

## 7. PROGRAMACIÓN DE PROYECTOS CON PERT-CPM.

Haciendo uso del enfoque de sistemas, un proyecto se entiende como una combinación de actividades interrelacionadas que deben ejecutarse en un determinado orden para terminar un trabajo. Las interrelaciones entre las actividades, normalmente son de tipo secuencial, esto es, algunas de ellas no pueden iniciar hasta que otras terminen. Cada actividad de un proyecto, es un trabajo que requiere tiempo y recursos para su ejecución.

El **diagrama de barras de Gantt** desarrollada por Henry L. Gantt en 1918 para la programación de producción y proyectos, aún se usa, por su simplicidad y fácil despliegue, con la errada consideración de "la mejor herramienta de 'planeación'", a pesar de que sólo especifica los tiempos de inicio y terminación de cada actividad en una escala de tiempo horizontal y tiene la desventaja de no controlar la interdependencia entre las diferentes actividades. Debe recurrirse a técnicas de planeación más sistemáticas y efectivas para optimizar la eficiencia en la ejecución del proyecto. La eficiencia significa conseguir la mayor reducción en el tiempo requerido para finalizar el proyecto mientras se tiene en cuenta la factibilidad económica de la utilización de los recursos disponibles.

Dadas las anteriores consideraciones, aparecieron dos técnicas analíticas para la planeación, programación y control de proyectos:

- **CPM (Critical Path Method ):** **Método de Ruta Crítica.**

- **PERT** (Program Evaluation and Review Technique): **Técnica de Evaluación y Revisión de Proyectos.**

Estas técnicas fueron desarrolladas por dos grupos diferentes entre 1956 y 1958. E. I. du Pont de Nemours & Company desarrolló el **CPM** como una aplicación a los proyectos de construcción y posteriormente Mauchly Associates, lo extendió a nuevas aplicaciones. El **PERT**, fue producido por un grupo consultor para la Marina de Estados Unidos, con el fin de programar las actividades de investigación y desarrollo del programa de misiles Polaris.

Los métodos PERT y CPM se fundamentan en el manejo de un programa de tiempo, pero originalmente las estimaciones en el tiempo para las actividades se supusieron **determinantes en CPM y probables en PERT**. Actualmente PERT y CPM comprenden realmente una sola técnica.

## 7.1 FASES DE PROGRAMACIÓN.

La programación de proyectos con PERT-CPM consiste en tres fases básicas: planeación, programación y control.

### 7.1.1 Fase de Planeación.

En esta primera etapa se descompone el proyecto en actividades distintas, enseguida se estima el tiempo para estas actividades y se construye un diagrama de red o de flechas, donde cada uno de sus arcos (flechas) representa una actividad. Este diagrama muestra gráficamente las interdependencias entre las actividades del proyecto y genera la ventaja de analizar las diferentes tareas en detalle, posibilitando modificaciones antes de la ejecución del mismo.

### 7.1.2 Fase de Programación.

Consiste en la construcción de un diagrama que muestre los tiempos de iniciación y finalización de cada actividad y su relación con otras actividades del proyecto. Igualmente, esta fase, debe señalar las actividades críticas en función del tiempo, esto es, aquellas que requieren atención especial para terminar oportunamente el proyecto. Para las actividades no críticas, debe mostrar los tiempos de holgura que pueden usarse cuando éstas se retrasan o se deben usar eficientemente recursos limitados.

### 7.1.3 Fase de Control.

Es la fase final en la administración de proyectos. Es el uso del diagrama de red y del gráfico de tiempo para hacer reportes periódicos del progreso. En consecuencia, la red puede actualizarse y analizarse para determinar, si es necesario, un nuevo programa para el resto del proyecto.

## 7.2 TERMINOLOGÍA EN LOS DIAGRAMAS DE RED.

Un diagrama de red representa las interdependencias y relaciones de precedencia entre las actividades del proyecto. Normalmente se usa **una flecha (arco dirigido)** para representar una actividad; la punta indica el sentido de avance del proyecto. La secuencia entre las actividades se precisa con eventos. Un **evento (nodo) es la terminación de algunas actividades y el comienzo de nuevas** en un instante de tiempo. Toda actividad tiene un evento de inicio y un evento final. Las actividades que inician un evento no pueden comenzar hasta que las actividades que finalizan en el mismo evento hayan terminado.

Los diagramas de red deben cumplir las siguientes reglas:

**Regla 1.** Cada actividad quedará representada por un sólo arco en la red. Ninguna actividad puede disponerse más de una vez en la red. Diferente es el caso en que una actividad se descompone en segmentos, los cuales pueden estar representados por arcos separados. La colocación de una banda transportadora en un proceso de producción puede hacerse en secciones.

**Regla 2.** Dos actividades diferentes, aunque se ejecuten simultáneamente, no pueden identificarse con los mismos eventos de inicio y final. Esta dificultad se resuelve introduciendo un evento ficticio, tal como lo muestra la Figura 25.

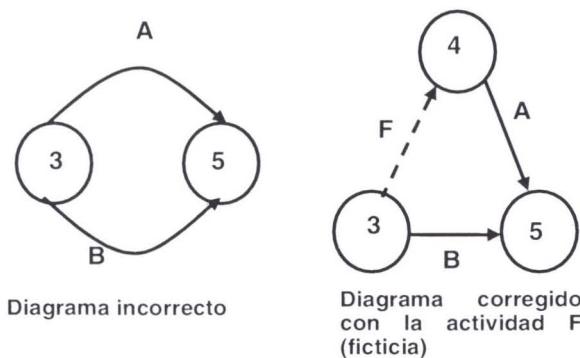
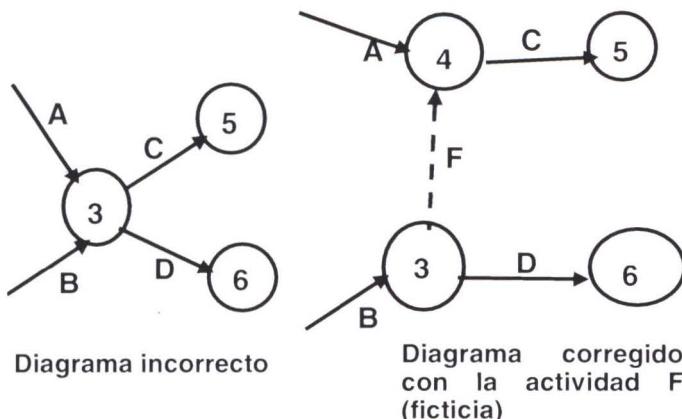


Figura 25. Uso de actividades ficticias.

Las actividades ficticias también se usan para establecer relaciones lógicas en el diagrama de red, que no pueden representarse de otra manera. La figura 26 muestra la formas incorrecta y correcta para cierto proyecto en donde las actividades A y B deben preceder a C; mientras que la actividad D está precedido solamente por B.

**Figura 26. Uso de actividades ficticias.**

**Regla 3.** Cada que se agrega una actividad a la red, se deben definir las actividades que deben terminar antes de que esta actividad pueda comenzar, las actividades que deben seguir a esta actividad y las actividades que deben ejecutarse simultáneamente con esta actividad.

**Ejemplo.** Construya el diagrama de red para el proyecto del traslado de las oficinas de una financiera de crédito, de acuerdo con la siguiente lista de actividades:

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN	PREDECESORES INMEDIATOS
A	Seleccionar el sitio de las Oficinas	
B	Crear el plan organizacional y financiero	
C	Determinar necesidades de personal	B
D	Diseñar la instalación	A,C
E	Construir el interior de la instalación	D
F	Seleccionar el personal que será transferido	C
G	Contratar nuevos empleados	F
H	Trasladar registros, personal y otros	F
I	Hacer los arreglos financieros con otras sedes de la compañía	B
J	Capacitar el nuevo personal	H,E,G

El diagrama de red resultante se muestra en la figura 27. La actividad ficticia  $F_1$  obliga el comienzo de la actividad D, únicamente cuando A y C hayan finalizado, mientras que la actividad ficticia  $F_2$  evita confundir en una sola a las actividades G y H. Las actividades A y B parten del nodo inicio porque no tienen predecesoras y las actividades J e I llegan al nodo final porque no son predecesoras de ninguna otra actividad.

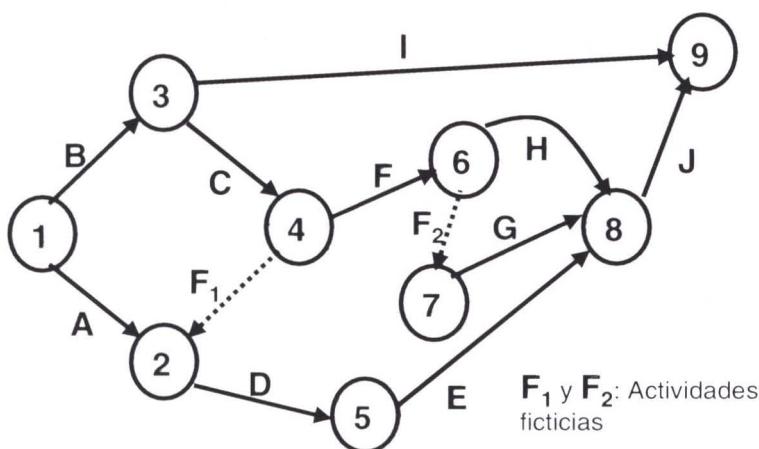


Figura 27. Diagrama de red para el proyecto del traslado de las oficinas.

### 7.3 LA RUTA CRITICA.

Después de la planeación o construcción del diagrama de red, la aplicación de PERT-CPM proporciona un programa contenido las fechas de inicio y finalización de cada actividad. Debido a la interacción entre las actividades, la determinación de estos tiempos, exige cálculos especiales que conducen a clasificar las **actividades de los proyectos como críticas o no críticas**.

**Actividad crítica.** Cuando la demora en su comienzo genera un retraso en la fecha de terminación de todo el proyecto.

**Actividad no crítica.** Cuando el tiempo entre su comienzo más próximo y de finalización más tardío permitido en el proyecto, es mayor que su duración real. En este caso, se dice que la actividad no crítica tiene un tiempo de holgura.

### 7.3.1 Determinación de la Ruta Crítica.

Una ruta crítica define una cadena de actividades críticas que unen los eventos inicial y final del diagrama de red e identifica todas las actividades críticas del proyecto. El método para determinar tal ruta se ilustrará con un ejemplo numérico.

**Ejemplo.** Considere la red de la figura 27, que comienza en el nodo 1 y termina en el nodo 9. El tiempo en semanas requerido para ejecutar cada actividad es el siguiente:

Actividad	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Tiempo	3	5	3	4	8	2	4	2	5	3

Los cálculos se realizan en dos etapas. A la primera fase se le llama **cálculos hacia adelante**; van desde el nodo "inicio" hasta el nodo de "finalización". En cada nodo se calcula el tiempo de ocurrencia más próximo del evento correspondiente. A la segunda fase se le llama **cálculos hacia atrás**, van desde el nodo "terminación" hacia nodo de "inicio". En cada nodo se calcula el tiempo de ocurrencia más tardío del evento correspondiente.

**Cálculos hacia adelante.** Sea  $TP_i$ , el tiempo de inicio más próximo de todas las actividades que se inician en el evento  $i$  o el tiempo de ocurrencia más próximo del evento  $i$ . Convencionalmente este tiempo se toma en 0 para el evento de "inicio".

Si  $d_{ij}$  representa la duración de la actividad  $i \rightarrow j$ , entonces el tiempo de ocurrencia más próximo de cada uno de los eventos  $j$  será:

$$TP_j = \max_i \{ TP_i + d_{ij} \}$$

Los cálculos hacia adelante para la figura 27 proporcionan los siguientes valores:

Evento	$TP_i + d_{ij}$	$TP_j = \max_i \{ TP_i + d_{ij} \}$
1	$TP_1 = 0$	0
2	$TP_1 + d_{12} = 0 + 3 = 3$ $TP_4 + d_{42} = 8 + 0 = 8$	8
3	$TP_1 + d_{13} = 0 + 5 = 5$	5
4	$TP_3 + d_{34} = 5 + 3 = 8$	8
5	$TP_2 + d_{25} = 8 + 4 = 12$	12
6	$TP_4 + d_{46} = 8 + 2 = 10$	10
7	$TP_6 + d_{67} = 10 + 0 = 10$	10
8	$TP_5 + d_{58} = 12 + 8 = 20$ $TP_6 + d_{68} = 10 + 2 = 12$ $TP_7 + d_{78} = 10 + 4 = 14$	20
9	$TP_3 + d_{39} = 5 + 5 = 10$ $TP_8 + d_{89} = 20 + 3 = 23$	23

**Cálculos hacia atrás.** Sea  $TT_i$  el tiempo de ocurrencia más tardío, para todas las actividades que terminan en el evento  $i$ . Si  $n$  es el evento de terminación de todo el proyecto, entonces,  $TT_n = TP_n$  e iniciará el cálculo hacia atrás. En general, para cada uno de los demás nodos  $i$ , el tiempo de ocurrencia más tardío se calculará como:

$$TT_i = \min_j \{ TT_j - d_{ij} \}$$

Los cálculos hacia atrás para la figura 27 proporcionan los siguientes valores:

Evento	$TT_j - d_{ij}$	$TT_i = \min_j \{ TT_j - d_{ij} \}$
9	$TT_9 = TP_9 = 23$	23
8	$TT_9 - d_{89} = 23 - 3 = 20$	20
7	$TT_8 - d_{78} = 20 - 4 = 16$	16
6	$TT_7 - d_{67} = 16 - 0 = 16$ $TT_8 - d_{68} = 20 - 2 = 18$	16
5	$TT_8 - d_{58} = 20 - 8 = 12$	12
4	$TT_6 - d_{46} = 16 - 2 = 14$ $TT_2 - d_{42} = 8 - 0 = 8$	8
3	$TT_9 - d_{39} = 23 - 5 = 18$ $TT_4 - d_{34} = 8 - 3 = 5$	5
2	$TT_5 - d_{25} = 12 - 4 = 8$	8
1	$TT_3 - d_{13} = 5 - 5 = 0$ $TT_2 - d_{12} = 8 - 3 = 5$	0

### 7.3.2 Identificación de las actividades de la Ruta Crítica.

Una actividad  $i \rightarrow j$  está en la ruta crítica si satisface las tres condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} TT_i &= TP_i \\ TT_j &= TP_j \\ TT_j - TT_i &= TP_j - TP_i = d_{ij} \end{aligned}$$

Estas condiciones se cumplen para las actividades que carecen de tiempo de holgura entre el inicio más próximo y el inicio más tardío. Esto, hace que esta actividad sea crítica. La tabla de la página siguiente posibilita el análisis de estas tres condiciones para el ejemplo de la figura 27.

La Ruta Crítica la componen las actividades **1→3→4→2→5→8→9** y comprenden el tiempo más corto posible para terminar todo el proyecto. Obsérvese que la ruta crítica forma una cadena de actividades conectadas desde el "inicio" hasta la "finalización", condición que debe cumplirse en cada uno de los programas de proyectos.

Actividad	Ruta i→j	TP <sub>i</sub>	TP <sub>j</sub>	TT <sub>i</sub>	TT <sub>j</sub>	d <sub>ij</sub>	Crítica
A	1→2	0	8	0	8	3	
B	1→3	0	5	0	5	5	Si
C	3→4	5	8	5	8	3	Si
F <sub>1</sub>	4→2	8	8	8	8	0	Si
D	2→5	8	12	8	12	4	Si
E	5→8	12	20	12	20	8	Si
F	4→6	8	10	8	16	2	
F <sub>2</sub>	6→7	10	10	16	16	0	
G	7→8	10	20	16	20	4	
H	6→8	10	20	16	20	2	
I	3→9	5	23	5	23	5	
J	8→9	20	23	20	23	3	Si

### 7.3.3 Determinación de las holguras.

Una vez se haya encontrado la Ruta Crítica, se debe proceder a calcular todas las holguras de las actividades no críticas. Para determinar estas holguras, es necesario encontrar dos parámetros adicionales, el **tiempo de inicio más tardío (IT<sub>ij</sub>)** y el **tiempo de finalización más próximo (FP<sub>ij</sub>)** para cada actividad; los cuales cumplen las siguientes expresiones matemáticas:

$$IT_{ij} = TT_j - d_{ij}$$

$$FP_{ij} = TP_i + d_{ij}$$

Se consideran dos tipos de holguras, total y libre.

**Holgura total HT<sub>ij</sub>.** Diferencia entre el máximo tiempo disponible para realizar la actividad y su duración; esto es:

$$HT_{ij} = (TT_j - TP_i) - d_{ij} = (TT_j - d_{ij}) - TP_i = IT_{ij} - TP_i$$

**Holgura libre  $HL_{ij}$ .** Suponiendo que todas las actividades comienzan tan pronto como sea posible, es el exceso de tiempo disponible sobre su duración para cada actividad; es decir:

$$HL_{ij} = TP_j - TP_i - d_{ij}$$

Todos los cálculos de ruta crítica, incluidas las holguras total y libre para las actividades no críticas, pueden presentarse como aparecen en la tabla de la página siguiente. En ésta, se observa que las actividades críticas tienen las holguras total y libre iguales a 0.

Actividad	Ruta $i \rightarrow j$	$d_{ij}$	$TP_i$	$TP_j$	$TT_i$	$TT_j$	$IT_{ij}$	$HT_{ij}$	$HL_{ij}$
A	1→2	3	0	8	0	8	5	5	5
B	1→3	5	0	5	0	5	0	0	0
C	3→4	3	5	8	5	8	5	0	0
F <sub>1</sub>	4→2	0	8	8	8	8	8	0	0
D	2→5	4	8	12	8	12	8	0	0
E	5→8	8	12	20	12	20	12	0	0
F	4→6	2	8	10	8	16	14	6	0
F <sub>2</sub>	6→7	0	10	10	16	16	16	6	0
G	7→8	4	10	20	16	20	16	6	6
H	6→8	2	10	20	16	20	18	8	8
I	3→9	5	5	23	5	23	18	13	13
J	8→9	3	20	23	20	23	20	0	0

#### 7.4 DIAGRAMA DE TIEMPO.

A partir de los cálculos de la red se construye un diagrama de tiempo que pueda servir o convertirse fácilmente en un programa calendario para el personal que ejecutará el proyecto. El diagrama de tiempo debe considerar las limitaciones de los recursos disponibles, pues en muchas ocasiones no es posible realizar

actividades simultáneas por las limitaciones de personal y equipo. En este caso las holguras totales para las actividades no críticas resultan muy útiles. Cambiando una actividad no crítica (hacia atrás o hacia adelante) entre sus límites TP y TT, se pueden cumplir los requisitos de recursos. Aun en abundancia de recursos (no hay recursos limitados), se acostumbra usar las holguras totales para nivelar los recursos sobre la duración del proyecto completo. Esto significa una planeación, uso y control de los recursos más estable comparada con el caso donde el uso de la fuerza laboral y de la maquinaria de trabajo cambia fuertemente entre un periodo y otro.

