Institut für Angewandte Mathematik

Leibniz Universität Hannover

Dr. Frank Attia, Dr. Florian Leydecker

Hannover, 30. Juni 2025

Mathematik für die Ingenieurwissenschaften III - Numerik
SoSe 2025 – Übung 12 – Lösungen

Themen

Näherungsverfahren für RWPe

- Allgemeiner Ansatz: Kapitel 5.2.2, schwache Formulierung (5.10) und (5.12).
- Galerkin-Verfahren: Kapitel 5.2.4
- Ritz-Verfahren zur Minimierung von Energiefunktionalen: Kapitel 5.2.5
  - Differentialgleichung (5.9) und zugehöriges Energiefunktional (5.15)

Zentralübung

Präsenzaufgabe 12.1 [Beispiel Galerkin-Verfahren]

Welches Polynom w dritten Grades ist die ist die beste Approximation im Sinne von Ritz–Galerkin der Lösung y von

$$-y''(x) + xy(x) = 2x^2, \qquad y(-1) = y(1) = 0\,?$$

Anders gesagt: Suche die Minimalstelle des zugehörigen Funktionals J im Raum derjenigen Polynome vom Grad $\leqslant 3$, die die Randbedingungen erfüllen.

Lösung

Die Lösung wird in der Vorlesung/Zentralübung präsentiert.

Kurzteil

Aufgabe 12.2 [1-parametriger Ansatz: allgemeinere RBen]

Geben Sie einen 1-, einen 2- und einen 3-parametrigen Polynomansatz zur Näherung der folgenden Randwertaufgabe an:

$$-y''(x) - xy'(x) + y = \cos(x), \qquad 0 < x < 2, \quad y(0) = 3, \; y(2) = 1.$$

Lösung

Die Randbedingungen müssen erfüllt sein. Eine Funktion, die die Randbedingungen interpoliert, erhält man durch

$$w_{\mathrm{RB}}(x) = \frac{1-3}{2-0}(x-0) + 3 = 3 - x$$

Die Ansatzfunktionen müssen die homogenen Randbedingungen erfüllen und linear unabhängig sein (erreichbar durch Graderhöhung). Wähle beispielsweise $w_1(x) = x(x-2)$, $w_2(x) = x^2(x-2)$ und $w_3(x) = x^2(x-2)^2$. Somit ergeben sich die Ansätze:

1-parametriger Ansatz: $w(x) = (3-x) + a_1 \underbrace{x(x-2)}_{=w_1(x)}$,

2-parametriger Ansatz: $w(x) = (3-x) + a_1 \underbrace{x(x-2)}_{=w_1(x)} + a_2 \underbrace{x^2(x-2)}_{=w_2(x)}$,

3-parametriger Ansatz: $w(x) = (3-x) + a_1 \underbrace{x(x-2)}_{=w_1(x)} + a_2 \underbrace{x^2(x-2)}_{=w_2(x)} + a_3 \underbrace{x^2(x-2)^2}_{=w_3(x)}$.

Aufgabenteil

Aufgabe 12.3 [RWAn und zugehöriges Energiefunktional J und schwache Formulierung]

Im Folgenden betrachten wir Randwertprobleme mit Nullrandbedingungen, d.h. $y(0) = y(1) = 0$.

(a) Geben Sie zu folgendem Randwertproblem das Energiefunktional J sowie die schwache Formulierung an.

$$-((x+1)y'(x))' + \sin(x)y(x) = \cos(x).$$

(b) Wie lauten für die durch folgende J gegebenen Minimierungsprobleme die zugehörigen Differentialgleichungen sowie die schwachen Formulierungen?

(i) $J[u] = \int_0^1 [x^2u^2(x) + e^{2x}(u'(x))^2]\,dx$,

(ii) $J[u] = \int_0^1 [x^2u^2(x) + e^{2x}(u'(x))^2 + (x+1)^2u(x)]\,dx$.

Lösung

Zunächst definieren wir den Testraum, der für alle Probleme hier gleich ist: $\mathbb{V}_0 = \{v \in C^2 : v(0) = v(1) = 0\}$. Im Gegensatz zum Vorgehen unter (5.9) müssen beide Randbedingungen in den Testraum eingearbeitet werden. In der Linearform ℓ ist $v(b) = v(1) = 0$ (gleiches Ergebnis, aber vom Sinn her falsch: man setzt dort $\rho = 0$).

(a) Zunächst liest man direkt aus der Differentialgleichung ab:

$$c_1(x) = x+1, \quad c_0(x) = \sin(x), \quad f(x) = \cos(x).$$

Damit erhält man mittels (5.10)

$$a(y,v) = \int_0^1 (x+1)y'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 \sin(x)y(x)v(x)\,dx, \quad \ell(v) = \int_0^1 \cos(x)v(x)\,dx,$$

und die schwache Formulierung lautet: Suche $y \in \mathbb{V}_0$, so dass

$$\int_0^1 (x+1)y'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 \sin(x)y(x)v(x)\,dx = \int_0^1 \cos(x)v(x)\,dx \quad \forall v \in \mathbb{V}_0.$$

Das zugehörige Energie-Funktional bestimmt man über

$$J[y] = \frac{1}{2}a(y,y) - \ell(y) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left((x+1)y'(x)^2 + \sin(x)y(x)^2\right)\,dx - \int_0^1 \cos(x)y(x)\,dx.$$

(b) **(i)** Man formuliert $J[u]$ um zu

$$J[u] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2e^{2x}(u'(x))^2 + 2x^2u^2(x)\right)\,dx.$$

und liest nach der Vorgehensweise aus der Vorlesung ab:

$$c_1(x) = 2e^{2x}, \quad c_0(x) = 2x^2, \quad f(x) = 0.$$

Die zugehörige Differentialgleichungen lautet somit:

$$\left(-2e^{2x}u'(x)\right)' + 2x^2u(x) = 0, \quad x \in [0,1], \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Die schwache Formulierung lautet dann: Suche $y \in \mathbb{V}_0$, so dass

$$\int_0^1 2e^{2x}y'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 2x^2y(x)v(x)\,dx = 0 \quad \forall v \in \mathbb{V}_0.$$

(ii) Analog zu (i) formuliert man $J[u]$ um zu

$$J[u] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2e^{2x}(u'(x))^2 + 2x^2u^2(x)\right)\,dx - \int_0^1 -(1+x)^2u(x)\,dx$$

und erhält mit der Vorgehensweise aus der Vorlesung:

$$c_1(x) = 2e^{2x}, \quad c_0(x) = 2x^2, \quad f(x) = -(1+x)^2.$$

Die zugehörige Differentialgleichungen lautet somit:

$$\left(-2e^{2x}u'(x)\right)' + 2x^2u(x) = -(1+x)^2, \quad x \in [0,1], \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Die schwache Formulierung lautet dann: Suche $y \in \mathbb{V}_0$, so dass

$$\int_0^1 2e^{2x}y'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 2x^2y(x)v(x)\,dx = \int_0^1 -(1+x)^2v(x)\,dx \quad \forall v \in \mathbb{V}_0.$$

Aufgabe 12.4 [Galerkin-Verfahren: zweiparametriger Polynomansatz]

Lösen Sie jeweils näherungsweise mit dem Galerkin-Verfahren die Randwertaufgaben

(a) $-((x+1)y'(x))' + 2y(x) = x, \qquad y(0) = y(1) = 0,$

(b) $-(xu'(x))' + \frac{u(x)}{x} = \cos(\frac{\pi}{2}x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$

unter Verwendung eines zweiparametrigen Polynomansatzes mit $w_1(x) = x(x-1)$ und $w_2(x) = x^2(x-1)$.

Lösung

(a) Man liest (bei Verwendung der Notation der Vorlesung) ab:

$$c_1(x) = x+1, \quad c_0(x) = 2, \quad f(x) = x.$$

Damit ist für $v(x)$ mit $v(0) = v(1) = 0$

$$a(u,v) = \int_0^1 (x+1)u'(x) \cdot v'(x)dx + \int_0^1 2u(x)v(x)dx, \quad \text{und} \quad \ell(v) = \int_0^1 x \cdot v(x)dx.$$

Man wählt nun den Ansatz so, dass beide Randbedingungen erfüllt sind

$$w(x,a_1,a_2) = a_1 \underbrace{x(x-1)}_{=w_1(x)} + a_2 \underbrace{x^2(x-1)}_{=w_2(x)}.$$

und berechnet für $w_1(x) = x(x-1)$ und $w_2(x) = x^2(x-1)$ mit $w_1'(x) = 2x-1$ und $w_2'(x) = 3x^2-2x$

$$\begin{aligned}
a(w_1,w_1) &= \int_0^1 (x+1)(2x-1)(2x-1)\,dx + \int_0^1 2x(x-1)x(x-1)\,dx = \ldots = \frac{17}{30},\\
a(w_1,w_2) &= \int_0^1 (x+1)(2x-1)(3x^2-2x)\,dx + \int_0^1 2x(x-1)x^2(x-1)\,dx = \ldots = \frac{19}{60},\\
a(w_2,w_2) &= \int_0^1 (x+1)(3x^2-2x)(3x^2-2x)\,dx + \int_0^1 2x^2(x-1)x^2(x-1)\,dx = \ldots = \frac{53}{210}.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie von $a(\cdot,\cdot)$ ist $a(w_1,w_2) = a(w_2,w_1)$. Ferner berechnet man

$$\begin{aligned}
\ell(w_1) &= \int_0^1 x \cdot x(x-1)dx = \ldots = -\frac{1}{12},\\
\ell(w_2) &= \int_0^1 x \cdot x^2(x-1)dx = \ldots = -\frac{1}{20}.
\end{aligned}$$

Durch Lösen des LGS $\begin{pmatrix} a(w_1,w_1) & a(w_2,w_1) \\ a(w_1,w_2) & a(w_2,w_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{20} \end{pmatrix}$ erhält man schließlich: $a_1 = -\frac{131}{1077}$, $a_2 = -\frac{49}{1077}$. Dies liefert zum Schluss

$$w(x) = -\frac{131}{1077}x(x-1) - \frac{49}{1077}x^2(x-1).$$

(b) Man liest erneut ab:

$$c_1(x) = x, \quad c_0(x) = \tfrac{1}{x}, \quad f(x) = \cos(\tfrac{\pi}{2}x).$$

Damit ist für $v(x)$ mit $v(0) = v(1) = 0$

$$a(u,v) = \int_0^1 xu'(x) \cdot v'(x)dx + \int_0^1 \tfrac{1}{x}u(x)v(x)dx, \quad \text{und} \quad \ell(v) = \int_0^1 \cos(\tfrac{\pi}{2}x) \cdot v(x)dx.$$

Man verwendet nun den Ansatz

$$w(x,a_1,a_2) = a_1x(x-1) + a_2x^2(x-1) = a_1(x^2-x) + a_2(x^3-x^2)$$

und berechnet für $w_1(x) = x(x-1)$ und $w_2(x) = x^2(x-1)$ mit $w_1'(x) = 2x-1$ und $w_2'(x) = 3x^2-2x$

$$a(w_1,w_1) = \int_0^1 x(2x-1)(2x-1)\,dx + \int_0^1 \tfrac{1}{x}x(x-1)x(x-1)\,dx = \ldots = \frac{1}{4},$$
$$a(w_1,w_2) = \int_0^1 x(2x-1)(3x^2-2x)\,dx + \int_0^1 \tfrac{1}{x}x(x-1)x^2(x-1)\,dx = \ldots = \frac{3}{20},$$
$$a(w_2,w_2) = \int_0^1 x(3x^2-2x)(3x^2-2x)\,dx + \int_0^1 \tfrac{1}{x}x^2(x-1)x^2(x-1)\,dx = \ldots = \frac{7}{60}.$$

Aufgrund der Symmetrie von $a(\cdot,\cdot)$ ist auch hier $a(w_1,w_2) = a(w_2,w_1)$. Ferner berechnet man

$$\ell(w_1) = \int_0^1 \cos(\tfrac{\pi}{2}x)\cdot x(x-1)dx = \ldots = \frac{4\pi-16}{\pi^3},$$
$$\ell(w_2) = \int_0^1 \cos(\tfrac{\pi}{2}x)\cdot x^2(x-1)dx = \ldots = -\frac{4(8\pi-24)}{\pi^4}.$$

Durch Lösen des LGS $\begin{pmatrix} a(w_1,w_1) & a(w_2,w_1) \\ a(w_1,w_2) & a(w_2,w_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell(w_1) \\ \ell(w_2)\rangle\end{pmatrix}$ erhält man schließlich:

$$a_1 = \frac{10(7\pi^2+44\pi-216)}{\pi^4} \approx -0.8914 \quad \text{und} \quad a_2 = -\frac{30(3\pi^2+28\pi-120)}{\pi^4} \approx 0.7473.$$

Dies liefert zum Schluss

$$w(x) = -0.8914x(x-1) + 0.7473x^2(x-1).$$

Aufgabe 12.5 [Galerkin-Verfahren mit Polynom-Ansatz sowie mit trigonometrischem Ansatz]

Lösen Sie näherungsweise mit dem Galerkin-Verfahren und einem zweiparametrigen Ansatz aus möglichst einfachen

(a) Polynomen die folgenden RWA: $-y''(x) + 2y(x) = x^2, \quad y(-1) = 0,\ y'(1) = 0,$

(b) trigonometrischen Funktionen die folgende RWA: $-y''(x) + xy(x) = x^2, \qquad y(0) = y(\pi) = 0.$

Hinweis: Verwenden Sie in (a) die Ansatzfunktionen $w_1(x) = (x+1)$ und $w_2(x) = (1+x)^2$ und bei (b) $w_1(x) = \sin(x)$ und $w_2(x) = \sin(2x)$. Die auftretenden Integrale und LGSe dürfen Sie mit Hilfe eines Computers berechnen.

