Funktsiooni mõiste

Olgu X mingi reaalarvude hulk. Kui muutuja x igale väärtusele hulgas X vastab muutuja y üks kindel väärtus, siis öeldakse, et y on muutuja x **funktsioon**.

Näide 1. uurime vastavust inimeste ja kodakondsuste vahel. Selgub, et selline vastavus ei ole funktsioon, sest leidub inimesi, kellel on mitme riigi kodakondsus ja leidub ka kodakondsuseta isikuid.

Näide 2. uurime seost Eesti Vabariigi kodanike ja nende vastavate isikukoodide vahel. Ilmneb, et sel juhul on tegu funktsiooniga, sest igale Eesti Vabariigi kodanikule vastab üks kindla eeskirja järgi määratud isikukood.

Asjaolu, et üks muutuja on teise funktsioon, tähistatakse $y = f(x)$ (või $y = y(x)$, $y = \varphi(x)$ jne.). Muutujat x nimetatakse seejuures **sõltumatuks muutujaks** e. **argumendiks**. Muutujat y, mille väärtused leitakse vastavalt sõltumatu muutuja väärtustele, nimetatakse **sõltuvaks muutujaks**.

Argumendi x väärtuste hulka, mille puhul saab määrata funktsiooni y väärtusi vastavalt eeskirjale $y = f(x)$, nimetatakse **funktsiooni määramispiirkonnaks**. Määramispiirkonnale vastavat funktsiooni väärtuste hulka Y nimetatakse **funktsiooni muutumispiirkonnaks**.

Funktsiooni esitusviisid

Funktsiooni esitamiseks tuleb näidata, kuidas argumendi väärtusele x on vastavusse seatud funktsiooni väärtus y. Kõige enam kasutatakse funktsiooni kolme järgmist esitusviisi:

1. Funktsiooni esitus tabelina

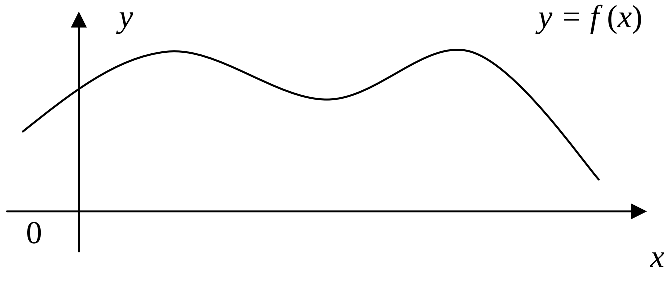
Tabelis esitatakse ühes reas (või veerus) argumendi x väärtused, teises reas (veerus) sellele vastavad funktsiooni väärtused.

$\boldsymbol{x}$	x_1	x_2	…	x_n
$\boldsymbol{y}$	y_1	y_2	…	y_n

Sellised on näiteks trigonomeetriliste funktsioonide tabelid, logaritmide tabelid jne. Ka nähtuste katselisel uurimisel võime saada tabelid. Näiteks õhu temperatuuri mõõtmise tulemused erinevatel kellaaegadel võib koondada tabelisse. Selline tabel määrab temperatuuri aja funktsioonina.

2. Funktsiooni graafiline esitusviis

Funktsiooni graafilise esitusviisi all mõistetakse funktsiooni graafikut tasandil. Kasutatakse eksperimentaalsete tulemuste märkimiseks isekirjutavate mõõteseadmete puhul. Samuti paljudel juhtudel muutumise käigu iseloomustamiseks teiste esitusviiside kõrval. Viimasel juhul lisatakse graafikule ka funktsiooni esitav valem.



3. Funktsiooni analüütiline esitusviis

Matemaatilises analüüsis määratakse funktsioon kõige sagedamini valemiga ehk analüütiliselt. Eristatakse omakorda kolme alamjuhtu:

- Ilmutatud kuju $y = f(x)$

  Funktsiooni esitus, kus üks muutuja on avaldatud teise kaudu.

  Näide. $y = \ln(x^2 + 1)$.

- Ilmutamata kujul $f(x, y) = 0$

  Funktsioon on määratud niisuguse kaht muutujat sisaldava võrrandiga, milles üks muutuja ei ole teise kaudu avaldatud.

  Näide. $x^2 + \sin y = 0$.

- Parameetriline kuju $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \qquad t \in T \subseteq R$

  Funktsionaalse sõltuvuse esitamine abimuutuja kaudu. Abimuutujat t nimetatakse parameetriks. Sageli kasutakse parameetrilist esitusviisi punkti liikumise kirjeldamisel.

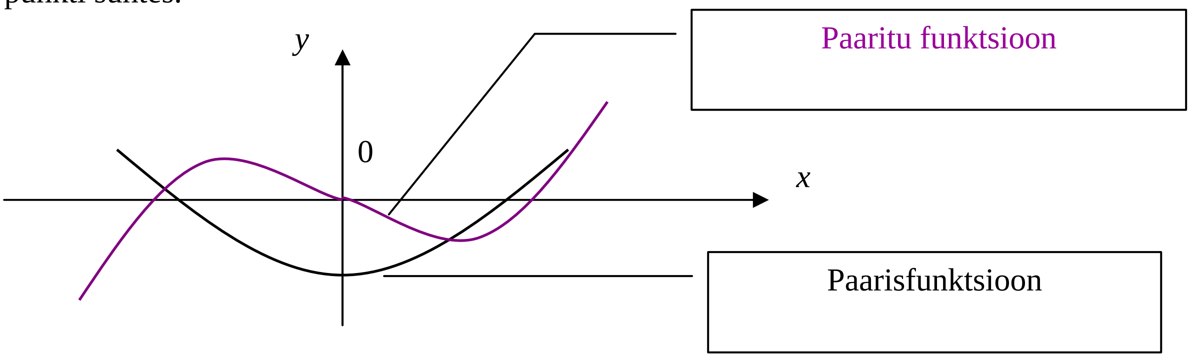
  Näide. $\begin{cases} x = 5 \cdot \cos(\varphi) \\ y = 6 \cdot \sin(\varphi) \end{cases}, \qquad \varphi \in [0;\ 2\pi]$.

