A. **LÓGICA**

I. Proposições transmitem pensamentos, isto é, **afirma fato**s ou **exprimem juízos** que formamos a respeito de determinados entes (FILHO, 2002, p. 11). Qual das alternativas abaixo são proposições?

a. O número 17 é um número primo.
b. Como é seu nome?
c. Estude mais.
d. Fortaleza é a capital do Maranhão.
e. 0, 4, -4 são as raízes da equação $x^3 - 16x = 0$.
f. Feliz aniversário!
g. O jogo saiu de quanto?
h. Caramba!
i. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$

II. Segundo o **Princípio do Terceiro Excluído**, toda proposição simples é verdadeira ou é falsa, isto é, tem valor lógico **V** (**verdade**) ou o valor **F** (**falso**) (FILHO, 2002, p. 13). De acordo com as respostas da questão I, quais são verdadeiras e quais são falsas?

a. Verdadeiras: ______________________________

b. Falsas: _________________________________

III. O **número de linhas** da tabela verdade de uma proposição composta depende do número de proposições simples que integram, sendo dado pelo seguinte teorema: **A tabela-verdade de uma proposição composta com n proposições simples componentes contém 2^n linhas.** Quantas linhas teriam uma tabela verdade para uma proposição composta formada pela quantidade de proposições simples da questão I?

IV. **Conectivos** são palavras que se usam para formar novas proposições a partir de outras, são exemplos: **e** (∧), **ou** (∨), **nao** (~), **se ... então...** (→), e **se somente se...** (↔). Efetuamos muitas vezes certas operações sobre proposições chamadas **operações lógicas**. É possível combinar proposições com os conectivos para construir proposições compostas e desta forma construir a tabela-verdade correspondente a qualquer proposição composta (FILHO, 2002). Desta forma escolha três proposições da questão I, e monte a tabela-verdade da proposição composta abaixo:

Método 1: **P(p, q, r) = (p → (~q ∨ r)) ∧ ~ (q ∨ (p ↔ ~r))**

(p	→	(~	q	∨	r))	∧	~	(q	∨	(p	↔	~	r))

Método 2: **P(p, q, r) = (p → (~q ∨ r)) ∧ ~ (q ∨ (p ↔ ~r))**

p	q	r	~q	~r	(~q ∨ r)	(p → (~q ∨ r)	(p ↔ ~r)	(q ∨ (p ↔ ~r))	~ (q ∨ (p ↔ ~r))	P

V. Chama-se **Tautologia** toda proposição composta cujo valor lógico é sempre **V**(verdade), independente dos valores lógicos das proposições simples componentes. **Contradição** é toda proposição composta cujo valor lógico é sempre **F**(falsidade) independente do valor lógico das proposições simples. E **Contingência** é toda a proposição composta que não é nem tautologia nem contradição(FILHO, 2002). Desta forma responda, a proposição composta **P** da questão IV e de que tipo?

Resposta:_____________________

VI. Uma proposição **implica** em outra quando uma é condicional da outra, e seu valor lógico é uma tautologia. (FILHO, 2002, p.52). Sendo assim verifique se:

$$(x = y \vee x < 4) \wedge x \nless 4 \Rightarrow x = y$$

p: $x = y$
q: $x < 4$
r: $x \nless 4$

(p	$\vee$	**q)**	$\wedge$	**r**	$\rightarrow$	**p**

VII. Uma proposição **equivale** a outra quando o valor lógico da bicondicional da outra for uma tautologia(FILHO, 2002, p.58). Considerando a proposição B: “Meu pai é desenvolvedor e minha mãe é design”, assinale a alternativa que apresenta uma proposição equivalente à negação de B.

a. “Minha mãe não é design e meu pai não é desenvolvedor ”.
b. “Minha mãe não é design, ou meu pai não é desenvolvedor ”.
c. “Minha mãe não é design e meu pai é desenvolvedor ”.
d. “Minha mãe é design, ou meu pai não é desenvolvedor ”.

