李括号与流的对易子

timothy e. goldberg

October 23, 2005

摘要

有一个著名且基本的结果表明，两个向量场的流的交换的充要条件是这两个向量场的李括号是零向量场。一个自然的下一步是尝试准确地将李括号偏离零的程度与流无法交换的程度联系起来。我们能否完全按照流的交换失败来描述李括号？

在本次演讲中，我将以一个著名的 (并有点奇异的) 等式的形式给出这个问题的一个答案。为此，我将对向量场、流和李括号做一个简要且一般的介绍。如果时间允许，我将讨论这个公式最自然的上下文，即李群。

一些流形的基本知识会有所帮助，但不是真正必要的。在演讲结束时，我将对任意有关漫画书的问题持开放态度。

目录

1 流形

你好，哺乳动物的同胞们。谢谢你的光临。今天故事的主角将是 M，一个光滑的流形。光滑流形是一类拓扑空间，局部看起来像某种 $\mathbb{R}^n$，这样我们就可以对它进行微积分。形容词“光滑”的意思是我们可以随心所欲地取任意多的导数。

对于不熟悉流形的人，可以想象在 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑曲面，如球面。如果不熟悉曲面，可以想象 $\mathbb{R}^n$ 的一个开放子集。如果你不熟悉，我很同情你。

2 切丛

2.1 切向量与切丛

在一个流形中的每一个点 p 都有它自己的小向量空间，称为在 p 处 $\mathcal{M}$ 的切空间 (tangent space)，标志为 $T_p\mathcal{M}$。如果 $\mathcal{M}$ 是连通的，则所有的切空间具有相同的维度。如果你想象把所有这些向量空间聚集在一起，我们得到一个叫做切丛 (tangent bundle) 的东西，用下式标志和定义为

$$T\mathcal{M} := \bigsqcup_{p\in\mathcal{M}} T_p\mathcal{M}.$$

切丛实际上也是一个光滑流形，其维数是原始流形的两倍。你可以把切丛看成是由原始流形钉在一起的一束向量空间，尽管它还有更多的内容。

2.2 映射的微分

如果 $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ 是光滑流形之间的一个光滑映射，则我们有一个诱导映射 $df:T\mathcal{M}\to T\mathcal{N}$，并且

$$df|_{T_p\mathcal{M}}:T_p\mathcal{M}\to T_{f(p)}\mathcal{N}$$

对于每一个 $p \in M$ 它是一个线性映射。

3 向量场

3.1 作为切向量

在我们剧本中的其他主要角色是向量场 (vector fields)。一个向量场是一个光滑映射 $X : \mathcal{M} \to T\mathcal{M}$，使得 $X(p) \in T_p\mathcal{M}$ 对于所有 $p \in \mathcal{M}$ 成立。将一个向量场视为在每个切空间中放置的一个向量，以使得向量随着切空间的变化而光滑变化。

3.2 $C^\infty(\mathcal{M})$

另一种表征向量空间的方法是利用在 $\mathcal{M}$ 上的光滑实值函数的集合 $C^\infty(\mathcal{M})$，它在这里起着极其重要的辅助作用。(对我来说，这些函数似乎从来都不是主要的表征，但它们总是为理解和解释其他事物提供重要的上下文。) 这是一个在 $\mathbb{R}$ 之上的向量场，无限维，并且它是一个在 $\mathbb{R}$ 之上的代数。你可以将它们相加，相乘，以及用标量相乘。

3.3 作为导子

在 $C^\infty(\mathcal{M})$ 上的一个导子 (derivation) 是一个线性映射 $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$,它服从 Leibniz 规则或乘积规则：

$$D(f \cdot g) = f \cdot D(g) + D(f) \cdot g.$$

一个导子就像一个方向导数，在它的口袋里有一个向量。如果你给我一个函数和一个点，我可以取得它在向量的方向上的方向导数。每一个向量场 X 诱导出一个类似于这样的导子 D_X。如果你给我一个函数和一个点，在该点处由 X 给出的方向上，我可以取得它在该点处的方向导数。每一个导子都会诱导出一个光滑的向量场，这是一个重要的、非平凡的事实。

4 流 (Flows)

