Institut für
Angewandte Mathematik

Leibniz Universität Hannover

Dr. Frank Attia, Dr. Florian Leydecker

Hannover, 07. April 2025

Mathematik für die Ingenieurwissenschaften III - Numerik
SoSe 2025 – Übung 1 – Lösungen

Themen

Finite Differenzen für Partielle Differentialgleichungen, Abschnitt 1.1

Grundlegende Begriffe und Operationen von Matrizen
- Bandmatrizen: Definitionen 1.2

strikte/starke Diagonaldominanz, Definition 1.8

symmetrisch positive Definitheit, Definition 1.10

elementare Matrizen: Frobenius- und Permutationsmatrizen, Abschnitt 1.2

Lösen von Systemen mit Dreiecksmatrix: Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen

Zentralübung

In dieser Zentralübung werden insbesondere Aufgaben aus diesem Abschnitt behandelt.
Weiterhin haben Sie die Gelegenheit Fragen zu der Vorlesung und den Videos zu stellen.

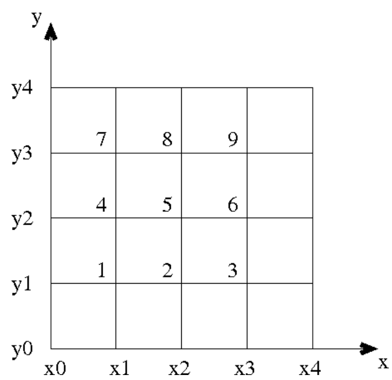
Aufgabe 1.1 [Differenzenverfahren für PDGL (Poissongleichung/stat. WLG)]

In dem Gebiet $\Omega := (0 < x < L) \times (0 < y < L)$, siehe Skizze rechts, sei die folgende Aufgabe vorgelegt:

$$\begin{aligned} -\Delta T(x,y) &= f(x,y) \quad \text{in } \Omega \\ T(x,y) &= g(x,y) \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned}$$

mit $f(x,y) = xy$ und

(a) $g(x,y) = 0,$ **(b)** $g(x,y) = x + y.$



Berechnen Sie mit dem Differenzenverfahren mit dem zentralen Differenzenquotienten zu den Schrittweiten $h = k = \frac{L}{4}$ und $L = 1$ die Näherungen an den inneren Knotenpunkten.

Kurzteil

Aufgabe 1.2 [Grundlagen der Matrizenrechnung, Wdh. von Mathematik I/II]

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie, wenn dies möglich ist, folgende Ausdrücke:
$A\vec{x},\ B\vec{x},\ \vec{x}A,\ \vec{x}B,\ \vec{x}^T\vec{x},\ \vec{x}\vec{x}^T,\ \vec{x}^TA,\ \vec{x}^TB,\ AB,\ BA,\ B^TA,\ AB^T,$

Lösung

Man kann $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $Y \in \mathbb{R}^{k\times l}$ nur dann multiplizieren wenn $n = k$. Deshalb ist es nicht möglich $BA,\ AB^T,\ B\vec{x},\ \vec{x}A,\ \vec{x}B$ zu berechnen. Es gilt:
$A\vec{x}$ entspricht einer Linearkombination der drei Spaltenvektoren $\vec{a}_{i,S}$, $i = 1, 2, 3$, von A. Die Koeffizienten sind durch die Komponenten in $\vec{x}$ gegeben. Analog entspricht $\vec{x}^TA$ einer Linearkombination der Zeilenvektoren $\vec{a}_{i,Z}$, $i = 1, 2, 3$, von A mit Koeffizienten aus $\vec{x}$.

$$A\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{a}_{i,S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{x}^TA = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{a}_{i,Z} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ +1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{x}^TB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \\ +1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\vec{x}^T\vec{x}$ ist das Skalarprodukt von $\vec{x}$ mit sich selbst und $\vec{x}\vec{x}^T$ ist das dyadische Produkt von $\vec{x}$ mit sich selbst.

$$\vec{x}^T\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_i = 1 + 1 + 1 = 3, \quad \vec{x}\vec{x}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abschließend berechnen sich die geforderten Matrix-Matrix Produkte zu

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 2 + 2\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 0 \\ (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 & (-1)\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B^TA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Letztgenannte können als Aneinanderreihungen von Matrix-Vektor Produkten gesehen werden (s. auch oben, Berechnung von $A\vec{x}$). Es gilt z.B. für AB: Die i-te Spalte ist eine Linearkombination der Spaltenvektoren von A mit den Koeffizienten aus der i-ten Spalte aus B.

Aufgabe 1.3 [Invertierbarkeit von 2×2 Matrizen]

Wann ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ invertierbar? Wie lautet die Inverse A^{-1}?

Lösung

A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det A = ad - bc \neq 0$. Sei nun $\det A \neq 0$, dann gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

denn

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.4 [Zeilendiagonaldominante Matrizen]

Vertauschen Sie die Zeilen von $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 10 & 3 \\ 3 & -11 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ derart, dass die resultierende Matrix strikt zeilendiagonaldominant ist.

Lösung

Die Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ ist strikt zeilendiagonaldominant, wenn

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

gilt. Vertauschen wir der Zeilen von A wie folgt, so erhalten wir eine strikt zeilendiagonaldominante Matrix:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 10 & 3 \\ 3 & -11 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \xrightarrow{Z_4 \leftrightarrow Z_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 10 & 3 \\ 3 & -11 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}}_{B} \xrightarrow{Z_2 \leftrightarrow Z_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -11 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 10 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}}_{C}.$$

Mit Permutationsmatrizen

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P = P_2 P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kann man den Rechenweg auch mit Matrix-Rechnung beschreiben:

$$B = P_1 A, \quad C = P_2 B \quad \text{also,} \quad C = P_2 P_1 A = PA.$$

Aufgabe 1.5 [Invertieren eines Produktes von Frobeniusmatrizen]

Berechnen Sie jeweils die Inverse der Matrizen

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = L_1 L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Entweder: Aus der Vorlesung wissen wir

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da diese Matrix die Form der Matrizen L_i aus der LR-Zerlegung hat.
Alternativ: Mit Gauß-Algorithmus/Invertieren der Matrix sehen wir obiges.
Anschaulich: L_1^{-1} addiert das -2-fache der ersten Zeile auf die zweite usw., erzeugt bei der Matrix L_1 also unterhalb des ersten Diagonalelements Nullen.
Genauso erhält man

$$L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Desweiteren gilt für $L = L_1 L_2$:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Wie man sieht, ist die Inverse der Matrix $L = L_1 L_2$ nicht durch Umkehrung der Vorzeichen der Unterdiagonaleinträge zu berechnen. Statt dessen muss $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ verwendet werden, $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$, usw...
Bemerkung: Analoges gilt auch für die Transponierte einer Matrix: $(AB)^T = B^T A^T$, $(ABC)^T = C^T B^T A^T$, usw...

Aufgabe 1.6 [Bandbreite von Matrizen]

(a) Bestimmen Sie die Bandbreite der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Bandbreite einer $(n \times n)$-Permutationsmatrix I_{pq} in Abhängigkeit von n, p, q.

Lösung

Die Bandbreite bestimmt man, vereinfacht gesprochen, mit Hilfe von Definition 1.2, indem man ausgehend von der Diagonale den größten horizontalen/vertikalen Abstand eines von Null verschiedenen Eintrags bestimmt. Dieser wird mit m bezeichnet. Die Bandbreite ist dann $2m + 1$.

(a) Die Matrix A hat $m = 2$ (z.B. in der dritten Zeile) und damit eine Bandbreite von $2 \cdot 2 + 1 = 5$.
Auch die Matrix B hat $m = 2$ (z.B. in der dritten Zeile) und damit eine Bandbreite von $2 \cdot 2 + 1 = 5$.
Auch die Permutationsmatrix I_{24} hat $m = 2$ (z.B. 2. Zeile) und damit eine Bandbreite von $2 \cdot 2 + 1 = 5$.

(b) Es ist

$$I_{pq} = \begin{pmatrix} 1 \\ & \ddots \\ && 1 \\ &&& 0 && \cdots && 1 \\ &&&& 1 \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots \\ &&&&&& 1 \\ &&& 1 && \cdots && 0 \\ &&&&&&&& 1 \\ &&&&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{p-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{q-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

In dieser Matrix sind außerhalb der Diagonalen lediglich die beiden Einträge a_{pq} und a_{qp} ungleich Null. Beide haben von der Diagonalen einen Abstand von $m = |p - q|$. Dementsprechend handelt es sich um eine Bandmatrix mit Bandbreite $2 \cdot |p - q| + 1$.

Aufgabenteil

Aufgabe 1.7 [Diagonaldominanz]

Gegeben seien die Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

- Welche ist/sind strikt diagonaldominant?
- Welche der Matrizen ist/sind symmetrisch positiv definit?
- Welche der Matrizen ist/sind invertierbar?

Lösung

Zunächst ist A strikt zeilendiagonaldominant (und somit auch strikt diagonaldominant):

$$5 > |-1| + 2, \quad |-6| > |-1| + 1, \quad 8 > 2 + 1.$$

Bemerkung: A ist auch strikt spaltendiagonaldominant.
Weiter ist A symmetrisch ($A = A^T$), aber nicht symmetrisch positiv definit („negativer Eintrag auf der Diagonalen"):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -6 < 0.$$

Da A strikt diagonaldominant ist, ist A auch invertierbar.
Matrix B ist weder strikt zeilen- noch strikt spaltendiagonaldominant (2. Zeile/Spalte: $2 \not> 1 + 1$). B ist symmetrisch. Um zu überprüfen, ob B auch symmetrisch positiv definit ist, berechnen wir die drei Hauptminoren:

$$B_1 = 2, \quad B_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3 > 0, \quad B_3 = \det B = 4 > 0$$

Damit ist B auch symmetrisch positiv definit. Alternativ hätte man für B die Eigenwerte bestimmen können:

$$\det(B - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^3 - 2(2-\lambda) = (2-\lambda) \cdot ((2-\lambda)^2 - 2) = (2-\lambda)(2+\sqrt{2}-\lambda)(2-\sqrt{2}-\lambda) \stackrel{!}{=} 0.$$

Die Eigenwerte sind damit $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3.4142$, $\lambda_3 = 2 - \sqrt{2} \approx 0.5858$. Da diese alle positiv sind und die Matrix symmetrisch ist, ist B s.p.d.
Matrix C ist weder strikt zeilendiagonaldominant (siehe z.B. 1.Zeile: $4 = 4 + 0$) noch strikt spaltendiagonaldominant (siehe z.B. 2. Spalte: $7 \not> 4 + |-4|$). Weiterhin ist C nicht symmetrisch und damit auch nicht s.p.d. Ist C invertierbar? Dazu berechnen wir die Determinante und erhalten $\det C = \ldots = 208 \neq 0$. Damit ist C invertierbar.

Aufgabe 1.8 [Lösen von Dreieckssystemen: Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen, Wdh. von Mathematik I/II]

Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 30 \end{pmatrix}$. Lösen Sie die LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ und $A^T\vec{x} = \vec{b}$.

Lösung

Wir suchen $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ mit $A\vec{x} = \vec{b}$, bzw. $A^T\vec{x} = \vec{b}$.
Es gilt:

$$A\vec{x} = \vec{b} \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Es folgt mit Vorwärtseinsetzen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{2} = 1, \\ x_2 &= \frac{6 - 3 \cdot 1}{1} = 3, \\ x_3 &= \frac{30 - 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3}{5} = 4. \end{aligned}$$

Im Falle $A^T\vec{x} = \vec{b}$ erhalten wir:

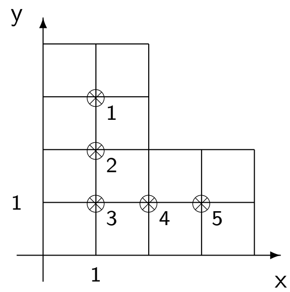
$$A^T\vec{x} = \vec{b} \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Es folgt mit Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{30}{5} = 6, \\ x_2 &= \frac{6 - 2 \cdot 6}{1} = -6, \\ x_1 &= \frac{2 - 4 \cdot 6 - 3 \cdot (-6)}{2} = -2. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.9 [Differenzenverfahren für PDGL (Poissongleichung)]

In dem rechts skizzierten Gebiet Ω sei die folgende Aufgabe vorgelegt:



$$\begin{aligned} -\Delta T(x,y) &= x+y && \text{in } \Omega \\ T(x,y) &= g(x,y) && \text{auf } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned}$$

mit

(a) $g(x,y) = 0$, **(b)** $g(x,y) = xy$.

Zur näherungsweisen Lösung dieser Aufgabe werde das Differenzenverfahren mit dem zentralen Differenzenquotienten herangezogen. Berechnen Sie in den durch Kreuze bezeichneten fünf inneren Knotenpunkten die Differenzenlösung.

Lösung

Beim Finite-Differenzen-Verfahren ersetzt man (vgl. Skript) die Ableitungen in der PDGL $-\Delta T = x+y$ an einer Stelle (x_i, y_j) durch Differenzenquotienten was bei gleichen Schrittlängen in x- und y-Richtung $h = k = 1$ und mit dieser Funktion f (vgl. Skript) an einer Stelle mit Mittelpunkt (x_i, y_j) zu

$$-T_{\text{Süd}} - T_{\text{West}} + 4T_{\text{Mitte}} - T_{\text{Nord}} - T_{\text{Ost}} = f_{h,\text{Mitte}} = h^2 f(x_{\text{Mitte}}, y_{\text{Mitte}}) = x_i + y_j \tag{1.9 1}$$

wird. Die Gleichungen im Gleichungssystem stellt man in der gegenen Reihenfolge auf, also 1. Gleichung bei $\otimes_1 = (1,3)$, 2. Gleichung bei $\otimes_1 = (1,2)$, ... Diese Gleichung (1.9 1) lässt sich auch kürzer mit einem „Differenzenstern" schreiben:

$$\left\{ \begin{matrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{matrix} \right\} T = x_i + y_j.$$

Außerdem setzt man/bezeichnet man mit T_i den gesuchten Näherungswert an der Stelle $\otimes_i$:

(a) Betrachte z.B. Punkt $\otimes_1$: Die rechte Seite der zugehörigen Gleichung lautet dort $1+3=4$. Dann ergibt sich für den Punkt $\otimes_1$:

$$-0 - 0 - T_2 - 0 + 4T_1 = 4.$$

Analog ergeben sich die Gleichungen für die anderen vier Punkte, und man erhält das folgende lineare Gleichungssystem [welches man mit etwas Übung ebenfalls direkt Aufstellen können sollte]:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3462 \\ 1.3846 \\ 1.1923 \\ 1.3846 \\ 1.3462 \end{pmatrix}.$$

(b) Bei z. B. $\otimes_1$ bringt man noch $-0-4-6=-10$ als $+10$ auf die rechte Seite, bei $\otimes_2$ $-0-4=-4$, usw...

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0+4+6 \\ 0+4 \\ 0+0 \\ 0+4 \\ 0+4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 2 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.3462 \\ 3.3846 \\ 2.1923 \\ 3.3846 \\ 4.3462 \end{pmatrix}.$$

Zusatzaufgaben

Aufgabe 1.10 [Ergänzend/nicht prüfungsrelevant: Invertieren eines Produktes von Block-Frobeniusmatrizen]

Die Inversen von L_1, L_2 aus Aufgabe 1.5 und das Produkt $L_1 L_2$ sind einfach anzugeben. Das funktioniert analog auch bei Blockmatrizen (aber bei z. B. L aus Aufgabe 1.5 ist die Inverse nicht direkt ablesbar). Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$L_B = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right),$$

indem Sie die Matrix L_B als Produkt von Block-Frobeniusmatrizen $L_B = L_1 L_2$ auffassen.

Lösung

Zunächst stellen wir fest, dass sich L_B als Blockmatrix schreiben lässt:

$$L_B = \begin{pmatrix} I_{2\times2} & 0 & 0 \\ L_{B1} & I_{2\times2} & 0 \\ 0 & L_{B2} & I_{1\times1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{2\times2} & 0 & 0 \\ L_{B1} & I_{2\times2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{1\times1} \end{pmatrix}}_{=:L_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} I_{2\times2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2\times2} & 0 \\ 0 & L_{B2} & I_{1\times1} \end{pmatrix}}_{=:L_2}$$

mit

$$I_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_{B1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad L_{B2} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad I_{1\times1} = 1.$$

Es bleibt also nur noch, die einzelnen Blockmatrizen L_1 und L_2 zu invertieren. Hier gilt allgemein wieder das gleiche wie bei den L_i der vorherigen Aufgabe (mit der gleichen Argumentation).

$$\begin{pmatrix} I_{2\times2} & 0 & 0 \\ L_{B1} & I_{2\times2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{1\times1} \end{pmatrix}^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{2\times2} & 0 & 0 \\ -L_{B1} & I_{2\times2} & 0 \\ -0 & 0 & I_{1\times1} \end{pmatrix}}_{L_1^{-1}}, \qquad \begin{pmatrix} I_{2\times2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2\times2} & 0 \\ 0 & L_{B2} & I_{1\times1} \end{pmatrix}^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{2\times2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2\times2} & 0 \\ 0 & -L_{B2} & I_{1\times1} \end{pmatrix}}_{L_2^{-1}}.$$

Damit folgt

$$L_B^{-1} = L_2^{-1} L_1^{-1} = \begin{pmatrix} I_{2\times2} & 0 & 0 \\ -L_{B1} & I_{2\times2} & 0 \\ L_{B2} \cdot L_{B1} & -L_{B2} & I_{1\times1} \end{pmatrix} . = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 8 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Institut für Angewandte Mathematik
Leibniz Universität Hannover
Dr. Frank Attia, Dr. Florian Leydecker

Hannover, 14. April 2025

Mathematik für die Ingenieurwissenschaften III - Numerik
SoSe 2025 – Übung 2 – Lösungen

Themen

Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen

LR-Zerlegung mit Spaltenpivotwahl
- Beschreibung: Kapitel 2.1

LR-Zerlegung ohne Pivotwahl (kanonisch) - Bemerkung 2.13 und Satz 2.12

Zentralübung

In dieser Zentralübung werden insbesondere Aufgaben aus diesem Abschnitt behandelt. Weiterhin haben Sie die Gelegenheit Fragen zu der Vorlesung und den Videos zu stellen.

Aufgabe 2.1 [Spaltenpivotsuche, siehe auch Beispiel 2.14 im Skript]

Vorgelegt seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 11 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 14 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Man bestimme die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotwahl.

(b) Man löse das LGS unter Zuhilfenahme der LR-Zerlegung mit Spaltenpivotwahl.

(c) Man gebe zum besseren Verständnis des Lösungsweges des ersten Aufgabenteils die Matrizen P_i, L_i^{-1}, $\tilde{A}^{(i)}$, $\hat{A}^{(i)}$ sowie P, L und R an.

Kurzteil

Aufgabe 2.2

Ist der GA mit kanonischer Pivotwahl möglich für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ bzw. $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$?

Lösung

Für die Matrix A führt man einfach eine Gauß-Umformung durch und erhält

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{Z_2 - 2Z_1} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

und erhält eine Null bei $a_{22}^{(2)}$. Der GA mit gewünschter Pivotwahl ist also nicht möglich.

Die Matrix B ist offenbar strikt zeilendiagonaldominant (und auch strikt spaltendiagonaldominant). Nach Satz 2.12 ist also der GA mit kanonischer Pivotwahl möglich.

Aufgabe 2.3 [Symmetrisch positiv definite Matrizen]

Welche der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 30 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

ist/sind symmetrisch positiv definit?

Lösung

Die Matrix A ist nicht symmetrisch wegen $2 = A_{1,2} \neq A_{2,1} = 1$, also auch nicht symmetrisch positiv definit.

Die *symmetrische* Matrix B kann mit Hilfe des Gauß-Algorithmus mit kanonischer Pivot-Wahl auf rechte obere Dreiecksgestalt gebracht werden. Man erhält

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 30 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 21 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{pmatrix}.$$

Da in dieser Zeilenstufenform (ohne Zeilentausch erlangt!) der *symmetrischen* Matrix A alle Diagonalelemente positiv sind, ist die Matrix symmetrisch positiv definit (siehe Bemerkung 2.13 im Skript).
Alternativ erhält man ebenbfalls mit Bemerkung 2.13, dass die Matrix B symmetrisch und symmetrisch positiv definit ist:

$$\det B_1 = B_{1,1} = 1 > 0, \quad \det B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 > 0, \quad \det B_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 30 \end{vmatrix} = 17 > 0.$$

Die Matrix C ist symmetrisch, man verwendet wieder Bemerkung 2.13 und führt den Gauß-Algorithmus durch oder berechnet alternativ die Hauptminoren:

$$\det C_1 = C_{1,1} = 3 > 0, \quad \det C_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14 > 0, \quad \det C_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 72 > 0, \qquad \Longrightarrow \text{ A ist s.p.d.}$$

Die Matrix D ist symmetrisch. Weiterhin berechnet man z. B. die Hauptminoren:

$$\det D_1 = D_{1,1} = 3 > 0, \quad \det D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 11 > 0, \quad \det D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 57 > 0, \qquad \Longrightarrow \text{ A ist s.p.d.}$$

Aufgabe 2.4 [LR-Zerlegung mit partieller Pivotwahl (Spaltenpivotsuche)]

(a) Bestimme Sie die $P^T LR$-Zerlegung $PA = LR$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Eine andere Matrix A hat die $P^T LR$-Zerlegung $PA = LR$ mit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie damit das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit rechter Seite $\vec{b} = (4, -2, 3)^T$, indem Sie die entsprechenden beiden Dreieckssysteme lösen.

Lösung

(a) Hier die Lösung in einer Kurzschreibweise Eine ausführlichere Lösung befindet sich hier weiter unten.

L, R, A				Operationen	$\vec{p}$	Bem.: Ablesbar in aktuellen Zeilen wären
1	1	2	1		1	
2	2	−1	2		2	$\hat{A}^{(1)} = A = \dots$
2	3	2	0		3	$P_1 = \dots$
0	2	5	1		4	
2	2	−1	2	$\cdot(-\frac{1}{2})$ $\cdot(-1)$	2	$\tilde{A}^{(1)} = P_1\hat{A}^{(1)} = \dots$
1	1	2	1	+	1	$L_1^{-1} = \dots$
2	3	2	0	+	3	$P_1 = \dots$
0	2	5	1		4	
2	2	−1	2		2	$\hat{L}_1 = \tilde{L}_0 L_1 = \dots$
0.5	0	2.5	0		1	$\hat{A}^{(2)} = L_1^{-1}\tilde{A}^{(1)} = \dots$
1	1	3	−2		3	$P_2 = \dots$
0	2	5	1		4	$P_1 = \dots$
2	2	−1	2		2	$\tilde{L}_1 = P_2\hat{L}_1P_2 = \dots$
0	2	5	1	$\cdot(-\frac{1}{2})$	4	$\tilde{A}^{(2)} = P_2\hat{A}^{(2)} = \dots$
1	1	3	−2	+	3	$L_2^{-1} = \dots$
0.5	0	2.5	0		1	$P_2P_1 = \dots$
2	2	−1	2		2	$\hat{L}_2 = \tilde{L}_1L_2 = \dots$
0	2	5	1		4	$\hat{A}^{(3)} = L_2^{-1}\tilde{A}^{(2)} = \dots$
1	0.5	0.5	−2.5		3	$P_3 = \dots$
0.5	0	2.5	0		1	$P_2P_1 = \dots$
2	2	−1	2		2	$\tilde{L}_2 = P_3\hat{L}_2P_3 = \dots$
0	2	5	1		4	$\tilde{A}^{(3)} = P_3\hat{A}^{(3)} = \dots$
0.5	0	2.5	0	$\cdot(-\frac{1}{5})$	1	$L_3^{-1} = \dots$
1	0.5	0.5	−2.5	+	3	$P_3P_2P_1 = \dots$
2	2	−1	2		2	
0	2	5	1		4	$\hat{L}_3 = \tilde{L}_2L_3 = \dots$
0.5	0	2.5	0		1	$\hat{A}^{(4)} = L_3^{-1}\tilde{A}^{(3)} = \dots$
1	0.5	0.2	−2.5		3	$P_3P_2P_1 = \dots$

Man erhält damit insgesamt

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \implies P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5 \end{pmatrix}.$$

Es folgt die ausführliche Lösung:
Zunächst vertauschen wir die ersten beiden Zeilen der Matrix

$$\mathrm{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \tilde{\mathrm{A}}^{(1)} = \mathrm{P}_1 \hat{\mathrm{A}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \hat{\mathrm{A}}^{(2)} = \mathrm{L}_1^{-1} \tilde{\mathrm{A}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: 2. und 4. Zeile tauschen!

$$\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \tilde{\mathrm{A}}^{(2)} = \mathrm{P}_2 \hat{\mathrm{A}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2.5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathrm{L}}_1 = \mathrm{P}_2\mathrm{L}_1\mathrm{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathrm{L}}_2 = \tilde{\mathrm{L}}_1\mathrm{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \hat{\mathrm{A}}^{(3)} = \mathrm{L}_2^{-1} \tilde{\mathrm{A}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & 2.5 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Schritt: 3. und 4. Zeile tauschen!

$$\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \tilde{\mathrm{A}}^{(3)} = \mathrm{P}_3 \hat{\mathrm{A}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -2.5 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathrm{L}}_2 = \mathrm{P}_3\hat{\mathrm{L}}_2\mathrm{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathrm{L}}_3 = \tilde{\mathrm{L}}_2\mathrm{L}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \hat{\mathrm{A}}^{(4)} = \mathrm{L}_3^{-1} \tilde{\mathrm{A}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

Man erhält damit insgesamt

$$\mathrm{L} = \hat{\mathrm{L}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{P} = \mathrm{P}_3\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{R} = \hat{\mathrm{A}}^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5 \end{pmatrix}.$$

(b) Zunächst gilt

$$\mathrm{A}\vec{x} = \vec{b} \qquad \iff \qquad \mathrm{PA}\vec{x} = \mathrm{LR}\vec{x} = \mathrm{P}\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Durch Vorwärtseinsetzen lösen wir dann $\mathrm{L}\vec{z} = (-2, 3, 4)^\mathsf{T}$ zu

$$z_1 = -2, \; z_2 = 5, \; z_3 = 5.$$

Damit erhalten wir für $\mathrm{R}\vec{x} = \vec{z}$:

$$x_3 = 2, \; x_2 = -1, \; x_1 = 1.$$

Aufgabe 2.5 [LR-Zerlegung]

(a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 17 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 10 & 3 \\ 6 & 7 & 3 & 11 \end{pmatrix} .$$

Man berechne „die“ LR-Zerlegung; dabei gebe man auch die einzelnen Matrizen L_j $(j = 1, 2, \ldots)$ an.

(b) Eine andere Matrix A hat die LR–Zerlegung $A = LR$ mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie damit das LGS $A\vec{x} = (10, 7, 4)^T$.

Lösung

(a) **Hinweis:** Hier kann auch wie gewohnt die bisher verwendete Kurzschreibweise benutzt werden.
Man berechnet mit Hilfe des Gauß–Algorithmus (ausgehend von $A^{(1)} = A$):

$$\begin{array}{cccc|l}
4 & 2 & 2 & 6 & \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \cdot\left(-\frac{3}{2}\right) \\
2 & 17 & 1 & 7 & \leftarrow + \qquad\qquad\qquad\qquad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = L_1^{-1} A^{(1)} = \ldots \\
2 & 1 & 10 & 3 & \leftarrow + \\
6 & 7 & 3 & 11 & \leftarrow + \\
\hline
4 & 2 & 2 & 6 & \\
0 & 16 & 0 & 4 & \cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \qquad\qquad\qquad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(3)} = L_2^{-1} A^{(2)} = \ldots \\
0 & 0 & 9 & 0 & \\
0 & 4 & 0 & 2 & \leftarrow + \\
\hline
4 & 2 & 2 & 6 & \\
0 & 16 & 0 & 4 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(4)} = L_3^{-1} A^{(3)} = \ldots \\
0 & 0 & 9 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
\end{array}$$

Damit ist $R = A^{(4)} (= A^{(3)})$ und

$$R = L_3^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdot L_1^{-1} \cdot A \;\Rightarrow\; LR = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot R = A$$

$$L = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Zunächst lösen wir durch Vorwärtseinsetzen $L\vec{z} = \vec{b}$ und erhalten $z_1 = 10,\ z_2 = 2,\ z_3 = 3$. Danach lösen wir durch Rückwärtseinsetzen $R\vec{x} = \vec{z}$, erhalten $x_3 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_1 = 1$ und somit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2.6 [LGS: Gauß–Algorithmus vs. gegebene Zerlegung in symmetrischer Form]

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$, und eine Zerlegung $A = C^T C$ und der Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 10 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \\ -1 & -4 & 10 & 39 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ & -1 & -2 & 1 \\ & & 2 & 6 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$

(a) mit Hilfe des Gauß–Algorithmus, angewendet direkt auf die Matrix A und rechte Seite $\vec{b}$

(b) mit Hilfe der Zerlegung $A = C^T C$, indem Sie zwei Dreieckssysteme lösen.

Lösung

(a) Wir verwenden die Kurzschreibweise und lösen das LGS mit dem Gauß–Algorithmus (für die Klausur müssten hier die Rechenschritte ersichtlich sein):

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 10 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 10 & 2 \\ -1 & -4 & 10 & 39 & 5 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 10 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & 38 & 6 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 37 & 6 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Rückwärtseinsetzen ergibt nun: $x_4 = 0$, $x_3 = 0.5$, $x_2 = -1$ und $x_1 = 4$, also $\vec{x} = (4, -1, 0.5, 0)^T$.

(b) Bemerkung: Die in dieser Aufgabe gegebene Zerlegung $A = C^T C$ ist zwar eine Zerlegung in einen linken Faktor mit linker/unterer Dreiecksmatrix C^T und rechter/oberer C, aber keine LR-Zerlegung, da C^T nicht nur 1en auf der Diagonale besitzt.

Im ersten Schritt lösen wir das Dreieckssystem $C^T\vec{z} = \vec{b}$ (Vorwärtseinsetzen):

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 3 & -1 & & \\ 0 & -2 & 2 & \\ -1 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Im darauf folgenden Schritt lösen wir nun das zweite Dreieckssystem $C\vec{x} = \vec{z}$ (Rückwärtseinsetzen):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ & -1 & -2 & 1 \\ & & 2 & 6 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zusatzaufgaben

Aufgabe 2.7 [(Wiederholend) Kurzfrage: LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche]

Führen Sie die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ durch und geben Sie die linke, untere Dreiecksmatrix L (alle Einträge vom Betrag $\leqslant 1$), die rechte, obere Dreiecksmatrix R und die Permutationsmatrix P an.

Lösung

Zunächst vertauschen wir die beiden Zeilen der Matrix mit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\tilde{A}^{(1)} = PA = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Danach ergibt sich in Kurzschreibweise:

$$\left(\begin{array}{cc} 8 & 9 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} 8 & 9 \\ \hline 0.125 & \text{-}1.125 \end{array} \right)$$

Ausführlich folgt:

$$\hat{A}^{(2)} = L_1^{-1}\tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 0 & -\frac{9}{8} \end{pmatrix} = R$$

mit $L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}$ und $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix} = L$. Für die Zerlegung $PA = LR$ haben wir damit gefunden:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 0 & -\frac{9}{8} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.8 [(Wiederholend)]

Gegeben seien die reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und der Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung $A = LR$ (mit kanonischer Pivotwahl) von A und verwenden Sie diese, um das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ zu lösen.

(b) Berechnen Sie die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche $PA = LR$ von A und lösen Sie das LGS auch mit dieser Zerlegung.

Lösung

(a) Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

1. Gauß-Elimination:

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{array} \right)$$

2. Gauß-Elimination:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Zur Lösung des LGS:

$$L\vec{z} = \vec{b} \implies \vec{z} = (1, 2, 7)^T$$
$$R\vec{x} = \vec{z} \implies \vec{x} = \frac{1}{5}(-1, -4, 7)^T$$

(b) **0: Matrix A.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{Reihenfolge der Zeilen: } (1, 2, 3)$$

1: Vertausche Zeile I und III:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{Reihenfolge der Zeilen: } (3, 2, 1)$$

2: 1. Gauß-Elimination:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3: Vertausche Zeile II und III:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{Reihenfolge der Zeilen: } (3, 1, 2)$$

4: 2. Gauß-Elimination:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \Longrightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ & & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Zur Permutationsmatrix:

$$\text{Reihenfolge der Zeilen: } (3, 1, 2) \implies P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Lösung des LGS:

$$\tilde{\vec{b}} := P\vec{b} = (3, 1, 2)^T,$$
$$L\vec{z} = \tilde{\vec{b}} \implies \vec{z} = (3, -\frac{1}{2}, \frac{7}{3})^T$$
$$R\vec{x} = \vec{z} \implies \vec{x} = \frac{1}{5}(-1, -4, 7)^T$$

Institut für Angewandte Mathematik

Leibniz Universität Hannover

Dr. Frank Attia, Dr. Florian Leydecker

Hannover, 21. April 2025

Mathematik für die Ingenieurwissenschaften III - Numerik
SoSe 2025 – Übung 3 – Lösungen

Die Übung 3 behandelt den Stoff der Vorlesungswochen 3 und 4 (KW 17 und KW 18). Einige Aufgaben werden dementsprechend erst nach den Veranstaltungen der 4. Vorlesungswoche vorbereitet worden sein.

Themen

Zerlegemethoden (Lineare Iterationsverfahren)

- Allgemeine Vorkonditionierer/Darstellung: siehe Formel (2.3), Einleitung Kapitel 2.2.1.1
- Fehlerfortpflanzungsmatrix M und Fehlerfortpflanzungsformel $\vec{e}^{(k+1)} = M\vec{e}^{(k)}$, s. S. 24
- Jacobi- und Gauß–Seidel-Verfahren: Kapitel 2.2.1.1

Rechnen mit Matrizen:

- Matrix-Normen/Kondition und Konditionszahl: siehe Abschnitt 2.2.2.2

Konvergenz linearer Iterationsverfahren

- Charakterisierung: Kapitel 2.2.4.2
- Hinreichendes Kriterium: Kapitel 2.2.4.1
- Fehlerabschätzung: Kapitel 2.2.4.4

Folgende Kriterien kennen wir für eine Matrix A und die Verfahrensmatrix M

($\mathrm{i_a}$) strikte Zeilen-Diagonaldominanz von $A \overset{\text{Abschn. 2.2.4.1}}{\Longrightarrow}$ Konvergenz von Jacobi.

($\mathrm{i_b}$) $\|M\|_1 < 1$ *oder* $\|M\|_\infty < 1 \overset{2.2.4.1}{\Longrightarrow}$ das Verfahren mit Fehlerfortpflanzungsmatrix M konvergiert.

(ii) Spektralradius $\rho(M) < 1 \overset{\text{Satz 2.42}}{\Longleftrightarrow}$ das Verfahren mit Fehlerfortpflanzungsmatrix M konvergiert.

(iii) A symmetrisch positiv definit $\overset{\text{Abschnitt 2.2.4.3}}{\Longrightarrow}$ Konvergenz von Gauß-Seidel (alle Varianten).

Zentralübung

In dieser Zentralübung werden insbesondere Aufgaben aus diesem Abschnitt behandelt. Weiterhin haben Sie die Gelegenheit Fragen zu der Vorlesung und den Videos zu stellen.

Präsenzaufgabe 3.1 [Lineare Iterationsverfahren: Das Jacobi- und die Gauß–Seidel-Verfahren, durch N^{-1} gegebenes Verfahren]

Gegeben seien das lineare Gleichungssystem und der Startvektor

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 4 & \\ 1 & & 2 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Führen Sie ausgehend vom Startvektor $\vec{x}^{(0)}$ ein bis zwei Schritte des Jacobi-Verfahrens durch.

(b) Führen Sie ausgehend vom Startvektor $\vec{x}^{(0)}$ einen Schritt des Gauß–Seidel-Verfahrens durch.

(c) Führen Sie ausgehend vom Vektor $\vec{x}^{(1)}$ des vorigen Aufgabenteils als Startvektor einen Schritt des rückwärts Gauß-Seidel-Verfahrens durch.

(d) Führen Sie ausgehend vom Startvektor $\vec{x}^{(0)}$ einen Schritt des symmetrischen Gauß-Seidel-Verfahrens durch.

(e) Führen Sie ausgehend vom Startvektor $\vec{x}^{(0)}$ einen Schritt des Verfahrens zu $N^{-1} = 2I$ durch. ($I \in \mathbb{R}^{3\times3}$, Einheitsmatrix.)

Lösung

Die Lösung wurde in den Zentralübungen vorgerechnet.

Präsenzaufgabe 3.2 [Berechnung von $\|\ \|_p$-Matrix-Normen und Konditionszahl]

Berechnen Sie für

(a) die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Normen $\|B\|_1$ und $\|B\|_\infty$,

(b) die Matrizen $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = B^T B$: $\|B\|_2$ und $\|C\|_2$ sowie die Konditionszahl $\kappa_2(C)$.

(c) $p = 1, 2, \infty$ jeweils $\|B\|_p$ mit der Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Präsenzaufgabe 3.3 [Lineare Iterationsverfahren: Fehlerabschätzungen]

Man betrachte das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 26 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Jacobi-Verfahren zur iterativen Lösung des LGS für jeden beliebigen Startvektor konvergiert. Wie lautet die Iterationsmatrix für das Jacobi-Verfahren?

(b) Starten Sie mit $\vec{x}^{(0)} = (1,\ 2,\ 1)^T$ und berechnen Sie mit dem Jacobi-Verfahren $\vec{x}^{(1)}$. Wieviele Schritte sind mit dem Jacobi-Verfahren (höchstens) nötig, um die Genauigkeit von 0.001 in allen Komponenten zu erhalten (a priori-Abschätzung)? Benutzen Sie die ∞-Norm.

(c) Berechnen Sie mit dem Jacobi-Verfahren die Iterierte $\vec{x}^{(2)}$ und schätzen Sie den Fehler $\|\vec{x}^{(2)} - \vec{x}\|_\infty$ im nachhinein (a posteriori) ab.

Kurzteil

Aufgabe 3.4 [Fehlerfortpflanzungsmatrizen linearer Iterationsverfahren]

Geben Sie jeweils die Fehlerfortpflanzungsmatrix [auch „Iterationsmatrix"] M der folgenden linearen Iterationsverfahren zur näherungsweise Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ an: Jacobi-Verfahren, vorwärts Gauß–Seidel-Verfahren, rückwärts Gauß–Seidel-Verfahren, das Verfahren zur untenstehenden Inversen eines Vorkonditionierers N:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad N^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Allgemein gilt: $M = -N(A - N^{-1})$. Somit ergeben sich

$$M_{Jac} = -D_A^{-1}(L_A + R_A) \ = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}, \ N^{-1} = D_A,$$

$$M_{vGS} = -(D_A + L_A)^{-1} R_A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{8} \end{pmatrix}, \ N^{-1} = D_A + L_A,$$

$$M_{rGS} = -(D_A + R_A)^{-1} L_A = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}, \ N^{-1} = D_A + R_A.$$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}: \quad M_N = -N(A - N^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}, \ N^{-1} = 2I.$$

Aufgabe 3.5 [p-Normen für Vektoren]

Für die Vektoren $\vec{x} = (1,2,3,4)^T, \vec{y} = (-2,-6,18,5)^T$ berechne man

$$\|\vec{x}\|_p, \quad \|\vec{y}\|_p, \quad \|\vec{x}+\vec{y}\|_p \;\text{ und }\; \|\vec{x}-\vec{y}\|_p, \text{ jeweils für } p = 1,2,\infty.$$

Lösung

Allgemein:

$$\|\vec{x}\|_1 = \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}, \quad \|\vec{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Hier (zunächst für $\vec{x}, \vec{y}$):

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|_1 &= 1+2+3+4 = 10, & \|\vec{y}\|_1 &= 2+6+18+5 = 31,\\ \|\vec{x}\|_2 &= \sqrt{1+4+9+16} = \sqrt{30}, & \|\vec{y}\|_2 &= \sqrt{4+36+324+25} = \sqrt{389},\\ \|\vec{x}\|_\infty &= \max\{1,2,3,4\} = 4, & \|\vec{y}\|_\infty &= \max\{|-2|,|-6|,18,5\} = 18; \end{aligned}$$

Sowie für die Vektoren $\quad \vec{x}+\vec{y} = \big(-1,\ -4,\ 21,\ 9\big), \quad \vec{x}-\vec{y} = \big(3,\ 8,\ -15,\ -1\big):$

$$\begin{aligned} \|\vec{x}+\vec{y}\|_1 &= 1+4+21+9 = 35, & \|\vec{x}-\vec{y}\|_1 &= 3+8+15+1 = 27,\\ \|\vec{x}+\vec{y}\|_2 &= \sqrt{1+16+441+81} = \sqrt{539}, & \|\vec{x}-\vec{y}\|_2 &= \sqrt{9+64+225+1} = \sqrt{299},\\ \|\vec{x}+\vec{y}\|_\infty &= \max\{|-1|,|-4|,21,9\} = 21 & \|\vec{x}-\vec{y}\|_\infty &= \max\{3,8,|-15|,|-1|\} = 15. \end{aligned}$$

Bemerkung. Man beachte für Zeilen*vektoren* ergeben sich dieselben, Normen, insbesondere: $\|\vec{x}^T\|_1 = 10$ und $\|\vec{x}^T\|_\infty = 4$. Bei Matrizen gilt allerdings z. B. für $X = (1\ 2\ 3\ 4)$, dass $\|X\|_1 = 4$, $\|X^T\|_\infty = 10$ und $\|X^T\|_1 = 10$ sowie $\|X^T\|_\infty = 4$.

