Variables aléatoires et lois de probabilités

Présenté par :
Pr.Abdelaziz Qaffou

EST-Beni Mellal – Université Sultan Moulay Slimane

DUT: MLT-2023-2024

Plan du cours

Outline

La démarche

Extraction d'un sous-ensemble de la population, appelé échantillon, puis déterminer les caractéristiques de l'échantillon, aprés on généralise les conclusions à la population.

Distinction entre probabilité et statistique

1. La Théorie des probabilités :
    - permet de modéliser des phénomènes aléatoires et d'y effectuer des calculs théoriques,
    - concerne les populations : on ne peut donc pas faire de mesures.
2. La Statistique :
    - concerne les échantillons, le monde réel, la pratique,
    - on fait des mesures (observations) sur des individus,
    - repose sur la modélisation probabiliste des observations.

Un exemple concret

- Un fabricant d'ampoules souhaite vérifier la qualité des ampoules électriques produites dans sa chaine de montage.
- Pour cela, il propose donc d'évaluer la durée moyenne de bon fonctionnement d'une ampoule.
- Comment faire ? on ne peut pas tester toutes les ampoules produites par la chaine de montage !
- On tire un échantillon au hasard.
- On réalise l'expérience, on effectue des mesures, on calcule la durée moyenne de bon fonctionnement des ampoules de l'échantillon.
- On approxime la durée moyenne de bon fonctionnement des ampoules de la population entière par la durée moyenne de bon fonctionnement des ampoules de l'échantillon.

Un exemple concret (suite)

- Comment savoir si ce qu'on vient de faire est correct ? Quelle est la qualité de l'approximation ? Il faut étudier la théorie des probabilités et la statistique !
- Si on tire un autre échantillon, il y a de fortes chances que l'on n'obtienne pas les mêmes résultats.
- Ces fluctuations (ou erreurs d'échantillonnage) sont dues à la variabilité. Cela signifie que des objets semblables en apparence peuvent présenter des différences lorsqu'on effectue des mesures.

Définition d'une variable aléatoire

- Une variable aléatoire X est le procédé qui relie l'expérience aléatoire à un nombre. On note D_X l'ensemble des valeurs que X peut prendre après réalisation de l'expérience : D_X s'appelle le domaine de définition de X.
- A chaque fois que l'on reproduit l'expérience, on obtient une réalisation de X que l'on note x : x est un nombre alors que X est une fonction.
- Soit l'expérience "tirer une pièce parmi une production" et soit X la variable aléatoire représentant la longueur de la pièce tirée. L'ingénieur d'usine effectue une 1ère fois cette expérience, il obtient la réalisation $x_1 = 10.2cm$. Il recommence une 2ème fois l'expérience et obtient la réalisation $x_2 = 9.9cm$, etc...

Les différents types de variables

On distingue :

- les variables aléatoires discrètes : elles prennent un nombre fini de valeurs, par ex : nombre de pièces défectueuses dans la production journalière d'une usine, nombre de clients arrivant à un guichet en une journée, variable aléatoire binaire codant pour "succès" ou "échec"...
- les variables aléatoires continues : toute valeur d'un intervalle de $\mathbb{R}$ est acceptable, ex : taille, poids, volume, temps écoulé...

Exemples de variables aléatoires et d'évènements associés

On distingue :

- A l'usine, on dispose d'un lot de 30 pièces prélevées dans la production sur lesquelles on effectue un contrôle de qualité à l'issue duquel on déclare les pièces conformes ou non-conformes. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de pièces non-conformes.
    - L'ensemble des valeurs possibles pour X est $D_X = \{0, 1, ..., 30\}$.
    - L'évènement "2 pièces sont non-conformes" se note $\{X = 2\}$.
    - $\{X = 50\} = \emptyset$.
    - $\{8.5 \leq X \leq 10.5\}$ code pour l'évènement "9 ou 10 pièces sont non-conformes".
- On s'intéresse au poids des pièces qui peut varier de 10g à 15g. Soit X la variable aléatoire représentant le poids (en g) d'une pièce.
    - L'ensemble des valeurs acceptables pour X est $D_X = [10, 15]$.
    - $\{X = 12\} =$ le poids d'une pièce est de 12g.
    - $\{X = 50\} = \emptyset$.
    - $\{8.5 \leq X \leq 10.5\} = \{10 \leq X \leq 10.5\}$: le poids est compris entre 10g et 10.5g.

