TALLERES

ED

Septiembre 26 de 2022

Taller 1

Ecuaciones diferenciales ordinarias

1. Averigue si la funcion es solucion de la E.D correspondiente:

a) $y = \frac{\text{Sen } x}{3x}$ de $xy' + y = \text{Cos}(x)$

R/= • $y = \frac{\text{Sen } x}{3x} \longrightarrow y' = \frac{\text{Cos } x \cdot 3x - 3 \cdot \text{Sen } x}{9x^2}$

$$y' = \frac{\text{Cos}(x) \cdot x - \text{Sen}(x)}{3x^2}$$

• $y' = \frac{\text{Cos}(x)}{3x^2} - \frac{\text{Sen}(x)}{3x \cdot x} \longrightarrow y' = \frac{\text{Cos}(x)}{3x^2} - y \cdot \frac{1}{x}$

$y' + y \cdot \frac{1}{x} = \frac{\text{Cos}(x)}{3x^2} \longrightarrow 3x^2 \left(y' + y \cdot \frac{1}{x}\right) = \text{Cos}(x)$

$3x^2 y' + 3xy = \text{Cos}(x)$ • No es solucion

b) $y = 2x\sqrt{1-x^2}$ de $yy' = 4x - 8x^3$

R/= • $y = 2x\sqrt{1-x^2} \longrightarrow y' = 2 \cdot \sqrt{1-x^2} + 2x \cdot -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$yy' = 2x \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \left(2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ * $z = \sqrt{1-x^2}$

$yy' = 4x(1-x^2) - 4x^3$

$yy' = 4x - 8x^3$ • Si es solucion

c) $\left.\begin{array}{l} x = \text{Cos}(t) \\ y = e^t \end{array}\right\}$ de $y' + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

R/:- • $y = e^t \longrightarrow y' = e^t$

$$e^t + \frac{e^t}{\sqrt{1-\cos^2(t)}} = 0 \rightsquigarrow e^t + \frac{e^t}{\sqrt{\operatorname{Sen}^2(t)}}$$

$$e^t\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Sen}^2(t)}}\right) = 0 \longrightarrow$$ a) $e^t = 0$ (Falso

b) $1 + \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Sen}^2(t)}} = 0$, solo si $t = 0$

• $\frac{\operatorname{Sen}(t) + 1}{\operatorname{Sen}(t)} = 0 \rightsquigarrow \operatorname{Sen}(t) + 1 = 0$

$\operatorname{Sen}(t) = -1 \longrightarrow t = \frac{3\pi}{2}$ • Si es solución particular

$t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

d) $y = e^{-x^2} \cdot \int_0^x e^{t^2}\, dt + Ce^{-x^2}$ de $y' + 2xy = 1$

* $\frac{d}{dx}\left[\int_a^{u(x)} f(t)\, dt\right] = f(u(x)) \cdot u'(x)$

R/:- • $y' = \left[(e^{-x^2} \cdot -2x) \cdot \int_0^x e^{t^2}\, dt + Ce^{-x^2}\right] + e^{-x^2} \cdot e^{x^2} \cdot 1$

$y' = -2x \cdot \left[e^{-x^2} \cdot \int_0^x e^{t^2}\, dt + Ce^{-x^2}\right] + 1$

$y' = -2xy + 1$

$y' + 2xy = 1$ • Si es solución

2. Sustituye la función $y = \operatorname{arcsen}(2x)$ en la ecuación diferencial $y' = 2\sec(y)$ para ver si la satisfare

R/:- • $y = \operatorname{arcsen}(2x)$

$y' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \longrightarrow y' = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$

• $y' = 2\sec(y) \longrightarrow y' = 2 \cdot \sec(\operatorname{arcsen}(2x))$

$y' = 2 \cdot \frac{\sqrt{1-(2x)^2}}{-(2x)^2 + 1} \longrightarrow y' = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}$

$y' = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ • Si la satisfare

3. Dada la ecuación diferencial, su solución general y las condiciones iniciales, determine el valor de las constantes arbitrarias.

(a) $y^2 y' - 4x = 0$, $\quad y^3 = 6x^2 + C$, $\quad y(\frac{1}{2}) = 0$

R//= • $y^3 = 6x^2 + C$

$(0)^3 = 6(\frac{1}{2})^2 + C$

$0 = \frac{3}{2} + C$

$C = -\frac{3}{2}$

(b) $y' = y - y^2$, $\quad y = \frac{1}{1 + Ce^{-x}}$, $\quad y(0) = -\frac{1}{3}$

R//= • $y = \frac{1}{1 + Ce^{-x}}$

$-\frac{1}{3} = \frac{1}{1 + Ce^{-(0)}} \longrightarrow -\frac{1}{3} = \frac{1}{1 + C}$

$-\frac{1}{3}(1 + C) = 1$

$-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}C = 1$

$-\frac{1}{3}C = \frac{4}{3} \longrightarrow C = -4$

(c) $y'' + y = 0$, $\quad y = C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \operatorname{Sen}(x)$, $\quad y(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\quad y'(\frac{\pi}{6}) = 0$

R//= • $y = C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \operatorname{Sen}(x)$

$y' = -\operatorname{Sen}(x) \cdot C_1 + \cos(x) \cdot C_2$

• $\frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{6}) \cdot C_1 + C_2 \cdot \operatorname{Sen}(\frac{\pi}{6})$

$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} C_1 + \frac{1}{2} C_2$

• $0 = -\operatorname{Sen}(\frac{\pi}{6}) C_1 + \cos(\frac{\pi}{6}) \cdot C_2$

$0 = -\frac{1}{2} C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} C_2$

$\hookrightarrow C_1 = +\frac{2\sqrt{3}}{2} C_2 \rightarrow C_1 = +\sqrt{3}\, C_2$

$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(+\sqrt{3} C_2) + \frac{1}{2} C_2$

$\frac{1}{2} = \frac{3}{2} C_2 + \frac{1}{2} C_2$

$\frac{1}{2} = 2 C_2$

$\frac{1}{4} = C_2$

$C_1 = \sqrt{3}(\frac{1}{4})$

$C_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

4. Determine si el Teorema de existencia y unicidad garantiza que la ecuación diferencial dada tiene una única solución en el punto especificado

(a) $y' = \sqrt{y^2 - 9}$, $(2, -3)$ $\quad x(2) = -3$

R/= - Existe solución?

$f(x, y) = \sqrt{y^2 - 9}$

- $f(x,y)$ es continua si: $\sqrt{y^2 - 9} \geq 0$, es decir:

$y^2 - 9 \geq \sqrt{0}$

$y^2 \geq 9$

$|y| \geq 3$

$-3 \geq y \geq 3$

- Debido a que mi condición inicial, toma a 'y' como -3, significa que $f(x,y)$ es continua, y por lo tanto, existe una solución

- ¿Es única solución?

- Derivamos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y^2 - 9}} \cdot 2y$$

- La anterior función es continua si: $\sqrt{y^2 - 9} > 0$, o sea si:

$-3 > y > 3$

- Debido a que mi condición inicial toma a 'y' como -3, significa que la continuidad de mi derivada no es válida en ese punto, y por lo tanto no hay unicidad.

(b) $y' = \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$, $(1, 2)$

R/= - ¿Existe solución?

- $f(x, y) = \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$, $y(1) = 2$

- $f(x,y)$ es continua si: $\sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$, es decir:

$\sqrt{9 - (x^2 + y^2)} \geq 0$

$9-(x^2+y^2) \geq 0$

$9 \geq x^2+y^2$

$x^2+y^2 \leq 9$

- Comprobamos si mi condición inicial cumple con que $x^2+y^2 \leq 9$

$(1)^2+(2)^2 \leq 9$

$1+4 \leq 9$

$5 \leq 9$ ✓

- Significa entonces que es continua, y existe solución

- ¿Es única solución?

- Derivamos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{9-(x^2+y^2)}} \cdot -2y$$

$$= -\frac{y}{2\sqrt{9-(x^2+y^2)}}$$

- La anterior función es continua si $\sqrt{9-(x^2+y^2)} \geq 0$, o sea si:

$x^2+y^2 \leq 9$

- Debido a que comparten las mismas condiciones de continuidad, es única solución

5. Muestre que $y(x) = (x-2)^3$ es solución particular del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}, \quad y(2) = 0$$

R/= • $y = (x-2)^3$

$y' = 3(x-2)^2 \cdot 1 = 3(x-2)^2$

$= 3[(x-2)^3]^{\frac{2}{3}}$

$= 3y^{\frac{2}{3}}$ ✓

- Demostrar valor inicial:

- $y(2) = (2-2)^3$

$y(2) = 0$ ✓

- Determine si el Teorema de existencia y unicidad puede garantizar la unicidad de esta solución. Si existe otra, indíquela

R//: Si existe, y es $y = 0$

$y' = 0$

- Remplazamos en la ecuación diferencial ordinaria

$0 = 3(0)^{2/3}$

$0 = 0$

6. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones de variables separables

a) $y' = \dfrac{9x^2 - 6}{x^2}$

R//: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{9x^2 - 6}{x^2}$

$dy = \dfrac{9x^2 - 6}{x^2}\, dx$

$\int dy = \int \dfrac{9x^2 - 6}{x^2}\, dx \longrightarrow y = \int 9\, dx - \int \dfrac{6}{x^2}\, dx$

$y = 9x - \left(-\dfrac{6}{x}\right) + C$

$y = 9x + \dfrac{6}{x} + C$

• $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

b) $y' = \dfrac{3x^2\sqrt{16+y^2}}{y}$

RII: • $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2\sqrt{16+y^2}}{y}$

$\dfrac{y}{\sqrt{16+y^2}}\,dy = 3x^2\,dx$

$\int \dfrac{y}{\sqrt{16+y^2}}\,dy = 3\cdot\dfrac{x^3}{3} + C$ *

* $u = 16 + y^2$, $du = 2y\,dy \rightarrow dy = \dfrac{du}{2y}$

$\int \dfrac{y}{\sqrt{u}}\cdot\dfrac{du}{2y}$

$\dfrac{1}{2}\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} \rightarrow \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{u} \rightarrow \sqrt{u}$

$\sqrt{16+y^2} + C$

$\sqrt{16+y^2} + C = x^3 + C$

$\sqrt{16+y^2} = x^3 + C$

$16 + y^2 = (x^3 + C)^2$

$y^2 = (x^3 + C)^2 - 16$

$y = \sqrt{(x^3 + C)^2 - 16}$

c) $y' = \dfrac{y^2}{\sqrt{1-x^2}}$

RII: • $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$\int \dfrac{dy}{y^2} = \int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$

$-\dfrac{1}{y} = \operatorname{arcsen}(x) + C$

$-\dfrac{1}{\operatorname{arcsen}(x) + C} = y$

7. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones de variables separables

a) $\frac{\tan(y)}{\cot(x)} dy + \sec(x)\, dx = 0$

R/: $\frac{\tan y}{\cot x} dy = -\sec(x)\, dx$

$\int \tan(y)\, dy = \int -\sec(x) \cdot \cot(x)\, dx$

$-\ln|\cos(y)| = -\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$

$\ln|\cos(y)| = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$

$\cos(y) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$

$y = \arccos\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C + 2\pi n$

b) $(x + xy^2)\, dx + e^{x^2} dy = 0$

R/: $(x + xy^2)\, dx + e^{x^2} dy = 0$

$(x + xy^2) + e^{x^2} \frac{dy}{dx} = 0$

$e^{x^2} \frac{dy}{dx} = -(x + xy^2)$

$e^{x^2} \frac{dy}{dx} = -x(1 + y^2)$

$\int \frac{1}{y^2+1} dy = \int -\frac{x}{e^{x^2}} dx$

$\arctan(y) = \int -\frac{x}{e^{x^2}} dx$ *

* $-\int x e^{-x^2} dx$

$u = -x^2, \quad du = -2x\, dx \rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$

$= \int x \cdot e^{u} \cdot \frac{du}{-2x} = \int e^{u} \cdot \frac{du}{2}$

$\frac{1}{2}\int e^{u^2}\, du$

$\frac{1}{2}\cdot e^{u} = \frac{1}{2}\cdot e^{-x^2}$

$\arctan(y) = \frac{e^{-x^2}}{2} + C$

$y = \tan\left(\frac{e^{-x^2}}{2} + C\right)$

c) (Es lo mismo que la 6 b)

8. Hallar la solución particular correspondiente a las condiciones iniciales dadas

a) $y' = 2\cdot \operatorname{Sen}(x) - e^{-x}$, $y(0) = 4$

Rpta: $\frac{dy}{dx} = 2\operatorname{Sen}(x) - e^{-x}$

$\int dy = \int 2\cdot \operatorname{Sen}(x) - e^{-x}\, dx$

$y = 2\cdot \int \operatorname{Sen}(x) - e^{-x}\, dx$

$y = 2\cdot \int \operatorname{Sen}(x) - \int e^{-x}\, dx$

$y = -2\cdot \cos(x) + e^{-x} + C$

- Comprobamos condición inicial

$4 = -2\cdot \cos(0) + e^{-0} + C$

$4 = -2\cdot 1 + 1 + C$

$4 = -2 + 1 + C$

$4 = -1 + C$

$5 = C$

9. Determinar si las siguientes ecuaciones son exactas; si lo son, resolverlas:

a) $\left(y - \frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}}\right) dx + \left(x + \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}}\right) dy = 0$

RII: - Verificamos si es exacta

- $M = \left(y - \frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}}\right) dx \qquad N = \left(x + \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}}\right) dy$

- $\frac{dM}{dy} = 1 - \left(\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x^2} \cdot e^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x}\right)$

- $\frac{dN}{dx} = 1 + \left(-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{y}{x}} + \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{y}{x}} \frac{y}{x^2}\right)$

Si son exactas ✓

- Resolvemos

- $\frac{dF}{dx} = y - \frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}}$ (2) $\qquad$ - $\frac{dF}{dy} = x + \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}}$ (1)

- $F(x,y) = \int x\, dy + \int \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}} dy$ *

* $\int \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}} dy$ $\qquad$ - $u = \frac{y}{x}$

$du = \frac{1}{x} dy \rightarrow dy = x \cdot du$

$\int \frac{1}{x} \cdot e^{u} \cdot x \cdot du$

$\int e^{u} du = e^{u} = e^{\frac{y}{x}}$

$F(x,y) = xy + e^{\frac{y}{x}} + \phi(x)$

- Derivamos respecto 'x'

$F'(x,y) = y + e^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{y}{x^2} + \phi'(x)$

- Igualamos con (2)

$y - \frac{y}{x^2} \cdot e^{\frac{y}{x}} = y - e^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{y}{x^2} + \phi'(x)$

$0 = \phi'(x)$

$\int 0\, dx = \int \phi'(x)$

$C = \phi(x)$

- Remplazamos $\phi(x)$

$$v(x,y) = xy + e^{\frac{y}{x}} + C \quad = R/=$$

- b) $(3x^2 + y \cdot \cos(xy))\,dx + (3y^2 + x \cdot \cos(xy))\,dy = 0$

R/: R/: Verificamos si es exacta

- $M = (3x^2 + y \cdot \cos(xy))\,dx$ • $N = (3y^2 + x \cdot \cos(xy))\,dy$

- $\frac{dM}{dy} = 0 + (1 \cdot \cos(xy) + y \cdot -\operatorname{Sen}(xy) \cdot x)$

$= \cos(xy) - xy \operatorname{Sen}(xy)$

- $\frac{dN}{dx} = 0 + (1 \cdot \cos(xy) + x \cdot -\operatorname{Sen}(xy)\, y)$

$= \cos(xy) - xy \operatorname{Sen}(xy)$

Son exactas ✓

- Resolvemos

① • $\frac{dv}{dx} = 3x^2 + y \cdot \cos(xy)$ ② • $\frac{dv}{dy} = 3y^2 + x \cdot \cos(xy)$

- $v(x,y) = \int 3x^2\,dx + \int y \cdot \cos(xy)\,dx$

* $\int y \cdot \cos(xy)\,dx$ • $u = xy$

$\int y \cdot \cos(u)\,\frac{du}{y}$ $du = y\,dx \rightarrow dx = \frac{du}{y}$

$\int \cos(u)\,du$

$\operatorname{Sen}(u) = \operatorname{Sen}(xy)$

$v(x,y) = x^3 + \operatorname{Sen}(xy) + \phi(y)$

- Derivamos respecto 'y'

$v'(x,y) = 0 + \cos(xy) \cdot x + \phi(y)$

- Igualamos con ②

$3y^2 + x \cdot \cos(xy) = 0 + \cos(xy) \cdot x + \phi(y)$

$3y^2 = \phi'(y) \rightarrow \phi(y) = y^3 + C$

- Remplazamos $\phi(y)$

$$f(x,y) = x^3 + \operatorname{Sen}(xy) + y^3 = C$$

c) $(4x^3 - 4xy^2 + y)\,dx + (4y^3 - 4x^2y + x)\,dy = 0$

R//=

- Verificamos si es exacta

- $M = (4x^3 - 4xy^2 + y)\,dx$ • $N = (4y^3 - 4x^2y^2 + x)\,dy$

- $\frac{dM}{dy} = 0 - 8xy + 1$
- $\frac{dN}{dx} = 0 - 8xy^2 + 1$

No son exactas X

10. Determinar si las siguientes ecuaciones son exactas, si lo son, hallar la solución particular correspondiente a las condiciones iniciales dadas

a) $\underbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + y\right)}_{M} dx + \underbrace{\left(x - \frac{1}{2y^{2/3}}\right)}_{N} dy = 0, \quad y(9) = 1;$

R//=

- Verificamos si son exactas

- $\frac{dM}{dy} = 0 + 1 = 1$
- $\frac{dN}{dx} = 1 - 0 = 1$

✓ Si son exactas

- Resolvemos

① • $\frac{dF}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + y$ ② • $\frac{dF}{dy} = x - \frac{1}{2y^{2/3}}$

① • $F(x,y) = \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx + \int y\,dx$

$$F(x,y) = +\sqrt{x} + xy + \phi(y)$$

- Derivamos respecto a 'y'

- $F'(x,y) = 0 + x + \phi'(y)$

- Igualamos con ①

• $x - \frac{1}{2y^{2/3}} = x + \phi'(y)$

$\phi'(y) = -\frac{1}{2y^{2/3}} \rightarrow \phi(y) = -\frac{1}{2}\int y^{-\frac{2}{3}} = \phi(y) = -\frac{1}{2} \cdot 3y^{\frac{1}{3}} + C$

