Math 53H: 李导数

Yakov Eliashberg

May 19, 2011

1 微分形式的李导数

设 A 是在一个域 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上定义的一个光滑向量场 (更一般地，我们可以假设 U 是任意 n 维流形)。给定一个函数 $f : U \to \mathbb{R}$，我们可以定义函数 f 沿着 A 的方向导数 (*directional derivative*) $L_A f$：

$$L_A f = \lim_{s \to 0} \frac{f(x+tX) - f(x)}{t}. \tag{1.1}$$

方向导数有许多其他表示方法：$D_A(f), \frac{\partial f}{\partial A}, df(A), \ldots$

让我们通过 $A^t : U \to U$, $t \in \mathbb{R}$, 标志向量场 A 的相流。[1] 我们可以观察到，方向导数也可以通过以下公式定义：

$$L_A f = \frac{d}{ds} f \circ A^s \Big|_{s=0}. \tag{1.2}$$

事实证明，公式 (1.2) 可以被推广，以便为微分形式和向量场定义一个方向导数的类比，这就是李导数 (*Lie derivative*)。

设 ω 为一个微分 k-形式。我们定义 ω 沿着 A 的李导数 $L_A\omega$ 为

$$L_A\omega = \frac{d}{ds} \left(A^s\right)^* \omega \Big|_{s=0}. \tag{1.3}$$

注意，如果 ω 是一个 0-形式，即一个函数 f，则 $(A^s)^* f = f \circ A^s$，并因此，在这种情况下，定义公式 (1.2) 和 (1.3) 是相同的，并因此对于函数来说，李导数与方向导数是相同的。

命题 1.1. *以下恒等式成立*

1. $L_A\left(\omega_1 \wedge \omega_2\right) = \left(L_A\omega_1\right) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge L_A\omega_2$.
2. $L_A(d\omega) = d\left(L_A\omega\right)$.

证明.

1.

$$\begin{aligned} L_A\left(\omega_1 \wedge \omega_2\right) &= \frac{d}{ds}\left(A^s\right)^*\left(\omega_1 \wedge \omega_2\right)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\left(\left(A^s\right)^*\omega_1 \wedge \left(A^s\right)^*\omega_2\right)\Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds}\left(\left(A^s\right)^*\omega_1\right)\Big|_{s=0} \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \frac{d}{ds}\left(\left(A^s\right)^*\omega_2\right)\Big|_{s=0} = \left(L_A\omega_1\right) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge L_A\omega_2. \end{aligned}$$

2. $L_A(d\omega) = \frac{d}{ds}\left(\left(A^s\right)^* d\omega\right)\big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\left(d\left(A^s\right)^*\omega\right)\big|_{s=0} = d\left(\frac{d}{ds}\left(A^s\right)^*\omega\big|_{s=0}\right) = d\left(L_A\omega\right).$ □

[1] 注意，相流不一定全局定义，可能并非对所有 t 都有定义。然而，本节的所有考虑都是局部的，并且根据常微分方程的存在性和唯一性定理，流总是局部定义的。因此，为了简化符号，我们不会在局部和全局之间进行这种区分。

Eli Cartan 的以下公式为计算微分形式的李导数提供了一种有效的方法。

定理 1.2. 设 A 是一个向量场，并且 ω 是一个微分 k-形式。则

$$L_A\omega = d(A\lrcorner\omega) + A\lrcorner d\omega. \tag{1.4}$$

证明. 首先假设 $\omega = f$ 是一个 0-形式。则 $L_A f = df(A) = A\lrcorner df$, 这等价于公式 (1.4)，因为在这种情况下，公式中的第一项等于 0 。然后，使用命题 1.1)，我们得到

$$L_A df = dL_A f = d(df(A)) = d(A\lrcorner df),$$

这再次等价于 (1.4)，因为这种情况下 $ddf = 0$. 接下来我们注意到，如果公式 (1.1) 对 ω_1 和 ω_2 成立，则它对 $\omega_1 \wedge \omega_2$ 也成立。事实上，通过 d_1, d_2 标志形式 ω_1, ω_2 的阶数。则我们有