Lösung

(a) Es ist

$$-(\underbrace{1}_{=c_1(x)}\,y'(x))' + \underbrace{2}_{=c_0(x)}\,y(x) = \underbrace{x^2}_{=f(x)}, \quad y(-1) = 0 \text{ und } \underbrace{1}_{=c_1(b)}\cdot y'(1) = 0 = \rho.$$

Damit ist für $v(x)$ mit $v(-1) = 0$ (und da $\rho = 0$)

$$a(u,v) = \int_{-1}^1 1\cdot u'(x)\cdot v'(x)dx + \int_{-1}^1 2u(x)v(x)dx, \quad \text{und} \quad \ell(v) = 0 + \int_{-1}^1 x^2\cdot v(x)dx.$$

Da wir an der Stelle $x = 1$ eine Ableitungsbedingung vorgegeben haben, müssen die Ansatzfunktionen nur die Bedingung am linken Rand erfüllen. Man wähle als Ansatzfunktionen $w_1(x) = 1+x$ und $w_2(x) = (1+x)^2$. Gesucht ist demnach $w(x,a_1,a_2) = a_1w_1(x) + a_2w_2(x)$. Mit $w_1'(x) = 1$ und $w_2'(x) = 2(1+x)$ ergibt sich

$$a(w_1,w_1) = \int_{-1}^1 1\cdot 1\cdot 1\,dx + \int_{-1}^1 2(x+1)^2dx = \ldots = \frac{22}{3}$$
$$a(w_1,w_2) = \int_{-1}^1 1\cdot 1\cdot 2(1+x)\,dx + \int_{-1}^1 2(x+1)(x+1)^2dx = \ldots = 12$$
$$a(w_2,w_2) = \int_{-1}^1 1\cdot 1\cdot 4(1+x)^2\,dx + \int_{-1}^1 2(x+1)^4dx = \ldots = \frac{352}{15}$$

Aufgrund der Symmetrie von $a(\cdot,\cdot)$ ist $a(w_1,w_2) = a(w_2,w_1)$. Ferner berechnet man

$$\ell(w_1) = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot (x+1)dx = \ldots = \frac{2}{3},$$
$$\ell(w_2) = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot (x+1)^2 dx = \ldots = \frac{16}{15}.$$

Durch Lösen des LGS $\begin{pmatrix} a(w_1,w_1) & a(w_2,w_1) \\ a(w_1,w_2) & a(w_2,w_2) \end{pmatrix} \binom{a_1}{a_2} = \begin{pmatrix} \ell(w_1) \\ \ell(w_2) \end{pmatrix}$ erhält man schließlich: $a_1 = \frac{8}{79}$, $a_2 = -\frac{1}{158}$. Dies liefert zum Schluss

$$w(x) = \frac{8}{79}(x+1) - \frac{1}{158}(x+1)^2.$$

(b) Mit der Vorgehensweise aus der Vorlesung erhält man:

$$-(\underbrace{1}_{=c_1(x)} y'(x))' + \underbrace{x}_{=c_0(x)} y(x) = \underbrace{x^2}_{=f(x)}, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Damit ist für $v(x)$ mit $v(0) = y(\pi) = 0$

$$a(u,v) = \int_0^\pi 1 \cdot u'(x) \cdot v'(x)dx + \int_0^\pi xu(x)v(x)dx, \quad \text{und} \quad \ell(v) = \int_0^\pi x^2 \cdot v(x)dx.$$

Man wähle als Ansatzfunktionen $w_1(x) = \sin x$ und $w_2(x) = \sin(2x)$. Gesucht ist demnach $w(x,a_1,a_2) = a_1 w_1(x) + a_2 w_2(x)$. Mit $w_1'(x) = \cos(x)$ und $w_2'(x) = 2\cos(2x)$ ergibt sich

$$a(w_1,w_1) = \int_0^\pi 1 \cdot \cos^2(x)dx + \int_0^\pi x\sin^2(x)dx = \ldots = \frac{1}{4}\pi^2 + \frac{1}{2}\pi$$
$$a(w_1,w_2) = \int_0^\pi 1 \cdot \cos(x) \cdot 2\cos(2x)dx + \int_0^\pi x\sin(x) \cdot \sin(2x)dx = \ldots = -\frac{8}{9}$$
$$a(w_2,w_2) = \int_0^\pi 1 \cdot 4\cos^2(2x)dx + \int_0^\pi x\sin^2(2x)dx = \ldots = 2\pi + \frac{\pi^2}{4}.$$

Aufgrund der Symmetrie von $a(\cdot,\cdot)$ ist $a(w_1,w_2) = a(w_2,w_1)$. Ferner berechnet man

$$\ell(w_1) = \int_0^\pi x^2 \cdot \sin(x)dx = \ldots = \pi^2 - 4,$$
$$\ell(w_2) = \int_0^\pi x^2 \cdot \sin(2x)dx = \ldots = -\frac{\pi^2}{2}.$$

Durch Lösen des LGS $\begin{pmatrix} a(w_1,w_1) & a(w_2,w_1) \\ a(w_1,w_2) & a(w_2,w_2) \end{pmatrix} \binom{a_1}{a_2} = \begin{pmatrix} \ell(w_1) \\ \ell(w_2) \end{pmatrix}$ erhält man schließlich: $a_1 \approx 1.3598$, $a_2 \approx -0.4258$. Dies liefert zum Schluss

$$w(x) = 1.3598\sin(x) - 0.4258\sin(2x).$$

Dr. Frank Attia, Dr. Florian Leydecker

Hannover, 23. Juni 2025

Mathematik für die Ingenieurwissenschaften III - Numerik
SoSe 2025 – Übung 11 – Lösungen

Themen

Lösung von Randwertaufgaben mit Finiten Differenzen: Kapitel 5.2.1

- vorderer und hinterer Differenzienquotient sowie insbesondere zentrale Differenzequotienten
- Approximationsgüte zentraler Differenzenquotienten: Satz 5.3

Zentralübung

Präsenzaufgabe 11.1 [Differenzen-Verfahren: verschiedene RBen ohne und mit Ghost Points]

Es geht in dieser Aufgabe um das RWP mit der DGL

$$-y''(x) + (1 + x^2)y(x) = -1, \quad x \in [-1, 1]$$

und untenstehenden RBen und bei Verwendung des Differenzen-Verfahrens mit $m = 6$ Intervallen.

Bestimmen Sie jeweils unter Zuhilfenahme von Skizzen die Anzahl und zugehörigen Stellen auf der x-Achse der Unbekannten, stellen Sie dabei jeweils die beiden aus den RBen resultierenden Differenzengleichungen auf und bestimmen Sie jeweils, wieviele Differenzengleichungen Ihnen noch fehlen, um die Unbekannten zu bestimmen:

(a) $y(-1) = c_l$ und $y(1) = c_r$

(b) $y'(-1) + \gamma y(-1) = 0$ und $y(1) = \beta$ [hier sollen -wie üblich- zentrale DQ für Ableitungen verwendet werden, $\rightsquigarrow$ Ghost-Point(s), Möglichkeit einer $\mathcal{O}(h^2)$-Approximation].

(c) *Bitte selber mit Hilfe von (a), (b) und (d) rechnen:* $y(-1) = c_l$ und $y'(1) + \gamma y(1) = 42$ [hier sollen -wie üblich- zentrale DQ für Ableitungen verwendet werden, $\rightsquigarrow$ Ghost-Point(s), Möglichkeit einer $\mathcal{O}(h^2)$-Approximation].

(d) $y'(-1) + \gamma y(-1) = 0$ und $y'(1) + \gamma y(1) = 42$ [hier sollen -wie üblich- zentrale DQ für Ableitungen verwendet werden, $\rightsquigarrow$ Ghost-Point(s), Möglichkeit einer $\mathcal{O}(h^2)$-Approximation].

Stellen Sie abschließend zu (a) und (f) ein LGS zur Bestimmung der Unbekannten auf.

Kurzteil

Aufgabe 11.2

Geben Sie die zentralen Differenzenquotienten zur Approximation der ersten und zweiten Ableitung einer Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an (Schrittweite h).

Lösung

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}, \qquad y''(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}.$$

Aufgabenteil

Aufgabe 11.3 [Differenzenverfahren für RWA]

Lösen Sie die Randwertaufgabe

$$-y''(x) + 4y'(x) = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = e^2 - e^{-2},$$

näherungsweise mit dem Differenzenverfahren zur Schrittweite $h = \frac{1}{4}$, unter Verwendung von zentralen Differenzenquotienten ($\mathcal{O}(h^2)$-Approximation).

Lösung

Die Schrittweite ist $h = 0.25$ und damit sind zunächst die Werte $y_0, \ldots, y_4$ an den Stellen

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.25,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 0.75 \text{ und } x_4 \ = 1$$

zu bestimmen, und da keine Ableitungen in der RBen vorkommen, bleibt es bei diesen Unbekannten (keine Ghost-Points). Die RBen liefern zwei Gleichungen $y_0 = 0$ und $y_4 = e^2 - e^{-2}$. Für alle restlichen Gleichungen:
In der allgemeinen Schreibweise aus der Vorlesung hat man $p(x) = -4$, $q(x) = 0$, $b(x) = 0$, $\beta = e^2 - e^{-2}$ und $\alpha = 0$. Ersetze nun

$$\begin{aligned} y'(x_j) &\approx \frac{y_h(x_{j+1}) - y_h(x_{j-1})}{2h}, \\ y''(x_j) &\approx \frac{y_h(x_{j+1}) - 2y_h(x_j) + y_h(x_{j-1})}{h^2}. \end{aligned}$$

Man erhält mit $y_h(x_j) =: y_j$ die Formel

$$\begin{aligned} & -\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + 4\frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} = 0 \\ \iff \quad & (1-2h)y_{j+1} - 2y_j + (1+2h)y_{j-1} = 0. \end{aligned}$$

Damit folgt nun für

$$\begin{aligned} j = 1: &\quad (1-2h)y_2 - 2y_1 + (1+2h)y_0 = 0, \\ j = 2: &\quad (1-2h)y_3 - 2y_2 + (1+2h)y_1 = 0, \\ j = 3: &\quad (1-2h)y_4 - 2y_3 + (1+2h)y_2 = 0. \end{aligned}$$

Man hat also das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^2 - e^{-2} \end{pmatrix}$$

zu lösen. Die Lösung ist $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)^T \approx (0,\ 0.1813,\ 0.7254,\ 2.3575,\ 7.2537)^T$.
Alternativ können die Variablen y_0, y_4 vorab eliminiert werden (s.o.). Die führt auf das zu lösende LGS:

$$\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-e^2 + e^{-2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist $(y_1, y_2, y_3)^T \approx (0.1813,\ 0.7254,\ 2.3575)^T$. Die Werte $y_0 = 0$ und $y_4 = e^2 - e^{-2} \approx 7.2537$ sind bereits durch die Randbedingungen bestimmt.

Aufgabe 11.4 [Differenzenverfahren für RWA: Ehemalige Klausuraufgabe]

Stellen Sie unter ausschließlicher Verwendung *zentraler Differenzenquotienten* mit dem Differenzenverfahren zur Schrittweite $h = 2$ ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Näherungslösung der Randwertaufgabe

$$-y''(x) + \frac{(4-x)^2}{4} y(x) = \frac{(4-x)^2}{4}, \quad 0 < x < 8, \quad y(0) = 1,\ y'(8) - 3y(8) = 0,$$

auf [*ohne* das LGS zu lösen]!

Lösung

Da die 2. RB am rechten Randpunkt $b = 8$ eine Ableitung enthält und wegen der Forderung der Verwendung zentraler Differenzenquotienten (dadurch besteht die Möglichkeit, eine $\mathcal{O}(h^2)$-Approximation zu erhalten), betrachtet man die Diskretisierungsstellen

$$x_0 = 0,\ x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6,\ x_4 = 8,\ x_5 = 10$$

mit Abstand $h = 2$ und hat dazu die Unbekannten $y_0, \ldots, y_5$ zu bestimmen (mit Ghost-Point (x_5, y_5), auch dann, wenn die Verwendung des Ghost-Points nicht explizit in der Aufgabe gefordert wäre).
Unter Verwendung der Approximationen

$$\begin{aligned} y'(x_j) &\approx \frac{y_h(x_{j+1}) - y_h(x_{j-1})}{2h}, \\ y''(x_j) &\approx \frac{y_h(x_{j+1}) - 2y_h(x_j) + y_h(x_{j-1})}{h^2}, \end{aligned}$$

erhält man für die obige RWA mit $y_h(x_i) = y_{h,i}$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} & -\frac{y_{h,i+1} - 2y_{h,i} + y_{h,i-1}}{4} + \frac{(4-x_i)^2}{4} y_{h,i} = \frac{(4-x_i)^2}{4}, \quad i = 1, \ldots, 4, \\ \iff \quad & \begin{pmatrix} -1, & 2 + (4-x_i)^2, & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{h,i-1} \\ y_{h,i} \\ y_{h,i+1} \end{pmatrix} = (4-x_i)^2, \quad i = 1, \ldots, 4. \end{aligned}$$

Für die rechte Seite der Gleichungen berechnet man:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	2	4	6	8	10
$(4-x_i)^2$	16	4	0	4	16	36

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen

$$y_{h,0} = 1 \quad \text{und} \quad -y_{h,3} + 4 \cdot (-3) \cdot y_{h,4} + y_{h,5} = 0$$

lässt sich zur Lösung der RWA das folgende lineare Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 18 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{h,0} \\ y_{h,1} \\ y_{h,2} \\ y_{h,3} \\ y_{h,4} \\ y_{h,5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nicht explizit gefordert war, das LGS mit durch die Randbedingungen ersetzten Variablen $y_{h,0}$, $y_{h,5}$ zu formulieren:

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{h,1} \\ y_{h,2} \\ y_{h,3} \\ y_{h,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.5 [Differenzenverfahren für EWP]

Welcher algebraischen Gleichung genügen die Werte $\lambda \in \mathbb{C}$ der Randwertaufgabe

$$-y''(x) = \lambda y(x), \quad y(0) - y'(0) = 0,\ y'(1) - y(1) = 0, \qquad (*)$$

wenn man diese näherungsweise nach dem Differenzenverfahren unter Verwendung zentraler Differenzenquotienten berechnet (Schrittweite $h = 1/2$), wobei zusätzlich vorausgesetzt ist, dass die finite Differenzenlösung *nicht* konstant gleich Null ist?

Bemerkung: Diejenigen Werte $\lambda \in \mathbb{C}$, für welche (*) mit $y \neq$ Nullfunktion erfüllt ist, nennt man Eigenwerte.

Lösung

Wir zerlegen das Intervall $[0, 1]$ in zwei Teilintervalle und haben damit die drei Knotenwerte $y_0 \approx y(0)$, $y_1 \approx y(1/2)$, $y_2 \approx y(1)$ zu bestimmen. Durch die Randbedingungen mit Verwendung zentraler Differenzenquotienten

$$y_0 - \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{y_3 - y_1}{2h} - y_2 = 0,$$

suchen wir mit zwei Ghost-Points zusätzlich $y_{-1} \approx y(-1/2)$ und $y_3 \approx y(3/2)$ und somit insgesamt 5 Unbekannte: y_{-1}, y_0, y_1, y_2 und y_3.

Wir ersetzen die Differentialgleichung durch die Differenzengleichung:

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + \lambda y_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2.$$

An dieser Stelle sortiert man *einmal* die Gleichung nach Unbekannten, da ansonsten später alle Gleichungen einzeln umsortiert werden müssen. Umsortierung ergibt:

$$\tfrac{1}{h^2} y_{k-1} + (\lambda - \tfrac{2}{h^2}) y_k + \tfrac{1}{h^2} y_{k+1} = 0, \qquad k = 0, 1, 2.$$

Setzen wir nun $h = 1/2$ ein, so erhalten wir 5 Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_{-1} + y_0 - y_1 &= 0 \\ 4y_{-1} + (\lambda - 8)y_0 + 4y_1 &= 0 \\ 4y_0 + (\lambda - 8)y_1 + 4y_2 &= 0 \\ 4y_1 + (\lambda - 8)y_2 + 4y_3 &= 0 \\ y_1 + y_2 - y_3 &= 0 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & & \\ 4 & (\lambda-8) & 4 & & \\ & 4 & (\lambda-8) & 4 & \\ & & 4 & (\lambda-8) & 4 \\ & & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ersetzen wir nun in den mittleren drei Gleichungen die Unbekannten y_{-1} und y_3 mit Hilfe der ersten Gleichung (d.h. $y_{-1} = -y_0 + y_1$) und letzten Gleichung (d.h. $y_3 = y_1 + y_2$), so erhalten wir ein System mit drei Unbekannten:

$$\begin{aligned} (\lambda - 12)y_0 + 8y_1 &= 0, \\ 4y_0 + (\lambda - 8)y_1 + 4y_2 &= 0, \\ 8y_1 + (\lambda - 4)y_2 &= 0. \end{aligned}$$

In Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 12 & 8 & 0 \\ 4 & \lambda - 8 & 4 \\ 0 & 8 & \lambda - 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen wieder nichttriviale Lösungen (die Nullfunktion ist ja Lösung). Wir setzen also die Determinante dieser Matrix gleich Null und bestimmen damit die Eigenwerte:

$$(\lambda - 12)(\lambda - 8)(\lambda - 4) - 4 \cdot 8(\lambda - 12) - 4 \cdot 8(\lambda - 4) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda^3 - 24\lambda^2 + 112\lambda + 128 = 0.$$

Institut für Angewandte Mathematik
Leibniz Universität Hannover
Dr. Frank Attia, Dr. Florian Leydecker
Hannover, 16. Juni 2025

Mathematik für die Ingenieurwissenschaften III - Numerik
SoSe 2025 – Übung 10 – Lösungen

Themen

Lösung von Anfangswertaufgaben mit Einschrittverfahren
- explizites Euler-Verfahren: Kapitel 4.3.1
- klassisches Runge-Kutta-Verfahren: Kapitel 4.3.3 mit Schrittweitenkontrolle: Kapitel 4.3.5
- implizites Euler-Verfahren (Definition 4.59) implizite Trapez-Methode (Definition 4.60)

Zentralübung

Präsenzaufgabe 10.1 [Euler-Verfahren 1D]

Führen Sie einen Schritt des (expliziten) Euler-Verfahrens mit Schrittweite $\tau = \frac{1}{2}$ zur näherungsweisen Lösung der Anfangswertaufgabe $u'(t) = u(t)^2 + t$ mit $u(1) = 3$ durch.