- Remplazamos $\phi(y)$

R//: $C = \sqrt{x} + xy + -\frac{1}{2} \cdot 3y^{\frac{1}{3}}$ $(9,1)$

$C = \sqrt{9} + (9)(1) + -\frac{1}{2} \cdot 3(1)^{\frac{1}{3}}$

$C = \frac{21}{2}$

b) $\underbrace{\left(\frac{1}{x} + ye^{xy}\right)}_{M} dx + \underbrace{\left(\frac{1}{y} + xe^{xy}\right)}_{N} dy = 0$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

R//:

- Verificamos si son exactas

• $\frac{\partial M}{\partial y} = 0 + (1 \cdot e^{xy} + y \cdot e^{xy} \cdot x)$

• $\frac{\partial N}{\partial x} = 0 + (1 \cdot e^{xy} + x \cdot e^{xy} \cdot y)$

Si son exactos

- Resolvemos

• $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} + ye^{xy}$ ① • $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} + xe^{xy}$ ②

• ① $f(x,y) = \int \frac{1}{x} dx + \int ye^{xy} dx$ *

$f(x,y) = \ln(x) + e^{xy} + \phi(y)$

- Derivamos respecto a 'y'

• $f'(x,y) = 0 + e^{xy} \cdot x + \phi'(y)$

- Igualamos con ②

• $\frac{1}{y} + xe^{xy} = e^{xy}x + \phi'(y) \rightarrow \phi'(y) = \frac{1}{y} \rightarrow \phi(y) = \ln(y)$

- Remplazamos $\phi(y)$

• $\ln(x) + e^{xy} + \ln(y) = C$ $\quad (\frac{1}{2}, 2)$

- Comprobamos valor inicial

• $\ln(\frac{1}{2}) + e^{(1)} + \ln(2) = C$

$\ln(\frac{1}{2} \cdot 2) + e^{(1)}$

$e = C$

11. Verifique que $M(y) = x^{-1}$ es un factor de integración de la ecuación dada y resolverla

$$(x + 3x^3 \operatorname{Sen}(y))\, dx + (x^4 \cdot \operatorname{Cos}(y))\, dy = 0$$

Rpta: - Multiplicamos

$$(1 + 3x^2 \cdot \operatorname{Sen}(y))\, dx + (x^3 \cdot \operatorname{Cos}(y))\, dy = 0$$

- Verificamos si es exacta

$$\left.\begin{aligned} \cdot \frac{\partial M}{\partial y} &= 0 + 3x^2 \cdot \operatorname{Cos}(y) \\ \cdot \frac{\partial N}{\partial x} &= 3x^2 \cdot \operatorname{Cos}(y) \end{aligned}\right\} \checkmark$$

- Resolvemos

• $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 3x^2 \cdot \operatorname{Sen}(y)$ (1) $\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \cdot \operatorname{Cos}(y)$ (2)

• $f(x,y) = \int x^3 \cdot \operatorname{Cos}(y)\, dy$ (2)

$= x^3 \cdot \int \operatorname{Cos}(y)\, dy$

$= x^3 \cdot \operatorname{Sen}(y) + \phi(x)$

- Derivamos respecto a 'x'

• $f'(x,y) = 3x^2 \cdot \operatorname{Sen}(y) + \phi'(x)$

- Igualamos con (1) (2)

• $1 + \cancel{3x^2 \cdot \operatorname{Sen}(y)} = \cancel{3x^2 \cdot \operatorname{Sen}(y)} + \phi'(x)$

$1 = \phi'(x) \rightarrow \phi(x) = \int 1\, dx = x + C$

- Reemplazamos $\phi(y)$

- $3x^2 \cdot \operatorname{Sen}(y) + x = C_1$

12. Escoger la opción que contiene un factor de integración de la ecuación dada y resolverla

a) $\underbrace{\left(2+\frac{y}{x}\right)}_{M} dx + \underbrace{\left(\frac{x}{y}+2\right)}_{N} dy = 0$

Tol=

(No voy a hacer este punto porque no arroco multiplier >:C)

- Procedemos a buscar el factor integral

- $\frac{dM}{dy} = 0 + \left(\frac{1 \cdot x + y \cdot 0}{x^2}\right) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

- $\frac{dN}{dx} = \frac{1}{y} + 0 = \frac{1}{y}$

- Usamos la fórmula $U(x)$

$$e^{\int \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{x}{y}+2} dx} \rightarrow \text{Tal vez}$$

13. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales usando un factor de integración apropiado

a) $\underbrace{(xy + y + y^2)}_{M} dx + \underbrace{(x+2y)}_{N} dy = 0$

Tol=

- Procedemos a buscar el factor integral

- $\frac{dM}{dy} = x + 1 + 2y$

- $\frac{dN}{dx} = 1 + 0$

- Usamos la fórmula $U(x)$

$$e^{\int \frac{x+1+2y-1}{x+2y} dx} \rightarrow e^{\int dx} \rightarrow e^x \rightarrow U(x) = e^x$$

- Multiplicamos

$$(e^x xy + e^x y + e^x y^2)\,dx + (e^x x + 2y e^x)\,dy$$

- Resolvemos

- $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x xy + e^x y + e^x y^2$ ① • $\frac{\partial f}{\partial y} = e^x x + 2y e^x$ ②

- $f(x,y) = e^x x \int dy + e^x 2 \int y \cdot dy$ ③

$$= e^x x y + e^x \cdot 2 \cdot \frac{y^2}{2} + \phi(x)$$

- Derivamos respecto a 'x'

$$f'(x,y) = (e^x \cdot xy + e^x \cdot y) + (y^2 e^x) + \phi'(x)$$

- Igualamos con ①

$$e^x xy + e^x y + e^x y^2 = e^x xy + e^x y + y^2 e^x + \phi'(x)$$

$$\phi'(x) = 0$$

$$\phi(x) = 0$$

- Reemplazamos

$$f(x) = e^x xy + e^x y^2 = C$$

b) $\underbrace{(e^x + y^2)}_{M}\,dx + \underbrace{\left(xy - \frac{e^x}{y} - 2y^2\right)}_{N}\,dy = 0$

$f(x) =$

- Procedemos a buscar el factor integral

- $\frac{\partial M}{\partial y} = 0 + 2y = 2y$

- $\frac{\partial N}{\partial x} = y - \left(\frac{e^x \cdot y - e^x \cdot 0}{y^2}\right) - 0 = y - \frac{e^x}{y}$

- Usamos la fórmula $u(y)$

$$e^{\int \frac{(y - \frac{e^x}{y}) - (2y)}{e^x + y^2}\,dy} \rightarrow e^{\int \frac{-y - \frac{e^x}{y}}{e^x + y^2}\,dy} \rightarrow e^{\int \frac{-\frac{1}{y}(y^2 + e^x)}{e^x + y^2}\,dy}$$

$$e^{\int -\frac{1}{y}\,dy} \rightarrow e^{-\int \frac{1}{y}dy} \rightarrow e^{-\ln(y)} \rightarrow u(y) = \frac{1}{y}$$

- Multiplicamos

$$\left(\frac{e^x}{y} + y\right)dx + \left(x - \frac{e^x}{y^2} - 2y\right)dy = 0$$

- Resolvemos

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^x}{y} + y$ (1) $\quad$ • $\frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{e^x}{y^2} - 2y$ (2)

- (1) $f(x,y) = \frac{1}{y}\int e^x\,dx + y\int dx$

$$= \frac{e^x}{y} + xy + \phi(y)$$

- Derivamos respecto a 'y'

$$f'(x,y) = -\frac{e^x}{y^2} + x + \phi'(y)$$

- Igualamos con (2)

$$\cancel{x} - \cancel{\frac{e^x}{y^2}} - 2y = -\cancel{\frac{e^x}{y^2}} + \cancel{x} + \phi'(y)$$

$$\phi'(y) = -2y \rightarrow \phi(y) = -2\int y\,dy \rightarrow \phi(y) - 2\frac{y^2}{2}$$

$$\phi(y) = -y^2 + C_1$$

- Reemplazamos

$$f(x,y) = \frac{e^x}{y} + xy + (-y^2) = C_1$$

1A. Hallar la solución general de los siguientes ecuaciones homogéneas

a) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ $\qquad \frac{dy}{dx}$

Rpta:

- $z = \frac{y}{x}$, $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$

$z + x\frac{dz}{dy} = z + \frac{1}{z}$

$\int z \, dz = \int \frac{1}{x} \, dx$

$\frac{z^2}{2} = \ln|x| + C$

$z = \sqrt{2 \cdot \ln|x| + C}$

$y = x\sqrt{2\ln|x| + C}$? $\qquad -x$

b) $x^2 - y^2 = xy \cdot y'$

Rpta:

- $y = xz$, $dy = z\,dx + x\,dz$

$x^2 - (xz)^2 = x(xz) \cdot \frac{z\,dx + x\,dz}{dx}$

$x^2 - x^2 - z^2 = x^2 z \cdot \frac{z\,dx + x\,dz}{dx}$

$-z = x^2 \cdot \frac{z\,dx + x\,dz}{dx}$

$-z \cdot dx = x^2 z\,dx + x^3\,dz$

$\frac{-z}{x^2} \cdot dx = z\,dx + x^3\,dz$

$dx \cdot \left(\frac{-z}{x^2} - z\right) = x^3\,dz$

$dx \cdot -z\left(\frac{1}{x^2} + 1\right) = x^3\,dz$

$\int \frac{1}{x^3} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) dx = -\int \frac{1}{z}\,dz$

$\int \frac{1}{x^3}\,dx + \int dx = -\ln|z| + C$

Taller 2

Ecuaciones diferenciales ordinarias

1. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones lineales

a) $x^2 y' + 2xy = e^{3x}$

R//:

- Procedemos a transformarla en una ecuación lineal de primer orden, es decir: $y' + P(x)y = Q(x)$

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

- $P(x) = \frac{2}{x}$ · $Q(x) = \frac{e^{3x}}{x^2}$

- Buscamos factor integral

$$u(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \cdot \ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2$$

- Multiplicamos

$$x^2 y' + 2xy^{*} = e^{3x}$$

$$\int (x^2 y)' = \int e^{3x}$$

$$x^2 y = e^{3x} + C$$

$$y = e^{3x} + \frac{C}{x^2}$$

* $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = (f(x) \cdot g(x))'$

b) $xy' - 3y = x^4 \cdot \operatorname{Sen}(x)$

R//:

- Procedemos a transformarla en una ecuación lineal de primer orden, es decir: $y' + P(x)y = Q(x)$

$$y' - \frac{3y}{x} = x^3 \cdot \operatorname{Sen}(x)$$

- $P(x) = -\frac{3}{x}$ · $Q(x) = x^3 \cdot \operatorname{Sen}(x)$

- Buscamos factor integral

$$u(x) = e^{\int -\frac{3}{x}} = e^{-3\int \frac{1}{x}} = e^{-3 \cdot \ln|x|} = e^{\ln|x^{-3}|} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

- Multiplicamos:

$$\frac{y'}{x^3} - \frac{3y}{x^4} = \frac{x^3}{x^3} \cdot \operatorname{Sen}(x)$$

$$y' \cdot \frac{1}{x^3} - y \cdot \frac{3}{x^4}^{*} = \cancel{x} \cdot \operatorname{Sen}(x)$$

$$\int \left(y \cdot \frac{1}{x^3}\right)' = \int \operatorname{Sen}(x)$$

$$\frac{y}{x^3} = -\operatorname{Cos}(x) + C$$

$$y = -\operatorname{Cos}(x)\, x^3 + C x^3$$

c) $y' - \frac{y}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$

R/=

- Ecuación lineal de primer orden: $y' + P(x)\, y = Q(x)$

- Buscamos factor integrante $\cdot\ P(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, $\cdot\ Q(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$U(x) = e^{\int -\frac{1}{1+x^2}} = e^{-\arctan(x)}$$

- Multiplicamos:

$$y' \cdot e^{-\arctan(x)} + e^{-\arctan(x)} \cdot \left(-\frac{y}{1+x^2}\right)^{*} = \frac{e^{-\arctan(x)}}{1+x^2}$$

$$\int \left(y \cdot e^{-\arctan(x)}\right)' = e^{-\arctan(x)} + C$$

$y \cdot$

2. Hallar la solución particular correspondiente a las condiciones iniciales dadas.

a) $y' - (\tan(x))(y) = x \cdot \operatorname{Sec}(x)$, $y(0) = \sqrt{\pi}$

R//=

- Ecuación lineal de primer orden $y' + P(x)\, y = Q(x)$

  • $P(x) = -\tan(x)$ • $Q(x) = x \cdot \operatorname{Sec}(x)$

- Buscamos factor integrante

$$u(x) = e^{\int -\tan(x)} = e^{-(-\ln|\cos(x)|)} = \cos(x)$$

- Multiplicamos:

$$y' \cdot \cos(x) - \operatorname{Sen}(x)(y) = x$$

$$\int (y \cdot \cos(x))' = \int x$$

$$y \cdot \cos(x) = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = \frac{x^2}{2\cos(x)} + \frac{C}{\cos(x)}$$

- Hallamos valor inicial $(0, \sqrt{\pi})$

$$\sqrt{\pi} = \frac{0^2}{2 \cdot \cos(0)} + \frac{C}{\cos(0)} \quad (?)$$

$$\sqrt{\pi} = C$$

• $$y = \frac{x^2}{2 \cdot \cos(x)} + \frac{\sqrt{\pi}}{\cos(x)}$$

3. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $y' - y \cdot \tan(x) = e^{-\operatorname{Sen}(x)}$

R//=

- Ecuación lineal de primer orden: $y' + P(x)\, y = Q(x)$

  • $P(x) = -\tan(x)$ • $Q(x) = e^{-\operatorname{Sen}(x)}$

- Buscamos factor integrante

$$u(x) = e^{\int -\tan(x)} = \cos(x)$$

** $u = \operatorname{Sen}(x) =$

$du = \cos(x) \cdot dx$

$dx = \frac{1}{\cos(x)}$

- Multiplicamos:

$$y' \cdot \cos(x) - y \cdot \cos(x) \cdot \tan(x) = e^{-\operatorname{Sen}(x)} \cdot \cos(x)$$

$\int e^{-u} \cdot d$

$-e^{u}$

$$y' \cdot \cos(x) - y \cdot \operatorname{Sen}(x)^{*} = e^{-\operatorname{Sen}(x)} \cdot \cos(x)$$

$$\int (y \cdot \cos(x))' = \int e^{-\operatorname{Sen}(x)} \cdot \cos(x)^{**}$$

$$y \cdot \cos(x) = -e^{-\operatorname{Sen}(x)} + C'$$

$$y = -\frac{e^{-\operatorname{Sen}(x)}}{\cos(x)} + \frac{C'}{\cos(x)}$$

b) $y' + (\cos(x))\, y = \cos(x)$

R/:

- Ecuación lineal de primer orden: $y' + P(x)y = Q(x)$

  - $P(x) = \cos(x)$
  - $Q(x) = \cos(x)$

- Buscamos factor integrante

$$u(x) = e^{\int \cos(x)} = e^{\operatorname{Sen}(x)}$$

- Multiplicamos

$$y' \cdot e^{\operatorname{Sen}(x)} + e^{\operatorname{Sen}(x)} \cdot \cos(x) \cdot y = e^{\operatorname{Sen}(x)} \cdot \cos(x)$$

$$\int (e^{\operatorname{Sen}(x)} \cdot y)' = \int e^{\operatorname{Sen}(x)} \cdot \cos(x)$$

$$e^{\operatorname{Sen}(x)} \cdot y = e^{\operatorname{Sen}(x)} + C'$$

$$y = 1 + \frac{C'}{e^{\operatorname{Sen}(x)}}$$

c) $xy' + y = y^2 \cdot \ln(x)$

Rpta:

- Ecuación lineal de primer orden. Transformamos a $y' + P(x)y = Q(x)\,(x^{-1})$

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2 \cdot \ln(x)}{x}$$

• Dividimos también por y^2, debido a $p = 2$

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{\ln x}{x}$$

• Sustituimos usando fórmulas:

• $u = y^{1-p}$

$u = y^{1-2} = y^{-1}$

• $u' = (1-p)y^{-p}y'$

$u' = (1-2)y^{-2} \cdot y'$

$u' = -y^{-2}y'$

$-u' = y^{-2}y'$

$$-u' + \frac{1}{x}u = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$u' - \frac{1}{x}u = -\frac{\ln(x)}{x}$$

- Buscamos factor integrante

• $P(x) = -\frac{1}{x}$

• $Q(x) = -\frac{\ln(x)}{x}$

$$u(x) = e^{-\int \frac{1}{x}} = e^{-\ln(x)} = e^{\ln(x^{-1})} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

- Multiplicamos y resolvemos

$$u' \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}u = -\frac{\ln(x)}{x^2} \quad *$$

** $u = \ln(x)$ $\quad dv = \frac{1}{x^2}$

$du = \frac{1}{x}$ $\quad v = -\frac{1}{x}$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2} = \ln(x) \cdot -\frac{1}{x} - \int -\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\int \left(u \cdot \frac{1}{x}\right)' = -\int \frac{\ln(x)}{x^2} \quad **$$

$$\left(u \cdot \frac{1}{x}\right) = -\left(-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right) + C$$

$$u \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} + C$$

$$u = \ln(x) + 1 + Cx$$

- Remplazamos 'u'

$$\frac{1}{y} = \ln(x) + 1 + C_1 x$$

$$y = \frac{1}{\ln(x) + 1 + C_1 x}$$

d) $y' = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2}$

R//=

- Ecuación lineal de primer orden. Transformamos a $y' + P(x)\,y = Q(x)$

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{2xy}{x^2}$$

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x}$$

$$y' - \frac{2y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$$

- Dividimos por y^2, debido a $p=2$

$$y^{-2} y' - \frac{2}{xy} = \frac{1}{x^2}$$

- Sustituimos usando fórmulas

- $u = y^{1-p}$

$$u = y^{1-2} = y^{-1}$$

- $u' = (1-p)\,y^{-p}\,y'$

$$u' = (1-2)\,y^{-2}\,y'$$

$$u' = -y^{-2}\,y'$$

$$-u' = y^{-2}\,y'$$

$$-u' - \frac{2}{x}u = \frac{1}{x^2} \rightarrow u' + \frac{2}{x}u = -\frac{1}{x^2}$$

- Buscamos factor integrante

- $P(x) = +\frac{2}{x}$
- $Q(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$u(x) = e^{+\int \frac{2}{x}} = e^{2\cdot\ln(x)} = e^{\ln(x^2)} = x^2$$

- Multiplicamos y resolvemos

$$u' x^2 + 2x u = -1$$

$$\int (u \cdot x^2)' = -\int dx$$

$$u \cdot x^2 = -x + C$$

$$u = -\frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$$

$$u = \frac{-x^2 + Cx}{x^3} = \frac{x(-x + C)}{x^3} = \frac{-x + C}{x^2}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{-x + C}{x^2}$$

$$y = \frac{x^2}{-x + C}$$

e) $\cos(x) \cdot y' + \operatorname{sen}(x) \cdot y = 1$

R/=

- Ecuación lineal de primer orden. Transformamos a $y' + P(x)\, y = Q(x)$

$$y' + \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\, y = \frac{1}{\cos(x)}$$

- Buscamos factor integrante $\cdot P(x) = \tan(x)$ $\cdot Q(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

$$u(x) = e^{\int \tan(x)} = e^{-\ln|\cos(x)|} = e^{\ln|\cos(x)^{-1}|} = \cos(x)^{-1} = \frac{1}{\cos(x)}$$

- Multiplicamos y resolvemos

$$\left(\frac{y'}{\cos(x)} + \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}\right) y = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\int \sec^2(x) = \tan(x) + C$$

$$\int \left(y \cdot \frac{1}{\cos(x)}\right)' = \int \frac{1}{\cos(x) \cdot \cos(x)}$$

$$y \cdot \frac{1}{\cos(x)} = \tan(x) + C$$

$$y = \tan(x) \cdot \cos(x) + C \cdot \cos(x)$$

4. Resolver las siguientes ecuaciones con su solución particular

a) $y' = e^x \cdot \cos^2(y)$, $\quad y(0) = \frac{\pi}{4}$.

