

## Tööleht nr 5 aines „Matemaatiline analüüs”

### **I. Arvutada järgmised piirväärtused, kasutades L'Hospitali reeglit.**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}{1 - x}$

5.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

### **II. Leida järgmiste funktsioonide monotoonsuse piirkonnad.**

7.  $f(x) = x^3 - 3x^2$

10.  $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$

8.  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

9.  $f(x) = x^2 e^x$

### **III. Leida järgmiste funktsioonide lokaalsed ekstreemumid.**

11.  $f(x) = x \ln^2 x$

14.  $f(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4$

12.  $f(x) = (x-4)^3 x$

13.  $f(x) = \sqrt[3]{x^2} e^x$

### **IV. Leida järgmiste funktsioonide graafikute käänupunktid ning kumeruse ja nõgususe piirkonnad.**

15.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$

17.  $f(x) = \arctan x - x$

16.  $f(x) = \frac{3}{x-4}$

18.  $f(x) = x^2 (\ln x - \frac{1}{2})$

### **V. Leida järgmiste funktsioonide graafikute asümptootid.**

19.  $f(x) = \frac{1}{x-2}$

22.  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

20.  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

23.  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x + 1}$

21.  $f(x) = x + \ln x$

### **VI. Uurida funktsioone.**

24.  $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$

26.  $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

25.  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-2}$

**Vastused:** 1. 1/2 2. 0 3. 2 4. 1/2 5. 1/3 6. 1/2

7. Kasvab vahemikes  $(-\infty; 0)$  ja  $(2; \infty)$ , kahaneb vahemikus  $(0; 2)$ .

8. Kahaneb vahemikes  $(0; 1)$  ja  $(1; e)$ , kasvab vahemikus  $(e; \infty)$ .

9. Kasvab vahemikes  $(-\infty; -2)$  ja  $(0; \infty)$ , kahaneb vahemikus  $(-2; 0)$ .

10. Kasvab vahemikes  $(-1; \frac{1}{2})$  ja  $(2; \infty)$ , kahaneb vahemikus  $(-\infty; -1)$  ja  $(\frac{1}{2}; 2)$ .

11. Punktis  $x = 1$  on lokaalne miinimum  $f(1) = 0$ . Punktis  $x = e^{-2}$  on lokaalne maksimum  $f(e^{-2}) = 4e^{-2}$ .

12. Punktis  $x = 1$  on lokaalne miinimum  $f(1) = -27$ .

13. Punktis  $x = -2/3$  on lokaalne maksimum  $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{4}{9}e^{-2}}$ . Punktis  $x = 0$  on lokaalne miinimum  $f(0) = 0$ .

14. Punktis  $x = -1$  on lokaalne miinimum  $f(-1) = -1/12$ . Punktis  $x = 0$  on lokaalne maksimum  $f(0) = 0$ . Punktis  $x = 1$  on lokaalne miinimum  $f(1) = -1/12$ .

15. Kumer vahemikus  $(-\infty; 2)$ , nõgus vahemikus  $(2; \infty)$ . Punkt  $(2; 12)$  on käänupunkt.

16. Kumer vahemikus  $(-\infty; 4)$ , nõgus vahemikus  $(4; \infty)$ . Käänupunkte pole (funktsioon pole määratud kohal  $x = 4$ ).

17. Nõgus vahemikus  $(-\infty; 0)$ , kumer vahemikus  $(0; \infty)$ . Punkt  $(0; 0)$  on käänupunkt.

18. Kumer vahemikus  $(0; \frac{1}{e})$ , nõgus vahemikus  $(\frac{1}{e}; \infty)$ . Punkt  $(\frac{1}{e}; -\frac{3}{2e^2})$  on käänupunkt.

