ECUACIONES DIFERENCIALES

- Sebastián Idrobo Avirama
- 2122637 - 3743

\(•_•)\ \(•_•)\ \(•_•)\

Septiembre 20 del 2022

Introducción

- 40% - Actividad en clase 40% - Parciales 20% - Autoevaluación

- Modelo de Malthus

La rapidez con que una población cambia es proporcional a la cantidad presente de dicha la población

- $x(t)$, población en el instante t $\rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = k\,x(t)$, $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$

* Constante de proporcionalidad

- $\int \frac{1}{x(t)} \frac{dx(t)}{dt}\, dt = \int k\, dt \rightarrow \ln|x(t)| = kt + C_2$

$\rightarrow \ln|x| = kt + C$

$$e^{\ln|x|} = e^{kt + C}$$

$$|x| = e^{kt} \cdot e^{C}$$

- Debido a la constante, significa que $x(t)$ puede ser:

① $x(t) = e^{kt} \cdot e^{C}$

$x(t) = e^{kt} C_1$

$\downarrow$

$C_2 > 0$

② $x(t) = e^{kt}(-e^{C_1})$

$x(t) = C_2 \cdot e^{kt}$

$\downarrow$

$C_2 < 0$

$$x(t) = C_2 e^{kt}$$

$C_2 = e^{C_1}$ o $C_2 = -e^{C_1}$.

$$x(t) = C e^{kt}$$

- Caída libre

Consideremos un cuerpo que cae bajo la acción de la fuerza de la gravedad. Tenemos posición y la velocidad cambian con el tiempo.

- $x(t) =$ Posición $\qquad a = \frac{d^2x}{dt^2}$

$V = \frac{dx}{dt}$, velocidad

- $m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -g$

$$\frac{dx}{dt} = -gt + C_1$$

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$$

Definición de ecuación diferencial ordinaria

Una " " " de orden 'm' es una ecuación que relaciona una función desconocida $x = x(t)$, sus derivadas hasta orden 'm' y la variable de la que depende 't' así:

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^m x}{dt^m}\right) = 0$$

donde F es una función de un subconjunto de $\mathbb{R}^{m+2}$ a $\mathbb{R}$.

- Una ecuación diferencial es normal de orden 'm' si está escrita de la siguiente manera:

$$\frac{d^m x}{dt^m} = G\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}\right)$$

Def. de Solución de una ecuación diferencial ordinaria

Una " " " " " es una función real $x: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

1. 'x' es continua y diferenciable en I hasta el orden 'm'

$x = -\frac{g}{2}t^2 \rightarrow x' = -gt \rightarrow x'' = -g$ ✓ (Es solución)

$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$

2. Satisface

$$f\left(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t), \dots, \right) = 0$$

- Solución explícita: $x = x(t)$

Ej: $x(t) = Ce^{kt}$ es solución de $\frac{dx}{dt} = kx$

$$\frac{de^{kt}}{dt} = e^{kt} \cdot k$$

$$x(t) = Ce^{kt} \checkmark \text{ (Es solución)}$$

Ej2: $z(t) = kt + C$ es solución de $\frac{dz}{dt} = k$.

$$z(t) = kt + C$$

$$z'(t) = k$$

Ej3: $y(x) = C \cdot \cos(wx)$ es solución de $\frac{d^2y}{dx^2} + w^2 y = 0$

- $y = y(x)$

$$y(x) = C \cdot \cos(wx)$$

$$y'(x) = -C \cdot (\operatorname{Sen}(wx)) \cdot w$$

$$y''(x) = -C \cdot w\,(\cos(wx)) \cdot w$$

$$= -Cw^2 \cdot \cos(wx)$$

$$y'' + w^2 y = -Cw^2 \cdot \cos(wx) + w^2 \cdot C \cdot \cos(wx) = 0$$

Septiembre 22 de 2022

Problema de valor inicial

- Consiste en encontrar una solución 'x' en el intervalo I tal que para cada $t_0 \in I$ satisfaga las condiciones iniciales.

Ej: 1. $y = e^{2(t-1)}$ es solución del problema $y' = 2y$, $y(1) = 1$.

- $y' = e^{2(t-1)} \cdot 2$ * $y = e^{2(t-1)}$

$y' = 2y$

- Resuelvo valor inicial:

- $y(1) = e^{2(1-1)} = e^{2 \cdot 0} = e^0 = 1$

Ej: 2: $y = \operatorname{Sen}(x)$ es solución de $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$

- $y' = \cos(x)$

Ej: 3: $y' - \sqrt{y} = 0$, $y(0) = 0$ tiene dos soluciones, $y_1 \equiv 0$ y $y_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4}, & x > 0 \end{cases}$

Teorema fundamental de existencia y unicidad

Ej: 1: • $x' = \ln(x)$, $x(1) = 1$ tiene solución

Rll: • $f(t, x) = \ln(x)$ ✓

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ ✓

(Son continuas)

• $x(1) = \frac{1}{1} = 1$ ✓

Ej: 2: • $x' = -x^2$

$x(1) = 1$ tiene solución

Rll: $f(t, x) = -x^2$ ✓

$\frac{\partial f}{\partial x} = +\frac{1}{x}$ ✓

(Son continuas)

• $x(1) = \frac{1}{1} = 1$ ✓

Ecuaciones diferenciales de Primer grado

- Forma general: $F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$
- Forma normal: $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$
- Otra: $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$

Ecuación de variables Separables (Método)

- Es una ecuación que se puede escribir:

$$\frac{dy}{dx} = g(y) \cdot h(x)$$

- O también:

$$p(x) \cdot q(y)\,dx + r(x)\,s(y)\,dy = 0$$

- Podemos hacer lo siguiente:

$$\frac{1}{g(y)}\,dy = h(x)\,dx$$

Integramos:

$$\int \text{"} = \int \text{"}$$

Solución implícita:

$$G(y) = H(x) + C$$

Ej 1: $y^2 \frac{dy}{dx} - x + 1 = 0$

$$y^2\,dy = (x-1)\,dx$$

$$\int y^2\,dy = \int (x-1)\,dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - x + C$$

$$y^3 = \frac{3}{2}x^2 - 3x + \overset{C}{3C}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 - 3x + C}$$

Ej 2: Resolvemos $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2}{y^2+1}$ 'y' $y(0) = -1$

$$(y^2+1)\,dy = (x+2)\,dx$$

$$\int (y^2+1)\,dy = \int (x+2)\,dx$$

$$\frac{y^3}{3} + y = \frac{x^2}{2} + 2x + C$$

- Comprobamos valor inicial

$$\frac{-1}{3} - 1 = 0 + 0 + C$$

$$\frac{-4}{3} = C \checkmark$$

- Reemplazamos:

$$\frac{y^3}{3} + y - \frac{x^2}{2} - 2x = \frac{-4}{3} \checkmark$$

Ej 3: Resolvemos $\frac{x}{2}\frac{dy}{dx} - 2 - y = 0$ 'y' $y(1) = 2$

$$\frac{x}{2}\frac{dy}{dx} = 2 + y$$

$$\frac{1}{y+2}\,dy = \frac{2}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y+2}\,dy = \int \frac{2}{x}\,dx$$

$$\ln|y+2| = 2\ln|x| + C$$

$$\ln|y+2| = \ln x^2 + C$$

$$e^{\ln|y+2|} = e^{\ln x^2 + C}$$

$$e^{\ln|y+2|} = e^{\ln x^2} \cdot e^{C}$$

- $|y+2| = Cx^2, \quad C > 0$

$y+2 = Cx^2$

Funciones Homogéneas

Una función es homogénea si para todo $\lambda > 0$, se tiene que:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y).$$

Ej: • La función $h(x,y) = \cos\left(\frac{y}{x}\right)$ es homogénea de grado 0

Ej 2: • $h(\lambda x, \lambda y) = \cos\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = \cos\left(\frac{y}{x}\right) = h(x,y)$ "Grado 0"

Ej 3: $g(x,y) = xy^2 + x^3 + y^3$ "Grado 3"

Comprobamos si es homogénea

- $g(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)(\lambda y)^2 + (\lambda x)^3 + (\lambda y)^3$

$= \lambda x \lambda^2 y^2 + \lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3$

$= \lambda^3 x y^2 + \lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3$

$= \lambda^3 (xy^2 + x^3 + y^3)$

$= \lambda^3 g(x,y)$ ✓

En general un polinomio es homogéneo si: sus monomios son del mismo grado

- Ecuación homogénea

De la forma:

$$\underbrace{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy}_{\text{Comparten el mismo grado}} = 0$$

Si la ecuación está escrita de la forma normal

$$y' = \underbrace{f(x,y)}_{\text{homogénea de grado 0}}$$

- Para resolver:

$$z = \frac{y}{x} \quad \text{o} \quad y = xz$$

Derivamos: Con respecto a 'x':

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} \quad \text{o} \quad dy = z\,dx + x\,dz$$

La sustitución de lo anterior a la respectiva, obtenemos una ecuación diferencial separable.

Ej 1: $(xy + x^2)\,dx - x^2\,dy = 0$ Resolver:

$$(x(xz) + x^2)\,dx - x^2(z\,dx + x\,dz) = 0$$

$$\cancel{x^2 z\,dx} + x^2\,dx - \cancel{x^2 z\,dx} + x^3\,dz = 0$$

$$x^2\,dx - x^3\,dz = 0$$

$$x^2\,dx = x^3\,dz \rightarrow x^3\,dz = x^2\,dx$$

$$dz = \frac{x^2\,dx}{x^3}$$

- Integramos:

$$z = \ln(x) + C \qquad * \; z = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{y}{x} = \ln(x) + C$$

$$y = x \cdot \ln|x| + Cx$$

Septiembre 27 del 2022

Ecuaciones exactas

- Dada una curva de nivel $F(x, y) = C$, tomando $y = y(x)$ y derivando implícitamente

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

dado que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

- Diremos que una E.D de la forma:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

Ej: • $F(x,y) = xy^2 + x + y$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 \cdot y^2 + 1 + 0 = y^2 + 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x(2y) + 0 + 1 = 2xy + 1$$

- $(y^2+1)\,dx + (2xy+1)\,dy$

la solución de esta ecuación es:

$$xy^2 + x + y = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Ej 2:

E.R. • $\underbrace{(\cos(x)\,\mathrm{Sen}(x) + xy^2)}_{M}\,dx + (y + yx^2)\,dy = 0, \quad y(0) = 2$

• $M(x,y) = \cos(x)\cdot \mathrm{Sen}(x) + xy^2$ y $N(x,y) = y + yx^2$,

• $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 0 + 2xy$

• $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 0 + 2xy$

Es exacta, y por lo tanto tiene solución

Luego, existe F tal que $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N$

Integrando con respecto a 'x' $\rightarrow F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + h(y)$

$$\int \cos(x)\cdot \mathrm{Sen}(x)\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} = \frac{\mathrm{Sen}^2(x)}{2}$$

$u = \mathrm{Sen}(x)$
$du = \cos(x)$

Así:

$$F(x,y) = \int \cos(x)\cdot \mathrm{Sen}(x) + xy^2\,dx + \theta(y)$$

$$= \frac{\mathrm{Sen}^2(x)}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + \theta(y)$$

• $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 + \dfrac{x^2y^2}{2} + \theta'(y)$ ①

• $\dfrac{\partial F}{\partial y} = y + yx^2$ ②

Así: $x^2y + \theta'(y) = y + yx^2$

Simplificando: $\theta'(y) = y$

Integrando: $\theta(y) = \dfrac{y^2}{2}$

R/: $\dfrac{\mathrm{Sen}^2(x)}{2} + \dfrac{x^2+y^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} = C$

- $y_{(0)} = 2$

$$\frac{\operatorname{Sen} 2\,0}{2} + \frac{0^2 (2)^2}{2} + \frac{2^2}{2} = C$$

$$0 + 0 + 2 = C$$

i. 3. $(2e^y + 3x \operatorname{Sen}(y))\,dx + (xe^y + x^2 \cos(y))\,dy = 0$

- $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^y + 3x \cos(y)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = e^y + 2x \cdot \cos(y)$$

No es exacta

- Pero si multiplicamos por 'x', obtenemos la ecuación exacta

$$(2xe^y + 3x^2 \operatorname{Sen}(y))\,dx + (x^2 e^y + x^3 \cos(y))\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xe^y + 3x^2 \cos(y) = \frac{\partial N}{\partial y} = 2xe^y + 3x^2 \cos(y)$$

- ¿F? $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ ó $\frac{\partial F}{\partial y} = N$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xe^y + 3x^2 \operatorname{Sen}(y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 e^y + x^3 \cdot \cos(y)$$

$$F(x,y) = \int x^2 e^y + x^3 \cdot \cos(y)\,dy$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 \cdot e^y + x^3 \operatorname{Sen}(y) + \theta(x)$$

- Factores integrantes

• Algunas veces una ecuación diferencial no podrá ser exacta, pero es posible encontrar una función tal que al multiplicarla se convierta en exacta. Le decimos Factor integrante

Ej 1: Resolver:

$$(2y - 6x)\,dx + (3x - 4x^2 y^{-1})\,dy = 0$$

* $u(x,y) = xy^2$ → Es un factor integrante

- Multiplicamos

$$(2xy^3 - 6x^2 y^2)\,dx + (3x^2y^2 - 4x^3 y)\,dy = 0$$

- Verificamos si es exacta

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 6xy^2 - 12x^2 y \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 6xy^2 - 12x^2 y \end{aligned}\right\} \checkmark$$

- Resolvemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^3 - 6x^2y^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4x^3 y$$

$$F(x,y) = \int 3x^2y^2 - 4x^3 y \, dy = 3x^2\frac{y^3}{3} - 4x^3\frac{y^2}{2} + \phi(x)$$

$$F(x,y) = x^2y^3 - 2x^3y^2 + \phi(x)$$

$$\therefore F(x,y) = 2xy^3$$

$$\therefore 2xy^3 - 6x^2y^2 + \phi(x) = 2xy^3 - 6x^2y^2$$

$$\phi(x) = 0$$

R/: $F(x,y) = C$

Septiembre 29 del 2022

Continuación

- Cálculo de factores integrales

Si $u(x,y)$ es un factor integral de (4), la ecuación

$$uM\,dx + uN\,dy = 0$$

es exacta, por tanto se verifica:

$$\frac{\partial(uM)}{\partial y} = \frac{\partial(uN)}{\partial x}$$

Derivando se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial y}M + u\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}N + u\frac{\partial N}{\partial x}$$

o equivalente:

$$M\frac{\partial u}{\partial y} - N\frac{\partial u}{\partial x} = u\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

- Si el factor integrante $u(x)$ depende de 'x'

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'(x) \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

luego:

$$N\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

Fórmula final:

$$u(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx}$$

$$u(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}dy}$$

• 18 de Oct - Quiz

Ej: $(y^2 - x)\,dx + xy\,dy = 0$ (No es exacta)

• $\underbrace{(y^2 - x)}_{M}\,dx + \underbrace{xy}_{N}\,dy = 0$

- Comprobamos si es exacta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = y$$

- Buscamos factor integrante

• $$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$$ (Depende de 'x')

• $$u'(x) = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln(x)} = x$$ Rta: $u(x) = x$

- Comprobamos de nuevo si es exacta con $u(x) = x$

• $(xy^2 - x^2)\,dx + x^2 y\,dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy \checkmark$$

* A veces puede existir factor integral de $u(x)$ pero no de $u(y)$, y viceversa.