Funktsioonide liigitamine

Paaris- ja paaritud funktsioonid

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse **paarisfunktsiooniks**, kui $f(-x) = f(x)$ ja **paarituks funktsiooniks**, kui $f(-x) = -f(x)$ iga x korral määramispiirkonnast X.

Paarisfunktsiooni graafik on sümmeetriline y-telje suhtes, paaritu funktsiooni graafik aga 0-punkti suhtes.



Näide. Funktsioonid $y = \cos x$ ja $y = x^2$ on paarisfunktsioonid. Funktsioonid $y = \sin x$ ja $y = x^3$ on paaritud.

Perioodilised funktsioonid

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse **perioodiliseks**, kui leidub selline nullist erinev reaalarv ω, nii et $f(x + \omega) = f(x)$ iga $x \in X$ korral.

Vähimat ω positiivset väärtust, mille korral see võrdus kehtib, nimetatakse funktsiooni **perioodiks**.

Näide. Kõik trigonomeetrilised funktsioonid on perioodilised. Sealjuures on funktsiooni $y = \tan x$ periood $\omega = \pi$ ja funktsioonide $y = \sin x$, $y = \cos x$ periood $\omega = 2\pi$.

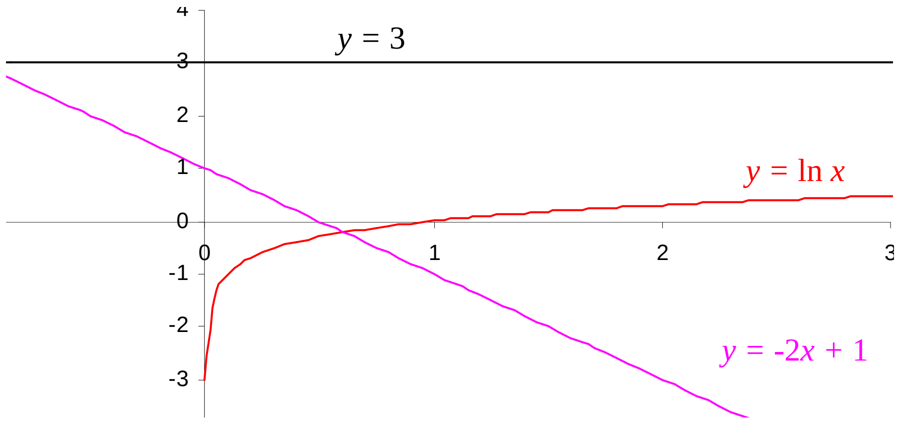
Monotoonsed funktsioonid

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse piirkonnas A

kasvavaks,	kui $a < b$	$\Rightarrow f(a) < f(b)$;
monotoonselt kasvavaks,	kui $a < b$	$\Rightarrow f(a) \le f(b)$;
kahanevaks,	kui $a < b$	$\Rightarrow f(a) > f(b)$;
monotoonselt kahanevaks,	kui $a < b$	$\Rightarrow f(a) \ge f(b)$;

iga $a, b \in A$ korral.

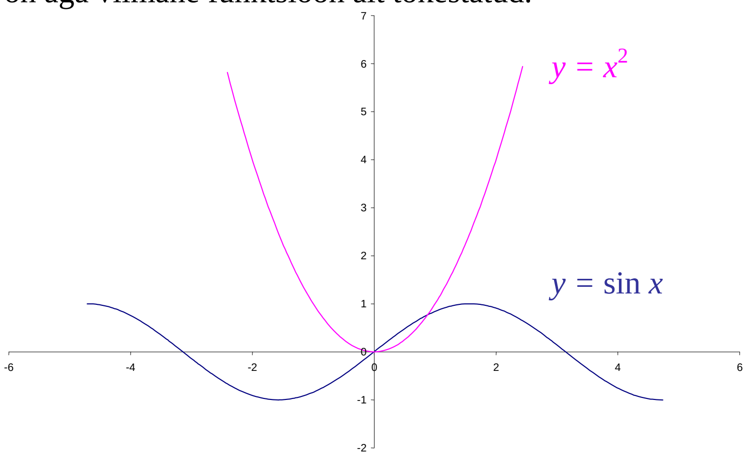
Näide. Funktsioon $y = \ln x$ on kasvav funktsioon, funktsioon $y = -2x + 1$ aga kahanev funktsioon. Konstantset funktsiooni $y = 3$ võib lugeda nii monotoonselt kasvavaks kui ka monotoonselt kahanevaks funktsiooniks.



Tõkestatud funktsioonid

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse piirkonnas A **tõkestatuks**, kui leidub reaalarv k, nii et $|f(x)| \le k$ iga $x \in A$ korral. Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse piirkonnas A **ülalt tõkestatuks**, kui leidub reaalarv k', nii et $f(x) \le k'$ iga $x \in A$ korral, ja **alt tõkestatuks**, kui leidub k" nii et $f(x) \ge k''$ iga $x \in A$ korral.

Näide. Tõkestatud funktsioon on näiteks $y = \sin x$, tõkestamata funktsioon aga $y = x^2$. Küll on aga viimane funktsioon alt tõkestatud.