Präsenzaufgabe 10.2 [Euler-Verfahren 2D]

Formen Sie das AWP $u''(t) = u'(t) - tu(t) + 3$ mit $u(1) = 0$, $u'(1) = -1$ in ein System erster Ordnung um und führen Sie einen Schritt mit dem Euler-Verfahren zur Schrittweite $\tau = 2$ durch. Wie lautet die Näherung für $u'(3)$?

Präsenzaufgabe 10.4 [Lineares autonomes 2d-System: Euler und Implizite-Verfahren]

Wir betrachten wieder die AWA $u''(t) = -u(t)$, $\quad t \in [0,1],\ u(0) = 0,\ u'(0) = 1$ bzw. das zugehörige System

$$\vec{u}'(t) = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ -u_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{u}(t), \qquad \vec{u}(0) := \vec{u}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine Matrix-Vektor-Formel an, wie sich bei

(a) beim Euler-Verfahren **(b)** beim impliziten Euler-Verfahren **(c)** bei der Trapez-Methode

die erste Näherung aus der Startnäherung und allgemein die $(k+1)$-te Näherung aus der k-ten ergibt.

Kurzteil

Aufgabe 10.5 [Euler-Verfahren]

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u'(t) = u(t)^2 + t, \; u(2) = 2$$

Berechnen Sie $u(3)$ näherungsweise mit dem expliziten Euler-Verfahren zur Schrittweite $\tau = \frac{1}{2}$.

Lösung

Es ist $u^{(0)} = 2$, sowie $t_0 = 2$, $t_1 = 2.5$. Somit:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^{(0)} + \tau \cdot f(t_0, u^{(0)}) = 2 + 0.5(2^2 + 2) = 2 + 3 = 5 \approx u(2.5), \\ u^{(2)} &= 5 + 0.5(5^2 + 2.5) = 18.75 \approx u(3). \end{aligned}$$

Aufgabe 10.6 [Fehlerreduktion]

Wenn man beim Euler-Verfahren die Schrittweite durch 10 teilt, um welchen Faktor wird sich der Fehler ungefähr reduzieren? Was passiert beim Verfahren von Euler-Heun und beim Runge-Kutta-Verfahren?

Lösung

Der Fehler wird beim Euler-Verfahren etwa um den Faktor 10^{-1}, bei Euler-Heun etwa um den Faktor 10^{-2} und beim Runge-Kutta-Verfahren etwa um den Faktor 10^{-4} reduziert.

Aufgabe 10.7 [implizites Euler-Verfahren]

Gegeben sei das AWP

$$u'(t) = tu(t) - u(t)^2, \qquad u(1) = 1.$$

Rechnen Sie einen Schritt mit dem impliziten Euler-Verfahren zur Schrittweite $\tau = 0.5$.
Hinweis: Verwenden Sie die positive Wurzel!

Lösung

Man liest ab $t_0 = 1$, $u^{(0)} = 1$, $\tau = 0.5$ und $f(t, u) = tu - u^2$ und erhält:

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} + \tau \cdot (t_{i+1} u^{(i+1)} - {u^{(i+1)}}^2)$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} && u^{(1)} &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot u^{(1)} - {u^{(1)}}^2 \right), \\ \iff && 2u^{(1)} &= 2 + \frac{3}{2} \cdot u^{(1)} - {u^{(1)}}^2, \\ \iff && {u^{(1)}}^2 + \frac{1}{2} u^{(1)} - 2 &= 0, \\ \iff && \left(u^{(1)} + \frac{1}{4} \right)^2 &= 2 + \frac{1}{16}, \\ \iff && u^{(1)} &= -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{4}. \end{aligned}$$

Man erhält die Näherung $u(1.5) \approx -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}$. Bemerkung: $-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4} \approx 1.1861$.

Aufgabenteil

Aufgabe 10.8 [Explizites Euler-Verfahren, auch zeichnerisch]

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = u^2(t) \quad \text{mit} \quad u(0) = 1.$$

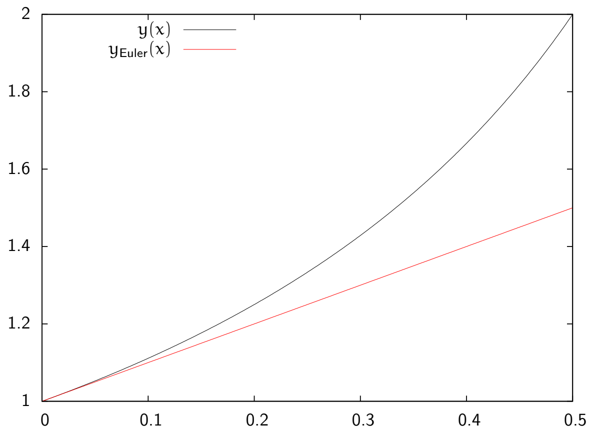
(a) Bestimmen Sie zeichnerisch mit dem Euler-Verfahren mit Schrittweite $\tau = 1/2$ einen Näherungswert für $u(1/2)$.

(b) Bestimmen Sie rechnerisch mit dem Euler-Verfahren mit Schrittweite $\tau = 1/2$ einen Näherungswert für $u(1/2)$. Vergleichen Sie mit (a).

(c) Geben Sie die nach dem Euler-Verfahren mit Schrittweite $\tau = 1/4$ berechneten Näherungen an den Stellen $t_k = k \cdot \tau$, $k = 1, \dots, 4$ an. Bestimmen Sie u und stellen Sie eine Tabelle auf, in der Sie die Werte von u sowie die Euler-Näherungen an den t_i (wo vorhanden) miteinander vergleichen.

Lösung

(a) Man liest aus der Skizze die Näherung $u_{0.5}^{(1)} = 1.5$ ab. u (in der Skizze „y) braucht nicht gezeichnet zu werden.



(b) $u_1 = u_0 + \tau \cdot f(t, u_0) = 1 + 0.5 \cdot 1^2 = 1.5.$

(c) Bestimmung von u: s. u. (liefert: $u = 1/(1-t)$).
Euler Verfahren: $u_\tau^{(i+1)} = u_\tau^{(i)} + \tau \cdot f(t_{\tau,i}, u_\tau^{(i)})$. Man erhält somit für $\tau = 0.5$ und $\tau = 0.25$:

i	0	1	2	3	4
$t_{0.25,i}$	0	0.25	0.5	0.75	1
$u(t_{0.25,i})$	1	$1.33\bar{3}$	2	4	∞
$u_{0.25}^{(i)}$	1	1.25	1.6406	2.3135	3.6517
$u_{0.5}^{(i/2)}$	1		1.5		2.6250

Mit Trennung der Variablen erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = u^2 \quad &\iff \quad \frac{1}{u^2}\,du = 1 \cdot dt \\ &\iff \quad \int \frac{1}{u^2}\,du = \int 1 \cdot dt \\ &\iff \quad -\frac{1}{u} = t - c \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{c-t}. \end{aligned}$$

Aus dem gegebenen Anfangswert $u(0) = 1$ folgt $1 = \frac{1}{c} \;\Rightarrow\; c = 1$, also

$$u(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Aufgabe 10.9 [Liefert das explizite Euler-Verfahren hier eine falsche Näherungslösung?]

Die Funktion $u(t) = t^2$ löst das Anfangswertproblem

$$u'(t) = 2\sqrt{u(t)} \qquad \forall\, t \geqslant 0, \qquad u(0) = 0.$$

Welche Approximationswerte liefert das Euler-Verfahren mit Schrittweite τ und $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, 2, \ldots$? Erklären Sie das Ergebnis!

Lösung

Hier: Schrittweite τ, $t_j = j\tau$, $f(t, u(t)) = 2\sqrt{u(t)}$.
Eulerverfahren: $u^{(i+1)} = u^{(i)} + \tau f(t_i, u^{(i)})$ also hier $u^{(i+1)} = u^{(i)} + \tau 2\sqrt{u^{(i)}}$.

$$\begin{aligned}
u^{(0)} &= u(0) = 0\\
u^{(1)} &= u^{(0)} + \tau 2\sqrt{u^{(0)}} = 0 + 0\tau = 0\\
u^{(2)} &= u^{(1)} + \tau 2\sqrt{u^{(1)}} = 0 + 0\tau = 0\\
\vdots\ &\quad \vdots\\
u^{(i)} &= u^{(i-1)} + \tau 2\sqrt{u^{(i-1)}} = 0 + 0\tau = 0
\end{aligned}$$

Die Lipschitzbedingung ist in keiner offenen Umgebung von $u = 0$ erfüllt, daher muss es keine eindeutige Lösung des AWPs geben. In der Tat, und wie aus der Vorlesung bekannt ist, ist $u(t) = 0$ ebenfalls eine Lösung.

Aufgabe 10.10 [Explizites Euler-Verfahren: DGL höherer Ordnung (hier: Ordnung 2)]

Schreiben Sie das Anfangswertproblem

$$u''(t) - 2u'(t) + u(t) = 0, \qquad u(0) = 0,\ u'(0) = 1$$

als System erster Ordnung und berechnen Sie dann mit dem Euler-Verfahren zur Schrittweite $\tau = 1/4$ Näherungen für $u(1)$ und $u'(1)$.

Lösung

Wie immer setzt man $u_1 = u(t)$ und $u_2 = u'(t)$. Dann erhält man als System

$$\begin{aligned}
u_1' &= u_2\\
u_2' &= -u_1 + 2u_2
\end{aligned}$$

oder in Matrix-Vektor Schreibweise

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Euler-Verfahren: $\Phi(\tau, u; \tau) = \vec{f}(t, u)$. Es ergibt sich mit $\tau = 1/4$, $t_0 = 0$ und $\vec{u}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\vec{u}^{(1)} &= \vec{u}^{(0)} + \tau\vec{f}(t_0, \vec{u}^{(0)}) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{k}_{\tau,0,1}} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \\
\vec{u}^{(2)} &= \vec{u}^{(1)} + \tau\vec{f}(t_1, \vec{u}^{(1)}) \\
&= \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/2 \end{pmatrix}}_{\vec{k}_{\tau,1,1}} = \begin{pmatrix} 5/8 \\ 35/16 \end{pmatrix}, \\
\vec{u}^{(3)} &= \vec{u}^{(2)} + \tau\vec{f}(t_2, \vec{u}^{(2)}) \\
&= \begin{pmatrix} 5/8 \\ 35/16 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/8 \\ 35/16 \end{pmatrix}}_{\vec{k}_{\tau,2,1}} = \begin{pmatrix} 75/64 \\ 25/8 \end{pmatrix}, \\
\vec{u}^{(4)} &= \vec{u}^{(3)} + \tau\vec{f}(t_3, \vec{u}^{(3)}) \\
&= \begin{pmatrix} 75/64 \\ 25/8 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 75/64 \\ 25/8 \end{pmatrix}}_{\vec{k}_{\tau,3,1}} = \frac{1}{256} \begin{pmatrix} 500 \\ 1125 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \qquad
\begin{aligned}
u(1) &\approx u_1^{(4)} = \frac{500}{256} \approx 1,9531 \\
u'(1) &\approx u_2^{(4)} = \frac{1125}{256} \approx 4,3945
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10.11 [Klassisches Runge-Kutta Verfahren für DGL höherer Ordnung (hier: Ordnung 2)]

Schreiben Sie das Anfangswertproblem

$$
u'' = t + u^2 + u', \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1
$$

als System erster Ordnung und berechnen Sie dann mit dem dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren zur Schrittweite $\tau = 1/2$ jeweils Näherungen für $u(1)$ und $u'(1)$.

Lösung

Setze $u_1 := y$, $u_2 := u_1' = u'$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Damit erhält man das System erster Ordnung

$$
\vec{u}' = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u_2 \\ t + u_1^2 + u_2 \end{pmatrix},
$$

mit Anfangswerten $\vec{u}^{(0)} := \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der „rechten Seite" $\vec{f}(t, \vec{u}) = \begin{pmatrix} u_2 \\ t + u_1^2 + u_2 \end{pmatrix}$.

Verfahren von Runge-Kutta:

Schritt 1:

$$
\begin{aligned}
\vec{k}_1 &= \vec{k}_{0.5,0,1} = \vec{f}(t_0, \vec{u}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\vec{k}_2 &= \vec{k}_{0.5,0,2} = \vec{f}(t_0 + \tfrac{\tau}{2}, \vec{u}^{(0)} + \tfrac{\tau}{2} \cdot \vec{k}_1) = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.5625 \end{pmatrix}, \\
\vec{k}_3 &= \vec{k}_{0.5,0,3} = \vec{f}(t_0 + \tfrac{\tau}{2}, \vec{u}^{(0)} + \tfrac{\tau}{2} \cdot \vec{k}_2) = \begin{pmatrix} 1.3906 \\ 1.7383 \end{pmatrix}, \\
\vec{k}_4 &= \vec{k}_{0.5,0,4} = \vec{f}(t_0 + \tau, \vec{u}^{(0)} + \tau \cdot \vec{k}_3) = \begin{pmatrix} 1.8691 \\ 2.8526 \end{pmatrix}, \\
&\Rightarrow \quad \vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(0)} + 0.5 \cdot \frac{\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4}{6} = \begin{pmatrix} 0.6792 \\ 1.8712 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Schritt 2:

$$
\begin{aligned}
\vec{k}_1 &= \vec{k}_{0.5,1,1} = \vec{f}(t_1, \vec{u}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1.8712 \\ 2.8325 \end{pmatrix}, \\
\vec{k}_2 &= \vec{k}_{0.5,1,2} = \vec{f}(t_1 + \tfrac{\tau}{2}, \vec{u}^{(1)} + \tfrac{\tau}{2} \cdot \vec{k}_1) = \begin{pmatrix} 2.5793 \\ 4.6449 \end{pmatrix}, \\
\vec{k}_3 &= \vec{k}_{0.5,1,3} = \vec{f}(t_1 + \tfrac{\tau}{2}, \vec{u}^{(1)} + \tfrac{\tau}{2} \cdot \vec{k}_2) = \begin{pmatrix} 3.0324 \\ 5.5354 \end{pmatrix}, \\
\vec{k}_4 &= \vec{k}_{0.5,1,4} = \vec{f}(t_1 + \tau, \vec{u}^{(1)} + \tau \cdot \vec{k}_3) = \begin{pmatrix} 4.6389 \\ 10.4587 \end{pmatrix}, \\
&\Rightarrow \quad \vec{u}^{(2)} = \vec{u}^{(1)} + 0.5 \cdot \frac{\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4}{6} = \begin{pmatrix} 2.1570 \\ 4.6755 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Folglich ist $u(1) \approx 2.1570$ und $u'(1) \approx 4.6755$.

Nicht gefragt ist diese Semester nach dem Verfahren von Runge und dem
Verfahren von Euler-Heun:
Schritt 1:

$$
\vec{k}_{0.5,0,1} = \vec{f}(t_0, \vec{u}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 + 0^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Euler-Prädiktor: } \vec{u}^{(0)} + \tau \cdot \vec{k}_{0.5,0,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{k}_{0.5,0,2} &= \vec{f}\left(t_0 + \tau, \vec{u}^{(0)} + \tau \cdot \vec{k}_{0.5,0,1}\right) \\
&= \vec{f}\left(\, 0.5\,, \ \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}\ \right) = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 + 0.5^2 + 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.25 \end{pmatrix}, \\
&\Rightarrow \quad \vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(0)} + \tau \cdot \frac{k_{0.5,0,1} + k_{0.5,0,2}}{2} = \begin{pmatrix} 0.625 \\ 1.8125 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Schritt 2:

$$
\begin{aligned}
\vec{k}_{0.5,1,1} &= \vec{f}(0.5, \vec{u}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1.8125 \\ 2.7031 \end{pmatrix}, \\
\vec{k}_{0.5,1,2} &= \vec{f}(1, \vec{u}^{(1)} + 0.5 \cdot \vec{k}_{0.5,1,1}) = \begin{pmatrix} 3.1641 \\ 6.5088 \end{pmatrix}, \\
&\Rightarrow \quad \vec{u}^{(2)} = \vec{u}^{(1)} + 0.5 \cdot \frac{k_{0.5,1,1} + k_{0.5,1,2}}{2} = \begin{pmatrix} 1.8691 \\ 4.1155 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Folglich ist $u(1) \approx 1.8691$ und $u'(1) \approx 4.1155$.

