收回 (拓扑)

Wikipedia

15 May 2024

在拓扑学，数学的一个分支中，**收回 (retraction)** 是指一种连续映射，它将一个拓扑空间映射到其子空间内，并保持该子空间中所有点的位置不变。[1] 这个子空间随后被称为原空间的收回。**形变收回 (deformation retraction)** 是一种映射，它捕捉了连续地将空间收缩到子空间的概念。

绝对邻域收回 (absolute neighborhood retract, ANR) 是一种行为特别良好的拓扑空间类型。例如，每一个拓扑流形都是 ANR。每一个 ANR 具有与非常简单的拓扑空间，即 CW 复形相同的同伦类型。

1 定义

1.1 收回

设 X 是一个拓扑空间，而 A 是 X 的一个子空间。则一个连续映射

$$r : X \to A$$

是一个收回，如果 r 到 A 上的限制是在 A 上的恒等映射；也就是说，对于在 A 中的所有 a，有 $r(a) = a$。等价地，标记

$$\iota : A \hookrightarrow X$$

为包含映射，一个收回是一个连续映射 r，使得

$$r \circ \iota = \mathrm{id}_A,$$

也就是说，r 与包含映射的复合是 A 的恒等映射。注意，根据定义，一个收回映射将 X 盖射到 A 上。一个子空间 A 被称为 X 的一个**收回 (retract)**，如果存在这样的收回 (retraction)。例如，任意非空空间都可以以明显的方式收回到一个点 (任意常值映射都会产生一个收回)。如果 X 是豪斯多夫空间，则 A 必须是 X 的闭子集。

如果 $r : X \to A$ 是一个收回，则复合映射 $\iota \circ r$ 是从 X 到自身的幂等连续映射。相反，给定任意幂等连续映射 $s : X \to X$，我们可以通过限制陪域来得到收回到 s 的像。

1.2 形变收回与强形变收回

一个连续映射

$$F : X \times [0, 1] \to X$$

[1] Borsuk (1931).

是一个空间 X 盖射到一个子空间 A 的一个形变收回，如果对于 X 中的每一个 x 和 A 中的每一个 a，满足

$$F(x,0)=x,\quad F(x,1)\in A,\quad \text{以及}\quad F(a,1)=a.$$

换句话说，一个形变收回是收回与 X 上的恒等映射之间的同伦。子空间 A 被称为 X 的**形变收回 (deformation retract)**。一个形变收回是一个同伦等价的一个特例。

一个收回不必是一个形变收回。例如，如果一个空间 X 有一个点作为形变收回，则这意味着 X 是路径连通的 (并且实际上 X 是可收缩的)。

注意：形变收回的另一种等价定义如下。一个连续映射 $r:X\to A$ 是一个形变收回，如果它是一个收回，并且其与包含映射的复合与在 X 上的恒等映射同伦。在这种表述中，一个形变收回伴随着在 X 上的恒等映射与自身之间的同伦。

如果在一个形变收回的定义中增加要求

$$F(a,t)=a$$

对于所有在 $[0,1]$ 中的 t 和在 A 中的 a 成立，则 F 被称为**强形变收回 (strong deformation retraction)**。换句话说，强形变收回在整个同伦过程中保持在 A 中的点不动。(一些作者，如 Hatcher，将此作为形变收回的定义。)

作为一个例子，n 维球面 S^n 是 $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ 的一个强形变收回；作为强形变收回，我们可以选择映射

$$F(x,t)=(1-t)x+t\frac{x}{\|x\|}.$$

注意，成为强形变收回的条件比成为形变收回的条件严格更强。例如，设 X 是 $\mathbb{R}^2$ 的子空间，由连接原点和点 $(1/n,1)$ 的闭合线段 (n 为正整数) 以及连接原点与 $(0,1)$ 的闭合线段组成。设 X 继承自在 $\mathbb{R}^2$ 上的欧几里得拓扑的子空间拓扑。现在设 A 是 X 的子空间，由连接原点与 $(0,1)$ 的线段组成。则 A 是 X 的形变收回，但不是 X 的强形变收回。[2]

