Экзамен «Скалярное произведение»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2011

Для получения экзамена нужно решить эти задачи:

1. Пусть в некоторой ортонормированной системе координат вектор u имеет координаты (u_1, u_2). Найдите координаты вектора u в другой системе координат, повернутой относительно первой на угол φ.

2. Пусть u и v — два вектора. Докажите, что число $u_1v_1 + u_2v_2$ не зависит от выбора ортонормированной системы координат. Покажите, что числа $u_1 + v_1$, $u_1u_2 + v_1v_2$, $u_1v_1 - u_2v_2$ наоборот, зависят от этого выбора. Следовательно, корректно определено т.н. скалярное произведение векторов:

$$\langle u|v\rangle := u_1v_1 + u_2v_2$$

3. Докажите, что число $u_1v_2 - u_2v_1$ не зависит от выбора ортонормированной системы координат. Следовательно, корректно определен т.н. определитель двух векторов:

$$\det(u, v) := u_1v_2 - u_2v_1$$

4. Докажите свойства линейности скалярного произведения (и аналогичные свойства для определителя):

1) $\langle au|v\rangle = a\langle u|v\rangle$, $a \in \mathbb{R}$;

2) $\langle u + v|w\rangle = \langle u|w\rangle + \langle v|w\rangle$.

5. Докажите тождества: $\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle$, $\det(u, v) = -\det(v, u)$.

6. Докажите, что $\langle u|v\rangle = |u||v|\cos\alpha$, где α — угол между векторами u и v. Выведете отсюда, что

1) $\langle u|v\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда u и v перпендикулярны (в том числе если один из этих векторов нулевой);

2) $\langle u|u\rangle = |u|^2$.

7. Докажите, что $|\det(u, v)|$ есть площадь параллелограмма, натянутого на u и v. Следовательно, определитель двух векторов равен нулю тогда и только тогда, когда эти вектора линейно зависимы.

8. Используя скалярное произведение, докажите теорему косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

9. Докажите, что сумма квадратов длин сторон параллелограмма равна сумме квадратов длин его диагоналей. Выведите отсюда формулу для медианы треугольника: $m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$.

10. Найдите наибольшее значение выражения

$$|x|\sqrt{16 - y^2} + |y|\sqrt{4 - x^2}.$$