Outline

Définition

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ associé à une expérience aléatoire. On appelle variable aléatoire discrète, une application X, de Ω dans $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, ensemble fini ou dénombrable :

$$\begin{array}{cccc} X & : & \Omega & \rightarrow & X(\Omega) \\ & & \omega & \mapsto & X(\omega). \end{array}$$

$X(\omega)$ est appelé ensemble des observables.

Définition

La loi de probabilité (ou distribution) de la v.a. discrète X est la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P} & : & X(\Omega) & \rightarrow & [0;1] \\ & & x_i & \mapsto & \mathbb{P}(X = x_i). \end{array}$$

On note généralement $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$.

Définition

On appelle fonction de répartition de X, la fonction :

$$\begin{array}{cccc} F & : & \mathbb{R} & \to & [0;1] \\ & & x & \mapsto & F(x) = \mathbb{P}(X \leq x). \end{array}$$

Propriétés

- pour tout x réel, on a $0 \leq F(x) \leq 1$.
- La fonction de répartition d'une v.a. est croissante et est continue à droite.
- X est une variable aléatoire discrète si et seulement si sa fonction de répartition est une fonction en escalier.

Définition

L'espérance d'une v.a. discrète X est le nombre réel, s'il existe, défini par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_k k\mathbb{P}(X = k)$$

Propriétés

- Soit f une fonction de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_i f(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)$$

- Propriété de linéarité : soient $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}(X) + b$

Définition

La variance d'une v.a. X est, si elle existe, l'espérance de la variable aléatoire $(X-\mathbb{E}(X))^2$. On la note $\mathbb{V}(X)$:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Propriétés

- $\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si X est une v.a. constante.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{V}[aX+b] = a^2\mathbb{V}(X)$.

Outline

Loi uniforme

C'est Loi de probabilité uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \text{ si } k \in \{1, \ldots, n\}$$

On la note $X \sim \mathscr{U}(n)$

Caractéristiques de la loi uniforme

- La somme des probabilités égale à 1 :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

- L'espérance mathématique : $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$.
- La variance : $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Exemple d'une v.a uniforme

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard, et on note X la variable aléatoire égale au chiffre obtenu. Alors X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, ..., n\}$.

Loi de Bernoulli

- Soit une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p
- On définit la variable aléatoire X pouvant prendre les deux valeurs 0 et 1 avec les probabilités p et $1-p$
- On dit que X suit une loi de Bernouilli
- loi de probabilité : $\mathbb{P}(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$ avec $k\in\{0,1\}$

Cette loi de probabilité s'appelle la loi de Bernoulli de paramètres p et l'on note $X\sim\mathscr{B}(p)$.

Caractéristiques de la loi de Bernoulli

- La somme des probabilités égale à 1 : $\sum\limits_{k=0}^{1}\mathbb{P}(X=k)=1$
- L'espérance mathématique : $\mathbb{E}(X)=p$.
- La variance : $\mathbb{V}(X)=pq$

Exemple d'une v.a de Bernoulli

Dans une urne contenant N boules de deux sortes :

- des boules blanches en proportion p,
- et des boules noires en proportion q.

