Florian Schleth

Aufgabe 1 Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die $P^T LR$-Zerlegung (also die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotwahl) von A.

(b) Lösen Sie mit Hilfe der $P^T LR$-Zerlegung aus (a) das obige Gleichungssystem.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der $P^T LR$-Zerlegung die Determinante von A. Hinweis: Es gilt $\det(P) = -1$.

a)

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left\| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (\cdot \frac{1}{2}) \\ \\ + \end{matrix} \qquad \left\| \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-\frac{1}{3}) \\ + \end{matrix} \qquad \left\| \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix} \qquad \left\| \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}; \; R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $L\underbrace{R\vec{x}}_{\vec{z}} = P\vec{b}$

$$L\vec{z} = P\vec{b} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \vec{z} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{z} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$R\vec{x} = \vec{z} \iff \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) $\det(L) = 1$; $\det(R) = -24$; $\det(P^T) = \det(P)$

$$\det(A) = \det(P^T) \cdot \det(L) \cdot \det(R) = 24 \,//$$

Aufgabe 2

Vorgelegt seien die Daten

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 1 & 22 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 45 \end{pmatrix}.$$

(a) Führen Sie *einen* Iterationsschritt des (vorwärts) *Gauß-Seidel*-Verfahrens mit Startvektor $\mathbf{x}^{(0)} = (5 \quad 1)^{\mathsf{T}}$ zur näherungsweisen Lösung des LGS $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ durch.

(b) Führen Sie mit Startvektor $\mathbf{x}^{(0)} = (5 \quad 1)^{\mathsf{T}}$ *einen* Schritt des Jacobi-Verfahrens durch.

(c) Konvergiert das (vorwärts) *Gauß-Seidel*-Verfahren für beliebige Startvektoren? Konvergiert das Jacobi-Verfahren für beliebige Startvektoren?

(d) Für eine andere Matrix A ergibt sich beim Gauß-Seidel-Verfahren die Fehlerfortpflanzungsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0 & -2/10 \\ -2/10 & -3/10 \end{pmatrix}$. Nach einer Iteration dieses Verfahrens erhält man ausgehend von

$$\mathbf{x}^{(0)} = (16/10 \quad 0)^{\mathsf{T}} \quad \text{den Vektor} \quad \mathbf{x}^{(1)} = (12/10 \quad 214/100)^{\mathsf{T}}.$$

Wieviele Iterationen k muss man höchstens durchführen, damit der Fehler $\|\mathbf{e}^{(k)}\|_\infty$ kleiner oder gleich 10^{-6} ist? Geben Sie eine möglichst kleine Zahl k dafür mit Hilfe der „a priori"-Fehlerabschätzung an.

a) $N^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 1 & 22 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 1 & 22 \end{pmatrix} \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 12 \\ 45 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 45 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1 = 1$

$22x_2 = 45 - x_1 = 44 \Leftrightarrow x_2 = 2$

$\Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ //

b) $N^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 22 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 45 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 40 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} 11/10 \\ 40/22 \end{pmatrix}$

c)

Jacobi:

Die Matrix A ist strikt diagonal dominant.

$\Rightarrow$ Jacobi-Verfahren konvergiert.

Gauß-Seidel:

(i) Die Matrix A ist nicht s.p.d..

$$M = -N(A - N^{-1}) \overset{\text{T.R.}}{=} -\begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 0 & -\frac{1}{110} \end{pmatrix}$$

(ii) $\|M\|_1 = \max\left(0, 23/110\right) = \frac{23}{110} < 1$, konvergiert

d)

$$\|M\|_\infty = 5/10 \qquad \|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\|_\infty = \left\| \begin{matrix} -4/10 \\ 214/100 \end{matrix} \right\|_\infty = \frac{214}{100}$$

$$k \geq \frac{\log\left(\frac{10^{-6}(1 - 5/10)}{214/100}\right)}{\log(5/10)} = 22{,}029$$

Nach höchsten 23 Iterationen.

