Funktsiooni uurimine

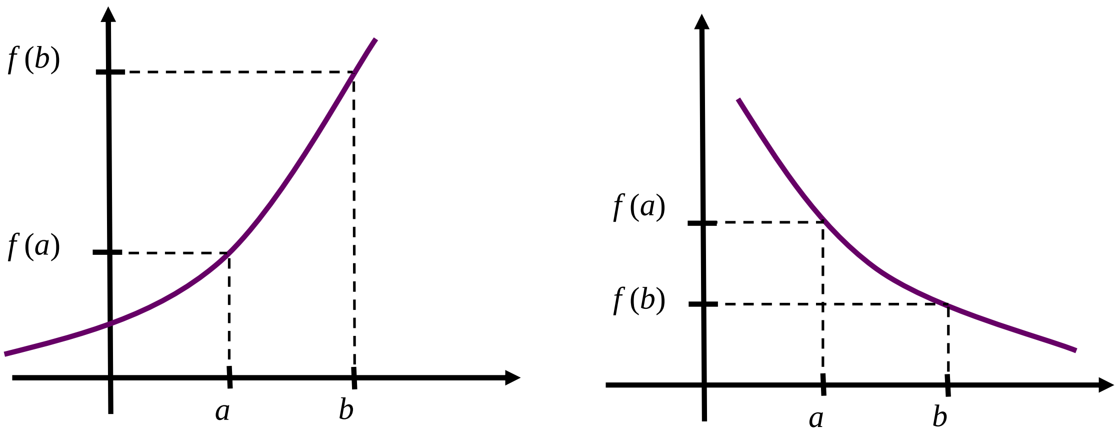
Funktsiooni kasvamine ja kahanemine

Teame, et funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse piirkonnas X kasvavaks, kui selles piirkonnas igale suuremale argumendi väärtusele vastab suurem funktsiooni väärtus ja kahanevaks kui igale suuremale argumendi väärtusele vastab väiksem funktsiooni väärtus. Ehk funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse piirkonnas X

kasvavaks, kui $a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) < f(b)$;

kahanevaks, kui $a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) > f(b)$.

iga $a, b \in X$ korral.



funktsioon kasvab — funktsioon kahaneb

Lisaks kasvavatele ja kahanevatel funktsioonidele vaadeldakse ka monotoonselt kasvavaid ja kahanevaid funktsioone. Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse piirkonnas X

monotoonselt kasvavaks, kui $a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) \le f(b)$,

monotoonselt kahanevaks, kui $a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) \ge f(b)$,

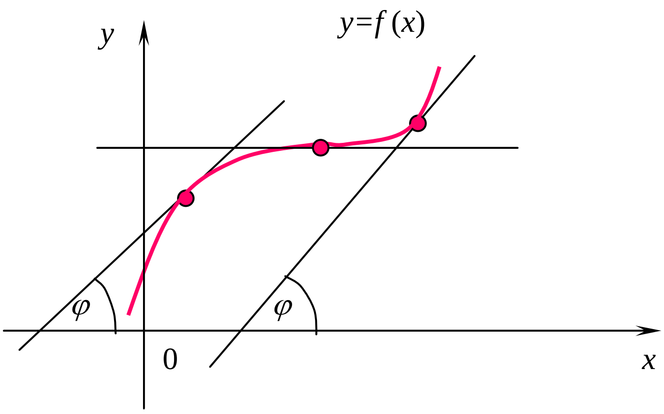
iga $a, b \in X$ korral.

Et saada informatsiooni funktsiooni käitumisest ei pea meil tingimata kasutada olema tema graafik. Järgnevast tulemusest näeme, et diferentseeruva funktsiooni korral annab esimene tuletis täieliku informatsiooni funktsiooni kasvamise ja kahanemise kohta.

Vahemikus X diferentseeruv funktsioon $y = f(x)$ on

1. monotoonselt kasvav vahemikus X siis ja ainult siis kui $f'(x) \ge 0$ iga $x \in X$ korral,
2. monotoonselt kahanev vahemikus X siis ja ainult siis kui $f'(x) \le 0$ iga $x \in X$ korral,
3. konstantne vahemikus X siis ja ainult siis kui $f'(x) = 0$ iga $x \in X$ korral,
4. kasvav vahemikus X siis ja ainult siis kui $f'(x) \ge 0$ iga $x \in X$ korral ja punktid $x \in X$, kus $f'(x) = 0$, ei moodusta vahemikke.
5. kahanev vahemikus X siis ja ainult siis kui $f'(x) \le 0$ iga $x \in X$ korral ja punktid $x \in X$, kus $f'(x) = 0$, ei moodusta vahemikke.

