

Tööleht nr 1 aines „Matemaatiline analüüs”

I. Lahendada esimese astme võrratused

1. $|x-1| + x > |2x+1|$
2. $|x| < |x+2|$
3. $|x+2| - |x-2| \leq x-1$
4. $2|x+1| > 3x - |x+2|$
5. $|x| > x$
6. $|2x-1| < |1-x|$
7. $|x-3| - |2-x| \geq |x-1|$
8. $\left| \frac{1-x}{x+1} \right| \geq 1$
9. $\left| \frac{2x-1}{x-1} \right| \geq 2$
10. $\frac{1}{|x-2|} < \frac{2}{|x+1|}$
11. $\frac{|x|-1}{|x-1|} \geq 1$

II. Lahendada ruutvõrratused

12. $x^2 + x - 2 < 0$
13. $x^2 - 3x + 2 \geq 0$
14. $x^2 + 2x + 2 > 0$
15. $-x^2 + 4x - 4 > 0$
16. $-x^2 + 4x - 4 \leq 0$
17. $x^2 - |x| - 6 < 0$
18. $x^2 - 2|x+2| - 4 \leq 0$
19. $x^2 - |4x-5| > x-1$
20. $|5x+3| > x^2 + 2x + 3$

III. Leida parameetrilisel kujul antud funktsioonid ilmutatud kujul

21. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \ln |t| + 2t \end{cases}, \quad t \in [-\pi; 0) \cup (0; \pi]$
22. $\begin{cases} x = t^5 + t \\ y = e^t \end{cases}, \quad t \in (-\infty; \infty)$

IV. Leida ilmutamata kujul antud funktsioonid ilmutatud kujul

23. $y^2 - 2xy + x^2 - 4 = 0$
24. $e^y + x^2 e^{-y} = 2x$

V. Leida $\varphi(-x)$, $\varphi(x+1)$, $\varphi(x)+1$, $\varphi(\frac{1}{x})$, $\frac{1}{\varphi(x)}$, ja $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$, kui

25. $\varphi(x) = \frac{1-x}{1+x}$
26. $\varphi(x) = 1-x^2$

VI. Lahendada võrratused intervallimeetodil

27. $(x+7)(x+1)(x-4) < 0$
28. $(x-3)(x+2)(x-5)^2 > 0$
29. $x^2(x+4)(x+5) \geq 0$
30. $(8-x)(x+4)^3(x-1) \leq 0$
31. $(x+1)(9-x^2)(x^2+7) \geq 0$
32. $x(x^2-4)(4x^2-9) < 0$
33. $\frac{x-1}{x+5} \geq 2$
34. $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} < 0$
35. $\frac{x^2-x-12}{x^2+2x-15} \geq 0$
36. $\frac{x^2+2x-3}{x^2+3} < 0$
37. $\frac{x-2}{x+2} \geq \frac{2x-3}{4x-1}$

Lisa

Vaatleme esimese astme võrratust, kus tundmatu x esineb avaldistes kujuga $|ax+b|$.

Selliste võrratuste lahendamiseks:

1. Leiame x väärtused, mille puhul absoluutväärtuse märkide vahel olevad avaldised saavad võrdseks nulliga.
2. Jaotame leitud x väärtuste abil x -telje osadeks.
3. Lahendame võrratuse x -telje iga saadud osa kohta eraldi, kõrvaldades igal osal absoluutväärtused liikmetes $|ax+b|$ absoluutväärtuse definitsiooni abil:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kui } a \geq 0 \\ -a, & \text{kui } a < 0 \end{cases}.$$

Tulemuseks saame osavastused V_1, V_2, \dots , millest igaüks annab võrratuse lahendid x -telje vastava osa kohta.

4. Ühendame saadud osavastused V_1, V_2, \dots kokku üldvastuseks V .

Vastused

1. $x \in (-1; 0)$
2. $x \in (-1; \infty)$
3. $x \in [-3; -1] \cup [5; \infty)$
4. $x \in (-\infty; \infty)$
5. $x \in (-\infty; 0)$
6. $x \in (0; 2/3)$
7. $x \in [0; 2]$
8. $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0]$
9. $x \in [3/4; 1) \cup (1; \infty)$
10. $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (5; \infty)$
11. $x \in (1; \infty)$
12. $x \in (-2; 1)$
13. $x \in (-\infty; 1] \cup [2; \infty)$
14. $x \in (-\infty; \infty)$
15. $x \in \emptyset$
16. $x \in (-\infty; \infty)$
17. $x \in (-3; 3)$
18. $x \in [-2; 4]$
19. $x \in (-\infty; -4) \cup (1; 2) \cup (3; \infty)$
20. $x \in (-6; -1) \cup (0; 3)$
21. $y = \ln |\arcsin x| + 2 \arcsin x$
22. $x = \ln^5 y + \ln y$
23. $y = x \pm 2$
24. $y = \ln x$
25. $\varphi(-x) = \frac{1+x}{1-x}; \varphi(x+1) = -\frac{x}{x+2}; \varphi(x)+1 = \frac{2}{1+x}; \varphi(\frac{1}{x}) = \frac{x-1}{x+1}; \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1+x}{1-x};$
$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = -\frac{2}{(1+x)(1+x+h)}$$
26. $\varphi(-x) = 1 - x^2; \varphi(x+1) = -x^2 - 2x; \varphi(x)+1 = 2 - x^2; \varphi(\frac{1}{x}) = 1 - \frac{1}{x^2}; \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{1-x^2};$
$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = -(2x+h)$$
27. $x \in (-\infty; -7) \cup (-1; 4)$
28. $x \in (-\infty; -2) \cup (3; 5) \cup (5; \infty)$
29. $x \in (-\infty; -5] \cup [-4; \infty)$
30. $x \in [-4; 1] \cup [8; \infty)$
31. $x \in (-\infty; -3] \cup [-1; 3]$
32. $x \in (-\infty; -2) \cup (-\frac{3}{2}; 0) \cup (\frac{3}{2}; 2)$
33. $x \in [-11; -5)$
34. $x \in (-\infty; 1) \cup (2; 3)$
35. $x \in (-\infty; -5) \cup [-3; 3) \cup [4; \infty)$
36. $x \in (-3; 1)$
37. $x \in (-\infty; -2) \cup (0, 25; 1] \cup [4; \infty)$