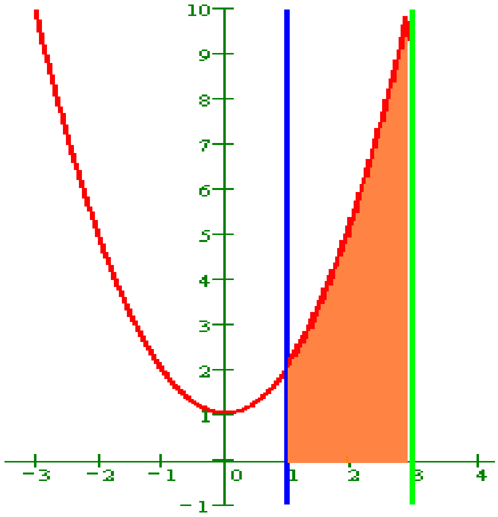
Määratud integraali rakendused

Pindala leidmine, kui kõvertrapets asub ülevalpool *x* -telge

Eelnevalt nägime, et juhul kui $f(x) > 0$, siis funktsiooni $y = f(x)$ graafiku, sirgete $x = a$ ja $x = b$ ning *x*-teljega piiratud kõvertrapetsi pindala *S* saame arvutada määratud integraaliga

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$

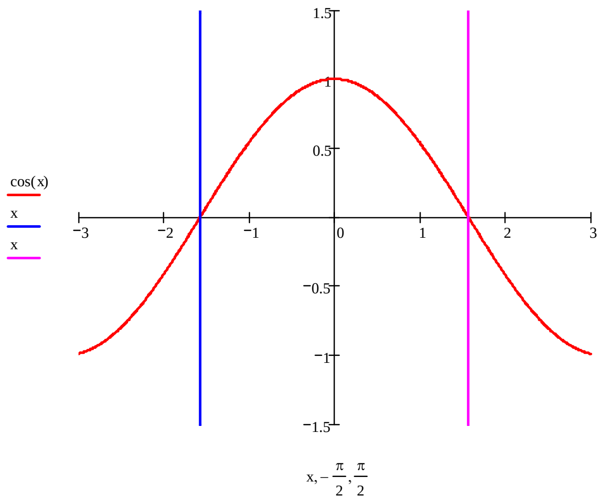
<u>*Näide* 1</u> Leida kujundi pindala, mis on piiratud joontega $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$ ja $x = 3$.



$$S = \int_1^3 (x^2 + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_1^3 = \left(\frac{3^3}{3} + 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1\right) = 12 - 1\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

Kujundi pindala on 10,7 ruutühikut.

<u>*Näide* 2</u> Leida kujundi pindala, mis on piiratud joontega $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\pi/2$ ja $x = \pi/2$.



$$S=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x dx = 2\int_0^{\pi/2}\cos x dx = 2\sin x\Big|_0^{\pi/2} = 2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=2$$

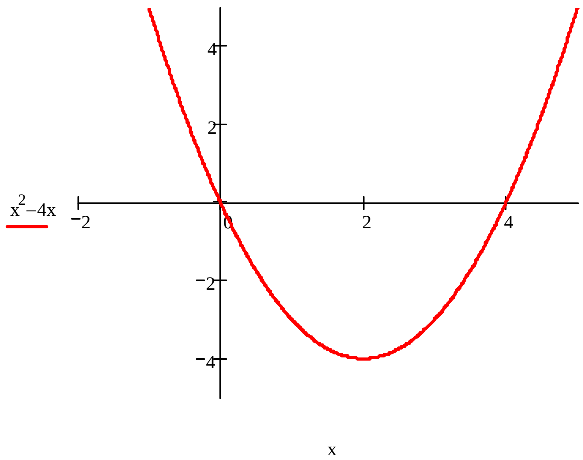
Kujundi pindala on 2 ruutühikut.

Pindala leidmine kui kõvertrapets asub allpool *x* -telge

Saab näidata, et juhul, kui funktsiooni $y=f(x)$ graafik paikneb allpool *x*-telge, s.t. $f(x)<0$, saame valemi $S=\int_a^b f(x)dx$ kasutamisel tulemuseks negatiivse arvu, mille absoluutväärtus on võrdne vastava kõvertrapetsi pindalaga. Seega, kui $f(x)<0$, siis

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

<u>Näide 3</u> Leida kujundi pindala, mis on piiratud *x*-teljega ja joonega $y=x^2-4x$.



