Piirväärtus

Punkti a ümbruseks nimetatakse suvalist vahemikku, millesse see punkt kuulub. ***Punkti a ümbruseks raadiusega ε* > 0**, nimetatakse arvtelje vahemikku arvust $a-\varepsilon$ kuni $a+\varepsilon$.

Arv *x* kuulub arvu *a* ümbrusesse raadiusega ε, kui

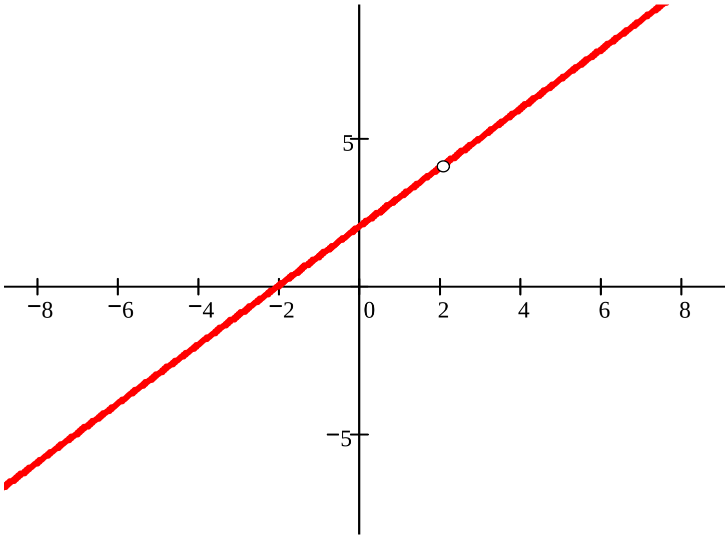
$$a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$$

$$-\varepsilon < x-a < \varepsilon$$

$$|x-a| < \varepsilon$$

Reaalarvu *a* ***parempoolseks ümbruseks*** (täpsemalt *ε*-ümbruseks) nimetatakse arvtelje vahemikku arvust *a* kuni $a+\varepsilon$, ***vasakpoolseks ümbruseks*** aga arvtelje vahemikku arvust $a-\varepsilon$ kuni *a*.

Seame endale eesmärgiks uurida funktsiooni $f(x)$ väärtuse muutumist, kui argument *x* muutub arvu *a* ümbruses. Vaatleme funktsiooni $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$. Tema määramispiirkonnaks on kogu reaalarvude hulk, välja arvatud 2. Sümbolites $X=(-\infty;2)\cup(2;\infty)$.



Graafiku seisukohalt tähendab see, et argumendi iga väärtuse $x \neq 2$ korral on graafikul punkt olemas, kuid $x=2$ korral graafikul punkt puudub. Märgime graafikul puuduva punkti seest tühja ringikesega.
Vaatleme funktsiooni väärtuste muutumist kui argument *x* muutub arvu 2 ümbruses.

x	1,5	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1	2,5
f (*x*)	3,5	3,9	3,99	3,999	4,001	4,01	4,1	4,5

Järeldus: argumendi väärtuse (arv 2) ümbruse vähenedes väheneb ka funktsiooni väärtuse (arv 4) ümbrus.

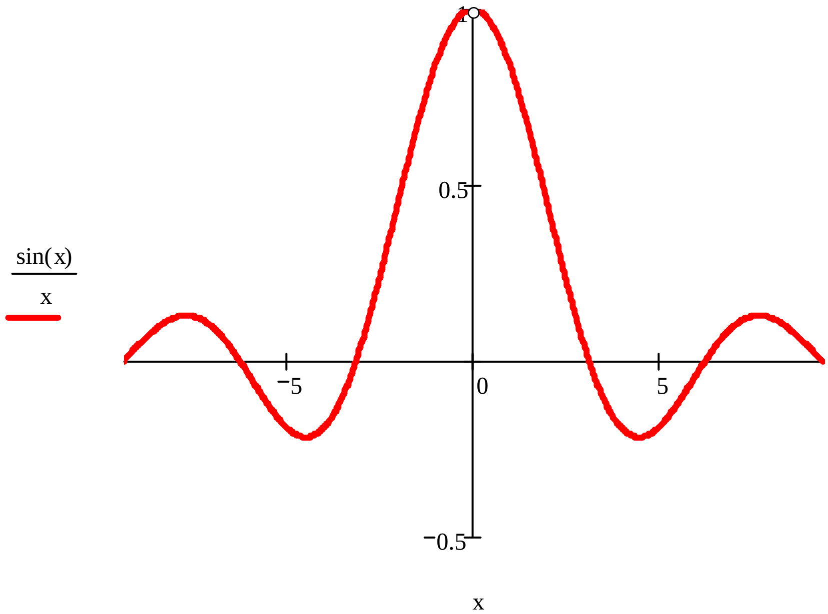
Kui argumendi väärtuse (arvu 2) ümbruse vähendamisega saab muuta funktsiooni vastava väärtuse (arvu 4) ümbruse kuitahes väikeseks, siis öeldakse, et arv 4 on funktsiooni $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ piirväärtus, kui x läheneb arvule 2 ja kirjutatakse

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4\,.$$

Paneme tähele, et funktsiooni piirväärtus ei ütle, missugune on funktsiooni väärtus vaadeldaval kohal, ta iseloomustab vaid funktsiooni väärtusi vaadeldava koha ümbruses.

