Aufgabe 1

Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Schreibweise an:

a) $M = \{n \in \mathbb{N} \mid -3.5 < n < 13.7\}$

$M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

b) $N = \{k^2 + 41k + 41 \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \leq k < 10\}$

$N = \{83, 127, 173, 221, 271, 323, 377, 433, 491\}$

c) $K = \{(-1)^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$K = \{-1, 1\}$

Aufgabe 2

Versuchen Sie, die folgenden Mengen in charakterisierender Schreibweise darzustellen:

a) $M = \{3, 5, 7, 11, 13, 17\}$

$M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Primzahl}\}$

b) $N = \{-2, 4, -6, 8, -10, 12\}$

$N = \{(-1)^n \cdot 2n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \leq n \leq 6\}$

c) $K = \{1, 9, 25, 49, 81, 121, 169\}$

$K = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ ist ungerade und } 1 \leq n \leq 13\}$

Aufgabe 3

Es sei $M = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 50 \text{ und } n \text{ ist gerade}\}$, $N = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 100 \text{ und } n \text{ ist Quadratzahl}\}$.
Geben Sie - wenn möglich - die folgenden Mengen in aufzählender Schreibweise an:

a) $M \cap N$

$M \cap N = \{4, 16, 36\}$

b) $M \backslash N$

$M \backslash N = \{2, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50\}$

c) $N \backslash M$

$N \backslash M = \{0, 1, 9, 25, 49, 64, 81, 100\}$

d) $(M \backslash N) \cup (N \backslash M)$

$$(M \backslash N) \cup (N \backslash M) = \{0, 1, 2, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 18, 20, 22, 24, 25, 26, 28, 30, 32, 34, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 49, 50, 64, 81, 100\}$$

Aufgabe 4

Es seien M, N, K beliebige Mengen. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $(N \setminus M) \setminus K = N \setminus (M \cup K)$

(I) Wir zeigen *linke Seite* $\Rightarrow$ *rechte Seite*

$$\begin{aligned}
(N \setminus M) \setminus K &\Rightarrow x \in ((N \setminus M) \setminus K) \\
&\Rightarrow (x \in N \wedge x \notin M) \wedge x \notin K \\
&\Rightarrow x \in N \wedge x \notin M \wedge x \notin K \\
&\Rightarrow x \in N \wedge (x \notin M \wedge x \notin K) \\
&\Rightarrow x \in N \wedge x \notin (M \vee K) \\
&\Rightarrow x \in (N \setminus (M \cup K)) \\
&\Rightarrow (N \setminus (M \cup K)
\end{aligned}$$

(II) Wir zeigen *rechte Seite* $\Rightarrow$ *linke Seite*

$$\begin{aligned}
N \setminus (M \cup K) &\Rightarrow x \in (N \setminus (M \cup K)) \\
&\Rightarrow x \in N \wedge x \notin (M \vee K) \\
&\Rightarrow x \in N \wedge (x \notin M \wedge x \notin K) \\
&\Rightarrow x \in N \wedge x \notin M \wedge x \notin K \\
&\Rightarrow (x \in N \wedge x \notin M) \wedge x \notin K \\
&\Rightarrow x \in ((N \setminus M) \setminus K) \\
&\Rightarrow (N \setminus M) \setminus K
\end{aligned}$$

$\square$

b) $N \setminus (N \setminus M) = M \Leftrightarrow M \subseteq N$

c) $M \subseteq N \Leftrightarrow M \setminus N = \emptyset$

Aufgabe 5

Es seien M, N, K beliebige Mengen.
Veranschaulichen Sie mit Hilfe von Venn-Diagrammen die folgenden Identitäten:

a) $M \setminus (N \setminus K) = (M \setminus N) \cup (M \cap K)$

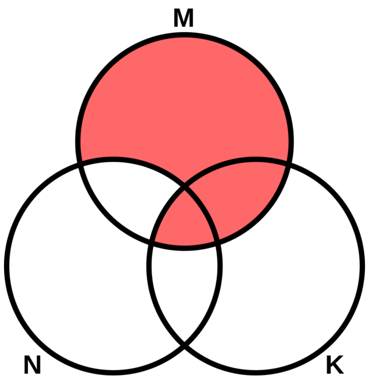

Abbildung 1: $M \setminus (N \setminus K) = (M \setminus N) \cup (M \cap K)$

b) $(M \setminus N) \setminus K = (M \setminus K) \setminus N$

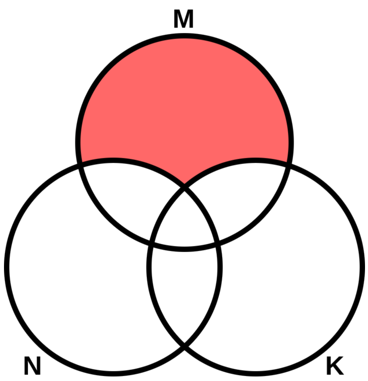

Abbildung 2: $(M \setminus N) \setminus K = (M \setminus K) \setminus N$

Aufgabe 6

Es sei $M = \{1,3,5\} \times \{2,3,4,5\}$, $N = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$, $K = \mathbb{N}$.
Geben Sie - wenn möglich - in aufzählender Schreibweise an:

a) M

	2	3	4	5
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
5	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

