

# Экзамен «Комбинаторика»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2011

*Требования: «Основы комбинаторики». Для получения экзамена необходимо уметь решать все задачи из приведенного списка.*

1. Найти количество  $k$ -элементных подмножеств  $n$ -элементного множества.
2. Доказать, что  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ , где  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .
3. Доказать, что для любых натуральных  $k \leq n$  выполняются равенства:
  - 1)  $C_n^k = C_n^{n-k}$ ;
  - 2)  $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$ ;
  - 3)  $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ .
4. Сколько диагоналей в выпуклом  $n$ -угольнике?
5. У одного школьника 6 книг, у другого — 8. Сколькими способами они могут обменяться тремя книгами?
6. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «миссисипи»?
7. Сколько различных слов, в которых две буквы «о» не идут подряд, можно получить, переставляя буквы в слове «обороноспособность»?
8. В выпуклом  $n$ -угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения у этих диагоналей (концы диагоналей не считаются точками пересечения)?
9. Сколькими способами можно разделить на команды по 6 человек группу из 24 человек?
10. Сколькими способами можно расселить 7 студентов в 3 комнаты: одноместную, двухместную и четырехместную?
11. Сколькими способами из колоды в 52 карты можно выбрать 3 карты различных мастей и достоинств, если порядок выбора не учитывается?
12. Сколькими способами колоду из 36 карт можно разделить на две половины так, чтобы в каждой было по 2 туза?
13. Сколькими путями, идущими по ребрам таблицы размера  $m \times n$ , можно попасть из правого нижнего угла в левый верхний?