

## Tema 1

### Ejercicio 6

#### a) Hallar las raíces

Para hallar el término  $x_{n+1}$  hay que sacar las raíces del polinomio:

$$p(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}f''(x_n)(x - x_n)^2$$

Por tanto:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{-f'(x_n) \pm \sqrt{f'(x_n)^2 - 2f(x_n)f''(x_n)}}{f''(x_n)}$$

#### b) ¿Qué raíz debemos escoger?

Debemos llegar a un punto tal que  $f(x^*) = 0$ . Este será un punto fijo, es decir:

$$x^* = x^* + \frac{-f'(x^*) \pm \sqrt{f'(x^*)^2 - 2f(x^*)f''(x^*)}}{f''(x^*)}$$

Es decir, el término de la derecha debe anularse. Simplificando y haciendo  $f(x^*) = 0$  tenemos que:

$$-f'(x^*) \pm \sqrt{f'(x^*)^2} = 0$$

Por tanto debemos escoger la raíz con símbolo +.

#### c) Comprobación del método

Si multiplicamos por el conjugado la expresión original:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n) - \sqrt{f'(x_n)^2 - 2f(x_n)f''(x_n)}}{f''(x_n)} \cdot \frac{f'(x_n) + \sqrt{f'(x_n)^2 - 2f(x_n)f''(x_n)}}{f'(x_n) + \sqrt{f'(x_n)^2 - 2f(x_n)f''(x_n)}}$$

Simplificando:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)^2 - f'(x_n)^2 + 2f(x_n)f''(x_n)}{(f'(x_n) + \sqrt{f'(x_n)^2 - 2f(x_n)f''(x_n)})f''(x_n)}$$

Reordenando términos y sacando  $f'(x_n)^2$ :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2 \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}}} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

d)

Hecho en Maxima. No converge.

e)

Sea  $x^*$  el punto fijo de  $f$ . Por el teorema de Taylor existe  $\xi$  en el menor intervalo abierto que contiene a  $x_k$  y  $x^*$  tal que:

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x^* - x_k)^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)(x^* - x_k)^3$$

Además, por cómo se ha elegido  $x_{k+1}$ :

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x_{k+1} - x_k)^2$$

Restando una expresión a otra:

$$0 = f'(x_k)(x^* - x_{k+1}) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x^* - x_{k+1})(x^* + x_{k+1} - 2x_k) + \frac{1}{6}f'''(\xi)(x^* - x_k)^3$$

Sacamos factor común y despejamos:

$$\left( f'(x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x^* + x_{k+1} - 2x_k) \right) (x^* - x_{k+1}) = \frac{1}{6}f'''(\xi)(x_k - x^*)^3$$

Tomamos valor absoluto y tenemos que:

$$|x^* - x_{k+1}| = \frac{1}{6} \frac{|f'''(\xi)|}{\left| f'(x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x^* + x_{k+1} - 2x_k) \right|} |x^* - x_k|^3$$

Sea  $f \in C^3([x^* - \delta_1, x^* + \delta_1])$  para algún  $\delta_1 > 0$ . Como  $f'(x^*) \neq 0$ , por el lema de conservación del signo  $\exists \delta_2$  con  $0 < \delta_2 \leq \delta_1$  tal que, siendo  $I_2 = [x^* - \delta_2, x^* + \delta_2]$ :

$$\min_{x \in I_2} |f'(x)| > 0$$

Sea  $M_{i,\delta} = \max_{x \in [x^* - \delta, x^* + \delta]} |f^{(i)}(x)|$ , que existe para todo  $i$  menor que 4 y todo  $\delta$  menor o igual que  $\delta_2$  por el teorema de Weierstrass y porque  $f \in C^3(I_2)$ . Sea  $m_{i,\delta}$  la expresión con el mínimo, que en el caso anterior existe, por lo que podemos llamar  $m_{1,\delta_2}$  a la cota inferior anterior.

