截面 (纤维丛)

Wikipedia

6 December 2023

在拓扑学的数学领域中，一个纤维丛 E 的一个**截面** (**section**) (或**横截面** (**cross section**)) [1] 是投影函数 π 的一个连续右逆。换句话说，如果 E 是在一个基空间之上的一个纤维丛，B 是:

$$\pi : E \to B$$

则该纤维丛的一个截面是一个连续映射，

$$\sigma : B \to E$$

使得

$$\pi(\sigma(x)) = x \text{ for all } x \in B.$$

一个截面是对一个图 (graph) 的意义的一个抽象表征。一个函数 $g : B \to Y$ 的图可以标识为在 B 和 Y 的笛卡尔积 $E = B \times Y$ 中取值的一个函数：

$$\sigma : B \to E, \quad \sigma(x) = (x, g(x)) \in E.$$

设 $\pi : E \to B$ 为投影到第一个因子的盖射：$\pi(x, y) = x$。则一个图是任意函数 σ，使得 $\pi(\sigma(x)) = x$。

纤维丛的语言允许将截面的概念推广到当 E 不一定是笛卡尔积的情况。如果 $\pi : E \to B$ 是一个纤维丛，则一个截面是在每个纤维中点 $\sigma(x)$ 的一个选择。条件 $\pi(\sigma(x)) = x$ 只是意味着在点 x 处的截面必须位于 x 上。(见图)。

例如，当 E 是一个向量丛时，E 的一个截面是向量空间 E_x 位于每个点 $x \in B$ 之上的一个元素。特别地，在一个光滑流形 M 上的一个向量场是在 M 的每个点处切向量的一个选择：这是 M 的切丛的一个截面 (*section*)。同样地，在 M 上的 1-形式是余切丛的一个截面。

截面，特别是主丛和向量丛的截面，在微分几何中也是非常重要的工具。在这种设置中，基空间 B 是一个光滑流形 M，并且假设 E 是在 M 之上的一个光滑纤维丛 (即 E 是一个光滑流形，并且 $\pi : E \to M$ 是一个光滑映射)。在这种情况下，人们考虑的是 E 在一个开集 U 之上的**光滑截面** (**smooth sections**) 空间，标志为 $C^\infty(U, E)$。在几何分析中，考虑具有中间正则性的截面空间 (例如，C^k 截面，或者在 Hölder 条件或 Sobolev 空间的意义上具有正则性的截面) 也是非常有用的。

1 局部和全局截面

纤维丛通常没有这样的全局截面 (*global sections*) (例如，考虑在 S^1 之上具有纤维 $F = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ 的纤维丛，它是通过取 Möbius 纤维丛并去除零截面而得到的)，因此只定义局部截面也是有用的。

[1] Husemöller, Dale (1994), Fibre Bundles, Springer Verlag, p. 12, ISBN 0-387-94087-1