See tulemus väljendab järgmist geomeetrilist fakti. Kui lõigul $[a,b]$ funktsioon $y = f(x)$ kasvab, siis joone puutuja moodustab selle lõigu igas punktis *x*-telje positiivse suunaga teravnurga või on mõnedes punktides horisontaalne. Kui lõigul $[a,b]$ funktsioon $y = f(x)$ kahaneb, siis joone puutuja moodustab selle lõigu igas punktis *x*-telje positiivse suunaga nürinurga või on mõnedes punktides horisontaalne.



Järeldusi teoreemist:

1. kui $f'(x) > 0$, siis on funktsioon $y = f(x)$ kasvav vahemikus *X*;
2. kui $f'(x) < 0$, siis on funktsioon $y = f(x)$ kahanev vahemikus *X*.

Seega võib kasvamis- ja kahanemispiirkondade kindlakstegemiseks lahendada võrratused $f'(x) > 0$ ja $f'(x) < 0$.

Funktsiooni statsionaarsed ja kriitilised punktid

Punkte $x \in X$, kus $f'(x) = 0$, nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ **statsionaarseteks punktideks**.
Funktsiooni statsionaarseid punkte ja neid punkte, kus funktsiooni tuletis puudub, nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ **kriitilisteks punktideks**.
Nagu nägime, tuleb funktsiooni monotoonsuse piirkondade (kasvamis- ja kahanemispiirkondade) leidmisel lahendada võrratused $f'(x) > 0$ ja $f'(x) < 0$. Nende võrratuste lahendamist saab vältida järgmise tulemuse abil.
Kui vahemikus $X = (a;b)$ punktid $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ on funktsiooni ainukesed kriitilised punktid, siis vahemikes

$$(a;\, x_1),\ (x_1;\, x_2),\ \ldots,\ (x_n\,;\, b)$$

säilitab funktsiooni tuletis märki.
Seega võime igas vaadeldavas osavahemikus $f'(x)$ märgi kindlaks teha argumendi *x* ühe (sobivalt valitud) väärtuse abil.
Näide. Leida funktsiooni $y = |x^2 - 4|$ monotoonsuse piirkonnad.
Lahendus. Selle funktsiooni määramispiirkond on $X = (-\infty; +\infty)$. Kõrvaldame funktsiooni avaldisest absoluutväärtused, saame

$$y = \begin{cases} x^2 - 4, \quad kui\ x \le -2; \\ -(x^2 - 4), \quad kui \quad -2 < x < 2; \\ x^2 - 4, \quad kui\ x \ge 2. \end{cases}$$

Leiame funktsiooni tuletise

$$y' = \begin{cases} 2x, \quad kui\ x \le -2; \\ -2x, \quad kui \quad -2 < x < 2; \\ 2x, \quad kui\ x \ge 2. \end{cases}$$

Vaatleme funktsiooni y', eraldi punktide -2 ja 2 ümbruses, kus toimub üleminek funktsiooni ühelt definitsiooniavaldiselt teisele. Uurime kõigepealt punkti -2 ümbrust selleks arvutame ühepoolsed piirväärtused

