

Экзамен «База+++»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2015

Экзамен засчитывается людям, в течение смены решившим хотя бы 7 задач из приведенного списка и сдавшим хотя бы 10 произвольных экзаменов кафедры математики.

1. Можно ли соединить две данные точки плоскости отрезком прямой, пользуясь лишь линейкой, длина которой меньше расстояния между этими точками?
2. Докажите, что на поверхности Земли в данный момент времени найдутся две диаметрально противоположные точки, в которых совпадают температура и давление. Считайте, что температура и давление непрерывно зависят от точки на земном шаре.
3. В стену вбито 3 гвоздя. Повесьте на них картину так, чтобы при вытаскивании любого гвоздя картина падала.
4. Докажите, что уравнение $x^5 + x + 1 = 0$ не имеет решений в радикалах.
5. Про функцию $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ известно, что для любых x и y выполняются равенства: $f(x + y) = f(x) + f(y)$ и $f(xy) = f(x)f(y)$. Обязательно ли $f(x) = x$ или $f(x) \equiv 0$?
6. Докажите, что количество разбиений любого натурального числа n на нечетные слагаемые равно количеству разбиений этого числа на попарно различные слагаемые.
7. С какой вероятностью число 2^n , $n \in \mathbb{N}$ начинается с цифры 7?
8. Найдите площадь поверхности $z = xy$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$.
9. Докажите, что два точечных объекта никогда не столкнутся, если один из них летит по прямой с постоянной скоростью, а другой не находится на этой прямой и всё время летит с такой же по величине скоростью по направлению на первый объект.
10. Можно ли с помощью циркуля и линейки разделить произвольный данный угол на три равные части?
11. Докажите, что если существует цепочка окружностей S_1, S_2, \dots, S_n , каждая из которых касается двух соседних и двух данных непересекающихся окружностей R_1 и R_2 , то таких цепочек бесконечно много. А именно, можно начать с произвольной окружности, касающейся R_1 и R_2 .
12. Докажите, что на \mathbb{R}^d при $d \neq 2^n$ невозможно определить операцию умножения, линейную относительно сложения и не имеющую делителей нуля (например, при $d = 3$ это означает, что не существует трехмерного аналога комплексных чисел).