



**INAOE**

# **Diseño de Filtros Digitales FIR con Menos Multiplicadores**

por

**Miguel Angel Pérez Xochicale**

Tesis sometida como requisito parcial para  
obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS EN LA  
ESPECIALIDAD DE ELECTRÓNICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y  
Electrónica**

Septiembre 2006  
Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

**Dra. Gordana Jovanovic Dolecek, INAOE**

©INAOE 2006

El autor otorga al INAOE el permiso de  
reproducir y distribuir copias en su totalidad o en  
partes de esta tesis





En esta tesis se presentan dos métodos que disminuyen el número de multiplicadores en filtros FIR (Respuesta Finita al impulso). Estos dos métodos propuestos están basados en modificaciones de las estructuras IFIR (FIR Interpolado) y FMM (Método Máscara de la Respuesta en Frecuencia). A partir de las técnicas de redondeo y afilado y una función de escalamiento es como se obtiene la disminución del número de multiplicadores. Las técnicas de redondeo y afilado ya han sido estudiadas y empleadas en la literatura, sin embargo la función de escalamiento es una novedad que se propone en esta tesis.

Con el fin de demostrar la utilidad de los métodos propuestos en esta tesis, se presentan las siguientes tres aplicaciones: la eliminación de ruido en frecuencias de voz, el transmultiplexor y un convertidor A/D tipo sigma delta.

Al final de la tesis se presentan en el apéndice las funciones en MATLAB mostrando una descripción de cada una de ellas y los artículos derivados de los métodos propuestos en esta tesis.



In this thesis two methods for reducing the number of multipliers in FIR (Finite Impulse Response) filters are presented. These two proposed methods are based on modifications on the IFIR (Interpolated FIR) and FMM (Frequency Masking Method) structures. By using rounding and sharpening techniques and the scaling function, the number of multipliers can be reduced. The rounding and sharpening techniques used here have been studied and employed in the literature, while this thesis employs the scaling function for the first time.

With the aim of demonstrating the proposed methods in this thesis, three applications are presented: 1) a noise reductor in vocal frequencies, 2) a transmultiplexor and 3) a sigma delta A/D converter.

In the Appendix, the MATLAB functions used for this work are described, as well as the published articles describing the methods proposed.



Al Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE), por brindarme la oportunidad de continuar preparándome.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por el apoyo económico brindado por la realización de este trabajo, a través de la Beca para Estudios de Maestría con número de registro 190622.

A la Dra. Gordana Jovanovic Dolecek, por su valioso apoyo brindado para el desarrollo de este trabajo.

A los Doctores Josefina Casteñeda Camacho, Alejandro Díaz Méndez y Alfonso Fernández Vázquez por sus comentarios y el tiempo que dedicaron a la revisión de este trabajo.

Al áltrego que viene implícito en cada ser humano, tal que con multiples deseos trata de alcanzar definiciones que aún no se han comprendido, sobre todo a aquellos los sin nombre y las sin razones que contribuyeron a situaciones o experiencias que nos hicieron creer que ésto es tangible y existente, principalmente a todo el abecedario que contiene a todas sus iniciales que forman parte de sus nombres...





---

## DEDICATORIA

*A mis progenitores:*

*Hilario Pérez Corona*

*e*

*Irma Xochicale Hernández*

∞



<b>Resumen</b>	<b>IV</b>
<b>Abstract</b>	<b>VI</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>VIII</b>
<b>Contenido</b>	<b>XII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivo . . . . .	2
1.2. Organización de la tesis . . . . .	3
<b>2. Técnicas de Mejoramiento</b>	<b>5</b>
2.1. Especificación de filtros digitales . . . . .	5
2.2. Transformación de filtros pasabajas a pasaaltas . . . . .	7
2.3. Técnica de redondeo . . . . .	7
2.4. Técnica de afilado . . . . .	10
<b>3. Estructuras IFIR y FMM</b>	<b>15</b>
3.1. Filtros expandidos . . . . .	15
3.2. Filtro FIR interpolado (IFIR) . . . . .	18
3.2.1. Diseño de filtro pasabajas . . . . .	18
3.2.2. Diseño de filtro pasaaltas . . . . .	20
3.3. Método Máscara de la Respuesta en Frecuencia (FMM) . . . . .	23
3.3.1. Introducción . . . . .	23
3.3.2. Filtro complementario . . . . .	24
3.3.3. Descripción del FMM . . . . .	28
3.3.4. Ejemplos del FMM . . . . .	32
3.4. Métodos aplicados al FMM . . . . .	36
3.4.1. Método utilizando filtros de media-banda . . . . .	36
3.4.2. Estructura usando un prefiltro-ecualizador . . . . .	37
3.4.3. Cascada de filtros idénticos . . . . .	39
3.4.4. Algoritmo de optimización no lineal . . . . .	41
3.4.5. Aproximación de la respuesta al impulso extrapolada . . . . .	42
<b>4. Método Propuesto para Filtros de Banda Angosta</b>	<b>47</b>
4.1. Introducción . . . . .	47
4.2. Reducción de la complejidad de la estructura IFIR basado en el método de redondeo-afilado con una función de escalamiento . . . . .	48
<b>5. Métodos Propuestos para Filtros de Banda Ancha</b>	<b>55</b>
5.1. Filtros de banda ancha con banda de transición moderada . . . . .	55
5.2. Reducción basada en el FMM . . . . .	58
5.2.1. Reducción de la complejidad de los filtros máscara . . . . .	58
5.2.2. Reducción de la complejidad del filtro modelo y los filtros máscara . . . . .	63

---

<b>6. Aplicaciones</b>	<b>67</b>
6.1. Eliminación de ruido en la señal de voz . . . . .	67
6.2. El transmultiplexor . . . . .	70
6.3. Convertidor A/D tipo Sigma Delta . . . . .	77
<b>7. Conclusiones</b>	<b>83</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>85</b>
A.1. Funciones independientes . . . . .	85
A.2. Función para el diseño del IFIR . . . . .	86
A.3. Función para el diseño del FMM . . . . .	87
A.4. Artículos Publicados . . . . .	88
<b>Lista de Figuras</b>	<b>90</b>
<b>Lista de Tablas</b>	<b>91</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>94</b>

# 1

---

## INTRODUCCIÓN

En muchas aplicaciones el diseño de filtros digitales está basado en la realización de filtros tipo FIR (*Respuesta Finita al Impulso*), considerando que cuentan con la propiedad de fase lineal y no presentan problemas de estabilidad. Sin embargo, cuando se diseña un filtro con una especificación de magnitud dada, el filtro FIR suele tener mayor complejidad (retardos, sumas y multiplicadores), comparado con el diseño de un filtro tipo IIR (*Respuesta Infinita al Impulso*).

En la actualidad una parte considerable de las aplicaciones en filtros digitales se requieren de filtrado con bandas de transición muy estrechas, dando como resultado gran complejidad en los filtros FIR (usando el algoritmo Remez). Por este motivo varios autores se han dado a la tarea de proponer algoritmos, métodos y técnicas [1, 2, 4, 9–14, 20–22] con el objetivo de disminuir el orden de los filtros FIR.

De esta manera, los sistemas con la *técnica de múltiples razones de muestreo* [3], llamados así ya que operan a más de una razón de muestreo, cuentan con dos operaciones esenciales que son interpolación y decimación, incremento y decremento de la razón de muestreo respectivamente. Este incremento y decremento de la razón de muestreo es el principio básico para obtener resultados significativos en la reducción de la complejidad de filtros tipo FIR.

Un método fundamentado en la técnica de múltiples razones de muestreo es el filtro FIR interpolado [15], con el que se obtiene un ahorro significativo en la cantidad de multiplicadores.

Otros resultados con una disminución importante en la complejidad de filtros FIR se

obtienen mediante FMM (*Método Máscara a la respuesta en Frecuencia*), propuesto por Yong Ching Lim en 1986 [13]. Este método es fundamental en esta tesis ya que se utiliza en todo el desarrollo de la misma.

Durante últimos años se han propuesto varias modificaciones de los filtros FMM con el objeto de disminuir la complejidad, tales propuestas son filtros de media banda [2], pre-filtros [11], optimización de la respuesta en frecuencia [20] y los dos métodos propuesto en esta tesis.

## 1.1. Objetivo

Primordialmente lo que se busca en cualquier tipo de aplicación referente a filtros digitales es cumplir con la especificación de magnitud dada o de fase, restringiendo la atención en esta tesis sólo al problema de la aproximación de la respuesta en magnitud. De este modo, cada especificación en particular muestra diferente complejidad dependiendo de la selectividad y tolerancias requeridas. El objetivo principal de esta tesis es disminuir la complejidad, es decir, el número de multiplicadores en filtros FIR basándose en la aplicación de técnicas que utilizan los principios de expansión de filtros y filtros interpoladores, usados para eliminar las frecuencias no deseadas.

Se pretende alcanzar el objetivo mediante el uso del FMM, que está formado por un filtro modelo expandido, su filtro complemento y dos filtros máscara. Con el uso de las técnicas de redondeo y de afilado aplicado a los subfiltros del método FMM se espera tener otra mejora en cuanto al ahorro de multiplicadores ya que son multiplicadores enteros, cumpliendo de forma estricta con la especificación dictada por la aplicación.

Además se presentará una fuente de consulta para el estudio de los principales algoritmos, métodos y técnicas publicados recientemente en la literatura, con el fin de encontrar alternativas que permitan lograr una mejora en los algoritmos de diseño.

## 1.2. Organización de la tesis

Para alcanzar los objetivos planteados anteriormente, la tesis esta organizada en seis capítulos. El capítulo 1 presenta una introducción con una breve descripción de la problemática en el diseño de filtros digitales tipo FIR, así como las soluciones tentativas que permiten disminuir el número de multiplicadores en filtros FIR.

En el capítulo 2 se presentan las especificaciones de filtros digitales, así como también la transformación de filtros pasabajas a pasaltas. Por otro lado, se describen las técnicas de redondeo y afilado.

El capítulo 3 presenta una revisión de los filtros expandidos, que son una introducción para la descripción de las estructuras IFIR y FMM. Además se presentan algunos métodos aplicados al FMM.

En el capítulo 4 se hace una propuesta para el diseño de filtros de banda angosta. Dicha propuesta está basada en la estructura IFIR con el uso de las técnicas de redondeo y afilado y una función de escalamiento.

En el capítulo 5 se muestra una propuesta para el diseño de filtros de banda ancha mediante la estructura FMM. Dicha estructura es modificada usando las técnicas de redondeo y afilado y una función de escalamiento en el filtro modelo y los filtros máscara.

En el sexto y último capítulo se presentan tres aplicaciones con diseños de filtros propuestos en esta tesis.

Por último se muestran las conclusiones y el trabajo futuro, así como el apéndice donde se describen las funciones en MATLAB usadas para el desarrollo de esta tesis.





---



---

## TÉCNICAS DE MEJORAMIENTO

*En este capítulo se muestra una breve introducción de los filtros digitales tipo FIR, así como la descripción de las técnicas de mejoramiento para filtros FIR con el objeto de minimizar la complejidad de los filtros. El capítulo está dividido en cuatro secciones. En la primera sección se presentan las especificaciones básicas de filtros digitales. En la segunda sección se presenta la transformación de filtros pasaaltas a pasabajas. En la tercera sección se muestra la técnica de redondeo. Finalmente en la cuarta sección se hace una introducción a la técnica de afilado.*

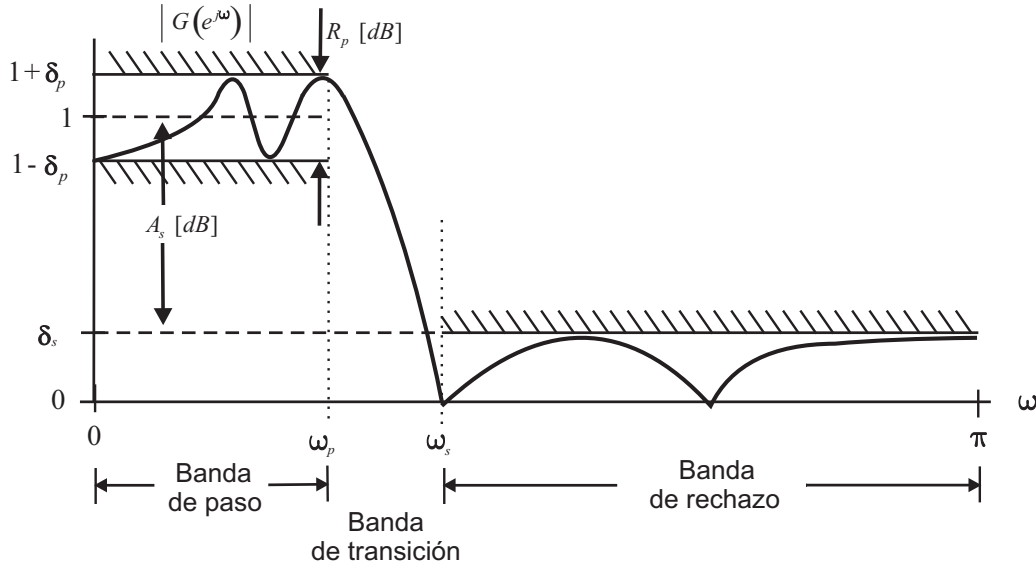
### 2.1. Especificación de filtros digitales

Los requerimientos para un filtro digital en el dominio de frecuencia se ilustran en la Figura 2.1.

Las frecuencias  $\omega_p$  y  $\omega_s$  son llamadas, respectivamente, *frecuencia de corte de la banda de paso* y *frecuencia de corte de la banda de rechazo*, mientras que las tolerancias en la banda de paso y la banda de rechazo, se denotan por  $\delta_p$  y  $\delta_s$ . La banda de transición  $\Delta\omega$  está determinada por una sustracción entre las frecuencias de la banda de paso y la banda de rechazo,  $(\omega_s - \omega_p)$ .

La región de la *banda de paso* comprende el rango de frecuencias que están entre  $0 \leq \omega \leq \omega_p$ , donde la magnitud se aproxima a la unidad con un rango de error de  $\pm\delta_p$ ,

$$1 - \delta_p \leq |G(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_p, \quad \text{para } |\omega| \leq \omega_p. \quad (2.1)$$



**Figura 2.1:** Especificaciones típicas en magnitud de un filtro pasa bajas.

La región de *banda de rechazo* comprende las frecuencias  $\omega_s \leq \omega \leq \pi$ , requiriendo que la magnitud se aproxime a cero con un error de  $\delta_s$  de la siguiente forma,

$$|G(e^{j\omega})| \leq \delta_s, \quad \text{para } \omega_s \leq |\omega| \leq \pi. \quad (2.2)$$

Frecuentemente las especificaciones de tolerancias en filtros digitales están dadas en unidades de decibeles, y éstas son determinadas por el *rizo de la banda de paso*  $R_p$  y la *mínima atenuación en la banda de rechazo*  $A_s$ ,

$$\begin{aligned} R_p &= -20 \log_{10}(1 - \delta_p) \quad \text{dB.} \\ A_s &= -20 \log_{10}(\delta_s) \quad \text{dB.} \end{aligned} \quad (2.3)$$

El *orden* del filtro es  $N - 1$ , donde  $N$  es el número de coeficientes, que es aproximadamente proporcional al inverso de la banda de transición:  $N \sim 1/\Delta\omega$ . Dicha estimación es atribuida a *Kaiser* y se determina por medio de:

$$N = \frac{-20 \log_{10}(\sqrt{\delta_p \delta_s}) - 13}{14.6 \cdot \Delta\omega}. \quad (2.4)$$

El número de multiplicadores  $M_{FIR}$  de un filtro FIR con simetría impar y fase lineal está dado por:

$$M_{FIR} = \left\lceil \frac{N + 1}{2} \right\rceil, \quad (2.5)$$

donde  $\lceil x \rceil$  es el entero más pequeño inferior o igual a  $x$ . El número de retrasos  $R_{FIR}$  y el número de sumas  $S_{FIR}$  del filtro es igual al orden  $N$  del filtro.

## 2.2. Transformación de filtros pasabajas a pasaaltas

Es posible basar el diseño de un filtro pasaaltas en un filtro pasabajas con sus respectivas especificaciones y aplicando una transformación [3]. A continuación se explica como se realiza dicha transformación.

A partir de un filtro pasabajas  $H_{LP}(z)$  de fase lineal con número de coeficientes impar es posible obtener un filtro pasaaltas  $H_{HP}(z)$ . Dicha transformación del filtro  $H_{HP}(z)$  al correspondiente filtro pasabajas está dada por la siguiente función:

$$H_{HP}(z) = (-1)^{\frac{N-1}{2}} H_{LP}(-z). \quad (2.6)$$

Esto quiere decir que se realiza invirtiendo los coeficientes pares del filtro  $H_{LP}$  cuando el cociente  $(N-1)/2$  es impar, o invirtiendo los coeficientes impares si el cociente es par. Las especificaciones del filtro pasaaltas obtenido se calculan de acuerdo con la Tabla 2.1.

**Tabla 2.1:** Conversión de un filtro pasaaltas a un pasabajas.

	Filtro pasaaltas $H_{HP}(z)$	Filtro pasabajas $H_{LP}(z)$
Frecuencia de paso	$\omega_{pHP}$	$\omega_{pLP} = \pi - \omega_{pHP}$
Frecuencia de rechazo	$\omega_{sHP}$	$\omega_{sLP} = \pi - \omega_{sHP}$
Rizo en la banda de paso	$R_{pHP}$	$R_{pLP} = R_{pHP}$
Atenuación en banda de rechazo	$A_{sHP}$	$A_{sLP} = A_{sHP}$

El uso de esta transformación se hará en la sección 3.2.2 para el diseño del filtro IFIR pasaaltas y también en la sección 5.2.2 para el diseño del filtro modelo complemento en el FMM.

## 2.3. Técnica de redondeo

Los coeficientes son redondeados usando los coeficientes del filtro  $g(n)$  con la función `round` de MATLAB, la cual representa una operación que redondea al entero más cercano. El valor que determina la precisión de aproximación es llamada constante de redondeo  $r$ .

Por ello al aplicar el redondeo a  $g(n)/r$  se obtienen valores enteros que posteriormente se normalizan haciendo una multiplicación con  $r$ . Consecuentemente, los coeficientes de la respuesta al impulso redondeada  $g_r(n)$  están dados por:

$$g_r(n) = r \cdot \text{round} \left( \frac{g(n)}{r} \right), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (2.7)$$

donde  $N$  es el orden del filtro.

En el siguiente ejemplo es posible notar que la operación de redondeo reduce el número de coeficientes desde  $M_{FIR}$  hasta  $S$ , donde  $S$  es el número de coeficientes de la respuesta al impulso redondeada.

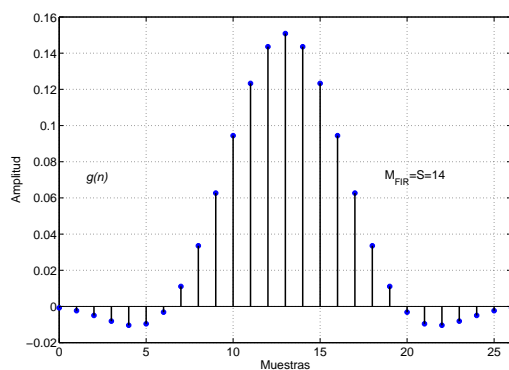
### Ejemplo 2-1.

Basándose en los coeficientes de la respuesta al impulso  $g(n)$  ilustrada en la Figura 2.2(a), es posible obtener diferentes respuestas al impulso que corresponde a constantes de redondeo  $r = 0.001$ ,  $r = 0.008$ ,  $r = 0.04$  y  $r = 0.9$ . La respuesta al impulso  $g_r(n)$  se ilustra en las Figuras 2.2(b), 2.2(c), 2.2(d) y 2.2(e), respectivamente.

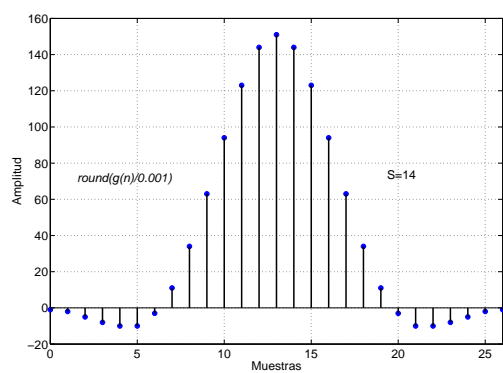
Se puede observar de las gráficas que la técnica de redondeo introduce algunos coeficientes de valor cero, por lo tanto el número de coeficientes enteros diferentes de cero  $N_s$  corresponde al número de sumas con que es incrementada la constante de redondeo  $r$ . Por lo tanto el número de coeficientes no cero de las Figuras 2.2(b), 2.2(c), 2.2(d) y 2.2(e) son 25, 21, 11 y 9, respectivamente.

Algunos coeficientes distintos de cero tienen el mismo valor, por lo tanto  $N_M$  es el número de multiplicadores enteros de diferente valor (valores de 1 y -1 no son contados). Los valores de  $N_M$  para la respuesta redondeada en las Figuras 2.2(b), 2.2(c), 2.2(d) y 2.2(e), son 11, 7, 3 y 1, respectivamente.

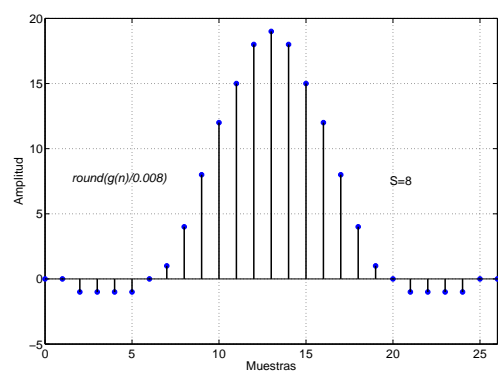
Como se puede ver en la Figura 2.3, la magnitud de la respuesta en frecuencia de los filtros redondeados tiene una distorsión tanto en la banda de paso como en la banda de rechazo, concluyendo que con un valor alto de  $r$  se obtiene más distorsión en la magnitud de la respuesta en frecuencia.



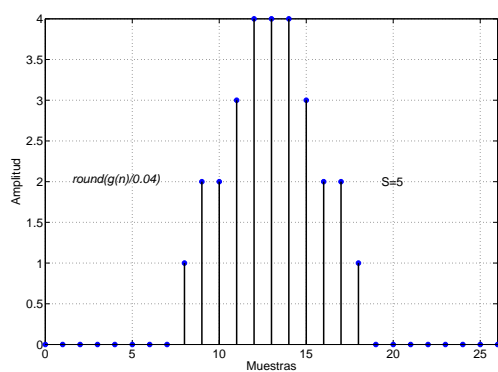
(a)



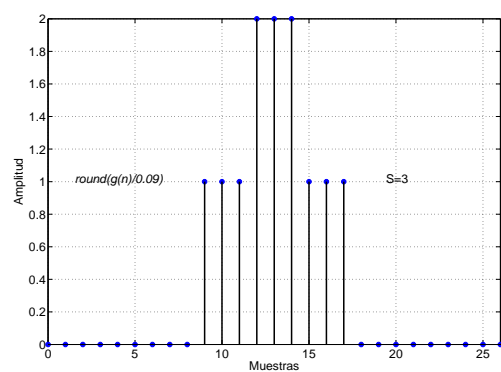
(b)



(c)

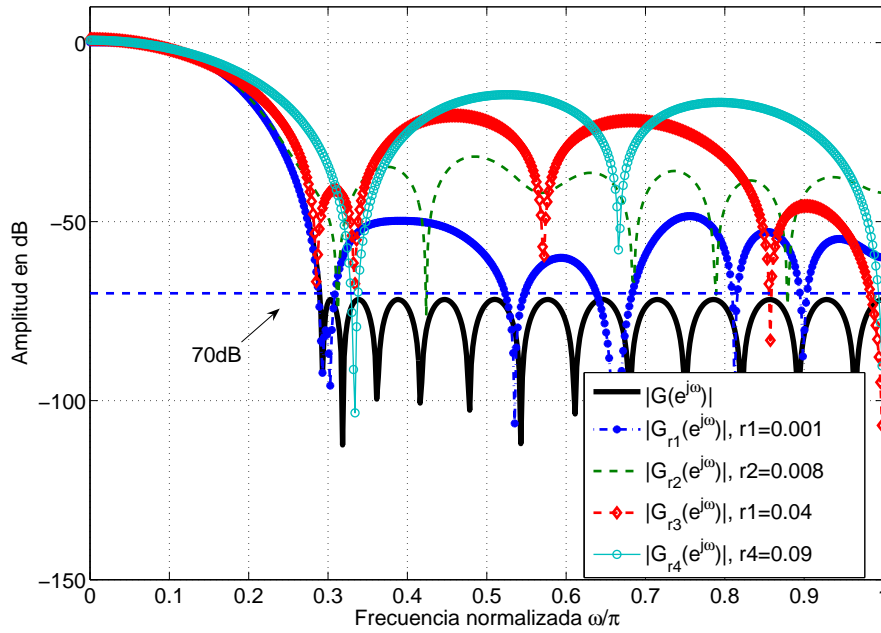


(d)



(e)

**Figura 2.2:** Respuesta al impulso original y redondeadas.



**Figura 2.3:** Magnitud de la respuesta a la frecuencia del filtro original y los filtros redondeados.

## 2.4. Técnica de afilado

Cuando la respuesta en magnitud de un filtro no es la deseada en la banda de paso o en la banda de rechazo, esta puede ser mejorada por medio del propio filtro original usando la función de cambio de amplitud. Dicha función procesa la información repetidas veces por un mismo filtro, de manera que la caída en la banda de paso se reduzca y en la banda de rechazo aumente. A este proceso se le llama *afilado* de filtros [10].

La función de cambio de amplitud es una relación polinomial de la forma  $G_{m,n} = f(G)$ , donde  $G$  denota el filtro de entrada y  $G_{m,n}$  denota el filtro afilado. Una forma general para construir el polinomio es teniendo una tangente de orden  $n$  en cero y una tangente de orden  $m$  en 1, pasando por los puntos (0,0) y (1,1), de este modo el polinomio se determina por medio de:

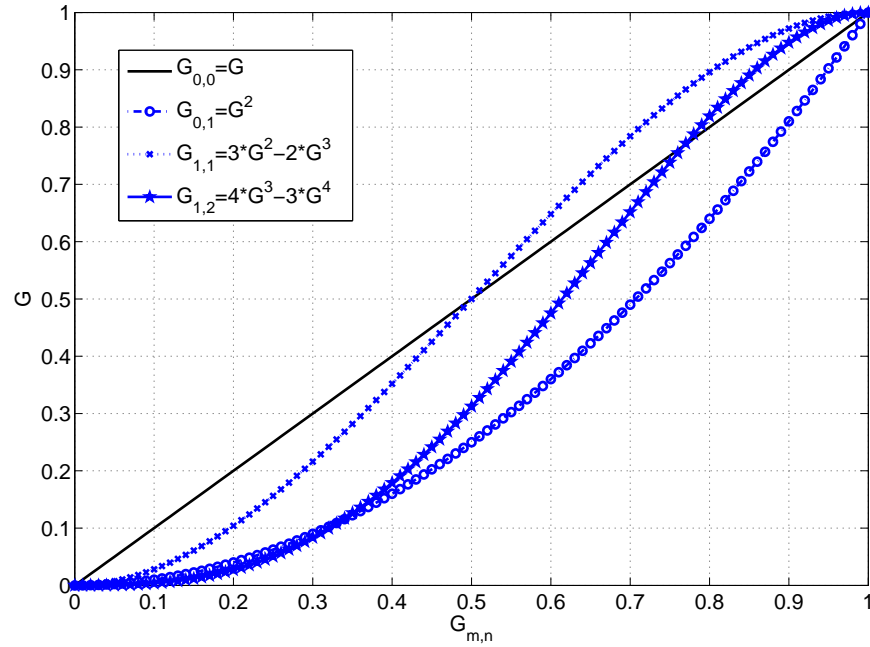
$$G_{m,n} = G^{n+1} \sum_{k=0}^m \frac{(n+k)!}{n!k!} [1-G]^k. \quad (2.8)$$

Los valores típicos de la función de cambio de amplitud  $m$  y  $n$ , se presentan en la Tabla 2.2.

**Tabla 2.2:** Polinomios de la función de cambio de amplitud.

$m$	$n$	Polinomio
0	1	$G^2$
0	2	$G^3$
1	0	$2G - G^2$
1	1	$3G^2 - 2G^3$
1	2	$4G^3 - 3G^4$
2	0	$G^3 - 3G^2 + 3G$
2	1	$3G^4 - 8G^3 + 6G^2$
2	2	$6G^5 - 15G^4 + 10G^3$

Para tener más claro el desarrollo de la técnica de afilado en la Figura 2.4 se muestran tres de los casos utilizados en esta tesis, de los cuales se dará una breve descripción.

