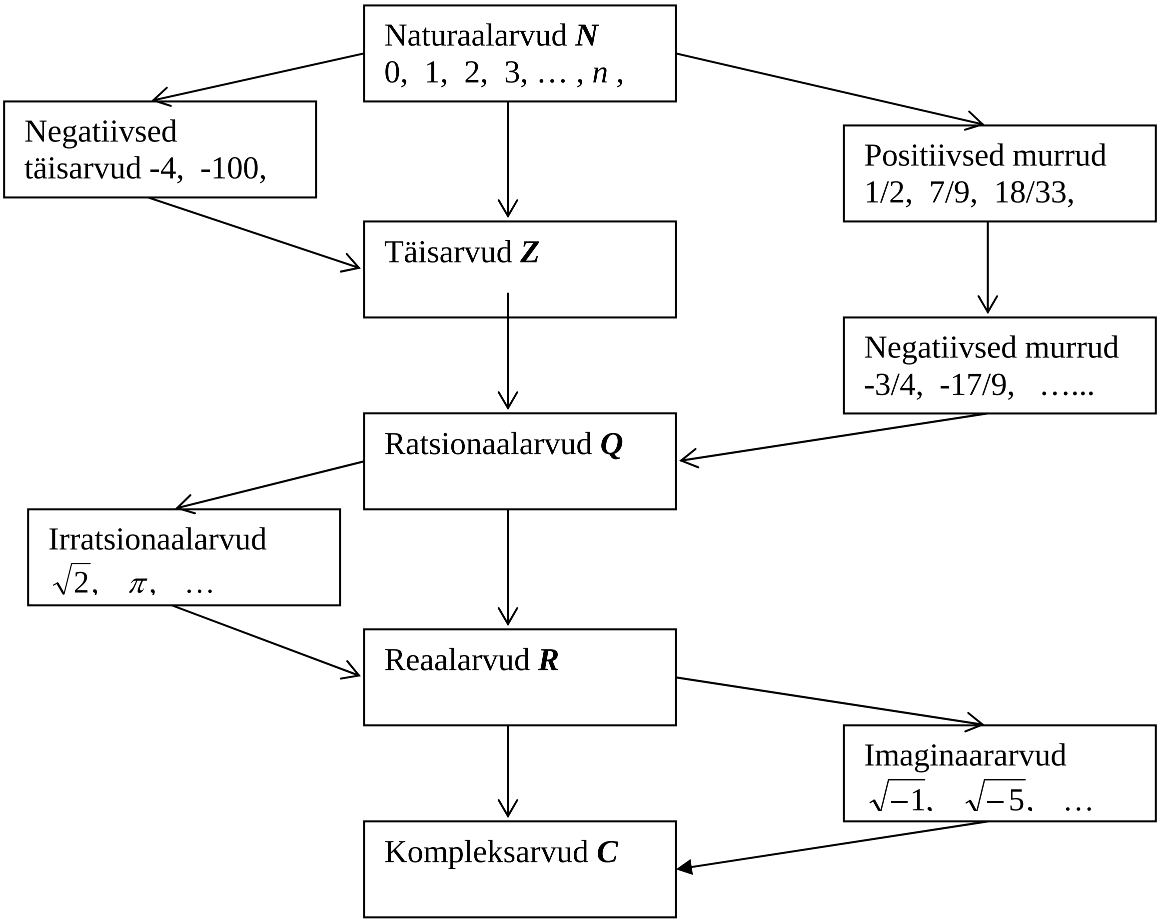
Arvu mõiste laiendamine

Arv on matemaatika üks põhimõisteid, mis tekkis juba ürgajal. Hiljem seda laiendati ja üldistati. Seoses esemete loendamisega arenes naturaalarvu mõiste. Pikkuste, ruumalade jms. mõõtmiseks ning esemete osadeks jaotamise ülesannete lahendamiseks oli vaja kasutusele võtta positiivne murd (kasutati muistses Egiptuses ja Süürias juba umbes 2000 a. e.m.a.). Vajadusest pikkusi täpselt arvudega väljendada ka sel juhul, kui mõõdetav lõik ja pikkusühik on ühismõõduta suurused (näiteks ruudu diagonaal ja külg), loodi positiivse irratsionaalarvu mõiste (tuntud 5. sajandist e.m.a.).
Negatiivsed arvud ja ratsionaalarvud võeti kasutusele lahutamis- ja jagamistehete sooritamiseks. Reaalarvude korrektne teooria tekkis alles 19. sajandi teisel poolel.
Arvu mõiste arengut võime iseloomustada järgneva skeemiga.



Järgnevatel peatume mõnedel olulisematel arvuhulkade omadustel.

Naturaalarvud

Arvud $0, 1, 2, \ldots$ on **naturaalarvud**. Naturaalarvude jada on lõpmatu (igale naturaalarvule järgneb veel naturaalarve). Liites või korrutades kaks naturaalarvu, saame tulemuseks taas naturaalarvu. Seepärast öeldakse, et **naturaalarvude hulk on kinnine liitmise ja korrutamise suhtes**. Liitmise ja korrutamise pöördtehted – lahutamine ja jagamine – ei ole naturaalarvude vallas alati teostatavad, s.t. võrranditel $b + x = a$ ja $b \cdot x = a$, kus a ja b on naturaalarvud, pole alati lahendit x naturaalarvude vallas.

Täisarvud

