Maatriksi astak

Miinorid

Definitsioon

Maatriksi **A** *k*-järku miinoriks nimetatakse *k*-järku determinanti, mis on leitud maatriksi **A** suvalisest *k* reast ja *k* veerust.

k-järku miinorit tähistused:

1) M_k

2) $$M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

Miinorid (II)

Näide

Maatriksi $\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ p & q & r & s \end{Vmatrix}$ kolmandat järku miinorid on

$$M_{1,2,3}^{1,2,3} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ p & q & r \end{vmatrix} \quad M_{1,2,3}^{1,3,4} = \begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ p & r & s \end{vmatrix} \quad M_{1,2,3}^{1,2,4} = \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ p & q & s \end{vmatrix}$$

$$M_{1,2,3}^{2,3,4} = \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ q & r & s \end{vmatrix}$$

Kolm teist järku miinorit (18-st):

$$M_{1,2}^{1,2} = \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} \quad M_{2,3}^{1,2} = \begin{vmatrix} e & f \\ p & q \end{vmatrix} \quad M_{2,3}^{3,4} = \begin{vmatrix} g & h \\ r & s \end{vmatrix}$$

Laplace'i arendusteoreem

Teoreem

Kehtib nn *Laplace'i valem*:

$$\det(A) = \sum M_k A_{n-k},$$

kusjuures paremal seisev summa tuleb leida üle kõigi k-ndat järku miinorite, mida saab moodustada fikseeritud ridadest $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ja A_{n-k} on maatriksist **A** miinori M_k moodustamisel kasutatud ridade $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ning veergude $j_1, j_2, \ldots, j_k$ kustutamisel saadud maatriksi determinandi korrutis arvuga $(-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+j_2+\ldots+j_k}$.

Laplace'i arendusteoreem on üldistuseks determinandi arendamisele rea või veeru järgi.

Laplace'i arendusteoreem. Näide

Leiame Laplace'i arendusteoreemi abil determinandi $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

On ilmne, et esimesest kolmest reast saab moodustada vaid ühe nullist erineva kolmandat järku miinori

$$M_{1,2,3}^{3,4,5} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 3 - (-1) \cdot 2) = -8.$$

Laplace'i arendusteoreemi põhjal on otsitav determinant:

$$D = (-8) \cdot (-1)^{1+2+3+3+4+5} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-8) \cdot (-4) = 32$$

Maatriksi astak

Definitsioon

Maatriksi **A** *astakuks* nimetatakse suurimat naturaalarvu *k*, mille korral maatriksil leidub nullist erinev *k*-järku miinor.

Maatriksi **A** astakut tähistatakse *rank*(**A**) või ka *r*(**A**).

Näide

Leiame maatriksi $\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$ astaku.

Kuna maatriksi esimene ja teine rida on lineaarselt sõltuvad (teine rida on esimese kahekordne), siis iga kolmandat järku miinor võrdub nulliga. Teist järku miinoritest on nullist erinev näiteks

$$M_{2,3}^{1,2} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Seega on maatriksi A astak *rank*(**A**) = 2.

Teoreeme maatriksi astakust (I)

Teoreem 1

Kui maatriks **B** on saadud maatriksist **A** ridade ja veergude elementaarteisenduste teel, siis nende maatriksite astakud on võrdsed.

Näide

Leiame maatriksi $\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$ astaku.

Kasutades maatriksi ridade elementaarteisendusi, teisendame maatriksit:

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{matrix} \text{-2II} \\ \longrightarrow \\ \text{-2I} \end{matrix} \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{Vmatrix} \begin{matrix} =\text{II} \\ \xrightarrow{=\text{I}} \\ +\text{I} \end{matrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Kuna saadud maatriksi viimane rida koosneb nullidest, on ainus kolmandat järku miinor 0. Teist järku miinorite seas esineb aga vähemalt üks nullist erinev: $M^{1,2}_{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$ Maatriksi astak on seega kaks.

Teoreeme maatriksi astakust (II)

Teoreem 2

Maatriksi **A** astak on *k* parajasti siis kui maatriksil **A** leidub *k* lineaarselt sõltumatut rea(veeru)vektorit, mille lineaarse kombinatsioonina avalduvad kõik maatriksi **A** rea(veeru)vektorid.

Selle teoreemi tõttu võib maatriksi astaku defineerida ka kui tema lineaarselt sõltumatute rea(veeru)vektorite maksimaalarvu.

Teiseks järelduseks teoreemist 2 on see, et determinant võrdub nulliga parajasti siis, kui tema rea(veeru)vektorite seas esineb lineaarselt sõltuvaid.

Kolmas järeldus kõlab, et aritmeetilised vektorid $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ on lineaarselt sõltumatud parajasti siis, kui nendest moodustatud maatriksi astak on *m*.

Lineaarse võrrandisüsteemi lahenduvus

Teoreem 3

Lineaarne võrrandisüsteem on lahenduv parajasti siis, kui võrrandisüsteemi maatriksi astak on võrdne laiendatud maatriksi astakuga.

Näide

Võrrandisüsteem $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=0 \end{cases}$ ei ole lahenduv, kuna

$$rank(\mathbf{A}) = rank\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1, \qquad rank(\mathbf{L}) = rank\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2,$$

$$\boxed{rank(\mathbf{A}) \neq rank(\mathbf{L}).}$$

Lineaarse võrrandisüsteemi lahenduvus

Näide

Võrrandisüsteem $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$ on lahenduv, kuna

$$rank(\mathbf{A}) = rank\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = 1, \qquad rank(\mathbf{L}) = rank\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = 1,$$

$$\boxed{rank(\mathbf{A}) = rank(\mathbf{L}).}$$

Teoreem 4

Lineaarse võrrandisüsteem on *üheselt lahenduv* parajasti siis, kui
1) võrrandisüsteemi maatriksi astak on võrdne laiendatud maatriksi astakuga ja
2) see astak on võrdne tundmatute arvuga võrrandisüsteemis.