微分形式

Wikipedia

16 December 2023

在数学中，**微分形式** (**differential forms**) 提供了一种统一的方法来定义在曲线、曲面、实体和高维流形 (manifolds) 之上的被积函数 (integrands)。微分形式的现代概念是由 Élie Cartan 开创的。它有许多应用，特别是在几何学、拓扑学和物理学中。

例如，表达式 $f(x)\,dx$ 是 1-形式的一个示例，并且可以在包含在 f 定义域中的区间 $[a,b]$ 之上进行积分：

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

类似地，表达式 $f(x,y,z)\,dx\wedge dy+g(x,y,z)\,dz\wedge dx+h(x,y,z)\,dy\wedge dz$ 是一个 **2-形式**，可在曲面 S 之上积分：

$$\int_S \left(f(x,y,z)\,dx\wedge dy+g(x,y,z)\,dz\wedge dx+h(x,y,z)\,dy\wedge dz\right)\,.$$

符号 $\wedge$ 标志两种微分形式的外积 (exterior product)，有时称为楔积 (wedge product)。同样，一个 **3-形式**的 $f(x,y,z)\,dx\wedge dy\wedge dz$ 表示一个体积元素 (volume element)，它可以在空间的一个区域之上积分。一般来说，一个 k-形式是一个可以在 k 维流形之上积分的对象，并且在坐标微分 $dx, dy, \ldots$ 中是 k 次齐次的。在一个 n 维流形上，顶维形式称为一个**体积形式** (*volume form*)。

微分形式构成一个交替代数。这意味着 $dy\wedge dx=-dx\wedge dy$ 和 $dx\wedge dx=0$。这种交替性质反映了积分域的方向。

外导数 (exterior derivative) 是微分形式上的一个运算，给定一个 k-形式 φ，它产生一个 $(k+1)$-形式的 $d\varphi$。该运算扩展了一个函数的微分 (一个函数可以看作是一个 0-形式，并且其微分为 $df(x)=f'(x)\,dx$) 这允许将微积分的基本定理、散度定理、格林定理和斯托克斯定理表述为一个一般结果—广义斯托克斯定理—的一个特例。

微分 1-形式与在一个可微流形 (differentiable manifold) 上的向量场是自然对偶的，并且通过内积 (interior product) 将向量场与 1-形式的配对推广到任意微分形式。微分形式代数以及在其上定义的外导数通过在两个流形之间的光滑函数之下的拉回 (pullback) 得到保持。该特性允许几何不变性的信息通过拉回从一个空间移动到另一个空间，前提是该信息根据微分形式表达。作为一个例子，变元积分公式变成一个简单的声明，即一个积分在拉回之下被保持。

1 历史

微分形式是微分几何领域的一部分，受线性代数的影响。尽管微分的概念非常古老，但最初尝试用代数组织微分形式通常要归功于 Élie Cartan 在 1899 年的论文。[1] 微分形式的外代数 (exterior algebra) 的某些方面出现在 Hermann Grassmann 于 1844 年的著作中，*Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (线性扩张理论，数学的一个新分支)。

2 概念

微分形式提供了一种独立于坐标的多元变量微积分 (multivariable calculus) 方法。

2.1 积分与方向

一个微分 k-形式可以在 k 维的方向流形之上积分。一个微分 1-形式可以看作是测量一个无穷小的方向长度或一维方向密度。一个微分 2-形式可以看作是测量一个无穷小的方向面积，或二维方向密度。如此等等。

微分形式的积分仅在有向流形上定义良好。一个例子是一维流形的一个区间 $[a, b]$，并且该区间可以被赋予一个方向：如果 $a < b$，则区间为正方向，否则区间为负方向。如果 $a < b$，则微分 1-形式 $f(x)\,dx$ 在区间 $[a, b]$ (其自然正方向) 之上的积分为

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

当具有相反方向时，它是在相同区间之上相同微分形式的积分的负值。即：

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

这为一维积分的约定提供了一个几何背景，即当区间的方向相反时符号会改变。单变量积分理论对此的一个标准解释是，当积分极限为相反顺序 ($b < a$) 时，增量 dx 在积分方向上为负。

更一般地是，一个 m-形式是一个方向密度，可以在 m 维方向流形之上积分。(例如，一个 1-形式可以在一条有向曲线之上积分，一个 2-形式可以在一个有向曲面之上积分，如此等等) 如果 M 是一个有向 m 维流形，而 M' 是具有相反方向的同一流形，并且 ω 是一个 m-形式，则有：

$$\int_M \omega = -\int_{M'} \omega\,.$$

这些约定对应于将一个被积函数解释为微分形式，在一个链之上积分。相比之下，在测度理论中，人们将被积函数解释为相对于一个测度 μ 的一个函数 f，并在一个子集 A 之上积分，而不考虑方向；我们写一个 $\int_A f\,d\mu = \int_{[a,b]} f\,d\mu$ 来表明在一个子集 A 之上的积分。这在一维中是一个很小的区别，但在高维流形上变得更微妙；详见下文。

为使一个方向密度的概念精确，从而使之成为一个微分形式，涉及到外代数 (exterior algebra)。一组坐标的微分，$dx^1, \ldots, dx^n$ 可用作所有 1-形式的基。其中每一个都表示在流形上的每一点处的一个余向量 (covector)，其可被视为测量在相应坐标方向上的一个小位移。一个一般的 1-形式是在流形上的每个点处的这些微分的线性组合：

$$f_1\,dx^1 + \cdots + f_n\,dx^n\,,$$

其中 $f_k = f_k\left(x^1, \ldots, x^n\right)$ 是所有坐标的函数。一个微分 1-形式沿着一个方向曲线的积分为一个线积分。

表达式 $dx^i \wedge dx^j$，其中 $i < j$，可用作所有 2-形式在流形上的每一点处的一个基。这可以被认为是平行于 $x^i - x^j$-平面的一个无穷小的有向正方形。一个一般的 2-形式是在流形上的每个点处的线性组合：$\sum_{1\leq i<j\leq n} f_{i,j}\,dx^i \wedge dx^j$，并且它的积分与曲面积分一样。