R//: $\frac{dy}{dx} = e^x \cdot \cos^2(y)$

$$\int dy \cdot \frac{1}{\cos^2(y)} = \int e^x \cdot dx$$

$$\tan(y) = e^x + C$$

$$y = \arctan(e^x + C)$$

- Evaluamos valor inicial

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1 + C)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + C$$

$$1 = 1 + C$$

$$C = 0$$

b) $xy' + 3y = \frac{1}{x} e^x$, $\quad y(1) = 1$

R//:

- Transformamos a $y' + P(x) = Q(x)$ (Divido por x)

$$y' + \frac{3y}{x} = \frac{1}{x^2} e^x$$

- Buscamos factor integrante $\quad \cdot P(x) = \frac{3}{x} \quad \cdot Q(x) = \frac{1}{x^2} e^x$

$$U(x) = e^{\int \frac{3}{x}} = e^{3 \cdot \ln(x)} = e^{\ln(x^3)} = x^3$$

- Multiplicamos y resolvemos

$$x^3 y' + 3yx^2 = e^x x$$

$$\int (x^3 \cdot y)' = \int e^x \cdot x$$

$$x^3 \cdot y = e^x x - e^x + C$$

$$y = e^x - \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}$$

- Evalúo caso inicial

$$1 = e^1 - \frac{e^1}{1} + \frac{C'}{1}$$

$$1 = e - e + C'$$

$$1 = C'$$

c) $\underbrace{(\sqrt{y} + 1)}_{M} dx + \underbrace{\left(\frac{x}{2\sqrt{y}} + 1\right)}_{N} dy = 0$

RII:

- Procedemos a buscar el factor integral

$$\left.\begin{aligned} &\cdot \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ &\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1 \cdot 2\sqrt{y} + 0 \cdot x}{(2\sqrt{y})^2} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{aligned}\right\} \checkmark \text{ (Es exacta)}$$

- Resolvemos

$$\cdot \frac{\partial F}{\partial x} = \sqrt{y} + 1 \quad (1) \qquad \cdot \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}} + 1 \quad (2)$$

$$\cdot F(x,y) = \int \sqrt{y}\, dx + \int 1\, dx$$

(1)

$$= \sqrt{y} \cdot x + x + \phi(y)$$

- Derivamos respecto a 'y'

$$\cdot F'(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{y}} + \phi'(y)$$

- Igualamos con (2)

$$\frac{x}{2\sqrt{y}} + 1 = \frac{x}{2\sqrt{y}} + \phi'(y)$$

$$1 = \phi'(y)$$

$$y = \phi(y)$$

- Resolvemos

$$\mathcal{F}(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{y}} + y + C$$

d) $y' =$ _____

d) $\underbrace{(y+x+2)}_{M}\,dx + \underbrace{1}_{N}\,dy = 0$

R//:

- Procedemos a buscar el factor integral

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \dfrac{dM}{dy} = 1 \\ \cdot \dfrac{dN}{dx} = 0 \end{array}\right\} \times \text{(No son iguales)}$$

- Usamos fórmula $U(x)$ ó $U(y)$

$$e^{\int \frac{1-0\,dx}{1}} = e^{\int 1\,dx} = e^{x} = U(x)$$

$$U(y) = e^{\int \frac{0-1}{y+x+2}\,dy}$$

- Multiplicamos

$$(e^{x}y + e^{x}x + 2)\,dx + e^{x}\,dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \dfrac{dM}{dy} = e^{x} \\ \cdot \dfrac{dN}{dx} = e^{x} \end{array}\right\} \checkmark$$

- Resolvemos

$\cdot \dfrac{d\mathcal{F}}{dx} = (e^{x}y + e^{x}x + 2)$ ① $\qquad \cdot \dfrac{d\mathcal{F}}{dy} = e^{x}$ ②

$\cdot$ ② $\mathcal{F}(x,y) = \int e^{x}\,dy$

$\mathcal{F}(x,y) = e^{x}\cdot y + \phi(x)$

$\cdot\ u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

- Derivamos respecto a 'x'

$\cdot\ \int e^x x\, dx$ $\quad u = x$, $dv = e^x$

$\cdot\ F'(x,y) = e^x \cdot y + \phi'(x)$

- Igualamos con ①

$$e^x \cdot y + e^x x + 2 = e^x \cdot y + \phi'(x)$$

$$e^x x + 2 = \phi'(x)$$

$$\int e^x x\, dx + \int 2\, dx = \phi(x)$$

$$e^x x - e^x + 2x + C = \phi(x)$$

- Reemplazamos

R/: $F(x,y) = e^x y + e^x x - e^x + 2x$

$C =$ " "

e) $(\cos(x))\, y' + (\operatorname{sen}(x))\, y = 2$

$\cos(x) \frac{dx}{dy} + \operatorname{sen}(x)\, y = 1$ → Ya está resuelto antes ewe

e) $y' + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\, y = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$, $y(0) = 4$

R/:

- Ecuación de bernoulli: $y' + P(x)\, y = Q(x)$

$\cdot\ P(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \cdot\ Q(x) = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$

- Buscamos factor integrante

$$\cdot\ U(x) = e^{\int P(x)} = e^{\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}} = e^{\operatorname{arcsen}(x)}$$

- Multiplicamos:

$$y' \cdot e^{\operatorname{arcsen}(x)} + \frac{e^{\operatorname{arcsen}(x)}}{\sqrt{1-x^2}}\, y = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \left(y \cdot e^{\operatorname{arcsen}(x)}\right)' = 3 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y \cdot e^{\operatorname{arcsen}(x)} = 3 \cdot \operatorname{arcsen}(x) + C'$$

$$y = \frac{3 \cdot \operatorname{arcsen}(x) + C'}{e^{\operatorname{arcsen}(x)}}$$

- Resolvemos valor inicial

$$4 = \frac{3 \cdot \operatorname{arcsen}(0) + C'}{e^{\operatorname{arcsen}(0)}}$$

$$4 = \frac{0 + C'}{1}$$

$$4 = C'$$

5. Resolver los siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli:

a) $y' + \frac{y}{x} = \frac{2}{3} x^4 y^4$

R//=

- Ecuación de bernoulli: $y' + P(x)\, y = Q(x)$

- Dividimos por y^4, debido a $p = 4$

$$y' \cdot y^{-4} + \frac{y^{-3}}{x} = \frac{2}{3} x^4$$

- Sustituimos usando fórmulas

- $u = y^{1-p}$

$$u = y^{1-4}$$
$$u = y^{-3}$$

- $u' = (1-p)\, y^{-p} y'$

$$u' = (1-4)\, y^{-4} y'$$
$$u' = -3 y^{-4} y'$$
$$\frac{u'}{-3} = y^{-4} \cdot y'$$

$$\frac{u'}{3} + \frac{u}{x} = \frac{2}{3} x^4$$

$$u' + \frac{3u}{x} = 2x^4$$

- Buscamos factor integrante

- $u(x) = e^{\int P(x)} = e^{\int \frac{3}{x}} = e^{3 \cdot \ln|x|} = e^{\ln|x^3|} = x^3$

- Multiplicamos y resolvemos

$$u'x^3 + 3ux^2 = 2x^7$$

$$\int (ux^3)' = 2\int x^7$$

$$ux^3 = 2\frac{x^8}{8}$$

$$ux^3 = \frac{x^8}{4}$$

$$u = \frac{x^5}{4}$$

$$\frac{1}{y^3} = \frac{x^5}{4} \rightarrow y^3 = \frac{4}{x^5} \rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{4}{x^5}}$$

b) $y' - xy = 2x\sqrt{y}$

R//=

- Ecuación de bernoulli: $y' - P(x)\,y = Q(x)$
- dividimos por $y^{\frac{1}{2}}$, ya que $p = \frac{1}{2}$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - x\sqrt{y} = 2x \qquad \cdot P(x) = \qquad \cdot Q(x)$$

- Sustituimos usando fórmulas

- $u = y^{1-p}$
  $u = y^{1-\frac{1}{2}}$
  $u = \sqrt{y}$

- $u' = (1-p)\,y^{-p}\,y'$
  $u' = (\frac{1}{2})\,y^{-\frac{1}{2}}\,y'$
  $2u' = \frac{y'}{\sqrt{y}}$

- $2u' - xu = 2x$

$$u' - \frac{xu}{2} = x$$

- Buscamos factor integrante $\cdot P(x) = -\frac{x}{2}$

$$e^{\int -\frac{x}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\int x\,dx} = e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{4}}$$

$$e^{-\frac{x^2}{4}} \rightarrow e^{-\frac{x^2}{4}} \cdot \left(-\frac{x^2}{4}\right)' \rightarrow e^{-\frac{x^2}{4}} \cdot -\frac{x}{2}$$

- Multiplicamos y resolvemos

$$e^{-\frac{x^2}{4}} u' - \frac{xu}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} = x$$

$$\int \left(e^{-\frac{x^2}{4}} \cdot u\right)' = \int x \, dx$$

$$e^{-\frac{x^2}{4}} \cdot u = \frac{x^2}{2}$$

$$u = \frac{x^2}{e^{-\frac{x^2}{4}}} \rightarrow y = \left(\frac{x^2}{e^{-\frac{x^2}{4}}}\right)^2 + C$$

c)

d)

7. Obtener las trayectorias ortogonales de los siguientes familias de curvas

a) $y^2 - x^2 = C$

R//=

- Derivamos respecto a 'x'

$$(y^2 - x^2)' = (C)'$$

$$2y \frac{dy}{dx} - 2x^2 \frac{dx}{dx} = 0$$

$$2y y' - 2x = 0$$

$$2yy' = 2x \rightarrow y' = \frac{2x}{2y} \rightarrow y' = \frac{x}{y}$$

- $m_2 = -\frac{1}{m_1}$

$$y' = -\frac{1}{\frac{x}{y}} \rightarrow y' = -\frac{y}{x}$$

- Despejamos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \rightarrow \int dy \cdot \frac{1}{y} = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|y| = -\ln|x| \rightarrow \ln|y| = \ln|x^{-1}| \rightarrow y = x^{-1} + C$$

R// = $y = \frac{1}{x} + C$

b) $y^2 = 2Cx + 4$

R// =

- Despejamos 'C'

$$y^2 - 4 = 2Cx$$

$$(y^2 - 4) \cdot \frac{1}{2x} = C$$

- Derivamos respecto a 'x'

$$\left((y^2 - 4) \cdot \frac{1}{2x}\right)' = (C)'$$

$$\left(\frac{y^2}{2x}\right)' - \left(\frac{4}{2x}\right)' = 0$$

$$\left(\frac{2yy' \cdot 2x - 2 \cdot y^2}{4x^2}\right) - \left(2 \cdot -\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$\frac{2yy'x - y^2}{2x^2} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$\frac{2yy'x - y^2}{2x^2} = -\frac{2}{x^2}$$

$$2yy'x - y^2 = -4$$

$$2yy'x = -4 + y^2$$

$$y' = \frac{y^2 - 4}{2yx}$$

- $m_2 = -\frac{1}{m_2}$

$$y' = -\frac{2yx}{y^2 - 4}$$

$u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

- Despejamos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2yx}{y^2-4}$$

$$(y^2-4)\,dy = -2yx\,dx$$

$$\int \frac{(y^2-4)}{y}\,dy = \int -2x\,dx$$

$$\int y\,dy - \int \frac{4}{y}\,dy = -2\int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} - 4\cdot \ln|y| = -2\,\frac{x^2}{2} + C$$

$$\frac{y^2}{2} - 4\cdot \ln|y| = -x^2 + C$$

$u = (y^2-4)$ $\quad dv = x$

$du = 2y\,dy$

$dy = \frac{du}{2y}$

8. Obtener las trayectorias ortogonales de los siguientes familias de curvas

a) $y^2 - x^2 + 4xy - 2Cx = 0.$

R/=

- Despejamos 'C'

$$y^2 - x^2 + 4xy = 2Cx$$

$$\frac{y^2}{x} - x + 4y = 2C$$

- Derivamos respecto a 'x'

$$\left(\frac{2yy'\cdot x - y^2\cdot 1}{x^2}\right) - 1 + 4y' = 2(0)$$

$$\frac{2yy'}{x} - \frac{y^2}{x^2} - 1 + 4y' = 0$$

$$\frac{2yy'}{x} + 4y' = \frac{y^2}{x^2} + 1$$

$$y'\left(\frac{2y}{x} + 4\right) \rightarrow y' = \frac{\frac{y^2}{x^2} + 1}{\frac{2y}{x} + 4}$$

- $m_2 = -\frac{1}{m_1}$

$$y' = -\frac{\frac{2y}{x}+4}{\frac{y^2}{x^2}+1}$$

- Despejamos

$$\frac{dy}{dx} = '' \rightarrow -\frac{\frac{2y+4x}{x}}{\frac{y^2+x^2}{x^2}} \rightarrow -\frac{2yx^2+4x^3}{y^2x+x^2} \rightarrow -\frac{2yx+4x^2}{y^2+x^2}$$

$$(y^2+x^2)\,dy = -(2yx+4x^2)\,dx$$

$$(y^2+x^2)\,dy + (2yx+4x^2)\,dx = 0$$

$$\underbrace{(2yx+4x^2)}_{M}\,dx + \underbrace{(y^2+x^2)}_{N}\,dy$$

- Buscamos factor integral

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \frac{dM}{dy} = 2x \\ \cdot \frac{dN}{dx} = 2x \end{array}\right\} \checkmark \text{ (Es exacta)}$$

- Resolvemos

$$\cdot \frac{dF}{dx} = 2yx + 4x^2 \quad (1) \qquad \cdot \frac{dF}{dy} = y^2 + x^2 \quad (2)$$

$$\cdot F(x,y) = \int y^2\,dy + \int x^2\,dy$$

$$(2) \quad = \frac{y^3}{3} + x^2y + \phi(x)$$

- Derivamos respecto a 'x'

$$F'(x,y) = 0 + 2xy + \phi'(x)$$

- Remplazamos con (1)

$$2yx + 4x^2 = 2xy + \phi'(x)$$

$$\phi'(x) = 4x^2$$

$$\phi(x) = 4\int x^2$$

$$\phi(x) = \frac{4x^3}{3}$$

R// = $V(x,y) = \frac{y^3}{3} + x^2 y + \frac{4x^3}{3}$

b) $2x^2 + y^2 = 4Cx$

R//:

- Despejamos 'C'

$$\frac{2x^2}{4x} + \frac{y^2}{4x} = C$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y^2}{4x} = C$$

- Derivamos respecto a 'x'

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{2yy' \cdot 4x - y^2 \cdot 4}{16x^2}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{2yy'x - y^2}{4x^2}\right) = 0$$

$$\frac{2yy' - y^2}{4x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$2yy' - y^2 = -\frac{4x^2}{2}$$

¿?

$$2yy' = -2x^2 + y^2$$

$$y' = \frac{-2x^2 + y^2}{2y}$$

- $m_2 = -\frac{1}{m_1}$:

$$y' = \frac{2y}{2x^2 + y^2}$$

- Despejamos

$$\frac{dy}{dx} = \text{''}$$

$$dy\,(2x^2 + y^2) = (2y)\,dx$$

$$\underbrace{(-2y)}_{M}\,dx + \underbrace{(2x^2 + y^2)}_{N}\,dy = 0$$

- Buscamos factor integrante

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \dfrac{dN}{dy} = -2 \\ \cdot \dfrac{dN}{dx} = 4x \end{array}\right\} X$$

9. Para la

11. Sabemos que un material radioactivo se desintegra proporcionalmente a la cantidad existente en cada momento. En una prueba realizada con 60 mg de este material, se observó que por 3 horas, solamente el 80 % de la masa permanecía en ese momento. Hallar

a) La ecuación que exprese la cantidad restante de masa en un tiempo t.

R/1: $\cdot \dfrac{dP}{dt} = -kP$

$$\int \frac{1}{P}\, dP = -\int k\, dt$$

$$\ln|P| = -kt + C$$

$$P(t) = C \cdot e^{-kt}$$

- $P(0) = 60$

$$P(0) = C \cdot e^{-k(0)} \rightarrow P(0) = C \rightarrow 60 = C$$

- $P(3) = 48$

$$48 = 60 \cdot e^{-k(3)}$$

$$\frac{4}{5} = e^{-k(3)}$$

$$\ln\left(\frac{4}{5}\right) = -k(3)$$

$$-\frac{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}{3} = k$$

$$0{,}07438 = k$$

R/1: $P(t) = 60 \cdot e^{-0{,}07438(t)}$

b) ¿Qué cantidad permanece cuando $t=5$?

$$P(5) = 60 \cdot e^{-0,07438(5)}$$

$$P(5) = 41,365$$

c) ¿Para que valor de t, la cantidad de material es de $\frac{1}{4}$ la cantidad inicial

$$15 = 60 \cdot e^{-0,07438(t)}$$

$$\frac{1}{4} = e^{-0,07438(t)}$$

$$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -0,07438\, t$$

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{-0,07438} = t \approx 18,63799$$

12. El Pb-209, isótopo radiactivo del plomo, se desintegra con una rápidez proporcional a la cantidad presente en cualquier tiempo t, y tiene vida media de 3.3 horas. Si al principio había 1 gramo de plomo. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que se desintegre el 90%?

