对偶空间

Wikipedia

24 June 2024

在数学中，任意向量空间 V 都有一个对应的**对偶向量空间 (dual vector space)** (或简称**对偶空间 (dual space)**)，它由所有在 V 上的线性泛函组成，同时具备逐点加法和常数标量乘法所定义的向量空间结构。

上述定义的对偶空间适用于所有向量空间,并为了避免混淆,有时也称为*代数对偶空间 (algebraic dual space)*。当定义于拓扑向量空间时，存在对偶空间的一个子空间，它对应连续线性泛函，称为**连续对偶空间 (continuous dual space)**。

对偶向量空间在使用向量空间的众多数学分支中都有应用，例如在有限维向量空间的张量分析中。当应用于函数向量空间 (这些空间通常是无限维的) 时，对偶空间被用来描述测度、分布以及希尔伯特空间。因此，对偶空间是泛函分析中的一个重要概念。

早期对于*对偶 (dual)* 的称呼包括 *polarer Raum* [Hahn 1927]，*espace conjugué, adjoint space* [Alaoglu 1940]，还有 *transponierter Raum* [Schauder 1930] 和 [Banach 1932]。术语*对偶 (dual)* 来自 Bourbaki 1938。[1]

1 代数对偶空间

对于任意定义在域 F 上的向量空间 V，**代数对偶空间 (algebraic dual space)** V^* [2] (有时也记作 $V^\vee$ [3] 或 V' [4][5]) [nb 1] 定义为所有线性映射 $\varphi : V \to F$ (线性泛函) 的集合。由于线性映射是向量空间同态，对偶空间可以标记为 $\hom(V, F)$[3]。对偶空间 V^* 本身在配备加法和标量乘法后成为在 F 之上的向量空间，满足：

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$
$$(a\varphi)(x) = a(\varphi(x))$$

对于所有 $\varphi, \psi \in V^*, x \in V$，以及 $a \in F$ 成立。

代数对偶空间 V^* 的元素有时被称为**余向量 (covectors)**、**1-形式 (one-forms)** 或**线性形式 (linear forms)**。

在对偶空间 V^* 中的一个泛函 φ 与 V 的一个元素 x 的配对有时用括号标记：$\varphi(x) = [x, \varphi]$ [6] 或 $\varphi(x) = \langle x, \varphi \rangle$ [7]。这种配对定义了一个非退化的双线性映射 [nb 2] $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V^* \to F$，称为自然配对 (natural pairing)。

1.1 有限维情况

如果 V 是有限维的，则 V^* 与 V 具有相同的维数。给定在 V 中的一个基 $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$，可以构造在 V^* 中的一个特定基，称为对偶基 (dual basis)。这个对偶基是在 V 上线性泛函的一个集合

$\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$，由以下关系定义：

$$\mathbf{e}^i\left(c^1\mathbf{e}_1 + \cdots + c^n\mathbf{e}_n\right) = c^i, \quad i = 1, \ldots, n$$

对于任意选择的系数 $c^i \in F$ 成立。特别是，依次令这些系数中的每一个等于 1 而其他系数等于 0，得到的系统方程为：

$$\mathbf{e}^i\left(\mathbf{e}_j\right) = \delta^i_j$$

其中 δ^i_j 是克罗内克 δ 符号。这个性质被称为双正交性质。

证明. 考虑 $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ 为 V 的基。设 $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ 定义如下：

$$\mathbf{e}^i\left(c^1\mathbf{e}_1 + \cdots + c^n\mathbf{e}_n\right) = c^i, \quad i = 1, \ldots, n$$

这些构成了 V^* 的基，因为：

1. $\mathbf{e}^i, i = 1, 2, \ldots, n$，是线性泛函，它们将 $x, y \in V$ 如 $x = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n$ 和 $y = \beta_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{e}_n$ 映射到标量 $\mathbf{e}^i(x) = \alpha_i$ 和 $\mathbf{e}^i(y) = \beta_i$。则还有 $x + \lambda y = (\alpha_1 + \lambda\beta_1)\,\mathbf{e}_1 + \cdots + (\alpha_n + \lambda\beta_n)\,\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{e}^i(x + \lambda y) = \alpha_i + \lambda\beta_i = \mathbf{e}^i(x) + \lambda\mathbf{e}^i(y)$。因此，$\mathbf{e}^i \in V^*$ 对于 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立。

2. 假设 $\lambda_1\mathbf{e}^1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{e}^n = 0 \in V^*$。将此泛函依次应用于 V 的基向量，导致 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ (将泛函应用于 $\mathbf{e}_i$ 的结果为 λ_i)。因此，$\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ 在 V^* 中是线性无关的。

3. 最后，考虑 $g \in V^*$。则

   $$g(x) = g\left(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n\right) = \alpha_1 g\left(\mathbf{e}_1\right) + \cdots + \alpha_n g\left(\mathbf{e}_n\right) = \mathbf{e}^1(x) g\left(\mathbf{e}_1\right) + \cdots + \mathbf{e}^n(x) g\left(\mathbf{e}_n\right)$$

