# Aufgabe 1

Welche der folgenden Zeichenketten sind aussagenlogische Formeln?

a) $((p) \wedge (\neg(q))) \Rightarrow (((p) \vee ((r) \vee (q))) \wedge (\neg(p)))$

*Es ist eine aussagenlogische Formel.*

b) $((a) \vee (\neg(b)) \wedge (\neg(c)) \Rightarrow (a) \wedge (\neg(c))))$

*Es ist keine aussagenlogische Formel (Letzte Klammer ist falsch/zu viel).*

c) $((p) \Rightarrow (\neg(r))) \vee (\neg(q) \wedge ((r) \wedge (\neg(p))))$

*Es ist eine aussagenlogische Formel.*

d) $(\neg(p)) \vee ((q) \wedge (q)) \vee ((p)(r) \Rightarrow (r))$

*Es ist keine aussagenlogische Formel ($(p)(r)$ ist keine valide Formel).*

e) $((a) \vee (b)) \Rightarrow (((c) \wedge (a)) \vee ((a) \Rightarrow (b)))$

*Es ist eine aussagenlogische Formel (Alle Klammern richtig).*

Stellen Sie für die korrekten aussagenlogischen Formeln jeweils einen Formelbaum auf. Für die Zeichenketten, die keine korrekten Formeln darstellen, sollten Sie allgemeine Sätze formulieren, die für eine aussagenlogische Formel stets erfüllt sind, die aber von der gegebenen Zeichenkette nicht erfüllt wird.

# Aufgabe 2

Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln sind Tautologien, welche sind erfüllbar?

- *Anmerkung:* $X \Rightarrow Y$ *wurde hier als* $\neg X \vee Y$ *geschrieben*

a) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$

| $A$ | $B$ | $C$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\overbrace{\neg B \vee C}^{D}$ | $\overbrace{\neg A \vee D}^{E}$ | $\overbrace{A \wedge B}^{F}$ | $\neg F$ | $\overbrace{\neg F \vee C}^{G}$ | $E \Leftrightarrow G$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

*Tautologie*

b) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((A \vee C) \wedge (\neg B \vee C))$
$\Leftrightarrow (C \vee (\neg B \wedge A))$

| $A$ | $B$ | $C$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\overbrace{\neg A \vee B}^{D}$ | $\neg D$ | $\overbrace{\neg D \vee C}^{E}$ | $\overbrace{\neg B \wedge A}^{F}$ | $\overbrace{C \vee F}^{G}$ | $E \Leftrightarrow G$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

*Keine Tautologie*

c) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C))$

| $A$ | $B$ | $C$ | $\neg A$ | $\overbrace{\neg A \vee B}^{D}$ | $\neg D$ | $\overbrace{\neg D \vee C}^{E}$ | $\overbrace{B \wedge C}^{F}$ | $\overbrace{\neg A \vee F}^{G}$ | $\neg E \vee G$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

*Keine Tautologie*

d) $((A \wedge \neg B) \Rightarrow (A \vee C)) \Rightarrow (\neg(B \Rightarrow A) \wedge (\neg A \Rightarrow C))$

| $A$ | $B$ | $C$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\overbrace{A \wedge \neg B}^{D}$ | $\overbrace{A \vee C}^{E}$ | $\neg D$ | $\overbrace{\neg D \vee E}^{F}$ | $\overbrace{\neg B \vee A}^{G}$ | $\neg G$ | $\overbrace{A \vee C}^{H}$ | $\overbrace{\neg G \wedge H}^{I}$ | $\neg F \vee I$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

*Keine Tautologie*

e) $(\neg B \wedge A) \Leftrightarrow \neg(A \Rightarrow B)$

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\overbrace{\neg B \wedge A}^{C}$ | $\overbrace{\neg A \vee B}^{D}$ | $\neg D$ | $C \Leftrightarrow \neg D$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

*Tautologie*

# Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, daß die folgende aussagenlogische Formel eine Tautologie ist:
$(A \vee B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$

| $A$ | $B$ | $\overbrace{A \vee B}^{C}$ | $\overbrace{B \vee A}^{D}$ | $\neg C$ | $\neg C \vee D$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

*Tautologie*

b) Formulieren Sie die Aussage, die aus der obigen Formel entsteht, wenn die aussagenlogischen Variablen A und B ersetzt werden durch die elementaren Aussagen:
"Fipi lüllt" bzw. "Gluka urzt".
Überzeugen Sie sich, dass diese Aussage auch im intuitiven Sinne wahr ist.

*"Wenn Fipi lüllt oder Gluka urzt dann hat, wenn Gluka nicht geurzt hat, Fippi gelüllt."*

c) Ersetzen Sie nun die Variablen A und B durch die (nicht mehr aussagenlogisch elementaren) Aussagen:
"Knull ixt oder Gluka pramelt" bzw. "Falls Akru urzt, so watzelt das Dapi".

*"Wenn Knull ixt oder Gluka pramelt oder wenn Akru urzt dann watzelt Dapi, dann wenn Akru urzt, und Dapi nicht watzelt, dann ixt Knull oder Gluka pramelt."*

$$((\overbrace{(K(i) \vee G(p))}^{A} \vee \overbrace{(A(u) \Rightarrow D(w)))}^{B} \Rightarrow (\overbrace{\neg(A(u) \Rightarrow D(w))}^{\neg B} \Rightarrow \overbrace{(K(i) \vee G(p)))}^{A}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$((\overbrace{(K(i) \vee G(p))}^{A} \vee \overbrace{(A(u) \Rightarrow D(w)))}^{B} \Rightarrow (\overbrace{(A(u) \wedge \neg D(w))}^{\neg B} \Rightarrow \overbrace{(K(i) \vee G(p)))}^{A}$$

Versuchen Sie, die Wahrheit auch dieser (sprachlich sicherlich unübersichtlichen) Aussage sich intuitiv klar zu machen.

# Aufgabe 4

Welche der folgenden Aussagen für eine aussagenlogische Formel A ist richtig, welche falsch (Begründung oder Gegenbeispiel)?

a) Ist $A$ eine Tautologie, so ist $A$ erfüllbar.

Wenn A wahr ist dann ist A auch

b) Ist $A$ eine Tautologie, so ist $\neg A$ unerfüllbar.

c) Ist $A$ keine Tautologie, so ist sowohl $A$ als auch $\neg A$ erfüllbar.

d) $A$ ist genau dann erfüllbar, wenn $\neg A$ keine Tautologie ist.

e) Ist $A$ erfüllbar und $\neg A$ erfüllbar, so ist $A$ keine Tautologie.

f) Ist $\neg A$ widerlegbar, so ist $A$ eine Tautologie.

# Aufgabe 5

Die folgende Formel charakterisiert die Stetigkeit der Funktion $f$ in einem Punkt $x_0$:
$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x : ((|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \epsilon))$.

a) "Übersetzen" Sie die Formel in einen natürlichen Satz.
(Hineweis: $\epsilon$ : Epslion, $\delta$ : Delta, $| \dots |$ : Betrag, $f(x)$ : "f von x")

*"Für alle Epsilon größer 0, existiert ein delta größer 0, sodass für alle x gilt, dass falls der Betrag von x minus $x_0$ größer Delta ist, Der Betrag von f von x minus f von $x_0$ kleiner Epsilon ist."*