

# Matemaatiline analüüs I

*Jaan Janno*



# Sisukord

<b>1</b>	<b>Funktsioonid ja nendega seotud mõisted</b>	<b>1</b>
1.1	Reaalarvud ja Arvtelg. Absoluutväärtuse mõiste. Reaalarvudest koosnevad hulgad. . . . .	1
1.2	Jäävad ja muutuvad suurused. Funktsiooni mõiste ja esitusviisid.	3
1.3	Funktsioonide liigid. Konstantne funktsioon. Astme-, eksponent- ja trigonomeetrilised funktsioonid. . . . .	6
1.4	Pöördfunktsiooni mõiste. Logaritmifunktsioon. Arkusfunktsioonid.	8
1.5	Tehted funktsioonidega. Elementaarfunktsioon. Polünoom ja ratsionaalfunktsioon. . . . .	18
1.6	Ilmutatud ja ilmutamata funktsioonid. Parameetrilisel kujul antud jooned ja funktsioonid. . . . .	19
1.7	Hüperboolsed trigonomeetrilised funktsioonid. . . . .	22
<b>2</b>	<b>Piirväärtus ja pidevus</b>	<b>27</b>
2.1	Muutuva suuruse piirprotsessid. . . . .	27
2.2	Jada piirväärtus. . . . .	29
2.3	Lõpmatult kahanevad, lõpmatult kasvavad ja tõkestatud suurused.	30
2.4	Funktsiooni piirväärtus. . . . .	32
2.5	Funktsiooni ühepoolsed piirväärtused. . . . .	37
2.6	Funktsiooni piirväärtuste omadused. . . . .	41
2.7	Lõpmatult kahanevad, kasvavad ja tõkestatud suurused kui funktsioonid. . . . .	41
2.8	Lõpmatult kahanevate ja lõpmatult kasvavate suuruste võrdlemine.	43
2.9	Funktsiooni pidevus. Katkevuspunktide liigitus. . . . .	45
2.10	Ühepoolne pidevus. Pidevus hulkadel. Elementaarfunktsioonide pidevus. . . . .	48
2.11	Lõigul pidevate funktsioonide omadusi. . . . .	52
<b>3</b>	<b>Tuletis ja diferentsiaal</b>	<b>57</b>
3.1	Tuletise, diferentseeruva funktsiooni ja diferentsiaali mõisted. . .	57
3.2	Näiteid tuletiste kohta rakendustes. . . . .	60
3.3	Tuletiste arvutamise põhireeglid . . . . .	61
3.4	Ilmutamata funktsiooni, pöördfunktsiooni ja parameetrilise funktsiooni diferentseerimine. . . . .	62

3.5	Joone puutuja ja normaalsirge. Diferentseeruvuse geomeetriline sisu. . . . .	65
3.6	Diferentsiaal kui funktsiooni muudu peaosa. Diferentsiaali geomeetriline sisu ja omadused. Funktsiooni lineaarne lähend. . . .	69
3.7	Näiteid diferentsiaali ja lineaarse lähenduse kasutamise kohta praktilistes arvutustes. . . . .	72
3.8	Funktsiooni lokaalsed ekstreemumid. Fermat' lemma . . . . .	74
3.9	Keskvaartusteoreemid. . . . .	75
3.10	l'Hospitali reegel. . . . .	78
3.11	Kõrgemat järku tuletised ja diferentsiaalid. . . . .	80
3.12	Taylori ja McLaurini polünoomid. . . . .	81
<b>4</b>	<b>Tuletise rakendused funktsiooni uurimisel</b>	<b>87</b>
4.1	Funktsiooni kasvamine ja kahanemine. . . . .	87
4.2	Lokaalsete ekstreemumite tarvilikud ja piisavad tingimused. . . .	88
4.3	Funktsiooni suurima ja vähima väärtuse leidmine lõigul. . . . .	92
4.4	Joone kumerus, nõgusus ja käänupunktid. . . . .	92
4.5	Joone asümptootid. . . . .	96
<b>5</b>	<b>Integraalid</b>	<b>103</b>
5.1	Algfunktsioon ja määramata integraal. . . . .	103
5.2	Integraalide tabel. Määramata integraali omadused. . . . .	104
5.3	Asendusvõte ja ositi integreerimine määramata integraali avaldamisel. . . . .	107
5.4	Ratsionaalfunktsioonide integreerimine. Ratsionaalfunktsiooni integraalile taanduvad integraalid. . . . .	111
5.5	Integraalsumma ja määratud integraal. . . . .	118
5.6	Määratud integraali geomeetriline sisu. . . . .	120
5.7	Määratud integraali omadused. Integraali keskvaartusteoreem. .	122
5.8	Muutuva ülemise rajaga integraal. Newton-Leibnitzi valem. . . .	124
5.9	Asendusvõte ja ositi integreerimine määratud integraali korral. .	127
5.10	Päratud integraalid. . . . .	129
5.11	Määratud integraali rakendusi. . . . .	131

# Peatükk 1

## Funktsioonid ja nendega seotud mõisted

### 1.1 Reaalarvud ja Arvtelg. Absoluutväärtuse mõiste. Reaalarvudest koosnevad hulgad.

Enne arvu mõiste käsitlemist toome sisse mõned hulkadega seotud tähised.

*Hulk* (tavalises mõttes) koosneb elementidest (e hulga liikmetest), kusjuures elemendid ei kordu ja nende järjestus ei ole kindlaks määratud. Hulga tähistamiseks eraldame vaadeldavad elemendid komadega ja piiritleme hulga loogeliste sulgudega. Näiteks  $\{0, 7, 5\}$  on elementidest 0, 7 ja 5 koosnev hulk. Hulk võib olla antud ka keerulisemal kujul. Näiteks  $\{x^2 \mid x = 1, 2, 3\}$  on hulk, mille elemendid on arvutatavad valemiga  $x^2$ , kusjuures  $x$  võib omandada väärtusi 1, 2 ja 3. Viimase hulga võib muidugi panna kirja ka ekvivalentsel kujul  $\{1, 4, 9\}$ .

Peale tavaliste hulkade kasutame edaspidi ka järjestatud hulki. *Järjestatud hulk* koosneb samuti elementidest, kuid selles hulgas on iga kahe elemendi kohta on võimalik öelda, kumb neist on eelnev, kumb järgnev. Tavalise hulga ja järjestatud hulga eristamiseks lepime kokku, et viimase tähistamisel kasutame loogeliste sulgude asemel ümarsulgi. Peale selle lubame järjestatud hulga elementidel ka korduda. Näiteks  $(-1, 1, -1, 1, \dots)$  on järjestatud hulk, milles  $-1$ -le järgneb 1, sellele omakorda  $-1$  jne.

Naturaalarvude hulk on  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  ja täisarvude hulk on  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

Täisarvude baasil defineerime ratsionaalarvud. Ratsionaalarvuks nimetatakse kahe täisarvu  $p$  ja  $q$  jagatist  $p/q$ , kusjuures  $q \neq 0$ . Ratsionaalarvude hulga tähis on  $\mathbb{Q}$ . Seega, lühidalt kirjutades  $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ . Iga ratsionaalarvu saab esitada kas lõpliku või lõpmatu perioodilise kümnendmurruna.

Lõpmatuid mitteperioodilisi kümnendmurde nimetatakse irratsionaalarvudeks. Irratsionaalarvude hulga tähis on  $\mathbb{I}$ . Üks ja sama arv ei saa olla samaaegselt nii

ratsionaal- kui ka irratsionaalarav. Seetõttu ei oma ratsionaalarvude ja irratsionaalarvude hulga ühisosa, st  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ .

Ratsionaalarvud ja irratsionaalarvud kokku moodustavad reaalarvude hulga. Reaalarvude hulga tähis on  $\mathbb{R}$ . Seega  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ .

**Arvtelje mõiste.** Arvteljeks nimetatakse sirget, millel on valitud nullpunkt, pikkusühik ja positiivne suund. Kasutades neid kolme parameetrit, saab arvtelje punktidele seada vastavusse reaalarvud. Tõepoolest, nullpunktist ühe ühiku võrra positiivses suunas paikneb punkt, mis vastab arvule 1, poole ühiku võrra negatiivses suunas paikneb punkt, mis vastab arvule  $-1/2$  jne. Võib väita, et igale arvtelje punktile vastab üks ja ainult üks reaalarv ja vastupidi: igale reaalarvule vastab üks ja ainult üks arvtelje punkt. Õeldu põhjal saab reaalarvud samastada sirge (arvtelje) punktidega.

Olgu tasandil antud kaks arvtelge, mis on ristuvad oma nullpunktides. Need moodustavad tasandil nn koordinaatteljestiku. Tasandi punkti ristkoordinaatideks nimetatakse selle punkti ristprojektsioone koordinaattelgedele. Igale tasandi punktile vastab üks ja ainult üks ristkoordinaatide moodustatud arvupaar ja vastupidi: igale arvupaarile vastab üks ja ainult üks tasandi punkt. Matemaatikas tähistatakse tavaliselt ühel ristuvatest koordinaattelgedest olevat olevat arvu  $x$ -ga ja teisel koordinaatteljel oleval arvu  $y$ -ga. Sel juhul on tegemist  $xy$ -teljestikuga ja me saame rääkida tasandil asuva punkti  $x$ - ja  $y$ -koordinaatidest.

**Absoluutväärtuse mõiste.** Reaalarvu  $a$  absoluutväärtuseks nimetatakse järgmist mittenegatiivset reaalarvu:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{kui } a \geq 0 \\ -a & \text{kui } a < 0. \end{cases}$$

Reaalarvu  $a$  absoluutväärtust  $|a|$  võib tõlgendada kui punkti  $a$  ja nullpunkti vahelist kaugust arvteljel.

Üldisemalt: punktide  $a$  ja  $b$  vaheline kaugus arvteljel võrdub arvuga  $|a - b|$ .

**Absoluutväärtuse omadused:**

1.  $|-a| = |a|$
2.  $|ab| = |a||b|$
3.  $|a + b| \leq |a| + |b|$
4.  $|a - b| \geq ||a| - |b||$

**Reaalarvude ja lõpmatuste ümbrused.** Reaalarvu  $a$  ümbruseks nimetatakse suvalist vahemikku  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , kus  $\varepsilon > 0$  on ümbruse raadius. Arv  $x$  kuulub arvu  $a$  ümbrusesse  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  siis ja ainult siis, kui selle arvu kaugus arvteljel on arvust  $a$  väiksem kui  $\varepsilon$ , st  $|x - a| < \varepsilon$ .

Näiteks arvu 0 ümbrus on suvaline vahemik  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ . Arv  $x$  kuulub 0-i ümbrusesse siis ja ainult siis, kui  $|x| < \varepsilon$ .

Reaalarvu  $a$  vasakpoolseks ümbruseks nimetatakse suvalist poollõiku  $(a - \varepsilon, a]$ , kus  $\varepsilon > 0$ . Arv  $x$  kuulub arvu  $a$  vasakpoolsesse ümbrusesse  $(a - \varepsilon, a]$  siis ja ainult siis, kui selle arvu kaugus arveljel on arvust  $a$  väiksem kui  $\varepsilon$ , st  $|x - a| < \varepsilon$ , ja  $x$  ei asetse  $a$ -st paremal, st  $x \leq a$ .

Reaalarvu  $a$  parempoolseks ümbruseks nimetatakse suvalist poollõiku  $[a, a + \varepsilon)$ , kus  $\varepsilon > 0$ . Arv  $x$  kuulub arvu  $a$  parempoolsesse ümbrusesse  $[a, a + \varepsilon)$  siis ja ainult siis, kui selle arvu kaugus arveljel on arvust  $a$  väiksem kui  $\varepsilon$ , st  $|x - a| < \varepsilon$ , ja  $x$  ei asetse  $a$ -st vasakul, st  $x \geq a$ .

Suuruse lõpmatus ümbruseks nimetatakse suvalist vahemikku  $(M, \infty)$ , kus  $M > 0$ . Arv  $x$  kuulub lõpmatuse ümbrusesse  $(M, \infty)$  siis ja ainult siis, kui  $x > M$ .

Suuruse miinus lõpmatus ümbruseks nimetatakse suvalist vahemikku  $(-\infty, -M)$ , kus  $M > 0$ . Arv  $x$  kuulub miinus lõpmatuse ümbrusesse  $(-\infty, -M)$  siis ja ainult siis, kui  $x < -M$ .

Ümbrusi kasutatakse piirprotsesside defineerimisel. Suurus  $x$  läheneb arvule  $a$ , kui ta liigub järjest lähemale arvule  $a$ , st satub arvu  $a$  ümbrusesse järjest väiksema raadiusega  $\varepsilon$ . Suurus  $x$  läheneb lõpmatusele, kui ta asub järjest lähemal lõpmatusele, st satub lõpmatuse ümbrusesse järjest suurema vasakpoolse otspunktiga  $M$ . Täpsemalt tuleb sellest juttu järgmises peatükis.

**Tõkestatud hulgad.** Reaalarvudest koosnevat hulka  $A$  nimetatakse tõkestatuks, kui leidub lõplik vahemik  $(a, b)$  nii, et  $A \subset (a, b)$ .

Tõkestatud hulgad on näiteks kõik lõplikud vahemikud  $(a, b)$ , lõigud  $[a, b]$  ja poollõigud  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ . Tõkestamata hulgad on aga näiteks lõpmatud vahemikud  $(-\infty, a)$ ,  $(a, \infty)$  ja lõpmatud poollõigud  $(-\infty, a]$ ,  $[a, \infty)$ .

## 1.2 Jäävad ja muutuvad suurused. Funktsiooni mõiste ja esitusviisid.

**Jäävad ja muutuvad suurused.** Suurust, mis võib omandada erinevaid arvulisi väärtusi, nimetatakse muutuvaks suuruseks ehk muutujaks. Suurust, mille arvuline väärtus ei muutu, nimetatakse jäävaks suuruseks. Näiteks ühtlase liikumise korral on kiirus jääv suurus ja läbitud teepikkus muutuv suurus. Samas mitteühtlase liikumise korral on ka kiirus muutuv suurus. Seega võib konkreetne suurus olla ühes protsessis jääv kuid teises protsessis muutuv. Nii matemaatikas kui füüsikas on olemas ka suurusi, mis igas olukorras on jäävad. Neid suurusi nimetatakse absoluutseteks konstantideks. Absoluutsed konstandid on näiteks ringjoone ümbermõõdu ja läbimõõdu suhe  $\pi$ , valguse kiirus  $c$  jne.

**Muutumispiirkonna mõiste.** Muutuva suuruse kõigi võimalike väärtuste hulka nimetatakse selle suuruse muutumispiirkonnaks. Näiteks keha temperatuur võib teoreetiliselt omada kõiki väärtusi, mis on suuremad või võrdsesemad kui absoluutne miinimum  $-273.15^\circ\text{C}$ . Seega on temperatuuri muutumispiirkond lõpmatu poollõik  $[-273.15; \infty)$ .

**Funktsiooni mõiste.** Olgu antud 2 muutuvat suurust  $x$  ja  $y$ . Funktsiooniks (ehk üheseks funktsiooniks) nimetatakse kujutist, mis seab suuruse  $x$  igale väärtusele tema muutumiskiirkonnast vastavusse suuruse  $y$  ühe kindla väärtuse. Muutujat  $x$  nimetatakse seejuures sõltumatuks muutujaks ehk argumendiks ja muutujat  $y$  sõltuvaks muutujaks.

Matemaatikas on levinud funktsiooni tähised  $f, g, u, v, \varphi, \psi$  jne.

Olgu antud funktsioon  $f$ , mille argumendiks on  $x$  ja sõltuvaks muutujaks  $y$ . Muutuja  $y$  väärtust, milleks funktsioon  $f$  kujutab argumendi  $x$ , nimetatakse funktsiooni  $f$  väärtuseks kohal  $x$  ja tähistatakse sümboliga  $f(x)$ . Seega võime kirjutada seose

$$y = f(x), \quad (1.1)$$

mis väljendab muutuja  $y$  "seotust" argumendiga  $x$  funktsiooni  $f$  kaudu. Seost (1.1) nimetatakse funktsiooni võrrandiks.

Mõnikord kasutatakse funktsiooni ja sõltuva muutuja tähistamiseks ühte ja sama sümbolit. Sellisel juhul omab võrrand (1.1) kuju  $y = y(x)$ .

Argumendi  $x$  muutumiskiirkonda nimetatakse funktsiooni  $f$  määramiskiirkonnaks. Määramiskiirkonna tähisena kasutame edaspidi sümbolit  $X$ . Hulka

$$Y = \{f(x) \mid x \in X\}$$

nimetatakse funktsiooni  $f$  väärtuste hulgaks.

**Mitmeseks funktsiooniks** nimetatakse kujutist, mis seab suuruse  $x$  igale väärtusele tema muutumiskiirkonnast vastavusse teatud hulga suuruse  $y$  väärtusi, kusjuures leidub vähemalt üks  $x$  väärtus, millele vastab mitu  $y$  väärtust. Argumendi, sõltuva muutuja, määramiskiirkonna ja väärtuste hulga mõisted on mitmese funktsiooni korral analoogilised vastavate mõistetega ühese funktsiooni korral.

NB! Käesolevas konspektis tähendab mõiste "funktsioon" ilma täiendita "mitmene" alati ühest funktsiooni.

### Funktsiooni esitusviisid.

1. *Esitusviis tabeli kujul.* Funktsiooni argumendi võimalikud väärtused esitatakse tabeli ühes reas (veerus) ja neil vastavad funktsiooni väärtused tabeli teises reas (veerus). On võimalik vaid siis, kui funktsiooni argumendil on lõplik arv väärtusi.
2. *Analüütiline esitusviis.* Funktsioon esitatakse valemi kujul. Kui vaja, lisatakse ka määramiskiirkonna kirjeldus. Näiteks avaldis

$$y = x^2, \quad x \in [0, 1]$$



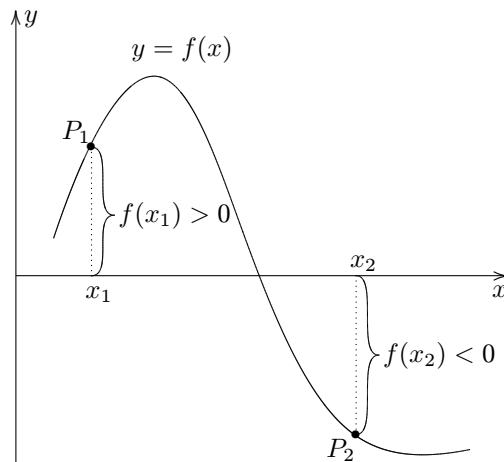
kirjeldab funktsiooni, mille määramispiirkonnaks on lõik  $[0, 1]$  ja iga  $x$  korral sellelt lõigult arvutatakse argumentidele  $x$  vastavad funktsiooni väärtused  $f(x)$  vastavalt valemile  $f(x) = x^2$ .

Analüütiliselt antud funktsiooni loomulikuks määramispiirkonnaks nimetatakse argumenti kõigi nende väärtuste hulka mille korral funktsiooni avaldis on täielikult määratud. Näiteks ülaltoodud funktsioon  $y = x^2$ ,  $x \in [0, 1]$  ei ole antud oma loomulikus määramispiirkonnas. Selle funktsiooni loomulik määramispiirkond on  $X = \mathbb{R}$ .

3. *Graafiline esitusviis.* Funktsioon esitatakse graafikuna tasandil ristkoordinaadistikus. Olgu antud funktsioon  $f$ , mille argument on  $x$ , sõltuv muutuja  $y$  ja määramispiirkond  $X$ . Kanname tasandile ristuvad  $x$ - ja  $y$ -teljed. Vaatleme selles teljestikus joont  $G$ , mis koosneb kõikvõimalikest punktidest  $P = (x, f(x))$ , kusjuures  $P$  esimene koordinaat  $x$  jookseb läbi kogu määramispiirkonna  $X$ . Seda joont nimetataksegi funktsiooni  $f$  *graafikuks*. Seega, lühidalt kirjutades on funktsiooni  $f$  graafiku definitsioon järgmine:

$$G = \{P = (x, f(x)) \mid x \in X\}.$$

Graafiku punkti  $P$  teist koordinaati  $f(x)$  võib tõlgendada  $P$  "kõrgusena"  $x$ - telje suhtes. Kui  $f(x) > 0$ , siis on graafiku "kõrgus" positiivne, st graafik paikneb ülalpool  $x$ -telge. Kui aga  $f(x) < 0$ , siis on "kõrgus" negatiivne, st graafik jääb  $x$ -teljest allapoole (vt joonis 1.1).



Joonis 1.1

Kuna  $xy$ -teljestikus antud punkti üldkuju on  $P = (x, y)$ , funktsiooni  $f$  graafik koosneb aga punktidest  $P = (x, f(x))$ , siis rahuldavad graafiku punktid võrrandit  $y = f(x)$ .

Suvaline  $y$ -teljega paralleelne sirge saab funktsiooni graafikut lõigata maksimaalselt ühes punktis. See omadus tuleneb otseselt funktsiooni ühesusest.

Tõepoolest: kui leiduks  $y$ -teljega paralleelne sirge, mis lõikaks graafikut mitmes punktis, siis oleks funktsiooni graafikul vaadeldavas kohas mitu "kõrgust", seega oleks ka funktsioonil ühe argumenti korral mitu väärtust. (Ühesel) funktsioonil ei saa aga mitut väärtust olla.

Juhul, kui vaadeldav funktsioon on mitmene, siis eksisteerib vähemalt üks  $y$ -teljega paralleelne sirge, mis lõikab funktsiooni graafikut mitmes punktis.

### 1.3 Funktsioonide liigid. Konstantne funktsioon. Astme-, eksponent- ja trigonomeetrilised funktsioonid.

**Paaris- ja paaritud funktsioonid.** Funktsiooni  $f$  nimetatakse paarisfunktsiooniks, kui iga  $x \in X$  korral kehtib võrdus  $f(-x) = f(x)$ . Funktsiooni  $f$  nimetatakse paarituks funktsiooniks, kui iga  $x \in X$  korral kehtib võrdus  $f(-x) = -f(x)$ .

**Perioodilised funktsioonid.** Funktsiooni  $f$  nimetatakse perioodiliseks, kui leidub konstant  $C > 0$  nii, et iga  $x \in X$  korral kehtib võrdus  $f(x + C) = f(x)$ . Väikseimat sellist konstanti  $C$  nimetatakse funktsiooni  $f$  perioodiks.

**Kasvavad ja kahanevad funktsioonid.** Olgu  $D$  funktsiooni  $f$  määramispiirkonna alamhulk. Valime hulgast  $D$  kaks suvalist arvu  $x_1$  ja  $x_2$  nii, et kehtib võrratus

$$x_1 < x_2.$$

Kui funktsiooni  $f$  rakendamisel argumentidele  $x_1$  ja  $x_2$  võrratuse märk ei muutu, st

$$f(x_1) < f(x_2),$$

siis on  $f$  kasvav hulgas  $D$ . Kui aga funktsiooni  $f$  rakendamisel argumentidele  $x_1$  ja  $x_2$  võrratuse märk muutub vastupidiseks, st

$$f(x_1) > f(x_2),$$

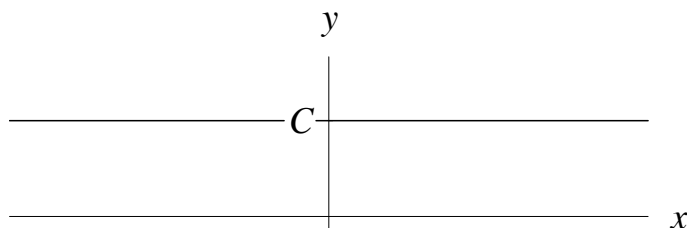
siis on  $f$  kahanev hulgas  $D$ . Kasvamispiirkonnas funktsiooni graafik tõuseb, kahanemispiirkonnas aga langeb.

**Konstantne funktsioon. Astme- ja eksponent- ja trigonomeetrilised funktsioonid.** Käesolevas alamparagrahvis alustame põhiliste elementaarfunktsioonide loetlemist ja omaduste kirjeldamist.

*Konstantne funktsioon*  $y = C$ . Ilmselt selle funktsiooni korral

$$X = \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad Y = \{C\}.$$

Graafik on selline:



Joonis 1.2: konstantne funktsioon  $y = C$

*Astmefunktsioon* on funktsioon järgmisel kujul

$$y = x^a,$$

kus  $a$  on nullist erinev konstantne astendaja. Selle funktsiooni määramispiirkond, väärtuste hulk ja graafik sõltuvad oluliselt astmest  $a$ .

Määramispiirkond on järgmine.

- a)  $a = p/q$ , kus  $p, q \in \mathbb{Z}$  ja  $q$  on paaritu. Selle juhu alla kuuluvad näiteks kõik täisarvuliste astendajatega funktsioonid:  $y = x, y = x^2, y = x^{-1}, y = x^{-2}$  jne, sest  $a \in \mathbb{Z}$  on esitatav kujul  $a = a/1$ . Samuti hõlmab see juht paarituid juuri:  $y = x^{1/3}, y = x^{1/5}, y = x^{-1/3}, y = x^{-1/5}$  jne. Paneme tähele, et kui  $a > 0$ , siis on kõik need funktsioonid suvalise reaalaravu  $x$  korral määratud. Kui  $a < 0$ , siis jääb määramispiirkonnast välja nullpunkt, sest nulliga jagamine ei ole võimalik. Seega: kui  $a > 0$ , siis  $X = \mathbb{R}$  ja kui  $a < 0$ , siis  $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- b)  $a = p/q$ , kus  $p, q \in \mathbb{Z}$  ja  $q$  on paaris või  $a$  on irratsionaalarv. Selle juhu alla kuuluvad näiteks kõik paaris juured:  $y = x^{1/2}, y = x^{1/4}, y = x^{-1/2}, y = x^{-1/4}$  jne. Kui  $a > 0$ , siis on taolised funktsioonid  $x \geq 0$  korral määratud. Kui  $a < 0$ , siis jääb määramispiirkonnast välja lisaks ka punkt  $x = 0$ . Seega: kui  $a > 0$ , siis  $X = [0, \infty)$  ja kui  $a < 0$ , siis  $X = (0, \infty)$ .

*EkspONENTfunktsioon* on funktsioon järgmisel kujul:

$$y = a^x,$$

kus astme alus  $a$  on konstantne ja rahuldab võrratust  $a > 0$ . Lisaks sellele võrratusele eeldame veel, et  $a \neq 1$ , sest  $a = 1$  korral saame konstantse funktsiooni  $y = 1^x = 1$ . EkspONENTfunktsiooni korral

$$X = \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad Y = (0, \infty).$$

Graafik on juhtudel  $a > 1$  ja  $0 < a < 1$  kvalitatiivselt erinev (vt joonised 1.4 ja 1.5 tagapool). Nagu graafikutelt nähtub, on funktsioon  $y = a^x$  kasvav kogu oma määramispiirkonnas, kui  $a > 1$  ja kahanev kogu oma määramispiirkonnas, kui  $0 < a < 1$ .

*Trigonomeetrilised funktsioonid*

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x \quad \text{ja} \quad y = \cot x$$

radiaanides antud argumendiga  $x$ .

Funktsioon  $\cos \alpha$  on defineeritud kui  $x$ -telje suhtes nurga  $\alpha$  all paikneva tasandilise vektori  $x$ -koordinaadi suhe tema pikkusesse, ja  $\sin \alpha$  kui taolise vektori  $y$ -koordinaadi suhe tema pikkusesse. Kraadides antud nurga teisendamisel radiaanidesse kehtib seos  $180 \text{ kraadi} = \pi \text{ radiaani}$ . Funktsioonid  $\sin \alpha$  ja  $\cos \alpha$  on lõigult  $\alpha \in [0, 2\pi]$  jätkatud perioodiliselt kogu arveljele. Funktsioonid  $\tan \alpha$  ja  $\cot \alpha$  on defineeritud valemitega  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  ja  $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$ .

Trigonomeetriliste funktsioonide määramispiirkonnad ja väärtuste hulgad on järgmised:

$$\begin{aligned} y = \sin x : \quad X &= \mathbb{R}, Y = [-1, 1], \\ y = \cos x : \quad X &= \mathbb{R}, Y = [-1, 1], \\ y = \tan x : \quad X &= \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, Y = \mathbb{R}, \\ y = \cot x : \quad X &= \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, Y = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Graafikud leiab lugeja joonistelt 1.8 - 1.11 tagapool. Funktsioonid  $y = \sin x$  ja  $y = \cos x$  on perioodilised perioodiga  $2\pi$  ning  $y = \tan x$  ja  $y = \cot x$  perioodiga  $\pi$ . Funktsioonid  $y = \sin x$ ,  $y = \tan x$  ja  $y = \cot x$  on paaritud ning  $y = \cos x$  paaris.

## 1.4 Pöördfunktsiooni mõiste. Logaritmfunktsioon. Arkusfunktsioonid.

**Üksühese funktsiooni mõiste.** Olgu antud funktsioon  $y = f(x)$ . Vastavalt funktsiooni definitsioonile on tegemist kujutisega, mis seab igale argumenti  $x$  väärtusele oma määramispiirkonnast vastavusse ühe kindla  $y$  väärtuse. Vaatleme nüüd teatud kitsamat erijuhtu. Nimelt eeldame, et ka argument  $x$  funktsiooni väärtuse  $f(x)$  kaudu üheselt määratud. See tähendab, et iga  $y$  korral hulgast  $Y$  leidub ainult üks  $x$  nii, et valitud  $y$  on selle  $x$ -i kujutiseks. Kui see on nii, siis öeldakse, et funktsioon  $f$  on *üksühene*. Üksühese funktsiooni korral on võrrand  $y = f(x)$  muutuja  $x$  suhtes üheselt lahenduv.

Näiteks kuupfunktsioon  $y = x^3$  on üksühene. Iga  $y$  korral leidub ainult üks  $x$  nii, et valitud  $y$  on selle  $x$ -i kuup. Arv 8 on ainult ühe arvu (so 2) kuup, arv  $-27$  on ainult ühe arvu (so  $-3$ ) kuup jne. Lahendades võrrandi  $y = x^3$  muutuja  $x$  suhtes saame argumenti  $x$  esituse  $y$  kaudu:  $x = \sqrt[3]{y}$ . Seevastu ruutfunktsioon  $y = x^2$  ei ole üksühene. Iga  $y > 0$  korral leidub kaks  $x$ -i nii, et valitud  $y$  on mõlema  $x$ -i ruut. Arv 4 nii  $-2$  kui 2 ruut. Võrrandi  $y = x^2$  lahendamisel saame kaks funktsiooni  $x = \sqrt{y}$  ja  $x = -\sqrt{y}$  ehk ühe mitmese funktsiooni  $x = \pm\sqrt{y}$ .

Funktsiooni üksühesust saab kindlaks teha ka graafiku abil. Kui suvaline  $x$ -teljega paralleelne sirge läbib funktsiooni graafikut maksimaalselt ühes punktis, siis on see funktsioon üksühene. Nii on see näiteks kuupfunktsiooni  $y = x^3$  graafikuga. Seevastu ruutfunktsiooni  $y = x^2$  graafikut (parabooli) läbib  $x$ -teljega paralleelne ja selle telje peal asuv sirge kahes punktis. Nagu nägime, ei ole viimasel juhul tegemist üksühese funktsiooniga.

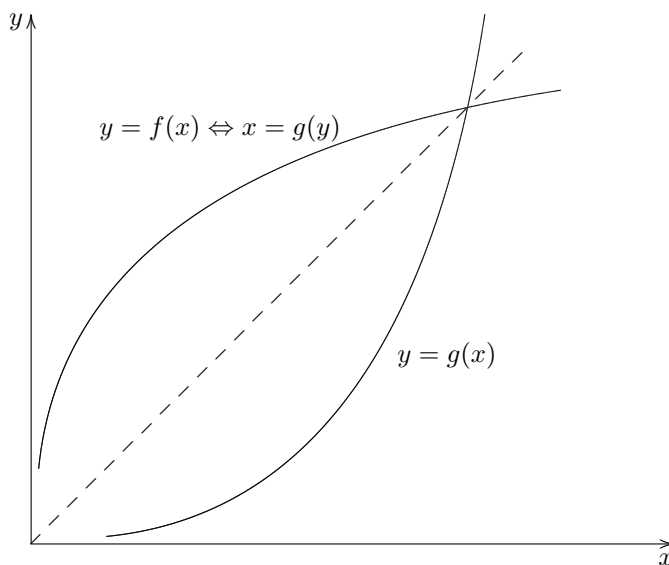
**Üksühese funktsiooni pöördfunktsioon.** Üksühese funktsiooni  $y = f(x)$  pöördfunktsiooniks nimetatakse kujutist, mis seab igale  $f(x)$ -le funktsiooni  $f$  väärtuste hulgast vastavusse  $x$ -i. Pöördfunktsiooni avaldise saame, kui lahendame võrrandi  $y = f(x)$  muutuja  $x$  suhtes. Pöördfunktsioonis funktsiooni argument ja sõltuv muutuja vahetavad oma kohad. See tähendab, et kui funktsiooni  $f$  argumendiks on  $x$  ja sõltuvaks muutujaks  $y$ , siis funktsiooni  $f$  pöördfunktsiooni argumendiks on  $y$  ja sõltuvaks muutujaks  $x$ . Samuti vahetavad pöördfunktsioonis kohad esialgse funktsiooni määramispiirkond ja väärtuste hulk.

Olgu  $x = g(y)$  üksühese funktsiooni  $y = f(x)$  pöördfunktsioon. Siis funktsioonid  $f$  ja  $g$  kompenseerivad teineteist järgmises mõttes. Fikseerime mingi  $x$  väärtuse ja arvutame  $f(x)$ . Seejärel arvutame  $g[f(x)]$ , st funktsioon  $g$  kohal  $f(x)$ . Tulemusena saame esialgse  $x$  väärtuse tagasi. Samuti arvutades antud  $y$  kaudu  $f[g(y)]$  saame  $y$  väärtuse tagasi. Need seosed saab kirjutada kujul

$$g[f(x)] = x, \quad f[g(y)] = y. \quad (1.2)$$

Kui  $g$  on funktsiooni  $f$  pöördfunktsiooni, siis  $f$  on  $g$  pöördfunktsioon.

Funktsiooni  $y = f(x)$  ja tema pöördfunktsiooni  $x = g(y)$  graafikud kattuvad  $xy$ -teljestikus. See on nii sellepärast, et funktsioonid  $y = f(x)$  ja  $x = g(y)$  määravad ühed ja samad arvupaarid  $(x, y)$ , seega ka ühed ja samad punktid  $P = (x, y)$  tasandil. Erinevus neis kahes funktsioonis seisneb ainult selles, et  $f$  seab  $x$ -le vastavusse  $y$ -i, kuid  $g$  seab  $y$ -le vastavusse  $x$ -i.



Joonis 1.3

Kui aga pöördfunktsiooni  $x = g(y)$  avaldises muutujate  $x$  ja  $y$  kohad vahetada, st esitada ta kujul  $y = g(x)$ , siis selle funktsiooni graafik peegeldub üle sirge  $y = x$ . Seega on funktsioonide  $y = f(x)$  ja  $y = g(x)$  graafikud sümmeetrilised sirge  $y = x$  suhtes (joonis 1.3).

**Logaritmifunktsioon. Arkusfunktsioonid.** Jätkame eelmises paragrahvis alustatud põhiliste elementaarfunktsioonide loetelu mõnede oluliste pöördfunktsioonidega.

*Logaritmifunktsioon.*

Suvaline  $x$ -teljega paralleelne sirge läbib eksponentfunktsiooni  $y = a^x$  graafikut maksimaalselt ühes punktis (vt joonised 1.4, 1.5). Seega on eksponentfunktsioon üksühene ning tal on olemas pöördfunktsioon. Eksponentfunktsiooni  $y = a^x$  pöördfunktsioon on logaritmifunktsioon

$$x = \log_a y,$$

kus  $a$  on logaritmi alus. Nii nagu eksponentfunktsiooni korral eeldame, et  $a > 0$  ja  $a \neq 1$ . Vastavalt valemitele (1.2) kehtivad seosed

$$\log_a[a^x] = x \quad \text{ja} \quad a^{\log_a y} = y.$$

Kuna pöördfunktsiooni võtmisel määramispiirkond ja väärtuste hulk vahetavad oma kohad, siis lähtudes eksponentfunktsioonist (vt §1.3) näeme, et funktsiooni  $y = \log_a x$  määramispiirkond ja väärtuste hulk on vastavalt

$$X = (0, \infty) \quad \text{ja} \quad Y = \mathbb{R}.$$

Graafik on juhtudel  $a > 1$  ja  $0 < a < 1$  erinev (joonised 1.6 ja 1.7). Võrreldes graafikuid joonistel 1.4 - 1.7 näeme, et  $y = \log_a x$  graafik on  $y = a^x$  graafiku peegeldus sirge  $y = x$  suhtes.

*Arkusfunktsioonid.*

Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid on nn. arkusfunktsioonid. Peamine probleem trigonomeetriliste funktsioonide pööramisel on see, et nad ei ole terves oma määramispiirkonnas üksühesed. Tõepoolest, vaadeldes trigonomeetriliste funktsioonide graafikuid joonistel 1.8 - 1.11 näeme, et  $x$ -teljega paralleelsed sirged võivad neid graafikuid lõigata paljudes punktides. Seetõttu ei ole võimalik saada neile funktsioonidele terves oma määramispiirkonnas üheseid pöördfunktsioone. Pöördfunktsioonid defineeritakse nende funktsioonide määramispiirkondade alamhulkadel. Vaatleme seda iga trigonomeetrilise funktsiooni korral lähemalt.

Funktsioon  $y = \sin x$  ei ole üksühene, sest ühele  $\sin x$  väärtusele vastab lõpmata palju  $x$  väärtusi. Näiteks  $x$ -telg lõikab siinuse graafikut lõpmata arvus erinevates punktides (vt joonis 1.8). Funktsiooni  $y = \sin x$  pööramisel ahendatakse tema määramispiirkond kokkuleppeliselt lõiguks  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , st jäetakse vaatluse alt välja kogu see  $\sin x$  osa, mille korral  $x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Vaadeldes joonisel 1.8 lõigul  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  paiknevat siinuse graafiku osa näeme, et suvaline  $x$ -teljega paralleelne sirge lõikab seda maksimaalselt ühes punktis. Seega on funktsioon

$$y = \sin x, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

üksühene. Selle funktsiooni pöördfunktsiooni nimetatakse arkussiinuseks ja tähistatakse  $x = \arcsin y$ . Kehtivad seosed

$$\arcsin[\sin x] = x \quad \text{ja} \quad \sin[\arcsin y] = y, \quad (1.3)$$

neist esimene iga  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  korral.

Funktsiooni  $y = \cos x$ , mis ei ole samuti üksühene kogu arvteljel, pööramisele ahendatakse tema määramispiirkond lõiguks  $[0, \pi]$ . Sellel lõigul on ta üksühene (joonis 1.9). Funktsiooni

$$y = \cos x, \quad x \in [0, \pi]$$

pöördfunktsioon kannab nimetust arkuskosinus ja seda tähistatakse  $x = \arccos y$ . Kehtivad valemid

$$\arccos[\cos x] = x \quad \text{ja} \quad \cos[\arccos y] = y,$$

neist esimene iga  $x \in [0, \pi]$  korral.

Funktsioonide  $y = \tan x$  ja  $y = \cot x$  pööramisele ahendatakse  $\tan x$  vahemikule  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  ja  $\cot x$  vahemikule  $(0, \pi)$ . Funktsioonide

$$y = \tan x, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad \text{ja} \quad y = \cot x, \quad x \in (0, \pi)$$

pöördfunktsioonid on vastavalt arkustangens  $x = \arctan y$  ja arkuskotangens  $x = \operatorname{arccot} y$ . Kehtivad valemid

$$\arctan[\tan x] = x, \quad \tan[\arctan y] = y, \quad \operatorname{arccot}[\cot x] = x, \quad \cot[\operatorname{arccot} y] = y,$$

neist esimene iga  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  ja kolmas iga  $x \in (0, \pi)$  korral.

Arkusfunktsioonide määramispiirkonnad ja väärtuste hulgad on järgmised:

$$\begin{aligned} y = \arcsin x : \quad X &= [-1, 1], Y = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ y = \arccos x : \quad X &= [-1, 1], Y = [0, \pi], \\ y = \arctan x : \quad X &= \mathbb{R}, Y = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ y = \operatorname{arccot} x : \quad X &= \mathbb{R}, Y = (0, \pi). \end{aligned}$$

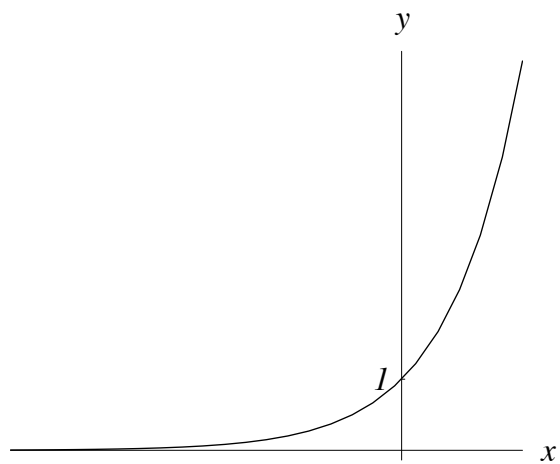
Need saab leida lihtsalt, kui vahetada ülaltoodud trigonomeetriliste funktsioonide ahendite määramispiirkonnad ja väärtuste hulgad.

Arkusfunktsioonide graafikud on kujutatud joonistel 1.12 - 1.15. Võrreldes omavahel jooniseid 1.8 - 1.11 ja 1.12 - 1.15 näeme, et arkusfunktsioonide graafikud on trigonomeetriliste funktsioonide ahendite graafikute peegeldused üle sirge  $y = x$ .

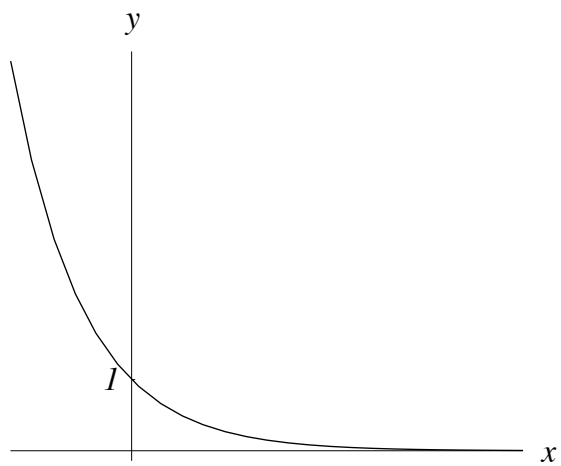
**Pöördfunktsioon funktsioonist, mis ei ole üksühene.** Olgu vaadeldav funktsioon  $y = f(x)$  oma määramispiirkonnaga  $X$  ja väärtuste hulgaga  $Y$  küll ühene, kuid mitte üksühene. Funktsiooni  $f$  pöördfunktsiooniks nimetatakse kujutist, mis igale  $y \in Y$  seab vastavusse kõigi selliste  $x \in X$  hulga, mille korral kehtib võrdus  $f(x) = y$ .

Ühese, kuid mitte üksühese funktsiooni pöördfunktsioon on mitmene. Selliste funktsioonide näideteks on terves oma määramispiirkonnas antud trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid ehk "suure algustähega" arkusfunktsioonid. Täpsemalt: terves määramispiirkonnas antud funktsioonide  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan x$  ja  $y = \cot x$  pöördfunktsioonid on vastavalt  $x = \operatorname{Arcsin} y$ ,  $x = \operatorname{Arccos} y$ ,  $x = \operatorname{Arctan} y$  ja  $x = \operatorname{Arccot} y$ .

Arvutame näiteks  $\operatorname{Arcsin} 0$ . Kuna kõigi selliste  $x$  hulk, mille korral  $\sin x$  võrdub nulliga, on  $\{k\pi \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , siis saamegi  $\operatorname{Arcsin} 0 = \{k\pi \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ .