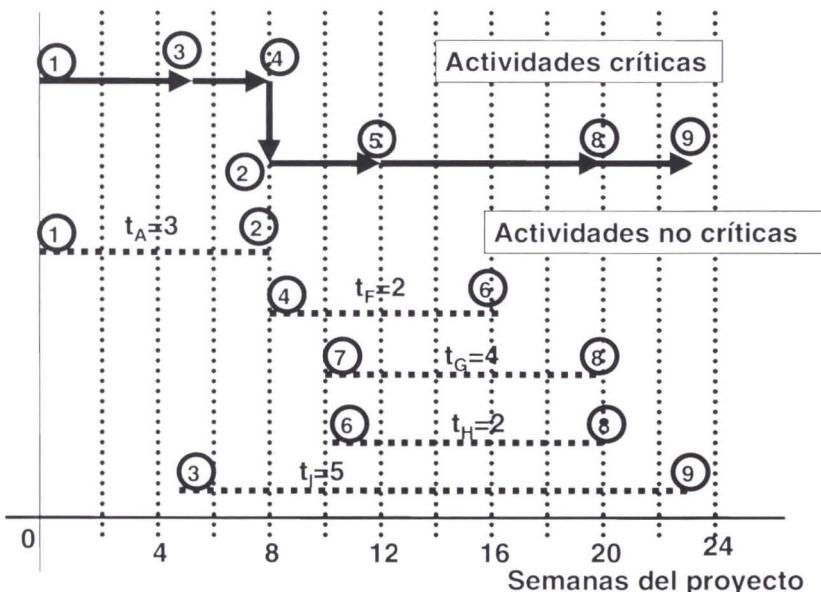


Figura 28. Diagrama de tiempo para el proyecto de traslado de oficinas.

La figura 28 ilustra la construcción del diagrama de tiempo para el ejemplo que se ha venido trabajando. Se observa fácilmente cuales son las holguras hacia delante o hacia atrás en la programación de las alternativas no críticas. La actividad ficticia

4→2 no consume tiempo, por lo tanto, se muestra como una línea vertical. Las actividades críticas se indican con líneas continuas. Los límites de tiempo para las actividades no críticas se muestran con líneas punteadas; tales actividades pueden programarse dentro de esos intervalos, siempre y cuando no se alteren las relaciones de precedencia.

Las holguras total y libre en la programación de actividades no críticas se explican en términos de dos criterios:

- ✓ Si estas holguras son iguales, la actividad no crítica se puede programar en cualquier instante entre los tiempos de inicio más próximo y de finalización más tardío.
- ✓ Si la holgura libre es menor que la holgura total, el inicio de la actividad no crítica se puede demorar en relación con su tiempo de inicio más próximo en un valor no mayor que la holgura libre sin afectar la programación de las actividades posteriores.

En esencia, la holgura libre menor que la holgura total advierte que la programación de la actividad no debe terminarse sin antes verificar su efecto en los tiempos de inicio de las actividades posteriores. Esta valiosa información sólo puede asegurarse a través del uso de cálculos de ruta crítica.

## 7.5 EL ENFOQUE DE TRES TIEMPOS ESTIMADOS DE PERT.

No siempre es posible obtener estimaciones con exactitud razonable para cada actividad del proyecto. En la práctica, frecuentemente existen incertidumbres sobre cuáles serán esos tiempos; de hecho se trata de una **variable aleatoria** que sigue alguna distribución de probabilidad. La versión original de **PERT** tiene en cuenta

esta incertidumbre, suponiendo que la estimación de tiempo para cada actividad está basada en 3 valores diferentes:

**a = tiempo optimista**, poco probable pero posible si todo sale bien.

**b = tiempo pesimista**, poco probable pero posible si todo sale mal.

**m = tiempo más probable**, estimación más realista.

El intervalo especificado por las estimaciones optimista y pesimista, contienen cualquier estimación de la duración de la actividad. La estimación más probable **m** no tiene que coincidir con el punto medio  $\frac{1}{2}(a + b)$ . Debido a estas propiedades se supone que la duración para cada actividad sigue una **distribución beta** con un solo punto modal en **m** y sus puntos extremos en **a** y **b**. La figura 29 muestra los tres casos de la distribución beta. Se hacen dos suposiciones para convertir **m**, **a** y **b** en estimaciones del valor esperado **T<sub>e</sub>** y la varianza **σ<sup>2</sup>** del tiempo para la actividad.

1. Como al menos el 90% de cualquier función densidad de probabilidad está dentro de tres desviaciones estándares de su media, la dispersión entre los extremos **a** y **b**, es seis veces la desviación estándar, esto es,  $6\sigma = b - a$ . Entonces la varianza del tiempo será:

$$\sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{36}$$

2. El punto medio  $\frac{1}{2}(a + b)$  tiene una ponderación de la mitad de la del punto más probable **m**. Entonces, el valor esperado **T<sub>e</sub>** es la media de  $\frac{1}{2}(a + b)$  y  $2m$ :

$$T_e = \frac{1}{3} [2m + \frac{1}{2}(a+b)] = \frac{a+b+4m}{6}$$

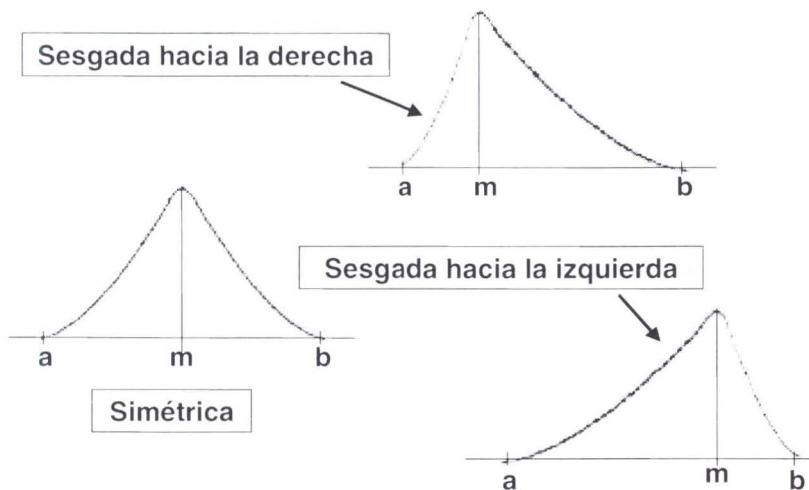


Figura 29. Distribución beta para las tres estimaciones de tiempo de PERT.

Los cálculos de la red para la figura 27 realizados en las secciones precedentes fueron tomados directamente para cada  $d_{ij}$ , reemplazándolos con la estimaciones  $T_e$  de la siguiente tabla:

ACTIVIDAD		Optimista	Pesimista	Probable	Esperado	Varianza
		<b>a</b>	<b>b</b>	<b>m</b>	<b><math>T_e</math></b>	<b><math>\sigma^2</math></b>
A	Seleccionar el sitio de las Oficinas	1.5	4.5	3	3	0.250
B	Crear el plan organizacional y financiero	3	7	5	5	0.444
C	Determinar necesidades de personal	0.5	4.5	3.25	3	0.444
D	Diseñar la instalación	2	7	3.75	4	0.694
E	Construir el interior de la instalación	6	12	9	9	1.000
F	Seleccionar el personal que será transferido	0.5	3.5	2	2	0.250
G	Contratar nuevos empleados	0.75	5.25	4.5	4	0.563
H	Trasladar registros, personal y otros	0.25	3.75	2	2	0.340
I	Hacer los arreglos financieros con otras sedes	2	12	4	5	2.778
J	Capacitar el nuevo personal	1	4	3.25	3	0.250

Si se supone que los tiempos de las actividades son variables estadísticamente independientes y que la ruta crítica, en términos de tiempos esperados, siempre requiere un tiempo mayor que cualquiera de las demás trayectorias. Además, como el valor esperado de una suma de variables aleatorias es la suma de sus valores esperados y la varianza de una suma de variables aleatorias estadísticamente independientes es la suma de sus varianzas, entonces el **tiempo del proyecto** es igual a **la suma de los tiempos esperados para las actividades sobre la ruta crítica** y la **varianza del tiempo del proyecto es la suma de las varianzas de los tiempos de las actividades.**

La tabla siguiente muestra que para la aplicación de este enfoque en la ruta crítica de la figura 27 (actividades **1→3→4→2→5→8→9**), el tiempo esperado del proyecto es 23 semanas con una varianza de 2.832.

Actividad	Ruta i→j	Esperado $T_e$	Varianza $\sigma^2$
B	1→3	5	0.444
C	3→4	3	0.444
F <sub>1</sub>	4→2	0	
D	2→5	4	0.694
E	5→8	8	1.000
J	8→9	3	0.250
Tiempo del proyecto		23	2.832

## 7.6 EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS.

- Para elaborar el presupuesto del año siguiente, una empresa debe recolectar información de sus departamentos de Ventas, Producción, Contabilidad y Tesorería. La tabla siguiente indica las actividades y sus duraciones. Construir el modelo de red del problema y realizar los cálculos de Ruta Crítica.

Actividad	Descripción	Precedentes inmediatas	Días de duración
A	Pronósticos sobre Ventas		10
B	Estudio del mercado competitivo		7
C	Diseño del artículo e instalaciones	A	5
D	Creación del programa de producción	C	3
E	Estimación del costo de producción	D	2
F	Fijación del precio de venta	B, E	1
G	Elaboración del Presupuesto	E, F	14

2. La instalación de un nuevo computador que trabajará como **servidor de archivos de la Universidad** en INTERNET, puede representarse por la siguiente lista de actividades. Construir el modelo de red del problema y realizar los cálculos de Ruta Crítica.

Actividad	Descripción	Precedentes inmediatas	Semanas de duración
A	Establecer las especificaciones		10
B	Solicitar los catálogos	A	1
C	Construir facilidades externas	A	16
D	Esperar los catálogos	B	3
E	Evaluar los catálogos	D	2
F	Construir facilidades internas	C	12
G	Seleccionar el computador	E	1
H	Escoger el equipo de comunicación	G	1
I	Escoger el Software necesario	G, H	3
J	Construir las redes eléctricas	F, G, H	6
K	Llegada e instalación del computador	G, J	2
L	Construir las redes de comunicación	F, K	6
M	Instalación del equipo de comunicación	H, L	3
N	Montaje del Software	K, M	4
O	Probar el Sistema	M, N	3

3. El montaje y puesta en marcha de una nueva planta de producción requiere las actividades de la tabla siguiente.

Actividad	Precedentes Inmediatas	Meses de duración		
		Optimista	Probable	Pesimista
A		3	4	6
B	A	2	3	5
C	A	0.5	1	3
D	A	1	2	4
E	D	2	3	6
F	D	1	4	8
G	B	2	4	10
H	B	1	2	5
I	C,E,G	1	4	7
J	F	1	2	5
K	H,I,J	2	4	8
L	F	0.5	1	4
M	K,L	1	3	5

3.1. Calcular el tiempo esperado y la desviación estándar para cada actividad.

3.2. Construir el modelo de red del problema y realizar los cálculos de Ruta Crítica.

## 8. MODELOS DE INVENTARIOS

Con demasiada frecuencia las empresas requieren mantener un inventario de bienes físicos o mercancías para satisfacer la demanda sobre un horizonte de tiempo definido, bien sea para asegurar un trabajo eficiente y uniforme en sus operaciones o para cumplir con las demandas de los clientes. En una empresa pequeña, el administrador puede mantener permanentemente un recuento de su inventario y definir fácilmente **cuándo y en qué cantidad reabastecer su inventario**; sin embargo, aún en estas pequeñas empresas, en muchas ocasiones, se debe recurrir a la formulación de un modelo matemático que describa el comportamiento del sistema de inventarios y proceder a derivar una política de inventarios respecto de este modelo.

Teóricamente, es posible satisfacer la demanda almacenando una sola vez para todo el horizonte de tiempo o separadamente por unidades de tiempo para el horizonte. Pero estos casos, normalmente pueden generar sobrealmacenamientos o subalmacenamientos.

En el primer caso, aunque no se tendrán frecuentes períodos de escasez se tendrá un mayor capital invertido por unidad de tiempo. En el segundo caso, aunque se requiere un menor capital invertido por unidad de tiempo se darán períodos de escasez. Las decisiones que consideran el instante y la cantidad de pedido puede estar basada en la minimización de una función de costos totales que consulte los excesos o faltas de almacenamiento.

## 8.1 TERMINOLOGÍA EN LOS MODELOS DE INVENTARIOS.

**C** : Costo de producción o Precio de compra por unidad de inventario.

**A** : Costo de hacer un pedido. Es independiente de la cantidad y considera los costos de preparación del pedido, despachos, preparación de maquinaria.

**I** : Costo de mantenimiento del inventario por unidad de dinero y tiempo. Considera los costos de oportunidad de inversión de capital, almacenamiento, depreciación y manejo del inventario.

**h** : Costo de mantenimiento de una unidad de inventario por unidad de tiempo. Así que  $h = IC$ .

$\mu$ : Costo fijo de penalización por cada unidad que se retrasa.

$\gamma$  : Costo de penalización por unidad de tiempo o dinero por cada unidad que se retrasa.

$\lambda$  : Tasa de demanda por periodo (normalmente, unidades/año). Se supone conocida con exactitud y constante a lo largo del periodo.

**Q** : Tamaño del lote. Cantidad de unidades que se ordenan para renovar el inventario.

**r** : Punto de reorden. Nivel del inventario para el que se debe ordenar un nuevo pedido de tamaño Q.

$T_r$  : Tiempo de reorden. Intervalo de tiempo entre pedidos o entre corridas de producción. En el caso más sencillo se considera determinístico y conocido, pero normalmente se distribuye con base en alguna función de densidad de probabilidad.

## 8.2 MODELO DETERMINÍSTICO SIMPLE.

Se considera los siguientes criterios:

- ❖ Una demanda determinística.
- ❖ La producción, adquisición o consumo del artículo ocurre a una tasa de  $\lambda$  unidades/año.
- ❖ No se permiten faltantes, esto es, la demanda siempre se satisface.

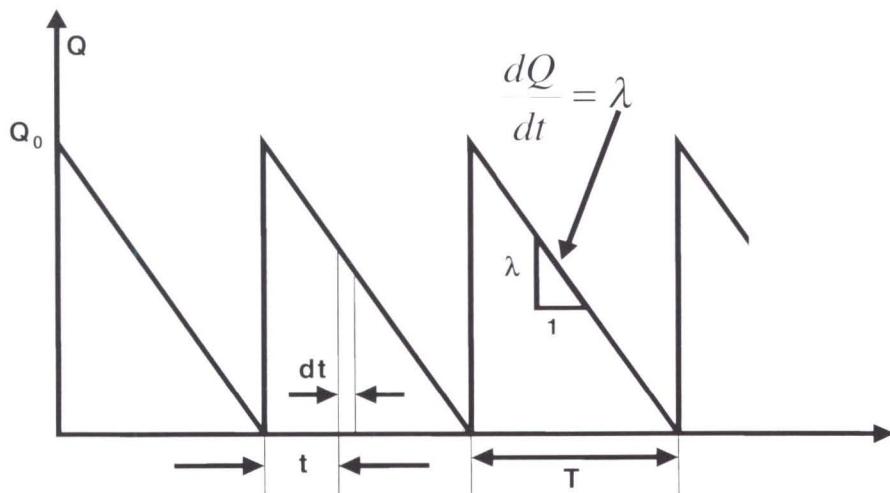


Figura 30. Modelo Determinístico Simple.

Con base en estos criterios, la Figura 30 describe la variación del nivel del inventario a lo largo del tiempo. En esta,  $T$  representa la longitud del periodo y  $Q_0$  es el valor inicial del inventario. En general,  $Q = \lambda T$ . En particular, en la figura 30,  $Q_0 = \lambda T$ . El problema será encontrar el valor de  $Q$  que produzca los costos menores anuales para una función  $C_a(Q)$ . Esta función resulta ser la suma de los siguientes costos parciales:

- 1. Costo anual de mantenimiento de los inventarios.** El costo de mantenimiento en cualquier instante es igual al costo de mantener todo el inventario menos el costo de la disminución de inventario en ese instante, esto es:

$$dC_p(t) = ICQdt - IC\lambda tdt = IC(Q - \lambda t)dt$$

Con ello, el costo de mantenimiento por periodo se puede calcular como:

$$C_p = \int_0^T dC_p(t)dt = \int_0^T IC(Q - \lambda t)dt = IC(Q - \frac{\lambda T^2}{2}), \quad \text{como } T = \frac{Q}{\lambda}, \text{ entonces :}$$

$$C_p = ICT \frac{Q}{2}$$

Como el número de periodos que hay en un año es  $\frac{1}{T}$ , entonces el costo anual de mantenimiento será  $C_m = \frac{1}{T} C_p = IC \frac{Q}{2}$ . Fácilmente se puede demostrar que  $\frac{1}{2}Q$  representa el inventario promedio anual. Este costo se reduce a calcular el producto del factor  $h = IC$  por el inventario promedio.

Haciendo uso de la definición del valor promedio de una función en un intervalo, en todos los casos el inventario promedio se podrá calcular con la siguiente expresión  $\bar{Q} = \frac{1}{T} \int_0^T Q(t)dt = \frac{1}{T} \text{Area debajo de } Q(t)$ . Entonces

$$\bar{Q} = \frac{1}{T} \frac{QT}{2} = \frac{Q}{2}.$$

2. **Costo anual de los inventarios.** Número de unidades compradas en el año por su costo unitario  $C_i = \lambda C$ .
3. **Costo anual de hacer los pedidos.** Costo del pedido por el número de pedidos en el año, esto es:  $C_h = A \frac{1}{T} = A \frac{1}{\frac{Q}{\lambda}} = \frac{\lambda}{Q} A$ .

