Funktsiooni pidevus

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse **pidevaks punktis *a***, kui $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Definitsioon nõuab kolme tingimuse täidetust:

1. funktsioon peab olema määratud punktis *a*;
2. funktsioonil peab olema lõplik piirväärtus $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;
3. peab kehtima võrdus $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Kui vähemalt üks nendest tingimustest ei ole täidetud, siis öeldakse, et funktsioon *f* ei ole pidev punktis *a*.

<u>*Näide* 1</u> Funktsioon $f(x) = x^2$ on pidev punktis 3, sest $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9 = f(3)$.

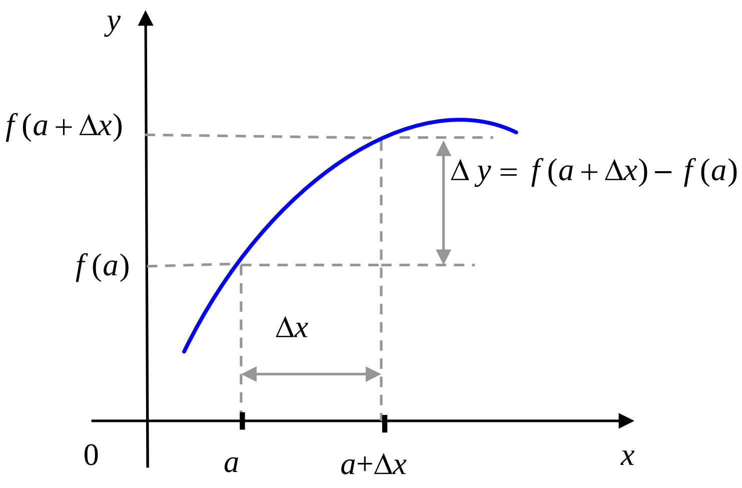
<u>*Näide* 2</u> Funktsioon $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ei ole pidev punktis 0, sest funktsioon pole määratud punktis 0 (pole täidetud tingimus 1).

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse **pidevaks piirkonnas *X***, kui ta on pidev piirkonna ***X*** igas punktis.

<u>*Näide* 1</u> Funktsioon $f(x) = x^2$ on pidev piirkonnas $X = (-\infty; \infty)$.

<u>*Näide* 2</u> Funktsioon $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ on pidev piirkonnas $X = (-\infty; 0); (0; \infty)$.

Vaatleme funktsioon $y = f(x)$. Olgu Δx argumendi x muut. Funktsiooni muut avaldub siis kujul $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$. Järgneval joonisel on näha, et kui muudame funktsiooni argumenti a suuruse Δx võrra, siis funktsiooni väärtus muutub $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ võrra. (Tavaliselt eeldatakse et muut $\Delta x \neq 0$. Muut võib olla nii positiivne kui ka negatiivne.)



Pidevuse tingimuse võime nüüd sõnastada järgmise teoreemina.

Teoreem Funktsioon $y = f(x)$ on pidev punktis a siis ja ainult siis, kui argumendi muudu Δx lähenemisel nullile läheneb ka vastav funktsiooni muut nullile ehk $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.
Antud teoreemi kasutatakse funktsiooni pidevuse kontrollimiseks.

Näide Tõestame, et funktsioon $f(x) = \sin x$ on pidev kogu määramispiirkonnas R.

Olgu $a \in R$. Arvutame funktsiooni muudu:
$\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a) = \sin(a+\Delta x) - \sin a = \sin a \cdot \cos \Delta x + \cos a \cdot \sin \Delta x - \sin a$
Arvutame vastava piirväärtuse:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \to 0} (\sin a \cdot \cos \Delta x + \cos a \cdot \sin \Delta x - \sin a) = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (\sin a \cdot \cos \Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} (\cos a \cdot \sin \Delta x) - \lim_{\Delta x \to 0} \sin a = \\
&= \sin a \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos \Delta x + \cos a \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sin \Delta x - \sin a = \\
&= \sin a \cdot 1 + \cos a \cdot 0 - \sin a = 0
\end{aligned}
$$

Kuna $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, siis antud funktsioon pidev piirkonnas R.
Kui funktsioonil on mingi omadus kogu arvsirgel, siis öeldakse, et see omadus kehtib **kõikjal**. Vastavalt eelmisele näitele on funktsioon $f(x) = \sin x$ pidev kõikjal.

