Funktsiooni uurimine

Uurime funktsiooni $f(x)=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

1. Määramispiirkond

Ainuke piirang, millega selle funktsiooni puhul peab arvestama on, et nulliga ei saa jagada. Seega

$2(x+1)^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq -1$

$X=\{(-\infty;-1);(-1;\infty)\}$

2. Nullkohad

Funktsiooni nullkohtade leidmiseks tuleb lahendada võrrand $f(x)=0$. Kuna tegu on murdvõrrandiga, siis kasutame lahendamiseks murru nulliga võrdumise tingimust: murd on võrdne nulliga, kui tema lugeja võrdub nulliga ja nimetaja ei võrdu nulliga.

$$\frac{x^3}{2(x+1)^2}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^3=0 \\ 2(x+1)^2 \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1=x_2=x_3=0$$

$X_0=\{0\}$

3. Paaris või paaritu

Funktsiooni $y=f(x)$ nimetatakse paarisfunktsiooniks, kui $f(-x)=f(x)$ ja paarituks funktsiooniks, kui $f(-x)=-f(x)$ iga x korral määramispiirkonnast *X*. (Paarisfunktsiooni graafik on sümmeetriline *y*-telje suhtes, paaritu funktsiooni graafik aga 0-punkti suhtes.)

Kontrollime, kas funktsioon on paaris. Kirjutame välja, millega võrdub $f(-x)$ (selleks asendame esialgse funktsiooni avaldises kõik *x*-d avaldisega *–x*):

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{2(-x+1)^2}=\frac{(-1\cdot x)^3}{2(-(x-1))^2}=\frac{(-1)^3\cdot(x)^3}{2(-1)^2(x-1)^2}=\frac{-x^3}{2(x-1)^2}=-\frac{x^3}{2(x-1)^2}$$

Kuna $f(-x)\neq f(x)$, siis funktsioon ei ole paaris.

Kontrollime, kas funktsioon on paaritu:

$$-f(x)=-\frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

Kuna $f(-x)\neq -f(x)$, siis funktsioon ei ole paaritu.

Kokkuvõttes funktsioon ei ole ei paaris ega paaritu.

4. Positiivsus- ja negatiivsuspiirkond

Positiivsuspiirkonna leidmiseks lahendame võrratuse $f(x)>0$ ehk $\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}>0$. Kuna jagatis ja korrutis on positiivsed samadel tingimustel (Jagatis on positiivne siis, kui lugeja ja nimetaja on sama märgiga. Korrutis on positiivne siis, kui tegurid on sama märgiga.), siis eelnev võrratus on samaväärne võrratusega

$2x^3(x+1)^2>0$

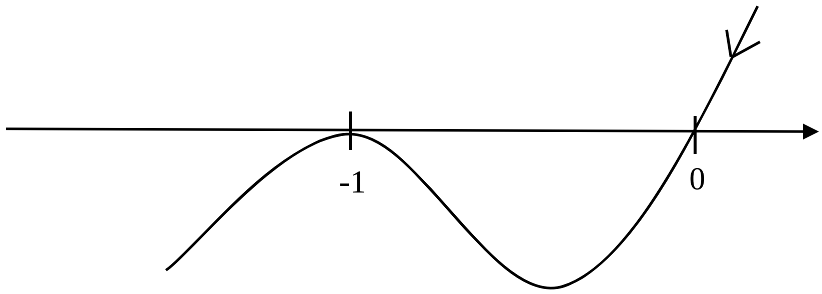
Selle võrratuse lahendamiseks kasutame intervallimeetodit (vt. ptk. „Intervallimeetod“). Leiame funktsiooni $y=2x^3(x+1)^2$ nullkohad:

$2x^3(x+1)^2=0$

$x^3=0 \qquad (x+1)^2=0$

$x_1=x_2=x_3=0 \qquad x_4=x_5=-1$

Kanname nullkohad x-teljele ja tõmbame abijoone. Kuna võrratus vastab üldkujule $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)>0$, $a>0$, siis alustame abijoone tõmbamist ülevalt paremalt. Kuna nullkoht 0 on paaritut järku (3-kordne), siis läbib abijoon sel kohal x-telge lõigates. Kuna nullkoht -1 on paarisjärku, siis abijoon sel kohal puudutab x-telge.



Jooniselt näeme, et $X^{+}=(0;\infty)$ ja $X^{-}=\{(-\infty;-1);(-1;0)\}$.