1.3 余纤维和邻域形变收回

一个拓扑空间映射 $f:A\to X$ 是一个 (Hurewicz) **余纤维 (cofibration)**，如果它对于到任意空间的映射具有同伦延拓性质。这是同伦理论中的一个中心概念。余纤维 f 总是单射，事实上是到其像的同胚。[3] 如果 X 是豪斯多夫空间 (或紧生成弱豪斯多夫空间)，则余纤维 f 的像是在 X 中的闭集。

在所有闭包含中，余纤维可以这样表征。一个闭子空间 A 在一个空间 X 中的包含是余纤维当且仅当 A 是 X 的**邻域形变收回 (neighborhood deformation retract)**，这意味着存在一个连续映射 $u:X\to[0,1]$，使得 $A=u^{-1}(0)$，并且存在一个同伦 $H:X\times[0,1]\to X$，使得对于所有 $x\in X$，有 $H(x,0)=x$；对于所有 $a\in A$ 和 $t\in[0,1]$，有 $H(a,t)=a$，并且 $H(x,1)\in A$，如果 $u(x)<1$。[4]

例如，CW 复形的子复形的包含是余纤维。

[2]Weintraub, Steven H. Fundamentals of Algebraic Topology. Graduate Texts in Mathematics. Vol. 270. Springer. p. 20.
[3]Hatcher (2002), Proposition 4H.1.
[4]Puppe (1967), Satz 1.

1.4 性质

- X 的一个收回 A 的一个基本性质 (具有收回 $r : X \to A$) 是每一个连续映射 $f : A \to Y$ 至少有一个延拓 $g : X \to Y$，即 $g = f \circ r$。
- 如果一个子空间是一个空间的一个收回，则包含诱导基本群之间的单射。
- 形变收回是同伦等价的一个特例。事实上，两个空间同伦等价当且仅当它们都可以同胚到同一个更大空间的形变收回。
- 任意形变收回到一个点的拓扑空间都是可收缩的，反之亦然。然而，存在可收缩的空间，它们不能强形变收回到一个点。[5]

2 无收回定理

n 维球体的边界，即 $(n-1)$ 维球面，不是球体的收回。(参见 Brouwer 不动点定理 § 使用同调或上同调的证明。)

3 绝对邻域收回 (ANR)

拓扑空间 Y 的一个闭子集 X 被称为 Y 的**邻域收回 (neighborhood retract)**，如果 X 是 Y 的某个包含 X 的开子集的收回。

设 $\mathcal{C}$ 是一类拓扑空间，对同胚和通过闭子集封闭。根据 Borsuk(始于 1931 年)，空间 X 被称为类 $\mathcal{C}$ 的**绝对收回 (absolute retract)**，记作 AR($\mathcal{C}$)，如果 X 属于 $\mathcal{C}$，并且每当 X 是在 $\mathcal{C}$ 中空间 Y 的一个闭子集时，X 是 Y 的一个收回。一个空间 X 是类 $\mathcal{C}$ 的**绝对邻域收回 (absolute neighborhood retract)**，记作 ANR($\mathcal{C}$)，如果 X 属于 $\mathcal{C}$，并且每当 X 是 $\mathcal{C}$ 中空间 Y 的一个闭子集时，X 是 Y 的邻域收回。

在这一定义中考虑了各种类 $\mathcal{C}$，例如正规空间，但是发现类 $\mathcal{M}$ 的可度量化空间给出了最令人满意的理论。为此原因，本文中 AR 和 ANR 的符号自身用来表示 AR($\mathcal{M}$) 和 ANR($\mathcal{M}$)。[6]

可度量化空间是 AR 当且仅当它是可收缩的并且是 ANR。[7] 根据 Dugundji，每个局部凸可度量化拓扑向量空间 V 是一个 AR；更一般地，这种向量空间 V 的每个非空凸子集是一个 AR。[8] 例如，任意 (完全的或不完全的) 赋范向量空间都是 AR。更具体地，欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$，单位立方体 I^n，以及希尔伯特立方体 I^ω 都是 ARs。