4.1 单个卵石 — 被积曲线

就像我前面提到的，向量场在流形的每一点上都给出一个方向。现在，让我们想象一下，把一个卵石丢进流形中，让它沿着向量场给出的方向游动。想象一条有水流的小溪，一颗鹅卵石掉进了小溪里。(你也要想象卵石不下沉，也许一根小树枝更好，无论如何，这个类比是不完美的。) 注意卵石流动时的时间，想象卵石也向后流动，我们得到了一条曲线 $c(t)$，它在时间零点穿过一个点，并且每次的导数总是与向量场相匹配。这叫做向量场通过该点的被积曲线。被积曲线可能无法永远连续。在流变得太混乱之前，它可能只能在有限的时间内移动。记住，这是一个非常聪明的卵石。它不只是朝一个方向起飞并一直向前。在每一点上，它都会重新评估它应该前进的方向。因此，被积曲线只能定义在零点的小邻域上。

4.2 很多卵石 — 完整的流

现在想象一下我们做了一些激烈的事情。我们取一整束卵石，然后在同一时间在每一个点上放一个卵石，让卵石都跟随向量场的流动。对于每一个足够小的 t，所有的卵石都在流动，直到时间 t，我们得到一个光滑的映射

$$\Phi_X^t : \mathcal{M} \to \mathcal{M},$$

称为向量场 X 的时间 t 的流。X 的时间 t 的流的象给出了在时间 t 时在 X 方向上 $\mathcal{M}$ 的所有点的大规模迁离。注意 Φ_X^0 是恒等式。

4.3 半群性质 — 流是微分同胚

流有一个非常重要的特性。我们可以问，如果让一颗卵石在时间 s 内流动，然后在时间 t 内流动多一点，会发生什么情况。结果与卵石在 $s+t$ 时间内流动的结果相同。因此 $\Phi_X^t \circ \Phi_X^s = \Phi_X^{s+t}$，只要两侧都被定义。这意味着

$$\Phi_X^{-t} \circ \Phi_X^t = \Phi_X^0 = \Phi_X^t \circ \Phi_X^{-t},$$

所以 Φ_X^t 有一个光滑的逆，这就是我们所说的微分同胚，在光滑流形中的一个同构。这是非常酷，非常有用。

5 两个向量场

5.1 流能否交换?

现在我们加大赌注，并看看两个向量场，X 和 Y。这给了卵石两个不同的方向。我们可以问以下非常有趣的问题。假设我们把卵石扔下去，让它在时间 t 内随着 X 流动，然后在时间 t 内随着 Y 流动。另一方面，如果卵石先与 Y 一起流动，然后与 X 一起流动，会怎么样？这颗卵石两次都会出现在同一个地方吗？对于映射，我们要问如果

$$\Phi_Y^t \circ \Phi_X^t = \Phi_X^t \circ \Phi_Y^t.$$

流能否交换？

5.2 回答是的一个例子 — 常数向量场

一般来说，答案是... 否！让我们举一个简单的例子。假设我们的流形是 $\mathbb{R}^n$，两个向量场是恒定的。然后这些向量场通过一个给定点的流在空间中是直线，我们的情况在空间中用一个平行四边形来表示。因为这个平行四边形是闭合的，所以流是交换的。这与更一般的向量场有何不同？

5.3 为什么一般的答案是否定的：我们的卵石聪明的

恒定向量场的情况是，如果我们的卵石很笨，选择了一个方向，然后就一直朝那个方向移动，会发生什么情况。对于不同的向量场，使用我们的智能卵石，方向每时每刻都在重新评估。没有理由认为事情最终会弯曲和扭转在一起。

6 李括号给出答案

这是一个好问题。有没有一种简单的方法来判断两个向量场的流是否交换？答案是不，我只是开玩笑。答案是肯定的。

6.1 导子的定义

我们取两个向量场，并构建一个新的向量场。如果这个新的向量场始终为零，则流交换。如果不为零，就不可交换。回想一下，X 和 Y 会诱导导子 D_X 和 D_Y。我们定义一个映射 $D_{[X,Y]}: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 为

$$D_{[X,Y]} = D_X \circ D_Y - D_Y \circ D_X.$$

很明显，这是一个线性映射，但是没有理由假设它满足乘积规则。绝对没有理由认为这是一个导子，除非，也许，它实际上就是！由于导子对应于向量场，这因此定义了一个新的向量场 $[X,Y]$，称为 X 和 Y 的李括号。

