余切丛

Wikipedia

8 January 2024

在数学中，特别是在微分几何中，一个光滑流形的**余切丛** (**cotangent bundle**) 是在流形中的每个点处的所有余切空间的向量丛。它也可以被描述为切丛的对偶丛。这可以推广到比光滑流形具有更多结构的范畴，例如复流形，或 (以余切丛的形式) 代数簇或概型。在光滑的情况下，任何黎曼度量或辛形式都会在余切丛和切丛之间给出一个同构，但在其他范畴中它们通常不是同构的。

1 通过对角态射的形式定义

定义余切丛有几种等价的方法。有一种是通过一个对角映射 Δ 和胚芽定义。

设 M 为一个光滑流形，并设 $M \times M$ 为 M 的笛卡尔积。对角映射 Δ 将在 M 中的一个点 p 映射到 $M \times M$ 中的点 (p, p)。Δ 的象称为对角线。设 $\mathcal{I}$ 为在 $M \times M$ 上的光滑函数的胚层，其对角线为零。则商层 $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ 由对角线为零的高阶项的函数等价类组成。余切层被定义为该层到 M 的拉回 (pullback)：

$$\Gamma T^* M = \Delta^* \left(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2\right).$$

根据泰勒定理，这是相对于 M 的光滑函数的微分簇的局部自由模簇。因此，它在 M 上定义一个向量丛：**余切丛** (**cotangent bundle**)。

余切丛的光滑截面称为 (微分) 1-形式。

2 逆变性质

流形的一个光滑态射 $\phi : M \to N$ 诱导在 M 上的一个拉回层 $\phi^* T^* N$。这里有一个向量丛的诱导映射 $\phi^* (T^* N) \to T^* M$。

3 示例

向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的切丛是 $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$，并且余切丛是 $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$，其中 $(\mathbb{R}^n)^*$ 标志余向量的对偶空间，线性函数 $v^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$。

给定一个光滑流形 $M \subset \mathbb{R}^n$，嵌入作为一个超曲面，它由一个函数 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的零点集表示，具有条件 $\nabla f \neq 0$，则切丛为

$$TM = \{(x, v) \in T\mathbb{R}^n : f(x) = 0, df_x(v) = 0\},$$

其中 $df_x \in T_x^* M$ 是方向导数 $df_x(v) = \nabla f(x) \cdot v$。根据定义，在这种情况下，余切丛是

$$T^*M = \{(x, v^*) \in T^*\mathbb{R}^n : f(x) = 0, v^* \in T_x^* M\},$$

其中 $T_x^*M = \{v \in T_x\mathbb{R}^n : df_x(v) = 0\}^*$。由于每个余向量 $v^* \in T_x^*M$ 对应于一个唯一的向量 $v \in T_xM$，即 $v^*(u) = v \cdot u$，对于一个任意 $u \in T_xM$，

$$T^*M = \{(x, v^*) \in T^*\mathbb{R}^n : f(x) = 0, v \in T_x\mathbb{R}^n, df_x(v) = 0\}.$$

4 余切丛作为相空间

由于余切丛 $X = T^*M$ 是一个向量丛，它本身就可以被视为一个流形。因为在每个点处，M 的切线方向可以与其纤维中的对偶余向量配对，所以 X 拥有一个称为重言式 1-形式 (tautological 1-form) 的正则 1-形式 θ，这将在下节讨论。θ 的外微分是一个辛 2-形式，由此对于 X 可以构建一个非退化的体积形式. 例如，由此结果可知 X 总是一个可定向流形 (其切丛 TX 是一个可定向的向量丛)。可以在余切丛上定义一组特殊的坐标；这些坐标被称为正则坐标。因为余切丛可以被视为辛流形，所以在余切丛上的任意实数函数都可以被解释为一个哈密顿量；因此，余切丛可以被理解为是哈密顿力学在其中发挥作用的一个相空间。

5 重言式 1-形式

余切丛携带一个正则 1-形式 θ，也称为辛势 (symplectic potential)，庞加莱 1-形式 (*Poincaré* 1-form) 或刘维尔 1-形式 (*Liouville* 1-form)。这意味着，如果我们把 T^*M 本身看作一个流形，则在 T^*M 之上有一个向量丛 $T^*(T^*M)$ 的正则截面。