Verfahren von Runge:

Schritt 1:

$$\vec{k}_{0.5,0,1} = \vec{f}(t_0, \vec{u}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{k}_{0.5,0,2} = \vec{f}(t_0 + \tfrac{\tau}{2}, \vec{u}^{(0)} + \tfrac{\tau}{2} \cdot \vec{k}_{0.5,0,1}) = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.5625 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(0)} + 0.5 \cdot k_{0.5,0,2} = \begin{pmatrix} 0.6250 \\ 1.7812 \end{pmatrix}.$$

Schritt 2:

$$\vec{k}_{0.5,1,1} = \vec{f}(t_1, \vec{u}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1.7812 \\ 2.6719 \end{pmatrix},$$

$$\vec{k}_{0.5,1,2} = \vec{f}(t_1 + \tfrac{\tau}{2}, \vec{u}^{(1)} + \tfrac{\tau}{2} \cdot \vec{k}_{0.5,1,1}) = \begin{pmatrix} 2.4492 \\ 4.3448 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u}^{(2)} = \vec{u}^{(1)} + 0.5 \cdot k_{0.5,1,2} = \begin{pmatrix} 1.8496 \\ 3.9536 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist $u(1) \approx 1.8496$ und $u'(1) \approx 3.9536$.

Aufgabe 10.12 [Implizite Verfahren]

Gegeben sei die AWA

$$u' = 1 + \frac{u}{t}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 1.4, \quad u(1) = 2.$$

(a) Man zeige, dass $u(t) = t\ln(t) + 2t$ die AWA löst.

(b) Zur Schrittweite $\tau = 0.2$ rechne man einen Schritt mit

(i) dem expliziten Euler-Verfahren,

(ii) der impliziten Trapez-Methode,

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \frac{\tau}{2}\left[f(t_n, u^{(n)}) + f(t_{n+1}, u^{(n+1)})\right].$$

(iii) dem impliziten Euler-Verfahren.

(c) Zu allen drei vorigen Verfahren gebe man den exakten Approximationsfehler an der Stelle $t = 1.2$ an.

Lösung

(a) $u'(t) = 1 + \ln(t) + 2 = 1 + \frac{t\ln(t)+2t}{t} = 1 + \frac{u}{t}$. Ferner gilt $u(1) = 1 \cdot \ln(1) + 2 = 2$. Also löst $u(t) = t\ln(t) + 2t$ die AWA.

(b) Man berechnet:

(i) $u^{(1)}_{\text{Euler}} = u^{(0)} + \tau f(t_0, u^{(0)}) = 2 + 0.2\left(1 + \frac{2}{1}\right) = 2.6.$

(ii) $u^{(1)}_{\text{Trapez}} = u^{(0)} + \frac{\tau}{2}\left[f(t_0, u^{(0)}) + f(t_1, u^{(1)}_{\text{Trapez}})\right]$

$= 2 + 0.1\left(1 + \frac{2}{1} + 1 + \frac{u^{(1)}_{\text{Trapez}}}{1.2}\right) = 2.4 + 0.08\overline{3} \cdot u^{(1)}_{\text{Trapez}}$

$\Rightarrow u^{(1)}_{\text{Trapez}} = \frac{144}{55} = 2.6\overline{18}$

(iii) $u^{(1)}_{\text{i.Euler}} = u^{(0)} + \tau \cdot \left(1 + \frac{u^{(1)}_{\text{i.Euler}}}{1.2}\right) \iff \frac{5}{6}u^{(1)}_{\text{i.Euler}} = 2.2 \iff u^{(1)}_{\text{i.Euler}} = 2.64.$

(c) Man berechnet $u(1.2) \approx 2.618786$. Für den Approximationsfehler in $t = 1.2$ ergibt sich also:

(i) $|u(1.2) - u^{(1)}_{\text{Euler}}| \approx 0.0188,$

(ii) $|u(1.2) - u^{(1)}_{\text{Trapez}}| \approx 0.0006,$

(iii) $|u(1.2) - u^{(1)}_{\text{i.Euler}}| \approx 0.0212.$

Aufgabe 10.13 [Verschiedene Verfahren für ein allgemeineres System]

Zum AWP

$$\vec{u}'(t) = \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix} \vec{u}(t), \qquad \vec{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 99.9 \end{pmatrix}$$

berechne man zur Schrittweite $\tau = 0.1$ zwei Schritte mit

(a) dem expliziten Euler-Verfahren,

(b) dem impliziten Euler-Verfahren.

(c) der (impliziten) Trapez-Methode.

Lösung

Man liest ab: $t_0 = 0$, $\vec{u}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 99.9 \end{pmatrix}$.

(a) Explizites Euler-Verfahren: Es ist $\vec{u}^{(k+1)} = \vec{u}^{(k)} + \tau \left(\begin{smallmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{smallmatrix}\right) \vec{u}^{(k)}$ und somit:

$$\begin{aligned} \vec{u}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 99.9 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 99.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9900 \\ 98.9010 \end{pmatrix}, \\ \vec{u}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0.9900 \\ 98.9010 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9900 \\ 98.9010 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9801 \\ 97.9120 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Implizites Euler-Verfahren: Es ist $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - \tau \left(\begin{smallmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{smallmatrix}\right)\right) \vec{u}^{(k+1)} = \vec{u}^{(k)}$ und somit:

$$\begin{aligned} &\text{Löse: } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix}\right) \vec{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 99.9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.9901 \\ 98.9109 \end{pmatrix}, \\ &\text{Löse: } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix}\right) \vec{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.9901 \\ 98.9109 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.9803 \\ 97.9316 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Trapez-Methode: Es ist $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - \frac{\tau}{2} \left(\begin{smallmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{smallmatrix}\right)\right) \vec{u}^{(k+1)} = \vec{u}^{(k)} + \frac{\tau}{2} \left(\begin{smallmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{smallmatrix}\right) \vec{u}^{(k)}$ und somit:

$$\begin{aligned} &\text{Löse: } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\tau}{2} \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix}\right) \vec{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 99.9 \end{pmatrix} + \frac{\tau}{2} \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 99.9 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.9900 \\ 98.9060 \end{pmatrix}, \\ &\text{Löse: } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\tau}{2} \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix}\right) \vec{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.990 \\ 98.906 \end{pmatrix} + \frac{\tau}{2} \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.990 \\ 98.906 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.9802 \\ 97.9218 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zusatzaufgaben

Aufgabe 10.14 [Euler-Verfahren (Wiederholung)]

Führen Sie zwei Schritte des Euler-Verfahrens mit Schrittweite $\tau = 0.1$ zur näherungsweisen Lösung der Anfangswertaufgabe $u'(t) = tu(t)$, $u(0) = 0.1$ durch.

Lösung

Mit $u^{(0)} = 0.1$, $t_0 = 0$, $t_1 = 0.1$ folgt:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^{(0)} + \tau \cdot t_0 \cdot u^{(0)} = 0.1 + 0.1 \cdot (0 \cdot 0.1) = 0.1, \\ u^{(2)} &= u^{(1)} + \tau \cdot t_1 \cdot u^{(1)} = 0.1 + 0.1 \cdot (0.1 \cdot 0.1) = 0.101. \end{aligned}$$

Aufgabe 10.15 [Runge–Kutta-Verfahren (Wiederholung) und Schrittweitenkontrolle]
Betrachten Sie folgende Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = -2tu^2(t), \quad u(-1) = \tfrac{1}{2}.$$

Berechnen Sie mit dem klassischen Runge–Kutta–Verfahren (Schrittweite $\tau = 0.2$) eine Näherung $u^{(1)}$ für $u(-0.8)$, und entscheiden Sie an Hand der Schrittweitenkontrolle, wie Sie verfahren würden, um einen weiteren Näherungswert zu berechnen.

Lösung

Wir berechnen zunächst für $t_0 = -1$, $u^{(0)} = 0.5$, $\tau = 0.2$ mit $f(t,u) = -2tu^2(t)$ die Steigungen $k_{h,0,j}$, $j = 1,2,3,4$:

$$\begin{aligned}
k_{0.2,0,1} &= f(t_0, u^{(0)}) = -2\cdot(-1)\cdot 0.25 = 0.5,\\
k_{0.2,0,2} &= f(t_0 + \tfrac{0.2}{2}, u^{(0)} + \tfrac{0.2}{2}k_{0.2,0,1}) \approx 0.5445,\\
k_{0.2,0,3} &= f(t_0 + \tfrac{0.2}{2}, u^{(0)} + \tfrac{0.2}{2}k_{0.2,0,2}) \approx 0.5533,\\
k_{0.2,0,4} &= f(t_0 + \tau, u^{(0)} + \tau\cdot k_{0.2,0,3}) \approx 0.5967
\end{aligned}$$

und damit

$$u^{(1)} = u^{(0)} + 0.2\cdot\frac{k_{0.2,0,1} + 2k_{0.2,0,2} + 2k_{0.2,0,3} + k_{0.2,0,4}}{6} = 0.609146302.$$

Schrittweitenkontrolle: Man berechne die Approximation der Schrittkennzahl:

$$\left|\frac{k_{0.2,0,3} - k_{0.2,0,2}}{k_{0.2,0,2} - k_{0.2,0,1}}\right| = q_0.$$

Ist der Ausdruck > 0.1, so wiederhole man den Schritt mit halber Schrittweite. Ist $q_0 < 0.025$ so akzeptiere $u^{(1)}$ und rechne mit doppelter Schrittweite weiter (Schrittweite ist kleiner als nötig).
Hier:

$$q_0 = 0.1977 > 0.1 \quad\Rightarrow\quad \text{Schrittweite halbieren und Schritt wiederholen!}$$

Bemerkung: Führt man zwei Schritte mit der Schrittweite $\tau = 0.1$ durch, so erhält man $u(-0.8) \approx u^{(2)} = 0.60973863$ (exakt: $u(-0.8) = 0.6097560$).

Aufgabe 10.16 [Implizites Euler-Verfahren (Wiederholung) aber hier für eine DGL 2. Ordnung]
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\text{AWA} \qquad u''(t) = -tu^2(t),\ t\in[0,1],\ u(0) = 0,\ u'(0) = 1\,.$$

Gesucht: die Implizit-Euler-Näherung(en) für $t^* = 1/4$ zur Zerlegung in *ein* Intervall $\leftrightarrow$ Schrittweite $\tau = 1/4$.

Lösung

Zunächst wird die AWA in ein System erster Ordnung transformiert mit $u_1 := u$, $u_2 := u'$:

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}u_2\\-t\cdot u_1^2\end{pmatrix}, \quad t\in[0,1], \quad \begin{pmatrix}u_1(0)\\u_2(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Man liest nun ab: $t_0 = 0$, $\tau = \frac14$, $\vec{u}^{(0)} = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ und $\vec{f}(t,\vec{u}) = \left(\begin{smallmatrix}u_2\\-t\cdot u_1^2\end{smallmatrix}\right)$ und erhält somit:

$$\vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(0)} + \tau\vec{f}(t_1, \vec{u}^{(1)}) \iff \begin{pmatrix}u_1^{(1)}\\u_2^{(1)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \frac14\begin{pmatrix}u_2^{(1)}\\-t_1\cdot {u_1^{(1)}}^2\end{pmatrix}.$$

Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
u_1^{(1)} &= \tfrac14 u_2^{(1)},\\
u_2^{(1)} &= 1 + \tfrac14\left(-\tfrac14 {u_1^{(1)}}^2\right).
\end{aligned}$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite führt auf das Lösen von

$$\frac{1}{256}{u_2^{(1)}}^2 + u_2^{(1)} - 1 = 0 \quad\iff\quad u_2^{(1)} = -256.9961 \ \vee\ u_2^{(1)} = 0.9961$$

und somit durch Einsetzen $u_1^{(1)} = -64.2490$ oder $u_1^{(1)} = 0.2490$.
Bemerkung: Die Wahl der „richtigen" Näherung wird nun manchmal durch die Durchführung eines „Prädiktorschrittes" versucht zu bestimmen, was hier mittels explizitem Euler-Verfahren demonstriert wird:

$$\vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(0)} + \tau\,\vec{f}(t_0, \vec{u}^{(0)}) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \frac14\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.25\\1\end{pmatrix}.$$

Somit erhält man die Implizit-Euler-Näherungen $u(\frac14) \approx 0.2490$ (da näher an 0.25) und $u'(\frac14) \approx 0.9961$.

Institut für
Angewandte Mathematik

Leibniz
Universität
Hannover

Dr. Frank Attia, Dr. Florian Leydecker

Hannover, 02. Juni 2025

Mathematik für die Ingenieurwissenschaften III - Numerik
SoSe 2025 – Übung 9 – Lösungen

Themen

Laplace Transformation zur Lösung linearer DGLn mit konstanten Koeffizienten

- Definition 4.16
- Rechenregeln + Tabelle: Kapitel 4.2.3
- Lösung von Anfangswertaufgaben: Satz 4.31, Satz 4.34 sowie Satz 4.42 und Satz 4.45

Zentralübung

Präsenzaufgabe 9.1 [Laplace-Transformation eines AWPs (s. Satz 4.31 und zugehöriges Beispiel)]

Transformieren Sie

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = g(x), \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

gemäß Satz 4.31 bzw. zugehörigem Beispiel 4.33.

Präsenzaufgabe 9.2 [Ansatz PBZ]

Machen Sie zu

$$\frac{2s-1}{(s-1)^3(s^2+4)^2(s^2+1)}$$

den komplexwertigen Ansatz

für die Partialbruchzerlegung (**ohne** die Koeffizienten des Ansatzes zu bestimmen).
Wie ändert sich der Ansatz, wenn der Nenner zusätzlich noch den Faktor $s^2 - 9$ enthält?

Präsenzaufgabe 9.3 [PBZ und Rücktransformation]

(a) Rücktransformiere $F(s) = \frac{1}{(s-a)^n}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{C}$.

(b) Rücktransformiere $F(s) = \dfrac{s-2}{s^2-2s+10}$ unter Zuhilfenahme der *Partialbruchzerlegung*.

Präsenzaufgabe 9.4 [Lsg. des lin. AWP mit hom. DGL PBZ (s. Sätze 4.42 und 4.45)]

Bei einer reellwertigen Anfangswertaufgabe (AWA) habe $Y(s) = (\mathcal{L}y)(t)$ Partialbruchzerlegung

$$Y(s) = \frac{A}{s-(4+3i)} + \frac{B}{s-(4-3i)} + \frac{C}{(s-(4+3i))^2} + \frac{D}{(s-(4-3i))^2} + \frac{E}{(s-5)} + \frac{F}{(s-5)^2} + \frac{G}{(s-5)^3}$$

mit den Koeffizienten

$$A = 6+7i,\ B = 6-7i, C = 8+9i,\ D = 8-9i, E = 10,\ F = 11 \text{ und } G = 12.$$

Bestimmen Sie

(a) die **komplexwertige** Form der Lösung $y(t)$ dieser AWA durch Rücktransformation von $Y(s)$ (s. Satz 4.42),

(b) die **reellwertige** Form der Lösung $y(t)$ dieser AWA durch Rücktransformation von $Y(s)$ (s. Satz 4.45).

