

# Экзамен «Многочлены»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2011

*На экзамене будет предложено несколько задач из этого списка или похожих на них:*

1. Вывести формулу для вычисления корней квадратного уравнения.
2. Доказать теорему Виета для квадратного уравнения.
3. Найти сумму коэффициентов многочлена  $(1 - 3x + 3x^2)^{743}(1 + 3x - 3x^2)^{744}$ .
4. Разделить с остатком  $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$  на  $x^2 - 3x + 1$ .
5. Найти остаток от деления многочлена  $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$  на многочлен  $x - 1$ .
6. Доказать, что для любых неотрицательных чисел  $a$  и  $b$  выполнено

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

7. Доказать, что в квадратном уравнении со старшим коэффициентом 1 квадрат разности корней равен дискриминанту.
8. Избавиться от иррациональности в знаменателе  $\frac{2-\sqrt{3}}{6+3\sqrt{3}}$ .
9. Избавиться от двойного радикала  $\sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$ .
10. Пусть  $P(x)$  — многочлен с вещественными коэффициентами. Доказать, что многочлен  $P(x)P(-x)$  содержит только члены четных степеней.
11. Доказать, что если целое число  $x$  является корнем уравнения  $a_n x^n + \dots + a_0 = 0$  с целыми коэффициентами, то  $a_0$  делится на  $x$ .