Aufgabe 1

Sei $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}$

Geben Sie die folgenden Relationen in $A \times A$ in aufzählender Schreibweise an:

a) $R_1 = \{(x, y) \mid y < 2x + 2\}$

$$\begin{aligned} R_1 = \{&(-2,-3),(-1,-3),(-1,-2),(-1,-1),(0,-3),(0,-2),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-3),\\ &(1,-2),(1,-1),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,-3),(2,-2),(2,-1),(2,0),(2,1),(2,2),\\ &(2,3),(3,-3),(3,-2),(3,-1),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1^{-1} = \{&(-3,-2),(-3,-1),(-2,-1),(-1,-1),(-3,0),(-2,0),(-1,0),(0,0),(1,0),(-3,1),\\ &(-2,1),(-1,1),(0,1),(1,1),(2,1),(3,1),(-3,2),(-2,2),(-1,2),(0,2),(1,2),(2,2),\\ &(3,2),(-3,3),(-2,3),(-1,3),(0,3),(1,3),(2,3),(3,3)\} \end{aligned}$$

b) $R_2 = \{(x, y) \mid 2x + y > 1\} \cup \{(x, y) \mid x = y\}$

Da $2x + y > 1$ sein muss kann man bereits alle Tupel welche im Bereich $x = [-3, 0]$ und $y = [-3, 1]$ liegen ausschließen da diese niemals größer 1 werden.

$$\begin{aligned} R_2 &= \{(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\} \cup\\ &\quad\{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}\\ &= \{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),\\ &\quad(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2^{-1} = \{&(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0),(2,0),(3,0),(1,1),(2,1),(3,1),(1,2),\\ &(2,2),(3,2),(1,3),(2,3),(3,3)\} \end{aligned}$$

c) $R_3 = \{(a, b) \mid 3 - a^2 \leq b\} \cap \{(x, y) \mid x^2 = y + 3\}$

$$\begin{aligned} R_3 &= \{(-3,-3),(-3,-2),(-3,-1),(-3,0),(-3,1),(-3,2),(-3,3),(-2,-1),(-2,0),\\ &\quad(-2,1),(-2,2),(-2,3),(-1,2),(-1,3),(0,3),(1,2),(1,3),(2,-1),(2,0),(2,1),(2,2),\\ &\quad(2,3),(3,-3),(3,-2),(3,-1),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)\} \cap\\ &\quad\{(-2,1),(-1,-2),(0,-3),(1,-2),(2,1)\}\\ &= \{(-2,1),(-1,-2),(2,1)\} \end{aligned}$$

$R_3^{-1} = \{(1,-2),(-2,-1),(1,2)\}$

Bestimmen Sie für alle drei Relationen jeweils die Umkehrrelation ebenfalls in aufzählender Schreibweise.

Aufgabe 2

Es sei $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}, N = \mathbb{N}, K = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq 10\}$
Ferner seien folgende Relation $R \subseteq M \times N, S \subseteq N \times K$ gegeben:

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow y \leq x+1$$
$$(a,b) \in S \Leftrightarrow b = 2a-1$$

a) Man gebe die Relationen explizit (d.h. in aufzählender Schreibweise) an.

$$\begin{aligned} R = \{&(-1,0),\\ &(0,0),(0,1),\\ &(1,0),(1,1),(1,2),\\ &(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),\\ &(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)(3,4)\} \end{aligned}$$

$S = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7),(5,9)\}$

b) Geben Sie R^{-1} und S^{-1} explizit an.

$$\begin{aligned} R^{-1} = \{&(0,-1),\\ &(0,0),(1,0),\\ &(0,1),(1,1),(2,1),\\ &(0,2),(1,2),(2,2),(3,2),\\ &(0,3),(1,3),(2,3),(3,3)(4,3)\} \end{aligned}$$

$S^{-1} = \{(1,1),(3,2),(5,3),(7,4),(9,5)\}$

c) Geben Sie $S \circ R$ explizit an.