On tire au hasard une boule dans l'urne. Soit X la variable valant 1 si la boule tirée est blanche et 0 si elle est noire.
Alors X est une v.a qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Loi binomiale

- On réalise n épreuves de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès est p.
- La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès sur l'ensemble des n épreuves est dite variable aléatoire binomiale de paramètres (n, p).
- Toute séquence comportant k succès et $n-k$ échecs a pour probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$.
- il y a C_n^k séquences vérifiant cette propriété
- loi de probabilité : $\mathbb{P}(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ avec $k = \{0, 1, ..., n\}$

Cette loi de probabilité s'appelle la loi binomiale de paramètres (n, p) et l'on note $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

Caractéristiques de la loi binomiale

- La somme des probabilités égale à 1 : $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1$
- L'espérance mathématique : $\mathbb{E}(X) = np$.
- La variance : $\mathbb{V}(X) = npq$

Exemple d'une v.a binomiale

Dans une urne contenant N boules de deux sortes :

- des boules blanches en proportion p,
- et des boules noires en proportion q.

On effectue n tirage successifs **avec remise**.
Soit X le nombre de boules blanches apparues après les n tirages.
Alors X est une v.a qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Loi hypergéométrique

La loi hypergéométrique de paramètres associés n, p et N est une loi de probabilité discrète, décrivant le modèle suivant :
On tire simultanément (ou successivement **sans remise** (mais cela induit un ordre))n boules dans une urne contenant $N_1 = pN$ boules gagnantes et $N_2 = qN$ boules perdantes (avec $q = 1 - p$, soit un nombre total de boules valant $pN + qN = N$). On compte alors le nombre de boules gagnantes extraites et on appelle X la variable aléatoire donnant ce nombre.
L'univers $X(\Omega)$ est l'ensemble des entiers de 0 à n. La variable X suit alors la loi de probabilité définie par

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{C_{pN}^{k} C_{qN}^{n-k}}{C_N^n}$$:probabilités d'avoir k succés (ou bien k boules gagnantes

Cette loi de probabilité s'appelle la loi hypergéométrique de paramètres (n, p, N) et l'on note $X \sim \mathscr{H}(n, p, N)$.

Caractéristiques de la loi hypergéométrique

- La somme des probabilités égale à 1 :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1$$

- L'espérance mathématique : $\mathbb{E}(X) = np$.
- La variance : $\mathbb{V}(X) = npq(\frac{N-n}{N-1})$

Exemple d'une v.a hypergéométrique

Dans une urne contenant N boules de deux sortes :

- des boules blanches en proportion p,
- et des boules noires en proportion q.

On effectue n tirage **sans remise**.
Soit X le nombre de boules blanches apparues après les n tirages. Alors X est une v.a qui suit une loi hypergéométrique de paramètres (n,p,N).

Exemple

Un lac renferme une centaine de poissons dont un quart sont des brochets. On pêche 10 poissons, la loi du nombre X de brochets dans la prise est $\mathscr{H}(10, \frac{1}{4}, 100)$.

Loi géométrique

- Soit une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p
- On renouvelle cette épreuve de manière indépendante jusqu'au premier succès.
- On appelle X la variable aléatoire modélisant la probabilité que le premier succès apparaisse au bout de k itérations.
- On dit que X suit une loi géométrique de paramètre p.
- loi de probabilité : $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ avec $k \geq 1$.

Caractéristiques de la loi géométrique

- La somme des probabilités égale à 1 :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1$$

- L'espérance mathématique : $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$.
- La variance : $\mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}$

Exemple d'une v.a géométrique

Dans une urne contenant N boules de deux sortes :

- des boules blanches en proportion p,
- et des boules noires en proportion q.

On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à obtenir une boule blanche.
On note X le nombre de tirages effectués, c'est à dire, le nombre de tirages nécessaire pour tirer une boule blanche.

Loi de Pascal

C'est une généralisation de la loi géométrique consistant à effectuer des tirages successifs (avec remise) jusqu'à obtenir r boules blanches.
Le nombre de tirage X est une v.a qui suit une loi de Pascal de paramètres r et p. On note $X \sim \mathscr{P}(r,p)$
Cette loi de probabilité est définie par : $\mathbb{P}(X=k) = C_{r-1}^{k-1} p^r (1-p)^{k-r}$ avec $k \geq r$.

