فصل چهارم: شبکه های عصبی مصنوعی

شبکه های عصبی مصنوعی[1] یا همان ANN ها متدی کلی و کاربردی برای یادگیری توابع حقیقی مقدار، گسسته مقدار و برداری از روی نمونه‌هاست. الگوریتم‌هایی یادگیری شبکه ای چون Backpropagation از روش‌هایی چون شیب نزول[2] استفاده کرده تا پارامترهای شبکه را طوری تنظیم کنند تا با دسته نمونه های آموزشی مطابقت داشته باشند. یادگیری شبکه های عصبی در مقابل خطاها در داده های آموزشی مقاوم[3] است و در تفسیر صحنه های تصویری، تشخیص صحبت و یادگیری استراتژی‌های کنترل ربات به کاربرد دارد.

٤.١ معرفی

متد یادگیری شبکه های عصبی روش‌هایی مقاوم به نویز برای تخمین توابع هدف حقیقی مقدار، گسسته مقدار و برداری ارائه می‌کند. در انواع خاصی از مسائل مثل یادگیری تفسیر ورودی‌های پیچیده‌ی حسگرها، شبکه های عصبی بهترین روش شناخته شده هستند. برای مثال، الگوریتم Backpropagation، که در این فصل کاملاً آن‌را توضیح خواهیم داد، موفقیت‌های چشم گیری در حل مسائل کاربردی‌ای نظیر تشخیص کاراکتر های دست نویس (LeCun et al. 1989) ، تشخیص صحبت (Lang et al. 1990) و تشخیص چهره (Cottrell 1990) از خود نشان داده است. بررسی‌ای از کاربرد های واقعی شبکه های عصبی توسط (Rumelhart et al. 1994) گرد آوری شده است.

٤.١.١ انگیزه‌ی زیستی

مطالعه‌ی شبکه های عصبی مصنوعی از سیستم‌های یادگیر زیستی که از شبکه های خیلی پیچیده‌ی اعصاب ساخته شده‌اند الهام گرفته شده است. در نگاه سطحی، این سیستم‌ها از انبوهی از دسته واحد های متصل به هم ساده ساخته شده‌اند که هر واحد ورودی‌های حقیقی مقداری

[1] Artificial neural networks
[2] Gradient decend
[3] robust

دریافت کرده (بیشتر این ورودی‌ها خروجی‌های واحد های دیگر هستند) و مقدار حقیقی‌ای را محاسبه می‌کند (که ممکن است ورودی واحد های دیگری باشد).

برای درک بهتر، چند حقیقت از عصب شناسی را با هم ملاحظه می‌کنیم. برای مثال، تخمین زده می‌شود که مغز انسان 10^{11} عصب دارد که هر کدام به طور متوسط به 10^{4} عصب دیگر متصلند. فعالیت عصب به طور عادی در یکی از دو حالت برانگیخته[1] و غیر برانگیخته[2] است. سریع‌ترین اعصاب در مرتبه‌ی 10^{-3} ثانیه بین این دو حالت سوییچ می‌کنند (این مقدار در مقابل کامپیوترها 10^{-10} مرتبه‌ی کندتر است). با این حال انسان می‌تواند به سرعت تصمیمات بسیار پیچیده ای بگیرد. برای مثال، شما تصویر مادرتان را در مدت حدوداً 10^{-1} ثانیه تشخیص می‌دهید. توجه دارید که در مدت این 10^{-1} ثانیه، با توجه به سرعت عملکرد اعصاب، اعصاب حداکثر چند صد بار برانگیخته شده‌اند. مشاهدات نشان داده که قدرت پردازش اطلاعات در سیستم‌های عصبی زیستی ناشی از عملیات‌های موازی بسیاری است که بر روی تعداد زیادی از اعصاب اجرا می‌شوند. یکی از انگیزه های به کار گیری شبکه عصبی رسیدن به چنین محاسبات موازی‌ای که توسط تعدادی زیادی واحد انجام می‌شود است. با وجود اینکه الگوریتم‌های سریع‌تری بر روی ماشین‌های محاسبه‌ی موازی استفاده شده و همچنین سخت افزار های خاصی برای برنامه های شبکه عصبی طراحی شده، اما اکثر برنامه های شبکه عصبی بر روی ماشین‌هایی ترتیبی[3] اجرا می‌شوند که عمل محاسبه‌ی غیر متمرکز را شبیه سازی می‌کنند.

با وجود اینکه شبکه های عصبی برداشتی از شبکه های عصبی زیستی است، اما بسیاری از پیچیدگی‌های شبکه های عصبی زیستی در شبکه های عصبی مدل سازی نمی‌شود، همان طور که بسیاری از خواص شبکه های عصبی (که درباره‌ی آن‌ها بحث خواهیم کرد) با سیستم‌های زیستی مطابقت ندارد. برای مثال، ما فرض می‌کنیم که واحد های شبکه عصبی یک سیگنال خروجی دارند، درحالی‌که در اعصاب زیستی خروجی سری‌ای ترکیبی از ضربه‌ها در طول زمان است.

بر اساس تاریخچه، دو دسته از محققان بر روی شبکه های عصبی مصنوعی کار می‌کردند. گروه اول که سعی داشتند با تقلید شبکه های عصبی فرایند های یادگیری زیستی را مطالعه و مدل سازی کنند و گروه دوم کسانی که سعی داشتند به الگوریتم‌های یادگیری ماشین موثری دست یابند، جدا از اینکه این الگوریتم‌ها از شبکه های عصبی بدست آمده است. در طول این کتاب، ما نیز جزو گروه دوم محسوب می‌شویم و بنابراین بر مدل سازی زیستی تاکید نمی‌کنیم. برای اطلاعات بیشتر در مورد مدل سازی سیستم‌های زیستی توسط شبکه های عصبی می‌توانید به کتب زیر مراجعه کنید:

Churchland and Sejnowski (1992);

Zornetzer et al. (1994);

Gabriel and Moore (1990).

---

[1] excited
[2] inhibited
[3] sequential

٤.٢ معرفی شبکه های عصبی

یک نمونه‌ی تمام عیار از یادگیری شبکه عصبی توسط سیستم Pomerleau (1993)، به نام ALVINN شبیه سازی شده است. این سیستم برای کنترل فرمان اتومبیل با سرعت متوسط در بزرگراه‌ها طراحی شده است. ورودی این شبکه‌ی عصبی یک تصویر 30x32 نقطه ای است که از دوربین رو به جلویی که در داخل اتومبیل کار گذاشته شده گرفته می‌شود. خروجی شبکه‌ی عصبی جهتی است که فرمان به آن سمت باید بچرخد. شبکه برای تقلید فرمان دهی انسان در طول حدود ۵ دقیقاً آموزش داده می‌شود. ALVINN موفق شده تا با شبکه‌ی آموزش دیده‌ی خود، خودرو را تا سرعت ۷۰ مایل در ساعت و برای مسافت ۹۰ مایل در بزرگراه کنترل کند (رانندگی‌ای که در خط سرعت بزرگراه بوده و بزرگراه نیز خط کشی شده بوده و دیگر وسایل نقلیه هم در بزرگراه حضور داشته‌اند).

شکل ۴.۱ شبکه‌ی عصبی استفاده شده در یکی از نسخه های ALVINN و نحوه‌ی نمایش بسیاری از شبکه های عصبی را نشان می‌دهد. شبکه با نمونه ای از تصویر های دوربین در چپ تصویر نشان داده شده است. هر واحد[1] (در شکل دایره) در شبکه نشان دهنده‌ی خروجی یک واحد است و خطوط متصل به زیر هر واحد نیز ورودی‌های آن هستند. همان طور که در شکل نیز نشان داده شده ۴ واحد مستقیماً به تمامی نقاط تصویر متصلند. این چهار واحد پنهان[2] نامیده می‌شوند زیرا که بر خروجی به طور غیر مستقیم اثر می‌کنند و هیچ گاه به صورت مستقیم تأثیری ندارند. هر یک از این چهار واحد خروجی‌ای بر اساس ۹۶۰ ورودی وزن دار خود ایجاد می‌کنند. خروجی این ۴ واحد پنهان به عنوان ورودی به ۳۰ واحد خروجی[3] داده می‌شود. هر واحد خروجی متناسب با یکی از فرمان‌های جهتی اتومبیل است (مثل کمی به راست، کمی به چپ، کاملاً به چپ ، کاملاً به راست یا مستقیم) و این خروجی‌ها نشان می‌دهد که کدام جهت برای فرمان ارجحیت دارد.