$S \circ R = \{(0,1),(1,1),(2,1),(3,1),(1,3),(2,3),(3,3),(2,5),(3,5),(3,7)\}$

d) Es sei nun die dreistellige Relation $T \subseteq M \times N \times K$ gegeben durch

$$(m,n,k) \in T \Leftrightarrow (m,n) \in R \text{ und } (n,k) \in S$$

Geben Sie auch T explizit an

$T = \{(0,1,1),(1,1,1),(2,1,1),(3,1,1),(1,2,3),(2,2,3),(3,2,3),(2,3,5),(3,3,3),(3,4,7)\}$

Aufgabe 3

Gegeben seien Mengen A, B, C und die Relationen $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$.
Zeigen Sie: $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

Aufgabe 4

Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine beliebige Teilmenge.
Auf M betrachten wir die "Teilrelation" T:

$xTy \Leftrightarrow x\ ist\ Teiler\ von\ y$

a) Man zeige, dass T eine Ordnungsrelation ist.

Reflexiv:
$xTx \rightarrow$ jede Zahl ist Teiler von sich selbst.

Antisymmetrie:
Wenn $xTy \wedge yTx$ gelten muss, müssen zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ exitieren, sodass $x = n \cdot y$ und $y = m \cdot x$ ist. Somit gilt $x = n \cdot y = n \cdot (m \cdot x) = (n \cdot m) \cdot y$. Dies kann allerdings nur stimmen wenn $m, n = 1$ sind, woraus folgt $x = y$.

Transitiv:
Wenn $xTy \wedge yTz \Rightarrow xTz$ gelten muss, müssen zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ exitieren, sodass $y = n \cdot x$ und $z = m \cdot y$ ist. Somit gilt $z = m \cdot y = m \cdot (n \cdot x) = (m \cdot n) \cdot x$. Also gibt es eine Zahl $(m \cdot n)$ die multipliziert mit mit x gleich z ist. Somit ist x auch Teiler von z.

b) Es sei jetzt $M = \{2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller geraden natürlichen Zahlen. Man zeige, dass die Relation T nicht linear ist.

Anmerkung: Lineare Ordnung = aRb und bRa

$M = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

Man muss zwei Zahlen x, y finden, die in M sind, sodass x kein Teiler von y ist und y kein Teiler von x (z.B $x = 4, y = 10$)

c) Es sei jetzt $M = \{2^n | n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller 2er-Potenzen. Man zeige, dass die Relation T auf dieser Menge linear ist.

$M = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$

Aufgabe 5

Es sei R die folgende Ordnungsrelation auf der Menge $\mathbb{N}^2$:
$(x, y)\ R\ (x', y') \Leftrightarrow x \leq x'$ und $y \leq y'$

a) Man zeige, dass R eine nichtlineare Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}^2$ ist.

Linear bedeutet $\forall a, b \in A : aRb\ \vee\ bRa$ *somit bedeutet nicht linear* $\exists a, b \in A : \neg aRb\ \wedge\ \neg bRa$. *Zwei Elemente aus* B *auf die das zutrifft sind* $(1, 2)$, $(2, 1)$.

b) Für die Menge $B = \{(1, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$ bestimme man, falls existent, maximale, minimale Elemente, größtes und kleinstes Element, Supremum und Infimum. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von B bzgl. der Relation R.

Maximales Element:
$(2, 3)$

Minimales Element:
$(1, 2), (2, 1) \rightarrow$ *stehen nicht in Relation, können somit nicht verglichen werden*

Größtes Element:
$(2, 3)$

Kleinstes Element:
Existiert nicht, $(1, 2)$ *und* $(2, 1)$ *stehen nicht in Relation, sind also nicht vergleichbar. Somit kann man nicht alle Element vergleichen um herrauszufinden, welches das kleinste Element ist.*

Infimum:
$(1, 1)$ *da wir* $(1, 2)$ *und* $(2, 1)$ *nicht vergleichen können und dies das nächst kleinere untere Grenze ist. Das* $(1, 1)$ *nicht in* B *ist spielt hierbei keine Rolle.*

Supermum:
$(2, 3)$

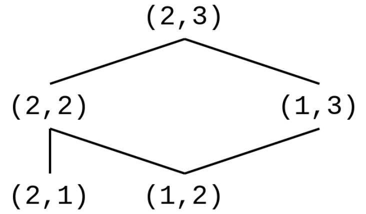


Abbildung 1: Hasse-Diagram

c) Man gebe eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{N}^2$ an, die kein größtes und kein kleinstes Element besitzt.

$\mathbb{N}^2 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2)\}$

Aufgabe 6

Es sei $M = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 13\}$. Auf M^2 betrachten wir folgende Relation S: $(a,b)S(a',b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b$

a) Man zeige, dass S eine Äquivalenzrelation ist.

Eine Äquivalenzrelation hat die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Trasitivität.

