李导数

Wikipedia

30 October 2023

在微分几何中，**李导数** (**Lie derivative** (/liː/ LEE)) 由 Władysław Ślebodziński [1][2] 以 Sophus Lie 的名字命名，它用于评估一个张量场 (包括标量函数、向量场和一元形式) 沿另一个向量场定义的流的变化。这种变化是坐标不变的，因此在任意可变流形上都可以定义李导数。

函数、张量场以及它们的形式可以相对于向量场进行微分。如果 T 是一个张量场，并且 X 是一个向量场，则 T 相对于 X 的李导数标志为 $\mathcal{L}_X T$。微分算子 $T \mapsto \mathcal{L}_X T$ 是底层流形张量场代数的一个导子 (derivation)。

李导数与收缩 (contraction) 和外导数 (exterior derivative) 在微分形式 (differential forms) 上交换。

尽管微分几何中有许多求导的概念，但当被微分的表达式是一个函数或标量场时，它们都是一致的。因此，在这种情况下，“Lie”一词被去掉，人们只说函数的导数。

一个向量场 Y 相对于另一向量场 X 的李导数称为 X 和 Y 的“李括号 (Lie bracket)”，通常标志为 $[X,Y]$ 以替代 $\mathcal{L}_X Y$。向量场的空间形成相对于这个李括号的李代数。李导数构成了这个李代数的无穷维李代数表示，是由于以下恒等式

$$\mathcal{L}_{[X,Y]}T = \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y T - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X T,$$

适用于任意向量场 X 和 Y 以及任意张量场 T。

考虑到向量场是在 M 上的无穷小流的生成元 (即一维微分同胚群)，李导数是张量场上微分同胚群表示的微分，类似于李群论中与群表示相关的无穷小表示的李代数表示。

对于旋量场，带有一个联络的纤维丛，以及向量-值微分形式，都存在李导数的扩展。

1 动机

要定义张量场相对于向量场的导数，一种“幼稚”尝试是取张量场的分量，并取每个分量相对于向量场的方向导数 (directional derivative)。但是，这种定义是不可取的，因为它在坐标系统变化时并不是不变的，例如，用极坐标或球面坐标表达的幼稚导数与用笛卡尔坐标表达的分量的幼稚导数是不同的。在抽象的流形上，这样的定义是没有意义且定义不清的。在微分几何中，张量场的微分有三种主要的坐标无关的表示法：李导数，相对于联络的导数，以及完全反对称协变张量的外导数，即微分形式。李导数和相对于联络的导数之间的主要区别在于，后者是张量场相对于切向量的的导数。它是定义良好的，即使没有指定如何将一个切向量扩展为一个向量场。但是，一个联络需要在流形上选择额外的几何结构 (例如一个黎曼度量或仅是一个抽象联络)。相反，当取一个李导数时，流形上不需要额外的结构，但不可能讨论张量场相对于单个切向量的李导数，因为张量场相对

于向量场 X 在点 p 处的李导数的值还取决于 p 的邻域中 X 的值，而不仅仅是 p 本身的值。最后，微分形式的外导数不需要任何额外的选择，但仅是一个微分形式 (包括函数) 的定义良好的导数。

2 定义

李导数可以用几种等价的方法定义。为了简单起见，我们先定义作用于标量函数和向量场的李导数，然后再定义一般张量的李导数。

2.1 函数的 (Lie) 导数

定义在一个流形上的一个函数 $f : M \to \mathbb{R}$ 的导数是个问题，因为当位移 $x+h$ 未定义时，无法确定其差分商 $(f(x+h)-f(x))/h$。

一个函数 $f : M \to \mathbb{R}$ 相对于一个向量场 X 在一点 $p \in M$ 处的李导数是函数

$$(\mathcal{L}_X f)(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(f \circ \Phi_X^t\right)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\Phi_X^t(p)\right) - f(p)}{t}$$

其中 $\Phi_X^t(p)$ 由向量场 X 定义的流所到达的点，在时间瞬间 t 它映射到点 p。在 $t=0$ 附近，$\Phi_X^t(p)$ 是一阶自治 (即与时间无关) 微分方程的系统的唯一解

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_t \Phi_X^t(p) = X\left(\Phi_X^t(p)\right),$$

其中 $\Phi_X^0(p) = p$ 。

设置 $\mathcal{L}_X f = \nabla_X f$ 以识别一个带有方向导数的函数的李导数，它也被标记为 $X(f) := \mathcal{L}_X f = \nabla_X f$。

2.2 向量场的李导数

如果 X 和 Y 都是向量场，则 Y 相对于 X 的李导数也被称为 X 和 Y 的李括号，有时标志为 $[X,Y]$。定义李括号有几种方法，它们都是等价的。在这里我们列出两个定义，对应于上面给出的向量场的两个定义：

- 在局部坐标中，X 和 Y 在 p 处的李括号由以下公式给出

  $$\mathcal{L}_X Y(p) = [X,Y](p) = \partial_X Y(p) - \partial_Y X(p),$$

  其中 ∂_X 和 ∂_Y 分别标志取相对于 X 和 Y 的方向导数的运算。在这里我们把 n 维空间中的向量看作 n 元组，因此它的方向导数就是由它的坐标的方向导数组成的元组。尽管在这个定义中出现的最终表达式不取决于局部坐标的选择，但单个项 $\partial_X Y(p)$ 和 $\partial_Y X(p)$ 确实取决于坐标的选择。

