

Экзамен «Стереометрия»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2011

На экзамене будет предложено несколько задач из этого списка.

1. Расположите в пространстве шесть незаточенных карандашей так, чтобы каждый из них касался всех остальных.
2. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке.
3. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите углы между прямыми
 - 1) AA_1 и BD_1 ;
 - 2) BD_1 и DC_1 ;
 - 3) AD_1 и DC_1 .
4. На прямой l в пространстве последовательно расположены точки A , B и C так, что $AB = 10$ и $BC = 22$. Найдите расстояние между прямыми l и m , если расстояния от точек A , B и C до прямой m равны 12, 13 и 20 соответственно.
5. Все грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной, равной a , и острым углом 60° . Найдите объем параллелепипеда.
6. В трехгранный угол с вершиной S вписана сфера с центром O . Докажите, что плоскость, проходящая через точки касания сферы с гранями, перпендикулярна прямой OS .
7. Три шара попарно касаются друг друга внешним образом, а также касаются некоторой плоскости в вершинах прямоугольного треугольника с катетом, равным 1, и противолежащим углом в 30° . Найдите радиусы шаров.
8. Из точки в пространстве выходят четыре луча, образующие друг с другом равные углы. Найдите эти углы.
9. Сколько существует различных раскрасок граней куба в 6 различных цветов? Две раскраски считаются одинаковыми, если их можно совместить, вращая куб в руках.
10. Дан конус с вершиной M , радиус основания равен $2\sqrt{6}$. На окружности его основания выбраны точки A , B , C так, что углы $\angle BMA$, $\angle AMC$, $\angle CMB$ равны 90° каждый. Точка F выбрана на дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A , так, что объем пирамиды $MABFC$ наибольший. Найдите расстояние от точки F до плоскости MAB .