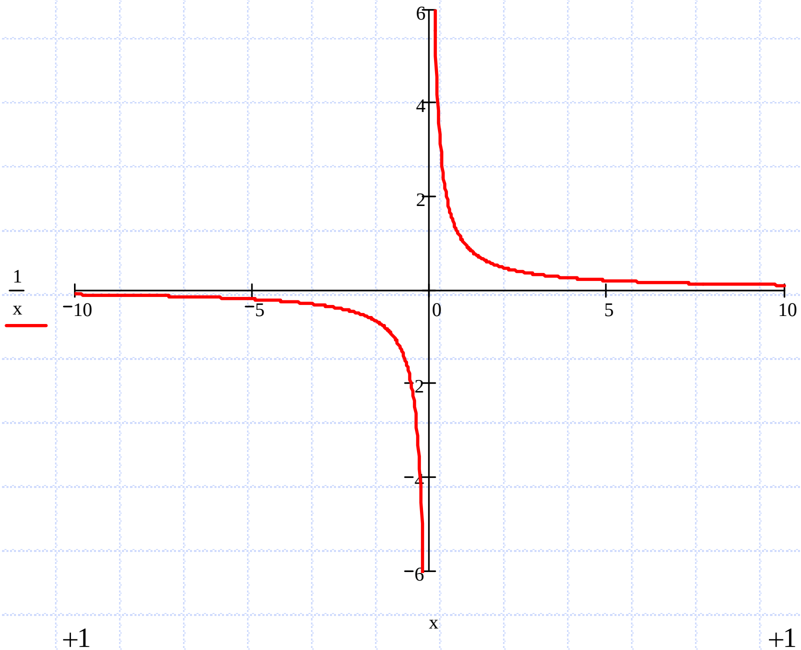
Funktsiooni ühepoolsed piirväärtused

Funktsiooni ühepoolsed piirväärtused



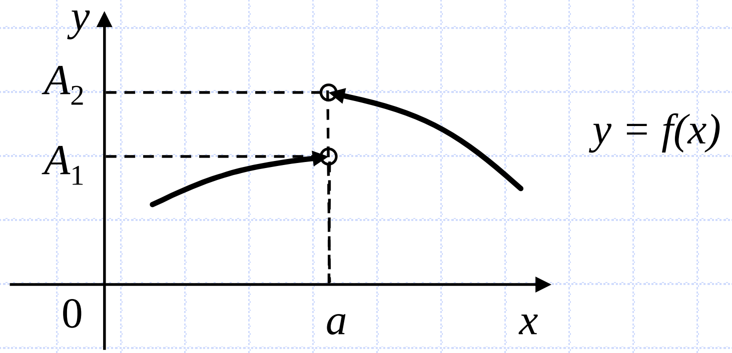
$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}^{\frac{+1}{-0}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}^{\frac{+1}{+0}}=+\infty$$

Funktsiooni ühepoolsed piirväärtused

Kui funktsioon $f(x)$ läheneb piirväärtusele A_1 argumendi x lähenemisel mingile arvule a nii, et x omandab ainult arvust a väiksemaid väärtusi, siis kirjutatakse $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = A_1$ ja arvu A_1 nimetatakse funktsiooni $f(x)$ ***vasakpoolseks piirväärtuseks*** punktis a.

Kui x omandab ainult arvust a suuremaid väärtusi, siis kirjutatakse $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = A_2$ ja arvu A_2 nimetatakse funktsiooni $f(x)$ ***parempoolseks piirväärtuseks*** punktis a.



$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \text{siis ja ainult siis, kui} \quad \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = A$$

Funktsiooni pidevus

Pideva funktsiooni definitsioon

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse **pidevaks kohal a**, kui

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

<u>Definitsioon nõuab kolme tingimuse täidetust:</u>

1. funktsioon peab olema määratud kohal a
   s.t. $a \in X$,
   s.t. leidub $f(a)$,
2. funktsioonil peab olema lõplik piirväärtus kohal a
   s.t. leidub $\lim\limits_{x \to a} f(x)$,
3. peab kehtima võrdus $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Funktsiooni nim. **pidevaks piirkonnas** X, kui ta on pidev piirkonna X igas punktis.

Pidevate funktsioonide omadused

Teoreem. Olgu $f(x)$ ja $g(x)$ pidevad funktsioonid kohal a, siis ka funktsioonid

$$f(x)+g(x), \quad f(x)-g(x), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

on pidevad kohal a, kusjuures jagatise korral eeldame, et $g(a)\neq 0$.

Näide. Funktsioon $y = 2x^2 - e^x$ on pidev kõikjal.

Teoreem. Liitfunktsioon $f\,[g(x)]$ on pidev kohal a, kui $g(x)$ on pidev kohal a ja $f\,[g(x)]$ on pidev kohal $g(a)$.

Näide $y = \cos^3 \dfrac{x}{2}$ on pidev kõikjal

Teoreem. Iga elementaarfunktsioon on pidev igas punktis, milles ta on määratud.