$$\begin{aligned}
&(\star) L_A(\omega_1\wedge\omega_2) = (L_A\omega_1)\wedge\omega_2 + \omega_1\wedge L_A\omega_2\\
&= (A\lrcorner d\omega_1 + d(A\lrcorner\omega_1))\wedge\omega_2 + \omega_1\wedge(A\lrcorner d\omega_2 + d(A\lrcorner\omega_2))\\
&= (A\lrcorner d\omega_1)\wedge\omega_2 + \omega_1\wedge(A\lrcorner d\omega_2) + d(A\lrcorner\omega_1)\wedge\omega_2 + \omega_1\wedge d(A\lrcorner\omega_2)
\end{aligned}$$

On the other hand

$$\begin{aligned}
&(\star\star) A\lrcorner d(\omega_1\wedge\omega_2) + d(A\lrcorner(\omega_1\wedge\omega_2))\\
&= A\lrcorner\left(d\omega_1\wedge\omega_2 + (-1)^{d_1}\omega_1\wedge d\omega_2\right) + d\left((A\lrcorner\omega_1)\wedge\omega_2 + (-1)^{d_1}\omega_1\wedge(A\lrcorner\omega_2)\right)\\
&= (A\lrcorner d\omega_1)\wedge\omega_2 + (-1)^{d_1+1}d\omega_1\wedge(A\lrcorner\omega_2) + (-1)^{d_1}(A\lrcorner\omega_1)\wedge d\omega_2 + \omega_1\wedge(A\lrcorner d\omega_2)\\
&+ d(A\lrcorner\omega_1)\wedge\omega_2 + (-1)^{d_1+1}A\lrcorner\omega_1\wedge d\omega_2 + (-1)^{d_1}d\omega_1\wedge(A\lrcorner\omega_2) + \omega_1\wedge(d(A\lrcorner\omega_2))\\
&= (A\lrcorner d\omega_1)\wedge\omega_2 + \omega_1\wedge(A\lrcorner d\omega_2) + d(A\lrcorner\omega_1)\wedge\omega_2 + \omega_1\wedge d(A\lrcorner\omega_2).
\end{aligned}$$

比较在 $(\star)$ 和 $(\star\star)$ 中的计算，我们得出结论

$$L_A(\omega_1\wedge\omega_2) = A\lrcorner d(\omega_1\wedge\omega_2) + d(A\lrcorner(\omega_1\wedge\omega_2)).$$

通过归纳，我们可以证明任意阶数的形式的外积的类似公式。

最后，我们观察到任意微分 k-形式 ω 都可以在坐标中写为 $\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} f_{i_1\ldots i_k}(x)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$，即 ω 是函数 (0-形式) 和精确 1-形式的外积之和，因此 Cartan 公式成立。 □

命题 1.3. 我们有

$$L_A\omega = 0 \Longleftrightarrow (A^s)^*\omega = \omega \textit{ for all } s\in\mathbb{R}.$$

证明. 如果 $(A^s)^*\omega \equiv \omega$，则 $L_A\omega = \frac{d}{ds}(A^s)^*\omega\big|_{s=0} = 0$。为了证明逆命题，我们注意到

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(A^s)^*\omega\Big|_{s=s_0} &= \lim_{t\to0}\frac{(A^{s_0+t})^*\omega - (A^{s_0})^*\omega}{t} = (A^{s_0})^*\left(\lim_{t\to0}\frac{(A^t)^*\omega-\omega}{t}\right)\\
&= (A^{s_0})^*(L_A\omega),
\end{aligned}$$