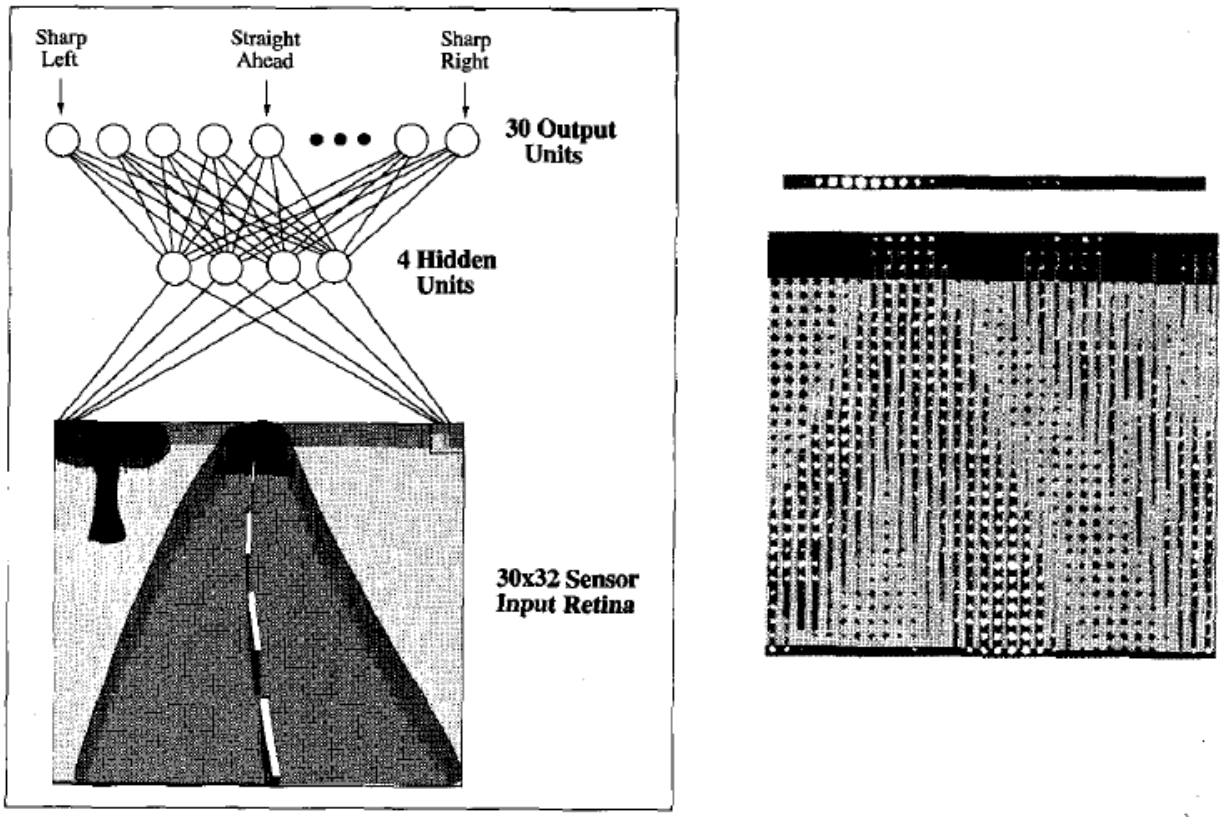
سمت راست شکل وزن‌های[4] یاد گرفته شده‌ی متناسب با یکی از این چهار واحد را نمایش می‌دهد. ماتریکس سیاه و سفیدی که در سمت راست و پایین شکل نشان داده شده وزن‌های متناسب با نقطه‌ها در یکی از ۴ واحد پنهان است. در این شکل مربع‌های سیاه نشان دهنده‌ی وزن منفی و مربع‌های سفید نشان دهنده‌ی وزن مثبتند و اندازه‌ی مربع نیز بزرگی وزن را نشان می‌دهد. مستطیل بالای مربع وزن‌های ورودی از هر ۴ واحد پنهان به ۳۰ خروجی را نشان می‌دهد.

ساختار شبکه‌ی ALVINN در بسیاری از شبکه های عصبی به کار برده می‌شود. در این چنین شبکه‌هایی فقط ارتباط‌های بین لایه ای وجود دارد و گراف جهت دار نظیر دور ندارد[5]. در کل، ساختار شبکه‌ها ممکن است هر نوع گرافی باشند (اعم از دور دار[6] و بدون دور[7]، جهت دار[8] و یا بدون جهت[9]) . در این فصل به بررسی پرکاربردترین و عمومی‌ترین ویژگی‌های شبکه های عصبی که بر پایه‌ی الگوریتم Backpropagation است می‌پردازیم. الگوریتم Backpropagation فرض می‌کند که شبکه ساختاری ثابت و متناسب با یک گراف

---

[1] node
[2] hidden
[3] output
[4] Weight value
[5] Directed acyclic graph
[6] cyclic
[7] acyclic
[8] directed
[9] adirected

جهت دار دارد که ممکن است دور نیز داشته باشد. و سعی می‌کند تا مقادیر متناسب با هر یال[1] در این گراف را یاد بگیرد. با وجود اینکه حلقه در شبکه مجاز است اما اکثر شبکه های کاربردی بدون حلقه و به فرم تک سویه[2] هستند، درست مثل ساختار شبکه‌ی ALVINN.



شکل ۴.۱ شبکه‌ی عصبی‌ای که برای کنترل فرمان خودرو طراحی شده.

[1] edge
[2] feed-forward

سیستم ALVINN از Backpropagation با هدف یادگیری کنترل خودرو استفاده می‌کند (شکل بالا یی). شکل سمت چپ نشان می‌دهد که چگونه ۹۶۰ نقطه‌ی تصویر دوربین به ۴ واحد پنهان متصل به ۳۰ واحد خروجی متصل شده‌اند. خروجی شبکه فرمان‌های کنترل فرمان خواهد بود. شکل سمت راست وزن‌های نظیر یکی از واحد های پنهان را نشان می‌دهد. وزن‌ها در یک ماتریس 30x32 نشان داده شده‌اند. در این ماتریس وزن‌های مثبت سفید و وزن‌های منفی سیاه رنگند، اندازه‌ی هر وزن متناسب با اندازه‌ی هر مربع است. مستطیل کوچک بالای این ماتریس وزن‌های ۳۰ واحد خروجی متصل به این واحد را مشخص می‌کند. همان طور که در مستطیل نیز معلوم است تهییج این واحد پنهان باعث گردش به چپ می‌گردد.

٤.٣ مسائل متناسب با یادگیری شبکه های عصبی

یادگیری شبکه های عصبی مناسب مسائلی با داده های ورودی نویز دار یا ترکیبی از چندین حسگر[1] مثل دوربین و میکروفن است. همچنین در مسائلی که کاملاً به صورت نمادی[2] بیان می‌شود، مثل مسائلی که در فصل ۳ بررسی شد، کاربرد دارند. در چنین مسائلی شبکه های عصبی و درخت تصمیم گیری دقت قابل مقایسه ای دارند. در Shvlik et al. (1991) و Weiss and Kapouleas (1989) مقایسه های تجربی این دو راهبرد برای مسائل مختلف بررسی شده است. الگوریتم Backpropagation پرکاربردترین متد یادگیری شبکه های عصبی محسوب می‌شود. این الگوریتم برای مسائلی با ویژگی‌های زیر متناسب است:

- نمونه‌ها به صورت n تایی‌های مرتبند. تابع هدف بر روی نمونه‌هایی تعریف شده که توسط بردارهایی از ویژگی‌ها بیان می‌شوند، مثل مقدار نقطه های تصویر در مثال ALVINN. این مقادیر ممکن است کاملاً وابسته[3] و یا کاملاً مجزا[4] باشند. مقادیر ورودی می‌توانند هر مقدار حقیقی‌ای باشند.
- تابع هدف ممکن است گسسته مقدار، حقیقی مقدار، یا برداری ترکیبی از حقیقی مقدار و گسسته مقدار باشد. برای مثال در ALVINN خروجی برداری از ۳۰ ویژگی است. خروجی هر یک از مقادیر حقیقی بین ۰ تا ۱ را می‌تواند داشته باشد، در این مثال این مقدار اطمینان شبکه به پیچیدن به آن جهت را مشخص می‌کند. همچنین می‌توان شبکه ای آموزش داد که علاوه بر کنترل فرمان کنترل سرعت اتومبیل را نیز در اختیار داشته باشد. کافی است مقداری برای کنترل شتاب به خروجی‌ها اضافه کنیم.
- نمونه‌ها ممکن است خطا داشته باشند. متد های یادگیری شبکه عصبی در مقابل داده های آموزشی نویز دار مقاوم است.
- زمان آموزش زیاد قابل قبول است. الگوریتم‌های آموزش شبکه زمانی بیشتر از آموزش‌های دیگر الگوریتم‌ها (مثلاً درخت تصمیم گیری) لازم دارند. زمان آموزش‌ها بسته به تعداد وزن‌های در شبکه ، تعداد نمونه های آموزشی، و تنظیمات پارامتر های الگوریتم یادگیری ممکن است از چند ثانیه تا چندین ساعت تغییر کند.
- ارزیابی سریع تابع هدف لازم باشد. با وجود اینکه شبکه های عصبی به نسبت کند آموزش داده می‌شوند، اما ارزیابی نمونه های جدید توسط شبکه‌ی آموزش دیده بسیار سریع انجام می‌گردد. برای مثال در ALVINN هر ثانیه چندین بار شبکه‌ی عصبی خود را ارزیابی می‌کند و دستورات فرمان دهی را تغییر می‌دهد.
- قدرت انسان برای درک تابع هدف یاد گرفته شده مهم نیست! گاهی تفسیر مقادیر یاد گرفته شده برای وزن‌ها ممکن نیست و قوانین شبکه های عصبی آموزش دیده برای انسان به سادگی قابل درک نیستند.

