

Экзамен «База++»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2015

Для допуска к экзамену необходимо сдать «База. Теория» и «База+». Будет предложено несколько задач из приведенного списка или аналогичной сложности.

1. Каждый ученик класса ходил в хотя бы один из двух походов. В каждом походе мальчиков было не больше $\frac{2}{5}$. Докажите, что во всем классе мальчиков не больше $\frac{4}{7}$.
2. Во время перемирия за круглым столом разместились рыцари из двух враждующих станов. Оказалось, что число рыцарей, справа от которых сидит враг, равно числу рыцарей, справа от которых сидит друг. Докажите, что число рыцарей делится на 4.
3. Могут ли все грани выпуклого многогранника иметь 6 и более сторон?
4. Докажите, что $3.05 < \pi < 3.45$.
5. Под каким углом к берегу нужно направить лодку так, чтобы ее как можно меньше снесло течением, если скорость лодки в стоячей воде равна 3 км/ч, а скорость течения — 6 км/ч.
6. Два автомобиля движутся с постоянными скоростями u и v по дорогам, пересекающимся под прямым углом. Когда первый автомобиль достиг перекрестка, второму оставалось проехать до этого места расстояние l . Чему равно наименьшее расстояние между автомобилями?
7. Можно ли доску 2010×2010 полностью покрыть непересекающимися блоками размера 1×4 ?
8. Существует ли на координатной плоскости правильный многоугольник, имеющий более шести сторон, все вершины которого — целые точки?
9. В парламенте у каждого не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, что у каждого парламентария в своей палате будет не более одного врага.
10. В ботаническом определителе растения описываются ста признаками. Каждый из признаков может либо присутствовать, либо отсутствовать. Определитель считается хорошим, если любые два растения различаются более чем по половине признаков. Докажите, что в хорошем определителе не может быть описано более а) 60 б) 50 в)* 40 растений.
11. На некоторых клетках шахматной доски стоит по фишке. Ходом фишки называется перестановка ее через фишку, стоящую на соседней (по горизонтали, вертикали или диагонали) клетке, непосредственно за которой на той же линии имеется свободная клетка. Какое наибольшее количество фишек может насчитывать такое их расположение на доске, в котором любая фишка сможет сделать первый ход?