Aufgabe 1

Welche der folgenden Relationen stellen Funktionen dar?

a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^3 = y^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Aufgabe 2

Welche der folgenden Funktionen sind injektiv, surjektiv, bijektiv?

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$

- Nicht injektiv $\to$ Durch die Quadrierung werden Zahlen mehrfach auf dieselbe Zahl dargestellt
- Nicht surjektiv $\to$ Nicht jedes Element aus $\mathbb{R}$ wird abgebildet

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 2x - 1$

- Injektiv
- Surjektiv
- Bijektiv

c) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, h(n) = \frac{n}{n^2+1}$

- Injektiv
- Nicht surjektiv

d) $k : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, k(n) = z^2$

- Nicht Injektiv
- Nicht Surjektiv

Aufgabe 3

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (\frac{x}{1+x^2}, x^2)$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x, y) = x(y + 1)$.

a) Berechnen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$.

$f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(g(x, y)) = ((\frac{x(y+1)}{1+(x(y+1))^2}), (x(y + 1))^2)$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(\frac{x}{1+x^2}, x^2) = \frac{x}{1+x^2}(x^2 + 1)$

b) Berechnen Sie $f(-1)$, $f(2)$, $g(1, 2)$, $g(-1, 1)$.
Berechnen Sie ferner $(f \circ g)(1, 1)$ und $(f \circ g)(2, 0)$, sowie $(g \circ f)(3)$ und $(g \circ f)(0)$

$f(-1) = (\frac{-1}{1+(-1)^2}, -1^2) = (-\frac{1}{2}, 1)$

$f(2) = (\frac{2}{1+2^2}, 2^2) = (\frac{2}{5}, 4)$

$g(1, 2) = 1(2 + 1) = 3$

$g(-1, 1) = -1(1 + 1) = -2$

$(f \circ g)(1, 1) = ((\frac{1(1+1)}{1+(1(1+1))^2}), (1(1 + 1))^2) = (\frac{2}{5}, 4)$

$(f \circ g)(2, 0) = ((\frac{2(0+1)}{1+(2(0+1))^2}), (2(0 + 1))^2) = (\frac{2}{5}, 4)$

$(g \circ f)(3) = \frac{3}{1+3^2}(3^2 + 1) = \frac{3}{10}(10) = \frac{10}{10} = 1$

$(g \circ f)(0) = \frac{0}{1+0^2}(0^2 + 1) = 0$

c) Welche der Funktionen f, g, $f \circ g$ und $g \circ f$ sind injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv?

Aufgabe 4

Es sei $M = 1, 2, 3, 4, 5$. Die Funktionen $f, g : M \to M$ seien gegeben durch

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ bzw. } g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Man bestimmte f^{-1}, g^{-1}, $f \circ g$, $g \circ f$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Mit $f^{(k)} = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (k-mal) bezeichnen wir die k-fache Komposition von f mit sich selbst. Man bestimmte die kleinste Zahlen $k, l \in \mathbb{N}$, sodass gilt: $f^{(k)} = id_M$ und $g^{(l)} = id_M$.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad g^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad g^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad g^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$f^{(6)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$