}$$

olduğu bulunur.

Eş. A.3'teki v_1, v_2 ve v_3'ün çözümünün

$$v_1 = \frac{49}{-5} = -9.8\ \text{V},$$

$$v_2 = \frac{118}{-5} = -23.6\ \text{V} \tag{A.20}$$

ve

$$v_3 = \frac{-184}{-5} = 36.8\ \text{V}$$

olduğunun sağlaması okura bırakılmıştır.

A.6 Matrisler

Bir ortak doğrusal denklem sistemi matrisler kullanılarak da çözülebilir. Aşağıda matris gösterimini, cebirini ve terminolojisini kısaca tekrarlayacağız[1].

Bir **matris,** elemanların dikdörtgen bir dizisi olarak tanımlanır. Buradan,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{A.21}$$

m satırlı ve n kolonlu bir matristir. A'yı m'ye n mertebeli veya $m \times n$ bir matris olarak tarif ederiz. Burada m satırların n de kolonların sayısına eşittir. Önce satırlar, ikinci olarak da kolonlar belirtilir. Matrisin $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$ elemanları reel sayılar, kompleks sayılar ve fonksiyonlar olabilir. Matrisleri kalın büyük harflerle göstereceğiz.

Eş. A.21'deki dizi sıklıkla, a_{ij} i-yinci satır ve j-yinci kolondaki eleman olmak üzere

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{mn} \tag{A.22}$$

biçiminde kısaltılır.

Eğer $m = 1$ ise **A matrisine** satır matrisi denir ve

$$\mathbf{A} = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \cdots \quad a_{1n}] \tag{A.23}$$

biçimindedir.

[1] Matrislerin devre analizine uygulanması konusunda mükemmel bir giriş seviyeli kitap olarak Lawrence P. Huelsman, *Circuits, Matrices, and Linear Vector Spaces* (New York: McGraw-Hill, 1963) gösterilebilir.

Eğer $n = 1$ ise **A** bir **kolon matrisidir** ve

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \tag{A.24}$$

biçimindedir. Eğer $m = n$ ise **A**, **kare matris** olarak adlandırılır. Örneğin $m = n = 3$ ise 3'e 3 kare matris

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{A.25}$$

olarak yazılır. Ayrıca matrisleri gösterirken köşeli parantez [ ] kullandığımıza, determinantları ise dikey çizgilerle | | gösterdiğimize dikkat ediniz. Bu farkı bilmek önemlidir. Bir matris, elemanların bir dikdörtgensel dizisidir. Bir **determinant** ise bir kare dizi oluşturan elemanların bir fonksiyonudur. Sonuç olarak eğer **A** matrisi kare ise **A**'nın determinantını tanımlayabiliriz. Örneğin eğer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

ise determinantını

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = 30 - 6 = 24$$

olarak hesaplarız.

A.7 Matris Cebiri

Matrislerin eşitliği, toplam ve farkı sadece aynı mertebeden matrislere uygulanır. İki matris ancak ve ancak karşılıklı tüm elemanları eşitse birbirine eşittir. Bir başka deyişle, ancak ve ancak tüm i ve j için $a_{ij} = b_{ij}$ ise $\mathbf{A} = \mathbf{B}$'dir. Örneğin Eş. A.26 ve A.27'deki iki matris eşittir çünkü $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ ve $a_{22} = b_{22}$'dir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 36 & -20 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}, \tag{A.26}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 36 & -20 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}. \tag{A.27}$$

Eğer **A** ve **B** aynı mertebeden ise

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \tag{A.28}$$

ifadesi

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{A.29}$$

anlamına gelir. Örneğin eğer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 10 \\ 8 & 12 & -4 \end{bmatrix} \tag{A.30}$$

ve

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 16 & 10 & -30 \\ -20 & 8 & 15 \end{bmatrix} \tag{A.31}$$

ise o zaman

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 20 & 4 & -20 \\ -12 & 20 & 11 \end{bmatrix} \tag{A.32}$$

olarak bulunur. Aşağıdaki

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \tag{A.33}$$

ifadesi

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \tag{A.34}$$

anlamına gelir. Eş. A. 30 ve A.31'deki matrisler için

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -12 & -16 & 40 \\ 28 & 4 & -19 \end{bmatrix} \tag{A.35}$$

olarak hesaplanır. Aynı mertebeden metrislere, toplama ve çıkarma için uyumlu denir.

Bir matrisi bir k skaleri ile çarpmak, her elemanını bu skaler ile çarpmaya eşdeğerdir. Dolayısıyla, ancak ve ancak $a_{ij} = kb_{ij}$ ise $\mathbf{A} = k\mathbf{B}$'dir. k'nın reel veya kompleks olabileceğine dikkat edilmelidir. Örnek olarak Eş. A.35'teki **D** matrisini 5 ile çarpacağız. Sonuç aşağıda verilmiştir.

$$5\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -60 & -80 & 200 \\ 140 & 20 & -95 \end{bmatrix}. \tag{A.36}$$

Matris çarpımı yalnızca birinci matrisin kolon sayısı ikinci matrisin satır sayısına eşit olduğunda gerçekleştirilebilir. Diğer bir deyişle **AB** çarpımı, **A**'nın kolon sayısının **B**'nin satır sayısına eşit olmasını gerektirir. Sonuç matrisinin mertebesi **A**'nın satır sayısı çarpı **B**'nin kolon sayısı olacaktır. Yani eğer $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, **A** $m \times p$ ve **B** $p \times n$ mertebeli ise **C** $m \times n$ olacaktır. **A**'nın kolon sayısı **B**'nin satır sayısına eşit olduğunda **A** çarpma için **B**'ye uyumludur denir.

C'nin elemanları

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \tag{A.37}$$

formülü ile verilir. Matris çarpımının satıra karşı kolon işlemi olduğu hatırlanırsa Eş. A.37'deki formülün kullanımı kolaydır. **C**'nin i-yinci, j-yinci terimini bulmak için **A**'nın i-yinci satırındaki her bir eleman, **B**'nin j-yinci kolonundaki karşılık gelen elemanla çarpılır ve bu çarpımlar toplanır. Bir sonraki örnek bu işlemi sergileyecektir. **A** ve **B**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \tag{A.38}$$

ve

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{A.39}$$

ile verildiğinde **C** matrisini bulmamız istenmektedir. Öncelikle **C**'nin bir 2×2 matris olacağına ve **C**'nin her bir elemanının, üç çarpımın toplanmasını gerektireceğine dikkat edilmelidir.

C_{11}'i bulmak için **A** matrisinin 1. satırındaki elemanları, **B** matrisinin 1. kolonundaki karşılık gelen elemanlarla çarpar ve bu çarpımları toplarız. Bu çarpma ve toplama işlemini, her bir matristen ilgili satırı ve kolonu çıkarıp bunları eleman eleman eşleyerek daha iyi anlayabiliriz. C_{11}'i bulmak için

A'nın 1. satırı	6	3	2
B'nin 1. kolonu	4	0	1

yazarız ve buradan

$$C_{11} = 6 \times 4 + 3 \times 0 + 2 \times 1 = 26$$

hesaplarız. C_{12}'yi bulmak için

A'nın 1. satırı	6	3	2
B'nin 2. kolonu	2	3	−2

yazar ve buradan

$$C_{12} = 6 \times 2 + 3 \times 3 + 2 \times (-2) = 17.$$

hesaplarız. C_{21} için ise

A'nın 2. satırı	1	4	6
B'nin 1. kolonu	4	0	1

yazar ve

$$C_{21} = 1 \times 4 + 4 \times 0 + 6 \times 1 = 10$$

hesaplarız. Son olarak C_{22} için

A'nın 2. satırı	1	4	6
B'nin 1. kolonu	2	3	−2

yazılır ve buradan da

$$C_{22} = 1 \times 2 + 4 \times 3 + 6 \times (-2) = 2$$

hesaplanır. Sonuç olarak

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 26 & 17 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} \tag{A.40}$$

bulunmuştur.

Genel olarak matris çarpımı değişmeli değildir. Yani $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Örnek olarak Eş. A.38 ve A.39'daki matrislerin **BA** çarpımını inceleyelim. Bu çarpım ile üretilen matris 3×3 mertebelidir ve sonuç matrisindeki her bir terim iki çarpımın toplanmasını içerir. Böylece eğer $\mathbf{D} = \mathbf{BA}$ ise

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 26 & 20 & 20 \\ 3 & 12 & 18 \\ 4 & -5 & -10 \end{bmatrix} \tag{A.41}$$

hesaplanır. Açıkça $\mathbf{C} \neq \mathbf{D}$'dir. Eş. A.41'deki elemanların sağlaması size bırakılmıştır.

Matris çarpımı birleşmeli ve dağılmalıdır. Böylelikle

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}), \tag{A.42}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \tag{A.43}$$

ve

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC} \tag{A.44}$$

geçerlidir.

Eş. A. 42, A.43 ve A.44'te, matrisin toplama ve çarpma için uyumlu oldukları kabul edilmiştir.

Daha önce matris çarpımının değişmeli olmadığını belirtmiştik. Skalar cebirdeki çarpmanın matris cebirine taşınmayan iki özelliği daha vardır.

Birinci olarak $\mathbf{AB} = 0$ matris çarpımı $\mathbf{A} = 0$ veya $\mathbf{B} = 0$ olmasını gerektirmez. (*Not:* Bir matris tüm elemanları sıfır ise sıfıra eşittir.) Örneğin, eğer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

verilirse

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

bulunur. Burada ne **A** ne de **B** sıfırdır ancak çarpımları sıfırdır. İkinci olarak, $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ matris denklemi $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ olmasını gerektirmez. Örneğin eğer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

ise

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \text{ ancak } \mathbf{B} \neq \mathbf{C}.$$

Bir matrisin devriği, satırları ile kolonları yer değiştirilerek oluşturulur. Örneğin eğer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ise} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

bulunur. İki matrisin toplamının devreği, devriklerin toplamına eşittir, yani

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T. \tag{A.45}$$

İki matrisin çarpımlarının devriği, matrislerin devriklerinin ters sırada çarpımına eşittir. Diğer bir deyişle,

$$[\mathbf{AB}]^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \tag{A.46}$$

geçerlidir.

Denklem A.46 herhangi bir sayıda matrisin çarpımına genişletilebilir. Örneğin,

$$[\mathbf{ABCD}]^T = \mathbf{D}^T\mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T. \tag{A.47}$$

yazılabilir. Eğer $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ ise matris simetriktir denir. Sadece kare matrisler simetrik olabilir.

A.8 Birim, Ek ve Ters Matrisler

Bir **birim matris,** $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ ve $i = j$ için $a_{ij} = 1$ olan bir kare matristir. Bir başka deyişle bir birim matriste ana köşegendeki tüm elemanlar 1, diğerleri ise sıfırdır. Böylece

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrislerinin tümü birim matristir. Birim matrislerin her zaman kare olduğuna dikkat ediniz. Birim matrisleri **U** sembolü ile göstereceğiz.

Bir $n \times n$ **A** matrisinin **ek matrisi**, Δ_{ij} a_{ij}'nin kofaktörü olmak üzere

$$\text{adj}\,\mathbf{A} = [\Delta_{ji}]_{n\times n} \tag{A.48}$$

ile tanımlanır. (Kofaktörün tanımı için Kısım A.5'e bakınız.) Eş. A.48'den, bir kare matrisin ekinin iki adımlı bir süreçle bulunabileceği düşünülebilir. Önce **A**'nın kofaktörlerinden oluşan bir matris yazılır ve sonra bu kofaktörler matrisinin devriği alınır. Örnek olarak aşağıdaki 3×3 **A** matrisinin ekini bulacağız.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

A'nın elemanlarının kofaktörleri

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} &= 1(10 - 1) = 9, \\
\Delta_{12} &= -1(15 + 1) = -16, \\
\Delta_{13} &= 1(3 + 2) = 5, \\
\Delta_{21} &= -1(10 - 3) = -7, \\
\Delta_{22} &= 1(5 + 3) = 8, \\
\Delta_{23} &= -1(1 + 2) = -3, \\
\Delta_{31} &= 1(2 - 6) = -4, \\
\Delta_{32} &= -1(1 - 9) = 8, \\
\Delta_{33} &= 1(2 - 6) = -4
\end{aligned}$$

olarak yazılır.

Buradan kofaktörler matrisi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & -16 & 5 \\ -7 & 8 & -3 \\ -4 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

yazılır ve **A**'nın eki

$$\text{adj}\,\mathbf{A} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 9 & -7 & -4 \\ -16 & 8 & 8 \\ 5 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bir matrisin ekini bulmanın aritmetiği

$$\text{adj}\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \det \mathbf{A} \cdot \mathbf{U} \tag{A.49}$$

teoremi kullanılarak kontrol edilebilir. Eş. A.49 bize **A**'nın eki ile **A**'nın çarpımının **A**'nın determinantı ile birim matrisin çarpımına eşit olduğunu söyler. Örneğimiz için

$$\det \mathbf{A} = 1(9) + 3(-7) - 1(-4) = -8.$$

bulurız. Eğer $\mathbf{C} = a_{dj}\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ alır ve Kısım A.7'de anlatılan tekniği kullanırsak **C**'nin elemanlarını

$$\begin{aligned}
c_{11} &= 9 - 21 + 4 = -8, \\
c_{12} &= 18 - 14 - 4 = 0, \\
c_{13} &= 27 - 7 - 20 = 0, \\
c_{21} &= -16 + 24 - 8 = 0, \\
c_{22} &= -32 + 16 + 8 = -8, \\
c_{23} &= -48 + 8 + 40 = 0, \\
c_{31} &= 5 - 9 + 4 = 0, \\
c_{32} &= 10 - 6 - 4 = 0, \\
c_{33} &= 15 - 3 - 20 = -8
\end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Sonuç olarak

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = -8\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \det \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}$$

olur. Bir **A** kare matrisinin **tersi** $\mathbf{A}^{-1}$ ile gösterilir ve

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U} \tag{A.50}$$

denklemini sağlar.

Eş. A.50 bir matris tersi ile soldan veya sağdan çarpıldığında sonucun **U** birim matrisi olduğunu söyler. Ters matrisin var olması için **A**'nın determinantının sıfır olmaması gerekir. Sadece kare matrislerin tersi vardır ve ters matris de karedir.

Bir matrisin tersi için bir formül

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj} \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}} \tag{A.51}$$

olarak verilebilir. Eğer **A**'nın boyutu 3 × 3'ten daha büyükse Eş. (A.51)'deki formülün kullanımı zorlaşır[2]. Günümüzde sayısal bilgisayarlar matris cebirinin nümerik uygulamalarında matris tersi bulma zorluğunu ortadan kaldırmıştır.

Eş. A.51 kullanılarak önceki örnekteki **A** matrisinin tersi

$$\mathbf{A}^{-1} = -1/8\begin{bmatrix} 9 & -7 & -4 \\ -16 & 8 & 8 \\ 5 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.125 & 0.875 & 0.5 \\ 2 & -1 & -1 \\ -0.625 & 0.375 & 0.5 \end{bmatrix}$$

bulunur. $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}$ olduğunun sağlaması size bırakılmıştır.

A.9 Bölünmüş Matrisler

Matris hesaplamalarından verilen bir matrisi altmatrislere bölmek sıklıkla kullanılan bir yöntemdir. Sonra baştaki cebirsel işlemler bu altmatrisler cinsinden gerçekleştirilir. Bir matrisi bölerken, bölmelerin yeri tamamen isteğe bağlıdır ancak bölme tüm matris boyunca olmalıdır. Bölmeleri seçerken, altmatrislerin ilgili matematiksel işlemler için uyumlu olduğundan emin olunmalıdır.

Örneğin aşağıda verilen **A** ve **B** matrisleri için altmatrisleri kullanarak **C** = **AB** çarpımını bulalım.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

[2]Herhangi bir giriş seviyesi matris teorisi kitabından değişik ters bulma yöntemlerini öğrenebilirsiniz. Örneğin Franz E. Hohn, Elemantary Matrix Algebra (New York: Macmillan, 1973) kullanılabilir.

ve

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

B'yi, $\mathbf{B}_{11}$ ve $\mathbf{B}_{21}$ altmatrislerine aşağıdaki gibi bölmeye karar verdiğimizi kabul ediniz.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{B}_{21} \end{bmatrix}.$$

Şimdi **B** iki satırlı bir kolon matris halinde bölündüğü için **A** da en az iki kolonlu bir matrise bölünmelidir. Aksi takdirde çarpma işlemi gerçekleştirilemez. **A** matrisinin dikey bölmeleri $\mathbf{B}_{11}$ ve $\mathbf{B}_{21}$'in tanımlarına dayanacaktır. Örneğin eğer

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ise $\mathbf{A}_{11}$ üç kolona ve $\mathbf{A}_{12}$ iki kolona sahip olmalıdır. Sonuç olarak Eş. A.52'de gösterilen bölmeler, **AB** çarpımını oluşturmak için uygun bir seçimdir.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & | & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & | & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & | & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ \cdots \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{A.52}$$

Öte yandan eğer **B** matrisini

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak bölersek o zaman $\mathbf{A}_{11}$ iki kolona ve $\mathbf{A}_{12}$ üç kolona sahip olmalıdır. Bu durumda Eş. A.53'teki bölmeleme **C** = **AB** çarpımını gerçekleştirmek için uygun olur.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & | & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & | & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & | & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \cdots \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{A.53}$$

Tartışma amacıyla Eş. A.52'deki bölmeleme üzerine odaklanacak ve Eş. A.53'teki bölmelemenin aynı sonucu verdiğinin sağlamasını size bırakacağız.

Eş. A.52'den

$$\mathbf{C} = [\mathbf{A}_{11}\ \mathbf{A}_{12}]\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}\\ \mathbf{B}_{21}\end{bmatrix} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} \tag{A.54}$$

yazabiliriz. Eş. A.52 ve A.54'ten

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 5 & 4 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 7\\ -4\\ 1\\ -1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} 4 & 5\\ 2 & 1\\ -3 & 1\\ 0 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\ 6\\ -9\\ 0\\ -6\end{bmatrix}$$

hesaplanır ve

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix}11\\ 13\\ -13\\ 1\\ -7\end{bmatrix}$$

elde edilir. Dikey bölmeleme çarpma işlemi ile tutarlı yapıldıktan sonra **A** matrisi yatay olarak da bölmelenebilir. Bu basit problemde yatay bölmeleme analizcinin seçimine göre yapılabilir. Dolayısıyla **C** matrisi Eş. A.55'te gösterilen bölmeleme ile de hesaplanabilir.

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & 0 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}2\\ 0\\ -1\\ \cdots\\ 3\\ 0\end{array}\right]. \tag{A.55}$$

Eş. A.55'ten

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}\\ \mathbf{B}_{21}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{C}_{11}\\ \mathbf{C}_{21}\end{bmatrix} \tag{A.56}$$

bulunur. Burada

$$\mathbf{C}_{11} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21},$$
$$\mathbf{C}_{21} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21}$$

ile verilmektedir.

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\\ -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & 5\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-1\\ 7\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}12\\ 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\ 13\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\\ -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1\\ 0 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-4\\ 1\\ -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-9\\ 0\\ -6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-13\\ 1\\ -7\end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix}11\\ 13\\ -13\\ 1\\ -7\end{bmatrix}$$

olduğunun sağlamasını yapmak okura bırakılmıştır. Ayrıca bitirirken, Eş. A.52 ve A.55'teki bölmelemelerin toplama göre uyumlu olduğuna dikkat edilmelidir.

A.10 Uygulamalar

Aşağıdaki örnekler matris cebirinin devre analizindeki bazı uygulamalarını sergilemektedir.

Örnek A.1

Matris yöntemini kullanarak Eş.4.5 ve 4.6'daki v_1 ve v_2 düğüm gerilimlerini bulunuz.

Çözüm

İlk adım, Eş. 4.5 ve 4.6'yi matris gösteriminde yazmaktır. v_1 ve v_2'nin katsayılarını toplamak ve aynı zamanda sabit terimleri denklemlerin sağ tarafına kaydırmak

$$1.7v_1 - 0.5v_2 = 10,$$
$$-0.5v_1 + 0.6v_2 = 2 \qquad \text{(A.57)}$$

verir. Buradan Eş. A. 57, matris gösteriminde

$$\begin{bmatrix} 1.7 & -0.5 \\ -0.5 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(A.58)}$$

veya

$$\mathbf{AV} = \mathbf{I} \qquad \text{(A.59)}$$

haline gelir. Burada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.7 & -0.5 \\ -0.5 & 0.6 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ile verilir. **V** matrisinin elemanlarını bulmak için Eş. A.59'un her iki tarafı soldan **A**'nın tersi ile çarpılır. Böylece

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AV} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I} \qquad \text{(A.60)}$$

yazılır. Eş. A.60

$$\mathbf{UV} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I} \qquad \text{(A.61)}$$

veya

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I} \qquad \text{(A.62)}$$

haline indirgenir.

Eş. A.62'den ϑ_1 ve ϑ_2 için çözümün, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}$ çarpımı hesaplanarak elde edileceği görülür.

A'nın tersini bulmak için önce **A**'nın kofaktörlerini buluruz. Böylece

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^2(0.6) = 0.6, \\ \Delta_{12} &= (-1)^3(-0.5) = 0.5, \\ \Delta_{21} &= (-1)^3(-0.5) = 0.5, \\ \Delta_{22} &= (-1)^4(1.7) = 1.7 \end{aligned} \qquad \text{(A.63)}$$

yazılır. Kofaktörlerin matrisi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 1.7 \end{bmatrix} \qquad \text{(A.64)}$$

ve **A**'nın ek matrisi

$$\text{adj}\,\mathbf{A} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 1.7 \end{bmatrix} \qquad \text{(A.65)}$$

bulunur. **A**'nın determinantı ise

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1.7 & -0.5 \\ -0.5 & 0.6 \end{vmatrix} = (1.7)(0.6) - (0.25) = 0.77 \qquad \text{(A.66)}$$

hesaplanır. Şimdi Eş. A.65 ve A.66'dan, katsayılar matrisinin tersini

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{0.77}\begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 1.7 \end{bmatrix} \qquad \text{(A.67)}$$

olarak yazabiliriz. Şimdi $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}$ çarpımı bulunabilir.

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{I} = \frac{100}{77}\begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 1.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{100}{77}\begin{bmatrix} 7 \\ 8.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.09 \\ 10.91 \end{bmatrix}. \qquad \text{(A.68)}$$

Buradan doğrudan

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.09 \\ 10.91 \end{bmatrix} \qquad \text{(A.69)}$$

veya $v_1 = 9.09$ V ve $v_2 = 10.91$ V olduğu görülür.

Örnek A.2

Şekil 4.24'teki devredeki üç ağ akımını matris yöntemini kullanarak bulunuz.

Çözüm

Şekil 4.24'teki devreyi açıklayan ağ akım denklemleri Eş. 4.34'te verilmiştir. Akım kontrollü gerilim kaynağınca belirlenen kısıt denklemi Eş. 4.35'te verilmiştir. Eş. 4.35 Eş. 4.34'te yerine konduğunda aşağıdaki denklem kümesi elde edilir:

$$\begin{aligned} 25i_1 - 5i_2 - 20i_3 &= 50, \\ -5i_1 + 10i_2 - 4i_3 &= 0, \\ -5i_1 - 4i_2 + 9i_3 &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(A.70)}$$

Matris gösteriminde Eş. A.70

$$\mathbf{AI} = \mathbf{V}, \qquad \text{(A.71)}$$

haline indirgenir. Burada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 25 & -5 & -20 \\ -5 & 10 & -4 \\ -5 & -4 & 9 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ile verilir. Eş. A.71'den **I**'nin çözümü

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V} \qquad \text{(A.72)}$$

bulunur. **A**'nın tersini

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}\,\mathbf{A}}{\det \mathbf{A}} \qquad \text{(A.73)}$$

bağıntısı ile buluruz. **A**'nın ek matrisini bulmak için önce **A**'nın kofaktörlerini hesaplayacağız. Kofaktörler

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^2(90 - 16) = 74, \\ \Delta_{12} &= (-1)^3(-45 - 20) = 65, \\ \Delta_{13} &= (-1)^4(20 + 50) = 70, \\ \Delta_{21} &= (-1)^3(-45 - 80) = 125, \\ \Delta_{22} &= (-1)^4(225 - 100) = 125, \\ \Delta_{23} &= (-1)^5(-100 - 25) = 125, \\ \Delta_{31} &= (-1)^4(20 + 200) = 220, \\ \Delta_{32} &= (-1)^5(-100 - 100) = 200, \\ \Delta_{33} &= (-1)^6(250 - 25) = 225 \end{aligned}$$

hesaplanır. Kofaktör matrisi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 74 & 65 & 70 \\ 125 & 125 & 125 \\ 220 & 200 & 225 \end{bmatrix} \qquad \text{(A.74)}$$

olarak elde edilir ve buradan da **A**'nın ek matrisini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\text{adj}\,\mathbf{A} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 74 & 125 & 220 \\ 65 & 125 & 200 \\ 70 & 125 & 225 \end{bmatrix}. \qquad \text{(A.75)}$$

A'nın determinantı

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 25 & -5 & -20 \\ -5 & 10 & -4 \\ -5 & -4 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= 25(90 - 16) + 5(-45 - 80) - 5(20 + 200) = 125$$

bulunur. Eş. A.73 kullanılarak $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{125}\begin{bmatrix} 74 & 125 & 220 \\ 65 & 125 & 200 \\ 70 & 125 & 225 \end{bmatrix}. \qquad \text{(A.76)}$$

olarak elde edilir. O halde **I** için çözüm

$$\mathbf{I} = \frac{1}{125}\begin{bmatrix} 74 & 125 & 220 \\ 65 & 125 & 200 \\ 70 & 125 & 225 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.60 \\ 26.00 \\ 28.00 \end{bmatrix} \qquad \text{(A.77)}$$

olur. Ağ akımları doğrudan Eş. A.77'den bulunur. Böylelikle

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.6 \\ 26.0 \\ 28.0 \end{bmatrix} \qquad \text{(A.78)}$$

veya $i_1 = 29.6$ **A**, $i_2 = 26$ **A** ve $i_3 = 28$ **A**'dir. Örnek A.3, matris elemanları kompleks sayılar olduğunda matris yönteminin uygulanmasını sergileyecektir.

Örnek A.3

Matris yöntemini kullanarak Şekli 9.37'de verilen devredeki $\mathbf{I}_1$ ve $\mathbf{I}_2$ fazör ağ akımlarını bulunuz.

Çözüm

Ağ 1 etrafında gerilimlerin toplanması

$$(1 + j2)\mathbf{I}_1 + (12 - j16)(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = 150\angle 0^\circ \quad \text{(A.79)}$$

denklemini üretir. Ağ 2 etrafındaki gerilimlerin toplamı ise

$$(12 - j16)(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + (1 + j3)\mathbf{I}_2 + 39\mathbf{I}_x = 0 \quad \text{(A.80)}$$

denklemini verir. Bağımlı gerilim kaynağını kontrol eden akım

$$\mathbf{I}_x = (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) \quad \text{(A.81)}$$

ile verilir. Eş. A.81, Eş. A.80'de yerine konduktan sonra her bir denklemde $\mathbf{I}_1$ ve $\mathbf{I}_2$'nin katsayıları gruplanarak denklemler matris biçiminde

$$\begin{aligned}(13 - j14)\mathbf{I}_1 - (12 - j16)\mathbf{I}_2 &= 150\angle 0^\circ,\\ (27 + j16)\mathbf{I}_1 - (26 + j13)\mathbf{I}_2 &= 0\end{aligned} \quad \text{(A.82)}$$

olarak yazılır. Şimdi Eş. (A.82) matris gösterimi ile

$$\mathbf{AI} = \mathbf{V} \quad \text{(A.83)}$$

halinde ifade edilir. Burada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 - j14 & -(12 - j16) \\ 27 + j16 & -(26 + j13) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 150\angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

ile verilir. Eş. A.83'ten

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V} \quad \text{(A.84)}$$

elde edilir. **A** katsayılar matrisinin tersi Eş. A.73 kullanılarak bulunur. Bu durumda **A**'nın kofaktörleri

$$\begin{aligned}\Delta_{11} &= (-1)^2(-26 - j13) = -26 - j13,\\ \Delta_{12} &= (-1)^3(27 + j16) = -27 - j16,\\ \Delta_{21} &= (-1)^3(-12 + j16) = 12 - j16,\\ \Delta_{22} &= (-1)^4(13 - j14) = 13 - j14\end{aligned}$$

hesaplanır.

B kofaktör matrisi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (-26 - j13) & (-27 - j16) \\ (12 - j16) & (13 - j14) \end{bmatrix} \quad \text{(A.85)}$$

ve **A**'nın ek matrisi

$$\text{adj}\,\mathbf{A} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} (-26 - j13) & (12 - j16) \\ (-27 - j16) & (13 - j14) \end{bmatrix} \quad \text{(A.86)}$$

bulunur. **A**'nın determinantı ise

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} (13 - j14) & -(12 - j16) \\ (27 + j16) & -(26 + j13) \end{vmatrix}$$

$$= -(13 - j14)(26 + j13) + (12 - j16)(27 + j16)$$

$$= 60 - j45 \quad \text{(A.87)}$$

hesaplanır. Katsayı matrisinin tersi

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} (-26 - j13) & (12 - j16) \\ (-27 - j16) & (13 - j14) \end{bmatrix}}{(60 - j45)} \quad \text{(A.88)}$$

elde edilir. Eş. A.8'deki bu sonuç

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{60 + j45}{5625}\begin{bmatrix} (-26 - j13) & (12 - j16) \\ (-27 - j16) & (13 - j14) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{375}\begin{bmatrix} -65 - j130 & 96 - j28 \\ -60 - j145 & 94 - j17 \end{bmatrix} \quad \text{(A.89)}$$

halinde sadeleştirilebilir. Eş. A.89 A.84'te yerine konursa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{375}\begin{bmatrix} (-65 - j130) & (96 - j28) \\ (-60 - j145) & (94 - j17) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 150\angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-26 - j52) \\ (-24 - j58) \end{bmatrix} \quad \text{(A.90)}$$

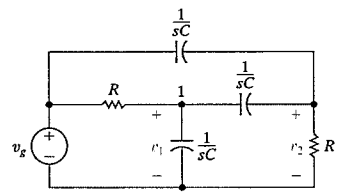
verir. Eş. A.90'dan aşağıdaki sonuç doğrudan yazılabilir.

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_1 &= (-26 - j52) = 58.14\angle -116.57^\circ \text{ A},\\ \mathbf{I}_2 &= (-24 - j58) = 62.77\angle -122.48^\circ \text{ A}.\end{aligned} \quad \text{(A.91)}$$

İlk üç örnekte matris elemanları sayılar idi. Örnek A.1 ve A.2 reel sayıları, Örnek A.3 ise kompleks sayıları içermekteydi. Elemanların fonksiyon olması da mümkündür. Örnek A.4, katsayılar matrisinin elemanları fonksiyonlar olan bir devre probleminde matris cebirinin kullanımını sergilemektedir.

Örnek A.4

Şekil A.1'deki devrede V_1 ve V_2 düğüm gerilimlerinin ifadesini matris yöntemini kullanarak çıkarınız.



Şekil A.1 ▲ Örnek A.4'ün devresi

Çözüm

Düğüm 1 ve 2'den çıkan akımların toplamını sıfıra eşitlemek bize aşağıdaki denklem kümesini verir.

$$\begin{aligned}\frac{V_1 - V_g}{R} + V_1 sC + (V_1 - V_2)sC &= 0,\\ \frac{V_2}{R} + (V_2 - V_1)sC + (V_2 - V_g)sC &= 0.\end{aligned} \quad \text{(A.92)}$$

$G = 1/R$ alır ve V_1 ile V_2'nin katsayılarını gruplarsak

$$\begin{aligned}(G + 2sC)V_1 - sCV_2 &= GV_g,\\ -sCV_1 + (G + 2sC)V_2 &= sCV_g\end{aligned} \quad \text{(A.93)}$$

buluruz. Eş. A.93 matris gösterimi ile

$$\mathbf{AV} = \mathbf{I} \quad \text{(A.94)}$$

olarak yazılır. Burada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} G + 2sC & -sC \\ -sC & G + 2sC \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} GV_g \\ sCV_g \end{bmatrix}$$

ile verilir. Eş. A.94'ten

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I} \quad \text{(A.95)}$$

takip eder. Daha önce olduğu gibi, **A** matrisinin tersini bulmak için önce **A**'nın ekini ve determinantını hesaplayacağız. **A**'nın kofaktörleri

$$\begin{aligned}\Delta_{11} &= (-1)^2[G + 2sC] = G + 2sC,\\ \Delta_{12} &= (-1)^3(-sC) = sC,\\ \Delta_{21} &= (-1)^3(-sC) = sC,\\ \Delta_{22} &= (-1)^4[G + 2sC] = G + 2sC\end{aligned}$$

ve buradan da kofaktör matrisi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} G + 2sC & sC \\ sC & G + 2sC \end{bmatrix} \quad \text{(A.96)}$$

bulunur. Sonuçta katsayılar matrisinin eki

$$\text{adj}\,\mathbf{A} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} G + 2sC & sC \\ sC & G + 2sC \end{bmatrix} \quad \text{(A.97)}$$

elde edilir.