在微分形式上定义的一个基本运算是外积 (exterior product)，符号为楔形 $\wedge$ 。这类似于向量演算的叉积 (cross product)，因为它是一个交替积。例如，

$$dx^1 \wedge dx^2 = -dx^2 \wedge dx^1$$

因为第一条边为 dx^1，和第二条边为 dx^2 的正方形被视为与第一条边为 dx^2，和第二条边为 dx^1 的正方形具有相反的方向。这就是为什么我们只需要对表达式 $dx^i \wedge dx^j$ 求和，其中 $i < j$；例如：$a\,(dx^i \wedge dx^j) + b\,(dx^j \wedge dx^i) = (a-b)\,dx^i \wedge dx^j$。外积允许高次微分形式从低次微分形式中构造出来，这与在向量演算中的叉积允许从指向两边的向量计算平行四边形的面积向量的方式大致相同。交替也意味着 $dx^i \wedge dx^i = 0$，与平行向量的叉积为零相同，平行向量的幅值是这些向量所张成的平行四边形的面积。在高维中，$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx = 0$，如果在指标 $i_1, \ldots, i_m$ 中的任意两个是相等的，这与边向量线性相关的平行体所包围的“体积”为零相同。

2.2 多重指标符号

基本 k-形式的楔积的一个常用符号称为多重指标符号:在一个 n 维环境中,对于 $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$，我们定义 $dx^I := dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \bigwedge_{i \in I} dx^i$。[2] 另一个有用的符号是通过定义在维数为 n 的空间中长为度 k 的所有严格递增多重指标集合，标志为 $\mathcal{J}_{k,n} := \{I = (i_1, \ldots, i_k) : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$。则局部地 (坐标应用的地方)，$\left\{dx^I\right\}_{I \in \mathcal{J}_{k,n}}$ 在一个维数为 n 的流形 M 中张成微分 k-形式的空间，当视为在 M 上的光滑函数的环 $C^\infty(M)$ 之上的模时，通过组合演算 $\mathcal{J}_{k,n}$ 的大小，在一个 n 维流形上 k-形式的模，与一般情况下在一个 n 维向量空间上的 k-余向量空间，为 n 选择 k：$|\mathcal{J}_{k,n}| = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$。这也说明不存在大于基础流形维数的非零阶微分形式。

2.3 外导数

除外积外，还有外导数 (exterior derivative) 算子 d。一个微分形式的外导数是一个函数的微分的一个推广，即 $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ 正是 f 的微分。当推广到更高形式时，如果 $\omega = f\,dx^I$ 是一个简单的 k-形式，则其外导数 $d\omega$ 是 $(k+1)$-形式，通过取系数函数的微分来定义：

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\,dx^i \wedge dx^I\,.$$

通过线性推广到一般 k-形式：如果 $\tau = \sum_{I \in \mathcal{J}_{k,n}} a_I\,dx^I \in \Omega^k(M)$，则它的外积为

$$d\tau = \sum_{I \in \mathcal{J}_{k,n}} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_I}{\partial x^j}\,dx^j \right) \wedge dx^I \in \Omega^{k+1}(M)$$

在 $\mathbf{R}^3$ 中，对于 Hodge 星算子，外导数对应于梯度 (gradient)、旋度 (curl) 和散度 (divergence)，尽管这种对应关系与叉积一样，不能推广到更高的维数，并且应该谨慎对待。

外导数本身适用于任意有限维数，是一种灵活而有力的工具，在微分几何 (differential geometry)、微分拓扑学 (differential topology) 以及在物理学的许多领域中有着广泛的应用。值得注意的是，尽管上述外导数的定义是相对于局部坐标定义的，但它可以用完全无坐标的方式定义，作为在微分形式的外代数 (exterior algebra) 上的 1 阶反导数 (antiderivation)。这种更通用的方法的好处是，它允许一种自然的无坐标方法在流形上进行积分。它还允许微积分的基本定理的自然推广，称为 (广义) 斯托克斯定理，它是在流形上的积分理论的中心结果。

2.4 微分演算

设 U 是在 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集。一个微分 0-形式（“零-形式”）定义为在 U 上的一个光滑函数 f，其集合标志为 $C^\infty(U)$。如果 v 是在 $\mathbf{R}^n$ 中的任意向量，则 f 具有一个方向导数 (directional derivative) $\partial_{\mathbf{v}} f$，这是在 U 上的另一个函数，其在一个点 $p \in U$ 处的值是 f 在 $\mathbf{v}$ 方向上 (在 p 处) 的变化率：

$$(\partial_{\mathbf{v}} f)(p) = \left. \frac{d}{dt} f(p + t\mathbf{v}) \right|_{t=0} .$$

(在定义中，通过在 p 点处计算 $\mathbf{v}$，可以将这个概念逐点扩展到 $\mathbf{v}$ 是在 U 上的向量场的情况。)

特别地，如果 $\mathbf{v} = \mathbf{e}_j$ 是第 j 个坐标向量，则 $\partial_{\mathbf{v}} f$ 是 f 相对于第 j 个坐标向量的偏导数，即 $\partial f/\partial x^j$，其中 $x^1, x^2, \ldots, x^n$ 是在 U 中的坐标向量。根据其定义，偏导数取决于坐标的选择：如果引入新坐标 $y^1, y^2, \ldots, y^n$，则

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial y^i} .$$

导致微分形式的第一个想法是观察到 $\partial_{\mathbf{v}} f(p)$ 是 $\mathbf{v}$ 的一个线性函数：

$$(\partial_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} f)(p) = (\partial_{\mathbf{v}} f)(p) + (\partial_{\mathbf{w}} f)(p)$$
$$(\partial_{c\mathbf{v}} f)(p) = c\,(\partial_{\mathbf{v}} f)(p)$$

对于任意向量 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 和任意实数 c 成立。在每个点 p 处，从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}$ 的线性映射标志为 df_p，并称为 f 在 p 处的导数 (derivative) 或微分 (differential)。因此 $df_p(\mathbf{v}) = \partial_{\mathbf{v}} f(p)$。扩展到整个集合之上，对象 df 可被视为一个函数，它取在 U 上的一个向量场，并返回一个实值函数，其在每个点处的值是沿着函数 f 的向量场的导数。注意，在每个 p 处，微分 df_p 不是一个实数，而是在切向量上的一个线性泛函，并且是一个微分 1-形式的一个原型示例。

由于任意向量 $\mathbf{v}$ 都是其分量的一个线性组合 $\Sigma v^j \mathbf{e}_j$，对于每一个 j 和每一个 $p \in U$，它只是 f 在 U 上的偏导数，则 df 由 $df_p(\mathbf{e}_j)$ 唯一地确定。因此 df 提供了一种编码 f 的偏导数的方法。通过注意坐标 $x^1, x^2, \ldots, x^n$ 本身是在 U 上的函数，可以对其解码，并因此定义了微分 1-形式 dx^1, $dx^2, \ldots, dx^n$。设 $f = x^i$。由于 $\partial x^i/\partial x^j = \delta_{ij}$，即 Kronecker δ 函数，它遵循