   从而 $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ 生成 V^*。因此，它是 V^* 的一个基。

□

例如，如果 V 是 $\mathbb{R}^2$，选择其基为 $\{\mathbf{e}_1 = (1/2, 1/2), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$。基向量彼此不正交。则 $\mathbf{e}^1$ 和 $\mathbf{e}^2$ 是 1-形式 (将向量映射到标量的函数)，满足 $\mathbf{e}^1\left(\mathbf{e}_1\right) = 1, \mathbf{e}^1\left(\mathbf{e}_2\right) = 0, \mathbf{e}^2\left(\mathbf{e}_1\right) = 0$，以及 $\mathbf{e}^2\left(\mathbf{e}_2\right) = 1$。(注意：这里的上标是索引，不是指数。) 这个方程系统可以表示为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} e^{11} & e^{12} \\ e^{21} & e^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} \\ e_{12} & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

求解第一个矩阵中的未知值表明对偶基为 $\{\mathbf{e}^1 = (2, 0), \mathbf{e}^2 = (-1, 1)\}$。因为 $\mathbf{e}^1$ 和 $\mathbf{e}^2$ 是泛函，它们可以重写为 $\mathbf{e}^1(x, y) = 2x$ 和 $\mathbf{e}^2(x, y) = -x + y$。

一般来说，当 V 是 $\mathbb{R}^n$ 时，如果 $E = [\mathbf{e}_1|\cdots|\mathbf{e}_n]$ 是一个矩阵，其列是基向量，而 $\hat{E} = [\mathbf{e}^1|\cdots|\mathbf{e}^n]$ 是一个矩阵，其列是对偶基向量，则

$$\hat{E}^{\mathrm{T}} \cdot E = I_n,$$

其中 I_n 是阶数为 n 的单位矩阵。这两个基集合的双正交性质允许任意点 $\mathbf{x} \in V$ 被表示为

$$\mathbf{x} = \sum_i \left\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}^i \right\rangle \mathbf{e}_i = \sum_i \left\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \right\rangle \mathbf{e}^i\,,$$

即使基向量彼此不正交。严格来说，上述陈述只有在引入内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和相应的对偶配对后才有意义，如下面的“双线性乘积与对偶空间”一节所述。

特别是，$\mathbb{R}^n$ 可以被解释为 n 个实数构成的列向量的空间，其对偶空间通常被写成 n 个实数构成的行向量的空间。这样的行向量通过普通的矩阵乘法作为线性泛函作用于 $\mathbb{R}^n$。这是因为泛函将每一个 n-维向量 x 映射到一个实数 y。然后，分别将这个泛函视作矩阵 M，而将 x 视作 $n \times 1$ 的矩阵，并将 y 视作 1×1 的矩阵 (即一个实数)，如果 $Mx = y$，则根据维度的原因，M 必须是一个 $1 \times n$ 的矩阵；也就是说，M 必须是一个行向量。

如果 V 包含平面上几何向量的空间，则 V^* 的一个元素的等值曲线 (level curves) 构成在 V 中的一族平行线，因为值域是一维的，所以在值域中的每一个点都是某个非零元素的倍数。因此，V^* 的一个元素可以直观地认为是一族覆盖平面的平行线。为了计算泛函在一个给定向量上的值，只需要确定这个向量位于哪一条直线上。非正式地讲，这“计数”了向量穿过多少条线。更一般地，如果 V 是任意维度的向量空间，则在 V^* 中线性泛函的等值集 (level sets) 是在 V 中的平行超平面，而线性泛函在向量上的作用可以借助这些超平面来可视化。[8]

1.2 无限维情况

如果 V 不是有限维的，但有一个由无限集合 A 索引的基 [nb 3] $\mathbf{e}_\alpha$，则与有限维情况一样构建得到的对偶空间中的线性无关元素 $\mathbf{e}^\alpha$ $(\alpha \in A)$ 将不会形成一个基。

例如，考虑空间 $\mathbb{R}^\infty$，其元素是那些只含有有限个非零项的实数序列，该空间有一个由自然数 $\mathbb{N}$ 索引的基。对于 $i \in \mathbb{N}$，$\mathbf{e}_i$ 是除了第 i 个位置为 1 外其他位置均为 0 的序列。空间 $\mathbb{R}^\infty$ 的对偶空间是 (同构于) $\mathbb{R}^\mathbb{N}$，即所有实数序列的空间：每个实数序列 (a_n) 定义了一个函数，该函数将 $\mathbb{R}^\infty$ 中的元素 (x_n) 映射到数值

$$\sum_n a_n x_n,$$

这是一个有限总和，因为只有有限个 x_n 非零。空间 $\mathbb{R}^\infty$ 的维数是可数无限的，而 $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ 没有一个可数的基。