- 根据第二种定义，如果 X 和 Y 是在一个流形 M 上的向量场，则算子 $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$ 由以下公式定义

  $$[X,Y] \colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$
  $$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

  是 M 的光滑函数代数的一个零阶导数，即根据第二种定义，该算子是一个向量场。

2.3 张量场的李导数

2.3.1 根据流来定义

李导数是张量场由流引起的空间形变作用下的变化速度。

形式上，在一个光滑流形 M 上给定一个可微 (与时间无关) 向量场 X，设 $\Phi_X^t : M \to M$ 为相应的局部流。由于 Φ_X^t 对每一个 t 都是一个局部微分同构，它因此产生了张量场的一个拉回 (pullback)。对于协变张量，这只是拉回映射的多线性扩展

$$\left(\Phi_X^t\right)_p^* : T^*_{\Phi_X^t(p)}M \to T_p^*M, \quad \left(\Phi_X^t\right)_p^* \alpha(X) = \alpha\left(T_p\Phi_X^t(X)\right), \quad \alpha \in T^*_{\Phi_X^t(p)}M, X \in T_pM$$

对于逆变张量，人们可以扩展微分 $T_p\Phi_X^t$ 的逆为

$$\left(T_p\Phi_X^t\right)^{-1} : T_{\Phi_X^t(p)}M \to T_pM,$$

因此，对于每一个 t，都有一个与 T 类型相同的张量场 $(\Phi_X^t)^* T$。

如果 T 是一个 $(r,0)$ 或 $(0,s)$ 类型的张量场，则 T 的李导数 $\mathcal{L}_X T$ 沿着一个向量场 X 在点 $p \in M$ 处的定义为

$$\mathcal{L}_X T(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\left(\Phi_X^t\right)^* T\right)_p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\Phi_X^t\right)_p^* T_{\Phi_X^t(p)} = \lim_{t\to 0} \frac{\left(\Phi_X^t\right)^* T_{\Phi_X^t(p)} - T_p}{t}.$$

得到的张量场 $\mathcal{L}_X T$ 与 T 的类型相同。

更一般地说，对于每一个微分同胚的光滑的单参数族 Φ_t，它积分一个向量场 X，即满足 $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \Phi_t = X \circ \Phi_0$，人们有

$$\mathcal{L}_X T = \left(\Phi_0^{-1}\right)^* \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Phi_t^* T = -\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\Phi_t^{-1}\right)^* \Phi_0^* T.$$

2.3.2 代数定义

我们现在给出一个代数定义。张量场李导数的代数定义遵循以下四个公理：

公理 1. 函数的李导数等价于函数的方向导数。这一事实通常用以下公式表达为

$$\mathcal{L}_Y f = Y(f)$$

公理 2. 李导数遵循莱布尼茨规则 *(Leibniz's rule)* 的以下版本：对于任意张量场 S 和 T，我们有

$$\mathcal{L}_Y(S \otimes T) = (\mathcal{L}_Y S) \otimes T + S \otimes (\mathcal{L}_Y T).$$

公理 3. 李导数遵循相对于收缩 *(contraction)* 的莱布尼茨规则：

$$\mathcal{L}_X\left(T\left(Y_1, \ldots, Y_n\right)\right) = \left(\mathcal{L}_X T\right)\left(Y_1, \ldots, Y_n\right) + T\left(\left(\mathcal{L}_X Y_1\right), \ldots, Y_n\right) + \cdots + T\left(Y_1, \ldots, \left(\mathcal{L}_X Y_n\right)\right)$$

公理 4. 李导数与函数的外导数交换：

$$[\mathcal{L}_X, d] = 0$$

如果这些公理都成立，那么把李导数 $\mathcal{L}_X$ 应用于关系 $df(Y) = Y(f)$，就会发现

$$\mathcal{L}_X Y(f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

这是李括号的标准定义之一。

李导数在一个微分形式上的作用是内积 (interior product) 与外导数的反对易子 (anticommutator)。因此，如果 α 是一个微分形式，

$$\mathcal{L}_Y \alpha = i_Y d\alpha + d i_Y \alpha.$$

这就很容易通过检查表达式是否与外导数交换、是否是一个导子 (作为分级导数的反对易子)，以及是否对函数做了正确的操作来实现。

显式地，设 T 为 (p,q) 型张量场。考虑 T 是一个可微的多线性映射，作用于余切丛 T^*M 的光滑截面 $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^p$，以及正切丛 TM 的截面 $X_1, X_2, \ldots, X_{\mathrm{q}}$，记作 $T\left(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, X_1, X_2, \ldots\right)$，其结果是实数 $\mathbf{R}$。通过公式定义 T 沿着 Y 的李导数为

