

Das RSA-Verfahren

6. März 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Das Problem der symmetrischen Verschlüsselung	2
2	Ver-und Entschlüsseln von Nachrichten	5
3	Herstellung eines Schlüsselpaars	5
4	Angriffsmöglichkeiten	5
5	Einsatzgebiete	6
5.1	Digitale Signatur	6
5.2	Hybride Verschlüsselung	6

1 Das Problem der symmetrischen Verschlüsselung

Alice und Bob arbeiten an einem streng geheimen Projekt. Da beide in verschiedenen Städten wohnen, sind sie sich noch nie begegnet. Alice und Bob müssen nun aber wichtige Nachrichten austauschen. Beide haben Angst, dass Oscar versuchen könnte ihre Nachrichten abzufangen. Sie müssen deshalb verschlüsseln.

Leider hat Alice nicht ein einziges Mal Zeit, sich persönlich mit Bob zu treffen. Aus diesem Grund sendet sie alle ihre Nachrichten mit der Post. Eine symmetrische Verschlüsselung der Nachrichten ist dabei keine gute Idee. Warum?

- ☐ Alice müsste Bob einmal das Entschlüsselungsverfahren mitteilen. Wird der Postbote dabei von Oscar abgefangen, kann Oscar alle Nachrichten entschlüsseln.
- ☐ Alle symmetrischen Verfahren sind einfach zu knacken.
- ☐ Da sich symmetrische Verfahren nur für sehr kurze Nachrichten eignen, müssen die beiden viel zu viele Nachrichten hin und her schicken.

Alice wendet deshalb eine asymmetrische Verschlüsselung, das RSA-Verfahren, an. Das RSA-Verfahren wird in vielen Bereichen des alltäglichen Lebens verwendet. Davon wissen aber nur die wenigsten. Es kommt zum Einsatz bei

- Apps zum Chatten (Telegram, Threema, usw.),
- jedem Öffnen einer sicheren Website (<https://...>) im Internet,
- Bankgeschäften oder
- der Fernwartung von Computern.

In diesem Kapitel wollen wir uns nur den Ablauf anschauen. Wie und warum das Ganze funktioniert und absolut sicher ist, erfährst du in den nächsten Abschnitten.

Öffne die Website

<https://mx3030.github.io/rsa/>

und versuche das Senden einer Nachricht von Alice an Bob nachzuvollziehen und selber auszuprobieren.

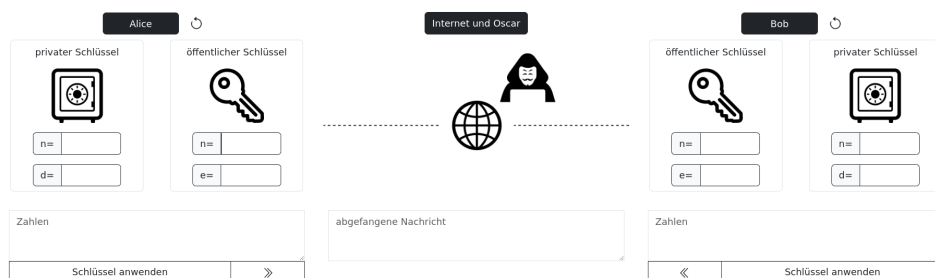



Abbildung 1: Startbildschirm beim Öffnen der Website.

Alice sendet eine Nachricht an Bob

Drücke auf den Button von **Bob** um die Perspektive von Bob einzunehmen.

Bob ↻


öffentlicher Schlüssel



n= 33


e= 17

privater Schlüssel



n= 33

d= 13

Durch Drücken von  baut sich Bob ein Schlüsselpaar (siehe Abschnitt 3) bestehend aus einem öffentlichen und einem privaten Schlüssel.


Der öffentliche Schlüssel besteht aus zwei Zahlen (n, e) und ist frei zugänglich für alle Personen.

Der private Schlüssel besteht aus zwei Zahlen (n, d) und ist ein Geheimnis von Bob.

Drücke auf den Button von **Alice** um die Perspektive von Alice einzunehmen.

Alice ↻


privater Schlüssel



n= 143

d= 113


öffentlicher Schlüssel



n= 143


e= 17

Internet und Oscar



Bob ↻

öffentlicher Schlüssel



n= 55

e= 17

Hallo Bob


Schlüssel anwenden >>

Alice verfasst die Nachricht „Hallo Bob“. Sie wählt den öffentlichen Schlüssel von Bob und verschlüsselt ihre Nachricht durch Drücken von **Schlüssel anwenden**. Durch Drücken von **>>** sendet sie die verschlüsselte Nachricht zu Bob.

Wechsle in die Perspektive von **Bob**.

Bob
↺

öffentlicher Schlüssel




n=

55

e=

17

privater Schlüssel



n=

55

d=

33

allezeg

«
Schlüssel anwenden

Nur Bob kann die Nachricht entschlüsseln, da er im Besitz des privaten Schlüssels ist. Wähle den privaten Schlüssel aus und drücke auf Schlüssel anwenden.

Aufgabe

Sende eine Antwort von Bob an Alice.

Aufgabe

Wie könnte Oscar versuchen die beiden hereinzulegen?

2 Ver-und Entschlüsseln von Nachrichten

Wir wollen nun verstehen, was beim Ver-und Entschlüsseln der Nachrichten passiert. Was läuft also im Hintergrund ab, wenn auf Schlüssel anwenden gedrückt wird. Zunächst machen wir uns klar, dass man jede Nachricht in eine Folge von Zahlenwerte übersetzten kann. Genauers dazu findest du im Zusatzkasten am Ende des Kapitels. Wie werden nun also Zahlen mit dem RSA-Verfahren verschlüsselt?

Aufgabe

Berechne die folgenden Kongruenzen mit der Methode der schnellen Exponentiation.

Aufgabe

Verwende einen Schlüssel mit $n = 10$ und schicke die Zahl 12. Was beobachtest du? Was muss beim Senden von Nachrichten also beachtet werden?

3 Herstellung eines Schlüsselpaars

Damit das Ver-und Entschlüsseln auf diese Art und Weise funktioniert, muss dass eigene Schlüsselpaar nach einer festgelegten Methode gebaut werden. Bei Drücken auf ↻ passiert genau das.

Aufgabe

Konstruiere dein eigenes Schlüsselpaar. Verwende keine Primzahlen > 30 .

Hefte deinen öffentlichen Schlüssel mit Namen an die Tafel.

Nehme dir einen freien öffentlichen Schlüssel von der Tafel und schicke eine verschlüsselte Zahlenfolge (max. 5 Zahlen).

Gebe dem Inhaber des öffentlichen Schlüssels deine Nachricht.

Entschlüssele die Nachricht, die du erhalten hast.

4 Angriffsmöglichkeiten

In diesem Abschnitt wollen wir die Perspektive von Oscar einnehmen. Drücke auf den Button Oscar um seine Situation grafisch darzustellen. Oscar kann nur an die verschlüsselte Nachricht gelangen und kennt den öffentlichen Schlüssel. Warum reichen diese Informationen in der Regel nicht aus um die Nachricht zu entschlüsseln?

Aufgabe

Was muss bekannt sein um das d des privaten Schlüssels zu berechnen?

Aufgabe

Hacke den privaten Schlüssel zu dem öffentlichen Schlüssel, den du in der vorherigen Aufgabe ausgewählt hast.

5 Einsatzgebiete

5.1 Digitale Signatur

5.2 Hybride Verschlüsselung