5. Monotoonsuse piirkonnad, ekstreemumid

Selles punktis läheb meil tarvis funktsiooni tuletist. Tuletise leidmisel kasutame jagatise reeglit:

$$f'(x)=\frac{(x^3)'\cdot 2(x+1)^2-x^3\cdot\left(2(x+1)^2\right)'}{\left(2(x+1)^2\right)^2}=\frac{3x^2\cdot 2(x+1)^2-x^3\cdot 2\cdot 2\cdot(x+1)\cdot(x+1)'}{4(x+1)^4}$$

$$=\frac{2x^2(x+1)[3(x+1)-2x]}{4(x+1)^4}=\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$$

Leiame funktsiooni $f(x)$ kriitilised punktid (punktid, kus funktsiooni $f(x)$ tuletis on null või puudub) :

1) $f'(x)$ nullkohad

$$\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x^2(x+3)=0 \\ 2(x+1)^3\neq 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad x_1=x_2=0 \quad x_3=-3$$

2) $f'(x)$ puudub (on määramata)

$$2(x+1)^3=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=x_2=x_3=-1$$

Seega kriitilised punktid on $x_1=-3;\quad x_2=-1;\quad x_3=0$.

Kanname kriitilised punktid joonisele ja määrame igal osal tuletise märgi. On teada, et kui $f'(x)>0$, siis funktsioon kasvab ja kui $f'(x)<0$, siis funktsioon kahaneb.

f' märk	$y'(-4)>0$		$y'(-2)<0$		$y'(-0,5)>0$		$y'(1)>0$	
f käik	kasvab	-3	kahaneb	-1	kasvab	0	kasvab	x

Paneme tähele, et kui kohal, kus funktsiooni tuletis puudub või on võrdne nulliga, ei toimu kasvamise üleminekut kahanemiseks või vastupidi, siis funktsioon kas kasvab või kahaneb ka sellel kohal. Seega antud juhul tuleb kirjutada, et funktsioon kasvab $(-\infty;-3);(-1;\infty)$.

Kokkuvõttes $X\uparrow=\{(-\infty;-3);(-1;\infty)\}$ ja $X\downarrow=(-3;-1)$.

Leiame lokaalsed ekstreemumid. Kuna -1 ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda, siis sellel kohal ekstreemum realiseeruda ei saa. Kuna $f'(x)>0$ (s.t. f kasvab) punkti -3 vasakpoolses ümbruses ja $f'(x) < 0$ (s.t. f kahaneb) punkti -3 parempoolses ümbruses, siis funktsioonil f on kohal 0 range lokaalne maksimum $f(-3) = -\dfrac{27}{8}$.

Kuna $f'(x)$ on punkti 0 vasakpoolses ja parempoolses ümbruses sama märgiga, siis kohal 0 lokaalset ekstreemumit ei ole.

Kokkuvõttes oleme seega saanud, et antud funktsioonil on lokaalne maksimum graafiku punktis $E_{\max} = (-3; -\dfrac{27}{8})$.

6. Käänupunktid, kumerus- ja nõgususpiirkonnad

Selles punktis on meil tarvis funktsiooni teist tuletist. Tuletise leidmisel on mõistlik kasutada logaritmilise diferentseerimise võtet. Tähistame esimese tuletise tähega *g*, siis

$$g = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3} = x^2 \cdot (x+3) \cdot 2^{-1} \cdot (x+1)^{-3}$$

$$\ln|g| = \ln\left|x^2 \cdot (x+3) \cdot 2^{-1} \cdot (x+1)^{-3}\right|$$

$$\ln|g| = \ln x^2 + \ln|x+3| + \ln 2^{-1} + \ln\left|(x+1)^{-3}\right|$$

$$\ln|g| = 2\ln|x| + \ln|x+3| - \ln 2 - 3 \cdot \ln|x+1|$$

$$\frac{1}{g}g' = 2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}(x+3)' - 0 - 3 \cdot \frac{1}{x+1}(x+1)'$$

$$g' = \left[\frac{2}{x} + \frac{1}{x+3} - \frac{3}{x+1}\right] \cdot \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3} = \frac{3x}{(x+1)^4}$$

Seega $f''(x) = \dfrac{3x}{(x+1)^4}$.

Leiame funktsiooni $f'(x)$ kriitilised punktid (punktid, kus $f''(x)$ on null või puudub) :

1) $f''(x)$ nullkohad

$$\frac{3x}{(x+1)^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x = 0 \\ (x+1)^4 \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

2) $f''(x)$ puudub (on määramata)

$$(x+1)^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1$$

Seega kriitilised punktid on $x_1 = -1; \quad x_2 = 0$.

