Numerische Mathematik für Maschinenbauer

Der Koffer für den Jetsetter unter den Studenten

LEIBNIZ UNIVERSITÄT HANNOVER

Vorwort

Dieser Koffer für den Maschinenbaustudenten soll jegliche Klausur zum Thema „Numerische Mathematik“ einfacher gestalten. Aus diesem Grund, hat der Autor dieses Werk nicht nur zum Zwecke des Nachschlages in der Klausur an sich gestaltet, nein, es kann auch hervorragend zur präventiven Anwendung vor Klausurantritt genutzt werden. Zu diesem Behufe, bietet der ,,Numerische Mathematik für Maschinenbauer Koffer, für den Jetsetter unter den Studenten‘‘, neben Erklärungen, die auch für die schwarz Strahler unter den geistigen Illuminationmitteln zur sicheren Erleuchtung führen, auch anschauliche Beispiele, die einfachen Zugang zur Materie gewährleisten.

Einleitung

Das grundlegende Prinzip ist, dass man im Inhaltsverzeichnis das benötigte Verfahren sucht und dann die zugehörige Seite aufschlägt. Auf dieser findet man im grauen Kasten immer das gesuchte Verfahren beschrieben als Algorithmus. Sollte es eine Voraussetzung geben steht diese im ebenfalls grauen Kasten oberhalb des Algorithmus, also ganz am Anfang der Seite. Danach folgt immer ein Beispiel, damit man die Durchführung des Algorithmus, an Hand eines Beispiels, nachvollziehen kann.

Der orangene Kasten markiert Kurzfragen relevante Teile

Tipps zum Lernen

Arbeite alle Übungsblätter so gut wie möglich durch, denn dieser Koffer nimmt dir das Merken der einzelnen Algorithmen ab, aber nicht das damit klarkommen! Versuche zudem den einzelnen Algorithmus zu verstehen, denn dann lässt er sich leichter Anwenden. Stumpfes Abschreiben und Einsetzen kann zu Fehlern führen!

Es kommen immer mit hoher Wahrscheinlichkeit ein lineares Iterationsverfahren, Partialzerlegung, Interpolation und Randwertaufgaben dran. Drei davon solltest du auf jeden Fall gut können, um zu bestehen. Für die Kurzfragen, solltest du die orangenen Kästen beachten und alle einfachen Algorithmen, z.B. Euler-Verfahren, auswendig können.

3. Auflage; 30.01.2020; Leibniz Universität Hannover

Inhalt

Eigenschaften einer Matrix

Strikt Zeilendiagonaldominant

Alle Diagonalelemente sind <u>größer als</u> die Summe der restlichen Zeilenelemente (zum Betrag).

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

- ➔ Invertierbar
- ➔ kanonischer GA möglich

Strikt Spaltendiagonaldominant

Ähnlich wie bei der strikten Zeilendiagonaldominanz nur, dass die Summe der Spaltenelemente (zum Betrag) <u>kleiner als</u> die des Diagonalelements sein muss.

- ➔ Invertierbar
- ➔ kanonischer GA möglich

Schwach Zeilen-/Spaltendiagonaldominant

Eine Matrix ist schwach zeilendiagonaldominant, wenn die Summe der Zeilenelemente, außer Diagonalelement, (zum Betrag) kleiner oder gleich dem Diagonalelement ist. Gleiches für die schwache Spaltendiagonaldominanz (nur mit den Spaltenelementen).

Schwaches Zeilen-/Spaltensummenkriterium

Eine Matrix erfüllt das schwache Zeilen-/Spaltensummen-kriterium, wenn sie SCHWACH ZEILEN-/SPALTENDIAGONALDOMINAT ist UND <u>mindestens</u> eine Zeile (Spalte) die STRIKTE DIAGONALDOMINANZ erfüllt

- \+ Irreduzibel
- ➔ Invertierbar

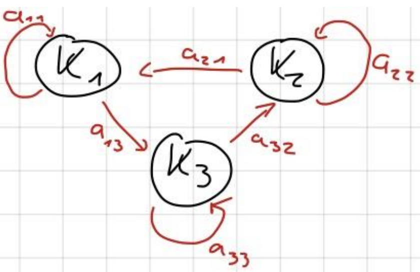
Reduzibel/Irreduzibel

Um die Reduzibilität/Irreduzibilität einer quadratischen Matrix zu überprüfen zeichnen wir für jede Zeile einen Knoten. Nun zeichnen wir für jeden Eintrag (der ungleich null ist) einen Pfeil. Startpunkt ist die Zeile (bei a_{12} ist das Knoten 1) und Ziel die Spalte des Eintrages (bei a_{12} ist das Knoten 2).

Irreduzibel + Schwaches Zeilen-/Spaltensummen-kriterium
- ➔ Invertierbar

<u>Beispiel:</u>

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



Kommen wir von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten (auch über andere Knoten auf dem Weg möglich, siehe Beispiel), so ist die Matrix irreduzibel. Wenn nicht heißt die Matrix reduzibel.

Tipp: Gibt es eine null Zeile, oder Spalte ist die Matrix immer reduzibel.

Symmetrisch positiv definit

➔ Invertierbar

Eine Matrix heißt symmetrisch positiv definit, wenn…

… die Matrix symmetrisch, STRIKT DIAGONALDOMINANT ist UND alle Diagonalelemente positiv sind

… die Matrix symmetrisch, IRREDUZIBEL ist, alle Diagonalelemente größer null sind und sie das SCHWACHE ZEILENSUMMENKRITERIUM erfüllt.

.. alle Eigenwerte > 0, oder alle Hauptminoren >0 sind, oder wenn beim Gauß-Algorithmus mit kanonischer Pivotwahl alle Diagonalelemente größer null sind.

Konjugiert

Vektoren (v, w) sind zu einer Matrix (A) konjugiert, wenn folgende Rechnung gleich null ist:

$$\overrightarrow{v^T} * A * \vec{w} = 0$$

Orthogonalität

Zwei Vektoren (v, w) sind orthogonal zueinander, wenn das Produkt der beiden null ergibt.

$$\overrightarrow{v^T} * \vec{w} = 0$$

Mit Matrizen rechnen

Matrix invertieren

Invertierbarkeit bewiesen, wenn…
…strikte (Zeilen-/Spalten-) Diagonaldominanz
…Determinante ≠ 0
… der Rang voll ist
… Spalten/Zeilen linearunabhängig sind
… irreduzibel und schwaches Zeilen-/Spaltensummenkriterium erfüllt sind
…symmetrisch positiv definit

R^{2x2}

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

R^{nxn}

A	I
…	…
…	…
I	A^{-1}

Schreibe die Matrix in die linke Spalte der Tabelle und die Einheitsmatrix in die recht. Führe den Gauß-Algorithmus solange an A (an I äquivalent) durch bis A zur Einheitsmatrix geworden ist. In der rechten Spalte steht dann die Inverse von A.

Frobenius-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Einfach das Vorzeichen der Einträge unterhalb der Diagonalen umdrehen.

Bei einer Matrix mit mehreren Spalten unter der Diagonalen ungleich null muss folgende Rechenregel befolgt werden:

I. Die ganze Matrix als einzelne Frobenius-Matrizen aufschreiben
II. Alle Matrizen invertieren
III. Alle Matrizen in der Reihenfolge vertauscht multiplizieren

oder

II. Beide Matrizen multiplizieren
III. Das Produkt invertieren

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Block-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$$

Sind alle Blöcke der Matrix bis auf die der Diagonalen null (Null-Matrix), so kann man die einzelnen Blöcke einzeln invertieren und wieder in eine Block-Matrix zusammenfügen.

Hauptminoren (Untermatrizen) berechnen

Einzeln alle $\sum_i^n R^{ixi}$ Determinanten der Matrix berechnen. Zum Beispiel bei einer A = R^{3x3} Matrix:

1.HM = det(a_{11})

2.HM = det $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

3.HM = det(A)

Matrix berechnen (Kontrolle der Lösung)

R^{3x4} x R^{4x1} = R^{3x1} <=> R^{mxx} x R^{yxz} = R^{mxz}

Die Spalten der linken Matrix müssen gleich der Zeilen der rechten Matrix sein!

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 + 3 \times 2 + 3 \times 2 \\ 3 \times 2 + 4 \times 2 + 3 \times 2 \\ 3 \times 2 + 3 \times 2 + 5 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 20 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte berechnen

Variante 1:

Um den Eigenwert einer Matrix zu ermitteln muss folgendes getan werden:

I. Multipliziere folgende Gleichung aus:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

II. Stelle die Gleichung so um, dass sie gleich null ist

$$a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = \lambda \cdot x$$
$$a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = \lambda \cdot y$$

III. Bilde aus den Gleichungen eine Matrix

$$(a_{11} - \lambda) \cdot x + a_{12} \cdot y = 0$$
$$a_{21} \cdot x + (a_{22} - \lambda) \cdot y = 0$$

IV. Bilde die Determinante aus der Matrix

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) - a_{21} \cdot a_{12} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot \lambda + a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \end{aligned}$$

V. Multiplizieren das charakteristische Polynom aus

VI. Bestimme die Nullstellen (z.B. p-q-Formel) -> Eigenwerte von A

Variante 2:

I. Bilde $|\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}|$

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Zuerst berechnen wir die EWte von H (symmetrisch)

$$|\lambda \mathrm{I} - \mathrm{H}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{3} \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}$$

$$= \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{12} \overset{!}{=} 0$$

II. Berechne die Determinante von $|\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}|$, das Ergebnis ist das charakteristische Polynom

III. Bestimme die Nullstellen -> Eigenwerte von A

Gauß-Algorithmus mit kanonischer Pivotwahl

Voraussetzung:
→ Strikt Zeilen-/Spaltendiagonaldominat

Allgemeines Vorgehen:
I. Nullen unter Hauptdiagonalen erzeugen
(Abbruch, wenn ein Diagonalelement zu null wird)

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

→ $Z_2 + 2\,Z_1$ & $Z_3 + 1\,Z_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

→ $Z_3 - 3\,Z_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{array}\right)$$

Gauß-Algorithmus mit partieller Pivotwahl

Voraussetzung:

➔ Keine Bedingungen

Allgemeines Vorgehen:

I. Zeile mit betragsgrößtes Element nach oben

II. Nullen unter Hauptdiagonalen erzeugen

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -6 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 6 & -6 \\ 4 & 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ -45 \\ -3 \\ 58 \end{pmatrix}$$

➔ -6 als betragsgrößtes Element nach oben tauschen (Z_1 <-> Z_2)

$$\begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 6 & -6 \\ 4 & 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -45 \\ 20 \\ -3 \\ 58 \end{pmatrix}$$

➔ $Z_2 + \frac{1}{3} Z_1$

➔ $Z_3 + \frac{1}{3} Z_1$

➔ $Z_4 + \frac{2}{3} Z_1$

$$\begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{-20}{3} & 6 & \frac{-16}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & 2 & \frac{-5}{3} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -45 \\ 5 \\ -18 \\ 28 \end{pmatrix}$$

➔ $\frac{-20}{3}$ als betragsgrößtes Element der 2. Spalte nach oben bringen

$$\begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{-20}{3} & 6 & \frac{-16}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & 2 & \frac{-5}{3} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -45 \\ -18 \\ 5 \\ 28 \end{pmatrix}$$

➔ $Z_3 + \frac{1}{5} Z_2$

➔ $Z_4 + \frac{2}{5} Z_2$

$$\begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{-20}{3} & 6 & \frac{-16}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{22}{5} & \frac{-19}{5} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -45 \\ -18 \\ \frac{7}{5} \\ \frac{104}{5} \end{pmatrix}$$

➔ $\frac{22}{5}$ betragsgrößtes Element nach oben

$$\begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{-20}{3} & 6 & \frac{-16}{3} \\ 0 & 0 & \frac{22}{5} & \frac{-19}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -45 \\ -18 \\ \frac{104}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

➔ $Z_4 + \left(\frac{-1}{22}\right) Z_3$

$$\begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{-20}{3} & 6 & \frac{-16}{3} \\ 0 & 0 & \frac{22}{5} & \frac{-19}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-5}{22} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -45 \\ -18 \\ \frac{104}{5} \\ \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

LR-Zerlegung mit kanonischer Pivotwahl

<u>Voraussetzung:</u>

- ➔ Invertierbar
- ➔ Alle Pivotelemente ≠ 0
- ➔ Strikt Zeilen-/Spaltendiagonaldominat
  oder
  alle n-1 Hauptminoren ≠ 0

<u>Es gilt:</u> **A = LR**

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

I. Nullen unter Hauptdiagonalen erzeugen
II. Das Vielfache der jeweiligen Zeile verwenden
III. Faktoren mit umgekehrten Vorzeichen „merken“ in L_i (für L_i^{-1} einfach die Frobenius-Inverse berechnen)
IV. L_{gesamt} sind alle Spalten der einzelnen L_i-Matrizen in eine geschrieben
V. R ist das Ergebnis des GA mit Nullen unter den Diagonalelementen

<u>Lösung des LGS:</u>

1. Lz=b   z bestimmen
2. Rx = z   x bestimmen

Beispiel:

Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

1. Gauß-Elimination:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Gauß-Elimination:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \implies L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Zur Lösung des LGS:

$$Lz = b \implies z = (1, 2, 7)^T$$
$$Rx = z \implies x = \frac{1}{5}(-1, -4, 7)^T$$

LR-Zerlegung mit partieller Pivotwahl

<u>Voraussetzung:</u>

➔ Invertierbar

<u>Es gilt:</u> **PA = LR**

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

I. Zeile mit betragsgrößtes Element nach oben bringen. Spaltentausch in die Permutationsmatrix P eintragen **Achtung**: Auch die „gemerkten" Faktoren beim Zeilentausch tauschen

II. Nullen unter dem jeweiligen Pivotelement erzeugen und wie bei der LR-Zerlegung mit kanonischer Pivotwahl dieses in L und R eintragen

<u>Lösung des LGS:</u>

3. Lz=Pb z bestimmen
4. Rx = z x bestimmen

Beispiel:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{array} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{array} \qquad \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \quad + \qquad \cdot(-1) \quad +$$

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 2 & -1 & 2 \\ \hline -0.5 & 0 & 2.5 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{array} \qquad P_2P_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 2 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ -0.5 & 0 & 2.5 & 0 \end{array} \qquad \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \quad +$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & -0.5 & 0.5 & -2.5 \\ -0.5 & 0 & 2.5 & 0 \end{array} \qquad P_3P_2P_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ -0.5 & 0 & 2.5 & 0 \\ -1 & -0.5 & 0.5 & -2.5 \end{array} \qquad \cdot\left(-\tfrac{1}{5}\right) \quad +$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ -0.5 & 0 & 2.5 & 0 \\ -1 & -0.5 & -0.2 & -2.5 \end{array}$$

$$P = P_3P_2P_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0{,}5&0&1&0 \\ 1&0{,}5&0{,}2&1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2&2&-1&2 \\ 0&2&5&1 \\ 0&0&2{,}5&0 \\ 0&0&0&-2{,}5 \end{pmatrix}$$

Cholesky-Zerlegung

<u>Voraussetzung:</u>

➔ Symmetrisch positiv definit

➔ Quadratische Matrix

<u>Es gilt:</u> **$A = C^T C$**

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

I. Führe eine LR-Zerlegung durch

II. Berechne C mit Hilfe von $D^{1/2}$ ($D^{1/2}$ berechnet sich wie folgt: Diagonalelemente von $D^{1/2}$ = Wurzel aller Diagonalelemente von R, alle anderen Einträge sind Null)

$C = D^{1/2} * L^T = D^{-1/2} * R$

<u>Lösung des LGS:</u>

5. $C^T z = b$ z bestimmen
6. $Cx = z$ x bestimmen

Beispiel:

Wir bestimmen die LR-Zerlegung von A:

1.Schritt:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & -4 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 18 \end{pmatrix}$$

2.Schritt:

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & -4 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 18 \end{pmatrix}$$

3.Schritt:

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & -4 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 & \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten damit:

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow C = D^{-\frac{1}{2}} R = D^{\frac{1}{2}} L^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cholesky-Zerlegung einer Matrix

Um Gleichungssysteme besser lösen zu können, z.B. Ax = b, kann es von Vorteil sein die Matrix A zu zerlegen, um dann mit Hilfe von C in zwei (einfacheren Schritten) das Gleichungssystem zu lösen. Denn wenn man A in C zerlegt bekomme ich mit C und C^T jeweils schon zwei Dreiecksmatrizen heraus, in welche man nur noch einsetzen muss. Man kann also Ax = b auch als $C^T*C*x = b$ schreiben. **In vielen Fällen ist allerdings die normale Cholesky-Zerlegung einfacher** als das folgende Verfahren. Also lieber eine LR-Zerlegung durchführen, als zu viel Zeit verbrauchen!

Voraussetzung:
- ➔ Symmetrisch positiv definit
- ➔ Quadratische Matrix

Es gilt: **$A = C^TC$**

Allgemeines Vorgehen:

I. Koeffizientenvergleich von der Matrix (siehe drunter) und A

$$\begin{pmatrix} {l_{1,1}}^2 & l_{1,1} \times l_{2,1} & l_{1,1} \times l_{3,1} \\ l_{1,1} \times l_{2,1} & {l_{2,1}}^2 + {l_{2,2}}^2 & l_{2,1} \times l_{3,1} + l_{2,2} \times l_{3,2} \\ l_{1,1} \times l_{3,1} & l_{2,1} \times l_{3,1} + l_{2,2} \times l_{3,2} & {l_{3,1}}^2 + {l_{3,2}}^2 + {l_{3,3}}^2 \end{pmatrix}$$

Zum Beispiel: $l_{1,1}^2 = \frac{1}{2} \rightarrow l_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (aus dem Beispiel)

II. Hat man alle Stellen berechnet, so ergibt sich die Matrix C (untere linke Dreiecksmatrix)

Lösung des LGS:

1. $C^Tz = b$ z bestimmen
2. $Cx = z$ x bestimmen

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{10}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} & \frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{10}}{6} & \frac{\sqrt{10}}{5} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}$$

$A = A^T$ - The matrix is symmetric

$A = L \times L^T$ (?)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} & l_{3,1} \\ 0 & l_{2,2} & l_{3,2} \\ 0 & 0 & l_{3,3} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} {l_{1,1}}^2 & l_{1,1} \times l_{2,1} & l_{1,1} \times l_{3,1} \\ l_{1,1} \times l_{2,1} & {l_{2,1}}^2 + {l_{2,2}}^2 & l_{2,1} \times l_{3,1} + l_{2,2} \times l_{3,2} \\ l_{1,1} \times l_{3,1} & l_{2,1} \times l_{3,1} + l_{2,2} \times l_{3,2} & {l_{3,1}}^2 + {l_{3,2}}^2 + {l_{3,3}}^2 \end{pmatrix}$$

cg-Verfahren

Voraussetzung:

➔ Symmetrisch positiv definit

Allgemeines Vorgehen:

Beginn:

I. Startvektor $x^{(0)}$ gegeben

II. $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$

III. $p^{(0)} = r^{(0)}$

Routine (immer vollständig wiederholen für einen Schritt):

IV. $\alpha_0 = \frac{{r^{(0)}}^T * r^{(0)}}{{p^{(0)}}^T * A * p^{(0)}}$

V. $x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 * p^{(0)}$

VI. $r^{(1)} = r^{(0)} - \alpha_0 * A * p^{(0)}$

(wird r der Nullvektor ist der letztmögliche Schritt erreicht)

VII. $\beta_0 = \frac{{r^{(1)}}^T * r^{(1)}}{{r^{(0)}}^T * r^{(0)}}$

VIII. $p^{(1)} = r^{(1)} + \beta_0 * p^{(0)}$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$p^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$${r^{(0)}}^T r^{(0)} = 12$$

$$Ap^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$${p^{(0)}}^T A\, p^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = 40$$

$$\alpha_0 = \frac{12}{40} = 0{,}3$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}6 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$$

$$r^{(1)} = r^{(0)} - \alpha_0 A\, p^{(0)} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}36 \\ 0{,}24 \end{pmatrix}$$

$${r^{(1)}}^T r^{(1)} = 0{,}24$$

$$\beta_1 = \frac{{r^{(1)}}^T r^{(1)}}{{r^{(0)}}^T r^{(0)}} = \frac{0{,}24}{12} = 0{,}02$$

$$p^{(1)} = r^{(1)} + \beta_1 p^{(0)} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}36 \\ 0{,}24 \end{pmatrix} + 0{,}02 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}24 \\ -0{,}36 \\ 0{,}24 \end{pmatrix}$$

$$Ap^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}12 \\ -0{,}24 \\ 0{,}12 \end{pmatrix}$$

$${p^{(1)}}^T A\, p^{(1)} = 0{,}144$$

$$\alpha_1 = \frac{0{,}24}{0{,}144} = 1{,}6667$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha_1 A p^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r^{(2)} = 0 \rightarrow fertig$$

Lineare Iterationsverfahren

Fehlerfortpflanzungsmatrix bestimmen

Die Fehlerfortpflanzungsmatrizen M der linearen Iterationsverfahren bilden sich wie folgt. D_A ist dabei die Diagonalmatrix (beinhaltet nur die Diagonalelemente von A), R_A ist die rechte obere Dreiecksmatrix von A (ohne Diagonalelemente) und L_A ist die linke untere Dreiecksmatrix (ohne Diagonalelemente).

$$M := -N(A - N^{-1})$$

$$M_{Jacobi} := -D_A^{-1}(L_A + R_A)$$

$$M_{vGS} := -(D_A + L_A)^{-1} * R_A$$

$$M_{rGS} := -(D_A + R_A)^{-1} * L_A$$

$$M_{sGS} := (D_A + R_A)^{-1} * L_A * (D_A + L_A)^{-1} * R_A$$

Fehlerberechnung: $e^{(k+1)} = M * e^{(k)}$

Kriterien/Konvergenz für lineare Iterationsverfahren

Damit die linearen Iterationsverfahren funktionieren müssen die folgende Kriterien erfüllt sein.

i. M streng spalten- oder zeilendiagonaldominant -> Konvergent von Gauß-Seidel und Jacobi
ii. p_A (=A*$p^{(n)}$) < 1 => Konvergenz aller Startvektoren
iii. M symmetrisch positiv definit -> Konvergenz von Gauß-Seidel
iv. M symmetrisch positiv definit, oder $(D_A-L_A-L_A^T)^T$ s.p.d. => Jacobi konvergiert

Kriterien	Jac.	vGS	rGS	SOR
Strenge Spalten- oder Zeilendiagonaldominanz von M	√	√	√	√ $0<w<1$
Symmetrisch positive Definitheit von M	√	√	√	√ $0<w<2$
$\|\|M\|\| < 1$	√	√	√	√

Um die Konvergenz zu garantieren für das Jacobi-/Gauß-Seidel-Verfahren einfach die Matrix so umstellen, dass die strikte Diagonaldominanz erfüllt ist.

