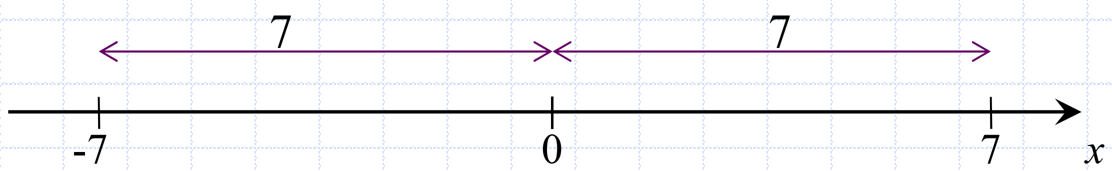
Absoluutväärtus

Reaalarvu absoluutväärtus

Reaalarvu x **absoluutväärtuseks** (ehk *mooduliks*, tähistatakse $|x|$) nimetatakse mittenegatiivset reaalarvu, mis rahuldab tingimusi

$$|x| = x, \text{ kui } \quad x \geq 0,$$
$$|x| = -x, \text{ kui } \quad x < 0.$$

Geomeetriliselt tõlgendades tähendab arvu absoluutväärtus seda arvu arvteljel kujutava punkti kaugust nullpunktist.



$$\left|7\right| = 7$$
$$\left|-7\right| = -(-7) = 7$$

Reaalarvu absoluutväärtus

Absoluutväärtuse omadusi

$$|x| \geq 0 \qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \qquad |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|-x| = |x| \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \qquad |x - y| \geq |x| - |y|$$

Absoluutväärtuse definitsioonist järeldub, et

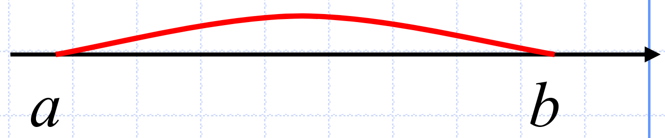
$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ või } x = -a$$

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

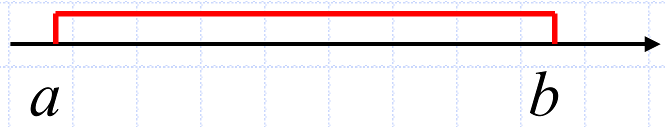
$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ või } x < -a$$

Reaalarvude piirkonnad

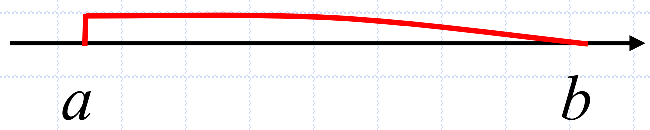
- vahemik $(a;\, b)$ $]a;\, b[$ $a < x < b$



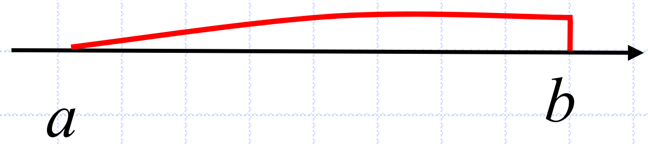
- lõik $[a;\, b]$ $a \le x \le b$



- poollõik $[a;\, b)$ $[a;\, b[$ $a \le x < b$



- poollõik $(a;\, b]$ $]a;\, b]$ $a < x \le b$



- kui $a = -\infty$ või $b = +\infty$, siis kõneldakse *lõpmatust vahemikust* või *poollõigust.*

Sümbol “∞” ei ole arv, vaid matemaatiline sümbol märkimaks, et suurus ei ole tõkestatud ülaltpoolt.

Funktsiooni definitsioon

Olgu X mingi reaalarvude hulk. Kui muutuja x igale väärtusele hulgas X vastab muutuja y <u>üks kindel väärtus</u>, siis öeldakse, et y on muutuja x **funktsioon**.

Asjaolu, et üks muutuja on teise funktsioon, tähistatakse

$$y = f(x), \qquad y = y(x), \qquad y = \phi(x) \qquad \text{jne.}$$

Muutujat x nimetatakse seejuures **sõltumatuks muutujaks** e. **argumendiks**.

Muutujat y, mille väärtused leitakse vastavalt sõltumatu muutuja väärtustele, nimetatakse **sõltuvaks muutujaks**.

Argumendi x väärtuste hulka, mille puhul saab määrata funktsiooni y väärtusi vastavalt eeskirjale $f(x)$, nimetatakse **funktsiooni määramispiirkonnaks**.

Määramispiirkonnale vastavat funktsiooni väärtuste hulka nim. funktsiooni **muutumispiirkonnaks**.

Funktsiooni analüütiline esitusviis

Ilmutatud kujul $y = f(x)$,

Näide: $y = \ln(x^2 + 1)$.

Ilmutamata kujul $f(x, y) = 0$

Näide: $x^2 + \sin y = 0$.

Parameetrilisel kujul

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \qquad t \in T \subseteq R$$

Näide:

$$\begin{cases} x = 5 \cdot \cos(t) \\ y = 5 \cdot \sin(t) \end{cases}, \qquad t \in [0;\, 2\pi]$$

