Vahemikhinnangud

Eelmises peatükis tutvusime punkthinnangutega. Meenutame, et üldkogumi vaadeldava parameetri punktihinnanguks nimetatakse valimi põhjal teatud eeskirja järgi arvutatud parameetri väärtust. Järgnevas tabelis on esitatud vaadeldud jaotusparameetrid ja nende punkthinnangud.

Jaotusparameeter	**Punkthinnang**
keskväärtus EX	aritmeetiline keskmine $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
dispersioon DX	dispersiooni nihutamata hinnang $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$
standardhälve σ	standardhälbe nihutamata hinnang $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

Punkthinnangute puudusteks on:

- Punkthinnangud on juhuslikud suurused, sest nad muutuvad ühelt valimilt teisele ülemineku korral.
- Punkthinnangud ei anna informatsiooni hinnangu täpsuse ja usaldatavuse kohta.
- Valimi väikeses mahu korral (kui n on väike) võib punkthinnang oluliselt erineda hinnatava parameetri tegelikust väärtusest.

Nendest puudustest on vabad nn. **vahemikhinnangud**, mille puhul antud valimi jaoks määratakse vahemik, millesse otsitav parameeter etteantud (küllalt suure) tõenäosusega kuulub. Enne kui asume vahemikhinnangu käsitlemisele, tutvume usaldusnivoo mõistega.
Matemaatilises statistikas saab kõiki otsuseid teha vaid teatud tõenäosusega. See tõenäosus sõltub suurel määral lahendatava probleemi iseloomust. Näiteks, kui me teame tõenäosusega 0,9, et täna ei hakka vihma sadama, siis võime rahulikult vihmavarju koju jätta. Et mingi masin tööprotsessis ei puruneks on tarvis märksa suuremat tõenäosust, näiteks 0,99.

Tõenäosust, millega peavad kehtima tehtud otsustused, nimetatakse **usaldusnivooks** ja tähistatakse sümboliga β.

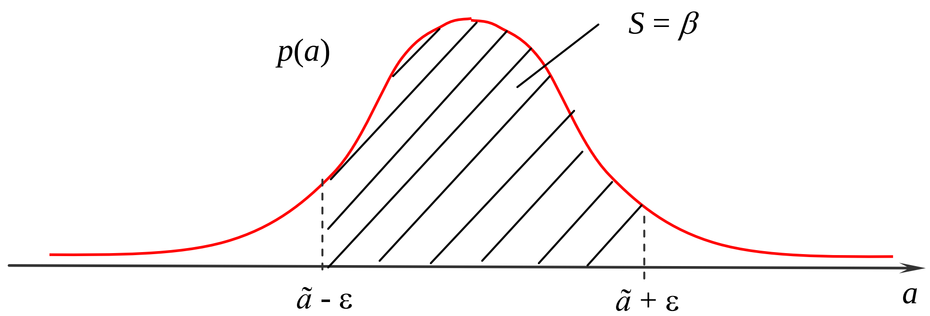
Usaldusnivoo väärtuseks võetakse sageli 0,95; 0,90 või 0,99, kuid vastavalt uurija kaalutlustele võib selleks olla ka mingi muu suur tõenäosus.

Parameetri a **sümmeetriliseks usalduspiirkonnaks** vastavalt usaldusnivoole β nimetatakse juhuslikku vahemikku $(\tilde{a} - \varepsilon, \tilde{a} + \varepsilon)$, mis katab hinnatava parameetri a tõenäosusega β:

$$P(|\tilde{a} - a| < \varepsilon) = \beta .$$

Arv ε iseloomustab hinnangu täpsust, $\tilde{a}$ on parameetri a punkthinnang.

Selgitame öeldut joonise varal. Olgu meil teada juhusliku suuruse a tihedusfunktsioon $p(a)$. Et tõenäosust $P(\tilde{a} - \varepsilon < a < \tilde{a} + \varepsilon)$ iseloomustab kõvera $p(a)$ all olev pindala, mis jääb punktide $\tilde{a} - \varepsilon$ ja $\tilde{a} + \varepsilon$ vahele, siis peab järgneval joonisel viirutatud ala pindala olema β.



