Taylori valem

Taylori valem võimaldab leida polünoomi, mis annab ligikaudse ettekujutuse funktsioonist (polünoom omakorda võimaldab funktsiooni lihtsamalt käsitleda).
Tuletame kõigepealt meelde, mis on polünoom. Polünoom on hulkliige, mille liikmeteks on naturaalarvuliste astendajatega astmed koos kordajatega, *n*-astme polünoomi üldkuju on

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n .$$

Näited polünoomidest

$$P_0(x) = -5 ,\ P_1(x) = 8{,}9 - x ,\ P_3(t) = 3(1-2t)^3 .$$

Saab näidata, et suvalise reaalarvu *a* korral on polünoom $P_n(x)$ esitatav kujul

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + ... + C_n(x-a)^n .$$

<u>Püstitame ülesande:</u> Antud on funktsioon $y = f(x)$ ja punkt *a* tema määramispiirkonnast. Leida polünoom, mis käitub punkti *a* ümbruses võimalikult sarnaselt antud funktsiooniga.

Olgu $y = f(x)$ mingis punkti *a* sisaldavas vahemikus $n+1$ korda diferentseeruv. Leiame polünoomi $P_n(x)$, mille aste ei ole kõrgem kui *n* ja mille väärtus punktis $x = a$ on võrdne funktsiooni $f(x)$ väärtusega selles punktis ning mille tuletiste väärtused *n*-nda järguni punktis $x = a$ on võrdsed funktsiooni $f(x)$ vastavate tuletiste väärtustega selles punktis:

$$\begin{aligned}
&P_n(a) = f(a)\\
&P'_n(a) = f'(a)\\
&P''_n(a) = f''(a)\\
&\qquad\dots\\
&P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).
\end{aligned}\tag{1}$$

On loomulik arvata, et see polünoom on mingis mõttes „lähedane“ funktsioonile $f(x)$.
Hakkame seda polünoomi otsima $x-a$ astmete järgi korraldatud polünoomina, mille kordajad on määramata

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + ... + C_n(x-a)^n \tag{2}$$

Määramata kordajad $C_1, C_2, \dots, C_n$ valime nii, et tingimused (1) oleksid täidetud. Selleks leiame esmalt polünoomi tuletised

$$\begin{aligned}
&P'_n(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + ... + nC_n(x-a)^{n-1}\\
&P''_n(x) = 2C_2 + 3\cdot 2C_3(x-a) + ... + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}\\
&\dots\\
&P_n^{(n)}(x) = n(n-1)\cdot ...\cdot 2\cdot 1 C_n
\end{aligned}\tag{3}$$

Asendame nüüd võrduste (2) ja (3) mõlemal poolel *x* tema väärtusega *a* ja arvestame lisaks võrdusi (1), saame

$$\begin{aligned}
&f(a) = C_0 \Rightarrow \quad C_0 = f(a)\\
&f'(a) = C \Rightarrow \quad C_1 = f'(a)\\
&f''(a) = 2\cdot 1\cdot C_2 \Rightarrow \quad C_2 = \tfrac{1}{1\cdot 2} f''(a)
\end{aligned}$$

$f'''(a) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot C_3 \Rightarrow \quad C_3 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(a)$

$\ldots$

$f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1 C_n \Rightarrow \quad C_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} f^{(n)}(a)$

Asendame $C_1, C_2, \ldots, C_n$ valemisse (2), saame otsitava polünoomi

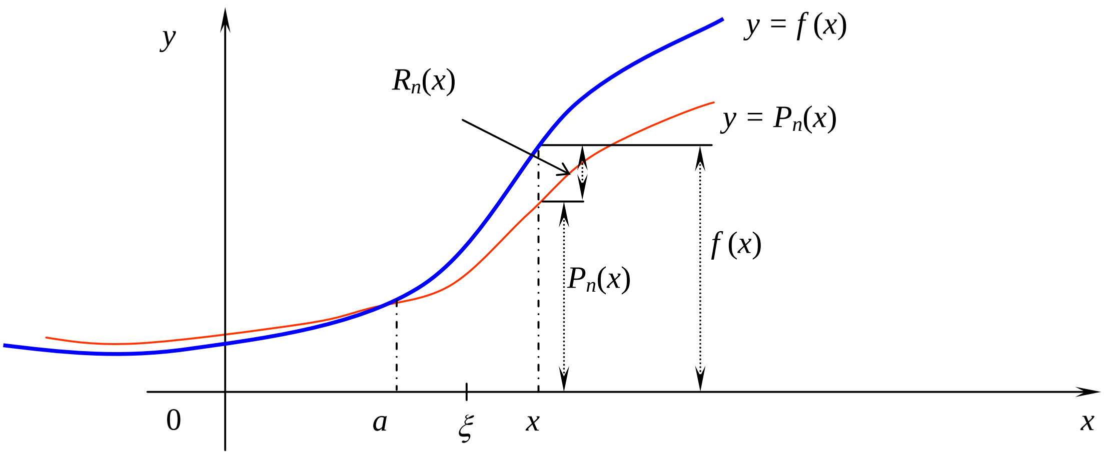
$$P_n(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} f^{(n)}(a).$$

Tähistame antud funktsiooni $f(x)$ ja saadud polünoomi $P_n(x)$ vahe sümboliga $R_n(x)$:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Suurust $R_n(x)$ nimetatakse jääkliikmeks. Kõigi nende x väärtuste korral, mille puhul jääkliige $R_n(x)$ on väike, annab polünoom $P_n(x)$ ligikaudse ettekujutuse funktsioonist $f(x)$.

