# Määramata integraal

# Algfunktsioon

Funktsiooni $F(x)$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$ **algfunktsiooniks** piirkonnas $A$, kui $F'(x) = f(x)$ iga $x \in A$ korral.

**Näide** $f(x) = x^2$
algfunktsioon on $F(x) = \frac{x^3}{3}$ sest $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$

**Teoreem 1** Kui $F(x)$ on $f(x)$ algfunktsioon, siis on seda ka $F(x) + c$ iga $c \in R$ korral.

**Näide** Vaadeldud funktsiooni kõik algfunktsioonid avalduvad

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + c, \quad (c \in R)$$

# Määramata integraal

Avaldist $F(x) + c$, kus $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ mingi algfunktsioon ja $c \in R$ on suvaline konstant, nimetatakse funktsiooni $f(x)$ **määramata integraaliks** ja tähistatakse kujul

$$\int f(x)\,dx.$$

Konstanti $c$ nimetatakse **integreerimiskonstandiks**.

# Määramata integraal

$$\int f(x)\,dx$$

integraali märk

integreeritav avaldis

integreerimismuutuja

integreeritav funktsioon

# Põhiintegraalide tabel

$$\int 0dx = c$$

$$\int dx = x + c$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{a+1} + c \quad (a \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + c$$

$$\int e^{x} dx = e^{x} + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{2} x} = \tan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2} x} = -\cot x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^{2}} = \arctan x + c = -\operatorname{arccot} x + c$$

# Määramata integraali omadused

$$\int \left( f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int af(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$$

# Ositi integreerimine

**Ositi integreerimise valem**

Kui $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ on diferentseeruvad funktsioonid ning leidub $\int v du$ siis leidub ka $\int u dv$ kusjuures

$$\int u dv = uv - \int v du$$

**Näide** $\int x \sin x dx =$

Olgu $u = x \qquad dv = \sin x dx$

siis $du = dx \qquad v = -\cos x$

Järelikult

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx =$$

$$= -x \cos x + \sin x + c$$

# Muutuja vahetus

## Muutuja vahetus määramata integraalis

Kui $x = \varphi(t)$, siis

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

**Näide** $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx =$

Teeme muutujate vahetuse

$$t = \sin x$$

$$dt = \cos x dx$$

seega

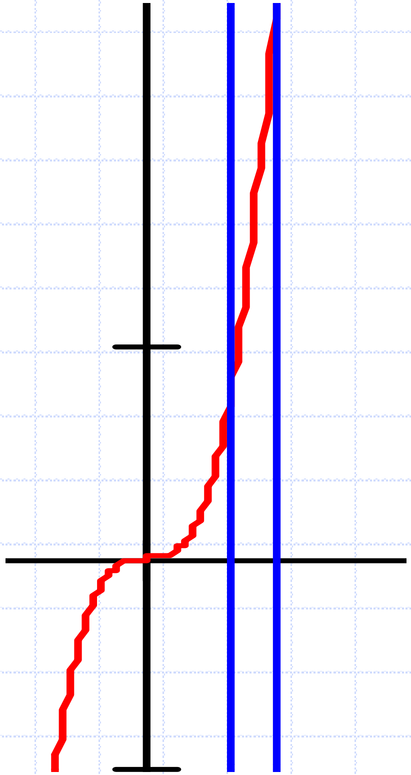
$$\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt = 2\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3} + c = \frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x + c$$

# Määratud integraal

# Määratud integraali arvutamine

**Newton-Leibnizi valem:** Olgu $f(x)$ lõigus $[a;b]$ integreeruv ja leidugu tal selles lõigus algfunktsioon $F(x)$. Siis

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$



__*Näide.*__ $$\int_2^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_2^3 =$$

$$= \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = \frac{65}{4} = 16\frac{1}{4}$$

# Ositi integreerimine

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du,$$

$$uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

*Näide.*

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = e - (e^1 - e^0) = 1$$

$$u = x \qquad dv = e^x dx$$

$$du = dx \qquad v = e^x$$

# Muutuja vahetus

*Näide.*
$$\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/4} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin t}{t} 2tdt = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin tdt$$

$$= -2\cos t\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -2(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$$

