Aufgabe 1

Entscheiden Sie, welche der folgenden (sprachlichen) Sätze man als Aussagen bezeichnen könnte:

a) Die Sonne ist ein Fixstern und der Mond ein Planet.

Aussage

b) Auf dem Planeten Alpha Centauri gibt es Eisen.

Aussage (Begründung: Unabhängig vom Wissensstand ob es wirklich so ist, können wir 'wahr' oder 'falsch' zuordnen)

c) $3 \cdot 3 = 10$.

Keine Aussage (Begründung: Es ist kein sprachlicher Satz)

d) Herr Ober, bitte zahlen, und schreiben Sie auch eine Rechnung aus!

Keine Aussage

e) Je zwei Geraden schneiden sich in einem Punkt.

Aussage

f) Es werde Licht.

Keine Aussage

g) Es gilt $x^2 - 2x + 5x = 0$.

Keine Aussage (Begründung: Wir wissen nicht was x ist, somit ist es eine Aussageform und keine Aussage)

h) Alle (FH-)Lehrer sind faule Säcke, bekommen aber ein hohes Gehalt.

Aussage (Begründung: 'wahr' oder 'falsch' sind logisch zuordbar)

i) Wie lange noch wirst Du unsere Geduld missbrauchen?

Keine Aussage

j) Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ hat für $n \geq 3$ in den positiven ganzen Zahlen keine Lösung.

Aussage

k) Für jede reelle Zahl a ist die Gleichung $ax + b = 0$ lösbar.

Keine Aussage (Begründung: b ist nicht gegeben)

l) Für je zwei Zahlen a und b ist die Gleichung $ax + b = 0$ lösbar.

Aussage (Begründung: a und b sind gegeben)

Aufgabe 2

Versuchen Sie, die folgenden Aussagen logisch zu zerlegen in elementarere Aussagen, die mit aussagenlogischen Operatoren (siehe oben) verknüpft sind!

Achten Sie darauf, dass es für diese logische Zerlegung u.U. nötig ist, die Aussagen anders zu formulieren, ohne an ihrer eigentlichen (logischen) Bedeutung etwas zu ändern.

Kursiv gedruckt: *Elementare Aussage*
Fett gedruckt: **Aussagenlogische Operatoren (Junktoren)**

a) Köln und Düsseldorf liegen am Rhein.

Köln liegt am Rhein **und** *Düsseldorf liegt am Rhein.*

b) Eine der Städte Frankfurt, Köln, Dresden und Berlin liegt an der Elbe.

Frankfurt liegt an der Elbe **oder** *Köln liegt an der Elbe* **oder** *Dresden liegt an der Elbe* **oder** *Berlin liegt an der Elbe*

c) Wenn es regnet, werden die Straßen nass und der Himmel verdunkelt sich.

A: "*Es regnet*"
B: "*Die Straßen werden nass*"
C: "*Der Himmel verdunkelt sich*"

Wenn A **dann** (B **und** C)

d) Ist p eine Primzahl und teilt p das Produkt xy der zwei Zahlen x und y, so teilt p auch einen der beiden Faktoren x oder y.

A: "*p ist eine Primzahl*"
B: "*p teilt xy*"
C: "*p teilt x*"
D: "*p teilt y*"

Wenn (A und B) **dann** (C **oder** D) **und nicht** (C **und** D)

e) Hans und Franz sind verwandt.

Bereits elementar Aussage ('Und' ist hier kein elementar logischer Operator).

f) Hans und Franz sind rothaarig.

Hand ist rothaaring **und** *Franz ist rothaarig.*

g) Jede Stadt, die an einem Fluss liegt, liegt entweder am Rhein oder an der Donau.

A: "*Die Stadt liegt an einem Fluss*"
B: "*Die Stadt liegt am Rhein*"
C: "*Die Stadt liegt an der Donau*"

Wenn A **dann** (B **oder** C) **und nicht** (B **und** C)

h) Ist G eine abelsche Gruppe, so ist G eine zyklische Gruppe oder ein Produkt von zyklischen Gruppen.

A: "*G ist eine abelsche Gruppe*"
B: "*G ist eine zyklische Gruppe*"
C: "*G ist Produkt von zyklischer Gruppe*"

Wenn A **dann** (B **oder** C)

Aufgabe 3

Versuchen Sie, für jede der Aussagen aus Aufgabe 2 die Negation zu bilden!

