Unterrichtsstunde
–
Funktionaler Zusammenhang

Gliederung

1) Funktionales Denken
2) Überblick der Unterrichtseinheit (Klasse 7/8)
3) Ablauf der Unterrichtsstunde
4) Interaktive Arbeitsblätter mit GeoGebra

Funktionales Denken

4 Repräsentationen des Funktionsbegriffs			
Sachkontext	Tabelle	Graph	Algebraische Ausdruck

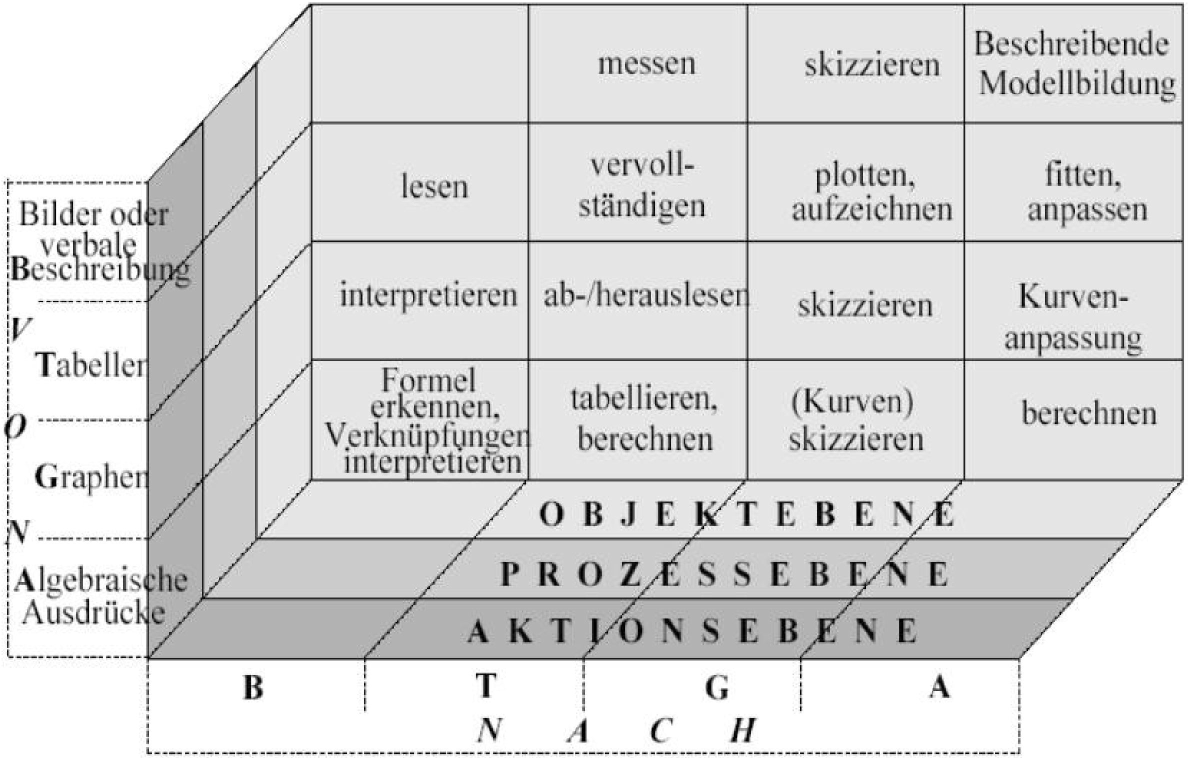
3 Ebenen des Zugangs		
Aktionsebene Zuordnungsaspekt	Prozessebene Kovariationsaspekt	Objektebene Objektaspekt

steigende Komplexität

Funktionales Denken

„Die Ausprägung des funktionalen Denkens zeigt sich in der Fähigkeit, in unterschiedliche Darstellungen von Funktionen das Ganze der Funktion zu erfassen und in der Fähigkeit, vom Einzelnen aufs Ganze und umgekehrt vom Ganzen aufs Einzelne, umzuschalten.“ (Vollrath, 1989)

Haus des Funktionalen Denkens



Stoffverteilungsplan Klasse 5/6

Leitidee Funktionaler Zusammenhang

Zusammenhänge beschreiben

maßstäbliche Zeichnungen anfertigen, auch mit selbstgewähltem, geeigneten Maßstab