**Figura 2.4:** Funciones de cambio de amplitud.

De la Figura 2.4, es posible notar que el polinomio que corresponde a  $G_{0,0}$  es una relación de la entrada con la salida correspondiente a una linealidad, ya que el filtro de

entrada y el filtro de salida es el mismo.

Posteriormente el siguiente polinomio representado de forma gráfica en la Figura 2.4, esta dado por

$$G_{0,1} = G^2, \quad (2.9)$$

donde es posible notar que cuando  $G$  tiene valores cerca de la unidad,  $G_{0,1}$  tendrá valores muy cerca a la unidad, pero cuando  $G$  tiene valores cerca de cero los valores de  $G_{0,1}$  están aproximadamente dos veces más lejos desde de cero. De este modo los errores en la banda de paso son reducidos (aproximadamente al cuadrado), mientras que los errores en la banda de rechazo son doblados.

Otro de los casos mostrado en la gráfica de la Figura 2.4 es el representado por un polinomio cúbico:

$$G_{1,1} = 3G^2 - 2G^3. \quad (2.10)$$

Dicho polinomio conduce a una aproximación de pequeños errores cuadráticos en la banda de paso y en la banda de rechazo, tales rizados están determinados por:

$$\begin{aligned} 3\delta_p^2, \\ 3\delta_s^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Con el uso del polinomio (2.10), el orden del filtro afilado es 3 veces mayor al del filtro original.

Finalmente el último polinomio que se presenta en la Figura 2.4, esta representado por:

$$G_{1,2} = 4G^3 - 3G^4, \quad (2.12)$$

del cual es posible determinar los rizados en la banda de paso y la banda de rechazo dados por:

$$\begin{aligned} 4\delta_p^3, \\ 4\delta_s^3. \end{aligned} \quad (2.13)$$

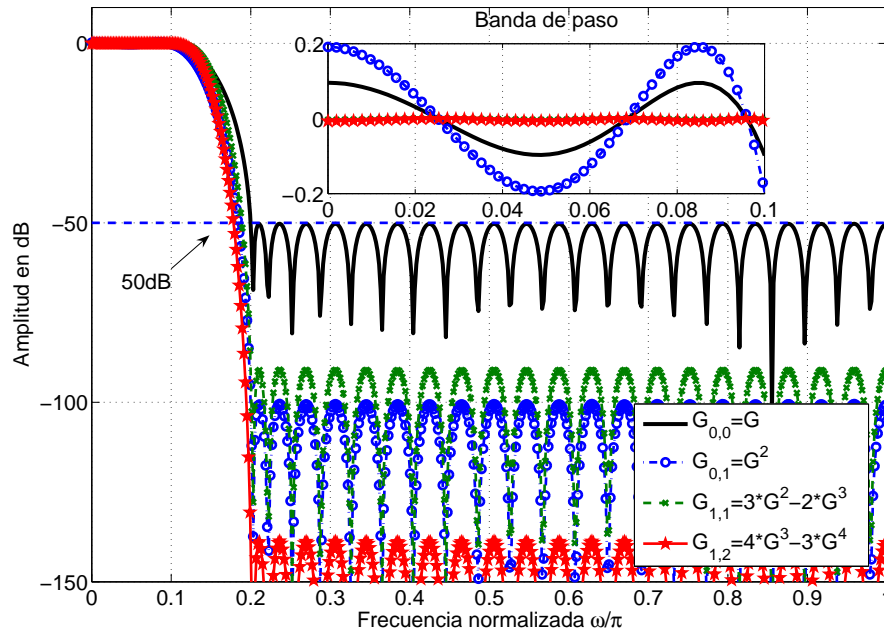
Como resultado del uso de este polinomio hay una reducción mucho mayor en cada una de las tolerancias, por otro lado el orden del filtro afilado es cuatro veces mayor al del filtro original.



**Ejemplo 2-2.**

Para ejemplificar la técnica de afilado se diseña un filtro con la siguiente especificación:  $\omega_p = 0.1$ ,  $\omega_s = 0.2$ ,  $R_p = 0.1$  y  $A_s = 50$ .

Con la técnica de afilado es posible notar un mejoramiento en el mínimo rizo de la banda de paso y en la máxima atenuación en la banda de rechazo. En la Figura 2.5 se ilustra el uso de las tres funciones de cambio de amplitud, donde es posible visualizar un mejoramiento que esta representado por el decremento del rizo en la banda de paso y la reducción del rizo en la banda de rechazo.



**Figura 2.5:** Magnitud de la respuesta en frecuencia de los filtros aplicando afilado.

La técnica de afilado es simple de implementar ya que se obtiene de la transformación de filtros FIR, resultando en un mejoramiento de rizados en la banda de paso y en la banda de rechazo.



# 3

---

## ESTRUCTURAS IFIR Y FMM

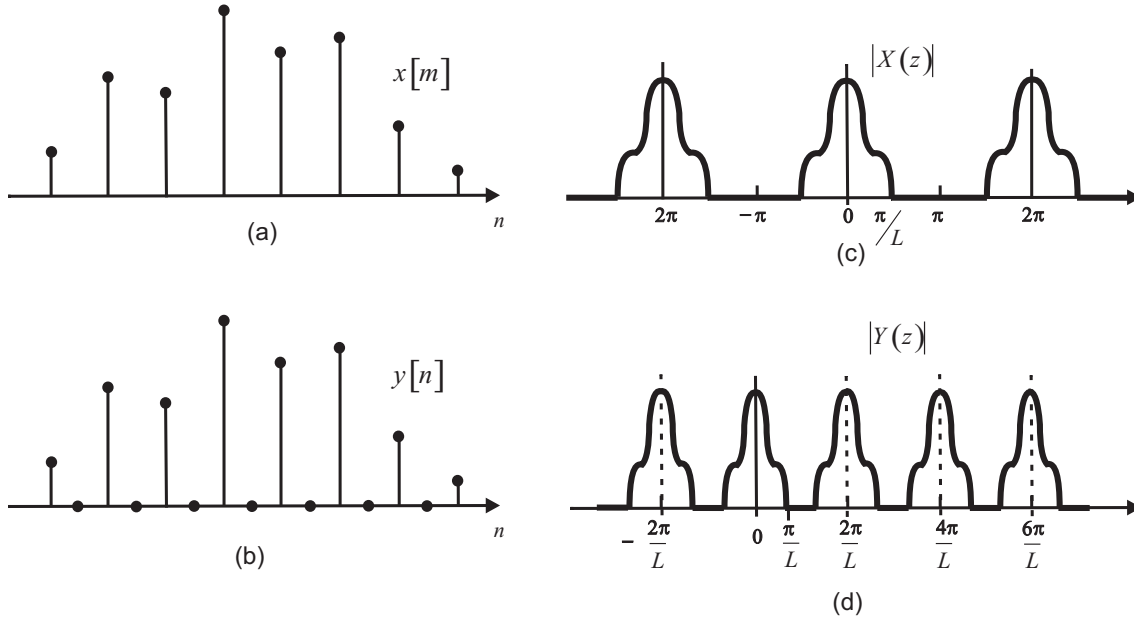
*En este capítulo se presenta la descripción de estructuras IFIR y FMM. El capítulo está dividido en cuatro secciones. En la primera sección se describen los filtros expandidos. En la segunda sección se presenta el diseño del filtro interpolado FIR (IFIR). En la tercera sección se muestra el Método Máscara de la respuesta en Frecuencia (FMM), con dos ejemplos de su diseño. Finalmente en la cuarta sección se describen los métodos publicados recientemente, aplicados al diseño de filtros FIR mediante el uso del FMM.*

### 3.1. Filtros expandidos

En el dominio del tiempo, la razón de muestreo para una respuesta al impulso, puede ser alterada por medio de una expansión o interpolación, y esto se lleva a cabo insertando  $L - 1$  ceros entre las dos muestras consecutivas de la secuencia de entrada  $x[n]$ , donde  $L$  es un entero positivo que representa el factor de incremento de la razón de muestreo [3]. La razón de muestreo de la señal de salida  $y[n]$  es  $L$  veces más grande que la secuencia de entrada  $x[n]$ . Este proceso de expansión se ilustra en la Figura 3.1 para  $L = 2$ .

La operación de expansión es implementada de acuerdo a la relación:

$$y[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots, mL \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (3.1)$$



**Figura 3.1:** Proceso de expansión  $L = 2$  (a) secuencia de entrada  $x[m]$ , (b) secuencia expandida  $y[n]$ , (c) Magnitud de la respuesta en frecuencia de la entrada  $|X(z)|$ , (d) Magnitud de la respuesta en frecuencia de la secuencia expandida  $|Y(z)|$ .

En términos de la transformada  $z$ , la relación de entrada salida esta dada por:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n/L]z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-Lm} = X(z^L). \quad (3.2)$$

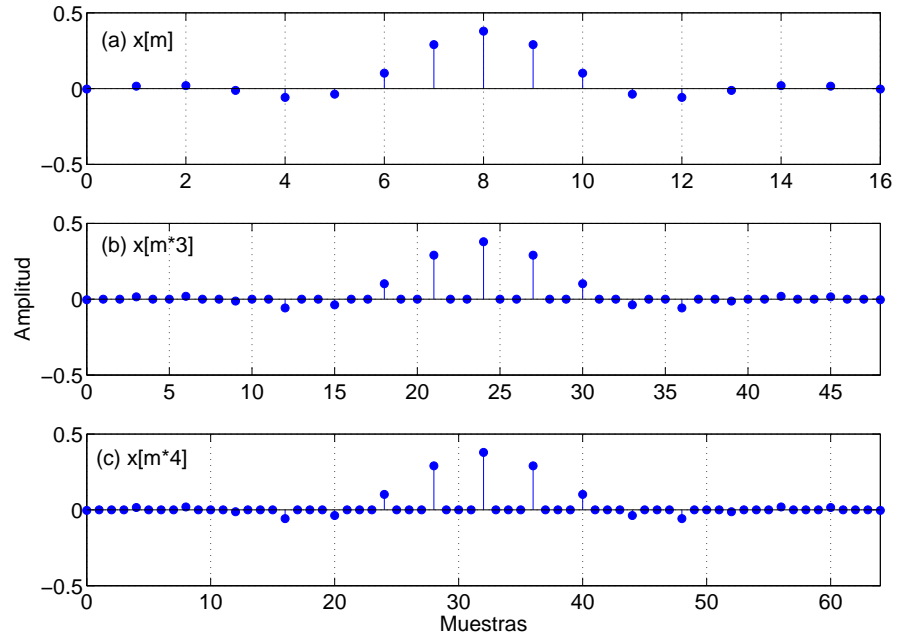
Para  $z = e^{j\omega}$  de (3.2), tenemos que,

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}). \quad (3.3)$$

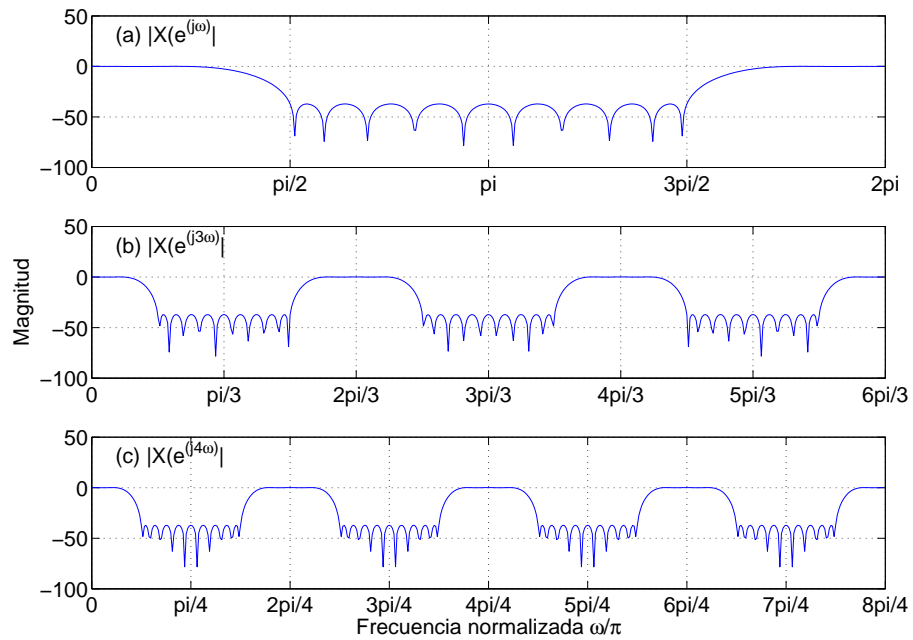
Considerando la magnitud de la respuesta en frecuencia  $|X(e^{j\omega})|$  es posible obtener una expansión a un factor de  $L$ , de este modo, la magnitud de la respuesta en frecuencia presenta  $L - 1$  imágenes en el intervalo  $[0, 2\pi]$ , efectuando un cambio de escala en el eje de frecuencia.

Para ejemplificar la operación de expansión, en la Figura 3.2 (a) se ilustra la respuesta al impulso de entrada  $x(n)$ , a la cual se le aplica una la expansión con un factor de  $L = 3$  y  $L = 4$ , respectivamente, obteniendo la respuesta al impulso ilustradas en las Figuras 3.2(b) y 3.2(c).

De las respuestas al impulso mostradas en la Figura 3.2, se presenta la magnitud de la respuesta en frecuencia en las Figuras 3.3(a), 3.3(b), 3.3(c), respectivamente.



**Figura 3.2:** Respuesta al impulso (a) original, (b) expandida con  $L = 3$  y (c) expandida con  $L = 4$ .

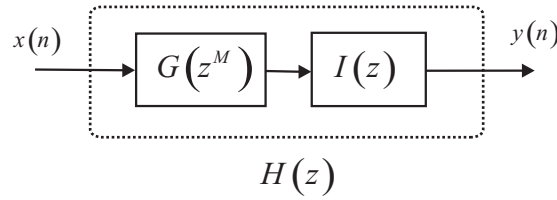


**Figura 3.3:** Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro original (a), (b) filtro expandido con  $L = 3$ , y (c) filtro expandido con  $L = 4$ .

En consecuencia, las Figuras 3.2 y 3.3 presentan características donde es posible observar que se insertan  $L - 1$  ceros entre la respuesta al impulso, creando  $L - 1$  imágenes en el espectro de salida, centradas en  $2\pi/L$  en un filtro pasabajas, tomando en cuenta que para cuando  $L$  es par, existe una imagen pasaaltas; y por último la banda de transición es  $L$  veces más estrecha que de la original.

### 3.2. Filtro FIR interpolado (IFIR)

Este método fue introducido en [15] para el diseño de filtros FIR de menor complejidad. La estructura del filtro IFIR esta formada por la cascada de un filtro periódico  $G(z^M)$  y un filtro interpolador  $I(z)$ , que satisfacen la especificación del filtro prototipo  $H(z)$ . Dicha estructura se muestra en la Figura 3.4.



**Figura 3.4:** Estructura del filtro IFIR.

La función de transferencia del filtro IFIR se expresa como:

$$H(z) = G(z^M)I(z). \quad (3.4)$$

El objetivo del filtro IFIR es reducir la complejidad del filtro prototipo al encontrar los filtros  $G(z)$  e  $I(z)$  en donde la suma de sus órdenes sea mucho menor al del filtro prototipo.

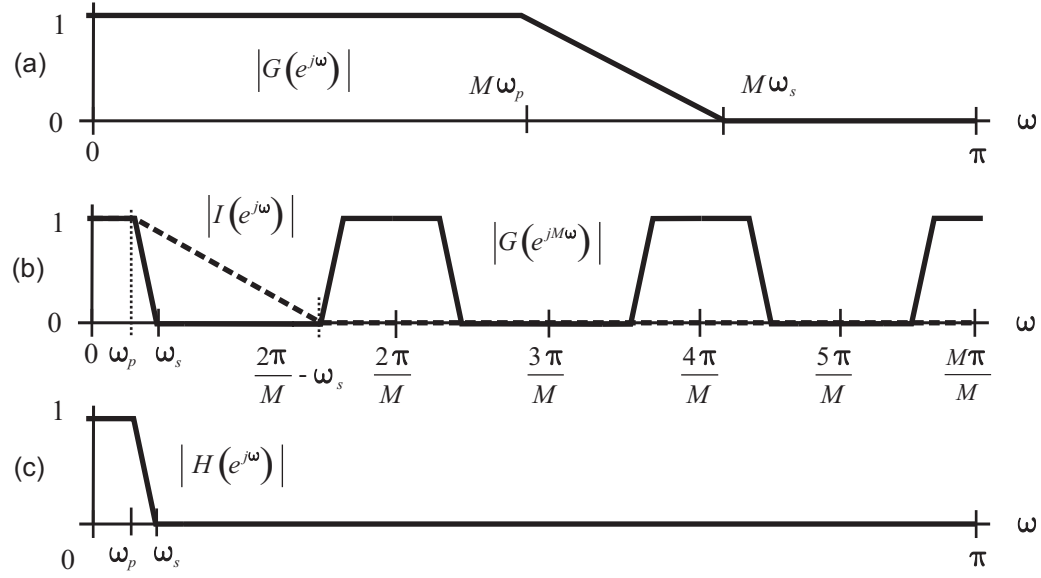
El método IFIR puede ser utilizado para el diseño de filtros pasabajas, pasaaltas y pasabandas FIR.

#### 3.2.1. Diseño de filtro pasabajas

El principio se basa en la introducción de  $M - 1$  ceros entre los coeficientes de un filtro  $G(z)$ . De este modo la compresión del espectro genera un espectro pasabajas  $M$  veces más pequeño que el original.

El orden del filtro  $G(z)$  será  $M$  veces menor que el del filtro prototipo ya que su banda de transición  $\Delta\omega_G$  es  $M$  veces mayor que la del filtro  $H(z)$ , ésto se puede ver en la Figura 3.5 y se presenta en la siguiente expresión:

$$\Delta\omega_G = M\Delta\omega_H = M\omega_p - M\omega_s = M(\omega_p - \omega_s). \quad (3.5)$$



**Figura 3.5:** Magnitud del filtro IFIR.

De acuerdo a lo anterior, para diseñar un filtro IFIR pasabajas se requiere que la especificación para la frecuencia en la banda de paso sea de  $\omega_p < \pi/2$ , y la frecuencia en la banda de rechazo sea de  $\omega_s < \pi/2$ .

El filtro modelo  $G(z)$  se diseña con las siguiente especificaciones:

$$\begin{aligned} \omega_{pG} &= M\omega_p, & \omega_{sG} &= M\omega_s, \\ R_{pG} &= R_p/2, & A_{sG} &= A_s. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Las imágenes generadas por la introducción de ceros deben ser eliminadas causa por la que se requiere de un filtro interpolador, como se observa en la Figura 3.5. La primera imagen inicia en  $2\pi/M - \omega_s$ , por lo que las especificaciones del filtro interpolador  $I(z)$  que preservan el espectro pasabajas son:

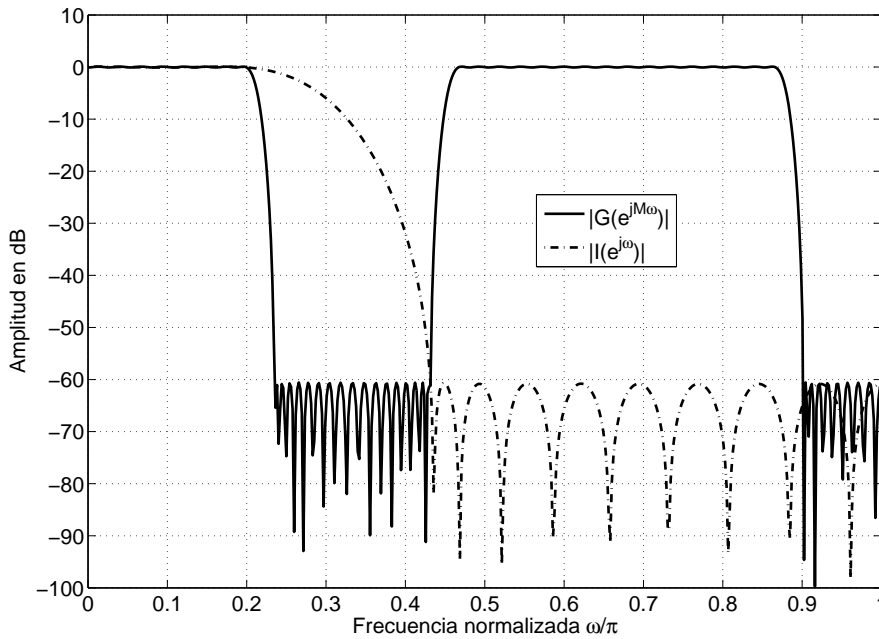
$$\begin{aligned} \omega_{pI} &= \omega_p, & \omega_{sI} &= 2\pi/M - \omega_s, \\ R_{pI} &= R_p/2, & A_{sI} &= A_s. \end{aligned} \quad (3.7)$$

En las especificaciones de ambos filtros, el rizo en la banda de paso es dividido a la mitad para asegurar que el filtro resultante cumpla con el rizo correspondiente. El siguiente ejemplo ilustra este procedimiento.

### Ejemplo 3-1.

Un filtro pasabajas que tiene la siguiente especificación:  $\omega_p = 0.2$ ,  $\omega_s = 0.235$ ,  $R_p = 0.17$  dB y  $A_s = 60$  dB. El orden del filtro prototipo es de un orden de 138.

Con un factor de interpolación de  $M = 3$ , el orden del filtro modelo es  $N_G = 50$  y el orden del filtro interpolador es  $N_I = 24$ , como se puede observar en las Figuras 3.6 y 3.7. La suma de ambos ordenes es menor al del filtro prototipo lo cual hace que el filtro IFIR reduzca la complejidad total.

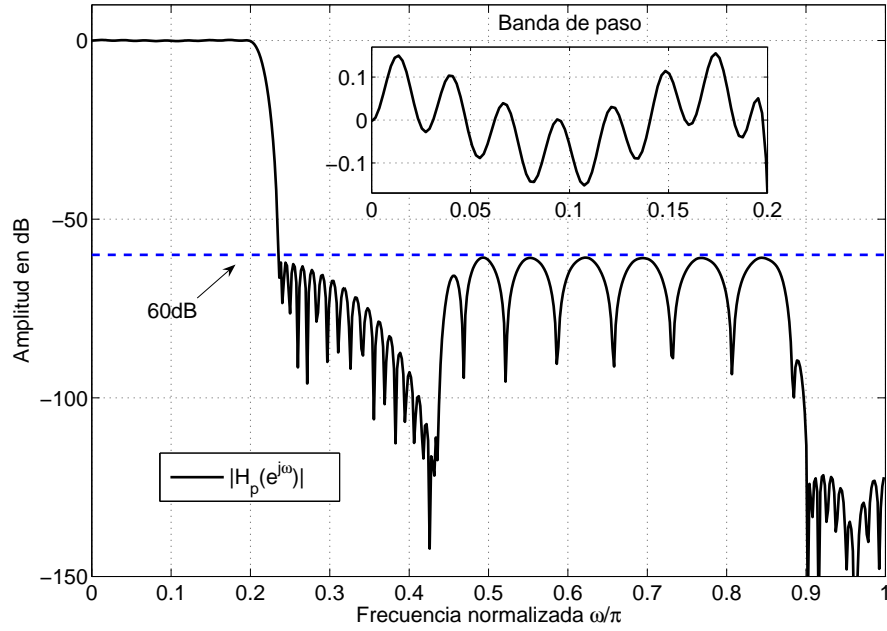


**Figura 3.6:** Filtros periódico  $G(z^M)$  e interpolador  $I(z)$ .

### 3.2.2. Diseño de filtro pasaaltas

Un filtro pasaaltas se puede diseñar por medio de un filtro IFIR pasabajas. La idea parte de dos principios: Primero es posible aprovechar el espectro pasaaltas que se genera





**Figura 3.7:** Filtro IFIR pasabajas.

por un factor de interpolación par, como se expresa en la Figura 3.5(b) o segundo, de transformar un filtro pasabajas a pasaaltas si el factor de interpolación es impar, dicho proceso ya fue descrito anteriormente.

Las frecuencias  $\omega_p$  y  $\omega_s$  deben ser mayores a  $\pi/2$ .

Las especificaciones del filtro modelo  $G(z)$  para diseñar el correspondiente filtro pasabajas están dadas por:

$$\begin{aligned}
 \omega_{pG} &= M\omega_{pLP} = M(\pi - \omega_p), \\
 \omega_{sG} &= M\omega_{sLP} = M(\pi - \omega_s), \\
 R_{pG} &= R_p/2, \\
 A_{sG} &= A_s.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Cuando el factor de interpolación es par, se debe preservar el espectro pasaaltas y para esto se diseña el filtro interpolador pasaaltas. Se puede observar en la Figura 3.8 la frecuencia donde termina la última imagen pasabanda. La especificación para el filtro interpolador

pasaaltas  $I(z)$  esta dado por:

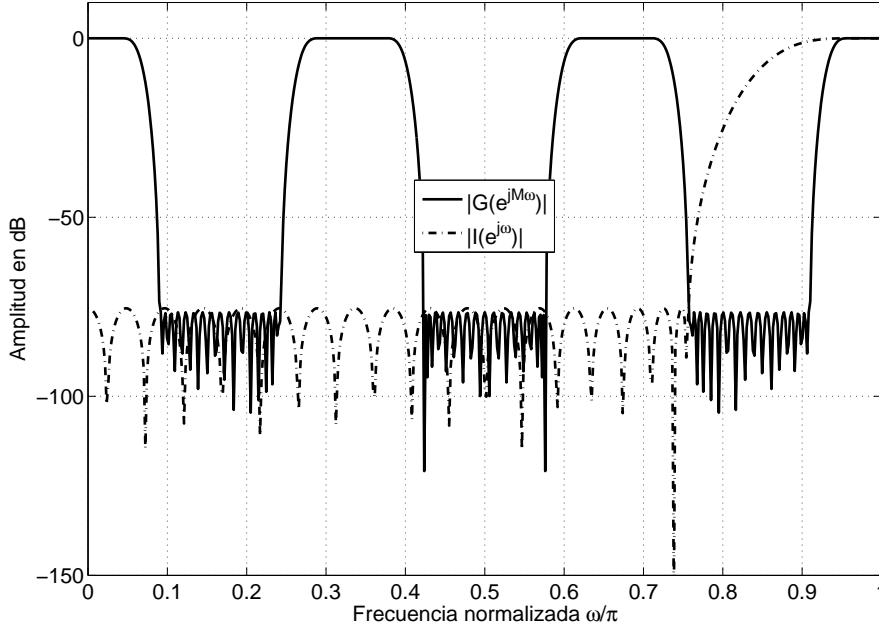
$$\begin{aligned}\omega_{sI} &= \frac{(M-2)\pi}{M} + \omega_{sLP} = \frac{(M-2)\pi}{M} + \pi - \omega_s, \\ \omega_{pI} &= \omega_p, \\ R_{pG} &= R_p/2, \\ A_{sG} &= A_s.\end{aligned}\tag{3.9}$$

El siguiente ejemplo ilustra este procedimiento.

### Ejemplo 3-2.

Un filtro pasabajas que tiene la siguiente especificación:  $\omega_p = 0.955$ ,  $\omega_s = 0.91$ ,  $R_p = 0.01$  dB y  $A_s = 75$  dB. El orden del filtro prototipo es de un orden de 174.

Con un factor de interpolación de  $M = 6$ , el orden del filtro modelo es  $N_G = 30$  y el orden del filtro interpolador es  $N_I = 40$ , como se puede observar en las Figuras 3.8 y 3.9. La suma de ambos ordenes es menor al del filtro prototipo lo cual hace que el filtro IFIR reduzca la complejidad total.



