Lineaarsed võrrandisüsteemid

Lineaarne võrrand

Definitsioon

Lineaarse võrrandi all mõistetakse võrrandit kujul

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b, \tag{1}$$

kus $a_1, \dots, a_n$ ja b on fikseeritud (antud) arvud ning $x_1, \dots, x_n$ on *tundmatud*.

Arvu b nimetatakse vaadeldava võrrandi *vabaliikmeks*, arve $a_1, \dots, a_n$ aga tema *kordajateks*.

Näide

Võrrandis

$$5x + 3y - 2z = -4$$

on vabaliikmeks arv –4, kordajateks arvud 5, 3 ja –2 ning tundmatud on tähistatud tähtedega x, y ja z.

Lineaarse võrrandi lahend

Definitsioon

Lineaarse võrrandi (1) *lahendiks* nimetatakse sellist tundmatute $x_1, \dots, x_n$ väärtuste komplekti $c_1, \dots, c_n, \in \mathbf{R}$, mis asendamisel võrrandi (1) vasakusse poolde muudavad selle samasuseks:

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \equiv b.$$

Näide

Võrrandi

$$5x + 3y - 2z = -4$$

üheks lahendiks on $x = 1$, $y = -1$ ja $z = 3$, kuna antud tundmatute väärtuste asendamisel võrrandisse saame samasuse:

$$5 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 \equiv -4$$

Lineaarse võrrandi lahend

Võrrandi (1) lahendit $c_1, \dots, c_n$ võib vaadelda ka reavektorina

$$\left\| c_1; c_2; \dots; c_n \right\|$$

või veeruvektorina

$$\left\| \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{matrix} \right\|$$

Näited

Võrrandi

$$2x = 4$$

ainsaks lahendiks on üheelemendiline vektor $\|2\|$.

Võrrandi $$2x_1 + 6x_2 = 5$$

lahendiks on vektor (d, $(5 - 2d)/6$), kus d on suvaline reaalarv.

Kuked-kanad-tibud

Talupoeg läinud laadale linde müüma. Teel tulnud talle vastu valitseja. Valitseja tahtnud teada, kui palju linnud maksavad.
«Kukk maksab 5 münti, kana 3 ning kolm kanapoega saab 1 mündi eest,» vastanud talupoeg.
Valitseja mõtelnud pisut ja käskinud siis endale tuua 100 mündi eest 100 lindu. Talupoeg läinud murelikult koju. Seal aga lahendanud ta kaheksa-aastane poeg kiiresti ülesande.
Järgmisel päeval tahtnud valitseja taas 100 mündi eest 100 lindu, kuid ei kukkesid, kanu ega tibupoegi tohtinud olla niisama palju, kui eelmisel korral. Ja jällegi lahendanud poeg ülesande.
Veel kolmas ja neljaski kord küsinud valitseja talupojalt 100 mündi eest 100 lindu, kusjuures nii kukkesid, kanu kui tibupoegi pidanud igaühte taas uus kogus olema. Poiss lahendanud ülesande seegi kord.
Mitu kukke, kana ja tibupoega tõi talumees valitsejale esimesel, teisel, kolmandal ja neljandal korral?

Lineaarne võrrandisüsteem

Definitsioon

Lineaarseks võrrandisüsteemiks nimetatakse lõplikust arvust lineaarsetest võrranditest koosnevat süsteemi. Tema üldkuju on

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Arve $b_1, b_2, \ldots, b_m$ nimetatakse võrrandisüsteemi (2) *vabaliikmeteks*, arve a_{ij} aga *kordajateks*.

Definitsioon

Arve $c_1, c_2, \ldots, c_n$, mis rahuldavad süsteemi (2) kõiki võrrandeid, nimetatakse selle võrrandisüsteemi *lahendiks*.

Lineaarne võrrandisüsteem

Näide

Lineaarse võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -2 \end{aligned}$$

üheks lahendiks on (0; 7/5; -1/5) . Lahendiks on aga ka vektorid (d; 7/5(1 + d); -1/5(1 + d)), kus d on suvaline reaalarv.

