Дополнительные главы квантовой механики

Листок 2. Символы дифференциальных операторов.

Обязательные задачи: 1а, 1б, 3, 4.

1. Пусть $f(p,q)$ — полином от коммутирующих переменных p, q. Определим полиномы $\hat{f}_{qp}(\hat{p},\hat{q})$, $\hat{f}_{pq}(\hat{p},\hat{q})$ и $\hat{f}_w(\hat{p},\hat{q})$ от некоммутирующих переменных $\hat{p}$, $\hat{q}$ следующим образом. Если $f(p,q) = p^k q^l$ — моном, то положим

$$\hat{f}_{qp}(\hat{p},\hat{q}) := \hat{q}^l \hat{p}^k, \quad \hat{f}_{pq}(\hat{p},\hat{q}) := \hat{p}^k \hat{q}^l,$$

$$\hat{f}_w(\hat{p},\hat{q}) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \hat{c}_{\sigma(1)} \ldots \hat{c}_{\sigma(n)},$$

где $n = k + l$ и $\hat{c}_{\sigma(i)} = \hat{p}$, если $1 \leqslant i \leqslant k$, $\hat{c}_{\sigma(i)} = \hat{q}$, если $k+1 \leqslant i \leqslant k+l$. На линейных комбинациях мономов доопределим по линейности. Будем говорить, что два полинома $\hat{f}_1(\hat{p},\hat{q})$ и $\hat{f}_2(\hat{p},\hat{q})$ задают один и тот же дифференциальный оператор $\hat{f}$, если один получается из другого применением коммутационного соотношения $[\hat{p},\hat{q}] = -ih$. Полином $f(p,q)$ называется (нормальным, антинормальным и вейлевским соответственно) символом оператора $\hat{f}$.

   а) Докажите, что каждое из построенных соответствий между символами и операторами взаимнооднозначно.

   б) Найдите нормальный, антинормальный и символ Вейля оператора $\hat{H} = \hat{p}\hat{q}$.

2. Докажите, что нормальный и антинормальный символы оператора $\hat{f}$ связаны соотношениями

$$f_{qp}(p,q) = e^{-ih\frac{\partial^2}{\partial p \partial q}} f_{pq}(p,q),$$

$$f_{qp}(p,q) = \frac{1}{2\pi h} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f_{pq}(p+p', q+q') e^{-\frac{i}{h}p'q'} dp'dq'.$$

3. Пусть $\hat{f} = \hat{f}_1 \hat{f}_2$. Докажите, что нормальные символы $f(p,q)$, $f_1(p,q)$, $f_2(p,q)$ операторов $\hat{f}$, $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$ связаны соотношениями

$$f(p,q) = f_1(p,q) \exp(-ih \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q) f_2(p,q) := \big(\exp(-ih \partial_{p'} \partial_{q'}) f_1(p',q) f_2(p,q') \big)|_{p'=p, q'=q},$$

$$f(p,q) = \frac{1}{2\pi h} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f_1(p+p',q) f_2(p,q+q') e^{-\frac{i}{h}p'q'} dp'dq'.$$

   Как эти соотношения обобщаются на случай полиномов от $2m$ переменных $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m$, $\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_m$, $[\hat{p}_i, \hat{q}_j] = -ih\delta_{ij}$?

4. Пусть $\hat{f}(\hat{a}, \hat{b})$ — некоторый моном от некоммутирующих переменных $\hat{a}$, $\hat{b}$, $[\hat{a}, \hat{b}] = 1$. Нормальным упорядочением $\mathcal{N}(\hat{f})$ называется полином $f(\hat{a}, \hat{b})$, где $f(a, b)$ — нормальный символ оператора $\hat{f}$. Наивным упорядочением $: \hat{f} :$ называется моном от $\hat{a}$ и $\hat{b}$, полученный из $\hat{f}(\hat{a}, \hat{b})$ простым перебрасыванием всех $\hat{a}$ направо без учета коммутационных соотношений. Докажите теорему Вика:

$$\mathcal{N}(\hat{f}) = \sum_{c \in C(\hat{f})} : c(\hat{f}) : .$$

Здесь суммирование производится по множеству $C(\hat{f}) = C_0(\hat{f}) \sqcup C_1(\hat{f}) \sqcup \ldots$ т.н. сжатий монома $\hat{f}(\hat{a}, \hat{b})$: если $c \in C_m(\hat{f})$, то $c(\hat{f})$ — результат вычеркивания из $\hat{f}(\hat{a}, \hat{b})$ m пар сомножителей $(\hat{a}, \hat{b})$, таких что $\hat{a}$ стоит в мономе до $\hat{b}$ (не обязательно непосредственно перед $\hat{b}$).

5. Найдите нормальный символ оператора $e^{t\hat{p}\hat{q}}$ (экспоненту здесь можно понимать как формальный степенной ряд). *Подсказка:* Перепишите дифференциальное уравнение $\frac{\partial}{\partial t} e^{t\hat{p}\hat{q}} = \hat{p}\hat{q} e^{t\hat{p}\hat{q}}$ на языке нормальных символов и решите его.