**Figura 3.8:** Filtros periódico  $G(z^M)$  e interpolador  $I(z)$ .

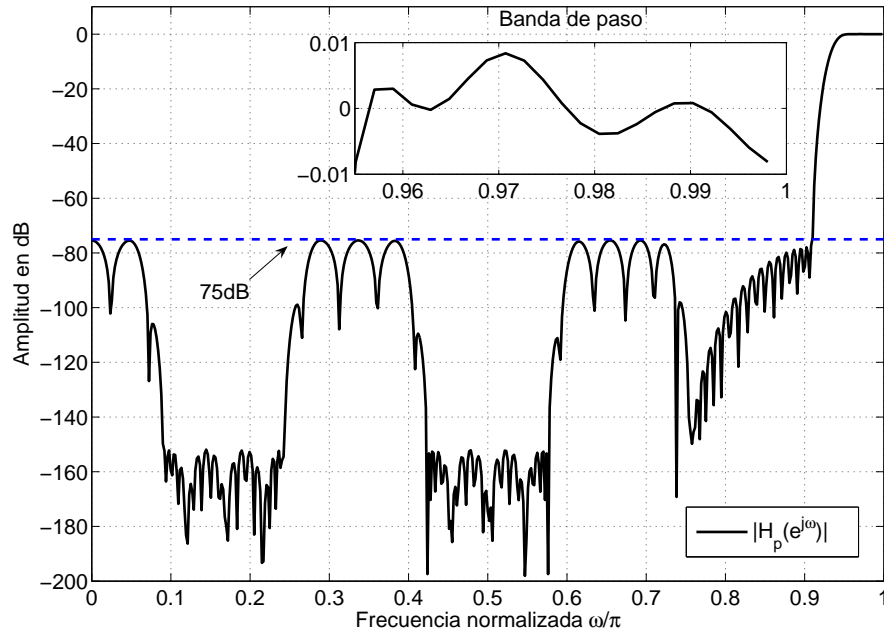


Figura 3.9: Filtro IFIR pasaaltas.

### 3.3. Método Máscara de la Respuesta en Frecuencia (FMM)

#### 3.3.1. Introducción

El FMM (*Método Máscara de la respuesta en Frecuencia*) está basado principalmente en la *técnica de múltiples razones de muestreo* [3] de la cual se deriva el incremento de razón de muestreo, llamado *interpolación*. Este principio es necesario para el desarrollo de filtros expandidos y filtros complementarios del tipo FIR.

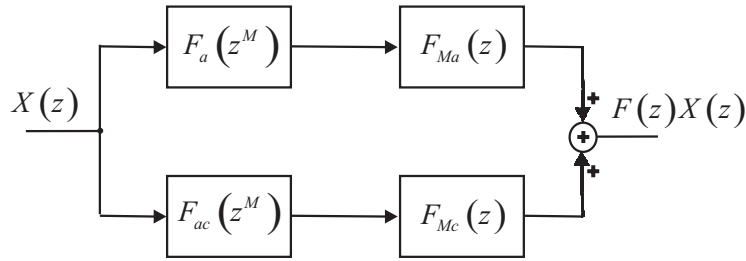
De este modo, los filtros expandidos insertan ceros entre dos muestras consecutivas de la respuesta al impulso en la señal de entrada, por consiguiente el eje de la respuesta en frecuencia es escalado, produciendo el efecto de imágenes.

Por otra parte, los filtros complementarios basan su diseño en la respuesta al impulso de un filtro FIR. De esta manera, mediante la respuesta al impulso negativa del filtro FIR y la suma de un retraso central, es posible obtener el filtro complemento.

Influenciado por los principios anteriores y esencialmente por la técnica de filtro interpolado FIR introducida por [15] en 1984, Yong Ching Lim desarrolla el método

máscara publicándolo en 1986 [13].

El método máscara basa su diseño en la estructura ilustrada en la Figura 3.10, donde  $F_a(z^M)$  es el filtro modelo,  $F_{ac}(z^M)$  es el filtro complemento,  $F_{Ma}(z)$  es el filtro máscara  $a$  y  $F_{Mc}(z)$  es el filtro máscara  $c$ ; se puede observar que la estructura esta constituida por dos ramas de interpoladores, donde  $F_a(z^M)$  representa un filtro expandido que genera imágenes las cuales son eliminadas con el filtro máscara  $F_{Ma}(z)$ , sucediendo lo mismo con la rama del filtro complemento; haciendo posible la determinación de  $F(z)$  apto para filtrar  $X(z)$ .



**Figura 3.10:** Estructura del método máscara.

El método máscara es considerado para dos casos, uno donde la banda de transición del filtro prototipo coincide con la banda de transición del filtro modelo expandido, y otro donde la banda de transición del filtro prototipo coincide con una banda de transición del filtro complemento expandido.

Los llamados subfiltros  $F_a(z^M)$ ,  $F_c(z^M)$ ,  $F_{Ma}(z)$  y  $F_{Mc}(z)$  son de menor complejidad, debido a que su banda de transición es mucho más grande que la del filtro prototipo. Por consiguiente, la principal aplicación del método máscara es implementar filtros FIR, tanto de banda ancha como de banda estrecha, con el propósito de disminuir el número total de multiplicadores, de manera que la complejidad en cómputo y hardware se reduzcan considerablemente, comparado con la implementación convencional del algoritmo Remez.

### 3.3.2. Filtro complementario

A la respuesta en frecuencia de  $X_c(e^{j\omega})$  se le llama filtro complementario, debido a que la suma con la respuesta en frecuencia de un filtro original  $X(e^{j\omega})$  da como resultado

uno:

$$|X(e^{j\omega}) + X_c(e^{j\omega})| = 1. \quad (3.10)$$

El filtro original  $X(e^{j\omega})$  es un filtro FIR con fase lineal, el cual puede ser representado por:

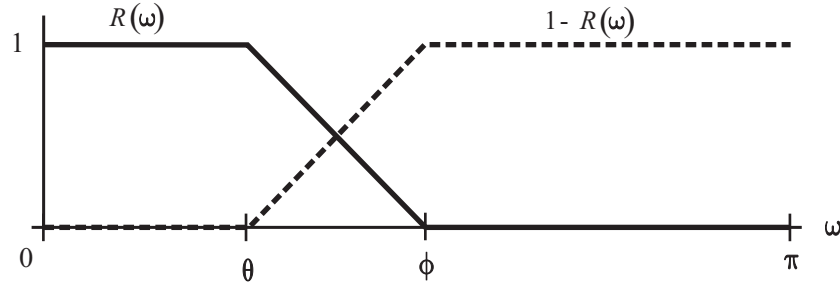
$$X(e^{j\omega}) = z^{-j((N-1)/2)\omega} R(\omega), \quad (3.11)$$

mientras que la respuesta en frecuencia del filtro complementario esta dada por:

$$X_c(e^{j\omega}) = z^{-j((N-1)/2)\omega} \{1 - R(\omega)\}, \quad (3.12)$$

donde  $R(\omega)$  es una función real de  $\omega$  y  $N$  representa el orden del filtro.

De este modo, a partir de un filtro pasabajos con frecuencias de corte  $\theta$  y  $\phi$ , es posible determinar el filtro complementario basándose en (3.12), el cual es ilustrado en la Figura 3.11.



**Figura 3.11:** Respuesta en frecuencia de filtro pasabajos y filtro complemento.

La transformada  $z$  de la función de transferencia del filtro complementario  $X_c$  esta dada por:

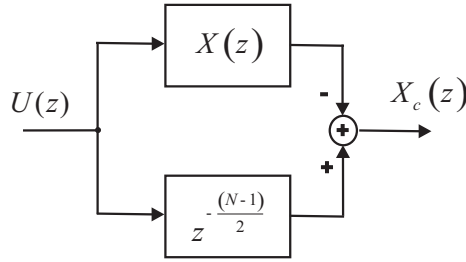
$$X_c(z) = z^{-(N-1)/2} - X(z), \quad (3.13)$$

y se implementa substrayendo la salida de  $X(z)$  de una versión retardada de la entrada, ilustrando la estructura para su obtención en la Figura 3.12.

La respuesta al impulso  $x[n]$  con fase lineal se puede representar como,

$$x[n] = a \left[ n - \frac{N-1}{2} \right], \quad (3.14)$$

donde  $a$  denota una secuencia no causal y  $N$  es el número de coeficientes. Por consiguiente, es posible obtener la respuesta al impulso causal de un filtro complementario  $x_c[n]$  dado



**Figura 3.12:** Estructura del filtro complementario.

por:

$$x_c[n] = \delta \left[ n - \frac{N-1}{2} \right] - x[n]. \quad (3.15)$$

donde  $\delta[n-b]$  denota la delta de dirac de un valor unitario concentrado en el punto  $n = b$  en donde  $b$  es un valor entero.

Una consideración importante en el diseño de un filtro complemento, es que la respuesta al impulso del filtro original debe tener una secuencia impar para poder agregar un retraso. De lo contrario el retraso es fraccionario y no es posible implementar el filtro complemento [3].

Se debe tomar en cuenta que a partir de los términos, de mínimo rizo de la banda de paso  $R_p$  y la máxima atenuación de la banda de rechazo  $A_s$ , es posible determinar el rizo en la banda de paso  $\delta_p$ , y el rizo de la banda de rechazo  $\delta_s$ , expresados de las siguiente forma:

$$\delta_p = 1 - 10^{-R_p/20}, \quad (3.16)$$

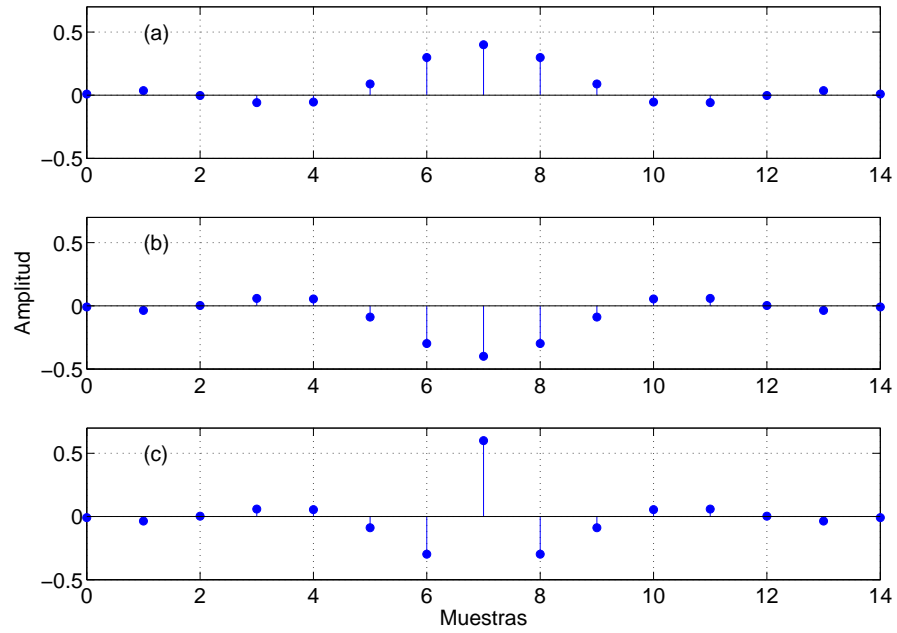
$$\delta_s = 10^{-A_s/20}. \quad (3.17)$$

Por lo tanto para el diseño del filtro complementario, se asigna el mismo valor para  $\delta_p$  y  $\delta_s$ , determinado por:

$$\delta_c = \frac{\min \{ \delta_p, \delta_s \}}{2}. \quad (3.18)$$

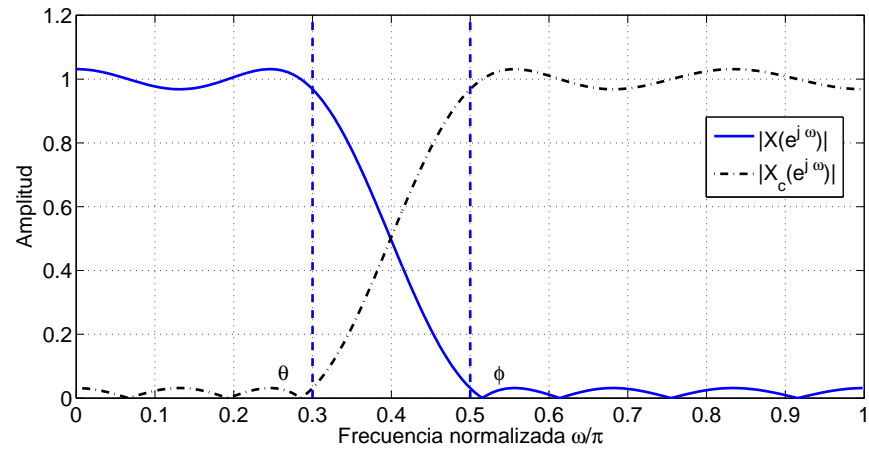
### Ejemplo 3-3.

Utilizando el diseño de un filtro pasa bajas con respuesta al impulso de secuencia impar (Fig. 3.13(a)), y haciendo una multiplicación negativa como se muestra en la Figura 3.13(b), se obtiene la respuesta al impulso del filtro complementario ilustrado en la Figura 3.13(c).



**Figura 3.13:** (a) Respuesta al impulso  $h(n)$ , (b) respuesta al impulso  $-h(n)$  y (c) respuesta al impulso  $h_c(n)$ .

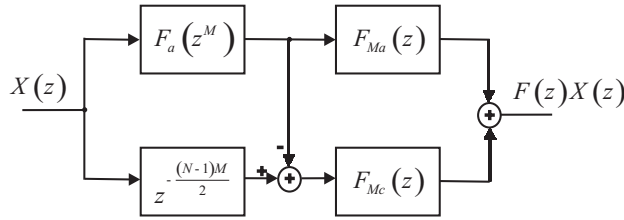
La magnitud de la respuesta en frecuencia para (Fig.3.13a) y (Fig. 3.13c), se muestra en la Figura 3.14, comprobando la realización del filtro complementario  $|X_c(e^{j\omega})|$ .



**Figura 3.14:** Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro original y filtro complementario.

### 3.3.3. Descripción del FMM

La estructura del FMM para el diseño del filtro prototipo  $F(z)$  se muestra en la Figura 3.15 la cual esta basada en el concepto de filtros expandidos que se aplica en el diseño del filtro modelo  $F_a(z)$ , también se aplica el concepto de filtro complementario, seguido del diseño de los filtros máscara  $F_{Ma}(z)$  y  $F_{Mc}(z)$ .



**Figura 3.15:** Estructura del FMM.

Inicialmente se requiere de la especificación de un filtro prototipo  $|F(e^{j\omega})|$ , dadas por: frecuencia de corte en la banda de paso  $\omega_p$ , frecuencia de corte en la banda de rechazo  $\omega_s$ , mínimo rizo de la banda de paso  $R_p$  y máxima atenuación de la banda de rechazo  $A_s$ .

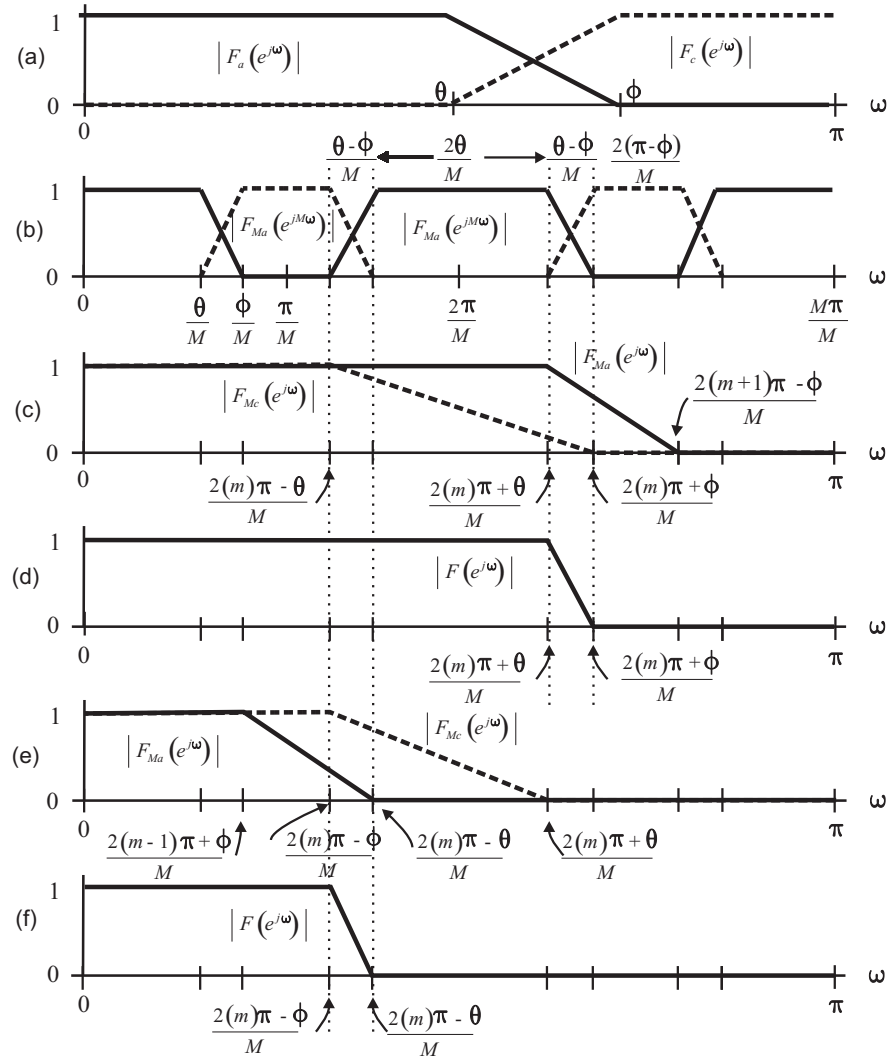
A partir de la especificación, se diseña el filtro modelo  $F_a(e^{j\omega})$  con frecuencias de corte  $\theta$  y  $\phi$ , posteriormente se diseña el filtro complementario  $F_c(e^{j\omega})$ , ilustrando respectivamente la magnitud de  $|F_a(e^{j\omega})|$  y  $|F_c(e^{j\omega})|$  en la Figura 3.16(a). Ahora los filtros  $F_a(e^{j\omega})$  y  $F_c(e^{j\omega})$  son expandidos con un factor de expansión  $M$ , dando como resultado  $|F_a(e^{jM\omega})|$  y  $|F_c(e^{jM\omega})|$  ilustrando sus respectivas frecuencias de corte en la Figura 3.16(b). Una vez obtenidos los filtros expandidos, se enmascaran las imágenes innecesarias con los filtros máscara  $|F_{Ma}(e^{j\omega})|$  y  $|F_{Mc}(e^{j\omega})|$  mostrados en la Figura 3.16(c).

Finalmente aplicando la función de transferencia:

$$F(e^{j\omega}) = F_a(e^{jM\omega})F_{Ma}(e^{j\omega}) + [e^{-j((N-1)M/2)\omega} - F_a(e^{jM\omega})]F_{Mc}(e^{j\omega}), \quad (3.19)$$

se obtiene el filtro resultante  $|F(e^{j\omega})|$  el cual se ilustra en la Figura 3.16(d).





**Figura 3.16:** Respuesta a la frecuencia de subfiltros del FMM.

En el método máscara existen dos casos dependientes de la banda de transición clasificados en:

**Caso A:** Se da cuando coinciden la banda de transición de  $F(e^{j\omega})$  con la banda de transición del filtro  $F_a(e^{jM\omega})$  ilustrado en las Figuras 3.16(b) y 3.16(d). En base a las frecuencias de corte del filtro prototipo  $\omega_p$  y  $\omega_s$  es posible calcular  $m$ , necesaria para determinar las frecuencias de corte ( $\theta$  y  $\phi$ ) del filtro modelo.

Una condición en el diseño del filtro modelo es que deben cumplir con:

$$0 < \theta < \phi < \pi. \quad (3.20)$$

De este modo, el cálculo  $\theta$  y  $\phi$  comienza con la elección del factor de expansión  $M$  necesario

para determinar:

$$m = \lfloor \omega_p M / (2\pi) \rfloor, \quad (3.21)$$

Con esto es posible determinar sus respectivos valores de las frecuencias de corte del filtro modelo, dadas por:

$$\theta = \omega_p M - 2m\pi, \quad (3.22)$$

$$\phi = \omega_s M - 2m\pi, \quad (3.23)$$

donde  $\lfloor x \rfloor$  es el entero más grande, superior o igual a  $x$ .

Las frecuencias de corte para el filtro máscara  $F_{Ma}$  están dadas por:

$$\omega_{paA} = \frac{2(m)\pi + \theta}{M} = \omega_p, \quad (3.24)$$

$$\omega_{saA} = \frac{2(m+1)\pi - \phi}{M}, \quad (3.25)$$

y para el filtro máscara  $F_{Mc}$ , las frecuencias de corte son:

$$\omega_{pcA} = \frac{2(m)\pi - \theta}{M}, \quad (3.26)$$

$$\omega_{scA} = \frac{2(m)\pi + \phi}{M} = \omega_s. \quad (3.27)$$

**Caso B:** Se da cuando coinciden la banda de transición de  $F(e^{j\omega})$  con la banda de transición del filtro  $F_c(e^{jM\omega})$ , tal coincidencia se ilustra por medio de las Figuras 3.16(b) y 3.16(f).

Cumpliendo con la condición dada en (3.20) y eligiendo un valor para el factor de expansión  $M$ , es posible determinar las frecuencias de corte del filtro modelo en base a:

$$m = \lceil \omega_p M / (2\pi) \rceil, \quad (3.28)$$

$$\theta = 2m\pi - \omega_p M, \quad (3.29)$$

$$\phi = 2m\pi - \omega_s M, \quad (3.30)$$

donde  $\lceil x \rceil$  es el entero más pequeño, inferior o igual a  $x$ .

Las frecuencias de corte para el filtro máscara  $F_{Ma}$  están determinadas por:

$$\omega_{saB} = \frac{2(m-1)\pi + \phi}{M}, \quad (3.31)$$

$$\omega_{paB} = \frac{2(m)\pi - \theta}{M} = \omega_p, \quad (3.32)$$

y las frecuencias de corte para el filtro máscara  $F_{Mc}$  son:

$$\omega_{scB} = \frac{2(m)\pi - \phi}{M} = \omega_s, \quad (3.33)$$

$$\omega_{pcB} = \frac{2(m)\pi + \theta}{M}. \quad (3.34)$$

Una consideración importante que se debe tomar para ambos casos en el diseño de los filtros máscara, es que debe tener el mismo retardo de grupo implicando que la respuesta al impulso tenga el mismo orden para  $F_{Ma}$  y  $F_{Mc}$ , es decir  $N_{F_{Ma}} = N_{F_{Mc}}$ , de lo contrario es necesario agregar retardos para ecualizar el retardo de grupo, por tanto si el orden de  $F_{Ma}$  es distinto de  $F_{Mc}$  se debe de añadir los siguientes retardos:

$$\text{si } N_{F_{Ma}} > N_{F_{Mc}} \text{ se agrega } z^{-(N_{F_{Ma}} - N_{F_{Mc}})} \text{ a } F_{Mc}, \quad (3.35)$$

$$\text{si } N_{F_{Mc}} > N_{F_{Ma}} \text{ se agrega } z^{-(N_{F_{Mc}} - N_{F_{Ma}})} \text{ a } F_{Ma}. \quad (3.36)$$

Otra consideración que se debe de tomar en cuenta, es referente a la especificación de rizados, los cuales basan su conversión en (3.16) y (3.17). Por lo tanto para el filtro modelo  $F_a(z)$  los rizados se denotan por  $\delta_{ap}$  como rizo de la banda de paso y  $\delta_{as}$  como rizo de la banda de rechazo. Por otro lado los rizados de banda de paso y la banda de rechazo en  $F_{Ma}(z)$  son expresados como  $\delta_{Map}$  y  $\delta_{Mas}$ , mientras que los rizados para  $F_{Mc}(z)$  se representan como  $\delta_{Mcp}$  y  $\delta_{Mcs}$ , respectivamente.

Por lo consiguiente los rizados correspondientes de la banda de paso y la banda de rechazo para el filtro modelo  $F_a(z^M)$ , están determinados por  $\delta_m$  a través de:

$$\delta_m = \delta_{ap} = \delta_{as} = \frac{\min\{\delta_p, \delta_s\}}{2}. \quad (3.37)$$

Subsecuentemente el rizo de la banda de paso del filtro modelo  $\delta_{ap}$ , es menor que el rizo de la banda de paso del filtro prototipo  $\delta_p$ , por lo tanto los rizados de los filtros máscara  $F_a(z^M)$  y  $F_c(z^M)$  deben completar esta diferencia la cual esta determinada por:

$$\delta_{Map} = \delta_{Mcp} = \delta_p - \delta_m, \quad (3.38)$$

mientras que el rizo de la banda de rechazo para los filtros máscara es el mismo utilizado en el filtro prototipo.

$$\delta_{Mas} = \delta_{Mcs} = \delta_s. \quad (3.39)$$

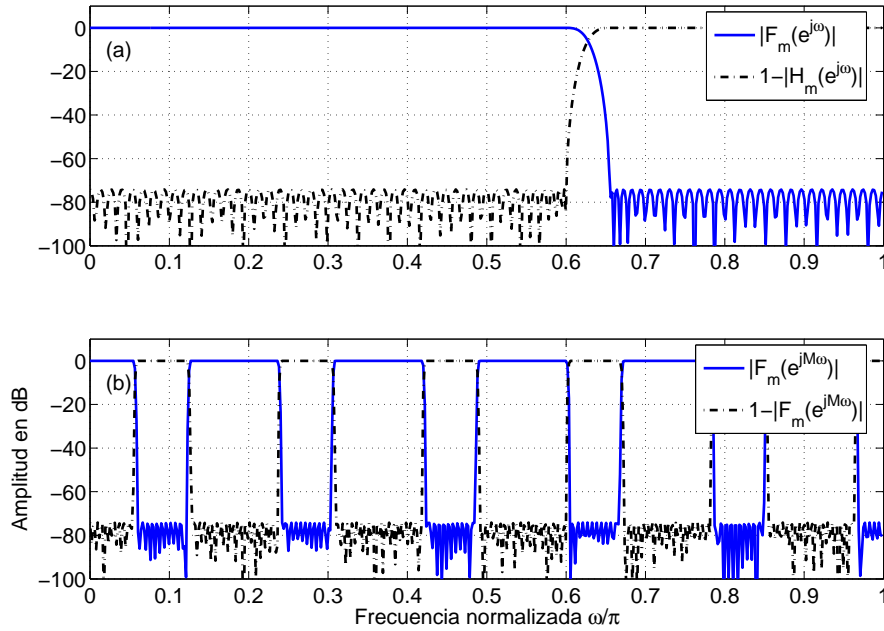
Finalmente se debe tomar en cuenta que las tolerancias de los rizados en las bandas de paso y de rechazo en los subfiltros, puede cumplir con la especificación en base a (3.37, 3.38 y 3.39), por lo tanto es posible disminuir gradualmente las tolerancias calculadas para cada subfiltro con el fin de obtener un mejor ahorro la complejidad del filtro.

### 3.3.4. Ejemplos del FMM

#### Ejemplo 3-4.

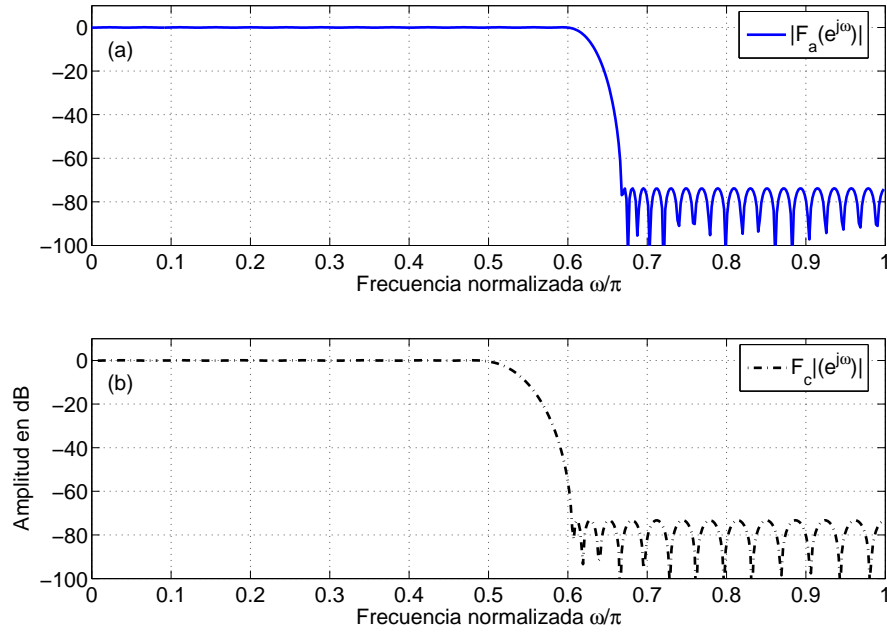
Se diseña un filtro prototipo representando el caso A, con la siguiente especificación: frecuencia de corte en la banda de paso  $\omega_p = 0.6$ , frecuencia de corte en la banda de rechazo  $\omega_s = 0.605$ , rizo mínimo en la banda de paso  $R_p = 0.1dB$  y máxima atenuación en la banda de rechazo  $A_s = 70dB$ ; representando las tolerancias en la escala lineal por  $\delta_p = 0.0114$ ,  $\delta_s = 0.000166$ .

