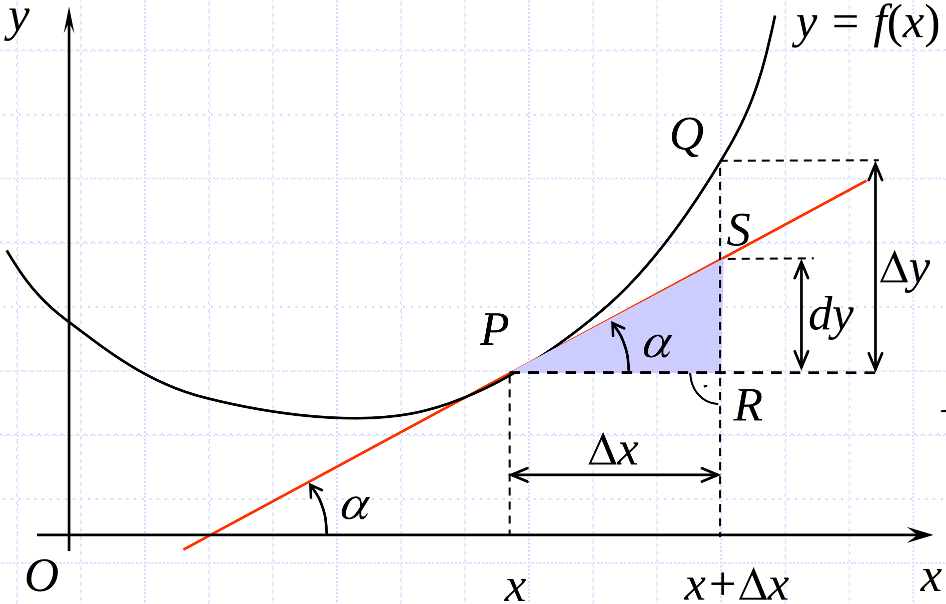
Funktsiooni diferentsiaal

Diferentsiaali geomeetriline tõlgendus



Täisnurksest kolmnurgast PRS: $\tan\alpha = \dfrac{RS}{PR}$

$$RS = PR \tan\alpha = f'(x)\,\Delta x = dy$$

$$PR = \Delta x$$

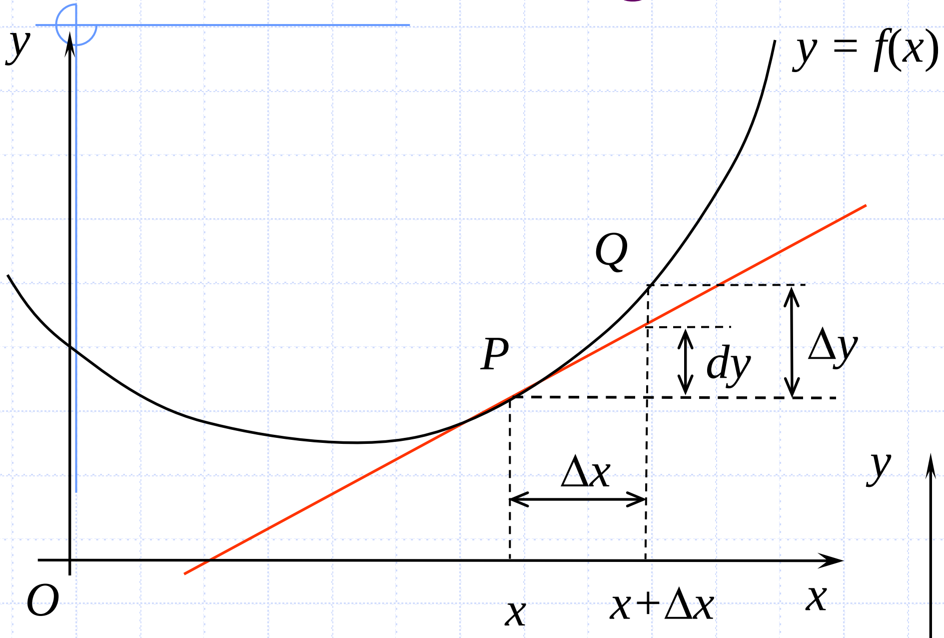
$$\tan\alpha = f'(x)$$

Funktsiooni $y = f(x)$ **diferentsiaaliks** dy nimetatakse avaldist

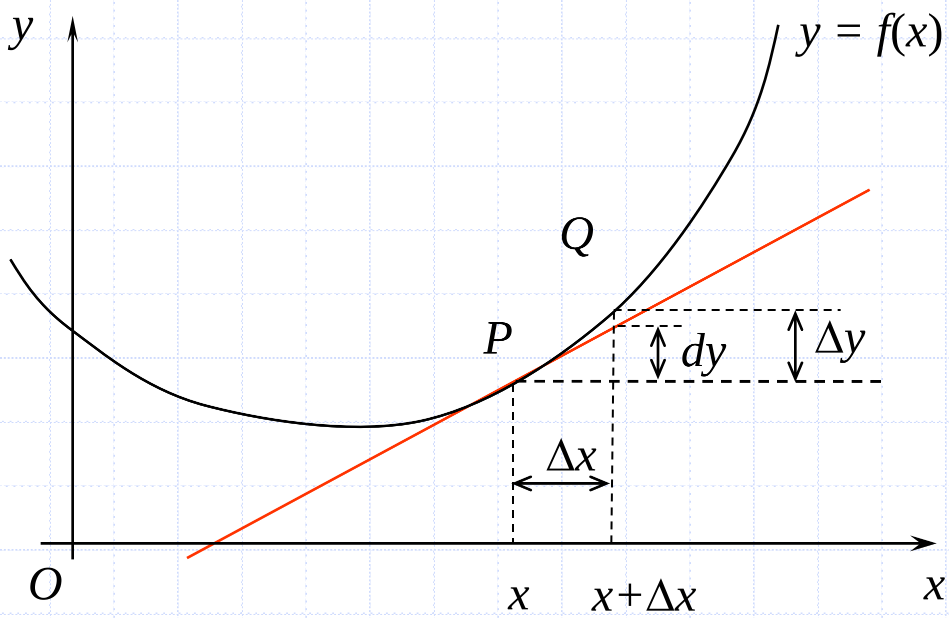
$$dy = f'(x)\Delta x$$

Geomeetriliselt kujutab funktsiooni diferentsiaal graafiku puutuja ordinaadi muutu.

Diferentsiaali geomeetriline tõlgendus



Väikese Δx korral: $\Delta y \approx dy$



Funktsiooni diferentsiaali arvutamine

Leida funktsiooni $y = x^3$ muut ja diferentsiaal:

1. x ja Δx suvaliste väärtuste korral;

$$\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$dy = \left(x^3\right)'\Delta x = 3x^2\Delta x$$

2. kui $x = 10$ ja $\Delta x = 0{,}01$, siis

$$\Delta y = 3\cdot 10^2\cdot 0{,}01 + 3\cdot 10\cdot (0{,}01)^2 + (0{,}01)^3 = 3 + 0{,}003 + 0{,}000001 = 3{,}003001$$

$$dy = 3\cdot 10^2\cdot 0{,}01 = 3$$

Argumendi diferentsiaal

Kui $f(x) = x$, siis **argumendi diferentsiaal** *dx* avaldub kujul

$$dx = x' \cdot \Delta x \quad = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

Seega seose $dy = f'(x)\Delta x$ põhjal