Aufgabe 3.6 [Eigenschaften induzierter Matrixnormen]

Zeigen Sie: Ist $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$, so gilt für die induzierte Matrix-Norm $\|I\| = 1$.

Lösung

$$\|I\| = \max_{0\neq\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\|I\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \max_{0\neq\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = 1.$$

Aufgabe 3.7 [A-Norm/Energienorm]

Berechnen Sie die A-Norm $\|\vec{x}\|_A$ (auch Energienorm genannt) des Vektors $\vec{x} = (1,-1,3)^T$ bzgl. der folgenden Matrizen (sofern möglich)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2&0&0\\0&7&0\\0&0&5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1&5&-3\\5&-2&4\\-3&4&5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4&1&0\\1&3&-1\\0&-1&5 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Die Energienorm eines Vektors $\vec{x}$ bzgl. einer s.p.d.-Matrix A ist definiert über $\|\vec{x}\|_A = \sqrt{\vec{x}^T A\vec{x}}$.
Die Matrix A_1 ist offensichtlich s.p.d. (Diagonalmatrix mit positiver Diagonale), und man berechnet

$$\|\vec{x}\|_{A_1} = \sqrt{\vec{x}^T A_1 \vec{x}} = \sqrt{(1,-1,3)\begin{pmatrix} 2&0&0\\0&7&0\\0&0&5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\-1\\3 \end{pmatrix}} = \sqrt{(1,-1,3)\begin{pmatrix} 2\\-7\\15 \end{pmatrix}} = \sqrt{2+7+45} = \sqrt{54}.$$

$$\|\vec{x}\|_{A_2} = \sqrt{\vec{x}^T A_2 \vec{x}} = \sqrt{(1,-1,3)\begin{pmatrix} 1&5&-3\\5&-2&4\\-3&4&5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\-1\\3 \end{pmatrix}} = \ldots = \sqrt{-8}.$$

Die Norm kann nicht berechnet werden. Das liegt daran, dass die Matrix A_2 nicht s.p.d. ist (negativer Diagonaleintrag). Damit ist die zugehörige Energienorm auch nicht definiert.

Die Matrix A_3 ist s.p.d., denn sie ist symmetrisch und die drei Hauptminoren 4, 11, 51 sind alle positiv. Damit berechnet man

$$\|\vec{x}\|_{A_3} = \sqrt{\vec{x}^T A_3 \vec{x}} = \sqrt{(1,-1,3)\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 3\end{pmatrix}} = \ldots = \sqrt{56}.$$

Aufgabe 3.8 [„Kreise“ bzgl. verschiedener Normen in $\mathbb{R}^2$]

(a) Skizzieren Sie für $p = 1$, $p = 2$ und $p = \infty$ die Mengen

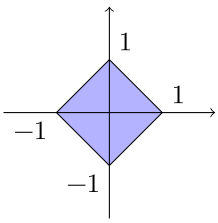
$$U_p = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 | \ \|\vec{x}\|_p \leqslant 1\}, \quad V_p = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 | \ \|\vec{x}\|_p = 1\}.$$

(b) Sei $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. Skizzieren Sie die Menge $U_A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 | \ \|\vec{x}\|_A \leqslant 1\}$.

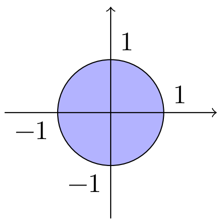
Lösung

(a) Bemerkung (insbesondere zur ersten Skizze $p = 1$): Zur Lösungfindung kann es hilfreich sein, zunächst den Rand, also die Menge der Punkte $\vec{x}$ mit $\|\vec{x}\|_p = 1$ zu zeichnen. Für beispielsweise $p = 1$ muss gelten $|x_1| + |x_2| = 1$. Jetzt muss man Fallunterscheidungen nach den Vorzeichenkombinationen von x_1 und x_2 machen:

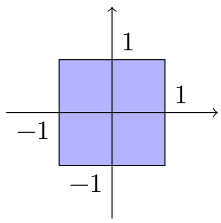
- $x_2 \geqslant 0$: Es gilt hier $|x_2| = x_2$, damit sind die Punkte das Geradenstück $|x_1| + x_2 = 1$ mit $x_2 \geqslant 0$, also auf $x_2 = 1 - |x_1|$ mit $x_2 \geqslant 0$.
- $x_2 \leqslant 0$: Es gilt hier $|x_2| = -x_2$, damit sind die Punkte das Geradenstück $|x_1| - x_2 = 1$ mit $x_2 \leqslant 0$, also auf $x_2 = |x_1| - 1$ mit $x_2 \leqslant 0$.



$p = 1$



$p = 2$

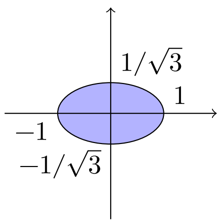


$p = \infty$

(b) Sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\|\vec{x}\|_A^2 = \vec{x}^T A \vec{x} = x_1^2 + 3x_2^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + \frac{x_2^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

Folglich wird durch diese Gleichung eine Ellipse mit Mittelpunkt $\vec{0}$ und Halbachsen $a = 1$ und $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ beschrieben.



$\|\cdot\|_A$

Aufgabenteil

Aufgabe 3.9 [Lineare Iterationsverfahren]

Vorgelegt seien die Daten

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(a) Man führe einen Iterationsschritt des Jacobi-Verfahrens mit Startvektor $\vec{x}^{(0)} = (\,2 \quad 1/2\,)^T$ zur näherungsweisen Lösung des LGS $A\,\vec{x} = \vec{b}$ durch.

(b) Man führe einen Iterationsschritt des Gauß-Seidel-Verfahrens mit Startvektor $\vec{x}^{(0)} = (\,2 \quad 0.4\,)^T$ zur näherungsweisen Lösung des LGS $A\,\vec{x} = \vec{b}$ durch.

(c) Jetzt sei ein Vorkonditionierer N über seine Inverse $N^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$ gegeben. Man führe mit Startvektor $\vec{x}^{(0)} = (\,1 \quad 1/2\,)^T$ einen Schritt des entsprechenden linearen Iterationsverfahrens durch.

Lösung

(a)

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.5 \\ 8 \end{pmatrix} \iff \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 0.4 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 20 \end{pmatrix} \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.6 \\ 10 \end{pmatrix} \iff \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.92 \\ 0.404 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.5 \\ 9 \end{pmatrix} \iff \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.45 \\ 0.45 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.10 [Lineare Iterationsverfahren zu geg. Vorkonditionierer]

Gegeben seien das lineare Gleichungssystem und der Startvektor

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie ein Vorkonditionierer N über seine Inverse

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man führe ausgehend vom Startvektor $\vec{x}^{(0)}$ zwei Iterationen des zum Vorkonditionierer N gehörenden linearen Iterationsverfahrens durch.

Lösung

Vorbemerkung: Bei dieser Matrix wären übrigens das Jacobi- und die Gauß–Seidel-Verfahren *nicht* anwendbar (wegen mindestens einer Null auf der Diagonalen).
Zur Lösung: Berechne zuerst

$$A - N^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Löse jetzt also $N^{-1}\vec{x}^{(k+1)} = \vec{b} - (A - N^{-1})\vec{x}^{(k)}$ für $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

und für $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 & 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

Nachbemerkung: Das Verfahren kann als „Block-Jacobi-Verfahren“ verstanden werden: Für N^{-1} hat man wie immer bei Block-Jacobi-Verfahren quadratische Blöcke auf der Diagonalen von A ausgewählt, hier haben diese unterschiedliche Größe: Es wurde ein 1×1-, ein 2×2- und dann wieder ein 1×1-Block gewählt (statt wie bei Jacobi die vier 1×1-Blöcke).

Aufgabe 3.11 [Sichere Konvergenz des Jacobi-Verfahrens bei strikter Zeilendiagonaldominanz]

Tauschen Sie die Zeilen *so, dass* für das Jacobi-Verfahren die Konvergenz gesichert ist. Lösen Sie das entstandene Gleichungssystem mit dem Jacobi-Verfahren näherungsweise, beginnend mit dem Startvektor $\vec{x}^{(0)}$, indem Sie 2 Iterationen durchführen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 8 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Umordnung der Zeilen, um strikte Zeilendiagonaldominanz zu erhalten (siehe Abschnitt 2.2.4.1):

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Jacobi-Verfahren:

$$N^{-1} = D_A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$N^{-1}\vec{x}^{(1)} = \vec{b} - (A - N^{-1})\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.4000 \\ 1.2500 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

$$N^{-1}\vec{x}^{(2)} = \vec{b} - (A - N^{-1})\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4.5000 \\ 7.2000 \\ 3.8500 \\ 2.3500 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.9000 \\ 0.9000 \\ 0.4278 \\ 0.4700 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.12 [Kondition]

Man berechne

(a) die Ausdrücke $\|H\|_2$, $\|H^{-1}\|_2$ und $\kappa_2(H)$ für die Hilbert-Matrix H mit $H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$,

(b) die Ausdrücke $\|G\|_2$, $\|G^{-1}\|_2$ und $\kappa_2(G)$ für die Matrix G mit $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösung

(a)

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Zuerst berechnen wir die EWte von H (symmetrisch)

$$|\lambda I - H| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{3} \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}$$

$$= \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{12} \stackrel{!}{=} 0$$

pq-Formel:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{36} - \frac{3}{36}} = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{13}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$\lambda_1 \approx 0.0657, \quad \lambda_2 \approx 1.2676$$

$$H \text{ symmetrisch } \Rightarrow \|H\|_2 \approx 1.2676, \quad \|H^{-1}\|_2 \approx \frac{1}{0.0657} = 15.2207$$

$$\kappa_2(H) = \|H\|_2 \, \|H^{-1}\|_2 \approx 1.2676 \cdot 15.2207 = 19.2938$$

(b)

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zuerst benötigen wir $G^T G$ da G nicht symmetrisch ist.

$$G^T G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

EWte

$$|\lambda I - G^T G| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 5) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 5\lambda + 5 - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$$

pq-Formel

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 1} = 3 \pm \sqrt{8}$$

$$\|G\|_2 = \sqrt{\max_{\lambda \text{ EW von } G^T G} |\lambda|} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{\left(1 + \sqrt{2}\right)^2} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\|G^{-1}\|_2 = \left(\min_{\lambda \text{ EW von } G^T G} |\lambda|\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$\Rightarrow \quad \kappa_2(G) = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \approx 5.8284$$

Aufgabe 3.13 [Lineare Iterationsverfahren für LGSe, vgl. Aufgabe **??**]

Zur näherungsweisen Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ und für die Matrix/den Vektor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) untersuche man die Konvergenz des Jacobi- und Vorwärts-Gauß-Seidel-Verfahrens zur Lösung von Gleichungen $A\vec{x} = \vec{\tilde{b}}$, $\vec{\tilde{b}} \in \mathbb{R}^3$, für beliebige Startvektoren.

(b) führe man jetzt die Konvergenzanalyse noch für das rGS-Verfahren und das sGS-Verfahren durch. Welche der vier genannten Verfahren konvergieren?

(c) Welches der Verfahren ist für *diese* Matrix A im Hinblick auf die Fehlerentwicklung (vgl. Skript, Charakterisierung d. Konvergenz) am besten geeignet? Welches im Hinblick auf die Anzahl der Rechenoperationen, die für *einen* Schritt des Verfahrens notwendig sind? Welches insgesamt?

Lösung

Vorüberlegung zu den Konvergenzuntersuchungen: Die Matrix A ist nicht symmetrisch, also lassen sich die hinreichenden Kriterien, die auf symmetrisch positiver Definitheit von A basieren, nicht verwenden. Weiter ist die Matrix weder Zeilen- noch Spaltendiagonaldominant. Die entsprechenden Kriterien lassen sich also auch nicht verwenden. Das bedeutet auch, dass sich für das Jacobi-Verfahren das hinreichende Kriterium mit $\|\cdot\|_\infty$ nicht verwenden lässt. Die Verfahrensmatrix M ist jeweils

$$\mathbf{M = I - NA = -N(A - N^{-1})}$$

Generelles Vorgehen:

1.) $\|\mathbf{M}\|_1 < \mathbf{1}$?

2.) $\|\mathbf{M}\|_\infty < \mathbf{1}$?

3.) $\rho(\mathbf{M}) < \mathbf{1}$? Es ist $\rho(M) = \max\{|x| : x \text{ ist EW von } M\}$ und die EWe berechnen wir i. Allg. als die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_M(x)$.

(a) **Jacobi-Verfahren:**

$$M_{\text{Jac}} = -\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=D^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=(L+R)} = -\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist 1.) $\|M_{\text{Jac}}\|_1 = 2.5 \geqslant 1$ und 2.) $\|M_{\text{Jac}}\|_\infty = \ldots \geqslant 1$, wobei das „$\geqslant 1$“ von 2.) hier klar ist, da A nicht strikt zeilendiagonaldominant ist. Also bestimmen wir 3.) den Spektralradius $\rho(M)$:

$$\chi_{M_{\text{Jac}}}(x) = \det(xI - M_{\text{Jac}}) = \det(xI + (-M_{\text{Jac}})) = \left| \begin{pmatrix} x+0 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & x+0 & 1 \\ -2 & 2 & x+0 \end{pmatrix} \right|$$

$$\chi_{M_{\text{Jac}}}(x) = x^3 + (-1) + 1 - (\frac{1}{4}x) - 2x + 2x = x^3 - \frac{1}{4}x = x \cdot \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \stackrel{!}{=} 0.$$

Also $x = 0$ oder $x^2 - \frac{1}{4} = 0$, d. h. die EWe sind $-\frac{1}{2}, 0$ und $\frac{1}{2}$. Also ist $\rho(M_{\text{Jac}}) = \max(|-\frac{1}{2}|, |0|, |\frac{1}{2}|) < 1$ und somit konvergiert das Jacobi-Verfahren für beliebige Startvektoren.

$$M_{vGS} = -\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{=(D+L)^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=R} = -\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & -0.25 & 0.5 \\ 0 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist 1.) $\|M_{vGS}\|_1 = 2.5 \geqslant 1$ und 2.) $\|M_{vGS}\|_\infty = 2.5 \geqslant 1$. Also 3.) Spektralradius $\rho(M_{vGS})$ bestimmen:

$$\chi_{M_{vGS}}(x) = \det(xI - M_{vGS}) = \begin{vmatrix} x+0 & 0.5 & 1 \\ 0 & x-0.25 & 0.5 \\ 0 & 1.5 & x+1 \end{vmatrix} = (x+0) \cdot \begin{vmatrix} x-0.25 & 0.5 \\ 1.5 & x+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff x \cdot (x^2 + \tfrac{3}{4}x - 1) \overset{!}{=} 0$$

Das ergibt den EW 0 und mit der pq-Formel die anderen beiden EWe $-\frac{3}{8} \pm \sqrt{1 + 9/64}$ und somit $\rho(M) = |-\frac{3}{8} - \sqrt{1+9/64}| > 1$, was gleichbedeutend damit ist, dass das vGS-Verfahren **nicht** für *beliebige* Startvektoren konvergiert.

Bemerkung: Da $(1,0,0)^T$ EV zum EW 0 ist, erhielte man ab dem 1 Schritt immer die exakte Lösung und das Verfahren kovergierte, wenn die Startnährung *so* gewählt wäre, dass der Startfehler ein Vielfaches des ersten Einheitsvektors wäre, d. h. wenn also „zufällig" nur die erste Komponente des Startvektors falsch wäre.

(b) rGS-Verfahren:

$$M_{rGS} = -\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{=(D+R)^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=L} = -\begin{pmatrix} 0.75 & -1 & 0 \\ 2.5 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist 1.) $\ldots \geqslant 1$ und 2.) $\ldots \geqslant 1$, sodass wir 3.) $\rho(M_{rGS})$, also die EWe berechnen:

$$\chi_{rGS}(x) = \begin{vmatrix} x+0.75 & -1 & 0 \\ 2.5 & x-2 & 0 \\ -2 & 2 & x+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+0.75 & -1 \\ 2.5 & x-2 \end{vmatrix} \cdot (x+0) = 0$$

$$\iff x \cdot (x^2 - \tfrac{5}{4}x + 1) \overset{!}{=} 0$$

Man erhält also den EW 0 und mit der pq-Formel die andere beiden (hier komplexwertigen) EWe $\frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64} - 1} = \frac{5}{8} \pm i\sqrt{1 - \frac{25}{64}}$, also erhält man die Beträge $|0|$, und $|\frac{5}{8} \pm i\sqrt{1-\frac{25}{64}}| = \sqrt{(\frac{5}{8})^2 + (1 - \frac{25}{64})} = \sqrt{1} = 1$. Also gilt $\rho(M_{rGS}) = 1 \geqslant 1$, womit das rückwärts-Gauß–Seidel-Verfahren **nicht** konvergiert.

sGS-Verfahren:

$$M_{sGS} = M_{rGS} M_{vGS}$$

$$M_{sGS} = \begin{pmatrix} 0.75 & -1 & 0 \\ 2.5 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & -0.25 & 0.5 \\ 0 & 1.5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.625 & 0.25 \\ 0 & 1.75 & 1.5 \\ 0 & -1.5 & -1 \end{pmatrix}$$

1.) und 2.) liefern wieder $\geqslant 1$. sodass abermals der Spektralradius berechnet werden muss:

$$\chi_{M_{sGS}}(x) = \begin{vmatrix} x-0 & -0.625 & -0.25 \\ 0 & x-1.75 & -1.5 \\ 0 & 1.5 & x+1 \end{vmatrix} = (x-0) \cdot \begin{vmatrix} x-1.75 & -1.5 \\ 1.5 & x+1 \end{vmatrix} = (x-0)(x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2})$$

Man erhält als EWe also die Nulstelle $x = 0$ und mit der pq-Formel die weiteren beiden komplexwertigen Nullstellen $\frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} - \frac{1}{2}} = \frac{3}{8} \pm i\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{9}{64}}$ mit dem Betrag $|\frac{3}{8} \pm i\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{9}{64}}| = \sqrt{(\frac{3}{8})^2 + \frac{1}{2} - \frac{9}{64}} = \sqrt{\frac{1}{2}} < 1$.

Insgesamt erhält man $\rho(M_{sGS}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, was gleichbedeutend damit ist, dass das sGS-Verfahren für *beliebige* Startvektoren konvergiert. **Von den vier Verfahren konvergieren also nur das Jacobi- und das symmetrische Gauß-Seidel-Verfahren.**

(c) Im Hinblick auf die Charakterisierung der Konvergenz ist das Jacobi-Verfahren zu bevorzugen wegen $\rho(M_{\mathsf{Jac}}) = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} = \rho(M_{\mathsf{sGS}})$. Für das Jacobi-Verfahren ist zu erwarten, dass sich langfristig der Fehler etwa wie $(\frac{1}{2})^k$ verhält, also dass sich der Fehler bei jeder Iteration etwa halbiert. Für das sGS-Verfahren ist zu erwarten, dass sich langfristig der Fehler etwa wie $(\frac{1}{\sqrt{2}})^k$ verhält, also dass sich langfristig der Fehler nach jeder zweiten Iteration etwa halbiert.
Auch hinsichtlich der Rechenoperationen ist das Jacobi-Verfahren zu bevorzugen: eine Iteration vom vGS- bzw. rGS-Verfahren besteht *jeweils* aus genauso vielen `flops` wie eine Iteration des Jacobi-Verfahrens (bei gleicher rechter Seite und der gleichen Iterierten). Der Rechenaufwand einer Iteration ist also etwa doppelt so groß.

Als Fazit lässt sich also sagen, dass zu erwarten ist, dass (nach einigen wenigen Iterationen) das symmetrische Gauß-Seidel-Verfahren etwa viermal soviel Rechnenaufwand verursacht wie das Jacobi-Verfahren, um die gleiche Fehlerreduktion zu erreichen.

Aufgabe 3.14 [Konvergenz linearer Iterationsverfahren]

In dieser Aufgabe soll die Konvergenz der linearen Iterationsverfahren mit folgenden Fehlerfortpflanzungsmatrizen untersucht werden.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Welche der Verfahren konvergieren für beliebige Startvektoren/rechte Seiten und welche nicht?

Lösung

M_1 : Hier sieht man, dass bspw. für die $\|\cdot\|_1$-Norm gilt:

$$\|M\|_1 = \frac{1}{2} < 1$$

Dies ist ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz dieses Verfahrens (siehe Vorlesung).

Alternativ funktioniert es in diesem Beispiel auch analog mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm $\|M\|_\infty$.

M_2 : Sowohl Zeilensummen- als auch Spaltensummennorm sind größer als 1. Damit sind weitere Untersuchungen notwendig. Es fällt auf, dass die Summe jeder Zeile genau 12 ergibt. Also gilt:

$$M_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} = 12 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist 12 EW zum EV $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}^T$. Der Spektralradius $\rho(M_2)$ ist also mindestens 12 und damit konvergiert dieses Verfahren nicht für alle Startvektoren!

M_3 : Zeilensummen- und Spaltensummennorm helfen hier nicht weiter. Wir wollen nun die EWte von M_3 berechnen:

$$\det(M_3 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}-\lambda & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix}$$

Man sieht, dass die Matrix bereits eine gewisse Blockstruktur besitzt. Geometrisch gedeutet, berechnen wir hier die EWte auf den Unterräumen

$$V_1 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_2 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die folgende Lösung ist rein rechnerisch hergeleitet, man sollte aber die geometrische Bedeutung vor Augen haben. Jede Vertauschung von einer Zeile (oder einer Spalte) einer Matrix kehrt das Vorzeichen der dazugehörigen Determinante um. Nach Vertauschung der 1. und der 3. Zeile und anschließender Vertauschung der 1. und der 3. Spalte haben wir also wieder das gleiche Vorzeichen und somit gilt

$$\det(M_3 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat nun eine diagonale Blockstruktur und damit folgt sofort für die Determinante:

$$\begin{aligned}
\det(M_3 - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \left(\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 - \frac{1}{16}\right) \cdot \left((1-\lambda)\left(-\frac{1}{3}-\lambda\right) + \frac{4}{9}\right) = 0 \\
&= \left(\frac{1}{2}-\lambda-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\lambda+\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}+\frac{\lambda}{3}-\lambda+\lambda^2+\frac{4}{9}\right) \\
&= \left(\frac{1}{4}-\lambda\right)\left(\frac{3}{4}-\lambda\right)\left(\lambda^2-\frac{2}{3}\lambda+\frac{1}{9}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}-\lambda\right)\left(\frac{3}{4}-\lambda\right)\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda \in \left\{\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{3}\right\}
\end{aligned}$$

Da die EWte alle kleiner als 1 sind, konvergiert dieses Verfahren.

Aufgabe 3.15 [Lineare Iterationsverfahren zu geg. Vorkonditionierer, vgl. Aufgabe **??**]

Gegeben seien eine Matrix A sowie ein Vorkonditionierer N durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad N^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Man untersuche das resultierende Iterationsverfahren zur näherungsweisen Lösung eines Linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit einer beliebigen rechten Seite $\vec{b}$ auf Konvergenz.

Lösung

Wir berechnen die Iterationsmatrix durch Lösen von $N^{-1}M = -(A - N^{-1})$:

$$\left.\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{matrix}$$

Da wir auf der linken Seite jetzt die Einheitsmatrix stehen haben, ist

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Davon berechnen wir nun die Eigenwerte:

$$\det(\lambda I - M) = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{1}{2} \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - \frac{1}{2})^2$$

Die Eigenwerte lauten also $\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ und damit ist $\rho(M) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, also konvergiert das Verfahren.

Aufgabe 3.16 [Fehlerabschätzung bei linearen Iterationsverfahren]

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen, Sie, dass das Gesamtschritt-Verfahren (=Jacobi-Verfahren) und das Einzelschritt-Verfahren (=Gauß-Seidel-Verfahren) zur iterativen Lösung des LGS für jeden beliebigen Startvektor konvergieren. Wie lautet die Fehlerfortpflanzungsmatrix für das Gesamtschritt-Verfahren?

(b) Starten Sie mit $\vec{x}^{(0)} = (1,\ 2,\ 1)^T$ und berechnen Sie mit dem Gesamtschritt-Verfahren sowie dem Einzelschritt-Verfahren die erste Iterierte $\vec{x}^{(1)}$.

(c) Wieviele Schritte sind mit dem Gesamtschritt-Verfahren (höchstens) nötig, um die Genauigkeit von 0.0001 in jeder Komponente zu erhalten? (a priori-Abschätzung). Verwenden Sie die ∞-Norm.

Lösung

(a) A ist strikt zeilendiagonaldominant, da

$$3 > 1+1, \quad 5 > 1+1, \quad 3 > 1+1$$

$\Rightarrow$ Das Jacobi-Verfahren konvergiert für jeden beliebigen Startvektor.

$$M_{\mathsf{Jac}} = -D_A^{-1}(L_A + R_A) = -\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Zur Konvergenzuntersuchung des (vorwärts) Gauß-Seidel-Verfahrens berechnen wir die Fehlerfortpflanzungsmatrix:

$$M_{\mathsf{vGS}} = -(D_A + L_A)^{-1}(R_A) = -\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1/15 & 1/5 & 0 \\ -4/45 & 1/15 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/15 & 2/15 \\ 0 & -4/45 & 7/45 \end{pmatrix}$$

Beispielsweise ist $\|M_{\mathsf{vGS}}\|_1 = \max\{0, 22/45, 28/45\} = 28/45 < 1$, so dass auch das Gauß-Seidel-Verfahren konvergiert.

(b) Jacobi-Verfahren: $\quad D_A\vec{x}^{(1)} = \vec{b} - (L_A + R_A)\vec{x}^{(0)} \;\Rightarrow\; \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)\vec{x}^{(1)} = \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ -8 \\ 8 \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right).$

$$\begin{aligned} \vec{x}_1^{(1)} &= \frac{1}{3}(\ 6 \qquad\quad + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1) = \frac{1}{3}\cdot 7 = \frac{7}{3} \\ \vec{x}_2^{(1)} &= \frac{1}{5}(-8\ + 1\cdot 1 \qquad\quad + 1\cdot 1) = -\frac{6}{5} \\ \vec{x}_3^{(1)} &= \frac{1}{3}(\ 8\ - 1\cdot 1 + 1\cdot 2 \qquad\quad) = 3 \end{aligned}$$

Gauß-Seidel-Verfahren: $(D_A + L_A)\vec{x}^{(1)} = \vec{b} - R_A\vec{x}^{(0)} \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)\vec{x}^{(1)} = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ -7 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$.

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1^{(1)} &= \frac{7}{3} \\
\vec{x}_2^{(1)} &= -\frac{1}{5}((-1)\cdot\frac{7}{3} + (-1)\cdot 1 + 8) = -\frac{1}{5}\left(7 - \frac{7}{3}\right) = -\frac{14}{15} \\
\vec{x}_3^{(1)} &= -\frac{1}{3}\left((+1)\cdot\frac{7}{3} + (-1)\cdot\left(-\frac{14}{15}\right) - 8\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{14}{15} + \frac{7}{3} - 8\right) = \frac{71}{45}
\end{aligned}$$

(c) Falls $L := \|M_{\text{Jac}}\|_\infty < 1$, so gilt: $\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*\|_\infty \leqslant \frac{L^k}{1-L}\|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\|_\infty$, wobei $\vec{x}^* = A^{-1}\vec{b}$.
Man berechnet hier

$$L = \max\left\{\tfrac{2}{3},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}, \qquad \|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\|_\infty = \max\left\{\tfrac{4}{3},\ 2 + \tfrac{6}{5},\ 2\right\} = \frac{16}{5}$$

und erhält somit:

$$\begin{aligned}
& & \frac{L^k}{1-L}\cdot\frac{16}{5} &\overset{!}{\leqslant} 0.0001 = 10^{-4} \\
&\iff & L^k &\leqslant \frac{5(1-L)}{16\cdot 10^4} = \frac{5}{48\cdot 10^4} \\
&\iff & k\ln L &\leqslant \ln\frac{5}{48\cdot 10^4} \\
&\iff & k &\geqslant \frac{\ln\frac{5}{48\cdot 10^4}}{\ln\frac{2}{3}} \approx 28.3
\end{aligned}$$

Für $k \geqslant 29$ mit $k \in \mathbb{N}$ gilt $k \geqslant \frac{\ln\frac{5}{48\cdot 10^4}}{\ln\frac{2}{3}} \approx 28.3$. Das heißt nach spätestens 29 Schritten hat man eine Genauigkeit von 0.0001 erreicht.

Zusatzaufgaben

Aufgabe 3.17 [Kondition (Wiederholung)]

Es sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix berechne man die Konditionszahlen $\kappa_1(A)$, $\kappa_2(A)$ und $\kappa_\infty(A)$.

Lösung

Wegen $\kappa_p(A) = \|A^{-1}\|_p\|A\|_p$ müssen wir hier leider A^{-1} berechnen. Vorteil: A hat Blockstruktur, d.h. wir müssen nur die 2×2-Blöcke invertieren.

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Formel für 2×2-Blöcke

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

A^{-1} ist symmetrisch: Also ist die Zeilensummennorm gleich der Spaltensummennorm: $\|A^{-1}\|_\infty = \|A^{-1}\|_1 = 1$, $\|A^{-1}\|_2$ lässt sich über die EWte von A blockweise berechnen (A symmetrisch):

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 \\ -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 \\ 2 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\
&= \left((\lambda-3)^2-4\right)\left((\lambda-3)^2-4\right) \stackrel{!}{=} 0 \\
&\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5 \\
&\Rightarrow \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{|\lambda_{|\mathsf{min}|}(A)|} = 1
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}
\kappa_1(A) &= \|A^{-1}\|_1 \|A\|_1 = 1 \cdot 5 = 5 \\
\kappa_2(A) &= \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2 = \frac{|\lambda_{|\mathsf{max}|}(A)|}{|\lambda_{|\mathsf{min}|}(A)|} = 5, \quad \text{da } A \text{ symmetrisch} \\
\kappa_\infty(A) &= \kappa_1(A) \quad \text{wegen Symmetrie}
\end{aligned}$$

Hier bezeichnen $\lambda_{|\mathsf{max}|}(A)$ und $\lambda_{|\mathsf{min}|}(A)$ den betragsgrößten bzw. betragskleinsten Eigenwert, und $|\lambda_{|\mathsf{max}|}(A)|$ und $|\lambda_{|\mathsf{min}|}(A)|$ deren Beträge.

Aufgabe 3.18 [Konvergenz linearer Iterationsverfahren (Wiederholung)]

Zur näherungsweisen Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ für einen beliebigen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ und die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 2 \\ 8 & 9 & 2 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

untersuche man die Konvergenz das vGS-, rGS- und des sGS-Verfahrens zur Lösung des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ für beliebige Startvektoren.

Lösung

Die Matrix A ist nicht symmetrisch, also lassen sich die hinreichenden Kriterien, die auf symmetrisch positiver Definitheit von A basieren, nicht verwenden. Weiter ist die Matrix weder Zeilen- noch Spaltendiagonaldominant, sodass sich die entsprechenden Kriterien ebenfalls nicht anwenden lassen. Die Verfahrensmatrix ist jeweils gegeben durch

$$M = I - NA = -N(A - N^{-1}).$$

Man berechnet die zugehörigen Systemmatrizen

$$\begin{aligned}
M_{vGS} &= -\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}^{-1}}_{=(D+L)^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=R} = -\begin{pmatrix} 0 & -0.8889 & 0.2222 \\ 0 & 0.7901 & 0.0247 \\ 0 & -0.7462 & 0.0878 \end{pmatrix}, \\
M_{rGS} &= -\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & -8 & 2 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}^{-1}}_{=(D+R)^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}}_{=L} = -\begin{pmatrix} 0.9767 & -0.1866 & 0 \\ 0.9877 & -0.0988 & 0 \\ -0.4444 & 0.4444 & 0 \end{pmatrix}, \\
M_{sGS} &= \qquad M_{rGS} M_{vGS} \qquad = \begin{pmatrix} 0 & -1.0156 & 0.2124 \\ 0 & -0.9560 & 0.2170 \\ 0 & 0.7462 & -0.0878 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ferner rechnet man leicht nach, dass für alle Systemmatrizen weder $\|M\|_1 < 1$ noch $\|M\|_\infty < 1$ und die entsprechenden Konvergenzkriterien daher nicht greifen. Als nächstes berechnet man den Spektralradius. Offensichtlich besitzt jeder der Matrizen einen Eigenwert 0 (Nullspalte). Ausnutzen der Blockstruktur (vgl. Aufgabe 3.13) liefert die Eigenwerte

$$\mathrm{spec}(M_{vGS}) = \{0, -0.7628, -0.1151\},\ \mathrm{spec}(M_{rGS}) = \{0, -0.7628, -0.1151\},\ \mathrm{spec}(M_{sGS}) = \{0, -1.1138, 0.0701\}$$

und somit die Spektralradien

$$\rho(M_{vGS}) = 0.7628 < 1, \quad \rho(M_{rGS}) = 0.7628 < 1, \quad \rho(M_{sGS}) = 1.1138 > 1.$$

Somit konvergieren sowohl das vGS- als auch das rGS-Verfahren für beliebige Startvektoren. Die Kombination der beiden Verfahren, d.h. das sGS-Verfahren, konvergiert hingegen nicht!

Aufgabe 3.19 [Lineare Iterationsverfahren zu geg. Vorkonditionierer (Alte Klausuraufgabe), vgl. Aufgabe **??**]

Gegeben seien eine Matrix A sowie ein Vorkonditionierer N durch

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 20 \end{pmatrix}, \quad N^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Man untersuche das resultierende Iterationsverfahren zur näherungsweisen Lösung eines Linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit einer beliebigen rechten Seite $\vec{b}$ auf Konvergenz.

Lösung

Berechne die Iterationsmatrix:

$$M = -N(A - N^{-1}) = -\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{20} & 0 \end{pmatrix}$$

Dann rechnet man z. B. $\|M\|_1 = \max\{\frac{11}{20}, \frac{1}{10}\} < 1$, dies ist eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Verfahrens.

Aufgabe 3.20 [(Wiederholend) Lineare Iterationsverfahren für LGSe]

Zur näherungsweisen Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ und für die Matrix/den Vektor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) führe man ausgehend vom Startvektor $\vec{x}^{(0)} = (0,0,0)^\mathsf{T}$ jeweils zwei Iterationen des Jacobi-Verfahrens und des (vorwärts-)Gauß-Seidel-Verfahrens durch.

(b) führe man mit der mit dem vGS-Verfahren berechneten Näherung $\vec{x}^{(1)}$ aus dem vorigen Aufgabenteil als Startnäherung einen Schritt des rGS-Verfahrens durch.

(c) gebe man für den Startvektor $\vec{x}^{(0)} = (0,0,0)^\mathsf{T}$ die Näherung $\vec{x}^{(1)}$ an, die das sGS-Verfahren liefert.

Lösung

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L + R = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D + L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D + R = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Jacobi:

$\vec{x}^{(1)}$:

$$\text{Löse} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=D} \vec{x}^{(1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=(L+R)} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{x}^{(0)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}-(L+R)\vec{x}^{(0)}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4/1 \\ 4/1 \\ 1/1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{x}^{(2)}$:

$$\text{Löse} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=D} \vec{x}^{(2)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=(L+R)} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}^{(1)}}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{(L+R)\vec{x}^{(1)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}-(L+R)\vec{x}^{(1)}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/1 \\ 1/1 \\ 1/1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vGS-Verfahren:

$\vec{x}^{(1)}$:

$$\text{Löse} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=(D+L)} \vec{x}^{(1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=R} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{x}^{(0)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}-R\vec{x}^{(0)}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\vec{x}^{(2)}$:

$$\text{Löse} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=(D+L)} \vec{x}^{(2)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=R} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{x}^{(1)}}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}}_{R\vec{x}^{(1)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}-R\vec{x}^{(1)}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(b) rGS-Verfahren:
$\vec{x}^{(1)}$:

$$\text{Löse} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=(D+R)} \vec{x}^{(1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=L} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{x}^{(0)}=\vec{x}^{(1)}_{vGS}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}-L\vec{x}^{(0)}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(c) Ein Schritt des sGS-Verfahrens entspricht der Hintereinanderausführung von zunächst einem Schritt des vGS-Verfahrens gefolgt von einem Schritt des rGS-Verfahrens. Mit dem Nullvektor als Startvektor wurde schon in (a) ein Schritt des vGS-Verfahren gerechnet. Mit dieser Iterierten wurde schon in (b) ein Schritt des rGS-Verfahrens gerechnet. Die Lösung lautet also auch hier:

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Institut für Angewandte Mathematik

Leibniz Universität Hannover

Dr. Frank Attia, Dr. Florian Leydecker

Hannover, 05. Mai 2025

Mathematik für die Ingenieurwissenschaften III - Numerik
SoSe 2025 – Übung 5 – Lösungen

Themen

CG-Verfahren

- Beschreibung: Algorithmus 2.60
- Beispiel: Übung 2.63
- Konvergenzsatz: Satz 2.62

Newton-Verfahren

- Nullstellensuche in 1D: Satz 2.66
- Nullstellensuche mehrdimensional: Satz 2.70
- gedämpftes Newton-Verfahren: **Algorithmus 2.76 wird dieses Semester nicht behandelt und ist nicht prüfungsrelevant Entsprechende Aufgaben(teile) können Sie also ignorieren.**
- stationäre Punkte: Kapitel 2.3.6

Zentralübung

In dieser Zentralübung werden insbesondere Aufgaben aus diesem Abschnitt behandelt. Weiterhin haben Sie die Gelegenheit Fragen zu der Vorlesung und den Videos zu stellen.

Präsenzaufgabe 5.1 [CG-Algorithmus]

Man löse $A\vec{x} = \vec{b}$ mit dem CG–Verfahren für folgende Daten:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Präsenzaufgabe 5.2 [Newton-Verfahren 1d]

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = -x^5 + x^3 + 4x.$$

Man führe zwei Schritte des ungedämpften Newton-Verfahrens zur näherungsweisen Bestimmung einer Nullstelle der Funktion durch. Man verwende dabei den Startwert $x_0 = 1$. Konvergiert das Verfahren?

Präsenzaufgabe 5.3 [Newton–Verfahren 2d]

Formuliere das Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$x_1^2 - x_2^2 = 1, \quad x_1^3 x_2^2 = 1$$

(a) äquivalent als Fixpunktproblem, siehe Abbildung 2.5 im Skript,

(b) äquivalent als Nullstellenproblem und wende das Newton–Verfahren an.

Präsenzaufgabe 5.4 [Newton–Verfahren zur Berechnung von Extremstellen skalarer Funktionen]

Ermitteln Sie näherungsweise einen stationären Punkt der Funktion („Rosenbrock-Funktion“)

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

Führen Sie hierfür zwei Schritte mit dem Newton-Verfahren mit Startwert $\vec{x}^{(0)} = (0, 0)^T$ durch.

Kurzteil

Aufgabe 5.5 [A-Skalarprodukt und Orthogonalität]

Gegeben seien
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \;, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ senkrecht bzgl. des A-Skalarproduktes sind, d.h. es gilt $\vec{u}^T A \vec{v} = 0$.
Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ senkrecht bzgl. des A-Skalarproduktes und/oder orthogonal sind.
Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{z}$ senkrecht bzgl. des A-Skalarproduktes und/oder orthogonal sind.

Lösung

Zunächst prüft man, dass A s.p.d. ist: A ist symmetrisch und die Hauptminoren sind $4 > 0$ und $16 - 9 > 0$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}^T} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}^T} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1.$$

Das bedeutet, dass die Vektoren *nicht* senkrecht bzgl. des A-Skalarproduktes sind, dafür müsste die Rechnung $= 0$ liefern.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}^T} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\vec{w}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}^T} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}^T} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{z}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}^T} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$$

Das ist der Fall bei $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sowie bei $\vec{u}$ und $\vec{z}$, weswegen diese jeweils senkrecht zueinander sind [bzgl. A]. Für die Orthogonalität muss das Skalarprodukt $= 0$ sein.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\vec{w}} = -3 \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{z}} = 0$$

Damit ist $\vec{v}$ nicht orthogonal zu $\vec{w}$, $\vec{u}$ ist aber orthogonal zu $\vec{z}$.