Paaris- ja paaritud funktsioonid

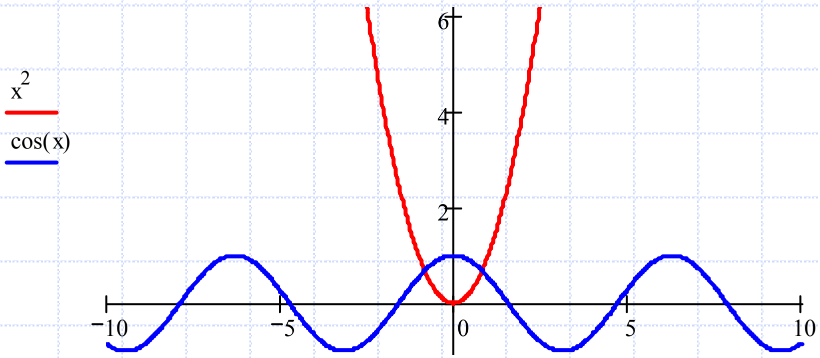
Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse

paarisfunktsiooniks, kui $f(-x) = f(x)$ ja

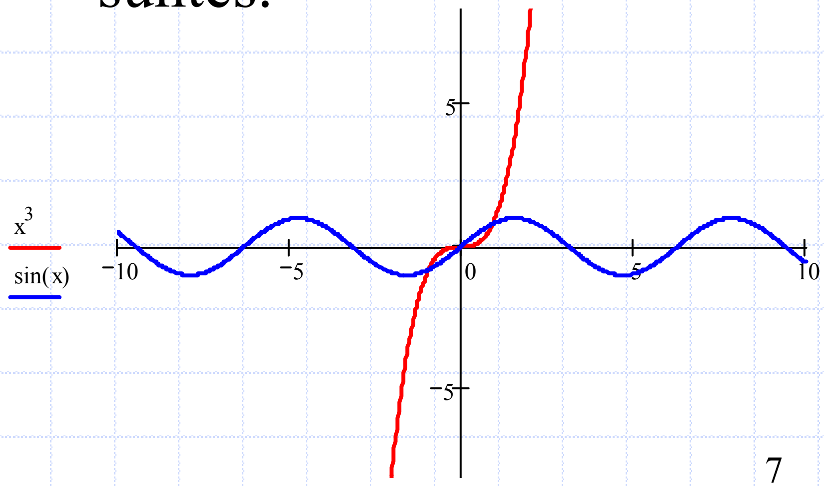
paarituks funktsiooniks, kui $f(-x) = -f(x)$

iga x korral määramispiirkonnast X.

Paarisfunktsiooni graafik on sümmeetriline y-telje suhtes

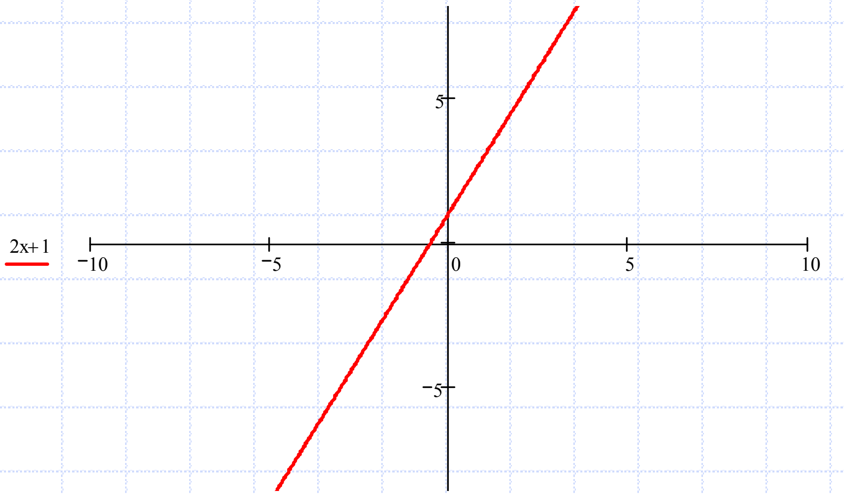


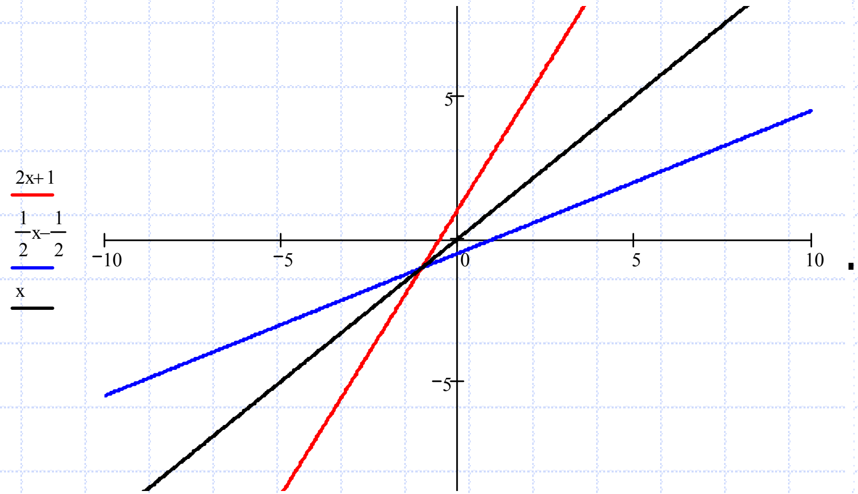
Paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline 0-punkti suhtes.