Entonces, el costo anual  $C_a(Q)$  en este modelo, se puede calcular como:

$$C_a(Q) = IC \frac{Q}{2} + \lambda C + A \frac{\lambda}{Q}$$

Aplicando los conceptos del cálculo diferencial se puede encontrar **el lote económico**, esto es, la cantidad óptima que se debe pedir para lograr que el modelo funcione a costo mínimo.

$$\frac{dC_a}{dQ} = \frac{IC}{2} - A \frac{\lambda}{Q^2} = 0, \text{ entonces } Q^* = \sqrt{\frac{2A\lambda}{IC}} = \sqrt{\frac{2A\lambda}{h}}$$

Tomando la segunda derivada se demuestra que  $Q^*$  produce un mínimo para la función de costos. El costo mínimo que se obtiene al reemplazar en la función a  $Q$  por  $Q^*$  es:  $C_a(Q^*) = \sqrt{2AIC\lambda} = \sqrt{2Ah\lambda}, T^* = \frac{Q^*}{\lambda}$ .

La política óptima será colocar un pedido de  $Q^*$  unidades cada  $T^*$  unidades de tiempo.

En la mayoría de los casos prácticos se tiene un **tiempo de demora  $T_d$**  entre el instante en se coloca el pedido hasta que realmente se entrega. En este caso, la política de pedidos debe especificar el **punto de reorden**. La figura 31 presenta la situación.

De la figura 31 se puede especificar el **punto de reorden**, calculando el tiempo y punto de reorden como:

$$T_r = T^* - T_d \quad y \quad r = \lambda T_r$$

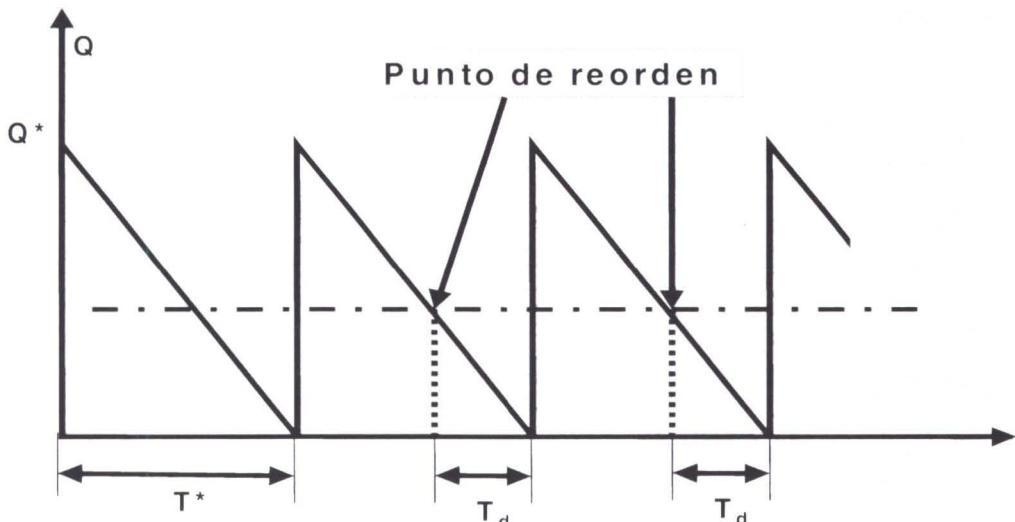


Figura 31. Modelo Determinístico Simple con tiempo de demora.

**Ejemplo.** Un proceso de producción automatizado consume 40 Ton diarias de plástico como materia prima. Cada que se coloca un pedido se origina un costo de \$US 10, mientras que el costo de mantenimiento de una Ton de materia prima por día es \$US 0.02. Si el tiempo de demora es de 2 días, determinar el tamaño económico del lote y el punto de reorden.

$$\text{Tamaño económico del lote: } Q^* = \sqrt{\frac{2A\lambda}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 10 \times 40}{0.02}} = 200 \text{ Ton}$$

$$\text{Longitud óptima del periodo: } T^* = \frac{Q^*}{\lambda} = \frac{200}{40} = 5 \text{ días.}$$

$$\text{Tiempo de reorden: } Tr = T^* - Td = 5 - 2 = 3 \text{ días}$$

$$\text{Punto de reorden: } r = \lambda Tr = 40 \times 3 = 120 \text{ Ton}$$

Se coloca un nuevo pedido a los tres días de iniciar cada periodo cuando el nivel de inventarios llega a 120 unidades.

La figura 31 y el ejemplo anterior consideran el caso en que  $T_d \leq T^*$ . Se deja al lector el análisis del caso en que ocurre  $T_d > T^*$ , por ejemplo  $T_d = 1.5T^*$ , en el cual se pueden tener en algún momento varios pedidos acumulados.

### 8.3 MODELO DETERMINÍSTICO CON ENTREGAS RETRASADAS.

Este caso obedece a una de dos circunstancias. En un primer caso, las demandas acumuladas insatisfechas pueden esperar hasta ser atendidas. En un segundo caso, las demandas insatisfechas acumuladas se pierden. En cualquiera de estos casos hay que considerar un **costo de penalización** adicional por no satisfacer a tiempo la demanda. Este costo tendrá dos componentes,  $C_{pen} = \Pi + \Phi$ . El primer elemento representa el costo fijo por las unidades retrasadas y el segundo un costo proporcional al tiempo de retraso.

De manera similar al procedimiento usado en el modelo determinístico simple, se puede encontrar el valor de  $Q$  que produzca los costos menores anuales para una función  $C_a(Q)$ . Esta función resulta ser la suma de los siguientes costos parciales:

1. **Costo anual de mantenimiento de los inventarios.** En las secciones

precedentes se mostró que este costo equivale a:  $IC\bar{Q} = IC\frac{1}{T}\int_0^{T_1} Q(t)dt$ , esto es,

$$C_m = IC\frac{1}{T}(Q-S)\frac{T_1}{2} = IC\frac{\lambda}{Q}(Q-S)\frac{Q-S}{2\lambda} = \frac{IC(Q-S)^2}{2Q}, \text{ en donde } S \text{ es la}$$

cantidad retrasada.

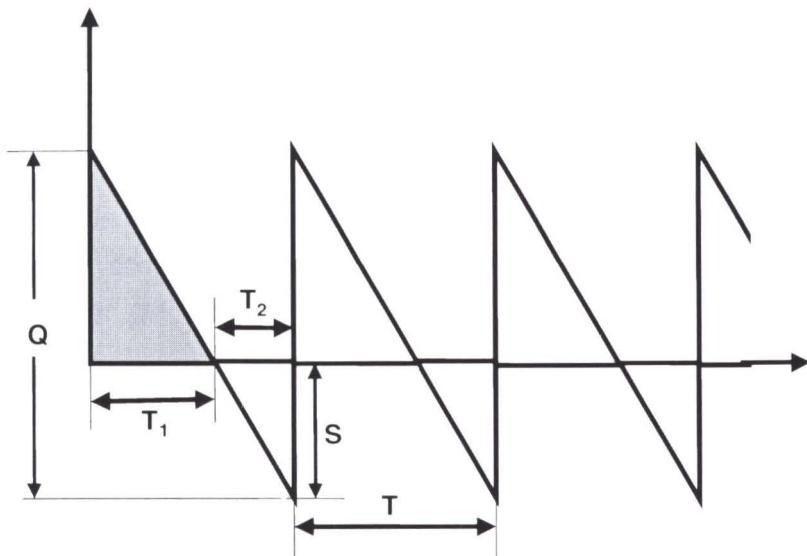


Figura 32. Modelo Determinístico con entregas retrasadas.

2. **Costo anual de los inventarios.** Número de unidades compradas en el año por su costo unitario  $C_i = \lambda C$ .
  3. **Costo anual de hacer los pedidos.** Costo del pedido por el número de pedidos en el año, esto es:  $C_h = A \frac{1}{T} = A \frac{1}{\frac{Q}{\lambda}} = \frac{\lambda}{Q} A$ .
  4. **Costo de penalización.** Se definió como  $C_{pen} = \Pi + \Phi$ . esto es, el costo fijo por las unidades retrasadas más un costo proporcional al tiempo de retraso. Si  $\mu$  define el costo fijo por cada unidad retrasada y  $\gamma$  el costo proporcional al tiempo de retraso por cada unidad, entonces,  $\Pi = \mu S \frac{1}{T}$  y  $\Phi = \gamma \frac{T_2 S}{2} \frac{1}{T}$ . Con ello,
- $$C_{pen} = \mu S \frac{1}{T} + \gamma \frac{T_2 S}{2} \frac{1}{T} = \mu S \frac{\lambda}{Q} + \gamma \frac{S S \frac{\lambda}{2 \lambda}}{Q} = \frac{1}{Q} (\mu S \lambda - \frac{\gamma S^2}{2})$$

Entonces, el costo anual en este modelo **C<sub>a</sub>(Q)**, se puede calcular como:

$$C_a(Q, S) = \lambda C + A \frac{\lambda}{Q} + IC \frac{(Q-S)^2}{2Q} + \frac{1}{Q} (\mu S \lambda + \frac{\gamma S^2}{2})$$

Aplicando los conceptos del cálculo diferencial se pueden encontrar los valores óptimos para Q y S.

$$\frac{\delta C_a}{\delta Q} = \frac{ICQ^2 - 2A\lambda - 2\mu S\lambda - \gamma S^2 - ICS^2}{2Q^2} = 0, \Rightarrow ICQ^2 = 2A\lambda + 2\mu S\lambda + (\gamma + IC)S^2 \quad (a)$$

$$\frac{\delta C_a}{\delta S} = \frac{IC(S-Q) + \mu\lambda + \gamma S}{Q} = 0, \Rightarrow S = \frac{ICQ - \mu\lambda}{IC + \gamma} \quad (b)$$

Reemplazando (b) en (a) se obtiene:

$$Q^2 = \frac{IC + \gamma}{\gamma} \left[ \frac{2\lambda A}{IC} - \frac{\mu^2 \lambda^2}{IC(IC + \gamma)} \right] \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{IC + \gamma}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\lambda A}{IC} - \frac{\mu^2 \lambda^2}{IC(IC + \gamma)}}$$

Reemplazando este valor **Q\*** en (b) se obtiene **S\***.

$$S^* = \frac{IC}{IC + \gamma} Q^* - \frac{\mu\lambda}{IC + \gamma} \Rightarrow S^* = \sqrt{\frac{IC}{IC + \gamma}} \sqrt{2\lambda A - \frac{\mu^2 \lambda^2}{IC + \gamma}} - \frac{\mu\lambda}{IC + \gamma}$$

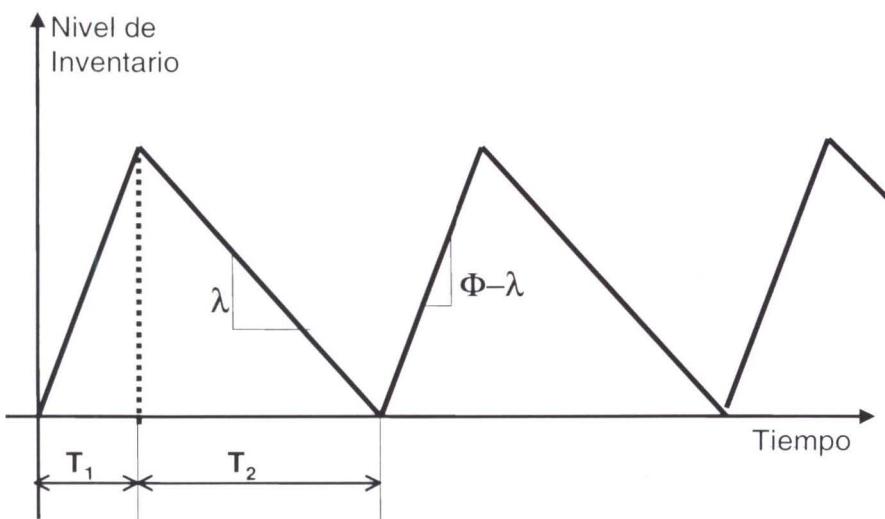
Sobre las expresiones anteriores, se puede considerar el modelo determinístico simple de entregas inmediatas si se supone que  $\gamma$  tiende a un valor muy grande ( $\gamma \rightarrow \infty$ ); es decir, se obtiene para este caso que:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} (S^*) = 0, \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} (Q^*) = \sqrt{\frac{2\lambda A}{IC}}$$

## 8.4 EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS.

1. Una embotelladora produce diferentes tipos de gaseosas usando el mismo equipo. Cuesta \$US 300 limpiarlo y prepararlo para producir otro tipo de gaseosas. Una de las gaseosas tiene una demanda determinística de 10000 litros/mes. El costo de producción es de 0.5 \$US/litro. Si  $I = 0.07$ , cuales son los valores de  $Q^*$ ,  $T^*$ ,  $C_{a.}^*$ .
2. La demanda de un producto es 300 unidades/mes y los artículos se retiran a una tasa constante. El costo de preparación cada que se hace una corrida de producción para reabastecer el inventario es \$US 150. El costo de producción es 5 \$US/unidad y el costo de mantener el inventario es 1 \$US/(unidad x mes).
  - 2.1. Si no se permiten retrasos en las entregas, determinar cada cuánto debe hacerse una corrida y de qué tamaño debe ser.
  - 2.2. Si se permiten retrasos en las entregas, con un costo fijo por cada unidad retrasada de \$US 2 y un costo de cada unidad proporcional al tiempo de retraso de \$US 1, determinar cada cuánto debe hacerse una corrida y de qué tamaño debe ser.
3. Una empresa de autobuses consume gasolina a una tasa constante de 17000 galones por mes. Puede comprar y almacenar grandes cantidades de gasolina a precios de descuento \$US 1.3 y tiene un costo fijo de \$ US 500 por cada orden. El costo de mantener el inventario es 0.05 \$US/(galón x mes).
  - 3.1. Si no se permiten retrasos en las entregas, determinar cada cuánto debe comprar y de qué tamaño debe ser el pedido.
  - 3.2. Si se admiten retrasos en las entregas, con un costo fijo por cada galón retrasado de \$US 0.3 y un costo de cada galón proporcional al tiempo de retraso de \$US 0.2, determinar cada cuánto debe comprar y de qué tamaño debe ser el pedido.

4. El modelo de la figura 33 supone que el inventario se reabastece uniformemente (a cambio de instantáneamente) a una tasa de  $\phi$  artículos por unidad de tiempo hasta que alcanza el tamaño del lote. Los artículos se retiran a una tasa de  $\lambda$  ( $\lambda < \phi$ ) artículos por unidad de tiempo. En este modelo se cumple que en el intervalo  $T_1$  los reabastecimientos y retiros son simultáneos mientras que en  $T_2$  únicamente se hacen retiros.



**Figura 33. Modelo Determinístico con reabastecimiento uniforme.**

- 4.1. Encuentre la función de costo anual para este modelo.
- 4.2. Determine el tamaño económico del lote.

## **9. MODELOS DE ESPERA O TEORÍA DE COLAS.**

La teoría de colas proporciona un gran número de modelos para el análisis matemático de los fenómenos de las líneas de espera o colas. Las colas ocurren con frecuencia cuando una serie de clientes solicitan un servicio, teniendo el servicio y la llegada de los clientes una situación de tipo probabilístico. Los modelos de espera describen el comportamiento de la cola a través del tiempo y sacan las características operacionales de la misma, pero no pretenden resolver directamente el problema de la espera en cola. Por lo tanto, algunos de los parámetros manejados en los modelos son el tiempo promedio de espera en la cola, el número promedio de clientes en la cola, el tiempo de ocupación de los servidores y otros más. Muchos de los problemas del análisis de líneas de espera requieren de los modelos de Simulación, aquí solamente se tratarán los aspectos básicos sobre los modelos más elementales sin considerar la optimización de los sistemas reales que representan.

### **9.1 PROCESO BÁSICO DE UNA COLA.**

El proceso básico supuesto para los modelos de espera es el siguiente: **un flujo de clientes provenientes de una fuente de entrada llegan a una cola para buscar una estación de servicio, donde el cliente  $i$ -ésimo llega en el instante  $t_i$ ; este cliente puede ser demorado un tiempo  $D_i$  mientras espera que los clientes que están delante de él en la cola sean atendidos por el despachador.** Se puede definir a  $S_i$  como el tiempo de servicio empleado

efectivamente para recibir atención este cliente o tiempo que el individuo pasa en el sistema. Se define una **estación de servicio** como la porción de una instalación o estación que puede suministrar servicio a un cliente a la vez.

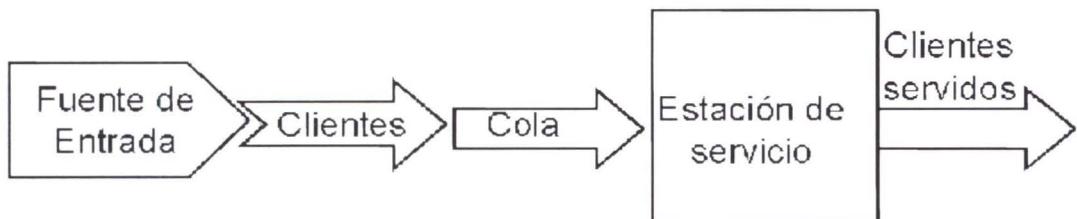


Figura 34. Proceso básico de Colas.

Si  $W_i$  representa el tiempo de espera en la estación del cliente  $i$ -ésimo, esto es,  $W_i = D_i + S_i$ , entonces él abandona el sistema en el instante  $t_i + W_i = t_i + D_i + S_i$ . Los valores  $t_i$ ,  $W_i$ ,  $S_i$  y  $D_i$  son variables aleatorias. Para cada instante  $t$ , se define  $N(t)$  como el número de clientes en el sistema en ese instante.

En muchos casos se supone que las llegadas ocurren con una distribución de

Poisson, es decir,  $P(x = j) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!}$ . En este caso, el parámetro  $\lambda$ , es la intensidad

o tasa promedio de llegadas al sistema o valor esperado del número de llegadas por unidad de tiempo. Ocasionalmente, las llegadas pueden ser en lotes de tamaño fijo o variable. Un ejemplo lo constituyen las llegadas de aviones a aeropuertos; cada avión se considera una unidad que requiere servicio; mientras que los pasajeros que llegan dentro del avión componen un lote que requiere la utilización de otros servicios.

## 9.2 DISCIPLINA DE LA COLA.

Es el método empleado para seleccionar los clientes en la cola con el fin de atenderlos. Este orden de prioridades puede ser primero en entrar primero en salir, aleatorio, prioridad a los clientes que emplearán menos tiempo en la estación o primero, los de una clase; luego, los de otra; y así sucesivamente.

La duración  $t$  del servicio, ocurre en muchos casos de acuerdo con una distribución exponencial  $f(t) = \mu e^{-\mu t}$ . El parámetro  $\mu$  representa la tasa promedio de servicio o valor esperado del número de clientes atendidas por unidad de tiempo.

