切空间

Wikipedia

6 November 2023

在数学上，一个流形的**切空间** (**tangent space**) 是二维空间中曲线的切线 (*tangent lines*) 和三维空间中曲面的切平面 (*angent planes*) 在高维空间中的推广。在物理学的上下文中，一个流形在一个点处的切空间可以看作是一个粒子在流形上运动的可能速度空间。

1　非正式描述

在微分几何中，人们可以在一个可微流形的每个点 x 上附着一个切空间 —— 一个实向量空间，直观地包含可以切向地通过 x 的可能方向。在 x 处的切空间元素称为在 x 处的**切向量** (*tangent vectors*)。这是基于给定初始点的向量概念的推广，在欧氏空间中。一个连通流形的每一点的切空间的维数与流形本身的维数相同。

例如，如果给定的流形是 2-球面，则人们可以将某一点处的切空间描绘为在该点处与球面接触，并且垂直于通过该点的球面半径的平面。更一般地说，如果一个给定的流形被认为是欧氏空间的一个嵌入子流形，则人们可以用这种文字的方式描绘一个切空间。这是定义并行传输的传统方法。微分几何和广义相对论的许多作者都使用它。[1] [2] 更严格地说，这定义了仿射切空间，它不同于现代术语描述的切向量空间。

相反，在代数几何中，一个代数簇 V 的切空间在一个点处 (*tangent space at a point*) 是一个内在定义，该定义给出一个向量空间，其维数至少为 V 本身的维数。切空间的维数与 V 的维数正好相等的点 p 称为非奇异的 (*nonsingular*) 点；其它的称为奇异的 (*singular*) 点。例如，与自身相交的曲线在该点处没有唯一的切线。V 的奇异点是“流形测试”失败的地方。参见 Zariski 切空间。

一旦引入一个流形的切空间，人们就可以定义向量场，其是在空间中运动粒子速度场的抽象。一个向量场以平滑的方式将一个向量从该点的切空间附着到流形的每个点。这样一个向量场用于定义流形上的一个广义常微分方程：这样一个微分方程的一个解是在流形上的一条可微曲线，它在任意一点的导数等价于向量场附着于该点的切向量。

一个流形的所有切空间可以“粘合在一起”，以形成一个新的可微流形，其维数是原流形的两倍，称为流形的**切丛** (*tangent bundle*)。

2　形式定义

上面的非正式描述依赖于一个流形嵌入到一个环境向量空间 $\mathbb{R}^m$ 中的能力，以便切向量能够从流形“伸出”到环境空间中。然而，这仅基于流形本身定义切空间的概念更为方便。[3]

定义一个流形的切空间有多种等价方法。虽然通过曲线速度的定义直观上是最简单的，但它也是最麻烦的。下面描述更优雅和抽象的方法。

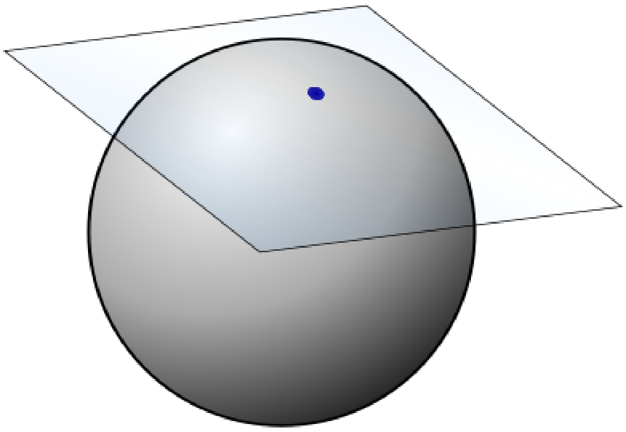

图 1: 球面上单个点 x 的切空间的图示。该切空间中的一个向量表示 (在球面上移动的物体) 在 x 处的一个可能速度。在沿着该方向运动到附近的点后，速度将由该点在切空间中的一个向量给出——这是一个不同的切空间，没有显示出来。

2.1 通过切曲线定义

在嵌入的流形图像中,在一个点 x 处的一个切向量被认为是一条曲线通过该点的速度 (*velocity*)。因此，我们可以将切向量定义为在 x 处彼此相切时通过 x 的曲线的一个等价类。

