Maatriksid

Maatriksi mõiste

Definitsioon

($m\times n$)-maatriksiks nimetatakse *m* reast ja *n* veerust koosnevat ristkülikukujulist arvude tabelit.

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \qquad (1)$$

($a_{ij} \in \mathbf{R}$ iga *i* ja *j* korral).

Tabeli ääristusena kasutatakse ka ümar- või nurksulge.

Kui kontekstist on selge maatriksi ridade ja veergude arvud *m* ja *n*, siis kasutatakse ka tähistust

$$\mathbf{A} = \left\| a_{ij} \right\|$$

Maatriksi mõiste

Arve a_{ij} nimetatakse *maatriksi elementideks*.

Kõigi reaalsete ($m\times n$)-maatriksite hulka tähistatakse

$$\mathbf{R}^{m\times n}.$$

Definitsioon

Maatriksit $\mathbf{A}=\left\|a_{ij}\right\|\in\mathbf{R}^{m\times n}$ nimetatakse *n-ndat järku ruutmaatriksiks*, kui tema ridade arv m võrdub tema veergude arvuga n. Seejuures öeldakse, et arvud $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ asuvad maatriksi **A** *peadiagonaalil* ja arvud $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ asuvad maatriksi **A** *kõrvaldiagonaalil*.

Definitsioon

Diagonaalmaatriksiks nimetatakse ruutmaatriksit, mille elemendid väljapool peadiagonaali võrduvad nulliga.

Maatriksi reavektorid

Diagonaalmaatriksi üldkuju:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{Vmatrix}$$

ja sellist diagonaalmaatriksit tähistatakse $\operatorname{diag}(a_1; a_2; \dots; a_n)$.

Definitsioon

Maatriksi (1) *reavektoriteks* nimetatakse aritmeetilisi vektoreid

$$\alpha_1 = (a_{11}; a_{12}; \dots; a_{1n}),$$

$$\alpha_2 = (a_{21}; a_{22}; \dots; a_{2n}),$$

....

$$\alpha_m = (a_{m1}; a_{m2}; \dots; a_{mn}).$$

Maatriksi veeruvektorid

Definitsioon

Maatriksi (1) *veeruvektoriteks* nimetatakse aritmeetilisi vektoreid

$$\beta_1 = (a_{11}; a_{21}; \ldots; a_{m1}),$$

$$\beta_2 = (a_{12}; a_{22}; \ldots; a_{m2}),$$

....

$$\beta_n = (a_{1n}; a_{2n}; \ldots; a_{mn}).$$

Maatriksit $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ reavektoritega $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_m)$ ja veeruvektoritega $(\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_n)$ on võimalik esitada ka kujul

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{Vmatrix} \quad \text{või} \quad \mathbf{A} = \left\| \beta_1; \beta_2; \ldots \beta_n \right\|.$$

Maatriksite liitmine ja skalaariga korrutamine

Definitsioon

(m×n)-maatriksite $\mathbf{A} = \left\| a_{ij} \right\|$ ja $\mathbf{B} = \left\| b_{ij} \right\|$ summaks nimetatakse (m×n)-maatriksit $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \left\| c_{ij} \right\|$, kus $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ kõigi indeksite i ja j võimalike väärtuste korral.

Definitsioon

Maatriksi $\mathbf{A} = \left\| a_{ij} \right\| \in \mathbf{R}^{m \times n}$ korrutiseks skalaariga $c \in \mathbf{R}$ nimetatakse maatriksit $c\mathbf{A} = c \cdot \mathbf{A} = \left\| c_{ij} \right\| \in \mathbf{R}^{m \times n}$, kus $c_{ij} = ca_{ij}$ kõigi indeksite i ja j võimalike väärtuste korral.

Osutub, et nii defineeritud liitmine ja skalaariga korrutamine rahuldavad vektorruumi aksioome.

Maatriksite korrutamine (I)

Definitsioon

Maatriksi

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{Vmatrix} \in \mathbf{R}^{m \times n},$$

mille reavektoriteks on $\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_m$, *korrutiseks* maatriksiga

$\mathbf{B} = \left\| \beta_1; \beta_2; \ldots \beta_p \right\| \in \mathbf{R}^{n \times p}$, mille veeruvektoriteks on $\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_p$,

nimetatakse maatriksit

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} \alpha_1 \cdot \beta_1 & \alpha_1 \cdot \beta_2 & \ldots & \alpha_1 \cdot \beta_p \\ \alpha_2 \cdot \beta_1 & \alpha_2 \cdot \beta_2 & \ldots & \alpha_2 \cdot \beta_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m \cdot \beta_1 & \alpha_m \cdot \beta_2 & \ldots & \alpha_m \cdot \beta_p \end{Vmatrix} \in \mathbf{R}^{m \times p},$$

kus $\alpha_i \cdot \beta_j$ tähistab vektorite α_i ja β_j skalaarkorrutist.

