

Экзамен «Планиметрия. Площади»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2011

На экзамене необходимо уметь решать следующие задачи. Можно пользоваться тем, что площадь — аддитивная функция на простых фигурах и что площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab .

1. Докажите следующие формулы для площади треугольника:

1) $S = \frac{1}{2}ah_a$;

2) $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$;

3) $S = rp$;

4) $S = \frac{abc}{4R}$;

5) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

2. Докажите, что площадь трапеции равна hd , где h — высота трапеции, а d — длина средней линии трапеции.

3. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна $\frac{1}{2}AC \cdot BD \sin \varphi$, где φ — угол между диагоналями.

4. Докажите, что площадь круга радиуса R равна πR^2 .

5. Дан равнобедренный треугольник AOB . Докажите, что сумма расстояний от точки M его основания AB до прямых AO и BO не зависит от положения точки M .

6. Теорема Чевы. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 так, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

7. Докажите, что медианы разбивают треугольник на 6 равновеликих треугольников.