Präsenzaufgabe 9.5 [AWP komplett]

Geben Sie einen Überblick zur Lösung von: *Man löse in Abhängigkeit von beliebigen $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ das folgende AWP mit $\alpha \geqslant 0$:*

$$y''(t) \quad +4y(t) \quad = \quad \cos(\alpha t) \qquad y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1.$$

Lösung

Es $c_1 = 0,\ c_0 = 4$ und $\mathcal{L}g(s) = (\mathcal{L}\cos(\alpha t))(s) = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$ (auch für $\alpha = 0$) und das charakteristische Polynom ist $P(s) = s^2 + 4$. Satz 4.31 oder Anwenden von a) und h_2) liefern

$$Y(s) \quad = \quad \overbrace{\frac{1}{s^2+4} \cdot \frac{s}{s^2+\alpha^2}}^{\frac{\mathcal{L}g}{P}} \quad + \quad \overbrace{y_0 \underbrace{\frac{s}{s^2+4}}_{\overset{\text{Tabelle}}{\rightsquigarrow}\ \cos(2t)} \quad + \quad y_1 \underbrace{\frac{1}{s^2+4}}_{\overset{\text{Tabelle}}{\rightsquigarrow}\ \frac{1}{2}\sin(2t)}}^{\frac{Q}{P}} \quad .$$

Somit haben wir die Lösung $(\mathcal{L}^{-1}\frac{Q}{P})(t) = y_0 \cos(2t) + \frac{y_1}{2}\sin(2t)$ des zugehörigen AWPs mit homogener DGL. Es verbleibt die Rücktransformation von $\frac{\mathcal{L}g}{P} = \frac{1}{s^2+4} \cdot \frac{s}{s^2+\alpha^2}$ zu der sehr speziellen Lösung $(\mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{L}g}{P})$ der inhomogen DGL mit homogenen ABen.
Zunächst betrachten wir den Fall $\alpha = 2$ (s. Tabelle):

$$(\mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{L}g}{P})(t) = \left(\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+4} \cdot \frac{s}{s^2+\alpha^2}\right)(t) \quad \overset{\alpha=2}{=} \quad \left(\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{4}\frac{2 \cdot \overbrace{2}^{\omega} \cdot s}{(s^2 + \underbrace{4}_{\omega^2})^2}\right)(t) \quad = \quad \frac{1}{4}\, t \sin(\underbrace{2}_{\omega} t) \quad .$$

Die Lösung für $\alpha = 2$ lautet also

$$y(t) \quad = \quad y_0 \cos(2t) \quad + \quad \frac{y_1}{2}\sin(2t) \quad + \quad \frac{1}{4}t\sin(2t) \qquad \alpha = 2.$$

Jetzt $0 \leqslant \alpha \neq 2$ mit komplexwertiger Partialbruchzerlegung durchführen:

$$\frac{s}{(s^2+4)(s^2+\alpha^2)} \quad = \quad \frac{c_{1,1}}{s-2i} + \frac{c_{3,1}}{s+2i} + \frac{c_{2,1}}{s-\alpha i} + \frac{c_{4,1}}{s+\alpha i}$$

bzw. im Fall $\alpha = 0$

$$\frac{1}{(s^2+4)s} \quad = \quad \frac{c_{1,1}}{s-2i} + \frac{c_{3,1}}{s+2i} + \frac{\tilde{c}_{2,1}}{s} \qquad (\text{mit } \tilde{c}_{2,1} \triangleq c_{2,1} + c_{4,1}).$$

Hier kann man jeweils, da nur einfache Nullstellen auftreten, alle $c_{i,1}$ durch die „Zuhaltemethode" bestimmen [i. Allg.: mit $P(s)$ Multiplizieren und LGS via Koeffizientenvergleich aufstellen, s. o.]. Wir zeigen den Fall $\alpha > 0$:

- Multiplikation mit $(s-2i)$ und Einsetzen von $s = 2i$ liefert: $c_{1,1} = \frac{2i}{(4i)(-4+\alpha^2)} = \frac{1}{2\cdot(\alpha^2-4)}$.
- Multiplikation mit $(s+2i)$ und Einsetzen von $s = -2i$ liefert: $c_{3,1} = \frac{-2i}{(-4i)(-4+\alpha^2)} = \overline{c_{1,1}}$. [Hier sogar: $\overline{c_{1,1}} = c_{1,1}$.]
- Multiplikation mit $(s-\alpha i)$ und Einsetzen von $s = \alpha i$ liefert $c_{2,1} = \frac{\alpha i}{(-\alpha^2+4)(2\alpha i)} = \frac{-1}{2\cdot(\alpha^2-4)}$.
- Multiplikation mit $(s+\alpha i)$ und Einsetzen von $s = -\alpha i$ liefert $c_{4,1} = \overline{c_{2,1}} = \frac{-1}{2\cdot(\alpha^2-4)}$

Man erhält sofort die nur scheinbar komplexe Lösung [reelle Lösung in komplexer Darstellung]

$$(\mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{L}g}{P})(t) \quad = \quad \frac{1}{2(\alpha^2-4)}e^{2it} + \frac{1}{2(\alpha^2-4)}e^{-2it} + \frac{-1}{2(\alpha^2-4)}e^{\alpha it} + \frac{-1}{2(\alpha^2-4)}e^{-\alpha it}$$

Daraus kann wieder (s. auch Satz 4.42) die reelle Darstellung gewonnen werden, was hier besonders einfach und auch ohne Satz 4.42 geht, da alle komplexen Koeffizienten sogar reell sind und:

$$(\mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{L}g}{P})(t) \quad = \quad \frac{1}{2(\alpha^2-4)}\underbrace{(e^{2it}+e^{-2it})}_{2\cos(2t)} - \frac{1}{2(\alpha^2-4)}\underbrace{(e^{\alpha it}+e^{-\alpha it})}_{2\cos(\alpha t)} \quad = \quad \frac{\cos(2t)-\cos(\alpha t)}{\alpha^2-4}.$$

Ohne Zuhaltemethode, mit LGS [beachten: dies ist der Fall $\alpha > 0$, bei $\alpha = 0$ erhält man analog ein 3×3-System]:

$$\begin{aligned}
s &= \left(\tfrac{c_{1,1}}{s-2i} + \tfrac{c_{3,1}}{s+2i} + \tfrac{c_{2,1}}{s-\alpha i} + \tfrac{c_{4,1}}{s+\alpha i}\right) \cdot (s^2+4) \qquad\qquad \cdot (s^2+\alpha^2) \\
&= \left(\tfrac{c_{1,1}}{s-2i} + \tfrac{c_{3,1}}{s+2i} + \tfrac{c_{2,1}}{s-\alpha i} + \tfrac{c_{4,1}}{s+\alpha i}\right) \cdot (s-2i)(s+2i)(s-\alpha i)(s+\alpha i) \\
&= c_{1,1}(s+2i)(s^2+\alpha^2) + c_{3,1}(s-2i)(s^2+\alpha^2) + c_{2,1}(s^2+4)(s+\alpha i) + c_{4,1}(s^2+4)(s-\alpha i) \\
&= (c_{1,1}+c_{3,1}+c_{2,1}+c_{4,1}) \cdot s^3 \;+\; ((2i)c_{1,1} + (-2i)c_{3,1} + (\alpha i)c_{2,1} + (-\alpha i)c_{4,1}) \cdot s^2 \\
&\quad +(\alpha^2 c_{1,1} + \alpha^2 c_{3,1} + 4c_{2,1} + 4c_{4,1}) \cdot s \;+\; (2i\alpha^2 c_{1,1} + (-2i\alpha^2)c_{3,1} + 4i\alpha c_{2,1} + (-4i\alpha)c_{4,1})
\end{aligned}$$

Es ergibt sich durch Koeffizientenvergleich das LGS

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & \alpha & -\alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2 & 4 & 4 \\ 2\alpha^2 & -2\alpha^2 & 4\alpha & -4\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{3,1} \\ c_{2,1} \\ c_{4,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{III} - 4 \cdot \mathrm{I} \\ \frac{\mathrm{IV}-4\cdot\mathrm{II}}{2\alpha} \\ \mathrm{III} - \alpha^2 \cdot \mathrm{I} \\ \frac{\mathrm{IV}-\alpha^2\cdot\mathrm{II}}{\alpha} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha^2-4 & \alpha^2-4 & 0 & 0 \\ \alpha-4 & -\alpha+4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-\alpha^2 & 4-\alpha^2 \\ 0 & 0 & 4-\alpha^2 & -4+\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{3,1} \\ c_{2,1} \\ c_{4,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dabei ist bei Betrachtung von II und IV auch durch α teilen OK, deren Aussage $c_{1,1} = c_{3,1}$ und $4c_{4,1} = 1 - 4c_{2,1}$ für diesen Fall bleibt erhalten. Man beachte hier auch $\alpha \neq 2$, sonst wären jeweils 2 der Gleichungen gleich. Die neue 4. Zeile besagt $c_{4,1} = c_{2,1}$. Wir ehalten also (natürlich) dieselben Koeffizienten wie per Zuhaltemethode.

Andere Fälle analog, insgesamt ergibt sich:

$$y(x) \quad = \quad y_0 \cos(2t) \quad + \quad \frac{y_1}{2} \sin(2t) \quad + \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\sin^2(t) & \alpha = 0, \\ \frac{1}{4}\, t \sin(2t) & \alpha = 2, \\ \frac{\cos(2t)-\cos(\alpha t)}{\alpha^2-4} & \alpha \neq 0 \text{ und } \alpha \neq 2. \end{cases}$$

Kurzteil

Aufgabe 9.6 [Laplace-Transformierte]

Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte von

$$f(x) = 2e^{3x} - 2e^{-3x},$$

indem Sie die Rechenregeln und die Tabelle aus dem Skript benutzen.

Lösung

Aus der Tabelle für die Laplace-Transformierten folgt sofort

$$(\mathcal{L}f)(s) = \frac{2}{s-3} - \frac{2}{s+3} = \frac{12}{s^2-9}.$$

Alternativ: Es ist $f(x) = 4\sinh(3x)$. Man liest somit $(\mathcal{L}f)(s) = \frac{12}{s^2-9}$ sofort ab.

Aufgabe 9.7 [Laplace-Transformierte]

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$. Berechnen Sie die Laplace-Transformierten zu folgenden Funktionen und vereinfachen Sie die Terme so weit wie möglich.

(a) $f_1(x) = \frac{1}{a-b}(e^{ax} - e^{bx})$.

(b) $f_2(x) = \frac{1}{a-b}(a\,e^{ax} - b\,e^{bx})$.

Benutzen Sie die Rechenregeln und die Tabelle aus dem Skript.

Lösung

Aus der Tabelle für die Laplace-Transformierten folgt sofort

(a)

$$(\mathcal{L}f_1)(s) = \frac{1}{a-b}\big((\mathcal{L}e^{ax})(s) - (\mathcal{L}e^{bx})(s)\big) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}.$$

(b)

$$(\mathcal{L}f_2)(s) = \frac{1}{a-b}\big(a(\mathcal{L}e^{ax})(s) - b(\mathcal{L}e^{bx})(s)\big) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{s-a} - \frac{b}{s-b}\right) = \frac{s}{(s-a)(s-b)}.$$

Alternativ lässt sich die Transformierte unter Verwendung von $f_2 = f_1'$ und der Vorschrift $\mathbf{h}_1$ aus Satz 5.25 berechnen:

$$(\mathcal{L}f_2) = (\mathcal{L}f_1') = s(\mathcal{L}f_1) - \underbrace{f_1(0^+)}_{=0} = \frac{s}{(s-a)(s-b)}.$$

Aufgabe 9.8 [Anwendung der Laplace-Transformation auf AWPs]

Wie lautet bei Anwendung der Laplace-Transformation die Gleichung zur Bestimmung von $Y(s) := (\mathcal{L}y)(s)$ der folgenden Anfangswertaufgabe?

$$y'' + 4y = 1 \qquad \text{mit} \quad y(0) = 0.1,\ y'(0) = 0.2.$$

Benutzen Sie die Rechenregeln und die Tabelle aus dem Skript.

Lösung

Man verwendet Satz 5.31 und Beispiel 5.33

$$P(s) = s^2 + 4, \text{ und } Q(s) = s^0[0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2] + s^1[1 \cdot 0.1] = 0.1s + 0.2.$$

Dies liefert $(s^2 + 4)Y(s) = (\mathcal{L}\,1)(s) + \frac{s+2}{10}$ und somit wie oben $Y(s) = \frac{s^2+2s+10}{10s(s^2+4)}$.

Alternativ: Anwenden der Laplace-Transformation:

$$(\mathcal{L}\,y'' + 4y)(s) = (\mathcal{L}\,1)(s) \quad \overset{\text{S.4.22a)}}{\Longleftrightarrow} \quad (\mathcal{L}y'')(s) + 4(\mathcal{L}y)(s) = (\mathcal{L}\,1)(s).$$

Man erhält somit mit $Y(s) := \mathcal{L}(y)(s)$ und Verwendung der Vorschrift $\mathbf{h}_2$) aus Satz 5.25:

$$s^2Y(s) - \underbrace{y(0+)}_{=0.1}s - \underbrace{y'(0+)}_{=0.2} + 4Y(s) = \frac{1}{s} \quad \Longleftrightarrow \quad (s^2+4)Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{s+2}{10}$$

$$\Longleftrightarrow \quad Y(s) = \frac{s^2 + 2s + 10}{10s(s^2+4)}$$

Aufgabe 9.9 [Inverse Laplace-Transformation]

Seien $a,\ b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$. Berechnen Sie die inversen Laplace-Transformierten zu den folgenden Funktionen

(a) $F(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$,

(b) $F(s) = \frac{s}{(s-a)(s-b)}$.

Lösung

In Aufgabe 9.7 wurden die Laplace-Transformierten der Funktionen $f(x) = \frac{1}{a-b}(e^{ax} - e^{bx})$ und $f(x) = \frac{1}{a-b}(a\,e^{ax} - b\,e^{bx})$ bestimmt. Diese stimmen mit den hier angegeben Funktionen $F(s)$ überein. Es gilt für die inversen Laplace-Transformierten somit $\left(\mathcal{L}^{-1}F(s)\right)(x) = \left(\mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}f(x)\right)(s)\right)(x) = f(x)$.

Alternativ geht man wie folgt vor:

(a) Man rechnet nach:

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} \overset{\text{Ansatz PBZ}}{=} \frac{c_{1,1}}{s-a} + \frac{c_{2,1}}{s-b} \overset{\text{Lösen PBZ}}{=} \frac{1}{a-b} \cdot \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right).$$

Damit erhält man:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right) = \frac{1}{a-b} \cdot \left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-b}\right)\right) = \frac{1}{a-b} \cdot \left(e^{at} - e^{bt}\right).$$

(b) Man rechnet erneut nach:

$$\frac{s}{(s-a)(s-b)} = \ldots = \frac{1}{a-b} \cdot \left(\frac{a}{s-a} - \frac{b}{s-b}\right)$$

und erhält

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right) = \frac{1}{a-b} \cdot \left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a}{s-a}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{b}{s-b}\right)\right) = \frac{1}{a-b} \cdot \left(ae^{at} - be^{bt}\right).$$

Aufgabenteil

Aufgabe 9.10 [Periodizitätssatz]

Berechnen Sie zu der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{für } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{für } \pi < t < 2\pi \end{cases},$$

die periodisch mit der Periode 2π fortgesetzt wird, die Laplace-Transformierte unter Zuhilfenahme des Periodizitätssatzes.

Lösung

Wir wenden den Periodizitätssatz mit $T = 2\pi$ an.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}f)(s) &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-st} f(t)\, dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st} \sin(t)\, dt \\
&\overset{\text{Formels.}}{=} \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \left[\frac{e^{-st}(-s\sin(t) - \cos(t))}{s^2+1} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \left[\frac{1+e^{-s\pi}}{s^2+1} \right] = \frac{1}{(1-e^{-s\pi})(s^2+1)}.
\end{aligned}$$

Die Stammfunktion von $\int_0^{\pi} e^{-st} \sin(t)\, dt$ kann aus einer Integrationstabelle (Formelsammlung) entnommen werden. Alternativ berechnet man das Integral über 2-fache partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} e^{-st} \sin(t)\, dt &= \underbrace{\left[-\frac{1}{s} e^{-st} \sin(t) \right]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{s} \int_0^{\pi} e^{-st} \cos(t)\, dt \\
&= \left[-\frac{1}{s^2} e^{-st} \cos(t) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{s^2} \int_0^{\pi} e^{-st} \sin(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung erhält man nun:

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \qquad & \left(1+\tfrac{1}{s^2}\right) \int_0^{\pi} e^{-st} \sin(t)\, dt = \left[-\frac{1}{s^2} e^{-st} \cos(t) \right]_0^{\pi} = \frac{1}{s^2} \cdot (e^{-\pi s} + 1) \\
\Leftrightarrow \qquad & \int_0^{\pi} e^{-st} \sin(t)\, dt = \frac{1}{(1+\frac{1}{s^2})} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot (e^{-\pi s} + 1) = \frac{1+e^{-\pi s}}{(s^2+1)}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 9.11 [Inverse Laplace-Transformation]

Bestimmen Sie für folgende Funktionen die inverse Laplace-Transformierte:

(a) $\dfrac{1}{s^2-3}$, **(b)** $\dfrac{3s-5}{4s^2-4s+37}$, **(c)** $\dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}$.