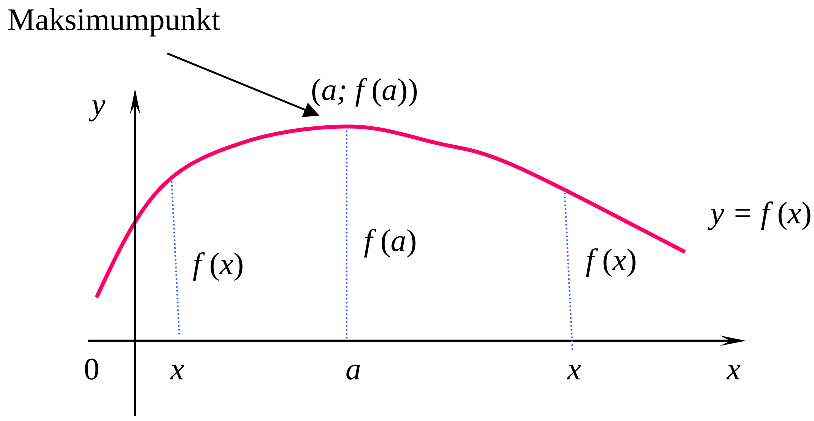
$$\lim_{x \to -2-} 2x = -4$$

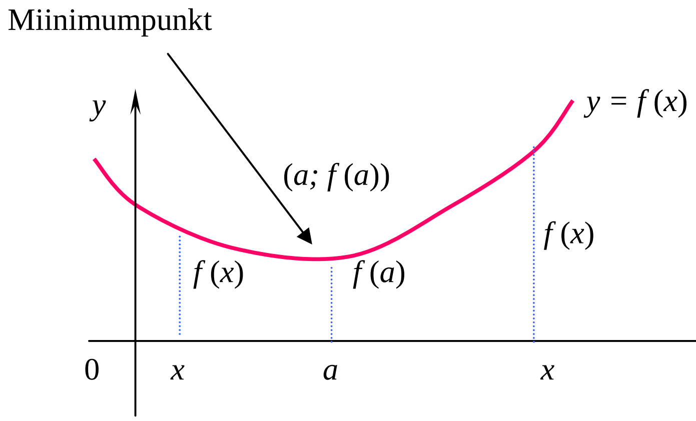
$$\lim_{x \to -2+} (-2x) = 4\,.$$

Näeme, et punktis -2 ei ole funktsioon y' pidev ja seepärast ei eksisteeri selles punktis ka tuletist. Samal viisil võib veenduda, et ka punktis 2 tuletist ei ole.
Leiame funktsiooni kriitilised punktid. Nendeks on punktid -2 ja 2, kus tuletist ei eksisteeri ja statsionaarne punkt 0 (funktsiooni tuletise väärtus on 0, kui $x = 0$).
Kriitiliste punktide abil jaotame funktsiooni määramispiirkonna neljaks vahemikuks: $X_1 = (-\infty; -2)$; $X_2 = (-2; 0)$; $X_3 = (0; 2)$ $X_4 = (2; +\infty)$. Eelpooltoodud teoreemi põhjal igas osas neist säilitab tuletis märki.
Et punktis $-3 \in X_1$ on $y'(-3) = 2 \cdot (-3) = -6 < 0$, siis kogu vahemikus $X_1 = (-\infty; -2)$ on $y' < 0$ ja funktsioon kahaneb selles vahemikus.
Et punktis $-1 \in X_2$ on $y'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2 > 0$, siis kogu vahemikus $X_2 = (-2; 0)$ on $y' > 0$ ja funktsioon kasvab selles vahemikus.
Analoogselt punktis $1 \in X_3$ on $y'(1) = -2 \cdot (1) = -2 < 0$, siis kogu vahemikus $X_3 = (0; 2)$ on $y' < 0$ ja funktsioon kahaneb selles vahemikus.
Punktis $3 \in X_4$ on $y'(3) = 2 \cdot (3) = 6 > 0$, seega kogu vahemikus $X_4 = (2; +\infty)$ on $y' > 0$ ja funktsioon kasvab selles vahemikus.

Funktsiooni maksimum ja miinimum

Öeldakse, et funktsioonil $y = f(x)$ on punktis a **lokaalne maksimum** (miinimum), kui leidub niisugune punkti a ümbrus, kus $f(x) \le f(a)$, $(f(x) \ge f(a))$. Kui eelmises võrratuses esineb võrdusmärk vaid juhul $x = a$, siis lokaalset maksimumi (miinimumi) nimetatakse **rangeks**.
Lokaalse maksimumi ja miinimumi ühine nimetus on **lokaalne ekstreemum.** Argumendi väärtust $x = a$ nimetatakse kas **maksimum- või miinimumkohaks**. Punkti $(a; f(a))$ nimetatakse **lokaalseks ekstreemumpunktiks** (maksimum- või miinimumpunktiks).





<u>Ekstreemumi tarvilik tingimus:</u> Lokaalne ekstreemum võib funktsioonil olla vaid tema kriitilises punktis.
Selle tarviliku tunnuse põhjal tuleb funktsiooni lokaalsete ekstreemumite leidmiseks kõigepealt leida funktsiooni kriitilised punktid. Igas kriitilises punktis ei ole lokaalset ekstreemumit. Selleks, et selgitada, millistes kriitilistes punktides on ja millistes ei ole lokaalset ekstreemumit, kasutatakse järgmisi piisavaid tunnuseid.

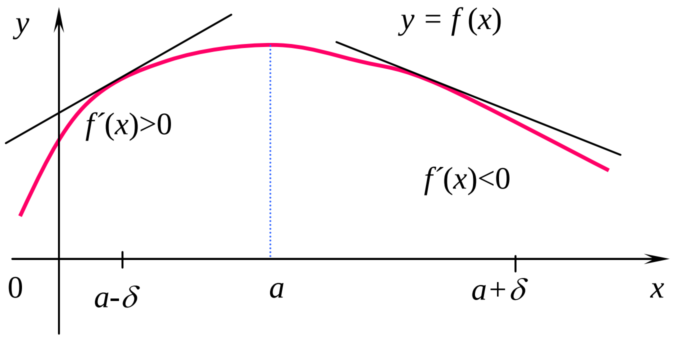
I. <u>Ekstreemumi piisavad tingimused:</u>

Olgu funktsioon $y = f(x)$ pidev kriitilises punktis *a*.

