Tõenäosusteooria ja statistika

Tõenäosusteooria on teadus seaduspärast juhuslike sündmuste ja juhuslike protsesside maailmas.

Ehk **tõenäosusteooria** uurib massiliselt toimuvates juhuslikes sündmustes esinevaid seaduspärasusi.

<u>Näiteks</u> täringu paljukordsel viskamisel tuleb 5 ligikaudu 1/6 juhtudest, mis pole enam juhuslik, vaid seaduspärane.

Statistika on teadus andmete kogumisest, töötlemisest ja statistiliselt korrektsete järelduste tegemisest.

Matemaatiline statistika üheks aluseks on tõenäosusteooria.

Sündmuse mõiste

Tõenäosusteooria üheks põhimõisteks on **sündmus**. Seda ei saa defineerida veelgi lihtsamate mõistete abil, vaid võime ainult kirjeldada.

<u>Sündmused on näiteks:</u>

1) vee keemahakkamine normaalse õhurõhu juures temperatuuril 100°C

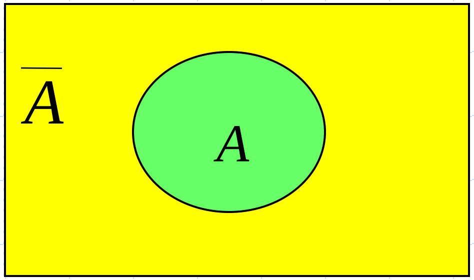
2) täringu veeretamisel tuleb kuus silma

3) mündi viskamisel üheaegselt kulli ja kirja saamine

Vastandsündmused

Sündmuse A **vastandsündmuseks** $\overline{A}$ nimetatakse sündmust, mille toimumine seisneb sündmuse A mittetoimumises.

Sündmuse A vastandsündmust tähistatakse tavaliselt sümboliga $\overline{A}$.



Näide Täpsuslaskmine

A – tabame ringi

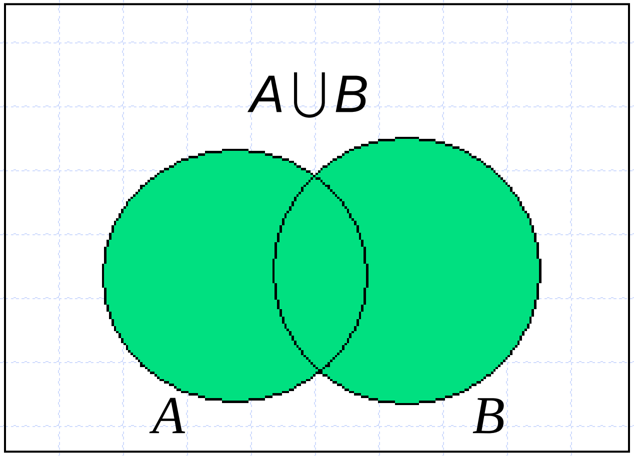
$\overline{A}$ – ei taba ringi, aga tabame kollast ala

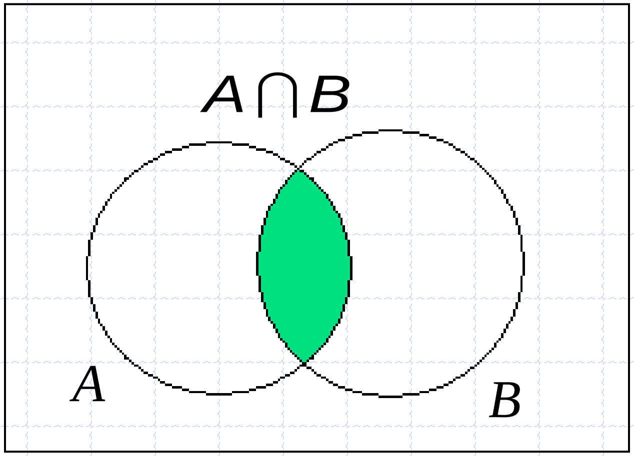
Sündmuste summa ja korrutis

Kahe sündmuse A ja B **summaks** (ka **ühendiks**) $A \cup B$ nimetatakse sündmust, mille toimumine seisneb kas A või B või mõlema toimumises.

