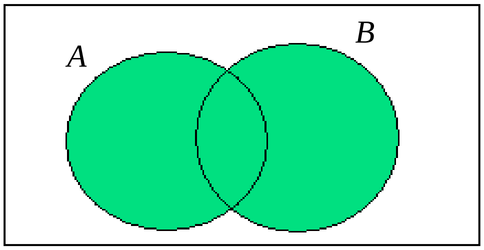
Tõenäosuse arvutamine

Kahe sündmuse summa tõenäosus

Kahe sündmuse summa tõenäosus on võrdne osasündmuste tõenäosuste summaga, millest on lahutatud osasündmuste koosesinemise ehk korrutise tõenäosus

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Tulemuse tähendust võib illustreerida järgneva Venni diagrammiga:



Kasutame geomeetrilise tõenäosuse mõistet ja käsitleme sündmuse tõenäosust piirkonna pindalana. Piirkonna $A \cup B$ pindala leidmisel tuleb diagrammil olev kattuv ala arvesse võtta üks kord, mis põhjendabki avaldise $P(A \cap B)$ lahutamist.

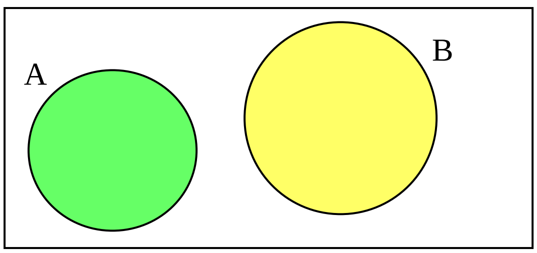
<u>Näide.</u> Kaardipakist, milles on 52 kaarti võetakse üks kaart. Leida tõenäosus, et see on äss või ärtu mastist.

Olgu:

A – kaart on äss
B – kaart on ärtu mastist
AB – kaart on ärtu äss

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} \approx 0{,}308.$$

Järgnev joonis kujutab juhtu, kus sündmused A ja B on teineteist välistavad:



Nagu näeme hulkadel A ja B ühist osa pole ja saame erijuhu üldisest tõenäosuste liitmislausest.

Kahe teineteist välistava sündmuse summa tõenäosus on võrdne osasündmuste tõenäosuste summaga

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Märkus. Kolme üksteist mittevälistava sündmuse korral

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC).$$

Kolme üksteist välistava sündmuse korral

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Võib veel tähele panna, et:

- Täieliku sündmuste süsteemi moodustavate sündmuste tõenäosuste summa on üks.
- Vastandsündmuste tõenäosuste summa on 1: $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Märkus. Praktiliste ülesannete lahendamisel on sageli kergem leida vastandsündmuse $\overline{A}$ tõenäosust kui sündmuse *A* enda tõenäosust. Niisugustel juhtudel leitakse kõigepealt tõenäosus $P(\overline{A})$ ja seejärel valemi $P(A)=1-P(\overline{A})$ abil küsitud tõenäosus.

Kahe sündmuse korrutise tõenäosus

Enne tõenäosuste korrutamislause käsitlemist defineerime sõltuvate sündmuste mõiste.

Sündmust *A* nimetatakse **sõltuvaks sündmusest *B***, kui sündmuse *A* toimumise tõenäosus sõltub sellest, kas sündmus *B* toimus või ei toimunud. Vastasel juhul on tegu sõltumatute sündmustega.

Näide 1. "Blackjack'i" mängides tõmmatakse kaardipakist järjest kaarte neid tagasi panemata. Iga järgmise kaardi tõmbamisel sõltub saadav silmade arv sellest, millised kaardid on juba välja tõmmatud.

Näide 2. Kui viskame täringut kaks korda järjest, siis teisel katsel saadavate silmade arv (sündmus *A*) ei sõltu esimesel katsel saadavast silmade arvust (sündmus *B*).

Sündmuse *B* toimumise tõenäosust tingimusel, et toimus sündmus *A*, tähistatakse $P(B\,|\,A)$ ja nimetatakse **sündmuse *B* tinglikuks tõenäosuseks** tingimusel *A*.

