1 Abzählungen

Es gibt nur zwei Arten von Aufgaben:

- Anzahl Aufteilungen von einer Menge N von Kugeln in eine Menge R von Fächern
- Aus einer Menge N mit n Elementen sollen alle oder k Elemente ausgewählt werden

1.1 Anzahl Aufteilungen von einer Menge N von Kugeln in eine Menge R von Fächern

$\lvert N\rvert = n, \lvert R\rvert = r$	beliebig	injektiv	surjektiv	bijektiv
N unterscheidbar R unterscheidbar	r^n	$r \geq n : r^{\underline{n}}$ $r < n : 0$	$n \geq r : r!S_{n,r}$ $n < r : 0$	$r = n : n!$ $r \neq n : 0$
N nicht unterscheidbar R unterscheidbar	$\binom{r+n-1}{n}$ $= \frac{r^{\overline{n}}}{n!}$	$r \geq n : \binom{r}{n}$ $r < n : 0$	$n \geq r : \binom{n-1}{r-1}$ $n < r : 0$	$r = n : 1$ $r \neq n : 0$
N unterscheidbar R nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^{r} S_{n,k}$	$r \geq n : 1$ $r < n : 0$	$n \geq r : S_{n,r}$ $n < r : 0$	$r = n : 1$ $r \neq n : 0$
N nicht unterscheidbar R nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^{r} P_{n,k}$	$r \geq n : 1$ $r < n : 0$	$n \geq r : P_{n,r}$ $n < r : 0$	$r = n : 1$ $r \neq n : 0$

Beliebige Aufteilung:

- Keine speziellen Regeln bei der Aufteilung (Man kann die Kugeln verteilen wie man möchte)
  - $\Rightarrow$ Ein Fach darf leer sein, kann eine Kugel haben oder mehrere Kugeln haben
- Alle Kugeln müssen benutzt werden

Injektive Aufteilung:

- Jedes Fach darf höchstens eine Kugel enthalten (Kein Fach darf mehr als eine Kugel enthalten)
  - $\Rightarrow$ Fächer dürfen leer bleiben (wenn Anzahl Fächer > Anzahl Kugeln)
- Nicht jede Kugel muss benutzt werden

Surjektive Aufteilung:

- Jedes Fach muss mindestens eine Kugel enthalten
  - $\Rightarrow$ Kein Fach darf leer sein
  - $\Rightarrow$ Einige Fächer können mehr Kugeln haben als andere (wenn Anzahl Fächer < Anzahl Kugeln)
- Nicht jede Kugel muss benutzt werden

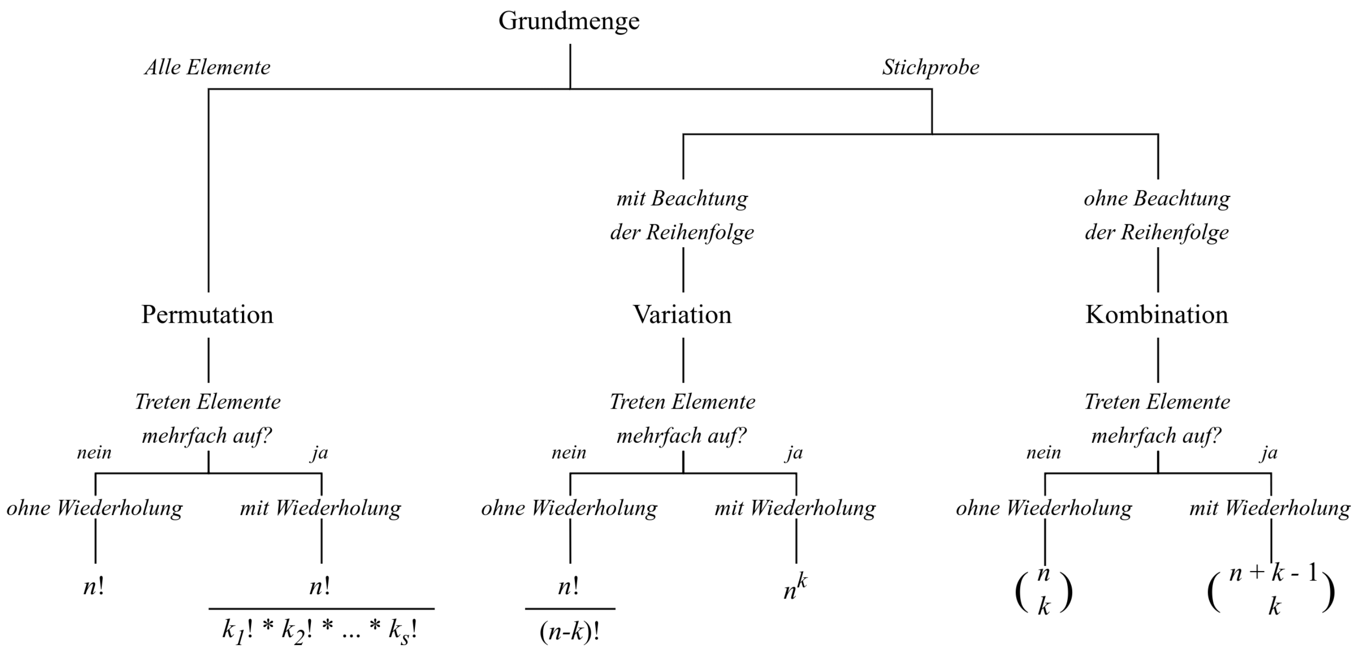
Bijektive Aufteilung:

- Jedes Fach muss genau eine Kugel enthalten
  - $\Rightarrow$ Kein Fach darf leer sein
  - $\Rightarrow$ Kein Fach darf mehre Kugeln enthalten

$\Rightarrow$ Anzahl Kugeln = Anzahl Fächer

- Jede Kugel muss somit benutzt werden

1.2 Aus einer Menge N mit n Elementen sollen alle oder k Elemente ausgewählt werden



- *Mit Beachtung der Reihenfolge:* ABC $\neq$ ACB $\neq$ BAC $\neq$ BCA $\neq$ CAB $\neq$ CBA
- *Ohne Beachtung der Reihenfolge:* ABC = ACB = BAC = BCA = CAB = CBA

Kombination:

Exakte Auswahl: Aus einer Menge mit n Elementen wählt man (*genau*) k aus.