A'nın determinantı

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} G + 2sC & sC \\ sC & G + 2sC \end{vmatrix} = G^2 + 4sCG + 3s^2C^2 \quad \text{(A.98)}$$

bulununca katsayı matrisinin tersi

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} G + 2sC & sC \\ sC & G + 2sC \end{bmatrix}}{(G^2 + 4sCG + 3s^2C^2)} \quad \text{(A.99)}$$

elde edilir. Eş. A.95'ten

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} G + 2sC & sC \\ sC & G + 2sC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} GV_g \\ sCV_g \end{bmatrix}}{(G^2 + 4sCG + 3s^2C^2)} \quad \text{(A.100)}$$

bulunur. Eş. A.100'deki matris çarpımı gerçekleştirildiğinde

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(G^2 + 4sCG + 3s^2C^2)}\begin{bmatrix} (G^2 + 2sCG + s^2C^2)V_g \\ (2sCG + 2s^2C^2)V_g \end{bmatrix} \quad \text{(A.101)}$$

elde edilir. Şimdi V_1 ve V_2'nin ifadeleri Eş. A.101'den doğrudan,

$$V_1 = \frac{(G^2 + 2sCG + s^2C^2)V_g}{(G^2 + 4sCG + 3s^2C^2)} \quad \text{(A.102)}$$

ve

$$V_2 = \frac{2(sCG + s^2C^2)V_g}{(G^2 + 4sCG + 3s^2C^2)} \quad \text{(A.103)}$$

olarak yazılabilir.

Son örneğimizde, matris cebirinin, art arda bağlı iki tane iki kapılı devrenin analizinde nasıl kullanılabileceğini sergileyeceğiz.

Örnek A.5

Matris cebiri kullanarak, Şekil 18.10'daki art arda bağlantıda V_1 ve I_1 giriş değişkenlerinin nasıl V_2 ve I_2 çıkış değişkenlerinin fonksiyonu olarak ifade edilebileceğini gösteriniz.

Çözüm

Her bir iki kapalı devrenin giriş ve çıkış değişkenleri arasındaki bağıntıyı matris gösterimiyle ifade ederek başlayacağız. Bu yapıldığında

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ I_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}' & -a_{12}' \\ a_{21}' & -a_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2' \\ I_2' \end{bmatrix} \tag{A.104}$$

ve

$$\begin{bmatrix} V_1'' \\ I_1'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}'' & -a_{12}'' \\ a_{21}'' & -a_{22}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2'' \\ I_2'' \end{bmatrix} \tag{A.105}$$

elde edilir. Buradaki art arda bağlantı

$$V_2' = V_1'' \quad \text{ve} \quad I_2' = -I_1'' \tag{A.106}$$

kısıtlarını gerektirmektedir.

Bu kısıt bağıntıları Eş. A.104'te yerine konursa

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ I_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}' & -a_{12}' \\ a_{21}' & -a_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1'' \\ -I_1'' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1'' \\ I_1'' \end{bmatrix} \tag{A.107}$$

buluruz. (V_1, I_1) giriş değişkenleri ile (V_2, I_2) çıkış değişkenleri arasındaki bağıntı Eş. A.105 Eş. A.107'de yerine konarak elde edilir. Bu yapıldığında

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}'' & -a_{12}'' \\ a_{21}'' & -a_{22}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{A.108}$$

sonucu bulunur. Katsayılar matrislerinin çarpımı yapıldığında

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}'a_{11}'' + a_{12}'a_{21}'') & -(a_{11}'a_{12}'' + a_{12}'a_{22}'') \\ (a_{21}'a_{11}'' + a_{22}'a_{21}'') & -(a_{21}'a_{12}'' + a_{22}'a_{22}'') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{A.109}$$

bulunur. Eş. A.109'un, Eş. 18.72 ve 18.73'ün matris biçiminde yazılmış hali olduğuna dikkat ediniz.

Ek

B Kompleks Sayılar

Kompleks sayılar, negatif sayıların kareköklerinin bulunması için icat edilmiştir. Diğer şekilde çözümü çok zor olan problemler kompleks sayılarla basitleşir. Örneğin, $x^2 + 8x + 41 = 0$ denkleminin, kompleks sayıları içermeyen bir sayı sisteminde çözümü yoktur. Kompleks sayılar ve onlarla cebirsel işlemler yapma kabiliyeti devre analizinde çok önemlidir.

B.1 Gösterim

Bir kompleks sayıyı göstermenin iki yolu vardır: **Kartezyen** veya **dikdörtgen biçim**inde ve kutupsal veya trigonometrik biçimde. Kartezyen biçimde bir kompleks sayı reel ve sanal bileşenleri cinsinden

$$n = a + jb \tag{B.1}$$

halinde yazılır. Burada a reel bileşen, b sanal bileşen ve j ise tanımı gereği $\sqrt{-1}$'dir.[1]

Kutupsal biçimde bir kompleks sayı büyüklüğü (modülüs) ve açısı (argümanı) ile

$$\tilde{n} = ce^{j\theta} \tag{B.2}$$

olarak gösterilir. Burada c büyüklük, θ açı, e doğal logaritmanın tabanı ve daha önce olduğu gibi $j = \sqrt{-1}$'dir. Literatürde $\angle\theta^\circ$ sıklıkla $e^{j\theta}$ yerine kullanılır yani kutupsal biçim

$$n = c\angle\theta^\circ \tag{B.3}$$

olarak yazılır. Eş. B.3'ün yazımı daha kolay olmakla birlikte Eş. B.2 matematiksel işlemlerde daha önemlidir. Bunun nedeni üstel niceliklerin işlem kurallarının bu biçimde çok bilinir olmasıdır. Örneğin $(y^x)^n = y^{xn}$ olduğundan $(e^{j\theta})^n = e^{jn\theta}$'dır ve $y^{-x} = 1/y^x$ olduğundan $e^{-j\theta} = 1/e^{j\theta}$'dır ve diğerleri de verilebilir.

Aynı kompleks sayıyı ifade etmek için iki yol olduğundan, bu iki biçim arasında bir ilişki bulmalıyız. Kutupsaldan kartezyen biçime geçiş, Euler özdeşliğini kullanır.

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta. \tag{B.4}$$

[1] $i = \sqrt{-1}$ gösterimi size daha tanıdık gelebilir. Elektrik mühendisliğinde i akım sembolü olarak kullanılır ve dolayısıyla elektrik mühendisliği literatüründe $j\sqrt{-1}$'i göstermek için kullanılır.

Kutupsal biçimdeki bir kompleks sayı kartezyen biçimde aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} ce^{j\theta} &= c(\cos\theta + j\sin\theta) \\ &= c\cos\theta + jc\sin\theta) \\ &= a + jb. \end{aligned} \tag{B.5}$$

Kartezyenden kutupsal biçime geçiş dik üçgen geometrisinden yararlanır. Bunun için,

$$\begin{aligned} a + jb &= \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)e^{j\theta} \\ &= ce^{j\theta} \end{aligned} \tag{B.6}$$

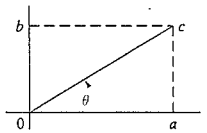
yazılır. Burada

$$\tan\theta = b/a \tag{B.7}$$

geçerlidir. Eş. B.7'den θ açısının hangi dörttebirlikte olduğu açık değildir. Bu belirsizlik, kompleks sayının grafik gösterimi ile çözülebilir.

B.2 Kompleks Sayıların Grafik Gösterimi

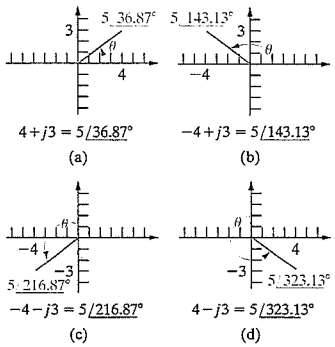
Kompleks sayılar, yatay ekseni reel bileşeni, dikey ekseni ise sanal bileşeni göstermek için kullanılan bir kompleks düzlemde grafik olarak gösterilebilirler. Kompleks sayının açısı, pozitif reel eksenden saat yönünün tersinde pozitif olarak ölçülür. $n = a + jb = c\,\underline{/\theta^\circ}$ kompleks sayısının grafik gösterimi a ve b pozitif kabul edilirse Şekil B.1'de verilmiştir.



Şekil B.1 ▲ a ve b'nin her ikisi pozitif iken $a + jb$'nin grafik gösterimi.

Bu çizim, kartezyen ve kutupsal biçimler arasındaki bağıntıyı açıkça göstermektedir. Kompleks düzlemde herhangi bir nokta, her bir eksendeki uzaklıkları (a ve b) veya noktanın orijinden uzaklığı (c) ve o noktaya çizilen doğru ile pozitif yatay eksen arasındaki açı (θ) verilerek tek biçimde tanımlanabilir.

Şekil B.1'den, a ve b pozitif ise θ birinci dörttebirlikte, a negatif b pozitif ise ikinci dörttebirlikte, a ve b'nin her ikisi de negatif ise üçüncü dörttebirlikte ve a pozitif, b negatif ise dördüncü dörttebirlikte yer alır. Bu gözlemler, $4 + j3$, $-4 + j3$ ve $-4 - j3$ ve $4 - j3$'ün çizildiği Şekil B.2'de sergilenmektedir.

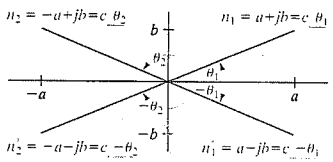


Şekil B.2 ▲ Dört kompleks sayının grafik gösterimi.

θ'yı pozitif reel eksenden saat yönünde negatif olarak da belirtebiliriz. Böylece şekil B.2(c)'deki $-4 + j3$, $5\underline{/-143.13^\circ}$ olarak da verilebilir. Şekil B.2(d)'den $5\underline{/323.13^\circ} = 5\underline{/-36.87^\circ}$ olduğu görülmektedir. θ üçüncü veya dördüncü dörttebirlikte iken negatif değerlerle ifade edilmesi yaygındır.

Bir kompleks sayının grafik yorumu, sayı ile eşleniği arasındaki ilişkiyi de gösterir. **Bir kompleks sayının eşleniği,** sayının sanal bileşeninin işareti ters çevrilerek oluşturulur.

Burada $a + jb$'nin eşleniği $a - jb$ ve $-a + jb$'nin eşleniği $-a - jb$'dir. Bir kompleks sayıyı kutupsal biçimde yazdığımızda eşleniğini bulmak için basitçe θ açısının işaretini değiştiririz. Böylelikle $c\underline{/\theta^\circ}$'nın eşleniği $c\underline{/-\theta^\circ}$'dır. Bir kompleks sayının eşleniği yıldız ile gösterilir. Diğer bir deyişle n^*, n'nin eşleniğidir. Şekil B.3 kompleks sayı düzleminde iki sayıyı ve bunların eşleniklerini göstermektedir.



Şekil B.3 ▲ n_1 ve n_2 kompleks sayıları ve n_1^* ve n_2^* eşlenikleri

Eşlenik almanın kompleks sayıların reel eksene göre simetriğini bulma ile eşdeğer olduğuna dikkat ediniz.

B.3 Aritmetik İşlemler

Toplama (Çıkarma)

Kompleks sayıları toplamak veya çıkarmak için Kartezyen biçimde ifade etmeliyiz. Toplama, toplamın reel kısmını bulmak için reel kısımların, toplamın sanal kısmını bulmak için de sanal kısımların toplanmasını içerir. Böylece eğer

$$n_1 = 8 + j16$$

ve

$$n_2 = 12 - j3$$

verilirse toplam

$$n_1 + n_2 = (8 + 12) + j(16 - 3) = 20 + j13$$

olur. Çıkarma da aynı kurala uyar, yani

$$n_2 - n_1 = (12 - 8) + j(-3 - 16) = 4 - j19$$

tanımlanır. Eğer toplanacak veya çıkarılacak sayılar kutupsal biçimde ise önce Kartezyen biçime çevrilmelidir. Örneğin eğer

$$n_1 = 10\underline{/53.13^\circ}$$

ve

$$n_2 = 5\underline{/-135^\circ}$$

ise o halde

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 &= 6 + j8 - 3.535 - j3.535 \\ &= (6 - 3.535) + j(8 - 3.535) \\ &= 2.465 + j4.465 = 5.10\,\underline{/61.10^\circ} \end{aligned}$$

ve

$$n_1 - n_2 = 6 + j8 - (-3.535 - j3.535)$$
$$= 9.535 + j11.535$$
$$= 14.966\,\underline{/50.42^\circ}$$

bulunur.

Çarpma (Bölme)

Çarpma veya bölme işlemi, kompleks sayılar Kartezyen veya kutupsal biçimde yazıldığında gerçekleştirilebilir. Ancak çoğu durumda kutupsal biçim daha uygundur. Örnek olarak, $n_1 = 8 + j10$ ve $n_2 = 5 - j4$ verildiğinde $n_1 n_2$ çarpımını bulalım. Kartezyen biçimi kullanarak,

$$n_1 n_2 = (8 + j10)(5 - j4) = 40 - j32 + j50 + 40$$
$$= 80 + j18$$
$$= 82\,\underline{/12.68^\circ}$$

buluruz. Eğer kutupsal biçimi kullanırsak $n_1 n_2$ çarpımı

$$n_1 n_2 = (12.81\,\underline{/51.34^\circ})(6.40\,\underline{/-38.66^\circ})$$
$$= 82\,\underline{/12.68^\circ}$$
$$= 80 + j18$$

halinde gelir. Kartezyen biçimdeki iki kompleks sayıyı bölerken ilk adım, payı ve paydayı paydanın eşleniği ile çarpmaktır. Bu işlem paydayı bir reel sayı haline getirir. Sonra bu reel sayıyı yeni paydaya böleriz. Örnek olarak $n_1 = 6 + j3$ ve $n_2 = 3 - j1$ verildiğinde n_1/n_2'yi hesaplayalım. İşlemleri uygularsak,

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{6 + j3}{3 - j1} = \frac{(6 + j3)(3 + j1)}{(3 - j1)(3 + j1)}$$
$$= \frac{18 + j6 + j9 - 3}{9 + 1}$$
$$= \frac{15 + j15}{10} = 1.5 + j1.5$$
$$= 2.12\,\underline{/45^\circ}$$

buluruz. Kutupsal biçim kullanılarak n_1'in n_2'ye bölümü

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{6.71\,\underline{/26.57^\circ}}{3.16\,\underline{/-18.43^\circ}} = 2.12\,\underline{/45^\circ}$$
$$= 1.5 + j1.5$$

verir. Beklendiği gibi sonuçlar aynıdır.

B.4 Yararlı Özdeşlikler

Kompleks sayılar ve niceliklerle çalışırken aşağıdaki özdeşlikler çok yararlıdır.

$$\pm j^2 = \mp 1, \tag{B.8}$$

$$(-j)(j) = 1, \tag{B.9}$$

$$j = \frac{1}{-j}, \tag{B.10}$$

$$e^{\pm j\pi} = -1, \tag{B.11}$$

$$e^{\pm j\pi/2} = \pm j. \tag{B.12}$$

$n = a + jb = c\,\underline{/\theta^\circ}$ verildiğinde, aşağıdakiler geçerlidir.

$$nn^* = a^2 + b^2 = c^2, \tag{B.13}$$

$$n + n^* = 2a, \tag{B.14}$$

$$n - n^* = j2b, \tag{B.15}$$

$$n/n^* = 1\,\underline{/2\theta^\circ}. \tag{B.16}$$

B.5 Bir Kompleks Sayının Tamsayı Kuvvetleri

Bir kompleks sayının bir k tamsayı kuvvetini bulmak için önce kompleks sayıyı kutupsal biçimde yazarız. Böylece

$$n^k = (a + jb)^k$$
$$= (ce^{j\theta})^k = c^k e^{jk\theta}$$
$$= c^k(\cos k\theta + j\sin k\theta)$$

yazılır. Örnek olarak

$$(2e^{j12^\circ})^5 = 2^5 e^{j60^\circ} = 32e^{j60^\circ}$$
$$= 16 + j27.71$$

ve

$$(3 + j4)^4 = (5e^{j53.13^\circ})^4 = 5^4 e^{j212.52^\circ}$$
$$= 625e^{j212.52^\circ}$$
$$= -527 - j336$$

hesaplamaları verilebilir.

B.6 Bir Kompleks Sayının Kökleri

Bir kompleks sayının k-yinci kökünü bulmak için, k-yinci dereceden

$$x^k - ce^{j\theta} = 0 \tag{B.17}$$

denklemini çözdüğümüzü ve dolayısıyla k kök olduğunu anlamak gerekir.

k kökü bulmak için önce

$$ce^{j\theta} = ce^{j(\theta+2\pi)} = ce^{j(\theta+4\pi)} = \cdots \tag{B.18}$$

olduğuna dikkat ediniz. B.17 ve B.18'den yararlanarak

$$x_1 = (ce^{j\theta})^{1/k} = c^{1/k}e^{j\theta/k}, \tag{B.19}$$

$$x_2 = [ce^{j(\theta+2\pi)}]^{1/k} = c^{1/k}e^{j(\theta+2\pi)/k}, \tag{B.20}$$

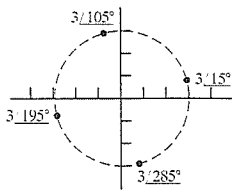
$$x_3 = [ce^{j(\theta+4\pi)}]^{1/k} = c^{1/k}e^{j(\theta+4\pi)/k}, \tag{B.21}$$

yazılır. Eş. B.19, B.20 ve B.21'deki işleme, kökler tekrar edene kadar devam edilir. Bu durum, π'nin bir katı $2k$'ye eşitlenince gerçekleşir. Örnek olarak, $81e^{j60°}$'nin dört kökünü bulalım. İşlemler

$$\begin{aligned}
x_1 &= 81^{1/4}e^{j60/4} = 3e^{j15°},\\
x_2 &= 81^{1/4}e^{j(60+360)/4} = 3e^{j105°},\\
x_3 &= 81^{1/4}e^{j(60+720)/4} = 3e^{j195°},\\
x_4 &= 81^{1/4}e^{j(60+1080)/4} = 3e^{j285°},\\
x_5 &= 81^{1/4}e^{j(60+1440)/4} = 3e^{j375°} = 3e^{j15°}
\end{aligned}$$

verir. Burada x_5 x_1 ile aynıdır yani kökler tekrar etmeye başlamıştır. Sonuç olarak $81e^{j60°}$'nin dört kökü, x_1, x_2, x_3 ve x_4 ile verilen değerlerdir.

Bir kompleks sayının köklerinin, kompleks sayı düzleminde bir çember üzerinde bulunduğuna dikkat etmek önemlidir. Bu çemberin yarıçapı $c^{1/k}$ ile verilir. Kökler çember üzerinde düzgün dağılmıştır ve ardışık kökler arasındaki açı $2\pi/k$ radyana veya $360/k$ dereceye eşittir. $81e^{j60°}$'nin dört kökü Şekil 8.4'te gösterilmiştir.

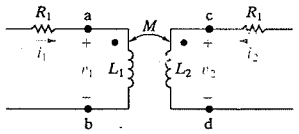


Şekil B.4 ▲ $81e^{j60°}$'nin dört kökü.

Ek C Manyetik Bağlaşık Bobinler ve İdeal Trafolar Hakkında Ek Bilgi

C.1 Manyetik Bağlaşık Bobinlerin Eşdeğer Devreleri

Bazı durumlarda manyetik bağlaşık bobinleri, manyetik bağlaşım içermeyen bir eşdeğer devre ile modellemek uygundur. Şekil C.1'de gösterilen manyetik bağlaşık iki bobini düşününüz. R_1 ve R_2 dirençleri her bir bobinin direncini göstermektedir. Amaç, gölgeli bölgedeki manyetik bağlaşık bobinleri manyetik bağlaşık olmayan indüktörlerle değiştirmektir. Eşdeğer devrelerin çıkarımından önce önemli bir kısıta işaret etmemiz gerekir: b ve d terminalleri arasındaki gerilim sıfır olmalıdır. Bir başka deyişle, eğer baştaki devrede b ve d terminalleri, devrenin gerilim ve akımlarını bozmadan kısa devre yapılabilirse, aşağıda çıkarılacak eşdeğer devreler bobinlerin modellemek için kullanılabilir. Bu kısıtın olmasının nedeni, eşdeğer devrelerimiz dört terminalli olmakla birlikte bunların ikisinin birbirine kısa devre edilmiş olmasıdır. Bundan dolayı baştaki devreye de aynı kısıt uygulanmaktadır.



Şekil C.1 ▲ Manyetik bağlaşık bobinlerin eşdeğer devresini geliştirmek için kullanılan devre.

Devre modellerini geliştirmeye, v_1 ve v_2 terminal gerilimlerini i_1 ve i_2 terminal akımları ile ilişkilendiren iki denklemi yazarak başlayacağız. Verilen referanslar ve kutupluk noktaları için

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \tag{C.1}$$

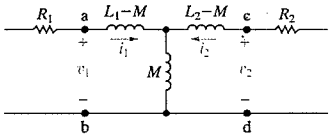
ve

$$v_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} \tag{C.2}$$

yazılır.

T Eşdeğer Devresi

Manyetik bağlaşık bu iki bobinin eşdeğer devresini bulmak için Eş. C.1 ve C.2'yi sağlayan bir indüktörler yapısı arayacağız. Yapıyı bulmanın anahtarı, Eş. C1 ve C.2'yi i_1 ve i_2 ağ akımları için yazılmış ağ denklemleri olarak değerlendirmektir. O halde toplam endüktansı L_1 H olan bir ağa ve toplam endüktansı L_2 H olan ikinci bir ağa ihtiyaç vardır. Ayrıca iki ağ M H ortak endüktansa sahip olmalıdır. Şekil C.2'de gösterilen T bobin yapısı bu gereksinimleri sağlamaktadır.



Şekil C.2 ▲ Şekil C.1'deki manyetik bağlaşık bobinler için T eşdeğer devresi.

v_1 ve v_2'yi i_1 ve i_2'ye ilişkilendiren denklemlerin Eş. C.1 ve C.2'ye indirgendiğini sağlamalısınız. İndüktörler arasında manyetik bağlaşım olmadığına ve b ile d arasında sıfır gerilim olduğuna dikkat ediniz.

π Eşdeğer Devresi

Şekil C.1'de gösterilen manyetik bağlaşık bobinler için bir π eşdeğer devresi çıkarabiliriz. Bu çıkarım, eş. C.1 ve C.2'yi di_1/dt ve di_2/dt türevleri için çözmeye ve daha sonra bulunan ifadeleri iki düğüm gerilim denklemi olarak değerlendirmeye dayanır. Ortak denklem çözümü için Cramer yöntemini kullanarak di_1/dt ve di_2/dt'nin ifadeleri

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & M \\ v_2 & L_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{vmatrix}} = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2}v_1 - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}v_2; \qquad \text{(C.3)}$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{\begin{vmatrix} L_1 & v_1 \\ M & v_2 \end{vmatrix}}{L_1L_2 - M^2} = \frac{-M}{L_1L_2 - M^2}v_1 + \frac{L_1}{L_1L_2 - M^2}v_2 \qquad \text{(C.4)}$$

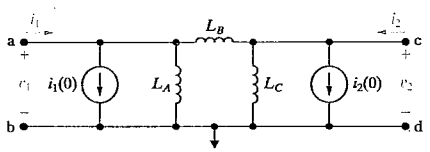
olarak elde edilir. Sonra Eş. C.3 ve C.4'ün her iki tarafını dt ile çarpar ve integral alırsak i_1 ve i_2 akımlarını

$$i_1 = i_1(0) + \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_1 d\tau - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_2 d\tau \qquad \text{(C.5)}$$

ve

$$i_2 = i_2(0) - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_1 d\tau + \frac{L_1}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_2 d\tau \qquad \text{(C.6)}$$

bulabiliriz. Eğer v_1 ve v_2 düğüm gerilimi olarak değerlendirilirse, Eş. C.6 Şekil C.3'te gösterilen biçimde bir devre tanımlar.



Şekil C.3 ▲ Manyetik bağlaşık bobinlerin π eşdeğer devresini çıkarmak için kullanılan devre.

π eşdeğer devresinin çıkarımında tek kalan; L_A, L_B ve L_C'nin L_1, L_2 ve M'nin fonksiyonu olarak bulunmasıdır. Bu da Şekil C.3'te i_1 ve i_2'nin denklemlerini yazarak ve Eş. C.5 ve C.6 ile karşılaştırılarak kolaylıkla yapılır. Böylece

$$i_1 = i_1(0) + \frac{1}{L_A}\int_0^t v_1 d\tau + \frac{1}{L_B}\int_0^t (v_1 - v_2) d\tau$$

$$= i_1(0) + \left(\frac{1}{L_A} + \frac{1}{L_B}\right)\int_0^t v_1 d\tau - \frac{1}{L_B}\int_0^t v_2 d\tau \qquad \text{(C.7)}$$

ve

$$i_2 = i_2(0) + \frac{1}{L_C}\int_0^t v_2 d\tau + \frac{1}{L_B}\int_0^t (v_2 - v_1) d\tau$$

$$= i_2(0) + \frac{1}{L_B}\int_0^t v_1 d\tau + \left(\frac{1}{L_B} + \frac{1}{L_C}\right)\int_0^t v_2 d\tau \qquad \text{(C.8)}$$

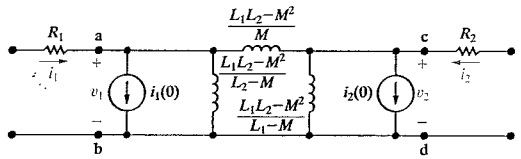
yazılır. Sonra

$$\frac{1}{L_B} = \frac{M}{L_1L_2 - M^2} \qquad \text{(C.9)}$$

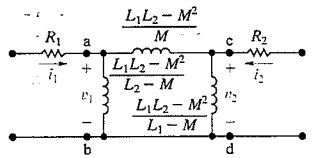
$$\frac{1}{L_A} = \frac{L_2 - M}{L_1L_2 - M^2}, \qquad \text{(C.10)}$$

$$\frac{1}{L_C} = \frac{L_1 - M}{L_1L_2 - M^2} \qquad \text{(C.11)}$$

elde edilir. Eş. C.9 – C.11 Şekil C.3'teki devrede kullanıldığında Şekil C.1'de verilen manyetik bağlaşık bobinlerin π eşdeğer devresi Şekil C.4'te gösterildiği gibi elde edilir.



Şekil C.4 ▲ Şekil C.1'deki manyetik bağlaşık bobinlerin π eşdeğer devresi.



Şekil C.5 ▲ Sinüzoidal durgun-durum analizi için kullanılan π eşdeğer devresi.

π eşdeğer devresinde i_1 ve i_2'nin başlangıç değerlerinin açık, T eşdeğer devresinde ise kapalı olduğuna dikkat ediniz. Karşılıklı endüktans içeren devrelerin sinüzoidal durgun durum davranışına odaklandığımız için i_1 ve i_2'nin başlangıç değerlerini sıfır kabul edebiliriz. Böylece π eşdeğer devresindeki akım kaynaklarını kaldırabiliriz. Bu durumda Şekil C.4'teki devre, Şekil C.5'te gösterilene sadeleşir.

T ve π eşdeğer devrelerinde, karşılıklı endüktans kendi işaretini taşır. Bir başka deyişle, eğer bağlaşık bobinlerin manyetik kutupluğu Şekil C.1'de verilenin tersine çevrilirse M'nin işareti değişir. Manyetik kutupluğun tersine çevrilmesi, terminal gerilim ve akımlarının referans kutuplukları değiştirilmeden bir kutupluk noktasını kaydırmayı gerektirir.

Örnek C.1 T eşdeğer devresinin bir uygulamasını sergilemektedir.

Örnek C.1

a) Şekil C.6'da gösterilen manyetik bağlaşık bobinler için T eşdeğer devresini kullanarak $\mathbf{I}_1$ ve $\mathbf{I}_2$ fazör akımlarını bulunuz. Kaynağın frekansı 400 rad/s'dir.

b) (a) şıkkını, ikincil sarımdaki kutupluk noktasının alt terminale kaydırıldığı durum için tekrarlayınız.

Çözüm

a) Şekil C.6'da gösterilen kutupluk noktaları için M'nin T eşdeğer devresindeki değeri +3 H olur. Dolayısıyla eşdeğer devredeki üç endüktans

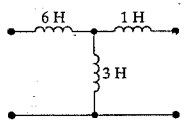
$$L_1 - M = 9 - 3 = 6\text{ H};$$

$$L_2 - M = 4 - 3 = 1\text{ H};$$

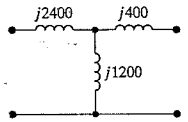
$$M = 3\text{ H}.$$

olarak hesaplanır. Şekil C.7 T eşdeğer devresini ve Şekil C.8'de 400 rad/s frekansta frekans bölgesi eşdeğer devresini göstermektedir.

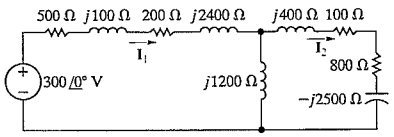
Şekil C.9, baştaki sistem için frekans bölgesi devresini göstermektedir.



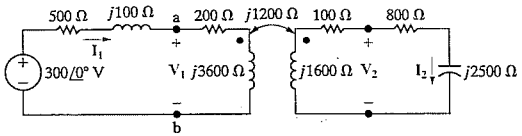
Şekil C.7 ▲ Örnek C.1'deki manyetik bağlaşık bobinlerin T eşdeğer devresi.



Şekil C.8 ▲ Eşdeğer devrenin, 400 rad/s'deki frekans bölgesi modeli.



Şekil C.9 ▲ Şekil C.6'daki devrenin, manyetik bağlaşık bobinler T eşdeğer devreleri ile değiştirildiğindeki hali.



Şekil C.6 ▲ Örnek C.1'in frekans bölgesi eşdeğer devresi.

Burada manyetik bağlaşık bobinler Şekil C.8'de gösterilen devre ile modellenmiştir. $\mathbf{I}_1$ ve $\mathbf{I}_2$ fazör akımlarını bulmak için önce 1200 Ω endüktif reaktans üzerindeki gerilimi bulacağız. Eğer alt düğümü referans olarak kullanırsak, düğüm gerilim denklemi

$$\frac{\mathbf{V} - 300}{700 + j2500} + \frac{\mathbf{V}}{j1200} + \frac{\mathbf{V}}{900 - j2100} = 0$$

yazılır. $\mathbf{V}$ için çözerek

$$\mathbf{V} = 136 - j8 = 136.24\,\underline{/-3.37^\circ}\text{ V (rms)}$$

buluruz. O halde

$$\mathbf{I}_1 = \frac{300 - (136 - j8)}{700 + j2500} = 63.25\,\underline{/-71.57^\circ}\text{ mA (rms)}$$

ve

$$\mathbf{I}_2 = \frac{136 - j8}{900 - j2100} = 59.63\,\underline{/63.43^\circ}\text{ mA (rms)}$$

elde edilir.

b) Kutupluk noktası ikincil sarımın alt terminaline kaydırıldığında M'nin T eşdeğer devresindeki değeri −3 H olur. Yani T eşdeğer devresi ile çözüm yapmadan önce M'nin işaretinin tersine çevrilmesinin $\mathbf{I}_1$ üzerinde hiçbir etkisinin olmadığına ancak $\mathbf{I}_2$'yi 180° kaydırdığına dikkat ederiz. Dolayısıyla

$$\mathbf{I}_1 = 63.25\,\underline{/-71.57^\circ}\text{ mA (rms)}$$

ve

$$\mathbf{I}_2 = 59.63\,\underline{/-116.57^\circ}\text{ mA (rms)}$$

bulmayı bekleriz. Şimdi bu çözümleri yeni T eşdeğer devresi ile bulacağız. M −3 H için, devredeki üç indüktör

$$L_1 - M = 9 - (-3) = 12\text{ H};$$

$$L_2 - M = 4 - (-3) = 7\text{ H};$$

$$M = -3\text{ H}$$

olarak hesaplanır. 400 rad/s çalışma frekansında eşdeğer devre şekil C.10'da gösterildiği gibi iki indüktör ve bir kapasitör gerektirir.

