Lenguajes, Sistemas y Teorías Formales

Manuel Ojeda Aciego

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Curso 2025–2026

Lenguajes naturales vs lenguajes formales

- Un *lenguaje natural* es el idioma hablado o escrito por humanos para propósitos generales de comunicación.
- Un *lenguaje formal* está construido con un propósito específico. Como ejemplos tenemos
  - Los lenguajes de programación (Fortran, Prolog, . . . , C, Java, Python, R, Haskell).
  - Los usados en el estudio de la lógica formal.

Lenguajes naturales vs lenguajes formales

Aspectos comunes

- Necesitan un alfabeto.
- Necesitan una gramática (sintaxis) que nos indique su vocabulario y cómo construir "frases con sentido".

A tener en cuenta

- Un mismo alfabeto puede servir para distintos idiomas:
  - Latino (español, inglés, ...); Cirílico (ruso, búlgaro, ...)
  - Árabe (árabe, persa, ...); Devanagari (hindi, sánscrito, ...)
- Un mismo idioma puede escribirse en distintos alfabetos:
  - El kazajo se escribe, según la zona, usando alfabeto latino, cirílico o árabe.
- Los lenguajes formales suelen usar el alfabeto ASCII.

Aspectos comunes a toda Lógica

- Sintaxis
- Semántica
- Teoría de la Demostración
- ¿Deducción automatizable?

Lenguaje formal

Definición

- Un lenguaje L sobre un conjunto numerable A que llamaremos alfabeto, es un subconjunto no vacío del lenguaje universal sobre A:

$$L \subseteq A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$$

Equivalentemente:

- Un conjunto de símbolos, llamado alfabeto del lenguaje.
- Un conjunto de reglas de formación que determinan qué cadenas de símbolos son fbfs y que constituyen la gramática del lenguaje.

El lenguaje ‘AB’

Ejemplo

- Alfabeto: A,B
- Elementos primitivos:
  - ‘A’ y ‘B’ son fórmulas bien formadas (fbf)
- Reglas de construcción:
  - Si μ es una fbf entonces AAμ es fbf
  - Si μ es una fbf entonces μBBB es fbf

Ejercicio

Defina por comprensión el conjunto de fbfs de ‘AB’

El lenguaje ‘MG’

Ejemplo

- Alfabeto: $\{-, m, g\}$
- Las fbfs del lenguaje ‘MG’ son aquellas cadenas que empiezan y terminan por un carácter ‘$-$’ y, además, ‘m’ y ‘g’ ocurren una y sólo una vez y ‘m’ ocurre antes que ‘g’.

Ejercicio

Defina como una clausura inductiva el conjunto de fbfs del lenguaje ‘MG’

El lenguaje 'MG': Una definición inductiva

- Alfabeto: $\{-, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{g}\}$
- Elementos primitivos:
  - La cadena '$-\boldsymbol{mg}-$' es una fbf
- Regla de construcción: sean α, β, γ cadenas de guiones
  - Si $-\alpha\boldsymbol{m}\beta\boldsymbol{g}\gamma-$ es fbf, $- - \alpha\boldsymbol{m}\beta\boldsymbol{g}\gamma-$ es fbf
  - Si $-\alpha\boldsymbol{m}\beta\boldsymbol{g}\gamma-$ es fbf, $-\alpha\boldsymbol{m}\beta - \boldsymbol{g}\gamma-$ es fbf
  - Si $-\alpha\boldsymbol{m}\beta\boldsymbol{g}\gamma-$ es fbf, $-\alpha\boldsymbol{m}\beta\boldsymbol{g}\gamma - -$ es fbf

Ejercicio

¿Es la construcción libremente generada?