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

Mindestauswahl (Allgemein): Wie viele Möglichkeiten gibt es *mindestens* k von n (z.B mindestens 7 von 10) richtig zu beantworten?

- Man rechet immer mit Plus (+)

$$\binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} = 176$$

Mindestauswahl (mit getrennter Betrachtung): Wie viele Möglichkeiten gibt es, falls von den ersten 5 Fragen *genau* 3 und von den nächsten 5 *genau* 4 richtig beantwortet werden müssen?

- Man rechet immer mit Mal ($\cdot$)

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{4} = 50$$

Mindestauswahl (mit kombinierter Betrachtung): Wie viele Möglichkeiten gibt es, falls von den ersten 5 Fragen *mindestens* 3 richtig beantwortet und insgesamt *genau* 7 richtig beantwortet werden müssen?

- Man rechet immer mit Plus (+) und Mal (·)

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{4} + \binom{5}{4} \cdot \binom{5}{3} + \binom{5}{5} \cdot \binom{5}{2}$$

1.3 Rekursionsgleichungen

1. Gleichung umstellen:

- Rekursionsgleichung in einen homogenen (links) und einen inhomogenen Teil (rechts) teilen
- **Homogener Teil:** Überall wo ein a vorhanden ist
- **Inhomogener Teil:** Rest wo kein a vorhanden ist

$$homogener\ Teil = inhomogener\ Teil$$

2. Allgemeine Lösung des homogenen Teils berechnen:

- Das Charakteristisches Polynom aufstellen indem man alle a_n mit λ^n ersetzt

$$p(\lambda) = x_m \lambda^{n_m} + x_{m-1}\lambda^{n_{m-1}} + \dots x_0 + \lambda^{n_0}$$

- Das Charakteristisches Polynom lösen, durch finden der Nullstellen
  - Bei Polynom zweiten Gerades (λ^2) pq-Formel verwenden: $-\frac{-p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

$$x_m \lambda^{n_m} + x_{m-1}\lambda^{n_{m-1}} + \dots x_0 + \lambda^{n_0} = 0$$

- Allgemeine Lösung für homogenen Teil setzt sich aus den Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ zusammen
  - Falls die Nullstellen verschieden (und reelle Zahlen) sind ist die allgemeine Lösung des homogenen Teils:

$$a_{h,n} = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \dots + c_k\lambda_k^n$$

  - Falls die Nullstellen gleich (und relle Zahlen) sind ist die allgemeine Lösung des homogenen Teils:

$$a_{h,n} = c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_2^n + c_3 n^2\lambda_3^n + \dots + c_k n^{k-1}\lambda_k^n$$

3. Ansatz für Spezielle Lösung des inhomogenen Teils herleiten:

- Mit Hile der Tabelle lässt sich ein Ansatz für die spezielle Lösung des inhomogenen Teils herleiten (vermutete spezielle Lösung)
- Dieser wird mit $a_{s,n}$ bezeichnet

	Ansatzfunktion: $y_{s,n}$
$b\ (Konstante)$	$B\ (Konstante)$
n	$B_1 n + B_0$
$n^t, t \in \mathbb{N}$	$B_t n^t + B_{n-1}n^{t-1} + \dots + B_1 n + B_0$
$r^n, r \in R$	Br^n
$n^t r^n$	$r^n(B_t n^t + B_{n-1}n^{t-1} + \dots + B_1 n + B_0)$

4. Ansatz der Spezielle Lösung in den homogenen Teil einsetzen, um die spezielle Lösung zu erhalten:

- Ansatz der Spezielle Lösung in den homogenen Teil einsetzen
- Koeffizientenverlgeich zum bestimmen der speziellen Lösung

5. a_n bestimmen

- Kombiniere die allgemeine Lösung des homogenen Teils und die spezielle Lösung des inhomogenen Teils:
$$a_n = a_{h,n} + a_{s,n}$$

6. Gegebenes a_0 und a_1 benuten

- Gegebenen Anfangswerte in die allgemeine Lösung eingesetzt, um die spezifischen Werte der Konstanten zu bestimmen, die benötigt werden, um die endgültige Lösung zu finden.

Typische Klausurfragen zu Rekursionsgleichungen:

1. Typ der Rekursionsgleichung bestimmen

- **Homogene lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten:**
  - Besteht nur aus a's (kann auch ein anderer Buchstabe sein)
  - **Aufbau:**
$$a_{n+k} = y_{k-1}a_{n+k-1} + y_{k-2}a_{n+k-2} + \cdots + y_1 a_{n+1} + y_0 a_n$$
  - **Beispiel:**
$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$$
- **Inhomogene lineare Rekursionsgleichungen mit konstanten Koeffizienten:**
  - Hat zusätzliche inhomogene Komponente, entweder eine Funktion von n (n, n^2, n^3, ..., x^n, ...) oder eine konstante Zahl
  - **Aufbau:**
$$a_{n+k} = y_{k-1}a_{n+k-1} + y_{k-2}a_{n+k-2} + \cdots + y_1 a_{n+1} + y_0 a_n + f(n)$$
  - **Beispiel:**
$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + 4n$$
$$\textit{oder}$$
$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + 6$$
$$\textit{oder}$$
$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + 3^n$$
$$\textit{oder}$$
$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + 4n + 6 + 3^n$$

2. Grad der Rekursionsgleichung bestimmen

- Der Grad einer Rekursionsgleichung bezieht sich auf den höchsten Exponenten der Rekursionsvariable
- **Beispiel:**$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + 6 \rightarrow \text{Grad} = 2$

