Экзамен
«Планиметрия. Окружности»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2011

На экзамене нужно знать определение окружности и уметь решать следующие задачи.

1. По определению, касательная к окружности — это прямая, имеющая с окружностью ровно одну общую точку. Докажите, что если прямая a пересекает окружность ω с центром в O в точке A и a перпендикулярна OA, то a касается ω. Обратно, докажите, что если a касается ω в точке A, то a перпендикулярна OA.

2. Докажите, что $3 < \pi < 4$.

3. Докажите, что угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла.

4. Найдите множество точек M на плоскости, из которых данный отрезок AB виден под данным углом α.

5. На плоскости даны окружность ω и точка , не лежащая на окружности. Через точку C проходят прямые a и b, пересекающие ω в точках A_1, A_2 и B_1, B_2 соответственно, причем на окружности A_1 лежит между A_2 и B_1. Найдите угол A_1CB_1, если известны угловые меры дуг A_1B_1 и A_2B_2.

6. В обозначениях предыдущей задачи докажите, что $CA_1 \cdot CA_2 = CB_1 \cdot CB_2$.

7. Четырехугольник является вписанным тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна $180°$.

8. Если в четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, то $AB + CD = AC + BD$.

9. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной окружности. Из вершины A проведена высота AH. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

10. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D. Докажите, что $AD = BD$.