Sonuç olarak baştaki sistem için bulunan frekans bölgesi devresi Şekil C.11'de görülmektedir.

Daha önce olduğu gibi, bu durumda da −j1200 Ω kapasitif reaktans olan merkez dalın karşısındaki düğüm gerilimini bularak başlayacağız. Eğer alt düğümü referans olarak kullanırsak, düğüm gerilim denklemi

$$\frac{\mathbf{V} - 300}{700 + j4900} + \frac{\mathbf{V}}{-j1200} + \frac{\mathbf{V}}{900 + j300} = 0$$

yazılır. $\mathbf{V}$ için çözerek

$$\mathbf{V} = -8 - j56$$

$$= 56.57\,\underline{/-98.13^\circ}\text{ V (rms)}$$

buluruz. O halde

$$\mathbf{I}_1 = \frac{300 - (-8 - j56)}{700 + j4900}$$

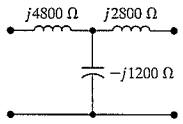
$$= 63.25\,\underline{/-71.57^\circ}\text{ mA (rms)}$$

ve

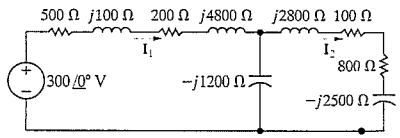
$$\mathbf{I}_2 = \frac{-8 - j56}{900 + j300}$$

$$= 59.63\,\underline{/-116.57^\circ}\text{ mA (rms)}$$

olarak bulunur.



Şekil C.10 ▲ $M = -3$H ve $\omega = 400$ rad/s için frekans bölgesi eşdeğer devresi.

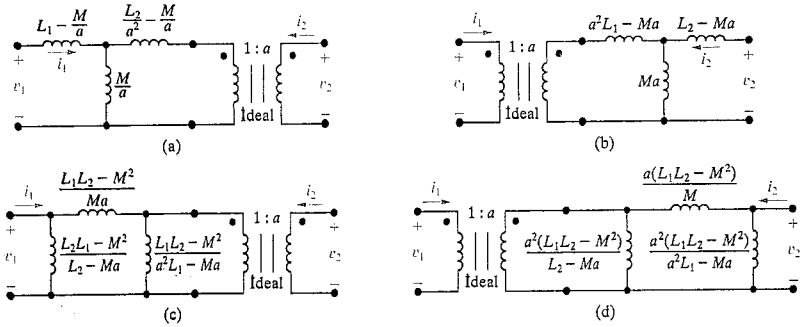


Şekil C.11 ▲ Örnek C.1(b) için frekans bölgesindeki eşdeğer devre.

C.2 Eşdeğer Devrelerde İdeal Trafo İhtiyacı

Manyetik bağlaşık bobinlerin T ve π eşdeğer devrelerindeki indüktörler negatif değerler alabilir. Örneğin eğer $L_1 = 3$mH, $L_2 = 12$ mH ve $M = 5$ mH ise T eşdeğer devre –2 mH'lik, π eşdeğer devre ise –5.5 mH'lik bir indüktör üretir. Eşdeğer devreler hesaplamalarda kullanılırken bu negatif endüktans değerleri sorun oluşturmaz. Ancak eşdeğer devreleri devre bileşenleri ile kuracaksanız negatif indüktörler problem olabilir. Bunun nedeni, sinüzoidal kaynağın frekansı değiştikçe, negatif reaktansı modelleyen kapasitörün değiştirilmesi gereğidir. Örneğin 50 krad/s frekansta –2 mH bir indüktörün empedansı $-j100\ \Omega$'dur. Bu empedans –0.2 μF kapasitansa sahip bir kapasitör ile modellenebilir. Eğer frekans 25 krad/s olursa, –2 mH'lik indüktörün empedansı $-j50$ olur. 25 krad/s'de bu, 0.8 μF'lık bir kapasitör gerektirir. Açıkça, frekansın sürekli değiştiği bir durumda, negatif endüktansın bir kapasitör ile modellenmesi pratik olarak değersizdir.

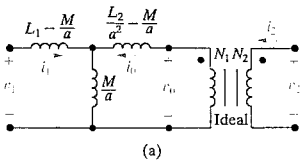
Negatif endüktanslarla uğraşma sorunundan, eşdeğer devrede bir ideal trafo kullanarak kaçınılabilir. Bu, modelleme problemini tamamen çözmez çünkü ideal trafolara sadece yaklaştırma yapılabilir. Ancak bazı durumlarda yaklaştırma, manyetik bağlaşık bobinlerin T ve π eşdeğer devrelerinde ideal trafo kullanma konusunun tartışılmasını hak edecek kadar iyidir.



Şekil C.12 ▲ Manyetik bağlaşık devrelerin T ve π eşdeğer devrelerinde ideal trafo kullanmanın dört yolu.

İdeal trafo T eşdeğer veya π eşdeğer devresinde iki farklı şekilde kullanılabilir. Şekil C.12 her iki tip eşdeğer devre için iki yapıyı göstermektedir.

Şekil C.12'deki herhangi bir eşdeğer devrenin sağlaması sadece o devrede v_1 ve v_2'yi di_1/dt ve di_2/dt'ye ilişkilendiren denklemlerin Eş. C.1 ve C.2 ile özdeş olduğunu göstermek gereklidir. Burada Şekil C.12(a)'daki devrenin sağlamasını yapacak, Şekil C.12(b), (c) ve (d)'deki devrelerin sağlamasını ise size bırakacağız. Tartışmaya yardımcı olması için Şekil C.13 olarak yeniden çizilmiştir.



Şekil C.12 ▲ i_0 ve v_0 tanımları ile Şekil C.12(a)'daki devre.

Bu devreden

$$v_1 = \left(L_1 - \frac{M}{a}\right)\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{a}\frac{d}{dt}(i_1 + i_0) \qquad \text{(C.12)}$$

ve

$$v_0 = \left(\frac{L_2}{a_2} - \frac{M}{a}\right)\frac{di_0}{dt} + \frac{M}{a}\frac{d}{dt}(i_0 + i_1) \qquad \text{(C.13)}$$

yazılır. İdeal trafo v_0 ve i_0 için aşağıdaki koşulları verir:

$$v_0 = \frac{v_2}{a}; \qquad \text{(C.14)}$$

$$i_0 = ai_2. \qquad \text{(C.15)}$$

Eş. C.14 ve C.15, Eş. C.12 ve C.13'te yerine konursa

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{a}\frac{d}{dt}(ai_2) \qquad \text{(C.16)}$$

ve

$$\frac{v_2}{a} = \frac{L_2}{a^2}\frac{d}{dt}(ai_2) + \frac{M}{a}\frac{di_1}{dt} \qquad \text{(C.17)}$$

bulunur. Eş. C.16 ve C.17'den,

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \qquad \text{(C.18)}$$

ve

$$v_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} \qquad \text{(C.19)}$$

elde edilir. Eş. C.18 ve C.19, Eş. C.1 ve C.2 ile özdeştir. Böylece terminal davranışları ile ilgilenildiği sürece Şekil C.13'te gösterilen devre Şekil C.1'deki kutuda gösterilen manyetik bağlaşık bobinlere eşdeğerdir.

Şekil C.13'teki devrenin Şekil C.1'deki manyetik bağlaşık bobinlere denk olduğunu gösterirken, a sarım oranı üzerine hiçbir kısıt koymadık. Dolayısıyla sonsuz sayıda eşdeğer devre oluşturulabilir. Ayrıca, tüm endüktansları pozitif yapacak bir sarım oranı her zaman bulunabilir. a'nın üç değerinin özel önemi vardır. Bunlar,

$$a = \frac{M}{L_1}, \tag{C.20}$$

$$a = \frac{L_2}{M} \tag{C.21}$$

ve

$$a = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \tag{C.22}$$

değerlerdir.

Eş. C.20 ile verilen a değeri T eşdeğer devrelerden $L_1 - M/a$ ve $a^2L_1 - aM$ endüktanslarını ve π eşdeğer devrelerden de $(L_1L_2 - M^2)/(a^2L_1 - aM)$ ve $a^2(L_1L_2 - M^2)/(a^2L_1 - aM)$ endüktanslarını yok eder. Eş. C.21 ile verilen a değeri π eşdeğer devrelerden $(L_2/a^2) - (M/a)/(L_2 - aM)$ ve $a^2(L_1L_2 - M)/(L_2 - aM)$ endüktanslarını yok eder.

Ayrıca $a = M/L_1$ olduğunda Şekil C.12 (a) ve (c)'deki devreler ve $a = L_2/M$ olduğunda Şekil C.12 (b) ve (d)'deki devreler aynı olur. Şekil C.14 ve C.15 bu gözlemleri özetlemektedir.

Burada endüktansların ifadelerini çıkarırken $M = k\sqrt{L_1L_2}$ bağıntısını kullandık. Endüktansları L_1 ve L_2 öz endüktansları ve k bağlaşım katsayısının fonksiyonu olarak ifade etmek sadece Eş.C.20 ve C.21'deki a değerlerinin eşdeğer devrelerdeki endüktans sayısını azaltmasına izin vermekle kalmaz, aynı zamanda tüm endüktansların pozitif olmasını da garanti eder. Eş. C.22'deki a değerini seçmenin sonuçlarını bulmayı size bırakıyoruz.

Eş. C.20–C.22 ile verilen a değerleri deneysel olarak bulunabilir. M/L_1 oranı, N_1 sarımı olan bobini bir sinüzoidal gerilim kaynağı ile sürerek elde edilir. Kaynak frekansı $L_1 >> R_1$ olacak şekilde yeterince yüksek seçilir ve N_2 bobini açık bırakılır. Şekil C.16 bu düzenlemeyi göstermektedir.

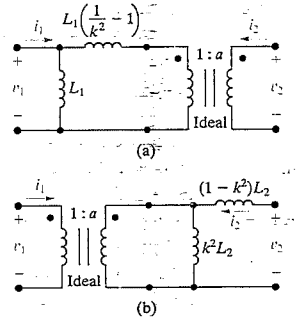
N_2 bobini açık iken

$$\mathbf{V}_2 = j\omega M\mathbf{I}_1 \tag{C.23}$$

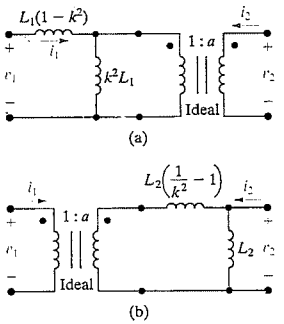
olur. Şimdi $\omega L_1 >> R_1$ olduğundan I_1 akımı

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{j\omega L_1} \tag{C.24}$$

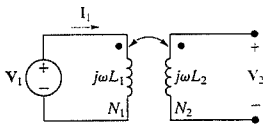
elde edilir.



Şekil C.14 ▲ $a = M/L_1$ iken iki eşdeğer devre.



Şekil C.15 ▲ $a = L_2/M$ iken iki eşdeğer devre.



Şekil C.16 ▲ M/L_1 oranının deneysel belirlenmesi.

Eş. C.24 Eş. C.23'te yerine konursa

$$\left(\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right)_{I_2=0} = \frac{M}{L_1} \tag{C.25}$$

bulunur. Burada M/L_1 oranı ikinci bobin açık iken yani $\mathbf{I}_2 = 0$ için terminal gerilim oranıdır.

L_2/M oranını işlemi tersine çevirerek yani 2. bobini besleyip 1. bobini açık bırakarak elde ederiz. Böylece

$$\frac{L_2}{M} = \left(\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right)_{I_1=0} \tag{C.26}$$

yazılabilir.

Son olarak, Eş. C.22 ile verilen a değerinin, bu iki gerilim oranının geometrik ortalaması, yani

$$\sqrt{\left(\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right)_{I_2=0}\left(\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right)_{I_1=0}} = \sqrt{\frac{M}{L_1}\frac{L_2}{M}} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \tag{C.27}$$

olduğuna dikkat edilmelidir.

Ferromanyetik çekirdekler üzerine sarılan bobinlerde gerilim oranı sarım oranı ile hemen hemen aynı olmakla birlikte, manyetik olmayan çekirdek üzerine sarılan bobinlerde bu oran aynı değildir. Öz endüktanslar sarım sayısının karesi ile değiştiğinden, Eş. C.27'den sarım oranının yaklaşık olarak iki gerilim oranının geometrik ortalamasına eşit olduğu veya

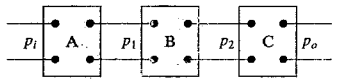
$$\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right)_{I_2=0}\left(\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right)_{I_1=0}} \tag{C.28}$$

bulunur.

Ek

D Desibel

Telefon sinyallerini iletmek için kullanılan ardarda devrelerdeki kayıplarla ilgilenen telefon mühendisleri desibel tanımını geliştirmiştir. Şekil D.1 problemi tanımlamaktadır.



Şekil D.1 ▲ Art arda üç devre.

Şekil D.1'de p_i sistemin giriş gücü, p_1 A devresinin çıkış gücü p_2 B devresinin çıkış gücü ve p_0 da sistemin çıkış gücüdür. Her bir devrenin güç kazancı devrenin çıkış gücüdür. Her devrenin güç kazancı ise o devrenin çıkış gücünün giriş gücüne oranıdır. Böylece kazançlar

$$\sigma_A = \frac{p_1}{p_i}, \quad \sigma_B = \frac{p_2}{p_1}, \quad \text{and} \quad \sigma_C = \frac{p_o}{p_2}$$

yazılabilir. Sistemin toplam kazancı basitçe tek tek kazançların çarpımıdır ve

$$\frac{p_o}{p_i} = \frac{p_1}{p_i}\frac{p_2}{p_1}\frac{p_o}{p_2} = \sigma_A\sigma_B\sigma_C$$

ile verilir. Güç oranlarının çarpımı logaritma aracılığıyla toplamaya çevirilir ve

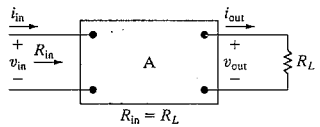
$$\log_{10}\frac{p_o}{p_i} = \log_{10}\sigma_A + \log_{10}\sigma_B + \log_{10}\sigma_C$$

bulunur. Güç oranının logaritması Alexandar Graham Bell'e atfen **bel** olarak adlandırılmıştır. Böylelikle tüm sistemin bel cinsinden güç kazancını, sistemin her bir parçasının bel cinsinden kazançlarının toplamı olarak bulabiliriz. Pratikte bel çok büyük bir niceliktir. Bir bel'in onda biri olan **desibel** daha kullanışlı bir güç kazancı ölçüsüdür. Desibellerin sayısı, bellerin sayısının 10 katıdır ve

$$\text{Desibel sayısı} = 10\log_{10}\frac{p_o}{p_i}$$

yazılır.

Desibeli güç oranı ölçüsü olarak kullandığımız bazı durumlarda, devreye doğru bakarken görülen direnç Şekil D.2'de gösterildiği gibi devreyi yükleyen dirence eşittir.



Şekil D.2 ▲ Giriş direnci yük direncine eşit olan bir devre.

Giriş direnci yük direncine eşit olduğunda, güç oranını gerilim oranına veya akım oranına aşağıda verilen

$$\frac{p_o}{p_i} = \frac{v_{out}^2/R_L}{v_{in}^2/R_{in}} = \left(\frac{v_{out}}{v_{in}}\right)^2$$

TABLO D.1 Bazı dB-Oran Çiftleri

dB	Oran	dB	Oran
0	1.00	30	31.62
3	1.41	40	100.00
6	2.00	60	10^3
10	3.16	80	10^4
15	5.62	100	10^5
20	10.00	120	10^6

ve

$$\frac{p_o}{p_i} = \frac{i_{\text{out}}^2 R_L}{i_{\text{in}}^2 R_{\text{in}}} = \left(\frac{i_{\text{out}}}{i_{\text{in}}}\right)^2$$

ile çevirebiliriz. Bu denklemler desibel sayısının

$$\text{Desibel sayısı} = 20 \log_{10} \frac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}}$$

$$= 20 \log_{10} \frac{i_{\text{out}}}{i_{\text{in}}} \qquad \text{(D.1)}$$

olduğunu gösterir.

Bode grafiklerinde (bkz. Ek E) kullanılan desibel tanımı Eş. D.1 ile ifade edilen sonuçlardan alınmıştır. Çünkü bu sonuçlar, bir gerilimin akıma oranı veya akımın gerilime oranı içeren herhangi bir aktarım fonksiyonu için kullanılabilir. desibelin baştaki tanımını akılda tutmalısınız çünkü birçok mühendislik uygulamasında önem taşır.

Desibelle ifade edilen aktarım fonksiyonu genlikleri ile çalışırken, çıkış/giriş oranının desibel değerini gerçek değerine çeviren bir tablonun bulunması yararlıdır. Tablo D.1 bazı yararlı çiftleri vermektedir. Negatif bir desibel değerine karşılık gelen oran pozitif oranın tersidir. Örneğin –3 dB, 1/1.41 veya 0.707 çıkış/giriş oranına karşılık gelir. İlginç bir şekilde, –3 dB, 14. ve 15. bölümlerde tartışılan filtrelerin yarım güç frekanslarına karşılık gelir.

Bir gücün referans bir güce oranı olarak kullanıldığında desibel güç birimi haline gelir. Genellikle referans güç 1 mW'tır ve güç birimi "bir miliwatt referansı ile desibel" anlamına gelen dBm olarak yazılır. Örneğin 20 mW güç ±13 dBm'e karşılık gelir.

AC voltmetreler yaygın olarak 1 mW referans güç yanı sıra 600 Ω referans direnç (telefon sistemlerinde yaygın bir değer) kabul eden dBm okuma verir. 600 Ω'da 1 mW güç 0.7746 V(rms) değerine karşılık geldiği için bu gerilim metre tarafından 0 dBm olarak okunur. Analog metrelerde ardışık aralıklar arasında genellikle tam olarak 10 dB fark vardır. Ölçekler 0.1, 0.3, 1.3, 10 v.b. işaretlense de gerçekte 3 V ölçekte 3.16 V, 1 V ölçekte 1 V ile aynı yerdedir.

Bazı voltmetreler referans direnç (50, 135, 600 veya 900 Ω) seçimi için veya dBm veya dBV (1 volt referansına göre desibel) seçimi için bir anahtar içerir.

Ek E Bode Grafikleri

Daha önce gördüğümüz gibi bir devrenin davranışını incelerken frekans tepkisi çok önemli bir araçtır. Ancak bu noktaya kadar bu grafiklerin nasıl oluşturulduğunu tartışmadan frekans tepkisinin nitel çizimlerini gösterdik. Genlik ve faz verilerini üretme ve çizmenin en verimli yöntemi bilgisayar kullanmaktır. ω'ya karşı $|H(j\omega)|$ ve $\theta(j\omega)$'nın doğru nümerik çizimleri için bilgisayarlara güvenebiliriz. Ancak bazı durumlarda Bode grafik kullanarak ön çizimler bilgisayarın verimli bir şekilde kullanılmasını garanti eder.

Bode grafiği veya çizimi, bir devrenin frekans tepkisi hakkında bilgi veren grafiksel bir tekniktir. Bu grafikler, konuda öncü çalışmalar yapan H. W. Bode[1]'nin adıyla anılmaktadır. Grafikleri $H(s)$'nin kutupları ve sıfırları iyi ayrılmış olduğunda çok kullanışlıdır.

Şimdiye kadar görülen nitel frekans tepkisi grafikleri gibi bir Bode grafiği de iki ayrı grafikten oluşur. Bir grafik $H(j\omega)$'nin genliğinin, diğeri de faz açısının frekansla nasıl değiştiğini gösterir. Bode grafiklerinde eğriler, geniş bir frekans aralığını göstermek için yarılog grafik kağıdına çizilir. Genlik ve faz grafiklerinin her ikisinde de frekans yatay log ölçekli eksende, genlik ve faz açısı ise dikey doğrusal eksenli ölçekte çizilir.

E.1 Birinci Mertebeden Reel Kutuplar ve Sıfırlar

Bode grafiklerinin açıklanmasını basitleştirmek için, $H(s)$'nin tüm kutup ve sıfırlarının reel ve birinci mertebeden olduğu durumlarla başlayacağız. Daha sonra kompleks ve tekrarlanan kutup ve sıfırların bulunduğu durumları sunacağız. Amaçlarımız açısından $H(s)$'nin özel bir ifadesinin olması yararlıdır. Bu nedenle tartışmamızı

$$H(s) = \frac{K(s + z_1)}{s(s + p_1)} \qquad \text{(E.1)}$$

üzerine kuracağız. Buradan

$$H(j\omega) = \frac{K(j\omega + z_1)}{j\omega(j\omega + p_1)} \qquad \text{(E.2)}$$

elde edilir. Bode grafikleri oluşturmada ilk adım $H(j\omega)$ ifadesini standart biçimde yazmaktır. Bu biçim, ifadede kutup ve sıfırlar parantez dışına alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$H(j\omega) = \frac{Kz_1(1 + j\omega/z_1)}{p_1(j\omega)(1 + j\omega/p_1)}. \qquad \text{(E.3)}$$

[1]Bkz. H. W. Bode, Network Analysis and Feedback Design (New York: Van Nostrand, 1945).

Sonra K_o'yu Kz_1/p_1 alalım ve aynı zamanda $H(j\omega)$'yı kutupsal biçimde ifade edelim:

$$H(j\omega) = \frac{K_o|1 + j\omega/z_1| \angle\psi_1}{|\omega| \angle 90^\circ |1 + j\omega/p_1| \angle\beta_1}$$

$$= \frac{K_o|1 + j\omega/z_1|}{|\omega||1 + j\omega/p_1|} \angle(\psi_1 - 90^\circ - \beta_1) \qquad \text{(E.4)}$$

Eş. E.4'ten

$$|H(j\omega)| = \frac{K_o|1 + j\omega/z_1|}{\omega|1 + j\omega/p_1|}, \qquad \text{(E.5)}$$

$$\theta(\omega) = \psi_1 - 90^\circ - \beta_1 \qquad \text{(E.6)}$$

yazılabilir. Tanımdan ψ_1 ve β_1 faz açıları

$$\psi_1 = \tan^{-1}\omega/z_1; \qquad \text{(E.7)}$$

$$\beta_1 = \tan^{-1}\omega/p_1 \qquad \text{(E.8)}$$

bulunur. Bode grafikleri Eş. E.5 (genlik) ve Eş. E.6'nın (faz) ω'nın fonksiyonu olarak çizimiyle ibarettir.

E.2 Düz Doğru Genlik Grafikleri

Genlik grafiği, $H(s)$'nin kutupları ve sıfırları ile ilgili terimlerin çarpım ve bölümünü içerir. Bu çarpma ve bölmeyi, $H(j\omega)$'nın genliğini desibel (dB)[2] cinsinden ifade ederek toplama ve çıkarmaya indirgeyebiliriz. $H(j\omega)$'nın genliği desibel cinsinden

$$A_{dB} = 20 \log_{10}|H(j\omega)| \qquad \text{(E.9)}$$

olarak verilir. Desibel birimi hakkında bir sezi oluşturmanız için Tablo E.1 birçok genliğin gerçek değeri ile desibel karşılığının bir listesini vermektedir. Eş. E.5'in desibel cinsinden ifade edilmesi

$$A_{dB} = 20 \log_{10} \frac{K_o|1 + j\omega/z_1|}{\omega|1 + j\omega/p_1|}$$

$$= 20 \log_{10} K_o + 20 \log_{10}|1 + j\omega/z_1|$$

$$- 20 \log_{10}\omega - 20 \log_{10}|1 + j\omega/p_1| \qquad \text{(E.10)}$$

verir.

TABLO E.1 Gerçek Genlikler ve Desibel Değerleri

A_{dB}	A	A_{dB}	A
0	1.00	30	31.62
3	1.41	40	100.00
6	2.00	60	10^3
10	3.16	80	10^4
15	5.62	100	10^5
20	10.00	120	10^6

[2]Desibel hakında daha fazla bilgi için Ek D'ye bakınız.

Eş. E.10'u çizmenin yolu, denklemdeki her bir terimi ayrı çizmek ve sonra bu ayrı çizimleri grafiksel olarak birleştirmektir. Terimlerin çizimi kolaydır çünkü her durumda düz doğru parçaları ile yaklaştırılabilir.

$20 \log_{10} K_o$'nun çizimi düz, yatay bir doğru verir. Çünkü K_o frekansın fonksiyonu değildir. Bu ifadenin değeri $K_o > 1$ için pozitif, $K_o = 1$ için sıfır ve $K_o < 1$ için negatiftir.

$20 \log_{10}|1 + j\omega/z_1|$'in grafiği iki düz doğru ile yaklaştırılır. Küçük ω değerleri için $|1 + j\omega/z_1|$ yaklaşık olarak 1'dir ve dolayısıyla

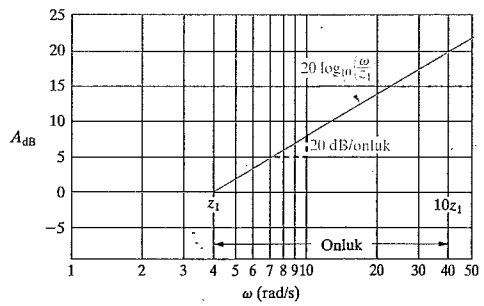
$$\omega \to 0 \text{ için } 20 \log_{10}|1 + j\omega/z_1| \to 0 \qquad \text{(E.11)}$$

bulunur. Büyük ω değerleri için $1 + j\omega/z_1|$ büyüklüğü yaklaşık olarak ω/z_1'dir ve buradan

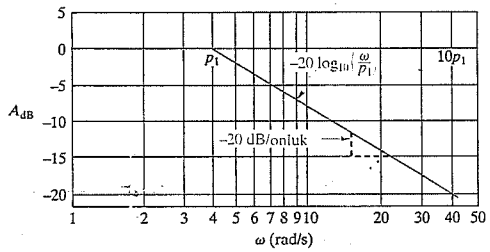
$$\omega \to \infty \text{ için } 20 \log_{10}|1 + j\omega/z_1| \to 20 \log_{10}(\omega/z_1) \qquad \text{(E.12)}$$

elde edilir. Bir log frekans ölçeğinde $20 \log_{10}(\omega/z_1)$ 20 dB/onluk eğime sahip düz bir doğrudur (onluk, frekansta 10 kat değişimdir). Bu düz doğru, 0 dB (ω) eksenini $\omega = z_1$'de keser. Bu ω değeri köşe frekansı olarak adlandırılır. Böylelikle Eş. E.11 ve E.12'ye dayanarak birinci mertebeden bir sıfırın genlik grafiği, Şekil E.1'de gösterildiği gibi iki düz doğru ile yaklaştırılabilir.

$-20 \log_{10} \omega$'nın grafiği, eğimi –20 dB/onluk olan ve 0 dB eksenini $\omega = 1$'de kesen bir düz doğrudur. $-20 \log_{10}|1 + j\omega/p_1|$'in grafiği iki düz doğru ile yaklaştırılır. Bu iki düz doğru 0 dB ekseninde $\omega = p_1$'de kesişir. Büyük ω değerleri için $20 \log10(\omega/p_1)$'in eğimi 20 dB/onluk'tur. Şekil E.2 birinci mertebeden bir kutbun genlik grafiğinin düz doğru yaklaştırmasını göstermektedir.



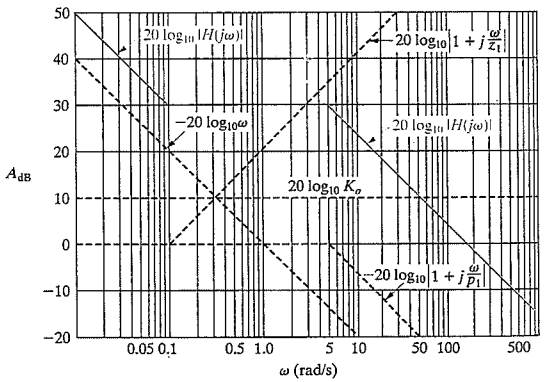
Şekil E.1 ▲ Birinci mertebeden bir sıfırın genlik grafiğinin düz doğru yaklaştırması.



Şekil E.2 ▲ Birinci mertebeden bir kutbun genlik grafiğinin düz doğru yaklaştırması.

Şekil E.3 $K_o = \sqrt{10}$, $z_1 = 0.1$ ve $p_1 = 5$ rad/s için Eş. E.10'un grafiğini göstermektedir. Eş. E.10'daki her bir terim Şekil E.3 üzerinde belirtilmiştir. Böylelikle tek tek terimlerin toplamının $20\log_{10}|H(j\omega)|$ ile belirtilen sonuç grafiğini verdiğini sağlayabilirsiniz.

Örnek E.1, birinci mertebeden kutuplar ve sıfırlarla tanımlanan bir aktarım fonksiyonunun genlik grafiğinin düz doğrular ile oluşturulmasını sergilemektedir.



Şekil E.3 ▲ Eş. E.10'un genlik grafiğinin düz doğru yaklaştırması.

Örnek E.1

Şekil E.4'teki devre için,

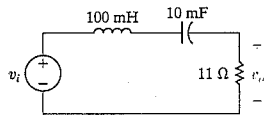
a) $H(s)$ aktarım fonksiyonunu hesaplayınız.

b) Bode genlik grafiğinin düz doğru yaklaştırmasını oluşturunuz.

c) $20\log_{10}|H(j\omega)|$'yı $\omega = 50$ rad/s ve $\omega = 1000$ rad/s için hesaplayınız.

d) (c)'de hesapladığınız değerleri düz doğrusal grafik üzerinde işaretleyiniz.

e) $v_i(t) = \cos(500t + 15°)$ V kabul ediniz ve oluşturduğunuz Bode grafiğini kullanarak $v_o(t)$'nin durgun durum genliğini kestiriniz.



Şekil E.4 ▲ Örnek E.1'in devresi.

Çözüm

a) Şekil E.4'teki devrenin s bölgesine dönüştürülmesi ve s bölgesinde gerilim bölünmesi uygulanması

$$H(s) = \frac{(R/L)s}{s^2 + (R/L)s + \frac{1}{LC}}.$$

verir. Devreden nümerik değerler yerine konursa

$$H(s) = \frac{110s}{s^2 + 110s + 1000} = \frac{110s}{(s+10)(s+100)}$$

elde edilir.

b) $H(j\omega)$'yı standart biçimde yazarsak,

$$H(j\omega) = \frac{0.11\,j\omega}{[1 + j(\omega/10)][1 + j(\omega/100)]}$$

olur. $H(j\omega)$'nın genliğinin desibel cinsinden ifadesi

$$A_{dB} = 20\log_{10}|H(j\omega)|$$

$$= 20\log_{10}0.11 + 20\log_{10}|j\omega|$$

$$- 20\log_{10}\left|1 + j\frac{\omega}{10}\right| - 20\log_{10}\left|1 + j\frac{\omega}{100}\right|$$

olarak bulunur. Şekil E.5 düz doğrusal grafiği göstermektedir. Toplam genliğe katkıda bulunan her bir terim şekilde belirtilmiştir.

c) Değerler yerine konarak

$$H(j50) = \frac{0.11(j50)}{(1 + j5)(1 + j0.5)}$$

$$= 0.9648\angle -15.25°.$$

$$20\log_{10}|H(j50)| = 20\log_{10}0.9648$$

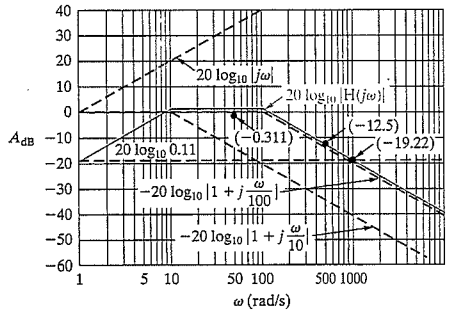
$$= -0.311 \text{ dB};$$

$$H(j1000) = \frac{0.11(j1000)}{(1 + j100)(1 + j10)}$$

$$= 0.1094\angle -83.72°;$$

$$20\log_{10}0.1094 = -19.22 \text{ dB}$$

bulunur.