Eelnevast selgub, et usalduspiirid pole määratud üheselt. Ühesuse tagamiseks nõutakse enamasti, et sirgest $a = \tilde{a} - \varepsilon$ vasakule ja sirgest $a = \tilde{a} + \varepsilon$ paremale jäävad pindalad oleksid võrdsed. Et kogu tihedusfunktsiooni graafiku alune pindala peab olema võrdne ühega, siis mõlema väikese tüki pindala peab olema $\frac{1-\beta}{2}$. Usalduspiire $\tilde{a} - \varepsilon$ ja $\tilde{a} + \varepsilon$ tõlgendatakse ka sageli kui juhusliku suuruse kvantiile või täiendkvantiile.

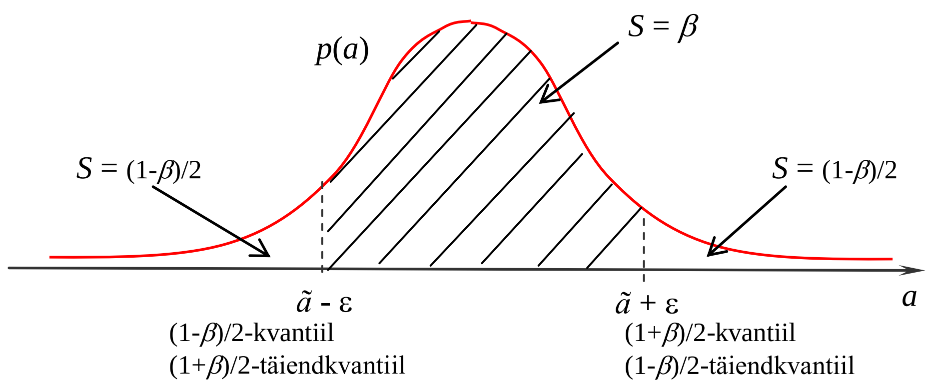
Juhusliku suuruse X ***p* -kvantiil** on tihedusfunktsiooni graafikul argumendi selline väärtus, millest vasakule jääv tihedusfunktsiooni alune pindala on p.

Kuna kogu tihedusfunktsiooni graafiku alla jääv pindala on 1, siis p-kvantiilist paremale jääva pindala suurus on 1-p. Seega eelnenud joonisel on väärtus $\tilde{a}$ - ε tõlgendatav kui vastava jaotuse $\frac{1-\beta}{2}$-kvantiil. Et $\frac{1-\beta}{2} + \beta = \frac{1+\beta}{2}$, siis on väärtus $\tilde{a}$ + ε tõlgendatav ka kui vastava jaotuse $\frac{1+\beta}{2}$-kvantiil.

Statistika tabelite koostamisel kasutatakse sageli ka täiendkvantiile.

Juhusliku suuruse ***q*-täiendkvantiiliks** nimetatakse juhusliku suuruse sellist väärtust, millest suuremate väärtuste esinemise tõenäosus on q.

Seega väärtus $\tilde{a}$ - ε on tõlgendatav ka kui vastava jaotuse $\frac{1+\beta}{2}$-täiendkvantiil. Punkti $\tilde{a}$ + ε võib aga vaadelda kui $\frac{1-\beta}{2}$-täiendkvantiili.



Usaldusnivoo β asemel kasutatakse mõnikord ka suurust $1-\beta$, mida nimetatakse **olulisuse nivooks** ehk **riskiprotsendiks**.
Järgnevalt tutvume ühe normaaljaotusest tuletatud jaotusega, mida kasutatakse vahemikhinnangute väljakirjutamisel.