Vorwärts Gauß-Seidel (Einzelschrittverfahren)

Allgemeines Vorgehen:

Beginn:

Falls Konvergenz gefordert: Matrix A auf Diagonaldominanz bringen (Zeilentauschen)!

Wenn kein Startvektor gegeben ist, nehme:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. $N^{-1} = D_A + L_A$

II. $R_A = (A - N^{-1})$

Routine (immer vollständig wiederholen für einen Schritt):

III. $N^{-1} * x^{(1)} = b - R_A * x^{(0)}$

IV. Nach $x^{(1)}$ auflösen und von vorne…

V. $(D_A + L_A) * x^{(n)} = b - R_A * x^{(n-1)}$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Startvektor: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Auf Diagonaldominanz bringen:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$N^{-1} = D_A + L_A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$R_A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(D_A + L_A)\, \boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{b} - R_A\, \boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1{,}4000 \\ 1{,}0286 \\ 0{,}5016 \\ 0{,}6140 \end{pmatrix}$$

$$(D_A + L_A)\, \boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{b} - R_A\, \boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 5{,}8273 \\ 12{,}2673 \\ 9{,}3860 \\ 6{,}0000 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1{,}1655 \\ 1{,}4195 \\ 0{,}4402 \\ 0{,}5950 \end{pmatrix}$$

Rückwärts Gauß-Seidel (Einzelschrittverfahren)

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

Beginn:

Falls Konvergenz gefordert: Matrix A auf Diagonaldominanz bringen (Zeilentauschen)!

I. $N^{-1} = D_A + R_A$

II. $L_A = (A - N^{-1})$

Wenn kein Startvektor gegeben ist, nehme:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Routine (immer <u>vollständig</u> wiederholen für einen Schritt):

III. $N^{-1} * x^{(1)} = b - (A - N^{-1}) * x^{(0)}$

IV. Nach $x^{(1)}$ auflösen und von vorne…

V. $(D_A + R_A) * x^{(n)} = b - L_A * x^{(n-1)}$

Beispiel:

$$\text{Löse: } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}5 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$N^{-1} = (D_A + R_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(D_A + R_A)\,\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{b} - L_A \boldsymbol{x}^{(0)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Symmetrisch Gauß-Seidel (Einzelschrittverfahren)

Allgemeines Vorgehen:

Ein Schritt sGs:

I. Führe zuerst einen Schritt vorwärts Gauß-Seidel mit dem Startvektor $x^{(0)}$ durch

II. Führe nun einen Schritt mit rückwärts Gauß-Seidel mit dem berechneten Vektor $x^{(1)}$ von I. durch

Vorkonditionierer gegeben (Einzelschrittverfahren)

Allgemeines Vorgehen:

Beginn:

I. N^{-1} gegeben, $(A-N^{-1})$ berechnen

Algorithmus (wie Gauß-Seidel, oder Jacobi):

II. $N^{-1} * x^{(1)} = b-(A- N^{-1}) * x^{(0)}$

III. Nach $x^{(1)}$ auflösen und von vorne…

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(c) Jetzt sei ein Vorkonditionierer N über seine Inverse $N^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$ gegeben. Man führe mit Startvektor $\mathbf{x}^{(0)} = (1 \quad 1/2)^T$ einen Schritt des entsprechenden linearen Iterationsverfahrens durch.

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.5 \\ 9 \end{pmatrix} \iff \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.45 \\ 0.45 \end{pmatrix}.$$

Jacobi-Verfahren (Gesamtschrittverfahren)

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

Beginn:

Falls Konvergenz gefordert: Matrix A auf Diagonaldominanz bringen (Zeilentauschen)!

I. $N^{-1} = D_A$ (Vorkonditionierer)

II. $L_A + R_A = (A - N^{-1})$

Routine (immer <u>vollständig</u> wiederholen für einen Schritt):

III. $N^{-1} * x^{(1)} = b - (A - N^{-1}) * x^{(0)}$

IV. Nach $x^{(1)}$ auflösen und von vorne…

V. $D_A * x^{(n)} = b - (L_A + R_A) * x^{(n-1)}$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Startvektor: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Auf Diagonaldominanz bringen:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$N^{-1} = D_A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_A + R_A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_A\,\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{b} - (L_A + R_A)\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1{,}4000 \\ 1{,}4286 \\ 1{,}0000 \\ 1{,}0000 \end{pmatrix}$$

$$D_A\,\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{b} - (L_A + R_A)\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4{,}1429 \\ 7{,}2000 \\ 3{,}3143 \\ 2{,}1714 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}8286 \\ 1{,}0286 \\ 0{,}3683 \\ 0{,}4343 \end{pmatrix}$$

Vektor- und Matrixnormen

Vektornormen

Betragssummennorm:

Beträge der einzelnen Komponenten aufaddieren: $\|e\|_1 = |e_1| + |e_2| + \ldots + |e_n|$

Euklidnorm:

Betrag des Vektors: $\|e\|_2 = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2}$

Maximumnorm:

Größte Komponente des Vektors: $\|e\|_\infty = \max\limits_{1 \le j \le n} |e_n|$

Matrixnormen

Spaltensummennorm:

Größte Spaltensumme: $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max\{1+2\,;5+3\,;3+1\} = 8$$

Zeilensummennorm:

Größte Zeilensumme: $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le m} \sum\limits^{n} |a_{ij}|$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \max\{1+5+3\,;\ 2+3+1\} = 9$$

Spektralnorm:

Maximaler Eigenwert zur Wurzel von **A^TA** (muss berechnet werden, nicht einfach A nehmen!): $\|A\|_2 = max\,\{\sqrt{\sigma}; \sqrt{\sigma}\ Eigenwert\ von\ A^T A\}$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0$$

$$\rightarrow EW\ bei\ 0{,}7639\ und\ 5{,}2361$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{5{,}2361}$$

Ist die Matrix symmetrisch kann auch gleich der betragsgrößte Eigenwert genommen werden: $\|A\|_2 = max\{|\lambda| : \lambda\ EW\ von\ \boldsymbol{A}\}$

Von A^{-1} ist die Spektralnorm einfach 1/(der betragskleinste Eigenwert von A).

Konditionszahlen

Absolute Kondition:

$$\kappa_{\text{abs}} = \|A^{-1}\|_2$$

Konditionszahl (relative Kondition):

$$\kappa_2(A) = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2 \text{ (1- und } \infty\text{-Norm analog)}$$

Für symmetrische Matrizen gilt:

$$\kappa_2(A) = max\{|\lambda|\} \cdot (min\{|\lambda|\})^{-1} = \frac{max\{|\lambda|\}}{min\{|\lambda|\}}$$

$$\kappa_1(A) = \kappa_\infty(A)$$

Spektralradius

$$\det(xI - M_{Jac}) = \left| \begin{pmatrix} x+0 & 0{,}5 & 1 \\ 0.5 & x+0 & 1 \\ -2 & 2 & x+0 \end{pmatrix} \right|$$

$$\to x^3 - \frac{1}{4}x = x\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\to x = 0\ oder\ x^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\to EW\ bei\ -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$$

$$\to p(M_{Jac}) = max\left(\left|-\frac{1}{2}\right|, |0|, \left|\frac{1}{2}\right|\right) = \frac{1}{2}$$

Eigenwertbestimmung

Eigenwert und Eigenvektor

Folgende Beziehung gilt zwischen Eigenwert und Eigenvektor:

$$A * \vec{x} = \lambda * \vec{x}$$

Die Triviallösung ist immer der Nullvektor, allerdings ist diese fast immer nicht gesucht!

Der **Rayleigh-Quotient** bildet den Eigenwert ebenfalls ab:

$$R_A(\vec{x}) = \frac{\vec{x}^T * A * \vec{x}}{\vec{x}^T * \vec{x}} = \lambda$$

Ein Eigenwert kann komplex sein, muss allerdings bei einer reellen Matrix komplex und komplex konjugiert vorliegen. Eine symmetrische Matrix hat nur reelle Eigenwerte.

Kreissatz von Gerschgorin

Allgemein:

Ist λ ein EW von A, dann liegt in der Vereinigung der Zeilen- und Spaltenkreise λ.

Sind $K_1, \ldots, K_n$ paarweise disjunkt (schneiden sich nicht), dann liegt in jedem Kreis genau ein Eigenwert.

Bilden k Zeilenkreise eine zusammenhängende Menge, so befinden sich in dieser Menge k Eigenwerte. Dasselbe gilt für Spaltenkreise.

Durch die Vereinigung der Spalten- und Zeilenkreise erhält man eine genaue Abschätzung über die Lage der Eigenwerte von A.

Wenn A symmetrisch gilt:

- Zeilenkreise = Spaltenkreise
- EW sind reelle (auf der x-Achse)

Bei vorheriger Cholesky-Zerlegung kann zusätzlich gesagt werden, dass die EW nicht negativ sind (positive Definitheit).

Zeilenkreise bestimmen:

- Mittelpunkt = Diagonalelement
- Radius = Summe der Beträge der Zeilenelemente (ausgenommen des Diagonalelements)

Spaltenkreise bestimmen:

- Mittelpunkt = Diagonalelement
- Radius = Summe der Beträge der Spaltenelemente (ausgenommen des Diagonalelements)

Beispiel:

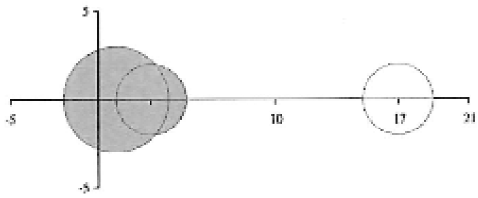
Lokalisiere die EW $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 17 \end{pmatrix}$

Zeilenkreise:

$$K_1 = \{ z \in C \,|\, \overbrace{z-1}^{\substack{Mittelpunkt \\ bei\ 1}} | \leq \overbrace{3}^{Radius} \}$$

$$K_2 = \{ z \in C | z-3 | \leq 2\}$$

$$K_3 = \{ z \in C | z-17 | \leq 2\}$$

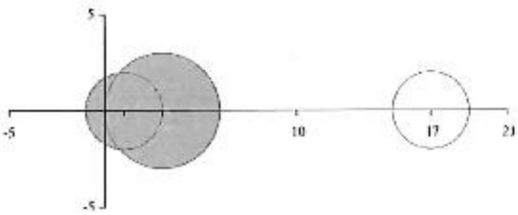


Spaltenkreise:

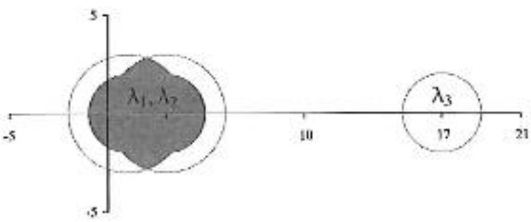
$$K_1 = \{ z \in C | z-1 | \leq 2\}$$

$$K_2 = \{ z \in C | z-3 | \leq 3\}$$

$$K_3 = \{ z \in C | z-17 | \leq 2\}$$



Vereinigung der Spalten- und Zeilenkreise:



Inverse Iteration (nach Wielandt)

Das Verfahren der inversen Iteration (nach Wielandt) bestimmt den betragskleinsten Eigenwert.

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

Beginn:

I. Startvektor normieren: $x^{(0)} = \frac{y^{(0)}}{\left\|y^{(0)}\right\|_2}$

Ist $y^{(0)}$ schon mit $\frac{1}{\sqrt{3}} * (1,1,1)^T$ gegeben, dann steht da schon der normierte Startvektor.

II. $y^{(1)}$ bestimmen mit Hilfe von LR-Zerlegung bzw. Cholesky $Ay^{(1)} = x^{(0)}$

III. Erneute Normierung: $x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{\left\|y^{(1)}\right\|_2}$

IV. $R_{A^{-1}}\left(y^{(0)}\right) = \frac{x^{(0)^T} * x^{(1)}}{\left\|y^{(1)}\right\|_2} = \widehat{\lambda_n}$

V. $\widehat{\lambda_n}$:= Näerung des betragskleinsten EW

Beispiel:

Gegeben sei das allg. EW-Problem $Ax = \lambda Bx$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}, B = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$y^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(0)} = \frac{y^{(0)}}{\|y^{(0)}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$By^{(1)} = Ax^{(0)}$$

Da B spd. ist, benutzen wir die Cholesky-Zerlegung (Alternativ LR-Zerlegung)

$$B = C^T C \quad \text{mit } C = \begin{pmatrix} 0{,}4082 & 0{,}1021 & 0 \\ 0 & 0{,}3953 & 0{,}1054 \\ 0 & 0 & 0{,}3944 \end{pmatrix}$$

$$By^{(1)} = C^T C y^{(1)} = Ax^{(0)}$$

- Rechte Seite $Ax^{(0)}$ berechnen
- $C^T C$ berechnen
- Nach $y^{(1)}$ auflösen

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} 48{,}4873 \\ -58{,}1848 \\ 48{,}4873 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{\|y^{(1)}\|_2}$$

$$R_{A^{-1}}\left(y^{(0)}\right) = \frac{x^{(0)^T} x^{(1)}}{\|y^{(1)}\|_2} = \widetilde{\lambda_n} = 68{,}5714$$

Von-Mises-Verfahren (Potenzmethode)

Das von-Mises-Verfahren bestimmt den betragsgrößten Eigenwert der Matrix.

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

Algorithmus:

I. Startvektor normieren: $x^{(0)} = \frac{y^{(0)}}{\|y^{(0)}\|_2}$

II. $y^{(1)} = Ax^{(0)}$ (wenn Bedingung: $Ax=\lambda Bx$ -> $By^{(1)} = Ax^{(0)}$)

III. Näherung des Eigenwertes:

$\widehat{\lambda_n} = x^{(0)^T} * y^{(1)} \left(= R_A\left(y^{(0)}\right)\right)$

IV. Erneute Normierung: $x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{\|y^{(1)}\|_2}$

V. …

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & -7 & 3 & -2 \\ -7 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(0)} = \frac{y^{(0)}}{\|y^{(0)}\|_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y^{(1)} = Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 20 \\ -7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\lambda_1^{(0)}} = x^{(0)^T} y^{(1)} = 20$$

$$x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{\|y^{(1)}\|_2} = \begin{pmatrix} 0{,}9163 \\ -0{,}3257 \\ 0{,}1396 \\ -0{,}093 \end{pmatrix}$$

$$y^{(2)} = Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} 21{,}4563 \\ -8{,}6277 \\ 2{,}6121 \\ -3{,}4154 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\lambda_1^{(1)}} = x^{(1)^T} y^{(2)} = 23{,}4156$$

Beispiel:

Aufgabe 5.8 [Iterative Bestimmung von EWen für Verallgemeinerte Eigenwertprobleme]

Gegeben sei ein verallgemeinertes Eigenwertproblem $Ax = \lambda Bx$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{y}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man berechne

(a) mit dem von-Mises Verfahren (2 Schritte) eine Näherung für den betragsmäßig größten Eigenwert.

(b) mit der Inversen Iteration (2 Schritte) eine Näherung für den betragsmäßig kleinsten Eigenwert.

Lösung.

(a) Da $\mathbf{y}^{(0)}$ normiert ist, gilt $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{y}^{(0)}$. Die Hauptschwierigkeit besteht im Lösen des linearen Gleichungssystems $B\mathbf{y}^{(k+1)} = A\mathbf{x}^{(k)}$. Da B symmetrisch positiv definit ist (Symmetrie, strikte Diagonaldominanz und positive Diagonale), benutzen wir die Cholesky-Zerlegung. Es ergibt sich

$$B = C^T C, \quad \text{mit } C = \begin{pmatrix} 0.4082 & 0.1021 & 0 \\ 0 & 0.3953 & 0.1054 \\ 0 & 0 & 0.3944 \end{pmatrix}$$

Nun können wir zuerst die rechte Seite $A\mathbf{x}^{(0)}$ berechnen und dann mithilfe der Cholesky-Zerlegung $\mathbf{y}^{(1)}$ derart bestimmen, dass schließlich $B\mathbf{y}^{(1)} = C^T C\mathbf{y}^{(1)} = A\mathbf{x}^{(0)}$ gilt. Der erste Schritt ist dementsprechend:

$$\mathbf{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} 48.4873 \\ -58.1848 \\ 48.4873 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda}_1^{(0)} = \left(\mathbf{x}^{(0)}\right)^T \mathbf{y}^{(1)} = 68.5714, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \frac{\mathbf{y}^{(1)}}{\|\mathbf{y}^{(1)}\|_2} = \begin{pmatrix} 0.5392 \\ -0.6470 \\ 0.5392 \end{pmatrix}.$$

Der zweite Schritt lautet analog:

$$\mathbf{y}^{(2)} = \begin{pmatrix} 63.5905 \\ -88.7310 \\ 63.5905 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda}_1^{(1)} = 125.9801, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5033 \\ -0.7023 \\ 0.5033 \end{pmatrix}.$$

Interpolation

Methode der Fehlerquadratsumme (mit Cholesky)

<u>Voraussetzung:</u>

➔ A muss vollen Rang besitzen

➔ Quadratische Matrix (wegen Cholesky)

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

Algorithmus:

I. A aufstellen

- Polynomabhängig füllen
- 1.Spalte mit Einsen füllen
- 2.Spalte mit x-Werten füllen
- Weiter Spalten, wenn der Grad der Funktion höher ist, dann mit den x-Werten^(Grad), …

z.B. beim Grad 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & {t_1}^2 \\ 1 & t_2 & {t_2}^2 \\ 1 & t_3 & {t_3}^2 \end{pmatrix}$

II. Berechne A^Tb (b enthält Fkt.-Werte)

III. Berechne Matrix A^TA

IV. Berechne die Cholesky Zerlegung von A^TA

Gegeben sei folgende Wertetabelle

t	−4	−2	2	4
y	128	72	8	2

Berechnen Sie die *Ausgleichsparabel* $f(t) = x_2t^2 + x_1t + x_0$ mit Hilfe der *Gaußschen Normalengleichungen*. Wählen Sie dabei für den Lösungsvektor $\vec{x}$ die Reihenfolge $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2)^T$ (*nicht* $\vec{x} = (x_2, x_1, x_0)^T$). Lösen Sie dabei die Gaußschen Normalengleichungen mit dem *Cholesky-Algorithmus*.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 16 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 & 4 \\ 16 & 4 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 128 \\ 72 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, A^Tb = \begin{pmatrix} 210 \\ -632 \\ 2400 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 40 \\ 0 & 40 & 0 \\ 40 & 0 & 544 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 20 \\ 0 & \sqrt{40} & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Löse $C^Tz = A^Tb \rightarrow z = \begin{pmatrix} 105 \\ \frac{-632}{\sqrt{40}} \\ 25 \end{pmatrix}$

Löse $Cx = z \rightarrow \ x = \begin{pmatrix} 31{,}67 \\ -15{,}8 \\ 2{,}083 \end{pmatrix}$

$\rightarrow f(t) = 2{,}083t^2 - 15{,}8t + 31{,}67$

Newton-Darstellung/Schema (Polynom-Interpolation)

In die erste Zeile kommen die x-Werte und in die zweite Zeile die Funktionswerte (f(x)). Darunter berechnen wir immer dasselbe Schema:

$$[x_i, x_{i-1}]f = \frac{[x_i]f - [x_{i-1}]f}{x_i - x_{i-1}}$$

Falls Stützstellen doppelt, wird über die Taylorformel der Eintrag bestimmt. Dieser gilt auch für alle weiteren Ableitungen in der Zeile (mit derselben Stützstelle (x-Wert)) (siehe Kasten):

$$[x_i, x_{i-1}]f = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Somit entsteht die folgende Tabelle (hier als Beispiel):

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
$[x_0]f$	$[x_1]f$	$[x_2]f$	$[x_3]f$	$[x_4]f$
	$[x_0, x_1]f$	$[x_1, x_2]f$	$[x_2, x_3]f$	$[x_3, x_4]f$
		$[x_0, x_1, x_2]f$	$[x_1, x_2, x_3]f$	$[x_2, x_3, x_4]f$
			$[x_0, x_1, x_2, x_3]f$	$[x_1, x_2, x_3, x_4]f$
				$[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]f$

x_i	-3	-1	1	3	5
$f(x_i)$	-14	6	2	22	114

-3	-1	1	3	5
-14	6	2	22	114
	$\frac{6-(-14)}{-1-(-3)} = 10$	$\frac{2-6}{1-(-1)} = -2$	$\frac{22-2}{3-1} = 10$	$\frac{114-22}{5-3} = 46$
		$\frac{-2-10}{1-(-3)} = -3$	$\frac{10-(-2)}{3-(-1)} = 3$	$\frac{46-10}{5-1} = 9$
			$\frac{3-(-3)}{3-(-3)} = 1$	$\frac{9-3}{5-(-1)} = 1$
				$\frac{1-1}{5-(-3)} = 0$

i	0	1	2
x_i	4	4	4.
y_i	10	2	-2

Newton-Schema:

4	4	4
10	10	10
	$\frac{2}{1!} = 2$	$\frac{2}{1!} = 2$
		$\frac{-2}{2!} = -1$

Das Interpolationspolynom berechnet sich mit den Werten der Diagonalen:

Der erste Wert ist f(x) an der Stelle x_0. Dann nimmt man immer den Wert der Diagonalen und multiziert diesen mit $(x-(x_{i-1}))$ mal alle „Nullstellen" der Spalten davor, also x minus den x-Wert der Spalte davor. So entsteht aus der oberen Tabelle folgendes Polynom:

$$\begin{aligned} p(x) = \; & [x_0]f + [x_0, x_1]f(x - x_0) + [x_0, x_1, x_2]f(x - x_1)(x - x_0) \\ & + [x_0, x_1, x_2, x_3]f(x - x_2)(x - x_1)(x - x_0) \\ & + [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]f(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1)(x - x_0) \end{aligned}$$

$$p(x) = -14 + 10(x+3) - 3(x+1)(x+3) + 1(x+1)(x-1)(x+3)$$

Lineare Spline-Interpolation (Hutfunktionen)

Man kann verschiedene Punkte durch lineare Splines verbinden und somit als Funktion definieren.