Punktis pidev funktsioon

Öeldakse, et funktsioon on **paremalt pidev** kohal a, kui

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

ja **vasakult pidev** kohal a, kui

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$$

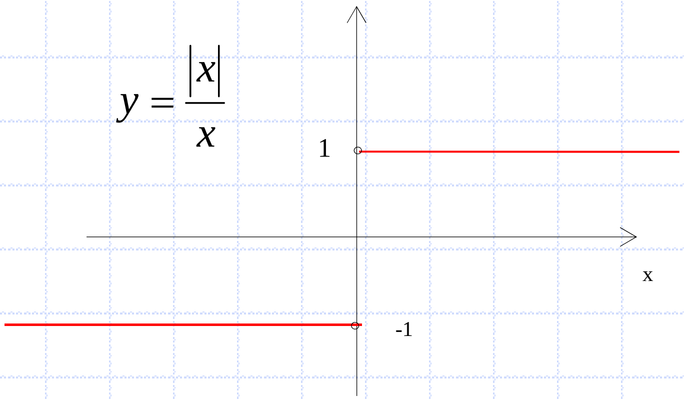
Teoreem. Funktsioon on pidev punktis a siis ja ainult siis kui ta on punktis a vasakult pidev ja paremalt pidev.

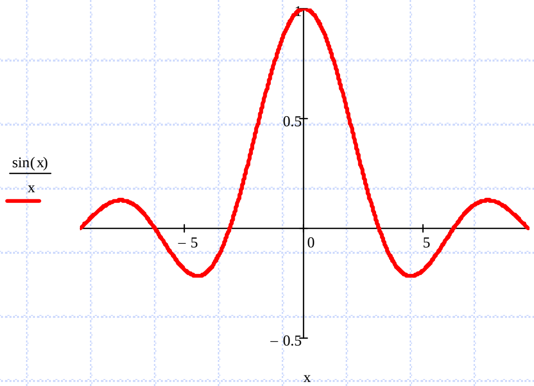
$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x)$$

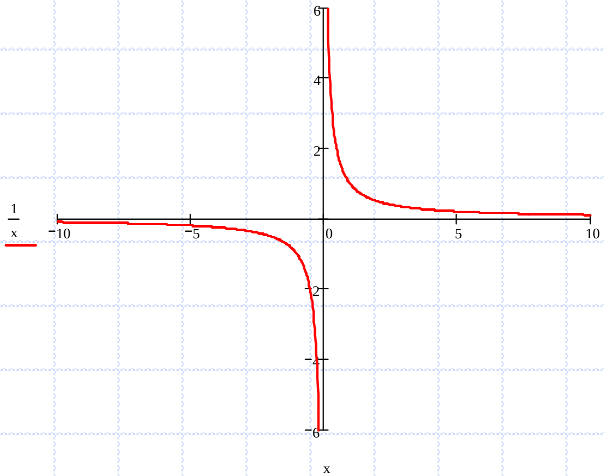
Katkev funktsioon

Funktsiooni katkevuspunktiks nimetatakse punkti, milles funktsioon ei ole pidev.

$$y = \frac{|x|}{x}$$







Katkev funktsioon

Funktsiooni katkevuspunktiks nimetatakse punkti, milles funktsioon ei ole pidev.

Niisugust katkevuspunkti, kus funktsioonil f on olemas ühepoolsed piirväärtused

$$f(a+) = \lim_{x \to a+} f(x)$$

$$f(a-) = \lim_{x \to a-} f(x)$$

nimetatakse **1. liiki katkevuspunktiks**, iga ülejäänud katkevuspunkti aga **2. liiki katkevuspunktiks**.

Esimest liiki katkevuspunktide jaotus

1) hüppekoht

Arvu a nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ **hüppekohaks**, kui

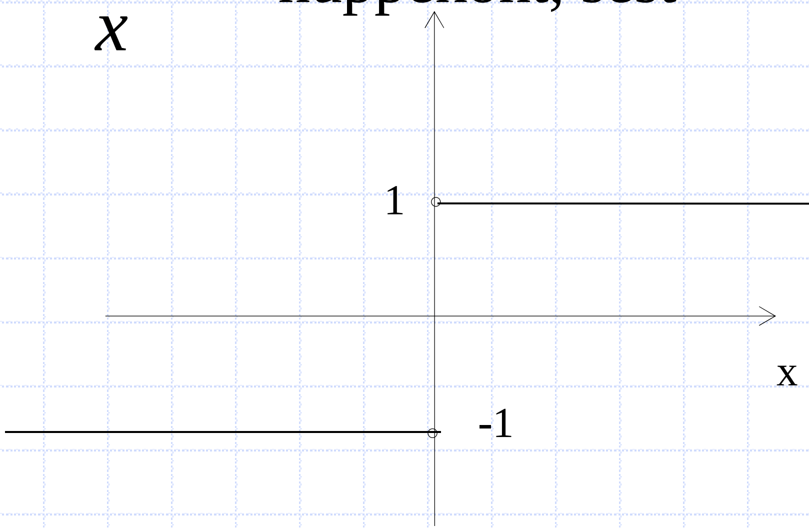
$$\lim_{x \to a-} f(x) \neq \lim_{x \to a+} f(x)$$

Näide.

