<u>Лекція №7</u>

<u>Тема:</u> Ланцюги Маркова з дискретним часом.

1. ***Дискретні ланцюги Маркова. Рекурентні формули.***
2. ***Класифікація станів ланцюга Маркова. Рекурентність. Теорема солідарності.***
3. ***Тереми про існування ергодичного розподілу.***

1. *Дискретні ланцюги Маркова.*

Нехай задана послідовність випадкових величин $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots,$ які визначені на одному й тому ж ймовірносному просторі $\{\mathbf{\Omega}, \Re, P\}$ і які набувають значень з множини $X = \{x_0, x_1, ...\}$.

Говорять, що послідовність $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ утворює ланцюг Маркова, якщо для будь-якого натурального *n* та довільних $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_n$ таких, що

$$P\{\xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, ..., \xi_1 = x_{i_1}, \xi_0 = x_{i_0}\} > 0$$

виконується рівність

$$P\{\xi_n = x_{i_n} \left| \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, ..., \xi_1 = x_{i_1}, \xi_0 = x_{i_0} \right.\} = P\{\xi_n = x_{i_n} \left| \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}} \right.\} \quad (1)$$

Властивість (1) називається **властивістю Маркова.**

Якщо ймовірність $p_{ij}(n) = P\{\xi_n = x_j / \xi_{n-1} = x_i\}$ не залежить від n, то ланцюг Маркова називається **однорідним.**

Матриця $P = \| p_{ij} \|$, де $p_{ij} = P\{\xi_n = j / \xi_{n-1} = i\}$ називається **матрицею перехідних ймовірностей за один крок** або просто **перехідною матрицею** ланцюга Маркова ξ_n.

Якщо перехідні імовірності дискретного однорідного ланцюга Маркова ξ_n, $n \geq 0$ задовольняють наступним умовам:

1) $0 \leq p_{ij} \leq 1$;
2) $\sum_{j \in X} p_{ij} = 1$

то матриці перехідних ймовірностей, що мають такі властивості 1) та 2), називаються стохастичними.

Ймовірності $P\{\xi_0 = x_i\} = p_i^0$ називаються **початковим розподілом** ланцюга Маркова ξ_n. У цілочисельні моменти часу система змінює свої стани. При цьому ймовірність у момент часу n попасти в стан j, якщо відома вся передісторія системи, залежить від того, в якому стані знаходилась система в момент $n-1$. Коротко властивість марковості можна сформулювати так: при фіксованому теперішньому майбутнє не залежить від минулого.

Оскільки $P\{\xi_0 = x_i, \xi_1 = x_{i_1}, ..., \xi_n = x_{i_n}\} = p_i^0 p_{ii_1} p_{i_1 i_2} ... p_{i_{n-1} i_n}$, то початковий розподіл $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ та матриця $P = \| p_{ij} \|$ **перехідних ймовірностей** визначають скінченновимірні розподіли ланцюга Маркова ξ_n.

Отже, можна зазначити, що ланцюг Маркова визначається початковим розподілом $\{p_i^0, \quad i \geq 1\}$ та перехідними ймовірностями.

Імовірності $p_{ij}^{(n)}$, які визначаються як $p_{ij}^{(n)} = P\{\xi_n = x_j / \xi_0 = x_i\}$, $i, j > 0$, називаються **перехідними ймовірностями ланцюга Маркова** ξ_n, $n \geq 0$ за n кроків.

Перехідні ймовірності ланцюга Маркова за n кроків $p_{ij}^{(n)} = P\{\xi_n = x_j / \xi_0 = x_i\}$, $i, j > 0$ мають наступні властивості:

1) $p_{ij}^{(n)} \geq 0$;

2) $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = 1$;

3) для дов. натуральних $n > 0$, $m > 0$, $p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$ – рівняння Чепмена-Колмогорова.

$P^{(n)} = \| p_{ij}^{(n)} \|$, $P^{(n)} = P^n$

Для довільних натуральних n, m дане рівняння можна записати у вигляді рівності $P^{(n+m)} = P^n P^m$, що називається **рівнянням Чепмена-Колмогорова.**

2. Класифікація станів ланцюга Маркова. Рекурентність. Теорема солідарності.

За матрицею переходів за n кроків введемо наступні типи станів ланцюга Маркова.

Стан x_i називається **неістотним**, якщо для нього знайдеться стан x_{j_0} та n_0 такі, що $p_{ij_0}^{(n_0)} > 0$, але для всіх $n > 1$ $p_{j_0 i}^{(n)} = 0$. У протилежному випадку стан x_i будемо називати істотним.

Стан x_j **досягається** зі стану x_i, якщо $p_{ij}^{(n)} > 0$ для деякого $n > 1$. В цьому випадку будемо писати $x_i \to x_j$.

Якщо $x_i \to x_j$ і $x_j \to x_i$, то говорять, що стани x_i, x_j **сполучаються.** В цьому випадку будемо писати $x_i \leftrightarrow x_j$. За визначенням $\leftrightarrow$ рефлексивне, симетричне і транзитивне, тобто є відношенням еквівалентності. А отже, за відношенням еквівалентності $\leftrightarrow$ множина станів $X = \{x_0, x_1, ...\}$ розбивається на класи, що не перетинаються $X_1, X_2, ...$ сполучних між собою станів. Стани об'єднуються в один клас, якщо вони сполучаються один з одним. Існує можливість того, що відправляючись із стану, що відноситься до одного класу еквівалентності, з додатньою ймовірністю попасти в інший клас. Хоча тоді повернення до початкового стану не можливе, бо тоді б згадані два класи входили до одного класу еквівалентності. Якщо всі стани ланцюга істотні, то виконується наступна умова: для будь-якого $j \in E_\beta$ не знайдеться $i \in E_\alpha$ такого, що $i \to j$. Якщо клас складається з одного стану i, то цей стан називається **поглинаючим**.

