Hataların Birleştirilmesi

- Bir ölçümde birden fazla hata kaynağı olduğunu gördük. Bazen bir ölçüm için tek cihaz yeterli olmayabilir. Bu durumda birden fazla cihazın hataları da söz konusu olabilir.
- Ölçülecek büyüklük farklı parametrelerin bir fonksiyonu olarak yazılabilir:

$x=f(a,b,\ldots..)$ $\qquad\qquad$ $x \rightarrow$ gerçek

$x_ö=f(a_ö,b_ö,\ldots..)$ $\qquad\qquad$ $x_ö \rightarrow$ ölçüm

Hataların Birleştirilmesi

- Her parametrenin bir hatası olacaktır. Bu durumda toplam hata ne olur? Yani

$$x_{ö}+\Delta x=f(a_{ö}+\Delta a,\ b_{ö}+\Delta b,\ \ldots\ldots)$$

  parametrelerdeki hatalar, x değerini nasıl etkiler?
- Bunu bulmanın bir yöntemi fonksiyonu ölçüm değerleri civarında Taylor serisine açmaktır.

Hataların Birleştirilmesi

$$x_{ö}+\Delta x=f(a_{ö}+\Delta a,\ b_{ö}+\Delta b,\ ......)$$

- Üstteki fonksiyon $a_{ö}$, $b_{ö}$, ... civarında Taylor serisine açılırsa:

$$x_{ö} + \Delta x = f(a_{ö}, b_{ö}, \dots) + \frac{\partial f}{\partial a}|_{x_{ö}}\Delta a + \frac{\partial f}{\partial b}|_{x_{ö}}\Delta b + \cdots + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}|_{x_{ö}}\Delta a \Delta b + \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}|_{x_{ö}}(\Delta a^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}|_{x_{ö}}(\Delta b^2) + \dots$$

olur.

- Hatanın ikinci derecesi çok çok küçük değerler alacağından $\Delta a.\Delta b$ çarpımı ve sonrasındaki terimler ihmal edilir:

$$x_{ö} + \Delta x = f(a_{ö}, b_{ö}, \dots) + \frac{\partial f}{\partial a}|_{x_{ö}}\Delta a + \frac{\partial f}{\partial b}|_{x_{ö}}\Delta b + \cdots$$

Hataların Birleştirilmesi

$$\underline{x_{ö}} + \Delta x = \underline{f(a_{ö}, b_{ö}, \ldots)} + \frac{\partial f}{\partial a}\Big|_{x_{ö}} \Delta a + \frac{\partial f}{\partial b}\Big|_{x_{ö}} \Delta b + \cdots$$

- Son formülde altı çizili kısımlar birbirine eşit olduğundan, kalan kısım toplam hatayı verir:

$$\Delta x = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \Delta b + \cdots$$

Hataların Birleştirilmesi

$$\Delta x = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \Delta b + \cdots$$

- Gerçek hatayı bulmak için Δa ve Δb gibi hataların gerçek değerleri bulunup hesap yapılabilir. Lakin genellikle gerçek hataları değil, hata üst sınırını biliriz. Normalde Δa ve Δb gibi değerler pozitif veya negatif olabilecekken, hepsi pozitif alınır.

- Dolayısıyla bulunan Δx değeri de olabilecek toplam hatanın üst sınırıdır.

Hataların Birleştirilmesi

$$\Delta x = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \Delta b + \cdots$$

- Bu üst sınırı belirleyebilmek için türevlerin de mutlak değerini almak gerekir. Genellikle bunu yapmak yerine Δx belirlenirken üstteki formülde terimlerin kareleri toplanıp, karekökü alınır.

Hataların Birleştirilmesi

- Hataların birleştirilmesinin bir diğer yolu da logaritmik türev yöntemidir. Bunda da öncelikle iki tarafın logoritması ve daha sonra türevi alınır. d(iferansiyel) ifadelerinin Δ kabulüyle toplam hata bulunabilir:

$$x=f(a,b,\ldots)$$

$$\ln x=\ln f(a,b,..)$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{{\partial f}/{\partial a}}{f}da+\frac{{\partial f}/{\partial b}}{f}db+\cdots$$

$$\frac{\Delta x}{x}=\left|\frac{{\partial f}/{\partial a}}{f}\right|\Delta a+\left|\frac{{\partial f}/{\partial b}}{f}\right|\Delta b+\cdots$$

Ölçme Yöntemlerinin Karşılaştırılması

- Ölçme yöntemleri farklı kriterlere göre sınıflandırılabilir.
- Mutlak veya Mutlak olmayan ölçme
- Doğrudan veya Dolaylı karşılaştırma
- Sapmalı Ölçme veya Sıfır (Denkleştirme) Yönt.

- gibi sınıflandırmalar mevcuttur.

Mutlak ve Mutlak Olmayan Ölçme

(slayt ile çok uzun olur, tahtada anlat)

- Çıkış noktası: birbirinden belli uzaklıkta *(a)* iki doğrusal, paralel iletkenden ters yönde aynı akımı akıtırsak, iletkenlerden birinin *(l)* boyuna etkiyen kuvvet bellidir:

$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi a} \qquad I = \sqrt{\frac{2\pi a\, mg}{\mu_0 l}}$$

(F kuvveti terazi ile dengelenirse mg ile eşit olur.)

