Unterrichtsentwurf - Einführung in proportionale Funktionen durch Schülerexperimente

Maximilian Frank

30. September 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Einordnung der Stunde in die Unterrichtseinheit	2
2	Verlaufsplan	3
3	Rahmenbedingungen	4
4	Aufgabenanalyse	4
5	Didaktische Überlegungen	6
6	Kompetenzen und Ziele	8
7	Methodische Überlegungen	9

1 Einordnung der Stunde in die Unterrichtseinheit

Der vorliegende Unterrichtsentwurf ist eine Doppelstunde zur Einführung in das Themengebiet "Proportionalität" in Klasse 7/8. In einem Beispielcurriculum für das Fach Mathematik vom "Landesinstitut für Schulentwicklung" [2] wird für das gesamte Thema ein Umfang ca. 10 Schulstunden angesetzt (Übungszeit mit eingerechnet). Eine mögliche Strukturierung der gesamten Unterrichtseinheit ist in Tabelle 1 dargestellt.

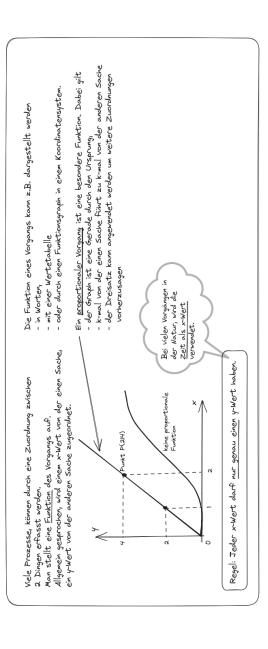
Betrachtet man die Unterrichtseinheit im Rahmen der Gesamtplanung für das Schuljahr, so setzt diese ohne großen Bezug zu vorherigen Themen ein. Vielmehr soll die Unterrichtseinheit dazu dienen, Erkenntnisse aus Klasse 6 aufzufrischen und ein Ausgangsniveau zu sichern, mit dem die SuS für die anschließende Unterrichtseinheit zum Thema "Lineare Funktionen" vorbereitet sind.

Studenthema	didaktisch-methodischer Schwerpunkt	Stunden- zahl
Zuordnungen allgemein	Reale Experimente zur Wiederholung der Darstellungsformen Tabelle/Graph/Verbal. Fokus liegt auf linearen und vor allem proportionalen Zusammenhängen. Präsentation und Diskussion der Ergebnisse.	2
Direkte Proportionalität	Systematisierung des Umgangs mit direkten Proportionalitäten. Proportionalitätsfaktor (Quotientengleichheit), Dreisatz und Ursprungsgerade.	2
Algebraische Darstellung	Gleichung einer proportionalen Zuordnung $y=m\cdot x$ und Herausarbeitung des Begriffs der Änderungsrate.	2
Indirekte Proportionalität	Abgrenzung gegenüber nicht proportionalen Vorgängen herausstellen. Eigenschaften erarbeiten.	2
Übungsstunde	Vermischte Aufgaben in verschiedenen Schwierigkeitsstufen. Eventuell bereits Ausblick auf lineare Funktionen.	2

Tabelle 1: Strukturierung der Unterrichtseinheit "Proportionale Funktionen".

2 Verlaufsplan

Matrialien	Beamer	iPads Stationen	Beamer	Tafel
$\begin{array}{ccc} {\rm Sozialform} & \& & {\rm Matrialien} \\ {\rm Arbeitsform} & & & \\ \end{array}$	Plenum	Gruppenarbeit	Plenum	Plenum
Unterrichtsschritte/Lehrer-Schülerinteraktion	Austeilen der iPads Erklärung des Ablaufs und Zeitplan Erklärung einzelner Experi- mente	SuS bearbeiten gewählte Stati- on	SuS präsentieren Ergebnisse Zusammenstellen von Beobachtungen	Tafelanschrieb Hausaufgabe erklären
Phase	Einstieg	Erarbeitung	Ergebnissicherung 1	Ergebnissicherung 2
Uhrzeit	10 min	45 min	20 min	15 min



3 Rahmenbedingungen

Bei der Planung der Doppelstunde wird von einer sehr heterogenen Klasse ausgegangen. Das bedeutet, dass die SuS sehr unterschiedliche Interessensgebiete haben und ihre mathematischen Fähigkeiten unterschiedlich stark ausgeprägt sind.