Aufgabe 5.6 [CG-Verfahren: Konvergenz]

Die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ habe den maximalen Eigenwert $\lambda_{\max} = 1$ und den minimalen Eigenwert $\lambda_{\min} = 0.01$. Wie viele Iterationen benötigt das cg-Verfahren höchstens, um den Fehler in der Energienorm um den Faktor 0.001 zu reduzieren? Hinweis: Verwenden Sie die Konditionszahl $\kappa_2(A)$

Lösung

Es gilt die Fehlerabschätzung nach Satz 2.64:

$$\|\vec{e}^{(k)}\|_A \leqslant 2q^k \|\vec{e}^{(0)}\|_A \quad \text{mit} \quad q = \frac{\sqrt{\kappa(A)} - 1}{\sqrt{\kappa(A)} + 1}.$$

Zunächst bestimmen wir die Konditionszahl $\kappa_2(A)$ nach Satz 2.40 (alle Eigenwerte der symmetrischen Matrix sind positiv) und damit q:

$$\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \frac{1}{0.01} = 100 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{\sqrt{\kappa(A)} - 1}{\sqrt{\kappa(A)} + 1} = \frac{10 - 1}{10 + 1} = 0.8182$$

Um den Fehler in der Energienorm um den Faktor 0.001 zu reduzieren, muss man also nur noch rechnen:

$$\begin{aligned} 2q^k \leqslant 0.001 \quad &\Leftrightarrow \quad q^k \leqslant \frac{0.001}{2} \quad \Leftrightarrow \quad k \ln(q) \leqslant \ln(0.0005) \\ &\Leftrightarrow \quad k \geqslant \frac{\ln(0.0005)}{\ln(q)} \approx 37.88. \end{aligned}$$

Damit hat meine eine Reduktion des Fehlers um den Faktor 0.001 nach spätestens 38 Schritten erreicht.

Aufgabe 5.7 [Existenz einer Nullstelle]

Besitzt die Funktion $f(x) = \frac{2}{1+x} - e^x$ eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$?

Lösung

Es ist $f(0) \cdot f(1) = (2-1) \cdot (1-e) = 1-e < 0$. Da f **stetig** auf $[0, 1]$ ist, muss die Funktion eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ besitzen, wegen „< 0 " sogar auf $(0, 1)$.

Aufgabe 5.8 [Newton-Verfahren]

Rechnen Sie zwei Schritte mit dem Newton-Verfahren zur Approximation einer Nullstelle der Funktion $f(x) = 2x^2 - 6x$ mit dem Startwert $x_0 = 2$.

Lösung

Es ist

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{-4}{2} = 4, \qquad x_2 = 4 - \frac{8}{10} = 3.2.$$

Aufgabenteil

Aufgabe 5.9 [CG-Verfahren]

Vorgelegt sei das System $A\vec{x} = \vec{b}$ mit der Systemmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und rechter Seite $\vec{b} = (\,0,\ -1,\ -1,\ 0\,)^T$.

(a) Führen Sie mit dem Nullvektor als Startvektor 2 Schritte des CG-Verfahrens durch.

(b) Überprüfen Sie, dass die Vektoren $\vec{p}^{(i)}, i = 0, 1, 2$, senkrecht bzgl. des A-Skalarproduktes sind.

Lösung

(a) Man berechnet nach der Vorgehensweise aus der Vorlesung:

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}^{(0)} = \vec{p}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = \vec{r}^{(0)} \cdot \vec{r}^{(0)} = 2, \qquad \vec{q}^{(0)} = A\vec{p}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_0}{\vec{q}^{(0)} \cdot \vec{p}^{(0)}} = 1, \quad \vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} + \alpha_0 \vec{p}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}^{(1)} = \vec{r}^{(0)} - \alpha_0 \vec{q}^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1 = \vec{r}^{(1)} \cdot \vec{r}^{(1)} = 2, \quad \beta_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = 1, \quad \vec{p}^{(1)} = \vec{r}^{(1)} + \beta_1 \vec{p}^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}^{(1)} = A\vec{p}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \vec{p}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Residuum ist $\vec{0}$, d.h. $\vec{x}^{(2)}$ ist die exakte Lösung.

(b) Die Vektoren $\vec{p}^{(i)}, i = 0, 1, 2$, sind senkrecht bzgl. des A-Skalarproduktes, wegen $(\vec{p}^{(i)})^T A \vec{p}^{(j)} = (\vec{p}^{(i)})^T \vec{q}^{(j)} = 0$ für $i \neq j$. Es ist

$$(\vec{p}^{(1)})^T \vec{q}^{(0)} = (\vec{p}^{(0)})^T \vec{q}^{(1)} = 0$$

und wegen $\vec{p}^{(2)} = \vec{q}^{(2)} = \vec{0}$ sind $(\vec{p}^{(0)})^T \vec{q}^{(2)} = 0$ und $(\vec{p}^{(1)})^T \vec{q}^{(2)} = 0$.

Bemerkung: Die Tatsache, dass der Algorithmus die exakte Lösung liefert, bedeutet nicht, dass die Matrix s.p.d. ist.

Aufgabe 5.10 [Vereinfachtes Newton-Verfahren in 2d]

Gesucht ist die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$10x_1 - \cos x_2 = 0, \qquad -\cos x_1 + 5x_2 = 0.$$

(a) Fertigen Sie eine geeignete Skizze an.

(b) Berechnen Sie ausgehend vom Startvektor $\vec{x}^{(0)} = (0,0)^T$ die Näherungen $\vec{x}^{(1)}$ und $\vec{x}^{(2)}$ mit dem vereinfachten Newton-Verfahren.

Lösung

(a) Skizze: Siehe Abbildung 5.1.

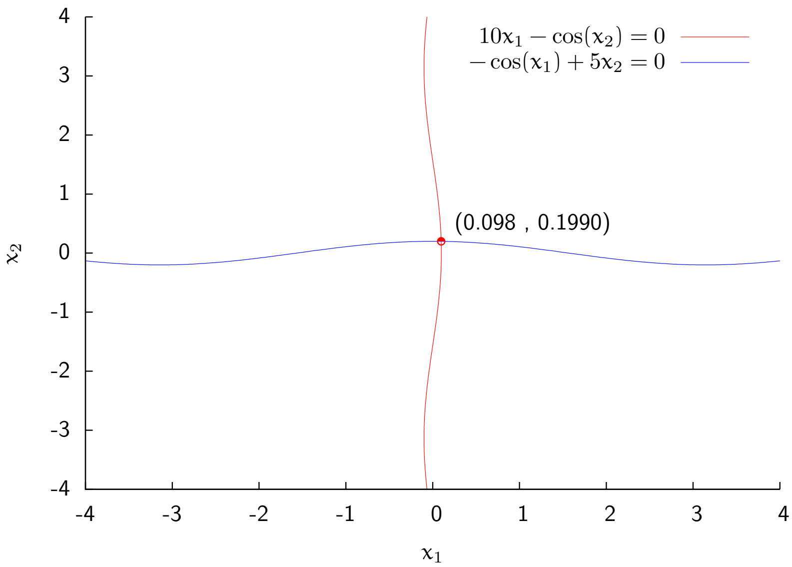


Abbildung 5.1: Skizze zu Aufgabe 5.10.

(b) Vereinfachtes Newton-Verfahren: $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{F}'(\vec{x}^{(0)})^{-1}\vec{F}(\vec{x}^{(k)})$. Also hier: $\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 10x_1 - \cos x_2 \\ -\cos x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{F}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 10 & \sin x_2 \\ \sin x_1 & 5 \end{pmatrix}$, also $\vec{F}'(\vec{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{F}'(\vec{x}^{(0)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{x}^{(1)} &= \vec{x}^{(0)} - \vec{F}'(\vec{x}^{(0)})^{-1}\vec{F}(\vec{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/10 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ \vec{x}^{(2)} &= \vec{x}^{(1)} - \vec{F}'(\vec{x}^{(0)})^{-1}\vec{F}(\vec{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/10 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \cos(1/5) \\ 1 - \cos(1/10) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.0980 \\ 0.1990 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Anmerkung: Hier wurde die Inverse der Jacobi-Matrix explizit berechnet. In der Praxis ist es besser, hierfür ein Lineares Gleichungssystem zu lösen:

$$\vec{F}'(\vec{x}^{(0)})\vec{d}^{(k)} = -\vec{F}(\vec{x}^{(k)}) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \vec{d}^{(k)}$$

oder beim (nicht vereinfachten) Newton-Verfahren:

$$\vec{F}'(\vec{x}^{(k)})\vec{d}^{(k)} = -\vec{F}(\vec{x}^{(k)}) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \vec{d}^{(k)}.$$

Aufgabe 5.11 [Newton-Verfahren in 2d]

Es sei die Funktion

$$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{4}\cos(x_1) + \frac{1}{4}\sin(x_2) \\ x_2 - \frac{1}{4}\cos(x_1) + \frac{1}{2}\sin(x_2) \end{pmatrix}.$$

Man führe einen Schritt des Newton-Verfahrens zur näherungsweisen Bestimmung einer Nullstelle von $\vec{F}$ ausgehend vom Startvektor $\vec{x}^{(0)} = (0,0)^T$ durch. Man berechne außerdem die Werte $||\vec{F}(\vec{x}^{(0)})||_2^2$ und $||\vec{F}(\vec{x}^{(1)})||_2^2$ und überprüfe, ob im ersten Schritt eine Reduktion der Norm der Funktion $\vec{F}$ stattgefunden hat.

Lösung

Die Funktion

$$\vec{F}(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{4}\cos(x_1) + \frac{1}{4}\sin(x_2) \\ x_2 - \frac{1}{4}\cos(x_1) + \frac{1}{2}\sin(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{F}_1(x_1, x_2) \\ \vec{F}_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

hat die Jacobi-Matrix $J(x_1, x_2) = \vec{F}'(x_1, x_2)$ mit

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{4}\sin(x_1) & \frac{1}{4}\cos(x_2) \\ \frac{1}{4}\sin(x_1) & 1 + \frac{1}{2}\cos(x_2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wir führen jetzt das ungedämpfte mehrdimensionale Newton-Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung einer Nullstelle von $\vec{F}$ durch. Als Startvektor nutzen wir $\vec{x}^{(0)} = (0,0)^T$.

$$\vec{F}(\vec{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$J(\vec{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Die Suchrichtung berechnen wir hier einfach mittels *Rückwärtseinsetzen*, da $J(\vec{x}^{(0)})$ eine rechte obere Dreiecksmatrix ist:

$$\begin{aligned} & J(\vec{x}^{(0)})\vec{d}^{(0)} = -\vec{F}(\vec{x}^{(0)}), \\ \Rightarrow & \frac{3}{2} d_2^{(0)} = \frac{1}{4}, \\ \Rightarrow & d_2^{(0)} = \frac{1}{6}, \\ \Rightarrow & d_1^{(0)} + \frac{1}{4} d_2^{(0)} = d_1^{(0)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4}, \\ \Rightarrow & d_1^{(0)} = \frac{5}{24}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\vec{d}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{24} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} + \vec{d}^{(0)} = \vec{d}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{24} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} ||\vec{F}(\vec{x}^{(0)})||_2^2 &= ||(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})^T||_2^2 = \frac{1}{8}, \\ ||\vec{F}(\vec{x}^{(1)})||_2^2 &= ||(0.0052, 0.0050)^T||_2^2 \approx 5.2382 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Also hat der erste Schritt eine Reduktion in der Norm von $\vec{F}$ erreicht.

Aufgabe 5.12 [Gedämpftes Newton-Verfahren]

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \arctan(x)$ auf Nullstellen, indem Sie

(a) drei Schritte mit dem Newton-Verfahren zum Startwert $x_0 = \frac{\pi}{2}$ durchführen.

(b) drei Schritte mit dem gedämpften Newton-Verfahren ($c = 10^{-3}$) für den Startwert $x_0 = \frac{\pi}{2}$ durchführen.

Was fällt Ihnen auf?

Lösung

$f(x) = \arctan(x)$ besitzt genau eine Nullstelle in $x = 0$. Es ist $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(a) Für $x_0 = \frac{\pi}{2}$ erhält man $f(x_0) = 1.0039$, $f'(x_0) = 0.2884$ und damit

$$d_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -\frac{1.0039}{0.2884} = -3.4809, \qquad x_1 = x_0 + d_0 = \frac{\pi}{2} - 3.4809 = -1.9101.$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned} &f(x_1) = -1.0885, && f'(x_1) = 0.2151, && d_1 = 5.0597, && x_2 = 3.1497, \\ &f(x_2) = 1.2634, && f'(x_2) = 0.0916, && d_2 = -13.7965, && x_3 = -10.6468. \end{aligned}$$

Es fällt auf, dass $|x_k| \to \infty$ und $|f(x_k)| \to \frac{\pi}{2}$ für $k \to \infty$. Das ungedämpfte Newton-Verfahren konvergiert demnach nicht.

(b) Für $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ist wie oben $f(x_0) = 1.0039$, $f'(x_0) = 0.2884$. Nach dem gedämpften Newton-Verfahren ($c = 10^{-3}$) erhält man

$$d_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -\frac{1.0039}{0.2884}.$$

Für $\alpha_0 = 1$ gilt $(1 - c\alpha_0) = 0,999 = 99,9\%$ und dementsprechen liefert die Probe bei der Abstiegsbedingung

$$\|f(x_0 + 1 \cdot d_0)\|_2^2 = 1.1848 > 1.0068 = 0,999\|f(x_0)\|_2^2,$$

was bedeutet, dass die Stelle $x_0 + 1 \cdot d_0$ *nicht* die gewünschte Reduktion auf $\leqslant 99,9\%$ des Wertes für x_0 liefert. Deswegen wird α halbiert: Für $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ gilt $(1 - c\alpha_0) = 0,9995 = 99,95\%$ und die Probe bei der Abstiegsbedingung liefert

$$\|f(x_0 + 0.5 \cdot d_0)\|_2^2 = 0.0282 \not> 1.0073 = 0,9995\|f(x_0)\|_2^2,$$

sodass $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ gewählt wird und man $x_1 = x_0 + \alpha_0 \cdot d_0 = -0.1696$ errechnet. Der neue Wert für $x_0 + 0.5 \cdot d_0$ hat jetzt eine Reduktion auf $\leqslant 99,95\%$ des alten Wertes für x_0 ergeben.

Weiter erhält man

$$\begin{aligned} &f(x_1) = -0.1680, && f'(x_1) = 0.9720, && d_1 = 0.1729, && \alpha_1 = 1, && x_2 = 0.0032, \\ &f(x_2) = 0.0032, && f'(x_2) = 1.0000, && d_2 = -0.0032, && \alpha_2 = 1, \end{aligned}$$

und schließlich $x_3 = -2.2591 \cdot 10^{-8}$ mit $f(x_3) = 2.259146 \cdot 10^{-8}$. Das gedämpfte Newton-Verfahren scheint also auch für den Startwert $x_0 = \frac{\pi}{2}$ zu konvergieren.

Aufgabe 5.13 [Stationäre Punkte skalarer Funktionen mit dem Newton-Verfahren annähern]

Ermitteln Sie näherungsweise einen stationären Punkt der Funktion („Himmelblau-Funktion")

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2.$$

Führen Sie hierfür drei Schritte mit dem Newton-Verfahren zur Lösung von $\vec{F}(x_1, x_2) = \nabla f(x_1, x_2) = \vec{0}$ mit Startwert $\vec{x}^{(0)} = (4, 3)^T$ durch.

Lösung

Zunächst berechnet man den Gradienten $\vec{F}(x_1, x_2) := \nabla f(x_1, x_2)$ und die Jacobi-Matrix $\vec{F}'(x_1, x_2)$ der Funktion $f(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned}
\vec{F}(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} 4x_1(x_1^2 + x_2 - 11) + 2(x_1 + x_2^2 - 7) \\ 2(x_1^2 + x_2 - 11) + 4x_2(x_1 + x_2^2 - 7) \end{pmatrix}, \\
\vec{F}'(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} 12x_1^2 + 4x_2 - 42 & 4x_1 + 4x_2 \\ 4x_1 + 4x_2 & 12x_2^2 + 4x_1 - 26 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ausgehend von dem Startvektor $\vec{x}^{(0)} = (4, 3)^T$ erhält man nach dem Newton-Verfahren

$$\begin{aligned}
\vec{x}^{(1)} &= \vec{x}^{(0)} - \vec{F}'(\vec{x}^{(0)})^{-1}\vec{F}(\vec{x}^{(0)}) \\
&= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.0065 & -0.0019 \\ -0.0019 & 0.0107 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 140 \\ 88 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.7458 \\ -0.6849 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2542 \\ 2.3151 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{x}^{(2)} &= \vec{x}^{(1)} - \vec{F}'(\vec{x}^{(1)})^{-1}\vec{F}(\vec{x}^{(1)}) \\
&= \begin{pmatrix} 3.2542 \\ 2.3151 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.0118 & -0.0051 \\ -0.0051 & 0.0217 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28.0220 \\ 18.7563 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2542 \\ 2.3151 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.2348 \\ -0.2635 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.0193 \\ 2.0517 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{x}^{(3)} &= \vec{x}^{(2)} - \vec{F}'(\vec{x}^{(2)})^{-1}\vec{F}(\vec{x}^{(2)}) \\
&= \begin{pmatrix} 3.0193 \\ 2.0517 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.0155 & -0.0086 \\ -0.0086 & 0.0321 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.4879 \\ 2.2130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.0193 \\ 2.0517 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0196 \\ -0.0496 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.9998 \\ 2.0020 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die exakte Lösung der Minimierungsaufgabe lautet $\vec{x}^* = (3, 2)^T$ mit $\nabla f(\vec{x}^*) = \vec{0}$.
Anmerkung: Hier wurde die Inverse der Jacobi-Matrix explizit berechnet. In der Praxis ist es besser, hierfür stattdessen ein Lineares Gleichungssystem zu lösen:

$$\vec{F}'(\vec{x}^{(k)})\vec{d}^{(k)} = -\vec{F}(\vec{x}^{(k)}) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \vec{d}^{(k)}.$$

Zusatzaufgaben

Aufgabe 5.14 [Newton-Verfahren in 2d und Matlab-Experiment]

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$x_1 = \frac{3 - e^{2x_1 - x_2}}{x_2}, \qquad x_2 = \frac{2 - \sin(\pi x_2)}{x_1^2}.$$

(a) Führen Sie die Aufgabe zurück auf eine Nullstellensuche, und berechnen Sie mit dem Startvektor $\vec{x}^{(0)} = (-1, -2)^T$ nach dem Newton-Verfahren zwei Näherungen $\vec{x}^{(1)}$ und $\vec{x}^{(2)}$ für eine Nullstelle.

(b) Verwenden Sie die Dateien *Newton.m* und *Nonlinear.m* in Matlab. In der zweiten Datei sind die Funktionen und Statwerte des aktuellen Zettels bereits implementiert. Starten Sie *Nonlinear* und wählen Sie „Aufgabe 4.12“. Nach wie vielen Iterationen ist der Fehler kleiner als 10^{-6}?

Lösung

(a) Newton-Verfahren: $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{F}'(\vec{x}^{(k)})^{-1}\vec{F}(\vec{x}^{(k)})$.

$$\begin{aligned} x_1x_2 - 3 + e^{2x_1-x_2} &= 0 \\ x_1^2x_2 - 2 + \sin(\pi x_2) &= 0 \end{aligned}$$

$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1x_2 - 3 + e^{2x_1-x_2} \\ x_1^2x_2 - 2 + \sin(\pi x_2) \end{pmatrix}$ und $\vec{F}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_2 + 2e^{2x_1-x_2} & x_1 - e^{2x_1-x_2} \\ 2x_1x_2 & x_1^2 + \pi\cos(\pi x_2) \end{pmatrix}$

Newton-Verfahren umgeformt: $\vec{F}'(\vec{x}^{(k)})(\underbrace{\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}}_{=\vec{d}^{(k)}}) = -\vec{F}(\vec{x}^{(k)})$

Also löse LGS

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1+\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^{(0)} \\ d_2^{(0)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} (-1)(-2) - 3 + e^{2(-1)-(-2)} \\ (-1)^2(-2) - 2 + \sin\pi(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt $\vec{d}^{(0)} = (1,\ 0)^T$. Somit folgt $\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} + \vec{d}^{(0)} = (0, -2)^T$.

$\vec{F}'(\vec{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} -2 + 2e^2 & 0 - e^2 \\ 0 & 0 + \pi\cos(-2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 2e^2 & -e^2 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$ und

$\vec{F}(\vec{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 - 3 + e^2 \\ 0 - 2 + \sin(-2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + e^2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Löse LGS

$$\begin{pmatrix} -2 + 2e^2 & -e^2 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(1)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -3 + e^2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{d}^{(1)} \approx (0.0246, 0.6366)^T$ und damit $\vec{x}^{(2)} \approx (0.0246, -1.36338)^T$.

(b) Sie benötigen 46 Iterationen.

Aufgabe 5.15 [Experimente mit Matlab: cg-Verfahren]

Laden Sie bei Stud.IP alle Matlab-Files im Verzeichnis „Finite Differenzen und LGS“ herunter. Starten Sie das Programm FDM.m mit Matlab. Hiermit werden die Gleichungssyteme nach Kapitel 1 der Vorlesung aufgestellt und gelöst. Rechnen Sie dieses Mal 2-dimensional. Zur Problemstellung geben Sie als Faktor vor der 2. Ableitung den Wert 1 ein und als Faktor vor u den Wert 0. Verwenden Sie das cg-Verfahren mit Diagonalvorkonditionierer (meint: Jacobi-Vorkonditionierer) als iterativen Löser mit Genauigkeit $\varepsilon = 10^{-6}$.

Erstellen Sie eine Tabelle mit den folgenden Einträgen:
Level k, innere Punkte im Intervall $n = 7, 15, 31, 63$, Dimension der Matrix n^2, Anzahl der Iterationen. Sie müssten dieselben Zahlen wie in Tabelle 2.3 im Skript erhalten.

Lösung

Siehe Tabelle 2.3 im Skript (dabei ist $k = \log_2(n+1) = 3, 4, 5, 6$).

Institut für Angewandte Mathematik

Leibniz Universität Hannover

Dr. Frank Attia, Dr. Florian Leydecker

Hannover, 12. Mai 2025

Mathematik für die Ingenieurwissenschaften III - Numerik
SoSe 2025 – Übung 6 – Lösungen

Themen

LGS: Aufstellen zu gegebenen Bedingungen
- Methode der kleinsten Fehlerquadrate/Gaußsche Normalengleichungen (s. Skript, Abschnitt 3.2.1)

Polynom-Interpolation: Kapitel 3.3.1
- allg. Darstellung mittels gegebener Basisfunktionen, *Monomdarstellung* und *Lagrange*-Darstellung

Zentralübung

In der Zentralübung werden insbesondere Aufgaben aus diesem Abschnitt behandelt. Weiterhin haben Sie die Gelegenheit Fragen zu der Vorlesung und den Videos zu stellen.

Präsenzaufgabe 6.1 [Polynom-Interpolation via Aufstellen eines LGS]

Vorgelegt seien die folgenden Stellen/Messwerte:

Stelle_i	-1	0	1
Messwert_i	-0.48	0.1	1.42

Stellen Sie ein LGS zum Ansatz

(a) $f(x) = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot (x - (-1)) + c_2 \cdot (x - (-1))(x - 0)$ und den Bedingungen $f(\text{Stelle}_i) = \text{Messwert}_i$ auf,

(b) Geben Sie das Interpolationspolynom zu den gegebenen Daten in der Monom-Darstellung an. Geben Sie ein weiteres Polynom an, das die Bedingungen $f(\text{Stelle}_i) = \text{Messwert}_i$ erfüllt, das aber *nicht* das Interpolationspolynom ist.

Lösung

Die Lösung wurde in der Zentralübung vorgerechnet.

Präsenzaufgabe 6.2 [Ausgleichsrechnung (zu Wertetabelle 3.1, Skript S. 51)]

Durch die Punkte der Wertetabelle soll mit der Methode der kleinsten Quadrate eine Gerade $g(t) = a + tb$ gelegt

-2	-1	0	1	3
-1	-2	-1	1	0

werden.

Lösung

Dazu stellen wir den Ansatz $A\vec{x} = \vec{f}$ auf, d.h.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T}_{=\vec{f}}$$

auf und erhalten die Normalengleichungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} A\vec{x} = A^T\vec{f} \iff \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $a = \frac{-25}{37}$, $b = \frac{14}{37}$. Die gesuchte Least-Squares-Ausgleichsgerade ist also $g(t) = \frac{-25}{37} + \frac{14}{37}t$.

Präsenzaufgabe 6.3 [Interpolation (Übung 3.10 aus dem Skript, S. 53)]

Bestimme das Interpolationspolynom in der Lagrange-Darstellung, das bei $x_0 = 0$, $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$ die Werte $f_0 = 7$, $f_1 = -1$ bzw. $f_2 = 0$ annimmt.

Lösung

Mit

$$
\begin{aligned}
L_{2,0}(x) &= \prod_{j=1,2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{x-2}{0-2}\,\frac{x-3}{0-3} \\
L_{2,1}(x) &= \prod_{j=0,2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{x-0}{2-0}\,\frac{x-3}{2-3} \\
L_{2,2}(x) &= \prod_{j=0,1} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{x-0}{3-0}\,\frac{x-2}{3-2}
\end{aligned}
$$

gilt

$$p_2(x) = 7 \cdot L_{2,0}(x) - 1 \cdot L_{2,1}(x) + 0 \cdot L_{2,2}(x).$$

Kurzteil

Aufgabe 6.4 [Methode der kleinsten Fehlerquadrate]

Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate die Ausgleichsgerade zu den Punkten

$$(1,3), \quad (2,1), \quad (3,0).$$

Lösung

Vorbemerkung: In der Klausur sollte man auch bspw. eine Ausgleichskonstante oder Ausgleichsdparabel bestimmen können. Den Ansatz $A\vec{x} = \vec{b}$ aufstellen sollte auch in noch allgemeineren Fällen auswendig beherrscht werden.

Wir suchen eine Gerade, unsere Funktion ist also z. B. von der Form

$$f(t) = 1 \cdot a_0 + t \cdot a_1 = \begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix},$$

die wir hier verwenden (möglich wäre auch bspw. der Newton-Ansatz $f(t) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot (t-1)$). Betrachtet man Messungen eines Systems (die typische Anwendung für diese Methode), so ist das t jeweils die veränderliche Größe und $f(t)$ der Wert, der bei der Messung herausgekommen ist. Wir suchen nun eine Lösung $\vec{x}$, die das Gleichungssystem $A\vec{a} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

derart näherungsweise löst, dass die Fehlerquadratsumme minimal wird. Jede Zeile entspricht dabei einem angegebenen Punkt. Laut Vorlesung ist ein Ansatz dazu das LGS der Gaußschen Normalengleichungen $A^T A\vec{a} = A^T\vec{b}$ zu lösen.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}, \quad A^T\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

also lautet unsere Funktion $f(t) = \frac{13}{3} - \frac{3}{2}t$.

Aufgabe 6.5 [Polynominterpolation]

Bestimmen Sie das Interpolationspolynom durch die Punkte (a, b), (c, d) für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq c$.

Lösung

Sei $a \neq c$. Dann haben wir zwei Punkte mit verschiedenen x-Koordinaten und das Interpolationspolynom ist vom Grad 1, d.h. es ergibt sich eine Gerade durch die beiden Punkte. Wir können also die Geradengleichung $y = sx + t$ aufstellen und die Werte für s und t ausrechnen:

$$s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{d - b}{c - a}.$$

Wir setzen s in die Geradengleichung ein, lösen nach t auf und rechnen aus. Als nächstes berechnen wir

$$t = d - \frac{d - b}{c - a} c = \ldots = \frac{da - bc}{a - c}$$

und haben somit die Lösung $p(x) = \frac{d-b}{c-a} x + \frac{da-bc}{a-c}$.
Eine alternative Darstellung, die manchmal etwas praktischer ist, ist die sogenannte-Newton-Darstellung:
Hierzu berechnen wir zunächst die Steigung wie oben: $s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{d-b}{c-a}$. Damit ergibt sich

$$p(x) = b + \frac{d - b}{c - a}(x - a).$$

Aufgabe 6.6 [Polynom-Interpolation: Lagrange-Darstellung]

Gegeben seien irgendwelche Stützstellen $x_0, \ldots, x_5$ (paarweise verschieden) und $L_0, \ldots, L_5$ die entsprechenden Lagrange-Polynome.

(a) Geben Sie für $p = 5L_2 + 7L_5$ die Werte $p(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, 5$, an.

(b) Geben Sie für $q = L_0 + L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ die Werte $q(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, 5$, an. Warum ist es ohne zu Rechnen für q möglich, die Werte von q an irgendwelchen Punkten x anzugeben?

Lösung

(a) Wir nutzen hierzu die in der Vorlesung gegebene Eigenschaft der Lagrange-Polynome aus. Sei ein Lagrange-Polynom L_i fixiert. Dann gilt $L_i(x_i) = 1$ und für alle $j \neq i$ ist $L_i(x_j) = 0$. Das nutzen wir aus und die Lösung der Aufgabe ist daher:

$$\begin{aligned} p(x_0) = p(x_1) = p(x_3) = p(x_4) &= 5 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 0 \\ p(x_2) &= 5 \cdot 1 + 7 \cdot 0 = 5 \\ p(x_5) &= 5 \cdot 0 + 7 \cdot 1 = 7 \end{aligned}$$

(b) Das Polynom q interpoliert die Punkte $(x_0, 1), \ldots, (x_5, 1)$ und ist somit die konstante 1-Funktion. Deshalb gilt auch $q(x) = 1$ für alle x.

Aufgabenteil

Aufgabe 6.7 [Methode der kleinsten Fehlerquadrate]

Gegeben seien folgende Daten:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y(x)$	1	2	0	2	1

Es soll nach der Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme eine Ausgleichsfunktion der Form $y(x) = a_1 \sin(x) + a_2 \cos(x) + a_3 \cos(2x)$ berechnet werden.

Lösung

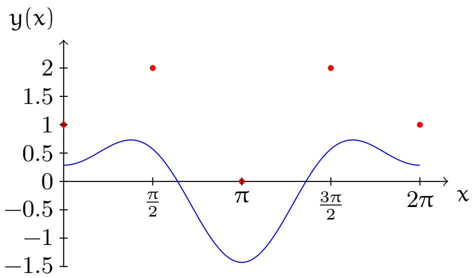
Zunächst stellen wir das System $A\vec{a} = \vec{b}$ auf:

$$A = \begin{pmatrix} \sin(0) & \cos(0) & \cos(2\cdot 0) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) & \cos(2\cdot\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) & \cos(2\cdot\pi) \\ \sin(\frac{3\pi}{2}) & \cos(\frac{3\pi}{2}) & \cos(2\cdot\frac{3\pi}{2}) \\ \sin(2\pi) & \cos(2\pi) & \cos(2\cdot 2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

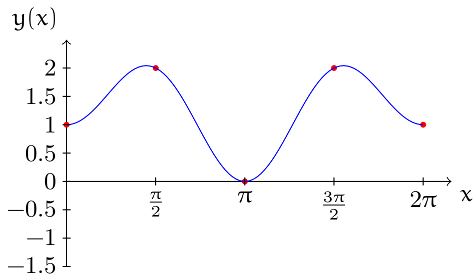
Die Gaußschen Normalengleichungen ergeben sich zu $A^T A\vec{a} = A^T\vec{b}$ mit

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^T\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des LGS ist $\vec{a} = \frac{1}{7}(0,\ 6,\ -4)$.
Plottet man die resultierende Funktion $y(x) = \frac{6}{7}\cos(x) - \frac{4}{7}\cos(2x)$ und trägt die Punkte ein, so erkennt man, dass das gewählte Modell nicht besonders gut ist und ein konstanter additiver Term das Ergebnis verbessern könnte. Rechnerisch ist die geringe Güte der Lösung daran zu sehen, dass die Norm $\|A\vec{a} - \vec{b}\|_2$ groß ist.



Ausgleichsfkt. $y(x) = \frac{6}{7}\cos(x) - \frac{4}{7}\cos(2x)$.



Ausgleichsfkt. $y(x) = 1.25 + \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{3}{4}\cos(2x)$.

Bemerkung: Mit dem Ansatz $a_1\, 1 + a_2\cos(x) + a_3\cos(2x)$ erhält man analog mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

die Koeffizienten $\vec{a} = (1.25, 0.5, -0.75)^T$.

Aufgabe 6.8 [Methode der kleinsten Fehlerquadrate]

Bestimmen Sie nach dem Fehlerquadratprinzip ein Polynom 1. Grades, das die folgenden fünf Punkte ausgleicht:

x	0	1	2	3	4
$y(x)$	1.5	2.1	2.8	3.7	4.1

Verwenden Sie die Gaußschen Normalengleichungen.

Lösung

Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.1 \\ 2.8 \\ 3.7 \\ 4.1 \end{pmatrix}.$$

(i) Aufstellen der *Gaußschen* Normalengleichungen:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}, \quad A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 14.2 \\ 35.2 \end{pmatrix}$$

(ii) Die Lösung des Systems $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$ lautet nun

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1.48 \\ 0.68 \end{pmatrix}$$

und das Ausgleichspolynom ergibt sich zu $p(x) = 0.68x + 1.48$.

Aufgabe 6.9 [Polynom-Interpolation: über ein LGS, Lagrange-Darstellung]

Bestimmen Sie das Interpolationspolynom zu den Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 6$ und den Stützwerten $f_0 = 14$, $f_1 = 26$, $f_2 = 238$

(a) über ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten,

(b) mit der Lagrangeschen Darstellungsformel.

Lösung

(a) Hier ist nach keiner speziellen Darstellung gefragt bzw. hier sind die Ansatzfunktionen nicht gegeben. Im Hinblick einfachere Lösbarkeit des entstehenden könnte man den Newton-Ansatz (mit $1,\ x+1,\ (x+1)(x-2)$) machen (dieser liefert immer ein Dreieckssystem). Wir verwenden hier dennoch exemplarisch den Monom-Ansatz, also die Ansatzfunktionen $1, x, x^2$: Das lineare Gleichungssystem für die Koeffizienten lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 26 \\ 238 \end{pmatrix}$$

und hat die Lösung $a = (4, -3, 7)^T$. Also ist $p(x) = 7x^2 - 3x + 4$.

(b) Lagrangesche Interpolationsformel:

$$\begin{aligned} L_{2,0}(x) &= \prod_{j=1}^{2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{x-2}{-1-2} \cdot \frac{x-6}{-1-6} \\ L_{2,1}(x) &= \prod_{j=0,2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{x+1}{2+1} \cdot \frac{x-6}{2-6} \\ L_{2,2}(x) &= \prod_{j=0}^{1} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{x+1}{6+1} \cdot \frac{x-2}{6-2} \end{aligned}$$

Also ist

$$p(x) = 14 \cdot L_{2,0}(x) + 26 \cdot L_{2,1}(x) + 238 \cdot L_{2,2}(x)$$

Aufgabe 6.10 [Monom- vs. Lagrange-Darstellung]

Man gebe jeweils das Interpolationspolynom in der Monom- sowie in der Lagrange-Darstellung an für die Daten

$$\begin{array}{c|ccc} i & 0 & 1 & 2 \\ \hline x_i & 5 & 6 & 8 \\ y_i & 10 & 11 & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|ccc} i & 0 & 1 & 2 \\ \hline x_i & 6 & 5 & 8 \\ y_i & 11 & 10 & 0 \end{array}.$$

Lösung

- Ein Polynom zweiten Grades in der Monom Darstellung hat folgende Form:

$$p_2(x) = a + bx + cx^2$$

Da es das Interpolationspolynom zu den gegebenen Daten sein soll, muss es erfüllen $p_2(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, 2$. Daraus ergibt sich folgendes LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \\ 1 & 8 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies lösen wir:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 25 & 10 \\ 1 & 6 & 36 & 11 \\ 1 & 8 & 64 & 0 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 25 & 10 \\ 0 & 1 & 11 & 1 \\ 0 & 3 & 39 & -10 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 25 & 10 \\ 0 & 1 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -13 \end{array}$$

Und durch Rückwärts einsetzen rechnen wir aus: $c = -\frac{13}{6}$, $b = 1+11\cdot\frac{13}{6} = \frac{149}{6}$ und $a = 10-5\cdot\frac{149}{6}+25\cdot\frac{13}{6} = -60$, also lautet das Polynom

$$p_2(x) = -\frac{13}{6}x^2 + \frac{149}{6}x - 60.$$

- Die Lagrange-Darstellung lautet

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i L_{2,i}(x) = 10 \cdot L_{2,0}(x) + 11 \cdot L_{2,1}(x) + 0 \cdot L_{2,2}(x)$$

mit

$$L_{2,0}(x) = \prod_{j=0, j\neq 0}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x-6}{5-6} \cdot \frac{x-8}{5-8}$$

$$L_{2,1}(x) = \prod_{j=0, j\neq 1}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x-5}{6-5} \cdot \frac{x-8}{6-8}$$

$$L_{2,2}(x) = \prod_{j=0, j\neq 2}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x-5}{8-5} \cdot \frac{x-6}{8-6}$$

- Da im Vergleich zum ersten Datensatz dieses Aufgabenteils nur die Reihenfolge der Daten vertauscht wurde und das Interpolationspolynom eindeutig ist, ist die Monomdarstellung sowieso dieselbe. Die Lagrange-Darstellung ist unabhängig von der Reihenfolge (anders als Newton), also müssen wir diese nicht noch einmal ausrechnen.

Institut für
Angewandte Mathematik

Leibniz
Universität
Hannover

Dr. Frank Attia, Dr. Florian Leydecker

Hannover, 19. Mai 2025

Mathematik für die Ingenieurwissenschaften III - Numerik
SoSe 2025 – Übung 7 – Lösungen

Themen

Spline-Interpolation:
- lineare Splines: Kapitel 3.3.2.1
  - *intervallweise* Darstellung mittels *Polynomen vom Grad* $\leqslant 1$
  - Darstellung mittels der *Basis der Hutfunktionen*.
- Splines höherer Ordnung: Definition 4.20
- Randbedingungen bei kubischer Spline-Interpolation, insbesondere Bedingungen (A), (B) und (C)

Numerische Integration/Quadraturformeln
- Newton-Cotes Formeln (Mittelpunktregel, Trapezregel, Simpsonregel): Kapitel 3.4.1

Zentralübung

In der Zentralübung werden insbesondere Aufgaben aus diesem Abschnitt behandelt. Weiterhin haben Sie die Gelegenheit Fragen zu der Vorlesung und den Videos zu stellen.

Präsenzaufgabe 7.1 [Lineare Spline-Interpolation]

Bestimmen Sie zu den Stellen $(x_0, \ldots, x_3) = (-2, 2, 4, 12)$ und den Werten $(\, f(x_0), \ldots, f(x_3)\,) = (12, -2, 14, 14)$ den interpolierenden linearen Spline s sowohl in der Darstellung mit der Basis der Hutfunktionen, als auch in der expliziten Darstellung für die Teilintervalle. Geben Sie $s(0)$ und $s(8)$ ohne Verwendung der expliziten Darstellung an.

Lösung

Die Lösung wurde in der Zentralübung vorgerechnet.

Präsenzaufgabe 7.2 [Spline oder nicht Spline? Das ist hier die Frage! (S. Übung 3.23 aus dem Skript)]

Diese Aufgabe wurde schon im Skript/den Videos bearbeitet.

Lösung

Wir führen der Übersicht halber zunächst die Bezeichnungen s_1 und s_2 mittels

$$s(t) = \left\{ \begin{matrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{matrix} \right\} = \begin{cases} t^2 - 4t + 5 & t \in [1, 2) \\ -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1 & t \in [2, 3] \end{cases}$$

ein berechnen zunächst

$$s'(t) = \left\{ \begin{matrix} s_1'(t) \\ s_2'(t) \end{matrix} \right\} = \begin{cases} 2t - 4 & t \in [1, 2), \\ -t + 2 & t \in (2, 3] \end{cases} \quad \text{und} \quad s''(t) = \left\{ \begin{matrix} s_1''(t) \\ s_2''(t) \end{matrix} \right\} = \begin{cases} 2 & t \in [1, 2), \\ -1 & t \in (2, 3]. \end{cases}$$

(a) **1.)** Offenbar stimmt $s(t) = s_1(t)$ sowohl auf $[1, 2]$ als auch $s(t) = s_2(t)$ auf $[2, 3]$ (also s auf *jedem* Teilintervall der Zerlegung) mit einem Polynom vom Grad $\leqslant 2$ überein.

2.) Für einen *quadratischen* Spline müssen außerdem für jede innere Stelle t_i (hier also nur für $t_i = t_1 = 2$) die *zwei* Proben $s_i(t_i) \stackrel{?}{=} s_{i+1}(t_i)$ und $s_i'(t_i) \stackrel{?}{=} s_{i+1}'(t_i)$ jeweils Gleichheit liefern.

$$s_1(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1 = -\frac{1}{2}2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = s_2(2),$$
$$s_1'(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0 = -2 + 2 = s_2'(2),$$

d. h. die Funktionswerte und ersten Ableitungen bei 2 stimmen überein.

1.) und 2.) zusammen ergeben, dass s bzgl. τ ein quadratischer Spline ist.

(b) **1.)** Offenbar stimmt $s(t)$ sowohl auf $[1, 2]$ als auch auf $[2, 3]$ (also auf *jedem* Teilintervall der Zerlegung) mit einem Polynom vom Grad $\leqslant 3$ überein.