Aufgabe 3

(a) Finden Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens eine Näherung $\mathbf{x}^{(1)}$ für einen stationären Punkt der Funktion

$$f(x_1, x_2) \;=\; x_1^4 - \frac{5}{2}x_1^2 + x_2^4 - \frac{5}{2}x_2^2 + 2x_1^2x_2^2 + 42.$$

Führen Sie dazu einen Schritt des Newton-Verfahrens für $\mathbf{F} = \nabla f$ durch. Verwenden Sie als Startvektor $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Hinweise: Verwenden Sie zum Lösen der Aufgabe, dass die erste und zweite Ableitung von f gegeben sind durch

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 5x_1 + 4x_1x_2^2 \\ 4x_2^3 - 5x_2 + 4x_1^2x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f''(\mathbf{x}) = D\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 5 + 4x_2^2 & 8x_1x_2 \\ 8x_1x_2 & 12x_2^2 - 5 + 4x_1^2 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})\|_2^2$ und $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})\|_2^2$. Hat sich eine Reduktion ergeben?

(c) *Ein* stationärer Punkt der Funktion ist $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Liegt die von Ihnen in (a) berechnete Stelle $\mathbf{x}^{(1)}$ näher an *diesem* stationären Punkt als $\mathbf{x}^{(0)}$? Verwenden Sie hierzu die $\|\cdot\|_2$-Norm.

a)

$$\nabla f(1/2, 0) = \begin{pmatrix} 1/2 - 5/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f''(1/2, 0) = \begin{pmatrix} 3-5 & 0 \\ 0 & -5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$f''(1/2, 0)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 - 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\nabla f(-1/2, 0) = \begin{pmatrix} -1/2 + 5/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|F(\vec{x}^{(0)})\|_2^2 = (-2)^2 = 4 \qquad \|F(\vec{x}^{(1)})\|_2^2 = 2^2 = 4$$

Es hat keine Reduktion statt gefunden.

c)

$$\|x^* - x^{(0)}\|_2 = \sqrt{\left(-\tfrac{3}{2}\right)^2} = 3/2$$

$$\|x^* - x^{(1)}\|_2 = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2} = 1/2$$

$x^{(1)}$ liegt näher dran!

Aufgabe 4 Betrachten Sie das Eigenwertproblem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}}_{A} \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}.$$

(a) Geben Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin eine möglichst genaue Abschätzung der Eigenwerte der Matrix A an.

(b) Führen Sie zu dem Eigenwertproblem ausgehend vom Startvektor $\mathbf{y}^{(0)} = (0.5,\ 0.7,\ 0.5)^{\mathsf{T}}$ einen Schritt der inversen Iteration zur Approximation der Näherung $\lambda_3^{(1)}$ für λ_3 durch.

(c) Führen Sie ausgehend vom Startvektor $\mathbf{y}^{(0)} = (-0.5,\ 0.7,\ -0.5)^{\mathsf{T}}$ einen Schritt der *Vektoriteration* zur Approximation der Näherung $\lambda_1^{(0)}$ durch, und geben Sie mit Hilfe des Ergebnisses und (b) eine Näherung für die Konditionszahl $\kappa_2(A)$ an!

2024 nicht prüfungsrelevant!

Aufgabe 5 Gegeben sei folgende Wertetabelle

t	−4	−2	2	4
y	128	72	8	2

Berechnen Sie die Ausgleichs*parabel* $f(t) = x_2 t^2 + x_1 t + x_0$ mit Hilfe der *Gaußschen Normalengleichungen*. Wählen Sie dabei für den Lösungsvektor $\mathbf{x}$ die Reihenfolge $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)^{\mathsf{T}}$ (*nicht* $\mathbf{x} = (x_2, x_1, x_0)^{\mathsf{T}}$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 16 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 & 4 \\ 16 & 4 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 40 \\ 0 & 40 & 0 \\ 40 & 0 & 544 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 128 \\ 72 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 210 \\ -632 \\ 2400 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 40 \\ 0 & 40 & 0 \\ 40 & 0 & 544 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ -632 \\ 2400 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 95/3 \\ -79/5 \\ 25/12 \end{pmatrix}$$