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i . \qquad (*)$$

该表达式的含义由在任意点 p 处计算两侧来给出：在右侧，总和定义为“逐点加和”，因此

$$df_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \left(dx^i\right)_p .$$

将两边的结果应用于 e_j，每一边的结果是 f 在 p 处的第 j 次偏导数。由于 p 和 j 是任意的，这就证明了公式 (*)。

更一般地，对于在 U 上的任意光滑函数 g_i 和 h_i，我们定义微分 1-形式 $\alpha = \Sigma_i\, g_i\, dh_i$ 的逐点加和

$$\alpha_p = \sum_i g_i(p)\, (dh_i)_p$$

对于每一个 $p \in U$。任意微分 1-形式都是这样产生的，通过使用公式 (*)，可以得出在 U 上的任意微分 1-形式 α 都可以在坐标中表达为

$$\alpha = \sum_{i=1}^n f_i\, dx^i$$

它对于在 U 上的某些光滑函数 f_i 成立。

导致微分形式的第二个想法来自以下问题：给定在 U 上的一个微分 1-形式 α，何时在 U 上存在一个函数 f 使得 $\alpha = df$ ？上述展开式将此问题归结为寻找一个函数 f，其偏导数 $\partial f/\partial x^i$ 等价于 n 个给定函数 f_i。对于 $n > 1$，这样的一个函数并不总是存在：任意光滑函数 f 都满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\, \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j\, \partial x^i}\,,$$

所以不可能找到这样的一个函数 f，除非

$$\frac{\partial f_j}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^j} = 0$$

对于所有的 i 和 j 都成立。

在 i 和 j 中，左手边的斜对称性 (skew-symmetry) 建议在微分 1-形式上引入一个反对称积 $\wedge$，即外积 (exterior product)，所以这些方程就可以组合成一个单一条件

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^j = 0\,,$$

其中 $\wedge$ 的定义为：

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i\,.$$

这是一个微分 2-形式的示例。该 2-形式称为 $\alpha = \Sigma_{j=1}^{n} f_j\, dx^j$ 的外导数 (exterior derivative) $d\alpha$。它给出为

$$d\alpha = \sum_{j=1}^{n} df_j \wedge dx^j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^j\,.$$

总结：$d\alpha = 0$ 是具有 $\alpha = df$ 的一个函数 f 存在的一个必要条件。

微分 0-形式、1-形式和 2-形式是微分形式的特例。对于每一个 k，都有一个微分 k-形式的空间，其可以根据坐标表达为

$$\sum_{i_1, i_2 \ldots i_k = 1}^{n} f_{i_1 i_2 \ldots i_k}\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

其对于函数集合 $f_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ 成立。反对称性，其对于 2-形式已经存在，使得有可能限制总和为这些指标 $i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1} < i_k$ 的集合。

微分形式可以使用外积相乘，并且对于任意微分 k-形式 α，都有一个微分 $(k+1)$-形式 $d\alpha$，称为 α 的外导数。

微分形式、外积和外导数与坐标的选择无关。因此，它们可以定义在任意光滑流形 M 上。一种方法是用坐标图表 (coordinate charts) 覆盖 M，并将在 M 上的一个微分 k-形式定义为在每个图表上的一个微分 k-形式族，这些图表在重叠区域上是一致的。然而，还有更加内在的定义使得坐标的独立性得以体现。

3 内在定义

设 M 是一个光滑流形 (smooth manifold)。一个 k 次光滑微分形式是 M 的余切丛 (cotangent bundle) 的第 k 次外幂 (exterior power) 的光滑截面 (smooth section)。在一个流形 M 上的所有微分 k-形式的集合是一个向量空间 (vector space)，通常标志为 $\Omega^k(M)$。

微分形式的定义可重述如下。在任意点 $p \in M$ 处，一个 k-形式 β 定义一个元素

$$\beta_p \in \bigwedge^k T_p^* M\,,$$

其中 T_pM 是 M 在 p 处的切空间 (tangent space)，而 $T_p{}^*M$ 是它的对偶空间 (dual space)。这个空间对于 M 的切丛 (tangent bundle) 的第 k 次外幂的对偶丛在 p 处的纤维是自然同构的 (naturally isomorphic) [3]，就是 β 也是一个线性泛函 $\beta_p : \bigwedge^k T_pM \to \mathbf{R}$，即第 k 次外幂的对偶同构于对偶的第 k 次外幂：

$$\bigwedge^k T_p^* M \cong \left(\bigwedge^k T_pM\right)^*$$

根据外幂的普适性，这等价于一个交替多线性映射：

$$\beta_p : \bigoplus_{n=1}^{k} T_pM \to \mathbf{R}\,.$$

因此，可以针对 M 的相同点 p 的切向量的任意 k 元组来计算一个微分 k-形式。例如，一个微分 1-形式 α 给每一个点 $p \in M$ 分配在 T_pM 上的一个线性泛函 (linear functional) α_p。当在 (由在 M 上的黎曼度量导出的) T_pM 上存在内积 (inner product) 时，α_p 可以表示为具有一个切向量 (tangent vector) X_p 的内积。微分 1-形式有时被称为协变向量场 (covariant vector fields)、余向量场或“对偶向量场”，特别是在物理学中。

外代数可以通过交替映射嵌入到张量代数中。交替映射定义为一个映射

$$\mathrm{Alt} : \bigotimes^k T^*M \to \bigotimes^k T^*M\,.$$

对于在一个点 p 处的一个张量 τ，

$$\mathrm{Alt}\left(\tau_p\right)\left(x_1, \ldots, x_k\right) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \tau_p \left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}\right),$$

其中 S_k 是在 k 元素上的对称群 (symmetric group)。在由对称 2-形式生成的张量代数中，交替映射在理想陪集上是常数，并因此下降到一个嵌入

$$\mathrm{Alt} : \bigwedge^k T^*M \to \bigotimes^k T^*M\,.$$

该映射将 β 展示为秩 k 的一个完全反对称协变张量场，在 M 上的微分形式与该张量场一一对应。

4 运算

除了由向量空间结构产生的标量运算的加法和乘法之外，还有其他几种定义在微分形式上的标准运算。最重要的运算是：两个微分形式的外积 (exterior product)，单个微分形式的外导数 (exterior derivative)，一个微分形式与一个向量场的内积 (interior product)，一个微分形式相对于一个向量场的李导数 (Lie derivative)，一个微分形式相对于在具有一个定义连通的一个流形上的一个向量场的协变导数 (covariant derivative)。