~	**(p**	$\wedge$	**q)**	$\leftrightarrow$	~	**p**	$\vee$	~	**q**

B. FUNÇÃO

I. Sobre os conhecimentos de função, analise as afirmativas abaixo e diga se são verdadeiras ou falsas:

   a. O domínio da função f é sua projeção vertical sobre o eixo 0 x. ( )
   b. A imagem da função f é a sua projeção sobre o eixo da abscissa. ( )
   c. f: X →Y, significa que a função f, mapeia o conjunto X no conjunto Y. ( )
   d. f(x) = sen x + ln x é uma função polinomial do primeiro grau. ( )
   e. Uma função recebe uma entrada e retorna uma saída. ( )
   f. As entradas de uma função pertencem ao conjunto domínio. ( )
   g. As saídas de uma função estão no eixo das ordenadas. ( )

C. RAZÃO INCREMENTAL DE NEWTON

I. Seja f, uma função de uma curva, *x* e *f*(*x*) as coordenadas do ponto P da reta tangente que toca esta curva e um ponto Q do gráfico e *f*, e cujas coordenadas são *x* + *h* e *f*(*x* + *h*). A inclinação da reta secante PQ é dada pelo coeficiente de *f*(*x* + *h*) - *f*(*x*) sobre h, chamado *razão incremental*. Uma reta tangente pode tocar uma curva em dois pontos. Definindo uma reta tangente à curva no ponto P como aquela que passa pelo ponto P e cuja inclinação ou coeficiente angular é *m*. Fazer um ponto Q se aproximar de P, consiste em fazer o número h cada vez mais próximo de 0. Quando $h \to 0$ e a razão incremental se aproximar um valor finito de *m*, então *m* se torna *o limite da razão incremental com h tendendo a zero*. Como m depende do valor de x, *m* é uma função de x, então *m* é chamada *derivada* de f e indicada por f' (ÁVILA, 2007 p. 67-73).

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Figura 1 - Limite da Razão Incremental

Desta forma, calcule a derivada *f'*(*x*) de cada uma das funções dadas utilizando o cálculo direto do limite da razão incremental.

   a. $f(x) = -3x^2$.
   b. $f(x) = x^3/2$.
   c. $f(x) = \sqrt{3x}$, $x > 0$.

D. DERIVADA

I. Como as regras de derivação são fundamentais, convém lembrá-las pelo quadro abaixo:

$$\text{Potência :}\quad (x^n)' = nx^{n-1};$$

$$\text{Soma :}\quad (f+g)' = f' + g';$$

$$\text{Produto por constante :}\quad (Cf)' = Cf';$$

$$\text{Produto :}\quad (fg)' = f'g + fg';$$

$$\text{Quociente :}\quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}.$$

Figura 2 - Regras de derivação

Utilizando estas regras calcule as derivadas das funções:

a. $2x^5$.
b. $x^7 - 5x^6/3 + 3x^5/5 - x^4 + 2x - 3$.
c. $\sqrt{x}\,(x - 1)$.
d. $(x^2 - 3x + 1) / (x^2 - 1)$.

II. Além destas regras de derivadas, existem outras especiais, como a derivada de funções trigonométricas:

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

$$\tan'(x) = \sec^2(x)$$

Fig 3 - Derivadas de algumas funções trigonométricas

Calcule as derivadas das funções trigonométricas das funções dadas:

a. *f(x) = sen x - cos x*
b. *f(x) = x cos x*
c. *f(x) = sen x / cos x*

III. Existem ainda a derivada da função logarítmica e que é dada pela figura 4:

$$D \ln |f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Figura 4 - Derivada da função logarítmica

Calcule a derivada das funções abaixo:

a. ln 3x.
b. $\ln(5x^2 - 7)$

IV. E pra finalizar a derivada da função exponencial, que para ser calculada, pode-se usar a regra da função inversa onde $f(x) = e^x \Leftrightarrow x = \ln f(x)$, fazendo então a derivada para ambos os lados temos que $x' = (\ln f(x))'$, como $x' = 1$ e $(\ln f(x))' = f'(x)/f(x)$ então fica: $1 = f'(x)/f(x)$, como $f(x) = e^x$ substituindo $1 = f'(x)/e^x$, portanto $f'(x)' = (e^x) = e^x$. Sabendo disso calcule:

a. $f(x) = e^{3x}$.

b. $f(x) = e^{sen\, x}$.

