Eukleidiline ruum

Skalaarkorrutis

Definitsioon

Öeldakse, et reaalses vektorruumis V on defineeritud *skalaarkorrutis*, kui igale kindlas järjekorras võetud vektorite paarile $x, y \in V$ on seatud vastavusse teatav reaalarv (x, y), nii et on täidetud tingimused (skalaarkorrutise aksioomid ehk postulaadid).

1. $(x, x) \geq 0; \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $(x, y) = (y, x);$ (skalaarkorrutise kommutatiivsus)
3. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z);$ (distributiivsus)
4. $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$ iga reaalarvu λ korral (homogeensus).

Vektorite x ja y skalaarkorrutist tähistatakse veel $x \cdot y$ ja $\langle x, y \rangle$

Näiteid skalaarkorrutisest

Näide 1

Olgu vektorid $x, y \in \mathbf{R}^n$ ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ suvalised positiivsed reaalarvud.

Skalaarkorrutise võime defineerida kui

$$(x, y) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \ldots + \lambda_n x_n y_n$$

Erijuhul, kui $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 1$, saame skalaarkorrutise tavapärase definitsiooni.

Näide 2

Olgu vektorid $x(t), y(t) \in \mathbf{C}[a, b]$ (lõigul $[a, b]$ pidevad funktsioonid) ning $\lambda(t)$ olgu samal lõigul pidev positiivne funktsioon. Skalaarkorrutise defineerime järgmiselt:

$$(x, y) = \int_a^b \lambda(t) x(t) y(t)\, dt.$$

Eukleidiline ruum

Definitsioon

Skalaarkorrutisega vektorruumi V nimetatakse *eukleidiliseks ruumiks*.

Eukleidilises vektorruumis võrdub nulliga iga vektori skalaarkorrutis nullelemendiga.

Definitsioon

Vektori $x \in V$ *pikkuseks ehk normiks* nimetatakse arvu $\sqrt{(x,x)}$.

Vektori x normi tähistatakse $||x||$.

Vektorruumi, milles on defineeritud norm, nimetatakse ka *normeeritud ruumiks*.

Normi omadused

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ (samasuse aksioom);

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (homogeensus);

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (kolmnurga võrratus);

4. $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Definitsioon

Kahe vektori *x* ja *y* vaheline *nurk* on defineeritud valemiga

$$\cos(x \hat{,} y) = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Ortogonaalsete vektorite süsteemid

Definitsioon

Öeldakse, et vektorid x ja y on *risti ehk ortogonaalsed*, kui $(x, y) = 0$.

Asjaolu, et vektorid x ja y on risti, tähistatakse $x \perp y$.

Definitsioon

Ortogonaalseks vektorite süsteemiks eukleididilises vektorruumis V nimetatakse vektoreid $x_1, x_2, \ldots x_m$, mis on paarikaupa risti.

Teoreem

Ortogonaalse, nullvektorist erinevate vektorite süsteemi vektorid on lineaarselt sõltumatud.

Definitsioon

Öeldakse, et vektor x on normeeritud ehk ühikvektor, kui tema pikkus on üks: $\|x\| = 1$.

Ortonormeeritud vektorite süsteemid

Definitsioon

Üleminekut vektorilt x normeeritud vektorile $\dfrac{1}{\|x\|}x$ nimetatakse vektori *normeerimiseks*.

Definitsioon

Ortogonaalsete vektorite süsteemi nimetatakse *ortonormeeritud süsteemiks*, kui selle süsteemi kõik vektorid on normeeritud. Vektorruumi baasi, mis koosneb ortonormeeritud vektoritest, nimetatakse *ortonormeeritud baasiks*.

Teoreem

Igas lõplikumõõtmelises eukleidilises vektorruumis leidub ortonormeeritud baas.

Ortonormeeritud vektorite süsteemid

Teoreem

Ortonormeeritud baasi puhul avaldub vektorite $x, y \in \mathbf{R}^n$ skalaarkorrutis kujul.

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Gram-Schmidti ortogonaliseerimisprotsess

Olgu $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ suvaline baas vektorruumis V.