Teoreem Kui funktsioonid $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ on pidevad punktis a, siis ka funktsioonid

$$f(x)+g(x), \quad f(x)-g(x), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

on pidevad punktis a, kusjuures jagatise korral eeldame, et $g(a) \neq 0$.
Näide Funktsioon $y = 2x^2 - e^x$ on pidev piirkonnas R, sest

$$u = 2,$$
$$v = x^2,$$
$$z = e^x$$

on pidevad selles piirkonnas.

Teoreem Kõik elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

Teoreem Liitfunktsioon $f[g(x)]$ on pidev punktis a, kui $g(x)$ on pidev punktis a ja $f[g(x)]$ on pidev punktis $g(a)$.
Ehk liitfunktsioon on pidev, kui selle funktsiooni koostisosad on pidevad. See tulemus kehtib ka siis, kui liitfunktsioonil on mitu koostisosa.
Näide. Funktsioon $y = \cos^3 \dfrac{x}{2}$ on pidev kõikjal, sest tema koostisosad $y = u^3, \quad u = \cos v, \quad v = \dfrac{x}{2}$ on pidevad kõikjal.

Öeldakse, et funktsioon on **paremalt pidev** kohal a, kui

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

ja **vasakult pidev** kohal a, kui

$$\lim_{x\to a-} f(x) = f(a).$$

Teoreem Funktsioon on pidev punktis *a* siis ja ainult siis kui ta on punktis *a* vasakult pidev ja paremalt pidev.

<u>Näide.</u> Leida arv a nii, et funktsioon $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \le 0 \\ e^{2x}+a, & x > 0 \end{cases}$ oleks pidev oma määramispiirkonnas.

Vaatleme kõigepealt osafunktsioone. Funktsioon $x-2$ on pidev piirkonnas $(-\infty;0]$ (sest ta on elementaarfunktsioon ja elementaarfunktsioon on pidev oma määramispiirkonnas). Samal põhjusel on pidev ka funktsioon $e^{2x}+a$ piirkonnas $(0;\infty)$.

Seega antud funktsioon $f(x)$ on pidev kõikjal, kui ta on pidev üleminekukohal (punktis 0). Teame, et funktsioon $f(x)$ on pidev punktis 0, kui

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x).$$

Arvutame ühepoolsed piirväärtused $f(0+)$ ja $f(0-)$:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}(x-2) = -2$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}(e^{2x}+a) = 1+a.$$

Et funktsioon $f(x)$ oleks pidev punktis 0, peab seega kehtima võrdus

$$1+a=-2,$$

millest saame $a=-3$.

Funktsioon $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \le 0 \\ e^{2x}+a, & x > 0 \end{cases}$ on pidev oma määramispiirkonnas, kui $a=-3$.

Teoreeme pidevatest funktsioonidest

Teoreem (Weierstrassi teoreem funktsiooni tõkestatusest.) Lõigus pidev funktsioon on tõkestatud selles lõigus.

Teoreem (Weierstrassi teoreem ekstremaalsetest väärtustest.) Lõigus pideval funktsioonil on olemas maksimaalne ja minimaalne väärtus selles lõigus.

Teoreem Kui lõigus [*a*;*b*] pideva funktsiooni *f* väärtused lõigu otspunktides *a* ja *b* on vastupidiste märkidega, siis lõigus [*a*;*b*] leidub vähemalt üks funktsiooni *f* nullkoht, s.o. niisugune koht *c*, kus $f(c)=0$.

Teoreem (Bolzano-Cauchy teoreem vahepealsetest väärtustest.) Lõigus pidev funktsioon omab iga väärtust, mis paikneb minimaalse ja maksimaalse väärtuse vahel.

Funktsiooni katkevuspunktid

Funktsiooni katkevuspunktiks nimetatakse punkti, milles funktsioon ei ole pidev. Pidevuse definitsioonist järeldub, et katkevuse põhjuseks punktis a võivad olla funktsiooni väärtuse puudumine punktis a, piirväärtuse puudumine punktis a või funktsiooni väärtuse ja piirväärtuse erinevus.

Katkevuspunktide liigitus

Niisugust katkevuspunkti, kus funktsioonil f on olemas ühepoolsed piirväärtused

$$f(a+) = \lim_{x \to a+} f(x) \text{ ja}$$

$$f(a-) = \lim_{x \to a-} f(x)$$

nimetatakse **1. liiki katkevuspunktiks**. Kõiki ülejäänud katkevuspunkte nimetatakse **2. liiki katkevuspunktideks**.

Esimest liiki katkevuspunktid jagunevad omakorda kolmeks.

1) hüppekoht

Arvu a nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ **hüppekohaks**, kui $\lim_{x \to a-} f(x) \neq \lim_{x \to a+} f(x)$.