Teeme muutujate vahetuse:

$$t = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad x = t^2 \quad (t \geq 0) \quad \Rightarrow \quad dx = 2tdt.$$

Määrame rajad:

ülemine raja $\quad x = \pi^2/4 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{x} = \sqrt{\pi^2/4} = \pi/2$

alumine raja $\quad x = \pi^2/16 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{x} = \sqrt{\pi^2/16} = \pi/4$

# Pindala arvutamine

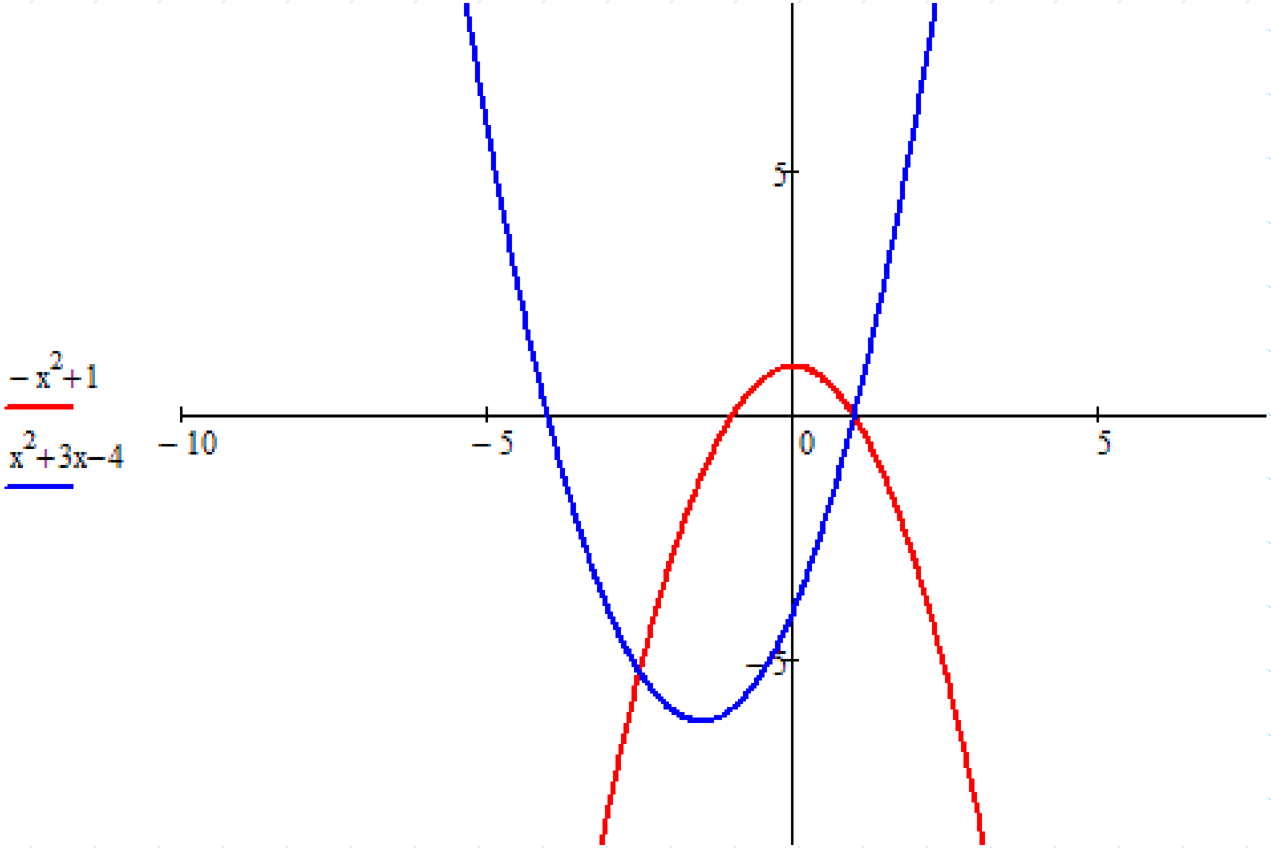
Kui $f(x) > 0$, siis funktsiooni $y = f(x)$ graafiku, sirgete $x = a$ ja $x = b$ ning $x$-teljega piiratud kõvertrapetsi pindala $S$ saame arvutada määratud integraaliga