El filtro prototipo diseñado con el algoritmo Remez tiene un orden de 1185.

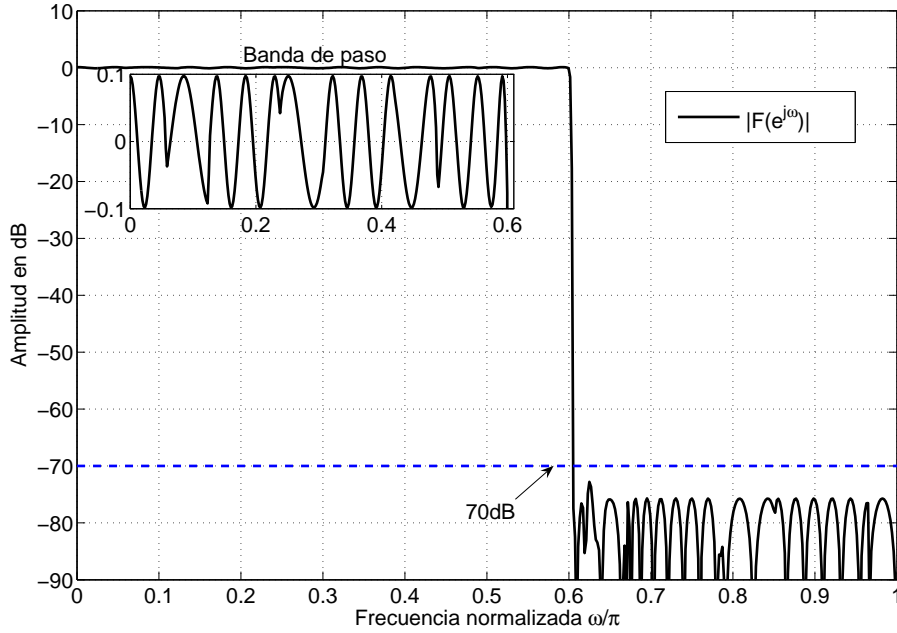


**Figura 3.17:** Magnitud de la respuesta en frecuencia caso A de los Filtros modelo y complementario (a) y expansión (b).

Aplicando el método máscara con un factor de expansión de  $M = 11$ , se obtiene el orden del filtro modelo de  $N_{Fm} = 160$ , el orden del filtro máscara  $F_a$  de  $N_{Fa} = 89$  y de filtro máscara  $F_c$  de  $N_{Fc} = 53$ , consiguiendo un ahorro de 74,5 % , ya que el orden total es de 302. Para igualar el número de retrasos en los filtros máscara se agregaron 18 retrasos a  $F_c(z)$ . La magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro modelo y complementario se ilustra en la Figura 3.17. La magnitud de la respuesta en frecuencia de los filtros máscara se muestra en la Figura 3.18. Finalmente, se ilustra en la Figura 3.19, la magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro diseñado con el FMM cumple con la especificación requerida.



**Figura 3.18:** Magnitud de la respuesta en frecuencia caso A de los Filtros máscara  $F_a(e^{j\omega})$  (a) y  $F_c(e^{j\omega})$  (b).



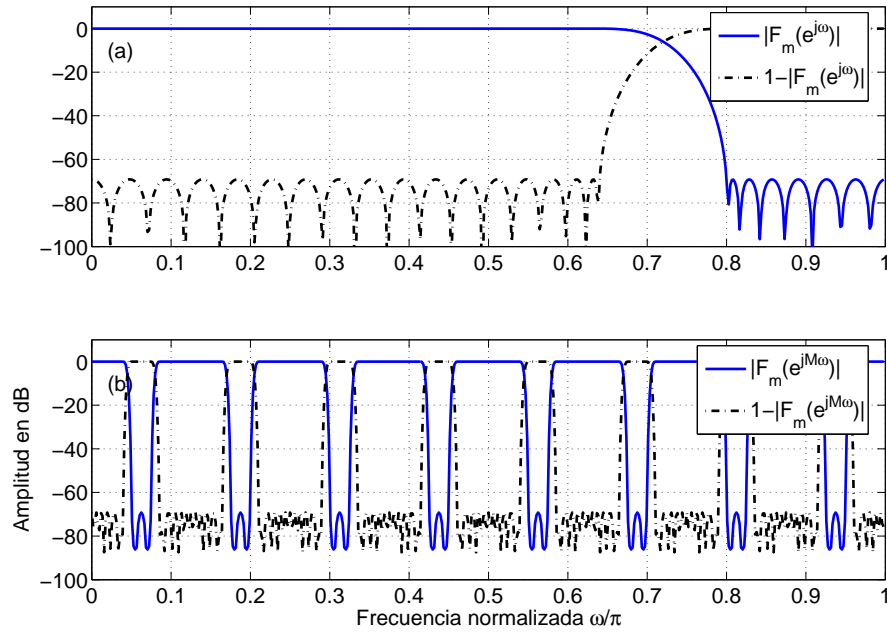
**Figura 3.19:** Filtro resultante del método máscara caso A.

### Ejemplo 3-5.

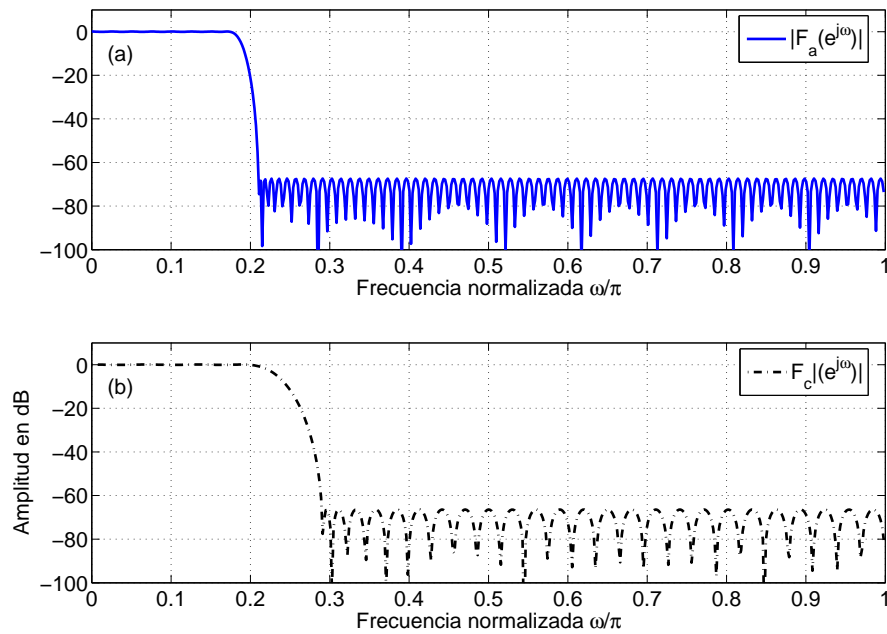
Se diseña un filtro prototipo para el caso B, con la siguiente especificación: frecuencias de corte:  $\omega_p = 0.2$  y  $\omega_s = 0.21$  y tolerancias dadas por  $R_p = 0.1dB$  y  $A_s = 70dB$ ; representando las tolerancias en la escala lineal por  $\delta_p = 0.0086$  y  $\delta_s = 0.0002966$ .

El filtro prototipo diseñado con el algoritmo Remez tiene un orden de 582.

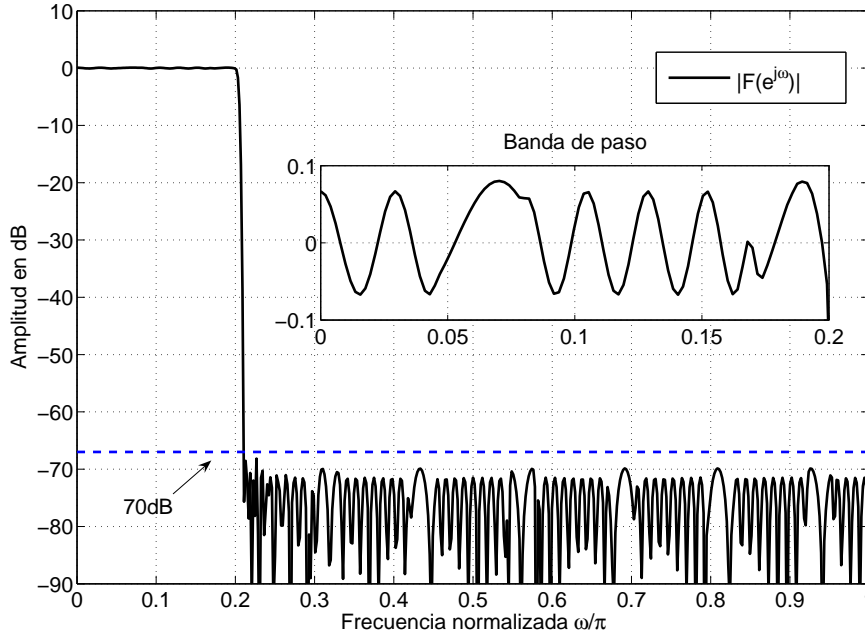
Aplicando el método máscara con un factor de expansión de  $M = 11$ , se obtiene el orden del filtro modelo de  $N_{Fm} = 52$ , el orden del filtro máscara  $F_a$  de  $N_{Fa} = 173$  y de filtro máscara  $F_c$  de  $N_{Fc} = 67$ , consiguiendo un ahorro de 50,67% , ya que el orden total es de 292. Para igualar el número de retrasos en los filtros máscara se agregaron 53 retrasos a  $F_c(z)$ . La magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro modelo y complementario se ilustra en la Figura 3.20. La magnitud de la respuesta en frecuencia de los filtros máscara se muestra en la Figura 3.21. Finalmente, se ilustra en la Figura 3.22, que la magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro diseñado con el FMM cumple con la especificación requerida.



**Figura 3.20:** Magnitud de la respuesta en frecuencia caso B de los Filtros modelo y complementario (a) y expansión (b).



**Figura 3.21:** Magnitud de la respuesta en frecuencia caso B de los Filtros máscara  $F_a(e^{j\omega})$  (a) y  $F_c(e^{j\omega})$  (b).



**Figura 3.22:** Filtro resultante del método máscara caso B.

### 3.4. Métodos aplicados al FMM

#### 3.4.1. Método utilizando filtros de media-banda

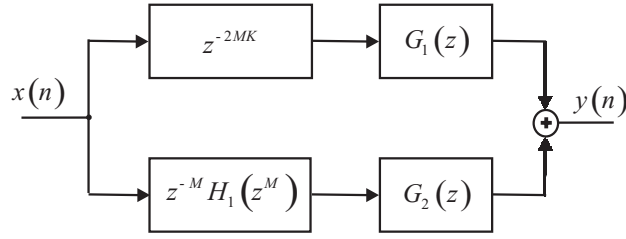
La implementación propuesta en [2] corresponde a un método que diseña filtros FIR utilizando filtros de media-banda, proporcionando mejoras en el número total de operaciones.

Esta aproximación se lleva cabo, suponiendo que los filtros son diseñados con una banda de transición  $\Delta f$  centrada a la frecuencia  $f_c = (2p + 1)/4M$ , donde  $M$  y  $p$  son enteros con  $p < M$  y  $\Delta f < f_s/4M$ , el filtro de media-banda es sobre muestreado con un factor de expansión  $M$ . Contando con  $N = 4K + 1$  coeficientes, de este modo la función de transferencia es expresada por:

$$H(z^M) = \frac{1}{2}[z^{-2MK} + z^{-M}H_1(z^{2M})]. \quad (3.40)$$

La estructura propuesta para la implementación de filtros FIR con FMM se ilustra en la Figura 3.23.





**Figura 3.23:** Estructura FMM modificada con filtros de media banda.

La realización esta dada por:

$$F_1(z) = \frac{1}{2}[G_1(z) + G_2(z)], \quad (3.41)$$

$$F_2(z) = \frac{1}{2}[G_1(z) - G_2(z)]. \quad (3.42)$$

Los dos filtros interpolados de media-banda pueden ser diseñados de la siguiente especificación. El filtro  $F_1(z)$  es un filtro pasa bajas con banda de transición  $f_s/M - \Delta f$ , mientras  $F_2(z)$  es un pasa banda centrado en la frecuencia  $f_c = (2p + 1)f_s/4M$ . La especificación de  $F_2(z)$  esta dada por:

$$F_2(f) = 1 - F_1(f) \quad ; \quad f_c + \frac{\Delta f}{2} - \frac{f_s}{2M} < f < f_c - \frac{\Delta f}{2}, \quad (3.43)$$

$$F_2(f) = F_1(f) \quad ; \quad f_c + \frac{\Delta f}{2} < f < f_c - \frac{\Delta f}{2} + \frac{f_s}{2M}, \quad (3.44)$$

$$F_2(f) = 0; f < f_c + \frac{\Delta f}{2} - \frac{f_s}{2M} \quad ; \quad f < f_c - \frac{\Delta f}{2} + \frac{f_s}{2M}. \quad (3.45)$$

Los rizados del filtro prototipo, son presentados como la suma de los rizados de los filtros de media-banda y los filtros interpolados.

### 3.4.2. Estructura usando un prefiltro-ecualizador

En esta estructura se propuso en [11], sustituyendo el filtro modelo del FMM, por la implementación de la técnica prefiltro-ecualizador.

El filtro prefiltro-ecualizador se basa en una cascada de un filtro coseno de primer orden con longitud par  $P_1(z)$  y otro filtro coseno cuadrado  $P_2(z)$ , dados por:

$$P_1(z) = \left( \frac{1 + z^{-1}}{2} \right), \quad (3.46)$$

$$P_2(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{1+z^{-1}}{2} \right) \left( \frac{1+z^{-1}}{2} \right). \quad (3.47)$$

De (3.46), vemos que  $P_1(e^{j\omega}) = e^{j\omega/2} \cos(\omega/2)$ , donde  $\cos(\omega/2)$  es positivo para el intervalo  $[0, \pi]$ , y negativo para  $[\pi, 2\pi]$ . Si el filtro  $P_2(z)$  es diseñado tal que la respuesta en frecuencia se aproxime a  $P_1(z)$  en el intervalo  $[0, \pi]$  y conectado en paralelo a  $P_2(z)$ , entonces un nuevo filtro  $P(z)$  es formado con una forma similar del pasa banda de  $P_1(z)$  y una banda de rechazo de  $\pi$  a  $2\pi$ . El prefiltro esta dado por:

$$P(z^M) = P_1(z^M) + P_2(z^M). \quad (3.48)$$

donde  $M$  es un entero par. La respuesta en frecuencia del prefiltro en la banda de paso es similar a  $P_1(z^M)$  y la banda de rechazo esta en los intervalos de  $2[\frac{m-0.5}{M}] [\frac{m+0.5}{M}]$  donde  $m = 1, 3, 5, \dots, (M/2 - 1)$ .

Para reemplazar el filtro modelo por la cascada del filtro prototipo  $P(z)$  y el filtro ecualizador  $H_{eq}(z)$ , las frecuencias de corte normalizadas están dadas por:

$$m = \lfloor \omega_p M \rfloor, \quad (3.49)$$

$$\omega_{ap} = \omega_p M - m, \quad (3.50)$$

$$\omega_{as} = \omega_s M - m, \quad (3.51)$$

$$\omega_{map} = \omega_p, \quad (3.52)$$

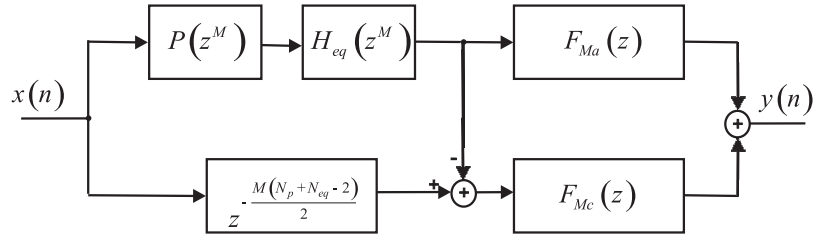
$$\omega_{mas} = \frac{m + 2 - \omega_{as}}{M}, \quad (3.53)$$

$$\omega_{mcp} = \frac{m - \omega_{ap}}{M}, \quad (3.54)$$

$$\omega_{mcs} = \omega_s. \quad (3.55)$$

donde  $\lfloor x \rfloor$  representa el entero más grande superior o igual a  $x$ .  $M$  es el factor de expansión para  $P(z)$  y  $H_{eq}(z)$ ,  $\omega_p$  y  $\omega_s$  son las frecuencias de corte normalizadas del filtro prototipo,  $\omega_{ap}$  y  $\omega_{as}$  son las frecuencias de corte normalizadas de  $P(z)H_{eq}(z)$ ,  $\omega_{map}(\omega_{mcp})$  y  $\omega_{mas}(\omega_{mcs})$  son las frecuencias de corte normalizadas de los dos filtros máscara.

Para obtener la estructura que se presenta en la figura 3.24, se propone seguir los siguientes pasos:



**Figura 3.24:** Estructura del método prefiltro-ecualizador.

**Paso 1:** Seleccionar el factor de expansión  $M$  que minimiza la longitud total del filtro.

**Paso 2:** Encontrar las frecuencias de corte de cada filtro, de acuerdo a las ecuaciones (3.49 - 3.55).

**Paso 3:** Diseñar los filtros máscara  $F_{Ma}(z)$  y  $F_{Mc}(z)$  con rizados en las bandas de paso y rechazo del 100 % a un 85 % del filtro prototipo.

**Paso 4:** Diseñar el filtro modelo  $F_a(z)$  con longitud par, de manera que el número de coeficientes de  $F_a(z)$  este dentro de  $P_1(z)H_{eq}(z)$ .

**Paso 5:** Diseñar  $P_2(z)$  usando  $P_1(z)$  y  $H_{eq}(z)$  para formar el filtro prefiltro-ecualizador  $P(z)$  mejorando las especificaciones del filtro modelo.

**Paso 6:** Comprobar el filtro prototipo cumpla con la especificación, de lo contrario ir al paso 3 e incrementar la longitud del filtro.

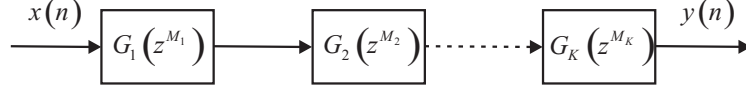
Este método es simple y fácil de aplicar comparado con el método máscara, esto se ve reflejado en un mejoramiento considerable en términos del número de multiplicadores del filtro prototipo.

### 3.4.3. Cascada de filtros idénticos

La aproximación del método propuesto es implementada mediante una cascada de filtros que tienen la misma respuesta al impulso. Dicha estructura se propuso en [4].

La estructura propuesta para filtros de banda angosta se muestra en la Figura 3.25, la cual se basa en la identidad:  $G_i(z) = G(z)$ , donde cada filtro tiene diferente factor de

expansión; haciendo posible la obtención de un filtro complemento a trevéz de:  $G_c(z) = z^{-N_G/2} - G(z)$ , donde  $N_G$  es el orden del filtro  $G(z)$ .



**Figura 3.25:** Estructura de filtros idénticos.

Las funciones de transferencia para los filtros son:

$$F(z) = \prod_{i=1}^K G(z^{M_i}), \quad (3.56)$$

$$F_c(z) = z^{-N_G(\sum_{i=1}^K M_i)/2} - F(z). \quad (3.57)$$

Una consideración importante dentro de este método es la determinación de las tolerancias.

El rizo en la banda de paso del filtro prototipo  $\delta_p^{(F)}$ , esta definida por:

$$\delta_p^{(F)} \leq K_I \delta_p^{(G)} + K_P \delta_p^{(G_c)}, \quad (3.58)$$

donde  $K_I$  y  $K_P$  son el número de etapas con  $M_i$  impar y par, respectivamente. Para el rizo en la banda de rechazo  $\delta_s^{(F)}$ , tenemos que:

$$\delta_s^{(H)} \leq \max \delta_s^{(G)}, \delta_s^{(G_c)} \quad (3.59)$$

Debido a que los rizo  $\delta_p^{(G)} \delta_s^{(G)}$  tienen una relación inversamente proporcional con el orden del filtro; el siguiente problema de optimización minimiza el orden del filtro modelo.

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad \delta_p^{(G)} \delta_s^{(G)} \\ &\text{sujeto a} \quad K_I \delta_p^{(G)} + K_P \delta_s^{(G)} \leq \delta_p^{(H)} \\ &\quad \delta_p^{(G)} \leq \delta_s^{(H)} \\ &\quad \delta_s^{(G)} \leq \delta_s^{(H)}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Puesto que se utiliza una cascada de filtros  $G_i(z)$  con diferente factor de expansión, solo es empleado un conjunto de sumadores y multiplicadores haciendo que la estructura propuesta sea eficiente en el área de implementación; sin embargo esto incrementa el costo en la cantidad de memoria.

## 3.4.4. Algoritmo de optimización no lineal

El propósito de esta contribución hecha en [20], es introducir un segundo paso en el método máscara para reducir la complejidad aritmética por medio de una optimización simultanea del diseño de todos los subfiltros.

La función de transferencia del método máscara  $H(z)$ , con  $R$  etapas esta determinada por:

$$H(z) = F^{(R)}(z^{M_R})G_1^{(R)}(z) + \left[ z^{-(M_R(N_F^{(R)}-1))/2} - F^{(R)}(z^{M_R}) \right] G_2^{(R)}(z), \quad (3.61)$$

donde

$$F(z^{M_R}) = \sum_{n=0}^{N_F^{(R)}-1} f^{(R)}(n) z^{-nM_R}, \quad (3.62)$$

y

$$G_k^{(r)}(z) = \sum_{n=0}^{N_k^{(r)}-1} g_k^{(r)}(n) z^{-n}, \quad (3.63)$$

para  $k = 1, 2, \dots, R$  y  $r = 1, 2, \dots, R$ . La solución obtenida por el uso del FMM puede ser mejorado eficientemente con la técnica de *optimización no lineal espontánea*.

El problema de obtimización se basa en encontrar un parámetro que es un vector ajustable  $\Phi$  dado por:

$$\begin{aligned} \Phi = & [g_1^{(1)}(0), \dots, g_1^{(1)} \lfloor N_1^{(1)}/2 \rfloor, g_2^{(1)}(0), \dots, g_2^{(1)} \lfloor N_2^{(1)}/2 \rfloor, \dots, \\ & g_1^{(R)}(0), \dots, g_1^{(R)} \lfloor N_1^{(R)}/2 \rfloor, g_2^{(R)}(0), \dots, g_2^{(R)} \lfloor N_2^{(R)}/2 \rfloor, \\ & f^{(R)}(0), \dots, f^{(R)} \lfloor N_F^{(R)}/2 \rfloor] \end{aligned} \quad (3.64)$$

para minimizar

$$\max_{\omega \in [0, \omega_p] \cup [\omega_s, \pi]} |E(\Phi, \omega)|, \quad (3.65)$$

$$E(\Phi, \omega) = W(\omega)[H(\Phi, \omega) - D(\omega)], \quad (3.66)$$

$$D(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, \omega_p] \\ 0, & \omega \in [\omega_s, \pi], \end{cases} \quad W(\omega) = \begin{cases} 1/\delta_p, & \omega \in [0, \omega_p] \\ 1/\delta_s, & \omega \in [\omega_s, \pi], \end{cases} \quad (3.67)$$

donde  $E(\Phi, \omega)$  es el vector de error,  $D(\omega)$  es el vector deseado,  $W(\omega)$  el vector de pesos y  $H(\Phi, \omega)$  es la respuesta en frecuencia de la función de transferencia del filtro prototipo.

Para resolver este problema, las regiones de banda de paso y banda de rechazo son discretizadas en puntos de la frecuencia  $\omega_j \in [0, \omega_p]$  para  $j = 1, 2, \dots, J_p$  y  $\omega_j \in [\omega_s, \pi]$  para  $j = J_p + 1, J_p + 2, \dots, J_p + J_s$ . El problema resultante de discretización es encontrar  $\Phi$  al mínimo:

$$\epsilon = \max_{1 \leq j \leq J_p + J_s} |E(\Phi, \omega)|. \quad (3.68)$$

Por lo tanto usando el algoritmo de optimización no lineal se encuentra una convergencia del algoritmo para una solución exacta, la cual puede ser obtenida mediante los siguientes pasos:

**Paso 1:** Fijar  $k = 1$  y seleccionar un conjunto denso de los puntos  $\Omega_{dense} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_I\}$  en  $[0, \omega_p] \cup [\omega_s, \pi]$ , como conjunto inicial los puntos son uniformemente espaciados por  $\Omega_0 = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_J\}$  con  $J = \lfloor I/100 \rfloor$ , donde la selección de  $I$  se basa en experimentos.

**Paso 2:** Encontrar en  $\Omega_{dense}$  el máximo local de  $|E(\Phi, \omega_j)|$ , determinado por:

$$|E(\Phi, \omega_{j-1})| < |E(\Phi, \omega_j)| > |E(\Phi, \omega_{j+1})|, \quad (3.69)$$

donde  $|E(\Phi, \omega_0)| = |E(\Phi, \omega_{J+1})| = 0$ . Actualizar las abscisas en  $\Omega_{new}$ , de la siguiente forma  $\Omega_k = \Omega_{k-1} \cup \Omega_{new}$ .

**Paso 3:** Resolver el problema con (3.68) usando  $\Omega_k$  como un conjunto de puntos de frecuencia.

**Paso 4:** Si  $|\Omega_{k-1}| = \Omega_k$ , entonces se detiene. De lo contrario, fijar  $k = k + 1$  e ir al paso 2;  $|\Omega|$  denota el tamaño del conjunto de  $\Omega$ .

El espaciamiento de la respuesta en frecuencia de la función de error  $E(\Phi, \omega)$  debe ser lo suficientemente densa. Usando más puntos, la solución final será más exacta. Sin embargo, la velocidad de convergencia del algoritmo de optimización empieza a ser lenta.

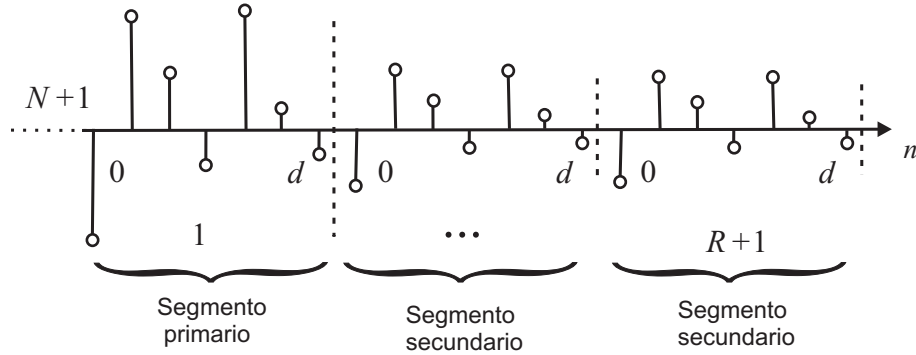
### 3.4.5. Aproximación de la respuesta al impulso extrapolada

En la respuesta al impulso del FMM es posible notar cuasi-periodicidad, necesaria para lograr una significativa reducción de la complejidad del filtro, esto se hace por medio de la técnica de respuesta al impulso extrapolada la cual fue propuesta en [22].

Dado un filtro FIR de fase lineal con función de transferencia:

$$H(z) = h(0) + \sum_{n=1}^N h(n)(z^n + z^{-n}), \quad (3.70)$$

donde  $h(n)$  es la respuesta al impulso, la técnica de respuesta al impulso extrapolada consistirá en la selección del segmento de mayor amplitud como el segmento primario y los restantes son segmentos secundarios vistos como versiones escaladas del segmento primario, lo cual es ilustrado en la Figura 3.26.



**Figura 3.26:** Respuesta al impulso  $f(n)$ , obtenida del FMM.

Considera el caso donde la respuesta al impulso puede ser particionada en un elemento central y  $R+1$  segmentos cuasi-periódicos con duración igual en cada uno de los segmentos de  $d$ . Los segmentos primarios están en el rango de  $n = N+1$  hasta  $n = N+d$  y para los  $r$ -ésimos segmentos secundarios están en el rango de  $n = N+rd+1$  hasta  $n = N+(r+1)d$  para  $r = \dots, R$ , de este modo  $H(z)$  puede ser prescrita como:

$$H(z) = h(0) + \sum_{n=1}^N h(n)(z^n + z^{-n}) + \sum_{r=0}^R \sum_{m=1}^d h(M+m+rd)(z^{M+m+rd} + z^{-(M+m+rd)}). \quad (3.71)$$

Si los segmentos secundarios para  $r \geq 1$  son una versión escalada del segmento  $r = 0$ , entonces  $H(z)$  puede ser aproximada como:

$$H(z) \approx \hat{H}(z) = h(0) + \sum_{n=1}^N h(n)(z^n + z^{-n}) + \sum_{m=1}^d h(M+m) \sum_{r=0}^R \alpha_r (z^{M+m+rd} + z^{-(M+m+rd)}), \quad (3.72)$$

donde  $\alpha_r$  es el  $r$ -ésimo factor de escala y  $\alpha_0 = 1$ .

