拉回 (微分几何)

Wikipedia

28 August 2023

设 $\phi : M \to N$ 是在光滑流形 M 与 N 之间的一个光滑映射。然后，从在 N 上的 1-形式的空间 (余切丛截面的线性空间) 到在 M 上的 1-形式的空间存在一个相关联的线性映射。这种线性映射被称为 (通过 ϕ 的) **拉回 (pullback)**，并且通常由 ϕ^* 标志。更一般地，在 N 上的任意协变张量场—特别是任意微分形式—可以使用 ϕ 拉回到 M。

当映射 ϕ 是一个微分同胚时，拉回与推前 (pushforward) 一起，可用于将任意张量场从 N 变换为 M，反之亦然。特别是，如果 ϕ 是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^n$ 的开放子集之间的一个微分同胚，被视为坐标的变化 (可能是在一个流形 M 上不同图表 (charts) 之间的变化)，则拉回和推前描述了在更传统 (坐标相关) 的主题方法中使用的协变和逆变张量的变换特性。

拉回背后的思想本质上是将一个函数与另一个函数预复合 (precomposition) 的概念。但是，通过将此思想结合到多个不同的上下文中，可以构造非常复杂的拉回操作。本文从最简单的操作开始，然后使用它们构造更复杂的操作。粗略地说，拉回机制 (使用预复合) 将微分几何中的若干构造转化为逆变函子。

1 光滑函数与光滑映射的拉回

设 $\phi : M \to N$ 是 (光滑) 流形 M 与 N 之间的一个光滑映射，并设 $f : N \to \mathbb{R}$ 是在 N 上的一个光滑函数。则 f 通过 ϕ 的**拉回 (pullback)** 是在 M 上的光滑函数 $\phi^* f$，定义为 $(\phi^* f)(x) = f(\phi(x))$。类似地，如果 f 是在 N 中的一个开集 U 上的一个光滑函数，则相同的公式定义在 $\phi^{-1}(U)$ 中的开集 f 上的一个光滑函数。(在层论语言中，拉回定义从在 N 上的光滑函数层到在 M 上通过 ϕ 的光滑函数层的直接象的一个态射。)

更一般地说，如果 $f : N \to A$ 是从 N 到任意其他流形 A 的一个光滑映射，则 $(\phi^* f)(x) = f(\phi(x))$ 是从 M 到 A 的一个光滑映射。

2 丛与截面的拉回

如果 E 是在 N 之上的一个向量丛 (或任意纤维丛) 并且 $\phi : M \to N$ 是一个光滑映射，则**拉回丛 (pullback bundle)** $\phi^* E$ 是在 M 之上的一个向量丛 (或纤维丛)，其在 M 中的 x 之上的纤维给出为 $(\phi^* E)_x = E_{\phi(x)}$。

在这种情况下，预复合在 E 的截面上定义一个拉回操作：如果 s 是 E 在 N 之上的一个截面，则**拉回截面 (pullback section)** $\phi^* s = s \circ \phi$ 是 $\phi^* E$ 在 M 之上的一个截面。

3 多线性形式的拉回

设 $\Phi : V \to W$ 是向量空间 V 和 W 之间的一个线性映射 (即 Φ 是 $L(V,W)$ 的一个元素，也标志为 $\mathrm{Hom}(V,W)$)，并设

$$F : W \times W \times \cdots \times W \to \mathbf{R}$$

是在 W 上的多线性形式 (也称为秩 $(0,s)$ 的一个张量，不要与张量场混淆，其中 s 是在乘积中 W 的因子数)。则 Φ 对 F 的拉回 Φ^*F 是在 V 上的多线性形式，通过将 F 与 Φ 预复合来定义。更精确地说，给定在 V 中的向量 $v_1, v_2, \ldots, v_s$，Φ^*F 由公式定义为

$$(\Phi^*F)(v_1, v_2, \ldots, v_s) = F(\Phi(v_1), \Phi(v_2), \ldots, \Phi(v_s)),$$

这是在 V 上的一个多线性形式。因此 Φ^* 是从在 W 上的多线性形式到在 V 上的多线性形式的一个 (线性) 算子。作为特例，注意如果 F 是在 W 上的一个线性形式 (或 $(0,1)$-张量)，使得 F 是 W^* 的一个元素，W 的对偶空间，则 Φ^*F 是 V^* 的一个元素，并因此 Φ 的拉回定义对偶空间之间的一个线性映射，其作用方向与线性映射 Φ 自身相反：

$$\Phi : V \to W, \quad \Phi^* : W^* \to V^*.$$

从张量的观点出发，很自然地尝试将拉回的概念推广到任意秩的张量，即对于在 W 上的多线性映射取 W 的 r 个拷贝的张量积值，即 $W \otimes W \otimes \cdots \otimes W$。然而，这种张量积的元素并不能自然地拉回：相反，这有一个从 $V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$ 到 $W \otimes W \otimes \cdots \otimes W$ 的推前操作，给出为

$$\Phi_*(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_r) = \Phi(v_1) \otimes \Phi(v_2) \otimes \cdots \otimes \Phi(v_r).$$

尽管如此，由此可以得出，如果 Φ 是可逆的，则可以通过逆函数 Φ^{-1} 的推前来定义拉回。结合这两种构造，对于任意秩 (r,s) 的张量，沿着可逆线性映射产生一个推前操作。

4 余切向量的拉回与 1-形式

设 $\phi : M \to N$ 是光滑流形之间的一个光滑映射。则，ϕ 的微分，写为 $\phi_*, d\phi$ 或 $D\phi$，是从 M 的切丛 TM 到拉回丛 ϕ^*TN 的一个向量丛态射 (在 M 之上)。因此，ϕ_* 的转置是从 ϕ^*T^*N 到 T^*M 的一个丛映射，即 M 的余切丛。