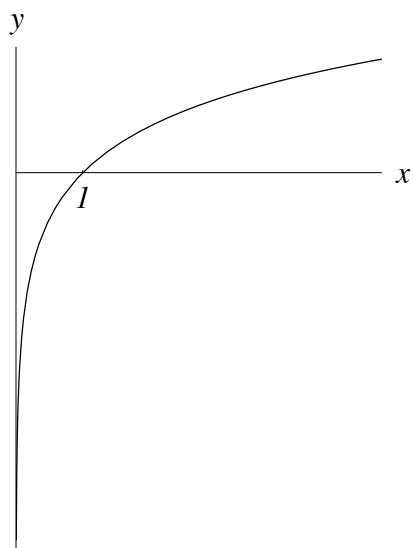


Joonis 1.4:  $y = a^x$  kui  $a > 1$

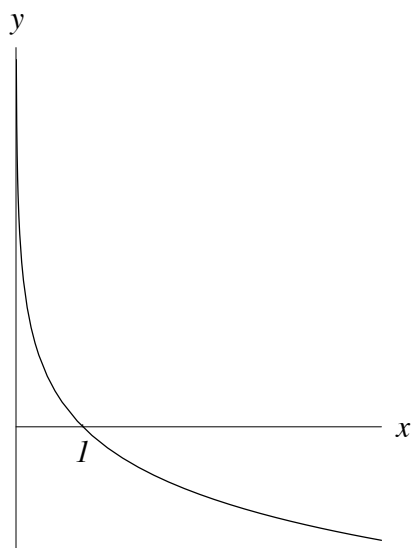


Joonis 1.5:  $y = a^x$  kui  $0 < a < 1$

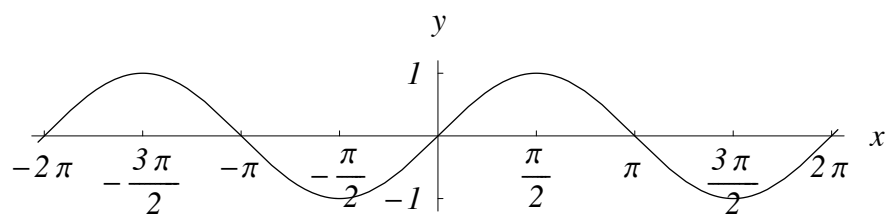




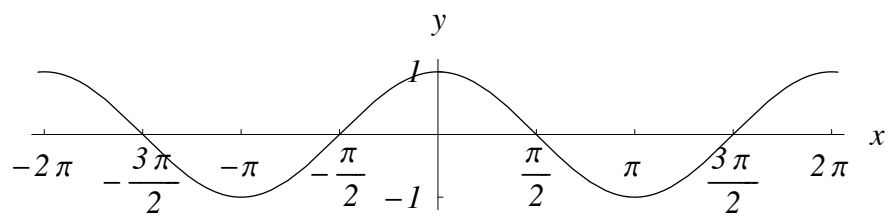
Joonis 1.6:  $y = \log_a x$  kui  $a > 1$



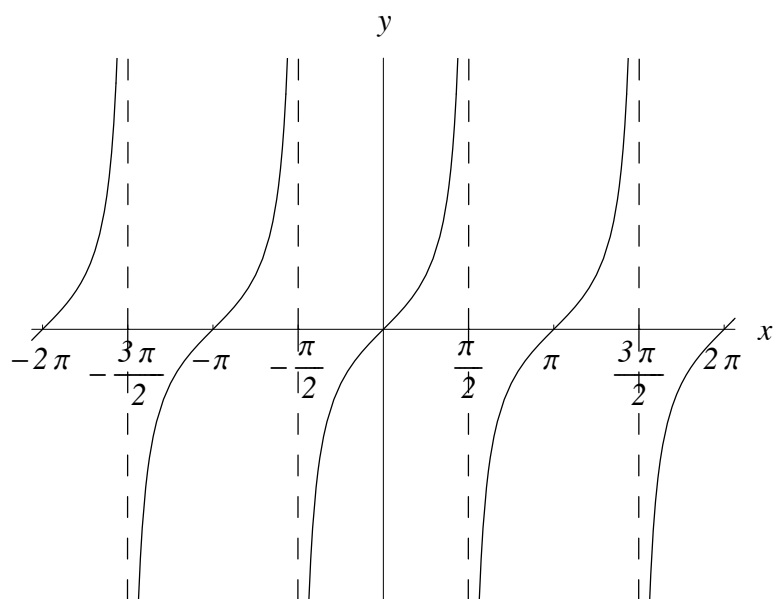
Joonis 1.7:  $y = \log_a x$  kui  $0 < a < 1$



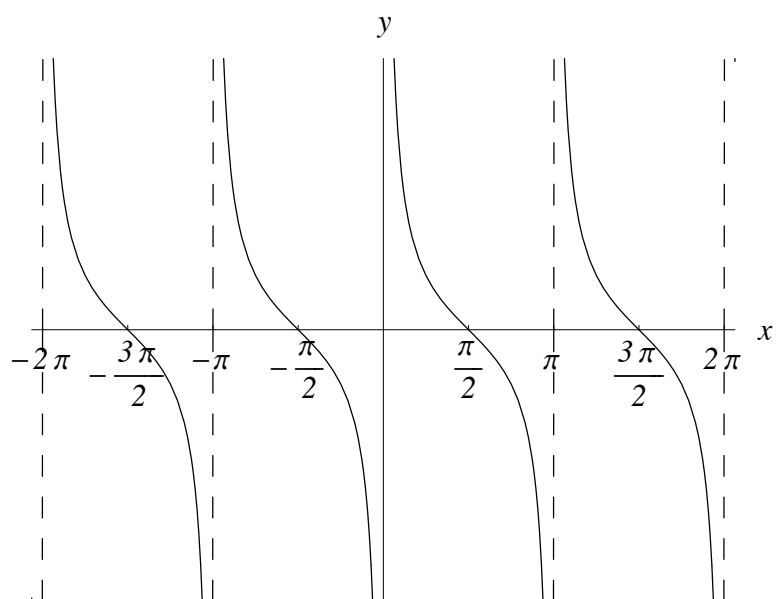
Joonis 1.8:  $y = \sin x$



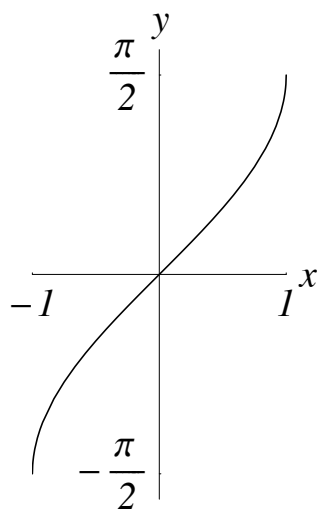
Joonis 1.9:  $y = \cos x$



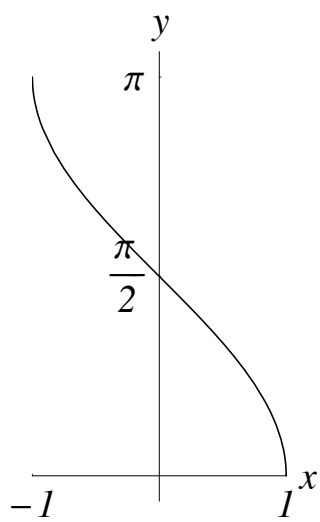
Joonis 1.10:  $y = \tan x$



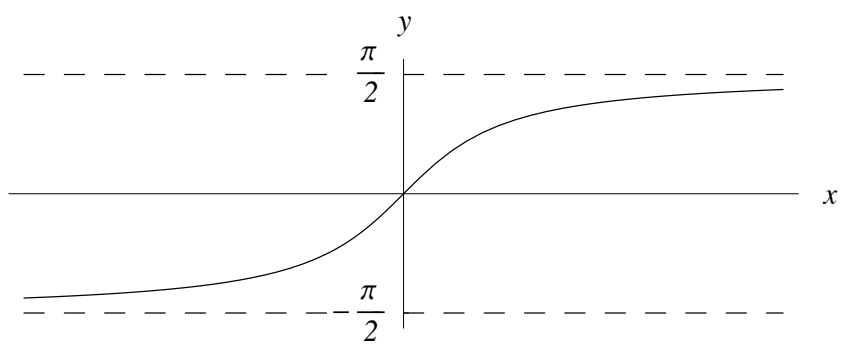
Joonis 1.11:  $y = \cot x$



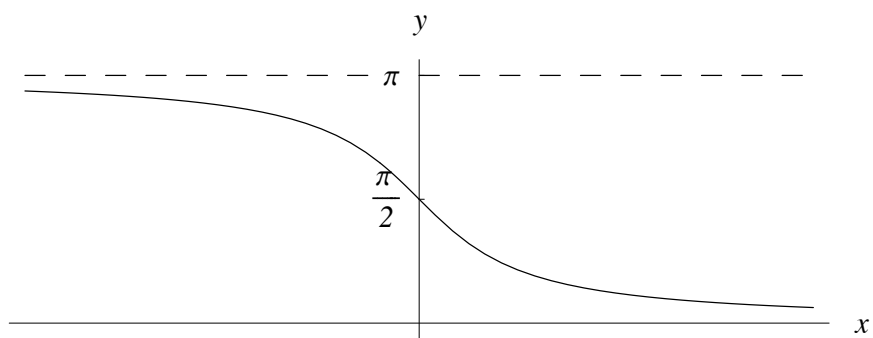
Joonis 1.12:  $y = \arcsin x$



Joonis 1.13:  $y = \arccos x$



Joonis 1.14:  $y = \arctan x$



Joonis 1.15:  $y = \operatorname{arccot} x$

## 1.5 Tehed funktsioonidega. Elementaarfunktsioon. Polünoom ja ratsionaalfunktsioon.

**Algebralised tehmed funktsioonidega.** Olgu antud kaks funktsiooni  $y = f(x)$  ja  $y = g(x)$  ühise määramispiirkonnaga  $X$ . Funktsioonide  $f$  ja  $g$  summa on defineeritud kui kujutis, mis seab igale  $x \in X$  vastavusse muutuja  $y$  väärtuse valemiga  $y = f(x) + g(x)$ . Funktsioonide  $f$  ja  $g$  summa loomulik tähis on  $f + g$ . Seega kehtib  $f$  ja  $g$  summa puhul seos

$$y = (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Analoogiliselt defineeritakse ka funktsioonide  $f$  ja  $g$  vahe  $y = (f - g)(x) = f(x) - g(x)$ , korrutis  $y = (fg)(x) = f(x)g(x)$  ja jagatis  $y = (f/g)(x) = f(x)/g(x)$ . Summa, vahe ja korrutise määramispiirkonnaks on  $X$ . Jagatise määramispiirkond koosneb kõigist sellistest  $x \in X$ , mille korral  $g(x) \neq 0$ .

**Liitfunktsiooni mõiste.** Olgu antud kaks funktsiooni:  $y = f(x)$  määramispiirkonnaga  $X_f$  ja  $z = g(y)$  määramispiirkonnaga  $Y_g$ . Asendades suuruse  $y$  funktsiooni  $g$  avaldises  $f(x)$ -ga saame uue funktsiooni, mille argumendiks on  $x$  ja sõltuvaks muutujaks  $z$ , kusjuures  $x$  ja  $z$  vaheline seos on antud kujul  $z = g[f(x)]$ . Tegemist on funktsioonide  $f$  ja  $g$  baasil defineeritud liitfunktsiooniga. Tähistame seda funktsiooni sümboliga  $g \circ f$ . Seega võime kirjutada võrduse

$$z = (g \circ f)(x) = g[f(x)].$$

Liitfunktsiooni  $g \circ f$  määramispiirkond ei tarvitse kattuda  $f$  määramispiirkonnaga. Liitfunktsioon  $g \circ f$  on määratud ainult sellistel  $x$ -i väärtustel hulgas  $X_f$ , mille korral  $f(x)$  asub funktsiooni  $g$  määramispiirkonnas. Tõepoolest, ainult sellisel juhul saame me leida funktsiooni  $g$  väärtuse kohal  $f(x)$  ehk suuruse  $g[f(x)]$ . Seega on  $g \circ f$  määramispiirkond järgmine:

$$X_{g \circ f} = \{x \mid x \in X_f, f(x) \in Y_g\}.$$

Näiteks annavad  $f(x) = \sin x$  ja  $g(y) = \sqrt{y}$  liitfunktsiooni  $(g \circ f)(x) = \sqrt{\sin x}$ . Kuna  $X_f = \mathbb{R}$  ja  $Y_g = [0, \infty)$ , siis  $X_{g \circ f} = \{x \mid \sin x \in [0, \infty)\} = \{x \mid 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Elementaarfunktsiooni mõiste.** Põhilisteks elementaarfunktsioonideks on järgmised funktsioonid: konstantne funktsioon,  $y = x^a$ ,  $y = a^x$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$ ,  $y = \log_a x$ ,  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \arctan x$  ja  $y = \operatorname{arccot} x$ .

Elementaarfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni, mis on saadud põhilistest elementaarfunktsioonidest lõpliku arvu aritmeetiliste tehete (so liitmiste, lahutamiste, korrutamiste, jagamiste) ja liitfunktsioonide moodustamise teel.

*Näiteid* elementaarfunktsioonide kohta:

elementaarfunktsioon  $y = 5 + 7 \tan x - \frac{e^x}{\cos x}$  on moodustatud põhilistest elementaarfunktsioonidest  $y = 5$ ,  $y = 7$ ,  $y = \tan x$ ,  $y = e^x$  ja  $y = \cos x$  lõpliku arvu

aritmeetiliste tehetege;

elementaarfunktsioon  $y = \arcsin(3^x)$  on põhiliste elementaarfunktsioonide  $y = 3^x$  ja  $y = \arcsin x$  liitfunktsioon;

elementaarfunktsioon  $y = \sqrt{2^{\arccos x} + \frac{3}{\tan^2 x}} - 4$  on saadud põhilistest elementaarfunktsioonidest  $y = 2^x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = 3$ ,  $y = \tan x$ ,  $y = x^2$ ,  $y = 4$  ja  $y = x^{1/2}$  lõpliku arvu aritmeetiliste tehete ja liitfunktsioonide moodustamisega.

Elementaarfunktsioonide hulka kuuluvad ka polünoomid ja ratsionaalfunktsioonid.  $n$ - astme polünoom on defineeritud avaldisega

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

kus  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  on konstandid ja  $a_n \neq 0$ . Ratsionaalfunktsioon on kahe polünoomi jagatis

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m}.$$

Kõik funktsioonid ei ole elementaarfunktsioonid. Selle kohta saab tuua üsna lihtsaid näiteid. Näiteks ei ole elementaarfunktsioon nn Heaviside'i funktsioon, mis on defineeritud järgmise eeskirjaga:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{kui } x \geq 0, \\ 0 & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

## 1.6 Ilmutatud ja ilmutamata funktsioonid. Parameetrilisel kujul antud jooned ja funktsioonid.

**Ilmutatud ja ilmutamata funktsioonid.** Analüütiliselt antud funktsioon võib olla kas ilmutatud või ilmutamata kujul. Funktsiooni  $y = f(x)$  ilmutatud kujuks on võrrand, mille vasakul pool on  $y$  ja paremal pool avaldis, mis võib sisaldada muutujat  $x$ , kuid mitte muutujat  $y$ . Näiteks  $y = x^2 - x$ .

Funktsiooni  $y = f(x)$  ilmutamata kujuks on võrrand, mis sisaldab  $x$  ja  $y$  läbisegi, st võrrand

$$F(x, y) = 0, \tag{1.4}$$

kus  $F$  on mingi  $x$  ja  $y$  sisaldav avaldis. Näiteks  $x^2 - \sin y + y = 0$ .

Kui me asendame muutuja  $y$  funktsiooni  $f(x)$  ilmutatud avaldisega võrrandis (1.4), siis muutub see võrrand samasuseks  $F(x, f(x)) \equiv 0$ . Seda on illustreeritud allpooltoodud näites.

Ilmutamata kujul antud funktsiooni ilmutamiseks tuleb lahendada võrrand (1.4) muutuja  $y$  suhtes. Kui sellel võrrandil on mitu lahendit, siis defineerib ta mitu funktsiooni.

*Näide.* Vaatleme võrrandit

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (1.5)$$

Kui me lahendame selle võrrandi  $y$  suhtes, saame kaks funktsiooni:  $y = -\sqrt{1-x^2}$  ja  $y = \sqrt{1-x^2}$ . Seega määrab võrrand (1.5) ilmutamata kujul kaks erinevat funktsiooni. Asendades kas  $y = -\sqrt{1-x^2}$  või  $y = \sqrt{1-x^2}$  võrrandisse (1.5) saame võrduse  $x^2 + [\sqrt{1-x^2}]^2 = 1$ , mis peale lihtsustamist muutub samasuseks  $0 \equiv 0$ .

**Parameetriliselt antud joon.** Olgu lõigul  $[T_1, T_2]$  antud kaks funktsiooni  $x = \varphi(t)$  ja  $y = \psi(t)$ . Kirjutame need funktsioonid üles süsteemina

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad t \in [T_1, T_2]. \end{cases} \quad (1.6)$$

Süsteem (1.6) määrab iga  $t \in [T_1, T_2]$  korral ühe kindla arvupaari ehk tasandi punkti ristkoordinaatidega  $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$ . Üldiselt vastavad muutuja  $t$  erinevatele väärtustele ka erinevad tasandi punktid. Kui muutuja  $t$  jookseb läbi kogu lõigu  $[T_1, T_2]$ , siis  $t$ -le vastav punkt kujundab tasandil teatud joone. Võrrandeid (1.6) nimetatakse selle joone *parameetristeks võrranditeks* ja muutujat  $t$  selle joone *parameetriks*.

*Näide.* Vaatleme joont

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi], \end{cases} \quad (1.7)$$

kus  $a$  ja  $b$  on positiivsed konstandid. Arvutame

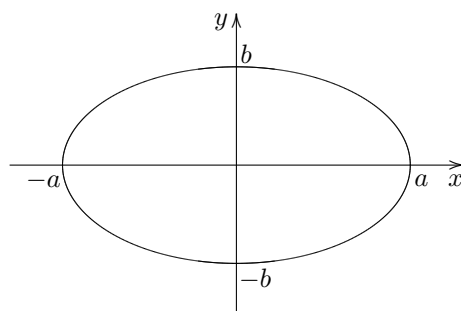
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(a \cos t)^2}{a^2} + \frac{(b \sin t)^2}{b^2} = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1.$$

Järelikult on vaadeldava joone võrrand  $x$  ja  $y$  kaudu esitatuna järgmine:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Seda joont nimetatakse ellipsiks (joonis 1.16). Arve  $a$  ja  $b$  nimetatakse ellipsi pooltelgedeks.





Joonis 1.16

**Parameetrilisel kujul antud funktsioon.** Vaatleme funktsiooni  $y = f(x)$ . Toome lisaks muutujatele  $x$  ja  $y$  sisse ka kolmanda muutuja  $t$  (nn parameetri). Olgu muutuja  $x$  parameetri  $t$  funktsioon, st

$$x = \varphi(t).$$

Siis saab ka muutuja  $y$  avaldada parameetri  $t$  kaudu. Tõepoolest: kasutades muutuja  $x$  valemit arvutame  $y = f(x) = f[\varphi(t)] = (f \circ \varphi)(t)$ . Seega, tähistades  $\psi = f \circ \varphi$  saame võrrandi

$$y = \psi(t).$$

Võtame need kaks võrrandit kokku ühte süsteemi. Kui parameetri  $t$  muutumiskiirkond on lõik  $[T_1, T_2]$ , näeb see süsteem välja järgmine:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad t \in [T_1, T_2]. \end{cases} \quad (1.8)$$

Võrrandeid (1.8) nimetatakse funktsiooni  $y = f(x)$  parameetrilisteks võrranditeks. Võrranditega (1.8) antud joon on ühtlasi funktsiooni  $y = f(x)$  graafikuks.

*Näiteks* vaatleme funktsiooni

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

kus  $a$  ja  $b$  on positiivsed konstandid. Asendame muutuja  $x$  parameetri  $t$  kaudu järgmiselt:

$$x = a \cos t.$$

Siis saame

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 t} = b \sqrt{1 - \cos^2 t}.$$

Eeldame, et parameeter  $t$  asub lõigul  $[0, \pi]$ . Sellel lõigul on funktsioon  $\sin t$  mittenegatiivne. Seetõttu kehtib võrdus  $\sqrt{1 - \cos^2 t} = \sin t$ . Nüüd saame muutuja  $y$  jaoks järgmise võrrandi:

$$y = b \sin t.$$

Võttes  $x$  ja  $y$  võrrandid kokku, paneme antud funktsiooni jaoks kirja järgmise parameetrilise esituse:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t, \quad t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Funktsiooni  $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$  graafikuks on joonisel 1.16 toodud ellipsi ülemine ( $x$ -telje peal asuv) kaar, mis vastab parameetri väärtustele  $t \in [0, \pi]$ .

Joonte ja funktsioonide parameetrilist esitust kasutatakse rohkelt füüsikas. Parameeter  $t$  tähistab seal enamasti aega. Näiteks esitab parameetiline joon ajas liikuvat punkti tasandil.

## 1.7 Hüperboolsed trigonomeetrilised funktsioonid.

Selles paragrahvis defineerime veel mõned olulised elementaarfunktsioonid. Matemaatikas ja selle rakendustes kasutatakse palju nn *hüperboolseid trigonomeetrilisi funktsioone*. Nendeks on

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} && \text{hüperboolne siinus,} \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} && \text{hüperboolne kosinus,} \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} && \text{hüperboolne tangens,} \\ \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} && \text{hüperboolne kotangens.} \end{aligned}$$

Määramispiirkonnad ja väärtuste hulgad on järgmised:

$$\begin{aligned} y = \sinh x : \quad X &= \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}, \\ y = \cosh x : \quad X &= \mathbb{R}, Y = [1, \infty), \\ y = \tanh x : \quad X &= \mathbb{R}, Y = (-1, 1), \\ y = \coth x : \quad X &= \mathbb{R} \setminus \{0\}, Y = (-\infty, -1) \cup (1, \infty). \end{aligned}$$

Graafikud on toodud joonistel 1.18 - 1.21.

Hüperboolse siinuse ja kosinuse kaudu on defineeritud veel

$$\begin{aligned} \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} && \text{hüperboolne seekant :} \\ \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} && \text{hüperboolne koseekant.} \end{aligned}$$

Funktsioonide  $\sinh x$ ,  $\cosh x$ ,  $\tanh x$  ja  $\coth x$  pöördfunktsioonid on nn area-funktsioonid:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{arsinh} y && \text{areasiinus (funktsiooni } y = \sinh x \text{ pöördfunktsioon),} \\ x &= \operatorname{arcosh} y && \text{areakosinus (funktsiooni } y = \cosh x \text{ pöördfunktsioon),} \\ x &= \operatorname{artanh} y && \text{areatangens (funktsiooni } y = \tanh x \text{ pöördfunktsioon),} \\ x &= \operatorname{arcoth} y && \text{areakotangens (funktsiooni } y = \coth x \text{ pöördfunktsioon).} \end{aligned}$$

Nii nagu hüperboolsed trigonomeetrilised funktsioonid, on ka areafunktsioonid elementaarfunktsioonid.

Toome siinkohal areafunktsioonide avaldised põhiliste elementaarfunktsioonide kaudu koos määramispiirkondade ja väärtuste hulkadega:

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) : \quad X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}, \\ \operatorname{arcosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) : \quad X = [1, \infty), Y = [0, \infty), \\ \operatorname{artanh} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} : \quad X = (-1, 1), Y = \mathbb{R}, \\ \operatorname{arcoth} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} : \quad X = (-\infty, -1) \cup (1, \infty), Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

Hüperboolne siinus ja kosinus on seotud teatud teist liiki joone, nn hüperbooliga. Selle selgitamiseks tuletame kõigepealt ühe abivalemi. Arvutame:

$$\begin{aligned}(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} [e^{2x} + e^{-2x} + 2] - \frac{1}{4} [e^{2x} + e^{-2x} - 2] \\ &= \frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{e^{2x}}{4} - \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2} = 1.\end{aligned}$$

Järelikult kehtib valem

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1. \quad (1.9)$$

See seos on tuntud trigonomeetria valemi  $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$  analoog hüperboolsete trigonomeetriliste funktsioonide korral.

Vaatleme nüüd kahte parameetriselt antud joont, millest esimene on kirjeldatud võrranditega

$$\begin{cases} x = R \cosh t \\ y = R \sinh t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.10)$$

ja teine võrranditega

$$\begin{cases} x = -R \cosh t \\ y = R \sinh t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.11)$$

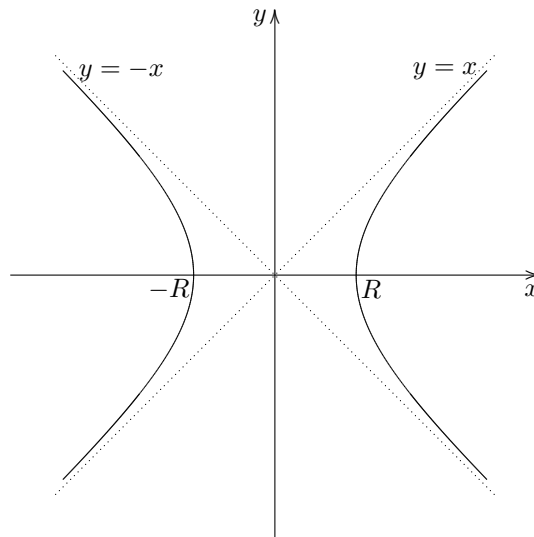
kus kordaja  $R$  on positiivne konstant. Nii joone (1.10) kui (1.11) korral kehtib järgmine võrdus

$$x^2 - y^2 = (R \cosh t)^2 - (R \sinh t)^2 = R^2[(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2] = R^2$$

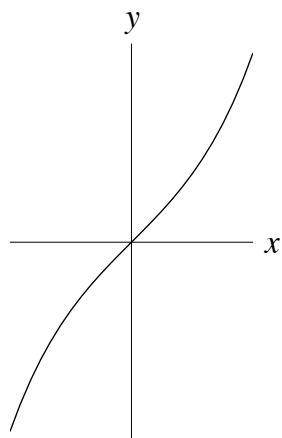
ehk

$$x^2 - y^2 = R^2. \quad (1.12)$$

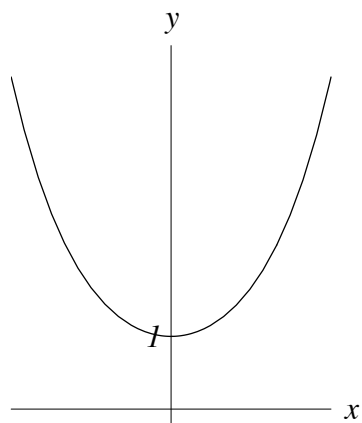
Võrrandiga (1.12) antud joont nimetatakse hüperbooliks (joonis 1.17). Hüperbool koosneb kahest  $x$  - telje suhtes sümmeetrilisest harust. Parempoolse haru parameetriselised võrrandid on (1.10) ja vasakpoolse haru parameetriselised võrrandid on (1.11).



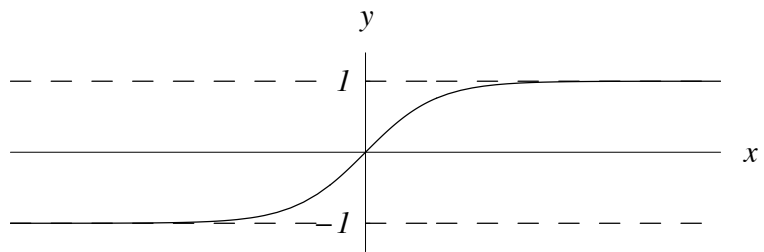
Joonis 1.17



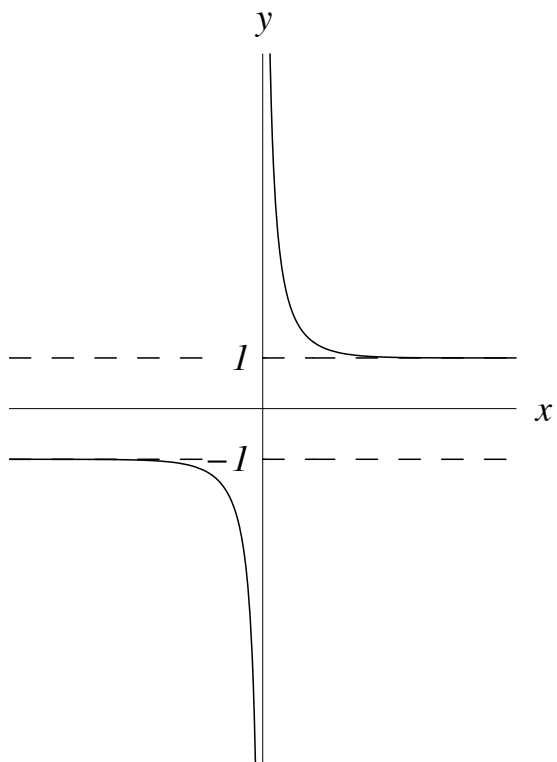
Joonis 1.18:  $y = \sinh x$



Joonis 1.19:  $y = \cosh x$



Joonis 1.20:  $y = \tanh x$



Joonis 1.21:  $y = \coth x$

## Peatükk 2

# Piirväärtus ja pidevus

### 2.1 Muutuva suuruse piirprotsessid.

Muutuva suuruse  $x$  kohta öeldakse, et ta on *järjestatud*, kui tema väärtustest on moodustatud järjestatud hulk, st hulk mille iga kahe elemendi kohta on võimalik öelda, kumb neist on eelnev ja kumb järgnev.

Järjestatud muutuva suuruse erijuhuks on ajast sõltuv suurus. Sel juhul on loomulik lugeda kahest suuruse väärtusest järgnevas seda, mis vastab suuremale ajamuutuja väärtusele. Näiteks materiaalse objekti sirgjoonelisel liikumisel läbitud teepikkus  $S(t)$  on järjestatud suurus. Kui  $t_2 > t_1$ , siis teepikkuse väärtus  $S(t_2)$  järgneb teepikkuse väärtusele  $S(t_1)$ .

Järjestatud muutuva suuruse erijuhuks on ka reaalarvude jada

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

Sel juhul genereerib jada indeks järjestuse. Kui  $k > i$ , siis jada element  $x_k$  järgneb elemendile  $x_i$ .

Selles paragrahvis tegeleme me selliste järjestatud suurustega, mis mööda järjestust edasi liikudes lähenevad teatud fikseeritud arvule. Need on nn koonduvad e piirväärtust omavad suurused. Nendest mõistetest arusaamiseks käsitleme kõigepealt ühte *näidet* mehaanika vallast.

Olgu vaatluse all vedru, mis on ühest otsast kinnitatud ja teine ots on lah-tine. Olgu tasakaaluasendis vedru pikkus  $a$ . Kui vedrut kokku suruda või välja venitada ja seejärel vabastada, hakkab tema lahtine otspunkt tasakaaluasendi ümber võnkuma. Vedru pikkus on sel juhul ajast sõltuv (seega järjestatud) muutu-v suurus  $x$ . Võnkumisprotsessi mõjutavad mitmesugused takistusjõud, mille tagajärjel võnkumine sumbub, st vedru pikkus  $x$  läheneb arvule  $a$ . Vaatame kuidas oleks võimalik sellist lähenemisprotsessi matemaatilistes terminites kirjeldada. Üks võimalus on järgmine. Valime mingisuguse tasakaalupunkti ümbruse, näiteks  $(a - 0.1, a + 0.1)$ . Kuna võnkumine sumbub, siis mingist ajahetkest (st  $x$  väärtusest) alates kõik järgnevad vedru pikkuse väärtused  $x$  jäävad vahemikku  $(a - 0.1, a + 0.1)$ , st rahuldavad võrratust  $|x - a| < 0.1$ . Edasi valime mingi

teise, väiksema raadiusega ümbruse, nt  $(a - 0.01, a + 0.01)$ . Arvestades jällegi seda, et võnkumine sumbub, leidub mingi teine, eelnevast suurem ajahetk ja sellele vastav  $x$  väärtus nii, et kõik järgnevad  $x$  väärtused jäävad vahemikku  $(a - 0.01, a + 0.01)$ , st rahuldavad võrratust  $|x - a| < 0.01$ . Sellist arutelu võib jätkata suvalise kuitahes väikse raadiusega ümbrusega  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Järelikult, iga kuitahes väikese positiivse arvu  $\varepsilon$  korral saab näidata sellist suuruse  $x$  väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuva suuruse väärtused kuuluvad arvu  $a$  ümbrusesse  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , st rahuldavad võrratust  $|x - a| < \varepsilon$ .

Muutuva suuruse piirväärtuse üldine definitsioon on järgmine:

Olgu  $x$  järjestatud muutuv suurus. Arvu  $a$  nimetatakse muutuva suuruse  $x$  *piirväärtuseks*, kui iga kuitahes väikese positiivse arvu  $\varepsilon$  korral saab näidata sellist suuruse  $x$  väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuva suuruse väärtused kuuluvad arvu  $a$  ümbrusesse  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , st rahuldavad võrratust  $|x - a| < \varepsilon$ .

Kui arv  $a$  on suuruse  $x$  piirväärtus, siis öeldakse, et suurus  $x$  läheneb arvule  $a$  ehk koondub arvuks  $a$  ja kirjutatakse

$$x \rightarrow a \quad \text{või} \quad \lim x = a.$$

Piirväärtuse üldises definitsioonis ei ole fikseeritud kuidas (vasakult, paremalt või mõlemalt poolt) muutuja  $x$  lähenemine arvule  $a$  toimub. Seega on piirprotsessi  $x \rightarrow a$  erijuhtudeks sellised piirprotsessid, kus  $x$  läheneb arvule  $a$  ainult vasakult või paremalt. Ühepoolsete piirprotsesside definitsioonid saame üldisest piirväärtuse definitsioonist, kui me seal esineva ümbruse  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  kitsendame kas vasakpoolseks või parempoolseks ümbruseks  $(a - \varepsilon, a]$  või  $[a, a + \varepsilon)$ .

Muutuv suurus  $x$  läheneb *vasakult* arvule  $a$ , kui iga kuitahes väikese positiivse arvu  $\varepsilon$  korral saab näidata sellist suuruse  $x$  väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuva suuruse väärtused kuuluvad poollõiku  $(a - \varepsilon, a]$ . Sellisel juhul kirjutatakse

$$x \rightarrow a^-.$$

Muutuv suurus  $x$  läheneb *paremalt* arvule  $a$ , kui iga kuitahes väikese positiivse arvu  $\varepsilon$  korral saab näidata sellist suuruse  $x$  väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuva suuruse väärtused kuuluvad poollõiku  $[a, a + \varepsilon)$ . Siis kirjutatakse

$$x \rightarrow a^+.$$

Saab konstrueerida ka lihtsaid mehaanilisi mudeleid, mis illustreerivad ühepoolset koondumist. Näiteks, kui vedru on ühendatud mingi tugeva võnkumist summutava seadmega (nt amortisaatoriga), siis võnkumist ümber tasakaalupunkti ei teki. Vedru pikkus  $x$  läheneb  $a$ -le ainult vasakult või paremalt sõltuvalt sellest, kas vedru on kokku surutud või välja venitatud.



Defineerime ka sellised piirprotsesseid, mille käigus  $x$  läheneb pluss või miinus lõpmatusele. Idee poolest on need definitsioonid sarnased eelpooltoodud definitsioonidele, ainult reaalarvu  $a$  ümbruste asemel kasutatakse lõpmatuse või miinus lõpmatuse ümbrust.

Alustame suurusest, mis läheneb pluss lõpmatusele. Piltlikult väljendudes on tegemist sellise järjestatud suurusega, mis mööda järjestust edasi liikudes kasvavab piiramatult, st saab suuremaks kuitahes suurest positiivsest arvust  $M$ . Selgitame seda lähemalt. Olgu näiteks  $M = 100$ . Leidub selline  $x$  väärtus, millest alates kõik järgnevad  $x$  väärtused on 100-st suuremad. Suurendame arvu  $M$ . Olgu nt  $M = 10000$ . Leidub selline (eelnevast suurem)  $x$  väärtus, millest alates kõik järgnevad  $x$  väärtused on 10000-st suuremad jne. Kokkuvõttes, kuitahes suure positiivse arvu  $M$  korral saab näidata sellist suuruse  $x$  väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuva suuruse väärtused on arvust  $M$  suuremad, st rahuldavad võrratust  $x > M$ .

Üldine definitsioon on järgmine:

Muutuja suuruse  $x$  piirväärtus on *lõpmatus* ehk muutuv suurus  $x$  läheneb lõpmatusele, kui iga kuitahes suure positiivse arvu  $M$  korral saab näidata sellist suuruse  $x$  väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuja suuruse väärtused kuuluvad lõpmatuse ümbrusesse  $(M, \infty)$ , st rahuldavad võrratust  $x > M$ . Taolist piirprotsessi tähistatakse järgmiselt:

$$x \rightarrow \infty \quad \text{või} \quad \lim x = \infty.$$

Analoogiliselt saab defineerida ja selgitada ka piirprotsessi  $x \rightarrow -\infty$ . Definitsioon on järgmine:

Muutuja suuruse  $x$  piirväärtus on *miinus lõpmatus* ehk muutuv suurus  $x$  läheneb miinus lõpmatusele, kui iga kuitahes suure positiivse arvu  $M$  korral saab näidata sellist suuruse  $x$  väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuja suuruse väärtused kuuluvad miinus lõpmatuse ümbrusesse  $(-\infty, -M)$ , st rahuldavad võrratust  $x < -M$ . Sellise piirprotsessi tähistusviis on

$$x \rightarrow -\infty \quad \text{või} \quad \lim x = -\infty.$$

## 2.2 Jada piirväärtus.

Kuna jada on järjestatud muutuja suuruse erijuht, saab muutuja suuruse piirväärtuse definitsiooni jadale otseselt üle kanda. See järgmine:

Arvu  $a$  nimetatakse reaalarvude jada  $x_1, x_2, x_3, \dots$  *piirväärtuseks*, kui iga kuitahes väikese positiivse arvu  $\varepsilon$  korral saab näidata sellist jada elementi  $x_n$ , millest alates kõik järgnevad jada elemendid kuuluvad arvu  $a$  ümbrusesse  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Jada piirväärtuse kirjutusviis on järgmine:

$$x_n \rightarrow a \quad \text{või} \quad \lim x_n = a.$$

Lõplikku piirväärtust omavat jada nimetatakse *koonduvaks*. Vastasel juhul nimetatakse jada *hajuvaks*.

*Näide.* Vaatleme jada elementidega  $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2^n}$ . Taolise jada piirväärtus on 1. Selle tõestamiseks kontrollime piirväärtuse definitsiooni kehtivust arvuga  $a = 1$ . Vastavalt definitsioonile peame me näitama, et suvalise kuitahes väikese positiivse arvu  $\varepsilon$  leidub selline jada element, millest alates kõik järgnevad jada elemendid kuuluvad arvu 1 ümbrusesse  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ . Taolisesse ümbrusesse kuuluvad jada elemendid rahuldavad võrratust  $1 - \varepsilon < x_n < 1 + \varepsilon$ . Lahendame selle võrratuse arvu  $n$  suhtes:

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon < x_n < 1 + \varepsilon &\Leftrightarrow 1 - \varepsilon < 1 + \frac{(-1)^n}{2^n} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{(-1)^n}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow \\ &\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 < 2^n \varepsilon \Leftrightarrow 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Järelikult: kui me etteantud  $\varepsilon > 0$  korral valime elemendi  $x_m$  nii, et  $m > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ , siis kehtib  $x_n \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$  iga  $x_m$ -le järgneva jada liikme  $x_n$  korral. Seega on jada piirväärtuse definitsioon täidetud arvuga  $a = 1$ . Olemegi tõestanud, et  $\lim \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^n}\right) = 1$ . Illustreerime seda tõestust veel mõnede erijuhtude vaatlemisega. Selleks paneme kirja mõned jada esimesed elemendid:

$$\begin{aligned} x_1 = 0.5, x_2 = 1.25, x_3 = 0.875, x_4 = 1.0625, x_5 = 0.96875, \\ x_6 = 1.015625, x_7 = 0.9921875, x_8 = 1.0039625, \dots \end{aligned}$$

Olgu  $\varepsilon = 0.1$ . Näeme, et alates neljandast elemendist kuuluvad kõik järgnevad jada elemendid ümbrusesse  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) = (1 - 0.1, 1 + 0.1) = (0.9, 1.1)$ . Järgmiseks olgu  $\varepsilon = 0.05$ . Alates viiendast elemendist kuuluvad kõik järgnevad jada elemendid ümbrusesse  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) = (1 - 0.05, 1 + 0.05) = (0.95, 1.05)$ . Kui  $\varepsilon = 0.01$ , siis alates seitsmendast elemendist kuuluvad kõik järgnevad elemendid ümbrusesse  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) = (1 - 0.01, 1 + 0.01) = (0.99, 1.01)$  jne.

## 2.3 Lõpmatult kahanevad, lõpmatult kasvavad ja tõkestatud suurused.

Järgnevalt vaatleme detailsemalt selliseid suurusi, mis lähenevad nullile või kasvavad piiramatult. Traditsiooniliselt kasutatakse selliste suuruste tähistamiseks kreeka tähestiku esimesi tähti  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

### Lõpmatult kahanevad ja kasvavad suurused.

Muutuvat suurust  $\alpha$  nimetatakse *lõpmatult väikeseks* ehk *lõpmatult kahanevaks*, kui  $\lim \alpha = 0$ .

Muutuvat suurust  $\alpha$  nimetatakse *lõpmatult kasvavaks*, kui  $\lim |\alpha| = \infty$ .

Lõpmatult kahanevate ja kasvavate suuruste vahel eksisteerib lihtne seos. Nimelt on nad teineteise pöördarvud. Kehtib järgmine väide.

**Teoreem 2.1.** Suurus  $\alpha$  on lõpmatult kahanev siis ja ainult siis, kui suurus  $\frac{1}{\alpha}$  on lõpmatult kasvav.

*Tõestus.* Tõestame ainult selle väite esimese poole, so: kui  $\alpha$  on lõpmatult kahanev, siis  $\frac{1}{\alpha}$  on lõpmatult kasvav. Vastupidine väide (kui  $\frac{1}{\alpha}$  on lõpmatult kasvav, siis  $\alpha$  on lõpmatult kahanev) tõestatakse analoogiliselt.

Niisiis olgu  $\alpha$  lõpmatult kahanev, st  $\alpha \rightarrow 0$ . Me peame tõestama, et suurus  $\beta = \frac{1}{\alpha}$  on lõpmatult kasvav, st  $|\beta| = \left|\frac{1}{\alpha}\right| \rightarrow \infty$ . Vastavalt selle piirprotsessi definitsioonile (vt §2.1) tuleb meil näidata, et suvalise kuitahes suure positiivse arvu  $M$  korral eksisteerib selline suuruse  $\beta$  väärtus  $\beta_M$  nii, et kõik  $\beta_M$ -le järgnevad  $\beta$  väärtused rahuldavad võrratust  $|\beta| > M$ .

Fikseerimegi mingi positiivse arvu  $M$  ja kasutame eeldust  $\alpha \rightarrow 0$ . Vastavalt piirprotsessi  $\alpha \rightarrow 0$  definitsioonile (vt §2.1) eksisteerib suvalise kuitahes väikese positiivse arvu  $\varepsilon$  korral selline suuruse  $\alpha$  väärtus  $\alpha_\varepsilon$  nii, et kõik  $\alpha_\varepsilon$ -le järgnevad  $\alpha$  väärtused rahuldavad võrratust  $|\alpha| < \varepsilon$ .

Kuna viimases lauses võib  $\varepsilon$  olla suvaline positiivne arv, saame me valida  $\varepsilon = \frac{1}{M}$ . Siis kehtivad kõigi  $\alpha_\varepsilon$ -le järgnevate  $\alpha$  väärtuste korral järgmised seosed:

$$|\alpha| < \frac{1}{M} \Leftrightarrow |\alpha|M < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} > M \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\alpha}\right| > M \Leftrightarrow |\beta| > M.$$

Seega defineerides

$$\beta_M = \frac{1}{\alpha_\varepsilon}$$

näeme, et kõik  $\beta_M$ -le järgnevad  $\beta$  väärtused rahuldavad võrratust  $|\beta| > M$ . Seda oligi vaja tõestada.

**Näiteid.** 1. Vaatleme jadasid

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \quad (\text{so } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots)$$

$$\beta_n = n \quad (\text{so } 1, 2, 3, 4 \dots).$$

Nende jadade liikmed on teineteise pöördarvud, st  $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ . Kõigepealt märgime, et jada  $\alpha_n$  on lõpmatult kahanev, st  $\alpha_n \rightarrow 0$ . Tõepoolest, kui me suvalise positiivse arvu  $\varepsilon$  korral valime jada liikme, mille indeks  $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ , siis kõigi sellele liikmele järgnevate jada liikmete  $\alpha_n$  korral kehtivad seosed

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n\varepsilon > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \alpha_n < \varepsilon.$$

Kuna lisaks  $\alpha_n > 0$ , siis saamegi võrratuse  $|\alpha_n| < \varepsilon$ , mis näitab, et  $\alpha_n \rightarrow 0$ . Vastavalt teoreemile 2.1 on jada  $\beta_n$  lõpmatult kasvav, st  $|\beta_n| \rightarrow \infty$ . Märgime, et kuna antud juhul  $\beta_n > 0$ , siis  $|\beta_n| = \beta_n$  ja järelikult  $\beta_n \rightarrow \infty$ .

2. Vaatleme jadasid

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad (\text{so } -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots)$$

$$\beta_n = (-1)^n n \quad (\text{so } -1, 2, -3, 4 \dots).$$

Jällegi  $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ . Peale selle  $\alpha_n \rightarrow 0$ . Tõepoolest, kui me suvalise positiivse arvu  $\varepsilon$  korral valime jada liikme, mille indeks  $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ , siis kõigi sellele liikmele järgnevate jada liikmete  $\alpha_n$  korral kehtivad seosed

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n\varepsilon > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow |\alpha_n| < \varepsilon.$$

See näitab, et  $\alpha_n \rightarrow 0$ . Teoreem 2.1 põhjal on  $\beta_n$  lõpmatult kasvav, st  $|\beta_n| \rightarrow \infty$ .

**Tõkestatud suurused.** Muutuvat suurust  $\alpha$  nimetatakse *tõkestatuks*, kui selle suuruse muutumiskiirkond on tõkestatud.

Tuletame meelde, et hulk  $A$  on tõkestatud, kui leidub lõplik vahemik  $(a, b)$  nii, et  $A \subset (a, b)$ . (vt §1.1). Järelikult: suurus  $\alpha$  on tõkestatud, kui kõik suuruse  $\alpha$  väärtused kuuluvad mingisse lõplikku vahemikku  $(a, b)$ .

Järgnevalt vaatleme lõpmatult väikese suuruse  $\alpha$  ja tõkestatud suuruse  $\beta$  korrutise käitumist. Kahe järjestatud muutuva suuruse  $\alpha$  ja  $\beta$  korrutis  $\gamma = \alpha\beta$  on muutuv suurus, mille väärtusteks on suuruste  $\alpha$  ja  $\beta$  väärtuste korrutised.

**Teoreem 2.2.** *Kui suurus  $\alpha$  on lõpmatult kahanev ja suurus  $\beta$  on tõkestatud, siis nende korrutis  $\alpha\beta$  on lõpmatult kahanev.*

*Tõestus.* Olgu  $\alpha$  lõpmatult kahanev ja  $\beta$  tõkestatud. Me peame näitama, et sellisel juhul on  $\gamma = \alpha\beta$  samuti lõpmatult kahanev, st  $\gamma \rightarrow 0$ . Vastavalt definitsioonile tuleb näidata, et suvalise kuitahes väikese positiivse arvu  $\varepsilon$  korral leidub selline suurus  $\gamma$  väärtus  $\gamma_\varepsilon$  nii, et kõik  $\gamma_\varepsilon$ -le järgnevad  $\gamma$  väärtused rahuldavad võrratust  $|\gamma| < \varepsilon$ .

Fikseerimegi mingi positiivse arvu  $\varepsilon$  ja kasutame eeldusi  $\alpha$  ja  $\beta$  kohta. Kuna  $\alpha \rightarrow 0$ , siis suvalise positiivse arvu  $\varepsilon_1$  korral leidub selline suurus  $\alpha$  väärtus  $\alpha_{\varepsilon_1}$  nii, et kõik  $\alpha_{\varepsilon_1}$ -le järgnevad  $\alpha$  väärtused rahuldavad võrratust  $|\alpha| < \varepsilon_1$ . Peale selle, kuna  $\beta$  on tõkestatud, siis leidub  $K > 0$  nii, et kõik suuruse  $\beta$  väärtused rahuldavad võrratust  $|\beta| < K$ .

Kuna  $\varepsilon_1$  võib olla suvaline positiivne arv, võime me valida

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{K}.$$

Järgmiseks valime  $\gamma_\varepsilon$  nii, et  $\gamma_\varepsilon = \alpha_{\varepsilon_1}\beta_\varepsilon$ , kus  $\beta_\varepsilon$  on mingisugune suurus  $\beta$  väärtus. Siis iga  $\gamma_\varepsilon$ -le järgneva  $\gamma$  väärtuse korral kehtivad seosed

$$|\gamma| = |\alpha\beta| = |\alpha||\beta| < \frac{\varepsilon}{K}K = \varepsilon.$$

Seega me näeme, et kõik  $\gamma_\varepsilon$ -le järgnevad suurus  $\gamma$  väärtused rahuldavad võrratust  $|\gamma| < \varepsilon$ . Seda oligi vaja tõestada.