E. INTEGRAL

I. Uma função F é chamada de *primitiva* de uma outra função f se f é a derivada de F, isto e, $F' = f$. Por exemplo, x^3 é primitiva de $3x^2$, $sen\, x$ a de $cos\, x$ e assim por diante. A integral é uma forma de obter a primitiva de uma função. Para calcular a integral de algumas funções, será necessário apresentar algumas regras:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ para } n \neq -1$$

$$\int k \, dx = k \cdot x + C$$

$$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

Figura 5 - Regras de integração.

O k que aparece na segunda regra de integração, representa uma constante. Ou seja um número qualquer como 2; 3/5; π; *e*. **ATENÇÃO:** há uma diferença entre *e* e e^x, a primitiva de *e*, será *ex*, e a primitiva de e^x será e^x conforme a quarta regra da figura 5. A diferença está no valor do expoente, *e* tem expoente 1 e e^x tem expoente *x*. Agora com base nestas regras, calcule as primitivas das funções abaixo:

a. $4x^3 - 3x^2 + 1$.
b. $x^{2/3}$.
c. $1/(x - 1)$.
d. e^x.

II. A integral é entendida também como a área total de uma figura plana delimitada por uma curva qualquer, em outras palavras, a área de uma curva definida por dois pontos de a até b. A integral é representada pela figura 6:

$$A = \int_a^b f(x)dx,$$

Figura 6 - Área de uma curva delimitada pelos pontos a até b.

Calcule a área da figura compreendida pela figura 7.

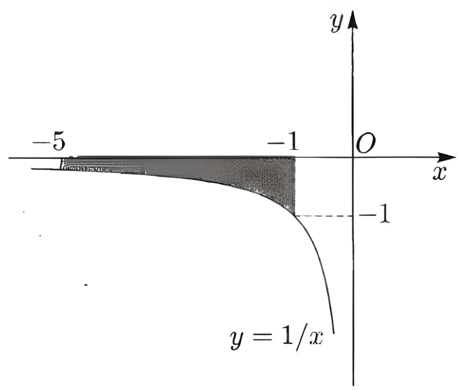

Figura 7 - Área da figura compreendida pela função $y = 1/x$.

F. ZERO DAS FUNÇÕES

I. Um dos problemas que ocorrem mais frequentemente em trabalhos científicos é calcular as raízes de equações da forma: f(x) = 0. A função f(x) pode ser um polinômio em x como $f(x) = x^7 - 5x^6/3 + 3x^5/5 - x^4 + 2x - 3$ ou uma função transcendental, como $f(x) = e^x - x^2 - 2$. Métodos numéricos podem ser utilizados para calcular as raízes de equações polinomiais de grau maior que 2 ou equações do tipo transcendentais.

Utilizando o método de Newton-Raphson, seja f: R → R, dado por $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1$. Calcule a raiz mais próxima da origem da função f(x).

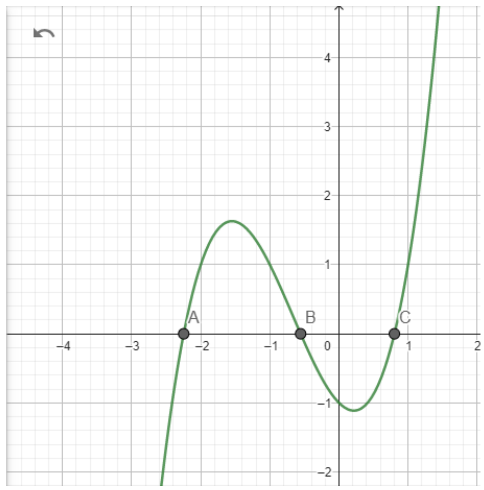

Figura 8 - Gráfico da função f(x)

Lembre-se das fases:

