Funktsiooni tuletis

Funktsiooni tuletis on üks diferentsiaalarvutuse põhimõisteid. Diferentsiaalarvutuse rajajateks peetakse 17. sajandi matemaatikuid Isaac Newtonit ja Gottfried Wilhelm Leibnizi. Nad jõudsid tuletise mõisteni erinevaid teid mööda. Newton taevakehade kiiruse muutumist uurides, Leibniz funktsiooni maksimumide ja miinimumide ning joone puutuja võrrandi leidmise ülesannete kaudu.

Liikumise kiirus

Vaatleme mingi keha sirgjoonelist liikumist, näiteks kivi kukkumist mingilt kõrguselt. Liikuva punkti kaugus *s* tema mingist algasendist sõltub ajast *t*, s.t. *s* on aja *t* funktsioon: $s = f(t)$. Asetsegu liikuv punkt ajahetkel *t* algasendist kaugusel *s*. Mingil järgmisel momendil $t + \Delta t$ saame asukoha leida võrdusest $s = f(t + \Delta t)$. Seega ajavahemikus Δt läbitud teepikkus avaldub $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$.

Vaatleme nüüd suhet $\frac{\Delta s}{\Delta t}$; see väljendab punkti liikumise keskmist kiirust ajavahemiku Δt jooksul. Keskmine kiirus ei iseloomusta alati küllalt täpselt vaadeldava punkti liikumise kiirust ajamomendil *t*. Kui keha liigub näiteks ajavahemiku Δt algul väga kiiresti, lõpul aga väga aeglaselt, siis keskmine kiirus ei peegelda enam neid liikumise iseärasusi. Et väljendada tõelist kiirust keskmise kiiruse abil täpsemalt, on vaja võtta väiksem ajavahemik Δt. Seetõttu defineeritakse liikuva punkti kiirus hetkel *t* ehk hetkkiirus valemiga $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Arutelu käigus lahendasime järgmist tüüpi ülesande: antud on funktsiooni esitav valem, leida selle funktsiooni muudu ja argumendi muudu suhte piirväärtus, kui argumendi muut läheneb nullile. Et seda tüüpi ülesandeid tuleb lahendada väga sageli, siis omistatakse niisugusele piirväärtusele omaette nimetus – funktsiooni tuletis.

Tuletise mõiste

Funktsiooni $y = f(x)$ **tuletiseks** $f'(x)$ kohal *x* nimetatakse piirväärtust

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

kui see piirväärtus eksisteerib.

Funktsiooni tuletise märkimiseks kasutatakse sümboleid: y', $f'(x)$, y_x, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Vastavalt tuletise definitsioonile, koosneb funktsiooni tuletise leidmine järgmistest etappidest:

1. funktsiooni $y = f(x)$ muudu Δy arvutamine vastavalt valemile $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;
2. jagatise $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ moodustamine;
3. piirväärtuse $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ arvutamine.

Näide. On antud funktsioon $f(x) = x^2$. Leida tema tuletis: a) suvalises punktis *x;* b) punktis $x = 3$.

Lahendus.

1. Leiame funktsiooni muudu

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

2. Moodustame suhte $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

3. Leides piirväärtuse, saame kätte antud funktsiooni tuletise

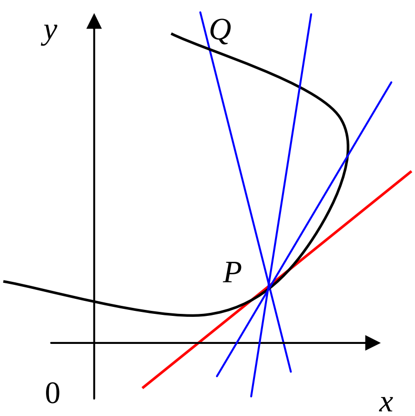
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Kui $x = 3$, siis saame $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

Tuletise geomeetriline tõlgendus

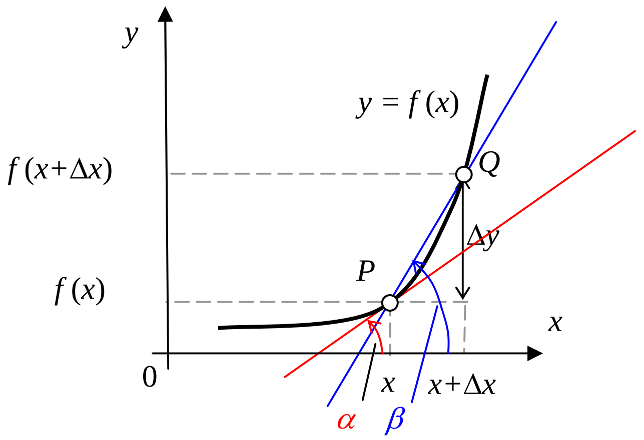
Tuletise mõiste juurde jõudsime liikuva keha (punkti) kiiruse vaatlemisel, s.o. lähtudes mehaanikaalasest kujutelmast. Anname nüüd tuletise geomeetrilise tõlgenduse. Selleks peame kõigepealt defineerima kõverjoone puutuja antud punktis.

