Vektorid

Geomeetrilised vektorid

Skalaarideks nimetatakse suurusi, mida saab esitada ühe arvuga – suuruse arvulise väärtusega.

Skalaari iseloomuga suurusi nimetatakse *skalaarseteks suurusteks*.

Skalaarse suuruse väärtuste hulgaks võib olla ka kompleksarvude hulk.

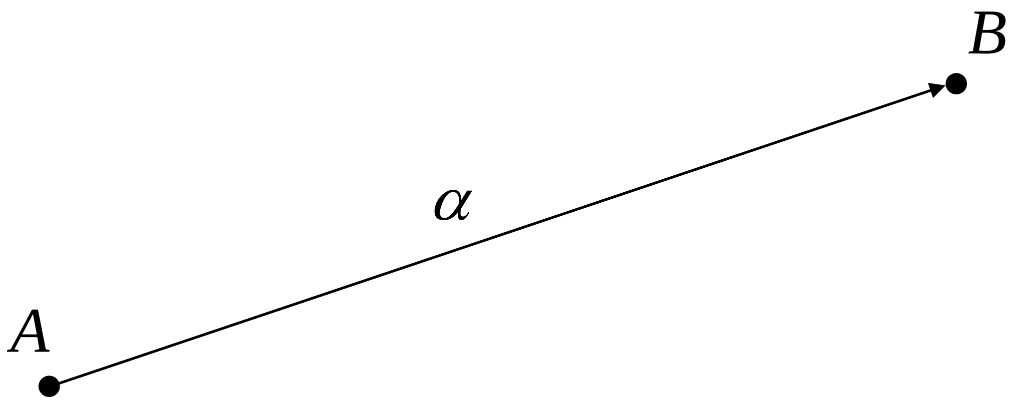
Suurust, mille kirjeldamiseks on peale arvulise väärtuse vaja teada tema sihti ja suunda, nimetatakse *vektoriaalseks suuruseks*.

Geomeetrilise vektori all mõistame kindla pikkusega, kindlas sihis paiknevat ja kindlas suunas suunatud suurust.

Samaväärne definitsioon:

Geomeetriliseks vektoriks nimetatakse suunatud lõiku.

Vektori algus- ja lõpp-punkt



Vektoril on *alguspunkt* (joonisel punkt *A*) ja *lõpp-punkt* (*B*).

Algus- ja lõpp-punktiga määratud vektorit tähistatakse:

$\boxed{\overrightarrow{AB}}$

või kreeka väiketähega $\boxed{\alpha}$

Kollineaarsed vektorid

Vektori $\alpha = \overrightarrow{AB}$ *pikkust* e. *moodulit* tähistatakse

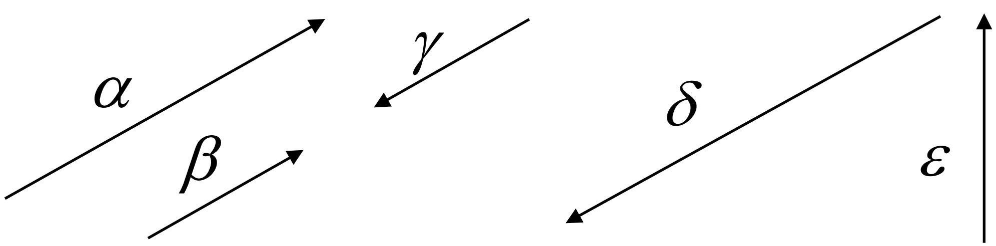
$$\boxed{\|\alpha\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB}$$

Vektori pikkuse all mõeldakse tema algus- ja lõpp-punkti vahelist kaugust.

Vektoreid, mis asuvad paralleelsetel sirgetel (või ühel ja samal sirgel), nimetatakse *kollineaarseteks.*

Asjaolu, et vektorid α ja β on kollineaarsed, tähistatakse:

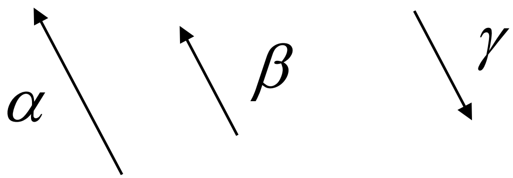
$$\boxed{\alpha \;||\; \beta.}$$



$\alpha \parallel \beta \parallel \gamma \parallel \delta \nparallel \varepsilon$

Vektorite võrdsus

Kollineaarsed vektorid võivad olla *samasuunalised* (tähistatakse $\alpha \uparrow\uparrow \beta$) või *vastandsuunalised* (tähistatakse $\alpha \uparrow\downarrow \beta$) .



$$\alpha \uparrow\uparrow \beta \uparrow\downarrow \gamma$$

Vektorid $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{BA}$ on samasihilised (kollineaarsed) ja sama pikkusega, kuid nende suunad on vastupidised. Kirjutatakse:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}}$$

Kui kolm vektorit on paralleelsed ühe ja sama tasapinnaga, siis nimetatakse neid *komplanaarseteks*.

