广义相对论中的李导数

2015/01/16

1 李导数

除了所谓的平行或协变导数，还有一个额外的概念称为李导数。这个导数比协变导数更为基本，因为它在时空上假设的结构更少。

假设我们有一系列的曲线填充时空。也就是说，通过在时空中的每一点，都存在一条曲线，从这一系列曲线中穿过这一点。现在我们可以用这一系列的曲线来滑动时空，也可以在滑动时空之上的任意结构。让我们指定这一系列曲线中经过点 p 的曲线为 $\gamma_p(\lambda)$，并指定点 p 的参数 λ 的值为 λ_p。即，$\gamma_p(\lambda_p) = p$。现在考虑由 $\gamma_p(\lambda_p + \mu)$ 指定的时空点。这将是时空中的一个新点，在点 p 附近。设在 p 处该曲线的切向量为 $\frac{\partial}{\gamma_p}$。

现在考虑一个函数 $f(p)$。定义函数的李导数，指定为

$$\pounds_{\frac{\partial}{\partial\gamma_p}} f = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(\gamma_p(\lambda_p+\epsilon)) - f(p)}{\epsilon} \tag{1}$$

我们注意到这就是 f 沿着曲线 γ_p 的导数，并因此这就是

$$\pounds_{\frac{\partial}{\partial\gamma_p}} f = \frac{\partial}{\partial\gamma_p}^A (df)_A \tag{2}$$

或在坐标中，

$$\pounds_{\frac{\partial}{\partial\gamma_p}} f = \eta^i \partial_i f \tag{3}$$

其中我们定义

$$\left(\frac{\partial}{\partial\gamma_p}\right)^A = \eta^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^A . \tag{4}$$

现在，让我们考虑由函数 f 定义的余切向量的导数。我们要定义余切向量的导数 $\pounds_{\frac{\partial}{\partial\gamma_p}} df_A$。我们通过减去由拖拽函数定义的余切向量来完成

$$\tilde{f}_\epsilon(p) = f(\gamma_p(\lambda_p - \epsilon)) . \tag{5}$$

其中，$\gamma_p(\lambda_p) = p$。即，γ_p 是通过点 p 的一条曲线，并且 λ_p 是当曲线在点 p 处时的参数值。注意，这假设我们有一整束曲线通过感兴趣点的邻域中的每一点，并且 p 是在该邻域中的任意点。

现在我们在点 p 处定义两个余切向量 df_A 和 $\left(d\tilde{f}_\epsilon\right)_A$。现在我们可以定义导数为

$$\pounds \left(\frac{\partial}{\partial\gamma_p}\right)^A df_B = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{df_B(p) - \left(d\tilde{f}_\epsilon(p)\right)_B}{\epsilon} \tag{6}$$

即，我们通过比较在点 p 处的余切向量和通过曲线集合的作用拖拽到点 p 的余切向量来定义这个导数。

以坐标形式书写，我们有

$$\tilde{f}_\epsilon\left(x^i(p)\right)=f\left(x^i\left(\gamma_p\left(\lambda_p-\epsilon\right)\right)\right)\approx f\left(x^i\right)-\epsilon\eta^j\,\partial_j f+O\left(\epsilon^2\right) \tag{7}$$

余切向量的分量为

$$\left(d\tilde{f}_\epsilon(p)\right)_i=\partial_i\left(\tilde{f}_\epsilon(p)\right)=\partial_i f-\epsilon\eta^j\,\partial_j f \tag{8}$$

然后李导数是

$$\pounds_{\eta^A}=\partial_i\eta^j\,\partial_j f+\eta^j\partial_j\left(\partial_i f\right) \tag{9}$$