El mecanismo de servicio puede tener uno o varios canales en serie o en paralelo. En un modelo de colas debe ser posible especificar el arreglo de los canales y el número de ellos.

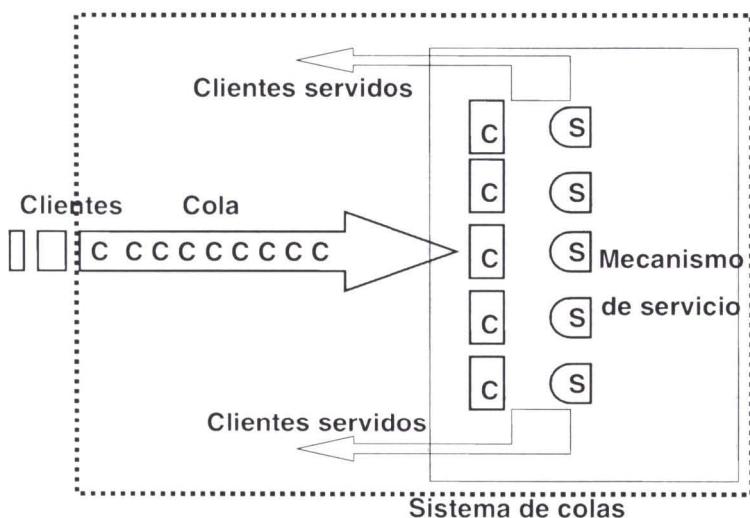


Figura 35. Modelo de Colas.

### 9.3 TERMINOLOGÍA BÁSICA.

Si el sistema de cola se encuentre en el estado estable, esto es, una cola que lleva operando mucho tiempo y por la cual han pasado o pasarán muchos clientes y se supone que los límites usados en las siguientes expresiones existen, entonces:

$$\frac{1}{\lambda} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{E(t_j)}{j}, \quad \frac{1}{\mu} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^j E(S_i)}{j}$$

Donde  $\lambda$  es tasa de llegada a la cola y  $\mu$  tasa de servicio en el sistema. Como  $n(t)$  es el número de clientes en el sistema en el instante  $t$ , si se define  $L$  como el número promedio de clientes en el sistema,  $w$  como el tiempo promedio de espera de un cliente en el sistema y  $P_n$  como la proporción de tiempo que se tienen  $n$  clientes en el sistema, entonces:

$$w = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^j E(W_i)}{j}, \quad L = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T E(n(t)) dt}{T}$$
$$P_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T P(n(t) = n) dt}{T}, \quad P(W \leq t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^j P(W_i \leq t)}{j}$$

En procesos de cola en estado estable  $L = \lambda w$ , llamada fórmula de Little debido a que John D. C. Little proporcionó la primera demostración rigurosa de ella.

### 9.4 EL PROCESO DE POISSON.

La representación más común en los procesos de llegada a una cola es el proceso de Poisson. Suponiendo que  $X_t$  es el número de llegadas en el intervalo  $(0, t]$ . El conjunto de variables aleatorias  $\{X_t, t\}$  es un proceso de Poisson, si para  $t > 0$  y

algún número real  $\lambda > 0$ ;  $X_t$  tiene la distribución  $P_n(t) = P(X_t = n) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$ . Esta

relación se obtiene por medio de argumentos matemáticos basados en una serie de supuestos del proceso. Las propiedades del proceso de Poisson son:

1. El número de llegadas en intervalos disyuntos, son variables aleatorias mutuamente independientes. Esta propiedad se conoce como de incrementos independientes.
2. La distribución del número de llegadas en el intervalo  $(t, t + h]$  depende únicamente de la longitud del intervalo. Esta propiedad se conoce como de incrementos estacionarios.
3. De la función de densidad de probabilidad se puede ver que para intervalos suficientemente pequeños, existe una alta probabilidad de cero llegadas; la probabilidad de exactamente una llegada es aproximadamente proporcional a la longitud del intervalo, mientras que la probabilidad de 2 o más llegadas es insignificante comparada con la probabilidad de exactamente una llegada. Esta última propiedad se conoce como de ordenabilidad. Matemáticamente se expresa como  $\lim_{t \rightarrow 0} P(X_t = 0) = 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} P(X_t = 1) = \lambda$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} P(X_t \geq 2) = 0$ .

#### 9.4.1 Tiempos entre llegadas, Proceso Poisson.

Si  $\Gamma_1$  es el instante en que ocurre la primera llegada y  $F(t)$  su distribución de probabilidad, entonces la probabilidad de que no hayan llegadas en el lapso  $(0, t]$  o que la primera llegada ocurra después del instante, será  $P_0(t) = e^{-\lambda t} = 1 - F(t)$ , es

dicho,  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$  ó  $f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$  con  $E(\Gamma_1) = \frac{1}{\lambda}$ . Esto indica que la función

de probabilidad de  $\Gamma_1$  es exponencial. Si se supone que las llegadas ocurren en los instantes  $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$ , y se toman los tiempos entre llegadas  $\Gamma_i = t_i - t_{i-1}$  para

todo  $i$ , se puede demostrar que cada  $\Gamma_i$  tiene una distribución exponencial con parámetro  $\lambda$ .

Si se precisa un instante de tiempo  $u \in (0, t]$  y se tienen exactamente  $n$  llegadas en ese intervalo y se suponen los siguientes eventos  $A = \text{llegan } n \text{ en } (0, t]$ ,  $B = \text{llegan } x \text{ en } (0, u]$  y  $C = \text{llegan } n - x \text{ en } (u, t]$ . Entonces la probabilidad de  $B$  dado  $A$  es

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(C)}{P(A)}. \text{ La última igualdad se debe a la propiedad de}$$

incrementos independientes, entonces:

$$P(B|A) = \frac{\frac{e^{-\lambda u}(\lambda u)^x}{x!} \cdot \frac{e^{-\lambda(t-u)}(\lambda(t-u))^{n-x}}{(n-x)!}}{\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}} = \binom{n}{x} \left(\frac{u}{t}\right)^x \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-x}$$

Esto es, se trata de una distribución binomial con parámetro  $u/t$  independiente de  $\lambda$ . Cuando  $n=1$  se obtiene  $P(X_u = 1 / X_t = 1) = \frac{u}{t}$ , es decir, el tiempo de llegada está uniformemente distribuido en el intervalo.

## 9.5 EL PROCESO DE NACIMIENTO Y MUERTE.

La mayoría de los modelos elementales de espera suponen que las entradas y salidas de los clientes del sistema ocurren de acuerdo con el proceso de nacimiento y muerte. Este importante modelo de teoría de probabilidad tiene aplicaciones en varias áreas; sin embargo en el campo de la teoría de colas el término **nacimiento** se refiere a la llegada de un nuevo cliente al sistema y término **muerte** se refiere a la salida del cliente servido. Es decir, la ocurrencia de un evento (ya sea nacimiento o muerte) se asocia con el cambio de estado del

sistema a lo largo del tiempo. El sistema se encuentra en el estado  $E_n$  si hay  $n$  clientes en el sistema; en este caso,  $\lambda_n$  es la tasa de nacimientos,  $\mu_n$  es la tasa de muertes y  $P_n(t)$  es la probabilidad de que el sistema esté en  $E_n$  en el instante  $t$ . Solamente se considerarán ingresos de Poisson y tiempos de servicio regulados exponencialmente. Las suposiciones básicas del proceso de nacimiento y muerte son las siguientes:

1. Como el sistema se encuentra en el estado  $E_n$  en el instante  $t$ , la probabilidad de que ocurra exactamente un nacimiento en el intervalo  $(t, t + h)$  está dado por  $\lambda_n h + O(h)$ ;  $O(h)$  es una propiedad de una función. Se dice que una función es  $O(h)$  si  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{O(h)}{h} = 0$ . Algunas propiedades de  $O(h)$  son  $O(h) \pm O(h) = O(h)$ ,  $cO(h) = O(h)$ .
2. Como el sistema se encuentra en el estado  $E_n$  en el instante  $t$ , la probabilidad de que ocurra exactamente una muerte en el intervalo  $(t, t + h)$  está dada por  $\mu_n h + O(h)$ .
3. Como el sistema se encuentra en el estado  $E_n$  en el instante  $t$ , la probabilidad de más de un evento en el intervalo  $(t, t + h)$  es igual a  $O(h)$ . Por lo tanto, al menos uno de los cuatro fenómenos siguientes mutuamente excluyentes debe ocurrir en este intervalo:
  - ✓ Exactamente un nacimiento y ninguna muerte
  - ✓ Exactamente una muerte y ningún nacimiento
  - ✓ Más de un evento y
  - ✓ Ningún nacimiento o muerte.

Así que,  $P_n(t+h) = P_{n-1}(t)[\lambda_{n-1}h + O(h)] + P_{n+1}(t)[\lambda_{n+1}h + O(h)] + P_n(t)[1 - \lambda_n h - \mu_n h + O(h)]$ .

Entonces  $\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \frac{O(h)}{h}$ , tomando el límite cuando  $h \rightarrow 0$  en ambos lados de la expresión se obtiene  $\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t)$ . Particularmente cuando  $n=0$ , se definen  $\mu_0 = 0$  y  $\lambda_{-1} = 0$ , entonces  $\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1 P_1(t) - \lambda_0 P_0(t)$ . Resolviendo el sistema de estas dos ecuaciones diferenciales se obtienen expresiones para  $P_n(t)$ , la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado  $E_n$  en el instante  $t$ , que el lector interesado podrá intentar resolver.

El proceso de nacimiento puro está caracterizado porque  $\lambda_n = \lambda$  y  $\mu_n = 0$  para todos los valores de  $n$ . Las ecuaciones diferenciales en este caso son:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \quad \frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t)$$

La solución general viene dada por  $P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$ . De manera similar para el proceso de muerte pura se obtiene una distribución de la familia exponencial.

Dentro del proceso de nacimiento y muerte en el estado estable (aquel que no depende del tiempo), la probabilidad de estado estable, viene dada por

$P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t)$ , esto es,  $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$  y entonces se cumple que:

$$0 = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t) \quad \forall n > 0$$

Desarrollando el sistema de ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\begin{aligned}\lambda_0 P_0 &= \mu_1 P_1 \\ (\lambda_1 + \mu_1) P_1 &= \lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 \\ \dots \\ (\lambda_n + \mu_n) P_n &= \lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1}\end{aligned}$$

La solución este sistema de ecuaciones simultáneas produce los valores de las probabilidades de estado estable  $P_0, P_1, P_2, \dots$ . A este sistema de expresiones se le llama ecuaciones de balance, debido a la manera alterna que se puede recurrir para obtenerlas.

La figura 36 muestra los diversos estados a los cuales puede llegar el sistema. Si se igualan las tasas hacia adentro y hacia afuera de cada estado, se obtienen las ecuaciones de balance. A esto se le reconoce como el principio de tasa de entrada igual a tasa de salida.

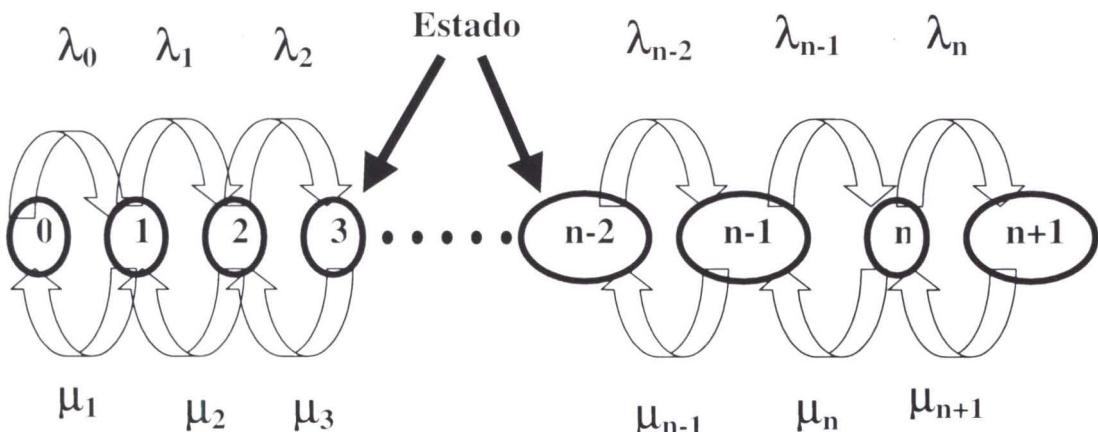


Figura 36. Diagrama de tasas para el proceso de nacimiento y muerte.

La tabla siguiente muestra la aplicación de este principio para generar las ecuaciones de balance.

Estado	Tasa de Salida =	Tasa de Entrada
0	$\lambda_0 P_0$	$= \mu_1 P_1$
1	$\lambda_1 P_1 + \mu_1 P_1$	$= \lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2$
2	$\lambda_2 P_2 + \mu_2 P_2$	$= \lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3$
	.....	.....
i	$\lambda_i P_i + \mu_i P_i$	$= \lambda_{i-1} P_{i-1} + \mu_{i+1} P_{i+1}$
	.....	.....
n	$\lambda_n P_n + \mu_n P_n$	$= \lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1}$
	.....	.....

De esta forma simplificada, se obtienen las ecuaciones que rigen el sistema. Este procedimiento es muy utilizado para desarrollar las relaciones que rigen los diversos tipos de colas. Este sistema se resuelve en función de  $P_0$  de la siguiente manera:

Estado

$$\begin{aligned}
 0: \quad P_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 \\
 1: \quad P_2 &= \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 + \frac{1}{\mu_2} (\mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0) = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0 \\
 2: \quad P_3 &= \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 + \frac{1}{\mu_3} (\mu_2 P_2 - \lambda_1 P_1) = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} P_0 \\
 \dots &\dots \\
 n-1: \quad P_n &= \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} + \frac{1}{\mu_n} (\mu_{n-1} P_{n-1} - \lambda_{n-2} P_{n-2}) = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} P_0 \\
 n: \quad P_n &= \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n + \frac{1}{\mu_{n+1}} (\mu_n P_n - \lambda_{n-1} P_{n-1}) = \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \dots \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_n \dots \mu_1} P_0
 \end{aligned}$$

Definiendo  $b_n = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$ , se obtiene  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_0 = 1$ . A partir de esta expresión se pueden calcular  $P_0 = \frac{1}{\sum b_n}$  y  $P_n = \frac{b_n}{\sum b_n}$ . Estas expresiones plantean la condición indispensable para la existencia de las probabilidades de estado estable. Es necesario que la suma  $\Sigma b_n$  converja.

## 9.6 MODELOS DE COLAS CON PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE.

Dado que se pueden asignar diferentes valores no negativos a las tasas  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$  y  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$  del proceso de nacimiento y muerte, existe una gran flexibilidad para modelar un sistema de colas. Los modelos más usados en teoría de colas están basados directamente en este proceso y entradas Poisson y tiempos de servicio exponenciales.

### 9.6.1 Modelo M/M/1.

La notación M/M/1 significa M-llegadas Poisson con tasa  $\lambda$ , M-servicio exponencial con tasa  $\mu$  y un despachador. Considerando el proceso de nacimiento y muerte se tiene que  $\lambda_n = \lambda$  y  $\mu_n = \mu$  para todo valor de  $n$ ; por lo tanto remplazando para  $b_n$  se obtiene:

$$b_n = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda}{\mu} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \Rightarrow \sum b_n = \sum \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \quad \text{cuando } \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

Entonces se obtiene que  $P_n = \frac{b_n}{\sum b_n} = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = (1 - \rho) \rho^n$  con  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ . Es decir, la condición para que existan las probabilidades es que  $\rho < 1$ . La probabilidad de

que el sistema se encuentre vacío es  $P_0 = 1 - \rho$ . Entonces, la probabilidad que el sistema esté ocupado será  $\rho$ . Por esto,  $\rho$  se define como el factor de utilización e indica que la tasa de llegada a la cola debe ser menor que la tasa de servicio en el sistema; en caso contrario, se dice que la cola "explota" o crece a infinito.

La longitud de la cola o valor esperado del número de personas en el sistema, será entonces:

$$L = \sum nP_n = \sum n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\rho \sum np^{n-1} = (1-\rho)\rho \sum \frac{d}{dp}(\rho^n) = (1-\rho)\rho \frac{d}{dp} \sum (\rho^n) =$$
$$(1-\rho)\rho \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{1-\rho} \right) = \frac{\rho}{1-\rho} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

El valor esperado del número de personas en la cola será

$$Q = \sum (n-1)P_n = \sum nP_n - \sum P_n = L - (1 - P_0) = L - \rho$$

En los modelos de cola M/M/1, la relación  $L = \lambda w$  se cumple, por lo tanto se puede calcular el valor esperado del tiempo de demora de un cliente en el sistema como

$$w = L \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

Es posible mostrar que la función de densidad de probabilidad del tiempo de un cliente en el sistema es de la forma  $f(t) = (\mu - \lambda)e^{-(\mu - \lambda)t}$ . Esto es, se distribuye exponencialmente.

El tiempo total en el sistema, se divide en un tiempo de servicio S y un tiempo de espera en la cola D, esto es  $W=D+S$ , entonces  $E(W) = E(D+S) = E(D)+E(S) = w$ . Entonces el tiempo promedio de espera en la cola se calcula como  $E(D) = w - E(S)$ .

$$E(D) = w - E(S) = w - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

### 9.6.2 Modelo M/M/s.

La notación M/M/s significa M-llegadas Poisson, con tasa  $\lambda$ , M-servicio exponencial con tasa  $\mu_n$  y s despachadores que prestan servicio a la misma cola. Gráficamente el modelo correspondiente aparece en la figura 36 mientras que el diagrama de tasas se muestra en la figura 37.

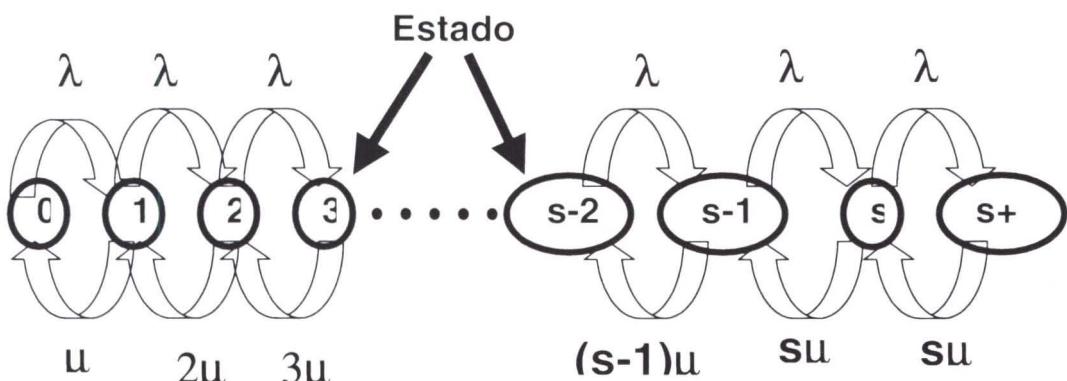


Figura 37. Diagrama de tasas para el modelo M/M/s.

