

Экзамен «Олимпиадные задачи. Графы»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2011

На экзамене будет предложено несколько задач из этого списка или аналогичных.

1. У марсиан бывает произвольное число рук. Однажды все марсиане взяли за руки так, что свободных рук не осталось. Докажите, что число марсиан, у которых нечетное число рук, четно.
2. Выбежав после уроков на двор, каждый школьник кинул снежком ровно в одного другого школьника. Докажите, что всех учащихся можно разбить на три команды так, что члены одной команды друг в друга снежками не кидали.
3. Докажите, что в любом графе обязательно найдутся две вершины одинаковой степени.
4. Докажите, что в плоском графе
 - 1) $V - E + F = 2$;
 - 2) $2E \geq 3F$.
5. Двадцать городов соединены 172-мя авиалиниями. Доказать, что, используя эти авиалинии, можно из любого города перелететь в любой другой (быть может, делая пересадки).
6. В углах шахматной доски 3×3 стоят четыре коня: 2 белых (в соседних углах) и 2 черных. Можно ли за несколько ходов (по шахматным правилам) поставить коней так, чтобы во всех соседних углах стояли кони разного цвета?
7. На плоскости даны 6 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Каждая пара точек соединена отрезком синего или красного цвета. Докажите, что среди данных точек можно выбрать такие три, что все стороны образованного ими треугольника будут окрашены в один цвет.
8. В марсианской стране некоторые города связаны между собой авиалиниями. Из столицы выходит 2011 линий, из города Дальнего — одна, а из остальных городов — по 20. Докажите, что из столицы можно добраться до Дальнего.
9. Имеются две страны: Обычная и Зазеркалье. У каждого города в Обычной стране есть «двойник» в Зазеркалье, и наоборот. Однако если в Обычной стране какие-то два города соединены железной дорогой, то в Зазеркалье эти города не соединены, а любые два несоединенных в Обычной стране города обязательно соединены железной дорогой в Зазеркалье. В Обычной стране девочка Алиса не может проехать из города A в город B , сделав менее двух пересадок. Доказать, что Алиса в Зазеркалье сможет проехать из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок.
10. В некоторой стране есть столица и еще 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.