4.1 外积

一个 k-形式 α 与一个 ℓ-形式 β 的外积，标志为 $\alpha \wedge \beta$，是一个 $(k+\ell)$-形式。在流形 M 的每个点 p 处，形式 α 和 β 是在 p 处余切空间的一个外幂的元素。当将外代数视为张量代数的商时，外积对应于张量积 (模定义外代数的等价关系)。

在外代数中固有的反对称性意味着当 $\alpha \wedge \beta$ 被看作一个多线性泛函时，它是交替的。然而，当外代数通过交替映射嵌入为张量代数的子空间时，张量积 $\alpha \otimes \beta$ 不是交替的。在这种情况下，有一个描述外积的显式公式。外积为

$$\alpha \wedge \beta = \operatorname{Alt}(\alpha \otimes \beta).$$

如果通过用映射 $n!\operatorname{Alt}$ 替代 Alt 来将 $\bigwedge^n T^*M$ 嵌入 $\bigotimes^n T^*M$，外积为

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} \operatorname{Alt}(\alpha \otimes \beta).$$

这个描述对于显式计算非常有用。例如，如果 $k = \ell = 1$，则 $\alpha \wedge \beta$ 是 2-形式，其在点 p 处的值是交替双线性形式，定义为

$$(\alpha \wedge \beta)_p (v, w) = \alpha_p(v)\beta_p(w) - \alpha_p(w)\beta_p(v)$$

对于 $v, w \in \mathrm{T}_p M$ 成立。

外积是双线性的：如果 α, β 和 γ 是任意微分形式，并且如果 f 是任意光滑函数，则

$$\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma,$$
$$\alpha \wedge (f \cdot \beta) = f \cdot (\alpha \wedge \beta).$$

它是**斜可交换的** (*skew commutative*)，也称为**分次可交换的** (*graded commutative*)，这意味着它满足一个反共变的变量，它取决于形式的阶数：如果 α 是一个 k-形式，并且 β 是一个 ℓ-形式，则

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha.$$

还有一个是分级莱布尼兹规则：

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$

4.2 黎曼流形

在一个黎曼流形或更一般的一个伪黎曼流形上，度量定义正切丛和余切丛的一个纤维同构。这样就可以将向量场转换为余向量场，反之亦然。它还支持定义附加的运算，如 Hodge 星算子 $\star : \Omega^k(M) \xrightarrow{\sim} \Omega^{n-k}(M)$ 和共微分 $\delta : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ ，其阶数为 -1 且为至外微分 d 的伴随。

4.2.1 向量场结构

在一个伪黎曼流形上，可以用向量场识别 1-形式；向量场具有其他不同的代数结构，这里列出这些结构是为了上下文并避免混淆。

首先，每个 (余) 切空间生成一个 Clifford 代数，其中一个 (余) 向量与其自身的乘积通过一个二次型的值给出—在这种情况下，是由度量诱导的自然值。该代数**不同于**微分形式的外代数，后者可以看作是二次型消失 (为零) 的 Clifford 代数 (因为任意向量与其自身的外积为零)。Clifford 代数是外代数的非反交换（“量子”）变形。它们是在几何代数中研究的。

另一种选择是将向量场视为导子。它们生成的微分算子的 (非交换) 代数是 Weyl 代数，并且是在向量场中的对称代数的非交换（“量子”）变形。

4.3 外微分复形

外导数的一个重要性质是 $d^2 = 0$。这意味着外导数定义了上链复形：

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \Omega^3(M) \to \cdots \to \Omega^n(M) \to 0\,.$$

这个复形称为 de Rham 复形，并且它的上同调定义为 M 的 de Rham 上同调。根据 Poincaré 引理，de Rham 复形都是局部精确的，除了在 $\Omega^0(M)$ 处。内核在 $\Omega^0(M)$ 处是在 M 上的局部常数函数的空间。因此，复形是常数层 $\underline{\mathbf{R}}$ 的一种解析，这反过来又意味着 de Rham 定理的一种形式：de Rham 上同调计算 $\underline{\mathbf{R}}$ 的层上同调。

5 拉回

假设 $f : M \to N$ 是光滑的。f 的微分是在 M 和 N 的切丛之间一个光滑映射 $df : TM \to TN$。该映射也被标志为 f_*，并称为**推前** (**pushforward**)。对于任意点 $p \in M$ 和任意切向量 $v \in T_pM$，在 $T_{f(p)}N$ 中存在一个定义良好的推前向量 $f_*(v)$。然而，对于一个向量场并非如此。如果 f 不是内射的，比如说因为 $q \in N$ 有两个或多个原象，则向量场可以确定在 T_qN 中的两个或多个不同的向量。如果 f 不是满射的，则存在一个点 $q \in N$，在该点处 f_* 根本不确定任何切向量。由于在 N 上的一个向量场根据定义在 N 的每一点处确定唯一的切向量，因此一个向量场的推前并不总是存在。

相反，拉回一个微分形式总是可能的，在 N 上的一个微分形式可以看作是在每个切空间上的一个线性泛函。将该泛函与微分 $df : TM \to TN$ 预组合在 M 的每个切空间上定义了一个线性泛函，并因此是在 M 上的一个微分形式。拉回的存在性是微分形式理论的一个重要特征。它导致了拉回映射在其他情况下的存在，如在 de Rham 上同调中的拉回同态。

形式上，设 $f : M \to N$ 是光滑的，并设 ω 是在 N 上的一个光滑 k-形式。则在 M 上有一个微分形式 $f^*\omega$，称为 ω 的**拉回** (**pullback**)，它捕捉 ω 相对于 f 的行为。要定义拉回，固定 M 的一个点 p，并且切向量 $v_1, \ldots, v_k$ 固定在 M 的 p 处。ω 的拉回由公式定义为

$$(f^*\omega)_p\,(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{f(p)}\,(f_*v_1, \ldots, f_*v_k)\,.$$

这里有几种更抽象的方法可以查看此定义。如果 ω 是在 N 上的 1-形式，则它可以看作 N 的余切丛 T^*N 的截面。使用 * 标志一个对偶映射，对偶于 f 的微分是 $(df)^* : T^*N \to T^*M$。ω 的拉回可以定义为复合的

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\omega} T^*N \xrightarrow{(df)^*} T^*M\,.$$

这是 M 的余切丛的一个截面，并因此是在 M 上的微分 1-形式。在一般情况下，设 $\bigwedge^k (df)^*$ 标志对偶映射到微分的第 k 次外幂。则一个 k-形式 ω 的拉回就是复合

