

# Экзамен

## «Элементы математического анализа»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2011

*Для сдачи экзамена нужно уметь решать такие задачи:*

1. Допустим, Ахиллес бежит в десять раз быстрее, чем черепаха, и находится позади нее на расстоянии в тысячу шагов. За то время, за которое Ахиллес пробежит это расстояние, черепаха в ту же сторону проползет сто шагов. Когда Ахиллес пробежит сто шагов, черепаха проползет еще десять шагов, и так далее. Процесс будет продолжаться до бесконечности, Ахиллес так никогда и не догонит черепаху. Где ошибка в этом рассуждении?
2. Сформулируйте определение предела последовательности. Сформулируйте определение непрерывной в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$  функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Докажите непрерывность функций  $x$ ,  $x^2$ ,  $\frac{1}{x}$  во всех точках их области определения.
3. Докажите, что
  - 1) у последовательности не может быть двух пределов;
  - 2) каждая сходящаяся последовательность ограничена;
  - 3) для монотонных последовательностей ограниченность равносильна сходимости.
4. Докажите, что
  - 1) площадь круга радиуса  $R$  равна  $\pi R^2$ ;
  - 2) объем пирамиды (или конуса) с площадью основания  $S$  и высоты  $h$  равен  $\frac{1}{3}hS$ ;
  - 3) объем шара радиуса  $R$  равен  $\frac{4}{3}\pi R^3$ ;
  - 4) площадь сферы радиуса  $R$  равна  $4\pi R^2$ .
5. На карту России масштаба 1 : 1000000 положили карту масштаба 1 : 10000000. Докажите, что найдется место, изображения которого на обеих картах совпадают.
6. Докажите, что ряд  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  расходится.
7. По веточке длины 1 м ползет червячок со скоростью 1 см/с, а веточка, в свою очередь, растет со скоростью 10 см/с. Сможет ли червячок проползти всю веточку? Если да, то за какое время?
8. Докажите, что ряд

$$\exp(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

сходится для любого  $x \in \mathbb{R}$ . Докажите, что  $\exp(x) = (\exp(1))^x$ . Предложите алгоритм вычисления числа  $e := \exp(1)$  с наперед заданной точностью.

9. Найдите приближенно число людей, достаточное для того, чтобы с вероятностью 0.5 хотя бы два из них имели один и тот же день рождения.

10. Докажите равенство:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$