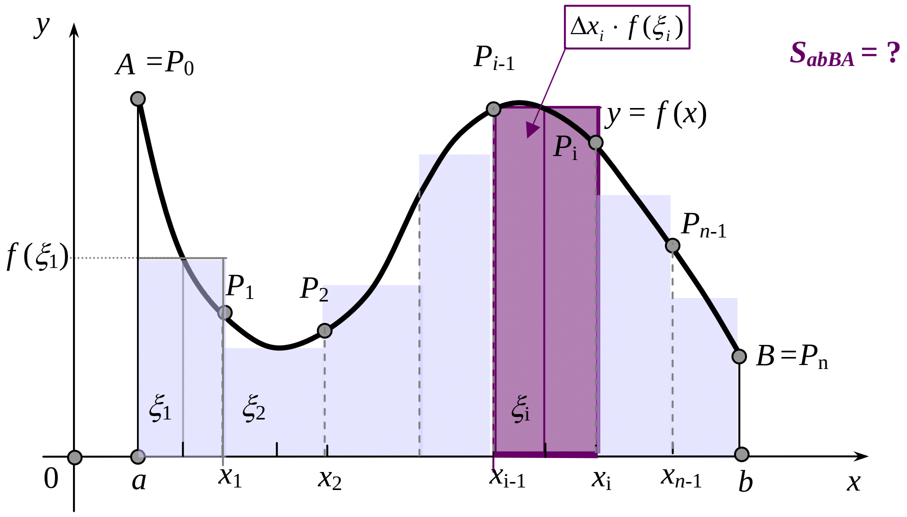
Määratud integraal

Olgu funktsioon *f* pidev ja mittenegatiivne lõigus $[a; b]$, kus $a < b$. Argumendi *x* igale väärtusele lõigus $[a; b]$ vastab siis funktsiooni *f* graafiku *AB* teatav punkt *P*. Vaatleme kõvertrapetsit *abBA*, s.o. *xy*-tasandi kujundit, mis on piiratud joonega *AB*, *x*-telje lõiguga $[a; b]$ ja *x*-teljega ristuvate sirglõikudega *aA* ja *bB*.



Kõvertrapetsi pindala leidmiseks on välja kujunenud järgmine meetod. Jaotame lõigu $[a; b]$ n osaks punktidega $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, kusjuures olgu

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Vastaku abstsissidele $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ punktid $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$ joonel *AB*. Siis trapets jaguneb n püstribaks $x_{i-1}, x_i, P_i P_{i-1}$, $i = 1,2,\ldots,n$. Valime iga osalõigu $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1,2,\ldots,n$ sees veel ühe punkti ξ_i nii et

$$x_0 \le \xi_1 \le x_1$$
$$x_1 \le \xi_2 \le x_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i\,.$$

Asendame iga püstriba $x_{i-1}, x_i, P_i P_{i-1}$ ristkülikuga, millel on sama alus $x_i - x_{i-1}$ mis püstribal, ja mille kõrguseks on selle aluse mingis punktis ξ_i võetud ordinaat $f(\xi_i)$. Niisuguse ristküliku pindala avaldub kujul $f(\xi_i)\Delta x_i$, kus $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Kõigi nende ristkülikute pindalade summa $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot f(\xi_i)$ kujutab ligikaudu kõvertrapetsi *abBA* pindala.

Olgu λ osalõikude $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1,2,\ldots,n$ maksimaalne pikkus, s.o. $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$, saab näidata, et kehtib valem

$$S_{abBA} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,.$$

Piirväärtust $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ nimetatakse funktsiooni f **määratud integraaliks** (ehk Riemanni integraaliks) lõigus [a; b] ja kirjutatakse

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot f(\xi_i).$$

See definitsioon on üldjuhul antud saksa kuulsa matemaatiku Riemanni (1826-1866) poolt. Määratud integraali praeguse tähistuse võttis kasutusele prantsuse matemaatik ja füüsik Fourier (1768-1830), kusjuures integraali sümbol $\int$, mis esineb Leibnizi töödes juba 1675. a., on nähtavasti saadud ladinakeelse sõna „Summa“ algtähe S stiliseerimisel.

