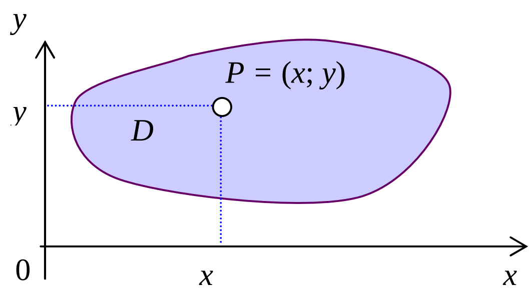
Mitme muutuja funktsioon

Kahe muutuja funktsiooni mõiste

Seni vaatlesime ühe muutuja funktsioone, s.t uurisime sõltuvusi kujul $y = f(x)$. Laiendame nüüd funktsiooni mõistet laiendades argumendi kui muutuva suuruse mõistet. Alustame näidetest. Olgu ristküliku külgede pikkused *x* ja *y*, siis tema pindala avaldub valemiga $S(x, y) = xy$. Näeme, et igale *x* ja *y* väärtuste paarile vastab pindala *S* üks väärtus, s.t. *S* on kahe muutuja *x* ja *y* funktsioon. Samamoodi võime vaadelda näiteks Ohmi seadust $I(U, R) = \frac{U}{R}$ või õhurõhku maakera pinnal $P = P(\varphi, \lambda)$ (φ ja λ on geograafilised koordinaadid) kui kahemuutuja funktsiooni.

Olgu *D* mingi arvupaaride (*x*; *y*) hulk.



<u>Definitsioon</u> Kui igale arvupaarile (*x*; *y*) ehk punktile *P* = (*x*; y) hulgast *D* on mingi eeskirja *f* abil seatud vastavusse täpselt üks reaalarv *z*, siis öeldakse, et hulgal *D* on määratud **kahe muutuja funktsioon** $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$.

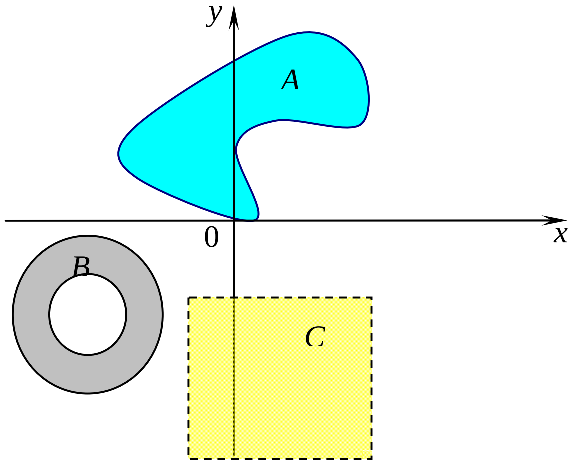
Siin

x, *y* - sõltumatud muutujad ehk argumendid,
z - funktsiooni *f* väärtus ehk sõltuv muutuja,
D - funktsiooni *f* määramispiirkond,
$Z = \{z \mid z = f(x, y); \quad (x; y) \in D\}$ funktsiooni *f* muutumispiirkond.

Nagu ühe muutuja funktsioon nii ka kahe muutuja funktsioon ei ole üldiselt määratud *x* ja *y* igasuguste väärtuste korral. Funktsiooni määramispiirkonda saab kujutada geomeetriliselt. Kui *x* ja *y* iga väärtuspaari kujutada *xy*-tasapinna punktina $M(x; y)$, siis funktsiooni määramispiirkonda kujutab teatud punktide hulk tasapinnal. Lihtsamatel juhtudel koosneb kahe muutuja funktsiooni määramispiirkond joontega piiratud tasapinna osadest.