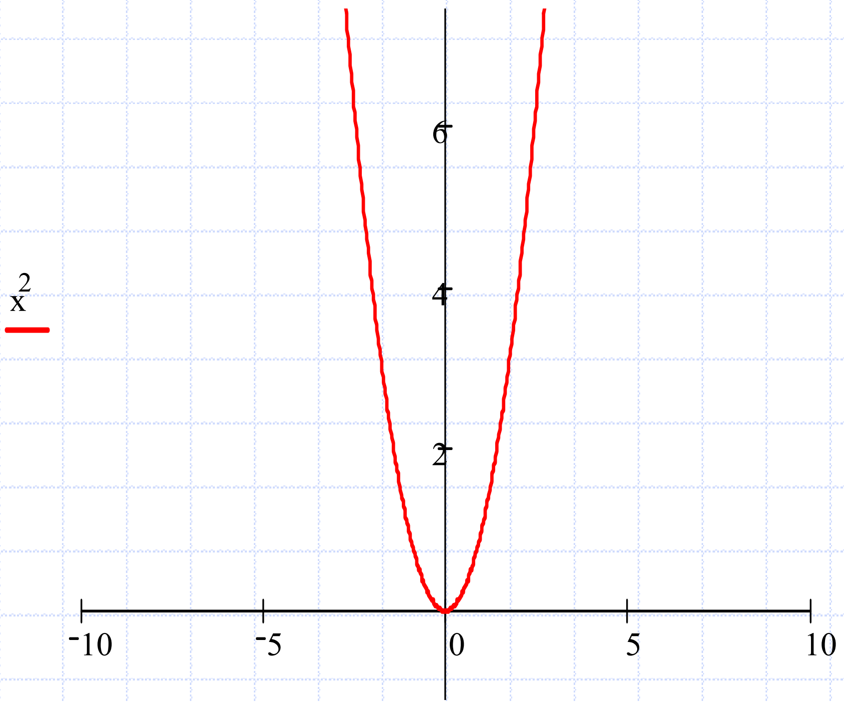
Pöördfunktsioon

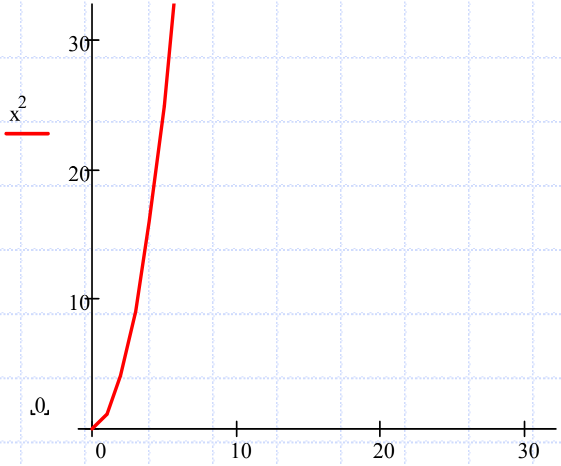
Olgu funktsiooni $y = f(x)$ määramispiirkond X ja muutumispiirkond Y.
Kui iga $y \in Y$ korral leidub täpselt üks $x \in X$, nii et $y = f(x)$, siis öeldakse, et funktsioonil $y = f(x)$ on olemas *pöördfunktsioon* määramispiirkonnaga Y ja muutumispiirkonnaga X.

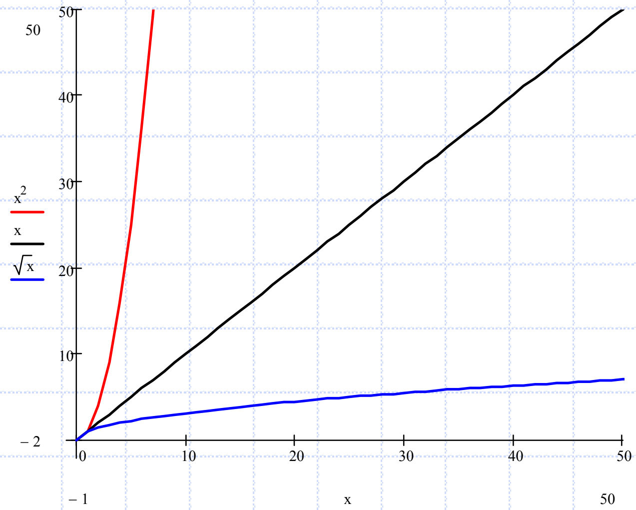




Pöördfunktsioon

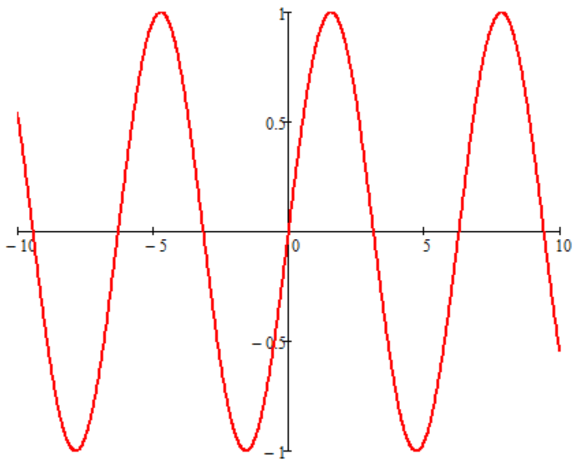


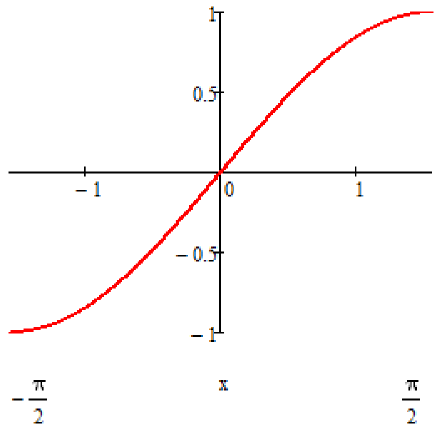




Näide

$y = \sin x, \quad X = \mathbf{R}$





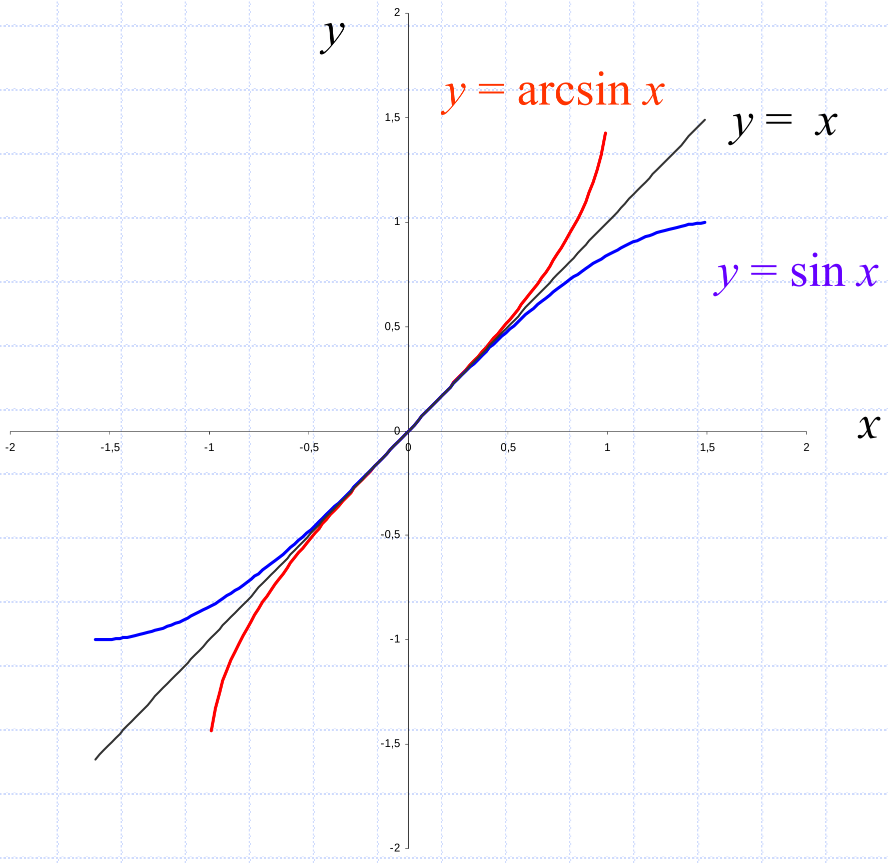
pöördfunktsioon puudub, kuna igale muutuja y väärtusele funktsiooni muutumispiirkonnast vastab lõpmata palju argumendi x väärtusi.