这个观察可以推广到任意 [nb 3] 无限维向量空间 V 上的任意域 F：基 $\{\mathbf{e}_\alpha : \alpha \in A\}$ 的一个选择标识 V 与函数 $f : A \to F$ 的空间 $\left(F^A\right)_0$，使得 $f_\alpha = f(\alpha)$ 对于有限个 $\alpha \in A$ 时是非零的，其中这样的一个函数 f 与向量

$$\sum_{\alpha \in A} f_\alpha \mathbf{e}_\alpha$$

在 V 中标识 (该总和是有限的，基于对 f 的假设，并且根据基的定义，任意 $v \in V$ 都可以唯一地以这种方式写出)。

V 的对偶空间随后可以与所有从 A 到 F 的函数的空间 F^A 标识：在 V 上的一个线性泛函 T 完全由它在 V 的基 $\mathbf{e}_\alpha$ 上的值 $\theta_\alpha = T(\mathbf{e}_\alpha)$ 决定，并且任意函数 $\theta : A \to F$ (其中 $\theta(\alpha) = \theta_\alpha$) 定义在 V 上的线性泛函 T 为

$$T\left(\sum_{\alpha \in A} f_\alpha \mathbf{e}_\alpha\right) = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha T(e_\alpha) = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha \theta_\alpha .$$

再次，这个总和是有限的，因为对于有限个 α，f_α 是非零的。

集合 $\left(F^A\right)_0$ (基本上按照定义) 可以被标识为与由 A 索引的无限多个 F 的副本的直和，即为线性同构

$$V \cong \left(F^A\right)_0 \cong \bigoplus_{\alpha \in A} F.$$

另一方面，F^A (同样按照定义) 是由 A 索引的无限多个 F 的副本的直积，并因此标识

$$V^* \cong \left(\bigoplus_{\alpha\in A} F\right)^* \cong \prod_{\alpha\in A} F^* \cong \prod_{\alpha\in A} F \cong F^A$$

是关于直和 (模) 与直积之间一般结果的一个特殊情况。

如果一个向量空间不是有限维的，则它的 (代数) 对偶空间的维数 (作为基数) **总是**比原始向量空间的维数大。这与连续对偶空间的情况形成对比，后者可能与原始向量空间同构，即使后者是无限维的。

这个维数不等式的证明来自于以下事实。

如果 V 是无限维的 F-向量空间，基数的算术性质意味着

$$\dim(V) = |A| < |F|^{|A|} = |V^*| = \max\left(|\dim(V^*)|, |F|\right),$$

其中基数表示为绝对值。为了证明 $\dim(V) < \dim(V^*)$，只需要证明 $|F| \le |\dim(V^*)|$，这可以通过类似 Cantor 对角线论证的方法来完成。[9] 对偶的确切维数由 Erdős-Kaplansky 定理给出。

1.3 双线性乘积与对偶空间

如果 V 是有限维的，则 V 与 V^* 同构。但通常这两个空间之间没有自然同构。[10] 在 V 上的任意双线性形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 给出 V 到其对偶空间的一个映射

$$v \mapsto \langle v, \cdot\rangle$$

其中右边定义为在 V 上的泛函，它将每个 $w \in V$ 映射到 $\langle v, w\rangle$。换句话说，双线性形式确定了一个线性映射

$$\Phi_{\langle\cdot,\cdot\rangle} : V \to V^*$$

被定义为

$$\left[\Phi_{\langle\cdot,\cdot\rangle}(v), w\right] = \langle v, w\rangle.$$

如果双线性形式是非退化的，则这是到 V^* 的一个子空间的盖射同构。如果 V 是有限维的，则这是到整个 V^* 的盖射同构。相反地，任意从 V 到 V^* 的一个子空间 (如果是有限维的则是整个 V^*) 的同构 Φ 定义在 V 上唯一的非退化双线性形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Phi$ 为

$$\langle v, w\rangle_\Phi = (\Phi(v))(w) = [\Phi(v), w].$$

因此，V 到 V^* 的一个子空间 (或整个 V^*，如果 V 是有限维的)，其同构与在 V 上的非退化双线性形式之间存在一一对应关系。

如果向量空间 V 是在复数域上，有时考虑半双线性形式比双线性形式更自然。在这种情况下，给定的半双线性形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 确定 V 与对偶空间的复共轭