Kanname kriitilised punktid joonisele ja määrame igal osal teise tuletise märgi. On teada, et kui $f''(x) > 0$, siis funktsiooni graafik on nõgus ja kui $f''(x) < 0$, siis funktsiooni graafik on kumer.

f'' märk	$y''(-2) < 0$		$y''(-0{,}5) < 0$		$y''(1) > 0$	
f käik	kumer	-1	kumer	0	nõgus	x

Leiame käänupunkti. Kuna -1 ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda, siis sellel kohal käänupunkt ei saa realiseeruda. Kuna punkti 0 ümbruses f'' vahetab märki, siis on tegu käänukohaga (käänukoht on argumendi väärtus, mis eraldab joone kumerat osa nõgusast).

Kokkuvõttes kumerus- ja nõgususvahemikud on $\widehat{X} = \{(-\infty;-1);(-1;0)\}$ $\breve{X} = (0;\infty)$. Punkt $K = (0; f(0)) = (0;0)$ on funktsiooni graafiku käänupunkt.

7. Asümptoodid

Asümptoot on sirge, millele funktsiooni graafiku mõni haru lõpmatult läheneb. Asümptoodid jagunevad püstasümptootideks ja kaldasümptootideks.

1) Püstasümptoodid

Püstasümptoot on asümptoot, mis on risti *x*-teljega. Joonel võivad püstasümptoodid olla vaid määramispiirkonna katkevuspunktides (ja otspunktides, kui otspunktid on lõplikud arvud). Tuginedes määramispiirkonnale otsime püstasümptooti kohal -1. Püstasümptoodi leidmiseks leiame ühepoolsed piirväärtused. Kui tulemuseks on $+\infty$ või $-\infty$, siis püstasümptoot leidub, vastasel juhul mitte.

$$\lim_{x\to -1+} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$$

Kuna tulemus tuli lõpmatu, siis öeldakse, et sirge $x = -1$ on funktsiooni f graafiku püstasümptoot punkti -1 parempoolses ümbruses.

$$\lim_{x\to -1-} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$$

Kuna tulemus tuli lõpmatu, siis öeldakse, et sirge $x = -1$ on funktsiooni f graafiku püstasümptoot punkti -1 vasakpoolses ümbruses.

Kokkuvõtvalt võib öelda, et joonel $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ on kohal -1 kahepoolne püstasümptoot võrrandiga $x = -1$.

2) Kaldasümptoodid

Kaldasümptootide olemasolu või puudumist pole võimalik arvutusi teostamata hinnata. Kaldasümptoodi leidmisel lähtutakse sirge võrrandist kujul $y = mx + b$, millesse püütakse leida arvud m ja b. Eristatakse parempoolset ja vasakpoolset kaldasümptooti.

Parempoolne kaldasümptoot

Vaadeldakse piirprotsessi, kus $x \to +\infty$, m ja b leidmiseks kasutatakse valemeid $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ja $b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$.

Arvutame m:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2 \cdot x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2+4x+2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\left(\frac{2x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(2 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}$$

Arvutame b:

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x(x+1)^2}{2(x+1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{2x^2+4x+2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2 - x}{2x^2+4x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(-\frac{2x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{2x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

Seega sirge $y=\frac{1}{2}x-1$ on funktsiooni *f* graafiku parempoolne kaldasümptoot.

Märkus. Kui *m* või *b* arvutamisel tuleb tulemuseks lõpmatus, siis see tähendab, et kaldasümptooti ei leidu.

Vaskpoolne kaldasümptoot

Piirprotsessi $x\to+\infty$ asemel vaadatakse nüüd protsessi, kus $x\to-\infty$, muus osas jäävad *m* ja *b* arvutusvalemid samaks:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ ja } b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx].$$

On lihtne veenduda, et kui asendada piirprotsess $x\to+\infty$ piirprotsessiga $x\to-\infty$, siis arvutustulemused ei muutu. Seega sama sirge $y=\frac{1}{2}x-1$ on ka vaskpoolne kaldasümptoot.

Kokkuvõtvalt võib öelda, et joonel $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$ on kahepoolne kaldasümptoot võrrandiga $y=\frac{1}{2}x-1$.

Funktsiooni $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$ graafik koos asümptootidega on kujutatud järgneval joonisel.