Lineaarse võrrandisüsteemi maatrikskuju

Definitsioon

Lineaarse võrrandisüsteemi kordajatest moodustatud maatriksit

$$\mathbf{A} = \left\| a_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

nimetatakse *süsteemi (2) maatriksiks*.

Lisades maatriksi **A** parempoolsesse serva vabaliikmete veeru, saame *süsteemi (2) laiendatud maatriksi:*

$$\mathbf{B} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{matrix} \right\|$$

Lineaarse võrrandisüsteemi maatrikskuju

Defineerime veel maatriksid

$$x = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}, \qquad b = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix}.$$

Siis saame võrrandisüsteemi (2) esitada maatrikskujul:

$$\mathbf{A}x = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix} = b.$$

Seega on lineaarne võrrandisüsteem (2) esitatav maatrikskujul

$$\boxed{\mathbf{A}x = b.} \qquad (3)$$

Samaväärsed võrrandisüsteemid

Definitsioon

Kaht lineaarset võrrandisüsteemi nimetatakse *samaväärseteks* ehk *ekvivalentseteks*, kui neil on ühed ja samad lahendid.

Lineaarse võrrandisüsteemi teisendamisel samaväärsele kujule kasutatakse järgmisi teisendusi:

1) süsteemi suvalist võrrandit korrutatakse mistahes nullist erineva arvuga;

2) süsteemi suvalisele võrrandile liidetakse juurde mistahes arvuga korrutatud mingi teine võrrand samast süsteemist.

Teoreem

Võrrandisüsteemist (3) lõpliku arvu teisendustega 1) ja 2) saadud võrrandisüsteem on samaväärne esialgsega.

Gaussi meetod

Teoreemist selgub, et teisenduste 1) ja 2) rakendamine võrrandisüsteemile on samaväärne võrrandisüsteemi laiendatud maatriksi ridade elementaarteisendustega.

On lihtne näha, et kui võrrandisüsteemi maatriks **A** on nullmaatriks, siis peab tema lahenduvuseks olema ka vabaliikmete maatriks *b* nullmaatriks. Sel korral on lahendiks suvaline *n*-mõõtmeline aritmeetiline vektor.

Maatrikseid käsitleval loengul sõnastatud teoreemi kohaselt on maatriks **A** ridade elementaarteisendustega teisendatav kujule.

$$
\left\| \begin{matrix}
\cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{matrix} \right\|
$$

Gaussi meetod

Rakendades samu teisendusi laiendatud maatriksile $\|\mathbf{A}, b\|$, saame maatriksi

Veeruindeksid, millele vastavad maatriksi ühikveerud

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} & j_1 & & j_2 & & j_k & & \phantom{\hat{b}_{k+1}} \end{array} \\
\left\|\hat{\mathbf{A}},\hat{b}\right\| = & \left\|\begin{array}{cccccccc}
\cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \hat{b}_1 \\
\cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \hat{b}_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
\cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \hat{b}_k \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \hat{b}_{k+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \hat{b}_m
\end{array}\right\|
\end{array}
\begin{array}{l}
\text{1. rida} \\
\text{2. rida} \\
\text{....} \\
k\text{. rida} \\
\\
\\
\\
\end{array}
$$

Sellele laiendatud maatriksile vastav võrrandisüsteem on

1) mittelahenduv, kui arvude $\hat{b}_{k+1}$, ..., $\hat{b}_m$ seas on nullist erinevaid.