Los valores de  $h(N+m)$  para  $m = 1, \dots, d$  son fijados usando los valores del diseño óptimo. Así el problema de optimización es simplificado a un problema lineal que determina

los coeficientes  $h(n)$  para  $n = 0, \dots, N$ , y los factores de escalamiento  $\alpha_r$  para  $r = 0, \dots, R$ ; dando solución con el uso de un algoritmo de optimización lineal, que utiliza una técnica de optimización  $h(n)$  y  $\alpha_r$  para todo  $n$  y  $r$ .

Suponiendo que la respuesta al impulso de  $F(z)$  es cuasi-periódico con muestras que van de  $f(N + 1)$  hasta  $f(N + (R + 1)d)$ , y cada periodo tiene una duración  $d$ , lo anterior se ilustra en la Figura 3.26.

El proceso de optimización consta de los siguiente pasos:

**Paso 0:** Fijar  $p = 0$  y  $\epsilon_G^{(p)} = 0$

**Paso 1:** Fijar  $p = p + 1$ . Determinar los parámetros de  $G_1^{(p)}(\omega)$  y  $G_2^{(p)}(\omega)$  para minimizar  $\epsilon_G^{(p)}$ .

$$\epsilon_G^{(p)} = \max_{\omega \in [0, \omega p_{g1}] \cup [\omega s_{g2}, \pi]} |W(\omega)| [H_G^{(p)}(\omega) - D(\omega)]. \quad (3.73)$$

En (3.73), esta el término  $H_G^{(p)}(\omega)$  el cual esta determinado por:

$$H_G^{(p)}(\omega) = F^{(p-1)}(M\omega)G_1^{(p)}(\omega) + [1 - F^{(p-1)}(M\omega)]G_2^{(p)}(\omega), \quad (3.74)$$

donde la respuesta en frecuencia para los subfiltros es denotada como  $F(M\omega)$ ,  $G_1(\omega)$  y  $G_2(\omega)$ .

**Paso 2:** Fijar

$$\begin{aligned} q &= 0, \epsilon_\alpha^{(-1)}, \epsilon_F^{(0)} = 0, \\ \mathbf{X}_1^{(q)} &= [f^{(p-1)}(0), \dots, f^{(p-1)}(M)]^T, \\ \mathbf{X}_2^{(q)} &= [f^{(p-1)}(M + 1), \dots, f^{(p-1)}(M + d)]^T, \\ \mathbf{X}_3^{(q)} &= [\alpha_0^{(p-1)}, \dots, \alpha_R^{(p-1)}]^T. \end{aligned} \quad (3.75)$$

**Paso 3:** Fijar  $q = q + 1$ . Determinar los valores de  $\mathbf{X}_1^{(q)}$  y  $\mathbf{X}_3^{(q)}$  que minimiza  $\epsilon_\alpha^{(q)}$ .

$$\epsilon_\alpha^{(q)} = \max_{\omega \in [\omega p_{g1}, \omega p_{g2}] \cup [\omega s_{g1}, \omega s_{g2}]} |W(\omega)| [H_\alpha^{(q)}(\omega) - D(\omega)]. \quad (3.76)$$

**Paso 4:** Fijar  $q = q + 1$ . Determinar los valores de  $\mathbf{X}_1^{(q)}$  y  $\mathbf{X}_2^{(q)}$  que minimiza  $\epsilon_F^{(q)}$ .

$$\epsilon_F^{(q)} = \max_{\omega \in [\omega p_{g1}, \omega p_{g2}] \cup [\omega s_{g1}, \omega s_{g2}]} |W(\omega)| [H_F^{(q)}(\omega) - D(\omega)]. \quad (3.77)$$



**Paso 5:** Si  $\left| \epsilon_{\alpha}^{(q-1)} - \epsilon_{\alpha}^{(q-3)} \right| \leq \Delta$  y  $\left| \epsilon_F^{(q)} - \epsilon_F^{(q-2)} \right| \leq \Delta$ , donde  $\Delta$  es una tolerancia prescrita, entonces se va al paso 6, de lo contrario ir al paso 3.

**Paso 6:** Si  $\left| \epsilon_G^{(p)} - \epsilon_G^{(p-1)} \right| \leq \Delta$ , entonces se detiene, de lo contrario se va al paso 1.

La formación de filtros extrapolados se optimiza por el ajuste iterativo de los coeficientes extrapolados y los factores de escalamiento en los pasos 2 a 5, generando la respuesta deseada.

La aproximación de la respuesta al impulso extrapolada, usa la correlación entre bloques de muestras de la respuesta al impulso, es decir pequeños segmentos de las muestras de la respuesta se aproximan a una versión escalada de unos como extrapolación de la longitud del filtro. Así la complejidad de hardware es reducida.



---

## MÉTODO PROPUESTO PARA FILTROS DE BANDA ANGOSTA

*En este capítulo se presenta un método para el diseño de filtros de banda angosta basado en la estructura IFIR con las técnicas de redondeo y afilado. Este método propone el uso de una función de escalamiento, lo que permite obtener una reducción en la complejidad de la estructura IFIR.*

### 4.1. Introducción

El Filtro IFIR propuesto en [15] es eficiente ya que muestra una disminución significativa en la complejidad de un filtro FIR. Algo que se debe tomar en cuenta en el diseño de filtros IFIR es que sólo pueden realizarse diseños para filtros de banda angosta. La necesidad de reducir la complejidad de los filtros FIR hace que se utilicen técnicas que mejoran la complejidad de los filtros, una de ellas es la de *técnica de redondeo* [1]. Como consecuencia de este ahorro se tiene una magnitud de respuesta en frecuencia distorsionada. La distorsión obtenida se mejora aplicando la *técnica de afilado* [10] que está basada en una función de cambio de amplitud logrando una mejoría en la magnitud de la respuesta en frecuencia.

## 4.2. Reducción de la complejidad de la estructura IFIR basado en el método de redondeo-afilado con una función de escalamiento

Basándose en el diseño de filtros que usan las técnicas de redondeo y afilado, se propone el uso de la función de escalamiento con el fin de obtener una reducción en la complejidad de los filtros IFIR.

En [7] Dolecek y Mitra proponen un método eficiente para el diseño de filtros libre de multiplicadores. Dicho método usa la estructura IFIR que consiste en la cascada de un filtro modelo expandido y un filtro interpolador, posteriormente se usa la técnica de redondeo y afilado para satisfacer las especificaciones deseadas.

La diferencia respecto al método anterior es que se le adiciona un factor de escalamiento dado por:

$$\omega_{Ps} = \omega_s + \gamma(\Delta\omega), \quad (4.1)$$

donde el factor de escalamiento está representado por  $\gamma(\Delta\omega)$  y se determina por medio de:

$$\gamma(\Delta\omega) \approx \frac{\Delta\omega^{(\Delta\omega+1)}}{3}. \quad (4.2)$$

Dicha ecuación es determinada en base al diseño de varios filtros de forma empírica.

Con el fin de tomar en cuenta otros anchos de transición en la Tabla 4.1 se presentan algunos valores diferentes que podrían utilizarse para otros casos.

Por lo tanto este método propuesto utiliza una banda de transición más amplia y con esto se obtienen órdenes del filtro mucho menores comparando con el diseño del método original. A continuación se explicará metódicamente en qué consiste el diseño.

### Descripción del diseño propuesto.

1. Se escoge el factor de interpolación  $M$  y con él se diseña el filtro modelo  $G(z)$  y el filtro interpolador  $I(z)$ .
2. Se elige el valor de la constante de redondeo. Como un buen punto de inicio se escoge  $r = 0.01$ .

**Tabla 4.1:** Factor de escalamiento para expandir la banda de transición.

$\Delta\omega$	$\gamma(\Delta\omega)$
0.1	$\frac{\Delta\omega^{(\Delta\omega+1)}}{3} \approx 0.027$
0.09	$\frac{\Delta\omega^{(\Delta\omega+1)}}{3} \approx 0.023$
0.08	$\frac{\Delta\omega^{(\Delta\omega+1)}}{3} \approx 0.02$
0.07	$\frac{\Delta\omega^{(\Delta\omega+1)}}{3} \approx 0.019$
0.06	$\frac{\Delta\omega^{(\Delta\omega+1)}}{3} \approx 0.016$
0.05	$\frac{\Delta\omega^{(\Delta\omega+1)}}{3} \approx 0.014$
0.04	$\frac{\Delta\omega^{(\Delta\omega+1)}}{3} \approx 0.011$
0.03	$\frac{\Delta\omega^{(\Delta\omega+1)}}{4} \approx 0.0067$
0.02	$\frac{\Delta\omega^{(\Delta\omega+1)}}{4} \approx 0.0046$
0.01	$\frac{\Delta\omega^{(\Delta\omega+1)}}{4} \approx 0.0023$

3. Los coeficientes de  $G(z)$  e  $I(z)$  se redondean para obtener  $G_r(z)$  e  $I_r(z)$ .
4. El filtro redondeado  $G_r(z)$  se expande por  $M$ , obteniendo  $G_r(z^M)$ .
5. La técnica de afilado es aplicada a los filtros  $G_r(z^M)$ ,  $I_r(z)$  para obtener  $Sh\{G_r(z^M)\}$  y  $Sh\{I_r(z)\}$ . Si la especificación no se cumple es posible disminuir la constante de redondeo  $r$  o aumentar el grado del polinomio de afilado.
6. Basándose en filtros previamente diseñados es posible decir hasta este punto que el filtro IFIR no cumple con la especificación de la frecuencia de corte en la banda de rechazo. Por lo tanto, se diseña nuevamente los filtros  $G(z)$  e  $I(z)$  con el uso de la función de escalamiento representados por  $G_P(z)$  e  $I_P(z)$  y de este modo se obtiene una nueva frecuencia de corte en la banda de rechazo para los filtros modelo e interpolador:

$$\begin{aligned}\omega_{Ps(G(z))} &= \omega_{sG(z)} + \gamma(\Delta\omega), \\ \omega_{Ps(I(z))} &= \omega_{sI(z)} + \gamma(\Delta\omega).\end{aligned}\tag{4.3}$$

7. Los filtros  $G_P(z)$  e  $I_P(z)$  se diseñan con los pasos del 3 al 5 para obtener el filtro propuesto:

$$H_{rsP}(z) = Sh\{G_{Pr}(z^M)\}Sh\{I_{Pr}(z)\} \quad (4.4)$$

Una vez obtenido el filtro resultante es posible probar que la especificación del filtro es satisfecha, de lo contrario se debe de elegir otra constante de redondeo o diferente polinomio de afilado.

El siguiente ejemplo permite ilustrar de una mejor manera esta descripción.

#### Ejemplo 4-1.

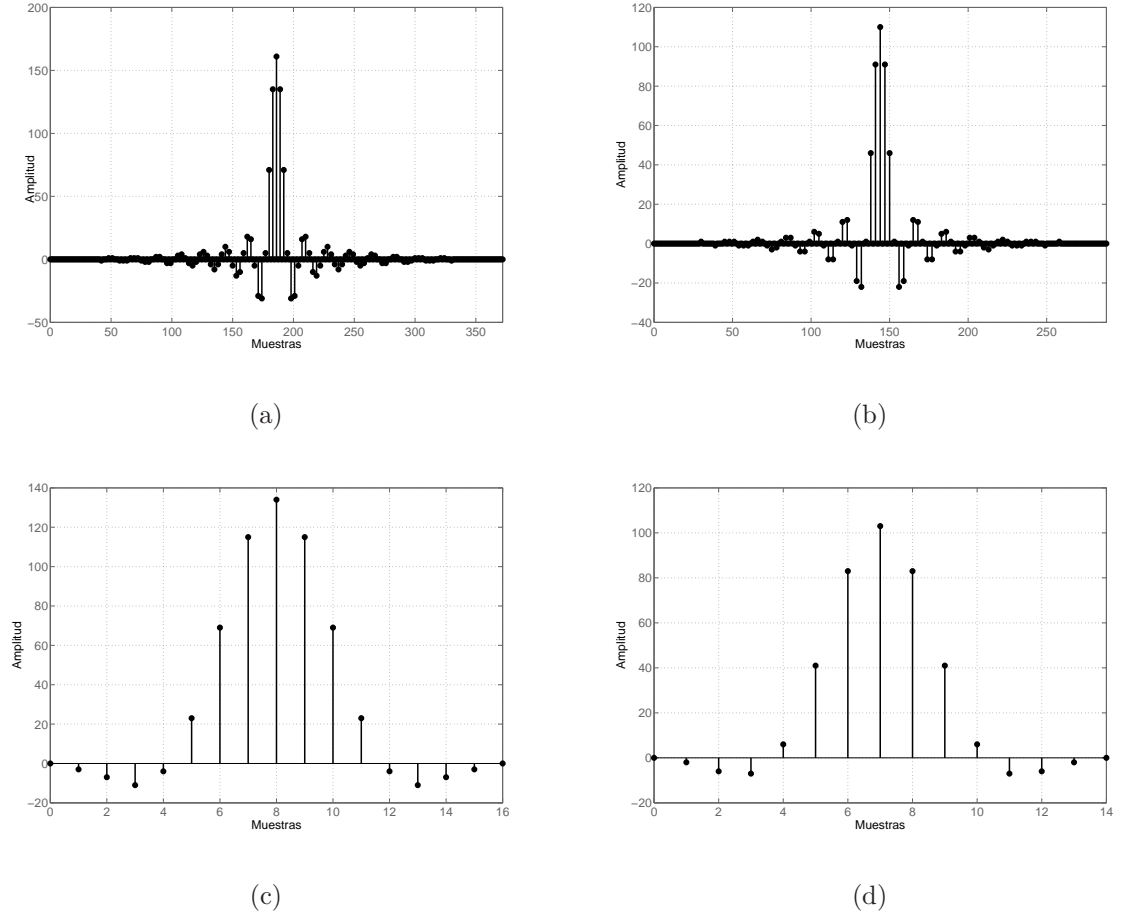
Se requiere diseñar un filtro  $H(z)$  con las siguientes especificaciones:

- Frecuencia de corte en la banda de paso: 0.1.
- Frecuencia de corte en la banda de rechazo: 0.12.
- Máximo rizo en la banda de paso: 0.1 dB.
- Mínima atenuación en la banda de rechazo: 90 dB.

1. Se escoge el factor de interpolación  $M = 3$  y con él se diseña los filtros modelo  $G(z)$  e interpolador  $I(z)$ .
2. El valor de la constante de redondeo es escogida con un valor de  $r = 0.002$ .
3. Los coeficientes de  $G(z)$  y  $I(z)$  son redondeados para obtener  $G_r(z)$  y  $I_r(z)$ .

En la Figura 4.1 se muestra la respuesta al impulso del filtro modelo redondeado  $G_r(z)$  que cuenta con 143 multiplicadores cero y 15 multiplicadores enteros diferentes (Fig. 4.1(a)). Por otro lado, el filtro modelo propuesto  $G_{Pr}(z)$  con la Ec. (4.2) cuenta con 109 multiplicadores cero y 13 multiplicadores enteros diferentes (Fig. 4.1(b)). Para el caso del filtro interpolador clásico redondeado  $I_r(z)$  se tiene 1 multiplicador cero y 8 multiplicadores enteros diferentes (Fig. 4.1(c)) mientras que el filtro interpolador propuesto con la Ec. (4.2)  $I_{Pr}(z)$  cuenta con 1 multiplicador cero y 6 multiplicadores enteros diferentes (Fig. 4.1(d)).

4. El filtro redondeado  $G_r(z)$  es expandido por  $M = 3$ , obteniendo  $G_r(z^3)$ .



**Figura 4.1:** Respuesta al impulso del filtro modelo e interpolador clásico y filtro modelo e interpolador propuesto con Ec. (4.2).

5. La técnica de afilado es aplicada a los filtros  $G_r(Mz)$ ,  $I_r(z)$  usando el polinomio  $H^4(4 - 3H)$ , para obtener  $Sh\{G_r(z)\}$  y  $Sh\{I_r(z)\}$ .
6. El filtro diseñado  $Sh\{G_r(z)\}Sh\{I_r(z)\}$  no cumple con la especificación de la frecuencia de corte en la banda de rechazo. Por ende se diseñan las nuevas frecuencias de corte en la banda de rechazo para los filtros  $G_{Pr}(z)$  e  $I_{Pr}(z)$  con el uso de la Tabla 4.1, dadas por:

$$\begin{aligned}\omega_{Ps(G(z))} &= \omega_{sG(z)} + \gamma(0.06) = 0.376893, \\ \omega_{Ps(I(z))} &= \omega_{sI(z)} + \gamma(0.44) = 0.64388.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Los filtros  $G_{Pr}(z)$  e  $I_{Pr}(z)$  se muestran en las Figuras 4.2 y 4.3, respectivamente.

7. El filtro resultante  $H_{ifirP}(z) = Sh\{G_{Pr}(z)\}Sh\{I_{Pr}(z)\}$  se ilustra en la Figura 4.4

probando que la especificación del filtro es satisfecha.

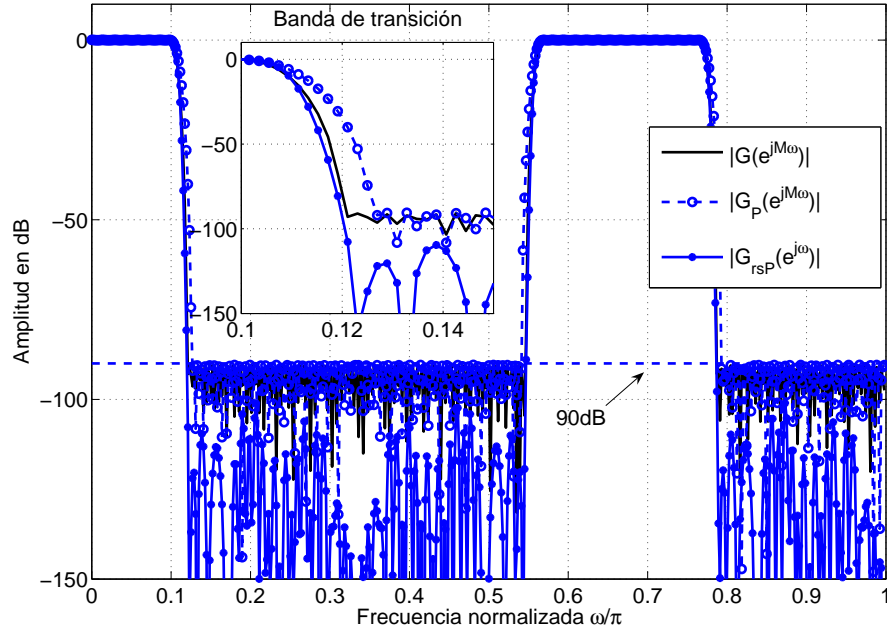
En la Tabla 4.2 se compara la complejidad del método propuesto con otros dos.

**Tabla 4.2:** Comparación de complejidad del método IFIR, IFIR redondeado y afilado, IFIR propuesto.

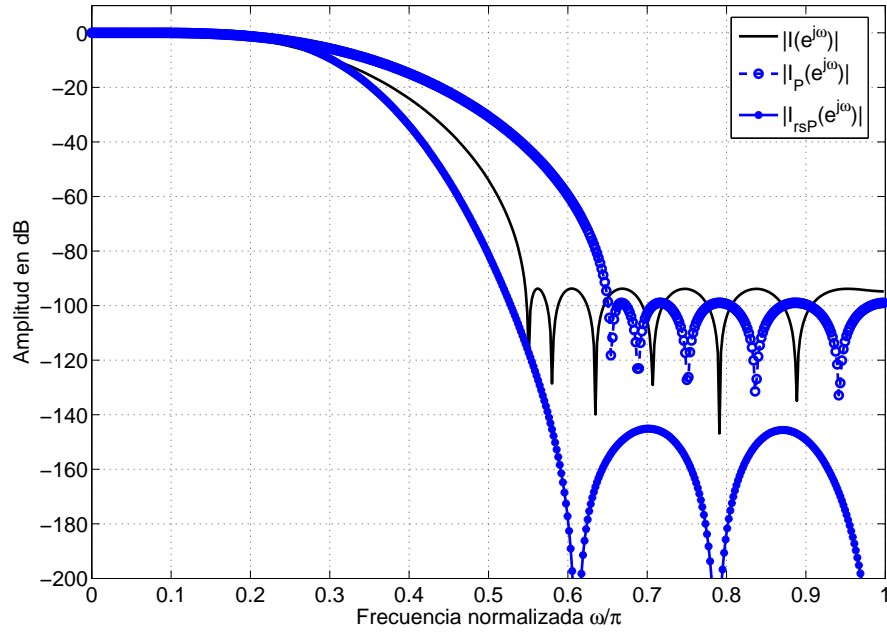
Método	Filtro	Multiplicadores
Filtro con algoritmo Remez	$H_{remez}(z)$	177 (flotantes)
IFIR [17]	$G(z)$	63
	$I(z)$	9
Total	$H(z)$	72 (flotantes)
IFIR [7]	$G_p(z)$	15
	$I_p(z)$	8
Total	$H_p(z)$	23 (enteros)
IFIR Propuesto	$Sh\{G_{pr}(z)\}$	13
	$Sh\{I_{pr}(z)\}$	6
Total	$H_{ifirP}(z)$	19 (enteros)

Este método propuesto es eficiente ya que la banda de transición es más amplia, por lo tanto el orden del filtro diseñado es menor al que originalmente se requiere en el diseño del filtro IFIR.





**Figura 4.2:** Filtros Modelo expandido, propuesto y redondeo-afilado propuesto.



**Figura 4.3:** Filtros interpolador, interpolador propuesto y redondeo-afilado propuesto.

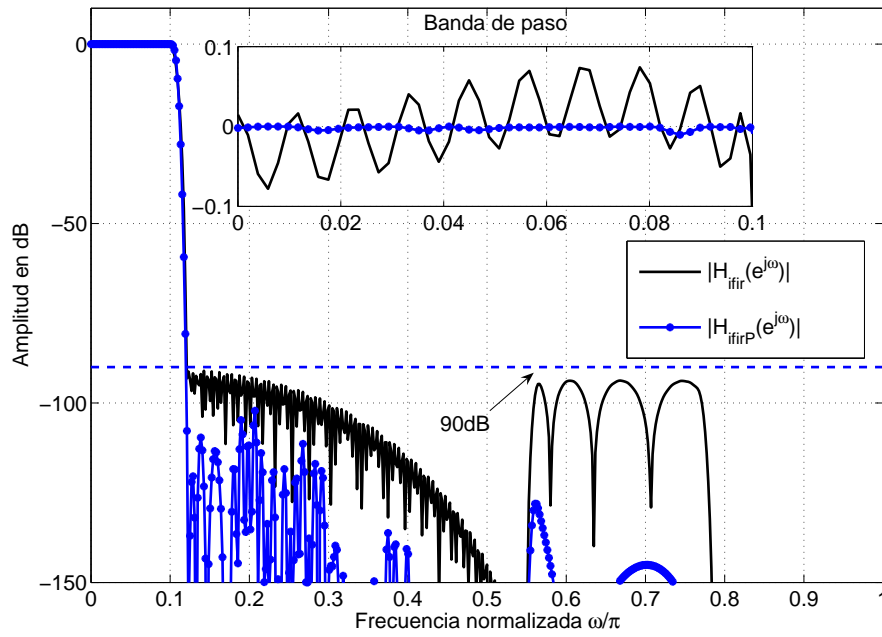


Figura 4.4: Filtros IFIR y propuesto.

---

## MÉTODOS PROPUESTOS PARA FILTROS DE BANDA ANCHA

*En este capítulo se presentan tres métodos para el diseño de filtros de banda ancha. El capítulo se divide en dos secciones. En la primera sección se presenta la reducción de filtros con banda de transición moderada usando además de las técnicas de redondeo y afilado una función de escalamiento. En la segunda sección se muestran dos métodos para la reducción de la complejidad de los subfiltros en el FMM.*

### 5.1. Filtros de banda ancha con banda de transición moderada

Con el objetivo de obtener una reducción en la complejidad de los FIR en esta sección se propone el uso de la técnica de redondeo y afilado con una función de escalamiento.

#### **Descripción del diseño propuesto.**

1. Se diseña el filtro prototipo  $G(z)$ .
2. Se elige el valor de la constante de redondeo. Como un buen valor inicial  $r = 0.01$ .
3. Los coeficientes de  $G(z)$  se redondean para obtener  $G_r(z)$ .
4. La técnica de afilado se aplica al filtro  $G_r(z)$ , para obtener  $Sh\{G_r(z)\}$ . Si la especificación no se cumple es posible disminuir la constante de redondeo  $r$  o aumentar el grado del polinomio de afilado.
5. El filtro diseñado  $Sh\{G_r(z)\}$  no cumple con la especificación de la frecuencia de corte en la banda de rechazo debido a esto, la nueva frecuencia de corte en la banda

de rechazo es:

$$\omega_{Ps} = \omega_s + \gamma(\Delta\omega), \quad (5.1)$$

donde el valor de  $\gamma(\Delta\omega)$  se toma de la Tabla 4.1.

6. Una vez que se obtiene el filtro  $Sh\{G_{Pr}(z)\}$  es posible checar si la especificación es satisfecha, de lo contrario volver al paso 2 para asignar otro valor de la constante de redondeo u otro polinomio de afilado.

El siguiente ejemplo permite ilustrar de una mejor manera esta descripción.

#### Ejemplo 5-1.

Se requiere diseñar un filtro  $H(z)$  con las siguientes especificaciones:

- Frecuencia de corte en la banda de paso: 0.7.
- Frecuencia de corte en la banda de rechazo: 0.72.
- Máximo rizo en la banda de paso: 0.1 dB.
- Mínima atenuación en la banda de rechazo: 90 dB.

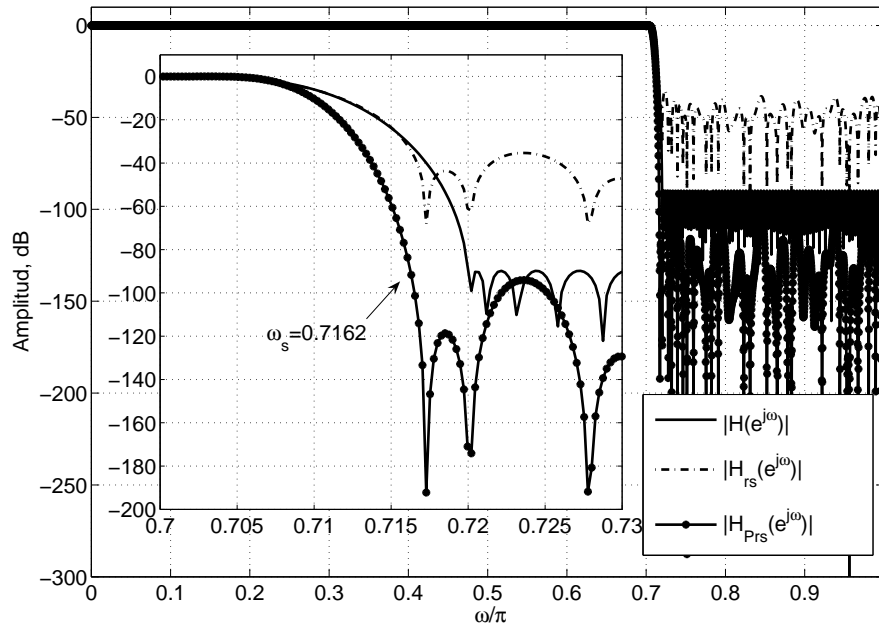
1. El orden del filtro prototipo diseñado es de 532.
2. El valor de constante de redondeo es de  $r = 0.0015$ .
3. Los coeficientes del filtro  $H(z)$  son redondeados para obtener  $H_r(z)$ , ilustrando la magnitud de la respuesta a la frecuencia en la Figura 5.1.
4. Con el polinomio de afilado  $H^3(4-3H)$  se obtiene el filtro  $H_{rs}(z) = Sh\{H_r(z)\}$ . En la Figura 5.1 se muestra como la frecuencia de corte de la banda de rechazo no es la adecuada, debido a ésto se usa la función de escalamiento.
5. Se utiliza la Tabla 4.1 la nueva frecuencia de corte en la banda de rechazo es:

$$\omega_{Ps} = \omega_s + \gamma(0.02) = 0.0246. \quad (5.2)$$

6. La Figura 5.2 muestra que el filtro resultante cumple con la especificación de la frecuencia de corte en la banda de rechazo. En la Tabla 5.1 se muestra la comparación de la complejidad con los otros dos métodos propuestos.