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

I. Newton-Schema bis zur zweiten Zeile bilden (Steigungen)

II. Hutfunktionen für die einzelnen Stützpunkte bilden:

$$C_i(x)\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x\in[x_{i-1},x_i]\\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}, & x\in[x_i,x_{i+1}]\\ 0, & sonst\ auf\ [a,b]\end{cases}$$

III. Linearen Spline aus Hutfunktionen und f(x)-Werten bilden:

$$s(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)*C_i(x)$$

(Ist s(x) abhängig von Hutfunktionen zu geben, dann wie Schritt III., sonst wie im Kasten unten mit abschnittsweiser Definierung)

Beispiel:

x_i	-1	2	4	8
$f(x_i)$	12	16	14	14

Für die Hutfunktion gilt somit

$$s(x)=12C_0(x)+16C_1(x)+14C_2(x)+14C_3(x)$$

Newton-Schema

-1	2	4	8
12	16	14	14
	$\frac{4}{3}$	-1	0

$$s(x)=\begin{cases}s_1(x)=12+\frac{4}{3}(x+1) & in\ [-1,2]\\ s_2(x)=16-(x-2) & in\ [2,4]\\ s_3(x)=14+0(x-4) & in\ [4,8]\end{cases}$$

Fehler zwischen den Stützstellen

$$s(4)=12C_0(4)+16C_1(4)+14C_2(4)+14C_3(4)$$

$$s(x)=12*0+16*0+14*1+14*0=14$$

Fehlerdarstellung

Mit der Länge des größten Intervalls

$$h=\max_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1})$$

folgt für die Fehlerabschätzung

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)-s(x)|\le\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{8}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

Um s(x) Abschnittsweise anzugeben nehmen wir für jeden Bereich $f(x_i)$ als Startwert, z.B. hier 12, und addieren dieses mit $f'(x_{i+1})$ * $(x-x_i)$, **also ist der Abschnitt von x_i bis x_{i+1} mit $f(x_i)+f'(x_{i+1})*(x-x_i)$ als linearer Spline definiert**. Siehe Beispiel: 12 + (4/3) * (x+1)

Beispiel:

Aufgabe 6.9 Gegeben sei die Wertetabelle

i	0	1	2	3
x_i	2	4	6	8
y_i	0	1	1	2

(a) Berechnen Sie $[x_0, x_1, x_2]f$ und $[x_1, x_2, x_3]f$.

(b) Geben Sie den linearen interpolierenden Spline s zu den obigen Daten in der intervallweisen Newton-Darstellung an und zeichnen Sie diesen in ein geeignetes Koordinatensystem.

(c) Geben Sie s ebenfalls in der nodalen Basis (Hutfunktionen) an. Bestimmen Sie dabei auch explizit alle notwendigen Basisfunktionen C_i.

(a) Um die zweiten Dividierten Differenzen $[x_0, x_1, x_2]f$ und $[x_1, x_2, x_3]f$ zu berechnen, verwenden wir der Einfachheit halber/wie immer das Newton-Schema:

2	4	6	8
0	1	1	2
	$\frac{1-0}{4-2} = \frac{1}{2}$	0	$\frac{2-1}{8-6} = \frac{1}{2}$
		$\frac{0-1/2}{6-2} = -\frac{1}{8}$	$\frac{1/2-0}{8-4} = \frac{1}{8}$

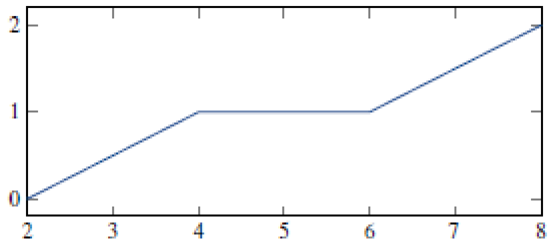
Es gilt demnach $[x_0, x_1, x_2]f = [2, 4, 6]f = -\frac{1}{8}$ und $[x_1, x_2, x_3]f = [4, 6, 8]f = \frac{1}{8}$ und wir können auch das entsprechende Interpolationspolynom in Newton-Darstellung angeben:

$$p(x) = \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)(x-4) + \frac{1}{24}(x-2)(x-4)(x-6). \tag{0.1}$$

(b) Der lineare interpolierende Spline s zu obigen Daten lautet

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-2), & x \in [2,4], \\ 1, & x \in [4,6], \\ 1 + \frac{1}{2}(x-6), & x \in [6,8] \end{cases} \tag{0.2}$$

und sieht wie folgt aus:



(c) Die Darstellung von s mit Hutfunktionen lautet

$$s(x) = 0C_0(x) + 1C_1(x) + 1C_2(x) + 2C_3(x). \tag{0.3}$$

Die explizite Angabe von C_0 ist unnötig, da es 0-mal (also nicht) vorkommt. $C_1(x)$, $C_2(x)$ und $C_3(x)$ gegeben sind durch

$$C_1(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2}, & x \in [2,4], \\ -\frac{x-6}{2}, & x \in [4,6], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$C_2(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{2}, & x \in [4,6], \\ -\frac{x-8}{2}, & x \in [6,8], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$C_3(x) = \begin{cases} \frac{x-6}{2}, & x \in [6,8], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hutfunktionen zeichnen

Hutfunktionen sind an der zugehörigen Stützstelle 1 und fallen bis zu der vorherigen und folgenden Stützstelle auf 0 wieder ab. Somit ist die Steigung der Hutfunktion nicht immer gleich, sondern hängt von der Entfernung zur nächsten Stützstelle ab.

Solle eine Funktion aus Hutfunktionen gezeichnet werden, so muss in die Hutfunktionen nacheinander immer die Stützstelle „eingesetzt“ werden (man schaut welchen Wert die Hutfunktion an der Stelle hat) und trägt die Summe dann als Wert für die Funktion ein.

Tipp: Die Hutfunktionen von zwei aufeinander folgenden Stützstellen (1,2) ergeben auf dem Intervall zwischen den beiden [1, 2] immer 1.

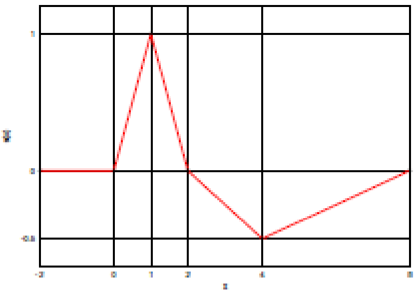
Beispiel:

Gegeben sei die Zerlegung

$$x_0 = -2,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 4,\ x_5 = 8$$

des Intervalls [-2,8] in 5 Teilintervalle. Die zugehörigen Basisfunktionen linearer Splines („Hutfunktionen“) seien mit $C_0, C_1, \ldots, C_5$ bezeichnet.

(a) Skizzieren Sie $C_2 - 0.5C_4$ (in einem Koordinatensystem, mit beschrifteter $x-$ und $y-$Achse).



Ordnung von Splinefunktionen

Soll man überprüfen, ob eine Funktion durch einen quadratischen oder kubischen Spline dargestellt werden kann müssen folgende Schritte überprüft werden:

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

I. Ist die Funktion (wenn stückweisedefiniert, die einzelnen Definitionen) kleiner gleich Grad 2 (quadratisch), oder 3 (kubisch)

II. Ist die Funktion an den inneren Punkten stetig, also bei stückweisedefinierten Funktionen gibt es keinen Sprung (quadratisch und kubisch potentiell möglich)

III. Ist die Funktion auch stetig differenzierbar? Ist die Ableitung der Funktion überall stetig (quadratisch -> möglich, kubisch potentiell möglich)

(Nur noch für kubische Splines):

IV. Ist die zweite Ableitung stetig? (kubisch -> möglich)

Beispiel:

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-4, 1), \\ -\frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{3}{2}, & x \in [1, 2) \\ \frac{3}{2}, & x \in [2, 4]. \end{cases}$$

(a) eine quadratische Splinefunktion?

(b) eine kubische Splinefunktion?

Die Gegenfrage lautet: Bzgl. welcher Zerlegung? Ohne diese Information kann man die ursprüngliche Frage nicht beantworten. Für die Zerlegung $x_0 = -4, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$ ist $f(x)$ unter Umständen eine quadratische Splinefunktion. Für die Zerlegung $x_0 = -4, x_1 = 2, x_2 = 4$ ist das dagegen nicht der Fall, da $f(x)$ kein Polynom auf dem Intervall $[-4, 2]$ ist.
Wir gehen nun von der Zerlegung $x_0 = -4, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$ aus und prüfen:

i) Ist $f(x)$ ein Polynom vom Grad $\leqslant 2$ auf jedem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1, 2, 3$?

$$x \in \mathbb{P}_2([-4,1]) \ \checkmark \qquad -\frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{3}{2} \in \mathbb{P}_2([1,2]) \ \checkmark \qquad \frac{3}{2} \in \mathbb{P}_2([2,4]) \ \checkmark$$

ii) Ist die Stetigkeit an den inneren Punkten gegeben?

$$f_1(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) = 1, \quad f_2(1) = \lim_{x\to 1+} f(x) = -\frac{1}{2}(2-1)^2 + \frac{3}{2} = 1 \qquad \checkmark$$

$$f_2(2) = \lim_{x\to 2-} f(x) = -\frac{1}{2}(2-2)^2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}, \quad f_3(2) = \lim_{x\to 2+} f(x) = \frac{3}{2} \qquad \checkmark$$

iii) Ist sie auch stetig differenzierbar? Dazu leiten wir $f(x)$ stückweise ab und nennen das Ergebnis $\bar{f}(x)$. Existieren die Grenzwerte an den Intervallgrenzen und stimmen sie überein, so wissen wir, dass $\bar{f}(x)$ die Ableitung von $f(x)$ ist und daher gilt $f'(x) = \bar{f}(x)$. (Die Ableitung muss nicht unbedingt

existieren! Beispielsweise müsste die Ableitungsfunktion von $g(x) = |x|$ an der Stelle 0 zwei Werte annehmen: -1 und 1.)

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f_1'(x) = 1, & x \in [-4,1), \\ f_2'(x) = 2 - x, & x \in (1,2), \\ f_3'(x) = 0, & x \in (2,4]. \end{cases}$$

$$f_1'(1) = \lim_{x\to 1-} \bar{f}(x) = 1 = f_2'(1) = \lim_{x \to 1+} \bar{f}(x) \qquad \checkmark$$
$$f_2'(2) = \lim_{x\to 2-} \bar{f}(x) = 0 = f_3'(2) = \lim_{x \to 2+} \bar{f}(x) \qquad \checkmark$$

Damit ist gezeigt, dass $f(x)$ stetig differenzierbar auf $[-4,4]$ ist und es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-4,1), \\ 2 - x, & x \in [1,2), \\ 0, & x \in [2,4]. \end{cases}$$

Also ist $f(x)$ ein quadratischer Spline bzgl. obiger Zerlegung (und jeder Verfeinerung dieser Zerlegung).

(b) Die stückweisen Ableitungen von $f'(x)$ sind gegeben durch

$$f''(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-4,1), \\ -1, & x \in (1,2), \\ 0, & x \in (2,4]. \end{cases}$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass falls $f(x)$ ein kubischer Spline ist, $f''(x)$ ein linearer Spline sein muss. Dies ist erkennbar nicht der Fall (folgt sofort aus der Unstetigkeit), $f(x)$ kann also kein kubischer Spline sein.

Kubische Spline-Interpolation

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

I. Berechne alle Längen der Intervalle

II. Stelle das Newton-Schema bis zur zweiten Ableitung (zweiten zusätzlichen Zeile) auf
*(nur bei **vollständiger** Spline oder **periodischer** Spline):*

III. **Vollständiger** Spline (Randbedinungen):

a. Füge eine weitere Spalte am Anfang und am Ende hinzu
b. Der x-/y-Wert ist derselbe wie der Stützstelle am Anfang (bzw. am Ende)
c. Schreibe in die zweite Zeile den Wert der für s'(a) / s'(b) gilt
Beispiel: (hier s'(a) = 2, s'(b) = -2)

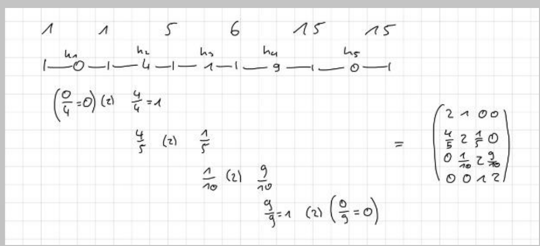
-2	-2	-1	0	1	2	2
1	1	3	4	3	1	1
	$\frac{2}{1!}$	$\frac{3-1}{-1-(-2)} = 2$	$\frac{4-3}{0-(-1)} = 1$	$\frac{3-4}{1-0} = -1$	$\frac{1-3}{2-1} = -2$	$-\frac{2}{1!}$
		$[x_0, x_0, x_1]s = 0$	$\frac{1-2}{0-(-2)} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-1-1}{1-(-1)} = -1$	$\frac{-2-(-1)}{2-0} = -\frac{1}{2}$	$[x_3, x_4, x_4]s = 0$

Periodischer Spline (s'(a) = s'(b), s(a) = s(b), …):

a. Füge eine weitere Spalte am Anfang und am Ende hinzu
b. Der x-Wert der Spalte am Anfang ist $x_0 - h_n$ (Anfangswert minus letzte Intervalllänge), der y-Wert ist der y-Wert der vorletzten Spalte
c. Der x-Wert der letzten Spalte ist $x_n - h_0$ (Endwert minus erste Intervalllänge)
Berechne auch die dritte Spalte (s''(x)) für die neuen Spalten

IV. Bilde eine Matrix mit immer einer 2 auf der Diagonalen und vor dem Diagonalelement mit $\frac{h_i}{h_i+h_{i-1}}$ und hinter dem Diagonalelement mit $\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}$, zusammen müssen die beiden Abstände 1 ergeben, es reicht also auch eine Seite zu berechnen und dann diese von eins abzuziehen.

Beispiel:



*(**vollständiger** Spline):*
In der ersten Zeile der Matrix steht immer (2, 1, 0, …, 0), in der letzten Zeile (0, …, 0, 1, 2)
*(**natürlicher** Spline):*
Erste und letzte Zeile verschwinden, da M_0 und $M_n = 0$ sind.

*(**periodischer** Spline):*

In der ersten Zeile der Matrix steht immer (2, $\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}$, 0, …, 0, $\frac{h_n}{h_i+h_{i+1}}$, 0);

(an der ersten Stelle eine 2, dann die Rechnung, bis zum vorletzten Eintrag nur Nullen, dann wieder die Rechnung und in der letzten Spalte wieder eine Null), in der letzten Zeile (1, 0, …, 0, -1)

V. Die aufgestellte Matrix multipliziert mit dem Momenten-Vektor ist gleich 6*Vektor(mit …

(**natürlicher/vollständiger** Spline):

… s''(x)-Werte (zweite Zeile im Newton-Schema) der jeweiligen Zeile (Spalte im Newton-Schema)

(**periodischer** Spline):

… s''(x)-Werte der jeweiligen Zeile, in der letzten Zeile steht eine Null

VI. Momente berechnen (Gleichungssystem lösen)

VII. Ableitung berechnen mit:

$$s'(x_{i-1}) = \frac{s(x_i) - s(x_{i-1})}{h_i} - M_{i-1}\frac{h_i}{3} - M_i\frac{h_i}{6}$$

oder

$$s'(x_i) = s'(x_{i-1}) + M_{i-1}\frac{h_i}{2} + M_i\frac{h_i}{2}$$

VIII. Momente und Ableitungen für jeden Abschnitt einsetzen in

$$s(x) = s(x_{i-1}) + s'(x_{i-1})(x - x_{i-1}) + \frac{M_{i-1}}{2}(x - x_{i-1})^2 + \frac{M_i - M_{i-1}}{6h_i}(x - x_{i-1})^3$$

Ist der Bereich nur von einem zum anderen Stützwert gefordert [0,1] (bei Abstand h=1), reicht es einmal die Ableitung zu bestimmen und dann den Spline zu berechnen. Sonst immer Abschnittsweise vorgehen und s(x) definieren. Also Schritt VII und VIII mehrmals durchführen. Für jeden Abschnitt separat. Siehe zweites Beispiel.

Die grundlegende Matrix sieht so aus:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 2 & 1-\alpha_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 2 & 1-\alpha_2 & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_i & 2 & 1-\alpha_i & 0 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \alpha_{n-2} & 2 & 1-\alpha_{n-2} & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_{n-1} & 2 & 1-\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ \vdots \\ M_{i-2} \\ M_{i-1} \\ M_i \\ M_{i+1} \\ M_{i+2} \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} [x_0, x_1, x_2]s \\ [x_1, x_2, x_3]s \\ \vdots \\ [x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]s \\ \vdots \\ [x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}]s \\ [x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]s \end{pmatrix}$$

Beachte: Bei *gleichabständigen* Stützstellen $h_i = h$ gilt sogar jeweils $\alpha_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} = \frac{h}{h+h} = \frac{1}{2}$ und auch $1 - \alpha_i = \frac{1}{2}$.

Beispiel:

Aufgabe 7.12 [Darstellung kubischer Splines, Momente]

Gegeben seien die Werte

i	0	1	2	3	4
x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	3	4	3	1

(a) Es seien hier zusätzlich $f'(x_0) = 2$ und $f'(x_4) = -2$ gegeben. Berechnen Sie die Taylor-Darstellung für den *vollständigen* interpolierenden Spline in $[0, 1]$. Geben Sie als Zwischenergebnis die *Momente* an.

(b) Berechnen Sie die Taylor-Darstellung des *natürlichen* interpolierenden Splines in $[1, 2]$. Geben Sie als Zwischenergebnis die *Momente* an.