Näide. Olgu urnis 3 punast ja 2 kollast kuuli. Urnist võetakse üks kuul, mida tagasi ei panda ja siis teine kuul. Olgu sündmused tähistatud järgnevalt:

A – punane kuul esimesel korral
B – punane kuul teisel korral

Sündmuse *B* tõenäosus, kui *A* juba toimus (esimesel katsel võeti punane kuul) on

$$P(B\,|\,A)=\frac{2}{4}.$$

Sündmuse *B* tõenäosus, kui *A* ei toimunud (esimesel katsel võeti kollane kuul) on

$$P(B\,|\,\bar{A})=\frac{3}{4}.$$

Seega sõltub sündmuse *B* tõenäosus sellest, kas sündmus *A* toimus või ei. See aga tähendab, et sündmus *B* sõltub sündmusest *A*.
Järeldus. Sündmust *B* nimetatakse sõltumatuks sündmusest *A*, kui kehtib seos $P(B\,|\,A)=P(B)$ ning sündmus *B* sõltub sündmusest *A* kui $P(B\,|\,A)\neq P(B)$.

Kahe mistahes sündmuse *A* ja *B* koos toimumise tõenäosus ehk **korrutise tõenäosus** on võrdne ühe osasündmuse tõenäosuse ja teise osasündmuse tingliku tõenäosuse korrutisega:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B\,|\,A)=P(B)\cdot P(A\,|\,B)$$

Kui sündmused *A* ja *B* on sõltumatud, siis $P(B\,|\,A)=P(B)$ ja tõenäosuste korrutamislausest järeldub, et $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$ ehk sõltumatute sündmuste korrutise tõenäosus on võrdne osasündmuste tõenäosuste korrutisega.

Tõenäosuste korrutamislause üldistus *n* sündmusele:

$$P(A_1A_2\dots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)\cdot\dots\cdot P(A_n\mid A_1A_2\dots A_{n-1}).$$

Kui *n* sündmust on sõltumatud, siis:

$$P(A_1A_2\dots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\dots\cdot P(A_n).$$

Näide 1. Kaks tanki tulistavad ühte ja sama märki. Esimesest tankist tulistamisel on tabamise tõenäosus 9/10 ja teisest 5/6. Mõlemast tankist tehakse samaaegselt üks lask. Leida tõenäosus, et mõlemad lasud tabavad märki.

Olgu A – esimene tank tabab

B – teine tank tabab

C – mõlemad tabavad

Siis

$$C=AB,$$

et sündmused A ja B on sõltumatud, siis

$$P(C)=P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3}{4}.$$

Näide 2. Elektriahel katkeb, kui rikneb vähemalt üks kolmest jadaühendusega elemendist. Leida tõenäosus, et ahel ei katke, kui elemendid riknevad sõltumatult üksteisest tõenäosustega 0,3; 0,4 ja 0,6. Kuidas muutub tõenäosus, kui esimene element ei rikne?

Olgu A_1 – element nr 1 ei rikne

A_2 – element nr 2 ei rikne

A_3 – element nr 3 ei rikne

B – ahel ei katke

Siis

$$B=A_1A_2A_3.$$

Leiame sündmuste A_1, A_2, A_3 tõenäosused kasutades vastandsündmusi ($\overline{A}_1$ – element nr 1 rikneb; $\overline{A}_2$ – element nr 2 rikneb; $\overline{A}_3$ – element nr 3 rikneb).

Saame $P(A_1)=1-P(\overline{A}_1)=1-0{,}3=0{,}7$

$P(A_2)=1-0{,}4=0{,}6$

$P(A_3)=1-0{,}6=0{,}4$

Kuna tegu on sõltumatute sündmustega, siis

$$P(B)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=0{,}168.$$

Kui esimene element ei rikne, siis

$$P(B)=P(\Omega)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=1\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=0{,}24.$$

Et

$$\frac{0{,}24}{0{,}168}\approx 1{,}43,$$

siis juhul kui element nr 1 ei rikne suureneb töökindlus 1,43 korda.

Näide 3. Olgu urnis 4 punast ja 6 kollast kuuli. Urnist võetakse üks kuul ja siis teine kuul. Leida tõenäosus, et mõlemad kuulid on punased.

Olgu:

A – esimene kuul on punane

B – teine kuul on punane.

Siis $P(A) = 4/10$. Kuna nüüd jäi urni ainult 9 kuuli, millest 3 on punased, siis teise punase kuuli võtmise tinglik tõenäosus on $P(B \mid A) = 3/9$.
Mõlema sündmuse koosesinemise tõenäosus on aga

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}.$$

Näide 4. Loosirattas olevast sajast piletist võidavad kümme. Kui tõenäone on kolme pileti järjestikusel võtmisel ainult võitude saamine?
Tähistame sündmused järgnevalt:

A – võidu saamine esimese piletiga
B – võidu saamine teise piletiga
C – võidu saamine kolmanda piletiga.