并因此，如果 $L_a\omega = 0$，则 $(A^s)^*\omega = \omega$。 □

2 向量场上微分同胚的作用

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 为在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个域，并且 $f: U\to V$ 为 U 的一个微分同胚，它盖射到另一个域 $V\subset\mathbb{R}^n$。我们定义推前 (*push-forward*) 算子 $f_*: \mathrm{Vect}(U)\to\mathrm{Vect}(V)$，它通过以下公式将在 U 上

的向量场映射到在 V 上的向量场：

$$f_*(A)(f(x)) = df_x(A(x)), \quad A \in \mathrm{Vect}(U), x \in U. \tag{2.1}$$

等效地，

$$f_*(A)(y) = df_{f^{-1}(y)}\left(A\left(f^{-1}(y)\right)\right), \quad y \in V.$$

假设我们在 U 中给定一个坐标系统 $(x_1, \ldots, x_n)$。则

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}, j = 1, \ldots, n,$$

或者更准确地说

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(y) = \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(f^{-1}(y)\right), y \in V.$$

还可以通过公式 $f^* = (f^{-1})_*$ 定义拉回 (*pull-back*) 算子 $f^* : \mathrm{Vect}(V) \to \mathrm{Vect}(U)$。换句话说，拉回就是逆微分同胚下的推前。更明确地说，我们可以写出

$$f^*(B)(x) = d\left(f^{-1}\right)(f(x))\left(B(f(x))\right) = (df_x)^{-1}\left(B(f(x))\right), \quad B \in \mathrm{Vect}(V), x \in U. \tag{2.2}$$

让我们指出为什么对于微分形式来说，拉回算子 f^* 是为一个**任意光滑映射** f 定义的，而对于向量场的情况，这两个算子 f_* 和 f^* 仅针对微分同胚 (*diffeomorphisms*) 定义。

3 向量场的李括号

设 $A, B \in \mathrm{Vect}(U)$ 是定义在一个域 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上的两个向量场。如 52H 所示，存在一个向量场 $C \in \mathrm{Vect}(V)$，称为向量场 A 和 B 的李括号 (*Lie bracket*)，并标志为 $C = [A, B]$，它由如下性质表征：**对于任意光滑函数** $\phi : U \to \mathbb{R}$**，我们有**

$$L_C\phi = (L_A L_B - L_B L_A)\phi.$$

这里有一个令人惊讶的事实，尽管这个方程的右侧看起来像是二阶微分算子，但左侧是一个一阶算子，所以右侧的二阶导数相互抵消。

回想一下，括号 $[A, B]$ 具有以下性质

- 李括号是一个双线性运算；
- $[A, B] = -[B, A]$ (斜对称性)；
- $[[A, B]C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$ (雅可比恒等式)；
- 如果 $A = \sum_1^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ 和 $B = \sum_1^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ 则

$$[A, B] = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3.1}$$

在本节中，我们将对李括号 $[A, B]$ 给出一个新解释。

我们定义向量场 B 沿着向量场 A 的李导数 (*Lie derivative*) $L_A B$，其方式与我们在前面节 1 中定义的一个微分形式的李导数的方式相似。即

$$L_A B=\left.\frac{d\left(A^s\right)^* B}{d s}\right|_{s=0}. \tag{3.2}$$

更明确地说，

$$L_A B(x)=\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d_{A^s(x)}\left(A^{-s}\right)\left(B\left(A^s(x)\right)-B(x)\right)}{s}.$$

同样地，对于命题 1.3，我们有

命题 3.1.

$$L_A B=0 \Longleftrightarrow\left(A^s\right)^* B \equiv B \text { for all } s \in \mathbb{R}.$$

证明. 我们有

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\left(A^s\right)^* B}{d s}\right|_{s=s_0} & =\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\left(A^{s+s_0}\right)^* B-\left(A^{s_0}\right)^* B}{s} \\
& =\lim_{s \rightarrow 0}\left(A^{s_0}\right)^*\left(\frac{\left(A^s\right)^* B-B}{s}\right)=\left(A^{s_0}\right)^*\left(\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\left(A^s\right)^* B-B}{s}\right) \\
& =\left(A^{s_0}\right)^*\left(L_A B\right).
\end{aligned}$$