(c) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Momente des periodischen interpolierenden Splines an.

a) Vollständiger Spline
b) Natürlicher Spline
c) Periodischer Spline

(a) Wir gehen wie im Skript zur Vorlesung beschrieben in 4 Schritten vor.

i) Wegen $h_i = 1$ für $i = 1, \dots, 4$ ist $\alpha_i = \frac{1}{2}$ für $i = 1, \dots, 3$ (in kurz/Worten: da alle Teilintervalle gleichlang sind, sind alle $\alpha_i = \frac{1}{2}$) und das lineare Gleichungssystem zum Berechnen der Momente lautet dementsprechend (s. Skript, Gleichung (5.8))

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} [x_0, x_1, x_2]s \\ [x_1, x_2, x_3]s \\ [x_2, x_3, x_4]s \end{pmatrix}$$

Um die rechte Seite auszurechnen verwenden wir die ersten Zeilen vom Newton-Schema

-2	-1	0	1	2
1	3	4	3	1
	$\frac{3-1}{-1-(-2)} = 2$	$\frac{4-3}{0-(-1)} = 1$	$\frac{3-4}{1-0} = -1$	$\frac{1-3}{2-1} = -2$
		$\frac{1-2}{0-(-2)} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-1-1}{1-(-1)} = -1$	$\frac{-2-(-1)}{2-0} = -\frac{1}{2}$

Also haben wir bisher das LGS

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

In dem LGS sind 5 Variablen aber nur 3 Gleichungen, es werden also noch 2 Gleichungen benötigt. Da wir einen vollständigen Spline berechnen wollen, ergänzen wir das LGS mit Skript-Formeln (5.13) ($\rightsquigarrow$ erste Zeile) und (5.14) ($\rightsquigarrow$ letzte Zeile) zu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot [x_0, x_0, x_1]s \\ -3 \\ -6 \\ -3 \\ 6 \cdot [x_3, x_4, x_4]s \end{pmatrix}.$$

Mit der Rekursionsformel aus Satz 5.10 kann man $[x_0, x_0, x_1]s$ und $[x_3, x_4, x_4]s$ berechnen. Man kann diese aber auch einfacher mit Hilfe des obigen Newton-Schemas ausrechnen, indem man zwei Spalten hinzufügt.

-2	-2	-1	0	1	2	2
1	1	3	4	3	1	1
	$\frac{2}{1!}$	$\frac{3-1}{-1-(-2)} = 2$	$\frac{4-3}{0-(-1)} = 1$	$\frac{3-4}{1-0} = -1$	$\frac{1-3}{2-1} = -2$	$-\frac{2}{1!}$
		$[x_0, x_0, x_1]s = 0$	$\frac{1-2}{0-(-2)} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-1-1}{1-(-1)} = -1$	$\frac{-2-(-1)}{2-0} = -\frac{1}{2}$	$[x_3, x_4, x_4]s = 0$

Es gilt also $[x_0, x_0, x_1]s = 0$, $[x_3, x_4, x_4]s = 0$ und wir erhalten das LGS

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Die Lösung (per Gauß oder LR-Zerlegung) ergibt

$$\begin{pmatrix} M_0 & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T$$

iii) + iv) Da wir den Spline nur auf einem Teilintervall angeben sollen, müssen wir nicht alle Ableitungen berechnen. Die Taylor-Darstellung erhalten wir aus der Formel (5.3) im Skript. Es genügt also, $s'(0)$ zu kennen, da die anderen Werte in der Formel bekannt sind. Dazu verwenden wir Formel (5.6)

$$s'(0) = \frac{s(1) - s(0)}{1} - M_2 \frac{1}{3} - M_3 \frac{1}{6} = 3 - 4 + \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 0$$

Nach Formel (5.3) ergibt sich für den Spline $s(x)$ auf dem Intervall $[0, 1]$ die Darstellung

$$s(x) = 4 + 0(x - 0) + \frac{-5}{4}(x - 0)^2 + \frac{1}{6}\left(-1 + \frac{5}{2}\right)(x - 0)^3 = 4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3.$$

(b) Prinzipiell geht man hier genauso vor wie oben. Aufgrund der bereits geleisteten Vorarbeit können wir aber abkürzen. Da wir einen *natürlichen* Spline ausrechnen wollen, gilt $M_0 = M_4 = 0$. Die übrigen drei Momente erhalten wir aus dem obigen LGS durch Streichen der zwei Zusatzbedingungen (erste und letzte Zeile der Matrix) und Streichen von M_0 und M_4.

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Die drei Momente als Lösung des LGS sind dann

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & -18 & -6 \end{pmatrix}^T.$$

In der Taylor-Darstellung für das Intervall $[1,2)$ benötigen wir die Ableitung s' am linken Randpunkt des Intervalls, also $s'(1)$; diese lautet

$$s'(1) = \frac{1-3}{1} + \frac{6}{7}\frac{1}{3} - 0\frac{1}{6} = -2 + \frac{2}{7} = -\frac{12}{7}$$

Also gilt auf dem Intervall $[1,2]$

$$\begin{aligned} s(x) &= 3 - \frac{12}{7}(x-1) - \frac{3}{7}(x-1)^2 + \frac{0+\frac{6}{7}}{6}(x-1)^3 \\ &= 3 - \frac{12}{7}(x-1) - \frac{3}{7}(x-1)^2 + \frac{1}{7}(x-1)^3 \end{aligned}$$

(c) Die rechte Seite berechnet man auch beim periodischen Spline mit Hilfe des Newton-Schemas: Wir definieren $x_{-1} := -3, s(x_{-1}) := s(x_3) = 3$, siehe Skript Seite 101 (C), Text unter Gleichung (5.15). Da es sich in dieser Aufgabe um einen periodischen Spline handelt, also mit $s(x_0) = s(x_n)$ und $M_0 = M_n$, werden wir Gleichungsvariante (5.15b) wählen). Die ersten Zeilen des Newton-Schemas lauten

-3	-2	-1	0	1	2
3	1	3	4	3	1
	$\frac{1-3}{-2-(-3)} = -2$	$\frac{3-1}{-1-(-2)} = 2$	$\frac{4-3}{0-(-1)} = 1$	$\frac{3-4}{1-0} = -1$	$\frac{1-3}{2-1} = -2$
		$\frac{2-(-2)}{-1-(-3)} = 2$	$\frac{1-2}{0-(-2)} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-1-1}{1-(-1)} = -1$	$\frac{-2-(-1)}{2-0} = -\frac{1}{2}$

Damit erhält man gemäß der Vorlesung das folgende LGS mit erster Zeile aus Gleichung (5.15b) und letzter Zeile aus (5.16)

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Laut Aufgabenstellung wäre man an dieser Stelle fertig! Allerdings formt man bei periodischen Splines das LGS i. d. R. weiter um, um ein strikt diagonaldominantes LGS zu erhalten. Für ein LGS mit strikt diagonaldominanter Matrix wüssten wir beispielsweise, dass die iterativen Relaxationsverfahren wie Gauß-Seidel oder Jacobi konvergieren. Wir formen die Matrix um, um strikte Diagonaldominanz zu erreichen. Die letzte Zeile in der Matrix bedeutet $M_4 = M_0$, wir können also M_4 eliminieren. Dazu erzeugen wir in der letzten Spalte der Matrix Nullen, indem wir die letzte Zeile jeweils mit einem Faktor multipliziert hinzuaddieren. Nennen wir die Zeilen der Matrix $z_1, \ldots, z_5$, so formen wir die Matrix um durch $z_4 \leftarrow z_4 + \frac{1}{2}z_5$. Das so umgeformte LGS enthält M_4 nur noch in der letzten Zeile und dort steht dann $M_0 - M_4 = 0$. Also lösen wir das LGS

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_4 = M_0$$

das nun auch strikt diagonaldominant ist. Damit konvergieren oben erwähnte Lösungsverfahren und wir wissen dann, dass die Lösung insgesamt

$$\left(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4\right)^T = \left(M_0, M_1, M_2, M_3, M_0\right)^T = \frac{1}{2}\left(15, -6, -3, -6, 15\right)^T$$

lautet.

Beispiel 2: Mehrere Bereiche anzugeben

Aufgabe 7.13 [Kubische Spline-Interpolation: Natürlicher Spline, nicht äquidistante Zerlegung]

Berechnen Sie die natürliche Spline–Funktion $s \in \mathcal{S}_3$, welche die nachfolgenden Daten zu den nicht äquidistant verteilten Stützstellen $x_0, \dots, x_3$ interpoliert.

x_i	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	2	5	5	2

Bemerkung: Hierbei handelt es sich um die Interpolation der Funktion $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{10}{1+x^2}$.

Lösung.

Die ersten Zeilen des Newton-Schemas lauten

-2	-1	1	2
2	5	5	2
	$\frac{5-2}{-1-(-2)} = 3$	$\frac{5-5}{1-(-1)} = 0$	$\frac{2-5}{2-1} = -3$
		$\frac{0-3}{1-(-2)} = -1$	$\frac{3-0}{2-5} = -1$

Da wir den natürlichen Spline berechnen, gilt $M_0 = M_3 = 0$. Man berechnet $h_1 = 1$, $h_2 = 2$, $h_3 = 1$ und erhält mit $\alpha_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}$, $i = 1, 2$ die Werte $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ und $\alpha_2 = \frac{2}{3}$.

$\vdash h_1 = 1 \dashv\vdash h_2 = 2 \dashv\vdash h_3 = 1 \dashv$

$\vdash h_1 + h_2 = 3 \dashv$

$\vdash h_2 + h_3 = 3 \dashv$

Das LGS der Momente ist somit gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 2 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{9}{4} \\ -\frac{9}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der benötigten $s'(x_i)$ mittels Formel (5.6) der Vorlesung und Zusammentragen der Ergebnisse führt auf:

i	x_i	$s(x_i)$	M_i	Formel (5.6)		$s'(x_i)$
0	-2	2	0	$3 - 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{6}$	$=$	$\frac{27}{8}$
1	-1	5	$-\frac{9}{4}$	$0 + \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{6}$	$=$	$\frac{9}{4}$
2	1	5	$-\frac{9}{4}$	$-3 + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} - 0 \cdot \frac{1}{6}$	$=$	$-\frac{9}{4}$
3	2	2	0	$s'(x_3)$ wird nicht benötigt, sonst mit Formel (5.7)		

Bemerkung: Die ersten Summanden für $i = 0, 1, 2$ wurden jeweils bereits in der zweiten Zeile des Newton–Schemas berechnet und müssen nicht erneut bestimmt werden.

Nun können wir den Spline auf den einzelnen Intervallen angeben (Formel (5.3)):

$$\begin{aligned}
[-2, -1]: \quad s(x) &= 2 + \frac{27}{8}(x+2) + 0(x+2)^2 + \frac{-\frac{9}{4} - 0}{6}(x+2)^3 \\
&= 2 + \frac{27}{8}(x+2) - \frac{9}{24}(x+2)^3 \\
[-1, 1]: \quad s(x) &= 5 + \frac{9}{4}(x+1) + \frac{-\frac{9}{4}}{2}(x+1)^2 + \frac{-\frac{9}{4} - (-\frac{9}{4})}{6 \cdot 2}(x+1)^3 \\
&= 5 + \frac{9}{4}(x+1) - \frac{9}{8}(x+1)^2 \\
[1, 2]: \quad s(x) &= 5 - \frac{9}{4}(x-1) + \frac{-\frac{9}{4}}{2}(x-1)^2 + \frac{0 + \frac{9}{4}}{6}(x-1)^3 \\
&= 5 - \frac{9}{4}(x-1) - \frac{9}{8}(x-1)^2 + \frac{9}{24}(x-1)^3
\end{aligned}$$

Numerische Integration

Newton-Cotes-Quadratur (Integral-Regeln)

Exaktheitsgrad

- Eine Funktion mit dem Grad ≤ k wird exakt integriert.
- Für symmetrische Knoten n = 2k integrieren auch Polynome vom Grad 2k+1 exakt.
- Mit n+1 Stützstellen bekommt man höchstens den Exaktheitsgrad 2n+1 (Gauß-Legendre)

Allgemeine Quadraturformel

$$Q(f) = (b-a)\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i) = \frac{b-a}{n_s}\sum_{i=0}^{n} \sigma_i f(x_i)$$

λ_i ist die Gewichtung an den jeweiligen Knoten x_i. Bei der Simpson-Regel ist die Gewichtung zum Beispiel 1,4,1.

Newton-Cotes-Quadraturformel

Mittelpunktregel (bis Grad 1 exakt)

$$Q(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Trapezregel (bis Grad 1 exakt)

$$Q(f) = \left(\frac{b-a}{2}\right)(f(a) + f(b))$$

Simpson-Regel (bis Grad 3 exakt)

$$Q(f) = \left(\frac{b-a}{6}\right)\left(1 * f(a) + 4 * f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 1 * f(b)\right)$$

Fehler für abgeschlossene Newton-Cotes-Formel mit einer unbekannten Stelle ξ im Intervall [a,b]:

$$\underbrace{\int_a^b p_{n,f}(x)dx}_{Q(f)} - \int_a^b f(x)dx = \begin{cases} k_n\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+2} \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}, & n \text{ ungerade} \\ k_n\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+3} \frac{f^{n+2}(\xi)}{(n+2)!}, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

n	n_s	Gewichte σ_i	Regel	Fehler
0	1	1	MP-Regel	$-\frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$
1	2	1 1	Trapezregel	$\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$
2	6	1 4 1	Simpson-Regel	$\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{1}{90} f^{(4)}(\xi)$
3	8	1 3 3 1	3/8-Regel	$\left(\frac{b-a}{3}\right)^5 \frac{3}{80} f^{(4)}(\xi)$

Bemerkung zu weiteren Quadraturformeln

Allgemein

$$Q(f) = (b-a)\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i) = \frac{b-a}{n_s}\sum_{i=0}^{n} \sigma_i f(x_i)$$

Optimaler Exaktheitsgrad nach Gauß-Legendre

$$x_i = m + r_j R \quad mit \quad R = \frac{b-a}{2} \quad und \quad m = \frac{a+b}{2}$$

→ Gauß-Quadraturformeln

n	n_s	Stützstellen r_i Gewichte σ_i	Regel	Fehler
0	1	$r_0 = 0$ $\sigma_0 = 1$	MP-Regel	$-\frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$
1	2	$r_0 = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ $r_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\sigma_0 = 1$ $\sigma_1 = 1$		$const \cdot f^{(4)}(\xi)$
2	18	$r_0 = \frac{-\sqrt{15}}{5}$ $r_1 = 0$ $r_2 = \frac{\sqrt{15}}{5}$ $\sigma_0 = 5$ $\sigma_1 = 8$ $\sigma_2 = 5$		$const \cdot f^{(6)}(\xi)$

<u>Mittelpunktregel</u>

$$Q(f) = f(m + r_0 R)$$

<u>Trapezregel</u>

$$Q(f) = \frac{1}{2}(f(m + r_0 R) + f(m + r_1 R))$$

<u>Simpson-Regel</u>

$$Q(f) = \frac{1}{18}\left(5f\left(\underbrace{m + r_0 R}_{x_0}\right) + 8f\left(\underbrace{m + r_1 R}_{x_1}\right) + 5f\left(\underbrace{m + r_2 R}_{x_2}\right)\right)$$

Zusammengesetzte Quadraturformeln

summierte Trapezregel

$$Q_L(f) = \frac{H}{2}(f(t_0) + f(t_L) + 2(f(t_1) + \cdots + f(t_{L-1}))$$

summierte Mittelpunktregel

$$Q_L(f) = H\big(f(m_1) + \cdots + f(m_L)\big)\,,\quad m_j = \frac{t_{j-1} + t_j}{2}$$

summierte Simpson-Regel

$$Q_L(f) = \frac{1}{3} * Trapezregel + \frac{2}{3} * Mittelpunktregel$$

Fehler bestimmen mit

$$|Q_L^n(f) - I(f)|$$

Halbierung der Schrittweite viertelt den Fehler

Beispiel

3-fach, bzw. 6-fach zusammengesetzte MP-Regel

$$I(f) = \int_0^1 \frac{sinx}{x}dx \approx 0{,}94608307036718$$

$$Q_M^3 = \frac{1}{3}(f\left(\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{3}(6sin\frac{1}{6} + 2sin\frac{1}{2} + \frac{6}{5}sin\frac{5}{6}) \approx 0{,}9475$$

$$Q_M^6 = \frac{1}{6}(12\sin\frac{1}{12} + 4sin\frac{1}{4} + \cdots + \frac{12}{11}sin\frac{11}{12}) \approx 0{,}9464$$

Für den Fehler ergibt sich

$$|Q_M^3(f) - I(f)| \approx 0{,}0014$$

bzw.

$$|Q_M^6(f) - I(f)| \approx 0{,}0003$$

Nullstellen und Fixpunkte

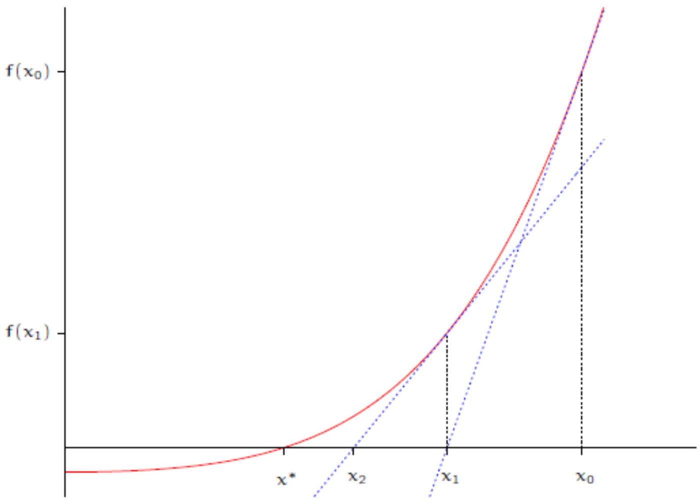
Nullstellenberechnung in einem Intervall

Damit bewiesen ist, dass auf einem Intervall [a,b] eine Nullstelle liegt, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- f(x) muss im Intervall stetig sein
- $f(a)*f(b) < 0$

Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren ist zur näherungsweisen Bestimmung der Nullstelle einer Funktion in einem Intervall. Dazu werden nacheinander immer dieselben Schritte durchlaufen und so die NST angenähert.



<u>Voraussetzung:</u>

➔ Die Funktion muss im Intervall stetig sein

➔ f(a) * f(b) < 0 muss erfüllt sein (außer es ist kein Intervall gegeben)

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

Beginn:

I. Die erste Ableitung der Funktion bilden

Vektoriell: $F'(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$

II. Wenn kein Anfangswert x_0 gegeben ist diesen als $x_0 = 0$ annehmen

Algorithmus:

III. $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, so oft wiederholen wie gefordert

Vektoriell: $F'\left(\vec{x}^{(k)}\right) * \vec{d}^{(k)} = -F\left(\vec{x}^{(k)}\right)$

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \alpha_k * \vec{d}^{(k)}$$

Der Algorithmus funktioniert nicht zur Bestimmung der NST, wenn das Verfahren alterniert, also Schritt x_1 gleich Schritt x_3 ist und Schritt $x_2 = x_4$ ist, oder die Werte gegen unendlich streben.

Beispiel:

$f(x) = \frac{2}{1+x} - e^x$ im Intervall [0,1]

i. $f(0) * f(1) = 1 - e < 0 \rightarrow$ erste Bed. erfüllt

Die Fkt. Ist stetig auf [0,1] Da einzige Polstelle -1 und die nicht im Intervall liegt.

ii. Ableitung:

$f'(x) = -(1+x)^{-2} - e^x$

iii. $x^0 = 0$

iv. $x^1 = x^1 = \frac{f(x^0)}{x^0 - f'(x^0)} = 0 - \frac{2}{1+0} = 1$

v. … (wiederholen des Algorithmus)

Gedämpftes Newton-Verfahren

Das gedämpfte Newton-Verfahren wird angewendet, wenn das normale Newton-Verfahren nicht gegen einen Wert konvergiert. Durch die Dämpfung wird eine Divergenz vermieden.

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

Algorithmus:

I. Berechne $d_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$,

Vektoriell: $F'\left(\vec{x}^{(k)}\right) * \vec{d}^{(k)} = -F\left(\vec{x}^{(k)}\right)$

II. Wähle α_0, am einfachsten ist erst mit $\alpha_0 = 1$

III. Überprüfe folgende Gleichung (c ist in der Aufgabe gegeben):

$$||f(x_0 + \alpha_0 * d_0)||_2^2 < (1 - c * \alpha_0) * ||f(x_0)||_2^2$$

Wenn die Gleichung stimmt, dann berechne Schritt IV., wenn nicht, dann wiederhole III. mit einem neuen α_0, am besten einfach die Hälfte vom alten α_0.

IV. $\vec{x}_{(k+1)} = \vec{x}_{(k)} - \alpha_k * d_k$,

Vektoriell: $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \alpha_k * \vec{d}^{(k)}$

Beispiel:

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \arctan(x)$ auf Nullstellen, indem Sie drei Schritte mit dem gedämpften Newton-Verfahren ($c = 10^{-3}$) für den Startwert $x_0 = \frac{\pi}{2}$ durchführen.