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{L}_Y T\right)\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, X_1, X_2, \ldots\right) &= Y\left(T\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, X_1, X_2, \ldots\right)\right) \\
&\quad - T\left(\mathcal{L}_Y \alpha_1, \alpha_2, \ldots, X_1, X_2, \ldots\right) - T\left(\alpha_1, \mathcal{L}_Y \alpha_2, \ldots, X_1, X_2, \ldots\right) - \ldots \\
&\quad - T\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \mathcal{L}_Y X_1, X_2, \ldots\right) - T\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, X_1, \mathcal{L}_Y X_2, \ldots\right) - \ldots
\end{aligned}$$

利用推前 (pushforward) 的性质和微分的莱布尼兹规则，可以证明解析定义和代数定义是等价的。李导数与收缩交换。

2.4 微分形式的李导数

张量场的一个特别重要的类型是微分形式。李导数对微分形式空间的限制与外导数密切相关。李导数和外导数都试图以不同的方式捕捉导数的概念。这些差异可以通过引入内积 (interior product) 的概念来弥合，这之后，这些关系就会以一种称为 **Cartan 公式** (**Cartan's formula**) 的形式出现。Cartan 公式也可用作微分形式空间上的李导数的定义。

设 M 是一个流形，并且 X 是在 M 上的一个向量场。设 $\omega \in \Lambda^{k+1}(M)$ 是一个 $(k+1)$ 形式，即对于每一个 $p \in M$，$\omega(p)$ 是一个从 $\left(T_p M\right)^{k+1}$ 到实数的交替多线性映射。X 和 ω 的内积是一个 k 形式 $i_X \omega$，定义为

$$\left(i_X \omega\right)\left(X_1, \ldots, X_k\right) = \omega\left(X, X_1, \ldots, X_k\right)$$

微分形式 $i_X \omega$ 也称为 ω 对 X 的**收缩** (**contraction**)，并且

$$i_X : \Lambda^{k+1}(M) \rightarrow \Lambda^k(M)$$

是一个 $\wedge$ 反导子 (antiderivation)，其中 $\wedge$ 是微分形式的楔积。也就是，i_X 是 $\mathbf{R}$-线性的，并且

$$i_X(\omega \wedge \eta) = \left(i_X \omega\right) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \left(i_X \eta\right)$$

对于 $\omega \in \Lambda^k(M)$ 和 η 是另一种微分形式。同样，对于一个函数 $f \in \Lambda^0(M)$，即在 M 上的实值函数或复值函数，人们有

$$i_{fX} \omega = f i_X \omega$$

其中 fX 标志 f 和 X 的乘积。外导数和李导数之间的关系可总结如下。首先，由于一个函数 f 相对于一个向量场 X 的李导数与方向导数 $X(f)$ 相同，因此它也与 f 对 X 的外导数的收缩相同：

$$\mathcal{L}_X f = i_X df$$

对于一般微分形式，考虑到 X 的变化，李导数同样是一种收缩：

$$\mathcal{L}_X \omega = i_X d\omega + d\left(i_X \omega\right).$$

这个恒等式被称为 **Cartan 公式** (**Cartan formula**)，**Cartan 同伦公式** (**Cartan homotopy formula**) 或 **Cartan 魔法公式** (**Cartan's magic formula**)。详情参见内积资料。Cartan 公式可用作一个微分形式的李导数的一个定义。Cartan 公式特别表明

$$d\mathcal{L}_X\omega = \mathcal{L}_X(d\omega).$$

李导数还满足关系

$$\mathcal{L}_{fX}\omega = f\mathcal{L}_X\omega + df \wedge i_X\omega.$$

3 坐标表达式

在局部坐标符号中，对于一个 (r,s) 型张量场 T，沿着 X 的李导数为

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X T)^{a_1\ldots a_r}{}_{b_1\ldots b_s} = X^c(\partial_c T^{a_1\ldots a_r}{}_{b_1\ldots b_s}) \\ -(\partial_c X^{a_1})T^{c a_2\ldots a_r}{}_{b_1\ldots b_s} - \ldots - (\partial_c X^{a_r})T^{a_1\ldots a_{r-1}c}{}_{b_1\ldots b_s} \\ +(\partial_{b_1}X^c)T^{a_1\ldots a_r}{}_{c b_2\ldots b_s} + \ldots + (\partial_{b_s}X^c)T^{a_1\ldots a_r}{}_{b_1\ldots b_{s-1}c}\end{aligned}$$

这里，符号 $\partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$ 是指相对于坐标 x^a 取偏导数。或者，如果我们使用无挠联络 (例如，Levi Civita 联络)，则偏导数 ∂_a 可以被协变导数替代，也就是将 $\partial_a X^b$ (通过滥用符号) 替换为 $\nabla_a X^b = X^b_{;a} := (\nabla X)^b_a = \partial_a X^b + \Gamma^b_{ac}X^c$，其中 $\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb}$ 是 Christoffel 系数 (Christoffel coefficients)。

张量的李导数是同一类型的另一个张量，也就是，即使表达式中的单个项取决于坐标系统的选择，表达式作为一个整体也会产生一个张量

$$(\mathcal{L}_X T)^{a_1\ldots a_r}{}_{b_1\ldots b_s}\partial_{a_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{a_r}\otimes dx^{b_1}\otimes\cdots\otimes dx^{b_s}$$