Ettekujutuse sellest, mis on jääkliige, annab järgmine joonis. Fikseerime argumendi väärtused *a* ja *x*. Vastavalt seatud tingimustele funktsiooni väärtus ja polünoomi väärtus punktis *a* langevad kokku. Suvalises punktis (punktis *x*) võime aga märgata teatavat erinevust.



Saab näidata, et jääkliige avaldub kujul:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (a;\, x).$$

Valemit

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \ldots.. + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x)$$

nimetatakse funktsiooni $f(x)$ Taylori valemiks.

Kui Taylori valemis võtta $a = 0$, siis saab valem kuju

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots.. + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x). \qquad (4)$$

Taylori valemi seda erikuju nimetatakse mõnikord Maclaureni valemiks.

Taylori valem mõnede elementaarfunktsioonide korral

Järgnevas tuletame Taylori (täpsemalt Maclaureni) valemi elementaarfunktsioonide e^x, $\sin x$ ja $\cos x$ jaoks.

Funktsiooni $y = e^x$ arendamine

Leiame funktsiooni $y = e^x$ tuletised punktis 0, saame järk-järgult

$f(x) = e^x \qquad f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1$

$\ldots$

$f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(0) = 1$

Asendades saadud avaldised valemisse (4), saame

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n .$$

Saab näidata, et milline ka ei oleks *x*, jääkliige $R_n \to 0$, kui $n \to \infty$. Seega võime kirjutada

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} .$$

Kui võtame $x = 1$(ja näiteks $n = 8$) saame valemi *e* väärtuse ligikaudseks arvutamiseks:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{8!} \approx 2{,}71828$$

Funktsiooni *y* = sin *x* arendamine

Leiame järk-järgult funktsiooni $y = \sin x$ tuletised ja vastavad väärtused punktis 0

$f(x) = \sin x \qquad f(0) = \sin 0 = 0$

$f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2) \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2\pi/2) \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3\pi/2) \qquad f'''(0) = -1$

$f^{\mathrm{IV}}(x) = \sin x = \sin(x + 4\pi/2) \qquad f^{\mathrm{IV}}(0) = 0$

$\ldots$

$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\pi/2) \qquad f^{(n)}(0) = \sin n\pi/2$

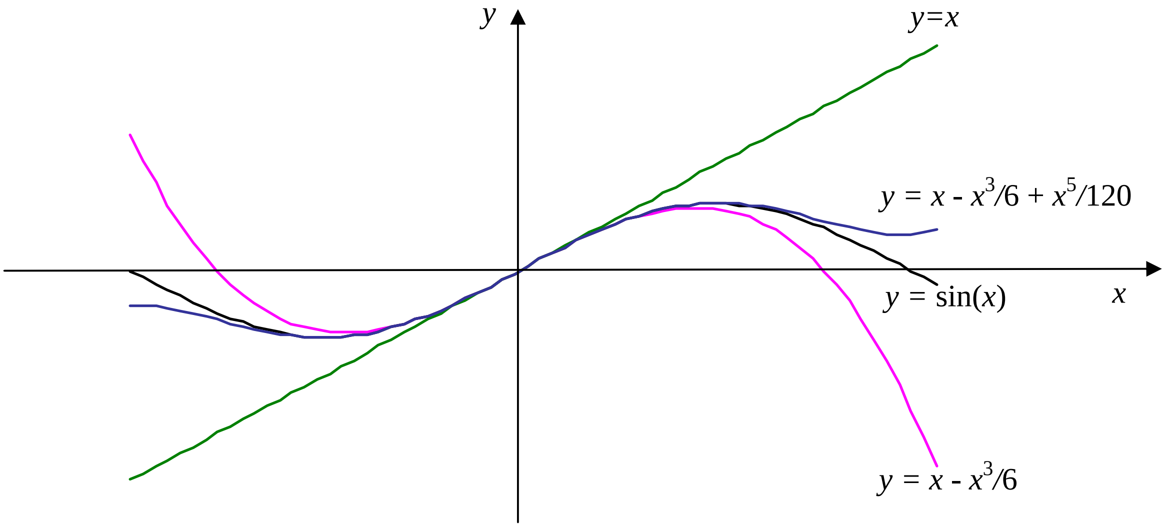
Asendades saadud avaldised valemisse (4), saame funktsiooni $\sin x$ arendi Taylori valemi järgi

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + \frac{x^n}{n!} \sin n\pi/2 .$$

Kasutame saadud valemit $\sin 20^\circ$ ligikaudseks arvutamiseks. Võtame $n = 3$, saame

$$\sin 20^\circ = \sin \pi/9 \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 \approx 0{,}342 .$$

Järgneval joonisel on kujutatud funktsiooni $y = \sin x$ ja tema kolme lähendit.



Funktsiooni y = cos x arendamine

Leiame funktsiooni $\cos x$ tuletised punktis 0

$f(x) = \cos x$ $\qquad f(0) = \cos 0 = 1$

$f'(x) = -\sin x = \sin(x + 2\pi/2)$ $\qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x = \sin(x + 3\pi/2)$ $\qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x = \sin(x + 4\pi/2)$ $\qquad f'''(0) = 0$

$f^{\mathrm{IV}}(x) = \cos x = \sin(x + 5\pi/2)$ $\qquad f^{\mathrm{IV}}(0) = 1$

$\ldots$

$f^{(n)}(x) = \sin(x + (n+1)\pi/2)$ $\qquad f^{(n)}(0) = \sin((n+1)\pi/2$

Asendame need valemisse (4):

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\sin((n+1)\pi/2)$$

Kasutame saadud ligikaudset valemit $\cos 17^\circ$ ligikaudseks arvutamiseks. Võtame $n = 4$, saame

$$\cos 17^\circ = \cos(17\pi/180) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{17\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{17\pi}{180}\right)^4 \approx 0{,}9563\,.$$