Экзамен «Многочлены+»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2011

На экзамене будет предложено несколько задач из этого списка или похожих на них:

1. Доказать, не раскрывая скобок:

$$\frac{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})}{(\sqrt[3]{5}-\sqrt{2})(\sqrt[3]{5}-\sqrt{3})}+\frac{(x-\sqrt{3})(x-\sqrt[3]{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt[3]{5})}+\frac{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt[3]{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt[3]{5})}=1$$

2. Найти сумму четвертых степеней корней уравнения $x^3+x^2-x-\frac{1}{2}=0$.

3. Найти остаток от деления многочлена $x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}$ на многочлен x^2-1.

4. Найти многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

5. Разложить на множители выражение $a^3+b^3+c^3-3abc$.

6. Избавиться от иррациональности в знаменателе

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$$

7. Доказать, что многочлен $x^{9999}+x^{8888}+x^{7777}+x^{6666}+x^{5555}+x^{4444}+x^{3333}+x^{2222}+x^{1111}+1$ делится на $x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x^1+1$.

8. Найти НОД многочленов x^m-1 и x^n-1.

9. Найти многочлен третьей степени, корни которого равны квадратам корней многочлена x^3+x^2+1.

10. Признак неприводимости Эйзенштейна. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и существует такое простое число q, что

1) старший коэффициент $P(x)$ не делится на q,
2) все остальные коэффициенты $P(x)$ делятся на q,
3) свободный коэффициент $P(x)$ делится на q^2.

Доказать, что не существует таких отличных от константы многочленов $Q(x)$ и $R(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(x)=Q(x)R(x)$.