Antud piirkonda piiravat joont nimetatakse piirkonna **rajajooneks**. Piirkonna punkte, mis ei asetse rajajoonel, nimetatakse piirkonna **sisepunktideks**. Ainult seesmistest punktidest koosnevat piirkonda nimetatakse **lahtiseks piirkonnaks**. Kui aga piirkonda kuuluvad ka kõik rajapunktid, siis nimetatakse piirkonda **kinniseks**. Piirkonda nimetatakse **tõkestatuks**, kui leidub selline konstant *C*, et piirkonna mistahes punkti *P* kaugus koordinaatide alguspunktist on väiksem kui *C*, s. t. $|OP| < C$.

Järgneval joonisel on piirkonnad *A* ja *B* kinnised ja piirkond *C* lahtine piirkond.



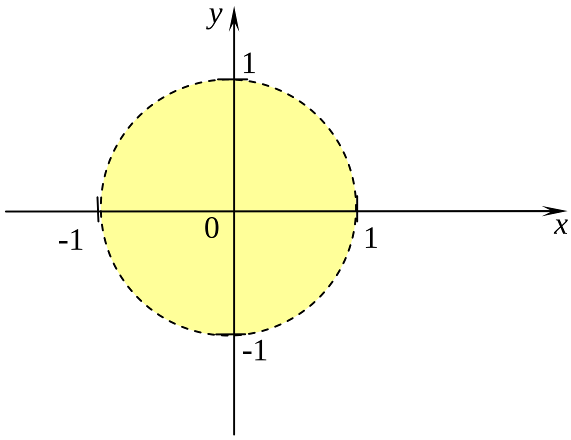
Reeglid kahe muutuja funktsiooni määramispiirkonna leidmiseks on analoogsed ühe muutuja funktsiooni määramispiirkonna leidmise reeglitega.

Näide 1 Leida funktsiooni $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ määramispiirkond.

Peame arvestama tingimustega

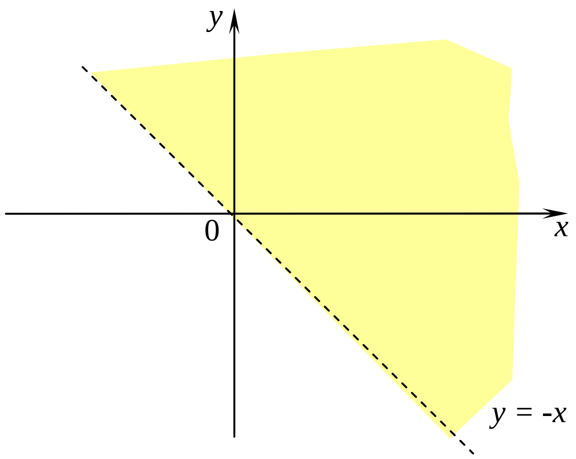
1. nulliga jagamine ei ole defineeritud,
2. juuritav peab olema mittenegatiivne.

Seega x ja y peavad rahuldama võrratust $1 - x^2 - y^2 > 0$ ehk $x^2 + y^2 < 1$. Kõik punktid, mille koordinaadid rahuldavad seda võrratust, asetsevad ringis raadiusega 1 ja keskpunktiga koordinaatide alguspunktis. (Meenutame, et ringjoone võrrand on esitatav kujul $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, kus punkt $P_0(x_0; y_0)$ on ringjoone keskpunkt ja r on ringi raadius.)



Näide 2 Leida funktsiooni $z = \ln(x + y)$ määramispiirkond.

Et logaritmida saab vaid positiivseid arve, siis peab olema täidetud võrratus $x + y > 0$ ehk $y > -x$. See tähendab, et funktsiooni z määramispiirkonnaks on sirgest $y = -x$ ülalpool asetsev pooltasand, sirge kaasa arvamata.



Mitme muutuja funktsiooni mõiste

Kahe ja enama muutuja funktsioone nimetatakse **mitme muutuja funktsioonideks**. Järgnevalt üldistame kahe muutuja funktsiooni definitsiooni.

Olgu *D* mingi piirkond ***n*-mõõtmelises ruumis**: $D \subseteq R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1, x_2, ..., x_n \in R\}$.