Sündmus "Kolme pileti järjestikusel võtmisel saadakse ainult võidud" on nüüd väljendatav sündmuste *A*, *B* ja *C* korrutisena *ABC*.

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid AB) = \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{8}{98} = 0{,}000742$$

Täistõenäosuse valem

Käsitleme veel ülesandeid, kus sündmuste tõenäosuse arvutamine toimub liitmis- ja korrutamislausete kombineerimisel.
Olgu antud täielik sündmuste süsteem H_1, ... ,H_n. (edaspidi nimetame neid sündmusi hüpoteesideks) ja vastavad tõenäosused $P(H_1)$, ... ,$P(H_n)$. Saagu sündmus *A* toimuda vaid koos mõnega sündmustest H_i. Siis

$$A = AH_1 \cup AH_2 \cup ... \cup AH_n .$$

Selles seoses olevad liidetavad on üksteist välistavad sündmused, sest hüpoteesid on üksteist välistavad. Tõenäosuste liitmislause kohaselt

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + ... + P(AH_n) \qquad (1)$$

Arvestades, et *A* tinglik tõenäosus tingimusel H_i on $P(A \mid H_i)$, saame korrutuslause põhjal

$$P(AH_i) = P(H_i) \cdot P(A \mid H_i).$$

Asendame valemis (1) üksikud liidetavad viimase võrduse parema poolega. Saame **täistõenäosuse valemi**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i).$$

Kui sündmus *A* võib toimuda koos ühega hüpoteesidest H_1, H_2, ... ,H_n, mis moodustavad täieliku sündmuste süsteemi, siis **sündmuse *A* tõenäosus** on võrdne summaga, mille liidetavateks on iga hüpoteesi tõenäosuse ja sellele hüpoteesile vastava sündmuse *A* tingliku tõenäosuse korrutis.

Näide. Eksamile tuleb üliõpilasi kolmest grupist. Esimeses grupis on 7, teises 6 ja kolmandas 8 tudengit. Esimese grupi tudeng sooritab eksami tõenäosusega 0,9, teise grupi tudeng tõenäosusega 0,8 ja kolmanda grupi tudeng tõenäosusega 0,95. Millise tõenäosusega sooritab eksami juhuslikult sisseastunud tudeng?
Tähistame sündmused järgnevalt:

A - juhuslik tudeng sooritab eksami
H_1 - tudeng on 1. grupist

H_2 - tudeng on 2. grupist

H_3 - tudeng on 3. grupist.

Sündmus A saab kaasneda suvalisega sündmustest H_1, H_2, H_3 (tudengid saavad olla vaid nimetatud kolmest grupist). Kirjutame välja hüpoteeside tõenäosused ja vastavad sündmuse A (eksamisoorituse) tinglikud tõenäosused

$P(H_1) = 7/21$ $\quad$ $P(A|H_1) = 0{,}9$

$P(H_2) = 6/21$ $\quad$ $P(A|H_2) = 0{,}8$

$P(H_3) = 8/21$ $\quad$ $P(A|H_3) = 0{,}95$

Täistõenäosuse valemi kohaselt:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1) + P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2) + P(H_3)\cdot P(A\,|\,H_3) =$$

$$= \frac{7}{21}\cdot 0{,}9 + \frac{6}{21}\cdot 0{,}8 + \frac{8}{21}\cdot 0{,}95 \approx 0{,}89$$

Vastus. Suvaline tudeng sooritab eksami tõenäosusega 0,89.

Bayesi valem

Järgnevalt lahendame eelmises punktis püstitatud ülesandega teatud mõttes vastupidise ülesande – kasutame mingi sündmuse toimumise fakti selleks, et täpsustada temaga seotud sündmuste tõenäosusi.

Olgu antud hüpoteeside täielik süsteem $H_1, \ldots ,H_n$ ning olgu teada nende hüpoteeside tõenäosused $P(H_1), \ldots , P(H_n)$. Tehakse katse, mille tulemuseks on mingi sündmus A, mille tinglikud tõenäosused $P(A|H_1), \ldots P(A|H_n)$ olgu teada. Siis avaldub hüpoteesi H_i tinglik tõenäosus **Bayesi valemi** kujul:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A|H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A|H_i)}.$$

Tõestuseks märgime, et korrutamislause põhjal

$$P(AH_i) = P(A)\cdot P(H_i|A) = P(H_i)\cdot P(A|H_i),$$

millest täistõenäosusvalemi põhjal

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)\cdot P(A|H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A|H_i)}.$$

<u>Näide 1.</u> Eksamile tuleb üliõpilasi kolmest grupist. Esimeses grupis on 7, teises 6 ja kolmandas 8 tudengit. Esimese grupi tudeng sooritab eksami tõenäosusega 0,9, teise grupi tudeng tõenäosusega 0,8 ja kolmanda grupi tudeng tõenäosusega 0,95. On teada, et esimesena eksamile läinud tudeng sooritas eksami, leida tõenäosus, et see tudeng kuulus teise gruppi.

