

Aufgabe 1

Welche der folgenden Zeichenketten sind aussagenlogische Formeln?

a) $((p) \wedge (\neg(q))) \Rightarrow (((p) \vee ((r) \vee (q))) \wedge (\neg(p)))$

Es ist eine aussagenlogische Formel.

b) $((a) \vee (\neg(b)) \wedge (\neg(c)) \Rightarrow (a) \wedge (\neg(c)))$

Es ist keine aussagenlogische Formel (Letzte Klammer ist falsch/zu viel).

c) $((p) \Rightarrow (\neg(r))) \vee (\neg(q) \wedge ((r) \wedge (\neg(p))))$

Es ist eine aussagenlogische Formel.

d) $(\neg(p)) \vee ((q) \wedge (q)) \vee ((p)(r) \Rightarrow (r))$

Es ist keine aussagenlogische Formel ist keine valide Formel

e) $((a) \vee (b)) \Rightarrow (((c) \wedge (a)) \vee ((a) \Rightarrow (b)))$

Es ist eine aussagenlogische Formel

Stellen Sie für die korrekten aussagenlogischen Formeln jeweils einen Formelbaum auf. Für die Zeichenketten, die keine korrekten Formeln darstellen, sollten Sie allgemeine Sätze formulieren, die für eine aussagenlogische Formel stets erfüllt sind, die aber von der gegebenen Zeichenkette nicht erfüllt wird.

Aufgabe 2

Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln sind Tautologien, welche sind erfüllbar?

- *Anmerkung: $X \Rightarrow Y$ wurde hier als $\neg X \vee Y$ geschrieben*

a) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$

Lösung durch Wahrheitstafel:

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\overbrace{\neg B \vee C}^D$	$\overbrace{\neg A \vee D}^E$	$\overbrace{A \wedge B}^F$	$\neg F$	$\overbrace{\neg F \vee C}^G$	$E \Leftrightarrow G$
1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1

Lösung durch Umschreiben:

$$\begin{aligned}
 (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) &\Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C) \\
 (\neg A \vee (\neg B \vee C)) &\Leftrightarrow (\neg(A \wedge B) \vee C) \\
 (\neg A \vee \neg B \vee C) &\Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \vee C
 \end{aligned}$$

Ist eine Tautologie, ist erfüllbar

$$\begin{aligned} \text{b) } ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) &\Leftrightarrow ((A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)) \\ &\Leftrightarrow (C \vee (\neg B \wedge A)) \end{aligned}$$

Lösung durch Wahrheitstafel:

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\overbrace{\neg A \vee B}^D$	$\neg D$	$\overbrace{\neg D \vee C}^E$	$\overbrace{\neg B \wedge A}^F$	$\overbrace{C \vee F}^G$	$E \Leftrightarrow G$
1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1

Lösung durch Umschreiben:

$$\begin{aligned} ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) &\Leftrightarrow ((A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)) \\ (\neg(\neg A \vee B) \vee C) &\Leftrightarrow (C \vee (A \wedge \neg B)) \\ ((\neg \neg A \wedge \neg B) \vee C) &\Leftrightarrow (C \vee (A \wedge \neg B)) \\ ((A \wedge \neg B) \vee C) &\Leftrightarrow (C \vee (A \wedge \neg B)) \\ (C \vee (A \wedge \neg B)) &\Leftrightarrow (C \vee (A \wedge \neg B)) \end{aligned}$$

Ist eine Tautologie, ist erfüllbar

c) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C))$

A	B	C	$\neg A$	$\overbrace{\neg A \vee B}^D$	$\neg D$	$\overbrace{\neg D \vee C}^E$	$\overbrace{B \wedge C}^F$	$\overbrace{\neg A \vee F}^G$	$\neg E \vee G$
1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	0	1	1

Ist keine Tautologie, erfüllbar

d) $((A \wedge \neg B) \Rightarrow (A \vee C)) \Rightarrow (\neg(B \Rightarrow A) \wedge (\neg A \Rightarrow C))$

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\overbrace{A \wedge \neg B}^D$	$\overbrace{A \vee C}^E$	$\neg D$	$\overbrace{\neg D \vee E}^F$	$\overbrace{\neg B \vee A}^G$	$\neg G$	$\overbrace{A \vee C}^H$	$\overbrace{\neg G \wedge H}^I$	$\neg F \vee I$
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0