Beispiel: $a_{n+2} = 49a_n + 48n - 98, \qquad n \geq 0 \qquad a_0 = 5, a_1 = 8$

1. Gleichung umstellen

$$a_{n+2} - 49a_n = 48n - 98$$

2. Allgemeine Lösung des homogenen Teil berechnen

- Ersetze alle a_n mit λ^n
- $a_{n+2} \to \lambda^2$ und $-49a_{n+0} \to -49\lambda^0 = -49$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 49$$

- Nullstelle bestimmen (λ_1 und λ_2)

$$\lambda^2 - 49 = 0 \to \lambda_{1,2} = \pm 7$$

- Allgemeine Lösung für homogenen Teil:

$$\boxed{a_{h,n} = c_1 7^n + c_2(-7)^n}$$

3. Ansatz für spezielle Lösung des inhomogenen Teil

- Nach Tabelle Ansatz für spezielle Lösung aufstellen

$$a_{s,n} = b_1 n + b_2$$

	Ansatzfunktion: $y_{s,n}$
$b\ (Konstante)$	$B\ (Konstante)$
n	$B_1 n + B_0$
$n^t, t \in \mathbb{N}$	$B_t n^t + B_{n-1} n^{t-1} + \cdots + B_1 n + B_0$
$r^n, r \in R$	Br^n
$n^t r^n$	$r^n(B_t n^t + B_{n-1} n^{t-1} + \cdots + B_1 n + B_0)$

4. Ansatz für spezielle Lösung in homogenen Teil einfügen

- homogener Teil: $a_{n+2} - 49a_n$
- Ansatz spezielle Lösung: $a_{s,n} = b_1 n + b_2$
- inhomogener Teil: $48n - 98$

$$b_1(n+2) + b_2 - 49(b_1 n + b_2) = 48n - 98$$
$$b_1 n + 2b_1 + b_2 - 49b_1 n - 49b_2 = 48n - 98$$

- Nun vergleicht man die Koeffizienten der speziellen Lösung (n^1, n^0)
- inhomogener Teil: $48n - 98$

$$n^1 : b_1 - 49b_1 = -48b_1 = 48 \to b_1 = -1$$

$$n^0 : 2b_1 + b_2 - 49b_2 = -98 \to b_2 = 2$$

- Nun setzt man die ermittelten Werte in den Ansatz der speziellen Lösung ein und erhält die spezielle Lösung

$$\boxed{a_{s,n} = -1n + 2}$$

a_n bestimmen

$$\begin{aligned} a_n &= a_{h,n} + a_{s,n} \\ a_n &= c_1 7^n + c_2(-7)^n - 1n + 2 \end{aligned}$$

a_0 und a_1 benutzen um c_1 und c_2 zu bestimmen

- $a_0 = 5, a_1 = 8$

$$\begin{aligned} a_0 : c_1 7^0 + c_2(-7)^0 - 1 \cdot 0 + 2 &= 5 \\ c_1 - c_2 + 2 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 : c_1 7^1 + c_2(-7)^1 - 1 \cdot 1 + 2 &= 8 \\ 7c_1 - 7c_2 - 1 + 2 &= 8 \end{aligned}$$

- a_0 nach c_1 umstellen un in a_1 einsetzen um c_2 zu bestimmen
- dann c_2 in c_1 einsetzen um c_1 zu erhalten
- Werte von c_1 und c_2 in a_n einsetzen, das Ergebnis ist die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} a_0 : c_1 - c_2 + 2 &= 5 \\ c_1 &= 3 + c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 : 7(3 + c_2) - 7c_2 - 1 + 2 &= 8 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\boxed{a_n = c_1 7^n + c_2(-7)^n - 1n + 2}$$

Hier c_1 und c_2 mit eigentlichen Werten ersetzen

2 Codierung

2.1 Allgemeines

- Linearer (n, m)-Code C
- ***a*** **x** ***b*** **Generatormatrix:** $n = b$ und $m = a$
- ***a*** **x** ***b*** **Kontrollmatrix:** $n = b$ und $m = a - b$

2.2 Wichtige Formeln

- **Blocklänge:** n
- **Linear unabhängige Wörter/Dimension des Unterrraums** C**:** m
- **Anzahl Codewörter:** $|C| = q^m$, wobei q Anzahl Elemente in C
- **Anzahl Wörter in Standardfeld:** q^n
- **Anzahl Wörter/Zeilen in Syndromtabelle:** q^{n-m}
- **Hamming Code:** $n = \dfrac{q^{n-m} - 1}{q - 1}$
- **Schätzen der Codedistanz (Singleton-Schranke):** $d(C) \leq n - m + 1$ (obere Schranke)
  - **Untere Schranke:** $d(C) \geq r + 1$, das bestimmte r ist die untere schranke. Damit zeigt man auch, dass bei gegebener Kontrollmatrix $d(C)$ Wert x hat.
- **Fehlererkennend:** $(n - m)$
- **Fehlerkorrigierend:** $\left\lfloor \dfrac{(n - m)}{2} \right\rfloor$
- **t-fehlererkennend:** $d(C) \geq t + 1$, das ausgewählte t ist, wie viel Fehler der Code erkennt
- **t-fehlerkorrigierend:** $d(C) \geq 2t+1$, das ausgewählte t ist, wie viele Fehler der Code korrigiert
- **t-ausfällekorrigierend:** $d(C) \geq t + 1$

2.3 Allgemeines zu Matrizen

Aufbau Generatormatrix:

- $(m \times n)$ Generatormatrix
- Beispiel: $m = 2, n = 5$
  $\rightarrow$ (2×5) Generatormatrix

$$G = \begin{array}{cc} & \overrightarrow{\quad n \quad} \\ m\downarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aufbau Kontrollmatrix:

- $(n \times n - m)$ Kontrollmatrix
- Beispiel: $m = 2, n = 5$
  $\rightarrow$ $(5 \times 5 - 2) = (5 \times 3)$ Kontrollmatrix

$$H = \begin{array}{cc} & \overrightarrow{\; n\text{-}m \;} \\ n\downarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

wort $\cdot$ matrix:

$$1010010 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot 1 & 1\cdot 1 \\ 1\cdot 0 & 0\cdot 0 & 1\cdot 0 \\ 0\cdot 1 & 1\cdot 1 & 1\cdot 1 \\ 1\cdot 0 & 1\cdot 0 & 0\cdot 0 \\ 1\cdot 0 & 0\cdot 0 & 0\cdot 0 \\ 0\cdot 1 & 1\cdot 1 & 0\cdot 1 \\ 0\cdot 0 & 0\cdot 0 & 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & | & 1 & | & 1 \\ +0 & | & +0 & | & +0 \\ +0 & | & +1 & | & +1 \\ +0 & | & +0 & | & +0 \\ +0 & | & +0 & | & +0 \\ +0 & | & +1 & | & +0 \\ +0 & \downarrow & +0 & \downarrow & +0 \end{pmatrix} = 110$$

$$1010010 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot 0 & 0\cdot 1 & 1\cdot 0 & 1\cdot 0 & 0\cdot 1 & 0\cdot 0 \\ 1\cdot 1 & 0\cdot 0 & 1\cdot 1 & 1\cdot 0 & 0\cdot 0 & 1\cdot 1 & 0\cdot 0 \\ 1\cdot 1 & 1\cdot 0 & 1\cdot 1 & 0\cdot 0 & 0\cdot 0 & 0\cdot 1 & 1\cdot 0 \end{pmatrix}^T =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & +0 & +0 & +0 & +0 & +0 & +0 \\ - & - & - & - & - & - & \rightarrow \\ 1 & +0 & +1 & +0 & +0 & +1 & +0 \\ - & - & - & - & - & - & \rightarrow \\ 1 & +0 & +1 & +0 & +0 & +0 & +0 \end{pmatrix}^T = 110$$

2.4 Codewörter sind gegeben

n und m bestimmen

$$n = \text{Länge der Codewörter} \Rightarrow n = 5$$

00000
01101
10111
11010

$$m = \text{Dimension} \Rightarrow m = 2$$

00000
01101
10111
11010

Hamming-Distanz/Code-Distanz/$d(c)$

- Hemming-Distanz ist die minimale Änderung des Gewichts
- Wird mit $d(C)$ bezeichnet

Beispiel:

- Anzahl Einsen in Codewörter Zählen
- $0 \dots 0$ wird dabei nicht beachtet

01101	$\rightarrow$	Gewicht: 3
10111	$\rightarrow$	Gewicht: 4
11010	$\rightarrow$	Gewicht: 3

- Gewicht der Codewörter vergleichen und minimalstes auswählen

$\Rightarrow$ $d(C) = 3$, da es minimal ist

Kanonische Generatormatrix

- Definition: Aus der Generatormatrix kann man alle möglichen Codewörter der Sprache erzeugen.
- Falls die Generatormatrix gegeben ist, lässt sich die die kanonische Generatormatrix durch das Anwenden des Gaußschen Verfahrens auf die Generatormatrix erstellen.
- Größe: $(m \times n)$
- Aufbau: $G = \begin{pmatrix} E & G' \end{pmatrix}$
  - E: Einheitsmatrix
  - G': Linear unabhängiger Rest aus Codewörtern

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kanonische Kontrollmatrix

- Definition: Erfüllt ein Wort $wort \cdot kontrollmatrix = 0$ ist es ein richtiges Codewort.
- Größe: $n \times (n - m)$
- Aufbau: $H = \begin{pmatrix} -G \\ E \end{pmatrix}$
  - E: Einheitsmatrix
  - $-G$: Linear unabhängiger Rest aus Codewörtern

$$H = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Modulo mit negativen Zahlen:

	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathbb{Z}_2$									0	1	[0	1]								
$\mathbb{Z}_3$								0	1	2	[0	1	2]							
$\mathbb{Z}_4$							0	1	2	3	[0	1	2	3]						
$\mathbb{Z}_5$						0	1	2	3	4	[0	1	2	3	4]					
$\mathbb{Z}_6$					0	1	2	3	4	5	[0	1	2	3	4	5]				
$\mathbb{Z}_7$				0	1	2	3	4	5	6	[0	1	2	3	4	5	6]			
$\mathbb{Z}_8$			0	1	2	3	4	5	6	7	[0	1	2	3	4	5	6	7]		
$\mathbb{Z}_9$		0	1	2	3	4	5	6	7	8	[0	1	2	3	4	5	6	7	8]	
$\mathbb{Z}_{10}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	[0	1	2	3	4	5	6	7	8	9]

2.5 Syndromtabelle

- Definition: Identifiziert und korrigiert Fehler in Codewörter durch Vergleich mit erwarteten Werten.
- Anzahl Zeilen: q^{n-m}
- Anzahl Spalten: n

Beispiel: (7×3)-Kontrollmatrix, $n = 7, m = 4$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a	$S = a \cdot H$
0000000	000
1000000	111
0100000	101
0010000	011
0001000	110
0000100	100
0000010	010
0000001	001

- Anzahl Zeilen: $2^{7-4} = 8$
- Anzahl Spalten: 7
- Wenn über 0000001 hinaus geht egal ob 1000001, 1100000, ...