19. Kahepoolne püstasümptoot  $x = 2$ , kahepoolne kaldasümptoot  $y = 0$ .

20. Kahepoolne püstasümptoot  $x = -2$ , kahepoolne püstasümptoot  $x = 2$ , kahepoolne kaldasümptoot  $y = 1$ .

21. Püstasümptoot  $x = 0$  punkti 0 parempoolses ümbruses.

22. Kahepoolne püstasümptoot  $x = 1$ .

23. Kahepoolne püstasümptoot  $x = -1$ , kahepoolne kaldasümptoot  $y = 2x - 2$ .

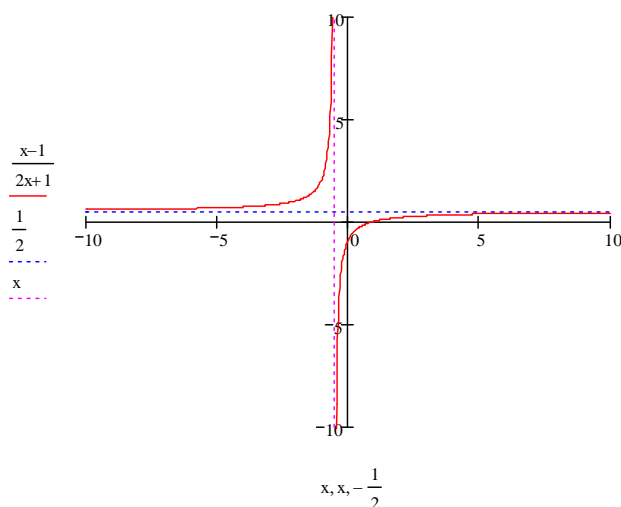
24.  $X = \left\{(-\infty; -\frac{1}{2}); (-\frac{1}{2}; \infty)\right\}$ ;  $X_0 = \{1\}$ , funktsioon ei ole ei paaris ega paaritu;

$$X^+ = \left\{(-\infty; -\frac{1}{2}); (1; \infty)\right\}; X^- = (-\frac{1}{2}; 1); f'(x) = \frac{3}{(2x+1)^2}; X \uparrow = \left\{(-\infty; -\frac{1}{2}); (-\frac{1}{2}; \infty)\right\};$$

$$X \downarrow = \emptyset; \text{ekstreemumpunkte pole}; f''(x) = -\frac{12}{(2x+1)^3}; \hat{X} = (-\frac{1}{2}; \infty); \check{X} = (-\infty; -\frac{1}{2});$$

käänupunkte pole; kahepoolne püstasümptoot võrrandiga  $x = -\frac{1}{2}$ ; kahepoolne

kaldasümptoot (rõhtasümptoot) võrrandiga  $y = \frac{1}{2}$ .



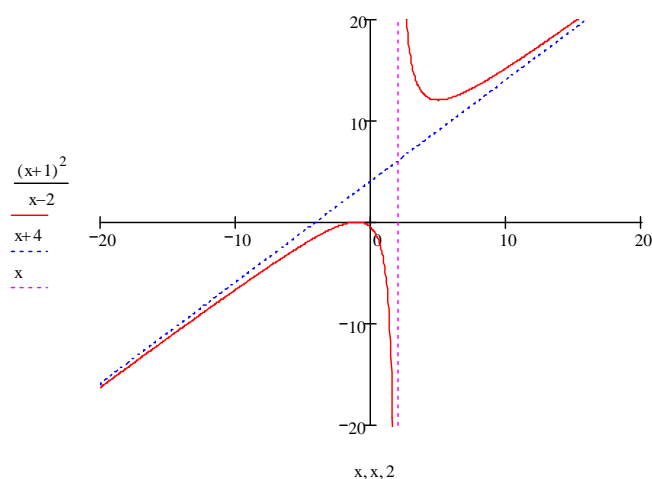
**25.**  $X = \{(-\infty; 2); (2; \infty)\}$ ;  $X_0 = \{-1\}$ , funktsioon ei ole ei paaris ega paaritu;  $X^+ = (2; \infty)$ ;

$$X^- = \{(-\infty; -1); (-1; 2)\}; f'(x) = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}; X \uparrow = \{(-\infty; -1); (5; \infty)\};$$

$X \downarrow = \{(-1; 2); (2; 5)\}$ ; maksimumpunkt  $E_1 = (-1; 0)$ ; miinimumpunkt  $E_2 = (5; 12)$ ;

$$f''(x) = \frac{18}{(x-2)^3}; \hat{X} = (-\infty; 2); \check{X} = (2; \infty); \text{käänupunkte pole; kahepoolne püstasümptoot}$$

võrrandiga  $x = 2$ ; kahepoolne kaldasümptoot võrrandiga  $y = x + 4$ .



**26.**  $X = \{(-\infty; -1); (-1; \infty)\}$ ;  $X_0 = \{1\}$ , funktsioon ei ole ei paaris ega paaritu;  $X^+ = (1; \infty)$ ;

$$X^- = \{(-\infty; -1); (-1; 1)\}; f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}; X \uparrow = \{(-\infty; -5); (-1; \infty)\}; X \downarrow = (-5; -1);$$

maksimumpunkt  $E = (-5; -13,5)$ ,  $f''(x) = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$ ;  $\hat{X} = \{(-\infty; -1); (-1; 1)\}$ ;  $\check{X} = (1; \infty)$ ;

käänupunkt  $K = (1; 0)$ ; kahepoolne püstasümptoot võrrandiga  $x = -1$ ; kahepoolne

kaldasümptoot võrrandiga  $y = x - 5$ .

