Aufgabe 1

Welche der folgenden Zeichenketten sind aussagenlogische Formeln?

a) $((p) \wedge (\neg(q))) \Rightarrow (((p) \vee ((r) \vee (q))) \wedge (\neg(p)))$

Es ist eine aussagenlogische Formel.

b) $((a) \vee (\neg(b)) \wedge (\neg(c)) \Rightarrow (a) \wedge (\neg(c))))$

Es ist keine aussagenlogische Formel (Letzte Klammer ist falsch/zu viel).

c) $((p) \Rightarrow (\neg(r))) \vee (\neg(q) \wedge ((r) \wedge (\neg(p))))$

Es ist eine aussagenlogische Formel.

d) $(\neg(p)) \vee ((q) \wedge (q)) \vee ((p)(r) \Rightarrow (r))$

Es ist keine aussagenlogische Formel ist keine valide Formel

e) $((a) \vee (b)) \Rightarrow (((c) \wedge (a)) \vee ((a) \Rightarrow (b)))$

Es ist eine aussagenlogische Formel (Alle Klammern richtig).

Stellen Sie für die korrekten aussagenlogischen Formeln jeweils einen Formelbaum auf. Für die Zeichenketten, die keine korrekten Formeln darstellen, sollten Sie allgemeine Sätze formulieren, die für eine aussagenlogische Formel stets erfüllt sind, die aber von der gegebenen Zeichenkette nicht erfüllt wird.

Aufgabe 2

Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln sind Tautologien, welche sind erfüllbar?

- *Anmerkung:* $X \Rightarrow Y$ *wurde hier als* $\neg X \vee Y$ *geschrieben*

a) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\overbrace{\neg B \vee C}^{D}$	$\overbrace{\neg A \vee D}^{E}$	$\overbrace{A \wedge B}^{F}$	$\neg F$	$\overbrace{\neg F \vee C}^{G}$	$E \Leftrightarrow G$
1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1

Tautologie

b) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((A \vee C) \wedge (\neg B \vee C))$
$\Leftrightarrow (C \vee (\neg B \wedge A))$

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\overbrace{\neg A \vee B}^{D}$	$\neg D$	$\overbrace{\neg D \vee C}^{E}$	$\overbrace{\neg B \wedge A}^{F}$	$\overbrace{C \vee F}^{G}$	$E \Leftrightarrow G$
1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1

Keine Tautologie

c) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C))$

A	B	C	$\neg A$	$\overbrace{\neg A \vee B}^{D}$	$\neg D$	$\overbrace{\neg D \vee C}^{E}$	$\overbrace{B \wedge C}^{F}$	$\overbrace{\neg A \vee F}^{G}$	$\neg E \vee G$
1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	0	1	1

Keine Tautologie

d) $((A \wedge \neg B) \Rightarrow (A \vee C)) \Rightarrow (\neg(B \Rightarrow A) \wedge (\neg A \Rightarrow C))$

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\overbrace{A \wedge \neg B}^{D}$	$\overbrace{A \vee C}^{E}$	$\neg D$	$\overbrace{\neg D \vee E}^{F}$	$\overbrace{\neg B \vee A}^{G}$	$\neg G$	$\overbrace{A \vee C}^{H}$	$\overbrace{\neg G \wedge H}^{I}$	$\neg F \vee I$
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0

Keine Tautologie

e) $(\neg B \wedge A) \Leftrightarrow \neg(A \Rightarrow B)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\overbrace{\neg B \wedge A}^{C}$	$\overbrace{\neg A \vee B}^{D}$	$\neg D$	$C \Leftrightarrow \neg D$
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1

Tautologie

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, daß die folgende aussagenlogische Formel eine Tautologie ist:
$(A \vee B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$

A	B	$\overbrace{A \vee B}^{C}$	$\overbrace{B \vee A}^{D}$	$\neg C$	$\neg C \vee D$
1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1

Tautologie

b) Formulieren Sie die Aussage, die aus der obigen Formel entsteht, wenn die aussagenlogischen Variablen A und B ersetzt werden durch die elementaren Aussagen:
"Fipi lüllt" bzw. "Gluka urzt".
Überzeugen Sie sich, dass diese Aussage auch im intuitiven Sinne wahr ist.