因此，对于一个具有分量 U_i 的一般余切向量，我们有

$$\pounds_{\eta^A}U_i=\eta^j\,\partial_j U_i+U_j\,\partial_i\eta^j \tag{10}$$

通过指出 $V^A\,W_A$ 是一个普通函数，我们可以等价地定义一个切向量的李导数，并因此

$$\begin{aligned}
\pounds_{\eta^A}V^B\,W_B &=\pounds\left(\frac{\partial}{\partial\gamma_p}\right)^A V^i\,W_i && (11)\\
&=\left(\eta^j\,\partial_j V^i\right)W_i+V^i\left(\eta^j\,\partial_j W_i\right) && (12)\\
&=\left(\eta^j\,\partial_j V^i-V^j\,\partial_j\eta^i\right)\left(W_i\right)+V^i\left(\eta^j\,\partial_j W_i+W_j\,\partial_i\eta^j\right) && (13)\\
&=\left(\pounds\left(\frac{\partial}{\partial\gamma_p}\right)^A W_B\right)_i V^i+W_i\left(\left(\eta^j\,\partial_j V^i-V^j\,\partial_j\eta^i\right)\right) && (14)
\end{aligned}$$

因此我们定义

$$\pounds_{\eta^A}V^i=\left(\eta^j\,\partial_j V^i-V^j\,\partial_j\eta^i\right) \tag{15}$$

注意这个

$$\pounds_{V^A}U^B+\pounds_{U^A}V^B=0 \tag{16}$$

一个切向量沿着另一个切向量的李导数有时称为这两个切向量场的对易子 (commutator)。

需要注意的是，李导数的定义没有度量的概念，并且没有共变导数的概念。在许多方面，导数比协变导数更为基本。它只需要定义更少的时空结构。

它也不同于平行导数，因为它在所取导数的方向 (即曲线的切向量) 上不是线性的，但这也取决于附近曲线的切向量 (这取决于切向量的导数)。任意方向上的李导数不存在张量 (如 ∇_A)。你必须指定向量场，然后沿着该向量场求李导数。

度量的李导数给出为

$$\begin{aligned}
\pounds_{\eta^A}g_{ij} &=\eta^k\,\partial_k g_{ij}+g_{ik}\,\partial_j\eta^k+g_{kj}\,\partial_i\eta^k && (17)\\
&=\eta^k\,\partial_k g_{ij}+\partial_j\eta_i+\partial_i\eta_j-\eta^k\left(\partial_i g_{kj}+\partial_j g_{ik}\right) && (18)\\
&=\partial_j\eta_i+\partial_i\eta_j-2\eta^k\Gamma_{kij} && (19)\\
&=\partial_j\eta_i+\partial_i\eta_j-2\eta_k\Gamma^k_{ij} && (20)
\end{aligned}$$

或者

$$\pounds_V\,g_{AB}=\nabla_A\,V_B+\nabla_B\,V_A \tag{21}$$

现在，如果沿着曲线拖拽的度量与已经存在的度量相同，并且如果处处都为真，则被拖拽的空间几何体自身与原空间几何体完全相同。这就是所谓的时空对称。这意味着如果存在一个向量场 K^A，使得

$$\pounds_{K^A}\,g_{BC}=0 \tag{22}$$

则向量场 K^A 是时空的一个对称性。这种向量称为 Killing 向量。

一个四维时空最多可以包含 10 个线性无关的 Killing 向量。

考虑 Killing 方程分量

$$\partial_i K_j + \partial_j K_i = 2\Gamma^k_{ij} K_k \tag{23}$$

也就是说，Killing 向量的对称普通导数可以写成 Killing 向量分量本身的函数。我们可以把 Killing 向量的普通导数写为

$$\begin{aligned}\partial_i K_j =& \frac{1}{2}\left(\partial_i K_j - \partial_j K_i\right) &(24)\\ &+ \frac{1}{2}\left(\partial_i K_j + \partial_j K_i\right) &(25)\\ =& \frac{1}{2}\left(\partial_i K_j - \partial_j K_i\right) + K_k \Gamma^k_{ij} &(26)\end{aligned}$$

