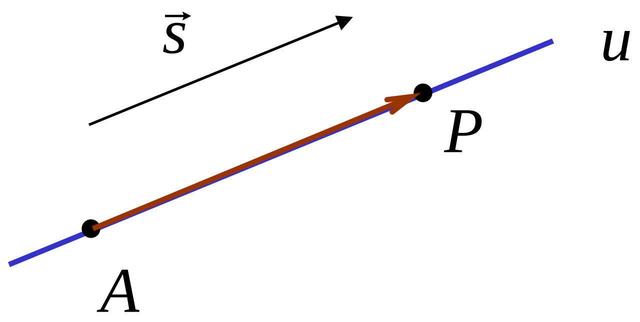
Sirge

Sirge ruumis

Sirge u on määratud, kui on teada

1) mingi sirgele kuuluv punkt A

2) sirge sihivektor $\vec{s}$



Sirge koosneb parajasti sellistest punktidest P, mille korral vektor $\overrightarrow{AP}$ on paralleelne vektoriga $\vec{s}$.

Definitsioon

Sirgeks läbi punkti A sihivektoriga $\vec{s}$ nimetatakse kõigi selliste punktide hulka u, mille korral $\overrightarrow{AP} = t\vec{s}$ mingi $t \in R$ puhul.

Sirge määramine kahe punktiga. Punktihulga võrrandid

Teoreem

Iga kahe erineva punkti A ja B korral leidub parajasti üks sirge u, millel need punktid asetsevad.

Definitsioon

Punktide hulga $U \in \mathbf{R}^n$ *võrranditeks* nimetatakse n tundmatut sisaldavat võrrandisüsteemi, mida rahuldavad parajasti tundmatute $x_1, \ldots, x_n$ sellised väärtused, mis on mingi hulka U kuuluva punkti P koordinaatideks.

Sirge parameetrilised võrrandid

Olgu sirge määratud punktiga $A(a_1, a_2 \ldots, a_n)$ ja sihivektoriga $\vec{s} = (s_1; s_2; \ldots; s_n)$.

Punkti A ja suvalise sirge punkti $P(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ vaheline vektor peab olema paralleelne sirge sihivektoriga $\vec{s}$.

Kuna

$$\overrightarrow{AP} = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n)$$

siis

$$x_1 - a_1 = ts_1, \quad x_2 - a_2 = ts_2, \ldots, x_n - a_n = ts_n, \quad t \in \mathbf{R}.$$

millest saame *sirge parameetrilised võrrandid*

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = a_1 + ts_1, \\ x_2 = a_2 + ts_2, \\ \ldots, \\ x_n = a_n + ts_n. \end{cases}}$$

Sirge kanoonilised võrrandid

Elimineerides sirge parameetrilistest võrranditest parameetri t saame sirge *kanoonilised võrrandid*:

$$\boxed{\frac{x_1 - a_1}{s_1} = \frac{x_2 - a_2}{s_2} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{s_n}}$$

Näide

Leiame punkte $A(2;-2;1;0)$ ja $B(2;-1;3;1)$ läbiva sirge parameetrilised ja kanoonilised võrrandid.

Sirge sihivektoriks sobib vektor

$$\overrightarrow{AB} = (2-2;-1-(-2);3-1;1-0) = (0;1;2;1)$$

Paigutades sirge parameetrilistesse võrrandisse punkti A koordinaadid, saame:

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 2 + t \cdot 0 = 2 \\ x_2 = -2 + t \\ x_3 = 1 + 2t \\ x_4 = 0 + t = t \end{cases}}$$

Näide

Sirge kanoonilisteks võrranditeks saame:

$$\frac{x_1 - 2}{0} = \frac{x_2 - (-2)}{1} = \frac{x_3 - 1}{2} = \frac{x_4 - 0}{1}$$

ehk

$$\frac{x_1 - 2}{0} = \frac{x_2 + 2}{1} = \frac{x_3 - 1}{2} = \frac{x_4}{1}.$$

Suhete võrdsusest

$$\frac{x_1 - 2}{0} = \frac{x_2 + 2}{1}$$

järeldub, et

$$1(x_1 - 2) = 0(x_2 + 2),$$

millest $x_1 = 2$.

Sirge kahemõõtmelises ruumis (1)

Kui n = 2, siis tähistatakse tavaliselt $x_1 = x$ ja $x_2 = y$.

Parameetrilised võrrandid: $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + s_x t \\ y = y_0 + s_y t \end{cases}}$

Kanooniline võrrand:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{s_x} = \frac{y - y_0}{s_y}}$$

Kanoonilisest võrrandist saame:

$$s_y(x - x_0) = s_x(y - y_0) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{s_y}_{a} x \underbrace{- s_x}_{b} y + \underbrace{(s_x y_0 - s_y x_0)}_{c} = 0$$

Sirge üldvõrrand:

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

Sirge kahemõõtmelises ruumis (2)

Leiame vektori $\vec{n} = (a; b) = (-s_y; s_x)$ skalaarkorrutise sirge sihivektoriga $\vec{s} = (s_x; s_y)$:

$$(\vec{n}, \vec{s}) = -s_y s_x + s_x s_y = 0.$$

Seega on vektorid $\vec{s}$ ja $\vec{n}$ ortogonaalsed (risti).

Definitsioon

Nullvektorist erinevat vektorit, mis on risti antud sirgega, nimetatakse selle *sirge normaalvektoriks*.

Seega on sirge üldvõrrandi kordajad *a* ja *b* sirge normaalvektori koordinaatideks.

Sirge kahemõõtmelises ruumis (3)

Kui $s_x \neq 0,$ siis saame kanoonilisest võrrandist

$$y - y_0 = \frac{s_y}{s_x}(x - x_0) = k(x - x_0)$$

Kordajat

$$k = \frac{s_y}{s_x}$$

nimetatakse sirge *tõusuks*.