Tähistame sündmused järgnevalt:

A - juhuslik tudeng sooritas eksami

H_1 - tudeng on 1. grupist

H_2 - tudeng on 2. grupist

H_3 - tudeng on 3. grupist.

$P(H_1) = 7/21$ $\quad$ $P(A|H_1) = 0{,}9$

$P(H_2) = 6/21$ $\quad$ $P(A|H_2) = 0{,}8$

$P(H_3) = 8/21$ $\quad$ $P(A|H_3) = 0{,}95$

Praegu huvitab meid H_2 tõenäosus tingimusel, et A on toimunud. Bayesi valemi kohaselt:

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P(A|H_i)} = \frac{\frac{6}{21} \cdot 0{,}8}{\frac{7}{21} \cdot 0{,}9 + \frac{6}{21} \cdot 0{,}8 + \frac{8}{21} \cdot 0{,}95} \approx 0{,}26$$

Vastus. Eksami sooritanud tudeng kuulus teise gruppi tõenäosusega 0,26.

<u>Näide 2.</u> Metsas eksinud ITK tudeng jõudis lagendikule, kust väljus 5 teed. On teada, et metsast väljapääsemise tõenäosus ühe tunni jooksul on erinevatel teedel vastavalt 0,6; 0,3; 0,2; 0,1; 0,1. Leida tõenäosus selleks, et eksinu valis esimese tee, kui teame, et ta väljus metsast ühe tunni jooksul.

Tähistame sündmused vastavalt:

A – tudeng jõudis 1 tunni jooksul metsast välja
H_1 – tudeng valis esimese tee
H_2 – tudeng valis teise tee
…
H_5 – tudeng valis viienda tee.

$P(H_1) = 1/5$ $P(A|H_1) = 0{,}6$
$P(H_2) = 1/5$ $P(A|H_2) = 0{,}3$
$P(H_3) = 1/5$ $P(A|H_3) = 0{,}2$
$P(H_4) = 1/5$ $P(A|H_4) = 0{,}1$
$P(H_5) = 1/5$ $P(A|H_5) = 0{,}1$

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{\sum_{i=1}^{5} P(H_i) \cdot P(A|H_i)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 0{,}6}{\frac{1}{5}(0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1)} \approx 0{,}46$$

Bernoulli valem

<u>Püstitame ülesande:</u> Leida tõenäosus, et n ühesuguse ja sõltumatu katse tulemusel toimuks sündmus A täpselt k korda. Kui vahetult rakendada tõenäosuste liitmis- ja korrutamislauseid, peame katsete arvu suurenedes ülesande lahendamiseks tegema palju tüütuid arvutusi. Tekib vajadus leida väiksema töömahuga võte.

Olgu igal üksikkatsel sündmuse A toimumise tõenäosus $P(A) = p$. Vastandsündmuse $\overline{A}$ toimumise tõenäosus on siis $P(\overline{A}) = 1 - p = q$. Kõigepealt leiame sellise sündmuse tõenäosuse, kus sündmus A leiab aset k esimese katse korral ja vastandsündmus $\overline{A}$ järgmise $(n-k)$ katse korral. Sõltumatute sündmuste korrutise tõenäosuse valemi põhjal

$$P(AA...A\overline{A}\overline{A}...\overline{A}) = \underbrace{P(A)P(A)...P(A)}_{k \text{ tegurit}}\underbrace{P(\overline{A})P(\overline{A})...P(\overline{A})}_{n-k \text{ tegurit}} = P(A)^k P(\overline{A})^{n-k} = p^k q^{n-k}$$

Sündmus A saab n katsel toimuda k korda ka teistsugustes järjestustes, kusjuures iga sellise järjestuse tõenäosus on ikka $p^k q^{n-k}$. Nende erinevate järjestuste arv on võrdne kombinatsioonide arvuga n elemendist k kaupa

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Iga erineva järjestuse realiseerimine tähendab ikka sündmuse A k-kordset toimumist. Et need võimalused on üksteist välistavad, siis saame tõenäosuste liitmislause põhjal

$$P_{n,k} = \underbrace{p^k q^{n-k} + \ldots + p^k q^{n-k}}_{\frac{n!}{k!(n-k)!}\ \text{liidetavat}}$$

Tulemuseks saame **Bernoulli valemi**.

