

# Экзамен «Математическая индукция»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2011

*На экзамене будет предложено несколько задач из списка:*

1. Из квадрата клетчатой бумаги размером  $2^n \times 2^n$  вырезали угловую клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на уголки из трех клеток.
2. Ханойская башня. Имеется пирамида с  $n$  кольцами возрастающих размеров (внизу — самое большое) и еще два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что можно переложить все кольца с первого стержня на один из пустых стержней, причем достаточно сделать  $2^n - 1$  перекладываний.
3. Докажите, что для любого натурального  $n$  число  $10^n + 18n - 1$  делится на 27.
4. Докажите, что число  $111\dots 1$  ( $3^n$  единиц) делится на  $3^n$ .
5. Плоскость поделена на части несколькими прямыми. Докажите, что эти части можно раскрасить в черный и белый цвет так, чтобы любые две соседние части были раскрашены в различные цвета (соседние части — это те, которые имеют общий участок границы).
6.  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .
7.  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .
8.  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$ .
9. Докажите, что если  $x + \frac{1}{x}$  — целое число, то  $x^n + \frac{1}{x^n}$  также является целым при любом натуральном  $n$ .
10. Объясните, где ошибка в следующем рассуждении. Докажем, что все лошади одной масти. Будем доказывать по индукции, что в табуне из  $n$  лошадей все лошади одной масти. База: одна лошадь одной масти (очевидно). Переход: Пусть в табуне из  $k$  лошадей все лошади одной масти. Докажем, что в любом табуне из  $k+1$  лошади, все лошади одной масти. Пусть есть произвольный табун из  $k+1$  лошади. Посмотрим на первые  $k$  лошадей этого табуна — по предположению они все одной масти. Посмотрим на последние  $k$  лошадей (без первой) — они тоже одной масти, поэтому все лошади одной масти. Вывод: все лошади одной масти.