Für $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ist wie oben $f(x_0) = 1.0039$, $f'(x_0) = 0.2884$. Nach dem gedämpften Newton-Verfahren ($c = 10^{-3}$) erhält man

$$d_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -\frac{1.0039}{0.2884}.$$

Für $\alpha_0 = 1$ gilt $(1 - c\alpha_0) = 0,999 = 99,9\%$ und dementsprechen liefert die Probe bei der Abstiegsbedingung

$$\|f(x_0 + 1 \cdot d)\|_2^2 = 1.1848 > 1.0068 = 0,999\|f(x_0)\|_2^2,$$

was bedeutet, dass die Stelle $x_0 + 1 \cdot d$ *nicht* die gewünschte Reduktion auf *mindestens* 99,9% des Wertes für x_0 liefert. Deswegen wird α halbiert: Für $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ gilt $(1 - c\alpha_0) = 0,9995 = 99,95\%$ und die Probe bei der Abstiegsbedingung liefert

$$\|f(x_0 + 0.5 \cdot d)\|_2^2 = 0.0282 \not> 1.0073 = 0,9995\|f(x_0)\|_2^2,$$

sodass $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ gewählt wird und man $x_1 = x_0 + \alpha_0 \cdot d_0 = -0.1696$ errechnet. Der neue Wert für $x_0 + 0.5 \cdot d$ hat jetzt eine Reduktion auf mindestens 99,95% des alten Wertes für x_0 ergeben.

Weiter erhält man

$$\begin{array}{lllll} f(x_1) = -0.1680, & f'(x_1) = 0.9720, & d_1 = 0.1729, & \alpha_1 = 1, & x_2 = 0.0032, \\ f(x_2) = 0.0032, & f'(x_2) = 1.0000, & d_2 = -0.0032, & \alpha_2 = 1, & \end{array}$$

und schließlich $x_3 = -2.2591 \cdot 10^{-8}$ mit $f(x_3) = 2.259146 \cdot 10^{-8}$. Das gedämpfte Newton-Verfahren scheint also auch für den Startwert $x_0 = \frac{\pi}{2}$ zu konvergieren.

Vereinfachtes Newton-Verfahren

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

Beginn:

I. Forme die Funktionen nach Null um
II. Schreibe die Funktionen in einen Vektor
III. Bilde die Ableitungen, in der ersten Spalte der Ableitungsmatrix wird nach x_1, in der zweiten x_2, … abgeleitet

Algorithmus:

IV. Setze in F'(x) den Startvektor $\vec{x}^{(0)}$ ein
V. Es gibt dann zwei Möglichkeiten $\vec{x}^{(1)}$ zu berechnen:
   a. Ist das Integral von F'($\vec{x}^{(0)}$) einfach zu bilden benutze folgende Formel zum Berechnen von $\vec{x}^{(1)}$:
   $$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - F'\left(\vec{x}^{(0)}\right)^{-1} * F\left(\vec{x}^{(k)}\right)$$
   b. Ansonsten berechne den Vektor $d^{(k)}$ durch das Gleichungssystem:
   $$F'\left(\vec{x}^{(0)}\right) * \vec{d}^{(k)} = -F\left(\vec{x}^{(k)}\right)$$
   Und dann mit Hilfe von $d^{(k)}$ den Vektor $\vec{x}^{(1)}$:
   $$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \vec{d}^{(k)}$$

Beispiel:

$$x_1 = \frac{3 - e^{2x_1 - x_2}}{x_2},\; x_2 = \frac{2 - \sin(\pi * x_2)}{x_1^2},\; Startvektor\; x^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

i. $Gleichung\; x_1\; 0 = x_1x_2 - 3 + e^{2x_1 - x_2}$, $Gleichung\; x_2\; 0 = x_1^2x_2 - 2 + \sin(\pi x_2)$

ii. $F(x) = \begin{matrix} Gleichung\; x_1 \\ Gleichung\; x_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - 3 + e^{2x_1 - x_2} \\ x_1^2x_2 - 2 + \sin(\pi x_2) \end{pmatrix}$

iii. $F'(x) = \begin{pmatrix} x_2 + 2e^{2x_1 - x_2} & x_1 - e^{2x_1 - x_2} \\ 2x_1x_2 & x_1^2 + \cos(\pi x_2) \end{pmatrix}$

iv. $\vec{d}^k = (x^{k+1} - x^k) \rightarrow F'(x^0) * \vec{d}^0 = -F(x^0)$

v. $\begin{pmatrix} x_2 + 2e^{2x_1 - x_2} & x_1 - e^{2x_1 - x_2} \\ 2x_1x_2 & x_1^2 + \cos(\pi x_2) \end{pmatrix} * \vec{d} = -\begin{pmatrix} x_1x_2 - 3 + e^{2x_1 - x_2} \\ x_1^2x_2 - 2 + \sin(\pi x_2) \end{pmatrix}$

vi. $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 + \pi \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ für $x_1 = -1$, $x_2 = -2$ ergo den Startvektor eingesetzt

vii. LGS lösen $[1]\; 0 * d_1 - 2 * d_2 = 0 \rightarrow d_2 = 0$
$[2]\; 4 * d_1 + (1 + \pi) * d_2 = 4 \rightarrow d_1 = 1$

iix. $\vec{d} = (x^1 - x^0) = \left(\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

DGL umformen in ein System 1. Ordnung

Allgemeines Vorgehen:

I. Alle Funktion y(x), y'(x) werden zu Funktionen mit Zahlen y(x) -> Y_1(x), y'(x) -> Y_2(x), …

II. Schreibe alle Funktionen bis zur vorletzten als Vektor zusammen

$$Y(x) = \begin{pmatrix} Y_1(x) \\ Y_2(x) \\ Y_3(x) \end{pmatrix}$$

Bilde auch den Ableitungsvektor (mit der höchsten Ableitung von y(x) als unterstes Element

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} Y_2(x) \\ Y_3(x) \\ Y_4(x) \end{pmatrix}$$

III. Stelle die eigentliche Funktion (ausgetauscht mit y(x) -> Y_1(x)) so um, dass die höchste Ableitung auf einer Seite steht

IV. Trage die umgestellte Funktion für das letzte Element des Vektors Y'(x) ein

V. Ist die DGL linear, so formen wir den Vektor noch um, sonst lassen wir alles einfach stehen

VI. Gibt es neben Bedingungen, so schreiben wir diese als Vektor von y(x)

Beispiel:

$y'''(x) - 6y'(x) + x^2 y(x) = 0$ mit $y(-1) = 1,\ y'(-1) = 0$ und $y''(-1) = 2.$

Setze $\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}$. Es gilt $y'''(x) - 6y'(x) + x^2 y(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'''(x) = 6y'(x) - x^2 y(x)$ und somit

$$\mathbf{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_3(x) \\ 6y_2(x) - x^2 y_1(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Hier ist man prinzipiell fertig. Da es sich hier um eine *lineare* DGL handelt, ist auch folgende Matrix-Verktorschreibweise üblich:

$$\mathbf{y}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -x^2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}(x).$$

Randwertaufgabe

$[y(x) = y_{dgl}(x) + \tilde{y}(x)]$

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

I. Funktion finden, die die Gleichung löst
Zum Beispiel mit dem Ansatz: $y_{dgl}(x) = ax + b$, $y_{dgl}(x)$ ist dabei die Lösung des ursprünglichen gegebenen GLSys

II. Neue Randbedingungen aufstellen $R_1[\tilde{y}] = r_1 - R_1[y_{dgl}]$
Heißt: Die neue Randbedingung = gegebene Randbedingung – Randbedingung in y_{dgl} eingesetzt

III. Homogene Gleichung aufstellen:

$$2 * \tilde{y}''(x) - \tilde{y}'(x) = 0$$

IV. Verfahren zum Lösen des AWP wählen

V. Konstanten durch Einsetzen in die neuen Randbedingungen bestimmen Ergebnis ist $\tilde{y}(x)$

VI. Alles in die Gleichung $y(x) = y_{dgl}(x) + \tilde{y}(x)$ einsetzen

Beispiel:

$2y''(x) - y'(x) = 3\,;\;\; \boldsymbol{y(0) = 1\,; y(1) = 3}$

Nun muss eine Funktion[$\boldsymbol{y_{dgl}}$] gefunden werden die die Gleichung löst

$\boldsymbol{y_{dgl}(x) = -3x\,;}\;\; y'_{dgl}(x) = -3 \;\;\; ; y''_{dgl}(x) = 0$

$\boldsymbol{2}y''_{dgl}(x) - y'_{dgl}(x) = \boldsymbol{3}$

*(2*0)-(-3) =3*

Da wir nun bestätigt haben das die $\boldsymbol{y_{dgl}(x)}$ die Gleichung löst Stellen wir die neuen Bedingung auf

$R_k[\tilde{y}(x)] = R_k[y(x)] - R_k[y_{dgl}(x)]$

$R_1[\tilde{y}(x)] = y(0) - y_{dgl}(0) = 1 - 0 = 1$ => $\underline{\tilde{y}(0) = 1}$

$R_2[\tilde{y}(x)] = y(1) - y_{dgl}(1) = 3 - (-3) = 6$ $\underline{=> \tilde{y}(1) = 6}$

Nun können wir die homogene Gleichung aufstellen [**Homogen heißt Gleichung 0 setzen**]

$2\tilde{y}''(x) - \tilde{y}'(x) = 0\,;\;\; \tilde{y}(0) = 1;\;\; \tilde{y}(1) = 6$

An dieser Stelle geeignetes verfahren wählen

$2\lambda^2 - \lambda = 0$ => $\lambda_1 = 0\,; \lambda_2 = \frac{1}{2}$

⇨ $\tilde{y}(x) = a_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 e^{\lambda_2 x} = a_1 + a_2 e^{\frac{x}{2}}$

Konstanten Bestimmen durch einsetzen in die Randbedingung

$\tilde{y}(0) = 1 = a_1 + a_2 e^{\frac{0}{2}} = a_1 + a_2$ also $1 = a_1 + a_2$

$\tilde{y}(1) = 6 = a_1 + a_2 e^{\frac{1}{2}}$ also $6 = a_1 + a_2 e^{\frac{1}{2}}$

Ansatz wählen

1) $y''(x) + y(x) = 0$

$\to y(x) = a_1 \cdot \sin(x) + b_1 \cdot \cos(x)$

2) $y''(x) + c \cdot y(x) = 0$

$\to y(x) = c_1 \cdot \sin(\sqrt{c}\, x) + c_2 \cdot \cos(\sqrt{c} \cdot x)$

3) $y''(x) - y'(x) = 0$

$\to \lambda$-Ansatz

4) $y''(x) - c \cdot y(x) \to y(x) = c_1 \cdot \cosh(\sqrt{c} \cdot x) + c_2 \cdot \sinh(\sqrt{c} \cdot x)$

An dieser Stelle hat man nun Also 2 unbekannte und 2Gleichungssysteme und erhält somit a_1 *und* a_2

Die Lösung ist also

um von $\tilde{y}$ auf y zu kommen!

$\boldsymbol{y(x) = y_{dgl}(x) + \tilde{y}(x)}$; $y_{dgl}(x) = -3x\,;\;\; \tilde{y}(x) = a_1 + a_2 e^{\frac{x}{2}}$

$\boldsymbol{y(x)} = -3 + \frac{6-\sqrt{e}}{1-\sqrt{e}} + \frac{5}{\sqrt{e}-1} e^{\frac{x}{2}}$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL

Allgemeines Vorgehen:

I. Tausche y(x) -> 1, y'(x) -> λ, y''(x) -> λ^2

II. Bestimme die Nullstellen des Polynoms (also von λ)

III. Ist eine NST…

a. …einfach dann schreibe $c_i * e^{\lambda_i * x}$

b. …mehrfach dann bilde folgende Summe:

$$\left(\mathcal{L}^{-1}\frac{Q}{P}\right)(x) = \sum_{i=1}^{k}\left(e^{\lambda_i x}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{c_{i,j}}{(j-1)!}x^{j-1}\right).$$

(Die Klammer ist das entscheidende)

IV. Insgesamt bilde nun die Summe aus allen „NST-Formeln" von Schritt III.

Beispiel:

Wie lautet jeweils die allgemeine Lösung der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen?

(a) $-3y''(x) + 12y'(x) - 12y(x) = 0,$ **(b)** $y'''(x) + 4y''(x) + 4y'(x) = 0.$

Lösung.

Wir verwenden Satz 10.36 oder Satz 10.38.

(a) Division durch (-3) liefert $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$. Über das charakteristisches Polynom erhält man:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \iff (\lambda - 2)^2 = 0 \iff \lambda = 2.$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = (ax + b)e^{2x}.$$

(b) Über das charakteristisches Polynom erhält man:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \text{ oder } \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -2 \text{ mit Vielfachheit } n_2 = 2.$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = a + (b + cx)e^{-2x}.$$

Teilhomogenisierung

(Platz für eigene Notizen 😉)

Laplace-Transformation

Partialbruchzerlegung

Allgemeines Vorgehen:

I. Ist der Grad des Nenners größer, als die des Zählers?

Ja -> weitermachen, Nein -> Abbruch

II. Polstellen des Nenners herausbekommen, wenn man diese nicht aus (z.B (x-2)) ablesen kann

III. Ursprünglichen Teil in Koeffizienten zerlegen. Folgende Möglichkeiten gibt es:

a. Einfache PST ($\lambda_1 = x_1$): $\frac{A}{(x-x_1)}$

b. Mehrfache PST ($\lambda_{1,2} = x_1$): $\frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_1)^2} \, oder \, \frac{Cx+D}{(x-x_1)^2}$

c. Komplexe PST (z.B. $x^2 + 1$): $\frac{Ax+B}{(x^2+1)}$

d. Kombination ($\lambda_1 = x_1, \lambda_{2,3} = x_2$): $\frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} + \frac{C}{(x-x_2)^2}$

e. Mehrfache komplexe PST: $\frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$

IV. Koeffizienten ermitteln mit…

a. Der **Zuhaltemethode** (geht nicht immer):
Multipliziere die obere Zeile mit einer Nullstelle und setze diese dann ein. Ein Koeffizient verschwindet so und der Wert des anderen lässt sich einfach ausrechnen.

$$\frac{7x-10}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)}$$

mit (x-1) erweitern

$$\frac{(7x-10)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{A\,(x-1)}{(x-1)} + \frac{B(x-1)}{(x-2)}$$

x = 1 einsetzen → A = 3

b. Dem **Koeffizientenvergleich**:
Erweitere alle Brüche so, dass Sie den gleichen Nenner, wie der ursprünglichen Bruch haben. Multipliziere die Zähler aus. Nun vergleiche die Koeffizienten von allen Variablen mit dem ursprünglichen Bruch.

$$\frac{7x-10}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)}$$

Auf den selben Nenner bringen

$$\frac{7x-10}{(x-1)(x-2)}=\frac{A(x-2)}{(x-1)(x-2)}+\frac{B(x-1)}{(x-2)(x-1)}$$

$$\frac{7x-10}{(x-1)(x-2)}=\frac{Ax-2A}{(x-1)(x-2)}+\frac{Bx-B}{(x-2)(x-1)}$$

Koeffizienten vergleichen

$$-10=\ -2A-B$$

$$7=\ A+B$$

A = 3 (gleiches Ergebnis wie Zuhaltemethode), B = 4

V. Setze für die Koeffizienten die berechneten Werte ein -> fertig.

$$\frac{7x-10}{(x-1)(x-2)}=\frac{3}{(x-1)}+\frac{4}{(x-2)}$$

Transformationstabelle

$f(t)$	$F(s)$	$s > s_0 = \cdots$
e^{kt}	$\frac{1}{s-k}$	k
1	$\frac{1}{s}$	0
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	0
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	0
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	0
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	$\lvert\omega\rvert$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$	$\lvert\omega\rvert$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
$\sin^2(t)$	$\frac{2}{s(s^2+4)}$	0
$\cos^2(t)$	$\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$	0
$t\sin(\omega t)$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$	0
$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	0
$\frac{1}{t}\sin(\omega t)$	$\arctan\left(\frac{\omega}{s}\right)$	0
$H(t-a)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$	0
$t^n e^{kt}$	$\frac{n!}{(s-k)^{n+1}}$	k
$e^{kt}\cos(\omega t)$	$\frac{s-k}{(s-k)^2+\omega^2}$	k
$e^{kt}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-k)^2+\omega^2}$	k
$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	0
$\delta(t-a)$	e^{-as}	0

Laplace-Rechenregeln

a) $\mathcal{L}(af + bg) = a\,\mathcal{L}f + b\,\mathcal{L}g$, für $s \in S$, für beliebige $a, b \in \mathbb{C}$ („Linearität“).

b) $(\mathcal{L}e^{at}f(t))(s) = (\mathcal{L}f)(s-a)$, $s > a + s_{0,f}$, für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ („Dämpfung⇝Verschiebung“, „Shiftsatz“).

c) $(\mathcal{L}f(at))(s) = \frac{1}{a}(\mathcal{L}f)\left(\frac{s}{a}\right)$, $s > as_{0,f}$, für beliebiges $a > 0$ („Streckung/Stauchung“).

d) $a \geqslant 0$ und $h(t) := \begin{cases} 0 & : t \leqslant a \\ f(t-a) & : t > a \end{cases} \implies (\mathcal{L}h)(s) = e^{-as}(\mathcal{L}f)(s)$, $(s > s_{0,f})$. („Verschiebung⇝Dämpfung“).

e_1) $(\mathcal{L}t\,f(t))(s) = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}f)(s)$, $\quad s > s_{0,f}$, („Ableitung der Transformierten“ oder auch „Multiplikationssatz“).

e_2) $(\mathcal{L}t^n\,f(t))(s) = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}(\mathcal{L}f)(s)$, $\quad s > s_{0,f}$, („Ableitungen der Transformierten“).

f) $\left(\mathcal{L}\frac{f(t)}{t}\right)(s) = \int_s^\infty (\mathcal{L}f)(u)\,du$, $\quad s > k$ falls $|\frac{f(t)}{t}| \leqslant Me^{kt}$ („Integration der Transformierten“, oder auch „Divisionssatz“).

g) $\left(\mathcal{L}\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right)(s) = \frac{1}{s}(\mathcal{L}f)(s)$, $\quad s > \max(0,k)$, („Transformation des Integrals“).

(„Transformation der Ableitung“).

h_1) $(\mathcal{L}f')(s) = s\,\mathcal{L}f(s) - f(0+)$, $\quad$ für $s > k$, dabei: $f(0+) := \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)$

h_2) $(\mathcal{L}f^{(n)})(s) = s^n(\mathcal{L}f)(s) - f(0+)s^{n-1} - f'(0+)s^{n-2} - \ldots - f^{(n-1)}(0+)$, $\quad$ für $s > k$ dabei: $f^{(j)}(0+) := \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f^{(j)}(t)$ („Transformation der Ableitungen“).

i) $(\mathcal{L}(f * g))(s) = (\mathcal{L}f)(s) \cdot (\mathcal{L}g)(s) = F(s)G(s)$ für $s > k$ dabei: „Faltung“ $(f * g)(t) := \int_0^t f(t-u)g(u)\,du$ („Faltungssatz“, „Produktformel“).

p) **Periodizitätssatz.** Sei f P-periodisch: Mit $P > 0$ gelte $f(t+P) = f(t) = f(t-P) = \ldots$ für alle t. Für die s, für die $\mathcal{L}f$ existiert, ist

$$\mathcal{L}f(s) \quad = \quad \frac{1}{1-e^{-sP}} \int_0^P f(u)\,e^{-su}\,du$$

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

I. Ist die Funktion schon in der Form $F(s) = L(f(s)) = \int_0^\infty e^{-st} * f(t)dt$, dann direkt Schritt III.

II. Wenn nicht, dann die Funktion mit Hilfe des in I. gegebenen Integrals in diese Form bringen

III. Mit Hilfe der Laplace-Tabelle die Funktion transformieren

IV. Mit der Funktion rechnen, zum Beispiel das Anfangswertproblem

V. Laplace-Funktion wieder mit Hilfe der Laplace-Tabelle zurück transformieren, hier bei Hilft die PBZ, um die Funktion „hübsch“ zu machen, damit man leichter sieht, welcher Fall aus der Tabelle nützlich ist

Beispiele:

Einfache Laplace- Transformation: **Linearität**

$f(x) = 2e^{3x} - 2e^{-3x}$ Hier ist zu erkennen, dass sich die Linearität ausnutzen lässt und sich die beiden Teile separat transformieren lassen. Desweiteren ist die Form „ $e^{-st} * f(t)$" schon erreicht somit reicht ein Blick in die Transformationstabelle um $\mathcal{L}(s)$ zu bestimmen.

→ $F(s) = \mathcal{L}f(s) = \frac{2}{s-3} - \frac{2}{s+3} = \frac{12}{s^2-9}$

Periodizitätssatz:

Die Fkt. $f(x) \{ \begin{matrix} \sin(t) \ \text{für}\ 0 < t < \pi \\ 0 \ \text{für}\ \pi < t < 2\pi \end{matrix}$ sei $P = 2\pi$ Periodisch

Wir erkennen, dass hier eine periodische Fkt. Vorliegt und somit Satz p) angewendet wird.