$$dy = f'(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Ehk funktsiooni tuletis avaldub funktsiooni diferentsiaali ja argumendi diferentsiaali jagatisena.

Funktsiooni diferentsiaali arvutamine

Näide 1

$$y = \sqrt{1 + \ln x}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1 + \ln x}} \frac{1}{x}$$

$$dy = y'\,dx \ = \frac{1}{2\sqrt{1 + \ln x}} \frac{1}{x} dx$$

Näide 2

$$y = \tan^2 \sqrt{x}$$

$$y' = 2\tan\sqrt{x} \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$$

$$dy = y'dx = \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}} dx$$

Diferentsiaali kasutamine ligikaudses arvutamises

Väikese Δx korral: $\Delta y \approx dy,$

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

Seda valemit kasutatakse laialdaselt ligikaudses arvutamises.

Leida $\sqrt[5]{32{,}3}$ ligikaudne väärtus.

Antud ülesannet võime vaadelda kui funktsiooni $f(x) = \sqrt[5]{x}$

väärtuse leidmist kohal $x + \Delta x,$ kus $x = 32$ ja $\Delta x = 0{,}3$.

$$f(32+0{,}3) \approx f(32) + f'(32)\cdot 0{,}3$$

Et $f'(x) = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$ siis

$$f(32+0{,}3) = \sqrt[5]{32} + \frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}}\cdot 0{,}3 = 2 + \frac{1}{5\cdot 16}\cdot 0{,}3 = 2 + \frac{0{,}3}{80} = 2{,}00375$$

Diferentsiaali kasutamine ligikaudses arvutamises

Voolutugevus ahelas

$$I = \frac{U}{R} = f(R),$$

kus U tähistab pinget juhi otstel ja R takistust.