2.) Für einen *kubischen* Spline müssen außerdem für jede innere Stelle t_i (hier also nur für $t_i = t_1 = 2$) die *drei* Proben $s_i(t_i) \stackrel{?}{=} s_{i+1}(t_i)$ und $s_i'(t_i) \stackrel{?}{=} s_{i+1}'(t_i)$ und $s_i''(t_i) \stackrel{?}{=} s_{i+1}''(t_i)$ jeweils Gleichheit liefern, jedoch:

$$s_1''(2) = 2 \neq -1 = s_2'(2),$$

was bedeutet: $s''(t)$ existiert nicht an der Stelle $t = t_1 = 2$, dies ist kein kubischer Spline.

(c) Ja, denn es handelt sich um eine „Verfeinerung“ Zerlegung von (a) (nur zusätliche(r) Zerlegungspunkt(e), keine anderen). Alternativ können auch wieder 1.) mit den jetzt drei Teilintervallen und dann 2.) mit der zusätzlichen Probe bei $t_2 = 2.5$ durchgeführt werden.

(d) Nein, denn auf $[1, 2.5]$ ist $s(t)$ kein quadratisches Polynom.

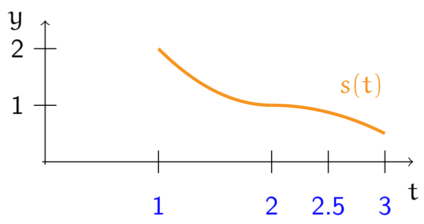


Abbildung 7.1: Funktion zur Übung 7.2.

Präsenzaufgabe 7.3 [Numerische Quadratur und Fehlerschätzung]

Approximieren Sie $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ mit Hilfe der

(a) Mittelpunktregel, **(b)** Trapezregel, **(c)** Simpson-Regel

und schätzen Sie für **(b)** den Fehler ab.

Präsenzaufgabe 7.4 [Numerische Integration von Splines]

Sei s der linear interpolierende Spline zu

x	2	4	8
$s(x)$	12	60	36

. Berechne mit Hilfe geeigneter Quadraturformeln die folgenden Integrale exakt:

(a) $\displaystyle\int_2^8 s(x)\, dx,$ **(b)** $\displaystyle\int_2^8 (s(x))^2\, dx.$

Kurzteil

Aufgabe 7.5 [Lineare Spline-Interpolation: Hutfunktionen]

Gegeben sei die Zerlegung

$$x_0 = -2,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 4,\ x_5 = 8$$

des Intervalls [-2,8] in 5 Teilintervalle. Die zugehörigen Basisfunktionen linearer Splines („Hutfunktionen") seien mit $C_0, C_1, \ldots, C_5$ bezeichnet.

(a) Skizzieren Sie $C_2 - 0.5C_4$ (in einem Koordinatensystem, mit beschrifteter $x-$ und $y-$Achse).

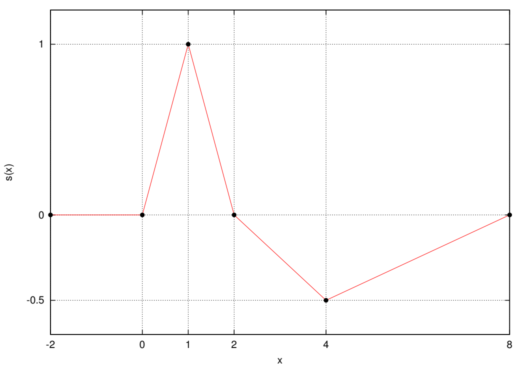
(b) Skizzieren Sie $-0.5C_1 + C_2 + C_3$ (in einem Koordinatensystem, mit beschrifteter $x-$ und $y-$Achse).

(c) Welchen Wert hat die Funktion $-0.5C_1 + C_2 + C_3$ jeweils in den Mittelpunkten der Teilintervalle?

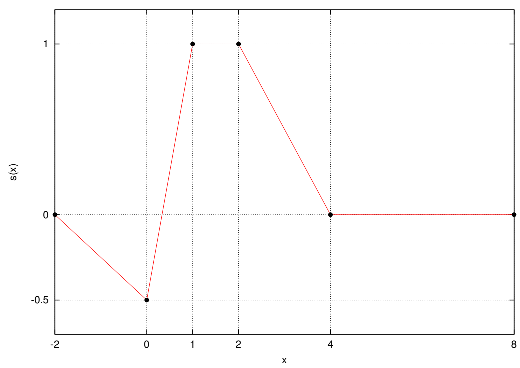
Lösung

Skizzen:

(a)



(b)



(c) Es bezeichne $s(x) = -0.5C_1(x) + C_2(x) + C_3(x)$ und $m_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, $i = 1, \ldots, 5$. Wegen der affinen Linearität auf den Teilintervallen gilt $s(m_i) = \frac{s(x_{i-1})+s(x_i)}{2}$ und damit berechnet man:

$$s(m_1) = \tfrac{-0.5+0}{2} = -0.25, \quad s(m_2) = \tfrac{1+(-0.5)}{2} = 0.25, \quad s(m_3) = 1, \quad s(m_4) = 0.5, \quad s(m_5) = 0.$$

Aufgabe 7.6 [Splines? Und: Ordnung von Splines]

Vorgelegt seien die folgenden auf $I = [a, b] = [-2, 1]$ definierten drei Funktionen:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{rl} -x^2 & \text{für } x \leqslant 0, \\ x^2 & \text{für } x > 0. \end{array} \right\}, \quad g(x) = \left\{ \begin{array}{rl} -x^3 & \text{für } x \leqslant 0, \\ x^3 & \text{für } x > 0. \end{array} \right\}, \quad h(x) = \left\{ \begin{array}{rl} x^2 + x^3 & \text{für } x \leqslant 0, \\ x^2 & \text{für } x > 0. \end{array} \right\}.$$

Prüfen Sie für die drei Funktionen jeweils zur Zerlegung $\mathcal{T} := ([-2, 0], [0, 1])$, ob es sich (i) um einen quadratischen und/oder (ii) um einen kubischen Spline handelt.

Lösung

Für ein weiteres Beispiel mit ausführlicher Lösung, siehe Aufgabe 7.12.

(a) Wir bezeichnen -wie aus der Vorlesung gewohnt- das Polynom, das f im i-ten Intervall ist, mit f_i, sodass insbesondere gilt:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{rl} f_1(x) = -x^2 & \text{für } x \leqslant 0, \\ f_2(x) = x^2 & \text{für } x > 0. \end{array} \right. ,$$

Ist $f(x)$ ein Polynom vom Grad $\leqslant 2$ für $x \leqslant 0$ und für $x > 0$? Dies ist erfüllt. ✓

Ist f stetig?

$$f_1(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0, \quad f_2(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \qquad \checkmark$$

Ist f auch stetig differenzierbar? Dazu leiten wir $f(x)$ stückweise ab.

$$\tilde{f}(x) = \left\{ \begin{array}{rl} f_1'(x) = -2x & \text{für } x \leqslant 0, \\ f_2'(x) = 2x & \text{für } x > 0. \end{array} \right.$$

$$f_1'(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f_2'(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \qquad \checkmark$$

Also ist $f(x)$ ein quadratischer Spline bzgl. obiger Zerlegung.
Um zu überprüfen, ob f auch ein kubischer Spline bzgl. der Zerlegeung ist, muss die Funktion zusätzlich zweimal stetig differenzierbar sein.

$$f''(x) = \begin{cases} f_1''(x) = -2 & \text{für } x \leqslant 0, \\ f_2''(x) = 2 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

$$f_1''(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = -2 \neq 2 = f_2''(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Folglich ist f kein kubischer Spline.

(b) Zunächst bestimmen wir die stückweisen Ableitungen:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = -x^3 & \text{für } x \leqslant 0, \\ g_2(x) = x^3 & \text{für } x > 0. \end{cases}, \qquad g'(x) = \begin{cases} g_1'(x) = -3x^2 & \text{für } x \leqslant 0, \\ g_2'(x) = 3x^2 & \text{für } x > 0. \end{cases}, \qquad g''(x) = \begin{cases} g_1''(x) = -6x & \text{für } x \leqslant 0, \\ g_2''(x) = 6x & \text{für } x > 0. \end{cases}.$$

Ist g stückweise quadratisch? Nein! $\Rightarrow$ kein quadratischer Spline!
Ist g stückweise kubisch? Ja! ✓
Ist g stetig? $g_1(0) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = 0, \quad g_2(0) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0 \qquad \checkmark$
Ist g' stetig? $g_1'(0) = \lim_{x\to 0^-} g'(x) = 0, \quad g_2'(0) = \lim_{x\to 0^+} g'(x) = 0 \qquad \checkmark$
Ist g'' stetig? $g_1''(0) = \lim_{x\to 0^-} g''(x) = 0, \quad g_2''(0) = \lim_{x\to 0^+} g''(x) = 0 \qquad \checkmark$
Foglich ist g ein kubischer Spline bzgl. obiger Zerlegung.

(c)

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x) = x^2 + x^3 & \text{für } x \leqslant 0, \\ h_2(x) = x^2 & \text{für } x > 0. \end{cases}, \quad h'(x) = \begin{cases} h_1'(x) = 2x + 3x^2 & \text{für } x \leqslant 0, \\ h_2'(x) = 2x & \text{für } x > 0. \end{cases}, \quad h''(x) = \begin{cases} h_1''(x) = 2 + 6x & \text{für } x \leqslant \\ h_2''(x) = 2 & \text{für } x > \end{cases}$$

Ist h stückweise quadratisch? Nein! $\Rightarrow$ kein quadratischer Spline!
Ist h stückweise kubisch? Ja!
Ist h stetig? $h_1(0) = \lim_{x\to 0^-} h(x) = 0, \quad h_2(0) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = 0 \qquad \checkmark$
Ist h' stetig? $h_1'(0) = \lim_{x\to 0^-} h'(x) = 0, \quad h_2'(0) = \lim_{x\to 0^+} h'(x) = 0 \qquad \checkmark$
Ist h'' stetig? $h_1''(0) = \lim_{x\to 0^-} h''(x) = 2, \quad h_2''(0) = \lim_{x\to 0^+} h''(x) = 2 \qquad \checkmark$
Foglich ist h ein kubischer Spline bzgl. obiger Zerlegung.

Aufgabe 7.7 [Kubische Spline-Interpolation: Eindeutigkeit]

Wieviele Bedingungen muss man *mindestens* noch stellen, damit man zu den Daten

x_i	-2	0	1	3	4
$f(x_i)$	3	5	2	3	4

einen *eindeutigen* kubischen interpolierenden Spline bekommt? Geben Sie *genau ein Beispiel* für die Bedingung(en) an (*falls* dazu überhaupt noch eine Bedingung zu stellen ist)!

Lösung

Ein kubischer Spline besitzt die Ordnung $k = 3$ und die Zerlegung zu den oben genannten Daten besteht aus 4 Intervallen. Also besitzt der Raum der kubischen Splines bezüglich der Zerlegung $\mathcal{T} = ([-2,0],[0,1],[1,3],[3,4])$ die Dimension $n + k = 7$. Da bereits 5 Datenpaare gegeben sind, reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf $7 - 5 = 2$. Wir müssen also noch zwei Bedingungen stellen, um aus den Daten einen eindeutigen kubischen Spline berechnen zu können. In der Praxis werden die Bedingungen typischerweise so gestellt, dass man einen vollständigen, einen natürlichen oder einen periodischen Spline erhält (für Details siehe Skript).

Beispielsweise müssen für einen natürlichen Spline die Bedingungen $s''(-2) = 0$ und $s''(4) = 0$ gelten.
Hinweis: Falls man für diese Daten die Bedingungen an einen periodischen Spline stellt, erhält man trotzdem keinen periodischen Spline, da die Voraussetzung $f(-2) = f(4)$ nicht erfüllt ist.

Aufgabe 7.8

Bestimmen Sie den exakten Wert des Integrals $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$. Danach berechnen Sie eine Näherung mit Mittelpunkt-, Trapez- und Simpsonregel.

Lösung

Man sieht:

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx \;=\; 4\arctan x|_0^1 = 4\arctan 1 = \pi$$

Sei $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$. Näherung mit:

(a) Mittelpunktregel: $Q_M(f) = (1-0)f(\frac{0+1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{16}{5} \approx 3,2$

(b) Trapezregel: $Q_T(f) = \frac{1-0}{2}(f(0)+f(1)) = \frac{4+2}{2} = 3$

(c) Simpson-Regel: $Q_S(f) = \frac{1-0}{6}(f(0)+4\cdot f(1/2)+f(1)) = \frac{4+2+4\cdot 16/5}{6} = \frac{47}{15} \approx 3,13333$

Aufgabe 7.9 [Quadraturformeln und lineare Spline-Funktionen]

Gegeben seien folgende Daten:

x_i	0	1	5	7
$s(x_i)$	3	7	5	9

Es bezeichne $s(x)$ den linear interpolierenden Spline auf dem Intervall $[a,b] = [0,7]$. Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter Quadraturformeln (exakt):

(a) $\int_a^b s(x)\,dx$, **(b)** $\int_a^b (s(x))^2\,dx$.

Lösung

(a) Bei $s(x)$ handelt es sich um eine stückweise lineare Funktion, somit liefert die Mittelpunktregel (stückweise angewendet) die exakte Lösung:

$$\begin{aligned}\int_0^7 s(x)\,dx &= \int_0^1 s(x)\,dx + \int_1^5 s(x)\,dx + \int_5^7 s(x)\,dx \\ &= \left[(1-0)\cdot(\tfrac{7+3}{2})\right] + \left[(5-1)\cdot(\tfrac{7+5}{2})\right] + \left[(7-5)\cdot(\tfrac{5+9}{2})\right] = 43.\end{aligned}$$

Alternativ lässt sich auch die intervallweise Trapezregel verwenden:

$$\begin{aligned}\int_0^7 s(x)\,dx &= \int_0^1 s(x)\,dx + \int_1^5 s(x)\,dx + \int_5^7 s(x)\,dx \\ &= \left[\tfrac{(1-0)}{2}\cdot(3+7)\right] + \left[\tfrac{(5-1)}{2}\cdot(7+5)\right] + \left[\tfrac{(7-5)}{2}\cdot(5+9)\right] = 43.\end{aligned}$$

(b) $(s(x))^2$ ist stückweise quadratisch, somit kann die Simpson–Regel zur exakten numerischen Integration (auf den Teilintervallen) verwendet werden:

$$\begin{aligned}\int_0^7 (s(x))^2\,dx = \int_0^1 (s(x))^2\,dx + \int_1^5 (s(x))^2\,dx + \int_5^7 (s(x))^2\,dx \\ = \left[\tfrac{1-0}{6}\left(1\cdot 3^2 + 4\cdot 5^2 + 1\cdot 7^2\right)\right] \\ + \left[\tfrac{5-1}{6}\left(1\cdot 7^2 + 4\cdot 6^2 + 1\cdot 5^2\right)\right] \\ + \left[\tfrac{7-5}{6}\left(1\cdot 5^2 + 4\cdot 7^2 + 1\cdot 9^2\right)\right] \\ = \frac{158}{6} + \frac{4\cdot 218}{6} + \frac{2\cdot 302}{6} = \frac{1634}{6}.\end{aligned}$$

Aufgabenteil

Aufgabe 7.10 [Linearer Spline]

Gegeben sei die Wertetabelle

i	0	1	2	3
x_i	2	4	6	8
y_i	0	1	1	2

(a) Geben Sie den linearen interpolierenden Spline s zu den obigen Daten in der intervallweisen Darstellung an und zeichnen Sie diesen in ein geeignetes Koordinatensystem.

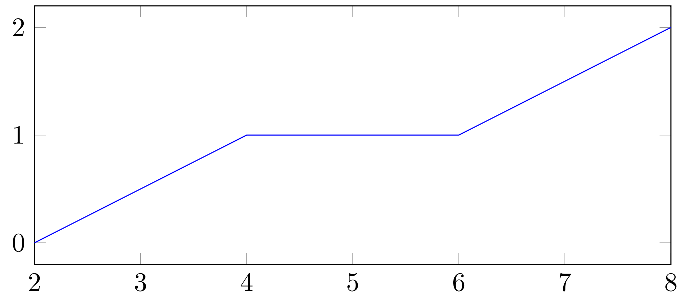
(b) Geben Sie s ebenfalls in der nodalen Basis (Hutfunktionen) an. Geben Sie explizit die Basisfunktionen C_1 und C_3 an.

Lösung

(a) Der lineare interpolierende Spline s zu obigen Daten lautet (einfach die stw. Geraden aufstellen)

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-2), & x \in [2,4], \\ 1, & x \in [4,6], \\ 1 + \frac{1}{2}(x-6), & x \in [6,8] \end{cases} \tag{7.10 1}$$

und sieht wie folgt aus:



(b) Die Darstellung von s mit Hutfunktionen lautet

$$s(x) = 0C_0(x) + 1C_1(x) + 1C_2(x) + 2C_3(x). \tag{7.10 2}$$

Die explizite Angabe von C_0 ist unnötig, da es 0-mal (also nicht) vorkommt, $C_1(x)$, $C_2(x)$ und $C_3(x)$ gegeben sind durch

$$C_1(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2}, & x \in [2,4], \\ -\frac{x-6}{2}, & x \in [4,6], \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \tag{7.10 3a}$$

$$C_3(x) = \begin{cases} \frac{x-6}{2}, & x \in [6,8], \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases} \tag{7.10 3b}$$

Aufgabe 7.11 [Interpolation mit linearen Spline-Funktionen]

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = x^4, \quad x \in [-1,1].$$

(a) Bestimmen Sie die lineare Splinefunktion $s(x)$, die f in den drei Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ interpoliert.

(b) Bestimmen Sie die lineare Splinefunktion $\tilde{s}(x)$, die f in den fünf Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = -1/2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1/2$ und $x_4 = 1$ interpoliert.

(c) Skizzieren Sie das Ergebnis. Was können Sie über den Fehler der Interpolation aussagen?

Lösung

(a) Um die linearen Splines einfach aufzustellen, berechnen wir zunächst die Funktionswerte

-1	0	1
1	0	1

Damit ergibt sich

$$s(x) = \begin{cases} 1 - 1(x+1), & x \in [-1, 0] \\ 0 + 1(x - 0), & x \in [0, 1] \end{cases}$$

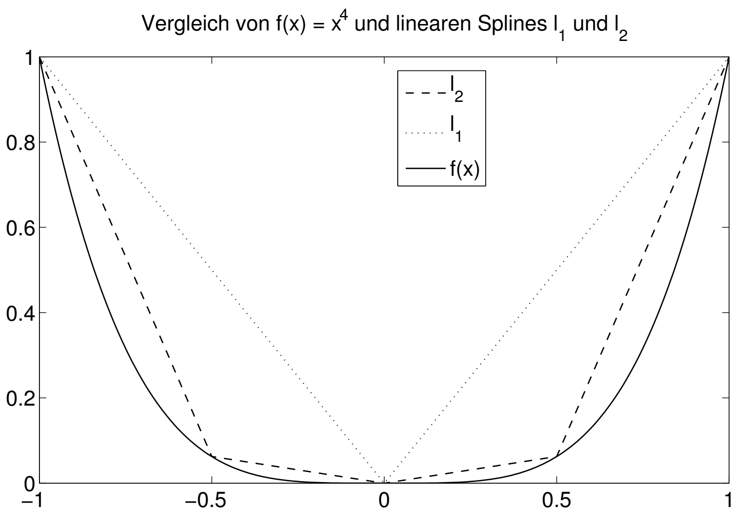
(b) Auch hier bestimmen wir zunächst die Funktionswerte

-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
1	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	1

Der zugehörige Spline lautet nun

$$\tilde{s}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{15}{8}(x+1), & x \in [-1, -\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{16} - \frac{1}{8}(x + \frac{1}{2}), & x \in [-\frac{1}{2}, 0) \\ 0 + \frac{1}{8}x, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{16} + \frac{15}{8}(x - \frac{1}{2}), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

(c) Der Funktionsplot:



Aufgrund der Symmetrie um die Y-Achse betrachten wir nur eine Seite. In der Skizze ist aber zu erkennen, dass der Fehler bei s (in der Skizze mit I_1 bezeichnet) und $\tilde{s}$ (in der Skizze mit I_2 bezeichnet) kleiner als 1 ist. Um den maximalen Fehler genauer abzuschätzen, könnte man bei s eine Kurvendiskussion für $s(x) - x^4$ machen; bei $\tilde{s}$ eine für $\tilde{s}_1(x) - x^4$ sowie $\tilde{s}_2(x) - x^4$ (es ist $\tilde{s} = \tilde{s}_1$ auf $[0, 0.5)$ und $\tilde{s} = \tilde{s}_2$ auf $[0.5, 1)$).

Aufgabe 7.12 [Ordnungen von Splinefunktionen]

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-4, 1), \\ -\frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{3}{2}, & x \in [1, 2) \\ \frac{3}{2}, & x \in [2, 4]. \end{cases}$$

(a) eine quadratische Splinefunktion?

(b) eine kubische Splinefunktion?

Lösung

Wir bezeichnen -wie aus der Vorlesung gewohnt- das Polynom, das f im i-ten Intervall ist, mit f_i, sodass insbesondere gilt:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = & x, & x \in [-4, 1), \\ f_2(x) = & -\frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{3}{2}, & x \in [1, 2) \\ f_3(x) = & \frac{3}{2}, & x \in [2, 4]. \end{cases}$$

(a) Die Gegenfrage lautet: Bzgl. welcher Zerlegung? Ohne diese Information kann man die ursprüngliche Frage nicht beantworten. Für die Zerlegung $x_0 = -4, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$ ist $f(x)$ unter Umständen eine quadratische Splinefunktion. Für die Zerlegung $x_0 = -4, x_1 = 2, x_2 = 4$ ist das dagegen nicht der Fall, da $f(x)$ kein Polynom auf dem Intervall $[-4, 2]$ ist.

Wir gehen nun von der Zerlegung $x_0 = -4, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$ aus und prüfen:

(i) Ist $f(x)$ ein Polynom vom Grad $\leqslant 2$ auf jedem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1, 2, 3$?

$$x \in \mathbb{P}_2([-4, 1]) \quad \checkmark \qquad -\frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{3}{2} \in \mathbb{P}_2([1, 2]) \quad \checkmark \qquad \frac{3}{2} \in \mathbb{P}_2([2, 4]) \quad \checkmark$$

(ii) Ist die Stetigkeit an den inneren Punkten gegeben?

$$f_1(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1, \quad f_2(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\frac{1}{2}(2-1)^2 + \frac{3}{2} = 1 \qquad \checkmark$$
$$f_2(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\frac{1}{2}(2-2)^2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}, \quad f_3(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{3}{2} \qquad \checkmark$$

(iii) Ist sie auch stetig differenzierbar? Dazu leiten wir $f(x)$ stückweise ab und nennen das Ergebnis $\tilde{f}(x)$. Existieren die Grenzwerte an den Intervallgrenzen und stimmen sie überein, so wissen wir, dass $\tilde{f}(x)$ die Ableitung von $f(x)$ ist und daher gilt $f'(x) = \tilde{f}(x)$. (Die Ableitung muss nicht unbedingt existieren! Beispielsweise müsste die Ableitungsfunktion von $g(x) = |x|$ an der Stelle 0 zwei Werte annehmen: -1 und 1.)

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f_1'(x) = & 1, & x \in [-4, 1), \\ f_2'(x) = & 2-x, & x \in (1, 2), \\ f_3'(x) = & 0, & x \in (2, 4]. \end{cases}$$

$$f_1'(1) = \lim_{x \to 1^-} \tilde{f}(x) = 1 = f_2'(1) = \lim_{x \to 1^+} \tilde{f}(x) \qquad \checkmark$$
$$f_2'(2) = \lim_{x \to 2^-} \tilde{f}(x) = 0 = f_3'(2) = \lim_{x \to 2^+} \tilde{f}(x) \qquad \checkmark$$

Damit ist gezeigt, dass $f(x)$ stetig differenzierbar auf $[-4, 4]$ ist und es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-4, 1), \\ 2-x, & x \in [1, 2), \\ 0, & x \in [2, 4]. \end{cases}$$

Also ist $f(x)$ ein quadratischer Spline bzgl. obiger Zerlegung (und jeder Verfeinerung dieser Zerlegung).

(b) Die stückweisen Ableitungen von $f'(x)$ sind gegeben durch

$$f''(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-4, 1), \\ -1, & x \in (1, 2), \\ 0, & x \in (2, 4]. \end{cases}$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass falls $f(x)$ ein kubischer Spline ist, $f''(x)$ ein linearer Spline sein muss. Dies ist erkennbar nicht der Fall (folgt sofort aus der Unstetigkeit), $f(x)$ kann also kein kubischer Spline sein.

Aufgabe 7.13 [Numerische Quadratur und Fehlerschätzung]

Approximieren Sie $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ mit Hilfe der

(a) Mittelpunktregel, **(b)** Trapezregel, **(c)** Simpson-Regel

und schätzen Sie jeweils den Fehler ab. **Hinweis:** Verwenden Sie ohne Beweis: $\max_{[\xi\in[0,1]}|f^{(4)}(\xi)| = 12$.

Lösung

Sei $f(x) = e^{-x^2}$ (alternative Schreibweise: $f(x) = \exp(-x^2)$). $Q(f)$ bezeichne das Integral von f, also $Q(f) = \int_0^1 f(x)dx$ und $I_{\text{Verfahren}}(f)$ bezeichne das mit dem jeweiligen Verfahren approximierte Integral von f. Für die Fehlerabschätzungen benötigen wir die zweite und die vierte Ableitung von $f(x)$. Diese sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -2x\exp(-x^2) \\
f''(x) &= (4x^2-2)\exp(-x^2) \\
f^{(3)}(x) &= (-8x^3+12x)\exp(-x^2) \\
f^{(4)}(x) &= (16x^4-48x^2+12)\exp(-x^2)
\end{aligned}$$

Weiter halten wir fest, dass $\max_{\xi\in[0,1]}|f''(\xi)| = 2$ gilt und dieses Maximum an der Stelle $\xi = 0$ angenommen wird; dies ist durch eine Kurvendiskussion zu erbringen. Außerdem gilt laut Hinweis $\max_{\xi\in[0.1]}|f^{(4)}(\xi)| = 12$ und dieses Maximum wird ebenfalls an der Stelle $\xi = 0$ angenommen (Ohne Hinweis müsste dies durch Kurvendiskussion erbracht werden).

(a) Mittelpunktregel

$$Q_M(f) = (1-0)\exp(-\left(\frac{1}{2}\right)^2) = \exp(-\frac{1}{4}) \approx 0.7788$$

$$|Q_M(f) - I(f)| \leqslant \max_{\xi\in[0,1]}\left|-\frac{(1-0)^3}{24}f''(\xi)\right| = \frac{1}{24}\max_{\xi\in[0,1]}|f''(\xi)| = \frac{1}{12} \approx 0.0833$$

(b) Trapezregel

$$Q_T(f) = \frac{1-0}{2}(f(0)+f(1)) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e}\right) \approx 0.6839$$

$$|Q_T(f) - I(f)| \leqslant \max_{\xi\in[0,1]}\left|\frac{(1-0)^3}{12}f''(\xi)\right| = \frac{1}{6} \approx 0.1667$$

(c) Simpson-Regel

$$Q_S(f) = \frac{1-0}{6}(f(0)+4f(\frac{1}{2})+f(1)) = \frac{1}{6}\left(1+4\exp(-\frac{1}{4})+\frac{1}{e}\right) \approx 0.7472$$

$$|Q_S(f) - I(f)| \leqslant \max_{\xi\in[0,1]}\left|\left(\frac{1-0}{2}\right)^5\frac{1}{90}f^{(4)}(\xi)\right| = \frac{12}{32\cdot 90} \approx 0.0042$$

Eine mit dem Computer errechnete genauere Approximation liefert $\int_0^1 e^{-x^2} \approx 0.7468$ als Ergebnis.

Zusatzaufgaben

Aufgabe 7.14 [Polynominterpolation vs. Spline-Interpolation]

Gegeben seien in der (x, y)–Ebene die 13 Punkte (Schrittweite $h = 1/6$):

x_i	-1	$-5/6$	$-2/3$	$-1/2$	$-1/3$	$-1/6$	0	$1/6$	$1/3$	$1/2$	$2/3$	$5/6$	1
y_i	1	1	1	1	$1+\sqrt{5}$	$1+\sqrt{8}$	4	$1+\sqrt{8}$	$1+\sqrt{5}$	1	1	1	1

(a) Stellen Sie das zugehörige Lagrange-Interpolationspolynom auf, *ohne* die Lagrangepolynome anzugeben.

(b) Skizzieren Sie zu den gegebenen Punkten zwei bis drei Funktionen, die Sie sich als zugehörige Interpolationsfunktion oder Näherungsfunktion vorstellen würden. Vergleichen Sie hinterher mit einer Skizze des Interpolationspolynoms. (Z.B. mit Computerhilfe). Hinweis: Die Funktionsgleichung für den „Tunnel" ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leqslant x < -0.5 \\ 1 + 6\sqrt{1/4 - x^2}, & -0.5 \leqslant x \leqslant 0.5 \\ 1, & 0.5 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

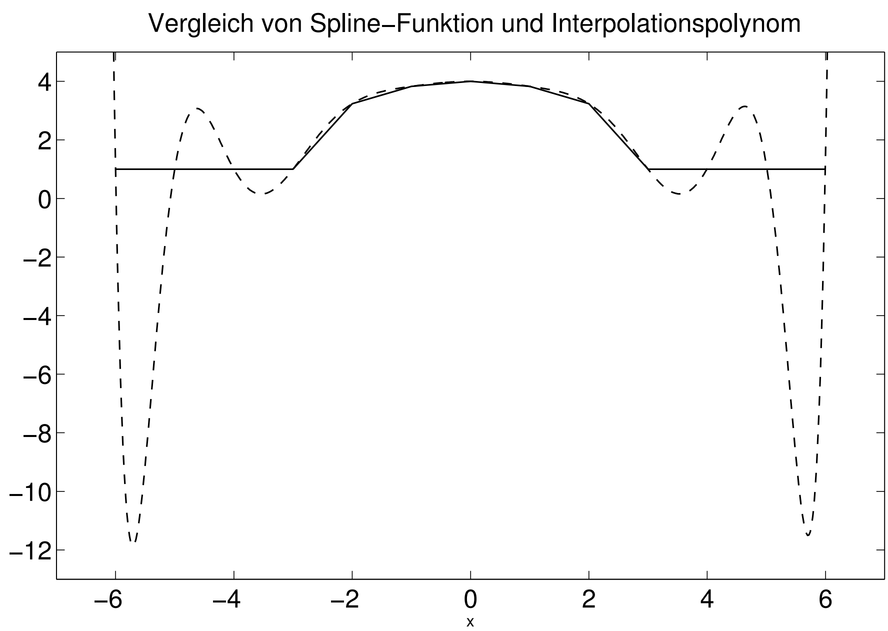
(c) Skizzieren Sie die zugehörige lineare Splinefunktion, die diese Punkte interpoliert.

Lösung

(a)

$$\begin{aligned} p(x) = {} & L_{12,0}(x) + L_{12,1}(x) + L_{12,2}(x) + L_{12,3}(x) \\ & + (1+\sqrt{5})L_{12,4}(x) + (1+\sqrt{8})L_{12,5}(x) + 4L_{12,6}(x) + (1+\sqrt{8})L_{12,7}(x) \\ & + (1+\sqrt{5})L_{12,8}(x) + L_{12,9}(x) + L_{12,10}(x) + L_{12,11}(x) + L_{12,12}(x) \end{aligned}$$

(b) In der unten stehenden Skizze sind das Interpolationspolynom und ein linearer Spline eingezeichnet (bitte teilen Sie die Werte der x-Achse noch durch 6). Die starken Schwankungen an den Rändern des Definitionsbereiches der Originalfunktion sind für Interpolationspolynome mit hohem Grad nicht ungewöhnlich.



Aufgabe 7.15 [Kubische Splines]

Gegeben sei die Funktion $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 1 - 32x & \text{in} \quad [-5, -3), \\ f_2(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 & \text{in} \quad [-3, 4), \\ f_3(x) = 1 - 32x & \text{in} \quad [4, 5]. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass f ein Spline vom Grad 3 bezüglich der Zerlegung $\mathcal{T} = \{[-5, -3], [-3, 4], [4, 5]\}$ ist.

(b) Ist f dann auch ein natürlicher Spline?

Lösung

(a) In diesem Fall kann man die Lösung auch ohne Rechnung erkennen. Wählt man $a + bx + cx^2 + dx^3 = 1 - 32x$, so erfüllt $f(x)$ alle Bedingungen an einen kubischen Spline.
Allgemein schließt man aber aus den Bedingungen, die ein kubischer Spline erfüllen muss, auf die Werte a, b, c, d.
Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:

- **(i)** $f(x)$ muss auf den Intervallen der Zerlegung mit einem Polynom vom Grad 3 übereinstimmen.
- **(ii)** $f(x)$ muss stetig sein (man schreibt dies auch als 0 mal stetig differenzierbar)
- **(iii)** $f(x)$ muss einmal stetig differenzierbar sein. Äquivalent dazu muss also $f'(x)$ stetig sein.
- **(iv)** $f(x)$ muss zweimal stetig differenzierbar sein. Äquivalent dazu muss also $f''(x)$ stetig sein.

Aus diesen Bedingungen wollen wir nun die Werte für a, b, c, d ableiten.

- **(i)** Dies ist der Fall.
- **(iv)** Hier ist es am einfachsten zunächst die Stetigkeit der zweiten Ableitung zu prüfen. Damit $f''(x)$ stetig ist, müssen wir die Übergangsstellen -3 und 4 prüfen.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-3} 0 &= \lim_{x\to-3} 2c + 6dx \\ \Rightarrow \quad 0 &= 2c - 18d \\ \lim_{x\to4} 0 &= \lim_{x\to4} 2c + 6dx \\ \Rightarrow \quad 0 &= 2c + 24d \end{aligned}$$

Hieraus folgt $c = d = 0$, keine anderen Wertepaare von c und d können das LGS erfüllen.

- **(iii)** Auch hier prüfen wir die Stellen -3 und 4, aber nun für die erste Ableitung.

$$\begin{aligned} -32 &= b - 6c + 27d \\ -32 &= b + 8c + 48d \end{aligned}$$

Aus $c = d = 0$ folgt damit, dass $b = -32$.

- **(ii)** Damit $f(x)$ stetig ist, müssen wir die Übergangsstellen -3 und 4 prüfen.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-3} 1 - 32x &= \lim_{x\to-3} a + bx + cx^2 + dx^3 \\ \Rightarrow \quad 1 + 96 &= a - 3b + 9c - 27d \quad \Rightarrow \quad a = 1 \\ \lim_{x\to4} 1 - 32x &= \lim_{x\to4} a + bx + cx^2 + dx^3 \\ \Rightarrow \quad -127 &= a + 4b + 16c + 64d \quad \Rightarrow \quad a = 1 \end{aligned}$$

Da an beiden Übergangsstellen übereinstimmend $a = 1$ folgt, sind wir nun fertig.

Da es keine Widersprüche in den Gleichungen gab, ist ein kubischer Spline konstruierbar und die Lösung lautet $a = 1, b = -32, c = d = 0$.

(b) Ja, denn es gilt $f''(-5) = f''(5) = 0$ und somit sind die Zusatzbedingungen an einen natürlichen Spline erfüllt.

Aufgabe 7.16 [Quadraturformeln: Fehlerquellen]

Es sei $f(y) = \frac{\cos \frac{\pi}{8} y}{\sqrt{y^2+y}}$. Approximieren Sie das Integral $\int_0^4 f(y)\, dy$ mit Hilfe der Mittelpunktregel, der Trapezregel und der Simpson-Regel. Substituieren Sie dazu zuerst $y = x^2$. Warum ist das nötig?

Lösung

Mit der Substutution $y = x^2$ erhält man

$$\int_0^4 f(y)\, dy = \int_0^4 \frac{\cos \frac{\pi}{8} y}{\sqrt{y^2+y}}\, dy = \int_0^2 \frac{\cos \frac{\pi}{8} x^2}{\sqrt{x^4+x^2}} 2x\, dx = \int_0^2 \frac{2\cos \frac{\pi}{8} x^2}{\sqrt{x^2+1}}\, dx =: \int_0^2 g(x)\, dx$$

Diese Substitution ist notwendig, da $f(0)$ nicht auswertbar ist [genauer: es gilt $\lim_{y\to 0} f(y) = +\infty$ und es handelt sich um ein *uneigentliches Integral*]. Anwenden der Definitionen liefert

$$\begin{aligned} Q_M(g) &= 2g(1) = 2.6131259 \\ Q_T(g) &= \frac{2}{2}(g(0)+g(2)) = 2+0 = 2 \\ Q_S(g) &= \frac{2}{6}(g(0)+4g(1)+g(2)) = \frac{1}{3}(2+4g(1)) = 2.4088 \end{aligned}$$

Institut für
Angewandte Mathematik

Leibniz
Universität
Hannover

Dr. Frank Attia, Dr. Florian Leydecker

Hannover, 26. Mai 2025

Mathematik für die Ingenieurwissenschaften III - Numerik
SoSe 2025 – Übung 8 – Lösungen

Themen

Numerische Integration/Quadraturformeln
- summierte Quadraturformeln
- Bestimmung von Gewichten: Kapitel 3.4.3

Anfangswertprobleme
- Umformung auf Systeme 1. Ordnung: Satz 4.5
- Existenz und Eindeutigkeit, s. Satz A5.11

Wiederholungen aus Mathe II
- Partielle Integration
- Partialbruchzerlegung in reellwertiger und komplexwertiger Form
- Allgemeine Lösung homogener linearer DGLn mit konstanten Koeffizienten

Zentralübung

In der Zentralübung werden insbesondere Aufgaben aus diesem Abschnitt behandelt. Weiterhin haben Sie die Gelegenheit Fragen zu der Vorlesung und den Videos zu stellen.

Präsenzaufgabe 8.1 [Summierte Quadraturformeln und Fehlerschätzung (s. auch Übung 3.47)]

Gegeben sei das Integral

$$I(f) = \int_0^1 \underbrace{\sqrt{1+48t}}_{:=f(t)}\,dt.$$

(b) Approximieren Sie das Integral durch eine zusammengesetzte Trapezregel mit Schrittweite $H = \frac{1}{4}$.

(c) Geben Sie die Fehleranschätzung der zusammengesetzten Trapezregel in diesem Beispiel in Abhängigkeit der Schrittweite H an!

(d) Wieviele Intervalle muss man wählen, damit bei der zusammengesetzten Trapezregel der Fehler kleiner als $3 \cdot 10^{-6}$ wird.

Präsenzaufgabe 8.2 [Numerische Integration linearer Spline-Funktionen (s. auch Aufgabe 8.4)]

Gegeben sei die Zerlegung mit $x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 6$ des Intervalls $[a,b] = [-1,6]$ in 4 Teilintervalle. Die zugehörigen Basisfunktionen linearer Splines („Hutfunktionen") seien mit $C_0, \ldots, C_4$ bezeichnet.

(a) Skizzieren Sie die Funktionen $C_2(x)C_3(x)$, $C_2(x)^2$ sowie $C_2(x)C_4(x)$ und $C_1(x)C_4(x)$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter Quadraturformeln (exakt):

(i) $\int_a^b C_2(x)C_3(x)\,dx$, **(ii)** $\int_a^b C_2(x)^2\,dx$, **(iii)** $\int_a^b C_2(x)C_4s(x)\,dx$.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter Quadraturformeln (exakt):

(i) $\int_a^b C_2'(x)C_3'(x)\,dx$, **(ii)** $\int_a^b C_2'(x)^2\,dx$, **(iii)** $\int_a^b C_2'(x)C_4'(x)\,dx$.

Hinweis: Die C_i sind streng genommen nicht differenzierbar: hier ist die stückweise Ableitung gemeint [und die an Knicken der Hutfunktionen undefinierten Ableitungswerte spielen für die Berechung der Integrale keine Rolle].

Präsenzaufgabe 8.3 [Umformen in ein System 1. Ordnung]

Formen Sie die folgenden DGLn jeweils in ein System der Ordnung 1 um (inklusive der ABen, falls angegeben).

(a) $y''(x) - 42y'(x) + 9y(x) = x^3$.

(b) $y'''(x) - 42y'(x) + \cos(\pi x)y(x) = 0$ mit $y(-1) = 0,\ y'(-1) = 0$ und $y''(-1) = 7$.

(c) $xy''(x) - y'(x) = \cos(\pi x),\ x > 0$.

(d) $y''(x) = \cos(\pi x) + \big(y(x)\big)^2$ mit $y(-1) = 1,\ y'(-1) = 42$.

Kurzteil

Aufgabe 8.4 [Numerische Integration linearer Spline-Funktionen]

Gegeben sei die Zerlegung mit $x_0 = 1,\quad x_1 = 3,\quad x_2 = 4,\quad x_3 = 7$ des Intervalls $[a, b] = [1, 7]$ in 3 Teilintervalle. Die zugehörigen Basisfunktionen linearer Splines seien mit $C_0, \ldots, C_3$ bezeichnet.

(a) Skizzieren Sie die Funktionen $C_1(x)C_2(x)$, $C_1(x)^2$ und $C_1(x)C_3(x)$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter Quadraturformeln (exakt):

(i) $\int_a^b C_1(x)C_2(x)\,dx$, **(ii)** $\int_a^b C_1(x)^2\,dx$, **(iii)** $\int_a^b C_1(x)C_3(x)\,dx$.

