# Juhuslikud suurused

Suurust nimetatakse **juhuslikuks**, kui see omandab antud tingimustes sõltuvalt juhusest ühe oma võimalikest väärtustest.

Näiteid juhuslikest suurustest:

1. Konkreetse Web-serveri poole pöördumiste arv ööpäevas.
2. Kümnevõistleja punktisumma võistlustel.
3. Laskude arv märklaua tabamiseni.
4. Keskpäevane temperatuur ilmavaatluspunktis.
5. Vooluvõrgu pinge mõõtmise tulemus.
6. Mõõtmistulemuse viga auto kiiruse mõõtmisel.

Paneme tähele, et kõigis toodud näidetes on tegu muutuvate suurustega, mis saavad omandada mitmesuguseid väärtusi. Mingi kindla väärtuse esiletulekut ei saa enne katse toimumist ette näha.
Juhuslikud suurused liigitatakse diskreetseteks ja pidevateks. **Diskreetseks** nimetatakse juhuslikku suurust, mille võimalike väärtuste hulk on lõplik või loenduv (nummerdatav). Diskreetse suuruse võimalikud väärtused erinevad üksteisest mingi lõpliku arvu võrra. Ülaltoodud näidetes 1. – 3. on tegu diskreetsete juhuslike suurustega.
Juhuslikku suurust nimetatakse **pidevaks**, kui tema võimalike väärtuste hulk on arvtelje (lõplik või lõpmatu) vahemik. Ülaltoodud näidetes 4. – 6. on tegu pidevate juhuslike suurustega.
Juhuslikke suurusi tähistatakse ladina suurtähtedega *X*, *Y*, ... ja juhuliku suuruse võimalikke väärtusi indeksitega väiketähtede abil: $x_1, x_2, \ldots,\ y_1, y_2, \ldots$ Väärtuste tõenäosusi tähistame tähega *p* (väärtuse $x_i$ tõenäosus on $p_i$).

## *Diskreetse juhusliku suuruse jaotusseadus*

Diskreetse juhusliku suuruse **jaotusseaduseks** nimetatakse vastavust tema kõikide võimalike väärtuste $x_1, x_2, \ldots,$ ja nende tõenäosuste $p_1, p_2, \ldots,$ vahel.

Üheks võimaluseks on esitada jaotusseadus **jaotustabelina** e. **jaotusreana**:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

Jaotustabel sisaldab juhusliku suuruse kõik võimalikud väärtused ja seetõttu $\sum_{j=1}^{n} p_i = 1$.

<u>Näide.</u> Tõenäosus, et teatud korvpallur tabab ühe viskega korvi on 0,8. Korvpallur teeb 4 viset. Koostada tabamuste arvu kui juhusliku suuruse jaotusrida.

<u>Lahendus.</u> Juhusliku suuruse *X* (tabamuste arvu) võimalikud väärtused on: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,$ $x_4 = 3,\ x_5 = 4$. Nendele väärtustele vastavad tõenäosused leiame Bernoulli valemi abil:

$$P_{0,4} = \frac{4!}{0!(4-0)!} \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^{4-0} = 0{,}0016 \qquad P_{2,4} = \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^{4-2} = 0{,}1536$$

$$P_{1,4} = \frac{4!}{1!(4-1)!} \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^{4-1} = 0{,}0256 \qquad P_{3,4} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^{4-3} = 0{,}4096$$

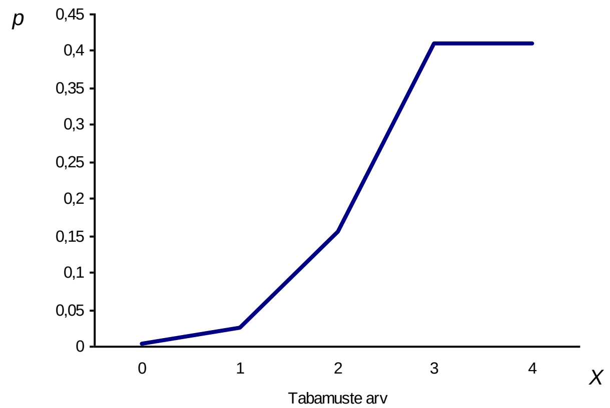
$$P_{4,4} = \frac{4!}{4!(4-4)!} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^{4-4} = 0{,}4096$$