Elementaarsed põhifunktsioonid

Matemaatilise analüüsi arengus on ajalooliselt välja kujunenud nn. elementaarfunktsioonide klass, mis koosneb kõige lihtsamate omadustega, kõige enam uuritud ning analüüsi rakendustes kõige sagedamini esinevatest funktsioonidest. Tutvume kõigepealt nn. põhiliste elementaarfunktsioonidega, millest tulenevad kõik teised elementaarfunktsioonid lihtsate operatsioonide teel.

Elementaarseteks põhifunktsioonideks nimetatakse järgmisi analüütiliselt antud funktsioone:

- konstantne funktsioon: $y = c$
- astmefunktsioon: $y = x^a$, kus a on reaalarv
- eksponentfunktsioon: $y = a^x$, kus a on ühest erinev positiivne arv
- logaritmfunktsioon: $y = \log_a x$, kus logaritmide alus a on ühest erinev positiivne arv
- trigonomeetrilised funktsioonid: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$
- arkusfunktsioonid: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = arc\cot x$.

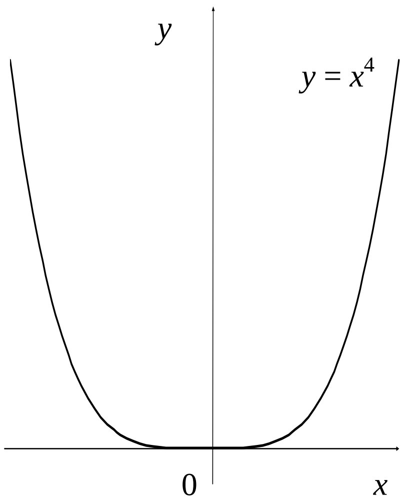
Vaatleme järgnevalt elementaarsete põhifunktsioonide määramispiirkondi ja graafikuid.

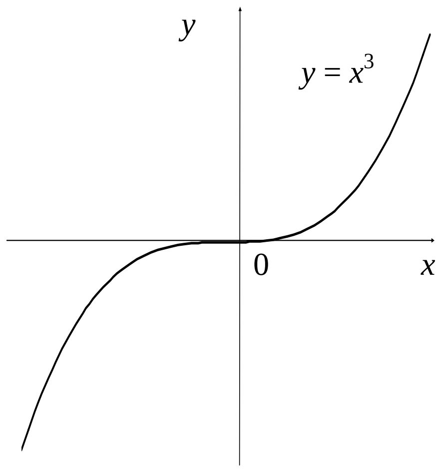
Astmefunktsioon

Astmefunktsiooni määramispiirkond sõltub astendajast a ja seda tuleb igal konkreetsel juhul eraldi uurida. Vaatame kõigepealt juhte, kus astendajaks on täisarv.

1. **Astmefunktsioon $y = x^a$, a on positiivne täisarv.**

Järgmisel joonisel on esitatud funktsioonide $y = x^4$ ja $y = x^3$ graafikud. Kuna funktsiooni väärtused on väljaarvutatavad iga argumendi väärtuse korral, siis on selliste funktsioonide määramispiirkonnaks kogu reaalarvude hulk.

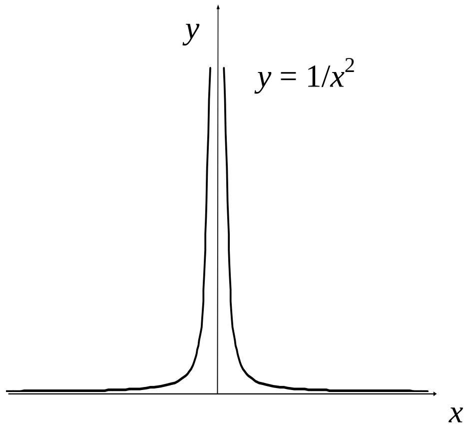


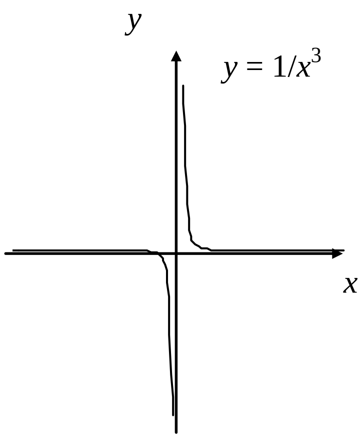


Määramispiirkond $X = (-\infty; \infty)$.

2. **Astmefunktsioon $y = x^a$, a on negatiivne täisarv.**

Järgmisel joonisel on esitatud funktsioonide $y = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ ja $y = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$ graafikud. Et nulliga jagada ei saa, ei kuulu arv 0 nende funktsioonide määramispiirkonda.

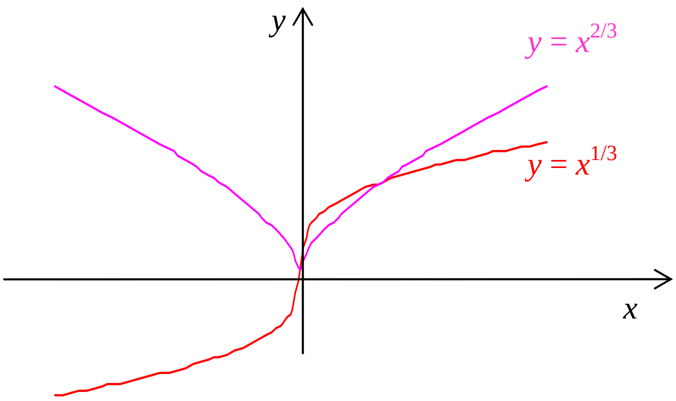




Määramispiirkond $X = (-\infty;0) \cup (0;\infty)$.

