Numerische Mathematik für Ingenieure (SoSe 25) – Übung 11 –

Randwertaufgaben

Lösung von Randwertaufgaben mit Finiten Differenzen: Kapitel 5.2.1

- vorderer und hinterer Differenzienquotient sowie insbesondere zentrale Differenzequotienten
- Approximationsgüte zentraler Differenzenquotienten: Satz 5.3

Wdh. Vorlesung:

Finite Differenzen: Gegeben ist eine DGL der Form

sind in den Aufgaben gegeben

Skript

$$(6.6) \qquad -y''(x) + p(x)\,y'(x) + q(x)\,y(x) = f(x), \quad x \in (a,b),$$

Eine Näherung für y ist gesucht
(bzw. Näherungswerte $y_i \approx y(x_i)$ sind)

sowie 2 Randbedingungen:

$$c_{1,a}\,y'(a) + c_{0,a}\,y(a) = \tilde{r}_a \quad (c_{1,a}\cdot c_{0,a} \neq 0)$$

$$c_{1,b}\,y'(b) + c_{0,b}\,y(b) = \tilde{r}_b \quad (c_{1,b}\cdot c_{0,b} \neq 0)$$

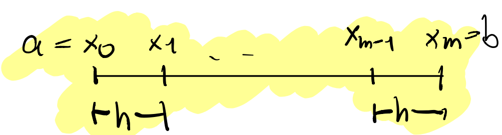
Für konkretere: s. Skript S. 114, Abschnitt 6.2

Es sollen jetzt Näherungswerte $y_i \approx y(x_i)$ bestimmt werden.

Dazu: 1. Def. ein Gitter / eine Zerlegung

$$\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_m)$$

Skript genauer $\vec{x}_h = (x_{h,0}, \dots, x_{h,m})$



mit Schrittweite $h = \frac{b-a}{m}$.

2. Schreibe statt $x \to x_i$, $a \to x_0$, $b \to x_m$

$y(x) \to y(x_i) \to y_i$ ← gesuchte Näherungen

3. Ersetze Ableitungen durch Differenzenquotienten (DQ)
(sowohl in den RBen als auch in der DGL):

$$y''(x) \to y''(x_i) \xrightarrow{zDQ} \boxed{\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}} \quad („\mathcal{O}(h^2)\text{-Approx.}")$$

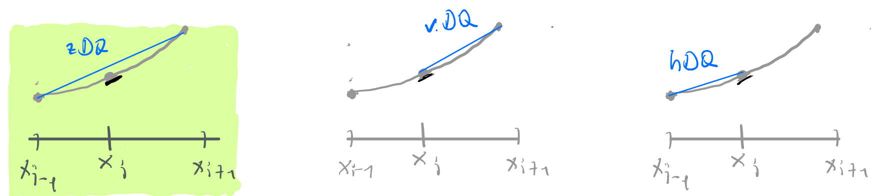
$$y'(x) \to y'(x_i) \xrightarrow{zDQ} \boxed{\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}} \quad („\mathcal{O}(h^2)\text{-Approx.}")$$

Einschub:

alternativ: meist wenn, dann nur am Rand

$y'(\overset{x_0}{a}) \to \frac{y_1 - y_0}{h}$ und $y'(\overset{x_m}{b}) \to \frac{y_m - y_{m-1}}{h}$

vordere DQ (vDQ) — hintere DQ (hDQ)



$y'(x_i)$ = Steigung der schwarzen Tangente

$y'(x_i) \approx$ jeweils die Steigung der blauen Sekante

- vorderer und hinterer DQ sind nur eine „$\mathcal{O}(h)$-Approx." (schlechter)

Dabei werden evtl. „Ghost-Points" eingeführt.
(Wenn in den RBen Ableitungen durch zDQ ersetzt werden)

5. Im Standardfall (2DQ) hat man also 2 Gleichungen aus RBen:

A) $$c_{1,a}\frac{y_1-y_{-1}}{2h}+c_{0,a}\,y_0=\tilde{r}_a$$ ← evtl. G.P. (x_{-1},y_{-1})

B) $$c_{1,b}\frac{y_{m+1}-y_{m-1}}{2h}+c_{0,b}\,y_0=\tilde{r}_b$$ ← evtl. G.P. (x_{m+1},y_{m+1})

↑ schreibt man in der Matrix des LGS immer als A) → 1. Zeile, B) → letzte Zeile.