因此，如果 $L_A B=0$，则对于所有 s，$\frac{d\left(A^s\right)^* B}{d s}$，并因此 $\left(A^s\right)^* B=\left(A^0\right)^* B=B$。反之亦然。 □

定理 3.2. 对于任意两个向量场 $A, B \in \operatorname{Vect}(U)$

$$L_A B=[A, B].$$

证明. 注意这个，$A^s(x)=x+s A(x)+o(s)$。因此，我们可以写出

$$d_y A^{-s}=\operatorname{Id}-s d_y A+o(s),$$

这里我们视 A 为一个映射 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$。此外，代入 $y=A^s(x)$，我们得到

$$d_{A^s(x)} A^{-s}=\operatorname{Id}-s d_x A+o(s),$$

因为 $s\left(d_y A-d_x A\right)=o(s)$。我们还有 $B\left(A^s(x)\right)=B(x+s A(x)+o(x))=B(x)+s d_x B(A(x))+o(s)$。因此，忽略 $o(s)$ 项，我们得到

$$\begin{aligned}
L_A B & =\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s}\left(d_{A^s(x)}\left(A^{-s}\right)\left(B\left(A^s(x)\right)\right)-B(x)\right) \\
& =\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s}\left(\left(\operatorname{Id}-s d_x A\right)\right)\left(B(x)+s d_x B(A(x))-B(x)\right) \\
& =\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s}\left(B(x)-s d_x A(B)+s d_x B(A)-B(x)\right)=d_x B(A)-d_x A(B).
\end{aligned}$$

但是，在坐标中的右侧表达式具有形式

$$d_x B(A)-d_x A(B)=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j}-b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

这与李括号表达式 (3.1) 一致。 □

练习 3.3. 证明对于任意光滑函数 ϕ，我们有

$$L_{[A, B]} \phi=\frac{\partial^2\left(\phi \circ A^s \circ B^t\right)}{\partial s \partial t}.$$

4 一阶积分

假设我们给定一个微分方程

$$\dot{x} = A(x), \tag{4.1}$$

其中 A 是在域 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上的一个向量场。一个函数 $\phi : U \to \mathbb{R}$ 被称为一阶积分 (*first integral*)，或者简称为方程 (4.1) 的积分，如果它在该方程的解上恒定，或者等价地，在向量场 A 的积分曲线上恒定。

显然，ϕ 为一个积分的必要且充分条件是满足方程 $L_A\phi = 0$。其中，$L_A\phi$ 标志 ϕ 沿着 A 的方向导数。

如果 ϕ 是方程 (3.2) 的积分，则解包含在函数 ϕ 的水平集中，因此，这允许我们将方程的阶数减少 1。如果方程 (3.2) 有两个积分 ϕ_1, ϕ_2，则解位于水平集 $\{\phi_1 = c_1\}$ 和 $\{\phi_2 = c_2\}$ 的交集中，$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$。因此，如果这些水平集相互正交 (这意味着微分 $d\phi_1$ 和 $d\phi_2$ 在交集的每个点处都是线性无关的)，则解位于 $\{\phi_1 = c_1\} \cap \{\phi_2 = c_2\}$ 中，这允许进一步降低系统的阶数。如果阶数减少到 1，则方程可以在数值积分中明确地积分。这样的系统被称为完全可积的 (*completely intregrable*)。

下一节将讨论来自力学的积分的一些重要例子。

5 哈密顿向量场

考虑向量空间 $\mathbb{R}^{2n}$，具有坐标 $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$，并有一个封闭的微分 2-形式 $\omega = \sum_1^n dp_i \wedge dq_i$。我们将写出 $p = (p_1, \ldots, p_n)$ 和 $q = (q_1, \ldots, q_n)$。给定一个函数 $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$，我们将标志

$$\frac{\partial H}{\partial q} := \left(\frac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial q_n}\right), \quad \frac{\partial H}{\partial p} := \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}\right).$$