$$\Phi_{\langle\cdot,\cdot\rangle} : V \to \overline{V^*}.$$

对偶空间的复共轭 $\overline{V^*}$ 可以识别为所有加性复数值泛函 $f : V \to \mathbf{C}$ 的集合，使得

$$f(\alpha v) = \bar{\alpha} f(v).$$

1.4 嵌入到双重对偶空间

存在一个自然同态 Ψ 从 V 到双重对偶 $V^{**} = \{\Phi : V^* \to F : \Phi \text{ 线性的}\}$，定义为 $(\Psi(v))(\varphi) = \varphi(v)$ 对于所有 $v \in V, \varphi \in V^*$ 成立。换句话说，如果 $\mathrm{ev}_v : V^* \to F$ 是评估映射，定义为 $\varphi \mapsto \varphi(v)$，则 $\Psi : V \to V^{**}$ 定义为映射 $v \mapsto \mathrm{ev}_v$。这个映射 Ψ 总是单射的，[nb 3] 并且如果 V 是有限维的，它总是同构的。[11] 实际上，有限维向量空间与其双重对偶的同构是一个典型的自然同构的例子。无限维 Hilbert 空间不是与其代数双重对偶同构，而是与其连续双重对偶同构。

1.5 线性映射的转置

如果 $f : V \to W$ 是一个线性映射，则其转置 *(transpose)* (或对偶 *(dual)*) $f^* : W^* \to V^*$ 定义为

$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f$$

对于每一个 $\varphi \in W^*$ 成立。由此产生的泛函 $f^*(\varphi)$ 在 V^* 中被称为 φ 沿着 f 的拉回 *(pullback)*。

对于所有的 $\varphi \in W^*$ 和 $v \in V$ 有以下恒等式成立：

$$[f^*(\varphi), v] = [\varphi, f(v)],$$

其中左边的括号 $[\cdot, \cdot]$ 是 V 与其对偶空间的自然配对，而右边的括号是 W 与其对偶空间的自然配对。这一恒等式刻画了转置，[12] 并且形式上类似于伴随的定义。

映射 $f \mapsto f^*$ 在从 V 到 W 的线性算子空间，与从 W^* 到 V^* 的线性算子空间之间产生一个单射的线性映射；当且仅当 W 是有限维的时候，这个同态是同构的。如果 $V = W$，则线性映射构成的实际上是带有映射复合的代数，此时的赋值则是一个反同态，即 $(fg)^* = g^* f^*$。在范畴论的语言中，取向量空间的对偶与线性映射的转置因此是从在 F 之上的向量空间范畴到其自身的逆变函子。有可能使用自然嵌入到双重对偶来把 $(f^*)^*$ 与 f 标识出来。

如果线性映射 f 关于 V 和 W 的两个基用矩阵 A 来表示，则 f^* 关于 W^* 和 V^* 的对偶基可以用转置矩阵 A^{T} 来表示，因此得名。或者，由于 f 可以通过左乘列向量的矩阵 A 来表示，f^* 可以通过同样的矩阵作用在行向量的右端来表示。这些观点通过在 $\mathbf{R}^n$ 上的标准内积相关联，该内积把列向量空间与行向量的对偶空间相识别。

1.6 商空间与零化子

设 S 为 V 的子集。在 V^* 中 S 的**零化子 (annihilator)**，这里记作 S^0，是线性泛函 $f \in V^*$ 的集合，使得对于所有的 $s \in S$ 有 $[f, s] = 0$。也就是说，S^0 包含所有线性泛函 $f : V \to F$，使得其在 S 上的限制消失 (为零)：$f|_S = 0$。在有限维向量空间中，零化子对偶于 (同构于) 正交补空间。

一个子集的零化子自身也是一个向量空间。零向量的零化子是整个对偶空间：$\{0\}^0 = V^*$，而整个空间的零化子只是零余向量：$V^0 = \{0\} \subseteq V^*$。此外，给定 V 的一个子集的零化子赋值反转了包含关系，所以如果 $\{0\} \subseteq S \subseteq T \subseteq V$，则

$$\{0\} \subseteq T^0 \subseteq S^0 \subseteq V^*.$$

如果 A 和 B 是 V 的两个子集，则

$$A^0 + B^0 \subseteq (A \cap B)^0.$$

如果 $(A_i)_{i\in I}$ 是 V 的由索引集 I 索引的任意子集族，则

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^0 = \bigcap_{i\in I} A_i^0.$$

特别是，如果 A 和 B 是 V 的子空间，则

$$(A+B)^0 = A^0 \cap B^0$$

以及 [nb 3]

$$(A\cap B)^0 = A^0 + B^0.$$

如果 V 是有限维的，且 W 是一个向量子空间，则

$$W^{00} = W$$

在双重对偶同构之下将 W 与其在第二重对偶空间中的像识别之后 $V \approx V^{**}$。特别地，形成零化子是在有限维向量空间的子集格上的 Galois 连通。

