Tema 1

Ejercicio 6

a) Hallar las raíces

Para hallar el término x_{n+1} hay que sacar las raíces del polinomio:

$$p(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}f''(x_n)(x - x_n)^2$$

Por tanto:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{-f'(x_n) \pm \sqrt{f'(x_n)^2 - 2f(x_n)f''(x_n)}}{f''(x_n)}$$

b) ¿Qué raíz debemos escoger?

Debemos llegar a un punto tal que $f(x^*) = 0$. Este será un punto fijo, es decir:

$$x^* = x^* + \frac{-f'(x^*) \pm \sqrt{f'(x^*)^2 - 2f(x^*)f''(x^*)}}{f''(x^*)}$$

Es decir, el término de la derecha debe anularse. Simplificando y haciendo $f(x^*) = 0$ tenemos que:

$$-f'(x^*) \pm \sqrt{f'(x^*)^2} = 0$$

Por tanto debemos escoger la raíz con símbolo $+$.

c) Comprobación del método

Si multiplicamos por el conjugado la expresión original:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n) - \sqrt{f'(x_n)^2 - 2f(x_n)f''(x_n)}}{f''(x_n)} \cdot \frac{f'(x_n) + \sqrt{f'(x_n)^2 - 2f(x_n)f''(x_n)}}{f'(x_n) + \sqrt{f'(x_n)^2 - 2f(x_n)f''(x_n)}}$$

Simplificando:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)^2 - f'(x_n)^2 + 2f(x_n)f''(x_n)}{(f'(x_n) + \sqrt{f'(x_n)^2 - 2f(x_n)f''(x_n)})f''(x_n)}$$

Reordenando términos y sacando $f'(x_n)^2$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2\frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}}} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

d)

Hecho en Maxima. No converge.

e)

Sea x^* el punto fijo de f. Por el teorema de Taylor existe ξ en el menor intervalo abierto que contiene a x_k y x^* tal que:

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x^* - x_k)^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)(x^* - x_k)^3$$

Además, por cómo se ha elegido x_{k+1}:

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x_{k+1} - x_k)^2$$

Restando una expresión a otra:

$$0 = f'(x_k)(x^* - x_{k+1}) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x^* - x_{k+1})(x^* + x_{k+1} - 2x_k) + \frac{1}{6}f'''(\xi)(x^* - x_k)^3$$

Sacamos factor común y despejamos:

$$\left(f'(x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x^* + x_{k+1} - 2x_k)\right)(x^* - x_{k+1}) = \frac{1}{6}f'''(\xi)(x_k - x^*)^3$$

Tomamos valor absoluto y tenemos que:

$$|x^* - x_{k+1}| = \frac{1}{6}\frac{|f'''(\xi)|}{\left|f'(x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x^* + x_{k+1} - 2x_k)\right|}|x^* - x_k|^3$$

Sea $f \in C^3([x^* - \delta_1, x^* + \delta_1])$ para algún $\delta_1 > 0$. Como $f'(x^*) \neq 0$, por el lema de conservación del signo $\exists \delta_2$ con $0 < \delta_2 \leq \delta_1$ tal que, siendo $I_2 = [x^* - \delta_2, x^* + \delta_2]$:

$$\min_{x\in I_2} |f'(x)| > 0$$

Sea $M_{i,\delta} = \max_{x\in[x^*-\delta,x^*+\delta]} |f^{(i)}(x)|$, que existe para todo i menor que 4 y todo δ menor o igual que δ_2 por el teorema de Weierstrass y porque $f \in C^3(I_2)$. Sea $m_{i,\delta}$ la expresión con el mínimo, que en el caso anterior existe, por lo que podemos llamar m_{1,δ_2} a la cota inferior anterior.

Tomamos δ con $0 < \delta \leq \delta_2$ tal que $\delta M_{2,\delta_2} < \frac{2}{3} m_{1,\delta_2}$ y $M_{2,\delta_2}\left(2\frac{M_{0,\delta}}{m_{1,\delta_2}}\right) < m_{1,\delta_2}$. La segunda igualdad puede conseguirse porque $f(x)$ tiende a 0 cuando x tiende a x^*. Entonces, tomando $x_k \in I := [x^*-\delta, x^*+\delta]$ y usando la definición de x_{k+1}:

$$\frac{|f'''(\xi)|}{\left|f'(x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x^* + x_{k+1} - 2x_k)\right|} \leq \frac{M_{3,\delta}}{m_{1,\delta} - \frac{1}{2}M_{2,\delta}|\underbrace{x^* - x_k}_{\leq\delta} + x_{k+1} - x_k|}$$

$$\leq \frac{M_{3,\delta}}{m_{1,\delta_2} - \frac{1}{2}M_{2,\delta_2}\big(\delta + |\underbrace{\frac{2}{1+\sqrt{\cdots}}}_{\leq 1}\frac{M_{0,\delta}}{m_{1,\delta_2}}|\big)} \leq \frac{M_{3,\delta}}{m_{1,\delta_2} - \frac{1}{3}m_{1,\delta_2} - \frac{1}{2}m_{1,\delta_2}} = \frac{6M_{3,\delta}}{m_{1,\delta_2}}$$

Por ello, sea $K = \frac{M_{3,\delta}}{m_{1,\delta_2}}$, podemos acotar la expresión que queríamos:

$$|x^* - x_{k+1}| \leq K|x^* - x_k|^3$$

Dando así orden de convergencia 3.

