线性形式

Wikipedia

15 June 2024

在数学中，**线性形式 (linear form)** (也被称为**线性泛函 (linear functional)**，[1] **1-形式 (one-form)** 或者**余向量 (covector)**) 是从向量空间到标量域 (通常是实数或复数) 的线性映射。[1]

如果 V 是一个在域 k 上的向量空间，所有从 V 到 k 的线性泛函的集合自身构成了一个在 k 之上的向量空间，其中加法和标量乘法被逐点定义。这个空间被称为 V 的对偶空间，或有时称为**代数对偶空间 (algebraic dual space)**，当同时考虑拓扑对偶空间时。它经常被标记为 $\mathrm{Hom}(V,k)$，[2] 或者当域 k 被理解时，V^*；[3] 其他记号也被使用，比如 V'，[4][5] $V^\#$ 或 $V^\vee$。[2] 当向量以列向量形式表示 (当固定一个基底时很常见) 时，线性泛函则以行向量形式表示，并且它们在特定向量上的数值由矩阵乘积给出 (行向量位于左边)。

1 例子

恒等零函数，把每个向量映射到零，显然是一个线性泛函。除了下面这些之外的所有其他线性泛函 (例如下面的) 都是满射 (也就是说它的像是整个 k)。

- 向量索引：三元组的第二个元素由 1-形式 $[0,1,0]$ 给出。即是说，$[x,y,z]$ 的第二个元素是

$$[0,1,0]\cdot[x,y,z]=y.$$

- 均值：n-向量的均值元素由 1-形式 $[1/n,1/n,\ldots,1/n]$ 给出。也就是，

$$\mathrm{mean}(v)=[1/n,1/n,\ldots,1/n]\cdot v.$$

- 采样：用核进行采样可以被认为是 1-形式，其中的 1-形式是在适当位置平移后的核。
- 净现值 $R(t)$ 的净现金流量由 1-形式 $w(t)=(1+i)^{-t}$ 给出，其中 i 是贴现率。即是说，

$$\mathrm{NPV}(R(t))=\langle w,R\rangle=\int_{t=0}^{\infty}\frac{R(t)}{(1+i)^t}dt.$$

1.1 在 $\mathbb{R}^n$ 中的线性泛函

设在实坐标空间 $\mathbb{R}^n$ 中的向量以列向量形式表示

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}.$$

[1]在某些文本中角色被颠倒，向量被定义为从余向量到标量的线性映射。

对于每个行向量 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ 存在一个由下列式子定义的线性泛函 $f_{\mathbf{a}}$

$$f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n,$$

并且每个线性泛函都可以表达成这种形式。

这可以被解释为行向量 $\mathbf{a}$ 和列向量 $\mathbf{x}$ 的矩阵乘积或点积

$$f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

1.2 方阵的迹

方阵 A 的迹 $\operatorname{tr}(A)$ 是其主对角线上所有元素的总和。矩阵可以乘以标量，并且相同维度的两个矩阵可以相加；这些操作使得所有 $n \times n$ 矩阵的集合成为一个向量空间。方阵的迹是这个空间上的线性泛函，因为 $\operatorname{tr}(sA) = s \operatorname{tr}(A)$ 和 $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$ 对于所有标量 s 和所有 $n \times n$ 矩阵 A 和 B 成立。

1.3 (定) 积分

线性泛函首次出现在泛函分析中，即函数向量空间的研究。一个典型的线性泛函例子是积分：由黎曼积分定义的线性变换

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

是从在区间 $[a, b]$ 上的连续函数的向量空间 $C[a, b]$ 到实数的线性泛函。I 的线性性来自于关于积分的基本事实：

$$\begin{aligned} I(f + g) &= \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = I(f) + I(g) \\ I(\alpha f) &= \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx = \alpha I(f). \end{aligned}$$

1.4 评估

设 P_n 表示定义在区间 $[a, b]$ 上的实值多项式函数空间，其次数 $\leq n$。如果 $c \in [a, b]$，则设 $\operatorname{ev}_c : P_n \to \mathbb{R}$ 为**评估泛函 (evaluation functional)**

$$\operatorname{ev}_c f = f(c).$$

映射 $f \mapsto f(c)$ 是线性的，因为

$$\begin{aligned} (f + g)(c) &= f(c) + g(c) \\ (\alpha f)(c) &= \alpha f(c). \end{aligned}$$