ANRs 构成一类“行为良好”的拓扑空间。它们的性质包括：

- 每个 ANR 的开子集是一个 ANR。
- 根据 Hanner，具有 ANR 开覆盖的可度量化空间是一个 ANR。[9] (也就是说，成为一个 ANR 对可度量化空间而言是一个**局部性质 (local property)**。) 由此得出每个拓扑流形都是一个 ANR。例如，球面 S^n 是一个 ANR 但不是一个 AR(因为它不是可收缩的)。在无限维中，

[5] Hatcher (2002), Exercise 0.6.
[6] Mardešič (1999), p. 242.
[7] Hu (1965), Proposition II.7.2.
[8] Hu (1965), Corollary II.14.2 and Theorem II.3.1.
[9] Hu (1965), Theorem III.8.1.

Hanner 的定理意味着每个希尔伯特立方体流形以及 (例如，不是局部紧致的) 希尔伯特流形和巴拿赫流形都是 ANRs。

- 每个局部有限的 CW 复形是一个 ANR。[10] 任意 CW 复形未必是可度量化的，但是每个 CW 复形具有与 ANR(按定义是可度量化的) 同伦类型的。[11]

- 每个 ANR X 是**局部可收缩 (locally contractible)** 的，意即对于在 X 中点 x 的每个开邻域 U，存在 x 的包含于 U 的开邻域 V，使得包含 $V \hookrightarrow U$ 与常值映射同伦。有限维可度量化空间是 ANR 当且仅当它在上述意义上是局部可收缩的。[12] 例如，康托尔集是实线上紧致子集，它不是一个 ANR，因为它甚至不是局部连通的。

- 反例：Borsuk 找到 $\mathbb{R}^3$ 的一个紧致子集，它是 ANR 但不是严格局部可收缩的。[13] (空间是**严格局部可收缩的 (strictly locally contractible)** 如果每个点 x 的每个开邻域 U 包含 x 的可收缩开邻域。)Borsuk 也找到了希尔伯特立方体的一个紧致子集，它是局部可收缩的 (按上述定义)，但不是 ANR。[14]

- 每个 ANR 具有与 CW 复形同伦类型的，由 Whitehead 和 Milnor 给出。[15] 而且，局部紧致 ANR 具有与局部有限 CW 复形同伦类型的；并且，根据 West，每个紧致 ANR 具有与有限 CW 复形同伦类型的。[16] 在这个意义上，ANRs 避免了任意拓扑空间所有的同伦论病态。例如，ANRs 的 Whitehead 定理成立：ANRs 之间映射诱导同伦群同构 (对于所有基点选择) 是同伦等价的。由于 ANRs 包含了拓扑流形，希尔伯特立方体流形，巴拿赫流形等等，这些结果适用于大类空间。

- 许多映射空间是 ANRs。特别是，设 Y 是 ANR，它有一个 ANR 的闭子集 A，并且设 X 是任意紧致可度量化空间，它有一个闭子集 B。则空间 $(Y, A)^{(X,B)}$ (具有紧-开拓扑的映射空间中的对 $(X, B) \to (Y, A)$ 的映射) 是一个 ANR。[17] 例如，这表明任意 CW 复形的环空间具有与 CW 复形同伦类型的。

- 根据 Cauty，可度量化空间 X 是 ANR 当且仅当 X 的每个开子集具有与 CW 复形同伦类型的。[18]

- 根据 Cauty，存在一个度量线性空间 V(意味着带有平移不变度量的拓扑向量空间) 它不是一个 AR。可以取 V 为可分和 F 空间 (也就是说，完全度量线性空间)。[19] (根据上面的 Dugundji 定理，V 不能是局部凸的。) 因为 V 是可收缩的并且不是 AR，它也不是 ANR。根据上面 Cauty 的定理，V 有一个开子集 U 它不是与 CW 复形同伦等价的。因此存在一个可度量化空间 U 它是严格局部可收缩的，但不是与 CW 复形同伦等价的。目前还不清楚紧致 (或局部紧致) 可度量化空间如果严格局部可收缩是否必须是 ANR。