Arv 0 on funktsiooni $y = \dfrac{|x|}{x}$ hüppekoht, sest

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = 1$$



Esimest liiki katkevuspunktide jaotus

2) kõrvaldatav katkevuskoht

Arvu *a* nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ **kõrvaldatavaks katkevuskohaks**, kui

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{ja} \quad a \notin X$$

Katkevuse kõrvaldamiseks defineeritakse täiendavalt funktsiooni väärtus kohal *a* tingimusega

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x).$$

Siis on $f(x) = \begin{cases} f(x), & kui\ x \neq a \\ \lim\limits_{x \to a} f(x), & kui\ x = a \end{cases}$ pidev funktsioon.

Esimest liiki katkevuspunktide jaotus

3) koht *a*, mille korral leiduvad

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \text{ja} \quad f(a), \qquad \text{kuid} \qquad \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a).$$

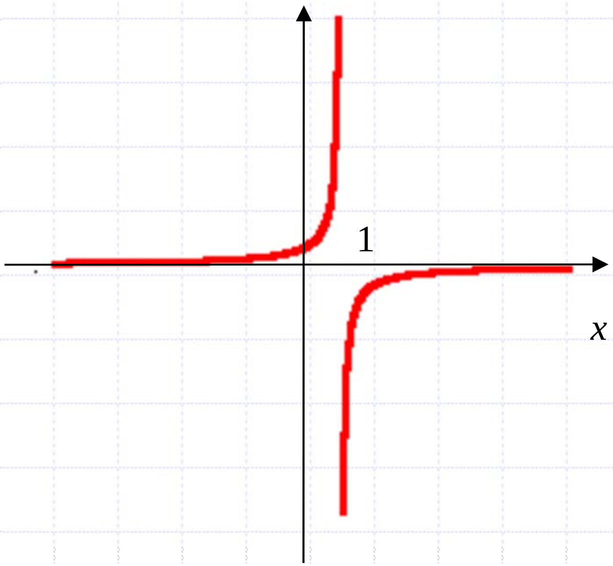
Teist liiki katkevuspunktid

Arvu a nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ **teist liiki katkevus-punktiks** kui

$$\lim_{x\to a-} f(x) \quad \text{on lõpmatu või ei eksisteeri}$$

$$\lim_{x\to a+} f(x) \quad \text{on lõpmatu või ei eksisteeri}$$

(s.t. kui $\lim_{x\to a} f(x)$ on lõpmatu või ei eksisteeri).