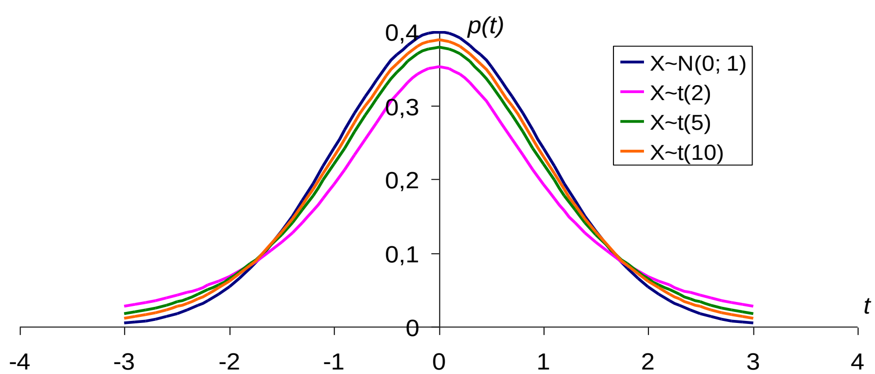
Studenti jaotus

Eeldame, et $X \sim N(m, \sigma)$, valimi maht on väike ($n < 30$). Teeme n sõltumatut katset, milles juhuslik suurus X omandab väärtused $x_1, \ldots, x_n$. Vaatleme keskväärtuse m hinnangut $\bar{x}$ kui juhuslikku suurust $\bar{X}$, mis muutub ühelt valimilt teisele üle minnes. Moodustame uue juhusliku suuruse

$$T = \frac{\bar{X} - m}{\sigma(\bar{X})} = \frac{(\bar{X} - m)\sqrt{n}}{s}.$$

Nii moodustatud juhuslik suurus ei ole enam jaotatud normaalselt, vaid allub uuele jaotusseadusele, mida nimetatakse **Studenti** e. **t-jaotuseks**. t-jaotusseaduse tuletas 1908 a. inglise keemik Gosset, kes esitas oma töid Studenti varjunime all. Viimase asjaolu tõttu nimetatakse t-jaotust ka Studenti jaotuseks.
Kui valimi maht on n, siis Studenti jaotuse parameetriks on $k = n - 1$, mida nimetatakse ka **vabadusastmete arvuks**.
Järgneval joonisel on esitatud Studenti jaotuse tihedusfunktsiooni graafikud vabadusastmete arvu $k = 2$; $k = 5$ ja $k = 10$ korral ja normeeritud normaaljaotuse tihedusfunktsiooni graafik. Näeme, et Studenti jaotuse tihedusfunktsiooni graafik on sümmeetriline ordinaattelje suhtes ja oma kujult sarnane normaalse juhusliku suuruse tihedusfunktsiooni graafikuga. Vabadusastmete arvu (katsete arvu) suurenedes koondub Studenti jaotuse tihedusfunktsioon $s_k(t)$ kiiresti normeeritud normaaljaotuse tihedusfunktsiooniks:

$$\lim_{n\to\infty} s_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$



Normaaljaotuse keskväärtuse usalduspiirkond

Lähtudes seosest $P(|\overline{X}-m|<\varepsilon)=\beta$, saab näidata, et normaaljaotusega üldkogumist pärinevate valimite korral keskväärtuse usalduspiirkond avaldub

$$\bar{x}-\frac{s\cdot t\left(k,\frac{1+\beta}{2}\right)}{\sqrt{n}}<m<\bar{x}+\frac{s\cdot t\left(k,\frac{1+\beta}{2}\right)}{\sqrt{n}},$$

kus $t\left(k,\frac{1+\beta}{2}\right)$ on Studenti jaotuse kvantiil.