如果 $x_0, \ldots, x_n$ 是在 $[a, b]$ 中的 $n + 1$ 个不同点，则评估泛函 $\operatorname{ev}_{x_i}, i = 0, \ldots, n$ 形成 P_n 的对偶空间的基底 (Lax (1996) 通过拉格朗日插值证明了这一最后的事实)。

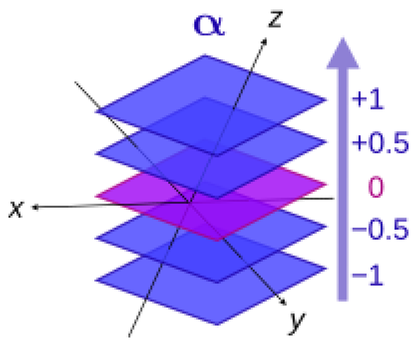

图 1: 1-形式 $\boldsymbol{\alpha}$ 的几何解释为一系列恒定数值的超平面堆叠，每个对应于那些 $\boldsymbol{\alpha}$ 映射到给定标量值的向量，如旁边所示以及增长的“感觉”。紫色的零平面通过原点。

1.5 非例

一个函数 f 满足直线方程 $f(x) = a + rx$ 且 $a \neq 0$ (例如 $f(x) = 1 + 2x$) 不是 $\mathbb{R}$ 上的线性泛函，因为它不是线性的。[2] 然而，它是仿射线性的。

2 可视化

在有限维中，线性泛函可以通过它的等值集 (level sets) 来可视化，这些等值集是映射到给定数值的向量的集合。在三维中，线性泛函的等值集是一族相互平行的平面；在更高维中，它们是平行的超平面。这种可视化线性泛函的方法有时被引入广义相对论的文本中，如 Misner, Thorne & Wheeler (1973) 的《*Gravitation*》。

3 应用

3.1 应用到求积

如果 $x_0, \ldots, x_n$ 是在 $[a, b]$ 中的 $n+1$ 个不同点，则上面定义的线性泛函 $\mathrm{ev}_{x_i} : f \mapsto f(x_i)$ 形成 P_n 的对偶空间的基底，这里 P_n 是次数 $\leq n$ 的多项式的空间。积分泛函 I 也是在 P_n 上的线性泛函，因此它可以被表达为这些基元素的线性组合。具体来说，存在系数 $a_0, \ldots, a_n$ 使得

$$I(f) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + \cdots + a_n f(x_n)$$

对于所有 $f \in P_n$ 成立。这形成了数值求积理论的基底。[6]

3.2 在量子力学中

线性泛函在量子力学中特别重要。量子力学系统被表示为 Hilbert 空间，这些空间与自身的对偶空间反同构。量子力学系统的状态可以被识别为一个线性泛函。更多信息参见 bra-ket 记号法。

[2] 例如，$f(1+1) = a + 2r \neq 2a + 2r = f(1) + f(1)$.