Caractéristiques de la loi de Pascal

- La somme des probabilités égale à 1 :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1$$

- L'espérance mathématique : $\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p}$.
- La variance : $\mathbb{V}(X) = \frac{rq}{p^2}$

Exemple d'une v.a de Pascal

Temps d'attente du r-ème succès.
On lance une pièce de monnaie (truquée) dont la probabilité d'obtenir pile est p. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le r-ème pile. Alors X suit une loi de Pascal de paramètres r et p.

Loi binomiale négative (ou loi de Polya)

Si dans le modèle précédent, on note Y le nombre d'echecs (boules noires tirées), on a $Y = X - r$. La loi suivie par Y est la loi binomiale négative, notée $\mathbb{BN}(r, p)$.
Cette loi de probabilité est définie par : $\mathbb{P}(X = k) = C_{k+r-1}^{k} p^r (1-p)^k$

Caractéristiques de la loi binomiale négative

- La somme des probabilités égale à 1 :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k)=1$$

- L'espérance mathématique : $\mathbb{E}(X)=\frac{r(1-p)}{p}$.
- La variance : $\mathbb{V}(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}$

Exemple d'une v.a binomiale négative

Nombre d'echecs précédant le r-ème succés.
On lance une pièce de monnaie (truquée) dont la probabilité d'obtenir pile est p. On note X le nombre d'échecs précédant le r-ème pile. Alors X suit une loi binomiale négative de paramètres r et p.

Loi de Poisson

- La loi de Poisson décrit le comportement du nombre d'événements se produisant dans un intervalle de temps fixé, si ces événements se produisent avec une fréquence moyenne connue et indépendamment du temps écoulé depuis l'événement précédent.
- Si le nombre moyen d'occurrences dans cet intervalle est λ, alors la probabilité qu'il existe exactement k occurrences est : $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ avec $k \in \mathbb{N}$.
- On note alors $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

Caractéristiques de la loi de Poisson

- La somme des probabilités égale à 1 :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1$$

- L'espérance mathématique : $\mathbb{E}(X) = \lambda$.
- La variance : $\mathbb{V}(X) = \lambda$

Exemples d'une v.a de Poisson

- Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'appels reçus par un standard téléphonique dans un intervalle de temps $[0, T]$: la loi de X est une loi de Poisson.
- Le nombre de voitures arrivant à un feu de circulation en 5 minutes.
- Le nombre de clients entrant dans un magasin en une journée.

Outline

Définition

Une variable aléatoire est une application de l'univers Ω dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{cccc} X & : & \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & X(\omega). \end{array}$$

Une variable aléatoire est généralement désignée par une lettre majuscule X, Y, etc. La variable aléatoire est dite continue si l'ensemble $X(\Omega)$ est un intervalle (ou une réunion d'intervalles) de $\mathbb{R}$.

Définition

On appelle fonction de répartition de X, la fonction :

$$\begin{array}{cccc} F & : & \mathbb{R} & \rightarrow & [0;1] \\ & & x & \mapsto & F(x)=\mathbb{P}(X\leq x)=\mathbb{P}(X<x). \end{array}$$

Propriétés

- F est continue
- F est croissante
- $\underset{x\rightarrow-\infty}{lim} F(x)=0$ et $\underset{x\rightarrow+\infty}{lim} F(x)=1$,
- pour tout $a,b\in\mathbb{R}$ et $a<b$ on a $F(b)-F(a)=\mathbb{P}[a<X<b]$.

Définition

Une variable aléatoire possède une **densité** si sa fonction de répartition F est dérivable. La dérivée notée f est appelée densité de probabilité de la variable aléatoire X.