如果 W 是 V 的子空间，则商空间 V/W 自身是一个向量空间，因而也有一个对偶空间。根据第一同构定理，泛函 $f : V \to F$ 因子穿过 V/W 当且仅当 W 在 f 的核中。因此存在一个同构

$$(V/W)^* \cong W^0.$$

作为一个特殊的推论，如果 V 是两个子空间 A 和 B 的直和，则 V^* 也是 A^0 和 B^0 的直和。

1.7 维度分析

对偶空间类比于“负”维空间。最简单地说，由于向量 $v \in V$ 可以通过自然配对 $\langle x,\varphi\rangle := \varphi(x) \in F$ 与余向量 $\varphi \in V^*$ 配对得到一个标量，余向量可以“抵消”向量的维度，类似于约简分数。因此，虽然直和 $V \oplus V^*$ 是一个 $2n$ 维空间 (如果 V 是 n 维的)，V^* 行为如同一个 $(-n)$ 维空间，在意义上它的维度可以被 V 的维度抵消。这是通过张量收缩正式化的。

这一点在物理学中通过量纲分析出现，其中对偶空间具有逆单位。[13] 在自然配对下，这些单位被抵消，而得到的标量值是无量纲的，正如所期望的那样。例如，在 (连续) 傅里叶分析，或者更广泛的时间-频率分析中：[nb 4] 给定一个一维向量空间，其单位是时间 t，对偶空间的单位是频率：每个单位时间的发生次数 (单位为 $1/t$)。例如，如果时间是以秒为单位测量的，则对应的对偶单位是秒的倒数：在 3 秒的过程中，一个每秒发生 2 次的事件总共发生了 6 次，这对应于 $3s \cdot 2s^{-1} = 6$。类似地，如果原空间测量长度，则对偶空间测量逆长度。

2 连续对偶空间

处理拓扑向量空间时，从空间到基域 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (或 $\mathbb{R}$) 的连续线性泛函尤为重要。这导致了“连续对偶空间”或“拓扑对偶”的概念，它是代数对偶空间 V^* 的线性子空间，记作 V'。对于任意有限维 *(finite-dimensional)* 范数向量空间或拓扑向量空间，如欧几里得 n-空间，连续对偶与代数对偶是相同的。然而，对于任意无限维范数空间，这一点不成立，如不连续线性映射的例子所示。尽管如此，在拓扑向量空间理论中，“连续对偶空间”和“拓扑对偶空间”的术语经常被简称为“对偶空间”。

对于拓扑向量空间 V,其连续对偶空间 *(continuous dual space)*,[14] 或拓扑对偶空间 *(topological dual space)*，[15] 或仅称对偶空间 *(dual space)* [14][15][16][17] (在拓扑向量空间理论的意义上) V' 被定义为所有连续线性泛函 $\varphi : V \to \mathbb{F}$ 的空间。

连续对偶空间的重要例子包括紧支集测试函数空间 $\mathcal{D}$ 和其对偶 $\mathcal{D}'$，即任意分布 (广义函数) 的空间；任意测试函数空间 $\mathcal{E}$ 和其对偶 $\mathcal{E}'$，即紧支集分布的空间；以及快速衰减测试函数空间 $\mathcal{S}$，即 Schwartz 空间，及其对偶 $\mathcal{S}'$，即温和分布 (缓慢增长分布) 的空间，在广义函数理论中。

2.1 性质

如果 X 是 Hausdorff 拓扑向量空间 (topological vector space, TVS)，则 X 的连续对偶空间与 X 的完备化中的连续对偶空间相同。[1]

2.2 对偶上的拓扑

有一种标准构造方法来引入拓扑向量空间 V 的连续对偶 V' 上的拓扑。固定一组 V 的有界子集 $\mathcal{A}$。这给出在 V 上在来自 $\mathcal{A}$ 的集合上的均匀收敛的拓扑，或者说，由形如

$$\|\varphi\|_A = \sup_{x\in A} |\varphi(x)|\,,$$

的半范数生成的拓扑，其中 φ 是在 V 上的连续线性泛函，而 A 运行在类 $\mathcal{A}$ 之上。

这意味着泛函序列 φ_i 在 V' 中趋于泛函 φ 当且仅当

$$\text{对所有} A \in \mathcal{A} \quad \|\varphi_i - \varphi\|_A = \sup_{x\in A} |\varphi_i(x) - \varphi(x)| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

通常 (但并非必要)，类 $\mathcal{A}$ 应该满足以下条件：

- V 的每个点 x 属于某个集合 $A \in \mathcal{A}$:

$$\text{对所有} x \in V \quad \text{存在一个} A \in \mathcal{A} \quad \text{使得} x \in A.$$

- $\mathcal{A}$ 中的任意两个集合 $A \in \mathcal{A}$ 和 $B \in \mathcal{A}$ 都包含在某个集合 $C \in \mathcal{A}$ 中:

$$\text{对所有} A, B \in \mathcal{A} \quad \text{存在一个} C \in \mathcal{A} \quad \text{使得} A \cup B \subseteq C.$$

- $\mathcal{A}$ 在标量乘法运算下封闭:

$$\text{对所有} A \in \mathcal{A} \quad \text{和所有} \lambda \in \mathbb{F} \quad \text{使得} \lambda \cdot A \in \mathcal{A}.$$