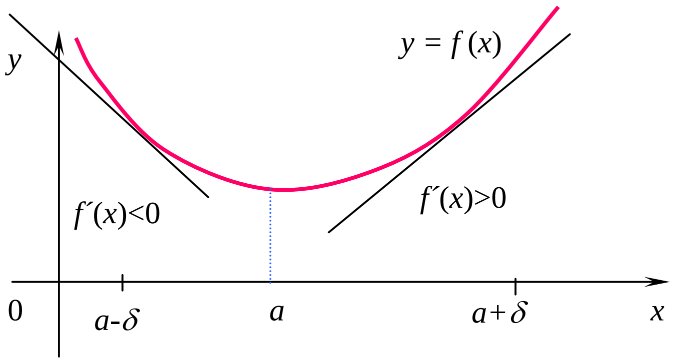
1) kui $f'(x) > 0$ (s.t. *f* kasvab) punkti *a* vasakpoolses ümbruses ja $f'(x) < 0$ (s.t. *f* kahaneb) punkti *a* parempoolses ümbruses, siis funktsioonil *f* on punktis *a* range lokaalne **maksimum**.
2) kui $f'(x) < 0$ (s.t. *f* kahaneb) punkti *a* vasakpoolses ümbruses ja $f'(x) > 0$ (s.t. *f* kasvab) punkti *a* parempoolses ümbruses, siis funktsioonil *f* on punktis *a* range lokaalne **miinimum**.
3) kui $f'(x)$ on punkti *a* vasakpoolses ja parempoolses ümbruses ühe ja sama märgiga, siis punktis *a* lokaalset ekstreemumit ei ole.

Selle tunnuse puhul ei ole oluline, kas funktsioon $y = f(x)$ on diferentseeruv punktis *a* või mitte, kuid ta peab olema selles punktis pidev.

Maksimum



Miinimum



II.<u>Ekstreemumi piisavad tingimused:</u>

Olgu funktsioon *f* vähemalt kaks korda diferentseeruv statsionaarses punktis *a*.

Kui $f''(a) < 0$, siis punktis *a* on range lokaalne maksimum.

Kui $f''(a) > 0$, siis punktis *a* on range lokaalne miinimum.

Kui $f''(a) = 0$, siis seda tunnust kasutada ei saa, sel korral kasutatakse järgmist tunnust.

Olgu funktsioon *f* diferentseeruv *n* korda statsionaarses punktis *a* ning olgu

$$f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ ja } f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Kui *n* on paarisarv, siis punktis *a* on $f^{(n)}(a) < 0$ korral range lokaalne maksimum ja $f^{(n)}(a) > 0$ korral range lokaalne miinimum.

Kui *n* on paaritu arv, siis punktis *a* lokaalset ekstreemumit ei ole.

Funktsiooni globaalsed ekstreemumid

Funktsiooni $y = f(x)$ **globaalseks** ehk absoluutseks **maksimumiks** (**miinimumiks**) piirkonnas X nimetatakse tema suurimat (vähimat) väärtust selles piirkonnas X. Kui funktsiooni $y = f(x)$ suurim väärtus M lõigus $X = [a;b]$ on punktis α ja vähim väärtus m punktis β, siis võime kirjutada

$$M = f(\alpha) = \max_{a \le x \le b} f(x), \qquad m = f(\beta) = \min_{a \le x \le b} f(x).$$

Globaalse maksimumi ja globaalse miinimumi ühine nimetus on **globaalne ekstreemum.** Kui piirkonnas X pideval funktsioonil $y = f(x)$ on üksainus lokaalne ekstreemum, siis on see ka funktsiooni globaalne ekstreemum selles piirkonnas.

Globaalsete ekstreemumite leidmine

<u>Lõigus X pideva funktsiooni globaalsete ekstreemumite leidmiseks tuleb:</u>

1) leida funktsiooni $y = f(x)$ kriitilised punktid lõigu X sisepunktides;
2) arvutada funktsiooni $y = f(x)$ väärtused kriitilistes punktides ja lõigu otspunktides;
3) saadud väärtustest valida välja suurim ja vähim, mis ongi globaalsed ekstreemumid selles lõigus.

<u>Näide.</u> Leida funktsiooni $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$, $X = [0;\ 2]$ globaalsed ekstreemumid.

Lahendus. Antud funktsioon on elementaarfunktsioon ja seepärast pidev lõigus X. Seega on tal selles lõigus globaalsed ekstreemumid.

Vastavalt eelpool toodud skeemile leiame funktsiooni kriitilised punktid. Selleks leiame funktsiooni tuletise

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x^2 + x - 2) = 12x(x-1)(x+2).$$

Näeme, et funktsiooni kriitiliseks punktiks on statsionaarsed punktid $x_1 = -2;\quad x_2 = 0;\quad x_3 = 1$, kusjuures punkt $x_1 = -2$ ei kuulu meie poolt vaadeldavasse lõiku $X = [0;\ 2]$.