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\omega} \bigwedge^k T^*N \xrightarrow{\bigwedge^k (df)^*} \bigwedge^k T^*M\,.$$

另一种抽象的方法是将一个 k-形式 ω 看作在切空间上的一个线性泛函。从这个角度看，ω 是向量丛 (vector bundles) 的一个态射

$$\bigwedge^k TN \xrightarrow{\omega} N \times \mathbf{R}\,,$$

其中 $N \times \mathbf{R}$ 是在 N 上的平凡秩 1 丛。复合映射

$$\bigwedge^k TM \xrightarrow{\bigwedge^k df} \bigwedge^k TN \xrightarrow{\omega} N \times \mathbf{R}$$

定义在 M 的每个切空间上的一个线性泛函，并因此它通过平凡丛 $M\times\mathbf{R}$ 进行因子分解。向量丛态射 $\bigwedge^k TM\to M\times\mathbf{R}$ 用这种方法定义为 $f^*\omega$。

拉回尊重在形式上的所有基本运算。如果 ω 和 η 是形式，并且 c 是一个实数，则

$$\begin{aligned}
f^*(c\omega) &= c\,(f^*\omega)\,,\\
f^*(\omega+\eta) &= f^*\omega+f^*\eta\,,\\
f^*(\omega\wedge\eta) &= f^*\omega\wedge f^*\eta\,,\\
f^*(d\omega) &= d\,(f^*\omega)\,.
\end{aligned}$$

一个形式的拉回也可以在坐标中写出。假设 $x^1,\ldots,x^m$ 是在 M 上的坐标，即 $y^1,\ldots,y^n$ 是在 N 上的一个坐标，并且对于所有的 i，这些坐标系统由公式 $y^i=f_i\left(x^1,\ldots,x^m\right)$ 制定。在 N 上的局部，ω 可以写为

$$\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\omega_{i_1\cdots i_k}\,dy^{i_1}\wedge\cdots\wedge dy^{i_k}\,,$$

其中，对于 $i_1,\ldots,i_k$ 的每一个选择，$\omega_{i_1}\cdots i_k$ 是 $y^1,\ldots,y^n$ 的一个实值函数。使用线性拉回及其与外积的相容性，ω 的拉回公式为

$$f^*\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\left(\omega_{i_1\cdots i_k}\circ f\right)\,df_{i_1}\wedge\cdots\wedge df_{i_k}\,.$$

每一个外导数 df_i 可以根据 $dx^1,\ldots,dx^m$ 展开。可以使用雅可比矩阵编写生成的 k-形式：

$$f^*\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\sum_{j_1<\cdots<j_k}\left(\omega_{i_1\cdots i_k}\circ f\right)\frac{\partial\left(f_{i_1},\ldots,f_{i_k}\right)}{\partial\left(x^{j_1},\ldots,x^{j_k}\right)}\,dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}\,.$$

这里，$\frac{\partial\left(f_{i_1},\ldots,f_{i_k}\right)}{\partial\left(x^{j_1},\ldots,x^{j_k}\right)}$ 标志矩阵的行列式，其条目为 $\frac{\partial f_{i_m}}{\partial x^{j_n}},1\le m,n\le k$。

6 积分

一个微分 k-形式可以在一个有向 k 维流形之上积分。当 k-形式定义在一个 n 维流形上时，其中 $n>k$，则 k-形式可以在有向 k-维子流形之上积分。如果 $k=0$，则在有向 0 维子流形之上的积分就是在各点处根据这些点的方向计算被积函数的总和。$k=1,2,3,\ldots$ 的其他值，对应于线积分、曲面积分、体积积分，如此等等。形式化定义一个微分形式积分有几种等价的方法，它们都依赖于约化到欧几里得空间的情形。

6.1 欧几里得空间上的积分

设 U 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集。给出 $\mathbf{R}^n$ 的标准方向和 U 在该方向的限制。在 U 上的每一个光滑 n-形式 ω 具有形式

$$\omega=f(x)\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

对于某些光滑函数 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 成立。这样一个函数具有通常黎曼或勒贝格意义下的积分。这允许我们将 ω 的积分定义为 f 的积分：

$$\int_U\omega\ \stackrel{\text{def}}{=}\ \int_U f(x)\,dx^1\cdots dx^n\,.$$

为使其定义良好，固定一个方向是必要的。微分形式的斜对称性意味着 $dx^1 \wedge dx^2$ 的积分必须是 $dx^2 \wedge dx^1$ 的积分的负值。黎曼积分和勒贝格积分看不到这种对坐标排序的依赖性，因此它们无法确定积分的符号。方向解决了这种歧义。

6.2 链上积分

设 M 是一个 n-流形，并且 ω 是在 M 上的一个 n-形式。首先，假设 M 的一个参数化由欧几里得空间的一个开子集完成。也就是，假设存在一个微分同胚

$$\varphi : D \to M$$

其中 $D \subseteq \mathbf{R}^n$。给出 M 的由 φ 诱导的方向。则 (Rudin 1976) 将 ω 在 M 之上的积分定义为 $\varphi^*\omega$ 在 D 之上的积分。在坐标中，这有以下表达式。用坐标 $x^1, \ldots, x^I$，固定 M 在 $\mathbf{R}^I$ 中的一个嵌入。则

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_n} a_{i_1,\ldots,i_n}(\mathbf{x})\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n}\,.$$

假设 φ 定义为

$$\varphi(\mathbf{u}) = \left(x^1(\mathbf{u}), \ldots, x^I(\mathbf{u})\right).$$

则积分在坐标中可以写为

$$\int_M \omega = \int_D \sum_{i_1 < \cdots < i_n} a_{i_1,\ldots,i_n}\left(\varphi(\mathbf{u})\right) \frac{\partial\left(x^{i_1}, \ldots, x^{i_n}\right)}{\partial\left(u^1, \ldots, u^n\right)}\, du^1 \cdots du^n\,,$$

其中

$$\frac{\partial\left(x^{i_1}, \ldots, x^{i_n}\right)}{\partial\left(u^1, \ldots, u^n\right)}$$

