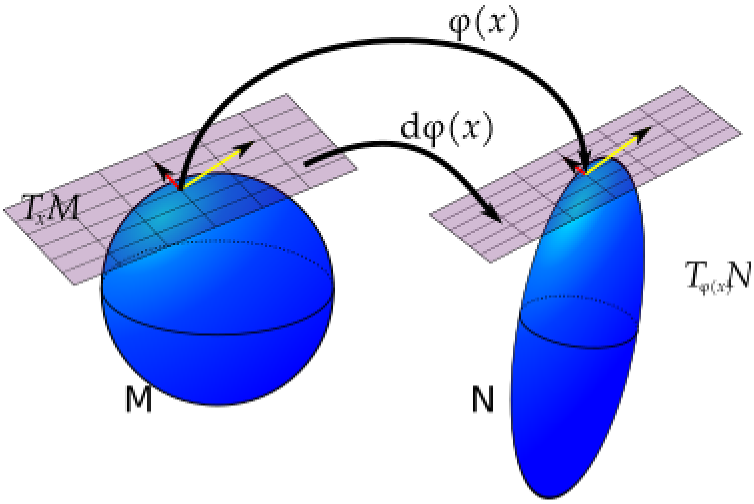
推前 (微分)

Wikipedia

2 December 2023

在微分几何中，**推前** (**pushforward**) 是切空间上光滑映射 (形成流形) 的线性近似。假设 $\varphi : M \to N$ 是光滑流形之间的一个光滑映射；则在某种意义上，φ 在点 x 处的**微分** (**differential**)，标志为 $d\varphi_x$，是 φ 在点 x 处附近的最佳线性逼近，可以看作是普通微积分全导数的推广。显式地，微分是从 M 在 x 处的切空间到 N 在 $\varphi(x)$ 处的切空间的线性映射，$d\varphi_x : T_xM \to T_{\varphi(x)}N$。因此，它可以用来将 M 上的切向量向前推送 (*push forward*) 到 N 上的切向量。一个映射 φ 的微分也被许多作者称为 φ 的**导数** (**derivative**) 或**全导数** (**total derivative**)。



如果一个映射 φ 将流形在 M 上的每一点携带到流形 N，则 φ 的推前将在 M 中每一点的切空间中的向量携带到在 N 中每一点的切空间中。

1 动机

设 $\varphi : U \to V$ 是一个从 $\mathbb{R}^m$ 的开子集 U 到 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 V 的光滑映射。对于在 U 中的任意点 x，φ 在 x 处 (相对于标准坐标) 的雅可比矩阵是 φ 在 x 处的全导数的矩阵表示，这是一个在它们的切空间之间的线性映射

$$d\varphi_x : T_x\mathbb{R}^m \to T_{\varphi(x)}\mathbb{R}^n.$$

注意切空间 $T_x\mathbb{R}^m, T_{\varphi(x)}\mathbb{R}^n$ 分别同构于 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^n$。推前将这种结构推广到 φ 是一个在**任意**光滑流形 M 和 N 之间的光滑函数的情况。

2 光滑映射的微分

设 $\varphi : M \to N$ 是光滑流形的一个光滑映射。给定 $x \in M$，则 φ 在 x 处的**微分** (**differential**) 是一个从 M 在 x 处的切空间到 N 在 $\varphi(x)$ 处的切空间的线性映射

$$d\varphi_x : T_xM \to T_{\varphi(x)}N.$$

一个切向量 $X \in T_xM$ 在 $d\varphi_x$ 下的象 $d\varphi_xX$ 有时称为 X 通过 φ 的**推前** (**pushforward**)。这种推前的精确定义取决于切向量的定义 (有关各种定义，参见切空间资料)。

如果切向量定义为 $\gamma(0) = x$ 的曲线 γ 的等价类，则微分给出为

$$d\varphi_x\left(\gamma'(0)\right) = (\varphi \circ \gamma)'(0).$$

这里，γ 是在 M 中的一条曲线，具有 $\gamma(0) = x$，并且 $\gamma'(0)$ 是曲线 γ 在 0 处的切向量。换而言之，切向量在 0 处对曲线 γ 的推前就是曲线 $\varphi \circ \gamma$ 在 0 处的切向量。

或者，如果切向量定义为作用于光滑实值函数的导子 (derivation)，则微分给出为

$$d\varphi_x(X)(f) = X(f \circ \varphi),$$

它对于任意一个函数 $f \in C^\infty(N)$ 和任意一个在 $x \in M$ 点处的导子 $X \in T_xM$ 都成立 (导子定义为满足 Leibniz 规则的一个线性映射 $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$，参见：definition of tangent space via derivations)。根据定义，X 的推前在 $T_{\varphi(x)}N$ 中，并因此它本身就是一个导子，$d\varphi_x(X) : C^\infty(N) \to \mathbb{R}$。