- Ecuación lineal de primer orden

tiene la forma:

$$a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = b(x)$$

donde $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $b(x)$ dependen de solo 'x', se puede reescribir como

$$y' + \underbrace{P(x)}_{*}\,y = \underbrace{Q(x)}_{*}$$ * Continuas

Forma diferencial:

$$[P(x)\,y - Q(x)]\,dx + dy = 0$$

Ej: Busquemos un factor integrante $u(x)$

$$u(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

- Ecuación de una solución de una ecuación lineal:

$$y = u^{-1}\left(\int u\,Q(x)\,dx + C\right)$$

Ej: Resolvamos $\frac{1}{x^2}y' + \frac{1}{x^3}y = \frac{1}{x}\operatorname{Sen}(x)$

- Dejamos en forma normal

$$y' + \frac{1}{x}y = x\cdot\operatorname{Sen}(x)$$

- Tenemos que $P(x) = \frac{1}{x}$ y $Q(x) = x\operatorname{Sen}(x)$. Un factor integrante es

$$u(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln(x)} = x.$$

- Multiplicando el factor integrante obtenemos que:

$$xy' + y = x^2\cdot\operatorname{Sen}(x)$$

$$xy = \int x^2\cdot\operatorname{Sen}(x)\,dx$$

$$xy = -x^2\cos(x) + 2x\operatorname{Sen}(x) + 2\cos(x) + C$$

$$y = -x\cos(x) + 2\operatorname{Sen}(x) + \frac{2}{x}\cdot\cos(x) + \frac{C}{x}$$

i.: Resolver $y' + 2y = 3e^{x}$, $y(0) = 3$

- Factor $P(x)$

$$P(x) = 2 \quad y \quad Q(x) = 3e^{x}$$

- Factor integrante

$$u(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$$

- Usando formula

$$y = e^{-2x} \cdot \left(\int e^{2x} \cdot 3e^{x}\,dx + C \right)$$

$$y = e^{-2x} \left(3 \int e^{3x}\,dx + C \right)$$

$$y = e^{-2x} \left(\cancel{3} \cdot \frac{e^{3x}}{\cancel{3}} + C \right)$$

$$y = e^{x} + Ce^{-2x}$$

- Condición inicial $y(0) = 3$ obtenemos que:

$$y = e^{x} + Ce^{-2x}$$

$$3 = e^{0} + Ce^{0}$$

$$3 = 1 + C$$

$$2 = C$$

- Ecuaciones de Bernoulli:

De la forma:

$$y' + a(x)\,y = b(x)\,y^{p},$$

- 'a' y 'b' son continuas
- $p=0$, $p=1$ → lineal
- Sino, se puede reducir a una lineal con sustitución $u = y^{1-p}$, $u' = (1-p)\,y^{-p}y'$, obtenemos:

$$(1-p)\,y^{p}\,y' + (1-p)\,a(x)\,y^{1-p} = (1-p)\,b(x)$$

- Ej: $x\,y' + y = y^{2}\cdot \ln(x)$

- Dejamos en forma normal

$$y' + \frac{1}{x}\,y = \frac{\ln(x)}{x}\,y^{2}, \quad p=2$$

- Fórmula

$$u = y^{1-2} = y^{-1}$$

$$u' = -y^{-2}$$

- Reemplazamos

$$-y^{-2}\,y' - \frac{1}{x}\,y^{-1} = \frac{-\ln(x)}{x}$$

Octubre 4 de 2022

Trayectorias Ortogonales

- Dada una familia de curvas de la forma $F(x,y) = C_1$, consideramos el problema de encontrar otra familia de curvas que las intersecten ortogonalmente en cada punto.

Derivando implícitamente obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

Por tanto:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \quad ó \quad \text{(original)} \quad m = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$$\text{(perpendicular)} \quad -\frac{1}{m} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}dx - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \text{'' ''}$$

- Original: $M\,dx + N\,dy = 0$
- Perpendicular: $-N\,dx + M\,dy = 0$ ó $N\,dx - M\,dy = 0$

Ej: Encontremos una familia de curvas ortogonales a la familia de elipses

$$x^2 + 2y^2 = C_1$$

- Derivamos

$$2x + 2(2y)\frac{dy}{dx}$$

Ej: Encontramos

$$2x + 4y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x\,dx + 4y\,dy = 0$$ Original

$$2x + 4yy' = 0$$

$$y' = \frac{2x}{4y}$$

$$y' = -\frac{4y}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4y}{2x}$$

- Hallamos familia de ortogonales

$$4y\,dx - 2x\,dy = 0$$

- Separamos variables

$$-2x\,dy = -4y\,dx$$

$$-x\,dy = -2y\,dx$$

$$\frac{1}{y}\,dy = \frac{2}{x}\,dx$$

- Integramos

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{2}{x}\,dx$$

$$\ln|y| = 2\cdot\ln|x| + C_1$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + C_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x^2| + C_1}$$

$$|y| = x^2 \cdot e^{C_1}$$

$$y = x^2 \cdot C, \quad C \in \mathbb{R}$$

- Por lo tanto, la familia de curvas ortogonales es la familia de parábolas

R//: $y = Cx^2$

• Video → 25 de Oct ∫ Terminado de Cocina
Individual

¡¡ Hallemos la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas definida implícitamente por:

$$4y + x^2 + 1 - Ce^{2y} = 0$$

Sol: - obtenemos:

$$\cdot\ (4y + x^2 + 1)\cdot e^{-2y} = C$$

→ Problema D:

- Derivamos:

$$4\frac{dy}{dx} + 2x + 0 - C2^{2y}\cdot 2\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

Tu bien :D

- Derivamos

$$\left(4\frac{dy}{dx} + 2x\right)\cdot e^{-2y} + (4y + x^2 + 1)\cdot e^{-2y}\left(-2\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$2e^{-2y}\left(2\cdot\frac{dy}{dx} + x - 4y\frac{dy}{dx} - x^2\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$2\frac{dy}{dx} + x - 4y\frac{dy}{dx} - x^2\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x + \frac{dy}{dx}(2 - 4y - x^2 - 1) = 0$$

$$x\,dx + (1 - 4y - x^2)\,dy = 0$$

$$\underbrace{(1 - 4y - x^2)}_{M}dx - \underbrace{x}_{N}dy = 0$$

- Resolvemos por ecuación exacta

• P.D: No es exacta

- Hallamos factor integral

$$U(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx} \Big\} \quad \frac{-4 - (-1)}{-x}$$

$$= \frac{-3}{-x} = \frac{3}{x}$$

$$U(x) = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3\ln|x|} = e^{\ln x^3} = x^3$$

- Multiplicamos

$$\underbrace{(x^3 - 4yx^3 - x^5)}_{M} dx - \underbrace{x^4}_{N} dy = 0$$

- Seguimos

- $\frac{\partial F}{\partial x} = x^3 - 4yx^3 - x^5$ $\qquad$ • $\frac{\partial F}{\partial y} = -x^4$

$$F(x,y) = \int x^3 - 4yx^3 - x^5 \, dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - yx^4 - \frac{x^6}{6} + \phi(y)$$

- $\frac{\partial F}{\partial y} = -x^4 + \phi'(y) = -x^4 \rightarrow \phi(y) = 0$

$$F(x,y) = \frac{x^4}{4} - yx^4 - \frac{x^6}{6} = C$$

• Video: Tomo medida t_0 $\qquad$ 25 Oct - Individual

Tomo medida t_1

Tomo medida t_2

} Mismos tiempos, intervalos

Leyes de enfriamiento

$$\frac{dT}{dt} = K(T_a - T)$$

$K > 0$ siendo la constante de transferencia de calor propia del sistema.

Ej. Si la torta sale a 150 °C y la temperatura ambiente es 25 °C y después de tres minutos está a 100 °C, para empacarla necesitamos que esté a 30 °C

Rpta:

$$\frac{dT}{dt} = K(25 - T)$$

$$\int \frac{dT}{25-T}$$

$u = 25 - T$
$du = dT$

$$\int \frac{1}{T_a - T} dT = \int K\, dt$$

- Ej: $\frac{dT}{dt} = -K(T - 25)$

$$\int \frac{1}{T-25} dT = \int -K\, dt$$

$$\ln|T - 25| = -Kt + C$$

$$e^{\ln|T-25|} = e^{-Kt + C}$$

$$|T - 25| = e^{-Kt} \cdot e^{C}$$

$$T = Ce^{-Kt} + 25$$

- Procedamos a reemplazar $T(0) = 150$

$$150 = Ce^{0} + 25$$

- Por tanto $C = 125$

$$T(t) = 125e^{-Kt} + 25$$

- Usando $T(3) = 100$

$$100 = 125e^{-K3} + 25 \rightarrow K = \frac{-\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{3} \approx 0{,}17$$

- Concluimos que:

$$T(t) = 125 = e^{-0,17t} + 25$$

- Para encontrar $T(t_0) = 30$

$$30 = 125e^{-0,17t_0} + 25$$

$$t_0 = \frac{-\ln(\frac{1}{15})}{0,17} = \frac{\ln(15)}{0,17} = 18,93 \text{ Minutos}$$

Desintegración de una sustancia radiactiva

- Supongamos que $P(t)$ es la cantidad de una sustancia radiactiva que está desintegrandose. Si la tasa de disintegración es proporcional a la cantidad, tenemos que:

$$\frac{dP}{dt} = -KP$$

Siendo $K > 0$ una constante de proporcionalidad

Ej: Después de 14 años, se ha desintegrado el 0.939% de la cantidad P_0 de plutonio

Determinar la semivida del isótopo

Sea $P(t)$ la cantidad de Plutonio existente en 't', sabemos que:

- $P(0) = P_0$
- $P(14) = P_0 - \frac{0,939}{100} P_0$

$$= P_0(1 - 0,00939)$$

$$= P_0(0,99061)$$

- Separando variables, y integrando:

$$\frac{dP}{dt} = -KP, \quad \int \frac{1}{P} dP = -\int K\, dt$$

$$\ln|P| = -Kt + C$$

$$e^{\ln|P|} = e^{-Kt} \cdot e^{C} \rightarrow P = C \cdot e^{-Kt}, \quad C \in \mathbb{R}$$

- Hallando valor inicial

- $P_{(0)} = Ce^{0} = C = P_{(0)}$
- $P_{(14)} \rightarrow P_0 e^{-k \cdot 14} = P_{(0)} \cdot 0.99061$

$$e^{-k \cdot 14} = 0.99061$$

$$\ln|e^{-k \cdot 14}| = \ln(0.99061)$$

$$-k \cdot 14 = \ln(0.99061)$$

$$k = -\frac{\ln(0.99061)}{14} \approx 6.7388 \times 10^{-4}$$

- Determinar semivida $(P_0/2)$

- $P_{(t)} = P_0 \cdot e^{-6.7388 \times 10^{-4} u}$

- Así

$$u = \frac{\ln|2|}{6.7388 \times 10^{-4}} \approx 1028.6 \text{ años}$$

- Nota. Tenemos que la vida media u y la constante k satisfacen

$$P_{(u)} = P_0 \cdot e^{-k \cdot u}$$

$$P_{(u)} = \frac{P_0}{2}$$

- $\frac{P_0}{2} = P_0 \cdot e^{-ku}$

$$\frac{1}{2} = e^{-ku}$$

$$-\ln\left(\frac{1}{2}\right) = ku$$

$$\ln(2) = ku$$

Determinación de edades por el método de Carbono 14

Ese isótopo puede ser usado para determinar los edades de materiales

- El C_{14} tiene una vida media de 5730 años.
- Con el se data la muerte de un ser vivo.

Ej: Un fósil contiene $\frac{1}{100}$ de la cantidad original de carbono 14. Determinamos la edad del fósil

Tenemos $u = 5730$ años

$$uk = \ln(2)$$

$$k = \frac{\ln(2)}{5730}$$

- $P(t) = P_0 e^{-\frac{\ln(2)}{5730} t}$

- Dado que se tiene $\frac{1}{100} P_0$ de ^{14}C, despejando el t_0 tenemos que:

$$\frac{1}{100} P_0 = P_0 e^{-\frac{\ln(2)}{5730} t_0}$$

$$-\ln\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{\ln(2)}{5730} t_0$$

$$\ln(100) = \frac{\ln(2)}{5730} t_0$$

$$t_0 = \frac{\ln(100)}{\ln(2)} 5730 \approx 38{,}069$$

Crecimiento de Poblaciones

Modelo de Malthus

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad \text{donde } k>0$$

El siguiente modelo es logístico:

$$\frac{dP}{dt} = P(a-bP)$$

- $P_{(t)} \equiv 0$ y $P_{(t)} \equiv \frac{a}{b}$ → Soluciones de equilibrio

- Resolvemos ecuación.

$$\int \frac{1}{P(a-bP)}\, dP \overset{*}{=} \int dt$$

$$* \int \frac{1}{P(a-bP)}\, dP = \frac{A}{P} + \frac{B}{(a-b)P} = \frac{A(a-bP)+PB}{P(a-bP)}$$

- $1 = A(a-bP) + PB$

- Si $P=0$, entonces

$$1 = A(a-0)+0 = Aa$$

$$1 = Aa \rightarrow \frac{1}{a} = A$$

- Si $P = \frac{a}{b}$ entonces

$$1 = A\left(a - b\frac{a}{b}\right) + \frac{a}{b}B$$

$$1 = 0 + \frac{a}{b}B$$

$$\frac{b}{a} = B$$

- $$\frac{1}{P(a-bP)} = \frac{\frac{1}{a}}{P} + \frac{\frac{b}{a}}{a-bP}$$

$$= \frac{1}{a}\int\left(\frac{1}{P} + \frac{b}{a-bP}\right) dP$$

$$= \frac{1}{a}\left(\ln|P| - \ln|a-bP|\right)$$

$$= \frac{1}{a}\ln\left|\frac{P}{a-bP}\right| = t + C$$

$$\frac{P}{a-bP} = Ce^{at}$$

$$P = Ce^{at}\cdot(a-bP)$$

$$P = Cae^{at} - CbPe^{at} \quad ó \quad P(t) = \frac{Cae^{at}}{1+Cbe^{at}}$$

Ej: En 2005 se estimó 42.888.592 y 2018 48.258.494

Usando el modelo de Malthus estimamos 2021 y 2022

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad \text{dónde } P(0) = 42.888.592, \quad P(13) = 48.258.494$$

$$\frac{1}{P}\,dP = k\,dt$$

$$\ln|P| = kt + C$$

$$P(t) = e^{kt}\cdot C$$

$$P(0) = e^{0}\cdot C = C = 42'888.592$$

$$48'258.494 = e^{k13}\cdot 42'888.592$$

$$\ln\left(\frac{48'258.494}{42'888.592}\right) = k\cdot 13$$

E.2. 2000 estudiantes van a Monterrey y deben quedarse allí por tiempo indeterminado sin elementos de bioseguridad

Sabemos que 1 de ellos es portador de Covid y dos días hay 10 contagiados.