本节可以采用多种方式构造。最基本的方法是使用局部坐标。假设 x^i 是在基流形 M 上的局部坐标。根据这些基坐标，有纤维坐标 p_i：在 T^*M 的一个特定点处，一个 1-形式具有形式 $p_i dx^i$ (隐含了爱因斯坦求和约定)。因此，流形 T^*M 本身携带局部坐标 (x^i, p_i)，其中 x' 是在基上的坐标，并且 p' 是在纤维中的坐标。在这些坐标中，正则 1-形式给出为

$$\theta_{(x,p)} = \sum_{i=1}^{n} p_i dx^i.$$

本质上，正则 1-形式在 T^*M 的每个固定点处的值都作为一个拉回给出。具体来说，假设 $\pi : T^*M \to M$ 是该丛的投影。取在 $T_x{}^*M$ 中的一个点，相当于选择在 M 中一个点 x 以及在 x 处的一个 1-形式 ω，并且重言式 1-形式 θ 指派给点 (x, ω) 一个值

$$\theta_{(x,\omega)} = \pi^*\omega.$$

也就是说，对于在余切丛的切丛中一个的向量 v, 在 (x, ω) 处将重言式 1-形式 θ 应用到 v 的计算，是使用 $d\pi : T(T^*M) \to TM$ 将 v 投影到在 x 处的切丛中，并将 ω 应用于该投影。注意，重言式 1-形式不是在基底 M 上的一个 1-形式的一个拉回。

5.1 辛形式

在余切丛上有一个正则辛 2-形式，作为紧致 1-形式 (辛势) 的一个外导数。证明这个形式是辛的，实际上可以通过注意到辛性是一个局部性质来完成：由于余切丛是局部平凡的，这个定义只需要在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上检查。但这里定义的 1-形式是 $y_i\, dx_i$ 的加和，并且微分是正则辛形式，即 $dy_i \wedge dx_i$ 的加和。

5.2 相空间

如果流形 M 表示在一个动力系统中可能位置的集合，则余切丛 T^*M 可以被看作是可能的位置 (*positions*) 和动量 (*momenta*) 的集合。例如，这是描述钟摆相空间的一种方式。钟摆的状态由它的位置 (角度) 和动量 (或等效地，它的速度，因为它的质量是恒定的) 决定。整个状态空间看起来像一个圆柱体，它是圆的余切丛。上述辛构造，加上适当的能量函数，可以完整地确定系统的物理特性。参见哈密顿力学和关于测地线流的文章，以获得哈密顿运动方程的明确构造。

5.3 测地线流

测地线流 (**Geodesic flow**) 是在流形 M 的切丛 TM 上的一个局部的 $\mathbb{R}$-作用，其定义如下

$$G^t(V) = \dot{\gamma}_V(t)$$

其中 $t \in \mathbb{R}$，$V \in TM$，并且 γ_V 标志具有初始数据 $\dot{\gamma}_V(0) = V$ 的测地线。因此，$G^t(V) = \exp(tV)$ 是向量 tV 的指数映射。**测地线流的一个封闭轨道对应于在 M 上的一条封闭测地线**。

在 (伪) 黎曼流形上，测地线流被标识为在余切丛上的哈密顿流。哈密顿量则由 (伪) 黎曼度量的逆，对于正则 1-形式求值给出。特别地，流保持 (伪) 黎曼度量 g，即

$$g(G^t(V), G^t(V)) = g(V, V).$$

特别是，当 V 是一个单位向量时，γ_V 始终保持单位速度，因此测地线流与单位切丛相切。刘维尔定理意味着单位切丛上的运动学测度的不变性。

See also

- Legendre transformation

References

- Abraham, Ralph; Marsden, Jerrold E. (1978). Foundations of Mechanics. London: Benjamin-Cummings. ISBN 0-8053-0102-X.
- Jost, Jürgen (2002). Riemannian Geometry and Geometric Analysis. Berlin: Springer-Verlag. ISBN 3-540-63654-4.
- Singer, Stephanie Frank (2001). Symmetry in Mechanics: A Gentle Modern Introduction. Boston: Birkhäuser.