# Diferentsiaalvõrrandid

## Diferentsiaalvõrrandi mõiste

**Diferentsiaalvõrrandiks** nimetatakse võrrandit, milles on otsitavaks ühe või mitme muutuja funktsioon, kusjuures võrrand seob otsitavat funktsiooni tema tuletiste ja sõltumatute muutujatega.
Vastavalt sõltumatute muutujate arvule liigitatakse võrrandid harilikeks ja osatuletistega diferentsiaalvõrranditeks. Kui otsitavaks on ühe muutuja funktsioon, siis kannab võrrand **hariliku diferentsiaalvõrrandi** nime.
Näiteks võrrandid

$$y' - 2xy^2 + 5 = 0 \qquad (1)$$

$$2ydy - xdx = 0 \qquad (2)$$

$$y'' + ky' - by - \sin x = 0 \qquad (3)$$

on harilikud diferentsiaalvõrrandid, igaühes neist on otsitavaks funktsioon $y = y(x)$.
Teiseks oluliseks tunnuseks diferentsiaalvõrrandite liigitamisel on võrrandi järk. **Diferentsiaalvõrrandi järguks** nimetatakse võrrandis esinevate otsitava funktsiooni tuletiste järkudest suurimat. Näiteks võrrandid (1) ja (2) on esimest järku diferentsiaalvõrrandid, võrrand (3) aga teist järku võrrand.
Esimest järku diferentsiaalvõrrandi üldkujuks on

$$F(x, y, y') = 0.$$

Siin *x* on sõltumatu muutuja, $y = y(x)$ otsitav funktsioon, $y' = \frac{dy}{dx}$ selle tuletis, funktsioon *F* aga esitab seose nende vahel.
**Diferentsiaalvõrrandi lahendi** mõiste on intuitiivselt küllalt selge – see on funktsioon, mille asendamine võrrandisse muudab võrrandi samasuseks. Näiteks funktsioon $y = -x$ on võrrandi $y' + 1 = 0$ lahend, sest $(-x)' = -1$ ja asendamisel võrrandisse saame $-1 + 1 \equiv 0$. Selle võrrandi lahenditeks sobivad ka näiteks funktsioonid $y = -x + 1$ ja $y = -x - 1$ ehk igasugune funktsioon kujul $y = -x + c \quad (c \in R)$. Toodud näide illustreerib fakti, et üldiselt võib diferentsiaalvõrrandil olla lõpmata palju lahendeid.
**Diferentsiaalvõrrandi** $F(x, y, y') = 0$. **üldlahendiks** nimetatakse meelevaldsest konstandist *c* ja argumendist *x* sõltuvat funktsiooni $y = \varphi(x, c)$, mis rahuldab esialgset võrrandit igal konstandi *c* valikul. **Diferentsiaalvõrrandi** $F(x, y, y') = 0$. **erilahendiks** nimetatakse funktsiooni $y = y(x)$, mis saadakse üldlahendist $y = \varphi(x, c)$ konstandi *c* fikseerimisel. Seega diferentsiaalvõrrandi $y' + 1 = 0$ üldlahend on $y = -x + c$. Erilahendid on näiteks $y = -x + 1$ ja $y = -x - 1$.
Diferentsiaalvõrrandil võib olla ka lahend, mis ei ole erilahend. Sellist lahendit nimetatakse **singulaarseks lahendiks**. Võrrandi $(y')^2 = 4y$ üldlahend avaldub $y = (x + c)^2$. Aga selle võrrandi lahendiks on ka funktsioon $y = 0$ kuna $(0')^2 = 0 = 4 \cdot 0$. See lahend ei ole aga antud võrrandi erilahend, sest ta ei ole saadav üldlahendist ühegi *c* väärtuse korral. Seega $y = 0$ on võrrandi singulaarne lahend.

*__Näide__* Näidata, et funktsioon $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ ($c_1$ ja $c_2$ on suvalised konstandid) on diferentsiaalvõrrandi $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ lahend. (Meenutame, et $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.)