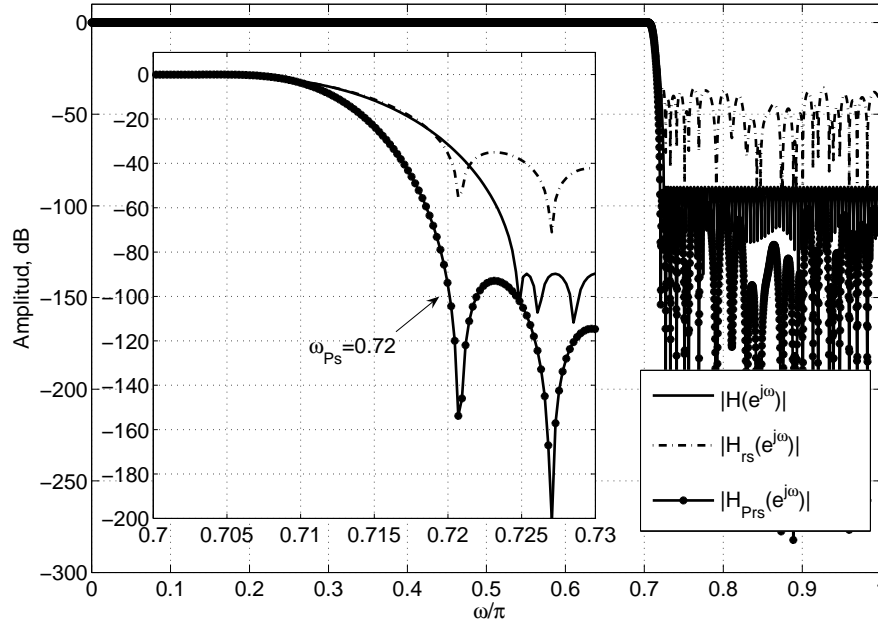
**Tabla 5.1:** Comparación de complejidad en un filtro FIR con las técnicas de redondeo y afilado, y con el factor de escalamiento.

Tipo de filtro	Multiplicadores
Filtro con algoritmo Remez	267 (Flotantes)
Redondeo Afilado [6]	96(Enteros)
Redondeo Afilado propuesto	80(Enteros)



**Figura 5.1:** Filtros original, redondeado y redondeado afilado.

El método propuesto permite comprobar que con el uso del factor de escalamiento es posible obtener filtros con anchos de banda de transición mucho más grandes al que originalmente se requieren, disminuyendo el número de multiplicadores y sumas.



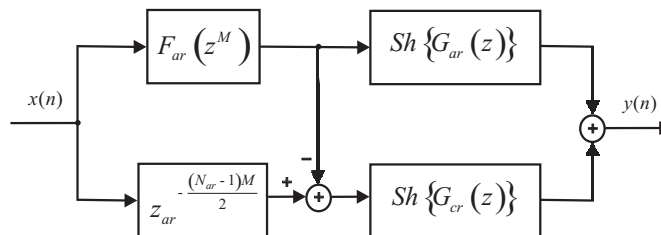
**Figura 5.2:** Filtros original, redondeado propuesto y redondeado afilado propuesto.

## 5.2. Reducción basada en el FMM

### 5.2.1. Reducción de la complejidad de los filtros máscara

En esta sección se propone la utilización de la técnica de redondeo y afilado, para reducir de la complejidad de los filtros máscara.

Basándose en una modificación del FMM se propone en este trabajo una estructura donde se aplica la técnica de redondeo al filtro modelo  $G_r(z)$  y la técnica de afilado  $Sh\{G_r(z)\}$  a los filtros máscara, dicha estructura se ilustra en la Figura 5.3.



**Figura 5.3:** Estructura FMM propuesta

El diseño del método propuesto supone un compromiso entre el coeficiente de redondeo y el orden del polinomio de la función de cambio de amplitud. Por lo tanto cabe mencionar la importancia de una selección adecuada del factor de redondeo así como también del polinomio de la función de cambio de amplitud, que se ve reflejada en la obtención de buenos resultados cumpliendo con la especificación del filtro prototipo.

### Descripción del diseño propuesto.

1. Se elige un óptimo factor de expansión  $M$  con el objetivo de alcanzar la menor complejidad en el diseño del filtro modelo y de los filtros máscara, posteriormente el filtro modelo es redondeado y expandido por  $M$ , resultando en  $F_{ar}(z^M)$ . El factor de redondeo inicial esta determinado por  $r = 0.001$ .
2. Se diseña el complemento redondeado basado en  $F_{ar}(z^M)$  denotado como  $F_{cr}(z^M)$ .
3. Aplicando la técnica de redondeo se obtienen los filtros máscara redondeados  $G_{ar}(z)$  y  $G_{cr}(z)$ . Una alta constante de redondeo es usada para obtener menor orden en el filtro. Un buen punto de partida es  $r = 0.01$ .
4. La técnica de afilado se aplica a los filtros  $G_{ar}(z)$  y  $G_{cr}(z)$ .
5. La función de transferencia del filtro resultante esta dada por:

$$H_p(z) = F_{ar}(z^M)Sh\{G_{ar}(z)\} + F_{cr}(z^M)Sh\{G_{cr}(z)\}. \quad (5.3)$$

El siguiente ejemplo permite ilustrar de una mejor manera esta descripción.

#### Ejemplo 5-2.

Un filtro pasabajas con especificación  $w_p = 0.7$ ,  $w_s = 0.73$ ,  $R_p = 0.2$  dB y  $A_s = 70$  dB es diseñado mediante el método FMM. El filtro prototipo diseñado con el algoritmo Remez tiene un orden de 174, con 88 multiplicadores.

A continuación se diseña el filtro con el método propuesto; cabe mencionar que se basa en el diseño del FMM caso A:

1. Se eligió un factor de expansión de  $M = 4$ , y se obtuvieron las frecuencias normalizadas para el filtro modelo  $G_a(z)$ :

$$\omega_{pF_a} = 0.8, \omega_{sF_a} = 0.92, Rp_{F_a} = 0.0026922 \text{ dB}, As_{F_a} = 70.175 \text{ dB}.$$

El orden del filtro modelo  $F_a(z)$  es de 66 con 34 multiplicadores. Se expande el filtro modelo con  $M = 4$  obteniendo  $F_a(z^4)$ .

Del diseño de los filtros máscara se obtienen las siguientes especificaciones:

$$\omega_{pG_a} = 0.7, \omega_{sG_a} = 0.77, Rp_{G_a} = 0.19595 \text{ dB}, As_{G_a} = 70.175 \text{ dB}.$$

$$\omega_{pG_c} = 0.3, \omega_{sG_c} = 0.73, Rp_{G_c} = 0.19595 \text{ dB}, As_{G_c} = 70.175 \text{ dB}.$$

El orden del filtro modelo  $G_a(z)$  es de 76 con 39 multiplicadores. El orden del filtro modelo  $G_c(z)$  es de 12 con 7 multiplicadores.

2. Se calcula el filtro complemento  $G_{rc}(z^M)$ . La respuesta en magnitud redondeada expandida del filtro modelo y su complemento es ilustrada en la Figura 5.4.
3. Se aplica el redondeo a los filtros máscara usando  $r = 0.0021$ .
4. Aplicando la técnica de afilado a los filtros máscara, la respuesta en magnitud de los filtros máscara redondeados afilados se muestran en la Figura 5.5.
5. Se encuentra el filtro resultante obteniendo la respuesta en magnitud que se ilustra en la Figura 5.6. La banda de paso y la banda de rechazo demuestran que la especificación esta satisfecha.

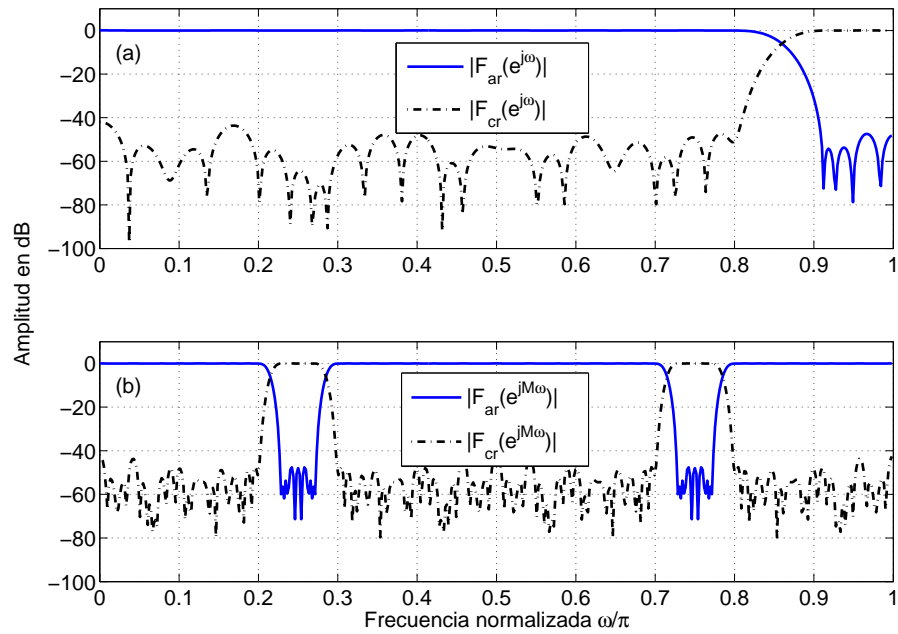
El número de sumas y de multiplicaciones enteras están dadas en la Tabla 5.2.

El precio por introducir multiplicaciones enteras se ve reflejada en el aumento de sumas.



**Tabla 5.2:** Comparación de complejidad del FMM y del FMM propuesto.

Método	Filtro	Multiplicadores
Filtro con algoritmo Remez	$H(z)$	88 (flotantes)
FMM	$F_a(z)$	34
	$G_a(z)$	39
	$G_c(z)$	7
Total	$H(z)$	80 (flotantes)
FMM Propuesto	$F_{ar}(z)$	25
	$Sh\{G_{ar}(z)\}$	27
	$Sh\{G_{ar}(z)\}$	7
Total	$H_p(z)$	59 (enteros)

**Figura 5.4:** Filtros Modelo y complemento expandido.

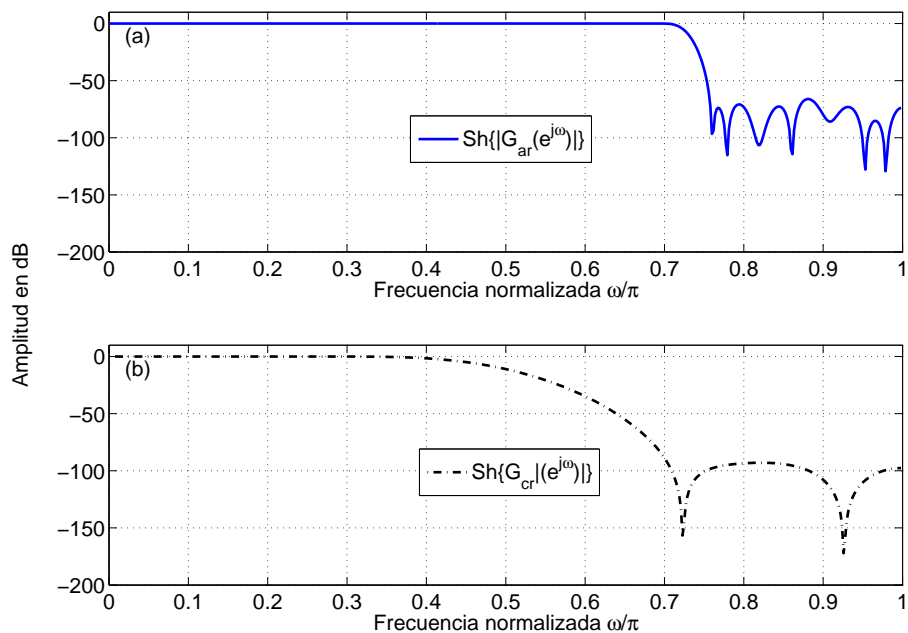


Figura 5.5: Filtros mascara redondeado y afilado.

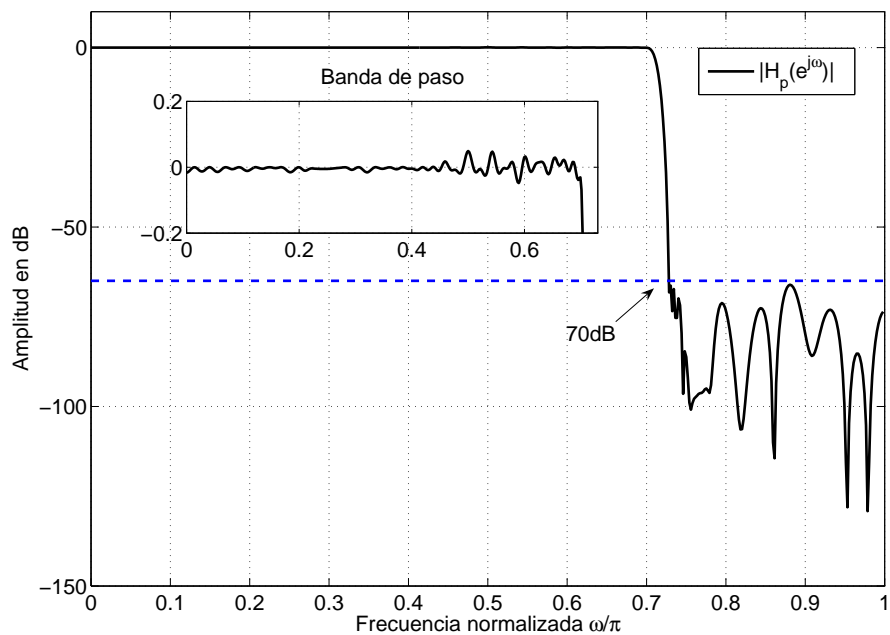


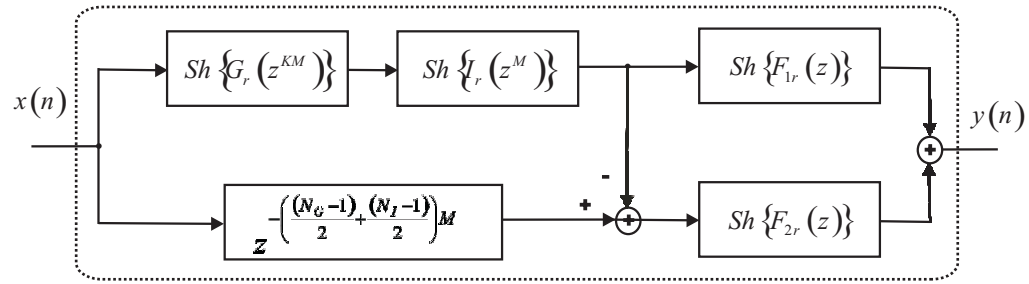
Figura 5.6: Magnitud de la respuesta en frecuencias del método propuesto.

### 5.2.2. Reducción de la complejidad del filtro modelo y los filtros máscara

Similar al método propuesto en la sección anterior, el siguiente método ahora tiene como objetivo reducir la complejidad del filtro modelo y de los filtros máscara, utilizando de la técnica de redondeo y afilado, además de la sustitución del filtro modelo por un filtro FIR interpolador.

La propuesta de la sustitución del filtro modelo por el filtro interpolador FIR en el FMM, es hecha por Zhang, Lian y Ko [23].

Basándose en la modificación del FMM, se propone una estructura donde es sustituido el filtro modelo por un filtro IFIR, al cual se les aplica la técnica de redondeo y de afilado; así como también el uso de estas dos técnicas en los filtros máscara, dicha estructura se presenta en la Figura 5.7.



**Figura 5.7:** Estructura del método propuesto

#### Descripción del método propuesto

1. El factor de expansión  $M$  es elegido para determinar las frecuencias de corte del filtro modelo y los filtros máscara  $F_1(z)$  y  $F_2(z)$ . El filtro modelo es intercambiado por un filtro IFIR, por lo tanto ahora es necesario elegir un factor de interpolación  $K$  para el diseño de  $G(z^{KM})$  e  $I(z^M)$ . La constante de redondeo inicial es de  $r = 0.001$ . Una alta constante de redondeo es usada para un filtro de menor orden.
2. La técnica de afilado es aplicada para obtener  $Sh\{G_r(z^{KM})\}$  e  $Sh\{I_r(z^M)\}$  y se hace la convolución de estos dos filtros para obtener el filtro modelo.
3. Se encuentra el complemento de  $H_{IFIR}(z) = Sh\{G_r(z^{KM})\}Sh\{I_r(z^M)\}$ , denotado como  $H_{IFIRC}(z)$ .

4. Se aplica la técnica de redondeo en los filtros máscara resultando en filtros máscara redondeados  $F_{1r}(z)$  y  $F_{2r}(z)$ . Un buen punto de partida es  $r = 0.01$ .
5. La técnica de afilado es aplicada a los filtros máscara para obtener  $Sh\{F_{1r}(z)\}$  y  $Sh\{F_{2r}(z)\}$ .
6. El filtro resultante esta dado por:

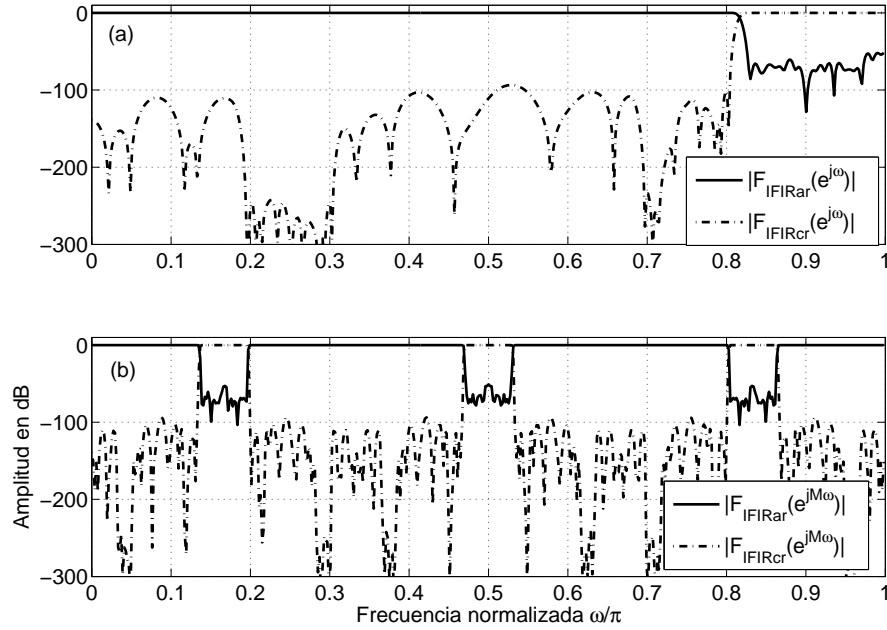
$$H_m(z) = H_{IFIR}(z)Sh\{F_{1r}(z)\} + H_{IFIRC}(z)Sh\{F_{2r}(z)\}. \quad (5.4)$$

### Ejemplo 5-3.

Se requiere diseñar un filtro FIR con de frecuencia de corte en la banda de paso  $\omega_p = 0.8$ , frecuencia de corte en la banda de rechazo  $\omega_p = 0.805$ , mínimo rizo en la banda de paso  $Rp = 0.2$  dB y máxima atenuación en la banda de rechazo  $As = 60$ dB. El filtro prototipo diseñado con el algoritmo Remez tiene un orden de 918.

1. Se elige un factor de expansion de  $M = 6$  para diseñar las frecuencias de corte de los subfiltros del FMM. Usando las frecuencias de corte del filtro modelo y con un factor de interpolación  $K = 4$  se diseña el filtro IFIR, posteriormente con una constante de redondeo  $r = 0.003$  y se diseñan los filtros  $G_r(z)$  y  $I_r(z)$ , finalizando con la expansion de los filtros para obtener  $G_r(z^{KM})$  e  $I_r(z^M)$ .
2. La técnica de afilado es aplicada a los filtros  $G_r(z^{KM})$  e  $I_r(z^M)$ , para obtener  $Sh\{G_r(z^{KM})\}$  y  $Sh\{I_r(z^K)\}$ .
3. Se encuentra el complemento del filtro  $H_{IFIR}(z) = Sh\{G_r(z^{KM})\}Sh\{I_r(z^M)\}$ , denotado como  $H_{IFIRC}(z)$ . La magnitud de la respuesta a la frecuencia del filtro modelo expandido redondeado-afilado y su complemento se ilustra en la Figura 5.8.
4. Se aplica la técnica de redondeo con un factor de  $r = 0.01$  en los filtros máscara, obteniendo  $F_{1r}(z)$  y  $F_{2r}(z)$ .
5. Se aplica la técnica de afilado en los filtros máscara redondeados para obtener  $Sh\{F_{1r}(z)\}$  y  $Sh\{F_{2r}(z)\}$ . La magnitud de la respuesta en frecuencia de los filtros máscara redondeados-afilados es mostrada en la Figura 5.9.

6. Se encuentra el filtro resultante y se checa si la especificación esta satisfecha.



**Figura 5.8:** Filtros Modelo y complemento expandido.

La respuesta en magnitud resultante se presenta en la Figura 5.10. La banda de paso y la banda de rechazo demuestran que la especificación esta satisfecha. Por lo tanto el filtro prototipo usando el algoritmo Remez tiene 460 multiplicadores, mientras que el FMM tiene 160 multiplicadores. El número total de multiplicaciones enteras es de 99 en el filtro diseñado.

Se hace necesario recalcar, que el precio por introducir multiplicaciones enteras, es incrementado por el número de sumadores.

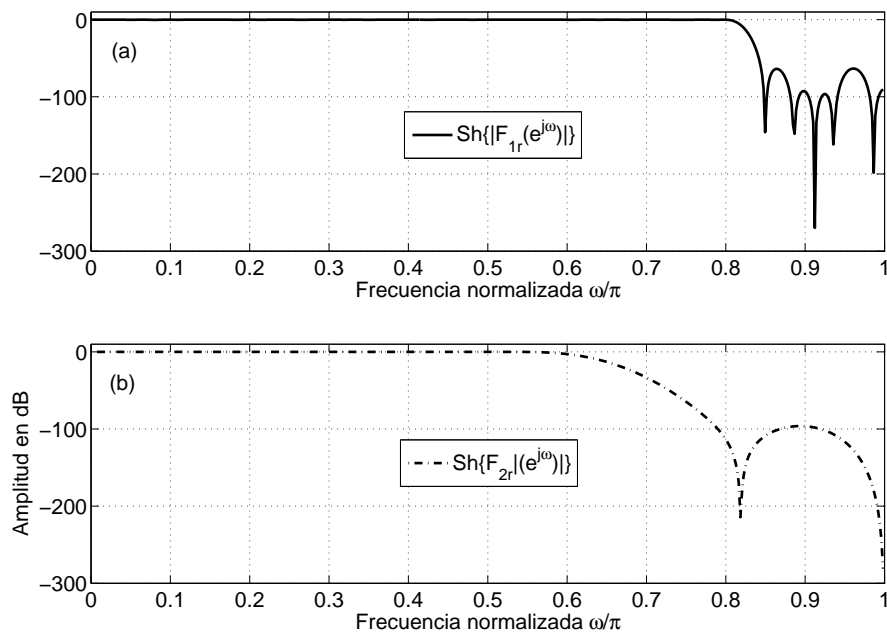


Figura 5.9: Filtros mascara redondeado y afilado.

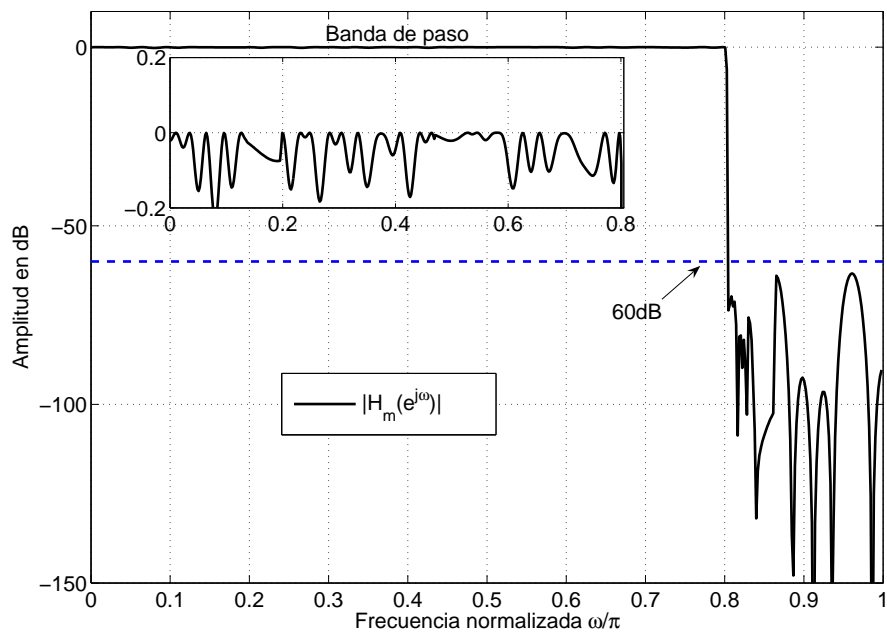


Figura 5.10: Magnitud de la respuesta en frecuencias del método propuesto.

# 6

---

## APLICACIONES

*En este capítulo se muestran ejemplos de aplicaciones de filtros propuestos en esta tesis. El capítulo se divide en tres secciones. En la primera sección se presenta el diseño de un filtro para la eliminación de ruido en señales de voz, posteriormente en la segunda sección se diseñan filtros para un transmultiplexor. Por último en la tercera sección se presenta el diseño de un filtro decimador aplicado a un convertidor Analógico Digital.*

### 6.1. Eliminación de ruido en la señal de voz

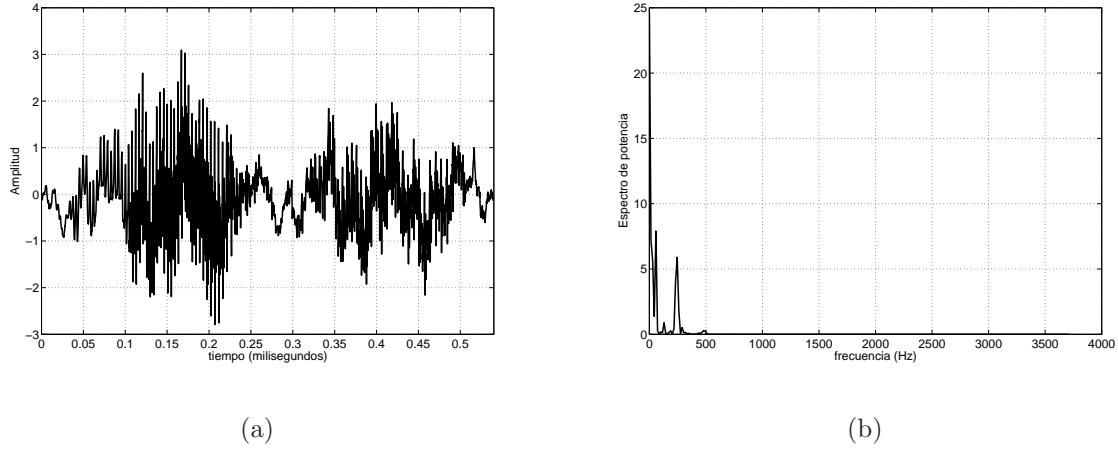
En este ejemplo se utilizó una grabación de voz femenina diciendo la palabra Matlab. La señal está compuesta por 4001 muestras donde la frecuencia de muestreo es de 7418 muestras/segundo y está representada por  $y(t)$ . Dicha señal es ilustrada en la Figura 6.1.