Dabei ist es wichtig, eine Formulierung zu finden, die logisch genau den Gehalt der Aussage 'Es gilt nicht, dass ...' hat, die aber so formuliert ist, wie ein 'normaler' Mensch (also kein Mathematiker!?!) sie aussprechen würde.

a) Köln und Düsseldorf liegen am Rhein.

Köln liegt nicht am Rhein oder Düsseldorg liegt nicht am Rhein.

b) Eine der Städte Frankfurt, Köln, Dresden und Berlin liegt an der Elbe.

Frankfurt liegt nicht an der Elbe, Köln liegt nicht an der Elbe, Dresden liegt nicht an der Elbe, Berlin liegt nicht an der Elbe.

c) Wenn es regnet, werden die Straßen nass und der Himmel verdunkelt sich.

Wenn es regnet dann werden die Straßen nicht nass und der Himmel verdunkelt sich nicht.

A: "*es regnet*"

Ursprüngliche Aussage:
$A \Rightarrow (B \wedge C) \Leftrightarrow$
$\neg A \vee (B \wedge C)$

Negation der Aussage:
$\neg(\neg A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow$
$\neg\neg A \wedge \neg(B \wedge C) \Leftrightarrow$
$A \wedge (\neg B \vee \neg C)$ *(Daraus Satz bauen ist schwierig, logisch aber richtig)*

d) Ist p eine Primzahl und teilt p das Produkt xy der zwei Zahlen x und y, so teilt p auch einen der beiden Faktoren x oder y.

Wenn p eine Primzahl ist und p das Produkt aus xy teilt, dann teilt p nicht einen der beiden Faktoren x oder y

e) Hans und Franz sind verwandt.

Hans und Franz sind nicht verwandt.

f) Hans und Franz sind rothaarig.

Hans ist nicht rothaarig oder Franz ist nicht rothaarig.

g) Jede Stadt, die an einem Fluss liegt, liegt entweder am Rhein oder an der Donau.

Jede Stadt die an einer Stadt liegt, liegt nicht am Rhein oder nicht an der Donau

h) Ist G eine abelsche Gruppe, so ist G eine zyklische Gruppe oder ein Produkt von zyklischen Gruppen.

Ist G eine abelsche Gruppe, so ist G nicht eine zyklishe Gruppe und nicht ein Produkt von zyklischen Gruppen.

$A \Rightarrow (B \vee C)$
$\neg(\neg A \vee (B \vee C)$
$A \wedge \vee(B \vee C)$
$A \wedge (\wedge B \wedge \wedge C)$

Aufgabe 4

Es seien A; B; C Aussagen.

Formulieren Sie die folgenden Aussagen so, dass ihr logischer Gehalt gleich bleibt, dass aber nur die Junktoren 'und', 'oder', 'nicht' und 'wenn ... dann' Verwendung finden.
a) Zwar A, aber nicht B.

A und nicht B

b) Nur dann, wenn A gilt, gilt auch B.

wenn A dann B und wenn B dann A

A	B	A $\Leftrightarrow$ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

c) Sowohl A als auch B.

A und B

d) Genau dann A, wenn B.

wenn A dann B und wenn B dann A

A	B	A $\Leftrightarrow$ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

e) Wenn A, dann gilt B nur, falls C nicht gilt.

Wenn nicht C und A dann B $((\neg C \wedge A) \Rightarrow B)$

f) C gilt höchstens dann, wenn sowohl A als auch B gilt.

Wenn (A und B) dann C

Aufgabe 5

Eine Logelei von Zweistein aus dem Zeit-Magazin lautet folgendermaßen:

A: *Wenn der Knull nicht gepramelt hat, dann haben entweder das Fipi oder die Gluka geurzt.*

B: *Wenn der Knull nicht geixt hat, dann hat, falls das Dapi nicht gelüllt hat, die Gluka gepramelt.*

C: *Wenn der Akru nicht geurzt hat, dann hat das Fipi entweder gepramelt oder gewatzelt.*

D: *Wenn weder der Knull noch das Dapi geixt haben, dann hat die Gluka geurzt.*

E: *Wenn das Dapi nicht gewatzelt hat, dann hat, falls der Knull nicht geurzt hat, das Fipi gelüllt.*

F: *Jeder hat etwas getan, keine zwei taten dasselbe.*

Wer hat was getan?

Ihre Aufgaben sind nun:

a) Zerlegen Sie alle Aussagen in elementare Bestandteile (d.h. in atomare Aussagen, s.o.) und den aussagenlogischen Operatoren 'und' ($\wedge$), 'oder' ($\vee$), 'nicht' ($\neg$) und 'wenn ... dann ...' ($\rightarrow$) analog zu Aufgabe 2.

