Aufgabe 1

Sei $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}$

Geben Sie die folgenden Relationen in $A \times A$ in aufzählender Schreibweise an:

a) $R_1 = \{(x, y) \mid y < 2x + 2\}$

$$\begin{aligned} R_1 = \{&(-2,-3),(-1,-3),(-1,-2),(-1,-1),(0,-3),(0,-2),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-3),\\ &(1,-2),(1,-1),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,-3),(2,-2),(2,-1),(2,0),(2,1),(2,2),\\ &(2,3),(3,-3),(3,-2),(3,-1),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1^{-1} = \{&(-3,-2),(-3,-1),(-2,-1),(-1,-1),(-3,0),(-2,0),(-1,0),(0,0),(1,0),(-3,1),\\ &(-2,1),(-1,1),(0,1),(1,1),(2,1),(3,1),(-3,2),(-2,2),(-1,2),(0,2),(1,2),(2,2),\\ &(3,2),(-3,3),(-2,3),(-1,3),(0,3),(1,3),(2,3),(3,3)\} \end{aligned}$$

b) $R_2 = \{(x, y) \mid 2x + y > 1\} \cup \{(x, y) \mid x = y\}$

Da $2x + y > 1$ sein muss kann man bereits alle Tupel welche im Bereich $x = [-3, 0]$ und $y = [-3, 1]$ liegen ausschließen da diese niemals größer 1 werden.

$$\begin{aligned} R_2 &= \{(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\} \cup\\ &\quad\{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}\\ &= \{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),\\ &\quad(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2^{-1} = \{&(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0),(2,0),(3,0),(1,1),(2,1),(3,1),(1,2),\\ &(2,2),(3,2),(1,3),(2,3),(3,3)\} \end{aligned}$$

c) $R_3 = \{(a, b) \mid 3 - a^2 \leq b\} \cap \{(x, y) \mid x^2 = y + 3\}$

$$\begin{aligned} R_3 &= \{(-3,-3),(-3,-2),(-3,-1),(-3,0),(-3,1),(-3,2),(-3,3),(-2,-1),(-2,0),\\ &\quad(-2,1),(-2,2),(-2,3),(-1,2),(-1,3),(0,3),(1,2),(1,3),(2,-1),(2,0),(2,1),(2,2),\\ &\quad(2,3),(3,-3),(3,-2),(3,-1),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)\} \cap\\ &\quad\{(-2,1),(-1,-2),(0,-3),(1,-2),(2,1)\}\\ &= \{(-2,1),(-1,-2),(2,1)\} \end{aligned}$$

$$R_3^{-1} = \{(1,-2),(-2,-1),(1,2)\}$$

Bestimmen Sie für alle drei Relationen jeweils die Umkehrrelation ebenfalls in aufzählender Schreibweise.

Aufgabe 2

Es sei $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}, N = \mathbb{N}, K = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq 10\}$
Ferner seien folgende Relation $R \subseteq M \times N, S \subseteq N \times K$ gegeben:

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow y \leq x + 1$$
$$(a, b) \in S \Leftrightarrow b = 2a - 1$$

a) Man gebe die Relationen explizit (d.h. in aufzählender Schreibweise) an.

$$\begin{aligned} R = \{&(-1, 0), \\ &(0, 0), (0, 1), \\ &(1, 0), (1, 1), (1, 2), \\ &(2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), \\ &(3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)(3, 4)\} \end{aligned}$$

$S = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9)\}$

b) Geben Sie R^{-1} und S^{-1} explizit an.

$$\begin{aligned} R^{-1} = \{&(0, -1), \\ &(0, 0), (1, 0), \\ &(0, 1), (1, 1), (2, 1), \\ &(0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2), \\ &(0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 3)(4, 3)\} \end{aligned}$$

$S^{-1} = \{(1, 1), (3, 2), (5, 3), (7, 4), (9, 5)\}$

c) Geben Sie $S \circ R$ explizit an.

$S \circ R = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (2, 5), (3, 5), (3, 7)\}$

d) Es sei nun die dreistellige Relation $T \subseteq M \times N \times K$ gegeben durch

$$(m, n, k) \in T \Leftrightarrow (m, n) \in R \text{ und } (n, k) \in S$$

Geben Sie auch T explizit an

$T = \{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 1), (3, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 2, 3), (3, 2, 3), (2, 3, 5), (3, 3, 3), (3, 4, 7)\}$

Aufgabe 3

Gegeben seien Mengen A, B, C und die Relationen $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$.
Zeigen Sie: $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

Aufgabe 4

Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine beliebige Teilmenge.
Auf M betrachten wir die "Teilrelation" T:

$xTy \Leftrightarrow x\ ist\ Teiler\ von\ y$

a) Man zeige, dass T eine Ordnungsrelation ist.

Reflexiv:
$xTx \rightarrow$ *jede Zahl ist Teiler von sich selbst.*

Antisymmetrie:
Wenn $xTy \wedge yTx$ *gelten muss, müssen zwei Zahlen* $n, m \in \mathbb{N}$ *exitieren, sodass* $x = n \cdot y$ *und* $y = m \cdot x$ *ist. Somit gilt* $x = n \cdot y = n \cdot (m \cdot x) = (n \cdot m) \cdot y$. *Dies kann allerdings nur stimmen wenn* $m, n = 1$ *sind, woraus folgt* $x = y$.

Transitiv:
Wenn $xTy \wedge yTz \Rightarrow xTz$ *gelten muss, müssen zwei Zahlen* $n, m \in \mathbb{N}$ *exitieren, sodass* $y = n \cdot x$ *und* $z = m \cdot y$ *ist. Somit gilt* $z = m \cdot y = m \cdot (n \cdot x) = (m \cdot n) \cdot x$. *Also gibt es eine Zahl* $(m \cdot n)$ *die multipliziert mit mit* x *gleich* z *ist. Somit ist* x *auch Teiler von* z.

b) Es sei jetzt $M = \{2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller geraden natürlichen Zahlen. Man zeige, dass die Relation T nicht linear ist.

Anmerkung: Lineare Ordnung = Totalordnung

$M = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$