Uurime funktsiooni $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ käitumist. Selle funktsiooni määramispiirkond on $X=\{(-\infty;0);(0;\infty)\}$. Vaatleme funktsiooni väärtuste muutumist kui argument x muutub arvu 0 ümbruses.

x	-0,5	-0,3	-0,1	-0,05	0,05	0,1	0,3	0,5
f(*x*)	0,9589	0,9851	0,9983	0,9996	0,9996	0,9983	0,9851	0,9589

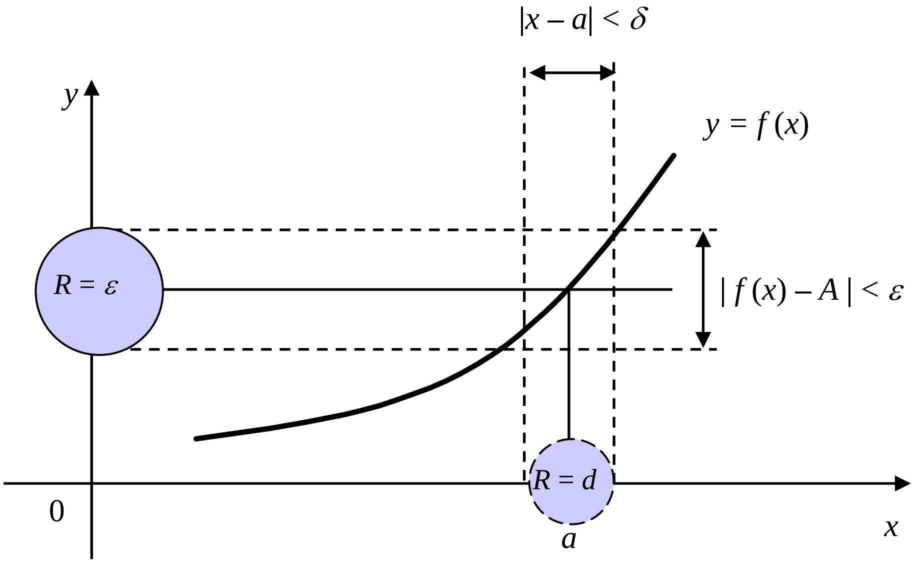


Näeme, et kui argumendi väärtused lähenevad 0-le, siis funktsiooni väärtused lähenevad 1-le ehk

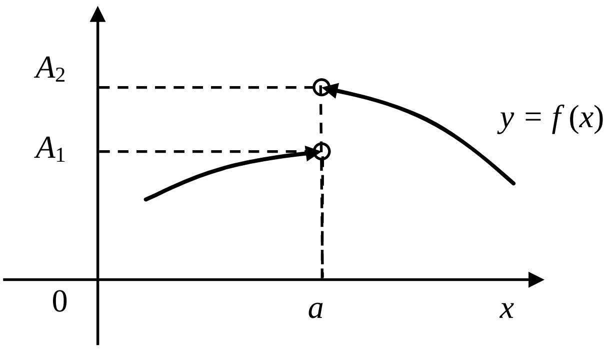
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\,.$$

Esitame nüüd funktsiooni piirväärtuse üldise definitsiooni.
<u>Tähistame</u>
argumendi x väärtuse tähega a;
argumendi ümbruse raadiuse tähega $\delta > 0$;
funktsiooni $f(x)$ vastava väärtuse tähega A;
funktsiooni $f(x)$ vastava väärtuse ümbruse raadiuse tähega $\varepsilon > 0$.
Tingimust x kuulub a ümbrusse raadiusega $\delta > 0$ väljendab võrratus $|x-a|<\delta$.
Tingimust $f(x)$ kuulub A ümbrusse raadiusega $\varepsilon > 0$ väljendab võrratus $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Arvu A nimetatakse **funktsiooni *f* piirväärtuseks** kohal a, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub niisugune arv $\delta > 0$, et kehtib võrratus $|f(x) - A| < \varepsilon$ alati kui $|x - a| < \delta$ ja kirjutatakse $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.



Kui funktsioon $f(x)$ läheneb piirväärtusele A_1 argumendi x lähenemisel mingile arvule a nii, et x omandab ainult arvust a väiksemaid väärtusi, siis kirjutatakse $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A_1$ ja arvu A_1 nimetatakse funktsiooni $f(x)$ ***vasakpoolseks piirväärtuseks*** punktis a.
Kui x omandab ainult arvust a suuremaid väärtusi, siis kirjutatakse $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A_2$ ja arvu A_2 nimetatakse funktsiooni $f(x)$ ***parempoolseks piirväärtuseks*** punktis a.



Funktsiooni piirväärtuse arvutamine

Funktsiooni piirväärtuse arvutamisel kasutatakse järgnevaid piirväärtuse omadusi.

$$\lim_{x \to a} c = c, \quad c = const$$

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} \left[c \cdot f(x) \right] = c \cdot \lim_{x \to a} f(x), \quad c = const$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$