Şekil E.5 ▲ Şekil E.4'teki devrenin aktarım fonksiyonunun düz doğru genlik grafiği.

d) Şekil E.5'e bakınız.

e) Şekil E.5'teki Bode grafiğinden de görülebileceği gibi $\omega = 500$ rad/s'deki A_{dB} değeri yaklaşık olarak −12.5 dB'dir. Böylece

$$|A| = 10^{(-12.5/20)} = 0.24$$

ve

$$V_{mo} = |A|V_{mi} = (0.24)(5) = 1.19 \text{ V}$$

bulunur.

$|H(j\omega)|$'nın gerçek değeri, $|H(j\omega)|$ denkleminde $\omega = 500$ kullanılarak hesaplanabilir:

$$H(j500) = \frac{0.11(j500)}{(1 + j50)(1 + j5)} = 0.22\angle -77.54^\circ.$$

Böylelikle, 500 rad/s'de verilen sinyal kaynağı için gerçek çıkış gerilim genliği

$$V_{mo} = |A|V_{mi} = (0.22)(5) = 1.1 \text{ V}$$

olarak bulunur.

E.3 Daha Doğru Genlik Grafikleri

Birinci mertebeden kutup ve sıfır için düz doğru grafikleri, genlik değerlerini köşe frekansında, köşe frekansının yarısında ve iki katında düzelterek daha doğru hale getirilebilir. Köşe frekansında desibel olarak gerçek değer

$$\begin{aligned} A_{dB_c} &= \pm 20 \log_{10}|1 + j1| \\ &= \pm 20 \log_{10}\sqrt{2} \\ &\approx \pm 3 \text{ dB} \end{aligned} \tag{E.13}$$

bulunur. Köşe frekansının yarısındaki gerçek değer,

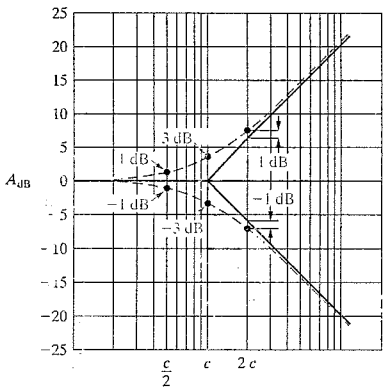
$$\begin{aligned} A_{dB_{c/2}} &= \pm 20 \log_{10}\left|1 + j\frac{1}{2}\right| \\ &= \pm 20 \log_{10}\sqrt{5/4} \\ &\approx \pm 1 \text{ dB} \end{aligned} \tag{E.14}$$

ve köşe frekansının iki katındaki gerçek değer

$$\begin{aligned} A_{dB_{c/2}} &= \pm 20 \log_{10}\left|1 + j\frac{1}{2}\right| \\ &= \pm 20 \log_{10}\sqrt{5/4} \\ &\approx \pm 1 \text{ dB} \end{aligned} \tag{E.15}$$

hesaplanır. Eş. E.13 – E.15'te + işareti birinci dereceden sıfır için, eksi işareti ise birinci mertebeden kutup için geçerlidir. Düz doğru yaklaştırma köşe frekansında ve yarısında 0 dB ve köşe frekansının iki katında ±6 dB verir. Dolayısıyla düzeltme miktarı köşe frekansında ±3 dB, köşe frekansının yarısı ve iki katında ±1 dB'dir. Şekil E.6 bu düzeltmeleri özetlemektedir.

Frekansta 2'ye 1 değişime **oktav** denir. 20 dB/onluk eğim, 6.02 dB/oktava denktir ve bu da grafiksel amaçlar açısından 6 dB/oktav alınabilir. Dolayısıyla hesaplanan düzeltmeler köşe frekansının bir oktav altına ve üstüne karşılık gelmektedir.



Şekil E.6 Birinci mertebeden kutup veya sıfır için düzeltilmiş genlik grafikleri.

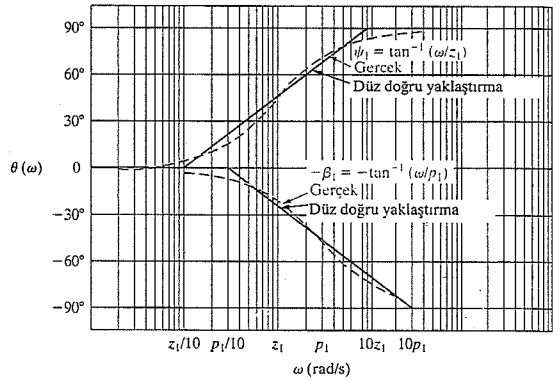
Eğer $H(s)$'nin kutupları ve sıfırları yeterince ayrıksa, bu düzeltmeleri toplam genlik çiziminde kullanmak ve kabul edilebilir doğruluğa sahip bir grafik elde etmek göreceli olarak kolaydır. Ancak kutuplar ve sıfırlar birbirine yakınsa, üstüste binen düzeltmelerin hesabı zordur. Bu durumda genlik karakteristiğinin ilk kestirimi olarak düz doğru grafiğin kullanılması daha uygundur. Daha sonra bilgisayar kullanılarak istenen frekans aralığında hesaplamalar düzeltilebilir.

E.4 Düz Doğru Faz Açısı Grafikleri

Düz doğru yaklaştırma ile faz açısı grafikleri de çizilebilir. K_o'nun faz açısı sıfırdır. Birinci metrebeden, orijinde bulunan bir sıfır veya kutbun faz açısı ise ±90°'dir. Orijinde olmayan birinci mertebeden bir sıfır veya kutup için düz doğru yaklaştırması aşağıdaki gibidir:

- Köşe frekansının onda birinden düşük frekanslarda faz açısı sıfır kabul edilir.
- Köşe frekansının on katından büyük frekanslarda faz açısı ±90° kabul edilir.
- Köşe frekansının onda biri ile on katı arasında faz açısı grafiği, köşe frekansının onda birinde 0°, köşe frekansında ±45° ve köşe frekansının 10 katında ±90° olan bir düz doğru ile yaklaştırılır.

Yukarıdaki durumların tümünde artı işareti birinci mertebeden sıfır için ve eksi işareti de birinci mertebeden kutup için geçerlidir. Şekil E.7, birinci mertebeden kutup ve sıfır için düz doğru yaklaştırmayı göstermektedir. Kesikli eğriler faz açısının frekansla değişimini tam olarak belirtmektedir. Düz doğru yaklaştırmanın, faz

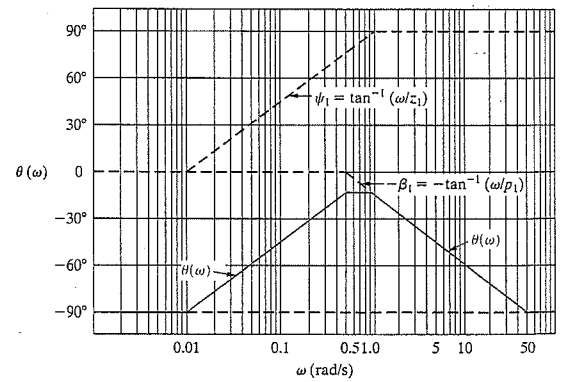


Şekil E.7 ▲ Birinci mertebeden kutup ve sıfır için faz açısı grafikleri.

açısının gerçek değişimine ne kadar yakın olduğuna dikkat ediniz. Gerçek grafik ile düz doğru grafik arasındaki maksimum sapma yaklaşık olarak 6°'dir.

Şekil E.8, Eş. B.1 ile verilen aktarım fonksiyonunun faz açısının düz doğru yaklaştırmasını göstermektedir. Eş. 8.6 faz açısının denklemidir. Grafik $z_1 = 0.1$ rad/s ve $p_1 = 5$ rad/s için çizilmiştir.

Düz doğru yaklaştırma kullanarak faz açısı çizimi, Örnek E.2'de sergilenmektedir.



Şekil E.8 ▲ Eş. B.1'in faz açısı grafiği için düz doğru yaklaştırma.

Örnek E.2

a) Örnek E.1'deki aktarım fonksiyonunun düz doğru faz açısı grafiğini çiziniz.
b) $\theta(\omega)$ faz açısını $\omega = 50$, 500 ve 1000 rad/s için hesaplayınız.
c) (b)'deki değerleri (a)'daki grafik üzerinde gösteriniz.
d) Örnek E.1(e) ve bu örneğin (b) şıkkındaki sonuçları kullanarak, $v_i(t) = 10 \cos(500t - 25°)$ V kaynak gerilimi için durgun durum çıkış gerilimini hesaplayınız.

Çözüm

a) Örnek E.1'den

$$H(j\omega) = \frac{0.11(j\omega)}{[1 + j(\omega/10)][1 + j(\omega/100)]}$$

$$= \frac{0.11|j\omega|}{|1 + j(\omega/10)||1 + j(\omega/100)|} \underline{/(\psi_1 - \beta_1 - \beta_2)}$$

bulunur. Buradan da

$$\theta(\omega) = \psi_1 - \beta_1 - \beta_2$$

elde edilir ki bu ifadede $\psi_1 = 90°$, $\beta_1 = \tan^{-1}(\omega/100)$ ve $\beta_2 = \tan^{-1}(\omega/100)$'dür. Şekil E.9 $\theta(\omega)$'nın düz doğru yaklaştırmasını göstermektedir.

b) Değerler yerine konarak

$$H(j50) = 0.96\underline{/-15.25°},$$

$$H(j500) = 0.22\underline{/-77.54°},$$

$$H(j1000) = 0.11\underline{/-83.72°}$$

bulunur. Böylece

$$\theta(j50) = -15.25°,$$

$$\theta(j500) = -77.54°,$$

ve

$$\theta(j1000) = -83.72°$$

elde edilir.

c) Şekil E.9'a bakınız.

d) Verilenlerden

$$V_{mo} = |H(j500)|V_{mi}$$
$$= (0.22)(10)$$
$$= 2.2 \text{ V}$$

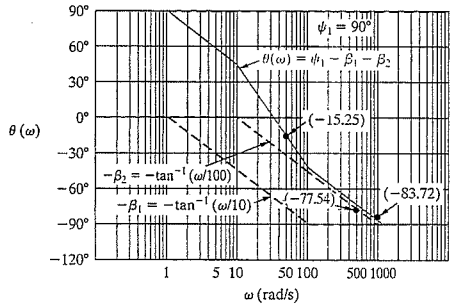
ve

$$\theta_o = \theta(\omega) + \theta_i$$
$$= -77.54° - 25°$$
$$= -102.54°$$

bulunur. Böylece sonuç,

$$v_o(t) = 2.2 \cos(500t - 102.54°) \text{ V}$$

çıkar.



Şekil E.9 ▲ Örnek E.2'deki $\theta(\omega)$'nın düz doğru yaklaştırması.

E.5 Bode Grafikleri: Kompleks Kutuplar ve Sıfırlar

Genlik ve faz açısı grafiği çizerken $H(s)$'nin kompleks kutup ve sıfırları özel ilgi gerektirir. Bir çift kompleks kutbun genlik ve faz grafiklerine katkısına odaklanalım. Kompleks kutuplarla çalışma kuralları öğrenildikten sonra, bunların kompleks sıfırlara uygulanması doğrudan görülecektir.

$H(s)$'nin kompleks kutupları ve sıfırları her zaman eşlenik çiftler halinde bulunur. Kompleks kutuplar içeren bir aktarım fonksiyonunun genliğini veya faz açısını çizerken ilk adım, eşlenik çifti bir kuadratik terim halinde birleştirmektir. Böylece

$$H(s) = \frac{K}{(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)} \qquad \text{(E.16)}$$

için önce $(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)$ çarpımını

$$(s + \alpha)^2 + \beta^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2 \qquad \text{(E.17)}$$

halinde yeniden yazarız. Bode grafiği çizerken kuadratik terim daha uygun olan

$$s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \qquad \text{(E.18)}$$

biçiminde yazılır. İki biçimin karşılaştırılması

$$\omega_n^2 = \alpha^2 + \beta^2 \qquad \text{(E.19)}$$

ve

$$\zeta\omega_n = \alpha. \qquad \text{(E.20)}$$

verir. ω_n terimi kuadratik terimin köşe frekansı ve ζ da sönüm katsayısıdır. ζ'nın kritik değeri 1'dir. Eğer $\zeta < 1$ ise kuadratik terimin kökleri komplekstir ve kompleks kutuplar Eş. E.18 ile temsil edilir. Eğer $\zeta \geq 1$ ise kuadratik terim $(s + p_1)(s + p_2)$ halinde çarpanlarına ayırır ve daha önceki tartışmalarda anlatıldığı gibi genlik ve faz grafiklerini çizeriz. $\zeta < 1$ kabul edersek Eş. E.16'yı

$$H(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \text{(E.21)}$$

halinde yeniden yazabiliriz. Sonra Eş. E.21'i kutuplara ve sıfırlara bölerek standart biçime getiririz. Kuadratik terim için ifade ω_n'ye bölünerek

$$H(s) = \frac{K}{\omega_n^2} \frac{1}{1 + (s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n)} \qquad \text{(E.22)}$$

ve buradan da

$$H(j\omega) = \frac{K_o}{1 - (\omega^2/\omega_n^2) + j(2\zeta\omega/\omega_n)} \qquad \text{(E.23)}$$

elde edilir. Bu ifade de K_o

$$K_o = \frac{K}{\omega_n^2} \qquad \text{(E.24)}$$

ile verilir. Eş. E.23'ün genlik ve faz grafiklerini tartışmadan önce kolaylık için ω/ω_n oranı yerine u yeni değişkenini kullanacağız. O halde

$$H(j\omega) = \frac{K_o}{1 - u^2 + j2\zeta u} \qquad \text{(E.25)}$$

bulunur. Şimdi $H(j\omega)$'yı kutupsal biçimde

$$H(j\omega) = \frac{K_o}{|(1 - u^2) + j2\zeta u| \angle \beta_1} \qquad \text{(E.26)}$$

yazılabilir. Buradan da

$$A_{dB} = 20 \log_{10}|H(j\omega)|$$
$$= 20 \log_{10}K_o - 20 \log_{10}|(1 - u^2) + j2\zeta u| \qquad \text{(E.26)}$$

ve

$$\theta(\omega) = -\beta_1 = -\tan^{-1}\frac{2\zeta u}{1 - u^2} \qquad \text{(E.27)}$$

elde edilir.

E.6 Genlik Grafikleri

Kuadratik terim $H(j\omega)$'nın genliğine $-20 \log_{10}|1 - u^2 + j2\zeta u|$ terimi ile katkıda bulunur. $u = \omega/\omega_n$ olduğu için, $\omega \to 0$ iken $u \to 0$ ve $\omega \to \infty$ iken $u \to \infty$ geçerlidir. ω 0'dan ∞'a değişirken terimin nasıl davrandığını görmek için

$$-20 \log_{10}|(1 - u^2) + j2\zeta u| = -20 \log_{10}\sqrt{(1 - u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2}$$
$$= -10 \log_{10}[u^4 + 2u^2(2\zeta^2 - 1) + 1] \qquad \text{(E.28)}$$

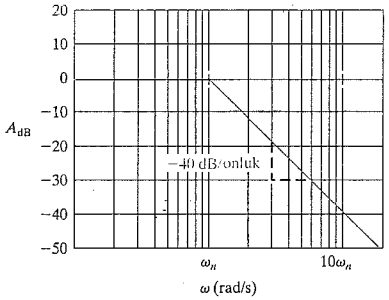
olduğuna, $u \to 0$ iken

$$-10 \log_{10}[u^4 + 2u^2(2\zeta^2 - 1) + 1] \to 0 \qquad \text{(E.29)}$$

ve $u \to \infty$ iken

$$-10 \log_{10}[u^4 + 2u^2(2\zeta^2 - 1) + 1] \to -40 \log_{10} u \qquad \text{(E.30)}$$

olduğuna dikkat ederiz. Eş. E.29 ve E.30'dan, yaklaşık genlik grafiğinin iki düz doğrudan oluştuğu sonucuna varılır. $\omega < \omega_n$ için düz doğru 0 dB ekseni boyunca uzanır. $\omega > \omega_n$ için ise doğru, –40 dB/onluk eğime sahiptir. Bu iki düz doğru 0 dB ekseninde $u = 1$'de veya $\omega = \omega_n$'de birleşir. Şekil E.10, $\zeta < 1$ için bir kuadratik terimin düz doğru yaklaştırmasını göstermektedir.



Şekil E.10 ▲ Bir çift kompleks kutup için genlik grafiği.

E.7 Düz Doğru Genlik Grafiklerinin Düzeltilmesi

Kompleks kutup çifti için düz doğru genlik grafiğinin düzeltilmesi, birinci mertebeden kutup için yapılan düzeltme kadar kolay değildir. Çünkü düzeltme ζ sönüm katsayısına bağlıdır. Şekil E.11, ζ'nin genlik grafiğine etkisini göstermektedir. ζ küçüldükçe ω_n(u = 1) köşe frekansı komşuluğunda büyük bir tepenin ortaya çıktığına dikkat ediniz. $\zeta \geq 1/\sqrt{2}$ iken, düzeltilmiş genlik grafiği tamamıyla düz doğru yaklaştırmanın altında kalır. Çizim açısından düz doğru genlik grafiği, gerçek eğri üzerinde dört nokta bularak düzeltilebilir. Bu dört nokta, (1) köşe frekansına, (2) genliğin tepe değerine ulaştığı frekansa, (3) köşe frekansına ve (4) genliğin sıfır olduğu frekansa karşılık gelir. Köşe frekansının yarısında (nokta 1) gerçek genlik

$$A_{dB}(\omega_n/2) = -10\log_{10}(\zeta^2 + 0.5625) \tag{E.31}$$

bulunur. Genlik tepe noktasına (nokta 2)

$$\omega_p = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2} \tag{E.32}$$

frekansında ulaşır. Tepe genliği ise

$$A_{dB}(\omega_p) = -10\log_{10}[4\zeta^2(1 - \zeta^2)] \tag{E.33}$$

bulunur. Köşe frekansında (nokta 3) gerçek genlik

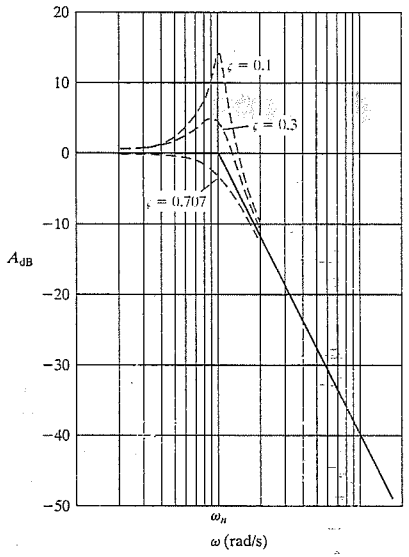
$$A_{dB}(\omega_n) = -20\log_{10}2\zeta \tag{E.34}$$

olarak hesaplanır. Düzeltilmiş genlik grafiği 0 dB eksenini

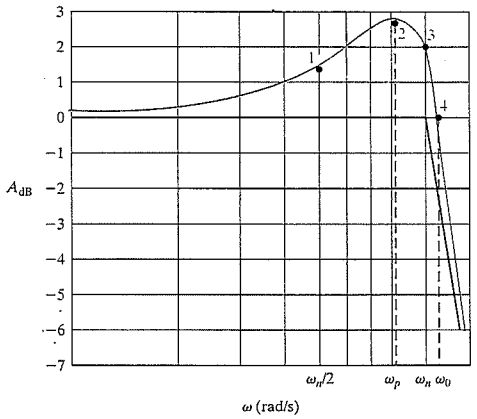
$$\omega_o = \omega_n\sqrt{2(1 - 2\zeta^2)} = \sqrt{2}\omega_p \tag{E.35}$$

noktasında (nokta 4) keser. Eş. E.31, E.34 ve E.35'in çıkarımı Eş. E.28'den takip eder. Eş. E.28'in, sırasıyla $u = 0.5$ ve $u = 1.0$'da hesaplanması, Eş. E.31 ve E.34'ü verir. E.35 denklemi, $u^4 + 2u^2(2\zeta^2 - 1) + 1 = 1$ sağlayan u değerinin bulunmasına karşılık gelir. Eş. E.32'nin çıkarımı, Eş. E.28'in u'ya göre türevinin sıfıra eşit olduğu u değerinin bulunmasını gerektirir. Eş. E.33, Eş. E.28'in, Eş. E.32'de bulunan u değeri için hesaplanmasıdır.

Örnek E.3 bir çift kompleks kutuplu bir aktarım fonksiyonu için genlik grafiği çizimini sergilemektedir.



Şekil E.11 ▲ ζ'nın genlik grafiği üzerindeki etkisi.



Şekil E.12 ▲ Bir çift kompleks kutup için düzeltilmiş genlik üzerindeki dört nokta.

Örnek E.3

Şekil E.13'te gösterilen devrenin aktarım fonksiyonunu hesaplayınız.

a) Köşe frekansının rad/s cinsinden değeri nedir?

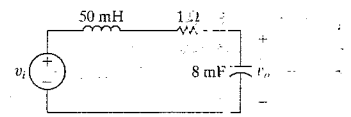
b) K_o değeri nedir?

c) Sönüm katsayısının değeri nedir?

d) 10 ile 500 rad/s arasında düz doğru genlik grafiğini çiziniz.

e) $\omega_n/2$, ω_p, ω_n ve ω_o'da gerçek genliği dB cinsinden hesaplayıp çiziniz.

f) Düz doğru genlik grafiğinden, Şekil E.13'teki devre ile tanımlanan filtre tipini açıklayınız ve ω_c kesim frekansını kestiriniz.



Şekil E.13 ▲ Örnek E.3'ün devresi.

Çözüm

Şekil E.13'teki devre s bölgesine dönüştürülür ve s bölgesi gerilim bölümü kullanırsa

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \left(\frac{R}{L}\right)s + \frac{1}{LC}}$$

bulunur. Eleman değerleri yerine konarak

$$H(s) = \frac{2500}{s^2 + 20s + 2500}$$

elde edilir.

a) $H(s)$ ifadesinde $\omega_n^2 = 2500$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\omega_n = 50$ rad/s'dir.

b) Tanımdan K_o, $2500/\omega_n^2$ veya 1 bulunur.

c) s'nin katsayısı $2\xi\omega_n$'dir. Böylelikle

$$\zeta = \frac{20}{2\omega_n} = 0.20$$

elde edilir.

d) Şekil E.14'e bakınız.

e) Gerçek genlikler

$$A_{dB}(\omega_n/2) = -10\log_{10}(0.6025) = 2.2 \text{ dB},$$

$$\omega_p = 50\sqrt{0.92} = 47.96 \text{ rad/s},$$

$$A_{dB}(\omega_p) = -10\log_{10}(0.16)(0.96) = 8.14 \text{ dB},$$

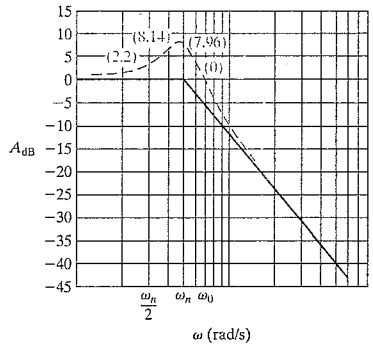
$$A_{dB}(\omega_n) = -20\log_{10}(0.4) = 7.96 \text{ dB},$$

$$\omega_o = \sqrt{2}\omega_p = 67.82 \text{ rad/s},$$

$$A_{dB}(\omega_o) = 0 \text{ dB}$$

hesaplanır. Şekil E.14 düzeltilmiş grafiği göstermektedir.

f) Şekil E.14'teki genlik grafiğinden bu devrenin bir alçak geçiren filtre olarak davrandığı açıktır. Kesim frekansında, aktarım fonksiyonunun genliği $|H(j\omega)|$, maksimum genliğinden 3 dB daha azdır. Düzeltilmiş grafikten kesim frekansı 55 rad/s civarında görülür. Bu değer düz doğru Bode grafiği ile kestirilen değerle hemen hemen aynıdır.

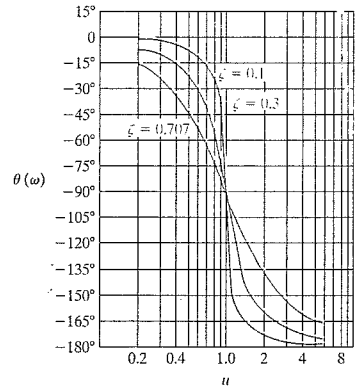


Şekil E.14 ▲ Örnek E.3 için genlik grafiği.

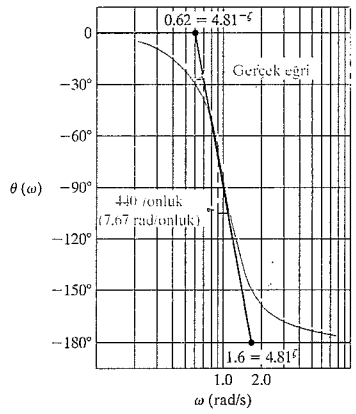
E.8 Faz Açısı Grafikleri

Bir kompleks kutup çifti için faz açısı grafiği Eş. E.27'nin grafiğidir. Faz açısı frekans sıfırken sıfır ve köşe frekansında −90'dir. $\omega(u)$ büyüdükçe −180°'ye yaklaşır. Genlik grafiğinde olduğu gibi, faz açısı grafiğinin kesin şeklini belirlerken de ζ önemlidir. Küçük ζ değerleri için faz açısı köşe frekansı yakınında hızla değişir. Şekil. E.15 ζ'nın faz açısı grafiği üzerindeki etkisini göstermektedir.

Kompleks kutup çifti için de faz açısı grafiğini düz doğrular ile yaklaştırabiliriz. Bunun için faz açısı eğrisine köşe frekansında bir teğet doğru çizer ve bu doğrunun 0° ve −180° doğrularıyla kesişimini buluruz. Faz açısı eğrisine −90°'de teğet olan doğrunun eğimi $-2.3/\zeta$ rad/onluktur ($-132/\zeta$ derece/onluk). Bu doğru 0° ve −180° doğrularını, sırasıyla $u_1 = 4.81^{-\zeta}$ ve $u_2 = 4.81^{\zeta}$ noktalarında keser. Şekil E.16 düz doğru yaklaştırmayı ve gerçek faz açısı grafiğini $\zeta = 0.3$ için göstermektedir. Düz doğru yaklaştırma gerçek faz açısı grafiği ile karşılaştırıldığında, yaklaştırmanın köşe frekansı yakınında mantıklı olduğu görülür. Ancak u_1 ve u_2 komşuluğunda hata oldukça büyüktür. Örnek E.4 Bode grafikleri tartışmalarımızı özetlemektedir.



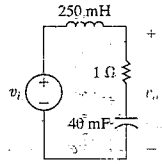
Şekil E.15 ▲ ζ'nın faz açısı grafiğine etkisi.



Şekil E.16 ▲ Kompleks kutup çifti için faz açısı grafiğinin düz doğru yaklaştırması.

Örnek E.4

a) Şekil E.17'de gösterilen devrenin transfer fonksiyonunu hesaplayınız.
b) 20 $\log_{10}|H(j\omega)|$'nın düz doğru genlik grafiğini oluşturunuz.
c) Düz doğru genlik grafiğini kullanarak bu devrenin temsil ettiği filtre tipini bulunuz ve köşe frekansını kestiriniz.
d) Gerçek kesim frekansı nedir?
e) $H(j\omega)$'nin düz doğru faz açısı grafiğini çiziniz.
f) (c)'deki kesim frekansında $\theta(\omega)$ değeri nedir?
g) Kesim frekansında gerçek $\theta(\omega)$ değeri nedir?



Şekil E.17 ▲ Örnek E.4'ün devresi.

Çözüm

a) Şekil E.17'deki devre s bölgesine dönüştürülür ve s bölgesinde gerilim bölüm kuralı kullanılırsa

$$H(s) = \frac{\frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

elde edilir. Devrenin eleman değerleri yerine konursa buradan

$$H(s) = \frac{4(s + 25)}{s^2 + 4s + 100}.$$

bulunur.

b) Bode grafik oluşturmada ilk adım, $H(j\omega)$'yı standart biçimde yazmaktır. $H(s)$ bir kuadratik terim içerdiğinden önce ζ değerine bakacağız. $\zeta = 0.2$ ve $\omega_n = 10$ buluruz ve

$$H(s) = \frac{s/25 + 1}{1 + (s/10)^2 + 0.4(s/10)}$$

yazarız. Buradan da

$$H(j\omega) = \frac{|1 + j\omega/25|\underline{/\psi_1}}{|1 - (\omega/10)^2 + j0.4(\omega/10)|\underline{/\beta_1}}$$

elde edilir. Kuadratik terim için $u = \omega/10$ olduğuna dikkat ediniz. $H(j\omega)$'nın desibel cinsinden genliği

$$A_{dB} = 20\log_{10}|1 + j\omega/25| - 20\log_{10}\left[\left|1 - \left(\frac{\omega}{10}\right)^2 + j0.4\left(\frac{\omega}{10}\right)\right|\right]$$

ve faz açısı

$$\theta(\omega) = \psi_1 - \beta_1$$

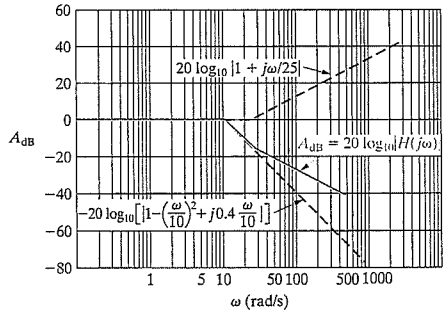
bulunur. Burada

$$\psi_1 = \tan^{-1}(\omega/25),$$

$$\beta_1 = \tan^{-1}\frac{0.4(\omega/10)}{1 - (\omega/10)^2}$$

ile verilir. Şekil E.18 genlik grafiğini göstermektedir.

c) Şekil E.18'deki düz doğru genlik grafiğine göre devre, bir alçak geçiren filtre gibi davranır. Kesim frekansında $H(j\omega)$'nın değeri geçirme bandındaki seviyeden 3 dB aşağıdadır. Grafikten, kesim frekansının yaklaşık olarak 13 rad/s olduğunu kestiririz.



Şekil E.18 ▲ Örnek E.4 için genlik grafiği.

d) Gerçek kesim frekansını hesaplamak için $H(s)$'de s yerine $j\omega$ konur $|H(j\omega)|$ ifadesi hesaplanır, $|H(j\omega_c)| = (1/\sqrt{2})\ H_{max} = 1/\sqrt{2}$ yazılır ve ω_c için çözülür. Bu şekilde önce

$$H(j\omega) = \frac{4(j\omega) + 100}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 100}$$

bulunur. Sonra

$$|H(j\omega_c)| = \frac{\sqrt{(4\omega_c)^2 + 100^2}}{\sqrt{(100 - \omega_c^2)^2 + (4\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

yazılır. Bu denklemin ω_c için çözümü

$$\omega_c = 16 \text{ rad/s}$$

verir.