Pöördfunktsiooni saab leida juhul, kui ahendame määramispiirkonna lõiguks

$$X = [-\pi/2; \pi/2]$$

Näide 1

Kui $X = [-\pi/2; \pi/2]$ on siinusfunktsiooni pöördfunktsiooniks vastav arkusfunktsioon: $x = \arcsin y,\ Y \in [-1; 1]$



NB! Esialgse funktsiooni muutumispiirkonnast saab pöördfunktsiooni määramispiirkond ja vastupidi.

$y = \sin x \quad X = [-\pi/2; \pi/2] \quad Y = [-1;1]$

$x = \arcsin y \quad Y = [-1;1] \quad X = [-\pi/2; \pi/2]$

Elementaarsed põhifunktsioonid

Elementaarseteks põhifunktsioonideks nimetatakse järgmisi analüütiliselt antud funktsioone:

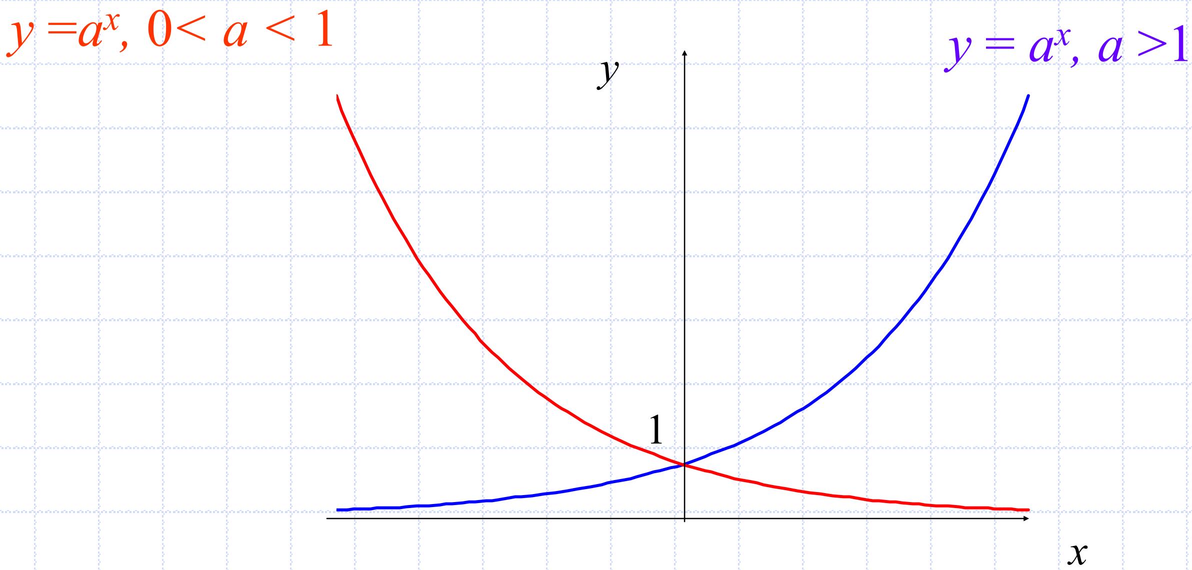
- Konstantne funktsioon: $y = c$
- Astmefunktsioon: $y = x^{\alpha}$, kus α on reaalarv.
- Eksponentfunktsioon: $y = a^x$, kus a on ühest erinev positiivne arv.
- Logaritmfunktsioon: $y = \log_a x$, kus logaritmide alus a on ühest erinev positiivne arv.
- Trigonomeetrilised funktsioonid:

$$y = \sin x, \qquad y = \tan x,$$
$$y = \cos x, \qquad y = \cot x.$$

- Arkusfunktsioonid: $y = \arcsin x, \qquad y = \arccos x,$

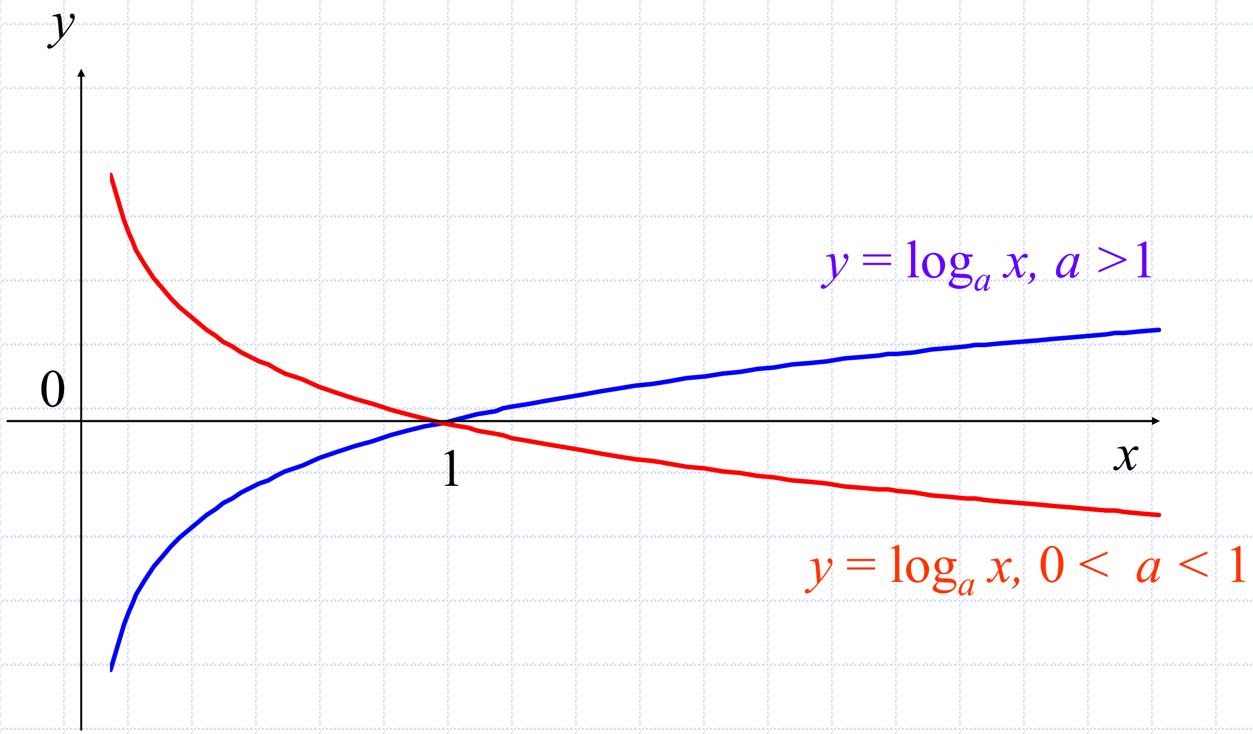
$$y = \arctan x, \qquad y = \operatorname{arccot} x.$$

Eksponentfunktsioon $y = a^x$



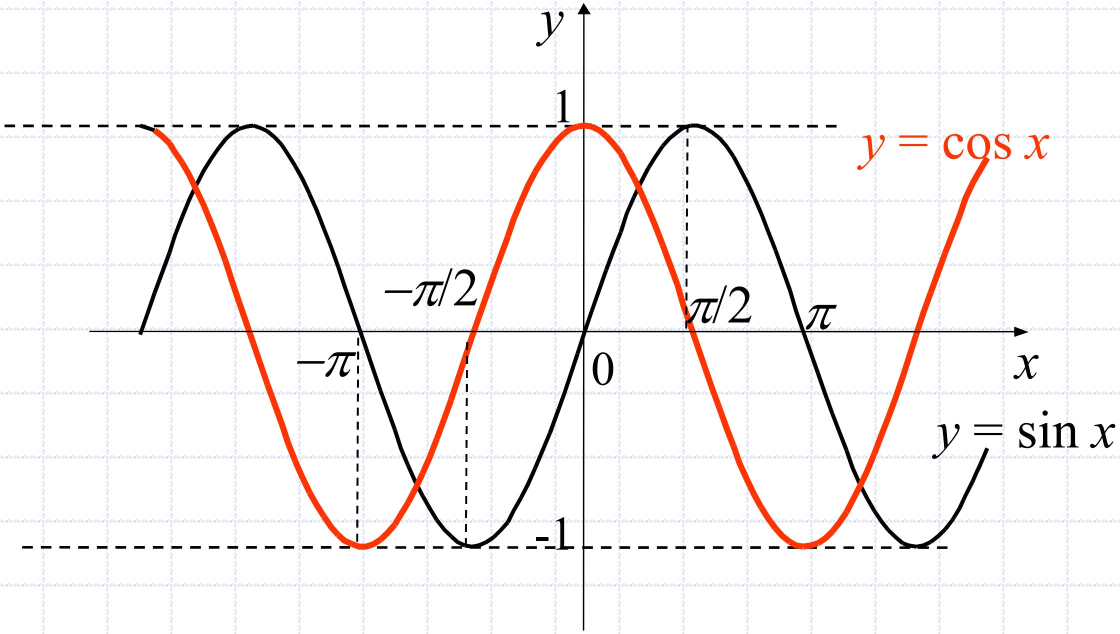
määramispiirkond: $X = (-\infty; \infty)$

