切丛

Wikipedia

7 December 2023

一个切丛 (**tangent bundle**) 是在一个流形上所有点的切空间集合，其结构使其自身形成一个新的流形。在微分几何中，一个可微流形 M 的切丛是一个流形 TM，它汇集在 M 中的所有切向量。作为一个集合，它由 M 的切空间的不相交并集 [1] 给出。即

$$\begin{aligned} TM &= \bigsqcup_{x \in M} T_x M \\ &= \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_x M \\ &= \bigcup_{x \in M} \{(x, y) \mid y \in T_x M\} \\ &= \{(x, y) \mid x \in M, y \in T_x M\} \end{aligned}$$

其中 T_xM 标志 M 在点 x 处的切空间。因此，TM 的一个元素可以看作是一个配对 (x, v)，其中 x 是在 M 中的一个点，并且 v 是 M 在 x 处的一个切向量。

有一个自然的投影

$$\pi : TM \to M$$

由 $\pi(x, v) = x$ 定义。该投影将切空间 T_xM 的每个元素映射到单个点 x。

切丛配备有一个自然拓扑 (在下面一节中描述)。通过这种拓扑，一个流形的切丛是一个向量丛 (这是一个纤维丛，它是向量空间) 的典型例子。TM 的一个截面是在 M 上的一个向量场，而 TM 的对偶丛是余切丛，它是 M 的余切空间的不相交并集。根据定义，一个流形 M 是可平行的，当且仅当切丛是平凡的。根据定义，一个流形 M 是赋有帧的，当且仅当切丛 TM 是稳定平凡的，这意味着对于某个平凡的丛 E ，Whitney 加和 $TM \oplus E$ 是平凡的。例如，n 维球面 S^n 对所有 n 都是赋有帧的，但只有 $n = 1, 3, 7$ 时才是可平行的 (根据 Bott-Milnor 和 Kervaire 的结果)。

1 角色

切丛的主要作用之一是为一个光滑函数的导数提供一个定义域和值域。具体来说，如果 $f : M \to N$ 是一个光滑函数，其中 M 和 N 是光滑流形，则其导数是一个光滑函数 $Df : TM \to TN$。

[1] 不相交并集确保流形 M 的任意两点 x_1 和 x_2 的切空间 T_1 和 T_2 没有共同向量。这在圆 S^1 的切丛的附图中得到形象的说明，参见示例部分：圆的所有切线都位于圆的平面内。为了使它们不相交，有必要将它们排列在垂直于圆平面的平面上。