Juhusliku suuruse *X* jaotustabel on seega:

| *X* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| *p* | 0,0016 | 0,0256 | 0,1536 | 0,4096 | 0,4096 |

Näitlikkuse huvides esitatakse jaotustabel sageli ka graafiliselt **jaotushulknurgana e. jaotuspolügoonina**, kus arvupaaridele $(x_i, p_i)$ vastavad punktid ristkoordinaadistikus on ühendatud sirglõikudega. Märgime, et sirglõikudega ühendatakse punktid ainult näitlikustamiseks, sest punktide $x_1$ ja $x_2$, $x_3$ ja $x_4$ jne. vahel juhuslikul suurusel *X* väärtusi pole ja seetõttu vastavad tõenäosused on võrdsed nulliga.

Näide. Eelmise näites vaadeldud tabamuste arvu kui juhusliku suuruse jaotuspolügoon.




## *Juhusliku suuruse jaotusfunktsioon*

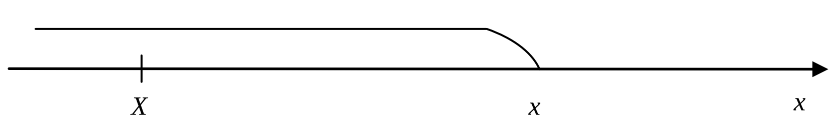
Pideva juhusliku suuruse jaoks pole võimalik jaotusrida välja kirjutada. Üldisemaks juhusliku suuruse jaotusseaduse esituseks on jaotusfunktsioon.

Juhusliku suuruse **jaotusfunktsioon** $F(x)$ määrab tõenäosuse selleks, et juhuslik suurus *X* on väiksem tõkkest $x$, s. t.

$$F(x) = P(X < x),$$

kus argument $x$ võib omandada mistahes reaalarvulisi väärtusi.

Jaotusfunktsioon on juhusliku suuruse universaalne iseloomustaja, mis kirjeldab võimalike väärtuste tõenäosuste jaotust. Jaotusfunktsioon on olemas nii pidevatel kui ka diskreetsetel juhuslikel suurustel. Sagedamini kasutatakse seda pideva juhusliku suuruse korral.
Geomeetriliselt võib jaotusfunktsiooni interpreteerida järgmisel viisil. Olgu juhuslikuks suuruseks *X* juhuslik punkt, mis katse tulemusena satub *x*-teljele.



Jaotusfunktsioon määrab iga $x$ puhul tõenäosuse, et juhuslik punkt $X$ asetseb punktist $x$ vasakul.

<u>Näide.</u> Jätkame eelneva näitega. Olgu juhuslik suurus $X$ antud jaotustabeliga