Logaritmfunktsioon



määramispiirkond: $X = (0; \infty)$

Trig. funktsioonid siinus ja koosinus



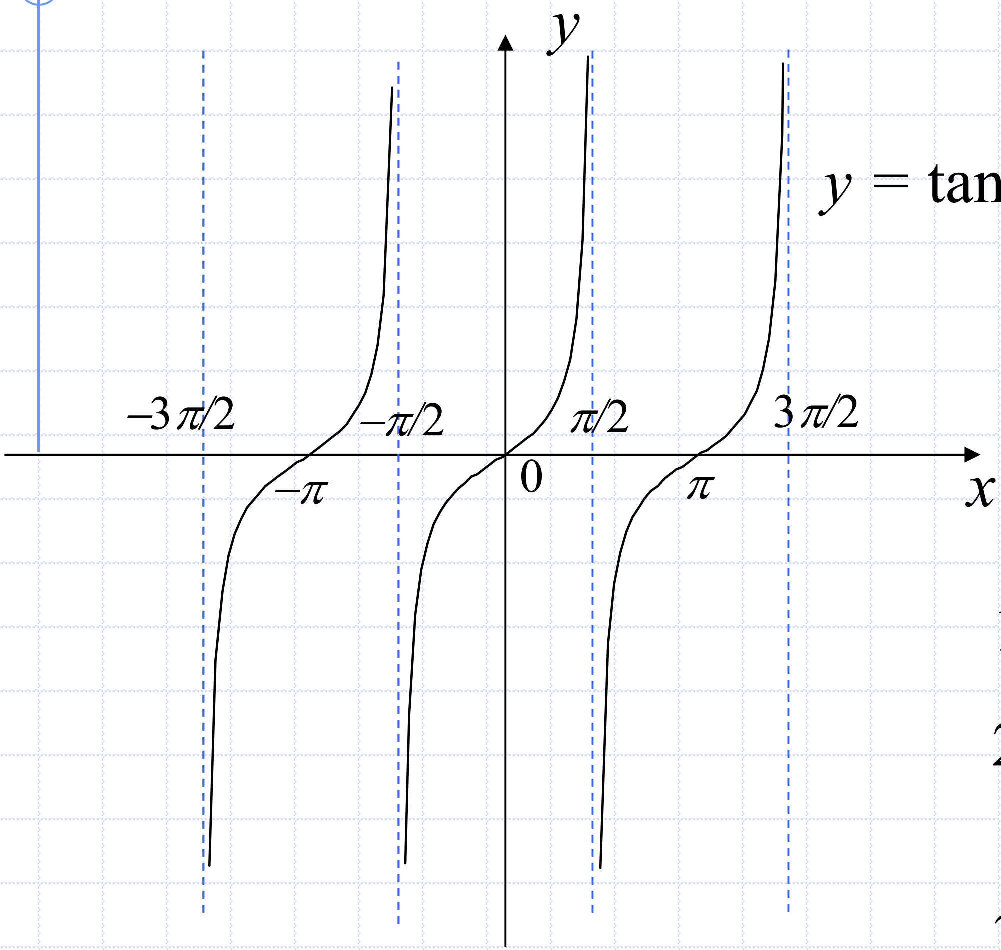
1) tõkestatud: $-1 \leq y \leq 1$

2) perioodilised, $\omega = 2\pi$

3) siinus on paaritu, koosinus – paarisfunktsioon

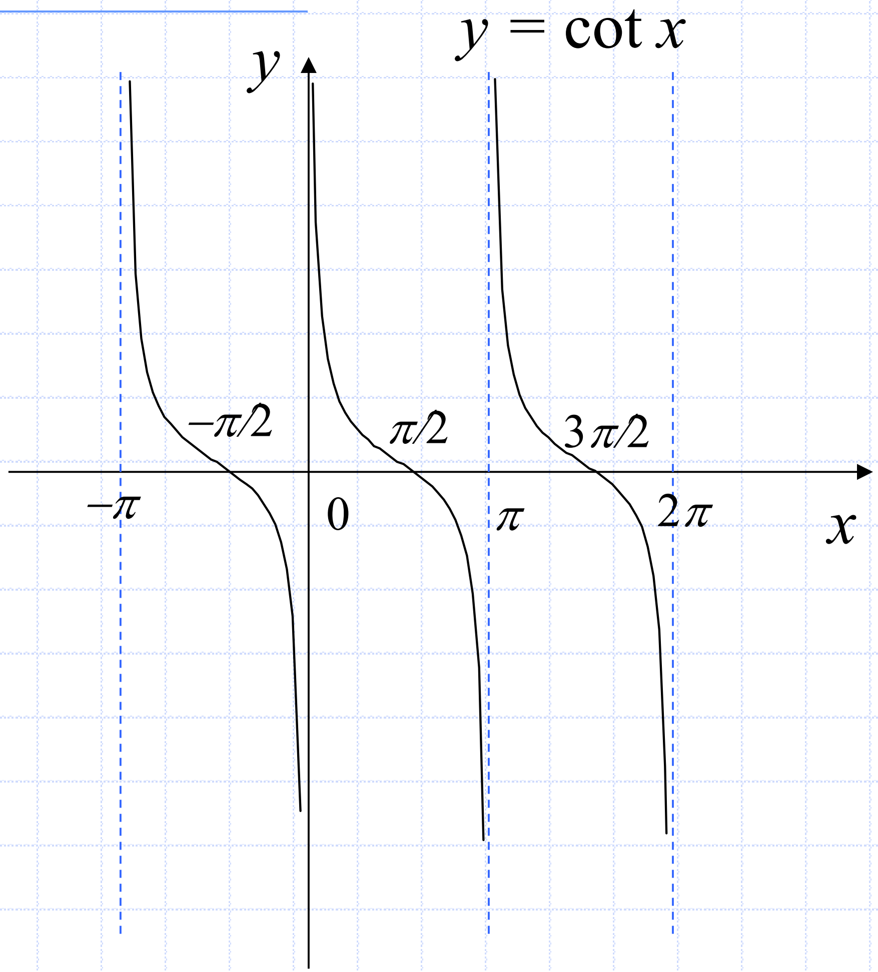
4) määramispiirkond: $X = (-\infty; \infty)$

Trig. funktsioonid: tangens



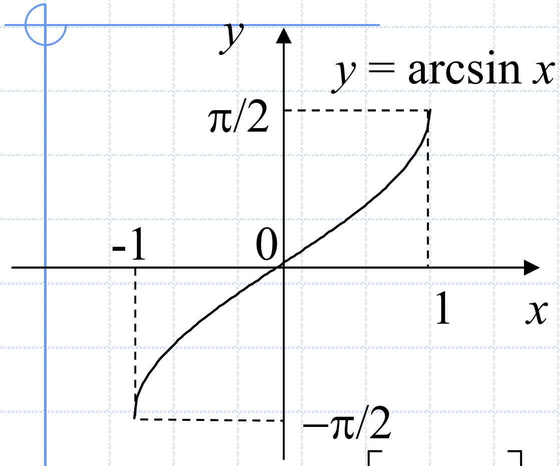
1. periood $\omega = \pi$
2. määramispiirkond:
   $X = (-\infty; \infty)\backslash\{(2k+1)\pi/2\}$
3. paaritu