假设 M 是一个 C^k 可微流形 (具有光滑度 $k \geq 1$)，并且 $x \in M$。拾取一个坐标图表 (chart) $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, 其中 U 是一个包含 x 的 M 的开子集。进一步假设给定两条曲线 $\gamma_1, \gamma_2 : (-1, 1) \to M$，其中 $\gamma_1(0) = x = \gamma_2(0)$，以使得 $\varphi \circ \gamma_1, \varphi \circ \gamma_2 : (-1, 1) \to \mathbb{R}^n$ 在一般意义上都是可微的，我们称为在x 处初始化的**可微曲线** (*differentiable curves*)。则 γ_1 和 γ_2 在 0 处**等价** (*equivalent*) 当且仅当 $\varphi \circ \gamma_1$ 和 $\varphi \circ \gamma_2$ 的导数在 0 处重合。这定义了在 x 处初始化的所有可微曲线的集合，并且这些曲线的等价类称为 M 在 x 处的**切向量** (*tangent vectors*)。任意此类曲线 γ 的等价类用 $\gamma'(0)$ 标志。将 M 在 x 处的**切空间** (*tangent space*)，用 T_xM 标志，则定义为在 x 处所有切向量的集合；它不取决于坐标图表 $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ 的选择。

为在 T_xM 上定义向量-空间运算，我们使用一个图表 $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$，并通过 $\mathrm{d}\varphi_x(\gamma'(0)) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(\varphi \circ \gamma)(t)\right]\Big|_{t=0}$ 定义一个映射 $\mathrm{d}\varphi_x : T_xM \to \mathbb{R}^n$，其中 $\gamma \in \gamma'(0)$。映射 $\mathrm{d}\varphi_x$ 是双射的，并可用于将在 $\mathbb{R}^n$ 上的向量-空间运算传输到在 T_xM 之上，从而将后者转换到一个 n 维实向量空间。同样，人们需要检查这种构造不依赖于特定的图表 $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$，并且使用曲线 γ，事实上确实如此。

2.2 通过导子定义

现在假设 M 是一个 C^∞ 流形。一个实值函数 $f : M \to \mathbb{R}$ 称为属于 $C^\infty(M)$，当且仅当对于每个坐标图表 $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$，映射 $f \circ \varphi^{-1} : \varphi[U] \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是无穷可微的。注意 $C^\infty(M)$ 是相对于函数的逐点积加与标量乘法的一个实结合代数。

在 $x \in M$ 处的一个**导子** (*derivation*) 定义为一个线性映射 $D : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$，它满足 Leibniz 恒等式

$$\forall f, g \in C^\infty(M) : \quad D(fg) = D(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot D(g),$$

它是建模在微积分的乘积规则之上的。

(对于每一个恒常函数 $f = \text{const}$，它遵循 $D(f) = 0$ 。)