*Näide.* Vaatleme jada

$$\gamma_n = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Esitame selle jada kahe jada korrutisena  $\gamma_n = \alpha_n\beta_n$ , kus  $\alpha_n = \frac{1}{n}$  ja  $\beta_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ . Nagu me eelnevalt nägime, on  $\alpha_n$  lõpmatult kahanev, st  $\alpha_n \rightarrow 0$ . Peale selle, kuna siinuse väärtused paiknevad lõigul  $[-1, 1]$ , siis saame  $|\sin x| \leq 1$  iga  $x$  korral, millest järeldub, et  $|\beta_n| \leq 1$ . Seega on jada  $\beta_n$  tõkestatud suvalise konstandiga  $K > 1$ . Rakendades äsjatõestatud väidet korrutisele  $\gamma_n$  saame, et  $\gamma_n$  on lõpmatult kahanev, st  $\gamma_n \rightarrow 0$ .

## 2.4 Funktsiooni piirväärtus.

Olgu antud funktsioon  $f$  argumentiga  $x$ . Kui argument  $x$  on järjestatud, siis saame me järjestada ka funktsiooni väärtused  $f(x)$ , lugedes funktsiooni kahest väärtusest järgnevaks selle, mis vastab argumenti järgnevale väärtusele.

Näiteks olgu funktsiooni  $f(x) = x^2$  argumentidest moodustatud järjestatud hulk  $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ . Siis vastab sellele funktsiooni väärtuste järjestatud hulk  $1, 4, 9, 16, 25, \dots$ .

Olgu funktsiooni  $f$  argument  $x$  järjestatud selliselt, et ta koondub mingiks arvaks  $a$ . Meid huvitab küsimus: kas sellisel juhul ka funktsiooni väärtus läheneb mingile arvule  $b$ ? Kui see on nii, ja peale selle arv  $b$  ei sõltu punktiks  $a$  koonduvast argumenti  $x$  järjestusest, siis on vaadeldaval funktsioonil punktis  $a$  piirväärtus.

**Funktsiooni piirväärtuse definitsioon.** Funktsioonil  $f$  on *piirväärtus*  $b$  kohal  $a$ , kui suvalises piirprotsessis  $x \rightarrow a$ , mis rahuldab tingimust  $x \neq a$ , funktsiooni väärtus  $f(x)$  läheneb arvule  $b$ .

Funktsiooni piirväärtuse kirjutusviis on

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

või

$$f(x) \rightarrow b \quad \text{kui} \quad x \rightarrow a.$$

Fraasi "piirväärtus kohal  $a$ " asemel võib kasutada ka samaväärseid fraase "piirväärtus punktis  $a$ " või "piirväärtus argumenti lähenemisel väärtusele  $a$ ".

Tingimus  $x \neq a$  piirväärtuse definitsioonis on sisse toodud selleks, et eristada funktsiooni väärtust kohal  $a$  tema piirväärtusest kohal  $a$ . Taoline eristus on vajalik funktsiooni pidevuse käsitlemisel edaspidistes paragrahvides.

*Näide.* Urime funktsiooni

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1}$$

käitumist protsessis  $x \rightarrow 1$ . Vaadeldav funktsioon on määratud kõikjal välja arvatud punkt  $x = 1$ . Kui  $x \neq 1$ , siis taandades murru  $\frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1}$  lugejast ja nimetajast teguri  $x - 1$ , saame sellele funktsioonile lihtsama valemi

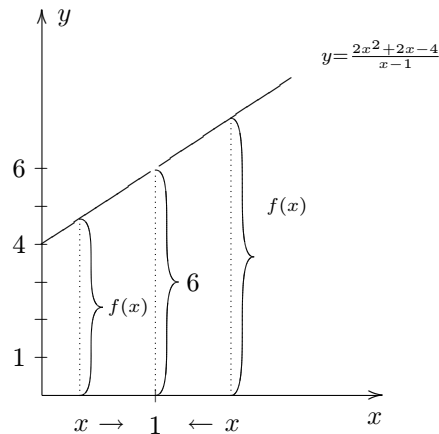
$$f(x) = 2x + 4, \quad x \neq 1.$$

Valime mõned punktiks 1 koonduvad argumenti jadad ning arvutame neile vastavad funktsiooni väärtuste jadad:

$x_1 = 0$	$x_2 = 0.5$	$x_3 = 0.9$	$x_4 = 0.95$	$x_5 = 0.99 \dots$
$f(x_1) = 4$	$f(x_2) = 5$	$f(x_3) = 5.8$	$f(x_4) = 5.9$	$f(x_5) = 5.98 \dots$
$x_1 = 2$	$x_2 = 1.5$	$x_3 = 1.1$	$x_4 = 1.05$	$x_5 = 1.01 \dots$
$f(x_1) = 8$	$f(x_2) = 7$	$f(x_3) = 6.2$	$f(x_4) = 6.1$	$f(x_5) = 6.02 \dots$
$x_1 = 3$	$x_2 = 0$	$x_3 = 1.1$	$x_4 = 0.99$	$x_5 = 1.001 \dots$
$f(x_1) = 10$	$f(x_2) = 4$	$f(x_3) = 6.2$	$f(x_4) = 5.98$	$f(x_5) = 6.002 \dots$

Esimeses jadas koondub  $x$  vasakult, teises koondub paremalt ja kolmandas koondub vaheldumisi paremalt ja vasakult. Kõigil toodud juhtudel koondub funktsiooni väärtus  $f(x)$  arvuks 6. Saab näidata, et suvalises piirprotsessis  $x \rightarrow 1$  koondub vaadeldava funktsiooni väärtus arvuks 6. Seega

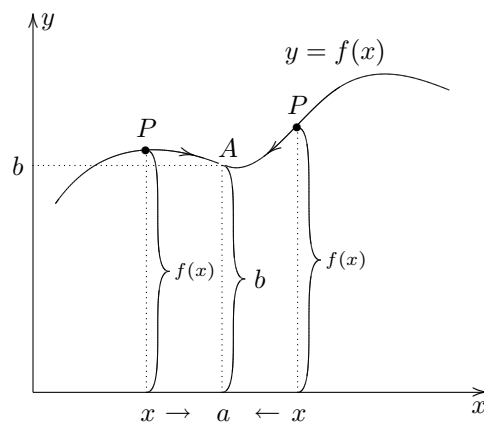
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1} = 6.$$



Joonis 2.1

Selle funktsiooni piirväärtust saab jälgida ka graafiliselt joonisel 2.1. Teatavasti näitab suurus  $f(x)$  funktsiooni graafiku "kõrgust" punktis  $x$ . Kui  $x \rightarrow 1^-$ , siis funktsiooni graafiku kõrgus suureneb ja läheneb arvule 6. Kui  $x \rightarrow 1^+$ , siis funktsiooni graafiku kõrgus väheneb ja läheneb samuti arvule 6. Suvalises piirprotsessis  $x \rightarrow 1$ , kus  $x \neq 1$ , läheneb funktsiooni graafiku kõrgus ühele ja samale arvule 6.

**Funktsiooni piirväärtuse geomeetriline tõlgendus.** Kui funktsioonil  $f(x)$  on piirväärtus  $b$  punktis  $a$ , siis suvalises piirprotsessis  $x \rightarrow a$ , kus  $x \neq a$ , läheneb funktsiooni graafiku kõrgus  $f(x)$  ühele ja samale arvule  $b$ . Teiste sõnadega: suvalises piirprotsessis  $x \rightarrow a$ , kus  $x \neq a$ , läheneb funktsiooni graafiku jooksev punkt  $P = (x, f(x))$  ühele ja samale punktile  $A = (a, b)$ . Seda on kujutatud joonisel 2.2.



Joonis 2.2

Mõned märkused:

1. Funktsiooni piirväärtus on alati üheselt määratud. See tähendab, et

$$\text{kui } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1 \text{ ja } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_2, \text{ siis } b_1 = b_2.$$

2. Funktsioonil võib olla piirväärtus ka punktis  $a$ , mis asub väljaspool tema määramispiirkonda. See oli nii eespooltoodud näites.

**Lõpmatuse sisaldavad piirväärtused.** Analoogiliselt saab käsitleda ka piirväärtusi, milles lõplike arvude  $a$  ja  $b$  asemel esinevad suurused  $-\infty$  või  $\infty$ . Selleks tuleb ülaltoodud definitsioonis lihtsalt arv  $a$  või  $b$  asendada kas suurusega  $\infty$  või  $-\infty$ .

Näiteks piirväärtuse

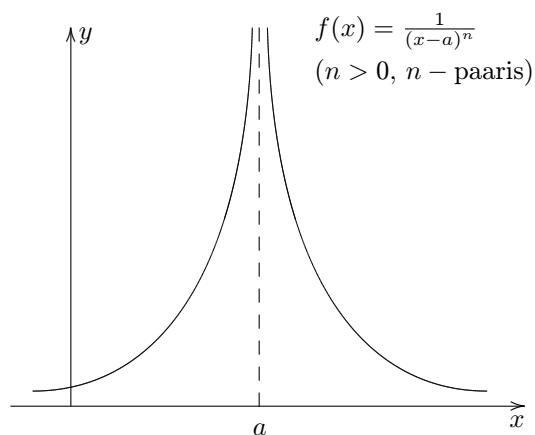
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

definitsioon on järgmine:

Funktsioonil  $f$  on *piirväärtus*  $\infty$  kohal  $a$ , kui suvalises piirprotsessis  $x \rightarrow a$ , mis rahuldab tingimust  $x \neq a$ , funktsiooni väärtus  $f(x)$  läheneb lõpmatusele.

Vaatleme mõningaid *näiteid* lõpmatuse sisaldavate piirväärtuste kohta. Neis näidetes kasutame piirväärtuste leidmiseks funktsioonide graafikuid.

1. Leiame  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n}$ , kus  $n$  on positiivne paarisarv. Funktsiooni  $f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}$  graafik on kujutatud joonisel 2.3.



Joonis 2.3

Graafikult näeme, et kui  $x \rightarrow a$ , siis funktsiooni graafiku kõrgus  $f(x)$  kasvab piiramatult ja läheneb lõpmatusale. Seega

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^2} = \infty.$$

2. Leiame  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$  ja  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x$ . Funktsiooni  $y = \arctan x$  graafik on kujutatud joonisel 1.14. Kui  $x \rightarrow \infty$ , siis funktsiooni graafiku kõrgus kasvab ja läheneb arvule  $\frac{\pi}{2}$ . Kui  $x \rightarrow -\infty$ , siis funktsiooni graafiku kõrgus väheneb ja läheneb arvule  $-\frac{\pi}{2}$ . Seega

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

3. Leiame  $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccot} x$  ja  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x$ . Funktsiooni  $y = \operatorname{arccot} x$  graafik on kujutatud joonisel 1.15. Kui  $x \rightarrow \infty$ , siis funktsiooni graafiku kõrgus väheneb ja läheneb arvule 0. Kui  $x \rightarrow -\infty$ , siis funktsiooni graafiku kõrgus suureneb ja läheneb arvule  $\pi$ . Seega

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccot} x = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi.$$

4. Leiame  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$  ja  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x$ . Eksponentfunktsioon käitub erjuhtudel  $a > 1$  ja  $0 < a < 1$  kvalitatiivselt erinevalt (joonised 1.4 ja 1.5). Esimeselt jooniselt näeme, et

$$\text{juhul } a > 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

ning teiselt jooniselt leiame, et

$$\text{juhul } 0 < a < 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty.$$



## 2.5 Funktsiooni ühepoolsed piirväärtused.

Funktsioonil  $f$  on *vasakpoolne piirväärtus*  $b$  kohal  $a$ , kui suvalises piirprotsessis  $x \rightarrow a^-$ , mis rahuldab tingimust  $x \neq a$ , funktsiooni väärtus  $f(x)$  läheneb arvule  $b$ .

Vasakpoolse piirväärtuse kirjutusviis on

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$$

või

$$f(x) \rightarrow b \quad \text{kui} \quad x \rightarrow a^-.$$

Funktsioonil  $f$  on *parempoolne piirväärtus*  $b$  kohal  $a$ , kui suvalises piirprotsessis  $x \rightarrow a^+$ , mis rahuldab tingimust  $x \neq a$ , funktsiooni väärtus  $f(x)$  läheneb arvule  $b$ .

Parempoolse piirväärtuse kirjutusviis on

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$$

või

$$f(x) \rightarrow b \quad \text{kui} \quad x \rightarrow a^+.$$

Toodud definitsioonides võib lõpliku arvu  $b$  asendada kas  $-\infty$ -ga või  $\infty$ -ga.

*Näide.* Olgu antud järgmine funktsioon:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{kui } x < 1, \\ x + 3, & \text{kui } x > 1. \end{cases}$$

Arvutame selle funktsiooni ühepoolsed piirväärtused punktis 1. Valime punktiks 1 koonduvad vasak- ja parempoolsed jadad ning arvutame neile vastavad funktsiooni väärtuste jadad:

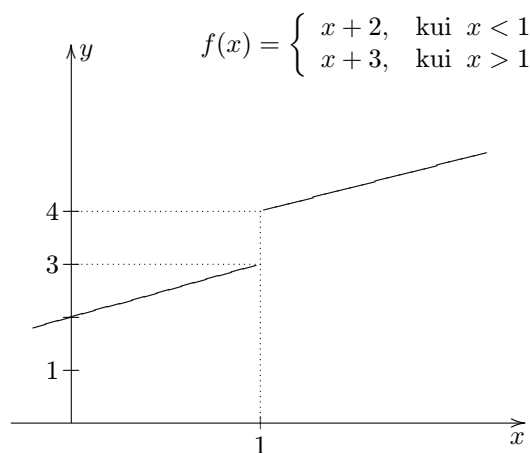
$$\begin{array}{cccccc} x_1 = 0 & x_2 = 0.5 & x_3 = 0.9 & x_4 = 0.95 & x_5 = 0.99 \dots \\ f(x_1) = 2 & f(x_2) = 2.5 & f(x_3) = 2.9 & f(x_4) = 2.95 & f(x_5) = 2.99 \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} x_1 = 2 & x_2 = 1.5 & x_3 = 1.1 & x_4 = 1.05 & x_5 = 1.01 \dots \\ f(x_1) = 5 & f(x_2) = 4.5 & f(x_3) = 4.1 & f(x_4) = 4.04 & f(x_5) = 4.01 \dots \end{array}$$

Näeme, et vasakult arvuks 1 koonduva jada korral läheneb  $f(x)$  arvule 3 ja paremalt arvuks 1 koonduva jada korral läheneb  $f(x)$  arvule 4. Saab tõestada, et suvaliste piirprotsesside  $x \rightarrow 1^-$  ja  $x \rightarrow 1^+$  korral läheneb  $f(x)$  vastavalt arvudele 3 ja 4. Seega

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4.$$

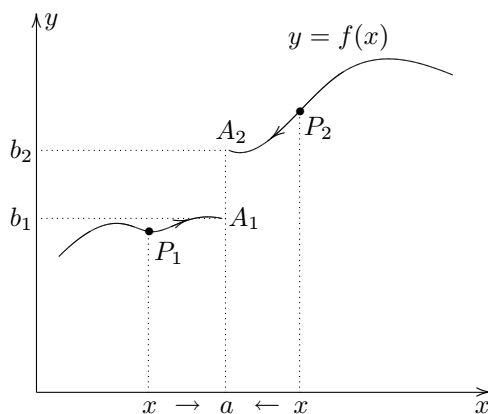
Illustreerime seda tulemust graafiliselt joonisel 2.4.



Joonis 2.4

Kui  $x \rightarrow 1^-$ , siis funktsiooni graafiku kõrgus tõuseb ja läheneb arvule 3. Kui  $x \rightarrow 1^+$ , siis funktsiooni graafiku kõrgus väheneb ja läheneb arvule 4.

Antud näites on funktsiooni ühepoolsete piirväärtused punktis 1 erinevad. Seetõttu puudub funktsioonil piirväärtus punktis 1. See on nii, sest eelmises paragrahvis toodud piirväärtuse definitsioon ei ole täidetud. Ei leidu arvu  $b$ , millele  $f(x)$  läheneks kõigis piirprotsessides  $x \rightarrow 1$ , kus  $x \neq 1$ . Vasakpoolses piirprotsessis  $x \rightarrow 1^-$  ja parempoolses piirprotsessis  $x \rightarrow 1^+$  läheneb  $f(x)$  erinevatele arvudele.



Joonis 2.5

**Funktsiooni ühepoolsete piirväärtuste geomeetriline tõlgendus.** Kui funktsioonil  $f(x)$  on vasakpoolne piirväärtus  $b_1$  ja parempoolne piirväärtus  $b_2$

punktis  $a$ , siis suvalises piirprotsessis  $x \rightarrow a^-$ , kus  $x \neq a$ , läheneb funktsiooni graafiku jooksev punkt  $P_1 = (x, f(x))$  punktile  $A_1 = (a, b_1)$  ja suvalises piirprotsessis  $x \rightarrow a^+$ , kus  $x \neq a$ , läheneb funktsiooni graafiku jooksev punkt  $P_2 = (x, f(x))$  punktile  $A_2 = (a, b_2)$  (joonis 2.5).

Kui  $b_1 \neq b_2$ , siis funktsioonil puudub piirväärtus punktis  $a$ , sest  $f(x)$  ei lähene ühele ja samale arvule suvalises piirprotsessis  $x \rightarrow a$ ,  $x \neq a$ . Piirprotsessi  $x \rightarrow a$  erijuhtudel  $x \rightarrow a^-$  ja  $x \rightarrow a^+$  läheneb  $f(x)$  erinevatele arvudele.

Kehtib järgmine väide:

**Teoreem 2.3.** *Piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  eksisteerib siis ja ainult siis, kui eksisteerivad võrdsed ühepoolsed piirväärtused  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  ja  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ . Peale selle, piirväärtuse  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  olemasolu korral kehtib valem*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Eespooltoodud näites olid funktsioonil olemas mõlemad ühepoolsed piirväärtused, kuid piirväärtus puudus. Saab tuua näiteid sellistest funktsioonidest, millel puuduvad ka ühepoolsed piirväärtused. Analüüsime funktsiooni

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

käitumist protsessis  $x \rightarrow 0^+$ . Selleks valime järgmise paremalt nulliks koonduva jada:  $x_n = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$  (ehk  $x_1 = \frac{2}{3\pi}$ ,  $x_1 = \frac{2}{5\pi}, \dots$ ). Vastavad funktsiooni väärtused on siis

$$f(x_n) = \sin(n + 1/2)\pi = \begin{cases} 1 & \text{kui } n \text{ on paaris,} \\ -1 & \text{kui } n \text{ on paaritu.} \end{cases}$$

Funktsioon omandab vaheldumisi väärtusi  $-1$  ja  $1$  ning seega ei lähene ühelegi arvule. Järelikult parempoolne piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$  puudub. Analooiliselt saab näidata, et puudub ka vasakpoolne piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{x}$ .

Vaatleme veel mõningaid näiteid lõpmatusi sisaldavate ühepoolsete piirväärtuste kohta.

1. Leiame  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$  ja  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$ . Jooniselt 1.10 näeme, et vasakpoolses piirprotsessis  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$  funktsiooni  $\tan x$  graafiku kõrgus kasvab piiramatult ja parempoolses piirprotsessis  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$  funktsiooni  $\tan x$  graafiku kõrgus väheneb piiramatult. Seega

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty.$$

2. Analooiliselt, kasutades joonist 1.11, leiame

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \cot x = -\infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = \infty.$$

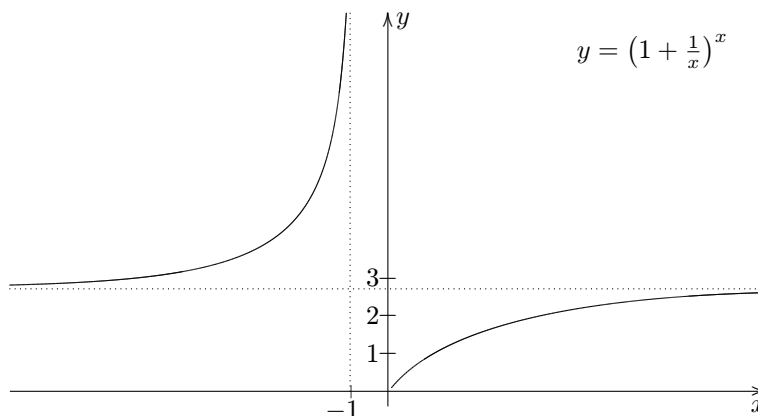
3. Leiame  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x$ . Funktsiooni  $y = \log_a x$  graafik on juhtudel  $a > 1$  ja  $0 < a < 1$  kvalitatiivselt erinev (joonised 1.6 ja 1.7). Neilt joonistel näeme, et

$$\begin{array}{ll} \text{juhul } a > 1 & \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty \quad \text{ja} \\ \text{juhul } 0 < a < 1 & \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \infty. \end{array}$$

**Arv e ja sellega seotud funktsioon.** Vaatleme järgmist funktsiooni:

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Selle funktsiooni loomulik määramispiirkond on  $X = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ . Graafik on kujutatud joonisel 2.6.



Joonis 2.6

Jooniselt näeme, et  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \infty$  ja  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 0$ . Peale selle, kui  $x \rightarrow \infty$  või  $x \rightarrow -\infty$ , läheneb funktsioon  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  teatud arvule, mis asub 2 ja 3 vahel. Tegemist on irratsionaalarvuga  $e$ :

$$e \approx 2.71828\dots$$

Seega

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Logaritmi alusel  $e$  nimetatakse naturaallogaritmiks ja tähistatakse sümboliga  $\ln$ . Seega  $\log_e x = \ln x$ .

## 2.6 Funktsiooni piirväärtuste omadused.

Paneme kõigepealt kirja järgmised aritmeetiliste tehetega seotud omadused:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x),$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x),$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  kui  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$

Otseste järeldustena omadustest 1 ja 2 saame me tuletada veel kaks omadust:

4.  $\lim_{x \rightarrow a} [Cf(x)] = \lim_{x \rightarrow a} C \lim_{x \rightarrow a} f(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x),$   $C$  – konstant,
5.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + (-1)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} [(-1)g(x)]$   
 $= \lim_{x \rightarrow a} f(x) + (-1) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x).$

Omadused 1 - 5 jäävad kehtima ka siis, kui neis esinev piirprotsess  $x \rightarrow a$  asendada ühega järgmistest piirprotsessidest:

$$x \rightarrow a^-, x \rightarrow a^+, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow \infty.$$

Omadusena 6 sõnastame liitfunktsiooni piirväärtuse arvutamise reegli:

6. Olgu antud kaks funktsiooni  $y = f(x)$  ja  $z = g(y)$ . Kui  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , siis kehtib valem

$$\lim_{x \rightarrow a} g[f(x)] = \lim_{y \rightarrow b} g(y).$$

Omadus 6 jääb kehtima ka siis, kui selles esinev piirprotsess  $x \rightarrow a$  asendada ühega järgmistest piirprotsessidest:

$$x \rightarrow a^-, x \rightarrow a^+, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow \infty$$

ning kui  $b$  asendada kas  $\infty$ -ga või  $-\infty$ -ga.

## 2.7 Lõpmatult kahanevad, kasvavad ja tõkestatud suurused kui funktsioonid.

Vaatleme muutujast  $x$  sõltuvat funktsiooni  $\alpha(x)$  piirprotsessis  $x \rightarrow a$ . Vastavalt §2.3 toodud definitsioonidele on funktsioon  $\alpha(x)$

*lõpmatult kahanev* ehk *lõpmatult väike* piirprotsessis  $x \rightarrow a$ , kui  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \rightarrow 0$ ;

*lõpmatult kasvav* piirprotsessis  $x \rightarrow a$ , kui  $\lim_{x \rightarrow a} |\alpha(x)| \rightarrow \infty$ .

Neis definitsioonides võib piirprotsessi  $x \rightarrow a$  asendada ühega järgmistest piirprotsessidest:

$$x \rightarrow a^-, x \rightarrow a^+, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow \infty.$$

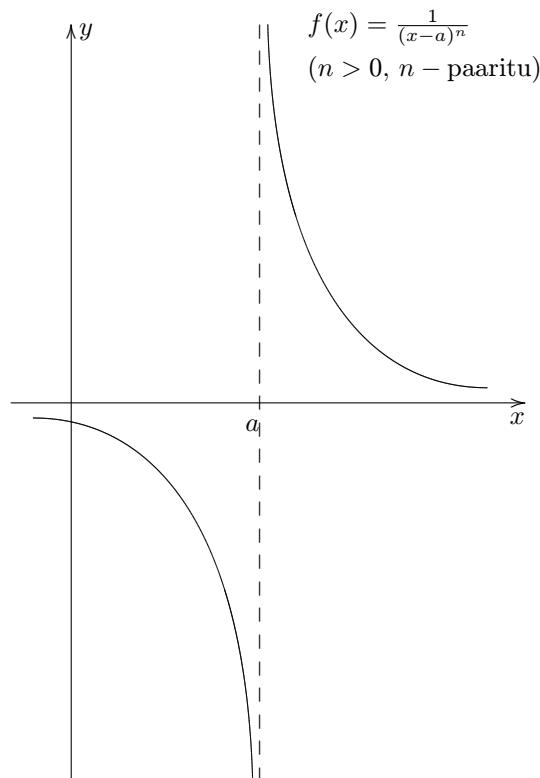
Teoreemist 2.1 järeldub vahetult järgmine teoreem:

**Teoreem 2.4.** Funktsioon  $\alpha(x)$  on lõpmatult kahanev suurus protsessis  $x \rightarrow a$  siis ja ainult siis, kui  $\frac{1}{\alpha(x)}$  on lõpmatult kasvav suurus samas protsessis.

Toome mõned näited.

1. Vaatleme funktsiooni  $(x - a)^n$ , kus  $n$  on positiivne täisarv. See funktsioon on lõpmatult kahanev protsessis  $x \rightarrow a$ , st  $\lim_{x \rightarrow a} (x - a)^n = 0$ . Seega  $\frac{1}{(x-a)^n}$  on lõpmatult kasvav samas protsessis, st  $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{1}{(x-a)^n} \right| = \infty$ . Siin võib eristada kaks erijuhtu:

- 1a. Kui  $n$  on paarisarv, siis  $\frac{1}{(x-a)^n} > 0$  iga  $x \neq a$  korral. Seega  $\left| \frac{1}{(x-a)^n} \right| = \frac{1}{(x-a)^n}$  ning  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty$ . Seda juhtu on kujutatud joonisel 2.3 eespool.
- 1b. Kui  $n$  on paaritu arv, siis  $\frac{1}{(x-a)^n} < 0$ , kui  $x < a$  ja  $\frac{1}{(x-a)^n} > 0$ , kui  $x > a$ .



Joonis 2.7

Seega läheneb funktsioon  $\frac{1}{(x-a)^n}$  ühepoolsetes piirprotsessides erineva märgiga lõpmatustele. Täpsemalt:  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty$  ja  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty$  (vt joonis 2.7). Kuna ühepoolsed piirväärtused on erinevad, puudub piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n}$ .

Küll aga eksisteerib  $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{1}{(x-a)^n} \right| = \infty$ .

2. Vaatleme funktsioone  $\tan x$  ja  $\cot x$  piirprotsessis  $x \rightarrow 0$ . Kuna  $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$ , siis  $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\tan x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} |\cot x| = \infty$  (vrdl jooniseid 1.10 ja 1.11).

3. Vaatleme samu funktsioone  $\tan x$  ja  $\cot x$  piirprotsessis  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . Kuna  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cot x = 0$ , siis  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left| \frac{1}{\cot x} \right| = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} |\tan x| = \infty$ .

4. Vaatleme funktsioone  $y = a^x$  ja  $y = a^{-x}$  piirprotsessis  $x \rightarrow \infty$ . Olgu konkreetsuse mõttes  $a > 1$ . Siis  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$  (joonis 1.4). Järelikult  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{a^x} = 0$ . Ühtlasi paneme tähele, et  $\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ , kus  $0 < \frac{1}{a} < 1$ . Seega võib piirväärtuse  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{a^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^x = 0$  leida ka jooniselt 1.5.

Funktsiooni  $\alpha(x)$  nimetatakse *tõkestatuks*, kui selle funktsiooni väärtuste hulk on tõkestatud.

Tõkestatud funktsiooni väärtused asuvad mingis lõplikus vahemikus  $(a, b)$ .

Näiteks funktsioonid  $\alpha(x) = \sin x$  ja  $\alpha(x) = \cos x$  on tõkestatud, sest nende väärtuste hulk  $Y = [-1, 1]$  on tõkestatud. Seevastu funktsioonid  $\tan x$  ja  $\cot x$  ei ole tõkestatud, kuna nende väärtuste hulk  $Y = \mathbb{R}$  ei ole tõkestatud.

Teoreemist 2.2 järgmine teoreem:

**Teoreem 2.5.** Kui  $\alpha(x)$  on lõpmatult kahanev piirprotsessis  $x \rightarrow a$  ja  $\beta(x)$  on tõkestatud, siis korrutis  $\alpha(x)\beta(x)$  on lõpmatult kahanev piirprotsessis  $x \rightarrow a$ .

*Näide.* Arvutame piirväärtuse  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin[f(x)]$ , kus  $f(x)$  on suvaline funktsioon. Selleks esitame funktsiooni  $x \sin[f(x)]$  korrutisena  $x \sin[f(x)] = \alpha(x)\beta(x)$ , kus  $\alpha(x) = x$  ja  $\beta(x) = \sin[f(x)]$ . Esimene tegur  $x$  on lõpmatult kahanev, kui  $x \rightarrow 0$  ja teine tegur on tõkestatud, kuna  $\sin[f(x)] \in [-1, 1]$ . Seega teoreem 2.5 põhjal saame

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin[f(x)] = 0.$$

## 2.8 Lõpmatult kahanevate ja lõpmatult kasvavate suuruste võrdlemine.

**Lõpmatult kahanevate suuruste võrdlemine.** Olgu  $\alpha(x)$  ja  $\beta(x)$  lõpmatult kahanevad suurused protsessis  $x \rightarrow a$ . See tähendab, et mõlemad need suurused lähenevad nullile, kui  $x \rightarrow a$ . Meid huvitab järgmine küsimus: kuidas võrrelda nende suuruste kahanemise kiirusi? Kõige õigem on seda teha suhet  $\frac{\alpha}{\beta}$  kasutades. Kui selline suhe koondub nulliks, siis lugejas olev  $\alpha$  kahaneb kiiremini, kui nimetajas olev  $\beta$ . Kui aga sellisel suhtel on nullist erinev piirväärtus, siis on  $\alpha$  ja  $\beta$  kahanemiskiirused samas suurusjärgus.

1. Kui eksisteerib lõplik nullist erinev piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ , siis nimetatakse suurusi  $\alpha$  ja  $\beta$  sama järku lõpmatult kahanevateks suurusteks.
2. Kui  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , siis nimetatakse suurusi  $\alpha$  ja  $\beta$  ekvivalentseteks lõpmatult kahanevateks suurusteks märkides seda kujul  $\alpha \sim \beta$ .
3. Kui  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ , siis nimetatakse suurust  $\alpha$  kõrgemat järku lõpmatult kahanevaks suuruseks  $\beta$  suhtes.

*Näited.* 1. Vaatleme astmefunktsioone  $a_1 x^{n_1}$  ja  $a_2 x^{n_2}$ , kus astmed  $n_1$  ja  $n_2$  on positiivsed täisarvud ning kordajad  $a_1$  ja  $a_2$  on nullist erinevad. Tegemist on lõpmatult kahanevate suurustega piirprotsessis  $x \rightarrow 0$ . Olgu  $n_1 > n_2$ . Siis on suhe  $\frac{a_1 x^{n_1}}{a_2 x^{n_2}} = \frac{a_1}{a_2} x^{n_1 - n_2}$  samuti positiivse astmega astmefunktsioon. Seega  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1 x^{n_1}}{a_2 x^{n_2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1}{a_2} x^{n_1 - n_2} = 0$ , millest järeldub, et funktsioon on  $a_1 x^{n_1}$  on kõrgemat järku lõpmatult väike suurus funktsiooni  $a_2 x^{n_2}$  suhtes.

2. Kuna  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$  ja  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (viimane väide tõestatakse l'Hospitali reeglit kasutades tagapool), siis  $\sin x \sim x$  piirprotsessis  $x \rightarrow 0$ .

Lõpmatult kahanevate suuruste võrdlemist saab kasutada ligikaudsetes arvutustes. Näiteks  $x \approx 0$  korral kehtib  $f(x) = x^2 + 3x^3 \approx x^2$ . See on nii, sest  $3x^3$  on kõrgemat järku lõpmatult kahanev  $x^2$  suhtes protsessis  $x \rightarrow 0$ . Seega võib  $x \approx 0$  korral liidetava  $3x^3$  funktsiooni  $f(x)$  avaldisest välja jätta, kuna ta on suhteliselt väiksem kui  $x^2$ . Peale selle, kuna  $\sin x \sim x$  piirprotsessis  $x \rightarrow 0$ , siis on väikeste nurkade  $x$  korral selle nurga siinus võrdne nurga endaga, st  $\sin x \approx x$ , kui  $x \approx 0$ .

Kahe ekvivalentse lõpmatult kahaneva suuruse vahe kohta kehtib järgmine teoreem:

**Teoreem 2.6.** *Kui  $\alpha$  ja  $\beta$  on ekvivalentsed lõpmatult kahanevad suurused, siis  $\alpha - \beta$  on kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus nii  $\alpha$  kui  $\beta$  suhtes.*

*Tõestus.* Kuna vastavalt eeldusele on  $\alpha$  ja  $\beta$  ekvivalentsed lõpmatult kahanevad suurused, siis

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}} = 1.$$

Seega,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left[ 1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \right] = 1 - \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - 1 = 0.$$

See võrdus näitab, et  $\alpha - \beta$  on kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus  $\alpha$  suhtes. Väide, et  $\alpha - \beta$  on kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus  $\beta$  suhtes, tõestatakse analoogiliselt.

*Näide.* Kuna  $\sin x \sim x$  piirprotsessis  $x \rightarrow 0$ , siis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin x} = 0.$$



**Lõpmatult kasvavate suuruste võrdlemine.** Olgu  $\alpha$  ja  $\beta$  lõpmatult kasvavad suurused protsessis  $x \rightarrow a$ .

1. Kui eksisteerib lõplik nullist erinev piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ , siis nimetatakse suurusi  $\alpha$  ja  $\beta$  sama järku lõpmatult kasvavateks suurusteks.
2. Kui  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , siis nimetatakse suurusi  $\alpha$  ja  $\beta$  ekvivalentseteks lõpmatult kasvavateks suurusteks märkides seda kujul  $\alpha \sim \beta$ .
3. Kui  $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \right| = \infty$ , siis nimetatakse suurust  $\alpha$  kõrgemat järku lõpmatult kasvavaks suuruseks  $\beta$  suhtes.

*Näide.* Käsitleme uuesti astmefunktsioone  $a_1 x^{n_1}$  ja  $a_2 x^{n_2}$ , kus astmed  $n_1$  ja  $n_2$  on positiivsed täisarvud ning kordajad  $a_1$  ja  $a_2$  on nullist erinevad. Seekord olgu vaatluse all piirprotsess  $x \rightarrow \infty$ . Selles protsessis on need funktsioonid lõpmatult kasvavad. Olgu  $n_1 > n_2$ . Siis on suhe  $\frac{a_1 x^{n_1}}{a_2 x^{n_2}} = \frac{a_1}{a_2} x^{n_1 - n_2}$  samuti positiivse astmega astmefunktsioon. Seega  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_1 x^{n_1}}{a_2 x^{n_2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_1}{a_2} x^{n_1 - n_2} = \infty$ , millest järeldub, et funktsioon  $a_1 x^{n_1}$  on kõrgemat järku lõpmatult kasvav suurus funktsiooni  $a_2 x^{n_2}$  suhtes.

## 2.9 Funktsiooni pidevus. Katkevuspunktide liigitus.

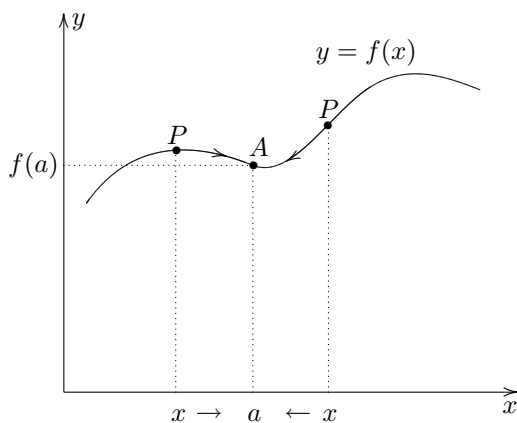
**Pideva funktsiooni mõiste.** Funktsiooni  $f$  nimetatakse *pidevaks punktis*  $a$ , kui

1.  $f$  on määratud argumenti väärtusel  $a$ , st  $a \in X$ ,
2. eksisteerib lõplik piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Väljendi "pidev punktis  $a$ " asemel võib kasutada ka sünonüüme "pidev kohal  $a$ " või "pidev argumenti väärtusel  $a$ ".

Geomeetriliselt tähendab funktsiooni pidevus joone pidevust. Täpsemalt: argumenti väärtusel  $x = a$  pideva funktsiooni graafik on punktis  $A = (a, f(a))$  pidev joon (joonis 2.8).

Selgitame seda lähemalt. Vastavalt pidevuse definitsioonis toodud 1. tingimusele on funktsioonil  $f(x)$  olemas väärtus punktis  $a$ , st  $f(a)$  eksisteerib. Peale selle, 2. tingimuse põhjal on olemas ka piirväärtus  $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Viimane tähendab seda, et suvalises piirprotsessis  $x \rightarrow a$ , kus  $x \neq a$ , läheneb graafiku jooksev punkt  $P(x, f(x))$  ühele ja samale punktile  $AP = (a, b)$ . Lõpuks, 3. tingimuse põhjal kehtib  $b = f(a)$ , mis tähendab, et graafiku piirpunkt  $A$  asub samuti funktsiooni graafikul, st graafik on punktis  $A$  pidev joon.



Joonis 2.8

Pideva funktsiooni definitsioonis esineva 3. tingimuse võib kirja panna ka pisut teistsugusel kujul. Selleks kasutame alljärgnevalt defineeritud argumendi muudu ja funktsiooni muudu mõisteid:

$$\begin{aligned}\Delta x &= x - a && \text{argumendi muut kohal } a, \\ \Delta y &= f(x) - f(a) && \text{funktsiooni muut kohal } a.\end{aligned}$$

Kehtib järgmine samaväärsete valemite ahel:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(a) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \Delta y = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.\end{aligned}$$

Järelikult on pideva funktsiooni definitsioonis esinev 3. tingimus samaväärne võrdusega

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Sõnastame selle tulemuse järgmiselt.

*Pideva funktsiooni muut läheneb nullile, kui selle funktsiooni argumendi muut läheneb nullile.*

Kehtivad järgmised väited:

1. Kui funktsioonid  $f$  ja  $g$  on pidevad punktis  $a$ , siis on selles punktis pidevad ka summa  $f + g$ , vahe  $f - g$ , korrutis  $fg$  ja eeldusel  $g(a) \neq 0$  ka jagatis  $\frac{f}{g}$ .
2. Kui funktsioon  $y = f(x)$  on pidev punktis  $a$  ja funktsioon  $z = g(y)$  on pidev punktis  $f(a)$ , siis on liitfunktsioon  $z = g[f(x)]$  pidev punktis  $a$ .

Need väited järelduvad otseselt §2.6 toodud piirväärtuste omadustest.

**Katkevuspunkti mõiste.** Punkti, kus funktsioon ei ole pidev, nimetatakse selle funktsiooni *katkevuspunktiks*.

Katkevuspunktis funktsiooni graafik katkeb. Katkevuspunkt võib paikneda näiteks väljaspool funktsiooni määramispiirkonda. Sellisel juhul on rikutud pideva funktsiooni definitsioonis toodud 1. tingimus. Juhul, kui katkevuspunkt paikneb funktsiooni määramispiirkonnas, siis on rikutud kas pidevuse 2. või 3. tingimus.

**Katkevuspunktide liigitus.** Olgu  $a$  funktsiooni  $f$  katkevuspunkt.

1. Kui punktis  $a$  eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  ja  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ , siis nimetatakse seda punkti funktsiooni  $f$  *esimest liiki katkevuspunktiks*. Esimest liiki katkevuspunkte on kaheksaguseid:

- a) Kui esimest liiki katkevuspunktis  $a$  kehtib võrdus

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

siis nimetatakse seda punkti funktsiooni  $f$  *kõrvaldatavaks katkevuspunktiks*.

- b) Kui esimest liiki katkevuspunktis  $a$  kehtib võrratus

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x),$$

siis nimetatakse seda punkti funktsiooni  $f$  *hüppepunktiks* (*hüppekohaks*).

2. Kui vähemalt üks ühepoolsetest piirväärtustest  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  või  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  puudub või ei ole lõplik, siis nimetatakse punkti  $a$  funktsiooni  $f$  *teist liiki katkevuspunktiks*. (Lühemalt: teist liiki katkevuspunktid on kõik need katkevuspunktid, mis ei ole esimest liiki.)

*Näiteid.* 1. §2.4 vaadeldud funktsioon

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1}$$

ei ole määratud punktis  $x = 1$ . Kuid selles punktis olemas lõplikud ühepoolsed piirväärtused ja need on võrdsed:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$ . Seega on  $x = 1$  esimest liiki katkevuspunkt, konkreetselt kõrvaldatav katkevuspunkt. Märgime, et vaadeldava funktsiooni graafik on sirge, millest on välja lõigatud punkt koordinaatidega  $(1, 6)$  (joonis 2.1). Katkevuspunkti on võimalik "kõrvaldada" defineerides funktsiooni väärtuse punktis  $x = 1$  valemiga  $f(1) = 6$ . Siis muutub funktsioon pidevaks, kusjuures tema graafik on pidev

sirge.

2. §2.5 vaadeldud funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{kui } x < 1 \\ x + 3, & \text{kui } x > 1 \end{cases}$$

katkeb punktis  $x = 1$ . Ühepoolsed piirväärtused eksisteerivad ja on lõplikud, kuid erinevad. Nimelt  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$  ja  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$ . Seega on  $x = 1$  esimest liiki katkevuspunkt, konkreetselt hüppekoht. Funktsiooni graafikul esineb "hüpe" argumenti väärtuse  $x = 1$  kohal (joonis 2.4).

3. Funktsioonil  $f(x) = \tan x$  on katkevuspunkt  $x = \frac{\pi}{2}$ . Ühepoolsed piirväärtused on olemas, kuid nad ei ole lõplikud:  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ . Seega on tegemist teist liiki katkevuspunktiga.

4. Funktsioon  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  katkeb kohal  $x = 0$ . Kuna ühepoolsed piirväärtused  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{x}$  ja  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$  puuduvad (vt §2.5), siis on tegemist teist liiki katkevuspunktiga.

## 2.10 Ühepoolne pidevus. Pidevus hulkadel. Elementaarfunktsioonide pidevus.

**Ühepoolset pidevad funktsioonid.** Funktsiooni  $f$  nimetatakse *vasakult pidevaks* punktis  $a$ , kui

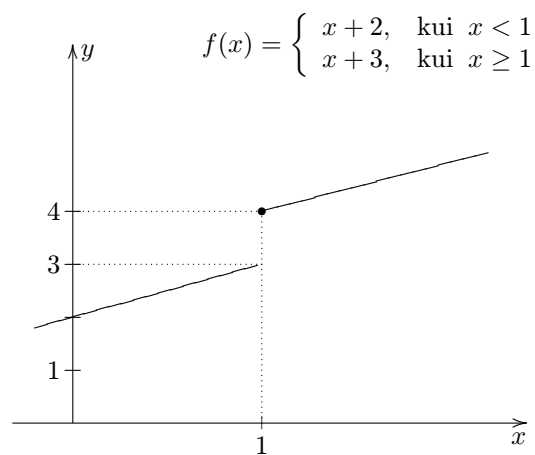
1.  $f$  on määratud argumenti väärtusel  $a$ , st  $a \in X$ ,
2. eksisteerib lõplik vasakpoolne piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ,
3.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ .

Analoogiliselt defineeritakse ka *paremalt pidev* funktsioon. Selleks tuleb definitsioonis esinev vasakpoolne piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  asendada parempoolse piirväärtusega  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

*Näiteid.* 1. Funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{kui } x < 1 \\ x + 3, & \text{kui } x \geq 1 \end{cases}$$

(vt joonis 2.9) on oma hüppepunktis  $x = 1$  paremalt pidev, sest  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 = f(1)$ . Samas ei ole see funktsioon punktis  $x = 1$  vasakult pidev, sest  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \neq f(1)$ .

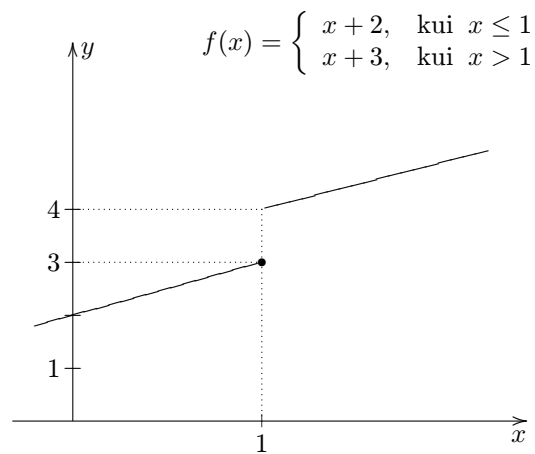


Joonis 2.9

2. Seevastu funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{kui } x \leq 1 \\ x + 3, & \text{kui } x > 1 \end{cases}$$

(joonis 2.10) on hüppepunktis  $x = 1$  vasakult pidev, sest  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 = f(1)$ , kuid ei ole seal paremalt pidev, sest  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 \neq f(1)$ .



Joonis 2.10

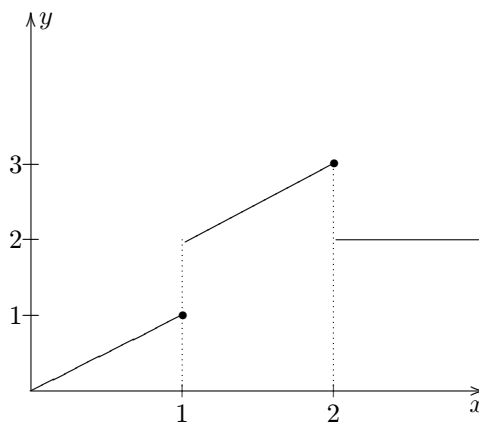
Kui funktsioon on punktis  $a$  nii vasakult kui ka paremalt pidev, siis on ta selles punktis pidev.

