流 (数学)

Wikipedia

25 October 2023

在数学中，一个**流** (**flow**) 形式化了粒子在流体中运动的概念。流在科学中无处不在，包括工程和物理。流的概念是研究常微分方程的基础。非正式地说，流可以被视为点随时间的连续运动。更正式地说，流是在一个集合上的实数的一个群作用。

一个向量流的概念，即由一个向量场确定的流，出现在微分拓扑、黎曼几何和李群等领域。向量流的具体例子包括测地线流、哈密顿流、Ricci 流、平均曲率流和 Anosov 流。流也可以定义为随机变量系统和随机过程系统，并出现在遍历动力系统的研究中。其中最著名的也许是伯努利流。

1 形式定义

在一个集合 X 上的一个**流** (**flow**) 是在 X 上的实数加法群的一个群作用。更明确地说，一个流是一个映射

$$\varphi : X \times \mathbb{R} \to X$$

使得，对于所有 $x \in X$ 和所有实数 S 和 t，

$$\varphi(x,0) = x;$$
$$\varphi(\varphi(x,t),s) = \varphi(x,s+t).$$

通常用 $\varphi^t(x)$ 代替 $\varphi(x,t)$，这样上述方程可以表达为 $\varphi^0 = \mathrm{Id}$ (恒等函数) 和 $\varphi^s \circ \varphi^t = \varphi^{s+t}$ (群定律)。则，对于所有 $t \in \mathbb{R}$，映射 $\varphi^t : X \to X$ 是具有逆 $\varphi^{-t} : X \to X$ 的一个双射。根据上述定义，实数参数 t 可被视为在函数迭代中的广义泛函幂。

流通常要求与在集合 X 上提供的结构兼容。特别是，如果 X 配备有拓扑结构，则 φ 通常要求是连续的。如果 X 具有可微结构，则 φ 通常要求是可微的。在这些情况下，流分别形成了同胚和微分同胚的单参数群。

在某些情况下，还可以考虑仅在某些子集中定义的**局部流** (**local flows**)

$$\mathrm{dom}(\varphi) = \{(x,t) \mid t \in [a_x, b_x], a_x < 0 < b_x, x \in X\} \subset X \times \mathbb{R}$$

称为 φ 的**流域** (**flow domain**)。向量场的流通常就是这种情况。

1.1 备选符号

在许多领域，包括工程、物理和微分方程的研究中，使用一种使流隐式的符号是非常常见的。因此，将 $\varphi^t(x_0)$ 写为 $x(t)$，并且可以说变量 x 取决于时间 t 和初始条件 $x = x_0$。示例在下面给出。

在一个光滑流形 X 上的一个向量场 V 的一个流，通常用它的生成元显式标志。例如，

$$\Phi_V : X \times \mathbb{R} \to X; \quad (x,t) \mapsto \Phi_V^t(x).$$

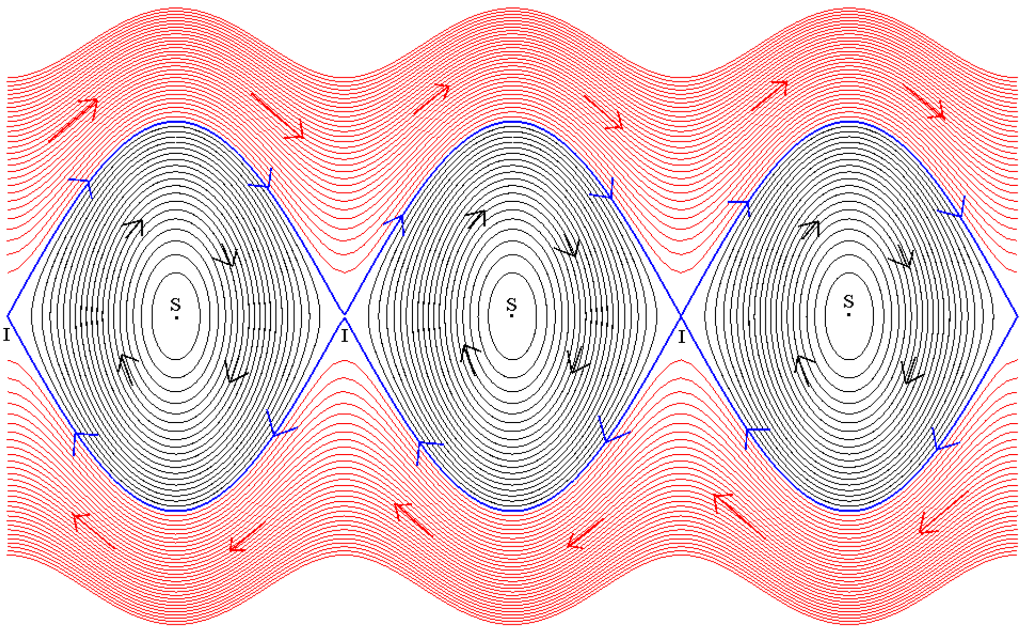

图 1: 由摆的微分方程规定的相空间中的流。在水平轴上，摆锤的位置，在垂直轴上，摆锤的速度。

2 轨道

给定在 X 中的 x，集合 $\{\varphi(x,t):t\in\mathbb{R}\}$ 称为在 φ 之下 x 的轨道。非正式地说，它可以被认为是一个粒子的轨迹，最初定位在 x 处。如果流是由向量场产生的，则它的轨道是其被积曲线的象。