Die ersten 45 Minuten der Doppelstunde führen die SuS in Gruppenarbeit (2-3 SuS pro Gruppe) verschiedene Experimente durch. Die Materialien werden an den verschiedenen Stationen bereitgestellt. Zur Durchführung verwenden die SuS ein iPad. Über eine Website (z.B. Moodle) greifen die SuS auf interaktive Arbeitsblätter zu, mit denen sie durch den Versuch und die Bearbeitung geführt werden können.

Im zweiten Teil der Doppelstunde präsentieren einzelne Gruppen zunächst ihre Ergebnisse mit Beamer und HDMI-Kabel. Durch die vorbereiteten Arbeitsblätter ist für die Präsentation wenig Arbeit erforderlich. Die Ergebnisse werden diskutiert und die wichtigsten Beobachtungen an der Tafel notiert.

Materialien

- Materialien für Experimente
- iPad
- Beamer + HDMI-Kabel
- Tafel

4 Aufgabenanalyse

Für den ersten Teil der Einführungsstunde, setzten sich die SuS mit einer Reihe von Problemstellungen auseinander. Diese werden durch Experimentieren gelöst und in Form von Stationen aufgebaut. Jede Station beschäftigt sich mit einer konkreten Fragestellung. Um der Heterogenität gerecht zu werden, wird versucht unterschiedlichste Interessensgebiete abzudecken. Die interaktiven Arbeitsblätter können unter

eingesehen werden. Im Folgenden sind die 7 Stationen aufgeführt, in denen verschiedene Zuordnungen untersucht werden können. Hauptsächlich handelt es sich dabei um proportionale und lineare Zuordnungen.

1. Der tropfende Wasserhahn

Wie viel Wasser wird bei einem tropfenden Wasserhahn an einem Tag verschwendet?

Die SuS untersuchen hier die proportionale Zuordnung Zeit \mapsto Volumen.

Vertiefung: Wie breit ist ein Wassertropfen?

2. Strategisches Zählen

Wie viele Seiten Papier sind in einem Papierstapel?

Hier sind zwei proportionale Zuordnungen denkbar. Entweder Gewicht \mapsto Seitenanzahl oder Höhe \mapsto Seitenanzahl.

Vertiefung: Ausweitung der Betrachtung auf andere Materialien (Geld zählen, Schrauben/Muttern in Box zählen, ...).

3. Kabelsalat

Wie lang ist das Seil/Verlängerungskabel?

Die Lösung erhält man über die proportionale Zuordnung Gewicht \mapsto Länge. Vertiefung: Wie viel wiegt die Kabeltrommel ohne Kabel?

4. Löse den Mordfall

Wie lange dauert es, bis die Kerze abgebrannt ist?

In diesem Fall liegt eine lineare Zuordnung vor, auch wenn nicht vom Ursprung aus gestartet wird. Für die Lösung nutzt man die Zuordnung Gewicht \mapsto Höhe.

Vertiefung: Die Kerze hatte ursprünglich eine bestimmte Höhe. Wie lange brennt die Kerze schon?

5. Getränke kühlen

Wie verändert sich das Abkühlen von kochendem Wasser bei der Zugabe von Salz?

Mit Hinblick auf die spätere Diskussion wird hier eine nichtlineare Zuordnung untersucht.

6. Gewindestange

Die SuS berechnen die Anzahl an Umdrehungen, um eine Schraube auf eine Gewindestange zu drehen.

Je nach Fragestellung lässt sich diese Station als lineare oder proportionale Zuordnung gestalten. Dabei wird Umdrehungen \mapsto Länge zugeordnet.

Vertiefung: Wie viele Umdrehungen kann ein Bleistift in einem Spitzer benutzt werden?

7. Hebelkraft

Wie funktioniert ein Hebel?

Bei diesem Experiment wird die Zuordnung Länge \mapsto Gewicht untersucht.

Vertiefung: Wo werden Hebel eingesetzt?