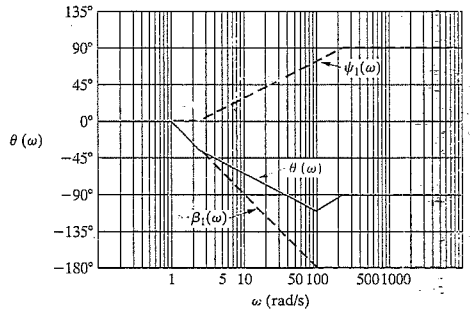
e) Şekil E.19 faz açısı grafiğini göstermektedir. 1.0 ile 2.5 rad/s arasında düz doğru $\theta(\omega)$ parçasının, 2.5 ile 100 rad/s arasındakinden farklı bir eğime sahip olduğuna dikkat ediniz.
f) Şekil E.19'daki faz açısı grafiğinden, kesim frekansı olan 16 rad/s'de faz açısını −65° kestirebiliriz.
g) Kesim frekansındaki tam faz açısı değeri, $H(s)$ aktarım fonksiyonunda $s = j16$ yerine konarak bulunabilir:

$$H(j16) = \frac{4(j16 + 25)}{(j16)^2 + 4(j16) + 100}.$$

Faz açısını hesaplarsak,

$$\theta(\omega_c) = \theta(j16) = -125.0°$$

buluruz. Kestirilen açıdaki büyük hataya dikkat ediniz. Genel olarak düz doğru faz açısı grafikleri, faz açısının değiştiği frekans bantlarında iyi sonuç vermez. Düz doğru faz açısı grafiği sadece faz açısının genel davranışını tahmin etmek için yararlıdır; gerçek faz açısı değerlerinin kestiriminde kullanışlı değildir.



Şekil E.19 ▲ Örnek E.4'ün faz açısı grafiği.

Ek F Trigonometrik Özdeşliklerin Kısa Bir Tablosu

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

3. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

4. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

5. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

6. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

7. $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

8. $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$

9. $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$

10. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

11. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

12. $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2\alpha$

13. $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2\alpha$

14. $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

15. $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

Ek

G İntegrallerin Kısa Bir Tablosu

1. $\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$

2. $\int x^2e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$

3. $\int x\sin ax\,dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{x}{a}\cos ax$

4. $\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax$

5. $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$

6. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$

7. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$

8. $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)$

9. $\int \sin ax\sin bx\,dx = \frac{\sin(a - b)x}{2(a - b)} - \frac{\sin(a + b)x}{2(a + b)}, \quad a^2 \neq b^2$

10. $\int \cos ax\cos bx\,dx = \frac{\sin(a - b)x}{2(a - b)} + \frac{\sin(a + b)x}{2(a + b)}, \quad a^2 \neq b^2$

11. $\int \sin ax\cos bx\,dx = -\frac{\cos(a - b)x}{2(a - b)} - \frac{\cos(a + b)x}{2(a + b)}, \quad a^2 \neq b^2$

12. $\int \sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$

13. $\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$

14. $\int_0^\infty \frac{a\,dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, a > 0; \\ 0, a = 0; \\ \frac{-\pi}{2}, a < 0 \end{cases}$

15. $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, a > 0; \\ \frac{-\pi}{2}, a < 0 \end{cases}$

16. $\int x^2\sin ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\sin ax - \frac{a^2x^2 - 2}{a^3}\cos ax$

17. $\int x^2 \cos ax\, dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \frac{a^2x^2 - 2}{a^3}\sin ax$

18. $\int e^{ax}\sin^2 bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 4b^2}\left[(a\sin bx - 2b\cos bx)\sin bx + \frac{2b^2}{a}\right]$

19. $\int e^{ax}\cos^2 bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 4b^2}\left[(a\cos bx + 2b\sin bx)\cos bx + \frac{2b^2}{a}\right]$

Ek

H Seçilmiş Problemlerin Cevapları

1. Bölüm

1.1 110 giga-watt saat

1.5 **a)** 111.6 saniye
b) 2480 byte

1.6 0.10 mm

1.9 6 sin 4000t mC

1.12 **a)** A'dan B'ye 600 W
b) B'den A'ya 2000 W
c) B'den A'ya 2400 W
d) A'dan B'ye 4800 W

1.17 **a)** 3.1 mW
b) 1.24 μJ
c) 21.67 μJ

1.24 **a)** t = 0.634 s
b) 5.196 mW (iletilen)
c) t = 2.366 s
d) 5.196 mW (çıkarılan)
e) 0 mJ, 4 mJ, 4 mJ, 0 mJ

1.26 770 mW

2. Bölüm

2.2 1700 W

2.3 En sağ daldaki 4 A ve 5 A akım kaynaklarından dolayı geçerli değil.

2.6 Sağ ve sol dallardaki farklı gerilim kaynaklarından dolayı üst ve alt düğümler arasındaki gerilim düşmesi farklıdır. Bu nedenle geçerli değil.

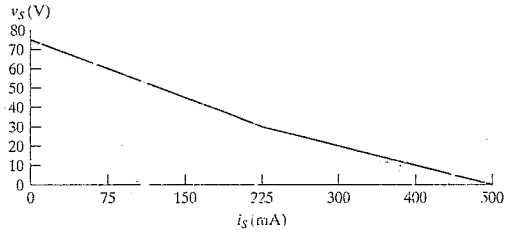
2.8 Sağ ve sol dallardaki farklı gerilim kaynaklarından dolayı üst ve alt düğümler arasındaki gerilim düşmesi farklıdır. Bu nedenle geçerli değil.

2.10 8 kΩ direnç

2.11 4 kΩ direnç

2.14 **a)** 20 Ω dirençle paralel 5A'lik bir akım kaynağı
b) 80 W

2.17 **a)**



b) 200 Ω dirençle seri 75 V'luk bir kaynak
c) 125 mA
d) 375 mA
e) 500 mA
f) Doğrusal bir model doğrusal olmayan davranışı kestiremez.

2.18 **a)** 2 A
b) 0.5 A
c) 40 V
d) 25 W, 80 W, 20 W
e) 125 W

2.19 **a)** 2.4 A, 1.6 A
b) 192 V
c) Üretilen ve harcanan güç 768 W'tır.

2.24 **a)** 22.22 W, 33.33 W, 11.11 W, 16.67 W, 0 W
b) 83.33 W
c) Üretilen ve harcanan güç 83.33 W'tır.

2.28 **a)** 4.5 V
b) Üretilen ve harcanan güç 741 mW'tır.

11. Bölüm

11.1 a) abc
b) acb

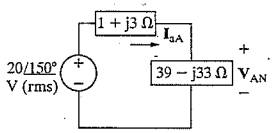
11.2 a) Dengeli, pozitif faz dizisi
b) Dengeli, negatif faz dizisi
c) Dengeli, pozitif faz dizisi
d) Dengeli, negatif faz dizisi
e) Eşit olmayan genliklerden dolayı dengesiz
f) Eşit olmayan faz ayrımından dolayı dengesiz

11.8 $v_{AB} = 13{,}799.25\cos(\omega t - 30°)$ V,
$v_{BC} = 13{,}799.25\cos(\omega t + 90°)$ V,
$v_{CA} = 13{,}799.25\cos(\omega t - 150°)$ V

11.9 a) 32.84 A(rms)
b) 12,845.94 V(rms)

11.10 a) $\mathbf{I}_{aA} = 24\angle{-16.26°}$ A, $\mathbf{I}_{bB} = 24\angle{103.74°}$ A, $\mathbf{I}_{cC} = 24\angle{-136.26°}$ A
b) $\mathbf{V}_{ab} = 8313.84\angle{-30°}$ V, $\mathbf{V}_{bc} = 8313.84\angle{90°}$ V, $\mathbf{V}_{ca} = 8313.84\angle{-150°}$ V
c) $\mathbf{V}_{AN} = 4659.96\angle{-4.37°}$ V, $\mathbf{V}_{BN} = 4659.96\angle{115.63°}$ V, $\mathbf{V}_{CN} = 4659.96\angle{-124.37°}$ V
d) $\mathbf{V}_{AB} = 8071.28\angle{-34.37°}$ V, $\mathbf{V}_{BC} = 8071.28\angle{85.63°}$ V, $\mathbf{V}_{CA} = 8071.28\angle{-154.37°}$ V

11.14 a)



b) $0.23\angle{156.87°}$ A(rms)
c) $35.3\angle{116.63°}$ V(rms)

11.15 $159.5\angle{29.34°}$ V(rms)

11.16 $10.82\angle{71.34°}$ A(rms)

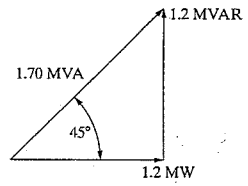
11.24 $6120\angle{36.61°}$ VA

11.25 a) $1833.46\angle{22°}$ VA
b) 519.62 V(rms)

11.41 197.29 W, 476.63 W

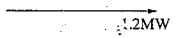
11.42 a) $W_2 - W_1 = V_L I_L[\cos(\theta - 30°) - \cos(\theta + 30°)] = 2V_L I_L \sin\theta \sin 30° = V_L I_L \sin\theta$
Thus, $\sqrt{3}(W_2 - W_1) = \sqrt{3}V_L I_L \sin\theta = Q_T$
b) −4172.79 VAR

11.52 a)



(a)

b)



11.53 a) 16.71 μF
b) 50.14 μF

11.54 $|\mathbf{V}_{ab}| = 12{,}548.8$ V, yani gerilim, kabul edilebilir 13 kV seviyesinden aşağıdadır. Dolayısıyla altistasyondaki yük sıfıra düştüğünde kapasitör bankası kapatılmalıdır.

11.55 $P_{L(\text{önce})} = 81.66$ kW, $P_{L(\text{sonra})} = 40.83$ kW

12. Bölüm

12.1 a) $(120 + 30t)[(u(t + 4) - u(t)] + (120 - 30t)[u(t) - u(t - 8)] + (-360 + 30t)[u(t - 8) - u(t - 12)]$
b) $\left(50\sin\frac{\pi}{2}t\right)u(t) - \left(50\sin\frac{\pi}{2}t\right)u(t - 4)$
c) $(30 - 3t)t[u(t) - u(t - 10)]$

12.2 a) $(2.5t + 50)u(t + 20) - 2.5tu(t) + (5t - 50)u(t - 10)$
b) $5(t + 9)u(t + 9) - 5(t + 6)u(t + 6) - 5(t + 3)u(t + 3) + 5(t - 3)u(t - 3) + 5(t - 6)u(t - 6) - 5(t - 9)u(t - 9)$

12.5 a) 1.0
b) 0
c) ∞

12.6 a) 52
b) 6.25

12.7 3/8

12.13 a) $\dfrac{1}{(s + a)^2}$
b) $\dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
c) $\dfrac{\omega\cos\theta + s\sin\theta}{s^2 + \omega^2}$
d) $\dfrac{1}{s^2}$
e) $\dfrac{\sinh\theta + s[\cosh\theta]}{(s^2 - 1)}$

12.17 a) $\dfrac{1}{s(s + a)}$
b) $\dfrac{1}{s^3}$
c) sağlayınız

12.18 a) $\dfrac{s\omega}{s^2 + \omega^2}$
b) $\dfrac{-\omega^2}{s^2 + \omega^2}$
c) 2
d) sağlayınız

12.24 a) $\dfrac{dF(s)}{ds} = \dfrac{d}{ds}\left[\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt\right]$

$= -\int_{0^-}^{\infty} tf(t)e^{-st}\,dt$

So $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$

b) $\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} = \int_{0^-}^{\infty} t^2 f(t)e^{-st}\,dt$

$\dfrac{d^3F(s)}{ds^3} = \int_{0^-}^{\infty} -t^3 f(t)e^{-st}\,dt$

So $\dfrac{d^nF(s)}{ds^n} = (-1)^n\int_{0^-}^{\infty} t^n f(t)e^{-st}\,dt$

$= (-1)^n\mathcal{L}\{t^n f(t)\}$

c) $\mathcal{L}\{t^5\} = \dfrac{120}{s^6}$

$\mathcal{L}\{t\sin\beta t\} = \dfrac{2\beta s}{(s^2 + \beta^2)^2}$

$\mathcal{L}\{e^{-t}t\cosh t\} = \dfrac{s^2 + 2s + 2}{s^2(s + 2)^2}$

12.25 a) $\displaystyle\int_s^{\infty} F(u)du = \int_s^{\infty}\left[\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-ut}\,dt\right]du$

$\displaystyle= \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_s^{\infty} f(t)e^{-ut}\,du\right]dt$

$\displaystyle= \int_{0^-}^{\infty} f(t)\int_s^{\infty} e^{-ut}\,du\,dt$

$\displaystyle= \int_{0^-}^{\infty} f(t)\left[\frac{e^{-tu}}{-t}\bigg|_s^{\infty}\right]dt$

$\displaystyle= \int_{0^-}^{\infty} f(t)\left[\frac{-e^{-st}}{-t}\right]dt$

$\displaystyle= \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$

b) $\mathcal{L}\{t\sin\beta t\} = \dfrac{\beta}{s^2 + \beta^2}$

12.26 $\dfrac{200s^2}{(s^2 + 40s + 64)(s^2 + 100)}$

12.40 a) $[3e^{-t} + 6e^{-2t} + 9e^{-3t}]u(t)$
b) $[10 + 5e^{-2t} - 8e^{-3t} + e^{-5t}]u(t)$
c) $[5e^{-2t} + 10e^{-6t}\cos(8t - 53.13°)]u(t)$
d) $[8 + 50e^{-7t}\cos(24t + 16.26°)]u(t)$

12.41 a) $[40t - 8 + 16e^{-10t}]u(t)$
b) $[10 - 40te^{-2t} + 20e^{-2t}]u(t)$
c) $[10t - 5 + 10e^{-2t}\cos(t + 53.13°)]u(t)$
d) $[(2t - 1.5t^2 + 1)e^{-2t}]u(t)$
e) $[50te^{-t}\cos(2t - 16.26°) + 20e^{-t}\cos(2t + 36.87)]u(t)$

12.42 c) $\delta'(t) + 5\delta(t) + 50e^{-20t}u(t)$

12.47 a) $f(0^+) = 18, f(\infty) = 0$
b) $f(0^+) = 8, f(\infty) = 10$
c) $f(0^+) = 11, f(\infty) = 0$
d) $f(0^+) = 56, f(\infty) = 8$

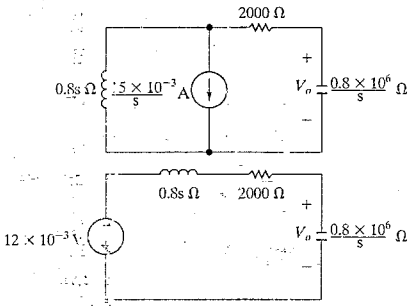
13. Bölüm

13.4 a) $\dfrac{5[s^2 + 2000s + 10^7]}{s}$
b) $-1000 + j3000$ rad/s ve $-1000 - j3000$ rad/s'de sıfır; 0'da kutup

13.5 a) $\dfrac{25 \times 10^6 s}{s^2 + 5000s + 4 \times 10^6}$

b) 0'da sıfır; –1000 rad/s ve –4000 rad/s'de kutup

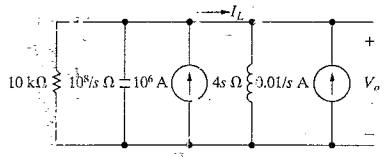
13.9 a)



b) $\dfrac{-12{,}000}{s^2 + 2500s + 10^6}$

c) $(-8e^{-500t} + 8e^{-2000t})u(t)$ V

13.10 a)



b) $\dfrac{100(s + 10^4)}{s^2 + 10^4 s + 25 \times 10^6}$

c) $\dfrac{-0.01(s + 7500)}{(s + 5000)^2}$

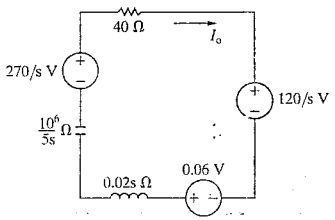
d) $[5 \times 10^5 te^{-5000t} + 100e^{-5000t}]u(t)$ V

e) $-[25{,}000t + 10]e^{-5000t}u(t)$ mA

13.15 a) $[5 - 6e^{-5t} + 4e^{-20t}]u(t)$ V

b) $t = 0$ ve $t = \infty$'daki çözümleri, $t = 0$ ve $t = \infty$'da devre ile karşılaştırınız.

13.16 a)



b) $\dfrac{3(s + 2500)}{s^2 + 2000s + 10^7}$

c) $3.35e^{-1000t}\cos(3000t - 26.57°)u(t)$ A

13.26 a) $(256e^{-40{,}000t} - 4e^{-10{,}000t})u(t)$ V

b) $(75 + 5e^{-10{,}000t} - 80e^{-40{,}000t})u(t)$ mA

c) $t = 0$ ve $t = \infty$'daki çözümleri, $t = 0$ ve $t = \infty$'da devre ile karşılaştırınız.

13.27 a) $\dfrac{15s^2 + 15s + 24}{s(s + 2)(s + 3)}$, $\dfrac{12s^2 + 63s + 24}{s(s + 2)(s + 3)}$

b) Başlangıç değerleri: 15 A, 12 A; son değerler: 4 A, 4 A

c) $(4 - 27e^{-2t} + 38e^{-3t})u(t)$ A, $(4 + 27e^{-2t} - 19e^{-3t})u(t)$ A

13.35 $[5 - 5000te^{-1000t} - 5e^{-1000t}]u(t)$ mA

13.36 a) $\dfrac{276.25(s + 400)}{s(s + 200)(s + 850)}$

b) Başlangıç değeri 0, son değeri 650 mA

c) $(650 - 425e^{-200t} - 225e^{-850t})u(t)$ mA

13.37 a) $(51e^{-200t} - 51e^{-850t})u(t)$ mA

b) $(-51e^{-200t} + 51e^{-850t})u(t)$ mA

13.42 a) $\dfrac{6 \times 10^4(s + 4000) + 96 \times 10^6}{s(s + 2000)(s + 3000)}$

b) $(56 - 108e^{-2000t} + 52e^{-3000t})u(t)$ V

13.49 a) $\dfrac{50}{s + 50}$, sıfırı yok, –50 rad/s'de kutup

b) $\dfrac{s}{s + 50}$, 0'da sıfır, –50 rad/s'de kutup

c) $\dfrac{s}{s + 3 \times 10^6}$, 0'da sıfır, -3×10^6 rad/s'de kutup

d) $\dfrac{3 \times 10^6}{s + 3 \times 10^6}$, sıfırı yok, -3×10^6 rad/s'de kutup

e) $\dfrac{100}{s + 125}$, sıfırı yok, –125 rad/s'de kutup

13.57 $(e - 1)e^{-t}$ V

13.58 $(1 - e)e^{-t}$ V

13.74 $50\cos(8000t + 36.87°)$ V

13.75 a) $\dfrac{-16 \times 10^4 s}{(s + 8000)(s + 16{,}000)}$

b) $4\cos(8000t - 161.57°)$ V

13.76 a) $\dfrac{s(s + 9000)}{(s + 2000)(s + 4000)}$

b) $(35e^{-2000t} - 25e^{-4000t})u(t)$ V

c) $11.68\cos(2000t + 30.96°)$ V

13.83 a) 80 V

b) 20 V

c) 0 V

d) $32\delta(t)$ μA

e) 16 V

f) 4 V

g) 20 V

13.84 a) 0.8 A

b) 0.6 A

c) 0.2 A

d) –0.6 A

e) $0.6e^{-2\times10^6 t}u(t)$ A

f) $-0.6e^{-2\times10^6 t}u(t)$ A

g) $[-1.6 \times 10^{-3}\delta(t)] - [7200e^{-2\times10^6 t}u(t)]$ V

13.89 a) $i_2(0^-) = i_2(0^+) = 0$ A; $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 35.36$ A

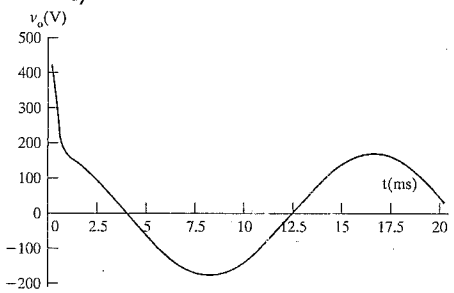
b) $V_0 = \dfrac{1440\pi(122.92\sqrt{2}s - 3000\pi\sqrt{2}}{(s + 1475\pi)(s^2 + 14{,}400\pi^2)} + \dfrac{300\sqrt{2}}{s + 1475\pi}$

$v_0 = 252.89e^{-1475\pi t} + 172.62\cos(120\pi t + 6.85°)$ V

$v_0(0^+) = 424.26$ V

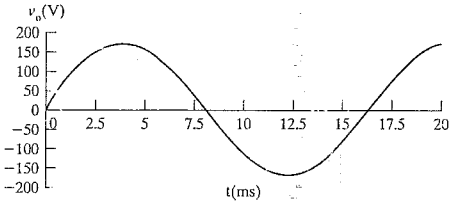
c) $\mathbf{V}_0 = 122.06\angle 6.85°$ V(rms)

d)



13.90 a) $-20.58e^{-1475\pi t} + 172.62\cos(120\pi t - 83.15°)$ V

b)



c) Problem 13.89'da ani artışlar vardır ama burada yoktur.

14. Bölüm

14.1 a) 954.93 Hz

b) $H(j\omega_c) = 0.7071\angle -45°$, $H(j0.3\omega_c) = 0.9578\angle -16.70°$, $H(j3\omega_c) = 0.3162\angle -71.57°$

c) $v_o(\omega_c) = 35.36\cos(6000t - 45°)$ V, $v_o(0.3\omega_c) = 47.89\cos(1800t - 16.70°)$ V, $v_o(3\omega_c) = 15.81\cos(18{,}000t - 71.57°)$ V

14.2 a) 392.70 Ω

b) 1640.85 Hz

14.12 a) 9.95 kΩ

b) 917.03 Hz

14.13 a) 4 kΩ

b) 60 kΩ

14.21 a) 1 Mrad/s

b) 159.15 kHz

c) 7.5

d) 935.55 krad/s
e) 148.90 kHz
f) 1068.89 krad/s
g) 170.12 kHz
h) 21.22 kHz

14.22 a) 8 kΩ, 16 mH
b) 7.57 kHz, 8.37 kHz
c) 795.77 Hz

14.33 a) 8 Mrad/s
b) 1.27 MHz
c) 16
d) 7.75 Mrad/s
e) 1.234 MHz
f) 8.25 Mrad/s
g) 1.31 Mrad/s
h) 79.58 kHz

14.34 a) 254.65 Ω, 101.32 μH
b) 46.97 kHz, 53.22 kHz
c) 6.25 kHz

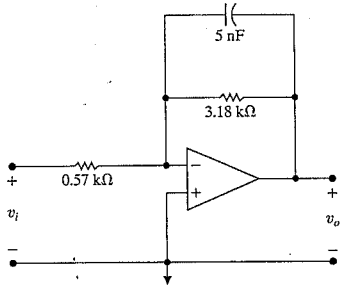
14.43 a) 0.39 H, 0.10 μF
b) $|V_{697\text{Hz}}| = |V_{941\text{Hz}}| = 0.707|V_{\text{tepe}}|$,
$|V_{770\text{Hz}}| = |V_{852\text{Hz}}| = 0.948|V_{\text{tepe}}|$
c) $|V_{1209\text{Hz}}| = 0.344|V_{\text{tepe}}|$

14.44 $L = 0.225$ H, $C = 0.057$ μF, $0.344|V_{\text{tepe}}|$

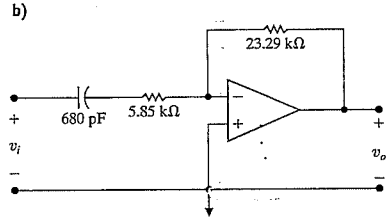
14.45 DTMF tonların 63.7 katı büyüklükte

15. Bölüm

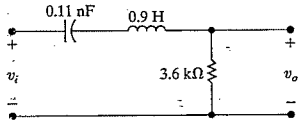
15.4 a) $R_1 = 0.57$ kΩ, $R_2 = 3.18$ kΩ
b)



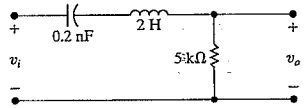
15.7 a) $R_1 = 5.85$ kΩ, $R_2 = 23.29$ kΩ
b)



15.13 a) 1 H, 1 F, 0.04 Ω
b) 0.9 H, 0.11 nF, 3.6 kΩ
c)



15.14 a) $1/L = 1/Q$ F
b) $\dfrac{(1/Q)s}{s^2 + (1/Q)s + 1}$
c) 5 kΩ, 2 H, 0.2 nF
d)



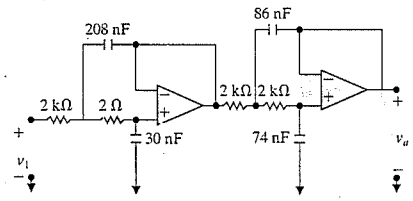
e) $\dfrac{2500s}{s^2 + 2500s + 25 \times 10^8}$

15.30 $f_{C1} = 1291.4$ Hz, $f_{C2} = 49{,}037.85$ Hz, $R_L = 21.64$ Ω, $R_H = 821.64$ Ω

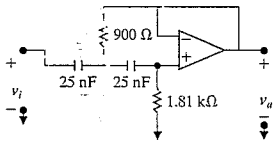
15.31 $R_L = 784.6$ Ω, $R_H = 20.7$ Ω; eğer $R_i = 1$ kΩ ise $R_f = 4$ kΩ

15.33 a) 4
b) −48.16 dB

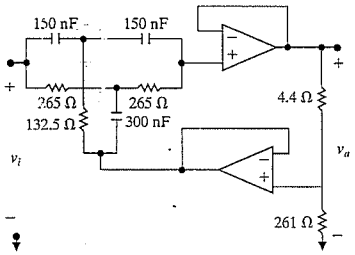
15.36 a) Birinci kat: 208.05 nF, 30.44 nF; ikinci kat: 86.12 nF, 73.53 nF
b)



15.37 a) 900.32 Ω, 1800.63 Ω
b)



15.58 a) $R = 265$ Ω, $\sigma R = 261$ Ω, $(1 - \sigma)R = 4.4$ Ω, $C = 150$ nF, $2C = 300$ nF
b)



c) $\dfrac{s^2 + 64 \times 10^6\pi^2}{s^2 + 533.33\pi s + 64 \times 10^6\pi^2}$

15.59 $R_1 = 11.1$ kΩ, $R_2 = 100$ kΩ seçelim. O halde $C = 39$ nF, $|H(j\omega)|_{\max} = 20.01$ dB, $|H(j/R_2C_1)| = 17.04$ dB

15.60 $R_1 = 100$ kΩ seçelim. O halde $R_2 = 400$ kΩ, $C_1 = 7.96$ nF

16. Bölüm

16.1 a) $\omega_{oa} = 69{,}813.17$ rad/s, $\omega_{ob} = 785{,}398.16$ rad/s
b) $f_{oa} = 11{,}111.11$ Hz, $f_{ob} = 125$ kHz
c) $a_{va} = 0$, $a_{vb} = 18.75$ V
d) $a_{ka} = 0$ her k için; $b_{ka} = 0$ çift k için:

$$b_{ka} = \frac{200}{\pi k}\left[2 - \cos\frac{\pi k}{3}\right] \text{ V tek } k \text{ için}$$

$$a_{kb} = \frac{50}{k\pi}\left\{\sin\frac{k\pi}{4} + \sin\frac{k\pi}{2}\right\} \text{ V her } k \text{ için;}$$

$b_{kb} = 0$ her k için

e) $v_a(t) =$

$$\frac{200}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\left(2 - \cos\frac{n\pi}{3}\right)\sin n\omega_o t \text{ V}$$

$v_b(t) = 18.75 +$

$$\frac{50}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\omega_o t \text{ V}$$

16.2 a) $\dfrac{4V_m}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega_o t$ V

b) $\dfrac{2V_m}{\pi}\left[1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1 - 4n^2}\cos n\omega_o t\right]$ V

c) $\dfrac{V_m}{\pi} + \dfrac{V_m}{2}\sin\omega_o t +$

$$\frac{2V_m}{\pi}\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty}\frac{1}{1 - n^2}\cos n\omega_o t \text{ V}$$

16.3 $\dfrac{300}{\pi} + 50\cos\omega_o t -$

$$\frac{600}{\pi}\sum_{n=2,4,6}^{\infty}\frac{\cos(n\pi/2)\cos(n\omega_o t)}{(n^2 - 1)} \text{ V}$$

16.10 a) 100 Hz
b) hayır
c) Evet
d) Evet
e) Evet
f) $a_v = 0$, $a_k = 0$ her k için $b_k = 0$ tek k için

$$b_k = \frac{80}{\pi^2 k^2}\sin\frac{k\pi}{4} \quad \text{tek } k \text{ için}$$

16.11 a) $\frac{\pi}{6}$ rad/s

b) hayır

c) evet

d) hayır

16.18 a) $\sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n \cos(n\omega_o t - \theta_n)$ burada

$A_k\angle -\theta_k = \frac{0.756}{k}\left(\frac{2}{\pi k} - j1\right)$ mV, tek k için

b) 888.92 mV

16.27 $214.66\cos(2000t - 26.57°) + 44.38\cos(6000t + 123.69°) + 17.83\cos(10{,}000t - 68.20°)$ V

16.28 a) $839.82\cos(10{,}000t - 1.19°) + 278.78\cos(30{,}000t + 174.64°) + 118.74\cos(70{,}000t - 171.70°)$ V

b) 50 krad/s'deki 5. harmonik, merkez frekansı 50 krad/s olan bant durduran filtre tarafından yok ediir.

16.32 a) 287.06 W

b) 300 W

c) −4.31 %

16.33 41.52 mW

16.36 a) 74.5356 V(rms)

b) 74.5306 V(rms)

16.37 a) 77.9578 V(rms)

b) −2.55%

c) 46.1880 V(rms), −0.0156%

16.44 $C_0 = \frac{I_m}{4}$,

$C_n = \frac{I_m}{n^2\pi^2}[2\cos(n\pi/2) + n\pi\sin(n\pi/2) - 2]$,

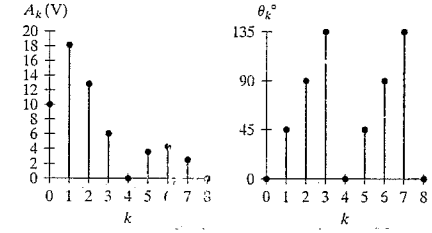
$n = \pm1, \pm2, \cdots$

16.45 a) 4000 W

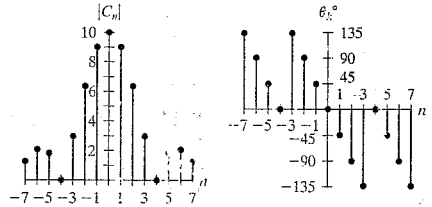
b) 7.72 A

c) −10.57%

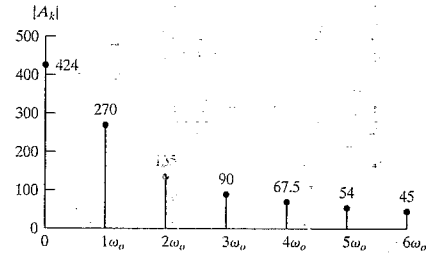
16.48 a)

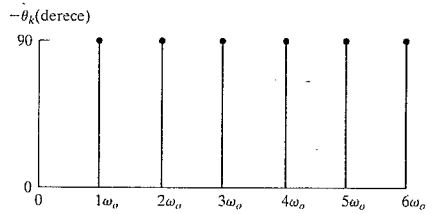


b)

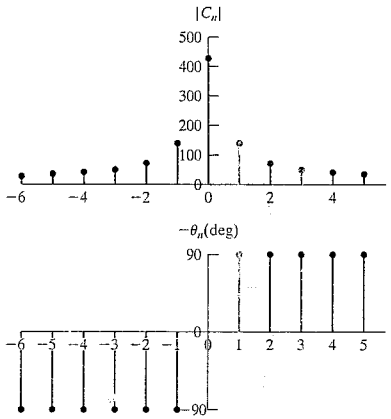


16.49 a)





b)

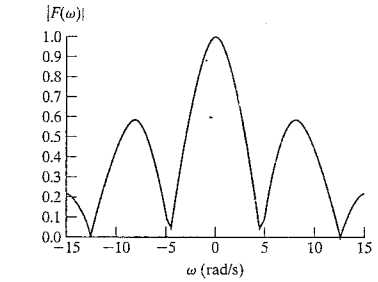


17. Bölüm

17.2 a) $\frac{2A}{\omega^2\tau}\left\{2\cos\frac{\omega\tau}{2} + \omega\tau\sin\frac{\omega\tau}{2} - 2\right\}$

b) $\frac{A\tau}{2}$

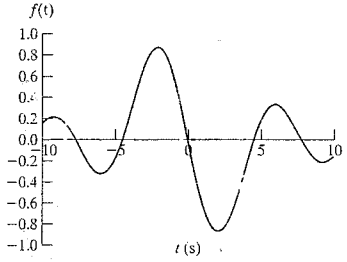
c)



17.3 a) $\frac{A}{\pi\omega_o t^2}[\omega_o t\cos(\omega_o t/2) - 2\sin(\omega_o t/2)]$

b) 0

c)



17.4 a) $\frac{2(a^2 - \omega^2)}{(a^2 + \omega^2)^2}$

b) $j48a\omega\frac{(a^2 - \omega^2)}{(a^2 + \omega^2)^4}$

c) $\frac{a}{a^2 + (\omega - \omega_o)^2} + \frac{a}{a^2 + (\omega + \omega_o)^2}$

d) $\frac{\omega - \omega_o}{a^2 + (\omega - \omega_o)^2} + \frac{\omega + \omega_o}{a^2 + (\omega + \omega_o)^2}$

e) $e^{-j\omega t_o}$

17.19 a) $\frac{\tau}{2}\cdot\frac{\sin[(\omega + \omega_o)\tau/2]}{(\omega + \omega_o)(\tau/2)} + \frac{\tau}{2}\cdot\frac{\sin[(\omega - \omega_o)\tau/2]}{(\omega - \omega_o)(\tau/2)}$

b) $F(\omega) \to \pi[\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o)]$

17.22 a) $20\text{sgn}(t) - 40e^{-50t}u(t)$ V

b) Evet, başlangıç koşullarını ve son değerleri kontrol ediniz.