Definitsioon Kui igale elemendile ehk punktile $P = (x_1, x_2, ..., x_n)$ hulgast *D* on mingi eeskirja *f* abil seatud vastavusse täpselt üks reaalarv *z*, siis öeldakse, et hulgal *D* on määratud ***n* muutuja funktsioon** $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Nii nagu kahe muutuja funktsiooni puhul, võib rääkida ka kolme, nelja ja enama muutuja funktsiooni määramispiirkonnast. Näiteks kolme muutuja funktsiooni määramispiirkonnaks on mingi arvukolmikute (x, y, z) ehk ruumipunktide hulk.

Näide Leida funktsiooni $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ määramispiirkond.

Et *u* oleks reaalarv peab juuritav olema mittenegatiivne, s.t. $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$.

Kahe muutuja funktsiooni graafik

Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ graafikuks on pind *x*, *y*, *z*- ruumis. Funktsiooni graafiku joonestamiseks on otstarbekas uurida funktsiooni graafiku lõikejooni tasanditega – **tasandilõikeid**. Enim huvi pakuvad **nivoojooned** ehk lõikejooned *xy*–tasandiga

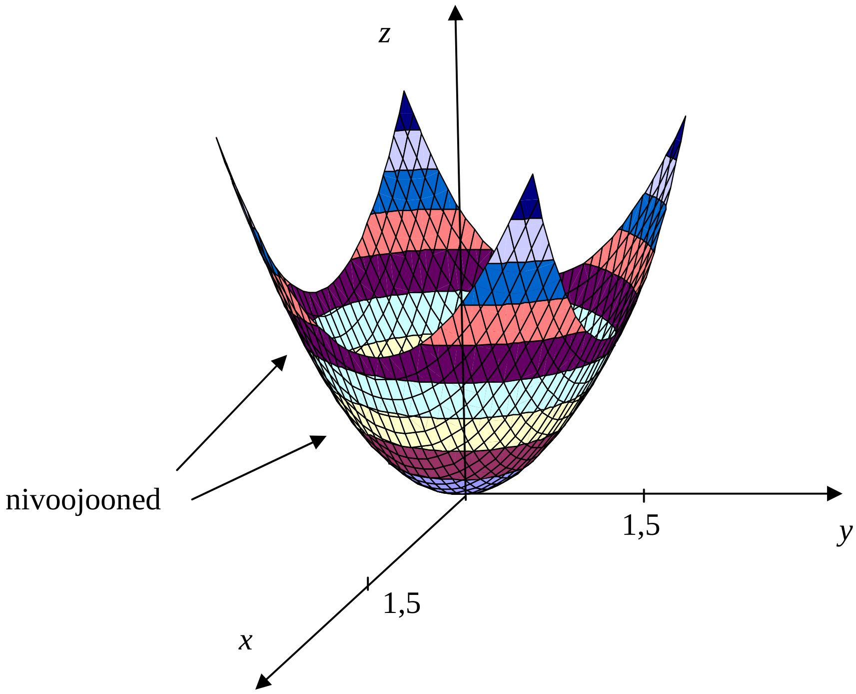
$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = 0 \end{cases}$$

või selle paralleelidega

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = c \end{cases}, \quad c \in R.$$

Näide Vaatleme funktsiooni $z = x^2 + y^2$. Nivoojooned saame, andes muutujale *z* positiivseid reaalarvulisi väärtusi (kuna $x^2 + y^2 \geq 0$ iga $x, y \in R$ korral, siis ei saa *z* omada negatiivseid väärtusi). Näiteks $z = 1$ korral on vastavaks nivoojooneks $x^2 + y^2 = 1$, s.o. ringjoon, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis ja mille raadius on 1. Kui $z = 0$, siis vastab nivoojoonele punkt (0;0).