6.2 李导数的定义

还有另一种方法可以得到两个向量场并产生一个新的向量场，称为李微分。幸运的是，我们最终得到了同样的结果。Y 在 X 方向上的李导数等于 X 和 Y 的李括号，

$$\mathscr{L}_X Y = [X,Y].$$

6.3 基本定理

所以，我们有

$$\Phi_Y^t \circ \Phi_X^t = \Phi_X^t \circ \Phi_Y^t \quad \text{if and only if} \quad [X,Y] = 0.$$

(李括号的导子定义使得它与交换性有关的原因变得特别明显。来自李导数的定义则不太明显。)

回想一下，X 的流与自身交换，因 $[X,X] = 0$。这很酷。实际上，$[X,Y] = -[Y,X]$ 也是正确的。

但 $[X,Y]$ 是一个全新的向量场，并且它不总是为零。然后呢？如果我们知道流有多少无法交换，我们能算出李括号是什么吗？

7 对易子

7.1 群的对易子映射

为了回答这个问题，我们稍微改变一下配置，设 G 是一个群。则我们有映射 $K: G \times G \to G$，由 $(g,h) \mapsto h^{-1}g^{-1}hg$ 给出，即 G 的对易子映射。如果两个元素交换，则在此映射下的象为零。因此，这个映射采用两个元素，并以某种方式衡量它们交换的失败。回到流形，我们注意到微分同胚 $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 的集合 $\mathrm{Diff}(\mathcal{M})$ 在组合之下形成一个群。因此我们可以讨论两个微分同胚的对易子。记住，流是微分同胚。

7.2 流的对易子映射

如果我们简化方程 $\Phi_Y^t \circ \Phi_X^t = \Phi_X^t \circ \Phi_Y^t$，我们获得了 $\Phi_Y^{-t} \circ \Phi_X^{-t} \circ \Phi_Y^t \circ \Phi_X^t = \mathrm{Id}$。这个方程的左边是在 t 时刻 X 和 Y 的流的对易子，因此 $[X, Y] = 0$ 当且仅当 X 和 Y 的流的对易子是恒等式。这是很合理的，那么也许有一个等式把这两件事联系起来。

7.3 固定一个点 — 关键曲线

7.3.1 一阶导数

让我们固定一个点 $p \in \mathcal{M}$。则我们可以定义通过 p 的一条曲线 c_p 为

$$c_p(t) = \Phi_Y^{-t} \circ \Phi_X^{-t} \circ \Phi_Y^t \circ \Phi_X^t(p) = K\left(\Phi_X^t \circ \Phi_Y^t\right)(p).$$

我们有通过 p 的一条曲线，并在 p 处有一个向量 $[X, Y](p)$。如果这条曲线的速度与向量相同，这将是世界上最自然的事情。

好得难以置信。这是一个非常重要且非常令人困惑的事实，$c_p'(0) = 0$。曲线 c_p 等价于在 p 处的常数曲线，直至一阶。

7.3.2 二阶导数

实际情况是

$$[X, Y](p) = \frac{1}{2} c_p''(0).$$

你们中间细心的人可能会注意到这里有点可疑。左侧是 $\mathcal{M}$ 的切向量，但 $c_p'(t)$ 是在切丛 $T\mathcal{M}$ 中的曲线，因此 $c_p''(0)$ 是 $T\mathcal{M}$ 的切向量 (tangent vector)。左侧属于 $T\mathcal{M}$，但右侧属于 $T(T\mathcal{M})$！这个方程怎么解释?!?!?

8 解释 — 切向量的其他思考方式

8.1 点导子

我们必须后退一点，记住向量场可以由导子给出。同样地，可以通过点导子 (point derivation) 给出单个向量。在 p 处的一个点导子是一个线性映射 $D_p : C^\infty(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$，使得

$$D_p(f \cdot g) = D_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot D_p(g).$$

