

1 Abzählungen

Es gibt nur zwei Arten von Aufgaben:

- Anzahl Aufteilungen von einer Menge N von Kugeln in eine Menge R von Fächern
- Aus einer Menge N mit n Elementen sollen alle oder k Elemente ausgewählt werden

1.1 Anzahl Aufteilungen von einer Menge N von Kugeln in eine Menge R von Fächern

$ N = n, R = r$	beliebig	injektiv	surjektiv	bijektiv
N unterscheidbar R unterscheidbar	r^n	$r \geq n : r^n$ $r < n : 0$	$n \geq r : r! S_{n,r}$ $n < r : 0$	$r = n : n!$ $r \neq n : 0$
N nicht unterscheidbar R unterscheidbar	$\binom{r+n-1}{n}$ $= \frac{r^{\overline{n}}}{n!}$	$r \geq n : \binom{r}{n}$ $r < n : 0$	$n \geq r : \binom{n-1}{r-1}$ $n < r : 0$	$r = n : 1$ $r \neq n : 0$
N unterscheidbar R nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^r S_{n,k}$	$r \geq n : 1$ $r < n : 0$	$n \geq r : S_{n,r}$ $n < r : 0$	$r = n : 1$ $r \neq n : 0$
N nicht unterscheidbar R nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^r P_{n,k}$	$r \geq n : 1$ $r < n : 0$	$n \geq r : P_{n,r}$ $n < r : 0$	$r = n : 1$ $r \neq n : 0$

1.2 Aus einer Menge N mit n Elementen sollen alle oder k Elemente ausgewählt werden

2 Codierung

2.1 Allgemeines

- Linearer (n, m) -Code C
- $a \times b$ Matrix: $n = b$ und $m = a$

2.2 Wichtige Formeln

- Blocklänge: n
- Dimension des Unterraums C : m
- Anzahl Codewörter: $|C| = q^m$, wobei q Anzahl Elemente in C
- Anzahl Wörter in Standardfeld: q^n
- Anzahl Wörter in Syndromtabelle: q^{n-m}
- Hamming Code: $n = \frac{q^{n-m} - 1}{q - 1}$
- Schätzen der Codedistanz (Singleton-Schranke): $d(C) \leq n - m + 1$
- Fehler erkennend: $(n - m + 1) - 1$
- Fehler korrigierend: $\left\lfloor \frac{(n - m + 1) - 1}{2} \right\rfloor$

2.3 Codewörter sind gegeben

n und m bestimmen

$n = \text{Länge der Codewörter} \Rightarrow n = 5$

00000

01101

10111

11010

$m = \text{Dimension} \Rightarrow m = 2$

00000

01101

10111

11010

Hamming-Distanz/Code-Distanz/ $d(c)$

- Hamming-Distanz ist die minimale Änderung des Gewichts
- Wird mit $d(C)$ bezeichnet

Beispiel:

- Anzahl Einsen in Codewörter Zählen
- $0 \dots 0$ wird dabei nicht beachtet

01101 \rightarrow Gewicht: 3

10111 \rightarrow Gewicht: 4

11010 \rightarrow Gewicht: 3

- Gewicht der Codewörter vergleichen und minimalstes auswählen

$\Rightarrow d(C) = 3$, da es minimal ist

t-fehlererkennend

t-fehlerkorrigierend

t-ausfällekorrigierend

Kanonische Generatormatrix

- Definition: Aus der Generatormatrix kann man alle möglichen Codewörter der Sprache erzeugen.
- Falls die Generatormatrix gegeben ist, lässt sich die kanonische Generatormatrix durch das Anwenden des Gaußschen Verfahrens auf die Generatormatrix erstellen.
- Größe: $(m \times n)$
- Aufbau: $G = (E \ G')$
 - E : Einheitsmatrix
 - G' : Linear unabhängiger Rest aus Codewörtern

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kanonische Kontrollmatrix

- Definition: Erfüllt ein Wort $wort \cdot kontrollmatrix = 0$ ist es ein richtiges Codewort.
- Größe: $n \times (n - m)$
- Aufbau: $H = \begin{pmatrix} -G \\ E \end{pmatrix}$
 - E : Einheitsmatrix
 - $-G$: Linear unabhängiger Rest aus Codewörtern

$$H = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Modulo mit negativen Zahlen:

	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
\mathbb{Z}_2									0	1	[0	1]								
\mathbb{Z}_3								0	1	2	[0	1	2]							
\mathbb{Z}_4							0	1	2	3	[0	1	2	3]						
\mathbb{Z}_5						0	1	2	3	4	[0	1	2	3	4]					
\mathbb{Z}_6					0	1	2	3	4	5	[0	1	2	3	4	5]				
\mathbb{Z}_7				0	1	2	3	4	5	6	[0	1	2	3	4	5	6]			
\mathbb{Z}_8			0	1	2	3	4	5	6	7	[0	1	2	3	4	5	6	7]		
\mathbb{Z}_9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	[0	1	2	3	4	5	6	7	8]	
\mathbb{Z}_{10}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	[0	1	2	3	4	5	6	7	8	9]

2.4 Syndromtabelle

- Definition: Identifiziert und korrigiert Fehler in Codewörter durch Vergleich mit erwarteten Werten.
- Anzahl Zeilen: q^{n-m}
- Anzahl Spalten: n

Beispiel: (7×3) -Kontrollmatrix, $n = 7, m = 4$

	a	$S = a \cdot H$	
$H = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} \\ \textcolor{blue}{1} & \textcolor{blue}{0} & \textcolor{blue}{1} \\ \textcolor{green}{0} & \textcolor{green}{1} & \textcolor{green}{1} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	0000000	000	
	1000000	111	• Anzahl Zeilen: $2^{7-4} = 8$
	0100000	101	• Anzahl Spalten: 7
	0010000	011	• Wenn über 0000001 hinaus geht egal ob 1000001, 1100000, ...
	0001000	110	
	0000100	100	
	0000010	010	
	0000001	001	

1. Überprüfen ob es ein empfangenes Codewort fehlerfrei ist ($\text{wort} \cdot \text{kontrollmatrix} = 0$)

- Empfangenes Wort: $y = 1010010$

$$1010010 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 110 \neq 0 \Rightarrow \text{Fehler im empfangenen Codewort}$$

2. Codewort durch Syndromtabelle korrigieren

- Klassenanführer von 110 aus Syndromtabelle ablesen: $a = 0001000$
- $\text{empfangenes Codewort} - \text{Klassenanfuhrer} = \text{korrigiertes Codewort}$

$$\begin{array}{r} y \quad 1010010 \\ a \quad - \quad 0001000 \\ \hline 1011010 \end{array}$$

- korrigiertes Codewort: 1011010

3. Nachricht extrahieren

- Letzte Stellen des korrigierten Codewort entfernen, um die Nachricht zu erhalten (Anzahl entfernte Stellen entspricht Länge des Syndrom).
- Nachricht: $1011\cancel{010} = 1011$

2.5 Standardfeld