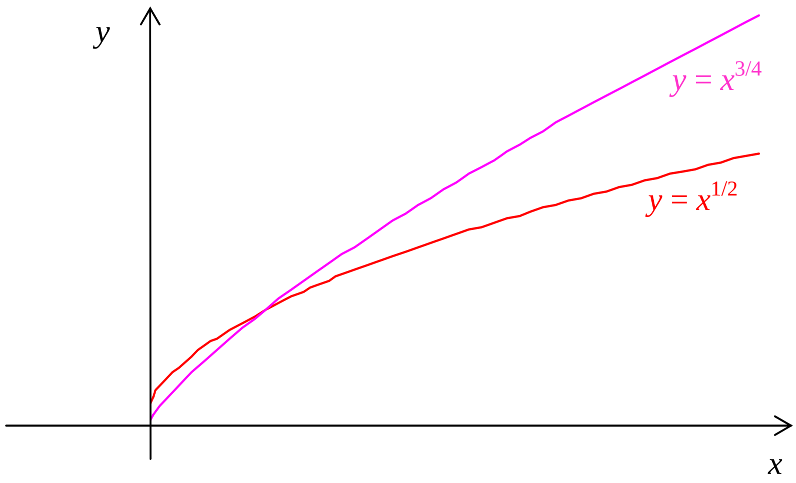
3. Astmefunktsioon $y = x^a$, *a* on positiivne murd.

Osutub, et murrulise astendaja korral sõltub funktsiooni käitumine ka sellest kas nimetajas on paari- või paaritu arv. Järgmisel joonisel on esitatud funktsioonide $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ ja $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ graafikud. Kuna funktsiooni väärtused on väljaarvutatavad iga argumendi väärtuse korral, siis on selliste funktsioonide määramispiirkonnaks kogu reaalarvude hulk.



Paarituarvulise nimetaja korral määramispiirkond $X = (-\infty;\infty)$.

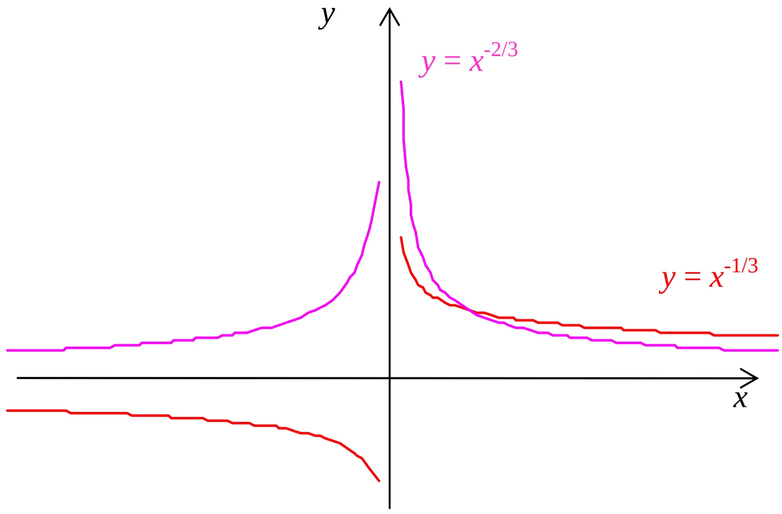
Järgmisel joonisel on esitatud funktsioonide $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ ja $y = x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$ graafikud. Kuna paarisarvulise juurijaga juurt ei saa võtta negatiivsetest arvudest, siis ei kuulu negatiivsed reaalarvud selliste funktsioonide määramispiirkonda.



Paarisarvulise nimetaja korral määramispiirkond $X = [0;\infty)$

4. **Astmefunktsioon $y = x^a$, *a* on negatiivne murd**

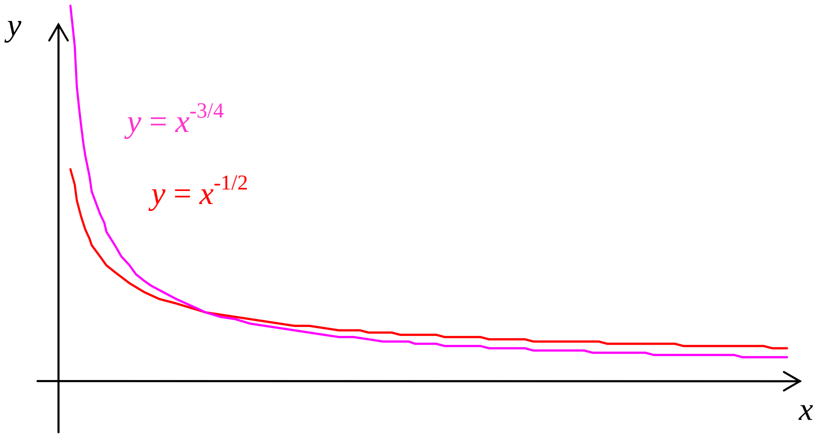
Järgmisel joonisel on esitatud funktsioonide $y = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ja $y = x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ graafikud. Et nulliga jagada ei saa, ei kuulu arv 0 nende funktsioonide määramispiirkonda.



Paarituarvulise nimetaja puhul määramispiirkond $X = (-\infty;0)\cup(0;\infty)$

Järgmisel joonisel on esitatud funktsioonide $y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ja $y = x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ graafikud.