Nota: Vida media $\longleftrightarrow$ $\frac{1}{2}$ de la mitad del elemento

PDI = • $\frac{dP}{dt} = -kP$

• $P(t) = C \cdot e^{-kt}$

$$1 = C \cdot e^{-k(0)}$$

$$1 = C$$

• $P(3,3) = 1 \cdot e^{-k(3,3)}$

$$0,5 = e^{-k(3,3)}$$

$$\ln|0,5| = -k(3,3)$$

$$-\frac{\ln|0,5|}{3,3} = k$$

$$k = 0,21$$

• $0,1 = 1 \cdot e^{-0,21(t)}$

$$-\frac{\ln(0,1)}{0,21} = t$$

$$t = 10,96$$

18.

R/: $\frac{dT}{dt} = k(T_0 - T)$

$\frac{dT}{dt} = -k(T - 50)$

$\int \frac{dT}{(T-50)} = -k \int dt$

$\ln|T-50| = -kt + C$

- $T = e^{-kt + C} + 50$

  $T = (e^{-kt} \cdot C) + 50$

- $T(0) = C + 50$

  $-20 = C$

- $\overset{40}{T}(1) = (e^{-k(1)} \cdot -20) + 50$

  $\frac{-10}{-20} =$

  $\frac{1}{2} = e^{-k}$

  $\ln(\frac{1}{2}) = -k$

  $-\ln(\frac{1}{2}) = k$

a)

$T(2) = (e^{0,693(2)} \cdot -20) + 50 =$

Simulacro

$$\overbrace{(2xy - 3y^2)}^{M}\,dx + \overbrace{(2x^2 - 9xy + 4y^2)}^{N}\,dy = 0$$

R//=

- $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x - 6y$

- $\frac{\partial N}{\partial x} = 4x - 9y$

- Buscar factor integral

- $u(x) = e^{\int \frac{2x - 6y - (4x - 9y)}{2x^2 - 9xy + 4y^2}}$

- $u(y) = e^{\int \frac{4x - 9y - (2x - 6y)}{2xy - 3y^2}} = e^{\int \frac{2x - 3y}{2xy - 3y^2}} = e^{\int \frac{2x - 3y}{y(2x - 3y)}}$

$= e^{\int \frac{1}{y}} = e^{\ln(y)} = y$

- Multiplicar

- $(2xy^2 - 3y^3)\,dx + (2x^2y - 9xy^2 + 4y^3)\,dy = 0$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = (2xy^2 - 3y^3)$ ① $\qquad$ • $\frac{\partial f}{\partial y} = (2x^2y - 9xy^2 + 4y^3)$

- $f(x,y) = \int 2xy^2\,dx - \int 3y^3\,dx$

$= 2y^2 \int x\,dx - 3y^3 \int 1\,dx$

$= x^2y^2 - 3xy^3 + \phi(y)$

- Derivar respecto a 'y'

- $f'(x,y) = 2yx^2 - 9xy^2 + \phi'(y)$

$(2x^2y - 9xy^2 + 4y^3) = 2yx^2 - 9xy^2 + \phi'(y)$

$4y^3 = \phi'(y)$

$4\int y^3 = \phi(y)$

$y^4 = \phi(y)$

$$\frac{dT}{dt} = k(T_0 - T)$$

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$$

$$\int \frac{dT}{(T - T_0)} = \int -k\,dt$$

$$\ln|T - 8| = -kt + C$$

$$|T - 8| = e^{-kt + C}$$

$$T - 8 = e^{-kt} \cdot C$$

$$T(t) = (e^{-kt} \cdot C) + 8$$

- $T(0)$

$$28 = (e^{-k(0)} \cdot C) + 8$$

$$20 = 1 \cdot C$$

$$20 = C$$

- $T(1)$

$$18 = (e^{-k(1)} \cdot 20) + 8$$

$$10 = e^{-k} \cdot 20$$

$$\frac{1}{2} = e^{-k}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -k$$

$$-\ln\left(\frac{1}{2}\right) = k \rightarrow$$

$$k = 0,693$$

- $T(3) = (e^{-(0,693)\cdot(3)} \cdot 20) + 8$

$$T(3) = 10,5$$

- $y^4 + 2x^2y^2 = C$

+ Derivo respecto a "x"

- $4y^3y' + 2\cdot(2x\cdot y^2 + x^2\cdot 2yy') = 0$

$\cancel{4}y^3y' + \cancel{4}xy^2 + \cancel{4}x^2yy' = 0$

$y^3y' + x^2yy' = -xy^2$

$y'(y^3 + x^2y) = \text{''}$

$y' = -\dfrac{xy^2}{(y^3 + x^2y)}$

- $m_2 = -\dfrac{1}{m_2}$

$y' = \dfrac{y^3 + x^2y}{xy^2}$

$y' = \dfrac{y^2 + x^2}{xy}$

$y'xy - y^2 - x^2 = 0$

$y'xy - y^2 = x^2$

$y' - \dfrac{y^2}{xy} = \dfrac{x^2}{xy}$

$y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y}$ $\quad y^{-1} \quad p=-1$

$y'y - \dfrac{y^2}{x} = x$

- $u = y^{1-p}$

$u = y^{1--1}$

$u = y^2$

$u' = (1-p)y^{-p}y'$

$u' = (2)y^{-1}y'$

$u' = 2\cdot yy'$

$\dfrac{u'}{2} = yy'$

$\dfrac{u'}{2} - \dfrac{u}{x} = x$

$u' - \dfrac{2u}{x} = 2x$ $\quad \int P(x) = \dfrac{2}{x}$

- $U(x) = e^{\int P(x)} = e^{2\int \frac{1}{x}} = e^{2\ln|x|}$

$= e^{\ln|x^2|}$

$= \dfrac{1}{x^2}$

$\dfrac{u'}{x^2} - \dfrac{2u}{x^3} = \dfrac{2}{x}$

- $y' + P(x)y = Q(x)$

$\int\left(u\cdot\dfrac{1}{x^2}\right)' = \int\dfrac{2}{x}$

$u\cdot\dfrac{1}{x^2} = (2\cdot\ln(x)) + C$

$u = x^2(2\cdot\ln(x) + C)$

$\dfrac{y^2}{x^2} = 2\cdot\ln(x) + C$

$\dfrac{y^2}{2x^2} - \ln(x) = C$

$\frac{\frac{1}{1}}{\frac{2}{4}} \quad \frac{16}{2} = 8$

TALLER 3

1. Supongamos que un paracaidista de masa 80 kg se lanza desde un avión y que su paracaídas se abre en el instante $t = 0$ cuando su velocidad $V(0) = 10$ m/sg. Calcula la velocidad del paracaídista en un instante $t > 0$ sabiendo que la resistencia al aire es proporcional al cuadrado de la velocidad. (La constante de proporcionalidad es $K = 4$ kg/sg y tomamos $g = 10$ m/s²)

R/= $m = 80$ kg $\qquad V(0) = 10 \frac{m}{s}$

$K = 4$ kg/s $\qquad g = 10$ m/s²

$$m \frac{dv}{dt} = mg - rv^2$$

$$80 \frac{dv}{dt} = 800 - 4v^2$$

$$20 \frac{dv}{dt} = 200 - v^2$$

$$\frac{20\, dv}{200 - v^2} = dt$$

$$\int \frac{20\, dv}{(10\sqrt{2} - v)\cdot(10\sqrt{2} + v)} = \int dt \quad *$$

$$\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(10\sqrt{2} - v)} + \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(10\sqrt{2} + v)} = t$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2}(10\sqrt{2} - v)} + \int \frac{1}{\sqrt{2}(10\sqrt{2} + v)} = t$$

$$\int \frac{1\cdot dv}{20 - v\sqrt{2}} \; ** + \int \frac{1\cdot dv}{20 + v\sqrt{2}} \; *** = t$$

$$\int \frac{-\frac{du}{\sqrt{2}}}{\frac{u}{2}} + \int \frac{\frac{du}{\sqrt{2}}}{\frac{u}{2}} = t$$

$$\int -\frac{du}{\sqrt{2}\cdot u} + \int \frac{du}{\sqrt{2}\cdot u} = t$$

$$* = \frac{A}{(10\sqrt{2} - v)} + \frac{B}{(10\sqrt{2} + v)}$$

$$\frac{20\, dv}{200 - v^2} = \frac{A(10\sqrt{2} + v) + B(10\sqrt{2} - v)}{200 - v^2}$$

- Donde se indeterminan

- $A = 10\sqrt{2}$

$$\frac{20}{10\sqrt{2} + 10v} = \frac{2}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = A$$

- $B = -\sqrt{2}\cdot 10$

$$\frac{20}{10\sqrt{2} - (-10\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}} = B$$

** $u = 20 - v\sqrt{2}$
$du = 0 - \sqrt{2}\, dv$
$du = \sqrt{2}\, dv$
$dv = \frac{du}{\sqrt{2}}$

*** $u = 20 + v\sqrt{2}$
$dv = \frac{du}{\sqrt{2}}$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int \frac{du}{u} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int \frac{du}{u} = t$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \ln|20 - \sqrt{\sqrt{2}}| + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \ln|20 + \sqrt{\sqrt{2}}| + C_1 = t$$

- Despejamos $\sqrt{10}$

2. Un paracaidista cae hacia la superficie terrestre partiendo del reposo. La masa total del hombre y del equipo es de 100 kg. Antes de que se abra el paracaídas la resistencia del aire (en Newtons) es de $5v$, siendo v la velocidad en m/seg. Después de abierto el paracaídas la resistencia del aire es de $36v^2$. Si el paracaidista se abre a los 5 segundos de iniciada la caída, calcule la velocidad del paracaidista en función del tiempo.

R/=

- Antes de abrir el paracaídas

• $m = 100$ kg • $ru = 5v$ • $g = 10$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - 5v$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{5v}{m}$$

$$\int \frac{dv}{10 - \frac{1}{20}v} = \int dt$$

$$-20 \cdot \ln|10 - \tfrac{1}{20}v| = t + C$$

$$\ln|10 - \tfrac{1}{20}v| = \frac{t}{-20} + C$$

$$10 - \tfrac{1}{20}v = e^{-\frac{t}{20}} \cdot C$$

$$-\tfrac{1}{20}v = e^{-\frac{t}{20}} \cdot C - 10$$

$$v(t) = -20 \cdot \left(e^{-\frac{t}{20}} \cdot C - 10\right)$$

$$v(t) = -20e^{-\frac{t}{20}} C + 200$$

* $u = 10 - \frac{1}{20}v$

$du = -\frac{1}{20}dv$

$dv = -du \cdot 20$

$$-20\int \frac{du}{u} = -20 \cdot \ln|u|$$

- Después de abierto el paracaídas

• $m = 100$ kg • $ru = 36v^2$ • $g = 10$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - 36v^2$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{36v^2}{m}$$

$$g \cdot \frac{36}{m} \cdot v^2$$

$$\int \frac{dv}{g - \frac{36}{m} v^2} = \int dt \qquad \int \frac{dv}{\left(\sqrt{g} - \sqrt{\frac{36}{m}}\, v\right) \cdot \left(\sqrt{g} + \sqrt{\frac{36}{m}}\, v\right)}$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{g} - \sqrt{\frac{36}{m}}\, v\right) \cdot \left(\sqrt{g} + \sqrt{\frac{36}{m}}\, v\right)} = \frac{A}{\left(\sqrt{g} - \sqrt{\frac{36}{m}}\, v\right)} + \frac{B}{\left(\sqrt{g} + \sqrt{\frac{36}{m}}\, v\right)}$$

- Simplemente buscamos donde se indeterminan

- $A = v = \dfrac{+\sqrt{g}}{\sqrt{\frac{36}{m}}}$

$$A = \frac{1}{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{36}{m}} \cdot \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\frac{36}{m}}}} = \frac{1}{2\sqrt{g}}$$

- $B = v = -\dfrac{\sqrt{g}}{\sqrt{\frac{36}{m}}}$

$$B = \frac{1}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{36}{m}} \cdot \frac{-\sqrt{g}}{\sqrt{\frac{36}{m}}}} = \frac{1}{\sqrt{g} + \sqrt{g}} = \frac{1}{2\sqrt{g}}$$

$$\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot dv}{\left(\sqrt{g} - \sqrt{\frac{36}{m}}\, v\right)} + \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot dv}{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{36}{m}}\, v} = t$$

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot \int \frac{dv}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{36}{m}}\, v} + \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot \int \frac{dv}{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{36}{m}}\, v} = t$$

$u =$

$u = \sqrt{g} - \sqrt{\frac{36}{m}}\, v$

$du = -\sqrt{\frac{36}{m}}\, dv$

$dv = \dfrac{-du}{\sqrt{\frac{36}{m}}}$

$u = \sqrt{g} + \sqrt{\frac{36}{m}}\, v$

$dv = \dfrac{du}{\sqrt{\frac{36}{m}}}$

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot \int \frac{\frac{-du}{\sqrt{36/m}}}{u} + \frac{1}{2\sqrt{g}} \int \frac{\frac{du}{\sqrt{36/m}}}{u} = t + C$$

$$\left(-\frac{1}{2\sqrt{g} \cdot \sqrt{\frac{36}{m}}} \cdot \ln\left|\sqrt{g} - \sqrt{\frac{36}{m}}\, v\right|\right) + \left(\frac{1}{2\sqrt{g} \cdot \sqrt{\frac{36}{m}}} \cdot \ln\left|\sqrt{g} + \sqrt{\frac{36}{m}}\, v\right|\right) = t + C$$

$$\ln\left|\sqrt{g}+\sqrt{\frac{36}{m}}\,v\right| - \ln\left|\sqrt{g}-\sqrt{\frac{36}{m}}\,v\right| = 2\sqrt{g}\cdot\sqrt{\frac{36}{m}}\cdot t + C$$

$$\ln\left|\frac{\sqrt{g}+\sqrt{\frac{36}{m}}\,v}{\sqrt{g}-\sqrt{\frac{36}{m}}\,v}\right| = \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''}$$

$$\frac{\sqrt{g}+\sqrt{\frac{36}{m}}\,v}{\sqrt{g}-\sqrt{\frac{36}{m}}\,v} = e^{2\sqrt{g}\sqrt{\frac{36}{m}}\,t}\cdot C$$

$$\sqrt{g}+\sqrt{\frac{36}{m}}\,v = e^{2\sqrt{g}\sqrt{\frac{36}{m}}\,t}\,C\cdot\sqrt{g}-\sqrt{\frac{36}{m}}\,v$$

$$\sqrt{\frac{36}{m}}\,v = e^{2\sqrt{g}\sqrt{\frac{36}{m}}\,t}\,C\cdot\left(\sqrt{g}-\sqrt{\frac{36}{m}}\,v\right)-\sqrt{g}$$

$$\sqrt{\frac{36}{m}}\,v = +e^{2\sqrt{g}\sqrt{\frac{36}{m}}\,t}\,C\cdot\sqrt{g} - e^{2\sqrt{g}\sqrt{\frac{36}{m}}\,t}\,C\sqrt{\frac{36}{m}}\,v - \sqrt{g}$$

$$v\left(\sqrt{\frac{36}{m}} + e^{2\sqrt{g}\sqrt{\frac{36}{m}}\,t}\,C\sqrt{\frac{36}{m}}\right) = \text{''} \quad \text{''}$$

$$v(t) = \frac{e^{2\sqrt{g}\sqrt{\frac{36}{m}}\,t}\,C\cdot\sqrt{g}-\sqrt{g}}{\sqrt{\frac{36}{m}} + e^{2\sqrt{g}\sqrt{\frac{36}{m}}\,t}\,C\sqrt{\frac{36}{m}}}$$

4. Un tanque contiene 200 litros de agua donde se han disuelto 30 g de sal y le entran 4 litros/min de solución con 1 g de sal por litro; bien mezclado, de él sale líquido con la misma rapidez.

Calcule la cantidad $x(t)$ de gramos de sal que hay en el tanque en cualquier instante t. ¿En qué instante habrán 50 g de sal disueltos en el tanque?

R//: • 200 litros de agua pura con • 30 g de sal

• $E = 4 \frac{\text{litros}}{\text{min}} \; 1 \frac{g}{\text{litro}}$ • $S = 4 \frac{\text{litros}}{\text{min}}$

- Calculamos V_e y V_s

• $V_e = 4 \cdot 1 = 4$

• $V_s = 4 \cdot \frac{x(t)}{V(t)}$; $V(t) = 200$, ya que entra y sale con igual rapidez.

$V_s = 4 \cdot \frac{x(t)}{200} = \frac{x(t)}{50}$

- Remplazo en la ecuación diferencial

$\frac{dx}{dt} = V_e - V_s$

$\frac{dx}{dt} = 4 - \frac{x(t)}{50}$

$x' + \frac{x}{50} = 4$

- Aplico bernoulli: $x' + P x = Q$

• $P = \frac{1}{50}$ $Q = 4$

- Saco factor integrante

$u(x) = e^{\int \frac{1}{50} dt} = e^{\frac{1}{50} t}$

- Multiplico

$e^{\frac{1}{50} t} x' + \frac{e^{\frac{1}{50} t} x}{50} = 4 e^{\frac{1}{50} t}$

- Integro

$$\int \left(e^{\frac{1}{50}t} \cdot x\right)' = \int 4 e^{\frac{1}{50}t}$$

$$e^{\frac{1}{50}t} \cdot x = 4 \cdot 50\, e^{\frac{1}{50}t} + C$$

$$x(t) = \frac{200 \cdot e^{\frac{1}{50}t}}{e^{\frac{1}{50}t}} + C \cdot e^{-\frac{1}{50}t}$$

$$x(t) = 200 + C e^{-\frac{1}{50}t}$$

- Encontramos la constante 'C' con $x(0) = 30$

$$x(0) = 200 + C e^{-\frac{1}{50}(0)}$$

$$-170 = C$$

R// = $x(t) = 200 + (-170) e^{-\frac{1}{50}t}$

5. Un depósito contiene 10 litros de agua. A partir del momento $t = 0$ se introduce la solución salina que contiene 0.3 kg de sal por litro, a razón de 2 litros/min. La mezcla sale del depósito a la misma razón de 2 litros/min y la concentración de la mezcla se mantiene uniforme. Halle la cantidad de sal presente en el depósito después de 5 min.

