外导数

Wikipedia

13 June 2024

在可微流形上，**外导数 (exterior derivative)** 将函数微分的概念扩展到更高阶的微分形式。外导数最早由 Élie Cartan 在 1899 年以现代的形式描述。由此产生的微积分，称为外微积分，允许自然地、无需度量地推广矢量微分学中的斯托克斯定理、高斯定理和格林定理。

如果把一个微分 k-形式想象成在流形的每一点上通过一个无穷小的 k-平行多面体的通量，则它的外导数可以理解为测量在每一点上 $(k+1)$-平行多面体边界上的净通量。

1 定义

外导数是一个将 k-形式映射为 $(k+1)$-形式的微分形式。

如果 f 是一个光滑函数 (一个 0-形式)，则外导数 df 就是 f 的微分。也就是说，df 是唯一的 1-形式，使得对于每一个光滑的向量场 X，有 $df(X) = d_X f$，其中 $d_X f$ 是 f 在 X 方向的方向导数。

外积 (标记为同一个符号 $\wedge$) 被定义为微分形式在每一点上的外积。

对于一般的 k-形式，外导数有多种等价的定义。

1.1 基于公理定义

外导数被定义为唯一的 $\mathbb{R}$-线性映射，它将 k-形式映射为 $(k+1)$-形式，并满足以下性质：

1. df 是 f 的微分，其中 f 是一个 0-形式。
2. $d(df) = 0$ 对于 0-形式 f。
3. $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p(\alpha \wedge d\beta)$，其中 α 是一个 p-形式。换句话说，d 是一个在外代数 (exterior algebra) 上度数为 1 的反导数 (参见分级乘法规则 (graded product rule))。

第二个定义性质在更一般的情况下也成立：$d(d\alpha) = 0$ 对于任意 k-形式 α；更简洁地说，$d^2 = 0$。第三个定义性质意味着如果 f 是一个函数，α 是一个 k-形式，则 $d(f\alpha) = d(f \wedge \alpha) = df \wedge \alpha + f \wedge d\alpha$，因为一个函数是一个 0-形式，标量乘法和外积在外代数中等价，当其中一个参数是标量时。

1.2 基于局部坐标定义

另外，我们也可以完全在一个局部坐标系统 $x^1, \ldots, x^n$ 中工作。坐标微分 $dx^1, \ldots, dx^n$ 形成了 1-形式空间的一组基，每个坐标微分与一个坐标关联。给定一个多指标 $I = (i_1, \ldots, i_k)$ 其中

$1 \leq i_p \leq n$ 对于 $1 \leq p \leq k$ (并且标记 $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ 为 dx^I)，一个简单的 k-形式

$$\varphi = g dx^I = g dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 之上的外导数定义为

$$d\varphi = \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I$$

(使用爱因斯坦求和约定)。外导数的定义被线性地扩展到一般的 k-形式为

$$\omega = f_I dx^I,$$

其中多指标 I 的每一个分量在 $\{1, \ldots, n\}$ 上取值。注意，每当 i 等于多指标 I 的一个分量时，则 $dx^i \wedge dx^I = 0$ (参见外积 (Exterior product))。

基于局部坐标的外导数定义遵循上述基于公理的定义。实际上，对于上面定义的 k-形式 φ，

$$\begin{aligned}
d\varphi &= d\left(g dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right) \\
&= dg \wedge \left(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right) + g d\left(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right) \\
&= dg \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + g \sum_{p=1}^{k} (-1)^{p-1} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p-1}} \wedge d^2 x^{i_p} \wedge dx^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\
&= dg \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\
&= \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}
\end{aligned}$$

在这里，我们将 g 解释为一个 0-形式，然后应用了外导数的性质。

这个结果直接推广到一般的 k-形式 ω 为

$$d\omega = \frac{\partial f_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I.$$

特别是对于 1-形式 ω，在局部坐标中 $d\omega$ 的分量为

$$(d\omega)_{ij} = \partial_i \omega_j - \partial_j \omega_i.$$

注意：关于 $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ 的意义有两种不同的约定。大多数当前的作者采用的约定，为

$$\left(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right) = 1.$$

而在较早的文献如 Kobayashi 和 Nomizu 或 Helgason 中的约定，为

$$\left(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right) = \frac{1}{k!}.$$

1.3 基于不变性公式定义

另外，对于一个 k-形式 ω 的外导数可以给出[1]一个明确的公式，当与 $k+1$ 个任意的光滑向量场 $V_0, V_1, \ldots, V_k$ 配对时，为：

$$d\omega\left(V_0, \ldots, V_k\right) = \sum_i (-1)^i V_i\left(\omega\left(V_0, \ldots, \widehat{V}_i, \ldots, V_k\right)\right) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega\left(\left[V_i, V_j\right], V_0, \ldots, \widehat{V}_i, \ldots, \widehat{V}_j, \ldots, V_k\right)$$