Kahe sündmuse A ja B **korrutiseks** (ka **ühisosaks**) $A \cap B$ ehk AB nimetatakse sündmust, mille toimumine seisneb mõlema sündmuse A ja B toimumises.

Analoogselt hulkadega kujutatakse sündmusi ja tehteid nendega Venni diagrammide abil.





Elementaarsündmuste süsteem

Juhuslikke sündmusi nimetatakse **võrdvõimalikeks**, kui ühel neist ei ole rohkem võimalusi esiletulekuks kui teisel.

Olgu ühel katsel n mõeldavat erinevat katsetulemust $A_1, ..., A_n$. Kusjuures üks nendest toimub kindlasti. Juhul kui neist ühe toimumine välistab teiste samaaegse toimumise, räägitakse **täielikust sündmuste süsteemist**.

Näiteks Täringuviske tulemuste hulk {1, 2, 3, 4, 5, 6} moodustab sündmuste täieliku süsteemi

Võrdvõimalike sündmuste täielikku süsteemi nimetatakse **elementaarsündmuste süsteemiks**.

Sündmuse klassikaline tõenäosus

Sündmuse *A* tõenäosuseks $P(A)$ nimetatakse sündmuse toimumiseks soodsate juhuste arvu m suhet kõigi võimalike juhuste arvusse n, kus juhused moodustavad elementaarsündmuste süsteemi:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Näide Kausis on 4 kollast, 7 sinist ja 5 punast ploomi. Kausist võetakse juhuslikult üks ploom. Kui suur on tõenäosus, et see ploom on kollane?

Kausis on kokku 16 ploomi, seega ühe ploomi valikuks on 16 erinevat võimalust (kõigi võimalike juhuste arv on 16). Kollaseid ploome on kausis 4, seega soodsaid juhuseid on 4.

$$P(\text{"}\,ploom\ on\ kollane\text{"}) = \frac{4}{16} = 0{,}25$$

Faktoriaal

Naturaalarvude korrutist $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ nimetatakse **arvu *n* faktoriaaliks**.

Faktoriaali tähis on $n!$

Eraldi defineeritakse

$$1! = 1$$

$$0! = 1$$

Näide

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Permutatsioonid

Permutatsioonide arv *n* elemendist on arv, mis näitab, mitu erinevat järjekorda saab moodustada *n* elemendist.

Permutatsioonide arvu tähis on P_n

Arvutusvalem

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

Näide Seitse inimest saavad siseneda bussi

$$P_7 = 7! = 5040$$ erineval moel.

Kombinatsioonide arv

Kombinatsioonide arv n elemendist k kaupa näitab, mitu erinevat võimalust on valida k elementi n elemendi hulgast.

Kombinatsioonide arvu tähis on C_n^k

Arvutusvalem

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Kusjuures

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

Kombinatsioonide arv

Näide Kuuest suusatajast saab 3-liikmelisi võistkondi moodustada

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20 \quad \text{erineval viisil.}$$

See, missugune suusataja sõidab millisel etapil, siin arvesse ei lähe.

Põhireeglid

Kombinatoorika kaheks põhireegliks on liitmise reegel ja korrutamise reegel.

Liitmise reegel – kui mingi elemendi A võib valida k erineval viisil, elemendi B aga l erineval viisil, siis elemendi **"kas A või B"** saab valida $k + l$ erineval viisil.

Korrutamise reegel – kui mingi elemendi A võib valida k erineval viisil, elemendi B aga l erineval viisil, siis elemendi **"A ja B"** saab valida $k \cdot l$ erineval viisil.

Variatsioonid

Variatsioonide arv *n* elemendist näitab, mitu erinevat võimalust on valida *n* elemendi hulgast *k* elemendilisi erinevate järjestustega osahulki.

Kuna *k* elemendist võib moodustada *k*! erinevat järjekorda (vt. permutatsioonide arvu def.), siis on variatsioonide arv *n* elemendist *k* kaupa *k*! korda suurem vastavast kombinatsioonide arvust.