Ist keine Tautologie, erfüllbar

e) $(\neg B \wedge A) \Leftrightarrow \neg(A \Rightarrow B)$

Lösung durch Wahrheitstafel:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\overbrace{\neg B \wedge A}^C$	$\overbrace{\neg A \vee B}^D$	$\neg D$	$C \Leftrightarrow \neg D$
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1

Lösung durch Umschreiben:

$$\begin{aligned}
 (\neg B \wedge A) &\Leftrightarrow \neg(A \Rightarrow B) \\
 (\neg B \wedge A) &\Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \\
 (\neg B \wedge A) &\Leftrightarrow (\neg \neg A \wedge \neg B) \\
 (\neg B \wedge A) &\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \\
 (\neg B \wedge A) &\Leftrightarrow (\neg B \wedge A)
 \end{aligned}$$

Ist eine Tautologie, ist erfüllbar

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, daß die folgende aussagenlogische Formel eine Tautologie ist:

$$(A \vee B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$$

A	B	$\overbrace{A \vee B}^C$	$\overbrace{B \vee A}^D$	$\neg C$	$\neg C \vee D$
1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1

Tautologie

b) Formulieren Sie die Aussage, die aus der obigen Formel entsteht, wenn die aussagenlogischen Variablen A und B ersetzt werden durch die elementaren Aussagen:

“Fipi lüllt” bzw. “Gluka urzt”.

Überzeugen Sie sich, dass diese Aussage auch im intuitiven Sinne wahr ist.

“Wenn Fipi lüllt oder Gluka urzt dann hat, wenn Gluka nicht geurzt hat, Fippi gelüllt.”

c) Ersetzen Sie nun die Variablen A und B durch die (nicht mehr aussagenlogisch elementaren) Aussagen:

“Knull ixt oder Gluka pramelt” bzw. “Falls Akru urzt, so watzelt das Dapi”.

“Wenn Knull ixt oder Gluka pramelt oder wenn Akru urzt dann watzelt Dapi, dann urzt Akru und Dapi watzelt nicht, wenn Knull ixt oder Gluka pramelt.”

Versuchen Sie, die Wahrheit auch dieser (sprachlich sicherlich unübersichtlichen) Aussage sich intuitiv klar zu machen.

Aufgabe 4

Welche der folgenden Aussagen für eine aussagenlogische Formel A ist richtig, welche falsch (Begründung oder Gegenbeispiel)?

a) Ist A eine Tautologie, so ist A erfüllbar.

Richtig. A ist eine Tautologie, d.h. es ist immer wahr, also erfüllbar, da es für erfüllbar mindestens einmal wahr sein muss.

b) Ist A eine Tautologie, so ist $\neg A$ unerfüllbar.

Richtig. Unerfüllbar heißt, dass es für alle Belegungen falsch ist, es handelt sich also um eine Kontradiktion. Wenn A eine Tautologie ist, also immer wahr ist, ist das Gegenteil $\neg A$, immer falsch, also unerfüllbar.

c) Ist A keine Tautologie, so ist sowohl A als auch $\neg A$ erfüllbar.

Falsch. Da für A , wenn es keine Tautologie ist, einen Fall geben kann, bei welchem A es immer 0 ist. Bei diesem Fall ist $\neg A$ zwar erfüllbar, A ist allerdings nicht erfüllbar.

d) A ist genau dann erfüllbar, wenn $\neg A$ keine Tautologie ist.

Richtig. Wenn $\neg A$ keine Tautologie ist, dann existiert mindestens eine 0. Somit existiert für A mindestens eine 1, und ist somit erfüllbar.

e) Ist A erfüllbar und $\neg A$ erfüllbar, so ist A keine Tautologie.

Richtig. Wenn A und $\neg A$ erfüllbar sind, muss in A mindestens eine 0 und eine 1 existieren damit auch $\neg A$ erfüllbar ist. Somit kann A keine Tautologie sein.

f) Ist $\neg A$ widerlegbar, so ist A eine Tautologie.

Falsch. Widerlegbar heißt das mindestens eine 0 existiert. D.h bei $\neg A$ können auch einsen vorkommen, wodurch es Fälle in A geben kann bei denen es nicht immer wahr ist, also keine Tautologie ist.