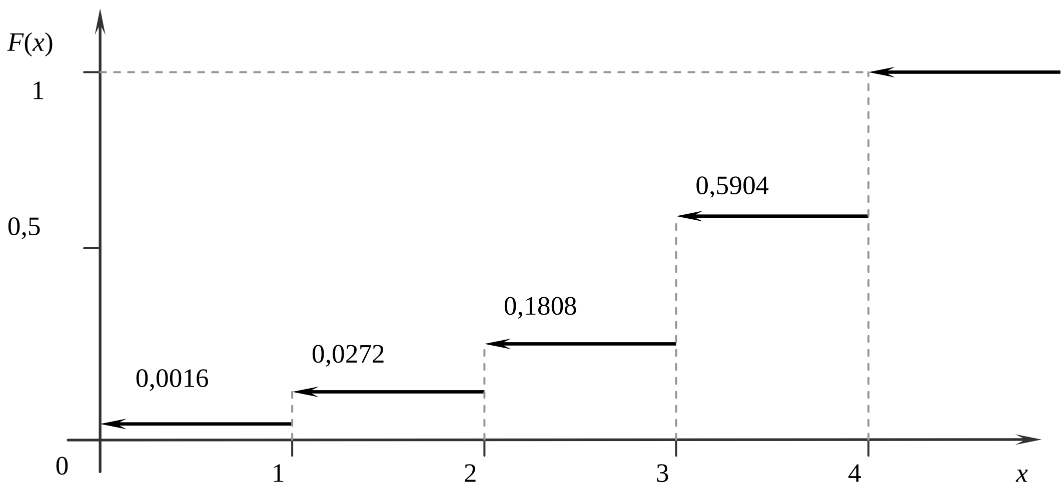
| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0,0016 | 0,0256 | 0,1536 | 0,4096 | 0,4096 |

Leida vastav jaotusfunktsioon.

<u>Lahendus.</u> Kui $x \le 0$ siis $F(x) = P(X < x) = 0$, sest nullist vasakul ei saa asuda ühtki juhusliku suuruse väärtust ja võimatu sündmuse tõenäosus on null.
Kui valida $x$ piirkonnast $0 < x \le 1$, siis jääb väärtusest $x$ vasakule suuruse võimalik väärtus $X = 0$, seega $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = 0{,}0016$.
Kui $1 < x \le 2$, siis saab juhuslik suurus omada tõkkest $x$ väiksemaid väärtusi $X = 0$ ja $X = 1$, seega $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}0016 + 0{,}0256 = 0{,}0272$.
Analoogselt jätkates saame, et kui $2 < x \le 3$ siis
$F(x) = P(X < x) = 0{,}0016 + 0{,}0256 + 0{,}1536 = 0{,}1808$.
Kui $3 < x \le 4$ siis $F(x) = P(X < x) = 0{,}0016 + 0{,}0256 + 0{,}1536 + 0{,}4096 = 0{,}5904$ ja kui $x > 4$ siis $F(x) = P(X < x) = 0{,}0016 + 0{,}0256 + 0{,}1536 + 0{,}4096 + 0{,}4096 = 1$.
Kokkuvõttes

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0{,}0016, & 0 < x \le 1; \\ 0{,}0272, & 1 < x \le 2; \\ 0{,}1808, & 2 < x \le 3; \\ 0{,}5904, & 3 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Graafiliselt




Veendusime, et diskreetse juhusliku suuruse jaotusfunktsioon võrdub argumendist rangelt väiksemate väärtuste $x_i$ tõenäosuste summaga

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

## Jaotusfunktsiooni omadusi

1. Pideva juhusliku suuruse jaotusfunktsioon on pidev.
2. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ ehk $F(-\infty) = 0$

Tõepoolest sündmus $X < -\infty$ on võimatu ja seega $P(X < -\infty) = F(-\infty) = 0$.

3. $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ ehk $F(+\infty) = 1$

Sündmus $X > \infty$ on kindel ja seega $P(X < \infty) = F(\infty) = 1$.

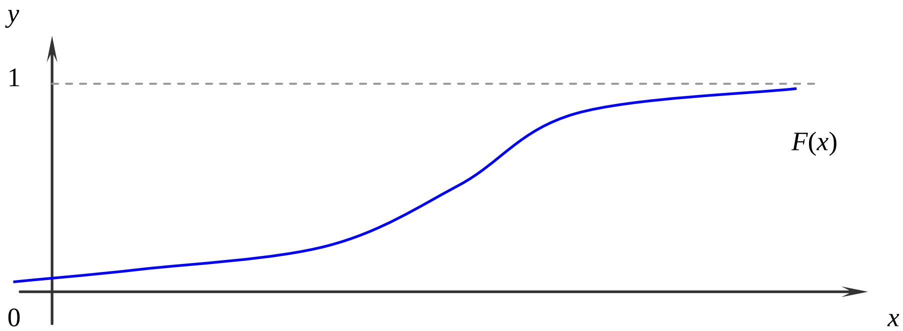
4. Jaotusfunktsioon on mittekahanev (monotoonselt kasvav), s.t. kui $x_2 \ge x_1$, siis $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Tõepoolest valides arvteljel punkti $x_2$ punktist $x_1$ paremal, suurenevad juhuslikul suurusel võimalused punktist $x_2$ vasakule jäämiseks võrreldes punktist $x_1$ vasakule jäämise võimalustega.