Trig. funktsioonid: kootangens

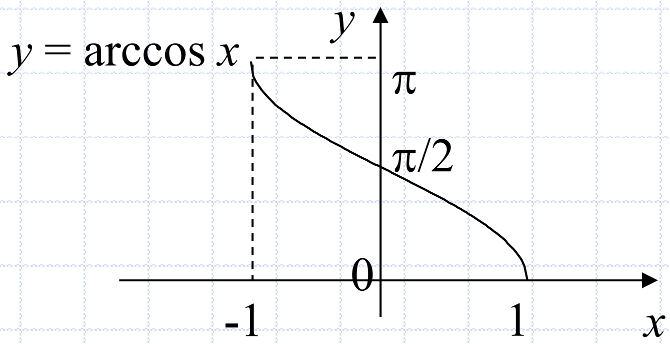


1. periood $\omega = \pi$
2. määramispiirkond:
   $X = (-\infty; \infty) \setminus \{k\pi\}$
   (kõik reaalarvud, mis ei ole arvu π täisarvkordsed)
3. paaritu

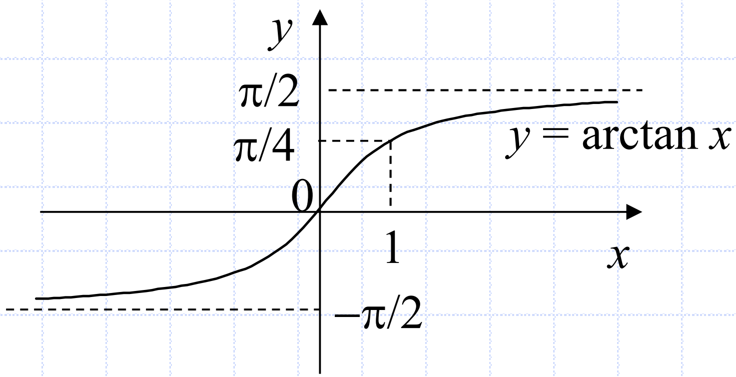
Arkusfunktsioonid trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid



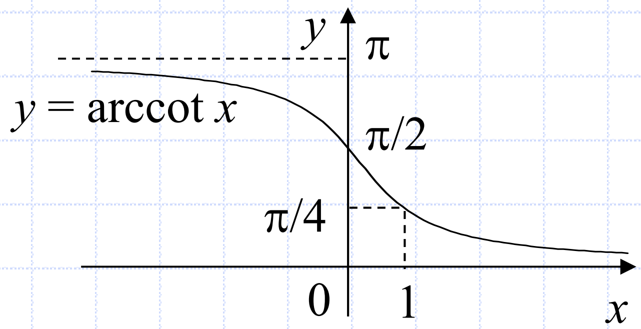
$X = [-1;1] \quad Y = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$



$X = [-1;1] \quad Y = [0;\pi]$



$X = (-\infty;\infty) \quad Y = \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$



$X = (-\infty;\infty) \quad Y = (0;\pi)$

Elementaarfunktsioon

Elementaarfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni, mis saadakse põhielementaarfunktsioonidest lõpliku arvu aritmeetiliste tehete ja liitfunktsioonide moodustamise tulemusena.

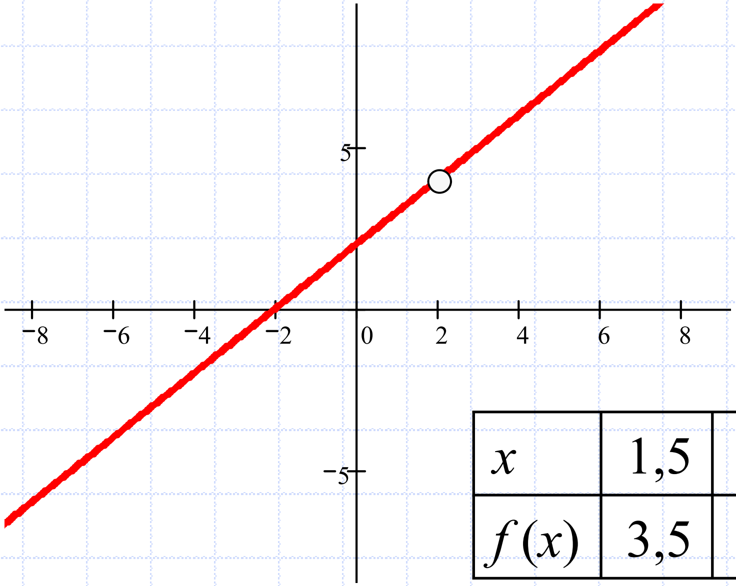
Näited

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \qquad \sqrt[3]{1-\cos x}$$

$$\ln(x+\sqrt{1-x^2}) \qquad e^{\arctan x}$$

Piirväärtus

Funktsiooni piirväärtus



$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

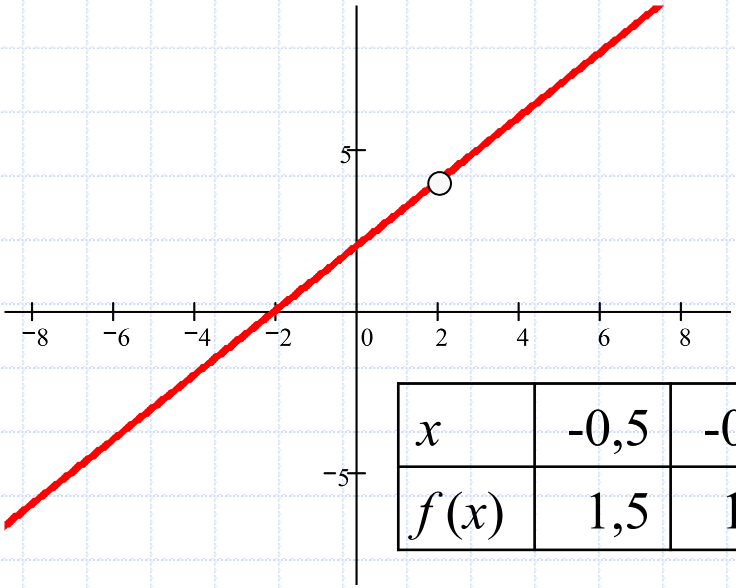
$$X = (-\infty;2) \cup (2;\infty)$$

x	1,5	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1	2,5
$f(x)$	3,5	3,9	3,99	3,999	4,001	4,01	4,1	4,5