它独立于任意坐标系统，并且类型与 T 相同。

该定义可以进一步扩展到张量密度。如果 T 是某个实值权重 w 的张量密度 (例如权重为 1 的体积密度)，则其李导数是同类型且同权重的张量密度。

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X T)^{a_1\ldots a_r}{}_{b_1\ldots b_s} = X^c(\partial_c T^{a_1\ldots a_r}{}_{b_1\ldots b_s}) - (\partial_c X^{a_1})T^{c a_2\ldots a_r}{}_{b_1\ldots b_s} - \ldots - (\partial_c X^{a_r})T^{a_1\ldots a_{r-1}c}{}_{b_1\ldots b_s} + \\ + (\partial_{b_1}X^c)T^{a_1\ldots a_r}{}_{c b_2\ldots b_s} + \ldots + (\partial_{b_s}X^c)T^{a_1\ldots a_r}{}_{b_1\ldots b_{s-1}c} + w(\partial_c X^c)T^{a_1\ldots a_r}{}_{b_1\ldots b_s}\end{aligned}$$

请注意表达式末尾处的新项。

对于一个线性联络 $\Gamma = (\Gamma^a_{bc})$，沿着 X 的李导数为 [3]

$$(\mathcal{L}_X\Gamma)^a_{bc} = X^d\partial_d\Gamma^a_{bc} + \partial_b\partial_c X^a - \Gamma^d_{bc}\partial_d X^a + \Gamma^a_{dc}\partial_b X^d + \Gamma^a_{bd}\partial_c X^d$$

3.1 示例

为清楚起见，我们现在用局部坐标符号展示以下示例。

对于一个标量场 $\phi(x^c) \in \mathcal{F}(M)$，我们有：

$$(\mathcal{L}_X\phi) = X(\phi) = X^a\partial_a\phi.$$

因此，对于标量场 $\phi(x,y) = x^2 - \sin(y)$ 和向量场 $X = \sin(x)\partial_y - y^2\partial_x$，相应的李导数变为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X\phi &= \left(\sin(x)\partial_y - y^2\partial_x\right)\left(x^2 - \sin(y)\right) \\ &= \sin(x)\partial_y\left(x^2 - \sin(y)\right) - y^2\partial_x\left(x^2 - \sin(y)\right) \\ &= -\sin(x)\cos(y) - 2xy^2\end{aligned}$$

对于一个更高秩的微分形式的示例，考虑 2-形式 $\omega = (x^2+y^2)\,dx\wedge dz$，以及来自上一示例的向量场 X。则，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X\omega &= d\left(i_{\sin(x)\partial_y - y^2\partial_x}\left(\left(x^2+y^2\right)dx\wedge dz\right)\right) + i_{\sin(x)\partial_y - y^2\partial_x}\left(d\left(\left(x^2+y^2\right)dx\wedge dz\right)\right)\\ &= d\left(-y^2\left(x^2+y^2\right)dz\right) + i_{\sin(x)\partial_y - y^2\partial_x}(2ydy\wedge dx\wedge dz)\\ &= \left(-2xy^2dx + \left(-2yx^2-4y^3\right)dy\right)\wedge dz + \left(2y\sin(x)dx\wedge dz + 2y^3dy\wedge dz\right)\\ &= \left(-2xy^2+2y\sin(x)\right)dx\wedge dz + \left(-2yx^2-2y^3\right)dy\wedge dz\end{aligned}$$

一些更抽象的例子。

$$\mathcal{L}_X\left(dx^b\right) = di_X\left(dx^b\right) = dX^b = \partial_a X^b dx^a.$$

因此，对于一个协向量场，即一个微分形式，$A = A_a\left(x^b\right)dx^a$，我们有：

$$\mathcal{L}_X A = X\left(A_a\right)dx^a + A_b\mathcal{L}_X\left(dx^b\right) = \left(X^b\partial_b A_a + A_b\partial_a\left(X^b\right)\right)dx^a$$

最后一个表达式的系数是李导数的局部坐标表达式。

对于一个协变秩 2 张量场 $T = T_{ab}\left(x^c\right)dx^a\otimes dx^b$，我们有：

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X T) &= (\mathcal{L}_X T)_{ab}\,dx^a\otimes dx^b\\ &= X\left(T_{ab}\right)dx^a\otimes dx^b + T_{cb}\mathcal{L}_X\left(dx^c\right)\otimes dx^b + T_{ac}dx^a\otimes\mathcal{L}_X\left(dx^c\right)\\ &= \left(X^c\partial_c T_{ab} + T_{cb}\partial_a X^c + T_{ac}\partial_b X^c\right)dx^a\otimes dx^b\end{aligned}$$

如果 $T = g$ 是对称度量张量，它相对于 Levi-Civita 联络 (又称协变导数) 是平行的，并且使用该联络会产生结果。这具有用协变导数替换所有导数的效果，给出为

$$(\mathcal{L}_X g) = \left(X^c g_{ab;c} + g_{cb}X^c_{;a} + g_{ac}X^c_{;b}\right)dx^a\otimes dx^b = \left(X_{b;a} + X_{a;b}\right)dx^a\otimes dx^b$$

