

Экзамен «Олимпиадные задачи. Принцип Дирихле»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2011

На экзамене будут предложены задачи из этого списка или аналогичные.

1. 15 мальчиков собрали 100 орехов. Докажите, что какие-то два из них собрали одинаковое число орехов.
2. На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили 3 контрольные работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2, 3, 4 или 5. Докажите, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки на всех контрольных.
3. Докажите, что среди степеней двойки есть две, разность которых делится на 2010.
4. Кот Базилио пообещал Буратино открыть великую тайну, если он составит чудесный квадрат 6×6 из чисел 1, -1 , 0 так, чтобы все суммы по строкам, по столбцам и по большим диагоналям были различны. Помогите Буратино.
5. Первоклассник Петя знает только цифру 1. Докажите, что он может записать число, которое делится на 2011.
6. На всех ребрах куба стоит по числу. На каждой грани (квадрате) пишется сумма четырех чисел, расположенных на ее ребрах (сторонах квадрата). Расставьте числа 1 и -1 на ребрах так, чтобы все числа на гранях были различны.
7. На плоскости даны 7 прямых, никакие две из которых не параллельны. Доказать, что найдутся две из них, угол между которыми меньше 26° .
8. 10 школьников на олимпиаде решили 35 задач, причем известно, что среди них есть школьники, решившие ровно одну задачу, школьники, решившие ровно две задачи и школьники, решившие ровно три задачи. Докажите, что есть школьник, решивший не менее пяти задач.
9. В квадрат со стороной 1 метр бросили 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратом со стороной 20 см.