1. Überprüfen ob es ein empfangenes Codewort fehlerfrei ist($wort \cdot kontrollmatrix = 0$)
   - Empfangenes Wort: $y = 1010010$

$$1010010 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 110 \neq 0 \Rightarrow \text{Fehler im empfangenen Codewort}$$

2. Codewort durch Syndromtabelle korrigieren
   - Klassenanführer von 110 aus Syndromtabelle ablesen: $a = 0001000$
   - $empfangenes\ Codewort - Klassenanfuehrer = korrigiertes\ Codewort$

$$\begin{array}{ccr} y & & 1010010 \\ a & - & 0001000 \\ \hline & & 1011010 \end{array}$$

   - korrigiertes Codewort: 1011010

3. Nachricht extrahieren
   - Letzte Stellen des korrigierten Codewort entfernen, um die Nachricht zu erhalten (Anzahl entfernte Stellen entspricht Länge des Syndrom).
   - Nachricht: $1011\cancel{010} = 1011$

2.6 Reed-Solomon-Codes

- $RS(q, m, n)$
- **Hamming-/Code-Distanz:** $d(C) = n - m + 1$
- **Max. Anzahl Fehlerkorrigierend:** $\left\lfloor \frac{(n-m)}{2} \right\rfloor$
- **Max. Anzahl Ausfällekorrigerend:** $(n - m)$

Nachricht codieren/Codewort erzeugen:

- Da $q = 5$ alles mod 5
- **Nachricht:** $a = (3, 4, 2)$
- **Polynom:** $a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \xRightarrow{a \text{ einsetzen}} a(x) = 3 + 4x + 2x^2$
- **Stützstellen:** $u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 4$

$a(0) = 3 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0^2 = 3$

$a(1) = 3 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 = 9 \ mod \ 5 = 4$

$a(2) = 3 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 = 19 \ mod \ 5 = 4$

$a(3) = 3 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 = 33 \ mod \ 5 = 3$

$a(4) = 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 = 51 \ mod \ 5 = 1$

$c(a) = (a(0), a(1), a(2), a(3), a(4)) = (3, 4, 4, 3, 1)$

Ausfällekorrigieren: Fehlerhaftes Codewort bestimmen

- Da $q = 5$ alles mod 5
- **Fehlerhaftes Codewort:** $y = (3, *, 4, 3, *)$
- **Polynom:** $a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$
- **Stützstellen:** $u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 4$

1. Stützstellen und empfangenen (nicht fehlerhafte) Werte in das Polynom einsetzen um die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 zu finden

$a(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 = 3 \Rightarrow \boxed{a_0 = 3}$

$$\begin{aligned} a(2) &= 3 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 = 4 \\ &= 3 + 2a_1 + 4a_2 = 4 \quad | -3 \ | -4a_2 \ | : 2 \\ &= a_1 = \tfrac{1}{2} - 2a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(3) &= 3 + (\tfrac{1}{2} - 2a_2) \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 = 3 \\ &= 3 + 3(\tfrac{1}{2} - 2a_2) + 9a_2 = 3 \\ &= 3 + \tfrac{3}{2} - 6a_2 + 9a_2 = 3 \\ &= 4,5 + 3a_2 = 3 \quad | -4,5 \ | : 3 \Rightarrow \boxed{a_1 = -\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

2. Mit den gefunden Koeffizienten a_0, a_1, a_2 lassen sich nun die fehlenden Stellen herleiten

$a(1) = 3 + \frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \underline{\underline{4}}$

$a(4) = 3 + \frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 = \underline{\underline{1}}$

Das Codewort ist somit $y = (3, 4, 4, 3, 1)$

Generatormatrix erzeugen:

- Beispiel: $m = 3, n = 5, q = 5$
- $u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 4$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & \dots & u_n^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^m & u_2^m & \dots & u_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$$

Kontrollmatrix erzeugen:

- Beispiel: $m = 2, n = 5, q = 5$
- $u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 4$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & u_3 & u_3^2 & \dots & u_3^{q-m-1} \\ 1 & u_4 & u_4^2 & \dots & u_4^{q-m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & u_q & u_q^2 & \dots & u_q^{q-m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

2.7 Kontrollmatrix zu Generatormatrix

- Die Kontrollmatrix eines linearen (n,m)-Codes C über dem Körper $\mathbb{Z}_5$
- Da $\mathbb{Z}_5$ alles *mod* 5

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}^T$$

- Um aus einer Kontrollmatrix eine Generatormatrix abzuleiten machen wir uns die Eigenschaft $G \cdot H = 0$ zu nutze
- Um $G \cdot H = 0$ zu lösen stellen wir eine Tabelle auf die unser Gleichungssystem repräsentiert

g_1	g_2	g_3	g_4	
4	1	2	3	0
1	1	4	4	0

- Nun wählt man 2 beliegt Variablen (Anzahl Variablen: $|g| - 2$)
- $g_3 = \lambda$, $g_4 = \mu$
- Nun löst man das Gleichungssystem für die restlichen g's (g_1 und g_2)
- **Achtung:** Wir rechnen in $\mathbb{Z}_5$
  - Wenn man neative Zahlen hat gilt $-a \ mod \ 5 = b$ und man rechnet mit der positive Zahl weiter
  - Wenn man dividiert immer das multiplikative Inverse der Zahl (z.B a) nehmen, und mit dem Inversen (z.B b) multiplizieren ($a \cdot b \ mod \ 5 = 1$)

Nach g_1 lösen:

$$\begin{aligned} 0 &= 4g_1 + g_2 + 2g_3 + 3g_4 \\ 4g_1 &= -g_2 - 2g_3 - 3g_4 \\ 4g_1 &= 4g_2 + 3g_3 + 2g_4 \mid \textit{variablen einsetzen} \\ 4g_1 &= 4g_2 + 3\lambda + 2\mu \mid \cdot 4 \ (\textit{mult. Inverses von } 4) \end{aligned}$$

$$\boxed{g_1 = g_2 + 2\lambda + 3\mu} \xrightarrow{\text{Nach dem lösen von } g_2} \boxed{g_1 = 4\lambda + 2\mu}$$

Nach g_2 lösen:

$$\begin{aligned} 0 &= g_1 + g_2 + 4g_3 + 4g_4 \\ g_2 &= -g_1 - 4g_4 - 4g_4 \ | g_1 \textit{ und variablen einsetzen} \\ &= -(g_2 + 2\lambda + 3\mu) - 4\lambda - 4\mu \\ &= -g_2 + -2\lambda - 3\mu - 4\lambda - 4\mu \\ &= 4g_2 + 3\lambda + 2\mu + 1\lambda + 1\mu \\ &= 4g_2 + 4\lambda + 3\mu \mid -4g_2 \\ 2g_2 &= 4\lambda + 3\mu \mid \cdot 3 \ (\textit{mult. Inverses von } 2) \end{aligned}$$

$$\boxed{g_2 = 2\lambda + 4\mu}$$

- Nun lässt sich G bestimmen
- G hat die Form (g_1, g_2, g_3, g_4)

$$G = (4\lambda + 2\mu, 2\lambda + 4\mu, \lambda, \mu)$$

- Nun muss mann für alle Spalten λ und μ so bestimmen das $G \cdot H = 0$ aufgeht
- **Für die ersten Spalte:** $\lambda = 1, \mu = 0$
- **Für die zweite Spalte:** $\lambda = 0, \mu = 1$