R// =

- Calculamos V_e y V_s * misma velocidad de entrada y salida

- $V_e = 2 \cdot 0{,}3 = \frac{3}{5}$
- $V_s = 2 \cdot \frac{x(t)}{10} = \frac{x}{5}$

- Reemplazo en la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = V_e - V_s$$

$$x' = \frac{3}{5} - \frac{x}{5}$$

$$x' + \frac{x}{5} = \frac{3}{5}$$

- Uso bernoulli. Saco factor integrante

$$u(t) = e^{\int \frac{1}{5} dt} = e^{\frac{1}{5}t}$$

- Multiplico e integro

$$e^{\frac{1}{5}t} x' + e^{\frac{1}{5}t} \frac{x}{5} = e^{\frac{1}{5}t} \frac{3}{5}$$

$$\int (e^{\frac{1}{5}t} x)' = \frac{3}{5} \int e^{\frac{1}{5}t}$$

$$e^{\frac{1}{5}t} \cdot x = \frac{3}{5} \cdot 5 e^{\frac{1}{5}t} + C$$

$$x(t) = 3 + \frac{C}{e^{\frac{1}{5}t}}$$

- Hallo la constante, $x(0) = 0$

$$x(0) = 3 + \frac{C}{1}$$

$$-3 = C$$

- Hallo en los 5 min

$$x(5) = 3 + (-3) e^{-\frac{1}{5}(5)}$$

$$x(5) = 3 + -3 e^{-1}$$

$$x(5) = 1,896...$$

6. Un depósito contiene inicialmente 2000 litros de una solución salina que contiene 40 kg de sal. En $t=0$ se vierte agua en el depósito a una velocidad de 8 litros por minuto y sale del depósito una solución bien mezclada a 6 litros por minuto. Hallar el tiempo necesario para que haya en el tanque una cantidad de sal de 10 kg

Rta:

- Calculamos V_e y V_s

- $V_e = 8 \cdot 0 = 0$
- $V_s = 6 \cdot \frac{x(t)}{V(t)}$

- Calculo $v(t)$

$$\frac{dv}{dt} = 8 - 6 \rightarrow \int dv = 2\int dt$$

$$v = 2t + C \rightarrow v = 2t + 200$$

- $v(0) = 200$

$$200 = 2(0) + C$$

$$200 = C$$

- Reemplazo

$$\frac{dx}{dt} = 0 - \frac{x(t)}{2t+200} \longrightarrow x' + \frac{x}{2t+200} = 0$$

- Resuelvo por bernoulli

- Hallo factor integrante

$$u(t) = e^{\int P(t)\,dt} = e^{\int \frac{dt}{2t+200}} = e^{\int \frac{\frac{du}{2}}{u}}$$

$u = 2t + 200$

$du = 2 \cdot dt$

$dt = \frac{du}{2}$

$$= e^{\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}} = e^{\frac{1}{2} \cdot \ln(2t+200)} = \sqrt{2t+200}$$

- Multiplico

$$\sqrt{2t+200}\; x' + \sqrt{2t+200} \cdot \frac{x}{2t+200} = 0$$

$$\int \left(\sqrt{2t+200} \cdot x\right)' = \int 0$$

$$x \cdot \sqrt{2t+200} = C$$

$$x(t) = \frac{C}{\sqrt{2t+200}}$$

- Hallo la constante, $x(0) = 40$

$$40 = \frac{C}{\sqrt{200}}$$

$$C = 400\sqrt{10} \approx 565,685$$

- Hallo tiempo, son 10 kg

$$10 = \frac{400\sqrt{10}}{\sqrt{2t+200}}$$

$\sqrt{2t+200} = 40\sqrt{10}$

$2t + 200 = 1600 \cdot 10$

$2t = 15800$

$t = 7900$

7. Una salmera que contiene inicialmente 2 kg de sal por litro, fluye hacia el interior de un tanque inicialmente lleno con 500 litros de agua

TALLER 4

1. En los siguientes problemas verifique la familia de funciones que se proporciona es la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo que se indica. Encuentre un miembro de la familia que sea una solución del problema de valor inicial.

a) $y = C_1 \cdot e^{4x} + C_2 e^{-x}$; $(-\infty, \infty)$; $y'' - 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$

Sol:

- $y_1(x) = e^{4x}$
- $y_2(x) = e^{-x}$

- Verificamos que la familia de funciones que se proporciona es la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo que se indica

- Hallamos las derivadas de la función dada

- $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$

$y' = 4C_1 e^{4x} - C_2 e^{-x}$

$y'' = 16 C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$

- Sustituimos en la ED la función y sus derivadas

- $(16C_1 e^{4x} + C_2 e^{x}) - 3(4C_1 e^{4x} - C_2 e^{-x}) - 4(C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}) = 0$

$16C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} - 12C_1 e^{4x} + 3C_2 e^{-x} - 4C_1 e^{4x} - 4C_2 e^{-x} = 0$

$0 = 0$

- Definimos intervalo adecuado para la solución

- Observando las fórmulas de la función y sus derivadas, tenemos intervalo de $(-\infty, \infty)$

- Si es la solución general

- Encontramos un miembro de la familia que sea una solución del problema de valor inicial

- $y(x) = C_1 \cdot e^{4x} + C_2 e^{-x}$

- $y(0) = 1$

$1 = C_1 \cdot e^{4(0)} + C_2 e^{-(0)}$

$1 = C_1 + C_2$

$y' = 4C_1 e^{4x} - C_2 e^{-x}$

- $y'(0) = 2$

$2 = 4C_1 e^{4(0)} - C_2 e^{-(0)}$

$2 = 4C_1 - C_2$

- Hallamos constantes

$$\begin{array}{rcl} C_1 + C_2 & = & 1 \\ 4C_1 - C_2 & = & 2 \\ \hline 5C_1 & = & 3 \end{array} \quad C_1 = \frac{3}{5}$$

- $1 = \frac{3}{5} + C_2$

$C_2 = \frac{2}{5}$

- R//: $y = \frac{3}{5} e^{4x} + \frac{2}{5} \cdot e^{-x}$

b) $y = C_1 x + C_2 x \cdot \ln(x)$; $(0, \infty)$; $x^2 y'' - xy' + y = 0$; $y(1) = 3$; $y'(1) = 1$

R//:

- Verificamos familia de funciones
- Hallamos las derivadas de la función dada
  - $y = C_1 x + C_2 \cdot x \cdot \ln(x)$

$y' = C_1 + (C_2 \cdot \ln(x) + C_2 \cdot x \cdot \frac{1}{x})$

$y'' = C_2 \cdot \frac{1}{x}$

- Sustituimos en la ED la función y sus derivadas
  - $x^2 (C_2 \cdot \frac{1}{x}) - x(C_1 + C_2 \cdot \ln(x) + C_2) + (C_1 x + C_2 \cdot x \cdot \ln(x)) = 0$

$C_2 x - C_1 x - C_2 \ln(x) x - C_2 x + C_1 x + C_2 x \ln(x) = 0$

$0 = 0$

- Deducimos intervalo
  - $(0, \infty)$

- Si es la solución general

- Encontramos valores que sea solución del problema

- $y(x) = C_1 \cdot x + C_2 x \cdot \ln(x)$

- $y(1) = 3$

$3 = 3C_1$ $\quad C_1 = \frac{3}{3} = 1$

$y'(x) = C_1 + (C_2 \cdot \ln(x) + C_2)$

- $y'(1) = 1$

$1 = C_1 + C_2 \cdot \ln(1) + C_2$

$1 = C_1 + C_2 \cdot 0 + C_2$

$1 = C_1 + C_2$

$1 = 1 + C_2$

$0 = C_2$

R/: $y(x) = x + 0 \cdot x \cdot \ln(x)$

c) $y = C_1 + C_2 \cdot \cos(x) + C_3 \cdot \operatorname{Sen}(x)$; $(-\infty, \infty)$; $y''' + y' = 0$, $y(\pi) = 0$; $y'(\pi) = 2$, $y''(\pi) =$

R/:

- Verificamos familia de funciones

- Hallamos las derivadas de las funciones dadas

- $y = C_1 + C_2 \cdot \cos(x) + C_3 \cdot \operatorname{Sen}(x)$

$y' = -C_2 \cdot \operatorname{Sen}(x) + C_3 \cdot \cos(x)$

$y'' = -C_2 \cdot \cos(x) - C_3 \cdot \operatorname{Sen}(x)$

$y''' = C_2 \cdot \operatorname{Sen}(x) - C_3 \cdot \cos(x)$

- Sustituimos en la ED la función y sus derivadas

- $(C_2 \cdot \operatorname{Sen}(x) - C_3 \cdot \cos(x)) - C_2 \cdot \operatorname{Sen}(x) + C_3 \cdot \cos(x) = 0$

$0 = 0$

- Deducimos intervalo

$(-\infty, \infty)$

- Si es la solución general.

- Encontramos miembro que sea solución del problema

- $y(x) = C_1 + C_2 \cdot \cos(x) + C_3 \cdot \operatorname{Sen}(x)$

- $y(\pi) = 0$

$0 = C_1 + C_2 \cdot \cos(\pi) + C_3 \cdot \operatorname{Sen}(\pi)$

$0 = C_1 - C_2$

- $y'(\pi) = 2$

$2 = -C_2 \cdot \operatorname{Sen}(\pi) + C_3 \cdot \cos(\pi)$

$2 = 0 - C_3$

$-2 = C_3$

- $y''(\pi) = -1$

$-1 = -C_2 \cdot \cos(\pi) - C_3 \cdot \operatorname{Sen}(\pi)$

$-1 = C_2$

- Encuentro C_1

$0 = C_1 - (-1)$

$0 = C_1 + 1$

$-1 = C_1$

R//: $y = -1 - \cos(x) - 2 \cdot \operatorname{Sen}(x)$

2. Escoger la opción que contiene dos soluciones de la ecuación

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$$

R//:

a) $y_1 = x^{-1}$, $y_2 = x^2$

- $y_1 = \frac{1}{x}$

$y_1' = -\frac{1}{x^2}$

$y_1'' = \frac{2}{x^3}$

$x^2\left(\frac{2}{x^3}\right) + 4x\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$\frac{2}{x} - \frac{4}{x} + \frac{2}{x} = 0$

$0 = 0$

- $y_2 = x^2$
  $y_2' = 2x$
  $y_2'' = 2$

$x^2 \cdot 2 + 4x \cdot 2x + 2(x^2) = 0$

$2x^2 + 8x^2 + 2x^2 = 0$

$12x^2 \neq 0$

b) $y_2 = x^{-2}$ $\quad y_2 = x^{-2}$

- $y_1 = \frac{1}{x}$
  $y_1' = -\frac{1}{x^2}$
  $y_1'' = \frac{2}{x^3}$ ✓

- $y_2 = x^{-2}$
  $y_2' = -\frac{2}{x^3}$
  $y_2'' = \frac{6}{x^4}$

- $x^2 \cdot \frac{6}{x^4} + 4x\left(-\frac{2}{x^3}\right) + 2\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

$\frac{6}{x^2} + -\frac{8}{x^2} + \frac{2}{x^2} = 0$

$0 = 0$ ✓

3. Determinar si se aplica el teorema de la existencia y unicidad de una solución a los problemas de valor inicial dados. En caso afirmativo, indicar el máximo intervalo para el cual existe una solución única. Sino se aplica explicar por qué.

a) $x^2 y'' + xy = \operatorname{Sen}(x)$, $\quad y(0) = 1$; $y'(0) = 2$

Rta:
- Pasamos a forma normal

- $y'' + \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{Sen}(x)}{x^2}$, $\quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Por lo tanto, el teorema de existencia y unicidad no es aplicable

b) $y' - yy' + y = 0$; $\quad y(1) = 3$; $y'(1) = 1$

Rta: $y'(1 - y) + y = 0$

$y' + \frac{y}{1-y} = 0$

$5 \cdot C_1 = -1$

4. Determine si el conjunto de funciones es linealmente independiente en el intervalo

a) $f_1(x) = x$; $f_2(x) = x^2$; $f_3(x) = 4x + 2x^2$

- linealmente dependiente: $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_n f_n(x) = 0$

Rpta:

- Buscamos dependencia

$$C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + C_3(4x + 2x^2) = 0$$

$$C_1 x + C_2 x^2 + C_3 4x + C_3 2x^2 = 0$$

- Porque es polinómico...

$C_1 = 4$ $\quad C_2 = 2$ $\quad C_3 = -1$

$$4x + 2x^2 - 4x - 2x^2 = 0$$

$$0 = 0$$

- Es linealmente dependiente

b) $f_1(x) = 5$; $f_2(x) = \cos^2(x)$; $f_3(x) = \operatorname{Sen}^2(x)$

Rpta:

- Buscamos dependencia

$$5C_1 + \cos^2(x) C_2 + \operatorname{Sen}^2(x) C_3 = 0$$

$C_1 = \frac{-1}{5}$ $\quad C_2 = 1$ $\quad C_3 = 1$

$$5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + \cos^2(x) \cdot 1 + \operatorname{Sen}^2(x) \cdot 1 = 0$$

$$-1 + 1 = 0$$

$$0 = 0$$

- Es linealmente dependiente

c) $f_1(x) = 1 + x$; $f_2(x) = 2x$; $f_3(x) = x^3$

R/: $C_1 \cdot (1 + x) + C_2 (2x) + C_3 (x^3) = 0$

- Si su Wronskiano es diferente a 0, es l.i

$f_1(x) = 1 + x$ $\quad$ $f_2(x) = 2x$ $\quad$ $f_3(x) = x^3$

$f_1'(x) = 1$ $\quad$ $f_2'(x) = 2$ $\quad$ $f_3'(x) = 3x^2$

$f_1''(x) = 0$ $\quad$ $f_2''(x) = 0$ $\quad$ $f_3''(x) = 6x$

- Calculamos determinante

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+x & x & x^2 \\ 1 & 2 & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6x \end{vmatrix} = W$$

$$W = (1+x) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3x^2 \\ 0 & 6x \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3x^2 \\ 0 & 6x \end{vmatrix} + x^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1+x) \cdot (12x - 0) - x \cdot (6x - 0) + x^2 (0 - 0)$$

$$= 12x + 12x^2 - 6x^2$$

$$W = 6x^2 + 12x$$

- Debido a que cuando $x = 0$, $\rightarrow W = 0$, por lo tanto es linealmente dependiente

d) $f_1(x) = e^x$; $f_2(x) = e^{2x}$; $f_3(x) = e^{3x}$

R/: • Buscamos Wronskiano.

$f_1(x) = e^x$ $\quad$ $f_2(x) = e^{2x}$ $\quad$ $f_3(x) = e^{3x}$

$f_1'(x) = e^x$ $\quad$ $f_2'(x) = 2 \cdot e^{2x}$ $\quad$ $f_3'(x) = 3e^{3x}$

$f_1''(x) = e^x$ $\quad$ $f_2''(x) = 4e^{2x}$ $\quad$ $f_3''(x) = 6e^{3x}$

$$W = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} & e^{3x} \\ e^{x} & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^{x} & 4e^{2x} & 6e^{3x} \end{vmatrix}$$

$$W = e^{x} \begin{vmatrix} 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ 4e^{2x} & 6e^{3x} \end{vmatrix} - e^{2x} \begin{vmatrix} e^{x} & 3e^{3x} \\ e^{x} & 6e^{3x} \end{vmatrix} + e^{3x} \begin{vmatrix} e^{x} & 2e^{2x} \\ e^{x} & 4e^{2x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{x} \cdot (12e^{5x} - 12e^{5x}) - e^{2x} \cdot (6e^{4x} - 3e^{4x}) + e^{3x}(4e^{3x} - 2e^{3x})$$

$$= e^{x} \cdot 0 - e^{2x}(3e^{4x}) + e^{3x}(2e^{3x})$$

$$= -3e^{6x} + 2e^{6x}$$

$$= -e^{6x}$$

$$0 \neq -e^{6x}$$

- Por lo tanto es l.i

e) $f_1(x) = 2 + 2x + 2x^2$; $f_2(x) = 1 - x$; $f_3(x) = 2x + x^2$

R/= ewe

5. Comprueba que las funciones que se proporcionan forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo que se indica. Forma la solución general.

a) $y'' - y' - 12y = 0$; $y_1 = e^{x}$; $y_2 = e^{4x}$; $(-\infty, \infty)$

R/=

- Demostramos que las funciones son solución de la ecuación

$y_1 = e^{x}$ $\quad y_1' = e^{x}$ $\quad y_1'' = e^{x}$

$e^{x} - e^{x} - 12e^{x} = 0$

$-12e^{x} \neq 0$

- No forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial.

b) $y'' - 2y' + 5y = 0$; $y_1 = e^x \cos(2x)$; $y_2 = e^x \operatorname{Sen}(2x)$; $(-\infty, \infty)$

R/:

- ¿Son solución?

$y_1 = e^x \cdot \cos(2x)$

$y_1' = e^x \cdot \cos(2x) - 2e^x \cdot \operatorname{Sen}(2x)$

$y_1'' = (e^x \cdot \cos(2x) - 2e^x \cdot \operatorname{sen}(2x)) - (2e^x \cdot \operatorname{Sen}(2x) + 4e^x \cdot \cos(2x))$

$e^x \cdot \cos(2x) - 2e^x \operatorname{Sen}(2x) - 2e^x \operatorname{Sen}(2x) - 4e^x \cos(2x) - 2e^x \cos(2x) + 4e^x \operatorname{Sen}(2x)$

$+ 5e^x \cos(2x) = 0$

$0 = 0$

$y_2 = e^x \cdot \operatorname{Sen}(2x)$

$y_2' = e^x \cdot \operatorname{Sen}(2x) + 2e^x \cdot \cos(2x)$

$y_2'' = (e^x \operatorname{Sen}(2x) + 2e^x \cdot \cos(2x)) + (2e^x \cdot \cos(2x) - 4e^x \cdot \operatorname{Sen}(2x))$

$e^x \operatorname{Sen}(2x) + 2e^x \cos(2x) + 2e^x \cos(2x) - 4e^x \operatorname{Sen}(2x) - 2e^x \operatorname{Sen}(2x) - 4e^x \cos(2x)$

$+ 5e^x \operatorname{Sen}(2x) = 0$

$0 = 0$

- Comprobamos si son L.I.

$$W = \begin{vmatrix} e^x \cdot \cos(2x) & e^x \operatorname{Sen}(2x) \\ e^x \cdot \cos(2x) - 2e^x \operatorname{Sen}(2x) & e^x \cdot \operatorname{Sen}(2x) + 2e^x \cdot \cos(2x) \end{vmatrix} \neq 0$$

$e^x \cos(2x) - e^x \cdot \operatorname{Sen}(2x) - 2e^x \cdot \cos(2x) - e^x \cdot \cos(2x) + 2e^x \cdot \operatorname{Sen}(2x) + e^x \operatorname{Sen}(2x)$

$-2e^x \cos(2x) + 2e^x \operatorname{Sen}(2x) \neq 0$

$e^x(-2\cos(2x) + 2\operatorname{Sen}(2x)) \neq 0$?

c) $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$; $y_1 = x$; $y_2 = x^{-2}$; $y_3 = x^{-2}\ln(x)$;

$(0, \infty)$

R//:

- ¿Son soluciones?