Variatsioonide arvu tähis on A_n^k

Arvutusvalem

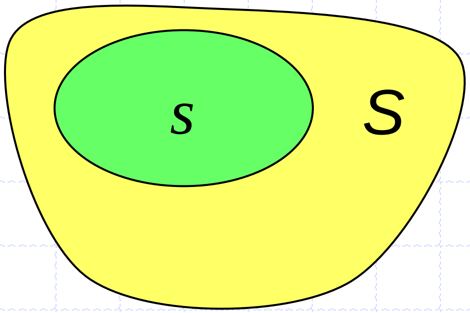
$$A_n^k = C_n^k \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Variatsioonid

Näide Kuuest suusatajast saab 3-liikmelisi võistkondi moodustada, arvestades seda, missugune võistleja sõidab millisel etapil,

$$A_6^3 = C_6^3 \cdot 3! = 20 \cdot 6 = 120 \quad \text{erineval viisil.}$$

Geomeetriline tõenäosus



Olgu märklaud pindalaga *S*.

Olgu märklaual mingi osapiirkond pindalaga *s*.

Vaatleme punkti n.ö. “juhuslikku viskamist” piirkonda *S*.

Sündmus A: märgitud piirkonna (pindalaga *s*) tabamine.

Tõenäosus, et see juhuslik punkt satub ühtlasi piirkonda *s*, avaldub piirkondade pindalade suhtena:

$$P(A) = \frac{s}{S}$$

Geomeetriline tõenäosus on soodsa pindala suhe kogupindalasse.

Statistiline tõenäosus

Kordugu sündmus A n katsest koosnevas seerias m korda. Sündmuse sageduse m ja katsete üldarvu n jagatist nimetatakse **sündmuse suhteliseks** (relatiivseks) **sageduseks**:

$$w = \frac{m}{n}$$

Suhteline sagedus w sõltub katseseeria pikkusest n. Katsete arvu kasvades on suhtelisel sagedusel tendents stabiliseeruda, s.t. küllalt pikkades katseseeriates kõigub w teatud kindla arvu läheduses, mis võetaksegi **statistiliseks tõenäosuseks**:

$$P(A) \approx w = \frac{m}{n}.$$

Teineteist välistavad ja mittevälistavad sündmused

Juhuslikke sündmusi nimetatakse **teineteist välistavateks**, kui nad ei saa korraga toimuda.

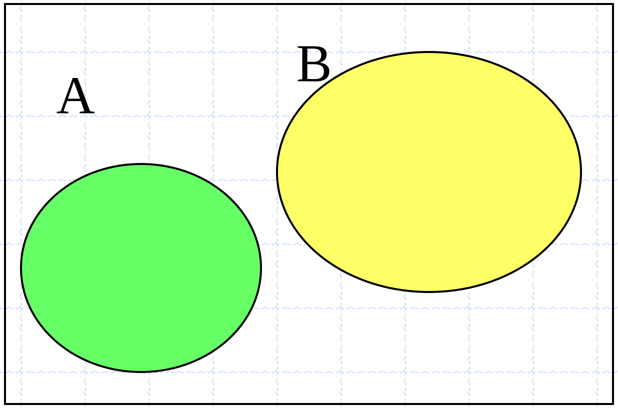
Näiteks Täringu veeretamisel välistab viie silma tulek mistahes ülejäänud silmade arvu tuleku.

Kui ühe sündmuse toimumisega saab kaasneda teise toimumine, siis neid nimetatakse **teineteist mittevälistavateks**.

Näiteks “Auditooriumi sisenev tudeng on noormees” ja “tudeng on vasakukäeline” on teineteist mittevälistavad sündmused.

Kahe sündmuse summa tõenäosus

Kahe teineteist välistava sündmuse summa tõenäosus on võrdne osasündmuste tõenäosuste summaga:



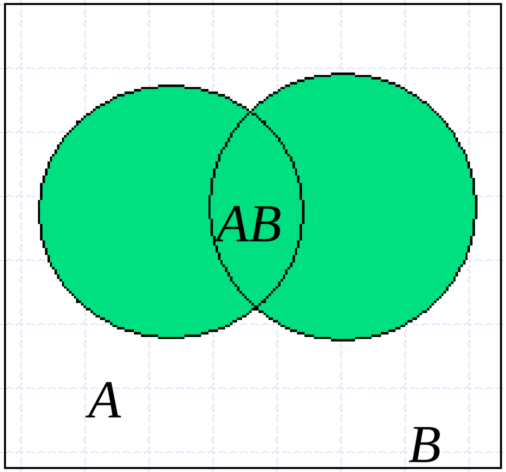
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Kui A_1, A_2, ... , A_k on üksteist välistavad sündmused, siis