**Vahemikus pidevad funktsioonid.** Kui funktsioon  $f$  on pidev vahemiku  $(a, b)$  kõigis punktides, siis öeldakse, et see funktsioon on pidev vahemikus  $(a, b)$ .

Vahemikus  $(a, b)$  pideva funktsiooni graafik on selle vahemiku kohal pidev joon.

**Lõigul pidevad funktsioonid.** Lõigul pideva funktsiooni defineerimisel lähtutakse samuti pidevuse geomeetrisest sisust: pideva funktsiooni graafik on pidev joon. Seega peame me kirja panema tingimused, mis garanteerivad, et funktsiooni  $f$  graafik on lõigu  $[a, b]$  kohal pidev joon. Kui me eeldame, et funktsioon on vahemikus  $(a, b)$  pidev, siis me saavutame vaid selle, et tema graafik vahemiku  $(a, b)$  kohal pidev joon. Selleks, et saavutada joone pidevust lisaks vahemikule  $(a, b)$  ka otspunktides  $a$  ja  $b$  (so tervel lõigul  $[a, b]$ ) peame me nõudma funktsioonilt ka parempoolset pidevust vasakpoolses otspunktis  $a$  ja vasakpoolset pidevust parempoolses otspunktis  $b$ .

Kui funktsioon  $f$  on määratud lõigul  $[a, b]$ , pidev vahemikus  $(a, b)$  ning lõigu otspunktides  $a$  ja  $b$  vastavalt paremalt ja vasakult pidev, siis öeldakse, et see funktsioon on pidev lõigul  $[a, b]$ .

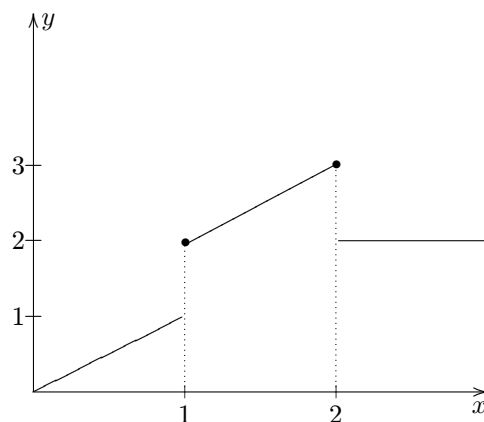


Joonis 2.11

*Näiteid.* 1. funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } x \leq 1 \\ x + 1, & \text{kui } 1 < x \leq 2 \\ 2, & \text{kui } x > 2 \end{cases}$$

(joonis 2.11) on pidev vahemikus  $(1, 2)$ . Samas ei ole see funktsioon pidev lõigul  $[1, 2]$ , sest ta ei ole selle lõigu vasakus otspunktis paremalt pidev. Nimelt  $f(1) = 1$ , kuid  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ . Tulemusena ei ole ka funktsiooni graafik terve lõigu  $[1, 2]$  kohal pidev. Vasakpoolses otspunktis  $x = 1$  graafik katkeb.



Joonis 2.12

2. Seevastu funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } x < 1 \\ x + 1, & \text{kui } 1 \leq x \leq 2 \\ 2, & \text{kui } x > 2 \end{cases}$$

on pidev lõigul  $[1, 2]$ , sest lisaks pidevusele vahemikus  $(1, 2)$  on ta paremalt pidev punktis  $x = 1$  ( $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 2$ ) ja vasakult pidev punktis  $x = 2$  ( $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 3$ ). Tulemusena on selle funktsiooni graafik pidev joon terve lõigu  $[1, 2]$  kohal.

**Elementaarfunktsioonide pidevus.** Põhilised elementaarfunktsioonid on kõigis oma määramispiirkonna punktides pidevad. Seda võib näha nende funktsioonide graafikutelt (joonised 1.2, 1.4 - 1.15). Määramispiirkondade kohal on graafikud pidevad jooned. See ei tähenda muidugi, et põhilistel elementaarfunktsioonidel ei oleks katkevuspunkte. Näiteks funktsioonil  $y = \tan x$  on katkevuspunktid  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , kuid need punktid asuvad väljaspool selle funktsiooni määramispiirkonda, so  $\tan(\frac{\pi}{2} + k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , ei ole määratud.

Kuna elementaarfunktsioonid on saadud põhilistest elementaarfunktsioonidest lõpliku arvu aritmeetiliste tehete ja liitfunktsioonide moodustamise kaudu ning nimetatud tehete puhul pidevus säilib, siis on ka *kõik elementaarfunktsioonid oma määramispiirkonnas pidevad*. Seega, kui punkt  $x = a$  kuulub elementaarfunktsiooni  $f(x)$  määramispiirkonda (st on täidetud pidevuse 1. tingimus), siis on automaatselt täidetud ka pidevuse 2. ja 3. tingimus ning me saame piirväärtuse arvutamisel punktis  $a$  kasutada valemit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

*Näited.* 1. Arvutame  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x$ . Kuna punkt  $x = \frac{\pi}{6}$  kuulub elementaarfunktsiooni  $\sin x$  määramispiirkonda, siis

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. Arvutame  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^3+1}{x^3-1}}$ . Kuna punkt  $x = 2$  kuulub elementaarfunktsiooni  $\sqrt{\frac{x^3+1}{x^3-1}}$  määramispiirkonda, siis

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^3+1}{x^3-1}} = \sqrt{\frac{2^3+1}{2^3-1}} = \frac{3}{\sqrt{7}}.$$

## 2.11 Lõigul pidevate funktsioonide omadusi.

Olgu antud funktsioon  $f$ , mis on määratud lõigul  $[a, b]$ .

**Funktsiooni suurim ja vähim väärtus lõigul.**

Kui leidub punkt  $x_1$  lõigult  $[a, b]$  nii, et iga teise punkti  $x$  korral samalt lõigult kehtib võrratus  $f(x_1) \geq f(x)$ , siis nimetatakse arvu  $f(x_1)$  funktsiooni  $f$  *suurimaks väärtuseks* (*absoluutseks maksimumiks*) lõigul  $[a, b]$ .

Kui leidub punkt  $x_2$  lõigult  $[a, b]$  nii, et iga teise punkti  $x$  korral samalt lõigult kehtib võrratus  $f(x_2) \leq f(x)$ , siis nimetatakse arvu  $f(x_2)$  funktsiooni  $f$  *vähimaks väärtuseks* (*absoluutseks miinimumiks*) lõigul  $[a, b]$ .

Funktsiooni suurima väärtuse kohal on funktsiooni graafikul kõrgeim punkt ja funktsiooni vähima väärtuse kohal on funktsiooni graafikul madalaim punkt.

Funktsiooni absoluutseid maksimume ja miinimume nimetatakse selle funktsiooni *absoluutseteks ekstreemumiteks*.

Loetleme kolm lõigul pidevate funktsioonide olulist omadust. Seejuures omadused 1 ja 2 anname tõestusteta. Esitame vaid nende omaduste üldisi selgitusi ja toome illustreerivaid näiteid.

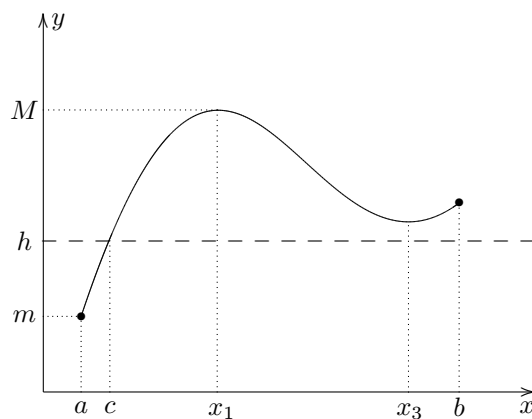
**Omadus 1.** *Lõigul pidev funktsioon saavutab oma suurima ja vähima väärtuse sellel lõigul.*

Seda omadust võib selgitada järgmiselt. Kui funktsioon  $f(x)$  on pidev lõigul  $[a, b]$ , siis on selle funktsiooni graafik antud lõigu kohal pidev joon. Taolisel pideval joonel on olemas nii kõrgeim kui ka madalaim punkt. Seega on funktsioonil olemas absoluutsed ekstreemumid vaadeldaval lõigul.

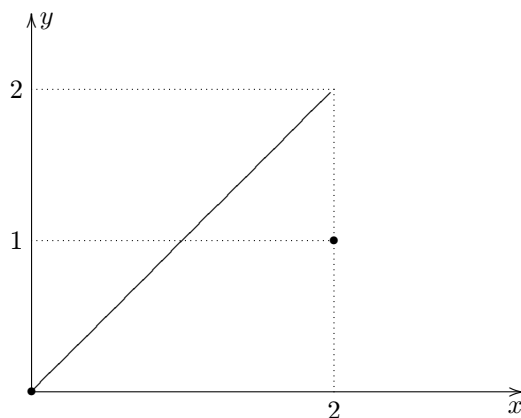
Märgime, et suurim ja vähim väärtus võivad esineda ka mitmes punktis. Näiteks funktsioonil  $y = \sin x$  on lõigul  $[-2\pi, 2\pi]$  suurim väärtus 1 ja vähim väärtus  $-1$ . Suurim väärtus saavutatakse punktides  $x = -\frac{3\pi}{2}$  ja  $x = \frac{\pi}{2}$  ning vähim väärtus saavutatakse punktides  $x = -\frac{\pi}{2}$  ja  $x = \frac{3\pi}{2}$  (joonis 1.8). Konstantne funktsioon (joonis 1.2) saavutab koguni kõigis punktides oma suurima ja vähima väärtuse.

Ühtlasi olgu mainitud, et funktsiooni suurim ja vähim väärtus lõigul  $[a, b]$  võivad esineda kas vahemikus  $(a, b)$  või ühes lõigu otspunktides  $a$  või  $b$ . Näiteks joonisel 2.13 kujutatud funktsioon saavutab oma vähima väärtuse  $m$  lõigu vasakpoolses otspunktis  $x = a$  ja suurima väärtuse  $M$  vahemikus  $(a, b)$  asuvas punktis  $x = x_1$ .





Joonis 2.13



Joonis 2.14

Kui  $f$  ei ole pidev lõigul  $[a, b]$ , siis ei tarvitse ta seal oma suurimat või vähimat väärtust saavutada. Selle väite põhjendamiseks vaatleme järgmist lõigul  $[0, 2]$  määratud funktsiooni:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } x \in [0, 2) \\ 1, & \text{kui } x = 2, \end{cases}$$

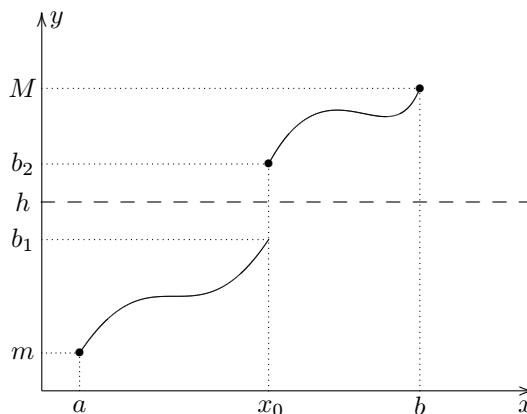
mille graafik on toodud joonisel 2.14. See funktsioon ei ole pidev lõigul  $[0, 2]$ , sest ta ei ole lõigu parempoolses otspunktis vasakult pidev. Funktsioonil  $f(x)$  on lõigul  $[0, 2]$  olemas vähim väärtus 0, mis saavutatakse punktis  $x = 0$ , kuid suurim väärtus puudub. See on nii, sest funktsiooni väärtuste hulk on poollõik  $Y = [0, 2)$ , millel puudub suurim arv. Valides ükskõikmillise funktsiooni väärtuse, alati saame me leida sellest veel suurema funktsiooni väärtuse. Näiteks valime

$y = 1.9$ . Selline väärtus saavutatakse  $x = 1.9$  korral, st  $f(1.9) = 1.9$ . Sellest väärtusest saame me leida veel suurema funktsiooni väärtuse, nt  $y = 1.99$ , mis saavutatakse  $x = 1.99$  korral, st  $f(1.99) = 1.99$ . Viimasest saame me leida veelgi suurema funktsiooni väärtuse, nt  $y = 1.999$  jne. Funktsioonil puudub suurim väärtus. Jooniselt on näha, et graafikul puudub kõrgeim punkt. Kui  $x \rightarrow 2^-$ , siis graafiku jooksev punkt tõuseb ja läheneb punktile koordinaatidega  $(2, 2)$ , kuid ei jõua selle punktini.

**Omadus 2.** Lõigul pidev funktsioon saavutab sellel lõigul iga väärtuse oma suurima ja vähima väärtuse vahel.

Selle omadusel on järgmine geomeetriline sisu. Kui me tõmbame lõigu  $[a, b]$  kohal oleva pideva joone kõrgeima ja madalaima punkti vahele horisontaalsirge, siis see sirge peab antud joont kuskil lõikama.

Näiteks vaatleme joonisel 2.13 toodud pidevat joont. Selle joone kõrgeima punkti koordinaadid on  $(x_1, M)$  ja madalaima punkti koordinaadid on  $(a, m)$ . Tõmbame nende kahe punkti vahele suvalise horisontaalsirge. Asugu see sirge  $x$ -telje suhtes kõrgusel  $h$ . Jooniselt näeme, et see sirge lõikab vaadeldavat joont ühes punktis (kui valiksime  $h$  suurema, lõikaks koguni mitmes punktis). Olgu lõikepunkti  $x$ -koordinaat  $c$ . Kuna lõikepunkt asub funktsiooni  $f$  graafikul, siis kehtib võrdus  $f(c) = h$ . See tähendabki, et funktsioon  $f$  saavutab (suvaliselt valitud) väärtuse  $h$  oma suurima ja vähima väärtuse vahel.



Joonis 2.15

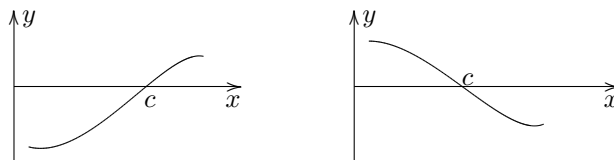
Kui  $f$  ei ole pidev lõigul  $[a, b]$ , ei tarvitse ta kõiki oma suurima ja vähima väärtuse (juhul kui viimased üldse eksisteerivad) vahel olevaid väärtusi saavutada. Näiteks on taoline funktsioon kujutatud joonisel 2.15. Funktsioonil on hüppekoht  $x = x_0$ . Suurim väärtus on  $M$  ja vähim väärtus on  $m$ . Funktsiooni väärtuste hulk on  $Y = [m, b_1) \cup [b_2, M]$ , kusjuures  $b_2 > b_1$ . Valime arvu  $h$  suurima ja vähima väärtuse vahel selliselt, et  $b_1 < h < b_2$ . Siis  $h \notin Y$ , seega funktsioon ei saavuta väärtust  $h$ . Geomeetriliselt tähendab see seda, et kõrgusel

$h$  tõmmatud horisontaalsirge ei lõika funktsiooni graafikut (joonis 2.15).

**Omadus 3.** Kui funktsioon  $f$  on pidev lõigul  $[a, b]$  ja omandab selle lõigu otspunktides erineva märgiga väärtusi, siis leidub sellel lõigul vähemalt üks punkt  $c$ , kus  $f(c) = 0$ .

*Tõestus.* Omadus 3 järelneb otseselt omadustest 1 ja 2. Kuna  $f$  on pidev lõigul  $[a, b]$ , siis ta saavutab sellel lõigul oma suurima ja vähima väärtuse. Peale selle, kuna funktsioonil  $f$  on lõigu otspunktides erineva märgiga väärtused, siis on selle funktsiooni suurim väärtus positiivne ja vähim väärtus negatiivne. Teisest küljest: vastavalt omadusele 2 saavutab  $f$  iga väärtuse oma suurima ja vähima väärtuse vahel. Kuna antud juhul 0 jääb suurima ja vähima väärtuse vahele, siis kuskil peab vaadeldav funktsioon saavutama väärtuse 0. See tähendabki, et lõigul  $[a, b]$  leidub vähemalt üks punkt  $c$ , kus  $f(c) = 0$ .

Omaduse 3 geomeetriline sisu on järgmine. Kui pideva joone üks otspunkt asub allpool  $x$ -telge ja teine otspunkt pealpool  $x$ -telge, siis peab see joon kuskil  $x$ -telge lõikama. Seda on illustreeritud joonisel 2.16 toodud graafikutel.



Joonis 2.16



## Peatükk 3

# Tuletis ja diferentsiaal

### 3.1 Tuletise, diferentseeruva funktsiooni ja diferentsiaali mõisted.

Olgu antud funktsioon  $f$  ja kuulugu punkt  $a$  selle funktsiooni määramispiirkonda.

**Tuletis ja diferentseeruv funktsioon.** Funktsiooni  $f$  *tuletis punktis*  $a$  on defineeritud järgmiselt:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (3.1)$$

Kui funktsioon  $f$  omab punktis  $a$  lõplikku tuletist, siis öeldakse et ta on selles punktis diferentseeruv. Tuletise arvutamist nimetatakse *diferentseerimiseks*.

Tuletist defineeriva piirväärtuse võib kirja panna ka argumendi muudu ja funktsiooni muudu kaudu. Olgu nii nagu ennegi

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - a && - \text{ argumendi muut kohal } a, \\ \Delta y &= f(x) - f(a) && - \text{ funktsiooni muut kohal } a. \end{aligned}$$

Siis

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Funktsiooni diferentseeruvuse ja pidevuse vahel kehtib järgmine seos:

**Teoreem 3.1.** *Punktis  $a$  diferentseeruv funktsioon on selles punktis pidev.*

*Tõestus.* Kuna punktis  $a$  diferentseeruv funktsioon on määratud punktis  $a$ , siis on täidetud pidevuse definitsioonis (vt §2.9) toodud 1. tingimus. Jääb veel näidata 2. ja 3. tingimuse kehtivust, st tuleb tõestada, et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  eksisteerib ja võrdub arvuga  $f(a)$ . Kuid see järeldub järgmisest võrduste reast:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] + f(a) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} (x - a) + f(a) = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a). \end{aligned}$$

Seega on teoreem tõestatud.

Teoreemile 3.1 vastupidine väide ei ole õige. Pidev funktsioon ei tarvitse diferentseeruv olla. Näiteks funktsioon  $y = |x|$  on punktis  $x = 0$  pidev, kuna  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|$ . Samas ei ole see funktsioon punktis  $x = 0$  diferentseeruv. Et seda näha, arvutame järgmised ühepoolsed piirväärtused:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = +1.$$

Kuna need on erinevad, siis piirväärtust  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0}$ , mis määrab funktsiooni  $y = |x|$  tuletise punktis  $x = 0$ , ei eksisteeri.

Järelikult on funktsiooni diferentseeruvus rangem tingimus kui pidevus. Pidevate funktsioonide hulk on suurem kui diferentseeruvate funktsioonide hulk. Tuletame meelde, et funktsiooni pidevus tähendab geomeetriliselt joone (so funktsiooni graafiku) pidevust. Tekib küsimus: milline on diferentseeruvuse geomeetiline sisu? Sellele saame vastuse §3.5.

**Tuletis kui funktsioon.** Kui funktsioon  $f$  on diferentseeruv oma määramispiirkonna alamhulga  $D$  kõigis punktides, siis öeldakse, et see funktsioon on *diferentseeruv hulgas*  $D$ .

Olgu  $f$  diferentseeruv hulgas  $D$ . Siis igale arvule  $x$  hulgast  $D$  vastab üks kindel reaalarv  $f'(x)$ . Seega on  $f'$  funktsioon, mis on määratud hulgas  $D$ .

Kirjutame funktsiooni  $f$  tuletise valemi välja argumendi väärtusel  $x$ . Kui tähistada  $\Delta x$ -ga argumendi muutu punktis  $x$ , siis avaldub vastav funktsiooni muut järgmiselt:  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ . Seega vastavalt tuletise definitsioonile saame

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

**Tuletise teisi tähistusi.** Funktsiooni  $y = f(x)$  tuletist punktis  $x$  võib veel tähistada sümbolitega

$$y', \quad y'(x), \quad \dot{y}, \quad \dot{y}(x), \quad \dot{f}(x).$$

**Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised.**

- 1)  $C' = 0$ ,  $C$  – konstant,
- 2)  $(x^a)' = ax^{a-1}$ ,
- 3)  $(a^x)' = a^x \ln a$ , sealhulgas  $(e^x)' = e^x$ ,
- 4)  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ , sealhulgas  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ,
- 5)  $(\sin x)' = \cos x$ ,
- 6)  $(\cos x)' = -\sin x$ ,
- 7)  $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ,

- 8)  $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$
- 9)  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
- 10)  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
- 11)  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$
- 12)  $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

Tõestame näiteks valemi 5. Vastavalt tuletise definitsioonile peame arvutama järgmise piirväärtuse:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Kasutades trigonomeetriast tuntud valemit

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

suurustega  $\alpha = x + \Delta x$  ja  $\beta = x$  saame

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \frac{2x + \Delta x}{2}.$$

Kuna  $\sin \frac{\Delta x}{2} \sim \frac{\Delta x}{2}$  piirprotsessis  $\Delta x \rightarrow 0$  (vt §2.8), siis  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$ . Peale selle, funktsiooni  $\cos x$  pidevuse tõttu kehtib  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \frac{2x + \Delta x}{2} = \cos \frac{2x + 0}{2} = \cos x$ . Seega  $(\sin x)' = \cos x$ , mida oligi vaja tõestada.

#### Hüperboolsete trigonomeetriliste funktsioonide tuletised.

- 13)  $(\sinh x)' = \cosh x,$
- 14)  $(\cosh x)' = \sinh x,$
- 15)  $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x},$
- 16)  $(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x},$
- 17)  $(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}},$
- 18)  $(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$
- 19)  $(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1 - x^2},$
- 20)  $(\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{1 - x^2}.$

**Funktsiooni diferentsiaali mõiste.** Funktsiooni  $y = f(x)$  diferentsiaaliks punktis  $a$  nimetatakse tuletise  $f'(a)$  ja argumendi muudu  $\Delta x = x - a$  korrutist ja tähistatakse  $dy$  või  $df$ . Seega definitsiooni kohaselt

$$dy = f'(a)\Delta x. \quad (3.2)$$

Diferentsiaal sõltub seega kahest suurusest: punktist  $a$ , kus diferentsiaal on arvatud, ja argumendi muudust  $\Delta x$ . Rõhutamaks neid sõltuvusi võib kirjutada  $dy(a, \Delta x)$ .

Järgnevalt arvutame funktsiooni  $y = x$  diferentsiaali  $dx$ . Kuna  $(x)' = 1$ , siis rakendades valemit (3.2) funktsiooni  $y = x$  jaoks saame

$$dx = \Delta x.$$

Järelikult võrdub argumendi diferentsiaal argumendi muuduga.

Olgu  $y = f(x)$  jällegi suvaline funktsioon. Asendame  $\Delta x$ -i  $dx$ -iga valemis (3.2). Saame võrduse

$$dy = f'(a)dx. \quad (3.3)$$

Siit tuleneb järgmine valem tuletise jaoks diferentsiaalide suhte kaudu:

$$f'(a) = \frac{dy}{dx}. \quad (3.4)$$

Seda valemit on mugav kasutada mõnede tuletist puudutavate teoreemide tõestamisel järgmistes paragrahvides (nt liitfunktsiooni, pöördfunktsiooni ja parameetrilise funktsiooni tuletised). Diferentsiaali peamine mõte seisneb siiski selles, et temaga on võimalik lähendada funktsiooni muut, st kehtib ligikaudne võrdus  $\Delta y \approx dy$ . Lähemalt tuleb sellest juttu §3.6.

## 3.2 Näiteid tuletiste kohta rakendustes.

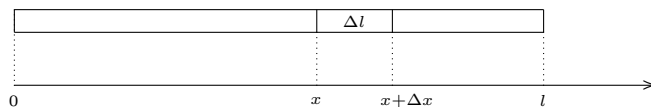
**Kiirus ja kiirendus.** Vaatleme materiaalse objekti sirgjoonelist liikumist  $x$ -teljel. Olgu  $t$  aeg. Ajavahemikus  $[t, t + \Delta t]$  liigub objekt teepikkuse  $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$  võrra. Kuna antud ajavahemiku pikkus on  $\Delta t$ , siis on keskmine kiirus selles ajavahemikus arvatav valemiga  $v_{kesk} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ . Hetkkiiruse ajahetkel  $t$  saame, kui me kahandame vaadeldava ajavahemiku pikkuse  $\Delta t$  nulliks. Seega, tuletise definitsiooni põhjal avaldub hetkkiirus valemiga

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t).$$

Sarnaselt saab käsitleda ka kiirendust. Ajavahemikus  $[t, t + \Delta t]$  on kiiruse muut järgmine:  $\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$ . Kiirendus on kiiruse suhteline muut ajas. Seega avaldub keskmine kiirendus vaadeldavas ajavahemikus järgmiselt:  $a_{kesk} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$ . Hetkkiirenduse saame jällegi piirprotsessis  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t).$$

**Varda joontihedus.** Olgu vaatluse all varras (või mingi muu suhteliselt ühemõõtmeline materiaalne keha) pikkusega  $l$ . Paiknegu varras  $x$ -telje kohal punktide 0 ja  $l$  vahel (vt juuresolev joonis).



Joontiheduse all mõeldakse massi suhet pikkusesse. Järelikult, kui varras on homogeenne (st aine paikneb vardas ühtlaselt) avaldub selle varda joontihedus lihtsa valemiga  $\gamma = \frac{m}{l}$ , kus  $m$  on varda kogumass.



Käsitleme keerulisemat juhtu, kui varras on mittehomogeenne, st aine on vardas jaotunud ebaühtlaselt. Sellisel juhul on aine tihedus varda erinevates punktides erinev. Valime  $x$ -i väärtuse lõigult  $[0, l]$ . Tähistame osalõigu  $[0, x]$  kohal paikneva vardaosa massi  $m(x)$ -ga. Siis on osalõigu  $[x, x + \Delta x]$  kohal oleva vardaosa  $\Delta l$  mass  $\Delta m = m(x + \Delta x) - m(x)$ . Jagades vardaosa  $\Delta l$  massi tema pikkusega saame aine *keskmise joontiheduse* vardaosal  $\Delta l$ :

$$\gamma_{\Delta l} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}.$$

Aine *joontiheduse all punktis  $x$*  mõeldakse selle punkti ümbruses paikneva väga väikese pikkusega vardaosa keskmist joontihedust. Seega saab joontiheduse valemi punktis  $x$  kätte keskmise joontiheduse valemist, kui me kahandame  $\Delta x$ -i nulliks. Saadav valem on järgmine:

$$\gamma(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x} = m'(x).$$

**Voolutugevus.** Voolutugevuse all mõeldakse juhtme ristlõiget ajaühikus läbivat laengut. Seega, kui voolutugevus ajas ei muutu (st tegemist on alalisvooluga), kehtib lihtne valem  $I = \frac{q}{t}$ , kus  $I$  on voolutugevus,  $q$  on juhet läbinud kogulaeng ja  $t$  on aeg.

Kui aga voolutugevus muutub ajas (nt vahelduvvoolu puhul), siis on seos voolutugevuse ja laengu vahel keerulisem. Vaatlemegi seda juhtu. Tähistame ajavahemikus  $[0, t]$  juhtme ristlõiget läbiva laenguhulga  $q(t)$ -ga. Siis läbib ajavahemikus  $[t, t + \Delta t]$  juhtme ristlõiget laeng  $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$ . Jagades selle  $\Delta t$ -ga saame *keskmise voolutugevuse* ajavahemikus  $[t, t + \Delta t]$ :

$$I_{\text{kesk}} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}.$$

Voolutugevuse tuletamiseks *ajahetkel  $t$*  peame  $\Delta t$  kahandama nulliks. Saadav valem on järgmine:

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} = q'(t).$$

**Marginaalkulu ja -tulu.** Olgu vaatluse all ettevõtte, mis väljastab mingit toodangut. Toodangu mahu tähistame  $q$ -ga. Tootmine on seotud teatud kuludega. Olgu kulud tähistatud  $C$ -ga. Mida suurem on toodangu maht, seda suuremad on ka kulud. Seega on  $C$  suurus  $q$  funktsioon, st  $C = C(q)$ . Mikroökonomikas nimetatakse kulufunktsiooni tuletist marginaalkuluks ja tähistatakse  $MC$ -ga (marginal cost). Seega  $MC(q) = C'(q)$ . Sisuliselt võib marginaalkulu tõlgendada kui lisakulu, mis on vajalik selleks, et suurendada toodangu mahtu ühe ühiku võrra. Katsume seda matemaatiliselt põhjendada. Vastavalt tuletise definitsioonile kehtib valem

$$MC(q) = C'(q) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta q},$$

kus  $\Delta q$  ja  $\Delta C$  on vastavalt toodangu mahu ja kulu muudud. Seega kehtib väikese  $\Delta q$  korral ligikaudne võrdus  $MC(q) \approx \frac{\Delta C}{\Delta q}$ . Kui toodangu mahtu suurendatakse ühe ühiku võrra, siis  $\Delta q = 1$ , seega  $MC(q) \approx \Delta C$  (suurte tootmismahdade korral võib  $\Delta q = 1$  lugeda väikeseks). Siit nähtubki, et marginaalkulu on võrdne ühikulisele toodangu suurenemisele vastava kulumuuduga.

Olgu  $R(q)$  toodangu hulga  $q$  müümisest saadav tulu. Tulufunktsiooni tuletis on nn marginaaltulu ja seda tähistatakse  $MR$ -ga (marginal revenue). Seega  $MR(q) = R'(q)$ . Sisuliselt on marginaaltulu lisatulu, mis saadakse ühe täiendava toodanguühiku müügist.

### 3.3 Tuletiste arvutamise põhireeglid

Paneme kirja aritmeetiliste tehete seotud reeglid.

1.  $(f + g)' = f' + g'$ ,
2.  $(fg)' = f'g + fg'$ ,

$$3. \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Tõestame reegli 2. Kasutades tuletise definitsiooni ja piirväärtuste omadusi saame

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left\{ [f(x + \Delta x) - f(x)]g(x + \Delta x) + f(x)[g(x + \Delta x) - g(x)] \right\} = \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) + \\&\quad + f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \\&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (f'g + fg')(x).\end{aligned}$$

Sellega ongi reegel 2 tõestatud.

Reeglitest 1 ja 2 järelduvad veel 2 lihtsat valemit:

$$4. (Cf)' = C'f + Cf' = 0f + Cf' = Cf', \quad C - \text{konstant},$$

$$5. (f - g)' = [f + (-1)g]' = f' + [(-1)g]' = f' + (-1)g' = f' - g'.$$

Järgnevalt tuletame valemeid liitfunktsiooni diferentseerimiseks. Olgu  $y = f(x)$  ja  $z = g(y)$  kaks diferentseeruvat funktsiooni ning olgu nendest moodustatud liitfunktsioon  $z = g[f(x)]$ . Tuletame meelde, et funktsiooni tuletise saab esitada sõltuva muutuja ja argumendi diferentsiaalide jagatisena (valem (3.4)). Kuna funktsiooni  $f$  argument on  $x$  ja sõltuv muutuja  $y$ , siis kirjutades valemi (3.4) üles punktis  $x$ , saame  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ . Analoogiliselt toimime ka funktsiooniga  $g$ , mille argument on  $y$  ja sõltuv muutuja  $z$ . Esitame  $g$  tuletise sõltuva muutuja ja argumendi diferentsiaalide jagatisena. Saame  $g'(y) = \frac{dz}{dy}$ . Viimaks avaldame ka liitfunktsiooni  $z = g[f(x)]$  tuletise tema argumendi on  $x$  ja sõltuva muutuja  $z$  diferentsiaalide jagatisena. Saame  $\{g[f(x)]\}' = \frac{dz}{dx}$ . Kasutades neid valemeid arvutame:

$$\{g[f(x)]\}' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = g'(y)f'(x) = g'[f(x)]f'(x).$$

Seega oleme tõestanud järgmised reeglid liitfunktsiooni tuletise jaoks:

$$6. \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \quad \text{ehk} \quad \{g[f(x)]\}' = g'[f(x)]f'(x).$$

### 3.4 Ilmutamata funktsiooni, pöördfunktsiooni ja parameetrilise funktsiooni diferentseerimine.

**Ilmutamata kujul antud funktsiooni diferentseerimine.** Olgu vaatluse all funktsioon  $y = f(x)$ , mis on antud ilmutamata kujul võrrandiga  $F(x, y) = 0$ .

Funktsiooni  $f$  ilmutamiseks tuleb lahendada võrrand  $F(x, y) = 0$  muutuja  $y$  suhtes. Sageli on see väga raske ülesanne.

Õnneks saab ilmutamata kujul antud funktsiooni diferentseerida ka nii, et teda ei ole vaja eelnevalt ilmutada. Tuletise võib arvutada otseselt, lähtudes funktsiooni määravast võrrandist  $F(x, y) = 0$ . Sealjuures tuleb aga arvestada asjaolu, et kõik  $y$ -it sisaldavad liikmed selles võrrandis on liitfunktsioonid, mille sisemiseks funktsiooniks on  $y = f(x)$ .

Kirjeldame näiteks võrrandiga

$$\sin y - x + \cos x - y = 0 \quad (3.5)$$

määratud funktsiooni  $y = f(x)$  diferentseerimise protseduuri. Võrrand (3.5) on liiga keeruline selleks, et teda lahendada  $y$  suhtes ja seejärel arvutada  $y'$  otseselt funktsiooni  $f$  avaldisest. Arvutame  $y'$  kaudselt. Selleks on kaks sisuliselt samaväärset, kuid formaalselt pisut erinevat võimalust. Esimese lähenemisviisi korral asendame kõigepealt võrrandis (3.5) suuruse  $y$  suurusega  $f(x)$ . Saame

$$\sin[f(x)] - x + \cos x - f(x) = 0.$$

Arvutame nüüd tuletise kasutades §3.1 toodud valemeid ja §3.3 esitatud liit-funktsiooni diferentseerimise eeskirja. Saame

$$\cos[f(x)] \cdot f'(x) - 1 - \sin x - f'(x) = 0.$$

Avaldades sellest seosest  $f'(x)$  ongi meil tuletis käes:

$$f'(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos[f(x)] - 1} = \frac{1 + \sin x}{\cos y - 1}. \quad (3.6)$$

Teine ja lihtsam võimalus on selline, et me ei asenda võrrandis (3.5)  $y$ -it  $f(x)$ -ga, vaid diferentseerimisel peame meeles, et  $y$ -it sisaldavad funktsioonid on liitfunktsioonid. Arvutame:

$$\cos y \cdot y' - 1 - \sin x - y' = 0.$$

Avaldades siit  $y'$  saame

$$y' = \frac{1 + \sin x}{\cos y - 1},$$

mis langeb kokku eelnevalt arvutatud tulemusega (3.6).

### Üksühese funktsiooni pöördfunktsiooni diferentseerimine.

**Teoreem 3.2.** *Olgu üksühese funktsiooni  $y = f(x)$  pöördfunktsioon  $x = g(y)$ . Siis kehtib valem*

$$g'[f(x)] = \frac{1}{f'(x)}. \quad (3.7)$$

*Tõestus.* Funktsiooni  $f$  argument on  $x$  ja sõltuv muutuja  $y$ . Seega  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ . Pöördfunktsiooni  $x = g(y)$  argument on  $y$  ja sõltuv muutuja  $x$ . Järelikult  $g'(y) = \frac{dx}{dy}$ . Kasutades neid valemeid arvutame:

$$g'[f(x)] = g'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Olemegi tõestanud valemi (3.7).

*Näide.* Teatavasti on funktsioon  $x = \arcsin y$  funktsiooni  $y = \sin x$  pöördfunktsioon argumenti väärtuste  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  korral. Tõestame valemi  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  kasutades selleks teoreemi 3.2. Teoreemi 3.2 ja valemi  $(\sin x)' = \cos x$  põhjal

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x}.$$

Esitame siin funktsiooni  $\cos x$  funktsiooni  $\sin x$  kaudu. Teatavasti kehtib järgmine trigonomeetia valem:  $\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$ , kus ruutjuure ees olev märk sõltub  $\cos x$  märgist. Antud juhul  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Sel lõigul on  $\cos x$  mittenegatiivne. Seega  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$  ning

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}.$$

Kasutades siin seost  $x = \arcsin y$  ja asjaolu, et funktsioonid  $\arcsin$  ja  $\sin$  kompenseerivad teineteist (vt (1.3)) tuletame valemi

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - [\sin(\arcsin y)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Tähistades muutuja  $y$  ümber  $x$ -ga saamegi valemi  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

**Parameetriselt antud funktsiooni diferentseerimine.**

**Teoreem 3.3.** Olgu funktsioon  $y = f(x)$  antud parameetrisel kujul võrranditega

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Siis kehtib valem

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (3.8)$$

*Tõestus.* Funktsiooni  $f$  argument on  $x$  ja sõltuv muutuja  $y$ . Seega  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ . Funktsiooni  $x = \varphi(t)$  argument on  $t$  ja sõltuv muutuja  $x$ . Järelikult  $\varphi'(t) = \frac{dx}{dt}$ . Analoogiliselt saame funktsiooni  $y = \psi(t)$ , mille argument on  $t$  ja sõltuv muutuja  $y$ , tuletise jaoks seose  $\psi'(t) = \frac{dy}{dt}$ . Kasutades neid valemeid arvutame:

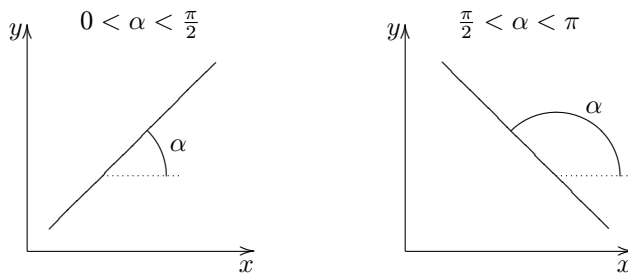
$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

See tõestabki valemi (3.8).

### 3.5 Joone puutuja ja normaalsirge. Diferentseeruvuse geomeetriline sisu.

**Sirge tõusunurk ja tõus.** Tasandil  $xy$  - teljestikus antud sirge  $s$  tõusunurgaks  $\alpha$  nimetatakse selle sirge ja  $x$  - telje positiivse suuna vahelist nurka, mille väärtus radiaanides jääb poollõigule  $[0, \pi)$ . Tõusva sirge korral  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  ja langeva sirge korral  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  (vt joonis 3.1).

Sirge  $s$  tõusuks  $p$  nimetatakse tema tõusunurga tangensit, st  $p = \tan \alpha$ .



Joonis 3.1

Punkti  $A = (a, b)$  läbiva ja tõusu  $p$  omava sirge võrrand on

$$y - b = p(x - a). \quad (3.9)$$

Viimane valem kehtib juhul, kui tõus  $p$  on määratud, st kui  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ . Juhul kui  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , on  $p$  määramata (tinglikult võrdne  $\infty$ -ga). Siis on  $s$  paralleelne  $y$  - teljega ja tema võrrand on  $x = a$ .

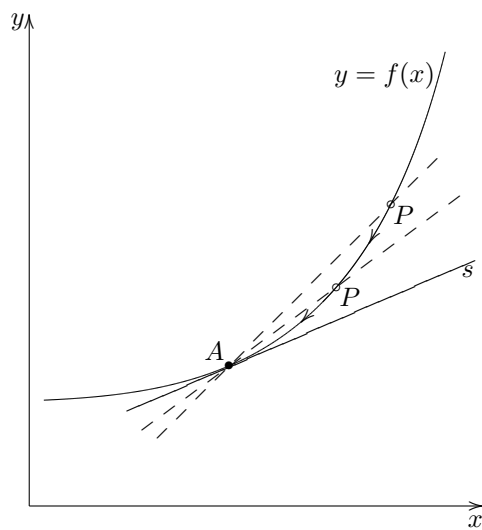
**Joone puutuja ja selle võrrand.** Olgu tasandil  $xy$  - teljestikus antud joon  $y = f(x)$  (st funktsiooni  $y = f(x)$  graafik). Joone  $y = f(x)$  puutujaks punktis  $A$  nimetatakse tema lõikaja  $AP$  piirsirget, mis tekib punkti  $P$  lähenemisel punktile  $A$  mööda joont  $y = f(x)$  (vt joonis 3.2, puutuja on seal tähistatud  $s$ -ga).

Meie eesmärgiks on tuletada puutuja  $s$  võrrand. Kõigepealt märgime, et valemi (3.9) põhjal avaldub puutuja  $s$  võrrand punktis  $A = (a, f(a))$  kujul

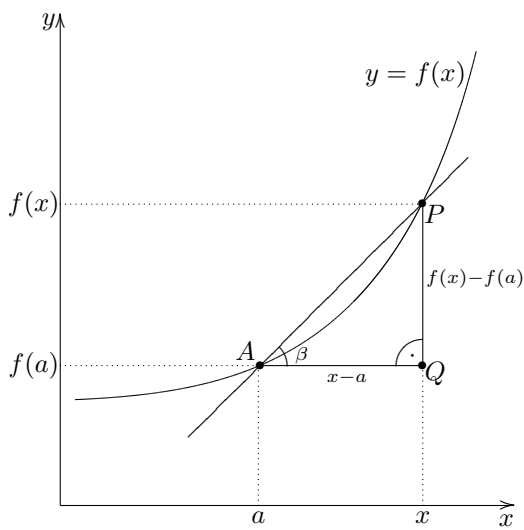
$$y - f(a) = p(x - a), \quad (3.10)$$

kus  $p$  on  $s$  tõus. Momendil on  $p$  veel tundmatu suurus. Avaldame suuruse  $p$  funktsiooni  $f$  tuletise kaudu. Selleks vaatleme joonist 3.3. Joonisel on lõikaja  $AP$  tõusunurk tähistatud  $\beta$ -ga. Seega on lõikaja  $AP$  tõus  $\bar{p} = \tan \beta$ . Täisnurkselt kolmnurgalt  $APQ$  näeme, et

$$\bar{p} = \tan \beta = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$



Joonis 3.2



Joonis 3.3

Vaatleme nüüd piirprotsessi  $x \rightarrow a$ . Kui  $x \rightarrow a$ , siis  $P$  läheneb punktile  $A$  mööda joont  $y = f(x)$ . Vastavalt puutuja definitsioonile läheneb lõikaja  $AP$

joone  $y = f(x)$  puutujale punktis  $A$ . Seega läheneb ka lõikaja tõus  $\bar{p}$  puutuja tõusule  $p$ . Järelikult, tuletise definitsiooni põhjal

$$p = \lim_{x \rightarrow a} \bar{p} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a). \quad (3.11)$$

Valemitest (3.10) ja (3.11) saamegi puutuja võrrandi

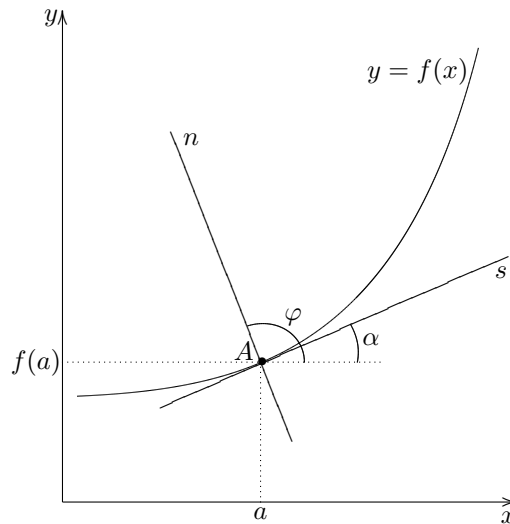
$$y - f(a) = f'(a)(x - a). \quad (3.12)$$

Valem (3.12) kehtib juhul, kui puutuja tõus  $p$  ehk tuletis  $f'(a)$  on määratud.

Kui puutuja tõusunurk on  $\frac{\pi}{2}$ , siis ei ole  $f'(a)$  määratud ja puutuja võrrand on  $x = a$ .

**Joone normaalsirge ja selle võrrand.** Joone  $y = f(x)$  normaalsirgeks punktis  $A$  nimetatakse sirget, mis läbib punkti  $A$  ja ristub joone  $y = f(x)$  puutujaga selles punktis. Joonisel 3.4 on kujutatud joone  $y = f(x)$  puutuja  $s$  ja normaalsirge  $n$  koos oma tõusunurkadega  $\alpha$  ja  $\varphi$ . Normaalsirge võrrandi tuletamiseks peame arvutama tema tõusu  $p = \tan \varphi$ . Kuna  $\varphi = \alpha + \frac{\pi}{2}$  ja  $\tan \alpha = f'(a)$ , siis

$$p = \tan \varphi = \tan \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{1}{f'(a)}. \quad (3.13)$$



Joonis 3.4

Valemite (3.13) ja (3.9) põhjal on punkti  $A = (a, f(a))$  läbiva normaalsirge võrrand järgmine:

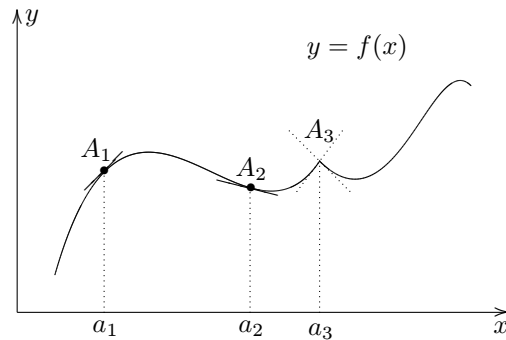
$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

Muidugi kehtib selline võrrand juhul, kui  $f'(a) \neq 0$ . Kui  $f'(a) = 0$ , siis on normaalsirge  $y$  - telje sihiline ja tema võrrand on  $x = a$ .