Leiame tuletised

$$y' = \frac{dy}{dx} = C_1 \cos x - C_2 \sin x,$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -C_1 \sin x - C_2 \cos x,$$

ja asendame lahendi $y(x)$ ning teist järku tuletise algvõrrandisse

$$(-C_1 \sin x - C_2 \cos x) + (C_1 \sin x + C_2 \cos x) \equiv 0.$$

Saadud samasus näitab, et funktsioon $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ sobib võrrandi $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ lahendiks.

## Näide ülesandest, mis toob diferentsiaalvõrrandi juurde

Paljud matemaatika, füüsika, mehaanika, tehnika, bioloogia jt teadusalade probleemid on formuleeritavad diferentsiaalvõrrandite kujul ning nende probleemide käsitlus taandub diferentsiaalvõrrandite lahendamisele.

Vaatame ühte näidet diferentsiaalvõrrandi tekkimisest. Olgu $y(t)$ mingi bakteriliigi isendite arv ajamomendil *t*. Liigi arvukuse muutumise kiirus $v = y'(t) = \frac{dy}{dt}$ on proportsionaalne isendite arvuga (Malthuse seadus), seega

$$\frac{dy}{dt} = ay.$$

Lihtsuse mõttes eeldame, et võrdetegur $a$ on konstantne. Sõltuvalt keskkonnast, eriti toidu piisavusest, on $a$ positiivne (toitu on küllalt) või negatiivne (toidupuudusel hakatakse õgima liigikaaslasi). Vaadeldud võrrandi lahendiks on

$$y = y_0 e^{at}.$$

kus $y_0$ on liigi isendite arv algmomendil. Näeme, et $a > 0$ korral toimub liigi arvukuse eksponentsiaalne kasv, $a < 0$ korral aga eksponentsiaalne kahanemine.

## Diferentsiaalvõrrandite lahendamine

Diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks pole ühtset lahendusvõtet. Lahendusvõte sõltub võrrandi kujust ja liigist. Järgnevas tutvume mõningate lihtsamate diferentsiaalvõrrandite lahendusvõtetega.

### Eraldatud muutujatega võrrand

Sellist nime kannab diferentsiaalvõrrand

$$M(x)dx + N(y)dy = 0,$$

milles $dx$ kordaja sõltub vaid muutujast *x* ja $dy$ kordaja vaid muutujast *y*. Sellise võrrandi lahendamiseks tuleb leida määramata integraal kordajatest $M(x)$ ja $N(y)$.

*Näide* Lahendada võrrand $dx+(2y+1)dy=0$

Tegu on eraldatud muutujatega võrrandiga, kus $M(x)=1$ ja $N(y)=2y+1$. Lahendamiseks integreerime võrrandit liikmeti

$$\int dx+\int(2y+1)dy=\int 0,$$

saame

$$x+y^2+y=C.$$

Saadud funktsioon $x+y^2+y=C$ on võrrandi $dx+(2y+1)dy=0$ üldlahend.

### Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$$

on äratuntav selle järgi, et nii $dx$ kui ka $dy$ kordaja on kahe funktsiooni korrutis, millest üks sõltub ainult muutujast *x*, teine ainult muutujast *y*. Tuues $M_2(x)N_1(y)$ sulgude ette, saame võrrandi esitada kujul

$$M_2(x)N_1(y)\left(\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy\right)=0.$$

Võrrandi teisendamist sellisele kujule nimetatakse **muutujate eraldamiseks**. Näeme, et võrrand on rahuldatud kui

$$M_2(x)=0,\ N_1(y)=0 \text{ või } \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0.$$

Võrrandi üldlahend leitakse seosest

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0$$

liikmeti integreerides

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=c.$$

*Näide* Leida võrrandi $y'=y$ üldlahend.

Kirjutame $y'$ kujul $\frac{dy}{dx}$, saame

$$\frac{dy}{dx}=y.$$

Korrutame võrrandi pooled nimetajas oleva suurusega $dx$

$$dy-ydx=0.$$

Eraldame muutujad

$$y\left(\frac{1}{y}dy-dx\right)=0,$$

millest

$$y=0 \text{ või } \frac{1}{y}dy-dx=0.$$

Integreerime

$$\int \frac{1}{y} dy - \int dx = \int 0$$

$$\ln|y| - x = c\,.$$

Seega võrrandi üldlahend on $\ln|y| - x = C$. Kõik lahendid avalduvad kujul $\ln|y| - x = C$ ja $y = 0$.