17.28 a) $5e^{5t}u(-t) + (12.5e^{-t} - 7.5e^{-5t})u(t)$ V

b) 5 V

c) 5 V

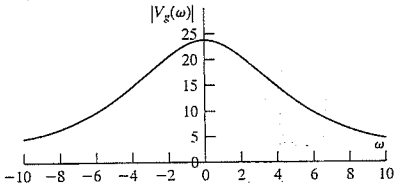
d) $(12.5e^{-t} - 7.5e^{-5t})u(t)$ V

e) Evet

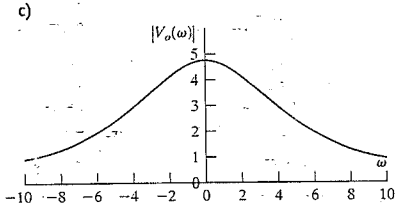
17.32 $166.67\cos(2500t + 90°)$ mA

17.39 a) $15e^{-5t} - 5e^{-25t}]u(t) + 10e^{5t}u(-t)$ V

b)



c)



d) 720 J

e) 28 J

f) 95.95%

g) 96.93%

18. Bölüm

18.2 $z_{11} = 25\ \Omega$; $z_{12} = 20\ \Omega$; $z_{21} = 20\ \Omega$; $z_{22} = 80\ \Omega$

18.4 $z_{11} = 20\ \Omega$; $z_{12} = 18\ \Omega$; $z_{21} = 18\ \Omega$; $z_{22} = 22\ \Omega$

18.5 $b_{11} = 500$; $b_{12} = 2\ \text{M}\Omega$; $b_{21} = 20\ \text{mS}$; $b_{22} = 50$

18.11 $h_{11} = 1000\ \Omega$; $h_{12} = 1 \times 10^{-4}$; $h_{21} = 40$; $h_{22} = 20 \times 10^{-6}$ S

18.12 a) $a_{11} = -4 \times 10^{-4}$; $a_{12} = -25\ \Omega$; $a_{21} = -5 \times 10^{-7}$ S; $a_{22} = -0.025$

b) $a_{11} = -4 \times 10^{-4}$; $a_{12} = -25\ \Omega$; $a_{21} = -5 \times 10^{-7}$ S; $a_{22} = -0.025$

18.30 15.625

18.32 a) $28\angle 180°$ V(rms)

b) 11.20 mW

c) 2.88 μW

18.37 7.5 W

18.38 3.88 V

Dizin

A

a fazı gerilimi, 434
Açık devre, 33-34
Admitans, empedans, 350
Ağ akımı yöntemi, 105-107, 107-109, 109-112, 112-116
  bağımlı kaynaklar ve, 107-109
  devre analizinde kullanımı, 105-107, 107-109, 109-112, 112-116
  düğüm gerilimi yöntemi, karşılaştırması, 112-116
  frekans bölgesi devreleri, 360-361
  giriş, 105-107
  özel durumları, 109-112
  sinüzoidal durgun durum analizi, 360-361
  tanımı, 105
  üst ağ, 110
  yükselteç devresi, analizi, 110-111
Ağ, tanımı, 94
Ağırlık fonksiyonu kavramı, 563-567
Akım bölücü devre, 64-65
Akım oranları, 368-369, 369-370
  belirlenmesi, 368-369
  ideal trafolar ve, 368-369, 369-371
  kutupluğu, 369-370
  nokta gösterimi, 369
Akım ve gerilim (V-I) bağıntıları, 342-345, 403-404
  dirençler, 342-343
  frekans bölgesinde pasif devre elemanları, 342-345
  güç hesaplamaları, 403-404
  indüktörler, 343-344
  kapasitörler, 344-345
  sinüzoidal durgun durum analizi, 342-345
Akım, 11-12, 12-13, 24-28, 36-37, 38-39, 56, 65-67, 68-70, 156-161, 188-189, 190-191, 195, 196, 230-232, 309, 332-334, 342-345, 347
  bölme, 65-67
  bükülme, 188-189
  doğal tepki, ifadenin çıkarımı, 230-232
  doğru (dc), 56
  elektrik yük ve, 11-12
  giriş kısıtı, 159
  indüktörler ve, 190-191
  işlemsel yükselteç (op amp) terminalleri, 156-161
  kapasitörler ve, 195, 196
  kaynaklar, 24-28, 56
  Kirchhoff yasası, 36-37, 38-39, 347
  ölçümü, 68-70
  pasif işaret gösterimi, 13
  RL devreleri, doğal tepki, 230-232
  sabit, 56
  Seri *RLC* devreler, doğal tepki, 309
  sinüzoidal durgun durum analizi ve, 332-334, 342-345, 347
  sinüzoidal kaynak, 332-334
  tanımı, 11
  V-I bağıntısı, 342-345
  yerdeğiştirme, 195
  yön referansı, 12-13
Aktif filtre devreleri, *bkz* Frekans seçici devreler
Alçak geçiren filtreler, 568, 570-577, 608-610, 627-629
  aktarım fonksiyonları, 576, 628-629
  aktif filtre devreleri, 608-610
  birinci mertebeden, 608-610
  Butterworth, 627-629
  frekans bölgesi-zaman bölgesi bağıntısı, 576-577
  frekans, sıfırdan başlayarak artan, 575
  kesim frekansı, 571-572, 573, 575
  op amp, 608-610
  pasif filtre devreleri, 568, 570-577
  seri *RC* devresi halinde, 574-576
  seri *RL* devrelerin nicel analizi, 572-574
  seri *RL* devrelerin nitel analizi, 570-571
  seri *RL* devresi halinde, 570-571, 572-574
  sıfır frekans, 575
  sonsuz frekans, 575
  tanımı, 568
Ampermetreler, 68, 69-70
Anahtarlama işlemleri, 540-542, 542-544
  dürtü fonksiyonu ve, 540-542, 542-544
  kapasitör devresi, 540-542
  seri indüktör devresi, 542-544
Anahtarlar, 187, 188-189, 214-216
Analiz, *bkz* Devre analizi; Laplace dönüşümü;

Analog metreler, 68
Ani dalgalanma bastırıcılar, 507, 548
Anlık güç, 392-393, 448-449
Anlık reel güç, 394-398
Ardarda bağlantı, 312-313, 622-627
integral alıcı yükselteçler, 312-313
özdeş op amp filtreler, 622-627
Arka cam buz çözücüsü, 57, 76-79
Aşırı sönümlü tepki, 289, 291-294, 309
doğal akım tepkisi, 309
gerilim, 289, 291-294
kapasitör gerilimi basamak tepkisi, 309
Ateşleme devresi, 285, 317-320

B

b fazı gerilimi
Bağlaşım katsayısı, 211-212
Bant durduran filtreler, 569, 593-597, 618-622, 636, 639-641
Butterworth, 636
dar bantlı, 639-641
geniş bantlı, 618-622
ikiz-T yarık, 639
op amp, 618-622
pasif filtre devreleri, 569, 593-597
seri *RLC* devrelerinin nicel analizi, 594-597
seri *RLC* devrelerinin nitel analizi, 593
seri *RLC* devresi biçimi, 593, 594-597
transfer fonksiyonu, 596
Bant geçiren filtreler, 569, 589-592, 615-618, 636-638
aktarım fonksiyonu, 591
bant genişliği, 582-583, 586
Butterworth, 636
dar bantlı, 636-638
frekans bölgesi-zaman bölgesi bağıntısı, 591-592
geniş bant, 615-618, 636
kalite katsayısı, 582-583, 586, 636-638
kesim frekansı, 585-588
merkez frekansı, 582-583, 584, 585
op amp, 615-618
paralel *RLC* devresi olarak, 588-589
pasif filtre devreleri, 569, 582-592
resonans frekansı, 582
seri *RLC* devresi olarak, 583, 584-587
seri *RLC* devresinin nicel analizi, 584-587
seri *RLC* devresinin nitel analizi, 584-587
Bant genişliği, bant geçiren filtreler, 582-583, 586
Bas şiddet kontrolü, 607, 642-644
Basamak fonksiyonu, Laplace dönüşümü, 468-470
Basamak tepkisi, 228, 240-248, 248-254, 301-307, 308-311, 514-515, 517-519
çok ağlı devreler, 517-519
direnç-indüktör-kapasitör (*RLC*) devreleri, 301-307, 308-311, 514-515
direnç-indüktör (*RL*) devreleri, 241-246, 248-254
direnç-kapasitör (*RC*) devreleri, 246-248, 248-254
doğrudan yaklaşım, 303-304
dolaylı yaklaşım, 303-304
genel çözümü, 248-254
hesaplama yöntemi, 256
Laplace dönüşüm ile analizi, 514-515, 517-519
paralel *RLC* devreler, 301-307
seri RLC devrelerde kapasitör gerilimi, 309
seri *RLC* devreleri, 308-307
tanımı, 228
Basınç vanaları, 155, 173-174
Başlangıç değer teoremi, Laplace dönüşümü, 495-498
Bellek, aktarım fonksiyonundaki kavram, 536-537
Bilgisayar sistemleri, elektrik mühendisliği, 3-4
Birim basamak fonksiyonu, 469, 707
Birim dürtü fonksiyonu, 471
Birinci mertebeden devreler, 228-283
basamak tepkisi, 228, 240-248, 248-254
direnç-indüktör (*RL*) devreleri, 228, 230-236, 246-248, 248-254, 257-258, 258-259
direnç-kapasitör (*RC*) devreleri, 228, 230-236, 246-248, 248-254, 257-258, 258-259
doğal tepkisi, 228, 230-236, 236-240, 248-254
genel çözümü, 248-254
integral alıcı yükselteç, analizi, 260-263
senkron anahtarlama, 254-258
sınırsız tepkisi, 258-259
tanımı, 228,230
tepkisi, 228-283
Birinci mertebeden filtreler, 608-612
alçak geçiren, 608-610
Bode grafikleri, 609-611
op amp devreleri, 608-612
yüksek geçiren, 610-611
Blok diyagramlar, 616
Bode grafikleri, 609-611, 799-815

aktif frekans seçici devreler, 609-611
düz doğru, 800-804, 804-805, 805-807, 810-812
faz açısı, 805-807, 813-815
genlik, 800-804, 804-805, 809, 810-812
kompleks kutuplar ve sıfırlar, 807-809
köşe frekansı, 801-802, 804-805
reel, birinci mertebeden kutuplar ve sıfırlar, 799-800
Bölme, gerilim ve akımı, 65-67
Butterworth filtreler, 627-636
aktarım fonksiyonu, 628-629
alçak geçiren, 627-634
bant durduran, 636
bant geçiren, 636
devrelerin tasarımı, 629-632
mertebesi, 632-634
yüksek geçiren, 635-636
Bükülme akımı, 188-189

C-Ç

c fazı gerilimi, 434
Cramer metodu, 760
Cihaz anma değerleri, 397-398
Çarpım, bir sabit ile, 475-476, 711
çeyrek dalga simetrisi, 666-667
çift fonksiyon simetrisi, 662-663
periyodik fonksiyon ve, 658, 659-662
simetrinin etkisi, 662-668
yarım dalga simetrisi, 664-666
Çizgi spektrumu, 682-684
Çok ağlı devre, Laplace dönüşüm kullanarak basamak tepkisi, 517-519

D

d'Arsonval ampermetre, 69-70
Dal, tanımı, 94
Darbant filtreler, 636-642
bant durduran, 639-641
bant geçiren filtreler, 636-638
ikiz-T oyuk, 639
kalite çarpanı ve, 636-638
Değişken parametreli fonksiyon, 471
Delta (Δ) ara bağlantı, 73
Delta (Δ) bağlı yük, güç hesaplamaları, 447-448
Delta-Y (Δ-Y) dönüşümleri, 73-76, 352-355
empedanslar, 352-355
eşdeğer devreler, 73-76
Dengeli üç fazlı devreler, 432-465
denge için koşullar, 437
elektriksel güç, üretimi ve dağıtımı, 433, 455-456
faz akımı, 440
faz gerilimi, 440
gerilimler, 434-435, 435-436
güç hesaplamaları, 445-451
hat akımı, 440
hat gerilimi, 440
iki wattmetre yöntemi, 452-454
kaynaklar, üç faz gerilim, 435-436
ortalama gücün ölçümü, 452-454
Y-delta devresi, analizi, 442-445
Y-Y devresi, analizi, 436-442
Desibel, birimi, 797-798
Determinantlar, 760-764, 765
hesaplanması, 761-764
karakteristik, 760
matrisler, 765
pay, 760-761
Devre analizi, 10-11, 42-46, 92-153, 170-172, 506-565, 670-675, 714-716
bağımlı kaynaklar, 42-46
bilinmeyen gerilimin bulunması, 44
devre elemanları, 508-510
devresi, 171-172
duyarlılık analizi, 93, 133-136
düğüm gerilimi yöntemi, 97-100, 100-101, 101-104, 112-116
düzlemsel devreler, 94
eşdeğer devreler, 510
fiziksel prototip, 10
Fourier dönüşümü kullanarak, 714-716
Fourier serileri ile, 67-675
genel bakış, 10-11
gerçekçi direnç devreleri, 93, 133-136
gerçekçi op amp modeli ile eviren yükselteç devresi, 170-171
gerçekçi op amp modeli kullanarak evirmeyen yükselteç
giriş, 506
ağ akımı yöntemi, 105-107, 107-109, 109-112, 112-116

ideal devre elemanları, 10
indüktör, 508-509
kavramsal model, 10
kaynak dönüşümleri, 116-119, 121-122
Kirchhoff yasalarının uygulanması, 43-45
Laplace dönüşümü ile, 506-565
maksimum güç aktarımı, 126-129
matematiksel modellerin kullanımı, 10
Norton eşdeğeri, 119-120, 121
Ohm yasasının uygulanması, 43-45
ortak denklemler, 95-96, 96-97
teknikleri, 92-153
terminolojisi, 94-97
Thévenin eşdeğeri, 119-121, 122-123, 123-126
üst üste bindirme, 129-132
yükselteç devresi, 45
Devre teorisi, 5-6
elektrik mühendisliği, 5-6
elektriksel devre, 5
frekans, 6
toplu parametreli sistem, 5
Devreler, 2-21, 22-55, 56-91, 92-153, 228-283, 284-329, 394-396, 432-465, 566-605, 606-655, 730-757. Ayrıca *bkz.* Devre analizi; İdeal temel devre elemanları; Modeller; İşlemsel yükselteç
açık, 33-34
akım bölücü, 64-65
akım, 11-12, 12-13, 24-28, 36-37, 38-39
aktif filtre, 606-655
arka cam buz çözücüsü, 57, 76-79
bağımlı kaynak, 42-45
birinci mertebe, 228-283
değişkenleri, 2-55
delta'dan Y'ye eşdeğer, 73-76
dengeli üç faz, 432-465
dirençler ve, 28,30-32,58-62
direnil güç, 394-395
düzlemsel, 94
elektrik mühendisliği, 2,3-8
elektriksel direnç, 28-32
elektriksel güvenlik, 23, 46-47
elektriksel, tanımı, 5
enerji, 14-16
endüktif güç, 395
frekans seçici, 566-605
gerçekçi dirençler, 93, 133-136
gerilim bölücü, 62-64
gerilim ve akım ölçümü, 65-67
gerilim ve akımın bölünmesi, 65-67
gerilim, 11-12, 12-13, 24-28, 37-39
güç, 14-16
ideal temel elemanlar, 12-13, 22-55
iki kapılı, 730-757
ikinci mertebe, 284-329
kapasitif güç, 395-396
kara kutu, 59
kaynaklar, 24-28, 56
kısa devre, 33-34
Kirchhoff yasaları, 36-42, 43-45
model, oluşturulması, 10, 32-35
Ohm yasası, 28-32, 43-45
paralel bağlı elemanlar, 59-60
π–T eşdeğer, 73-74
seri bağlı elemanlar, 58-59
seri ve paralel birleşik, 60-62
tepkileri, 228-283, 284-329
terminolojisi, 94-97
uluslararası birimler sistemi (SI), 8-9
Wheatstone köprüsü, 71-72
yükselteç, 45, 103-104, 110-111, 125-126
Dirac delta fonksiyonu, *bkz.* Dürtü fonksiyonu
Direnç devreleri, 394-395
Direnç-indüktör (*RL*) devreleri, 228, 230-236, 241-246, 248-254, 255-256, 570-571, 572-574
akım, ifadelerin çıkarımı, 230-232
alçak geçiren filtre olarak analizleri, 570-571, 572-574
basamak tepkisi, 241-246
doğal tepkileri, 230-236
durgun durum tepkisi, 233
filtre olarak seri devreler, 570-571, 572-574
geçici tepki, 233
genel çözüm (tepkiler için), 248-254
kesim frekansı, 573
nicel analiz (seri devre için), 572-574
nitel analiz (seri devre için), 570-571
sıralı anahtarlama, 255-256
tanımı, 228
zaman sabiti, 232-234
Direnç-indüktör-kapasitör (*RLC*) devreleri, 284-329, 514-515, 516-517, 583, 584-587, 588-589, 593, 594-597

aşırı sönümlü tepki, 289, 291-294
ateşleme devresi, 285, 317-320
bant durduran filtreler olarak analizi, 593, 594-597
bant geçiren filtre olarak analizi, 583, 584-587, 588-589
basamak tepkisi, 301-307, 308-311, 514-515
doğal tepkisi, 286-291, 291-301, 308-311
eksik sönümlü tepki, 289, 295-298
geçici tepkisi, 516-517
kesim frekansı, 585, 588
kritik sönümlü tepki, 289, 299-300
Laplace dönüşümü ile analizi, 514-515, 516-517
nicel analizi (seri devrenin), 584-587, 594-597
nitel analizi (seri devrenin), 583, 593
paralel, 284, 286-291, 291-301, 301-307, 514-515, 516-517, 588-589
seri, 284, 308-311, 583, 584-587, 593, 594-597
Direnç-kapasitör (*RC*) devreleri, 228, 236-240, 246-248, 248-254, 257-258, 258-259, 512-513, 574-576, 577-582
alçak geçiren filtre olarak analizleri, 574-576
basamak tepkisi, 246-248
doğal tepkileri, 236-240, 512-513
filtre olarak seri devreler, 574-576, 577-578, 578-582
genel çözüm (tepkileri için), 248-254
gerilim, ifadelerin çıkarımı, 237-238
kesim frekansı, 575
Laplace dönüşümü ile analizleri, 512-513
nicel analiz (seri devre için), 578-582
nitel analiz (seri devre için), 577-578
sınırsız tepki, 258-259
sıralı anahtarlama, 257-258
tanımı, 228
yüksek geçiren filtreler olarak analizleri, 577-578, 578-582
zaman sabiti, 237
Direnç, 22, 28-32, 71-72. Ayrıca *bkz.* Ohm yasası
dirençler, 28, 30-32
iletkenlik, 29, 31
Ohm yasası, 29
ölçümü, 71-72
sembolü, 28
tanımı, 28
temel direnç elemanı, 22
Wheatstone köprü devresi, 71-72
Dirençler, 28, 30-32, 58-62, 73
akımı, 30
delta (Δ) arabağlantı, 73
gerilimi, 30-31
gücü, 30-32
iletkenliği, 31
paralel, 59-60
pi (π) arabağlantı, 73
seri-paralel birleşim, 60-62
seri, 58-59
T arabağlantı, 73
tanımı, 28
Y arabağlantı, 73
Dirichlet koşulları, 658
Doğal tepki, 228, 230-236, 236-240, 248-254, 286-291, 291-301, 308-311, 512-513
aşırı sönümlü gerilim, 289, 291-294
direnç-indüktör (*RL*) devreleri, 230-236, 248-254,
direnç-indüktör-kapasitör (*RLC*) devreleri, 286-291, 291-301
direnç-kapasitör (*RC*) devreleri, 236-240, 248-254, 512-513
eksik sönümlü gerilim, 289, 295-298
genel çözüm, 248-254, 286-290
hesaplama yöntemi, 234, 238, 250
kritik sönümlü gerilim, 289, 299-300
Laplace dönüşümü, 512-513
paralel *RLC* devresi, 286-291, 291-301
RLC devrenin gerilimi için biçimleri, 291-301
seri *RLC* devrelerde akım, 309
seri *RLC* devreleri, 308-311
tanımı, 228
zaman sabiti, 232-234, 237
Doğru akım (dc) kaynaklar, 56
Doğrusal denklemler, çözümleri, 759-780
Doğrusal trafo, sinüzoidal durgun durum analizi, 361-365
Döngü, tanımı, 37, 94
Dönüştürücü, 155
Dönüşümler, 73-76, 116-119, 121-122, 352-355, 355-358
Δ-Y empedans, 352-355
Δ-Y eşdeğer devreler, 73-76
frekans bölgesi, 352-355, 355-358
kaynak, 116-119, 121-122, 355-358
π – T eşdeğer devreler, 73-74

sinüzoidal analiz ve, 352-355, 355-358
Durdurma frekansları, tanımı, 568
Durgun durum tepkisi, 233, 335-337, 670-675
bileşeni, 336-337
doğrudan yaklaşım, 673-674
Fourier serisi ile bulunması, 670-675
sinüzoidal analiz ve, 335-337
tanımı, 233
Duyarlılık analizi, 93, 133-136
Düğüm gerilimi yöntemi, 97-100, 100-101, 101-104, 112-116, 359-360
bağımlı kaynaklarla kullanımı, 100-101
devre analizi, 97-100, 100-101, 101-104, 112-116
frekans bölgesi devreleri, 359-360
giriş, 97-100
ağ akımı yöntemiyle karşılaştırılması, 112-116
özel durumları, 101-104
sinüzoidal durgun durum analizinde kullanımı, 359-360
tanımı, 98
üst düğüm, 102-103
yükselteç devresi, analizi, 103-104
Düğüm, tanımı, 36, 94
Dürtü fonksiyonu, 470-473, 540-547
anahtarlama işlemleri, 540-542, 542-544
birimi, 471
değişken parametreli fonksiyon, 471
dürtüsel kaynaklar, 544-547
kayma özelliği, 472
Laplace dönüşümüyle devre analizi, 540-547
şiddeti, 471
tanımı, 472
türevleri, 472-473
Dürtü, tanımı, 470
Düzlemsel devreler, 94

E

Eksik sönümlü tepki, 289, 295-298, 309
akım doğal tepkisi, 309
gerilim, 289, 295-298
kapasitör gerilimi basamak tepkisi, 309
sönüm katsayısı, 296
sönümlü radyan frekans, 295-296
Elektrik devreleri, *bkz* Devreler
Elektrik güç, iletimi ve dağıtımı, 433, 455-456
Elektrik mühendisliği, 2, 3-8
bilgisayar sistemleri, 3-4
devre teorisi, 5-6
genel bakış, 3-8
iletişim sistemleri, 3
kontrol sistemleri, 4
problem çözme, 6-8
rolü, 2
sinyal işleme sistemleri, 43-5
Elektriksel güvenlik, 23, 46-47
Elektriksel kaynaklar, *bkz*. Kaynaklar
Empedans, 345, 348-352, 352-355, 363-365, 371
admitans, 350
Delta-Y dönüşümler, 352-355
doğrusal trafolar, 363-364
hassasiyet, 350
iletkenlik, 350
paralel, 350
pasif devre elemanı, 345
reaktans, 345
seri ve paralel bağlantı, 348-352
seri, 348-349
tanımı, 345
uyumlama, ideal trafo kullanımı, 371
yansıtılan empedans, 363-364
Endüktans, 186, 188, 203-207, 207-214
Faraday yasası, 207
karşılıklı, 188, 203-207, 209-214
öz, 207-208
tanımı, 186
Endüktif devreler, 395
Enerji, 14-16, 192, 197, 212-214, 717-724. Ayrıca *bkz*. dikdörtgen gerilim
darbesi için güç hesaplaması, 722-723
hesaplamaları, 212-214
Parseval teoremi ve, 717-724
Eşdeğer devreler (manyetik bağlaşık bobinler için, 787-791
Etkin değer, 399
Ev dağıtım devresi, 331, 375
Eviren yükselteç devresi, 161-162, 170-171
Evirmeyen yükselteç devresi, 164-165, 171-172
Evrişim integrali ve aktarım fonksiyonu, 531-537
Evrişim, Fourier dönüşümü, 712-713

F

Faraday yasası, 207
Fark modu giriş gerilimleri, 166-167
Fark yükselteç devresi, 165-169
başarım ölçümü, 168-169
fark modu giriş gerilimleri, 166-167
ortak mod giriş gerilimleri, 166-167
ortak modu bastırma oranı (CMRR), 168-168???
Faz açısı grafiği, 568, 805-807, 813-815
Bode grafikleri, 805-807, 813-815
düz doğru, 805-807
kompleks kutuplar ve, 813-815
pasif frekans seçici devreler ve, 568
Faz açısı, tanımı, 332
Faz akımı, tanımı, 440
Faz gerilimi, tanımı, 440
Faz spektrum grafikleri, 682-684
Faz spektrumu, tanımı, 682
Fazör diyagramları, 372-374
Fazörler, 337-342, 342-345, 403-404
dönüşüm, 338
frekans bölgesi, 338
gösterimi, 338
güç hesaplamaları, 403-404
tanımı, 337
ters dönüşüm, 338-340
V-I bağıntısı, 342-345, 403-404
Flaşör devresi, 229, 263-264
Filtreler, *bkz*. Frekans seçici devreler
Fiziksel prototip, devre analizinde kullanımı, 10
Fonksiyonel dönüşümler, 468, 474-475
Fourier dönüşümü, 698-729. Ayrıca *bkz*. İşlemsel dönüşümler
birim basamak fonksiyonu, 707
çıkarımı, 699-701
devre uygulamaları, 714-716
fonksiyonel, 706-708, 710-714
işlemsel, 710-714
kosinüs fonksiyonunun, 707-708
Laplace dönüşümünden bulunması, 703-706
limitleri, 706-708
matematiksel özellikleri, 708-710
Parseval teoremi, 717-724
işaret fonksiyonu, 706-707
tanımı, 699
temel fonksiyonlar, 708
ters, 700
Fourier integrali, yakınsaması, 701-703
Fourier katsayıları, 658, 659-662, 662-668
Fourier serilerinin üstel biçimi, 679-682
Fourier serisi, 656-697
analizi, 658-659
Dirichlet koşulları, 658
durgun-durum tepkisi, bulunması, 670-675
faz spektrumu, 682-684
genliği, 682-684
giriş, 656-657
harmonik frekans, 658
katsayıları, 658, 659-662, 662-668
ortalama güç hesaplamaları, 675-678
periyodik fonksiyonlar, 656, 675-678, 678-679
rms değer, 678-679
simetri ve, 662-668
temel frekans, 658
trigonometrik biçimi, 668-670
uygulamaları, 670-675
üstel biçimi, 679-682
Fourier serisinin trigonometrik biçimi, 668-670
Frekans bölgesi, 338, 342-346, 346-348, 348-352, 352-355, 355-360, 360-361, 467,479, 576-577, 591-592, 712, 713
alçak geçiren filtreler, zaman bölgesiyle ilişkisi, 576-577
Δ-Y dönüşümler, 352-355
düğüm gerilimi yöntemi, 359-360
empedans ve, 345, 348-352, 352-355
evrişim, 713
Fourier dönüşümü ve, 712, 713
ağ akımı yöntemi, 360-361
kaynak dönüşümleri ve, 355-358
Kirchhoff yasaları, 346-348
Laplace dönüşümü ve, 467, 479
Norton eşdeğer devresi, 355
öteleme, 479, 712
pasif devre elemanları, 342-346
reaktans, 345
sinüzoidal durgun durum analizi, 342-361
tanımı, 338
Thévenin eşdeğer devresi, 355, 357-358
V-I bağıntısı, 342-345
yüksek geçiren filtreler, zaman bölgesiyle ilişkisi, 591-592
zaman bölgesiyle ilişkisi, 576-577, 591-592

akım oranları, 368-369, 369-370
empedans uyumlama, 371
eşdeğer devreler, 792-795
gerilim oranları, 368-369, 369-370
oranın kutupluğu, 369-370
sınır değerler, 366-368
sinüzoidal durgun durum analizi, 361, 365-371
tanımı, 365
İki kapılı devreler, 730-757
analizi, 741-747
arabağlı, 747-751
arasındaki bağıntılar, 735-739
iletim parametreleri, 734
inmmitans, 734
karma parametreler, 734
karşılıklı, 739-741
parametreleri, 732-741
parametrelerin çevrimi, 736
simetrik karşılıklı, 740
sonlandırılmış, 741-747
terminal denklemleri, 731-732
z parametreleri
İki wattmetre Yöntemi, üç fazlı devreler, 452-454
İkili paket (DIP), 156
İkinci mertebeden devreler, 284-329
ateşleme devresi, 285, 317-320
basamak tepkisi, 301-307, 308-311
direnç-indüktör-kapasitör (*RLC*) devreleri, 284-329
doğal tepkisi, 286-291, 291-301, 301-307
genel çözüm (tepkisi için), 286-290
integral alıcı yükselteçler, 260-263, 312-316
paralel *RLC* devrelerin gerilim tepkileri, 291-301
paralel *RLC*, 284, 286-291, 291-301, 301-307
seri *RLC*, 284, 308-311
tanımı, 286
İkiz T yarık filtre, 639
İletişim sistemleri, elektrik mühendisliği, 3
İletkenlik, 29, 31, 350
İmmitans, tanımı, 734
İntegral alıcı yükselteçler, 260-263, 312-316
ardarda bağlantıları, 312-313
birinci mertebeden devreler, 260-263
geribesleme dirençleri, 314-316
ikinci mertebeden devreler, 312-316
sıralı anahtarlama, 262
tepki analizi, 260-263, 312-316
İntegraller, 531-537, 701-703, 819
İntegrasyon (zaman bölgesinde), 477-478, 711-712
indüktörler, 188-195, 200-203, 217-227, 542-544
akım, 190-191
dürtü fonksiyonu için anahtarlama işlemi, 542-544
enerji, 192
gerilim, 188-189
güç, 191-192
seri-paralel birleşimleri, 200-203
İşaret fonksiyonu, Fourier dönüşümü, 706-707
İşlemsel dönüşümler, 468, 475-481, 710-714
bir sabitle çarpım, 475-476, 711
çıkarma, 476, 711
evrişim, 712-713
Fourier, 710-714
frekans bölgesi, 479, 713
genlik modülasyonu, 712
integrasyon, 477-478, 711-712
Laplace, 468, 475-481
ölçek değişimi, 479-480, 712
öteleme, 478-479
tanımı, 468
toplama, 476, 711
türev, 476-477, 711
zaman bölgesinde, 478-479, 712-713
İşlemsel yükselteç (op amp), 154-185, 608-611, 613-614, 615-622, 622-636
akımlar, 156-161
alçak geçiren filtreler, 608-610
ardarda özdeş filtreler, 622-627
bant durduran filtreler, 618-622
bant geçiren filtreler, 615-6118
basınç vanaları, 155, 173-174
Butterworth filtreler, 627-636
eviren yükselteç devresi, 161-162, 170-171
evirmeyen yükselteç devresi, 164-165, 171-172
fark yükselteç devreleri, 165-169
filtreler, 608-611, 613-614, 615-622, 622-636
gerçekçi modeli, 170-173
ikili paket (DIP), 156
ölçekleme, filtre tasarımında kullanımı, 613-614
terminaller, 156-161
toplayan yükselteç devresi, 163-164

yüksek geçiren filtreler, 610-611
yüksek mertebeden filtreler, 622-636

K

Kalite çarpanı, 582-583, 586, 636-638
bant geçiren filtreler, 582-583, 586
darbant bant geçiren filtreler, 636-638
genişbant bant geçiren filtreler, 636
Kapalı yol, tanımı, 37
Kapasitans, tanımı, 186
Kapasitif devreler, 395-396
Kapasitörler, 195-199, 200-203, 217-227, 309, 509-510, 540-542
akım, 196
dürtü fonksiyonunun anahtarlama işlemi, 540-542
enerji, 197
gerilim, 196, 309
s bölgesi, 509-510
seri-paralel birleşimleri, 200-203
yerdeğiştirme akımı, 195
Kapılar, tanımı, 730
Kara kutu, tanımı, 59
Karakteristik denklem, RLC devreleri, 287-288, 308
Karma parametreler, iki kapılı devreler, 734
Karşılıklı endüktans, 188, 203-207, 209-214, 521-523
bağlaşım katsayısı, 211-212
enerji hesaplamaları, 212-214
kavramı, 209-211
Laplace dönüşümüyle devre analizi, 521-523
nokta gösterimi, 204-207
öz endüktans, ilişkisi, 211-212
tanımı, 188
Karşılıklı iki kapılı devreler, 739-741
Kayma özelliği, dürtü fonksiyonu, 472
Kaynak dönüşümleri, 116-119, 121-122, 355-358
devre analizi, 116-119
durgun durum analizi ve, 355-358
frekans bölgesi devreleri, 355-358
Norton eşdeğer devresi, kullanımı, 121, 355
sinüzoidal analiz ve, 355-358
tanımı, 116
Thévenin eşdeğer devre, kullanımı, 121-122, 355, 357-358
Kaynaklar, 24-28, 56, 332-335, 435-436
aktif eleman, 25
arabağlantıların testi, 26-27
bağımlı, 24
bağımsız, 24
doğru akım (dc), 56
ideal akım, 24
ideal gerilim, 24
kontrollü, 25
nötr terminal, 435
pasif eleman, 25
sabit, 56
semboller, 24–25
sinüzoidal, 332-335
üç faz gerilim, 435-436
Kazanç, tanımı, 157
Kesim frekansı, 568, 571-572, 573, 575, 585-586, 588
alçak geçiren filtreler, 573, 575
bant geçiren filtreler, 585-586, 588
bant genişliği ile ilişkisi, 586
gerçek filtre devreleri, 571-572
merkez frekansı ile ilişkisi, 585
paralel *RLC* filtreler, 588
seri *RC* filtreler, 575
seri *RL* filtreler, 573
seri *RLC* filtreler, 585
tanımı, 568, 571-572
yarım güç frekansı, 572
Kesim frekansı, 568, 571-572, 573, 575, 585-586, 588
bant geçiren filtreler, 585-586, 588
Kesirli fonksiyonlar, 482-494. Ayrıca *bkz.* Kısmi kesirler açılımı
has olmayan, 483, 493-494
has, 483-493
kısmi kesirler açılımı, 483-494
tanımı, 482-483
Kısa devre, 33-34
Kısmi kesirler açılımı, 483-494, 528-531
aktarım fonksiyonu, 528-531
$D(s)$'nin farklı kompleks kökleri, 486-488
$D(s)$'nin farklı reel kökleri, 484-485
$D(s)$'nin katlı kompleks kökleri, 491-493
$D(s)$'nin katlı reel kökleri, 488-490
direnç, 508
$H(s)$ ile devre analizi, 530-531
has kesirli fonksiyonlar, 483-493
has olmayan kesirli fonksiyonlar, 493-494
Kirchhoff yasaları ve, 511