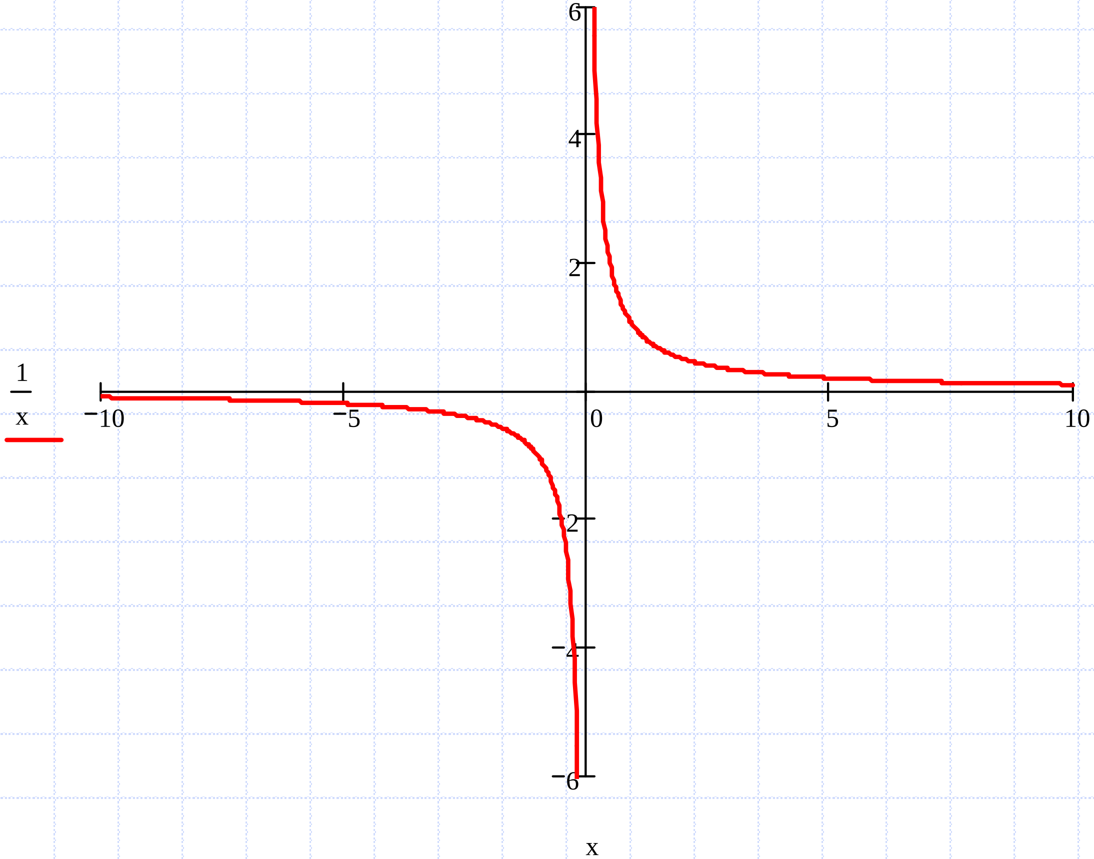


$$\lim_{x\to 1-} \frac{1}{1-x} = \infty$$

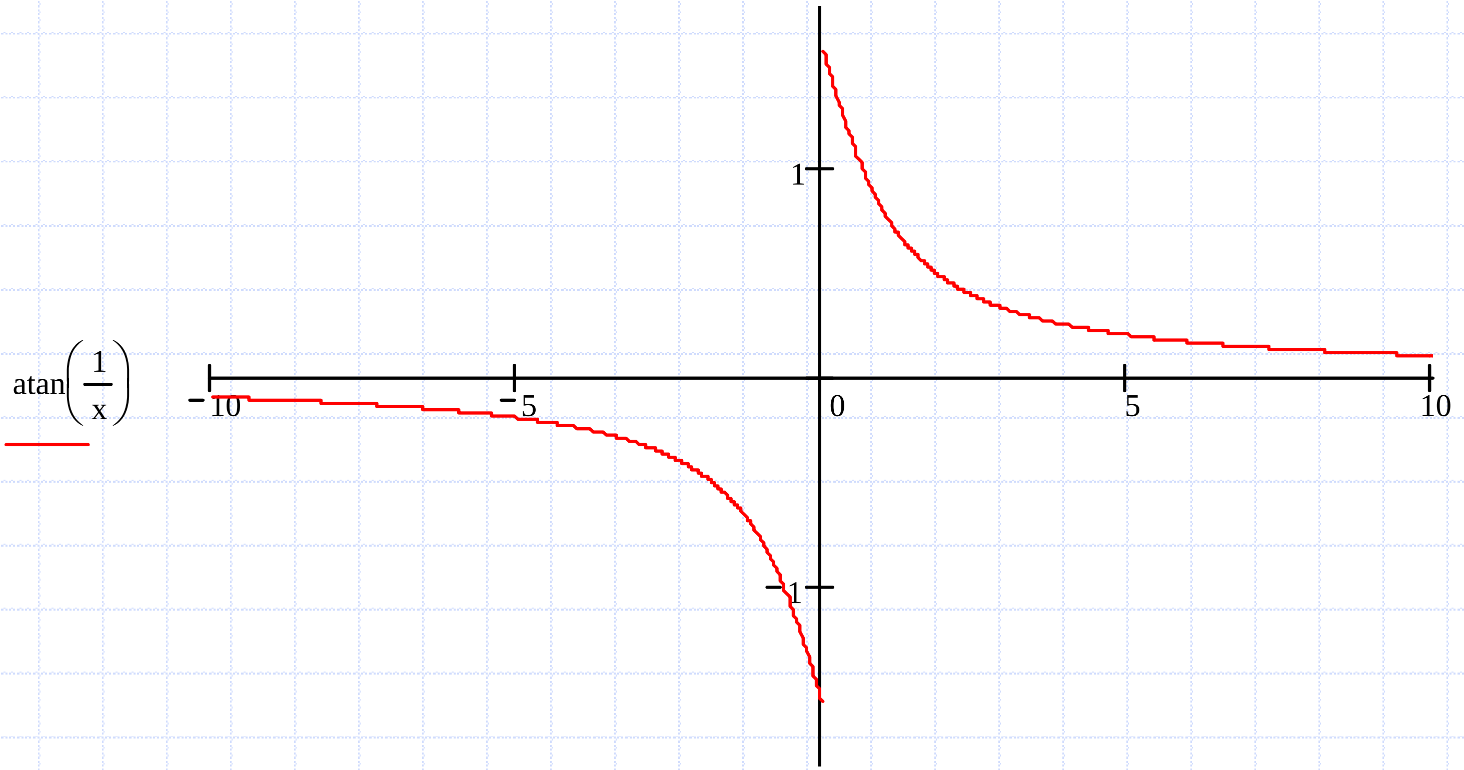
$$\lim_{x\to 1+} \frac{1}{1-x} = -\infty$$

Seega arv 1 on funktsiooni II liiki katkevuskoht.