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

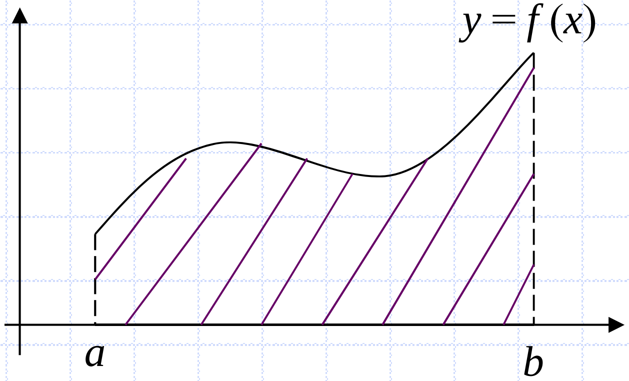
Kui tasandiline kujund on ülalt tõkestatud funktsiooni $y = f(x)$ graafikuga ja alt tõkestatud funktsiooni $y = g(x)$ graafikuga ning külgedelt vertikaalsirgetega $x = a$ ja $x = b$, kus $a < b$, siis

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

# Tööleht 7 ülesanne 29



# Ruumala arvutamine




Joonisel esitatud kõvertrapetsi pöörlemisel ümber *x*-telje tekkiva pöördkeha ruumala avaldub:

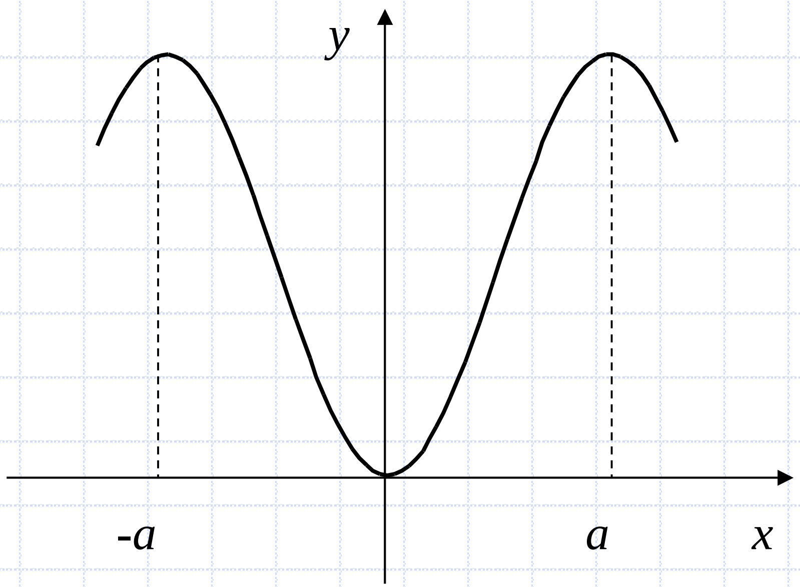
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

# Paarisfunktsioon

Kui funktsioon $f(x)$ on paarisfunktsioon, siis

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Seda tulemust illustreerib järgnev joonis:

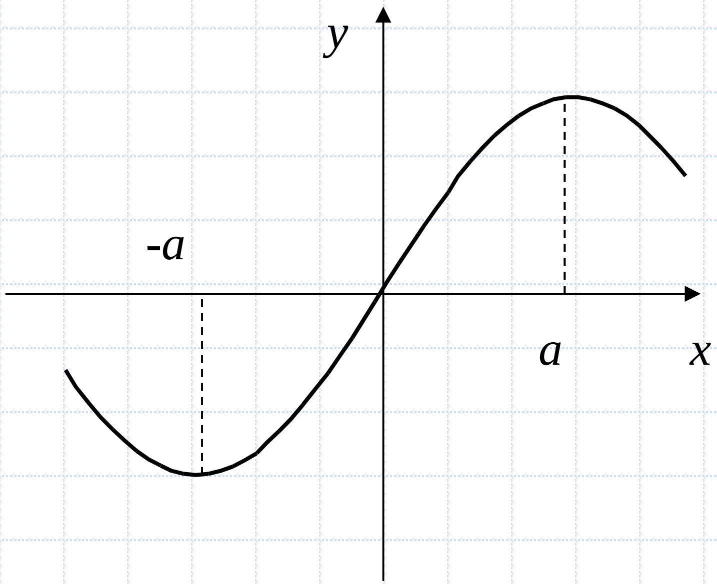


# Paaritu funktsioon

Kui funktsioon $f(x)$ on paaritu funktsioon, siis

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

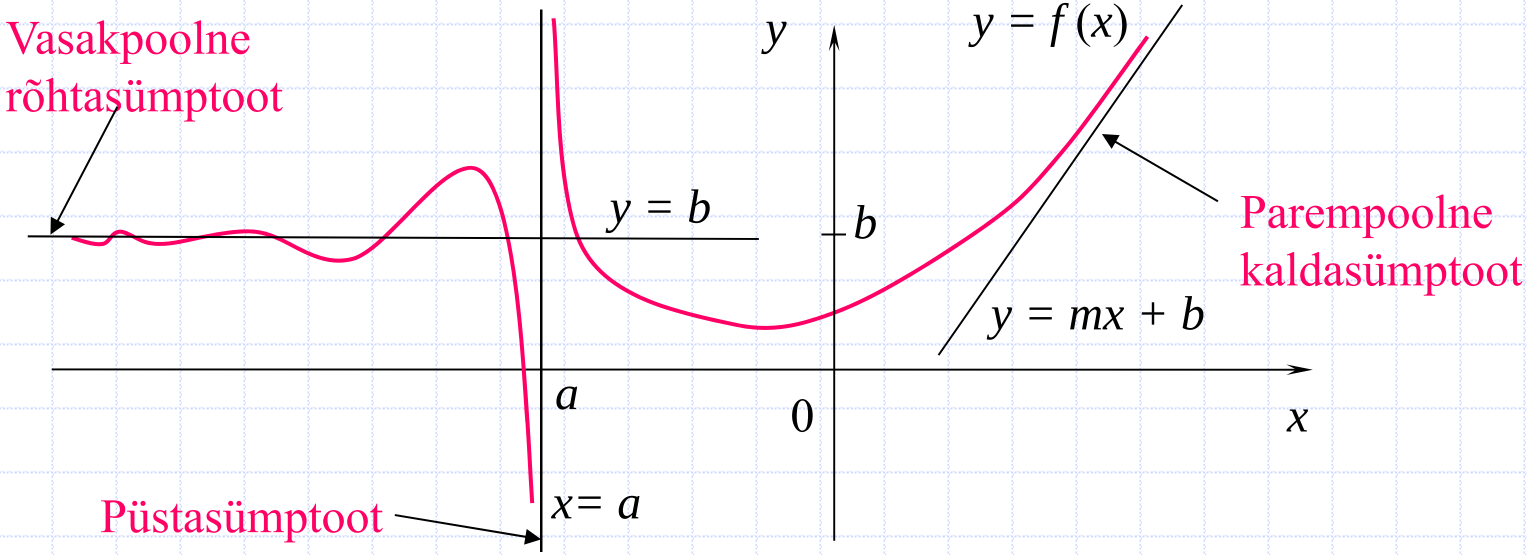
Seda tulemust illustreerib järgnev joonis:



# Funktsiooni graafiku asümptoodid

Asetsegu punkt $(x; y)$ funktsiooni $f$ graafikul, millel on lõpmatusse ulatuv haru.

Kui punkti $(x; y)$ kaugenemisel lõpmatusse tema kaugus mingist sirgest läheneb nullile, siis seda sirget nimetatakse selle funktsiooni graafiku **asümptoodiks**.



# Asümptootide leidmine

Sirge $x = a$ on funktsiooni $f$ graafiku püstasümptoot punkti $a$ parempoolses (vasakpoolses) ümbruses siis ja ainult siis, kui

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty \quad \left(\lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty\right).$$

Sirge $y = mx + b$ on funktsiooni $f$ graafiku parempoolne kaldasümptoot siis ja ainult siis, kui

