Institut für Angewandte Mathematik

Leibniz Universität Hannover

Dr. Attia, Prof. Dr. Beuchler, Dr. Leydecker

Numerische Mathematik für Ingenieure Sommersemester 2021

Klausur (90 Minuten), 24. Juli 2021

Die Klausur ist für 90min konzipiert. Die Kurzfragen sind integriert (und durften mit Hilfsmitteln gerechnet werden, obwohl keine nötig sein sollten). Wenn Sie Aufgaben dieser online-Klausur zum Üben rechnen wollen, dann müssen Sie für den Parameter p noch eine Zahl zwischen/inklusive 1 und 9 verwenden, für a_1, a_2, ... noch irgendwelche Zahlen zwischen/inklusive 0 und 9. (In der online-Klausur waren die Werte der Parameter über das hier fehlende Deckblatt festgelegt)

Aufgabenteil

Aufgabe 1.1 [LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche ....(12 + 6 = 18 Punkte (+2 Bonuspunkte))]

(a) Zur Bestimmung der $P^T LR$-Zerlegung (also mit Spaltenpivotsuche) einer Matrix hat man nach einem ersten Zeilentausch und dem ersten Eliminationsschritt das folgende Schema in Kurzsschreibweise erzeugt (die Vorzeichen in der L-Matrix wurden bereits umgedreht):

$$\begin{array}{c|ccc||c}
\multicolumn{4}{c||}{L, R, A} & \text{Tauschvektor} \\ \hline
2 & -p & 0 & 7 & 4 \\ \cline{1-1}
-\frac{1}{4} & 1 & 2 & 4 & 2 \\
\frac{1}{3} & 0 & 3 & p & 3 \\
\frac{2}{5} & 2 & 4 & 4 & 1
\end{array}$$

Tragen Sie zunächst Ihre persönliche Zahl p ein. Wie lautet die Matrix L_1^{-1}? Führen Sie nun die restlichen Schritte des Algorithmus „LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche" durch und geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an.

(b) Eine Matrix B hat eine $P^T LR$-Zerlegung $PB = LR$ mit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & p+2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \cdot p \\ p \end{pmatrix}$$

Tragen Sie zunächst Ihren persönlichen Wert für p ein und geben Sie damit die Matrix R und den Vektor $\vec{b}$ an.

Lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $B\vec{x} = \vec{b}$ exakt, indem Sie die entsprechenden zwei Dreieckssysteme lösen (*ohne* B oder LR zu berechnen).

Hinweis: Das Lösen der Dreieckssysteme mit einem zugelassenen Taschenrechner ist erlaubt.

Bonusaufgabe (+ 2 Punkte): Geben Sie die Determinante von B an. Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\det(P) = 1$ gilt.

Aufgabe 1.2 [Lineare Iterationsverfahren .... (5 + 3 + 5 = 13 Punkte)]

Gegeben seien die Daten

$$A = \begin{pmatrix} 3\cdot p & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3\cdot p \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Setzen Sie zunächst Ihren persönlichen Parameter p ein.

(a) Führen Sie einen Schritt des Jacobi-Verfahrens mit Startvektor $\vec{x}^{(0)}$ durch.

(b) Geben Sie Fehlerfortpflanzungsmatrix M für das Jacobi-Verfahren an.

(c) Die Matrix M aus (b) hat die Eigenwerte

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt{p}},\ \frac{i}{\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt{p}},\ -\frac{1}{\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt{p}},\ -\frac{i}{\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt{p}} \right\}.$$

Konvergiert das Jacobi-Verfahren für beliebige Startvektoren?

Aufgabe 1.3 [Interpolation und Quadratur .... ((6 + 6) + 6 = 18 Punkte)]

(a) Gegeben sei die äquidstante Unterteilung

$$\tau = [-3,-2], [-2,-1], [-1,0], [0,1], [1,2], [2,3],$$

also $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (\,-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\,)$.

(i) In diesem Aufgabenteil gelte die Wertetabelle (Setzen Sie zunächst Ihren persönlichen Wert für a_2 ein!)

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$s(x_i)$	a_2	1	2	3	4	5	a_2

Es geht um die Bestimmung des interpolierenden *periodischen kubischen Splines* s in der B-Spline-Basis: Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Form auf, **ohne es zu lösen!**

(ii) Es bezeichne C_i die i-te Hutfunktion, also den linearen Spline mit $C_i(x_j) = 1$ für $j = i$ und $C_i(x_j) = 0$ für $j \neq i$. Skizzieren Sie den folgenden linearen Spline (Setzen Sie zunächst Ihre persönlichen Werte für p und a_2 ein!)

$$\tilde{s}(x) = (a_2 + 2)\cdot C_1(x) - C_2(x) + p \cdot C_4(x)$$

in einem Koordinatensystem mit geeigneter Achsenbeschriftung im Intervall $[-3, 3]$.

Hinweis: Die „y-Achse“ muss nicht maßstabsgetreu skizziert sein.

