余切空间

Wikipedia

2 February 2024

在微分几何中，**余切空间** (**cotangent space**) 是在光滑 (或可微) 流形 $\mathcal{M}$ 上与一个点 x 相关联的向量空间；我们可以为在一个光滑流形上的每个点定义一个余切空间。通常，余切空间 $T_x^*\mathcal{M}$ 被定义为在 x 处的切空间 $T_x\mathcal{M}$ 的对偶空间，尽管有更直接的定义 (见下文)。余切的元素空间被称为**余切向量** (**cotangent vectors**) 或**切余向量** (**tangent covectors**)。

1 性质

在一个连通流形上的所有点的所有余切空间都具有相同的维数，等于该流形的维数。一个流形的所有余切空间可以“粘合”在一起 (即并集并赋予拓扑)，形成一个新的两倍维数的可微流形，即该流形的余切丛。

在一个点处的切空间和余切空间都是相同维度的实向量空间，因此通过许多可能的同构相互同构。一个黎曼度量或一个辛形式的引入，使得切空间与在一个点处的余切空间之间存在一个自然同构，并将一个正则切向量与任意切余向量相关联。

2 形式定义

2.1 线性泛函的定义

设 $\mathcal{M}$ 是一个光滑流形，并设 x 是在 $\mathcal{M}$ 中的一个点。设 $T_x\mathcal{M}$ 是在 x 处的切空间。则在 x 处的余切空间定义为 $T_x\mathcal{M}$ 的对偶空间：

$$T_x^*\mathcal{M} = (T_x\mathcal{M})^*$$

具体地说，余切空间的元素是在 $T_x\mathcal{M}$ 上的线性泛函。即每个元素 $\alpha \in T_x^*\mathcal{M}$ 都是一个线性映射

$$\alpha : T_x\mathcal{M} \to F$$

其中 F 是所考虑的向量空间的底层域，例如实数域。$T_x^*\mathcal{M}$ 的元素称为余切向量。

2.2 备选定义

在某些情况下，可能希望直接定义余切空间而不参考切空间。这样的定义可以用在 $\mathcal{M}$ 上光滑函数的等价类来表述。非正式地，我们将说，如果两个光滑函数 f 和 g 在一个点 x 附近具有相同的一阶行为，则它们在点 x 处是等价的，类似于它们的线性泰勒多项式；当且仅当函数 $f-g$ 的导

数在 x 处消失 (为零) 时，两个函数 f 和 g 在 x 附近具有相同的一阶行为。则余切空间将包含一个函数在 x 附近的所有可能的一阶行为。

设 $\mathcal{M}$ 是一个光滑流形，并设 x 是在 $\mathcal{M}$ 中的一个点。设 I_x 是在 $C^\infty(\mathcal{M})$ 中 x 处消失 (为零) 的所有函数的理想，并设 I_x^2 是形式为 $\sum_i f_i g_i$ 的函数的集合，其中 $f_i, g_i \in I_x$。则 I_x 和 I_x^2 都是实向量空间，并且通过证明这两个空间是相互同构的，余切空间可被定义为商空间 $T_x^*\mathcal{M} = I_x/I_x^2$。

这种表述类似于在代数几何中构造余切空间来定义 Zariski 切空间。该结构也推广到局部赋环空间。

3 函数的微分

设 M 是一个光滑流形，并设 $f \in C^\infty(M)$ 是一个光滑函数。f 在一个点 x 处的微分是映射

$$\mathrm{d}f_x\left(X_x\right) = X_x(f)$$

其中 X_x 是一个在 x 处的切向量，被认为是一个导子 (derivation)。也就是，$X(f) = \mathcal{L}_X f$ 是 f 在方向 X 上的李导数，并且有 $\mathrm{d}f(X) = X(f)$。等价地，我们可以认为切向量相切于曲线，并写为

$$\mathrm{d}f_x\left(\gamma'(0)\right) = (f \circ \gamma)'(0)$$

在这两种情况下，$\mathrm{d}f_x$ 都是在 $T_x M$ 上的一个线性映射，并因此它是在 x 处的切余向量。

我们然后可以定义在点 x 处的微分映射 $\mathrm{d} : C^\infty(M) \to T_x^*(M)$，做为将 f 发送到 $\mathrm{d}f_x$ 的映射。微分映射的性质包括：