5 Didaktische Überlegungen

Laut [4] lassen sich mehrere Stufen des Begrifferwerbs beim Umgang mit Funktionen beobachten. Die Unterstufe, zusammen mit den beiden Unterrichtseinheiten zum Thema proportionale Funktionen und lineare Funktionen dient in erster Line dazu, Stufe 1, ein intuitives Begriffsverständnis, zu erreichen. In der späten Sekundarstufe 1 und Sekundarstufe 2 rücken dann formale Gesichtspunkte in den Vordergrund. Um diese Stufe abzuschließen, führt [1] folgende Kennzeichen auf:

- 1. SuS können Zusammenhänge zwischen Größen erkennen und mit Hilfe des Funktionsbegriffs beschreiben.
- 2. SuS kennen wichtige Beispiele derartiger Funktionen.
- 3. SuS verknüpfen mit dem Funktionsbegriff Vorstellungen wie Kurve, Schaubild, Pfeildiagramm, Tabelle, usw.
- 4. SuS können diese Ausdrucksmittel zum Lösen einfacher Probleme einsetzen.
- 5. SuS haben verstanden, dass eine Funktion eine eindeutige Zuordnung ist und kennen den Begriff "Funktion".

Um das zu erreichen, sind die SuS in Klasse 6 zum ersten Mal mit Tabellen und der grafischen Darstellung von Wertepaaren im Koordinatensystem in Kontakt gekommen. Alle weiteren Punkte sollen laut Bildungsplan [3] im Rahmen der proportionalen bzw. linearen Funktionen vertieft werden. In der unteren Abbildung 1 ist der entsprechende Ausschnitt des Bildungsplans für die Leitidee "Funktionaler Zusammenhang" dargestellt. Themen, die in der Einführungsstunde abgedeckt werden, sind in Abb. 1 schwarz umrandet markiert. Es geht also im besonderen darum, den Spezialfall der proportionalen Funktion kennenzulernen und mit möglichst vielen Darstellungsformen und entsprechenden Wechseln konfrontiert zu werden.

Laut [1] ist ein vielversprechender Ansatz, das funktionale Denken durch den Einsatz von Experimenten zu unterstützen. Das wird versucht in der 45-minütigen Experimentierphase umzusetzen. Der Vorteil bei dieser Herangehensweise liegt zum einen darin, dass die SuS authentische Erfahrungen machen können, die dann mit verschiedenen funktionalen Zusammenhängen in Verbindung gebracht werden. Zum anderen werden durch das Experimentieren Aspekte aus verschiedenen Leitideen (über den funktionalen Zusammenhang hinaus) benötigt. Es geht beispielsweise neben der Datenerfassung, dem Messen, dem Modellieren auch um das Aufzeigen von fachübergreifenden Zusammenhängen und die Herstellung eines Alltagsbezugs. Gerade bei sehr heterogenen Klassen, sind so viele Möglichkeiten gegeben um die Stärken und das Wissen der einzelnen Schüler in den Mittelpunkt zu stellen.

In den Experimenten wird immer eine alltagsnahe Problemstellung gelöst. Dadurch wird es den SuS erleichtert, innerhalb der Gruppe und bei der späteren Diskussion die Funktion verbal zu beschreiben. Verwenden die SuS die vorgegebene Anleitung des interaktiven Arbeitsblattes, so läuft die Modellierung in allen Stationen

ähnlich ab. Dieser vorgegebene Rahmen wird als notwendig erachtet, da die SuS zum ersten Mal mit dem Modellieren konfrontiert werden. Natürlich kann auch mehr Freiheit und Eigenarbeit im Vordergrund stehen, allerdings bleibt die Frage offen, inwiefern die systematische Vorgehensweise in diesem Fall verinnerlicht werden kann.

Zunächst wird eine Messtabelle aufgenommen (Darstellungswechsel: Verbal \rightarrow Tabelle). Die SuS müssen dazu einen geeigneten Versuchsaufbau mit den bereit gestellten Materialien gestalten. Zur Kontrolle oder als Hilfstellung können die SuS über den Hilfebutton ein Beispiel abrufen. Damit die SuS eine Rückmeldung über ihre Messungen erhalten, kann eine Zieltabelle mit Lösungsbereich vorgegeben werden.

