Aufgabe 1

a) Erstellen Sie für die Gruppe $(\mathbb{Z}, \oplus)$ eine Gruppentafel.
(Hinweis: $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$) und $\oplus$ (manchmal $\oplus_6$) bedeutet $+$ mit *mod* 6)

$\oplus$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

b) Bestimmen Sie für die Elemente 3 und 4 in $\mathbb{Z}_6$ die bezüglich $\oplus$ inversen Elemente.

Das inverse Element verknüpft mit dem eigentlichen Element muss gleich dem neutralen Element sein. Also $(3 + x)$ *mod* $6 = 0$*, bzw.* $(4 + x)$ *mod* $6 = 0$.

- *Inverses von* 3*:* 3
- *Inverses von* 4*:* 2

c) Lösen Sie in $\mathbb{Z}_6$ die Gleichung $x \oplus 4 = 1$

$x = 3$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Menge $\mathbb{Z}_{10}$ zusammen mit der bekannten Multiplikation $\otimes$.

a) Geben Sie eine Verknüpfungstafel an.

$\otimes$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

b) Bestimmen Sie alle bezüglich dieser Verknüfung invertierbaren Elemente $\mathbb{U}(\mathbb{Z}_{10}) \subseteq \mathbb{Z}_{10}$

Das inverse Element verknüpft mit dem eigentlichen Element muss gleich dem neutralen Element sein.

$\mathbb{U}(\mathbb{Z}_{10}) = \{1, 3, 7, 9\}$

c) Ist $\mathbb{U}(\mathbb{Z}_{10}) \subseteq \mathbb{Z}_{10}$ bezüglich $\otimes$ abgeschlossen?
Es ist abgeschlossen, da jedes Element genau einmal in jeder Zeile und Spalte vorkommt (Sudoku).

d) Geben Sie eine Verknüpfungstafel für $(\mathbb{U}(\mathbb{Z}_{10}), \otimes)$ an.
Definiert diese Verknüpfung eine Gruppenstruktur?
Zu welcher bekannten Gruppe ist (eventuell) diese Gruppe isomorph?
Geben Sie ggf. einen Isomorphismus an.

$\otimes$	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

Es ist eine Gruppe:

1. *Ist Abgeschlossen*
2. *Das neutrale Element existiert*
3. *Für jedes Element existiert ein neutrales Element.*

4. *Es ist assoziativ*

e) Lösen Sie in $\mathbb{Z}_{10}$ die Gleichung $3 \otimes x \oplus 4 = 5$

$\underbrace{\underbrace{3 \otimes x}_{1} \oplus 4}_{5} = 5$, damit die Gleichung aufgeht muss $x = 7$.

Aufgabe 3

Wir betrachten die Symmetriegruppe ($\mathbb{S}_7$, $\circ$) der Permutationen der 7 Elemente $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ mit der Abbildungskomposition als Verknüpfung.

a) Berechnen Sie für die Elemente $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ und $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\phi^4 = \phi^2 \circ \phi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\psi^3 = \psi^2 \circ \psi^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\phi \circ \psi^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \psi^2 \circ \phi \circ \psi^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 4 & 1 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die kleinste Zahl $k > 0$, sodass ϕ^k das neutrale Element der Gruppe ergibt.

4 und 6 tauschen somit muss k eine gerade Zahl sein. 1, 2, 3, 5 werden so aufeinander abgebildet, dass es 4 Verknüpfungen braucht damit jedes Element auf sich selbst abgebildet wird, somit ist $k = 4$

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & 2 & \to & 3 & \to & 5 & \to & 1 \\
2 & \to & 3 & \to & 5 & \to & 1 & \to & 2 \\
3 & \to & 5 & \to & 1 & \to & 2 & \to & 3 \\
4 & \to & 6 & \to & 4 & \to & 6 & \to & 4 \\
5 & \to & 1 & \to & 2 & \to & 3 & \to & 5 \\
6 & \to & 4 & \to & 6 & \to & 4 & \to & 6 \\
\multicolumn{3}{c}{\underbrace{7 \;\to\; 7}_{k=1 \Leftrightarrow \phi}} & \to & \underbrace{7}_{k=2} & \to & \underbrace{7}_{k=3} & \to & \underbrace{7}_{k=4}
\end{array}$$

c) Lösen Sie in $(\mathbb{S}_7, \circ)$ die folgende Gleichung für die Unbekannte ξ :

$$\phi^2 \circ \psi \circ \xi \circ \phi^3 = \psi \circ \phi^2$$

d) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{T} = \{\rho \in \mathbb{S}_7 \mid \rho(\{1,2,5\}) \subseteq \{1,2,5\}\} \subseteq \mathbb{S}_7$ eine Untergruppe ist.

e) Geben Sie die von $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ erzeuge Untergruppe von $\mathbb{S}_7$ an.