Võttes $x = 0$, saame funktsiooni graafiku lõikejooneks *yz*-tasandiga parabooli, mille võrrand on $z = y^2$. Funktsiooni graafiku lõikejooneks *xz*-tasandiga on parabool võrrandiga $z = x^2$. Saadud andmete põhjal on võimalik skitseerida funktsiooni graafik, milleks on elliptiline paraboloid.



Kahe muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

Punkti $P_0(x_0, y_0)$ **ümbruseks** raadiusega r nimetatakse punktide hulka, mille iga punkti koordinaadid rahuldavad võrratust $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$ s.t. need punktid asetsevad ringi sees, mille raadius on r ja keskpunkt P_0.

Arvu A nimetatakse funktsiooni $f(x, y)$ **piirväärtuseks** punkti P lähenemisel punktile P_0, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $r > 0$, et kõigi võrratust $|\overrightarrow{PP_0}| < r$ rahuldavate punktide P puhul kehtib võrratus $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ ja kirjutatakse

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Kuulugu punkt $P_0(x_0, y_0)$ funktsiooni $f(x, y)$ määramispiirkonda. Funktsiooni $z = f(x, y)$ nimetatakse **pidevaks punktis** $P_0(x_0, y_0)$, kui kehtib võrdus

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Funktsiooni nimetatakse **pidevaks piirkonnas *A***, kui ta on pidev piirkonna A igas punktis.

Mitme muutuja funktsioonide osatuletised

Kui y väärtus on konstantne ja x saab muudu Δx, siis saab funktsioon z muudu, mida nimetatakse ***z* osamuuduks *x* järgi**. Seda muutu tähistatakse sümboliga $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y).$$

Analoogselt kui *x* väärtus on konstantne ja *y* saab muudu Δy, siis saab funktsioon *z* muudu, mida nimetatakse ***z* osamuuduks *y* järgi**. Seda muutu tähistatakse sümboliga $\Delta_y z$:

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Andes argumendile *x* muudu Δx ja argumendile *y* muudu Δy, saame *z* uue muudu Δz, mida nimetatakse **funktsiooni *z* täismuuduks**:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Üldiselt $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

<u>Definitsioon</u> Funktsiooni $z = f(x, y)$ **osatuletiseks *x* järgi** nimetatakse vastava osamuudu $\Delta_x z$ ja muudu Δx suhte piirväärtust Δx lähenemisel nullile:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Selle osatuletise tähistamiseks kasutatakse sümboleid

$$z'_x; \quad z_x; \quad f'_x(x, y); \quad f_x(x, y,); \quad \frac{\partial f}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Analoogselt funktsiooni $z = f(x, y)$ **osatuletis *y* järgi**:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Tähistused: $z'_y; \quad z_y; \quad f'_y(x, y); \quad f_y(x, y); \quad \frac{\partial f}{\partial y}; \quad \frac{\partial z}{\partial x}.$

Pannes tähele, et $\Delta_x z$ arvutatakse muutumatu *y* puhul ja $\Delta_y z$ muutumatu *x* puhul, võime osatuletise definitsioonid formuleerida järgmiselt: **funktsiooni $z = f(x, y)$ osatuletiseks *x* järgi nimetatakse tema tuletist *x* järgi, mis arvutatakse eeldusel, et *y* on konstantne**. Funktsiooni $z = f(x, y)$ osatuletiseks *y* järgi nimetatakse tema tuletist *y* järgi, mis arvutatakse eeldusel, et *x* on konstantne.

Sellest definitsioonist on selge, et osatuletiste leidmiseks sobivad ühe muutuja funktsiooni tuletise leidmise eeskirjad, tuleb vaid iga kord meelse pidada, millise muutuja järgi osatuletist otsitakse.

<u>Näide</u> Leida funktsiooni $z = x^2 + \sin(3x - y^2)$ osatuletised z_x ja z_y.