$$f(t) = \frac{25}{12} t^2 - \frac{79}{5} t + \frac{95}{3} \quad //$$

Aufgabe 6 Gegeben seien die folgenden Messdaten

i	0	1	2	3
x_i	-3	0	1	3
$f(x_i)$	0	2	-1	4

(a) Geben Sie das Lagrange-Interpolationspolynom *oder* das Newton-Interpolationspolynom zu diesen Daten an. Hinweis: Es ist nicht nötig, auzumultiplizieren und zusammenzufassen.

(b) Skizzieren Sie den zugehörigen linearen Spline s sowie s^2.

(c) Berechnen Sie für den zugehörigen linearen Spline s die Integrale $\int_{-3}^{3} [s(x)]^2 \, dx$ und $\int_{-3}^{3} s'(x) \, dx$.

(d) Wie groß ist die Dimension des kubischen Splineraums zu diesen Stützstellen mit natürlichen Randbedingungen?

a)
$$L_0 = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(-3-0)(-3-1)(-3-3)}$$

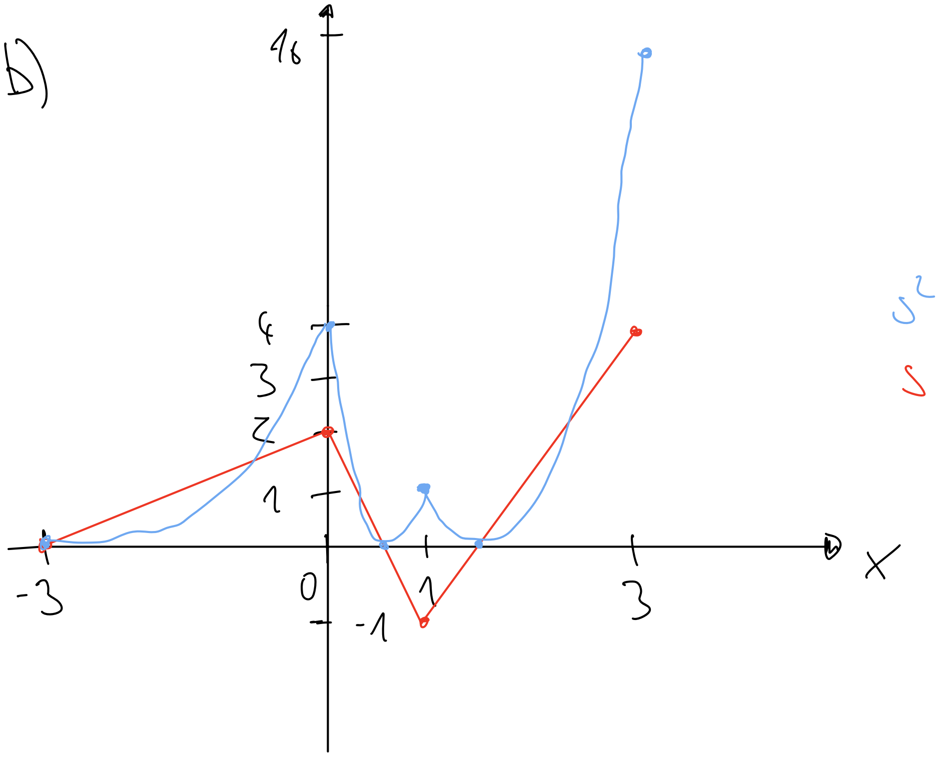
$$L_1 = \frac{(x+3)(x-1)(x-3)}{(0+3)(0-1)(0-3)}$$

$$L_2 = \frac{(x+3)(x-0)(x-3)}{(1+3)(1-0)(1-3)}$$

$$L_3 = \frac{(x+3)(x-0)(x-1)}{(3+3)(3-0)(3-1)}$$

$$p(x) = 0L_0 + 2L_1 - 1L_2 + 4L_3 \quad //$$

b)