你可以将一个点导子视为一个方向导数，其中包含一个点和一个从该点开始的切向量。切空间 $T_p\mathcal{M}$ 可以用在 p 处所有的点导子的空间来识别。

8.2 作为点导子的无穷小曲线

但它会变得更好。每一条通过 p 的微小曲线都以其速度定义在 p 处的切向量。由于在 p 处的切向量是在 p 处的点导子，因此每一个微小曲线也必须定义一个点导子。实际上很容易看出这是如何工作的。设 c 是一条曲线，其中 $c(0) = p$，则 c 在 p 处通过下式作用于函数 f

$$f \mapsto (f \circ c)'(0).$$

注意这是一个实数，因为 $f\circ c$ 只是一个单变量微积分函数。你可以很快地检查它是否遵循乘积规则。

9 奇异的点导子，由二阶导数给出

现在，我们可以使用 c_p 在 0 处的二阶导数来定义在 p 处的点导子，但这实际上取决于一个重要但奇异的事实，即 $c_p'(0)=0$。通过 $D_p(f):=(f\circ c_p)''(0)$ 定义在 p 处的一个点导子 D_p。这当然是一个线性函数 $C^\infty(\mathcal{M})\to\mathbb{R}$，但是证明它服从乘积规则取决于我们奇异的事实。我们计算

$$
\begin{gathered}
(f\circ g\circ c_p)''(t)=\frac{d}{dt}(f\cdot g\circ c_p)'(t)\\
=\frac{d}{dt}(f\circ c_p)'(t)(g\circ c_p)(t)+(f\circ c_p)(t)(g\circ c_p)'(t)\\
=(f\circ c_p)''(t)(g\circ c_p)(t)+(f\circ c_p)'(t)(g\circ c_p)'(t)+(f\circ c_p)'(t)(g\circ c_p)'(t)+(f\circ c_p)(t)(g\circ c_p)''(t)\\
=(f\circ c_p)''(t)(g\circ c_p)(t)+2(f\circ c_p)'(t)(g\circ c_p)'(t)+(f\circ c_p)(t)(g\circ c_p)''(t).
\end{gathered}
$$

为了使它符合乘积法则，我们想去掉那个讨厌的中间项。但由于 $c_p'(0)=0$，使用链式规则我们有

$$(f\circ c)'(0)=df_{c(0)}c'(0)=df_{c(0)}\overrightarrow{0}=0,$$

其中最后一个事实来自导数是一个线性映射的事实。因此在 $t=0$ 处，那个可怕的计算中的中间项去掉了，并且我们获得

$$
\begin{aligned}
D(f\cdot g)&=(f\cdot g\circ c_p)''(0)=(f\circ c_p)''(0)(g\circ c_p)(0)+(f\circ c_p)(0)(g\circ c_p)''(0)\\
&=D(f)\cdot g(p)+f(p)\cdot D(g).
\end{aligned}
$$

Yay!!!

当然，这一点也不明显，为什么我们会期望 $c_p''(0)$ 给出的切向量随着点 p 的变化而光滑变化。我相信这为真的最直接的原因是，这些向量等于李括号给出的向量的两倍，这绝对是光滑的。

读书笔记

对 6.3 节注释内容的理解。

在现代数学中，李括号是研究微分几何中向量场的交换性的重要工具。给定两个光滑向量场 X 和 Y，它们的李括号 $[X,Y]$ 本身也是一个向量场，并具有以下性质：如果 $[X,Y]=0$，那么这两个向量场在流形上产生的流是可交换的。

导子定义 (Derivation Definition)

向量场的李括号可以通过导子定义来理解。在这个定义中，向量场被视为作用在光滑函数上的导数算子，即对于任意光滑函数 f，向量场 X 定义了一个导数 $X(f)$。当我们说导子时，我们指的是满足莱布尼茨法则 (Leibniz rule) 的线性算子 D，即对于任意的光滑函数 f 和 g，有：

$$D(fg) = fD(g) + D(f)g.$$

对于两个向量场 X 和 Y，它们的李括号 $[X,Y]$ 定义为另一个导数算子，作用在函数上的效果是：

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

这个导子定义直接反映了 X 和 Y 的交换性，因为如果 $[X,Y]=0$，则 X 和 Y 在任意函数 f 上的作用是可交换的。这就揭示了向量场流不可交换的程度。

李导数定义 (Lie Derivative Definition)

李导数是另一种表述向量场变化的方式，它描述了一个向量场沿着另一个向量场流动时的变化。对于两个向量场 X 和 Y，Y 沿着 X 的李导数定义为：

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_t^* Y - Y}{t},$$

其中，Φ_t^* 表示 X 产生的流在时间 t 的拉回 (pullback)。李导数的定义涉及到流和推前映射，它们没有那么直接地反映出向量场的交换性。

为什么导子定义更加直观?