Im nächsten Schritt müssen die Messwerte in ein Koordinatensystem eingetragen werden (Tabelle \rightarrow Graph). Zunächst wird dazu ein Lückentext gelöst, um den Ablauf zu verstehen. Bei schwächeren SuS unterstützt die Lehrkraft an diesem Punkt. Sind die Messwerte richtig in das Koordinatensystem eingetragen (mit kleinen Fehlertoleranzen), wird im Falle eines proportionalen Zusammenhangs eine Regressionsgerade eingezeichnet. Dabei findet eine didaktische Reduktion des Sachverhalts in der Hinsicht statt, dass den SuS vorgeschrieben wird, eine Ursprungsgerade zu verwenden und der Verlauf etwas großzügiger abgeschätzt werden kann.

Mit dieser Gerade beantworten die SuS die abschließenden Fragen (Graph \rightarrow Tabelle). Dabei ist man aber grundsätzlich nicht auf eine grafische Lösung festgelegt. Auch der Dreisatz kann angewendet werden.

Sind die Fragen beantwortet, können die SuS selber entscheiden wie sie weiterarbeiten. Das Problem kann in einigen Experimenten z.B. noch ausführlicher untersucht werden. [1] empfiehlt dabei bei jüngeren und nicht so leistungsstarken Lerngruppen auf die Betrachtung des algebraischen Ausdruck der proportionalen Funktion zunächst zu verzichten. Deshalb wird darauf erst im späteren Verlauf der Unterrichtseinheit eingegangen. Eine vertiefende Betrachtung besteht deshalb z.B. in der Veränderung des Versuchsaufbaus um proportionale Funktionen mit veränderter Steigung zu erzeugen. Je nach Interesse der SuS ist es auch denkbar, dass andere Stationen bearbeitet werden oder die SuS gestalten ein eigenes Plakat (z.B. Google Jamboard) zur späteren Präsentation ihrer Ergebnisse.

Die durchgeführten Experimente stellen ein zentrales Element der gesamten Unterrichtseinheit darstellen. Die SuS sollen im weiteren Verlauf in der Lage dazu sein, sich vorallem in der Diskussion untereinander oder auch mit der Lehrkraft darauf berufen zu können. Die besonderen mathematischen Eigenheiten (z.B. Quotientengleichheit und Proportionalitätsfaktor) und der algebraische Ausdrucks, wird zu späteren Zeitpunkten der Unterrichtseinheit behandelt. Die Idee ist, dass die SuS auch diese Erkenntnisse dann nach und nach im Rahmen von Hausaufgaben auf die Experimente der interaktiven Arbeitsblätter anwenden können.

Neben der Bedeutung für die aktuelle Unterrichtseinheit, lassen sich die erarbeiteten Fähigkeiten aber auch auf andere Fächer übertragen. Gerade im Physikunterricht wird bis zum Abitur mit proportionalen Funktionen gearbeitet um verschiedenste Phänomene zu beschreiben. Haben die SuS einmal die grundlegende Vorgehesweise des Modellierens verinnerlicht, so lassen sich analog im Physikun-

terricht entsprechende Messreihen aufnehmen.

Die anschließende Präsentation und Diskussion einzelner Experimente soll vor allem die mathematische Kommunikation trainieren. Im Gespräch vollziehen die SuS ständig den Wechsel zwischen der verbalen Beschreibung der Funktion, also dem konkreten Phänomen, und den anderen Darstellungsformen (Messtabelle, Graph). Das Sammeln der Beobachtungen (wahrscheinlich eher unstrukturiert) an der Tafel wird den SuS zu großen Teilen selber überlassen. Es soll so lange wie möglich zurecht der Eindruck entstehen, dass die zentralen Erkenntnisse aus den Experimenten selber gefunden worden sind.

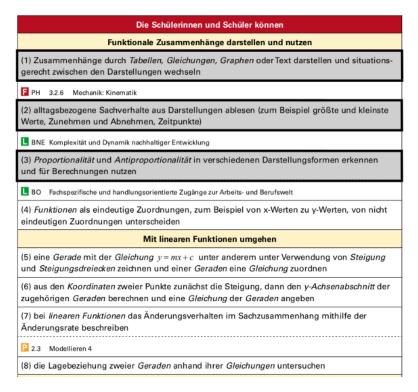


Abbildung 1: Leitidee Funktionaler Zusammenhang für Klasse 7/8 aus dem Bildungsplan 2016.

