Квантовая теория поля

Листок 4.

Обязательные задачи: 1, 2.

1. Рассмотрим струну длины a, массы σ на единицу длины и натяжения T, закрепленную на концах. Лагранжева плотность малых поперечных колебаний $\varphi(x,t)$ струны имеет вид
$$\mathcal{L} = \frac{\sigma}{2}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big)^2 - \frac{T}{2}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2.$$
Выведите уравнения движения. Разлагая φ в ряд Фурье
$$\varphi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Big(\frac{\pi n x}{a}\Big)q_n(t),$$
покажите, что
$$\int\limits_0^a \mathcal{L}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sigma}{2}\dot{q}_n^2 - \frac{T}{2}\Big(\frac{\pi n}{a}\Big)^2 q_n^2\right).$$
Убедитесь, что колеблющаяся струна эквивалентна бесконечному количеству невзаимодействующих гармонических осцилляторов с частотами
$$\omega_n = \frac{\pi n}{a}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}.$$

2. Метод Лапласа. Пусть $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — гладкие функции, причем f достигает глобального минимума только в одной точке $c \in (a,b)$, $f''(c) > 0$. Покажите, что
$$\int\limits_a^b g(x)e^{-f(x)/h}dx = \sqrt{2\pi h}\, e^{-f(c)/h}I(h),$$
где $I(h)$ доопределяется в нуле $I(0) := \frac{g(c)}{\sqrt{f''(c)}}$ до гладкой функции на $[0,\infty)$.

3. Применяя метод Лапласа к Γ-функции
$$\Gamma(s+1) = \int\limits_0^{\infty} t^s e^{-t}dt = s^{s+1}\int\limits_0^{\infty} e^{-s(x-\ln x)}dx,$$
выведите формулу Стирлинга: $n! = \sqrt{2\pi n}\big(\frac{n}{e}\big)^n(1+O(1/n))$.

4. Рассмотрим теорию трех скалярных полей φ_i, $i = 1,2,3$, с лагранжианом
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\big(\partial_\mu\varphi_i\partial^\mu\varphi_i - m^2\varphi_i^2\big),$$
обладающую глобальной $O(3)$-симметрией. Вводя дополнительные калибровочные поля A_μ^a, постройте теорию, обладающую локальной (калибровочной) $O(3)$-симметрией и сводящуюся к исходной при $A_\mu^a \equiv 0$.