Cuando el sistema tiene varios servidores no es tan sencillo expresar  $\mu_n$  o tasa media de servicio para la terminación del servicio cuando hay  $n$  clientes en el sistema. Cuando la tasa media de servicio por servidor ocupado es  $\mu$ , entonces la tasa media de servicio global para  $n$  servidores ocupados es  $n\mu$ . Entonces  $\mu_n = n\mu$  cuando  $n \leq s$  mientras que  $\mu_n = s\mu$  cuando  $n \geq s$ , ya que  $s$  servidores están ocupados. Cuando la tasa media de servicio máxima  $s\mu$  sobrepasa la tasa media

de llegadas  $\lambda$ , esto es,  $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$ , en algún momento alcanzará la condición de

estado estable. Si  $d$  es el valor esperado de la demora en cola, entonces:

$$E(D/d > 0) = \frac{1}{s\mu - \lambda}, \quad d = \frac{\mu P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} \text{ con } w = d + \frac{1}{\mu}, \quad L = \lambda w$$

donde  $P_0 = \left[ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{s\mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!(s\mu - \lambda)} \right]^{-1}$

## 9.7 EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS.

1. Identifique los clientes y los servidores del sistema de colas en cada una de las siguientes situaciones:
  - 1.1. Las cajas registradoras de un supermercado.
  - 1.2. Una estación de bomberos.
  - 1.3. La caseta de peaje de una carretera.
  - 1.4. Un taller de reparación de carros.
  - 1.5. Un muelle de carga y descarga.
  - 1.6. Un grupo de máquinas semiautomáticas asignadas a un operador.
2. Para el sistema M/M/1, encuentre la probabilidad de que haya más de  $n$  clientes en el sistema.
3. Para los sistemas M/M/1 y M/M/s escriba las ecuaciones de estado.
4. Considere un sistema M/M/1 con  $\mu = 1.0$ . Compare  $L$  para los casos en los cuales  $\lambda$  es 0.6, 0.9 y 0.99, respectivamente. Igual para  $Q$  Y  $w$ . Calcule la probabilidad de que el tiempo de espera sea mayor que 4 unidades  $P[W > 4]$ .

5. Un flujo de votantes por dos candidatos cumple un proceso de Poisson con tasas de llegada  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  independientes. Mostrar que el flujo total es un proceso de Poisson con tasa  $(\lambda_1 + \lambda_2)$ . Determine la probabilidad de que el primer cliente vote por el primer candidato.
6. Un mecánico abrió un taller de reparaciones en un garaje donde únicamente hay cupo para dos carros. El flujo de vehículos es Poisson con una tasa de 5 carros/día; pero por razones de espacio no todos pueden entrar. Durante el primer mes el taller contrata adicionalmente dos mecánicos sin experiencia que reparan carros a razón de 2.5 vehículos/día, cada mecánico, y sus sueldos son de 52 \$US/día.
  - 6.1. ¿Cuántos vehículos reparan diariamente los dos mecánicos?.
  - 6.2. ¿Cuál es el tiempo promedio de espera de cada vehículo?
  - 6.3. Al final del primer mes el taller decide salir de los dos mecánicos y contratar un mecánico con mayor experiencia y rapidez. ¿Cuál debe ser la velocidad del nuevo mecánico si se desea atender al mismo número de clientes?
  - 6.4. ¿Cuál debe ser el salario del nuevo mecánico si se supone proporcional a su tasa de servicio?
7. Una cabina telefónica recibe clientes Poisson que llegan a un promedio de 12 minutos entre cada cliente, las llamadas tienen una duración exponencial de un promedio de 4 minutos. La empresa de teléfonos decide que colocaría un segundo teléfono si los clientes tienen que esperar en promedio más de cuatro minutos para que desocupen el teléfono.
  - 7.1. ¿Para qué valor de  $\lambda$  se sucede este cambio?
  - 7.2. ¿Cuál debe ser  $\lambda$ , si la compañía de teléfonos coloca otro aparato sólo si la probabilidad de que un cliente tenga que esperar excede de 0.6?
8. Una pequeña estación de gasolina tiene cupo para dos carros solamente. Los clientes potenciales son Poisson a tasa desconocida, pero que no se detienen si el espacio está lleno (es decir, se pierden). Se sabe que el tiempo promedio entre los clientes actuales (aquellos que se detienen y son servidos) es de 6 minutos. Hay un despachador con servicio exponencial y con media de 5 minutos.

- 8.1. ¿Qué fracción de clientes potenciales se pierden?
  - 8.2. Encuentre  $L$ , si se cumple  $L = \lambda w$ .
  - 8.3. Si el despachador trabajara el doble de rápido, ¿cuánto más ingreso atraería?
9. Un sistema de colas tiene dos servidores, una distribución de tiempo entre llegadas Poisson con media de 2 horas y una distribución de tiempo de servicio Exponencial con media de 2 horas por servidor. Si a las 12 del día llega el primer cliente.
- 9.1. Cuál es la probabilidad de que la siguiente llegada ocurra antes de la 1 P.M., Entre la 1 y las 2 P.M. Después de las 2 P.M.?
  - 9.2. Cuál es la probabilidad de que le número de llegadas entre la 1 y las 2 P.M. sea 0, 2 ó más clientes?
10. El gerente de un supermercado debe decidir a quién contratar de dos cajeras, María, que trabaja despacio y puede ser empleada por  $C_1 = 5$  \$US/hora; o Alicia, que trabaja más rápido y cuesta  $C_2$  \$US/hora, donde  $C_2 > C_1$ . Ambas dan servicio exponencial a tasas  $\mu_1 = 20$  clientes/hora y  $\mu_2 = 30$  clientes/hora, respectivamente. La llegada a la caja es Poisson con  $\lambda = 10$  clientes/hora. El gerente estima que en promedio, el tiempo de cada cliente vale 0.02 \$US/min y debe ser tomado en cuenta en el modelo.
- 10.1. Calcular el costo esperado por hora al contratar a Alicia o María.
  - 10.2. ¿Cuánto estaría usted dispuesto a pagarle a Alicia?
  - 10.3. Si no se conoce la tasa de servicios de Alicia, encuentre una cota superior para la cantidad que se le pagaría.

## 10. MODELOS DE DECISIÓN MARKOVIANOS

Muchos problemas exigen tomar decisiones a partir de fenómenos o procesos que tienen asociada a ellos algún grado de incertidumbre, normalmente generada por la variación inherente aleatoria no posible de controlar, como es el caso de algunos fenómenos naturales. Esta variabilidad puede incorporarse en un modelo matemático, si muestra un cierto grado de regularidad, de manera que sea posible describir la variación mediante un modelo probabilístico.

Resulta de importancia el análisis de los procesos que evolucionan en el tiempo de una manera probabilística, llamados procesos estocásticos. Dentro de estos hay unos de tipo especial llamados cadenas de Markov, que tienen la propiedad particular de que las probabilidades que describen la forma en que el proceso evolucionará en el futuro, únicamente dependen del estado actual en que se encuentra el proceso, por lo tanto, no dependen de los eventos ocurridos en el pasado. Muchos procesos se comportan como las cadenas de Markov.

### 10.1 PROCESOS ESTOCÁSTICOS.

Es un conjunto de variables aleatorias reales ( $X_t$ ,  $t \in T$ ). Normalmente  $T$  es el conjunto de enteros no negativos y  $X_t$  representa una característica medible en el tiempo  $t$ . Por ejemplo, el proceso estocástico,  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $X_4$ , ...,  $X_n$ , puede representar el conjunto de vehículos para cada uno de los días de un año que pasan por un peaje. Otro ejemplo puede ser el siguiente problema de inventarios.

Una joyería tiene un modelo especial de reloj que se puede ordenar semanalmente. Sean  $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_n$  las demandas de este modelo durante la 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup>, ..., n<sup>a</sup>, semana, respectivamente. Se supone que las  $d_i$  son variables aleatorias independientes que tienen una distribución de probabilidad conocida. Sea  $I_0 = 3$  la cantidad que se tiene en el momento de iniciar el proceso,  $I_t$  el número de relojes que se tienen al final de cada semana t-ésima. El sábado se hace un pedido que entregan el lunes en la mañana. Se usa la siguiente política, si no hay inventario al final de la semana se ordena un pedido de 3 relojes, de otra manera, no coloca la orden. Se supone que las ventas se pierden cuando la demanda excede el inventario. Entonces,  $I_t$  para  $t = 0, 1, \dots$  es un proceso estocástico. Los estados posibles del proceso son los enteros 0, 1, 2, 3 que representan el número posible de relojes en inventario al final de la semana. Las variables aleatorias  $I_t$  se pueden evaluar iterativamente mediante la expresión

$$I_{t+1} = \begin{cases} \text{Máx}(3 - d_{t+1}) & \text{si } I_t < 1 \\ \text{Máx}(I_t - d_{t+1}) & \text{si } I_t \geq 1 \end{cases} \quad \text{para } t = 0, 1, 2, \dots$$

## 10.2 CADENAS DE MARKOV.

Al considerar el problema de experimentos independientes con resultados  $E_1, E_2, E_3, E_4, \dots, E_J$  y definiendo la variable aleatoria  $X_t = J$  cuando se obtiene el resultado  $E_J$  en el ensayo t, entonces si los ensayos son independientes se tiene que

$$P\{X_t = J \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}\} = P\{X_t = J\} \text{ para todo } t.$$

En el caso de los experimentos anteriores, se tiene una **cadena de Markov**, si el resultado de cada nuevo ensayo depende del resultado obtenido en el ensayo inmediatamente anterior pero independiente de los demás. Esto es, se cumple que

$$P\{X_t = J \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}\} = P\{X_t = J \mid X_{t-1} = i_{t-1}\} \text{ para todo } t.$$

A los resultados  $E_J$ , con  $J=1,2,3,\dots$ , se les denomina **estados del sistema**. A las probabilidades condicionales  $P\{X_{t+1} = J \mid X_{t-1} = i\}$  se les llama **probabilidades de transición**. Cuando  $X_{t-1} = i$  y  $X_{t+1} = J$ , se dice que el sistema realizó una **transición  $E_i \rightarrow E_J$  en el paso t**. Las **Cadenas de Markov homogéneas** conforman un grupo especial de probabilidades de transición que son independientes de t. Se acostumbra la siguiente notación  $P_{iJ} = P\{X_t = J \mid X_{t-1} = i\}$  y  $\pi_J(t) = P\{X_t = J\}$ . Por supuesto se cumple que  $\sum_{J=1}^{\infty} P_{iJ} = 1$ .

Una notación conveniente para representar las probabilidades de transición es la forma matricial

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1f} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2f} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \dots & P_{3f} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{f1} & P_{f2} & P_{f3} & \dots & P_{ff} \end{pmatrix}$$

Esta matriz de probabilidades de transición por cumplir la propiedad  $\sum_{J=1}^{\infty} P_{iJ} = 1$  se

denomina **matriz estocástica**. La probabilidad de transición en t pasos se define como  $P_{ij}^{(t)} = P\{X_{t+m} = J \mid X_t = i\}$ . En el caso de las cadenas homogéneas, estas probabilidades no dependen de m y deben cumplir  $P\{X_t = J\} = \pi_J(t) \sum_i \pi_i(0) P_{ij}^{(t)}$ .

### 10.2.1 Ejemplos de Cadenas de Markov.

En el problema del inventario de relojes se observa que  $X_t$ , número de relojes en el almacén al final de la semana t, es una variable aleatoria que conforma una cadena de Markov. En este caso la matriz de transición será.

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{pmatrix}$$

Suponiendo que  $D_t$  cumple una distribución Poisson con parámetro  $\lambda = 1$ , para obtener  $P_{00}$  es necesario evaluar  $P\{X_t=0 | X_{t-1}=0\}$ . En este caso,  $X_t = \max((3-D_t, 0)$ . Para que  $X_t=0$  la demanda en la semana debe ser de tres o más relojes, esto es,  $P_{00} = P(D_t \geq 3) = 0.080$ . Los demás elementos de la matriz se obtienen en forma análoga.

Considerando el siguiente modelo para el cambio del valor de una acción. Al final del día se registra el precio. Si subió, la probabilidad de que el próximo día suba es 0.66. Si bajó, la probabilidad de que el próximo día suba es sólo 0.45. En este caso puede representar el estado 0 el precio de la acción sube y el estado 1 que baja. La matriz de transición está dada por

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.66 & 0.34 \\ 0.55 & 0.45 \end{pmatrix}$$

Los estados posibles del clima de una región son: 0 día lluvioso, 1 día bueno, 2 día con nieve. Nunca hay días buenos en secuencia. Después de un día bueno existe la misma posibilidad de que el siguiente sea lluvioso o con nieve. El 50% de los días lluviosos y el 50% de los días con nieve se repiten. Cuando un día es lluvioso existe la misma posibilidad de que el siguiente sea bueno o con nieve. Cuando un día es con nieve existe la misma posibilidad de que el siguiente sea bueno o lluvioso. La matriz es:

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

### 10.3 ECUACIONES DE CHAPMAN KOLMOGOROV.

En la sección 10.2 se definió la probabilidad de transición de t pasos, la cual puede ser útil cuando el proceso se encuentra en el estado i y se desea la probabilidad de que el proceso se encuentre en el estado J después de n períodos. Las ecuaciones de Chapman Kolmogorov permiten calcular estas probabilidades de transición de t pasos:

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^M P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n-m)} \quad \forall i, J, n \quad y \quad 0 \leq m \leq n$$

Estas ecuaciones manifiestan que al pasar del estado i al estado J en n pasos, el proceso estará en algún estado k después de m pasos. El término que hay dentro de la sumatoria, es la probabilidad condicional de que, si se comienza en el estado i, el proceso va al estado k después de m pasos y después al estado J en n-m pasos. Los casos de m = 1 y m = n-1 conducen a las expresiones

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^M P_{ik} P_{kj}^{(n-1)} \quad y \quad P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^M P_{ik}^{n-1} P_{kj} . \text{ Es decir, las probabilidades de transición de}$$

n pasos se pueden obtener a partir de las probabilidades de transición de un solo paso en forma recursiva. Para n = 2,  $P_{ij}^{(2)} = \sum_{k=0}^M P_{ik} P_{kj}$ . Estos elementos son las filas de la matriz  $P^{(2)}$ , pero también se obtienen con el producto matricial (mirar Producto Matricial en el apéndice A) de la matriz de transición de un paso por ella misma; esto es,  $\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$ . Generalizando, se concluye que la matriz de probabilidades de transición de n pasos se puede obtener de la expresión

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \cdot \dots \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^n = \mathbf{P} \mathbf{P}^{n-1} = \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{P}$$

En el problema del inventario de relojes la matriz de transición de dos pasos es

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{pmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.249 & 0.286 & 0.3 & 0.165 \\ 0.283 & 0.252 & 0.233 & 0.233 \\ 0.351 & 0.319 & 0.233 & 0.097 \\ 0.249 & 0.286 & 0.3 & 0.165 \end{pmatrix}$$

Si se tiene tres relojes al final de una semana, la probabilidad de que no haya existencias en inventario dos semanas después es 0.249.

De igual manera se puede obtener la matriz de transición de cuatro pasos como

$$P^{(4)} = P^2 P^2 = \begin{pmatrix} 0.289 & 0.286 & 0.261 & 0.164 \\ 0.282 & 0.285 & 0.268 & 0.166 \\ 0.284 & 0.283 & 0.263 & 0.171 \\ 0.289 & 0.286 & 0.261 & 0.164 \end{pmatrix}$$

Así que, si se tiene dos relojes al final de una semana, la probabilidad de que no haya existencias en inventario cuatro semanas después es 0.284.

#### 10.4 CLASIFICACIÓN DE LOS ESTADOS DE UNA CADENA DE MARKOV.

Del estado  $E_k$  se puede llegar al estado  $E_J$  si existe un  $n > 0$  tal que  $P_{kj}^{(n)} > 0$ . Una cadena de Markov es **irreducible** si de cualquier estado se puede llegar hasta otro estado. Un conjunto  $C$  de estados de una cadena de Markov es **cerrado** si es imposible salir de  $C$ . esto es si  $P_{jk} = 0$  si  $J \in C$  y  $K \notin C$ .

Cuando un estado  $E_k$  forma un estado cerrado se le llama **absorbente**. En este caso  $P_{kk} = 1$ . En una cadena irreducible, el conjunto de todos los estados forma un conjunto cerrado. Si  $X_0 = J$  para un estado  $E_J$  y la probabilidad de que el primer retorno a  $J$  ocurra en el paso  $n$  se le llama  $f_J^{(n)}$ , entonces  $P_{jj}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_j^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}$  y la

probabilidad de que el sistema retorne al menos una vez hasta  $E_J$  es  $f_J = \sum_{n=1}^{\infty} f_J^{(n)}$ .

En este caso, el número esperado de pasos antes del primer retorno es  $\mu_J = \sum_{n=1}^{\infty} n f_J^{(n)}$ . Un estado  $E_J$  es **recurrente** si el retorno hasta él es seguro, esto es

$f_J = 1$ .  $E_J$  es **transitorio** si el retorno hasta él no es seguro, esto es  $f_J < 1$ . Un estado  $E_J$  es **periódico** si el retorno solamente puede ocurrir cada  $t$  pasos, esto es, en los pasos  $t, 2t, 3t, \dots$ .

