Tema 1

Ejercicio 6

a) Hallar las raíces

Para hallar el término x_{n+1} hay que sacar las raíces del polinomio:

$$p(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}f''(x_n)(x - x_n)^2$$

Por tanto:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{-f'(x_n) \pm \sqrt{f'(x_n)^2 - 2f(x_n)f''(x_n)}}{f''(x_n)}$$

b) ¿Qué raíz debemos escoger?

Debemos llegar a un punto tal que $f(x^*) = 0$. Este será un punto fijo, es decir:

$$x^* = x^* + \frac{-f'(x^*) \pm \sqrt{f'(x^*)^2 - 2f(x^*)f''(x^*)}}{f''(x^*)}$$

Es decir, el término de la derecha debe anularse. Simplificando y haciendo $f(x^*) = 0$ tenemos que:

$$-f'(x^*) \pm \sqrt{f'(x^*)^2} = 0$$

Por tanto debemos escoger la raíz con símbolo $+$.

c) Comprobación del método

Si multiplicamos por el conjugado la expresión original:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n) - \sqrt{f'(x_n)^2 - 2f(x_n)f''(x_n)}}{f''(x_n)} \cdot \frac{f'(x_n) + \sqrt{f'(x_n)^2 - 2f(x_n)f''(x_n)}}{f'(x_n) + \sqrt{f'(x_n)^2 - 2f(x_n)f''(x_n)}}$$

Simplificando:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)^2 - f'(x_n)^2 + 2f(x_n)f''(x_n)}{(f'(x_n) + \sqrt{f'(x_n)^2 - 2f(x_n)f''(x_n)})f''(x_n)}$$

Reordenando términos y sacando $f'(x_n)^2$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{1+\sqrt{1-2\frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}}}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

d)

Hecho en Maxima. No converge.

e)

Sea x^* el punto fijo de f. Existe ξ tal que:

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x - x_k)^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)(\xi - x_k)^3$$

Además:

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x_{k+1} - x_k)^2$$

Restando una expresión a otra:

$$0 = f'(x_k)(x - x_{k+1}) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x - x_{k+1})(x + x_{k+1} - 2x_k) + \frac{1}{6}f'''(\xi)(\xi - x_k)^3$$

Sacamos factor común y despejamos:

$$\left(f'(x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x + x_{k+1} - 2x_k)\right)(x - x_{k+1}) = -\frac{1}{6}f'''(\xi)(\xi - x_k)^3$$

Tomamos valor absoluto y acotamos:

$$|x - x_{k+1}| \leq \frac{1}{6}\frac{|f'''(\xi)|}{\left|f'(x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x + x_{k+1} - 2x_k)\right|}|x - x_k|^3$$

(Y a partir de aquí ni idea de cómo se seguía)

9

$x_{n+1} = 1 - \log x_n$

Esta sucesión converge a un punto fijo de $1 - \log x_n$, es decir, un punto en el que:

$$1 - \log x = x$$

por lo que no sirve para resolver el problema.

El **resto de sucesiones** si convergen lo hacen a un punto tal que $1 - \log x = 0$.

$x_{n+1} = x_n + 1 - \log x_n$

Consideramos la aplicación $g(x) = x + 1 - \log x$:

Vemos que $|g'| < 1$ en $(0, +\infty)$ por lo que la aplicación es contractiva.

Además, $g([2,3]) \subseteq [2,3]$

$x_{n+1} = x_n - (1 - \log x_n)$

Consideramos la aplicación $g(x) = x - (1 - \log x)$:

Vemos que $|g'| > 1$ en $(0, +\infty)$ por lo que la aplicación **no** es contractiva. Por tanto **no** podemos aplicar el teorema del punto fijo.

$x_{n+1} = x_n + (1 - \log x_n)/3$

Consideramos la aplicación $g(x) = x + (1 - \log x)/3$:

Vemos que $|g'| < 1$ en $(0, +\infty)$ por lo que la aplicación es contractiva.

Además $g([2,3]) \subseteq [2,3]$