Chapter 10 - Lane-Riesenfeld-Algorithmus

Allgemein

Biinfinite Kontrollpolygone: $\mathbf{c}_{\mathbb{Z}} := (\mathbf{c}_i)_{i\in\mathbb{Z}} = (...\mathbf{c}_{-1}\mathbf{c}_0\mathbf{c}_1...)$

Algorithmus

Eingabe:
    $\mathbf{c}^0_{\mathbb{Z}}$ ein Polygon $\subset \mathbb{R}^d$
    $n \in \mathbb{N}_0$ der Grad
Ausgabe:
    $\mathbf{c}^m_{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}^d$

For k = 1, ..., m
    For i $\in \mathbb{Z}$ //verdoppele
        $\mathbf{d}^0_{2i} \leftarrow \mathbf{d}^0_{2i+1} \leftarrow \mathbf{c}^{k-1}_i$
    For j = 1, ..., n
        For i $\in \mathbb{Z}$ //mittele
            $\mathbf{d}^j_i \leftarrow \left(\mathbf{d}^{j-1}_{i-1} + \mathbf{d}^{j-1}_i\right)\frac{1}{2}$
    For i $\in \mathbb{Z}$ //bennen um
        $\mathbf{c}^k_i \leftarrow \mathbf{d}^n_i$

Bem.: $\mathbf{d}^j_0$ ist immer der Punkt $\mathbf{d}^j_i$ mit dem kleinsten i, der von $\mathbf{c}^0_0$ beeinflusst wird.

Unterteilungsmatrizen

$$D = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$U_n^m \mathbf{c} = (U_n)^m \mathbf{c} = (M^n D)^m \mathbf{c}$$

Allgemein enthält U_n in den Spalten die Einträge α_i, jeweils um zwei Zeilen versetzt:

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{2^n}\binom{n+1}{i}, & i = 0, ..., n+1 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Unterteilungsgleichung:

$$b_i = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{i-2k} c_k, \; i \in \mathbb{Z}$$

Das Symbol

Bsp. α eines stationären Unterteilungsalgorithmus:

$$\alpha(z) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j z^j$$

$$\alpha_n(z) := \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i} z^i = \frac{1}{2^n}(1+z)^{n+1}$$