Olgu antud mingi kõverjoon ja sellel fikseeritud punkt *P*. Võtame joonel veel ühe punkti *Q* ja tõmbame lõikaja *PQ*. Jälgime selle lõikaja asendi muutumist, kui punkt *P* jääb paigale, aga punkt *Q* läheneb mööda joont punktile *P*.



Joone puutujaks punktis *P* nimetatakse lõikaja *PQ* piirseisu, kui punkt *Q* mööda kõverat piiramata läheneb punktile *P*.

Vaatleme nüüd funktsiooni $y = f(x)$ graafikut. Märgime joonel kaks punkti $P(x, f(x))$ ja $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$. Tähistame lõikaja *PQ* tõusunurka tähega β ja puutuja tõusunurka tähega α.



Nagu joonisel näha avaldub lõikaja tõus jagatisena $\tan\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Kui punkt *Q* läheneb punktile *P*, siis $\Delta x \to 0$ ja lõikaja tõusunurk β läheneb puutuja tõusunurgale α. Seega

$$\tan\alpha = \lim_{\Delta x\to 0}\tan\beta = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Järelikult $f'(x) = \tan\alpha$, ehk funktsiooni tuletis kohal *x* on võrdne funktsiooni graafikule kohal *x* tõmmatud puutuja tõusuga.

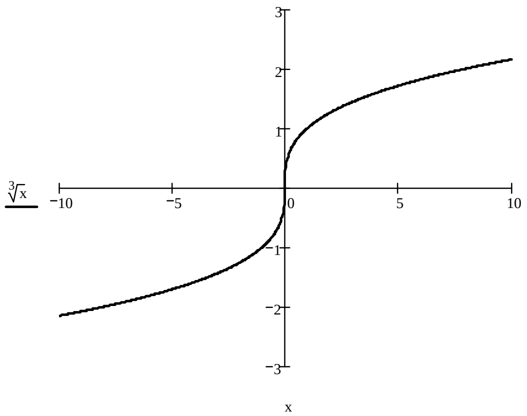
Funktsiooni diferentseeruvus

Funktsiooni tuletise leidmist nimetatakse funktsiooni **diferentseerimiseks.** Kui funktsioonil $y = f(x)$ on tuletis punktis $x = a$, siis ütleme, et funktsioon on **diferentseeruv punktis *a***. Kui funktsioon on diferentseeruv aga mingi piirkonna igas punktis, siis öeldakse, et see funktsioon on **diferentseeruv selles piirkonnas**.

Teoreem. Kui funktsioonil on olemas lõplik tuletis antud kohal, siis funktsioon on pidev sellel kohal.

Seega on pidevus funktsiooni diferentseeruvuse tarvilik tingimus. See tingimus ei ole aga piisav, sest leidub funktsioone, mis on küll pidevad, aga mõnedel *x* väärtustel neil tuletist pole.

Näide. Vaatleme funktsiooni $y = \sqrt[3]{x}$, mille graafik on määratud ja pidev muutuja *x* kõigi väärtuste korral.



Selgitame, kas sellel funktsioonil leidub tuletis, kui $x = 0$. Selleks avaldame funktsiooni muudu

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}\,.$$

Arvutame muudu väärtuse, kui $x = 0$

$$\Delta y = \sqrt[3]{0+\Delta x} - \sqrt[3]{0} = \sqrt[3]{\Delta x}\,.$$

Leiame funktsiooni muudu ja argumendi muudu suhte piirväärtuse

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = \infty\,.$$

Seega läheneb funktsiooni muudu ja argumendi muudu suhe punktis $x = 0$ lõpmatusele, kui $\Delta x \to 0$ (seega piirväärtus puudub). Järelikult pole vaadeldav funktsioon punktis $x = 0$ diferentseeruv.