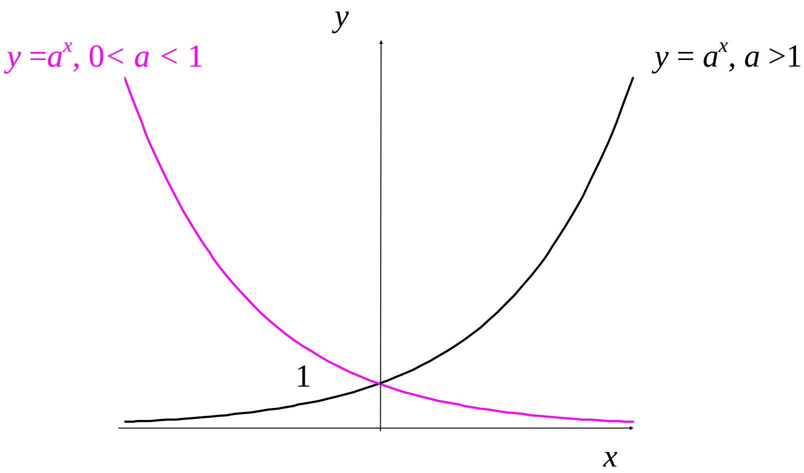
Kuna paarisarvulise juurijaga juurt ei saa võtta negatiivsetest arvudest ja nulliga jagamine pole defineeritud, siis ei kuulu negatiivsed reaalarvud ja arv null selliste funktsioonide määramispiirkonda.



Paarisarvulise nimetaja korral määramispiirkond $X = (0;\infty)$.

Eksponentfunktsioon

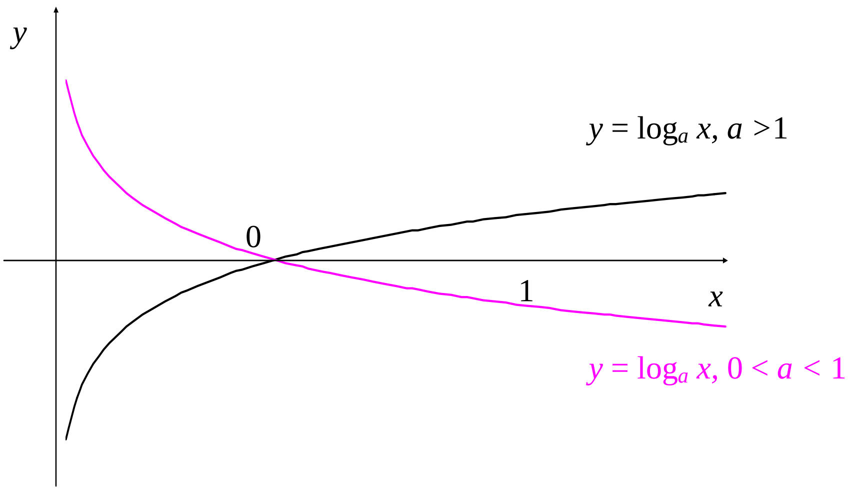
Eksponentfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni $y = a^x$, kus a on ühest erinev positiivne arv. Nagu näha järgmiselt jooniselt sõltub eksponentfunktsiooni käitumine a väärtusest. Kui $a > 1$, siis on eksponentfunktsioon $y = a^x$ kasvav, kui $0 < a < 1$, siis see funktsioon on kahanev. Märgime veel, et eksponentfunktsioonil puuduvad nullkohad ja negatiivsuspiirkond.



Määramispiirkond $X = (-\infty;\infty)$.

Logaritmfunktsioon

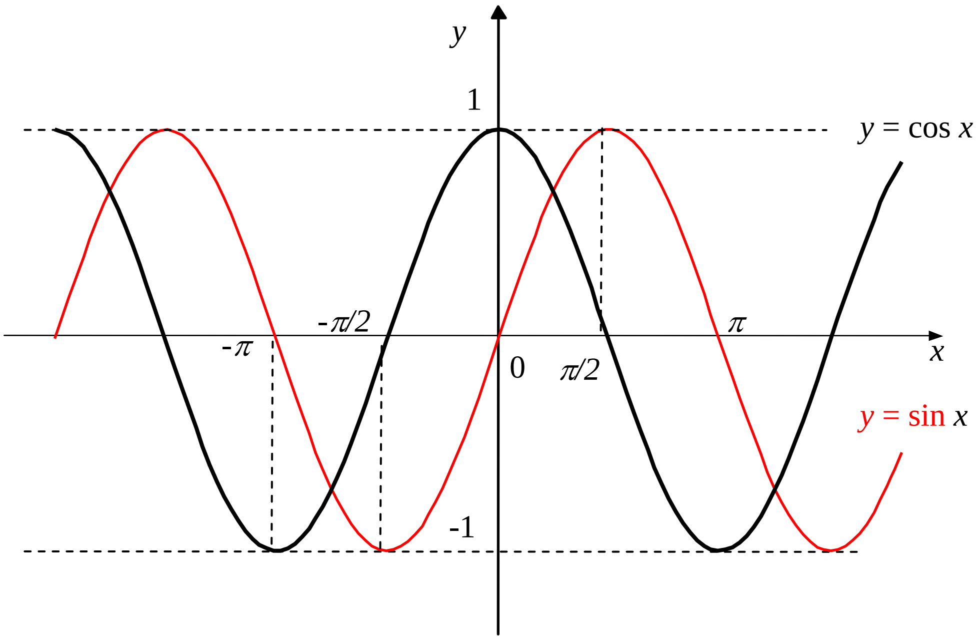
Logaritmfunktsioon on eksponentfunktsiooni pöördfunktsioon.



Määramispiirkond $X = (0;\infty)$.

