

Diskreetsed Markovi protsessid

Ilmaproгноos

Vaatleme homse ilma progноosimist tänase ilma järgi.

Tõenäosusega 0,4 järgneb päikesepaistelisele ilmale samasugune ilm ja tõenäosusega 0,2 sajune ilm ning tõenäosusega 0,4 pilves kuid sajuta ilm. Vihmale järgneb tõenäosusega 0,5 vihm, tõenäosusega 0,2 päike ja tõenäosusega 0,3 pilves ja sajuta ilm. Pilves ilmale järgneb tõenäosusega 0,6 pilves ilm, tõenäosusega 0,2 läheb vihmale ja tõenäosusega 0,2 ilm selgineb.

Sündmuste tähistused:

S_i - „ i . päeval on ilm selge“;

P_i - „ i . päeval on ilm pilves“;

V_i - „ i . päeval on ilm vihmane“;

Ilmaprognoos (2)

Täistõenäosuse valemi põhjal:

$$P(S_{i+1}) = P(S_i) \cdot 0,4 + P(P_i) \cdot 0,2 + P(V_i) \cdot 0,2 ;$$

$$P(V_{i+1}) = P(S_i) \cdot 0,2 + P(P_i) \cdot 0,5 + P(V_i) \cdot 0,2 ;$$

$$P(P_{i+1}) = P(S_i) \cdot 0,4 + P(P_i) \cdot 0,3 + P(V_i) \cdot 0,6 ;$$

Tähistame:

$$u_i = \begin{pmatrix} P(S_i) \\ P(V_i) \\ P(P_i) \end{pmatrix}$$

*Stohhastiline
maatriks*

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Summa:	1,0	1,0	1,0
--------	-----	-----	-----

Prognoos maatrikskujul (lineaarne diferentsvõrrand): $u_{i+1} = Au_i$

Ilmaproгноos (3)

Lahend MATLAB-i abil:

i	0	1	2	3	4	5	6
päike	1.00	0.40	0.28	0.256	0.2512	0.2502	0.2500
vihm	0	0.20	0.26	0.278	0.2834	0.2850	0.2855
pilves	0	0.40	0.46	0.466	0.4654	0.4647	0.4644

i	7	8	9	10
päike	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500
vihm	0.2857	0.2857	0.2857	0.2857
pilves	0.4643	0.4643	0.4643	0.4643

Diskreetne Markovi protsess

Definitsioon

Diferentsvõrrandit $u_{i+1} = Au_i$ nimetatakse *diskreetset Markovi protsessi* kirjeldavaks, kui matriksi A elemendid rahuldavad tingimusi:

- 1) $a_{ij} \geq 0$;
- 2) $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n$.

Definitsioonis toodud tingimusi rahuldavat matriksit nimetatakse *stohhastiliseks matriksiks*.

Markovi protsessis sündivat aegrida (näiteks: selge, selge, vihmane, pilves, pilves, ...) nimetatakse *Markovi ahelaks*.

Näite lahendamine

Lahendame näites toodud diferentsvõrrandi.

Maatriksi A omaväärtused:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 0,4 - \lambda & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 - \lambda & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3/10, \quad \lambda_3 = 1/5.$$

Vasavad omavektorid:

$$\lambda_1 = 1: \begin{vmatrix} 0,4 - 1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 - 1 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 - 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow x = \begin{vmatrix} 7 \\ 8 \\ 13 \end{vmatrix}$$

Näite lahendamine (2)

$$\lambda_2 = 3/10: \quad x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = 1/5: \quad x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Moodustame maatriksid S ja S^{-1} :

$$S = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 13 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/28 & 1/28 & 1/28 \\ -2/7 & 5/7 & -2/7 \\ -3/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Näite lahendamine (3)

Alustades „selgest ilmast“ ehk algvektorist $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Valemi (3) põhjal leiame vektori b :

$$b = S^{-1}u_0 = \begin{pmatrix} 1/28 & 1/28 & 1/28 \\ -2/7 & 5/7 & -2/7 \\ -3/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/28 \\ -2/7 \\ -3/4 \end{pmatrix}$$

Näite lahendamine (4)

Valemi (4) põhjal leiame lahendi :

$$\begin{aligned} u_k &= b_1 \lambda_1^k x_1 + b_2 \lambda_2^k x_2 + b_3 \lambda_3^k x_3 = \\ &= \frac{1}{28} \cdot 1^k \cdot \begin{Bmatrix} 7 \\ 8 \\ 13 \end{Bmatrix} + \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^k \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

piirprotsess:
 $k \rightarrow \infty$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{Bmatrix} 1/4 \\ 2/7 \\ 13/28 \end{Bmatrix} & 0 & 0 \end{array}$$

Järeldus: kirjeldatud protsessis on ilm selge tõenäosusega $1/4$, vihmae tõenäosusega $2/7$ ja pilves kuid sademeteta tõenäosusega $13/28$.