$y_1 = x \qquad y_1' = 1 \qquad y_1'' = 0 \qquad y_1''' = 0$

$0 + 0 + 4x - 4x = 0$

$0 = 0$ ✓

$y_2 = x^{-2} \qquad y_2' = -2x^{-3} \qquad y_2'' = 6x^{-4} \qquad y_2''' = -24x^{-5}$

$x^3\left(\frac{-24}{x^5}\right) + 6x^2\left(\frac{6}{x^4}\right) + 4x\left(\frac{-2}{x^3}\right) - 4\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

$-\frac{24}{x^2} + \frac{36}{x^2} - \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x^2} = 0$

$0 = 0$ ✓

$y_3 = x^{-2} \cdot \ln(x)$

$y_3' = (-2x^{-3} \cdot \ln(x)) + x^{-2} \cdot \frac{1}{x}$

$= -2x^{-3}\ln(x) + x^{-3}$

$= -x^{-3} \cdot \ln(x)$

$y_3'' = (3x^{-4} \cdot \ln(x)) + (-x^{-3} \cdot \frac{1}{x})$

$= 3x^{-4} \cdot \ln(x) - x^{-4}$

$= 2x^{-4} \cdot \ln(x)$

$y_3''' = (-8x^{-5} \cdot \ln(x)) + (2x^{-4} \cdot \frac{1}{x})$

$= -8x^{-5} \cdot \ln(x) + 2x^{-5}$

$= -6x^{-5} \cdot \ln(x)$

$x^3 \cdot \left(\frac{-6}{x^5} \cdot \ln(x)\right) + 6x^2\left(\frac{2}{x^4} \cdot \ln(x)\right) + 4x\left(-\frac{1}{x^3} \cdot \ln(x)\right) - 4\left(\frac{1}{x^2} \cdot \ln(x)\right) = 0$

$\frac{-6 \cdot \ln(x)}{x^2} + \frac{12 \cdot \ln(x)}{x^2} + \frac{4 \cdot \ln(x)}{x^2} - \frac{4}{x^2}\ln(x) = 0$

$\frac{-2 \cdot \ln(x)}{x^2} = 0$ ✗

6. Encontrar una segunda solución de cada ecuación diferencial dada

a) $9y'' - 12y' + 4y = 0$; $y_1 = e^{\frac{2}{3}x}$

R//=

-Uso fórmula • $P(x) = 12$

$$\bullet\ y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int P \cdot dx}}{y_1^2}\, dx$$

$$y_2 = e^{\frac{2}{3}x} \cdot \int \frac{e^{-\int 12\, dx}}{(e^{\frac{2}{3}})^2}\, dx$$

$$y_2 = e^{\frac{2}{3}x} \cdot \int \frac{e^{+12x}}{e^{\frac{4}{3}x}}\, dx$$

$$y_2 = e^{\frac{2}{3}x} \int e^{\frac{32}{3}x}\, dx$$

$$C_1 \cdot y_2 = e^{\frac{2}{3}x} \cdot \frac{3}{32} e^{\frac{32x}{3}} + C_2 \quad , \quad C_1 = 1 \quad y \quad C_2 = 0$$

b) $x^2 y'' - 7xy' + 16y = 0$; $y_1 = x^4$

R//=

-Uso fórmula • $P(x) = -7x$

$$y_2 = x^4 \cdot \int \frac{e^{-\int -7x\, dx}}{(x^4)^2}\, dx$$

$$y_2 = x^4 \cdot \int \frac{e^{\frac{7x^2}{2}}}{x^8}\, dx$$

c) $(1+2x)y'' + 4xy' - 4y = 0$; $y_1 = e^{-2x}$

R//=

-Uso fórmula • $P(x) = 4x$

$$y_2 = e^{-2x} \cdot \int \frac{e^{-\int 4x\, dx}}{(e^{-2x})^2}\, dx$$

$$y_2 = e^{-2x} \cdot \int \frac{e^{-2x^2}}{e^{-4x}}\, dx$$

d) $xy'' - (x+1)y' + y = 0$; $y_1 = e^x$ *

R//:

- Uso formula • $p(x) = -(x+1)$

$$y_2 = e^x \cdot \int \frac{e^{-\int -(x+1)dx}}{e^{2x}} dx$$

$$y_2 = e^x \cdot \int \frac{e^{\frac{x^2}{2}+x}}{e^{2x}} dx$$

$$y_2 = e^x \cdot \int \frac{e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{x}}{e^{2x}} dx$$

$$y_2 = e^x \cdot \int e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-x} dx$$

* Posar a la forma normal

d) $xy'' - (x+1)y' + y = 0$; $y_1 = e^x$

R//:

- Uso formula

$$y'' - \frac{(x+1)}{x} \cdot y' + \frac{y}{x} = 0$$

• $P(x) = \frac{-(x+1)}{x}$

$$y_2 = e^x \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{(x+1)}{x} dx}}{e^{2x}} dx$$

$$y_2 = e^x \cdot \int \frac{e^{x+\ln(x)}}{e^{2x}} dx \rightarrow y_2 = e^x \cdot \int e^{-x} \cdot e^{\ln(x)} dx$$

$$y_2 = e^x \cdot \int e^{-x} \cdot x \, dx$$ Aplicar integración por partes

$$y_2 = e^x \cdot \left(e^{-x} x - \int -e^{-x} dx\right)$$

$$y_2 = e^x \cdot \left(-e^{-x} x - e^{-x}\right)$$

$$y_2 = -x - 1$$

TALLER 5.

SIMULACRO

1. Ejercicio de Salmuera

Tol: • Inicialmente fluye $2 \frac{kg}{L}$

• Tanque 500 L de agua con 100 kg sal.

• $V_e = 6 \frac{L}{m}$

• $V_s = 4 \frac{L}{m}$

• ¿S0 min?

- Calculamos V_e y V_s

$V_e = 6 \cdot \frac{L}{m} \cdot 2 \frac{kg}{L} \rightarrow 12 \frac{kg}{m}$

$\frac{dx}{dt} = V_e - V_s$

$V_s = 4 \frac{L}{m} \cdot \frac{X(t)}{V(t)}$

- Tenemos q.e:

$\frac{dx}{dt} = 12 - \frac{4 \cdot X(t)}{V(t)}$

$\frac{dx}{dt} = 12 - \frac{4 \cdot X(t)}{500+2t}$

$\frac{dx}{dt} + \frac{4x}{500+2t} = 12$

$\frac{dV}{dt} = 6 - 4 = 2$

$\int dV = 2 \cdot \int dt$

$V(t) = 2t + C$

• $V(0) = 500$

$500 = 0 + C$

$C = 500$

- Resuelvo $x' + P(t)x = Q(t)$

• $P(t) = \frac{4}{500+2t}$

- Resuelvo Bernoulli

- Hallo factor integral

$u(t) = e^{\int P(t)\,dt} = e^{\int \frac{4}{500+2t}} = e^{4\int \frac{dt}{500+2t}}$

$2(2t+500)\cdot 2 \rightarrow 4(2t+50)$

$$= \quad u = 2t+500 \quad du = 2\cdot dt \quad dt = \frac{du}{2} \qquad = e^{4\cdot\int \frac{\frac{du}{2}}{u}}$$

$$= e^{2\cdot\int\frac{du}{u}} = e^{2\cdot\ln(u)} = e^{\ln(u^2)} = u^2$$

$$= (2t+500)^2$$

- Multiplico

$$(2t+500)^2 x' + (2t+500)^2\cdot\frac{4x}{500+2t} = 12\cdot(2t+500)^2$$

$$\int((2t+500)^2\cdot x)' = 12\cdot\int(2t+500)^2\,dt$$

$u = 2t+500$
$du = 2\,dt$
$dt = \frac{du}{2}$

$$(2t+500)^2\cdot x = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2t+500)^3}{3} + C$$

$$\int(u)^2\cdot\frac{du}{2}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\int(u^2)\,du$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{u^3}{3}$$

$$x(t) = \left(\frac{(2t+500)^3}{6} + C\right)\cdot(2t+500)^2$$

$$x(t) = 2t+500 + C\cdot(2t+500)^2$$

$$x(0) = C(2(0)+500)^2$$

$$0 = C(500)^2$$

$$0 = C$$

- $x(t) = 2t+500$

$$x(50) = 2(50)+500$$

$$x(50) = 600$$

2. Considere la ecuación $x^2y'' + xy' - y = 0$

Tenemos que $y_2 = x$ es solución

Rpta:

- Limpiamos la ecuación
  - $y'' + \frac{y'}{x} - y = 0$

$-\int \frac{1}{x} dx$

$-\ln|x|$

$\ln|x^{-1}|$

- Aplicamos ecuación
  - $P(x) = \frac{1}{x}$
  - $y_2 = x \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{1}{x} dx}}{(x)^2} dx$

$y_2 = x \cdot \int \frac{e^{\ln|x^{-1}|}}{x^2} dx \rightarrow x \cdot \int \frac{x^{-1}}{x^2} dx$

$y_2 = x \cdot \int \frac{1}{x^3} dx \rightarrow x \cdot \int x^{-3} dx$

$y_2 = x \cdot \frac{x^{-2}}{-2} \rightarrow x \cdot \frac{1}{-2x^2} \rightarrow \frac{1}{-2x}$

- Multiplico por (-2) porque es l.i

$y_2 = -2 \cdot \frac{1}{-2x} = \frac{1}{x} = x^{-1}$

3. Paracaidista Masa = 90 $r = 10$

Resistencia = $10v$ $56 - 30 = 26$

Despues

Resistencia = $50v$

- Se abre a los 30 segundos
- Calcular a los 56

Rta:

- Usamos ecuacion

$$m\frac{dv}{dt} = mg - 10v$$

- $$X(t) = \frac{m}{r}\left(v_0 - \frac{m}{r}g\right)\left(1 - e^{-\frac{r}{m}(t-t_0)}\right) + \frac{m}{r}g(t-t_0) + x_0$$

- Cuando recien se abre

$$X(30) = \frac{90}{10}\left(0 - \frac{m}{10}(9,8)\right)\left(1 - e^{-\frac{10}{90}(30-0)}\right) + \frac{90}{10}9,8(30-0)$$

$$X(30) = 1880$$

$$V(30) = \frac{90}{10}(9,8) + \left(0 - \frac{90}{10}(9,8)\right)e^{-\frac{10}{90}(30-0)}$$

$$V_{(30)} = 85$$

- Cuando lo abre

$$X(26) = \frac{90}{50}\left(85 - \frac{90}{50}(9,8)\right)\left(1 - e^{-\frac{50}{90}(30-0)}\right) + \frac{90}{50}\cdot 9,8(26-0)$$

$$X(26) = 579,88$$

$$X(30) + X(26) = 2459,88$$

4. Solución general de la ecuación:

$$y'' + 6y' + 10y = x^2 \cdot e^{-3x}$$

Sol:

- Tenemos

$$y'' + 6y' + 10y = 0$$

- Resuelvo

$a = 1 \quad b = 6 \quad c = 10$

$r^2 + 6r + 10 =$

- $r = -b \pm$
- $b^2 - 4ac = -4$

- $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$

- $\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{4}}{2a} = \frac{2}{2a} = \frac{1}{1} = 1$

1) ~ 0 ~ 0 ~ 0 ~ 0 ~ 0

Mais ocorres

• m

1) $m = 90$ $\quad V_0 = 0$ $\quad F_1 = 9v$ $\quad g = 10$ ①

$F_2 = 45v$ ② 30 segs

③ 56 segs

• $m\frac{dv}{dt} = mg - rv$

$\frac{dv}{dt} = g - \frac{9v}{m}$

$dv = \left(g - \frac{9v}{m}\right)dt$

$\int \frac{dv}{(g - \frac{9v}{m})} = \int dt$

$-\frac{m}{9} \cdot \ln\left|g - \frac{9v}{m}\right| = t + C'$

$-\frac{9t}{m} + C' = \ln\left|g - \frac{9v}{m}\right|$

$g - \frac{9v}{m} = e^{-\frac{9t}{m} + C'}$

$\frac{9v}{m} - g = -C' \cdot e^{-\frac{9t}{m}}$

$\frac{9v}{m} = -C' e^{-\frac{9t}{m}} + g$

$v = \frac{-C' e^{-\frac{9t}{m}} \cdot m}{9} + \frac{g \cdot m}{9}$

* $\int \frac{dv}{(g - \frac{9v}{m})}$

• $u = g - \frac{9v}{m}$

$du = -\frac{9}{m}\, dv$

$dv = -\frac{du \cdot m}{9}$

$= \int \frac{-\frac{du \cdot m}{9}}{u}$

$= -\frac{m}{9} \int \frac{+du}{u}$

$= -\frac{m}{9} \cdot \ln|u|$

$= -\frac{m}{9} \cdot \ln\left|g - \frac{9v}{m}\right|$

• $V(0) = 0$

$0 = -\frac{C' \cdot 90}{10} + \frac{10 \cdot 90}{9}$

$0 = -C' \cdot 9 + 100$

$+\frac{100}{9} = C'$

$1{,}11 = C'$

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - rv$$

$$90 \cdot \frac{dv}{dt} = 90 \cdot 10 - 9v$$

$$90 \cdot \frac{dv}{dt} = 900 - 9v$$

$$\frac{dv}{dt} = 10 - \frac{1}{10}v$$

$$\int \frac{dv}{10 - \frac{1}{10}v} = \int dt$$

$$-10 \cdot \ln\left|10 - \frac{1}{10}v\right| = t + C$$

$$-10 \cdot \ln|100 - v|$$

$$v = 100 - C \cdot e^{-\frac{t}{10}}$$

$$v_{(0)} = 0$$

$$0 = 100 - C \cdot e^{-\frac{t}{10}}$$

$$-100 = -C e^{-\frac{0}{10}}$$

$$100 = C$$

$$\frac{dx}{dt} = 100 - 100 \cdot e^{-\frac{t}{10}}$$

$$\int dx = \int \left[100 - \left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right)\right] dt$$

$$\int dx = \int 100\, dt - 100 \int e^{-\frac{t}{10}}\, dt$$

$$x = 100t + 1000 \cdot e^{-\frac{t}{10}} + C$$

$$u = 10 - \frac{1}{10}v$$

$$du = -\frac{1}{10}\, dv \quad - dv = -10 \cdot du$$

$$\int \frac{-10 \cdot du}{u}$$

$$-10 \int \frac{du}{u}$$

$$-10 \cdot \ln|u|$$

$$-10 \cdot \ln\left|10 - \frac{1}{10}v\right|$$

$$10 - \frac{1}{10}v = 100 - v$$

$$-\frac{1v}{10} = 90 - v$$

$$u = (100 - 100 \cdot e^{-\frac{t}{10}})$$

$$du = -100 \cdot e^{-\frac{t}{10}} \cdot -\frac{1}{10}\, dt$$

$$du = 10 \cdot e^{-\frac{t}{10}}\, dt$$

$$dt = \frac{du}{10 \cdot e^{-\frac{t}{10}}}$$

$$u = \frac{-t}{10}$$

$$du = \frac{-1}{10}\, dt$$

$$dt = -10\, du$$

$$\int e^{u} \cdot -10\, du$$

$$-10 \cdot \int e^{u} \cdot du$$

$$-10 \cdot e^{u}$$

$$-10 \cdot e^{-\frac{t}{10}}$$

• Solución

Tanque inicial = 500 con 200 kg sal

$V_e = 8$ $\quad C_e = 2kg$ $\quad$ ¿ $C(50)$?

$V_s = 6$ $\quad C_s = \frac{x(t)}{V(t)}$

• $\frac{dV}{dt} = V_{ef} - V_{sv}$

$V_e = 8 \cdot 2 = 16$

$V_s = 6 \cdot \frac{x(t)}{V(t)}$

$V_s = 6 \cdot \frac{x(t)}{2t+500}$

$\frac{dV}{dt} = 8 - 6$

$\frac{dV}{dt} = 2$

$\int dV = \int 2\, dt$

$V = 2t + C$

• $V_{(0)} = 500$

$500 = 2(0) + C$

$500 + C$

• $V = 2t + 500$

$\frac{dx}{dt} = V_e \cdot C_e - V_s \cdot C_s$

• $\frac{dx}{dt} = 16 - \frac{6 \cdot x}{2t+500}$

$\frac{dx}{dt} + \frac{6x}{2t+500} = 16 = 0$

- Resolver $\cancel{P(x)}\, x' + P(x)\, x = Q(t)$ $\quad$ • $x' + P(t)\, x = Q(t)$

• $P(t) = \frac{6}{2t+500}$

$\int \frac{1}{2t+500} = 1$

- Hallo factor integrad

$u(t) = e^{\int \frac{6}{2t+500} dt} = e^{6 \int \frac{1}{2t+500} dt}$

$u = 2t+500$

$du = 2\, dt \rightarrow dt = \frac{du}{2}$

$\int \frac{du}{\frac{1}{u}} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{du}{u}$

$\frac{1}{2} \cdot \ln|u|$

$= e^{3 \cdot \ln|2t+500|} = e^{\ln|(2t+500)^3|} = (2t+500)^3$

$$(2t+500)^3 \cdot x' + \frac{6(2t+500)^3 \cdot 6x}{2t+500} = 16 \cdot (2t+500)^3$$

$$\int (x \cdot (2t+500)^3)' = 16 \cdot \int (2t \cdot 500)^3 \, dt$$

$u = 2t+500$

$du = 2\,dt$

$dt = \frac{du}{2}$

$$x \cdot (2t+500)^3 = 2 \cdot (2t+500)^4 + C_1$$

$$x(t) = 2 \cdot (2t+500) + \frac{C_1}{(2t+500)^3}$$

$$\int (u)^3 \cdot \frac{du}{2}$$

$$\frac{1}{2} \int u^3 \cdot du$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{u^4}{4}$$

$$\frac{u^4}{8}$$

- $x(0) = 200$

$$200 = 2(2(0)+500) + \frac{C_1}{(2(0)+500)^3}$$

$$-300 \cdot (500)^3 = C_1$$

$$-3{,}75 \times 10^{10} \; C_1$$

- $$x(t) = 2(2t+500) + \frac{C_1}{(2t+500)^3}$$

$x(0) = 200$

$$200 = 2(2(0)+500) + \frac{C_1}{(2(0)+500)^3}$$

$$200 = 1000 + \frac{C_1}{(2(0)+500)^3}$$

$$-800 \cdot (500)^3 = C_1$$

$$C_1 = -1 \times 10^{11}$$

$$x(50) = 2(2(50)+500) - \frac{-1 \times 10^{11}}{(2(50)+500)^3}$$

- $x^2 y'' + xy' - 9y = 0$ $\quad y_1 = x^3$

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{(y_1)^2}\,dx$$

- Paso a forma normal

$$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{9}{x^2} = 0 \qquad P(x) = \frac{1}{x}$$

