Pöördmaatriks

Pöördmaatriksi definitsioon

Definitsioon

Ruutmaatriksi **A** pöördmaatriksiks nimetatakse sellist ruutmaatriksit **B**, mille korral

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}.$$

Teoreem

Maatriksil **A** leidub ülimalt üks pöördmaatriks.

Igal ruutmaatriksil ei ole pöördmaatriksit.

Maatriksi **A** pöördmaatriksit tähistatakse $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Pöördmaatriksi leidmine

Teoreem

Ruutmaatriksil $\mathbf{A} = \|a_{ij}\| \in \mathbf{R}^{n\times n}$ leidub pöördmaatriks parajasti siis, kui tema determinant ei võrdu nulliga (st kui maatriksi astak $rank(\mathbf{A}) = n$).
Sel korral on pöördmaatriks

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

kus A_{ij} on maatriksi $\mathbf{A}$ determinandi elemendi a_{ij} alamdeterminant (elemendile a_{ij} vastav miinor, korrutatud suurusega $(-1)^{i+j}$).

Pöördmaatriksi leidmine. Näide

Leiame maatriksi $A = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ pöördmaatriksi.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 11. \qquad \mathbf{A}^T = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Sõnastatud teoreemist lähtuvalt saame leida pöördmaatriksi:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{11} \cdot \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = \frac{1}{11} \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \end{Vmatrix}$$

Pöördmaatriksi leidmine. Kontroll

Tulemuse kontrolliks uurime, kas **AA**$^{-1}$ = **E**.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\begin{Vmatrix}3 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{Vmatrix}\cdot\frac{1}{11}\begin{Vmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & 5 & -2\\ -2 & 4 & 5\end{Vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{11}\begin{Vmatrix}3 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & 5 & -2\\ -2 & 4 & 5\end{Vmatrix}=$$

$$\frac{1}{11}\begin{Vmatrix}3\cdot1+2\cdot3+(-1)\cdot(-2) & 3\cdot(-2)+2\cdot5+(-1)\cdot4 & 3\cdot3+2\cdot(-2)+(-1)\cdot5\\ (-1)\cdot1+1\cdot3+1\cdot(-2) & (-1)\cdot(-2)+1\cdot5+1\cdot4 & (-1)\cdot3+1\cdot(-2)+1\cdot5\\ 2\cdot1+0\cdot3+1\cdot(-2) & 2\cdot(-2)+0\cdot5+1\cdot4 & 2\cdot3+0\cdot(-2)+1\cdot5\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}=\mathbf{E}.$$

Osutus, et pöördmaatriks on leitud õigesti.

Singulaarne ja regulaarne ruutmaatriks

Definitsioon

Ruutmaatriksit nimetatakse *regulaarseks*, kui tema determinant ei ole null. Vastasel juhul nimetatakse ruutmaatriksit *singulaarseks*.

Näide

Maatriks $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$ on singulaarne,

maatriks $B = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$ on aga regulaarne.

Pöördmaatriks leidub vaid regulaarsetel ruutmaatriksitel.

Pöördmaatriksi leidmise teine algoritm

Ruutmaatriksi pöördmaatriksi leidmiseks tuleb tema kõrvale (alla) kirjutada vastavat järku ühikmaatriks. Teisendades saadud liitmaatriksit ridade (veergude) elementaarteisenduste abil nii, et esialgse maatriksile vastavate veergude (ridade) asemele tekib ühikmaatriks, teisenevad juurdekirjutatud ühikmaatriksi veerud(read) pöördmaatriksiks.

Skemaatiliselt:

$$\left\| A, \quad E \right\| \rightarrow \ldots\ldots \rightarrow \left\| E, \quad A^{-1} \right\|$$

Näide

Näide

$$A = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{array} \right\|$$

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right\| \xrightarrow[+\mathrm{I}]{} \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right\| \xrightarrow[:3]{} \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array} \right\| \xrightarrow{-2\mathrm{II}}$$

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array} \right\|$$

Pöördmaatriks on

$$\mathbf{A}^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{array} \right\|$$

Näide, kontroll

Kontrolliks korrutame maatriksi **A** tema pöördmaatriksiga $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1\cdot(1/3)+2\cdot(1/3) & 1\cdot(-2/3)+2\cdot(1/3) \\ -1\cdot/1/3)+1\cdot(1/3) & -1\cdot(-2/3)+1\cdot(1/3) \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \mathbf{E}_2$$