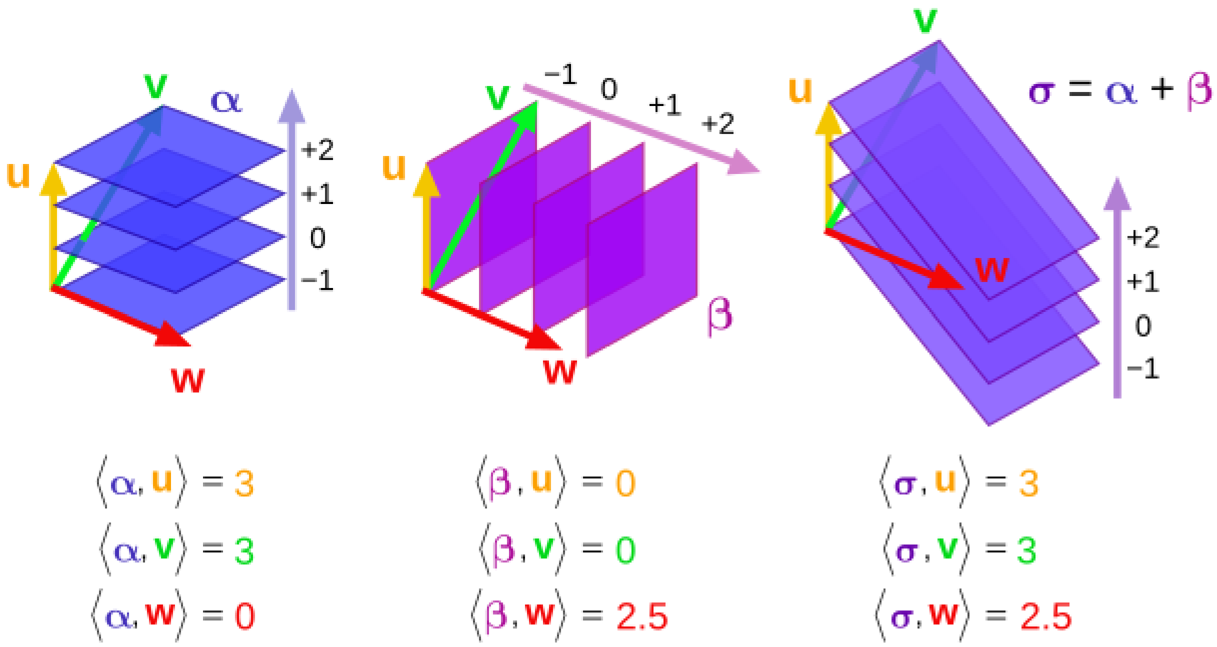

图 2: 在三维欧几里得空间中，线性泛函 (1-形式) $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 及其总和 $\boldsymbol{\sigma}$ 与向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$。向量穿过 (1-形式) 超平面的数量等于内积。[7]

3.3 分布

在广义函数理论中，某些类型的广义函数被称为分布 (distributions)，可以在测试函数空间上实现为线性泛函。

4 对偶向量与双线性形式

每一个非退化的双线性形式在有限维向量空间 V 上诱导一个同构 $V \to V^* : v \mapsto v^*$ 使得

$$v^*(w) := \langle v, w \rangle \quad \forall w \in V,$$

其中在 V 上的双线性形式标记为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (例如，在欧几里得空间中，$\langle v, w \rangle = v \cdot w$ 是 v 和 w 的点积)。

逆同构是 $V^* \to V : v^* \mapsto v$，其中 v 是在 V 中唯一的元素使得

$$\langle v, w \rangle = v^*(w)$$

对于所有 $w \in V$ 成立。

上述定义的向量 $v^* \in V^*$ 被称为 $v \in V$ 的**对偶向量 (dual vector)**。

在一个无穷维的 Hilbert 空间中，类似的结果通过 Riesz 表示定理成立。存在一个映射 $V \mapsto V^*$ 将 V 映射到它的连续对偶空间 *(continuous dual space)* V^*。

5 与基底的关系

5.1 对偶空间的基底

设向量空间 V 有一个基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$，不一定是正交的。则对偶空间 V^* 有一个基 $\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \ldots, \tilde{\omega}^n$ 称为对偶基底，定义为如下特殊性质

$$\tilde{\omega}^i(\mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

或者更简洁地，

$$\tilde{\omega}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$$

其中 δ_{ij} 是克罗内克 δ 符号。这里的基泛函的上标不是指数而是逆变指标。

属于对偶空间 $\tilde{V}$ 的一个线性泛函 $\tilde{u}$ 可以表达为基泛函的线性组合，具有系数（“分量”）u_i，

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \tilde{\omega}^i.$$

然后，将泛函 $\tilde{u}$ 应用于一个基向量 $\mathbf{e}_j$ 得到

$$\tilde{u}(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \left(u_i \tilde{\omega}^i\right) \mathbf{e}_j = \sum_i u_i \left[\tilde{\omega}^i(\mathbf{e}_j)\right]$$

这是由于泛函的标量倍数的线性，以及泛函总和的逐点线性。则

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\mathbf{e}_j) &= \sum_i u_i \left[\tilde{\omega}^i(\mathbf{e}_j)\right] \\ &= \sum_i u_i \delta_{ij} \\ &= u_j. \end{aligned}$$

因此一个线性泛函的每个分量可以通过将该泛函应用于相应的基向量来提取。

5.2 对偶基与内积

当空间 V 带有内积时，则有可能写出给定基底的对偶基的显式公式。设 V 有 (不一定正交的) 基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$。在三维空间 ($n = 3$) 中，对偶基可以明确写为

$$\tilde{\omega}^i(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon^{ijk} (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}, \mathbf{v} \right\rangle,$$