Por otro lado la señal con ruido de tres sinusoidales se expresa como:

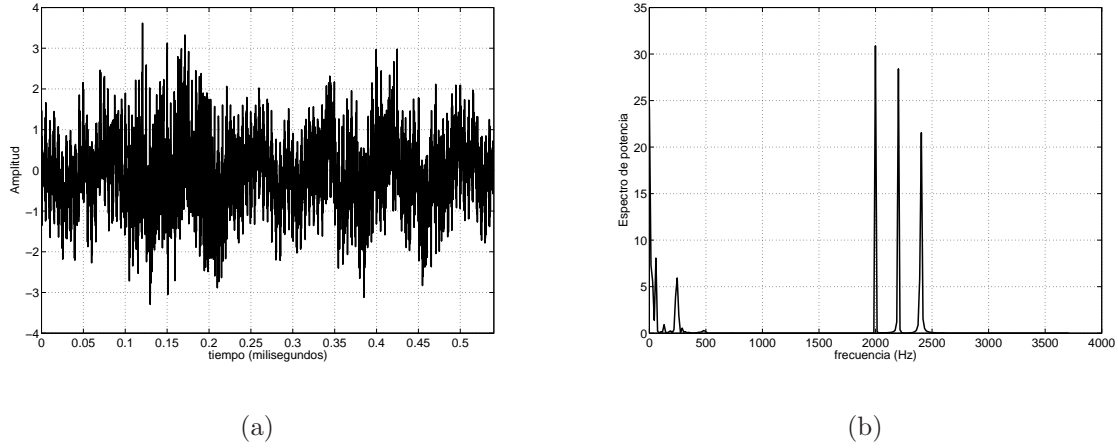
$$y_{ruido}(t) = y(t) + 0.5 \sin(2\pi 2000t) + 0.3 \sin(2\pi 2200t) + 0.2 \sin(2\pi 2400t), \quad (6.1)$$

donde la señal en tiempo y su espectro se presentan en la Figura 6.2.

Ya que en el espectro de potencia interfieren tres picos de ruido es necesario diseñar un filtro pasabajos conservando todas las frecuencias antes de 2000 Hz y eliminar aquellas mayores a 2050 Hz, así el cálculo de frecuencias angulares normalizadas  $\omega_p$  y  $\omega_s$  están



**Figura 6.1:** Señal de voz y su espectro.



**Figura 6.2:** Señal de voz que cuenta con el ruido de tres senoidales y espectro de la señal de voz con ruido de tres señales.

dadas por:

$$\begin{aligned}\omega_p &= \frac{\Omega_p}{F_m} = \frac{2\pi F_p}{F_m}, \\ \omega_s &= \frac{\Omega_s}{F_m} = \frac{2\pi F_s}{F_m}.\end{aligned}\tag{6.2}$$

Las frecuencias angulares normalizadas son:  $\omega_p = 0.53923\pi$  y  $\omega_s = 0.55271\pi$ , de acuerdo a (6.2). Las tolerancias elegidas son  $R_p = 0.01$  y  $A_s = 50$  dB.

Tomando en cuenta la especificación anterior el filtro diseñado con el algoritmo Remez tiene un orden de 516. Mediante el uso del FMM, las especificaciones y los órdenes de los filtros son los siguientes:

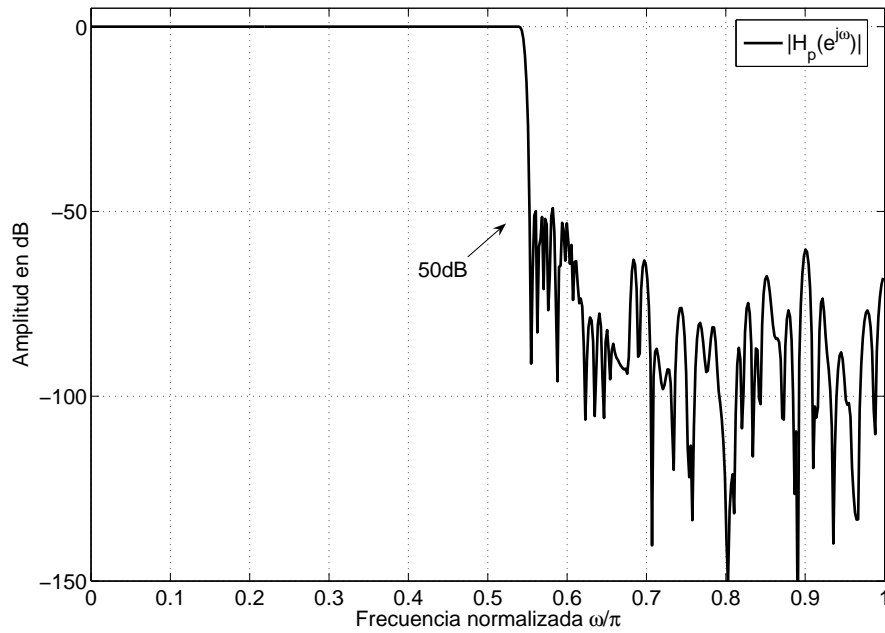


- Factor de expansión:  $M = 15$ .
- Filtro modelo:  $\omega_{pG} = 0.088434$ ,  $\omega_{sG} = 0.29064$  y  $N_G = 15$ .
- Filtro máscara 1:  $\omega_{pFa} = 0.53923$ ,  $\omega_{sFa} = 0.64729$  y  $N_{Fa} = 34$ .
- Filtro máscara 2:  $\omega_{pFb} = 0.52744$ ,  $\omega_{sFb} = 0.55271$  y  $N_{Fb} = 140$ .
- Número de total de multiplicaciones: 189 flotantes.

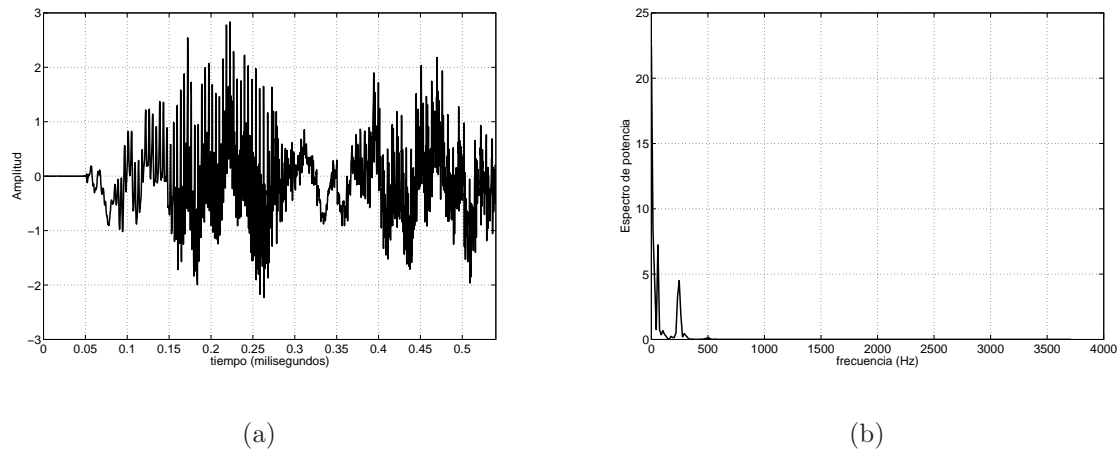
Utilizando los procedimientos que se presentan en la sección 5.2.1 es posible modificar la estructura del FMM usando la técnica de redondeo y de afilado. Los parámetros con los que fue diseñado dicho filtro son los siguientes:

- Filtro modelo:  $r = 0.0007$ ,  $Sh\{G_r(z)\} = G_r(z)^2(3 - 2G_r(z))$  obteniendo  $N_{Grs} = 15$ .
- Filtro máscara 1:  $r = 0.015$ ,  $Sh\{F_{1r}(z)\} = F_{1r}(z)^2(3 - 2F_{1r}(z))$  obteniendo  $N_{F1rs} = 23$ .
- Filtro máscara 1:  $r = 0.015$ ,  $Sh\{F_{2r}(z)\} = F_{2r}(z)^2(3 - 2F_{2r}(z))$  obteniendo  $N_{F2rs} = 52$ .
- Número de total de multiplicaciones: 90 enteros.
- Ahorro de multiplicadores con respecto al FMM: 52.38 %

La magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro diseñado se ilustra en la Figura 6.3. El resultado de filtrar la señal de voz en tiempo y el espectro de potencia se presenta en la Figura 6.4.



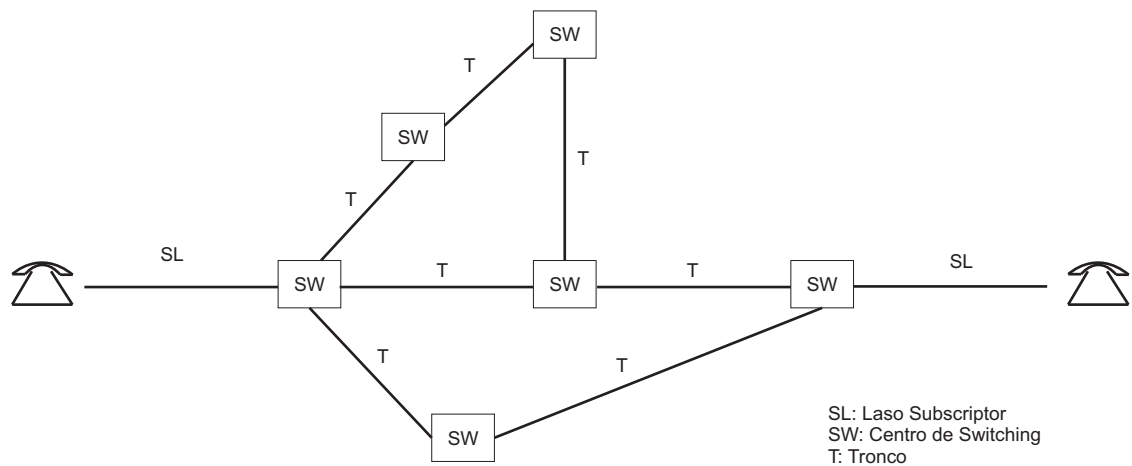
**Figura 6.3:** Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro a usar.



**Figura 6.4:** Señal de voz filtrada y espectro filtrado.

## 6.2. El transmultiplexor

La **PSTN** (Red Telefónica Publica de Conmutadores) puede ser vista como un complejo sistema de centros de conmutación interconectados por troncales como se ve en la Figura 6.5.



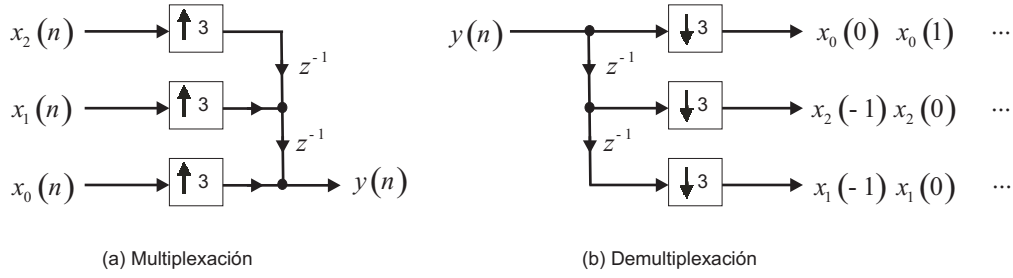
**Figura 6.5:** Conexión de suscriptores sobre una Red Telefónica Publica de Conmutadores

El medio de una conexión interconmutable, o troncal, puede ser un cable eléctrico, inalámbrico o una fibra óptica y éste mismo puede trabajar con varios canales que son multiplexados para un mejor uso del medio de transporte.

En torno a 1970 hubo una rápida tendencia hacia el desarrollo de sistemas digitales de conmutación. Por su naturaleza, este sistema de conmutación es orientado hacia los troncales digitales entre conmutadores. Los troncales digitales emplean ensambles **TDM** (multiplexación por división de tiempo). Además, las estructuras de troncales predominan analógicamente creando la necesidad de suministrar conectividad bidireccional entre troncales digitales y troncales analógicos. Esta funcionalidad es mejorada usando técnicas de procesamiento digital de señales con dispositivos llamados *transmultiplexores* los cuales hacen una conversión entre dos esquemas de multiplexaje.

En los años cercanos a 1985 predominó la transmisión analógica para distancias considerables. Usando las técnicas de **SBB** (Single Side Band) los canales de voz son asignados en muescas de  $4\text{KHz}$  ( $8\text{KHz}$  considerando frecuencias positivas y negativas) en ensambles **FDM** (multiplexión por división de frecuencias). La unidad FDM en Norte América es una *señal de Grupo* que abarca 12 canales apilados en una banda de frecuencia entre 60 y 108 kHz. La unidad FDM en Europa y en el resto del mundo es el *Super Grupo* abarcando 60 canales apilados en una banda de frecuencia de 312 a 552 kHz [18].

Para describir el formato TDM se considera la Figura 6.6(a), donde tres señales pasan



**Figura 6.6:** (a) Multiplexación en el dominio del tiempo y (b) Demultiplexación en el dominio del tiempo, utilizando bloques multirazón

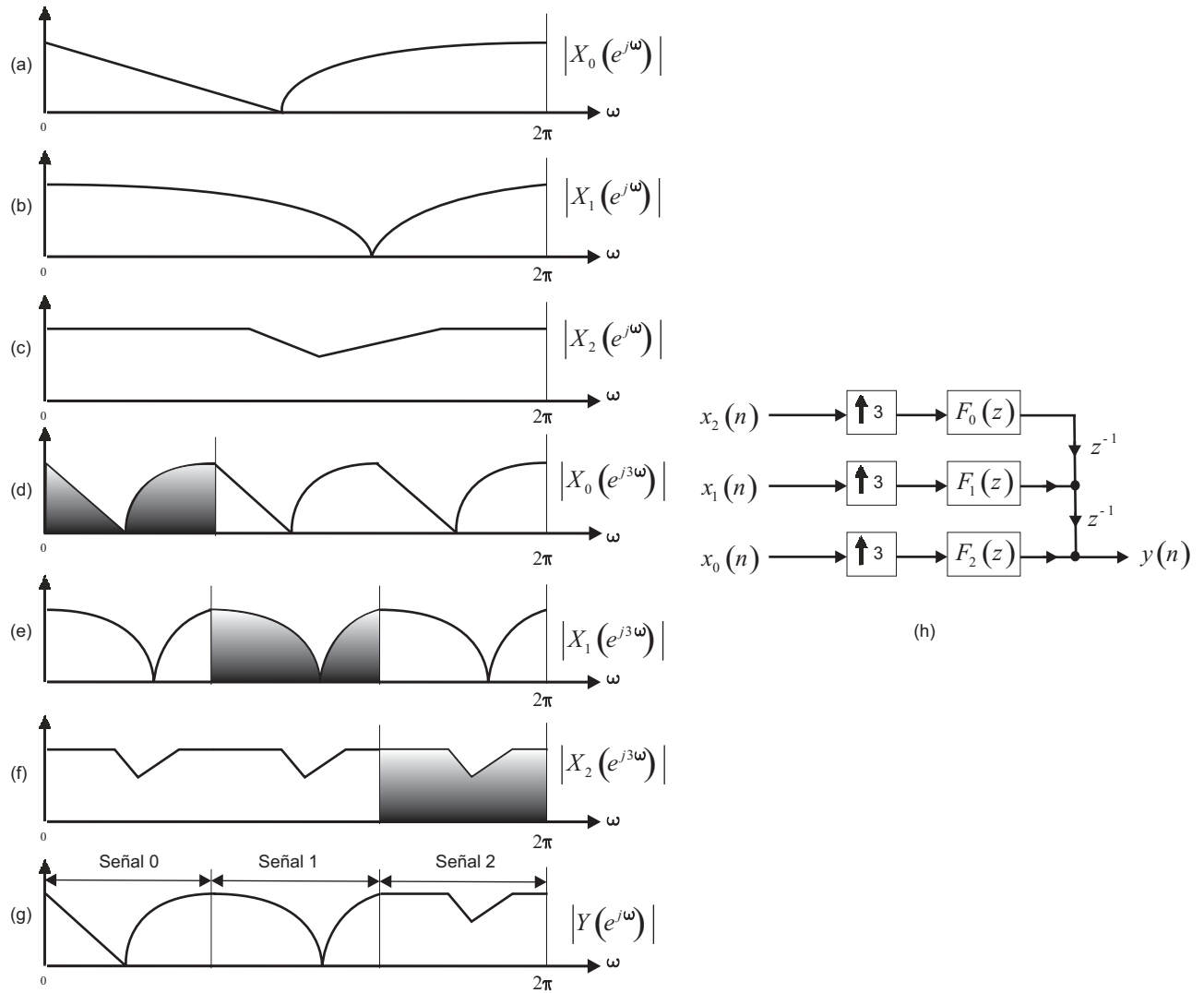
a través de tres expansiones y se suman en una cadena de retardos con lo que forman la señal de salida  $y(n)$  que es una versión de intervalos de tres señales representada por:

$$\dots x_0(0)x_1(0)x_2(0)x_0(1)x_1(1)x_2(1) \dots$$

La señal  $y(n)$  que representa una versión de tres señales puede ser recuperada usando un demultiplexor en el dominio del tiempo que es representado en la Figura 6.6(b). En la Figura 6.7 se presenta el formato de multiplexación por división de frecuencias, que para este ejemplo consta de tres transformadas de las señales  $x_0(n)$ ,  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$ .

La señal FDM  $y(n)$  es una señal compuesta que tiene transformada  $Y(e^{j\omega})$ . La operación de FDM puede realizarse usando el circuito mostrado en la Figura 6.7(h). Cada señal es pasada, en primer lugar a través de un expansor obteniendo una compresión de su espectro formando 2 imágenes. Los filtros interpoladores  $F_k(z)$  (que se suponen ideales para este ejemplo) retienen una de las tres imágenes con que aparecen  $X_k(e^{j\omega})$ , sombreadas en las Figuras 6.7(d), (e) y (f). Finalmente si sumamos la salida de los tres filtros el resultado que se obtiene es la señal FDM  $Y(e^{j\omega})$ .

La Figura 6.8 muestra la estructura completa de un multiplexor. Si los filtros de síntesis  $F_k(z)$  no son ideales los espectros adyacentes en la Figura 6.7(g) tenderán a traslaparse. De la misma manera, si los filtros de análisis  $H_k(z)$  no son ideales, hay contribuciones de  $X_k(e^{j\omega})$ . Para un caso general cada señal reconstruida  $\hat{x}_k(z)$  tiene una contribución que es una interferencia causada por dos frecuencias que viajan en diferentes canales. Una aproximación obvia para disminuir las interferencias es diseñar los filtros  $F_k(z)$  y  $H_k(z)$  con bandas de transición muy estrechas con el fin de que no tenga lugar el traslapamiento de frecuencias. Para obtener una reducción aceptable de interferencias los filtros requieren

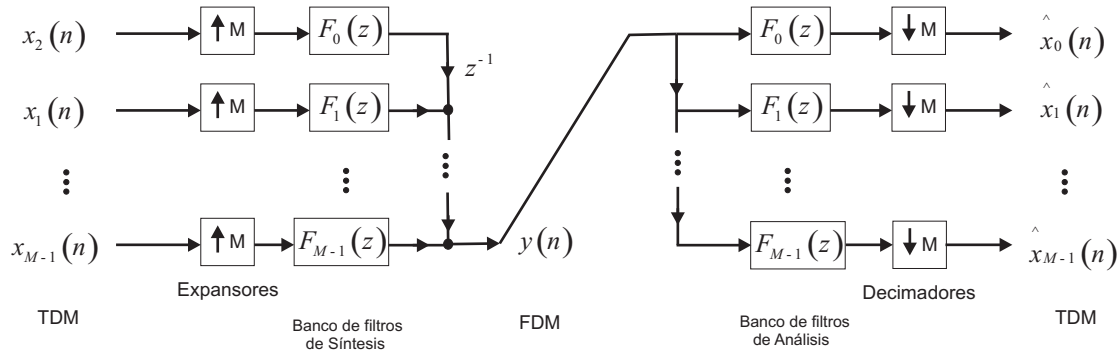


**Figura 6.7:** Operación de multiplexación por división de frecuencia

de un orden muy alto [19].

En su forma más básica un transmultiplexor mejora la conversión bilateral manteniendo el contenido de la información entre formatos analógicos y digitales.

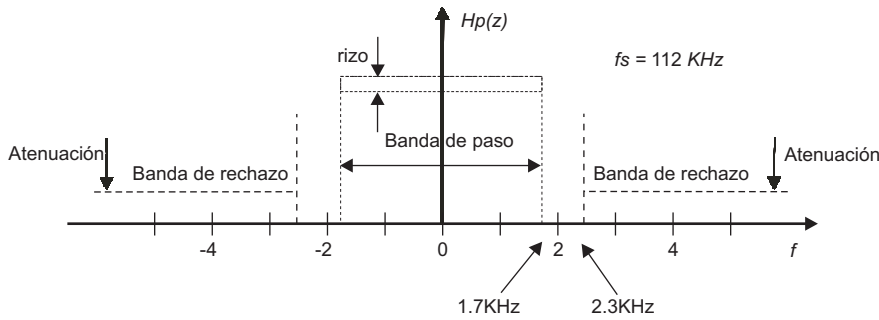
De este modo se puede considerar un canal del transmultiplexor, el cual está colocado entre 84 y 88 KHz. Ahora se tiene la necesidad de diseñar un filtro que debe pasar frecuencias en este rango pero también debe atenuar en la misma banda para rechazar frecuencias de otros canales. Puesto que  $H_p(z)$  es un filtro con coeficientes reales, se centra a una frecuencia de 86 KHz, lo que significa que la banda de paso del filtro está en  $(86+1.7)$  KHz y de manera simétrica se tiene la frecuencia  $(86-1.7)$  KHz. En consecuencia,



**Figura 6.8:** Estructura completa de un Transmultiplexor

y teniendo en cuenta de nuevo la simetría la frecuencia en la banda de rechazo izquierda es  $(84-0.3)$  KHz y la frecuencia en la banda de rechazo derecha es  $(88+0.3)$  KHz.

Por lo tanto se requiere diseñar un filtro como el que se ilustra en la Figura 6.9.



**Figura 6.9:** Especificación del filtro prototipo

La especificación del filtro cuenta con las siguientes características: la máxima atenuación en la banda de rechazo es tomada por la interferencia causada por la mezcla de dos frecuencias que viajan en dos canales con un valor que debe exceder 70 dB y el mínimo rizo en la banda de paso que es una medida de cuando de distorsión es introducida al canal, este valor es menor que 0.1dB.

Estos requerimientos pueden lograrse con el diseño de un filtro FIR de fase lineal con 540 multiplicadores, pero como el objetivo es disminuir el número de multiplicadores este filtro se diseña en base a un filtro IFIR con las técnicas de redondeo y afilado aplicando una función de escalamiento.

La siguiente descripción del método propuesto permite ilustrar de una mejor manera los resultados obtenidos.

1. Se escoge el factor de interpolación  $M = 6$  y de este modo es diseñado el filtro modelo y el filtro interpolador  $G(z)$   $I(z)$  para obtener el filtro IFIR.
2. El valor de la constante de redondeo se toma como  $r = 0.009$ .
3. Los coeficientes de  $G(z)$  y  $I(z)$  son redondeados para obtener  $G_r(z)$  y  $I_r(z)$ .
4. El filtro redondeado  $G_r(z)$  es expandido por  $M = 3$ , obteniendo  $G_r(z^3)$ .
5. La técnica de afilado es aplicada a los filtros  $G_r(z^3)$ ,  $I_r(z)$  usando el polinomio  $H^4(4 - 3H)$ , para obtener  $Sh\{G_r(z)\}$  y  $Sh\{I_r(z)\}$ .
6. El filtro diseñado no cumple con la especificación de la frecuencia de corte en la banda de rechazo, debido a lo anterior y con el uso de la Tabla 4.1 la nueva frecuencia de corte en la banda de rechazo para el filtro modelo e interpolador es:

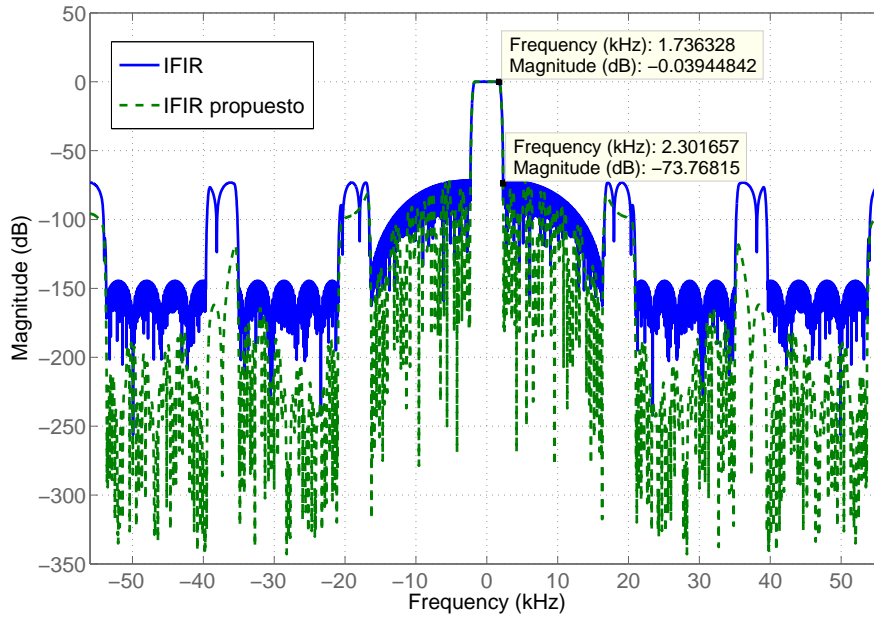
$$\begin{aligned}\omega_{Ps(G(z))} &= \omega_{s(G(z))} + \gamma(0.064286) = 0.26439, \\ \omega_{Ps(I(z))} &= \omega_{s(I(z))} + \gamma(0.2619) = 0.35373.\end{aligned}\tag{6.3}$$

7. El filtro resultante se ilustra en la Figura 6.10 probando que la especificación del filtro es satisfecha.

En la Tabla 6.1 se muestra la comparación de la complejidad con otros métodos. El método propuesto en la sección 4.2 es eficiente ya que la banda de transición es más amplia y por lo tanto el orden que se obtiene es mucho menor al que originalmente se requiere en el diseño del filtro con el algoritmo Remez.

**Tabla 6.1:** Comparación de complejidad del método IFIR, IFIR redondeado y afilado, IFIR propuesto.

Método	Filtro	Multiplicadores
Filtro con algoritmo Remez	$H_{remez}(z)$	271 (flotantes)
IFIR [17]	$G(z)$	50
	$I(z)$	14
Total	$H(z)$	64 (flotantes)
IFIR propuesto con la Ec. 6.3	$G_p(z)$	39
	$I_p(z)$	12
Total	$H_p(z)$	51 (flotantes)
IFIR propuesto en la Sec. 4.2	$Sh\{G_r(z)\}$	17 (enteros)
	$Sh\{GIr(z)\}$	6 (enteros)
Total	$H_{rsP}(z)$	23 (enteros)



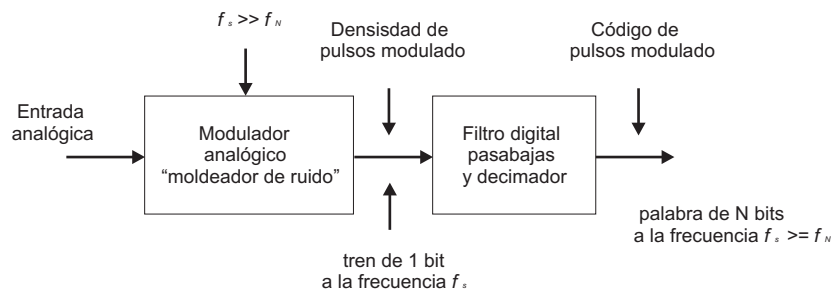
**Figura 6.10:** Filtros IFIR y propuesto.



### 6.3. Convertidor A/D tipo Sigma Delta

El uso de técnicas de modulación sigma delta en convertidores A/D y D/A tiene grandes ventajas ya que ofrecen alta resolución, además de alta integración y bajo costo de fabricación [5, 8].

Un convertidor A/D sigma delta consiste en dos bloques básicos: un modulador analógico moldeado de ruido y el filtrado digital, que se ilustran en la Figura 6.11.



**Figura 6.11:** Convertidor A/D sigma delta

El proceso inicia cuando una señal analógica entra al modulador donde es sobremuestreada a una frecuencia mucho mayor que la frecuencia de Nyquist. Este es llamado modulador analógico porque la señal analógica es modulada como una densidad de pulsos y como resultado de la modulación analógica se produce ruido de cuantización que posteriormente será filtrado.

Por otro lado tenemos el filtrado digital, que desempeña las siguientes tres principales tareas:

1. **Remover el ruido moldeado de cuantización:** El modulador sigma delta es diseñado para suprimir el ruido de cuantización en la banda base, de este modo mucho ruido de cuantización está sobre frecuencias que se encuentran fuera de la banda base, por lo que es necesario remover el ruido de cuantización que está fuera de la banda.
2. **Decimación (Reducción de la razón de muestreo):** La salida del modulador sigma delta está a muy alta razón de muestreo por ésto es deseable reducir la razón de muestreo para minimizar la información apta para la subsecuente etapa.