导子定义直接涉及向量场作为导数算子的性质，它们的作用在函数上面是可以直接计算的。因此，当我们考虑 $[X,Y](f)$ 时，我们实际上是在考虑 X 和 Y 在每个点上的作用是否交换，这是一种局部性质，容易直观理解。

相反，李导数定义涉及到流的全局性质和向量场的整体变化，这需要更深层次的理解。它是在整个流形上的全局动态下考虑的，这不如导子定义那样直接表现向量场在每个点上的交换性。

综上所述，当我们想要直观地理解两个向量场之间的交换性时，导子定义提供了一种更简洁、直接的方式来看待这个问题。而李导数定义则在理解向量场沿着另一个向量场的流动时提供了动态的视角。两者各有优势，但在直观上理解交换性时，导子定义往往更为明显。

简要总结

1. 李括号 $[X,Y]$ 的导子定义是:

$$D_{[X,Y]} = D_X \circ D_Y - D_Y \circ D_X$$

这里 D_X 和 D_Y 分别是向量场 X 和 Y 所对应的导子。这个定义直接捕捉了 X 和 Y 的非交换性 (non-commutativity)。如果 X 和 Y 是可交换的 (即它们的流量可交换)，那么 D_X 和 D_Y 也是可交换的，于是 $D_{[X,Y]} = 0$。这说明 $[X,Y] = 0$，即 X 和 Y 的李括号为 0。

2. 而李导数的定义则不那么直观地反映交换性。李导数 $L_X Y$ 试图衡量 Y 沿着 X 的方向的变化率。这个定义本身并不显然与 X 和 Y 的流是否可交换有关。

3. 因此，李括号的导子定义更直接地把握了交换性这个概念，这一点在定理“$[X,Y] = 0$ 当且仅当 X 和 Y 的流可交换”中得到体现。而李导数的定义这一点则不那么明显。

总的来说，李括号导子定义中的 D_X 和 D_Y 的组合抓住了交换性的本质，这是它与李导数定义的一个重要区别。这也解释了为什么文档中会说李括号的导子定义使得它与交换性的关联“特别明显”。

对初始问题的理解

在现代微分几何中，两个向量场 X和Y 的李括号标志为 $[X,Y]$，它可以描述两个向量场生成的流之间的交换性质。具体来说，对于两个光滑向量场 X 和 Y，它们的李括号 $[X,Y]$ 是另一个向量场，它在直观上给出了 X 和 Y 的局部流之间的差分。如果两个向量场的李括号为零，即 $[X,Y] = 0$，则这两个向量场生成的流是可交换的，这意味着沿着这两个向量场的流形成的路径是不依赖于路径顺序的；反之，如果李括号非零，则它给出的流的交换失败的度量。

向量场 (Vector Fields)

向量场是在流形上的一个切向量赋值函数，它为每一个点分配一个切向量的光滑映射。向量场不仅定义方向，还定义幅值。在物理学中，向量场可以表示速度场或力场，指导如何在流形上导引物体的运动。数学上，我们通常表达为 $X : M \to TM$，其中 $X(p) \in T_pM$ ，M 是流形，TM 是其切空间，它对于所有 $p \in M$ 成立。

李括号 (Lie Bracket)

李括号 $[X,Y]$ 定义为两个向量场 X 和 Y 的导数操作的差分，具体表示为：

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

其中 $f \in C^\infty(M)$ 是定义在流形 M 上的光滑函数。这个操作本身就是一个向量场，因为它满足向量场作为导子的性质，即线性和莱布尼茨法则。

从直观上来说，李括号 $[X,Y]$ 描述了在 X 的作用下 Y 的变化，反之亦然。这可以通过考虑 X 和 Y 在一个小邻域内生成的流的行为来理解。李括号是可交换性失败的一阶近似，可以通过关键曲线 $c(t)$ 的二阶导数在 $t = 0$ 时来计算：

$$[X,Y]_p = \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} c(t)(p).$$

这表明李括号 $[X,Y]$ 实际上是曲线 $c(t)$ 在 $t = 0$ 时的加速度 (二阶导数)，给出流不对易的确切测量。这个加速度是沿着流 Φ_X^t 和 Φ_Y^t 形成的路径的偏离率。