[10] Mardešic (1999), p. 245.
[11] Fritsch & Piccinini (1990), Theorem 5.2.1.
[12] Hu (1965), Theorem V.7.1.
[13] Borsuk (1967), section IV.4.
[14] Borsuk (1967), Theorem V.11.1.
[15] Fritsch & Piccinini (1990), Theorem 5.2.1.
[16] West (2004), p. 119.
[17] Hu (1965), Theorem VII.3.1 and Remark VII.2.3.
[18] Cauty (1994), Fund. Math. 144: 11-22.
[19] Cauty (1994), Fund. Math. 146: 85-99.

References

- Borsuk, Karol (1931), “Sur les rétractes” (http://eudml.org/doc/212513), Fundamenta Mathematicae, 17: 152-170, doi:10.4064/fm-17-1-152-170 (https://doi.org/10.4064%2Ffm-17-1-152-170), ZbI 0003.02701 (https://zbmath.org/?format=complete&q=an:0003.02701)

- Borsuk, Karol (1967), Theory of Retracts, Warsaw: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, MR 0216473 (https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0216473)

- Cauty, Robert (1994), “Une caractérisation des rétractes absolus de voisinage” (http://eudml.org/doc/212011), Fundamenta Mathematicae, 144: 11-22, doi:10.4064/fm-144-1-11-22 (https://doi.org/10.4064%2Ffm-144-1-11-22), MR 1271475 (https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1271475)

- Cauty, Robert (1994), “Un espace métrique linéaire qui n’est pas un rétracte absolu” (http://eudml.org/doc/212053), Fundamenta Mathematicae, 146: 85-99, doi:10.4064/fm-146-1-85-99 (https://doi.org/10.4064%2Ffm-146-1-85-99), MR 1305261 (https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1305261)

- Fritsch, Rudolf; Piccinini, Renzo (1990), Cellular Structures in Topology, Cambridge University Press, ISBN 0-521-32784-9, MR 1074175 (https://mathscinet.ams.org/mathscinetgetitem?mr=1074175)

- Hatcher, Allen (2002), Algebraic Topology (http://www.math.cornell.edu/hatcher/AT/ATpage.html), Cambridge University Press, ISBN 0-521-79540-0, MR 1867354 (https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1867354)

- Hu, Sze-Tsen (1965), Theory of Retracts, Wayne State University Press, MR 0181977 (https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0181977)

- Mardešić, Sibe (1999), “Absolute neighborhood retracts and shape theory”, in James, I. M. (ed.), History of Topology, Amsterdam: North-Holland, pp. 241-269, ISBN 0-444-82375-1, MR 1674915 (https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1674915)

- May, J. Peter (1999), A Concise Course in Algebraic Topology (http://www.math.uchicago.edu/-may/CONCISE/ConciseRevised.pdf) (PDF), University of Chicago Press, ISBN 0-22651182-0, MR 1702278 (https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1702278)

- Milnor, John (1959), “On spaces having the homotopy type of a CW-complex”, Transactions of the American Mathematical Society, 90 (2): 272-280, doi:10.2307/1993204 (https://doi.org/10.2307%2F1993204), JSTOR 1993204 (https://www.jstor.org/stable/1993204), MR 0100267 (https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0100267)

- Puppe, Dieter (1967), “Bemerkungen über die Erweiterung von Homotopien”, Archiv der Mathematik, 18: 81-88, doi:10.1007/BF01899475 (https://doi.org/10.1007%2FBF01899475), MR 0206954 (https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0206954), S2CID 120021003 (https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120021003)

- West, James (2004), "Absolute retracts", in Hart, K. P. (ed.), Encyclopedia of General Topology, Amsterdam: Elsevier, ISBN 0-444-50355-2, MR 2049453 (https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=2049453)

External links

-