#### 10.4.1 Estado estable de las cadenas de Markov.

Una cadena de Markov es **ergódica** si la distribución de probabilidad  $\{\pi_J(n)\}$  siempre converge a una distribución límite  $\pi_J$ , que no depende de la distribución inicial  $\{\pi_J(0)\}$ , es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_J(n) = \pi_K$ . La distribución de probabilidad  $\{\pi_J\}$  es **estacionaria** o de **estado estable**, si al seleccionar cualquier  $\{\pi_J(0)\}$  de distribución inicial, todas las distribuciones  $\{\pi_J(n)\}$ , coinciden con  $\{\pi_J\}$ . Además, en estos casos  $\mu_K \pi_K = 1$ . Toda distribución **estacionaria** satisface las ecuaciones:

$$\pi_K = \sum_J \pi_J P_{JK} \quad o \quad \text{matricialmente} \quad \pi = \pi P$$

$$\sum_K \pi_K = 1$$

**Ejemplo.** Un distribuidor de cierto artículo puede estar en uno de dos estados posibles. En el estado cero (**ventas buenas**) hay 50% de posibilidades de pasar al otro estado en la próxima semana. Cuando está en el estado uno (**ventas malas**), experimenta nuevas estrategias y puede volver al estado cero con probabilidad 0.4. Cuál es la probabilidad de alcanzar el estado uno en  $n$  semanas, si se empezó con ventas buenas?

$$\text{Como } \pi_J(n+1) = \sum_i \pi_i(n) P_{ij} \quad o \quad \text{matricialmente} \quad \pi(n+1) = \pi(n)P$$
$$\Rightarrow \pi(1) = \pi(0)P$$
$$\pi(2) = \pi(1)P = \pi(0)P^2$$
$$\pi(3) = \pi(2)P = \pi(0)P^3 \quad \text{en general} \quad \pi(n) = \pi(0)P^n$$

Como para examinar si esta cadena es de **estado estable**, se puede seleccionar cualquier  $\{\pi_J(0)\}$ , entonces se escoge  $\pi(0) = (1 \ 0)$  y se aplican las expresiones de cálculo para  $\pi(n)$ :

$$\pi(1) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = (0.5 \ 0.5) \Rightarrow \pi(2) = (0.5 \ 0.5) \begin{pmatrix} 0.45 & 0.55 \\ 0.44 & 0.56 \end{pmatrix} = (0.45 \ 0.55) = (\pi_0 \ \pi_1)$$

El lector podrá comprobar que para  $\pi(0) = (1 \ 0)$ , los valores sucesivos de  $\pi(n)$  son:

N	0	1	2	3	4
$\pi_0$	1	0.5	0.45	0.445	0.445
$\pi_1$	0	0.5	0.55	0.555	0.555

Así mismo, para  $\pi(0) = (0 \ 1)$ , los valores sucesivos de  $\pi(n)$  son:

N	0	1	2	3	4
$\pi_0$	1	0.4	0.44	0.445	0.445
$\pi_1$	0	0.6	0.56	0.555	0.555

En ambos casos se observa que  $\pi(n) = (0.445 \ 0.555)$  cuando n crece. Se puede demostrar que esta cadena es ergódica, solucionando el sistema de ecuaciones:

$$\pi = \pi P \quad \sum \pi_i = 1$$

En este caso las ecuaciones correspondientes son:

$$(\pi_0 \quad \pi_1) = (\pi_0 \quad \pi_1) \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \quad \pi_0 + \pi_1 = 1$$

De esta igualdad matricial se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\pi_0 = 0.5\pi_0 + 0.4\pi_1$$

$$\pi_1 = 0.5\pi_0 + 0.6\pi_1$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1$$

El lector puede analizar una de estas ecuaciones resulta redundante, por lo tanto se elimina una cualquiera de ella y se obtiene la solución  $\pi_0 = 0.445$  y  $\pi_1 = 0.555$ .

#### 10.4.2 Costo promedio esperado por unidad de tiempo.

La sección anterior estudió las cadenas de Markov cuyos estados son ergódicos (recurrentes y no periódicas). Si no se tiene el requerimiento de que los estados sean no periódicos, entonces el  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)}$  puede no existir. Pero, el siguiente límite siempre existe para una cadena de Markov irreducible con estados recurrentes:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{ij}^{(k)} \right) = \pi_j$ , en donde las  $\pi_j$  satisfacen las ecuaciones de estado estable

presentadas en la sección anterior. Resultado importante para calcular el costo promedio por unidad asociado a una cadena de Markov.

Supóngase que se incurre en un costo o factor de efectividad  $C_t$  cuando el proceso se encuentra en el estado  $E_t$  en el instante  $t$ . Nótese que  $C_t$  es una variable aleatoria e independiente de  $t$  que toma cualquiera de los valores  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_m$ . El costo promedio esperado en el que se incurre a lo largo de los primeros  $n$

períodos está dado por la expresión  $E(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n C_t)$  y usando el resultado del límite anterior, se puede demostrar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n C_t\right] = \sum_{i=0}^m \pi_i C_i$$

**Ejemplo.** En el ejemplo de la sección anterior se supone que cuando las ventas son buenas se tienen utilidades semanales promedias de \$US 1000 y cuando son malas de \$US 400, entonces las utilidades promedias por semana, esperadas a la larga, se pueden calcular como:

$$E(U) = 1000\pi_0 + 500\pi_1 = 1000 \times 0.445 + 500 \times 0.555 = \$ US 722.5$$

#### 10.4.3 Estados absorbentes.

En la sección 10.4 se indicó que el **estado k es absorbente si  $P_{kk} = 1$** , de manera que una vez la cadena llega a este estado permanece ahí para siempre. Si k es un estado absorbente, la probabilidad de llegar en algún momento a k se llama probabilidad de absorción al estado k. Esta probabilidad se denota por  $f_{ik}$ . Si se tienen varios estados absorbentes en una cadena de Markov y se evidencia que el proceso será absorbido en uno de estos estados, es deseable encontrar estas probabilidades de absorción, las cuales pueden obtenerse resolviendo un sistema de ecuaciones lineales. Si el estado k es un estado absorbente, entonces el conjunto de probabilidades de absorción  $f_{ik}$  satisface el sistema de ecuaciones sujeta a las condiciones

$$f_{ik} = \sum_{j=0}^m P_{ij} f_{jk} \quad \forall i = 0, 1, \dots, m$$

sujeta a:  $f_{kk} = 1$  y  $f_{ik} = 0$  si el estado i es recurrente e  $i \neq k$

**Ejemplo.** Una empresa clasifica el saldo de la cuenta de un cliente como pagada (estado 0), 1 a 30 días de retraso (estado 1), 31 a 60 días de retraso (estado 2) o mala deuda (estado 3). Las cuentas se revisan cada mes y se determina el estado de cada cliente. En general, los créditos no se extienden y se espera que los clientes paguen sus cuentas dentro de 30 días. A veces, los clientes pagan sólo una parte de su cuenta, en este caso quedan dentro de los 30 días de retraso (estado 1); esto es, permanecen en el estado 1. Si esto ocurre cuando el saldo está entre 31 y 60 días de retraso, se considera que el cliente se mueve al estado 1 (1 a 30 días de retraso). Los clientes que tienen más de 60 días de retraso se clasifican en la categoría de una mala deuda (estado 3); luego, las cuentas se mandan a una agencia de cobro. Después de examinar los datos de años pasados, se tiene la siguiente matriz de transición:

Estado	0: Cuenta pagada	1: 1 a 30 días de retraso	2: 31 a 60 días de retraso	3 : mala deuda
0: Cuenta pagada	1	0	0	0
1: 1 a 30 días de retraso	0.7	0.2	0.1	0
2: 31 a 60 días de retraso	0.5	0.1	0.2	0.2
3 : mala deuda	0	0	0	1

Cuál es la probabilidad de que un cliente llegue a tener una mala deuda dado que la cuenta pertenece al estado 1 a 30 días de retraso. Igualmente, dado que la cuenta está en 31 a 60 días de retraso.

Estas probabilidades  $f_{13}$  y  $f_{23}$  se calculan con el sistema de ecuaciones presentadas en esta sección, esto es:

$$f_{13} = P_{10} f_{03} + P_{11} f_{13} + P_{12} f_{23} + P_{13} f_{33}$$

$$f_{23} = P_{20} f_{03} + P_{21} f_{13} + P_{22} f_{23} + P_{23} f_{33}$$

A partir de la matriz se sustituyen los valores para cada  $P_{ij}$  y como  $f_{03} = 0$  y  $f_{33} = 1$ , estas ecuaciones se convierten en:

$$f_{13} = 0.2f_{13} + 0.1f_{23}$$

$$f_{23} = 0.1f_{13} + 0.2f_{23} + 0.2$$

La solución es  $f_{13} = 0.032$  y  $f_{23} = 0.254$ . Aproximadamente el 3% de los clientes cuyas cuentas tienen 1 a 30 días de retraso acaban por ser una mala deuda mientras que el 25% de los clientes cuyas cuentas tienen 31 a 60 días de retraso llegan a la misma categoría.

## 10.5 MODELOS DE DECISIÓN MARKOVIANOS.

Algunos sistemas importantes se pueden modelar como una cadena de Markov. Es útil describir el comportamiento de estos sistemas para evaluar su desempeño y mucho más útil diseñar la operación del sistema para optimizar su desempeño.

Un proceso de decisión consiste en que normalmente, para cada estado posible de una cadena de Markov se analiza la decisión sobre cuál, de las diferentes acciones alternativas, debe tomarse en ese estado. La acción seleccionada afecta las probabilidades de transición y a los costos o beneficios inmediatos y subsecuentes (o beneficios) de operación del sistema.

**Ejemplo.** Un fabricante tiene una máquina clave en el núcleo de uno de sus procesos. Como ésta tiene un uso pesado se deteriora rápidamente tanto en calidad como en la cantidad de producción. Por lo tanto, al final de cada semana, se realiza una inspección exhaustiva para clasificar la condición de la máquina en uno de cuatro estados posibles:

- 0: Excelente para la producción.
- 1: Operable para la producción de calidad con muy poco deterioro.
- 2: Operable para la producción de calidad con bastante deterioro.
- 3: No operable para la producción de calidad.

Los datos históricos sobre los resultados de inspecciones permitió un análisis estadístico de la evolución del estado de la máquina de un mes a otro. La siguiente matriz muestra la frecuencia relativa (probabilidad) de cada transición posible del estado en el que se encuentra en un mes al estado en el que se encuentra el siguiente mes.

Estado	0	1	2	3
0	0	7/8	1/16	1/16
1	0	¾	1/8	1/8
2	0	0	½	½
3	0	0	0	1

El último elemento de esta matriz de transición indica que, una vez que la máquina se vuelve inoperable (entra al estado 3), permanece inoperable, esto es, el estado 3 es absorbente. Dejar la máquina en este estado sería intolerable ya que esto detendría el proceso de producción, por lo que la máquina debe reemplazarse. (La reparación no es factible en este estado). La nueva máquina comenzaría entonces en el estado 0. El proceso de reemplazo toma 1 semana de manera que la producción se pierde durante este periodo. El costo de la producción perdida (ganancia perdida) es de \$US 2000 y el costo de reemplazar la máquina es de \$US 4000 de manera que el costo total en el que se incurre siempre que la máquina actual entra al estado 3 es de \$US 6000. Antes de que la máquina llegue al estado 3, puede incurrirse en costos por producir artículos defectuosos. Los costos esperados por semana debido a artículos defectuosos \$US 0, 1000 y 3000 respectivamente para los estados 0, 1, 2. Estos costos relevantes están asociados con la política de mantenimiento, **reemplazar la máquina cuando es inoperable, pero no darle mantenimiento en otros casos**. Bajo esta política, la evolución del estado del sistema o sucesión de máquinas, es una cadena de Markov con la siguiente matriz de transición:

Estado	0	1	2	3
0	0	7/8	1/16	1/16
1	0	¾	1/8	1/8
2	0	0	½	½
3	1	0	0	0

Para evaluar esta política de mantenimiento, deben considerarse tanto los costos inmediatos en que se incurre en la siguiente semana, como los costos subsecuentes que resultan cuando el sistema evoluciona de esta forma. Una medida de desempeño usada para cadenas de Markov es el costo promedio esperado por unidad de tiempo sobre un periodo largo. El calculo de esta medida, exige encontrar las probabilidades de estado estable con el siguiente sistema:

$$\pi_0 = \pi_3$$

$$\pi_1 = \frac{7}{8}\pi_0 + \frac{3}{4}\pi_1$$

$$\pi_2 = \frac{1}{16}\pi_0 + \frac{1}{8}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2$$

$$\pi_3 = \frac{1}{16}\pi_0 + \frac{1}{8}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2$$

$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$$

$$Solución: \quad \pi_0 = \frac{2}{13}, \quad \pi_1 = \frac{7}{13}, \quad \pi_2 = \frac{2}{13}, \quad \pi_3 = \frac{2}{13}$$

Así, a la larga, el costo promedio esperado por semana para esta política de

mantenimiento es  $C = 0\pi_0 + 1000\pi_1 + 3000\pi_2 + 6000\pi_3 = \frac{25000}{13}.$

Sin embargo, pueden existir otras políticas de mantenimiento que deben considerarse y compararse con ésta. Por ejemplo, es posible que la máquina debiera reemplazarse antes de llegar al estado 3. Otra alternativa puede ser hacer una reparación general a un costo de \$2000; opción no factible en el estado 3 y no mejora la máquina si está en el estado 0 o el 1; sólo es de interés en el estado 2. En este estado, una reparación general regresaría a la máquina al estado 1. Se requiere una semana para ello, por lo que otra consecuencia sería un gasto de

\$2000 por las ganancias perdidas al no producir. Las decisiones posibles después de cada inspección son las siguientes:

Decisión	Acción	Estados relevantes	Costo total por semana
1	No hacer nada.	0	0
		1	1000
		2	3000
2	Reparación general. Regresa al estado 1.	2	4000
		1	6000
		2	6000
3	Reemplazo. Regresa al estado 0.	3	6000

#### 10.5.1 Modelo para procesos de decisión Markovianos.

Uno de los modelos para los procesos markovianos de decisión se puede resumir:

1. Se observa el estado  $i$  de la cadena de Markov después de cada transición, para todo  $i = 0, 1, \dots, m$ .
2. Enseguida se selecciona una decisión  $k$  de un conjunto de acciones posibles. Algunas de las acciones pueden no ser relevantes para algunos estados.
3. La elección de la decisión  $d_i = k$  en el estado  $i$ , crea un costo inmediato con un valor esperado  $C_{ik}$ .
4. La decisión  $d_i = k$  en el estado  $i$  determina las probabilidades  $P_{ik}(k)$  para la siguiente transición desde el estado  $i$ .
5. Una especificación de las decisiones  $d_0, d_1, \dots, d_m$ , para los estados respectivos, define una política para el proceso markoviano de decisión.
6. El objetivo es encontrar una política óptima de acuerdo a algún criterio de costo que considere los costos inmediatos y subsecuentes que resulten de la evolución futura del proceso. Un criterio común es minimizar el costo promedio esperado por unidad de tiempo a lo largo del mismo.

En el ejemplo de la sección anterior, después de cada inspección de la máquina, se elige entre tres decisiones posibles: no hacer nada, reparación general o reemplazo. El costo esperado inmediato que resulta aparece en la última columna de la tabla de la página anterior para cada combinación relevante de estados y decisiones. Para el ejemplo de la sección anterior, se debe encontrar una política óptima entre todas las políticas relevantes. En la tabla siguiente se denota por  $R$  a la política específica y por  $d_i(R)$  la decisión que debe tomarse en el estado  $i$ .

### Solución del ejemplo por enumeración exhaustiva

POLÍTICAS RELEVANTES		Decisiones			
Política	Descripción	$d_0(R)$	$d_1(R)$	$d_2(R)$	$d_3(R)$
$R_a$	Reemplazo en el estado 3	1	1	1	3
$R_b$	Reemplazo en el estado 3 y Reparación en el estado 2.	1	1	2	3
$R_c$	Reemplazo en los estados 2 y 3	1	1	3	3
$R_d$	Reemplazo en los estados 1, 2 y 3	1	3	3	3

Cada una de estas políticas tiene una matriz de transición diferente, como se muestra enseguida:

$$\begin{array}{c}
 R_a \\
 \left( \begin{array}{cccc}
 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\
 \frac{3}{8} & 1 & 1 & 1 \\
 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\
 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
 1 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 R_b \\
 \left( \begin{array}{cccc}
 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\
 \frac{3}{8} & 1 & 1 & 1 \\
 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 R_c \\
 \left( \begin{array}{cccc}
 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\
 \frac{3}{8} & 1 & 1 & 1 \\
 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 R_d \\
 \left( \begin{array}{cccc}
 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\
 \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

De los costos totales por semana de la sección anterior, los valores de  $C_{ik}$  son:

Estados	C <sub>ik</sub> en \$US para la decisión		
	1	2	3
0	0		
1	1000		6000
2	3000	4000	6000
3			6000

El costo promedio esperado a largo plazo por unidad de tiempo, se calcula con la expresión  $E(C) = \sum_{i=0}^M C_{ik} \pi_i$ , siendo  $k = d_i(R)$  para cada  $i$  y  $\pi_i$  representa la distribución de estado estable para los estados del sistema según la política  $R$  que se está evaluando. Una vez obtenidos  $\pi_0, \pi_1, \pi_2$  y  $\pi_3$  para cada una de las cuatro políticas, el cálculo de  $E(C)$  se presenta en la siguiente tabla:

Política	$\{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3\}$	$E(C)$ en \$US
$R_a$	$\left\{ \frac{2}{13}, \frac{7}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13} \right\}$	$\frac{2}{13}0 + \frac{7}{13}1000 + \frac{2}{13}3000 + \frac{2}{13}6000 = 1923$
$R_b$	$\left\{ \frac{2}{21}, \frac{5}{7}, \frac{2}{21}, \frac{2}{21} \right\}$	$\frac{2}{21}0 + \frac{5}{7}1000 + \frac{2}{21}4000 + \frac{2}{21}6000 = 1667$
$R_c$	$\left\{ \frac{2}{11}, \frac{7}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11} \right\}$	$\frac{2}{11}0 + \frac{7}{11}1000 + \frac{1}{11}6000 + \frac{1}{11}6000 = 1727$
$R_d$	$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{7}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32} \right\}$	$\frac{1}{2}0 + \frac{7}{16}6000 + \frac{1}{32}6000 + \frac{1}{32}6000 = 3000$

De los cálculos anteriores se obtiene que la política óptima es  $R_b$ , esto es, reemplazar la máquina cuando llegue al estado 3 y hacer una reparación general en el estado 2. En el largo tiempo, el costo esperado es 1667 \$US/semana.

### 10.5.2 Uso de la Programación Lineal.

Como en el ejemplo de la sección anterior sólo existen cuatro políticas relevantes, resulta adecuado hacer uso de la enumeración exhaustiva para encontrar la

política óptima. Enfoque no factible cuando se tienen muchas políticas, casos en los cuales se necesitan otros algoritmos, uno de ellos el uso de la Programación Lineal.

