Funktsiooni diferentsiaal

Olgu antud diferentseeruv funktsioon $y = f(x)$. Selle funktsiooni tuletis on defineeritud kui

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ läheneb $\Delta x \to 0$ puhul kindlale arvule ja erineb seega tuletisest lõpmatult väikese suuruse võrra ehk

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \text{ kus } \alpha \to 0, \text{ kui } \Delta x \to 0.$$

Korrutame viimase võrduse pooli argumendi muuduga Δx, saame

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x.$$

Δy avaldise esimest liidetavat $f'(x)\Delta x$ tähistatakse dy ja nimetakse funktsiooni $y = f(x)$ **diferentsiaaliks**.

Kui Δx on piisavalt väike, siis $\Delta y \approx dy$. Kuna $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ ja $dy = f'(x)\Delta x$ siis $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$ ehk

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Seda valemit kasutatakse laialdaselt ligikaudses arvutamises.

Näide. Leida $\sqrt[5]{32{,}3}$ ligikaudne väärtus.

Lahendus. Antud ülesannet võime vaadelda kui funktsiooni $f(x) = \sqrt[5]{x}$ väärtuse leidmist kohal $x + \Delta x,$ kus $x = 32$ ja $\Delta x = 0{,}3$.

Kasutame eelnevalt tuletatud valemit $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, saame

$$f(32+0{,}3) \approx f(32) + f'(32)\cdot 0{,}3$$

Et $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$, siis

$$f(32+0{,}3) = \sqrt[5]{32} + \frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}}\cdot 0{,}3 = 2 + \frac{1}{5\cdot 16}\cdot 0{,}3 = 2 + \frac{0{,}3}{80} = 2{,}00375.$$

Näide. Leida funktsiooni $y = x^3$ diferentsiaal ja muut 1) x ja Δx suvaliste väärtuste korral; 2) kui $x = 10$ ja $\Delta x = 0{,}01$.

Lahendus.

Arvutame muudu:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Arvutame diferentsiaali:

$$dy = \left(x^3\right)'\Delta x = 3x^2\Delta x.$$

Näeme, et funktsiooni diferentsiaali arvutamine on tunduvalt lihtsam kui muudu arvutamine.

Kui $x = 10$ ja $\Delta x = 0{,}01$, siis

$$\Delta y = 3\cdot 10^2\cdot 0{,}01 + 3\cdot 10\cdot (0{,}01)^2 + (0{,}01)^3 = 3 + 0{,}003 + 0{,}000001 = 3{,}003001,$$

$$dy = 3\cdot 10^2\cdot 0{,}01 = 3.$$

Seega näeme, et viga, mille me teeme, kui võtame Δy asemel dy on $0{,}003001$. Paljudel juhtudel võib seda lugeda väikeseks võrreldes täpse väärtusega $\Delta y = 3{,}003001$ ja jätta arvestamata.

Kui $f(x) = x$, siis **argumendi diferentsiaal** dx avaldub kujul

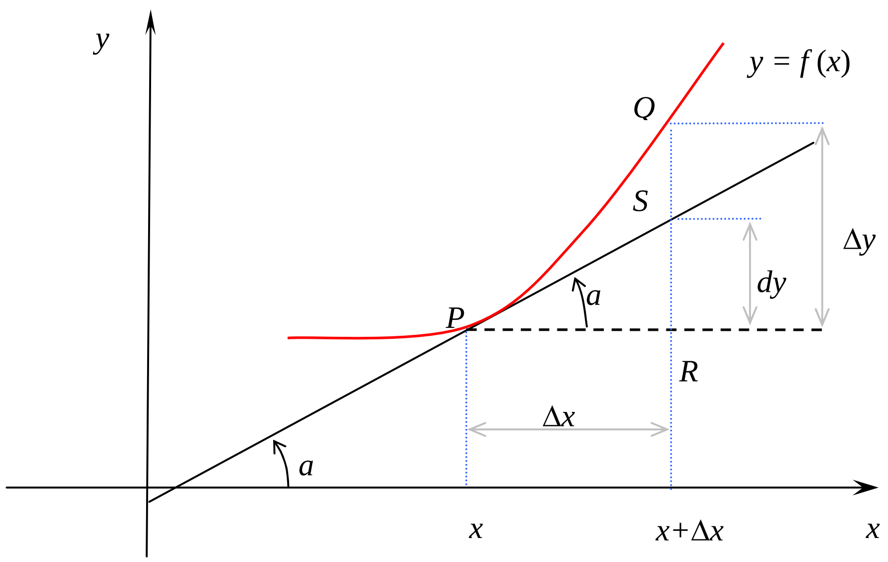
$$dx = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x .$$