Si la tasa de cambio del contagio es proporcional al número de estudiantes contagiados y al de no contagiados → me dice el modelo

Determinar 8 días

Octubre 13 de 2022

Desarrollo Problemas Taller (2)

22. $P(t)$ = Cantidad de personas que saben del rumor

$P(t)$: $\frac{\partial P}{\partial t} = k \cdot P(100.000 - P)$

$P(0) = 50000$, Población 100000

$\frac{\partial P}{\partial t}(0) = 1000$ ¿t_0, $P(t_0) = 75.000$?

Usando $P(0) = 50000$

$\frac{50.000}{100000 - 50.000} = C' k \cdot e^0 = C'k$

$1 = C'k$

$\frac{\partial P}{\partial t} = P(100000k - kP)$

$\frac{P}{100.000k - kP} = C \cdot e^{100.000kt}$

$\frac{P}{100.000 - P} = C'k e^{100.000kt}$, luego $\frac{P}{100.000 - P} = e^{100.000kt}$

- Usando la ecuación, $P(0) = 50.000$ y $\frac{\partial P}{\partial t} = 1000$

$1000 = k \cdot 50000(100.000 - 50.000)$

$1 = k\,50(50.000)$

$1 = k(2.500.000)$, $k = \frac{1}{2.500.000}$

$\frac{P}{100.000 - P} = e^{\frac{100.000}{2'500.000}} = e^{\frac{1}{25}t}$

$P = 75000$ entonces

$\frac{75.000}{25.000} = e^{\frac{1}{25}t_0}$

$3 = e^{\frac{1}{25}t_0} \rightarrow \ln(3) = \frac{1}{25}t_0 \rightarrow t_0 = 25 \cdot \ln(3) \rightarrow 27{,}46 \approx t_0$

Octubre 20 de 2022

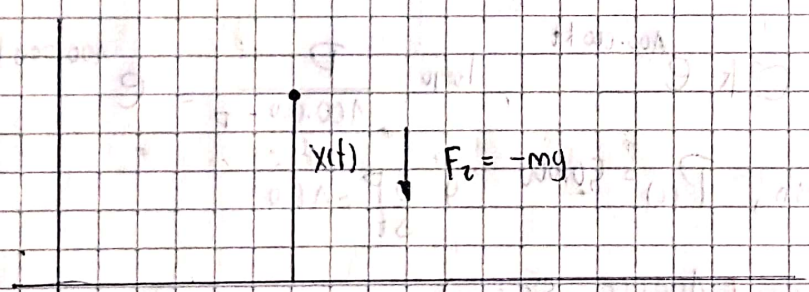
MECÁNICA NEWTONIANA

- $m\bar{a} = \vec{F}(t, x, x')$
- $g = 9{,}81 \ \frac{m}{s^2}$
- Pasos:
  - a) Sistema de ejes coordenados apropiados
  - b) Determinar todas las fuerzas que actúan sobre el objeto
  - c) Aplicar 2do ley de Newton mediante la ecuación $(F = m \cdot a)$

- Movimiento de cuerpos en un medio restrictivo

$$F = F_1 + F_2 = -mg - \gamma u^{*}$$

* ¿Rozamiento?



De la 2do ley de Newton tenemos que:

$$m\frac{dv^{*}}{dt} = -mg - \gamma u$$

* constante

$u = v$ = Velocidad

$$m\frac{dv}{dt} = -(mg + \gamma u)$$

$$\int \frac{1}{(g + \frac{\gamma}{m}u)} dv^{**} = -\int 1 \, dt$$

$$\frac{\ln\left|g + \frac{\gamma}{m}u\right|}{\frac{\gamma}{m}} = -t + C$$

* aceleración

$a = v'(t) = x''(t)$

velocidad — posición

** $z = g + \frac{\gamma}{m}u$

$dz = \frac{\gamma}{m}dv$

$dv = \frac{m}{\gamma}dz$

$= \frac{m}{\gamma}\int \frac{1}{z} dz$

$= \frac{m}{\gamma} \cdot \ln|z|$

$= \frac{m}{\gamma} \cdot \ln\left|g + \frac{\gamma}{m} \cdot u\right|$

$$\ln\left|g+\frac{r}{m}u\right| = -\frac{r}{m}t + C'$$

$$g+\frac{r}{m}u = e^{-\frac{r}{m}t}\cdot C, \quad C\in\mathbb{R}$$

$$\frac{r}{m}u = e^{-\frac{r}{m}t} - g$$

$$v(t) = Ce^{-\frac{r}{m}t} - g\cdot\frac{m}{r}$$

$$v(0) = v_0 = C - g\frac{m}{r}, \qquad v_0 + g\frac{m}{r} = C$$

- $v(t) = \left(v_0 + \frac{m}{r}\right)e^{-\frac{r}{m}t} - g\cdot\frac{m}{r}$

$$x(t) = \int \quad " \quad " \quad " \quad " \quad "$$

$$= \left(v_0 + g\frac{m}{r}\right)\int e^{-\frac{r}{m}t}\,dt - g\frac{m}{r}\int dt$$

$$= -\left(v_0 + g\frac{m}{r}\right)\frac{m}{r}\cdot e^{-\frac{r}{m}t} - g\frac{m}{r}t + C$$

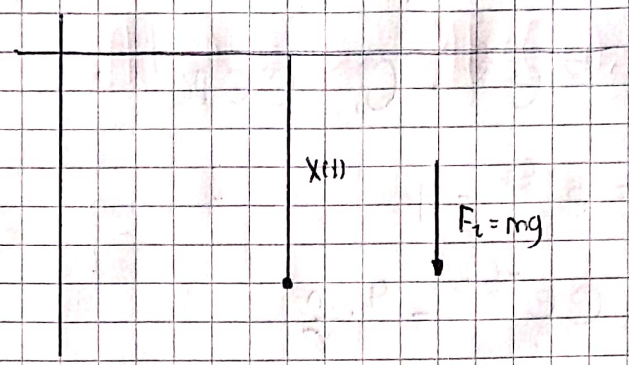
- teniendo que $x(0) = x_0$

$$x(0) = x_0 = -\frac{m}{r}\left(v_0 + \frac{m}{r}g\right) + C$$

$$x_0 + \frac{m}{r}\left(v_0 + \frac{m}{r}g\right) = C$$

$$x(t) = -\frac{m}{r}\left(v_0 + \frac{m}{r}g\right)e^{-\frac{r}{m}t} - \frac{m}{r}gt + x_0 + \frac{m}{r}\left(v_0 + \frac{m}{r}g\right)$$

- $F = F_1 + F_2 = mg - rU$. "Se deja caer"

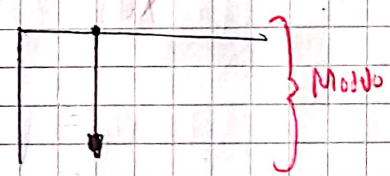


→ Ejemplo

- Un objeto se deja caer desde 600 metros de altura. Gravedad constante y la fuerza de resistencia del aire es rU, donde U es la velocidad y $r = 4$ kg/s, encontrar el tiempo en que golpea el suelo

Tenemos que $m = 4$, $r = 4$, $g = 9{,}81$

Rta:



- $\frac{m}{r} = 1$

- $X(t) = 1(0 - 9{,}81)(1 - e^{-t}) + 9{,}81t$

$= -9{,}81(1 - e^{-t}) + 9{,}81t$

- ¿ $X(t) = 600$?

$600 = -9{,}81(1 - e^{-t}) + 9{,}81t$

↓ Esto es muy pequeño, por lo que...

$600 = -9{,}81 + 9{,}81\ t_0$

$609{,}81 = 9{,}81t$

$\frac{609{,}81}{9{,}81} = t$

$t = 62{,}16$

- Estado (Paracaidista)
- Antes de abrir paracaídas.

$m = 80$ $\quad v_L = 16$

$$\frac{m}{r} = \frac{80}{16} = 5$$

$$\frac{m}{r} g = 49{,}05$$

$$v(t) = \left(v_0 - g\frac{m}{r}\right) e^{-\frac{r}{m}(t-t_0)} - g \cdot \frac{m}{r}$$

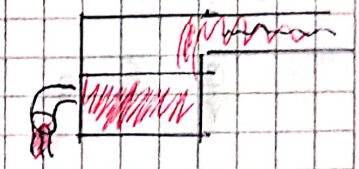
$$v(t) = -49{,}05 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t} - 49{,}05$$

$$v(60) = 49{,}05$$

Octubre 25 de 2022

APLICACIONES MEZCLAS

- Sea $x(t)$ = Cantidad sustancia en el tiempo "t"



- Tasa de cambio: $\frac{dx}{dt}$

- Ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = V_e - V_s$$

- V_e = Velocidad de entrada
  V_s = " " Salida

-- Adicional

V_e = Velocidad de entrada de fluido (Vol/t) x Concentración al entrar $(Cant/Vol)$

V_s = " " Salida (Vol/t) Concentración al salir $(Cant/Vol)$

- Mezcla homogénea: Concentración de salida es igual a la concentración del tanque

$$C(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$$

Ej: Caso donde $V_e = V_s$. 1000 litros de agua pura. Entra salmuera cambiando $\frac{1}{10}$ kg de sal por litro. a 10 L/m.

- Hallemos $x(t)$, siendo la cantidad de sal en el tanque en el tiempo (t)

Tal: Tenemos que

$$V_e = 10 \frac{L}{m} \cdot \frac{1}{10} \frac{kg}{L} = 1 \frac{kg}{m}$$

y

$$V_s = 10 \frac{L}{m} \cdot \frac{x(t)}{1000} \frac{kg}{L} = \frac{x(t)}{100} \frac{kg}{m}$$

$V(t)$ = ✓

- Siendo la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = v_e - v_s$$

- Reemplazo

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{x}{100}$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{100} = 1$$

- Aplico bernoulli: $y' + P(t)\,x = Q(t)$

- $P = \frac{1}{100}$ $\quad Q = 1$

- Busco factor integrante $u(t) = e^{\int P(t)}$

- $x(t) = u^{-1}\left(\int u\,Q\,dt + C\right)$

- $u(t) = e^{\int \frac{1}{100}dt} = e^{\frac{1}{100}t}$

$u^{-1}(t) = e^{-\frac{t}{100}}$

- $x(t) = e^{-\frac{t}{100}} \cdot \left(\int e^{\frac{t}{100}} \cdot dt + C\right)$

$x(t) = e^{-\frac{t}{100}} \cdot \left(100\,e^{\frac{t}{100}} + C\right)$

$x(t) = 100 + C\,e^{-\frac{t}{100}}$

- Encontramos la constante 'C' con $x(0) = 0$

$x(0) = 100 + C\,e^{0}$

$0 = 100 + C$

$C = -100$

P(1) = $x(t) = 100 - 100\,e^{-\frac{t}{100}}$ y

$C(t) = \frac{x(t)}{V} = 0{,}1 - 0{,}1\,e^{-\frac{t}{100}}$

Ej 2: El tanque ahora contiene Salmuera con X_0 de kg de sal disuelta.

Tell:

$$X(t) = 100 + Ce^{-\frac{t}{100}}$$

- Usando $X(0) = X_0$ tenemos que:

$$C = X_0 - 100$$

$$X(t) = 100 + (X_0 - 100)\, e^{-\frac{t}{100}}$$

$$= 100\left(1 - e^{-\frac{t}{100}}\right) + X_0\, e^{-\frac{t}{100}}$$

Ej 3: Con $V_e \neq V_s$.

$V(t)$ satisface que $\frac{dV}{dt}$ es igual a la velocidad de flujo entrada menos la velocidad de flujo de salida.

Tanque de 1000 L de agua

Salmuera empieza a fluir hacia el interior del tanque, a velocidad de $6 \frac{L}{min}$. Se mantiene bien agitada y fluye al exterior a una velocidad de $5 \frac{L}{min}$.

Si la concentración de sal en salmuera que entra es de $1 \frac{kg}{L}$, determinar concentración de sal en el tanque en función del tiempo

Tell:

- $\frac{dV}{dt} = V_e - V_s$

- $V_e \overset{\text{Flujo}}{=} 6 \rightarrow 1 \cdot 6$
- $V_s \overset{\text{Flujo}}{=} 5 \rightarrow$
- $C_{\text{entrada}} = 1$

- $V_e = 6 \cdot 1 = 6$

$V_s = 5 \cdot \frac{X(t)}{V(t)}$

- Tenemos que:

$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{5 \cdot x(t)}{V(t)}$$

$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{5 \cdot x(t)}{1000 + t}$$

$\rightarrow \frac{dV}{dt} = 6 - 5 = 1 \rightarrow \int 1 \cdot dV = \int 1 \cdot dt$

$V = t + C$

- $V(0) = 1000$

$1000 = 0 + C \rightarrow C = 1000$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{5x}{t+1000} = 6$$

- Resuelvo $\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)$

$$U(t) = e^{\int P(t)\,dt}$$

$$X(t) = U^{-1}\left(\int U \cdot Q\,dt + C\right)$$

- $P(t) = \frac{5}{1000+t}$ $\quad Q(t) = 6$

- $U(t) = e^{\int \frac{5}{1000+t}dt} = e^{5\cdot\ln(1000+t)} = e^{\ln[(1000+t)^5]} = (1000+t)^5$

- $X(t) = (1000+t)^{-5} \cdot \left(\int (1000+t)^5 \cdot 6\,dt + C\right)$

$$= (1000+t)^{-5} \cdot \left(6 \cdot \frac{(1000+t)^6}{6} + C\right)$$

$$= (1000+t)^1 + C \cdot (1000+t)^{-5}$$

$$X(t) = 1000 + t + C(1000+t)^{-5}$$

- Despejo la C, $X(0)=0$

$$0 = 1000 + (0) + C(1000+(0))^{-5}$$

$$-1000 = \frac{C}{1000^5}$$

$$-1000^6 = C$$

- $X(t) = 1000 + t - \frac{1000^6}{(1000+t)^5}$

- Determinamos Constantes

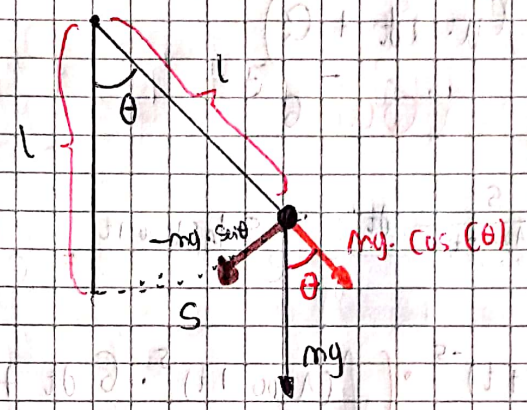
$$C(t) = \frac{X(t)}{V(t)} = \frac{1000 + t - \frac{1000^6}{(1000+t)^5}}{1000+t} = 1 - \frac{1000^6}{(1000+t)^6}$$

Octubre 27 del 2022

Ejemplos del Péndulo

- Consideramos un péndulo de masa 'm' suspendida por una cuerda longitud 'L'

Queremos describir el ángulo respecto al tiempo $\theta(t)$ en un instante 't'



a) La Tensión, T, dirigida hacia arriba en la dirección del Cable

b) El peso de la masa, en la dirección de la vertical y dirigido hacia abajo, de módulo mg.

