EST BENI MELLAL | UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE
DUT-MLT1 | Session d'automne 2023

Série d'exercices de variables aléatoires et lois de probabilités
– Pr.Abdelaziz QAFFOU –

Exercice 1 Une variable aléatoire X est établie par la loi de probabilité suivante :

k	-2	-1	0	1	2	3
$P(X=k)$	0,3	0,05	0,1	0,05	0,2	p

Soit F sa fonction de répartition.
a) Calculer p.
b) Calculer $F(0,5)$.
c) Calculer $E(X)$.
d) Calculer $\sigma(X)$.

Exercice 2 On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres 5 et 0,4.
1. Calculer $\mathbb{P}(X=1)$; $\mathbb{P}(X=4)$
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1)$; $\mathbb{P}(X \geq 2)$

Exercice 3 On tire 5 cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. On appelle cela une main.
Si la main contient 4 rois on gagne 100dhs, si la main contient 3 rois, on gagne 50dhs, si la main contient 2 rois, on ne gagne rien et on ne perd rien, si la main contient 1 rois, on perd 10dhs et si la main ne contient aucun roi, on perd 50dhs. Soit X la variable aléatoire correspondant au gain.
a) Etablir la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 4 On suppose que le temps d'attente (en minutes) d'un métro suit une loi géométrique. Durant les heures de pointes du matin, le temps d'attente moyen d'un métro pour la ligne 8 est de 3 minutes tandis qu'il est de 2 min pour la ligne 9.
(a) Quels sont les paramètres des lois géométriques pour les lignes $n8$ et $n9$?
(b) Quelle est la probabilité d'attendre entre 2 et 4 minutes un métro de la ligne 8 ? de la ligne 9 ?
(c) Même question pour un temps d'attente de plus de 5 minutes.

Exercice 5 Le nombre X de désintégrations d'une substance radioactive durant un intervalle de temps de $7,5$ secondes suit une loi de Poison de paramètre $3,87$.
(a) Quel est le nombre moyen de désintégrations durant un intervalle de temps de $7,5$ secondes ? Calculer l'écart-type correspondant.
(b) Déterminer la probabilité qu'il n'y ait aucune désintégration durant un intervalle de temps de $7,5$ secondes.
(c) Quelle est la probabilité qu'il y ait entre 3 et 5 désintégrations durant un intervalle de temps de $7,5$ secondes ?

Exercice 6 On modélise la durée de vie des galaxies par des lois exponentielles. On estime qu'une galaxie a probabilité de disparaître d'ici à un million d'année égale à $0,000002\%$.
(a) Déterminer la valeur du paramètre λ de la loi exponentielle X mesurant la durée de vie de la galaxie.
(b) Quelle est l'espérance de vie de la galaxie ?
(c) Quelle est la probabilité que la galaxie ait disparu d'ici à 3 millions d'années ?
(d) Quelle est la probabilité que la galaxie soit toujours là dans 10 millions d'année ?

Exercice 7 On modélise le temps entre deux clics d'un compteur Geiger par une loi exponentielle. Le nombre moyens de clics par minutes égal à 50.
(a) Calculer le paramètre λ de la loi exponentielle.
(b) Quelle est la probabilité qu'on attende plus d'une seconde entre deux clics ?
(c) On approche un minéral légèrement radioactif du compteur et le nombre de clics passe à 100 par seconde. Quelle est la probabilité d'attendre moins d'un centième de seconde entre deux clics ?

Exercice 8 Soit X la variable aléatoire dont la fonction densité est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 4e^{-4x}$.
a) Calculer $F(5)$.
b) Calculer $\mathbb{P}(1 < X < 3) = \mathbb{P}(1 \leq X \leq 3)$.

Exercice 9 Une usine fabrique des billes de diamètre 8mm. Les erreurs d'usinage provoquent des variations de diamètre. On estime, sur les données antérieures, que l'erreur est une variable aléatoire qui obeit à une loi normale les paramètres étant : moyenne : 8mm, écart-type : 0,02mm. On rejette les pièces dont le diamètre n'est pas compris entre 7,97mm et 8,03mm. Quelle est la proportion de billes rejetées ?

Exercice 10 Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées.
1. Soit X la variable aléatoire "épaisseur de la plaque en mm", on suppose que X suit une loi normale de paramètres $m = 0,3$ et $\sigma = 0,1$. Calculez la probabilité pour que X soit inférieur à 0,36mm et la probabilité pour que X soit compris entre 0,25mm et 0,35mm.
2. L'utilisation de ces plaques consiste à en empiler n, numérotées de 1 à n en les prenant au hasard : soit X_i la variable aléatoire "épaisseur de la plaque numéro i en mm" et Z la variable aléatoire "épaisseur des n plaques en mm". Pour $n = 20$, quelle est la loi de Z, son espérance et sa variance ?