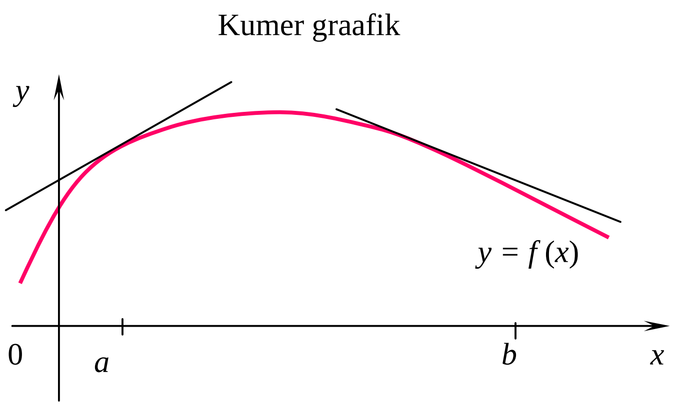
Arvutame nüüd funktsiooni väärtused vaadeldava piirkonna kriitilistes punktides ja lõigu X otspunktides, saame $f(0) = 0$; $f(1) = -5$ ja $f(2) = 32$.

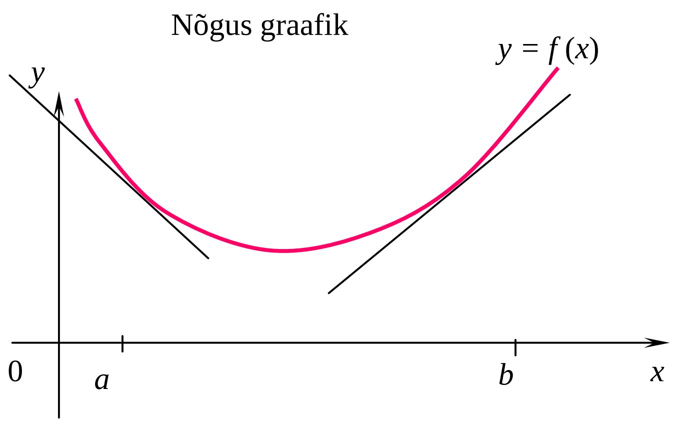
Neist arvudest vähim $f(1) = -5$ on funktsiooni f globaalne miinimum ja suurim $f(2) = 32$ on globaalne maksimum lõigus X.

Joone kumerus ja nõgusus

Öeldakse, et funktsiooni f graafik on vahemikus X **kumer** (**nõgus**), kui selle vahemiku X igas punktis x graafiku puutuja asetseb ülalpool (allpool) graafikut.

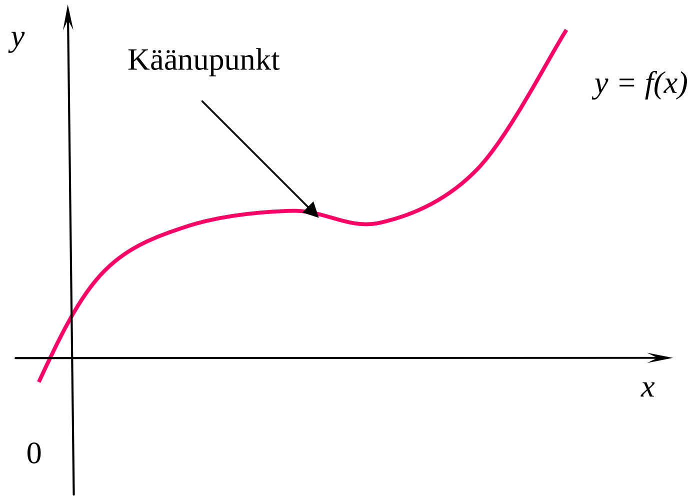
Funktsiooni graafiku kumeruse ja nõgususe piirkondade leidmiseks kasutatakse järgmist piisavat tunnust. Kui vahemiku (a; b) kõigis punktides funktsiooni $y = f(x)$ teine tuletis on negatiivne, s.t. $f''(x) < 0$, siis joon $y = f(x)$ on selles vahemikus kumer. Kui vahemiku (a; b) kõigis punktides funktsiooni $y = f(x)$ teine tuletis on positiivne, s.t. $f''(x) > 0$, siis joon $y = f(x)$ on selles vahemikus nõgus.





Funktsiooni käänupunktid

Punkti, mis eraldab pideva joone kumerat osa nõgusast, nimetatakse joone **käänupunktiks**.