Laplace dönüşüm fonksiyonu, 467
Ohm yasası, 511
Thévenin eşdeğeri, kullanımı, 520-521
üst üste bindirme, kullanımı, 523-526
zamanla değişmeyen, 530
Kirchhoff yasaları, 36-42, 43-45, 346-348, 511
akım, 36-37, 38-39, 347
bilinmeyen akımı bulmada kullanımı, 40
bilinmeyen gerilimi bulmak için uygulanması, 44
devre analizine uygulanması, 45
devre modeli, 41-42
döngü, 37
düğüm, 36
elektrik devreleri ve, 36-42
frekans bölgesinde, 346-348
gerilim, 37, 39, 346-347
kapalı yol, 37
s bölgesinde kullanımı, 511
seri elemanlar, 38
sinüzoidal durgun durum analizi ve, 346-348
yükselteç devrelerine uygulanması, 45
Kompleks frekanslar, 289
Kompleks kuvvet, 401-402, 403-405, 446-447
alternatif biçimler, 404-405
görünen güç, 401
hesabı, 402
sinüzoidal durgun durum analizi, 401-402, 403
tanımı, 401
V-I bağıntısı, 403-404
Y bağlı yükler, 446-447
Kompleks sayılar, 781-786
aritmetik işlemler, 783-785
gösterim, 781-782
grafik gösterim, 782-783
kökleri, 768
özdeşlikler, 785
tamsayı kuvvetler, 785
Kontrol sistemleri, elektrik mühendisliği, 4
Kosinüs fonksiyonu, Fourier dönüşümü, 707-708
Kök-ortalama-kare (rms) değer, 333, 335, 399-400, 678-679
akımı, 30
etkin değer, 399
güç hesaplamaları, 399-400
periyodik fonksiyonlar, 678-679
sinüzoidal kaynaklar, 333, 335
tanımı, 28
Köşe frekansı, genlik grafikleri, 801-802, 804-805
Kritik sönümlü tepki, 289, 299-300, 309
doğal akım tepkisi, 309
gerilim, 289, 299-300
kapasitörün basamak gerilime tepkisi, 309
Kutuplar, 494-495, 528, 799-800, 807-809
Bode grafikleri ve, 799-800, 807-809
$F(s)$'nin Laplace dönüşümü kutuplarının yerleşimi, 494-495
$H(s)$'nin Laplace dönüşümü kutuplarının yerleşimi, 528
kompleks, 807-809
reel, birinci mertebeden, 799-800
Kutupluk referansları, 12-13, 15
Kutupluk, akım ve gerilim oranlarının, 369-370

L

Laplace dönüşümü, 466-505, 506-565, 703-706. Ayrıca *bkz.* İşlemsel dönüşümler
aktarım fonksiyonu, 526-528, 528-531, 531-537, 537-540
ani dalgalanma bastırıcılar, 507, 548
basamak fonksiyonu, 468-470
basamak tepkisi, 514-515, 517-519
başlangıç değeri teoremi, 495-498
çiftler, 474-475, 493
devre analizi ve, 506-565
doğal tepki, 512-513
dürtü fonksiyonu, 470-473, 540-547
düzgün kesirli fonksiyonlar, 483-484
düzgün olmayan kesirli fonksiyonlar, 483, 493-494
$F(s)$'nin kutupları, 494-495
$F(s)$'nin sıfırları, 494-495
fonksiyonel dönüşümler, 468, 474-475
Fourier dönüşümünü bulmada kullanımı, 703-706
frekans bölgesi ve, 467, 469
işlemsel dönüşümler, 468, 475-481
karşılıklı endüktans, 521-523
kesirli fonksiyon, 482-483
kısmi kesirler açılımı, 483-484
s bölgesi, 467, 506, 508-510, 511-512, 520-521, 523-526
son değer teoremi, 495-498
tanımı, 467-468
tek taraflı, 468
tek yönlü, 468
ters, 482-494
Thévenin eşdeğeri, s bölgesinde kullanımı, 523-526
uygulanması, 481-482, 512-526
üst üste bindirme, s bölgesinde kullanımı, 523-526
zaman bölgesi ve, 467, 476-479

M

Maksimum güç aktarımı, 126-129, 410-417
devre analizi ve, 126-129
kısıtlı, 412-413
koşulu, 411
sinüzoidal durgun durum güç hesaplamaları, 410-417
soğurulan, 412
Manyetik bağlaşık bobinler, 787-795
eşdeğer devreleri, 787-791
ideal trafolar ve, 792-795
π eşdeğer devre, 788-790
T eşdeğer devre, 787-788
Matrisler, 764-780
birim, 770
bölünmüş, 772-775
cebir, 765-770
determinantı, 765
devriği, 769
ek matris, 770-771
kare, 765
kolon, 765
tanımı, 764
ters, 771-772
uygulamaları, 776-780
uyumlu, 766
Merkez frekansı, bant geçiren filtreler, 582-583, 584
Modeller, 10, 32-35, 170-173
devre, 10, 32-35
elektriksel davranış, 35
fener, 33-34
gerçekçi op amp modeli ile devre analizi, 170-173
işlemsel yükselteç (op amp), 170-173
kavramsal, 10
matematiksel, 10
oluşturulması, 10, 32-35
terminal ölçümleri, 35

N

Negatif (acb) faz sırası, gerilimler, 434
Negatif geribesleme, tanımı, 158
Neper frekansı, 289, 308
Nokta gösterimi, 204-207, 369
Norton eşdeğer devresi, 119-120, 121, 123, 355
devre analizi, 119-121
frekans bölgesi tipi, 355
kaynak dönüşümleri kullanılarak çıkarımı, 121, 355
sinüzoidal durgun durum analizi, 355
tanımı, 121
Nötr terminal, 435

O-Ö

Ohm yasası, 29, 43-45, 511
bilinmeyen gerilimi bulmada kullanımı, 44
devre analizine uygulanması, 43-45, 511
elektriksel direnç ve, 29
s bölgesinde kullanımı, 511
yükselteç devresinde uygulanması, 45
Op amp, *bkz.* İşlemsel dönüşümler (op amp)
Ortak denklemler, 95-96, 96-97, 759-780
devre analizi ve, 95-96, 96-97
doğrusal, çözümü, 759-780
sayısı, 95-96
sistematik yaklaşımda kullanımı, 96-97
Ortak mod bastırma oranı (CMRR), 168-168
Ortak mod giriş gerilimleri, 166-167
Ortalama güç, 394-398, 406, 445-446, 452-454, 675-678
güç katsayısı, 396
iki wattmetre yöntemi, 452-454
periyodik fonksiyonlarla hesaplamalar, 675-678
sinüzoidal durgun durum analizi, 394-398, 406
tanımı, 394
üç fazlı devreler, 445-446, 452-454
üç fazlı devrelerde ölçümü, 452-454
Y bağlı yükler, 445-446
Ölçek değiştirme, 479-480, 712
Ölçekleme, 612-614

bileşen ölçek çarpanları, 613
frekans, 612
genlik, 612
op amp filtre tasarımı, kullanımı, 613-614
Ölçüm, 8-9, 35, 68-70, 71-73, 168-169
ampermetreler, 68,69-70
çıkarılan SI birimleri, 9
direnç, 71-73
fark yükselteç performansı, 168-169
gerilim ve akım, 65-67
ortak modu bastırma oranı (CMRR), 410-417
ön ekler, SI birimleri, 9
SI birimleri, 8-9
tanımlı nicelikler, SI birimleri, 8
terminal, modellerin dayandığı, 35
voltmetre, 68
Öndeki güç çarpanı, 396
Öteleme, 478-479, 712
Fourier dönüşümü, 712
frekans bölgesi, 479, 712
Laplace dönüşümü, 478-479
zaman bölgesi, 478?479, 712
Öz endüktans, 207-208, 211-212

P

π eşdeğer devre, 788-790
π -T eşdeğer devreler, 73-76
Paralel bağlı devre elemanları, 59-60
Paralel *RLC* devreleri, 284, 286-291, 291-301, 301-307
basamak tepkisi, 284, 301-307
doğal tepki, 284, 286-291, 291-301
karakteristik denklem, 287-288
neper frekansı, 289
rezonant radyan frekansı, 289
Parseval teoremi, 717-724
dikdörtgen gerilim darbesindeki enerjinin hesaplanması, 722-723
filtrelere uygulanması, 718-719
sergilenmesi, 718
yorumu, 718-719
Pasif devre elemanları, 25, 188, 342-346
empedans, 345
eşfazlı sinyal, 343
frekans bölgesi, 342-346
ideal temel devreler ve, 188
kaynak, 25
reaktans, 345
sinüzoidal analiz ve, 342-346
V-I bağıntısı, 342-345
Pasif filtre devreleri, *bkz* Frekans seçici devreler
Pasif işaret gösterimi, 13
Periyodik fonksiyonlar, 656, 658-662, 675-678, 678-679
Fourier katsayıları, 656, 658-662
Fourier serileri ve, 656, 675-678, 678-679
ortalama güç hesaplamaları, 675-678
rms değeri, 678-679
tanımı, 656
Periyot, sinüzoidal fonksiyonun, 332
Pi (π) arabağlantı, 73
Pozitif (abc) faz sırası, gerilimler, 434
Pspice duyarlılık analizi, 135-136

R

RC devreleri, *bkz*. Direnç-kapasitör (*RC*) devreleri
Reaktans, pasif devre elemanı, 345
Reaktif çarpan, 396
Reaktif güç, 394-398, 406
Rezonant frekans, bant geçiren filtreler, 582
Rezonant radyan frekans, 289, 308
RL devreleri, *bkz*. Direnç-indüktör (*RL*) devreleri
RLC devreleri, *bkz*. Direnç-indüktör-kapasitör (RLC) devreleri
rms değer, *bkz*. Kök-ortalama-kare (rms) değer

S

s bölgesi, 467, 506, 508-510, 511-512, 520-521, 523-526
devre analizi, 511-512
kapasitör, 509-510
Sabit kaynaklar, 56
Sadeleştirme teknikleri, *bkz*. Dönüşümler
Sanal toprak koşulu, 158
Sayısal metreler, 68
Seri *RLC* devreler, 284, 308-311
basamak tepkisi, 308-311
doğal tepki, 308-311
kapasitör gerilimi, 309
karakteristik denklem, 308
neper frekansı, 308
rezonant radyan frekansı, 308
Seri bağlı devre elemanları, 58-59
Seri-paralel birleşimler, 60-62, 200-203, 348-352
admitans, 350
devre elemanları, 60-62
dirençler, 60-62
empedanslar, 348-352
hassasiyet, 350
indüktörler, 200-203
kapasitörler, 200-203
Sıfır frekans, 575
Sıfırlar, 494-495, 528,799-800, 807-809
Bode grafikleri, 799-800, 807-809
$F(s)$'nin köklerinin yerleşimi, 494-495
$H(s)$'nin köklerinin yerleşimi, 528
kompleks, 807-809
reel, birinci mertebe, 799-800
Sınırsız tepki, 258-259
Sıralı anahtarlama, 254-258
SI birimleri, *bkz*. Uluslararası birimler sistemi (SI); Ölçüm
Simetri, 662-668
çeyrek dalga, 666-667
çift fonksiyon, 662-663
Fourier katsayıları, etkisi, 662-668
tek fonksiyon, 663-664
yarım dalga, 664-666
Sinüzoidal durgun durum analizi, 330-389, 390-431
Δ–Y dönüşüm, 352-355
akım-gerilim (V-I) bağıntıları, 342-345
düğüm gerilimi yöntemi, 359-360
empedans, 345, 348-352, 352-355
ev dağıtım devresi, 331, 375
fazör diyagramları, 372-374
fazörler, 337-342
frekans bölgesi, 338, 342-346, 346-348, 348-352, 352-355, 355-360, 360-361
ağ akımı yöntemi, 360-361
güç hesaplamaları, 390-431
ideal dönüştürücü, 365-371
kaynak dönüşümleri, 355-358
kaynaklar, 332-335
Kirchhoff yasaları, 346-348
Norton eşdeğer devresi, 355
pasif devre elemanları, 342-346
tepki, 335-337
Thévenin eşdeğer devre, 355, 357-358
trafolar, 361-365, 365-371
Sinüzoidal kaynaklar, 332-335
akım, 332-334
faz açısı, 332
gerilim, 332-334
periyot, 332
Sinüzoidal tepki, 335-337, 537-540
aktarım fonksiyonu ve, 537-540
durgun durum bileşeni, 336-337
durgun durum sinüzoidal analizi, 335-337
geçici bileşen, 335
Sinyal işleme sistemleri, elektrik mühendisliği, 4-5
Son değer teoremi, Laplace dönüşümü, 495-498
Sonlandırılmış iki kapılı devreler, 741-747
Sonsuz frekans, 575
Sönüm katsayısı, 296
Sönüm oranı, 296
Sönümlü radyan frekans, 295-296

T

T arabağlantı, 78
T eşdeğer devre, 787-788
Tasarım için kavramsal model, 10
Tek taraflı Laplace dönüşümü, 468
Temel frekans, tanımı, 658
Tepki, 228-283, 284-329, 335-337, 537-540, 566, 670-674
aktarım fonksiyonu ve durgun durum sinüzoidal tepki, 537-540
ateşleme devresi, 285, 317-320
basamak, 228, 240-248, 248-254, 301-307, 308-311
birinci mertebeden devreler, 228-283
çözümleri, 248-254
direnç-indüktör (*RL*) devreleri, 228, 230-236, 241-246, 248-254
direnç-indüktör-kapasitör (*RLC*) devreleri, 284-329
direnç-kapasitör (*RC*) devreleri, 228, 236-240, 246-248, 248-254
doğal, 228, 230-236, 236-240, 248-254, 286-291, 291-301, 308-311
durgun durum, 233, 335-337, 670-675
flaşör devresi, 229, 263-264

Fourier serisi uygulaması, 670-674
frekans, 566
geçici, 233
genel çözüm, 248-254
ikinci mertebeden devreler, 284-329
integral alıcı yükselteçler, 260-263, 312-316
sınırsız, 258-259
sıralı anahtarlama, 254-258
sinüzoidal, 335-337, 537-540
Terminaller, 156-161
işlemsel yükselteçler (op amp'lar), 156
op amp akımı, 156-161
op amp gerilimi, 156-161
Ters Fourier dönüşümü, 700
Ters Laplace dönüşümleri, 482-494
dönüşüm çiftleri, 493
düzgün olmayan kesirli fonksiyonlar, 483, 493-494
düzgün kesirli fonksiyonlar, 483-484
kısmi kesirler açılımı, 483-494
kesirli fonksiyonlar, 482-483
Thévenin eşdeğer devreleri, 119-121, 122-123, 123-126, 355, 357-358, 520-521
bağımsız kaynaklar, çıkarım, 123-125
bulunması, 120-121
devre analizi, 119-121
frekans bölgesi tipi, 355, 357-358
kaynak dönüşümleri ile çıkarım, 121-122, 357-358
Laplace dönüşümü, analizi, 520-521
s bölgesi, kullanımı, 520-521
Sinüzoidal durgun durum analizi, 355, 357-358
tanımı, 120
tipleri, 480, 713
yükselteç devresinde kullanımı, 125-126
Toplayan yükselteç devresi, 163-164
Toplu parametreli sistem, 5
Trafolar, 361-365, 365-371, 792-795
birincil sarım, 362
doğrusal, 361-365
eşdeğer devrelerde, 792-795
ideal, 361, 365-371, 792-795
ikincil sarım, 362
sinüzoidal durgun durum analizi, 361-365, 365-371
tanımı, 362
yansıtılan empedans, 363-364
Transfer fonksiyonu, 526-528, 528-531, 51-537, 537-540, 576, 581, 591, 596, 628-629
ağırlık fonksiyonu, 536-537
bellek ve, 536-537
bir devrede çıkarımı, 527
Butterworth filtreler, 628-629
durgun durum sinüzoidal tepki ve, 537-540
evrişim integrali ve, 531-537
frekans seçici devreler, 576, 581, 591, 596, 628-629
H(*s*) ile devre analizi, 530-531
H(*s*)'nin kutup ve sıfırları, 528
kısmi kesirler açılımı, 528-531
Laplace dönüşümü devre analizi, 526-540
tanımı, 526
zamanda değişmez, 530
Trigonometrik özdeşlikler, tablosu, 817
Tuşlu telefon devreleri, 567, 598

U-Ü

Uluslararası birimler sistemi (SI), 8-9
Üç fazlı devreler, *bkz.* Dengeli üç fazlı devrelerde zaman sabiti 232-234, 576
Üst düğüm, kavramı, 102-103
Üst ağ, kavramı, 110
Üst üste bindirme, 129-132, 523-526
devre analizi ve, 129-132
Laplace dönüşümü analizi, 523-526
s bölgesi, 523-526
tanımı, 129

V

V-I bağıntıları, *bkz.* Akım ve Gerilim (V-I) bağıntıları
VAR, reaktif güç birimi, 395
Volt-amp (VA), kompleks güç birimi, 401
Voltmetre, 68

W

Watt (W), ortalama güç birimi, 395
Wheatstone köprü devresi, 71-72

Y

Y bağlı yükler, 445-446, 446-447
Y-delta devresi analizi, 442-445
Y-Y devre, 436-442

analizi, 436-442
dengeli üç faz devre koşulları, 437
tek fazlı eşdeğer devre, 438
Yakınlık anahtarları, 187, 214-216
Yansıtılan empedans, 363-364
Yol, tanımı, 94
Yön referansları, 12-12
Yüksek geçiren filtreler, 568-569, 577-582, 610-611, 635-636
aktarım fonksiyonu, 581
aktif filtre devreleri, 610-611
birinci mertebeden, 610-611
Butterworth, 635-636
op amp, 610-611
pasif filtre devreleri, 568-569, 577-582
Seri *RC* devreleri, 577-578, 578-582
Seri *RC* devresinin nicel analizi, 577-582
Seri *RC* devresinin nitel analizi, 577-578
tanımı, 568-569
Yüksek mertebeden op amp filtreler, 622-636
Yükselteç devreleri, 45, 103-104, 110-111, 125-126
ağ akımı yöntemiyle analizi, 110-111
düğüm gerilimi yöntemiyle analizi, 103-104
Kirchhoff yasalarının uygulanması, 45
Ohm yasasının uygulanması, 45
Thévenin eşdeğerin kullanılması, 125-126
Yükselteçler, 154-185, 260-263, 312-316
integral alıcı, 260-263, 312-316
işlemsel (op amp), 154-185

Z

Z ara bağlantı, 73
z parametreleri, 732-733, 742-746
belirlenmesi, 732-733
iki kapılı devreler, 732-733, 742-746
sonlandırılmış iki kapılı devre, 742-746
Zaman bölgesi, 467, 476-479, 576-577, 591-592, 712-713
alçak geçiren filtreler, frekans bölgesi bağlı 576-577
evrişim, 712-713
Fourier dönüşümü ve, 712-713
frekans bölgesi, ile ilişkisi, 576-577, 591-592
integrasyon, 477-478
işlemsel Laplace dönüşümleri, 476-479
Laplace dönüşümü ve, 467, 476-479
öteleme, 478-479, 712
türev, 476-477
yüksek geçiren filtreler, frekans bölgesi ile 591-592
Zaman bölgesinde türev, 476-477, 711
Zaman sabiti, 232-237, 576
Zamanda değişmez, tanımı,
Zayıflama, tanımı, 566

Sözlük

Türkçe – İngilizce

A

Açık devre	Open circuit
Admitans	Admittance
Ağ	Mesh
Ağırlık fonksiyonu	Weighting function
Akım	Current
Akım bölücü	Current divider
Aktarım fonksiyonu	Transfer function
Aktif filtre	Active filter
Alçak geçiren filtre	Low-pass filter
Ampermetre	Ampermeter
Anahtar	Switch
Anahtarlama	Switching
Analiz	Analysis
Analog metre	Analog meter
Ani dalgalanma bastırıcı	Surge suppressor
Anlık güç	Instantaneous power
Art arda bağlantı	Cascade connection
Arka cam buz çözücüsü	Rear window defroster
Aşırı sönümlü	Overdamped
Ateşleme devresi	Starter circuit

B

Bağlaşım katsayısı	Coupling coefficient
Bant durduran	Bandstop, bandreject
Bant geçiren	Bandpass
Bant genişliği	Bandwidth
Bas şiddet kontrolü	Bass volume control
Basamak fonksiyonu	Step function
Basamak tepkisi	Step response
Başlangıç değer teoremi	Initial value theorem
Bellek	Memory
Birim	Unit
Birinci mertebeden	First order
Bode grafiği	Bode plot

C-Ç

Çıkış	Output

D

Dal	Branch
Dalgabiçimi	Waveform
Darbant	Narrowband
Delta-Y dönüşüm	Delta-Y conversion
Dengeli üç fazlı	Balanced three-phase
Desibel	Decibel
Determinant	Determinant
Devre	Circuit
Dirac delta fonksiyonu (Dürtü fonksiyonu)	Dirac delta function
Direnç	Resistor
Dirichlet koşulları	Dirichlet conditions
Doğal tepki	Natural response
Doğru akım	DC
Doğrusal	Linear
Döngü	Loop
Dönüştürücü	Transducer
Dönüşüm	Transformation
Durgun durum	Steady state
Duyarlılık	Sensitivity
Düğüm	Node
Düzlemsel	Planar

E

Eksik sönümlü	Underdamped
Elektrik devreleri	Electric circuits
Empedans	Impedance
Endüktans	Inductance
Endüktif	Inductive
İndüktör	Inductor
Enerji	Energy
Eşdeğer	Equivalent
Etkin değer	rms value
Eviren yükselteç	Inverting amplifier
Evirmeyen yükselteç	Non-inverting amplifier
Evrişim	Convolution

F

Faraday yasası	Faraday's law
Fark modu	Differential mode
Fark yükselteç	Differential amplifier
Faz	Phase

Faz spektrumu	Phase spectrum
Fazör	Phasor
Filtre	Filter
Fonksiyonel dönüşümler	Functional transforms
Fourier dönüşümü	Fourier transform
Fourier serisi	Fourier series
Frekans	Frequency
Frekans bölgesi	Frequency domain
Frekans ölçekleme	Frequency scaling
Frekans seçici	Frequency selective

G

Gecikmeli	Lagging
Geçici	Transient
Geçirme bandı	Passband
Genişbant	Wideband
Genlik	Amplitude
Geribesleme	Feedback
Gerilim	Voltage
Gerilim bölücü	Voltage divider
Giriş	Input
Görünen güç	Available power
Güç	Power
Güç çarpanı	Power factor

H

Harmonik	Harmonic
Hat	Line

I-İ

İdeal	Ideal
İki kapılı	Two-port
İki Wattmetre Yöntemi	Two-wattmeter method
İkinci mertebeden	Second order
İkiz T yarık	Twin T notch
İletişim	Communication
İletkenlik	Conductivity
İmmitans	Immitance
İntegral	Integral
İntegral alıcı yükselteç	Integrating amplifier
İşaret fonksiyonu	Sign function
İşlemsel dönüşüm	Operational transform
İşlemsel yükselteç (op amp)	Operational amplifier

K

Kalite çarpanı	Quality factor
Kapalı yol	Closed loop
Kapasitans	Capacitance
Kapasitif	Capacitive
Kapasitör	Capacitor
Karma	Hybrid
Karşılıklı	Mutual
Kaynak	Source
Kazanç	Gain
Kesim frekansı	Cut-off frequency
Kesirli	Rational
Kısa devre	Short circuit
Kısmi kesirler açılımı	Partial fraction expansion
Kirchhoff yasaları	Kirchhoff laws
Kompleks	Complex
Kontrol	Control
Kök-ortalama-kare	Root-mean-square
Kritik sönümlü	Critically damped
Kutup	Pole
Kutupluk	Polarity

L

Laplace dönüşümü	Laplace transform

M

Maksimum güç aktarımı	Maximum power transfer
Manyetik bağlaşık	Magnetically coupled
Matris	Matrix
Merkez frekansı	Center frequency

N

Neper frekansı	Neper frequency
Nokta gösterimi	Dot convention
Norton eşdeğer devresi	Norton equivalent circuit
Nötr	Neutral

O-Ö

Ohm yasası	Ohm's law
Ortak denklemler	Simultaneous equations
Ortak mod	Common mode
Ortak mod bastırma oranı (CMRR)	Common mode rejection ratio

Ortalama	Average
Ölçekleme	Scaling
Ölçüm	Measurement
Önde	Leading
Öteleme	Translation
Öz endüktans	Self inductance

P

pi eşdeğer	pi equivalent
Pi'den T'ye eşdeğer	pi to T equivalent
Paralel	Parallel
Parseval teoremi	Parseval's theorem
Pasif	Passive
Periyot	Period
Periyodik	Periodic

R

Reaktans	Reactance
Reaktif çarpan	Reactive factor
Reaktif güç	Reactive power
Rezonant	Resonant

S

s bölgesi	s domain
Sanal toprak	Virtual ground
Sayısal metre	Digital meter
Seri	Series
Sıfır	Zero
Sınırsız	Unbounded
Sıralı anahtarlama	Sequential switching
SI birimleri	SI units
Simetri	Symmetry
Sinüzoidal	Sinusoidal
Sinyal işleme	Signal processing
Son değer teoremi	Final-value theorem
Sonlandırılmış	Terminated
Sonsuz	Infinite
Sönüm	Damping

T

T arabağlantı	T connection
T eşdeğer	T equivalent

Çift taraflı (Laplace dönüşümü)	Two-sided (Laplace transform)
Tek taraflı (Laplace dönüşümü)	One-sided (Laplace transform)
Temel frekans	Fundamental frequency
Tepki	Response
Terminal	Terminal
Ters Fourier dönüşümü	Inverse Fourier transform
Ters Laplace dönüşümü	Inverse Laplace transform
Thevenin eşdeğer	Thevenin equivalent
Toplayan yükselteç	Summing amplifier
Toplu parametreli	Lumped parameter
Trafo	Transformator

U-Ü

Üç faz	Three-phase
Üst düğüm	Super-node
Üst ağ	Super-mesh
Üst üste bindirme	Superposition

V

VAR, reaktif güç birimi	VAR, reactive power unit
Volt-amp (VA), kompleks güç birimi	Volt-amp (VA), complex power unit
Voltmetre	Voltmeter

W

Watt (W), ortalama güç birimi	Watt (W), average power unit
Wheatstone köprü	Wheatstone bridge

Y

Y bağlı	Y connected
Yakınlık anahtarı	Proximity switch
Yol	Path
Yüksek geçiren	Highpass
Yüksek mertebeden	High order
Yükselteç	Amplifier

Z

z bağlantı	z connection
z parametreleri	z parameters
Zaman bölgesi	Time domain
Zaman sabiti	Time constant
Zamanda değişmez	Time invariant
Zayıflama	Attenuation

Sözlük
İngilizce – Türkçe

A

Admittance	Admitans
Ampermeter	Ampermetre
Amplifier	Yükselteç
Amplitude	Genlik
Analog meter	Analog metre
Analysis	Analiz
Attenuation	Zayıflama
Available power	Görünen güç
Average	Ortalama

B

Balanced three-phase	Dengeli üç fazlı
Bandpass	Bant geçiren
Bandstop, bandreject	Bant durduran
Bandwidth	Bant genişliği
Bass volume control	Bas şiddet kontrolü
Bode plot	Bode grafiği
Branch	Dal

C

Capacitance	Kapasitans
Capacitive	Kapasitif
Capacitor	Kapasitör
Cascade connection	Art arda bağlantı
Center frequency	Merkez frekansı
Circuit	Devre
Closed loop	Kapalı yol
Common mode	Ortak mod
Common mode rejection ratio	Ortak mod bastırma oranı (CMRR)
Communication	İletişim
Complex	Kompleks
Conductivity	İletkenlik
Control	Kontrol
Convolution	Evrişim
Coupling coefficient	Bağlaşım katsayısı
Critically damped	Kritik sönümlü