Lösung

Vorbemerkung: Alle Aufgabenteile lassen sich alternativ auch anders lösen (teilweise auch einfacher, z. B. im Teil (b) und wenn man das Ergebnis in der „reellwertigen“ Form angeben möchte).
Wir lösen hier aber mit „Schema F“, also über einen Ansatz mit komplexwertiger PBZ.

(a) Es gilt: $s^2 - 3 = (s-\sqrt{3})^1(s+\sqrt{3})^1$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = \sqrt{3}$ mit Vielfachheit 1 und $\lambda_2 = -\sqrt{3}$ mit Vielfachheit 1. Der entsprechende PBZ-Ansatz lautet

$$\frac{1}{s^2-3} = \frac{c_{1,1}}{s-\sqrt{3}} + \frac{c_{2,1}}{s+\sqrt{3}}, \tag{9.11 1}$$

was bedeutet, dass die Rücktransformierte die Form

$$f(x) = c_{1,1} e^{\sqrt{3}x} + c_{2,1} e^{-\sqrt{3}x}$$

hat. Der PBZ-Ansatz (9.11 1) liefert nach Multiplikation mit dem Nenner s^2-3

$$1 \;=\; c_{1,1}\cdot(s+\sqrt{3}) + c_{2,1}\cdot(s-\sqrt{3}) \quad\Longleftrightarrow\quad 0\cdot s+1 \;=\; (c_{1,1}+c_{2,1})s + \sqrt{3}(c_{1,1}-c_{2,1})$$

und nach Koeffizientenvergleich das LGS / die Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Die Rücktransformierte lautet also $f(x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}x} - \frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}x}$.

Bemerkung: Das könnte man auch als $f(x) \;=\; \frac{\sinh(\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}}$ schreiben.

(b) Wir normieren den Nenner so, dass die höchste Potenz von s mit 1 multipliziert wird und berechnen die Nullstellen [das ist alternativ mit der pq-Formel möglich]:

$$\frac{3s-5}{4s^2-4s+37} = \frac{3s-5}{4[(s-1/2)^2+9]} = \frac{\frac{3}{4}s-\frac{5}{4}}{(s-1/2)^2+9}$$

Der Nenner $(s-1/2)^2+9$ hat also die konjugiert komplexwertigen Nullstellen $\frac{1}{2}\pm\sqrt{-9}=\frac{1}{2}\pm 3i$ jeweils mit Vielfachheit 1: $(s-1/2)^2+9=(s-(\frac{1}{2}+3i))^1(s-(\frac{1}{2}-3i))^1$, und der entsprechende PBZ-Ansatz lautet

$$\frac{\frac{3}{4}s-\frac{5}{4}}{(s-1/2)^2+9} \;=\; \frac{c_{1,1}}{s-(\frac{1}{2}+3i)} + \frac{c_{2,1}}{s-(\frac{1}{2}-3i)}, \tag{9.11 2}$$

wobei da anfangs alle Zahlen reell waren $c_{2,1}=\overline{c_{1,1}}$ gilt, was bedeutet, dass die Rücktransformierte die Form

$$f(x) \;=\; c_{1,1}e^{(\frac{1}{2}+3i)x} + \overline{c_{1,1}}e^{(\frac{1}{2}-3i)x} \overset{\text{Satz 5.45}}{=} e^{\frac{1}{2}x}\big(2\,\mathrm{Re}(c_{1,1})\cos(3x) - 2\,\mathrm{Im}(c_{1,1})\sin(3x)\big)$$

hat. Der PBZ-Ansatz (9.11 2) liefert nach Multiplikation mit dem Nenner $(s-1/2)^2+9$

$$\frac{3}{4}s-\frac{5}{4} \;=\; c_{1,1}\cdot(s-(\frac{1}{2}-3i))+c_{2,1}\cdot(s-(\frac{1}{2}+3i)) \iff \frac{3}{4}s-\frac{5}{4} \;=\; (1\cdot c_{1,1}+1\cdot c_{2,1})s+((-\frac{1}{2}+3i)c_{1,1}+(-\frac{1}{2}-3i)c_{2,1})\cdot 1,$$

und nach Koeffizientenvergleich das LGS / die Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2}+3i & -\frac{1}{2}-3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -5/4 \end{pmatrix} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8}+\frac{7}{48}i \\ \frac{3}{8}-\frac{7}{48}i \end{pmatrix}.$$

Die Rücktransformierte lautet also

$$f(x) \;=\; (\tfrac{3}{8}+\tfrac{7}{48}i)e^{(\frac{1}{2}+3i)x} + (\tfrac{3}{8}-\tfrac{7}{48}i)e^{(\frac{1}{2}-3i)x} \overset{\text{Satz 5.45}}{=} e^{\frac{1}{2}x}\big(\tfrac{3}{4}\cos(3x) - \tfrac{7}{24}\sin(3x)\big).$$

(c) Hier zerlegen wir den den vorgelegten Bruch in Partialbrüche durch den Ansatz:

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{3s+7}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+1} \Rightarrow A=4,\; B=-1$$

Mit dem Linearitätssatz und bekannten Laplace-Transformationen folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right] &= 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] \\ &= 4e^{3t}-e^{-t} \quad \text{für } s>3. \end{aligned}$$

Alternativ wieder gemäß dem Abschnitt „Rücktransformation: Spezialfall quadratischer Nenner“, Seite 98, wie bei **(a)**.

Aufgabe 9.12 [Lösung von AWPs]

Lösen Sie folgende Anfangswertaufgaben (auf $[0,\infty[$) mit Hilfe der Laplace-Transformation.

(a) $y''(x) + y(x) = x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -2.$

(b) $y''(x) + 4y(x) = x, \quad y(0) = y'(0) = 1.$

(c) $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = e^{-x}\sin x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

(d) $y'''(x) - 3y''(x) + 3y'(x) - y(x) = x^2 \cdot e^x$ mit $y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -2.$

Lösung

(a) Anwendung der Laplace-Transformation ergibt (vergleiche Satz 5.31 und das Beispiel darunter, $\rightsquigarrow Q(s) = 1 \cdot [0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2)] + s \cdot [1 \cdot 1]$):

$$\left.\begin{aligned} P(s) &= s^2+1 \\ Q(s) &= (s-2) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{(\mathcal{L}g)(s) + Q(s)}{P(s)} = \frac{\frac{1}{s^2} + (s-2)}{s^2+1} = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1}.$$

Bemerkung: Wenn die Nullstellen der Nennerpolynome bekannt sind, kann man immer die Summanden getrennt behandeln. Wenn für $\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ keine PBZ möglich ist [bspw. wenn die rechte Seite der DGL statt x die Funktion $g(x) = \sqrt{x}$ wäre], dann wäre dies der Standardweg und man würde den Summanden $\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ so behandeln:

1.) PBZ von $\frac{1}{P(s)}$, **2.)** Rücktransf. $\rightsquigarrow \tilde{y}(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P(s)}\right)$, **3.)** $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}\right) = g(x) * \tilde{y}(x)$.

Hier ist auch für $\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ PBZ möglich, sodass man die Summanden zusammenfassen kann (Erweitern des ersten Bruchs mit s^2)

$$\frac{(\mathcal{L}g)(s) + Q(s)}{P(s)} = \frac{\frac{1}{s^2} + (s-2)}{s^2+1} = \frac{1 + s^3 - 2s^2}{s^2(s^2+1)}.$$

und nach Bestimmung der Nullstellen von $s^2 + 1 = (s-i)^1(s+i)^1$ alles mit *einer* komplexwertigen PBZ lösen kann, Ansatz:

$$\frac{s^3 - 2s^2 + 1}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-i} + \frac{D}{s+i}, \tag{9.12 3}$$

wobei, da in der DGL alle Koeffizienten und alle ABen reell waren, hier für die Koeffizienten C, D der konjugiert komplexen Nullstellen $\lambda_3 = 0 + 1 \cdot i$ und $\lambda_4 = 0 - i$ gilt: $D = \overline{C}$. An dieser Stelle sieht man, dass die Lösung des AWP mit $E = 2\,\mathrm{Re}(C)$ und $F = -2\,\mathrm{Im}(C)$ die folgende Form hat:

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{0x} + B\frac{x^1}{1!}e^{0x} + Ce^{ix} + \overline{C}e^{-ix} && (9.12\ 4) \\ &= (A + Bx) + Ce^{ix} + \overline{C}e^{-ix} && (9.12\ 5) \\ &\underset{\lambda_3 = 0 + 1\cdot i}{\overset{\text{Satz 5.45}}{=}} (A + Bx) + e^{0\cdot x}\big(E\cos(1\cdot x) + F\sin(1\cdot x)\big). && (9.12\ 6) \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner $s^2(s^2+1) = s^2(s-i)(s+i)$ der linken Seite beim PBZ-Ansatz (9.12 3) erhält man

$$\begin{aligned} s^3 - 2s^2 + 1 &= As(s^2+1) + B(s^2+1) + Cs^2(s+i) + Ds^2(s-i) \\ &= (A + C + D)s^3 + (B + iC - iD)s^2 + As + B, \end{aligned}$$

und somit nach Koeffizientenvergleich das LGS

$$B = 1, \quad A = 0, \quad C + D = 1 \text{ und } \quad iC - iD = -3$$

und somit für C und D das LGS / die Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \end{pmatrix}$$

gibt. Wir erhalten also die Lösung

$$y(x) \overset{(9.12\ 5)}{=} (0 + x) + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}i\right)e^{ix} + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}i\right)e^{-ix} \overset{(9.12\ 6)}{=} x + \big(\cos(x) - 3\sin(x)\big).$$

(b) Anwendung der Laplace-Transformation ergibt (vergleiche Satz 5.31 und das Beispiel darunter, $\rightsquigarrow$ $Q(s) = 1\cdot[0\cdot 1+1\cdot 1]+s\cdot[1\cdot 1]$):

$$\left.\begin{aligned} P(s) &= s^2+4 \\ Q(s) &= (s+1) \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad Y(s) = \frac{(\mathcal{L}g)(s)+Q(s)}{P(s)} = \frac{\frac{1}{s^2}+(s+1)}{s^2+4} = \frac{1}{s^2(s^2+4)} + \frac{s+1}{s^2+4}.$$

Bemerkung: Wenn die Nullstellen der Nennerpolynome bekannt sind, kann man immer die Summanden getrennt behandeln. Wenn für $\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ keine PBZ möglich ist [bspw. wenn die rechte Seite der DGL statt x die Funktion $g(x)=\sqrt{x}$ wäre], dann wäre dies der Standardweg und man würde den Summanden $\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ so behandeln:

1.) PBZ von $\frac{1}{P(s)}$, **2.)** Rücktransf. $\rightsquigarrow \tilde{y}(x) = \mathcal{L}^{-1}\big(\frac{1}{P(s)}\big)$, **3.)** $\mathcal{L}^{-1}\big(\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}\big) = g(x)*\tilde{y}(x)$.

Hier ist auch für $\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ PBZ möglich, sodass man die Summanden zusammenfassen kann (Erweitern des ersten Bruchs mit s^2)

$$\frac{(\mathcal{L}g)(s)+Q(s)}{P(s)} = \frac{\frac{1}{s^2}+(s+1)}{s^2+4} = \frac{1+s^3+s^2}{s^2(s^2+4)}.$$

und nach Bestimmung der Nullstellen von $s^2+4=(s-2i)^1(s+2i)^1$ alles mit *einer* komplexwertigen PBZ lösen kann, Ansatz:

$$\frac{s^3+s^2+1}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-2i} + \frac{D}{s+2i}, \tag{9.12 7}$$

wobei, da in der DGL alle Koeffizienten und alle ABen reell waren, hier für die Koeffizienten C, D der konjugiert komplexen Nullstellen $\lambda_3 = 0+2\cdot i$ und $\lambda_4 = 0-2i$ gilt: $D=\overline{C}$. An dieser Stelle sieht man, dass die Lösung des AWP mit $E = 2\,\mathrm{Re}(C)$ und $F=-2\,\mathrm{Im}(C)$ die folgende Form hat:

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{0x} + B\frac{x^1}{1!}e^{0x} + Ce^{2ix} + \overline{C}e^{-2ix} && (9.12\ 8)\\ &= (A+Bx) + Ce^{2ix} + \overline{C}e^{-2ix} && (9.12\ 9)\\ &\underset{\lambda_3=0+2\cdot i}{\overset{\text{Satz 4.45}}{=}} (A+Bx) + e^{0\cdot x}\big(E\,\cos(2x)+F\,\sin(2x)\big). && (9.12\ 10)\end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner $s^2(s^2+4) = s^2(s-2i)(s+2i)$ der linken Seite beim PBZ-Ansatz (9.12 7) erhält man

$$\begin{aligned} s^3+s^2+1 &= As(s^2+4) + B(s^2+4) + Cs^2(s+2i) + Ds^2(s-2i) \\ &= (A+C+D)s^3 + (B+2iC-2iD)s^2 + 4As + 4B, \end{aligned}$$

und aus

$$s^3+s^2+1 = (A+C+D)s^3 + (B+2iC-2iD)s^2 + 4As + 4B,$$

ergibt sich nach Koeffizientenvergleich das LGS

$$B=1/4,\quad A=0,\quad C+D=1 \text{ und } \quad 2iC-2iD = 1-\tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}$$

und somit für C und D das LGS / die Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8i & -8i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{3}{16}i \\ \frac{1}{2}+\frac{3}{16}i \end{pmatrix}$$

gibt. Wir erhalten also die Lösung

$$y(x) \overset{(9.12\ 5)}{=} (0+\tfrac{1}{4}x) + (\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{16}i)e^{2ix} + (\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{16}i)e^{-2ix} \overset{(9.12\ 6)}{=} \tfrac{1}{4}x + \big(\cos(2x)+\tfrac{3}{8}\,\sin(2x)\big).$$

(c) Anwendung der Laplace-Transformation ergibt (Satz 4.31/Beispiel darunter $\rightsquigarrow$ $Q(s) = 1 \cdot [2 \cdot 0 + 1 \cdot 1] + s^2 \cdot [1 \cdot 0]$):

$$\left.\begin{aligned} P(s) &= s^2+2s+5 \\ Q(s) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{(\mathcal{L}g)(s)+Q(s)}{P(s)} = \frac{\frac{1}{(s+1)^2+1}+1}{(s+1)^2+4} = \frac{1}{((s+1)^2+1)((s+1)^2+4)} + \frac{1}{(s+1)^2+4}.$$

Bemerkung: Wenn die Nullstellen der Nennerpolynome bekannt sind, kann man immer die Summanden getrennt behandeln. Wenn für $\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ keine PBZ möglich ist [bspw. wenn die rechte Seite der DGL statt $e^{-x}\sin(x)$ die Funktion $g(x) = \sqrt{x}$ wäre], dann wäre dies der Standardweg und man würde den Summanden $\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ so behandeln:

1.) PBZ von $\frac{1}{P(s)}$, **2.)** Rücktransf. $\rightsquigarrow \tilde{y}(x) = \mathcal{L}^{-1}\big(\frac{1}{P(s)}\big)$, **3.)** $\mathcal{L}^{-1}\big(\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}\big) = g(x) * \tilde{y}(x)$.