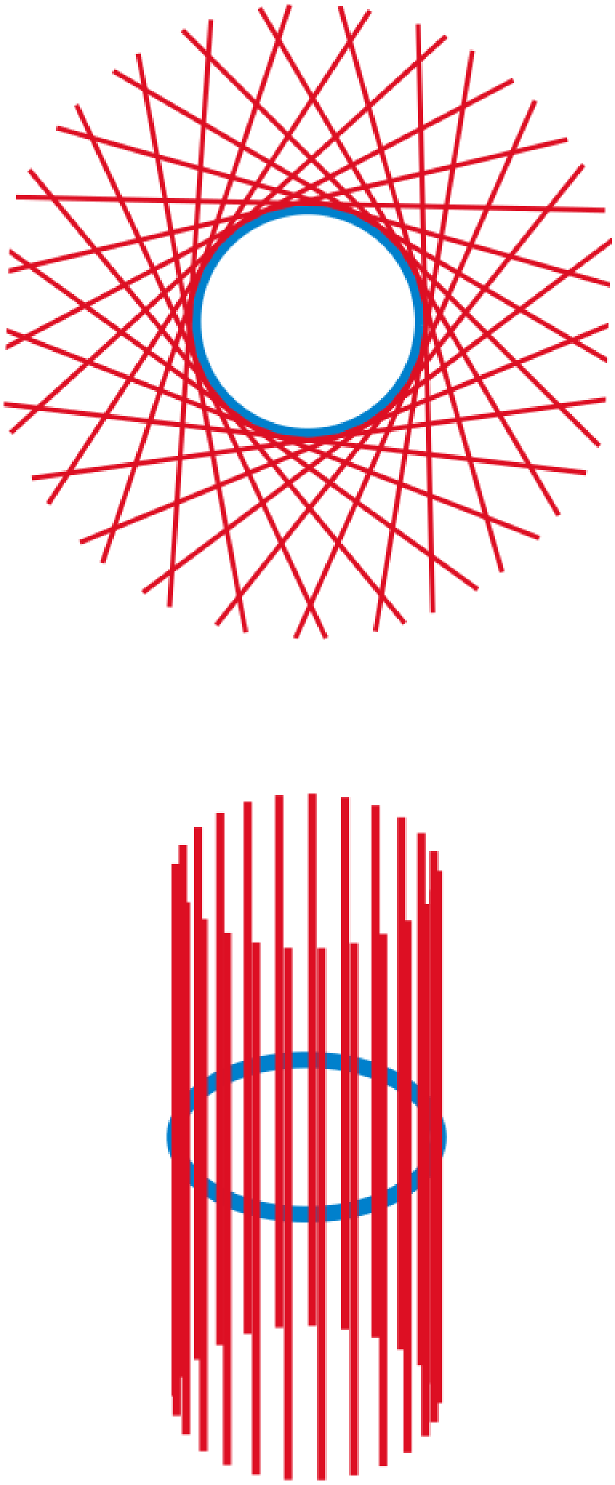

图 1: 非正式地说，一个流形 (在这种情况下是一个圆) 的切丛是通过考虑所有切空间 (上图) 并以一个平滑和不重叠的方式将它们连接在一起 (下图) 而获得的。[note 1]

2 拓扑和光滑结构

切丛自带一个自然拓扑 (**不是**不相交并集拓扑) 和平滑结构，使其本身成为一个流形。TM 的维数是 M 维数的两倍。

一个 n 维流形的每个切向量空间都是一个 n 维向量空间。如果 U 是 M 的一个可缩开子集，则有一个微分同胚 $TU \to U \times \mathbb{R}^n$，它限制为从每个切向量空间 T_xU 到 $\{x\} \times \mathbb{R}^n$ 的线性同构。然而，作为一个流形，TM 并不总是与乘积流 $M \times \mathbb{R}^n$ 微分同胚。当它具 $M \times \mathbb{R}^n$ 的形式时，则称切向量丛是平凡的 (*trivial*)。平凡切向量丛通常发生在配备有“兼容群结构”的流形上；例如，在流形是李群的情况下。单位圆的切向量丛是平凡的，因为它是一个李群 (在乘法及其自然微分结构之下)。然而，并非所有具有平凡切向量丛的空间都是李群；具有平凡切向量丛的流形称为可平行的。正如流形在欧几里得空间上局部建模一样，切向量丛在 $U \times \mathbb{R}^n$ 上局部建模，其中 U 是欧几里得空间的开子集。

如果 M 是一个光滑的 n 维流形，则它配备了一个图集的图表 (U_α, ϕ_α)，其中 U_α 是 M 中的一个开集，并且

$$\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$$

是一个同胚。对于所有 $x \in U_\alpha$，这些在 U_α 上的局部坐标产生一个同构 $T_xM \to \mathbb{R}^n$。我们可以定义一个映射

$$\widetilde{\phi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^{2n}$$

其由下式给出

$$\widetilde{\phi}_\alpha\left(x, v^i \partial_i\right) = \left(\phi_\alpha(x), v^1, \cdots, v^n\right).$$

我们使用这些映射来定义在 TM 上的拓扑和平滑结构。TM 的一个子集 A 是开放的，当且仅当

$$\widetilde{\phi}_\alpha\left(A \cap \pi^{-1}(U_\alpha)\right)$$

对于每个 α，在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中是开放的。这些映射是 TM 和 $\mathbb{R}^{2n}$ 的开子集之间的同胚，并因此可以作为在 TM 上光滑结构的图表。在图表重叠 $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ 上的转换函数由相关坐标变换的雅可比矩阵诱导，并因此是 $\mathbb{R}^{2n}$ 开子集之间的光滑映射。

切丛一个更一般的结构的一个示例，称为一个向量丛 (它本身是一种特定的纤维丛)。具体地说，一个 n 维流形 M 的切丛可以定义为在 M 之上秩为 n 的向量丛，其转换函数由相关坐标变换的雅可比矩阵给出。