3 示例

3.1 代数方程

设 $f:\mathbb{R}\to X$ 是一个与时间相关的轨迹，它是一个双射函数。则流可以定义为

$$\varphi(x,t)=f\left(t+f^{-1}(x)\right).$$

3.2 自治常微分方程组

设 $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一个 (与时间无关的) 向量场，并且 $\boldsymbol{x}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ 初值问题的解为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t)),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0.$$

则 $\varphi(\boldsymbol{x}_0,t)=\boldsymbol{x}(t)$ 是**向量场 $\boldsymbol{F}$ 的流**。它是良好定义的局部流，如果向量场 $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是 Lipschitz 连续的。则 $\varphi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ 也是 Lipschitz 连续的。通常很难证明流 φ 是全局定义的，但一个简单的判据是向量场 $\boldsymbol{F}$ 是紧支撑的。

3.3 含时常微分方程组

对于含时向量场 $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$，我们标志 $\varphi^{t,t_0}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}(t+t_0)$, 其中 $\boldsymbol{x}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ 是如下方程的解

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t),t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0.$$

则 $\varphi^{t,t_0}(\boldsymbol{x}_0)$ 是 $\boldsymbol{F}$ 随时间变化的流。根据上面的定义，它不是一个“流”，但通过重新排列它的参数，可以很容易地将其视为一个流。即映射

$$\varphi:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R};\quad \varphi((\boldsymbol{x}_0,t_0),t)=\left(\varphi^{t,t_0}(\boldsymbol{x}_0),t+t_0\right)$$

对于上一个变量，它确实满足群定律：

$$\begin{aligned}\varphi(\varphi((\boldsymbol{x}_0,t_0),t),s)&=\varphi\left(\left(\varphi^{t,t_0}(\boldsymbol{x}_0),t+t_0\right),s\right)\\&=\left(\varphi^{s,t+t_0}\left(\varphi^{t,t_0}(\boldsymbol{x}_0)\right),s+t+t_0\right)\\&=\left(\varphi^{s,t+t_0}(\boldsymbol{x}(t+t_0)),s+t+t_0\right)\\&=(\boldsymbol{x}(s+t+t_0),s+t+t_0)\\&=\left(\varphi^{s+t,t_0}(\boldsymbol{x}_0),s+t+t_0\right)\\&=\varphi((\boldsymbol{x}_0,t_0),s+t).\end{aligned}$$

通过下面的技巧，我们可以把向量场的时间相关流看作时间无关流的特例。定义

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t):=(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t),1),\quad \boldsymbol{y}(t):=(\boldsymbol{x}(t+t_0),t+t_0).$$

则 $y(t)$ 是“时间无关”初值问题的解

$$\dot{\boldsymbol{y}}(s)=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}(s)),\quad \boldsymbol{y}(0)=(\boldsymbol{x}_0,t_0)$$

当且仅当 $\boldsymbol{x}(t)$ 是原含时初值问题的解。此外，映射 φ 正是“时间无关”向量场 $\boldsymbol{G}$ 的流。

3.4 流形上向量场的流

在光滑流形上定义与时间无关的和与时间相关的向量场流，其定义与在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 上的定义完全相同，且其局部行为相同。然而，一个光滑流形的全局拓扑结构主要体现在它能支持什么样的全局向量场，而在光滑流形上的向量场流是微分拓扑的重要工具。动力系统的研究大多是在光滑流形上进行的，光滑流形在应用中被认为是“参数空间”。

形式上：设 $\mathcal{M}$ 是一个可微流形。设 $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$ 标志一个点 $p\in\mathcal{M}$ 的切空间，设 $\mathrm{T}\mathcal{M}$ 为完全切流形；即 $\mathrm{T}\mathcal{M}=\cup_{p\in\mathcal{M}}\mathrm{T}_p\mathcal{M}$。设

$$f:\mathbb{R}\times\mathcal{M}\to\mathrm{T}\mathcal{M}$$

是在 $\mathcal{M}$ 上的时间相关的向量场；即 f 是一个光滑映射，使得对于每个 $t\in\mathbb{R}$ 和 $p\in\mathcal{M}$，我们有 $f(t,p)\in\mathrm{T}_p\mathcal{M}$；也就是说，映射 $x\mapsto f(t,x)$ 将每个点映射到其自身切空间的元素。对于包含 0 的适当间隔 $I\subseteq\mathbb{R}$，f 的流是一个函数 $\phi:I\times\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ ，满足

$$\begin{aligned}\phi(0,x_0)&=x_0 &&\forall x_0\in\mathcal{M}\\ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\phi(t,x_0)&=f(t_0,\phi(t_0,x_0)) &&\forall x_0\in\mathcal{M},t_0\in I\end{aligned}$$