Sea 'S' es la longitud de arco desde de la vertical que indica la posición de la masa.

Dado que $S = l \cdot \theta$. Aceleración es:

$$a = \frac{d^2 S}{dt^2} = \frac{d^2(l\theta)}{dt^2} = \frac{l \cdot d^2\theta}{dt^2}$$

De la 2da Ley de Newton

$$m \cdot l \cdot \frac{d^2\theta}{dt} = -mg \cdot \operatorname{Sen}(\theta)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt} = -\frac{g}{l} \cdot \operatorname{Sen}\theta$$

- Porque $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{Sen}\theta}{\theta} = 1$

$$\operatorname{Sen}\theta \approx 1$$

$$\frac{d^2\theta}{dt} = -\frac{g}{l}\cdot\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt} + \frac{g}{l}\cdot\theta = 0$$ → ¡Ecuación de segundo orden! ¿$\theta(t)$?

- Notemos que $\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)$ y $\operatorname{Sen}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)$ son soluciones de la ecuación

$$\theta(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right) \checkmark$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\cdot\theta = 0, \quad \omega > 0$$

$$\theta(t) = \cos(\omega t)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega\cdot\operatorname{Sen}(\omega t)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega\cdot\cos(\omega t)\cdot\omega$$

$$\frac{d^2\theta}{dt} = -\omega^2\cdot\cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = -\omega^2\cos(\omega t) + \omega^2\cdot\cos(\omega t) = 0$$

- También $\operatorname{Sen}(\omega t)$ es solución de (A)

→ Más aún C_1 y C_2 constantes arbitrarias

$$\theta(t) = C_1\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right) + C_2\cdot\operatorname{Sen}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)$$

Es solución de la ecuación (Si esto se deriva, se llega a la ecuación de segundo orden).

También las soluciones son periódicas

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = P = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}}$$, debido a que $\cos(\omega t)$ → $\omega t = 2\pi$, $t = \frac{2\pi}{\omega}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

Ecuaciones Diferenciales lineales

- Orden n =

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_{(0)}(x)y = g(x)$$

- Ej (orden 2): $x^2 y'' + e^x y' + 5y = \ln(x)$

- $L(y) := a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots$

- $L(y) = x^2 y'' + e^x y' + 5y$

$$L(\lambda y) = x^2(\lambda y)'' + e^x(\lambda y)' + 5(\lambda y)$$
$$= \lambda(x^2 y'' + e^x y' + 5y)$$
$$= \lambda \cdot L(y)$$

Lineal: • $L(\lambda y) = \lambda \cdot L(y)$ y • $L(y+z) = L(y) + L(z)$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y funciones "n" ...

- Una ecuación es de coeficientes constantes si los coeficientes $a_i(x)$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$ son constantes, sino coeficientes variables

Si: $g(x) \equiv 0$. es homógenea

Sino, no homógenea

- $3y'' + 4y' + 5y = 0$

- Pasamos a normal

$$y'' + \frac{4}{3}y' + \frac{5}{3}y = 0$$

- En caso de $n=2$

$$q_1(x)\frac{dy}{dx} + q_0(x)\,y = g(x).$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x)$$

- Teorema de existencia y unicidad

- Con las 'n' condiciones dadas en un intervalo (a,b)

$$y(x_0) = y_0,\ \frac{dy}{dx}(x_0) = y_1, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) = y_{n-1}$$

Ej: ~~~

Problemas

- $x \leq 2$ · $6 - x \geq 0$ ·
  $6 \geq x$

Intersección: $(2, 6]$

- Ecuaciones homogéneas

- Sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones de la ecuación lineal homogénea.

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots +$$

Entonces cualquier combinación lineal $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, con C_1, C_2 constantes arbitrarias, también es solución de (5)

Esto debido a $L(C_1y_1 + C_2y_2)$

$$= C_1 \cdot g_1(x) + C_2 g(x) = 0$$

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \rightarrow L(y) = C_1y_1 + C_2y_2$$

- $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$ $\quad y = C_1 \cdot \cos(\omega t) + C_2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t)$

- Dado

- $y_1(x) = e^x \cdot \cos(x)$

  $y_2(x) = e^x \cdot \sin(x)$

$$2y'' - 4y' + 4y = 0$$

Tal: $y_1' = e^x \cdot \cos(x) - e^x \cdot \operatorname{sen}(x)$

$= e^x(\cos(x) - \operatorname{sen}(x))$

$y_1'' = e^x(\cos(x) - \operatorname{sen}(x)) + e^x(-\operatorname{sen}(x) - \cos(x))$

$= e^x(\cos(x) - \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x) - \cos(x))$

$= -2e^x \cdot \operatorname{sen}(x)$

- $2y_1'' - 4y_1' + 4y_1 =$ (Reemplazo, opera)

$= 0$

- Cantidad de combinaciones de estas soluciones.

$y(x) = C_1 \cdot e^x \cdot \cos(x) + C_2 e^x \cdot \sin(x)$

- $y(0) = C_1 \cdot e^0 \cos(0) + C_2 \cdot e^0 \cdot \operatorname{sen}(0)$

$= C_1 \cdot 1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 \cdot 0$

$2 = C_1$

- $y(x) = 2e^x \cdot \cos(x) + C_2 e^x \cdot \operatorname{sen}(x)$

$= e^x(2 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \operatorname{sen}(x))$

$y'(x) = e^x \cdot (2 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \operatorname{sen}(x)) + e^x(-2 \cdot \operatorname{sen}(x) + C_2 \cdot \cos(x))$

$= e^x(2\cos(x) + C_2 \cdot \operatorname{sen}(x) - 2 \cdot \operatorname{sen}(x) + C_2 \cdot \cos(x))$

$y'(0) = -1$

- $y'(0) = 2 + C_2$

$-1 = 2 + C_2$

$1 = C_2$

- $y(x) = 2 \cdot e^x \cdot \cos(x) - 3e^x \cdot \operatorname{Sen}(x)$

- Ejemplo

$$y'' + y = 0$$

Tenemos que $y_1 = \operatorname{Sen}(x)$ y $y_2 = \cos(x)$ son soluciones. Dado que toda combinación lineal de la forma.

$$y(x) = C_1 \cdot \operatorname{Sen}(x) + C_2 \cdot \cos(x)$$

también es solución. Supongamos ahora que $\phi(x)$ es otra solución. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y supongamos que tenemos constantes C_1 y C_2 tales que $y(x_0) = \phi(x_0)$ y $y'(x_0) = \phi'(x_0)$

Noviembre 1 de 2022

Continuación...

- Teorema: Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones definidas en (a,b) de la ecuación.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (11)$$

Con $p(x)$ y $q(x)$ funciones continuas en (a,b). Si en algún punto $x_0 \in (a,b)$ se satisface

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces, toda solución de (11) se expresa de la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Al conjunto $\{y_1(x), y_2(x)\}$ lo llamamos conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (11). La combinación lineal dada en (13) la llamamos solución general.

- Dadas dos funciones diferenciables y_1 y y_2, se denomina Wronskiano o determinante de Wronski de y_1 y y_2 a la función dada por.

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

linealmente dependiente: Si existen C_1 y C_2 no simultáneamente nulos, tales que para todo $x \in (a,b)$ tenemos

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0$$

- Criterio para Conjunto Fundamental de Soluciones

Hay tres condiciones:

a) $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes

b) $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$

c) $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in (a,b)$

METODO DE REDUCCIÓN DE ORDEN

- Sea $y_1(x)$ una solución de:

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0. \quad (1)$$

Queremos obtener:

$$y_2(x) = v(x)\,y_1(x).$$

Derivando obtenemos: $y_2' = v'y_1 + v y_1'$ y $y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + v y_1''$ y
Sustituimos en (1)

$y_1 \to$ Solución Conocida

$y_2 = v\,y_1$, ¿v?

$y_2' = v'y_1 + v y_1'$

$y_2'' = v''y_1 + v y_1' + v'y_1' + y_1''$

$= v''y_1 + 2v'y_1' + v y_1''$

- Sustituimos

$$y_2'' + p y_2' + q y_2 = v''y_1 + 2v'y_1' + v y_1'' + p\cdot(v'y_1 + v y_1') + q v y_1$$

$$= v(\underbrace{y_1'' + p y_1' + q y_1}_{=0}) + v''y_1 + 2v'y_1' + p v' y_1$$

$$= v''y_1 + 2v'y_1' + p v' y_1$$

- $v''y_1 + 2v'y_1' + p v' y_1 = 0$

Renombramos $v' = w$, $v'' = w'$

$w'y_1 + 2w y_1' + p w y_1 = 0$

$w'y_1 + w(2y_1' + p y_1) = 0$

$w' + w\left(\frac{2y_1' + p y_1}{y_1}\right) = 0$

$w' + w\cdot\left(\frac{2y_1'}{y_1} + p\right) = 0$

$$\frac{dw}{dx} y_2 + w\left(2y_1' + p(y_1)\right) = 0$$

$$\frac{dw}{dx} = -w\left(2 \cdot \frac{y_1'}{y_1} + p\right)$$

$$\frac{1}{w}\, dw = -\left(2 \cdot \frac{y_1'}{y_1} + p\right) dx$$

- Se integra -

$$\int \frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\, dx \qquad y = y_1(x) \ldots$$

$$\ln|w| = -2 \cdot \ln|y_1| + \int p(x)\, dx + C_1$$

$$\ln|w| = \ln|y_1|^{-2} - \int p(x)\, dx + C_1$$

$$|w| = e^{\ln(y_1)^{-2} - \int p(x)\, dx + C_1}$$

$$|w| = e^{\ln(y_1)^{-2}} \cdot e^{-\int p(x)\, dx} \cdot e^{C_1}$$

$$w = e^{\ln(y_1)^{-2}} \cdot e^{-\int p(x)\, dx} \cdot C_1$$

$$v' = w = \frac{e^{-\int p(x)\, dx}}{y_1^2} \cdot C_1$$

$$\int v' = C_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p(x)\, dx}}{y_1^2} \cdot dx + C_2$$

- Para que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ sean l. independientes

$C_1 = 1 \qquad C_2 = 0$

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p \cdot dx}}{y_1^2} \cdot dx$$

- Ejercicio

- Dada $y_1(x) = e^{2x}$ solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Hallamos una segunda ~~ecuación~~ solución linealmente independiente.

Tenemos q.e $y_2(x) = v(x) \cdot e^{2x}$, luego.

Noviembre 3 del 2022

Continuación...

- Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Sean a, b y c constantes. Consideremos.

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Tenemos que el teorema de existencia y unicidad nos garantiza que esta ecuación tiene soluciones con dominio $\mathbb{R}$

i. $y_1 = e^{rx}$, ¿$r \in \mathbb{R}$?

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$y_1' = re^{rx}, \quad y_1'' = r^2 e^{rx}$$

$$0 = ay_1'' + by_1' + cy_1 = ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx}$$

- Luego

$$0 = e^{rx}(ar^2 + br + c)$$

Obtenemos

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Discriminante

- $b^2 - 4ac > 0$, r_1 y r_2 son dos soluciones.
- $b^2 - 4ac = 0$, entonces $r_1 = r_2$, $r = -\frac{b}{2a}$
- $b^2 - 4ac < 0$, tiene dos soluciones complejas.

- Si $r_1 \neq r_2$, un conjunto fundamental de soluciones de (1) es $\{e^{r_1x}, e^{r_2x}\}$, podemos verificar con Wronskiano

$$W(e^{r_1x}, e^{r_2x})(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x} \end{vmatrix}$$

- En este caso

$$= \underbrace{r_2e^{r_1x} \cdot e^{r_2x}}_{1} - \underbrace{r_1e^{r_1x} \cdot e^{r_2x}}_{2}$$

$$= (r_2 - r_1)\, e^{r_1 x + r_2 x} \neq 0$$

- Si $r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ son raíces iguales tenemos una solución de (2) es $y_1 = e^{rx}$. Usando el método de reducción de orden buscamos $y_2 = v(x) \cdot e^{rx}$ luego.

