Lineaarne kujutus

Kujutus, kujutis ja originaal

Olgu V ja W vektorruumid mõõtmetega n ja m.

Definitsioon

Kujutuseks ehk *operaatoriks* f ruumist V ruumi W nimetatakse reeglit, mis vektorruumi V igale elemendile seab vastavusse vektorruumi W mingi elemendi.

Kujutust tähistatakse:

$$f : V \longrightarrow W \qquad \text{või} \qquad V \xrightarrow{\quad f \quad} W$$

Elementi $y \in W$, mille kujutus f seab vastavusse elemendile $x \in V$, nimetatakse elemendi x *kujutiseks*; elementi x nimetatakse sealjuures elemendi y *originaaliks*.

Kujutise tähised:

$$y = f(x) \qquad \text{või} \qquad y = f\,x$$

Lineaarse kujutuse definitsioon

Definitsioon

Kujutust $L : V \longrightarrow W$ nimetatakse *lineaarseks*, kui ta on

1) *aditiivne*: $L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2)$ iga $x_1, x_2 \in V$ korral;

2) *homogeenne*: $L(cx) = c(L(x))$ iga $x \in V$ ja $c \in \mathbf{R}$ korral.

Märkus 1

Juhul kui vektorruumiks W on reaal- või kompleksarvude hulk, nimetatakse lineaarset kujutust *lineaarseks funktsionaaliks*.

Märkus 2

Lineaarset kujutust $L : V \longrightarrow V$ (vektorruumist V iseendasse) nimetatakse vektorruumi V *lineaarteisenduseks*.

Näide lineaarsest kujutusest

Olgu $V = \mathbf{R}^{n \times 1}$ ja $W = \mathbf{R}^{m \times 1}$ (veeruvektorite vektorruumid).

Fikseerime ($m \times n$)-maatriksi $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ja defineerime kujutuse

$L : V \longrightarrow W$ reegliga

$$L(x) = Ax, \quad x \in \mathbf{R}^{n \times 1}$$

See kujutus on lineaarne, kuna

1) $L(x_1 + x_2) = A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = L(x_1) + L(x_2)$

2) $L(cx) = A(cx) = c(Ax) = c(L(x))$

Lineaarsete kujutuste vektorruum

Olgu f ja g lineaarsed kujutused vektorruumist V vektorruumi W.

Definitsioon

Lineaarsete kujutuste f ja g *summa* $f + g$ seab igale elemendile x vektorruumist V vastavusse vektorruumi W elemendi

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Lineaarse kujutuse f *korrutiseks skalaariga* c nimetatakse lineaarset kujutust cf, mis seab igale elemendile x vektorruumist V vastavusse vektorruumi W elemendi

$$(cf)(x) = c(f(x)).$$

Nullkujutuseks **O** nimetame kujutust, mis igale ruumi V elemendile seab vastavusse W nullelemendi θ: $\mathbf{O}x = \theta$ iga $x \in V$ korral.

Lineaarsete kujutuste vektorruum

Definitsioon

Iga kujutuse f korral nimetame tema *vastandkujutuseks* $-f$ kujutust, mis seab igale vektorruumi V elemendile x vastavusse vektorruumi W elemendi

$$(-f)(x) = -(f(x)).$$

Teoreem

Kõikide lineaarsete kujutuste hulk $L(V, W)$ vektorruumist V vektorrummi W eespool defineeritud nullelemendi ja vastandelemendiga on samuti vektorruum.

Lineaarse kujutuse koordinaatkuju

Olgu $L : V \longrightarrow W$ lineaarne kujutus vektorruumist V (dim $V = n$) vektorruumi W (dim $W = m$).

Ruumis V olgu antud baas baasivektoritega $e_1, \ldots, e_n$ ja ruumis W baas baasivektoritega $\ell_1, \ldots, \ell_m$.

Iga vektor $\xi \in V$ ja $\eta \in W$ on esitatavad oma koordinaatidega baaside suhtes:

$$\xi = (x_1; \ldots; x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

$$\eta = (y_1; \ldots; y_m) = \sum_{j=1}^{m} y_j \ell_j.$$

Lineaarne kujutus L on täielikult määratud, kui on teada baasivektorite $e_1, \ldots, e_n$ kujutised.

Lineaarse kujutuse koordinaatkuju

Olgu $L(e_j) = (a_{1j}; a_{2j}; \ldots; a_{mj}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ell_i, \quad j = 1, \ldots, n.$

Moodustame maatriksi vektorite $L(e_1), \ldots, L(e_n)$ koordinaatidest:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Saadud maatriksit A nimetatakse *lineaarse kujutuse L maatriksiks* (baasidel e ja ℓ).

Lineaarse kujutuse maatriks sõltub baaside valikust ruumides V ja W.

Lineaarse kujutuse koordinaatkuju

Teades lineaarse kujutuse L maatriksit A, saame vektori ξ kujutise η leida maatrikskorrutise abil:

$$\boxed{\eta = L(\xi) = A\xi}$$

Ortogonaalteisendus

Definitsioon

Lineaarteisendust $L : V \longrightarrow V$ nimetatakse *ortogonaalteisenduseks*, kui ta säilitab skalaarkorrutise:

$$(x, y) = (Lx, Ly)$$

iga $x, y \in V$ korral.

