# Экзамен
# «Олимпиадные задачи. Инвариант»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2011

*На экзамене будет предложено несколько задач из этого списка или аналогичных.*

**1.** На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стаканов стоят правильно, а один перевернут донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

**2.** На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 2010. Разрешается стереть любые два числа и записать вместо них сумму или разность. После многократного повторения этой операции на доске осталось лишь одно число. Может ли это число быть нулем?

**3.** На острове Серобуромалин живут хамелеоны: 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых. Если два хамелеона разных цветов встречаются, то они оба меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что в некоторый момент все хамелеоны на острове станут одного цвета?

**4.** На доске $8 \times 8$ в левом нижнем углу в виде квадрата $3 \times 3$ расположены 9 фишек. За один ход можно какой-нибудь одной фишкой перепрыгнуть через какую-нибудь другую (не обязательно соседнюю) фишку на клетку, симметричную первой клетке относительно второй. Можно ли через несколько ходов собрать все фишки в виде квадрата $3 \times 3$ в правом верхнем углу доски?

**5.** На квадратном поле $10 \times 10$ девять клеток поросли бурьяном. После этого бурьян может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних клеток уже поросли бурьяном. Докажите, что тем не менее бурьян не сможет распространиться на все клетки.

**6.** В выпуклом пятиугольнике проведены все диагонали. Каждая вершина и каждая точка пересечения диагоналей окрашены в синий цвет. Вася хочет перекрасить эти синие точки в красный цвет. За одну операцию ему разрешается поменять цвет всех окрашенных точек, принадлежащих либо одной из сторон либо одной из диагоналей на противоположный (синие точки становятся красными, а красные– синими). Сможет ли он добиться желаемого, выполнив какое-то количество описанных операций?

**7.** На доске написаны числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа $a$ и $b$ и заменить их на $ab+a+b$. Какое число может получиться после 19 таких операций?

**8.** В вершинах правильного 12-угольника расставлены числа $+1$ и $-1$ так, что во всех вершинах, кроме одной, стоят $+1$. Разрешается изменять знак в любых $k$ подряд идущих вершинах. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы единственное число $-1$ сдвинулось в соседнюю с исходной вершину, если а) $k = 3$; б) $k = 4$; в) $k = 6$;

**9.** Докажите, что, сдвигая фишки на свободное место, из исходной расстановки в игре в «15» нельзя получить расстановку, где 14 и 15 поменялись местами.