如果这些要求得到满足，则相应的拓扑在 V' 上为 Hausdorff，并且集合

$$U_A = \{\varphi \in V' : \quad \|\varphi\|_A < 1\}, \quad \text{对于} A \in \mathcal{A}$$

构成其局部基。

下面是三种最重要的特殊情况。

- 在 V' 上的强拓扑是在 V 中有界子集上的均匀收敛拓扑 (因此 $\mathcal{A}$ 可以选择为在 V 中所有有界子集的类)。

如果 V 是一个范数向量空间 (例如，Banach 空间或 Hilbert 空间)，则 V' 上的强拓扑是范数化的 (实际上如果标量域是完备的，则是一个 Banach 空间)，范数为

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\varphi(x)|.$$

- 在 V' 上的刻型拓扑是在 V 中全有界集上的均匀收敛拓扑 (因此 $\mathcal{A}$ 可以选择为 V 中所有全有界子集的类)。
- 在 V' 上的弱拓扑是在 V 中有限子集上的均匀收敛拓扑 (因此 $\mathcal{A}$ 可以选择为 V 中所有有限子集的类)。

对于 V' 的这三种拓扑选择，各自对应于拓扑向量空间的一种反射性性质：

- 如果 V' 配备了强拓扑，则相应的反射性是标准的：在这种意义上反射的空间被称为反射空间。[18]
- 如果 V' 配备了刻型对偶拓扑，则相应的反射性在刻型空间理论中呈现：在这种意义上反射的空间被称为刻型空间。
- 如果 V' 配备了弱拓扑，则相应的反射性在对偶对理论中呈现：[19] 在这种意义上反射的空间是任意 (Hausdorff) 局部凸空间，具有弱拓扑。[20]

2.3 示例

设 $1 < p < \infty$ 是一个实数，并考虑 Banach 空间 ℓ^p，它由所有序列 $\mathbf{a} = (a_n)$ 组成，这些序列满足

$$\|\mathbf{a}\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

定义数值 q 使得 $1/p + 1/q = 1$。则 ℓ^p 的连续对偶自然地与 ℓ^q 识别：给定一个元素 $\varphi \in (\ell^p)'$，相应的 ℓ^q 中的元素是序列 $(\varphi(\mathbf{e}_n))$，其中 $\mathbf{e}_n$ 标记第 n 项为 1 而其余项为 0 的序列。相反地，给定一俄国元素 $\mathbf{a} = (a_n) \in \ell^q$，相应的连续线性泛函 φ 在 ℓ^p 上由下式定义

$$\varphi(\mathbf{b}) = \sum_n a_n b_n$$

它对于所有 $\mathbf{b} = (b_n) \in \ell^p$ 成立 (参见 Hölder 不等式)。

以类似的方式，ℓ^1 的连续对偶自然地与 ℓ^∞ (有界序列的空间) 识别。此外，Banach 空间 c (所有收敛序列组成，配备最大范数) 和 c_0 (序列趋于零) 的连续对偶都自然地与 ℓ^1 识别。

根据 Riesz 表示定理，Hilbert 空间的连续对偶再次是一个 Hilbert 空间，它与原空间反同构。这导致了物理学家在量子力学的数学表述中使用的“bra-ket”表示法。

根据 Riesz-Markov-Kakutani 表示定理，某些连续函数空间的连续对偶可以通过测度来描述。

2.4 连续线性映射的转置

如果 $T: V \to W$ 是两个拓扑向量空间之间的连续线性映射，则其 (连续) 转置 $T': W' \to V'$ 由同样的公式定义：

$$T'(\varphi) = \varphi \circ T, \quad \varphi \in W'.$$

由此产生的泛函 $T'(\varphi)$ 位于 V' 中。赋值 $T \to T'$ 产生一个从 V 到 W 的连续线性映射空间与从 W' 到 V' 的线性映射空间之间的线性映射。当 T 和 U 是可组合的连续线性映射时，则

$$(U \circ T)' = T' \circ U'.$$

当 V 和 W 是赋范空间时，转置在 $L(W', V')$ 中的范数等价于 T 在 $L(V, W)$ 中的范数。转置的一些性质依赖于 Hahn-Banach 定理。例如，有界线性映射 T 具有稠密像当且仅当转置 T' 是单射的。

当 T 是两个 Banach 空间 V 和 W 之间的紧致线性映射时，转置 T' 也是紧致的。这可以使用 Arzelà-Ascoli 定理证明。

当 V 是 Hilbert 空间时，存在一个从 V 到其连续对偶 V' 的反线性同构 i_V。对于在 V 上的每一个有界线性映射 T，转置和伴随算子之间有联系如下

$$i_V \circ T^* = T' \circ i_V.$$

当 T 是两个拓扑向量空间 V 和 W 之间的连续线性映射时，若给 W' 和 V' 配备“兼容”的拓扑，则转置 T' 也是连续的：例如，当对于 $X = V$ 和 $X = W$，两者的对偶 X' 都具有强拓扑 $\beta(X', X)$ 即在 X 的有界集上的均匀收敛，或者两者都有弱-$*$ 拓扑 $\sigma(X', X)$ 即在 X 上的逐点收敛。转置 T' 从 $\beta(W', W)$ 到 $\beta(V', V)$，或者从 $\sigma(W', W)$ 到 $\sigma(V', V)$ 是连续的。

