Vektorruum

Vektorruumi definitsioon

Definitsioon

Hulka V nimetatakse *vektorruumiks* üle arvukorpuse **K**, kui temas on antud kaks tehet – liitmine (igale kahele elemendile $\alpha, \beta \in V$ on vastavusse pandud parajasti üks element $\alpha + \beta \in V$), ja skalaariga korrutamine (igale arvule $a \in \mathbf{K}$ ja hulga V elemendile α on vastavusse pandud parajasti üks element $a\alpha \in V$), nii et on täidetud järgmised aksioomid:

1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ iga $\alpha, \beta \in V$ korral (*liitmise kommutatiivsus*);

2) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ iga $\alpha, \beta \in V$ korral (*liitmise assotsiatiivsus*);

3) $\exists \theta \in V: \quad \theta + \alpha = \alpha$ (*nullvektori olemasolu*);

4) $\forall \alpha \in V$ korral $\exists \; -\alpha \in V$, nii et $\alpha + (-\alpha) = \theta$ (*vastandvektori olemasolu*);

5) $1\alpha = \alpha$ (unitaarsus)

Vektorruumi definitsioon (järg)

6) $(ab)\alpha = a(b\alpha)$ iga $a, b \in \mathbf{R}$ ja $\alpha \in V$ korral (assotsiatiivsus arvude korrutamise suhtes);

7) $a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$ iga $a \in \mathbf{R}$ ja $\alpha, \beta \in V$ korral (distributiivsus vektorite liitmise suhtes);

8) $(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha$ iga $a, b \in \mathbf{R}$ ja $\alpha \in V$ korral (distributiivsus arvude liitmise suhtes);

Vektorruumi V elemente nimetatakse *vektoriteks*.

Kui **K** = **R**, siis kõneldakse *reaalsest vektorruumist* ja kui **K** = **C**, siis *komplekssest vektorruumist*.

Iga kahe vektori α ja β jaoks vektorruumist V saab defineerida ka nende *vektorite vahe* $\alpha - \beta$ võrdusega

$$\alpha - \beta = \alpha + (-1)\beta$$

Näiteid vektorruumidest (1)

1) geomeetrilised vektorid;

2) aritmeetilised vektorid;

3) $m \times n$ maatriksid

4) Lõigul $[a; b]$ pidevate funktsionide hulk $C[a; b]$

Näiteid vektorruumidest (2)

5) *homogeense* lineaarse võrrandisüsteemi

$$\mathbf{A}x = \Theta$$

lahendite hulk;

6) *n*-ndat järku polünoomide hulk:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

7) *nullruum* – vektorruum, mis koosneb vaid nullelemendist: V = {θ}.

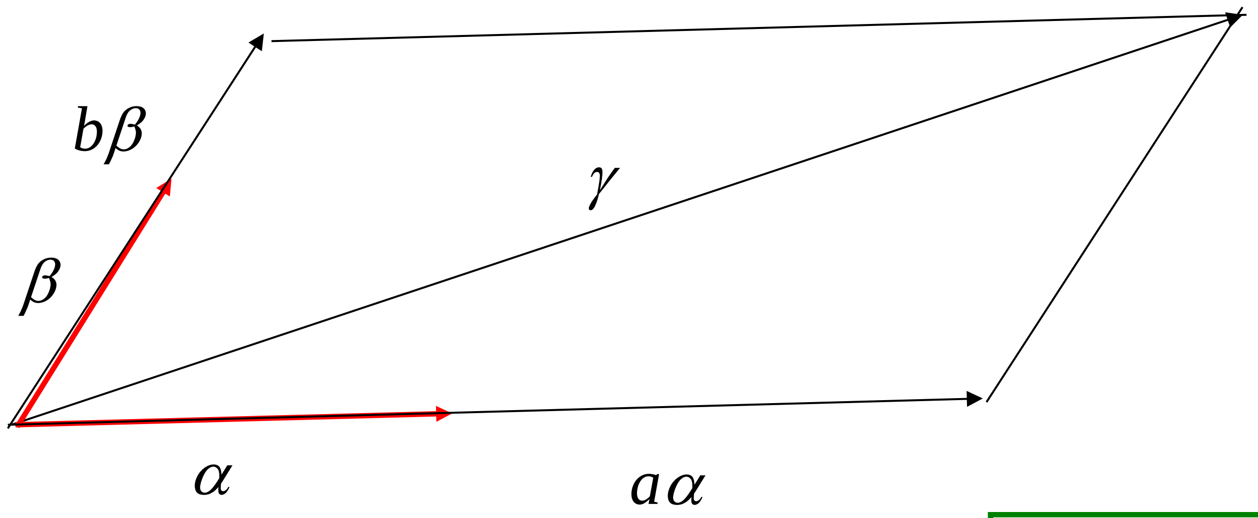
Vektorite lineaarne kombinatsioon

Definitsioon

Vektorite $\alpha_1,\ldots,\alpha_m \in V$ *lineaarseks kombinatsiooniks* nimetatakse iga vektorit kujul

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_m\alpha_m,$$

kus $c_1,\ldots,c_m \in \mathbf{R}$.



$$\gamma = a\alpha + b\beta$$

Lineaarne kombinatsioon

Vektorite lineaarne sõltuvus

Definitsioon

Öeldakse, et vektorid $\alpha_1,\ldots,\alpha_m \in V\ (m > 1)$ on *lineaarselt sõltumatud*, kui ükski neist ei avaldu lineaarse kombinatsioonina ülejäänud $m - 1$ vektorist. Nullist erinevat vektorit nimetatakse samuti lineaarselt sõltumatuks. Vastasel korral nimetatakse neid vektoreid *lineaarselt sõltuvateks*.