---

[1] sensor
[2] Symbolic representation
[3] correlated
[4] independent

در ادامه‌ی این فصل: ابتدا انواع طراحی واحد را در شبکه های عصبی بررسی خواهیم کرد (واحد های پرسپترون[1] ، واحد های خطی و واحد های سیگموید[2])، سپس به الگوریتم‌های آموزش تک واحدها می‌پردازیم. پس از ان، الگوریتم Backpropagation را برای آموزش شبکه های چند لایه ساخته شده از چنین واحدهایی بیان خواهیم کرد و به مطالب کلی‌تری نظیر قابلیت‌های شبکه‌ها، مسئله‌ی overfit و جایگزین‌های Backpropagation می‌پردازیم. و در آخر نیز یک مثال توضیحی از استفاده الگوریتم Backpropagation برای آموزش شبکه با هدف تشخیص چهره آورده‌ایم تا خواننده بتواند از این الگوریتم برای آموزش شبکه استفاده‌ی کاربردی کند.

٤.٤ پرسپترون‌ها

نوعی از سیستم‌های شبکه عصبی بر پایه‌ی نوعی واحد به نام پرسپترون ساخته می‌شود (شکل ۴.۲). پرسپترون برداری حقیقی مقدار دریافت کرده و ترکیبی خطی از آن‌را محاسبه می‌کند، اگر این مقدار از مقدار خاصی (مقدار آستانه)[3] بیشتر بود خروجی را ۱ و در غیر این صورت خروجی را -1 می‌دهد. به صورت دقیق‌تر، اگر $x_1, \dots, x_n$ ورودی‌ها باشند و $o(x_1, \dots, x_n)$ خروجی واحد باشد داریم:

$$o(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1\,, & w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n > 0 \\ -1\,, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این تابع هر w_i مقدار حقیقی ثابتی یا همان وزن است که میزان تأثیر x_i را در خروجی پرسپترون تعیین می‌کند. توجه دارید که مقدار w_0 نیز یک مقدار آستانه است و ترکیب $w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n$ باید حداقل مقدار $(-w_0)$ را داشته باشد تا خروجی ۱ شود.

برای ساده تر شدن نمایش فرض می‌کنیم که $x_0 = 1$، و به جای عبارت شرط می‌نویسیم $\sum_{i=0}^{n} w_i x_i > 0$ و یا به صورت برداری داریم که $\vec{w}.\vec{x} > 0$. و برای اختصار می نویسیم

$$o(\vec{x}) = sgn(\vec{w}.\vec{x})$$

در این نمایش تابع sgn همان تابع علامت است:

$$sgn(y) = \begin{cases} 1\,, y > 0 \\ -1\,, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

یادگیری برای پرسپترون به معنای پیدا کردن مقدار مناسب برای $w_0, \dots, w_n$ است. پس فضای فرضیه ای متناسب با این یادگیری تمام بردار های حقیقی مقدار خواهند بود:

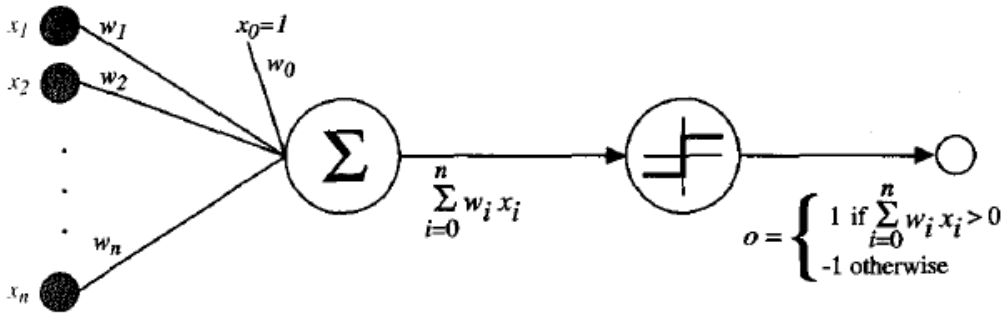
$$H = \{\vec{w} | \vec{w} \in \Re^{(n+1)}\}$$

---

[1] perceptron
[2] sigmoid
[3] threshold

٤.٤.١ قدرت پرسپترون‌ها

ما می‌توانیم پرسپترون را ابر صفحه ای[1] سطح تصمیم در فضای n بعدی نمونه‌ها بدانیم. پرسپترون برای نمونه‌هایی که در یک طرف این ابر صفحه هستند ۱ و برای نمونه‌هایی که در طرف دیگر این ابر صفحه هستند مقدار 1- را برمی گرداند (شکل ۴.۳). معادله‌ی این ابر صفحه‌ی تصمیم گیری به فرم $\vec{w}.\vec{x} = 0$ نوشته می‌شود. البته تمامی دسته نمونه های آموزشی را نمی‌توان بدین شکل دسته بندی کرد. دسته مثال‌هایی را که این گونه دسته بندی می‌شوند دسته بندی پذیر خطی[2] می‌نامند.



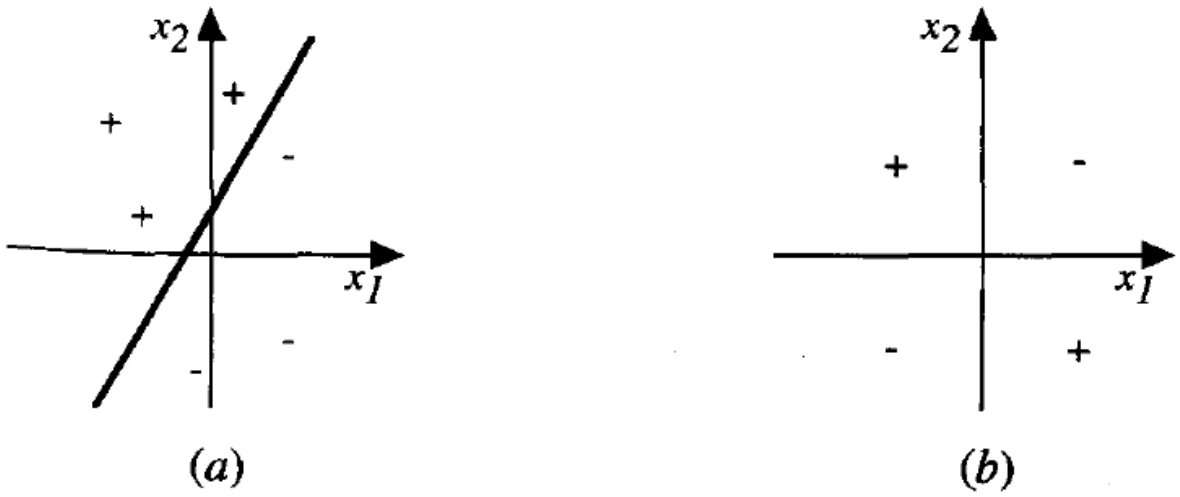
شکل ۴.۲ یک پرسپترون.

پرسپترون‌ها به تنهایی می‌توانند بسیاری از توابع منطقی مقدار را یاد بگیرند. برای مثال اگر مقدار ۱ را درست (True) و مقدار 1- را غلت (False) در نظر بگیریم برای شبیه سازی تابع AND می‌توان وزن‌ها را به صورت $w_1 = w_2 = .5$ و $w_0 = -.8$ را در نظر گرفت. همین پرسپترون را می‌توان با عوض کردن مقدار w_0 به 3.- به تابع OR تبدیل کرد. در واقع توابع AND و OR را می‌توان به صورت توابع خاص m از n دانست: توابعی که زمانی مقدار درست را بر می‌گردانند که حداقل m تا از n ورودیشان درست باشد. در تابع OR، m=1 و در تابع AND، m=n است. چنین توابعی را به سادگی می‌توان با یکی کردن وزن‌ها و تعیین مقدار متناسب w_0 توسط پرسپترون‌ها تقلید کرد.

پرسپترون‌ها تمامی توابع ساده‌ی منطقی اعم از AND، OR، NAND (¬AND) و NOR (¬OR) را تقلید می‌کنند. اما متأسفانه پرسپترون‌ها نمی‌توانند توابعی همچون XOR را تقلید کنند. تابع XOR زمانی درست است که $x_1 \neq x_2$. در شکل ۴.۳ (b) تمام نمونه های آموزشی مربوط به XOR نشان داده شده است.

---

[1] hyperplane
[2] linearly separable



شکل ۴.۳ فضای مثال‌ها برای پرسپترون‌هایی که دو ورودی دارند.
(a) نمونه‌هایی آموزشی و فضای آن‌ها که پرسپترون آن‌ها را درست دسته بندی می‌کند. (b) دسته مثال‌هایی آموزشی که دسته بندی پذیر خطی نیستند (یا هیچ خطی نمی‌توان نمونه های مثبت را از نمونه های منفی جدا کرد). نمونه های مثبت با "+" و نمونه های منفی با "–" در شکل نشان داده شده است.

