Determinandid

Substitutsioonid

Definitsioon

n-*ndat järku substitutsiooniks* (*permutatsiooniks*) nimetatakse n esimese naturaalarvu 1, 2, ... , n iga ümberjärjestust $i_1, i_2, ..., i_n$.

Näide

Moodustame kõik kolmandat järku substitutsioonid:

1, 2, 3;	1, 3, 2;	2, 1, 3
2, 3, 1;	3, 1, 2;	3, 2, 1

n-ndat järku substitutsioone on $n! = 1\cdot2\cdot3 \cdot ... \cdot(n-1)\cdot n$ tükki.

Definitsioon

Olgu substitutsioonist $i_1, i_2, ..., i_n$ valitud kaks arvu i_k ja i_l selles järjekorras, nagu nad seal esinevad, st $k < l$ ehk $i_1,..., i_k ,..., i_l ,..., i_n$. Kui $i_k > i_l$,siis öeldakse, et paar i_k ja i_l moodustab *inversiooni* vaadeldavas substitutsioonis.

Substitutsioonid

Näiteks vaadeldud 3. järku substitutsioonis 3, 1, 2 moodustavad inversiooni paarid 3, 1 ja 3, 2.

Näide

Leiame inversioonide arvu neljandat järku substitutsioonis 3, 2, 1, 4

Kahekaupa arve grupeerides saame moodustada järgmised paarid:

1) 3, 2 2) 3, 1 3) 3, 4 4) 2, 1

5) 2, 4 6) 1, 4

Inversioonide arvu leidmiseks leiame nende paaride arvu, kus tagumine liige on väiksem kui esimene. Sellisteks on paarid 1), 2) ja 4). Seega on inversioonide arv vaadeldavas substitutsioonis 3.

Tähistame kõikide inversioonide arvu substitutsioonis $i_1, i_2, ..., i_n$ sümboliga

$$\boxed{\sigma(i_1, i_2, ..., i_n)}$$

Substitutsioonid

Teoreem

Kui substitutsioon $j_1, j_2, ..., j_n$ on saadud substitutsioonist $i_1, i_2, ..., i_n$ kahe arvu (näiteks i_k ja i_l, $k < l$) asukoha vahetamisel, siis muutub inversioonide arvu paarsus, s.t.

$$(-1)^{\sigma(j_1,\dots,j_n)} = -(-1)^{\sigma(i_1,\dots,i_n)}.$$

Näide $\sigma(2,3,1,4) = 2$ (paarisarv)

$\sigma(4,3,1,2) = 5$ (paaritu arv)

$\sigma(4,2,1,3) = 4$ (paarisarv)

Determinandi definitsioon

Definitsioon

Ruutmaatriksi A = || a_{ij} || determinandiks nimetatakse summat

$$\sum_{(i_1,\dots,i_n)\in S_n} (-1)^{\sigma(i_1,\dots,i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}, \qquad (1)$$

kus iga n-ndat järku substitutsiooni (i_1, i_2, ..., i_n) jaoks on üks liidetav

$$(-1)^{\sigma(i_1,\dots,i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

Summas (1) on n! liidetavat. Seda tähistatakse veel

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Näide

Leiame determinandi

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\sigma(1,2,3)} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^{\sigma(1,3,2)} a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} +$$
$$(-1)^{\sigma(2,1,3)} a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + (-1)^{\sigma(2,3,1)} a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} +$$
$$(-1)^{\sigma(3,1,2)} a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-1)^{\sigma(3,2,1)} a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} =$$

$$= (-1)^0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0 + (-1)^1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 1 +$$
$$(-1)^1 \cdot (-1) \cdot 0 \cdot 0 + (-1)^2 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot 1 +$$
$$(-1)^2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 + (-1)^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 =$$
$$= 2$$

Determinantide omadused

•Maatriksi determinant on võrdne tema transponeeritud maatriksi determinandiga: det $(\mathbf{A})$ = det $(\mathbf{A}^T)$;

•Determinandi mingi rea (veeru) kõigi elementide korrutamisel ühe ja sama arvuga korrutub determinant selle arvuga.