Hier ist auch für $\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ PBZ möglich, sodass man die Summanden zusammenfassen kann (Erweitern des ersten Bruchs mit s^2)

$$\frac{(\mathcal{L}g)(s)+Q(s)}{P(s)} = \frac{\frac{1}{(s+1)^2+1}+1}{(s+1)^2+4} = \frac{1+(s+1)^2+1}{((s+1)^2+1)((s+1)^2+4)} = \frac{s^2+2s+3}{((s+1)^2+1)((s+1)^2+4)}.$$

und nach Bestimmung der Nullstellen von $(s+1)^2+1 = \big(s-(-1+i)\big)^1\big(s-(-1-i)\big)^1$ und von $(s+1)^2+4 = \big(s-(-1+2i)\big)^1\big(s-(-1-2i)\big)^1$ alles mit *einer* komplexwertigen PBZ lösen kann, Ansatz:

$$\frac{s^2+2s+3}{((s+1)^2+1)\cdot((s+1)^2+4)} = \frac{A}{s-(-1+i)} + \frac{B}{s-(-1-i)} + \frac{C}{s-(-1+2i)} + \frac{D}{s-(-1-2i)}, \tag{9.12 11}$$

wobei, da in der DGL alle Koeffizienten und alle ABen reell waren,

hier für die Koeffizienten A, B der konjugiert komplexen Nullstellen $\lambda_1 = 1+i$ und $\lambda_2 = 1-i$ gilt: $B = \overline{A}$,

und für die Koeffizienten C, D der konjugiert komplexen Nullstellen $\lambda_3 = 1+2i$ und $\lambda_4 = 1-2i$ gilt: $D = \overline{C}$.

Die Lösung des AWP hat mit $E = 2\,\mathrm{Re}(A)$ und $F = -2\,\mathrm{Im}(A)$ und $G = 2\,\mathrm{Re}(C)$ und $H = -2\,\mathrm{Im}(C)$ die folgende Form:

$$y(x) = Ae^{(-1+i)x} + \overline{A}e^{(-1-i)x} + Ce^{(-1+2i)x} + \overline{C}e^{(-1-2i)x} \tag{9.12 12}$$

$$\overset{\text{Satz 4.45}}{=} \underbrace{e^{-1\cdot x}\big(E\cos(1\cdot x) + F\sin(1\cdot x)\big)}_{\lambda_1=(-1+1\cdot i)} + \underbrace{e^{-1\cdot x}\big(G\cos(2x) + H\sin(2x)\big)}_{\lambda_3=(-1+2\cdot i)}. \tag{9.12 13}$$

Der PBZ-Ansatz (9.12 11) von weiter oben,

$$\frac{A}{s-(-1+i)} + \frac{B}{s-(-1-i)} + \frac{C}{s-(-1+2i)} + \frac{D}{s-(-1-2i)} = \frac{s^2+2s+3}{((s+1)^2+1)\cdot((s+1)^2+4)},$$

könnte wie in den vorigen Aufgabenteilen mit dem Nenner der linken Seite multipliziert werden und man erhielte ein 4×4-LGS, was hier aber realtiv aufwendig wäre. Dieses Beispiel wird aber genutzt, um die „Zuhaltemethode“ zu demonstrieren, die immer anwendbar ist, wenn man nur einfache Nullstellen hat.

Für A: Wir multiplizieren den Ansatz mit dem Linearfaktor $(s-\lambda_1) = (s-(-1+i))$ der zugehörigen Nullstelle λ_1, beachte dazu für die rechte Seite $(s+1)^2+1 = \big(s-(-1+i)\big)\big(s-(-1-i)\big)$,

$$A + \frac{B(s-(-1+i))}{s-(-1-i)} + \frac{C(s-(-1+i))}{s-(-1+2i)} + \frac{D(s-(-1+i))}{s-(-1-2i)} = \frac{s^2+2s+3}{(s-(-1-i))\cdot((s+1)^2+4)}$$

und setzen danach für s eben diese Nullstelle $\lambda_1 = (-1+i)$ ein:

$$A + 0 + 0 + 0 = \frac{(-1+i)^2 + 2\cdot(-1+i) + 3}{((-1+i)-(-1-i))\cdot(((-1+i)+1)^2+4)} = \ldots = 0 - \tfrac{1}{6}i.$$

Für B könnte man analog vorgehen, hier weiß man aber $B = \overline{A} = 0 + \frac{1}{6}i$.

Für C (analog, aber kürzer): Wir multiplizieren den Ansatz mit dem Linearfaktor $(s-\lambda_3) = (s-(-1+2i))$ der zugehörigen Nullstelle λ_3, beachte dazu für die rechte Seite $(s+1)^2+4 = \big(s-(-1+2i)\big)\big(s-(-1-2i)\big)$,

$$\ldots = \frac{s^2+2s+3}{((s+1)^2+1)\cdot(s-(-1-2i))}$$

und setzen danach für s eben diese Nullstelle $s = \lambda_3 = (-1+2i)$ ein:

$$C = \frac{(-1+2i)^2 + 2\cdot(-1+2i) + 3}{(((-1+2i)+1)^2+1)\cdot((-1+2i)-(-1-2i))} = \ldots = 0 - \tfrac{1}{6}i.$$

Für D könnte man analog vorgehen, hier weiß man aber $D = \overline{C} = 0 + \frac{1}{6}i$.

Wir erhalten also die Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &\overset{(9.12\,12)}{=} (0 - \tfrac{1}{6}i)e^{(-1+i)x} + (0 + \tfrac{1}{6}i)e^{(-1-i)x} + (0 - \tfrac{1}{6}i)e^{(-1+2i)x} + (0 + \tfrac{1}{6}i)e^{(-1-2i)x} \\ &\overset{(9.12\,13)}{=} e^{-1\cdot x}(0\cdot\cos(x) + \tfrac{1}{3}\sin(x)) + e^{-1\cdot x}(0\cdot\cos(2x) + \tfrac{1}{3}\sin(2x)) \\ &= \tfrac{1}{3}e^{-x}(\sin(x) + \sin(2x)). \end{aligned}$$

(d) Statt mit P und Q führen wir hier exemplarisch die Transformation mittels der Rechenregeln a) „Linearität“ und h_2) „Transformation der Ableitungen“ durch:

$$\mathcal{L}[y'''] - 3\mathcal{L}[y''] + 3\mathcal{L}[y'] - \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[x^2 e^x]$$

und weiter

$$(s^3 Y - s^2 y(0) - s y'(0) - y''(0)) - 3(s^2 Y - s y(0) - y'(0)) + 3(sY - y(0)) - Y = \frac{2}{(s-1)^3}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(s^3 - 3s^2 + 3s - 1)}_{=(s-1)^3} Y - s^2 + 3s - 1 = \frac{2}{(s-1)^3}$$

Wenn man sieht, dass $s^2 - 3s + 1 = (s-1)^2 - (s-1) - 1$ gilt, kann man sich die PBZ sparen und stattdessen umformen:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow Y &= \frac{s^2 - 3s + 1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6} \\
&= \frac{(s-1)^2 - (s-1) - 1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6} \\
&= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}
\end{aligned}$$

Rücktransformation nach Formelsammlung:

$$y(x) = e^x - x e^x - \frac{x^2 e^x}{2} + \frac{x^5 e^x}{60}.$$

Laplace-Tabellen aus dem Skript

Skript-Tabelle 4.2: Weitere Laplace-Transformierte $F(s) := \mathcal{L}f(s) := (\mathcal{L}f(t))(s)$ von $f : (0,\infty) \to \mathbb{C}$ mit $s \in \mathbb{C}$ und für $\operatorname{Re} s > s_0$ (dabei: $n \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{C}$):

$f(t)$	$F(s)$	$\operatorname{Re} s > s_0 = \dots$
$\frac{t^n}{n!} e^{\lambda t}$	$\frac{1}{(s-\lambda)^{n+1}}$	$\operatorname{Re}\lambda$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s-\lambda}$	$\operatorname{Re}\lambda$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	0

Skript-Tabelle 4.1: Laplace Transformierte $F(s) := \mathcal{L}f(s) := (\mathcal{L}f(t))(s)$ von $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $s \in \mathbb{R}$ und für $s > s_0$ (dabei: $n \in \mathbb{N},\ a, k, \omega \in \mathbb{R}, a \geqslant 0$

$f(t)$	$F(s)$	$s > s_0 = \dots$
e^{kt}	$\frac{1}{s-k}$	k
1	$\frac{1}{s}$	0
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	0
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	0
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\pi/s}$	0
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\lvert\omega\rvert$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\lvert\omega\rvert$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
$\sin^2(t)$	$\frac{2}{s(s^2+4)}$	0
$\cos^2(t)$	$\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$	0
$t\ \sin(\omega t)$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$	0
$t\ \cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	0
$\frac{\sin(\omega t)}{t}$	$\arctan(\frac{\omega}{s})$	0
$H(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	0
$\frac{t^n}{n!}e^{kt}$	$\frac{1}{(s-k)^{n+1}}$	k
$e^{kt}\cos(\omega t)$	$\frac{s-k}{(s-k)^2+\omega^2}$	k
$e^{kt}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-k)^2+\omega^2}$	k
$e^{kt}\cosh(\omega t)$	$\frac{s-k}{(s-k)^2-\omega^2}$	$k+\lvert\omega\rvert$
$e^{kt}\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-k)^2-\omega^2}$	$k+\lvert\omega\rvert$
$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$	0
$\delta(t-a)$	e^{-as}	0

Zusatzaufgaben

Aufgabe 9.13 [Rechenregeln]

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Laplace-Transformierten, indem Sie die Rechenregeln und die Tabelle aus dem Skript benutzen.

(a) $\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\,dt$,

(b) $\int_0^\infty t\cdot e^{-2t}\cdot\cos(t)\,dt$.

Lösung

(a) Problem: Die einzelnen Integrale $\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ und $\int_0^\infty \frac{e^{-3t}}{t}\,dt$ existieren nicht. Verwendung der Laplace-Transformation ergibt aber:

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{1-e^{-2t}}{t}e^{-t}\,dt = \left(\mathcal{L}\,\tfrac{1-e^{-2t}}{t}\right)(1).$$

Nach L'Hospital ist $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{t} = 2$. Weiterhin gilt $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t} = 0$. Damit ist $|\frac{f(t)}{t}| \leqslant M = Me^{0\cdot t}$ für alle $t \geqslant 0$. Für $f(t) = 1-e^{-2t}$ ist somit der Divisionssatz (Satz 5.25**f**) anwendbar ($k=0$) und es gilt:

$$\begin{aligned}
I = \left(\mathcal{L}\,\tfrac{1-e^{-2t}}{t}\right)(1) &\overset{\text{S.4.25f)}}{=} \int_1^\infty \left(\mathcal{L}(1-e^{-2t})\right)(u)\,du \\
&\overset{\text{S.4.22a)}}{=} \int_1^\infty (\mathcal{L}1)(u) - (\mathcal{L}e^{-2t})(u)\,du \\
&\overset{\text{Tabelle}}{=} \int_1^\infty \frac{1}{u} - \frac{1}{u+2}\,du \\
&= \Big[\ln(u) - \ln(u+2)\Big]_1^\infty \\
&= \left[\ln\left(\frac{u}{u+2}\right)\right]_1^\infty = -\ln(\tfrac{1}{3}) = \ln(3).
\end{aligned}$$

(b) Es ist $I = \int_0^\infty t\cdot e^{-2t}\cdot\cos(t)\,dt = \mathcal{L}(t\cdot\cos(t))(2)$. Nach Satz 4.22**e**$_1$) mit $f(t)=\cos(t)$ und der Tabelle gilt

$$(\mathcal{L}t\cos(t))(s) \overset{\text{S.4.22e}_1)}{=} -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}\cos(t))(s) \overset{\text{Tabelle}}{=} -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+1} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} \quad\Longrightarrow\quad I = \frac{3}{25}.$$

Aufgabe 9.14 [Laplace-Transformierte einer Stammfunktion]

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte des Integralsinus

$$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin(x)}{x}\,dx,$$

indem Sie zunächst die Laplace-Transformierte von $\frac{\sin(\omega t)}{t}$ mit Hilfe der Rechenregeln und der Tabelle aus dem Skript bestimmen.

Lösung

Nach Aufgabenstellung berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{L}\,\tfrac{\sin(\omega t)}{t}\right)(s) &\overset{\text{S.5.25f)}}{=} \int_s^\infty \left(\mathcal{L}\sin(\omega t)\right)(u)\,du \\
&\overset{\text{Tabelle}}{=} \int_s^\infty \frac{\omega}{u^2+\omega^2}\,du \\
&= \frac{1}{\omega}\int_s^\infty \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\omega}\right)^2}\,du \\
&= \left[\arctan\left(\tfrac{u}{\omega}\right)\right]_s^\infty \\
&= \tfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\tfrac{s}{\omega}\right).
\end{aligned}$$

Man erhält hiermit für $s \in \mathbb{R}, s > 0$ (siehe auch Tabelle) und mit $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2,\ x > 0$

$$\left(\mathcal{L}\,\frac{\sin(\omega t)}{t}\right)(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{s}{\omega}\right) = \arctan(\frac{\omega}{s}).$$

Damit erhalten wir für $\omega = 1$ mit Satz 5.25**g**) wegen $|\frac{\sin(x)}{x}| \leqslant |\frac{x}{x}| \leqslant 1$ für $s > 0$:

$$(\mathcal{L}\mathsf{Si})\,(s) = \left(\mathcal{L}\int_0^t \frac{\sin(x)}{x}\,dx\right)(s) \overset{\text{S.4.25}\mathbf{g})}{=} \frac{1}{s}\left(\mathcal{L}\,\frac{\sin(x)}{x}\right)(s) = \frac{1}{s}\arctan\left(\frac{1}{s}\right).$$

Aufgabe 9.15 [Lapalce-Transformierte]

(a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Induktion oder mit dem binomischen Lehrsatz: Mit $p_n(s) = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \ldots + \frac{s^n}{n!}$ gilt

$$(\mathcal{L}(x+a)^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} p_n(as), \qquad \text{für } s > 0.$$

(b) Berechnen Sie die Laplace-Transformation von $f(x) = (x-3)^2 e^{2(x-4)}$, indem Sie die Rechenregeln und die Tabelle aus dem Skript, sowie das Ergebnis aus Aufgabenteil **(a)** benutzen.

Lösung

(a) Beweis durch vollständige Induktion. (Alternative mit der allgemeinen binomischen Formel.)
Induktionsanfang: Für $n = 1$ und $s > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}(x+a)^1)(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}(x+a)dx \\
&= \int_0^\infty e^{-sx} x dx + a \int_0^\infty e^{-sx} dx \\
&= \frac{1}{s^2} + \frac{a}{s} \\
&= \frac{1}{s^2}(1 + as)
\end{aligned}$$

Ferner gilt für den Übergang $n \Rightarrow n+1$: Sei $(\mathcal{L}(x+a)^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} p_n(as)$. Dann gilt für $s > 0$:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}(x+a)^{n+1})(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}(x+a)^{n+1} dx \\
&\overset{\text{mit part. Integration}}{=} \left[-\frac{1}{s} e^{-sx}(x+a)^{n+1}\right]_0^\infty + \frac{n+1}{s} \underbrace{\int_0^\infty e^{-sx}(x+a)^n dx}_{= \frac{n!}{s^{n+1}} p_n(as) \text{ nach Ind. Vors}} \\
&= 0 - (-\frac{1}{s} a^{n+1}) + \frac{(n+1)!}{s^{n+2}} p_n(as) \\
&= \frac{(n+1)!}{s^{n+2}} \frac{(sa)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(n+1)!}{s^{n+2}} p_n(as) \\
&= \frac{(n+1)!}{s^{n+2}} p_{n+1}(as).
\end{aligned}$$

Die Bedingung $s > 0$ folgt hierbei aus der Linearität der Laplacetransformation.
Alternativ zeigt man das Gewünschte unter Verwendung der Linearität der Laplacetransformation, der Tabelle zur Laplacetransformation und dem binomischen Lehrsatz:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}(x+a)^n)(s) &= \left(\mathcal{L} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k}\right)(s) \\
&\overset{\text{Linearität}}{=} \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} a^k (\mathcal{L}x^{n-k})(s)\right] \\
&\overset{\text{Tabelle}}{=} \sum_{k=0}^n \left[\frac{n!}{k!(n-k)!} a^k \frac{(n-k)!}{s^{n-k+1}}\right] \\
&= \frac{n!}{s^{n+1}} \sum_{k=0}^n a^k \frac{s^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Auch hier gilt offensichtlich $s > 0$ (vgl. Tabelle im Skript).