Kuidas muutub voolutugevus takistuse suurenemisel ΔR võrra (näiteks kontaktide oksüdeerumisel)?

$$\Delta I \approx f'(R) \cdot \Delta R$$

$$f'(R) = -\frac{U}{R^2}$$

$$\Delta I \approx -\frac{U}{R^2} \Delta R$$

Absoluutne ja relatiivne viga

Täpse arvu X ja tema ligikaudse väärtuse ehk lähendi x korral nimetame **lähendi veaks** (tõeliseks veaks) suurust $|X - x|$.

Tavaliselt pole võimalik tõelist viga leida, vaid saab hinnata, millist arvu viga ei ületa.

Hinnangut δx nimetatakse **absoluutseks veaks.**

Ligikaudse arvu absoluutse vea ja selle arvu absoluutväärtuse jagatist nim. selle ligikaudse arvu **relatiivseks** ehk **suhteliseks veaks**:

$$\frac{\delta x}{|x|}$$

Diferentsiaali kasutamine mõõtmisvigade hindamisel

Suurus x mõõdetakse otseselt, suurus y aga kaudselt valemi $y = f(x)$ järgi.

x mõõtmisel saadud tulemus

Δx suuruse x mõõtmisel tehtud (tegelik) viga

δx suuruse x mõõtmise maksimaalne absoluutne viga:

$x(\pm\delta x)$

Ilmselt $|\Delta x| \le \delta x$

Kuna $\Delta y \approx f'(x)\Delta x,$

siis $|\Delta y| \approx |f'(x)| \cdot |\Delta x| \le |f'(x)|\delta x.$

Suuruse y **maksimaalne absoluutne viga**: $\delta y = |f'(x)|\,\delta x$

Suuruse y **maksimaalne relatiivne viga**: $\dfrac{\delta y}{|y|} = \left|\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right|\delta x$

Näide mõõtmisvea hindamisest

25(±0,5) cm

$$d = 25\ \text{cm}$$
$$\delta d = 0{,}5\ \text{cm}$$

Palli (kera) ruumala $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi d^3 \approx 8181\ \text{cm}^3$

Ruumala (kui funktsiooni) tuletis avaldub $V'(d) = \frac{1}{2}\pi d^2$

Ruumala absoluutne viga $\delta V = V'\delta d = \frac{1}{2}\pi d^2 \delta d \approx 491\ \text{cm}^3$

Seega kera ruumala $V = 8181(\pm 491)\ \text{cm}^3$

Ruumala relatiivne viga $\frac{\delta V}{V} = \frac{491}{8181} \approx 0{,}06 = 6\%$

Määramata integraal

Algfunktsioon

Funktsiooni $F(x)$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$ **algfunktsiooniks** piirkonnas A, kui $F'(x) = f(x)$ iga $x \in A$ korral.

Funktsiooni algfunktsiooni leidmist nimetatakse funktsiooni **integreerimiseks**.

Näide $f(x) = x^2$

algfunktsiooniks on $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ sest $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$

Teoreem 1 Kui $F(x)$ on $f(x)$ algfunktsioon, siis on seda ka $F(x) + c$ iga $c \in R$ korral.