Diferentseerimise põhivalemid

Funktsiooni tuletise leidmine definitsiooni abil on töömahukas. Seetõttu leitakse enamesinevate funktsioonide tuletised ning diferentseerimise reeglid, mida kasutatakse keerulisemate funktsioonide tuletiste leidmisel. Esitame kokkuvõtvas tabelis meie kursusel vajaminevad valemid.

$y = \mathrm{const}$	$y' = 0$	$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x\ln a}$
$y = x^\alpha$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$		
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \ln\lvert x\rvert$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = -\dfrac{1}{x^2}$	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$		
$y = \tan x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = \arctan x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \cot x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$y = \mathrm{arccot}\, x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$y = e^x$	$y' = e^x$		
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$		

Kasutades tuletise definitsiooni veendume järgnevalt mõningate valemite kehtivuses.

Funktsiooni y = sin x tuletis

Teoreem. Funktsiooni $y = \sin x$ tuletis on $y = \cos x$.

Tõestus. Leiame esmalt funktsiooni muudu, kasutades teisendamisel gümnaasiumikursusest tuntud valemit $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Moodustame jagatise $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x/2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Arvestame, et kui $\Delta x\to 0$, siis ka $\frac{\Delta x}{2}\to 0$ ja kehtib võrdus $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, saame

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x/2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\lim_{\frac{\Delta x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x=\cos x$$

MOTT

Ülesanne (iseseisvalt). Leida funktsiooni $y=\cos x$ tuletis.

Astmefunktsiooni tuletis

Teoreem. Funktsiooni $y = x^n$ tuletis on $y = nx^{n-1}$, kus *n* on positiivne täisarv.

Tõestus: Tõestamisel läheb tarvis Newtoni binoomvalemit:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b^1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\ldots+b^n.$$

Meenutame siinkohal ka, et $C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ ja $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n$.

Arvutame funktsiooni muudu

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=x^n+\tfrac{n}{1}x^{n-1}\Delta x+\tfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n-x^n$$

$$=nx^{n-1}\Delta x+\tfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n.$$

Leiame suhte

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\tfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+\ldots+(\Delta x)^{n-1}.$$

Leiame selle suhte piirväärtuse

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[nx^{n-1}+\tfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+\ldots+(\Delta x)^{n-1}]=nx^{n-1}.$$

MOTT

Tehetega seotud diferentseerimisreeglid

Teoreem Kui funktsioonid *f* ja *g* on diferentseeruvad punktis *a*, siis ka $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ (kui $g(a)\neq 0$) on diferentseeruvad selles punktis ja

$$(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a);$$

$$(f-g)'(a)=f'(a)-g'(a);$$

$$(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a);$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Näide. Leida funktsiooni $y = x\sin x + \cos x$ tuletis.
Lahendus. Kasutame summa ja korrutise diferentseerimise reeglit

$$\begin{aligned}(x\sin x + \cos x)' &= (x\sin x)' + (\cos x)' \\ &= x'\cdot \sin x + x(\sin x)' + (\cos x)' = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x\end{aligned}$$

Näide. Leida funktsiooni $y = \tan x$ tuletis.
Lahendus. Esitame tangensi siinuse ja koosinuse suhtena ja kasutame jagatise tuletise valemit

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - (-\sin^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Liitfunktsiooni diferentseerimine

Kui funktsioonidel $f(u)$ ja $\varphi(x)$ on lõplikud tuletised vastavalt kohtadel $u = \varphi(x)$ ja, x siis on liitfunktsioonil $F(x) = f[\varphi(x)]$ kohal x lõplik tuletis $F'(x)$, mis avaldub kujul

$$F'(x) = f'(u)\varphi'(x).$$

Märkus. Kui funktsioon $y = F(x)$ on selline, et teda võib esitada kujul $y = f(u)$, $u = \phi(v)$, $v = \psi(x)$, siis $F'(x) = f'(u)\phi'(v)\psi'(x)$.
Näide. On antud funktsioon $y = \sin\left[(\ln x)^3\right]$. Leida $y'(x)$.
Lahendus. Esitame funktsiooni kujul $y = \sin u$, $u = v^3$, $v = \ln x$. Leiame vastavad tuletised

$$\frac{dy}{du} = \cos u\,,\ \frac{du}{dv} = 3v^2,\ \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Kasutades eelpool toodud valemit, saame:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = (\cos u)\cdot 3v^2\cdot\frac{1}{x} = 3\cos\left[(\ln x)^3\right]\cdot(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}.$$

Pöördfunktsiooni tuletis

Kui piirkonnas X kasvaval või kahaneval funktsioonil $y = f(x)$ on punktis x olemas tuletis $f'(x) \neq 0$, siis pöördfunktsioonil $x = \varphi(y)$ on punktis $y = f(x)$ olemas tuletis, mis avaldub kujul