(b) Hier lässt sich eine Kombination aus Satz 4.22**b**) und dem Ergebnis aus Aufgabenteil **(a)** anwenden. Man erhält für $s > 2 + s_{0,f}$ (siehe S.4.22**b**) und $s_{0,f} = 0$ aus Aufgabenteil **(a)**):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}((x-3)^2 e^{2(x-4)})(s) &= \frac{1}{e^8} \mathcal{L}((x-3)^2 e^{2x})(s) \\
&\overset{\text{S.4.22b)}}{=} \frac{1}{e^8} \mathcal{L}((x-3)^2)(s-2) \\
&\overset{\text{(a)}}{=} \frac{1}{e^8} \frac{2!}{(s-2)^3} p_2(-3s+6) \\
&= \frac{1}{e^8} \frac{2!}{(s-2)^3} \left(1 + (-3s+6) + \frac{(-3s+6)^2}{2!}\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 9.16 [Inverse Laplace-Transformation]

Berechnen Sie die folgende inverse Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right)$$

(a) mit Hilfe des „Multiplikationssatzes“

$$\mathcal{L}[t \cdot f(t)](s) = -\frac{d}{ds}\{\mathcal{L}[f(t)](s)\},$$

(b) mit Hilfe des Faltungssatzes.

Lösung

Mit Hilfe der Linearität und der Tabelle erhält man:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2sa}{2a(s^2+a^2)^2}\right) \overset{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{2a}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2sa}{(s^2+a^2)^2}\right) \overset{\text{Tabelle}}{=} \frac{1}{2a} t\sin(at).$$

Es gibt jedoch auch weitere Möglichkeiten, die inverse Laplace-Transformierte auszurechnen:

(a) Aus dem Multiplikationssatz folgt

$$tf(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{d}{ds}\underbrace{\mathcal{L}[f(t)](s)}_{=:G(s)}\right)(t).$$

Um diesen anwenden zu können, müssen wir $g(s) := \frac{s}{(s^2+a^2)^2}$ als negative Ableitung einer Funktion $G(s)$ interpretieren, bzw. umgekehrt G als negative Stammfunktion zu g:

$$G(s) := -\int \frac{s}{(s^2+a^2)^2}\, ds = \int \frac{-s}{(s^2+a^2)^2}\, ds = \frac{1}{2}\frac{1}{(s^2+a^2)}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right) &\overset{!}{=} \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{d}{ds}G(s)\right)\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{d}{ds}\int \frac{-s}{(s^2+a^2)^2}\, ds\right)\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{(s^2+a^2)}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2a}\mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{d}{ds}\frac{a}{(s^2+a^2)}\right)\\
&= \frac{1}{2a}\cdot t \cdot \sin(at).
\end{aligned}$$

(b) Wir wissen, dass $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right) = \frac{1}{a}\sin(ax)$ und $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \cos(ax)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\cdot\frac{s}{s^2+a^2}\right)\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}\left[\tfrac{1}{a}\sin(ax)\right](s)\cdot\mathcal{L}\left[\cos(ax)\right](s)\right)\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}\left(\tfrac{1}{a}\sin(ax) * \cos(ax)\right)\right)\\
&= \left(\tfrac{1}{a}\sin(ax) * \cos(ax)\right)(t)\\
&= \int_0^t \tfrac{1}{a}\sin(at-ax)\cdot\cos(ax)\, dx.
\end{aligned}$$

Wir verwenden nun $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$ und $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_0^t \tfrac{1}{a}\sin(at-ax)\cdot\cos(ax)\, dx &= \int_0^t \tfrac{1}{a}\left[\sin(at)\cos(ax) - \sin(ax)\cos(at)\right]\cdot\cos(ax)\, dx\\
&= \frac{1}{a}\sin(at)\int_0^t \cos^2(ax)\, dx - \frac{1}{a}\cos(at)\int_0^t \sin(ax)\cos(ax)\, dx\\
&= \frac{1}{a}\sin(at)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin(2ax)\right)\Big|_0^t - \frac{1}{a}\cos(at)\left(\frac{1}{2a}\sin^2(ax)\right)\Big|_0^t\\
&= \frac{1}{a}\sin(at)\left(\frac{1}{2}t + \frac{\sin(2at)}{4a}\right) - \frac{1}{a}\cos(at)\frac{\sin^2(at)}{2a}\\
&= \frac{t\sin(at)}{2a} + \frac{\sin(at)\sin(2at)}{4a^2} - \frac{\cos(at)\sin^2(at)}{2a^2}\\
&= \frac{t\sin(at)}{2a} + \frac{2\cos(at)\sin^2(at)}{4a^2} - \frac{\cos(at)\sin^2(at)}{2a^2}\\
&= \frac{1}{2a}\cdot t\cdot\sin(at).
\end{aligned}$$

Aufgabe 9.17 [Lösung einer Anfangswertaufgabe]

Lösen Sie die AWA

$$y''(t) + ay'(t) = \cos(\beta t), \qquad y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation:

(a) Für $a = 0,\ \beta = 0,$

(b) für $a = 0,\ \beta \neq 0,$

(c) für $a \neq 0$ (Fallunterscheidung bzgl. β).

(d) Wie lautet jeweils die Lösung der homogenen AWA (hier: rechte Seite $= 0$ statt $\cos(\beta t)$)? Wie lautet jeweils die spezielle Lösung mit $y(0) = y'(0) = 0$?

Lösung

(a) $a = 0,\ \beta = 0$: Wir setzen $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$, damit folgt

$$\mathcal{L}[y''](s) = \mathcal{L}[1] \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_0}{s}$$

$$\overset{\text{Rücktransformation}}{\Longrightarrow} \qquad y(t) = \frac{1}{2}t^2 + c_1 t + c_0.$$

(b) $a = 0,\ \beta \neq 0$: Wir setzen erneut $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$, damit folgt

$$\mathcal{L}[y''](s) = \mathcal{L}[\cos \beta t] \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y(s) = \frac{1}{s(s^2+\beta^2)} + \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_0}{s}$$

$$\overset{\text{Rücktransformation}}{\Longrightarrow} \qquad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+\beta^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_1}{s^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_0}{s}\right].$$

Wir wissen $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\beta^2}\right] = \frac{1}{\beta}\sin(\beta t)$ und verwenden Satz 5.25 **g**):

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+\beta^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_1}{s^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_0}{s}\right] \\ &= \frac{1}{\beta}\int_0^t \sin(\beta\tau)\,d\tau + c_1 t + c_0 \\ &= -\frac{1}{\beta^2}(\cos(\beta t) - 1) + c_1 t + c_0. \end{aligned}$$

(c) Analog zu den vorherigen Aufgabenteilen erhalten wir

$$Y(s) = \frac{1}{s+a}\cdot\frac{1}{s^2+\beta^2} + \frac{c_0}{s+a} + (c_1 + ac_0)\cdot\frac{1}{s(s+a)}$$

Wir führen nun für $\frac{1}{s+a}\cdot\frac{1}{s^2+\beta^2}$ eine Partialbruchzerlegung durch mit dem Ansatz

$$\frac{1}{s+a}\cdot\frac{1}{s^2+\beta^2} \overset{!}{=} \frac{A}{s+a} + \frac{Bs+C}{s^2+\beta^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad As^2 + A\beta^2 + Bs^2 + Bsa + Cs + Ca \overset{!}{=} 1$$

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B \\ aB + C &= 0 \quad \Rightarrow \quad -a^2A + Ca = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{a^2+\beta^2}, B = -\frac{1}{a^2+\beta^2} \\ \beta^2 A + Ca &= 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{a}{a^2+\beta^2} \end{aligned}$$

Ebenso führen wir für $(c_1 + ac_0)\cdot\frac{1}{s(s+a)}$ eine PBZ durch mit dem Ansatz

$$\frac{c_1 + ac_0}{s(s+a)} \overset{!}{=} \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_a + ac_0 = A(s+a) + Bs = (A+B)s + Aa$$

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B \\ Aa &= c_1 + ac_0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{c_1}{a} + c_0, B = -\left(\frac{c_1}{a} + c_0\right) \end{aligned}$$

und erhalten insgesamt

$$Y(s) = \frac{1}{a^2+\beta^2}\cdot\frac{1}{s+a} - \frac{1}{a^2+\beta^2}\cdot\frac{s}{s^2+\beta^2} + \frac{a}{a^2+\beta^2}\cdot\frac{1}{s^2+\beta^2} + c_1\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{s} - c_1\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{s+a} + c_0\frac{1}{s}.$$

Rücktransformation liefert nun für $\beta \neq 0$

$$y(t) = \frac{1}{a^2+\beta^2}\left(e^{-at} - \cos(\beta t) + \frac{a}{\beta}\sin(\beta t)\right) + \frac{c_1}{a}\left(1-e^{-at}\right) + c_0.$$

Rücktransoformation von $Y(s)$ für $\beta = 0$, also von

$$Y(s) = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{s+a} - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{s} + \frac{a}{a^2}\cdot\frac{1}{s^2} + c_1\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{s} - c_1\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{s+a} + c_0\frac{1}{s},$$

liefert

$$y(t) = \frac{1}{a^2}\left(e^{-at} - 1 + at\right) + \frac{c_1}{a}\left(1-e^{-at}\right) + c_0.$$

(d) Homogene Lösungen:

(a): $y(t) = c_1 t + c_0$

(b): $y(t) = c_1 t + c_0$

(c): $y(t) = \frac{c_1}{a}\left(1-e^{-at}\right) + c_0$

Lösungen für $y(0) = y'(0) = 0$:

(a): $y(t) = \frac{1}{2}t^2$.

(b): $y(t) = -\frac{1}{\beta^2}\left(\cos(\beta t) - 1\right)$.

(c): $y(t) = \frac{1}{a^2+\beta^2}\left(e^{-at} - \cos(\beta t) + \frac{a}{\beta}\sin(\beta t)\right)$.

Aufgabe 9.18 [Anfangswertaufgabe mit anderer Anfangsbedingung]

Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe unter Verwendung der Laplace-Transformation:

$$y'(t) - 3y(t) = te^{2t} \quad \text{mit} \quad y(-1) = e^{-3}.$$

Hinweis: Ersetzen Sie zunächst $y(t)$ durch $y(t-1)$ und formen Sie die DGL (insbesondere die rechte Seite) geeignet um. Führen Sie anschließend die Substitution $y(t-1) = z(t)$ durch.

Lösung

Für die Anwendung der Rechenregeln für die Laplace-Transformation benötigen wir eine AWA in der Form $L[y](x) = g(x)$ mit gegebenen Anfangswerten in $x_0 = 0$. Wir verschieben die DGL in der Veränderlichen t somit zunächst um -1. Wir erhalten

$$y'(t-1) - 3y(t-1) = (t-1)e^{2(t-1)} \quad \text{mit} \quad y(-1) = e^{-3}.$$

Mittels der Substitution $y(t-1) = z(t)$ und wegen $z'(t) = y'(t-1)\cdot(t-1)' = y'(t-1)$ erhalten wir nun eine AWA in der gewünschten Form.

$$z'(t) - 3z(t) = (t-1)e^{2(t-1)} = e^{-2}(te^{2t} - e^{2t}) \quad \text{mit} \quad z(0) = y(-1) = e^{-3}.$$

Anwenden der Laplace-Transformation ergibt (mit $Z(s) := (\mathcal{L}z(t))(s)$)

$$\begin{aligned}
& sZ(s) - \underbrace{z(0)}_{=e^{-3}} - 3Z(s) = \frac{e^{-2}}{(s-2)^2} - \frac{e^{-2}}{(s-2)} \\
\iff \quad & (s-3)Z(s) = \frac{e^{-2}}{(s-2)^2} - \frac{e^{-2}}{(s-2)} + e^{-3} \\
\iff \quad & Z(s) = \frac{e^{-2}}{(s-3)(s-2)^2} - \frac{e^{-2}}{(s-3)(s-2)} + \frac{e^{-3}}{(s-3)}
\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegungen der ersten beiden Terme führen auf

$$\begin{aligned}
Z(s) &= -\frac{e^{-2}}{(s-2)} - \frac{e^{-2}}{(s-2)^2} + \frac{e^{-2}}{(s-3)} - \frac{e^{-2}}{(s-3)} + \frac{e^{-2}}{(s-2)} + \frac{e^{-3}}{(s-3)} \\
&= -\frac{e^{-2}}{(s-2)^2} + \frac{e^{-3}}{(s-3)}.
\end{aligned}$$

Rücktransformation mit der Tabelle der Vorlesung ergibt nun

$$z(t) = -e^{-2}te^{2t} + e^{-3}e^{3t}$$

Wegen $y(t-1) = z(t)$ gilt

$$y(t) = z(t+1) = -e^{-2}(t+1)e^{2(t+1)} + e^{-3}e^{3(t+1)} = -(t+1)e^{2t} + e^{3t}.$$

Alternativ führt man die Laplace-Transformation unter Unwissenheit des Anfangswertes $y(0) = c$ durch und bestimmt den Parameter durch die Lösung einer linearen Gleichung.

Anwenden der Laplace-Transformation auf die AWA mit $y(0) = c$ ergibt (mit $Y(s) := (\mathcal{L}y(t))(s)$)

$$Y(s) = \frac{e^{-2}}{(s-3)(s-2)^2} - \frac{e^{-2}}{(s-3)(s-2)} + \frac{c}{(s-3)}.$$

Die Rücktransformation (nach PBZ wie oben) mit der Tabelle aus dem Vorlesungsskript führt auf

$$y(t) = -(1+t)e^{2t} + (1+c)e^{3t}.$$

Einsetzen des gegebenen Anfangswertes $y(-1) = e^{-3}$ (und $t = -1$) führt auf

$$e^{-3} = -(1-1)e^{2t} + (1+c)e^{-3} \quad\iff\quad c = 0.$$

Somit erhalten wir

$$y(t) = -(t+1)e^{2t} + e^{3t}.$$

Aufgabe 9.19 [Faltung zweier Funktionen]

Betrachten Sie die Faltung zweier Funktionen f und g:

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-x) \cdot g(x)\,dx.$$

(a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$f * g = g * f \qquad \text{(Kommutativität)}.$$

(b) Verifizieren Sie die Kommutativität für $f(t) = e^{3t}$ und $g(t) = e^{2t}$.

(c) Zeigen Sie

$$f * [g + h] = f * g + f * h \qquad \text{(Distributivität)}.$$

Lösung

(a) Mit der Substitution $t - x = v$ und $\frac{dv}{dx} = -1$ folgt:

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)\,dx \overset{\text{Subst.}}{=} \int_t^0 f(v)g(t-v)\,(-dv) = \int_0^t g(t-v)f(v)\,dv = (g*f)(t).$$

(b) Man rechnet nach:

$$(e^{3x} * e^{2x})(t) = \int_0^t e^{3(t-x)}e^{2x}\,dx = \int_0^t e^{3t}e^{-x}\,dx = e^{3t}\int_0^t e^{-x}\,dx = e^{3t}(-e^{-t}+1) = -e^{2t} + e^{3t},$$

$$(e^{2x} * e^{3x})(t) = \int_0^t e^{2(t-x)}e^{3x}\,dx = \int_0^t e^{2t}e^{x}\,dx = e^{2t}\int_0^t e^{x}\,dx = e^{3t} - e^{2t}.$$

(c)

$$\begin{aligned} f*(g+h) &= \int_0^t f(x)(g+h)(t-x)\,dx \\ &= \int_0^t f(x)g(t-x) + f(x)h(t-x)\,dx \\ &= \int_0^t f(x)g(t-x)\,dx + \int_0^t f(x)h(t-x)\,dx \\ &= f*g + f*h. \end{aligned}$$