

# Дополнительные главы квантовой механики и основы квантовой теории поля

## Обязательные задачи

1. Для свободной частицы с лагранжианом  $L = \frac{m\dot{x}^2}{2}$  найдите

а) Функцию действия  $S(x_1, t_1; x_0, t_0)$  ;

б) Ядро оператора эволюции  $K(x_1, t_1; x_0, t_0) = \langle x_1 | e^{-i\hat{H}(t_1-t_0)} | x_0 \rangle$

как функцию начальных и конечных значений времени и координат.

2. Найдите  $pq$ -,  $qp$ - и символ Вейля

а) оператора  $\hat{A} = \hat{p}\hat{q}$ ;

б) оператора  $e^{t\hat{A}} = e^{t\hat{p}\hat{q}}$  (экспоненту понимать как формальный степенной ряд).

3. Рассмотрим струну длины  $a$ , закрепленную на концах. Лагранжева плотность малых поперечных колебаний  $X(\sigma, \tau)$  струны имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{T}{2} \left[ \left( \frac{\partial X}{\partial \tau} \right)^2 - \left( \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2 \right]$$

Выведите уравнения движения для коэффициентов Фурье  $\{q_n(\tau)\}$  разложения

$$X(\sigma, \tau) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n \sigma}{a}\right) q_n(\tau)$$

Можно ли представить  $L = \int_0^a \mathcal{L} d\sigma$  как функцию Лагранжа бесконечного количества не взаимодействующих гармонических осцилляторов? Если да, найдите их частоты.

4. Пусть  $B$  - положительно определенная матрица размера  $n \times n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Обозначим

$$\langle f(x) \rangle := \frac{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\frac{1}{2}(Bx, x)} dx}{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(Bx, x)} dx}$$

а) Вычислить гауссов интеграл  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(Bx, x)} dx$ .

б) Вычислить  $\langle x_i \rangle$ ,  $\langle x_i x_j \rangle$ .

в) Пусть  $n = 3$ . Вычислить  $\langle x_1 x_2 x_3^2 \rangle$ .

5. Найти спектр теории с гамильтонианом

$$H = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left( K_i a_i^\dagger a_i + S_i (a_i a_{-i} + a_i^\dagger a_{-i}^\dagger) \right)$$

где  $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$ .

6. Для теории скалярного поля с лагранжианом  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4$

- а) нарисовать любые две связные диаграммы Фейнмана для  $S$ -матрицы 3-го порядка и написать для них аналитические выражения в координатном представлении;
- б) сколько всего в этой теории диаграмм Фейнмана 3-го порядка?