

Экзамен «Производная+»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2011

Требования: «Производная», «Множества. Основные понятия», «Графики». На экзамене будет проверяться умение решать задачи следующих типов:

1. Доказать формулу для производной обратной функции: $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. Найти производные следующих функций:

- 1) $f(x) = \arccos x$
- 2) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f(x) = \operatorname{arcctg}(x)$
- 3) $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$
- 4) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}$

2. В каких точках достигается минимум следующих функций на соответствующих отрезках:

- 1) $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$ на $[-2, 4]$;
- 2) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 7$ на $[-1, 3]$;
- 3) $-x^3 + 6x^2 - 12x + 5$ на $[1, 3]$.

3. Построить графики следующих функций, указывая экстремумы и точки перегиба:

- 1) $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$;
- 2) $y = xe^{-1/x^2}$;
- 3) $y = (x+2)^{2/3} - (x-2)^{2/3}$;
- 4) $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2}$.

4. Из всех прямоугольников данного периметра определить прямоугольник с наибольшей площадью.

5. Найти высоту цилиндрического котла с заданным объемом и минимально возможной площадью поверхности.

6. К реке ширины a построен под прямым углом канал ширины b . Какой максимальной длины суда могут входить в этот канал?

7. Доказать, что производная четной функции есть функция нечетная, а производная нечетной — четная.

8. Что больше, 99^{100} или 100^{99} ?

9. Числа a и b таковы, что первое уравнение системы

$$\begin{cases} \sin x + a = bx \\ \cos x = b \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения. Докажите, что система имеет хотя бы одно решение.

10. В сосуд, содержащий 10 л воды, непрерывно поступает со скоростью 2 л в минуту раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 кг соли. Поступающий раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 минут?