Экзамен «Комплексные числа»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2014

Для сдачи экзамена необходимо уметь решать задачи следующих типов:

1. Представьте комплексные числа в виде $a+bi$: $\frac{1}{1+i}$, $\frac{(1+i)(2+i)(3+i)}{5(1-i)}$, $\frac{1}{i^5}$.

2. Изобразите на комплексной плоскости множества точек z, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $|z-i|<1$
2) $|z-i| \geqslant |z+5i|$
3) $|z-1|^2+|z+1|^2=5$
4) $\operatorname{Im}(\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{z}) \geqslant 1$
5) $|z-i|+|z+i|=2$
6) $\frac{\pi}{6} < \arg(z-i) < \frac{\pi}{3}$

3. Решите уравнения в комплексных числах:

1) $z^2+4z+29=0$
2) $|z|+z=8+4i$
3) $z^2+\overline{z}=0$

4. Представьте следующие комплексные числа в тригонометрической форме:

1) $1+i$
2) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. Докажите, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

6. Вычислите: $\frac{(i-1)^{20}}{2^{10}}$, $\frac{(1-\sqrt{3}i)^{100}}{2^{100}}$.

7. Используя комплексные числа, выразите $\sin 4\varphi$ и $\cos 4\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

8. Вычислите все различные значения выражений: $\sqrt[5]{1}$, $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt{5+12i}$, $\sqrt[6]{-1}$.

9. Введем функцию $\exp(z)=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots$. Используя тождества $\exp(ix)=\cos x+i\sin x$ и $\exp(z+w)=\exp(z)\cdot\exp(w)$, докажите, что

1) $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$
2) $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

10. Дан треугольник с вершинами z_1, z_2, z_3, установите геометрический смысл аргумента числа $\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$. Докажите, что четыре точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на окружности или на прямой в том и только в том случае, когда число

$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} : \frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}$$

действительное.