对于 $i = 1, 2, 3$ 成立，其中 ε 是 Levi-Civita 符号并且 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是在 V 上的内积 (或点积)。

在更高维中，这推广如下

$$\tilde{\omega}^i(\mathbf{v}) = \left\langle \frac{\sum_{1 \le i_2 < i_3 < \cdots < i_n \le n} \varepsilon^{i i_2 \ldots i_n} (\star \mathbf{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_n})}{\star (\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n)}, \mathbf{v} \right\rangle,$$

其中 $\star$ 是 Hodge 星算子。

6 在环之上

在环之上的模是向量空间的推广，去除了系数属于域的限制。给定一个在环 R 之上的模 M，在 M 上的一个线性形式是从 M 到 R 的一个线性映射，其中后者被认为是它自己的模。线性形式的空间总是标记为 $\mathrm{Hom}_k(V,k)$，无论 k 是否是一个域。如果 V 是左模，则它是一个右模。

"足够多"的线性形式的存在等价于模的投影性。[8]

引理 (对偶基引理). *一个 R-模 M 是投影的，当且仅当存在一个子集 $A \subset M$ 和线性形式 $\{f_a \mid a \in A\}$ 使得对每一个 $x \in M$，只有有限多个 $f_a(x)$ 非零，并且*

$$x = \sum_{a \in A} f_a(x)a.$$

7 场的变换

假设 X 是一个在 $\mathbb{C}$ 上的向量空间。将标量乘法限制到 $\mathbb{R}$ 将产生一个实向量空间 [9] $X_{\mathbb{R}}$ 称为 X 的实化 *(realification)*。任意在 $\mathbb{C}$ 上的向量空间 X 也是一个在 $\mathbb{R}$ 上的向量空间，带有复结构；也就是说，存在一个实向量子空间 $X_{\mathbb{R}}$ 使得我们可以 (形式地) 写出 $X = X_{\mathbb{R}} \oplus X_{\mathbb{R}} i$ 作为 $\mathbb{R}$-向量空间。

7.1 复线性泛函与实线性泛函

在 X 上的每一个线性泛函都是复值的，而在 $X_{\mathbb{R}}$ 上的每一个线性泛函都是实值的。如果 $\dim X \neq 0$，则在 X 或 $X_{\mathbb{R}}$ 上的任意一个线性泛函是非平凡的 (意味着不恒为 0) 当且仅当它是满射的 (因为如果 $\varphi(x) \neq 0$ 则对于任意标量 $s, \varphi((s/\varphi(x))x) = s$ 成立)，其中在 X 上的一个线性泛函的像是 $\mathbb{C}$ 而在 $X_{\mathbb{R}}$ 上的一个线性泛函的像是 $\mathbb{R}$。因此，在 X 上既是 X 的线性泛函也是 $X_{\mathbb{R}}$ 的线性泛函的唯一函数是平凡泛函；换句话说，$X^{\#} \cap X_{\mathbb{R}}^{\#} = \{0\}$，其中 $\cdot^{\#}$ 标记空间的代数对偶空间。然而，每一个 $\mathbb{C}$-线性泛函在 X 上是一个 $\mathbb{R}$-线性算子 *(operator)* (意味着它在 $\mathbb{R}$ 之上是加性的和齐次的)，但除非它是恒为 0 的，否则它不是在 X 上的 $\mathbb{R}$-线性泛函 *(functional)*，因为它的值域 (即 $\mathbb{C}$) 在 $\mathbb{R}$ 之上是二维的。相反，一个非零的 $\mathbb{R}$-线性泛函的值域太小以至于不能同时成为 $\mathbb{C}$-线性泛函。

7.2 实部与虚部

如果 $\varphi \in X^{\#}$ 则标记其实部为 $\varphi_{\mathbb{R}} := \mathrm{Re}\,\varphi$ 并标记其虚部为 $\varphi_i := \mathrm{Im}\,\varphi$。则 $\varphi_{\mathbb{R}} : X \to \mathbb{R}$ 和 $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$ 是在 $X_{\mathbb{R}}$ 上的线性泛函且 $\varphi = \varphi_{\mathbb{R}} + i\varphi_i$。由于对于所有的 $z \in \mathbb{C}$ 有 $z = \mathrm{Re}\, z - i\,\mathrm{Re}(iz) = \mathrm{Im}(iz) + i\,\mathrm{Im}\, z$，这意味着对于所有的 $x \in X$ [9]