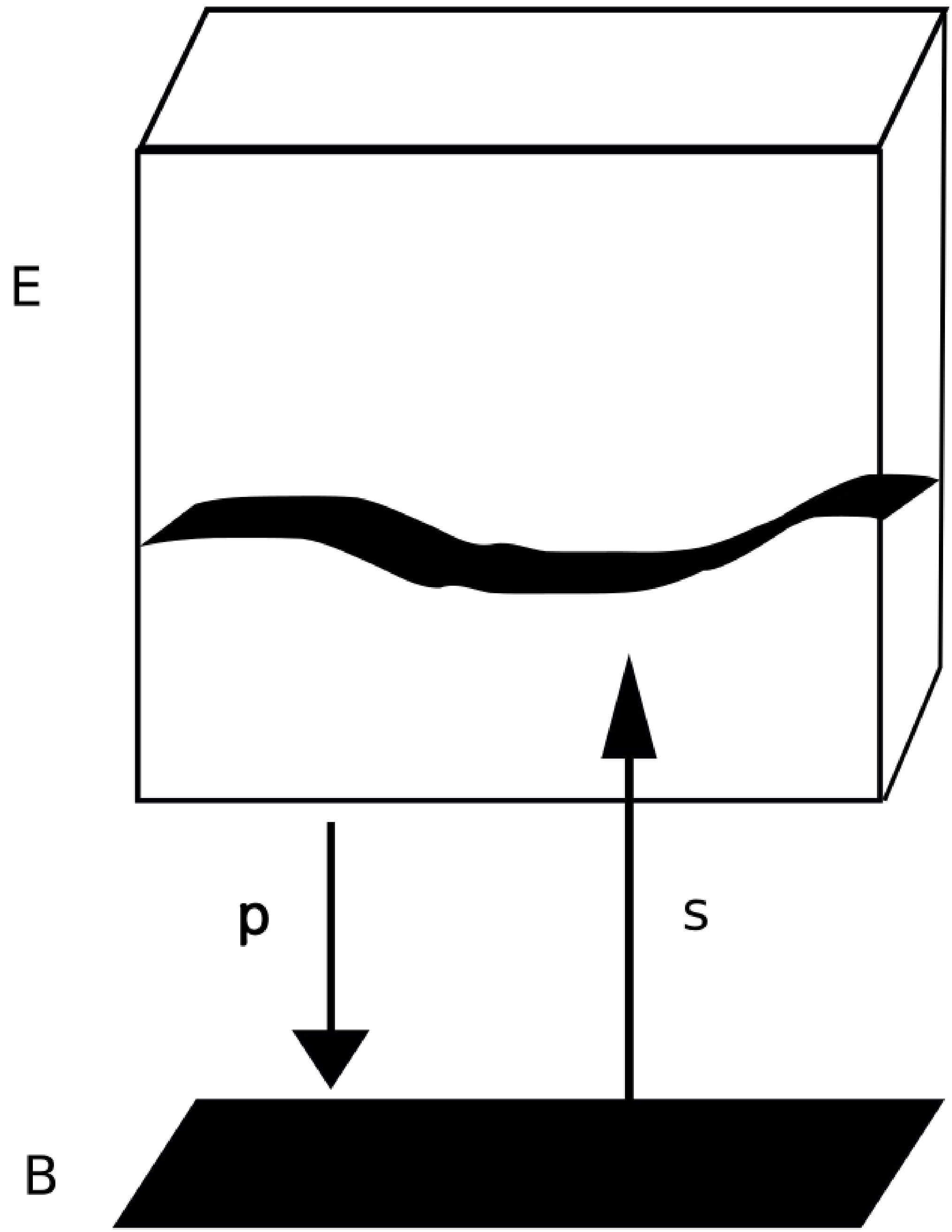

图 1: 一个从 $p : E \to B$ 的一个截面 s。一个截面 s 允许将基空间 B 标识为 E 的一个子空间 $s(B)$。

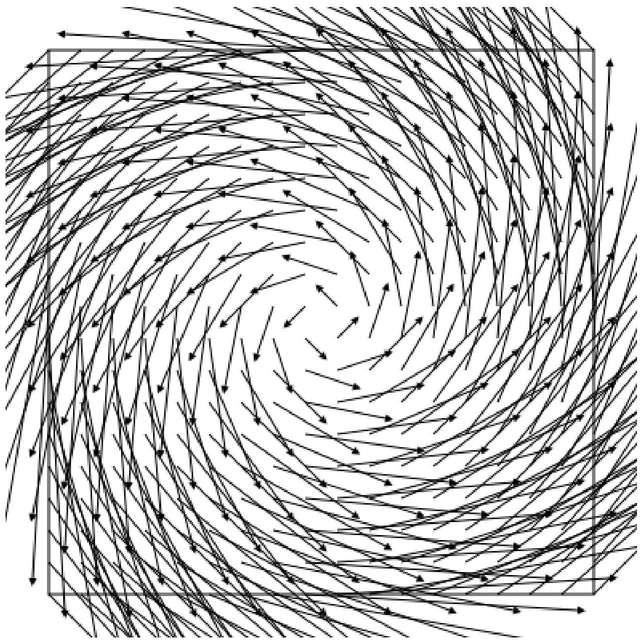

图 2: 在 $\mathbb{R}^2$ 上的一个向量场。一个切向量丛的一个截面是一个向量场。

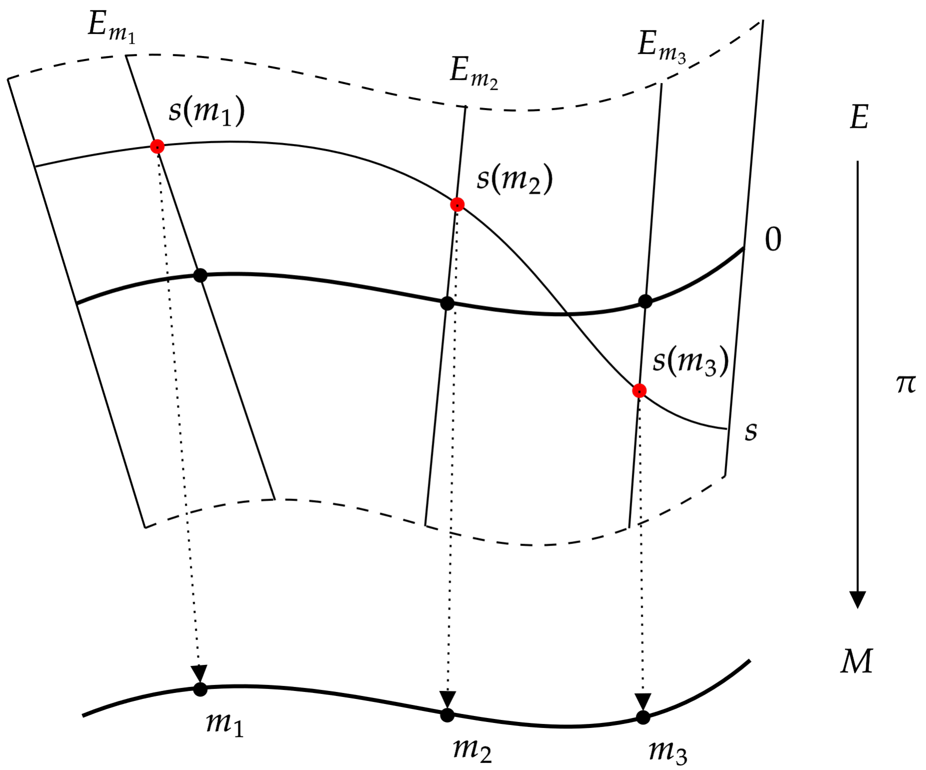

图 3: 在一个基底 M 上的一个向量丛 E，带有截面 s。

一个纤维丛的一个**局部截面** (**local section**) 是一个连续映射 $s : U \to E$，其中 U 是 B 中的一个开集，并且对于在 U 中的所有 x，$\pi(s(x)) = x$。如果 (U, φ) 是 E 的一个局部平凡化，其中 φ 是从 $\pi^{-1}(U)$ 到 $U \times F$ 的一个同胚 (其中 F 是纤维)，则在 U 之上总是存在与从 U 到 F 的具有连续映射的双射相对应的局部截面。该 (局部) 截面在 B 之上形成一个称为 E 的**截面层** (**sheaf of sections**)。

一个纤维丛 E 在 U 之上的连续截面的空间有时标志为 $C(U, E)$, 而 E 的全局截面的空间通常标志为 $\Gamma(E)$ 或 $\Gamma(B, E)$。

1.1 扩展到全局截面

在同伦理论和代数拓扑中研究的是截面，其中一个主要目标是解释**全局截面** (**global sections**) 的存在或不存在。一个障碍否认全局截面的存在，因为空间太“扭曲”。更精确地说，该障碍“阻碍”了将局部截面扩展为全局截面的可能性，因为空间的“扭曲性”。障碍由特定的特征类表征，这些特征类是上同调类。例如，一个主丛有一个全局截面当且仅当它是平凡的。另一方面，一个向量丛总是有一个全局截面，即零截面。然而，只有当它的欧拉类为零时，它才承认一个无处消失 (为零) 的截面。

1.1.1 泛化