$(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{1-e^{-sP}} * \int_0^P f(t) * e^{-st}dt$ allg. Formel für P 2π einsetzen und für f(t) die beiden Fkt.

$(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} * \int_0^{\pi} \sin(t) * e^{-st}dt + \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} * \int_{\pi}^{2\pi} 0 * e^{-st}dt$ durch den Linearitätssatz können wir die beiden Fkt. Additiv zusammenschreiben, dabei fällt jedoch der „0`er" Term weg.
<u>WICHTIG:</u> die Grenzen müssen aber auch angepasst werden je nach dem welchen Gültigkeitsberreich den die Fkt. hat.

$(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} * \int_0^{2\pi} \sin(t) * e^{-st}dt$ Siehe Integrationstabelle + einsetzten der Grenzen

$(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} * \left[\frac{1+e^{-s\pi}}{s^2+1}\right] = \frac{1}{(1-e^{-s\pi})*(s^2+1)}$

<u>Divisionssatz:</u>

Bei dem Divisionssatz muss enorm drauf geachtet werden das die Fkt. anders aufgeschrieben werden.

$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t} dt$ Hier erkennt man eine Division → Divisionssatz muss umgeformt werden, da $\mathcal{L}(e^{-t}) - \mathcal{L}(e^{-3t})$ geht <u>nicht!</u> (siehe Ausnahmen und Bedingungen)

$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t} * (1 - e^{-2t})\right) * e^{-t}\, dt$ Die Fkt. wurde so umgeschrieben um die Allg. Form zu erhalten
$\int f(t) * e^{-st}dt$ „s" erkennen aus der e-Fkt. → s=1 in die untere Grenze einsetzen
$(\mathcal{L}f)(s) = \int_1^{\infty} (\mathcal{L}\, 1 - e^{-2t})\,(u)\, du$ f(t) ist immer ohne 1/t !!!
Linearität aus nutzen
Transformationstabelle
Bestimmtes Integral ausrechnen

Anfangswertaufgabe mit Hilfe von Laplace

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

I. Laplace Transformierte der Funktion berechnen
II. Funktion als Laplace-Transformierte aufstellen (z.B. x -> L[x]) und mit den Laplace-Regeln vereinfachen
III. Die Laplace-Transformation beider Seiten ausrechnen.
IV. Für y(x) -> Y, für y'(x) -> s*Y – y(0) und für
y''(x) -> s^2*Y – s*y(0) – y'(0)
Allgemein: $L\left[y^{(n)}(x)\right] = \left(\sum_{k=0}^{n-1} s^k * y^{((n-1)-k)}(0)\right) + s^n * Y$
V. Nach Y umstellen
VI. Funktion „hübsch" machen, z.B. durch PZB
VII. Rücktransformation L^{-1}, Y -> y(x)

Sonderfall Randbedingungen nicht von x=0 gegeben:

- Wenn **<u>alle</u>** Randbedingungen nicht von x=0 gegeben sind, also z.B. y(-1) = e^{-3}, wird aus y(t) -> y(t-1)
- Nun ersetzt man jedes t durch t-1 in der Funktion
- Anschließend substituieren y(t-1) -> z(t)
- Nun weiter mit Schritt I.
- Nach Schritt VII. Rücksubstitution z(t) = y(t-1), also y(t) = z(t+1), man ersetzt also jedes t durch t+1

Randwertaufgabe mit Hilfe von Laplace

Wird durchgeführt, wenn **<u>einige</u>** Randbedingungen nicht von x=0 gegeben sind, also wie z.B. y(-1) = e^{-3}

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

I. Schritt I.-IV. aus Anfangswertaufgaben
II. Alle unbekannten [für die keine Nebenbedingungen y(0) existiert] durch c_n ersetzen, z.B. dann y'''(0) (hierfür gibt es keine Bedingung) durch c_3 ersetzen
III. Schritt V. bis VII. aus Anfangswertaufgabe durchführen

Beispiel für eine Anfangswertaufgabe mit Laplace:

Lösen Sie folgende Anfangswertaufgaben (auf $[0,\infty[$) mit Hilfe der Laplace-Transformation.

(a) $y''(x) + y(x) = x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -2.$

(a) Anwendung der Laplace-Transformation ergibt

$$\mathcal{L}[y''(x) + y(x)](s) = \mathcal{L}[x](s).$$

Wir setzen $Y := \mathcal{L}[y]$ und erhalten

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + Y = \frac{1}{s^2} \quad \Longleftrightarrow \quad s^2Y - s + 2 + Y = \frac{1}{s^2} \quad \Longleftrightarrow \quad Y = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1}.$$

Das Selbige erhält man alternativ durch Anwendung von Satz 10.25:

$$\left.\begin{aligned} P(s) &= s^2+1 \\ Q(s) &= (s-2) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{(\mathcal{L}g)(s) + Q(s)}{P(s)} = \frac{\frac{1}{s^2} + (s-2)}{s^2+1} = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1}.$$

Eine Partialbruchzerlegung für den ersten Summanden führt auf

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1} = \frac{(A+C)s^3 + (B+D)s^2 + As + B}{s^2(s^2+1)}.$$

Mit Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad A = 0,\ A + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \\ &\Rightarrow \quad B = 1,\ B + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -1. \end{aligned}$$

erhalten wit somit

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{-1}{s^2+1} + \frac{s-2}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}.$$

Rücktransformation liefert nun die Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}\right)(x) \overset{\text{Tabelle}}{=} x + \cos x - 3\sin x.$$

Alternativ kann man hier auch eine komplexe Partialbruchzerlegung durchführen, dies wird exemplarisch in Aufgabenteil (b) gemacht.

Euler/Runge-Kutta

Explizites Euler-Verfahren

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

I. Ist das Gleichungssystem ≤ 1. Ordnung (1. Ableitung)
   a. Ja -> weitermachen
   b. Nein -> GLS in 1. Ordnung umstellen (dann nach dem vektoriellen Vorgehen weitermachen; siehe unten)

II. $f(x_i, y_i) \triangleq y'(x)$, also y'(x) berechnen bzw. nach y'(x) umstellen

<u>Algorithmus:</u>

III. $\boxed{y_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i)}$
- In jedem Schritt x_i und y_i in die Funktion [y'(x)] einsetzen
  - $x_{i+1} = x_i + h$
- Im ersten Schritt setzen wir den Anfangswert ein

Beispiel:

Führen Sie zwei Schritte des Euler-Verfahrens mit Schrittweite $h = 0.1$ zur näherungsweisen Lösung der Anfangswertaufgabe $y'(x) = xy(x)$, $y(0) = 0.1$ durch.

Lösung.

Mit $y_0 = 0.1$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$ folgt:

$$y_1 = y_0 + h \cdot x_0 \cdot y_0 = 0.1 + 0.1 \cdot (0 \cdot 0.1) = 0.1,$$
$$y_2 = y_1 + h \cdot x_1 \cdot y_1 = 0.1 + 0.1 \cdot (0.1 \cdot 0.1) = 0.101.$$

Vektoriell:

<u>Algorithmus:</u>

IV. $y_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i)$
- $f(x_i, y_i)$ ist der Vektor der Lösung zuvor, bzw. am Anfang der Anfangsvektor
- In jedem Schritt x_i und y_i in die Funktion [y'(x)] einsetzen.
- Im ersten Schritt setzen wir den Anfangswert ein.

Beispiel:

Aufgabe 11.10

Schreiben Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

als System erster Ordnung und berechnen Sie dann mit dem Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = 1/4$ Näherungen für $y(1)$ und $y'(1)$.

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $y' = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$y_3 = 2y_2 - y_1$

$y' = \begin{pmatrix} y_2 \\ 2y_2 - y_1 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} y' \\ 2y' - y \end{pmatrix}$

Lösung.

Wie immer setzt man $y_1 = y(x)$ und $y_2 = y'(x)$. Dann erhält man als System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

oder in Matrix-Vektor Schreibweise

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Euler-Verfahren: $\Phi(x, y; h) = \mathbf{f}(x, y)$. Es ergibt sich mit $h = 1/4$, $x_0 = 0$ und $\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_1 &= \mathbf{y}_0 + hf(x_0, \mathbf{y}_0) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{k}_{h,0,1}} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{y}_2 &= \mathbf{y}_1 + hf(x_1, \mathbf{y}_1) \\
&= \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{k}_{h,1,1}} = \begin{pmatrix} 5/8 \\ 35/16 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{y}_3 &= \mathbf{y}_2 + hf(x_2, \mathbf{y}_2) \\
&= \begin{pmatrix} 5/8 \\ 35/16 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/8 \\ 35/16 \end{pmatrix}}_{\mathbf{k}_{h,2,1}} = \begin{pmatrix} 75/64 \\ 25/8 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{y}_4 &= \mathbf{y}_3 + hf(x_3, \mathbf{y}_3) \\
&= \begin{pmatrix} 75/64 \\ 25/8 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 75/64 \\ 25/8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{k}_{h,3,1}} = \frac{1}{256} \begin{pmatrix} 500 \\ 1125 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{aligned} y(1) &\approx y_{4,1} = \frac{500}{256} \approx 1,9531 \\ y'(1) &\approx y_{4,2} = \frac{1125}{256} \approx 4,3945 \end{aligned}$$

Fehler bei Euler-/Runge-Kutta-Verfahren

(Für den Kurzfragenteil)

Der Fehler beim Euler-Verfahren reduziert sich um den Faktor n^{-1}, wenn man die Schrittweite um n verkleinert.

Der Fehler beim Runge-Kutta-Verfahren reduziert sich um den Faktor n^{-4}, wenn man die Schrittweite um n verkleinert.

Implizites Euler-Verfahren

Wir gehen ähnlich wie das explizite Euler-Verfahren vor nur, dass wir nicht x_i und y_i einsetzen, sondern x_{i+1} und y_{i+1}. Wir müssen also die Gleichung noch umstellen, bevor wir sie lösen können.

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

I. Ist das Gleichungssystem ≤ 1. Ordnung (1. Ableitung)
   a. Ja -> weitermachen
   b. Nein -> GLS in 1. Ordnung umstellen (dann nach dem vektoriellen Vorgehen weitermachen; siehe unten)

II. $f(x_i, y_i) \triangleq y'(x)$, also y'(x) berechnen bzw. nach y'(x) umstellen

<u>Algorithmus:</u>

III. $y_{i+1} = y_i + h * f(x_{i+1}, y_{i+1})$
   - In jedem Schritt x_{i+1} und y_{i+1} in die Funktion [y'(x)] einsetzen.
   - Im ersten Schritt setzen wir den Anfangswert ein.

IV. Nach y_{i+1} umstellen und berechnen, oder nach 0 umstellen und mit dem Newton-Verfahren lösen

Beispiel:

$$y' = 1 + \frac{y}{x}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 1.4, \quad y(1) = 2$$

$$y_{1,\text{i.Euler}} = y_0 + h \cdot \left(1 + \frac{y_{1,\text{i.Euler}}}{1.2}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{5}{6} y_{1,\text{i.Euler}} = 2.2 \quad \Longleftrightarrow \quad y_{1,\text{i.Euler}} = 2.64.$$

Runge-Kutta-Verfahren

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

I. Ist das Gleichungssystem ≤ 1. Ordnung (1. Ableitung)
   a. Ja -> weitermachen
   b. Nein -> GLS in 1. Ordnung umstellen

II. $f(x_i, y_i) \triangleq y'(x)$, also y'(x) berechnen bzw. nach y'(x) umstellen

<u>Algorithmus:</u>

III. Berechne die 4 k_i:
   a. $k_{i,1} = f(x_i, y_i)$
   b. $k_{i,2} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} * k_{i,1}\right)$
   c. $k_{i,3} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} * k_{i,2}\right)$
   d. $k_{i,4} = f\left(x_i + h, y_i + h * k_{i,3}\right)$

IV. $y_{i+1} = y_i + h * \frac{k_{i,1} + 2 * k_{i,2} + 2 * k_{i,3} + k_{i,4}}{6}$

Beispiel:

Aufgabe 11.11

Schreiben Sie das Anfangswertproblem

$$y'' = x + y^2 + y', \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

als System erster Ordnung und berechnen Sie dann mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren zur Schrittweite $h = 1/2$ Näherungen für $y(1)$ und $y'(1)$.

Lösung.

Setze $y_1 := y$, $y_2 := y_1' = y'$ und $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Damit erhält man das System erster Ordnung

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ x + y_1^2 + y_2 \end{pmatrix},$$

mit Anfangswerten $\mathbf{y}_0 := \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der „rechten Seite" $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ x + y_1^2 + y_2 \end{pmatrix}$.

Verfahren von Runge-Kutta: $\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$
Schritt 1:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_{0.5,0,1} = \mathbf{f}(x_0, \mathbf{y}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \quad \Leftarrow \begin{pmatrix} y_2(0) \\ x_0 + y_1^2(0) + y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 + 0 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_{0.5,0,2} = \mathbf{f}(x_0 + \underset{\frac{1}{4}}{\frac{h}{2}}, \mathbf{y}_0 + \underset{\frac{1}{4}}{\frac{h}{2}} \cdot \mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.5625 \end{pmatrix}, = \begin{pmatrix} y_2(0) + \frac{1}{4} 1 \\ \frac{1}{4} + (0 + \frac{1}{4} \cdot 1)^2 + (1 + \frac{1}{4} \cdot 1) \end{pmatrix}$$

y_2 aus AU; y_1 aus AW; y_1 aus $k_{i,1}$; y_2 aus $k_{i,1}$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_{0.5,0,3} = \mathbf{f}(x_0 + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_0 + \frac{h}{2} \cdot \mathbf{k}_2) = \begin{pmatrix} 1.3906 \\ 1.7383 \end{pmatrix}, \rightarrow *$$

$$f\left(\frac{1}{2}, \begin{pmatrix} 0 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}3906 \\ 1 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}7383 \end{pmatrix}\right) \hat{=} \mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_{0.5,0,4} = \mathbf{f}(x_0 + h, \mathbf{y}_0 + h \cdot \mathbf{k}_3) = \begin{pmatrix} 1.8691 \\ 2.8526 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + 0.5 \cdot \frac{\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4}{6} = \begin{pmatrix} 0.6792 \\ 1.8712 \end{pmatrix}. \longrightarrow \begin{matrix} y_1 = y(\frac{1}{2}) \approx 0{,}6792 \\ y_2 = y'(\frac{1}{2}) \approx 1{,}8712 \end{matrix}$$

Schritt 2:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_{0.5,1,1} = \mathbf{f}(x_1, \mathbf{y}_1) = \begin{pmatrix} 1.8712 \\ 2.8325 \end{pmatrix},$$

$$* \rightarrow = f\left(\frac{1}{4}, \begin{pmatrix} 0 + \frac{1}{4} \cdot 1{,}25 \\ 1 + \frac{1}{4} \cdot 1{,}5625 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_{0.5,1,2} = \mathbf{f}(x_1 + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_1 + \frac{h}{2} \cdot \mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix} 2.5793 \\ 4.6449 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_{0.5,1,3} = \mathbf{f}(x_1 + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_1 + \frac{h}{2} \cdot \mathbf{k}_2) = \begin{pmatrix} 3.0324 \\ 5.5354 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_{0.5,1,4} = \mathbf{f}(x_1 + h, \mathbf{y}_1 + h \cdot \mathbf{k}_3) = \begin{pmatrix} 4.6389 \\ 10.4587 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + 0.5 \cdot \frac{\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4}{6} = \begin{pmatrix} 2.1570 \\ 4.6755 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist $y(1) \approx 2.1570$ und $y'(1) \approx 4.6755$.

Implizierte Trapezmethode

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

I. Ist das Gleichungssystem ≤ 1. Ordnung (1. Ableitung)
   a. Ja -> weitermachen
   b. Nein -> GLS in 1. Ordnung umstellen

II. $f(x_i, y_i) \triangleq y'(x)$, also y'(x) berechnen bzw. nach y'(x) umstellen

<u>Algorithmus:</u>

III. $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} * \left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right)$
   x_{i+1} heißt, den x-Wert um h erhöhen. Z.B. 1 -> 1,2 bei h = 0,2

IV. Nach y_{i+1} bzw. $y_{1,Trapez}$ umstellen und berechnen

Beispiel:

$$y' = 1 + \frac{y}{x}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 1.4, \quad y(1) = 2$$

Zur Schrittweite $h = 0.2$ rechne man einen Schritt mit

der impliziten Trapez-Methode,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

Lösung:

$$\begin{aligned} y_{1,\text{Trapez}} &= y_0 + \tfrac{h}{2}\,[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_{1,\text{Trapez}})] \\ &= 2 + 0.1\,(1 + \tfrac{2}{1} + 1 + \tfrac{y_{1,\text{Trapez}}}{1.2}) = 2.4 + 0.08\overline{3} \cdot y_{1,\text{Trapez}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_{1,\text{Trapez}} = \tfrac{144}{55} = 2.6\overline{18}$$

Randwertaufgaben

Minimierungsprobleme

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

I. Vergleiche die gegebene DGL mit der Funktion:

$$J[u] = \frac{1}{2}\int_a^b c_1(x)\,u'(x)^2 + c_0(x)u(x)^2dx - \int_a^b g(x)u(x)dx = \frac{1}{2}[u,u] - \langle g,u\rangle$$

Achtung: Steht keine ½ vor dem Integral der DGL so muss dieses noch durch umformen (mit 2/2 multiplizieren) hinzugefügt werden

II. Tipp: Alles vor dem $u^2(x)$ ist c_1, alles vor dem u'(x) ist c_0 und alles (wenn vorhanden) vor dem u(x) ist g(x)

III. In $(-c_1(x)y'(x))' + c_0(x)y(x) = g(x)$ einsetzen

IV. Die Grenzen nicht vergessen!

Beispiel:

Wie lauten für die durch folgende J gegebenen Minimierungsprobleme die zugehörigen Differentialgleichungen?

(a) $J[u] = \int_0^1 [x^2u^2(x) + e^{2x}(u'(x))^2]\,dx$,

(b) $J[u] = \int_0^1 [x^2u^2(x) + e^{2x}(u'(x))^2 + (x+1)^2u(x)]\,dx$.

Lösung.

(a) Man formuliert J[u] um zu

$$J[u] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2e^{2x}(u'(x))^2 + 2x^2u^2(x)\right)\,dx.$$

und liest nach der Vorgehensweise aus der Vorlesung ab:

$$c_1(x) = 2e^{2x}, \quad c_0(x) = 2x^2, \quad g(x) = 0.$$

Die zugehörige Differentialgleichungen lautet somit:

$$(-2e^{2x}u'(x))' + 2x^2u(x) = 0, \quad x \in [0,1], \quad u(0) = u(1) = 0.$$

(b) Analog zu (a) formuliert man J[u] um zu

$$J[u] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2e^{2x}(u'(x))^2 + 2x^2u^2(x)\right)\,dx - \int_0^1 -(1+x)^2u(x)\,dx$$

und erhält mit der Vorgehensweise aus der Vorlesung:

$$c_1(x) = 2e^{2x}, \quad c_0(x) = 2x^2, \quad g(x) = -(1+x)^2.$$

Die zugehörige Differentialgleichungen lautet somit:

$$(-2e^{2x}u'(x))' + 2x^2u(x) = -(1+x)^2, \quad x \in [0,1], \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Differenzenquotienten

Voraussetzung:
➔ DGL darf maximal 2. Ordnung sein

1.Ableitung:	*vorderer* Diff.-Quotient:	$y'(x) = \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$
	hinterer Diff.-Quotient:	$y'(x) = \frac{y(x)-y(x-h)}{h}$
	zentraler Diff.-Quotient:	$y'(x) = \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}$
2.Ableitung:	*Zentraler* Diff.-Quotient:	$y''(x) = \frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2}$

Allgemeines Vorgehen:

I. Allgemeinen Differenzenquotienten y'(x) und y''(x)
II. Beachte die Ausnahmen und Bedingungen siehe unten.
III. Zählervariable bestimmen (i)
IV. Allgemeinen Differenzenquotienten in die Gleichung einsetzen und gleich in Matrixform bringen, alle unbekannten y-Werte in einen Vektor
V. i-Gleichungen aufstellen (Werte für Abschnitte einsetzen)
VI. Die erste und letzte Gleichung bilden oft die Randbedingungen
  a. Ein „Ghost-Point“ bildet eine eigene Gleichung
VII. Matrix aus den einzelnen Gleichungsvektoren/ LGS aus V. aufstellen
VIII. Nach dem y-Vektor auflösen für die einzelnen Diskretisierungspunkte

Besonderheiten

I. Wenn in der Aufgabe nicht explizit ein Quotient genannt wird immer den zentralen nehmen
II. Ist eine Randbedingung mit einer Ableitung definiert und/oder der zentrale Differenzenquotient wird verwendet muss (vor oder nach, je nachdem, ob 1. Oder 2. RB) ein „GhostPoint hinzugefügt werden. Einfach einen Schritt vor oder weiter mit dem gegebenen Intervallschritt gehen und Werte berechnen

Zählvariable bestimmen

I. Wie viele Ableitungen existieren in den Ableitungen, für jede Abl. +1 auf die Zählvariable (sind in beiden eine, dann +2)
II. Wie viele Schritte braucht es, um mit gegebenen Intervallschritt (h) von der unteren zur oberen Randbedingung zu kommen. **Intervalllänge zwischen RB geteilt durch h.**

Beispiel:

Aufgabe 11.15 [Klausuraufgabe aus dem WS 11/12]
Stellen Sie unter ausschließlicher Verwendung *zentraler Differenzenquotienten* mit dem Differenzenverfahren zur Schrittweite $h = 2$ ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Näherungslösung der Randwertaufgabe

$$y''(x) + \frac{(4-x)^2}{4} y(x) = \frac{(4-x)^2}{4}, \quad 0 < x < 8, \quad y(0) = 1,\ y'(8) - 3y(8) = 0,$$

auf [*ohne* das LGS zu lösen]!