Maatriksite korrutamine (II)

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \sum_{l=1}^{k} a_{1l}b_{l1} & \sum_{l=1}^{k} a_{1l}b_{l2} & \dots & \sum_{l=1}^{k} a_{1l}b_{ln} \\ \sum_{l=1}^{k} a_{2l}b_{l1} & \sum_{l=1}^{k} a_{2l}b_{l2} & \dots & \sum_{l=1}^{k} a_{2l}b_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{l=1}^{k} a_{ml}b_{l1} & \sum_{l=1}^{k} a_{ml}b_{l2} & \dots & \sum_{l=1}^{k} a_{ml}b_{ln} \end{matrix} \right\|$$

Maatriksite korrutise omadused

Maatriksite korrutamisel peab esimeseks teguriks oleva maatriksi veergude arv võrduma teiseks teguriks oleva maatriksi ridade arvuga.

Maatrikskorrutise omadused

1) Maatriksite korrutamine ei ole kommutatiivne, s.t. üldiselt

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

2) Maatriksite korrutamine on assotsiatiivne, s.t.

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}.$$

3) Liitmine ja korrutamine on seotud distributiivsusega, s.t.

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}, \qquad (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC},$$

4) Kui eksisteerib maatriksite korrutis **AB**, siis

$$a(\mathbf{AB}) = (a\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(a\mathbf{B})$$

iga $a \in \mathbf{R}$ korral.

Ühikmaatriks

Definitsioon

m-ndat järku ühikmaatriksiks nimetatakse *m*-ndat järku ruutmaatriksit

$$\mathbf{E}_m = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} = \operatorname{diag}(1; 1; \dots; 1) \in \mathbf{R}^{m\times m}.$$

Teoreem

Kui $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$, siis

$$\mathbf{E}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{E}_n = \mathbf{A}.$$

Maatriksite transponeerimine

Definitsioon

Maatriksi $\mathbf{A} = \left\| a_{ij} \right\| \in \mathbf{R}^{m \times n}$ *transponeeritud maatriksiks* nimetatakse maatriksit $\mathbf{A}^T = \left\| b_{ji} \right\| \in \mathbf{R}^{n \times m}$, mille veeruvektoriteks on parajasti maatriksi **A** reavektorid (maatriksi **A** read on paigutatud maatriksi $\mathbf{A}^T$ veergudeks), s.t. $b_{ji} = a_{ij}$ iga *i* ja *j* võimaliku väärtuse korral

Maatriksi **A** transponeeritud maatriksit tähistatakse ka **A**´.

Näide

Maatriksi

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -6 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

transponeeritud maatriks on

$$\mathbf{A}^T = \begin{Vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 0 \\ 4 & 0 \end{Vmatrix}$$

Maatriksite transponeerimise reeglid

Teoreem

Maatriksite transponeerimisel kehtivad järgmised reeglid:

1) $\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}$ iga maatriksi **A** korral;

2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ iga maatriksi **A, B** korral;

3) $(c\mathbf{A})^T = c\mathbf{A}^T$ iga $c \in \mathbf{R}$ ja maatriksi **A** korral;

4) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ iga $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ ja $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n\times p}$ korral;

Tõestus (reegel 4)

$$c_{ij} = \left\|(\mathbf{AB})^T\right\|_{ij} = \left\|\mathbf{AB}\right\|_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$$

$$d_{ij} = \left\|\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\right\|_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left\|\mathbf{B}^T\right\|_{ik} \left\|\mathbf{A}^T\right\|_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \left\|\mathbf{B}\right\|_{ki} \left\|\mathbf{A}\right\|_{jk} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = c_{ij}$$

Seega $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ *mida oligi vaja näidata.*

Sümmeetriline ja kaldsümmeetriline maatriks

Definitsioon

Ruutmaatriksit **A** nimetatakse *sümmeetriliseks maatriksiks*, kui $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ ja *kaldsümmeetriliseks maatriksiks,* kui $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$

Näide

Maatriks $\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -6 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{Vmatrix}$ on sümmeetriline;

maatriks $\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 0 & 6 & -4 \\ -6 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ on kaldsümmeetriline maatriks.

Sümmeetriline ja kaldsümmeetriline maatriks

Lause

Iga ruutmaatriks on esitatav sümmeetrilise maatriksi ja kaldsümmeetrilise maatriksi summana.