- kein G.P. bei (x_{-1},y_{-1}), falls $c_{1,a}=0$ oder vDQ statt zDQ verwendet
- kein G.P. bei (x_{m+1},y_{m+1}), falls $c_{1,b}=0$ oder vDQ statt zDQ verwendet

Die resultierende Differenzengleichung

(6.6) → $$(\widetilde{6.6})\quad -\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p(x_i)\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+q(x_i)\,y_i=f(x_i)$$

Minus!

sollte zunächst sortiert werden: $\boxed{\ldots y_{i-1}+\ldots y_i+\ldots y_{i+1}=f(x_i)}$

und muss dann gelten für (es müssen folgende i, x_i, ... eingesetzt werden)

immer / kein G.P.: $i=1,\ldots,m-1$
G.P. links: auch $i=0$
G.P. rechts: auch $i=m$

Bem.: G.P. links und rechts $i=0,\ldots,m$

Problem für die meisten: wann/wie/wo G.P. einführen!?

Präsenzaufgabe 11.1 [Differenzen-Verfahren: verschiedene RBen ohne und mit Ghost Points]

Es geht hier um das RWP mit der DGL

$$-y''(x) + (1 + x^2)y(x) = -1, \quad x \in [-1, 1]$$

und untenstehnden RBen und bei Verwendung des Differenzen-Verfahrens mit $m = 6$ Intervallen.

$a = x$ $\qquad b = x_m = x_6$ $\qquad h = \frac{b-a}{m} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(a) $y(-1) = c_l$ und $y(1) = c_r$

a.) $1 \cdot y_0 = c_l$ und b.) $1 \cdot y_6 = c_r$

$\Rightarrow$ keine G.P. eingeführt!

$-1 = a \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad b = 1$

$x_0 \quad \underbrace{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5}_{\text{innere Pkt. nach voll. G.P.s}} \quad x_6$

(hier wurden keine G.P. eingeführt)

DGL

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + (1 + x_i^2)\, y_i = -1 \\ &\overset{h=\frac{1}{3}}{\Leftrightarrow} -9\, y_{i-1} + (19 + x_i^2)\, y_i + (-9)\, y_{i+1} = -1 \quad \text{Sortieren} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & 19 + x_i^2 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = -1 \end{aligned}\right\} \text{für } i = 1, \ldots, 5$$

$-1 = a \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad b = 1$

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6$

und (s.o.) a.) $1 \cdot y_0 = c_l$ und b.) $1 \cdot y_6 = c_r$:

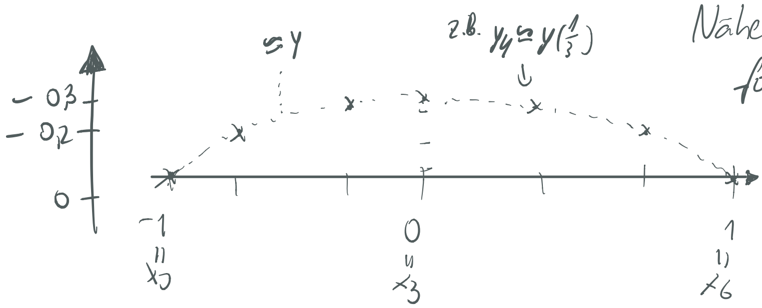
$$\begin{array}{l} \text{a.)} \\ i=1 \\ i=2 \\ i=3 \\ i=4 \\ i=5 \\ \text{b)} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 19 + \frac{4}{9} & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 19 + \frac{1}{9} & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 19 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 19 + \frac{1}{9} & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 19 + \frac{4}{9} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_l \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ c_r \end{pmatrix}$$

~~(a)~~

Zusatz: LGS lösen und Skizze:

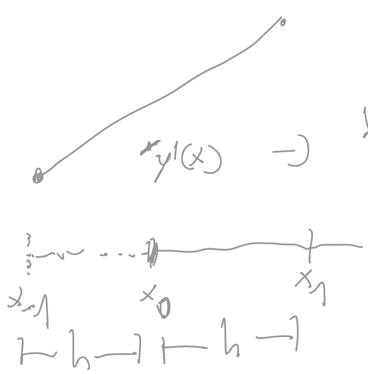
Für $c_l = 0$ und $c_r = 0$ ergibt sich lt. Skript/mittels Computer:

$$\vec{y} = (0, -0.2, -0.3, -0.34, -0.3, -0.2, 0)^T$$ (stark gerundet)