李导数 (Lie Derivatives)

向量场上的李导数是度量一个向量场沿着另一个向量场流动时的变化率。它由李括号 $L_X Y = [X, Y]$ 定义，其中 X 和 Y 是两个向量场。李导数是研究流形上向量场如何相互作用的有力工具，它展现了向量场的局部对称性和守恒定律。

积分曲线 (Integral Curves)

积分曲线是在流形上的曲线，它们由向量场的局部特性来定义。对于流形 M 上的光滑向量场 X 和流形上的一个点 $p \in M$，积分曲线是从点 p 出发的曲线 $c : I \to M$(其中 I 是实数的一个区间，通常包括 0)，满足初始条件 $c(0) = p$ 和微分方程：

$$\frac{dc(t)}{dt} = X_{c(t)},$$

其中 $X_{c(t)}$ 是向量场在曲线 $c(t)$ 处的值。积分曲线可以看作是流形上的点在向量场指示的方向上随时间的移动路径。

流 (Flow)

流是积分曲线概念的全局化。它描述了流形上所有点在向量场中随时间的演进。正式的定义是，对于在流形 M 上的向量场 X，流是一族微分同胚 $\Phi^t : M \to M$，满足：

$$\frac{d}{dt}\Phi^t(p) = X_{\Phi^t(p)},$$

这个方程表示点 p 在时间 t 经过流 Φ^t 后的位置。对于每个点 $p \in M$，流的轨迹 $t \mapsto \Phi^t(p)$ 就是通过点 p 的积分曲线。

流是动力学系统中的一个关键概念，它不仅描述了单个点的运动，还描述了整个流形随时间的演化。在物理学中，流通常对应于物理系统状态的时间演变。

积分曲线与流 (Integral Curves and Flows)

积分曲线是向量场中沿着给定方向的曲线，其在每一个点的切向量都与向量场对应。对于向量场 X，通过点 p 的积分曲线是一个曲线 $c(t)$，使得 $\frac{dc(t)}{dt} = X_{c(t)}$。流是积分曲线的一般化，它描述了随着时间的流逝，点在向量场中的移动。对于向量场 X，它的流 Φ_X^t 是一个描述流形如何随时间演变的一族微分同胚。也就是说，流是将积分曲线概念扩展到整个流形，代表了随时间演进的整个流形的状态。

总之，积分曲线提供了向量场在流形上每一点局部作用的具体实例，而流则展示了整个流形上向量场的全局动力学行为。流可以视为通过每一点的积分曲线的集合，从而形成了一个更完整的动力学系统的描述。

向量场作为导子 (Vector Fields As Derivations)

向量场可以作为导子，可以作用于光滑函数空间 $C^\infty(M)$。它对光滑函数 f 进行操作，得到一个新的函数 $X[f]$。这在代数上是一个导子，满足莱布尼兹法则：$X[f \cdot g] = f \cdot X[g] + X[f] \cdot g$。这种描述强调了向量场不仅影响流形上的点，也通过其导数作用影响函数。

曲线及其一阶和二阶导数 (The Curve, The First Derivative, and The Second Derivative)

对于两个不可交换的流，我们可以固定一个点 p，并构造一条关键曲线 $c(t)$ 来描述两个流的交换失败。该曲线 $c(t)$ 的一阶导数 $c'(0)$ 在 $t=0$ 时为零，说明流的交换性与恒等映射的一阶导数相同。但是曲线的二阶导数 $c''(0)$ 给出了流的交换性失败的度量，这与李括号 $[X,Y](p)$ 相联系。即该曲线反映了粒子在两个向量场下交换顺序运动的路径。

点导子与无穷小曲线作为点导子 (Point Derivations and Infinitesimal Curves as Point Derivations)

点导子是在流形的某一点处切空间中的一个线性映射，它将函数 f 映射到实数并遵循莱布尼兹法则，可视为在该点处的切向量。无穷小曲线通过点 p 定义在 p 处的切向量 v，因而也定义了一个点导子 D，使得对于任意的光滑函数 f，$D[f]=v[f]$。