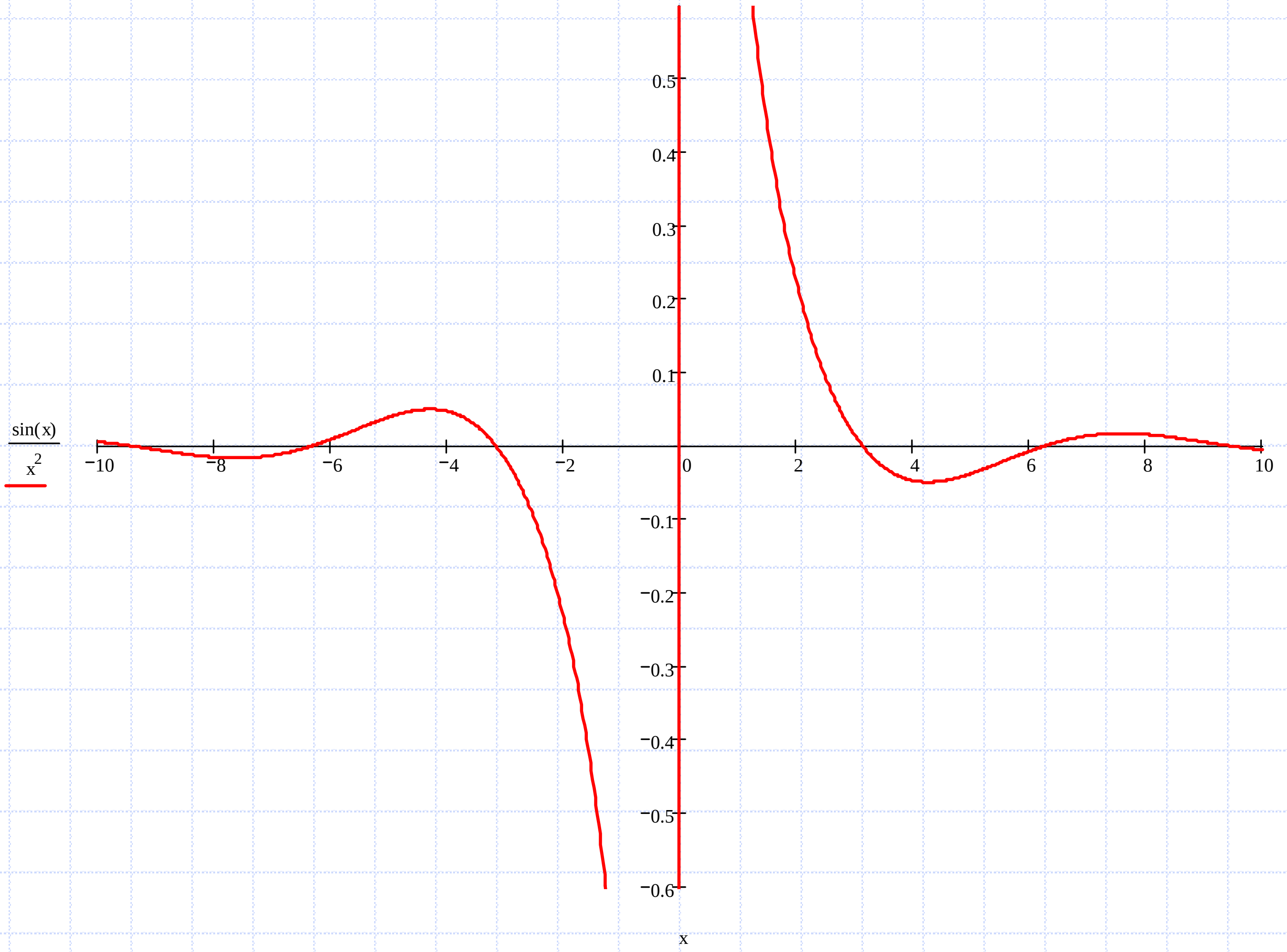
Näide



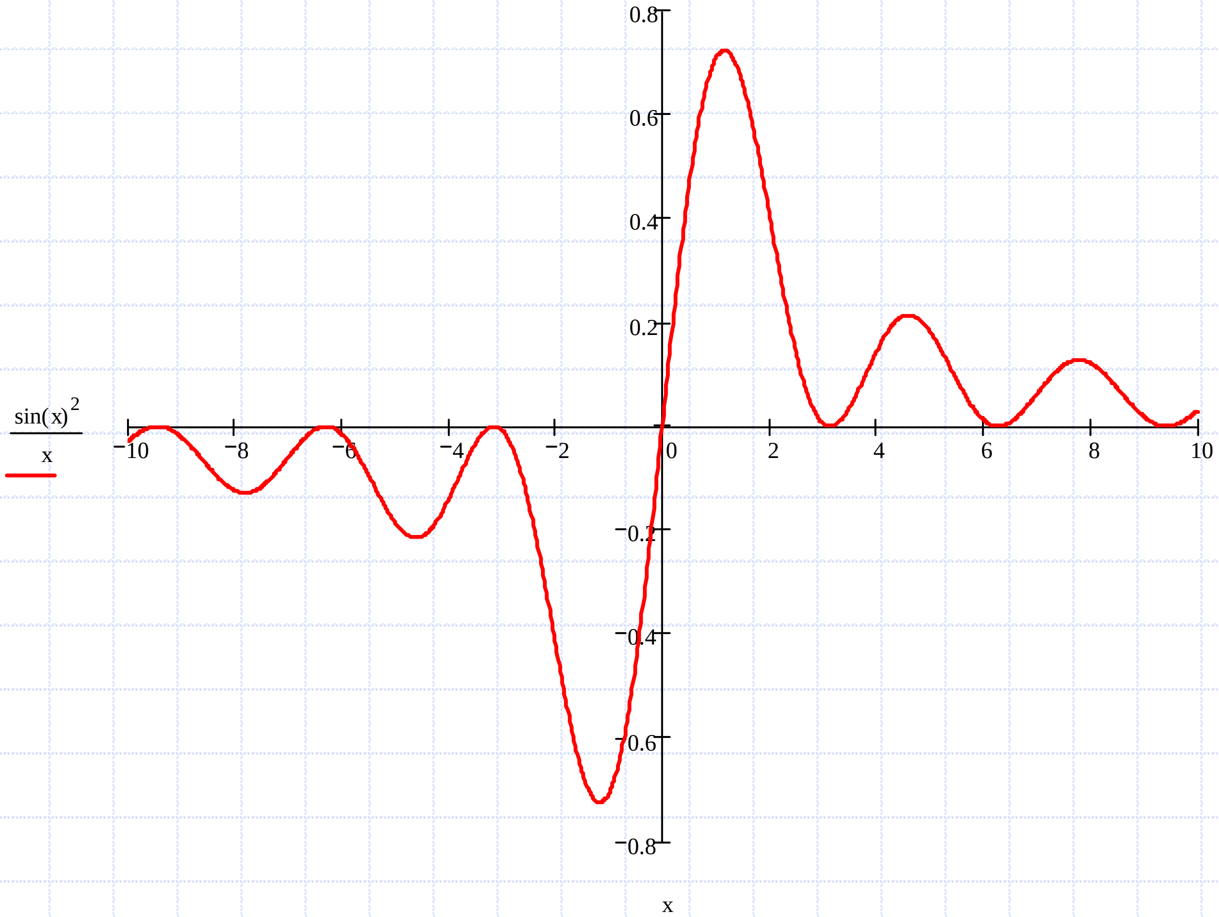
Tööleht 3 ülesanne 20



Tööleht 3 ülesanne 21

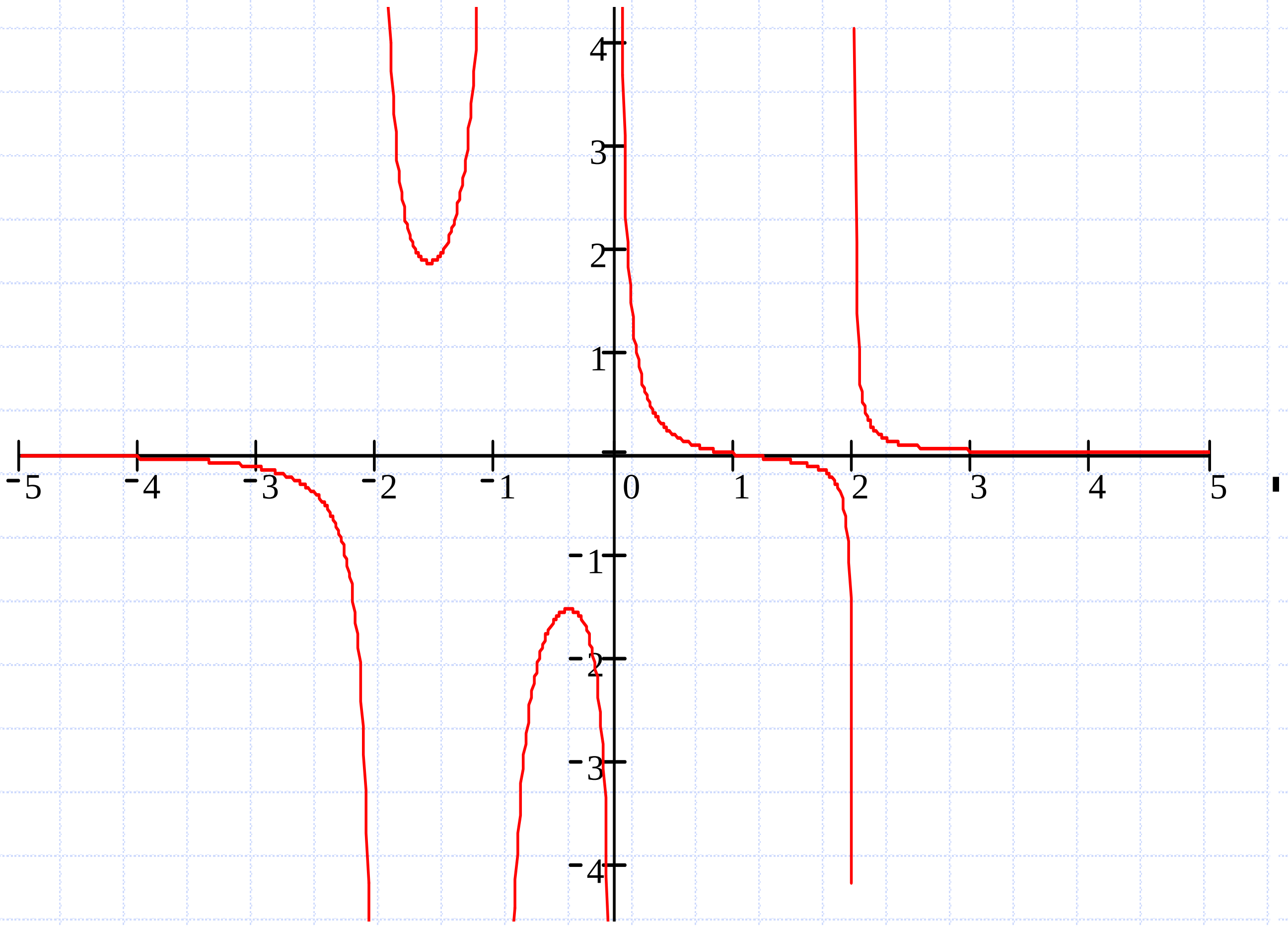


Tööleht 3 ülesanne 22