Näherungswerte) für $y(x)$:

$y_i = y(x_i)$



$y'(x) \rightarrow \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}$

$a = x_0 = -1$ $\qquad$ $b = x_m = x_6$

(b) $y'(-1) + \gamma y(-1) = 0$ und $y(1) = \beta$ Hier sollen -wie üblich- zentrale DQ für Ableitungen verwendet werden

$$\frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + \gamma y_0 = 0 \quad \text{und} \quad \text{b.)}\ 1 \cdot y_6 = \beta$$

s.o.: $a=-1, b=1$; $h = \frac{b-a}{m} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\cdot 2h$

$\Leftrightarrow -1 \cdot y_{-1} + 2h\gamma\, y_0 + 1 \cdot y_1 = 0$

$h = \frac{1}{3}$

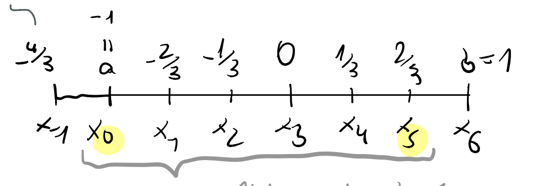
$\Leftrightarrow -1\, y_{-1} + \frac{2\gamma}{3} y_0 + 1 \cdot y_1 = 0 \leftarrow$ a.)

G.P. (x_{-1}, y_{-1}) eingeführt!

unbekannt

$x_{-1} = x_0 - h = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$

Ghost-Stelle



innere Pkt. nach wll. G.P.s

(hier wurde der G.P. (x_{-1}, y_{-1}) eingeführt)

DGL umformen, wie zuvor:

$$\begin{pmatrix} -9 & 19 + x_i^2 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = -1 \qquad \text{für } i = 0, 1, \ldots, 5$$

anders!

Neu!

$$\begin{array}{c} \text{a.)} \\ i=0 \\ i=1 \\ i=2 \\ i=3 \\ i=4 \\ i=5 \\ \text{b.)} \end{array}
\begin{pmatrix}
-1 & \frac{2\gamma}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-9 & 20 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -9 & 19+\frac{4}{9} & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -9 & 19+\frac{1}{9} & -9 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -9 & 19 & -9 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 19+\frac{1}{9} & -9 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 19+\frac{4}{9} & -9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

(c) $y(-1) = c_l$ und $y'(1) + \gamma y(1) = 42$ ← Bitte selber rechnen, mit Hilfe von (a), (b) und (d).

(d) $\underbrace{y'(-1) + \gamma y(-1) = 0}_{a = x_0 = -1}$ und $\underbrace{y'(1) + \gamma y(1) = 42}_{b = x_m = x_6}$

Wie bei (b)

$$\text{a.)}\quad -1 \cdot y_{-1} + \frac{2\gamma}{3} y_0 + 1 \cdot y_1 = 0$$

$\Downarrow$ G.P. einf.

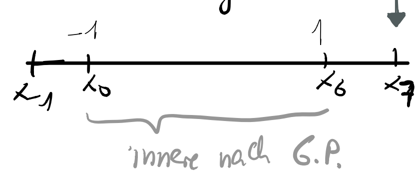
$$\text{b.)}\quad \frac{y_7 - y_5}{2h} + \gamma y_6 = 42 \quad \Big| \cdot 2h,\ h = \tfrac{1}{3}$$

$$\Longleftrightarrow \dots$$

$$\Longleftrightarrow \text{b.)}\quad -1\, y_5 + \frac{2\gamma}{3} y_6 + 1 \cdot y_7 = 28$$

$\Downarrow$ G.P. einf. → Ghost-Stelle

- DGL auch wie zuvor,
  aber auch noch für $i=6$.



$$\begin{array}{r l}
\begin{array}{r} \text{a.)} \\ i=0 \\ i=1 \\ i=2 \\ i=3 \\ i=4 \\ i=5 \\ \text{Neu! } i=6 \\ \text{Geändert: b.)} \end{array} &
\begin{pmatrix}
-1 & \frac{2\gamma}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-9 & 20 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -9 & 19+\frac{4}{9} & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -9 & 19+\frac{1}{9} & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -9 & 19 & -9 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 19+\frac{1}{9} & -9 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 19+\frac{4}{9} & -9 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 20 & -9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{2\gamma}{3} & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 28 \end{pmatrix}
\end{array}$$