En la sección anterior se utilizó el tipo normal de política, llamada determinística estacionaria, usada en los procesos de decisión de Markov. Se vio que cualquier política  $R$  se interpreta como una regla que toma la decisión  $d_i(R)$  cuando el sistema se encuentra en el estado  $i$ , para  $i = 0, 1, \dots, m$ . Entonces  $R$  queda definida por los valores  $\{d_0(R), d_1(R), d_2(R), \dots, d_m(R)\}$ . Así mismo,  $R$  se puede caracterizar por la asignación de valores  $D_{ik} = 1$  si la decisión  $k$  debe tomarse en el estado  $i$  o  $D_{ik} = 0$  en cualquier otro caso en la matriz

$$\begin{array}{c} & & & \text{Decisión } k \\ & 1 & 2 & \cdots & l \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ m \end{matrix} & \left( \begin{array}{ccccc} D_{01} & D_{02} & \cdots & \cdots & D_{0l} \\ D_{11} & D_{12} & \cdots & \cdots & D_{1l} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & \cdots & D_{2l} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ D_{m1} & D_{m2} & \cdots & \cdots & D_{ml} \end{array} \right) \\ \text{Estado} & & & & \end{array}$$

Para el ejemplo que se viene utilizando, la siguiente matriz caracteriza la política de no hacer nada (decisión 1) cuando la máquina llega a los estados 0 o 1, reparar en forma general (decisión 2) en el estado 2 y reemplazar (decisión 3) en el estado 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La definición de  $D_{ik} = 1$  ó  $0$  permite formular modelos de programación lineal. Para ello, el costo esperado de una política se puede expresar como una función lineal de los  $D_{ik}$  o de algunas variables relacionadas, sujeta a restricciones

**lineales.** Para obviar el hecho de que se requieren variables continuas para la formulación de programación lineal, se amplía la interpretación de una política. Se había considerado tomar la misma decisión cada vez que el sistema se encuentre en el estado  $i$ , que **se cambia por la determinación de una distribución de probabilidad para tomar la decisión cuando el sistema se encuentre en el estado  $i$** . Esto es:  $D_{ik} = P(\text{decisión} = k \mid \text{estado} = i)$ . La distribución de probabilidad para la decisión que debe tomarse en el estado  $i$  es  $(D_{i1}, D_{i2}, D_{i3}, \dots, D_{im})$ . A este tipo de política se le llama **aleatorizada**, mientras que a la anterior ( $D_{ik} = 1$  ó  $0$ ) se le denomina **determinística**.

Para el ejemplo que se viene utilizando, la siguiente matriz caracteriza la política de tomar la decisión 1 (no hacer nada) cuando la máquina llega al estado 0. Cuando llega al estado 1, se deja como está con probabilidad  $\frac{1}{2}$  y se reemplaza con probabilidad  $\frac{1}{2}$ . Si llega al estado 2, hay una probabilidad de  $\frac{1}{4}$  de dejarla como está, una probabilidad de  $\frac{1}{4}$  de repararla y una de  $\frac{1}{2}$  para reemplazarla. Si la máquina llega al estado 3, siempre será reemplazada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Variables de decisión.** Para cada  $i = 0, 1, \dots, m$  y  $k = 1, 2, \dots, l$ , sea  $X_{ik}$  la probabilidad incondicional de estado estable de que el sistema se encuentre en el estado  $i$  y se tome la decisión  $k$ .

$$X_{ik} = P(\text{estado} = i \text{ y decisión} = k).$$

Cada  $X_{ik}$  tiene una relación con la  $D_{ik}$  correspondiente, pues de las reglas de probabilidad condicional, se tiene  $X_{ik} = \pi_i D_{ik}$ . Siendo  $\pi_i$  la probabilidad de estado estable de que la cadena de Markov se encuentre en el estado i. Se cumple entonces  $\pi_i = \sum_{k=1}^l X_{ik}$  de manera que  $D_{ik} = \frac{X_{ik}}{\pi_i} = \frac{X_{ik}}{\sum_{k=1}^l X_{ik}}$ .

### Restricciones.

1.  $\sum_{i=0}^m \pi_i = 1$ , esto es,  $\sum_{i=0}^m \sum_{k=1}^l X_{ik} = 1$ .
2. De los resultados de las probabilidades de estado estable  $\pi_j = \sum_{i=0}^m \pi_i P_{ij}$ , es decir,  $\sum_{k=1}^l X_{jk} = \sum_{i=0}^m \sum_{k=1}^l X_{ik} P_{ij}(k)$  para  $J = 0, 1, 2, \dots, m$ .
3.  $X_{ik} \geq 0$ , para  $i = 0, 1, \dots, m$  y  $k = 1, 2, \dots, l$ .

El **modelo de programación lineal** consiste en encontrar los  $X_{ik}$ , para

$$\text{Min}(Z) = \sum_{i=0}^m \sum_{k=1}^l C_{ik} X_{ik}$$

Sujeto a las restricciones:

$$\sum_{i=0}^m \sum_{k=1}^l X_{ik} = 1$$

$$\sum_{k=1}^l X_{jk} - \sum_{i=0}^m \sum_{k=1}^l X_{ik} P_{ij}(k) = 0$$

$$X_{ik} \geq 0$$

Una resuelto el modelo, se encuentra a  $D_{ik} = \frac{X_{ik}}{\sum_{k=1}^l X_{ik}}$

### Solución del ejemplo prototipo por programación lineal

**Variables de decisión.** Revisando el ejemplo que se ha venido manejando, las variables de decisión que deben incluirse en el modelo son  $X_{01}$ ,  $X_{11}$ ,  $X_{13}$ ,  $X_{21}$ ,  $X_{22}$ ,  $X_{23}$ ,  $X_{33}$ ,

### Modelo de programación lineal.

$$\text{Min}(Z) = 1000 X_{11} + 6000 X_{13} + 3000 X_{21} + 4000 X_{22} + 6000 X_{23} + 6000 X_{33}$$

$$\text{Sujeto a: } X_{01} + X_{11} + X_{13} + X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{33} = 1$$

$$X_{01} - (X_{13} + X_{23} + X_{33}) = 1$$

$$8X_{11} + 8X_{13} - (7X_{01} + 6X_{11} + 8X_{22}) = 0$$

$$16X_{21} + 16X_{22} + 16X_{23} - (X_{01} + 2X_{11} + 8X_{21}) = 0$$

$$16X_{33} - (X_{01} + 2X_{11} + 8X_{21}) = 0$$

$$X_{ik} \geq 0$$

La solución óptima es  $X_{01} = \frac{2}{21}$ ,  $X_{11} = \frac{5}{7}$ ,  $X_{13} = 0$ ,  $X_{21} = 0$ ,  $X_{22} = \frac{2}{21}$ ,  $X_{23} = 0$ ,  $X_{33} = \frac{2}{21}$ ,

de tal forma que  $D_{01} = 1$ ,  $(D_{11}, D_{13}) = (1, 0)$ ,  $(D_{21}, D_{22}, D_{23}) = (0, 1, 0)$ ,  $D_{33} = 1$ .

Entonces, debe dejarse la máquina como está (decisión 1) cuando se encuentre en el estado 0 o 1, debe hacerse una reparación general (decisión 2) cuando se llegue al estado 2 y debe reemplazarse (decisión 3) si está en el estado 3. Es la misma

política óptima encontrada mediante la enumeración exhaustiva en la sección 10.5.1.

## 10.6 EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS.

1. Dos máquinas dan premio, la primera con probabilidad  $a$  y la segunda con probabilidad  $b$ . Una persona juega, si pierde juega de nuevo en la misma máquina, si gana cambia de máquina. Encuentre la matriz de transición y las probabilidades de estado.
2. Un computador se inspecciona cada día. Los estados son: está trabajando o descompuesto. Si está trabajando, la probabilidad de que siga trabajando el siguiente día es 0.80. Si está descompuesto se repara, lo que puede emplear más de 1 día. Siempre que el computador esté descompuesto (independientemente de cuánto tiempo haya pasado), la probabilidad de que siga descompuesto el siguiente día es 0.3.
  - 2.1. Construya la matriz de transición de un paso para esta cadena de Markov.
  - 2.2. Encontrar el tiempo esperado de primera pasada del estado  $i$  al estado  $j$ .
3. Una máquina, cuando está operando al comenzar el día tiene una probabilidad de 0.1 de descomponerse en algún momento de ese día. Cuando esto ocurre, la reparación se hace al siguiente día y se termina al finalizar ese día.
  - 3.1. Formule la evolución del estado de la máquina como una cadena de Markov, identificando los tres estados posibles al final del día y después construyendo la matriz de transición (de un paso).
  - 3.2. Encontrar el tiempo esperado de primera pasada del estado  $i$  al estado  $j$ .
  - 3.3. Si la máquina tiene 20 días sin descomponerse desde la última reparación, cuál es el número esperado de días que la máquina permanecerá en operación antes de la siguiente descompostura.
4. La cervecería "EL CÓNDOR" debe analizar su posición en el mercado, debido a las últimas estrategias de su mayor competidor, "EL TIGRE". Se piensa modelar el cambio

de marca como una cadena de Markov, incluyendo tres estados: los estados A y B representan a los clientes que beben cerveza producida por las mencionadas cervecerías y el estado C representa a todas las demás marcas. Los datos se toman cada mes y el analista del CÓNDOR construye la siguiente matriz de transición con datos históricos.

	A	B	C
A	0.7	0.2	0.1
B	0.2	0.7	0.1
C	0.2	0.2	0.6

- 4.1. ¿Cuáles son los porcentajes de mercado en el estado estable para las dos cervecerías grandes?
  
5. Un fabricante de VHS ofrece garantía de reposición total si un aparato falla dentro de los 2 primeros años. Basándose en datos compilados, la compañía ha notado que sólo el 1% de sus grabadoras fallan durante el primer año mientras que 5% de ellas sobreviven el primer año pero fallan durante el segundo. La garantía no cubre VHS ya reemplazadas.
  - 5.1. Formule la evolución del estado de un aparato como una cadena de Markov que incluyen dos estados absorbentes que representan la necesidad de cubrir la garantía o el hecho de que un VHS sobreviva el periodo de garantía. Después construya la matriz de transición (de un paso).
  - 5.2. Encontrar probabilidad de que el fabricante tenga que cubrir una garantía.
  
6. Un inversionista cada año tiene la oportunidad de invertir en dos fondos diferentes F1 y F2. Al final de cada año, el inversionista liquida su inversión, recoge sus ganancias y reinvierte. Las ganancias anuales de los fondos dependen de la reacción del mercado. En los últimos años el mercado ha oscilado alrededor de los 45 puntos, de acuerdo con las probabilidades que se dan en la siguiente matriz:

	4400	4500	4600
4400	0.3	0.5	0.2
4500	0.2	0.5	0.3
4600	0.1	0.5	0.4

- 6.1. Cada año en que el mercado sube (o baja) 100 puntos, el F1 tiene ganancias o pérdidas de \$US 200, mientras que el F2 tiene ganancias o pérdidas de \$US 100. Si el mercado sube o baja 200 puntos en un año, las ganancias o pérdidas del F1 serán de \$US 500 mientras que las del F2 serán de \$US 200. Si el mercado no cambia, ninguno de los fondos tiene ganancias o pérdidas. El inversionista quiere determinar su política óptima de inversión con el fin de minimizar en el largo plazo el costo (pérdida menos ganancia) promedio esperado por año.
- 6.2. Formule este problema como un problema de decisión de Markov identificando los estados y las decisiones. Después encuentre las  $C_{ik}$ .
- 6.3. Identifique todas las políticas determinísticas. Para cada una, encuentre la matriz de transición y escriba una expresión para el costo promedio esperado (a la larga) por periodo en términos de las probabilidades de estado estable  $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ .
- 6.4. Encontrar la política óptima por enumeración exhaustiva.
7. Una compañía revisa anualmente el estado de uno de sus productos importantes. Decide si tiene éxito (estado 0) o no lo tiene (estado 1). Después debe decidir si da o no publicidad al producto con el fin de promocionar las ventas. Las matrices  $P_0$  y  $P_1$  dan las matrices de transición con o sin publicidad respectivamente. Los rendimientos asociados están dados por las matrices  $R_0$  y  $R_1$ . Determine las decisiones óptimas en los tres años siguientes.

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \quad R_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \quad R_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

## APÉNDICE A.

### A. ELEMENTOS BÁSICOS SOBRE MATRICES Y VECTORES.

El desarrollo y comprensión de algunos elementos teóricos y de cálculo de la Investigación de Operaciones, requiere de la mezcla de un conjunto de conceptos y técnicas básicas de algunos tópicos matemáticos. En este apéndice se presentarán solamente aquellos tópicos de las Matrices y Vectores que faciliten el entendimiento y ayuden al lector en la aplicación del material presentado en los capítulos.

#### A.1 MATRIZ.

Una **Matriz** es un arreglo rectangular de  $m \times n$  números, dispuestos en **m filas** y **n columnas**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Los  $a_{ij}$  de la Matriz  $A=(a_{ij})$  son llamados **elementos de la matriz** y el doble subíndice define la **posición de fila y columna**. En el caso anterior diremos que la matriz es de **orden  $m \times n$**  y lo podremos simbolizar como  $\mathbf{A}_{mn}$ .

#### A.2 ALGUNAS MATRICES ESPECIALES.

**A.2.1 Vector columna (Vector):** Es una matriz con solamente una columna y cualquier número de filas.

**A.2.2 Vector fila (Fila):** Es una matriz con solamente una fila y cualquier número de columnas.

**A.2.3 Matriz Nula:** Es aquella con  $a_{ij} = 0$ , para todo  $i, j$ .

**A.2.4 Matriz cuadrada:** Una matriz A se llama **cuadrada** si  $m=n$ , esto es, tiene igual número de filas y columnas. Se dice que es de orden n y se simboliza  $A_n$ .

**A.2.5 Matriz triangular:** Es una matriz cuadrada que cumple una de las siguientes condiciones:

$$A) a_{ij} = 0 \text{ para todo } i > j. \quad \text{ó} \quad B) a_{ij} = 0 \text{ para todo } i < j.$$

Las matrices A y B presentadas enseguida son triangulares:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 3 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

**A.2.6 Matriz diagonal:** Es una matriz cuadrada con  $a_{ij} = 0$  para todo  $i \neq j$ . Equivale a decir que cualquier elemento ocupando una posición fuera de la **diagonal de la matriz** es nulo.

**A.2.7 Matriz idéntica:** Es una matriz diagonal con  $a_{ii} = 1$ . Equivale a decir que cada elemento de la diagonal es 1.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**A.2.8 Transpuesta de una matriz.** Dada una matriz **A de orden mxn**, su **transpuesta**  $A^T$ , será otra **matriz de orden nxm**, obtenida al intercambiar respectivamente filas por columnas en la matriz A.

Una matriz A, se llama **simétrica**, si cumple  $A^T = A$ ; y se llama **oblicuamente simétrica**, cuando cumple  $A^T = -A$ .

### A.3 IGUALDAD DE MATRICES.

Dos matrices son iguales solamente si sus elementos correspondientes (misma posición de fila y columna), son iguales. Por consiguiente, ambas matrices tendrán el mismo orden.

### A.4 OPERACIONES PARA MATRICES.

**A.4.1 Suma de matrices:** La suma de las matrices  $A_{mn}$  y  $B_{mn}$  es otra matriz  $C_{mn}$ , tal que cada elemento en la posición fila i-ésima, columna j-ésima de la matriz resultado, se obtiene como:

$$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

**A.4.2 Producto escalar:** Operación producto entre un número real  $\alpha$  y una matriz  $A$ .

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

La expresión anterior indica que el escalar multiplicará a cada uno de los elementos de la matriz.

**A.4.3 Producto matricial:** Operación producto entre 2 matrices. El producto de dos matrices A y B, se define sólamente bajo la posición de que el número de columnas de A, primera matriz sea igual al número de filas de B, segunda matriz. Esto es:

$$A_{mp} * B_{pn} = C_{mn}$$

En donde cada elemento de la matriz resultado se obtiene como:

$$c_{ij} = \sum a_{ik}b_{kj}, \text{ con } k=1,2,3,\dots,p$$

**Ejemplo.** Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , el producto  $C = AB$ , es

$$C = AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & -1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

**A.4.4 Propiedades de la suma y productos:** Para las expresiones siguientes **A, B, C** son matrices y **a, β** son escalares. Así mismo, asumimos que las operaciones son realizables.

Asociativa:  $(A + B) + C = A + (B + C)$

$$(A^*B)^*C = A^*(B^*C)$$

$$a(A^*B) = (aA)^*B = A^*(aB)$$

Comutativa:  $A + B = B + A$

Distributiva:  $(a + β)A = aA + βA$

$$a(A + B) = aA + aB$$

$$(A + B)^*C = A^*C + B^*C$$

$$A^*(B + C) = A^*B + A^*C$$

Idéntica:  $A + O = O + A$  , en donde **O** : matriz nula.

$$A^*I = I^*A$$
 , en donde **I** : matriz idéntica.

## A.5 VECTORES.

Entenderemos un vector como **una matriz con una sola columna**, por lo tanto sobre los vectores aparecen definidas las mismas operaciones con las mismas propiedades que para las matrices.

**A.5.1 Combinación lineal :** Dados los vectores  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$  y los escalares  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ; el vector  $V$  obtenido como:  $V = a_1V_1 + a_2V_2 + a_3V_3 + \dots + a_nV_n$ , es una combinación lineal de los vectores dados.

**A.5.2 Vectores linealmente independientes :** Un conjunto de vectores dados será **linealmente independientes**, si ninguno de ellos puede ser expresado como una combinación lineal de los demás, de lo contrario serán **linealmente dependientes**. En consecuencia, dado el conjunto de vectores  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ ; estos serán **linealmente independientes** entre sí, cuando la siguiente combinación lineal sólo puede ocurrir para  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ :

$$a_1V_1 + a_2V_2 + a_3V_3 + \dots + a_nV_n = O \text{ (O vector nulo)}$$

Por ejemplo los vectores  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , son linealmente independientes. Para demostrar esto se escribe:  $\alpha V + \beta U = O$ , esto es:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La igualdad entre los 2 últimos vectores exige que:  $\beta = 0$  y  $\alpha = -\beta$ . Lo que significa que obligatoriamente  $\alpha = \beta = 0$ .

En forma similar se demuestra que el conjunto  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  es linealmente dependiente. En este caso se escribe:  $\alpha V + \beta U + \gamma W = O$ , esto es:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma \\ \beta + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De los 2 últimos vectores, se concluye que  $\alpha = -\gamma$  y  $\beta = -\gamma$ . Por consiguiente, para cualquier valor de  $\gamma$ , con  $\alpha = \beta = -\gamma$ , la expresión  $\alpha V + \beta U + \gamma W = O$ , se cumple.

