Aufgabe 1

a) Erstellen Sie für die Gruppe $(\mathbb{Z}, \oplus)$ eine Gruppentafel.
(Hinweis: $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$) und $\oplus$ (manchmal $\oplus_6$) bedeutet $+$ mit *mod* 6)

$\oplus$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

b) Bestimmen Sie für die Elemente 3 und 4 in $\mathbb{Z}_6$ die bezüglich $\oplus$ inversen Elemente.

Das inverse Element verknüpft mit dem eigentlichen Element muss gleich dem neutralen Element sein. Also $(3 + x)$ *mod* $6 = 0$*, bzw.* $(4 + x)$ *mod* $6 = 0$.

- *Inverses von* 3*:* 3
- *Inverses von* 4*:* 2

c) Lösen Sie in $\mathbb{Z}_6$ die Gleichung $x \oplus 4 = 1$

$x = 3$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Menge $\mathbb{Z}_{10}$ zusammen mit der bekannten Multiplikation $\otimes$.

a) Geben Sie eine Verknüpfungstafel an.

$\otimes$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

b) Bestimmen Sie alle bezüglich dieser Verknüfung invertierbaren Elemente $\mathbb{U}(\mathbb{Z}_{10}) \subseteq \mathbb{Z}_{10}$

Das inverse Element verknüpft mit dem eigentlichen Element muss gleich dem neutralen Element sein.

$\mathbb{U}(\mathbb{Z}_{10}) = \{1, 3, 7, 9\}$

c) Ist $\mathbb{U}(\mathbb{Z}_{10}) \subseteq \mathbb{Z}_{10}$ bezüglich $\otimes$ abgeschlossen?
Es ist abgeschlossen, da jedes Element genau einmal in jeder Zeile und Spalte vorkommt (Sudoku).

d) Geben Sie eine Verknüpfungstafel für $(\mathbb{U}(\mathbb{Z}_{10}), \otimes)$ an.
Definiert diese Verknüpfung eine Gruppenstruktur?
Zu welcher bekannten Gruppe ist (eventuell) diese Gruppe isomorph?
Geben Sie ggf. einen Isomorphismus an.

$\otimes$	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

Es ist eine Gruppe:

1. *Ist Abgeschlossen*
2. *Das neutrale Element existiert*
3. *Für jedes Element existiert ein neutrales Element.*

4. *Es ist assoziativ*

e) Lösen Sie in $\mathbb{Z}_{10}$ die Gleichung $3 \otimes x \oplus 4 = 5$

$\underbrace{\underbrace{3 \otimes x}_{1} \oplus 4}_{5} = 5$, damit die Gleichung aufgeht muss $x = 7$.

Aufgabe 3

Wir betrachten die Symmetriegruppe ($\mathbb{S}_7$, $\circ$) der Permutationen der 7 Elemente $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ mit der Abbildungskomposition als Verknüpfung.

a) Berechnen Sie für die Elemente $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ und $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\phi^4 = \phi^2 \circ \phi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\psi^3 = \psi^2 \circ \psi^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\phi \circ \psi^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \psi^2 \circ \phi \circ \psi^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 4 & 1 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die kleinste Zahl $k > 0$, sodass ϕ^k das neutrale Element der Gruppe ergibt.

4 und 6 tauschen somit muss k eine gerade Zahl sein. 1, 2, 3, 5 werden so aufeinander abgebildet, dass es 4 Verknüpfungen braucht damit jedes Element auf sich selbst abgebildet wird, somit ist $k = 4$

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & 2 & \to & 3 & \to & 5 & \to & 1 \\
2 & \to & 3 & \to & 5 & \to & 1 & \to & 2 \\
3 & \to & 5 & \to & 1 & \to & 2 & \to & 3 \\
4 & \to & 6 & \to & 4 & \to & 6 & \to & 4 \\
5 & \to & 1 & \to & 2 & \to & 3 & \to & 5 \\
6 & \to & 4 & \to & 6 & \to & 4 & \to & 6 \\
\multicolumn{3}{c}{\underbrace{7 \ \to \ 7}_{k=1\Leftrightarrow\phi}} & \to & \underbrace{7}_{k=2} & \to & \underbrace{7}_{k=3} & \to & \underbrace{7}_{k=4}
\end{array}$$

c) Lösen Sie in $(\mathbb{S}_7, \circ)$ die folgende Gleichung für die Unbekannte ξ :

$$\phi^2 \ \circ \ \psi \ \circ \ \xi \ \circ \ \phi^3 = \psi \ \circ \ \phi^2$$

d) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{T} = \{\rho \in \mathbb{S}_7 \mid \rho(\{1,2,5\}) \subseteq \{1,2,5\}\} \subseteq \mathbb{S}_7$ eine Untergruppe ist.

e) Geben Sie die von $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ erzeuge Untergruppe von $\mathbb{S}_7$ an. Welche Ordnung hat diese?