$M = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\}$

b) $M \setminus (K \times N)$

K \ N	0	2	4	...
0	(0,0)	(0,2)	(0,4)	...
1	(1,0)	(1,2)	(1,4)	...
2	(2,0)	(2,2)	(2,4)	...
3	(3,0)	(3,2)	(3,4)	...
4	(4,0)	(4,2)	(4,4)	...
5	(5,0)	(5,2)	(5,4)	...
...	...	...	...	...

$M \setminus (K \times N) = \{(1,3),(1,5),(3,3),(3,5),(5,3),(5,5)\}$

c) $M \cap (N \times K)$

N \ K	0	1	2	3	4	5	...
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	...
2	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	...
4	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	...
...	...	...	...	...	...	...	...

$M \cap (N \times K) = \{\ \}$

Aufgabe 7

Es seien A, B, C, D Mengen. Man zeige:

a) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

Das Kartesische Produkt ist definiert als: $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Wir zeigen *linke Seite* $\Rightarrow$ *rechte Seite*

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \times (C \cap D) &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge y \in (C \cap D) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (y \in C \wedge y \in D) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C \wedge y \in D \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C \wedge x \in B \wedge y \in D \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in D) \\
&\Leftrightarrow x, y \in (A \times C) \wedge x, y \in (B \times D) \\
&\Leftrightarrow (A \times C) \cap (B \times D)
\end{aligned}$$

Wir zeigen *linke Seite* $\Leftarrow$ *rechte Seite*

$$\begin{aligned}
(A \times C) \cap (B \times D) &\Leftrightarrow x, y \in (A \times C) \wedge x, y \in (B \times D) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in B \wedge y \in D) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge x \in B \wedge y \in D \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C \wedge y \in D \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (y \in C \wedge y \in D) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge y \in (C \cap D) \\
&\Leftrightarrow (A \cap B) \times (C \cap D)
\end{aligned}$$

b) $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$

Man nimmt ein beliebiges Tupel $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times D)$. Das bedeutet $(x, y) \in (A \times C)$ oder $(x, y) \in (B \times D)$. Das ist gleichbedeutend mit ($x \in A$ und $y \in C$) oder ($x \in B$ und $y \in D$).

(I) Ist $x \in A$ und $y \in C$, dann folgt daraus $x \in A \subseteq A \cup B$ und $y \in C \subseteq C \cup D$. Somit ist $(x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$

(II) Ist $x \in B$ und $y \in D$, dann folgt daraus $x \in B \subseteq A \cup C$ und $y \in D \subseteq C \cup D$. Somit ist $(x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$

Für jeden Fall gilt also $(x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$, somit stimmt $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$.

Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel, dass in b) die Inklusion "$\supseteq$" i.A. nicht gilt.
Anm.: $(B \nsubseteq A) \Leftrightarrow (A \subseteq B)$

Aufgabe 8

Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Schreibweise an:

a) $M = \mathcal{P}(\{1, 3, 5)$

$M = \{\{\ \}, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$

b) $N = \mathcal{P}(\{0, 1\} \times \{1, 2\})$

$$\begin{aligned} N = \{&\{\ \}, \\ &\{(0,1)\}, \{(0,2)\}, \{(1,1)\}, \{(1,2)\}, \\ &\{(0,1),(0,2)\}, \{(0,1),(1,1)\}, \{(0,1),(1,2)\}, \{(0,2),(1,1)\}, \{(0,2),(1,2)\}, \{(1,1),(1,2)\}, \\ &\{(0,1),(0,2),(1,1)\}, \{(0,1),(0,2),(1,2)\}, \{(0,1),(1,1),(1,2)\}, \{(0,2),(1,1),(1,2)\}, \\ &\{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)\}\} \end{aligned}$$

c) $K = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{2\}))$

$K = \{\{\ \}, \{\{\ \}\}, \{2\}, \{\{\ \}, \{2\}\}\}$

Geben Sie auch jeweils eine drei-elementige Teilmenge von M bzw. N bzw. K an.

