Kompleksarvud

Imaginaarühik

Reaalarvude vallas ei ole igal võrrandil lahendit.

Näiteks puudub lahend ruutvõrrandil

$$x^2 + 1 = 0. \tag{1}$$

Et oleks võimalik lahendada iga ruutvõrrandit, on kasutusele võetud *imaginaarühik*, mida tähistatakse sümboliga i:

$$\boxed{i^2 = -1.}$$

Vastavalt ruutjuure mõistele on siis

$$\sqrt{-1} = i.$$

Ruutvõrrandi (1) lahenditeks saame:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Kompleksarvu mõiste

Ruutvõrrandit

$$x^2 - 6x + 13 = 0$$

lahendades saame:

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{-4} = 3 \pm \sqrt{4 \cdot (-1)} = 3 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 3 \pm 2i$$

Seega

$$x_1 = 3 + 2i \qquad \text{ja} \qquad x_2 = 3 - 2i.$$

Arve kujul *a* + *bi*, kus *a* ja *b* on mistahes reaalarvud ja *i* imaginaarühik, nimetatakse *kompleksarvudeks*.

Arvu *a* nimetatakse kompleksarvu *reaalosaks* ja arvu *bi* *imaginaarosaks*. Reaalarvu *b* nimetatakse *imaginaarosa kordajaks*.

Kompleksarvu erikujud

Kompleksarvude hulka tähistatakse tähega **C**.

Kui $b = 0$, siis $a + 0i = a \in \mathbf{R}$.

Seega on reaalarvude hulk kompleksarvude hulga alamhulk:

$$\mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

Kui $b \neq 0$, siis nimetatakse kompleksarvu *imaginaararvuks*; erijuhul, kui $a = 0$, nimetatakse kompleksarvu *puhtimaginaararvuks* (bi).

Näiteks on puhtimaginaararvud $1{,}72i$, $-22i$.

Arvu 0 komplekskuju on $0 + 0i$.

Kaaskompleksarvud

Arve $a + bi$ ja $-a - bi$ nimetatakse *vastandkompleksarvudeks* ning arve $a + bi$ ja $a - bi$ *kaaskompleksarvudeks*.

Kaks kompleksarvu on *võrdsed* parajasti siis, kui nende reaalosead on omavahel võrdsed ja imaginaarosade kordajad on omavahel võrdsed, s.t.

$$\boxed{a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c \quad \text{ja} \quad b = d.}$$

Kompleksarve tähistatakse tavaliselt tähestiku lõpuosa tähtedega (z, u, v, w).

Avaldist $a + bi$ nimetatakse *kompleksarvu algebraliseks kujuks*.

Kompleksarvude hulk ei ole järjestatud, s.t. kompleksarve ei saa võrrelda suuruse järgi. Seetõttu ei saa kompleksarvude hulgal lahendada võrratusi.

Tehted kompleksarvudega

Tehteid kompleksarvudega sooritatakse nendesamade reeglite kohaselt, mille järgi sooritatakse tehteid algebraliste kaksliikmetega.

Iga tehte korral saadakse tulemuseks taas kompleksarv.

Kompleksarvude hulk on *kinnine* kõigi tehete suhtes.

Liitmine

$$(a+bi)+(c+di)=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i.$$

Lahutamine

$$(a+bi)-(c+di)=a+bi-c-di=(a-c)+(b-d)i.$$

Korrutamine

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Tehted kompleksarvudega (II)