注意，这个形式是非退化的，即它的矩阵在每个点处都是非退化的。因此，由公式 $X \mapsto X \lrcorner \omega$ 给出的映射 $J : \mathrm{Vect}(\mathbb{R}^{2n}) \to \Omega^1(\mathbb{R}^{2n})$ 是向量场空间 $\mathrm{Vect}(\mathbb{R}^{2n})$ 与在 $\mathbb{R}^n$ 上的微分 1-形式的空间 $\Omega^1(\mathbb{R}^{2n})$ 之间的一个同构。在坐标中，映射 J 将向量场 $(P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n)$ 关联到微分形式 $\sum_1^n Q_i dp_i - P_i dq_i$。

引理 5.1. *给定在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的一个向量场 A，微分 1-形式 $J(A) = A \lrcorner \omega$ 是封闭的，当且仅当 $L_A\omega = 0$。*

证明. 事实上，根据 Cartan 公式 (1.4)，我们有 $L_A\omega = d(A \lrcorner \omega) = dJ(A)$，因为 ω 是封闭的。 □

给定一个函数 $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$，我们用 X_H 标志向量场 $-J^{-1}(dH)$。通过这种构造获得的向量场称为哈密顿量 (*Hamiltonian*)。

为了找到 X_H 的坐标表达式，我们写出 $X_H = \sum_1^n a_i \frac{\partial}{\partial p_i} + b_i \frac{\partial}{\partial q_i}$。则

$$X_H \lrcorner \omega = \left(\sum_1^n a_i \frac{\partial}{\partial p_i} + b_i \frac{\partial}{\partial q_i}\right) \lrcorner \sum_1^n dp_i \wedge dq_i = \sum_1^n -b_i dp_i + a_i dq_i.$$

因此，方程

$$X_H \lrcorner \omega = -dH = -\sum_1^n \frac{\partial H}{d} p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i$$

意味着 $a_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, b_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, i = 1, \ldots, n$。因此

$$X_H = \sum_1^n -\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}.$$

在一个缩写形式中，省略指标后，我们将写成

$$X_H = -\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}.$$

因此，对应于向量场 X_H 的微分方程系统具有形式

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}\\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}.\end{aligned} \tag{5.1}$$

这些方程在力学中起着重要作用，被称为哈密顿正则方程组 (*Hamilton canonical equations*)。它们描述了力学系统的相流。这里的坐标 $q = (q_1, \ldots, q_n)$ 确定了系统的一个位置，或在力学系统的配置空间 (*configuration space*) 中的一个点。坐标 $p = (p_1, \ldots, p_n)$ 被称为动量 (*momenta*)，并且可以看作是到配置空间的余切丛的向量。函数 H 是通过坐标和动量表达的系统总能量。

引理 5.2. *函数 H 是方程 (5.1) 的一阶积分，即 $L_{X_H}H = 0$。*

证明.

$$L_{X_H}H = dH\left(X_H\right) = -\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} = 0.$$

□

例 5.3. 考虑牛顿方程

$$\ddot{q}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}, i = 1, \ldots, n,$$

或以简写符号表示为

$$\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q} = -\nabla U.$$

将其简化为一阶方程系统，我们得到

$$\dot{p} = -\frac{\partial U}{\partial q} \tag{5.2}$$

$$\dot{q} = p. \tag{5.3}$$

考虑总能量 (*full energy*) $H(p,q) = \sum_1^n \frac{p_i^2}{2} + U(q) = \frac{1}{2}p^2 + U(q)$。则 $\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial q}$ 并且 $\frac{\partial H}{\partial p} = p$，并因此方程 (5.2) 采用这个哈密顿函数 H 的形式方程 (5.1)。引理 5.2 是能量守恒定律。