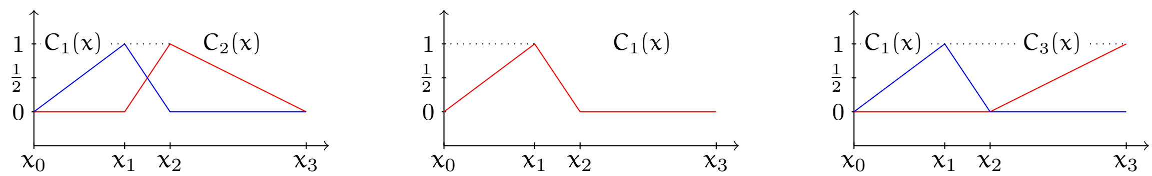
(c) Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter Quadraturformeln (exakt):

(i) $\int_a^b C_1'(x)C_2'(x)\,dx$, **(ii)** $\int_a^b C_1'(x)^2\,dx$, **(iii)** $\int_a^b C_1'(x)C_3'(x)\,dx$.

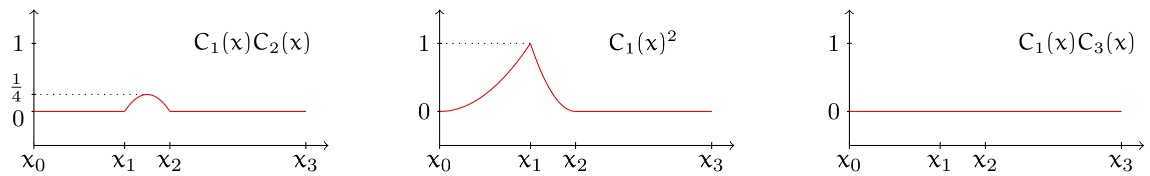
Hinweis: Die C_i sind streng genommen nicht differenzierbar: hier ist die stückweise Ableitung gemeint [und die an Knicken der Hutfunktionen undefinierten Ableitungswerte spielen für die Berechung der Integrale keine Rolle].

Lösung

(a) Skizzen der Basisfunktionen:



Skizzen der Produkte:



(b) Da es sich bei $C_0, C_1, \ldots, C_3$ um stückweise lineare Polynome handelt, sind $C_1(x)C_2(x)$, $C_1(x)^2$ und $C_1(x)C_3(x)$ stückweise Polynome vom Grad $\leqslant 2$. Somit liefert die Simpson–Regel angewendet auf die Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ der Zerlegung jeweils die exakten Werte.

(i)

$$\int_1^7 C_1(x)C_2(x)\,dx = \int_3^4 C_1(x)C_2(x)\,dx = \frac{4-3}{6} \cdot \big(1 \cdot 0 + 4 \cdot 0.5^2 + 1 \cdot 0\big) = \frac{1}{6}.$$

(ii)

$$\int_1^7 (C_1(x))^2\,dx = \int_1^3 (C_1(x))^2\,dx + \int_3^4 (C_1(x))^2\,dx$$
$$= \frac{3-1}{6}\cdot\bigl(1\cdot 0 + 4\cdot 0.5^2 + 1\cdot 1\bigr) + \frac{4-3}{6}\cdot\bigl(1\cdot 1 + 4\cdot 0.5^2 + 1\cdot 0\bigr) = 1.$$

(iii) Da $C_1(x)$ und $C_3(x)$ keinen gemeinsamen Bereich besitzen, auf dem beide Funktionen ungleich Null sind, folgt direkt:

$$\int_1^7 C_1(x)C_3(x)\,dx = 0.$$

(c) Da es sich bei $C_0, C_1, \dots, C_3$ um stückweise lineare Polynome handelt, sind die Ableitungen stückweise konstant, und die Produkte ebenso. Somit liefert die Mittelpunktregel angewendet auf die Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ der Zerlegung jeweils

(i)

$$\int_1^7 C_1'(x)C_2'(x)\,dx = \int_3^4 C_1'(x)C_2'(x)\,dx = (4-3)\cdot((-1)\cdot 1) = -1.$$

(ii)

$$\int_1^7 (C_1'(x))^2\,dx = \int_1^3 (C_1'(x))^2\,dx + \int_3^4 (C_1'(x))^2\,dx$$
$$= (3-1)\cdot\bigl(0.5^2\bigr) + (4-3)\cdot\bigl((-1)^2\bigr) = \frac{3}{2}.$$

(iii) Da $C_1'(x)$ und $C_3'(x)$ keinen gemeinsamen Bereich besitzen, auf dem beide Funktionen ungleich Null sind, folgt direkt:

$$\int_1^7 C_1'(x)C_3'(x)\,dx = 0.$$

Aufgabe 8.5 [Umformen in ein System 1. Ordnung]

Formen Sie die folgenden DGLn jeweils in ein System der Ordnung 1 um (inklusive der ABen).

(a) $y'''(x) - 6y'(x) + x^2 y(x) = 0$ mit $y(-1) = 1,\ y'(-1) = 0$ und $y''(-1) = 2$.

(b) $y''(x) = x^2 + \big(y(x)\big)^2$ mit $y(-1) = 1,\ y'(-1) = 42$.

Lösung

Setze $y_1 := y$, $y_2 := y_1' = y'$ und $y_3 := y_2' = y_1'' = y''$ (y_3 braucht man nur für (b)). Damit erhält man für obige DGLn die nachfolgenden Systeme der Ordnung 1:

(a) Setze $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}$. Es gilt $y'''(x) - 6y'(x) + x^2 y(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'''(x) = 6y'(x) - x^2 y(x)$ und somit

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_3(x) \\ 6y_2(x) - x^2 y_1(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Hier ist man prinzipiell fertig. Da es sich hier um eine *lineare* DGL handelt, ist auch folgende Matrix-Verktorschreibweise üblich:

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -x^2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}(x).$$

(b) Setze $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ und erhalte

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ x^2 + y_1^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 42 \end{pmatrix}.$$

In diesem Aufgabenteil ist die DGL *nicht linear*, man lässt das System so stehen.

Aufgabe 8.6 [Lösung(en) linearer Differentialgleichungen, s. Mathe I/II]

Hat die Differentialgleichung

$$y'(x) = 1$$

eine eindeutige Lösung?

Lösung

Nein. Jede Funktion $y(x) := x + c$ mit $c = \text{const}$ beliebig erfüllt die DGL.

Aufgabenteil

Aufgabe 8.7 [Zusammengesetzte Trapezregel]

Gegeben sei das Integral $\int_1^2 \frac{1}{1+x}\,dx$.

(a) Bestimmen Sie ein L derart, dass die L-fach zusammengesetzte Trapezregel eine Näherung mit einem Fehler kleiner als $2.5 \cdot 10^{-3}$ liefert.

(b) Berechnen Sie eine Näherung mit der dreifach zusammengesetzten Trapezregel.

Lösung

(a) Die L-fach zusammengesetzte Trapezregel lautet:

$$Q_{T,L}(f) = H/2[f(a) + 2f(a+H) + 2f(a+2H) + \cdots + 2f(a+(L-1)H) + f(b)]$$

Abschätzen des Fehlers:

$$|Q_{T,L}(f) - I(f)| \leqslant \sum_{j=0}^{L-1} \frac{1}{12} H^3 \max|f''(x)| = \frac{L}{12} H^3 \max|f''(x)| = \frac{b-a}{12} H^2 \max|f''(x)|,$$

da $H = \frac{b-a}{L}$.
Es ist $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, also f'' ist eine fallende Funktion, und somit

$$\max_{x\in[1,2]} |f''(x)| \leqslant f''(1) = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}.$$

Damit ist $\frac{b-a}{12} H^2 \max|f''(x)| = \frac{b-a}{12} H^2 \frac{1}{4} = \frac{1}{48} H^2$. Ist $\frac{1}{48} H^2 \leqslant 2.5 \cdot 10^{-3}$, so ist auch

$$|Q_{T,L}(f) - I(f)| \leqslant 2.5 \cdot 10^{-3}.$$

Es gilt:

$$\frac{1}{48} H^2 \leqslant 2.5 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{400} \iff H \leqslant 0,3464.$$

Wähle also z.B. $H = \frac{1}{3} \iff L = 3$.

(b) $L = 3, H = 1/3$: $t_0 = 1, t_1 = \frac{4}{3}, t_2 = \frac{5}{3}, t_3 = 2$.

$$Q_{T,3}(f) = \frac{1}{6}\left(f(1) + 2f(\frac{4}{3}) + 2f(\frac{5}{3}) + f(2)\right) = 0,4067.$$

Aufgabe 8.8 [Gewichte Bestimmen I]

Gegeben seien $a = 0$, $b = 1$, und $x_i = \frac{i}{3}$ mit $i = 0, ..., 3$. Man berechne $\omega_0, \ldots, \omega_3$ so, dass

$$\sum_{i=0}^{3} \omega_i p(x_i) = \int_a^b p(x)dx$$

für alle Polynome $p(x)$ von Grad $\leqslant 3$ gilt.

Lösung

Es reicht, die Aussage für die Monome zu zeigen, weil das eine Basis des linearen Vektorraumes $\mathbb{P}_3$ der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 ist und sowohl das Integrieren als auch das Anwenden der Quadraturformel eine lineare Abbildung (von $\mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}$) sind.

Man sieht hier im Speziellen auch einfach, dass für $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b p(x)dx &= c_0 \int_a^b 1dx &+ c_1 \int_a^b xdx &+ c_2 \int_a^b x^2dx &+ c_3 \int_a^b x^3dx \\
\sum_{i=0}^{3} \omega_i p(x_i) &= c_0 \sum_{i=0}^{3} \omega_i 1 &+ c_1 \sum_{i=0}^{3} \omega_i x_i &+ c_2 \sum_{i=0}^{3} \omega_i x_i^2 &+ c_3 \sum_{i=0}^{3} \omega_i x_i^3
\end{aligned}$$

Wir erhalten also für jedes Monom mit Grad kleiner oder gleich 3 eine Gleichung:

$$\begin{aligned}
\underline{p(x) = 1:} \qquad & \sum_{i=0}^{3} \omega_i = \int_0^1 1dx = 1, \\
\underline{p(x) = x:} \qquad & \sum_{i=0}^{3} \omega_i x_i = \frac{1}{3}\omega_1 + \frac{2}{3}\omega_2 + 1 \cdot \omega_3 = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}, \\
\underline{p(x) = x^2:} \qquad & \sum_{i=0}^{3} \omega_i x_i^2 = \frac{1}{9}\omega_1 + \frac{4}{9}\omega_2 + 1 \cdot \omega_3 = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}, \\
\underline{p(x) = x^3:} \qquad & \sum_{i=0}^{3} \omega_i x_i^3 = \frac{1}{27}\omega_1 + \frac{8}{27}\omega_2 + 1 \cdot \omega_3 = \int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

daraus ergibt sich folgendes LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & 1 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $\begin{pmatrix}\omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\end{pmatrix}^T = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix}^T$.

Bemerkungen. Wegen der Symmetrie der Stützstellen, sind ebenso die Gewichte symmetrisch zum Mittelpunkt $m = 1/2$. Es reicht somit ein LGS halber Größe zur Berechnung der Gewichte. Interessant ist diesbezüglich auch alternativ die Funktionen $p_k(x) = (x - \frac{1}{2})^k$ statt obiger Funktionen p_k zu verwenden; in dem Fall sollte das Integrieren von p_{2k} ausreichen. Man kann also

$$\cancel{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (\frac{2}{3} - \frac{1}{2})^2 & (1 - \frac{1}{2})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

lösen [und erhält desweiteren $\omega_0 = \omega_3$ sowie $\omega_1 = \omega_2$].

Aufgabe 8.9 [Gewichte Bestimmen II: zwei-dimensionale Integrale auf einem Dreieck]

Zu berechnen sei das Integral $I(f) = \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)\, dy\, dx$. Der Integrationsbereich ist hier also ein Dreieck (Skizze?).

(a) Bestimmen Sie eine Quadraturformel $Q(f) = \omega \cdot f(x_0, y_0)$ mit einem Punkt (x_0, y_0), die für alle Polynome ersten Grades der Form $p(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y$ exakt ist.

(b) Bestimmen Sie eine Quadraturformel mit zwei symmetrisch liegenden Punkten (a,b) und (b,a), die für alle bilinearen Funktionen der Form $p(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy$ exakt ist.

Lösung

Zunächst bestimmen wir die exakten Integrale

$$
\begin{aligned}
I(1) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1\, dy\, dx = \int_0^1 [y]_0^{1-x}\, dx = \int_0^1 1-x\, dx = \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} - 0 + 0 = \frac{1}{2}, \\
I(x) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x\, dy\, dx = \int_0^1 x[y]_0^{1-x}\, dx = \int_0^1 x - x^2\, dx = [\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0 + 0 = \frac{1}{6}, \\
I(y) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} y\, dy\, dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2\, dx = \frac{1}{2}\left([\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x]_0^1\right) = \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{3} - 1 + 1) = \frac{1}{6}, \\
I(x\cdot y) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x\cdot y\, dy\, dx = \int_0^1 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 x\cdot\frac{1}{2}(1-x)^2\, dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x - x^2 + \frac{1}{2}x^3\, dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} - 0 + 0 - 0 = \frac{1}{24}.
\end{aligned}
$$

(a) Die gesuchte Quadraturformel hat die Form $Q(f) = \omega \cdot f(x_0, y_0)$, gesucht sind also ω, sowie (x_0, y_0). Wegen der Linearität des Integrals und der Quadraturformel genügt es, die Funktionen 1, x und y zu betrachten:

$$
\begin{aligned}
\underline{f(x,y) = 1:}\ Q(f) &= \omega\cdot 1 \overset{!}{=} I(f) = \frac{1}{2}, &\implies&\quad \omega = \frac{1}{2} \\
\underline{f(x,y) = x:}\ Q(f) &= \omega\cdot x_0 = \frac{1}{2}\cdot x_0 \overset{!}{=} I(f) = \frac{1}{6}, &\implies&\quad x_0 = \frac{1}{3} \\
\underline{f(x,y) = y:}\ Q(f) &= \omega\cdot y_0 = \frac{1}{2}\cdot y_0 \overset{!}{=} I(f) = \frac{1}{6}, &\implies&\quad y_0 = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich die Quadraturformel zu $Q(f) = \frac{1}{2}\cdot f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

(b) Die gesuchte Quadraturformel hat die Form $Q(f) = \omega_0 \cdot f(x_0, y_0) + \omega_1 \cdot f(y_0, x_0)$, gesucht sind also ω_0, ω_1, sowie (x_0, y_0). Wegen der Linearität des Integrals und der Quadraturformel genügt es, die Funktionen 1, x, y und $x\cdot y$ zu betrachten:

$$
\begin{aligned}
\text{I}\ \underline{f(x,y) = 1:}\ Q(f) &= \omega_0\cdot 1 + \omega_1\cdot 1 \overset{!}{=} I(f) = \frac{1}{2}, \quad\implies\quad \omega_0 + \omega_1 = \frac{1}{2} \\
\text{II}\ \underline{f(x,y) = x:}\ Q(f) &= \omega_0\cdot x_0 + \omega_1\cdot y_0 \overset{!}{=} I(f) = \frac{1}{6} \\
\text{III}\ \underline{f(x,y) = y:}\ Q(f) &= \omega_0\cdot y_0 + \omega_1\cdot x_0 \overset{!}{=} I(f) = \frac{1}{6} \\
\text{IV}\ \underline{f(x,y) = x\cdot y:}\ Q(f) &= \omega_0\cdot x_0\cdot y_0 + \omega_1\cdot x_0\cdot y_0 \overset{!}{=} I(f) = \frac{1}{24}
\end{aligned}
$$

Lösen des Systems:

Zunächst bilden wir die Differenz der Gleichungen II und III und erhalten ($x_0 = y_0$ impliziert mit IV $x_0 = y_0 = \sqrt{\frac{1}{12}}$, ergibt einen Widerspruch bei II (auch bei III) und wird ausgeschlossen):

$$
\begin{aligned}
0 = \omega_0(x_0 - y_0) + \omega_1(y_0 - x_0) = (\omega_0 - \omega_1)\cdot(x_0 - y_0) \quad&\implies\quad \omega_0 = \omega_1 \overset{\text{I}}{=} \frac{1}{4} \\
\text{II} \implies \frac{1}{4}x_0 + \frac{1}{4}y_0 = \frac{1}{6} \quad&\iff\quad x_0 + y_0 = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Gleichung IV wird zu $2\cdot\frac{1}{4}x_0y_0 = \frac{1}{24} \iff x_0y_0 = \frac{1}{12} \iff y_0 = \frac{1}{12x_0}$. Setzt man dies nun in II ein, so erhält man

$$
x_0 + \frac{1}{12x_0} = \frac{2}{3} \iff x_0^2 - \frac{2}{3}x_0 + \frac{1}{12} = 0 \implies x_0 = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}
$$

Damit erhält man die Quadraturformel $Q(f) = \frac{1}{4}\left(f(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}, \frac{1}{6})\right)$.

Zusatzaufgaben

Aufgabe 8.10 [Gewichte Bestimmen III: andere Basis]

Für Funktionen $f \in C^1[0,\pi]$ und $(x_0, x_1, x_2) = (0, \frac{\pi}{2}, \pi)$ sei eine Quadraturformel der Form

$$Q(f) = \pi \sum_{i=0}^{2} \lambda_i f(x_i) + \lambda_3 f'(x_1)$$

gegeben, die das Integral $I(f) = \int_0^\pi f(x)\,dx$ derart approximieren soll, sodass für alle Funktionen

$$f \in \mathrm{Span}\{\sin(2x), \cos(x), \sin(x), 1\}$$

die Exaktheitsbedingungen $I(f) = Q(f)$ erfüllt sind.

(a) Bestimmen Sie geeignete Quadraturgewichte λ_i $(i = 0,1,2,3)$, sodass die Exaktheitsbedingungen erfüllt sind.

(b) Ist die Quadraturformel auch exakt für Funktionen

$$f \in \mathrm{Span}\{\sin(2x), \cos(x), \sin(x), \cos(3x), 1\}?$$

(c) Berechnen Sie für $f(x) = 3x$ sowohl $I(f)$ als auch $Q(f)$ und vergleichen Sie die Werte miteinander.

Hinweis: Für einen K-Vektorraum V und eine Teilmenge $S \subset V$ bezeichne $\mathrm{Span}(S) := \{\sum_{v\in S} \lambda_v v \mid \lambda_v \in K\}$ die von S *aufgespannte lineare Hülle.*

Lösung

(a) Wir leiten aus den Exaktheitsbedingungen $I(f) = Q(f)$ die Quadraturgewichte her.

- **$f(x) = \sin(2x)$:**

  Es ist

  $$f(x_0) = f(0) = \sin(0) = 0, \quad f(x_1) = f(\pi/2) = \sin(\pi) = 0, \quad f(x_2) = f(\pi) = \sin(2\pi) = 0.$$

  Ferner gilt

  $$f'(x) = 2\cos(2x) \implies f'(x_1) = 2\cos(\pi) = -2$$

  und

  $$I(f) = \int_0^\pi f(x)\,dx = \int_0^\pi \sin(2x)\,dx = -\frac{\cos(2x)}{2}\bigg|_0^\pi = \frac{-1+1}{2} = 0$$

  und $Q(f) = -2\lambda_3$. Somit folgt aus $I(f) = Q(f)$:

  $$-2\lambda_3 = 0 \implies \lambda_3 = 0$$

- **$f(x) = \cos(x)$:** .

  $$f(x_0) = \cos(0) = 1, \quad f(x_1) = \cos(\pi/2) = 0, \quad f(x_2) = \cos(\pi) = -1.$$

  Ferner gilt

  $$f'(x) = -\sin(x) \implies f'(x_1) = -\sin(\pi/2) = -1$$

  und

  $$I(f) = \int_0^\pi \cos(x)\,dx = \sin(x)|_0^\pi = 0.$$

  Damit haben wir

  $$\begin{aligned} I(f) = Q(f) &\iff \pi(\lambda_0 - \lambda_2) - \lambda_3 = 0 \\ &\iff \pi(\lambda_0 - \lambda_2) = 0 \\ &\iff \lambda_0 = \lambda_2. \end{aligned}$$

- $f(x) = \sin(x)$:

$$f(x_0) = \sin(0) = 0, \quad f(x_1) = \sin(\pi/2) = 1, \quad f(x_2) = \sin(\pi) = 0.$$

  Außerdem gilt

$$f'(x) = \cos(x) \implies f'(x_1) = \cos(\pi/2) = 0$$

  und

$$I(f) = \int_0^\pi \sin(x)\,dx = -\cos(x)|_0^\pi = -(-1-1) = 2.$$

  Mit $Q(f) = \pi\lambda_1$ folgt dann direkt $\lambda_1 = 2/\pi$.

- $f(x) = 1$: Damit gilt $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2) = 1$, $f'(x) = 0$ und

$$\int_0^\pi 1\,dx = x|_0^\pi = \pi.$$

  Schließlich folgt

$$\begin{aligned} I(f) = Q(f) &\iff \pi(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) = \pi \\ &\implies \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ &\implies 2\lambda_0 + \frac{2}{\pi} = 1 \\ &\implies \lambda_0 = \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

Damit lauten die Gewichte:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}, \quad \lambda_1 = \frac{2}{\pi}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}, \quad \lambda_3 = 0.$$

(b) Auf Grund von Aufgabenteil **(a)** weiß man, dass man nur noch die Exaktheit für $f(x) = \cos(3x)$ überprüfen muss. Es gilt

$$I(f) = \int_0^\pi \cos(3x)\,dx = \left.\frac{\sin(3x)}{3}\right|_0^\pi = 0.$$

Es gilt außerdem

$$f(x_0) = \cos(0) = 1, \quad f(x_1) = \cos(\frac{3}{2}\pi) = 0, \quad f(x_2) = \cos(3\pi) = -1$$

und $f'(x) = -3\sin(3x)$ und damit $f'(x_1) = -3\sin(\frac{3\pi}{2}) = 3$. Damit liefert die Quadraturformel

$$Q(f) = \pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi})) = 0$$

und somit ist die Quadraturformel auch exakt für Funktionen in dem gegebenen Raum.

(c) Es gilt

$$I(f) = \int_0^\pi 3x\,dx = \left.\frac{3x^2}{2}\right|_0^\pi = \frac{3\pi^2}{2}.$$

Ferner gilt

$$f(0) = 0, \quad f(\pi/2) = \frac{3\pi}{2}, \quad f(\pi) = 3\pi$$

und somit gilt

$$Q(f) = \pi\left(\frac{2}{\pi}\frac{3\pi}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)3\pi\right) = \pi\left(3 + \frac{3\pi}{2} - 3\right) = \frac{3\pi^2}{2}.$$

Auch diese Funktion wird also exakt integriert.

Aufgabe 8.11 [Wiederholung: Häufig vorkommende Differentialgleichungen, s. Mathe I/II]

Hinweis: Die allgemeinen Lösungen dieser Differentialgleichungen sollten Sie auswendig können.
Führen Sie die folgenden Schritte für jede der folgenden Differentialgleichungen durch:
(i) Formen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf die implizite Form um.
(ii) Stellen Sie das charakteristische Polynom auf und bestimmen Sie dessen Nullstellen.
(iii) Geben Sie die allgemeine Lösung sowohl in *komplexer* als auch in *reeller* Form an.

(a) $y'(x) = ky(x)$

(b) $y'(x) = -ky(x)$

(c) $y'' = \omega^2 y(x),\ \omega \neq 0$

(d) $y'' = -\omega^2 y(x),\ \omega \neq 0$

(e) $y^{(n)} = 0$

Führen Sie die Schritte (i) bis (iii) ebenfalls für die Gleichungen durch, die sich durch Erhöhen der Ableitungsordnung für **(a)** und **(c)** ergeben (Beispiel: **(a)** um einen Grad erhöht: $y''(x) = ky'(x)$). Was fällt Ihnen dabei auf?

Lösung

(a) (i) umgeformt auf implizite Form ergibt sich:

$$y'(x) - ky(x) = 0.$$

(ii) Damit lässt sich das charakteristische Polynom berechnen zu:

$$P(s) = (s - k).$$

Dieses besitzt die Nullstelle $\lambda_1 = k$ in einfacher Vielfachheit $n_1 = 1$.

(iii) Aus Mathematik II ist bekannt, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung die folgende komplexwertige Form hat (s. auch Satz 4.45):

$$y(x) = \sum_{i=1}^{1} \sum_{j=1}^{n_i} \tilde{c}_{i,j} x^{j-1} e^{\lambda_i x} = \tilde{c}_{1,1} x^0 e^{kx} = \tilde{c}_{1,1} e^{kx} \quad (\tilde{c}_{1,1} \in \mathbb{C})$$

Die reellwertige Version mit $k \in \mathbb{R}$ hat in diesem Fall dieselbe Form, da P dann nur reellwertige Nullstellen besitzt: $y(x) = \hat{c}_{1,1} e^{kx}$ mit $\hat{c}_{1,1}, k \in \mathbb{R}$.

(b) Die Schritte folgen analog:

(i) $y'(x) + ky(x) = 0$

(ii) $P(s) = (s + k)$

$\lambda_1 = -k$

(iii) $y(x) = \tilde{c}_{1,1} e^{-kx} \quad (\tilde{c}_{1,1} \in \mathbb{C})$ bzw.: $\hat{c}_{1,1} e^{-kx} \quad (\hat{c}_{1,1}, k \in \mathbb{R}.)$

(c)

(i) $y''(x) - \omega^2 y(x) = 0$

(ii) $P(s) = s^2 - \omega^2 = (s - \omega)(s + \omega)$

$\lambda_1 = \omega \qquad \lambda_2 = -\omega$

(iii) $y(x) = \tilde{c}_{1,1} e^{\omega x} + \tilde{c}_{2,1} e^{-\omega x} \quad (\tilde{c}_{i,1} \in \mathbb{C})$ bzw.: $\hat{c}_{1,1} e^{\omega x} + \hat{c}_{2,1} e^{-\omega x}, \quad (\hat{c}_{i,1}, \omega \in \mathbb{R}.)$

Bemerkung: Wegen $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ kann man hier auch alternativ $y(x) = c_1 \cosh(\omega x) + c_2 \sinh(\omega x)$ als Lösung angeben.

Bemerkung: mit Koeffizientenvergleich ergibt sich dann: $c_1 = \hat{c}_{1,1} + \hat{c}_{2,1},\ c_2 = \hat{c}_{1,1} - \hat{c}_{2,1}$

(d)

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)}\ \ y''(x)+\omega^2 y(x)=0\\
&\text{(ii)}\ \ P(s)=s^2+\omega^2=(s-i\omega)(s+i\omega)\\
&\qquad \lambda_1=i\omega\in\mathbb{C},\ \lambda_2=-i\omega\in\mathbb{C}\\
&\text{(iii)}\ y(x)=\tilde{c}_{1,1}e^{i\omega x}+\tilde{c}_{2,1}e^{-i\omega x}\quad (\tilde{c}_{\dots,1}\in\mathbb{C})
\end{aligned}
$$

Reellwertige Version:

$\omega\in\mathbb{R},\ \lambda_1=i\omega\in\mathbb{C},\ \lambda_2=-i\omega=\overline{\lambda_1}\in\mathbb{C}$ (und $\tilde{c}_{2,1}=\overline{\tilde{c}_{1,1}}$).

$y(x)=\tilde{c}_{1,1}e^{i\omega x}+\overline{\tilde{c}_{1,1}}e^{-i\omega x}\quad (\tilde{c}_{1,1}\in\mathbb{C})$

Mit $\mathrm{Re}(\lambda_1)=0$ und $\mathrm{Im}(\lambda_1)=\omega$ gemäß Satz 4.45:

$$
\begin{aligned}
y(x)&=e^{\mathrm{Re}(\lambda_1)x}(\hat{c}_{1,1}\cos(\mathrm{Im}(\lambda_1)x)+\hat{c}_{2,1}\sin(\mathrm{Im}(\lambda_1)x))\\
&=\hat{c}_{1,1}\cos(\omega x)+\hat{c}_{2,1}\sin(\omega x)\quad (\hat{c}_{1,1},\hat{c}_{2,1},\omega\in\mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)}\ \ y^{(n)}(x)=0\\
&\text{(ii)}\ \ P(s)=s^n\\
&\qquad \lambda_1=0,\ n_1=n\\
&\text{(iii)}\ y(x)=\sum_{j=1}^{n_1=n}\tilde{c}_{1,j}x^{j-1}e^{\lambda_1 x}=\tilde{c}_{1,1}+\tilde{c}_{1,2}x+\tilde{c}_{1,3}x^2+\dots+\tilde{c}_{1,n}x^{n-1}\quad (\text{alle } \tilde{c}_{1,j}\in\mathbb{C}).
\end{aligned}
$$

Die reellwertige Version hat in diesem Fall dieselbe Form, da P nur reellwertige Nullstellen besitzt:

$$
y(x)=\sum_{j=1}^{n_1=n}\hat{c}_{1,j}x^{j-1}e^{\lambda_1 x}=\hat{c}_{1,1}+\hat{c}_{1,2}x+\hat{c}_{1,3}x^2+\dots+\hat{c}_{1,n}x^{n-1}\quad (\text{alle } \hat{c}_{1,j}\in\mathbb{R}).
$$

Für den letzten, jetzt folgenden, Teil sei bemerkt, dass in der reellwertigen Version jeweils nur reelle Nullstellen vorkommen; die reellwertige Lösung sieht also immer identisch aus, aber mit Konstanten $\hat{c}_{i,j}\in\mathbb{R}$ statt Konstanten $\tilde{c}_{i,j}\in\mathbb{C}$.

Zuerst werden die Schritte für die Differentialgleichung aus **(a)** durchgeführt:

Erhöhung der Ordnung um 1:

$$
\begin{aligned}
&y''(x)=ky'(x)\\
&\text{(i)}\ \ y''(x)-ky'(x)=0\\
&\text{(ii)}\ \ P(s)=s(s-k)\\
&\qquad \lambda_1=k,\ n_1=1,\quad \lambda_2=0,\ n_2=1\\
&\text{(iii)}\ y(x)=\tilde{c}_{1,1}e^{kx}+\tilde{c}_{2,1}
\end{aligned}
$$

Erhöhung der Ordnung um 2:

$$
\begin{aligned}
&y'''(x)=ky''(x)\\
&\text{(i)}\ \ y'''(x)-ky''(x)=0\\
&\text{(ii)}\ \ P(s)=s^2(s-k)\\
&\qquad \lambda_1=k,\ n_1=1,\quad \lambda_2=0,\ n_2=2\\
&\text{(iii)}\ y(x)=\tilde{c}_{1,1}e^{kx}+\tilde{c}_{2,1}+\tilde{c}_{2,2}x
\end{aligned}
$$

Als nächstes werden die Schritte für die DGL aus **(c)** durchgeführt:

Erhöhung der Ordnung um 1:

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)}\ \ y'''(x)-\omega^2y'(x)=0\\
&\text{(ii)}\ \ P(s)=s^3-s\omega^2=s(s-\omega)(s+\omega)\\
&\qquad \lambda_1=\omega,\ \lambda_2=-\omega,\ \lambda_3=0\\
&\text{(iii)}\ y(x)=\tilde{c}_{1,1}e^{\omega x}+\tilde{c}_{2,1}e^{-\omega x}+\tilde{c}_{3,1}
\end{aligned}
$$

Erhöhung der Ordnung um 2:

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)}\ \ y^{(4)}(x)-\omega^2y''(x)=0\\
&\text{(ii)}\ \ P(s)=s^4-s^2\omega^2=s^2(s-\omega)(s+\omega)\\
&\qquad \lambda_1=\omega,\ \lambda_2=-\omega,\ \lambda_3=0,\ n_3=2\\
&\text{(iii)}\ y(x)=\tilde{c}_{1,1}e^{\omega x}+\tilde{c}_{2,1}e^{-\omega x}+\tilde{c}_{3,1}+\tilde{c}_{3,2}x
\end{aligned}
$$

Es fällt auf, dass im charakteristischen Polynom jeweils der Term s^n in der Ordnung erhöht wird.
Dadurch erhöht sich die Vielfachheit der Nullstelle $\lambda_i = 0$ und in der Lösung werden Terme $\tilde{c}_{i,m}x^{m-1}$, $m = 1, \dots, n$ hinzuaddiert. Das ist übrigens bei einer solchen Erhöhung der Ableitungsordnung auch immer in der reellwertigen Version der Fall [auch, wenn P in der reellwertigen Version komplexe Nullstellen hat].

Aufgabe 8.12 [Wiederholung: Partielle Integration, s. Mathe I/II]

Berechnen Sie mit Hilfe partieller Integration die beiden Integrale

$$(i) \int_0^\infty x \cdot e^{-x}\, dx, \qquad (ii) \int_0^\infty e^{-x} \cdot \sin(x)\, dx,$$

indem Sie zunächst die Stammfunktionen bestimmen.

Lösung

(i)

$$\begin{aligned}\int x \cdot e^{-x}\, dx &= x \cdot (-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x})\, dx = x \cdot (-e^{-x}) + (-e^{-x}) + C = -(x+1)e^{-x} + C \\ \Rightarrow \int_0^\infty x \cdot e^{-x}\, dx &= \lim_{b\to\infty} \left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^b = \underbrace{\lim_{b\to\infty} \left(-(b+1)e^{-b}\right)}_{=0} + (0+1)e^{-0} = 1.\end{aligned}$$

(ii) Hier führt man zweimal partielle Integration durch und erhält

$$\begin{aligned}\int e^{-x} \cdot \sin(x)\, dx &= -e^{-x}\sin(x) - \int -e^{-x}\cos(x)\, dx = -e^{-x}\sin(x) + \int e^{-x}\cos(x)\, dx \\ &= -e^{-x}\sin(x) + (-e^{-x})\cos(x) - \int -e^{-x}(-\sin(x))\, dx \\ &= -e^{-x}\sin(x) - e^{-x}\cos(x) - \int e^{-x}\sin(x)\, dx + C \\ \Leftrightarrow \quad 2\int e^{-x} \cdot \sin(x)\, dx &= -e^{-x}\sin(x) - e^{-x}\cos(x) + C \\ \Leftrightarrow \quad \int e^{-x} \cdot \sin(x)\, dx &= \frac{1}{2}\left(-e^{-x}\sin(x) - e^{-x}\cos(x)\right) + C \\ \Rightarrow \int_0^\infty e^{-x} \cdot \sin(x)\, dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x} \cdot \sin(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{2}\left(-e^{-x}\sin(x) - e^{-x}\cos(x)\right)\right]_0^b \\ &= \underbrace{\lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{2}\left(-e^{-b}\sin(b) - e^{-b}\cos(b)\right)\right)}_{=0} + \left(\frac{1}{2}\left(e^{-0}\sin(0) + e^{-0}\cos(0)\right)\right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 8.13 [Wiederholung: Partialbruchzerlegung I, s. Mathe I/II]

Mit welchem Ansatz bestimmt man die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{2s^4 + s^3 + 4s^2 - 2s + 10}{(s+1)(s-2)^2(s+2)^4}\ ?$$

Lösung

Der Ansatz ist

$$\frac{2s^4 + s^3 + 4s^2 - 2s + 10}{(s+1)(s-2)^2(s+2)^4} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{s+2} + \frac{E}{(s+2)^2} + \frac{F}{(s+2)^3} + \frac{G}{(s+2)^4}.$$

Aufgabe 8.14 [Wiederholung: Partialbruchzerlegung II, s. Mathe I/II]

Mit welchen Ansätzen bestimmt man die reelle/komplexe Partialbruchzerlegung von

$$\frac{Q(s)}{(s+2)^2(s^2+1)^2},$$

wobei Q ein Polynom vom Grad $\leqslant 5$ bezeichnet?

Lösung

Der komplexwertige Ansatz ist

$$\frac{Q(s)}{(s+2)^2(s^2+1)^2} = \frac{Q(s)}{(s+i)^2(s-i)^2(s+2)^2} = \frac{\tilde{A}}{s+i} + \frac{\tilde{B}}{(s+i)^2} + \frac{\tilde{C}}{s-i} + \frac{\tilde{D}}{(s-i)^2} + \frac{\tilde{E}}{s+2} + \frac{\tilde{F}}{(s+2)^2}.$$

Die Summanden aus dem komplexwertigen Ansatz lassen sich gut zurücktransformieren.
Der reelle Ansatz wäre

$$\frac{Q(s)}{(s^2+1)^2(s+2)^2} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{(s^2+1)^2} + \frac{E}{s+2} + \frac{F}{(s+2)^2},$$

Der zweite Summand ist für eine einfache Rücktransformation nicht geeignet, weswegen man den reellwertigen Ansatz hinsichtlich der Laplace-Rücktransformation nicht machen würde. Hinsichtlich einer einfachen Rücktransformation wäre noch der folgende gemischte Ansatz geeignet:

$$\frac{Q(s)}{(s^2+1)^2(s+2)^2} = \frac{\hat{A}s+\hat{B}}{s^2+1} + \frac{\hat{C}}{(s+i)^2} + \frac{\hat{D}}{(s-i)^2} + \frac{E}{s+2} + \frac{F}{(s+2)^2}$$

Institut für
Angewandte Mathematik

Leibniz Universität Hannover

Dr. Frank Attia, Dr. Florian Leydecker

Hannover, 02. Juni 2025

Mathematik für die Ingenieurwissenschaften III - Numerik
SoSe 2025 – Übung 9 – Lösungen

Themen

Laplace Transformation zur Lösung linearer DGLn mit konstanten Koeffizienten

- Definition 4.16
- Rechenregeln + Tabelle: Kapitel 4.2.3
- Lösung von Anfangswertaufgaben: Satz 4.31, Satz 4.34 sowie Satz 4.42 und Satz 4.45

Zentralübung

Präsenzaufgabe 9.1 [Laplace-Transformation eines AWPs (s. Satz 4.31 und zugehöriges Beispiel)]

Transformieren Sie

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = g(x), \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

gemäß Satz 4.31 bzw. zugehörigem Beispiel 4.33.

Präsenzaufgabe 9.2 [Ansatz PBZ]

Machen Sie zu

$$\frac{2s-1}{(s-1)^3(s^2+4)^2(s^2+1)}$$

den komplexwertigen Ansatz

für die Partialbruchzerlegung (**ohne** die Koeffizienten des Ansatzes zu bestimmen).
Wie ändert sich der Ansatz, wenn der Nenner zusätzlich noch den Faktor $s^2 - 9$ enthält?

Präsenzaufgabe 9.3 [PBZ und Rücktransformation]

(a) Rücktransformiere $F(s) = \frac{1}{(s-a)^n}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{C}$.

(b) Rücktransformiere $F(s) = \dfrac{s-2}{s^2 - 2s + 10}$ unter Zuhilfenahme der *Partialbruchzerlegung*.

Präsenzaufgabe 9.4 [Lsg. des lin. AWP mit hom. DGL PBZ (s. Sätze 4.42 und 4.45)]

Bei einer reellwertigen Anfangswertaufgabe (AWA) habe $Y(s) = (\mathcal{L}y)(t)$ Partialbruchzerlegung

$$Y(s) = \frac{A}{s-(4+3i)} + \frac{B}{s-(4-3i)} + \frac{C}{(s-(4+3i))^2} + \frac{D}{(s-(4-3i))^2} + \frac{E}{(s-5)} + \frac{F}{(s-5)^2} + \frac{G}{(s-5)^3}$$

mit den Koeffizienten

$$A = 6 + 7i,\ B = 6 - 7i, C = 8 + 9i,\ D = 8 - 9i, E = 10,\ F = 11 \text{ und } G = 12.$$

Bestimmen Sie

(a) die **komplexwertige** Form der Lösung $y(t)$ dieser AWA durch Rücktransformation von $Y(s)$ (s. Satz 4.42),

(b) die **reellwertige** Form der Lösung $y(t)$ dieser AWA durch Rücktransformation von $Y(s)$ (s. Satz 4.45).

