Экзамен «Арифметика+»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2014

Для допуска необходимо сдать экзамен «Арифметика». Будет проверяться умение решать задачи типа таких:

1. Докажите бесконечность множества простых чисел.

2. Найдите последнюю цифру числа 2013^{2011}.

3. Докажите, что
1) $7^{2010} + 9^{2010}$ делится на 10;
2) $2006 \cdot 2007 \cdot 2008 \cdot 2009 - 24$ делится на 2005 и на 2010.

4. Натуральные числа x, y, z удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что либо x, либо y делится на 3.

5. Пусть p и q — простые числа, большие 3. Докажите, что $p^2 - q^2$ делится на 24.

6. Докажите, что ни при каком натуральном k число $3^k + 5^k$ не является квадратом натурального числа.

7. Любое ли трехзначное натуральное число можно представить в виде суммы трех квадратов натуральных чисел?

8. Решите уравнения в целых числах:
1) $3x - 5y = 1$;
2) $3x + 5y = 49$;
3) $6x + 39y = 11$.

9. Пусть $(a, m) = 1$. Докажите, что среди чисел $a, 2a, \ldots, ma$ встречаются все остатки по модулю m.

10. Докажите малую теорему Ферма. Если a не делится на простое p, то

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Подсказка: из предыдущей задачи выведите, что

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \ldots \cdot (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-1) \pmod{p}$$

11. Докажите, что если p — простое число, то числа $2, 3, 4, \ldots, p-3, p-2$ можно разбить на пары так, что произведение чисел в каждой паре будет сравнимо с единицей по модулю p.

12. Докажите теорему Вильсона: p — простое тогда и только тогда, когда $(p-1)! + 1$ делится на p.