"Wenn Fipi lüllt oder Gluka urzt dann hat, wenn Gluka nicht geurzt hat, Fippi gelüllt."

c) Ersetzen Sie nun die Variablen A und B durch die (nicht mehr aussagenlogisch elementaren) Aussagen:
"Knull ixt oder Gluka pramelt" bzw. "Falls Akru urzt, so watzelt das Dapi".

"Wenn Knull ixt oder Gluka pramelt oder wenn Akru urzt dann watzelt Dapi, dann wenn Akru urzt, und Dapi nicht watzelt, dann ixt Knull oder Gluka pramelt."

$$((\overbrace{K(i) \vee G(p))}^{A} \vee \overbrace{(A(u) \Rightarrow D(w)))}^{B} \Rightarrow (\overbrace{\neg(A(u) \Rightarrow D(w))}^{\neg B} \Rightarrow \overbrace{(K(i) \vee G(p)))}^{A}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$((\overbrace{K(i) \vee G(p))}^{A} \vee \overbrace{(A(u) \Rightarrow D(w)))}^{B} \Rightarrow ((\overbrace{A(u) \wedge \neg D(w))}^{\neg B} \Rightarrow \overbrace{(K(i) \vee G(p)))}^{A}$$

Versuchen Sie, die Wahrheit auch dieser (sprachlich sicherlich unübersichtlichen) Aussage sich intuitiv klar zu machen.

Aufgabe 4

Welche der folgenden Aussagen für eine aussagenlogische Formel A ist richtig, welche falsch (Begründung oder Gegenbeispiel)?

a) Ist A eine Tautologie, so ist A erfüllbar.

Wenn A wahr ist dann ist A auch

b) Ist A eine Tautologie, so ist $\neg A$ unerfüllbar.

c) Ist A keine Tautologie, so ist sowohl A als auch $\neg A$ erfüllbar.

d) A ist genau dann erfüllbar, wenn $\neg A$ keine Tautologie ist.

e) Ist A erfüllbar und $\neg A$ erfüllbar, so ist A keine Tautologie.

f) Ist $\neg A$ widerlegbar, so ist A eine Tautologie.

Aufgabe 5

Die folgende Formel charakterisiert die Stetigkeit der Funktion f in einem Punkt x_0:
$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x : ((|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \epsilon))$.

a) "Übersetzen" Sie die Formel in einen natürlichen Satz.
(Hineweis: ϵ : Epslion, δ : Delta, $|\ldots|$: Betrag, $f(x)$: "f von x")

"Für alle Epsilon größer 0, existiert ein delta größer 0, sodass für alle x gilt, dass falls der Betrag von x minus x_0 größer Delta ist, Der Betrag von f von x minus f von x_0 kleiner Epsilon ist."

b) Bilden Sie formal die Negation dieser Aussage und schreiben Sie diese so, dass

- kein Negationszeichen vor Quantoren steht und
- kein Negationszeichen vor einer Implikation steht.

1. *Durch die Negation der Quantoren, negiert sich auch die Aussage (drei mal)*

$$\exists \epsilon > 0, \; \forall \delta > 0, \; \exists x : \neg\neg\neg((|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \epsilon))$$

2. *Zwei Negationen können entfernt werden, da es sich um eine Doppeltenegation handelt*

$$\exists \epsilon > 0, \; \forall \delta > 0, \; \exists x : \neg((|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \epsilon))$$

3. *Da laut Aufgaben stellung vor einer Implikation keine Negation stehen soll wird die Implikation umgewandelt ($A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$)*

$$\exists \epsilon > 0, \; \forall \delta > 0, \; \exists x : \neg(\neg(|x - x_0| < \delta) \vee (|f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

