

Aufgabe 1

Sei $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}$

Geben Sie die folgenden Relationen in $A \times A$ in aufzählender Schreibweise an:

a) $R_1 = \{(x, y) \mid y < 2x + 2\}$

$$R_1 = \{(-2, -3), (-1, -3), (-1, -2), (-1, -1), (0, -3), (0, -2), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -3), (1, -2), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, -3), (2, -2), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, -3), (3, -2), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$R_1^{-1} = \{(-3, -2), (-3, -1), (-2, -1), (-1, -1), (-3, 0), (-2, 0), (-1, 0), (0, 0), (1, 0), (-3, 1), (-2, 1), (-1, 1), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (-3, 2), (-2, 2), (-1, 2), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (-3, 3), (-2, 3), (-1, 3), (0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$$

b) $R_2 = \{(x, y) \mid 2x + y > 1\} \cup \{(x, y) \mid x = y\}$

Da $2x + y > 1$ sein muss kann man bereits alle Tupel welche im Bereich $x = [-3, 0]$ und $y = [-3, 1]$ liegen ausschließen da diese niemals größer 1 werden.

$$R_2 = \{(0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\} \cup \{(-3, -3), (-2, -2), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \\ = \{(-3, -3), (-2, -2), (-1, -1), (0, 0), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$R_2^{-1} = \{(-3, -3), (-2, -2), (-1, -1), (0, 0), (2, 0), (3, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$$

c) $R_3 = \{(a, b) \mid 3 - a^2 \leq b\} \cap \{(x, y) \mid x^2 = y + 3\}$

$$R_3 = \{(-3, -3), (-3, -2), (-3, -1), (-3, 0), (-3, 1), (-3, 2), (-3, 3), (-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-2, 3), (-1, 2), (-1, 3), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, -3), (3, -2), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\} \cap \{(-2, 1), (-1, -2), (0, -3), (1, -2), (2, 1)\} \\ = \{(-2, 1), (-1, -2), (2, 1)\}$$

$$R_3^{-1} = \{(1, -2), (-2, -1), (1, 2)\}$$

Bestimmen Sie für alle drei Relationen jeweils die Umkehrrelation ebenfalls in aufzählender Schreibweise.

Aufgabe 2

Es sei $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}$, $N = \mathbb{N}$, $K = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq 10\}$

Ferner seien folgende Relation $R \subseteq M \times N$, $S \subseteq N \times K$ gegeben:

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow y \leq x + 1$$

$$(a, b) \in S \Leftrightarrow b = 2a - 1$$

a) Man gebe die Relationen explizit (d.h. in aufzählender Schreibweise) an.

$$R = \{(-1, 0), \\ (0, 0), (0, 1), \\ (1, 0), (1, 1), (1, 2), \\ (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), \\ (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

$$S = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9)\}$$

b) Geben Sie R^{-1} und S^{-1} explizit an.

$$R^{-1} = \{(0, -1), \\ (0, 0), (1, 0), \\ (0, 1), (1, 1), (2, 1), \\ (0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2), \\ (0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$$

$$S^{-1} = \{(1, 1), (3, 2), (5, 3), (7, 4), (9, 5)\}$$

c) Geben Sie $S \circ R$ explizit an.

$$S \circ R = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (2, 5), (3, 5), (3, 7)\}$$

d) Es sei nun die dreistellige Relation $T \subseteq M \times N \times K$ gegeben durch

$$(m, n, k) \in T \Leftrightarrow (m, n) \in R \text{ und } (n, k) \in S$$

Geben Sie auch T explizit an

$$T = \{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 1), (3, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 2, 3), (3, 2, 3), (2, 3, 5), (3, 3, 3), (3, 4, 7)\}$$

Aufgabe 3

Gegeben seien Mengen A, B, C und die Relationen $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$.

Zeigen Sie: $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

Aufgabe 4

Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine beliebige Teilmenge.

Auf M betrachten wir die "Teilrelation" T :

$$xTy \Leftrightarrow x \text{ ist Teiler von } y$$

a) Man zeige, dass T eine Ordnungsrelation ist.

Reflexiv:

$xTx \rightarrow$ jede Zahl ist Teiler von sich selbst.

Antisymmetrie:

Wenn $xTy \wedge yTx$ gelten muss, müssen zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $x = n \cdot y$ und $y = m \cdot x$ ist. Somit gilt $x = n \cdot y = n \cdot (m \cdot x) = (n \cdot m) \cdot x$. Dies kann allerdings nur stimmen wenn $m, n = 1$ sind, woraus folgt $x = y$.

Transitiv:

Wenn $xTy \wedge yTz \Rightarrow xTz$ gelten muss, müssen zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $y = n \cdot x$ und $z = m \cdot y$ ist. Somit gilt $z = m \cdot y = m \cdot (n \cdot x) = (m \cdot n) \cdot x$. Also gibt es eine Zahl $(m \cdot n)$ die multipliziert mit x gleich z ist. Somit ist x auch Teiler von z .

b) Es sei jetzt $M = \{2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller geraden natürlichen Zahlen. Man zeige, dass die Relation T nicht linear ist.

Anmerkung: Lineare Ordnung = aRb und bRa

$$M = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

Man muss zwei Zahlen x, y finden, die in M sind, sodass x kein Teiler von y ist und y kein Teiler von x (z.B $x = 4, y = 10$)

c) Es sei jetzt $M = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller 2er-Potenzen. Man zeige, dass die Relation T auf dieser Menge linear ist.

$$M = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$$

Aufgabe 5

Es sei R die folgende Ordnungsrelation auf der Menge \mathbb{N}^2 :

$$(x, y) R (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ und } y \leq y'$$

a) Man zeige, dass R eine nichtlineare Ordnungsrelation auf \mathbb{N}^2 ist.