引理 5.4. *设 X_H 为哈密顿向量场，并且 X_H^s 是它产生的相流。则对于所有的 $s \in \mathbb{R}$，$\left(X_H^s\right)^* \omega = \omega$。换句话说，一个哈密顿向量场的流保持了形式 ω.*

证明. 这证明 $L_{X_H}\omega = 0$ 就足够了。使用定理 1.2，我们得到

$$L_{X_H}\omega = d\left(X_H \lrcorner \omega\right) + X_H \lrcorner d\omega.$$

但是因为 ω 是封闭的，并因此 $d\omega = 0$，而 $X_H \lrcorner \omega = dH$。因此，$L_{X_H}\omega = ddH = 0$。 □

6 正则变换

方程 (5.1) 被称为是正则的，因为它们相对于相空间的一大组变换是不变的。如果一个微分同胚 $f:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$ 保持形式 ω，则称其为辛同胚 (*symplectomorphism*) (或者正则变换 (*canonical transformation*))。则它也保持方程 (5.1) 的形式。事实上，假设 $f(p,q)=(\widetilde{p},\widetilde{q})$。则 $f^*(\omega)=f^*(dp\wedge dq)=d\widetilde{p}\wedge d\widetilde{q}=\omega=dp\wedge dq$。因此，如果我们通过坐标 $\widetilde{p},\widetilde{q}$ 表达函数 $H(p,q)$，$H(p,q)=\widetilde{H}(\widetilde{p},\widetilde{q})$，则方程 (5.1) 在坐标 $(\widetilde{p},\widetilde{q})$ 中将以相同的形式表达：

$$\begin{aligned}\dot{\widetilde{p}}&=-\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial\widetilde{q}}\\ \dot{\widetilde{q}}&=\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial\widetilde{p}}.\end{aligned}\tag{6.1}$$

以下命题提供了一类重要的正则变换，

命题 6.1. *考虑在两个域 $U,V\subset\mathbb{R}^{2n}$ 之间的任意微分同胚 $f:U\to V$。设 Df 为映射 U 的雅可比矩阵。则映射*

$$(p,q)\mapsto\left(\left((Df)^{-1}\right)^T p,f(q)\right)$$

是域 $\widehat{U}=\{p\in\mathbb{R}^n,q\in U\}$ 到域 $\widehat{V}=\{p\in\mathbb{R}^n,q\in V\}$ 的一个辛同胚 $\widehat{f}$。这里 $\left((Df)^{-1}\right)^T$ 是雅可比矩阵 Df 的逆矩阵的转置。

换句话说，**q-坐标的任意变换都会扩展为 p,q-坐标的正则变换**。

证明. 让我们用 $g_{ij},i,j=1,\ldots,n$ 标志矩阵 $(Df)^{-1}$ 的元素。因此，$\sum_i^n g_{ji}\frac{\partial f_i}{\partial q_k}=\delta_{jk},\delta_{jk}=1$ 如果 $j=k$，并且 $\delta_{jk}=0$ 如果 $j\neq k$。

让我们计算 $\widehat{f^*}(pdq)=\widehat{f^*}\left(\sum_1^n p_i dq_i\right)$。我们有

$$\widehat{f}\left(p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n\right)=\left(\sum_1^n g_{j1}p_j,\ldots,\sum_1^n g_{jn}p_j,f_1(q),\ldots,f_n(q)\right).$$

因此，

$$\begin{aligned}\widehat{f^*}(pdq)=\widehat{f^*}\left(\sum_1^n p_i dq_i\right)&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n g_{ji}p_j df_i\\ &=\sum_{i,j,k=1}^n g_{ji}\frac{\partial f_i}{\partial q_k}p_j dq_k=\sum_{j,k=1}^n\delta_{jk}p_j dq_k\\ &=\sum_1^n p_k dq_k=pdq.\end{aligned}$$

因此，

$$\widehat{f^*}\omega=\widehat{f^*}dp\wedge dq=d\left(\widehat{f^*}(pdq)\right)=d(pdq)=dp\wedge dq=\omega.$$