Kui sündmuse tõenäosus igal katsel on p, siis tõenäosus, et n katse korral sündmus A toimuks k korda leitakse valemiga

$$P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k},$$

kus $q = P(\overline{A}) = 1 - p$.

Bernoulli valemi erijuhud:

- kui $k = n$, siis $P_{n,n} = p^n$
- kui $k = 0$, siis $P_{n,0} = q^n$

Näide 1. Leida mündi 10-kordsel viskamisel vapi 4 korda esinemise tõenäosus.

Siin $p = q = 0{,}5$ ja Bernoulli valemi põhjal

$$P_{10,4} = C_{10}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{10!}{4!(10-4)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \approx 0{,}205$$

Näide 2. Tõenäosus, et teatud korvpallur tabab ühe viskega korvi on 0,8. Korvpallur teeb 4 viset. Leida tõenäosus, et ta tabab 0, 1, 2, 3, 4 korda.

Siin $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$ ja Bernoulli valemi põhjal

$$P_{4,0} = \frac{4!}{0!(4-0)!} \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^{4-0} = 0{,}0016$$

$$P_{4,1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^{4-1} = 0{,}0256$$

$$P_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^{4-2} = 0{,}1536$$

$$P_{4,3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^{4-3} = 0{,}4096$$

$$P_{4,4} = \frac{4!}{4!(4-4)!} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^{4-4} = 0{,}4096$$

Tõenäoseim sündmuse toimumiste arv

Bernoulli valemis tähistab k sündmuse A toimumiste arvu. Kõige tõenäosem sündmuse A toimumiste arv on k_0, mille puhul P_{n,k_0} on maksimaalne (ei ole väiksem ühestki teisest katsete arvu tõenäosusest $P_{n,k}$).

Eelmise jaotuse teise näite lahendusest võib näha, et tõenäoseim tabamuste arv on 3 või 4. Selgub, et sündmuse A toimumise tõenäoseima arvu leidmiseks pole sugugi vaja leida kõiki tõenäosusi $P_{n,k}$. On piisav teada katsete arvu n ja sündmuse A toimumise tõenäosust ühel katsel.

Tõepoolest, tõenäoseima arvu definitsiooni põhjal ei saa tõenäosused, et sündmus A toimub kas k_0+1 või k_0-1 korda, ületada tõenäosust P_{n,k_0}. Seega peab kehtima:

$$P_{n,k_0} \geq P_{n,k_0+1}$$
$$P_{n,k_0} \geq P_{n,k_0-1}$$

Neist võrratustest esimene annab vastavalt Bernoulli valemile

$$\frac{n!}{k_0!(n-k_0)!} p^{k_0} q^{n-k_0} \geq \frac{n!}{(k_0+1)!(n-k_0-1)!} p^{k_0+1} q^{n-k_0-1}$$

millest pärast taandamist saame

$$\frac{q}{n-k_0} \geq \frac{p}{k_0+1}$$

ehk

$$q(k_0+1) \geq p(n-k_0)\,.$$

Lahendame saadud võrratuse k_0 suhtes:

$$q(k_0+1) \geq p(n-k_0)$$
$$(q+p)k_0 \geq np-q$$
$$k_0 \geq np-q$$

Seos $P_{k_0,n} \geq P_{k_0-1,n}$ annab analoogiliselt, et $k_0 \leq np+p$. Veendu selles iseseisvalt!

Kokkuvõttes: sündmuse tõenäoseima toimumiste arvu määrab võrratus $np-q \leq k_0 \leq np+p$.

Näide. Korvpalluri vabaviske tabamistõenäosus on 0,8. Korvpallur teeb 5 vabaviset. Leida tõenäoseim tabamuste arv ning vastav tõenäosus.

Siin $n=5$, $p=0{,}8$, $q=0{,}2$. Asendades need suurused valemisse $np-q \leq k_0 \leq np+p$, saame

$$5\cdot 0{,}8-0{,}2 \leq k_0 \leq 5\cdot 0{,}8+0{,}8$$
$$3{,}8 \leq k_0 \leq 4{,}8$$

Seega tõenäoseim tabamuste arv on 4. Vastava tõenäosuse arvutame Bernoulli valemiga

$$P_{5,4} = \frac{5!}{4!(5-4)!}\cdot(0{,}8)^4\cdot(0{,}2)^1 \approx 0{,}406\,.$$