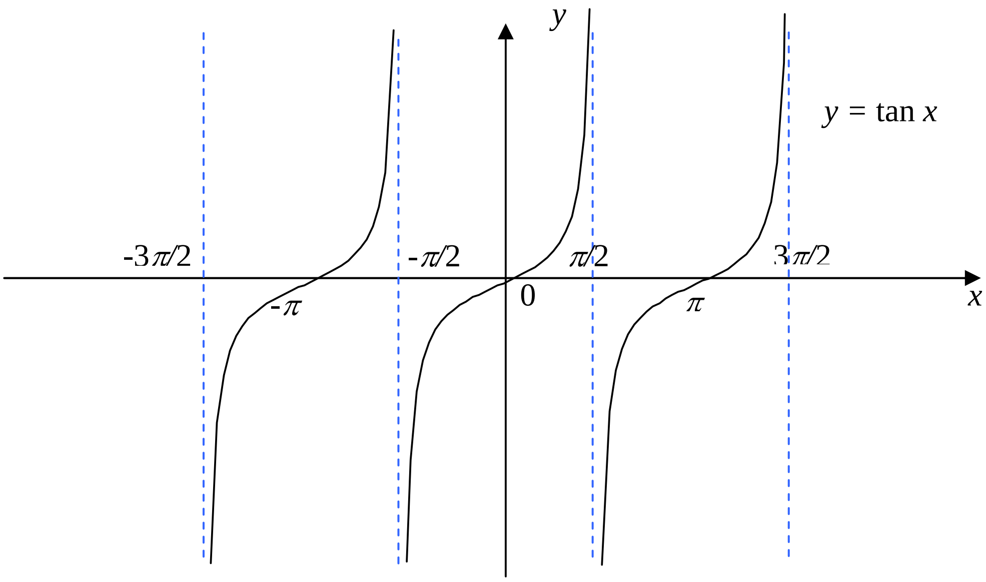
Trigonomeetrilised funktsioonid

Funktsioonide $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ määramispiirkonnaks on kogu reaalarvude hulk. Mõlemad funktsioonid on perioodilised perioodiga 2π. Funktsioon $y = \sin x$ on paaritu, $y = \cos x$ aga paarisfunktsioon.



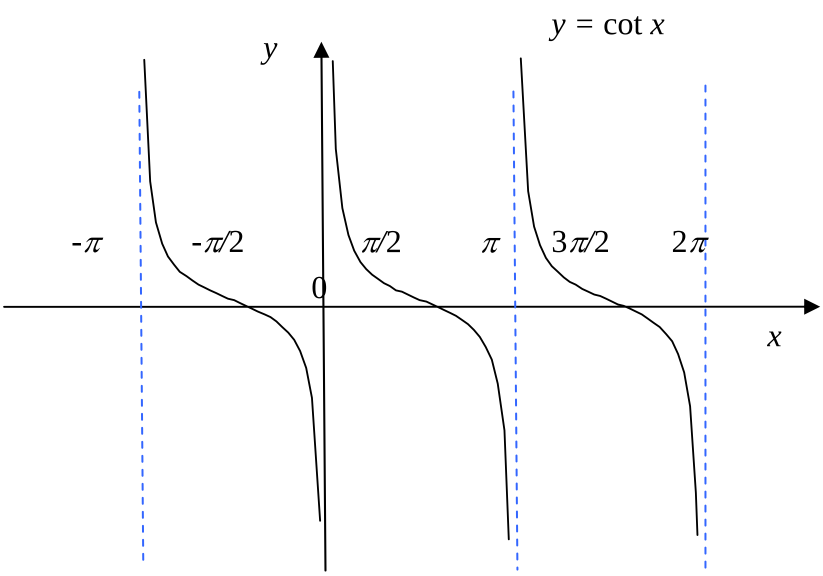
Määramispiirkond $X = (-\infty;\infty)$.

Funktsiooni $y = \tan x$ määramispiirkonnaks on reaalarvude hulk, millest on välja arvatud arvud kujul $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$. Tangensfunktsioon on paaritu funktsioon ja perioodiline funktsioon perioodiga π.



Määramispiirkond $X = (-\infty;\infty) \setminus (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$.

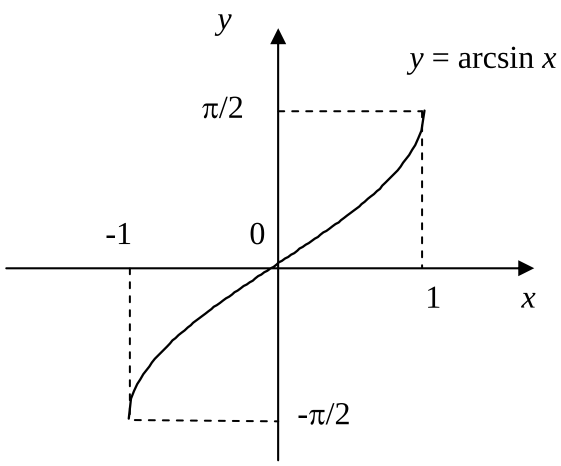
Funktsiooni $y = \cot x$ määramispiirkonnaks on reaalarvude hulk, millest on välja arvatud arvud kujul $k\pi$, $k \in Z$. Funktsioon on paaritu ja perioodiline perioodiga π.



Määramispiirkond $X = (-\infty;\infty) \setminus k\pi$.

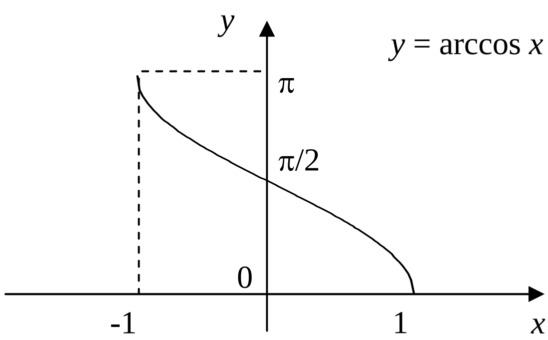
Arkusfunktsioonid

Arkusfunktsioonid on trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid. Esitame siinkohal vaid vastavate funktsioonide graafikud ning määramis- ja muutumispiirkonnad. Järgmises jaotuses „Pöördfunktsioon" räägime pöördfunktsioonidest ja funktsioonist $y = \arcsin x$ täpsemalt.