قدرت پرسپترون‌ها برای یادگیری توابع AND، OR، NAND و NOR از این رو اهمیت دارد که تمامی توابع منطقی توسط این ترکیب توابع شبیه سازی هستند. در واقع تمامی توابع منطقی توسط دو سری از پرسپترون‌های متصل به هم (خروجی سری اول به ورودی سری دوم وصل باشد) قابل شبیه سازی‌اند. یک راه معمول بیان توابع به صورت فصلی از توابع پایه است (برای مثال، فصلی (OR) از عطف‌های (AND) بین ورودی‌ها و نقیضشان). توجه داشته باشید که می‌توان به سادگی تمام ورودی‌ها را با تغییر علامتشان وزنشان نقیض کرد.

چون که شبکه‌ی واحد های آستانه ای می‌توانند دسته‌ی وسیعی از توابع را یاد بگیرند (در مقابل تک واحد های آستانه ای که فقط تعداد کمی از توابع را یاد می‌گیرند)، علاقه‌ی ما بیشتر به شبکه های چند لایه‌ی این نوع واحدهاست.

٤.٤.٢ قانون آموزش پرسپترون‌ها

با وجود اینکه علاقه‌ی ما بیشتر به شبکه‌هایی با تعداد زیاد از واحدهاست، اما بیایید از نحوه‌ی یادگیری وزن‌های یک تک پرسپترون شروع کنیم. اینجا مسئله این است که برداری از وزن‌ها را بیابیم که پرسپترون با آن بتواند تمامی برای نمونه های آموزشی خروجی درست را تعیین کند.

برای حل چنین مسائلی الگوریتم‌های بسیاری وجود دارد. در اینجا ما به بررسی دو تا از این الگوریتم‌ها می‌پردازیم: قانون پرسپترون[1] و قانون دلتا[2] (نسخه ای از قانون LMS که در فصل ۱ برای یادگیری تابع ارزیابی استفاده شد). این دو الگوریتم تضمین می‌کنند که در شرایط خاص مختلف به فرضیه های مختلف قابل قبولی میل کنند. اهمیت چنین الگوریتم‌هایی از آن جهت است که پایه‌ی یادگیری برای شبکه‌ی با تعداد بالای واحد هستند.

---

[1] perceptron rule
[2] delta rule

یکی از راه‌های یادگیری بردار وزن‌ها ایجاد برداری تصادفی و امتحان کردن آن با تک‌تک نمونه های آموزشی است، اگر با خروجی یکی از نمونه سازگار نبود، وزن‌ها را عوض می‌کنیم، این فرایند آنقدر ادامه می‌یابد تا برداری پیدا شود که با تمامی نمونه های آموزشی سازگار باشد. بر اساس قانون آموزشی پرسپترون در هر مرحله وزن‌ها به صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$w_i \leftarrow w_i + \Delta w_i$$

که در آن

$$\Delta w_i = \eta(t - o)x_i$$

در این رابطه t خروجی تابع هدف برای نمونه فعلی، o خروجی پرسپترون و η ثابتی به نام ضریب یادگیری[1] است. نقش ضریب یادگیری کنترل میزان تغییر وزن‌ها در هر مرحله است. ضریب یادگیری معمولاً عددی کوچک (مثلاً 0.1) است که با زیاد شدن تعداد تکرارها کم‌کم کمرنگ می‌شود.

چرا باید چنین فرایندی به سمت مقادیر درست برای وزن‌ها میل کند؟ برای درک بهتر، حالتی خاص را بررسی می‌کنیم. فرض کنید که نمونه های آموزشی همگی توسط پرسپترون درست دسته بندی می‌شوند در چنین شرایطی همیشه مقدار عبارت (t-o) صفر و متعاقباً Δw_i خواهند بود پس وزن‌ها تغییر نخواهند کرد. حال فرض کنید که پرسپترون برای یک مثال که خروجی 1+ است اشتباهاً خروجی 1- می‌دهد. برای اینکه این اشتباه تصحیح شود وزن‌ها باید طوری تغییر کنند که مقدار $\vec{w}.\vec{x}$ بیشتر شود. مثلاً اگر $x_i > 0$، با افزایش w_i می‌توان مقدار پرسپترون را درست کرد. توجه داشته باشید که چون (t-o)، η، و x_i در این مثال همگی مثبتند w_i افزایش می‌یابد. برای مثال اگر

$$o = -1 \text{ و } t = 1 \text{ و } \eta = .1 \text{ و } x_i = .8$$

خواهیم داشت که

$$\Delta w_i = \eta(t - o)x_i = 0.1\big(1 - (-1)\big)0.8 = 0.16$$

از طرف دیگر اگر t=-1 و o=1 مقدار تغییر وزن به صورت عکس در می‌آمد و x_i کاهش می‌یافت.

در واقع، ثابت می‌شود که فرایند بالا به در طی تعداد محدودی تکرار به برداری از وزن‌ها خواهد رسید که تمامی نمونه های آموزشی را درست دسته بندی می‌کند (به شرط آنکه نمونه های آموزشی دسته بندی پذیر خطی و η نیز به اندازه‌ی کافی کوچک باشد (Papert 1969)). اگر داده‌ها دسته بندی پذیر خطی نباشند اطمینانی نیست که داده‌ها به مقدار خاصی میل کنند.

٤.٤.٣ شیب نزول[2] و قانون دلتا

با وجود اینکه قانون پرسپترون زمانی که داده‌ها دسته بندی پذیر خطی باشند به درستی برداری برای وزن‌ها پیدا می‌کند، اما در زمانی که داده‌ها دسته بندی پذیر خطی نیستند در این کار شکست می‌خورد. قانون آموزش دومی، به نام قانون دلتا، طراحی شده که حتی با وجود چنین مشکلی

---

[1] learning rate
[2] Gradient Descent

به مقدار خاصی میل کند. اگر داده‌ها دسته بندی پذیر خطی نباشند، قانون دلتا به سمتی میل می‌کند تا بهترین تقریب را از تابع هدف داشته باشد.

نکته‌ی کلیدی‌ای که در قانون دلتا به کار رفته این است که این قانون از شیب نزول برای جستجوی فضای فرضیه ای بردار های وزن را برای پیدا کردن متناسب‌ترین بردار استفاده می‌کند. اهمیت قانون دلتا از این رو است که پایه ای برای الگوریتم Backpropagation است. الگوریتم Backpropagation برای آموزش شبکه‌هایی با تعداد زیادی واحد به کار می‌رود. از سوی دیگر، شیب نزول پایه ای برای الگوریتم‌هایی که جستجو در فضای پیوسته‌ی فرضیه ای انجام می‌دهند است.

قانون دلتا، در پرسپترون‌های بدون مقدار آستانه قابل درک تر است. در چنین پرسپترون‌هایی داریم :

$$o(\vec{x}) = \vec{w}.\vec{x}$$

بنابراین، واحدی خطی (بدون مقدار آستانه) متناسب با هر پرسپترون مشخص می‌شود. برای اشتقاق یک وزن برای واحد خطی، از تعریف میزان خطای فرضیه (بردار های وزن) شروع می‌کنیم. با وجود اینکه توابع بسیاری برای بدست آوردن خطا وجود دارد اما تعریف می‌کنیم که:

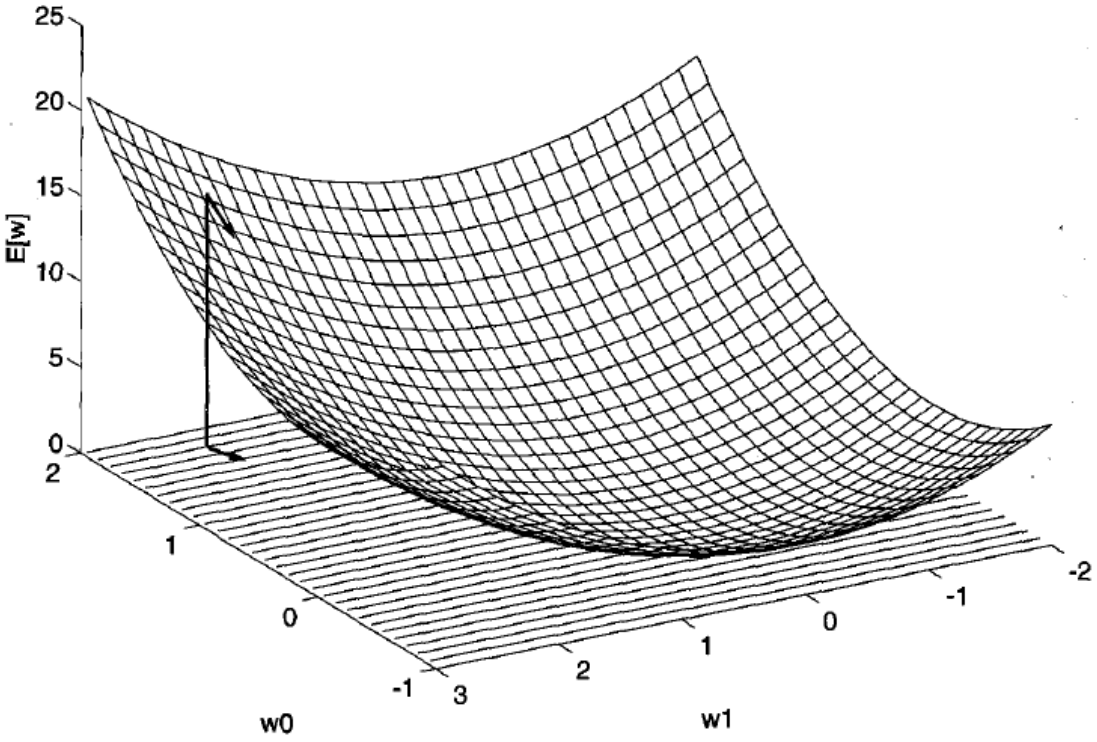
$$E(\vec{w}) \equiv \frac{1}{2}\sum_{d\in D}(t_d - o_d)^2$$