Теорема 1. Множина станів X ланцюга Маркова ξ_n може бути подана у вигляді $X = X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup ...$,де X_0 клас усіх неістотних станів, а X_i, $i \geq 1$ класи істотних станів, що сполучаються, причому $X_i \cap X_j = \varnothing$ для $i \neq j$.

Ланцюг Маркова, всі стани якого сполучаються (утворюють один клас еквівалентності), називається **незвідним.**

Позначимо

$$f_{ii}^{(n)} = P\{\xi_n = x_i, \xi_{n-1} \neq x_i, ..., \xi_1 \neq x_i \mid \xi_0 = x_i\},$$

$$F_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)},$$

$f_{ii}^{(n)}$ – ймовірність того, що ланцюг Маркова, який вийшов із i-того стану, вперше повернеться в нього на n-му кроці. Імовірність того, що ланцюг ξ_n, $n \geq 0$, що вийшов із i-того стану, знову коли-небудь повернеться до нього, дорівнює F_i.

Стан x_i, називають **рекурентним,** якщо $F_i = 1$, і **нерекурентним.** якщо $F_i < 1$.

Якщо $\xi_0 = x_i$, то випадкову величину $\tau_i = \inf\{n > 0 : \xi_n = x_i\}$ називають **часом першого повернення в стан** x_i**.**

Стан x_i називаеться **рекурентним додатнім,** якщо він є рекурентним і $M\tau_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_i^{(n)} < \infty$. Якщо $M\tau_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_i^{(n)} = \infty$, то такий стан називається **рекурентним нульовим.**

Теорема 2. Стан x_i є рекурентним тоді і лише тоді, коли $P_i = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.

Якщо стан x_i не є рекурентним, то $F_i = \dfrac{P_i}{1 + P_i}$. Стан x_i називають **періодичним з періодом** d **> 1,** якщо

$$НСД\{n : p_{ij}^{(n)} > 0\} = d.$$

Теорема3. (про солідарність). В класі станів, що сполучаються:

а) якщо один стан є рекурентним, тоді всі стани будуть рекурентними;

б) якщо один стан є рекурентно нульовим, тоді всі стани будуть рекурентно нульовими;

в) якщо один стан є рекурентно додатнім, тоді всі стани будуть рекурентно додатними;

г) якщо один стан є періодичним з періодом d, тоді всі стани будуть періодичні з тим самим періодом.

Таким чином, якщо ланцюг є незвідним і хоча б один із його станів має період, то всі його стани мають цей же період, який називають **періодом ланцюга.**

3. Тереми про існування ергодичного розподілу.

Розподіл $\{q_i\}_{i=0}^{\infty}$ називають **стаціонарним розподілом** ланцюга ξ_n, $n \geq 0$, якщо

$$\begin{cases} q_j = \sum\limits_{k \in X} q_k p_{kj}, \; j \in X, \\ \sum\limits_{j \in X} q_j = 1. \end{cases} ,$$

або в матричній формі $q = qP$, де $q = (q_0, q_1, ...)$ позначає вектор-рядок з координатами q_i.

Якщо для марковського ланцюга існують границі $\lim\limits_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0,$

то $\{\pi_j\}_{j=1}^{\infty}$ називають **ергодичним розподілом.**

Наступні три теореми дають умови для існування ергодичного розподілу для скінченних ланцюгів Маркова.

Теорема 4. Нехай ланцюг Маркова ξ_n, $n \geq 0$, скінченний. Умова: $\min\limits_{i,j} p_{ij}^{(n)} > 0$, для деякого *n,* є необхідною і достатньою для існування ергодичного розподілу $\pi = (\pi_1, ..., \pi_N)$, причому цей ергодичний розподіл буде і єдиним стаціонарним розподілом.

Теорема 5. Якщо ланцюг Маркова ξ_n, $n \ge 0$, незвідний, скінченний та неперіодичний, то для нього існує ергодичний розподіл $\pi = (\pi_1, ..., \pi_N)$, який буде і єдиним стаціонарним розподілом, і $\forall j = \overline{1, N}$ $\pi_j = \dfrac{1}{M\tau_j}$.

Наступні дві теореми дають умови для існування ергодичних розподілів для нескінченних ланцюгів Маркова.

Теорема 6. Для того, щоб ланцюг Маркова ξ_n, $n \ge 0$, був ергодичним, необхідно і достатньо, щоб цей ланцюг був незвідним, неперіодичним, та щоб існував стан i_0 такий, що $M\tau_{i_0} < \infty$. При цьому єдиний стаціонарний розподіл буде співпадати з ергодичним.

Теорема 7. Якщо ланцюг Маркова ξ_n, $n \ge 0$, незвідний та неперіодичний і такий, що для деякого j_0 та $\varepsilon > 0$ виконується умова $\inf\limits_i p_{ij_0} \ge \varepsilon$, тоді існує ергодичний розподіл $\pi = (\pi_1, ..., \pi_N, ...)$ який буде єдиним стаціонарним розподілом, і $\pi_j = \dfrac{1}{M\tau_j}$.