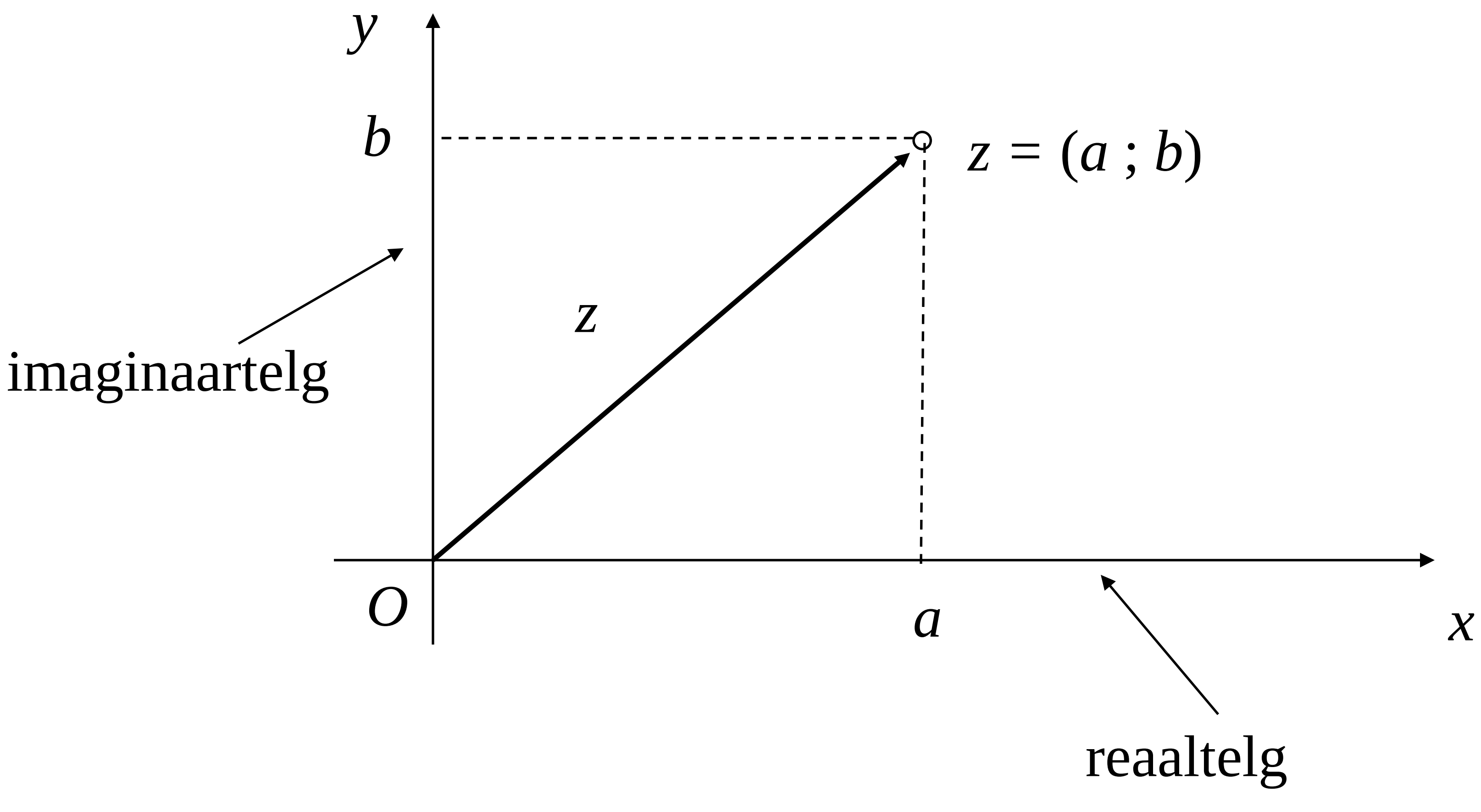
Jagamine

Jagamistehe kirjutatakse murruna ning murdu laiendatakse nimetaja kaaskompleksarvuga:

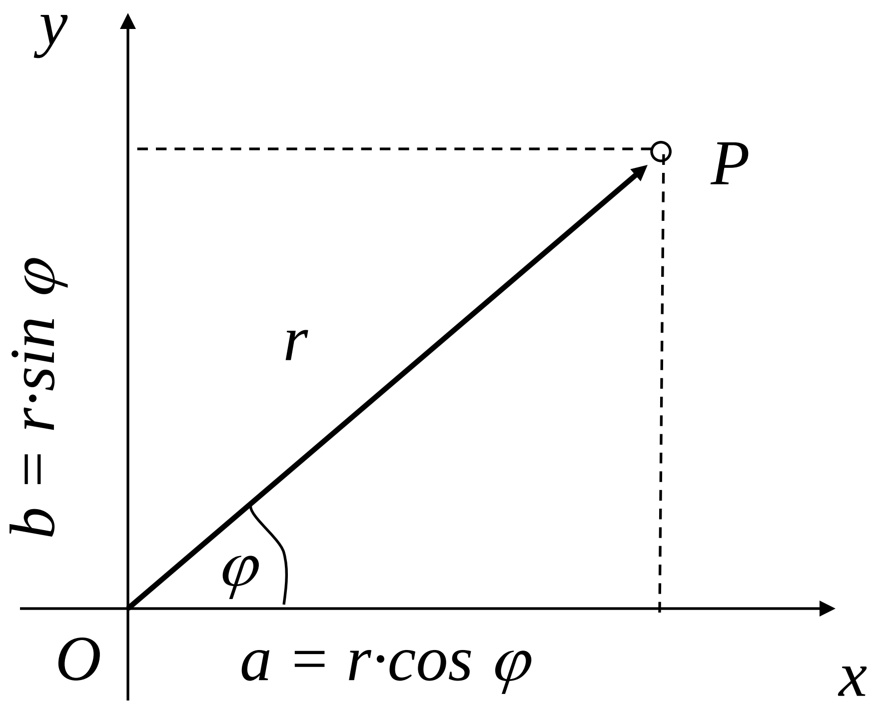
$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2} =$$