Lösung.
Da die 2. RB am rechten Randpunkt $b = 8$ eine Ableitung enthält und wegen der Forderung der Verwendung zentraler Differenzenquotienten (dadurch besteht die Möglichkeit, eine $\mathcal{O}(h^2)$-Approximation zu erhalten), betrachtet man die Diskretisierungsstellen

$$x_0 = 0,\ x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6,\ x_4 = 8,\ x_5 = 10$$

mit Abstand $h = 2$ und hat dazu die Unbekannten $y_0, \dots, y_5$ zu bestimmen (mit Ghost-Point (x_5, y_5), auch dann, wenn die Verwendung des Ghost-Points nicht explizit in der Aufgabe gefordert wäre).

Unter Verwendung der Approximationen

$$y'(x_j) \approx \frac{y_h(x_{j+1}) - y_h(x_{j-1})}{2h},$$
$$y''(x_j) \approx \frac{y_h(x_{j+1}) - 2y_h(x_j) + y_h(x_{j-1})}{h^2},$$

erhält man für die obige RWA mit $y_h(x_i) = y_{h,i}$ die Gleichungen

$$\frac{y_{h,i+1} - 2y_{h,i} + y_{h,i-1}}{4} + \frac{(4-x_i)^2}{4} y_{h,i} = \frac{(4-x_i)^2}{4}, \quad i = 1, \dots, 4,$$

$$\iff \quad (1, -2 + (4-x_i)^2, 1) \begin{pmatrix} y_{h,i-1} \\ y_{h,i} \\ y_{h,i+1} \end{pmatrix} = (4-x_i)^2, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Für die rechte Seite der Gleichungen berechnet man:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	2	4	6	8	10
$(4-x_i)^2$	16	4	0	4	16	36

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen

$$y_{h,0} = 1 \quad \text{und} \quad -y_{h,3} + 4 \cdot (-3) \cdot y_{h,4} + y_{h,5} = 0$$

lässt sich zur Lösung der RWA das folgende lineare Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 14 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{h,0} \\ y_{h,1} \\ y_{h,2} \\ y_{h,3} \\ y_{h,4} \\ y_{h,5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nicht explizit gefordert war, das LGS mit durch die Randbedingungen ersetzten Variablen $y_{h,0}$, $y_{h,5}$ zu formulieren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{h,1} \\ y_{h,2} \\ y_{h,3} \\ y_{h,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Ansatzfunktionen / p-Parameter Ansätze:

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

I. Randbedingungen als Newton-Schema aufschreiben, kennen wir die RB von Ableitungen der Funktion können wir die gleich für $f^{(n)}(x_i)$ im Newton-Schema einsetzen mit $f^{(n)}(x_i)/n!$

II. ω_{RB} ermitteln. Welche Funktion erfüllt <u>alle</u> Randbedingungen. Bsp.: y(-1) = y(1) = 0 -> $\omega_{RB} = 0$, y(0) = 3, y(2) = 1 -> $\omega_{RB} = (3 - x)$ Zu Lösen über die Newton-Fkt.: $\omega_{RB}(x) = [x_0]f + [x_0, x_1]f(x - x_0) + [x_0, x_1, x_2]f(x - x_1)(x - x_0) + \cdots$

III. Aufstellen der einzelnen ω_p Funktionen. Da ω_{RB} alle RB abdeckt müssen <u>alle</u> Funktionen ω_p <u>Null</u> beim Einsetzen der jeweiligen x-Werte der RB ergeben, wie NST etwa. **Wichtig**:
   - Die einzelnen Funktionen müssen linear unabhängig sein, also immer als gesamten Exponenten gerade-ungerade-gerade-… haben.
   - Ist die RB durch/mit einer Ableitung gegeben müssen alle Exponenten der ω_p Funktionen um einen erhöht werden!

IV. Schreibe $\omega(x) = \omega_{RB} + a_1 * \omega_1 \ldots + a_p * \omega_p$. Wir beginnen mit a_1!

x_i	x_0	x_1	x_2
$f(x_i)$	$f(x_0) = a_0$	$f(x_1)$	$f(x_2)$
$f'(x_i)$		$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = a_1$	$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = D$
$f''(x_i)$			$\frac{D - a_1}{x_2 - x_1} = a_2$

Beispiel: Wie lautet ein 2-parametriger Ansatz beim Galerkin-Verfahren zu einer DGL mit den Randbedingungen

$$y(1) = 1,\ y'(1) = 0,\ y(2) = 1,\ y'(2) = 0?$$

Lösung.

Man sieht sofort $w_{RB}(x) = 1$ oder berechnet nach dem Newton-Schema:

$$\begin{array}{c|cccc|}
x_i & 1 & 1 & 2 & 2 \\
\hline
w_{RB}(x_i) & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & \frac{0}{1!} & 0 & \frac{0}{1!} & \\
 & & 0 & 0 & \\
 & & & 0 &
\end{array}$$

$w_{RB}(x) = 1 + 0(x-1) + 0(x-1)^2 + 0(x-1)^2(x-2) = 1$. Man wähle nun z.B.:

$$w(x) = \underbrace{1}_{\text{RB erfüllen}} + a_1 \underbrace{(x-1)^2(x-2)^2}_{\text{hom. RB erfüllen}} + a_2 \underbrace{(x-1)^3(x-2)^2}_{\text{hom. RB erfüllen}}.$$

Die Ansatzfunktionen (hier: $(x-1)^2(x-2)^2$ und $(x-1)^3(x-2)^2$), welche homogenen Randbedingungen erfüllen, müssen linear unabhängig gewählt werden. Dies ist bei unterschiedlichem Polynomgrad sicher gegeben.

Ritz-Verfahren

Voraussetzung:

➔ Nur lineare Funktionen

Allgemeines Vorgehen:

I. Aufstellen der p-parametrischen Ansatzfunktion $\omega(x)$

II. Bestimmen der Konstanten c_0, c_1 aus der Ursprungsfunktion:

a. Mit Hilfe des Ansatzes: $-c_1 * y''(x) + c_0 * y(x) = g(x)$

b. Wichtig: Auf die Vorzeichen bei c_1 achten! Das Minus gehört zu Vergleichsfunktion. Steht also in der zu untersuchenden Fkt. kein Minus vor dem Vorfaktor b ist $c_1 = -b$.

III. Aufstellen aller benötigten Gleichungen:

a. $[\omega_1, \omega_1]$, …, $[\omega_p, \omega_p]$ und jeweils dazu $\tilde{r}_p = < \omega_p, g >$

Bei einer 1-parametrischen Ansatzfunktion entsteht somit eine Gleichung, sonst eine Matrix zum Lösen von allen Vorfaktoren a.

$$[\omega_p, \omega_q] = \int_a^b c_1 * \omega'_p * \omega'_q + \int_a^b c_0 * \omega_p * \omega_q$$

$$< \omega_p, g > = \int_a^b \omega_p * g(x)$$

IV. Gleichung/Matrix lösen:

$$[\omega_1, \omega_1] = a_1 * \tilde{r}_1$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} [w_1, w_1] & \dots & [w_1, w_p] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [w_p, w_1] & \dots & [w_p, w_p] \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{r}_1 \\ \vdots \\ \tilde{r}_p \end{pmatrix}$$

V. Die berechneten a´s in die Gleichung aus I. einsetzen.

Beispiel:

Lösen Sie näherungsweise mit einem einparametrigen Ansatz aus möglichst einfachen

(a) Polynomen die folgenden RWA: $-y''(x) + xy(x) = 2x^2, \quad y(-1) = y(1) = 0,$

(a) 1. (Ritz-Verfahren): Es ist

$$(-\underbrace{1}_{=c_1(x)} y'(x))' + \underbrace{x}_{=c_0(x)} y(x) = \underbrace{2x^2}_{=g(x)}, \quad y(-1) = y(1) = 0.$$

Bemerkung: $c_0(x) = x \not\geq 0$ in $[-1, 1]$, dennoch wende man hier nach Aufgabenstellung das Ritz-Verfahren an.
Aufgrund der homogenen Randbedingungen ist $w_{RB} = 0$ und man wähle als Ansatzfunktion $w_1(x) = (1-x)(1+x) = 1-x^2$. Gesucht ist demnach $w(x) = w_{RB}(x) + a_1 w_1(x)$. Aufstellen des LGS ergibt:

$$[w_1, w_1] \cdot a_1 = \tilde{r}_1, \quad \text{mit} \quad \tilde{r}_1 = \langle w_1, g \rangle .$$

Man berechnet:

$$\begin{aligned}
[w_1, w_1] &= \int_{-1}^{1} 1 \cdot w_1'(x)^2 + x \cdot w_1(x)^2 \, dx \\
&= \int_{-1}^{1} 4x^2 \, dx + \underbrace{\int_{-1}^{1} x(1-x^2)^2 \, dx}_{=0, \text{ da } x(1-x^2)^2 \text{ ungerade}} = \frac{4}{3} x^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3},
\end{aligned}$$

$$\ell(w_1) = \langle w_1, g \rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^2) 2x^2 \, dx = \ldots = \frac{8}{15}$$

und erhält $\frac{8}{3} a_1 = \frac{8}{15} \iff a_1 = \frac{1}{5}$ und somit die Lösung

$$y(x) \approx w(x) = \frac{1}{5}(1-x^2).$$

Galerkin-Verfahren

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

I. Aufstellen der p-parametrischen Ansatzfunktion $\omega(x)$

II. Stelle die allgemeine Funktion L für deine gegebene Gleichung auf. Tausche y -> $\omega(x)$, y‘ -> $\omega'(x)$, y‘‘ -> $\omega''(x)$ und stelle die Gleichung nach 0 um.

III. Der Ansatz für jeden Koeffizienten der Ansatzfunktion lautet:

$$< \omega_1, L[\omega_1] > = a_1 * < \omega_1, g - L[\omega_{RB}] >$$

IV. Wir stellen wieder alle benötigten Gleichungen auf und formen, wie beim Ritz-Verfahren (Schritt IV.) eine Matrix draus.

V. $L[\omega_1]$ bedeutet, dass wir für y, y‘, … (siehe Schritt II.) unsere Ansatzfunktionen einsetzen. Beachte, dass du diese bei y‘ zum Beispiel ableiten musst.
Wichtig alle gesuchten Koeffizienten müssen nicht in die Gleichung geschrieben werden, diese haben wir im Ansatz als ausgeklammert definiert.

VI. Nun berechnet man die Integrale:

$$< \omega_p, L[\omega_p] > = \int_a^b \omega_p * L[\omega_p]$$

VII. Nun nur noch die Ansätze umstellen und die Koeffizienten a_p berechnen.

Beispiel:

Lösen Sie näherungsweise mit einem einparametrigen Ansatz aus möglichst einfachen

(a) Polynomen die folgenden RWA: $-y''(x) + xy(x) = 2x^2, \quad y(-1) = y(1) = 0,$

2. (Galerkin-Verfahren): Man verwende den gleichen Ansatz wie in 1. und stelle das LGS

$$\langle w_1, L[w_1]\rangle a_1 = \langle w_1, g - L[w_{RB}]\rangle$$

auf. Für die rechte Seite der Gleichung erhält man wie in 1.:

$$\langle w_1, g - L[\underbrace{w_{RB}}_{=0}]\rangle = \langle w_1, g\rangle = \frac{8}{15}.$$

$-y'' + xy - 2x^2 = 0$

$L[\omega_1] \hat{=} [2\cancel{a_1} + \cancel{a_1} x(1-x^2) - 2x^2]$

a_1 ist ausgeklammert

Weiter berechnet man

$$\begin{aligned}\langle w_1, L[w_1]\rangle &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)\overbrace{(2 + x(1-x^2))}\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} 2(1-x^2)\,dx + \underbrace{\int_{-1}^{1} x\,(1-x^2)^2\,dx}_{=0,\text{ da Integrand ungerade}} \\ &\overset{\text{Simpson}}{=} \frac{2}{6}(0+8+0) = \frac{8}{3}\end{aligned}$$

und erhält $\frac{8}{3}a_1 = \frac{8}{15} \iff a_1 = \frac{1}{5}$ und somit (wie beim Ritz-Verfahren) die Lösung

$$y(x) \approx w(x) = \frac{1}{5}(1-x^2).$$

Bemerkung: Hier gilt „Ritz = Galerkin“, da $C^2[a,b]$-Ansatzfunktionen verwendet wurden.

FEM-Methode (Ritz-Verfahren)

Allgemeines Vorgehen:

I. Aufstellen der p-parametrischen Ansatzfunktion $\omega(x)$, dabei neu ist, dass alle $\omega_p(x)$ Funktionen Hut-Funktionen sind, wie bei der Spline-Interpolation

II. Bestimmen der Konstanten c_0, c_1 aus der Ursprungsfunktion:
   a. Mit Hilfe des Ansatzes: $-c_1 * y''(x) + c_0 * y(x) = g(x)$
   b. Wichtig: Auf die Vorzeichen bei c_1 achten! Das Minus gehört zu Vergleichsfunktion. Steht als in der zu untersuchenden Fkt. kein Minus vor dem Vorfaktor a ist $c_1 = -a$.

III. Aufstellen aller benötigten Gleichungen:
   a. $[\omega_1, \omega_1]$, …, $[\omega_p, \omega_p]$ und jeweils dazu $\tilde{r}_p = < \omega_p, g >$

Bei einer 1-parametrischen Ansatzfunktion entsteht somit eine Gleichung, sonst eine Matrix zum Lösen von allen Vorfaktoren a.

$$[\omega_p, \omega_q] = \int_{x_i-h}^{x_i} c_1 * \omega'_p * \omega'_q + \int_{x_i}^{x_i+h} c_0 * \omega_p * \omega_q$$

$$< \omega_p, g > = \int_{x_i-h}^{x_i} \omega_p * g(x) + \int_{x_i}^{x_i+h} \omega_p * g(x)$$

Die Grenzen des Integrals sind dabei immer die Stützstelle x_i und beim ersten Integral nach links mit der Intervalllänge h und beim zweiten Integral nach rechts mit der Intervalllänge h. Auch $< \omega_p, g >$ hat sich leicht verändert im Gegensatz zum Ritz-Verfahren.

IV. Gleichung/Matrix lösen:

$$[\omega_1, \omega_1] = a_1 * \tilde{r}_1$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} [w_1, w_1] & \dots & [w_1, w_p] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [w_p, w_1] & \dots & [w_p, w_p] \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{r}_1 \\ \vdots \\ \tilde{r}_p \end{pmatrix}$$

V. Die berechneten a´s in die Gleichung aus I. einsetzen.

Beispiel:

Vorgelegt sei die Randwertaufgabe

$$-y''(x) - cy(x) = d, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

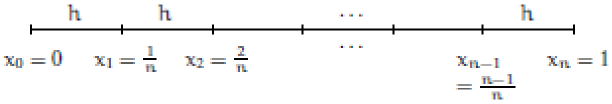
wobei c und d konstant seien. Dazu soll mit dem Ritz-Verfahren (FEM-Ansatz: lineare Splines) als Näherungslösung ein linearer Spline $s = \sum_{i=1}^{p} a_i w_i$ berechnet werden. Hierfür sei das Intervall $[a, b] = [0, 1]$ gemäß $x_0 = a = 0$, $x_i = x_0 + ih$ mit $h = \frac{b-a}{p+1} = \frac{1}{n}$ in $n = p + 1$ Teilintervalle zerlegt.

(a) Skizzieren Sie das Intervall und die Zerlegung (allgemein). Skizzieren Sie den Fall $n = 4$.

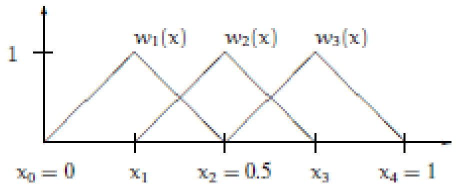
(b) Stellen Sie ein LGS zur Berechnung der Koeffizienten a_i auf ($n = 4$ und allgemein).

(c) Wie lautet die Lösung ($n = 4$) für $c = 0$ und $d = 1$. Skizzieren Sie die Lösung.

(a) Allgemeine Zerlegung des Intervalls:



Skizze für den Fall $n = 4$:



(b) Zunächst liest man $c_1(x), c_0(x)$ und $g(x)$ aus der DGL ab:

$$(-\underbrace{1}_{=c_1(x)} y'(x))' + \underbrace{(-c)}_{=c_0(x)} y(x) = \underbrace{d}_{=g(x)}, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Man berechnet:

$$\begin{aligned} A_{i,i} = [w_i, w_i] &= \int_{x_i-h}^{x_i} (w_i'(x))^2\,dx + \int_{x_i}^{x_i+h} (w_i'(x))^2\,dx \\ &+ \int_{x_i-h}^{x_i} (-c)w_i(x)^2\,dx + \int_{x_i}^{x_i+h} (-c)w_i(x)^2\,dx. \end{aligned}$$

Bei den Integranden handelt es sich um Polynome höchstens vom Grad 2, sodass die Integration mit der Simpson-Regel exakt ist. Die Ableitungen $w_i'(x)$ sind sogar stückweise konstant, hier ist somit auch die Mittelpunkt-/ Trapezregel exakt. Man berechnet allgemein:

$$\begin{aligned} A_{i,i} = &\frac{h}{6}\left(1 \cdot \frac{1}{h^2} + 4 \cdot \frac{1}{h^2} + 1 \cdot \frac{1}{h^2}\right) + \frac{h}{6}\left(1 \cdot \frac{(-1)^2}{h^2} + 4 \cdot \frac{(-1)^2}{h^2} + 1 \cdot \frac{(-1)^2}{h^2}\right) \\ &+ (-c) \cdot \left(\frac{h}{6}(1 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0.5^2 + 1 \cdot 1^2) + \frac{h}{6}(1 \cdot 1^2 + 4 \cdot 0.5^2 + 1 \cdot 0^2)\right) \qquad = \frac{2}{h} - \frac{2ch}{3} \end{aligned}$$

sowie analog

$$\begin{aligned} A_{i,i+1} &= \int_{x_i}^{x_i+h} a_1 \cdot w_i'(x) w_{i+1}'(x)\,dx + \int_{x_i}^{x_i+h} (-c) \cdot w_i(x) w_{i+1}(x)\,dx \\ &= \left(h \cdot \frac{1}{h}\left(-\frac{1}{h}\right) + (-c)\frac{h}{6}(1 \cdot 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0.5 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0 \cdot 1)\right) \qquad = -\frac{1}{h} - \frac{ch}{6}. \end{aligned}$$

Für die rechte Seite ergibt sich:

$$r_i = \ell(w_i) = \langle w_i, g \rangle = \int_{x_i-h}^{x_i} d \cdot w_i(x)\,dx + \int_{x_i}^{x_i+h} d \cdot w_i(x)\,dx = d\left(\frac{h(0+1)}{2} + \frac{h(1+0)}{2}\right) = dh.$$

Somit erhält man das allgemeine LGS (dieses LGS erhält man auch direkt aus dem Skript, s. Übung 12.18):

$$\left(\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} - c\frac{h}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & & \\ 1 & 4 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{p-1} \\ a_p \end{pmatrix} = h \cdot \begin{pmatrix} d \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d \end{pmatrix}$$

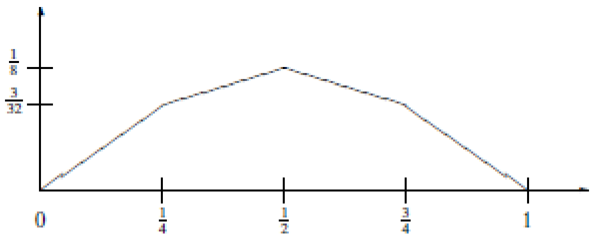
Für den Fall $n = 4$ erhält man somit das LGS

$$\left(4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{c}{24} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} d \\ d \\ d \end{pmatrix}.$$

(c) Für $c = 0$ und $d = 1$ berechnet man mit dem LGS aus Aufgabenteil (b) für $n = 4$:

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} d \\ d \\ d \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{3}{32} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{32} \end{pmatrix}.$$

Skizze der Lösung:



Eigenwertaufgabe für Differentialgleichungen

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

I. Aufstellen eines LGS nach Ritz, Galerkin, oder anderen Differenzverfahren

II. Meistens soll nur λ ausgerechnet werden, dann kann bei einem **1-parametrigen Ansatz** das a „weggedacht „werden und wir müssen die Gleichung nur lösen.
Wenn ein höher parametriger Ansatz gewählt wird stellen wir die Gleichungssysteme so um, dass $A\vec{a} = \lambda B\vec{a}$, wir stellen also bei allen Gleichungen das λ nach rechts und den Rest nach links.