Näeme, et argumendi x lähenemisel arvule 2 funktsiooni väärtused lähenevad arvule 4. Sel juhul öeldakse, et vaadeldava funktsiooni piirväärtus protsessis $x \to 2$ (ehk kohal $x = 2$) on võrdne arvuga 4 ja kirjutatakse

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Funktsiooni piirväärtus



$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$X = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$$

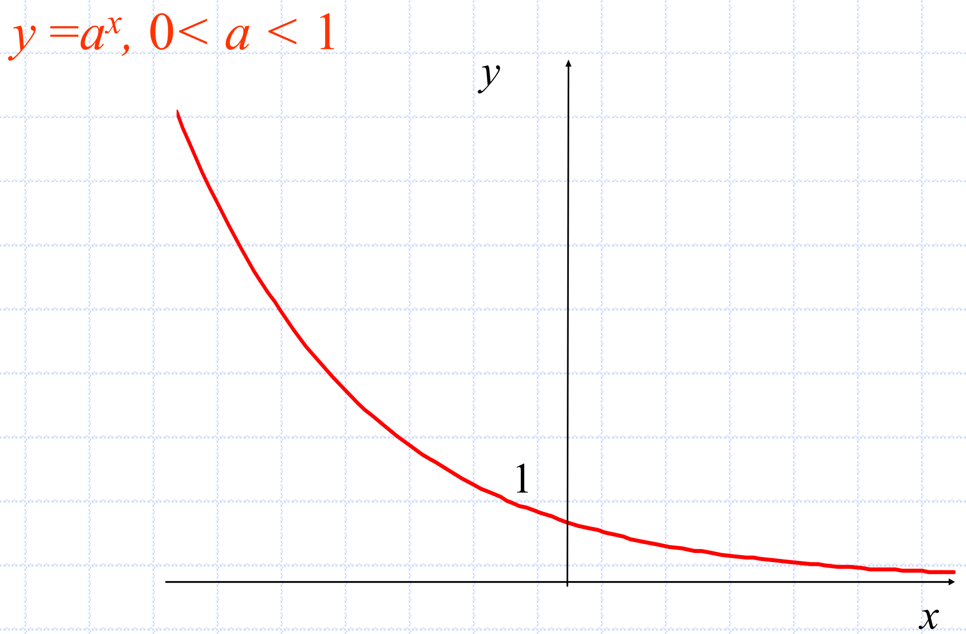
x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1	2,5

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 2 \qquad f(0) = 2$$

Kui punkt a on funktsiooni f määramispiirkonna punkt ja funktsioon f on elementaarfunktsioon, siis

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Funktsiooni piirväärtus

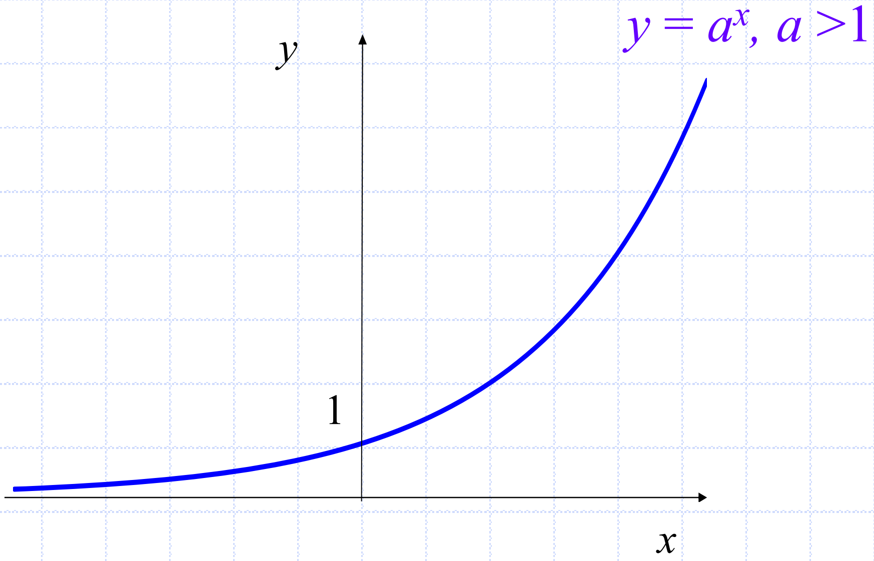


Kui argumendi väärtused tõkestamatult kasvavad, siis lähenevad funktsiooni väärtused tõkestamatult nullile.

Tähistame argumendi väärtuste tõkestamatut kasvamist sümboliga ∞.

$$\lim_{x \to \infty} a^x = 0$$

Funktsiooni piirväärtus



Kui argumendi väärtused tõkestamatult kahanevad, siis lähenevad funktsiooni väärtused tõkestamatult nullile.

Tähistame argumendi väärtuste tõkestamatut kahanemist sümboliga -∞.

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

Funktsiooni piirväärtus

Kui punkt a on funktsiooni f määramispiirkonna punkt ja funktsioon f on elementaarfunktsioon, siis

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Kui punkt a ei ole funktsiooni määramispiirkonna punkt, siis võivad tekkida määramatused:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0$$

<u>Määramatuse kõrvaldamise võtted:</u>

- Teguriteks lahutamine
- Irratsionaalsuse üleviimine lugejast nimetajasse ja vastupidi
- Tuntud piirväärtuste ärakasutamine
- Muutuja vahetus

Funktsiooni piirväärtuse arvutamine

Funktsiooni piirväärtuse arvutamisel kasutatakse funktsiooni piirväärtuse omadusi ning teatud praktilisi võtteid.

$$\lim_{x\to a} c = c, \quad c = const$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[c \cdot f(x)\right] = c \cdot \lim_{x\to a} f(x), \quad c = const$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

Kehtivad ka siis, kui $x \to \infty$ või $x \to -\infty$