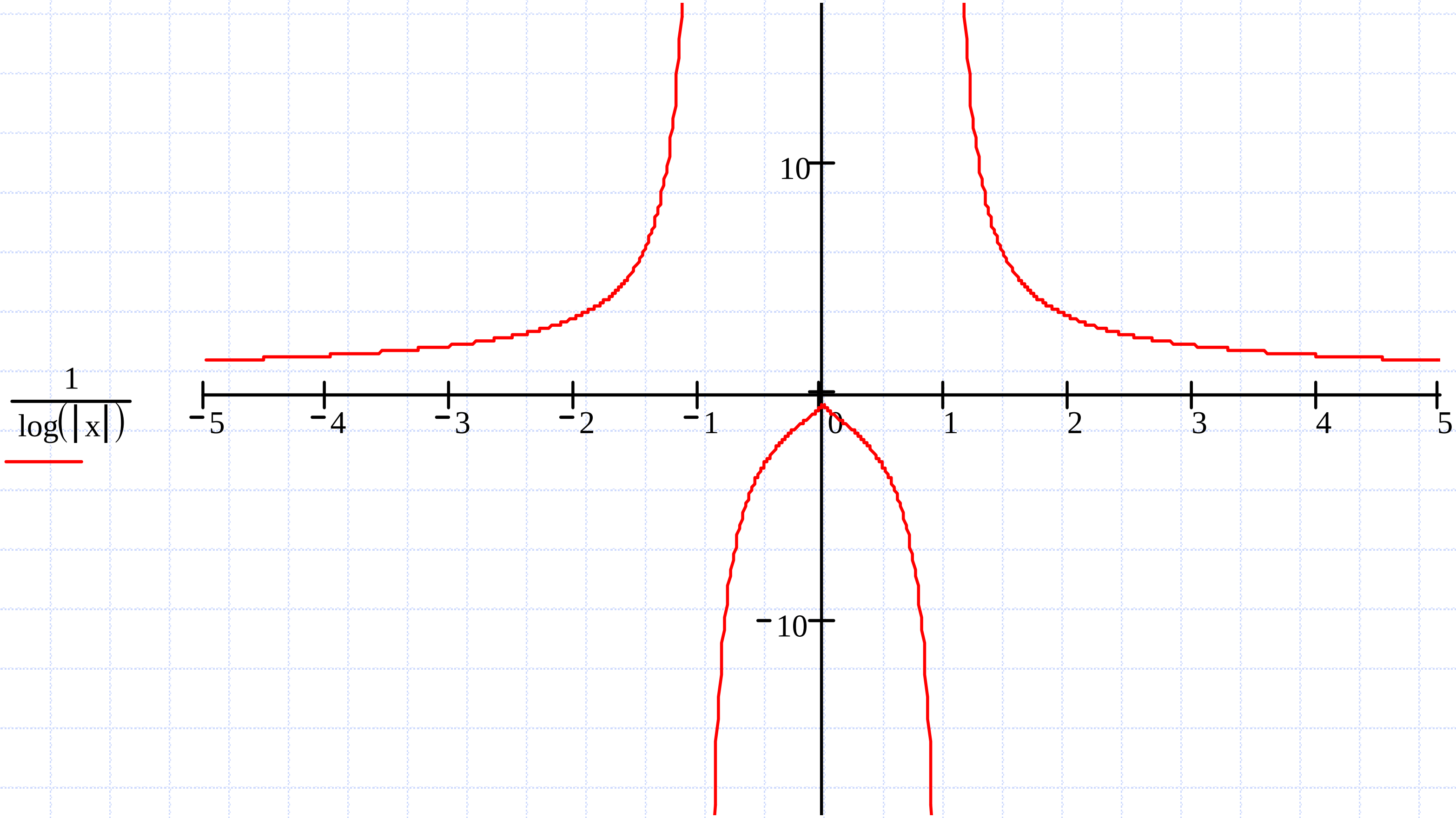


Tööleht 3 ülesanne 23

$$\frac{x-1}{(x^2-4)(x+1)\cdot x}$$



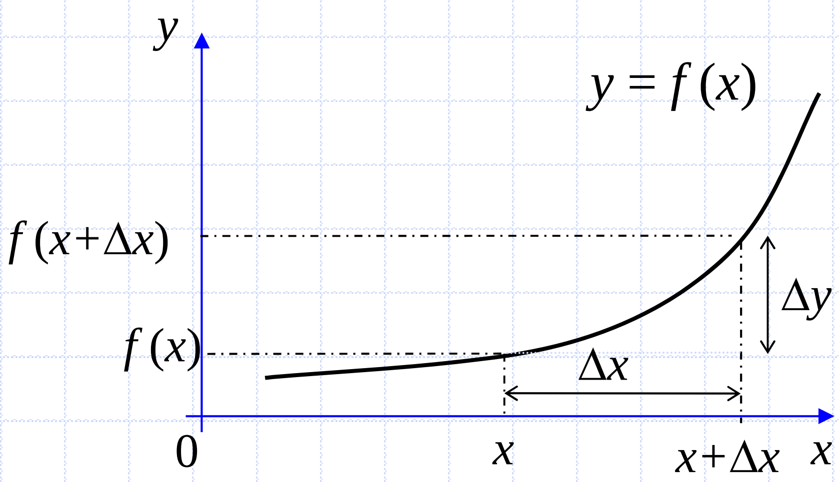
Tööleht 3 ülesanne 25



Funktsiooni tuletis

Tuletise mõiste

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$



Funktsiooni $y = f(x)$ **tuletiseks** $f\,'(x)$ kohal x nimetatakse piirväärtust

$$f\,'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

kui see piirväärtus eksisteerib.