Präsenzaufgabe 9.5 [AWP komplett]

Geben Sie einen Überblick zur Lösung von: *Man löse in Abhängigkeit von beliebigen $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ das folgende AWP mit $\alpha \geqslant 0$:*

$$y''(t) \qquad + 4y(t) \quad = \quad \cos(\alpha t) \qquad y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1.$$

Lösung

Es $c_1 = 0,\ c_0 = 4$ und $\mathcal{L}g(s) = (\mathcal{L}\cos(\alpha t))(s) = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$ (auch für $\alpha = 0$) und das charakteristische Polynom ist $P(s) = s^2 + 4$. Satz 4.31 oder Anwenden von a) und h_2) liefern

$$Y(s) \quad = \quad \overbrace{\frac{1}{s^2+4} \cdot \frac{s}{s^2+\alpha^2}}^{\frac{\mathcal{L}g}{P}} \quad + \quad \overbrace{y_0 \underbrace{\frac{s}{s^2+4}}_{\overset{\text{Tabelle}}{\rightsquigarrow} \cos(2t)} \quad + \quad y_1 \underbrace{\frac{1}{s^2+4}}_{\overset{\text{Tabelle}}{\rightsquigarrow} \frac{1}{2}\sin(2t)}}^{\frac{Q}{P}} \quad .$$

Somit haben wir die Lösung $(\mathcal{L}^{-1}\frac{Q}{P})(t) = y_0 \cos(2t) + \frac{y_1}{2}\sin(2t)$ des zugehörigen AWPs mit homogener DGL. Es verbleibt die Rücktransformation von $\frac{\mathcal{L}g}{P} = \frac{1}{s^2+4} \cdot \frac{s}{s^2+\alpha^2}$ zu der sehr speziellen Lösung $(\mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{L}g}{P})$ der inhomogen DGL mit homogenen ABen.
Zunächst betrachten wir den Fall $\alpha = 2$ (s. Tabelle):

$$(\mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{L}g}{P})(t) = \left(\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+4} \cdot \frac{s}{s^2+\alpha^2}\right)(t) \quad \overset{\alpha=2}{=} \quad \left(\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{4}\,\frac{2 \cdot \overbrace{2}^{\omega} \cdot s}{(s^2 + \underbrace{4}_{\omega^2})^2}\right)(t) \quad = \quad \frac{1}{4}\,t\sin(\underbrace{2}_{\omega}\,t) \quad .$$

Die Lösung für $\alpha = 2$ lautet also

$$y(t) \quad = \quad y_0 \cos(2t) \quad + \quad \frac{y_1}{2}\sin(2t) \quad + \quad \frac{1}{4}\,t\sin(2t) \qquad \alpha = 2.$$

Jetzt $0 \leqslant \alpha \neq 2$ mit komplexwertiger Partialbruchzerlegung durchführen:

$$\frac{s}{(s^2+4)(s^2+\alpha^2)} \quad = \quad \frac{c_{1,1}}{s-2i} + \frac{c_{3,1}}{s+2i} + \frac{c_{2,1}}{s-\alpha i} + \frac{c_{4,1}}{s+\alpha i}$$

bzw. im Fall $\alpha = 0$

$$\frac{1}{(s^2+4)s} \quad = \quad \frac{c_{1,1}}{s-2i} + \frac{c_{3,1}}{s+2i} + \frac{\tilde{c}_{2,1}}{s} \qquad (\text{mit } \tilde{c}_{2,1} \mathrel{\hat{=}} c_{2,1} + c_{4,1}).$$

Hier kann man jeweils, da nur einfache Nullstellen auftreten, alle $c_{i,1}$ durch die „Zuhaltemethode“ bestimmen [i. Allg.: mit $P(s)$ Multiplizieren und LGS via Koeffizientenvergleich aufstellen, s. o.]. Wir zeigen den Fall $\alpha > 0$:

- Multiplikation mit $(s-2i)$ und Einsetzen von $s = 2i$ liefert: $c_{1,1} = \frac{2i}{(4i)(-4+\alpha^2)} = \frac{1}{2\cdot(\alpha^2-4)}$.
- Multiplikation mit $(s+2i)$ und Einsetzen von $s = -2i$ liefert: $c_{3,1} = \frac{-2i}{(-4i)(-4+\alpha^2)} = \overline{c_{1,1}}$. [Hier sogar: $\overline{c_{1,1}} = c_{1,1}$.]
- Multiplikation mit $(s-\alpha i)$ und Einsetzen von $s = \alpha i$ liefert $c_{2,1} = \frac{\alpha i}{(-\alpha^2+4)(2\alpha i)} = \frac{-1}{2\cdot(\alpha^2-4)}$.
- Multiplikation mit $(s+\alpha i)$ und Einsetzen von $s = -\alpha i$ liefert $c_{4,1} = \overline{c_{2,1}} = \frac{-1}{2\cdot(\alpha^2-4)}$

Man erhält sofort die nur scheinbar komplexe Lösung [reelle Lösung in komplexer Darstellung]

$$(\mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{L}g}{P})(t) \quad = \quad \frac{1}{2(\alpha^2-4)}e^{2it} + \frac{1}{2(\alpha^2-4)}e^{-2it} + \frac{-1}{2(\alpha^2-4)}e^{\alpha it} + \frac{-1}{2(\alpha^2-4)}e^{-\alpha it}$$

Daraus kann wieder (s. auch Satz 4.42) die reelle Darstellung gewonnen werden, was hier besonders einfach und auch ohne Satz 4.42 geht, da alle komplexen Koeffizienten sogar reell sind und:

$$(\mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{L}g}{P})(t) \quad = \quad \frac{1}{2(\alpha^2-4)}\underbrace{(e^{2it} + e^{-2it})}_{2\cos(2t)} - \frac{1}{2(\alpha^2-4)}\underbrace{(e^{\alpha it} + e^{-\alpha it})}_{2\cos(\alpha t)} \quad = \quad \frac{\cos(2t)-\cos(\alpha t)}{\alpha^2-4}.$$

Ohne Zuhaltemethode, mit LGS [beachten: dies ist der Fall $\alpha > 0$, bei $\alpha = 0$ erhält man analog ein 3×3-System]:

$$\begin{aligned}
s &= \left(\tfrac{c_{1,1}}{s-2i} + \tfrac{c_{3,1}}{s+2i} + \tfrac{c_{2,1}}{s-\alpha i} + \tfrac{c_{4,1}}{s+\alpha i}\right) \cdot (s^2+4) \qquad\qquad \cdot (s^2+\alpha^2) \\
&= \left(\tfrac{c_{1,1}}{s-2i} + \tfrac{c_{3,1}}{s+2i} + \tfrac{c_{2,1}}{s-\alpha i} + \tfrac{c_{4,1}}{s+\alpha i}\right) \cdot (s-2i)(s+2i)(s-\alpha i)(s+\alpha i) \\
&= c_{1,1}(s+2i)(s^2+\alpha^2) + c_{3,1}(s-2i)(s^2+\alpha^2) + c_{2,1}(s^2+4)(s+\alpha i) + c_{4,1}(s^2+4)(s-\alpha i) \\
&= (c_{1,1}+c_{3,1}+c_{2,1}+c_{4,1}) \cdot s^3 \;+\; ((2i)c_{1,1} + (-2i)c_{3,1} + (\alpha i)c_{2,1} + (-\alpha i)c_{4,1}) \cdot s^2 \\
&\quad +(\alpha^2 c_{1,1} + \alpha^2 c_{3,1} + 4c_{2,1} + 4c_{4,1}) \cdot s \;+\; (2i\alpha^2 c_{1,1} + (-2i\alpha^2)c_{3,1} + 4i\alpha c_{2,1} + (-4i\alpha)c_{4,1})
\end{aligned}$$

Es ergibt sich durch Koeffizientenvergleich das LGS

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & \alpha & -\alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2 & 4 & 4 \\ 2\alpha^2 & -2\alpha^2 & 4\alpha & -4\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{3,1} \\ c_{2,1} \\ c_{4,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{III} - 4 \cdot \mathrm{I} \\ \frac{\mathrm{IV}-4\cdot\mathrm{II}}{2\alpha} \\ \mathrm{III} - \alpha^2 \cdot \mathrm{I} \\ \frac{\mathrm{IV}-\alpha^2\cdot\mathrm{II}}{\alpha} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha^2-4 & \alpha^2-4 & 0 & 0 \\ \alpha-4 & -\alpha+4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-\alpha^2 & 4-\alpha^2 \\ 0 & 0 & 4-\alpha^2 & -4+\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{3,1} \\ c_{2,1} \\ c_{4,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dabei ist bei Betrachtung von II und IV auch durch α teilen OK, deren Aussage $c_{1,1} = c_{3,1}$ und $4c_{4,1} = 1 - 4c_{2,1}$ für diesen Fall bleibt erhalten. Man beachte hier auch $\alpha \neq 2$, sonst wären jeweils 2 der Gleichungen gleich. Die neue 4. Zeile besagt $c_{4,1} = c_{2,1}$. Wir ehalten also (natürlich) dieselben Koeffizienten wie per Zuhaltemethode.

Andere Fälle analog, insgesamt ergibt sich:

$$y(x) \quad = \quad y_0 \cos(2t) \quad + \quad \frac{y_1}{2} \sin(2t) \quad + \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\sin^2(t) & \alpha = 0, \\ \frac{1}{4}\, t \sin(2t) & \alpha = 2, \\ \frac{\cos(2t)-\cos(\alpha t)}{\alpha^2-4} & \alpha \neq 0 \text{ und } \alpha \neq 2. \end{cases}$$

Kurzteil

Aufgabe 9.6 [Laplace-Transformierte]

Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte von

$$f(x) = 2e^{3x} - 2e^{-3x},$$

indem Sie die Rechenregeln und die Tabelle aus dem Skript benutzen.

Lösung

Aus der Tabelle für die Laplace-Transformierten folgt sofort

$$(\mathcal{L}f)(s) = \frac{2}{s-3} - \frac{2}{s+3} = \frac{12}{s^2-9}.$$

Alternativ: Es ist $f(x) = 4\sinh(3x)$. Man liest somit $(\mathcal{L}f)(s) = \frac{12}{s^2-9}$ sofort ab.

Aufgabe 9.7 [Laplace-Transformierte]

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$. Berechnen Sie die Laplace-Transformierten zu folgenden Funktionen und vereinfachen Sie die Terme so weit wie möglich.

(a) $f_1(x) = \frac{1}{a-b}(e^{ax} - e^{bx})$.

(b) $f_2(x) = \frac{1}{a-b}(a\,e^{ax} - b\,e^{bx})$.

Benutzen Sie die Rechenregeln und die Tabelle aus dem Skript.

Lösung

Aus der Tabelle für die Laplace-Transformierten folgt sofort

(a)

$$(\mathcal{L}f_1)(s) = \frac{1}{a-b}\big((\mathcal{L}e^{ax})(s) - (\mathcal{L}e^{bx})(s)\big) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}.$$

(b)

$$(\mathcal{L}f_2)(s) = \frac{1}{a-b}\big(a(\mathcal{L}e^{ax})(s) - b(\mathcal{L}e^{bx})(s)\big) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{s-a} - \frac{b}{s-b}\right) = \frac{s}{(s-a)(s-b)}.$$

Alternativ lässt sich die Transformierte unter Verwendung von $f_2 = f_1'$ und der Vorschrift $\mathbf{h}_1$ aus Satz 5.25 berechnen:

$$(\mathcal{L}f_2) = (\mathcal{L}f_1') = s(\mathcal{L}f_1) - \underbrace{f_1(0^+)}_{=0} = \frac{s}{(s-a)(s-b)}.$$

Aufgabe 9.8 [Anwendung der Laplace-Transformation auf AWPs]

Wie lautet bei Anwendung der Laplace-Transformation die Gleichung zur Bestimmung von $Y(s) := (\mathcal{L}y)(s)$ der folgenden Anfangswertaufgabe?

$$y'' + 4y = 1 \qquad \text{mit} \quad y(0) = 0.1,\ y'(0) = 0.2.$$

Benutzen Sie die Rechenregeln und die Tabelle aus dem Skript.

Lösung

Man verwendet Satz 5.31 und Beispiel 5.33

$$P(s) = s^2 + 4, \text{ und } Q(s) = s^0[0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2] + s^1[1 \cdot 0.1] = 0.1s + 0.2.$$

Dies liefert $(s^2+4)Y(s) = (\mathcal{L}\,1)(s) + \frac{s+2}{10}$ und somit wie oben $Y(s) = \frac{s^2+2s+10}{10s(s^2+4)}$.
Alternativ: Anwenden der Laplace-Transformation:

$$(\mathcal{L}\,y'' + 4y)(s) = (\mathcal{L}\,1)(s) \quad \overset{\text{S.4.22a)}}{\Longleftrightarrow} \quad (\mathcal{L}y'')(s) + 4(\mathcal{L}y)(s) = (\mathcal{L}\,1)(s).$$

Man erhält somit mit $Y(s) := \mathcal{L}(y)(s)$ und Verwendung der Vorschrift $\mathbf{h}_2$) aus Satz 5.25:

$$s^2Y(s) - \underbrace{y(0+)}_{=0.1}s - \underbrace{y'(0+)}_{=0.2} + 4Y(s) = \frac{1}{s} \quad \Longleftrightarrow \quad (s^2+4)Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{s+2}{10}$$

$$\Longleftrightarrow \quad Y(s) = \frac{s^2+2s+10}{10s(s^2+4)}$$

Aufgabe 9.9 [Inverse Laplace-Transformation]

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$. Berechnen Sie die inversen Laplace-Transformierten zu den folgenden Funktionen

(a) $F(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$,

(b) $F(s) = \frac{s}{(s-a)(s-b)}$.

Lösung

In Aufgabe 9.7 wurden die Laplace-Transformierten der Funktionen $f(x) = \frac{1}{a-b}(e^{ax} - e^{bx})$ und $f(x) = \frac{1}{a-b}(a\,e^{ax} - b\,e^{bx})$ bestimmt. Diese stimmen mit den hier angegeben Funktionen $F(s)$ überein. Es gilt für die inversen Laplace-Transformierten somit $\left(\mathcal{L}^{-1}F(s)\right)(x) = \left(\mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}f(x)\right)(s)\right)(x) = f(x)$.
Alternativ geht man wie folgt vor:

(a) Man rechnet nach:

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} \overset{\substack{\text{Ansatz}\\\text{PBZ}}}{=} \frac{c_{1,1}}{s-a} + \frac{c_{2,1}}{s-b} \overset{\substack{\text{Lösen}\\\text{PBZ}}}{=} \frac{1}{a-b} \cdot \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right).$$

Damit erhält man:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right) = \frac{1}{a-b} \cdot \left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-b}\right)\right) = \frac{1}{a-b} \cdot \left(e^{at} - e^{bt}\right).$$

(b) Man rechnet erneut nach:

$$\frac{s}{(s-a)(s-b)} = \ldots = \frac{1}{a-b} \cdot \left(\frac{a}{s-a} - \frac{b}{s-b}\right)$$

und erhält

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right) = \frac{1}{a-b} \cdot \left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a}{s-a}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{b}{s-b}\right)\right) = \frac{1}{a-b} \cdot \left(ae^{at} - be^{bt}\right).$$

Aufgabenteil

Aufgabe 9.10 [Periodizitätssatz]

Berechnen Sie zu der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{für } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{für } \pi < t < 2\pi \end{cases},$$

die periodisch mit der Periode 2π fortgesetzt wird, die Laplace-Transformierte unter Zuhilfenahme des Periodizitätssatzes.

Lösung

Wir wenden den Periodizitätssatz mit $T = 2\pi$ an.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}f)(s) &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-st} f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st} \sin(t)\,dt \\
&\overset{\text{Formels.}}{=} \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \left[\frac{e^{-st}(-s\sin(t)-\cos(t))}{s^2+1}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \left[\frac{1+e^{-s\pi}}{s^2+1}\right] = \frac{1}{(1-e^{-s\pi})(s^2+1)}.
\end{aligned}$$

Die Stammfunktion von $\int_0^{\pi} e^{-st}\sin(t)\,dt$ kann aus einer Integrationstabelle (Formelsammlung) entnommen werden. Alternativ berechnet man das Integral über 2-fache partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} e^{-st}\sin(t)\,dt &= \underbrace{\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\sin(t)\right]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{s}\int_0^{\pi} e^{-st}\cos(t)\,dt \\
&= \left[-\frac{1}{s^2}e^{-st}\cos(t)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{s^2}\int_0^{\pi} e^{-st}\sin(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung erhält man nun:

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \left(1+\tfrac{1}{s^2}\right)\int_0^{\pi} e^{-st}\sin(t)\,dt = \left[-\frac{1}{s^2}e^{-st}\cos(t)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{s^2}\cdot(e^{-\pi s}+1) \\
\Leftrightarrow \quad & \int_0^{\pi} e^{-st}\sin(t)\,dt = \frac{1}{(1+\frac{1}{s^2})}\cdot\frac{1}{s^2}\cdot(e^{-\pi s}+1) = \frac{1+e^{-\pi s}}{(s^2+1)}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 9.11 [Inverse Laplace-Transformation]

Bestimmen Sie für folgende Funktionen die inverse Laplace-Transformierte:

(a) $\dfrac{1}{s^2-3}$, **(b)** $\dfrac{3s-5}{4s^2-4s+37}$, **(c)** $\dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}$.

Lösung

Vorbemerkung: Alle Aufgabenteile lassen sich alternativ auch anders lösen (teilweise auch einfacher, z. B. im Teil (b) und wenn man das Ergebnis in der „reellwertigen“ Form angeben möchte).
Wir lösen hier aber mit „Schema F“, also über einen Ansatz mit komplexwertiger PBZ.

(a) Es gilt: $s^2-3 = (s-\sqrt{3})^1(s+\sqrt{3})^1$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = \sqrt{3}$ mit Vielfachheit 1 und $\lambda_2 = -\sqrt{3}$ mit Vielfachheit 1. Der entsprechende PBZ-Ansatz lautet

$$\frac{1}{s^2-3} = \frac{c_{1,1}}{s-\sqrt{3}} + \frac{c_{2,1}}{s+\sqrt{3}}, \tag{9.11 1}$$

was bedeutet, dass die Rücktransformierte die Form

$$f(x) = c_{1,1}e^{\sqrt{3}x} + c_{2,1}e^{-\sqrt{3}x}$$

hat. Der PBZ-Ansatz (9.11 1) liefert nach Multiplikation mit dem Nenner $s^2 - 3$

$$1 \;=\; c_{1,1}\cdot(s+\sqrt{3}) + c_{2,1}\cdot(s-\sqrt{3}) \quad\Longleftrightarrow\quad 0\cdot s + 1 \;=\; (c_{1,1}+c_{2,1})s + \sqrt{3}(c_{1,1}-c_{2,1})$$

und nach Koeffizientenvergleich das LGS / die Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Die Rücktransformierte lautet also $f(x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}x} - \frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}x}$.

Bemerkung: Das könnte man auch als $f(x) \;=\; \frac{\sinh(\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}}$ schreiben.

(b) Wir normieren den Nenner so, dass die höchste Potenz von s mit 1 multipliziert wird und berechnen die Nullstellen [das ist alternativ mit der pq-Formel möglich]:

$$\frac{3s-5}{4s^2-4s+37} = \frac{3s-5}{4[(s-1/2)^2+9]} = \frac{\frac{3}{4}s-\frac{5}{4}}{(s-1/2)^2+9}$$

Der Nenner $(s-1/2)^2+9$ hat also die konjugiert komplexwertigen Nullstellen $\frac{1}{2}\pm\sqrt{-9} = \frac{1}{2}\pm 3i$ jeweils mit Vielfachheit 1: $(s-1/2)^2+9 = (s-(\frac{1}{2}+3i))^1(s-(\frac{1}{2}-3i))^1$, und der entsprechende PBZ-Ansatz lautet

$$\frac{\frac{3}{4}s-\frac{5}{4}}{(s-1/2)^2+9} \;=\; \frac{c_{1,1}}{s-(\frac{1}{2}+3i)} + \frac{c_{2,1}}{s-(\frac{1}{2}-3i)}, \qquad (9.11\ 2)$$

wobei da anfangs alle Zahlen reell waren $c_{2,1} = \overline{c_{1,1}}$ gilt, was bedeutet, dass die Rücktransformierte die Form

$$f(x) \;=\; c_{1,1}e^{(\frac{1}{2}+3i)x} + \overline{c_{1,1}}e^{(\frac{1}{2}-3i)x} \overset{\text{Satz 5.45}}{=} e^{\frac{1}{2}x}\big(2\operatorname{Re}(c_{1,1})\cos(3x) - 2\operatorname{Im}(c_{1,1})\sin(3x)\big)$$

hat. Der PBZ-Ansatz (9.11 2) liefert nach Multiplikation mit dem Nenner $(s-1/2)^2+9$

$$\frac{3}{4}s-\frac{5}{4} \;=\; c_{1,1}\cdot(s-(\frac{1}{2}-3i)) + c_{2,1}\cdot(s-(\frac{1}{2}+3i)) \Longleftrightarrow \frac{3}{4}s-\frac{5}{4} \;=\; (1\cdot c_{1,1}+1\cdot c_{2,1})s + ((-\frac{1}{2}+3i)c_{1,1}+(-\frac{1}{2}-3i)c_{2,1})\cdot 1,$$

und nach Koeffizientenvergleich das LGS / die Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2}+3i & -\frac{1}{2}-3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -5/4 \end{pmatrix} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8}+\frac{7}{48}i \\ \frac{3}{8}-\frac{7}{48}i \end{pmatrix}.$$

Die Rücktransformierte lautet also

$$f(x) \;=\; (\tfrac{3}{8}+\tfrac{7}{48}i)e^{(\frac{1}{2}+3i)x} + (\tfrac{3}{8}-\tfrac{7}{48}i)e^{(\frac{1}{2}-3i)x} \overset{\text{Satz 5.45}}{=} e^{\frac{1}{2}x}\big(\tfrac{3}{4}\cos(3x) - \tfrac{7}{24}\sin(3x)\big).$$

(c) Hier zerlegen wir den den vorgelegten Bruch in Partialbrüche durch den Ansatz:

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{3s+7}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1} \Rightarrow A = 4,\ B = -1$$

Mit dem Linearitätssatz und bekannten Laplace-Transformationen folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right] &= 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] \\ &= 4e^{3t} - e^{-t} \quad \text{für } s > 3. \end{aligned}$$

Alternativ wieder gemäß dem Abschnitt „Rücktransformation: Spezialfall quadratischer Nenner“, Seite 98, wie bei **(a)**.

Aufgabe 9.12 [Lösung von AWPs]

Lösen Sie folgende Anfangswertaufgaben (auf $[0,\infty[$) mit Hilfe der Laplace-Transformation.

(a) $y''(x)+y(x)=x, \quad y(0)=1,\ y'(0)=-2.$

(b) $y''(x)+4y(x)=x, \quad y(0)=y'(0)=1.$

(c) $y''(x)+2y'(x)+5y(x)=e^{-x}\sin x, \quad y(0)=0,\ y'(0)=1$

(d) $y'''(x)-3y''(x)+3y'(x)-y(x)=x^2\cdot e^x$ mit $y(0)=1,\ y'(0)=0,\ y''(0)=-2.$

Lösung

(a) Anwendung der Laplace-Transformation ergibt (vergleiche Satz 5.31 und das Beispiel darunter, $\rightsquigarrow Q(s)=1\cdot[0\cdot 1+1\cdot(-2)]+s\cdot[1\cdot 1]$):

$$\left.\begin{aligned} P(s) &= s^2+1 \\ Q(s) &= (s-2)\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad Y(s)=\frac{(\mathcal{L}g)(s)+Q(s)}{P(s)}=\frac{\frac{1}{s^2}+(s-2)}{s^2+1}=\frac{1}{s^2(s^2+1)}+\frac{s-2}{s^2+1}.$$

Bemerkung: Wenn die Nullstellen der Nennerpolynome bekannt sind, kann man immer die Summanden getrennt behandeln. Wenn für $\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ keine PBZ möglich ist [bspw. wenn die rechte Seite der DGL statt x die Funktion $g(x)=\sqrt{x}$ wäre], dann wäre dies der Standardweg und man würde den Summanden $\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ so behandeln:

1.) PBZ von $\frac{1}{P(s)}$, **2.)** Rücktransf. $\rightsquigarrow \tilde{y}(x)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P(s)}\right)$, **3.)** $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}\right) = g(x)*\tilde{y}(x)$.

Hier ist auch für $\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ PBZ möglich, sodass man die Summanden zusammenfassen kann (Erweitern des ersten Bruchs mit s^2)

$$\frac{(\mathcal{L}g)(s)+Q(s)}{P(s)} = \frac{\frac{1}{s^2}+(s-2)}{s^2+1} = \frac{1+s^3-2s^2}{s^2(s^2+1)}.$$

und nach Bestimmung der Nullstellen von $s^2+1=(s-i)^1(s+i)^1$ alles mit *einer* komplexwertigen PBZ lösen kann, Ansatz:

$$\frac{s^3-2s^2+1}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-i}+\frac{D}{s+i}, \tag{9.12 3}$$

wobei, da in der DGL alle Koeffizienten und alle ABen reell waren, hier für die Koeffizienten C, D der konjugiert komplexen Nullstellen $\lambda_3=0+1\cdot i$ und $\lambda_4=0-i$ gilt: $D=\overline{C}$. An dieser Stelle sieht man, dass die Lösung des AWP mit $E=2\,\mathrm{Re}(C)$ und $F=-2\,\mathrm{Im}(C)$ die folgende Form hat:

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{0x}+B\frac{x^1}{1!}e^{0x}+Ce^{ix}+\overline{C}e^{-ix} && (9.12\ 4)\\ &= (A+Bx)+Ce^{ix}+\overline{C}e^{-ix} && (9.12\ 5)\\ &\underset{\lambda_3=0+1\cdot i}{\overset{\text{Satz 5.45}}{=}} (A+Bx)+e^{0\cdot x}\big(E\cos(1\cdot x)+F\sin(1\cdot x)\big). && (9.12\ 6)\end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner $s^2(s^2+1) = s^2(s-i)(s+i)$ der linken Seite beim PBZ-Ansatz (9.12 3) erhält man

$$\begin{aligned} s^3-2s^2+1 &= As(s^2+1)+B(s^2+1)+Cs^2(s+i)+Ds^2(s-i)\\ &= (A+C+D)s^3+(B+iC-iD)s^2+As+B,\end{aligned}$$

und somit nach Koeffizientenvergleich das LGS

$$B=1, \quad A=0, \quad C+D=1 \text{ und } \quad iC-iD=-3$$

und somit für C und D das LGS / die Lösung

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C\\ D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix}C\\ D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\\ \frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\end{pmatrix}$$

gibt. Wir erhalten also die Lösung

$$y(x) \overset{(9.12\ 5)}{=} (0+x)+\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}i\right)e^{ix}+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{2}i\right)e^{-ix} \overset{(9.12\ 6)}{=} x+\big(\cos(x)-3\sin(x)\big).$$

(b) Anwendung der Laplace-Transformation ergibt (vergleiche Satz 5.31 und das Beispiel darunter, $\rightsquigarrow$ $Q(s) = 1 \cdot [0 \cdot 1 + 1 \cdot 1] + s \cdot [1 \cdot 1]$):

$$\left.\begin{aligned} P(s) &= s^2+4 \\ Q(s) &= (s+1) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{(\mathcal{L}g)(s)+Q(s)}{P(s)} = \frac{\frac{1}{s^2}+(s+1)}{s^2+4} = \frac{1}{s^2(s^2+4)} + \frac{s+1}{s^2+4}.$$

Bemerkung: Wenn die Nullstellen der Nennerpolynome bekannt sind, kann man immer die Summanden getrennt behandeln. Wenn für $\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ keine PBZ möglich ist [bspw. wenn die rechte Seite der DGL statt x die Funktion $g(x) = \sqrt{x}$ wäre], dann wäre dies der Standardweg und man würde den Summanden $\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ so behandeln:

1.) PBZ von $\frac{1}{P(s)}$, **2.)** Rücktransf. $\rightsquigarrow \tilde{y}(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P(s)}\right)$, **3.)** $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}\right) = g(x) * \tilde{y}(x)$.

Hier ist auch für $\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ PBZ möglich, sodass man die Summanden zusammenfassen kann (Erweitern des ersten Bruchs mit s^2)

$$\frac{(\mathcal{L}g)(s)+Q(s)}{P(s)} = \frac{\frac{1}{s^2}+(s+1)}{s^2+4} = \frac{1+s^3+s^2}{s^2(s^2+4)}.$$

und nach Bestimmung der Nullstellen von $s^2+4 = (s-2i)^1(s+2i)^1$ alles mit *einer* komplexwertigen PBZ lösen kann, Ansatz:

$$\frac{s^3+s^2+1}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-2i} + \frac{D}{s+2i}, \tag{9.12 7}$$

wobei, da in der DGL alle Koeffizienten und alle ABen reell waren, hier für die Koeffizienten C, D der konjugiert komplexen Nullstellen $\lambda_3 = 0 + 2 \cdot i$ und $\lambda_4 = 0 - 2i$ gilt: $D = \overline{C}$. An dieser Stelle sieht man, dass die Lösung des AWP mit $E = 2\,\mathrm{Re}(C)$ und $F = -2\,\mathrm{Im}(C)$ die folgende Form hat:

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{0x} + B\frac{x^1}{1!}e^{0x} + Ce^{2ix} + \overline{C}e^{-2ix} && (9.12\ 8) \\ &= (A+Bx) + Ce^{2ix} + \overline{C}e^{-2ix} && (9.12\ 9) \\ &\underset{\lambda_3 = 0+2\cdot i}{\overset{\text{Satz 4.45}}{=}} (A+Bx) + e^{0\cdot x}\big(E\cos(2x) + F\sin(2x)\big). && (9.12\ 10) \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner $s^2(s^2+4) = s^2(s-2i)(s+2i)$ der linken Seite beim PBZ-Ansatz (9.12 7) erhält man

$$\begin{aligned} s^3+s^2+1 &= As(s^2+4) + B(s^2+4) + Cs^2(s+2i) + Ds^2(s-2i) \\ &= (A+C+D)s^3 + (B+2iC-2iD)s^2 + 4As + 4B, \end{aligned}$$

und aus

$$s^3+s^2+1 = (A+C+D)s^3 + (B+2iC-2iD)s^2 + 4As + 4B,$$

ergibt sich nach Koeffizientenvergleich das LGS

$$B = 1/4, \quad A = 0, \quad C+D = 1 \text{ und } \quad 2iC - 2iD = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}$$

und somit für C und D das LGS / die Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8i & -8i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{16}i \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{16}i \end{pmatrix}$$

gibt. Wir erhalten also die Lösung

$$y(x) \overset{(9.12\ 5)}{=} (0 + \tfrac{1}{4}x) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{16}i)e^{2ix} + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{16}i)e^{-2ix} \overset{(9.12\ 6)}{=} \tfrac{1}{4}x + \big(\cos(2x) + \tfrac{3}{8}\sin(2x)\big).$$

(c) Anwendung der Laplace-Transformation ergibt (Satz 4.31/Beispiel darunter $\rightsquigarrow Q(s) = 1 \cdot [2 \cdot 0 + 1 \cdot 1] + s^2 \cdot [1 \cdot 0]$):

$$\left.\begin{aligned} P(s) &= s^2+2s+5 \\ Q(s) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{(\mathcal{L}g)(s)+Q(s)}{P(s)} = \frac{\frac{1}{(s+1)^2+1}+1}{(s+1)^2+4} = \frac{1}{((s+1)^2+1)((s+1)^2+4)} + \frac{1}{(s+1)^2+4}.$$

Bemerkung: Wenn die Nullstellen der Nennerpolynome bekannt sind, kann man immer die Summanden getrennt behandeln. Wenn für $\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ keine PBZ möglich ist [bspw. wenn die rechte Seite der DGL statt $e^{-x}\sin(x)$ die Funktion $g(x) = \sqrt{x}$ wäre], dann wäre dies der Standardweg und man würde den Summanden $\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ so behandeln:

1.) PBZ von $\frac{1}{P(s)}$, **2.)** Rücktransf. $\rightsquigarrow \tilde{y}(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P(s)}\right)$, **3.)** $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}\right) = g(x) * \tilde{y}(x)$.

Hier ist auch für $\frac{(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ PBZ möglich, sodass man die Summanden zusammenfassen kann (Erweitern des ersten Bruchs mit s^2)

$$\frac{(\mathcal{L}g)(s)+Q(s)}{P(s)} = \frac{\frac{1}{(s+1)^2+1}+1}{(s+1)^2+4} = \frac{1+(s+1)^2+1}{((s+1)^2+1)((s+1)^2+4)} = \frac{s^2+2s+3}{((s+1)^2+1)((s+1)^2+4)}.$$

und nach Bestimmung der Nullstellen von $(s+1)^2+1 = \big(s-(-1+i)\big)^1\big(s-(-1-i)\big)^1$ und von $(s+1)^2+4 = \big(s-(-1+2i)\big)^1\big(s-(-1-2i)\big)^1$ alles mit *einer* komplexwertigen PBZ lösen kann, Ansatz:

$$\frac{s^2+2s+3}{((s+1)^2+1)\cdot((s+1)^2+4)} = \frac{A}{s-(-1+i)} + \frac{B}{s-(-1-i)} + \frac{C}{s-(-1+2i)} + \frac{D}{s-(-1-2i)}, \tag{9.12 11}$$

wobei, da in der DGL alle Koeffizienten und alle ABen reell waren,

hier für die Koeffizienten A, B der konjugiert komplexen Nullstellen $\lambda_1 = 1+i$ und $\lambda_2 = 1-i$ gilt: $B = \overline{A}$,

und für die Koeffizienten C, D der konjugiert komplexen Nullstellen $\lambda_3 = 1+2i$ und $\lambda_4 = 1-2i$ gilt: $D = \overline{C}$.

Die Lösung des AWP hat mit $E = 2\,\mathrm{Re}(A)$ und $F = -2\,\mathrm{Im}(A)$ und $G = 2\,\mathrm{Re}(C)$ und $H = -2\,\mathrm{Im}(C)$ die folgende Form:

$$y(x) = Ae^{(-1+i)x} + \overline{A}e^{(-1-i)x} + Ce^{(-1+2i)x} + \overline{C}e^{(-1-2i)x} \tag{9.12 12}$$

$$\overset{\text{Satz 4.45}}{=} \underbrace{e^{-1\cdot x}\big(E\cos(1\cdot x) + F\sin(1\cdot x)\big)}_{\lambda_1=(-1+1\cdot i)} + \underbrace{e^{-1\cdot x}\big(G\cos(2x) + H\sin(2x)\big)}_{\lambda_3=(-1+2\cdot i)}. \tag{9.12 13}$$

Der PBZ-Ansatz (9.12 11) von weiter oben,

$$\frac{A}{s-(-1+i)} + \frac{B}{s-(-1-i)} + \frac{C}{s-(-1+2i)} + \frac{D}{s-(-1-2i)} = \frac{s^2+2s+3}{((s+1)^2+1)\cdot((s+1)^2+4)},$$

könnte wie in den vorigen Aufgabenteilen mit dem Nenner der linken Seite multipliziert werden und man erhielte ein 4×4-LGS, was hier aber realtiv aufwendig wäre. Dieses Beispiel wird aber genutzt, um die „Zuhaltemethode“ zu demonstrieren, die immer anwendbar ist, wenn man nur einfache Nullstellen hat.

Für A: Wir multiplizieren den Ansatz mit dem Linearfaktor $(s-\lambda_1) = (s-(-1+i))$ der zugehörigen Nullstelle λ_1, beachte dazu für die rechte Seite $(s+1)^2+1 = \big(s-(-1+i)\big)\big(s-(-1-i)\big)$,

$$A + \frac{B(s-(-1+i))}{s-(-1-i)} + \frac{C(s-(-1+i))}{s-(-1+2i)} + \frac{D(s-(-1+i))}{s-(-1-2i)} = \frac{s^2+2s+3}{(s-(-1-i))\cdot((s+1)^2+4)}$$

und setzen danach für s eben diese Nullstelle $\lambda_1 = (-1+i)$ ein:

$$A + 0+0+0 = \frac{(-1+i)^2+2\cdot(-1+i)+3}{((-1+i)-(-1-i))\cdot(((-1+i)+1)^2+4)} = \ldots = 0 - \tfrac{1}{6}i.$$

Für B könnte man analog vorgehen, hier weiß man aber $B = \overline{A} = 0 + \frac{1}{6}i$.

Für C (analog, aber kürzer): Wir multiplizieren den Ansatz mit dem Linearfaktor $(s-\lambda_3) = (s-(-1+2i))$ der zugehörigen Nullstelle λ_3, beachte dazu für die rechte Seite $(s+1)^2+4 = \big(s-(-1+2i)\big)\big(s-(-1-2i)\big)$,

$$\ldots = \frac{s^2+2s+3}{((s+1)^2+1)\cdot(s-(-1-2i))}$$

und setzen danach für s eben diese Nullstelle $s = \lambda_3 = (-1+2i)$ ein:

$$C = \frac{(-1+2i)^2+2\cdot(-1+2i)+3}{(((-1+2i)+1)^2+1)\cdot((-1+2i)-(-1-2i))} = \ldots = 0 - \tfrac{1}{6}i.$$

Für D könnte man analog vorgehen, hier weiß man aber $D = \overline{C} = 0 + \frac{1}{6}i$.

Wir erhalten also die Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &\overset{(9.12\,12)}{=} (0-\tfrac{1}{6}i)e^{(-1+i)x} + (0+\tfrac{1}{6}i)e^{(-1-i)x} + (0-\tfrac{1}{6}i)e^{(-1+2i)x} + (0+\tfrac{1}{6}i)e^{(-1-2i)x} \\ &\overset{(9.12\,13)}{=} e^{-1\cdot x}(0\cdot\cos(x) + \tfrac{1}{3}\sin(x)) + e^{-1\cdot x}(0\cdot\cos(2x) + \tfrac{1}{3}\sin(2x)) \\ &= \tfrac{1}{3}e^{-x}(\sin(x)+\sin(2x)). \end{aligned}$$

(d) Statt mit P und Q führen wir hier exemplarisch die Transformation mittels der Rechenregeln a) „Linearität“ und h_2) „Transformation der Ableitungen“ durch:

$$\mathcal{L}[y'''] - 3\mathcal{L}[y''] + 3\mathcal{L}[y'] - \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[x^2e^x]$$

und weiter

$$(s^3Y - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)) - 3(s^2Y - sy(0) - y'(0)) + 3(sY - y(0)) - Y = \frac{2}{(s-1)^3}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(s^3 - 3s^2 + 3s - 1)}_{=(s-1)^3}Y - s^2 + 3s - 1 = \frac{2}{(s-1)^3}$$

Wenn man sieht, dass $s^2 - 3s + 1 = (s-1)^2 - (s-1) - 1$ gilt, kann man sich die PBZ sparen und stattdessen umformen:

$$\begin{aligned}\Rightarrow Y &= \frac{s^2 - 3s + 1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}\\ &= \frac{(s-1)^2 - (s-1) - 1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}\\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}\end{aligned}$$

Rücktransformation nach Formelsammlung:

$$y(x) = e^x - xe^x - \frac{x^2e^x}{2} + \frac{x^5e^x}{60}.$$

Laplace-Tabellen aus dem Skript

Skript-Tabelle 4.2: Weitere Laplace-Transformierte $F(s) := \mathcal{L}f(s) := (\mathcal{L}f(t))(s)$ von $f : (0,\infty) \to \mathbb{C}$ mit $s \in \mathbb{C}$ und für $\operatorname{Re} s > s_0$ (dabei: $n \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{C}$):

$f(t)$	$F(s)$	$\operatorname{Re} s > s_0 = \dots$
$\frac{t^n}{n!} e^{\lambda t}$	$\frac{1}{(s-\lambda)^{n+1}}$	$\operatorname{Re}\lambda$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s-\lambda}$	$\operatorname{Re}\lambda$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	0

Skript-Tabelle 4.1: Laplace Transformierte $F(s) := \mathcal{L}f(s) := (\mathcal{L}f(t))(s)$ von $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $s \in \mathbb{R}$ und für $s > s_0$ (dabei: $n \in \mathbb{N},\ a, k, \omega \in \mathbb{R}, a \geqslant 0$

$f(t)$	$F(s)$	$s > s_0 = \dots$
e^{kt}	$\frac{1}{s-k}$	k
1	$\frac{1}{s}$	0
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	0
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	0
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\pi/s}$	0
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\lvert\omega\rvert$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\lvert\omega\rvert$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
$\sin^2(t)$	$\frac{2}{s(s^2+4)}$	0
$\cos^2(t)$	$\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$	0
$t \sin(\omega t)$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$	0
$t \cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	0
$\frac{\sin(\omega t)}{t}$	$\arctan(\frac{\omega}{s})$	0
$H(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	0
$\frac{t^n}{n!} e^{kt}$	$\frac{1}{(s-k)^{n+1}}$	k
$e^{kt}\cos(\omega t)$	$\frac{s-k}{(s-k)^2+\omega^2}$	k
$e^{kt}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-k)^2+\omega^2}$	k
$e^{kt}\cosh(\omega t)$	$\frac{s-k}{(s-k)^2-\omega^2}$	$k+\lvert\omega\rvert$
$e^{kt}\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-k)^2-\omega^2}$	$k+\lvert\omega\rvert$
$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$	0
$\delta(t-a)$	e^{-as}	0

Zusatzaufgaben

Aufgabe 9.13 [Rechenregeln]

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Laplace-Transformierten, indem Sie die Rechenregeln und die Tabelle aus dem Skript benutzen.

(a) $\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\,dt$,

(b) $\int_0^\infty t\cdot e^{-2t}\cdot\cos(t)\,dt$.