<u>Keskväärtuse usalduspiirkonna leidmise algoritm</u>

1. valimi alusel leitakse keskväärtuse ja standardhälbe punkthinnangud $\bar{x}$ ja *s;*
2. ette antakse usaldusnivoo β (näiteks 0,95 või 0,99);
3. Studenti jaotuse kvantiilide tabelist leitakse $t\left(k,\frac{1+\beta}{2}\right)$, kus $k=n-1$;
4. arvutatakse keskväärtuse usalduspiirkond

$$\bar{x}-\frac{s\cdot t\left(k,\frac{1+\beta}{2}\right)}{\sqrt{n}}<m<\bar{x}+\frac{s\cdot t\left(k,\frac{1+\beta}{2}\right)}{\sqrt{n}}.$$

<u>Näide.</u> Malmi sulatamisel on kahjulikuks lisandiks väävel. Kuue katsepartii analüüs näitas, et keskmiselt sisaldub sulami tonnis 4,00 kg väävlit. Arvutati ka valimi standardhälve, milleks saadi 0,30 kg. Võttes riskiprotsendiks 5% leida, missugustes piirides võiks muutuda keskmine väävli hulk tonni malmi kohta.

<u>Lahendus.</u>

Kuna riskiprotsent on 5%, siis usaldusnivoo $\beta=1-0{,}05=0{,}95$.

$\bar{x}=4{,}00$

$s=0{,}30$

$k=6-1=5$

$(1+\beta)/2=(1+0{,}95)/2=0{,}975$

Studenti jaotuse kvantiilide tabelist leiame $t\,(5;0{,}975)=2{,}571$.

Arvutame keskväärtuse usalduspiirkonna. Usalduspiirkonna piiride ümardamisel on õige ümardada piiride laienemise suunas.

$$\bar{x}-\frac{s\cdot t\left(k,\frac{1+\beta}{2}\right)}{\sqrt{n}}<m<\bar{x}+\frac{s\cdot t\left(k,\frac{1+\beta}{2}\right)}{\sqrt{n}}$$

$$4-\frac{0{,}3\cdot 2{,}571}{\sqrt{6}}<m<4+\frac{0{,}3\cdot 2{,}571}{\sqrt{6}}$$

$$3{,}6<m<4{,}4$$

Seega 95%-lise tõenäosusega sisaldub sulami tonnis keskmiselt 3,6 kuni 4,4 kilo väävlit.

Näide. On teada kolme tiigis elava konna kaalud 18,6; 18,4; 19,2. Leida konnade kaalu keskväärtuse 95%-lised usalduspiirid.
Lahendus.
Arvutame punkthinnangud

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{3}(18{,}6 + 18{,}4 + 19{,}2) \approx 18{,}73$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{2}\left((18{,}6 - 18{,}73)^2 + (18{,}4 - 18{,}73)^2 + (19{,}2 - 18{,}73)^2\right) \approx 0{,}17$$

$$s = \sqrt{s^2} \approx 0{,}42$$

Leiame

$$k = 3 - 1 = 2$$

$$(1+\beta)/2 = (1+0{,}95)/2 = 0{,}975$$

Studenti jaotuse kvantiilide tabelist $t\ (2;\ 0{,}975) = 4{,}303$.
Arvutame keskväärtuse usalduspiirkonna

$$18{,}73 - \frac{0{,}42 \cdot 4{,}303}{\sqrt{3}} < m < 18{,}73 + \frac{0{,}42 \cdot 4{,}303}{\sqrt{3}}$$