" Podemos hacer completo o usar formulita,

$$r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}, \quad y_1 = e^{rx}, \quad y_2 = v \cdot e^{rx}$$

$$y_2' = v' e^{rx} + v r e^{rx}$$

$$y_2'' = v'' e^{rx} + v' r e^{rx} + v' r e^{rx} + v r^2 e^{rx}$$

- Reemplazamos en $ay'' + by' + cy = 0$

$$\underbrace{a v'' e^{rx} + 2 a r v' e^{rx} + a v r^2 e^{rx}}_{a} + \underbrace{b v' e^{rx} + b v r e^{rx}}_{b} + \underbrace{c v e^{rx}}_{c} = 0$$

$$a v'' e^{rx} + 2 a r v' e^{rx} + b v' e^{rx} + v(a r^2 e^{rx} + b r e^{rx} + c e^{rx}) = 0$$

$$a v'' e^{rx} + v' e^{rx}(2ar + b) = 0$$

$$e^{rx}[a v'' + v'(2ar + b)] = 0$$

$$a v'' + v'\left(2a\left(\frac{-b}{2a}\right) + b\right) = 0$$

$$a v'' + v'(-b + b) = 0$$

$v'' = 0$, luego $v' = C_1$ y $v = C_1 x + C_2$

- Tomando $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$ tenemos

$v = x$, y así $y_2 = \underbrace{x}_{v}\, \underbrace{e^{rx}}_{y_1}$

Conjunto: $y = C_1 \cdot e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Verificamos que es L.I por el Wronskiano

$y_2' = r e^{rx}$ $\qquad$ $y_2' = e^{rx} + x r e^{rx}$

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & x e^{rx} \\ r e^{rx} & (e^{rx} + r x e^{rx}) \end{vmatrix}$$

$= e^{rx} \cdot e^{rx} + r x e^{rx} \cdot e^{rx} - r x e^{rx} \cdot e^{rx}$

$= e^{rx} \cdot e^{rx}$

$= 2 e^{rx}$

$0 \neq 2 e^{rx}$

- Ejemplo

- Solucionar $y'' + 3y' + 2y = 0$

$r^2 + 3r + 2 = 0$

$(r+2)(r+1) = 0$

$r = -2$ $\qquad$ $r = -1$

- Así: $y_1 = e^{-2x}$ $\qquad$ $y_2 = e^{-x}$

- Solución general

$y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{-x}$

- Ejemplo 2

- Solucionar $y'' + 2y' + y = 0$

$r^2 + 3r + 2 = 0$ $\longrightarrow$ $a = 1,\ b = 3,\ c = 2$

NO ES

$r = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$r_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $r_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{2}}{2}$

$r_1 = \dfrac{-2}{2}$ $\qquad$ $= \dfrac{-4}{2}$

$r_1 = -1$ $\qquad$ $= -2$

$r^2 + 2r + 4 = 0$

$(r+1)^2 = 0$

$(r+1)(r+1)$

$r = -1$ $\quad r = -1$ ← Solución única

$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

CASO RAÍCES COMPLEJAS

- Número complejo

- Tiene estructura (a,b) a = Parte real b = Parte imaginaria
- Suma $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$
- Producto $(a,b)\cdot(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

- Si llamamos $a = (a,0)$ y $i = (0,1)$ entonces un número complejo $z = (a,b)$ se puede escribir de la forma

$$z = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + bi$$

$(2,3) = 2 + 3i$

$(5,4) = 5 + 4i$

- $i^2 = -1$ $\quad$ - $(bi)^2 = -(b^2)$
- $(a+bi) + (c+di) = (a+b) + (c+d)i$

$\sqrt{-25} \to 5i$

$\to -5i$

- $(a+bi) - (c+di) = ac - bd + (ad + bc)i$
- Número opuesto $-z = -a + (-b)i$

$z = a + bi$

- $r^2 + 2r + 1 = 0$

$(r+1)^2 = 0$

$(r+1)(r+1)$

$r = -1$ $\quad$ $r = -1$ ← Solución única

$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

CASO RAICES COMPLEJAS

- Números complejos

- Inserte descripción aquí $\quad a$ = Parte real $\quad b$ = Parte imaginaria
- Suma: $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$.
- Producto: $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$.

- Si denotamos $a = (a,0)$ y $i = (0,1)$ entonces un número complejo $z = (a,b)$ se puede escribir de la forma:

$$z = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + bi$$

$$(0,2) = 0 + 2i = 2i$$

$$(3,4) = 3 + 4i$$

- $i^2 = -1$ $\quad$ • $(bi)^2 = -(b^2)$
- $(a+bi) + (c+di) = (a+b) + (c+d)i$

$\sqrt{-25}$ → $5i$, $-5i$

- $(a+bi) \cdot (c+di) = ac - bd + (ad+bc)i$
- Inverso aditivo: $-z = -a + (-b)i$

$z = a + bi$

• $z = a + bi$

• Conjugado: $\bar{z} = a + (-b)i$

• Modulo: $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

• $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$

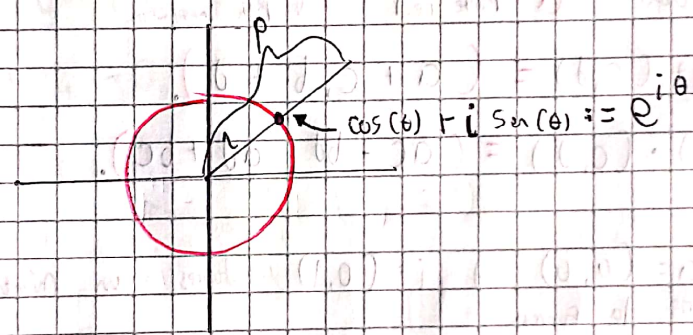
• Coef. indeterminados no sale en el parcial

Noviembre 8 del 2022

- Representación polar

• Definimos $z = a + bi$ como

$$z = \rho(\cos(\theta) + i\,\mathrm{Sen}(\theta)) \qquad \rho = |z|$$



$$z_1 = \rho_1 e^{\theta_1 i} \qquad z_2 = \rho_2 e^{\theta_2 i}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{\theta_1 i} \cdot e^{\theta_2 \cdot i}$$

• $e^{i\pi} + 1 = 0$

- Un poco de cálculo complejo

Sea $z: J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ podemos escribir

$$z(t) = \underbrace{u(t)}_{\text{Son reales}} + \underbrace{v(t)}_{\text{Son reales}} i$$

y diferencial si:

$$z'(t_0) = u'(t_0) + v'(t_0) i$$

y Integrar

$$\int_c^d z(t)\,dt = \int_c^d u(t)\,dt + i \int_c^d v(t)\,dt.$$

Supongamos que $\lambda = \alpha + \beta i$, podemos definir la función

$$y(x) = e^{\lambda x}$$
$$= e^{(\alpha + \beta i)x}$$
$$= e^{\alpha x} \cdot e^{\beta i x}$$
$$= e^{\alpha x} \cdot (\cos(\beta x) + i \operatorname{Sen}(\beta x))$$
$$= e^{\alpha x} \cos(\beta x) + (e^{\alpha x} \operatorname{Sen}(\beta x)) i$$

Derivando obtenemos

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$
$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

- Recordemos

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad a, b, c \text{ constantes}$$

Buscamos soluciones de la forma $y(x) = e^{rx}$, tenemos que

$$y' = re^{rx} \quad \wedge \quad y'' = r^2 e^{rx}$$

Se sigue que $y(x) = e^{rx} = e^{rx}$ es una solución de (1) si r satisface la ecuación auxiliar

$$ar^2 + br + c = 0$$

Con

$$r = [\text{Fórmula cuadrática}]$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \underbrace{\frac{-b}{2a}}_{\text{Parte real}} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}_{\text{Parte imaginaria}}$$

Tenemos que

$$y(x) = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \cdot \operatorname{Sen}(\beta x)$$

Solución general: $y(x) = C_1 \cdot e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 \cdot e^{\alpha x} \operatorname{Sen}(\beta x)$

- Ejercicio

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

- Ecuación auxiliar

$$r^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow r = -\omega^2$$

$r = \omega i$ $\qquad$ $r = -\omega i$

$r = 0 + \omega i$

$y_1 = e^{0x} \cdot \cos(\omega x)$ $\qquad$ $y_2 = e^{0x} \cdot \operatorname{Sen}(\omega x)$

$= \cos(\omega x)$ $\qquad$ $= \operatorname{Sen}(\omega x)$

- Ejercicio

$$y'' - 6y' + 13y = 0$$

$a = 1, \quad b = -6, \quad c = 13$

- $b^2 - 4ac = 36 - 52 = -16$
- $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \dfrac{6}{2} = 3$
- $\beta = \dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \dfrac{\sqrt{16}}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

$y_1 = e^{3x} \cos(2x)$, $\qquad$ $y_2 = e^{3x} \cdot \operatorname{Sen}(2x)$

Solución general: $y(x) = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$

Noviembre 17 del 2022

ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS

- Sea L una ecuación diferencial.

- Teorema (Principio de Superposición) Sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones de las ecuaciones

$$L(y_1) = g_1 \quad y \quad L(y_2) = g_2$$

- Ej: $x^2y'' + y' + xy = \underbrace{\cos(x)}_{g_1} = y_1$

$$x^2y'' + y' + xy = \underbrace{\ln(x)}_{g_2} = y_2$$

$\tilde{y} = y_1 + y_2$ Solución:

$$x^2y'' + y' + xy = \cos(x) + \ln(x)$$

$$L(y) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x)$$

Lo anterior se sigue de:

$$L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2)$$
$$= C_1 g_1 + C_2 g_2$$

Podemos tener que

$$L(y) = C_1 g_1 + C_2 g_2 + \dots + C_n g_n$$

- Ej:

• Ej. Sea $y_1(x) = e^x$ solución de:

$$2y'' - 4y' + 4y = 2e^x$$

Sea $y_2(x) = x$ una solución de:

$$2y'' - 4y' + 4y = 4x - 4$$

Por el principio de superposición tenemos que

Puedo poner cualquier constante

$$y(x) = 2e^x + \frac{x}{2} = 2y_1 + \frac{1}{2}y_2$$

es solución de:

$$2y'' - 4y' + 4y = 4e^x + 2x - 2$$

o — o — o — o — o — o

• Teorema: Sean L definido como E.C y $y_{p_1}(x)$ y $y_{p_2}(x)$ dos soluciones de la ecuación

$$L(y) = g.$$

Entonces existe una función $y_h(x)$ solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$ tal que

$$y_{p_2} = y_h + y_{p_1}$$

- Teorema: Sea $y_p(x)$ una solución definida en (a,b) de la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = g(x)$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \rightarrow \text{"Solución general"}$$

1 • Ej: Encontremos la solución general para la ecuación

$$y'' - 6y' + 13y = 5e^{2x}$$

Sabemos que una solución particular $y_p = e^{2x}$. Recordando que la ecuación homogénea asociada.

• Solucionamos el homogéneo

$$y'' - 6y' + 13y = 0$$

- Por ecuación auxiliar

$$r^2 - 6r + 13 = 0$$

$a = 1$ $b = -6$ $c = 13$

• $b^2 - 4ac = -16$,

$-16 < 0$

- Solución compleja $\alpha + \beta i$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(1)} = 3$$

$$\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

• $y_h = C_1 \cdot e^{3x} \cos(2x) + C_2 \cdot e^{3x} \cdot \operatorname{Sen}(2x)$

• Solución general:

$$y = \underbrace{C_1 \cdot e^{3x} \cos(2x) + C_2 e^{3x} \operatorname{Sen}(2x)}_{\text{Podemos poner cualquier constantes.}} + e^{2x}$$

- Método de los coeficientes indeterminados

Tenemos una E.C con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

Siendo $g(x)$ correspondiente a una función polinómica, exponencial, seno, coseno o suma finita de estas.

- Ej: Hallemos solución de la E.D:

$$y'' - 3y' + 2y = x + 2.$$

- Empezamos con un supuesto, siendo que ¿$A, B \in \mathbb{R}$?

$$y = Ax + B, \quad y' = A, \quad y'' = 0$$

- Sustituimos en la ecuación

$$0 - 3A + 2(Ax + B) = x + 2$$

$$-3A + 2Ax + 2B = x + 2$$

$$\boxed{2A}x + \boxed{2B - 3A}\,\boxed{1}x + \boxed{2}$$

- Luego

$2A = 1$, $A = 1/2$

$2B - 3A = 2$, $2B - \frac{3}{2} = 2$, $2B = 2 + \frac{3}{2}$

$2B = \frac{7}{2}$, $B = \frac{7}{4}$

- Luego

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$$

• Ej 2: Hallamos solución de la E.D:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$$

- Empezamos con un supuesto

$$y = Ae^{3x} \quad , \quad y' = 3Ae^{3x} \quad ; \quad y'' = 9Ae^{3x}$$

- Sustituimos en la ecuación

$$9Ae^{3x} - 3(3Ae^{3x}) + 2Ae^{3x} = e^{3x}$$

$$9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = e^{3x}$$

$$2Ae^{3x} = e^{3x}$$

$$2A = 1$$

$$A = \frac{1}{2}$$

- La solución es

$$y = \frac{1}{2}e^{3x}$$

• Ej 3: Hallamos solución particular de la E.D:

$$y'' - y' - y = \cos(x)$$

- Empezamos supuesto

$$y = A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x) \quad , \quad y' = -A\operatorname{sen}(x) + B\cos(x)$$

$$y'' = -A\cos(x) - B\operatorname{sen}(x)$$

- Reemplazamos en la ecuación

$$-A\cos(x) - B\operatorname{sen}(x) - (-A\operatorname{sen}(x) + B\cos(x)) - (A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x)) = \cos(x)$$

$$-A\cos(x) - B\operatorname{sen}(x) + A\operatorname{sen}(x) - B\cos(x) - A\cos(x) - B\operatorname{sen}(x) = \cos(x)$$

$$(-2A - B)\cos(x) + (-2B + A)\operatorname{sen}(x) = 1\cos(x) + 0\operatorname{sen}(x)$$

• $-2A - B = 1$

• $A - 2B = 0 \rightarrow A = 2B \rightarrow$ • $-2(2B) - B = 1$

$$-5B = 1, \quad B = -\frac{1}{5} \qquad A = -\frac{2}{5}$$

2000 < 17x

- Luego

$$y = \frac{-2}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\operatorname{Sen}(x)$$

• Ej 4: Hallamos Solución particular de la E.D

$$y'' - y' = 3$$

$y = A$, $y' = 0$, $y'' = 0$

- Reemplazando en la ecuación

$$0 = 3$$

Pero... No es homogeneo porque debe de ser igual a Cero

$y = Ax$, $y' = A$, $y'' = 0$

- Reemplazamos

$0 - A = 3$, $-A = 3$, $A = -3$

Así: $y = -3x$ es una solución particular y la solución general es

$$y = A + Be^{x} - 3x$$

Noviembre 22 del 2012

Continuación

- Caso I

• $ay'' + by' + cy = 0$

$g(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

$y_{(p)}(x) = (A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0) x^h$

donde A son dos coeficientes y h es la multiplicidad de $r = 0$

- Caso II

- Caso III

• Ej: Solución de

$$y'' + 2y' - 3y = x^2 \quad (\text{Caso I})$$

- Hallamos 'r'

$r^2 + 2r - 3 = 0$

$(r + 3)(r - 1) = 0$

$r = -3$ ó $r = 1$

- ¿$r = 0$? es raíz 0 RTA: No, por tanto

Multiplicidad de "$r = 0$" no hay raíces igual a cero, por lo que:

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C)x^h$$

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

• Ej: Solución particular de (Caso I)

$$y'' + 2y' = x^2$$

- Hallamos 'r' $y'' + 2y' = 0$

$r^2 + 2r = 0$

$r(r+2) = 0$

$r = 0$ $\quad$ $r = -2$

• Multiplicidad de "$r=0$" es 1, por lo que $h = 1$ por lo tanto.