2.5 零化子

假设 W 是赋范空间 V 的闭合线性子空间，考虑在 V' 中 W 的零化子，

$$W^{\perp} = \{\varphi \in V' : W \subseteq \ker \varphi\}.$$

则，商空间 V/W 的对偶可以与 $W^{\perp}$ 识别，而 W 的对偶可以与商 $V'/W^{\perp}$ 识别。[21] 实际上，令 P 标记从 V 到商 V/W 的典范满射；则，转置 P' 是一个从 $(V/W)'$ 进入 V' 的等距同构，其像等价于 $W^{\perp}$。如果 j 标记从 W 到 V 的嵌入映射，则转置 j' 的核是 W 的零化子：

$$\ker(j') = W^{\perp}$$

并且根据 Hahn-Banach 定理，j' 诱导一个等距同构 $V'/W^{\perp} \to W'$。

2.6 进一步的性质

如果赋范空间 V 的对偶是可分的，则空间 V 本身也是可分的。反之则不成立：例如，空间 ℓ^1 是可分的，但其对偶 ℓ^{∞} 不是可分的。

2.7 双重对偶

类似于代数双重对偶的情形，总是存在一个自然定义的连续线性算子 $\Psi : V \to V''$ 从赋范空间 V 进入其连续双重对偶 V''，定义为

$$\Psi(x)(\varphi) = \varphi(x), \quad x \in V, \varphi \in V'.$$

作为 Hahn-Banach 定理的结果，该映射实际上是一个等距映射，意味着 $\|\Psi(x)\| = \|x\|$ 对所有 $x \in V$ 成立。赋范空间对于其中映射 Ψ 是双射的，称为反射空间。

当 V 是一个拓扑向量空间，则 $\Psi(x)$ 仍然可以根据同样的公式定义，对于每一个 $x \in V$ 成立，但是会出现几个困难。首先，当 V 不是局部凸的时，连续对偶可能等价于 $\{0\}$ 并且映射 Ψ 退化。然而，如果 V 是 Hausdorff，并且是局部凸的，则再次根据 Hahn-Banach 定理，映射 Ψ 从 V 到连续对偶的代数对偶 V'^* 是单射的。[nb 5]

其次，即使在局部凸的情况下，在连续对偶 V' 上也可以定义几种自然的向量空间拓扑，所以连续双重对偶 V'' 作为集合不是唯一确定的。我们说 Ψ 从 V 映射到 V''，或者说，$\Psi(x)$ 在 V' 上对每一个 $x \in V$ 是连续的，是对 V' 的拓扑的一个合理的最小要求，即评估映射

$$\varphi \in V' \mapsto \varphi(x), \quad x \in V,$$

对于所选择的 V' 的拓扑是连续的。此外，还有 V'' 的拓扑的选择，Ψ 的连续性取决于这个选择。因此，在这个框架下定义反射性比在赋范情况下更复杂。

例如，

$$\begin{tikzcd} \langle x_1, x_2 \rangle \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "+"'] & \langle \Psi(x_1), \Psi(x_2) \rangle \arrow[d, "+'"] \\ x \arrow[r, "\Psi"] & \Psi(x) \end{tikzcd}$$

这是向量加法从一个向量空间到其双重对偶的自然变换。$\langle x_1, x_2 \rangle$ 标记两个向量的有序对。加法 $+$ 将 x_1 和 x_2 发送到 $x_1 + x_2$。由变换诱导的加法 $+'$ 可以定义为

$$[\Psi(x_1) +' \Psi(x_2)](\varphi) = \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x)$$

对于在对偶空间中的任意 φ 成立。

See also

- Covariance and contravariance of vectors
- Dual module
- Dual norm
- Duality (mathematics)
- Duality (projective geometry)
- Pontryagin duality
- Reciprocal lattice —dual space basis, in crystallography

Notes

1. 对于以这种方式使用的 $V^\vee$，参见 *An Introduction to Manifolds* (Tu 2011, p. 19)。这种记号有时用于当 $(\cdot)^*$ 保留用于其他含义时。例如，在上述文本中，F^* 经常用于标记 F 的余微分，所以 $F^*\omega$ 表示形式 ω 的拉回。Halmos (1974, p. 20) 使用 V' 标记 V 的代数对偶。然而，其他作者使用 V' 表示连续对偶，而保留 V^* 表示代数对偶 (Trèves 2006, p. 35)。