Fase 1: Isolamento ou localização dos zeros. Utilizar o teorema de Bolzano: Seja f: R → R, uma função contínua num intervalo fechado [a,b]. Se $f(a)\,f(b) < 0$, então f tem pelo menos um zero no intervalo aberto (a,b).

x	$f(x)$
-2	1
-1	1
0	-1
1	1
2	13

Tabela 1

Fase 2: Refinamento. Sob as hipóteses do teorema de Bolzano, se a derivada f' de f existir e preservar o sinal no intervalo aberto (a,b), então f tem um único zero em (a,b).

x	$f(x)$
0	-1
0.1	-1.070
0.2	-1.112
0.3	-1.093
0.4	-1.016
0.5	-0.875
0.6	-0.664
0.7	-0.377
0.8	-0.008
0.9	0.449
1	1

Tabela 2

Lembre-se de usar o Método de Newton-Raphson, conforme a fórmula:

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

Fórmula 1 - Método de Newton-Raphson

x_0	0.85
x_{r+1}	$x_r - \dfrac{x_r^3 + 2x_r^2 - x - 1}{3x_r^2 + 4x_r - 1}$
x_1	0.80421455938697
x_2	0.80194323550078
x_3	0.80193773583705
x_4	0.80193773580484
x_5	0.80193773580484

Tabela 3

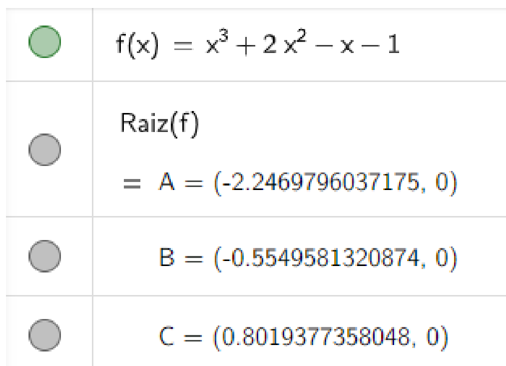

Figura 9 - Raízes da função *f*(*x*)

G. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

I. As técnicas de integração numérica, que apresentaremos, serão úteis para calcular integrais definidas. Ou seja, integrais que têm limites de integração definidas, as quais podem ser representadas pela área sob a curva. O método dos Trapézios consiste em aproximar a área sob a curva compreendida entre o intervalo [a;b], por trapézios de mesma base. Nossa aproximação se tornaria cada vez melhor, se aumentássemos o número de trapézios. A aproximação da integral definida pela fórmula dada pelo método dos trapézios é:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{E}{2} + I + P\right]$$

Fórmula 2

Onde h = $\frac{b-a}{n-1}$, onde n é o número de pontos tabelados; h, o espaçamento dos pontos tabelados, E, é a soma das imagens dos pontos extremos da tabela. I é a soma das imagens dos pontos ímpares dos pontos tabelados e P, é a soma das imagens dos pontos pares dos pontos tabelados.

Use o método dos trapézios para estimar o valor da integral $\int_0^2 \sqrt{1 + x^3}\,dx$.

H. INTERPOLAÇÃO

I. A interpolação, também conhecida como interpolação linear, é um método numérico muito utilizado no processamento de dados. Podemos através desse método encontrar a função geradora de uma tabela de dados construída através de um experimento ou por uma pesquisa de campo. Interpolação são procedimentos empregados sobre dados numéricos apresentados normalmente na forma de tabelas, onde não se conhece a função geradora desses dados. Existem integrais que não têm solução pelas técnicas do cálculo diferencial e integral. Interpolar, consiste em aproximar uma função desconhecida (x), por um polinômio. Sendo n, o grau do polinômio, um polinômio tem a seguinte forma:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n+1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

Para encontrar a função geradora utilizaremos a forma do Polinômio Interpolador de Lagrange que é dado por:

$$Pn(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i^n(x_i), \text{ onde}$$

$$L_i^{(n)}(x_i) = \prod_{\substack{j \neq i \\ j=0}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

O n, entre parênteses, é um índice, e não, um expoente. Usando o método de Lagrange, encontre o polinômio interpolador para o conjunto de dados {(1, 3), (4, 18)}.