Fikseerime muutuja *y*, siis *z* on ühe muutuja funktsioon. Diferentseerides *x* järgi saame:

$$z_x = 2x + 3\cos(3x - y^2).$$

Analoogiliselt, fikseerides muutuja *x* ja diferentseerides *y* järgi saame:

$$z_y = -2y\cos(3x - y^2).$$

Kõrgemat järku osatuletised

Osatuletised z_x ja z_y on üldiselt muutujate *x* ja *y* funktsioonid. Seepärast võib leida ka nende uued osatuletised. Järelikult on kahe muutuja funktsioonil neli teist järku osatuletist, sest mõlemad funktsioonid z_x ja z_y võib diferentseerida nii *x* kui ka *y* järgi.

II järku osatuletis *x* järgi:

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

II järku osatuletis y järgi:

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

II järku segatuletised x ja y järgi:

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Näide Leiame funktsiooni $z = x^2 + \sin(3x - y^2)$ kõik teist järku osatuletised.
Eelnevalt leidsime, et

$$z_x = 2x + 3\cos(3x - y^2),$$

$$z_y = -2y\cos(3x - y^2).$$

Diferentseerides esimest avaldist kord x, kord y järgi, saame:

$$z_{xx} = 2 - 9\sin(3x - y^2),$$

$$z_{xy} = 6y\sin(3x - y^2).$$

Analoogiliselt, diferentseerides teist avaldist kord y, kord x järgi:

$$z_{yy} = -2[\cos(3x - y^2) + 2y^2\sin(3x - y^2)] = -2\cos(3x - y^2) - 4y^2\sin(3x - y^2),$$

$$z_{yx} = 6y\sin(3x - y^2).$$

Tekib küsimus: Kas mitme muutuja funktsiooni diferentseerimise tulemus sõltub diferentseerimise järjekorrast erinevate muutujate järgi? Vastuse sellele küsimusele annab teoreem segatuletistest.
Kui funktsioon $z = f(x,y)$ ja tema osatuletised f_x, f_y, f_{xy} ja f_{yx} on määratud ja pidevad, siis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Funktsiooni täisdiferentsiaal

Sõltumatute muutujate muute Δx ja Δy nimetatakse **sõltumatute muutujate *x* ja *y* diferentsiaalideks** ja tähistatakse vastavalt dx, dy.
Saab näidata, et funktsiooni $z = f(x,y)$ täismuut $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$ on esitatav kujul $\Delta z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$, kus γ_1 ja γ_2 on protsessis $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ lõpmata väikesed suurused: $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \gamma_1 = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \gamma_2 = 0$.

Ühe muutuja funktsiooni käsitlusest mäletame, et funktsiooni muut on argumentide väikeste muutude korral ligikaudu võrdne funktsiooni diferentsiaaliga: $\Delta z \approx dz$.
Täisdiferentsiaal avaldub seetõttu kujul

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy.$$

Teoreem Kui funktsioonil $z = f(x, y)$ on pidevad osatuletised, siis on ta punktis (x; y) diferentseeruv ja tema täisdiferentsiaal avaldub osatuletiste ja vastavate sõltumatute muutujate diferentsiaalide korrutiste summana.

Näide Leida funktsiooni $u(x, y, z) = e^{x^2+y^2}\sin^2 z$ täisdiferentsiaal.

Leiame osatuletised:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}\sin^2 z,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}\sin^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2e^{x^2+y^2}\sin z\cdot\cos z = e^{x^2+y^2}\sin 2z.$$

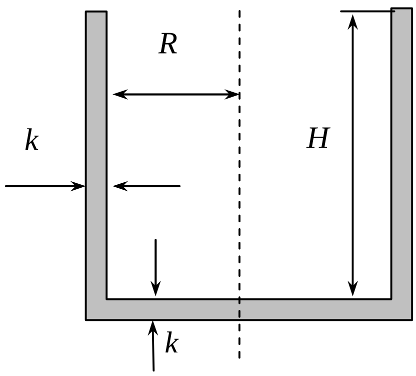
Paneme tähele, et osatuletised on pidevad x, y ja z kõigi väärtuste korral, seega

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = = e^{x^2+y^2}(2x\sin^2 z\,dx + 2y\sin^2 z\,dy + \sin 2z\,dz).$$

Täisdiferentsiaali kasutamine ligikaudsetes arvutustes

Näitame, kuidas kasutada valemit $\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$ ligikaudsel arvutamisel.