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_{\mathbb{R}}(x) - i\varphi_{\mathbb{R}}(ix) \\ &= \varphi_i(ix) + i\varphi_i(x) \end{aligned}$$

并因此，$\varphi_i(x) = -\varphi_{\mathbb{R}}(ix)$ 并且 $\varphi_{\mathbb{R}}(x) = \varphi_i(ix)$。[10]

赋值 $\varphi \mapsto \varphi_{\mathbb{R}}$ 定义了一个双射 [10] $\mathbb{R}$-线性算子 $X^{\#} \to X_{\mathbb{R}}^{\#}$，其逆映射 $L_{\bullet} : X_{\mathbb{R}}^{\#} \to X^{\#}$ 由赋值 $g \mapsto L_g$ 定义，该赋值将 $g : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ 发送到线性泛函 $L_g : X \to \mathbb{C}$，该线性泛函定义为

$$L_g(x) := g(x) - ig(ix) \quad \text{for all } x \in X.$$

L_g 的实部为 g 且双射 $L_\bullet : X^\#_{\mathbb{R}} \to X^\#$ 是一个 $\mathbb{R}$-线性算子，意味着 $L_{g+h} = L_g + L_h$ 且 $L_{rg} = rL_g$ 对于所有的 $r \in \mathbb{R}$ 和 $g, h \in X^\#_{\mathbb{R}}$ 成立。[10] 类似地，对于虚部，赋值 $\varphi \mapsto \varphi_i$ 诱导一个 $\mathbb{R}$-线性双射 $X^\# \to X^\#_{\mathbb{R}}$，其逆映射 $X^\#_{\mathbb{R}} \to X^\#$ 定义为将 $I \in X^\#_{\mathbb{R}}$ 发送到在 X 上的线性泛函，该线性泛函定义为 $x \mapsto I(ix) + iI(x)$。

这种关系是在 1934 年由 Henry Löwig 发现的 (尽管通常归功于 F. Murray)，[11] 并且可以自然地推广到任意有限域扩张。它有许多重要的后果，下面将描述其中一些。

7.3 性质与关系

假设 $\varphi : X \to \mathbb{C}$ 是在 X 上的线性泛函，其实部为 $\varphi_{\mathbb{R}} := \operatorname{Re} \varphi$ 并且虚部为 $\varphi_i := \operatorname{Im} \varphi$。

则 $\varphi = 0$ 当且仅当 $\varphi_{\mathbb{R}} = 0$ 当且仅当 $\varphi_i = 0$。

假设 X 是一个拓扑向量空间。则 φ 是连续的，当且仅当它的实部 $\varphi_{\mathbb{R}}$ 是连续的，当且仅当 φ 的虚部 φ_i 是连续的。也就是说，要么 $\varphi, \varphi_{\mathbb{R}}$ 和 φ_i 都是连续的，要么都不是连续的。如果用“有界 (bounded)”替换“连续 (continuous)”，这个结论仍然成立。特别地，$\varphi \in X'$ 当且仅当 $\varphi_{\mathbb{R}} \in X'_{\mathbb{R}}$，其中上标撇号表示空间的连续对偶空间。[9]

设 $B \subseteq X$。如果对于所有单位长度的标量 $u \in \mathbb{C}$ (即 $|u| = 1$) 有 $uB \subseteq B$ 则 [3] [12]

$$\sup_{b \in B} |\varphi(b)| = \sup_{b \in B} |\varphi_{\mathbb{R}}(b)| .$$

类似地，如果 $\varphi_i := \operatorname{Im} \varphi : X \to \mathbb{R}$ 标记 φ 的复部，则 $iB \subseteq B$ 意味着

$$\sup_{b \in B} |\varphi_{\mathbb{R}}(b)| = \sup_{b \in B} |\varphi_i(b)| .$$

如果 X 是一个带有范数 $\|\cdot\|$ 的赋范空间，并且如果 $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ 是闭单位球，则上面的上确界是 $\varphi, \varphi_{\mathbb{R}}$ 和 φ_i 的算子范数 (按常规方式定义) 使得 [12]