Nagu jooniselt näeme, asub kujund allpool *x*-telge. Integreerimisrajadeks on parabooli ja *x*-telje lõikepunktide abstsissid. Need leiame võrrandist $x^2-4x=0$, millest $x_1=0$ ja $x_2=4$.

$$S=\left|\int_0^4 (x^2-4x)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}\right)\Big|_0^4\right| = \left|\left(\frac{4^3}{3}-\frac{4\cdot 4^2}{2}\right)-0\right| = \left|-10\frac{2}{3}\right| = 10\frac{2}{3}$$

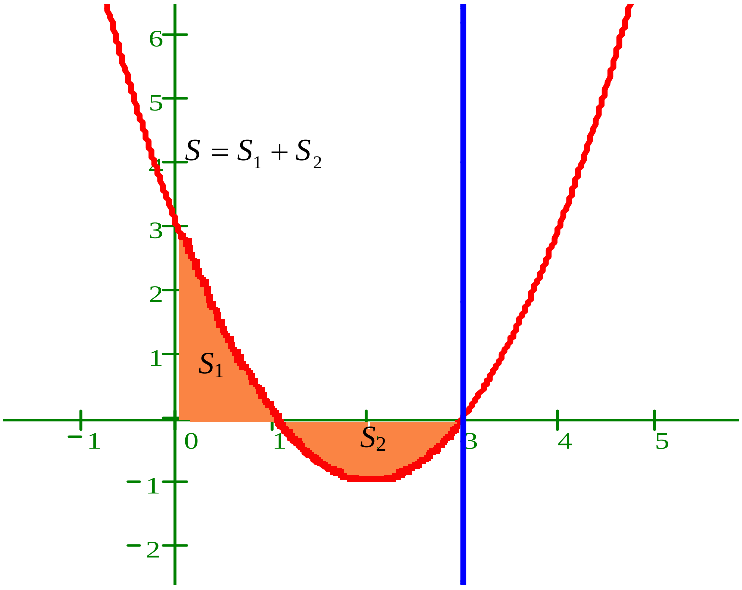
Kujundi pindala on 10,7 ruutühikut.

Pindala leidmine kui pinnatükk koosneb mitmest osast

<u>Näide 4</u> Leida niisuguse kujundi pindala, mis on piiratud joontega $y=x^2-4x+3$, $x=3$ ja koordinaattelgedega.

Kui integreeriksime joone võrrandit 0-st 3-ni, poleks tulemus õige, sest *x*-teljest allpool asetseva osa pindala tuleb negatiivne ja me saaksime positiivse osa pindala ja negatiivse osa pindala vahe. Et leida õiget pindala väärtust, tuleb leida mõlema osa pindalad eraldi.

Leiame kõigepealt parabooli lõikekohad *x*-teljega: $x^2-4x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=1 \quad x_2=3$.



$$S_1 = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1^3}{3} - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 - 0 = 1\frac{1}{3}$$

$$S_2 = \left|\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Bigg|_1^3\right| = \left|\left(\frac{3^3}{3} - 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right)\right|$$

$$= \left|-1\frac{1}{3}\right| = 1\frac{1}{3}$$

Kujundi pindala on $S = S_1 + S_2 = 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = 2{,}7$ ruutühikut.

Pindala leidmine kui pinnatükk on ülalt tõkestatud funktsiooni *y* = *f* (*x*) graafikuga ja alt tõkestatud funktsiooni *y* = *g* (*x*) graafikuga

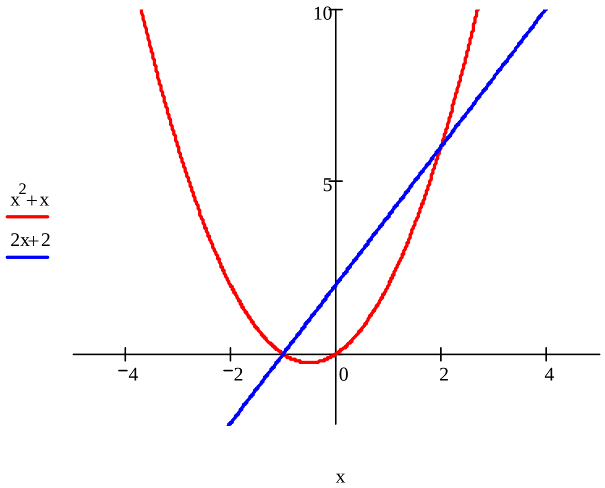
Kui tasandiline kujund on ülalt tõkestatud funktsiooni $y = f(x)$ graafikuga ja alt tõkestatud funktsiooni $y = g(x)$ graafikuga ning külgedelt vertikaalsirgetega sirgete $x = a$ ja $x = b$, kus $a < b$, siis

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

<u>*Näide*</u> <u>6</u> Leida kujundi pindala, mis on piiratud joontega $y = x^2 + x$ ja $y = 2x + 2$.
Leiame joonte lõikepunktid. Selleks lahendame süsteemi

$$\begin{cases} y = x^2 + x \\ y = 2x + 2 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + x = 2x + 2.$$

Seega saame $x^2 - x - 2 = 0$, millest $x_1 = -1$ ja $x_2 = 2$.

