Aufgabe 1

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssystem über $\mathbb{R}$:

a)

$$\begin{aligned} 2x + 4y + z &= 7 \\ 4x + 2y + 3z &= 8 \\ x + 5y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & | & 7 \\ 4 & 2 & 3 & | & 8 \\ 1 & 5 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{II - (-2·I)}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & | & 7 \\ 0 & -6 & 1 & | & -6 \\ 1 & 5 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III - (0.5·I)}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & | & 7 \\ 0 & -6 & 1 & | & -6 \\ 0 & 3 & 1.5 & | & -3.5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III - (-0.5·II)}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & | & 7 \\ 0 & -6 & 1 & | & -6 \\ 0 & 0 & 2 & | & -6.5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} 2x + 4y + z &= 7 \\ -6y + 1z &= -6 \\ 2z &= -6.5 \end{aligned} \longrightarrow z = \frac{-13}{4}, y = \frac{11}{24}, x = \frac{101}{24}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 7 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & | & 6 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & | & 7 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & | & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{II - I}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & | & -1 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & | & 7 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & | & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III - (2·I)}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & | & -1 \\ 0 & -5 & -4 & 2 & | & -7 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & | & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{IV - (3·I)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & | & -1 \\ 0 & -5 & -4 & 2 & | & -7 \\ 0 & -4 & -2 & -1 & | & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III - (5·II)}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -8 & | & -12 \\ 0 & -4 & -2 & -1 & | & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{IV - (4·II)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -8 & | & -12 \\ 0 & 0 & 6 & -9 & | & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{IV - III}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -8 & | & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -1 \\ 6x_3 - 8x_4 &= -12 \\ -1x_4 &= -3 \end{aligned} \longrightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 & x_2 = 1 \\ x_3 = 2 & x_4 = 3 \end{matrix}$$

Aufgabe 2

Es sei V der Lösungsraum des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned}
2x_1 + \ \ 3x_2 + \ \ 4x_3 + \ \ 5x_4 &= 0\\
2x_1 + 11x_2 + 15x_3 + 13x_4 &= 0\\
4x_1 - \ \ 2x_2 - \ \ 3x_3 + \ \ 2x_4 &= 0\\
14x_1 + \ \ 5x_2 + \ \ 6x_3 + 19x_4 &= 0
\end{aligned}$$

a) Man bestimme die Dimension von V.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 11 & 15 & 13 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \\ 14 & 5 & 6 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{II - I}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 11 & 8 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \\ 14 & 5 & 6 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III - (2·I)}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 11 & 8 \\ 0 & -8 & -11 & -8 \\ 14 & 5 & 6 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{IV - (7·I)}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 11 & 8 \\ 0 & -8 & -11 & -8 \\ 0 & -16 & -22 & -16 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III - (-I)}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & -22 & -16 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{IV - (-2·II)}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dimensionen: 2

b) Man zeige, dass $v = (1, 1, 0, -1)$ in V liegt.

I.

$$\begin{aligned}
(2 \cdot 1) + (3 \cdot 1) + (4 \cdot 0) + (5 \cdot -1) &= 0\\
2 + 3 + 0 - 5 &= 0\\
0 &= 0
\end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned}
(8 \cdot 1) + (11 \cdot 0) + (8 \cdot -1) &= 0\\
8 + 0 - 8 &= 0\\
0 &= 0
\end{aligned}$$

c) Man bestimme eine Basis von V.

Man muss ein $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ suchen für dass das Gleichungssystem aufgeht

$$u = (2, 2, 0, -2)$$

Aufgabe 3

a) Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 15 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & + & 8x_3 & + & ax_4 & = & c \end{array}$$

Für welche Wahl von a bzw. c in $\mathbb{R}$ wird der Lösungsraum dieses Gleichungssystems 2-dimensional, für welche a, c wird das Gleichungssystem unlösbar?

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 & | & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & | & 15 \\ 3 & -6 & 8 & a & | & c \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{II - (0,5·I)}} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -3.5 & 3.5 & | & 14 \\ 3 & -6 & 8 & a & | & c \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III - (1.5·I)}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -3.5 & 3.5 & | & 14 \\ 0 & 0 & 3.5 & a & | & c \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III - II}} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -3.5 & 3.5 & | & 14 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 & | & c-11 \end{bmatrix}$$

Lösbar für $a = 6$ und $c = 11$

a) Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$:

b) Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 1 \\
x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & (a+2)x_5 & = & a+3 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -1 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & (a-2)x_4 & - & x_5 & = & 2a-1 \\
2x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & - & ax_5 & = & a+1
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & | & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & a+2 & | & a+3 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & | & -1 \\
1 & 1 & 1 & a-2 & -1 & | & 2a-1 \\
2 & 1 & 0 & -1 & -a & | & a+1
\end{bmatrix}
\xrightarrow{\substack{\text{II-I} \\ \text{III - I} \\ \text{IV - I} \\ \text{V - 2I}}}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & | & 1 \\
0 & -2 & 0 & 2 & a+3 & | & a+2 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & | & -2 \\
0 & 0 & 0 & a-2 & 0 & | & 2a-2 \\
0 & -1 & -2 & 1 & -a+2 & | & a-1
\end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{Vertauschen}}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & | & 1 \\
0 & -1 & -2 & 1 & -a+2 & | & a-1 \\
0 & -2 & 0 & 2 & a+3 & | & a+2 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & | & -2 \\
0 & 0 & 0 & a-2 & 0 & | & 2a-2
\end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{II - (2}\cdot\text{I)}}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & | & 1 \\
0 & -1 & -2 & 1 & -a+2 & | & a-1 \\
0 & 0 & 4 & 0 & 3a-1 & | & -a+4 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & | & -2 \\
0 & 0 & 0 & a-2 & 0 & | & 2a-2
\end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{Vertauschen}}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & | & 1 \\
0 & -1 & -2 & 1 & -a+2 & | & a-1 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & | & -2 \\
0 & 0 & 0 & a-2 & 0 & | & 2a-2 \\
0 & 0 & 4 & 0 & 3a-1 & | & -a+4
\end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{V - (2}\cdot\text{III)}}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & | & 1 \\
0 & -1 & -2 & 1 & -a+2 & | & a-1 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & | & -2 \\
0 & 0 & 0 & a-2 & 0 & | & 2a-2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3a-1 & | & 4a-10
\end{bmatrix}
$$

Aufgabe 4

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 \phantom{{}+3x_5} &= 4 \\
-x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 5 \\
-x_1 + 7x_2 + x_3 + 2x_4 + 9x_5 &= 23 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 - 3x_5 &= -1 \\
9x_2 \phantom{{}+3x_3} + 6x_4 + 9x_5 &= 27
\end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraumes des zugehörigen homogenen Systems.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ -1 & 7 & 1 & 2 & 9 & 23 \\ 2 & 1 & 2 & 6 & -3 & -1 \\ 0 & 9 & 0 & 6 & 9 & 27 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{IV - 2I}]{\substack{\text{II+I} \\ \text{III + I}}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & 0 & 6 & 9 & 27 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & 9 & 0 & 6 & 9 & 27 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{V - 3II}]{\substack{\text{III-3II} \\ \text{IV + II}}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{V - III}]{\text{IV + III}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$