Läheme sellelt baasilt üle ortonormeeritud baasile B_0 järgmise algoritmi kohaselt.

Gram-Schmidti ortogonaliseerimisprotsess

Esmalt läheme üle ortogonaalsele baasile, valides esimeseks baasivektoriks .

$$y_1 = x_1,$$

Teise vektori uude baasi valime järgmiselt:

$$y_2 = x_2 + c_1 y_1,$$

kus $c_1 = -\dfrac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)}.$

Üldiselt: $y_k = x_k + c_1 y_1 + \ldots + c_{k-1} y_{k-1},$

kus $c_i = -\dfrac{(x_k, y_i)}{(y_i, y_i)}, \quad i = 1,2,\ldots k-1.$

Gram-Schmidti ortogonaliseerimisprotsess

Saadud *ortogonaalselt baasilt* $B_1 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ läheme üle *ortonormeeritud baasile* $B_0 = \{e_1, \ldots e_n\}$

$$e_i = \frac{1}{\| y_i \|} y_i.$$

Näide

Läheme baasilt $B = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}^4$

$$x_1 = (1;0;0;0);$$

$$x_2 = (1;1;0;0);$$

$$x_3 = (1;1;1;0);$$

$$x_4 = (1;1;1;1)$$

üle ortonormeeritud baasile, kasutades Gram-Schmidti ortogonaliseerimisprotsessi.

Lahendus

Esimeseks vektoriks uues, ortogonaliseeritud baasis valime x_1:

$$y_1 = x_1.$$

Näide (2)

Teist vektorit uude (ortogonaliseeritud) baasi otsime kujul

$$y_2 = x_2 + c_1 y_1,$$

kus

$$c_1 = -\frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)}.$$

Leiame vajalikud skalaarkorrutised:

$$(x_2, y_1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1,$$

$$(y_{1,} y_1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1.$$

Seega $\quad c_1 = -1/1 = -1$

ja $\quad y_2 = x_2 - y_1 = (1;1;0;0) - (1;0;0;0) = (0;1;0;0)$

Näide (3)

Kolmandat vektorit uude baasi otsime kuju:

$$y_3 = x_3 + c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

kus

$$c_1 = -\frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)}, \quad c_2 = -\frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)}.$$

Leiame vajalikud skalaarkorrutised:

$$(x_3, y_1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1,$$

$$(y_{2,} y_2) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1,$$

$$(x_3, y_2) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1.$$

Seega

$$c_1 = c_2 = -1/1 = -1$$

ja $\quad y_3 = x_3 - y_1 - y_2 = (1;1;1;0) - (1;0;0;0) - (0;1;0;0) = (0;0;1;0)$

Näide (4)

Analoogselt leiame neljanda vektori:

$$y_4 = x_4 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3,$$

kus $$c_1 = -\frac{(x_4, y_1)}{(y_1, y_1)}, \quad c_2 = -\frac{(x_4, y_2)}{(y_2, y_2)} \quad c_3 = -\frac{(x_4, y_3)}{(y_3, y_3)}.$$

Leiame vajalikud (siiani leidmata) skalaarkorrutised:

$$(x_4, y_1) = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 = 1,$$

$$(x_4, y_2) = 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 = 1,$$

$$(x_4, y_3) = 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = 1,$$

$$(y_{3,} y_3) = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 = 1.$$

Seega $$c_1 = c_2 = c_3 = -1/1 = -1$$

ja

$$y_4 = x_3 - y_1 - y_2 - y_3 = (1;1;1;1) - (1;0;0;0) - (0;1;0;0) - (0;0;1;0) = (0;0;0;1)$$

Näide (5)

Ortogonaalne ja ühtlasi ka ortonormeeritud baas on seega

$$B_O = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}, \quad y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbf{R}^4$$

kus

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= (1;0;0;0); \\ y_2 &= (0;1;0;0); \\ y_3 &= (0;0;1;0); \\ y_4 &= (0;0;0;1) \end{aligned}}$$