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

2.8 Generatormatrix zu Kontrollmatrix

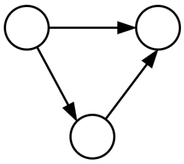
3 Graphentheorie

3.1 Grundbegriffe

$G(V, E)$, V = Vertices = Knoten, E = Edges = Kanten

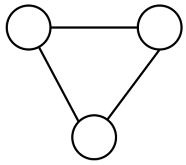
Gerichteter Graph

- Kante geht nur in *eine* Richtung



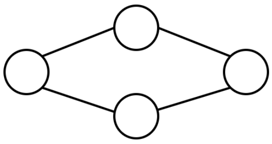
Ungerichteter Graph

- Kante geht nur in *beide* Richtung



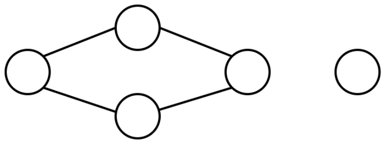
Zusammenhängender Graph

- Verbindung von einem Knotenpunkt zu allen anderen
- Verbindungen müssen nicht direkt sein
- Gibt keine isolierten Knoten



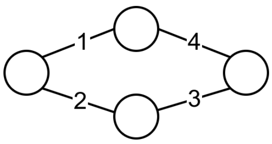
Nichtzusammenhängender Graph

- Wenn ein Knoten isoliert ist und keine Verbindung herrscht



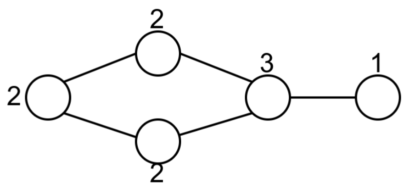
Gewichteter Graph

- Die Kanten bekommen Gewichte zugewiesen



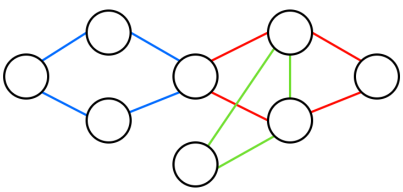
Knotengrad

- Anzahl Kanten die von einem Knoten ausgehen



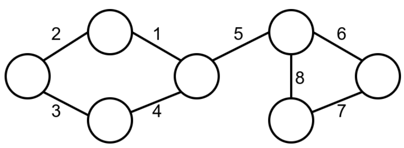
Euler-Zyklus/Eulersch

- Jede Kante wird genau einmal durchlaufen
- Kanten dürfen somit nicht mehrmals durchlaufen werden
- Anfangszustand = Endzustand
- Alle Knoten haben einen geraden Grad
- Ist bei Adjazenzmatrix Außengrad $\neq$ Innengrad dann kein Euler-Zyklus



Euler-Pfad

- Jede Kante wird genau einmal durchlaufen
- Keine Kante wird mehrmals durchlaufen
- Startknoten muss nicht gleich Endknoten sein
- Genau zwei Knoten haben einen ungeraden Grad



Hamilton-Zyklus

- Jeder Knoten wird genau einmal besucht
- Anfangsknoten = Startknoten

Hamilton-Pfad

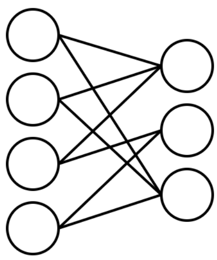
- Jeder Knoten wird genau einmal durchlaufen
- Nicht jede Kante muss durchlaufen werden
- Keine Kante wird mehrmals durchlaufen
- Startknoten muss nicht gleich Endknoten sein

Isomorph

- Bijektive Abbildung
- Kanten, Knoten und Knotengrad müssen gleich sein

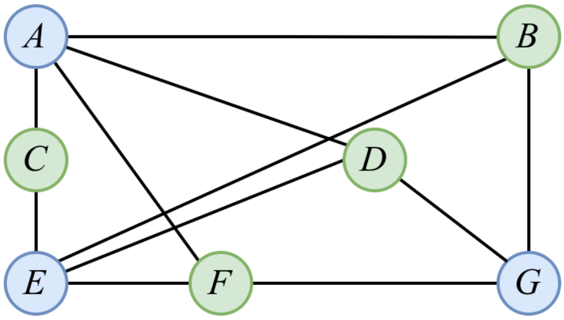
Bipartit

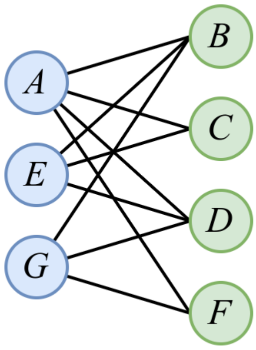
- Man kann alle Knoten in zwei (disjunkte) Teilmengen/Gruppen aufteilen
- Jede Verbindung geht dabei von einer Teilmenge/Gruppe in die andere
- Es darf allerdings keine Verbindung der Knoten innerhalb der eigenen Teilmenge/Gruppe geben
- **Hamilton-Zyklus:**
  - Wenn beide Teilmenge (A und B) die gleiche Anzahl an Knoten haben ($|A| = |B|$)
  - Graph vollständig ist
- **Hamilton-Pfad:**
  - Wenn gilt $|A| \leq |B| + 1$ *und* $|A| \geq |B| - 1$



Beispiel: Zeigen ob ein Graph bipartit ist

- Beliebigen Knoten auswählen und färben (z.B blau).
- Alle benachbarte Knoten mit einer anderen Farbe färben (z.B grün)
- Widerholen: Alle Knoten die an einen blauen Knoten angrenzen, grün und alle Knoten, die an einen grünen Knoten angrenzen, blau färben.
- Prüfung: Wenn man auf einen Knoten stößt, der bereits gefärbt ist und dessen Farbe sich von der Farbe unterscheidet, die man ihm zuweisen möchten, dann ist der Graph *nicht bipartit*. Wenn man alle Knoten ohne solche Konflikte färben konnte, ist der Graph *bipartit*.
- Die blauen Knoten sind am Ende die eine Teilmenge/Gruppe und die grünen Knoten sind am Ende die andere Teilmenge/Gruppe





Planar

- Ein Graph ist planar, wenn man ihn so zeichnen kann, dass sich seine Kanten nirgendwo kreuzen.