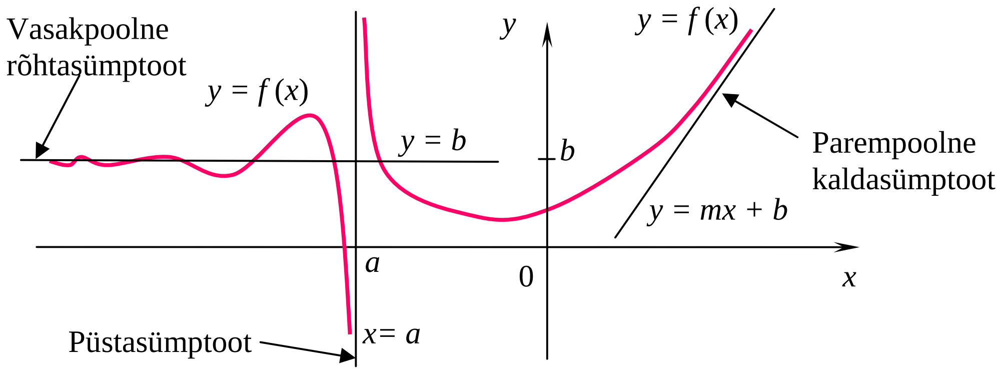


Funktsiooni graafiku käänupunktid võib leida kumerus ja nõgususpiirkondade järgi, kuid võib kasutada ka järgmist tunnust.

Funktsiooni *f* graafikul võib käänupunkt olla vaid tuletise $f'(x)$ kriitilises punktis (s.t. punktis, kus f'' on 0 või puudub). Kui tuletisel $f'(x)$ on kriitilises punktis *a* range lokaalne ekstreemum, siis punkt $K = (a; f(a))$ on funktsiooni *f* graafiku käänupunkt.

Funktsiooni graafiku asümptoodid

Asetsegu punkt $(x; y)$ funktsiooni *f* graafikul, millel on lõpmatusse ulatuv haru. Kui punkti $(x; y)$ kaugenemisel lõpmatusse tema kaugus mingist sirgest läheneb nullile, siis seda sirget nimetatakse selle funktsiooni graafiku **asümptoodiks**.
Asümptooti võrrandiga $x = a$ nimetatakse **püst-** ehk **vertikaalasümptoodiks**. Asümptooti võrrandiga $y = mx + b$ nimetatakse **kaldasümptoodiks**. Kui $m = 0$, siis kaldasümptooti nimetatakse **rõht- ehk horisontaalasümptoodiks**.



Kaldasümptoodid liigitatakse parempoolseteks ja vasakpoolseteks. Kui punkt $(x; y)$ läheneb kaldasümptoodile protsessis $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ siis kaldasümptooti nimetatakse **parempoolseks (vasakpoolseks) kaldasümptoodiks**.
Analoogilisi nimetusi kasutatakse ka püstasümptootide korral. Öeldakse, et sirge $x = a$ on **püstasümtoot punkti *a* parempoolses (vasakpoolses) ümbruses**, kui punkt $(x; y)$ läheneb püstasümtoodile paremalt (vasakult).

Funktsiooni graafiku asümptootide leidmiseks kasutatakse järgmisi tingimusi.
Sirge $x = a$ on funktsiooni *f* graafiku püstasümptoot punkti *a* parempoolses (vasakpoolses) ümbruses siis ja ainult siis, kui

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty \quad (\lim_{x \to a-} f(x) = \pm\infty).$$

Sirge $y = mx + b$ on funktsiooni *f* graafiku parempoolne kaldasümptoot siis ja ainult siis, kui

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx).$$

Sirge $y = mx + b$ on funktsiooni *f* graafiku vasakpoolne kaldasümptoot siis ja ainult siis, kui

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx).$$

Funktsiooni uurimine

Uurime funktsiooni $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$

1) Määramispiirkond

$X = (-\infty; +\infty)$

2) Katkevuspunktid

Kuna funktsioon $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$ on elementaarfunktsioon, siis ta on pidev oma määramispiirkonnas $X = (-\infty; +\infty)$. Seega katkevuspunktid puuduvad.

3) Nullkohad

Nullkohtade leidmiseks lahendame võrrandi $f(x) = 0$

$\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} = 0$

$x^3 - 6x^2 = 0$

$x^2(x-6) = 0$

$x_{1,2} = 0; \quad x_3 = 6$

$X_0 = \{0;6\}$

4) Paaris, paaritu või perioodiline

Funktsioon ei ole ei paaris, paaritu, ega perioodiline (veendu ise!).