[1] Spivak(1970), p 7-18, Th. 13

其中 $[V_i, V_j]$ 标记李括号，并且帽子符号标记所省略的那些元素：

$$\omega\left(V_0, \ldots, \widehat{V}_i, \ldots, V_k\right) = \omega\left(V_0, \ldots, V_{i-1}, V_{i+1}, \ldots, V_k\right).$$

特别地，当 ω 是一个 1-形式时，我们有 $d\omega(X, Y) = d_X(\omega(Y)) - d_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$。

注意：根据 Kobayashi-Nomizu 和 Helgason 的约定，公式会有一个 $\frac{1}{k+1}$ 的因子差：

$$\begin{aligned} d\omega\left(V_0, \ldots, V_k\right) = & \frac{1}{k+1} \sum_i (-1)^i V_i \left(\omega\left(V_0, \ldots, \widehat{V}_i, \ldots, V_k\right)\right) \\ & + \frac{1}{k+1} \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega\left(\left[V_i, V_j\right], V_0, \ldots, \widehat{V}_i, \ldots, \widehat{V}_j, \ldots, V_k\right) \end{aligned}$$

2 示例

示例 1. 对于一个标量场 u，考虑在一个 1-形式的基 $dx^1, \ldots, dx^n$ 之上的 $\sigma = u dx^1 \wedge dx^2$。其外导数为：

$$\begin{aligned} d\sigma &= du \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i\right) \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \sum_{i=3}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge dx^2\right) \end{aligned}$$

最后一个公式，其中求和从 $i = 3$ 开始，很容易从外积的性质得出。具体来说，$dx^i \wedge dx^i = 0$。

示例 2. 设 $\sigma = u dx + v dy$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 之上的一个 1-形式。通过将上述公式应用于每一项 (考虑 $x^1 = x$ 和 $x^2 = y$)，我们有加和

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i \wedge dx\right) + \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x^i} dx^i \wedge dy\right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \wedge dx\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy \wedge dy\right) \\ &= 0 - \frac{\partial u}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx \wedge dy + 0 \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

3 流形上的斯托克斯定理

如果 M 是一个紧致的光滑可定向的 n-维流形，边界为 ∂M，并且 ω 是在 M 上的一个 $(n-1)$-形式，则广义的斯托克斯定理表明

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

直观上讲，如果认为 M 被划分成无穷小的区域，并且加上所有这些区域边界的通量，内部边界都会相互抵消，只留下通过 M 边界的总通量。

4 更多性质

4.1 闭合与恰当形式

一个 k-形式 ω 被称为闭合的 (closed)，如果 $d\omega=0$；闭合形式是 d 的核。若 $\omega=d\alpha$ 对于某个 $(k-1)$-形式 α，则称 ω 是恰当的 (exact)；恰当形式是 d 的像 (image)。由于 $d^2=0$，每一个恰当形式都是闭合的。庞加莱引理指出，在一个可缩区域内，反之亦然也是正确的。

4.2 德拉姆上同调

由于外导数 d 满足 $d^2=0$ 的性质，它可以作为微分 (上链) 来定义流形上的德拉姆上同调。第 k 阶德拉姆上同调 (群) 是由闭合 k-形式模恰当 k-形式构成的向量空间；如前一节所述，庞加莱引理表明对于一个可缩区域，当 $k>0$ 时这些向量空间是平凡的。对于光滑流形，形式的积分给出了从德拉姆上同调到实数域 $\mathbb{R}$ 上的奇异上同调的一个自然同态。德拉姆定理说明了这个映射实际上是一个同构，这是庞加莱引理的一个深远的推广。正如广义斯托克斯定理所暗示的那样，外导数是奇异单纯形的边界算子的“对偶”。

4.3 自然性

外导数在技术意义上是自然的：如果 $f:M\to N$ 是一个光滑映射，而 Ω^k 是一个逆变光滑函子，它将每个流形映射到该流形上的 k-形式的空间，则下面的图是交换的

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^k(N) & \xrightarrow{f^*} & \Omega^k(M) \\
{\scriptstyle d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d} \\
\Omega^{k+1}(N) & \xrightarrow{f^*} & \Omega^{k+1}(M)
\end{array}$$

所以 $d(f^*\omega)=f^*d\omega$，其中 f^* 标记 f 的拉回 (pullback)。这源于 $f^*\omega(\cdot)$，按定义，是 $\omega(f_*(\cdot))$，f_* 是 f 的推前 (pushforward)。因此，d 是一个从 Ω^k 到 Ω^{k+1} 的自然变换。

5 外导数在矢量微分学中的应用

大多数矢量微分算子都是外导数概念的特殊情况或与其有密切关系。

5.1 梯度 (Gradient)

