

# Экзамен «Координаты»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2011

*Для сдачи экзамена нужно уметь решать задачи из списка. Если не указано противное, то все системы координат предполагаются ортонормированными.*

**1.** Определите, образуют ли вектора  $v_1, v_2, v_3$  базис пространства. Если да, то найдите координаты вектора  $v$  в этом базисе:

1)  $v_1 = (6, 0, 2), v_2 = (3, -9, 4), v_3 = (1, -1, 4), v = (2, 5, 5)$

2)  $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (4, 5, 6), v_3 = (7, 8, 9), v = (-3, -2, -1)$

**2.** Докажите, что прямые на плоскости задаются уравнениями вида  $Ax + By + C = 0$ .

**3.** Докажите, что расстояние от точки  $A_1$  с координатами  $(x_1, y_1)$  до точки  $A_2$  с координатами  $(x_2, y_2)$  равно

$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

**4.** Докажите, что окружность с центром  $(x_0, y_0)$  и радиусом  $R$  задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

**5.** Найдите координаты середины отрезка, если известны координаты его концов. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника, если известны координаты трех его вершин.

**6.** Докажите, что расстояние от точки  $(x_0, y_0)$  до прямой  $Ax + By + C = 0$  равно

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

**7.** Какую линию описывает середина отрезка между двумя пешеходами, равномерно идущими по прямым дорогам?

**8.** Найдите наименьшее значение выражения  $|x - y| + \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 1)^2}$ .

**9.** На плоскости даны две точки  $A$  и  $B$ . Найдите геометрическое место точек  $M$ , для которых  $AM : BM = k$  (окружность Аполлония).

**10.** Найдите множество точек, для которых касательные, проведенные к двум данным окружностям, равны по длине.