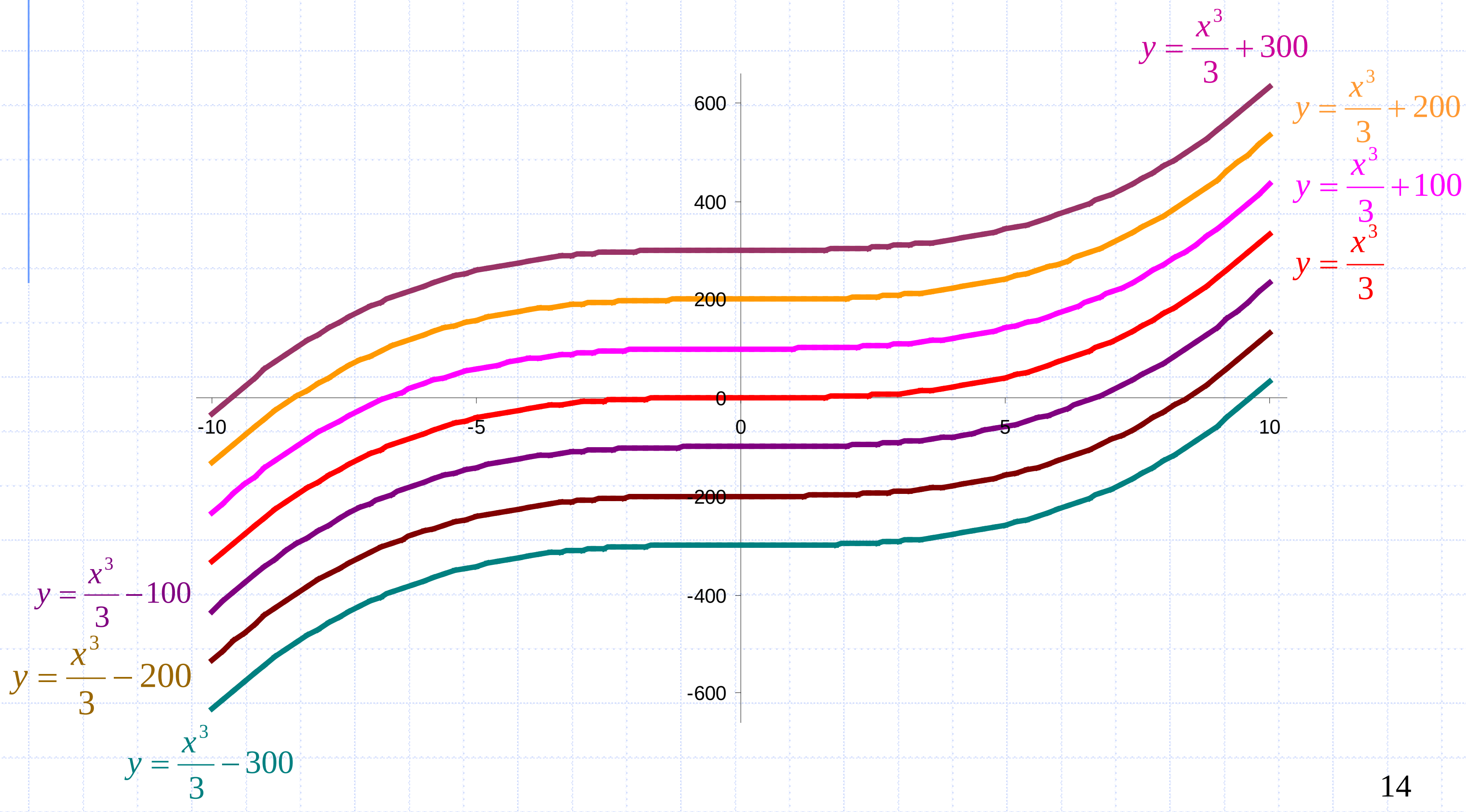
Teoreem 2 Kui $F(x)$ on $f(x)$ algfunktsioon mingis piirkonnas A, siis avaldub $f(x)$ iga algfunktsioon kujul $F(x) + c$, kus $c \in R$.

Näide Vaadeldud funktsiooni kõik algfunktsioonid avalduvad

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + c, \quad (c \in R)$$

Algfunktsioon

Funktsiooni $f\,(x) = x^2$ mõningate algfunktsioonide graafikud.



Määramata integraal

Avaldist $F(x) + c$, kus $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ mingi algfunktsioon ja $c \in R$ on suvaline konstant, nimetatakse funktsiooni $f(x)$ **määramata integraaliks** ja tähistatakse kujul

$$\int f(x)\, dx = F(x)+c.$$

Konstanti c nimetatakse **integreerimiskonstandiks**.

Määramata integraal

$$\int f(x)dx$$

integraali märk

integreeritav avaldis

integreerimismuutuja

integreeritav funktsioon

Põhiintegraalide tabel

$$\int 0dx = c$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{a+1} + c \quad (a \neq -1)$$

$$\int dx = x + c$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c = -\mathrm{arccot}\, x + c$$

Määramata integraali omadused

1) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

2) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

3) $(\int f(x)dx)' = f(x)$

4) $\int F'(x)dx = F(x) + c$

Näide: vahetu integreerimine

$$\int \frac{(x-3)^2}{2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2-6x+9}{x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(x-6+\frac{9}{x} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int xdx - \int 6dx + \int \frac{9}{x}dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int xdx - 6\int dx + 9\int \frac{1}{x}dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - 6x + 9\ln|x| \right) + c$$

Ositi integreerimine

Ositi integreerimise valem

Kui $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ on diferentseeruvad funktsioonid ning

leidub $\int vdu$ siis leidub ka $\int udv$ kusjuures

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Näide $\int x\sin xdx =$

Olgu $u = x$ $dv = \sin xdx$

siis $du = dx$ $v = -\cos x$

Järelikult

$$\int x\sin xdx = -x\cos x + \int \cos xdx =$$

$$= -x\cos x + \sin x + c$$

Muutuja vahetus

Muutuja vahetus määramata integraalis

Kui $x = \varphi(t),$ siis

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Näide $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx =$

Teeme muutuja vahetuse

$$t = \sin x$$

$$dt = \cos x dx$$

seega

$$\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt = 2\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3} + c = \frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x + c$$