Seega seose $dy = f'(x)\Delta x$ põhjal

$$dy = f'(x)dx .$$

Saadud võrdus võimaldab funktsiooni tuletist vaadelda funktsiooni diferentsiaali ja argumendi diferentsiaali jagatisena: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Uurime, mida tähendab funktsiooni diferentsiaal geomeetriliselt.



Funktsiooni tuletis tähendab funktsiooni graafikule punktis P tõmmatud puutuja tõusu. Korrutis $f'(x)dx$ tähendab täisnurkse kolmnurga PRS kaatetit RS (sest $RS = PR\tan\alpha = f'(x)\Delta x = dy$). Järelikult näitab diferentsiaali arvuline väärtus, kui palju muutub y argumendi x muutudes Δx võrra, kui liikumine mööda joont on asendatud liikumisega mööda joone puutujat.

<u>Näide.</u> Leida funktsiooni $y = \sqrt{1 + \ln x}$ diferentsiaal.

Lahendus. $dy = y'dx = \dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}(1+\ln x)'dx = \dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}\dfrac{1}{x}dx$.

<u>Näide.</u> Leida funktsiooni $y = \tan^2\sqrt{x}$ diferentsiaal.

Lahendus. $dy = 2\tan\sqrt{x}(\tan\sqrt{x})'dx =$

$$= 2\tan\sqrt{x}\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}(\sqrt{x})'dx = 2\tan\sqrt{x}\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx .$$

Diferentsiaali kasutamine mõõtmisvigade hindamisel

Oletame, et suurus *x* mõõdetakse otseselt, suurus *y* aga kaudselt valemi $y = f(x)$ järgi.

Tähistame:

- x mõõtmisel saadud tulemus;
- Δx suuruse *x* mõõtmisel tehtud viga (ei ole teada);
- δx suuruse *x* mõõtmise maksimaalne absoluutne viga: $x(\pm\delta x)$ (on teada, näiteks mõõteriista täpsus või pool skaala jaotust)

Ilmselt $|\Delta x| \le \delta x$. Kuna $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$, siis $|\Delta y| \approx |f'(x)| \cdot |\Delta x| \le |f'(x)| \delta x.$

Viimane saadud seos on aluseks praktikas sageli kasutatavale veaarvutusvalemile

$$\delta y = |f'(x)|\, \delta x\,,$$

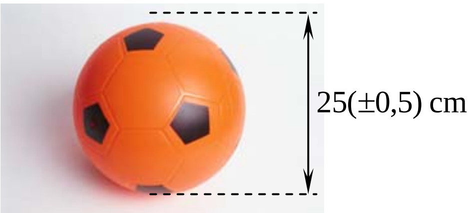
kus δy on arvutustulemuse absoluutne viga.

Vea suhtelist suurust tulemusega võrrelduna esitab tulemuse suhteline viga

$$\frac{\delta y}{|y|} = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| \delta x\,.$$

__Näide.__ Palli läbimõõdu mõõtmisel kasutatud mõõtevahendi maksimaalne võimalik viga on 0,5 cm. Leida palli ruumala arvutamisel tehtav absoluutne ja suhteline viga, kui palli läbimõõduks mõõdeti 25cm.

Lahendus.



Antud on $d = 25\,\text{cm}$
$\delta d = 0{,}5\ \text{cm}$

Palli (kera) ruumala avaldub valemiga

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi d^3\,.$$

Selle funktsiooni tuletis avaldub kujul $V'(d) = \frac{1}{2}\pi d^2$, seega ruumala absoluutne viga on

$$\delta V = |V'|\delta d = \frac{1}{2}\pi d^2 \delta d \approx 491\,\text{cm}^3\,.$$

Seega palli ruumala $V = 8181(\pm 491)\,\text{cm}^3$.

Ruumala relatiivne viga

$$\frac{\delta V}{|V|} = \frac{\frac{1}{2}\pi d^2 \delta d}{\frac{1}{6}\pi d^3} = 3\frac{\delta d}{d} \approx 0{,}06 = 6\%\,.$$