Määramata integraal

Algfunktsioon

Funktsiooni $F(x)$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$ **algfunktsiooniks** piirkonnas *X*, kui $F'(x) = f(x)$ iga $x \in X$ korral.

<u>*Näide*</u> Funktsiooni $f(x) = x^2$ algfunktsiooniks on $F(x) = \frac{x^3}{3}$, sest $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Algfunktsioon ei ole üheselt määratud, sest näiteks peale funktsiooni $F(x) = \frac{x^3}{3}$ on funktsiooni $f(x) = x^2$ algfunktsiooniks ka

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 1, \text{ sest } \left(\frac{x^3}{3} + 1\right)' = x^2$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 2, \text{ sest } \left(\frac{x^3}{3} - 2\right)' = x^2$$

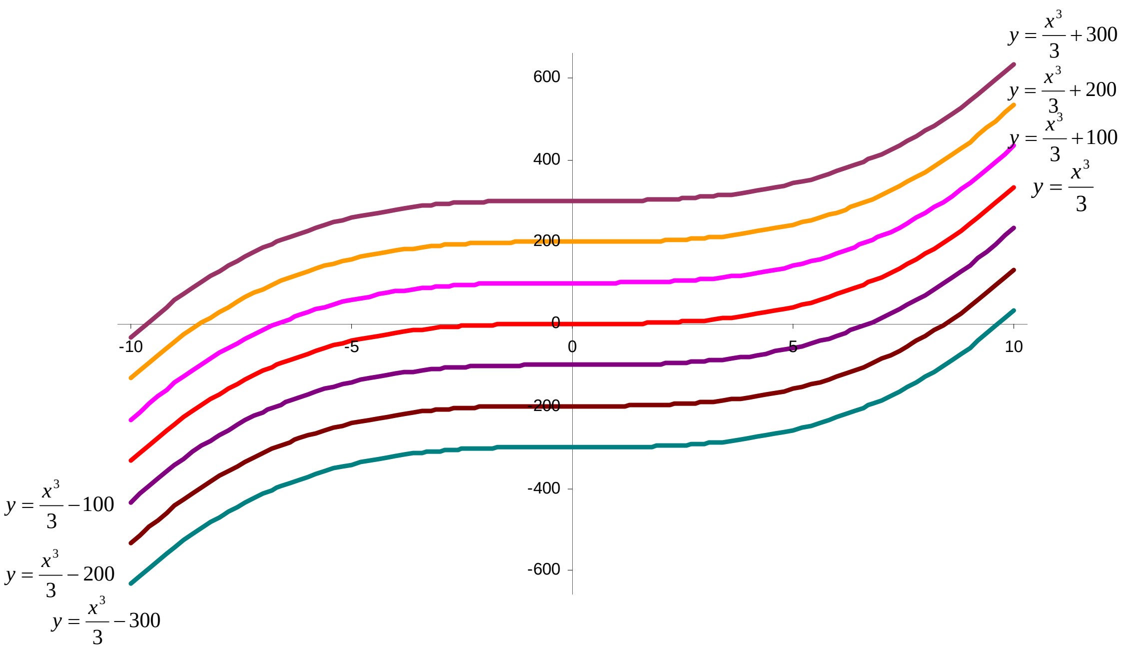
ja igasugune avaldis kujul

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + c, \quad (c \in R), \text{ sest } \left(\frac{x^3}{3} + c\right)' = x^2.$$

Seega võime sõnastada järgneva tulemuse.

<u>**Teoreem**</u> Kui $F(x)$ on $f(x)$ algfunktsioon, siis on seda ka $F(x) + c$ iga $c \in R$ korral.

Funktsiooni $f(x) = x^2$ mõningate algfunktsioonide graafikud on kujutatud järgneval joonisel.



Tekib küsimus, kas funktsioonil $f(x)$ võib leiduda veel teisigi algfunktsioone peale nende, mis avalduvad kujul $F(x)+c$. Sellele annab vastuse järgmine teoreem.

<u>Teoreem</u> Kui $F(x)$ on $f(x)$ algfunktsioon mingis piirkonnas *X*, siis avaldub $f(x)$ iga algfunktsioon kujul $F(x)+c$, kus $c \in R$.

Määramata integraal

Eelnevalt nägime, et funktsiooni diferentseerimise pöördoperatsioon on algfunktsiooni leidmine. Seda pöördoperatsiooni nimetatakse **integreerimiseks**, funktsiooni $f(x)$ algfunktsioonide üldavaldist $F(x)+c$ nimetatakse funktsiooni f **määramata integraaliks** ja konstanti c nimetatakse **integreerimiskonstandiks**. Määramata integraali tähistatakse sümboliga $\int f(x)dx$ (loetakse: *integraal ef iks de iks*).

Sümbolit $\int$ nimetakse integraali märgiks, muutujat x integreerimismuutujaks, avaldist $f(x)dx$ integreeritavaks avaldiseks, funktsiooni $f(x)$ integreeritavaks funktsiooniks.