Aufgabe 4

Von einer Gruppe $G = \{x, y, z, w\}$ mit Verknüpfung $\bullet$ sei der folgende Teil der Verknüpfungstabelle bekannt:

$\bullet$	x	y	z	w
x		y		
y		x	w	
z				
w		z		x

a) Zeigen Sie, dass diese Tabelle eindeutig zu einer Gruppentafel ergänzt werden kann.

$\bullet$	x	y	z	w
x	x	y	z	w
y	y	x	w	z
z	z	w	x	y
w	w	z	y	x

b) Geben Sie alle echten Untergruppen von G an.

$\{x\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{x, w\}$

c) Zeigen Sie, dass diese Gruppe nicht isomorph zur zyklischen Gruppe $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$ ist.

Isomorphismus: Surjektiv und Injektiv (Bijektiv)

Aufgabe 5

Gegeben sei die Gruppe $G = (\mathbb{Z}_{12}, \oplus)$.

a) Welche Ordnungen können die Untergruppen von G haben?

Satz von Lagrange: Die Ordnung einer Untergruppe ist stets Teiler der Gruppenordnung. D.h hier sind die Ordnungen der Untergruppen Teiler von 12*, also* $1, 2, 3, 4, 6, 12$.

b) Geben Sie eine Untergruppe von G der Ordnung 4 an (als Menge und mit der zugehörigen Gruppentafel).

$U_1 = \{0, 3, 6, 9\}$

$\oplus$	0	3	6	9
0	0	3	6	9
3	3	6	9	0
6	6	9	0	3
9	9	0	3	6

Aufgabe 6

Es sei K die Menge der Kongruenzabbildungen eines gleichseitigen Dreiecks. K besteht aus den Drehungen um den Mittelpunkt (Schnittpunkt der Seitenhalbierenden) mit Winkel 0°, 60°, 120°, und den Spiegelungen $s1$, $s2$, $s3$ an den Mittelsenkrechten. K bildet zusammen mit der Abbildungskomposition $\circ$ eine Gruppe.

a) Bei jeder der Abbildungen werden die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks permutiert, durch jede der Abbildungen ist also eine Permutation der Menge $\{A, B, C\}$ bestimmt, und jede Permutation der drei Eckpunkte entsteht auch durch eine dieser Kongruenzabbildungen. Man gebe in einer Tabelle zu jeder der Kongruenzabbildungen die entsprechende Permutation an.

$$d_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}, d_3 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix},$$

$$s_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die Gruppentafel zu dieser Gruppe $(K, \circ)$.

$\circ$	d_1	d_2	d_3	s_1	s_2	s_3
d_1	d_1	d_2	d_3	s_1	s_2	s_3
d_2	d_2	d_3	d_1	s_3	s_1	s_2
d_3	d_3	d_1	d_2	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	d_1	d_2	d_3
s_2	s_2	s_3	s_1	d_3	d_1	d_2
s_3	s_3	s_1	s_2	d_2	d_3	d_1

c) Man überzeuge sich an einigen Beispielen, dass die Abbildungskomposition $\circ$ auf K genau mit der Verknüpfung in der Permutationsgruppe $\mathbb{S}_{\{A,B,C\}}$ korrespondiert. Die Zordnung aus a) definiert also einen Gruppenisomorphismus von $(K, \circ)$ auf die Permutationsgruppe $(\mathbb{S}_{\{A,B,C\}}, \circ)$.

Aufgabe 7

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe.

a) Es sei $h \in G$ ein beliebiges (aber festes) Element. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\phi_h : G \to G$, $\phi_h(g) = h \star g \star h^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Ein Homomorphismus ist definiert, dass für zwei Gruppen $(H, *)$ und $(I, \circ)$, mit der Abbildung $A : G \to H$ gelten muss: $\forall g, g' \in H : A(g * g') = A(g) \circ A(g')$.

Hier muss also gezeigt werden, dass es für die Gruppe $(G, \star)$, $\forall g, g' \in G : \phi_h(g \star g') = \phi_h(g) \star \phi_h(g') = (h \star g \star h^{-1}) \star (h \star g' \star h^{-1})$ gilt.

$$\begin{aligned} \phi_h(g \star g') &= h \star (g \star g') \star h^{-1} \\ &= h \star g \star g' \star h^{-1} \end{aligned}$$

b) Es sei speziell $G = \mathbb{S}_3$ die Permutationsgruppe von drei Elementen $\{1, 2, 3\}$, es sei $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Man gebe den Homomorphismus ϕ_h in Form einer Tabelle an.

Aus $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, lässt sich $h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ableiten. Anschließend muss man alle $g \in G$ in ϕ_h einsetzen also, $\phi_h(g) = h \star g \star h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \star g \star \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$g \in G$	$\phi_h(g)$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$