Экзамен «Планиметрия+»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2011

Экзамен засчитывается людям, в течение смены решившим хотя бы 7 задач из следующего списка и сдавшим как минимум 3 других экзамена из группы «Планиметрия».

1. Теорема Штейнера–Лемуса. Если две биссектрисы треугольника равны, то он равнобедренный.

2. Теорема Птолемея. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Тогда $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$.

3. Прямая Эйлера. В любом треугольнике точка H пересечения высот, центр O описанной окружности и точка M пересечения медиан лежат на одной прямой, причем точка M расположена между точками O и H, и $MH = 2MO$.

4. Задача Ферма. Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

5. Формула Эйлера. Расстояние между центром I вписанной окружности и центром O описанной окружности равно $\sqrt{R^2 - 2Rr}$.

6. Задача Фаньяно–Шварца. Треугольник наименьшего возможного периметра с вершинами на сторонах данного остроугольного треугольника — это ортотреугольник данного треугольника (т.е. треугольник, вершины которого — это основания высот исходного треугольника).

7. Прямая Симпсона. Основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности на стороны треугольника (или их продолжения), лежат на одной прямой.

8. Окружность Аполлония. Геометрическое место точек, расстояния от каждой из которых до двух данных точек относятся как $m : n$ $(m \neq n)$, есть окружность.

9. Треугольник Наполеона. Центры правильных треугольников, построенных внешним (или внутренним) образом на сторонах произвольного треугольника, образуют правильный треугольник.

10. Теорема Коперника. По неподвижной окружности, касаясь ее изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса. Тогда фиксированная точка K подвижной окружности движется по диаметру неподвижной окружности.