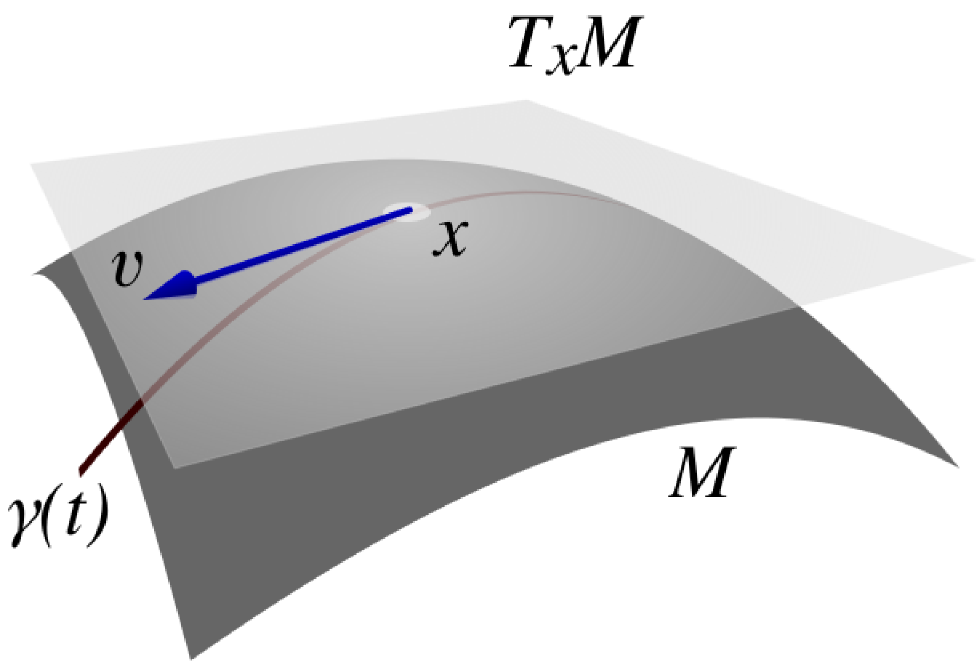

图 2: 切空间 T_xM 和一个切向量 $v \in T_xM$，沿着一条穿过 $x \in M$ 的曲线运动。

标志 T_xM 为在 x 处所有导子的集合。设置

- $(D_1 + D_2)(f) := D_1(f) + D_2(f)$ and
- $(\lambda \cdot D)(f) := \lambda \cdot D(f)$

将 T_xM 转换进入一个向量空间。

2.2.1 推广

这个定义的推广是可能的，例如，推广到复流形和代数簇。然而，与其研究函数全代数的导子 D，人们不如从函数的胚芽层面入手。这样做的原因是，对于这样的结构，结构层可能是不适合的。例如，设 X 是一个代数簇，其结构层为 $\mathcal{O}_X$。则在一个点 $p \in X$ 处的 Zariski 切空间是所有 $\Bbbk$-导子 $D : \mathcal{O}_{X,p} \to \Bbbk$ 的集合、其中 $\Bbbk$ 是基域，并且 $\mathcal{O}_{X,p}$ 是 $\mathcal{O}_X$ 在 p 处的茎。

2.3 定义的等价性

对于 $x \in M$ 和一条可微曲线 $\gamma : (-1,1) \to M$，使得 $\gamma(0) = x$，定义 $D_\gamma(f) := (f \circ \gamma)'(0)$ (其中导数取一般意义，因为 $f \circ \gamma$ 是一个从 $(-1,1)$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数)。人们可以确定 $D_\gamma(f)$ 是一个在点 x 处的导子，并且等效曲线也会产生相同的导子。因此，对于一个等价类 $\gamma'(0)$，我们可以定义 $D_{\gamma'(0)}(f) := (f \circ \gamma)'(0)$，其中曲线 $\gamma \in \gamma'(0)$ 任意选择。映射 $\gamma'(0) \mapsto D_{\gamma'(0)}$ 是等价类 $\gamma'(0)$ 空间与在点 x 处的导子空间之间的一个向量空间同构。

2.4 通过余切空间定义

同样，我们从一个 C^∞ 流形 M 和一个点 $x \in M$ 开始。考虑 $C^\infty(M)$ 的理想 I，它由在 x 处消失 (为零) 的所有光滑函数 f 构成，即 $f(x)=0$。则 I 和 I^2 都是实向量空间，并且通过使用 Taylor 定理可以证明商空间 I/I^2 同构于余切空间 T_x^*M。则可以将切空间 T_xM 定义为 I/I^2 的对偶空间。

虽然这个定义是最抽象的，但它也是最容易转换到其它设置的定义，例如，转换到代数几何中考虑的变体。

如果 D 是在 x 处的一个导子，则对于每个 $f \in I^2$，$D(f)=0$，这意味着 D 产生一个线性映射 $I/I^2 \to \mathbb{R}$。相反，如果 $r: I/I^2 \to \mathbb{R}$ 是一个线性映射，则 $D(f) := r\left((f-f(x))+I^2\right)$ 定义在 x 处的一个导子。这产生了通过导子定义的切空间与通过余切空间定义的切空间之间的等价性。

3 性质

如果 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，则 M 是在一种自然方式中的一个 C^∞ 流形 (取坐标图表为在 $\mathbb{R}^n$ 开子集上的恒等映射)，并且切空间都是自然地用 $\mathbb{R}^n$ 标识的。

3.1 切向量作为方向导数

另一种方法是考虑切向量作为方向导数 (directional derivatives)。给定在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量 v，定义在一个点 $x \in \mathbb{R}^n$ 处对应的方向导数为

$$\forall f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right): \quad \left(D_v f\right)(x) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(x+tv)]\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x).$$

这个映射自然是在 x 处的一个导子。此外，在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点的每个导子都是这种形式。因此，向量 (被认为是在一个点处的切向量) 和在一个点处的导子之间存在一对一的对应关系。