El lenguaje ‘MG’

- Alfabeto: $\{-, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{g}\}$
- Elementos primitivos:
  - La cadena ‘$-\boldsymbol{mg}-$’ es una fbf
- Regla de construcción: sean α, β, γ cadenas de guiones
  - Si $-\alpha\boldsymbol{mg}-$ es fbf, $- - \alpha\boldsymbol{mg}-$ es fbf
  - Si $-\alpha\boldsymbol{m}\beta\boldsymbol{g}-$ es fbf, $-\alpha\boldsymbol{m} - \beta\boldsymbol{g}-$ es fbf
  - Si $-\alpha\boldsymbol{m}\beta\boldsymbol{g}\gamma-$ es fbf, $-\alpha\boldsymbol{m}\beta\boldsymbol{g}\gamma - -$ es fbf
- Esta construcción es libremente generada

Semántica

¿Y eso qué es?

La semántica

Definiciones

- Valores **semánticos**, valores **destacados**
- **Interpretación**: Una aplicación que asocia un significado (valor semántico) a cada fórmula bien formada.
- **Modelo** para $\boldsymbol{A}$: Una interpretación que asigna a $\boldsymbol{A}$ un valor destacado
- Fórmula **válida**: aquélla para la que toda interpretación es un modelo

Una semántica para 'MG'

Sí, es una semántica deliberadamente complicada

- Valores semánticos

$$\{(a, b, c) \mid a, b, c \text{ son números naturales}\}$$

- Valores destacados

$$\{(a, b, c) \mid a + b = c\}$$

- Interpretaciones: Dada una cadena $\delta =$ '$-\alpha m \beta g \gamma -$' se define

$$I_k(\delta) = (k \cdot \text{long}(\alpha), k \cdot \text{long}(\beta), k \cdot \text{long}(\gamma))$$

Ejercicio

¿Cuáles son las fbfs válidas de este lenguaje?

Teoría de la demostración

Concepto

Mecanismo sintáctico que permite obtener unas fbfs a partir de otras, para establecer la noción sintáctica de deducción

Objetivo

Búsqueda de una definición inductiva del conjunto de fórmulas válidas basada en los conceptos formales de **teorema** y de **demostración**

Teoría de la demostración

Definiciones principales

Definiciones

1. Un **sistema axiomático** viene determinado por:
   - un conjunto de fbfs llamadas **axiomas** y
   - un conjunto de **reglas de inferencia** (sintácticas).
2. Una **demostración** es una secuencia finita D de fbfs tal que cada fbf de D es o consecuencia inmediata de alguna de las fbfs anteriores o bien es un axioma
3. Un **teorema** es la última fbf de una demostración
4. Un sistema se dice **correcto** cuando todo teorema es una fbf válida
5. Un sistema se dice **completo** cuando toda fbf válida es un teorema

Retorno a ‘MG’

Busquemos un sistema axiomático para ‘MG’

- Axiomas
  - La fbf ‘$-\boldsymbol{mg}-$’ es un axioma
- Reglas de inferencia
  - De ‘$-\alpha\boldsymbol{m}\beta\boldsymbol{g}\gamma-$’ se deduce ‘$-\alpha\boldsymbol{m}\beta-\boldsymbol{g}\gamma--$’
  - De ‘$-\alpha\boldsymbol{m}\beta\boldsymbol{g}\gamma-$’ se deduce ‘$--\alpha\boldsymbol{m}\beta\boldsymbol{g}\gamma--$’

Ejercicios

1. ¿Es correcto este sistema para la semántica del lenguaje?
2. ¿Es completo?

El sistema axiomático MIU

Consideramos el alfabeto $A = \{M, I, U\}$ y el lenguaje universal sobre A

- Axiomas: 'MI' es un axioma
- Reglas de inferencia
  - De Mx se deduce Mxx
  - De xI se deduce xIU
  - De $xUUy$ se deduce xy
  - De $xIIIy$ se deduce xUy

Ejercicio

¿Qué fbfs son teoremas? MI, MUI, UMI, $MUIU$, MU

Deducción automática

Idea

Buscar un algoritmo de **decisión** tal que, dada una fórmula A *decida* en un número finito de etapas si A es o no válida

Una lógica se dice decidible si dispone de tal algoritmo.

- La Lógica Proposicional es decidible
- La Lógica de Predicados no es decidible (Church-Turing), pero sí es semidecidible (Herbrand)