3. Anti-traslapamiento: En la práctica rara vez la señal de entrada está completamente limitada en banda, por ésto cuando se reduce la razón de muestreo a una razón de Nyquist es necesario un rechazo adicional de traslapamiento para la señal de entrada como oposición a la generación de ruido interno de cuantización.

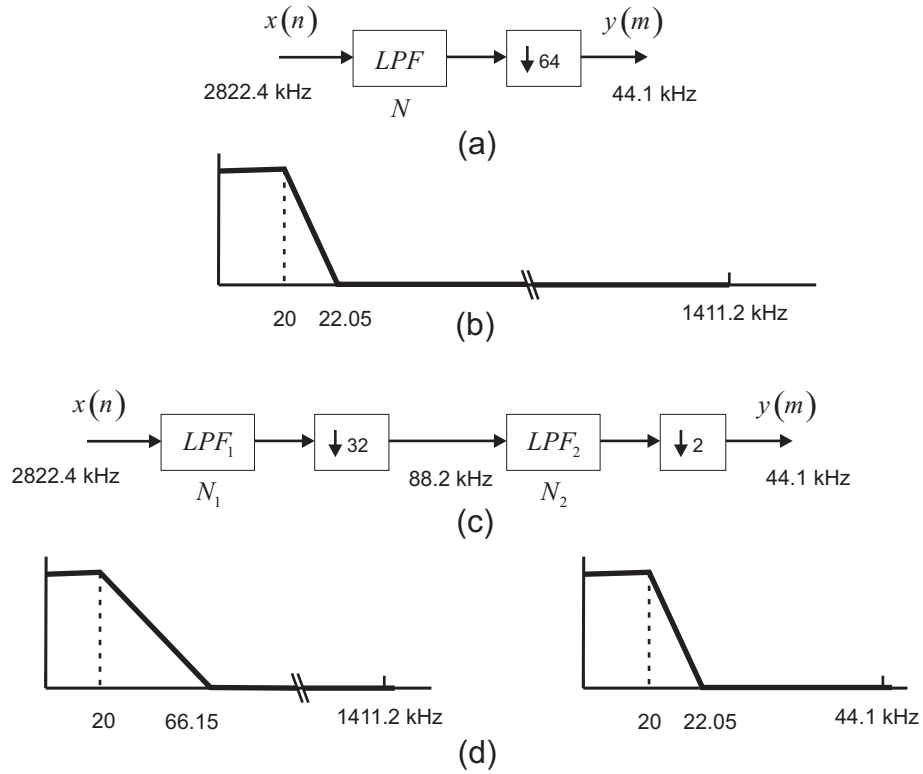
De este modo, un importante criterio en el diseño de convertidores A/D o D/A es la eficiencia con la cual el decimador o interpolador son implementados. Esta eficiencia está directamente relacionada con el tipo, el orden, y la arquitectura del filtro digital usado en la implementación.

Cuando se requieren grandes razones de sobremuestreo, como es el caso de los convertidores sigma delta, es posible notar que los requerimientos de las frecuencias de corte en estos filtros digitales pueden ser extremadamente rigurosas. Esto quiere decir que el ancho de la banda de transición es pequeña en relación a la frecuencia de muestreo, haciendo que los filtros tengan un orden excesivamente alto. Afortunadamente, con los requerimientos de diseño de los filtros se puede obtener menor orden usando diseños de multiples etapas en las cuales el decimador y el interpolador son hechos por estructuras en cascada de dos o mas etapas.

Para ilustrar lo anterior, consideramos un ejemplo de un decimador 64-1 implementado con el diseño de una y dos etapas, ver la Figura 6.12 [16].

En este ejemplo se desea convertir una señal a una velocidad de muestreo de 2822.4 kHz a 44.1 kHz con una banda base extendida de cero a 20 kHz; el rizo en la banda de paso es de 0.001 y el rizo en la banda de rechazo es de 0.00001. En este caso el diseño de una sola etapa ilustrado en las Figuras 6.12(a) y 6.12(b) requiere de un filtro con 6250 multiplicadores. La razón por la cual el filtro tiene esta longitud es que la banda de transición es de 2.05 kHz debido a que la frecuencia de muestreo es extremadamente alta, 2822.4 kHz.

A continuación se considera una implementación con dos etapas como la que se muestra en la Figura 6.12(c). El decimador es realizado por la cascada de dos decimadores, con un convertidor de 32:1 que reduce la razón de muestreo de 2822.4 a 88.2 kHz y un convertidor de 2:1 que reduce la razón de muestreo de 88.2 a 44.1 kHz. En consecuencia en la primera etapa, la banda de paso va de 0 a 20 kHz relajándose la banda de transición en un rango



**Figura 6.12:** Decimador de un convertidor D/A con una y dos etapas.

de 20 a 66.15 kHz, permitiendo un traslapamiento en la region de 22.05 a 44.1 kHz. Este traslapamiento es eliminado por la segunda etapa, que tiene una banda de transición que va de 20 a 22.05kHz.

Los ordenes respectivos de los filtros son  $N_1 = 71$  y  $N_2 = 56$  para las dos etapas. Esta conversión es eficiente ya que el diseño de decimación se hace con una conversión de 64:1, así que el diseño de dos decimadores en cascada son más eficientes que el diseño de una sola etapa.

Para una mejor reducción se utilizo el método propuesto en la sección 5.1 mostrando resultados en la Tabla 6.2. En las Figuras 6.13 y 6.14 se muestra la magnitud de la respuesta a la frecuencia donde es posible visualizar que cumplen con la especificación de diseño.

Tabla 6.2: Comparación de complejidad .

Tipo de filtro	Multiplicadores
Filtro con algoritmo Remez	6250 (Flotantes)
Filtros en cascada con algoritmo Remez	140+98=238(Flotantes)
Filtros en cascada por Jovanovic y Mitra	64+48=112(Enteros)
Filtros en cascada redondeo afilado y la función de escalamiento	60+48=108(Enteros)

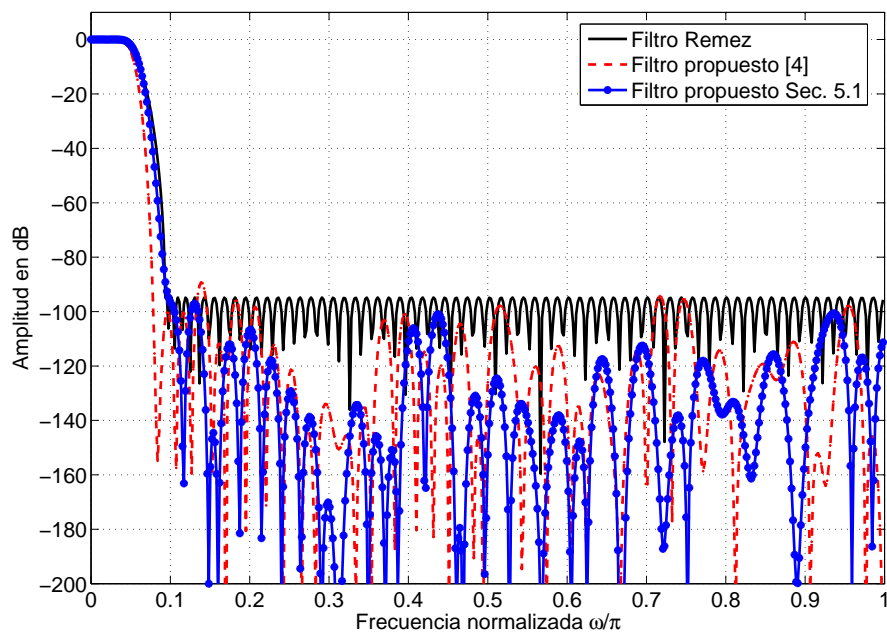


Figura 6.13: Decimador 1 del convertidor D/A.

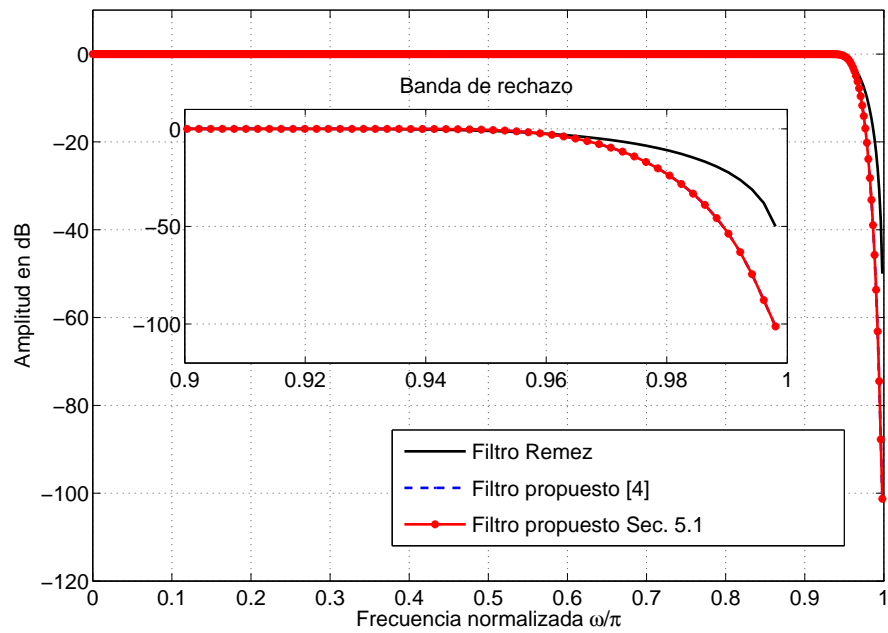


Figura 6.14: Decimador 2 del convertidor D/A.



---

## CONCLUSIONES

En los últimos años se han realizado varias propuestas para la disminución de la complejidad de los filtros FIR. La mayoría de ellos se basan en técnicas de múltiples razones de muestreo y algoritmos de optimización. De esta forma se logra obtener una disminución en el número de multiplicadores que lleva a un menor consumo de potencia y velocidad computacional.

Se llevó a cabo un estudio de la técnica de redondeo que representa un ahorro en las operaciones realizadas para la implementación de los filtros, ya que la técnica usa una multiplicación flotante y el resto son multiplicadores enteros implementados por sumas y corrimientos. Por otro lado, el uso de la técnica de afilado es requerida ya que con el uso de la técnica de redondeo se obtiene una distorsión en la magnitud. La técnica de afilado es una función de amplitud que procesa varias veces la señal de entrada mostrando una mejoría en la magnitud. De este modo mediante el uso conjunto de las dos técnicas se logra implementar filtros con multiplicadores enteros.

Las estructuras IFIR y FMM son presentadas ya que son dos de los principales métodos que ofrecen los mejores resultados en cuanto al menor número de multiplicadores usados para la implementación de filtros FIR.

En esta tesis se propuso una función de escalamiento, que es una ecuación obtenida de forma empírica usando como factor común el ancho de la banda de transición. El resultado es un valor numérico que es sumado a la frecuencia de corte de la banda de rechazo. Con el uso de la función de escalamiento se obtiene un ancho en la banda de transición más amplio, dando como resultado un orden menor al que originalmente se requiere en el

diseño del filtro.

Se propusieron dos métodos, uno para el diseño de filtros de banda angosta que es una modificación de la estructura IFIR y otro para el diseño de filtros de banda ancha basado en la modificación de la estructura FMM. Ambos métodos utilizaron la técnica de redondeo y afilado y la función de escalamiento.

Se realizaron aplicaciones donde se utilizan los filtros propuestos en esta tesis: el filtrado de ruido en voz, el diseño de un filtro de un transmultiplexor y el diseño de filtros para un convertidor Digital Analógico tipo Sigma-Delta.

Como trabajo futuro se pretende generalizar la función de escalamiento con la técnica de redondeo y afilado para demostrar su eficiencia respecto a otros métodos. Es posible también estudiar algoritmos de optimización para ser aplicados en el diseño de las estructuras propuestas y de este modo lograr otro ahorro tanto en software como en hardware. También se implementarán en un FPGA las estructuras propuestas y se comprobará que la realización teórica también se cumple en la práctica.



# A

---

---

## APÉNDICE

En este apéndice se presentan las funciones que se utilizaron para el diseño de cada uno de los filtros citados en la tesis.

### A.1. Funciones independientes

**function [b] = bfirimp(wp,ws,dp,ds,T)**

Entrega la respuesta al impulso de un filtro FIR con fase lineal con coeficientes reales y simetría impar.

VARIABLES DE ENTRADA: **wp**: frecuencia de paso normalizada, **ws**: frecuencia de rechazo, **dp**: rizo en la banda de paso, **ds**: rizo en la banda de rechazo, **T**: tipo de filtro, si T=1 pasabajas o si T=2 pasaaltas.

VARIABLES DE SALIDA: **b**: devuelve una longitud de la respuesta al impulso de  $N + 1$  coeficientes, con un orden de  $N$ .

**[bM] = expansion (b,M)**

Entrega la respuesta al impulso expandida con  $M - 1$  ceros entre dos coeficientes consecutivos de la secuencia de  $b$ .

VARIABLES DE ENTRADA: **b**: respuesta al impulso del diseño de un filtro FIR y **M**: factor de expansión.

**[bc] = filcom(b)**

Entrega la respuesta al impulso de un filtro complementario. VARIABLES DE ENTRADA: **b**: respuesta al impulso del diseño de un filtro FIR con simetría impar.

**[b1,b2]=igualfl(ba,bb)**

Entrega los filtros b1 y b2 como filtros de igual número de retrasos y la misma respuesta que los filtros ba y bb respectivamente.

VARIABLES DE ENTRADA: **ba**, **bb**: respuesta al impulso de dos filtros que pueden tener distintos órdenes.

**[Nz Nm] = Nr(br)**

Entrega **Nz** que es el número de coeficientes cero y **Nm** que es el número de multiplicadores enteros.

VARIABLES DE ENTRADA: **br**: respuesta al impulso de redondeada.

**[br] = redondeo(b,r)**

Entrega la respuesta al impulso redondeada.

VARIABLES DE ENTRADA: **b**: respuesta al impulso del filtro diseñado con el algoritmo Remez y **r**: constante de redondeo.

**[bs]=afilado(b,l)**

Entrega la respuesta al impulso con la aplicación de la técnica de afilado.

VARIABLES DE ENTRADA: **b**: respuesta al impulso del filtro diseñado con el algoritmo Remez y **l**: valor que considera diferentes casos de la función de cambio de amplitud:  $l=1$  ( $H_s = H$ ),  $l=2$  ( $H_s = H^2$ ),  $l=3$  ( $H_s = 3H^2 - 2H^3$ ) y  $l=4$  ( $4H^3 - 3H^4$ ).

**[fe]=funcesc(ws,wp)**

Entrega el factor de escalamiento, el cual esta calculado en base a:  $\Delta\omega^{(\Delta\omega+1)}/3$ .

VARIABLES DE ENTRADA: **ws**: frecuencia de corte en la banda de paso y **wp**: frecuencia de corte en la banda de rechazo.

## A.2. Función para el diseño del IFIR

**[bgi bg bgM bi]=ifir(M,wp,ws,dp,ds,T)**

Diseño del filtro modelo y filtro interpolador y filtro IFIR.

VARIABLES DE ENTRADA: **M**: factor de expansión, **wp**: frecuencia de paso, **ws**: frecuencia de rechazo, **dp**: rizo en la banda de paso, **ds**: rizo en la banda de rechazo y **T**: tipo de filtro, si  $T=1$  se diseña un filtro pasabajas o si  $T=2$  se diseña un filtro pasaaltas.

VARIABLES DE SALIDA: **bi**: entrega la respuesta al impulso del filtro interpolador, **bg**: entrega la respuesta al impulso del filtro modelo, **bgM**: entrega la expansión por  $M$  del filtro modelo y **bgi**: entrega la respuesta al impulso del filtro IFIR.

### A.3. Función para el diseño del FMM

$[bFa \ bFaC \ bFaM \ bFaMC \ bFaMaskD \ bFaMaskCD \ bF \ MatOp \ fcm \ fcm1 \ fcm2] = FMM(wp, ws, dp, ds, eM, M, AB)$

Diseño de los subfiltros para el método máscara, caso A y caso B.

VARIABLES DE ENTRADA: **wp**: frecuencia de paso, **ws**: frecuencia de rechazo, **dp**: rizo en la banda de paso, **ds**: rizo en la banda de rechazo, **eM**: número del cual se evalúan los posibles factores de expansión en el FMM, **M**: factor de expansión, **AB**: tipo de filtro, si  $AB=1$  se diseña un filtro Máscara caso A o si  $AB=2$  se diseña un filtro máscara del caso B.

VARIABLES DE SALIDA: **bFa**: devuelve una longitud de la respuesta al impulso de  $N + 1$  coeficientes del filtro modelo, **bFaC** entrega la respuesta al impulso del filtro complemento de **bFa**, **bFaM** entrega la respuesta al impulso expandida con un factor de  $M$ , **bFaMC** entrega el complemento de la respuesta al impulso expandida con un factor de  $M$ , **bFaMaskD** entrega la respuesta del filtro máscara 1, **bFaMaskCD** entrega la respuesta al impulso del filtro máscara 2, **bF** entrega la respuesta al impulso del filtro máscara completo, **MatOp** entrega una matriz que presenta los valores óptimos del factor de expansión en el método máscara, **fcm** entrega las frecuencias de corte del filtro modelo, **fcm1** entrega las frecuencias de corte del filtro máscara 1 y **fcm2** entrega las frecuencias de corte del filtro máscara 2.

#### A.4. Artículos Publicados

M. A. Pérez-Xochicale, G. Jovanovic-Dolecek, "**Diseño de filtros FIR Utilizando el Método Máscara con la Aplicación de las Técnicas de Redondeo y Sharpening**", Memorias del Sexto Encuentro de Investigación INAOE 2005, pp. 127 - 130.

G. Jovanovic-Dolecek and M. A. Pérez-Xochicale, "**One Method for Design of Wideband FIR Filters Without Multipliers**", International Conference CONIELECOMP 2006, Puebla February 2006. (Proc. Published by IEEE Computer Society, N0. 0-7695-2505-9/06.2006 IEEE).

Por publicar

ELECTRO 2006, Chihuahua October 2006.

Jovanovic-Dolecek Gordana and Pérez-Xochicale Miguel Angel, "**One Efficient Design of Frequency Masking Filters**".

ICED 2006, Veracruz November 2006.

M. A. Pérez-Xochicale and G. Jovanovic-Dolecek, "**A New Method for Design Narrow Band Lowpass FIR Filters Using a Scale Function**".

---



---

## LISTA DE FIGURAS

2.1. Especificaciones típicas en magnitud de un filtro pasa bajas. . . . .	6
2.2. Respuesta al impulso original y redondeadas. . . . .	9
2.3. Magnitud de la respuesta a la frecuencia del filtro original y los filtros redondeados. . . . .	10
2.4. Funciones de cambio de amplitud. . . . .	11
2.5. Magnitud de la respuesta en frecuencia de los filtros aplicando afilado. . . .	13
3.1. Proceso de expansión $L = 2$ (a) secuencia de entrada $x[m]$ , (b) secuencia expandida $y[n]$ , (c) Magnitud de la respuesta en frecuencia de la entrada $ X(z) $ , (d) Magnitud de la respuesta en frecuencia de la secuencia expandida $ Y(z) $ . . . . .	16
3.2. Respuesta al impulso (a) original, (b) expandida con $L = 3$ y (c) expandida con $L = 4$ . . . . .	17
3.3. Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro original (a), (b) filtro expandido con $L = 3$ , y (c) filtro expandido con $L = 4$ . . . . .	17
3.4. Estructura del filtro IFIR. . . . .	18
3.5. Magnitud del filtro IFIR. . . . .	19
3.6. Filtros periódico $G(z^M)$ e interpolador $I(z)$ . . . . .	20
3.7. Filtro IFIR pasabajas. . . . .	21
3.8. Filtros periódico $G(z^M)$ e interpolador $I(z)$ . . . . .	22
3.9. Filtro IFIR pasaaltas. . . . .	23
3.10. Estructura del método máscara. . . . .	24
3.11. Respuesta en frecuencia de filtro pasabajas y filtro complemento. . . . .	25
3.12. Estructura del filtro complementario. . . . .	26
3.13. (a) Respuesta al impulso $h(n)$ , (b) respuesta al impulso $-h(n)$ y (c) respuesta al impulso $h_c(n)$ . . . . .	27
3.14. Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro original y filtro complementario. . . . .	27
3.15. Estructura del FMM. . . . .	28
3.16. Respuesta a la frecuencia de subfiltros del FMM. . . . .	29
3.17. Magnitud de la respuesta en frecuencia caso A de los Filtros modelo y complementario (a) y expansión (b). . . . .	32
3.18. Magnitud de la respuesta en frecuencia caso A de los Filtros máscara $F_a(e^{j\omega})$ (a) y $F_c(e^{j\omega})$ (b). . . . .	33
3.19. Filtro resultante del método máscara caso A. . . . .	34
3.20. Magnitud de la respuesta en frecuencia caso B de los Filtros modelo y complementario (a) y expansión (b). . . . .	35
3.21. Magnitud de la respuesta en frecuencia caso B de los Filtros máscara $F_a(e^{j\omega})$ (a) y $F_c(e^{j\omega})$ (b). . . . .	35
3.22. Filtro resultante del método máscara caso B. . . . .	36
3.23. Estructura FMM modificada con filtros de media banda. . . . .	37
3.24. Estructura del método prefiltro-ecualizador. . . . .	39
3.25. Estructura de filtros idénticos. . . . .	40
3.26. Respuesta al impulso $f(n)$ , obtenida del FMM. . . . .	43

4.1. Respuesta al impulso del filtro modelo e interpolador clásico y filtro modelo e interpolador propuesto con Ec. (4.2).	51
4.2. Filtros Modelo expandido, propuesto y redondeo-afilado propuesto.	53
4.3. Filtros interpolador, interpolador propuesto y redondeo-afilado propuesto.	53
4.4. Filtros IFIR y propuesto.	54
5.1. Filtros original, redondeado y redondeado afilado.	57
5.2. Filtros original, redondeado propuesto y redondeado afilado propuesto.	58
5.3. Estructura FMM propuesta	58
5.4. Filtros Modelo y complemento expandido.	61
5.5. Filtros mascara redondeado y afilado.	62
5.6. Magnitud de la respuesta en frecuencias del método propuesto.	62
5.7. Estructura del método propuesto	63
5.8. Filtros Modelo y complemento expandido.	65
5.9. Filtros mascara redondeado y afilado.	66
5.10. Magnitud de la respuesta en frecuencias del método propuesto.	66
6.1. Señal de voz y su espectro.	68
6.2. Señal de voz que cuenta con el ruido de tres senoidales y espectro de la señal de voz con ruido de tres señales.	68
6.3. Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro a usar.	70
6.4. Señal de voz filtrada y espectro filtrado.	70
6.5. Conexión de subscriptores sobre una Red Telefónica Publica de Conmutadores	71
6.6. (a) Multiplexación en el dominio del tiempo y (b) Demultiplexación en el dominio del tiempo, utilizando bloques multirazón	72
6.7. Operación de multiplexación por división de frecuencia	73
6.8. Estructura completa de un Transmultiplexor	74
6.9. Especificación del filtro prototipo	74
6.10. Filtros IFIR y propuesto.	76
6.11. Convertidor A/D sigma delta	77
6.12. Decimador de un convertidor D/A con una y dos etapas.	79
6.13. Decimador 1 del convertidor D/A.	80
6.14. Decimador 2 del convertidor D/A.	81

---

## LISTA DE TABLAS

2.1.	Conversión de un filtro pasaaltas a un pasabajas. . . . .	7
2.2.	Polinomios de la función de cambio de amplitud. . . . .	11
4.1.	Factor de escalamiento para expandir la banda de transición. . . . .	49
4.2.	Comparación de complejidad del método IFIR, IFIR redondeado y afilado, IFIR propuesto. . . . .	52
5.1.	Comparación de complejidad en un filtro FIR con las técnicas de redondeo y afilado, y con el factor de escalamiento. . . . .	57
5.2.	Comparación de complejidad del FMM y del FMM propuesto. . . . .	61
6.1.	Comparación de complejidad del método IFIR, IFIR redondeado y afilado, IFIR propuesto. . . . .	76
6.2.	Comparación de complejidad . . . . .	80





---

## REFERENCIAS

- [1] A. Bartolo, B. D. Clymer, R. C. Burgess, and J. P. Turnbull, "An efficient method of FIR filtering based on impulse response rounding," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 8, pp. 2243–2248, August 1998.
- [2] M. G. Bellanger, "Improved design of long FIR filters using the frequency masking technique," *IEEE*, pp. 1272–1275, 1996.
- [3] N. J. Fliege, *Multirate Digital Signal Processing*. New York: John and Wiley Sons, 1995.
- [4] O. Gustafsson, H. Johansson, and L. Wanhammar, "Narrow-band and wide-band single filter frequency masking FIR filters," *Circuits and Systems, 2001. ISCAS 2001*, vol. 2, pp. 181–184, May 2001.
- [5] P. G. A. Jespers, *Integrated Converters*. Great Britain: Oxford University Press, 2001.
- [6] G. Jovanovic-Dolecek and S. K. Mitra, "Computationally efficient FIR filter design based on impulse response rounding and sharpening," *Proceedings of the Fifth IEEE International Caracas Conference on Devices, Circuits and Systems, Dominican Republic*, pp. 249–253, November 2004.
- [7] —, "Multiplier-free FIR filter design based on IFIR structure and rounding," *IEEE Conference MWSCAS*, no. Proc. 0-7803-9197-7/05, pp. 559–562, August 2005.
- [8] G. Jovanovic-Dolecek, *Multirate Systems: Design and Applications*. Hershey USA: Idea Group Publishing, 2003.
- [9] M. B. F. Jr., P. S. R. Diniz, and S. L. Netto, "A new procedure for optimized design of CMFBS based on the frequency-response masking technique," *ICASSP*, pp. 517–520, 2003.
- [10] J. Kaiser and R. Hamming, "Sharpening the response of a symmetric nonrecursive filter by multiple use of the same filter," *IEEE Transactions on Acoustic, Speech, Signal Processing*, vol. 25, no. 5, pp. 457–467, May 1977.
- [11] Y. Lian, "A new frequency-response masking structure with reduced complexity for FIR filter design," *Circuits and Systems, 2001. ISCAS 2001*, vol. 2, pp. 609–612, May 2001.
- [12] Y. C. Lim, J. H. Lee, C. K. Chen, , and R. H. Yang., "A weighted least squares algorithm for quasi-equiripple FIR and IIR digital filter design," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, no. 3, pp. 551–558, Marzo 1992.
- [13] Y. C. Lim, "Frequency-response masking approach for the synthesis of sharp linear phase digital filters," *IEEE Trans., on Circuits. and Systems*, vol. 33, no. 4, pp. 357–360, April 1986.

- [14] W.-S. Lu and T. Hinamoto, "Improved design of frequency-response-masking filters using enhanced sequential quadratic programming," *Circuits and Systems, 2004. IS-CAS '04*, vol. 5, pp. 528–531, May 2004.
- [15] Y. Neuvo, C.-Y. Dong, and S. Mitra, "Interpolated finite impulse response filters," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing*, vol. 32, no. 6, pp. 563–570, June 1984.
- [16] S. R. Norsworthy, R. Schreier, and G. C. Temes, *Delta Sigma Data Converters*. New York: IEEE PRESS, 1997.
- [17] T. Saramaki, Y. Neuvo, and S. K. Mitra, "Design of computationally efficient interpolated FIR filters," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. 35, no. 1, pp. 563–570, Jan 1988.
- [18] K. Shenoi, *Digital Signal Processing in Telecommunications*. New Jersey: Prentice Hall, 1995.
- [19] P. P. Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks*. New Jersey: Prentice Hall, 1993.
- [20] J. Yli-Kaakinen, T. Saramaki, and Y. Jun-Yu, "An efficient algorithm for the optimization of FIR filters synthesized using the multistage frequency-response masking approach," *IEEE ISCAS*, pp. 540–543, 2004.
- [21] J. Yu and Y. Lian., "Frequency-response masking based filters with the even-length bandedge shaping filter," *IEEE ISCAS*, pp. 536–539, 2004.
- [22] Y. J. Yu, Y. C. Lim, K. L. Tao, and G. Zhao, "Frequency-response masking technique incorporating extrapolated impulse response band-edge shaping filter," *IEEE ISCAS*, pp. 532–535, 2004.
- [23] Zhang, Y. Lian, and C. C. Ko, "A new approach for design sharp FIR filters using frequency response masking technique," *Proceedings of IEEE DSP Workshop*, pp. 1–5, October 2000.