Arve a ja b nimetatakse vastavalt määratud integraali **alumiseks ja ülemiseks rajaks**. Lõiku $[a;b]$ nimetatakse **integreerimislõiguks**. Summat $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i \cdot f(\xi_i)$ nimetatakse funktsiooni f **Riemanni integraalsummaks** lõigus $[a;b]$. Niisugust funktsiooni, millel on olemas määratud integraal nimetatakse **integreeruvaks** (Riemanni mõttes).

Määratud integraali arvutamine

Üldise meetodi määratud integraali arvutamiseks andsid Newton ja Leibniz.

Newton-Leibnizi valem: Olgu $f(x)$ lõigus $[a;b]$ integreeruv ja leidugu tal selles lõigus algfunktsioon $F(x)$. Siis

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Näide Leida $\int\limits_2^3 x^3 dx$.

Kasutades astmefunktsiooni integreerimise valemit ja Newton-Leibnizi valemit, saame

$$\int_2^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_2^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = \frac{65}{4} = 16\frac{1}{4}.$$

Määratud integraali arvutamiseks võib kasutada ka muutujavahetuse ja ositi integreerimise meetodeid.

Ositi integreerimine

Kui funktsioonidel $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ on olemas integreeruvad tuletised lõigus $[a;b]$, siis

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

kus

$$uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Selgitame ositi integreerimise valemi kasutamist näite varal.

Näide Leida $\int\limits_0^1 xe^x dx$.

Jagame integreeritava avaldise $xe^x dx$ teguriteks u ja dv.

Olgu $\quad u = x \qquad dv = e^x dx$

siis $\quad du = dx \qquad v = e^x$.

Ositi integreerimise valemi põhjal

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = 1\cdot e^1 - 0 - (e^1 - e^0) = 1.$$

Muutujate vahetus

Nagu teame seisneb muutuja vahetuse võte selles, et integreeritava avaldise argument väljendatakse uue muutuja kaudu, seejärel leitakse vastav määramata integraal ja saadud tulemus väljendatakse uuesti esialgse muutuja kaudu. Määratud integraali arvutamisel pole vajadust tagasi minna esialgsele muutujale, vaid lisaks uue muutuja diferentsiaalile tuleb leida ka uue muutuja integreerimisrajad ning rakendada siis Newton-Leibnizi valemit. Muutuja vahetuse reegli võib sõnastada järgnevalt.

Kui funktsioonil f on olemas algfunktsioon lõigus $[a; b]$ ja $x = \varphi(t)$ on mingis lõigus $[\alpha; \beta]$ diferentseeruv funktsioon, kusjuures $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta),$ siis

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

eeldusel, et integraalid võrduse mõlemal poolel eksisteerivad.

<u>*Näide*</u> Leida $\displaystyle\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/4} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

Teeme muutujate vahetuse

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow \quad x = t^2 \quad (t \ge 0)$$
$$dx = 2tdt.$$

Arvutame nüüd uue muutuja integreerimisrajad. Need leiame võrdusest $t = \sqrt{x}$, kui argument x asendada tema väärtustega $\pi^2/4$ ja $\pi^2/16$.

Ülemine raja $x = \pi^2/4 \Rightarrow \quad t = \sqrt{x} = \sqrt{\pi^2/4} = \pi/2$.

Alumine raja $x = \pi^2/16 \Rightarrow \quad t = \sqrt{x} = \sqrt{\pi^2/16} = \pi/4$.

Seega leidsime, et argumendi x muutumisvahemikule $\pi^2/4$-st $\pi^2/16$-ni vastab muutuja t muutumisvahemik $\pi/2$-st $\pi/4$-ni. Asendades antud integraalis $\sqrt{x}$ ja dx vastavate avaldistega uue muutuja kaudu ning muutes vastavalt ka integreerimisrajad, saame

$$\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/4} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}2tdt = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin tdt = -2\cos t\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -2(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}.$$

Tarvilik tingimus funktsiooni integreeruvuseks

Funktsiooni integreeruvuseks mingis lõigus on tarvilik, et ta oleks tõkestatud selles lõigus. (Iga tõkestatud funktsioon ei ole integreeruv.)