二阶导数给出的点导子 (The Point Derivation, Given by the Second Derivative)

利用曲线 $c(t)$ 在 $t=0$ 处的二阶导数定义点导子，这依赖于曲线的一阶导数在 $t=0$ 处为零这一事实。这种点导子 D_p 可以通过 $D_p(f)=(f\circ c)''(0)$ 定义，它满足莱布尼兹法则。这种二阶导数定义的点导子可以捕捉到流的对易子的无穷小行为，因此揭示了流的不可交换性的更深层次的信息。

流与李括号的关系

给定向量场 X，它的流 Φ_X^t 是 M 上的一族微分同胚，描述了每个点在时间 t 下沿着 X 方向的演化。对于两个向量场 X 和 Y，我们可以考虑先沿着 X 流动时间 t，然后沿着 Y 流动时间 t，这可以标志为 $\Phi_Y^t\circ\Phi_X^t$；反之亦然，可以标志为 $\Phi_X^t\circ\Phi_Y^t$。若这两个复合操作相同，对于所有 t，则称 X 和 Y 的流是交换的。

流的交换性与李括号的关系

给定两个光滑向量场 X 和 Y 以及它们在流形 M 上生成的流 Φ_X^t 和 Φ_Y^t，我们可以考虑以下组合映射：

$$\Gamma(t)=\Phi_Y^{-t}\circ\Phi_X^{-t}\circ\Phi_Y^t\circ\Phi_X^t.$$

然后，我们考虑 $\Gamma(t)$ 在 $t=0$ 时的行为。如果 X 和 Y 生成的流是对易的，那么对于所有的 t，$\Gamma(t)$ 将是恒等映射。如果流不对易，$\Gamma(t)$ 的行为会揭示流的对易失败的程度。

流的交换性可以通过考虑在某点 p 处的行为来刻画。设想一个关键曲线 $c(t)$，它是由复合流 $\Phi_Y^{-t}\circ\Phi_X^{-t}\circ\Phi_Y^t\circ\Phi_X^t(p)$ 定义的。这条曲线在 $t=0$ 时通过点 p，并且其一阶导数 $c'(0)$ 恰好是零。这表明，至少在无穷小的时间内，流似乎是交换的。然而，曲线 $c(t)$ 在 p 处的二阶导数 $c''(0)$ 给出了流不交换的一阶近似，这与李括号有关：

$$[X,Y](p)=\frac{1}{2}c''(0)$$

这个关系实际上描述了如何从流的不交换性中获得李括号的信息。直观上，如果你考虑两个无穷小的流的对易子，它们在一阶导数上可能看起来是交换的，但在二阶导数上就能揭示出它们的微妙差异。

将以上关键点综合起来的阐述

1. 向量场作为导子
   向量场 X 在每一点 p 给出一个切向量 $X(p)$。我们可以把向量场看作是一个将函数映射到函数的导子 D_X。对任意函数 f，$D_X(f)$ 给出了 f 沿着 X 方向的方向导数。更深入地说，D_X 满足莱布尼兹律:
   $$D_X(fg) = fD_X(g) + gD_X(f)$$
   这个性质使得 D_X 作为一个导子，能反映 X 的微分运动特征。

2. 向量场的积分曲线和流
   设 X 通过点 p 的积分曲线为 $c(t)$。则我们有:
   $$\frac{dc(t)}{dt} = X_{c(t)}$$
   即 $c(t)$ 曲线的切线方向随时刻变化，永远与 X 的方向一致。
   考虑所有点的积分曲线，在时间 t 时刻，我们就得到一个从初始流形映射到自身的流映射:
   $$\Phi_X^t : M \to M$$
   其中 $\Phi_X^t(p) = c_p(t)$，c_p 表示通过 p 的积分曲线。Φ 反映了从初始位置开始，经过时间 t 在 X 方向上流动后的位置。

3. 流的对易性和李括号
   考虑两个向量场 X 和 Y。一个关键问题是它们的流是否对易，即:
   $$\Phi_X^t \circ \Phi_Y^t = \Phi_Y^t \circ \Phi_X^t$$
   另一种表述是：流的对易性与 X 和 Y 的李括号是否为零向量场等价:
   $$[X, Y] = 0 \Leftrightarrow \Phi_X^t \circ \Phi_Y^t = \Phi_Y^t \circ \Phi_X^t$$
   李括号作为一个向量场，其值完全刻画了两个流的对易情况。