R//: $y_p = (Ax^2 + Bx + C)\,x^1$

• Ej: Solución particular de

$$y'' + 2y' - 3y = x^1 e^x \qquad \text{(Caso II)}$$

• $y_p = e^x (Ax + B)\,x^h$

- Determinamos nuestro 'h' hallando 'r'

$r^2 + 2r - 3 = 0$

$(r+3)(r-1)$

$r = -3$ $\quad$ $r = 1$, por lo que $h = 1$ porque hay 1 "$r=1$"

α

R//: $y_p = e^x (Ax + B)\,x$

• Ej: Solución particular de

$$y'' + 2y' = x^2 e^x$$

- Determinamos hallando r

$r^2 + 2r = 0$

$r(r+2) = 0$

$r = 0$ $\quad$ $r = -2$ $\qquad$ $\alpha = 1$, multiplicidad es 0

$$\boxed{\text{Tell}} = y_p = e^{x}(Ax+B)$$

Ej 5: Solución particular de

$$y'' + 2y' - 3y = e^{2x}\left(x^{1}\cdot\cos(2x) + \underbrace{1\cdot\sin(2x)}_{x^{0}}\right) \qquad (\text{Caso III})$$

Deben de ser iguales. "2x"

Grado 0 = A
Grado 1 = $Ax + B$
Grado 2 = $Ax^2 + Bx + C$
Grado ...

Grado 0 y Grado 1 → Tomo el mayor.

$$y_p = e^{\overset{\alpha}{2x}}\left((Ax+B)\cos(\overset{\beta}{2x}) + (Cx+D)\sin(2x)\right)\cdot x^{h}$$

- Hallamos "r"

$$r^2 + 2r - 3 = 0$$

$$(r+3)(r-1)$$

$$r = -3 \qquad r = 1$$

- Evaluamos multiplicidad con $\alpha + \beta i = 2 + 2i$

lo cual tiene multiplicidad 0

$h = 0$

$$\boxed{\text{Tell}} = y_p = e^{2x}\left((Ax+B)\cos(2x) + (Cx+D)\sin(2x)\right)$$

Ej: Halle Solución de

$\alpha = 1 + i$

$$y'' + 2y' + 2y = e^x \cdot \cos(x)$$

- Hallo las 'r'

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

$a = 1 \qquad b = 2 \qquad c = 2$

- $b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4 < 0$

- Solución compleja

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad r = -1 + i \qquad r = -1 - i$$

$$\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{4}}{2(1)} = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

- $y_p = e^x (A \cdot \cos(x) + B \cdot \operatorname{Sen}(x))\, x^h$

Raíces '$1 + i$' con multiplicidad de 0

$$\text{Tal} = y_p = e^x (A \cdot \cos(x) + B \cdot \operatorname{Sen}(x))$$

Ej 7. Halle Solución de

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \cdot \cos(x)$$

"Do lo mismo de arriba con raíces"

$r_1 = 1 + i \qquad r_2 = 1 - i$

- En caso de $y'' + 3y' + 5y = e^x x \cos(x) + e^x \operatorname{Sen}(2x)$

Debo de hacer

- $y'' + 3y' + 5y = e^x x \cos(x)$
  - y_{p1}
- $y'' + 3y' + 5y = e^x \operatorname{Sen}(2x)$
  - y_{p2}

$y_p = y_{p1} + y_{p2}$

También aplica para $2y'' + y' + 4y = \underbrace{e^x x + e^{2x}}$

Separo → Separo para obtener y_{p1} y y_{p2}

- ¿Como despejar las constantes?
  - Ej 2: $y_p = (Ax^2 + Bx + C)x$
    $= Ax^3 + Bx^2 + Cx$

- Derivamos

$y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C$

$y_p'' = 6Ax + 2B$

Solución final (Particular): $y_p = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x$

- Reemplazamos en la respectiva ecuación.

$y'' + 2y' = x^2$

$(6Ax + 2B) + 2(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2$

$6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx + 2C = x^2$

$1x^2 + 0x + 0$ $\quad 6Ax^2 + (6A + 4B)x + 2B + 2C = x^2$

- $6A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{6}$
- $6A + 4B = 0 \rightarrow 1 + 4B = 0 \rightarrow 4B = -1$ $\quad B = -\frac{1}{4}$
- $2B + 2C = 0 \rightarrow -\frac{1}{2} + 2C = 0 \rightarrow 2C = \frac{1}{2} \rightarrow C = \frac{1}{4}$

- Solución General

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x$$

Noviembre 24 del 2022

METODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS

- Método de Cramer:

- $v_1' = -\dfrac{y_2 g}{W(y_1, y_2)}$ $\qquad$ - $v_2' = \dfrac{y_1 g}{W(y_1, y_2)}$

$\downarrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$

- $v_1 = -\displaystyle\int \frac{y_2 g}{W(y_1, y_2)}\, dx$ $\qquad$ - $v_2 = \displaystyle\int \frac{y_1 g}{W(y_1, y_2)}\, dx$

- Ej: 1: Halle la solución particular de

$$y'' + 2y' = xe^x$$

- $g(x) = xe^x$, $\qquad y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$

$\downarrow$

$r^2 + 2r = 0$

$r(r+2) = 0$

$r = 0 \qquad r = -2$

$\downarrow$

$y_1 = e^{0x} = 1, \qquad y_2 = e^{-2x}$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e^{-2x} \\ 0 & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-2x}$$

- $v_1 = -\displaystyle\int \frac{xe^x \cdot e^{-2x}}{-2e^{-2x}}\, dx = +\frac{1}{2} \cdot \int xe^x \cdot dx$ *

* $u = x \qquad v = e^x$
$du = dx \qquad dv = e^x dx$ $\Big\}$ $\frac{1}{2}\left(xe^x - \int e^x dx\right) = \frac{1}{2}(xe^x - e^x)$

- $V_2 = \int \frac{xe^{x} \cdot 1}{-2e^{-2x}}\, dx = -\frac{1}{2} \int x \cdot e^{3x}\, dx$ *

* $\left.\begin{array}{ll} u = x & v = \frac{1}{3}e^{3x} \\ du = dx & dv = e^{3x}\, dx \end{array}\right\} -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\, dx\right)$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right)$

- Hacemos solución particular (y_p)

$$\boxed{y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2}$$

$$= \left(\frac{xe^{x}}{2} - \frac{e^{x}}{2}\right)1 + \left(-\frac{x}{6}e^{3x} + \frac{e^{3x}}{18}\right)e^{-2x}$$

$$= e^{x}\left(\frac{x}{3} - \frac{8}{18}\right)$$

- Ej 2: Halle una solución particular de

$$y'' + y = \operatorname{Sec}(x)$$

Tenemos que la ecuación auxiliar $r^2 + 1 = 0$ tiene soluciones complejas i y $-i$

- $\alpha + i\beta = i$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$
- $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \cdot \operatorname{Sen} \beta x$

$= \cos(\beta x)$ $\qquad = \operatorname{Sen}(\beta x)$

- $W = \begin{vmatrix} \cos(x) & \operatorname{Sen}(x) \\ -\operatorname{Sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2 x + \operatorname{Sen}^2 x = 1$
- $g(x) = \operatorname{Sec}(x)$
- $V_1 = -\int \frac{-\operatorname{Sen}(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}}{1} = -\int -\frac{\operatorname{Sen}(x)}{\cos(x)}$

$V_2 = \int \frac{\cos(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}}{1} = \int 1\, dx = x$

$y = y_{g\acute{e}n} + y_p$

- $V_1 = \left.\begin{array}{l} u = \cos(x) \\ du = -\operatorname{Sen}(x) \end{array}\right\} \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| = \ln|\cos(x)|$

$y_p = C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{Sen}(x) + \cos(x) \cdot \ln|\cos(x)| + x \operatorname{Sen}(x)$

ECUACIONES DE CAUCHY EULER

- De la forma:

$$ax^2y'' + bxy' + Cy = g(x)$$

- En su forma normal obtenemos que:

$$y'' + \frac{b}{ax}y' + \frac{C}{ax^2}y = h(x)$$

Teniendo que $P(x) = \frac{b}{ax}$ y $Q(x) = \frac{C}{ax^2}$

Noviembre 29 del 2022

Continuación...

- Método 1.

- Haremos cambio de variable, $x = e^t$ y así tenemos $y(t) = y$, transformando a una ecuación con coeficientes constantes. Buscamos soluciones $x > 0$.

Tenemos que $\frac{dx}{dt} = e^t$ y por regla de la cadena se sigue.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} e^t$$

Despejando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t}$$

$$\frac{d^2y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot e^t + \frac{dy}{dx} \cdot e^t$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot e^t + \frac{dy}{dx} e^t = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot e^{2t} + \frac{dy}{dx} e^t$$

Similarmente

$$\frac{d^2y}{dt^2} = e^t \frac{dy}{dx} + e^t \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dt} = e^t \frac{dy}{dt} + e^{2t} \frac{d^2y}{dx^2}$$

Despejando tenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

Tenemos que:

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = ae^{2t}\left(e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right) + be^{t}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right) + cy$$

$$= a\frac{d^2y}{dt^2} - a\frac{dy}{dt} + b\frac{dy}{dt} + cy$$

$$= a\frac{d^2y}{dt^2} + (b-a)\frac{dy}{dt} + cy$$

Se tiene de la formula

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + (b-a)\frac{dy}{dt} + cy = f(t)$$

donde $f(t) = g(e^t)$

La ecuación anterior es de coeficientes constantes, pudiendose obtener $y(t)$

Usando que $t = \ln(x)$, podemos encontrar $y(x)$

$x = e^t$

Ej 1. Para $x>0$, encontrar la solución general de la ecuación.

$$2x^2y'' - xy' - 2y = -3x$$

$a = 2, \quad b = -1, \quad c = -2$

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + (-1-2)\frac{dy}{dt} - 2y = -3e^t$$

$$2y'' - 3y' - 2y = 0$$

- Usamos el cambio de variable $x = e^t$

$$2x^2y'' - xy' - 2y = 0$$

$$2r^2 - 3r - 2 = 0$$

$$(r_1 + \tfrac{1}{2}) \quad (r_2 - 2)$$

$$r_1 = -\tfrac{1}{2} \qquad r_2 = 2$$

$$y_h = C_1 e^{-\frac{1}{2}t} + C_2 e^{2t}$$

- Usando $t = \ln(x)$ encontramos la solución general $y_h(x)$ de (1)

$$y_h(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}\ln(x)} + C_2 e^{2\ln(x)}$$

$$= C_1 e^{\ln(x^{-\frac{1}{2}})} + C_2 e^{\ln(x^2)}$$

$$= C_1 x^{-\frac{1}{2}} + C_2 x^2$$

- Usamos el método de variación de parámetros, esto para determinar una solución particular de la forma:

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 \; ; \quad v_1 = -\int \frac{y_2 y}{W}\,dx$$

$$v_2 = \int \frac{y_1 y}{W}\,dx$$

$$y_p(t) = v_1(t)e^{-\frac{1}{2}t} + v_2(t)e^{2t}$$

- Calculamos Wronskiano

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} & e^{2t} \\ -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} & 2e^{2t} \end{vmatrix}$$

$$= 2e^{-\frac{1}{2}t+2t} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t+2t}$$

$$= 2e^{\frac{3}{2}t} + \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}t} = \frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}$$

- Luego

$$v_1(t) = -\int \frac{e^{2t}\left(-\frac{3}{2}e^{t}\right)}{\frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}}\,dt = \frac{3}{5}\int e^{\frac{3}{2}t}\,dt$$

$$= \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}t}\right) = \frac{2}{5}e^{\frac{3}{2}t}$$

$$v_2(t) = \int \frac{e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{3}{2}e^{t}\right)}{\frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}}\,dt = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}\int e^{-\frac{1}{2}t+t-\frac{3}{2}t}\,dt$$

$$= -\frac{3}{5}\int e^{-t}\,dt = -\frac{3}{5}\left(-e^{-t}\right)$$

$$= \frac{3}{5}e^{-t}$$

- Por tanto

$$y_p(t) = \frac{2}{5}e^{\frac{3}{2}t}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\right) + \frac{3}{5}e^{-t}\left(2^{t}\right) = e^{t}$$

- - Recordando que $t = \ln(x)$ obtenemos que

$$y_h(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}\ln(x)} + C_2 e^{2\ln(x)}$$

$$= C_1\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) + C_2 x^2$$

y $y_p(x) = e^{\ln(x)} = x$

- Por tanto, la solución general para $x > 0$ es:

$$y(x) = C_1(x)^{-\frac{1}{2}} + C_2(-x)^2 + x, \quad x > 0$$

- Método 2

Buscamos soluciones de la forma $y = x^r$ para algún $r \in \mathbb{C}$ de la ecuación de Cauchy-Euler homogénea

Puede ponerse directamente: $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$

Tenemos que $y' = rx^{r-1}$ y $y'' = r(r-1)x^{r-2}$, sustituyendo en la ecuación, se sigue que

$$ax^2(r(r-1)x^{r-2}) + bx(rx^{r-1}) + cx^r = 0$$

Factorizando x^r obtenemos

$$x^r(a(r(r-1)) + br + c) = 0$$

Dado que $x^r > 0$ y en tanto no es la función nula obtenemos la:

$$\underbrace{ar^2 + (b-a)r + c = 0}_{\text{Ecuación Auxiliar o Indicial}}$$

- Raíces reales distintas

- Si $r_1 \neq r_2$, un conjunto fundamental de soluciones es $\{x^{r_1}, x^{r_2}\}$, es decir:

$$y_h(x) = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$$

- Raíces reales iguales

- Si $r = r_1 = r_2$ son raíces iguales tenemos una solución.

$$y_h(x) = C_1 x^r + C_2 x^r \cdot \ln(x)$$

- Raíces complejas

- En el caso complejo, nos soluciones serían.

$$y_h(x) = C_1 \cdot x^{\lambda} \cos(n \cdot \ln(x)) + C_2 \cdot x^{\lambda} \cdot \operatorname{Sen}(n \cdot \ln(x))$$

$$W = n x^{2\lambda - 1} \neq 0$$

Diciembre 1 del 2022.