Ülesanne Leida silindrilise anuma valmistamiseks kuluva materjali hulk, kui anuma mõõtmed on järgmised:



seesmise silindri raadius on R,
seesmise silindri kõrgus on H,
anuma seinte ja põhja paksus on k.

Anname sellele ülesandele kaks lahendust, täpse ja ligikaudse.

a) Täpne lahendus.

Otsitav ruumala V võrdub välise ja seesmise silindri ruumalade vahega. Et välise silindri raadius on $R + k$ ja kõrgus $H + k$, siis

$$V = \pi(R+k)^2(H+k) - \pi R^2 H = \pi(2RHk + R^2k + Hk^2 + 2Rk^2 + k^3).$$

b) Ligikaudne lahendus.

Tähistame seesmise silindri ruumala tähega f, siis $f(R, H) = \pi R^2 H$ (s.t. f on kahe muutuja R ja H funktsioon). Kui suurendame suurusi R ja H suuruse k võrra, siis funktsioon saab muudu Δf, mis ongi otsitav ruumala. Kuna $\Delta f \approx df$, siis $V \approx df$

$$V \approx \frac{\partial f}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial f}{\partial H}\Delta H$$

Et $\frac{\partial f}{\partial R} = 2\pi RH$, $\frac{\partial f}{\partial H} = \pi R^2$, $\Delta R = \Delta H = k$, siis $V \approx \pi(2RHk + R^2k)$

Rakendame nüüd täpset ja ligikaudset valemit numbrilise näite puhul, olgu R = 4 cm, H = 20 cm, k = 0,1cm. Siis täpse valemi abil saame $V = 17{,}881\pi\ cm^3$ ja ligikaudse valemi abil $V \approx 17{,}6\pi\ cm^3$.

Tulemuste võrdlemiseks arvutame ka ligikaudse valemi suhtelise vea:

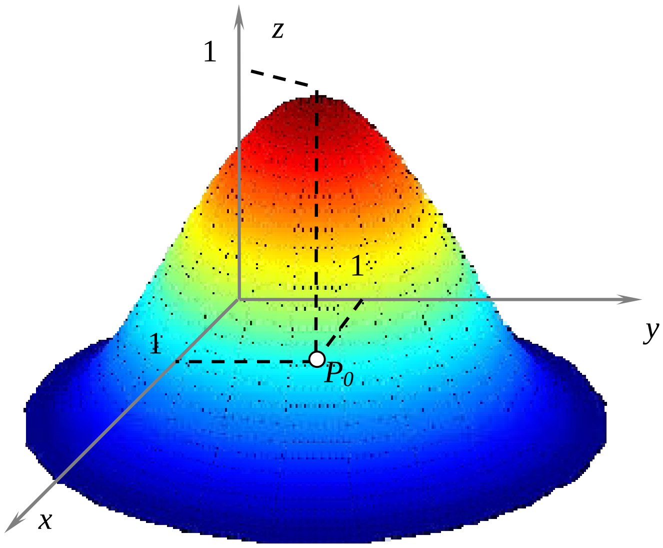
$$100 \cdot \frac{(17{,}881 - 17{,}6)\pi}{17{,}881\pi}\ \% \approx 1{,}57\% .$$

Järelikult ligikaudse valemi kasutamisel tehtav viga moodustab mõõdetavast suurusest vähem kui 2%.

Mitme muutuja funktsiooni ekstreemumid

Definitsioon Öeldakse, et kahe muutuja funktsioonil $z = f(x, y)$ on punktis $P_0(x_0, y_0)$ **lokaalne maksimum**, kui $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ kõigi punktile (x_0, y_0) küllalt lähedaste ja temast erinevate punktide (x, y) korral.