Tõestus

Suvaline ruutmaatriks **A** on esitatav kujul

$$\mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{A}/2 + \mathbf{A}^T/2}_{\mathbf{B}} + \underbrace{\mathbf{A}/2 - \mathbf{A}^T/2}_{\mathbf{C}}$$

$$\mathbf{B}^T = \left(\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)/2\right)^T = \left(\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)^T\right)/2 = \left(\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\right)/2 = \mathbf{B}$$

Maatriks **B** on seega sümmeetriline.

$$\mathbf{C}^T = \left(\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)/2\right)^T = \left(\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)^T\right)/2 = \left(\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\right)/2 = -\mathbf{C}$$

Maatriks **C** on seega kaldsümmeetriline.

Lause on tõestatud.

Ridade elementaarteisendused

Definitsioon

Maatriksi **A** *ridade elementaarteisenduseks* nimetatakse üleminekut maatriksilt **A** maatriksile **B** järgmise kahe võimaliku reegli abil:

1) maatriksi **A** mingile reavektorile liidetakse maatriksi A mingi teise rea nullist erineva arvu kordne;
2) maatriksi **A** mingit reavektorit korrutatakse mingi nullist erineva arvuga.

Tähistus: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$

Näide

$$\left\|\begin{matrix} 2 & -3 & 4 \\ -6 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 3 \end{matrix}\right\| \xrightarrow{+(-3)\cdot \mathrm{III}} \left\|\begin{matrix} 26 & -9 & -5 \\ -6 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 3 \end{matrix}\right\| \xrightarrow{\cdot(1/3)} \left\|\begin{matrix} 26 & -9 & -5 \\ -2 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 3 \end{matrix}\right\|$$

Veergude elementaarteisendused

Maatriksi veergude elementaarteisenduste definitsioon on analoogne ridade elementaarteisenduste definitsiooniga.

Näide

$$\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -6 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 3 \end{Vmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ -6 & 0 & -12 \\ -8 & 2 & -13 \end{Vmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 8 \\ -3 & 0 & -12 \\ -4 & 2 & -13 \end{Vmatrix}$$

$+2\cdot \mathrm{I}$ $\quad \cdot(1/2)$

Elementaarteisendused

Teoreem

Kui maatriks $\hat{\mathbf{A}}$ on saadud maatriksist $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ mingite reavektorite elementaarteisenduste teel ja maatriks $\hat{\mathbf{E}}$ on saadud *m*-ndat järku ühikmaatriksist samade ridade samade elementaarteisenduste teel, siis

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{E}}\mathbf{A}$$

Kui maatriks $\hat{\mathbf{A}}$ on saadud maatriksist $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ veeruvektorite elementaarteisenduste teel ja maatriks $\hat{\mathbf{E}}$ on saadud *n*-ndat järku ühikmaatriksist samade veergude samade elementaarteisenduste teel, siis

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{E}}$$

Elementaarteisendused

Teoreem

Iga nullmaatriksist erinev maatriks $\mathbf{A} = \left\| a_{ij} \right\| \in \mathbf{R}^{m \times n}$ on ridade elementaarteisendustega viidav kujule

$$\begin{Vmatrix} \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix} \begin{array}{l} \text{1. rida} \\ \text{2. rida} \\ \\ k\text{. rida,} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \textit{Nullid} \end{array}$$

kus maatriksi viimases $m - k$ reas on kõik arvud nullid, esimeses k reas aga esinevad k-ndat järku ühikmaatriksi kõik veerud mistahes järjekorras.

Elementaarteisendused

Teoreem

Iga nullmaatriksist erinev maatriks $\mathbf{A} = \left\| a_{ij} \right\| \in \mathbf{R}^{m \times n}$ on veergude elementaarteisendustega viidav kujule

$$\begin{Vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \textit{nullid} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{Vmatrix}$$

kus maatriksi viimases $n - k$ veerus on kõik arvud nullid, esimeses k veerus aga esinevad k-ndat järku ühikmaatriksi kõik read mistahes järjekorras.

Elementaarteisendused

Teoreem

Iga nullmaatriksist erinev maatriks $\mathbf{A} = \left\| a_{ij} \right\| \in \mathbf{R}^{m \times n}$ on ridade ja veergude elementaarteisendustega viidav kujule

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \mathit{nullid} \\ & \mathit{nullid} & & & \end{matrix} \right\|$$

kus maatriksi ülal vasakus nurgas on k-ndat järku ühikmaatriks, mujal on aga kõik arvud nullid.