Chapter 7 - Lineare Programme

Lineares Programm

Lineare Ungleichung:

$$y := \mathbf{u}^t\mathbf{x} + u \geq 0$$

Ungleichungssystem mit l linearen Ungleichungen

$$y_i := \mathbf{a}_i^t\mathbf{x} + a_i \geq 0$$

bilden konvexes Polyeder S, *Simplex!*

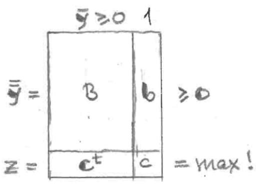
Def.

lineare Zielfunktion $z := \mathbf{z}^t\mathbf{x}$.

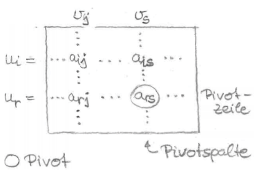
Lineares Programm:

$$\begin{aligned} z &:= \mathbf{z}^t\mathbf{x} && = max! \\ \mathbf{y} &:= A\mathbf{x} + \mathbf{a} && \geq 0 \end{aligned}$$

Schematische Normalform:



Eckentausch



AUSTAUSCH:

Eingabe:
  $A = [a_{ij}]_{i,j=1,1}^{m,n}$
  r, s
Ausgabe:
  $A' = [a'_{ij}]_{i,j=1,1}^{m,n}$

For $i \neq r$, $j \neq s$
  $a'_{ij} \leftarrow a_{ij} - \frac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}}$
For $i = r$, $j \neq s$ (Pivotzeile)
  $a'_{ij} \leftarrow -\frac{a_{ij}}{a_{rs}}$
For $i \neq r$, $j = s$ (Pivotspalte)
  $a'_{ij} \leftarrow \frac{a_{ij}}{a_{rs}}$
For $i = r$, $j = s$ (Pivot)
  $a'_{ij} \leftarrow \frac{i}{a_{rs}}$

Simplex

Algorithmus:

Eingabe:
  Normalform B eines lin. Programms
Ausgabe:
  Normalform geaendert, sodass $z(\mathbf{0})$=c=max

solange ein $c_s > 0$
  falls alle $b_{is} \geq 0$
    keine Loesung − Ende
  sonst
    bestimme r so, documentclass
    $\frac{b_r}{b_{rs}} = \max_{b_{is}<0} \frac{b_i}{b_{is}}$
  B ← AUSTAUSCH(B, r, s)

Aufwand im worst-case $\Omega\left(m^{\frac{n}{2}}\right)$. In Praxis meist in $O\left(m^2 n\right)$.

Berechnung der Normalform

Gegeben ein lineares Programm

- finde zulässigen Punkt
- mache Punkt zum Ursprung
- führe n Tauschs x_r mit y_r durch

Damit Ursprung beim Tausch von x_r mit y_r gültig bleibt muss für alle $i > r$ gelten:

$$a_i - \frac{a_{ir}a_r}{a_{rr}} \geq 0$$

Duale lineare Programme

Das lineare Programm

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &\geq 0 \\ B^t\mathbf{y} + \mathbf{c} &\leq 0 \\ \mathbf{b}^t\mathbf{y} + c &= min! \end{aligned}$$

ist dual zu

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\geq 0 \\ B\mathbf{x} + \mathbf{b} &\leq 0 \\ \mathbf{c}^t\mathbf{y} + c &= min! \end{aligned}$$

Ersteres kann transformiert werden zu

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &\geq 0 \\ -B^t\mathbf{y} - \mathbf{c} &\geq 0 \\ -\mathbf{b}^t\mathbf{y} - c &= max! \end{aligned}$$

Ausgleichen mit Maximumsnorm

$A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ überbestimmtes LGS. $\forall \mathbf{x}$ ist das Residuum

$$\mathbf{r} := (r_1 ... r_n)^t := A\mathbf{x} - \mathbf{a} \neq 0$$

Wir definieren $x_0 := \frac{1}{r}$ und $\bar{\mathbf{x}} := \mathbf{x}x_0$. Führt zu linearem Programm:

$$\begin{aligned} -A\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{a}x_0 + \mathbf{e} &\geq 0 \\ A\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{a}x_0 + \mathbf{e} &\geq 0 \\ x_0 &= max! \end{aligned}$$