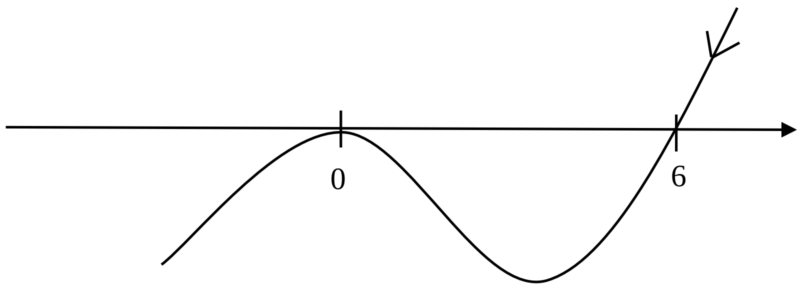
5) Positiivsus- ja negatiivsuspiirkond

Positiivsuspiirkonna leidmiseks lahendame võrratuse $f(x) > 0$

$\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} > 0$

$x^2(x-6) > 0$

Kasutame intervallimeetodit. Kanname võrratuse vasaku poole nullkohad *x*-teljele ja tõmbame abijoone.



Jooniselt näeme, et $X^+ = (6;\infty)$ ja $X^- = \{(-\infty;0);(0;6)\}$.

6) monotoonsuse piirkonnad, ekstreemumid

Leiame funktsiooni $y = f(x)$ kriitilised punktid, selleks arvutame funktsiooni tuletise.

Funktsiooni avaldise võib teisendada kujule

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2} = \left(x^3 - 6x^2\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Seega

$f'(x) = \frac{1}{3}\left(x^3 - 6x^2\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(x^3 - 6x^2\right)' =$

$$= \frac{1}{3}\left(x^3 - 6x^2\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(3x^2 - 12x\right) = \frac{x^2 - 4x}{\sqrt[3]{\left(x^3 - 6x^2\right)^2}} = \frac{x(x-4)}{\sqrt[3]{\left(x^2(x-6)\right)^2}} = \frac{x(x-4)}{\sqrt[3]{x^4(x-6)^2}} = \frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}}.$$

Tuletise avaldisest näeme, et $f'(x) = 0$, kui $x = 4$ ja $f'(x)$ ei eksisteeri kui $x = 0$ ja $x = 6$. Seega kriitilised punktid on $x_1 = 0; \quad x_2 = 4; \quad x_3 = 6$.

Kriitiliste punktide abil jaotame funktsiooni määramispiirkonna neljaks vahemikuks: $X_1 = (-\infty; 0)$; $X_2 = (0; 4)$; $X_3 = (4; 6)$ $X_4 = (6; +\infty)$ ja määrame igal osal tuletise märgi.

Et punktis $-1 \in X_1$ on $y'(-1) > 0$, siis kogu vahemikus $X_1 = (-\infty; 0)$ on $y' > 0$ ja funktsioon kasvab selles vahemikus.

Et punktis $1 \in X_2$ on $y'(1) < 0$, siis kogu vahemikus $X_2 = (0; 4)$ on $y' < 0$ ja funktsioon kahaneb selles vahemikus.

Analoogselt punktis $5 \in X_3$ on $y'(5) > 0$, siis kogu vahemikus $X_3 = (4; 6)$ on $y' > 0$ ja funktsioon kasvab selles vahemikus.

Punktis $7 \in X_4$ on $y'(7) > 0$, seega kogu vahemikus $X_4 = (6; +\infty)$ on $y' > 0$ ja funktsioon kasvab selles vahemikus.

f' märk	+		-		+		+	
f käik	kasvab	0	kahaneb	4	kasvab	6	kasvab	x

Paneme tähele, et kui kohal, kus funktsiooni tuletis puudub või on võrdne nulliga, ei toimu kasvamise üleminekut kahanemiseks või vastupidi, siis funktsioon kas kasvab või kahaneb ka sellel kohal. Seega antud juhul tuleb kirjutada, et funktsioon kasvab $(-\infty;0);(4;\infty)$.

Kokkuvõttes $X \uparrow = \{(-\infty;0);(4;\infty)\}$ ja $X \downarrow = (0;4)$.

Leiame lokaalsed ekstreemumid. Kuna $f'(x) > 0$ (s.t. *f* kasvab) punkti 0 vasakpoolses ümbruses ja $f'(x) < 0$ (s.t. *f* kahaneb) punkti 0 parempoolses ümbruses, siis funktsioonil *f* on punktis 0 range lokaalne maksimum $f(0) = 0$.

Kuna $f'(x) < 0$ (s.t. *f* kahaneb) punkti 4 vasakpoolses ümbruses ja $f'(x) > 0$ (s.t. *f* kasvab) punkti 4 parempoolses ümbruses, siis funktsioonil *f* on punktis 4 range lokaalne miinimum $f(4) \approx -3{,}17$.

Kuna $f'(x)$ on punkti 6 vasakpoolses ja parempoolses ümbruses ühe ja sama märgiga, siis punktis 6 lokaalset ekstreemumit ei ole. Kokkuvõttes oleme seega saanud, et antud funktsioonil on lokaalne maksimum graafiku punktis $E_1 = (0;0)$ ja lokaalne miinimum graafiku punktis $E_2 = (4;-3{,}17)$.