5. Tõenäosus selleks, et juhuslik suurus omandaks väärtusi poollõigust $[a;b)$ on võrdne jaotusfunktsiooni juurekasvuga selles poollõigus

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$$

Kokkuvõttes võib öelda, et jaotusfunktsioon on mittekahanev ja rahuldab tingimusi $0 \le F(x) \le 1$. Jaotusfunktsiooni graafik asub sirgete $y = 0$ ja $y = 1$ vahel ja kulgeb üdiselt tõusvalt. Pideva juhusliku suuruse jaotusfunktsiooni põhimõtteline kuju on toodud järgmisel joonisel.




Näide. Pideva juhusliku suuruse jaotusfunktsioon on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ ax^2, & 0 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Leida kordaja *a* väärtus.

Lahendus. Kuna juhuslik suurus on pidev, siis peab olema pidev ka jaotusfunktsioon $F(x)$. Näeme, et funktsioon $y = 0$ on pidev piirkonnas $(-\infty;0]$, $y = ax^2$ on pidev piirkonnas $(0;2]$ ja $y = 1$ on pidev $(2;\infty)$. Seega $F(x)$ on pidev $(-\infty;\infty)$, kui ta on pidev kohtadel 0 ja 2. Selleks, et funktsioon $F(x)$ oleks pidev punktis $x = 2$ peab kehtima

$$\lim_{x\to2+} F(x) = \lim_{x\to2-} F(x).$$

Ehk $\lim_{x\to2+} 1 = \lim_{x\to2-} ax^2$, millest $1 = 4a$ ja seega $a = \dfrac{1}{4}$.

## Pideva juhusliku suuruse eriomadus

Leiame tõenäosuse selleks, et pidev juhuslik suurus $X$ omandab kindla üksikväärtuse $X = x_1$. Selleks leiame kõigepealt poollõiku $[x_1; x_1 + \Delta x)$ sattumise tõenäosuse. Eelmise punkti omaduse 5 põhjal $P(x \le X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$. Seejärel laseme pikkusel $\Delta x \to 0$. Saame

$$\lim_{\Delta x \to 0} [F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)] = 0 .$$

Jõudsime tulemuseni: pideva juhusliku suuruse korral on suuruse mistahes üksikväärtuse esinemise tõenäosus null. See tähendab, et kindel, etteantud väärtus realiseerub väga harva. Pideva suuruse korral on mõtet rääkida ainult vahemikku sattumise tõenäosusest.

Seetõttu võib pideva juhusliku suuruse korral kirjutada eelmises punktis vaadeldud omaduse 5 kujul

$$P(a \le X < b) = P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a) .$$

## *Tõenäosuse tihedus e. tihedusfunktsioon*

Jaotusfunktsiooni abil on raske otsustada juhusliku suuruse käitumise üle mingi punkti ümbruses. Seetõttu kasutatakse lisaks jaotusfunktsioonile ka sellest tuletatud tihedusfunktsiooni.

Olgu $X$ pidev juhuslik suurus jaotusfunktsiooniga $F(x)$. Tõenäosus selleks, et juhuslik suurus sattuks vahemikku $(x; x + \Delta x)$ avaldub $\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x)$.