c)

$$\int_{-3}^{3} (s(x))^2 \, dx = \int_{-3}^{0} (s(x))^2 \, dx + \int_{0}^{1} (s(x))^2 \, dx + \int_{1}^{3} (s(x))^2 \, dx$$

$$= \frac{0-(-3)}{6}\left(0 + 4\cdot 1\cdot 1 + 4\right) + \frac{1-0}{6}\left(4 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 1\right) + \frac{3-1}{6}\left(1 + 4\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} + 16\right)$$

$$= 4 + 1 + \frac{26}{3} = \frac{41}{3}$$

$$\int_{-3}^{3} s'(x)\,dx = \int_{-3}^{0} s'(x)\,dx + \int_{0}^{1} s'(x)\,dx + \int_{1}^{3} s'(x)\,dx$$

$$= (0+3)\cdot\frac{2}{3} + (1-0)\cdot -3 + (3-1)\cdot\frac{5}{2} = 2 - 3 + 5 = 4$$

d)

$d = n + k = 6$ //　　　Dimension $= 6$

Aufgabe 6 Gegeben seien die folgenden Messdaten

i	0	1	2	3
x_i	-3	0	1	3
$f(x_i)$	0	2	-1	4

(a) Geben Sie das Lagrange-Interpolationspolynom *oder* das Newton-Interpolationspolynom zu diesen Daten an. Hinweis: Es ist nicht nötig, auszumultiplizieren und zusammenzufassen.

(b) Skizzieren Sie den zugehörigen linearen Spline s sowie s^2.

(c) Berechnen Sie für den zugehörigen linearen Spline s die Integrale $\int_{-3}^{3}[s(x)]^2\,dx$ und $\int_{-3}^{3} s'(x)\,dx$.

(d) Wie groß ist die Dimension des kubischen Splineraums zu diesen Stützstellen mit natürlichen Randbedingungen?

Aufgabe 7 Ist

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 - 1, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\frac{1}{2}x^3, & 1 < x \leqslant 5 \end{cases}$$

ein kubischer Spline auf dem Intervall $[-1, 5]$ zur Zerlegung bzgl. der Punkte $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$?

Aufgabe 8 (4 + 6 + 2 = 12 Punkte)

(a) Gegeben ist die Anfangswertaufgabe (AWA)

$$y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) = \sin^2(t), \quad y(0) = 3, y'(0) = -2, y''(0) = 1.$$

Zur Lösung dieser Aufgabe soll die Laplace-Transformation verwendet werden. Stellen Sie hierzu den Ansatz $Y(s) = \frac{Q(s)+(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ auf. Hinweis: Eine explizite Berechnung der Lösung der AWA wird in der Aufgabe NICHT verlangt!

(b) Zu einer anderen Anfangswertaufgabe sei die folgende Laplacetransformierte gegeben:

$$Y(s) = \frac{4s-1}{(s-1)^2(s+2)}.$$

Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$ dieser AWA durch Rücktransformation von $Y(s)$. Führen Sie hierfür zunächst eine Partialbruchzerlegung durch.

(c) Betrachten Sie die 3-periodische Funktion

$$f(x) = e^{-2x}, \ 0 \leqslant x < 3, \quad f(3k+x) = f(x), \ k \in \mathbb{Z}.$$

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von f. Hinweis: Es ist nicht nötig, das Ergebnis nach einer Integralberechnung weiter zu vereinfachen.

Aufgabe 7 Ist

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 - 1, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\frac{1}{2}x^3, & 1 < x \leqslant 5 \end{cases}$$

ein kubischer Spline auf dem Intervall $[-1, 5]$ zur Zerlegung bzgl. der Punkte $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$?

$$s'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{3}{2}x^2 & 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} s'(x) = \frac{3}{2}1^2 = \frac{3}{2} \neq -\frac{3}{2} = \lim_{x \to 1^+} s'(x)$$

Ist kein stetiger Spline!