3.5 热方程的解

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ (其中 n 为整数) 的子域 (有界或无界)。用 Γ 标志其边界 (假定光滑)。在 $\Omega\times(0,T)$ 上考虑以下热方程，对于 $T>0$，

$$\begin{aligned} u_t-\Delta u=0 &\quad \text{in } \Omega\times(0,T), \\ u=0 &\quad \text{on } \Gamma\times(0,T), \end{aligned}$$

具有以下初始值条件，在 Ω 中 $u(0)=u^0$。

在 $\Gamma\times(0,T)$ 上的方程 $u=0$ 对应于齐次 Dirichlet 边界条件。这个问题的数学背景可以是半群方法。为了使用这个工具，我们引入在 $L^2(\Omega)$ 上定义的无界算子 Δ_D，其域为

$$D\left(\Delta_D\right)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$$

(参见经典的 Sobolev 空间，其中 $H^k(\Omega)=W^{k,2}(\Omega)$，并且

$$H_0^1(\Omega)=\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$

是对于 $H^1(\Omega)$-模在 Ω 中具有紧支撑的无穷可微函数的闭包)。

对于任意 $v\in D\left(\Delta_D\right)$，我们有

$$\Delta_D v=\Delta v=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}v.$$

利用该算子，热方程变为 $u'(t)=\Delta_D u(t)$ 和 $u(0)=u^0$。因此，对应于该方程的流为 (见上述符号说明)

$$\varphi\left(u^0,t\right)=\mathrm{e}^{t\Delta_D}u^0,$$

其中 $\exp\left(t\Delta_D\right)$ 是由 Δ_D 生成的 (解析) 半群。

3.6 波动方程的解

再一次，设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ (其中 n 为整数) 的子域 (有界或无界)。我们用 Γ 标志它的边界 (假定光滑)。考虑以下波动方程 $\Omega\times(0,T)$ (对于 $T>0$)，

$$\begin{aligned} u_{tt}-\Delta u=0 &\quad \text{in } \Omega\times(0,T), \\ u=0 &\quad \text{on } \Gamma\times(0,T), \end{aligned}$$

具有以下初始条件，在 Ω 中 $u(0)=u^{1,0}$，并且在 Ω 中 $u_t(0)=u^{2,0}$。

使用与上述热方程相同的半群方法。通过引入下列无界算子，我们将波动方程写为一阶时间偏微分方程，

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ \Delta_D & 0 \end{pmatrix}$$

其具有在 $H=H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 上的域 $D(\mathcal{A})=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ (该算子 Δ_D 在上一示例中定义)。

我们引入列向量

$$U=\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

(其中 $u^1 = u$ 和 $u^2 = u_t$) 以及

$$U^0 = \begin{pmatrix} u^{1,0} \\ u^{2,0} \end{pmatrix}.$$

利用这些概念，波动方程变成 $U'(t) = \mathcal{A}U(t)$ 和 $U(0) = U^0$。

因此，对应于该方程的流为

$$\varphi\left(U^0, t\right) = \mathrm{e}^{t\mathcal{A}} U^0$$

其中 $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$ 是由 $\mathcal{A}$ 生成的 (酉) 半群。

3.7 伯努利流

遍历动力系统,即具有随机性的系统,也具有流的特性。其中最著名的也许是伯努利流。Ornstein 同构定理指出，对于任意给定的熵 H，存在一个称为伯努利流的流 $\varphi(x,t)$，使得在 $t = 1$ 时的流，即 $\varphi(x,1)$ 是一个伯努利位移。

此外，这个流在时间的常数缩放下是唯一的。也就是说，如果 $\psi(x,t)$ 是另一个具有相同熵的流，则对于某些常数 c，$\psi(x,t) = \varphi(x,t)$。在这里，唯一性和同构的概念是指动力系统的同构。许多动力系统，包括西奈台球和阿诺索夫流，都与伯努利位移同构。

See also

- Abel equation
- Iterated function
- Schröder’s equation
- Infinite compositions of analytic functions

References

- D.V. Anosov (2001) [1994], ”Continuous flow” (https://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Continuous_flow), Encyclopedia of Mathematics, EMS Press
- D.V. Anosov (2001) [1994], ”Measureable flow” (https://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Measureable_flow), Encyclopedia of Mathematics, EMS Press
- D.V. Anosov (2001) [1994], ”Special flow” (https://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Special_flow), Encyclopedia of Mathematics, EMS Press

- This article incorporates material from Flow on PlanetMath, which is licensed under the Creative Commons Attribution/Share-Alike License.