

Chapter 12 - Textsuche

Lineares Programm

Lineare Ungleichung:

$$y := \mathbf{u}^t \mathbf{x} + u \geq 0$$

Ungleichungssystem mit l linearen Ungleichungen

$$y_i := \mathbf{a}_i^t \mathbf{x} + a_i \geq 0$$

bilden konvexes Polyeder S , *Simplex!*

Def.

lineare Zielfunktion $z := \mathbf{z}^t \mathbf{x}$.

Lineares Programm:

$$z := \mathbf{z}^t \mathbf{x} = \max!$$

$$\mathbf{y} := \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a} \geq 0$$

Schematische Normalform:

$$\bar{\mathbf{y}} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{B} & \mathbf{b} \geq 0 \\ \hline \mathbf{c}^t & c = \max! \\ \hline \end{array}$$

Eckentausch

$$\begin{array}{|c|c|} \hline u_j & u_s \\ \hline u_i = \dots a_{ij} \dots a_{is} \dots & \vdots \\ u_r = \dots a_{rj} \dots a_{rs} \dots & \vdots \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Pivot-} \\ \text{zeile} \end{array}$$

○ Pivot ← Pivotspalte

AUSTAUSCH:

Eingabe:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,1}^{m,n}$$

r, s

Ausgabe:

$$\mathbf{A}' = [a'_{ij}]_{i,j=1,1}^{m,n}$$

For $i \neq r, j \neq s$

$$a'_{ij} \leftarrow a_{ij} - \frac{a_{is} a_{rj}}{a_{rs}}$$

For $i = r, j \neq s$ (Pivotzeile)

$$a'_{ij} \leftarrow -\frac{a_{ij}}{a_{rs}}$$

For $i \neq r, j = s$ (Pivotspalte)

$$a'_{ij} \leftarrow \frac{a_{ij}}{a_{rs}}$$

For $i = r, j = s$ (Pivot)

$$a'_{ij} \leftarrow \frac{1}{a_{rs}}$$

Simplex

Algorithmus:

Eingabe:

Normalform B eines lin. Programms

Ausgabe:

Normalform geändert, sodass $z(\mathbf{0}) = c = \max$

solange ein $c_s > 0$

falls alle $b_{is} \geq 0$

keine Lösung – Ende

sonst

bestimme r so, documentclass

$$\frac{b_r}{b_{rs}} = \max_{b_{is} < 0} \frac{b_i}{b_{is}}$$

$B \leftarrow \text{AUSTAUSCH}(B, r, s)$

Aufwand im worst-case $\Omega(m^{\frac{n}{2}})$. In Praxis meist in $O(m^2 n)$.

Berechnung der Normalform

Gegeben ein lineares Programm

- finde zulässigen Punkt
- mache Punkt zum Ursprung
- führe n Tauschs x_r mit y_r durch

Damit Ursprung beim Tausch von x_r mit y_r gültig bleibt muss für alle $i > r$ gelten:

$$a_i - \frac{a_{ir} a_r}{a_{rr}} \geq 0$$

Duale lineare Programme

Das lineare Programm

$$\mathbf{y} \geq 0$$

$$\mathbf{B}^t \mathbf{y} + \mathbf{c} \leq 0$$

$$\mathbf{b}^t \mathbf{y} + c = \min!$$

ist dual zu

$$\mathbf{x} \geq 0$$

$$\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b} \leq 0$$

$$\mathbf{c}^t \mathbf{x} + c = \min!$$

Ersteres kann transformiert werden zu

$$\mathbf{y} \geq 0$$

$$-\mathbf{B}^t \mathbf{y} - \mathbf{c} \geq 0$$

$$-\mathbf{b}^t \mathbf{y} - c = \max!$$

Ausgleichen mit Maximumsnorm

$A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ überbestimmtes LGS. $\forall \mathbf{x}$ ist das Residuum

$$\mathbf{r} := (r_1 \dots r_n)^t := A\mathbf{x} - \mathbf{a} \neq 0$$

Wir definieren $x_0 := \frac{1}{r}$ und $\bar{\mathbf{x}} := \mathbf{x}x_0$. Führt zu linearem Programm:

$$\begin{aligned} -A\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{a}x_0 + \mathbf{e} &\geq 0 \\ A\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{a}x_0 + \mathbf{e} &\geq 0 \\ x_0 &= \max! \end{aligned}$$