4. *Die Negation vor der Klammer kann entfernt werden indem man es in die Klammer holt und den aussagenlogischen Operator umdreht ($\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$)*

$$\exists \epsilon > 0, \; \forall \delta > 0, \; \exists x : ((|x - x_0| < \delta) \wedge \neg(|f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

4. *Die Negation vor $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ kann entfernt indem man das $<$ zu einem $\geq$ macht (ist etwas nicht kleiner als was anderes, impliziert es das es größer oder gleich ist)*

$$\exists \epsilon > 0, \; \forall \delta > 0, \; \exists x : ((|x - x_0| < \delta) \wedge (|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon)$$

c) Versuchen Sie sowohl die gegebene Aussage, als auch die negierte Aussage verbal zu formulieren.

Aufgabe 6

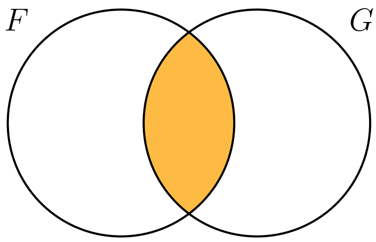
Welche der folgenden prädikatenlogischen Formeln (über einem nicht leeren Gültigkeitsbereich für die Variable x) stellen allgemeingültige Aussagen dar, welche nicht:

a) $(\forall x : F(x)) \Rightarrow (\neg\forall x : \neg F(x))$

Richtig, da $\neg\forall x : \neg F(x)$ *sich als* $\exists x : F(x)$ *schreiben lässt, und* $\forall x : F(x))$, $\exists x : F(x)$ *impliziert.*

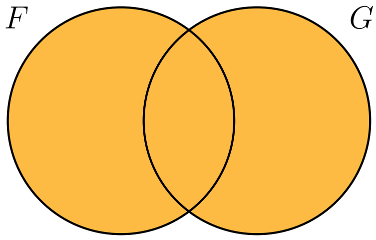
b) $(\forall x : F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow (\forall x : G(x))$

Richtig. Erklärung durch Venn-Diagram: Sei F(x), dass ein Element in F enthalten ist und G(x), dass ein Element in G enthalten ist, dann bedeutet $\forall x : F(x) \wedge G(x)$ *dass gilt, dass alle Elemente gemeint sind, die sowohl in F als auch in G sind (gelbe Schnittmenge in der Abbildung). Aus der Grundannahme kann man also folgen, dass alle, in der Grundannahme, gemeinten Elemente auch immer Teil von G seien müssen.*



c) $(\forall x : F(x) \vee G(x)) \Rightarrow (\forall x : F(x))$

Falsch. Erklärung durch Venn-Diagram: Sei F(x), dass ein Element in F enthalten ist und G(x), dass ein Element in G enthalten ist, dann bedeutet $\forall x : F(x) \vee G(x)$*, dass gilt, dass alle Elemente in entweder F, G oder in beiden enthalten sind. Aus der Grundannahme kann nicht gefolgert werden, das für alle Element gilt, dass diese in F enthalten sind, da es auch Elemente geben kann welche ausschließlich in G enthalten sind.*



d) $(\forall x : F(x) \vee G(x)) \Rightarrow (\exists x : G(x))$

Falsch. Beispiel: Sei F(x) $x^2 \geq 0$ *und G(x) sei* $x < 0$ *für* $x \in \mathbb{R}$*, so gilt zwar* $\forall x : F(x) \vee G(x)$ *aber nicht* $\exists x : G(x)$.

e) $(\forall x : F(x) \Rightarrow G(x)) \Rightarrow (\exists x : F(x) \wedge G(x))$

Falsch. Erklärung durch Venn-Diagram: Sei F(x), dass ein Element in F enthalten ist und G(x), dass ein Element in G enthalten ist, dann bedeutet $\forall x : F(x) \Rightarrow G(x)$*, dass gilt, dass alle Elemente die in F enthalten sind auch in G enthalten sind. Daraus folgt allerdings nicht, dass es mindestens ein Element gibt welches in F und G enthalten ist, da, da es auch ein Element geben kann welche nur in G enthalten ist aber nicht in F.*