Aufgabe 8 (4 + 6 + 2 = 12 Punkte)

(a) Gegeben ist die Anfangswertaufgabe (AWA)

$$y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) = \sin^2(t), \quad y(0) = 3, y'(0) = -2, y''(0) = 1.$$

Zur Lösung dieser Aufgabe soll die Laplace-Transformation verwendet werden. Stellen Sie hierzu den Ansatz $Y(s) = \frac{Q(s)+(\mathcal{L}g)(s)}{P(s)}$ auf. Hinweis: Eine explizite Berechnung der Lösung der AWA wird in der Aufgabe NICHT verlangt!

(b) Zu einer anderen Anfangswertaufgabe sei die folgende Laplacetransformierte gegeben:

$$Y(s) = \frac{4s-1}{(s-1)^2(s+2)}.$$

Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$ dieser AWA durch Rücktransformation von $Y(s)$. Führen Sie hierfür zunächst eine Partialbruchzerlegung durch.

(c) Betrachten Sie die 3-periodische Funktion

$$f(x) = e^{-2x},\ 0 \leqslant x < 3, \quad f(3k + x) = f(x),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von f. Hinweis: Es ist nicht nötig, das Ergebnis nach einer Integralberechnung weiter zu vereinfachen.

a) $P(s) = s^3 - 2s^2 + s$

$$Q(s) = 1\cdot 3 + (-2)(-2) + 1\cdot 1$$
$$+ s(-2\cdot 3 + 1\cdot(-2))$$
$$+ s^2(1\cdot 3)$$
$$= 8 - 8s + 3s^2$$

$$(\mathcal{L}\sin^2(t))(s) = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{8 - 8s + 3s^2 + \frac{2}{s(s^2+4)}}{s^3 - 2s^2 + s}$$

b) $$\frac{4s-1}{(s-1)^2(s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+2}$$

$$\Leftrightarrow 4s-1 = A(s-1)(s+2) + B(s+2) + C(s-1)^2$$

$$= (A+C)s^2 + (A+B-2C)s + (-2A+2B+C)$$

K.V. $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ T.R. $\Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{s+2}$$

$$\Rightarrow f(t) = e^t + te^t - e^{-2t}$$

c)

$$(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{1-e^{-s3}} \int_0^3 e^{-2x} \cdot e^{-sx}\, dx$$

$$= \frac{1}{1-e^{-3s}} \int_0^3 e^{(-2-s)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{1-e^{-3s}} \left[\frac{1}{-2-s} e^{(-2-s)x}\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{1-e^{-3s}} \left(\frac{1}{-2-s} e^{(-2-s)3} - \frac{1}{-2-s} e^0\right) //$$

Aufgabe 9 In dieser Aufgabe geht es um das Euler-Verfahren zur Lösung von Anfangswertaufgaben.

(a) Formen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\text{AWA} \qquad y''(x) = f(x, y(x)) = (x+1)\,y(x) \ + \ \sin(x), \ x \in [0,1] \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1$$

in ein DGL-System 1. Ordnung um (so, dass also das Euler-Verfahren anwendbar *wäre*).

(b) Eine *andere* Anfangswertaufgabe zur Bestimmung einer Lösung $y(x)$ hat mit $u_1(x) := y(x)$, $u_2(x) := y'(x)$ und $\mathbf{u}(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$ als System 1. Ordnung das System

$$\text{AWA} \qquad \mathbf{u}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}, \ x \in [0,1], \quad \mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit dem Verfahren von Euler zur Schrittweite $h = 0.1$ eine Näherung für $y(0.2)$. Geben Sie auch eine Näherung für die Steigung von y bei 0.2 an.

a) $u_1 = y(x) \quad u_2 = y'(x)$

$$u' = f(x, u(x)) = \begin{pmatrix} u_2 \\ (x+1)u_1 + \sin(x) \end{pmatrix} \quad \text{, mit } \vec{u}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{u}^{(0)} = \vec{u}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(0)} + h \cdot f(x_0, \vec{u}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 1{,}1 \end{pmatrix}$$