是雅可比矩阵 (Jacobian matrix) 的行列式。雅可比矩阵存在，是因为 φ 是可微的。

一般来说，一个 n-流形不能由 $\mathbf{R}^n$ 的开子集参数化。但是这种参数化在局部总是可能的，因此定义在任意流形之上的积分是可能的，通过将积分定义为在局部参数化集合之上的积分总和来完成。此外，对于 $k < n$，还可以定义 k 维子集的参数化，并且这使得定义 k-形式积分成为可能。为使其精确，可以方便地在 $\mathbf{R}^k$ 中固定一个标准域 D，通常是一个立方体或一个单纯形。一个 k-链是光滑嵌入 $D \to M$ 的一个形式总和。也就是，它是一个光滑嵌入的集合，每个嵌入都被赋予一个整数重数。每个光滑嵌入确定一个 M 的 k 维子流形。如果链为

$$c = \sum_{i=1}^{r} m_i \varphi_i\,,$$

则定义一个 k-形式 ω 在 c 之上的积分为在 c 的各项之上的积分总和：

$$\int_c \omega = \sum_{i=1}^{r} m_i \int_D \varphi_i^* \omega\,.$$

这种定义积分的方法并没有给在整个流形 M 之上的积分赋予一个直接意义。但是，仍然可以间接赋予这种意义，因为每个光滑流形都可以以本质上唯一的方式进行光滑三角剖分，并且在 M 之上的积分可以定义为由三角剖分确定的在链之上的积分。

6.3 使用单位分解进行积分

在 (Dieudonné 1972) 中阐述了另一种方法，它确实直接赋予在 M 之上积分的意义，但这种方法需要固定 M 的一个方向。在一个 n 维流形上的一个 n-形式 ω 的积分通过图表来定义。首先假设 ω 在一个正方向图表上得到支撑。在这个图表上，它可以被拉回到在 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集上的一个 n-形式。在这里，如之前那样，形式有一个定义良好的黎曼或勒贝格积分。变量的变化公式与图表是正方向的假设，共同确保 ω 的积分与所选图表无关。在一般情况下，使用一个单位分解将 ω 写为 n-形式的一个总和，每个形式在一个正方向图表中得到支撑，并将 ω 的积分定义为在单位分解中每个项的积分之和。

使用这种更内在的方法，在有向 k 维子流形上积分 k-形式也是可能的。该形式被拉回到子流形，在那里积分像以前一样使用图表定义。例如，给定一个路径 $\gamma(t):[0,1]\to\mathbf{R}^2$，在路径上的一个 1-形式积分就是简单地将形式拉回到在 $[0,1]$ 上的一个形式 $f(t)\,dt$，并且这个积分就是在区间上的函数 $f(t)$ 的积分。

6.4 沿着纤维积分

Fubini 定理指出，在一个乘积集合之上的积分可以作为在乘积中的两个因子的迭代积分来计算。这表明在一个乘积之上的微分形式的积分也应该作为迭代积分来计算。微分形式的几何灵活性确保了这不仅适用于乘积，也适用于更一般的情况。在某些假设下，沿着光滑映射的纤维积分是可能的，类似于 Fubini 定理的情况是，这个映射是从一个乘积到它的一个因子的投影。

由于在一个子流形之上积分一个微分形式需要固定一个方向，所以沿着纤维积分的先决条件是在这些纤维上存在一个定义良好的方向。设 M 和 N 分别是纯维 m 和 n 的两个有向流形。假设 $f:M\to N$ 是一个满射浸没。这意味着每个纤维 $f^{-1}(y)$ 是 $(m-n)$ 维的，并且在 M 的每个点周围有一个图表，在其上 f 看起来像是从一个乘积到其因子之一的投影。固定 $x\in M$ 并设置 $y=f(x)$。假设

$$\omega_x \in \bigwedge\nolimits^m T_x^* M$$

$$\eta_y \in \bigwedge\nolimits^n T_y^* N$$

并且 η_y 不会消失 (为零)。根据 (Dieudonné 1972)，有一个唯一的

$$\sigma_x \in \bigwedge\nolimits^{m-n} T_x^* \left(f^{-1}(y)\right)$$

可以被认为是 ω_x 相对于 η_y 的原纤部分。更准确地说，定义 $j:f^{-1}(y)\to M$ 作为包含项。则 σ_x 由以下性质定义：

$$\omega_x = (f^*\eta_y)_x \wedge \sigma'_x \in \bigwedge\nolimits^m T_x^* M\,,$$

其中

$$\sigma'_x \in \bigwedge\nolimits^{m-n} T_x^* M$$

对于下式是任意 $(m-n)$-余向量

$$\sigma_x = j^*\sigma'_x\,.$$

形式 σ_x 也可用 ω_x/η_y 标志。

此外，对于固定的 y，σ_X 相对于 x 光滑变化。也就是，假设

$$\omega : f^{-1}(y) \to T^* M$$

是投影映射的一个光滑截面；我们说 ω 是在 M 上沿着 $f^{-1}(y)$ 的一个光滑微分 m-形式。则在 $f^{-1}(y)$ 上存在一个光滑微分 $(m-n)$ 形式 σ，使得在每个 $x \in f^{-1}(y)$ 处，

$$\sigma_x = \omega_x / \eta_y \,.$$

这种形式标志为 ω/η_y。如果 ω 是在一个纤维的邻域中的一个 m-形式，则使用相同的构造，并且使用相同的符号。结果是每个纤维 $f^{-1}(y)$ 都是有向的。特别地，在 M 和 N 上方向形式的一个选择定义 f 的每个纤维的一个方向。

Fubini 定理的类比如下。如前所述，M 和 N 是纯维 m 和 n 的两个有向流形，并且 $f : M \to N$ 是一个满射浸没。固定 M 和 N 的方向，并给 f 的每个纤维诱导方向。设 ω 是在 M 上的一个 m-形式，并且设 η 是在 N 上的一个 n-形式，它相对于 n 的方向几乎处处为正。那么，对于几乎每一个 $y \in N$，形式 ω/η_y 在 $f^{-1}(y)$ 上是定义良好的可积 $(m-n)$-形式。此外，在 N 上有一个可积的 n-形式，定义为

$$y \mapsto \left(\int_{f^{-1}(y)} \omega/\eta_y\right) \eta_y \,.$$

这种形式标志为

$$\left(\int_{f^{-1}(y)} \omega/\eta\right) \eta \,.$$

然后 (Dieudonné 1972) 证明了广义 Fubini 公式

$$\int_M \omega = \int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} \omega/\eta\right) \eta \,.$$