**Siledad ja murduvad jooned. Diferentseeruvuse geomeetriline sisu.** Kui funktsiooni graafik on punktis  $A = (a, f(a))$  sile (so mittemurduv), siis on lõikaja  $AP$  piirsirge punktis  $A$  üheselt määratud, sõltumata sellest kummalt poolt punktiga  $P$  punktile  $A$  lähenetakse. Seega on sel juhul punktis  $A$  puutuja üheselt määratud. Kui puutuja tõusunurk  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ , siis on arvutatav ka puutuja tõus ehk funktsiooni tuletis  $f'(a)$ . Kui aga punktis  $A$  esineb graafikul murdepunkt, siis ei ole selles punktis võimalik puutujat üheselt määrata. Lõikajad  $AP$  annavad punkti  $P$  lähenemisel punktile  $A$  erinevatest külgedest erinevad piirsirged. Sellisel juhul ei ole ka funktsiooni tuletis  $f'(a)$  argumendi väärtusel  $x = a$  määratud. Seega võib öelda, et

*argumendi väärtusel  $x = a$  diferentseeruva funktsiooni graafik on punktis  $A = (a, f(a))$  sile joon, mille puutuja tõusunurk ei ole  $\frac{\pi}{2}$ .*

Õeldut illustreerib joonis 3.5. Punktides  $A_1$  ja  $A_2$  on joon sile, seal on tema puutujad üheselt määratud (joonisel kujutatud pidevate sirglõikudega). Puutujate tõusunurgad erinevad  $\frac{\pi}{2}$ -st, järelikult on funktsioonil  $f$  argumendi väärtustel  $x = a_1$  ja  $x = a_2$  olemas lõplikud tuletised. Seevastu punktis  $A_3$  joon murdub. Punktiiriga on kujutatud lõikajate piirsirged mõlemapoolsel lähenemisel  $A_3$ -le. Need on erinevad, seega ei ole puutuja määratud. Argumendi väärtusel  $x = a_3$  funktsiooni tuletis puudub.



Joonis 3.5



### 3.6 Diferentsiaal kui funktsiooni muudu peaosa. Diferentsiaali geomeetriline sisu ja omadused. Funktsiooni lineaarne lähend.

**Funktsiooni muudu peaosa ja jääkliige.** Olgu antud funktsioon, mis on diferentseeruv punktis  $a$ . Eeldame, et

$$f'(a) \neq 0.$$

Kasutame §3.1 sissetoodud mõisteid

$$\begin{aligned}\Delta x &= x - a && \text{argumendi muut kohal } a \\ \Delta y &= f(x) - f(a) && \text{funktsiooni muut kohal } a.\end{aligned}$$

§3.1 me näitasime, et

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Seega, kui me tähistame  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  ja  $f'(a)$  vahe järgmiselt

$$r(\Delta x) := \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a), \quad (3.14)$$

kehtib võrdus

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} r(\Delta x) = 0. \quad (3.15)$$

Püüame avaldada funktsiooni muutu  $\Delta y$  argumendi muudu  $\Delta x$  kaudu. Selleks avaldame kõigepealt võrdusest (3.14) suhte  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) + r(\Delta x)$$

ja korrutame saadud avaldise  $\Delta x$ -ga. Saame valemi

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \beta, \quad \text{kus } \beta = r(\Delta x)\Delta x. \quad (3.16)$$

Valemist (3.16) näeme, et *funktsiooni muut  $\Delta y$  koosneb kahest liidetavast, millest esimene on diferentsiaal  $dy = f'(a)\Delta x$  ja teine on  $\beta$ .*

Mõlemad liidetavad on lõpmatult kahanevad protsessis  $\Delta x \rightarrow 0$ . Võrdleme neid suurusi  $\Delta x$  suhtes. Esiteks, eelduse  $f'(a) \neq 0$  põhjal saame

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(a)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'(a) = f'(a) \neq 0.$$

Teiseks, (3.15) põhjal kehtib

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} r(\Delta x) = 0.$$

Näeme, et esimene liidetav, so diferentsiaal  $dy$  on sama järku lõpmatult kahanev suurus kui  $\Delta x$  ja teine liidetav  $\beta$  on kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus  $\Delta x$  suhtes. Järelikult väikese  $\Delta x$  korral hakkab diferentsiaal funktsiooni muudu avaldises domineerima. Seetõttu võime lugeda diferentsiaali  $dy$  funktsiooni muudu *peaosaks*. Jääkliikme  $\beta$  võib väikese  $\Delta x$  korral funktsiooni muudu avaldises ära jätta. Kehtib ligikaudne valem

$$\Delta y \approx dy \quad \text{kui} \quad \Delta x \approx 0. \quad (3.17)$$

*Näide.* Olgu  $f(x) = x^2$ . Arvutame

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x) - f(a) = x^2 - a^2 = (x + a)(x - a) = (2a + x - a)(x - a) = \\ &= 2a(x - a) + (x - a)^2. \end{aligned}$$

Seega

$$\Delta y = 2a\Delta x + \Delta x^2.$$

Esimene liidetav selles valemis on diferentsiaal  $dy = 2a\Delta x$ , kusjuures tegur  $2a$  võrdub funktsiooni  $f$  tuletisega punktis  $a$ , st  $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(a) = 2a$ . Teine liidetav on jääkliikme  $\beta = \Delta x^2$ , mis on kõrgemat järku lõpmatult kahanev  $\Delta x$  suhtes. Järelikult  $\Delta x \approx 0$  korral saame  $\Delta y \approx 2a\Delta x$ .

**Diferentsiaali geomeetriline sisu.** Katsume diferentsiaali  $dy$  ja jääkliikmet  $\beta$  graafiliselt interpreteerida. Selleks vaatame joonisel 3.6 kujutatatud täisnurkset kolmnurka  $APR$ . Selle kolmnurga alumise kaateti pikkus on

$$|AP| = x - a = \Delta x$$

ja parempoolse kaateti pikkus on

$$|PR| = f(x) - f(a) = \Delta y.$$

Kaatet  $PR$  koosneb kahest osast: lõik  $PQ$ , mis asub puutuja  $s$  all ja lõik  $QR$ , mis asub puutuja  $s$  ja joone  $y = f(x)$  vahel.

Arvutame alumise lõigu  $PQ$  pikkuse. Kasutades sirge  $s$  tõusunurka  $\alpha$  saame

$$|PQ| = |AP| \tan \alpha.$$

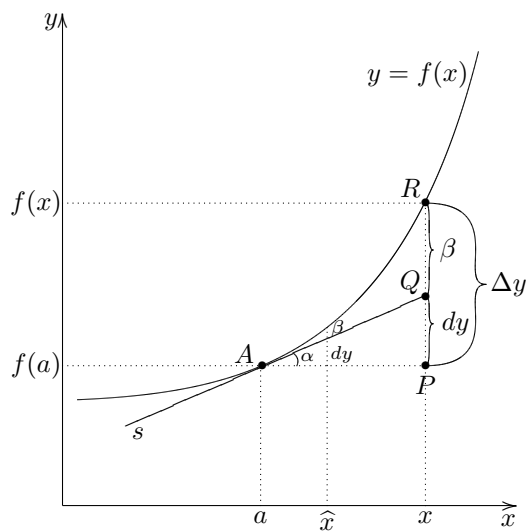
Kuna  $|AP| = \Delta x$  ja sirge  $s$  tõusnurga tangens võrdub  $f'(a)$ -ga, jõuame valemieni

$$|PQ| = f'(a)\Delta x = dy.$$

*Funktsiooni diferentsiaal võrdub selle funktsiooni graafiku puutuja kasvuga lõigul  $[a, x]$ .*

Lõigu  $PR = \Delta y$  ülejäänud osa pikkus, st  $|QR|$ , on seega võrdne jääkliikmega  $\beta$ .

Piirprotsessis  $\Delta x \rightarrow 0$  (ehk  $x \rightarrow a$ ) suurused  $dy$  ja  $\beta$  vähenevad, kuid  $\beta$  väheneb kiiremini (võrdle neid suurusi  $x$  ja  $\hat{x}$  korral joonisel).



Joonis 3.6

#### Diferentsiaali omadused.

1.  $d(u + v) = du + dv$ ,
2.  $d(u - v) = du - dv$ ,
3.  $d(uv) = vdu + u dv$ ,
4.  $d(Cu) = Cdu$ ,  $C$  – konstant,
5.  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$  kui  $v \neq 0$ .

Need omadused järelduvad vahetult tuletiste arvutamise põhireeglitest 1 - 5. Näiteks tuletiste arvutamise põhireegli 2 ja diferentsiaali valemi  $df = f' dx$  (valem (3.3)) põhjal

$$d(uv) = (uv)' dx = (u'v + v'u) dx = v u' dx + u v' dx = v du + u dv,$$

mis tõestab omaduse 3.

**Funktsiooni lineaarne lähend.** Olgu funktsioon  $y = f(x)$  diferentseeruv punkti  $a$  mingis ümbruses. Eelnevalt nägime, et funktsiooni muudu jaoks kehtib järgmine valem (valem (3.16)):

$$\Delta y = f'(a) \Delta x + \beta.$$

Asendame siin  $\Delta x = x - a$  ja  $\Delta y = f(x) - f(a)$ . Saame

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \beta.$$

Avaldame  $f(x)$ :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \beta. \quad (3.18)$$

Jättes funktsiooni  $f(x)$  avaldisest välja jääkliikme  $\beta$ , saame uue funktsiooni, mis on lineaarne:

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a). \quad (3.19)$$

Kui  $x \approx a$ , siis  $\beta$  on suhteliselt väike ja võime kirjutada järgmise ligikaudse võrduse:

$$f(x) \approx P_1(x). \quad (3.20)$$

$P_1(x)$  on funktsiooni  $f(x)$  *lineaarne lähend*. Jääkliikme  $\beta$  eemaldamisega funktsiooni avaldisest me *lineariseerisime* selle funktsiooni.

Võrreldes võrrandeid (3.12) ja (3.19) näeme, et lineaarse lähendi  $y = P_1(x)$  graafik on joone  $y = f(x)$  puutuja punktis  $A = (a, f(a))$ . Geomeetriliselt tähendab lineariseerimine joone asendamist tema puutujaga puutepunkti ümbruses. Jooniselt 3.6 näeme, et puutepunkti  $A$  lähedal on  $\beta$  suhteliselt väike ja joon  $y = f(x)$  langeb oma puutujaga  $s$  ligikaudselt kokku.

Lineariseerimist kasutatakse rohkesti rakendustes (loodusteadustes, sh füüsikas, mehaanikas, ka sotsiaalteadustes jm). Lineaarse funktsiooniga on ju palju lihtsam opereerida kui mittelineaarsega.

Lineariseerimisel jääb osa funktsiooni käitumisest muidugi arvestamata (näiteks joone  $y = f(x)$  kõverus). Säilivad funktsiooni  $f$  väärtus punktis  $a$ :

$$P_1(a) = f(a)$$

ja joone  $y = f(x)$  liikumise suund, so  $f$  tuletis punktis  $a$ :

$$P_1'(a) = f'(a).$$

### 3.7 Näiteid diferentsiaali ja lineaarse lähenduse kasutamise kohta praktilistes arvutustes.

Näide 1. Arvutame ligikaudselt

$$\sqrt[3]{64.03}.$$

Selleks paneme kõigepealt tähele, et  $\sqrt[3]{64} = 4$  on lihtsalt leitav. Ülesande lahendamiseks sellest, et jätkame funktsiooni  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  lineaarselt punktist  $a = 64$  punkti  $x = 64.03$ . Selleks saab kasutada lineaarse lähendi valemit (3.19). Valemis esinev suurus  $f(a)$  on juba teada:  $f(a) = 4$ . Arvutame ka tuletise:  $f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ . Seega  $f'(a) = \frac{1}{3 \cdot 16} = \frac{1}{48}$ . Järelikult

$$\sqrt[3]{64.03} \approx 4 + \frac{1}{48}(64.03 - 64) = 4.00625.$$

Näide 2. Ettevõtte kulufunktsioon on antud valemiga

$$C = 10^{-5}q^3 + 0.2q + 30 \text{ tuhat kr},$$

kus  $q$  on toodangu maht. Praegu toodetakse 100 ühikut päevas. Seega on tootmiskulud 60 tuhat kr päevas. Lahendame kahte ülesannet: a) Millised on täiendavad kulud selleks, et

suurendada toodangut 50 ühiku võrra päevas? b) Mitme ühiku võrra päevas on võimalik suurendada toodangut, kui tootmisse mahutada täiendavalt 20 tuhat krooni? Ülesannete lahendamist lihtsustab diferentsiaali kasutamine. Vastavalt valemile (3.17) saame me funktsiooni muutu lähendada diferentsiaaliga. Seega  $\Delta C \approx dC$ . Kulufunktsiooni diferentsiaali saame avaldada tuletise (so marginaalkulu) ja tootmismahu muudu korrutisena, st  $dC = MC \cdot \Delta q$ . Järelikult

$$\Delta C \approx MC \cdot \Delta q.$$

Arvutame marginaalkulu:  $MC = C'(q) = 3 \cdot 10^{-5} q^2 + 0.2$ . Kuna  $q = 100$ , siis  $MC = 0.5$ . Nüüd saame lihtsasti lähendada mõlemad ülesanded. Ülesandes a) on antud  $\Delta q = 50$  ja tuleb leida  $\Delta C$ . Pannes arvud valemisse saame  $\Delta C \approx 0.5 \cdot 50 = 25$ . Vastus on järgmine: selleks, et suurendada tootmist 50 ühiku võrra on vaja kulutada täiendavalt 25 tuhat kr päevas. Järgmiseks lähendame ülesande b). Seal on antud  $\Delta C = 20$  ja tuleb leida  $\Delta q$ . Teisendame eespooltuletatud valemi järgmisele kujule:  $\Delta q \approx \frac{\Delta C}{MC}$  ja paneme sellesse arvud sisse. Saame  $\Delta q \approx \frac{20}{0.5} = 40$ . Vastus: paigutades tootmisesse täiendavalt 20 tuhat krooni saab suurendada tootmist 40 ühiku võrra päevas.

Üks diferentsiaali rakendusvaldkondi on *vigade hindamine*. Olgu vaatluse all mingi füüsikaline protsess, mida iseloomustavad kaks suurust:  $x$  ja  $y$ , kusjuures  $y$  on  $x$  funktsioon, st  $y = f(x)$ . Olgu suuruse  $x$  täpne arvuline väärtus vaadeldavas protsessis  $a$ . Oletame, et suurust  $x$  mõõdetakse. Teatavasti on mõõtmine alati ebatäpne. Mõõtmise tulemusena saadakse suuruse  $x$  täpse väärtuse  $a$  asemel tema ligikaudne väärtus  $a + \Delta x$ . Liidetav  $\Delta x$  on siin suuruse  $x$  mõõtmisel tehtud viga. Suuruse  $y$  väärtus arvutatakse valemist  $y = f(x)$ . Tema täpne väärtus on  $f(a)$ . Mõõtmistulemuste alusel arvutatakse  $y$  väärtus on  $f(a + \Delta x)$ . Järelikult võrdub suuruse  $y$  viga funktsiooni  $f$  muuduga

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Suuruse  $x$  vea hindamine on lihtne.  $\Delta x$  täpne väärtus ei ole küll teada, kuid enamasti on teada mõõtmisel kasutatava seadme vea ülempiir  $\Delta x^*$ . Seega saab  $\Delta x$  hinnata järgmiselt:  $|\Delta x| \leq \Delta x^*$ . Suuruse  $y$  vea hindamisel saab aga kasutada diferentsiaali. Kui  $\Delta x$  on väike, siis

$$\Delta y \approx dy = f'(a) \Delta x.$$

Kasutades absoluutväärtuse omadusi saame

$$|\Delta y| \approx |dy| = |f'(a) \Delta x| = |f'(a)| |\Delta x| \leq |f'(a)| \Delta x^*.$$

Siit nähtub, et  $y$  vea ülempiiriks sobib järgmine suurus:

$$\Delta y^* = |f'(a)| \Delta x^*.$$

**Näide 3.** Komposiitmaterjalist keha pinge  $\sigma$  ja deformatsioon  $\varepsilon$  (suhteline pikenemine) on seotud valemiga

$$\sigma = E\varepsilon - \nu\varepsilon^2,$$

kus  $E = 200$  MPa (MPa - megapaskal) ja  $\nu = 500$  MPa on vastavalt esimest ja teist järku elastsuskordajad. Mõõtmisel saadi järgmine deformatsiooni väärtus:  $0.15 \pm 0.01\%$ . Ülesandes tuleb leida pinge ja hinnata selle viga. Arvutame pinget väärtuse:  $\sigma(0.15) = 200 \cdot 0.15 - 500 \cdot 0.15^2 = 18.75$  MPa. Pinge vea hindamiseks leiame funktsiooni  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  tuletise:  $\sigma'(\varepsilon) = E - 2\nu\varepsilon$ . Tuletise arvuline väärtus on  $\sigma'(0.15) = 200 - 2 \cdot 500 \cdot 0.15 = 50$ . Vea ülempiiri valem on

$$\Delta \sigma^* = |\sigma'(\varepsilon)| \Delta \varepsilon^*.$$

Kuna  $\Delta \varepsilon^* = 0.01$ , siis saame  $\Delta \sigma^* = 50 \cdot 0.01 = 0.5$  MPa. Ülesande vastus on  $\sigma = 18.75 \pm 0.5$  MPa.

**Näide 4.** Mittelineaarne takisti on selline vooluahela element, mille takistus ei ole konstantne vaid sõltub voolutugevusest, st  $R = R(I)$ . Olgu konkreetselt  $R(I) = 15I$ . Ülesandes on antud pinget  $U = 200 \pm 0.5$  V takisti klemmidel. Tuleb leida voolutugevus ja hinnata selle viga. Vastavalt Ohmi seadusele  $U = RI$ . Kuna  $R = 15I$ , siis  $U = 15I^2$ . Siit avaldame voolutugevuse pinget kaudu:

$$I = \sqrt{\frac{U}{15}}.$$

Vooltugevuse arvuline väärtus on  $I = \sqrt{\frac{200}{15}} \approx 3.873$  A. Vea hindamiseks peame leidma  $I$  tuletise:  $I'(U) = \frac{1}{30\sqrt{\frac{U}{15}}}$ . Tuletise arvuline väärtus on  $I'(200) \approx 8.6 \cdot 10^{-3}$ . Vea ülempiiri valem on

$$\Delta I^* = |I'(U)|\Delta U^*.$$

Kuna  $\Delta U^* = 0.5$  V, siis saame  $\Delta I^* = 8.6 \cdot 10^{-3} \cdot 0.5 = 4.3 \cdot 10^{-3}$  A. Ülesande vastus on  $I = 3.873 \pm 0.004$  A.

### 3.8 Funktsiooni lokaalsed ekstreemumid. Fermat' lemma

**Lokaalse ekstreemumi mõiste.**

Öeldakse, et funktsioonil  $f$  on punktis  $x_1$  *lokaalne maksimum*, kui

1. funktsioon  $f$  on määratud punkti  $x_1$  mingis ümbruses  $(x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon)$ ;
2. iga  $x \in (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon)$  korral kehtib võrratus  $f(x) \leq f(x_1)$ .

Öeldakse, et funktsioonil  $f$  on punktis  $x_1$  *lokaalne miinimum*, kui

1. funktsioon  $f$  on määratud punkti  $x_1$  mingis ümbruses  $(x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon)$ ;
2. iga  $x \in (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon)$  korral kehtib võrratus  $f(x) \geq f(x_1)$ .

Funktsiooni lokaalseid maksimume ja miinimume nimetatakse selle funktsiooni *lokaalseteks ekstreemumiteks*.

Kui funktsioon ei ole konstantne lokaalse maksimumipunkti ümbruses, siis on selles punktis funktsiooni graafikul "tipp". Läbides maksimumipunkti vasakult paremale asendub funktsiooni kasvamine kahanemisega. Seevastu on lokaalne maksimum funktsiooni graafiku "org". Läbides seda punkti vasakult paremale asendub funktsiooni kahanemine kasvamisega.

Lokaalseid ekstreemume saab vaadelda nt joonisel 2.13. Seal kujutatud funktsioonil on punktis  $x_1$  lokaalne maksimum ja punktis  $x_3$  lokaalne miinimum.

Funktsiooni lokaalseid ekstreemume ei tohi segi ajada funktsiooni absoluutsete ekstreemumitega, millest oli juttu §2.11. Näiteks joonisel 2.13 toodud funktsioon saavutab absoluutse miinimumi punktis  $a$ , kuid seal lokaalset miinimumi ei ole. Põhjus on selles, et ei leidu lokaalse ekstreemumi definitsioonis nõutavat  $a$  ümbrust, kus funktsioon oleks määratud. Punktist  $a$  vasakul on funktsioon määramata.

Küll võib väita, et juhul, kui funktsioon on määratud lõigul  $[a, b]$  ja saavutab oma absoluutse ekstreemumi vahemikus  $(a, b)$ , siis on see ühtlasi lokaalne ekstreemum.

Kehtib järgmine väide.

**Lemma 3.1 (Fermat' lemma).** *Kui funktsioonil  $f$  on punktis  $x_1$  lokaalne ekstreemum ja funktsioon on diferentseeruv selles punktis, siis  $f'(x_1) = 0$ .*

*Tõestus.* Vaatleme juhtu, kui funktsioonil  $f$  on punktis  $x_1$  lokaalne maksimum. Siis, vastavalt lokaalse maksimumi definitsioonile, leidub punkti  $x_1$  ümbrus nii, et iga  $x$  korral sellest ümbrusest kehtib võrratus

$$f(x) - f(x_1) \leq 0. \quad (3.21)$$

Selles ümbruses asuva arvu  $x$  me saame võtta punktist  $x_1$  nii vasakult kui ka paremalt. Asugu  $x$  punktist  $x_1$  vasakul. Siis  $x - x_1 < 0$ . Jagame võrratuse (3.21) negatiivse arvuga  $x - x_1$ . Kuna negatiivse arvuga jagamisel võrratuse märk muutub vastupidiseks, saame

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq 0.$$

See võrratus jääb kehtima ka siis, kui me võtame temast piirväärtuse protsessis  $x \rightarrow x_1$ . Seega tuletise definitsiooni põhjal

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq 0. \quad (3.22)$$

Järgnevalt olgu  $x$  punktist  $x_1$  paremal. Siis  $x - x_1 > 0$ . Jagades võrratuse (3.21) positiivse arvuga  $x - x_1$  saame

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq 0.$$

Võtame piirväärtuse:

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq 0. \quad (3.23)$$

Võrratused (3.22) ja (3.23) näitavad, et  $f'(x_1) \geq 0$  ja  $f'(x_1) \leq 0$ . See on võimalik vaid siis, kui  $f'(x_1) = 0$ . Seega on lemma tõestatud juhul, kui  $x_1$ -s on lokaalne miinimum. Analooiliselt saab käsitleda ka juhtu, kui  $x_1$ -s on lokaalne miinimum.

### 3.9 Keskvaartusteoreemid.

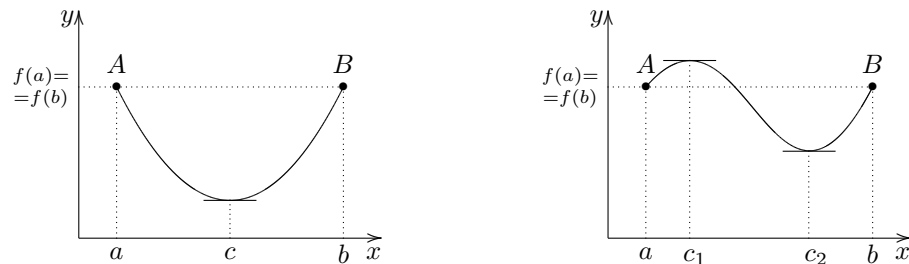
**Teoreem 3.4 (Rolle'i teoreem).** Kui funktsioon  $f$  on lõigul  $[a, b]$  pidev, vahemikus  $(a, b)$  diferentseeruv ja rahuldab tingimust  $f(a) = f(b)$ , siis leidub vahemikus  $(a, b)$  vähemalt üks punkt  $c$  nii, et  $f'(c) = 0$ .

*Tõestus.* Kuna  $f(x)$  on pidev lõigul  $[a, b]$ , siis saavutab ta oma suurima ja vähima väärtuse sellel lõigul (vt lõigul pidevate funktsioonide omadus 1 §2.11). Olgu  $M$  suurim väärtus ja  $m$  vähim väärtus.

Kui  $M = m$ , siis on funktsioon lõigul  $[a, b]$  konstantne, st kõigi  $x \in [a, b]$  korral kehtib  $f(x) = M = m$ . Sellisel juhul on  $f(x)$  tuletis nullfunktsioon, st  $f'(x) \equiv 0$ , ja teoreemi väide on täidetud iga  $c \in (a, b)$  korral.

Edasi vaatleme juhtu, kui  $M \neq m$ . Funktsioon võib oma absoluutse ekstreemumi saavutada kas lõigu  $[a, b]$  otspunktis või vahemikus  $(a, b)$ . Oletame kõigepealt, et mõlemad absoluutsed ekstreemumid saavutatakse lõigu otspunktides  $a$  ja  $b$ . Siis on  $f(x)$  väärtus ühes otspunktis  $M$  ja teises otspunktis  $m$  ning võrratusest  $M \neq m$  tuleneb, et  $f(x)$  väärtused lõigu otspunktides on erinevad. Kuid me ju eeldasime, et funktsiooni väärtused lõigu otspunktides on võrdsed (vt tingimus  $f(a) = f(b)$  teoreemi sõnastuses!). Tekib vastuolu. Järelikult ei olnud oletus, et mõlemad absoluutsed ekstreemumid saavutatakse lõigu otspunktides  $a$  ja  $b$ , õige. Funktsioon  $f(x)$  peab vähemalt ühe oma absoluutsetest ekstreemumitest (kas suurima või vähima väärtuse) saavutama vahemikus  $(a, b)$  asuvas punktis. Tähistame selle punkti  $c$ -ga. Kuna vahemikus  $(a, b)$  asuv absoluutne ekstreemum on ühtlasi ka lokaalne ekstreemum, omab funktsioon  $f$  lokaalset ekstreemumit punktis  $c$ . Peale selle on  $f$  teoreemi eelduste põhjal diferentseeruv punktis  $c$ . Järelikult, Fermat' lemma põhjal saame  $f'(c) = 0$ . Teoreem on tõestatud.

Rolle'i teoreemil on lihtne geomeetriline sisu. See on järgmine. Nimelt teoreemi eeldustel on funktsiooni  $y = f(x)$  graafik sile joon, mille otspunktid  $A = (a, f(a))$  ja  $B = (b, f(b))$  asuvad  $x$ -telje suhtes samal kõrgusel. Teoreem väidab, et sellisel juhul leidub vahemikus  $(a, b)$  vähemalt üks punkt  $c$ , mille korral funktsiooni tuletis on null, st funktsiooni graafiku puutuja on paralleelne  $x$ -teljega. Teoreemi illustreerib joonis 3.7. Vasakpoolisel graafikul on üks taoline punkt  $c$ , parempoolisel graafikul aga kaks punkti  $c_1$  ja  $c_2$ .



Joonis 3.7

**Teoreem 3.5 (Cauchy teoreem).** Kui funktsioonid  $f$  ja  $g$  on lõigul  $[a, b]$  pidevad, vahemikus  $(a, b)$  diferentseeruvad ja iga  $x \in (a, b)$  korral kehtib võrratus  $g'(x) \neq 0$ , siis leidub vahemikus  $(a, b)$  vähemalt üks punkt  $c$  nii, et

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (3.24)$$

*Tõestus.* Defineerime järgmise funktsiooni:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)). \quad (3.25)$$



Arvutame:

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} (g(a) - g(a)) = f(a),$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} (g(b) - g(a)) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a).$$

Seega  $F(a) = F(b)$ . Ühtlasi on  $F(x)$  pidev lõigul  $[a, b]$  ja diferentseeruv vahemikus  $(a, b)$ . Järelikult rahuldab  $F(x)$  Rolle'i teoreemi eeldusi. Rolle'i teoreemi põhjal leidub vahemikus  $(a, b)$  vähemalt üks punkt  $c$  nii, et  $F'(c) = 0$ . Valemist (3.25) leiame funktsiooni  $F(x)$  tuletise:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

Seega

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

Siit järeldub, et

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c).$$

Jagades suurusega  $g'(c)$ , mis eelduse tõttu erineb nullist, saame valemi (3.24). Teoreem on tõestatud.

**Teoreem 3.6 (Lagrange'i teoreem).** Kui funktsioon  $f$  on lõigul  $[a, b]$  pidev ja vahemikus  $(a, b)$  diferentseeruv, siis leidub vahemikus  $(a, b)$  vähemalt üks punkt  $c$  nii, et

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (3.26)$$

*Tõestus.* Lagrange'i teoreem on Cauchy teoreemi erijuht. Tõepoolest, võttes Cauchy teoreemis  $g(x) = x$  saame  $g(b) = b$ ,  $g(a) = a$ ,  $g'(c) = 1$  ja valemist (3.24) järeldubki (3.26).

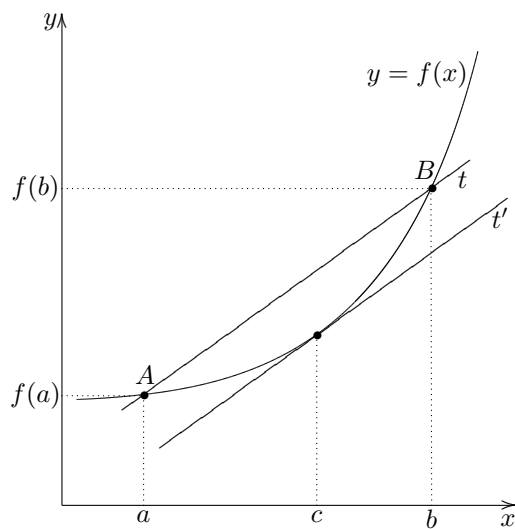
Lagrange'i teoreemi geomeetrilist sisu vaatleme jooniselt 3.8. Punktidest  $A = (a, f(a))$  ja  $B = (b, f(b))$  läbi tõmmatud lõikaja  $t$  tõus võrdub suhtega

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Viime paralleellükkega sirge  $t$  uude asendisse nii, et saadud uus sirge  $t'$  oleks joone  $y = f(x)$  puutuja. Tähistame puutepunkti  $x$ -koordinaadi  $c$ -ga. Kuna funktsiooni graafiku puutuja tõus võrdub funktsiooni tuletisega vaadeldavas punktis, siis sirge  $t'$  tõus on  $f'(c)$ . Kuna sirged  $t$  ja  $t'$  on paralleelsed, siis on nende tõusud omavahel võrdsed, seega

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Korrutades  $b - a$ -ga saame valemi (3.26). Kokkuvõttes: Lagrange'i teoreem väidab, et sileda joone lõikaja saab paralleellükkega viia selle joone puutujaks.



Joonis 3.8

### 3.10 l'Hospitali reegel.

l'Hospitali reegel on abivahend  $\frac{0}{0}$  ja  $\frac{\infty}{\infty}$  tüüpi määramatusi sisaldavate piirväärtuste arvutamisel. Sõnastame ja tõestame selle reegli konkreetset juhu  $\frac{0}{0}$  jaoks.

**Teoreem 3.7 (l'Hospitali reegel).** *Olgu funktsioonid  $f$  ja  $g$  diferentseeruvad punkti  $a$  mingis ümbruses, kusjuures  $g'(x) \neq 0$  iga  $x$  korral sellest ümbrusest. Peale selle, olgu*

$$f(a) = g(a) = 0.$$

*Kui eksisteerib piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , siis eksisteerib ka piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  ja kehtib valem*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (3.27)$$

*Tõestus.* Valime suvalise punkti  $x \neq a$  teoreemi sõnastuses mainitud arvu  $a$  ümbrusest. Tekib kaks võimalust:

1.  $x > a$ . Siis Cauchy teoreemi põhjal leidub vahemikus  $(a, x)$  punkt  $c$  nii, et

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (3.28)$$

2.  $x < a$ . Jällegi, Cauchy teoreemi põhjal leidub vahemikus  $(x, a)$  punkt  $c$  nii, et

$$\frac{f(a) - f(x)}{g(a) - g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (3.29)$$

Kuna eelduse kohaselt  $f(a) = g(a) = 0$ , siis nii valemist (3.28) kui ka valemist (3.29) järeldub võrdus

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (3.30)$$

Kui  $x \rightarrow a$ , siis  $c \rightarrow a$ , sest  $c$  paikneb  $x$  ja  $a$  vahel. Järelikult (3.30) põhjal

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (3.31)$$

Muudame avaldise (3.31) paremal poolel asuva piirväärtuse  $\lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$  tähistust asendades seal muutuja  $c$  muutujaga  $x$ , st  $\lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$  asemel kirjutame  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Tulemusena saame valemi (3.27). Eelduse kohaselt eksisteerib valem (3.27) paremal poolel olev piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Järelikult eksisteerib ka vasakul pool olev piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ . Teoreem on tõestatud.

l'Hospitali reegli põhjal saab  $\frac{0}{0}$  tüüpi määramatusega piirväärtuse arvutamisel üle minna piirväärtusele, mille all esineb esialgse murru lugeja tuletise ja nimetaja tuletise jagatis.

*Näide.* Arvutame  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ . Elementaarfunktsioon  $\frac{\sin x}{x}$  ei ole  $x = 0$  korral määratud (tekib määramatus  $\frac{0}{0}$ ). Piirväärtuse arvutamisel kasutame l'Hospitali reeglit:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

*Märkus.*

1. l'Hospitali reegel jääb kehtima ka siis, kui piirprotsess  $x \rightarrow a$  asendada piirprotsessiga  $x \rightarrow -\infty$  või  $x \rightarrow \infty$ .
2. l'Hospitali reegel on rakendatav ka  $\frac{\infty}{\infty}$  tüüpi määramatuse korral. Sellisel juhul tuleb teoreem 2.7 eeldustes esinevad võrdused  $f(a) = g(a) = 0$  asendada võrdustega  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$ .
3. l'Hospitali reeglit saab rakendada murrule  $\frac{f(a)}{g(a)}$  ainult siis, kui seal tõesti esineb määramatus  $\frac{0}{0}$  või  $\frac{\infty}{\infty}$ . Kui funktsioon  $\frac{f(x)}{g(x)}$  on punktis  $a$  määratud, siis l'Hospitali reeglit kasutada ei saa.

Lisaks saab seda reeglit (mitte otseselt!) kasutada ka  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$  jm määramatuste puhul. Neil juhtudel tuleb taoline määramatus enne l'Hospitali reegli rakendamist taandada kas määramatuseks  $\frac{0}{0}$  või määramatuseks  $\frac{\infty}{\infty}$ . Täpsemalt kirjeldatakse seda harjutustunnis.

### 3.11 Kõrgemat järku tuletised ja diferentsiaalid.

**Kõrgemat järku tuletised.** Olgu funktsioon  $y = f(x)$  diferentseeruv hulgas  $D$ . Siis on tema tuletis  $f'$  hulgas  $D$  määratud funktsioon. Oletame, et  $f'$  on samuti diferentseeruv hulgas  $D$ . Siis saame me arvutada funktsiooni  $f'$  tuletise ehk funktsiooni  $f$  teise tuletise, mida tähistatakse  $f''$ . Seda protseduuri võib jätkata. Funktsiooni  $f$  teise tuletise diferentseerimisel saame selle funktsiooni kolmanda tuletise  $f'''$  jne.

Funktsiooni  $y = f(x)$   $n$ -järku tuletiseks nimetatakse selle funktsiooni  $n - 1$  - järku tuletise tuletist ja tähistatakse  $f^{(n)}$ . Lõplikku  $n$ -järku tuletist omavat funktsiooni nimetatakse  $n$ -korda diferentseeruvaks.

Kui funktsioonil on olemas kõik tuletised  $f^{(n)}$ , kus  $n = 1, 2, 3, \dots$ , ja neil on lõplikud väärtused, siis nimetatakse seda funktsiooni *lõpmata arv kordi diferentseeruvaks*.

Neljandat ja kõrgemat järku tuletisi tähistatakse ka rooma numbritega. Näiteks  $f^{IV}$  on neljandat järku tuletis,  $f^{VII}$  on seitsmendat järku tuletis jne.

Kui funktsioon on esitatud kujul  $y = y(x)$ , st funktsiooni ja sõltuva muutuja jaoks kasutatakse samu tähiseid, siis tuletisi märkivad ülaindeksid liidetakse sõltuva muutujaga  $y$ . Näiteks: esimene tuletis on  $y'$ , teine tuletis  $y''$ ,  $n$ -järku tuletis  $y^{(n)}$  jne.

**Kõrgemat järku diferentsiaalid.** §3.6 tuletasime valemi  $dy = f'(a)dx$  funktsiooni  $y = f(x)$  diferentsiaali  $dy$  jaoks (valem (3.3)). Suurus  $dy$  sõltub punktist  $a$ , kus ta arvutatakse, ja argumendi muudust  $dx$ . Olgu  $dx$  konstantne suurus. Siis on  $dy$  arvu  $a$  funktsioon, st  $dy(a) = f'(a)dx$ . Tähistame selles valemis suuruse  $a$  ümber  $x$ -ga. Saame

$$dy(x) = f'(x)dx. \quad (3.32)$$

Selles tähistuses on diferentsiaal argumendi  $x$  funktsioon. Kui see funktsioon on piisavalt heade omadustega, võib temast uuesti diferentsiaali arvutada. Niiviisi saame me funktsiooni  $f$  teist järku diferentsiaali. Seda tähistatakse  $d^2y$ .

Tuletame valemi teist järku diferentsiaali jaoks. Kasutades võrdust (3.32) arvutame:

$$d^2y(x) = d[dy(x)] = d[f'(x)dx] = d[f'(x)]dx = [f'(x)]'dx = f''(x)dx^2.$$

Seega

$$d^2y(x) = f''(x)dx^2. \quad (3.33)$$

Võttes teist järku diferentsiaalid diferentsiaali saame kolmandat järku diferentsiaali  $d^3y$ . Kasutades juba tuletatud valemeid (3.32) ja (3.33) arvutame:

$$\begin{aligned} d^3y(x) &= d[d^2y(x)] = d[f''(x)dx^2] \\ &= d[f''(x)]dx^2 = [f''(x)]'dx^2 = f'''(x)dx^3. \end{aligned}$$

Järelikult

$$d^3y(x) = f'''(x)dx^3.$$

Seda protseduuri võib jätkata.

Funktsiooni  $y = f(x)$   $n$ -järku *diferentsiaaliks* nimetatakse selle funktsiooni  $n - 1$  - järku diferentsiaali diferentsiaali ja tähistatakse.  $d^n y$ . Kehtib valem

$$d^n y(x) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Lõpuks märgime, et jagades selle võrduse mõlemaid pooli suurusega  $dx^n$  saame järgmise valemi  $n$ -järku tuletise jaoks:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x).$$

### 3.12 Taylори ja McLaurini polünoomid.

**Taylori polünoom.** Mitmetes matemaatika rakendustes on vaja leida keeruliste funktsioonidele lihtsaid lähendeid. Enamasti konstrueeritakse taolised lähendid polünoomide hulgast. Polünoomiga on lihtne opereerida. Polünoomi väärtuse arvutamisel tuleb ju teostada ainult aritmeetilisi tehteid (liitmist, lahutamist, korrutamist ja jagamist). Näiteks taskuarvuti leiab funktsioonide  $a^x$ ,  $\sin x$  jms tegelike väärtuste asemel nende funktsioonide polünomiaalsete lähendite väärtusi. Polünoomi on lihtne ka diferentseerida ja integreerida. Seetõttu kasutatakse polünomiaalset lähendamist inseneriteadustes üsna palju.

§3.6 käsitlesime  $f(x)$  funktsiooni lineaarset lähendit punkti  $x = a$  ümbruses, mis avaldub valemiga

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Funktsioon  $P_1(x)$  koos oma tuletisega langeb punktis  $x = a$  kokku funktsiooniga  $f(x)$ , st

$$P_1(a) = f(a), \quad P_1'(a) = f'(a).$$

Lineaarfunktsiooni ehk esimese astme polünoomi  $P_1(x)$  graafik on sirge. Täpsemalt on tegemist funktsiooni  $y = f(x)$  graafiku puutujaga punktis  $A = (a, f(a))$ . Seega asendatakse kõverjoon puutepunkti ümbruses ligikaudselt sirgjoonega. Taoline lähend säilitab esialgse funktsiooni  $f(x)$  väärtuse  $f(a)$  ja graafiku tõusu ehk liikumissuuna punktis  $A$ .

Lineaarse lähendamisega läheb kaotsi joone "kõverus". Seetõttu tekib küsimus: kas on võimalik konstrueerida lineaarsest lähendist paremaid lähendeid, mis arvestavad ka "kõverust". Joone "kõverust", täpsemini kumerust või nõgusust, iseloomustab teist järku tuletis (sellest tuleb lähemalt juttu §4.4). Seega, kui õnnestuks konstrueeritavasse lähendisse üle kanda ka esialgse funktsiooni  $f(x)$  teise tuletise väärtus, st kui lähendi  $P(x)$  puhul kehtiks seos  $P''(a) = f''(a)$ , siis saaksime joone "kõveruse" teatud mõttes säilitada. Kahjuks lineaarne lähend selleks ei sobi, sest lineaarse funktsiooni teine tuletis on alati

null. Seega peame kasutusele võtma vähemalt teise astme ehk ruutpolünoomid. Funktsiooni  $f(x)$  ruutlähend punkti  $x = a$  ümbruses ruutfunktsioon  $P_2(x)$ , mis rahuldab järgmisi tingimusi:

$$P_2(a) = f(a), \quad P_2'(a) = f'(a), \quad P_2''(a) = f''(a).$$

Käesolevas paragrahvis me lahendame siiski üldisemat ülesannet. Nimelt me konstrueerime lähendi, mis on  $n$ -astme poünoom.

Eeldame, et  $f$  on lõpmata arv kordi diferentseeruv punkti  $a$  mingis ümbruses. Oletame, et selle funktsiooni kohta on teada tema väärtus ja tuletised kuni järguni  $n$  punktis  $a$ , st  $f(a), f'(a), \dots, f^{(n)}(a)$ . Ülesanne on järgmine: leida  $n$ -astme polünoom  $P_n$ , mis koos oma tuletistega kuni järguni  $n$  langeb punktis  $a$  kokku funktsiooniga  $f$ , st rahuldab tingimusi

$$P_n(a) = f(a), \quad P_n'(a) = f'(a), \quad \dots, \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \quad (3.34)$$

Otsime meid huvitavat polünoomi järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} P_n(x) = & C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 \\ & + C_4(x-a)^4 + \dots + C_n(x-a)^n, \end{aligned} \quad (3.35)$$

kus  $C_0, C_1, \dots, C_n$  on konstantsed kordajad. Nende kordajate määramiseks arvutame kõigepealt  $P_n$  tuletised kuni järguni  $n$ :

$$\begin{aligned} P_n'(x) = & 1C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + 4C_4(x-a)^3 \\ & + \dots + nC_n(x-a)^{n-1}, \\ P_n''(x) = & 2 \cdot 1C_2 + 3 \cdot 2C_3(x-a) + 4 \cdot 3C_4(x-a)^2 \\ & + \dots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}, \\ P_n'''(x) = & 3 \cdot 2 \cdot 1C_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2C_4(x-a) \\ & + \dots + n(n-1)(n-2)C_n(x-a)^{n-3}, \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ P_n^{(n)}(x) = & n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1C_n. \end{aligned}$$

Pannes neis avaldistes ja valemis (3.35) muutuja  $x$  võrduma  $a$ -ga saame

$$\begin{aligned} P_n(a) = C_0, \quad P_n'(a) = 1!C_1, \quad P_n''(a) = 2!C_2, \\ P_n'''(a) = 3!C_3, \quad \dots, \quad P_n^{(n)}(a) = n!C_n. \end{aligned}$$

Sümbol  $n!$  tähistab arvu  $n$  faktoriaali:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Kasutades tingimusi (3.34) tuleme järgmised valemid kordajate  $C_0, C_1, \dots, C_n$  jaoks:

$$C_0 = f(a), \quad C_1 = \frac{f'(a)}{1!}, \quad C_2 = \frac{f''(a)}{2!},$$

$$C_3 = \frac{f'''(a)}{3!}, \quad \dots, \quad C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Seega saame valemi (3.35) kirjutada järgmisel kujul:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$$+ \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (3.36)$$

Polünoomi  $P_n$  nimetatakse funktsiooni  $f$  *Taylori polünoomiks ehk  $n$ -järku lähendiks* punkti  $a$  ümbruses.

Kui  $x \approx a$ , siis kehtib ligikaudne valem

$$f(x) \approx P_n(x).$$

Mida suurem on  $n$  seda täpsem see valem on. See tähendab, et polünoomi astme suurenemisel lähendi täpsus paraneb.

Erijuhtudel  $n = 1$  ja  $n = 2$  saame Taylori polünoomist vastavalt lineaarse ja ruutlähendi:

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a), \quad P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2.$$

Kui  $a = 0$ , siis nimetatakse Taylori polünoomi ka *McLaurini polünoomiks*. Seega on funktsiooni  $f(x)$  McLaurini polünoom järgmine:

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad (3.37)$$

*Näiteid.* 1. Olgu  $f(x) = e^x$ . Kuna funktsioon  $e^x$  diferentseerimisel ei muutu, siis  $f^{(n)}(x) = e^x$  iga  $n \in \mathbb{N}$  korral. Seega  $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Asendades need suurused valemisse (3.37) tuleme funktsiooni  $e^x$  McLaurini polünoomi:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^i}{i!}.$$

2. Olgu  $f(x) = \sin x$ . Arvutame tuletised:

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{IV}(x) = \sin x,$$

$$f^V(x) = \cos x \quad \text{jne.}$$

Kuna  $\sin 0 = 0$  ja  $\cos 0 = 1$ , saame

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1,$$

$$f^{IV}(0) = 0, \quad f^V(0) = 1 \quad \text{jne.}$$

Üldiselt

$$f^{(2k)}(0) = 0, \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Järelikult sisaldab funktsiooni  $f(x) = \sin x$  McLaurini polünoom ainult paari-  
tuid liidetavaid vahelduvate märkidega:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

3. Analoogiliselt leiame ka  $f(x) = \cos x$  McLaurini polünoomi. Erinevalt funktsioonist  $\sin x$  sisaldab see ainult paaris liidetavaid:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

**Taylori polünoomi jääkliige.** Mõnikord on vaja hinnata Taylori polünoomi viga, so funktsiooni  $f(x)$  erinevust polünoomist  $P_n(x)$ . Vea hindamiseks on kõigepealt vaja leida selle vea jaoks sobiv valem. Järgevalt tegelemegi taolise valemi tuletamisega.

Taylori polünoomi viga avaldub  $f(x)$  ja  $P_n(x)$  vahena::

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x). \quad (3.38)$$

$R_n(x)$  valemi tuletamiseks kirjutame ta üles järgmiselt:

$$R_n(x) = \frac{Q(x)}{(n+1)!} (x-a)^{(n+1)}, \quad (3.39)$$

kus  $Q(x)$  on uus tundmatu funktsioon. Selline viga kuju on sarnane Taylori polünoomi üldliikmega valemis (3.36). Alljärgnevalt tegeleme funktsiooni  $Q(x)$  avaldamisega.

