

# Экзамен «Эллипс, гипербола, парабола»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2011

*Для получения экзамена нужно знать определения эллипса, гиперболы, параболы и уметь решать все задачи из приведенного списка.*

Пусть на плоскости фиксированы прямая  $l$  и точка  $F$ , не лежащая на  $l$ . Параболой называется множество точек, равноудаленных от  $l$  и от  $F$ . Прямая  $l$  называется директрисой параболы, а точка  $F$  — фокусом параболы.

Пусть на плоскости фиксированы две точки  $F_1$  и  $F_2$ . Эллипсом называется множество точек, для которых сумма расстояний до  $F_1$  и  $F_2$  постоянна. Гиперболой называется множество точек, для которых модуль разности расстояний до  $F_1$  и  $F_2$  постоянен. Точки  $F_1$  и  $F_2$  называются фокусами эллипса или гиперболы.

1. Докажите, что любая парабола в некоторой ортонормированной системе координат задается уравнением  $y = ax^2$ .
2. Докажите, что график любой квадратичной функции  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  является параболой. Найдите координаты фокуса и уравнение директрисы параболы  $y = 4x^2 + 8x$ .
3. Докажите, что любой эллипс в некоторой ортонормированной системе координат задается уравнением  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , а любая гипербола — уравнением  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
4. Докажите, что если асимптоты гиперболы перпендикулярны, то в некоторой ортонормированной системе координат она задается уравнением  $y = \frac{a}{x}$ .
5. С помощью циркуля и линейки постройте прямую, касающуюся параболы в данной точке.
6. Докажите, что лучи, выходящие из фокуса параболы, после отражения от нее идут параллельно оси симметрии параболы. Докажите, что лучи, выходящие из фокуса эллипса, после отражения от него идут в другой фокус.
7. Докажите, что семейства эллипсов и гипербол с одинаковыми фокусами образуют два взаимно ортогональных семейства.
8. Рассмотрим все параболы с данным фокусом и данной вертикальной осью. Они естественно разбиваются на два семейства: у парабол одного семейства ветви идут вверх, у другого — вниз. Докажите, что любая парабола одного семейства ортогональна любой параболе другого семейства.
9. Пусть задан эллипс с фокусами  $A$  и  $B$ . Найдите множество точек, симметричных фокусу  $A$  относительно всех касательных к эллипсу. Найдите множество оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса  $A$  на все касательные к эллипсу.
10. Докажите, что любые две параболы подобны. Верно ли аналогичное утверждение для эллипсов? Для гипербол?