Pikkusühiku kohta tuleb keskmiseks tõenäosuseks siis

$$p_k(x) = \frac{\Delta F}{\Delta x} .$$

Juhusliku suuruse **tõenäosuse tiheduseks** $p(x)$ e. **tihedusfunktsiooniks** e. **jaotustiheduseks** nimetatakse keskmise tõenäosuse tiheduse piirväärtust vahemiku pikkuse $\Delta x$ tõkestamatul kahanemisel

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = F'(x) .$$

<u>Näide.</u> Leida juhusliku suuruse tihedusfunktsioon, kui jaotusfunktsioon on järgmine

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

<u>Lahendus.</u> Diferentseerimisel saame

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{x}{2}, & 0 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

## Tihedusfunktsiooni omadused

1. $p(x) \geq 0$

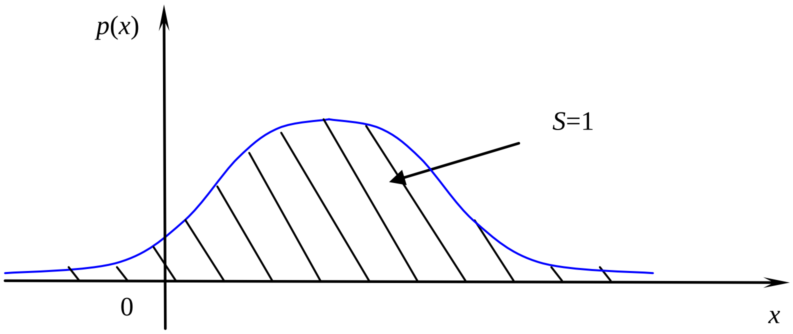
See omadus järeldub asjaolust, et mittekahaneva funktsiooni $F(x)$ tuletis ei saa olla negatiivne.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$

Tõepoolest,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int\limits_{-t}^{t} p(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int\limits_{-t}^{t} F'(x)dx = \lim_{t\to\infty}\left(F(x)\Big|_{-t}^{t}\right) = \lim_{t\to\infty} F(t) - \lim_{t\to-\infty} F(t) = 1 - 0 = 1.$$

Tihedusfunktsiooniks saab olla ainult nimetatud kaht tingimust rahuldav funktsioon. Üks võimalikest tihedusfunktsiooni graafikutest on esitatud järgneval joonisel.



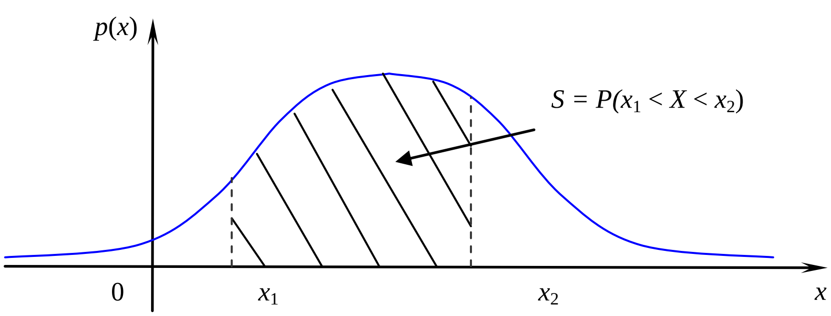

Tihedusfunktsiooni kaudu saab leida juhusliku suuruse antud piirkonda sattumise tõenäosuse. Kuna

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} F'(x)\,dx.$$

ja $F'(x) = p(x),$ siis

$$P(x_1 < X < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx.$$

Seega juhusliku suuruse antud piirkonda sattumise tõenäosus on võrdne tihedusfunktsiooni graafiku aluse kõverjoonelise trapetsi pindalaga vahemikus $(x_1, x_2)$ (viirutatud pindala järgneval joonisel).