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i).$$

Kahe sündmuse summa tõenäosus

Kahe sündmuse summa tõenäosus on võrdne osasündmuste tõenäosuste summaga, millest on lahutatud osasündmuste koosesinemise ehk korrutise tõenäosus:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Kolme üksteist mittevälistava sündmuse korral

$$P(A \cup B \cup C) =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

Tinglik tõenäosus

Sündmust A nim. **sõltuvaks sündmusest *B***, kui sündmuse A toimumise tõenäosus sõltub sellest, kas sündmus B toimus või ei toimunud.
Sündmuse B toimumise tõenäosust tingimusel, et toimus sündmus A, tähistatakse $P\ (B \mid A)$ ja nimetatakse **sündmuse *B* tinglikuks tõenäosuseks** tingimusel A.

Näide. Olgu urnis 3 punast ja 2 kollast kuuli. Urnist võetakse üks kuul ja siis teine kuul.

A – punane kuul esimesel korral

B – punane kuul teisel korral

Sündmuse B tõenäosus, kui A juba toimus $$P(B \mid A) = \frac{2}{4}$$

Sündmuse B tõenäosus, kui A ei toimunud $$P(B \mid \bar{A}) = \frac{3}{4}$$

Tõenäosuste korrutamine

Kahe mistahes sündmuse *A* ja *B* koos toimumise tõenäosus ehk **korrutise tõenäosus** on võrdne ühe osasündmuse tõenäosuse ja teise osasündmuse tingliku tõenäosuse korrutisega:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

Kui sündmused *A* ja *B* on sõltumatud, siis $P(A \mid B) = P(A)$ ja tõenäosuste korrutamislausest järeldub, et

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

ehk sõltumatute sündmuste korrutise tõenäosus on võrdne osasündmuste tõenäosuste korrutisega.

Näide

Näide. Eksamile tuleb üliõpilasi kolmest grupist. Esimeses grupis on 7, teises 6 ja kolmandas 8 tudengit. Esimese grupi tudeng sooritab eksami tõenäosusega 0,9, teise grupi tudeng tõenäosusega 0,8 ja kolmanda grupi tudeng tõenäosusega 0,95. Millise tõenäosusega sooritab eksami juhuslikult sisseastunud tudeng?

Tähistame sündmused järgnevalt:

A - tudeng sooritab eksami

H_1 - tudeng on 1. grupist

H_2 - tudeng on 2. grupist

H_3 - tudeng on 3. grupist

$$A = H_1A + H_2A + H_3A$$

$P(H_1) = 7/21$ $\qquad$ $P(A|H_1) = 0{,}9$

$P(H_2) = 6/21$ $\qquad$ $P(A|H_2) = 0{,}8$

$P(H_3) = 8/21$ $\qquad$ $P(A|H_3) = 0{,}95$

Näide

$P(H_1) = 7/21$ $\quad P(A|H_1) = 0{,}9$
$P(H_2) = 6/21$ $\quad P(A|H_2) = 0{,}8$
$P(H_3) = 8/21$ $\quad P(A|H_3) = 0{,}95$

$$A = H_1A + H_2A + H_3A$$

$P(H_1A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) = 7/21 \cdot 0{,}9$
$P(H_2A) = P(H_2) \cdot P(A|H_2) = 6/21 \cdot 0{,}8$
$P(H_3A) = P(H_3) \cdot P(A|H_3) = 8/21 \cdot 0{,}95$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3) =$$

$$= \frac{7}{21} \cdot 0{,}9 + \frac{6}{21} \cdot 0{,}8 + \frac{8}{21} \cdot 0{,}95 \approx 0{,}89$$

Vastus. Suvaline tudeng sooritab eksami tõenäosusega 0,89.

Täistõenäosuse valem

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i).$$

Kui sündmus *A* võib toimuda koos ühega hüpoteesidest H_1, H_2,..,H_n, mis moodustavad täieliku sündmuste süsteemi, siis **sündmuse *A* tõenäosus** on võrdne summaga, mille liidetavateks on iga hüpoteesi tõenäosuse ja sellele hüpoteesile vastava sündmuse *A* tingliku tõenäosuse korrutis.