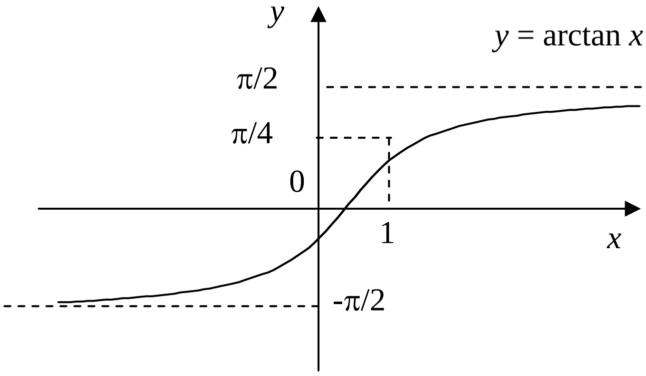
Määramispiirkond $X = [-1;1]$.

Muutumispiirkond $Y = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.



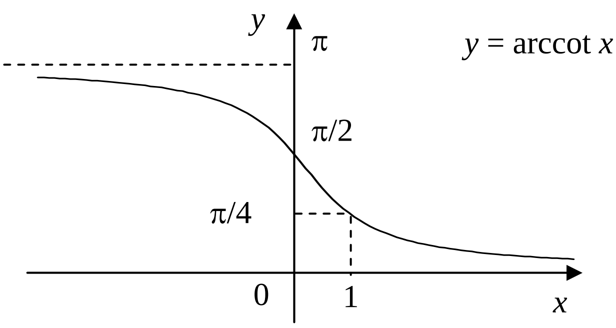
Määramispiirkond $X = [-1;1]$.

Muutumispiirkond $Y = [0;\pi]$.



Määramispiirkond $X = (-\infty;\infty)$.

Muutumispiirkond $Y = \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.



Määramispiirkond $X = (-\infty; \infty)$.
Muutumispiirkond $Y = (0; \pi)$.

Elementaarfunktsioon

Elementaarfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni, mis saadakse põhielementaarfunktsioonidest lõpliku arvu aritmeetiliste tehete ja liitfunktsioonide moodustamise tulemusena.

Näide. $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ $y = \sqrt[3]{1-\cos x}$ $y = \ln(x + \sqrt{1-x^2})$ $y = e^{\arctan x}$

Liitfunktsioon

Sageli ei sõltu funktsioon oma argumendist mitte otseselt, vaid kaudselt.
Näide. Pendelkella võnkeperiood T sõltub pendli pikkusest l, see pikkus aga omakorda temperatuurist t, nii et võnkeperiood sõltub ka temperatuurist, kuid mitte otseselt, vaid pendli pikkuse kaudu. Sümbolites $T = f(l)$, $l = g(t)$, nii et $T = f[g(t)]$.

Öeldakse, et võnkeperiood T on temperatuuri t **liitfunktsioon** e. funktsiooni funktsioon e. funktsioonide f ja g kompositsioon. Funktsiooni f argumendiks olevat funktsiooni g nimetatakse ka **argumentfunktsiooniks**.
Sõnastame nüüd liitfunktsiooni mõiste pisut üldisemalt. Olgu y muutuja u funktsioon: $y = f(u)$ ja u on omakorda muutuja x funktsioon: $u = g(x)$. Nendest moodustatud funktsiooni $y = f[g(x)]$ nimetatakse **liitfunktsiooniks**.

Funktsioone g ja f nimetatakse liitfunktsiooni y koostisosadeks e. komponentideks. Funktsiooni f argumendiks oleva funktsiooni g puhul kasutatakse ka mõistet "**sisemine funktsioon**"; funktsiooni f ennast nimetatakse seejuures "**välimiseks funktsiooniks**".
Liitfunktsiooni korral kasutatakse ka tähistust

$$(f \circ g)(x) \equiv f[g(x)].$$

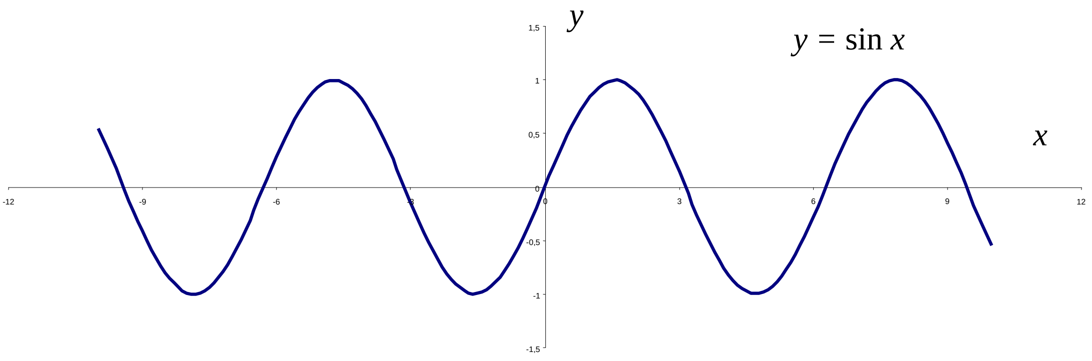
Märgime, et liitfunktsiooni moodustamise operatsiooni võib teostada mitte üks, vaid mistahes arv kordi.
Näide. Olgu $y = f(u) = u^2$ ja $u = \sin x$, siis vastav liitfunktsioon on $y = \sin^2 x$.

