Gestão de Tecnologia
da Informação

Tempo de leitura: aproximadamente 02 minutos e 36 segundos

Álgebra Linear - Operações Elementares

A álgebra linear é uma ferramenta importante na matemática, pois está presente em diversas áreas, a saber: engenharias, computação, física e economia. O estudo da álgebra linear, fundamenta e auxilia estudos mais avançados em campos como computação gráfica, sistemas dinâmicos, circuitos elétricos, fluxo de trânsito, balanceamento de equações químicas, entre outros. Nesta aula, vamos estudar operações elementares. É uma técnica importante e útil na álgebra linear, para resolver problemas de equações lineares, encontrar matrizes inversas e muito mais.

Operações Elementares

Uma forma de resolver sistemas de equações lineares é utilizando a técnica de operações elementares ou também conhecida como redução à forma escada. Essa técnica é muito útil para cálculo da matriz inversa. São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz, as quais veremos na figura abaixo:

i) Permuta da i-ésima e j-ésima linhas.

Exemplo: $L_2 \longleftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \longleftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

ii) Multiplicação da i-ésima linha por em escala não nulo K. $L_i \longrightarrow kL_i$

Exemplo: $L_2 \rightarrow -3L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \longleftrightarrow -3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

iii) Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais k vezes a j-ésima linha. $L_i \longrightarrow L_i + kL_i$ j

Exemplo: $L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Vamos praticar?

Utilize operações elementares, para calcular a inversa da matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

A partir da matriz A, construiremos a matriz aumentada composta pela matriz A e pela matriz Identidade. Usaremos operações elementares na matriz aumentada e faremos com que a matriz identidade apareça no lugar onde estava a matriz A e por consequência, teremos a matriz inversa, onde anteriormente, era a matriz identidade. Observe a figura.

$$(A \,\vdots\, I) \overset{\text{Op. Ele.}}{\sim>} (I \,\vdots\, A^{-1})$$

Agora, sabemos como construir a matriz aumentada a partir da matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vamos resolver o sistema de equações lineares dado:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases}$$

Para iniciar as discussões que se seguem, tomemos um sistema de equações lineares do tipo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases}$$ **FORMA ALGÉBRICA**

Vamos passar o sistema de equações lineares na forma algébrica, para a forma matricial.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$ **FORMA MATRICIAL**

Sabendo que nossa solução tem a forma a seguir:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B$$

E que a inversa da matriz A, já foi calculada na questão anterior por operações elementares:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

A solução do sistema será encontrada facilmente, calculando o produto da inversa da matriz A, pela matriz dos termos independentes, como vemos abaixo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x = -\frac{7}{2} \qquad e \qquad y = 3$$

Referências

FERNANDES, L, F. D. **Álgebra Linear.** São Paulo: Editora Dialógica, 2017.

FRANCO, N. B. **Álgebra Linear.** São Paulo: Editora Pearson, 2017.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 6z = 3 \\ 2x + 6y + 13z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1-1 & 3-2 & 6-3 & 3-1 \\ 2-2 & 6-6 & 13-12 & 5-6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0-0 & 1-0 & 3-3 & 2+3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad L_2 \to L_2 - 3L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1-0 & 2-2 & 3-0 & 1-10 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) L_1 \to L_1 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-0 & 0-0 & 3-3 & -9+3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad L_1 \to L_1 - 3L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$x = -6 \quad , \quad y = 5 \quad e \quad z = -1$$

$$[A \mid I] \xrightarrow{\text{op. el.}} [I \mid A^{-1}]$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = ?$$

$$(A \mid I)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4-4 & 5-6 & 0-2 & 1-0 \end{array}\right)$$

$$L_2 \to L_2 - 2L_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -(0) & -(-1) & -(-2) & -(1) \end{array}\right)$$

$$L_2 \to -L_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2-0 & 3-3 & 1-6 & 0+3 \\ \hline 0 & 1 & 2 & -1 \\ \hline \end{array}\right)$$

$$L_1 \to L_1 - 3L_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{2}{2} & \frac{0}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \to \frac{1}{2} L_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$(I \mid A^{-1})$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = ?$$

$(A \mid I)$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3-2 & 1-2 & 1-0 & 0-1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \to L_1 - L_2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2-2 & 2+2 & 0-2 & 1+2 \end{array}\right)$$

$L_2 \to L_2 - 2L_1$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \frac{0}{4} & \frac{4}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

$L_2 \to \frac{1}{4} L_2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1+0 & -1+1 & 1-1/2 & -1+\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -1/2 & 3/4 \end{array}\right)$$

$L_1 \to L_1 + L_2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3/4 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 3/4 \end{pmatrix} = \; ? \; = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$(A \,\vdots\, B) \xrightarrow{\text{op ele}} (I \,\vdots\, X)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 4-4 & 5-6 & 1-4 \end{array}\right)$$

$$L_2 \to L_2 - 2L_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ -(0) & -(-1) & -(-3) \end{array}\right)$$

$$L_2 \to -L_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2-0 & 3-3 & 2-9 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$L_1 \to L_1 - 3L_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{2}{2} & \frac{0}{2} & \frac{-7}{2} \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$L_1 \to \frac{1}{2} L_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7/2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x = -7/2$$

$$y = 3$$

$$\left(A \mid B\right) \xrightarrow{\text{op. ele.}} \left(I \mid X\right)$$

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$$

$x = ?$

$y = ?$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$(A \,\vdots\, B)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 3-2 & 2+1 & 3-2 \end{array}\right)$$

$$L_2 \to L_2 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2-2 & -1-6 & 2-2 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ \frac{0}{-7} & \frac{-7}{-7} & \frac{0}{-7} \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightarrow -\frac{1}{7} L_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-0 & 3-3 & 1-0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_1 \rightarrow L_1 - 3L_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x = 1$

$y = 0$

$$\begin{aligned} x + 2y - 4z &= -4 \\ 2x + 5y - 9z &= -10 \\ 3x - 2y + 3z &= 11 \end{aligned}$$

$x = ?$

$y = ?$

$z = ?$

$2 \quad -1 \quad 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 2-2 & 5-4 & -9+8 & -10+8 \\ 3 & -2 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

$L_2 \to L_2 - 2L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3-3 & -2-6 & 3+12 & 11+12 \end{array}\right)$$

$L_3 \to L_3 - 3L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0+0 & -8+8 & 15-8 & 23-16 \end{array}\right)$$

$L_3 \to L_3 + 8L_2$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ \frac{0}{7} & \frac{0}{7} & \frac{7}{7} & \frac{7}{7} \end{array}\right)$$

$$L_3 \to \frac{1}{7} L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0+0 & 1+0 & -1+1 & -2+1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \to L_2 + L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-0 & 2-2 & -4-0 & -4+2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \to L_1 - 2 L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+0 & 0+0 & -4+4 & -2+4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \to L_1 + 4L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$I \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$x = 2$; $y = -1$ e $z = 1$