4 性质

李导数具有许多性质。设 $\mathcal{F}(M)$ 为定义在流形 M 上的函数的代数。则

$$\mathcal{L}_X : \mathcal{F}(M)\to\mathcal{F}(M)$$

是一个在代数 $\mathcal{F}(M)$ 上的导数。也就是，$\mathcal{L}_X$ 是 $\mathbf{R}$-线性的，并且

$$\mathcal{L}_X(fg) = (\mathcal{L}_X f)\,g + f\mathcal{L}_X g.$$

类似地，它是一个在 $\mathcal{F}(M)\times\mathcal{X}(M)$ 上的导数，其中 $\mathcal{X}(M)$ 是在 M 上的向量场集合 (参见文章中的定理 6：Nichita, F.F. Unification Theories: New Results and Examples. Axioms 2019, 8, 60)：

$$\mathcal{L}_X(fY) = (\mathcal{L}_X f)\,Y + f\mathcal{L}_X Y$$

这也可以用等价符号写为

$$\mathcal{L}_X(f\otimes Y) = (\mathcal{L}_X f)\otimes Y + f\otimes\mathcal{L}_X Y$$

这里使用张量乘积符号 $\otimes$ 来强调一个函数与一个向量场的乘积是在整个流形之上进行的。

其它附加性质与李括号的一致。因此，例如，考虑做为在一个向量场上的一个导子，

$$\mathcal{L}_X[Y,Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z]$$

人们会发现上述公式就是雅可比恒等式 (Jacobi identity)。因此，人们就有一个重要的结果，在 M 之上的向量场空间，配备李括号，就形成一个李代数。

当作用于微分形式时，李导数也具有重要性质。设 α 和 β 是在 M 上的两个微分形式，并设 X 和 Y 是两个向量场。则

- $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X \beta)$
- $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]\, \alpha := \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y \alpha - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X \alpha = \mathcal{L}_{[X,Y]} \alpha$
- $[\mathcal{L}_X, i_Y]\, \alpha = [i_X, \mathcal{L}_Y]\, \alpha = i_{[X,Y]} \alpha$, 其中 i 标志上面定义的内积，并且这很清楚，$[\cdot,\cdot]$ 标志的即是对易子也是向量场的李括号。

5 推广

李导数的各种推广在微分几何中起着重要作用。

5.1 旋量场的李导数

在一般 (伪) 黎曼流形上沿着一般时空向量场 (不一定是 Killing 场) 旋量的 Lie 导数的定义，在 1971 年已经由 Yvette Kosmann 提出。[4] 后来，有人提供了一个几何框架，证明她在纤维丛上的李导数的一般框架内的特殊规定是正确的 [5]，在规范自然丛的显式上下文中，规范自然丛被证明是 (规范变分) 场理论的最合适的领域。[6]

在一个给定的旋量流形中，也就是在一个容许旋量结构的黎曼流形 (M, g) 中，一个旋量场 ψ 的李导数可首先通过局部表达式相对于无穷小等距变换 (Killing 向量场) 来定义，该定义由 André Lichnerowicz 在 1963 年首次给出：[7]

$$\mathcal{L}_X \psi := X^a \nabla_a \psi - \frac{1}{4} \nabla_a X_b \gamma^a \gamma^b \psi,$$

其中 $\nabla_a X_b = \nabla_{[a} X_{b]}$，假设 $X = X^a \partial_a$ 是 Killing 向量场，并且 γ^a 是狄拉克矩阵。

然后，通过保留 Lichnerowicz 对于一个一般向量场 X 的局部表达式，但仅显式地取 $\nabla_a X_b$ 的反对称部分，就可以将 Lichnerowicz 的定义扩展到所有向量场 (一般无穷小变换)。[4] 更明确地说，在 1972 年给出的 Kosmann 局部表达式为：[4]

$$\mathcal{L}_X \psi := X^a \nabla_a \psi - \frac{1}{8} \nabla_{[a} X_{b]} \left[\gamma^a, \gamma^b\right] \psi \, = \nabla_X \psi - \frac{1}{4} (dX^\flat) \cdot \psi \,,$$

其中，$\left[\gamma^a, \gamma^b\right] = \gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a$ 是对易子，d 是外导数，$X^\flat = g(X, -)$ 是对应于 X 在度量 (即指标降低) 下的对偶 1-形式，并且 $\cdot$ 是 Clifford 乘法。

值得注意的是，旋量李导数与度量无关，并因此也与联络无关。从 Kosmann 局部表达式的右侧看，这一点并不明显，因为右侧似乎通过旋量联络 (协变导数)、向量场的对偶化 (指标降低) 以及在旋量丛上的 Clifford 乘法依赖于度量。情况并非如此：Kosmann 局部表达式右侧的量合并，使得所有与度量和联络相关项都被消除了。

为了更好地理解长期争论不休的旋量场李导数的概念，可以参考原始文献 [8][9]，其中旋量场李导数的定义被置于纤维丛截面李导数理论的更一般框架中，并且 Y. Kosmann 对旋量情形的直接方法被推广到被称为 Kosmann 提升 (Kosmann lift) 的新几何概念的形式规范自然丛。

5.2 协变李导数

如果我们在流形 M 之上有一个以 G 为结构群的主丛，并且我们选择 X 作为主丛切空间截面的协变向量场 (即它有水平和垂直分量)，则协变李导数就是在主丛之上相对于 X 的李导数。