1. 对于常数 a 和 b, d 是一个线性映射：$\mathrm{d}(af + bg) = a\ \mathrm{d}f + b\ \mathrm{d}g$
2. $\mathrm{d}(fg)_x = f(x)\mathrm{d}g_x + g(x)\mathrm{d}f_x$

微分映射提供上述余切空间的两个备选定义之间的连接。因为对于所有的 $f \in I_x^2$，存在 $g_i, h_i \in I_x$，以使得 $f = \sum_i g_i h_i$，我们有

$$\mathrm{d}f_x = \sum_i\ \mathrm{d}\left(g_i h_i\right)_x = \sum_i \left(g_i(x)\mathrm{d}\left(h_i\right)_x + \mathrm{d}\left(g_i\right)_x h_i(x)\right) = \sum_i \left(0\ \mathrm{d}\left(h_i\right)_x + \mathrm{d}\left(g_i\right)_x 0\right) = 0,$$

即，在 I_x^2 中的所有函数都有微分零，对于每一对函数 $f \in I_x^2, g \in I_x$，它们都遵循这结果，我们就有 $\mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}(g)$。现在我们可以通过将线性映射 α 发送到相应的陪集 $\alpha + I_x^2$ 来构造 $T_x^*\mathcal{M}$ 和 I_x/I_x^2 之间的同构。对于一个给定的核和斜率因此有一个唯一的线性映射，这是一个同构，建立了两个定义的等价性。

4 光滑映射的拉回

正如流形之间的每个可微映射 $f : M \to N$ 诱导在切空间之间的一个线性映射，称为**推前** (*pushforward*) 或**导数** (*derivative*)

$$f_* : T_x M \to T_{f(x)} N$$

每一个这样的映射都会在余切空间之间诱导一个线性映射，称为**拉回** (*pullback*)，只是这次是反向的：

$$f^* : T_{f(x)}^* N \to T_x^* M.$$

拉回自然地被定义为推前的对偶 (或转置)。拆开定义，这意味着：

$$(f^*\theta)(X_x) = \theta(f_* X_x),$$

其中 $\theta \in T^*_{f(x)}N$ 和 $X_x \in T_x M$。小心注意每个东西所处的位置。

如果我们根据在一点处消失 (为零) 的光滑映射的等价类来定义切余向量，则拉回的定义就更简单。设 g 是在 M 上的一个光滑函数，它在 $f(x)$ 处消失 (为零)。则由 g 确定的切余向量的拉回 (标志为 $\mathrm{d}g$) 给出为

$$f^*\,\mathrm{d}g = \mathrm{d}(g \circ f).$$

也就是，它是在 M 上由 $g \circ f$ 确定在 x 处消失 (为零) 的函数的等价类。

5 外幂

余切空间的第 k 次外幂，标志为 $\Lambda^k(T^*_x\mathcal{M})$，在微分几何与代数几何中是另一个重要对象。第 k 次外幂中的向量，或者更精确地说，余切丛的第 k 次外幂的截面，被称为微分 k-形式。可以将它们视为在 k 次切向量上的交替多线性映射。由于这个原因，切余向量经常被称为 **1-形式** (*one-forms*)。

References

- Abraham, Ralph H.; Marsden, Jerrold E. (1978), Foundations of mechanics, London: Benjamin-Cummings, ISBN 978-0-8053-0102-1
- Jost, Jürgen (2005), Riemannian Geometry and Geometric Analysis (4th ed.), Berlin, New York: Springer-Verlag, ISBN 978-3-540-25907-7
- Lee, John M. (2003), Introduction to smooth manifolds, Springer Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Berlin, New York: Springer-Verlag, ISBN 978-0-387-95448-6
- Misner, Charles W.; Thorne, Kip; Wheeler, John Archibald (1973), Gravitation, W. H. Freeman, ISBN 978-0-7167-0344-0