3 示例

最简单的例子是 $\mathbb{R}^n$。在这种情况下，切丛是平凡的：通过从 $\mathbb{R}^n$ 中减去 x 的映射，给出一个微分同胚 $T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$，每个 $T_x\mathbb{R}^n$ 到 $T_0\mathbb{R}^n$ 是正则同构的。

另一个简单的例子是单位圆，S^1 (见上图)。圆的切丛也是平凡的，并同构于 $S^1 \times \mathbb{R}$。从几何上讲，这是一个无限高的圆柱体。

唯一可以容易地可视化的切丛是实数线 $\mathbb{R}$ 和单位圆 S^1 的切丛，两者都是平凡的。对于 2 维流形，切丛是 4 维的，因此难以可视化。

一个非平凡切丛的简单例子是单位球面 S^2：由于毛球定理，这个切丛是非平凡的。因此，球面是不可平行的。

4 向量场

将切向量平滑地分配给一个流形的每个点称为一个**向量场** (**vector field**)。具体来说，一个流形 M 上的一个向量场是一个光滑映射

$$V : M \to TM$$

使得 $V(x) = (x, V_x)$，其中对于每个 $x \in M$，$V_x \in T_x M$。在纤维丛的语言中，这样一个映射被称为一个截面。因此，在 M 上的一个向量场是 M 的切丛的一个截面。

在 M 上所有向量场的集合标志为 $\Gamma(TM)$。向量场可以逐点相加

$$(V + W)_x = V_x + W_x$$

并可乘以在 M 上的光滑函数

$$(fV)_x = f(x) V_x$$

以获得其他向量场。所有向量场集合 $\Gamma(TM)$ 于是具有在 M 上光滑函数的交换代数上的模结构，标志为 $C^\infty(M)$。

在 M 上的一个局部向量场是切丛的一个局部截面 (*local section*)。也就是说，一个局部向量场仅在某些开集 $U \subset M$ 上有定义，并为 U 的每个点分配一个在关联切空间中的向量。在 M 上的局部向量场集合形成了一种称为在 M 上实向量空间层 (sheaf of real vector spaces) 的结构。

上述构造同样适用于余切丛—在 M 上的微分 1-形式正是余切丛的截面，即 $\omega \in \Gamma(T^* M)$，$\omega : M \to T^* M$ 为每个点 $x \in M$ 指定一个 1-余向量 $\omega_x \in T_x^* M$，它将切向量映射到实数：$\omega_x : T_x M \to \mathbb{R}$。

等价地，一个微分 1-形式 $\omega \in \Gamma(T^* M)$ 将一个光滑向量场 $X \in \Gamma(TM)$ 映射到一个光滑函数 $\omega(X) \in C^\infty(M)$ 中。

5 高阶切丛

由于切丛 TM 本身是一个光滑流形，因此可以通过重复应用切丛构造来定义二阶切丛：

$$T^2 M = T(TM).$$

一般来说，第 k 阶切丛 $T^k M$ 可以递归地定义为 $T\left(T^{k-1} M\right)$。

一个光滑映射 $f : M \to N$ 有一个诱导的导数，其中切丛是适当的定义域和值域 $Df : TM \to TN$。同样，高阶切丛为高阶导数 $D^k f : T^k M \to T^k N$ 提供定义域和值域。

一个独特但相关的结构是在一个流形上的射流丛 (jet bundles)，它是由射流 (jet) 组成的丛。

6 切丛上的正则向量场

在每个切丛 TM 上，作为流形本身，可以定义一个**正则向量场** (**canonical vector field**) $V : TM \to T^2 M$，作为在每个点处的切空间的对角映射。这是可能的，因为向量空间 W 的切空间自然地是一个乘积，$TW \cong W \times W$，因为向量空间本身是平坦的，并因此在这个乘积结构下有一个自然的对角映射 $W \to TW$，在这个乘积结构之下，给出为 $w \mapsto (w, w)$。将这个乘积结构应用于在每个点处的切空间并全局化，产生正则向量场。非正式地说，虽然流形 M 是弯曲的，但在一个

点 x 处的每个切空间 $T_xM \approx \mathbb{R}^n$ 是平坦的，因此切丛流形 TM 在局部上是一个弯曲的 M 和一个平坦的 $\mathbb{R}^n$ 的乘积。因此，切丛的切丛在局部上是 (使用 $\approx$ 表示“坐标选择”，并使用 $\cong$ 表示“自然标识”)：

$$T(TM) \approx T\left(M \times \mathbb{R}^n\right) \cong TM \times T\left(\mathbb{R}^n\right) \cong TM \times \left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\right)$$

