Aufgabe 1

Wir betrachten die Ringe $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \otimes)$

a) Für $n = 15$ bestimmen Sie die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}_{15}^*, \otimes)$
Geben Sie die Elemente dieser Gruppe an und bestimmen Sie die Gruppentafel.
Ist diese Gruppe zyklisch?
Geben Sie die Ordnungen aller Elemente an.

$\mathbb{Z}_{15}^* = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\} \rightarrow$ *Alle Elemente wo Rest gleich dem Neutralem Element ist (also 1), da Elemente invertierbar seien müssen*

$\otimes$	1	2	4	7	8	11	13	14
1	1	2	4	7	8	11	13	14
2	2	4	8	14	1	7	11	13
4	4	8	1	13	2	14	7	11
7	7	14	13	4	11	2	1	8
8	8	1	2	11	4	13	14	7
11	11	7	14	2	13	1	8	4
13	13	11	7	1	14	8	4	2
14	14	13	11	8	7	4	2	1

Zyklisch bedeutet, dass die Potenzen eines Elementes aus einer Menge, alle Elemente der Menge ergibt. Man muss also ein Erzeuger finden. Die Einheitengruppe $\mathbb{Z}_{15}^*$ ist also nicht zyklisch, da kein Erzeuger existiert.

Die Ordnung eines Elements ist das Element, dass bei der Verknüpfung das neutrale Element ergibt.

- $\mathcal{O}(1) = 1$
- $\mathcal{O}(2) = 8$
- $\mathcal{O}(4) = 4$
- $\mathcal{O}(7) = 13$
- $\mathcal{O}(8) = 2$
- $\mathcal{O}(11) = 11$
- $\mathcal{O}(13) = 7$
- $\mathcal{O}(14) = 14$

b) Haben die folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z}_{15}$ eine Lösung?
Falls eine Lösung existiert, bestimmen Sie diese!
$4 \otimes x \oplus 6 = 8$
$10 \otimes x \oplus 3 = 4$

(i)

$$
\begin{aligned}
4 \otimes x \oplus 6 &= 8 \\
(4 \otimes x) \oplus 6 &= 8 && | \oplus (\ominus 6) \\
(4 \otimes x) \oplus 6 \oplus (\ominus 6) &= 8 \oplus (\ominus 6) \\
(4 \otimes x) \oplus \cancel{6 \oplus (\ominus 6)} &= 8 \oplus \underbrace{(\ominus 6)}_{9} \\
(4 \otimes x) \oplus 0 &= 8 \oplus 9 \\
4 \otimes x &= 2 && |4^{-1} \otimes \\
4^{-1} \otimes 4 \otimes x &= 4^{-1} \otimes 2 \\
\cancel{4^{-1} \otimes 4} \otimes x &= \underbrace{4^{-1}}_{4} \otimes 2 \\
x &= 4 \otimes 2 \\
x &= 8
\end{aligned}
$$

(ii)

$10 \otimes x \oplus 3 = 4$ *hat keine Lösung.* $10 \otimes x$ *müsste* 1 *sein damit* $1 \oplus 3 = 4$ *ergeben kann. Es existiert allerdings kein* x *damit dies der Fall ist.*

c) Warum ist $\mathbb{Z}_{11}$ ein Körper?
Bestimmen Sie für jedes Element in $\mathbb{Z}_{11} \backslash \{0\}$ das multiplikative inverse Element.

$\mathbb{Z}_{11} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

1. $(\mathbb{Z}_{11}, +)$ *ist eine abelsche Gruppe.*
   - *Assoziativ* $a + b = b + a$
   - *neutrales Element (0) existiert*
   - *Für alle Elemente existiert inverses Element*
   - *kommutativ* $(a + b) + c = a + (b + c)$
2. $(\mathbb{Z}_{11} \backslash \{0\}, \cdot)$
   - *Assoziativ* $a \cdot b = b \cdot a$
   - *neutrales Element (1) existiert*
   - *Für alle Elemente existiert inverses Element*
   - *kommutativ* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. *Distributivgesetze gelten*

Multiplikative Inverse:

- $1^{-1} = 1$
- $2^{-1} = 6$
- $3^{-1} = 4$
- $4^{-1} = 3$
- $5^{-1} = 9$
- $6^{-1} = 2$
- $7^{-1} = 8$
- $8^{-1} = 7$
- $9^{-1} = 5$
- $10^{-1} = 10$

d) Lösen Sie in $\mathbb{Z}_{11}$ die folgenden Gleichungen:
$4 \otimes x \oplus 6 = 8$
$10 \otimes x \oplus 3 = 4$