Zusammenhänge beschreiben

Muster erkennen, verbal beschreiben und diese fortsetzen

Leitidee Funktionaler Zusammenhang

Zusammenhänge beschreiben

einfache Zusammenhänge zwischen Zahlen und Größen erkennen und beschreiben

proportionale und antiproportionale Zusammenhänge in konkreten Situationen erkennen und Sachprobleme durch proportionales oder antiproportionales Rechnen lösen, auch in der Darstellungsform Dreisatz

in einfachen Situationen (Länge, Umfang, Flächeninhalt, Volumen) den dynamischen Zusammenhang zwischen Größen veranschaulichen

Stoffverteilungsplan Klasse 7

Leitidee Funktionaler Zusammenhang

Funktionale Zusammenhänge darstellen und nutzen

Zusammenhänge durch Tabellen, Graphen, Gleichungen oder Text darstellen und situationsgerecht zwischen den Darstellungen wechseln

alltagsbezogene Sachverhalte aus Darstellungen ablesen

Proportionalität und Antiproportionalität in verschiedenen Darstellungsformen erkennen und für Berechnungen nutzen

Funktionen als eindeutige Zuordnungen von x-Werten zu y-Werten von nicht eindeutigen Zuordnungen unterscheiden

Mit linearen Funktionen umgehen

eine Gerade mit der Gleichung $y = mx + c$ unter anderem unter Verwendung von Steigung und Steigungsdreiecken zeichnen und einer Geraden eine Gleichung zuordnen

aus den Koordinaten zweier Punkte zunächst eine Steigung, dann den y-Achsenabschnitt der zugehörigen Geraden berechnen und eine Gleichung der Geraden angeben

bei linearen Funktionen das Änderungsverhalten im Sachzusammenhang mithilfe der Änderungsrate beschreiben

Lagebeziehungen zweier Geraden anhand ihrer Gleichungen untersuchen

Stoffverteilungsplan Klasse 8

Leitidee Funktionaler Zusammenhang

Funktionale Zusammenhänge darstellen und nutzen

Zusammenhänge durch Tabellen, Gleichungen, Graphen oder Text darstellen und situationsgerecht zwischen den Darstellungen wechseln

Alltagsbezogene Sachverhalte aus Darstellungen ablesen (zum Bsp. größte und kleinste Werte, Zunehmen und Abnehmen, Zeitpunkte)

Mit quadratischen Funktionen umgehen

Quadratische Zusammenhänge durch Tabellen und Gleichungen beschreiben und graphisch darstellen

Eigenschaften von Parabeln angeben

den Graphen einer quadratischen Funktion mithilfe von Wertetabellen zeichnen oder ausgehend von der Lage des Scheitels skizzieren

die Wirkung der Parameter a, d, e in der Parabelgleichung $y = a \cdot (x - d)^2 + e$ auf den Graphen abbildungsgeometrisch als Streckung, Spiegelung, Verschiebungen deuten

die allgemeine Parabelgleichung $y = ax^2 + bx + c$ mithilfe funktionaler oder algebraischer Überlegungen in die Scheitelform überführen

Anwendungsaufgaben mithilfe quadratischer Funktionen lösen, auch Bestimmung größter und kleinster Werte

Unterrichtseinheit Klasse 7/8

- Übergang intuitives Begriffsverständnis ➔ inhaltliches Begriffsverständnis

„1. Stufe: Intuitives Begriffsverständis/ Der Begriff als Phänomen
Kennzeichen:

(1) Die Schüler können Zusammenhänge zwischen Größen erkennen und mit Hilfe des Funktionsbegriffs beschreiben.
(2) Sie kennen wichtige Beispiele derartiger Funktionen.
(3) Mit dem Funktionsbegriff sind Vorstellungen wie Kurve, Schaubild, Pfeildiagramm, Tabelle usw. verbunden.
(4) Die Schüler können diese Ausdruckmittel zum Lösen einfacher Probleme einsetzen.
(5) Sie haben die Eindeutigkeit der Zuordnung als kennzeichnende Eigenschaft erkannt und kennen die Begriffsbezeichnung ´Funktion´."

„2. Stufe: Inhaltliches Begriffsverständnis/ Der Begriff als Träger von Eigenschaften
Kennzeichen:

(1) Die Schüler kennen grundlegende Eigenschaften von Funktionen
(2) Die Vorstellungen über die Eigenschaften sind eng verbunden mit den unterschiedlichen Darstellungsformen.
(3) Die Schüler sind in der Lage, Argumente für die erkannten Eigenschaften anzugeben. Dabei greifen sie ebenfalls auf die entsprechenden Darstellungen zurück.
(4) Die Schüler können die entdeckten Eigenschaften zur Lösung von Problemen benutzen."

