**第14章二阶微分方程习题解答**

习题14-3的解答

（A）

1.求下列微分方程的通解

(1) (2) (3)

解：

（1），

通解为



（2）



通解为



（3），



通解为



2.已知方程的一个解，求其通解.

解： 由公式知另一个线性无关的特解为



故通解为



5.求下列微分方程的通解

(1) (2)

(3) (4)

解：

（1）特征方程为，齐次方程通解为



设非齐次方程特解，故非齐次方程的通解为



（2）特征方程为，齐次方程通解为



设非齐次方程特解，



故非齐次方程的通解为



（3）特征方程为，齐次方程通解为



设非齐次方程特解，故所求非齐次方程的通解为



（4）特征方程为，齐次方程通解为



设非齐次方程特解为，代入原方程得，。

设方程特解为，代入原方程得。

方程的特解是

故所求非齐次方程的通解为



6.求下列初值问题的解

(1)，，；

(2)，，；

(3)，，；

(4)，，

解：

（1）特征方程为，齐次方程通解为



由初始条件得，故所求方程的解为



（2）特征方程为方程通解为



由初始条件得



解得，故所求方程的解为



（3）特征方程为方程通解为



由初始条件得



解得，故本初值问题的解为



（4）特征方程为，方程通解为



由初始条件得



故所求方程的解为



7.试指出下列各小题方程的特解待定形式是、、、中的哪一个

(1)的特解形式是:

 

 

(2)的特解形式是:

 

 

解：

（1）特征方程为，方程的特解形式为



方程的特解形式为



故原方程的特解为



所以,答案是（C）.

(2) 特征方程为，方程的特解形式为



因此，答案是（D）。

7.设，，是2阶线性方程



的三个解，试求此方程满足初始条件，的解.

解：都是齐次方程的解，且



它们线性无关，故非齐次方程的通解为



再由初始条件得



最后，得

.

8.求方程

解：令，则原方程化为



这是2阶欧拉方程，令，方程又化为



其特征方程为，特征根为，通解为

.

9.求方程的通解.

解：令，则，



并且，



将上述结果代入方程，得



解这个2阶欧拉方程得通解



因此，

.

10.函数满足微分方程，且其图形在点处的切线与曲线在该点的切线重合，求函数.

解：特征方程为，特征根为，齐次方程通解为



设特解，代入非齐次方程中得所以通解为



由题设条件得



由此解得.所以

.

11.设有一长度l为的弹簧，其上端固定，用五个都为的重物同时挂于弹簧下端，使弹簧伸长了，今突然取去其中一个重物，使弹簧由静止状态开始振动.若不计弹簧本身重量，求所挂重物的运动规律.

解：设悬挂五个质量为的重物时，弹簧被拉伸5后，重物所处位置为坐标原点，轴正向向下，在时刻，弹簧下端重物的位移为.根据牛顿第二定律得



其中为弹簧弹性系数，由题意及虎克定律得（为已知常数），解得.

从而得初值问题如下：



由第5题知齐次方程的通解为



特解



故通解为



由初值条件得，所以初值问题的解为

.

12.弹簧的弹性力与其伸缩量成正比.设长度增加厘米时，弹簧力等于公斤.现把公斤的重物悬挂在弹簧上，如果先稍微把重物往下拉，然后放开它，求重物由此所产生的振动周期.

解：取弹簧下端悬挂物的平衡位置为坐标原点，轴的正向向下，设时刻重物位移为.由牛顿第二定律得

，（其中为弹性系数）

由题意及虎克定律知，故有微分方程



由第10题知，该振动的周期为.

13.一质点徐徐沉入水中，当下沉时，水的阻力与下沉速度成正比，求此质点（质量为）的运动规律.

解：设质点的运动规律为，为时间，为下沉距离.由牛顿第二定律得，其中是比例常数.

由题意，有初始条件.令，得





即



由初始条件得.于是质点的运动规律为

.

14.已知，是方程在上线性无关的解.试求此方程满足下列不同初始条件的解

(1)，

(2)，

(3)，

解：（1）特征方程为，特征根为，通解为.

由初始条件得



解得，故初值问题的解为



（2）由初始条件得



解得，故初值问题的解为

.

(3) 由初始条件得



解得，故初值问题的解为

.

**习题14-4及其解答**

（A）

1.求方程的通解.

解：令得

，

积分四次得



2.求方程的通解.

解：特征方程为，特征根为，故通解为



3.求方程的通解.

解：特征方程为，特征根为，故通解为



4.求方程的通解.

解：特征方程为，特征根为，故通解为



5.求方程的通解.

解：特征方程为

，

特征根为，故通解为



6.求方程的通解.

解：特征方程为

，

故通解为



7.求初值问题

(1)；，

(2)；，，，

(3)；，，，

解：

（1）特征方程为



特征根为，故通解为



由初始条件得



解得



所以，



（2）特征方程为由此得特征根

，所以通解为



由初始条件得



解得



所以，



（3）特征方程为 

分解因子得 ，特征根为，故通解为



由初始条件得



解得



所以，



8.求解方程的通解

(1)

(2)

解：

（1）特征方程为



特征根为，故齐次方程通解为



设非齐次方程的特解为，代入方程得

，

解得，所以，得通解



（2）特征方程为



特征根为，因此，齐次方程的通解为



设非齐次方程的特解为，代入方程得，所以，得通解



（B）

1.求初值问题

；

解：特征方程为由此得特征根



即所以齐次方程通解为





设，代入方程得,因此，通解为

，

由初始条件得



所以，初值问题的解为



2.设实常系数的阶线性齐次方程有两个解和，求其通解，并确定方程.

解：设该常系数4阶线性齐次方程为



已知是上述方程的解，推测也是该方程的解，事实上，将代入方程中得



令，得



类似地，由是方程（1）的解，可证得也是方程（1）的解。故方程（1）的通解为



因此，方程（1）的特征根为，故特征方程为



所以，微分方程为



3.设4阶实系数线性齐次微分方程的一个解是，求其通解，并确定该方程.

解：若是方程的解，根据线性齐次方程的理论知，也是方程的解，它们构成四阶常系数齐次线性微分方程的基本解组，故所求通解为



因此，是所求方程的二重共轭复特征根，即



所以，所求方程为



4.设4阶实系数线性齐次微分方程的一个解是，求其通解，并确定该方程.

解：若是方程的解，根据实常系数线性齐次方程的理论知，也是方程的解，它们构成微分方程的基本解组，故通解为



因此，是方程的四重特征根，即



故，得方程



总习题解

1. 设方程的三个解为

，试求此方程满足初始条件：

的解.

解： 可以验证函数组在上线性无关，所以相应的齐次方程的通解可写为



已知方程的通解可写为



代入初始条件得



求得.所以，所求解为



1. 已知方程在上的两个特解为

，试求此方程的通解.

解：是齐次方程的解，根据刘维尔公式，该齐次方程的另一线性无关解为



所以，已知方程的通解为



其中是任意常数.

1. 已知一个4阶线性齐次微分方程的系数都是实常数，并且它的一个解是，求其通解，并写出该方程.

解：如果是一个解，则也是解，所求通解为



因此，是所求方程的特征方程的二重共轭复根，展开的特征



所以，该微分方程为



1. 设2阶微分方程的一个特解为，是未知常数，求该方程的通解.

解：将代入方程，比较等式两边的系数。得到代数方程组



解得，因此，方程为



显然，上述方程相应齐次方程的通解为



故得通解为