现在，如果我们在 M 之上给定一个向量场 Y (但不是主丛)，但我们在主丛之上也有一个联络，我们就可以在主丛之上定义一个向量场 X，使其水平分量与 Y 匹配，垂直分量与联络一致。这就是协变李导数。

详情参见联络形式 (connection form)。

5.3 Nijenhuis-Lie 导数

另一种推广，由 Albert Nijenhuis 提出，允许我们定义沿着在正切丛中具有值的微分形式的任意丛 $\Omega^k(M, \mathrm{T}M)$ 的截面的微分形式的李导数。如果 $K \in \Omega^k(M, \mathrm{T}M)$，并且 α 是一个微分 p-形式，那么可以定义 K 和 α 的内积 $i_K\alpha$。Nijenhuis-Lie 导数则是内积和外导数的反对易子：

$$\mathcal{L}_K\alpha = [d, i_K]\,\alpha = di_K\alpha - (-1)^{k-1} i_K d\alpha$$

6 历史

在 1931 年，Władysław Ślebodziński 引入了一种新的微分算子，后来被 David van Dantzig 称为李导数，它可以应用于标量、向量、张量和仿射联络，并在自同构群研究中证明了其强大的作用。

一般几何对象 (即自然纤维丛的截面) 的李导数由 A. Nijenhuis、Y. Tashiro 和 K. Yano 进行了研究。

很长一段时间以来，物理学家一直在使用李导数，而没有参考数学家的工作。在 1940 年，Léon Rosenfeld [10] —以及在他之前 (在 1921 年 [11]) 的 Wolfgang Pauli [12] —引入了他所称的几何对象 A 的“局部变分” $\delta^* A$，该变分是由一个向量场 X 生成的坐标的无穷小变换约化而成。人们可以很容易地证明他的 $\delta^* A$ 就是 $\mathcal{L}_X(A)$。

7 See also

- Covariant derivative
- Connection (mathematics)
- Frölicher-Nijenhuis bracket
- Geodesic
- Killing field
- Derivative of the exponential map

8 Notes

1. Trautman, A. (2008). "Remarks on the history of the notion of Lie differentiation". In Krupková, O.; Saunders, D. J. (eds.). Variations, Geometry and Physics: In honour of Demeter Krupka's sixty-fifth birthday. New York: Nova Science. pp. 297-302. ISBN 978-1-60456-920-9.

2. Ślebodziński, W. (1931). "Sur les équations de Hamilton". Bull. Acad. Roy. D. Belg. 17 (5): 864-870.

3. Yano, K. (1957). The Theory of Lie Derivatives and its Applications (https://archive.org/details/theoryofliederiv029601mbp). North-Holland. p.8 (https://archive.org/details/theoryofliederiv029601mbp/page/n25). ISBN 978-0-7204-2104-0.

4. Kosmann, Y. (1971). "Dérivées de Lie des spineurs". Ann. Mat. Pura Appl. 91 (4): 317-395. doi:10.1007/BF02428822 (https://doi.org/10.1007%2FBF02428822). S2CID 121026516 (https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121026516).

5. Trautman, A. (1972). "Invariance of Lagrangian Systems". In O'Raifeartaigh, L. (ed.). General Relativity: Papers in honour of J. L. Synge. Oxford: Clarenden Press. p. 85. ISBN 0-19-851126-4.

6. Fatibene, L.; Francaviglia, M. (2003). Natural and Gauge Natural Formalism for Classical Field Theories. Dordrecht: Kluwer Academic.

7. Lichnerowicz, A. (1963). "Spineurs harmoniques". C. R. Acad. Sci. Paris. 257: 7-9.

8. Fatibene, L.; Ferraris, M.; Francaviglia, M.; Godina, M. (1996). "A geometric definition of Lie derivative for Spinor Fields". In Janyska, J.; Kolář, l.; Slovák, J. (eds.). Proceedings of the 6th International Conference on Differential Geometry and Applications, August 28th-September 1st 1995 (Brno, Czech Republic). Brno: Masaryk University. pp. 549-558. arXiv:gr-qc/9608003v1 (https://arxiv.org/abs/gr-qc/9608003v1). Bibcode:1996gr.qc....8003F (https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1996gr.qc.....8003F). ISBN 80-210-13699.

9. Godina, M.; Matteucci, P. (2003). "Reductive G-structures and Lie derivatives". Journal of Geometry and Physics. 47 (1): 66-86. arXiv:math/0201235 (https://arxiv.org/abs/math/0201235). Bibcode:2003JGP...47...66G (https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2003JGP...47...66G). doi:10.1016/S0393-0440(02)00174-2 (https://doi.org/10.1016%2FS0393-0440%2802%2900174-2). S2CID 16408289 (https://api.semanticscholar.org/CorpusID:16408289).

