

# Экзамен «База+»

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО, кафедра математики, 2015

*На экзамене будут предложены некоторые задачи из этого списка или аналогичной сложности.*

1. Плоскость раскрашена в 3 цвета. Докажите, что на плоскости найдется отрезок единичной длины, концы которого покрашены в одинаковый цвет.
2. Грузовик должен доехать из пункта  $A$  в пункт  $B$  с заходом на протекающую рядом реку с прямолинейным берегом. В каком месте он должен достигнуть реки, чтобы преодолеть свой путь за минимальное время?
3. Из шахматной доски вырезали клетки  $a_1$  и  $h_8$ . Можно ли оставшуюся доску замостить плитками домино?
4. Бронзовые монеты в 1, 2, 3 и 5 коп. весят соответственно 1, 2, 3 и 5 г. Среди четырех бронзовых монет (по одной из каждого номинала) одна фальшивая — отличается от настоящих по весу. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определить фальшивую монету?
5. Существует ли невыпуклый пятиугольник, никакие две из пяти диагоналей которого не имеют общих точек (кроме вершин)?
6. В ящиках лежат орехи. Известно, что среднее число орехов в ящиках равно 10, а средний квадрат числа орехов не больше 1000. Докажите, что по крайней мере 10% ящиков не пустые.
7. Имеется два дома, в каждом по два подъезда. Жильцы держат кошек и собак, причем доля кошек (отношение числа кошек к общему числу кошек и собак) в первом подъезде первого дома больше, чем доля кошек в первом подъезде второго дома, а доля кошек во втором подъезде первого дома больше, чем доля кошек во втором подъезде второго дома. Верно ли, что доля кошек в первом доме больше доли кошек во втором доме?
8. На острове Невезения с населением 96 человек правительство решило провести пять реформ. Каждой реформой недовольна ровно половина всех граждан. Гражданин выходит на митинг, если он недоволен более чем половиной всех реформ. Какое минимальное и максимальное число людей может выйти на митинг?
9. От двух кусков сплавов (с различным содержанием свинца) массой в 6 и 12 кг отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавляли с остатком другого куска, после чего процентное содержание свинца в обоих сплавах стало одинаковым. Каковы массы каждого из отрезанных кусков?
10. Коэффициенты квадратного уравнения  $x^2 + px + q = 0$  изменили не больше, чем на  $1/1000$ . Может ли больший корень уравнения измениться больше, чем на 1000?