

# 余切空间

Wikipedia

25 October 2023

在微分几何中，**余切空间** (**cotangent space**) 是在光滑 (或可微) 流形  $\mathcal{M}$  上的一个点  $x$  相关的向量空间；可以为一个光滑流形上的每个点定义一个余切空间。通常，余切空间  $T_x^*\mathcal{M}$  被定义为在  $x$  处的切空间  $T_x\mathcal{M}$  的对偶空间，尽管有更直接的定义 (见下文)。余切的元素空间被称为**余切向量** (**cotangent vectors**) 或**切余向量** (**tangent covectors**)。

## 1 性质

在连通流形上的点的所有余切空间都具有相同的维数，等于流形的维数。一个流形的所有余切空间可以“粘合”在一起 (即联合并赋予拓扑)，形成一个新的两倍维数的可微流形，即流形的余切丛。

在一个点处的切空间和余切空间都是同维的实向量空间，因此通过许多可能的同构相互同构。一个黎曼度量或一个辛形式的引入，使得切空间与在一个点处的余切空间之间存在一个自然同构，并将一个正则切向量与任意切余向量相关联。

## 2 形式定义

### 2.1 线性泛函的定义

设  $\mathcal{M}$  是一个光滑流形，并设  $x$  是在  $\mathcal{M}$  中的一个点。设  $T_x\mathcal{M}$  是在  $x$  处的切空间。则在  $x$  处的余切空间定义为  $T_x\mathcal{M}$  的对偶空间：

$$T_x^*\mathcal{M} = (T_x\mathcal{M})^*$$

具体地说，余切空间的元素是在  $T_x\mathcal{M}$  上的线性泛函。即每个元素  $\alpha \in T_x^*\mathcal{M}$  都是一个线性映射

$$\alpha : T_x\mathcal{M} \rightarrow F$$

其中  $F$  是所考虑的向量空间的底层场，例如实数场。 $T_x^*\mathcal{M}$  的元素称为余切向量。

### 2.2 备选定义

在某些情况下，可能希望直接定义余切空间而不参考切空间。这样的定义可以用在  $\mathcal{M}$  上光滑函数的等价类来表示。非正式地，我们将说，如果两个光滑函数  $f$  和  $g$  在一个点  $x$  附近具有相同的一阶行为，则它们在点  $x$  处是等价的，类似于它们的线性泰勒多项式；当且仅当函数  $f - g$  的导

数在  $x$  处消失时，两个函数  $f$  和  $g$  在  $x$  附近具有相同的一阶行为。余切空间将包含一个函数在  $x$  附近的所有可能的一阶行为。

设  $\mathcal{M}$  是一个光滑流形，并设  $x$  是在  $\mathcal{M}$  中的一个点。设  $I_x$  是在  $C^\infty(\mathcal{M})$  中所有函数在  $x$  处消失的理想，并设  $I_x^2$  是形式  $\sum_i f_i g_i$  的函数的集合，其中  $f_i, g_i \in I_x$ 。则  $I_x$  和  $I_x^2$  都是实向量空间，并且余切空间可以定义为商空间  $T_x^* \mathcal{M} = I_x / I_x^2$ ，通过证明这两个空间是相互同构的。

这个公式类似于构造余切空间来定义代数几何中的 Zariski 切空间。该结构也推广到局部环空间。

### 3 函数的微分

设  $M$  是一个光滑流形，并设  $f \in C^\infty(M)$  是一个光滑函数。 $f$  在一个点  $x$  处的微分是映射

$$df_x(X_x) = X_x(f)$$

其中  $X_x$  是一个在  $x$  处的切向量，被认为是一个导子 (derivation)。也就是， $X(f) = \mathcal{L}_X f$  是  $f$  在方向  $X$  上的李导数，并且有  $df(X) = X(f)$ 。等价地，我们可以认为切向量相切于曲线，并写为

$$df_x(\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)'(0)$$

在这两种情况下， $df_x$  都是在  $T_x M$  上的一个线性映射，并因此它是在  $x$  处的切余向量。

我们然后可以定义在点  $x$  处的微分映射  $d: C^\infty(M) \rightarrow T_x^*(M)$ ，做为将  $f$  发送到  $df_x$  的映射。微分映射的性质包括：