并且映射 $TTM \to TM$ 是投影到第一个坐标上的盖射：

$$(TM \to M) \times \left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\right).$$

通过零截面分割第一个映射，并通过对角分割第二个映射，产生正则向量场。

如果 (x, v) 是 TM 的局部坐标，则向量场具有表达式

$$V = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial v^i}\bigg|_{(x,v)}.$$

更简洁地说，$(x, v) \mapsto (x, v, 0, v)$ 一坐标的第一个配对没有改变，因为它是一个丛的截面，并且这些只是在基空间中的点：坐标的最后一个配对是截面本身。这个向量场的表达式只取决于 v，而不取决于 x，因为只有切线方向可以自然地标识。

或者，考虑标量乘法函数：

$$\begin{cases} \mathbb{R} \times TM \to TM \\ (t, v) \longmapsto tv \end{cases}.$$

这个函数在时间 $t = 1$ 相对于变量 $\mathbb{R}$ 的导数是一个函数 $V : TM \to T^2M$，这是正则向量场的另一种描述。

在 TM 上存在这样的向量场类似于在余切丛上的正则 1-形式。有时 V 也被称为 **Liouville 向量场** (**Liouville vector field**)，或**径向向量场** (**radial vector field**)。使用 V 可以表征切丛。本质上，V 可以用 4 个公理来表征，并且如果一个流形有一个满足这些公理的向量场，则这个流形是一个切丛，并且该向量场是它的正则向量场。示例参见 De León 等人的文献。

7 提升

有各种方法将在 M 上的对象提升为在 TM 上的对象。例如，如果 γ 是在 M 中的一条曲线，则 γ' (γ 的切线) 是在 TM 中的一条曲线。相比之下，如果没有对 M 的进一步假设 (例如，黎曼度量)，则没有类似的方法提升进入余切丛。

一个函数 $f : M \to \mathbb{R}$ 的垂直提升 (*vertical lift*) 是函数 $f^\vee : TM \to \mathbb{R}$，由 $f^\vee = f \circ \pi$ 定义，其中 $\pi : TM \to M$ 是正则投影。

See also

- Pushforward (differential)
- Unit tangent bundle
- Cotangent bundle
- Frame bundle
- Musical isomorphism

References

- Lee, Jeffrey M. (2009), Manifolds and Differential Geometry, Graduate Studies in Mathematics, vol. 107, Providence: American Mathematical Society. ISBN 978-0-8218-48159
- Lee, John M. (2012). Introduction to Smooth Manifolds. Graduate Texts in Mathematics. Vol. 218. doi:10.1007/978-1-4419-9982-5 (`https://doi.org/10.1007%2F978-1-4419-9982-5`). ISBN 978-1-4419-9981-8.
- Jürgen Jost, Riemannian Geometry and Geometric Analysis, (2002) Springer-Verlag, Berlin. ISBN 3-540-42627-2 - Ralph Abraham and Jerrold E. Marsden, Foundations of Mechanics, (1978) BenjaminCummings, London. ISBN 0-8053-0102-X
- León, M. De; Merino, E.; Oubiña, J. A.; Salgado, M. (1994). "A characterization of tangent and stable tangent bundles" (`http://archive.numdam.org/article/AIHPA_1994_61_1_1_0.pdf`) (PDF). Annales de l'I.H.P.: Physique Théorique. 61 (1): 1-15.
- Gudmundsson, Sigmundur; Kappos, Elias (2002). "On the geometry of tangent bundles". Expositiones Mathematicae. 20: 1-41. doi:10.1016/S0723-0869(02)80027-5 (`https://doi.org/10.1016%2FS0723-0869%2802%2980027-5`).

External links

- "Tangent bundle" (`https://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Tangent_bundle`), Encyclopedia of Mathematics, EMS Press, 2001 [1994]
- Wolfram MathWorld: Tangent Bundle (`http://mathworld.wolfram.com/TangentBundle.html`) - PlanetMath: Tangent Bundle (https://planetmath.org/tangentbundle)