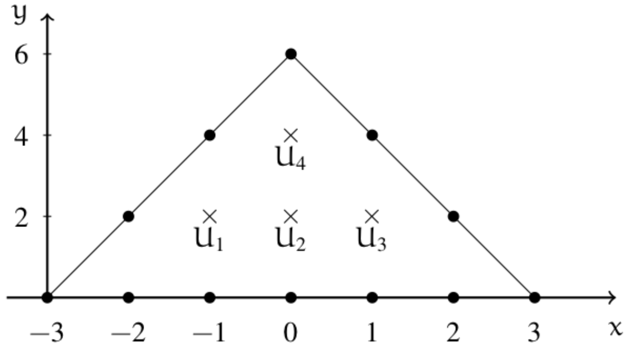
$$\vec{u}^{(2)} = \vec{u}^{(1)} + h f(x_1, \vec{u}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 1{,}1 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} 1{,}1 \\ 1{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}21 \\ 1{,}22 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}(0{,}2) \approx \vec{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}21 \\ 1{,}22 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y(0{,}2) = 0{,}21 \quad , \quad y'(0{,}2) = 1{,}22$$

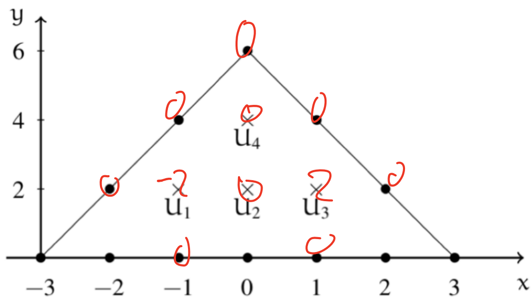
Aufgabe 10 (6 + 8 = 14 Punkte)

In dem unten skizzierten Gebiet Ω (der Rand sei bezeichnet mit $\partial\Omega$) sollen partielle Differentiagleichungen näherungsweise mit dem Differenzenverfahren (zentrale Differenzenquotienten) gelöst werden. Die Schrittweite in x-Richtung sei $h = 1$ und in y-Richtung sei $k = 2$. Stellen Sie jeweils das Gleichungssystem (in Matrix-Schreibweise) zur Bestimmung der Differenzenlösung in den durch Kreuze bezeichneten vier inneren Knoten auf, *ohne* es zu lösen.



(a) $\Delta u = x \cdot y$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$,

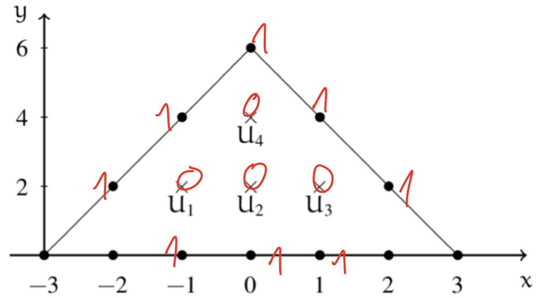
(b) $u_{xx} - u_{yy} = 0$ in Ω, $u = 1$ auf $\partial\Omega$.



$h=1 \qquad k=2$

$$\begin{pmatrix} 5/2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5/2 & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 5/2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 5/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)



$h = 1 \qquad k = 2$

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\ 0+\frac{1}{4} \\ 0+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1 \\ 0+1+1+\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/4 \\ 3/2 \\ 9/4 \end{pmatrix}$$

$$-1 - 1u_2 + \frac{5}{2}u_1 - \frac{1}{4}\cdot 1 - \frac{1}{4}\cdot 1 = 0$$

Aufgabe 11 [Ritz/Galerkin-1d-FEM Eigenwertaufgabe]

Vorgelegt sei die Zerlegung des Intervalls $[0, 10]$ mit folgenden Punkten:

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 5,\ x_3 = 9,\ x_4 = 10.$$

(a) Bestimmen Sie die Intervalllängen h_i der Teilintervalle. Fertigen Sie eine maßstabsgetreue Skizze auf der x-Achse an, die Sie mit den x_i und deren Werten sowie den Intervalllängen beschriften.