در این رابطه D دسته نمونه‌ها، t_d مقدار تابع هدف برای نمونه d، و o_d مقدار خروجی پرسپترون برای نمونه‌ی d است. طبق این تعریف، $E(\vec{w})$ نصف مجموع مجذور اختلاف‌های بین تابع هدف t_d و خروجی پرسپترون خطی o_d در تمامی نمونه های آموزشی است. در اینجا ما E را به عنوان تابعی از $\vec{w}$ تعریف کرده‌ایم زیرا که خروجی o به $\vec{w}$ وابسته است. البته E علاوه بر $\vec{w}$ به نمونه های آموزشی نیز وابسته است اما این نمونه ثابت فرض شده‌اند. در فصل ۶ توجیهی بیزی[1] برای نحوه‌ی تعریف E می‌آوریم. در کل، نشان خواهیم داد که در تحت شرایطی فرضیه ای که E را مینیمم کند متناسب‌ترین فرضیه‌ی درون H با داده های آموزشی است.

٤.٤.٣.١ تصور فضای فرضیه‌ها

برای درک الگوریتم شیب نزول، بد نیست فضای فرضیه ای و رابطه‌ی آن را با مقادیر E تصور کنیم (شکل ۴.۴). در شکل دو محور w_0 و w_1 دو مقدار ممکن برای بردار وزن واحد خطی هستند. محور سوم E میزان خطای مربوط به دسته ای از نمونه های آموزشی خاص را نشان می‌دهد. سطح خطای نشان داده شده در شکل ارجحیت هر بردار وزن را در فضای فرضیه‌ها نشان می‌دهد (بردارهایی ارجحیت دارند که خطای کمتری داشته باشند). با توجه به نحوه‌ی تعریف E، برای واحدهای خطی، سطح خطا همیشه سهمی‌وار است و یک نقطه‌ی مینیمم مطلق خواهد داشت. این نقطه‌ی مینیمم مطلق، همان طور که واضح است، به دسته نمونه های آموزشی وابسته است.

[1] Bayesian



شکل ۴.۴ خطای فرضیه های مختلف.

برای واحدی خطی با دو وزن، فضای فرضیه ای H صفحه‌ی w_1 و w_0 خواهد بود. محور عمودی میزان خطای فرضیه‌ها را برای دسته نمونه ثابتی نشان می‌دهد. فلش‌های شکل شیب منفی را در نقطه ای خاص نشان می‌دهند، این فلش‌ها به سمتی اشاره می‌کنند که میزان خطا در آنجا به حداقل می‌رسد.

جستجوی شیب نزول بردار وزنی را مشخص می‌کند که در آن E کمینه است. در این الگوریتم ابتدا از برداری دلخواه شروع کرده و مرحله به مرحله آن با تغییر های کوچک به بردار وزن مطلوب میل می‌کند. در هر مرحله، بردار وزن به طرف بیشترین کاهش خطا حرکت داده می‌شود. این فرایند آنقدر ادامه پیدا خواهد کرد تا به مینیمم مطلق تابع خطا برسیم.

٤.٤.٣.٢ اشتقاق قانون شیب نزول

چگونه می‌توان بیشترین کاهش خطا را پیدا کرد؟ این جهت با مشتق گرفتن ضمنی از میزان خطای E بر حسب تمامی مؤلفه های بردار $\vec{w}$ بدست می‌آید. این بردار گرادیان[1] E نامیده می‌شود و به صورت $\nabla E(\vec{w})$ نشان داده می‌شود.

$$\nabla E(\vec{w}) \equiv \left[\frac{\partial E}{\partial w_0}, \frac{\partial E}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial E}{\partial w_n}\right] \qquad (4.3)$$

توجه داشته باشید که خود $\nabla E(\vec{w})$ نیز یک بردار است که مؤلفه‌هایش مشتقات E بر حسب w_i هاست. زمانی که به گرادیان به صورت برداری در فضای وزن‌ها نگاه کنیم، سمت بیشترین افزایش E را مشخص خواهد کرد. در نقطه‌ی مقابل خلاف این سمت بیشترین کاهش E را

[1] gradient

به دنبال خواهد داشت. برای مثال، در شکل ۴.۴ عکس گرادیان $(-\nabla E(\vec{w}))$ برای نقطه ای دلخواه در صفحه‌ی w_1 و w_0 نشان داده شده است.

از آنجایی که گرادیان سمت بیشترین کاهش E را مشخص می‌کند، قانون یادگیری برای شیب نزول به شکل زیر خواهد بود:

$$\vec{w} \leftarrow \vec{w} + \Delta\vec{w}$$

که در آن

$$\Delta\vec{w} = -\eta\nabla E(\vec{w}) \qquad (4.4)$$

در اینجا نیز η مقداری مثبت است که ضریب یادگیری نامیده می‌شود. این مقدار اندازه‌ی قدم‌های را در الگوریتم شیب نزول مشخص می‌کند. علامت منفی به خاطر این است که می‌خواهیم بردار وزن‌ها را به سمت کاهش میزان E حرکت دهیم. می‌توان به صورت ساده تر این قانون را بر روی مؤلفه های بردار وزن‌ها نیز نوشت:

$$w_i \leftarrow w_i + \Delta w_i$$

که در آن

$$\Delta w_i = -\eta\left(\frac{\partial E}{\partial \mathrm{w}_i}\right) \qquad (4.5)$$

این نشان می‌دهد که برای رسیدن به بیشترین کاهش باید هر مؤلفه را متناسب با مقدار $\frac{\partial E}{\partial \mathrm{w}_i}$ تغییر داد.

برای تبدیل این فرایند به الگوریتم و تکرار مراحل توسط رابطه‌ی (۴.۵) لازم است که راهی موثر برای محاسبه‌ی گرادیان در هر مرحله داشته باشیم. خوشبختانه این کار چندان هم مشکل نیست. مشتقات سازنده‌ی بردار گرادیان $\frac{\partial E}{\partial \mathrm{w}_i}$ به سادگی با استفاده از رابطه‌ی (۴.۲) محاسبه می‌شود:

$$\frac{\partial E}{\partial \mathrm{w}_i} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{w}_i}\frac{1}{2}\sum_{d\in D}(\mathrm{t_d} - \mathrm{o_d})^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{d\in D}\frac{\partial}{\partial \mathrm{w}_i}(\mathrm{t_d} - \mathrm{o_d})^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{d\in D}2(\mathrm{t_d} - \mathrm{o_d})\frac{\partial}{\partial \mathrm{w}_i}(\mathrm{t_d} - \mathrm{o_d})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{d\in D}2(\mathrm{t_d} - \mathrm{o_d})\frac{\partial}{\partial \mathrm{w}_i}(\mathrm{t_d} - \vec{\mathrm{w}}.\vec{\mathrm{x}}_\mathrm{d})$$

$$\frac{\partial E}{\partial \mathrm{w}_i} = \sum_{d\in D}(\mathrm{t_d} - \mathrm{o_d})(-\mathrm{x_{id}}) \qquad (4.6)$$

در این رابطه x_{id} نشان دهنده‌ی مؤلفه‌ی i ام در نمونه‌ی d است. حالا ما معادلی برای $\frac{\partial E}{\partial w_i}$ داریم که به مقـادیر x_{id} ،o_d و t_d (مقـدار تـابع هدف نمونه آموزشی) وابسته است. با جایگزینی مقادیر رابطه‌ی (4.6) در رابطه‌ی (4.5) رابطه‌ی تغییر مقادیر وزن‌ها برای شیب نزول بدسـت می‌آید:

$$\Delta w_i = \eta \sum_{d \in D} (t_d - o_d)(x_{id}) \qquad (4.7)$$

به طور خلاصه، الگوریتم شیب نزول برای آموزش واحد های خطی به صورت زیر است: ابتدا برداری دلخواه برای وزن‌هـا انتخـاب کـن. سـپس برای هر نمونه آموزشی مقدار واحد خطی را محاسبه کن، و Δw_i ها را برای هر وزن حساب کن (رابطـه‌ی ۴.۷). هـر وزن را بـا اضـافه کـردن Δw_i تغییر بده و این فرایند را تا اتمام نمونه های آموزشی تکرار کن. در جدول ۴.۱ این الگوریتم آورده شده است. چون سطح خطا فقـط یـک مینیمم مطلق دارد، این الگوریتم به برداری با کمترین خطا میل می‌کند، بدون توجه به اینکه داده‌ها دسته پذیر خطی هستند یا نـه. فقـط کـافی است که η به اندازه‌ی کافی کوچک باشد. اگر η خیلی بزرگ باشد، احتمال دارد الگوریتم شیب نزول به کمترین مقدار خطا میل نکنـد. یکـی از روش‌های حل این مشکل کم کردن تدریجی η در طول مراحل الگوریتم است.