- Utilizo y_2

$$y_2 = x^3 \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{1}{x}\,dx}}{(x^3)^2}\,dx$$

$$y_2 = x^3 \cdot \int \frac{e^{-\ln|x|}}{x^6}\,dx \rightarrow y_2 = x^3 \cdot \int \frac{x^{-1}}{x^6}\,dx$$

$$y_2 = x^3 \cdot \int \frac{1}{x^7}\,dx$$

$$y_2 = x^3 \cdot \int x^{-7}\,dx \rightarrow x^3 \cdot \frac{x^{-6}}{-6}$$

$$y_2 = \frac{x^3}{-6} \rightarrow y_2 = x^{-3}$$

TALLER 6

1. Encontrar la solución general usando el método de variación de parámetros para determinar

- $y'' + y = \sec(x)$

[1]=

- Buscamos a que tipo de solución pertenece con el determinante

- $a = 1 \quad b = 0 \quad c = 1$

$b^2 - 4ac \rightarrow 0^2 - 4(1)(1)$

$-4 < 0$

- Solución del tipo complejo

- $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(1)} = 0$

- $\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{4(1)(1) - 0^2}}{2(1)} = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

- $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$
  $= \cos(x)$

- $y_2 = e^{\alpha x} \cdot \operatorname{Sen}(\beta x)$
  $= \operatorname{Sen}(x)$

- Calculamos Wronskiano

- $W = \begin{vmatrix} \cos(x) & \operatorname{Sen}(x) \\ -\operatorname{Sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2(x) - (-\operatorname{Sen}^2(x)) = 1$

- $g(x) = \sec(x)$

- Calculamos V_1 y V_2

- $V_1 = -\int \frac{y_2 \cdot g(x)}{W(y_1, y_2)}$

- $V_2 = \int \frac{y_1 \cdot g(x)}{W(y_1, y_2)}$

$V_1 = -\int \frac{\operatorname{Sen}(x) \cdot \sec(x)}{1}$

$$V_1 = -\int \operatorname{Sen} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \, dx$$

$$V_1 = -\int \operatorname{Sen}(x) \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{-\operatorname{Sen}(x)}$$

$$V_1 = \int \frac{1}{u}$$

$$V_1 = \ln|u| = \ln|\cos(x)|$$

$$* \; u = \cos(x)$$
$$du = -\operatorname{Sen}(x)\,dx$$
$$dx = \frac{du}{-\operatorname{Sen}(x)}$$

- $V_2 = \int \frac{\cos(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}}{1} \, dx$

$$V_2 = \int dx = x$$

- Por lo tanto, ya tenemos y_p y y_h

- $y_p = (\ln|\cos(x)|)\cos(x) + x \cdot \operatorname{Sen}(x)$

  $\hookrightarrow V_1 \cdot y_1 + V_2 \cdot y_2$

- $y_h = C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \operatorname{Sen}(x)$

- Unimos los resultados siendo que $y = y_p + y_h$

- $y = C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \operatorname{Sen}(x) + (\ln|\cos(x)|) \cdot \cos(x) + x \cdot \operatorname{Sen}(x)$.

- $y'' + y = \tan(x)$

R//:

- Buscamos a que tipo de solución pertenece con el determinante

- $a = 1 \qquad b = 0 \qquad c = 1$

$$b^2 - 4ac \rightarrow 0^2 - 4(1)(1) \rightarrow -4 < 0$$

- Solución del tipo compleja

- $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(1)} = 0$

- $\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

- $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\sqrt{3}x)$ $\quad$ - $y_2 = e^{\alpha x} \cdot \operatorname{Sen}(\sqrt{3}x)$

$= \cos(x)$ $\quad$ $= \operatorname{Sen}(x)$

- $y_h = C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \operatorname{Sen}(x)$

- Calculamos y_p → Recordar pasar en forma normal
- Calculamos Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} \cos(x) & \operatorname{Sen}(x) \\ -\operatorname{Sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1$$

- $g(x) = \tan(x)$
- Calculamos V_1 y V_2

- $V_1 = -\int \frac{\operatorname{Sen}(x) \cdot \tan(x)}{1}$

$V_1 = -\int \frac{\operatorname{Sen}^2(x)}{\cos(x)}$ ---- $\operatorname{Sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, $\operatorname{Sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

$V_1 = -\int \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos(x)}$

$V_1 = -\int \frac{1}{\cos(x)} + \int \cos(x)$

$V_1 = -\ln|\tan(x) + \sec(x)| + \operatorname{Sen}(x)$

- $V_2 = \int \frac{\cos(x) \cdot \tan(x)}{1} dx$

$= \int \frac{\operatorname{Sen}(x)}{\cancel{\cos(x)}} \cdot \cancel{\cos(x)} \, dx$

$= \int \operatorname{Sen}(x) \, dx$

$= -\cos(x)$

- $y_p = \left(-\ln|\tan(x) + \sec(x)| + \operatorname{Sen}(x)\right) \cdot \cos(x)\Big) + \left(\operatorname{Sen}(x) \cdot -\cos(x)\right)$

- Ponemos Solución general
  - $y = y_h + y_p$
  - $y = [C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \operatorname{Sen}(x)] + [$
    $[((-\ln|\tan(x) + \sec(x)| + \operatorname{Sen}(x)) \cdot \cos(x)) + (\operatorname{Sen}(x) \cdot -\cos(x))]$

- $y'' + y = (\cos(x))^2$
  - Buscamos a que tipo de solución pertenece el determinante
    - $r^2 + 1 = (\cos(x))^2$
    - $a = 1 \qquad b = 0 \qquad c = 1$

      $b^2 - 4ac \rightarrow (0) - 4(1)(1) \rightarrow -4 < 0$
  - Solución del tipo complejo
    - $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(1)} = 0$
    - $\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{4(1)(1) - (0)^2}}{2(1)} = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$
    - $y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)$ $\qquad$ $y_2 = e^{\alpha x} \cdot \operatorname{Sen}(\beta x)$

      $= \cos(x)$ $\qquad$ $= \operatorname{Sen}(x)$
    - $y_h = C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \operatorname{Sen}(x)$
  - Calculamos y_p
    - Calculamos Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} \cos(x) & \operatorname{Sen}(x) \\ -\operatorname{Sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1$$

    - $g(x) = (\cos(x))^2$
  - Calculamos V_1 y V_2

$$\cdot\ V_2 = -\int \frac{\operatorname{Sen}(x) \cdot ((\cos(x)))^2}{1}$$

$$V_2 = -\int \operatorname{Sen}(x)(\cos(x))^2 \ *$$

$$V_2 = \int u^2 \cdot du$$

$$= \frac{u^3}{3} = \frac{(\cos(x))^3}{3}$$

$$\cdot\ V_2 = \int \frac{\cos(x) \cdot (\cos(x))^2}{1}$$

$$= \int (\cos(x))^3\, dx \ **$$

$$= \int (\cos(x))^2 \cdot \cos(x) = \int (1 - \operatorname{Sen}^2(x)) \cdot \cos(x) \ **$$

$$= \int (1 - u^2) \cdot \cos(x) \cdot \frac{du}{\cos(x)}$$

$$= \int 1 - u^2 \cdot du = \int du - \int u^2\, du$$

$$= u - \frac{u^3}{3} = \operatorname{Sen}(x) - \frac{(\operatorname{Sen}(x))^3}{3}$$

$$\cdot\ y_p = V_1 \cdot y_1 + V_2 \cdot y_2$$

$$= \frac{(\cos(x))^3}{3} \cdot \cos(x) + \left(\operatorname{Sen}(x) - \frac{(\operatorname{Sen}(x))^3}{3}\right) \cdot \operatorname{Sen}(x)$$

$$= \frac{(\cos(x))^4}{3} + \left((\operatorname{Sen}(x))^2 - \frac{(\operatorname{Sen}(x))^4}{3}\right)$$

* $u = \cos(x)$
$du = -\operatorname{Sen}(x)\, dx$
$dx = \frac{du}{-\operatorname{Sen}(x)}$

$$\int \operatorname{Sen}(x) \cdot (u)^2 \cdot \frac{du}{-\operatorname{Sen}(x)}$$

$$-\int u^2$$

** $u = \operatorname{Sen}(x)$
$du = \cos(x)\, dx$
$dx = \frac{du}{\cos(x)}$

- Realizamos solución general

$$\cdot\ y_p = (C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \operatorname{Sen}(x)) + \left(\frac{(\cos(x))^4}{3} + \left((\operatorname{Sen}(x))^2 - \frac{(\operatorname{Sen}(x))^4}{3}\right)\right)$$

- $y'' + 3y + 2y = \dfrac{1}{1+e^x}$

- Buscamos a que tipo de solución pertenece el determinante

- $r^2 + 3r + 2 = 0$

- $a = 1$ $\quad$ $b = 3$ $\quad$ $c = 2$

- $b^2 - 4ac \rightarrow 3^2 \rightarrow 4(1)(2) \rightarrow 9 - 8 \rightarrow 1 > 0$

- Solución de tipo real

- $(r+1)(r+2) \rightarrow r_1 = -1$, $r_2 = -2$

- $y_1 = e^{-x}$ $\quad$ $y_2 = e^{-2x}$

- $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

- Calculamos y_p

- Calculamos Wronskiano

- $W = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = (-2e^{-2x} \cdot e^{-x}) - (-e^{-x} \cdot e^{-2x})$

$= -2e^{-3x} + e^{-3x}$

$= -e^{-3x}$ ✓

- $g(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$

- Calculamos V_1 y V_2

- $V_1 = -\displaystyle\int \frac{e^{-2x} \cdot \frac{1}{1+e^x}}{-e^{-3x}} = \int e^x \cdot \frac{1}{1+e^x}\, dx^{*}$

$* \; u = e^x$
$du = e^x\, dx$
$dx = \dfrac{du}{e^x} = \dfrac{du}{u}$

$= \displaystyle\int u \cdot \frac{1}{1+u} \cdot \frac{du}{u}$

$= \displaystyle\int \frac{1}{1+u} \cdot du^{**} = \int \frac{1}{z} \cdot dz$

$** \; z = 1+u$
$dz = du$

$= \ln|z| = \ln|1+u| = \ln|1+e^x|$

$$\cdot\ V_2 = \int \frac{e^{-x}}{-e^{-2x}} \cdot \frac{1}{1+e^x} = -\int e^{2x} \cdot \frac{1}{1+e^x}$$

$u = e^x$
$du = e^x\, dx$
$dx = \frac{dx}{e^x}$
$dx = \frac{du}{u}$

$$= -\int e^{x+x} \cdot \frac{1}{1+e^x} = -\int e^x \cdot e^x \cdot \frac{1}{1+e^x}$$

$$= -\int u \cdot u \cdot \frac{1}{1+u} \frac{du}{u}$$

$** \ 1+u = z$
$du = z$

$$= -\int \frac{u}{1+u} \cdot du^{**}$$

$$= -\int \frac{z-1}{z}\, dz = -\int dz + \int \frac{1}{z}\, dz$$

$$= -z + \ln|z| = -1-u + \ln|1+u|$$

$$= -1 - e^x + \ln|1+e^x|$$

$$\cdot\ y_p = \left(e^{-x} \cdot \ln|1+e^x|\right) + e^{-2x} \cdot \left(-1 - e^x + \ln|1+e^x|\right)$$

2. Resolver los siguientes ecuaciones de Cauchy - Euler.

$\cdot\ x^2 y'' - 2y = 0$

- Pasamos a ecuación auxiliar

$\cdot\ a = 1 \quad b = 0 \quad c = -2$

$\cdot\ ar^2 + (b-a)r + c = 0$

$\cdot\ b^2 - 4ac \rightarrow 4 - 4(1)(-2) \rightarrow 12 > 0$

$\cdot\ \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} \rightarrow r_1 = 1 + \sqrt{3}$

$\rightarrow r_2 = 1 - \sqrt{3}$

- Tenemos raíces distintas, esto significa

$y_h(x) = C_1 \cdot x^{1+\sqrt{3}} + C_2 \cdot x^{1-\sqrt{3}}$

- Por el otro método...

- Hacemos cambio de variable

- $x^2y'' - 2y = 0$

- Pasamos a ecuación auxiliar

  - $a = 1 \qquad b = 0 \qquad c = -2$

  - $ar^2 + (b-a)r + c = 0$

  - $r^2 + (0-1)r - 2 = 0$

    $r^2 - r - 2 = 0$

- Buscamos qué tipo de solución es

  - $a = 1 \qquad b = -1 \qquad c = -2$

  $b^2 - 4ac \rightarrow 1 - 4(1)(-2) \rightarrow 1 + 4 = 5 > 0$

- Soluciones reales

  $(r+1)(r-2)$

  $r_1 = -1 \qquad r_2 = -2$

- $y_h = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-2}$ • $y_1 = x^{-1}$ • $y_2 = x^{-2}$

- Buscamos la solución particular y_p

  - Calculamos Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x^{-1} & x^{-2} \\ -\frac{1}{x^2} & -\frac{2}{x^3} \end{vmatrix} = \frac{-2}{x^3 \cdot x^2} - \left(-\frac{1}{x^2 \cdot x^2}\right)$$

$$= \frac{-2}{x^4} + \frac{1}{x^4} = -\frac{1}{x^4} \checkmark$$

  - Calculamos V_1 y V_2 → Forma normal: $y'' - \frac{2y}{x^2} = 0$ • $g(x) = 0$

  - $V_1 = -\int \frac{x^{-2} \cdot 0}{x^{-4}} dx = 0$

  - $V_2 = \int \frac{x^{-1} \cdot 0}{x^{-4}} dx = 0$

  - $y_p = 0$

  - $y = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-2}$

- $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 0$

- Pasamos a ecuación auxiliar

- $a = 1 \qquad b = -3 \qquad c = 5$

$r^2 + (-3-1)r + 5 = 0$

$r^2 - 4r + 5 = 0 \qquad a = 1 \qquad b = -4 \qquad c = 5$

- $b^2 - 4ac \rightarrow 16 - 4(1)(5) \rightarrow 16 - 20 \rightarrow -4 < 0$

- Solución del tipo imaginaria

$\lambda = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = +2$

$\mu = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{4(1)(5) - (-4)^2}}{2(1)} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$

$r_1 = 2 + i \qquad r_2 = 2 - i$

- $y_h = C_1 \cdot x^{\lambda} \cdot \cos(\mu \cdot \ln(x)) + C_2 \cdot x^{\lambda} \cdot \operatorname{Sen}(\mu \cdot \ln(x))$

$y_h = C_1 \cdot x^2 \cos(\ln(x)) + C_2 \cdot x^2 \operatorname{Sen}(\ln(x)), \quad x > 0$

- $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 0$

- Pasamos ¿?

- $x^2 y'' + 8y' + 6y = 0$

3. Resolver los siguientes problemas de valor inicial:

- $9x^2y'' + 3xy' + y = 0$ donde $y(1) = 3$ y $y'(1) = 0$

→ Posemos a ecuación auxiliar

- $a = 9$ $b = 3$ $c = 5$

$r^2 + (3-9)r + 5 = 0$

$r^2 - 6r + 5 = 0$

$(r-5)(r-1)$ → $r_1 = 5$, $r_2 = 1$

- Solución del tipo real.

$y_h = C_1 x^5 + C_2 \cdot x$

- Hallamos constantes

- $y = C_1 x^5 + C_2 x$

$y' = 5C_1 x^4 + C_2$ → $0 = 5C_1(1)^4 + C_2$

$0 = 5C_1 + C_2$

$C_2 = -5C_1$

→ $3 = C_1(1)^5 + C_2(1)$

$3 = C_1 + C_2$

$3 = C_1 - 5C_1$

$3 = -4C_1$

$\frac{3}{-4} = C_1$

$C_2 = -5\left(-\frac{3}{4}\right)$

$C_2 = \frac{15}{4}$

- $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ donde $y(1) = 4$ y $y'(1) = 0$

- Pasamos a ecuación auxiliar

$a = 1 \quad b = 2 \quad c = -2$

$r^2 + (2-1)r - 2 = 0$

$r^2 + r - 2 = 0$

$(r-1)(r-1) \rightarrow r_1 = 1, \; r_2 = 1 \rightarrow r = 1$

- $y = C_1 x + C_2 x \cdot \ln(x)$

- Hallamos constantes

$4 = C_1 + 0$

- $y = C_1 x + C_2 x \cdot \ln(x) \rightarrow 4 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 \cdot \ln(1) \rightarrow 4 = C_1$

$y' = C_1 + (1 \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot x) \cdot C_2$

$y' = C_1 + C_2(\ln(x) + 1)$

$0 = C_1 + C_2(\ln(1) + 1)$

$0 = 4 + C_2 \cdot 1 \rightarrow C_2 = -4$

- $x^2y'' + xy' + y = 0$ donde $y(1) = 1$ y $y'(1) = 2$

- Pasamos a ecuación auxiliar

$a = 1 \quad b = 1 \quad c = 1$

$r^2 + (1-1)r + 1 = 0$

$r^2 + 1 = 0 \rightarrow a = 1 \quad b = 0 \quad c = 1$

- Soluciones imaginarias

$\lambda = \frac{-b}{2a} = 0$

$\mu = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{4(1)(1) - 0}}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$

$y_h = C_1 \cdot x^0 \cdot \cos(1 \cdot \ln(x)) + C_2 \cdot x^0 \cdot \operatorname{Sen}(1 \cdot \ln(x))$

$y_h = C_1 \cdot \cos(\ln(x)) + C_2 \cdot \operatorname{Sen}(\ln(x))$

Hallamos constantes

- $y = C_1 \cdot \cos(\ln(x)) + C_2 \cdot \operatorname{sen}(\ln(x))$

$y' = C_1 \cdot -\operatorname{sen}(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} + C_2 \cdot \cos(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x}$

- $y(1) = 1$

$1 = C_1 \cdot \cos(0) + C_2 \cdot \operatorname{sen}(0)$

$1 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0$

$C_1 = 1$

- $y'(1) = 2$

$2 = C_1 \cdot -\operatorname{sen}(0) \cdot \frac{1}{1} + C_2 \cdot \cos(0) \cdot \frac{1}{1}$