(b) Gegeben sei die Eigenwertaufgabe

$$-(24y'(x))' = \lambda y(x)\ , \qquad x \in [0, 10], \quad y(0) = y(10) = 0.$$

Als Ansatzfunktionen für das **Ritz/Galerkin-Verfahren** sollen hier die entsprechenden **Hutfunktionen (FEM-Ansatz)** zu obiger Zerlegung verwendet werden. Geben Sie das aus diesem Ansatz resultierende verallgemeinerte Matrizen-Eigenwertproblem an, *ohne* dieses zu lösen.

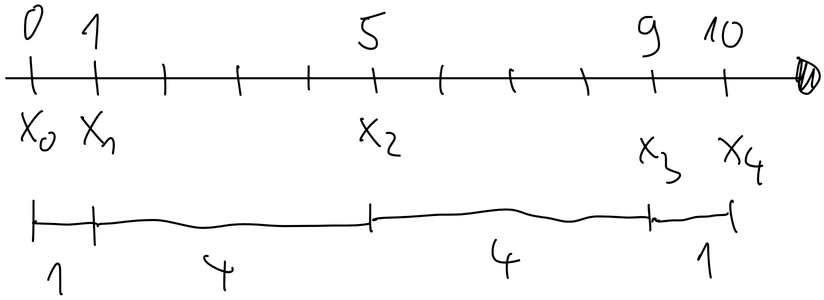
(c) Gegeben sei hier die leicht abgeänderte Randwertaufgabe

$$-(24y'(x))' + y(x) = 0, \qquad x \in [0, 10], \quad y(0) = y(10) = \pi.$$

Wie ändert sich „die rechte Seite“, wenn Sie zur näherungsweisen Lösung wieder das Galerkin-Verfahren mit FEM-Ansatz zu obiger Zerlegung verwenden: Bestimmen Sie hier nur „die rechte Seite“!

(d) Für eine ähnliche Aufgabe wie im vorigen Aufgabenteil (ebenfalls Galerkin-Verfahren, ebenfalls FEM-Ansatz zu obiger Zerlegung) lautet die Lösung $(1, 4, 1)^T$. Zeichnen Sie die Lösung in ein Koordinatensystem, in dem die x-Achse wie in (a) ist. Beschriften Sie auch die y-Achse.

a) $h_1 = 1$; $h_2 = 4$; $h_3 = 4$; $h_4 = 1$



b)

$$K = 24 \cdot \begin{pmatrix} 5/4 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 5/4 \end{pmatrix} ; M = -\lambda \cdot \begin{pmatrix} 5/3 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A = K + M \qquad A\tilde{\alpha} = \vec{b}$$

c) $y_{RB} = \pi$

$$\vec{b} = \cancel{\vec{\ell}(v)}^{\to 0} - \vec{a}(y_{RB}, v)$$

$$a(y_{RB}, w_1) = \int_0^{10} 24 \cdot \cancel{(\pi)'}^{\,0}\, w_1'(x)\, dx + \int_0^{10} \pi\, w_1(x)\, dx$$