6 Kompetenzen und Ziele

Das Schwerpunktziel der Unterrichtsstunde ist es, dass die SuS eine Sinnhaftigkeit in der Auseinandersetzung mit dem Funktionsbegriff erkennen. Die Problemstellungen der Experimente sind so gewählt, dass Alltagsfragen systematisch untersucht werden können. Am Ende soll allen klar sein, dass man proportionale Vorgänge durch eine Ursprungsgerade beschreiben kann und damit eine grafische Lösung für verschiedene Fragestellungen möglich ist.

Die Kompetenzen die dazu erforderlich sind, sind sowohl theoretischer, als auch praktischer Natur. Letzteres wird durch den guten Aufbau der Versuche und die korrekte Durchführung der Messungen erreicht.

Die theoretischen Anforderungen liegen im mathematischen und physikalischen Bereich. Das Messen und Umrechnen von Einheiten ist bei der Bearbeitung von zentraler Wichtigkeit. Diese Fähigkeit wird in der 7. Klasse auch mit dem Beginn des Physikunterrichts vertieft. Die SuS sollen hier auch die starke Verbindung der beiden Fächer erkennen.

Schaut man in die prozessbezogenen Kompetenzen des Bildungsplans Mathematik, so liegt der Fokus in dieser Doppelstunde auf dem Modellieren und dem Kommunizieren. Wie bereits im vorherigen Kapitel verdeutlicht, findet an dieser Stelle aber eine didaktische Reduktion statt, sodass sich die Kompentenzen allein auf das Verstehen der systematischen Herangehensweise zum Lösen von solchen Problemen beschränkt. D.h. das Problem lösen als Kompetenz wird weniger gefördert, da die interaktiven Arbeitsblätter einen sinnvollen Lösungsweg vorgeben.

Die Heterogenität im Bereich der mathematischen Fähigkeiten zeigt sich am deutlichsten in den Rechnenfertigkeiten. Diese rücken aus diesem Grund erst am Ende der interaktiven Arbeitsblätter stärker in der Vordergrund.

Die Verwendung interaktiver Arbeitsblätter liefert zusätzlich die Möglichkeit der Verwendung von GeoGebra-Applets. Diese Software ist in späteren Schuljahren ein hervorragendes Hilfsmittel für den Umgang mit komplizierten Funktionen und der Differential- bzw. Integralrechnung. Da sich die Applets im Voraus in ihrem Umfang speziell anpassen lassen, kann den SuS ein langsamer Einstieg in die Möglichkeiten des Programms ermöglicht werden.

In Tabelle 2 sind die einzelnen Teilschritte zum Erreichen des Schwerpunktziels aufgeführt.

Bei stärkeren SuS ist es auch denkbar, dass zum Lösen der vertiefenden Aufgabenstellungen ChatGPT zum Einsatz kommt. Das interaktive Arbeitsblatt liefert in diesem Fall nur die Problemstellung und die SuS erarbeiten in der Diskussion mit ChatGPT einen möglichen Lösungsweg.

7 Methodische Überlegungen

Die Heterogenität der Klasse stand im Mittelpunkt der methodischen Überlegungen. Die Umsetzung der Experimentierphase erfolgt im Grunde nach dem bekannten Stationenlernen. Die Problemstellungen der Stationen behandeln dabei ganz verschiedene Bereiche des Alltagslebens. Dadurch soll versucht werden, dass jede Gruppe eine Station findet, die sich auch mit dem eigenen Interesse deckt. Zusätzlich wird darauf geachtet, dass die Stationen räumlich möglichst getrennt voneinander stattfinden. Dadurch soll Rücksicht auf SuS genommen werden, die eher ruhigere Arbeitsumgebungen bevorzugen.

Um den stärken Gruppen ein möglichst unabhängiges Arbeiten zu ermöglichen, werden interaktive Arbeitsblätter eingesetzt. Diese leiten schrittweise durch das Experiment. Dabei erhalten die SuS immer wieder Rückmeldungen, ob entsprechende Teillösungen korrekt sind. Dadurch kann die Konzentration der Lehrkraft auf schwächeren Gruppen liegen, während die anderen selbstständig arbeiten können. Für diese schwächeren Gruppen stehen zusätzlich Hilfebuttons bereit, die