4. 利用流的交换映射构造曲线
   考虑流的交换映射:
   $$\Phi_Y^{-t} \circ \Phi_X^{-t} \circ \Phi_Y^t \circ \Phi_X^t$$
   固定一个点 p，令曲线 $c(t)$ 为该映射作用在 p 上的结果。则 $c(t)$ 通过 p，并反映了两个流顺序交换作用下的运动轨迹。

5. 关键曲线 c 奇异的一阶和二阶导数
   可以证明，曲线 c 满足:
   $$c'(0) = 0$$
   $$c''(0) = 2[X, Y](p)$$
   即该曲线在 $t = 0$ 时的一阶导数为 0，但二阶导数给出了 p 点处的李括号向量的 2 倍。

6. 导子的观点理解切向量
   切向量空间可以看作点 p 的导子空间。每个通过 p 的曲线 c 都定义一个导子 D_c，作用在函数 f 上时对其方向导数有:
   $$D_c(f) = (f \circ c)'(0)$$
   尤其是我们的曲线 c，满足:
   $$D_c(0) = 0, D_c''(0) = 2[X, Y](p)$$
   这与曲线在 $t = 0$ 时的切向量为 0，但二阶导数不为 0 相关。从导子的观点将其理解为非平凡的导子。

7. 李括号的几何意义
   上述奇异性质揭示了李括号的深刻几何意义: 它测量了两个流顺序交换所产生的“第二级影响”。第一级影响 (一阶导数) 为零，但通过二阶导数描述的第二级效应反映了两个非对易流的交换失败的本质。

总结与直觉

流的交换性与李括号的关系在直觉上反映了向量场如何在流形上相互作用和纠缠。如果两个向量场的流完全交换，那么这意味着它们在流形上生成的运动可以自由地重排而不影响最终结果；这在代数上表现为它们的李括号为零。而如果李括号非零，那么向量场的流在组合时会产生新的效果，这在几何上表现为曲线的二阶变化，或者说是流形的曲率。这不仅仅告诉我们两个流在一个点附近如何不交换，更重要的是揭示了整个流形上的结构和对称性破缺。

现代数学视角下，流的交换性与李括号之间的关系可以被看作是对称性和守恒定律在几何层面上的反映。李括号的非零性指出了即使在无穷小尺度上，两个向量场的流也不能完全交换，这揭示了在微分几何中，向量场的流和李括号在描述物理系统的对称性和动力学行为时扮演着核心角色。

在物理中，李括号和流的对易性是研究动力系统、对称性和守恒定律的基本工具。例如，在哈密顿力学中，李括号用于描述物理量在不同的哈密顿流下的演化，这与物理系统的对称性和守恒定律密切相关。在微分几何中，这意味着如果一个物理系统的拉格朗日量在某个连续对称性下不变，那么相应的守恒量可以通过生成这个对称性的向量场的李括号来找到。例如，如果系统在时间平移下是不变的，则能量守恒；如果系统在空间平移下不变，则动量守恒。这些对称性可以通过考察相应的李括号是否为零来理解。

在李群理论中，李代数是对李群结构的线性化描述。对于李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$，李括号 $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 描述了基本生成元之间的相互作用。如果我们选择一个基 $\{T_a\}$，李代数的结构常数 ${f_{ab}}^c$ 由下式给出：

$$[T_a, T_b] = {f_{ab}}^c T_c$$

结构常数度量了基向量场的非交换性，这对应于它们生成的流在局部的非交换性。因此李括号和流的对易性可以用来研究李群结构及其代数性质。

特别地，对于李群，我们可以考虑左不变向量场，这些向量场在李群的左乘作用下保持不变。左不变向量场的流提供了李群的一组局部坐标系的平移，而李括号描述了这些坐标系变换的非交换性质。

因此，流的交换性和李括号之间的关系不只是一个几何问题，也是一个深刻的动力学和对称性问题，这在现代物理学的许多领域中都有非常重要的应用。通过研究这种关系，我们可以更深入地理解流形的几何结构，以及定义在其上的物理定律和对称性。