Näiteks on lineaarselt sõltuvad suvalised kolm vektorit tasandil või neli vektorit kolmemõõtmelises ruumis.

Lõpmatu hulga vektorite Vektorite lineaarne sõltumatus

Kui mingisse vektorite hulka kuulub nullvektor, siis see vektorite hulk on lineaarselt sõltuv.

Definitsioon

Öeldakse, et lõpmatu vektorite hulk *B* vektorruumist *V* on *lineaarselt sõltumatu*, kui selle hulga iga lõpliku alamhulga vektorid on lineaarselt sõltumatud. Vastasel juhul nimetatakse hulka B *lineaarselt sõltuvate* vektorite hulgaks.

Teoreem

Vektorid $\alpha_1,...\alpha_m \in V$ on lineaarselt sõltumatud parajasti siis, kui võrdusest

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + ... + c_m\alpha_m = \theta$$

kus $c_1, c_2, ..., c_m \in \mathbf{R}$ järedub, et

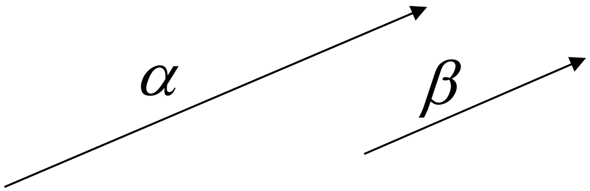
$$c_1 = c_2 = ... = c_m = 0.$$

Vektorite kollineaarsus

Definitsioon

Öeldakse, et vektorruumi V vektorid α ja β on *paralleelsed* ehk *kollineaarsed*, kui üks nendest kahest vektorist on teise vektori kordne.

Näide 1



$\alpha = 2\beta$

α ja β on kollineaarsed

Näide 2

Polünoomid x^2 ja $-3x^2$ on kollineaarsed.

Vektorruumi baas

Definitsioon

Mittetühja hulka $B \subset V$ nimetatakse vektorruumi V *baasiks* kui

1) Vektorite hulk B on lineaarselt sõltumatute vektorite hulk;

2) iga vektor ξ vektorruumist V avaldub lineaarse kombinatsioonina hulka B kuuluvatest vektoritest, st leiduvad sellised vektorid $e_1, e_2, ..., e_n \in B$ ja arvud $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{R}$, et

$$\xi = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n .$$

Teoreem

Igas nullruumist erinevas vektorruumis leidub baas.

Vektorruumis leidub lõpmata palju baase. Tavaliselt valitakse neist välja üks, loomulikul viisil tekkiv baas ning seda nimetatakse vektorruumi *kanooniliseks e. loomulikuks baasiks*.

Vektorruumi baas

Vektorruumi V erinevad baasid sisaldavad ühepalju elemente. Vektorite arvu vektorruumi baasis nimetatakse tema *mõõtmeks e. dimensiooniks*.

n-mõõtmelises vektorruumis iga n lineaarselt sõltumatut vektorit moodustavad selle ruumi baasi.

Vektorruumis V iga lineaarselt sõltumatute vektorite hulk on täiendatav selle vektorruumi baasiks.

Vektori koordinaadid

Olgu V n-mõõtmeline vektorruum $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ tema mingi baas. Vektoreid $e_1, e_2, ..., e_n$ nimetatakse *baasivektoriteks*.

Iga vektor ξ on avaldatav lineaarse kombinatsioonina baasivektoritest:

$$\xi = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n.$$

Definitsioon

Vektoriga x üheselt määratud arve $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{R}$ nimetatakse vektori ξ koordinaatideks antud baasil B.

Vektori tähistamisel on sageli kasutatav ka tema *koordinaatkuju*:

$$\xi = (x_1;\, x_2; ...; x_n)_B$$

Lihtsustatult:

$$\xi = (x_1;\, x_2; ...; x_n)$$

Alamruum

Vektorruumi V mittetühi alamhulk U võib samuti osutuda vektorruumiks. Sellisel juhul öeldakse, et U on vektorruumi V *alamruum*.

Teoreem

Vektorruumi V mittetühi alamhulk U on alamruum parajasti siis, kui

$$\alpha, \beta \in U \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta \in U,$$

$$c \in R,\ \alpha \in U \quad \Rightarrow \quad c\alpha \in U.$$

Teoreem

Vektorruumi V alamruumide U_i , $i \in I$ ühisosa $U = \bigcap_{i \in I} U_i$ on samuti vektorruumi V alamruum

Lineaarse homogeense võrrandisüsteemi lahendite fundamentaalsüsteem

Definitsioon

Lineaarse homogeense võrrandisüsteemi

$$Ax = \Theta, \quad A \in R^{m \times n}, \quad x \in R^n$$

lahendid moodustavad alamruumi vektorruumis $\mathbf{R}^{n}$. Sellele alamruumile vastavat baasi nimetatakse selle võrrandisüsteemi *lahendite fundamentaalsüsteemiks*.