(i)

$$\begin{aligned}
4 \otimes x \oplus 6 &= 8 \\
(4 \otimes x) \oplus 6 &= 8 && | \oplus (\ominus 6) \\
(4 \otimes x) \oplus 6 \oplus (\ominus 6) &= 8 \oplus (\ominus 6) \\
(4 \otimes x) \oplus \cancel{6 \oplus (\ominus 6)} &= 8 \oplus \underbrace{(\ominus 6)}_{5} \\
(4 \otimes x) \oplus 0 &= 8 \oplus 5 \\
4 \otimes x &= 2 && | 4^{-1} \otimes \\
4^{-1} \otimes 4 \otimes x &= 4^{-1} \otimes 2 \\
\cancel{4^{-1} \otimes 4} \otimes x &= \underbrace{4^{-1}}_{3} \otimes 2 \\
x &= 3 \otimes 2 \\
x &= 6
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
10 \otimes x \oplus 3 &= 4 \\
(10 \otimes x) \oplus 3 &= 4 && | \oplus (\ominus 3) \\
(10 \otimes x) \oplus 3 \oplus (\ominus 3) &= 4 \oplus (\ominus 3) \\
(10 \otimes x) \oplus \cancel{3 \oplus (\ominus 3)} &= 4 \oplus \underbrace{(\ominus 3)}_{8} \\
(10 \otimes x) \oplus 0 &= 4 \oplus 8 \\
10 \otimes x &= 1 && | 10^{-1} \otimes \\
10^{-1} \otimes 10 \otimes x &= 10^{-1} \otimes 1 \\
\cancel{10^{-1} \otimes 10} \otimes x &= \underbrace{10^{-1}}_{10} \otimes 1 \\
x &= 10 \otimes 1 \\
x &= 10
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Gegeben sei eine Menge $K = \{0, 1, a, b\}$ mit vier Elementen. Auf K seien zwei Verknüpfungen $+$ und $*$ gegeben durch folgende (unvollständige) Verknüpfungstafeln:

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1		0		
a		b		1
b				

$*$	0	1	a	b
0				
1		1	a	
a			b	1
b		b		

a) Kümmern Sie sich nicht um die Assoziativ- und Distributiv-Gesetze.
Ergänzen Sie die Tabellen so, dass K mit diesen Verknüpfungen ein Körper wird.

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$*$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

b) Lösen Sie in diesem Körper die Gleichungssysteme:
$b * x + 1 = a$
$x - a = 1$

(i)

$$\begin{aligned}
(b * x) + 1 &= a && \mid + (-1) \\
(b * x) + 1 + (-1) &= a + \underbrace{(-1)}_{1} \\
(b * x) &= a + 1 \\
b * x &= b && \mid b^{-1} * \\
\cancel{b^{-1} * b} * x &= b * \underbrace{b^{-1}}_{a} \\
x &= b * a \\
x &= 1
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
x - a &= 1 \\
x + (-a) &= 1 \\
x + a &= 1 && \mid + (-a) \\
x + \cancel{a + (-a)} &= 1 + \underbrace{(-a)}_{a} \\
x &= 1 + a \\
x &= b
\end{aligned}$$

c) Lösen Sie in diesem Körper das Gleichungssystem mit zwei Unbekannten x und y:
$b * x + y = 1$
$x + b * y = 0$

(i)

$$\begin{aligned} b * x + y &= 1 \\ (b * x) + y &= 1 && |(b * x)^{-1}+ \\ (b * x)^{-1} + (b * x) + y &= (b * x)^{-1} + 1 \\ \cancel{(b * x)^{-1} + (b * x)} + y &= (b * x)^{-1} + 1 \\ y &= (b * x)^{-1} + 1 \end{aligned}$$

Die Gleichung geht auf für:

- $y = 1, x = 0$
- $y = b, x = 1$
- $y = 0, x = a$
- $y = a, x = b$

(ii)

Aufgabe 3

Gegeben sei ein kommutativer Ring mit Einselement $(A, \oplus, \otimes)$.
Auf $B = A \times A$ definieren wir zwei Verknüpfungen, die wir wieder mit $\oplus$ und $\otimes$ bezeichnen:
$(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$
$(a_1, a_2) \otimes (b_1, b_2) := (a_1 * b_1, a_2 * b_2)$

a) Zeigen Sie, dass B mit diesen Verknüpfungen wieder ein kommutativer Ring mit Einselement ist.

Um zu zeigen, dass B mit den gegebenen Verknüpfungen ein kommutativer Ring mit Einselement ist, muss man zeigen, dass B die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. *Assoziativität der Addition:* $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ *für alle a, b, c in B.*

2. *Kommutativität der Addition:* $a \oplus b = b \oplus a$ *für alle a, b in B.*

3. *Existenz eines neutralen Elements bei der Addition: Es gibt ein Element* 0 *in B, so dass* $a \oplus 0 = a$ *für alle a in B.*

4. *Existenz eines inversen Elements bei der Addition: Für jedes a in B gibt es ein Element* a^{-1} *in B, so dass* $a \oplus (a^{-1}) = 0$.

5. *Assoziativität der Multiplikation:* $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ *für alle a, b, c in B.*

6. *Kommutativität der Multiplikation:* $a \otimes b = b \otimes a$ *für alle a, b in B.*

7. *Existenz eines neutralen Elements bei der Multiplikation: Es gibt ein Element* 1 *in B, so dass* $a \otimes 1 = a$ *für alle a in B.*

8. *Distributivität:* $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ *und* $(b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a)$ *für alle a, b, c in B.*

Anhand der angegebenen Verknüpfungen sieht man, dass alle oben genannten Eigenschaften erfüllt sind.