A)
A: "*Knull pramelt*"
B: "*Fipi urzt*"
C: "*Gluka urzt*"
$\neg A \Rightarrow B \vee C$

B)
A: "*Knull ixt*"
B: "*Dapi lüllt*"
C: "*Gluka pramelt*"
$(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow C$

C)
A: "*Akru urzt*"
B: "*Fipi pramelt*"
C: "*Fipi watzelt*"
$A \rightarrow (B \vee C)$

D)
A: "*Knull ixt*"
B: "*Dapi ixt*"
C: "*Gluka urzt*"
$(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow C$

E)
A: "*Dapi watzelt*"
B: "*Knull urzt*"
C: "*Fipi lüllt*"
$(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow C$

b) Formalisieren Sie insbesondere die letzte Aussage:
'Jeder hat etwas getan, keine zwei taten dasselbe' mit diesen atomaren Aussagen und den aussagenlogischen Operatoren.

c) **Challenge:**

Versuchen Sie, die ursprüngliche Aufgabe: 'Wer hat was getan?' zu lösen.

Aufgabe 6

Versuchen Sie, die folgenden Aussagen auf ihre prädikatenlogische Struktur hin zu analysieren. Zerlegen Sie die Aussagen in elementare Aussageformen, die mit aussagenlogischen Verknüpfungen und/oder prädikatenlogischen Quantoren zusammengesetzt sind.

Beachten Sie, dass es hierbei meist nätig ist, die Aussagen in drastischer Weise umzuformulieren, um die formale prädikatenlogische Struktur sichtbar zu machen.

a) Jede natürliche Zahl ist eine Primzahl oder eine gerade Zahl.

$A : \ldots$ ist eine Primzahl

$B : \ldots$ ist eine gerade Zahl

$\forall x \in \mathbb{N} : A(x) \vee B(x)$

b) Es gibt eine reelle Zahl x mit der Eigenschaft $3x^2 + 5x - 7 = 0$.

$P : \ldots$ hat die Eigeneschaft $3x^2 + 5x - 7 = 0$

$\exists x \in \mathbb{R} : P(x)$

c) Die Gleichung $x^3 - 3x = 7$ ist lösbar.

$P : x^3 - 3x = 7$ist lösbar

$\exists x P(x)$

d) Für je zwei reelle Zahlen a und b ist die Gleichung $ax + b = 0$ lösbar.

$P : \ldots ax + b = 0$ ist lösbar
$\forall ab \in \mathbb{R} : P(a, b)$

Aufgabe 7

Es seien $P(n); Q(n); R(n); S(n); T(n)$ die folgenden Aussageformen:

$$\begin{array}{lcl} P(n) & : & n \text{ ist eine gerade natürliche Zahl} \\ Q(n) & : & n \text{ ist eine Primzahl} \\ R(n) & : & n \text{ ist Summe zweier Primzahlen} \\ S(n) & : & \text{es gibt eine natürliche Zahl } k > 1 \text{ mit } n = 2k - 1 \\ T(n) & : & n \text{ ist größer als } 2 \end{array}$$

Formulieren Sie die folgenden prädikatenlogischen Formeln umgangssprachlich aus:

a) $\forall n((Q(n) \land T(n)) \Rightarrow (\neg P(n)))$

Für alle n gilt, wenn n eine Primzahl ist und n größer als zwei ist, dann ist n keine gerade natürliche Zahl.

b) $\forall n((T(n) \land P(n)) \Rightarrow (R(n)))$

Für alle n gilt wenn n größer als zwei ist und n eine gerade natürliche Zahl ist, dann ist n die Summe zweier Primzahlen.

c) $\exists n(S(n) \land \neg R(n) \Rightarrow \neg Q(n))$

Es existiert mindestens ein n was wenn es eine natürliche Zahl k > 1 mit n = 2k - 1 gibt und n nicht die Summe zweier Primzahlen ist, n keine Primzahl ist.

d) $\neg \forall n(S(n) \Rightarrow Q(n))$

Es existiert kein n was, wenn es eine natürliche Zahl k > 1 mit n = 2k - 1 gibt, eine Primzahl ist.

e) $\exists n(R(n) \land Q(n))$

Es existiert mindestens ein n, was die Summe zweier Primzahlen ist und selber eine Primzahl ist.