Valemist (3.38) saame  $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$  ning seoseid (3.36) ja (3.39) arvestades

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ &\quad + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{Q(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Funktsiooni  $Q(x)$  avaldamiseks vaatleme valemi (3.40) paremat poolt sõltuvana  $a$ -st mitte  $x$ -st. Täpsemalt: tähistame konstandi  $a$  ümber  $t$ -ga ja defineerime järgmise muutujast  $t$  sõltuva abifunktsiooni:

$$\begin{aligned} F(t) &= f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 \\ &\quad + \frac{f'''(t)}{3!}(x-t)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{Q(x)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Suurus  $x$  esineb funktsiooni  $F(t)$  valemis konstandina. Seega ei ole  $Q(x)$  selle funktsiooni valemis enam muutuv suurus vaid konstant. See lihtsustab  $Q(x)$  avaldamist.

Konkreetselt kasutame  $Q(x)$  leidmiseks Rolle'i teoreemi rakendatuna funktsioonile  $F(t)$  lõigul  $[a, x]$ . (Me eeldame siin võrratust  $a \leq x$ . Juhul, kui  $a > x$ , tuleb alljärgnevad teisendused teha lõigul  $[x, a]$ ). Kontrollime Rolle'i teoreemi eeldusi. Ilmselt on funktsioon  $F(t)$  lõigul  $[a, x]$  pidev ja vahemikus  $(a, x)$  diferentseeruv. See on nii, sest  $F(t)$  on polünoom. Polünoom on isegi lõpmata arv kordi diferentseeruv. Arvutame funktsiooni  $F(t)$  väärtused lõigu  $[a, x]$  otspunktides. Alustame vasakpoolsest otspunktist  $t = a$ :

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ &\quad + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{Q(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.42)$$



Võrreldes (3.42) ja (3.40) näeme, et  $F(a) = f(x)$ . Parempoolses otspunktis  $t = x$  saame

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(x-x) + \frac{f''(x)}{2!}(x-x)^2 \\ &\quad + \frac{f'''(x)}{3!}(x-x)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x)^n + \frac{Q(x)}{(n+1)!}(x-x)^{n+1} = f(x). \end{aligned}$$

Seega  $F(a) = F(x)$ . Rolle'i teoreemi eeldused on täidetud. Selle teoreemi põhjal leidub vahemikus  $(a, x)$  vähemalt üks punkt  $c$  nii, et  $F'(c) = 0$ .

Võrrand  $F'(c) = 0$  ongi see, millest meil lõpuks õnnestub avaldada  $Q(x)$ . Kuid selleks on meil vaja eelnevalt leida  $F(t)$  tuletis. Märkides, et

$$\left[ \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i \right]' = -\frac{f^{(i)}(t)}{i!}i(x-t)^{i-1} + \frac{f^{(i+1)}(t)}{i!}(x-t)^i,$$

diferentseerime valemite (3.41):

$$\begin{aligned} F'(t) &= f'(t) - f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}2(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 \\ &\quad - \frac{f'''(t)}{3!}3(x-t)^2 + \frac{f^{IV}(t)}{3!}(x-t)^3 - \\ &\quad - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{Q(x)}{(n+1)!}(n+1)(x-t)^n. \end{aligned}$$

Kuna  $\frac{i}{i!} = \frac{1}{(i-1)!}$  saame

$$\begin{aligned} F'(t) &= f'(t) - f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 \\ &\quad - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \frac{f^{IV}(t)}{3!}(x-t)^3 - \\ &\quad - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{Q(x)}{n!}(x-t)^n. \end{aligned}$$

Näeme, et  $F'(t)$  avaldises koonduvad liidetavad paarikaupa välja. Järele jäävad vaid 2 viimast liidetavat. Seega

$$F'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{Q(x)}{n!}(x-t)^n. \quad (3.43)$$

Arvestades võrreldes  $F'(c) = 0$  saame valemist (3.43) järgmise võrrandi:

$$-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{Q(x)}{n!}(x-c)^n = 0.$$

Siit tuleneb meid huvitava funktsiooni  $Q(x)$  jaoks järgmine valem:

$$Q(x) = f^{(n+1)}(c).$$

Asendame  $Q(x)$  selle valemi põhjal avaldistesse (3.39), saame  $R_n$  jaoks järgmise valemi:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}, \quad (3.44)$$

Järelikult saab valemite (3.40) ja (3.44) põhjal esitada funktsiooni  $f(x)$  järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{P_n(x)} \\ &\quad + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{R_n(x)}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Funktsiooni  $f(x)$  valem (3.45) koosneb kahest osast. Valemi peaosa on Tayloriga polünoom  $P_n(x)$ . Suurus  $R_n(x)$  on *Taylori polünoomi jääkliige* ehk Taylori polünoomi viga. Jääkliikmes esinev arv  $c$  paikneb  $x$  ja  $a$  vahel. Arvu  $a$  täpne väärtus ei ole teada. Ta sõltub nii  $a$ -st kui  $x$ -st.

Kui  $n = 1$ , siis on valem (3.45) järgmine:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(c)}{2!}(x - a)^2,$$

kus  $c$  on mingi arv  $x$  ja  $a$  vahel. Võrreldes seda valemit avaldisega (3.18) näeme, et Taylori polünoomi jääkliige langeb  $n = 1$  korral kokku diferentsiaali jääkliikmega  $\beta$ .

*Näide.* Hindame funktsiooni  $f(x) = e^x$  Taylori polünoomi viga. Eespool me juba tuletasime selle funktsiooni Taylori (McLaurini) polünoomi  $a = 0$  korral. Arvestades, et  $f^{(n+1)}(x) = e^x$ , paneme kirja ka vastava Taylori valemi:

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}}_{R_n(x)}.$$

Arv  $c$  asub 0 ja  $x$  vahel. Konkreetselt olgu funktsiooni  $e^x$  jaoks koostatud mingisugune tabel argumendi väärtustega  $x$  lõigult  $[0, 10]$ . Oletame, et funktsiooni  $e^x$  praktiliseks arvutamiseks kasutati McLaurini polünoomi astmega  $n = 50$ . Siis on jääkliige järgmine:

$$R_{50}(x) = \frac{e^c x^{51}}{51!}.$$

Kõige suurem  $x$  väärtus tabelis on  $x = 10$ . Kuna  $c$  paikneb 0 ja  $x$  vahel, siis on ka  $c$  kõige suurem võimalik väärtus 10. Seega

$$|R_{50}(x)| \leq \frac{e^{10} 10^{51}}{51!} \approx 1.42 \cdot 10^{-11}.$$

Tabeli maksimaalne võimalik viga on  $1.42 \cdot 10^{-11}$ .

## Peatükk 4

# Tuletise rakendused funktsiooni uurimisel

### 4.1 Funktsiooni kasvamine ja kahanemine.

Funktsiooni kasvamine ja kahanemine on seotud funktsiooni tuletise märgiga. Konkreetselt kehtib järgmine teoreem.

**Teoreem 4.1.** *Olgu funktsioon  $f$  diferentseeruv vahemikus  $(a, b)$ . Siis kehtivad järgmised väited:*

1. *Kui  $f'(x) > 0$  iga  $x \in (a, b)$  korral, siis  $f$  on kasvav vahemikus  $(a, b)$ .*
2. *Kui  $f'(x) < 0$  iga  $x \in (a, b)$  korral, siis  $f$  on kahanev vahemikus  $(a, b)$ .*

*Tõestus.* Tõestame väite 1. Olgu  $f'(x) > 0$  iga  $x \in (a, b)$  korral. Valime vahemikus  $(a, b)$  kaks suvalist punkti  $x_1$  ja  $x_2$  nii et  $x_1 < x_2$ . Kui meil õnnestub näidata, et kehtib võrratus  $f(x_1) < f(x_2)$ , siis on  $f$  kasvav vahemikus  $(a, b)$  ning väide 1 ongi tõestatud.

Lagrange'i teoreemi põhjal leidub vahemikus  $(x_1, x_2)$  vähemalt üks punkt  $c$  nii, et kehtib võrdus

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1). \quad (4.1)$$

Selle võrduse paremal poolel olev tuletis  $f'(c)$  on nullist suurem, kuna me eeldasime  $f'(x)$  positiivsust vahemikus  $(a, b)$ . Nullist suurem on ka vahe  $x_2 - x_1$ , kuna me valisime punktid  $x_1$  ja  $x_2$  selliselt, et  $x_1 < x_2$ . Seega on valemi (4.1) parem pool nullist suurem. Saame  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ . Sellest järeldubki soovitud võrratus  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Väide 2 tõestatakse analoogiliselt.

## 4.2 Lokaalsete ekstreemumite tarvilikud ja piisavad tingimused.

Eespool §3.8 defineerisime funktsiooni lokaalse ekstreemumi. Ühtlasi tõestasime Fermat' lemma, mis väidab, et diferentseeriva funktsiooni tuletis on lokaalses ekstreemumpunktis võrdne nulliga. Käesolevas paragrahvis vaatleme natuke üldisemat juhtu, kui funktsioon ei tarvitse diferentseeruv olla.

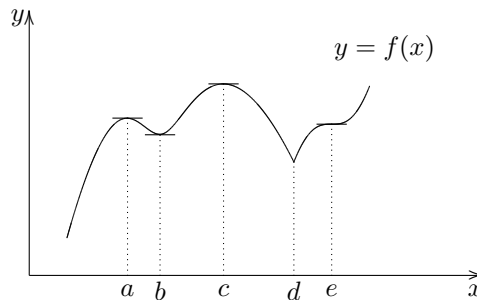
Niisiis: olgu funktsioonil  $f(x)$  punktis  $x_1$  lokaalne ekstreemum. Siis on kaks võimalust: kas  $f$  on diferentseeruv selles punktis (see tähendab, et eksisteerib lõplik tuletis  $f'(x_1)$ ) või  $f$  ei ole diferentseeruv punktis  $x_1$  (so vastav lõplik tuletis puudub). Esimesel juhul kehtib Fermat' lemma põhjal võrdus  $f'(x_1) = 0$ . Järelikult esineb kaks võimalust: kas 1)  $f'(x_1) = 0$  või 2) lõplik tuletis  $f'(x_1)$  puudub.

Funktsiooni argumenti väärtusi, mille korral tuletis võrdub nulliga või lõplik tuletis puudub, nimetatakse selle funktsiooni *kriitilisteks punktideks* (täpsemini: *esimest järku kriitilisteks punktideks*).

Nende arutluste tulemusena saame formuleerida järgmise väite:

**Teoreem 4.2 (Lokaalse ekstreemumi tarvilik tingimus).** *Kui funktsioonil  $f$  on punktis  $x_1$  lokaalne ekstreemum, siis on  $x_1$  selle funktsiooni kriitiline punkt.*

Näiteks joonisel 4.1 kujutatud funktsioonil on punktides koordinaatidega  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$ ,  $(c, f(c))$  ja  $(d, f(d))$  lokaalsed ekstreemumid. Esimese kolme ekstreemumpunktis on graafik sile, seega on funktsioon seal diferentseeruv ning tema tuletis võrdub nulliga:  $f'(a) = f'(b) = f'(c) = 0$ . Graafiku puutujad on neis punktides horisontaalsed. Seevastu neljandas ekstreemumpunktis koordinaatidega  $(d, f(d))$  ei ole graafik sile, seega  $f'(d)$  puudub.

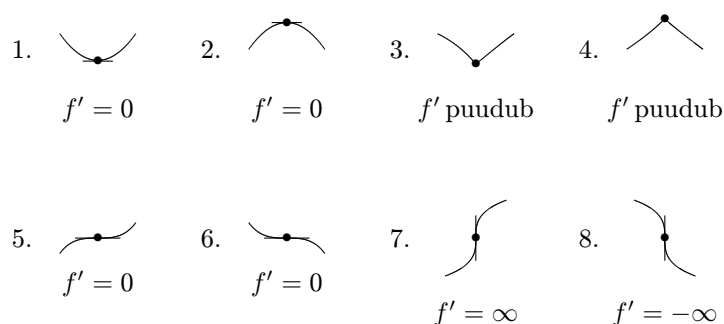


Joonis 4.1

Siinkohal tuleb rõhutada seda, et teoreemile 4.2 vastupidine väide ei kehti. See tähendab, et *igas kriitilises punktis ei tarvitse ekstreemumit olla*. Teiste sõnadega: funktsioonil võib olla selliseid kriitilisi punkte, kus ekstreemumit ei

ole. Näiteks funktsioonil  $f(x) = x^3$  on kriitiline punkt  $x = 0$  (sest  $f'(0) = 0$ ). Samas aga see funktsioon kasvab kogu arvteljel, kaasa arvatud punkti  $x = 0$  ümbrus. Seega ei ole funktsioonil  $f(x) = x^3$  punktis  $x = 0$  lokaalset ekstreemumit. Paneme tähele, et ka joonisel 4.1 kujutatud funktsioonil on kriitiline punkt  $e$ , milles ekstreemumit ei ole. Tõepoolest, punktis koordinaatidega  $(e, f(e))$  on graafiku puutuja paralleelne  $x$ -teljega, st  $f'(e) = 0$ , kuid ekstreemum seal puudub.

Kõikvõimalikud kriitilise punkti juhud on kokku võetud joonisel 4.2. Graafikutel 1 - 4 esineb lokaalne ekstreemum, kuid graafikutel 5 - 8 lokaalset ekstreemumit ei ole.



Joonis 4.2

Nagu nägime, on võimalike kriitiliste punktide hulk suurem kui võimalike ekstreemumite hulk. Tingimus, et  $x_1$  on kriitiline punkt, on vaid tarvilik lokaalse ekstreemumi olemasoluks. Sellest tingimusest ei piisa lokaalse ekstreemumi jaoks. Tekib loomulik küsimus: millised on piisavad tingimused, mille rahuldamise korral on kriitilises punktis lokaalne ekstreemum?

Võib arutleda nii: Lokaalsed ekstreemumid on punktid, kus funktsiooni kasvamine asendub kahanemisega või vastupidi. Seega lokaalses ekstreemumis tuleb vahetab märki. Kui tuleb on positiivne enne ekstreemumit ja negatiivne peale ekstreemumit, siis kasvamine asendub kahanemisega ning vaadeldav punkt on maksimumpunkt. Kui aga tuleb on negatiivne enne ekstreemumit ja positiivne peale ekstreemumit, siis kahanemine asendub kasvamisega ning vaadeldav punkt on miinimumpunkt.

Seega võime sõnastada järgmise väite:

**Teoreem 4.3 (Lokaalse ekstreemumi piisav tingimus I).** Olgu  $x_1$  funktsiooni  $f$  kriitiline punkt.

- 1) Kui läbides punkti  $x_1$  vasakult paremale funktsiooni tuletise märk muutub plussist miinuseks, siis on funktsioonil selles punktis lokaalne maksimum.
- 2) Kui aga läbides punkti  $x_1$  vasakult paremale funktsiooni tuletise märk muutub

miinusest plussiks, siis on funktsioonil selles punktis lokaalne miinimum.

Näiteks joonisel 4.2 toodud graafikutel 2 ja 4 on enne kriitilist punkti  $f' > 0$  ja peale kriitilist punkti  $f' < 0$ . Seega on neil graafikutel kriitilistes punktides maksimumid. Graafikutel 1 ja 3 on enne kriitilist punkti  $f' < 0$  ja peale kriitilist punkti  $f' > 0$ . Järelikult on neil graafikutel kriitilistes punktides miinimumid.

Seevastu graafikutel 5 - 8 toodud kriitilistes punktides tuletis märki ei muuda. Graafikutel 5 ja 7 on enne kriitilist punkti  $f' > 0$  ja peale kriitilist punkti samuti  $f' > 0$ . Graafikutel 6 ja 8 on nii enne kui ka peale kriitilist punkti  $f' < 0$ .

Vaatleme näidet teoreem 4.3 kasutamise kohta. Olgu antud funktsioon

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^3 - 8)^2}.$$

Leiame selle funktsiooni kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ja lokaalsed ekstreemumid.

Kuna kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemumid peavad asuma funktsiooni määramispiirkonnas, leiame kõigepealt antud funktsiooni loomuliku määramispiirkonna. Vaadeldav funktsioon on määratud suvalise reaalarvu  $x$  korral. Seega  $X = \mathbb{R}$ .

Avaldame tuletise. Liitfunktsiooni tuletise arvutamise eeskirja põhjal

$$f'(x) = \left[ (x^3 - 8)^{2/3} \right]' = \frac{2}{3} (x^3 - 8)^{-1/3} \cdot (x^3 - 8)' = \frac{2}{3} (x^3 - 8)^{-1/3} \cdot 3x^2.$$

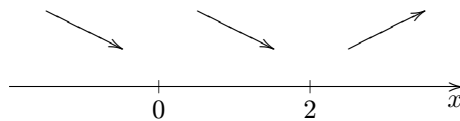
Seega

$$f'(x) = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 8}}.$$

Kasutades tuletise valemit leiame funktsiooni kriitilised punktid. Need on sellised punktid, kus tuletis võrdub nulliga või lõplik tuletis puudub. Ilmselt on tuletis nullkoht  $x = 0$ . Peale selle, tuletis ei ole määratud punktides, kus tema nimetaja  $\sqrt[3]{x^3 - 8}$  nulliks muutub. Seega lahendame võrrandi

$$\sqrt[3]{x^3 - 8} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 8 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

Järelikult on antud funktsioonil kaks kriitilist punkti  $x_1 = 0$  ja  $x_2 = 2$ . Punktis  $x_1$  on tuletis null ja punktis  $x_2$  lõplik tuletis puudub. Kanname need kaks punkti teljele:



Vaadeldava funktsiooni tuletis saab märki muuta ainult kriitilistes punktides.

See on nii järgmistel põhjustel. Funktsioon  $f'(x) = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 8}}$  kui elementaarfunktsioon on pidev kõigis oma määramispiirkonna punktides. Kuna kahe järjestikuse kriitilise punkti vahel on  $f'(x)$  määratud, on ta seal ka pidev. Kui nüüd  $f'(x)$  muudaks märki kahe järjestikuse

kriitilise punkti vahel, siis §2.11 omadus 3 põhjal oleks funktsioonil  $f'(x)$  nende kahe kriitilise punkti vahel veel üks kriitiline punkt  $c$ , kus  $f'(c) = 0$ .

Seega säilitab  $f'(x)$  märki vahemikes  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 2)$  ja  $(2, \infty)$ . Tuletise märgi kindlaks tegemiseks neis vahemikes valime igas vahemikus suvalised kontrollpunktid ja leiame neis kontrollpunktides tuletise märgi. Näiteks võime valida  $-1 \in (-\infty, 0)$ ,  $1 \in (0, 2)$  ja  $3 \in (2, \infty)$ . Arvutame:

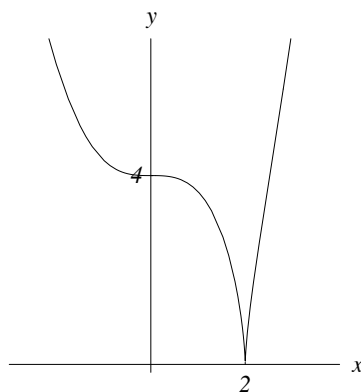
$$f'(-1) = \frac{2(-1)^2}{\sqrt[3]{(-1)^3 - 8}} = \frac{2}{\sqrt[3]{-9}} < 0,$$

$$f'(1) = \frac{2 \cdot 1^2}{\sqrt[3]{1^3 - 8}} = \frac{2}{\sqrt[3]{-7}} < 0,$$

$$f'(3) = \frac{2 \cdot 3^2}{\sqrt[3]{3^3 - 8}} = \frac{19}{\sqrt[3]{19}} > 0.$$

Tuletise märgi põhjal koostame funktsiooni kasvamis-kahanemisdiagrammi tõusvate ja langevate noolekestega  $x$ -teljel (vt ülal).

Diagrammilt leiame funktsiooni kasvamispiirkonna:  $\nearrow X = (2, \infty)$  ja kahanemispiirkonna:  $\searrow X = (-\infty, 2)$ . Punktis  $x = 2$  funktsiooni kahanemine asendub kasvamisega. Järelikult on teoreem 5.3 põhjal seal lokaalne miinimum. Miinimumpunkt on  $P_{min} = (2, 0)$ . Kuna selles punktis tuletis puudub, näeb funktsiooni graafik punkti  $P_{min}$  ümbruses välja nagu juht 3 joonisel 4.2. Teine kriitiline punkt  $x = 0$  asub funktsiooni kahanemispiirkonnas. Kuna selles punktis tuletis  $= 0$ , siis näeb funktsiooni graafik punkti  $P = (0, 4)$  ümbruses välja nagu juht 6 joonisel 4.2. Graafik on toodud joonisel 4.3.



Joonis 4.3:  $y = \sqrt[3]{(x^3 - 8)^2}$

Kui funktsioonil eksisteerivad esimest ja teist järku tuletised kriitilises punktis, siis saab lokaalsete ekstreemumite olemasolu kontrollida ka teise tuletise märgi abil. Paneme tähele, et joonisel 4.2 toodud juhul 1 on funktsiooni graafik

miinimumpunkti ümbruses nõgus, so ülespoole kaarduv ja juhul 2 on graafik maksimumpunkti ümbruses kumer, so allapoole kaarduv. Ülejärgmise paragrahvi teoreemis 4.5 me tõestame, et graafik on nõgus, kui funktsiooni teine tuletis on positiivne ja kumer, kui teine tuletis on negatiivne. Seega võime sõnastada järgmise teoreemi.

**Teoreem 4.4 (Lokaalse ekstreemumi piisav tingimus II).** *Olgu funktsiooni  $f$  kriitiline punkt  $x_1$  selline, et  $f'(x_1) = 0$ .*

*Kui  $f''(x_1) < 0$ , siis on funktsioonil  $f$  punktis  $x_1$  lokaalne maksimum.*

*Kui aga  $f''(x_1) > 0$ , siis on funktsioonil  $f$  punktis  $x_1$  lokaalne miinimum.*

### 4.3 Funktsiooni suurima ja vähima väärtuse leidmine lõigul.

Lõigul  $[a, b]$  pidev funktsioon  $f$  saavutab sellel lõigul oma suurima ja vähima väärtuse (vt §2.11 omadus 1). Kui suurim (vähim) väärtus saavutatakse vahemiku  $(a, b)$  punktis, siis samas punktis omab funktsioon ka lokaalset maksimumi (miinimumi), seega on see punkt ühtlasi funktsiooni kriitiline punkt. Kuid funktsioon võib saavutada suurima või vähima väärtuse ka lõigu otspunktis  $a$  või  $b$ . Seega tuleb lisaks kriitilistele punktidele kontrollida funktsiooni väärtusi lõigu otspunktides.

Kokkuvõttes: funktsiooni  $f$  suurima (vähima) väärtuse leidmiseks lõigul  $[a, b]$  tuleb

1. leida funktsiooni kriitilised punktid vahemikus  $(a, b)$ ,
2. arvutada  $f(a)$  ja  $f(b)$ ,
3. saadud arvudest valida suurim (vähim).

*Näide.* Leiame funktsiooni  $f(x) = x^3 - 3x$  suurima ja vähima väärtuse lõigul  $[0, 2]$ . Alustame kriitiliste punktide määramisest. Selleks arvutame tuletise:  $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$ . Funktsioonil on kaks kriitilist punkti, mis on tuletise nullkohad:  $x = -1$  ja  $x = 1$ . Kuna punkt  $x = -1$  ei asu lõigul  $[0, 2]$ , siis jääb see vaatluse alt välja. Seega tuleb funktsiooni väärtusi võrrelda kolmes punktis: kriitiline punkt  $x = 1$  ja lõigu otspunktid  $x = 0$  ja  $x = 2$ . Arvutame:

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0, \quad f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2, \quad f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2.$$

Järelikult on suurim väärtus 2 ja vähim väärtus  $-2$ . Suurim väärtus saavutatakse lõigu parempoolses otspunktis  $x = 2$  ja vähim väärtus saavutatakse kriitilises punktis  $x = 1$ .

### 4.4 Joone kumerus, nõgusus ja käänupunktid.

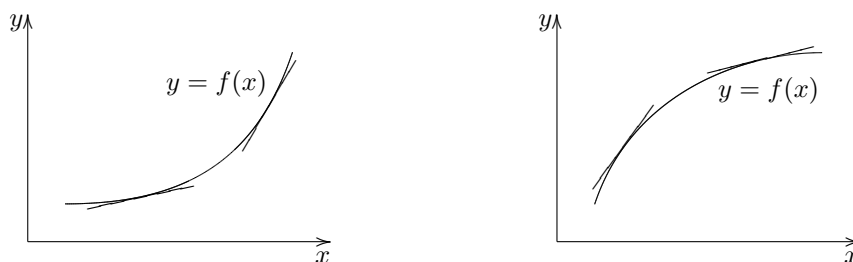
**Joone kumerus ja nõgusus.** Vaatleme joont võrrandiga  $y = f(x)$  ehk funktsiooni  $y = f(x)$  graafikut tasandil  $xy$ -teljestikus. Eeldame, et funktsioon  $f$  on



kõikjal diferentseeruv. Viimane on vajalik selleks, et joonel  $y = f(x)$  oleks igas punktis puutuja.

Õeldakse, et joon  $y = f(x)$  on *nõgus*, kui liikudes vasakult paremale selle joone puutuja tõus suureneb. Õeldakse, et joon  $y = f(x)$  on *kumer*, kui liikudes vasakult paremale selle joone puutuja tõus väheneb.

Joonise 4.4 vasakpoolsel graafikul on kujutatud nõgusat joont. Liikudes vasakult paremale joone puutuja tõus suureneb ja seega joon kaardub ülespoole. Parempoolsel on kujutatud kumerat joont. Liikudes vasakult paremale joone puutuja tõus väheneb ja joon kaardub allapoole.



Joonis 4.4

Kuna joone  $y = f(x)$  puutuja tõus punktis  $(x, f(x))$  võrdub funktsiooni  $f$  tuletisega, siis võime väita, et seal, kus  $f'$  kasvab, on joon  $y = f(x)$  nõgus ja seal, kus  $f'$  kahaneb, on joon  $y = f(x)$  kumer. Kuid  $f'$  kasvamine ja kahanemine on ju seotud  $f''$  märgiga. Nimelt rakendades teoreemis 4.1 tõestatud väiteid funktsioonile  $f'(x)$  saame järgmised laused:

1. Kui  $f''(x) > 0$  iga  $x \in (a, b)$  korral, siis on  $f'$  kasvav vahemikus  $(a, b)$ .
2. Kui  $f''(x) < 0$  iga  $x \in (a, b)$  korral, siis on  $f'$  kahanev vahemikus  $(a, b)$ .

Nende lausete põhjal saame sõnastada järgmise teoreemi:

**Teoreem 4.5.** Olgu funktsioon  $f$  kaks korda diferentseeruv vahemikus  $(a, b)$ . Siis kehtivad järgmised väited:

1. Kui  $f''(x) > 0$  iga  $x \in (a, b)$  korral, siis on joon  $y = f(x)$  nõgus vahemikus  $(a, b)$ .
2. Kui  $f''(x) < 0$  iga  $x \in (a, b)$  korral, siis on joon  $y = f(x)$  kumer vahemikus  $(a, b)$ .

**Joone käänupunktid.** Punkti, mis eraldab pideva joone kumerat osa nõgusast, nimetatakse selle joone *käänupunktiks*.

Näiteks joonise 4.2 graafikutel 5 - 8 on käänupunktid. Täpsemalt: graafikutel 5 ja 8 läheb vasakult paremale liikudes kumerus üle nõgususeks ning graafikutel 6 ja 7 läheb vasakult paremale liikudes nõgusus üle kumeruseks.

Olgu punkt  $P = (x_1, f(x_1))$  joone  $y = f(x)$  käänupunkt. Sellisel juhul ei saa kehtida võrratus  $f''(x_1) > 0$ . Tõepoolest, kui kehtiks  $f''(x_1) > 0$ , siis teoreemi 4.5 väite 1 põhjal oleks joon  $y = f(x)$  nõgus argumenti  $x_1$  ümbruses. See ei saa aga nii olla, sest vastavalt käänupunkti definitsioonile asendub nõgusus kumerusega, kui argument  $x$  läbib käänupunkti  $P$  ordinaati  $x_1$ . Samal põhjusel ei saa kehtida ka võrratus  $f''(x_1) < 0$ , sest sellisel juhul järelduks teoreemi 4.5 väitest 2, et  $y = f(x)$  oleks kumer argumenti  $x_1$  ümbruses, mis oleks samuti vastuolus sellega, et  $x = x_1$  korral asendub nõgusus kumerusega. Jäävad üle vaid kaks võimalust: kas 1)  $f''(x_1) = 0$  või 2) lõplik teist järku tuletis  $f''(x_1)$  puudub.

Funktsiooni argumenti väärtusi, mille korral teist järku tuletis võrdub nulliga või lõplik teist järku tuletis puudub, nimetatakse selle funktsiooni *teist järku kriitilisteks punktideks*.

Nende arutluse tulemusena saame formuleerida järgmise väite:

**Teoreem 4.6 (Käänupunkti tarvilik tingimus).** *Kui  $P = (x_1, f(x_1))$  on joone  $y = f(x)$  käänupunkt, siis  $x_1$  on funktsiooni  $f$  teist järku kriitiline punkt.*

Vastupidine väide kehti. funktsioonil võib olla ka selliseid teist järku kriitilisi punkte, kus käänupunkti ei ole. Näiteks funktsioonil  $f(x) = x^4$  on teist järku kriitiline punkt  $x = 0$  (sest  $f''(0) = 0$ ). Samas aga selle funktsiooni esimest järku tuletis  $f'(x) = 4x^3$  kasvab kogu arvteljel, kaasa arvatud punkti  $x = 0$  ümbruses. Seega on joon  $y = x^4$  kõikjal nõgus, millest järeldub, et tal ei ole üldse käänupunkte. Lihtne on kontrollida, kasutades §4.2 toodud lokaalse ekstreemumi piisavaid tingimusi, et punktis  $x = 0$  on funktsioonil  $f(x) = x^4$  hoopis lokaalne miinimum.

Püstitame küsimuse: millistel piisavatel tingimustel on teist järku kriitilises punktis funktsiooni graafikul käänupunkt? Oletame kõigepealt, et  $f''(x)$  on suurem nullist punktist  $x_1$ -st vasakul ja väiksem nullist punktist  $x_1$  paremal. Siis teoreemi 4.5 väidete 1 ja 2 põhjal on joon  $y = f(x)$  nõgus punktist  $x_1$  vasakul ja kumer punktist  $x_1$  paremal. Seega  $x_1$  korral nõgusus asendub kumerusega, mis tähendab et  $P = (x_1, f(x_1))$  on käänupunkt. Analoogiliselt arutleme juhul, kui  $f''(x)$  on väiksem nullist punktist  $x_1$ -st vasakul ja suurem nullist punktist  $x_1$  paremal. Siis on joon  $y = f(x)$  kumer punktist  $x_1$  vasakul ja nõgus punktist  $x_1$  paremal. Punktis  $P = (x_1, f(x_1))$  asendub kumerus nõgususega, seega on  $P = (x_1, f(x_1))$  käänupunkt. Kokkuvõttes saame formuleerida järgmise teoreemi:

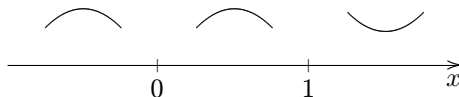
**Teoreem 4.7 (Käänupunkti piisav tingimus).** *Olgu  $x_1$  funktsiooni  $f$  teist järku kriitiline punkt. Kui läbides seda punkti funktsiooni teine tuletis muudab märki, siis on  $P = (x_1, f(x_1))$  joone  $y = f(x)$  käänupunkt.*

*Näide.* Leiame funktsiooni  $f(x) = 3x^5 - 5x^4$  kumerus- ja nõgususpiirkonnad ja käänupunktid. Antud funktsiooni määramispiirkond on  $X = \mathbb{R}$ . Avaldame

teist järku tuletise:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 15x^4 - 20x^3, \\f''(x) &= 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x - 1).\end{aligned}$$

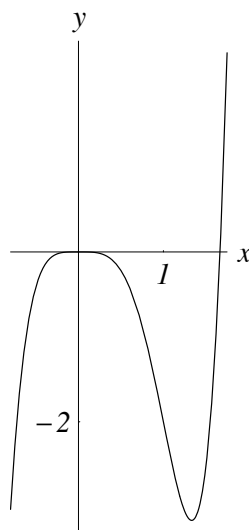
Teist järku kriitilised punktid on  $x = 0$  ja  $x = 1$ . Kanname nad teljele:



Vaadeldava funktsiooni teine tuletis saab märki muuta vaid teist järku kriitilistes punktides. Seega säilitab  $f''(x)$  märki vahemikes  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 1)$  ja  $(1, \infty)$ . Fikseerime kontrollpunktid neil intervallidel ja teeme kontrollpunktides kindlaks  $f''(x)$  märgid:

$$\begin{aligned}f''(-1) &= 60(-1)^2(-1 - 1) < 0 \\f''(0.5) &= 60 \cdot 0.5^2(0.5 - 1) < 0, \\f''(2) &= 60 \cdot 2^2(2 - 1) > 0.\end{aligned}$$

Teise tuletise märgi põhjal koostame kumerus-nõgusus diagrammi  $x$ -teljel (vt ülal). Kasutades seda diagrammi paneme kirja kumeruspiirkonna  $\overset{\cap}{X} = (-\infty, 1)$  ja nõgususpiirkonna  $\overset{\cup}{X} = (1, \infty)$ . Argumendi väärtusel  $x = 1$  asendub kumerus nõgususega. Seega on vastav punkt  $P = (1, -2)$  käänupunkt. Argumendi väärtusel  $x = 0$  käänupunkti ei ole. On võimalik näidata (kasutades teoreemi 4.3), et punktis  $x = 0$  on lokaalne miinimum. Funktsiooni graafik on kujutatud joonisel 4.5.



Joonis 4.5:  $y = 3x^5 - 5x^4$

## 4.5 Joone asümptoodid.

**Asümptoodi mõiste.** Vaatleme tasandil  $xy$  - teljestikus joont  $y = f(x)$ . Sirget  $l$  nimetatakse joone  $y = f(x)$  *asümptoodiks*, kui joone  $y = f(x)$  jooksva punkti eemaldumisel lõpmatusse selle punkti kaugus sirgest  $l$  läheneb nullile.

Punkt eemaldub lõpmatusse, kui selle punkti kaugus koordinaatide alguspunktist kasvab piiramatult.

Asümptoodid esinevad näiteks joonistel 1.10, 1.11, 1.14, 1.15, 1.17, 1.20, 1.21, 2.3, 2.6 ja 2.7 kujutatud funktsioonide graafikutel. Nad on seal tähistatud katkendliku joonega.

Joonel  $y = f(x)$  võib olla kahte liiki asümptoot:

1. *Vertikaalasümptoodid.* Need on  $y$ -teljega paralleelsed sirged. Asümptoodi võrrand on  $x = a$ .

Olgu sirge  $x = a$  joone  $y = f(x)$  vertikaalasümptoot. Kui punkt  $M = (x, y)$  eemaldub lõpmatusse mööda joont  $y = f(x)$ , siis vastavalt asümptoodi definitsioonile tema kaugus sirgest  $x = a$  läheneb nullile. Seega peab punkti  $M$   $x$ -koordinaat lähenema arvule  $a$  kas vasakult või paremalt, st kas  $x \rightarrow a^-$  või  $x \rightarrow a^+$ . Teisest küljest: kuna punkti  $M$  kaugus koordinaatide alguspunktist kasvab piiramatult, siis peab vähemalt üks selle punkti koordinaatidest piiramatult kasvama. Nagu nägime,  $x$  koordinaat läheneb lõplikule arvule  $a$ . Seega kasvab punkti  $y$ -koordinaat piiramatult, st kas  $y \rightarrow -\infty$  või  $y \rightarrow \infty$ . Me saame formuleerida järgmise väite.

Sirge  $x = a$  on joone  $y = f(x)$  asümptoodiks siis ja ainult siis, kui kehtib vähemalt üks järgmistest piirväärtustest:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \quad \text{või} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty. \end{aligned}$$

*Näiteid.* 1. Sirged  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , kus  $k \in \mathbb{Z}$ , on joone  $y = \tan x$  vertikaalasümptoodid (joonis 1.10). Kehtivad piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \tan x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \tan x = -\infty, \quad \text{kus } a = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Sirged  $x = k\pi$ , kus  $k \in \mathbb{Z}$ , on joone  $y = \cot x$  vertikaalasümptoodid (joonis 1.11). Kehtivad piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \cot x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \cot x = \infty, \quad \text{kus } a = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3. Sirge  $x = a$  on joone  $y = \frac{1}{(x-a)^n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  vertikaalasümptoot (joonised 2.3 ja 2.7). Paarisarvulise  $n$  korral

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty$$

ja paarituarvulise  $n$  korral

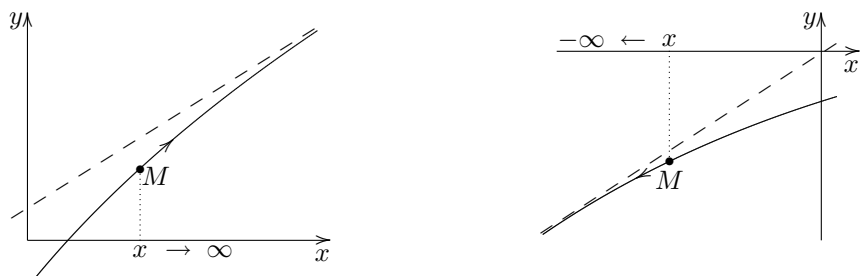
$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty.$$

4. Sirge  $x = -1$  on joone  $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  vertikaalasümptoot (joonis 2.6). Kehtib

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \infty.$$

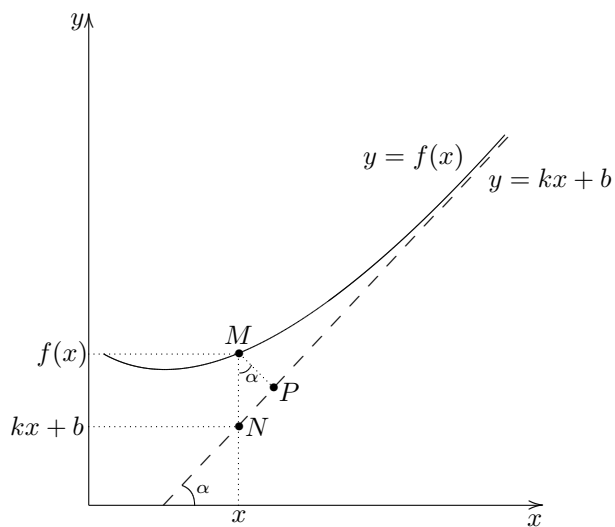
2. *Kaldasümptoodid.* Need on sirged, mis ei ole paralleelsed  $y$ -teljega. Asümptoodi võrrand on  $y = kx + b$ , kus  $k$  on asümptoodi tõus. Kaldasümptoodi erijuht on *horisontaalasümptoot*, mis on paralleelne  $x$ -teljega. Tõus  $k$  on sellisel juhul võrdne nulliga, st asümptoodi võrrand on  $y = b$ .

Kui sirge  $y = kx + b$  on joone  $y = f(x)$  kaldasümptoot, siis selle joone jooksva punkti  $M = (x, y)$  eemaldumisel lõpmatusse peab ka selle punkti  $x$ -koordinaat piiramatult kasvama, st kas  $x \rightarrow \infty$  või  $x \rightarrow -\infty$ . Tekib kaks võimalust: asümptoot esineb kas piirprotsessis  $x \rightarrow \infty$  või piirprotsessis  $x \rightarrow -\infty$ . Neid kahte juhtu on kujutatud joonisel 4.6.



Joonis 4.6

Näiteks on sirged  $y = \frac{\pi}{2}$  ja  $y = -\frac{\pi}{2}$  joone  $y = \arctan x$  horisontaalasümptoodid vastavalt piirprotsessides  $x \rightarrow \infty$  ja  $x \rightarrow -\infty$  (joonis 1.14). Samuti on sirged  $y = 0$  ja  $y = \pi$  joone  $y = \operatorname{arccot} x$  horisontaalasümptoodid vastavalt piirprotsessides  $x \rightarrow \infty$  ja  $x \rightarrow -\infty$  (joonis 1.15).



Joonis 4.7

Järgnevalt tuletame valemid kaldasümptoodi võrrandis  $y = kx + b$  esinevate kordajate  $k$  ja  $b$  jaoks. Vaatleme konkreetselt juhtu, kui sirge  $y = kx + b$  on joone  $y = f(x)$  asümptoodiks protsessis  $x \rightarrow \infty$  (joonis 4.7).

Kui  $x \rightarrow \infty$ , siis eemaldub punkt  $M = (x, f(x))$  lõpmatusse mööda joont  $y = f(x)$ . Kuna  $y = kx + b$  on joone  $y = f(x)$  asümptoot, siis punkti  $M$  kaugus

sirgest  $y = kx + b$  läheneb nullile. Tähistame punkti  $M$  ristprojektsiooni sirgel  $y = kx + b$  tähega  $P$ . Kuna punkti  $M$  kaugus sirgest  $y = kx + b$  võrdub lõigu  $MP$  pikkusega  $|MP|$ , saame

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |MP| = 0. \quad (4.2)$$

Ühtlasi näeme jooniselt, et  $|MN| = \frac{|MP|}{\cos \alpha}$ , kus  $\alpha$  on asümptoodi tõusunurk. Kuna  $\alpha$  jääb muutumatuks protsessis  $x \rightarrow \infty$ , siis (4.2) põhjal

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |MN| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|MP|}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \lim_{x \rightarrow \infty} |MP| = 0. \quad (4.3)$$

Edasi paneme tähele, et  $|MN|$  võrdub funktsioonide  $f(x)$  ja  $kx + b$  väärtuste vahega, st

$$|MN| = f(x) - kx - b.$$

Seega võrduse (4.3) põhjal

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx - b] = 0. \quad (4.4)$$

Tuues  $x$  sulgude ette saame

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[ \frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0.$$

Selles valemis oleva korrutise  $x \cdot \left[ \frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right]$  esimene tegur  $x$  läheneb lõpmatusele, kuid korrutis ise läheneb nullile. Järelikult peab teine tegur lähenema nullile, st

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0.$$

Selles avaldises  $\frac{b}{x} \rightarrow 0$ , kui  $x \rightarrow \infty$ . Seega

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - k \right] = 0 \quad \text{ehk} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k = 0$$

ehk

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (4.5)$$

Võrdusest (4.4) saame veel

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]. \quad (4.6)$$

Kokkuvõttes oleme tõestanud järgmise teoreemi:

**Teoreem 4.8.** Kui  $y = kx + b$  on joone  $y = f(x)$  asümptoot protsessis  $x \rightarrow \infty$ , siis  $k$  ja  $b$  avalduvad valemitega (4.5) ja (4.6).

Saab tõestada ka vastupidise väite: kui piirväärtused (4.5) ja (4.6) on lõplikud, siis on sirge  $y = kx + b$  joone  $y = f(x)$  asümptoot protsessis  $x \rightarrow \infty$ .

Analoogilised väited kehtivad ka piirprotsessi  $x \rightarrow -\infty$  korral.

*Näide.* Leiame joone  $y = x + \frac{1}{x} + 1$  asümptootid. Kõigepealt paneme tähele, et sirge  $x = 0$  on selle joone vertikaalasümptoot. See on nii, sest  $x$  lähenemisel nullile funktsiooni  $f(x) = x + \frac{1}{x} + 1$  liidetav  $\frac{1}{x}$  kasvab piiramatult. Seega  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| \rightarrow \infty$ .

Et selgitada välja joone täpsemat käitumist asümptoodi  $y = 0$  lähedal, leiame ka ühepoolsed piirväärtused  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  ja  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ . Kuna  $f(x) > 0$ , kui  $x > 0$  ja  $f(x) < 0$ , kui  $x < 0$ , siis ühepoolsetes piirprotsessides  $x \rightarrow 0^+$  ja  $x \rightarrow 0^-$  on funktsioon  $f(x)$  vastavalt positiivne ja negatiivne. Järelikult

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x + \frac{1}{x} + 1 \right) = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( x + \frac{1}{x} + 1 \right) = -\infty.$$

Järgnevalt vaatame, kas joonel on kaldasümptoot protsessis  $x \rightarrow \infty$ . Selleks arvutame piirväärtused (4.5) ja (4.6):

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x + \frac{1}{x} + 1 - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} + 1 \right) = 1.$$

Järelikult on joonel  $y = x + \frac{1}{x} + 1$  kaldasümptoot  $y = x + 1$  protsessis  $x \rightarrow \infty$ .

Lõpuks kontrollime kaldasümptoodi olemasolu ka protsessis  $x \rightarrow -\infty$ . Analoogiliselt arvutame:

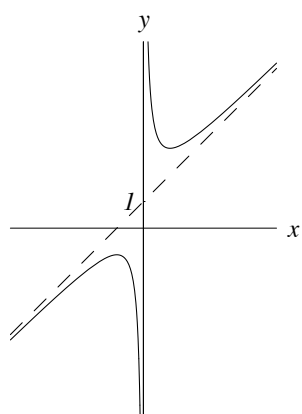
$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x + \frac{1}{x} + 1 - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} + 1 \right) = 1.$$

Näeme, et kaldasümptoot  $y = x + 1$  esineb sellel joonel ka piirprotsessis  $x \rightarrow -\infty$ .

Joon  $y = x + \frac{1}{x} + 1$  koos oma asümptootidega on kujutatud joonisel 4.8.





Joonis 4.8:  $y = x + \frac{1}{x} + 1$



# Peatükk 5

## Integraalid

### 5.1 Algfunktsioon ja määramata integraal.

**Algfunktsiooni mõiste.** Funktsiooni  $F$  nimetatakse funktsiooni  $f$  *algfunktsiooniks* hulgas  $D$ , kui iga  $x \in D$  korral kehtib võrdus  $F'(x) = f(x)$ .

Näiteks funktsioon  $F(x) = \sin x$  on funktsiooni  $f(x) = \cos x$  algfunktsioon hulgas  $\mathbb{R}$ , sest iga  $x \in \mathbb{R}$  korral  $(\sin x)' = \cos x$ .

Paneme tähele, et algfunktsioon ei ole üheselt määratud. Näiteks on funktsiooni  $f(x) = \cos x$  algfunktsioonideks ka kõik funktsioonid  $F(x) = \sin x + C$ , kus  $C$  on suvaline konstant. Tõepoolest, kuna konstandi tuletis on null, kehtib  $(\sin x + C)' = (\sin x)' + C' = \cos x$ .