٤.٤.٣.٣ تقریب اتفاقی شیب نزول

شیب نزول نمونه‌ی کلی مهمی از یادگیری است. این الگوریتم استراتژی‌ای برای جستجوی فضاهای بزرگ و نامتناهی فرضیه ای است. از این الگوریتم به شرطی می‌توان استفاده کرد که (1) فضای فرضیه ای پیوسته (برای مثال، فضای وزن‌ها در واحد خطی)، و (2) خطاهـا بـر حسـب پارامترهای این فرضیه صریح باشد. مشکلات استفاده از شیب نزول این است که (1) همگرایی به یک مقـدار مینـیمم موضـعی بعضـی مواقـع زیادی طول می‌کشد (مثلاً، صدها گام لازم است تا به مقدار خاصی همگرا شویم) و (2) اگر چند مینیمم موضعی وجـود داشـته باشـد تضـمینی نیست که الگوریتم به مینیمم مطلق میل کند.

الگوریتم Gradient-Descent(training_examples,η)

هر نمونه آموزشی به صورت $< \vec{x}, t >$ مشخص می‌شود، $\vec{x}$ نمونه و t مقدار نمونه است. η نیز نرخ یادگیری را تعیین می‌کند.

- w_i ها را با مقادیر دلخواه کوچکی مقدار دهی اولیه کن.
- تا زمانی که به شرط پایانی نرسیده ای حلقه‌ی زیر را اجرا کن
  - هر Δw_i را صفر مقدار دهی اولیه کن.
  - برای هر مثال $< \vec{x}, t >$ حلقه‌ی زیر را اجرا کن
    - $\vec{x}$ را به واحد خطی بده و خروجی o را دریافت کن
    - برای هر وزن w_i دستور زیر را انجام بده

$$\Delta w_i \leftarrow \Delta w_i + \eta(t - o)x_i \qquad (T4.1)$$

  - برای هر وزن واحد خطی دستور زیر را انجام بده

$$w_i \leftarrow w_i + \Delta w_i \qquad (T4.2)$$

جدول ۴.۱ الگوریتم Gradient-Descent برای آموزش یک واحد خطی.

برای تبدیل به تقریب اتفاقی برای شیب نزول رابطه‌ی (T4.2) حذف می‌شود و رابطه‌ی (T4.1) نیز با رابطه‌ی $\boldsymbol{w_i \leftarrow w_i + \eta(t-o)x_i}$ *جایگزین می‌شود.*

یکی از راه‌های حل این مشکلات ، استفاده از متد شیب نزولی افزایشی[1] یا متد شیب نزولی تصادفی[2] است. قانون شیب نزول تغییر وزن‌ها را بعد از جمع بستن همه‌ی نمونه‌ها انجام می‌دهد (رابطه‌ی 4.7). اما متد شیب نزول تصادفی سعی می‌کند تا با افزایش ذره ذره‌ی وزن‌ها روش جستجوی شیب نزول را تخمین بزند و سپس خطا را برای هر نمونه محاسبه کند. این قانون آموزش نظیر قانون آموزش بیان شده در معادله‌ی 4.7 است با این فرق که بعد از هر تکرار طبق رابطه‌ی زیر وزن‌ها را تغییر می‌دهیم

$$\Delta w_i = \eta(t-o)x_i \qquad (4.10)$$

در این رابطه t، o و x_i به ترتیب مقدار تابع هدف، خروجی واحد و i امین ویژگی نمونه آموزشی مورد بحث هستند. برای تبدیل الگوریتم شیب نزول (جدول ۴.۱) به شیب نزول تصادفی، رابطه‌ی (T4.2) حذف و به جای رابطه‌ی (T4.1) رابطه‌ی $w_i \leftarrow w_i + \eta(t-o)x_i$ جایگزین می‌شود. برای بیان الگوریتم شیب نزول تصادفی به بیانی دیگر کافی است تابع خطایی به نام $E_d(\vec{w})$ را برای هر نمونه آموزشی d به شکل زیر تعریف کنیم:

$$E_d(\vec{w}) = \frac{1}{2}(t_d - o_d)^2 \qquad (4.11)$$

که در آن t_d و o_d به ترتیب مقدار تابع هدف و خروجی واحد برای نمونه d هستند. الگوریتم شیب نزول تصادفی برای تمامی نمونه های d در D تکرار خواهد شد و در هر تکرار وزن‌ها را بر اساس گرادیان و با توجه به $E_d(\vec{w})$ تغییر می‌دهد. سری‌ای از این تغییر وزن‌ها معیار خوبی برای تخمین کاهش گرادیان با توجه به تابع خطای اصلی $E(\vec{w})$ است. با کم کردن مقدار η (اندازه‌ی قدم‌ها در شیب نزول) به اندازه‌ی کافی، شیب نزول تصادفی می‌تواند به اندازه‌ی دلخواه به خود شیب نزول نزدیک شود. فرق‌های اساسی بین شیب نزول و شیب نزول تصادفی در زیر آورده شده است:

- در شیب نزول، خطا برای تمامی نمونه‌ها قبل از تغییر در وزن‌ها جمع زده می‌شد اما در شیب نزول تصادفی محاسبه‌ی خطاها و تغییر وزن‌ها همزمان انجام می‌شود.
- جمع خطا برای چندین نمونه در شیب نزول نیاز به محاسبات بیشتری در هر تکرار حلقه دارد. در مقابل چون از گرادیان اصلی برای تغییرات استفاده می‌شود، در هر قدم (به نسبت شیب نزول تصادفی) بیشتر به مینیمم E نزدیک می‌شود.
- در مواقعی که $E(\vec{w})$ چندین مینیمم‌های موضعی دارد گاهی شیب نزول تصادفی می‌تواند از افتادن در چنین مینیمم‌هایی پرهیز کند زیرا که شیب نزول تصادفی برای کنترل سمت جستجو بجای $\nabla E(\vec{w})$ از $\nabla E_d(\vec{w})$ استفاده می کند.

هر دو الگوریتم شیب نزول و شیب نزول تصادفی به یک اندازه در کاربرد استفاده می‌شوند.

به قانون آموزش رابطه‌ی (4.10) را قانون دلتا، LMS[3]، قانون Adaline، یا قانون Window-Hoff (همنام ارائه کننده) نیز می‌نامند. در فصل ۱ از LMS برای توصیف کاربردش برای یادگیری ارزیابی‌ای از بازی استفاده کردیم. توجه داشته باشید که قانون دلتا در رابطه‌ی 4.10 مشابه قانون آموزش پرسپترون‌ها در قسمت ۴.۴.۲ است. در واقع از نظر ظاهری این دو رابطه با هم یکی هستند، با این وجود قانون دلتا o

---

[1] incremental gradient descent
[2] stochastic gradient descent
[3] least-mean-square

مربوط به رابطه‌ی خروجی واحد خطی یعنی $o(\vec{x}) = \vec{w}.\vec{x}$ و قانون پرسپترون o مربوط به رابطه‌ی خروجی واحد آستانه یعنی $o(\vec{x}) = sgn(\vec{w}.\vec{x})$ است.

با وجود اینکه قانون دلتا برای واحد های خطی بدون مقدار آستانه بررسی شد اما می‌توان این قانون را برای آموزش پرسپترون‌ها نیز استفاده کرد. فرض کنید که $o = \vec{w}.\vec{x}$ خروجی بدون مقدار آستانه واحد خطی باشد و $o' = sgn(\vec{w}.\vec{x})$ خروجی واحد آستانه دار یا همان پرسپترون باشد. حال اگر می‌خواهیم که پرسپترون را با توجه به مقادیر تابع هدف که ± 1 هستند آموزش دهیم، می‌توانیم همان مقادیر را با استفاده از قانون برای آموزش o به کار ببریم. واضح است که اگر واحد خطی بتواند تمامی نمونه‌ها را یاد بگیرد پرسپترون نیز به حالت نظیر می‌تواند تمامی نمونه‌ها را یاد بگیرد (زیرا که sgn(1)=1 و sgn(-1)=-1). حتی زمانی که نمی‌توان با استفاده از واحد خطی همه‌ی نمونه‌ها را به دقت یاد گرفت مقدار آستانه این کمبود دقت را جبران می‌کند و مقادیر خروجی را به ± 1 می‌رساند (فقط کافیست واحد خطی علامت خروجی را درست تعیین کرده باشد). توجه داشته باشید که تلاش فرایند برای کم کردن خطای واحد خطی o است و ممکن است الزاماً دسته وزن‌هایی را مشخص نمی‌کند که کمترین خطای دسته بندی o′ را داشته باشد.

٤.٤.٤ ملاحظات

در قسمت قبلی دو الگوریتم تکراری[1] برای پیدا کردن وزن‌های پرسپترون ارائه کردیم. تفاوت این دو الگوریتم در اینجا است که قانون پرسپترون وزن‌ها را برای پرسپترون‌هایی با مقدار آستانه پیدا می‌کند اما قانون دلتا وزن‌ها را برای پرسپترون‌هایی بدون مقدار آستانه پیدا می‌کند.