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx).$$

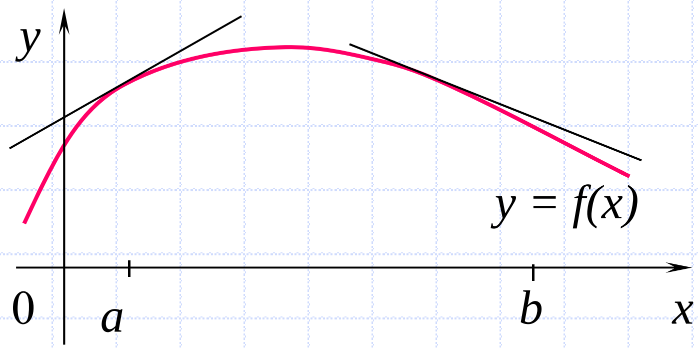
Sirge $y = mx + b$ on funktsiooni $f$ graafiku vasakpoolne kaldasümptoot siis ja ainult siis, kui

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx).$$

# Joone kumerus ja  nõgusus

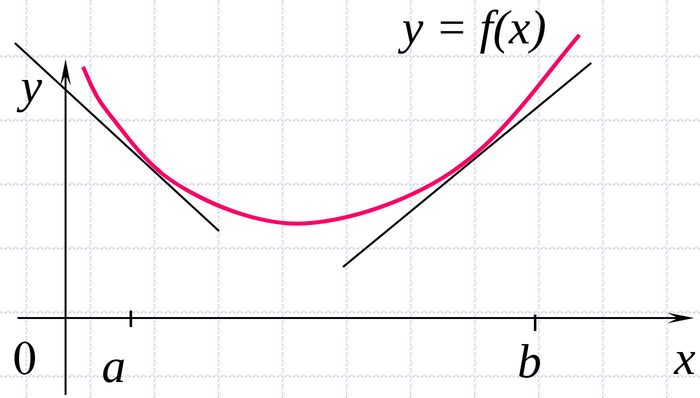
Öeldakse, et funktsiooni $f$ graafik on vahemikus $X$ ***kumer*** (*nõgus*), kui selle vahemiku $X$ igas punktis $x$ graafiku puutuja asetseb ülalpool (allpool) graafikut.

Kumer graafik




Kui vahemiku $(a; b)$ kõigis punktides funktsiooni $f(x)$ teine tuletis on negatiivne, s.t. $f''(x) < 0$, siis joon $y = f(x)$ on selles vahemikus kumer.

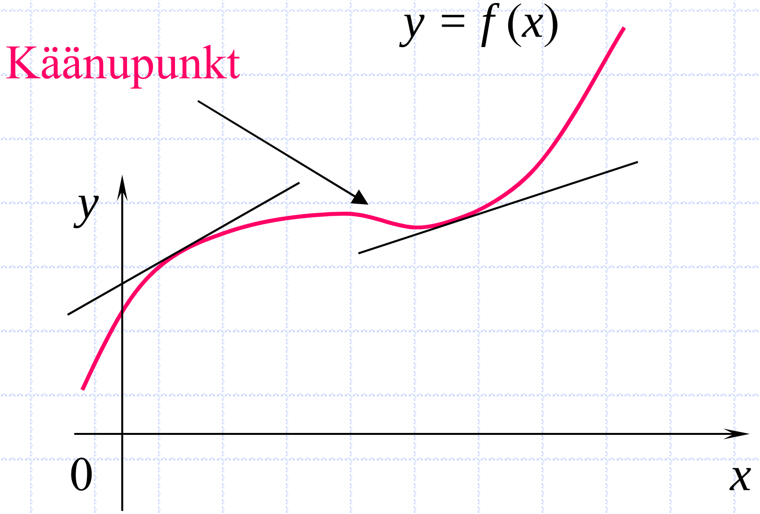
Nõgus graafik




Kui vahemiku $(a; b)$ kõigis punktides funktsiooni $f(x)$ teine tuletis on positiivne, s.t. $f''(x) > 0$, siis joon $y = f(x)$ on selles vahemikus nõgus.

# Funktsiooni käänupunktid

Punkti, mis eraldab pideva joone kumerat osa nõgusast, nimetatakse joone *käänupunktiks*.




Funktsiooni $f$ graafikul võib käänupunkt olla vaid tuletise $f'(x)$ kriitilises punktis (s.t. punktis, kus $f''(x)$ on 0 või puudub) .

Kui tuletisel $f'(x)$ on kriitilises punktis $a$ lokaalne ekstreemum, siis punkt $K = (a;\ f(a))$ on funktsiooni $f$ graafiku käänupunkt.