Bayesi valemi tuletus

Korrutamislause põhjal

$$P(AH_i) = P(A) \cdot P(H_i | A) = P(H_i) \cdot P(A | H_i),$$

millest täistõenäosusvalemi põhjal

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A | H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A | H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A | H_i)}$$

Bayesi valem

Olgu antud hüpoteeside täielik süsteem H_1 ,... , H_n ning olgu teada nende hüpoteeside tõenäosused $P\ (H_1)$, ... , $P\ (H_n)$. Tehakse katse, mille tulemuseks on mingi sündmus A, mille tinglikud tõenäosused $P\ (A|H_1)$, ... $P\ (A|H_n)$ olgu teada.

Siis avaldub hüpoteesi H_i tinglik tõenäosus **Bayesi valemi** kujul:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A|H_i)}.$$

Näide

Näide. Eksamile tuleb üliõpilasi kolmest grupist. Esimeses grupis on 7, teises 6 ja kolmandas 8 tudengit. Esimese grupi tudeng sooritab eksami tõenäosusega 0,9, teise grupi tudeng tõenäosusega 0,8 ja kolmanda grupi tudeng tõenäosusega 0,95. On teada, et esimesena eksamile läinud tudeng sooritas eksami, leida tõenäosus, et see tudeng kuulus esimesse gruppi.

Tähistame sündmused järgnevalt:

A - tudeng sooritas eksami
H_1 - tudeng on 1. grupist
H_2 - tudeng on 2. grupist
H_3 - tudeng on 3. grupist

Näide

$P\,(H_1) = 7/21$ $P\,(A|H_1) = 0{,}9$

$P\,(H_2) = 6/21$ $P\,(A|H_2) = 0{,}8$

$P\,(H_3) = 8/21$ $P\,(A|H_3) = 0{,}95$

Praegu huvitab meid H_1 tõenäosus tingimusel, et A on toimunud.

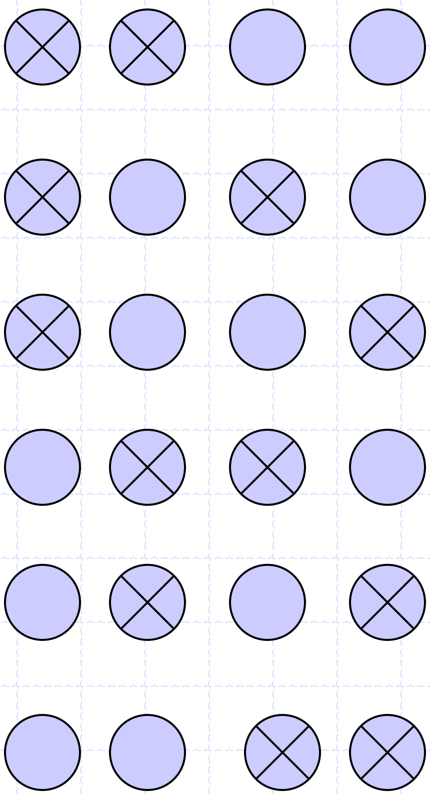
Bayesi valemi kohaselt:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i)\cdot P(A|H_i)} = \frac{\frac{7}{21}\cdot 0{,}9}{\frac{7}{21}\cdot 0{,}9 + \frac{6}{21}\cdot 0{,}8 + \frac{8}{21}\cdot 0{,}95} \approx 0{,}33$$

Vastus. Eksami sooritanud tudeng kuulus esimesse gruppi tõenäosusega 0,33.

Näide

Tõenäosus, et teatud korvpallur tabab ühe viskega korvi on 0,8. Korvpallur teeb 4 viset. Leida tõenäosus, et ta tabab 2 korda.



$$\left.\begin{array}{c} 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2 \\ + \\ 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2 \\ + \\ 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8 \\ + \\ 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2 \\ + \\ 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8 \\ + \\ 0{,}2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8 \end{array}\right\} = 0{,}1536$$

$$= C_4^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2$$

Bernoulli valem

Kasutatakse siis, kui on vaja leida tõenäosus, et n ühesuguse ja sõltumatu katse tulemusel toimuks sündmus A täpselt k korda.