Proposition

De ce fait,

$$\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(t)dt,$$

et la probabilité de trouver X dans un intervalle $[a, b]$ donné, apparaît comme l'aire d'une partie du graphique située entre la courbe de la densité f et l'axe des abscisses.

Quelques propriétés de la densité

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0.$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$
3. $\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$

Espérance

Soit X une variable aléatoire continue de dans $\mathbb{R}$ de densité f. On calcule l'espérance à l'aide de la formule suivante :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} tf(t)dt.$$

Variance

Soit X une variable aléatoire continue de dans $\mathbb{R}$ de densité f. On calcule la variance à l'aide de la formule suivante :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \int_{\mathbb{R}} (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t)dt$$

Outline

Cette loi modélise un phénomène uniforme sur un intervalle donné.

Définition

La v.a. X suit une loi uniforme sur l'intervalle borné $[a, b]$ si elle a une densité f constante sur cet intervalle et nulle en dehors. Elle est notée $\mathscr{U}([a, b])$. Sa densité est alors,

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a, b].$$

Cette loi est l'équivalent continue de la loi discréte equirépartie.

Son espérance est $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ et sa variance est $\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Définition

Soit α un réel positif. La v.a X suit une loi exponentielle de paramètre α, notée $\mathscr{E}(\alpha)$, si elle admet pour densité :

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} 1_{[0;+\infty[}(x).$$

Cette loi est l'équivalent continue de la loi discréte equirépartie.
Son espérance est $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\alpha}$ et sa variance est $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\alpha^2}$.
Les lois exponentielles sont souvent utilisées pour modéliser des temps d'attente ou des durées de vie.
Par exemple, les temps d'attente à partir de maintenant du prochain tremblement de terre, de la prochaine panne d'un appareil, de la prochaine désintégration dans un réacteur nucléaire suivent des lois exponentielles.
Le paramètre α désigne alors l'inverse du temps d'attente moyen.

Outline

La loi normale est apparu naturellement (d'où son nom) comme limite de certains processus.
C'est la loi la plus connue des probabilités, parfois sous le vocable loi de Laplace-Gauss et caractérisée par une célèbre "courbe en cloche".

Définition

La loi normale centrée réduite est une la loi continue, d'une v.a. X à valeurs dans $X(\Omega) = \mathbb{R}$ tout entier, définie à partir de la densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Il n'existe par contre pas d'expression simple de sa fonction de répartition autre que la formule intégrale

$$\forall a \in \mathbb{R},\ F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$$

On dit que X suit une $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, si la densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

L'usage d'un changement de variable $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$ permet de se ramener à un calcul d'intégrale à partir de la loi $\mathcal{N}(0;1)$, ce qui nous permettra de consulter les tables existant pour la loi standard précédente. On a le théorème suivant :

Théorème

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ et Z la variable aléatoire définie par

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

alors Z suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

Outline

Définition

Soient $X_1,...,X_n$ des v.a indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0;1)$.
Posons

$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2,$$

par définition la v.a. Z suit une loi du khi-deux à n degré(s) de liberté (abréviation d.d.l.). On la note $\chi^2(n)$.

Quelques Propriétés :

- $Z \geq 0$, cette loi n'est donc pas symétrique,
- Z admet une densité,
- $\mathbb{E}(Z) = n$ et $\mathbb{V}(Z) = 2n$.

Définition

Soient $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2(n)$. Posons

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}.$$

Alors T suit une loi de Student à n degré de liberté et on la note $t(n)$ ou Student(n).

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \chi^2(n)$ et $Y \sim \chi^2(m)$. Alors, on dit que la variable

$$Z = \frac{X/n}{Y/m}$$

suit une loi de Fisher-Snedecor(n, m). On la note $\mathscr{F}(n, m)$.

Ces trois derniéres lois seront utiles dans la théorie des tests.
L'expression explicite des densités de ces lois n'est pas à connaître (sauf pour la loi normale). Des tables statistiques et des logiciels permettent de les manipuler.

Merci pour votre attention