(Nicht) Planarität prüfen:

1 Methode:

- $n = |V|$ (Anzahl Knoten) und $m = |E|$ (Anzahl Kanten) bestimmen
- Hat der Graph einen Zyklus der Länge 3?

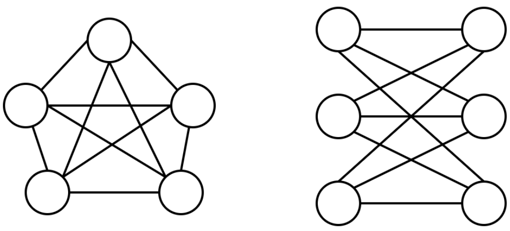
  $\rightarrow$ **Ja:** $m \leq 3n - 6$

  $\rightarrow$ **Nein:** $m \leq 2n - 4$

  - Gilt $m \not\leq 3n - 6$ oder $m \not\leq 2n - 4$ ist der Graph *nicht planar*
  - **Achtung:** Die Formel macht nur eine Aussage darüber, ob der Graph nicht planar ist, aber nicht, ob ein Graph planar ist. Gilt also $m \leq 3n - 6$ oder $m \leq 2n - 4$ heißt es nicht, dass der Graph planar ist. Man kann also nur die Nichtplanarität überprüfen.

2 Methode:

- Ist der K_5 oder $K_{3,3}$ der Graph oder ein Teilgraph ist der ein Graph immer *nicht planar*



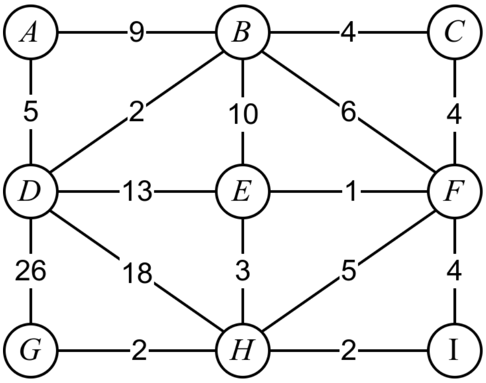
K_5 (links), $K_{3,3}$ (rechts)

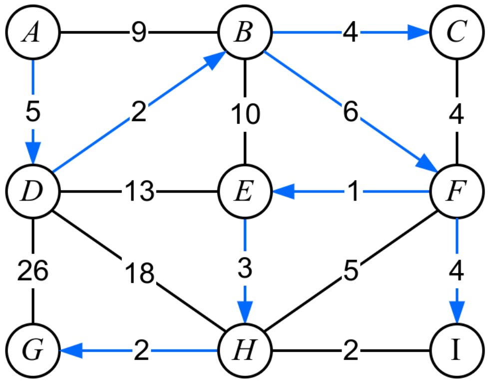
3 Methode:

- Graphen versuchen so zu zeichnen das ein planarer Graph rauskommt (umständlich)

3.2 Kürzester Weg

Dijkstra

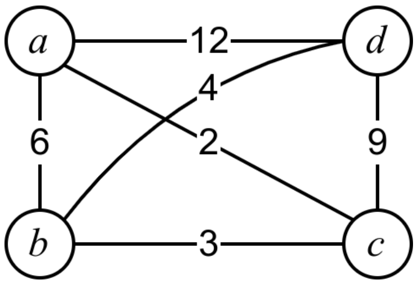




A	B	C	D	E	F	G	H	I	S
0(A)									A
0(A)	9(A)		5(D)						A, D
0(A)	7(D)		5(D)	18(E)		31(D)	23(D)		A, D, B
0(A)	7(D)	11(B)	5(D)	17(E)	13(B)	31(D)	23(D)		A, D, B, C
0(A)	7(D)	11(B)	5(D)	17(E)	13(B)	31(D)	23(D)		A, D, B, C, F
0(A)	7(D)	11(B)	5(D)	14(F)	13(B)	31(D)	18(F)	17(F)	A, D, B, C, F, E
0(A)	7(D)	11(B)	5(D)	14(F)	13(B)	31(D)	17(E)	17(F)	A, D, B, C, F, E, H
0(A)	7(D)	11(B)	5(D)	14(F)	13(B)	31(D)	17(E)	17(F)	A, D, B, C, F, E, H, I
0(A)	7(D)	11(B)	5(D)	14(F)	13(B)	31(D)	17(E)	17(F)	A, D, B, C, F, E, H, I, G

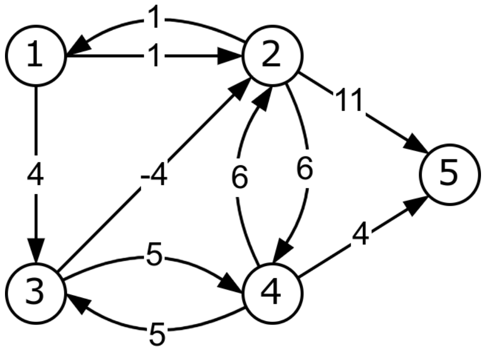
- Kann bei negativen Kanten ein falsches Ergebnis liefern, da er davon ausgeht, dass einmal besuchte Knoten nicht mehr verbessert werden können. Bei negativen Kanten ist dies jedoch möglich.
- Bei negativen Kanten Gewichte deshalb lieber Bellman-Ford-Algorithmus