Kui sündmuse tõenäosus igal katsel on p, siis tõenäosus, et n katse korral sündmus A toimuks k korda leitakse valemiga

$$P_{k,n} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

kus $q = P(\overline{A}) = 1 - p$.

Näide. Leida mündi 10-kordsel viskamisel vapi 4 korda esinemise tõenäosus.

Siin $p = q = 0{,}5$ ja Bernoulli valemi põhjal

$$P_{4,10} = C_{10}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{10!}{4!(10-4)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \approx 0{,}205$$

Näide

Tõenäosus, et teatud korvpallur tabab ühe viskega korvi on 0,8. Korvpallur teeb 4 viset. Leida tõenäosus, et ta tabab 0, 1, 2, 3, 4 korda.

Siin $p = 0{,}8$

$q = 0{,}2$

$n = 4$

Bernoulli valemi põhjal

$$P_{4,0} = \frac{4!}{0!(4-0)!} \cdot 0{,}8^{0} \cdot 0{,}2^{4-0} = 0{,}0016$$

$$P_{4,1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} \cdot 0{,}8^{1} \cdot 0{,}2^{4-1} = 0{,}0256$$

$$P_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot 0{,}8^{2} \cdot 0{,}2^{4-2} = 0{,}1536$$

$$P_{4,3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot 0{,}8^{3} \cdot 0{,}2^{4-3} = 0{,}4096$$

$$P_{4,4} = \frac{4!}{4!(4-4)!} \cdot 0{,}8^{4} \cdot 0{,}2^{4-4} = 0{,}4096$$

Tõenäoseim sündmuse toimumiste arv

Kõige tõenäosem sündmuse *A* toimumiste arv on k_0

$$np - q \le k_0 \le np + p$$

Näide. Korvpalluri vabaviske tabamistõenäosus on 0,8. Korvpallur teeb 4 vabaviset. Leida tõenäoseim tabamuste arv ning vastav tõenäosus.

Ülesande põhjal: $n = 4 \quad p = 0{,}8 \quad q = 0{,}2$

Asendades need suurused viimasesse valemisse, saame

$$np - q \le k_0 \le np + p$$

$$4 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \le k_0 \le 4 \cdot 0{,}8 + 0{,}8$$

$$3 \le k_0 \le 4$$

Seega tõenäoseim tabamuste arv on 3 või 4.

Juhuslik suurus

Suurust nimetatakse **juhuslikuks**, kui see omandab antud tingimustes sõltuvalt juhusest ühe oma võimalikest väärtustest.

Näiteid juhuslikest suurustest:

1. Konkreetse Web-serveri poole pöördumiste arv ööpäevas
2. Kümnevõistleja punktisumma võistlustel
3. Laskude arv märklaua tabamiseni
4. Keskpäevane temperatuur ilmavaatluspunktis
5. Vooluvõrgu pinge mõõtmise tulemus
6. Mõõtmistulemuse viga auto kiiruse mõõtmisel

Diskreetsed ja pidevad juhuslikud suurused

Juhuslikke suurusi tähistatakse ladina suurtähtedega X, Y, ... ja juhuliku suuruse võimalikke väärtusi indeksitega väiketähtede abil: $x_1, x_2, \ldots, \; y_1, y_2, \ldots$.

Juhuslikud suurused jaotuvad kahte klassi: diskreetseteks ja pidevateks.

Diskreetseks nimetatakse juhuslikku suurust, mille võimalike väärtuste hulk on lõplik või loenduv (nummerdatav).

Näiteks: Laskude arv märklaua tabamiseni.

Juhuslikku suurust nimetatakse **pidevaks**, kui tema võimalike väärtuste hulk on arvtelje (lõplik või lõpmatu) vahemik.

Näiteks: Vooluvõrgu pinge mõõtmise tulemus.

Diskreetse juhusliku suuruse jaotusseadus

Tõenäosus, et juhuslik suurus X saavutab ühe oma võimalikest väärtustest x_i :

$$P(X = x_i) = p_i$$

Diskreetse juhusliku suuruse **jaotusseaduseks** nimetatakse vastavust tema kõikide võimalike väärtuste x_1, x_2, ... ja nende tõenäosuste p_1, p_2, ... vahel.