**Teoreem 5.1.** Kui  $F$  on funktsiooni  $f$  algfunktsioon hulgas  $D$ , siis kõik funktsiooni  $f$  algfunktsioonid hulgas  $D$  avalduvad kujul  $F + C$ , kus  $C$  on suvaline konstant.

*Tõestus.* Olgu  $F$  funktsiooni  $f$  algfunktsioon hulgas  $D$ . Kõigepealt kontrollime kas funktsioonid kujul  $F + C$ , kus  $C$  on konstant, on tõepoolest  $f$  algfunktsioonid hulgas  $D$ . Kuna  $F'(x) = f(x)$  iga  $x \in D$  korral, siis

$$[F(x) + C]' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x) \quad \text{iga } x \in D \text{ korral,}$$

mis näitab, et suvaline funktsioon  $F + C$ , kus  $C$  on konstant, on tõesti  $f$  algfunktsioon hulgas  $D$ .

Tõestame nüüd teoreemi väite:  $f$ -i kõik algfunktsioonid hulgas  $D$  avalduvad kujul  $F + C$ . Selleks oletame vastuväiteliselt, et  $f$ -l leidub algfunktsioon  $G$ , mis ei avaldu kujul  $F + C$ . Arvutame  $G$  ja  $F$  vahe tuletise. Kuna  $G$  ja  $F$  on ühe ja sama funktsiooni  $f$  algfunktsioonid hulgas  $D$ , siis saame

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{iga } x \in D \text{ korral.}$$

Nulltuletist omab aga ainult konstantne funktsioon. Seega  $G - F = C$ , kus  $C$  on mingi konstant. Viimasest võrdusest saame seose  $G = F + C$ , mis näitab, et

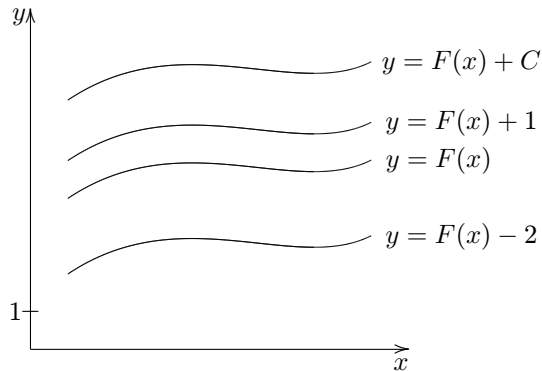
$G$  ikkagi avaldub kujul  $F + C$ . Jõudsime vastuolule. Teoreem on tõestatud.

**Määramata integraali mõiste.** Funktsiooni  $f$  algfunktsioonide üldavaldist  $F(x) + C$ , kus  $C$  on konstant, nimetatakse funktsiooni  $f$  *määramata integraaliks* ja tähistatakse  $\int f(x)dx$ . Seega definitsiooni kohaselt

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C - \text{konstant}. \quad (5.1)$$

Algfunktsiooni leidmist nimetatakse *integreerimiseks*.

Määramata integraal ei ole ühene funktsioon. Iga  $x$  korral on tal lõpmatult palju erinevaid väärtusi, mis sõltuvad valitud konstandist  $C$ . Teisest küljest võib määramata integraali tõlgendada kui ühete funktsioonide parve  $y = F(x) + C$ , kus konstandi  $C$  igale väärtusele vastab üks ühene funktsioon. Kujutades seda funktsioonideparve graafiliselt tasandil  $xy$ -koordinaadistikus saame joonteparve, mille jooned on üksteisest tuletatavad  $y$ -telje sihilise paralleellükke abil (joonis 5.1).



Joonis 5.1

## 5.2 Integraalide tabel. Määramata integraali omadused.

**Integraalide tabel.**

1.  $\int dx = x + C$ ,  
kuna  $(x + C)' = 1$ .
2.  $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ , kus  $a \neq -1$ ,  
kuna  $\left(\frac{x^{a+1}}{a+1} + C\right)' = (a+1) \frac{x^a}{a+1} = x^a$ .

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Tõestame valemi 3. Selleks peame näitama, et  $(\ln|x| + C)' = \frac{1}{x}$ .

Kui  $x > 0$ , siis  $(\ln|x| + C)' = (\ln x + C)' = \frac{1}{x}$ .

Kui  $x < 0$ , siis  $(\ln|x| + C)' = [\ln(-x) + C]' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ .

Kui  $x = 0$ , siis ei ole  $\ln|x|$  määratud. Oleme tõestanud valemi 3 kehtivuse kõikide  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  korral.

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ kus } a > 0, a \neq 1,$$

$$\text{kuna } \left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{a^x}{\ln a} \ln a = a^x.$$

$$\text{Erijuht: } \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{k^2 + x^2} = \frac{1}{k} \arctan \frac{x}{k} + C.$$

$$\text{Erijuht: } \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{k} + C.$$

$$\text{Erijuht: } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

**Hüperboolsete trigonomeetriliste funktsioonidega seotud integraalid.**

$$11. \int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$12. \int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$13. \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$$

$$14. \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$$

$$15. \int \frac{dx}{k^2 - x^2} = \frac{1}{2k} \ln \left| \frac{k+x}{k-x} \right| + C = \begin{cases} \frac{1}{k} \operatorname{artanh} \frac{x}{k} + C & \text{kui } |x| < k \\ \frac{1}{k} \operatorname{arcoth} \frac{x}{k} + C & \text{kui } |x| > k \end{cases} \quad (k > 0)$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k^2}} = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + k^2} \right) + C = \operatorname{arsinh} \frac{x}{k} + C$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - k^2} \right| + C = \begin{cases} \operatorname{arcosh} \frac{x}{k} + C & \text{kui } x > k \\ -\operatorname{arcosh} \left( -\frac{x}{k} \right) + C & \text{kui } x < -k \end{cases} \quad (k > 0)$$

Valemite 5 - 17 kontrollimiseks tuleb arvutada nende paremate poolte tuletised kasutades põhiliste elementaarfunktsioonide tuletiste tabelit §3.1 ja liit-funktsiooni tuletise arvutamise eeskirja §3.3 ning võrrelda saadud tulemusi integraalialuste funktsioonidega.

*Näiteid* valemite 9 ja 10 kohta:

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C, \int \frac{dx}{5+x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x}{\sqrt{5}} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

### Määramata integraali omadused.

$$1. \quad \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

NB! Omadus 1 ei kehti korrutamise ja jagamise korral! See tähendab, et

$$\int [f(x)g(x)] dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx \quad \text{ja}$$

$$\int [f(x) : g(x)] dx \neq \int f(x) dx : \int g(x) dx.$$

$$2. \quad \int a f(x) dx = a \int f(x) dx, \text{ kus } a \text{ on konstant.}$$

$$3. \quad \text{Kui } \int f(x) dx = F(x) + C \text{ ja } a, b \text{ on konstandid, siis}$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

*Tõestame* omaduse 3. Selleks me peame näitama, et

$$\left[ \frac{1}{a} F(ax+b) + C \right]' = f(ax+b).$$

Kasutades liitfunktsiooni diferentseerimise eeskirja ja võrdust  $F'(x) = f(x)$  saame seose

$$\left[ \frac{1}{a} F(ax+b) + C \right]' = \frac{1}{a} [F(ax+b)]' = \frac{1}{a} F'(ax+b) \cdot (ax+b)' =$$

$$= \frac{1}{a} F'(ax+b) \cdot a = f(ax+b),$$

mida oligi tarvis tõestada.

*Näiteid* omaduse 3 rakendamise kohta.

$$1. \quad \text{Arvutame } \int \cos(3x+4) dx. \text{ Kuna } \int \cos x dx = \sin x + C, \text{ siis}$$

$$\int \cos(3x+4) dx = \frac{1}{3} \sin(3x+4) + C.$$

2. Arvutame  $\int \frac{dx}{ax+b}$ . Kuna  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ , siis

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C.$$

3. Arvutame  $\int \frac{dx}{\cos^2(1-x)}$ . Kuna  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ , siis

$$\int \frac{dx}{\cos^2(1-x)} = \frac{1}{-1} \tan(1-x) + C = -\tan(1-x) + C.$$

4. Arvutame  $\int \frac{dx}{3+2x^2}$ . Kuna  $\int \frac{dx}{3+x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + C$ , siis

$$\int \frac{dx}{3+2x^2} = \int \frac{dx}{3+(\sqrt{2}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \sqrt{\frac{2}{3}}x + C.$$

4. Arvutame  $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$ . Kuna  $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C$ , siis

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}x}{2} + C.$$

### 5.3 Asendusvõte ja ositi integreerimine määrata integraali avaldamisel.

**Asendusvõte.** Vaatleme määrata integraali

$$\int f(x)dx. \quad (5.2)$$

Integraali (5.2) avaldamisel asendusvõttega tehakse selle integraali all muutuja vahetus. Selleks valitakse mingi funktsioon

$$u = \varphi(x)$$

ja integreerimine muutuja  $x$  järgi asendatakse integreerimisega muutuja  $u$  järgi. Eeldame, et  $\varphi$  on üksühene ja diferentseeruv. Tähistame funktsiooni  $\varphi$  pöörd-funktsiooni  $\psi$ -ga. Seega

$$x = \psi(u). \quad (5.3)$$

Paneme kirja funktsiooni  $\psi$  tuletise diferentsiaalide jagatisena:  $\frac{dx}{du} = \psi'(u)$ . Korrutades seda võrdust  $du$ -ga saame

$$dx = \psi'(u)du. \quad (5.4)$$

Kasutades valemeid (5.3) ja (5.4) asendame  $x$  ja  $dx$  integraali (5.2) all. Saame avaldise

$$\int f(x)dx = \int f[\psi(u)]\psi'(u)du. \quad (5.5)$$

*Näited.* 1. Avaldame  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$  muutuja vahetusega  $u = \frac{1}{x}$ . Funktsiooni  $u = \frac{1}{x}$  pöördfunktsioon on  $x = \frac{1}{u}$ . Arvutame diferentsiaali:  $dx = -\frac{du}{u^2}$ . Nüüd on olemas valemid suuruste  $x$  ja  $dx$  asendamiseks integraali all. Arvutame:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}} = -\int \frac{du}{u\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}}}$$

Kui  $u > 0$ , siis  $\sqrt{u^2} = u$  ja me saame

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\arcsin u + C = -\arcsin \frac{1}{x} + C.$$

Kui aga  $u < 0$ , siis  $\sqrt{u^2} = -u$  ja

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = \arcsin \frac{1}{x} + C.$$

Seega on vastus järgmine:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} -\arcsin \frac{1}{x} + C & \text{kui } x > 0 \\ \arcsin \frac{1}{x} + C & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

2. Avaldame  $\int xe^{x^2}dx$ , kusjuures sobiv muutuja vahetus ei ole ette antud, vaid tuleb ise leida. Ülesande lahendamise idee on järgmine. Püüame integraali teisendada nii, et selle alla tekiks liitfunktsiooni korrutis oma sisemise komponendi diferentsiaaliga. Siis võttes selle sisemise komponendi uueks muutujaks, on võimalik teostada asendus, mis integraali lihtsustab.

Püüamegi viia integraali  $\int xe^{x^2}dx$  sellisele kujule. Paneme tähele, et integraali all on juba olemas liitfunktsioon  $e^{x^2}$ . Selle liitfunktsiooni sisemise funktsiooni  $x^2$  diferentsiaal on  $2xdx$ . Seega kirjutame integraali järgmiselt:

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} \cdot 2xdx.$$

Nüüd on ta viidud kujule, kus liitfunktsioon on korrutatud oma sisemise komponendi diferentsiaaliga. Seega teeme muutuja vahetuse  $u = x^2$ ,  $du = 2xdx$  ja saame

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} \cdot 2xdx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$



**Ositi integreerimine.** Olgu  $u = u(x)$  ja  $v = v(x)$  kaks diferentseeruvat funktsiooni. Paneme kirja nende korrutise diferentsiaali avaldise (vt. diferentsiaali omadus 3 §3.3):

$$d(uv) = vdu + u dv.$$

Integreerime seda avaldist. Saame

$$\int d(uv) = \int vdu + \int u dv.$$

Kuna  $\int d(uv) = uv + C$  integraalide tabeli valemi 1 põhjal, siis

$$uv + C = \int vdu + \int u dv.$$

Konstandi  $C$  võib sellest valemist välja jätta, sest mõlemad määramata integraalid  $\int u dv$  ja  $\int v du$  sisaldavad juba määramata konstante. Viies  $\int v du$  võrduse teisele poolele saame

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (5.6)$$

Saadud avaldis kannab ositi integreerimise valemi nime.

Ositi integreerimise valemit kasutades saab avaldada integraale

$$\int x^n \sin(ax) dx, \quad \int x^n \cos(ax) dx, \quad \int x^n e^{ax} dx, \quad \int (\ln x)^n dx,$$

kus  $n$  on positiivne täisarv ja  $a$  on reaalarvuline konstant. Samuti saab seda võtet kasutades leida integraale arkusfunktsioonidest.

*Näited.* 1. Avaldame  $\int x \cos 2x dx$ . Võtame

$$u = x \quad \text{ja} \quad dv = \cos 2x dx.$$

Siis on avaldatav integraal kujul  $\int u dv$ . Ositi integreerimise valemi (5.6) kasutamiseks peame me avaldama ka suurused  $du$  ja  $v$ , mis asuvad selle valemi paremal poolel. Kuna  $u = x$ , siis

$$du = dx.$$

Funktsiooni  $v$  leidmiseks tuleb meil integreerida diferentsiaali  $dv = \cos 2x dx$ . See tähendab funktsiooni  $\cos 2x$  algfunktsiooni leidmist. Funktsiooni  $\cos 2x$  algfunktsioonide üldavaldis on  $\frac{1}{2} \sin 2x + C$ , kus  $C$  on suvaline konstant. Ositi integreerimise valemis läheb vaja ainult ühte algfunktsioonidest. Seega võtame neist lihtsaima:

$$v = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Nüüd on meil olemas vajalikud suurused  $u, v, du, dv$  ja me saame ositi integreerida:

$$\int x \cos 2x \, dx = x \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \int \frac{1}{2} \sin 2x \, dx = \frac{x}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx.$$

Kuna  $\int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$ , on lõpptulemus järgmine:

$$\int x \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

2. Avaldame  $\int \ln x \, dx$ . Seekord võtame

$$u = \ln x \quad \text{ja} \quad dv = dx.$$

Siis

$$du = \frac{dx}{x} \quad \text{ja} \quad v = x.$$

Integreerime ositi:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

2. Avaldame  $\int \arctan x \, dx$ . Olgu

$$u = \arctan x \quad \text{ja} \quad dv = dx.$$

Siis

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{ja} \quad v = x.$$

Integreerime ositi:

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x dx}{1+x^2}.$$

Integraali  $\int \frac{x dx}{1+x^2}$  avaldamisel kasutame asendusvõtet. Selleks kirjutame ta kujul

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1+x^2}$$

ja teeme muutuja vahetuse  $t = 1 + x^2$ . Siis  $dt = 2x dx$ . Saame

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + C = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C.$$

Kokkuvõttes on vastus järgmine: Integreerime ositi:

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C.$$

## 5.4 Ratsionaalfunktsioonide integreerimine. Ratsionaalfunktsiooni integraalile taanduvad integraalid.

**Ratsionaalfunktsiooni integreerimine.** Olgu vaja avaldada ratsionaalfunktsiooni  $R(x)$  integraal. Nagu me teame, on ratsionaalfunktsioon kahe polünoomi jagatis. Seega

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

kus  $P_m$  on  $m$ -astme polünoom ja  $Q_n$  on  $n$ -astme polünoom. Integraali  $\int R(x)dx$  avaldamine koosneb alljärgnevatest etappidest.

1. *Polünoomide  $P_m$  ja  $Q_n$  jagamine.* See etapp teostatakse ainult siis, kui  $m \geq n$ . Eesmärgiks on eraldada välja ratsionaalfunktsiooni täisosa polünoomi kujul ja jääki sisaldav murdos. Täpsemalt: funktsioon  $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$  esitatakse järgmise summana:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = T_{m-n}(x) + \frac{S_t(x)}{Q_n(x)}, \quad (5.7)$$

kus  $T_{m-n}(x)$  on  $m-n$ -astme polünoom ja  $S_t(x)$  on  $t$ -astme polünoom, kusjuures kehtib võrratus  $t < n$ . Polünoomid  $T_{m-n}(x)$  ja  $S_t(x)$  on vastavalt jagatise täisosa ja jääk. Täisosa  $T_{m-n}(x)$  integreerimine on lihtne, sest polünoom  $T_{m-n}(x)$  on astmefunktsioonide summa, millele saab rakendada tabeli valemeid 1 ja 2. Seega koondub raskuspunkt ratsionaalfunktsiooni

$$\frac{S_t(x)}{Q_n(x)}, \quad \text{kus } t < n, \quad (5.8)$$

integraali avaldamisele.

Kui  $m < n$ , siis jääb jagamise etapp vahele, sest integreeritava funktsiooni lugeja on juba algselt väiksema astmega kui nimetaja, st funktsioon on kujul (5.8).

2. *Ratsionaalfunktsiooni (5.8) lahutamine osamurdude summaks.* Alustame murru nimetaja teguriteks lahutamisest. Nimelt on võimalik tõestada, et suvalise polünoomi  $Q_n(x)$  saab lahutada teguriteks järgmisel kujul:

$$Q_n(x) = c \cdot (x-a)^k \cdot \dots \cdot (x^2+px+q)^l \cdot \dots, \quad (5.9)$$

milles esineb teatud lõplik arv tegureid kujul  $(x-a)^k$  erinevate konstantidega  $a \in \mathbb{R}$  ja astmetega  $k \in \mathbb{N}$  ning teatud lõplik arv tegureid kujul  $(x^2+px+q)^l$  erinevate konstantidega  $p, q \in \mathbb{R}$  ja astmetega  $l \in \mathbb{N}$  ning  $c$  on konstant. Seejuures ruutfunktsioonide  $x^2+px+q$  diskriminandid on negatiivsed, st  $p^2-4q < 0$ . Seetõttu ei saa tegureid  $(x^2+px+q)^l$  reaalarvude hulgas enam väiksemateks teguriteks lahutada. Seega saame

$$\frac{S_t(x)}{Q_n(x)} = \frac{S_t(x)}{c(x-a)^k \cdot \dots \cdot (x^2+px+q)^l \cdot \dots}.$$

Edasi lahutame funktsiooni  $\frac{S_t(x)}{Q_n(x)}$  osamurdude summaks järgmiselt:

$$\begin{aligned} \frac{S_t(x)}{Q_n(x)} &= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \dots + \\ &+ \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \frac{M_lx + N_l}{(x^2 + px + q)^l} + \dots, \end{aligned} \quad (5.10)$$

kus  $A_1, \dots, A_k, \dots, M_1, N_1, \dots, M_l, N_l, \dots$  on teatud reaalarvulised konstandid, mis tuleb eraldi määrata (sellest pisut hiljem). Märgime, et toodud valemis vastab igale polünoomi  $Q_n(x)$  tegurile  $(x-a)^k$  grupp liidetavaid kujul  $\frac{A_i}{(x-a)^i}$ , kus  $i = 1, \dots, k$ , ja igale polünoomi  $Q_n(x)$  tegurile  $(x^2+px+q)^l$  grupp liidetavaid kujul  $\frac{M_ix+N_i}{(x^2+px+q)^i}$ , kus  $i = 1, \dots, l$ .

Konstantide  $A_1, \dots, A_k, \dots, M_1, N_1, \dots, M_l, N_l, \dots$  määramiseks minnakse valemi (5.10) paremal poolel ühisele nimetajale. Kuna vastav ühine nimetaja on  $Q_n(x)$ , peab paremal poolel saadav lugeja olema võrdne vasaku poole lugejaga  $S_t(x)$ . Sellest võrdusest tuletataksegi võrrandid tundmatute  $A_1, \dots, A_k, \dots, M_1, N_1, \dots, M_l, N_l, \dots$  määramiseks. Funktsiooni (5.8) integreerimine taandub nüüd valemis (5.10) esinevate osamurdude integreerimisele.

3. *Osamurdude integreerimine.* Murru  $\frac{A}{(x-a)^i}$  integreerimine on lihtne. Tabeli valemite 2 ja 3 ning määramata integraali omaduste 2 ja 3 põhjal

$$\int \frac{A}{(x-a)^i} dx = \begin{cases} \frac{A}{(1-i)(x-a)^{i-1}} + C & \text{kui } i \neq 1, \\ A \ln |x-a| + C & \text{kui } i = 1. \end{cases}$$

Murru  $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^i}$  integreerimine on keerulisem. Murd  $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^i}$  lahutatakse kahe murru summaks, millest esimese lugejas on konstandiga korrutatud funktsiooni  $x^2 + px + q$  tuletis ja teise lugeja on konstantne:

$$\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^i} = \frac{c_1(2x + p)}{(x^2 + px + q)^i} + \frac{c_2}{(x^2 + px + q)^i}. \quad (5.11)$$

On lihtne näha (minnes selle valemi paremal poolel ühisele nimetajale ja võrdsustades lugejates olevad  $x$  kordajad ning vabaliikmed), et  $2c_1 = M$ ,  $c_1p + c_2 = N$ , millest tulenevad järgmised valemid konstantide  $c_1$  ja  $c_2$  jaoks:  $c_1 = \frac{M}{2}$ ,  $c_2 = N - \frac{Mp}{2}$ . Avaldisest (5.11) saame

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^i} dx = c_1 \int \frac{(2x + p)dx}{(x^2 + px + q)^i} + c_2 \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^i}. \quad (5.12)$$

Valemi (5.12) paremal poolel oleva esimese integraali avaldamisel kasutatakse asendust  $u = x^2 + px + q$ . Siis  $du = (2x + p)dx$  ja

$$\begin{aligned} \int \frac{(2x + p)dx}{(x^2 + px + q)^i} &= \\ &= \int \frac{du}{u^i} = \begin{cases} \frac{1}{(1-i)u^{i-1}} + C = \frac{1}{(1-i)(x^2+px+q)^{i-1}} + C & \text{kui } i \neq 1 \\ \ln |u| + C = \ln |x^2 + px + q| + C & \text{kui } i = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Jääb veel avaldada valemi (5.12) paremal poolel olev teine integraal

$$I_i = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^i}.$$

Eraldame kõigepealt tema nimetajas olevast ruutfunktsioonist täisruudu:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 + 2 \frac{p}{2}x + q = \left(x^2 + 2 \frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}\right) + q - \frac{p^2}{4} = \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = (x + a)^2 + k^2, \end{aligned}$$

kus  $a = \frac{p}{2}$  ja  $k^2 = q - \frac{p^2}{4}$ . Märgime, et  $q - \frac{p^2}{4} > 0$ , kuna ruutfunktsioonide  $x^2 + px + q$  diskriminandid on negatiivsed, st  $p^2 - 4q < 0$ . Kui  $i = 1$ , siis saab integraali  $I_1$  avaldamisel kasutada tabeli valemit 9 ja määramata integraali omadust 3:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{k^2 + (x + a)^2} = \frac{1}{k} \arctan \frac{x + a}{k} + C.$$

Kui  $i > 1$ , siis saab integraali  $I_i$  avaldada kasutades järgmist rekurrentset valemit:

$$I_i = \frac{x + a}{(2i - 2)k^2(x^2 + px + q)^{i-1}} + \frac{2i - 3}{(2i - 2)k^2} I_{i-1}. \quad (5.13)$$

Integraali  $I_1$  kaudu avaldub sellest valemist  $I_2$ ,  $I_2$  kaudu  $I_3$  jne.

Selle üsna komplitseeritud eeskirja illustreerimiseks lahendame ühe pikema näiteülesande. Avaldame ratsionaalfunktsiooni integraali

$$I = \int \frac{3x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 37x - 10}{x^3 + 2x^2 - 16} dx.$$

Antud juhul on lugejas oleva polünoomi aste suurem kui nimetajas oleva polünoomi aste. Seetõttu tuleb alustada nende kahe polünoomi jagamisest. Jagamistehe on kirja pandud järgmise skeemina:

$$\begin{array}{rcl} 3x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 37x - 10 & : & x^3 + 2x^2 - 16 = 3x + 2 \\ \underline{3x^4 + 6x^3 + 0x^2 - 48x} & & \\ 2x^3 + 8x^2 + 11x - 10 & & \\ \underline{2x^3 + 4x^2 + 0x - 32} & & \\ 4x^2 + 11x + 22 & & \end{array}$$

Kirjeldame seda skeemi. Kõigepealt kirjutame ülemisse ritta kõrvuti jagatava, so  $3x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 37x - 10$  ja jagaja, so  $x^3 + 2x^2 - 16$ . Nende järele, peale võrdusmärgi hakkame moodustama jagatise täisosas. Esitame küsimuse: millega peab korrutama jagaja kõige kõrgema astmega liiget  $x^3$  selleks, st saada jagatava kõige kõrgema astmega liige  $3x^4$ ? Selleks teguriks on  $3x$ . Jagatise

täisosa esimene liidetav ongi  $3x$ , ja me kirjutame selle peale võrdusmärgi. Nüüd me korrutame terve jagaja läbi teguriga  $3x$ :

$$3x \cdot (x^3 + 2x^2 - 16) = 3x^4 + 6x^3 - 48x = 3x^4 + 6x^3 + 0x^2 - 48x$$

ja kirjutame saadud tulemuse jagatava alla. Järgnevalt lahutame ülemisest polünoomist  $3x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 37x$  alumise polünoomi  $3x^4 + 6x^3 + 0x^2 - 48x$  ja toome ka liidetava  $-10$  ülevaalt alla. Tulemuseks saame  $2x^3 + 8x^2 + 11x - 10$ . Kordame äsjakirjeldatud protseduuri polünoomiga  $2x^3 + 8x^2 + 11x - 10$  jagatava asemel. See tähendab, et kõigepealt esitame küsimuse: millega peab korrutama jagaja kõrgeima astmega liiget  $x^3$  selleks, st saada antud polünoomi kõrgeima astmega liige  $2x^3$ ? Selleks teguriks on 2. Jagatise täisosa teine liidetav liidetav ongi 2, ja me lisame selle peale võrdusmärgi. Seejärel korrutame terve jagaja läbi teguriga 2:

$$2 \cdot (x^3 + 2x^2 - 16) = 2x^3 + 4x^2 + 0x - 32$$

ja kirjutame saadava tulemuse polünoomi  $2x^3 + 8x^2 + 11x - 10$  alla. Lõpuks lahutame polünoomist  $2x^3 + 8x^2 + 11x - 10$  polünoomi  $2x^3 + 4x^2 + 0x - 32$ . Saame  $4x^2 + 11x + 22$ . Kuna tegemist on ruutpolünoomiga, mille aste on väiksem kui jagaja aste, siis seda enam rohkem jagada ei saa.

Jagatise täisosa on  $3x + 2$  ja jääk on  $4x^2 + 11x + 22$ . Järelikult on võimalik ülesandes antud ratsionaalfunktsioon esitada järgmisel kujul:

$$\frac{3x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 37x - 10}{x^3 + 2x^2 - 16} = 3x + 2 + \frac{4x^2 + 11x + 22}{x^3 + 2x^2 - 16}.$$

Esitame ka integraali  $I$  kahe liidetava summana:

$$I = I_1 + I_2, \quad \text{kus } I_1 = \int (3x + 2) dx, \quad I_2 = \int \frac{4x^2 + 11x + 22}{x^3 + 2x^2 - 16} dx.$$

Esimese integraali avaldamine on lihtne:

$$I_1 = \frac{3x^2}{2} + 2x + C.$$

Seega langeb kogu raskus teise integraali  $I_2$  avaldamisele.

Integraali  $I_2$  avaldamist alustame nimetaja  $x^3 + 2x^2 - 16$  teguriteks lahutamisest. Kuna kuupvõrrandi lahendamiseks puuduvad lihtsad reeglid, siis kasutame kaudset meetodit. Oletame, et kuupvõrrandi  $x^3 + 2x^2 - 16 = 0$  lahendid on täisarvulised. Sellisel juhul peavad nad olema arvu 16 tegurid (kas  $+$  või  $-$  märgiga). Seega peame me otsima lahendeid arvude 1,  $-1$ , 2,  $-2$ , 4,  $-4$ , 8,  $-8$ , 16 ja  $-16$  hulgast. Kontrollime neid arve järjest:  $1^3 + 2 \cdot 1^2 - 16 \neq 0$ ,  $(-1)^3 + 2(-1)^2 - 16 \neq 0$ , kuid  $2^3 + 2 \cdot 2^2 - 16 = 0$ . Järelikult on arv  $x = 2$  kuupvõrrandi  $x^3 + 2x^2 - 16 = 0$  lahend ning ühtlasi on  $x - 2$  kuupliikme  $x^3 + 2x^2 - 16$  tegur. Jagame polünoomi  $x^3 + 2x^2 - 16$  teguriga  $x - 2$ . Saame  $x^2 + 4x + 8$ . Seega

$$x^3 + 2x^2 - 16 = (x - 2)(x^2 + 4x + 8).$$

Ruutfunktsiooni  $x^2 + 4x + 8$  ei saa reaalarvude hulgas enam rohkem teguriteks lahutada, sest tema diskriminant on negatiivne:  $D = 4^2 - 4 \cdot 8 < 0$ .

Moodustame osamurrud määramata kordajatega:

$$\begin{aligned}\frac{4x^2 + 11x + 22}{x^3 + 2x^2 - 16} &= \frac{4x^2 + 11x + 22}{(x-2)(x^2 + 4x + 8)} = \\ &= \frac{A}{x-2} + \frac{Mx + N}{x^2 + 4x + 8}.\end{aligned}$$

Kordajate  $A$ ,  $M$  ja  $N$  määramiseks läheme selle võrduse paremal poolel üle ühisele nimetajale:

$$\frac{4x^2 + 11x + 22}{(x-2)(x^2 + 4x + 8)} = \frac{A(x^2 + 4x + 8) + (Mx + N)(x-2)}{(x-2)(x^2 + 4x + 8)}.$$

Kuna vasakul ja paremal pool olevate murdude nimetajad on omavahel võrdsed, siis peavad ka lugejad omavahel võrdsed olema:

$$A(x^2 + 4x + 8) + (Mx + N)(x-2) = 4x^2 + 11x + 22. \quad (5.14)$$

Saadud võrdus peab olema täidetud iga  $x$  korral, sest me teisendame ratsionaalfunktsiooni osamurdude summaks iga  $x$  väärtuse korral.

Järgnevalt kirjutame võrrandi (5.14) välja kolme erineva  $x$  väärtuse korral selleks, et saada süsteemi kolme tundmatu  $A$ ,  $M$  ja  $N$  jaoks. Seejuures püüame valida sellised  $x$  väärtused, mille korral võrrandid tulevad võimalikult lihtsad. Valides näiteks  $x = 2$  langevad  $M$  ja  $N$  võrrandist välja ja me saame

$$A(2^2 + 4 \cdot 2 + 8) = 4 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 + 22 \Leftrightarrow 20A = 60 \Leftrightarrow A = 3.$$

Järgmiseks valime  $x = 0$ . Siis langeb  $M$  välja ja me saame

$$A \cdot 8 + N \cdot (-2) = 22 \Leftrightarrow 2N = 8A - 22.$$

Kuna  $A = 3$ , siis  $2N = 8 \cdot 3 - 22 = 2$ , millest järeldub, et  $N = 1$ . Lõpuks võtame  $x = 1$ , Siis

$$A(1 + 4 + 8) + (M + N)(-1) = 4 + 11 + 22 \Leftrightarrow M = 13A - N - 37.$$

Kuna  $A = 3$  ja  $N = 1$ , siis  $M = 13 \cdot 3 - 1 - 37 = 1$ . Kokkuvõttes: määramata kordajatel on järgmised väärtused:

$$A = 3, M = N = 1.$$

Seega on osamurrud järgmised:

$$\frac{4x^2 + 11x + 22}{x^3 + 2x^2 - 16} = \frac{3}{x-2} + \frac{x+1}{x^2 + 4x + 8}.$$

Kasutades seda seost saame integraali  $I_2$  kirjutada kahe osamurru integraali summaks:

$$I_2 = I_3 + I_4, \quad \text{kus } I_3 = \int \frac{3}{x-2} dx, \quad I_4 = \int \frac{x+1}{x^2 + 4x + 8} dx.$$

Integraali  $I_3$  arvutamine on lihtne:

$$I_3 = 3 \int \frac{dx}{x-2} = 3 \ln|x-2| + C.$$

Integraali  $I_4$  arvutamiseks eraldame temast välja selle osa, mille jaoks saab kasutada asendust  $u = x^2 + 4x + 8$ . Kuna selle asenduse korral  $du = (2x+4)dx$ , peame integraali all lugejasse saama avaldise  $(2x+4)dx$ . Selleks korrutame ja jagame kõigepealt 2-ga:

$$I_4 = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+4x+8}.$$

Selle tehte tulemusega saime lugejas  $x$  kordajaks arvu 2. Nüüd peame me  $2x$  järele saama liidetavaks arvu 4. Selleks liidame ja lahutame lugejas arvu 2 ja teisendame  $I_4$  kahe integraali summaks:

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x+4-2)dx}{x^2+4x+8} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+8} - \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{x^2+4x+8} = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+8}}_{I_5} - \underbrace{\int \frac{dx}{x^2+4x+8}}_{I_6}. \end{aligned}$$

Integraali  $I_5$  arvutamisel kasutamegi asendust  $u = x^2 + 4x + 8$ , mille korral  $du = (2x+4)dx$ . Saame

$$I_5 = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2+4x+8| + C.$$

Jääb veel avaldada  $I_6$ . Selleks eraldame nimetajas olevast ruutfunktsioonist välja täisruudu:

$$x^2 + 4x + 8 = x^2 + 4x + 4 + 4 = (x+2)^2 + 4.$$

Seega

$$I_6 = \int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{dx}{2^2+(x+2)^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+2}{2} + C.$$

Paneme kokku lõpptulemuse:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^4+8x^3+8x^2-37x-10}{x^3+2x^2-16} dx &= I = I_1 + I_3 + I_5 - I_6 = \\ &= \frac{3x^2}{2} + 2x + 3 \ln|x-2| + \frac{1}{2} \ln|x^2+4x+8| - \frac{1}{2} \arctan \frac{x+2}{2} + C. \end{aligned}$$

**Ratsionaalfunktsiooni integraalile taanduvad integraalid.**

Nüüd vaatleme mitmesuguseid integraale kujul

$$\int R(f_1(x), \dots, f_n(x)) dx,$$



kus  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  on mingid suvalised funktsioonid ja  $R(x)$  on ratsionaalfunktsioon. Liitfunktsiooni  $R(f_1(x), \dots, f_n(x))$  all mõistame funktsiooni, milles on  $R(x)$ -i argument asendatud kõikjal ühega funktsioonidest  $f_1(x), \dots, f_n(x)$ .

Näiteks kui  $R(x) = \frac{1}{1+x^2}$  ja  $f_1(x) = \sin x$ ,  $f_2(x) = \cos x$ , siis on liitfunktsiooni  $R(\sin x, \cos x)$  moodustamiseks järgmised võimalused:

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{1+\sin^2 x}, \quad R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{1+\cos^2 x}, \\ R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{1+\sin x \cos x}.$$

Teatud juhtudel on võimalik integraali  $\int R(f_1(x), \dots, f_n(x))dx$  sobiva asendusega  $u = \varphi(x)$  taandada ratsionaalfunktsiooni integraalile, st integraalile kujul

$$\int R_1(u)du,$$

kus  $R_1(u)$  on ratsionaalfunktsioon argumendiga  $u$ . Viimase avaldamiseks saab kasutada eelmises alamparagrahvis kirjeldatud eeskirja.

Alljärgnevas loetelus on toodud mõned taolised integraalid koos asendustega, mis viivad nad ratsionaalfunktsioonide integraalidele.

$$\int R(e^x) dx, \quad u = e^x \\ \int R(\sin^2 x, \cos x) \sin x dx, \quad u = \cos x \\ \int R(\sin x, \cos^2 x) \cos x dx, \quad u = \sin x$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx, \quad u = \tan \frac{x}{2}, \quad \text{asendusvalemid:} \quad \begin{aligned} \sin x &= \frac{2u}{1+u^2} \\ \cos x &= \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx &= \frac{2du}{1+u^2} \end{aligned}$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx, \quad u = \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx, \quad u = \begin{cases} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{ax} & \text{kui } a > 0 \\ \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - x_1} & \text{kui } a < 0, \end{cases}$$

kus  $x_1$  on võrrandi  $ax^2 + bx + c = 0$  lahend.

*Näited.* 1. Avaldame integraali  $\int \frac{dx}{\sin x + 1}$  asendusega  $u = \tan \frac{x}{2}$ . Siis  $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$  ja  $du = \frac{2du}{1+u^2}$  (vt ülal). Arvutame:

$$\int \frac{dx}{\sin x + 1} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2} + 1} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u+1+u^2}{1+u^2}} = 2 \int \frac{du}{2u+1+u^2} =$$

$$= 2 \int \frac{du}{(u+1)^2} = -\frac{1}{u+1} + C = -\frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} + C.$$

2. Avaldame  $\int \sin^7 x \cos^3 x dx$  kasutades asendust  $u = \sin x$ . Siis  $du = \cos x dx$  ja me saame

$$\begin{aligned} \int \sin^7 x \cos^3 x dx &= \int \sin^7 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^7 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \\ &= \int u^7 (1 - u^2) du = \int (u^7 - u^9) du = \frac{u^8}{8} - \frac{u^{10}}{10} + C = \frac{\sin^8 x}{8} - \frac{\sin^{10} x}{10} + C. \end{aligned}$$

3. Avaldame  $\int x\sqrt{x-1} dx$ . Tegemist on integraaliga tüüpi  $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx$ , kus  $n = 2$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$ ,  $\gamma = 0$  ja  $\delta = 1$ . Seega teeme muutuva vahetuse  $u = \sqrt{x-1}$ . Integraali all on vaja asendada ka suurused  $x$  ja  $dx$ . Arvutame  $x$ :

$$u = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow u^2 = x-1 \Leftrightarrow x = u^2 + 1.$$

Järelikult  $dx = 2udu$ . Teeme muutuva vahetuse ja avaldame integraali:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-1} dx &= \int (u^2 + 1)u \cdot 2udu = 2 \int (u^4 + u^2) du = \\ &= \frac{2u^5}{5} + \frac{2u^3}{3} + C = \frac{2(x-1)^2\sqrt{x-1}}{5} + \frac{2(x-1)\sqrt{x-1}}{3} + C. \end{aligned}$$

## 5.5 Integraalsumma ja määratud integraal.

**Integraalsumma mõiste.** Olgu antud funktsioon  $f$ , mis on pidev lõigul  $[a, b]$ . Jaotame lõigu  $[a, b]$   $n$  osalõiguks punktidega  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , kusjuures

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Tähistame järjekorras  $i$ -nda osalõigu pikkuse sümboliga  $\Delta x_i$ , st

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Valime igal osalõigul  $[x_{i-1}, x_i]$  ühe punkti  $p_i$ . Moodustame summa

$$S_n = f(p_1)\Delta x_1 + f(p_2)\Delta x_2 + \dots + f(p_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(p_i)\Delta x_i. \quad (5.15)$$

Seda summat nimetatakse funktsiooni  $f$  *integraalsummaks* lõigul  $[a, b]$ .

**Määratud integraali mõiste.** Tähistame pikima osalõigu pikkuse sümboliga  $\varrho_n$ , st  $\varrho_n = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ . Muudame lõigu  $[a, b]$  tükeldust järjest peenemaks selliselt, et pikima osalõigu pikkus  $\varrho_n$  läheneb nullile. Kui  $f$  on pidev lõigul  $[a, b]$ , siis on integraalsummal  $S_n$  taolises piirprotsessis lõplik piirväärtus.

Seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni  $f$  määratud integraaliks lõigul  $[a, b]$  ja tähistatakse

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Seega definitsiooni kohaselt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varrho_n \rightarrow 0} S_n. \quad (5.16)$$

Integraali  $\int_a^b f(x)dx$  komponendid kannavad järgmisi nimetusi:  $a$  - integraali alumine raja,  $b$  - integraali ülemine raja,  $[a, b]$  - integreerimisloik,  $x$  - integreerimismuutuja,  $f$  - integreeritav funktsioon,  $f(x)dx$  - integraalialune avaldis.

**Näide füüsikast.** Liikugu materiaalne objekt  $x$ -teljel punktist  $a$  punkti  $b$ . Mõjuga temale jõud  $F$ , mis üldiselt sõltub koordinaadist  $x$ , st  $F = F(x)$ . Eesmärgiks on leida valem töö  $A$  arvutamiseks, mille jõud  $F$  teeb vaadeldava objekti liikumisel punktist  $a$  punkti  $b$ .

Kui  $F$  on konstantne, siis avaldub töö valemiga

$$A = F(b - a).$$

Kui  $F$  ei ole konstantne, siis tuleb töö arvutamisel kasutada integreerimist. Idee on järgmine: jaotame vaadeldava lõigu  $[a, b]$  väikesteks osalõikudeks nii, et igal osalõigul on jõud ligikaudselt konstantne. Igal osalõigul arvutame töö eraldi, kasutades selleks ülaltoodud valemit. Seejärel liidame osalõikudel tehtud tööd kokku saades töö tervel lõigul  $[a, b]$ . Nii viisi saame ligikaudse töö valemi. Täpse töö valemi saame, kui muudame lõigu tükelduse "lõpmata peeneks", st võtame ligikaudsest töö valemist piirväärtuse pikima osalõigu pikkuse lähenemisel nullile.

Asume töö valemi tuletamise juurde. Seejuures eeldame, et funktsioon  $F(x)$  on pidev. Pidevus on vajalik selleks, et  $F(x)$  muutuks väikestel osalõikudel vähe. Teatavasti läheneb pideva funktsiooni muut nullile tema argumendi muudu lähenemisel nullile (vt §2.9).

Jaotame lõigu  $[a, b]$   $n$  osalõiguks punktidega  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , kusjuures

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Tähistame järjekorras  $i$ -nda osalõigu pikkuse sümboliga  $\Delta x_i$ , st  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Valime igal osalõigul  $[x_{i-1}, x_i]$  ühe punkti  $p_i$ . Kui  $i$ -nda osalõigu pikkus on väike, siis muutub pidev funktsioon  $F(x)$  sellel osalõigul vähe, st

$$F(x) \approx F(p_i) \quad \text{iga} \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad \text{korral.}$$

Seega on  $i$ -ndal osalõigul tehtud töö  $A_i$  ligikaudselt võrdne  $F(p_i)$  ja osalõigu pikkuse  $\Delta x_i$  korrutisega, st  $A_i \approx F(p_i)\Delta x_i$ . Summeerides tööd üle osalõikude saame töö ligikaudse avaldise kogu lõigul  $[a, b]$ :

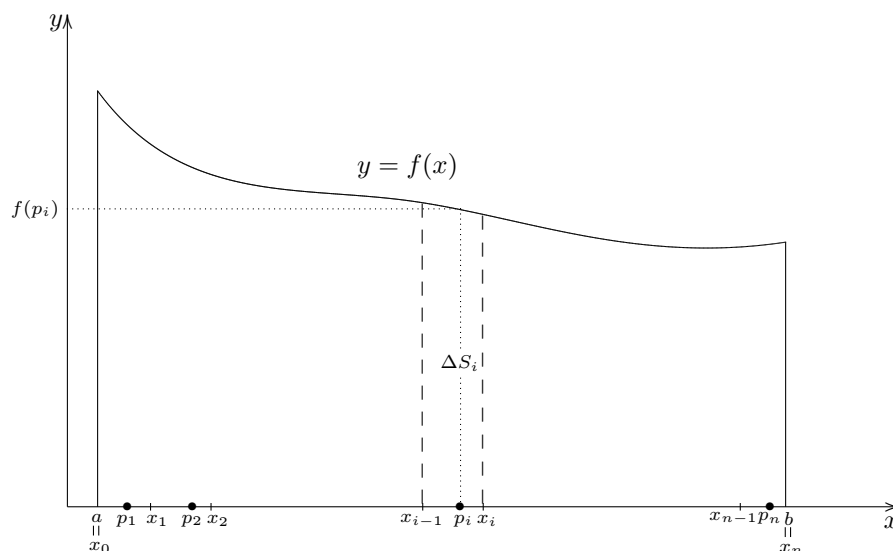
$$A = \sum_{i=1}^n A_i \approx \sum_{i=1}^n F(p_i)\Delta x_i. \quad (5.17)$$

Mida väiksem on osalõigu  $[x_{i-1}, x_i]$  pikkus, seda vähem muutub jõud sellel osalõigul ja seda täpsem on valem  $A_i \approx F(p_i)\Delta x_i$ . Olgu  $\varrho_n$  pikima osalõigu pikkus. Mida väiksem on  $\varrho_n$ , seda väiksemad on osalõikude pikkused ning järelikult on seda täpsem valem (5.17). Teisest küljest, valemi (5.17) paremal poolel seisab funktsiooni  $F$  integraalsumma lõigul  $[a, b]$ . Integraalsumma läheneb määratud integraalile protsessis  $\varrho_n \rightarrow 0$ . Seega saame ligikaudsest valemist (5.17) piirprotsessis  $\varrho_n \rightarrow 0$  järgmise täpse valemi töö jaoks:

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

## 5.6 Määratud integraali geomeetriline sisu.

Olgu funktsioon  $f$  pidev lõigul  $[a, b]$ . Eldame, et  $f(x) \geq 0$ . Vaatleme joontega  $y = f(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  ja  $y = 0$  piiratud kõvertrapetsit (joonisel 5.2 on see ümbritsetud pideva joonega).



Joonis 5.2

Tähistame selle kujundi pindala sümboliga  $S$ . Meie eesmärk on tuletada valem pindala  $S$  jaoks. Selleks jaotame lõigu  $[a, b]$   $n$  osalõiguks punktidega  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , kusjuures

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Fikseerime igal osalõigul  $[x_{i-1}, x_i]$  ühe punkti  $p_i$ . Tähistame

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Vaatleme osalõigule  $[x_{i-1}, x_i]$  toetuvat kõvertrapetsi osa  $\Delta S_i$  (joonisel 5.2 on selle küljed tõmmatud katkendliku joonega). Kui  $\Delta x_i$  on väike, siis muutub pidev funktsioon  $f$  osalõigul  $[x_{i-1}, x_i]$  vähe. Seega võib ta sellel osalõigul lugeda ligikaudselt võrdseks konstandiga  $f(p_i)$  ehk

$$f(x) \approx f(p_i) \quad \text{kui} \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (5.18)$$

Järelikult on  $\Delta S_i$  ligikaudselt ristkülik ja tema pindala avaldub ligikaudu kõrguse ja aluse korrutisena:

$$\Delta S_i \approx f(p_i) \Delta x_i.$$

Terve kõvertrapetsi ligikaudse pindala valemi saame, kui summeerime osapiirkondade pindalad:

$$S \approx \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i. \quad (5.19)$$

Märgime, et saadud valemi paremal poolel seisab aluseid  $\Delta x_i$  ja kõrgusi  $f(p_i)$  omavate ristkülikute ühendi (vt joonis 5.3) pindala.