10. Rosenfeld, L. (1940). "Sur le tenseur d'impulsion-énergie". Mémoires Acad. Roy. D. Belg. 18 (6): 1-30.

11. Pauli's book on relativity.

12. Pauli, W. (1981) [1921]. Theory of Relativity (First ed.). New York: Dover. ISBN 978-0-486-64152-2. See section 23

References

- Abraham, Ralph; Marsden, Jerrold E. (1978). Foundations of Mechanics. London: Benjamin-Cummings. ISBN 0-8053-0102-X. See section 2.2.
- Bleecker, David (1981). Gauge Theory and Variational Principles (https://archive.org/details/gaugetheoryvaria00blee_0). Addison-Wesley. ISBN 0-201-10096-7. See Chapter 0.
- Jost, Jürgen (2002). Riemannian Geometry and Geometric Analysis. Berlin: Springer. ISBN 3-54042627-2. See section 1.6.
- Kolář, I.; Michor, P.; Slovák, J. (1993). Natural operations in differential geometry (http://www.emis.de/monographs/KSM/index.html). Springer-Verlag. ISBN 9783662029503. Extensive discussion of Lie brackets, and the general theory of Lie derivatives.
- Lang, S. (1995). Differential and Riemannian manifolds. Springer-Verlag. ISBN 978-0-387-94338-1. For generalizations to infinite dimensions.
- Lang, S. (1999). Fundamentals of Differential Geometry. Springer-Verlag. ISBN 978-0-387-98593-0. For generalizations to infinite dimensions.
- Yano, K. (1957). The Theory of Lie Derivatives and its Applications (https://archive.org/details/theoryofliederiv029601mbp). North-Holland. ISBN 978-0-7204-2104-0. Classical approach using coordinates.

External links

- "Lie derivative" (https://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Lie_derivative), Encyclopedia of Mathematics, EMS Press, 2001 [1994]

译注 1

在“向量场的李导数”一节中提到了两种定义李导数的方式，对应于之前给出的两种定义向量场的方式。虽然正文没有明确列出，但从上下文可以推断出来，在“动机”一节中，向量场提供两种等价的定义方式:

1. 将向量场看作是一个映射，它将流形 M 上每个点 p 映射到其切空间 T_pM 中的一个切向量。在这种定义下，向量场可以被视为流形上一个流 (flow) 的生成元 (infinitesimal generator)。这种定义关注的是向量场如何通过其诱导的流来刻画流形的微小变形。或者说，它关注的是向量场如何通过其对应的流来影响流形上的点。具体地，

   (a) 给定一个向量场 X，我们可以定义一个流 ϕ_t，它是一个参数 t 的函数，对于每个 t，它都是一个流形到自身的映射 (更精确地说，是一个微分同胚)。这个流 ϕ_t 可以看作是向量场 X 生成的流形的“变形”或“运动”。

   (b) 对于流的轨迹：在流 ϕ_t 中，每个点 p 在参数 t 下的“轨迹”是一条积分曲线，标记为 $\phi_t(p)$，它满足微分方程：
   $$\frac{d}{dt}\phi_t(p) = X_{\phi_t(p)}$$
   其中 $X_{\phi_t(p)}$ 是向量场 X 在点 $\phi_t(p)$ 处的值。

   (c) 直观地说，向量场 X 在每个点 p 处的值 X_p 可以被解释为流 ϕ_t 在 $t = 0$ 时，点 p 沿着它的轨迹 $\phi_t(p)$ 运动的“速度”。换句话说，它表示流形在点 p 处，沿着向量场 X 的方向，在无穷小时间内的变形或运动的趋势。

2. 将向量场看作是流形上光滑函数的导子 (derivation)，即一个满足莱布尼兹法则的线性算子。在这种定义下，向量场可以被视为沿着某个方向的方向导数算子。这种定义关注的是向量场作为方向导数算子如何作用于光滑函数。或者说，将向量场视为作用于光滑函数上的导数算子，它关注的是向量场如何通过方向导数来影响函数。

对应地，在向量场上也有两种等价的李导数 (Lie derivative) 定义方式:

1. 基于流的定义: 这基于向量场作为流生成元的概念来定义。在这种情况下，李导数是通过考虑由一个向量场产生的流如何影响另一个向量场的值来定义的。具体来说，就是观察在由向量场 X 定义的流的作用下，向量场 Y 如何随时间变化。即，设 ϕ_t 是向量场 X 生成的流，即对于每一个点 p，积分曲线 $\phi_t(p)$ 满足方程
   $$\frac{d}{dt}\phi_t(p) = X_{\phi_t(p)}$$
   其中 $X_{\phi_t(p)}$ 是向量场 X 在点 $\phi_t(p)$ 处的值。则向量场 Y 沿着 X 的李导数在点 p 处的值定义为
   $$(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{t\to 0} \frac{((\phi_t)_* Y)_p - Y_p}{t}$$
   其中 $(\phi_t)_*$ 表示流 ϕ_t 诱导的推前 (push-forward) 映射。使用李括号 $[X, Y]$ 在点 p 处的值可以表示为：
   $$[X, Y]_p = (XY - YX)_p$$
   其中 X 和 Y 被视为将点映射到切向量的映射。在这里 XY 表示先沿着 Y 方向微分，然后沿着 X 方向微分；YX 则相反。这种定义依赖于将向量场视为点到切空间映射的观点。