Tomamos  $\delta$  con  $0 < \delta \leq \delta_2$  tal que  $\delta M_{2,\delta_2} < \frac{2}{3}m_{1,\delta_2}$  y  $M_{2,\delta_2} \left(2 \frac{M_{0,\delta}}{m_{1,\delta_2}}\right) < m_{1,\delta_2}$ . La segunda igualdad puede conseguirse porque  $f(x)$  tiende a 0 cuando  $x$  tiende a  $x^*$ . Entonces, tomando  $x_k \in I := [x^* - \delta, x^* + \delta]$  y usando la definición de  $x_{k+1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{|f'''(\xi)|}{\left|f'(x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x^* + x_{k+1} - 2x_k)\right|} &\leq \frac{M_{3,\delta}}{m_{1,\delta} - \frac{1}{2}M_{2,\delta}|\underbrace{x^* - x_k}_{\leq \delta} + x_{k+1} - x_k|} \\ &\leq \frac{M_{3,\delta}}{m_{1,\delta_2} - \frac{1}{2}M_{2,\delta_2}\left(\delta + \underbrace{\left|\frac{2}{1 + \sqrt{\dots}} \frac{M_{0,\delta}}{m_{1,\delta_2}}\right|}_{\leq 1}\right)} \leq \frac{M_{3,\delta}}{m_{1,\delta_2} - \frac{1}{3}m_{1,\delta_2} - \frac{1}{2}m_{1,\delta_2}} = \frac{6M_{3,\delta}}{m_{1,\delta_2}} \end{aligned}$$

Por ello, sea  $K = \frac{M_{3,\delta}}{m_{1,\delta_2}}$ , podemos acotar la expresión que queríamos:

$$|x^* - x_{k+1}| \leq K|x^* - x_k|^3$$

Dando así orden de convergencia 3.

## Ejercicio 9

$$x_{n+1} = 1 - \log x_n$$

Esta sucesión converge a un punto fijo de  $1 - \log x_n$ , es decir, un punto en el que:

$$1 - \log x = x$$

por lo que no sirve para resolver el problema.

El **resto de sucesiones** si convergen lo hacen a un punto tal que  $1 - \log x = 0$ .

$$x_{n+1} = x_n + 1 - \log x_n$$

Consideramos la aplicación  $g(x) = x + 1 - \log x$ :

Vemos que  $|g'| < 1$  en  $(0, +\infty)$  por lo que la aplicación es contractiva.

Además,  $g([2, 3]) \subseteq [2, 3]$

$$x_{n+1} = x_n - (1 - \log x_n)$$

Consideramos la aplicación  $g(x) = x - (1 - \log x)$ :

Vemos que  $|g'| > 1$  en  $(0, +\infty)$  por lo que la aplicación **no** es contractiva. Por tanto **no** podemos aplicar el teorema del punto fijo.

$$x_{n+1} = x_n + (1 - \log x_n)/3$$

Consideramos la aplicación  $g(x) = x + (1 - \log x)/3$ :

Vemos que  $|g'| < 1$  en  $(0, +\infty)$  por lo que la aplicación es contractiva.

Además  $g([2, 3]) \subseteq [2, 3]$

## Ejercicio 18

**a) Hallar  $D$  y  $g$  para el método**

Sea  $D = [0, 1]^2$ . Podemos tomar como  $g = g_1 \times g_2$ :

$$g_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{5}}y = x \iff 5x^2 - y^2 = 0$$

$$g_2(x, y) = \frac{1}{4}(\sin x + \cos y) = y \iff y - 0.25(\sin x + \cos y) = 0$$

Tenemos que  $g_1, g_2 \geq 0$  en  $D$ . Además, claramente:  $\max g_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1$  y  $\max g_2 \leq \frac{1}{2}$ . Así,  $g(D) \subseteq D$ . Por otra parte,  $g \in C^1(D)$  y:

$$Jg(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{\cos x}{4} & -\frac{\sin y}{4} \end{pmatrix}$$

Y por tanto  $\|Jg(x)\|_\infty = \max_{x, y \in D} \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{4}(|\cos x| + |\sin y|) \right\} = \frac{1}{2} < 1$ , por lo que la aplicación es contractiva en  $D$ .

Así, por el teorema de convergencia global, existe  $x^* \in D$  tal que  $g(x^*) = x^*$ . Además el teorema garantiza la convergencia a ese punto mediante iteración funcional.