Pöördfunktsioon

Olgu funktsiooni $y = f(x)$ määramispiirkond X ja muutumispiirkond Y. Kui iga $y \in Y$ korral leidub täpselt üks $x \in X$, nii et $y = f(x)$, siis öeldakse, et funktsioonil $y = f(x)$ on olemas **pöördfunktsioon**. Pöördfunktsiooni määramispiirkonnaks on esialgse funktsiooni muutumispiirkond ja muutumispiirkonnaks esialgse funktsiooni määramispiirkond.

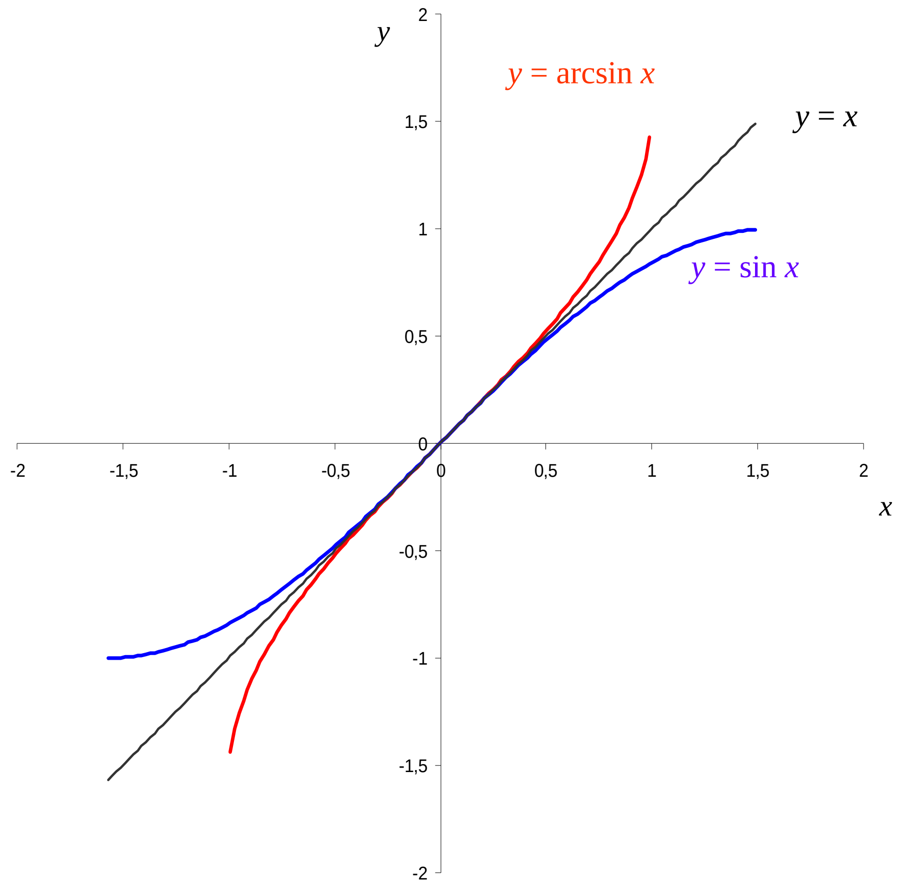
Pöördfunktsiooni tähistatakse $x = f^{-1}(y)$. (Mõnikord kasutatakse ka ümbertähistust, tähistades pöördfunktsiooni avaldises argumendi tähega *x* ja funktsiooni tähega *y*. Meie kasutame sellist ümbertähistust vaid juhul, kui funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni on tarvis kujutada samal joonisel.)

<u>*Näide:*</u> Funktsiooni $y = \sin x$ korral vastab argumendi *x* igale väärtusele üks funktsiooni väärtus, kuid iga funktsiooni väärtus vastab mitmele (lõpmata paljudele) argumendi väärtustele. Näiteks funktsiooni väärtus 0,5 vastab argumendi väärtustele $\ldots;-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\ldots$. Seetõttu puudub funktsioonil $y = \sin x$ pöördfunktsioon.



Selleks, et leida funktsiooni $y = \sin x$ pöördfunktsiooni, peame kitsendama ta määramispiirkonda, näiteks vaatlema seda funktsiooni lõiguks $X = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Nüüd on pöördfunktsiooni definitsioonis olev ühesuse nõue täidetud. Selliselt saadud funktsiooni tähistatakse kujul $y = \arcsin x$ ja seda nimetatakse funktsiooni $y = \sin x$ pöördfunktsiooniks.

Nagu teame on funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni graafikud sümmeetrilised sirge $y = x$ suhtes. Seda arvestades saab joonistada funktsiooni $y = \arcsin x$ graafiku.



Näide. Leiame funktsiooni $y = \log(1-x)$ pöördfunktsiooni.

Leiame õigepealt esialgse funktsiooni $y = \log(1-x)$ määramispiirkonna ja muutumispiirkonna. Kuna logaritmida saab vaid positiivseid arve siis saame $1-x>0$ $\Leftrightarrow$ $x<1$ ehk $X=(-\infty;1)$. Muutumispiirkonnaks on logaritmfunktsiooni muutumispiirkond: $Y=(-\infty;+\infty)$.

Pöördfunktsiooni arvutuseeskirja saamiseks tuleb võrrandist $y=\log(1-x)$ avaldada muutuja x: $y=\log(1-x)$ $\Leftrightarrow$ $10^y=1-x$ $\Leftrightarrow$ $x=1-10^y$.

Kokkuvõttes oleme saanud, et funktsiooni $y=\log(1-x)$ pöördfunktsioon on $x=1-10^y$, pöördfunktsiooni määramispiirkond on $Y=(-\infty;+\infty)$, pöördfunktsiooni muutumispiirkond on $X=(-\infty;1)$.