Ejercicio 9

$x_{n+1} = 1 - \log x_n$

Esta sucesión converge a un punto fijo de $1 - \log x_n$, es decir, un punto en el que:

$$1 - \log x = x$$

por lo que no sirve para resolver el problema.

El **resto de sucesiones** si convergen lo hacen a un punto tal que $1 - \log x = 0$.

$x_{n+1} = x_n + 1 - \log x_n$

Consideramos la aplicación $g(x) = x + 1 - \log x$:

Vemos que $|g'| < 1$ en $(0, +\infty)$ por lo que la aplicación es contractiva.

Además, $g([2,3]) \subseteq [2,3]$

$x_{n+1} = x_n - (1 - \log x_n)$

Consideramos la aplicación $g(x) = x - (1 - \log x)$:

Vemos que $|g'| > 1$ en $(0, +\infty)$ por lo que la aplicación **no** es contractiva. Por tanto **no** podemos aplicar el teorema del punto fijo.

$x_{n+1} = x_n + (1 - \log x_n)/3$

Consideramos la aplicación $g(x) = x + (1 - \log x)/3$:

Vemos que $|g'| < 1$ en $(0, +\infty)$ por lo que la aplicación es contractiva.

Además $g([2,3]) \subseteq [2,3]$

Ejercicio 18

a) Hallar D y g para el método

Sea $D = [0,1]^2$. Podemos tomar como $g = g_1 \times g_2$:

$$g_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{5}} y = x \iff 5x^2 - y^2 = 0$$
$$g_2(x,y) = \frac{1}{4}(\sin x + \cos y) = y \iff y - 0.25(\sin x + \cos y) = 0$$

Tenemos que $g_1, g_2 \geq 0$ en D. Además, claramente: $\max g_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1$ y $\max g_2 \leq \frac{1}{2}$. Así, $g(D) \subseteq D$. Por otra parte, $g \in C^1(D)$ y:

$$Jg(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{\cos x}{4} & \frac{-\sin y}{4} \end{pmatrix}$$

Y por tanto $||Jg(x)||_\infty = \max_{x,y \in D}\{\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{4}(|\cos x| + |\sin y|)\} = \frac{1}{2} < 1$, por lo que la aplicación es contractiva en D.

Así, por el teorema de convergencia global, existe $x^* \in D$ tal que $g(x^*) = x^*$. Además el teorema garantiza la convergencia a ese punto mediante iteración funcional.

Tema 2

Ejercicio 9

a)

Si llamamos los nodos x_i, x_j, x_k tenemos que:

$$l'_i(x) = \frac{2x - x_j - x_k}{(x_i - x_k)(x_i - x_j)}$$

Es decir:

- $l'_0(x) = \frac{2x-4h}{3h^2}$, por lo que $l'_0(2h) = 0$
- $l'_1(x) = \frac{2x-3h}{-2h^2}$, por lo que $l'_1(2h) = \frac{-1}{2h}$
- $l'_2(x) = \frac{2x-h}{6h^2}$, por lo que $l'_2(2h) = \frac{1}{2h}$

Por tanto la fórmula de derivación numérica queda:

$$\text{FDN}(f) = \sum f(x_i) l_i(x) = \frac{f(3h) - f(h)}{2h}$$

b)

Desarrollamos el polinomio de Taylor centrado en $2h$:

$$f(x) = f(2h) + f'(2h)(x - 2h) + \frac{1}{2} f''(2h)(x - 2h)^2 + \frac{1}{6} f'''(\xi)(x - 2h)^3$$

Evaluando en $3h$ y en h tenemos, para $h < \xi_2 < 2h < \xi_1 < 3h$:

$$f(3h) = f(2h) + hf'(2h) + \frac{1}{2} h^2 f''(2h) + \frac{1}{6} h^3 f'''(\xi_1)$$
$$f(h) = f(2h) - hf'(2h) + \frac{1}{2} h^2 f''(2h) - \frac{1}{6} h^3 f'''(\xi_2)$$

La diferencia vale:

$$f(3h) - f(h) = 2hf'(2h) + \frac{1}{6} h^3 (f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2))$$

Si $f \in \mathcal{C}^3$ por el teorema de los valores intermedios tenemos que existe un $h < \xi < 3h$ tal que:

$$f(3h) - f(h) = 2hf'(2h) + \frac{1}{3}h^3 f'''(\xi)$$

Por tanto:

$$\mathrm{ED}(f) = f'(2h) - \mathrm{FDN}(f) = f'(2h) - \frac{f(3h) - f(h)}{2h} = -\frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$