Chapter 10 - Lane-Riesenfeld-Algorithmus

Allgemein

Biinfinite Kontrollpolygone: $\mathbf{c}_{\mathbb{Z}} := (\mathbf{c}_i)_{i\in\mathbb{Z}} = (...\mathbf{c}_{-1}\mathbf{c}_0\mathbf{c}_1...)$

Algorithmus

```
Eingabe:
        c_Z^0 ein Polygon ⊂ R^d
        n ∈ N_0 der Grad
Ausgabe:
        c_Z^m ⊂ R^d

For k = 1, ..., m
        For i ∈ Z //verdoppele
                d_{2i}^0 ← d_{2i+1}^0 ← c_i^{k-1}
        For j = 1, ..., n
                For i ∈ Z //mittele
                        d_i^j ← (d_{i-1}^{j-1} + d_i^{j-1}) 1/2
        For i ∈ Z //benennen um
                c_i^k ← d_i^n
```

Bem.: $\mathbf{d}_0^j$ ist immer der Punkt $\mathbf{d}_i^j$ mit dem kleinsten i, der von $\mathbf{c}_0^0$ beeinflusst wird.

Unterteilungsmatrizen

$$D = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$U_n^m \mathbf{c} = (U_n)^m \mathbf{c} = (M^n D)^m \mathbf{c}$$

Allgemein enthält U_n in den Spalten die Einträge α_i, jeweils um zwei Zeilen versetzt:

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{2^n}\binom{n+1}{i}, & i = 0, ..., n+1 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Unterteilungsgleichung:

$$b_i = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{i-2k} c_k, \; i \in \mathbb{Z}$$

Das Symbol

Bsp. α eines stationären Unterteilungsalgorithmus:

$$\alpha(z) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j z^j$$

$$\alpha_n(z) := \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i} z^i = \frac{1}{2^n}(1+z)^{n+1}$$

Differenzenschema

$$\begin{aligned} \text{Rückwärtsdifferenzen: } \nabla\mathbf{c} &:= (\nabla c_i)_{i\in\mathbb{Z}} \\ \nabla c_i &:= c_i - c_{i-1} \\ \text{Symbol: } v(z) &:= 1 - z \\ \nabla\mathbf{c}(z) &= v(z)\, c(z) \\ \text{Differenzenpolygone: } b_\nabla(z) &= (1-z)\, b(z) \\ &= (1-z)\,\alpha(z)\frac{c_\nabla(z^2)}{(1-z^2)} \\ &= \frac{\alpha(z)}{1+z} c_\nabla(z^2) \end{aligned}$$

Bem.: Das Differenzenschema zu $\alpha(z)$ existiert nur, wenn gilt: $\alpha(-1) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_{2i} - \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_{2i+1} = 0$

Bem.: Es muss $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_{2i} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_{2i+1} = 1$ gelten, damit die unterteilten Polygone gegen eine Kurve konvergieren.

Die β_i können wie folgt aus α_i berechnet werden:

$$\beta_0 = \alpha_0$$
$$\beta_i = \alpha_i - \beta_{i-1}$$

Uniforme Parametrisierung

Brauchen wir das? Ich würde es eher weglassen. Verstehn wir ja eh nicht.

Konvergenz

Same thing here.