选择围绕 x 和围绕 $\varphi(x)$ 的两个图表 (chart) 之后，φ 由在 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^n$ 的开集之间的一个光滑映射 $\widehat{\varphi} : U \to V$ 局部地确定，并且

$$d\varphi_x\left(\frac{\partial}{\partial u^a}\right) = \frac{\partial \widehat{\varphi}^b}{\partial u^a}\frac{\partial}{\partial v^b},$$

在爱因斯坦求和符号中，偏导数在 U 中的点处求值对应于 x 在给定图表中的求值。

通过线性扩展得到以下矩阵

$$\left(d\varphi_x\right)_a^b = \frac{\partial \widehat{\varphi}^b}{\partial u^a}.$$

因此，微分是切空间之间的一个线性变换，与在每个点处的光滑映射 φ 相关联。因此，在一些被选择的局部坐标中，它通过从 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的相应的光滑映射的雅可比矩阵来表示。一般来说，微分不必是可逆的。然而，如果 φ 是局部微分同胚，则 $d\varphi_x$ 是可逆的，并且其逆给出 $T_{\varphi(x)}N$ 的拉回 (pullback)。

微分通常使用其它多种符号表示，例如

$$D\varphi_x, \left(\varphi_*\right)_x, \varphi'(x), T_x\varphi.$$

根据定义，复合微分是微分的复合 (即函数行为)。这是光滑映射的链式规则 (*chain rule*)。

此外，一个局部微分同胚的微分是切空间的一个线性同构。

3 切丛上的微分

一个光滑映射 φ 的微分以一种明显的方式诱导出从 M 的切丛到 N 的切丛的一个丛映射 (实际上是向量丛同态)，用 $d\varphi$ 标志，它符合以下交换图：

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "\mathrm{d}\varphi"] \arrow[d, "\pi_M"'] & TN \arrow[d, "\pi_N"] \\ M \arrow[r, "\varphi"'] & N \end{tikzcd}$$

其中 π_M 和 π_N 分别标志 M 和 N 的切丛的丛投影。

通过下式，$d\varphi$ 诱导一个从 TM 到在 M 之上的拉回丛 φ^*TN 的丛映射

$$(m, v_m) \mapsto (m,\ \mathrm{d}\varphi\,(m, v_m))\,,$$

其中 $m \in M$ 和 $v_m \in T_mM$。后一种映射又可被视为在 M 之上的向量丛 $\mathrm{Hom}\,(TM, \varphi^*TN)$ 的一个截面。从映射 $d\varphi$ 也用 $T\varphi$ 标志，并称为**切映射** (**tangent map**)。这样，T 就是一个函子 (functor)。

4 向量场的推前

给定一个光滑映射 $\varphi : M \to N$ 和一个在 M 上的向量场 X，通常不可能用一些在 N 上的向量场 Y 来识别 X 通过 φ 的推前。例如，如果映射 φ 不是满射的，则在 φ 的象之外就没有自然的方法来定义这样一个推前。还有，如果 φ 不是内射的，在给定点上可能有多个推前选择。然而，人们可以使用沿着一个映射的一个向量场的概念来将这一难题精确化。

φ^*TN 在 M 之上的一个截面称为一个**沿着 φ 的向量场**。例如，如果 M 是 N 的子流形，并且 φ 是包含 (inclusion)，则一个沿着 φ 的向量场就是 N 沿着 M 的切丛的一个截面；特别地，在 M 上的一个向量场通过在 TN 内 TM 的包含来定义这样一个截面。这一思想推广到任意光滑映射。

假设 X 是在 M 上的一个向量场，即 TM 的一个截面。则 $d\phi \circ X$ 在上述意义上产生**推前** (**pushforward**) φ_*X，它是沿着 φ 的一个向量场，即 φ^*TN 在 M 之上的一个截面。

在 N 上的一个任意向量场 Y 用 $(\varphi^*Y)_X = Y_{\varphi(x)}$ 定义 φ^*TN 的一个拉回截面 φ^*Y。如果 $\varphi_*X = \varphi^*Y$ 作为沿着 φ 的向量场，则称在 M 上的一个向量场 X 和在 N 上的一个向量场 Y 是**以 φ 相关的** (**φ-related**)。换句话说，对于在 M 中的所有 x，$d\varphi_X(X) = Y_{\varphi(x)}$。