$$17{,}6 < m < 19{,}8$$

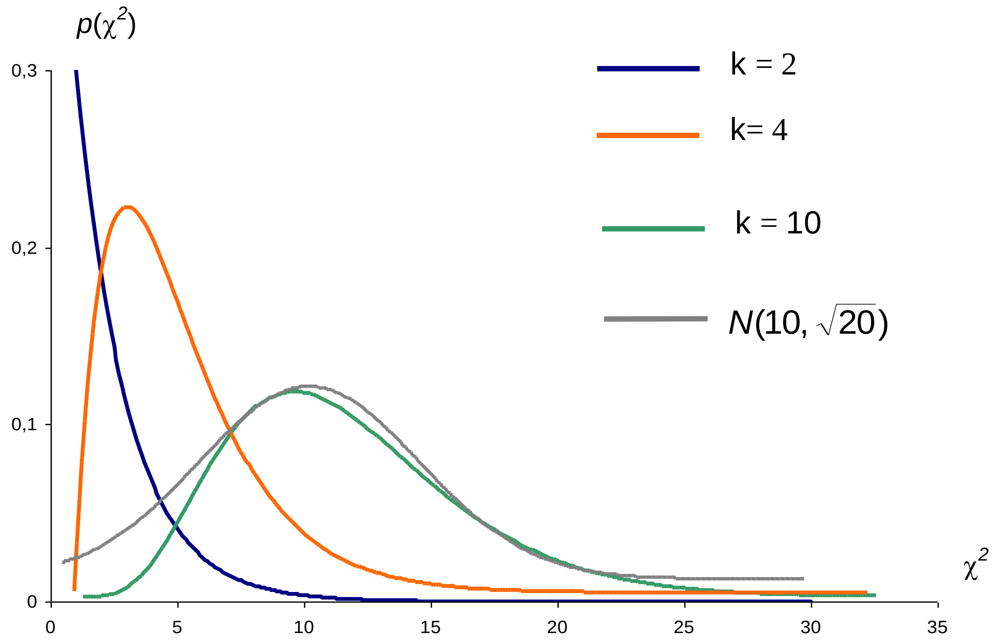
Seega 95%-lise tõenäosusega on tiigis elavate konnade keskmine kaal 17,6 kuni 19,8 grammi. Suurendamaks hinnangu täpsust, tuleks uurida rohkem konni, sest mida suurem on *n*, seda kitsamaks muutub usaldusintervall.

χ^2–jaotus

(loetakse: hii- ruut-jaotus)
Olgu $X_1, \ldots, X_k$ sõltumatud normeeritud normaaljaotusega juhuslikud suurused: $X_i \sim N(0,1)$, siis nimetatakse juhuslikku suurust

$$\chi^2(k) = \sum_{i=1}^{k} X_i^{\,2}$$

χ^2 –**jaotusega** juhuslikuks suuruseks vabadusastmete arvuga *k*.
Sellise nimetuse andis jaotusele tema uurija, inglise statistik Karl Pearson 1900. aastal.
χ^2 –jaotuse tihedusfunktsiooni graafik on asümmeetriline ja tema kuju sõltub tugevalt vabadusastmete arvust *k*. Kui vabadusastmete arv *k* kasvab, siis χ^2 –jaotus läheneb aeglaselt normaaljaotusele parameetritega $m = k$ ja $\sigma = \sqrt{2k}$. Järgneval joonisel on toodud χ^2 –jaotuse tihedusfunktsiooni graafikud mõnede parameetri *k* väärtuste korral ja normaaljaotuse tihedusfunktsiooni graafik kui $m = 10$ ja $\sigma = \sqrt{20}$.



Dispersiooni ja standardhälbe usalduspiirkond

Olgu X normaaljaotusega juhuslik suurus, mille parameetrid m ja σ on tundmatud. Olgu $x_1, \ldots, x_n$ valim normaaljaotusega üldkogumist ning $\bar{x}$ ja s vastavalt selle valimi aritmeetiline keskmine ja standardhälve. On tõestatud, et juhuslik suurus, mis avaldub valemiga

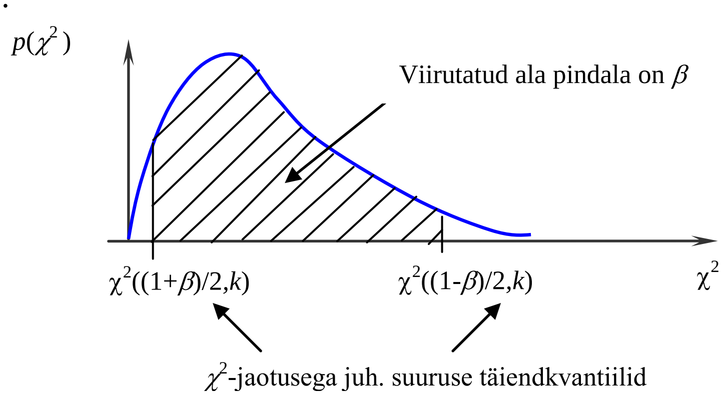
$$\frac{s^2}{\sigma^2} \cdot (n-1)$$

on χ^2–jaotusega, vabadusastmete arvuga $k = n-1$.