Unterrichtseinheit Klasse 7/8

- Übergang intuitives Begriffsverständnis ➔ inhaltliches Begriffsverständnis
- Haus des funktionalen Denkens füllen (Aktionsebene und Prozessebene)
- Lineare und proportionale Funktionen als Einstieg nicht geeignet

Einführungsstunde - Ziele

- Lerngegenstand muss SuS sinnvoll erscheinen $\Rightarrow$ Optimierungsaufgaben geeignet
- Beziehung zwischen 2 Größen im Mittelpunkt
- Fragestellungen um Funktion als „Ganzes“ zu betrachten (nicht nur einzelne Wertepaare)
- Repräsentationswechsel verwenden (Sachkontext, Tabelle, Graph, Term)
- EIS-Prinzip
- Kommunikation mit Mitschülern

Einführungsstunde

Rahmenbedingungen

• Klassenstufe 7/8
• Doppelstunde
• SuS erhalten in 2-er Gruppen:
  ✔ DIN A4 Papier
  ✔ iPad oder Computer
  ✔ https://mx3030.github.io/fdm3/

Einstieg - Realsituation

Methode

- Realitätsnaher Arbeitsauftrag
- SuS sollen einen Behälter aus einem DIN A4 Papier falten.

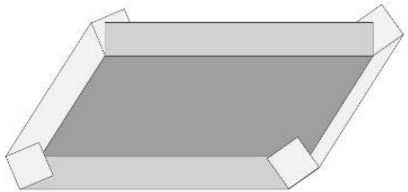
Begründung

- Herstellung von Alltagsbezug
- Konkrete Aufgabe steigert Schüleraktivität (enaktiv)
- Zielvolumen angegeben werden, wenn SuS danach fragen
- Direkte Frage nach maximalem Volumen setzt Funktionsbegriff bereits voraus und ist daher nicht geeignet
- Fehlvorstellung (SuS erwarten unabhängiges Volumen) muss langsam gelöst werden

Arbeitsblatt

Die Kuchenform

a) Du wirst beauftragt mit der Herstellung einer Kuchenform. Entwerfe einen Behälter aus einem DIN A4 Papier. Verwende die dargestellte Faltskizze.



Arbeitsphase 1.1 - Wiederholung

Methode
• Messen und Volumenbestimmung • Arbeit mit Tabelle
Begründung
• Anknüpfen an Vorwissen • Spielerisches Finden der Formel möglich • Motivation und Interesse aufbauen • Ergebnis spielt keine Rolle

Arbeitsblatt

b) Bestimme das Volumen deines Behälters mit der Formel

Breite	Volumen	$\cdot$	Höhe	Länge	$=$	$\cdot$

Einfacher: $V = h \cdot b \cdot l$

Trage dein Ergebnis in die Tabelle ein. Dein Auftraggeber benötigt ein Volumen von $1120\ cm^3$. Ist dein Behälter geeignet?

Name	h [cm]	b [cm]	l [cm]	V [cm]
Max	2.5	16	24.7	988

Arbeitsphase 1.2 - Vermutungen

Methode

- Arbeiten mit Tabelle
- Vermutungen aus Tabelleneinträge folgern
- Kommunikation mit Mitschülern

Begründung

- Fragen aufwerfen (unabhängiges Volumen?)
- Erzeugen neuer Problemstellungen
- Festhalten der Vermutungen ermöglicht am Ende einen Rückblick und ggf. Korrektur
- Lernen im Team
- Lösungssuche durch gegenseitigen Austausch
- Interaktivität ermöglicht Selbstkontrolle

Arbeitsblatt

Sammle weitere Ergebnisse aus deiner Klasse und fülle damit die Tabelle. Welche Aussagen sind deiner Meinung nach richtig oder falsch?

- Man kann einen passenden Behälter bauen.
- Wenn die Höhe größer wird, wird auch das Volumen größer.
- Je niedriger die Box, desto größer das Volumen.
- Wenn die Höhe größer wird, werden Breite und Länge kleiner.
- Es gibt verschiedene Behälter mit gleichem Volumen.
- Es gibt nur einen Behälter mit dem größten Volumen.

Ob deine Vermutungen stimmen, wirst du im Laufe des Arbeitsblattes herausfinden. Drücke auf Weiter um deine Eingaben zu speichern.

Besprechung - Problemstellung

Methode
• Sammeln der Vermutungen ohne Bewertung
Begründung
• Unterschiedliche Ergebnisse schaffen Problembewusstsein • SuS sollen erkennen, dass ein neuer Zugang notwendig wird um Fragestellungen beantworten zu können. Probieren reicht nicht aus. • Herausarbeiten des eigentlichen Problems: Gibt es eine optimale Box?