Continuación

- Ej 1: Para $x > 0$, la ecuación

$$2x^2 y'' + 8xy' + 4y = 6x$$

- Hallamos $a = 2$, $b = 8$, $c = 4$

• $2r^2 + 6r + 4 = 0$

$(r+2)(r+1) = 0$ → $r = -2$, $r = -1$

$y_h(x) = \underbrace{C_1 x^{-2}}_{y_1} + \underbrace{C_2 x^{-1}}_{y_2}$

- Ej Otro metodo

• $2y'' + 6y' + 4y = 0$, $x = e^t$

$y_h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} = C_1 (e^t)^{-2} + C_2 (e^t)^{-1}$

$y_h = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-1}$

- Pasamos a la ecuación normal para obtener particular (y_p)

• $y'' + \frac{4}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = \frac{3}{x}$ } Forma normal

$y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2 = V_1 x^{-2} + V_2 x^{-1}$

- Calculamos el Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x^{-2} & x^{-1} \\ -2x^{-3} & -x^{-2} \end{vmatrix} = -x^{-4} + 2x^{-4} = x^{-4}$$

- Calculamos V_1 y V_2

- $V_1 = -\int \frac{\frac{3}{x} \cdot x^{-1}}{x^{-4}} dx = -3 \int x^{-2} \cdot x^{4} \, dx$

$= -3 \int x^{2} dx = -x^{3}$

- $V_2 = \int \frac{\frac{3}{x} \cdot x^{-2}}{x^{-4}} dx = 3 \int x \cdot dx = \frac{3}{2} x^{2}$

$y_p = (-x^{3}) x^{-2} + \left(\frac{3}{2} x^{2}\right) x^{-1} = -x + \frac{3}{2} x = \frac{1}{2} x$

- La solución final es:

$y = C_1 (-x)^{-2} + C_2 x^{-1} + \frac{1}{2} x, \quad x > 0$

$y = C_1 (x)^{2} + C_2 (x^{-1}) + \frac{1}{2} x \quad x < 0$

- Ej 2: $x^{2} y'' + 3xy' + y = 0$

- Hallamos homogenea

- $a = 1, \; b = 3, \; c = 1$

- $(r+1)^{2} \rightarrow r = -1$

- $y_h = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-1} \cdot \ln|x|$

- Ej 3: $x^{2} y'' + xy' + 4y = 0$

- $a = 1, \; b = 1, \; c = 4, \qquad b - a = 1 - 1 = 0$

$r^{2} = -4 \rightarrow r = -2i$

$\searrow r = 2i$

- $\lambda + \mu i, \quad \lambda = 0, \; \mu = 2$

- $y_h = C_1 x^{0} \cdot \cos(2 \cdot \ln|x|) + C_2 x^{0} \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \ln|x|)$

$y_h = C_1 \cdot \cos(2 \cdot \ln(x)) + C_2 \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \ln(x)), \quad x > 0$

• Ej4: $x^2 y'' - 5xy' + 13y = 0$

• $a = 1$, $b = -5$, $c = 13$, $b - a = -6$

• $r^2 - 6r + 13 = 0$

$b^2 - 4ac = 36 - 52 = -16 < 0$

- Soluciones Complejas

• $\lambda = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2} = 3$

• $\mu = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$

• $y_h = C_1 \cdot x^3 \cdot \cos(2 \cdot \ln(x)) + C_2 \cdot x^3 \cdot \operatorname{Sen}(2 \cdot \ln(x))$

VIBRACIONES MECÁNICAS

Fuerzas que actúan sobre la masa 'm'

a) Gravedad, $F_1 = mg$

b) Fuerza de restitución: $F_2 = -k(x + l)$. Luego $F_2 = -kx - mg$

c) Fuerza de amortiguación: $F_3 = -b \frac{dx}{dt}$ donde $b > 0$

d) Fuerzas externas: $F_4 = f(t)$

Aplicando 2da ley de Newton:

$$m \frac{d^2x}{dt} = mg - kx - mg - b \frac{dx}{dt} + f(t)$$

Obtenemos la ecuación diferencial de segundo orden:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \quad \rightarrow \text{Ecuación general.}$$

Cuando $b = 0$, el sistema es no amortiguado; en caso contrario es amortiguado.

Si: $f(t) \equiv 0$, es libre.

- Movimiento libre no amortiguado

El movimiento satisface la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

- $x = x(t)$

$$mx'' + kx = 0$$

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0 \quad , \quad w = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow w^2 = \frac{k}{m}$$

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$r^2 + w^2 = 0 \rightarrow r^2 = -w^2 \qquad \alpha = 0$$

$$r_2 = -wi \qquad r_1 = wi \qquad \beta = w$$

- $x(t) = C_1 \cdot \cos(wt) + C_2 \cdot \operatorname{Sen}(wt)$

$$= C_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) + C_2 \cdot \operatorname{Sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

- $P = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ } Periodo

- Al final, $C_1 = A \cdot \operatorname{Sen}\phi$ y $C_2 = A \cdot \cos\phi$

$x(t) =$ Siendo $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ y $\phi = \arctan\left(\frac{C_1}{C_2}\right)$

- $x(t) = A \cdot \operatorname{Sen}(wt + \phi)$

Diciembre 6 del 2022

Continuación...

- Movimiento libre amortiguado

• Tomo de la forma:

$$mx'' + bx' + kx = 0 \text{ ó } = f(t)$$

$$x = x(t)$$

$$mr^2 + br + k = 0$$

$$a = m, \quad b = b \quad c = k$$

$$b^2 - 4ac = b^2 - 4mk$$

- < 0 Subamortiguado o oscilatorio
- $= 0$ Críticamente amortiguado
- > 0 Sobre-amortiguado

- Subamortiguado oscilado

$$\alpha + \beta i$$

$$\alpha = \frac{-b}{2m} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}$$

• $x(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 \cdot e^{\alpha t} \cdot \operatorname{Sen}(\beta t)$

$$x(t) = e^{\alpha t} \cdot A \operatorname{Sen}(\beta t + \phi)$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad y \quad \phi = \arctan\left(\frac{C_1}{C_2}\right)$$

- Amortiguado crítico

En este caso $b^2 = 4mk$, y la raíz es

$$\alpha = -\frac{b}{2m}$$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$x(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 t e^{\alpha t}$$
$$= e^{\alpha t}(C_1 + C_2 t)$$

- Sobreamortiguado

$b^2 > 4mk$

$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$ $\quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$

$X(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$

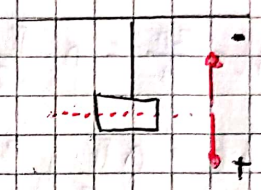
MOVIMIENTO FORZADO

Diciembre 13 del 2022

Continuación...

• E: 1

• $F = Kx$ • $m = 25$



$400 = K \times 1$

$x(0) = -0{,}5$ $x'(0) = 2$

• $b = 0$

• Ecuación: $25x'' + 400x = 0$

$x'' + 16x = 0$

$r^2 + 16 = 0$

$r^2 = -16$ → $r_1 = 4j$, $r_2 = -4j$

• $x(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \cdot \operatorname{Sen}(\beta t)$

$x(t) = C_1 \cdot \cos(4t) + C_2 \cdot \operatorname{Sen}(4t)$

• $\omega = \sqrt{16} = 4$, $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$x(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = C_1 =$

$C_1 = -0{,}5$

$x'(t) = -4C_1 \cdot \operatorname{Sen}(4t) + 4C_2 \cdot \cos(4t)$

$x'(0) = -4C_1 \cdot 0 + 4C_2 \cdot 1 = 4C_2$

$C_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$x(t) = -\frac{1}{2}\cos(4t) + \frac{1}{2}\operatorname{Sen}(4t)$

-Tomando que $A = \frac{1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\phi = \frac{3\pi}{4}$ obtenemos que

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(4t - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \cos(4t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(4t) \right)$$

$$4t - \frac{3\pi}{4} = n \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$4t = n\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}$$

$$t = \frac{n\pi}{8} + \frac{3\pi}{16}$$, cuando 'n' es impar para que $\cos(\ ) = 0$

• Ej 2: (Caso libre)

$m = 6$ $\quad g = 980 \ \frac{cm}{s^2}$

$mg = ke$

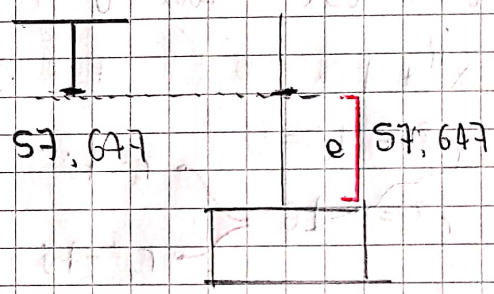
$6 \cdot 980 = k \cdot 57{,}647$

$k = \frac{6 \cdot 980}{57{,}647}$

$102 = k$

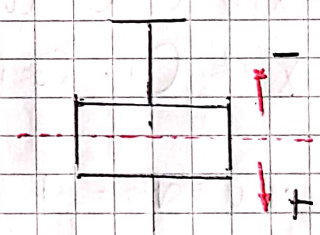
$400 = k \cdot 57{,}647$

• $F = ke$



• $x'(0) = 10$

• $x(0) = 70$



• $x(0) = 70$ $\quad$ • $x'(0) = 10$ $\quad b = 12$ $\quad$ • $f(t) = 0$

• $mx'' + bx' + kx = f(t)$

$$6x'' + 12x' + 102x = 0$$

$x'' + 2x' + 17x = 0$ $\quad a = 1 \quad b = 2 \quad c = 17$

$r^2 + 2r + 17 = 0$ $\quad b^2 - 4ac \rightarrow 2^2 - 4(1)(17) < 0$

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$

$\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2} = 4$

$$x(t) = C_1 e^{-t} \cos(4t) + C_2 \cdot e^{-t} \operatorname{Sen}(4t)$$
$$= e^{-t}\left(C_1 \cdot \cos(4t) + C_2 \cdot \operatorname{Sen}(4t)\right)$$

$$x(0) = C_1 = 70$$

$$x'(t) = -e^{-t}\left(C_1 \cdot \cos(4t) + C_2 \cdot \operatorname{Sen}(4t)\right) + e^{-t}\left(-4C_1 \cdot \operatorname{Sen}(4t) + 4C_2 \cdot \cos(4t)\right)$$

$$= e^{-t}\left((4C_2 - C_1) \cdot \cos(4t) - (4C_1 + C_2) \operatorname{Sen}(4t)\right)$$

- Ej Taller

$m = 16$ $\quad \downarrow = 98$

$x(0) = 100$, $x'(0) = 0$

$b = \frac{1}{2}$, $g = 980 \ \frac{cm}{s^2}$

$f(t) = 20 \cdot \cos(3t)$

$16 \cdot 980 = k \cdot 98$

$160 = k$

$$16x'' + \frac{1}{2}x' + 160x = 20 \cdot \cos(3t)$$

$16r^2 + \frac{1}{2}r + 160 = 0$. $\quad a = 16, \ b = \frac{1}{2}, \ c = 160$

$$b^2 - 4ac = \frac{1}{4} - 64 \cdot 160 < 0$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{1}{2}}{32} = \frac{-1}{64} \qquad \beta = \frac{\sqrt{10239{,}75}}{32} = 3{,}162$$

$$x_h(t) = C_1 e^{-\frac{1}{64}t} \cdot \cos(3{,}162t) + C_2 e^{-\frac{1}{64}t} \cdot \operatorname{Sen}(3{,}162t)$$

$$x_p = \left(A \cdot \cos(3t) + B \operatorname{Sen}(3t)\right) x^n \ , \quad n = 0$$

$X_p = A \cdot \cos(3t) + B \cdot \operatorname{Sen}(3t)$

$X_p' = -3A \operatorname{Sen}(3t) + 3B \cos(3t)$

$X_p'' = -9A \cos(3t) - 9B \operatorname{Sen}(3t)$

- Reemplazo en la ecuación

- $-144A \cos(3t) - 144B \operatorname{Sen}(3t)$

$-\frac{3}{2}A \operatorname{Sen}(3t) + \frac{3}{2}B \cos(3t) + 160A \cos(3t) + 160B \operatorname{Sen}(3t) = 20\cos(3t) + 0 \cdot \operatorname{Sen}(3t)$

- $\left(16A + \frac{3}{2}B\right) \cos(3t) + \left(16B - \frac{3}{2}A\right) \operatorname{Sen}(3t) = 20 \cos(3t) + 0 \operatorname{Sen}(3t)$

SERIES DE POTENCIAS

- Una serie de potencias en $x-a$ es una serie infinita de la forma.

$$\sum_{n=k}^{\infty} C_n (x-a)^n$$

La serie converge en x_0 si al tomar $x = x_0$ en (1) la serie converge, caso contrario diremos que la serie diverge en x_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L \quad \text{si} \quad \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n = L$$

- Solo hay tres posibilidades:

1) Solo converge en 'a'

2) Existe $R > 0$ tal que la serie converge para todo x que satisfaga $|x-a| < R$, y diverge para $|x-a| > R$

3) La serie converge para todo x

- A 'R' se le llama Radio de Convergencia, puede ser 0 o ∞. Se le llama centro al número 'a'

- La serie converge absolutamente para un conjunto de valores de 'x' que verifican que $|x-a| < r$.

- Criterio de la razón o de la raíz: Para calcular el radio de convergencia.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$$

$L > 1$ la serie diverge

$L < 1$ " " converge

$L = 1$ no se puede concluir.

ó

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

- Una función es analítica en el punto "p" si se puede representar por una serie de potencias en "x − p", con radio de convergencia positivo.

- Resolver la ecuación:

$$y' - y = 0 \qquad y = C \cdot e^{x}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad y' = n \cdot a_n x^{n-1}$$

¿a_n? Reemplazando en la ecuación

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n$$

- $j = n - 1$

$j + 1 = n$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\, a_{j+1} \cdot x^j - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$j = n$

$$\sum_{n=0} (n+1)\, a_{n+1} \cdot x^n - \sum_{n=0} a_n \cdot x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} x^n - a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)\, a_{n+1} - a_n \right] x^n = 0$$

$$(n+1)\, a_{n+1} - a_n = 0$$

$$(n+1)\, a_{n+1} = a_n$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$$

- Haciendo $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ Observamos que

$$a_n = \frac{a_0}{n!}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{n!} x^n$$

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$y = a_0 e^x$$

$$y = C \cdot e^x$$

- Resolve la ecuación

$$y'' + y = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

- $j = n-2$
  $j+2 = n$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1) a_{j+2} \cdot x^j + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) \cdot a_{n+2} \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) \cdot a_{n+2} x^n + a_n \right] x^n = 0$$

Diciembre 27 del 2022

Continuación...

- Teorema

• Sea x_0 un punto ordinario de la ecuación entonces se pueden determinar dos soluciones linealmente independientes en series de potencias centradas en x_0, adicionalmente el radio de convergencia es la distancia desde x_0 al punto singular mas cercano.