$$= \pi \left(\frac{h_1}{2}(0+1) + \frac{h_2}{2}(1+0) \right)$$

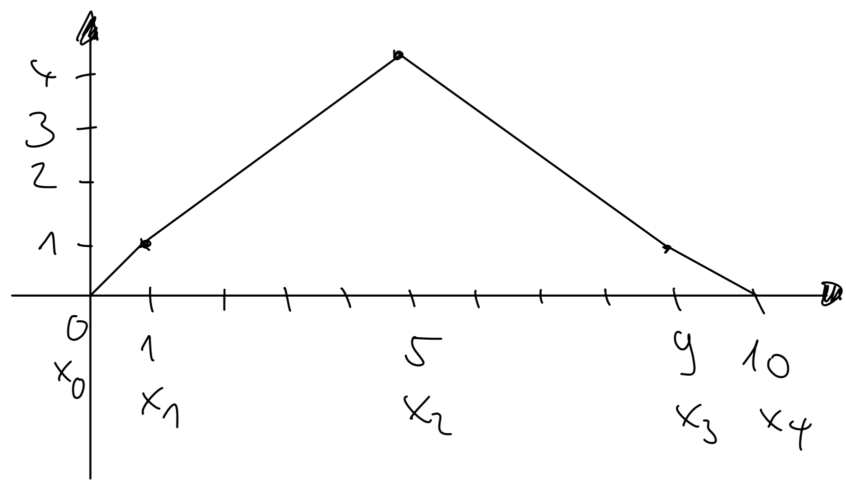
$$= \pi \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{5}{2}\pi$$

$$a(y_{RB}, w_2) = \pi \cdot \frac{h_2 + h_3}{2} = \frac{8}{2}\pi$$

$$a(y_{RB}, w_3) = \pi \cdot \frac{h_3 + h_4}{2} = \frac{5}{2}\pi$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -5/2\,\pi \\ -8/2\,\pi \\ -5/2\,\pi \end{pmatrix}$$

d)



Aufgabe 12

Betrachten Sie die Randwertaufgabe (RWA)

$$-y''(x) + xy'(x) - x^2y(x) = x^2 - x, \qquad x \in [0,1], \qquad y'(0) = 2 \quad \text{und} \quad y(1) = 42.$$

Stellen Sie das Gleichungssystem für das **Finite Differenzenverfahren** zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ auf (ohne es zu lösen). Verwenden Sie zentrale Differenzenquotienten ($\mathcal{O}(h^2)$-Approximation). Schreiben Sie das LGS **in Matrix-Vektor-Schreibweise** auf.

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\frac{1}{2})^2} + x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 \cdot \frac{1}{2}} - x_i^2 y_i = x_i^2 - x_i$$

$$(-4 - x_i)\, y_{i-1} + (8 - x_i^2)\, y_i + (-4 + x_i)\, y_{i+1} = x_i^2 - x_i$$

RBen:

$$\frac{y_1 - y_{-1}}{1} = 2 \qquad y_2 = 42$$

$i = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

$$-4y_{-1} + 8y_0 - 4y_1 = 0$$

$i = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$

$$-\frac{9}{2}y_0 + \frac{31}{4}y_1 - \frac{7}{2}y_2 = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{2} & \frac{31}{4} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1/4 \\ 42 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 13 Bei Verwendung des expliziten Differenzenverfahrens für die nichtstationäre Wärmeleitungsgleichung $u_{xx} - 5u_t = 0$ mit der Orts-/x-Schrittweite $\mathbf{h} = \mathbf{2}$ und Zeit-/t-Schrittweite $\mathbf{k} = \mathbf{4}$ berechnet sich mit $r = \frac{k}{5h^2} = \frac{1}{5}$ der Näherungswert $u_{i,j+1} \approx u(x_i, t_{j+1})$ zum Zeitpunkt t_{j+1} aus schon bekannten Werten $u_{l,j} \approx u(x_l, t_j)$ zum Zeitpunkt t_j gemäß

$$u_{i,j+1} = ru_{i-1,j} + (1-2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j} .$$

(a) Welche (x,t)-Stellen braucht man, um den Wert $u(1,4)$ zu approximieren?
(b) Approximieren Sie für die Anfangsdaten $u(x,0) = 5x^2$ den Wert $u(1,4)$.

a)

$u(-1,0)$, $u(1,0)$ und $u(3,0)$

b)

$$u(1,4) = \frac{1}{5} \cdot 5(-1)^2 + \left(1-\frac{2}{5}\right)5(1)^2 + \frac{1}{5}5 \cdot (3)^2$$

$$= 1 + 3 + 9 = 13$$