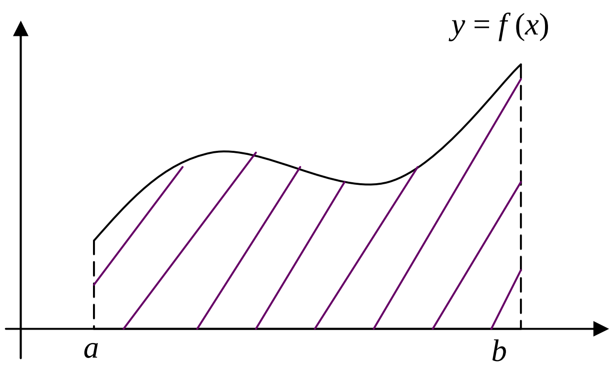


$$S=\int_{-1}^{2}(2x+2-(x^2+x))dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$=-\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+2\cdot 2-\left(-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+2\cdot(-1)\right)=4{,}5$$

Kujundi pindala on 4,5 ruutühikut.

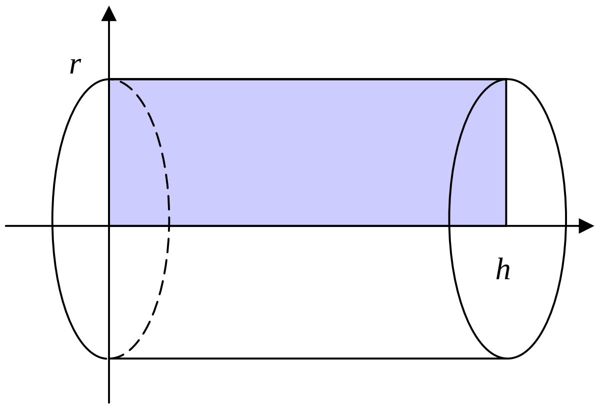
Keha ruumala arvutamine



Joonisel esitatud kõvertrapetsi pöörlemisel ümber *x*-telje tekkiva pöördkeha ruumala avaldub

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx\,.$$

<u>*Näide* 1</u> Leida sellise keha ruumala, mis tekib funktsiooni $y=r$, $r=const$ graafiku pöörlemisel ümber *x*-telje piirkonnas [0; *h*].



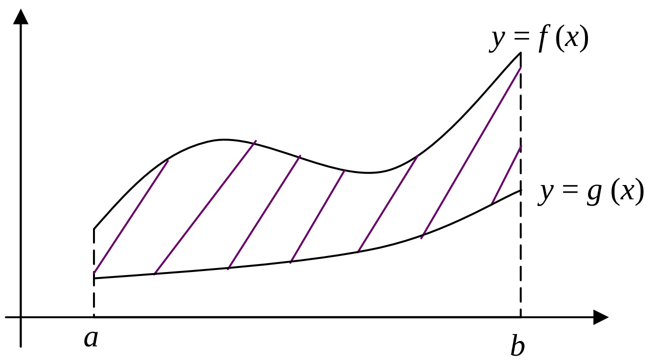
Nagu joniselt näeme tekib ristküliku pöörlemisel ümber x-telje silinder. Kasutades eelpool toodud ruumala valemit, saame:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx=\pi\int_0^h r^2dx=\pi r^2\int_0^h dx=\pi r^2 x\Big|_0^h=\pi r^2 h\,.$$

Keha ruumala on $\pi r^2 h$ kuupühikut.

Järgneval joonisel esitatud kõvertrapetsi pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöördkeha ruumala avaldub

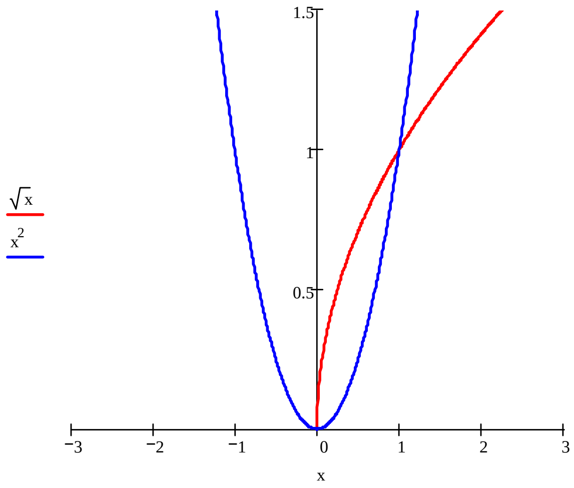
$$V=\pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx\,.$$



<u>*Näide* 2</u> Leida sellise keha ruumala, mis tekib joonte $y=x^2$ ja $y=\sqrt{x}$ poolt piiratud keha pöörlemisel ümber x-telje.
Leiame joonte lõikepunktid. Selleks lahendame süsteemi

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \quad x^2=\sqrt{x} \Rightarrow \quad x^4=x\,.$$

Seega saame $x(x^3-1)=0$, millest $x_1=0$ ja $x_2=x_3=x_4=1$.



$$V=\pi\int_0^1\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(x^2\right)^2\right]dx=\pi\int_0^1\left[x-x^4\right]dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\pi\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right]_0^1=\frac{3\pi}{10}$$

Keha ruumala on $3\pi/10$ kuupühikut.