Tuletise tähised: $f'(x),\quad y',\quad \dfrac{dy}{dx},\quad \dfrac{df(x)}{dx}$

Tuletise leidmise skeem

Vastavalt tuletise definitsioonile, koosneb funktsiooni tuletise leidmine järgmistest etappidest:

1. funktsiooni $f(x)$ muudu Δy arvutamine vastavalt valemile

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

2. jagatise $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ moodustamine

3. piirväärtuse $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ leidmine

Diferentseerimise põhivalemid

$y = \mathrm{const}$	$y' = 0$	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = x^{\alpha}$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$	$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \arctan x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = -\dfrac{1}{x^2}$	$y = \operatorname{arccot} x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \tan x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$
$y = \cot x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$y = \ln\lvert x\rvert$	$y' = \dfrac{1}{x}$

Tehetega seotud diferentseerimisreeglid

Teoreem Kui funktsioonid f ja g on diferentseeruvad punktis x_0, siis ka

$$f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g}\ \ (\text{kui } g(x_0)\neq 0)$$

on diferentseeruvad selles punktis ja

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$(cf)'(x_0) = c\cdot f'(x_0),\ c = const$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Liitfunktsiooni diferentseerimine

Teoreem

Kui funktsioonidel $\varphi(x)$ ja $f(u)$ on lõplikud tuletised vastavalt kohtadel x ja $u=\varphi(x)$, siis on liitfunktsioonil $F(x)=f[\varphi(x)]$ kohal x lõplik tuletis $F'(x)$, mis avaldub kujul

$$F'(x)=f'(u)\varphi'(x).$$

Märkus

Kui funktsioon $y = F(x)$ on selline, et teda võib esitada kujul

$$y = f(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(x),$$

siis

$$F'(x) = f'(u)\ \varphi'(v)\ \psi'(x).$$

Näide

Ülesanne Leida funktsiooni $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$ tuletis.

Lahendus. Teisendame $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}=x^{\frac{1}{3}}(x^2+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{2}{3}}$

Logaritmime $\ln|y|=\ln\left|x^{\frac{1}{3}}(x^2+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{2}{3}}\right|$

Lihtsustame $\ln|y|=\ln\left|x^{\frac{1}{3}}\right|+\ln(x^2+1)^{\frac{1}{3}}+\ln\left|(x-1)^{-\frac{2}{3}}\right|$

$$\ln|y|=\frac{1}{3}\ln|x|+\frac{1}{3}\ln(x^2+1)-\frac{2}{3}\ln|x-1|$$

Diferentseerime $\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)'-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x-1}\cdot(x-1)'$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x-2\cdot\frac{1}{x-1}\cdot 1\right]$$

Avaldame y'

$$y'=y\cdot\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}\right]\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$$

Logaritmiline diferentseerimine

Logaritmilise diferentseerimise võtte rakendamisel tuleb:

Logaritmida funktsiooni avaldise $y = f(x)$ absoluutväärtus:

$$\ln|y| = \ln|f(x)|$$

Võtta tuletis mõlemalt poolt:

$$\frac{1}{y} y' = (\ln|f(x)|)'$$

Avaldada y':

$$y' = f(x)(\ln|f(x)|)'$$

Astme-eksponentfunktsioonide tuletis

Funktsiooni kujul

$$y = u(x)^{v(x)}, \quad u(x) > 0$$

nimetatakse astme-eksponentfunktsiooniks.

Astme-eksponentfunktsioonid on näiteks

$$y = x^x$$

$$y = (\sin x)^x$$

Astme-eksponentfunktsiooni korral osutub logaritmilise diferentseerimise võte vältimatuks, sest diferentseerimise põhivalemite hulgas ei ole valemit juhuks, kus astme alus ja astendaja korraga muutuvad.

Näide

Ülesanne Leida funktsiooni $y = (\sin x)^x$ tuletis.

Lahendus:

Funktsioon on määratud, kui $\sin x > 0$, seega $y > 0$.

Logaritmime: $\ln y = \ln(\sin x)^x$

Lihtsustame: $\ln y = x \ln(\sin x)$

Diferentseerime: $\frac{1}{y} y' = \ln(\sin x) + x \frac{1}{\sin x} \cos x$

Avaldame y': $y' = y[\ln(\sin x) + x \cot x]$

$$= (\sin x)^x [\ln(\sin x) + x \cot x]$$

Lisa

Eeldusel, et $x > 0$ ja $y > 0$

$$\ln xy = \ln x + \ln y$$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\ln x^n = n \ln x$$

Tagasi