•Kui determinandis kahe rea (veeru) asukohad vahetada, siis determinandi märk muutub vastupidiseks.

•Kui determinandis kaks rida (veergu) on võrdsed, siis võrdub determinant nulliga.

•Kui determinandis mingi rea (veeru) iga element on kahe liidetava summa, siis see determinant lahutub kahe liidetava summaks, kusjuures esimeses determinandis on vaadeldavas reas (veerus) esimesed liidetavad ja teises determinandis selles reas (veerus) teised liidetavad ning ülejäänud read (veerud) on samad, mis lähtedeterminandis:

Determinantide omadused

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+b_{k1} & \dots & a_{kn}+b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & \dots & b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- Determinandi väärtus ei muutu, kui kui tema mingi rea arvudele liita mingi arvu kordsed teise rea arvud.

Analoogiline väide kehtib ka veergude jaoks.

Determinantide teooria põhivalemid

- Kehtivad determinantide teooria põhivalemid (ehk arendusteoreemid)

$$a_{i1}\mathbf{A}_{k1} + a_{i2}\mathbf{A}_{k2} + \ldots + a_{in}\mathbf{A}_{kn} = \det(\mathbf{A}) \cdot \delta_{ik},$$
$$a_{1i}\mathbf{A}_{1k} + a_{2i}\mathbf{A}_{2k} + \ldots + a_{ni}\mathbf{A}_{nk} = \det(\mathbf{A}) \cdot \delta_{ik},$$

kus

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{kui} \quad i = k \\ 0, & \text{kui} \quad i \neq k \end{cases}$$

on Kroneckeri sümbol ja $\mathbf{A}_{ik}$ on maatriksist **A** i-nda rea ja k-nda veeru kustutamisel saadud $(n-1)\times(n-1)$ maatriksi determinandi ja arvu $(-1)^{i+k}$ korrutis.

Determinantide omadused

- Kui determinandi mingis reas või veerus on kõik arvud nullid, siis determinandi väärtus võrdub nulliga.

- Kui A ja B on sama järku ruutmaatriksid, siis nende maatriksite korrutise AB determinant võrdub maatriksite A ja B determinantide korrutisega:

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B}).$$

Determinandi väärtuse leidmine

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \text{-(2/3)I} \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} =$$

-IV

$$= (-1)^{3+2}(-2)\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot(6\cdot(-1/3)\cdot(-3) - 3\cdot(-1/3)\cdot 1) = 14$$

Lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine determinantide abil

Kui lineaarses võrrandisüsteemis $\mathbf{A}x = \boldsymbol{b}$ on võrrandite arv n võrdne tundmatute arvuga m, siis lahendamisel determinantide abil tuleb

1) Leida süsteemi maatriksi determinant $D = \det(\mathbf{A})$; võrrandisüsteem on üheselt lahenduv, kui $D \neq 0$.

2) Leida determinandid $D_1 = \det(\mathbf{A}_1)$, $D_2 = \det(\mathbf{A}_2)$, ..., $D_\mathrm{n} = \det(\mathbf{A}_n)$, kus $\mathbf{A}_i$ on maatriks, mis on saadud süsteemi kordajate maatriksist $\mathbf{A}$ i-nda veeru asendamisel vabaliikmete veeruga $\boldsymbol{b}$.

Näide

Lahendame lineaarse võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - 5x_3 &= 1 \\ x_1 \qquad\quad - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Näide

Lahendus

Moodustame vajalikud maatriksid:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{A}_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{Vmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{A}_3 = \begin{Vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$$

Leiame nende determinandid:

$\det(\mathbf{A}) =-3$ $\quad \det(\mathbf{A}_1) = 2$ $\quad \det(\mathbf{A}_2) =-1$ $\quad \det(\mathbf{A}_3) = 2$

Lahend:

$x_1 = \det(\mathbf{A}_1) / \det(\mathbf{A}) = 2 / (-3) = -2/3$

$x_2 = \det(\mathbf{A}_2) / \det(\mathbf{A}) = (-1) / (-3) = 1/3$

$x_3 = \det(\mathbf{A}_3) / \det(\mathbf{A}) = 2 / (-3) = -2/3$