__Näide__ Vaatleme funktsiooni $y = \frac{|x|}{x}$. Selle funktsiooni määramispiirkond on $X = (-\infty;0);(0;\infty)$.

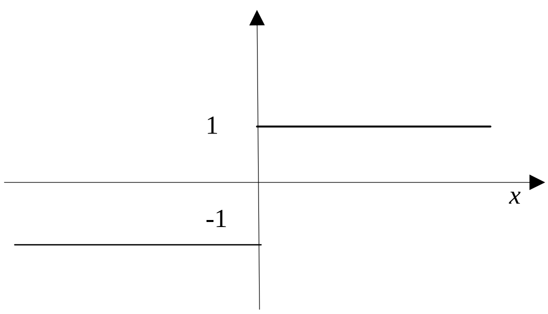
Arvutame ühepoolsed piirväärtused punktis 0. Kui $x \to 0-$, siis $x < 0$ ja $|x| = -x$, seega $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$. Konstantse suuruse piirväärtus on võrdne selle suurusega, seega

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Kui $x \to 0+$, siis $x > 0$ ja $|x| = x$. Järelikult $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$ ja

$$\lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = 1.$$

Seega 0 on funktsiooni $y = \frac{|x|}{x}$ hüppekoht.



2) kõrvaldatav katkevuskoht

Arvu a nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ **kõrvaldatavaks katkevuskohaks**, kui

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) \quad \text{ja } a \notin X .$$

Katkevuse kõrvaldamiseks defineeritakse täiendavalt funktsiooni väärtus kohal a tingimusega $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

Siis on

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & kui\ x \neq a \\ \lim_{x\to a} f(x), & kui\ x = a \end{cases}$$

pidev funktsioon

__Näide__ Funktsioon $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ei ole määratud punktis 0, kuid eksisteerib piirväärtus $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Seega on sellel funktsioonil punktis 0 kõrvaldatav katkevus.

Defineerime $f(0) = \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1,$ saame pideva funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & kui\ x \neq 0 \\ 1, & kui\ x = 0 \end{cases}$$

3) koht a, mille korral leiduvad $\lim_{x\to a} f(x)$ ja $f(a)$, kuid $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

Seda juhtu me oma kursuse pikemalt ei käsitle.

Arvu a nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ **teist liiki katkevuspunktiks** kui vähemalt üks ühepoolsetest piirväärtustest

$$\lim_{x\to a-} f(x) \text{ või } \lim_{x\to a+} f(x)$$

on lõpmatu või ei eksisteeri.

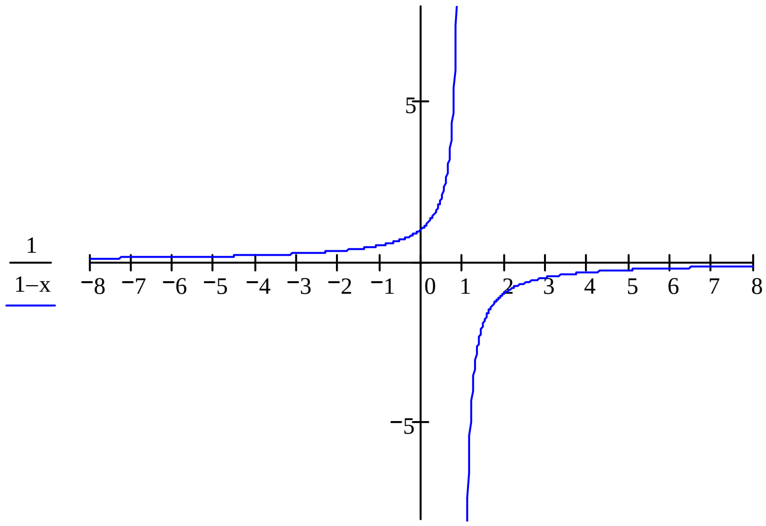
__Näide__ Vaatleme funktsiooni $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Selle funktsiooni määramispiirkond on $X = (-\infty;1);(1;\infty)$. Arvutame ühepoolsed piirväärtused punktis 1. Kui $x \to 1-$, siis $1-x > 0$ ja

$$\lim_{x\to 1-}\frac{1}{1-x} = \infty .$$

Kui $x \to 1+$, siis $1-x < 0$ ja

$$\lim_{x\to 1+}\frac{1}{1-x} = -\infty .$$

Seega arv 1 on funktsiooni II liiki katkevuskoht.



1
1−x
5
−5
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8