$2 = C_2$

$C_2 = 2$

4. Hallar, mediante el método de variación de parámetros, una solución particular de la ecuación dada

- $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 7x^4$

- Buscamos a que tipo de solución pertenece el determinante

- $r^2 - 3r + 4 = 0$, $a = 1$ $b = -3$ $c = 4$

- $b^2 - 4ac \rightarrow 9 - 4(1)(4) \rightarrow 9 - 16 < 0$

- Solución del tipo complejo

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2(1)} = \frac{3}{2}$

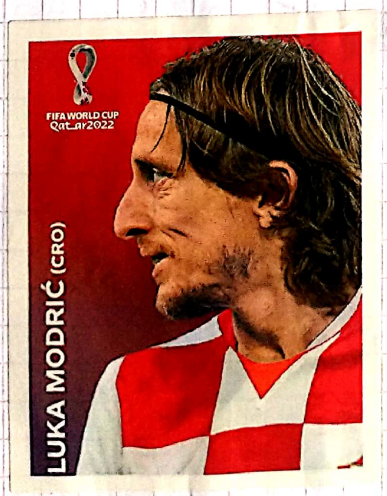
$\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2(a)} = \frac{\sqrt{4(1)(4) - (-3)^2}}{2(1)} =$

- $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 7x^4$
  - Encontramos y_h
    - $a = 1 \quad b = -3 \quad c = 4$
    - Buscamos a qué tipo de solución pertenece
      - $b^2 - 4ac \rightarrow (-3)^2 - 4(1)(4) = 9 - 16 < 0$
    - Soluciones del tipo imaginarias

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2(1)} = \frac{3}{2}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{4(1)(4) - 9}}{2(1)} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

- $y_h = C_1 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \ln(x)\right) + C_2 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \ln(x)\right)$
  - Encontramos y_p
    - Pasamos a la ecuación normal
      - $y'' - \frac{3y}{x} + \frac{4y}{x^2} = 7x^2$
      - $y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2 = x^{\frac{3}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \ln(x)\right)$?
        - Esto solo se hace cuando NO HAY 'x'



- $x^2y'' - 3xy' + 4y = 7x^4$
  - Encontramos y_h
    - $a = 1 \quad b = -3 \quad c = +4$
      - $ar^2 + (b-a)r + c = 0$

        $r^2 + (-3-1)r + 4 = 0$

        $r^2 - 4r + 4 = 0$
    - Hallamos a que tipo de solución pertenece

      $a = 1 \quad b = -4 \quad c = +4$

      $b^2 - 4ac \rightarrow (-4)^2 - 4(1)(4) \rightarrow 0 = 0$
    - Solución real

      $(r-2)(r-2) \quad r = +2$
  - $y_h = C_1 x^2 + C_2 x^2 \cdot \ln(x)$
  - Encontramos y_p
    - Pasamos a la ecuación normal
      - $y'' - \frac{3y'}{x} + \frac{4y}{x^2} = 7x^2$
      - $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 = v_1 x^2 + v_2 x^2 \cdot \ln(x)$
    - Calculamos Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \cdot \ln(x) \\ 2x & 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} \end{vmatrix} = x^2 \cdot \left(2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) - 2x \cdot x^2 \cdot \ln(x)$$

$$= 2x^3 \ln(x) + x^3 - 2x^3 \cdot \ln(x)$$

$$= x^3$$

- Calculamos v_1 y v_2

- $g(x) = 7x^2$; $W = x^3$

- $v_1 = -\int \frac{y_2 \cdot g(x)}{W(y_1, y_2)}$

$v_1 = -\int \frac{x^2 \cdot \ln(x) \cdot 7x^2}{x^3}$

$= -7\int \ln(x) \cdot x \, dx$

$= -7 \cdot \left(\ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx \right)$

$\int \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x^2}{4}$

$= -7 \ln(x) \frac{x^2}{2} + 7 \frac{x^2}{4}$

- $u = \ln(x)$

$du = \frac{1}{x} dx \rightarrow dx = du \cdot x$

$u \cdot dv = u \cdot v + \int v \cdot du$

$dv = x$ $\quad u = \ln(x)$

$v = \frac{x^2}{2}$ $\quad du = \frac{1}{x}$

- $v_2 = \int \frac{y_1 \cdot g(x)}{W}$

$v_1 = \int \frac{x^2 \cdot 7x^2}{x^3} = \int 7x = \frac{7x^2}{2}$

- $y_p = \left(-7 \ln(x) \frac{x^2}{2} + \frac{7x^2}{4}\right) \cdot x^2 + \left(\frac{7x^2}{2}\right) \cdot x^2 \cdot \ln(x)$

- $x^2 y'' - 2xy' + 2y = (\ln(x))^2 - \ln(x^2)$

- Encontramos y_h

- $a = 1$ $\quad b = -2$ $\quad c = 2$

$ar^2 + (b-a)r + c = 0$

$r^2 + (-2-1)r + 2 = 0$

$r^2 - 3r + 2 = 0$

- Hallamos raíces

$(r-2)(r-1) \rightarrow r_1 = 2$

$r_2 = 1$

- $y_h = C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x$

- Encontramos y_p

- $v_1 y_1 + v_2 y_2 \rightarrow v_1 \cdot x^2 + v_2 \cdot x$

- Pasamos a ecuación normal

- $y'' - \frac{2y'}{x} + \frac{2y}{x^2} = \frac{(\ln(x))^2}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{x^2}$.

- Calculamos Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = x^2 \cdot 1 - 2x \cdot x$$
$$= x^2 - 2x^3 = x^2(1 - 2x)$$

- Calculamos v_1 y v_2

$$v_1 = -\sqrt{\frac{x \cdot \frac{(\ln(x))^2}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{x}}}$$

5. Una masa que pesa 12 kg, cuelga al extremo de un resorte, alarga este 9,8 cms. Al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto 8 cm arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la ecuación del movimiento.

R/= $m = 12$ $\quad e = 9{,}8$ cm $\quad g = 980 \ \frac{cm}{s^2}$

- $mg = ke$

$12 \cdot 980 = k \cdot 9{,}8$

$k = \frac{12 \cdot 980}{9{,}8} = 1200$

- $x(0) = -8$

$x'(0) = 0$

- Realizamos ecuación

- $x = x(t)$

$mx'' + kx = 0$

$12x'' + 1200x = 0$

$r^2 + 1200 = 0$

$r^2 = -1200 \begin{cases} r_1 = 20\sqrt{3}\, i \\ r_2 = -20\sqrt{3}\, i \end{cases}$

- $x(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \cdot \operatorname{Sen}(\beta t)$

$x(t) = C_1 \cdot \cos(20\sqrt{3}\, t) + C_2 \cdot \operatorname{Sen}(20\sqrt{3}\, t)$

- $\omega = \sqrt{c} = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3}$ $\quad P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20\sqrt{3}} = \frac{\pi}{10\sqrt{3}}$

- $x(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 \rightarrow C_1 = -8$

- $x'(t) = C_1 \cdot \operatorname{Sen}(20\sqrt{3}\, t) + C_2 \cdot \cos(20\sqrt{3}\, t)$

$0 = 0 + C_2 \rightarrow C_2 = 0$

R/= $x(t) = -8 \cdot \cos(20\sqrt{3}\, t) + 0 \cdot \operatorname{Sen}(20\sqrt{3}\, t)$

$x(t) = -8 \cos(20\sqrt{3}\, t)$

6. Determine la ecuación de movimiento si la masa del problema anterior al inicio se libero desde la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 10 cm/s

R/: $X(t) = C_1 \cdot \cos(20\sqrt{3}\, t) + C_2 \cdot \operatorname{Sen}(20\sqrt{3}\, t)$

- $X(0) = 0$ $\quad X'(0) = 10$
- $my = ke$ ~~~
- $X(t) = C_1 \cdot \cos(20\sqrt{3}\, t) + C_2 \cdot \operatorname{Sen}(20\sqrt{3}\, t)$
- $X(0) = 0$

$0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 \rightarrow C_1 = 0$

- $X'(0) = 10$

$10 = 0 \cdot \operatorname{Sen}(20\sqrt{3}\, t) + C_2 \cdot \cos(20\sqrt{3}\, t)$

$10 = C_2$

7.

SIMULACRO

1. Ejercicio de Objeto

R/: • $m = 2$ • $g = 980$ • $e = 39,2$

• $x(0) = -10$ • $x'(0) = 62$ • $b = 12$ pm

- Calculamos

$F = ke \rightarrow mg = ke$

$2 \cdot 980 = k(39,2)$

$k = 50$

- Resolvemos

• $mx'' + bx' + kx = 0$

$2x'' + 12x' + 50x = 0$

$x'' + 6x' + 25x = 0$ • $b^2 - 4ac \rightarrow (6)^2 - 4(1)(25) < 0$

- Solución imaginaria • $a = 1$ $b = 6$ $c = 25$

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(1)} = -3$

$\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{64}}{2(1)} = \frac{8}{2} = 4$

R/: $x(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \operatorname{Sen}(\beta t)$

$x(t) = C_1 e^{-3t} \cdot \cos(4t) + C_2 e^{-3t} \cdot \operatorname{Sen}(4t)$

ewe

2. La solución general de la ecuación $x^2y'' + 5xy' + 4y = -18x$

R/: Utilizaremos Cauchy - Euler.

- Hallamos y_h

- Resolvemos por r $a=1$ $b=5$ $c=4$

$$ar^2 + (b-a)r + c = 0$$

$$r^2 + (5-1)r + 4 = 0$$

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$(r+2)(r+2) \rightarrow r = -2$$

- $y_h(x) = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-2} \cdot \ln(x)$

- Hallamos y_p

- Pasamos a forma normal

$$y'' - \frac{5y'}{x} + \frac{4y}{x^2} = -\frac{18}{x}$$

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 = v_1 x^{-2} + v_2 x^{-2} \cdot \ln(x)$$

- Calculamos Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x^{-2} & x^{-2} \cdot \ln(x) \\ -2x^{-3} & -2x^{-3} \cdot \ln(x) + x^{-2} \cdot \frac{1}{x} \end{vmatrix}$$

$$= x^{-2}(-2x^{-3}\ln(x) + x^{-3}) + 2x^{-3}(x^{-2} \cdot \ln(x))$$

$$= -2x^{-5}\ln(x) + x^{-5} + 2x^{-5}\ln(x)$$

$$= x^{-5}$$

- Calculamos v_1 y v_2 $\cdot\, g(x) = -\frac{18}{x}$

$$v_1 = -\int \frac{y_2 \cdot g}{W} \rightarrow v_1 = -\int \frac{x^{-2}\ln(x) \cdot -\frac{18}{x}}{x^{-5}}$$

$$v_1 = 18\int \frac{x^{-3} \cdot \ln(x)}{x^{-5}} \qquad v_1 = 18\int x^2 \cdot \ln(x)$$

$2^{1-3} + 2^{1-1} >$

$V_1 = 18 \int x^2 \cdot \ln(x)$ *

$V_1 = 18\left(\ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9}\right)$

$V_1 = 6\ln(x)\, x^3 - 2x^3$

V_2

* $\int u\,dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$u = \ln(x) \qquad dv = x^2$

$du = \frac{1}{x} \qquad v = \frac{x^3}{3}$

$\ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}$

$\frac{1}{3}\int x^2$

$\frac{1}{3}\,\frac{x^3}{3}$

$\frac{x^3}{9}$

TALLER 7

1. Reescriba la ecuación dada como una sola serie de potencias en cuyo término general aparezca x^k

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2n\, C_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 6\, C_n x^{n+1}$

$\cdot\ k = n-1 \iff k+1 = n$

$\sum_{n=0}^{\infty} 2(k+1) \cdot C_{k+1} \cdot x^k + \sum_{n=0}^{\infty} 6 \cdot C_{k+1} \cdot x^{k+2}$

$\sum_{n=0}^{\infty}$??

2 -3

2. Compruebe por sustitución directa que la serie de potencias dada es una solución particular de la ecuación diferencial indicada

a) $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, $(x+1)y'' + y' = 0$

PDM: $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot x^{n-1}$

$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$

↳ Desde 2 porque en 1 se me anularía.

- Reemplazamos

$$(x+1) \cdot \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot x^{n-1} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot (n-1) x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot (n-1) x^{n-2} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot x^{n-1} = 0$$

- $k = n-1$, $n = k+1$
- S: $n=2$, $k=1$

- $k = n-2$, $n = k+2$
- S: $n=2$, $k=0$

- $k = n-1$, $n = k+1$
- S: $n=1$, $k=0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+2} \cdot k \cdot x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+3} \cdot (k+1) \cdot x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+2} \cdot x^k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+2} \cdot k \cdot x^k + \underbrace{(-1)^3 \cdot 1 \cdot x^0}_{(-1)} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+3} \cdot (k+1) \cdot x^k + \underbrace{(-1)^2 \cdot x^0}_{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+2} \cdot x^k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{k+2} \cdot k + (-1)^{k+3} \cdot (k+1) + (-1)^{k+2} \right] x^k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{k+2} \cdot k - (-1)^{k+2} \cdot (k+1) + (-1)^{k+2} \right] = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\cancel{(-1)^{k+2} \cdot k} - \cancel{(-1)^{k+2} \cdot k} - \cancel{(-1)^{k+2}} + \cancel{(-1)^{k+2}} \right] x^k = 0 \checkmark$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot x^k = 0$$

b) $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \cdot x^{2n}$, $xy'' + y' + xy = 0$

R//:

- Hallamos derivada de y'

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \cdot x^{2n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot (2n-1) \cdot \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \cdot x^{2n-2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^2 - 2n \cdot \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \cdot x^{2n-2}$$

- Reemplazamos

$$\cdot\ x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot (2n-1) \cdot \frac{(-1)^n}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \cdot x^{2n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \cdot x^{2n-1} +$$

$$x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \cdot x^{2n} = 0$$

- $k = 2n-2$, $n = \frac{k+2}{2}$ • $k = 2n-1$, $n = \frac{k+1}{2}$ • $k = 2n$, $n = \frac{k}{2}$

Si $n=1$, $k=0$ • Si $n=1$, $k=1$ Si $n=1$, $k=2$

$$\cdot\ x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 2\left(\frac{k+2}{2}\right) \cdot \left(2\left(\frac{k+2}{2}\right)-1\right) \cdot \frac{(-1)^n}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \cdot x^{2n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{k+1}{2}\right) \cdot (-1)^n$$

3. Encuentre dos series de potencias de la ecuación diferencial dada respecto al punto ordinario $x = 0$.

a) $y'' - xy = 0$

R//: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$

$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) a_n x^{n-2}$

- ¿a_n? Remplazamos en la ecuación

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) a_n \cdot x^{n-2} - x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

- $j = n - 2$
  $n = j + 2$

- $j = n + 1$
  $n = j - 1$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+2) \cdot ((j+2)-1) a_{j+2} \cdot x^j - x \sum_{j=1}^{\infty} a_{j+1} \cdot x^j = 0$$

- $$2a_2 + \sum_{j=1}^{\infty} (j+2) \cdot ((j+2)-1) a_{j+2} \cdot x^j - \sum_{j=1}^{\infty} a_{j+1} \cdot x^j = 0$$

$$2a_2 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[(j+2) \cdot ((j+2)-1) a_{j+2} - a_{j+1} \cdot x^j \right] x^j = 0$$

$$2a_2 + (j+2)(j+1) a_{j+2} - a_{j-1} = 0$$

b) $y'' - 2xy' + y = 0$

Sol:

- Derivamos la respectiva serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot a_n \cdot x^{n-1+1}$$

- Reemplazamos en la ecuación

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

- $j = n-2$, $n = j+2$
- $j = n$, $n = j$
- $j = n$, $n = j$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+2)((j+2)-1) \cdot a_{j+2} \cdot x^j - \sum_{j=1}^{\infty} 2j \cdot a_j \cdot x^j + \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot x^j = 0$$

$$2a_2 + \sum_{j=1}^{\infty} (j+2)(j+1) \cdot a_{j+2} \cdot x^j - \sum_{j=1}^{\infty} 2j \cdot a_j \cdot x^j + a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot x^j = 0$$

$$2a_2 + a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (j+2)(j+1) \cdot a_{j+2} \cdot x^j - 2j \cdot a_j \cdot x^j + a_j \cdot x^j = 0$$

$$2a_2 + a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} [(j+2)(j+1) \cdot a_{j+2} - 2j \cdot a_j + a_j] x^j = 0$$

- Despejamos

- $2a_2 + a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2}$ $\qquad a_{j+2} = \frac{(2j-1)}{(j+2)(j+1)} a_j$
-
- $(j+2)(j+1) a_{j+2} - 2j \cdot a_j + a_j = 0$, $k = 1, 2, 3$

- Procedemos a resolver la recurrencia

- $k = 1$

$$(1+2)(1+1) a_{1+2} - 2(1) \cdot a_1 + a_1 = 0$$

$c_0 = 1$ $\quad c_1 = 0$ $\quad c_2 = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$

- $k = 1$

$$a_3 = \frac{1}{3 \cdot 2} c_1 = 0 = c_5 = c_7 = c_9$$

- $k = 2$

$$a_4 = \frac{3}{4 \cdot 3} c_2 = \frac{3}{12} \cdot -\frac{1}{2} = \frac{-3}{24}$$

- $k = 1$

$$a_3 = \frac{1}{6} a_1$$

- $k = 2$

$$a_4 = \frac{(2(2)-1)}{(2+2)(2+1)} a_2 = \frac{1}{4} a_2$$

- $k = 3$

$$a_5 = \frac{(2(3)-1)}{(3+2)(3+1)} a_3 = \frac{1}{4} a_3 = \frac{1}{24} a_1$$

- $k = 4$

$$a_6 = \frac{(2(4)-1)}{(4+2)(4+1)} a_4 = \frac{7}{30} a_4 = \frac{7}{120} a_2$$

c) $y'' + x^2 y' + xy = 0$

6. a) $2xy'' - y' + 2y = 0$

$x^2 y'' + p(x)\, xy' + q(x)\, y = 0$

$x^2 y'' - \frac{1}{2} xy' + xy = 0$

$\cdot\, y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$

$\cdot\, y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) C_n x^{n+r-1}$

$\cdot\, y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) C_n x^{n+r-2}$

- Remplazo

$x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) C_n x^{n+r-2} - \frac{1}{2} x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) C_n \cdot x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) C_n x^{n+r}$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) C_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot (n+r) C_n \cdot x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) C_n x^{n+r}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1) C_n - \frac{1}{2}(n+r) C_n + (n+r) C_n \right] x^{n+r}$

- Despejamos

$\cdot\, (n+r)(n+r-1) C_n - \frac{1}{2}(n+r) C_n + (n+r) C_n = 0$

$\left[(n+r-1) - \frac{1}{2} + 1 \right] C_n \cdot (n+r) = 0$