即 K^i 在 j 方向上的导数可以根据 K 的反对称导数和 K 在该点处的值来表示。

我们也可以把 Killing 方程写为

$$\partial_i K_j = -\partial_j K_i + 2K_k \Gamma^k_{ij} \tag{27}$$

查看反对称导数的导数

$$\begin{aligned}\partial_k\left(\partial_i K_j - \partial_j K_i\right) &= \partial_i\left(\partial_k K_j\right) - \partial_j \partial_k K_i &(28)\\ &= -\partial_i \partial_j K_k + \partial_j \partial_i K_k + 2\partial_i\left(\Gamma^l_{kj} K_l\right) - \partial_j\left(\Gamma^l_{ik} K_l\right) &(29)\\ &= 2\left(\partial_i \Gamma^l_{ki}\right) - 2\left(\partial_j \Gamma^l_{ki}\right) K_l + 2\Gamma^l_{ki}\,\partial_j K_l - 2\Gamma^l_{kj}\,\partial_i K_l &(30)\\ &= 2\left(\partial_i \Gamma^l_{ki} - \partial_j \Gamma^l_{ki} + \Gamma^m_{ki}\Gamma^l_{jm} - \Gamma^m_{kj}\Gamma^l_{im}\right) K_l &(31)\\ &\quad + \left(\Gamma^l_{ki}\left(\partial_j K_l - \partial_l K_j\right) - \Gamma^l_{kj}\left(\partial_i K_l - \partial_l K_i\right)\right) &(32)\end{aligned}$$

即，反对称导数的导数可以表示为度量乘以 Killing 向量的分量的导数加上 Killing 张量反对称导数的度量乘以分量的导数 (因为普通导数可以表示为反对称导数和度量乘以 Killing 向量分量的导数)。也就是说，我们有一个初值方程，如果我们在一个点处指定 Killing 向量的 4 个分量和 Killing 向量的反对称导数的 6 个分量，则我们可以沿着所有坐标轴，并且在时空中的任意地方将它们积分起来。

当然，这也要求如果我们沿着不同的路径方程进行积分，我们得到相同的向量。这就是为什么可以减少 Killing 向量的数量，使其少于 10 个，但永远不能超过 10 个。

平直时空有 10 个。

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{33}$$

$$K(1)_i = (1,0,0,0) \tag{34}$$

$$K(2)_i = (0,1,0,0) \tag{35}$$

$$K(3)_i = (0,0,1,0) \tag{36}$$

$$K(4)_i = (0,0,0,1) \tag{37}$$

$$K(5)_i = (x,-t,0,0) \tag{38}$$

$$K(6)_i = (y,0,-t,0) \tag{39}$$

$$K(7)_i = (z,0,0,-t) \tag{40}$$

$$K(8)_i = (0,y,-x,0) \tag{41}$$

$$K(9)_i = (0,z,0,-x) \tag{42}$$

$$K(10)_i = (0,0,z,-y) \tag{43}$$

其中 (a,b,c,d) 表示 t 分量是 a，x 是 b，y 是 c，并且 z 是 d。

前四个在 $t=x=y=z=0$ 时具有零反对称导数，但在该点对于 Killing 向量的一个分量具有非零值。最后 6 个在 $t=x=y=z=0$ 时，所有分量的值均为零，但在该点处具有非零的反对称导数。

注意，具有常数系数的 Killing 向量的任意线性组合也是 Killing 向量。类似地，一个 Killing 向量沿着另一个 Killing 向量的李导数，假设它不为 0，也是 Killing 向量。

如果度量的所有分量独立于某个坐标，则该坐标轴切向量是一个 Killing 向量。让我们假设 g_{ij} 都独立于第一个坐标 x^1。则如果我们取向量 $V^i=(1,0,0\ldots)$，我们有

$$\pounds_V\, g_{ij} = V^k\,\partial_k g_{ij} + g_{ik}\,\partial_j V^k + g_{jk}\,\partial_i V^k = V^1\frac{\partial g_{ij}}{x^1} + 0 + 0 = 0 \tag{44}$$

因为 V^i 的所有成分都是常数，并且 g_{ij} 与 x^1 无关。

类似地，一个坐标轴切向量对另一个坐标轴切向量的李导数为零，因为在该坐标系统中，每个切向量的分量都是常数，因此导数为零。