Arbeitsphase 2 - Modellbildung

Methode
• Interaktive Modellbildung mit GeoGebra-Applet • Rückmeldung bei richtigen und falschen Antworten
Begründung
• Differenzierung setzt ein, durch das Ermöglichen von selbständigem Arbeiten mit Rückmeldungen • Konzentration kann auf schwächere SuS gelegt werden • Erhaltung der Aufmerksamkeit und Motivation durch Abwechslung (ikonisch) • Formel angeben (symbolisch) ➔ EIS • Vorbereitung für schrittweise Berechnung des Volumens

Arbeitsblatt

c) Vervollständige die Skizze des Faltvorgangs. Setze dazu die Größen an die grün markierten Linien und die Faltlinien in passende Positionen.

Prüfe Eingabe

Mit welcher Formel lässt sich die Breite b aus der Skizze bestimmen?

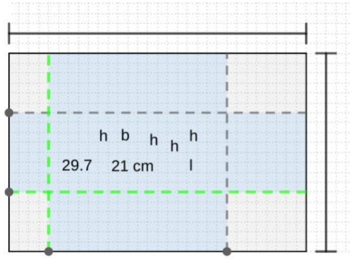
$b =$

Mit welcher Formel lässt sich die Länge l bestimmen?

$l =$

Wie groß kann h maximal werden? $h <$

Wie groß kann h minimal werden? $h >$



Arbeitsphase 3.1 - Zuordnungsaspekt

Methode

- Zerlegung des Funktionsterms in schrittweise Rechnung
- Verwendung der Tabellenkalkulation oder Berechnung von Hand

Begründung

- Schrittweise Zerlegung macht die Bedeutung der gefundenen Abhängigkeiten deutlich
- Differenzierung durch Verwendung der Tabellenkalkulation möglich
- Tabellenkalkulation verhindert Ausfüllen entlang der Spalten bei Breite und Länge
- Aktionsebene A ➔ T (Zuordnungsaspekt)

Arbeitsblatt

d) Mit den Ergebnissen aus c) und der Formel für das Volumen kann die Tabelle gefüllt werden. Verwende 1 cm Schritte für die Höhe h. Achte auf eine sinnvolle Darstellung. Prüfe Eingabe

Wählt man eine Höhe h der Box, dann ist das Volumen V ...

1	h [cm]	b [cm]	l [cm]	V[cm^3]
2	1			
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				

Skizze | Zeichnen | Löschen | Fill | Marker

Arbeitsphase 3.2 – Graphische Darstellung

Methode

- Eintragen einiger Werte von Hand
- Eintragen der Werte mit Computer
- Verfeinerung der Schrittweite mit Tabellenkalkulation

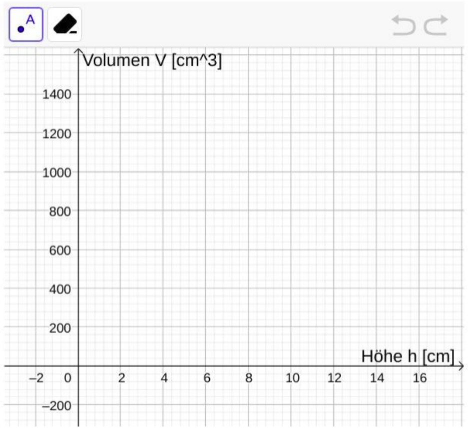
Begründung

- Eintragen von Hand fördert Verständnis und Anerkennung des Computers/Taschenrechners
- Kleinere Schrittweiten führen zur Kurvendarstellung
- Aktionsebene T ➔ G
- Synchronisation zwischen Tabelle, Graph und Skizze fördert Wechsel zwischen Repräsentationen auf Prozessebene

Arbeitsblatt

Trage zunächst 3 Punkte von Hand in das Koordinatensystem ein.
Drücke auf den Zeichnen -Button um die gesamte Tabelle automatisch im Koordinatensystem darzustellen.