Näiteks funktsioonil $z = \cos\sqrt{(y-1)^2 + (x-1)^2}$ on lokaalne maksimum punktis $P_0(1; 1)$.



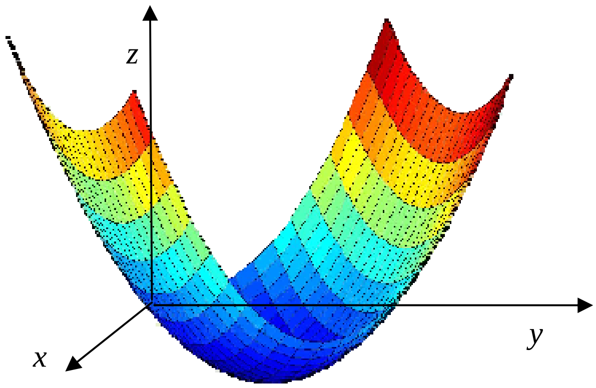
Definitsioon Öeldakse, et funktsioonil $z = f(x, y)$ on punktis $P_0(x_0, y_0)$ **lokaalne miinimum**, kui $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ kõigi punktile (x_0, y_0) küllalt lähedaste ja temast erinevate punktide (x, y) korral.

Näide Funktsioonil $z = f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$ on miinimum, kui x = 1 ja y = 2, s.t. punktis $P_0(1; 2)$, kuna $f(1; 2) = -1$ ning

$$(x-1)^2 > 0, \quad \text{kui} \quad x \neq 1,$$

$$(y-2)^2 > 0, \quad \text{kui} \quad y \neq 2$$

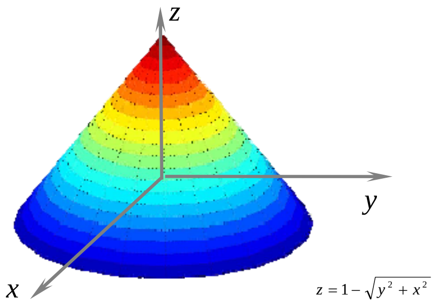
ja seetõttu $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 > -1 = f(1,2)$ kui $(x, y) \neq (1,2)$.

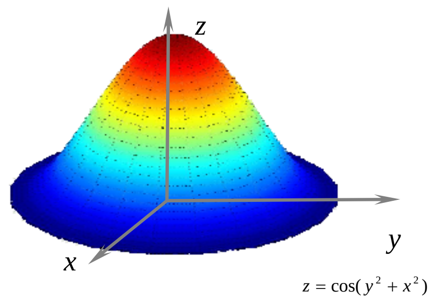


Öeldakse, et funktsioonil $z = f(x, y)$ on punktis $P_0(x_0,\ y_0)$ **lokaalne ekstreemum**, kui tal on selles punktis lokaalne miinimum või maksimum. Punkte, milles $\partial z / \partial x = 0$ (või puudub) ja $\partial z / \partial y = 0$ (või puudub), nimetatakse funktsiooni $z = f(x, y)$ **kriitilisteks punktideks**.

Teoreem Kui funktsioonil on mingis punktis lokaalne ekstreemum, siis on see punkt funktsiooni kriitiline punkt .

Selle teoreemi pöördteoreem üldjuhul ei kehti. Veendume selles näidete varal. Funktsioonidel $z = 1 - \sqrt{y^2 + x^2}$ ja $z = \cos(y^2 + x^2)$ on punktis (0;0) lokaalne maksimum.