(b) In diesem Aufgabenteil sei $\hat{s}$ der interpolierende lineare Spline zur Wertetabelle (Setzen Sie zunächst Ihren persönlichen Wert für p ein!)

x_i	0	1	4	6
$\hat{s}(x_i)$	0	p	$-p$	$-p$

Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter Quadraturformeln das folgende Integral exakt:

$$\int_0^6 \left(\hat{s}(x)\right)^2 \, dx.$$

Aufgabe 1.4 [Laplace-Transformation ....(7 + 6 = 13 Punkte (+7 Bonuspunkte))]

(a) Gegeben ist die Anfangswertaufgabe (AWA)

$$y^{(4)}(t)+(a_2+2)y'(t)-(a_2+2)y(t) = t\cdot\sin((a_2+2)\cdot t), \quad y(0) = 20,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 30,\ y'''(0) = 40.$$

Setzen Sie zunächst Ihren persönlichen Parameter a_2 ein. Zur Lösung dieser Aufgabe soll die Laplace-Transformation verwendet werden. Stellen Sie hierzu den Ansatz $Y(s) = \frac{Q(s)+(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ auf, indem Sie $P(s)$, $Q(s)$ und $(\mathcal{L}g)(s)$ angeben.
Hinweis: Eine explizite Berechnung der Lösung der AWA wird in der Aufgabe NICHT verlangt!

(b) Bei einer anderen Anfangswertaufgabe hat die Laplace-Transformierte $Y(s) = (\mathcal{L}y)(s)$ die Partialbruchzerlegung

$$Y(s) = \frac{\pi}{(s+p)^5} + \frac{11+p\cdot i}{(s-(2-5i))^4} + \frac{11-p\cdot i}{(s-(2+5i))^4}$$

Setzen Sie zunächst Ihren persönlichen Parameter p ein. Bestimmen Sie die **komplexwertige** Form der Lösung $y(t)$ dieser AWA durch Rücktransformation von $Y(s)$.

(c) **Bonusaufgabe:** Bestimmen Sie mit Hilfe der Tabelle aus dem Skript sowie den Rechenregeln für die Laplace-Transformation die Laplace-Transformierten der Funktionen

$$f(t) = \sin^2((a_2+2)\cdot t) \qquad \text{und} \quad g(t) = e^{3t}\cdot\sin^2((a_2+2)\cdot t).$$

Setzen Sie zunächst Ihre persönliche Zahl a_2 ein.
Hinweis: Es ist nicht nötig, nach Anwendung der Rechenregeln das Ergebnis weiter zu vereinfachen.

Aufgabe 1.5 [Finite Differenzen für RWP ....(14 Punkte)]

Die Randwertaufgabe (Setzen Sie zunächst Ihren persönlichen Wert für a_2 ein!)

$$-(2+a_2)y''(x) + y'(x) = \frac{x^2}{4}, \quad -2 < x < 4, \quad y'(-2) = \pi, \ \ y(4) = 42,$$

soll mit dem Differenzenverfahren unter ausschließlicher Verwendung *zentraler Differenzenquotienten* näherungsweise gelöst werden. Stellen Sie zur Schrittweite $h = 2$ **ein lineares Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Form** auf [*ohne* das LGS zu lösen]! **Rechnen Sie exakt!**
Hinweis: Die aus der DGL resultierenden Gleichungen vereinfachen sich, wenn sie mit 4 multipliziert werden!

Aufgabe 1.6 [Kurzfrage: Rayleigh-Quotient ....(1 Punkt)]

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} p+1 & p-3 & -2 \\ p-1 & p+3 & 2 \\ 1-p & 3-p & 4 \end{pmatrix}$ hat den Eigenvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $2\cdot p$.
Bestimmen Sie für Ihre persönliche Zahl p den Rayleigh-Quotienten $R_A(\vec{y})$ (in dieser Kurzfrage ist keine Begründung nötig).

Aufgabe 1.7 [Kurzfrage: Lagrange-Polynom .... (1 Punkt)]

Gegeben seien $x_0 = 0,\ x_1 = p,\ x_2 = 2 \cdot p$ und $x_3 = 3 \cdot p$. Setzen Sie zunächst Ihren persönlichen Parameter p ein. Geben Sie das zur Stützstelle x_2 gehörende Lagrange-Polynom $L_{3,2}(x)$ in faktorisierter Form an (multiplizieren Sie es nicht aus!).

Aufgabe 1.8 [Kurzfrage: Newton-Verfahren .... (3 Punkte)]

Bestimmen Sie ausgehend von $x_0 = p$ näherungsweise eine Nullstelle von $f(x) = x^2 - px + 2p^2$, indem Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens ausführen. (Setzen Sie zunächst Ihre persönliche Zahl p ein!)

Aufgabe 1.9 [Kurzfrage: Euler-Verfahren .... (2 Punkte)]

Ein Anfangswertproblem für eine Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lautet

$$u'(t) = p \cdot \cos(t) - u(t) \quad \text{mit } u(0) = p.$$

Ersetzen Sie zunächst den Parameter p durch Ihren persönlichen Wert. Führen Sie einen Schritt des Euler-Verfahrens zur näherungsweisen Bestimmung von $u(0.01)$ durch.