(Akımı mutlak olarak ölçmüş olduk)

Hataların İstatistiksel Analizi

- Aynı büyüklüğe ait bir çok ölçüm sonucunun farklı değerler vermesi durumunda, gerçek büyüklüğe yaklaşmak için istatistiksel yöntemlerin kullanımı yaygındır.
- Rastlantı hatalarını sıfıra yaklaştırmak için kullanılan ortalama alma işlemi buna örnek verilebilir.
- Genel istatistiksel terimler: Aritmetik ortalama, geometrik ortalama, mod, medyan, orta, varyans, sapma, ortalama sapma, standart sapma vs…

İstatistiksel Analizi / A.Ortalama

- Aritmetik ortalama, bilinen en temel ortalama çeşididir. Tüm değerler toplanıp değer sayısına bölünerek bulunur.

$$X_o = \frac{(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)}{n}$$

- Değerlerin ortalaması alındığında hatanın etkisi küçültülmüş olur.

İstatistiksel Analizi / G.Ortalama

- Geometrik ortalama, Aritmetik ortalamada toplama ile yapılan işlemin, çarpma versiyonu denilebilir. Yani ölçülen büyüklükler birbiri ile çarpılır ve terim sayısı derecesinden kökü alınır. Yaygın kullanılan yöntemlerden biridir.

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

- Özellikle bir sonraki ölçüm sonucu bir öncekine bağlı olarak değişiyorsa geometrik ortalama anlamlı bilgi taşır.

İstatistiksel Analizi / G.Ortalama

- Ayrıca
  Harmonik Ortalama
  Pisagorik Ortalama,
  Kuadratik Ortalama,
  Ağırlıklı Geometrik Ortalama,
  Genelleştirilmiş Ortalama
  gibi ortalama çeşitleri de mevcuttur.

İstatistiksel Analizi / Mod

- Yapılan ölçümler içinde frekansı en yüksek olan (en çok tekrar eden) değerdir.
- Bazen birden fazla mod olabilir. Bu durumda tek değer gerekiyorsa tek değeri bulmak için farklı yaklaşımlar vardır. (Mesela modların ortalamasını almak gibi).

İstatistiksel Analizi / Medyan (Ortanca)

- Yapılan ölçümler sıralandığında ortada kalan değerdir.
- Ölçüm sayısı çift ise birden fazla medyan olabilir. Bu durumda tek değer gerekiyorsa tek değeri bulmak için farklı yaklaşımlar vardır.

İstatistiksel Analizi / Sapma

- Ölçülen her bir değer ile, ölçümlerin ortalaması arasındaki farka sapma denir.
- Her bir ölçüm sonucu için sapma değeri ayrıca hesaplanır.

$$D_1 = X_1 - X_o,\ D_2 = X_2 - X_o,\ \ldots,\ D_n = X_n - X_o$$

- Sapmaların cebirsel toplamı sıfırdır. !

İstatistiksel Analizi / Ort. Sapma

- Ortalama sapma, tüm sapmaların mutlak değerlerinin ortalamasıdır.

$$D_o = \frac{(|D_1|+|D_1|+\cdots+|D_n|)}{n}$$

İstatistiksel Analizi / Std. Sapma

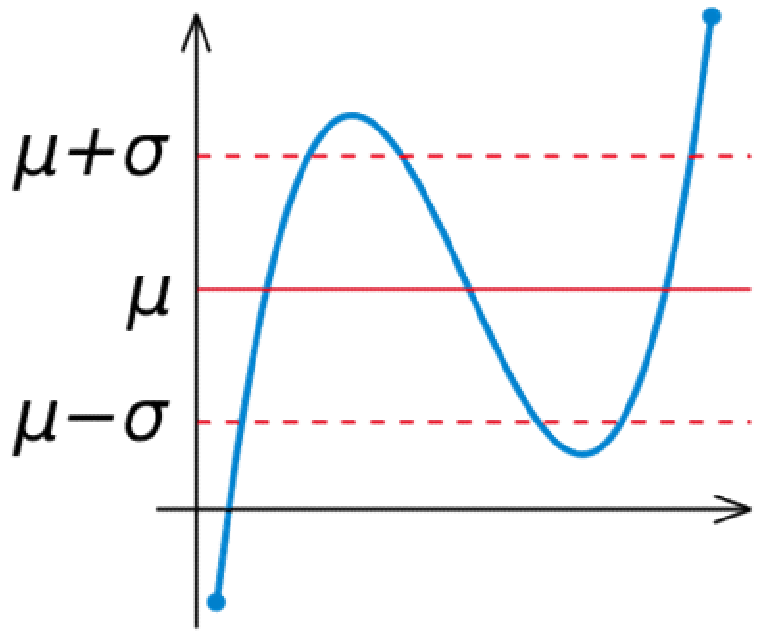
- Sapmalar değerlendirilirken ortalama sapma yerine standart sapma kullanmak daha makul sonuçlar verir.
- Standart sapma, sapmaların karelerinin ortalamasının kareköküdür.

$$S = \sqrt{\frac{(D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2)}{n}}$$

- (σ ile de gösterilir).

İstatistiksel Analizi / Std. Sapma

- Eğer terim sayısı 20’den küçük ise, n ile değil de n–1 ile bölünür.
- Standart sapma, değerlerin ortalama etrafındaki değişim miktarını gösterir.



İstatistiksel Analizi / Varyans

- Standart sapmanın karesidir. Yani standart sapma formülünde karekök ifadesi kullanılmazsa, varyans bulunur.