一个光滑函数 $f:M\to\mathbb{R}$ 在实可微流形 M 上是一个 0-形式。这个 0-形式的外导数是 1-形式 df。

当内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 被定义时，函数 f 的梯度 ∇f 被定义为在 V 中唯一的一个向量，使得它与 V 的任意向量的内积等于沿着该向量的方向导数，即

$$\langle\nabla f,\cdot\rangle=df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i.$$

也就是说，

$$\nabla f=(df)^\sharp=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\left(dx^i\right)^\sharp,$$

其中 $\sharp$ 标记由内积诱导的音乐同构 $\sharp : V^* \to V$。

这个 1-形式 df 是余切丛的一个截面，它给出了 f 在每一点余切空间中的局部线性近似。

5.2 散度 (Divergence)

在 $\mathbb{R}^n$ 上的一个向量场 $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ 有一个相应的 $(n-1)$-形式

$$\begin{aligned}\omega_V &= v_1 \left(dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n\right) - v_2 \left(dx^1 \wedge dx^3 \wedge \cdots \wedge dx^n\right) + \cdots + (-1)^{n-1} v_n \left(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i-1)} v_i \left(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge \widehat{dx^i} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n\right)\end{aligned}$$

其中 $\widehat{dx^i}$ 标记所省略的那些项。

(例如，当 $n = 3$，即在三维空间中，2-形式 ω_V 局部上是与 V 的标量三重积。) ω_V 在超曲面上的积分是 V 在该超曲面上的通量。

这个 $(n-1)$-形式的外导数是 n-形式

$$d\omega_V = \mathrm{div} V \left(dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n\right).$$

5.3 旋度 (Curl)

在 $\mathbb{R}^n$ 上的一个向量场 V 也有一个相应的 1-形式

$$\eta_V = v_1 dx^1 + v_2 dx^2 + \cdots + v_n dx^n.$$

局部上，η_V 是与 V 的点积。沿着路径积分 η_V 是沿着该路径对抗 $-V$ 所做的功。

当 $n = 3$，即在三维空间中，1-形式 η_V 的外导数是 2-形式

$$d\eta_V = \omega_{\mathrm{curl}\ V}.$$

5.4 不变性形式中的矢量微分算子

标准的矢量微分算子可以推广到任意伪黎曼流形，并用坐标无关的表示如下：

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{grad} f & \equiv & \nabla f & = (df)^\sharp \\ \mathrm{div} F & \equiv & \nabla \cdot F & = \star d \star \left(F^\flat\right) \\ \mathrm{curl} F & \equiv & \nabla \times F & = \left(\star d \left(F^\flat\right)\right)^\sharp \\ \Delta f & \equiv & \nabla^2 f & = \star d \star df \\ & & \nabla^2 F & = \left(d \star d \star \left(F^\flat\right) - \star d \star d \left(F^\flat\right)\right)^\sharp, \end{array}$$

其中 $\star$ 是霍奇星算子，$\flat$ 与 $\sharp$ 是音乐同构，f 是一个标量场，而 F 是一个向量场。

注意：旋度表达式要求 $\sharp$ 作用于 $\star d\left(F^\flat\right)$，这是一个 $n-2$ 级的形式。对任意度数的 k-形式的 $\sharp$ 的自然推广使得这个表达式对于任意 n 都有意义。

See also

- Exterior covariant derivative
- Green's theorem
- de Rham complex
- Lie derivative
- Finite element exterior calculus
- Stokes' theorem
- Discrete exterior calculus
- Fractal derivative

References

- Cartan, Élie (1899). "Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff". Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Série 3 (in French). 16. Paris: Gauthier-Villars: 239-332. doi:10.24033/asens.467. ISSN 0012-9593. JFM 30.0313.04. Retrieved 2 Feb 2016
- Conlon, Lawrence (2001). Differentiable manifolds. Basel, Switzerland: Birkhäuser. p. 239. ISBN 0-81764134-3.
- Darling, R. W. R. (1994). Differential forms and connections. Cambridge, UK: Cambridge University Press. p. 35. ISBN 0-521-46800-0.
- Flanders, Harley (1989). Differential forms with applications to the physical sciences. New York: Dover Publications. p. 20. ISBN 0-486-66169-5.
- Loomis, Lynn H.; Sternberg, Shlomo (1989). Advanced Calculus. Boston: Jones and Bartlett. pp. 304-473 (ch. 7-11). ISBN 0-486-66169-5.
- Ramanan, S. (2005). Global calculus. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society. p. 54. ISBN 0-8218-3702-8.
- Spivak, Michael (1971). Calculus on Manifolds. Boulder, Colorado: Westview Press. ISBN 9780805390216.
- Spivak, Mlchael (1970), A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol. 1, Boston, MA: Publish or Perish, Inc, ISBN 0-914098-00-4
- Warner, Frank W. (1983), Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Graduate Texts in Mathematics, vol. 94, Springer, ISBN 0-387-90894-3

External links

- Archived at Ghostarchive and the Wayback Machine: "The derivative isn't what you think it is". Aleph Zero. November 3, 2020 - via YouTube.