تفاوت این دو الگوریتم بر ویژگی‌های همگرایی آن‌ها نیز تأثیر گذاشته است. قانون پرسپترون، با فرض اینکه داده‌ها دسته بندی پذیر خطی باشند، پس از تعداد محدودی تکرار به فرضیه‌ی درست می‌رسد. در حالی که قانون دلتا به طور مجانبی به فرضیه‌ی درست میل می‌کند، و ممکن است برای همگرایی تا بی نهایت طول بکشد. در عوض قانون دلتا بدون توجه نیاز به دسته بندی پذیر خطی بودن داده‌ها همگرا می‌شود. برای اطلاعات بیشتر در مورد همگرایی این دو روش به Hertz et al. (1991) مراجعه کنید.

الگوریتم سوم برای یادگیری بردار وزن‌ها برنامه نویسی خطی[2] است. برنامه نویسی خطی متدی کارامد و کلی برای حل نامساوی‌های خطی است. توجه دارید که هر نمونه آموزشی متناسب با یک نامساوی به فرم $\vec{w}.\vec{x} > 0$ یا $\vec{w}.\vec{x} \leq 0$ است و جواب نا معادله نیز همان بردار وزن‌هاست. متأسفانه این روش نیز فقط زمانی به جواب می‌رسد که داده‌ها دسته بندی پذیر خطی باشند، با این وجود (Duda and Hart 1973, p. 168) فرمولی زیرکانه برای مواقعی که داده‌ها دسته بندی پذیر خطی نیز نیستند پیشنهاد داده است. به هر حال روش برنامه نویسی خطی برای شبکه های چند لایه تعمیم ندارد. در مقابل، روش شیب نزول که قانون دلتا نیز با کمک آن ساخته شده، به راحتی برای شبکه های چند لایه تعمیم می‌یابد. در قسمت آینده این تعمیم را بررسی خواهیم کرد.

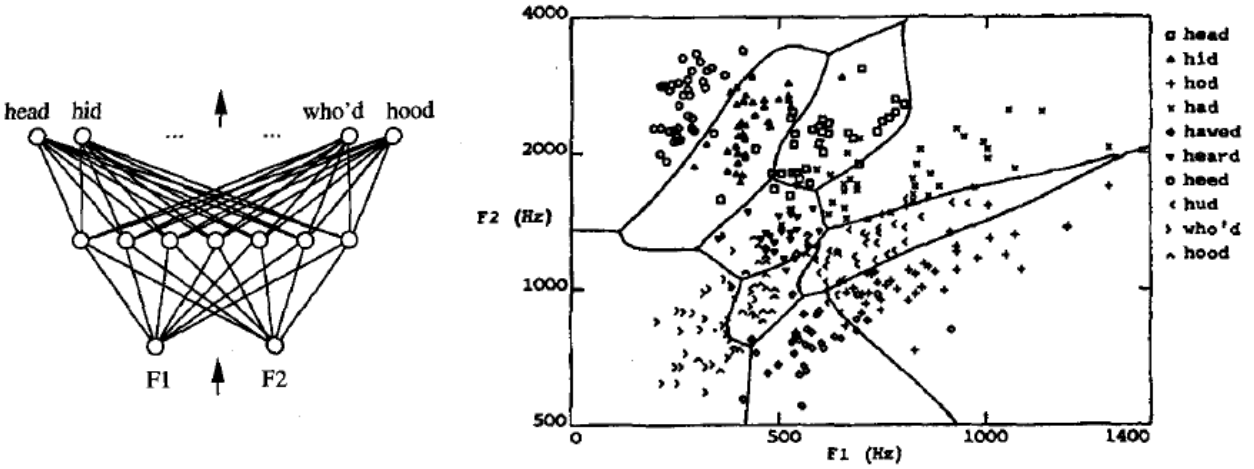
٤.٥ شبکه های چند لایه و الگوریتم Backpropagation

همان طور که در قسمت ۴.۴.۱ نیز گفته شد، تک پرسپترون‌ها فقط سطوح خطی تصمیم گیری را می‌توانند یاد بگیرند. در مقابل، شبکه های چند لایه که توسط الگوریتم Backpropagation آموزش داده می‌شوند می‌توانند انواع مختلفی از سطوح تصمیم گیری غیر خطی را نیز یاد

---

[1] iterative
[2] linear programming

بگیرند. برای مثال، یک شبکه‌ی چند لایه و سطح تصمیم گیری آن در شکل ۴.۵ نشان داده شده است. در این مثال کار تشخیص گفتار برای تشخیص حرف صدا دار بین دو حرف بی صدای h و d (در ده حالت مختلف) آورده شده. ورودی سیگنال صحبت به صورت دو پارامتر عددی که از آنالیز صدا بدست آمده می‌باشد. این اعداد سطح ۲ بعدی تصمیم گیری را تشکیل می‌دهند. همان طور که در شکل نیز نشان داده شده شبکه های چند لایه می‌توانند سطوح تصمیم گیری خیلی پیچیده تری را نسبت به سطوح خطی (شکل ۴.۳) یاد بگیرند. در این بخش به نحوه‌ی آموزش شبکه های چند لایه توسط الگوریتم شیب نزول می‌پردازیم.



شکل ۴.۵ فضای تصمیم گیری یک شبکه‌ی چند لایه‌ی تک سویه.
شبکه‌ی نشان داده شده برای تشخیص یکی از ده صدای بین حروف h و d آموزش داده شده است. ورودی شبکه دو پارامتر F1 و F2 هستند که از آنالیز صدا بدست می‌آیند. ده خروجی شبکه متناسب با ده صدای مختلف هستند. پیش بینی شبکه صدایی است که بیشترین مقدار خروجی شبکه را داشته باشد. سمت راست سطح تصمیم گیری غیر خطی این شبکه را نشان می‌دهد. نقطه های نشان داده شده در شکل نمونه های آموزشی هستند. (گرفته شده از (Haung and Lippmann 1988).)

٤.٥.١ واحد آستانه ای مشتق پذیر

چه نوع واحدهایی برای تشکیل پایه های شبکه های چند لایه به کار می‌روند؟ در ابتدا ممکن است فکر کنیم که واحد های خطی‌ای که پیش‌تر قانون یادگیریشان را پیدا کردیم مناسبند. با این وجود، درحالی‌که شبکه‌هایی که ترکیب واحد های خطی‌اند فقط توابع خطی را ایجاد می‌کنند، در حالی که هدف ما از شبکه های چند لایه پیدا کردن شبکه‌هایی است که توابع غیر خطی را بیان کنند. گزینه‌ی دیگر واحد پرسپترون است، اما ناپیوستگی مقدار آستانه‌ی این واحد آن‌را مشتق ناپذیر می‌کند. و واحدهایی که مشتق ناپذیرند، گرادیان ندارند و متعاقباً برای شیب نزول مناسب نیستند. در اینجا به واحدی با خروجی مشتق پذیر و غیر خطی نیاز داریم. واحد سیگموید یکی از راه حل‌های ممکن است. واحدی که خیلی مشابه پرسپترون و تابع مقدار آستانه‌اش پیوسته و مشتق پذیر است.

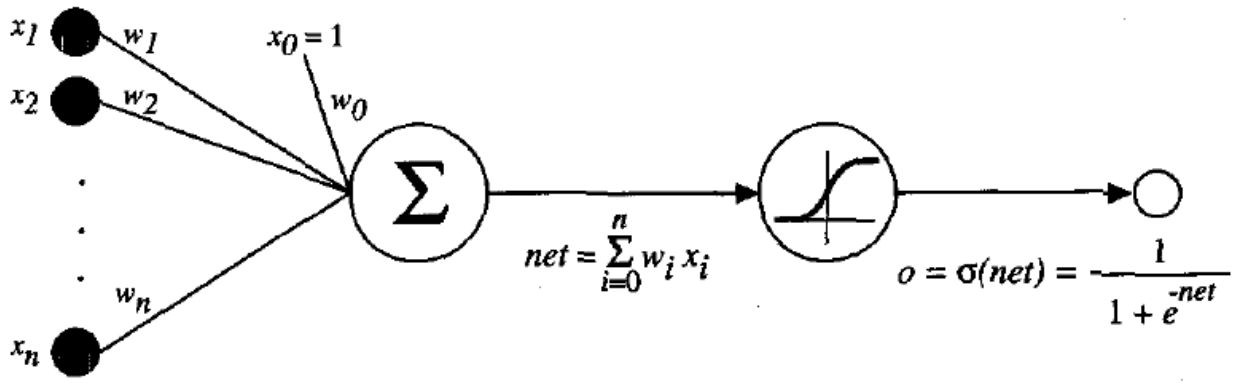
تابع سیگموید در شکل ۴.۶ نشان داده شده. مثل واحد پرسپترون، سیگموید نیز ابتدا ترکیبی خطی از ورودی‌ها را محاسبه کرده و سپس آن‌را بعد از تأثیر تابع آستانه‌اش خروجی می‌دهد. در واحد سیگموید خروجی تابعی پیوسته از ورودی‌هاست. به عبارت دقیق‌تر خروجی واحد سیگموید از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$o = \sigma(\vec{w}.\vec{x})$$

که در آن

$$\sigma(y) = \frac{1}{1 + e^{-y}} \qquad (4.12)$$

به تابع σ تابع سیگموید[1] یا تابع منطق[2] نیز می‌گویند. توجه دارید که خروجی این تابع عددی بین صفر تا یک است، که متناسب با ورودی‌هاست. (تابع سیگموید در شکل ۴.۶ نشان داده شده). چون تابع سیگموید پهنای بزرگی از خروجی‌ها را به پهنای کوچکی می‌برد گاهی به آن تابع فشرده ساز[3] نیز می‌گویند. یکی دیگر از خواص بسیار مفید تابع سیگموید بیان مشتق آن بر حسب خودش است. [به عبارت دیگر، $\frac{\partial\sigma(y)}{\partial y} = \sigma(y).(1 - \sigma(y))$]. همان طور که بعداً نیز خواهیم دید، در استفاده از گرادیان این رابطه محاسبات را بسیار ساده تر می کند. توابع مشتق پذیر دیگر در بعضی موارد به جای σ به کار می روند. برای مثال گاهی به جای e^{-y} در تابع سیگموید $e^{-k.y}$ قرار می دهند که در آن k عددی ثابت و مثبت است که تندی مقدار آستانه را مشخص می کند. در بعضی موارد نیز از تابع tanh به جای سیگموید استفاده می شود (تمرین ۴.۸).