$$\|\varphi\| = \|\varphi_{\mathbb{R}}\| = \|\varphi_i\| .$$

这个结论推广到在一般拓扑向量空间中平衡集的极集的类似陈述。

- 如果 X 是一个带有 (复) 内积 $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ 的复 Hilbert 空间，该内积在其第一个坐标中是反线性的 (而在第二个坐标中是线性的)，则 $X_{\mathbb{R}}$ 在赋予 $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ 的实部后成为一个实 Hilbert 空间。具体来说，在 $X_{\mathbb{R}}$ 上的这个实内积由 $\langle x \mid y \rangle_{\mathbb{R}} := \operatorname{Re}\langle x \mid y \rangle$ 定义，对于所有的 $x, y \in X$ 成立，并且它在 X 上诱导与 $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ 相同的范数，因为对于所有的向量 x 有 $\sqrt{\langle x \mid x \rangle_{\mathbb{R}}} = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$。将 Riesz 表示定理应用到 $\varphi \in X'$ (及 $\varphi_{\mathbb{R}} \in X'_{\mathbb{R}}$) 保证存在一个唯一的向量 $f_\varphi \in X$ (及 $f_{\varphi_{\mathbb{R}}} \in X_{\mathbb{R}}$) 使得 $\varphi(x) = \langle f_\varphi \mid x \rangle$ (及 $\varphi_{\mathbb{R}}(x) = \langle f_{\varphi_{\mathbb{R}}} \mid x \rangle_{\mathbb{R}}$) 对于所有的向量 x 成立。该定理也保证了 $\|f_\varphi\| = \|\varphi\|_{X'}$ 和 $\|f_{\varphi_{\mathbb{R}}}\| = \|\varphi_{\mathbb{R}}\|_{X'_{\mathbb{R}}}$。很容易验证 $f_\varphi = f_{\varphi_{\mathbb{R}}}$。现在 $\|f_\varphi\| = \|f_{\varphi_{\mathbb{R}}}\|$ 以及之前的等式意味着 $\|\varphi\|_{X'} = \|\varphi_{\mathbb{R}}\|_{X'_{\mathbb{R}}}$，这与上面得出的结论相同。

[3]

证明．如果 $B = \varnothing$ 这为真，所以假设为假。由于对于所有的标量 $z \in \mathbb{C}$ 有 $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$，于是得到 $\sup_{x \in B} |\varphi_{\mathbb{R}}(x)| \leq \sup_{x \in B} |\varphi(x)|$。如果 $b \in B$ 则设 $r_b \geq 0$ 和 $u_b \in \mathbb{C}$ 使得 $|u_b| = 1$ 并且 $\varphi(b) = r_b u_b$，如果 $r_b = 0$ 则取 $u_b := 1$。则 $|\varphi(b)| = r_b$ 并且因为 $\varphi\left(\frac{1}{u_b} b\right) = r_b$ 是一个实数，所以 $\varphi_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{u_b} b\right) = \varphi\left(\frac{1}{u_b} b\right) = r_b$。根据假设 $\frac{1}{u_b} b \in B$ 所以 $|\varphi(b)| = r_b \leq \sup_{x \in B} |\varphi_{\mathbb{R}}(x)|$。由于 $b \in B$ 是任意的，于是得到 $\sup_{x \in B} |\varphi(x)| \leq \sup_{x \in B} |\varphi_{\mathbb{R}}(x)|$。 $\square$

8 在无限维中

下面，所有的向量空间都是在实数 $\mathbb{R}$ 或复数 $\mathbb{C}$ 上的。

如果 V 是一个拓扑向量空间，连续线性泛函的空间——*连续对偶 (continuous dual)* ——通常简单地称为对偶空间。如果 V 是一个 Banach 空间，则它的 (连续) 对偶也是。为了区分普通的对偶空间与连续对偶空间，前者有时被称为*代数对偶空间 (algebraic dual space)*。在有限维中，每个线性泛函都是连续的，因此连续对偶与代数对偶是一样的，但在无限维中，连续对偶是代数对偶的一个真子空间。

在一个 (不一定是局部凸的) 拓扑向量空间 X 上的一个线性泛函 f 是连续的，当且仅当存在一个在 X 上的连续半范数 p 使得 $|f| \leq p$。[13]