□

推论 6.2. *假设存在一个坐标变换 $\widetilde{q}=f(q)$，使得在新的坐标中，哈密顿函数 H 与坐标 $\widetilde{q}_1$ 无关。则 $\widetilde{p}_1=\sum_1^n g_{j1}p_j$ 是系统方程 (5.1) 的一阶积分。这里的符号 g_{ij} 表示矩阵 $(Df)^{-1}$ 的元素。*

证明. 让我们将坐标变换 $q\mapsto\widetilde{q}=f(q)$ 扩展为如命题 6.1 中所述的坐标变换 $(p,q)\mapsto(\widetilde{p},\widetilde{q})=\widetilde{f}(p,q)$。则在新坐标 $(\widetilde{p},\widetilde{q})$ 中的方程也具有正则哈密顿形式方程 (6.1)。则 $\dot{\widetilde{p}}_1=\frac{\partial H}{\partial\widetilde{q}_1}=0$，因为假设哈密顿量与坐标 $\widetilde{q}_1$ 无关。因此 $\widetilde{p}_1=\sum_1^n g_{j1}p_j$ 沿着轨迹是恒定的，即它是一个一阶积分。 □

7 示例：角动量

考虑一个牛顿方程

$$\ddot{q}=-\nabla U(q), \quad q \in \mathbb{R}^3, \tag{7.1}$$

它描述了质量为 1 的一个粒子在具有一个势能函数 $U(q)$ 的场中的运动。假设在 $\mathbb{R}^3$ 中存在一条轴线 l，使得函数 $U(q)$ 相对于围绕 l 的旋转保持不变。

系统方程 (7.1) 可以重写为哈密顿形式方程 (5.1)，其中哈密顿函数为 $H=\frac{p^2}{2}+U(q)=\frac{p_1^2}{2}+\frac{p_2^2}{2}+\frac{p_3^2}{2}+U\left(q_1, q_2, q_3\right)$。为了简单起见，假设 q_3-轴与轴 l 重合。

让我们将坐标 (q_1, q_2, q_3) 变换为柱面坐标 (ϕ, r, z)：

$$q_1=r \cos \phi, q_2=r \sin \phi, q_3=z.$$

等效地，

$$\phi=\arctan \frac{q_2}{q_1}, r=\sqrt{q_1^2+q_2^2}, z=q_3.$$

计算雅可比矩阵 $\frac{D(\phi, r, z)}{D(q_1, q_2, q_3)}$，我们得到

$$\left(\begin{array}{ccc}\frac{\partial \phi}{\partial q_1} & \frac{\partial \phi}{\partial q_2} & \frac{\partial \phi}{\partial q_3} \\ \frac{\partial r}{\partial q_1} & \frac{\partial r}{\partial q_2} & \frac{\partial r}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc}-\frac{q_2}{q_1^2+q_2^2} & \frac{q_1}{q_1^2+q_2^2} & 0 \\ \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} & \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

则逆矩阵等于

$$\left(\begin{array}{ccc}-q_2 & \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} & 0 \\ q_1 & \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

[2]让我们将坐标变换 $(r, \phi, z) \mapsto (q_1, q_2, q_3)$ 扩展为正则坐标变换

$$(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \mapsto (\phi, r, q_3, p_\phi, p_r, p_z)$$

其中，我们用 p_r, p_ϕ, p_z 标志对应于新坐标 (r, ϕ, z) 的动量变量。事实上，我们只需要坐标 p_ϕ，它由 $p_\phi=-p_1 q_2+q_1 p_2$ 给出。因此，函数 $-p_1 q_2+p_2 q_1$ 是一阶积分。它被称为**围绕 q_3-轴的角动量**。

[2]当然，在这种情况下，计算映射 $(\phi, r, z) \rightarrow (q_1, q_2, q_3)$ 的雅可比矩阵，然后改变结果中的坐标会更容易。但是，我们在这里精确地遵循命题 6.1 提供的方案。