Beispiele:

Gegeben sei die Eigenwertaufgabe (Schwingungsgleichung) $y''(x) + \lambda y(x) = 0$ mit $y(0) = y(1) = 0$, die den kleinsten Eigenwert $\lambda_1 = \pi^2$ besitzt.

(a) Berechnen Sie mit dem Galerkin–Verfahren eine Näherung für diesen Eigenwert unter Verwendung eines einparametrigen Ansatzes.

(a) Wie in der Vorlesung verwenden wir hier mit $l = 1$ den Ansatz (andere Ansätze sind auch möglich)

$$w_1(x) = -x(l-x) = x^2 - lx.$$

Aufstellen des LGS:

$$\begin{aligned}\langle w_1, D(w_1)\rangle \overset{\text{DGL linear}}{=} \langle w_1, L(w_1)\rangle &= \int_0^1 (x^2 - lx)\cdot(2 + \lambda(x^2 - lx))\,dx \\ &= \int_0^1 2x^2 - 2lx + \lambda(x^4 - 2lx^3 + l^2x^2)\,dx \\ &\overset{l=1}{=} \left[\frac{2}{3}x^3 - x^2 + \lambda\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right)\right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{30}\lambda.\end{aligned}$$

Für die rechte Seite gilt $\langle w_1, 0\rangle = 0$. Für das LGS

$$(-\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{30}\lambda)a_1 = 0$$

gilt es nun eine nichttriviale Lösung zu finden:

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{30}\lambda \overset{!}{=} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = 10.$$

Bemerkung: Der Fehler der Näherung betägt $|\pi^2 - 10| \approx 0.1304$.

Aufgabe 13.7 [Klausuraufgabe]
Gegeben sei die *lineare* Eigenwertaufgabe

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad \text{mit} \quad y(-1) = y(1) = 0.$$

Berechnen Sie jeweils mit einem 1-parametrigen Ansatz mit der Funktion

$$w_1(x) = x^2 - 1 \quad \text{bzw.} \qquad \tilde{w}_1(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{für } x < 0 \\ 1 - x & \text{für } x \geqslant 0 \end{cases}$$

unter Verwendung des **Ritz–Verfahrens** eine Näherung für den kleinsten Eigenwert λ_1.

Berechnen Sie dabei alle Integrale über Polynome bis zum Höchstgrad 3 mit der Simpson-Regel.

Welche Näherung für λ_1 ist besser?
Ergänzung zur Klausuraufgabe: Berechnen Sie mit dem 2-parametrigen Ansatz $w(x) = a_1 w_1(x) + a_2 \tilde{w}_1(x)$ Nährungen für die beiden kleinsten Eigenwerte.
Hinweise:

(a) $\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^2 \, dx = 2 \int_0^1 (x^2 - 1)^2 \, dx = \frac{16}{15}$.

(b) Nutzen Sie aus, dass die Integranden gerade Funktionen sind.

Lösung.
Bringt man die Eigenwertaufgabe zunächst auf Standardform

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow (-1 \cdot y')'(x) + (-\lambda)\, y(x) = 0$$

erhält man den Differentialoperator $L = L_\lambda[y] = (-\underbrace{1}_{\Rightarrow c_1(x)=1} \cdot y')' + \underbrace{(-\lambda)}_{\Rightarrow c_0(x)=-\lambda} y$. Die rechte Seite der (homogenen) DGL ist $g(x) = 0$. Das Ritz-Verfahren führt für lineare DGLn bei p-parametrigem Ansatz $w(x) = a_1 w_1(x) + \ldots a_p w_p(x)$ auf das LGS

$$\begin{pmatrix} [w_1, w_1] & \ldots & [w_1, w_p] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [w_p, w_1] & \ldots & [w_p, w_p] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{r}_1 \\ \vdots \\ \tilde{r}_p \end{pmatrix} \overset{g(x)=0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

und bei Eigenwertaufgaben sind Lösungen $\neq \mathbf{0}$ gesucht. Hier ist $p = 1$:

$$[w_1, w_1] \cdot a_1 = 0 \qquad (\text{bzw. } [\tilde{w}_1, \tilde{w}_1] \cdot \tilde{a}_1 = 0)$$

Es ist

$$\begin{aligned} [w_1, w_1] &= \int_{-1}^{1} c_1(x)\, w_1'(x)^2 + c_0(x)\, w_1(x)^2 \, dx \\ &= \int_{-1}^{1} (2x)^2 \, dx + (-\lambda) \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^2 \, dx \\ &\overset{\text{Hinweis}}{=} 2 \cdot \int_0^1 (2x)^2 \, dx - \lambda \frac{16}{15} \\ &\overset{\text{Simpson}}{=} 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot (1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 4) - \lambda \frac{16}{15} = \frac{8}{3} - \lambda \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

Gesucht: Werte für λ mit Lösung(en) mit $a_1 \neq 0$ von $(\frac{8}{3} - \lambda \frac{16}{15})\, a_1 = 0$, d. h. $\frac{8}{3} - \lambda \frac{16}{15} = 0 \iff \lambda = 2.5$. Man weiß aus der Vorlesung, dass mit der Intervalllängen $L = l = 2$ für den kleinsten EW $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{2^2} \approx 2.4674$ gilt.
Jetzt analog mit $\tilde{w}_1$:

$$[\tilde{w}_1, \tilde{w}_1] = 2 \cdot \int_0^1 (-1)^2 - \lambda (1 - x)^2 \, dx = 2 \cdot 1 - \lambda \cdot \frac{2}{6} \cdot (1 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 0)$$

$\overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow} \quad (2 - \frac{4}{6}\lambda) = 0 \quad \iff \lambda = 3$. Damit folgt schließlich $\lambda_1 \leqslant 2.5 < 3$ und 2.5 ist die bessere Näherung.

Für den 2-parametrigen Ansatz $w(x) = a_1 w_1(x) + a_2 \tilde{w}_1(x)$ benötigt man neben $[w_1, w_1]$ und $[\tilde{w}_1, \tilde{w}_1]$:

$$\begin{aligned} [w_1, \tilde{w}_1] &= \int_{-1}^{1} w_1'(x) \tilde{w}_1'(x) + (-\lambda) w_1(x) \tilde{w}_1(x) \, dx \\ &= 2 \cdot \int_0^1 (2x)(-1) + (-\lambda)(x^2 - 1)(1 - x) \, dx \overset{\text{Simpson}}{=} -2 + \frac{5}{6}\lambda. \end{aligned}$$

Aufstellen und Lösen des Eigenwertproblems

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{16}{15} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{4}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

führt auf die Näherungen $\lambda_1 = 2.4860$ und $\lambda_2 = 32.1807$.

Differenzenstern

<u>Allgemeines Vorgehen:</u>

I. Allgemeine Gleichung aufstellen:
(h Abstand zwischen Punkten in x-Richtung, j in y-Richtung)

$$\Delta u(x,y) = \frac{U_{x-1,y} - 2 * U_{x,y} + U_{x+1,y}}{h^2} + \frac{U_{x,y-1} - 2 * U_{x,y} + U_{x,y+1}}{j^2}$$

(Dreidimensional: einfach um einen Bruch mit z-Verschiebung erweitern)

II. Ist die Randbedingung mit $-\Delta u(x,y) = \cdots$ gegeben, stellen wir das Minus auf die andere Seite (Vorzeichen drehen sich um)

III. Wir gehen alle gegebenen Punkte mit der Grundgleichung aus Schritt I. durch.
$\Delta u(x,y)$ ist meistens angegeben, wie sich dies berechnet. $U_{x-1,y}$ ist zum Beispiel der Punkt in x-Richtung links, auf selber y Höhe. Ist dieser einer der betrachteten Punkte wird dieser mit U aufgeschrieben, ist es ein Randpunkt wird die Randbedingung genommen.

IV. Die ganzen Gleichungen tragen wir in eine Matrix. Alle Werte, welche nicht in Verknüpfung mit den Punkten U_j stehen, werden vom Vektor $\Delta u(x,y)$ abgezogen.

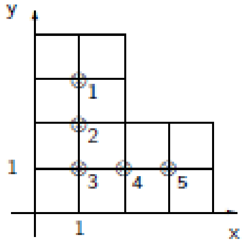
Beispiel:

In dem rechts skizzierten Gebiet Ω sei die folgende Aufgabe vorgelegt:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= x+y \quad \text{in } \Omega \\ u(x,y) &= g(x,y) \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned}$$

mit

(a) $g(x,y) = 0$, **(b)** $g(x,y) = xy$.



Zur näherungsweisen Lösung dieser Aufgabe werde das Differenzenverfahren mit dem zentralen Differenzenquotienten herangezogen. Berechnen Sie in den durch Kreuze bezeichneten fünf inneren Knotenpunkten die Differenzenlösung.

Lösung.
Beim Differenzen-Verfahren ersetzt man (vgl. Skript) die PDGL $-\Delta u = x+y$ an einer Stelle (x_i, y_j) durch

$$-\frac{u_{h,k}(x_i-h,y_j) - 2u_{h,k}(x_i,y_j) + u_{h,k}(x_i+h,y_j)}{h^2} - \frac{u_{h,k}(x_i,y_j-k) - 2u_{h,k}(x_i,y_j) + u_{h,k}(x_i,y_j+k)}{k^2} = x_i + y_j,$$

was hier wegen $h = k = 1$ (vgl. Skript) zu

$$-u_{h,k}(x_i-h,y_j) - u_{h,k}(x_i+h,y_j) - u_{h,k}(x_i,y_j-h) - u_{h,k}(x_i,y_j+h) + 4u_{h,k}(x_i,y_j) = x_i + y_j \qquad (0.1)$$

wird. Man entnimmt der Skizze **bspw.** $x_i = 0 + i\cdot h$ und $y_j = 0 + j\cdot h$ mit $h = 1$, dann wäre immer $(x_i, y_j) = (i,j)$ und bspw. $\otimes_1 = (x_1, y_3) = (1,3)$ usw... Dann schreibt man mit $u_{i,j} := u_{h,k}(x_i,y_j)$ auch kürzer

$$-\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} - \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2} = x_i + y_j,$$

bzw. wegen $h = k = 1$

$$-u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} + 4u_{i,j} = x_i + y_j. \qquad (0.2)$$

Diese Gleichungen (0.1) bzw. (0.2) lässt sich auch kürzer mit einem „Differenzenstern" schreiben (vgl. Skript):

$$\left\{\begin{matrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{matrix}\right\} u = x_i + y_j.$$

(a) Betrachte z.B. Punkt $\otimes_1$: Die rechte Seite der zugehörigen Gleichung lautet dort $1+3 = 4$. Setze $U_i := u_{h,k}(\otimes_i)$, dann ergibt sich für den Punkt $\otimes_1$:

$$\begin{aligned} & -u_{0,3} - u_{2,3} - u_{1,2} - u_{1,4} + 4u_{1,3} = x_1 + y_3 = 1+3 \\ \iff & \quad -0 - 0 - U_2 - 0 + 4U_1 = 4, \end{aligned}$$

wobei man mit etwas Übung direkt/nur die letzte Zeile hinschreiben würde. Analog ergeben sich die Gleichungen für die anderen vier Punkte, und man erhält das folgende lineare Gleichungssystem [welches man mit etwas Übung ebenfalls direkt Aufstellen können sollte]:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3462 \\ 1.3846 \\ 1.1923 \\ 1.3846 \\ 1.3462 \end{pmatrix}.$$

(b) Bei z. B. $\otimes_1$ bringt man noch $-0-4-6-10$ als $+10$ auf die rechte Seite, bei $\otimes_2$ $-0-4 = -4$, usw...

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0+4+6 \\ 0+4 \\ 0+0 \\ 0+4 \\ 0+4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 2 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.3462 \\ 3.3846 \\ 2.1923 \\ 3.3846 \\ 4.3462 \end{pmatrix}.$$

Integrationstabelle

A) Grundintegrale

1) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$

2) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$

3) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$

4) $\int \cos x\,dx = \sin x$

5) $\int \sin x\,dx = -\cos x$

6) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x$

7) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x$

8) $\int e^x\,dx = e^x$

9) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$

10) $\int \cosh x\,dx = \sinh x$

11) $\int \sinh x\,dx = \cosh x$

12) $\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x$

13) $\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = -\coth x$

14) $\int \ln x\,dx = x \cdot \ln x - x$

B) Rationale Funktionen

15) $\int (x-a)^n\,dx = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$

16) $\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a|$

17) $\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}\,dx = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right| \qquad (a \neq b)$

18) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$

19) $\int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^2}\,dx = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a}$

20) $$\int \frac{1}{a x^2 + bx + c}\, dx = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} \quad \text{für} \quad \Delta > 0$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}} \right| \quad \text{für} \quad \Delta < 0$$
$$= \frac{-2}{2ax+b} \quad \text{für} \quad \Delta = 0$$

mit $\Delta = 4ac - b^2$

21) $$\int \frac{x}{a x^2 + bx + c}\, dx = \frac{1}{2a} \ln \left| a x^2 + bx + c \right| - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{a x^2 + bx + c}\, dx \quad \text{(vgl. 20)}$$

Bei Integralen über echt gebrochenrationale Funktionen wird auf die Methode der Partialbruchzerlegung verwiesen.

C) Irrationale Funktionen

22) $$\int \sqrt{ax+b}\, dx = \frac{2}{3a} (ax+b)^{3/2}$$

23) $$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}\, dx = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b}$$

24) $$\int x\sqrt{ax+b}\, dx = \frac{2}{15a^2} (3ax - 2b)\, (ax+b)^{3/2}$$

25) $$\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}\, dx = \frac{2}{3a^2} (ax - 2b) \sqrt{ax+b}$$

26) $$\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}} \right| \quad \text{für } b > 0$$
$$= \frac{2}{\sqrt{b}} \arctan \sqrt{\frac{ax+b}{-b}} \quad \text{für } b < 0$$

27) $$\int \frac{1}{x} \sqrt{ax+b}\, dx = 2\sqrt{ax+b} + b \int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}\, dx \quad \text{(vgl. 26)}$$

28) $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right)$$

29) $$\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -\frac{1}{3} (a^2 - x^2)^{3/2}$$

30) $$\int \frac{1}{x} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|$$

31) $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \arcsin \frac{x}{a}$$

32) $$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

33) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\left(-x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right)$

34) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2 \operatorname{arsinh}\frac{x}{a}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2 \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\right)$

35) $\int x\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{3}(a^2+x^2)^{3/2}$

36) $\int \frac{1}{x}\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \sqrt{a^2+x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right|$

37) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \operatorname{arsinh}\frac{x}{a} = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$

38) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \sqrt{a^2+x^2}$

39) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} - a^2 \operatorname{arsinh}\frac{x}{a}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} - a^2 \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$

40) $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right|$

41) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x}$

42) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \operatorname{arcosh}\frac{x}{a}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right)$

43) $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{3}(x^2-a^2)^{3/2}$

44) $\int \frac{1}{x}\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x}$

45) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \operatorname{arcosh}\frac{x}{a} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$

46) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \sqrt{x^2-a^2}$

47) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \operatorname{arcosh}\frac{x}{a}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right)$

48) $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|2\sqrt{a(ax^2+bx+c)} + 2ax + b\right|$ für $a > 0$

$= \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$ für $a < 0$

49) $\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a}\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ (vgl. 48)

50) $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a}\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

D) Trigonometrische Funktionen

51) $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$

52) $\int \sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\sin 2ax$

53) $\int \sin^3 ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + \frac{1}{3a}\cos^3 ax$

54) $\int \sin^n ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cdot \cos ax}{n \cdot a} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\,dx$

55) $\int x \cdot \sin ax\,dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cdot \cos ax}{a}$

56) $\int x^n \cdot \sin ax\,dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1} \cdot \cos ax\,dx$

57) $\int \frac{1}{\sin ax}\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\tan\frac{ax}{2}\right|$

58) $\int \frac{1}{\sin^n ax}\,dx = -\frac{1}{a(n-1)} \cdot \frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{1}{\sin^{n-2} ax}\,dx$ $(n > 1)$

59) $\int \frac{1}{1+\sin ax}\,dx = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{ax}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

60) $\int \frac{1}{1-\sin ax}\,dx = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

61) $\int \sin ax \cdot \sin bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$ $(\,|a| \neq |b|$

62) $\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax$

63) $\int \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin 2ax$

64) $\int \cos^3 ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax - \frac{1}{3a} \sin^3 ax$

65) $\int \cos^n ax \, dx = -\frac{\cos^{n-1} ax \cdot \sin ax}{n \cdot a} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax \, dx$

66) $\int x \cdot \cos ax \, dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \cdot \sin ax}{a}$

67) $\int x^n \cdot \cos ax \, dx = \frac{x^n}{a} \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cdot \sin ax \, dx$

68) $\int \frac{1}{\cos ax} dx = \frac{1}{a} \ln \left| \tan \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$

69) $\int \frac{1}{\cos^n ax} dx = \frac{1}{a(n-1)} \cdot \frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{1}{\cos^{n-2} ax} dx$ $\quad (n > 1)$

70) $\int \frac{1}{1 + \cos ax} dx = \frac{1}{a} \tan \frac{ax}{2}$

71) $\int \frac{1}{1 - \cos ax} dx = -\frac{1}{a} \cot \frac{ax}{2}$

72) $\int \cos ax \cdot \cos bx \, dx = \frac{\sin (a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin (a+b)x}{2(a+b)}$ $\quad (|a| \neq |b|$

73) $\int \sin ax \cdot \cos ax \, dx = \frac{1}{2a} \sin^2 ax$

74) $\int \sin ax \cdot \cos bx \, dx = -\frac{\cos (a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos (a+b)x}{2(a+b)}$ $\quad (|a| \neq |b|$

75) $\int \tan ax \, dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax|$

76) $\int \tan^2 ax \, dx = \frac{1}{a} \tan ax - x$

77) $\int \tan^n ax \, dx = \frac{1}{a \cdot (n-1)} \tan^{n-1} ax - \int \tan^{n-2} ax \, dx$ $\quad (n \neq 1)$

78) $\int \cot ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sin ax|$

79) $\int \cot^n ax \, dx = -\frac{1}{a \cdot (n-1)} \cot^{n-1} ax - \int \cot^{n-2} ax \, dx$ $\quad (n \neq 1)$

E) Exponential- und Hyperbelfunktionen

80) $\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$

81) $\int x e^{ax} \, dx = \frac{1}{a^2} e^{ax} (a x - 1)$

82) $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax}\,dx$

83) $\int \sinh ax\,dx = \frac{1}{a} \cosh ax$

84) $\int \sinh^2 ax\,dx = \frac{1}{4a} \sinh 2ax - \frac{x}{2}$

85) $\int \frac{1}{\sinh ax}\,dx = \frac{1}{a} \ln \left| \tanh \frac{ax}{2} \right|$

86) $\int \cosh ax\,dx = \frac{1}{a} \sinh ax$

87) $\int \cosh^2 ax\,dx = \frac{1}{4a} \sinh 2ax + \frac{x}{2}$

88) $\int \frac{1}{\cosh ax}\,dx = \frac{2}{a} \arctan e^{ax}$

89) $\int \tanh ax\,dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax$

90) $\int \coth ax\,dx = \frac{1}{a} \ln |\sinh ax|$

F) Gemischte Ausdrücke aus D) und E)

91) $\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$

92) $\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$

G) Logarithmusfunktionen

93) $\int \ln x\,dx = x \cdot \ln x - x$

94) $\int \ln^2 x\,dx = x \cdot \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$

95) $\int x^m \ln x\,dx = x^{m+1} \left(\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) \qquad (m \neq -1)$

96) $\int \frac{1}{x} \ln x\,dx = \frac{1}{2} \ln^2 x$

H) Arcusfunktionen

97) $\int \arcsin \frac{x}{a}\,dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}$

98) $\int \arccos \frac{x}{a}\,dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$

99) $\int \arctan \frac{x}{a}\,dx = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2)$

100) $\int \operatorname{arccot} \frac{x}{a}\,dx = x \operatorname{arccot} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2)$

Ableitungstabelle

Funktion	Ableitung
Sin(x)	Cos(x)
Cos(x)	-Sin(x)
Tan(x)	$\frac{1}{\cos(x)^2}$
arcsin(x)	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arccos(x)	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arctan(x)	$\frac{1}{1+x^2}$
arccot(x)	$-\frac{1}{1+x^2}$