Jaotusseaduse võib esitada jaotustabelina e. jaotusreana:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Jaotustabel sisaldab juhusliku suuruse kõik võimalikud väärtused ja seetõttu

$$\sum_{j=1}^{n} p_i = 1$$

Näide

Tõenäosus, et teatud korvpallur tabab ühe viskega korvi on 0,8. Korvpallur teeb 4 viset. Koostada tabamuste arvu kui juhusliku suuruse jaotusrida.

X – tabamuste arv

$$P_{0,4} = \frac{4!}{0!(4-0)!} \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^{4-0} = 0{,}0016$$

$$P_{1,4} = \frac{4!}{1!(4-1)!} \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^{4-1} = 0{,}0256$$

$$P_{2,4} = \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^{4-2} = 0{,}1536$$

$$P_{3,4} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^{4-3} = 0{,}4096$$

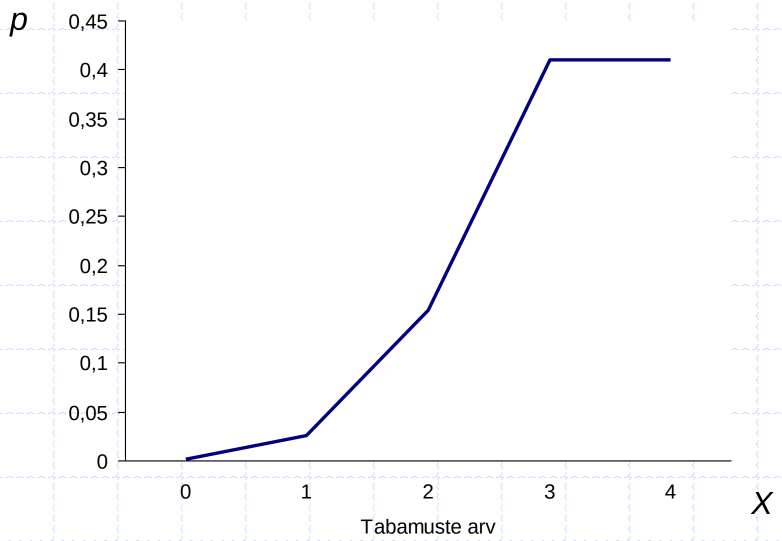
$$P_{4,4} = \frac{4!}{4!(4-4)!} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^{4-4} = 0{,}4096$$

X	0	1	2	3	4
p	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Jaotushulknurk e. jaotuspolügoon

Diskreetset juhuslikku suurust esitatakse sageli ka graafiliselt **jaotushulknurgana e. jaotuspolügoonina**, kus arvupaaridele (x_i , p_i) vastavad punktid ristkoordinaadistikus on ühendatud sirglõikudega.

Näide. Eelmise näites vaadeldud tabamuste arvu kui juhusliku suuruse jaotuspolügoon.



Juhusliku suuruse jaotusfunktsioon

Juhusliku suuruse **jaotusfunktsioon** $F(x)$ määrab tõenäosuse selleks, et juhuslik suurus on väiksem tõkkest x , s. t.

$$F(x) = P(X < x), \quad kus\ x \in (-\infty, \infty)$$

Jaotusfunktsioon on juhusliku suuruse universaalne iseloomustaja, mis kirjeldab võimalike väärtuste tõenäosuste jaotust.

Jaotusfunktsioon on olemas nii pidevatel kui ka diskreetsetel juhuslikel suurustel. Sagedamini kasutatakse seda pideva juhusliku suuruse korral.

Näide

Juhuslik suurus on antud jaotustabeliga

X	0	1	2	3	4
p	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Leiame jaotusfunktsiooni:

$x \le 0$: $F(x) = P(X < x) = 0$

$0 < x \le 1$: $F(x) = P(X < x) = 0{,}0016$

$1 < x \le 2$: $F(x) = P(X < x) = 0{,}0016+0{,}0256 = 0{,}0272$

$2 < x \le 3$: $F(x) = P(X < x) = 0{,}0272+0{,}1536 = 0{,}1808$

$3 < x \le 4$: $F(x) = P(X < x) = 0{,}1808+0{,}4096 = 0{,}5904$

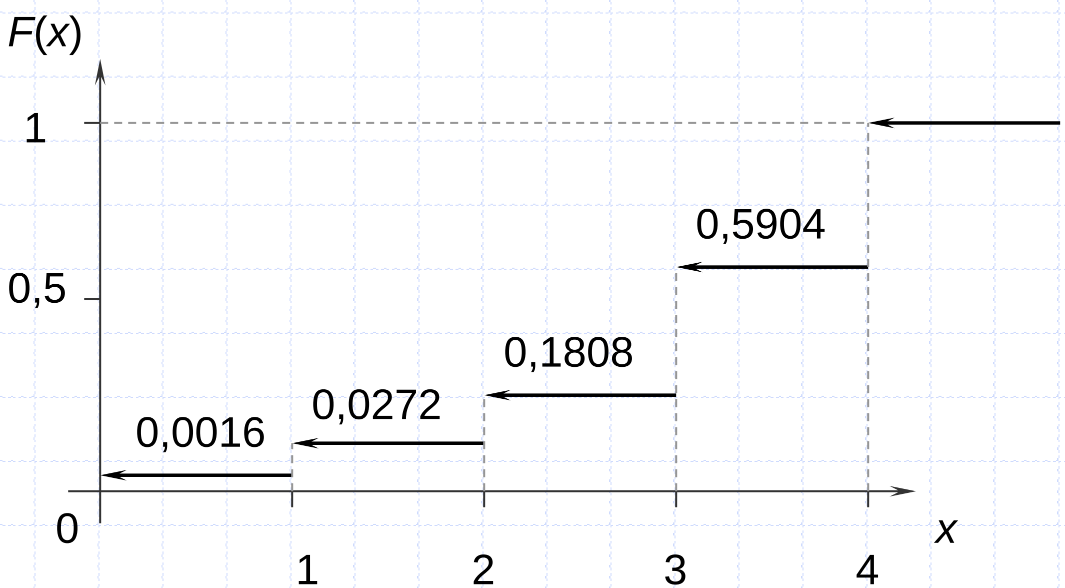
$x > 4$: $F(x) = P(X < x) = 0{,}5904+0{,}4096 = 1{,}0$

Näide

Jaotusfunktsioon:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{kui } x\le 0,\\ 0{,}0016 & \text{kui } 0<x\le 1,\\ 0{,}0272 & \text{kui } 1<x\le 2,\\ 0{,}1808 & \text{kui } 2<x\le 3,\\ 0{,}5904 & \text{kui } 3<x\le 4,\\ 1{,}0 & \text{kui } x>4\ .\end{cases}$$

Graafiliselt:



Jaotusfunktsiooni omadusi

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad ehk \quad F(-\infty) = 0$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1 \quad ehk \quad F(+\infty) = 1$

3. Jaotusfunktsioon on mittekahanev (monotoonselt kasvav), s.t. kui $x_2 \geq x_1$, siis $F(x_2) \geq F(x_1)$.

4. Pideva juhusliku suuruse jaotusfunktsioon on pidev.

5. Tõenäosus selleks, et juhuslik suurus omandaks väärtusi poollõigust [*a*; *b*) on võrdne jaotusfunktsiooni juurekasvuga selles poollõigus: $P(a \leq x < b) = F(b) - F(a)$

Diskreetse juhusliku suuruse keskväärtus

Olgu juhuslik suurus *X* määratud jaotustabeliga:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Diskreetse juhusliku suuruse *X* keskväärtuseks (matemaatiliseks ootuseks) *EX* (kasutatakse ka tähistusi *MX* ja m_x) nimetatakse suuruse võimalike väärtuste ja nende tõenäosuste korrutiste summat:

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Diskreetse juhusliku suuruse dispersioon ja standardhälve

Juhusliku suuruse dispersiooniks *DX* nimetatakse tema tsentreeritud hälbe ruudu keskväärtust: $DX = E(X - EX)^2$.

Diskreetse juhusliku suuruse dispersiooni arvutamise eeskiri:

$$DX = \sum_{i=1}^{n} (x_i - EX)^2 \cdot p_i$$

Dispersioon ruutjuurt nimetatakse **standardhälbeks**:

$$\sigma(X) = \sqrt{DX}$$