Lösung

(a) Problem: Die einzelnen Integrale $\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ und $\int_0^\infty \frac{e^{-3t}}{t}\,dt$ existieren nicht. Verwendung der Laplace-Transformation ergibt aber:

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{1-e^{-2t}}{t}e^{-t}\,dt = \left(\mathcal{L}\,\frac{1-e^{-2t}}{t}\right)(1).$$

Nach L'Hospital ist $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{t} = 2$. Weiterhin gilt $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t} = 0$. Damit ist $|\frac{f(t)}{t}| \leqslant M = Me^{0\cdot t}$ für alle $t \geqslant 0$. Für $f(t) = 1-e^{-2t}$ ist somit der Divisionssatz (Satz 5.25**f**) anwendbar ($k=0$) und es gilt:

$$\begin{aligned} I = \left(\mathcal{L}\,\frac{1-e^{-2t}}{t}\right)(1) &\overset{\text{S.4.25f)}}{=} \int_1^\infty \left(\mathcal{L}(1-e^{-2t})\right)(u)\,du \\ &\overset{\text{S.4.22a)}}{=} \int_1^\infty (\mathcal{L}1)(u) - (\mathcal{L}e^{-2t})(u)\,du \\ &\overset{\text{Tabelle}}{=} \int_1^\infty \frac{1}{u} - \frac{1}{u+2}\,du \\ &= \Big[\ln(u) - \ln(u+2)\Big]_1^\infty \\ &= \left[\ln\left(\frac{u}{u+2}\right)\right]_1^\infty = -\ln(\tfrac{1}{3}) = \ln(3). \end{aligned}$$

(b) Es ist $I = \int_0^\infty t\cdot e^{-2t}\cdot\cos(t)\,dt = \mathcal{L}(t\cdot\cos(t))(2)$. Nach Satz 4.22$\mathbf{e}_1$) mit $f(t) = \cos(t)$ und der Tabelle gilt

$$(\mathcal{L}t\cos(t))(s) \overset{\text{S.4.22e}_1)}{=} -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}\cos(t))(s) \overset{\text{Tabelle}}{=} -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+1} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} \quad\Longrightarrow\quad I = \frac{3}{25}.$$

Aufgabe 9.14 [Laplace-Transformierte einer Stammfunktion]

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte des Integralsinus

$$\mathrm{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin(x)}{x}\,dx,$$

indem Sie zunächst die Laplace-Transformierte von $\frac{\sin(\omega t)}{t}$ mit Hilfe der Rechenregeln und der Tabelle aus dem Skript bestimmen.

Lösung

Nach Aufgabenstellung berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{L}\,\frac{\sin(\omega t)}{t}\right)(s) &\overset{\text{S.5.25f)}}{=} \int_s^\infty \left(\mathcal{L}\sin(\omega t)\right)(u)\,du \\ &\overset{\text{Tabelle}}{=} \int_s^\infty \frac{\omega}{u^2+\omega^2}\,du \\ &= \frac{1}{\omega}\int_s^\infty \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\omega}\right)^2}\,du \\ &= \left[\arctan\left(\tfrac{u}{\omega}\right)\right]_s^\infty \\ &= \tfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\tfrac{s}{\omega}\right). \end{aligned}$$

Man erhält hiermit für $s \in \mathbb{R}, s > 0$ (siehe auch Tabelle) und mit $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2,\ x > 0$

$$\left(\mathcal{L}\,\frac{\sin(\omega t)}{t}\right)(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{s}{\omega}\right) = \arctan(\frac{\omega}{s}).$$

Damit erhalten wir für $\omega = 1$ mit Satz 5.25**g**) wegen $|\frac{\sin(x)}{x}| \leqslant |\frac{x}{x}| \leqslant 1$ für $s > 0$:

$$(\mathcal{L}\mathsf{Si})(s) = \left(\mathcal{L}\int_0^t \frac{\sin(x)}{x}\,dx\right)(s) \overset{\text{S.4.25}\mathbf{g})}{=} \frac{1}{s}\left(\mathcal{L}\,\frac{\sin(x)}{x}\right)(s) = \frac{1}{s}\arctan\left(\frac{1}{s}\right).$$

Aufgabe 9.15 [Lapalce-Transformierte]

(a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Induktion oder mit dem binomischen Lehrsatz: Mit $p_n(s) = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \ldots + \frac{s^n}{n!}$ gilt

$$(\mathcal{L}(x+a)^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} p_n(as), \qquad \text{für } s > 0.$$

(b) Berechnen Sie die Laplace-Transformation von $f(x) = (x-3)^2 e^{2(x-4)}$, indem Sie die Rechenregeln und die Tabelle aus dem Skript, sowie das Ergebnis aus Aufgabenteil **(a)** benutzen.

Lösung

(a) Beweis durch vollständige Induktion. (Alternative mit der allgemeinen binomischen Formel.)
Induktionsanfang: Für $n = 1$ und $s > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}(x+a)^1)(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}(x+a)dx \\ &= \int_0^\infty e^{-sx}x dx + a\int_0^\infty e^{-sx}dx \\ &= \frac{1}{s^2} + \frac{a}{s} \\ &= \frac{1}{s^2}(1+as)\end{aligned}$$

Ferner gilt für den Übergang $n \Rightarrow n+1$: Sei $(\mathcal{L}(x+a)^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} p_n(as)$. Dann gilt für $s > 0$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}(x+a)^{n+1})(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}(x+a)^{n+1}dx \\ &\overset{\text{mit part. Integration}}{=} \left[-\frac{1}{s}e^{-sx}(x+a)^{n+1}\right]_0^\infty + \frac{n+1}{s} \underbrace{\int_0^\infty e^{-sx}(x+a)^n dx}_{=\frac{n!}{s^{n+1}}p_n(as) \text{ nach Ind. Vors}} \\ &= 0 - (-\frac{1}{s}a^{n+1}) + \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}p_n(as) \\ &= \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}\frac{(sa)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}p_n(as) \\ &= \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}p_{n+1}(as).\end{aligned}$$

Die Bedingung $s > 0$ folgt hierbei aus der Linearität der Laplacetransformation.
Alternativ zeigt man das Gewünschte unter Verwendung der Linearität der Laplacetransformation, der Tabelle zur Laplacetransformation und dem binomischen Lehrsatz:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}(x+a)^n)(s) &= \left(\mathcal{L}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k}\right)(s) \\ &\overset{\text{Linearität}}{=} \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} a^k (\mathcal{L}x^{n-k})(s)\right] \\ &\overset{\text{Tabelle}}{=} \sum_{k=0}^n \left[\frac{n!}{k!(n-k)!} a^k \frac{(n-k)!}{s^{n-k+1}}\right] \\ &= \frac{n!}{s^{n+1}} \sum_{k=0}^n a^k \frac{s^k}{k!}.\end{aligned}$$

Auch hier gilt offensichtlich $s > 0$ (vgl. Tabelle im Skript).

(b) Hier lässt sich eine Kombination aus Satz 4.22**b**) und dem Ergebnis aus Aufgabenteil **(a)** anwenden. Man erhält für $s > 2 + s_{0,f}$ (siehe S.4.22**b**) und $s_{0,f} = 0$ aus Aufgabenteil **(a)**):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}((x-3)^2 e^{2(x-4)})(s) &= \frac{1}{e^8}\mathcal{L}((x-3)^2 e^{2x})(s) \\ &\overset{\text{S.4.22b)}}{=} \frac{1}{e^8}\mathcal{L}((x-3)^2)(s-2) \\ &\overset{\text{(a)}}{=} \frac{1}{e^8}\frac{2!}{(s-2)^3}p_2(-3s+6) \\ &= \frac{1}{e^8}\frac{2!}{(s-2)^3}\left(1 + (-3s+6) + \frac{(-3s+6)^2}{2!}\right).\end{aligned}$$

Aufgabe 9.16 [Inverse Laplace-Transformation]

Berechnen Sie die folgende inverse Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right)$$

(a) mit Hilfe des „Multiplikationssatzes“

$$\mathcal{L}[t\cdot f(t)](s) = -\frac{d}{ds}\{\mathcal{L}[f(t)](s)\},$$

(b) mit Hilfe des Faltungssatzes.

Lösung

Mit Hilfe der Linearität und der Tabelle erhält man:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2sa}{2a(s^2+a^2)^2}\right) \overset{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{2a}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2sa}{(s^2+a^2)^2}\right) \overset{\text{Tabelle}}{=} \frac{1}{2a}t\sin(at).$$

Es gibt jedoch auch weitere Möglichkeiten, die inverse Laplace-Transformierte auszurechnen:

(a) Aus dem Multiplikationssatz folgt

$$tf(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{d}{ds}\underbrace{\mathcal{L}[f(t)](s)}_{=:G(s)}\right)(t).$$

Um diesen anwenden zu können, müssen wir $g(s) := \frac{s}{(s^2+a^2)^2}$ als negative Ableitung einer Funktion $G(s)$ interpretieren, bzw. umgekehrt G als negative Stammfunktion zu g:

$$G(s) := -\int \frac{s}{(s^2+a^2)^2}\,ds = \int \frac{-s}{(s^2+a^2)^2}\,ds = \frac{1}{2}\frac{1}{(s^2+a^2)}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right) &\overset{!}{=} \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{d}{ds}G(s)\right)\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{d}{ds}\int\frac{-s}{(s^2+a^2)^2}\,ds\right)\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{(s^2+a^2)}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2a}\mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{d}{ds}\frac{a}{(s^2+a^2)}\right)\\
&= \frac{1}{2a}\cdot t\cdot\sin(at).
\end{aligned}$$

(b) Wir wissen, dass $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right) = \frac{1}{a}\sin(ax)$ und $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \cos(ax)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\cdot\frac{s}{s^2+a^2}\right)\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}\left[\tfrac{1}{a}\sin(ax)\right](s)\cdot\mathcal{L}\left[\cos(ax)\right](s)\right)\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}\left(\tfrac{1}{a}\sin(ax)*\cos(ax)\right)\right)\\
&= \left(\tfrac{1}{a}\sin(ax)*\cos(ax)\right)(t)\\
&= \int_0^t \tfrac{1}{a}\sin(at-ax)\cdot\cos(ax)\,dx.
\end{aligned}$$

Wir verwenden nun $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$ und $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_0^t \tfrac{1}{a}\sin(at-ax)\cdot\cos(ax)\,dx &= \int_0^t \tfrac{1}{a}\left[\sin(at)\cos(ax) - \sin(ax)\cos(at)\right]\cdot\cos(ax)\,dx\\
&= \frac{1}{a}\sin(at)\int_0^t\cos^2(ax)\,dx - \frac{1}{a}\cos(at)\int_0^t\sin(ax)\cos(ax)\,dx\\
&= \frac{1}{a}\sin(at)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin(2ax)\right)\Big|_0^t - \frac{1}{a}\cos(at)\left(\frac{1}{2a}\sin^2(ax)\right)\Big|_0^t\\
&= \frac{1}{a}\sin(at)\left(\frac{1}{2}t + \frac{\sin(2at)}{4a}\right) - \frac{1}{a}\cos(at)\frac{\sin^2(at)}{2a}\\
&= \frac{t\sin(at)}{2a} + \frac{\sin(at)\sin(2at)}{4a^2} - \frac{\cos(at)\sin^2(at)}{2a^2}\\
&= \frac{t\sin(at)}{2a} + \frac{2\cos(at)\sin^2(at)}{4a^2} - \frac{\cos(at)\sin^2(at)}{2a^2}\\
&= \frac{1}{2a}\cdot t\cdot\sin(at).
\end{aligned}$$

Aufgabe 9.17 [Lösung einer Anfangswertaufgabe]

Lösen Sie die AWA

$$y''(t) + ay'(t) = \cos(\beta t), \qquad y(0) = c_0,\; y'(0) = c_1$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation:

(a) Für $a = 0,\; \beta = 0$,

(b) für $a = 0,\; \beta \neq 0$,

(c) für $a \neq 0$ (Fallunterscheidung bzgl. β).

(d) Wie lautet jeweils die Lösung der homogenen AWA (hier: rechte Seite $= 0$ statt $\cos(\beta t)$)? Wie lautet jeweils die spezielle Lösung mit $y(0) = y'(0) = 0$?

Lösung

(a) $a = 0,\; \beta = 0$: Wir setzen $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$, damit folgt

$$\mathcal{L}[y''](s) = \mathcal{L}[1] \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_0}{s}$$

$$\overset{\text{Rücktransformation}}{\Longrightarrow} \qquad y(t) = \frac{1}{2}t^2 + c_1 t + c_0.$$

(b) $a = 0,\; \beta \neq 0$: Wir setzen erneut $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$, damit folgt

$$\mathcal{L}[y''](s) = \mathcal{L}[\cos\beta t] \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y(s) = \frac{1}{s(s^2+\beta^2)} + \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_0}{s}$$

$$\overset{\text{Rücktransformation}}{\Longrightarrow} \qquad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+\beta^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_1}{s^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_0}{s}\right].$$

Wir wissen $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\beta^2}\right] = \frac{1}{\beta}\sin(\beta t)$ und verwenden Satz 5.25 **g**):

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+\beta^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_1}{s^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_0}{s}\right] \\ &= \frac{1}{\beta}\int_0^t \sin(\beta\tau)\,d\tau + c_1 t + c_0 \\ &= -\frac{1}{\beta^2}(\cos(\beta t) - 1) + c_1 t + c_0. \end{aligned}$$

(c) Analog zu den vorherigen Aufgabenteilen erhalten wir

$$Y(s) = \frac{1}{s+a}\cdot\frac{1}{s^2+\beta^2} + \frac{c_0}{s+a} + (c_1 + ac_0)\cdot\frac{1}{s(s+a)}$$

Wir führen nun für $\frac{1}{s+a}\cdot\frac{1}{s^2+\beta^2}$ eine Partialbruchzerlegung durch mit dem Ansatz

$$\frac{1}{s+a}\cdot\frac{1}{s^2+\beta^2} \overset{!}{=} \frac{A}{s+a} + \frac{Bs+C}{s^2+\beta^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad As^2 + A\beta^2 + Bs^2 + Bsa + Cs + Ca \overset{!}{=} 1$$

$$\begin{aligned} A + B &= 0 & &\Rightarrow \quad A = -B \\ aB + C &= 0 & &\Rightarrow \quad -a^2A + Ca = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{a^2+\beta^2}, B = -\frac{1}{a^2+\beta^2} \\ \beta^2 A + Ca &= 1 & &\Rightarrow \quad C = \frac{a}{a^2+\beta^2} \end{aligned}$$

Ebenso führen wir für $(c_1 + ac_0)\cdot\frac{1}{s(s+a)}$ eine PBZ durch mit dem Ansatz

$$\frac{c_1 + ac_0}{s(s+a)} \overset{!}{=} \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_a + ac_0 = A(s+a) + Bs = (A+B)s + Aa$$

$$\begin{aligned} A + B &= 0 & &\Rightarrow \quad A = -B \\ Aa &= c_1 + ac_0 & &\Rightarrow \quad A = \frac{c_1}{a} + c_0, B = -\left(\frac{c_1}{a} + c_0\right) \end{aligned}$$

und erhalten insgesamt

$$Y(s) = \frac{1}{a^2+\beta^2}\cdot\frac{1}{s+a} - \frac{1}{a^2+\beta^2}\cdot\frac{s}{s^2+\beta^2} + \frac{a}{a^2+\beta^2}\cdot\frac{1}{s^2+\beta^2} + c_1\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{s} - c_1\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{s+a} + c_0\frac{1}{s}.$$

Rücktransformation liefert nun für $\beta \neq 0$

$$y(t) = \frac{1}{a^2+\beta^2}\left(e^{-at} - \cos(\beta t) + \frac{a}{\beta}\sin(\beta t)\right) + \frac{c_1}{a}\left(1-e^{-at}\right) + c_0.$$

Rücktransoformation von $Y(s)$ für $\beta = 0$, also von

$$Y(s) = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{s+a} - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{s} + \frac{a}{a^2}\cdot\frac{1}{s^2} + c_1\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{s} - c_1\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{s+a} + c_0\frac{1}{s},$$

liefert

$$y(t) = \frac{1}{a^2}\left(e^{-at} - 1 + at\right) + \frac{c_1}{a}\left(1-e^{-at}\right) + c_0.$$

(d) Homogene Lösungen:

(a): $y(t) = c_1 t + c_0$

(b): $y(t) = c_1 t + c_0$

(c): $y(t) = \frac{c_1}{a}\left(1-e^{-at}\right) + c_0$

Lösungen für $y(0) = y'(0) = 0$:

(a): $y(t) = \frac{1}{2}t^2$.

(b): $y(t) = -\frac{1}{\beta^2}\left(\cos(\beta t) - 1\right)$.

(c): $y(t) = \frac{1}{a^2+\beta^2}\left(e^{-at} - \cos(\beta t) + \frac{a}{\beta}\sin(\beta t)\right)$.

Aufgabe 9.18 [Anfangswertaufgabe mit anderer Anfangsbedingung]

Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe unter Verwendung der Laplace-Transformation:

$$y'(t) - 3y(t) = te^{2t} \quad \text{mit} \quad y(-1) = e^{-3}.$$

Hinweis: Ersetzen Sie zunächst $y(t)$ durch $y(t-1)$ und formen Sie die DGL (insbesondere die rechte Seite) geeignet um. Führen Sie anschließend die Substitution $y(t-1) = z(t)$ durch.

Lösung

Für die Anwendung der Rechenregeln für die Laplace-Transformation benötigen wir eine AWA in der Form $L[y](x) = g(x)$ mit gegebenen Anfangswerten in $x_0 = 0$. Wir verschieben die DGL in der Veränderlichen t somit zunächst um -1. Wir erhalten

$$y'(t-1) - 3y(t-1) = (t-1)e^{2(t-1)} \quad \text{mit} \quad y(-1) = e^{-3}.$$

Mittels der Substitution $y(t-1) = z(t)$ und wegen $z'(t) = y'(t-1)\cdot(t-1)' = y'(t-1)$ erhalten wir nun eine AWA in der gewünschten Form.

$$z'(t) - 3z(t) = (t-1)e^{2(t-1)} = e^{-2}(te^{2t} - e^{2t}) \quad \text{mit} \quad z(0) = y(-1) = e^{-3}.$$

Anwenden der Laplace-Transformation ergibt (mit $Z(s) := (\mathcal{L}z(t))(s)$)

$$\begin{aligned} & sZ(s) - \underbrace{z(0)}_{=e^{-3}} - 3Z(s) = \frac{e^{-2}}{(s-2)^2} - \frac{e^{-2}}{(s-2)} \\ \iff \quad & (s-3)Z(s) = \frac{e^{-2}}{(s-2)^2} - \frac{e^{-2}}{(s-2)} + e^{-3} \\ \iff \quad & Z(s) = \frac{e^{-2}}{(s-3)(s-2)^2} - \frac{e^{-2}}{(s-3)(s-2)} + \frac{e^{-3}}{(s-3)} \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegungen der ersten beiden Terme führen auf

$$\begin{aligned} Z(s) &= -\frac{e^{-2}}{(s-2)} - \frac{e^{-2}}{(s-2)^2} + \frac{e^{-2}}{(s-3)} - \frac{e^{-2}}{(s-3)} + \frac{e^{-2}}{(s-2)} + \frac{e^{-3}}{(s-3)} \\ &= -\frac{e^{-2}}{(s-2)^2} + \frac{e^{-3}}{(s-3)}. \end{aligned}$$

Rücktransformation mit der Tabelle der Vorlesung ergibt nun

$$z(t) = -e^{-2}te^{2t} + e^{-3}e^{3t}$$

Wegen $y(t-1) = z(t)$ gilt

$$y(t) = z(t+1) = -e^{-2}(t+1)e^{2(t+1)} + e^{-3}e^{3(t+1)} = -(t+1)e^{2t} + e^{3t}.$$

Alternativ führt man die Laplace-Transformation unter Unwissenheit des Anfangswertes $y(0) = c$ durch und bestimmt den Parameter durch die Lösung einer linearen Gleichung.

Anwenden der Laplace-Transformation auf die AWA mit $y(0) = c$ ergibt (mit $Y(s) := (\mathcal{L}y(t))(s)$)

$$Y(s) = \frac{e^{-2}}{(s-3)(s-2)^2} - \frac{e^{-2}}{(s-3)(s-2)} + \frac{c}{(s-3)}.$$

Die Rücktransformation (nach PBZ wie oben) mit der Tabelle aus dem Vorlesungsskript führt auf

$$y(t) = -(1+t)e^{2t} + (1+c)e^{3t}.$$

Einsetzen des gegebenen Anfangswertes $y(-1) = e^{-3}$ (und $t = -1$) führt auf

$$e^{-3} = -(1-1)e^{2t} + (1+c)e^{-3} \quad \Longleftrightarrow \quad c = 0.$$

Somit erhalten wir

$$y(t) = -(t+1)e^{2t} + e^{3t}.$$

Aufgabe 9.19 [Faltung zweier Funktionen]

Betrachten Sie die Faltung zweier Funktionen f und g:

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-x) \cdot g(x)\,dx.$$

(a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$f * g = g * f \qquad \text{(Kommutativität)}.$$

(b) Verifizieren Sie die Kommutativität für $f(t) = e^{3t}$ und $g(t) = e^{2t}$.

(c) Zeigen Sie

$$f * [g+h] = f * g + f * h \qquad \text{(Distributivität)}.$$

Lösung

(a) Mit der Substitution $t - x = v$ und $\frac{dv}{dx} = -1$ folgt:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)\,dx \overset{\text{Subst.}}{=} \int_t^0 f(v)g(t-v)\,(-dv) = \int_0^t g(t-v)f(v)\,dv = (g * f)(t).$$

(b) Man rechnet nach:

$$(e^{3x} * e^{2x})(t) = \int_0^t e^{3(t-x)}e^{2x}\,dx = \int_0^t e^{3t}e^{-x}\,dx = e^{3t}\int_0^t e^{-x}\,dx = e^{3t}(-e^{-t}+1) = -e^{2t} + e^{3t},$$

$$(e^{2x} * e^{3x})(t) = \int_0^t e^{2(t-x)}e^{3x}\,dx = \int_0^t e^{2t}e^{x}\,dx = e^{2t}\int_0^t e^{x}\,dx = e^{3t} - e^{2t}.$$

(c)

$$\begin{aligned} f * (g+h) &= \int_0^t f(x)(g+h)(t-x)\,dx \\ &= \int_0^t f(x)g(t-x) + f(x)h(t-x)\,dx \\ &= \int_0^t f(x)g(t-x)\,dx + \int_0^t f(x)h(t-x)\,dx \\ &= f * g + f * h. \end{aligned}$$

Institut für Angewandte Mathematik

Leibniz Universität Hannover

Dr. Frank Attia, Dr. Florian Leydecker

Hannover, 16. Juni 2025

Mathematik für die Ingenieurwissenschaften III - Numerik
SoSe 2025 – Übung 10 – Lösungen

Themen

Lösung von Anfangswertaufgaben mit Einschrittverfahren

- explizites Euler-Verfahren: Kapitel 4.3.1
- klassisches Runge-Kutta-Verfahren: Kapitel 4.3.3 mit Schrittweitenkontrolle: Kapitel 4.3.5
- implizites Euler-Verfahren (Definition 4.59) implizite Trapez-Methode (Definition 4.60)

Zentralübung

Präsenzaufgabe 10.1 [Euler-Verfahren 1D]

Führen Sie einen Schritt des (expliziten) Euler-Verfahrens mit Schrittweite $\tau = \frac{1}{2}$ zur näherungsweisen Lösung der Anfangswertaufgabe $u'(t) = u(t)^2 + t$ mit $u(1) = 3$ durch.

Präsenzaufgabe 10.2 [Euler-Verfahren 2D]

Formen Sie das AWP $u''(t) = u'(t) - tu(t) + 3$ mit $u(1) = 0$, $u'(1) = -1$ in ein System erster Ordnung um und führen Sie einen Schritt mit dem Euler-Verfahren zur Schrittweite $\tau = 2$ durch. Wie lautet die Näherung für $u'(3)$?

Präsenzaufgabe 10.4 [Lineares autonomes 2d-System: Euler und Implizite-Verfahren]

Wir betrachten wieder die AWA $u''(t) = -u(t)$, $\quad t \in [0, 1],\ u(0) = 0,\ u'(0) = 1$ bzw. das zugehörige System

$$\vec{u}'(t) = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ -u_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{u}(t), \qquad \vec{u}(0) := \vec{u}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine Matrix-Vektor-Formel an, wie sich bei

(a) beim Euler-Verfahren **(b)** beim impliziten Euler-Verfahren **(c)** bei der Trapez-Methode

die erste Näherung aus der Startnäherung und allgemein die $(k + 1)$-te Näherung aus der k-ten ergibt.

Kurzteil

Aufgabe 10.5 [Euler-Verfahren]

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u'(t) = u(t)^2 + t, \ u(2) = 2$$

Berechnen Sie $u(3)$ näherungsweise mit dem expliziten Euler-Verfahren zur Schrittweite $\tau = \frac{1}{2}$.

Lösung

Es ist $u^{(0)} = 2$, sowie $t_0 = 2$, $t_1 = 2.5$. Somit:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^{(0)} + \tau \cdot f(t_0, u^{(0)}) = 2 + 0.5(2^2 + 2) = 2 + 3 = 5 \approx u(2.5), \\ u^{(2)} &= 5 + 0.5(5^2 + 2.5) = 18.75 \approx u(3). \end{aligned}$$

Aufgabe 10.6 [Fehlerreduktion]

Wenn man beim Euler-Verfahren die Schrittweite durch 10 teilt, um welchen Faktor wird sich der Fehler ungefähr reduzieren? Was passiert beim Verfahren von Euler-Heun und beim Runge-Kutta-Verfahren?

Lösung

Der Fehler wird beim Euler-Verfahren etwa um den Faktor 10^{-1}, bei Euler-Heun etwa um den Faktor 10^{-2} und beim Runge-Kutta-Verfahren etwa um den Faktor 10^{-4} reduziert.

Aufgabe 10.7 [implizites Euler-Verfahren]

Gegeben sei das AWP

$$u'(t) = tu(t) - u(t)^2, \qquad u(1) = 1.$$

Rechnen Sie einen Schritt mit dem impliziten Euler-Verfahren zur Schrittweite $\tau = 0.5$.
Hinweis: Verwenden Sie die positive Wurzel!

Lösung

Man liest ab $t_0 = 1$, $u^{(0)} = 1$, $\tau = 0.5$ und $f(t, u) = tu - u^2$ und erhält:

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} + \tau \cdot (t_{i+1} u^{(i+1)} - {u^{(i+1)}}^2)$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} & & u^{(1)} &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot u^{(1)} - {u^{(1)}}^2 \right), \\ &\Longleftrightarrow & 2u^{(1)} &= 2 + \frac{3}{2} \cdot u^{(1)} - {u^{(1)}}^2, \\ &\Longleftrightarrow & {u^{(1)}}^2 + \frac{1}{2} u^{(1)} - 2 &= 0, \\ &\Longleftrightarrow & \left(u^{(1)} + \frac{1}{4} \right)^2 &= 2 + \frac{1}{16}, \\ &\Longleftrightarrow & u^{(1)} &= -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{4}. \end{aligned}$$

Man erhält die Näherung $u(1.5) \approx -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}$. Bemerkung: $-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4} \approx 1.1861$.

Aufgabenteil

Aufgabe 10.8 [Explizites Euler-Verfahren, auch zeichnerisch]

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = u^2(t) \quad \text{mit} \quad u(0) = 1.$$

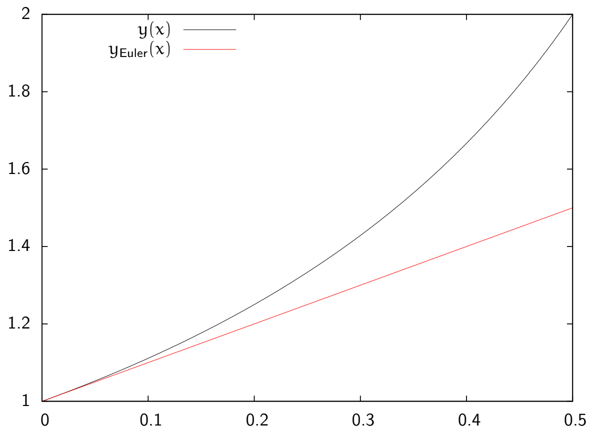
(a) Bestimmen Sie zeichnerisch mit dem Euler-Verfahren mit Schrittweite $\tau = 1/2$ einen Näherungswert für $u(1/2)$.

(b) Bestimmen Sie rechnerisch mit dem Euler-Verfahren mit Schrittweite $\tau = 1/2$ einen Näherungswert für $u(1/2)$. Vergleichen Sie mit (a).

(c) Geben Sie die nach dem Euler-Verfahren mit Schrittweite $\tau = 1/4$ berechneten Näherungen an den Stellen $t_k = k \cdot \tau$, $k = 1, \ldots, 4$ an. Bestimmen Sie u und stellen Sie eine Tabelle auf, in der Sie die Werte von u sowie die Euler-Näherungen an den t_i (wo vorhanden) miteinander vergleichen.

Lösung

(a) Man liest aus der Skizze die Näherung $u_{0.5}^{(1)} = 1.5$ ab. u (in der Skizze „y) braucht nicht gezeichnet zu werden.



(b) $u_1 = u_0 + \tau \cdot f(t, u_0) = 1 + 0.5 \cdot 1^2 = 1.5$.

(c) Bestimmung von u: s. u. (liefert: $u = 1/(1-t)$).
Euler Verfahren: $u_\tau^{(i+1)} = u_\tau^{(i)} + \tau \cdot f(t_{\tau,i}, u_\tau^{(i)})$. Man erhält somit für $\tau = 0.5$ und $\tau = 0.25$:

i	0	1	2	3	4
$t_{0.25,i}$	0	0.25	0.5	0.75	1
$u(t_{0.25,i})$	1	$1.33\bar{3}$	2	4	∞
$u_{0.25}^{(i)}$	1	1.25	1.6406	2.3135	3.6517
$u_{0.5}^{(i/2)}$	1		1.5		2.6250

Mit Trennung der Variablen erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} = u^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{u^2}\,du = 1 \cdot dt \\
&\Longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{u^2}\,du = \int 1 \cdot dt \\
&\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{u} = t - c \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{c-t}.
\end{aligned}$$

Aus dem gegebenen Anfangswert $u(0) = 1$ folgt $1 = \frac{1}{c} \;\Rightarrow\; c = 1$, also

$$u(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Aufgabe 10.9 [Liefert das explizite Euler-Verfahren hier eine falsche Näherungslösung?]

Die Funktion $u(t) = t^2$ löst das Anfangswertproblem

$$u'(t) = 2\sqrt{u(t)} \qquad \forall\, t \geqslant 0, \qquad u(0) = 0.$$

Welche Approximationswerte liefert das Euler-Verfahren mit Schrittweite τ und $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, 2, \ldots$? Erklären Sie das Ergebnis!

Lösung

Hier: Schrittweite τ, $t_j = j\tau$, $f(t, u(t)) = 2\sqrt{u(t)}$.
Eulerverfahren: $u^{(i+1)} = u^{(i)} + \tau f(t_i, u^{(i)})$ also hier $u^{(i+1)} = u^{(i)} + \tau 2\sqrt{u^{(i)}}$.

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= u(0) = 0 \\ u^{(1)} &= u^{(0)} + \tau 2\sqrt{u^{(0)}} = 0 + 0\tau = 0 \\ u^{(2)} &= u^{(1)} + \tau 2\sqrt{u^{(1)}} = 0 + 0\tau = 0 \\ &\vdots \quad \vdots \\ u^{(i)} &= u^{(i-1)} + \tau 2\sqrt{u^{(i-1)}} = 0 + 0\tau = 0 \end{aligned}$$

Die Lipschitzbedingung ist in keiner offenen Umgebung von $u = 0$ erfüllt, daher muss es keine eindeutige Lösung des AWPs geben. In der Tat, und wie aus der Vorlesung bekannt ist, ist $u(t) = 0$ ebenfalls eine Lösung.

Aufgabe 10.10 [Explizites Euler-Verfahren: DGL höherer Ordnung (hier: Ordnung 2)]

Schreiben Sie das Anfangswertproblem

$$u''(t) - 2u'(t) + u(t) = 0, \qquad u(0) = 0,\ u'(0) = 1$$

als System erster Ordnung und berechnen Sie dann mit dem Euler-Verfahren zur Schrittweite $\tau = 1/4$ Näherungen für $u(1)$ und $u'(1)$.

Lösung

Wie immer setzt man $u_1 = u(t)$ und $u_2 = u'(t)$. Dann erhält man als System

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -u_1 + 2u_2 \end{aligned}$$

oder in Matrix-Vektor Schreibweise

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Euler-Verfahren: $\Phi(\tau, u; \tau) = \vec{f}(t, u)$. Es ergibt sich mit $\tau = 1/4$, $t_0 = 0$ und $\vec{u}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\vec{u}^{(1)} &= \vec{u}^{(0)} + \tau\vec{f}(t_0, \vec{u}^{(0)}) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{k}_{\tau,0,1}} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \\
\vec{u}^{(2)} &= \vec{u}^{(1)} + \tau\vec{f}(t_1, \vec{u}^{(1)}) \\
&= \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/2 \end{pmatrix}}_{\vec{k}_{\tau,1,1}} = \begin{pmatrix} 5/8 \\ 35/16 \end{pmatrix}, \\
\vec{u}^{(3)} &= \vec{u}^{(2)} + \tau\vec{f}(t_2, \vec{u}^{(2)}) \\
&= \begin{pmatrix} 5/8 \\ 35/16 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5/8 \\ 35/16 \end{pmatrix}}_{\vec{k}_{\tau,2,1}} = \begin{pmatrix} 75/64 \\ 25/8 \end{pmatrix}, \\
\vec{u}^{(4)} &= \vec{u}^{(3)} + \tau\vec{f}(t_3, \vec{u}^{(3)}) \\
&= \begin{pmatrix} 75/64 \\ 25/8 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 75/64 \\ 25/8 \end{pmatrix}}_{\vec{k}_{\tau,3,1}} = \frac{1}{256}\begin{pmatrix} 500 \\ 1125 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{aligned} u(1) &\approx u_1^{(4)} = \frac{500}{256} \approx 1,9531 \\ u'(1) &\approx u_2^{(4)} = \frac{1125}{256} \approx 4,3945 \end{aligned}$$

Aufgabe 10.11 [Klassisches Runge-Kutta Verfahren für DGL höherer Ordnung (hier: Ordnung 2)]
Schreiben Sie das Anfangswertproblem

$$u'' = t + u^2 + u', \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$$

als System erster Ordnung und berechnen Sie dann mit dem dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren zur Schrittweite $\tau = 1/2$ jeweils Näherungen für $u(1)$ und $u'(1)$.

Lösung

Setze $u_1 := y$, $u_2 := u_1' = u'$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Damit erhält man das System erster Ordnung

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u_2 \\ t + u_1^2 + u_2 \end{pmatrix},$$

mit Anfangswerten $\vec{u}^{(0)} := \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der „rechten Seite" $\vec{f}(t, \vec{u}) = \begin{pmatrix} u_2 \\ t + u_1^2 + u_2 \end{pmatrix}$.

Verfahren von Runge-Kutta:

Schritt 1:

$$
\begin{aligned}
\vec{k}_1 &= \vec{k}_{0.5,0,1} = \vec{f}(t_0, \vec{u}^{(0)}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\\
\vec{k}_2 &= \vec{k}_{0.5,0,2} = \vec{f}(t_0 + \tfrac{\tau}{2}, \vec{u}^{(0)} + \tfrac{\tau}{2}\cdot\vec{k}_1) = \begin{pmatrix}1.25\\1.5625\end{pmatrix},\\
\vec{k}_3 &= \vec{k}_{0.5,0,3} = \vec{f}(t_0 + \tfrac{\tau}{2}, \vec{u}^{(0)} + \tfrac{\tau}{2}\cdot\vec{k}_2) = \begin{pmatrix}1.3906\\1.7383\end{pmatrix},\\
\vec{k}_4 &= \vec{k}_{0.5,0,4} = \vec{f}(t_0 + \tau, \vec{u}^{(0)} + \tau\cdot\vec{k}_3) = \begin{pmatrix}1.8691\\2.8526\end{pmatrix},\\
&\Rightarrow \quad \vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(0)} + 0.5\cdot\frac{\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4}{6} = \begin{pmatrix}0.6792\\1.8712\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Schritt 2:

$$
\begin{aligned}
\vec{k}_1 &= \vec{k}_{0.5,1,1} = \vec{f}(t_1, \vec{u}^{(1)}) = \begin{pmatrix}1.8712\\2.8325\end{pmatrix},\\
\vec{k}_2 &= \vec{k}_{0.5,1,2} = \vec{f}(t_1 + \tfrac{\tau}{2}, \vec{u}^{(1)} + \tfrac{\tau}{2}\cdot\vec{k}_1) = \begin{pmatrix}2.5793\\4.6449\end{pmatrix},\\
\vec{k}_3 &= \vec{k}_{0.5,1,3} = \vec{f}(t_1 + \tfrac{\tau}{2}, \vec{u}^{(1)} + \tfrac{\tau}{2}\cdot\vec{k}_2) = \begin{pmatrix}3.0324\\5.5354\end{pmatrix},\\
\vec{k}_4 &= \vec{k}_{0.5,1,4} = \vec{f}(t_1 + \tau, \vec{u}^{(1)} + \tau\cdot\vec{k}_3) = \begin{pmatrix}4.6389\\10.4587\end{pmatrix},\\
&\Rightarrow \quad \vec{u}^{(2)} = \vec{u}^{(1)} + 0.5\cdot\frac{\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4}{6} = \begin{pmatrix}2.1570\\4.6755\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Folglich ist $u(1) \approx 2.1570$ und $u'(1) \approx 4.6755$.

Nicht gefragt ist diese Semester nach dem Verfahren von Runge und dem Verfahren von Euler-Heun:
Schritt 1:

$$
\vec{k}_{0.5,0,1} = \vec{f}(t_0, \vec{u}^{(0)}) = \begin{pmatrix}1\\0+0^2+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \text{Euler-Prädiktor: } \vec{u}^{(0)} + \tau\cdot\vec{k}_{0.5,0,1} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 0.5\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.5\\1.5\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{k}_{0.5,0,2} &= \vec{f}\left(t_0 + \tau, \vec{u}^{(0)} + \tau\cdot\vec{k}_{0.5,0,1}\right)\\
&= \vec{f}\left(\ 0.5\,,\ \begin{pmatrix}0.5\\1.5\end{pmatrix}\ \right) = \begin{pmatrix}1.5\\0.5+0.5^2+1.5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.5\\2.25\end{pmatrix},\\
&\Rightarrow \quad \vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(0)} + \tau\cdot\frac{k_{0.5,0,1} + k_{0.5,0,2}}{2} = \begin{pmatrix}0.625\\1.8125\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Schritt 2:

$$
\begin{aligned}
\vec{k}_{0.5,1,1} &= \vec{f}(0.5, \vec{u}^{(1)}) = \begin{pmatrix}1.8125\\2.7031\end{pmatrix},\\
\vec{k}_{0.5,1,2} &= \vec{f}(1, \vec{u}^{(1)} + 0.5\cdot\vec{k}_{0.5,1,1}) = \begin{pmatrix}3.1641\\6.5088\end{pmatrix},\\
&\Rightarrow \quad \vec{u}^{(2)} = \vec{u}^{(1)} + 0.5\cdot\frac{k_{0.5,1,1} + k_{0.5,1,2}}{2} = \begin{pmatrix}1.8691\\4.1155\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Folglich ist $u(1) \approx 1.8691$ und $u'(1) \approx 4.1155$.

Verfahren von Runge:

Schritt 1:

$$\vec{k}_{0.5,0,1} = \vec{f}(t_0, \vec{u}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{k}_{0.5,0,2} = \vec{f}(t_0 + \tfrac{\tau}{2}, \vec{u}^{(0)} + \tfrac{\tau}{2} \cdot \vec{k}_{0.5,0,1}) = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.5625 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(0)} + 0.5 \cdot k_{0.5,0,2} = \begin{pmatrix} 0.6250 \\ 1.7812 \end{pmatrix}.$$

Schritt 2:

$$\vec{k}_{0.5,1,1} = \vec{f}(t_1, \vec{u}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1.7812 \\ 2.6719 \end{pmatrix},$$

$$\vec{k}_{0.5,1,2} = \vec{f}(t_1 + \tfrac{\tau}{2}, \vec{u}^{(1)} + \tfrac{\tau}{2} \cdot \vec{k}_{0.5,1,1}) = \begin{pmatrix} 2.4492 \\ 4.3448 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u}^{(2)} = \vec{u}^{(1)} + 0.5 \cdot k_{0.5,1,2} = \begin{pmatrix} 1.8496 \\ 3.9536 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist $u(1) \approx 1.8496$ und $u'(1) \approx 3.9536$.

Aufgabe 10.12 [Implizite Verfahren]

Gegeben sei die AWA

$$u' = 1 + \frac{u}{t}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 1.4, \quad u(1) = 2.$$

(a) Man zeige, dass $u(t) = t\ln(t) + 2t$ die AWA löst.

(b) Zur Schrittweite $\tau = 0.2$ rechne man einen Schritt mit

- **(i)** dem expliziten Euler-Verfahren,
- **(ii)** der impliziten Trapez-Methode,

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \frac{\tau}{2}\left[f(t_n, u^{(n)}) + f(t_{n+1}, u^{(n+1)})\right].$$

- **(iii)** dem impliziten Euler-Verfahren.

