Intervallimeetod võrratuste lahendamiseks

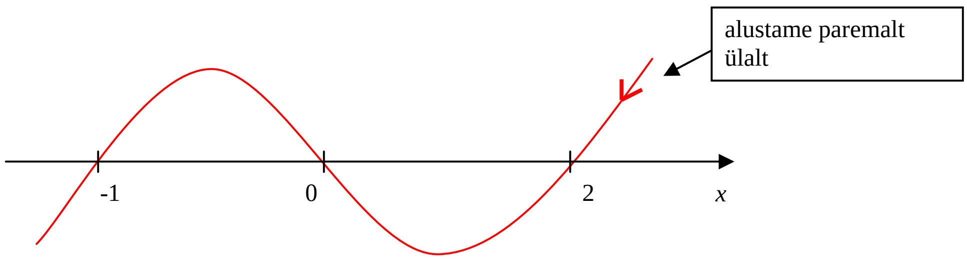
Võrratusi kujul $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)>0$, kus $x_1<x_2<x_3$ on võrratuse nullkohad, saab lahendada **intervallimeetodil**.

Praktiliselt kujuneb võrratuse lahendamine intervallmeetodil järgmiseks:

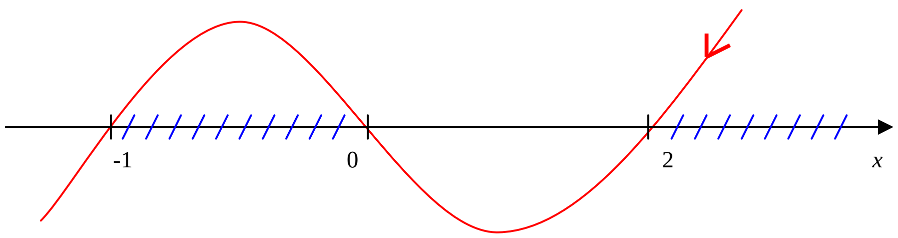
1. kanname võrratuse nullkohad (antud juhul x_1, x_2 ja x_3) *x*-teljele, eeldades, et $a>0$ (vastasel juhul korrutame lähtevõrratust –1-ga);
2. tõmbame läbi nende punktide joone, alustades paremalt ülalt;
3. kui nullkoha järk on paaritu arv, läbime nullkohta lõigates *x*-telge;
4. kui nullkoha järk on paarisarv, läbime nullkohta puudutades;
5. võrratuse lahendihulga määrame graafikult.

***Näide* 1.** Lahendame võrratuse $x(x-2)(x+1)>0$.

Lahendus: Vastava funktsiooni $y=x(x-2)(x+1)$ nullkohad on $x=0$, $x=2$, $x=-1$ ning kõik need on ühekordsed. Seega läbib abijoon neid punkte *x*-telge lõigates.



Antud võrratuse lahendamine tähendab funktsiooni $y=x(x-2)(x+1)$ positiivsuspiirkonna leidmist.



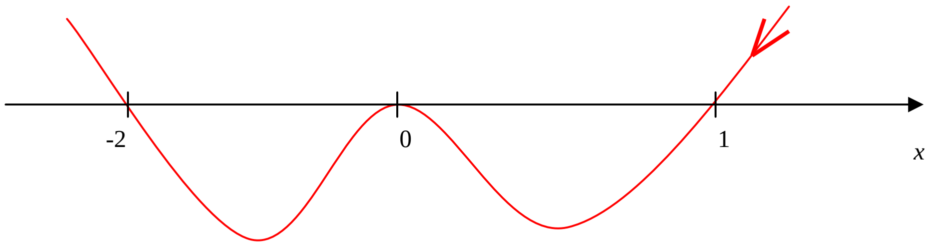
Positiivsuspiirkonna moodustavad need *x* väärtused, mille korral funktsiooni graafiku skits asub ülalpool *x*-telge (joonisel viirutatud ala).

Antud juhul on positiivsuspiirkonnaks, aga seega ka vastava võrratuse lahendiks hulk $x \in (-1;0) \cup (2;\infty)$.

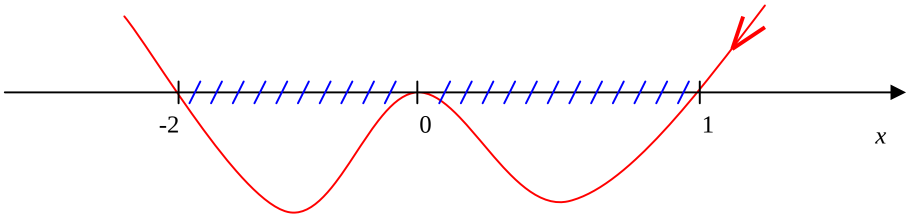
Vastus: $x \in (-1;0) \cup (2;\infty)$.

***Näide* 2.** Lahendame võrratuse $x^2(x+2)(x-1)^3 < 0$.

Lahendus: Vastava funktsiooni $y = x^2(x+2)(x-1)^3$ nullkohad on $x=0$, $x=-2$, $x=1$. Nullkoht $x=0$ on paarisjärku, mistõttu abijoon sellel kohal puudutab *x*-telge. Nullkohad $x=-2$ ja $x=1$ on aga paaritut järku, mistõttu abijoon läbib neid kohti *x*-telge lõigates.