8.1 刻画闭子空间

连续线性泛函在分析中有很好的性质：一个线性泛函是连续的，当且仅当它的核是闭合的，[14] 并且一个非平凡的连续线性泛函是一个开映射，即使 (拓扑) 向量空间是不完备的。[15]

8.1.1 超平面与极大子空间

X 的一个向量子空间 M 被称为**极大的 (maximal)**，如果 $M \subsetneq X$ (即 $M \subseteq X$ 且 $M \neq X$) 并且不存在 X 的一个向量子空间 N 使得 $M \subsetneq N \subsetneq X$。$X$ 的一个向量子空间 M 是极大的，当且仅当它是在 X 上某个非平凡线性泛函的核 (即 $M = \ker f$ 对于在 X 上某个不是恒为 0 的线性泛函 f 成立)。在 X 中的一个**仿射超平面 (affine hyperplane)** 是极大向量子空间的一个平移。通过线性性，X 的一个子集 H 是仿射超平面，当且仅当存在某个在 X 上的非平凡线性泛函 f 使得 $H = f^{-1}(1) = \{x \in X : f(x) = 1\}$。[11] 如果 f 是一个线性泛函且 $s \neq 0$ 是一个标量，则 $f^{-1}(s) = s\left(f^{-1}(1)\right) = \left(\frac{1}{s}f\right)^{-1}(1)$。这个等式可用于关联 f 的不同水平集 (level sets)。此外，如果 $f \neq 0$，则 f 的核可以从仿射超平面 $H := f^{-1}(1)$ 通过 $\ker f = H - H$ 重构。

8.1.2 多个线性泛函之间的关系

任意两个具有相同核的线性泛函是成比例的 (即彼此的标量倍)。这一事实可以推广到以下定理。

定理 ([16][17])**.** *如果 $f, g_1, \ldots, g_n$ 是在 X 上的线性泛函，则下列条件等价：*

1. *f 可以被写为 $g_1, \ldots, g_n$ 的线性组合；也就是，存在标量 $s_1, \ldots, s_n$ 使得 $sf = s_1 g_1 + \cdots + s_n g_n$；*
2. *$\bigcap_{i=1}^{n} \ker g_i \subseteq \ker f$；*
3. *存在一个实数 r 使得 $|f(x)| \leq r g_i(x)$ 对于所有 $x \in X$ 和所有 $i = 1, \ldots, n$ 成立。*

如果 f 是在 X 上的一个非平凡线性泛函，其核为 N，$x \in X$ 满足 $f(x) = 1$，且 U 是 X 的一个平衡子集，则 $N \cap (x + U) = \varnothing$ 当且仅当 $|f(u)| < 1$ 对于所有 $u \in U$ 成立。[15]

8.2 Hahn-Banach 定理

任意向量子空间上的 (代数) 线性泛函都可以扩展到整个空间；例如，上述的评估泛函可以扩展到在 $\mathbb{R}$ 上的所有多项式的向量空间。然而，这种扩展并不能总是保持线性泛函的连续性。Hahn-Banach 定理族给出了在这种扩展之下可以完成的条件。例如，

定理 (**Hahn-Banach 支配扩张定理** [18] (**Rudin 1991, 定理 3.2**)). *如果 $p: X \to \mathbb{R}$ 是一个亚线性函数，且 $f: M \to \mathbb{R}$ 是在线性子空间 $M \subseteq X$ 上由 p 支配的一个线性泛函，则存在 f 到整个空间 X 的一个线性扩展 $F: X \to \mathbb{R}$，该扩展由 p 支配，即存在一个线性泛函 F 使得*

$$F(m) = f(m)$$

对于所有 $m \in M$ 成立，且

$$|F(x)| \leq p(x)$$

对于所有 $x \in X$ 成立。

8.3 线性泛函族的均匀连续性

设 X 是一个带有连续对偶空间 X' 的拓扑向量空间 (topological vector space, TVS)。

对于 X' 的任意子集 H，下列条件等价：[19]

1. H 是均匀连续的；
2. H 包含在 X 中 0 的某个邻域的极集中；
3. H 的 (预) 极集是在 X 中 0 的一个邻域；

如果 H 是 X' 的一个均匀连续子集，则下列集合也是均匀连续的：弱-$*$ 闭包、平衡包络、凸包络以及凸平衡包络。[19] 此外，Alaoglu 定理表明，X' 的一个均匀连续子集的弱-$*$ 闭包是弱-$*$ 紧致的 (从而每个均匀连续子集是弱-* 相对紧致的)。[20][19]