2. 基于导子的定义: 这基于向量场作为导数算子的概念来定义。这意味着每个向量场 X 都可以看作一个从光滑函数到光滑函数的映射，即如果 f 是一个定义在流形 M 上的光滑函数，则 $X(f)$ 表示 f 沿着向量场 X 的方向变化率。在这种情况下，李导数 $\mathcal{L}_X Y$ 可以通过李括号算子来定义，即将李括号 $[X,Y]$ 定义为一个新的向量场，使得对任意光滑函数 f，有

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

其中 X 和 Y 被看作作用于光滑函数的导数算子。在等式右侧分别表示先对函数应用 Y 算子再应用 X 算子以及相反的过程。换句话说，我们可以将一个函数 f 先沿着 Y 方向求导，然后沿着 X 方向求导，减去先沿着 X 方向求导再沿着 Y 方向求导，其结果为李括号 $[X,Y]$。在这里，李括号测量这两个算子不交换的程度。在局部坐标 $(x^1,\ldots,x^n)$ 下，李括号 $[X,Y]$ 可以被表达为

$$[X,Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}$$

其中，X^j 和 Y^j 是向量场 X 和 Y 的分量，而 $\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}$ 与 $\frac{\partial X^i}{\partial x^j}$ 分别是对 Y^i 和 X^i 沿着坐标 x^j 的偏导数。这个表达式清楚地体现了通过导数算子定义的李括号。

这两种定义是等价的，都刻画了一个向量场沿着另一个向量场方向的变化率。它们的区别在于，基于流的定义更强调向量场生成的流形上的微小变形，而基于导子的定义更强调向量场作为方向导数算子的性质。

这两种视角揭示了向量场的动态几何本质: 一方面，向量场在每一点提供一个切向量，这个切向量生成一个局部流，刻画了流形的微小变形; 另一方面，向量场作为方向导数，刻画了沿着这个方向函数的变化率。李导数将这两种视角统一起来，刻画了一个向量场相对于另一个向量场的变化率。特别是将向量场视为流的生成元的视角，体现了静态几何结构与动态变化之间的内在联系。

向量场的李导数是描述一个向量场相对于另一个向量场所定义的流的变化的一种方法。这种变化是坐标不变的，反映了李导数在任意可微流形上的定义通用性。向量场和李导数的两种定义方式体现了微分几何的一个重要思想，即将静态的几何对象 (如向量场) 与动态的过程 (如流) 联系起来，从而揭示向量场的几何和动力学属性。

译注 2

在微分几何中，这几个英文介词 (“in”, “on”, “over”, “under”, “at”) 的特定用法通常与流形 M 的概念一起引入，因此理解这些术语的含义和用法需要理解流形的基本性质。在微分几何中，“流形” 被视为允许进行微积分运算的空间。

1. 在... 中 (... in M)：通常指的是某个对象 (如点、曲线、向量场等) 存在于流形 “M” 的内部。例如，当我们说函数定义在流形 “M” 中时，我们的意思是函数的定义域包括 “M” 中的所有点。常见的还有：
   - “a point p in M” 表示点 p 是流形 M 的一个元素。
   - “a curve γ in M” 表示曲线 γ 完全包含在流形 M 内。
   - “a vector field X in M” 表示向量场 X 定义在整个流形 M 中。
2. 在... 上 (... on M)：这个术语通常用于描述在流形 “M” 上定义的对象，例如向量场、张量场、微分形式或函数。这些对象在 “M” 上的每一点都有定义。例如，当我们说在 “M” 上定义了一个向量场时，我们的意思是在 “M” 的每一点都定义了一个向量。常见的还有：
   - “a function f on M” 表示函数 f 的定义域是整个流形 M。
   - “a tensor field T on M” 表示张量场 T 在流形 M 的每一点都有定义。
   - “a differential form ω on M” 表示微分形式 ω 是定义在流形 M 上的。
3. 在... 之上 (... over M)：这个术语一般用于描述在流形 “M” 之上定义或构造的某种结构 (如纤维丛结构、覆盖空间等)，例如正切向量丛或余切向量丛。“在... 之上” 强调了这些对象是在 “M” 的每一点上存在的，并且每一点都有一个与之关联的空间 (例如，切空间)。例如，当我们说一个向量场定义在 “M” 之上时，我们是指在 “M” 的每一点上都有一个切向量。常见的还有：
   - “a vector bundle E over M” 表示向量丛 E 是以流形 M 为基空间而构造。
   - “a covering space $\tilde{M}$ over M” 表示 $\tilde{M}$ 是流形 M 的一个覆盖空间。
4. 在... 之下 (... under M)：这种用法相对较少，通常表示某种结构 (如子流形、商空间等) 是由流形 M 生成或导出的。例如:
   - “a submanifold N under M” 表示 N 是流形 M 的一个子流形。
   - “a quotient space M/G under M” 表示 M/G 是由流形 M 在群 G 作用下生成的商空间。
5. 在点 p 处的... (... at p)：这通常表示某个对象 (如向量、张量等) 是在流形 M 的特定点 p 处定义的。例如:
   - “a tangent vector v at p” 表示 v 是流形 M 在点 p 处的一个切向量。
   - “the value of a tensor field T at p” 表示张量场 T 在点 p 处的值。

这些术语通常用于表达对象与流形之间的特定关系，如包含、定义、构造等。虽然这些术语在日常语言中可能有相似的用法，但在微分几何中，它们具有特定的含义和用法。