Antud võrratuse lahendamine tähendab funktsiooni $y = x^2(x+2)(x-1)^3$ negatiivsuspiirkonna leidmist.



Antud juhul on negatiivsuspiirkonnaks, aga seega ka vastava võrratuse lahendiks hulk $x \in (-2;0) \cup (0;1)$.

Vastus: $x \in (-2;0) \cup (0;1)$.

***Näide* 3.** Lahendame võrratuse $(x-1)(x^2+1)(x+3)^2(2-x) \geq 0$.

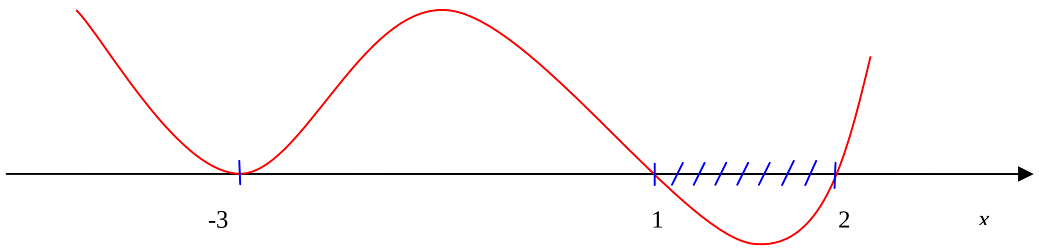
Lahendus: Antud võrratus ei vasta üldkujule $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \geq 0$ viimase teguri $2-x$ tõttu. Et võrratust nõutud kujule viia, võtame viimases sulgavaldises -1 sulgude ette. Saame

$$-(x-1)(x^2+1)(x+3)^2(x-2) \geq 0.$$

Korrutades antud võrratuse -1-ga (sest $a=-1$), saame võrratuse kujul

$$(x-1)(x^2+1)(x+3)^2(x-2) \leq 0.$$

Vastava funktsiooni $y=(x-1)(x^2+1)(x+3)^2(x-2)$ nullkohad on $x=-3$, $x=1$, $x=2$. Paneme tähele, et tegur $x^2+1>0$, ehk ei võrdu nulliga ühegi x väärtuse korral. Edasi lahendame juba nii nagu eelmisi näiteid. Kanname võrratuse vasaku poole nullkohad x-teljele ja tõmbame abijoone.



Võrratuse lahendeiks on muutuja x need väärtused, mille korral joon pole ülalpool x-telge. Seega joonise põhjal $x\in\{-3\}\cup[1;2]$.

Vastus: $x\in\{-3\}\cup[1;2]$

Murdvõrratused

Võrratust, mis sisaldab tundmatut murru nimetajas, nimetatakse **murdvõrratuseks**. Murdvõrratus esitub kujul:

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0 \text{ (või } \geq 0\text{)},$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}<0 \text{ (või } \leq 0\text{)}.$$

Kuna jagatis ja korrutis on positiivsed (negatiivsed) samadel tingimustel, siis

võrratus $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$, on samaväärne võrratusega $f(x)g(x)>0$,

võrratus $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$, on samaväärne võrratusega $f(x)g(x)<0$.

Mitterange võrratus kujul $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, on samaväärne seostega

$$\begin{cases} f(x)g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

võrratus $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$, on samaväärne seostega

$$\begin{cases} f(x)g(x) \leq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

s.t. murdvõrratuse lahendihulka ei kuulu nimetaja nullkohad.

Murdvõrratuse lahendamisel saab kasutada intervallimeetodit. Vaatame seda täpsemalt näite varal.

Näide. Lahendame võrratuse $\frac{2}{x-1} < 1$.

Lahendus: Kanname kõik liikmed võrratuse ühele poolele

$$\frac{2}{x-1} - 1 < 0,$$

ja viime ühisele nimetajale

$$\frac{2-x+1}{x-1} < 0$$

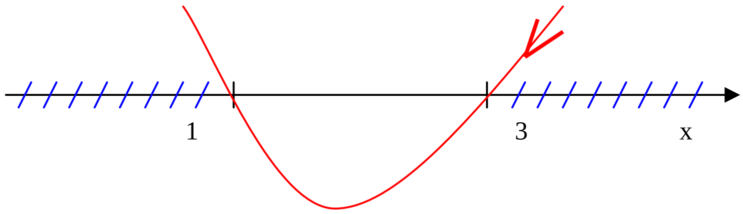
$$\frac{3-x}{x-1} < 0.$$

Viimane võrratus on samaväärne võrratusega $(3-x)(x-1) < 0$. Võrratuse $(3-x)(x-1) < 0$ lahendamiseks kasutame intervallimeetodit, selleks esitame kõigepealt võrratuse vasaku poole sobival kujul.

$$(3-x)(x-1) < 0 \mid \cdot(-1)$$

$$(x-3)(x-1) > 0$$

Vastava funktsiooni $y = (x-3)(x-1)$ nullkohad on $x = 3$ ja $x = 1$ ning mõlemad on ühekordsed. Seega läbib abijoon neid punkte *x*- telge lõigates.



Antud võrratuse lahendamine tähendab funktsiooni $y=(x-3)(x-1)$ positiivsuspiirkonna leidmist.

Antud juhul on positiivsuspiirkonnaks, aga seega ka vastava võrratuse lahendiks hulk

$x \in (-\infty;1) \cup (3;\infty)$.

Vastus: $x \in (-\infty;1) \cup (3;\infty)$