$$= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Kompleksarvu geomeetriline tõlgendus



Kompleksarvu trigonomeetriline kuju



$$z = a + bi = r \cdot \cos\varphi + ir \cdot \sin\varphi = \boxed{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}.$$

r – kompleksarvu moodul; $r \geq 0$;

φ - kompleksarvu argument; $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Kompleksarvu trigonomeetriline kuju II

Trigonomeetrilise kuju määramine algebralise kuju kaudu:

1) $r = \sqrt{a^2 + b^2}$,

2) $\varphi_1 = \arctan\left|\frac{b}{a}\right|$;

I veerandis: $\varphi = \varphi_1$;

II veerandis: $\varphi = \pi - \varphi_1$;

III veerandis: $\varphi = \pi + \varphi_1$;

IV veerandis: $\varphi = 2\pi - \varphi_1$;

Algebralise kuju määramine trigonomeetrilise kuju kaudu:

1) $a = r \cdot \cos\varphi$;

2) $b = r \cdot \sin\varphi$.

Tehted trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvudega

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

$$z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

1) Korrutamine:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvude korrutamisel nende moodulid korrutatakse ja argumendid liidetakse.

2) Jagamine:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvude jagamisel nende moodulid jagatakse ja argumendid lahutatakse.

Tehted trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvudega (II)

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

3) Astendamine:

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvu astendamisel tema moodul astendatakse ja argument korrutatakse astendajaga.

4) Juurimine:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right], \quad k = 0,1,\ldots,n-1.$$

Trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvude juurimisel tema moodul juuritakse ja argument (koos perioodiga) jagatakse juurijaga.

Tehted trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvudega (IV)

Näide Leiame $\sqrt[4]{1}$.

Teisendame kompleksarvu $z = 1 = 1 + 0i$ trigonomeetrilisele kujule.

Leiame mooduli: $r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

... ja argumendi: $\varphi_1 = \arctan\frac{0}{1} = 0,$

Kompleksarv $z = 1$ on esimeses veerandis, seetõttu: $\varphi = \varphi_1 = 0$

$$1 = z = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$$

Juurime:

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1} \cdot (\cos\frac{0 + 2k\pi}{4} + i \sin\frac{0 + 2k\pi}{4}) = \cos\frac{2k\pi}{4} + i \sin\frac{2k\pi}{4}.$$

Tehted trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvudega (V)

$$k=0: \quad \sqrt[4]{1}=\cos\frac{0}{4}+i\sin\frac{0}{4}=\boxed{1.}$$

$$k=1: \quad \sqrt[4]{1}=\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4}=\boxed{i.}$$

$$k=2: \quad \sqrt[4]{1}=\cos\frac{4\pi}{4}+i\sin\frac{4\pi}{4}=\boxed{-1.}$$

$$k=3: \quad \sqrt[4]{1}=\cos\frac{6\pi}{4}+i\sin\frac{6\pi}{4}=\boxed{-i.}$$

Kompleksarvu eksponentkuju

Euleri valem:

$$\boxed{\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}}$$

Kompleksarvu eksponentkuju:

$$\boxed{z = r\cdot e^{i\varphi}}$$

Kompleksarvu kolm kuju:

$a+bi$	$= r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$	$= r\cdot e^{i\varphi}$
algebraline kuju	trigonomeetriline kuju	eksponentuju

Näide

$$-3+\left(3\sqrt{3}\right)i = 6(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = 6e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$