这也可以沿着一个浸没的纤维积分其他级数的形式。假设与之前相同的假设，并设 α 是在 M 上的一个紧支撑 ($m-n+k$)-形式。则在 N 上有一个 k-形式 γ ，它是沿着 f 的纤维积分 α 的结果。形式 α 通过在每一个 $y \in N$ 处指定 γ 如何与在 y 处的每一个 k-向量 $\mathbf{v}$ 配对来定义，并且该配对的值是在 $f^{-1}(y)$ 之上的一个积分，它仅取决于 $\alpha, \mathbf{v}$，以及 M 和 N 的方向。更精确地说，在每一个 $y \in N$ 上，这都有一个同构

$$\bigwedge^k T_y N \to \bigwedge^{n-k} T_y^* N$$

其由以下内积定义

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \lrcorner \zeta_y \,,$$

它对于在 N 的方向上的体积形式 ζ 的任意选择都成立。如果 $x \in f^{-1}(y)$，则在 y 处的一个 k-向量 $\mathbf{v}$ 通过拉回来确定在 x 处的一个 $(n-k)$-余向量：

$$f^*\left(\mathbf{v} \lrcorner \zeta_y\right) \in \bigwedge^{n-k} T_x^* M \,.$$

这些余向量的每一个都有一个相对于 α 的外积，因此沿着 $f^{-1}(y)$ 在 M 上有一个 $(m-n)$-形式 $\beta_{\mathbf{v}}$，定义为

$$\left(\beta_{\mathbf{v}}\right)_x = \left(\alpha_x \wedge f^*\left(\mathbf{v} \lrcorner \zeta_y\right)\right) / \zeta_y \in \bigwedge^{m-n} T_x^* M \,.$$

这种形式取决于 N 的方向，而取决于 ζ 的选择。则 k-形式 γ 是由该性质唯一定义的

$$\langle \gamma_y, \mathbf{v} \rangle = \int_{f^{-1}(y)} \beta_{\mathbf{v}} \,,$$

并且 γ 是光滑的 (Dieudonné 1972)。这种形式也标志为 $\alpha^\flat$，并称为 α **沿着 f 的纤维的积分**。在 de Rham 上同调中，沿着纤维的积分对于的 Gysin 映射的构造是非常重要的。

沿着纤维的积分满足投影公式 (Dieudonné 1972)。如果 λ 为在 N 上的任意 ℓ-形式，则

$$\alpha^\flat \wedge \lambda = \left(\alpha \wedge f^* \lambda\right)^\flat \,.$$

6.5 斯托克斯定理

由斯托克斯定理给出外导数与积分之间的基本关系：如果 ω 是一个 $(n-1)$-形式，具有在 M 上的紧支撑，并且 ∂M 标志 M 的边界及其诱导方向，则

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega\,.$$

这样做的一个关键结果是“在同调链之上的一个形式的积分等价”：如果 ω 是一个 k-形式，并且 M 和 N 是同调的 k-链 (使得 $M-N$ 是一个 $(k+1)$-链 W 的边界)，则 $\int_M \omega = \int_N \omega$，因为差值是积分 $\int_W d\omega = \int_W 0 = 0$ 。

例如，如果 $\omega = df$ 是在平面或 $\mathbf{R}^n$ 上的一个势函数的导数，则 ω 在从 a 到 b 的一个路径上的积分不取决于路径的选择 (该积分为 $f(b)-f(a)$)，因为具有给定端点的不同路径是同伦的，因此它是同伦的 (一个弱条件)。这种情况称为梯度定理，并且是微积分基本定理的推广。这种路径无关性在等高线积分中非常有用。

这个定理也构成了 de Rham 上同调与链的同调之间的对偶性的基础。

6.6 与度量的关系

在一个**一般**可微流形 (无附加结构) 上，微分形式**不能**在流形子集之上积分；这种区别是区分微分形式 (在链或有向子流形之上积分) 与度量 (在子集之上积分) 的关键。最简单的例子是尝试在区间 $[0,1]$ 之上积分 1-形式 dx。假设在实数线上的通常距离 (并因此度量)，该积分为 1 或 -1，取决于方向：$\int_0^1 dx = 1$，而 $\int_1^0 dx = -\int_0^1 dx = -1$。相比之下，在区间上的度量 $|dx|$ 的积分是明确的 1 (即常数函数 1 相对于该测度的积分是 1)。类似地，在坐标的一个变化之下，一个微分 n-形式由雅可比行列式 J 改变，而一个度量由雅可比行列式的绝对值 $|J|$ 改变，这进一步反映了方向问题。例如，在线上在映射 $x \mapsto -x$ 之下，微分形式 dx 拉回到 $-dx$；方向已反转；而勒贝格测度，这里我们标志为 $|dx|$，拉回 $|dx|$；它不会改变。

在存在一个方向的附加数据的情况下，可以在整个流形或紧致子集之上积分 n-形式 (顶维形式)；在整个流形之上的积分对应于在流形基本类 $[M]$ 上的积分形式。形式上，在存在一个方向的情况下，可以识别在一个流形上具有密度的 n-形式；密度反过来定义一个测度，并因此可以进行积分 (Folland 1999，第 11.4 节，第 361-362 页)。

在可定向但非有向流形上，有两种方向选择；任何一种选择都允许在紧致子集之上积分 n-形式，两种选择因符号不同而不同。在不可定向流形之上，n-形式和密度是不可识别的—特别是，任意顶维形式必须在某个地方消失 (为零) (在不可定向流形上不存在体积形式)，但是没有消失 (为零) 的密度—因此，虽然可以在紧致子集之上积分密度，但不能积分 n-形式。我们可以用顶维伪形式来识别密度。

即使在存在一个方向的情况下，对于 $k < n$，通常也没有有意义的方法在 k 维子集之上积分 k-形式，因为没有一致的方法使用环境方向来确定 k 维子集的方向。在几何上，一个 k 维子集可以在适当的位置旋转，产生具有相反方向的相同子集；例如，在一个平面中的水平轴可以旋转 180 度。比较在一个 n 维空间中的一个 k 维向量集合的 Gram 行列式，它与 n 维向量的行列式不同，总是正的，对应于一个平方数。因此，一个 k-子流形的方向是不能从环境流形推导出来的额外数据。

在黎曼流形上，对于任意 k (整数或实数)，可以定义 k 维 Hausdorff 测度，该测度可以在该流形的 k 维子集之上积分。一个函数乘以这个 Hausdorff 测度就可以在 k 维子集之上积分，这提供了一个与 k-形式积分类似的测度理论。n 维 Hausdorff 测度产生一个密度，如上所述。

6.7 电流

分布或广义函数的微分形式类似物称为**电流** (**current**)。在 M 上的 k-电流空间是到微分 k-形式的一个适当空间的对偶空间。电流扮演着广义积分域的角色，类似于链，但比链更灵活。