Aufgabe 5

Die folgende Formel charakterisiert die Stetigkeit der Funktion f in einem Punkt x_0 :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : ((|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \epsilon)).$$

a) “Übersetzen” Sie die Formel in einen natürlichen Satz.

(Hinweis: ϵ : Epsilon, δ : Delta, $|\dots|$: Betrag, $f(x)$: “f von x”)

“Für alle Epsilon größer 0, existiert ein delta größer 0, sodass für alle x gilt, dass falls der Betrag von x minus x_0 kleiner Delta ist, der Betrag von f von x minus f von x_0 kleiner Epsilon ist.”

b) Bilden Sie formal die Negation dieser Aussage und schreiben Sie diese so, dass

- kein Negationszeichen vor Quantoren steht und
- kein Negationszeichen vor einer Implikation steht.

1. Zuerst wird die komplette Formel negiert.

$$\neg(\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : ((|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \epsilon)))$$

2. Durch die Negation der Formel, wird jedes \exists zu einem \forall und jedes \forall zu einem \exists und die Aussage negiert sich.

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x : \neg((|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \epsilon))$$

3. Da laut Aufgabenstellung vor einer Implikation keine Negation stehen soll wird die Implikation umgewandelt ($A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$)

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x : \neg(\neg(|x - x_0| < \delta) \vee (|f(x) - f(x_0)| < \epsilon))$$

4. Die Negation vor der Klammer kann entfernt werden indem man es in die Klammer holt und den aussagenlogischen Operator umdreht ($\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ (De Morgan))

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x : ((|x - x_0| < \delta) \wedge \neg(|f(x) - f(x_0)| < \epsilon))$$

5. Die Negation vor $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ kann entfernt indem man das $<$ zu einem \geq macht (ist etwas nicht kleiner als was anderes, impliziert es das es größer oder gleich ist)

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x : ((|x - x_0| < \delta) \wedge (|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon))$$

c) Versuchen Sie sowohl die gegebene Aussage, als auch die negierte Aussage verbal zu formulieren.

“Es existiert ein Epsilon größer 0 und für alle Delta größer 0, existiert ein x für das gilt, dass der Betrag von x minus x_0 kleiner Delta ist und dass der Betrag von f von x minus f von x_0 größer gleich 0 ist.”

Aufgabe 6

Welche der folgenden prädikatenlogischen Formeln (über einem nicht leeren Gültigkeitsbereich für die Variable x) stellen allgemeingültige Aussagen dar, welche nicht:

a) $(\forall x : F(x)) \Rightarrow (\neg \forall x : \neg F(x))$

Richtig, da $\neg \forall x : \neg F(x)$ sich als $\exists x : F(x)$ schreiben lässt, und $\forall x : F(x)$, $\exists x : F(x)$ impliziert.

b) $(\forall x : F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow (\forall x : G(x))$

Richtig.

$F(x)$	$G(x)$	$\overbrace{F(x) \wedge G(x)}^H$	$H \Rightarrow G(x)$
0	0	0	1
1	1	1	1

c) $(\forall x : F(x) \vee G(x)) \Rightarrow (\forall x : F(x))$

Falsch. Bei der Belegung 0, 0 entsteht ein Widerspruch zur Aussage.

$F(x)$	$G(x)$	$\overbrace{F(x) \wedge G(x)}^H$	$H \Rightarrow G(x)$
0	0	0	1

d) $(\forall x : F(x) \vee G(x)) \Rightarrow (\exists x : G(x))$

Falsch. Beispiel: Sei $F(x) \ x^2 \geq 0$ und $G(x)$ sei $x < 0$ für $x \in \mathbb{R}$, so gilt zwar $\forall x : F(x) \vee G(x)$ aber nicht $\exists x : G(x)$.

e) $(\forall x : F(x) \Rightarrow G(x)) \Rightarrow (\exists x : F(x) \wedge G(x))$

Falsch. Erklärung durch Venn-Diagramm: Sei $F(x)$, dass ein Element in F enthalten ist und $G(x)$, dass ein Element in G enthalten ist, dann bedeutet $\forall x : F(x) \Rightarrow G(x)$, dass gilt, dass alle Elemente die in F enthalten sind auch in G enthalten sind. Daraus folgt allerdings nicht, dass es mindestens ein Element gibt welches in F und G enthalten ist, da, da es auch ein Element geben kann welche nur in G enthalten ist aber nicht in F .