2. 在许多领域，如量子力学中，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 保留用于定义在 $V \times V$ 上的半双线性形式。
3. 本文中的若干断言需要选择公理来证明其正确性。为了证明一个任意向量空间有一个基，需要选择公理：特别是为了证明 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 有一个基。还需要选择公理来显示无限维向量空间 V 的对偶非零，从而得出自然映射从 V 到其双重对偶是单射的。
4. 更准确地说，连续傅里叶分析研究的是具有向量空间域的泛函空间以及在其对偶空间上的泛函空间。
5. 如果 V 是局部凸的但不是豪斯多夫的，则 Ψ 的核是最小的包含 $\{0\}$ 的闭子空间。

References

1. Narici & Beckenstein 2011, pp. 225-273.
2. Katznelson & Katznelson (2008) p. 37, §2.1.3
3. Tu (2011) p. 19, §3.1
4. Axler (2015) p. 101, §3.94
5. Halmos (1974) p. 20, §13
6. Halmos (1974) p. 21, §14
7. Misner, Thorne & Wheeler 1973
8. Misner, Thorne & Wheeler 1973, §2.5
9. Nicolas Bourbaki (1974). Hermann (ed.). Elements of mathematics: Algebra I, Chapters 1 - 3. p. 400. ISBN 0201006391.
10. Mac Lane & Birkhoff 1999, §VI. 4
11. Halmos (1974) pp. 25, 28
12. Halmos (1974) §44
13. Tao, Terence (2012-12-29). "A mathematical formalisation of dimensional analysis". "Similarly, one can define $V^{T^{-1}}$ as the dual space to V^T ..."
14. Robertson & Robertson 1964, II. 2
15. Schaefer 1966, II. 4
16. Rudin 1973, 3.1
17. Bourbaki 2003, II. 42
18. Schaefer 1966, IV.5.5
19. Schaefer 1966, IV. 1
20. Schaefer 1966, IV.1.2
21. Rudin 1991, chapter 4

Bibliography

- Axler, Sheldon Jay (2015). Linear Algebra Done Right (3rd ed.). Springer. ISBN 978-3-31911079-0.
- Bourbaki, Nicolas (1989). Elements of mathematics, Algebra I. Springer-Verlag. ISBN 3-54064243-9.
- Bourbaki, Nicolas (2003). Elements of mathematics, Topological vector spaces. Springer-Verlag.

- Halmos, Paul Richard (1974) [1958]. Finite-Dimensional Vector Spaces (2nd ed.). Springer. ISBN 0-387-90093-4.
- Katznelson, Yitzhak; Katznelson, Yonatan R. (2008). A (Terse) Introduction to Linear Algebra. American Mathematical Society. ISBN 978-0-8218-4419-9.
- Lang, Serge (2002), Algebra, Graduate Texts in Mathematics, vol. 211 (Revised third ed.), New York: Springer-Verlag, ISBN 978-0-387-95385-4, MR 1878556, ZbI 0984.00001
- Tu, Loring W. (2011). An Introduction to Manifolds (2nd ed.). Springer. ISBN 978-1-4419-7400-6.
- Mac Lane, Saunders; Birkhoff, Garrett (1999). Algebra (3rd ed.). AMS Chelsea Publishing. ISBN 0-8218-1646-2..
- Misner, Charles W.; Thorne, Kip S.; Wheeler, John A. (1973). Gravitation. W. H. Freeman. ISBN 07167-0344-0.
- Narici, Lawrence; Beckenstein, Edward (2011). Topological Vector Spaces. Pure and applied mathematics (Second ed.). Boca Raton, FL: CRC Press. ISBN 978-1584888666. OCLC 144216834 .
- Rudin, Walter (1973). Functional Analysis. International Series in Pure and Applied Mathematics. Vol. 25 (First ed.). New York, NY: McGraw-Hill Science/Engineering/Math. ISBN 9780070542259.
- Rudin, Walter (1991). Functional Analysis. International Series in Pure and Applied Mathematics. Vol. 8 (Second ed.). New York, NY: McGraw-Hill Science/Engineering/Math. ISBN 978-0-07-054236-5. OCLC 21163277.
- Robertson, A.P.; Robertson, W. (1964). Topological vector spaces. Cambridge University Press.
- Schaefer, Helmut H. (1966). Topological vector spaces. New York: The Macmillan Company.
- Schaefer, Helmut H.; Wolff, Manfred P. (1999). Topological Vector Spaces. GTM. Vol. 8 (Second ed.). New York, NY: Springer New York Imprint Springer. ISBN 978-1-4612-7155-0. OCLC 840278135.
- Trèves, François (2006) [1967]. Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. Mineola, N.Y.: Dover Publications. ISBN 978-0-486-45352-1. OCLC 853623322.

External links

- Weisstein, Eric W. “Dual Vector Space”. MathWorld.