Täiendades naturaalarvude hulka negatiivsete täisarvudega -1, -2, -3, …, saame **täisarvude hulga**. **Täisarvude hulk on kinnine liitmise, lahutamise ja korrutamise suhtes**, mitte aga jagamise suhtes; võrrandil $b \cdot x = a$, kus a ja b on täisarvud, täisarvulist lahendit üldiselt ei ole.

Ratsionaalarvud

Ratsionaalarvud koosnevad murdudest $\frac{a}{b}$, kus a ja b on täisarvud ning $b \neq 0$. Ratsionaalarvud on näiteks $\frac{4}{5}$; $-\frac{7}{6}$. Iga ratsionaalarv on esitatav lõpmatu perioodilise kümnendmurruna. Näiteks: $\frac{5}{6} = 0{,}8(3)$, $\frac{7}{11} = 0{,}(63)$, $\frac{1}{2} = 0{,}5(0)$.

Ratsionaalarvude hulk on kinnine kõigi aritmeetiliste tehete suhtes.

Ratsionaalarvude hulk on **tihe**: iga kahe erineva ratsionaalarvu vahel on lõpmata palju ratsionaalarve. Ratsionaalarvude hulk **ei ole aga pidev**: arvteljel leidub punkte, millele ei vasta ükski ratsionaalarv.

Irratsionaalarvud

Mitteperioodilisi lõpmatuid kümnendmurde nimetatakse **irratsionaalarvudeks**.

Näiteks: $\sqrt{2} = 1{,}41421...$, $\pi = 3{,}14159265...$, $e = 2{,}71828...$

Reaalarvud

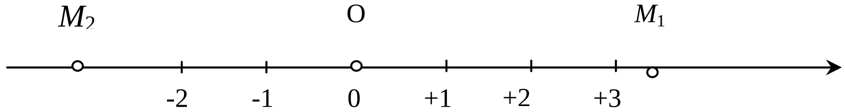
Ratsionaalarve ja irratsionaalarve nimetatakse ühiselt **reaalarvudeks**.

Reaalarvud on näiteks $3-\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{3}$; $2{,}7128...$; $\frac{4}{3}$.

Reaalarve saab kujutada arvtelje punktidena. Arvteljeks nimetatakse lõpmatut sirget, millel on valitud:

1. mingi punkt O, mida nimetatakse nullpunktiks;
2. positiivne suund, mida näidatakse noolega;
3. pikkusühik.