Reflexiv:
$(a,b)S(a,b)$. *Für* $(a,b)S(a,b)$ *gilt* $a + b = a + b$. *Da die linke Seite gleich rechte Seite ist stehen sie in Relation und es ist somit reflexiv.*

Symmetrie:
$(a,b)S(a',b') \Rightarrow (a',b')S(a,b)$. *Für* $(a,b)S(a',b')$ *gilt* $a + b' = a' + b$ *und für* $(a',b')S(a,b)$ *gilt* $a' + b = a + b'$. *Somit ist es symmetrisch.*

Transitiv:
$(a,b)S(c,d) \wedge (c,d)S(e,f) \Rightarrow (a,b)S(e,f)$. *Für* $(a,b)S(c,d)$ *gilt* $a + d = c + b$ *und für* $(c,d)S(e,f)$ *gilt* $c + f = e + d$. *Nicht transitiv ???*

b) Man gebe die Äquivalenzklassen von $(2,5)$ und von $(7,3)$ explizit an.

Für die Äquivalenzklasse von $x = (2,5)$ *gilt* $[(2,5)]_R = \{y \in A \mid (2,5)Ry\}$. *D.h wir suchen alle Tupel für die die Gleichung* $2 + b' = a' + 5$ *aufgeht.*

$[(2,5)]_R = \{(1,4),(2,5),(3,6),(4,7),(5,8),(6,9),(7,10),(8,11),(9,12),(10,13)\}$

Für die Äquivalenzklasse von $x = (7,3)$ *gilt* $[(7,3)]_R = \{y \in A \mid (7,3)Ry\}$. *D.h wir suchen alle Tupel für die die Gleichung* $7 + b' = a' + 3$ *aufgeht.*

$[(7,3)]_R = \{(5,1),(6,2),(7,3),(8,4),(9,5),(10,6),(11,7),(12,8),(13,9)\}$

Aufgabe 7

Es sei G die Menge aller Geraden in der euklidischen Ebene.
Prüfen Sie, ob die folgenden Relationen P und S in $G \times G$ Äquivalenzrelationen sind:

a) $g_1 P g_2 \Leftrightarrow g_1$ ist parallel zu g_2

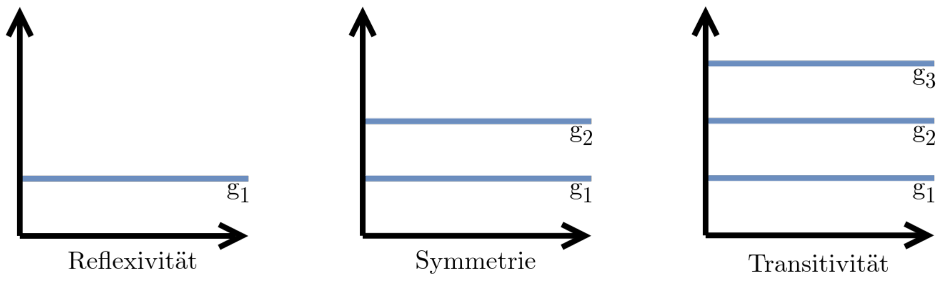
Eine Äquivalenzrelation hat die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Trasitivität.

Reflixiv:
$g_1 P g_1$. *Jede Gerade ist parallel zu sich selbst. Somit ist es reflexiv.*

Symmetrie:
$g_1 P g_2 \Leftarrow g_2 P g_1$. *Ist eine Gerade g_1 parallel zu einer Gerade g_2 folgt daraus, dass g_2 auch parallel zu g_1 ist. Somit ist es symmetrisch.*

Transitiv:
$g_1 P g_2 \wedge g_2 P g_3 \Rightarrow g_1 P g_3$. *Ist eine Gerade g_1 parallel zu einer Gerade g_2 und ist Gerade g_2 parallel zu g_3, so ist g_1 auch parallel zu g_3. Somit ist die transitiv.*

Da alle drei Eigenschaften zutreffen, handelt es sich bei P um eine Äquivalenzrelation.



a) $g_1 S g_2 \Leftrightarrow g_1$ ist senkrecht zu g_2

Eine Äquivalenzrelation hat die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Trasitivität.

Reflixiv:
$g_1 P g_1$. *Eine Gerade kann nicht senkrecht zu sich selbst stehen. Somit ist es nicht reflexiv.*

Es handelt es sich bei S um keine Äquivalenzrelation.