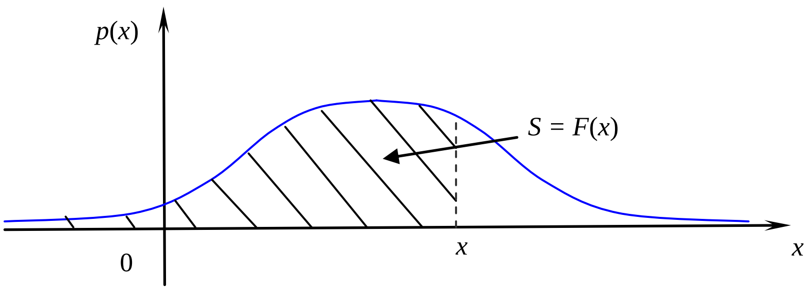

Kui võtta $x_1 = -\infty$ ja $x_2 = x$, siis $P(-\infty < X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)\,dx.$

Teisalt $P(-\infty < X < x) = P(X < x) = F(x)$ ja seega $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)\,dx.$

Juhusliku suuruse jaotusfunktsioon avaldub tihedusfunktsiooni kaudu valemiga

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)\,dx.$$

Jaotusfunktsiooni väärtus punktis $x$ on arvuliselt võrdne tihedusfunktsiooni graafiku aluse pindalaga abstsissist $x$ vasakul.

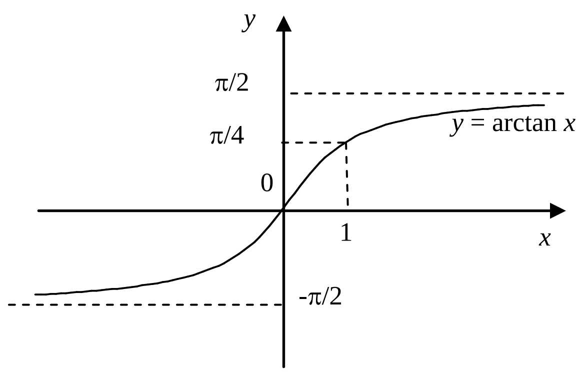



Näide 1. Juhusliku suuruse tihedusfunktsioon on antud kujul $p(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$. Leida kordaja $a$ väärtus, jaotusfunktsioon ja $P(-1 < x < 1)$. (Sellise tihedusfunktsiooniga juhusliku suuruse kohta öeldakse, et ta on **Cauchy jaotusega**.)

Lahendus. Tihedusfunktsiooni 2. omaduse kohaselt peab kehtima võrdus $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$.

Leiame võrduse vasakul pool oleva integraali

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}\,dx = a \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = a \cdot \arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = a \cdot \pi$$




Seega peab kehtima $a \cdot \pi = 1$, millest $a = \dfrac{1}{\pi}$ ja $p(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Jaotusfunktsioon avaldub kujul

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(x)dx=\int_{-\infty}^{x}\frac{dx}{\pi(1+x^2)}=\frac{1}{\pi}\arctan x\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{\pi}\left(\arctan x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{\pi}(\arctan x+\frac{\pi}{2}).$$

Antud vahemikku sattumise tõenäosus

$$P(-1<x<1)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{\pi}\arctan x\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}.$$

Näide 2. Juhusliku suuruse tihedusfunktsioon on antud kujul

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

(Sellise tihedusfunktsiooniga juhusliku suuruse kohta öeldakse, et ta on **ühtlase jaotusega**.)
Leida jaotusfunktsioon.

Lahendus. Jaotusfunktsiooni avaldise leiame integreerimisega.

Kui $x<a$, siis $F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dx=0$ .

Kui $a\le x\le b$, saame $F(x)=\int_{-\infty}^{a}0dx+\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dx=0+\frac{1}{b-a}x\Big|_{a}^{x}=\frac{x-a}{b-a}$ .

Kui $x>b$, siis $F(x)=\int_{-\infty}^{a}0dx+\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dx+\int_{b}^{x}0dx=0+\frac{1}{b-a}x\Big|_{a}^{b}+0=0+1+0=1$ .

Seega vastav jaotusfunktsioon avaldub

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 1, & x>b.\end{cases}$$