现在假设 α 是 T^*N 的一个截面 (在 N 上的一个 1-形式)，并将 α 与 ϕ 预复合以获得 ϕ^*T^*N 的一个拉回截面。将上述丛映射 (逐点) 应用于该截面，产生 α 通过 ϕ 的**拉回** (**pullback**)，即在 M 上的 1-形式 $\phi^*\alpha$，定义为

$$(\phi^*\alpha)_x(X) = \alpha_{\phi(x)}(d\phi_x(X))$$

对于在 M 中的 x 和在 T_xM 中的 X 成立。

5 (协变) 张量场的拉回

上一节的构造直接推广到任意自然数 s 的秩 $(0,s)$ 的张量丛：在一个流形 N 上的一个 $(0,s)$ 张量场是在 N 上张量丛的一个截面，其纤维在 N 中的 y 处是多线性 s-形式的空间

$$F : T_yN \times \cdots \times T_yN \to \mathbb{R}.$$

通过取 ϕ 等价于从 M 到 N 的一个光滑映射 ϕ 的 (逐点) 微分，可以将多线性形式的拉回与截面的拉回结合起来，以产生在 M 上的一个拉回 $(0,s)$ 张量场。更精确地说，如果 S 是在 N 上的一个 $(0,s)$-张量场，则 ϕ 对 S 的**拉回** (**pullback**) 是在 M 上的 $(0,s)$-张量场 ϕ^*S，定义为

$$\left(\phi^* S\right)_x\left(X_1, \ldots, X_s\right)=S_{\phi(x)}\left(d \phi_x\left(X_1\right), \ldots, d \phi_x\left(X_s\right)\right)$$

对于在 M 中的 x 和在 T_xM 中的 X_j 成立。

6 微分形式的拉回

协变张量场拉回的一个特别重要的例子是微分形式的拉回。如果 α 是一个微分 k-形式，即在 TN 上 (纤维方向) 交替 k-形式的外丛 $\Lambda^k\left(T^*N\right)$ 的一个截面，则 α 的拉回是在 M 上的微分 k-形式，定义公式与上一节相同：

$$\left(\phi^* \alpha\right)_x\left(X_1, \ldots, X_k\right)=\alpha_{\phi(x)}\left(d \phi_x\left(X_1\right), \ldots, d \phi_x\left(X_k\right)\right)$$

对于在 M 中的 x 和在 T_xM 中的 X_j 成立。

微分形式的拉回有两个性质，这使得它非常有用。

1. 它与楔积相容，因为对于在 N 上的微分形式 α 和 β，

$$\phi^*(\alpha \wedge \beta)=\phi^* \alpha \wedge \phi^* \beta.$$

2. 它与外导数 d 相容：如果 α 是在 N 上的一个微分形式，则

$$\phi^*(d \alpha)=d\left(\phi^* \alpha\right).$$

7 通过微分同胚的拉回

当流形之间的映射 ϕ 是一个微分同胚，即它有一个光滑的逆，则可以为向量场和 1-形式定义拉回，从而通过推广，为在流形上的任意混合张量场定义拉回。这个线性映射

$$\Phi=d \phi_x \in \mathrm{GL}\left(T_x M, T_{\phi(x)} N\right)$$

可以求逆以给出

$$\Phi^{-1}=\left(d \phi_x\right)^{-1} \in \mathrm{GL}\left(T_{\phi(x)} N, T_x M\right).$$

然后，一个一般混合张量场将根据张量丛的张量积分解为 TN 和 T^*N 的副本，使用 Φ 和 Φ^{-1} 进行转换。当 $M=N$ 时，拉回和推前描述在流形 M 上一个张量的变换性质。传统意义上，拉回描述张量的协变指数的变换性质；相比之下，张量的逆变指标的变换由一个推前给出。

8 通过自同构的拉回

当 ϕ 是从流形 M 到其自身的一个微分同胚时，上一节的构造具有表示理论解释。在这种情况下，导数 $d\phi$ 是 $\mathrm{GM}(TM, \phi^*TM)$ 的一个截面。这通过一般线性群 $\mathrm{GM}(m)$ (其中 $m=\mathrm{dim} M$) 的表示，在与 M 的帧丛 $\mathrm{GM}(m)$ 相关联的任意丛的截面上诱导一个拉回作用。

9 拉回与李导数

参见李导数 (Lie derivative)。将上述思想应用于由在 M 上的向量场定义的局部微分同胚单参数群，并对其参数进行微分，获得在任意相关丛上的李导数的概念。

10 连通的拉回 (协变导数)

如果 ∇ 是在 N 之上一个向量丛 E 上的一个连通 (或协变导数)，并且 ϕ 是从 M 到 N 的一个光滑映射，则在 M 之上的 ϕ^*E 上有一个拉回连通 $\phi^*\nabla$，它由以下条件唯一确定

$$(\phi^*\nabla)_X (\phi^* s) = \phi^* \left(\nabla_{d\phi(X)} s\right).$$

See also

- Pushforward (differential)
- Pullback bundle
- Pullback (category theory)

References

- Jost, Jürgen (2002). Riemannian Geometry and Geometric Analysis. Berlin: Springer-Verlag. ISBN 3-540-42627-2. See sections 1.5 and 1.6.
- Abraham, Ralph; Marsden, Jerrold E. (1978). Foundations of Mechanics. London: BenjaminCummings. ISBN 0-8053-0102-X. See section 1.7 and 2.3.