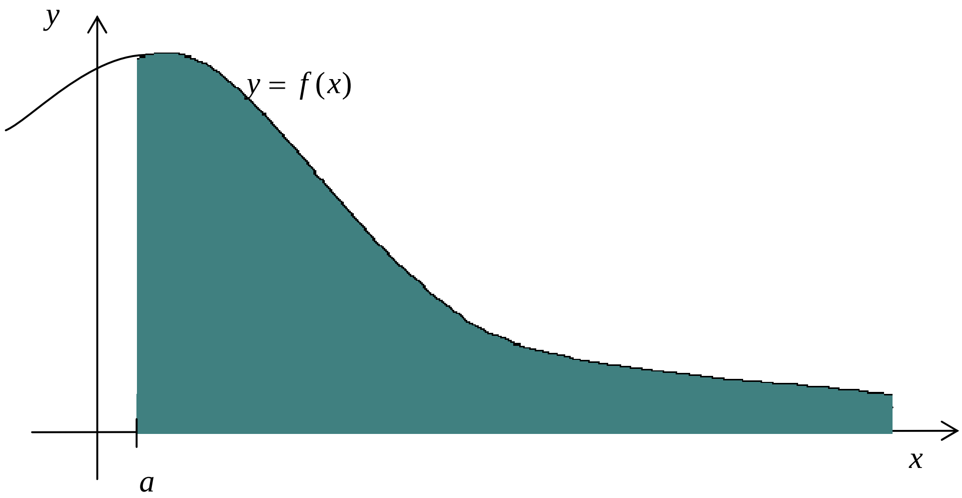
Päratu integraal

Olgu funktsioon määratud ja pidev piirkonnas $[a,\infty)$. Funktsiooni $y = f(x)$ **päratuks integraaliks** piirkonnas $[a,\infty)$ nim. piirväärtust

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Kui definitsioonis toodud piirväärtus on olemas, siis öeldakse, et **päratu integraal koondub**, vastasel juhul aga öeldakse, et **päratu integraal hajub**.

Kui piirkonnas $[a,\infty)$ kehtib $f(x) > 0$, siis on päratu integraali geomeetriline tähendus analoogiline määratud integraali geomeetrilise tähendusega:



päratu integraal on võrdne sellise *xy*-tasandi piirkonna pindalaga, mida piiravad *x*-telg, sirge $x = a$ ja funktsiooni $y = f(x)$ graafik (lõpmatu piirkonna pindala).

Analoogselt võrdusega (1) defineeritakse päratu integraal piirkonnas $(-\infty,b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

Vahemikus $(-\infty,\infty)$ defineeritakse päratu integraal võrduste (1) ja (2) kaudu järgmiselt:

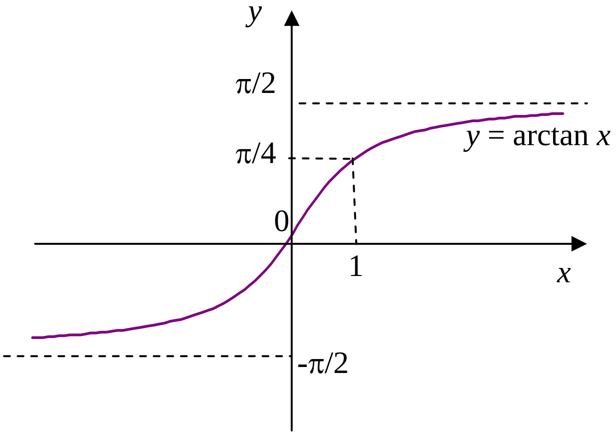
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)dx\,. \qquad (3)$$

<u>*Näide* 1</u> Arvutada integraal $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Päratu integraali definitsiooni kohaselt (vt. (1))

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\arctan x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(\arctan b - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}$$

Piirväärtuse leidmisel on abiks funktsiooni $y = \arctan x$ graafik:



<u>*Näide*</u> <u>2</u> Arvutada integraal $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Päratu integraali definitsiooni kohaselt (vt. (3)):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Et

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \arctan x \Big|_{a}^{0} = \lim_{a\to-\infty} (\arctan 0 - \arctan a) = \frac{\pi}{2}$$

ja $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ (vt. eelmine näide), siis

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi\ .$$