Tõenäosusteooria algmõisted

Tõenäosusteooria on teadus seaduspärast juhuslike sündmuste ja juhuslike protsesside maailmas. Ehk tõenäosusteooria uurib massiliselt toimuvates juhuslikes sündmustes esinevaid seaduspärasusi. Näiteks täringu paljukordsel viskamisel tuleb 5 ligikaudu 1/6 juhtudest, mis pole enam juhuslik, vaid seaduspärane.

Tõenäosusteooria üheks põhimõisteks on **sündmus**. Sündmuseks nimetatakse kõike seda, mille kohta saab rääkida toimumisest või mittetoimumisest. Sündmust me ei saa defineerida veelgi lihtsamate mõistete abil, vaid võime ainult kirjeldada.
Sündmused on näiteks:

1) vee keemahakkamine normaalse õhurõhu juures temperatuuril 100°C;
2) täringu veeretamisel tuleb kuus silma;
3) mündi viskamisel üheaegselt kulli ja kirja saamine.

Sündmus saab toimuda teatud tingimustes ehk sündmuse toimumiseks peab olema täidetud teatud tingimuste kompleks. Tingimuste kompleksi täitmist nimetatakse **katseks**. Näiteks vee keemahakkamiseks on vajalik teatud tingimuste loomine – vastav temperatuur ja rõhk. Katse kordamisel räägitakse katseseeriast, mis koosneb üksikkatsetest.
Vastava tingimuste kompleksi olemasolul e. katsel toimub mõni sündmus alati, mõni sündmus ei toimu kunagi. Leidub sündmusi, mis katsel mõnikord toimuvad, mõnikord mitte. Nii liigitataksegi sündmusi nende toimumise võimalikkuse seisukohalt kindlateks, võimatuteks ja juhuslikeks.
Sündmust, mis antud katsel alati toimub, nimetatakse **kindlaks sündmuseks**. Näiteks vee keemahakkamine normaalse õhurõhu juures temperatuuril 100°C. Kindlat sündmust tähistatakse suure kreeka tähega Ω (“omega”).
Sündmust, mis antud katsel ei saa kunagi toimuda, nimetatakse **võimatuks sündmuseks**. Näiteks mündi viskamisel üheaegselt kulli ja kirja saamine. Võimatut sündmust tähistab sümbol $\varnothing$.
Sündmust, mis antud tingimustes võib toimuda või ka mitte toimuda, nimetatakse **juhuslikuks sündmuseks**. Juhuslikuks sündmuseks on näiteks täringuviske tulemus.

Sündmusi tähistatakse tavaliselt suurte ladina tähtedega: $A, B, C, \ldots, A_1, A_2, \ldots$ või ka pikemalt, näiteks sündmus “vooluringis ei teki katkestust”.

Sündmusi võib liigitada mitmeti, tutvume veel mõningate võimalustega.

Juhuslikke sündmusi nimetatakse **võrdvõimalikeks**, kui ühel neist ei ole rohkem võimalusi esiletulekuks kui teisel. Näiteks täringu veeretamisel on võrdvõimalikeks sündmusteks ühe, kahe, …, kuue silma esiletulek.
Juhuslikke sündmusi nimetatakse **teineteist välistavateks**, kui nad ei saa korraga toimuda. Näiteks täringu veeretamisel välistab viie silma tulek mistahes ülejäänud silmade arvu tuleku.
Kui ühe sündmuse toimumisega saab kaasneda teise toimumine, siis neid nimetatakse **teineteist mittevälistavateks**. Näiteks “auditooriumi sisenev tudeng on noormees” ja “tudeng on vasakukäeline” on teineteist mittevälistavad sündmused.

Olgu ühel katsel n mõeldavat erinevat katsetulemust $A_1, \ldots, A_n$. Kusjuures üks nendest toimub kindlasti. Juhul kui neist ühe toimumine välistab teiste samaaegse toimumise, räägitakse

täielikust sündmuste süsteemist. Näiteks täringuviske tulemuste hulk {1, 2, 3, 4, 5, 6} moodustab sündmuste täieliku süsteemi. Hinnete hulk {0, 1, 2, 3, 4, 5} moodustab õpilase eksamihinnete täieliku süsteemi.