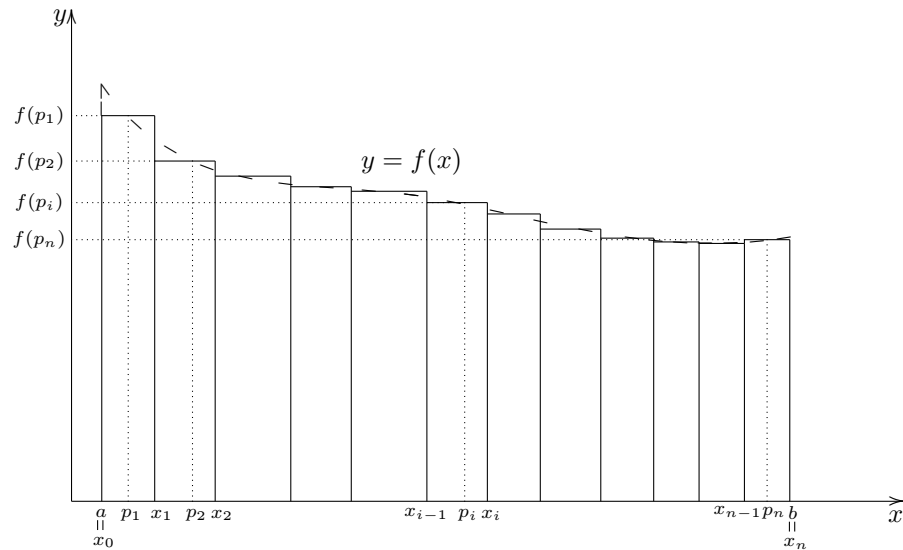
Mida väiksem on  $\Delta x_i$ , seda vähem muutub funktsioon  $f$  osalõigu  $[x_{i-1}, x_i]$  peal, järelikult seda täpsem on valem (5.18). Seega, mida peenem on  $[a, b]$  tükeldus, seda täpsem on ka pindala valem (5.19). Teisest küljest, valemi (5.19) paremal poolel on funktsiooni  $f$  integraalsumma lõigul  $[a, b]$ . Järelikult, kui pikima osalõigu pikkus  $\varrho_n$  läheneb nullile, siis läheneb nimetatud integraalsumma määratud integraalile  $\int_a^b f(x) dx$ . Kokkuvõttes, piirporotsessis  $\varrho_n \rightarrow 0$  saame ligikaudsest valemist (5.19) järgmise täpse valemi pindala jaoks:

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (5.20)$$

Lõpuks tuleme veel tagasi valemi (5.19) juurde. Nagu nägime, seisab selle paremal poolel joonisel 5.3 kujutatud ristkülikute ühendi pindala. Valemit (5.19) saab kasutada määratud integraali  $\int_a^b f(x) dx$  ligikaudseks arvutamiseks. Oma geomeetrilise sisu tõttu nimetatakse seda valemit *ristkülikvalemiks*.

*Näide.* Arvutame  $\int_a^b dx = \int_a^b 1 dx$ . Kuna lõigule  $[a, b]$  toetuva ja kõrgust 1 omava ristküliku pindala on  $b - a$ , siis

$$\int_a^b dx = b - a.$$



Joonis 5.3

## 5.7 Määratud integraali omadused. Integraali keskväärtusteoreem.

### Määratud integraali omadusi.

$$1. \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

NB! Omadus 1 ei kehti korrutamise ja jagamise korral! See tähendab, et

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x)g(x)] dx &\neq \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx \quad \text{ja} \\ \int_a^b [f(x) : g(x)] dx &\neq \int_a^b f(x) dx : \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

$$2. \int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx, \quad C - \text{konstant.}$$

Lisame veel mõned olulised omadused. Nende omaduste põhjendamisel on hea kasutada määratud integraali füüsikalist sisu: jõu  $F(x)$  pool tehtud töö materiaalse objekti liikumisel punktist  $a$  punkti  $b$  avaldub valemiga  $A = \int_a^b F(x) dx$ .

Me defineerisime määratud integraali  $\int_a^b f(x) dx$  lõigul  $[a, b]$ . Et selline definitsioon omaks mõtet, peab kehtima võrratus  $a < b$ . Teatud põhjustel on aga vaja määratud integraali definitsiooni laiendada ka juhule kui  $a \geq b$ . Näiteks asendusvõtte rakendamise tulemusena (vt. §5.9) tekib sageli integraal, mille alumine raja on suurem kui ülemine. Alljärgnevatest omadustest esimesed kaks ongi definitsioonid, mis laiendavad määratud integraali juhule  $a \geq b$ .

$$3. \int_a^a f(x)dx = 0,$$

Põhjendus: kui  $a = b$ , siis on läbitud teepikkus võrdne nulliga, seega on ka töö võrdne nulliga, st  $\int_a^a F(x) = 0$ .

$$4. \text{ Kui } a > b, \text{ siis } \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

Põhjendus. Jõu  $F(x)$  poolt tehtud töö liikumisel punktist  $a$  punkti  $b$  on  $\int_a^b F(x)dx$  ning töö liikumisel punktist  $b$  punkti  $a$  on  $\int_b^a F(x)dx$ . Seega, kui materiaalne objekt liigub punktist  $a$  punkti  $b$  ja sealt tagasi punkti  $a$ , on kogu tehtud töö võrdne summaga  $\int_a^b F(x)dx + \int_b^a F(x)dx$ . Kuid kuna sel juhul on kogu läbitud teepikkus võrdne nulliga, kehtib võrdus

$$\int_a^b F(x)dx + \int_b^a F(x)dx = 0.$$

Viies selles võrduses teise liidetava paremale poole tekibki valem

$$\int_a^b F(x)dx = - \int_b^a F(x)dx.$$

Järgnev omadus ütleb, et integreerimisloikude liitmisel integraalide väärtused liituvad:

$$5. \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Põhjendus. Jõu  $F(x)$  poolt tehtud tööd liikumisel punktist  $a$  punkti  $b$  ning punktist  $b$  punkti  $c$  on vastavalt  $\int_a^b F(x)dx$  ning  $\int_b^c F(x)dx$ . Seega, kui objekt liigub punktist  $a$  üle punkti  $b$  punkti  $c$ , on jõu poolt tehtud kogutöö võrdne summaga

$$\int_a^b F(x)dx + \int_b^c F(x)dx.$$

Kuid teisest küljest on jõuvälja poolt tehtud töö liikumisel punktist  $a$  punkti  $c$  võrdne ka integraaliga  $\int_a^c F(x)dx$ . Seega saamegi valemi

$$\int_a^c F(x)dx = \int_a^b F(x)dx + \int_b^c F(x)dx.$$

Võrratus, mida rahuldavad kaks funktsiooni, laieneb ka nende funktsioonide integraalidele:

$$6. \text{ Kui } a \leq b \text{ ja } f_1(x) \leq f_2(x) \text{ iga } x \in [a, b] \text{ korral, siis } \int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx.$$

Põhjendus. Jõufunktsioonide  $F_1(x)$  ja  $F_2(x)$  poolt tehtud tööd liikumisel punktist  $a$  punkti  $b$  on vastavalt  $\int_a^b F_1(x)dx$  ja  $\int_a^b F_2(x)dx$ . Kui  $F_1(x) \leq F_2(x)$  ja läbitud teepikkus on positiivne, st  $b > a$ , siis on jõu  $F_2$  poolt tehtud töö suurem või võrdne jõu  $F_1$  poolt tehtud tööga, st

$$\int_a^b F_1(x)dx \leq \int_a^b F_2(x)dx.$$

**Teoreem 5.2 (Integraali keskväärtusteoreem).** Kui  $f(x)$  on pidev lõigul  $[a, b]$ , siis leidub sellel lõigul vähemalt üks punkt  $c$  nii, et

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \int_a^b dx = f(c)(b-a). \quad (5.21)$$

*Tõestus.* Kuna  $f(x)$  on pidev lõigul  $[a, b]$ , saavutab ta sellel lõigul oma suurima ja vähima väärtuse (lõigul pidevate funktsioonide omadus 1 §2.11). Olgu  $M$  suurim väärtus ja  $m$  vähim väärtus. Siis kehtivad iga  $x \in [a, b]$  korral võrratused  $m \leq f(x) \leq M$ . Määratud integraali omaduse 6 põhjal

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx.$$

Kuna  $m$  ja  $M$  on konstandid, siis omaduse 2 põhjal  $\int_a^b m dx = m \int_a^b dx$  ja  $\int_a^b M dx = M \int_a^b dx$ . Seega

$$m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \int_a^b dx.$$

Jagades suurusega  $\int_a^b dx$  saame

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b dx} \leq M.$$

Näeme, et arv  $\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b dx}$  paikneb funktsiooni  $f(x)$  suurima ja vähima väärtuse vahel. Kuna lõigul  $[a, b]$  pidev funktsioon  $f(x)$  saavutab sellel lõigul iga väärtuse oma suurima ja vähima väärtuse vahel (lõigul pidevate funktsioonide omadus 2 §2.11), siis leidub vähemalt üks punkt  $c \in [a, b]$  nii, et

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b dx}.$$

Korrutades seda võrdust arvuga  $\int_a^b dx$  ja arvestades, et  $\int_a^b dx = b - a$ , saame valemi (5.21). Teoreem on tõestatud.

## 5.8 Muutuva ülemise rajaga integraal. Newton-Leibnitzi valem.

**Muutuva ülemise rajaga integraal.** Oleme vaadelnud kahte liiki integraale:

1. määramata integraal  $\int f(x)dx$ , mis on defineeritud kui funktsiooni  $f$  alg-funktsioonide üldavaldis;



2. määratud integraal  $\int_a^b f(x)dx$ , mis on defineeritud kui funktsiooni  $f$  integraalsumma piirväärtus.

Järgnevalt vaatame ühte olulist seost nende kahe integraalitüübi vahel.

Olgu antud funktsioon  $f(t)$ , mis on pidev lõigul  $[a, b]$ . Siis on sellel funktsioonil olemas määratud integraal  $\int_a^b f(t)dt$ . Asendame selle integraali ülemise raja muutujaga  $x$ . Siis saame järgmise lõigul  $[a, b]$  defineeritud funktsiooni:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

Osutub, et sellisel viisil oleme me teisendanud määratud integraali  $\int_a^b f(t)dt$  määramata integraaliks. Täpsemalt:  $\Phi(x)$  on funktsiooni  $f$  algfunktsioon, st üks konkreetne funktsioon määramata integraaliga  $\int f(x)dx$  antud funktsioonide parvest. Sõnastame ja tõestame selle väite teoreemina.

**Teoreem 5.3.** *Kui  $f$  on pidev lõigul  $[a, b]$ , siis funktsioon  $\Phi$ , mis avaldub valemiga  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ , on funktsiooni  $f$  algfunktsioon lõigul  $[a, b]$ .*

*Tõestus.* Teoreemi väite tõestamiseks peame näitama, et

$$\Phi'(x) = f(x) \quad \text{iga } x \in [a, b] \quad \text{korral.}$$

Olgu  $x$  suvaline punkt lõigult  $[a, b]$ . Nagu tavaliselt, tähistame sümboliga  $\Delta x$  argumendi  $x$  muutust. Kasutades määratud integraali omadust 3 §5.7 arvutame:

$$\begin{aligned} \Phi(x + \Delta x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \\ &= \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt. \end{aligned}$$

Seega saame funktsiooni  $\Phi$  muudu jaoks seose

$$\Delta \Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt. \quad (5.22)$$

Integraali keskväärtusteoreemi põhjal leidub punktide  $x$  ja  $x + \Delta x$  vahel punkt  $c$  nii, et kehtib võrdus

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)(x + \Delta x - x) = f(c)\Delta x. \quad (5.23)$$

Täpsemalt: Kui  $\Delta x > 0$ , siis leidub integraali keskväärtusteoreemi põhjal lõigul  $[x, x + \Delta x]$  punkt  $c$  nii, et kehtib (5.23). Kui aga  $\Delta x < 0$ , siis leidub sama teoreemi põhjal lõigul  $[x + \Delta x, x]$  punkt  $c$  nii, et kehtib

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = - \int_{x+\Delta x}^x f(t)dt = -f(c)(x - x - \Delta x) = f(c)\Delta x,$$

st samuti kehtib (5.23).

Võttes (5.22) ja (5.23) kokku saame seose  $\Delta\Phi = f(c)\Delta x$ , millest järeldub et

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(c).$$

Selle võrduse vasakul pool olev jagatis koondub funktsiooni  $\Phi$  tuletiseks punktis  $x$  piirprotsessis  $\Delta x \rightarrow 0$ . Peale selle, kuna  $c$  paikneb  $x$  ja  $x + \Delta x$  vahel, siis  $c \rightarrow x$ , kui  $\Delta x \rightarrow 0$ . Kokkuvõttes saame võrduse

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x).$$

Olemegi tõestanud, et  $\Phi'(x) = f(x)$  iga  $x \in [a, b]$  korral ja sellega ka teoreemi väite.

**Newton-Leibnitzi valem.** Eelmises alamparagrahvis vaatlesime ühte võimalust teisendada määratud integraal määramata integraaliks. Nüüd vaatleme teistpidist teisendust, st määratud integraali saamist määramata integraalist.

Konkreetselt olgu  $F$  funktsiooni  $f$  algfunktsioon, st  $F$  on üks konkreetne funktsioon määramata integraaliga  $\int f(x)dx$  antud funktsioonide perest. Esiatame küsimuse: kuidas oleks võimalik sellisel juhul arvutada määratud integraal  $\int_a^b f(x)dx$ ? Vastuse koos arvutusvalemiga annab järgmine teoreem.

**Teoreem 5.4 (Newton-Leibnitzi valem).** *Kui  $F$  on pideva funktsiooni  $f$  algfunktsioon lõigul  $[a, b]$ , siis kehtib valem*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b. \quad (5.24)$$

*Tõestus.* Teoreemi eelduse kohaselt on  $F$  funktsiooni  $f$  algfunktsioon lõigul  $[a, b]$ . Peale selle, teoreem 5.3 põhjal on ka funktsioon  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$  funktsiooni  $f$  algfunktsioon lõigul  $[a, b]$ . Kuna ühe ja sama funktsiooni kaks algfunktsiooni võivad teineteisest erineda vaid liidetava konstandi võrra (teoreem 5.1), siis kehtib seos

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C. \quad (5.25)$$

Järgnevalt leiame konstandi  $C$  väärtuse. Selleks paneme avaldises (5.25) muutuja  $x$  võrduma  $a$ -ga. Saame võrduse

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C,$$

mille vasak pool võrdub nulliga määratud integraali omaduse 1 põhjal (vt §5.7). Seega,  $0 = F(a) + C$ , millest tuletame valemi  $C = -F(a)$  konstandi  $C$  jaoks. Nüüd saame kirjutada võrduse (5.25) kujul

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Pannes selles avaldises muutuja  $x$  võrduma arvuga  $b$ , jõuamegi Newton-Leibnitzi valemini (5.24). Teoreem on tõestatud.

*Näiteid.* 1. Arvutame  $\int_{-1}^1 e^x dx$ . Kuna  $\int e^x dx = e^x + C$ , siis Newton-Leibnitzi valemit kasutades saame

$$\int_{-1}^1 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e}.$$

2. Arvutame  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx$ . Kuna  $\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x + C$ , siis

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3} [\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0] = \frac{1}{3} [1 - 0] = \frac{1}{3}.$$

## 5.9 Asendusvõtte ja ositi integreerimine määratud integraali korral.

**Asendusvõtte.** Vaatleme määratud integraali

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (5.26)$$

Teeme integraali all asenduse valides uueks muutujaks  $u$ , mis sõltub  $x$ -st järgmisel viisil:  $u = \varphi(x)$ . Eeldame, et  $\varphi$  on üksühene ja diferentseeruv. Tähistame  $\varphi$  pöördfunktsiooni  $\psi$ -ga. Siis

$$x = \psi(u). \quad (5.27)$$

Paneme kirja funktsiooni  $\psi$  tuletise diferentsiaalide jagatisena:  $\frac{dx}{du} = \psi'(u)$ . Korrutades seda võrdust  $du$ -ga saame

$$dx = \psi'(u) du. \quad (5.28)$$

Kasutades valemeid (5.27) ja (5.28) saame integraali (5.26) all suurused  $x$  ja  $dx$  asendada vastavate  $u$ -st sõltuvate suurustega. Erinevalt määratud integraalist, tuleb määratud integraali korral lisaks suurustele  $x$  ja  $dx$  asendada ka integreerimislõik koos rajadega. Uus integreerimislõik koosneb funktsiooni  $u = \varphi(x)$  väärtustest, mis on saadud argumenti  $x$  varieerimisel üle kogu esialgse integreerimislõigu  $[a, b]$ . Ühtlasi on uue integraali alumine raja võrdne  $u$  väärtusega, mis vastab muutuja  $x$  väärtusele  $a$  ja ülemine raja on võrdne  $u$  väärtusega, mis vastab muutuja  $x$  väärtusele  $b$ . Seega on uue integraali alumine raja  $\varphi(a)$  ja ülemine raja  $\varphi(b)$ . Kokkuvõttes saame järgmise valemi:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f[\psi(u)] \psi'(u) du. \quad (5.29)$$

*Näide.* Arvutame  $\int_{-1}^1 \frac{(\operatorname{arccot} x)^2 dx}{1+x^2}$ . Teeme asenduse  $u = \operatorname{arccot} x$ . Siis

$$du = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

Taolise asenduse puhul lihtsustub integraalialune avaldis kujule  $-u^2 du$ . Arvutame rajad uues integraalis:  $\operatorname{arccot}(-1) = \frac{3\pi}{4}$ ,  $\operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4}$ . Seega

$$\int_{-1}^1 \frac{(\operatorname{arccot} x)^2 dx}{1+x^2} = - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} u^2 du = - \frac{u^3}{3} \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{3} \left[ \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 - \left(\frac{3\pi}{4}\right)^3 \right] = \frac{13\pi^3}{92}.$$

**Ositi integreerimine.** Olgu  $u = u(x)$  ja  $v = v(x)$  kaks diferentseeruvat funktsiooni. Paneme kirja nende korrutise diferentsiaali avaldise:

$$d(uv) = vdu + u dv.$$

Integreerime seda avaldist rajades  $a$ -st  $b$ -ni. Saame

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b vdu + \int_a^b u dv. \quad (5.30)$$

Arvutame eraldi selle avaldise vasaku poole. Kuna  $\int d(uv) = uv + C$  integraalide tabeli valemi 1 põhjal, siis Newton-Leibnitzi valemi tõttu

$$\int_a^b d(uv) = uv \Big|_a^b.$$

Asendame selle võrduse seose (5.30) vasakusse poolde. Saame

$$uv \Big|_a^b = \int_a^b vdu + \int_a^b u dv.$$

Viies  $\int_a^b vdu$  võrduse teisele poolele, tuletame ositi integreerimise valemi määratud integraali jaoks:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b vdu. \quad (5.31)$$

*Näide.* Arvutame  $\int_0^\pi x^2 \cos \frac{x}{2} dx$ . Võtame  $u = x^2$  ja  $dv = \cos \frac{x}{2} dx$ . Siis  $du = 2x dx$  ja  $v = 2 \sin \frac{x}{2}$ . Integreerime ositi:

$$\int_0^\pi x^2 \cos \frac{x}{2} dx = 2x^2 \sin \frac{x}{2} \Big|_0^\pi - 4 \int_0^\pi x \sin \frac{x}{2} dx.$$

Integraali  $\int_0^\pi x \sin \frac{x}{2} dx$  tuleb uuesti ositi integreerida. Selleks võtame  $u = x$  ja  $dv = \sin \frac{x}{2} dx$ . Siis  $du = dx$  ja  $v = -2 \cos \frac{x}{2}$ . Saame

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^2 \cos \frac{x}{2} dx &= 2x^2 \sin \frac{x}{2} \Big|_0^\pi - 4 \left[ -2x \cos \frac{x}{2} \Big|_0^\pi + 2 \int_0^\pi \cos \frac{x}{2} dx \right] = \\ &= 2x^2 \sin \frac{x}{2} \Big|_0^\pi - 4 \left[ -2x \cos \frac{x}{2} \Big|_0^\pi + 4 \sin \frac{x}{2} \Big|_0^\pi \right] = \left[ (2x^2 - 16) \sin \frac{x}{2} + 8x \cos \frac{x}{2} \right] \Big|_0^\pi = \\ &= \left[ (2\pi^2 - 16) \sin \frac{\pi}{2} + 8\pi \cos \frac{\pi}{2} \right] - [(2 \cdot 0^2 - 16) \sin 0 + 8 \cdot 0 \cdot \cos 0] = 2\pi^2 - 16. \end{aligned}$$

## 5.10 Päratud integraalid.

### Lõpmatute rajadega päratud integraalid.

1. *Päratu integraal poollõigul*  $[a, \infty)$ . Olgu antud funktsioon  $f$ , mis on pidev lõpmatul poollõigul  $[a, \infty)$ . Seega on  $f$  pidev ka kõigil lõplikel lõikudel  $[a, b]$ , kus  $b > a$ . Järelikult eksisteerib määratud integraal

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{iga } b > a \text{ korral}$$

(vt §5.5). Vaatleme selle integraali käitumist protsessis  $b \rightarrow \infty$ . Piirväärtust  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$  nimetatakse funktsiooni  $f$  *päratuks integraaliks poollõigul*  $[a, \infty)$  ja tähistatakse  $\int_a^\infty f(x)dx$ . Seega definitsiooni kohaselt

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx. \quad (5.32)$$

2. *Päratu integraal poollõigul*  $(-\infty, b]$ . Olgu  $f$  pidev lõpmatul poollõigul  $(-\infty, b]$ . Päratu integraal  $\int_{-\infty}^b f(x)dx$  defineeritakse järgmise piirväärtusega:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx. \quad (5.33)$$

3. *Päratu integraal tervel arvteljel*  $(-\infty, \infty)$ . Eeldame, et  $f$  on pidev tervel arvteljel  $(-\infty, \infty)$ . Päratu integraal  $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$  defineeritakse valemiga

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x)dx. \quad (5.34)$$

Päratud integraali nimetatakse *koonduvaks*, kui ta eksisteerib ja on lõplik. Vastasel juhul nimetatakse päratud integraali *hajuvaks*.

*Näiteid.* 1. Arvutame integraali  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ . Vastavalt definitsioonile saame

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \Big|_1^b \right] = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{b} + 1 \right] = 1.$$

Integraal koondub.

2. Arvutame integraali

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \ln |x| \Big|_1^b \right] = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln b - 0] = \infty.$$

Integraal hajub.

Päratu integraali koonduvuse kindlaks tegemiseks ei ole alati vaja selle integraali arvulist väärtust leida. Selleks võib kasutada nn. hindamisteoreemi. Esitame siinkohal kaks taolist teoreemi ilma tõestusteta.

**Teoreem 5.5.** Kui iga  $x \geq a$  korral kehtivad võrratused  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  ja integraal  $\int_a^\infty g(x)dx$  koondub, siis koondub ka integraal  $\int_a^\infty f(x)dx$ .

*Näide.* Hindame päratu integraali  $\int_1^\infty \frac{e^{-x}dx}{x^2}$  koonduvust. Kuna  $e^x$  on kasvav funktsioon, siis kehtib  $e^x \geq e^1 = e$  iga  $x \geq 1$  korral. Sellest võrratusest tuleb  $e^{-x} = \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{e}$  iga  $x \geq 1$  korral. Seega kehtib järgmine hinnag:

$$\frac{e^{-x}}{x^2} \leq \frac{1}{e x^2} \quad \text{iga } x \geq 1 \text{ korral.}$$

Selles võrratuses paremal pool oleva funktsiooni integraal koondub, sest eespool toodud näite 1 põhjal

$$\int_1^\infty \frac{dx}{e x^2} = \frac{1}{e} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e}.$$

Järelikult, teoreem 5.5 põhjal koondub ka integraal  $\int_1^\infty \frac{e^{-x}dx}{x^2}$

Märki muutva funktsiooni päratu integraali hindamiseks saab kasutada näiteks järgmist teoreemi:

**Teoreem 5.6.** Kui  $\int_a^\infty |f(x)|dx$  koondub, siis koondub ka  $\int_a^\infty f(x)dx$ .

*Näide.* Hindame päratu integraali  $\int_1^\infty \frac{\sin x dx}{x^2}$  koonduvust. Kuna iga  $x$  korral kehtib võrratus

$$\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

ja integraal  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$  koondub, siis teoreem 5.5 põhjal integraal  $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x dx}{x^2} \right| dx$  koondub. Teoreemi 5.6 põhjal järeldub sellest omakorda integraali  $\int_1^\infty \frac{\sin x dx}{x^2}$  koonduvus.

**Päratud integraalid katkevatest funktsioonidest.** §5.5 toodud määratud integraali definitsioonis eeldasime, et  $f$  on pidev lõigul  $[a, b]$ . Vaatleme nüüd juhtu, kui  $f$  on katkev. Kui  $f$ -l on katkevuspunktid lõigul  $[a, b]$ , siis selle funktsiooni integraalsumma ei tarvitse omada lõplikku piirväärtust, seega ei eksisteeri viimasel juhul ka määratud integraali  $\int_a^b f(x)dx$ . Siiski on katkevate funktsioonide teatud juhtudel võimalik integreerida päratu integraali mõttes. Vaatleme kahte erijuhtu:

1. Olgu funktsioon  $f$  pidev poollõigul  $[a, b)$  ja olgu  $b$  selle funktsiooni katkevuspunkt. Siis on  $f$  pidev kõigil lõikudel  $[a, c]$ , kus  $c$  on  $a$  ja  $b$  vahel, st  $c \in (a, b)$ . Järelikult eksisteerib määratud integraal

$$\int_a^c f(x)dx \quad \text{iga } c \in (a, b) \text{ korral.}$$

Selleks, et saada integraalist  $\int_a^c f(x)dx$  integraali  $\int_a^b f(x)dx$ , tuleb meil lähendada arvuga  $c$  arvu  $b$ . Kuna  $c$  paikneb vahemikus  $(a, b)$ , on tegemist

vasakpoolse piirväärtusega. Seega defineeritakse päratu integraal  $\int_a^b f(x)dx$  järgmiselt:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x)dx.$$

2. Olgu funktsioon  $f$  pidev poollõigul  $(a, b]$  ja olgu  $a$  selle funktsiooni katkevuspunkt. Siis on  $f$  pidev kõigil lõikudel  $[c, b]$ , kus  $c \in (a, b)$ . Päratu integraal  $\int_a^b f(x)dx$  defineeritakse järgmise parempoolse piirväärtusega:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x)dx.$$

Kui päratu integraal katkevast funktsioonist eksisteerib ja on lõplik, siis öeldakse, et ta koondub. Vastasel juhul öeldakse, et päratu integraal hajub.

*Näited.* 1. Arvutame integraali  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ . Integreeritav funktsioon  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  on pidev poollõigul  $(0, 1]$  ja katkev punktis  $x = 0$ . Seega definitsiooni kohaselt

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2.$$

Integraal koondub.

2. Arvutame integraali  $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ . Vastavalt definitsioonile

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \ln|x| \Big|_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} (-\ln c) = \infty.$$

Integraal hajub.

## 5.11 Määratud integraali rakendusi.

§5.5 tõime me näite määratud integraali rakendamise kohta töö arvutamisel. Selles paragrahvis vaatleme veel mõningaid määratud integraali rakendusi.

Kuna integreerimine on tuletise arvutamise pöördoperatsioon, saab reeglina tuletisi sisaldavaid valemite esitada ka integraalsel kujul. Kõigepealt vaatlemegi kahte taolist näidet.

**Varda massi arvutamine joontiheduse kaudu.** Vaatleme  $x$ -telje kohal paiknevat varrast, mis asub punktide 0 ja  $l$  vahel (vt §3.2 toodud joonist). Püstitame järgmise ülesande: antud on aine joontihedus  $\gamma(x)$  kogu vardas, so lõigul  $[0, l]$ . Määrata tuleb varda kogumass  $m$ . §3.2 me juba näitasime, et joontiheduse  $\gamma(x)$  jaoks kehtib järgmine valem:

$$\gamma(x) = m'(x),$$

kus  $m(x)$  on osalõigu  $[0, x]$  kohal paikneva vardaosa mass. Massi leidmiseks integreerime kõigepealt joontiheduse valemit lõigul  $[0, l]$ :

$$\int_0^l \gamma(x)dx = \int_0^l m'(x)dx.$$

Ilmselt on  $m'(x)$  algfunktsioon  $m(x)$ . Seega Newton-Leibnitzi põhjal

$$\int_0^l m'(x)dx = m(x)\Big|_0^l = m(l) - m(0).$$

Seega

$$\int_0^l \gamma(x)dx = m(l) - m(0).$$

Siinjuures  $m(0)$  punkti 0 kohal paikneva lõpmatult väikese vardaosa mass, seega  $m(0) = 0$ , ja  $m(l)$  on terve lõigu  $[0, l]$  kohal paikneva varda mass, seega  $m(l) = m$ . Olemegi tuletanud järgmise valemi varda massi jaoks:

$$m = \int_0^l \gamma(x)dx.$$

**Laengu koguse arvutamine voolutugevuse kaudu.** §3.2 me tuletasime järgmise valemi:

$$I(t) = q'(t),$$

kus  $I(t)$  on voolutugevus juhtme ristlõikes ajahetkel  $t$  ja  $q(t)$  on ajavahemikus  $[0, t]$  seda ristlõiget läbinud laeng. Taolist valemit kasutades saab arvutada voolutugevuse laengukoguse kaudu. Püstitame nüüd vastupidise ülesande: antud on voolutugevus  $I(t)$  ja leida tuleb ajavahemikus  $[0, t_0]$  juhtme ristlõiget läbinud laeng. Ülesande lahendamiseks integreerime toodud valemit rajades 0 kuni  $t_0$ :

$$\int_0^{t_0} I(t)dt = \int_0^{t_0} q'(t)dt.$$

Vastavalt Newton Leibnitzi valemile

$$\int_0^{t_0} q'(t)dt = q(t_0) - q(0).$$

Seega

$$\int_0^{t_0} I(t)dt = q(t_0) - q(0).$$

Kuna  $q(0) = 0$  ( $q(0)$  võrdub ajahetkel  $t = 0$  juhul läbiva laenguga, mis on tühiselt väike), siis saame järgmise valemi

$$q(t_0) = \int_0^{t_0} I(t)dt,$$

mis annabki ajavahemikus  $[0, t_0]$  juhtme ristlõiget läbinud laengu.

Järgnevalt vaatleme määratud integraali geomeetrilisi rakendusi. Nende näidete juures puuduvad tuletisi sisaldavad lähteseosed. Seetõttu kasutame Newton-Leibnitzi valemi asemel määratud integraali definitsiooni ja vahetut geomeetrilist sisu.

**Pindala arvutamine.** Olgu antud funktsioon  $f(x) \geq 0$ . Vaatleme joonisel 5.2 kujutatud joone  $y = f(x)$  ja  $x$ -telje vahel paiknevat kõvertrapetsit. Nagu nägime §5.6, avaldub selle kõvertrapetsi pindala valemiga

$$S = \int_a^b f(x)dx. \quad (5.35)$$

Järgnevalt käsitleme pisut teistsugust juhtu. Vaatleme tasandilist kujundit  $D$ , mis on alt piiratud joonega  $y = f_1(x)$  ja ülalt joonega  $y = f_2(x)$ , kusjuures



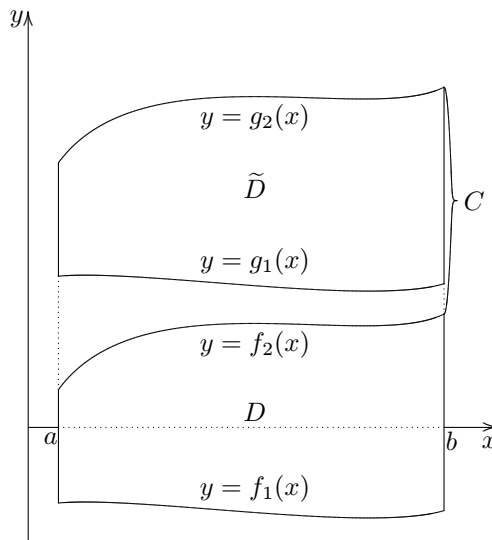
$a \leq x \leq b$  (joonis 5.4). Meid huvitab  $D$  pindala  $S$ . Näitame, et  $S$  saab esitada  $f_2$  ja  $f_1$  vahe integraalina, st

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (5.36)$$

Valemi (5.36) tõestamiseks nihutame  $D$  ülespoole  $x$ -telge. Selleks leiame sellise positiivse arvu  $C$ , mille korral kehtib võrratus  $f_1(x) + C \geq 0$  ja defineerime funktsioonid

$$g_1(x) = f_1(x) + C \quad \text{ning} \quad g_2(x) = f_2(x) + C.$$

Olgu  $\tilde{D}$  joonte  $y = g_1(x)$  ja  $y = g_2(x)$  vahel paiknev kujund. Tänu  $C$  sobivale valikule asetseb kujund  $\tilde{D}$   $x$ -telje peal (joonis 5.4). Märgime, et juhul kui  $D$  asetseb juba  $x$ -telje peal, siis ei ole taolist nihutamise operatsiooni vaja teha, st võtame  $C = 0$  ja  $\tilde{D} = D$ .



Joonis 5.4

Kujundite  $D$  ja  $\tilde{D}$  pindalad on võrdsed. Järelikult tuleb  $S$  leidmiseks arvutada  $\tilde{D}$  pindala. Kuna jooned  $y = g_1(x)$  ja  $y = g_2(x)$  asetsevad ülalpool  $x$ -telge (st  $g_1(x) \geq 0, g_2(x) \geq 0$ ), siis võib kujundi  $\tilde{D}$  pindala arvutada selliselt, et lahutame joone  $y = g_2(x)$  ja  $x$ -telje vahele jääva kõvertrapetsi pindalast joone  $y = g_1(x)$  ja  $x$ -telje vahele jääva kõvertrapetsi pindala. Kuna valemi (5.35) põhjal võrdub  $y = g_2(x)$  ja  $x$ -telje vahele jääva kõvertrapetsi pindala

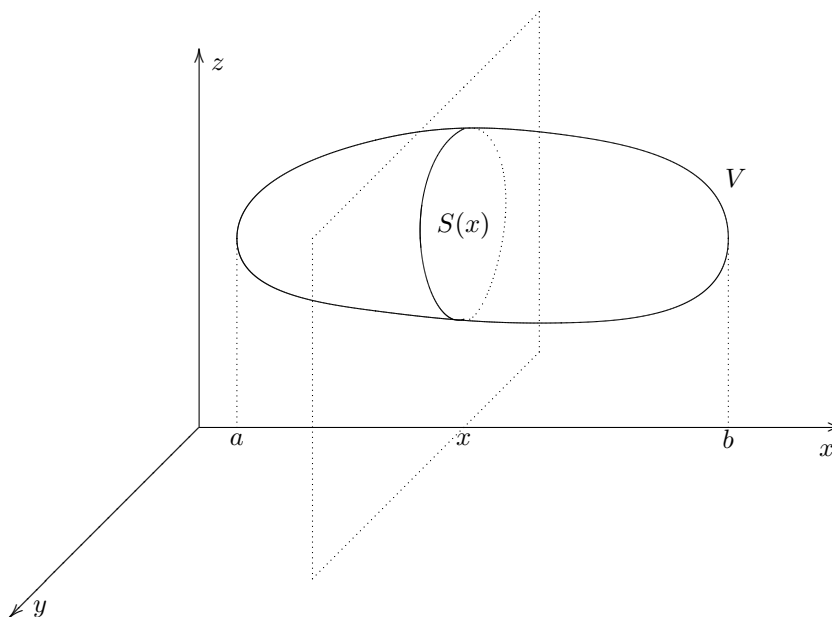
integraaliga  $\int_a^b g_2(x)dx$  ning  $y = g_1(x)$  ja  $x$ -telje vahele jääva kõvertrapetsi pindala integraaliga  $\int_a^b g_1(x)dx$ , siis  $S = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx$ . Lõpuks arvutame

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx = \int_a^b [f_2(x) + C - f_1(x) - C] dx = \\ &= \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \end{aligned}$$

Olemegi tõestanud valemi (5.36).

**Ruumala arvutamine ristlõigete pindalade järgi.** Olgu antud ruumiline keha  $V$ , mis paikneb tasandite  $x = a$  ja  $x = b$  vahel. Tähistame selle keha ruumala samuti  $V$ -ga. Tuletame valemi  $V$  arvutamiseks.

Vaatleme keha  $V$  lõiget  $x$ -teljega ristuva tasandiga (joonis 5.5). Tekkiva ristlõike pindala sõltub lõiketasandi asukohast, seega on ta muutuja  $x$  funktsioon. Tähistame ristlõike pindala  $S(x)$ -ga. Eeldame, et  $S(x)$  on pidev.



Joonis 5.5

Tükeldame lõigu  $[a, b]$  osalõikudeks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Valime igal osalõigul  $[x_{i-1}, x_i]$  ühe punkti  $p_i$ . Tähistame

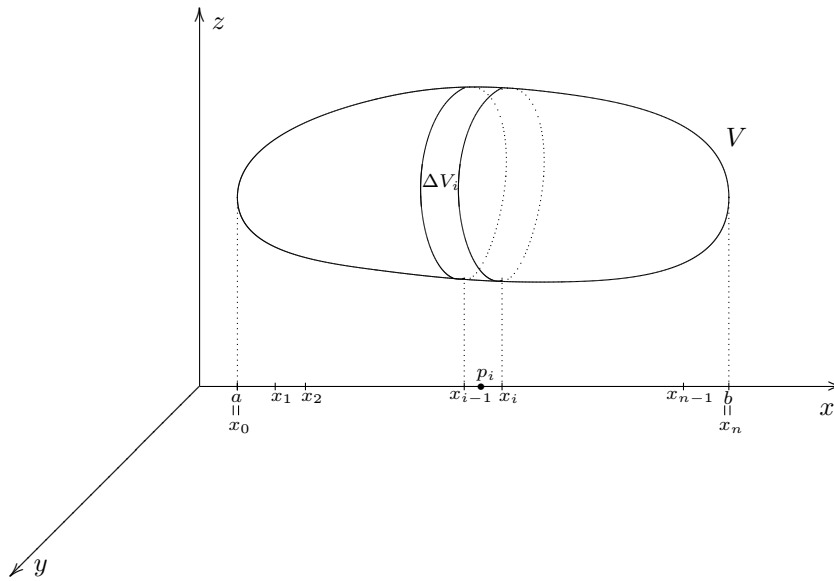
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Vaatleme tasandite  $x = x_{i-1}$  ja  $x = x_i$  vahele jäävat keha kihti  $\Delta V_i$  (joonis 5.6). Kui  $\Delta x_i$  on väike, siis muutub ristlõike pindala  $S(x)$  osalõigul  $[x_{i-1}, x_i]$  vähe ja me saame ta lugeda ligikaudselt võrdseks  $S(p_i)$ -ga, st

$$S(x) \approx S(p_i) \quad \text{kui} \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Sellisel juhul on  $\Delta V_i$  ligikaudselt silinder, mille põhja pindala ja kõrgus on vastavalt  $S(p_i)$  ja  $\Delta x_i$ . Seega avaldub  $\Delta V_i$  ruumala ligikaudselt valemiga

$$\Delta V_i \approx S(p_i) \Delta x_i.$$



Joonis 5.6

Terve keha ruumala ligikaudse valemi saame summeerides  $\Delta V_i$  ruumalad:

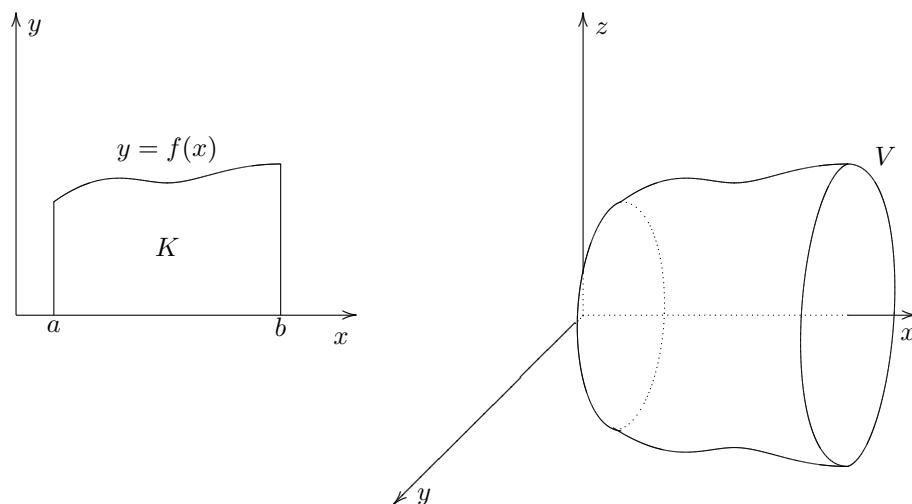
$$V \approx \sum_{i=1}^n S(p_i) \Delta x_i. \quad (5.37)$$

Mida peenem on lõigu  $[a, b]$  jaotus, seda täpsem on ligikaudne võrdus  $\Delta V_i \approx S(p_i) \Delta x_i$  ning seda täpsem on ka valem (5.37). Teisest küljest: valemi (5.37) paremal poolel seisab funktsiooni  $S$  integraalsumma lõigul  $[a, b]$ . Järelikult saame pikima osalõigu pikkuse  $\varrho_n$  lähenemisel nullile järgmise täpse valemi keha ruumala jaoks ristlõigete pindalade järgi:

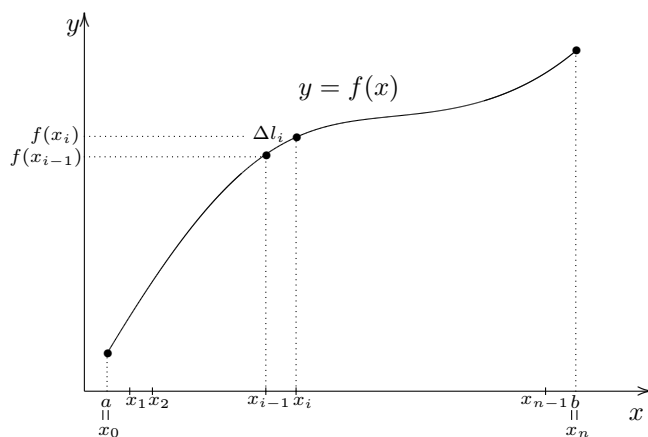
$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (5.38)$$

*Erijuht: pöördkeha ruumala.* Olgu antud funktsioon  $f$  lõigul  $[a, b]$ . Eeldame, et  $f(x)$  on pidev ja  $f(x) \geq 0$ . Vaatleme joontega  $y = f(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  ja  $y = 0$  piiratud kõvertrapetsit  $K$  (joonis 5.7 vasakul). Paneme kujundi  $K$  pöörlema ümber  $x$ -telje. Tulemusena saame pöördkeha  $V$  (joonis 5.7 paremal). Keha  $V$  lõikamisel  $x$ -teljega ristuva tasandiga tekkiv lõige on ring, mille raadius võrdub  $f(x)$ -ga (sest kujundi  $K$  kõrgus punktis  $x$  on  $f(x)$ ). Seega on ristlõike pindala  $S(x) = \pi f^2(x)$  ja üldisest valemist (5.38) saame järgmise valemi  $V$  ruumala jaoks:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (5.39)$$



Joonis 5.7



Joonis 5.8

**Joone pikkuse arvutamine.** Olgu antud joon võrrandiga  $y = f(x)$ , kus  $a \leq x \leq b$ . Tähistame selle joone pikkuse  $l$ -ga. Meid huvitab valem  $l$  arvutamiseks.

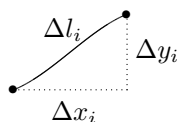
Eeldame, et  $f(x)$  on diferentseeruv. Jaotame lõigu  $[a, b]$  osalõikudeks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

(joonis 5.8). Tähistame

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

Vaatleme osalõigu  $[x_{i-1}, x_i]$  kohale jäävat joone osakaart  $\Delta l_i$ . See osakaar on suurendatult kujutatud joonisel 5.9.



Joonis 5.9

Kuna  $f(x)$  on eelduse kohaselt diferentseeruv, on vaadeldav joon sile. Sile joon on aga sirgestuv (st suurendamisel muutub "sirgemaks"). Järelikult on väikese  $\Delta x_i$  korral osakaar  $\Delta l_i$  ligikaudselt sirglõik ja joonisel 5.9 on ligikaudne täisnurkne kolmnurk. Seega võime me  $\Delta l_i$  pikkuse arvutamisel kasutada Pythagorase teoreemi. Tähistades  $\Delta l_i$  pikkuse samuti  $\Delta l_i$ -ga saame

$$\Delta l_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}. \quad (5.40)$$

Edasi avaldame selles valemis esineva funktsiooni muudu  $\Delta y_i$  argumendi muudu  $\Delta x_i$  kaudu. Selleks sobib kasutada Lagrange'i teoreemi (vt §3.9). Nimetatud teoreemi põhjal leidub vahemikus  $(x_{i-1}, x_i)$  punkt  $p_i$  nii, et kehtib võrdus

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(p_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Seega

$$\Delta y_i = f'(p_i)\Delta x_i$$

ja valemit (5.40) saab teisendada järgmiselt:

$$\begin{aligned}\Delta l_i &\approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(p_i)\Delta x_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(p_i)]^2(\Delta x_i)^2} = \\ &= \sqrt{1 + [f'(p_i)]^2} \Delta x_i.\end{aligned}$$

Terve joone ligikaudse pikkuse saame kui summeerime  $\Delta l_i$  ligikaudsed pikkused:

$$l \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(p_i)]^2} \Delta x_i. \quad (5.41)$$

Mida väiksem on  $\Delta x_i$ , seda "sirgem" on osakaar  $\Delta l_i$  ja järelikult on seda täpsem ka ligikaudne võrdus (5.40). Sellest tuleneb, et mida väiksemad on osalõigud, seda täpsem on valem (5.41). Teisest küljest, valemi (5.41) paremal poolel seisab funktsiooni  $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$  integraalsumma lõigul  $[a, b]$ . Järelikult pikima osalõigu pikkuse  $\varrho_n$  lähenemisel nullile saame järgmise täpse valemi vaadeldava joone pikkuse jaoks:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (5.42)$$