1. 对于常数  $a$  和  $b$ ,  $d$  是一个线性映射:  $d(af + bg) = a df + b dg$
2.  $d(fg)_x = f(x)dg_x + g(x)df_x$

微分映射提供上述余切空间的两个备选定义之间的连接。因为对于所有的  $f \in I_x^2$ ，存在  $g_i, h_i \in I_x$ ，以使得  $f = \sum_i g_i h_i$ ，我们有

$$df_x = \sum_i d(g_i h_i)_x = \sum_i (g_i(x) d(h_i)_x + d(g_i)_x h_i(x)) = \sum_i (0 d(h_i)_x + d(g_i)_x 0) = 0,$$

即，在  $I_x^2$  中的所有函数都有微分零，对于每两个函数  $f \in I_x^2, g \in I_x$ ，它们都遵循这结果，我们就有  $d(f+g) = d(g)$ 。现在我们可以通过将线性映射  $\alpha$  发送到相应的陪  $\alpha + I_x^2$  来构造  $T_x^* \mathcal{M}$  和  $I_x / I_x^2$  之间的同构。由于给定的核和斜率有一个唯一的线性映射，这是一个同构，建立了两个定义的等价性。

### 4 光滑映射的拉回

正如流形之间的每个可微映射  $f: M \rightarrow N$  诱导在切空间之间的一个线性映射，称为**前推** (pushforward) 或**导数** (derivative)

$$f_*: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

每一个这样的映射都会余切空间之间产生一个线性映射，称为**拉回** (pullback)，只是这次是反向的：

$$f^*: T_{f(x)}^* N \rightarrow T_x^* M.$$

拉回自然地定义为向前推的对偶 (或转置)。拆开定义, 这意味着:

$$(f^*\theta)(X_x) = \theta(f_*X_x),$$

其中  $\theta \in T_{f(x)}^*N$  和  $X_x \in T_xM$ 。注意所有东西所处的位置。

如果我们根据在一点处消失的光滑映射的等价类来定义切余向量, 则拉回的定义就更加简单了。设  $g$  是在  $M$  上的一个光滑函数, 它在  $f(x)$  处消失。则由  $g$  确定的余向量的拉回 (标志为  $dg$ ) 给出为

$$f^*dg = d(g \circ f).$$

也就是, 它是由  $g \circ f$  确定的在  $M$  上的在  $x$  处消失的函数的等价类。

## 5 外幂

余切空间的第  $k$  次外幂, 标志为  $\Lambda^k(T_x^*M)$ , 在微分几何中是另一个重要对象。第  $k$  次外幂中的向量, 或者更精确地说, 余切丛的第  $k$  次外幂的截面, 被称为微分  $k$ -形式。可以将它们视为在  $k$  次切向量上的交替多线性映射。由于这个原因, 切余向量经常被称为 1-形式 (*one-forms*)。

## References

- Abraham, Ralph H.; Marsden, Jerrold E. (1978), Foundations of mechanics, London: Benjamin-Cummings, ISBN 978-0-8053-0102-1
- Jost, Jürgen (2005), Riemannian Geometry and Geometric Analysis (4th ed.), Berlin, New York: Springer-Verlag, ISBN 978-3-540-25907-7
- Lee, John M. (2003), Introduction to smooth manifolds, Springer Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Berlin, New York: Springer-Verlag, ISBN 978-0-387-95448-6
- Misner, Charles W.; Thorne, Kip; Wheeler, John Archibald (1973), Gravitation, W. H. Freeman, ISBN 978-0-7167-0344-0