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Arkusfunktsioonide tuletised

Teoreem. Funktsiooni $y = \arcsin x$ tuletis on $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Tõestus. Funktsiooni $y = \arcsin x$ pöördfunktsioon on $x = \sin y$. Seega

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Kasutades teisendusvalemit $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ja tehes tagasiasenduse $\sin y = x$, võime kirjutada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

MOTT

Teoreem. Funktsiooni $y = \arccos x$ tuletis on $y = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Tõestus. Funktsiooni $y = \arccos x$ pöördfunktsioon on $x = \cos y$. Seega

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y}.$$

Kasutades teisendusvalemit $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ja tehes tagasiasenduse $\cos y = x$, võime kirjutada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}.$$

MOTT

<u>Ülesanne (iseseisvalt)</u>. Leida funktsioonide $y = \arctan x$ ja $y = arc\cot x$ tuletised.

<u>Näide.</u> Diferentseerime funktsiooni $y = \arctan\frac{1-x}{1+x}$.

Lahendus. Paneme tähele, et tegemist on liitfunktsiooniga kujul $y = \arctan u$, kus $u = \frac{1-x}{1+x}$.

Kasutades liitfunktsiooni diferentseerimisreeglit saame

$$\left(\arctan\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)' =$$

$$= \left(\frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+(1-x)^2}\right)\cdot\left(\frac{(1-x)'(1+x)-(1-x)(1+x)'}{(1+x)^2}\right) =$$

$$= \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2+(1-x)^2} = \frac{-2}{2+2x^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Ilmutamata kujul oleva funktsiooni diferentseerimine

Olgu argumendi x funktsioon y esitatud ilmutamata kujul $F(x,y) = 0$. Tuletise $y' = \frac{dy}{dx}$ leidmiseks diferentseeritakse antud võrduse pooli x järgi, kusjuures funktsiooni y sisaldavaid osafunktsioone diferentseeritakse kui liitfunktsioone.

<u>Näide.</u> Leida tuletis y', kui $y^2 + 2x = x^2 + 2xy$.

Lahendus. Võtame tuletise x järgi võrduse mõlemast poolest, arvestades, et y on muutuja x funktsioon

$$2yy' + 2 = 2x + 2(y + xy')$$

Avaldame saadud võrdusest y'

$$y' = \frac{1-x-y}{x-y}.$$

Parameetrilisel kujul oleva funktsiooni diferentseerimine

Olgu funktsioon antud parameetrilisel kujul:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in T \subseteq R.$$

Eeldame, et $\varphi(t), \psi(t)$ on diferentseeruvad ja $\varphi'(t) \neq 0$ siis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\psi / dt}{d\varphi / dt} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Saadud valem võimaldab leida parameetrilisel kujul antud funktsiooni tuletist leidmata otsest sõltuvust *x* ja *y* vahel.

<u>Näide.</u> Leida $\frac{dy}{dx}$ kui $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi$.

Lahendus. $y'_x = \frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\cot t$.

Logaritmilise diferentseerimise võte

Juhul kui diferentseeritav funktsioon kujutab hõlpsasti logaritmitavat avaldist, osutub otstarbekaks enne diferentseerimist selle avaldise absoluutväärtust logaritmida. Vaatleme logaritmilise diferentseerimise võtet kõigepealt näite varal.

<u>Näide.</u> Leida funktsiooni $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$ tuletis.

Lahendus. Teisendame kõigepealt funktsiooni avaldise

$$y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}} = x^{\frac{1}{3}}(x^2+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{2}{3}}.$$

Võtame võrduse kummastki poolest naturaallogaritmi. (Kuna funktsiooni väärtused võivad olla ka negatiivsed, peame logaritmima funktsiooni absoluutvääruse.)

$$\ln|y| = \ln\left|x^{\frac{1}{3}}(x^2+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{2}{3}}\right|.$$

Lihtsustame, kasutades logaritmi omadusi :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln(a^c) = c\ln a.$$

Saame

$$\ln|y| = \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln(x^2+1) - \frac{2}{3}\ln|x-1|.$$

Võtame võrduse mõlemast poolest tuletise arvestades, et *y* on muutuja *x* funktsioon:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)' - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1}\cdot(x-1)'$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x - 2\cdot\frac{1}{x-1}\cdot 1\right].$$

Avaldame y':

$$y' = y\cdot\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{x-1}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{x-1}\right]\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}.$$