Kui arv x_1 on positiivne, siis kujutatakse teda punktina M_1, mis asetseb punktist O positiivses suunas ja sellest kaugusel $O\,M_1 = x_1$. Kui arv x_2 on negatiivne, siis kujutatakse teda punktina M_2, mis asetseb punktist O negatiivses suunas ja sellest kaugusel $O\,M_2 = -x_2$.



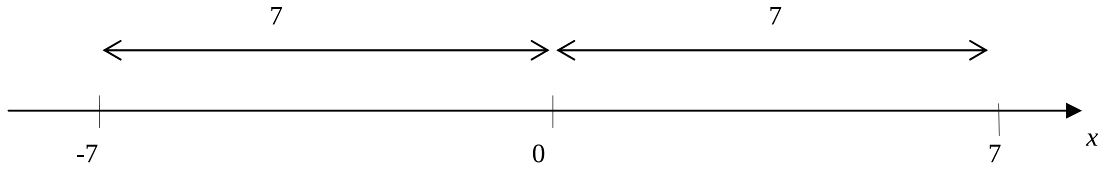
Reaalarvude omadused:

1. Reaalarvude hulk on **pidev**: igale punktile arvteljel vastab parajasti üks reaalarv.
2. Reaalarvud on **järjestatavad** suuruse järgi, s. o. iga kahe reaalarvu x ja y kohta kehtib parajasti üks seostest: $x < y$, $x = y$, $x > y$.

Reaalarvu x **absoluutväärtuseks** (ehk *mooduliks*, tähistatakse $|x|$) nimetatakse mittenegatiivset reaalarvu, mis rahuldab tingimusi

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Geomeetriliselt tõlgendades tähendab arvu absoluutväärtus seda arvu arvteljel kujutava punkti kaugust nullpunktist.



Näide. $|7| = 7$

$|-7| = -(-7) = 7$

Absoluutväärtuse definitsioonist järeldub, et

$|x| = a \Leftrightarrow x = a$ või $x = -a$

$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

$|x| > a \Leftrightarrow x > a$ või $x < -a$

Absoluutväärtuse omadusi

1. $|x| \geq 0$
2. $|-x| = |x|$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$
4. $|x - y| \geq |x| - |y|$
5. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
6. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Kompleksarvud

Eelnevalt laiendasime arvu mõistet naturaalarvudest reaalarvudeni. Iga laiendamisega avardusid tehete sooritamise võimalused. Kuid ka reaalarvude vallas on osa tehteid defineeritud teatud kitsendustega. Näiteks ei saa leida paarisarvulise juurijaga juurt negatiivsest arvust. Seetõttu jäävad reaalarvude vallas lahendamata paljud võrrandid. Näiteks võrrandil $x^2 + 2 = 0$ pole lahendit reaalarvude vallas, kuna $\sqrt{-1}$ pole reaalarvude vallas defineeritud. Et ka selliste võrrandite puhul saaks kasutada mõistet lahend, laiendati reaalarvude hulka ühe teatava arvuga, mille ruut on võrdne -1-ga. Kuna ühtegi sellise omadusega reaalarvu ei leidu, siis hakati kujutletavat arvu, mille ruut on -1, nimetama imaginaarühikuks ja tähistama tähega *i*.

Arvu, mille ruut on –1, nimetatakse **imaginaarühikuks** ja tähistatakse sümboliga *i*, s. t. $i = \sqrt{-1}$. Arve kujul $a + ib$, kus a ja b on reaalarvud ning i imaginaarühik, nimetatakse **kompleksarvudeks**. Arvu a nimetatakse kompleksarvu reaalosaks ja arvu ib selle kompleksarvu imaginaarosaks. Kompleksarvud on näiteks 5 - 4*i*, $-\sqrt{2}i$.

Näide. Lahendame võrrandi $x^2 - 6x + 13 = 0$. Kasutades taandatud ruutvõrrandi lahendivalemit, saame

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 13} = 3 \pm \sqrt{-4}$$

Kuna $i = \sqrt{-1}$, siis $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{4 \cdot (-1)} = 3 \pm 2\sqrt{(-1)} = 3 \pm 2i$