

# Chapter 10 - Lane-Riesenfeld-Algorithmus

## Allgemein

Biinfinite Kontrollpolygone:  $\mathbf{c}_{\mathbb{Z}} := (\mathbf{c}_i)_{i \in \mathbb{Z}} = (\dots \mathbf{c}_{-1} \mathbf{c}_0 \mathbf{c}_1 \dots)$

## Algorithmus

Eingabe:

$\mathbf{c}_{\mathbb{Z}}^0$  ein Polygon  $\subset \mathbb{R}^d$   
 $n \in \mathbb{N}_0$  der Grad

Ausgabe:

$\mathbf{c}_{\mathbb{Z}}^m \subset \mathbb{R}^d$

For  $k = 1, \dots, m$

For  $i \in \mathbb{Z}$  //verdoppele

$\mathbf{d}_{2i}^0 \leftarrow \mathbf{d}_{2i+1}^0 \leftarrow \mathbf{c}_i^{k-1}$

For  $j = 1, \dots, n$

For  $i \in \mathbb{Z}$  //mittele

$\mathbf{d}_i^j \leftarrow (\mathbf{d}_{i-1}^{j-1} + \mathbf{d}_i^{j-1}) \frac{1}{2}$

For  $i \in \mathbb{Z}$  //benenne um

$\mathbf{c}_i^k \leftarrow \mathbf{d}_i^n$

Bem.:  $\mathbf{d}_0^j$  ist immer der Punkt  $\mathbf{d}_i^j$  mit dem kleinsten  $i$ , der von  $\mathbf{c}_0^0$  beeinflusst wird.

## Unterteilungsmatrizen

$$D = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$U_n^m \mathbf{c} = (U_n)^m \mathbf{c} = (M^n D)^m \mathbf{c}$$

Allgemein enthält  $U_n$  in den Spalten die Einträge  $\alpha_i$ , jeweils um zwei Zeilen versetzt:

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{2^n} \binom{n+1}{i}, & i = 0, \dots, n+1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Unterteilungsgleichung:

$$b_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{i-2k} c_k, \quad i \in \mathbb{Z}$$

## Das Symbol

Bsp.  $\alpha$  eines stationären Unterteilungsalgorithmus:

$$\alpha(z) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j z^j$$

$$\alpha_n(z) := \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} z^i = \frac{1}{2^n} (1+z)^{n+1}$$

## Differenzenschema

Rückwärtsdifferenzen:  $\nabla \mathbf{c} := (\nabla c_i)_{i \in \mathbb{Z}}$

$$\nabla c_i := c_i - c_{i-1}$$

Symbol:  $v(z) := 1 - z$

$$\nabla \mathbf{c}(z) = v(z) \mathbf{c}(z)$$

Differenzenpolygone:  $b_{\nabla}(z) = (1-z) b(z)$

$$= (1-z) \alpha(z) \frac{c_{\nabla}(z^2)}{(1-z^2)}$$

$$= \frac{\alpha(z)}{1+z} c_{\nabla}(z^2)$$

Bem.: Das Differenzenschema zu  $\alpha(z)$  existiert nur, wenn gilt:  
 $\alpha(-1) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_{2i} - \sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_{2i+1} = 0$

Bem.: Es muss  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_{2i} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_{2i+1} = 1$  gelten, damit die unterteilten Polygone gegen eine Kurve konvergieren.

## Uniforme Parametrisierung

Brauchen wir das? Ich würde es eher weglassen. Verstehen wir ja eh nicht.

## Konvergenz

Same thing here.