Piisavad tingimused funktsiooni integreeruvuseks

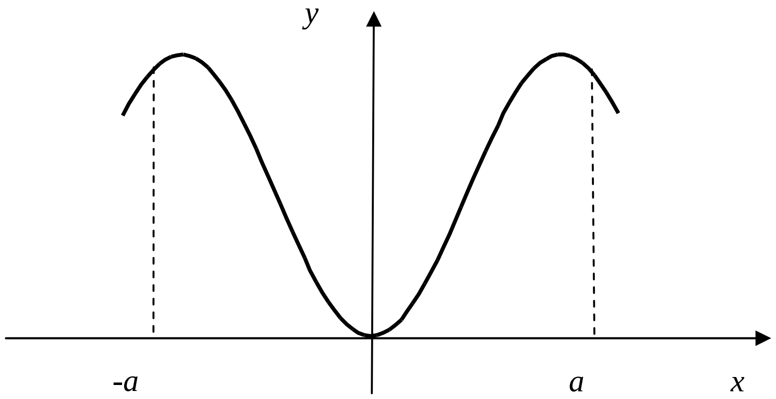
Lõigus pidev funktsioon on integreeruv selles lõigus.
Lõigus tõkestatud monotonne funktsioon on integreeruv selles lõigus.
Lõigus tõkestatud funktsioon, millel on lõplik arv katkevuspunkte, on integreeruv selles lõigus.
Kui funktsioonid f ja g on integreeruvad mingis lõigus, siis ka nende korrutis fg on integreeruv selles lõigus.

Määratud integraali omadused

1. Aditiivsus: kui $c \in [a; b]$, siis $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$
2. Lineaarsus: kui $\alpha, \beta \in R$, siis $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx.$
3. Monotoonsus: kui funktsioonid f ja g on integreeruvad lõigus $[a; b]$ ja $f(x) \le g(x)$ iga $x \in [a; b]$, siis $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
5. $\int_a^a f(x)dx = 0$.
6. Kui funktsioon f on paarisfunktsioon, siis

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

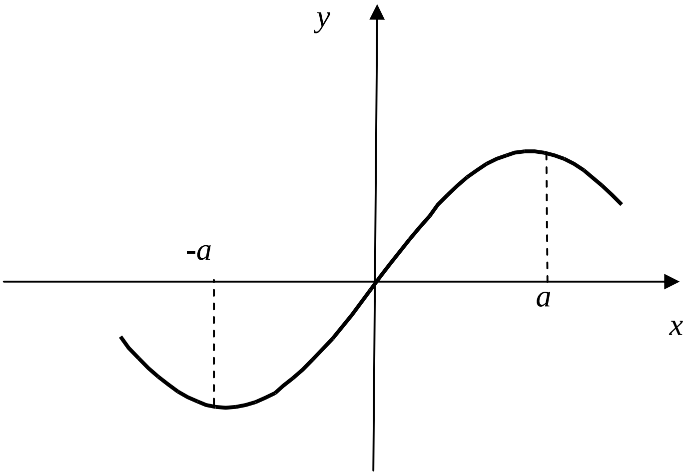
Seda tulemust illustreerib järgnev joonis:



7. Kui funktsioon *f* on paaritu funktsioon, siis

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Seda tulemust illustreerib järgnev joonis:



<u>*Näide*</u> kasutades paarisfunktsiooni ja paaritu funktsiooni omadusi leida integraali $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x + \cos x)dx$ väärtus.

Kuna $\sin x$ on paaritu funktsioon ja $\cos x$ paarisfunktsioon, siis

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x + \cos x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin xdx + \int_{-\pi}^{\pi}\cos xdx = 0 + 2\int_{0}^{\pi}\cos xdx = 2\sin x\Big|_{0}^{\pi} = 2(\sin\pi - \sin 0) = 0\,.$$