Kaht geomeetrilist vektorit α ja β loetakse *võrdseteks* ja kirjutatakse $\alpha = \beta$, kui need vektorid on kollineaarsed, samasuunalised ($\alpha \uparrow\uparrow \beta$) ja ühepikkused $\|\alpha\| = \|\beta\|$.

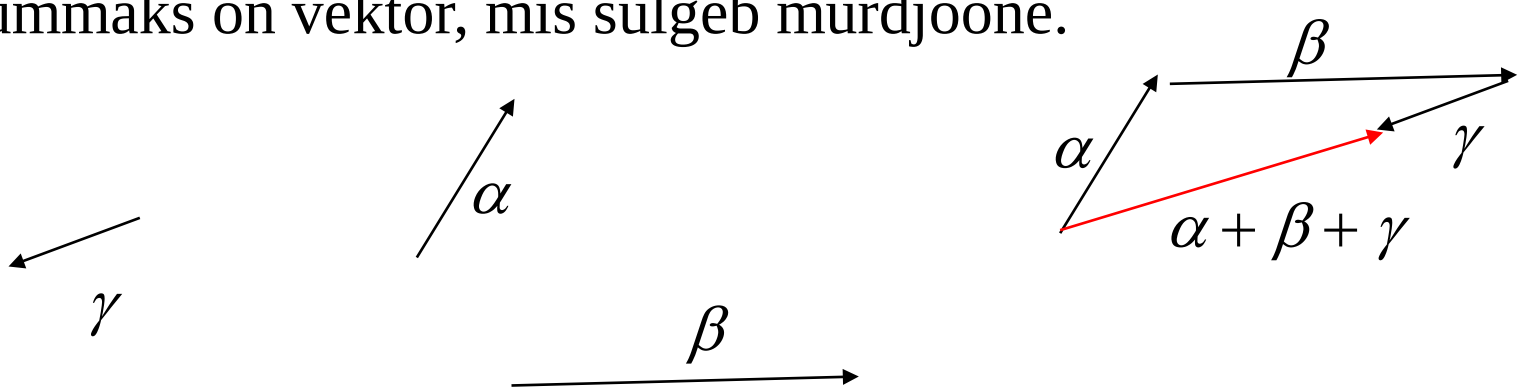
Vektorite liitmine

Vektorit, mille algus- ja lõpp-punkt langevad kokku, nimetatakse *nullvektoriks*.

Nullvektorit tähistatakse kreeka tähega θ (teeta).

Vektorite $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{BC}$ *summaks* nimetatakse vektorit $\overrightarrow{AC}$ ja tähistatakse $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Vektorite liitmiseks tuleb nad ruumis nii ringi paigutada (iseendaga paralleelselt), et nad moodustaksid murdjoone; seejuures tuleb iga järgnev vektor rakendada eelneva vektori lõpp-punktist. Vektorite summaks on vektor, mis sulgeb murdjoone.



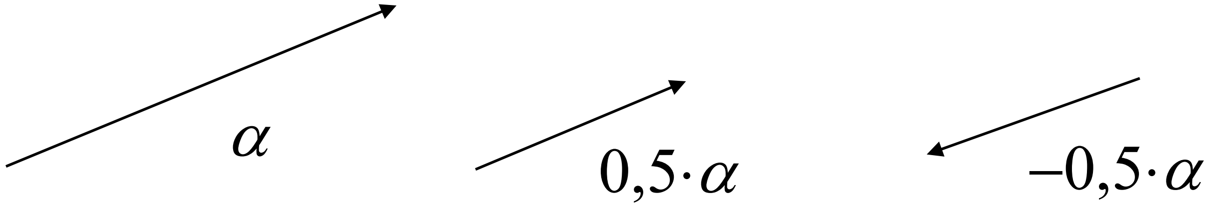
Vektori korrutamine skalaariga

Arvu (skalaari) c ja vektori α *korrutiseks* nimetatakse vektorit $c\alpha$, mis rahuldab järgnevaid tingimusi:

1) vektor $c\alpha$ on paralleelne (kollineaarne) vektoriga α : $c\alpha \parallel \alpha$ *;*

2) kui $c \geq 0$, siis vektori $c\alpha$ suund ühtib vektori α suunaga, $c < 0$ korral on vektorid $c\alpha$ ja α vastassuunalised;

3) vektori $c\alpha$ pikkus saadakse vektori α pikkuse ja arvu c absoluutväärtuse korrutamisel: $\|c\alpha\| = |c| \cdot \|\alpha\|$.