**A.5.3 Combinación lineal convexa :** Es un vector  $V$ , obtenido como la combinación lineal:  $V = a_1V_1 + a_2V_2 + a_3V_3 + \dots + a_nV_n$ ; en la cual los escalares:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  cumplen las siguientes condiciones:

a)  $0 \leq a_j \leq 1$ , para todo  $j = 1, 2, 3, \dots, n$

b)  $\sum a_j = 1$  para  $j = 1$  hasta  $n$ .

**TEOREMA :** Cualquier punto sobre un segmento de línea puede ser expresado como una combinación convexa de los extremos del segmento.

**DEMOSTRACIÓN:** En el gráfico aparecen trazados los vectores  $U$ ,  $V$ , y  $W$ ; de tal manera que  $W$  es un punto del segmento  $UV$  o vector diferencia  $U - V$ . Dado que los vectores  $U - V$  y  $W - V$ , son del mismo sentido, pero  $W - V$  es de menor o igual magnitud que  $U - V$ , se acepta que  $W - V = \beta(U - V)$ , con  $0 \leq \beta \leq 1$ , lo que puede ser escrito como  $W = V + \beta(U - V)$ , o también como  $W = \beta U + (1 - \beta)V$

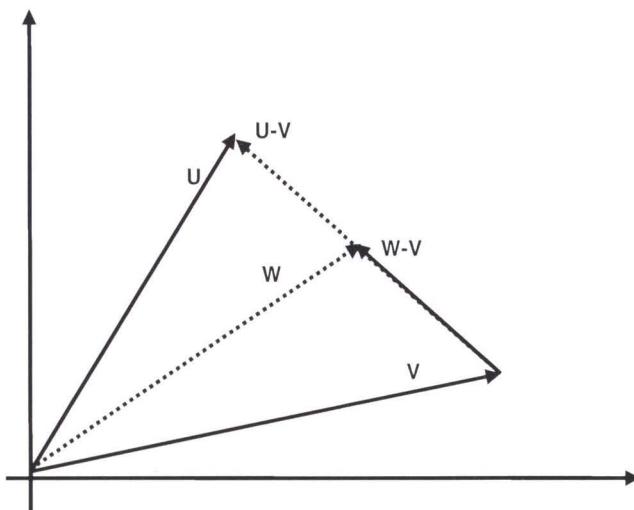


Gráfico de los vectores  $U$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $U-V$  y  $W-V$ .

Ahora se analiza si los escalares  $\beta$  y  $1 - \beta$  cumplen las condiciones que hacen a la anterior una combinación convexa:

Condición (a): Por definición  $0 \leq \beta \leq 1$ , que puede ser escrita como:  $-1 \leq -\beta \leq 0$ . A la cual sumándole 1 a cada miembro de la desigualdad produce:  $0 \leq 1 - \beta \leq 1$ .

Condición (b) :  $\beta + (1 - \beta) = 1$ .

## A.6 DETERMINANTES.

Asociado con cualquier matriz cuadrada  $A = (a_{ij})$ , existe un número único llamado el determinante de  $A$ , que se simboliza de cualquiera de las siguientes formas  $\det(A)$ ,  $| A |$ ,  $| a_{ij} |$ .

### A.5.1 Determinante para la matriz de orden 1.

Si  $A = (a_{11}) \Rightarrow \det(A) = a_{11}$ .

### A.5.2 Determinante para la matriz de orden 2 : Es decir,

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

**A.5.3 Menor de un elemento :** Dada una matriz cuadrada  $A$ , para cada elemento  $a_{ij}$ , se define su menor  $d_{ij}$ , como el determinante que se puede calcular cuando en la matriz  $A$ , se suspende la fila  $i$ -ésima y la columna  $j$ -ésima. Para la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} d_{21} &= (-2)(-3) - 2(-1) = 8 \\ d_{22} &= 1(-3) - 2 \cdot 1 = -5 \\ d_{23} &= 1(-1) - (-2)1 = 1 \end{aligned}$$

### A.5.4 Menor signado de un elemento : Se define como $m_{ij} = (-1)^{i+j}d_{ij}$

En el ejemplo anterior  $m_{21} = -8$ ,  $m_{22} = -5$  y  $m_{23} = 1$ .

**A.5.5 Cofactor de un elemento :** Dada una matriz cuadrada  $A$ , para cada elemento  $a_{ij}$ , se define su cofactor  $f_{ij}$ , como el menor signado multiplicado por el mismo elemento

$$f_{ij} = (-1)^{i+j}a_{ij}d_{ij}$$

En el ejemplo de los puntos anteriores:  $f_{21} = -8 \cdot 3 = -24$ ,  $f_{22} = -5 \cdot 0 = 0$  y  $f_{23} = 1 \cdot 1 = -1$ . De este ejercicio, el lector podrá deducir que si  $a_{ij} = 0$ , entonces  $f_{ij} = 0$ .

**A.5.6 Determinante para la matriz de orden  $n \geq 2$ .** Existe una propiedad para las matrices cuadradas, la cual no se va a demostrar, **la suma de los cofactores de cualquier fila o columna es siempre el mismo valor.** Este aspecto "específico" fue definido como **el determinante de la matriz.** Así pues, dada una matriz cuadrada A, se tiene que  $\det(A) = \sum f_{ij}$ , para una sola fila i-ésima o una sola columna j-ésima. En el ejemplo que se viene presentando se puede calcular  $\det(A) = -24 + 0 - 1 = -25$ .

**A.5.7 Propiedades de los determinantes.** La demostración de las siguientes propiedades se dejan al lector y en ellas se supone que cuando se habla del determinante de una matriz A, se entiende la estructura  $|A|$ .

1. El determinante de una matriz y el determinante de su transpuesta son iguales, esto es,  $\det(A^T) = \det(A)$ .
2. Si  $|B|$  es el determinante formado por el intercambio entre 2 vectores filas o columnas respectivas de  $|A|$ , entonces:  $|B| = -|A|$ .
3. Si  $|B|$  es el determinante obtenido al multiplicar por  $\alpha$  un solo vector fila o columna del determinante  $|A|$ , entonces:  $|B| = \alpha|A|$ .
4. Si un vector fila o columna en una matriz cuadrada es nulo, entonces el determinante de ellas es 0.
5. Cuando en un determinante una fila o columna es cambiado por la combinación lineal de ella con otra fila o columna respectivamente, el valor del determinante no cambia.
6. Si un determinante tiene 2 vectores filas o columnas respectivamente iguales o proporcionales será igual a 0.

## A.6 OTRAS MATRICES ESPECIALES.

**A.6.1 Matriz singular.** Una **matriz A** se denominará **singular**, si  $\det(A) = |A| = 0$ .

**A.6.2 Matriz Adjunta.** La adjunta de una matriz cuadrada A es otra matriz cuadrada J del mismo orden, estructurada como la transpuesta de los menores signados de A, esto es, Si  $A = (a_{ij})$ , entonces  $J = (m_{ij})^T$

**A.6.3 Matriz Inversa.** Una matriz B recibe el nombre de **inversa de la matriz cuadrada A**, si  $A^*B = I$ . La inversa de A se designa como  $A^{-1}$ . Puede demostrarse que si A es no singular, esto es  $|A| \neq 0$ , entonces  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} J$ .

Para cualquier matriz cuadrada no singular A,  $A^{-1}$  es única y cumple  $A^*A^{-1} = A^{-1}*A = I$

Para la matriz de orden 2, particularmente se tiene  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow B = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ , con  $|A| = ad - bc$ .

## A.7 ECUACIONES LINEALES SIMULTÁNEAS.

Cualquier conjunto de ecuaciones lineales simultáneas tiene una representación conveniente usando la notación matricial. El sistema:

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \dots + a_{1n}X_n &= b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \dots + a_{2n}X_n &= b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \dots + a_{3n}X_n &= b_3 \\ \dots & \\ \dots & \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \dots + a_{mn}X_n &= b_m \end{aligned}$$

se puede escribirse como  $\mathbf{A}^*\mathbf{X} = \mathbf{b}$ , en donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

Si  $A$  es cuadrada, esto es,  $m = n$  y no singular, el vector solución está dado por  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ .

Aplicar esta expresión para encontrar  $\mathbf{X}$ , exige un procedimiento demasiado congestionado de operaciones, el cual fue totalmente mejorado mediante el método de eliminación de Gauss.

**A.7.1 Método de eliminación de Gauss :** La fundamentación matemática del método no es materia de este tratado, por ello nos limitaremos a observar la aplicación, la cual consiste en:

1. Construir la estructura  $(\mathbf{A} | \mathbf{I} | \mathbf{b})$ .
2. Realizar las combinaciones lineales adecuadas entre las filas de esta matriz para que en la posición donde está  $\mathbf{A}$ , aparezca la matriz idéntica  $\mathbf{I}$ .
3. Cuando esto se logra la anterior estructura se convierte a  $(\mathbf{I} | \mathbf{A}^{-1} | \mathbf{X})$ .

Una justificación (no demostración) de la validez del anterior procedimiento es:

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} | \mathbf{I} | \mathbf{b}) = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} | \mathbf{A}^{-1} | \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}) = (\mathbf{I} | \mathbf{A}^{-1} | \mathbf{X})$$

Este procedimiento es usado cuando para un sistema de ecuaciones lineales se requiere encontrar la solución del sistema, vector  $\mathbf{X}$ , y la inversa de la matriz definida como  $\mathbf{A}$ .

Si únicamente se requiere el cálculo del vector  $\mathbf{X}$ , solución del sistema de ecuaciones, el proceso será iniciar con  $(\mathbf{A} | \mathbf{b})$  y terminar con  $(\mathbf{I} | \mathbf{X})$ .

Para encontrar la inversa de una matriz  $\mathbf{A}$ , el proceso será iniciar con  $(\mathbf{A} | \mathbf{I})$ , realizar las combinaciones lineales para terminar con  $(\mathbf{I} | \mathbf{A}^{-1})$ .

Para entender y discutir el procedimiento se presenta el siguiente ejemplo, para el cual se necesita calcular el vector  $\mathbf{X}$  y la matriz  $\mathbf{A}$ .

$$\begin{array}{l} 2X_1 + 3X_2 + X_3 = 2 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ -X_1 + X_2 + 2X_3 = 4 \end{array} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con esta información se puede construir el tablero inicial ( $A | I | b$ ), el cual queda como:

2	3	1	1	0	0	2	F1
1	1	1	0	1	0	0	F2
-1	1	2	0	0	1	4	F3
1	3/2	1/2	1/2	0	0	1	$F1_1 = \frac{1}{2}F1$
0	$-\frac{1}{2}$	1/2	$-\frac{1}{2}$	1	0	-1	$F2_1 = F2 - F1_1$
0	5/2	5/2	1/2	0	1	5	$F3_1 = F3 + F1_1$
1	0	2	-1	3	0	-2	$F1_2 = F1_1 - 3/2F2_2$
0	1	-1	1	-2	0	2	$F2_2 = -2F2_1$
0	0	5	-2	5	1	0	$F3_2 = F3_1 - 5/2F2_2$
1	0	0	-1/5	1	-2/5	-2	$F1_3 = F1_2 - 1/5F3_3$
0	1	0	3/5	-1	1/5	2	$F2_3 = F2_2 + F3_3$
0	0	1	-2/5	1	1/5	0	$F3_3 = 1/5F3_2$

Al revisar el procedimiento seguido, se puede decir:

- a) Pasar a un nuevo tablero, significa generar un nuevo "vector unitario" en búsqueda de la matriz I en las primeras columnas de la tabla.
- b) El "vector unitario" debe generarse con 1 en la posición del marco (elemento pivote) y ceros en el resto de la columna.
- c) La fila que contiene el elemento pivote ( **fila pivote** ) debe multiplicarse por **el inverso del pivote**, para pasar al nuevo tablero.
- d) Las demás filas se obtienen realizando entre ella y la fila pivote la correspondiente combinación lineal que genere el cero del "vector unitario".

## A.8 EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$   $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$   $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ ,

determinar: a)  $A + B$  b)  $CD$  c)  $DC$  d)  $BC - 2AD$  e)  $C + D^T$

f)  $3A^T + 2B^T$  g)  $C^{-1}$  h)  $(CD)^{-1}$  i)  $D^{-1}C^{-1}$  j)  $|C|$

2. Dadas las matrices ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , Hallar:

a)  $AB - BA$  b)  $(A + B)^T$  c)  $(A - B)^{-1}$  c)  $AB^{-1}$  d)  $A^2$  e)  $A^n$

3. Si A y B son matrices cuadradas mostrar que:

a)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  b)  $A^{-1}(A + B) - (A^{-1} + B^{-1})B = O$

4. Si A es una matriz diagonal de orden n, en donde todo  $a_{ii} = c$ ,

a) Mostrar que  $\det(A) = c^n$ .

b) Mostrar que si  $n = 2$  , entonces :  $A^n = c^nI$

5. Dada  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  encontrar  $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix}$ , para que:

(a)  $AB = BA$  (b)  $AB = I$  (c)  $AB = A^T$  (d)  $AB = A^2$

6. Dados los vectores  $V1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$   $V2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$   $V3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$   $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

a) Calcule  $V4 = 2V1 - 3V2 + V3$

b) Encuentre a, b, m para que:  $aV1 + bV2 + mV3 = V$

c) Analizar si V1, V2 y V3 son o no Linealmente independientes.

7. La solución a un PROGRAMA LINEAL generó las siguientes soluciones óptimas:

$$V1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V2 = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Expresar mediante una combinación lineal convexa todas las posibles soluciones óptimas al programa lineal.

8. Usando el método de eliminación de Gauss, solucione:

a)  $2X_1 + 3X_2 - 5X_3 = -3$       b)  $3X_1 + 2X_2 - X_3 = 4$

$$3X_1 - 2X_2 + 4X_3 = 15 \qquad \qquad 2X_2 + 3X_3 = 8$$

$$5X_1 + 3X_2 - 2X_3 = 6 \qquad \qquad X_1 + X_2 + X_3 = 4$$

c)  $2X_1 + X_2 + X_3 = 10$       d)  $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 3$

$$X_1 + 2X_2 + X_3 = 8 \qquad \qquad 2X_1 - X_2 - X_3 = 0$$

$$X_1 - X_2 + 2X_3 = 2 \qquad \qquad X_1 + 2X_2 - X_3 + 2X_4 = 2$$

$$X_3 + X_4 = 1$$

## BIBLIOGRAFÍA

- AHUJA, R., MAGNANTI T, y ORLIN, J.**, Netwoork flows: Theory, Algorithms and applications. Ed. Prentice Hall. New Jersey. 1993.
- BAZARAA, M., JARVIS J.**, Linear programming and Netwoork flows. 3<sup>a</sup>. Edición. Ed, Willey. New York. 1995.
- BINGHAM, R.** Programas de computación para formular alimentos. Avicultura profesional. pp 134-136. 1983.
- BRONSON, R.** Teoría y problemas de investigación de operaciones. Ed. McGraw Hill. México 1983. 324 p.
- COOPER, Robert B.**, Introduction to Queueing Theory. 3<sup>a</sup>. Edición. Elsevier North Holland. Nueva York. 1988.
- COWLES, K y CARLING B.**, Markov chain Monte Carlo convergence diagnostics. Journal Am. Stat. Assoc., 1996. p 91, 883-904.
- DANTZIG, G. B.** Linear Programming and Extensions. Princeton University Press. Princeton. 1963.
- EPPEN G. D., GOULD F. G., SCHMIDT C.P. MOORE J. H. y WEATHERFORD I. R.**, Investigación de Operaciones en la ciencia administrativa. Editorial Prentice Hall. Quinta Edición. 1998. México.
- FU, M. C.**, Optimization via Simulation, Annals of Operations Research. 1994. P 199-248.
- GASS, S. I.** An Illustrated guide to Linear programming. Ed. Dover Publications. 1990.
- GILKS, W., RICHARDSON S.**, Markov chain Monte in practice. Chapman Hall. 1996.
- HILLIER, Frederick S. y LIEBERMAN, Gerald J.**, Introducción a la Investigación de Operaciones. Editorial Mc Graw Hill. Cuarta Edición. 1997. México.
- INFANTE, A.** Programación Lineal. Bogotá. Universidad de América, 1979. 352 p.

- KOLESAR, P.** A branch and bound algorithm for the knapsack problem. Management Science. Vol. 13. 1982.
- MODER, J., y C. PHILLIPS**, Project Management with CPM and PERT, 4a. ed., Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1980.
- MURTY y KATTA**. Linear programming, Ed. Wiley. New York 1983.
- PRAWDA, J.** Métodos y modelos de investigación de operaciones. México. Ed. Limusa, 1988. 872 p.
- RINCON, A. Luis Alberto.** Programación Lineal con aplicaciones al sector agropecuario. Universidad Nacional de Colombia. Palmira. Segunda Edición. 1994.
- RÍOS, David, RÍOS, Sixto y MARTIN, Jacinto.** Simulación, Métodos y aplicaciones. Ed. Alfaomega. Santafé de Bogotá. 2000. 371 p.
- SALKIN, H.** Integer programming. New York Wiley. 1975. 185 p.
- STEWART, W. J.**, Numerical solution of Markov chains. Ed. Marcel Dekker. New York. 1991
- TAHA, Hamdy A.** Investigación de operaciones. Traductor: Juan Carlos Vega. Editorial Alfaomega. México. 1991. pp 989
- TAHA, Hamdy A.** Integer programming: Theory, applications and computations. New York: Academic Press, 1975. 336 p.
- TARQUIN y BLANK.** Ingeniería económica. México : McGraw Hill. 1991. 345 p.
- VARELA, Jaime Enrique.** Introducción a la investigación de operaciones. Bogotá: Fondo Editorial Interamerica. 1991. 452 p.
- VARELA, Rodrigo.** Evaluación económica de inversiones. Cali. Norma, 1989. 486 p.
- VIDAL, C. J.** Modelos lineales. Algebra lineal aplicada para ingenieros. Universidad del Valle. 1989.
- WILLIAMS, H. P.**, Model Building in Mathematical Programming. 4<sup>a</sup>. Ed. Willey. New York. 1996.



## **LUIS ALBERTO RINCÓN ABRIL**

Magíster en Ingeniería de Sistemas, Ingeniero Electricista. Docente Investigador de la Universidad Nacional de Colombia en las áreas de Desarrollo de Software y Sistemas, Investigación de Operaciones, Estadística y Matemáticas. Director del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Palmira, en tres períodos diferentes.

ISBN 958809509-3

A standard one-dimensional barcode representing the ISBN number 958809509-3.

9 789588 095097