Floyd



	i	a	b	c	d	a	b	c	d
	a	0	6	2	12	a	a	a	a
	b	6	0	3	4	b	b	b	b
	c	2	3	0	9	c	c	c	c
	d	12	4	9	0	d	d	d	d
1	a	0	6	2	12	a	a	a	a
1	b	6	0	3	4	b	b	b	b
1	c	2	3	0	9	c	c	c	c
1	d	12	4	9	0	d	d	d	d
2	a	0	6	2	10	a	a	a	b
2	b	6	0	3	4	b	b	b	b
2	c	2	3	0	7	c	c	c	b
2	d	10	4	7	0	b	d	b	d
3	a	0	5	2	9	a	c	a	b
3	b	5	0	3	4	c	b	b	b
3	c	2	3	0	7	c	c	c	b
3	d	9	4	7	0	c	d	b	d
4	a	0	5	2	9	a	c	a	b
4	b	5	0	3	4	c	b	b	b
4	c	2	3	0	7	c	c	c	b
4	d	9	4	7	0	c	d	b	d

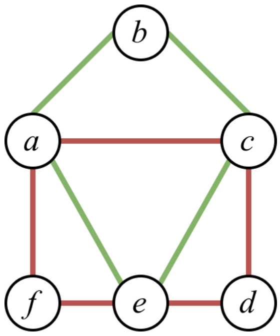
FIFO



D(s,1)	D(s,2)	D(s,3)	D(s,4)	D(s,5)	R(1)	R(2)	R(3)	R(4)	R(5)	S
0										1
0	1	4				1	1			$2 < 3$
0	1	4	7	12		1	1	2	2	$3 < 4 < 5$
0	0	4	7	12		3	1	2	2	$4 < 5 < 2$
0	0	4	6	11		3	1	2	4	$5 < 2$
0	0	4	6	11		3	1	2	4	2
0	0	4	6	10		3	1	2	4	4
0	0	4	6	10		3	1	2	4	5
0	0	4	6	10		3	1	2	4	

3.3 Hierholzer

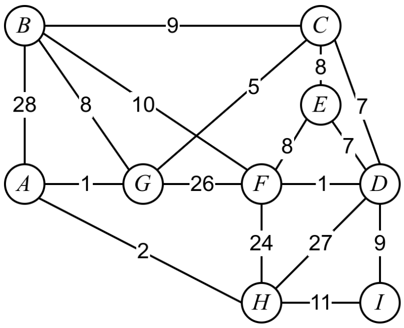
- Man will einen Weg finden, der alle Kanten durchläuft

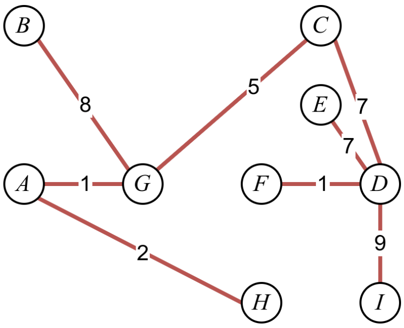


- $R_1 = acdefa$
- $R_2 = eabce$
- $R_1 + R_2 = acdeabcefa$

3.4 Prim

- **Ziel:** Erstellung eines minimalen Spannbaum, von einem gewichteten ungerichteten Graphen.
- Die Kantengewichte sind im vorhinein nicht bekannt
- Es wird immer die Kante mit dem kleinsten Gewicht (welches aktuell bekannt ist) benutzt

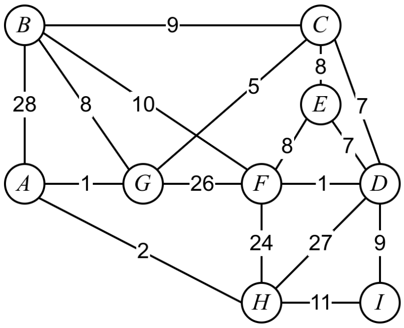


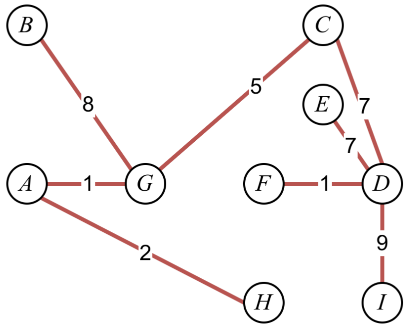


- Start: A, G
- Füge hinzu: A, H
- Füge hinzu: G, C
- Füge hinzu: C, D
- Füge hinzu: D, F
- Füge hinzu: D, E
- Füge hinzu: B, G
- Füge hinzu: D, I

3.5 Kruskal

- **Ziel:** Erstellung eines minimalen Spannbaum, von einem gewichteten ungerichteten Graphen.
- Alle Kantengewichte sind im vorhinein bekannt

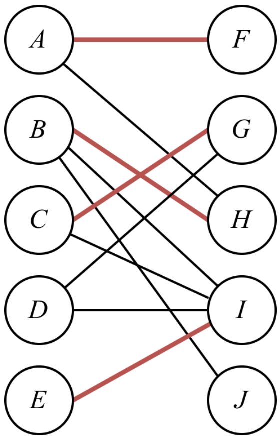




- Start: A, G
- Füge hinzu: F, D
- Füge hinzu: A, H
- Füge hinzu: G, C
- Füge hinzu: F, D
- Füge hinzu: C, D
- Füge hinzu: D, E
- Füge hinzu: G, B
- Füge hinzu: D, I

3.6 Matching

Unter Matching eines Graphen versteht man eine Menge von Kanten von G, sodass keine zwei Kanten einen Knoten gemeinsam haben.



$M = (A, F), (B, H), (C, G), (E, I)$ ist ein Matching der Mächtigkeit 4

Heiratssatz

Im bipartiten Graphen $G = (S + T, E)$ gilt:

$$m(G) = |S| \Leftrightarrow |A| \leq |N(A)| \text{ für alle } A \subseteq S$$

Hopcraft-Karp Algorithmus