(c) Zu allen drei vorigen Verfahren gebe man den exakten Approximationsfehler an der Stelle $t = 1.2$ an.

Lösung

(a) $u'(t) = 1 + \ln(t) + 2 = 1 + \frac{t\ln(t)+2t}{t} = 1 + \frac{u}{t}$. Ferner gilt $u(1) = 1 \cdot \ln(1) + 2 = 2$. Also löst $u(t) = t\ln(t) + 2t$ die AWA.

(b) Man berechnet:

- **(i)** $u^{(1)}_{\text{Euler}} = u^{(0)} + \tau f(t_0, u^{(0)}) = 2 + 0.2\left(1 + \frac{2}{1}\right) = 2.6.$
- **(ii)** $u^{(1)}_{\text{Trapez}} = u^{(0)} + \frac{\tau}{2}\left[f(t_0, u^{(0)}) + f(t_1, u^{(1)}_{\text{Trapez}})\right]$

  $= 2 + 0.1\left(1 + \frac{2}{1} + 1 + \frac{u^{(1)}_{\text{Trapez}}}{1.2}\right) = 2.4 + 0.08\overline{3} \cdot u^{(1)}_{\text{Trapez}}$

  $\Rightarrow u^{(1)}_{\text{Trapez}} = \frac{144}{55} = 2.6\overline{18}$
- **(iii)** $u^{(1)}_{\text{i.Euler}} = u^{(0)} + \tau \cdot \left(1 + \frac{u^{(1)}_{\text{i.Euler}}}{1.2}\right) \iff \frac{5}{6}u^{(1)}_{\text{i.Euler}} = 2.2 \iff u^{(1)}_{\text{i.Euler}} = 2.64.$

(c) Man berechnet $u(1.2) \approx 2.618786$. Für den Approximationsfehler in $t = 1.2$ ergibt sich also:

- **(i)** $|u(1.2) - u^{(1)}_{\text{Euler}}| \approx 0.0188,$
- **(ii)** $|u(1.2) - u^{(1)}_{\text{Trapez}}| \approx 0.0006,$
- **(iii)** $|u(1.2) - u^{(1)}_{\text{i.Euler}}| \approx 0.0212.$

Aufgabe 10.13 [Verschiedene Verfahren für ein allgemeineres System]

Zum AWP

$$\vec{u}'(t) = \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix} \vec{u}(t), \qquad \vec{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 99.9 \end{pmatrix}$$

berechne man zur Schrittweite $\tau = 0.1$ zwei Schritte mit

(a) dem expliziten Euler-Verfahren,

(b) dem impliziten Euler-Verfahren.

(c) der (impliziten) Trapez-Methode.

Lösung

Man liest ab: $t_0 = 0$, $\vec{u}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 99.9 \end{pmatrix}$.

(a) Explizites Euler-Verfahren: Es ist $\vec{u}^{(k+1)} = \vec{u}^{(k)} + \tau \left(\begin{smallmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{smallmatrix}\right) \vec{u}^{(k)}$ und somit:

$$\vec{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 99.9 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 99.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9900 \\ 98.9010 \end{pmatrix},$$
$$\vec{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.9900 \\ 98.9010 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9900 \\ 98.9010 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9801 \\ 97.9120 \end{pmatrix}.$$

(b) Implizites Euler-Verfahren: Es ist $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - \tau \left(\begin{smallmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{smallmatrix}\right)\right) \vec{u}^{(k+1)} = \vec{u}^{(k)}$ und somit:

$$\text{Löse: } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix}\right) \vec{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 99.9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.9901 \\ 98.9109 \end{pmatrix},$$
$$\text{Löse: } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix}\right) \vec{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.9901 \\ 98.9109 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.9803 \\ 97.9316 \end{pmatrix}.$$

(c) Trapez-Methode: Es ist $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - \frac{\tau}{2} \left(\begin{smallmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{smallmatrix}\right)\right) \vec{u}^{(k+1)} = \vec{u}^{(k)} + \frac{\tau}{2} \left(\begin{smallmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{smallmatrix}\right) \vec{u}^{(k)}$ und somit:

$$\text{Löse: } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\tau}{2} \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix}\right) \vec{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 99.9 \end{pmatrix} + \frac{\tau}{2} \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 99.9 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.9900 \\ 98.9060 \end{pmatrix},$$
$$\text{Löse: } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\tau}{2} \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix}\right) \vec{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.990 \\ 98.906 \end{pmatrix} + \frac{\tau}{2} \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.990 \\ 98.906 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.9802 \\ 97.9218 \end{pmatrix}.$$

Zusatzaufgaben

Aufgabe 10.14 [Euler-Verfahren (Wiederholung)]

Führen Sie zwei Schritte des Euler-Verfahrens mit Schrittweite $\tau = 0.1$ zur näherungsweisen Lösung der Anfangswertaufgabe $u'(t) = tu(t)$, $u(0) = 0.1$ durch.

Lösung

Mit $u^{(0)} = 0.1$, $t_0 = 0$, $t_1 = 0.1$ folgt:

$$u^{(1)} = u^{(0)} + \tau \cdot t_0 \cdot u^{(0)} = 0.1 + 0.1 \cdot (0 \cdot 0.1) = 0.1,$$
$$u^{(2)} = u^{(1)} + \tau \cdot t_1 \cdot u^{(1)} = 0.1 + 0.1 \cdot (0.1 \cdot 0.1) = 0.101.$$

Aufgabe 10.15 [Runge–Kutta-Verfahren (Wiederholung) und Schrittweitenkontrolle]

Betrachten Sie folgende Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = -2tu^2(t), \quad u(-1) = \tfrac{1}{2}.$$

Berechnen Sie mit dem klassischen Runge–Kutta–Verfahren (Schrittweite $\tau = 0.2$) eine Näherung $u^{(1)}$ für $u(-0.8)$, und entscheiden Sie an Hand der Schrittweitenkontrolle, wie Sie verfahren würden, um einen weiteren Näherungswert zu berechnen.

Lösung

Wir berechnen zunächst für $t_0 = -1$, $u^{(0)} = 0.5$, $\tau = 0.2$ mit $f(t,u) = -2tu^2(t)$ die Steigungen $k_{h,0,j}$, $j = 1,2,3,4$:

$$\begin{aligned}
k_{0.2,0,1} &= f(t_0, u^{(0)}) = -2 \cdot (-1) \cdot 0.25 = 0.5,\\
k_{0.2,0,2} &= f(t_0 + \tfrac{0.2}{2}, u^{(0)} + \tfrac{0.2}{2} k_{0.2,0,1}) \approx 0.5445,\\
k_{0.2,0,3} &= f(t_0 + \tfrac{0.2}{2}, u^{(0)} + \tfrac{0.2}{2} k_{0.2,0,2}) \approx 0.5533,\\
k_{0.2,0,4} &= f(t_0 + \tau, u^{(0)} + \tau \cdot k_{0.2,0,3}) \approx 0.5967
\end{aligned}$$

und damit

$$u^{(1)} = u^{(0)} + 0.2 \cdot \frac{k_{0.2,0,1} + 2k_{0.2,0,2} + 2k_{0.2,0,3} + k_{0.2,0,4}}{6} = 0.609146302.$$

Schrittweitenkontrolle: Man berechne die Approximation der Schrittkennzahl:

$$\left| \frac{k_{0.2,0,3} - k_{0.2,0,2}}{k_{0.2,0,2} - k_{0.2,0,1}} \right| = q_0.$$

Ist der Ausdruck > 0.1, so wiederhole man den Schritt mit halber Schrittweite. Ist $q_0 < 0.025$ so akzeptiere $u^{(1)}$ und rechne mit doppelter Schrittweite weiter (Schrittweite ist kleiner als nötig).
Hier:

$$q_0 = 0.1977 > 0.1 \quad \Rightarrow \quad \text{Schrittweite halbieren und Schritt wiederholen!}$$

Bemerkung: Führt man zwei Schritte mit der Schrittweite $\tau = 0.1$ durch, so erhält man $u(-0.8) \approx u^{(2)} = 0.60973863$ (exakt: $u(-0.8) = 0.6097560$).

Aufgabe 10.16 [Implizites Euler-Verfahren (Wiederholung) aber hier für eine DGL 2. Ordnung]

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\text{AWA} \qquad u''(t) = -tu^2(t),\ t \in [0,1],\ u(0) = 0,\ u'(0) = 1\,.$$

Gesucht: die Implizit-Euler-Näherung(en) für $t^* = 1/4$ zur Zerlegung in *ein* Intervall $\leftrightarrow$ Schrittweite $\tau = 1/4$.

Lösung

Zunächst wird die AWA in ein System erster Ordnung transformiert mit $u_1 := u$, $u_2 := u'$:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u_2 \\ -t \cdot u_1^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1], \quad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man liest nun ab: $t_0 = 0$, $\tau = \frac{1}{4}$, $\vec{u}^{(0)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\vec{f}(t,\vec{u}) = \left(\begin{smallmatrix} u_2 \\ -t \cdot u_1^2 \end{smallmatrix}\right)$ und erhält somit:

$$\vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(0)} + \tau \vec{f}(t_1, \vec{u}^{(1)}) \iff \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} u_2^{(1)} \\ -t_1 \cdot {u_1^{(1)}}^2 \end{pmatrix}.$$

Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
u_1^{(1)} &= \tfrac{1}{4} u_2^{(1)},\\
u_2^{(1)} &= 1 + \tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{4} {u_1^{(1)}}^2\right).
\end{aligned}$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite führt auf das Lösen von

$$\frac{1}{256} {u_2^{(1)}}^2 + u_2^{(1)} - 1 = 0 \quad \iff \quad u_2^{(1)} = -256.9961 \ \vee \ u_2^{(1)} = 0.9961$$

und somit durch Einsetzen $u_1^{(1)} = -64.2490$ oder $u_1^{(1)} = 0.2490$.
Bemerkung: Die Wahl der „richtigen“ Näherung wird nun manchmal durch die Durchführung eines „Prädiktorschrittes“ versucht zu bestimmen, was hier mittels explizitem Euler-Verfahren demonstriert wird:

$$\vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(0)} + \tau\, \vec{f}(t_0, \vec{u}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit erhält man die Implizit-Euler-Näherungen $u(\frac{1}{4}) \approx 0.2490$ (da näher an 0.25) und $u'(\frac{1}{4}) \approx 0.9961$.

Institut für
Angewandte Mathematik

Leibniz Universität Hannover

Dr. Frank Attia, Dr. Florian Leydecker

Hannover, 23. Juni 2025

Mathematik für die Ingenieurwissenschaften III - Numerik
SoSe 2025 – Übung 11 – Lösungen

Themen

Lösung von Randwertaufgaben mit Finiten Differenzen: Kapitel 5.2.1

- vorderer und hinterer Differenzienquotient sowie insbesondere zentrale Differenzequotienten
- Approximationsgüte zentraler Differenzenquotienten: Satz 5.3

Zentralübung

Präsenzaufgabe 11.1 [Differenzen-Verfahren: verschiedene RBen ohne und mit Ghost Points]

Es geht in dieser Aufgabe um das RWP mit der DGL

$$-y''(x) + (1 + x^2)y(x) = -1, \quad x \in [-1, 1]$$

und untenstehenden RBen und bei Verwendung des Differenzen-Verfahrens mit $m = 6$ Intervallen.

Bestimmen Sie jeweils unter Zuhilfenahme von Skizzen die Anzahl und zugehörigen Stellen auf der x-Achse der Unbekannten, stellen Sie dabei jeweils die beiden aus den RBen resultierenden Differenzengleichungen auf und bestimmen Sie jeweils, wieviele Differenzengleichungen Ihnen noch fehlen, um die Unbekannten zu bestimmen:

(a) $y(-1) = c_l$ und $y(1) = c_r$

(b) $y'(-1) + \gamma y(-1) = 0$ und $y(1) = \beta$ [hier sollen -wie üblich- zentrale DQ für Ableitungen verwendet werden, $\rightsquigarrow$ Ghost-Point(s), Möglichkeit einer $\mathcal{O}(h^2)$-Approximation].

(c) *Bitte selber mit Hilfe von (a), (b) und (d) rechnen:* $y(-1) = c_l$ und $y'(1) + \gamma y(1) = 42$ [hier sollen -wie üblich- zentrale DQ für Ableitungen verwendet werden, $\rightsquigarrow$ Ghost-Point(s), Möglichkeit einer $\mathcal{O}(h^2)$-Approximation].

(d) $y'(-1) + \gamma y(-1) = 0$ und $y'(1) + \gamma y(1) = 42$ [hier sollen -wie üblich- zentrale DQ für Ableitungen verwendet werden, $\rightsquigarrow$ Ghost-Point(s), Möglichkeit einer $\mathcal{O}(h^2)$-Approximation].

Stellen Sie abschließend zu (a) und (f) ein LGS zur Bestimmung der Unbekannten auf.

Kurzteil

Aufgabe 11.2

Geben Sie die zentralen Differenzenquotienten zur Approximation der ersten und zweiten Ableitung einer Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an (Schrittweite h).

Lösung

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}, \qquad y''(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}.$$

Aufgabenteil

Aufgabe 11.3 [Differenzenverfahren für RWA]

Lösen Sie die Randwertaufgabe

$$-y''(x) + 4y'(x) = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = e^2 - e^{-2},$$

näherungsweise mit dem Differenzenverfahren zur Schrittweite $h = \frac{1}{4}$, unter Verwendung von zentralen Differenzenquotienten ($\mathcal{O}(h^2)$-Approximation).

Lösung

Die Schrittweite ist $h = 0.25$ und damit sind zunächst die Werte $y_0, \ldots, y_4$ an den Stellen

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.25,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 0.75 \text{ und } x_4 \ = 1$$

zu bestimmen, und da keine Ableitungen in der RBen vorkommen, bleibt es bei diesen Unbekannten (keine Ghost-Points). Die RBen liefern zwei Gleichungen $y_0 = 0$ und $y_4 = e^2 - e^{-2}$. Für alle restlichen Gleichungen:
In der allgemeinen Schreibweise aus der Vorlesung hat man $p(x) = -4$, $q(x) = 0$, $b(x) = 0$, $\beta = e^2 - e^{-2}$ und $\alpha = 0$.
Ersetze nun

$$\begin{aligned} y'(x_j) &\approx \frac{y_h(x_{j+1}) - y_h(x_{j-1})}{2h}, \\ y''(x_j) &\approx \frac{y_h(x_{j+1}) - 2y_h(x_j) + y_h(x_{j-1})}{h^2}. \end{aligned}$$

Man erhält mit $y_h(x_j) =: y_j$ die Formel

$$\begin{aligned} & -\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + 4\frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} = 0 \\ \iff \quad & (1 - 2h)y_{j+1} - 2y_j + (1 + 2h)y_{j-1} = 0. \end{aligned}$$

Damit folgt nun für

$$\begin{aligned} j = 1: &\quad (1 - 2h)y_2 - 2y_1 + (1 + 2h)y_0 = 0, \\ j = 2: &\quad (1 - 2h)y_3 - 2y_2 + (1 + 2h)y_1 = 0, \\ j = 3: &\quad (1 - 2h)y_4 - 2y_3 + (1 + 2h)y_2 = 0. \end{aligned}$$

Man hat also das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^2 - e^{-2} \end{pmatrix}$$

zu lösen. Die Lösung ist $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)^T \approx (0,\ 0.1813,\ 0.7254,\ 2.3575,\ 7.2537)^T$.
Alternativ können die Variablen y_0, y_4 vorab eliminiert werden (s.o.). Die führt auf das zu lösende LGS:

$$\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-e^2 + e^{-2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist $(y_1, y_2, y_3)^T \approx (0.1813,\ 0.7254,\ 2.3575)^T$. Die Werte $y_0 = 0$ und $y_4 = e^2 - e^{-2} \approx 7.2537$ sind bereits durch die Randbedingungen bestimmt.

Aufgabe 11.4 [Differenzenverfahren für RWA: Ehemalige Klausuraufgabe]

Stellen Sie unter ausschließlicher Verwendung *zentraler Differenzenquotienten* mit dem Differenzenverfahren zur Schrittweite $h = 2$ ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Näherungslösung der Randwertaufgabe

$$-y''(x) + \frac{(4-x)^2}{4} y(x) = \frac{(4-x)^2}{4}, \quad 0 < x < 8, \quad y(0) = 1,\ y'(8) - 3y(8) = 0,$$

auf [*ohne* das LGS zu lösen]!

Lösung

Da die 2. RB am rechten Randpunkt $b = 8$ eine Ableitung enthält und wegen der Forderung der Verwendung zentraler Differenzenquotienten (dadurch besteht die Möglichkeit, eine $\mathcal{O}(h^2)$-Approximation zu erhalten), betrachtet man die Diskretisierungsstellen

$$x_0 = 0,\ x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6,\ x_4 = 8,\ x_5 = 10$$

mit Abstand $h = 2$ und hat dazu die Unbekannten $y_0, \ldots, y_5$ zu bestimmen (mit Ghost-Point (x_5, y_5), auch dann, wenn die Verwendung des Ghost-Points nicht explizit in der Aufgabe gefordert wäre).
Unter Verwendung der Approximationen

$$\begin{aligned} y'(x_j) &\approx \frac{y_h(x_{j+1}) - y_h(x_{j-1})}{2h}, \\ y''(x_j) &\approx \frac{y_h(x_{j+1}) - 2y_h(x_j) + y_h(x_{j-1})}{h^2}, \end{aligned}$$

erhält man für die obige RWA mit $y_h(x_i) = y_{h,i}$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} & -\frac{y_{h,i+1} - 2y_{h,i} + y_{h,i-1}}{4} + \frac{(4-x_i)^2}{4} y_{h,i} = \frac{(4-x_i)^2}{4}, \quad i = 1, \ldots, 4, \\ \iff \quad & \left(-1,\ 2 + (4-x_i)^2,\ -1\right) \begin{pmatrix} y_{h,i-1} \\ y_{h,i} \\ y_{h,i+1} \end{pmatrix} = (4-x_i)^2, \quad i = 1, \ldots, 4. \end{aligned}$$

Für die rechte Seite der Gleichungen berechnet man:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	2	4	6	8	10
$(4-x_i)^2$	16	4	0	4	16	36

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen

$$y_{h,0} = 1 \quad \text{und} \quad -y_{h,3} + 4 \cdot (-3) \cdot y_{h,4} + y_{h,5} = 0$$

lässt sich zur Lösung der RWA das folgende lineare Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 18 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{h,0} \\ y_{h,1} \\ y_{h,2} \\ y_{h,3} \\ y_{h,4} \\ y_{h,5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nicht explizit gefordert war, das LGS mit durch die Randbedingungen ersetzten Variablen $y_{h,0}$, $y_{h,5}$ zu formulieren:

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{h,1} \\ y_{h,2} \\ y_{h,3} \\ y_{h,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.5 [Differenzenverfahren für EWP]

Welcher algebraischen Gleichung genügen die Werte $\lambda \in \mathbb{C}$ der Randwertaufgabe

$$-y''(x) = \lambda y(x), \quad y(0) - y'(0) = 0,\ y'(1) - y(1) = 0, \tag{*}$$

wenn man diese näherungsweise nach dem Differenzenverfahren unter Verwendung zentraler Differenzenquotienten berechnet (Schrittweite $h = 1/2$), wobei zusätzlich vorausgesetzt ist, dass die finite Differenzenlösung *nicht* konstant gleich Null ist?
Bemerkung: Diejenigen Werte $\lambda \in \mathbb{C}$, für welche (*) mit $y \neq$ Nullfunktion erfüllt ist, nennt man Eigenwerte.

Lösung

Wir zerlegen das Intervall $[0,1]$ in zwei Teilintervalle und haben damit die drei Knotenwerte $y_0 \approx y(0)$, $y_1 \approx y(1/2)$, $y_2 \approx y(1)$ zu bestimmen. Durch die Randbedingungen mit Verwendung zentraler Differenzenquotienten

$$y_0 - \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{y_3 - y_1}{2h} - y_2 = 0,$$

suchen wir mit zwei Ghost-Points zusätzlich $y_{-1} \approx y(-1/2)$ und $y_3 \approx y(3/2)$ und somit insgesamt 5 Unbekannte: y_{-1}, y_0, y_1, y_2 und y_3.
Wir ersetzen die Differentialgleichung durch die Differenzengleichung:

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + \lambda y_k = 0, \qquad k = 0,1,2.$$

An dieser Stelle sortiert man *einmal* die Gleichung nach Unbekannten, da ansonsten später alle Gleichungen einzeln umsortiert werden müssen. Umsortierung ergibt:

$$\tfrac{1}{h^2} y_{k-1} + (\lambda - \tfrac{2}{h^2}) y_k + \tfrac{1}{h^2} y_{k+1} = 0, \qquad k = 0,1,2.$$

Setzen wir nun $h = 1/2$ ein, so erhalten wir 5 Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_{-1} + y_0 - y_1 &= 0 \\ 4y_{-1} + (\lambda - 8)y_0 + 4y_1 &= 0 \\ 4y_0 + (\lambda - 8)y_1 + 4y_2 &= 0 \\ 4y_1 + (\lambda - 8)y_2 + 4y_3 &= 0 \\ y_1 + y_2 - y_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & & \\ 4 & (\lambda - 8) & 4 & & \\ & 4 & (\lambda - 8) & 4 & \\ & & 4 & (\lambda - 8) & 4 \\ & & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ersetzen wir nun in den mittleren drei Gleichungen die Unbekannten y_{-1} und y_3 mit Hilfe der ersten Gleichung (d.h. $y_{-1} = -y_0 + y_1$) und letzten Gleichung (d.h. $y_3 = y_1 + y_2$), so erhalten wir ein System mit drei Unbekannten:

$$\begin{aligned} (\lambda - 12)y_0 + 8y_1 &= 0, \\ 4y_0 + (\lambda - 8)y_1 + 4y_2 &= 0, \\ 8y_1 + (\lambda - 4)y_2 &= 0. \end{aligned}$$

In Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 12 & 8 & 0 \\ 4 & \lambda - 8 & 4 \\ 0 & 8 & \lambda - 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen wieder nichttriviale Lösungen (die Nullfunktion ist ja Lösung). Wir setzen also die Determinante dieser Matrix gleich Null und bestimmen damit die Eigenwerte:

$$(\lambda - 12)(\lambda - 8)(\lambda - 4) - 4 \cdot 8(\lambda - 12) - 4 \cdot 8(\lambda - 4) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda^3 - 24\lambda^2 + 112\lambda + 128 = 0.$$

Institut für Angewandte Mathematik
Leibniz Universität Hannover
Dr. Frank Attia, Dr. Florian Leydecker

Hannover, 30. Juni 2025

Mathematik für die Ingenieurwissenschaften III - Numerik
SoSe 2025 – Übung 12 – Lösungen

Themen

Näherungsverfahren für RWPe

- Allgemeiner Ansatz: Kapitel 5.2.2, schwache Formulierung (5.10) und (5.12).
- Galerkin-Verfahren: Kapitel 5.2.4
- Ritz-Verfahren zur Minimierung von Energiefunktionalen: Kapitel 5.2.5
    - Differentialgleichung (5.9) und zugehöriges Energiefunktional (5.15)

Zentralübung

Präsenzaufgabe 12.1 [Beispiel Galerkin-Verfahren]

Welches Polynom w dritten Grades ist die ist die beste Approximation im Sinne von Ritz–Galerkin der Lösung y von

$$-y''(x) + xy(x) = 2x^2, \qquad y(-1) = y(1) = 0\,?$$

Anders gesagt: Suche die Minimalstelle des zugehörigen Funktionals J im Raum derjenigen Polynome vom Grad $\leqslant 3$, die die Randbedingungen erfüllen.

Lösung

Die Lösung wird in der Vorlesung/Zentralübung präsentiert.

Kurzteil

Aufgabe 12.2 [1-parametriger Ansatz: allgemeinere RBen]

Geben Sie einen 1-, einen 2- und einen 3-parametrigen Polynomansatz zur Näherung der folgenden Randwertaufgabe an:

$$-y''(x) - xy'(x) + y = \cos(x), \qquad 0 < x < 2, \quad y(0) = 3, \; y(2) = 1.$$

Lösung

Die Randbedingungen müssen erfüllt sein. Eine Funktion, die die Randbedingungen interpoliert, erhält man durch

$$w_{\mathrm{RB}}(x) = \frac{1-3}{2-0}(x-0) + 3 = 3 - x$$

Die Ansatzfunktionen müssen die homogenen Randbedingungen erfüllen und linear unabhängig sein (erreichbar durch Graderhöhung). Wähle beispielsweise $w_1(x) = x(x-2)$, $w_2(x) = x^2(x-2)$ und $w_3(x) = x^2(x-2)^2$. Somit ergeben sich die Ansätze:

1-parametriger Ansatz: $w(x) = (3-x) + a_1 \underbrace{x(x-2)}_{=w_1(x)}$,

2-parametriger Ansatz: $w(x) = (3-x) + a_1 \underbrace{x(x-2)}_{=w_1(x)} + a_2 \underbrace{x^2(x-2)}_{=w_2(x)}$,

3-parametriger Ansatz: $w(x) = (3-x) + a_1 \underbrace{x(x-2)}_{=w_1(x)} + a_2 \underbrace{x^2(x-2)}_{=w_2(x)} + a_3 \underbrace{x^2(x-2)^2}_{=w_3(x)}$.

Aufgabenteil

Aufgabe 12.3 [RWAn und zugehöriges Energiefunktional J und schwache Formulierung]

Im Folgenden betrachten wir Randwertprobleme mit Nullrandbedingungen, d.h. $y(0) = y(1) = 0$.

(a) Geben Sie zu folgendem Randwertproblem das Energiefunktional J sowie die schwache Formulierung an.

$$-((x+1)y'(x))' + \sin(x)y(x) = \cos(x).$$

(b) Wie lauten für die durch folgende J gegebenen Minimierungsprobleme die zugehörigen Differentialgleichungen sowie die schwachen Formulierungen?

(i) $J[u] = \int_0^1 [x^2u^2(x) + e^{2x}(u'(x))^2]\, dx$,

(ii) $J[u] = \int_0^1 [x^2u^2(x) + e^{2x}(u'(x))^2 + (x+1)^2u(x)]\, dx$.

Lösung

Zunächst definieren wir den Testraum, der für alle Probleme hier gleich ist: $\mathbb{V}_0 = \{v \in C^2 : v(0) = v(1) = 0\}$. Im Gegensatz zum Vorgehen unter (5.9) müssen beide Randbedingungen in den Testraum eingearbeitet werden. In der Linearform ℓ ist $v(b) = v(1) = 0$ (gleiches Ergebnis, aber vom Sinn her falsch: man setzt dort $\rho = 0$).

(a) Zunächst liest man direkt aus der Differentialgleichung ab:

$$c_1(x) = x + 1, \quad c_0(x) = \sin(x), \quad f(x) = \cos(x).$$

Damit erhält man mittels (5.10)

$$a(y, v) = \int_0^1 (x+1)y'(x)v'(x)\, dx + \int_0^1 \sin(x)y(x)v(x)\, dx, \quad \ell(v) = \int_0^1 \cos(x)v(x)\, dx,$$

und die schwache Formulierung lautet: Suche $y \in \mathbb{V}_0$, so dass

$$\int_0^1 (x+1)y'(x)v'(x)\, dx + \int_0^1 \sin(x)y(x)v(x)\, dx = \int_0^1 \cos(x)v(x)\, dx \quad \forall v \in \mathbb{V}_0.$$

Das zugehörige Energie-Funktional bestimmt man über

$$J[y] = \frac{1}{2}a(y, y) - \ell(y) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left((x+1)y'(x)^2 + \sin(x)y(x)^2\right)\, dx - \int_0^1 \cos(x)y(x)\, dx.$$

(b) **(i)** Man formuliert J[u] um zu

$$J[u] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2e^{2x}(u'(x))^2 + 2x^2u^2(x)\right)\, dx.$$

und liest nach der Vorgehensweise aus der Vorlesung ab:

$$c_1(x) = 2e^{2x}, \quad c_0(x) = 2x^2, \quad f(x) = 0.$$

Die zugehörige Differentialgleichungen lautet somit:

$$\left(-2e^{2x}u'(x)\right)' + 2x^2u(x) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Die schwache Formulierung lautet dann: Suche $y \in \mathbb{V}_0$, so dass

$$\int_0^1 2e^{2x}y'(x)v'(x)\, dx + \int_0^1 2x^2y(x)v(x)\, dx = 0 \quad \forall v \in \mathbb{V}_0.$$

(ii) Analog zu (i) formuliert man J[u] um zu

$$J[u] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2e^{2x}(u'(x))^2 + 2x^2u^2(x)\right)\, dx - \int_0^1 -(1+x)^2u(x)\, dx$$

und erhält mit der Vorgehensweise aus der Vorlesung:

$$c_1(x) = 2e^{2x}, \quad c_0(x) = 2x^2, \quad f(x) = -(1+x)^2.$$

Die zugehörige Differentialgleichungen lautet somit:

$$\left(-2e^{2x}u'(x)\right)' + 2x^2u(x) = -(1+x)^2, \quad x \in [0, 1], \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Die schwache Formulierung lautet dann: Suche $y \in \mathbb{V}_0$, so dass

$$\int_0^1 2e^{2x}y'(x)v'(x)\, dx + \int_0^1 2x^2y(x)v(x)\, dx = \int_0^1 -(1+x)^2v(x)\, dx \quad \forall v \in \mathbb{V}_0.$$

Aufgabe 12.4 [Galerkin-Verfahren: zweiparametriger Polynomansatz]

Lösen Sie jeweils näherungsweise mit dem Galerkin-Verfahren die Randwertaufgaben

(a) $-((x+1)y'(x))' + 2y(x) = x, \qquad y(0) = y(1) = 0,$

(b) $-(xu'(x))' + \frac{u(x)}{x} = \cos(\frac{\pi}{2}x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$

unter Verwendung eines zweiparametrigen Polynomansatzes mit $w_1(x) = x(x-1)$ und $w_2(x) = x^2(x-1)$.

Lösung

(a) Man liest (bei Verwendung der Notation der Vorlesung) ab:

$$c_1(x) = x+1, \quad c_0(x) = 2, \quad f(x) = x.$$

Damit ist für $v(x)$ mit $v(0) = v(1) = 0$

$$a(u,v) = \int_0^1 (x+1)u'(x)\cdot v'(x)dx + \int_0^1 2u(x)v(x)dx, \quad \text{und} \quad \ell(v) = \int_0^1 x\cdot v(x)dx.$$

Man wählt nun den Ansatz so, dass beide Randbedingungen erfüllt sind

$$w(x,a_1,a_2) = a_1 \underbrace{x(x-1)}_{=w_1(x)} + a_2 \underbrace{x^2(x-1)}_{=w_2(x)}.$$

und berechnet für $w_1(x) = x(x-1)$ und $w_2(x) = x^2(x-1)$ mit $w_1'(x) = 2x-1$ und $w_2'(x) = 3x^2-2x$

$$a(w_1,w_1) = \int_0^1 (x+1)(2x-1)(2x-1)\,dx + \int_0^1 2x(x-1)x(x-1)\,dx = \ldots = \frac{17}{30},$$
$$a(w_1,w_2) = \int_0^1 (x+1)(2x-1)(3x^2-2x)\,dx + \int_0^1 2x(x-1)x^2(x-1)\,dx = \ldots = \frac{19}{60},$$
$$a(w_2,w_2) = \int_0^1 (x+1)(3x^2-2x)(3x^2-2x)\,dx + \int_0^1 2x^2(x-1)x^2(x-1)\,dx = \ldots = \frac{53}{210}.$$

Aufgrund der Symmetrie von $a(\cdot,\cdot)$ ist $a(w_1,w_2) = a(w_2,w_1)$. Ferner berechnet man

$$\ell(w_1) = \int_0^1 x\cdot x(x-1)dx = \ldots = -\frac{1}{12},$$
$$\ell(w_2) = \int_0^1 x\cdot x^2(x-1)dx = \ldots = -\frac{1}{20}.$$

Durch Lösen des LGS $\begin{pmatrix} a(w_1,w_1) & a(w_2,w_1) \\ a(w_1,w_2) & a(w_2,w_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{20}\end{pmatrix}$ erhält man schließlich: $a_1 = -\frac{131}{1077}$, $a_2 = -\frac{49}{1077}$. Dies liefert zum Schluss

$$w(x) = -\frac{131}{1077}x(x-1) - \frac{49}{1077}x^2(x-1).$$

(b) Man liest erneut ab:

$$c_1(x) = x, \quad c_0(x) = \tfrac{1}{x}, \quad f(x) = \cos(\tfrac{\pi}{2}x).$$

Damit ist für $v(x)$ mit $v(0) = v(1) = 0$

$$a(u,v) = \int_0^1 xu'(x)\cdot v'(x)dx + \int_0^1 \tfrac{1}{x}u(x)v(x)dx, \quad \text{und} \quad \ell(v) = \int_0^1 \cos(\tfrac{\pi}{2}x)\cdot v(x)dx.$$

Man verwendet nun den Ansatz

$$w(x,a_1,a_2) = a_1x(x-1) + a_2x^2(x-1) = a_1(x^2-x) + a_2(x^3-x^2)$$

und berechnet für $w_1(x) = x(x-1)$ und $w_2(x) = x^2(x-1)$ mit $w_1'(x) = 2x-1$ und $w_2'(x) = 3x^2-2x$

$$
\begin{aligned}
a(w_1,w_1) &= \int_0^1 x(2x-1)(2x-1)\,dx + \int_0^1 \tfrac{1}{x}x(x-1)x(x-1)\,dx = \ldots = \frac{1}{4},\\
a(w_1,w_2) &= \int_0^1 x(2x-1)(3x^2-2x)\,dx + \int_0^1 \tfrac{1}{x}x(x-1)x^2(x-1)\,dx = \ldots = \frac{3}{20},\\
a(w_2,w_2) &= \int_0^1 x(3x^2-2x)(3x^2-2x)\,dx + \int_0^1 \tfrac{1}{x}x^2(x-1)x^2(x-1)\,dx = \ldots = \frac{7}{60}.
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Symmetrie von $a(\cdot,\cdot)$ ist auch hier $a(w_1,w_2) = a(w_2,w_1)$. Ferner berechnet man

$$
\begin{aligned}
\ell(w_1) &= \int_0^1 \cos(\tfrac{\pi}{2}x)\cdot x(x-1)dx = \ldots = \frac{4\pi-16}{\pi^3},\\
\ell(w_2) &= \int_0^1 \cos(\tfrac{\pi}{2}x)\cdot x^2(x-1)dx = \ldots = -\frac{4(8\pi-24)}{\pi^4}.
\end{aligned}
$$

Durch Lösen des LGS $\begin{pmatrix} a(w_1,w_1) & a(w_2,w_1) \\ a(w_1,w_2) & a(w_2,w_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell(w_1) \\ \ell(w_2)\rangle \end{pmatrix}$ erhält man schließlich:

$$
a_1 = \frac{10(7\pi^2+44\pi-216)}{\pi^4} \approx -0.8914 \quad \text{und} \quad a_2 = -\frac{30(3\pi^2+28\pi-120)}{\pi^4} \approx 0.7473.
$$

Dies liefert zum Schluss

$$
w(x) = -0.8914x(x-1) + 0.7473x^2(x-1).
$$

Aufgabe 12.5 [Galerkin-Verfahren mit Polynom-Ansatz sowie mit trigonometrischem Ansatz]

Lösen Sie näherungsweise mit dem Galerkin-Verfahren und einem zweiparametrigen Ansatz aus möglichst einfachen

(a) Polynomen die folgenden RWA: $-y''(x) + 2y(x) = x^2, \quad y(-1) = 0,\ y'(1) = 0,$

(b) trigonometrischen Funktionen die folgende RWA: $-y''(x) + xy(x) = x^2, \qquad y(0) = y(\pi) = 0.$

Hinweis: Verwenden Sie in (a) die Ansatzfunktionen $w_1(x) = (x+1)$ und $w_2(x) = (1+x)^2$ und bei (b) $w_1(x) = \sin(x)$ und $w_2(x) = \sin(2x)$. Die auftretenden Integrale und LGSe dürfen Sie mit Hilfe eines Computers berechnen.

Lösung

(a) Es ist

$$
-(\underbrace{1}_{=c_1(x)}\ y'(x))' + \underbrace{2}_{=c_0(x)}\ y(x) = \underbrace{x^2}_{=f(x)}, \quad y(-1) = 0 \text{ und } \underbrace{1}_{=c_1(b)} \cdot y'(1) = 0 = \rho.
$$

Damit ist für $v(x)$ mit $v(-1) = 0$ (und da $\rho = 0$)

$$
a(u,v) = \int_{-1}^1 1\cdot u'(x)\cdot v'(x)dx + \int_{-1}^1 2u(x)v(x)dx, \quad \text{und} \quad \ell(v) = 0 + \int_{-1}^1 x^2\cdot v(x)dx.
$$

Da wir an der Stelle $x = 1$ eine Ableitungsbedingung vorgegeben haben, müssen die Ansatzfunktionen nur die Bedingung am linken Rand erfüllen. Man wähle als Ansatzfunktionen $w_1(x) = 1+x$ und $w_2(x) = (1+x)^2$. Gesucht ist demnach $w(x,a_1,a_2) = a_1w_1(x) + a_2w_2(x)$. Mit $w_1'(x) = 1$ und $w_2'(x) = 2(1+x)$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
a(w_1,w_1) &= \int_{-1}^1 1\cdot 1\cdot 1\,dx + \int_{-1}^1 2(x+1)^2dx = \ldots = \frac{22}{3}\\
a(w_1,w_2) &= \int_{-1}^1 1\cdot 1\cdot 2(1+x)\,dx + \int_{-1}^1 2(x+1)(x+1)^2dx = \ldots = 12\\
a(w_2,w_2) &= \int_{-1}^1 1\cdot 1\cdot 4(1+x)^2\,dx + \int_{-1}^1 2(x+1)^4dx = \ldots = \frac{352}{15}
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Symmetrie von $a(\cdot,\cdot)$ ist $a(w_1,w_2) = a(w_2,w_1)$. Ferner berechnet man

$$\begin{aligned}\ell(w_1) &= \int_{-1}^{1} x^2 \cdot (x+1)dx = \ldots = \frac{2}{3},\\ \ell(w_2) &= \int_{-1}^{1} x^2 \cdot (x+1)^2 dx = \ldots = \frac{16}{15}.\end{aligned}$$

Durch Lösen des LGS $\begin{pmatrix} a(w_1,w_1) & a(w_2,w_1) \\ a(w_1,w_2) & a(w_2,w_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\ell(w_1)\\ \ell(w_2)\end{pmatrix}$ erhält man schließlich: $a_1 = \frac{8}{79}$, $a_2 = -\frac{1}{158}$. Dies liefert zum Schluss

$$w(x) = \frac{8}{79}(x+1) - \frac{1}{158}(x+1)^2.$$

(b) Mit der Vorgehensweise aus der Vorlesung erhält man:

$$-(\underbrace{1}_{=c_1(x)} y'(x))' + \underbrace{x}_{=c_0(x)} y(x) = \underbrace{x^2}_{=f(x)}, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Damit ist für $v(x)$ mit $v(0) = y(\pi) = 0$

$$a(u,v) = \int_0^\pi 1 \cdot u'(x) \cdot v'(x)dx + \int_0^\pi xu(x)v(x)dx, \quad \text{und} \quad \ell(v) = \int_0^\pi x^2 \cdot v(x)dx.$$

Man wähle als Ansatzfunktionen $w_1(x) = \sin x$ und $w_2(x) = \sin(2x)$. Gesucht ist demnach $w(x,a_1,a_2) = a_1 w_1(x) + a_2 w_2(x)$. Mit $w_1'(x) = \cos(x)$ und $w_2'(x) = 2\cos(2x)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}a(w_1,w_1) &= \int_0^\pi 1 \cdot \cos^2(x)dx + \int_0^\pi x\sin^2(x)dx = \ldots = \frac{1}{4}\pi^2 + \frac{1}{2}\pi\\ a(w_1,w_2) &= \int_0^\pi 1 \cdot \cos(x) \cdot 2\cos(2x)dx + \int_0^\pi x\sin(x)\cdot\sin(2x)dx = \ldots = -\frac{8}{9}\\ a(w_2,w_2) &= \int_0^\pi 1 \cdot 4\cos^2(2x)dx + \int_0^\pi x\sin^2(2x)dx = \ldots = 2\pi + \frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie von $a(\cdot,\cdot)$ ist $a(w_1,w_2) = a(w_2,w_1)$. Ferner berechnet man

$$\begin{aligned}\ell(w_1) &= \int_0^\pi x^2 \cdot \sin(x)dx = \ldots = \pi^2 - 4,\\ \ell(w_2) &= \int_0^\pi x^2 \cdot \sin(2x)dx = \ldots = -\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

Durch Lösen des LGS $\begin{pmatrix} a(w_1,w_1) & a(w_2,w_1) \\ a(w_1,w_2) & a(w_2,w_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\ell(w_1)\\ \ell(w_2)\end{pmatrix}$ erhält man schließlich: $a_1 \approx 1.3598$, $a_2 \approx -0.4258$. Dies liefert zum Schluss

$$w(x) = 1.3598\sin(x) - 0.4258\sin(2x).$$