Teilziel	inhaltsbezogene Kompetenzen	prozessbezogene Kompetenzen
Versuchsaufbau	Größen messen Volumen berechnen	Realsituation analysieren und aufbereiten
Tabelle + Graph	Datenaufnahme Tabelle Datenaufnahme KOS Darstellungswechsel	Mathematisieren der Realsituation
grafische Lösung	Funktionsgraph Regression Sachverhalte ablesen Dreisatz Darstellungswechsel	Arbeiten im mathematischen Modell Modellergebnisse interpretieren und validieren
Präsentation + Sicherung	Proportionalität erkennen eindeutige Zuordnung	Lösungsweg und Ergebniss dar- stellen Fachsprache korrekt verwenden Vermutungen begründet äußern

Tabelle 2: Das Schwerpunktziel, das Erfahren der Bedeutung von Funktionen zur Lösung von Alltagsproblemen, setzt sich aus vier Teilzielen zusammen.

umfangreichere Erklärungen oder Tipps liefern.

Da die gesamte Bearbeitung digital stattfindet, ist sowohl Struktur und Ordentlichkeit der Arbeitsschritte gewährleistet. Die SuS können also die Konzentration ganz auf das Verständnis des Modellierungsprozesses legen. Um trotzdem eine gewisse Individualität in der Lösung herzustellen, ist es denkbar, dass starke Gruppen mit Hilfe von Bildschirmfotos ein kompakteres Plakat der Versuchsergebnisse erstellen

Nach dem Experimentieren, sollten alle Gruppen mindestens eine Problemstellung grafisch gelöst haben. Es erfolgt dann der Übergang in die Präsentationsphase. Dabei sollen verschiedene Gruppen kurz ihre Ergebnisse vorstellen. Haben die Gruppen kein Plakat erstellt, kann ohne Problem auch direkt das interaktive Arbeitsblatt verwendet werden. Um einen Denkprozess bei den SuS anzuregen, wird darauf geachtet, dass neben proportionalen Vorgängen auch nicht-proportionale Vorgänge vorgestellt werden.

Nach jeder Präsentation wird im Gespräch mit der ganzen Klasse diskutiert, welche zentralen Beobachtungen und Erkenntnisse an der Tafel festgehalten werden soll. Um die SuS in die passende Richgung zu lenken sind folgende Impulse denkbar:

• Welche Besonderheit wurde bei diesem Vorgang ausgenutzt? (Messpunkte liegen auf Gerade durch den Ursprung.)

- Welche Annahme wurde bei der Bestimmung der Lösung verwendet? (Auch die weiteren Punkte würden im Bereich der Gerade liegen.)
- Warum konnte hier keine Vorhersage getroffen werden? (Weil die Messpunkte auf keiner Gerade liegen.)
- Worin liegt der Unterschied zwischen den Geraden? (Eine Gerade geht durch den Ursprung.)
- Was ist der Vorteil, wenn die Gerade durch den Ursprung läuft? (Man kann auch den Dreisatz andwenden.)

Es werden nicht alle Gruppen ihre Ergebnisse und speziellen Experimente präsentieren können. Damit trotzdem alle Gruppen die entsprechende Wertschätzung erfahren, wird klar gemacht, dass die Ergebnisse online zur Verfügung gestellt werden (z.B. als PDF-Dateien auf CryptPad) und im Rahmen der weiteren Unterrichtseinheit immer wieder darauf zurückgegriffen wird. Das erfolgt sowohl im Rahmen späterer Unterrichtsstunden als auch in Form von Hausaufgaben.

Nachdem ca. 20 Minuten präsentiert wurde, werden die Beobachtungen der SuS zu einem systematischen Tafelaufschrieb zusammengefasst und gegebenenfalls ergänzt. Dieser wird so gestaltet, dass in der nächsten Stunde die Idee der Quotientengleichheit in das Schaubild eingefügt werden und der Begriff des Proportionalitätsfaktors, sowie das Vorgehen beim Dreisatz ergänzt werden kann.

Literatur

- [1] Astrid Beckmann. Didaktik des Mathematikunterrichts der Sekundarstufen. Skript Universität Ulm, 2009.
- [2] Landesinstitut für Schulentwicklung. Beispielcurriculum für das Fach Mathematik. 2017.
- [3] Jugend und Sport Ministerium für Kultus. Bildungsplan Mathematik. 2016.
- [4] Vollrath & Weigand. Algebra in der Sekundarstufe. Spektrum Akademischer Verlag, 2007.