Erhöhe die Genauigkeit durch Verwenden einer kleineren Schrittweite (0.1 cm).
Verwende dazu die Möglichkeiten der Tabellenkalkulation. Hilfe
In diesem Fall ist die Darstellung als Kurve besser geeignet. Kurve



Arbeitsphase 4 – Lernfortschritt erkennen

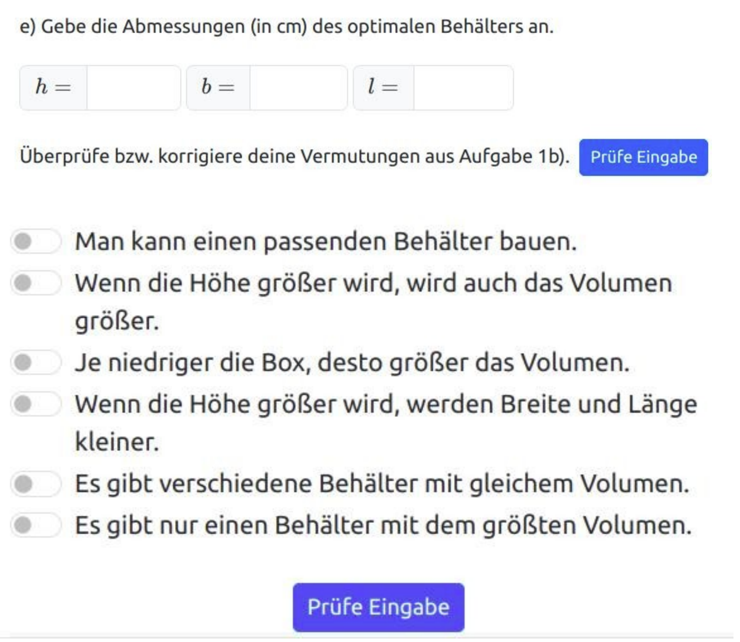
Methode

- SuS verwenden Applets um optimale Abmessungen zu finden
- SuS korrigieren Vermutungen aus 1b)

Begründung

- Aktionsebene G ➔ B oder T ➔ B (für optimalen Behälter)
- Freie Wahl macht Vorteile deutlich
- SuS erkennen Hochpunkt als Eigenschaft der Funktion
- Korrektur der ursprünglichen Vermutungen zeigt Bedeutung von Funktionen und dient zur Wiederholung
- Prozessebene G ➔ B

Arbeitsblatt


e) Gebe die Abmessungen (in cm) des optimalen Behälters an.

$h =$ $b =$ $l =$

Überprüfe bzw. korrigiere deine Vermutungen aus Aufgabe 1b). Prüfe Eingabe

- Man kann einen passenden Behälter bauen.
- Wenn die Höhe größer wird, wird auch das Volumen größer.
- Je niedriger die Box, desto größer das Volumen.
- Wenn die Höhe größer wird, werden Breite und Länge kleiner.
- Es gibt verschiedene Behälter mit gleichem Volumen.
- Es gibt nur einen Behälter mit dem größten Volumen.

Prüfe Eingabe

Interaktive Arbeitsblätter

- GeoGebra Editor: https://www.geogebra.org/worksheet/new
- GeoGebra Dateien in Website einbetten: https://wiki.geogebra.org/en/Reference:GeoGebra_Apps_Embedding

  API: https://wiki.geogebra.org/en/Reference:GeoGebra_Apps_API

Interaktive Arbeitsblätter - Vorteile

- Schnelle SuS erhalten unabhängig von Lehrkraft Rückmeldung ⇒ selbständiges Lernen
- Einbetten von Hilfestellungen bei Falscheingaben
- Angst vor falschen Lösungen sinkt
- Umgang mit Hypertext wird gefördert
- Kontrolle der Leistung oder Wettbewerbe möglich (z.B. durch Punktesystem)

Interaktive Arbeitsblätter - Nachteile

- Rückmeldungen falsch eingesetzt verleiten zu probieren statt verstehen
- Zu starke Anleitung erweckt nur den Schein der Selbstständigkeit
- Speicherung des Arbeitsstands aufwendiger
- Bearbeitung mit mobilen Geräten schwieriger (s.h. GeoGebra Applets)
- Zeitaufwand bei der Erstellung

Beispiele

- https://www.geogebra.org/m/vmqnh3cf
- https://euclid.findell.org/Tutorial/
- https://unterrichten.zum.de/wiki/Einf%C3%BChrung_in_die_Differentialrechnung/Der_Differentialquotient

Quellen

- Beckmann (2009). Didaktik des Mathematikunterrichts der Sekundarstufen. Skript.
- Lambacher Schweizer Stoffverteilungspläne. https://www.klett.de/lehrwerk/lambacher-schweizer-mathematik-ausgabe-baden-wuerttemberg-ab-2014/stoffverteilungsplaene
- Maaß, Siller (2014). Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 2. Springer Spektrum