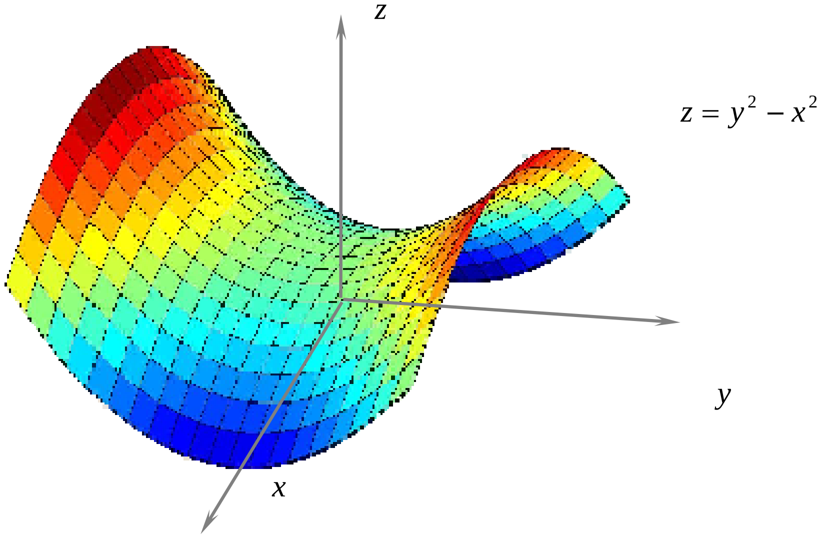


$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = -\left.\frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} \text{ - puudub} \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = -\left.\frac{y}{\sqrt{y^2 + x^2}}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} \text{ - puudub}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = -2x\sin(y^2 + x^2)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0 \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = -2y\sin(y^2 + x^2)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

Näeme, et mõlema funktsiooni puhul on punkt (0;0) kriitiline punkt.

Vaatleme nüüd funktsiooni $z = y^2 - x^2$. Leiame osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x} = -2x$ ja $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$. Näeme, et kui $x = y = 0$, siis ka $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, kuid funktsioonil selles punktis lokaalset ekstreemumit ei ole (vaata järgnev joonis).



Seda pinda nimetatakse hüperboolseks paraboloidiks ehk sadulpinnaks.
Funktsiooni ekstremaalsete väärtuste kindlaks tegemiseks kasutatakse järgmisi tingimusi.
Tähistame

$$A := \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \quad B := \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \quad C := \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

Olgu

1. mingis punktis $P_0(x_0, y_0)$ funktsiooni $f(x, y)$ osatuletised kuni kolmanda järguni (kaasa arvatud) pidevad
2. punkt $P_0(x_0, y_0)$ funktsiooni $f(x, y)$ statsionaarseks punktiks, s.t.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Siis punktis $P_0(x_0, y_0)$:
funktsioonil $f(x, y)$ on **lokaalne maksimum**, kui $A \cdot B - C^2 > 0$ ja $A < 0$,
funktsioonil $f(x, y)$ on **lokaalne miinimum**, kui $A \cdot B - C^2 > 0$ ja $A > 0$,
funktsioonil $f(x, y)$ **ei ole ei maksimumi ega miinimumi**, kui $A \cdot B - C^2 < 0$,
küsimus jääb lahtiseks kui $A \cdot B - C^2 = 0$.
Näide Leida funktsiooni $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$ lokaalsed ekstreemumid.
Leiame esimest järku osatuletised

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2$$

Statsionaarsete punktide leidmiseks lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 2y - 2 = 0 \end{cases}.$$

Saame $x = -\frac{4}{3}$; $y = \frac{1}{3}$. Seega on antud funktsiooni statsionaarseks punktiks $M\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$. (See punkt on ka funktsiooni ainsaks kriitiliseks punktiks, sest osatuletised on määratud x ja y iga väärtuse korral.)
Leiame teist järku tuletised, saame

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1.$$

Seega $AB - C^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3$. Kuna $AB - C^2 > 0$ ja $A > 0$, siis teoreemi kohaselt on punkt $M\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ antud funktsiooni miinimumpunkt.
Funktsiooni lokaalseks miinimumiks on

$$z_{\min} = \left[x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1\right]_M = -\frac{4}{3}.$$