扩展局部截面的障碍可以概括为以下方式：取一个拓扑空间，形成一个范畴，其对象是开子集，并包含态射。因此，我们使用范畴来概括拓扑空间。我们使用阿贝尔群层来概括“局部截面”的概念，它为每个对象分配一个阿贝尔群 (类似于局部截面)。

这里有一个重要的区别：直观地说，局部截面就像拓扑空间的一个开子集上的“向量场”。因此在每个点上，都有一个**固定**向量空间的元素被分配。然而，层可以“连续地改变”向量空间 (或更一般的阿贝尔群)。

整个过程实际上是全局截面函子，它为每个层分配其全局截面。然后，层上同调使我们能够在“连续变化”阿贝尔群的同时考虑类似的扩展问题。特征类理论将障碍的概念推广到我们的扩展中。

See also

- Section (category theory)
- Fibration
- Gauge theory
- Principal bundle
- Pullback bundle
- Vector bundle

References

- Norman Steenrod, The Topology of Fibre Bundles, Princeton University Press (1951). ISBN 0-691-00548-6.
- David Bleecker, Gauge Theory and Variational Principles, Addison-Wesley publishing, Reading, Mass (1981). ISBN 0-201-10096-7.
- Husemöller, Dale (1994), Fibre Bundles, Springer Verlag, ISBN 0-387-94087-1

External links

- Fiber Bundle (`https://planetmath.org/fiberbundle`), PlanetMath
- Weisstein, Eric W. ”Fiber Bundle” (`https://mathworld.wolfram.com/FiberBundle.html`). MathWorld.