- *Die Assoziativität der Addition und Multiplikation erfüllt, da es sich um die gleiche Assoziativität wie in A handelt.*
- *Die Kommutativität der Addition und Multiplikation erfüllt, da es sich um die gleiche Kommutativität wie in A handelt.*
- *Der neutrale Element bei der Addition ist* $(0, 0)$ *und bei der Multiplikation ist* $(1, 1)$
- *Für jedes* (a_1, a_2) *gibt es ein inverses Element* (a_1^{-1}, a_2^{-1})
- *Die Distributivität erfüllt, da es sich um die gleiche Distributivität wie in A handelt.*

b) Bestimmen Sie alle Einheiten von B.

Gesucht sind alle Elemente für die gilt: $(a_1, a_2) \otimes (b_1, b_2) = (1, 1)$.

Einheiten von $B : (1, 1)$

c) Bestimmen Sie alle Nullteiler von B.

Gesucht sind Elemente für die gilt $x, y \neq (0, 0)$ *mit* $x \otimes y = (0, 0)$.

Nullteiler von $B : (1, 0), (0, 1)$

d) Zeigen Sie, dass das Assoziativgesetz nicht gilt, wenn Sie statt dessen die Definition $(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ verwendet hätten

Damit die Assioziativät der Addition gilt muss $\forall a, b, c \in B : (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ *gelten. Man muss also drei* $a, b, c \in B$ *finden für die die Definition nicht gilt.*

Sei $(1, 2), (3, 4), (5, 6) \in B$ *dann muss* $((1, 2) \oplus (3, 4)) \oplus (5, 6) = (1, 2) \oplus ((3, 4) \oplus (5, 6))$.

(i)

$$\begin{aligned} ((1,2) \oplus (3,4)) \oplus (5,6) &= \\ ((1+2, 3+4)) \oplus (5,6) &= \\ (3,7) \oplus (5,6) &= \\ (3+7, 5+6) &= \\ (10, 11)& \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} (1,2) \oplus ((3,4) \oplus (5,6)) &= \\ (1,2) \oplus ((3+4, 5+6)) &= \\ (1,2) \oplus (7,11) &= \\ (1+2, 7+11) &= \\ (3, 18)& \end{aligned}$$

$(10, 11) \neq (3, 18)$ *somit gilt die Definition der Assioziativität nicht für alle Elemente* $a, b, c \in B$.

Aufgabe 4

Wir betrachten den Ring der Polynome $\mathbb{Q}[x]$ über dem Körper der rationalen Zahlen. Dieser Ring ist ein "euklidischer Ring" bezüglich der Grad-Funktion, d.h.:

> Für je zwei Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ mit $g \neq 0$ gibt es Polynome $p, r \in \mathbb{Q}[x]$ mit $f = p * g + r$, wobei gilt: $grad(r) < grad(g)$
> (Polynomdivision mit Rest)

Für die folgenden Polynome f, g berechne man jeweils die zugehörigen p, q:

a) $f = 3x^4 - 2x^2 + x + 1, g = x + 2$

$$
\begin{array}{l}
\big(\; 3x^4 \qquad\quad - 2x^2 \quad + x \quad + 1\big) \div \big(x + 2\big) = 3x^3 - 6x^2 + 10x - 19 + \dfrac{39}{x+2} \\
\underline{-\,3x^4 - 6x^3} \\
\qquad\quad -\,6x^3 \;\; - 2x^2 \\
\qquad\quad \underline{\;\;\; 6x^3 + 12x^2} \\
\qquad\qquad\qquad 10x^2 \quad + x \\
\qquad\qquad\quad \underline{-\,10x^2 - 20x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -\,19x \quad + 1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\;\;\; 19x + 38} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 39
\end{array}
$$

- $p = 3x^3 - 6x^2 + 10x - 19$
- $r = 39$

b) $f = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1, g = x^3 + x^2 + x + 1$

$$
\begin{array}{l}
\big(\; x^5 \;\; - x^4 \;\; + x^3 \;\; - x^2 \;\; + x - 1\big) \div \big(x^3 + x^2 + 1\big) = x^2 - 2x + 3 + \dfrac{-5x^2 + 3x - 4}{x^3 + x^2 + 1} \\
\underline{-\,x^5 \;\; - x^4 \qquad\quad\;\; - x^2} \\
\qquad -\,2x^4 \;\; + x^3 - 2x^2 \;\; + x \\
\qquad \underline{\;\;\; 2x^4 + 2x^3 \qquad\quad + 2x} \\
\qquad\qquad\quad 3x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \\
\qquad\qquad \underline{-\,3x^3 - 3x^2 \qquad - 3} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -\,5x^2 + 3x - 4
\end{array}
$$

- $p = x^2 - 2x - 3$
- $r = -5x^2 + 3x - 4$