Процес Пуассона. Найпростіший потік вимог.

Покладемо, що у випадкові моменти часу відбувається деяка подія. Нас цікавить число появ цієї події на проміжку часу від 0 до t. Позначимо це число через $\xi(t)$. Тобто розглянемо **найпростіший потік подій**, якому притаманні наступні властивості.

1) Стаціонарність означає, що ймовірність появи k подій протягом проміжку часу від T до $T+t$ не залежить від T і є функцією тільки від k та t.

2) Відсутність післядії означає, що ймовірність появи k подій протягом проміжку часу $(T, T+t)$ не залежить від того, скільки раз і як з'являлися події раніше.

3) Ординарність виражає собою вимогу практичної неможливості появи двох або декілька подій за малий проміжок часу Δt: $P_{>1}(\Delta t) = o(\Delta t)$.

4) Ймовірність того,що за малий проміжок часу Δt відбудеться рівно одна подія, пропорційна Δt з точністю до нескінченно малої вищого порядку відносно Δt:

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t),\ \lambda > 0. \qquad (1)$$

Знайдемо ймовірність $P_k(t)$ того, що за час t відбудеться k подій.

А) Знайдемо ймовірність того, що за час t не відбудеться жодної події. Для цього приймемо до уваги, що на проміжку часу $t+\Delta t$ не відбудеться жодної події, якщо на кожному з проміжків t та Δt не відбудеться жодної події. Враховуючи стаціонарність та відсутність післядії за теоремою множення отримаємо

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t) P_0(\Delta t). \qquad (2)$$

Події «за час Δt не відбулося жодної події», «за час Δt відбулася одна подія», «за час Δt відбулося більше однієї події» утворюють повну групу подій, тому

$$P_0(\Delta t) + P_1(\Delta t) + P_{>1}(\Delta t) = 1. \qquad (3)$$

Враховуючи попередні властивості, маємо $P_0(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$. (4)

Переходячи до границі при $\Delta t \to 0$, отримаємо $P_0(0)=1$. (5)

Підставимо (4) у (2), отримаємо

$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)[1-\lambda\Delta t + o(\Delta t)]$. Звідси, $P_0(t+\Delta t) - P_0(t) = -\lambda\Delta t P_0(t) - o(\Delta t)P_0(t)$.

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = -\frac{\lambda\Delta t P_0(t)}{\Delta t} - \frac{o(\Delta t)P_0(t)}{\Delta t}.$$

Переходячи до границі при $\Delta t \to 0$, отримаємо $P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$. (6)

Розв'язок даного рівняння: $P_0(t) = Ce^{-\lambda t}$. Враховуючи умову (5), маємо $C=1$. Тоді

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{7}$$

В) Знайдемо ймовірність того, що за час t відбудеться рівно одна подія. Для цього знайдемо ймовірність того, що на проміжку часу $t+\Delta t$ відбудеться одна подія, при цьому буде два несумісні випадки: подія відбудеться за час t та не відбудеться за час Δt; подія не відбудеться за час t та відбудеться за час Δt. За формулою повної ймовірності:

$$P_1(t+\Delta t) = P_1(t)P_0(\Delta t) + P_0(t)P_1(\Delta t).$$

Використавши формули (1) та (4), будемо мати

$$P_1(t+\Delta t) = P_1(t)[1-\lambda\Delta t + o(\Delta t)] + P_0(t)[\lambda\Delta t + o(\Delta t)]$$

$$\frac{P_1(t+\Delta t)-P_1(t)}{\Delta t} = -\frac{\lambda\Delta t P_1(t)}{\Delta t} - \frac{o(\Delta t)P_1(t)}{\Delta t} + \frac{\lambda\Delta t P_0(t)}{\Delta t} + \frac{o(\Delta t)P_0(t)}{\Delta t}.$$

Переходячи до границі при $\Delta t \to 0$, отримаємо

$$P_1'(t) + \lambda P_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \tag{8}$$

Враховуючи умову (5), маємо $C=0$. Отже,

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}. \tag{9}$$

С) Знайдемо ймовірність того, що за час t відбудеться рівно дві події. Для цього знайдемо ймовірність того, що на проміжку часу $t+\Delta t$ відбудеться дві події, при цьому буде три несумісні випадки: подія відбудеться два рази за час t та не відбудеться за час Δt; подія відбудеться один раз за час t та один раз за час Δt; подія не відбудеться за час t та відбудеться два рази за час Δt. За формулою повної ймовірності:

$$P_2(t+\Delta t) = P_2(t)P_0(\Delta t) + P_1(t)P_1(\Delta t) + P_0(t)P_2(\Delta t).$$

Використавши формули (1), (4), (9) будемо мати

$$P_2(t+\Delta t)=P_2(t)[1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)]+P_1(t)[\lambda\Delta t+o(\Delta t)]+P_0(t)o(\Delta t)$$

$$\frac{P_2(t+\Delta t)-P_2(t)}{\Delta t}=-\frac{\lambda\Delta tP_2(t)}{\Delta t}-\frac{o(\Delta t)P_2(t)}{\Delta t}+\frac{\lambda\Delta tP_1(t)}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)P_1(t)}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)P_0(t)}{\Delta t}.$$

Переходячи до границі при $\Delta t\to 0$, отримаємо

$$P_2'(t)+\lambda P_2(t)=\lambda^2te^{-\lambda t}.$$

Розв’язавши дане рівняння, отримаємо

$$P_2(t)=\frac{(\lambda t)^2}{2!}e^{-\lambda t}. \tag{10}$$

Аналогічно можна отримати ймовірності, що за час t відбудеться k подій

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}. \tag{11}$$

Процес Пуассона – це однорідний процес з незалежними приростами та неперервним часом, для якого виконуються умови:

- кожен переріз процесу має можливі значення: 0, 1, 2, …;
- ймовірність того, що за час Δt відбудеться одна подія є $P_1(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$;
- ймовірність того, що за час Δt відбудеться дві і більше подій є $P_{>1}(h)=o(\Delta t)$;
- кожен переріз пуассонівського процесу $\xi(t)$ є випадковою величиною, що має розподіл Пуассона з параметром λt, тобто $P\{\xi(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$, $k\ge 0$.