由于一般流形在一个点处的切向量可以定义为在该点处的导子，因此很自然地将其视为方向导数。具体地说，如果 v 是在点 x 处与 M 相切的向量 (被认为是一个导子)，则定义在 v 方向上的方向导数 D_v 为

$$\forall f \in C^\infty(M): \quad D_v(f) := v(f).$$

如果我们认为 v 是可微曲线 γ 在 x 处初始化的初速，即 $v=\gamma'(0)$，则相反的，定义 D_v 为

$$\forall f \in C^\infty(M): \quad D_v(f) := (f \circ \gamma)'(0).$$

3.2 在一个点处切空间的基

对于一个 C^∞ 流形 M，如果一个图表 $\varphi=(x^1,\ldots,x^n): U \to \mathbb{R}^n$ 由 $p \in U$ 给定，则人们可以定义 T_pM 的一个有序基 $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p\right\}$ 为

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \forall f \in C^\infty(M): \quad \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f) := \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)\right)(\varphi(p)).$$

则对于每个切向量 $v \in T_pM$，人们有

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p.$$

因此，该公式将 v 表达为由坐标图表 $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ 定义的基切向量 $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_pM$ 的一个线性组合。[4]

3.3 映射的导数

在光滑 (或可微) 流形之间的每个光滑 (或可微) 映射 $\varphi : M \to N$，在其相应的切空间之间诱导自然线性映射：

$$\mathrm{d}\varphi_x : T_xM \to T_{\varphi(x)}N.$$

如果切空间是通过可微曲线定义的，则此映射由下式定义为

$$\mathrm{d}\varphi_x\left(\gamma'(0)\right) := (\varphi \circ \gamma)'(0).$$

相反，如果切空间是通过导子定义的，则此映射由下式定义为

$$\left[\mathrm{d}\varphi_x(D)\right](f) := D(f \circ \varphi).$$

线性映射 $\mathrm{d}\varphi_x$ 被称为 φ 在 x 处的**导数** (*derivative*)、**全导数** (*total derivative*)、**微分** (*differential*) 或**推前** (*pushforward*)。它通常使用其它各种符号表达：

$$D\varphi_x, \quad \left(\varphi_*\right)_x, \quad \varphi'(x).$$

在某种意义上，导数是 φ 在 x 附近的最佳线性逼近。注意，当 $N = \mathbb{R}$ 时，则映射 $\mathrm{d}\varphi_x : T_xM \to \mathbb{R}$ 与函数 φ 的微分的一般概念一致。在局部坐标中，φ 的导数由雅可比矩阵给出。

关于导数映射的一个重要结果如下：

定理. *如果 $\varphi : M \to N$ 是在 M 中的在 x 处的一个局部微分同胚，则 $\mathrm{d}\varphi_x : T_xM \to T_{\varphi(x)}N$ 是一个线性同构。反之，如果 $\varphi : M \to N$ 是连续可微的，并且 $\mathrm{d}\varphi_x$ 是一个同构，则 x 有一个开邻域 U，使得 φ 将 U 微分同构地盖射到它的象上。*

这是反函数定理在流形之间映射的推广。

See also

- Coordinate-induced basis
- Cotangent space
- Differential geometry of curves
- Exponential map
- Vector space

Notes

1. do Carmo, Manfredo P. (1976). Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall.:

2. Dirac, Paul A. M. (1996) [1975]. General Theory of Relativity. Princeton University Press. ISBN 0-691-01146-X.

3. Chris J. Isham (1 January 2002). Modern Differential Geometry for Physicists (https://books.google.com/books?id=DCn9bjBe27oC&pg=PA70). Allied Publishers. pp. 70-72. ISBN 978-81-7764-316-9.

4. Lerman, Eugene. "An Introduction to Differential Geometry" (https://faculty.math.illinois.edu/~lerman/518/f11/8-19-11.pdf) (PDF). p. 12.

References

- Lee, Jeffrey M. (2009), Manifolds and Differential Geometry, Graduate Studies in Mathematics, vol. 107, Providence: American Mathematical Society.
- Michor, Peter W. (2008), Topics in Differential Geometry, Graduate Studies in Mathematics, vol. 93, Providence: American Mathematical Society.
- Spivak, Michael (1965), Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus (https://archive.org/details/SpivakM.CalculusOnManifolds_201703), W. A. Benjamin, Inc., ISBN 978-0-8053-9021-6.

External links

- Tangent Planes (http://mathworld.wolfram.com/TangentPlane.html) at MathWorld