Ortogonaalteisendus säilitab vektorite pikkused ja vektoritevahelised nurgad.

Teoreem

Lineaarteisendus L on ortogonaalteisendus parajasti siis, kui tema maatriks A rahuldab võrdust

$$A^T A = E.$$

Viimane tingimus on samaväärne tingimusega

$$A^{-1} = A^T$$

Ortogonaalmaatriks

Definitsioon

Ruutmaatriksit A nimetatakse *ortogonaalmaatriksiks*, kui $A^{-1} = A^T$

Teoreem

Ruutmaatriks A on ortogonaalmaatriks parajasti siis, kui tema rea(veeru)vektorid on omavahel risti ning nende pikkused võrduvad ühega.

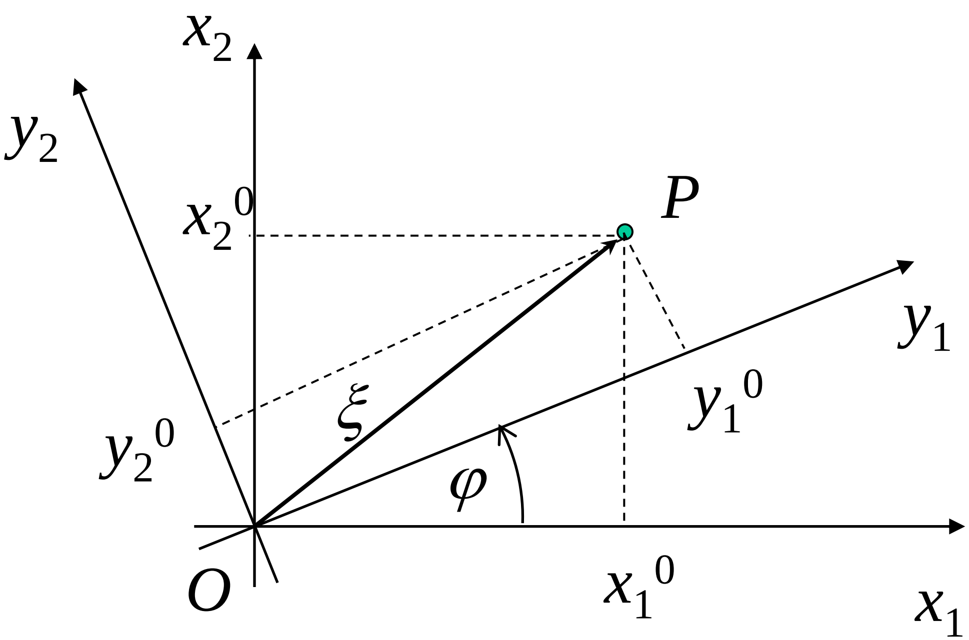
Teoreem

Teist järku ortogonaalmaatriksiteks on maatriksid

$$\begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}$$

Ortogonaalteisenduse geomeetriline tõlgendus

Geomeetriliselt tähendab ortogoaalteisendus kahemõõtmelises ruumis koordinaatteljestiku pööramist nurga φ võrra .



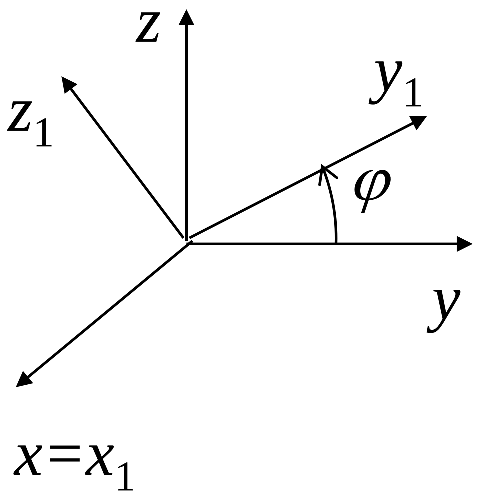
Punkti P koordinaadid pööratud teljestikus:

$$\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

Ortogonaalteisenduse geomeetriline tõlgendus

Kolmemõõtmelises ruumis on pööre ümber x-telje väljendatav ortogonaalteisenduse maatriksiga

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$



Punkti P koordinaadid pööratud teljestikus:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Üleminek uuele baasile

Olgu V n-mõõtmeline vektorruum baasidega

$$B_e = \{e_1, \ldots, e_n\} \qquad \text{ja} \qquad B_\ell = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$$

ehk maatrikskujul

$$e = \begin{Vmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{Vmatrix} \qquad \ell = \begin{Vmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{Vmatrix}$$

Siis $\quad \ell_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i, \quad j = 1, \ldots, n.$

Maatrikskujul: $\ell = C^T e,$ kus $\quad C = \begin{Vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \ldots & c_{nn} \end{Vmatrix}$

Maatriksit C nimetatakse *üleminekumaatriksiks* baasilt e baasile ℓ.

Üleminek uuele baasile

Teoreem

Kui lineaarse teisenduse $L : V \longrightarrow V$ maatriksid baasidel e ja ℓ on vastavalt A ja B, siis

$$B = C^{-1}AC,$$

kus C on üleminekumaatriks baasilt e baasile ℓ.