Seega logaritmilise diferentseerimise võtte rakendamisel tuleb:

1. Logaritmida funktsiooni avaldise $y = f(x)$ absoluutväärtus
$$\ln|y| = \ln|f(x)|.$$
2. Võtta tuletis võrduse mõlemalt poolt
$$\frac{1}{y}y' = (\ln|f(x)|)'.$$
3. Avaldada y'
$$y' = f(x)(\ln|f(x)|)'.$$

Logaritmilise diferentseerimise võte osutub vältimatuks nn. **astme-eksponentfunktsiooni**

$$y = u(x)^{v(x)},\ u(x) > 0$$

korral, sest diferentseerimise põhivalemite hulgas ei ole valemit juhuks, kus astme alus ja astendaja korraga muutuvad.

<u>Näide.</u> Leida funktsiooni $y = (\sin x)^x$ tuletis.

Lahendus. Arvestame, et funktsioon on määratud, kui $\sin x > 0$, seega $y > 0$.

Logaritmime võrduse pooli

$$\ln y = \ln(\sin x)^x.$$

Lihtsustame

$$\ln y = x\ln(\sin x).$$

Võtame võrduse mõlemast poolest tuletise

$$\frac{1}{y}y' = \ln(\sin x) + x\frac{1}{\sin x}\cos x.$$

Avaldame y'

$$y' = y[\ln(\sin x) + x\cot x] = (\sin x)^x[\ln(\sin x) + x\cot x].$$

Astmefunktsiooni tuletis

Tuletame astmefunktsiooni diferentseerimise reegli, kasutades logaritmilise diferentseerimise võtet. Olgu $y = x^n$, $x > 0, n \in R$.

Logaritmime antud funktsiooni

$$\ln y = n\ln x.$$

Diferentseerime võrduse pooli

$$y'\frac{1}{y} = n\frac{1}{x}.$$

Avaldame y'

$$y' = yn\frac{1}{x} = x^n n\frac{1}{x} = nx^{n-1}.$$

Saab näidata, et see valem kehtib ka siis, kui $x < 0$, kui vaid x^n omab mõtet. (Varasemalt tõestasime selle valemi juhul kui *n* on positiivne täisarv. Praegu viisime tõetuse läbi üldjuhul, kus *n* võib olla suvaline konstant.)

Ülesanne (iseseisvalt): Kasutades logaritmimisvõtet leida eksponentfunktsiooni tuletis.

Kõrgemat järku tuletised

Funktsiooni teist järku tuletiseks ehk **teiseks tuletiseks** nimetatakse tema tuletise tuletist ja seda tähistatakse kas sümboliga $f''(x)$ või sümboliga $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

Näide. Avaldada funktsiooni $f(x) = x^5$ teist järku tuletis.

Lahendus. $f'(x) = 5x^4$

$f''(x) = (5x^4)' = 20x^3$

Funktsiooni kolmandat järku tuletiseks ehk **kolmandaks tuletiseks** nimetatakse tema teise tuletise tuletist ja seda tähistatakse kas sümboliga $f'''(x)$ või sümboliga $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$

Funktsiooni $f(x)$ *n*-järku tuletiseks nimetatakse tema (*n*-1)-järku tuletise tuletist ja seda tähistatakse kas sümboliga $f^{(n)}(x)$ või sümboliga $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$.

Neljandat, viiendat ja kõrgemat järku tuletisi märgitakse ka rooma numbritega: y^{IV}, y^{V},...

Kõrgemat järku tuletiste arvutamiseks tuleb üldiselt leida üksteise järel kõik madalamat järku tuletised. Teatud juhtudel õnnestub aga ette aimata *n*-järku tuletise avaldist.

Näide. Avaldada funktsiooni $y = e^{kx}$ ($k = const$) *n*-järku tuletis.

Lahendus. $y' = ke^{kx}$

$y'' = k^2 e^{kx}$

$y''' = k^3 e^{kx}$

Seega võib oletada, et kehtib valem $y^{(n)} = k^n e^{kx}$.

Näide. Avaldada funktsiooni $y = \sin x$ *n*-järku tuletis.

Lahendus. $y' = \cos x = \sin(x + \pi/2)$

$y'' = -\sin x = \sin(x + 2\pi/2)$

$y''' = -\cos x = \sin(x + 3\pi/2)$

$y^{\mathrm{IV}} = \sin x = \sin(x + 4\pi/2)$

Seega võib oletada, et kehtib valem $y^{(\mathrm{n})} = \sin(x + n\pi/2)$.