Lähtume täiendkvantiili mõistest (ajalooliselt on välja kujunenud kasutada χ^2–jaotuse korral kvantiilide asemel täiendkvantiile) ja asendame suuruse $\frac{s^2}{\sigma^2} \cdot (n-1)$ seosesse

$$P\left[\chi^2\left(\frac{1+\beta}{2}, k\right) < \chi^2 < \chi^2\left(\frac{1-\beta}{2}, k\right)\right] = \beta$$

suuruse χ^2 asemele.



Teisendades tekkinud võrratust, saame avaldada dispersiooni σ^2 usalduspiirkonna. Tõkked, mille vahel suurus σ^2 tõenäosusega β asub ehk dispersiooni usaldusvahemik usaldusnivooga β avaldub

$$\left(\frac{k \cdot s^2}{\chi^2\left(\frac{1-\beta}{2}, k\right)}, \frac{k \cdot s^2}{\chi^2\left(\frac{1+\beta}{2}, k\right)} \right).$$

Täiendkvantiilide $\chi^2\left(\frac{1+\beta}{2}, k\right)$ ja $\chi^2\left(\frac{1-\beta}{2}, k\right)$ väärtused leitakse tabelist.

Standardhälbe usalduspiirkonna määramisel võetakse dispersiooni kummastki usalduspiirist ruutjuur

$$\left(\sqrt{\frac{k \cdot s^2}{\chi^2\left(\frac{1-\beta}{2}, k\right)}} \quad , \quad \sqrt{\frac{k \cdot s^2}{\chi^2\left(\frac{1+\beta}{2}, k\right)}} \right).$$

<u>Näide.</u> Mõõdeti 12-ne 10-aastase puu diameetrid maast 1 meetri kõrgusel. Tulemused on toodud järgnevas tabelis:

25	21	22	26	28	23	20	24	26	22	25	26

Leida selle metsa 10-aastaste puude diameetri standardhälbe ja dispersiooni 95%-lised usalduspiirid.

<u>Lahendus.</u>

Diameetrite aritmeetiline keskmine $\bar{x} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i = 24$.

Dispersiooni punkthinnang $s^2 = \frac{1}{12-1}\sum_{i=1}^{12}(x_i - \bar{x})^2 \approx 5{,}82$.

Vabadusastmete arv $k = 12 - 1 = 11$. Usaldusnivoo $\beta = 0{,}95$. Leiame tabelist χ^2–jaotuse täiendkvantiilid $\chi^2\left(\frac{1-0{,}95}{2}, 11\right) = 21{,}920$ ja $\chi^2\left(\frac{1+0{,}95}{2}, 11\right) = 3{,}816$.

Ülldispersiooni alumine usalduspiir $\sigma_{al}^2 = \frac{k \cdot s^2}{\chi^2\left(\frac{1-\beta}{2}, k\right)} = \frac{11 \cdot 5{,}82}{21{,}92} \approx 2{,}9$

Ülldispersiooni ülemine usalduspiir $\sigma_{ül}^2 = \frac{k \cdot s^2}{\chi^2\left(\frac{1+\beta}{2}, k\right)} = \frac{11 \cdot 5{,}82}{3{,}816} \approx 16{,}8$

Seega 95%-lise tõenäosusega on selle metsa 10-aastaste puude diameetrite dispersioon 2,9 kuni 16,8.

Standardhälbe 95%-lised usalduspiirid: $\sigma_{al} = \sqrt{2{,}9} \approx 1{,}7$

$\sigma_{ül} = \sqrt{16{,}8} \approx 4{,}1$

Seega 95%-lise tõenäosusega on selle metsa 10-aastaste puude diameetrite standardhälve 1,7 kuni 4,1 m.