Chapter 9 - De Casteljau-Algorithmus

Schreibweise

C ist De-Casteljau, C^* Unterteilungsoperator mit Stufe k.

$$C\left(B_0^0, t\right) = B_0^1 B_1^1$$
$$C^*\left(B_0^0, k\right) := B_0^k ... B_{2^k-1}^k$$

Algorithmus

```
Eingabe:
        b_0^0...b_n^0 ⊂ R^d
        t ∈ R
Ausgabe:
        b_0^0...b_0^n b_0^n...b_n^0 ⊂ R^d

For k = 1, ..., n
        For i = 0, ..., n - k
                b_i^k ← b_i^{k-1} (1 - t) + b_{i+1}^{k-1} t
```

Kanonische Parametrisierung

Unterteilung eines Polygons in $P^k := \mathbf{P}_0^k ... \mathbf{P}_{2^k-1}^k$ mit

$$P_j^k := \mathbf{p}_0^{k,j} ... p_n^{k,j}$$
$$\mathbf{p}_i^{k,j} := \begin{bmatrix} \beta_i^{k,j} \\ \mathbf{b}_i^{k,j} \end{bmatrix}$$
$$\beta_i^{k,j} := \frac{j + \frac{i}{n}}{2^k}$$

Zu P^k it die stückweise lineare Funktion $L_k\left(\mathbf{b}_0 ... \mathbf{b}_n\right)$

Differenzenpolygon

$$\begin{aligned} \Delta B &:= \Delta \mathbf{b}_0 ... \mathbf{b}_n \\ &:= \left(\Delta \mathbf{b}_0\right) ... \left(\Delta \mathbf{b}_{n-1}\right) \\ &:= \left(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0\right) ... \left(\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}\right) \end{aligned}$$

Zusammenhang von Differenzen mit normalem Polygon

$$B_0 B_1 := C^*\left(B, 1\right)$$
$$\Delta B_0 \Delta B_1 = \frac{1}{2} C^*\left(\Delta B, 1\right)$$
$$B_0 ... B_{2^k} := C^*\left(B, k\right)$$
$$\Delta B_0 ... \Delta B_{2^k} = 2^{-k} C^*\left(\Delta B, k\right)$$

Abhängigkeit von ΔB_0 und ΔB_1 bzgl. C: (Übung 9.2)

$$tL = \Delta B_0 \quad \left(1 - t\right) R = \Delta B_1$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta B_0}{t} \frac{\Delta B_1}{\left(1 - t\right)} = C\left(\Delta B, t\right)$$

Ableitung unterteilter Polygone

$$b\left(t\right) := L_k\left(B\right)$$
$$\beta_i^{k,j} := \frac{jn + i}{n 2^k}$$
$$b_i^{k,j} := b^k\left(\beta_i^{k,j}\right)$$
$$\dot{b}^k\left(t\right) = \frac{\Delta b_i^{k,j}}{\Delta \beta_i^{k,j}} = n 2^k \Delta b_i^{k,j}$$

Konvergenz

Satz: Zu jedem Polygon $B = b_0 ... b_n$ gibt es ein Polygon $L_\infty\left(B\right)$ vom Grad $\leq n$, sodass

$$\sup_{[0,1]} \left| L_k\left(B\right) - L_\infty\left(B\right) \right| \in O\left(2^{-k}\right)$$

Folgerung:

$$\frac{d}{dt} L_\infty\left(B\right) = n L_\infty\left(\Delta B\right)$$