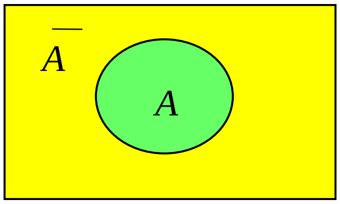
Kui täielikku sündmuste süsteemi kuuluvad üksiksündmused on võrdvõimalikud, siis nimetatakse neid **elementaarsündmusteks**. Võrdvõimalike sündmuste täielikku süsteemi nimetatakse **elementaarsündmuste süsteemiks**.

Sündmuse A **vastandsündmuseks** $\overline{A}$ nimetatakse sündmust, mille toimumine seisneb sündmuse A mittetoimumises. Sündmuse A vastandsündmust tähistatakse tavaliselt sümboliga $\overline{A}$.

<u>Näide.</u> Täpsuslaskmine

A – tabame ringi

$\overline{A}$ – ei taba ringi, aga tabame kollast ala

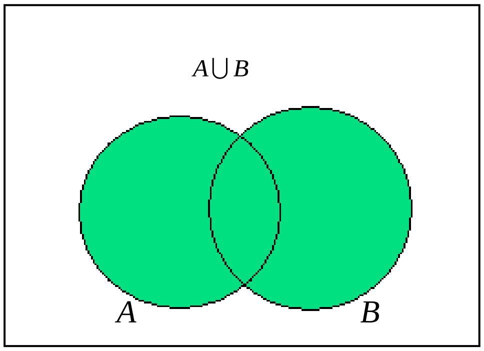


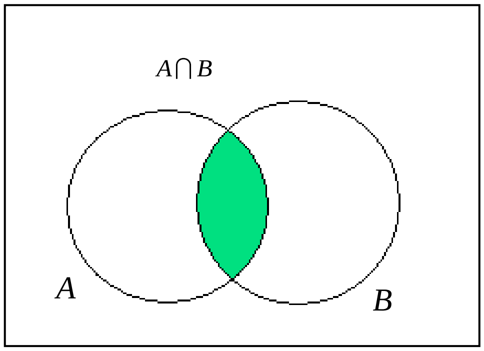
Sündmuste summa ja korrutis

Defineerime nüüd sündmuste jaoks kaks tehet – summa ja korrutise. Kahe sündmuse A ja B **summaks** $A \bigcup B$ ehk $A+B$ (ka **ühendiks**) nimetatakse sündmust, mille toimumine seisneb kas A või B või mõlema toimumises.

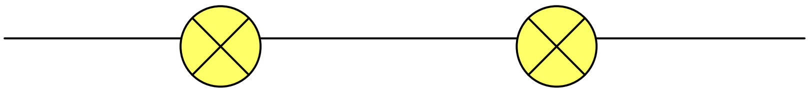
Kahe sündmuse A ja B **korrutiseks** $A \bigcap B$ ehk AB (ka **ühisosaks**) nimetatakse sündmust, mille toimumine seisneb mõlema sündmuse A ja B toimumises.

Analoogselt hulkadega kujutatakse sündmusi ja tehteid nendega Venni diagrammide abil.





Näide. Olgu 2 elektripirni ühendatud järjestikku.

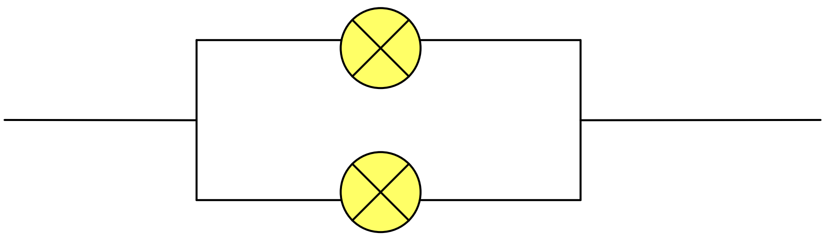


Olgu tegu sündmustega:

A – vasakpoolne lamp on terve peale sisselülitamist
B – parempoolne lamp on terve peale sisselülitamist
C – sütib valgus

Seisnegu juhuslik katse selles, et ühendame skeemi võrku. Siis $C = A \cap B$

Näide. Olgu 2 elektripirni ühendatud paralleelselt.