Gaussi meetod

2) Kui $\hat{b}_{k+1} = \hat{b}_{k+2} = \ldots = \hat{b}_m = 0$ ja $k = n$, siis on võrrandisüsteemil parajasti üks lahend:

$$x_{j_1} = \hat{b}_1, \quad x_{j2} = \hat{b}_2, \quad \ldots, \quad x_{j_n} = \hat{b}_n.$$

3) Kui $\hat{b}_{k+1} = \hat{b}_{k+2} = \ldots = \hat{b}_m = 0$ ja $k < n$, siis süsteemil on lõpmata palju lahendeid:

$$x_j = c_j, \quad kui \quad j \notin \{j_1, \ldots, j_k\}$$

$$x_{j_1} = \hat{b}_1 - \sum_{j \notin \{j_1, .. j_k\}} \hat{a}_{1j} c_j,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{j_k} = \hat{b}_k - \sum_{j \notin \{j_1, .. j_k\}} \hat{a}_{kj} c_j,$$

kus c_j on mistahes reaalarvud.

Gaussi meetod

Saadud lahendit nimetatakse *üldlahendiks*.
Fikseerides suvaliste arvude c_j väärtused, saame *erilahendid*

Tundmatuid, millele vastavaid lahendi väärtusi saab vabalt valida, nimetatakse *vabadeks tundmatuteks*.

Näide Gaussi meetodi rakendamisest

Lahendame lineaarse võrrandisüsteemi

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 5x_2 + x_3 \qquad\quad + 10x_5 &= 6 \\
x_1 - x_2 \qquad\quad + x_4 + 2x_5 &= 2 \\
x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 + 9x_5 &= 3 \\
x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 9x_4 - 2x_5 &= 6
\end{aligned}
$$

Lahendus

Võrrandisüsteemi laiendatud maatriks on

$$
\left\|\begin{matrix} 3 & -5 & 1 & 0 & 10 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & -3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & 9 & -2 & 6 \end{matrix}\right\|
$$

Vahetame selles esimese ja teise rea. Saame

Näide (2)

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 1 & 0 & 10 & 6 \\ 1 & -4 & 1 & -3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & 9 & -2 & 6 \end{Vmatrix}$$

Uue esimese rea abil, kasutades ridade elementaarteisendusi saavutame nullid esimesse veergu (välja arvatud esimese rea esimene element):

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 1 & 0 & 10 & 6 \\ 1 & -4 & 1 & -3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & 9 & -2 & 6 \end{Vmatrix} \begin{array}{c} \\ \text{-3I} \\ \text{-I} \\ \text{-I} \end{array} \longrightarrow \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & -4 & 4 \end{Vmatrix}$$

Nüüd jagame viimase rea neljaga ja vahetame viimase ja teise rea asukoha. Saame

Näide (3)

$$\left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & 7 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 4 & 0 \end{matrix}\right\| \begin{matrix} +\mathrm{II} \\ \\ +3\mathrm{II} \\ +2\mathrm{II} \end{matrix} \longrightarrow \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{matrix}\right\| \begin{matrix} \\ \\ :(-2) \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{matrix}\right\| \begin{matrix} +\mathrm{III} \\ +\mathrm{III} \\ \\ +\mathrm{III} \end{matrix} \longrightarrow \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|$$

Kuna ülemisse vasakusse nurka tekkinud ühikmaatriksi veerud vastavad muutujatele x_1, x_2 ja x_3, siis x_4 ja x_5, on vabad muutujad. Tähistame nende väärtused $x_4 = c_1$ ja $x_5 = c_2$. Esimesele kolmele reale vastavad võrrandid

Näide (4)

$$x_1 + 2x_4 - x_5 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 - 2x_4 + x_5 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 - 2c_1 + c_2$$

$$x_2 + x_4 - 3x_5 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1 - x_4 + 3x_5 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1 - c_1 + 3c_2$$

$$x_3 - x_4 - 2x_5 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -2 + x_4 + 2x_5 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -2 + c_1 + 2c_2$$

Üldlahendiks on seega

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 1 - 2c_1 + c_2 \\ x_2 &= -1 - c_1 + 3c_2 \\ x_3 &= -2 + c_1 + 2c_2 \\ x_4 &= c_1 \\ x_5 &= c_2 \end{aligned}}$$