7 物理应用

微分形式出现在一些重要的物理环境中。例如，在麦克斯韦的电磁学理论中，**法拉第 2-形式**，或电磁场强度，为

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} f_{ab}\, dx^a \wedge dx^b \,,$$

其中 f_{ab} 由电磁场 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 形成；即 $f_{12} = E_z/c, f_{23} = -B_z$ 或等效定义。

这种形式是在 U(1) 主丛上曲率形式的特例，在 U(1) 主丛上可以描述电磁学和一般规范理论。当用某种规范表示时，主丛的连通形式是向量势，通常用 **A** 标志。然后我们有

$$\mathbf{F} = d\mathbf{A}\,.$$

电流 3-形式为

$$\mathbf{J} = \frac{1}{6} j^a \varepsilon_{abcd}\, dx^b \wedge dx^c \wedge dx^d \,,$$

式中，j^a 是电流密度的四个分量。(这里用 F_{ab} 代替 f_{ab} 是惯例，即使用大写字母，用 J^a 代替 j^a。然而，向量相对于张量分量和上述形式具有不同的物理维度。此外，根据国际纯物理和应用物理联合会的一个国际委员会的决定，几十年来，磁极化矢量被称为 $\vec{J}$，而一些出版商称为 **J**；即同一名称用于不同的物理量。)

使用上述定义，麦克斯韦方程组可以非常紧凑地用几何化单位写为

$$d\mathbf{F} = \mathbf{0}$$
$$d \star \mathbf{F} = \mathbf{J}\,,$$

其中 $\star$ 标志 Hodge 星算子。类似的考虑一般描述规范理论的几何结构。

该 2-形式 $\star\mathbf{F}$ 对偶于法拉第形式，也称为**麦克斯韦 2-形式**。

电磁学是一个 U(1) 规范理论的一个例子。这里的李群是 U(1)，一维酉群，特别是交换群。有一些规范理论，如 Yang-Mills 理论，其中李群不是交换群。在这种情况下，我们得到的关系与这里描述的类似。在这种理论中，场 **F** 的类似形式是连接的曲率形式，它在规范中用一个李代数-值的 1-形式 **A** 表示。则 Yang-Mills 场 **F** 定义为

$$\mathbf{F} = d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}\,.$$

在交换群的情况下，如电磁学，$\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} = 0$，但这并不适用于一般情况。同样地，由于规范群的结构方程，场方程也由涉及 **A** 和 **F** 的外积的附加项的修正。

8 几何测度理论的应用

许多复解析流形的极小值结果都是基于 2-形式的 Wirtinger 不等式。赫伯特-费德勒的经典著作几何测度理论 (*Geometric Measure Theory*) 提供了一个简洁的证明。Wirtinger 不等式也是在收缩几何中复射影空间的 Gromov 不等式的重要组成部分。

See also

- Closed and exact differential forms
- Complex differential form
- Vector-valued differential form
- Equivariant differential form
- *Calculus on Manifolds*
- Multilinear form
- Polynomial differential form

Notes

1. Cartan, Élie (1899), "Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff" (http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1899_3_16_239_0), Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 16: 239-332, doi:10.24033/asens. 467 (https://doi.org/10.24033%2Fasens.467)
2. Tu, Loring W. (2011). An introduction to manifolds (2nd ed.). New York: Springer. ISBN 9781441974006. OCLC 682907530 (https://www.worldcat.org/oclc/682907530).
3. "Linear algebra - "Natural" pairings between exterior powers of a vector space and its dual" (https://mathoverflow.net/q/68033).

References

- Bachman, David (2006), A Geometric Approach to Differential Forms, Birkhäuser, ISBN 978-0-8176-4499-4
- Bachman, David (2003), A Geometric Approach to Differential Forms, arXiv:math/0306194v1 (https://arxiv.org/abs/math/0306194v1), Bibcode:2003math......6194B (https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2003math......6194B)
- Cartan, Henri (2006), Differential Forms, Dover, ISBN 0-486-45010-4-Translation of Formes différentielles (1967)
- Dieudonné, Jean (1972), Treatise on Analysis, vol. 3, New York-London: Academic Press, Inc., MR 0350769 (https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0350769)
- Edwards, Harold M. (1994), Advanced Calculus; A Differential Forms Approach, Modern Birkhäuser Classics, Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, doi:10.1007/978-0-8176-8412-9 (https://doi.org/10.1007%2F978-0-8176-8412-9), ISBN 978-0-8176-8411-2

- Folland, Gerald B. (1999), Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications (Second ed.), ISBN 978-0471-31716-6, provides a brief discussion of integration on manifolds from the point of view of measure theory in the last section.
- Flanders, Harley (1989) [1964], Differential forms with applications to the physical sciences, Mineola, New York: Dover Publications, ISBN 0-486-66169-5
- Fleming, Wendell H. (1965), "Chapter 6: Exterior algebra and differential calculus", Functions of Several Variables, Addison-Wesley, pp. 205-238. This textbook in multivariate calculus introduces the exterior algebra of differential forms at the college calculus level.
- Morita, Shigeyuki (2001), Geometry of Differential Forms (https://archive.org/details/geometryofdiffer00mori), AMS, ISBN 0-8218-1045-6
- Rudin, Walter (1976), Principles of Mathematical Analysis, New York: McGraw-Hill, ISBN 0-07-054235-X
- Spivak, Michael (1965), Calculus on Manifolds (https://archive.org/details/SpivakM.CalculusOnManifolds_201703), Menlo Park, California: W. A. Benjamin, ISBN 0-8053-9021-9, standard introductory text.
- Tu, Loring W. (2008), An Introduction to Manifolds, Universitext, Springer, doi:10.1007/978-1-4419-7400-6 (https://doi.org/10.1007%2F978-1-4419-7400-6), ISBN 978-0-387-48098-5
- Zorich, Vladimir A. (2004), Mathematical Analysis II, Springer, ISBN 3-540-40633-6

External links

- Weisstein, Eric W. "Differential form" (https://mathworld.wolfram.com/Differentialk-Form.html). MathWorld.
- Sjamaar, Reyer (2006), Manifolds and differential forms lecture notes (http://pi.math.cornell.edu/sjamaar/manifoIds/manifold.pdf) (PDF), a course taught at Cornell University.
- Bachman, David (2003), A Geometric Approach to Differential Forms, arXiv:math/0306194 (https://arxiv.org/abs/math/0306194), Bibcode:2003math......6194B (https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2003math......6194B), an undergraduate text.
- Needham, Tristan. Visual differential geometry and forms: a mathematical drama in five acts (https://www.vdgf.space/table-of-contents). Princeton University Press, 2021.