Olgu tegu sündmustega:

A – vasakpoolne lamp on terve peale sisselülitamist
B – parempoolne lamp on terve peale sisselülitamist
C – sütib valgus

Seisnegu juhuslik katse selles, et ühendame skeemi võrku. Siis $C = A \cup B$

Summat või korrutist moodustavaid sündmusi nimetatakse **osasündmusteks**. Sündmuste summa ja korrutise mõiste laiendatakse ka enama kui kahe sündmuse juhule. Sündmuste A_1, A_2 , ... , A_k summa $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ toimub parajasti siis, kui toimub ükskõik milline osasündmustest $A_i, i = 1, \ldots, k$ ja korrutis $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k$ (ehk $A_1 A_2 ... A_k$) siis, kui toimuvad kõik osasündmused.

Sündmuse tõenäosus

Erinevad sündmused toimuvad erineva sagedusega. Ühed sündmused toimuvad suhteliselt sageli (“vapi saamine mündi viskamisel”) teised aga vägagi harva (“peavõidu saamine loteriil”). Sündmuse toimumise võimalikkuse määra nimetatakse **sündmuse tõenäosuseks**.

Sündmuse tõenäosuse klassikaline definitsioon

Sündmuse *A* tõenäosuseks $P(A)$ nimetatakse sündmuse toimumiseks soodsate juhuste arvu m suhet kõigi võimalike juhuste arvusse n, kus juhused moodustavad elementaarsündmuste süsteemi:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Ajalooliselt loodigi tõenäosuse mõiste esmakordselt just selliselt XVII sajandil, seetõttu nimetataksegi eespool toodud viisil defineeritud tõenäosust klassikaliseks tõenäosuseks.

Näide. Kausis on 4 kollast, 7 sinist ja 5 punast ploomi. Kausist võetakse juhuslikult üks ploom. Kui suur on tõenäosus, et see ploom on kollane?

Kausis on kokku 16 ploomi, seega ühe ploomi valikuks on 16 erinevat võimalust (kõigi võimalike juhuste arv on 16). Kollaseid ploome on kausis 4, seega soodsaid juhuseid on 4.

$$P(\text{" ploom on kollane"}) = \frac{4}{16} = 0{,}25$$

Tõenäosuse klassikalisest definitsioonist järeldub, et:

1) kindla sündmuse tõenäosus $P\ (\Omega) = 1$
   (kuna kindla sündmuse jaoks on iga juht soodne, s.t. $m = n$)
2) võimatul sündmuse tõenäosus on $P\ (\varnothing) = 0$
   (võimatu sündmuse jaoks ei leidu soodsaid juhte, s.t. $m = 0$)
3) juhusliku sündmuse tõenäosus on $0 < P\ (A) < 1$
4) sündmuse tõenäosus on alati rajades $0 \leq P\ (A) \leq 1$.

Tihti esitatakse tõenäosuse väärtus protsentides. Kindlalt toimuva sündmuse tõenäosus on 1, ehk see toimub 100%-lise tõenäosusega.

Sündmuse tõenäosuse statistiline definitsioon

Alati ei ole võimalik elementaarsündmuste süsteemi määrata. Sündmuse tõenäosus leitakse sel korral katseliselt. Selline olukord esineb näiteks kahest erinevast materjalist kleebitud täringu viskamisel. Oletame, et osa täringust on valmistatud puust ja osa tinast. Sellise täringu veeretamisel jääb peale sagedamini puust osa ja seetõttu pole mingi silmade arvu saamise võimalused enam võrdsed. Kui meid huvitab, kui tõenäone on saada tulemuseks kuus silma, siis aitab meid täringu korduv viskamine, iga kord tuleks seejuures registreerida saadav silmade arv. Kui selgub, et täringu n kordsel viskamisel saadi kuus silma m korda, siis suhte m/n abil saame iseloomustada kuue silma saamise tõenäosust n katsel.
Kordugu sündmus A n katsest koosnevas seerias m korda. Sündmuse sageduse m ja katsete üldarvu n jagatist nimetatakse **sündmuse suhteliseks sageduseks**