$M' = \{\{1\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}\} \subseteq M$

$N' = \{\{(0, 1), (0, 2)\}, \{(0, 2)\}, \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}\} \subseteq N$

$K' = \{\{\{\ \}\}, \{2\}, \{\{\ \}, \{2\}\}\} \subseteq K$

Aufgabe 9

Untersuchen Sie, ob die folgenden Gleichungen für beliebige Mengen M, N gelten:

a) $\mathcal{P}(N) \cap \mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(N \cap M)$

Die Schnittmenge ist definiert als: $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Zu zeigen ist, (I) $x \in \mathcal{P}(N) \cap \mathcal{P}(M) \subseteq \mathcal{P}(N \cap M)$ und (II) $\mathcal{P}(N) \cap \mathcal{P}(M) \supseteq x \in \mathcal{P}(N \cap M)$

(I) $x \in \mathcal{P}(N) \cap \mathcal{P}(M)$
Laut Schnittmengendefinition gilt $x \in P(N) \wedge x \in P(M)$.
Somit ist $x \subseteq N \wedge x \subseteq M$, also $x \subseteq N \cap M$ und damit $x \in P(N \cap M)$.

(II) $x \in \mathcal{P}(N \cap M)$
Laut Potenzmengendefinition gilt $x \subseteq N \cap M$.
Somit ist $x \subseteq N \wedge x \subseteq M$, also $x \in P(N) \wedge x \in P(M)$ und damit $x \in P(N) \cap P(M)$.

b) $\mathcal{P}(N) \cup \mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(N \cup M)$

Die Vereinigungsmenge ist definiert als: $A \cap B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Zu zeigen ist, (I) $\mathcal{P}(N) \cup \mathcal{P}(M) \subseteq \mathcal{P}(N \cup M)$ und (II) $\mathcal{P}(N) \cup \mathcal{P}(M) \supseteq \mathcal{P}(N \cup M)$

(I) $x \in \mathcal{P}(N) \cup \mathcal{P}(M)$
Laut Vereinigungsmengendefinition gilt $x \in P(N) \vee x \in P(M)$.
Somit ist $x \subseteq N \vee x \subseteq M$, also $x \subseteq N \cup M$ und damit $x \in P(N \cup M)$.

(II) $x \in \mathcal{P}(N \cup M)$
Laut Potenzmengendefinition gilt $x \subseteq N \cap M$.
Somit ist $x \subseteq N \vee x \subseteq M$, also $x \in P(N) \vee x \in P(M)$ und damit $x \in P(N) \cup P(M)$.

Aufgabe 10

Sind M und N beliebige Mengen, so definiert man die "symmetrische Differenz" $M \triangle N$ als die Menge aller Elemente, die in genau einer der beiden Mengen enthalten sind.

a) Drücken Sie den Operator $\triangle$ durch die Operatoren $\cup$, $\cap$, $\setminus$ aus.

$M \triangle N = (M \cup N) \setminus (M \cap N)$

b) Welcher logischen Operation entspricht dieser Operator?

Kontravalenz/Exklusives Oder

c) Bestimmen Sie die folgenden Mengen (in aufzählender Schreibweise):

- $\{0, 2, 4\} \triangle \{1, 2, 3, 4\}$

$\{0, 2, 4\} \triangle \{1, 2, 3, 4\} = \{0, 1, 3\}$

- $\{1, 3, 5\} \triangle \{2, 4\}$

$\{1, 3, 5\} \triangle \{2, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- $\{(1, 2), (1, 3)(1, 4), (2, 4)\} \triangle \{(2, 1), (2, 4), (1, 3)\}$

$\{(1, 2), (1, 3)(1, 4), (2, 4)\} \triangle \{(2, 1), (2, 4), (1, 3)\} = \{(1, 2)(1, 4), (2, 1)\}$

- $\mathcal{P}(\{0, 2\}) \triangle \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\{0,2\})\triangle\mathcal{P}(\{1,2,3\}) &= \{\{\ \}, \{0\}, \{2\}, \{0, 2\}\}\triangle\{\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \\ &= \{\{0\}, \{1\}, \{3\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}\end{aligned}$$

Aufgabe 11

Zeigen Sie, dass für beliebige Mengen M, N gilt:

a) $M \triangle N = M \cup N \Leftrightarrow M \cap N = \emptyset$

(I) Wir zeigen *linke Seite* $\Rightarrow$ *rechte Seite* durch einen Widerspruch

Zuerst nehmen wir das Gegenteil an, also $M \triangle N \neq M \cup N \Rightarrow M \cap N \neq \emptyset$. Somit existiert ein $x \in M \cap N$, wodurch auch $x \in M \cup N$ gelten muss. Da laut Definition der Kontravalenz $(M \cup N) \setminus (M \cap N)$ gilt, ist $x \notin M \triangle N$. Da $x \notin M \triangle N$ ist, aber $x \in M \cup N$ ist, gilt $M \triangle N \neq M \cup N$. Dies ergibt einen Widerspruch zur unserer Grundannahme das $M \triangle N = M \cup N$ gilt.

(II) Wir zeigen *linke Seite* $\Leftarrow$ *rechte Seite*

Es gilt $M \cap N = \emptyset$. Somit ist $M \triangle N = (M \cup N) \setminus \emptyset \Leftrightarrow (M \cup N)$.

b) $M \triangle N = \emptyset \Leftrightarrow M = N$