

# Экзамен «Планиметрия. Подобие»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2011

*На экзамене нужно знать определения преобразований подобия и гомотетии. Будет предложено несколько задач из этого списка или аналогичных. Можно пользоваться теоремой Фалеса и обратной к ней.*

1. Докажите 3 свойства и признака подобия треугольников: по двум углам, по двум сторонам и углу между ними, по трем сторонам.
2. Докажите, что гомотетия — это частный случай преобразования подобия.
3. Докажите, что в любом треугольнике медианы пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении  $2 : 1$ , считая от вершин.
4. Докажите, что в любом треугольнике высоты пересекаются в одной точке.
5. Теорема Менелая. Точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , лежащие соответственно на сторонах  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$  или на их продолжениях, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1$$

6. Пусть  $AA_1$  и  $BB_1$  — высоты в треугольнике  $ABC$ . Докажите, что треугольник  $A_1B_1C$  подобен треугольнику  $ABC$ .
7. Замечательное свойство трапеции. В трапеции  $ABCD$  диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $E$ , а продолжения боковых сторон  $AB$  и  $CD$  — в точке  $F$ . Докажите, что прямая  $EF$  пересекает отрезки  $BC$  и  $AD$  по их серединам.
8. В трапеции основания равны  $a$  и  $b$ . Найти длину отрезка, заключенного между боковыми сторонами трапеции, параллельного основаниям и проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции. Найдите также длину отрезка, отсекаемого диагоналями трапеции на средней линии.
9. На плоскости даны окружность и точка  $A$ . Найти множество середин отрезков  $AN$ , где  $N$  — произвольная точка данной окружности.
10. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  взята точка  $A_1$  так, что  $BA_1 : A_1C = 2 : 1$ . В каком отношении медиана  $CC_1$  делит отрезок  $AA_1$ ?