$$w = \frac{m}{n}.$$

Suhteline sagedus w sõltub katseseeria pikkusest n.
Katsete arvu kasvades on suhtelisel sagedusel tendents stabiliseeruda, s.t. küllalt pikkades katseseeriates kõigub w teatud kindla arvu läheduses, mis võetaksegi **statistiliseks tõenäosuseks**

$$P(A) \approx w = \frac{m}{n}.$$

Näide. Juba mitusada aastat tagasi pandi tähele, et poisslapsi sünnib enam kui tüdrukuid. Aastal 2013 sündis Eestis 13 831 last, neist 7038 poissi. Seega poisslapse sündimise suhteline sagedus (poisslapse sünni tõenäosus) on

$$w = \frac{7038}{13831} \approx 0{,}51$$

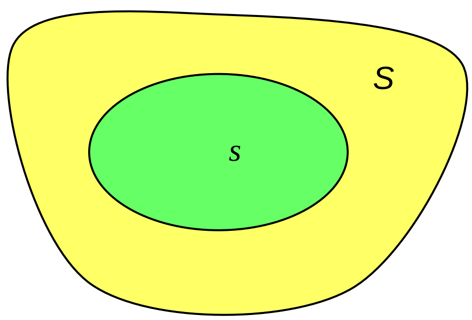
Küllalt suure kogumi puhul loetakse poiste sünni statistiliseks tõenäosuseks 0,52 ehk 52%.

<u>Järeldusi statistilisest tõenäosusest</u>

1) Kui statistiline tõenäosus võrdub ühega, siis ei tarvitse sündmus veel olla kindel. (Sest võib ju nii olla, et *n* katsel vaadeldav sündmus toimus ja seega $w = n/n = 1$, kuid kui katseseeriat pikendame võib juba järgmisel katsel sündmus mittetoimuda.)
2) Kui aga sündmus on kindel, siis see toimub igal üksikkatsel ja kindlasti statistiline tõenäosus tuleb 1.
3) Kui statistiline tõenäosus võrdub nulliga, siis ei tarvitse sündmus veel olla võimatu. (Põhjendus on analoogne esimeses punktis kirjeldatuga.)
4) Kui aga sündmus on võimatu, siis see ei toimu ühelgi üksikkatsel ja statistiline tõenäosus tuleb 0.

Sündmuse tõenäosuse geomeetriline definitsioon

Olgu märklaud pindalaga *S*. Olgu sellel märklaual mingi osapiirkond pindalaga *s*. Vaatleme punkti n.ö. "juhuslikku viskamist" piirkonda *S*. Tuleb leida piirkonna *s* tabamise tõenäosus (sündmus *A*) noole juhuslikul laskumisel, eeldades, et märklauda kindlasti tabatakse.



Selles ülesandes on kõigi võimalike juhtude arv (piirkonna *S* punktide arv) ja samuti kõigi soodsate juhtude arv (piirkonna *s* punktide arv) lõpmatu ning tõenäosuse klassikalise definitsiooni järgi toimida ei saa. Kogemuslikult on selge, et piirkonna *s* tabamise tõenäosus on seda suurem, mida suurema osa moodustab pindala *s* kogupindalast *S*. Seepärast võetaksegi pindala *s* tabamise tõenäosuseks suhe *s*/*S* ehk

$$P(A) = \frac{s}{S}.$$

Kuna tõenäosus leitakse siin geomeetrilistel kaalutlustel, siis nimetatakse seda **geomeetriliseks tõenäosuseks**.

<u>Näide.</u> Astronoomide andmeil tabab maakera aastal 2022 suur meteoriit. Leida tõenäosus, et see meteoriit langeb Eestisse.

Kasutades ülaltoodud valemit, saame

$$P(\text{"}meteoriit\ \ langeb\ \ Eestisse\text{"}) = \frac{Eesti\ \ pindala}{Maa\ \ pindala}$$