Põhiintegraalide tabel

Järgnevalt esitame põhiliste elementaarfunktsioonide määramata integraalid. Neid valemeid saab tõestada tuletise võtmise teel.

$$\int 0dx = c$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{a+1} + c \quad (a \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c = -\mathrm{arccot}\, x + c$$

Määramata integraali omadused

1. Funktsioon jääb muutumatuks kui seda kõigepealt integreerida ja siis diferentseerida. Tõepoolest $(\int f(x)dx)' = (F(x)+c)' = f(x)$.
2. Kui diferentseerimisele järgneb integreerimine, siis muutub funktsioon integreerimiskonstandi võrra.
   Tõepoolest $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+c$.
3. Summa integraal on liidetavate integraalide summa
   $$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$
4. Konstantse teguri võib tuua integraali märgi alt integraali märgi ette
   $$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

Näide 1 Leida $\int 5\sin x dx$.

Toome konstandi integraali märgi ette ja kasutame põhivalemit $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

$$\int 5\sin x dx = 5\int \sin x dx = -5\cos x + c\ .$$

Näide 2 Leida $\int x^2\sqrt{x}dx$.

Kirjutame avaldise $x^2\sqrt{x}$ astmena ja kasutame astmefunktsiooni integreerimise reeglit

$$\int x^2\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + c = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + c.$$

Näide 3 Leida $\int \frac{(x-3)^2}{x}dx$.

Kuna jagatise integreerimiseks valemit pole (nagu ka korrutise jaoks), siis on üheks võimaluseks teisendada jagatis (korrutis) enne integreerimist summaks või vaheks.
Kirjutame lugeja vahe ruudu valemi abil lahti ja seejärel jagame murru lugeja liikmeti nimetajaga

$$\int \frac{x^2 - 6x + 9}{x}dx = \int \left(x - 6 + \frac{9}{x}\right)dx\ .$$

Seejärel integreerime igat liidetavat eraldi tuginedes põhivalemitele

$$\int xdx - \int 6dx + \int \frac{9}{x}dx = = \frac{x^2}{2} - 6x + 9\ln|x| + c\ .$$

Määramata integraali leidmist integraali omaduste ja integreerimise põhivalemite abil nimetatakse **vahetuks integreerimiseks**. Sageli pole aga vahetu integreerimise teel võimalik leida määramata integraali. Sel korral kasutatakse mitmesuguseid integreerimisvõtteid. Järgnevalt vaatleme kahte integreerimise võtet – muutuja vahetust ja ositi integreerimist.

Ositi integreerimine

Kui $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ on diferentseeruvad funktsioonid ning leidub $\int vdu$ siis leidub ka $\int udv$ kusjuures

$$\int udv = uv - \int vdu\ . \qquad (5)$$

Selgitame ositi integreerimise valemi kasutamist näite varal.

Näide Leida $\int x\sin xdx$.

Jagame integreeritava avaldise $x\sin xdx$ teguriteks *u* ja *dv*.

Olgu $u = x$ $\quad dv = \sin xdx$

siis $du = dx$ $\quad v = -\cos x$.

Ositi integreerimise valemi põhjal:

$$\int x\sin xdx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + c\ .$$

Märgime, et ositi integreerimisel saab integreeritavat avaldist harilikult mitmel erineval viisil tegurite *u* ja *dv* korrutiseks lahutada. Valik tuleb teha selline, et valemi (5) paremale poole jääv integraal oleks lihtsam esialgsest. Kui viimases näites valiksime $u = \sin x$ ja $dv = xdx$, siis saaksime $du = \cos xdx$ ja $v = \frac{x^2}{2}$. Ositi integreerimise valemi põhjal

$\int x\sin xdx = \frac{x^2}{2}\sin x + \int \frac{x^2}{2}\cos xdx$. Ilmselt ei ole see valik otstarbekohane, sest võrduse paremal pool olev integraal ei ole lihtsam esialgsest.

Muutuja vahetus

Muutuja vahetuse valemi võib esitada kujul: kui $x = \varphi(t)$, siis $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

<u>*Näide*</u> Leida $\int \sqrt{\sin x}\cos xdx$

Teeme muutujate vahetuse $t = \sin x$. Diferentseerides viimase võrduse mõlemat poolt, saame $dt = \cos xdx$, seega

$$\int \sqrt{\sin x}\cos xdx = \int \sqrt{t}dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt = 2\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3} + c = \frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x + c.$$

<u>Muutuja vahetuse võte seisneb järgnevas:</u>

1. leitakse vastav tabeliintegraal, mille kujuliseks saab antud integraali teisendada;
2. kirjutatakse välja integreerimiseks vajalik võrdus ja asendatakse mingi osa integreeritavast funktsioonist uue muutujaga;
3. leitakse selle võrduse mõlema poole diferentsiaal;
4. avaldatakse diferentsiaali avaldisest see osa integreeritavast avaldisest, kus on veel asendused tegemata;
5. asendatakse integraalimärgi all ülejäänud avaldise osa.

Pärast sellist asendust peame saama ühe tabeliintegraalidest, mis sisaldab ainult uut muutujat (vastasel korral pole asendus õige või antud integraali ei saa üldse asendusvõttega leida).
Lahenduse lõpetamiseks integreeritakse saadud funktsiooni uue muutuja järgi ning lõpptulemuses asendatakse endine muutuja tagasi.