1. Вычисляя континуальный интеграл в конфигурационном пространстве, найти амплитуду перехода $K(x_b, t_b; x_a, t_a)$ для квантового гармонического осциллятора, $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$.

Решение. Сначала находим функцию действия для гармонического осциллятора:

$$S(x_b, t_b; x_a, t_a) = \frac{m\omega}{2\sin\omega T}\big((x_a^2 + x_b^2)\cos\omega T - 2x_a x_b\big), \quad T = t_b - t_a.$$

В силу гауссовости

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int\limits_{\substack{x(t_a)=x_a \\ x(t_b)=x_b}} e^{iS[x]} Dx = e^{iS(x_b,t_b;x_a,t_a)} \cdot K(0, t_b; 0, t_a),$$

где

$$K(0, t_b; 0, t_a) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{2\pi i\varepsilon}{m}\right)^{-\frac{N}{2}} \int \exp\frac{im\omega}{2\sin\omega\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} \big((x_{i-1}^2 + x_i^2)\cos\omega\varepsilon - 2x_{i-1}x_i\big) dx_1 \ldots dx_{N-1}.$$

В правой части стоит гауссов интеграл по $(N-1)$-мерному пространству с матрицей

$$\frac{im\omega}{2\sin\omega\varepsilon} \cdot A_{N-1},$$

где

$$A_{N-1} = \begin{pmatrix} 2\cos\alpha & -1 & & \\ -1 & \ldots & \ldots & \\ & \ldots & \ldots & -1 \\ & & -1 & 2\cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha := \omega\varepsilon.$$

Решая рекуррентное соотношение, находим

$$\det A_N = \frac{1}{2}(1 - i\operatorname{ctg}\alpha)e^{iN\alpha} + \frac{1}{2}(1 + i\operatorname{ctg}\alpha)e^{-iN\alpha} = \cos N\alpha + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\sin N\alpha.$$

Следовательно,

$$K(0, t_b; 0, t_a) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{m}\Big(2\pi i\varepsilon\big(\cos(\omega T - \omega\varepsilon) + \operatorname{ctg}(\omega\varepsilon)\sin(\omega T - \omega\varepsilon)\big)\Big)^{-1/2} = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\sin\omega T}\right)^{1/2}.$$

Окончательный ответ:

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\sin\omega T}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{im\omega}{2\sin\omega T}\big((x_a^2 + x_b^2)\cos\omega T - 2x_a x_b\big)\right).$$

2. Найти нормальный, антинормальный и символ Вейля оператора $\hat{H} = \hat{q}^2\hat{p}^2$, $[\hat{p}, \hat{q}] = -ih$.

Решение. Очевидно, $H_{qp} = p^2q^2$. Для нахождения антинормального символа символа переставим с помощью коммутационных соотношений все $\hat{q}$ направо:

$$\hat{H} = \hat{p}^2\hat{q}^2 + 4ih\hat{p}\hat{q} - 2h^2.$$

Следовательно, $H_{pq} = p^2q^2 + 4ihpq - 2h^2$. Для нахождения символа Вейля вычислим

$$\widehat{p^2q^2} = \frac{1}{6}(\hat{p}\hat{p}\hat{q}\hat{q} + \hat{p}\hat{q}\hat{p}\hat{q} + \hat{p}\hat{q}\hat{q}\hat{p} + \hat{q}\hat{p}\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}\hat{q}\hat{p} + \hat{q}\hat{q}\hat{p}\hat{p}) = \hat{q}^2\hat{p}^2 - 2ih\hat{q}\hat{p} - \frac{h^2}{2},$$

$$\widehat{pq} = \frac{1}{2}(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}) = \hat{q}\hat{p} - \frac{ih}{2}.$$

Следовательно, $H_w = p^2q^2 + 2ihpq - \frac{h^2}{2}$.

3. Пусть $A = (a_{ij})$ — вещественная кососимметричная матрица размера $n \times n$. Вычислить гауссов интеграл

$$\int \exp\left(\frac{1}{2}a_{ij}\xi^i \wedge \xi^j\right) d\xi^1 \dots d\xi^n$$

от вещественных антикоммутирующих переменных $\xi^1, \dots, \xi^n$.

Решение. Предполагается ставить дробный балл за правильное вычисление в маломерных случаях $n = 2, 3, 4$ (об этом нужно сказать в начале контрольной). Решение для произвольного n возможно следующее.

Будем считать, что матрица A невырожденная. Единственным членом разложения Тейлора экспоненты, дающем ненулевой вклад в интеграл, будет $\frac{\omega^k}{k!}$, где $\omega = \frac{1}{2}a_{ij}\xi^i \wedge \xi^j$, $n = 2k$. Если n нечетное то каждый член разложения Тейлора дает нулевой вклад в интеграл. Заметим, что $\frac{\omega^k}{k!}$ — форма максимальной степени, и, следовательно, она пропорциональна $\xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^n$ с некоторым коэффициентом пропорциональности, который мы будем обозначать $\mathrm{Pf}(A)$:

$$\frac{\omega^k}{k!} = \mathrm{Pf}(A)\xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^n.$$

Докажем, что

$$\mathrm{Pf}^2(A) = \det(A).$$

Для этого приведем 2-форму ω к каноническому виду:

$$\omega = v^1 \wedge v^2 + \dots + v^{n-1} \wedge v^n.$$

Тогда

$$v^1 \wedge \dots \wedge v^n = \mathrm{Pf}(A)\xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^n.$$

Рассмотрим базис $(u^1, \dots, u^n)$, ортогональный $(v^1, \dots, v^n)$. Для него

$$u^1 \wedge \dots \wedge u^n = \mathrm{Pf}^{-1}(A)\xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^n.$$

С другой стороны, поскольку $Au^1 = -v^2$, $Au^2 = v^1$ и т.д.,

$$v^1 \wedge \ldots \wedge v^n = (\det A) u^1 \wedge \ldots \wedge u^n.$$

Следовательно,

$$\int \exp\Big(\frac{1}{2} a_{ij} \xi^i \wedge \xi^j\Big) d\xi^1 \ldots d\xi^n = \sqrt{\det A}.$$

Из нашего определения легко получить комбинаторную формулу для пфаффиана:

$$\mathrm{Pf}(A) = \sum_{\alpha \in \Pi_n} A_\alpha,$$

где суммирование производится по всевозможным неупорядоченным разбиениям $\alpha = \big((i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k)\big)$ множества $\{1, \ldots, n\}$ на пары, а

$$A_\alpha = \mathrm{sgn}(\alpha) a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_k j_k}.$$

Из этой формулы легко вывести другую комбинаторную формулу:

$$\mathrm{Pf}(A) = \frac{1}{2^k k!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(n-1)\sigma(n)}.$$