Lineaarsed tehted

Liitmist ja skalaariga korrutamist nimetatakse *lineaarseteks teheteks*.

Lineaaralgebra on matemaatika haru, mis uurib objekte, millega saab sooritada lineaarseid tehteid.

Geomeetriliste vektorite vektorruum

Teoreem 1

Lineaarsed tehted kõigi geomeetriliste vektorite hulgal V rahuldavad järgmisi omadusi:

1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ iga $\alpha, \beta \in V$ korral (liitmise kommutatiivsus);

2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ iga $\alpha, \beta, \gamma \in V$ korral (liitmise assotsiatiivsus);

3) leidub selline vektor $\theta \in V$, et $\alpha+\theta=\theta+\alpha=\alpha$ iga $\alpha \in V$ korral (nullvektori olemasolu);

4) iga vektori $\alpha \in V$ jaoks leidub selline vektor $\beta \in V$, et $\alpha+\beta=\beta+\alpha=\theta$ (vastandvektori olemasolu);

5) $(a+b)\alpha=a\alpha+b\alpha$ iga $a, b \in \mathbf{R}$ ja $\alpha \in V$ korral;

6) $a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta$ iga $a \in \mathbf{R}$ ja $\alpha, \beta \in V$ korral;

7) $(ab)\alpha=a(b\alpha)$ iga $a, b \in \mathbf{R}$ ja $\alpha \in V$ korral;

8) $1\alpha=\alpha$ iga $\alpha \in V$ korral.

Omadused 1 – 8 annavad meile õiguse nimetada hulka V *vektorruumiks*.

Aritmeetilised vektorid

n-mõõtmeliseks aritmeetiliseks vektoriks nimetatakse n arvu $(a_1; a_2; \dots ; a_n)$, võetuna kindlas järjekorras.

Tähistame: $\alpha = (a_1; a_2; \dots; a_n)$

Kõigi n-mõõtmeliste aritmeetiliste vektorite hulka tähistatakse $\mathbf{R}^n$ ja teda nimetatakse *n-mõõtmeliseks aritmeetiliseks ruumiks*.

Lineaarsed tehted aritmeetilises ruumis

Aritmeetiliste vektorite $\alpha = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ ja $\beta = (b_1; b_2; \dots; b_n)$ *summaks*

nimetatakse aritmeetilist vektorit

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; \dots; a_n + b_n)$$

Skalaari c ja aritmeetilise vektori $\alpha = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ *korrutiseks* nimetatakse aritmeetilist vektorit

$$c\alpha = (ca_1; ca_2; \dots; ca_n).$$

Aritmeetiliste vektorite vektorruum

Teoreem 2

Lineaarsed tehted n-mõõtmelises aritmeetilises ruumis rahuldavad teoreemis 1 toodud kaheksat omadust.

Seega moodustavad n-mõõtmelised aritmeetilised vektorid vektorruumi.

Nullvektor n-mõõtmelises aritmeetilises ruumis : $\theta = (0;0;...;0)$

Vektori α vastandvektor: $\alpha = (-a_1;-a_2;...;-a_n)$

Vektorite skalaarkorrutis

Aritmeetiliste vektorite $\alpha = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ ja $\beta = (b_1; b_2; \dots; b_n)$ *skalaarkorrutiseks* nimetatakse arvu

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Teoreem 3

Skalaarkorrutis n-mõõtmelises ruumis $V = \mathbf{R}^n$ rahuldab omadusi

1) $\alpha \cdot \alpha \geq 0$ iga $\alpha \in V$ korral; $\alpha \cdot \alpha = 0$ parajasti siis, kui $\alpha = \theta$;

2) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ iga $\alpha, \beta \in V$ korral (kommutatiivsus);

3) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$ iga $\alpha, \beta, \gamma \in V$ korral (distributiivsus);

4) $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = (\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma)$ iga $\alpha, \beta, \gamma \in V$ korral (distributiivsus);

5) $a(\alpha \cdot \beta) = (a\alpha) \cdot \beta = \alpha \cdot (a\beta)$ iga $\alpha, \beta \in V$ ja $a \in \mathbf{R}$ korral.