7) Käänupunktid, kumerus- ja nõgususpiirkonnad

Kumeruse ja nõgususe leidmiseks leiame kõigepealt teise tuletise. Tuletise võtmisel on mõistlik kasutada logaritmilise diferentseerimise võtet. Tähistame esimese tuletise tähega *y*, siis

$$y = \frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}} = (x-4) \cdot x^{-\frac{1}{3}} \cdot (x-6)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\ln|y| = \ln|x-4| + \ln\left|x^{-\frac{1}{3}}\right| + \ln\left|(x-6)^{-\frac{2}{3}}\right|$$

$$\ln|y| = \ln|x-4| - \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{2}{3}\ln|x-6|$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{x-4}\cdot(x-4)' - \frac{1}{3x} - \frac{2}{3(x-6)}\cdot(x-6)'$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{x-4} - \frac{1}{3x} - \frac{2}{3(x-6)}$$

$$y' = \left[\frac{1}{x-4} - \frac{1}{3x} - \frac{2}{3(x-6)}\right]\cdot\frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}}$$

$$y' = \frac{3x(x-6)-(x-6)(x-4)-2x(x-4)}{3x(x-6)(x-4)}\cdot\frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}} =$$

$$= \frac{-24}{3x(x-6)(x-4)}\cdot\frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}} = -\frac{8}{x(x-6)\sqrt[3]{x(x-6)^2}} = -\frac{8}{\sqrt[3]{x^4(x-6)^5}}$$

Seega

$$f''(x) = -\frac{8}{\sqrt[3]{x^4(x-6)^5}}.$$

Leiame tuletise f' kriitilised punktid (s.t. punktid, kus f'' on 0 või ei eksisteeri). Näeme, et f'' ei ole null mitte ühegi argumendi väärtuse korral ja f'' ei eksisteeri kui $x=0$ ja $x=6$. Jaotame nende punktide abil x-telje osadeks ja määrame igal osal f'' märgi.

f'' märk	+		+		-	
f käik	nõgus	0	nõgus	6	kumer	x

Valime testimiseks näiteks punktid -1; 1 ja 7. Kui $x=-1$, siis $f''>0$, kui $x=1$, siis $f''>0$, seega punktis $x=0$ käänupunkti pole ja funktsioon on kogu piirkonnas $(-\infty;6)$ nõgus. Kui $x=7$, siis $f''<0$, seega punktis $x=6$ on käänupunkt ja funktsioon on piirkonnas $(6;\infty)$ kumer.

Kokkuvõttes kumerus- ja nõgususvahemikud on $\overset{\frown}{X} = (6;\infty)$ $\overset{\smile}{X} = (-\infty;6)$. Punkt $K = (6; f(6)) = (6;0)$ on funktsiooni graafiku käänupunkt.

8) Asümptoodid

Püstasümptoodid puuduvad, sest x ühegi lõpliku väärtuse puhul funktsiooni väärtus ei lähene lõpmatusele.

Parempoolse kaldasümptoodi $y = mx + b$ leidmiseks arvutame kõigepealt m

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-6x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{x^3-6x^2}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{x^3\left(1-\frac{6x^2}{x^3}\right)}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1-\frac{6}{x}} = 1$$

ja siis b

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-6x^2} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3-6x^2}-x\right)\left[\left(\sqrt[3]{x^3-6x^2}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3-6x^2} + x^2\right]}{\left(\sqrt[3]{x^3-6x^2}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3-6x^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-6x^2-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3-6x^2}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3-6x^2} + x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-6x^2}{x^2\left[\frac{\sqrt[3]{(x^3-6x^2)^2}}{x^2} + \frac{x\sqrt[3]{x^3-6x^2}}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}\right]} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-6}{\frac{\sqrt[3]{(x^3-6x^2)^2}}{x^2} + \frac{\sqrt[3]{x^3-6x^2}}{x} + 1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-6}{\sqrt[3]{\frac{x^6-12x^5+36x^4}{x^6}} + \sqrt[3]{\frac{x^3-6x^2}{x^3}} + 1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-6}{\sqrt[3]{\frac{x^6\left(1-\frac{12x^5}{x^6}+\frac{36x^4}{x^6}\right)}{x^6}} + \sqrt[3]{\frac{x^3\left(1-\frac{6x^2}{x^3}\right)}{x^3}} + 1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-6}{\sqrt[3]{1-\frac{12}{x}+\frac{36}{x^2}} + \sqrt[3]{1-\frac{6}{x}} + 1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-6}{3} = -2$$

Seega sirge $y = x - 2$ on parempoolne kaldasümptoot. Sama sirge osutub ka vasakpoolseks kaldasümptoodiks (kontrolli järgi!).

Funktsiooni $f(x) = \sqrt[3]{x^3-6x^2}$ graafik on kujutatud järgneval joonisel.