

## Aufgabe 1

Welche der folgenden Relationen stellen Funktionen dar?

a)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^3 = y^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

## Aufgabe 2

Welche der folgenden Funktionen sind injektiv, surjektiv, bijektiv?

a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

- Nicht injektiv  $\rightarrow$  Durch die Quadrierung werden Zahlen mehrfach auf dieselbe Zahl dargestellt
- Nicht surjektiv  $\rightarrow$  Nicht jedes Element aus  $\mathbb{R}$  wird abgebildet

b)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x - 1$

- Injektiv
- Surjektiv
- Bijektiv

c)  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, h(n) = \frac{n}{n^2+1}$

- Injektiv
- Nicht surjektiv

d)  $k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, k(n) = n^2$

- Nicht Injektiv
- Nicht Surjektiv

## Aufgabe 3

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = (\frac{x}{1+x^2}, x^2)$  und  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x, y) = x(y+1)$ .

a) Berechnen Sie  $f \circ g$  und  $g \circ f$ .

$$f \circ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(g(x, y)) = ((\frac{x(y+1)}{1+(x(y+1))^2}), (x(y+1))^2)$$

$$g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(\frac{x}{1+x^2}, x^2) = \frac{x}{1+x^2}(x^2 + 1)$$

b) Berechnen Sie  $f(-1)$ ,  $f(2)$ ,  $g(1, 2)$ ,  $g(-1, 1)$ .

Berechnen Sie ferner  $(f \circ g)(1, 1)$  und  $(f \circ g)(2, 0)$ , sowie  $(g \circ f)(3)$  und  $(g \circ f)(0)$

$$f(-1) = (\frac{-1}{1+(-1)^2}, -1^2) = (-\frac{1}{2}, 1)$$

$$f(2) = (\frac{2}{1+2^2}, 2^2) = (\frac{2}{5}, 4)$$

$$g(1, 2) = 1(2+1) = 3$$

$$g(-1, 1) = -1(1+1) = -2$$

$$(f \circ g)(1, 1) = ((\frac{1(1+1)}{1+(1(1+1))^2}), (1(1+1))^2) = (\frac{2}{5}, 4)$$

$$(f \circ g)(2, 0) = ((\frac{2(0+1)}{1+(2(0+1))^2}), (2(0+1))^2) = (\frac{2}{5}, 4)$$

$$(g \circ f)(3) = \frac{3}{1+3^2}(3^2 + 1) = \frac{3}{10}(10) = \frac{10}{10} = 1$$

$$(g \circ f)(0) = \frac{0}{1+0^2}(0^2 + 1) = 0$$

c) Welche der Funktionen  $f$ ,  $g$ ,  $f \circ g$  und  $g \circ f$  sind injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv?

## Aufgabe 4

Es sei  $M = 1, 2, 3, 4, 5$ . Die Funktionen  $f, g : M \rightarrow M$  seien gegeben durch

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ bzw. } g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Man bestimme  $f^{-1}$ ,  $g^{-1}$ ,  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ .

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Mit  $f^{(k)} = f \circ f \circ \dots \circ f$  ( $k$ -mal) bezeichnen wir die  $k$ -fache Komposition von  $f$  mit sich selbst. Man bestimme die kleinsten Zahlen  $k, l \in \mathbb{N}$ , sodass gilt:  $f^{(k)} = id_M$  und  $g^{(l)} = id_M$ .

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad g^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad g^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad g^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$f^{(6)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 5

Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$

a) Bestimmen Sie  $f(M_1)$  bzw.  $f(M_2)$  für die Mengen

- $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1 \text{ und } 1 < y < 2\} = ]0, 1[ \times ]1, 2[$

$$f(M_1) = ]2, 6[$$

- $M_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$f(M_2) = ]1, \infty[$$

b) Für  $M = ]0, 2[$  bestimmte man  $f^{-1}(M)$ .

c) Für  $c = 0$  bzw.  $c = 1$  bzw.  $c = 5$  bestimme man  $f^{-1}(\{c\})$

Zeichnen Sie diese Mengen außerdem in einem Koordinatensystem.

## Aufgabe 6

Gegeben seien Mengen  $A$ ,  $B$  und  $C$  sowie Funktionen  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$ .

a) Zeigen Sie:

(i)  $g \circ f$  surjektiv  $\Rightarrow g$  surjektiv.

*Annahme:*

- $g \circ f : A \rightarrow C$  ist surjektiv
- $f : A \rightarrow B$  ist surjektiv

*Zu Zeigen:*

*Damit  $g$  surjektiv ist muss für jedes  $c \in C$  ein Element  $b \in B$  existieren, sodass  $g(b) = c$ .*

*Da  $g \circ f$  surjektiv ist, gibt es für jedes  $c \in C$  ein  $a \in A$ , sodass  $(g \circ f)(a) = c$ . Da  $f$  surjektiv ist, gibt es für jedes  $b \in B$  ein  $a \in A$ , sodass  $f(a) = b$ . Daraus folgt, dass für jedes  $c \in C$  ein Element  $b \in B$  existieren muss, sodass  $g(b) = c$  ist. Damit ist  $g$  surjektiv.*

(ii)  $g \circ f$  injektiv  $\Rightarrow f$  injektiv.

*Zu Zeigen:*

*Damit  $f$  injektiv ist muss darf jedem  $b \in B$  höchstens ein  $a \in A$  zugeordnet werden.*