- de Hermite

La ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Desde que $P(x) = -2x$ y $Q(x) = \lambda$ todos sus puntos son ordinarios y tiene dos soluciones en serie de potencias centradas en cero, definidas en $\mathbb{R}$

Reemplazando $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en la ecuación obtenemos

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 2a_2 + \lambda a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n-\lambda))x^n = 0.$$

• $a_2 = -\frac{\lambda}{2} a_0$

- Teorema (Frobenius): Suponga que ambas series están definidas en $(x_0 - R, x_0 + R)$ entonces la ecuación tiene al menos una solución de la forma.

$$y(x) = |x - x_0|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Valida en los intervalos $(x_0 - R, x_0)$ y $(x_0, x_0 + R)$ donde r es una raíz

• $(x - x_0) \cdot P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ y

• $(x - x_0)^2 Q(x) = \sum^{\infty}$

$\sum a_n x^n \leftarrow$ Método de Frobenius

- Este teorema nos garantiza por lo menos una solución
- r

- Ej: $x^2 y'' - xy' + (1-x)y = 0 \leftarrow$ Resolver

Rta:

- Lo ponemos en forma normal

$$y'' - \frac{1}{x} y' + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) y = 0$$

$$\cdot P(x) = -\frac{1}{x} \qquad \cdot Q(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad \text{con } x = 0$$

- Usamos método de Frobenius

$$\cdot\ xP(x) = x\left(\frac{-1}{x}\right) = -1$$

$$\cdot\ x^2 \cdot Q(x) = x^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = 1 - x$$

Analíticas en 0

Es un punto singular regular

Usamos método de Frobenius

$$\cdot\ y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \Big\} \text{ Solución de esta forma}$$

$x > 0, \quad r = ?$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) \cdot x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

- Reemplazamos

$$\cdot\ x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

Enero 10 de 2022

- $\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, a_n \cdot x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n \cdot x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1 \right] a_n \cdot x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0$

$$(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1 = (n+r)(n+r-1) - (n+r-1)$$
$$= (n+r-1)\left[n+r-1 \right]$$
$$= (n+r-1)^2$$

- $\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)^2 a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0$

- $\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)^2 a_n \cdot x^{n+r} - \sum_{j=1}^{\infty} a_{j-1} x^{j+r}$

- $\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)^2 \cdot a_n \cdot x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \cdot x^{n+r} = 0,$

- $(r-1)^2 a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)^2 a_n x^{n+r} - a_{n-1} x^{n+r} = 0$

- $(r-1)^2 \cdot a_0 \cdot x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r-1)^2 \cdot a_n - a_{n-1} \right] x^{n+r} = 0$

  * $(r-1)^2 = 0$, eso debe ser cero.
  * $(n+r-1)^2 \cdot a_n - a_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$

José Luis Hincapié Ruchelly
Jose Luis Hincapié Ruchelly

- Otro ejercicio

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0$$

Con $\lambda \geq 0$.

- Pasamos a forma normal

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{(x^2-\lambda^2)}{x^2} = 0 \qquad ¿x=0?$$

$$P(x) = \frac{1}{x}, \qquad Q(x) = \frac{(x^2-\lambda^2)}{x^2}$$

$$x \cdot P(x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1 = \alpha_0$$

$$x^2 \cdot Q(x) = x^2 \frac{(x^2-\lambda^2)}{x^2} = x^2 - \lambda^2 = \underbrace{-\lambda^2}_{\beta_0} + x^2$$

$x=0$, es singular regular.

- $r^2 + (\alpha_0 - 1)r + \beta_0 = 0$

$$r^2 + (1-1)r - \lambda^2 = 0$$

$$r^2 - \lambda^2 = 0$$

a, b, c por $\exists$. Campos de c

mogu

Enero 12 del 2022

Continuación...

- Caso $\lambda = r$.

Expresión general $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n \cdot a_0}{n!\,(2^n)^2\,(1+\lambda)(2+\lambda)\dots(n+\lambda)}$ para $n = 1, 2, 3 \dots$

Se llega a la solución

$$y(x) = a_0 x^{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot a_0}{n!\,(2^n)^2\,(1+\lambda)(2+\lambda)\dots(n+\lambda)} x^{2n+\lambda}$$

- $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{s-1}\, dt$
  - Entero no negativo: $\Gamma(n+1) = n!$
  - Negativo no entero: $\Gamma(s) = \dfrac{\Gamma(s+1)}{s}$
  - p diferente de un entero negativo.

$$\frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(p+1)} = (p+1)(p+2)\dots(p+n)$$

Se llega a la solución

$$\cancel{y(x) = a_0 x^{\lambda} + \sum}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \Gamma(\lambda+1)\, a_0}{n!\,(2^n)^2\,\Gamma(n+\lambda+1)} x^{2n+\lambda}$$

- Tomando $a_0 = \dfrac{1}{2^{\lambda}\,\Gamma(\lambda+1)}$ se tiene las funciones de Bessel de primera especie.

$$J_{\lambda}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\lambda+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\lambda}$$

• Jueves 26 – Traer hoja con formulas – Propiedades de Laplace.

– Caso $n = -\lambda$

• $$J_{-\lambda}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-\lambda+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\lambda}$$

– Transformada Laplace

• $$\hat{u}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t)\,dt$$

Ej: Calculemos la transformada de 1.

$$L(1) = \frac{1}{s}$$

Ej 2: Calculemos la transformada de Laplace de e^{at} para $s > a$ usando la definición

$$L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$

Ej 3:

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$$

Ej 4:

$$L\{\cos(kt)\}(s) = \frac{s}{s^2 + k^2}$$

$$L\{\operatorname{sen}(kt)\}(s) = \frac{k}{s^2 + k^2}$$

• Actividad Punto 6, a, b, c.

– Función de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

– Propiedades

Enero 17 de 2022

Continuación...

- Tener en cuenta imprimir propiedades → Imprimir la de las propiedades.
- Propiedad adicional:

$$L\{f''(t)\} = s^2 \cdot L\{f\} - s f(0) - f'(0)$$

- Convolución
  - La convolución de f y g se denota $f * g$. Se define como sigue:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\eta) \cdot g(t-\eta)\, d\eta$$

- Transformada de la Convolución

$$L\{f(t) * g(t)\} = L\{f(t)\} \cdot L\{g(t)\}$$

- Ej: Hallemos la transformada de Laplace de $f(t) = e^{at}$

$$L\{e^{at}\} = L\{e^{at} \cdot 1\}$$

$$= L\{1\}\Big|_{s \to s-a}$$

$$= \frac{1}{s}\Big|_{s \to s-a}$$

$$= \frac{1}{s-a}$$

• Ej2: $\mathcal{L}\{t\,e^{4t}\} = \frac{-d}{ds}\mathcal{L}\{e^{4t}\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-4}\right)$

$= -\frac{d}{ds}(s-4)^{-1}$

$= -(-1)(s-4)^{-2}$

$= (s-4)^{-2}$

$= \frac{1}{(s-4)^2}$

• Ej3: $\mathcal{L}\{5t^4 + 3t^3 - t + 3\} = 5\mathcal{L}\{t^4\} + 3\mathcal{L}\{t^3\} - \mathcal{L}\{t\} + 3\mathcal{L}\{1\}$

• $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

• Ej4: $\mathcal{L}\{t\cdot\cos(3t)\} = -\frac{d}{ds}\cdot\mathcal{L}\{\cos(3t)\}$

$= -\frac{d}{ds}\cdot\left(\frac{s}{s^2+9}\right) = -\left(\frac{1(s^2+9) - s(2s)}{(s^2+9)^2}\right)$

$= -\left(\frac{s^2+9-2s^2}{(s^2+9)^2}\right) = -\left(\frac{9-s^2}{(s^2+9)^2}\right)$

$= \frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}$

• Ej5: Sean $0 < a < b$ y calculamos de Laplace

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{si } t > b \end{cases}$$

· 6.6: $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \dfrac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{s}$

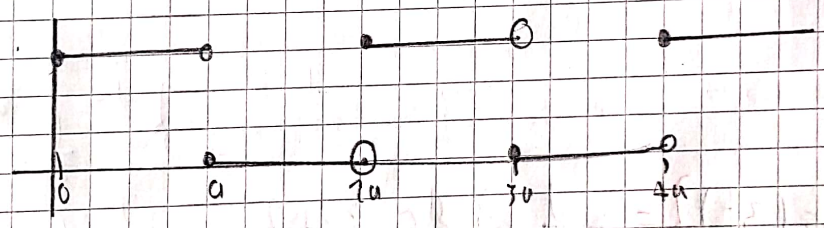
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t u^{50}\cdot e^{3u}\,du\right\} = \frac{1}{s}\cdot\mathcal{L}\cdot\left\{t^{50}\,e^{3t}\right\}$$

$$= \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\{t^{50}\}\Big|_{s\to s-3}$$

$$= \frac{1}{s}\left(\frac{50!}{s^{50+1}}\Bigg|_{s\to s-3}\right)$$

$$= \frac{1}{s}\ (\text{Me faltó})$$

· 6.7: (Función periódica)



· Periódica es $2a$

(Ver fotos)

· 6.8: $t * \cos(t) = \int_0^t (t-y)\cdot\cos(y)\,dy$

$$\mathcal{L}\{t * \cos(t)\} = \mathcal{L}\{t\}\cdot\mathcal{L}\{\cos(t)\}$$

$$= \frac{1}{s^2}\cdot\frac{s}{s^2+1}$$

• Ej 9: $f(t) = e^{t^2}$ ← Teniendo en cuenta esto.

$$\mathcal{L}\{e^{t^2}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{t^2} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{t^2 - ts} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{t^2 - ts + \frac{s^2}{4} - \frac{s^2}{4}} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{(t-\frac{s}{2})^2} \cdot e^{-\frac{s^2}{4}} dt$$

$$= e^{-\frac{s^2}{4}} \int_0^\infty e^{(t-\frac{s}{2})^2} dt$$

$$= \infty$$

$$(t - \frac{s}{2})^2 - \frac{s^2}{4}$$

- Condiciones de Convergencia

Lunes 19 de 2022

LAPLACE INVERSA.

- $f(t) \xrightarrow{L} L(f(t))$

L^{-1}

Inversa: L^{-1}

-- Propiedades

(Ya los tienes ewe)

- Ej: $L^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n$ Siendo de la inversa

- $L^{-1}\left\{\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right\} = e^{at} \cdot t^n$ ← Primera Propiedad de la translación

- $L^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}\right\} = e^{at} \cdot \cos(kt)$

- Ej: Encontrar

$$L^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s+5}\right\}$$

$$= \frac{3s+7}{s^2-2s+5} = \frac{3s+7}{(s-1)^2+4}$$

$$= A\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right) + B\left(\frac{2}{(s-1)^2+4}\right)$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{3s+7}{(s-1)^2+4}\right\} = A \cdot L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\} + B \cdot L^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+4}\right\}$$

$$= A \cdot e^t \cos(2t) + B \cdot e^t \cdot \operatorname{sen}(2t)$$

- Hallando A y B

$$3s+7 = A(s-1)+2B$$
$$= As - A + 2B$$

$$3 = A$$
$$2B - A = 7$$
$$2B - 3 = 7$$
$$2B = 10, \quad B = 5$$

- Ej 2: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-8}{s^2-s-2}\right\}$

$$= \frac{s-8}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}$$

$$= A\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + B\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= A\cdot e^{2t} + B\cdot e^{-t}$$

- Hallando 'A' y 'B'

$$s-8 = (A+B)s + (A-2B)$$

- Ej 3: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$

- Método de Heaviside.

Ej: $2x'' + 3x' + x = 8e^{-2t}$, $x(0) = -4$, $x'(0) = 2$

$\mathcal{L}\{x''\} = s^2 \cdot \mathcal{L}\{x\} - s \cdot x(0) - x'(0)$

$\mathcal{L}\{x'\} = s \cdot \mathcal{L}\{x\} - x(0)$

$\mathcal{L}\{x''\} = s^2 \cdot \mathcal{L}\{x\} + 4s - 2$

$\mathcal{L}\{x'\} = s \cdot \mathcal{L}\{x\} + 4$

$2(s^2 \cdot \mathcal{L}\{x\} + 4s - 2) + 3(s \cdot \mathcal{L}\{x\} + 4) + \mathcal{L}\{x\} = 8\mathcal{L}\{e^{-2t}\}$

$2s^2 + 8s - 4 + 3s\mathcal{L}\{x\} + 12 + \mathcal{L}\{x\} = 8 \cdot \left(\frac{1}{s-(-2)}\right)$

$\mathcal{L}\{x\}(2s^2 + 3s + 1) + 8s + 8 = 8 \cdot \left(\frac{1}{s+2}\right)$

Actividad: 1. (c)

El primero de cada uno (2.) (3.) (4.) .....

- De a 4 personas

- Observación

- Mediante el Sen Hiperbólico y Cos Hiperbólico.

Si

Enero 24 de 2023

Actividad - Taller

1. Método de Series de potencias alrededor de $x=0$

- $(1-x^2)y'' - 3xy' + 35y = 0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

- $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$

$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2}$

- Reemplazamos en la ecuación

$y'' - x^2 y'' - 3xy' + 35y = 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} - x^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} - 3x \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + 35 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) a_n \cdot x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3n \cdot a_n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 35 a_n \cdot x^n = 0$$

$j = n-2$ $\quad$ $j = n$ $\quad$ $j = n$ $\quad$ $j = n$

$n = j+1$ $\quad$ $n = j$ $\quad$ $n = j$ $\quad$ $n = j$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1) \cdot a_{j+2} \cdot x^j - \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j \cdot x^j - \sum_{j=1}^{\infty} 3j \cdot a_j \cdot x^j + \sum_{j=0}^{\infty} 35 a_j \cdot x^j = 0$$

- $(2)(1) \cdot a_2 \cdot 1 + (3)(2) a_3 \cdot x + \sum_{j=2}^{\infty} (j+2)(j+1) \cdot a_{j+2} \cdot x^j -$

$\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j \cdot x^j - 3 \cdot a_1 \cdot x - \sum_{j=2}^{\infty} 3j \cdot a_j \cdot x^j + 35 a_0 + 35 a_1 x +$

$\sum_{j=2}^{\infty} 35 a_j \cdot x^j = 0$

2) $xy'' + \left(\frac{1}{2} - x\right) y' - \frac{1}{2} y = 0$

- Derivamos

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ • $\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n \cdot x^{n+r-1}$ • $\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$

- Sustituimos

$xy'' + \frac{1}{2} y' - xy' - \frac{1}{2} y =$