Current	Akım
Current divider	Akım bölücü
Cut-off frequency	Kesim frekansı

D

Damping	Sönüm
DC	Doğru akım
Decibel	Desibel
Delta-Y conversion	Delta-Y dönüşüm
Determinant	Determinant
Differential amplifier	Fark yükselteç
Differential mode	Fark modu
Digital meter	Sayısal metre
Dirac delta function	Dirac delta fonksiyonu (Dürtü fonksiyonu)
Dirichlet conditions	Dirichlet koşulları
Dot convention	Nokta gösterimi

E

Electric circuits	Elektrik devreleri
Energy	Enerji
Equivalent	Eşdeğer

F

Faraday's law	Faraday yasası
Feedback	Geribesleme
Filter	Filtre
Final-value theorem	Son değer teoremi
First order	Birinci mertebeden
Fourier series	Fourier serisi
Fourier transform	Fourier dönüşümü
Frequency	Frekans
Frequency domain	Frekans bölgesi
Frequency scaling	Frekans ölçekleme
Frequency selective	Frekans seçici
Functional transforms	Fonksiyonel dönüşümler
Fundamental frequency	Temel frekans

G-H

Gain	Kazanç
Harmonic	Harmonik
High order	Yüksek mertebeden
Highpass	Yüksek geçiren
Hybrid	Karma

I

Ideal	İdeal
Immitance	İmmitans
Impedance	Empedans
Inductance	Endüktans
Inductive	Endüktif
Inductor	İndüktör
Infinite	Sonsuz
Initial value theorem	Başlangıç değer teoremi
Input	Giriş
Instantaneous power	Anlık güç
Integral	İntegral
Integrating amplifier	İntegral alıcı yükselteç
Inverse Fourier transform	Ters Fourier dönüşümü
Inverse Laplace transform	Ters Laplace dönüşümü
Inverting amplifier	Eviren yükselteç

K - L

Kirchhoff laws	Kirchhoff yasaları
Lagging	Gecikmeli
Laplace transform	Laplace dönüşümü
Leading	Önde
Line	Hat
Linear	Doğrusal
Loop	Döngü
Low-pass filter	Alçak geçiren filtre
Lumped parameter	Toplu parametreli

M - N

Magnetically coupled	Manyetik bağlaşık
Matrix	Matris
Maximum power transfer	Maksimum güç aktarımı
Measurement	Ölçüm
Memory	Bellek
Mesh	Ağ
Mutual	Karşılıklı
Narrowband	Darbant
Natural response	Doğal tepki
Neper frequency	Neper frekansı
Neutral	Nötr
Node	Düğüm
Non-inverting amplifier	Evirmeyen yükselteç
Norton equivalent circuit	Norton eşdeğer devresi

O

Ohm's law	Ohm yasası
One-sided (Laplace transform)	Tek taraflı (Laplace dönüşümü)
Open circuit	Açık devre
Operational amplifier	İşlemsel yükselteç (op amp)
Operational transform	İşlemsel dönüşüm
Output	Çıkış
Overdamped	Aşırı sönümlü

P - Q

Parallel	Paralel
Parseval's theorem	Parseval teoremi
Partial fraction expansion	Kısmi kesirlet açılımı
Passband	Geçirme-bandı
Passive	Pasif
Path	Yol
Period	Periyot
Periodic	Periyodik
Phase	Faz
Phase spectrum	Faz spektrumu
Phasor	Fazör
pi equivalent	pi eşdeğer
pi to T equivalent	Pi'den T'ye eşdeğer
Planar	Düzlemsel
Polarity	Kutupluk
Pole	Kutup
Power	Güç
Power factor	Güç çarpanı
Proximity switch	Yakınlık anahtarı
Quality factor	Kalite çarpanı

R

Rational	Kesirli
Reactance	Reaktans
Reactive factor	Reaktif çarpan
Reactive power	Reaktif güç
Rear window defroster	Arka cam buz çözücüsü
Resistor	Direnç
Resonant	Rezonant
Response	Tepki
rms value	Etkin değer
Root-mean-square	Kök-ortalama-kare

S

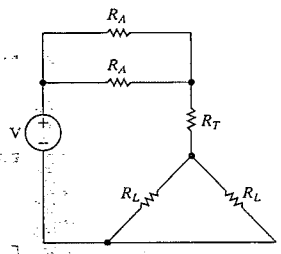
s domain	s bölgesi
Scaling	Ölçekleme
Second order	İkinci mertebeden
Self inductance	Öz endüktans
Sensitivity	Duyarlılık
Sequential switching	Sıralı anahtarlama
Series	Seri
Short circuit	Kısa devre
SI units	SI birimleri
Sign function	İşaret fonksiyonu
Signal processing	Sinyal işleme
Simultaneous equations	Ortak denklemler
Sinusoidal	Sinüzoidal
Source	Kaynak
Starter circuit	Ateşleme devresi
Steady state	Durgun durum
Step function	Basamak fonksiyonu
Step response	Basamak tepkisi
Summing amplifier	Toplayan yükselteç
Super-mesh	Üst ağ
Super-node	Üst düğüm
Superposition	Üst üste bindirme
Surge suppressor	Ani dalgalanma bastırıcı
Switch	Anahtar
Switching	Anahtarlama
Symmetry	Simetri

T

T connection	T arabağlantı
T equivalent	T eşdeğer
tActive filter	Aktif filtre
Terminal	Terminal
Terminated	Sonlandırılmış
Thevenin equivalent	Thevenin eşdeğer
Three-phase	Üç faz
Time constant	Zaman sabiti
Time domain	Zaman bölgesi
Time invariant	Zamanda değişmez
Transducer	Dönüştürücü
Transfer function	Aktarım fonksiyonu
Transformation	Dönüşüm

2.34 $i = 385$ mA'dir dolayısıyla bir uyarı işareti asılmalı ve önlem alınmalıdır.

2.35



2.36 a) $P_{kol} = 59.17$ W; $P_{bacak} = 29.59$ W; $P_{gövde} = 7.40$ W

b) $t_{kol} = 1414.23$ s; $t_{bacak} = 7071.13$ s; $t_{gövde} = 70{,}422.54$ s

c) Tüm değerler birkaç dakikadan çok büyüktür.

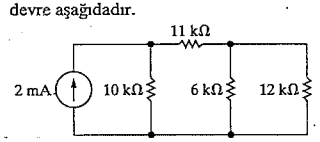
2.37 a) 40 V

b) Hayır, 12 V/800 Ω = 15 mA şoka neden olacaktır.

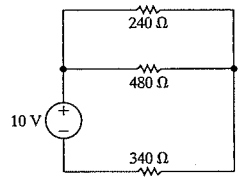
2.38 3000 V

3. Bölüm

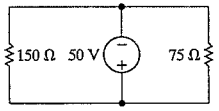
3.1 a) 3 kΩ ve 8 kΩ, 5 kΩ ve 7 kΩ; basitleştirilmiş devre aşağıdadır.



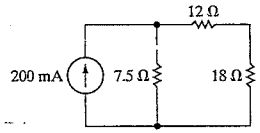
b) 180 Ω ve 300 Ω, 140 Ω ve 200 Ω; basitleştirilmiş devre aşağıdadır.



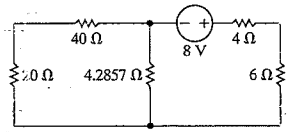
c) 40 Ω, 50 Ω ve 60 Ω, 45 Ω ve 30 Ω; basitleştirilmiş devre aşağıdadır.



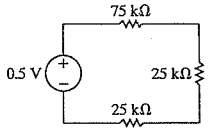
3.2 a) 12 Ω ve 20 Ω, 28 Ω ve 21 Ω; basitleştirilmiş devre aşağıdadır.



b) 30 Ω ve 5 Ω, 9 Ω ve 18 Ω; basitleştirilmiş devre aşağıdadır.



c) 100 kΩ ve 300 kΩ, 75 kΩ, 50 kΩ ve 150 kΩ; basitleştirilmiş devre aşağıdadır.



3.5 a) 6 kΩ

b) 500 Ω

c) 50 Ω

3.6 a) 6 Ω

b) 14 Ω

c) 125 kΩ

3.13 a) 66 V

b) 1.88 W, 1.32 W

c) 17,672 Ω, 12,408 Ω

3.15 a) 60 kΩ, 15 kΩ

b) 1/8 W

3.21 257.5 Ω, 1030 Ω, 8240 Ω, 41.2 kΩ

3.22 a) 1.2 mA

b) 12 V

c) 3.2 V

d) 1.33 V

3.23 a) 3.2 V

b) 13.33 mA

c) 20 mA

3.30 a) $i_m = \dfrac{(25/12)}{50 + (25/12)}(i_{ölçüm}) = \dfrac{1}{25} i_{ölçüm}$

b) 1/2500

c) Evet

3.33 a) 99,950 Ω

b) 4950 Ω

c) 50 Ω

3.48 a) 900 Ω

b) 25 mA

c) 800 Ω, 180 mW

d) 900 Ω, 90 mW

3.52 48 V, 24 V

3.53 a) Δ bağlı $R_2 - R_3 - R_4$, Y bağlı 3 Ω–18 Ω–6 Ω haline gelir; eşdeğer direnç 50 Ω'dur.

b) Y bağlı R_2—R_4—R_5, Δ bağlı 90Ω—270Ω—45 Ω haline gelir; eşdeğer direnç 50 Ω'dur.

c) R_4–R_5–R_6 delta bağlantısını Y eşdeğerine çeviriniz. R_3–R_4–R_6 Y bağlantısını Δ eşdeğerine çeviriniz.

3.54 99 Ω

3.71 $R_1 = 1.0372\ \Omega$, $R_2 = 1.1435\ \Omega$, $R_3 = 1.2\ \Omega$, $R_4 = 1.1435\ \Omega$, $R_5 = 1.0372\ \Omega$, $R_a = 0.0259\ \Omega$, $R_b = 0.0068\ \Omega$, $R_c = 0.0068\ \Omega$, $R_d = 0.0259\ \Omega$

3.72 $P_{har} = 624\ \text{W} = P_{ilet}$

3.73 a) $R_1 = 0.6106\ \Omega$, $R_2 = 0.7122\ \Omega$, $R_3 = 0.768\ \Omega$, $R_4 = 0.7122\ \Omega$, $R_5 = 0.6106\ \Omega$, $R_a = 0.0244\ \Omega$, $R_b = 0.0066\ \Omega$, $R_c = 0.0066\ \Omega$, $R_d = 0.0244\ \Omega$

b) $i_1 = 17.52$ A, $i_1^2 R_1 = 187.5$ W or 150 W/m; $i_2 = 16.23$ A, $i_2^2 R_2 = 187.5$ W or 150 W/m; $i_b = 33.75$ A, $i_b^2 R_b = 7.5$ W or 150 W/m; $P_{ilet} = 997.5\ \text{W} = P_{har}$

4. Bölüm

4.1 a) 5

b) 3

c) $-i_g + i_1 + i_2 = 0, -i_1 + i_4 + i_3 = 0,$ $i_5 - i_2 - i_3 = 0$

d) 2

e) $R_1 i_1 + R_3 i_3 - R_2 i_2 = 0,$ $R_3 i_3 + R_5 i_5 - R_4 i_4 = 0$

4.2 a) 11

b) 10

c) 11

d) 10

e) 5

f) 5

g) 7

4.3 a) 2

b) 5

c) 7

d) 1, 4, 7

4.4 a) 10

b) 4

c) 4

d) Akım kaynaklı üç ağdan kaçınınız.

4.6 10 V

4.9 25 V, 90 V

4.10 a) 4 A, 2 A, 2 A, 3 A, −1 A

b) 582 W

4.19 375 W

4.20 a) 165 W

b) 165 W

4.21 3.2 V

4.26 200 V, 1.2 W

4.27 26 V

4.31 a) 9.8 A, −0.2 A, −10 A

b) −1.72 A, 1.08 A, 2.8 A

4.32 a) 1140 W, üretilen

b) 1140 W, soğurulan

Transformator	Trafo
Transient	Geçici
Translation	Öteleme
Twin T notch	İkiz T yarık
Two-port	İki kapılı
Two-sided (Laplace transform)	Çift taraflı (Laplace dönüşümü)
Two-wattmeter method	İki Wattmetre Yöntemi

U

Unbounded	Sınırsız
Underdamped	Eksik sönümlü
Unit	Birim

V - W

VAR, reactive power unit	VAR, reaktif güç birimi
Virtual ground	Sanal toprak
Volt-amp (VA), complex power unit	Volt-amp (VA), kompleks güç birimi
Voltage	Gerilim
Voltage divider	Gerilim bölücü
Voltmeter	Voltmetre
Watt (W), average power unit	Watt (W), ortalama güç birimi
Waveform	Dalgabiçimi
Weighting function	Ağırlık fonksiyonu
Wheatstone bridge	Wheatstone köprü
Wideband	Genişbant

Y - Z

Y connected	Y bağlı
z connection	z bağlantı
z parameters	z parametreleri
Zero	Sıfır

4.37 98 W

4.38 2700 W

4.41 a) 2643.36 W
b) 6847.36 W
c) sağlar

4.42 a) −5.2 mA
b) 200 mW
c) 2.912 mW

4.47 99 W

4.50 a) 5.7 A, 4.6 A, 0.97 A, −1.1 A, 3.63 A
b) 1319.685 W

4.54 a) Ağ akımı yöntemi daha az denklem gerektirir.
b) 4 mW
c) Hayır, ağ akımlarından gerilimi bulabilirsiniz.
d) 200 mW

4.56 a) Düğüm gerilimi yöntemi kullanıldığında kısıt denklemleri daha kolaydır.
b) 180 W

4.59 a) 3 mA
b) 3 mA

4.62 a) 1 A
b) 1 A

4.63 48 V, 16 Ω

4.66 8 mA (aşağı), 16 kΩ

4.67 a) 45.28 V
b) −5.67%

4.71 −86.40 V, 43.2 kΩ

4.77 0 V, 8 Ω

4.79 16.67 Ω, 150 Ω

4.80 a) 12 Ω
b) 48 W

4.91 a) 38 V
b) 72.2 V

4.92 30 V

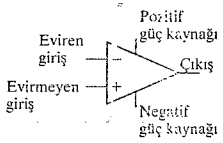
4.105 $v_1 = 39.583$ V, $v_2 = 102.5$ V

4.106 $v_1 = 37.5$ V, $v_2 = 105$ V

4.107 $v_1 = 52.083$ V, $v_2 = 117.5$ V

5. Bölüm

5.1 a)



b) Giriş direnci: $i_n = 0$
c) Açık döngü gerilim kazancı: $(v_p - v_n) = 0$
d) $v_o = -4$ V

5.2 a) −12 V
b) −18 V (doyar)
c) 10 V
d) −14 V
e) 18 V (doyar)
f) 2.8125 V ≤ v_a ≤ 7.3125 V

5.3 −3.1 mA

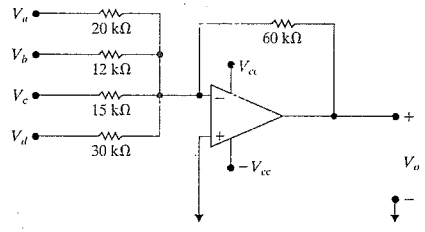
5.8 a) Evirmeyen yükselteç
b) 4.5 V

5.9 a) Birçok olası tasarım vardır. Biri 10 kΩ giriş direnci ve geribesleme yolunda paralel bağlı dört 10 kΩ direnç kullanır.
b) ±10 V

5.12 a) Eviren toplayıcı yükselteç
b) −6 V
c) −7.5 V ≤ v_c ≤ 1.5 V

5.13 a) −6 V
b) 8.4 V ≤ v_b ≤ 13.2 V

5.15



5.17 a) Evirmeyen toplayıcı yükselteç
b) $3.75v_s$
c) −2.4 V ≤ v_s ≤ 4 V

5.18 a) 7.56 V
b) −3.97 V ≤ v_g ≤ 3.97 V
c) 35 kΩ

5.24 20 kΩ

5.25 a) −15.95 V
b) −638 mV ≤ v_b ≤ 962 mV

5.26 a) 56.25 mV
b) 114.3 kΩ
c) 80 kΩ

5.32 a) 19.975
b) −0.05
c) 399.5

5.33 32.89 kΩ ≤ R_x ≤ 33.11 kΩ

5.42 a) −19.9844
b) 736.1 μV
c) 5003.58 Ω
d) −20, 0 V, 5000 Ω

5.43 a) 30.98
b) 999.5 mV, 999.87 mV
c) 367.94 μV
d) 836.22 pA
e) 31, 1 V, 0 V, 0 A

5.48 a) 2 kΩ
b) 12 mΩ

6. Bölüm

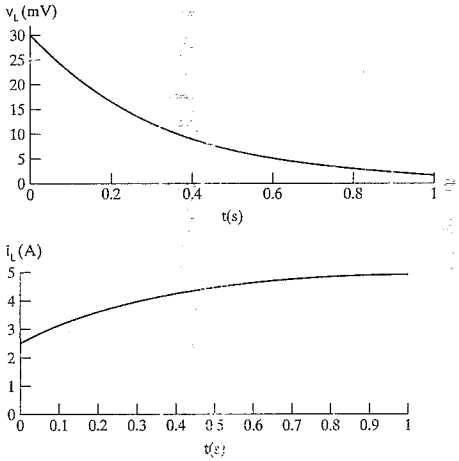
6.1 a)

$i = 0$	$t < 0$
$i = 16t$ A	$0 \le t \le 25$ ms
$i = 0.8 - 16t$ A	$25 \le t \le 50$ ms
$i = 0$	50 ms $< t$

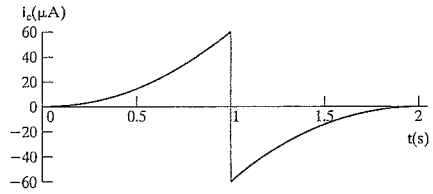
b)

$v = 0$	$t < 0$
$v = 6$ V	$0 < t < 25$ ms
$v = -6$ V	$25 < t < 50$ ms
$v = 0$	50 ms $< t$
$p = 0$	$t < 0$
$p = 96t$ W	$0 < t < 25$ ms
$p = 96t - 4.8$ W	$25 < t < 50$ ms
$p = 0$	50 ms $< t$
$w = 0$	$t < 0$
$w = 48t^2$ J	$0 < t < 25$ ms
$w = 48t^2 - 4.8t + 0.12$ J	$25 < t < 50$ ms
$w = 0$	50 ms $< t$

6.3



6.14



8.46 $40 - 200{,}000te^{-5000t} - 40e^{-5000t}$ V

8.47 $40 - 53.33e^{-2000t} + 13.33e^{-8000t}$ V

8.58 a) $0 \le t \le 0.2$ s: $25t^2$ V, $-4t$ V; 0.2 s $\le t \le t_{sat}$: $-6.25t^2 + 12.5t - 1.25$ V, $t - 1$ V

b) 2.844 s

8.59 $0 \le t \le 0.2$ s: $25 - 50e^{-t} + 25e^{-2t}$ V, $-2 + 2e^{-2t}$ V; $t \ge 0.2$ s: $-6.25 + 22.38e^{-(t-0.2)} - 15.31e^{-2(t-0.2)}$ V, $0.5 - 1.66e^{-2(t-0.2)}$ V

8.64 a) 55.23 μs

b) 262.42 V

c) $t_{max} = 53.63\ \mu$s, $v(t_{max}) = 262.15$ V

8.65 a) 40 mJ

b) −27,808.04 V

c) 568.15 V

9. Bölüm

9.1 a) 120 Hz

b) 8.33 ms

c) 100 V

d) 70.71 V

e) 45°, 0.7854 rad

f) 1.042 ms

g) 3.125 ms

9.5 a) 170 V

b) 60 Hz

c) 377 rad/s

d) −1.05 rad

e) −60°

f) 16.67 ms

g) 2.78 ms

h) $-170 \sin 120\pi t$ V

i) 25/18 ms

j) 25/9 ms

9.8 $\frac{V_m}{2}$

9.9 a) $-1.84e^{-533.33t} + 2\cos(400t + 23.13°)$ A

b) $-1.84e^{-533.33t}$ A, $2\cos(400t + 23.13°)$ A

c) 133.61 mA

d) 2 A, 400 rad/s, 23.13°

e) 36.87°

9.12 a) 50 Hz

b) −90°

c) 40 Ω

d) 127.32 mH

e) $j40$ Ω

9.13 a) 251,327.41 rad/s

b) 90°

c) −19.89 Ω

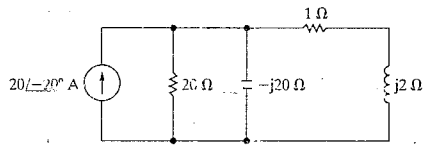
d) 0.2 μF

e) $-j19.89$ Ω

9.14 a) $5\angle 72°$ Ω

b) 50 μs

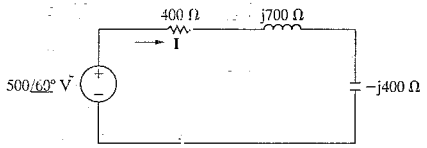
9.15 a)



b) $46.4\angle 34.46°$ V

c) $46.4\cos(5 \times 10^4 t + 34.46°)$ V

9.16 a)



b) $1\angle 23.13°$ A

c) $1\cos(8000t + 23.13°)$ A

9.21 a) $223.6\angle 26.57°$ mS

b) 200 mS

c) 100 mS

d) 2.24 A

9.26 5000 rad/s

9.27 $33.94\cos(5000t + 45°)$ V

9.28 $32\cos(8000t + 90°)$ V

9.34 2/3 Ω

9.40 $60\angle -36.87°$ V, $8.64 + j11.52$ Ω

9.41 $8\angle -36.87°$ A, $50 - j25$ Ω

9.47 20 A, $0.4 - j1.2$ Ω

9.51 $15.81\angle 18.43°$ V

9.56 $72 + j96 = 120\angle 53.13°$ V

9.58 $12\cos 5000t$ V

9.61 $11.31\cos(5000t - 45°)$ V

9.72 a) $18.03\cos(10{,}000t - 56.31°)$ A, $5\cos(10{,}000t - 180°)$ A

b) 0.5

c) 112.5 mJ, 37.5 mJ

9.73 a) 0.5657

b) 1.5 A

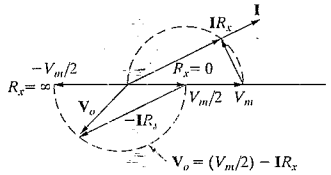
9.77 $800 + j600$ Ω

9.81 a) $247 + j7.25 = 247.11\angle 1.68°$ V

b) $-j32$ Ω, $241 + j8 = 241.13\angle 1.90°$ V

c) $-j26.90$ Ω

9.82



9.85 a) $\mathbf{I}_1 = 24\angle 0°$ A, $\mathbf{I}_2 = 2.04\angle 0°$ A, $\mathbf{I}_3 = 21.96\angle 0°$ A, $\mathbf{I}_4 = 19.40\angle 0°$ A, $\mathbf{I}_5 = 4.6\angle 0°$ A, $\mathbf{I}_6 = 2.55\angle 0°$ A

b) $0.42\angle 0°$ A

9.86 a) 0 A

b) 0.436 A

c) İki yük eşit olduğunda birincilden daha çok akım çekilir.

10. Bölüm

10.2 a) 2404.16 W (mut), 2404.16 VAR (mut)

b) 155.29 W (mut), −579.56 VAR (taş)

c) −427.53 W (taş), −1174.62 VAR (taş)

d) −307.82 W (taş), 845.72 VAR (mut)

10.3 a) Evet

b) Evet

10.13 a) 60 V(rms)

b) 300 W

10.17 a) −80 W(taş), 60 VAR, 100 VAR

b) Dengeler (80 W)

c) Dengeler (80 VAR)

10.21 a) 0.9 geride, 0.43; 0.43 önde, −0.9; 0.57 önde, −0.82

b) 0.94 geride, 0.343

10.22 a) $72 - j24 = 75.89\angle -18.43°$ Ω

b) 0.9487 önde

10.41 a) $30 + j10$ kΩ

b) 16.875 mW

10.44 a) $140\angle 0°$ V(rms)

b) 280 W

c) 9.72%

10.45 a) 3240 W

b) 6480 W

10.49 a) 9 W

b) 20 Ω, 8 mH

c) 17.31 W evet

d) 18.75 W

e) 30 Ω, 9 mH

f) Evet

10.50 a) 8 mH, 51.62 Ω, 18.26 W

b) Evet

c) Evet

10.58 160 W

10.59 a) 8

b) 250 W

10.66 a) 28.8 Ω

b) 28.8 Ω

c) Evet

10.67 a) $P_L = \frac{V^2}{R_1 + R_2}$ $\quad P_M = \frac{V^2}{R_2}$

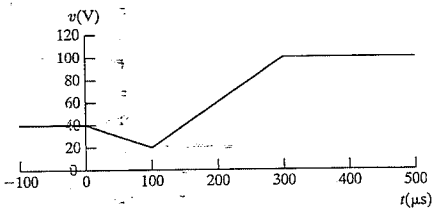
$$P_H = \frac{V^2(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} = \frac{\frac{V^2 V^2}{P_L}}{\left(\frac{V^2}{P_L} - \frac{V^2}{P_M}\right)\left(\frac{V^2}{P_M}\right)}$$

$$= \frac{P_M^2}{P_M - P_L}$$

b) 1125 W

10.68 36 Ω, 24 Ω

6.15 a) $-200 \times 10^3 t + 40$ V
b) $4 \times 10^5 t - 20$ V
c) 100 V
d)



6.21 20 H

6.22 a) $-12e^{-20t}$ A
b) $-9e^{-20t} + 13$ A
c) $-3e^{-20t} - 13$ A
d) 540 J
e) 3920 J
f) 3380 J
g) $\frac{1}{2}(10)(13)^2 + \frac{1}{2}(30)(13)^2 = 3380$ J (sağlıyor)

6.26 5 nF, başlangıç gerilimi −10 V

6.27 a) $30e^{-2500t}$ V
b) $18e^{-2500t} + 27$ V
c) $12e^{-2500t} - 27$ V
d) 5.4 μJ
e) 23.625 μJ
f) 18.225 μJ
g) $\frac{1}{2}(20 \times 10^{-9})(27)^2 + \frac{1}{2}(30 \times 10^{-9})(27)^2 =$ 18.225 μJ

6.34 a) $40\frac{di_2}{dt} + 90i_2 = -5\frac{di_g}{dt}$
b) $40[-e^{-t} + 11.25e^{-2.25t}] + 90[e^{-t} - 5e^{-2.25t}] = 50e^{-t}$
c) $-105e^{-t} + 56.26e^{-2.25t}$ V
d) −48.75 V ki bu da devrenin davranışı ile tutarlıdır.

6.42 a) 160 mH, 1.25
b) 0.25×10^{-6} Wb/A, 0.25×10^{-6} Wb/A

6.43 2.8 nWb/A, 3.6 nWb/A

6.47 a) 18.5 J
b) 18.5 J
c) 6.5 J
d) 6.5 J

6.48 a) −5 A
b) Hayır

6.49 $v = \frac{1}{3}v_s(t) + v(0)$

6.51 a) $2C\frac{dv}{dt} = 0$
b) $3C\frac{dv}{dt} = 0$

7. Bölüm

7.1 a) 5 A
b) 40 ms
c) $5e^{-25t}$ A, $-400e^{-25t}$ V, $-500e^{-25t}$ V
d) 9.02%

7.2 a) 0.2 mA, 0.2 mA
b) 0.2 mA, −0.2 mA
c) $0.2e^{-10^6 t}$ mA
d) $-0.2e^{-10^6 t}$ mA
e) Bir dirençteki akım ani olarak değişebilir.

7.3 a) 0 A
b) 62.5 mA
c) 87.5 mA
d) 62.5 mA
e) 150 mA
f) 0 A
g) $62.5e^{-4000t}$ mA
h) 0 V
i) −12.5 V
j) 0 V
k) $-12.5e^{-4000t}$ V
l) $150 - 62.5e^{-4000t}$ mA

7.21 a) $15e^{-125t}$ mA, $60e^{-125t} + 15$ V, $-15e^{-125t} + 15$ V
b) 5625 μJ
c) 1125 μJ, 4500 μJ

7.24 a) $39.6e^{-2000t}$ mA
b) 14.05%

7.33 $9 + 3e^{-80{,}000t}$ mA, $-60e^{-80{,}000t}$ V

7.34 a) $4 + 2e^{-4000t}$ A, $16 - 16e^{-4000t}$ V
b) −40 V, 0 V

7.35 a) $3 - 19e^{-2000t}$ A
b) $15 + 285e^{-2000t}$ V

7.50 a) $40 - 40e^{-5000t}$ V
b) $2 - e^{-5000t}$ mA
c) $2 + 4e^{-5000t}$ mA
d) $8 - 4e^{-5000t}$ mA
e) 6 mA

7.51 $15 - 105e^{-4000t}$ V

7.53 a) 120 V
b) −150 V
c) 2 ms
d) −5.4 mA
e) $-150 + 270e^{-500t}$ V
f) $5.4e^{-500t}$ mA

7.54 a) −30 V
b) 25 V
c) 2.5 ms
d) 1.97 ms

7.65 a) $0.2 - 0.2e^{-10{,}000t}$ A
b) $15e^{-10{,}000t}$ V
c) $0.25 - 0.25e^{-10{,}000t}$ A
d) $-50 + 50e^{-10{,}000t}$ mA
e) Evet

7.67 a) $40 - 40e^{-5000t}$ mA
b) $10e^{-5000t}$ V
c) $16 - 16e^{-5000t}$ mA
d) $24 - 24e^{-5000t}$ mA
e) Evet

7.72 −559.12 mV

7.76 $v_o = 100$ V, $0 \le t \le 250$ ms;
$v_o = 100e^{-1000(t-0.25)}$ V, 250 ms $\le t < \infty$

7.86 a) 2
b) 529.83 μs

7.87 173.23 μs

7.92 25 ms

7.93 $30{,}000t - 30$ mV, $10 + 5e^{-2000t}$ mV, $30{,}000t - 40 - 5e^{-2000t}$ mV

7.103 a) 1.091 MΩ
b) 0.29 s

7.104 a) 8.55 flaş/dak
b) 559.3 kΩ

7.105 a) 24.3 flaş/dak
b) 99.06 mA
c) yılda 43.39$

8. Bölüm

8.1 a) −5000 rad/s, −20,000 rad/s
b) aşırı sönümlü
c) 7812.5 Ω
d) $-8000 + j6000$ rad/s, $-8000 - j6000$ rad/s
e) 6250 Ω

8.2 a) 800 Ω, 200 mH, 12,500 rad/s, 10,000 rad/s
b) $-6.25e^{-5000t} + 25e^{-20{,}000t}$ mA, $5e^{-5000t} - 5e^{-20{,}000t}$ mA, $1.25e^{-5000t} - 20e^{-20{,}000t}$ mA

8.3 a) 800 mH
b) 2500 Ω
c) 125 V
d) 12.5 mA
e) $e^{-4000t}(12.5\cos 3000t + 68.75\sin 3000t)$ mA

8.4 a) 10 kΩ, 12.5 nF, -5×10^5 V/s, 25 V
b) $(25{,}000t - 7.5)e^{-4000t}$ mA

8.5 a) 100 rad/s, 80 rad/s, 6.25 H, 25 μF, 20 mA, −5 mA
b) $-5e^{-160t} + 5e^{-40t}$ V
c) $-25e^{-160t} + 25e^{-40t}$ mA
d) $5e^{-160t} - 20e^{-40t}$ mA

8.19 $-140e^{-2000t} + 200e^{-8000t}$ V

8.20 $60e^{-4000t}\cos 3000t - 320e^{4000t}\sin 3000t$ V

8.21 $(60 - 132 \times 10^4 t)e^{-10{,}000t}$ V

8.25 $15 - 40e^{-50t} - 5e^{-200t}$ mA

8.26 $15 - 45e^{-80t}\cos 60t - 10e^{-80t}\sin 60t$ mA

8.27 $15 - 1500te^{-100t} - 45e^{-100t}$ mA

8.45 $40 - 40e^{-5000t}\cos 5000t - 40e^{-5000t}\sin 5000t$ V