See also

- Discontinuous linear map
- Locally convex topological vector space —A vector space with a topology defined by convex open sets
- Positive linear functional —ordered vector space with a partial order
- Multilinear form —Map from multiple vectors to an underlying field of scalars, linear in each argument
- Topological vector space —Vector space with a notion of nearness

References

1. Axler (2015) p. 101, §3.92
2. Tu (2011) p. 19, §3.1
3. Katznelson & Katznelson (2008) p. 37, §2.1.3
4. Axler (2015) p. 101, §3.94
5. Halmos (1974) p. 20, §13
6. Lax 1996
7. Misner, Thorne & Wheeler (1973) p. 57
8. Clark, Pete L. *Commutative Algebra* (PDF). Unpublished. Lemma 3.12.
9. Rudin 1991, pp. 57.
10. Narici & Beckenstein 2011, pp. 9-11.
11. Narici & Beckenstein 2011, pp. 10-11.
12. Narici & Beckenstein 2011, pp. 126-128.
13. Narici & Beckenstein 2011, p. 126.
14. Rudin 1991, Theorem 1.18
15. Narici & Beckenstein 2011, p. 128.
16. Rudin 1991, pp. 63-64.
17. Narici & Beckenstein 2011, pp. 1-18.
18. Narici & Beckenstein 2011, pp. 177-220.
19. Narici & Beckenstein 2011, pp. 225-273.
20. Schaefer & Wolff 1999, Corollary 4.3.

Bibliography

- Axler, Sheldon (2015), Linear Algebra Done Right, Undergraduate Texts in Mathematics (3rd ed.), Springer, ISBN 978-3-319-11079-0
- Bishop, Richard; Goldberg, Samuel (1980), “Chapter 4”, *Tensor Analysis on Manifolds*, Dover Publications, ISBN 0-486-64039-6
- Conway, John (1990). A course in functional analysis. Graduate Texts in Mathematics. Vol. 96 (2nd ed.). New York: Springer-Verlag. ISBN 978-0-387-97245-9. OCLC 21195908.

- Dunford, Nelson (1988). Linear operators (in Romanian). New York: Interscience Publishers. ISBN 0-471-60848-3. OCLC 18412261.
- Halmos, Paul Richard (1974), Finite-Dimensional Vector Spaces, Undergraduate Texts in Mathematics (1958 2nd ed.), Springer, ISBN 0-387-90093-4
- Katznelson, Yitzhak; Katznelson, Yonatan R. (2008), A (Terse) Introduction to LinearAlgebra, American Mathematical Society, ISBN 978-0-8218-4419-9
- Lax, Peter (1996), Linear algebra, Wiley-Interscience, ISBN 978-0-471-11111-5
- Misner, Charles W.; Thorne, Kip S.; Wheeler, John A. (1973), Gravitation, W. H. Freeman, ISBN 0-7167-0344-0
- Narici, Lawrence; Beckenstein, Edward (2011). Topological Vector Spaces. Pure and applied mathematics (Second ed.). Boca Raton, FL: CRC Press. ISBN 978-1584888666. OCLC 144216834.
- Rudin, Walter (1991). *Functional Analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. Vol. 8 (Second ed.). New York, NY: McGraw-Hill Science/Engineering/Math. ISBN 978-0-07-054236-5. OCLC 21163277.
- Schaefer, Helmut H.; Wolff, Manfred P. (1999). Topological Vector Spaces. GTM. Vol. 8 (Second ed.). New York, NY: Springer New York Imprint Springer. ISBN 978-1-4612-7155-0. OCLC 840278135.
- Schutz, Bernard (1985), “Chapter 3”, A first course in general relativity, Cambridge, UK: Cambridge University Press, ISBN 0-521-27703-5
- Trèves, François (2006) [1967]. Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. Mineola, N.Y.: Dover Publications. ISBN 978-0-486-45352-1. OCLC 853623322.
- Tu, Loring W. (2011), An Introduction to Manifolds, Universitext (2nd ed.), Springer, ISBN 978-0-8218-4419-9
- Wilansky, Albert (2013). Modern Methods in Topological Vector Spaces. Mineola, New York: Dover Publications, Inc. ISBN 978-0-486-49353-4. OCLC 849801114.