在某些情况下，给定在 M 上的一个向量场 X，在 N 上存在一个唯一的向量场 Y，它与 X 是以 φ 相关的，特别是在 φ 是一个微分同胚的时候。在这种情况下，推前定义在 N 上的一个向量场 Y，给出为

$$Y_y = \phi_*\left(X_{\phi^{-1}(y)}\right).$$

当 φ 是满射时 (例如一个纤维丛的丛投影)，就会出现更一般的情况。如果对于在 N 中的所有 y，$d\varphi_x\,(X_x)$ 独立于在 $\varphi^{-1}(\{y\})$ 中 x 的选择，则称在 M 上的一个向量场 X 是**可投影的** (**projectable**)。这正是保证 X 作为在 N 上的一个向量场的一个推前是良好定义的。

4.1 示例

4.1.1 李群上乘法的推前

给定一个李群 G，我们可以使用乘法映射 $m(-,-):G\times G\to G$ 来得到左乘 $L_g=m(g,-)$ 和右乘 $R_g=m(-,g)$ 以映射 $G\to G$。这些映射可用于从 G 的切空间的原点 $\mathfrak{g}=T_eG$ 处 (它是相关的李代数) 构造在 G 上的左不变或右不变向量场。例如，给定 $X\in\mathfrak{g}$，我们得到在 G 上的一个相关向量场 $\mathfrak{X}$，定义为

$$\mathfrak{X}_g=(L_g)_*(X)\in T_gG$$

对于每一个 $g\in G$ 成立。这可以很容易地用推前映射的曲线定义来计算。如果我们有一个曲线

$$\gamma:(-1,1)\to G$$

其中

$$\gamma(0)=e,\quad \gamma'(0)=X$$

我们得到

$$\begin{aligned}(L_g)_*(X)&=(L_g\circ\gamma)'(0)\\&=(g\cdot\gamma(t))'(0)\\&=\frac{dg}{d\gamma}\gamma(0)+g\cdot\frac{d\gamma}{dt}(0)\\&=g\cdot\gamma'(0)\end{aligned}$$

因为 L_g 相对于 γ 是常数。这意味着我们可以将切空间 T_gG 解释为 $T_gG=g\cdot T_eG=g\cdot\mathfrak{g}$ 。

4.1.2 一些李群的推前

例如，如果 G 是由矩阵给出的 Heisenberg 群

$$H=\left\{\begin{bmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{bmatrix}:a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

它具有由矩阵集合给出的李代数

$$\mathfrak{h}=\left\{\begin{bmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix}:a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

因为我们可以找到一条路径 $\gamma:(-1,1)\to H$，使得在上三角矩阵的第 i 行和第 j 列的任意实数都可以通过该路径得到，其中 $i<j$。那么，对于

$$g=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

我们有

$$T_gH=g\cdot\mathfrak{h}=\left\{\begin{bmatrix}0&a&2b+3c\\0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix}:a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

它等价于原始矩阵集合。情况并非总是如此，例如，在以下群中，

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

我们将它的李代数作为矩阵集合

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

因此对于某些矩阵

$$g = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

我们有

$$T_g G = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & 2b - a/2 \\ 0 & -a/2 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

这不是相同集合的矩阵。

See also

- Pullback (differential geometry)
- Flow-based generative model

References

- Lee, John M. (2003). Introduction to Smooth Manifolds. Springer Graduate Texts in Mathematics. Vol. 218.
- Jost, Jürgen (2002). Riemannian Geometry and Geometric Analysis. Berlin: Springer-Verlag. ISBN 3-540-42627-2. See section 1.6.
- Abraham, Ralph; Marsden, Jerrold E. (1978). Foundations of Mechanics. London: BenjaminCummings. ISBN 0-8053-0102-X. See section 1.7 and 2.3.

译注

在微分几何中，'in'/'on'/'over' 用来描述与流形 M 相关的数学对象时，它们之间的含义和区别如下:

1. 'in M': 表示一个点或对象存在于流形 M 中。比如一个点、一个向量位于 M 的切空间中。
2. 'on M': 表示一个对象附着或约束在流形 M 上，比如一个向量场，它对每个点 $x \in M$ 都定义了一个切向量，一个函数定义在 M 上。
3. 'over M'：表示一个向量丛或更一般的纤维丛，它的基空间是 M。比如切向量丛 (tangent bundle)，就是所有切空间的并集。切向量丛就是一个定义在流形 M 之上的向量丛。

所以简单地说:

1. 'in M' 表示在流形内；
2. 'on M' 表示附着在流形上；
3. 'over M' 表示以流形为基流形的向量丛或纤维丛。

在使用的时候:

1. 一个点，一个切向量用'in M'。
2. 一个向量场，一个函数用'on M'。
3. 切向量丛，拉回丛 (pullback bundle) 用'over M'。

它们表示对象与流形 M 的不同关系，在某种程度上可以互换，但每个都有其标准和最恰当的使用场景。