شکل ۴.۶ واحد آستانه ای سیگموید.

٤.٥.٢ الگوریتم Backpropagation

الگوریتم Backpropagation وزن‌های لازم برای یک شبکه‌ی چند لایه با ساختار شبکه‌ی ثابت را پیدا می‌کند. این الگوریتم از شیب نزول برای مینیمم کردن میزان خطا، مربع اختلاف بین خروجی شبکه و تابع هدف، استفاده می‌کند. در این بخش الگوریتم Backpropagation و در بخش بعدی مشتقات لازم برای قانون شیب نزول وزن‌ها در این الگوریتم را ارائه می‌کنیم.

چون در این شبکه‌ها خروجی یک عدد نیست، پس کار را با تعریف دوباره‌ی E آغاز می‌کنیم و E را جمع خطای تمامی خروجی‌ها تعریف می‌کنیم:

---

[1] sigmoid
[2] logistic function
[3] squashing function

$$E(\vec{w}) \equiv \frac{1}{2}\sum_{d\in D}\sum_{\text{k}\in\text{outputs}}(\text{t}_{\text{kd}}-\text{o}_{\text{kd}})^2 \qquad (4.13)$$

که در آن outputs مجموعه‌ی تمامی خروجی‌های شبکه، t_{kd} مقدار تابع هدف و o_{kd} خروجی شبکه برای k امین خروجی و d امین نمونه است.

مسئله فعلی پیدا کردن وزن‌های متناسب با نمونه های آموزشی در میان فضای فرضیه ای تمامی وزن‌های ممکن است. می‌توان وضعیت را دوباره مثل شکل ۴.۴ تصور کرد. در وضعیت محور عمودی تعریف جدید E، و بقیه‌ی محورها، وزن‌های تمامی واحد های شبکه هستند. درست مشابه زمانی که تنها یک واحد داشتیم در این وضعیت نیز می‌توان از شیب نزول برای یافتن فرضیه ای با کمترین میزان خطا کمک گرفت.

تنها فرق این است که برعکس حالت قبلی که فقط یک مینیمم داشت (شکل ۴.۴) در این حالت ممکن است چندین مینمم موضعی وجود داشته باشد. متأسفانه شیب نزول تنها تضمین می‌کند که به سوی مینیممی موضعی میل کند، و این مقدار همیشه با مینیمم مطلق یکی نیست. با وجود این مانع، در عمل Backpropagation ثابت کرده که می‌تواند جواب‌های بسیار خوبی در کاربردهای واقعی پیدا کند.

الگوریتم Backpropagation در جدول ۴.۲ آورده شده است. این الگوریتم برای شبکه های یک سویه ای است که از دو لایه واحد سیگموید تشکیل شده‌اند که هر واحد در هر لایه به تمامی واحدهای لایه‌ی قبلی متصل است. این الگوریتم یکی از دو نسخه‌ی شیب نزول تصادفی یا افزایشی الگوریتم Backpropagation است. نماد گزاری استفاده شده جز در موارد زیر مشابه قسمت‌های قبلی است:

- به هر گره[1] یک اندیس[2] نسبت داده شده است که در آن گره یک ورودی به شبکه یا خروجی واحدی است.
- x_{ij} نماینده‌ی ورودی گره‌ی i به واحد j است و w_{ij} وزن این متناظر است.
- δ_n نماد خطای مربوط به واحد n است. و نقش مقدار (t-o) را که قبلاً در قانون دلتا درباره‌ی آن بحث کردیم ایفا می‌کند. همان طور که بعداً نیز خواهیم دید: $\delta_n = \frac{\partial E}{\partial net_n}$.

Backpropagation ($training\_examples, \eta, n_{in}, n_{out}, n_{hidden}$)

هر نمونه آموزشی به صورت زوج مرتب $< \vec{x}, \vec{t} >$ مشخص می‌شود که در آن $\vec{x}$ بردار مقدار های ورودی شبکه و $\vec{t}$ مقادیر تابع هدف است.

η ضریب یادگیری است، n_{in} تعداد ورودی‌های شبکه n_{out} تعداد خروجی‌های شبکه و n_{hidden} تعداد واحدها پنهان شبکه هستند.

ارتباط بین واحد i ام و واحد j ام به صورت x_{ij} نشان داده شده است و وزن متناسب با این ارتباط نیز با نماد w_{ij} نشان داده شده.

به هر گره[3] یک اندیس[4] نسبت داده شده است که در آن گره یک ورودی به شبکه یا خروجی واحدی است.

- شبکه ای یک طرفه با n_{in} واحد ورودی n_{hidden} واحد پنهان و n_{out} واحد خروجی بساز

---

[1] node
[2] index
[3] node
[4] index

- تمامی وزن‌های شبکه را با اعداد کوچک تصادفی مقدار دهی اولیه کن (مثلاً بین ۰.۵ و 0.5-)
- تا رسیدن به شرط پایانی حلقه‌ی زیر را اجرا کن
  - برای هر مثال $< \vec{x}, \vec{t} >$ در training_examples حلقه‌ی زیر را اجرا کن

ورودی را در جهت شبکه میان شبکه پخش کن:

۱. $\vec{x}$ را به ورودی بده و خروجی o_u را برای هر خروجی u دریافت کن

خطاها را خلاف جهت شبکه در میان شبکه پخش کن:

۲. برای هر خروجی k مقدار δ_k را از رابطه‌ی زیر بدست آور

$$\delta_k \leftarrow o_k(1 - o_k)(t_k - o_k) \qquad (T4.3)$$

۳. برای هر واحد پنهان h مقدار زیر را حساب کن

$$\delta_h \leftarrow o_h(1 - o_h) \sum_{k \in output} w_{kh}\delta_k \qquad (T4.4)$$

۴. هر وزن w_{ji} را از رابطه‌ی زیر تغییر بده

$$w_{ji} \leftarrow w_{ji} + \Delta w_{ji}$$

که در آن

$$\Delta w_{ji} = \eta \delta_j x_{ji}$$

جدول ۴.۲ نسخه‌ی شیب نزول اتفاقی الگوریتم Backpropagation برای شبکه های تک سویه که دو لایه واحد سیگموید دارند.

توجه دارید که الگوریتم جدول ۴.۲ با ساخت یک شبکه‌ی جدید با همان تعداد واحد پنهان و همان تعداد واحد خروجی و مقدار دهی اولیه‌ی وزن‌های آن با اعداد تصادفی کوچک آغاز می‌گردد. با توجه به اینکه ساختار شبکه ثابت و معلوم است، حلقه‌ی اصلی الگوریتم فقط برای نمونه های آموزشی مختلف تکرار می‌شود و بقیه‌ی موارد تغییری نمی‌کنند. برای هر نمونه‌ی آموزشی، نمونه به شبکه داده شده و خروجی را دریافت می‌شود، سپس خطای خروجی را برای نمونه مذکور محاسبه می‌کند. در ادامه، گرادیان را با توجه به خطای محاسبه شده محاسبه و در آخر نیز مقدار وزن‌ها را تغییر می‌دهد. این مرحله‌ی شیب نزول تا زمانی که خطای شبکه به حد مطلوب برسد تکرار می‌شود (گاهی این تکرارها تا صدها بار ادامه می‌یابد و همان نمونه‌ها چندین دفعه تکرار می‌شوند).

قانون تغییر وزن‌های شیب نزول (رابطه‌ی [T4.5] در جدول ۴.۲) مشابه رابطه‌ی قانون دلتا (رابطه‌ی [4.10]) است. مثل قانون دلتا، این رابطه مقدار هر وزن را به نسبت ضریب یادگیری η و مقدار ورودی x_{ji} که وزن به آن اعمال شده و مقدار خطای خروجی تغییر می‌دهد. تنها تفاوت بین این دو رابطه این است که خطا در قانون دلتا (t-o) بوده و در رابطه‌ی جدید با مقداری پیچیده تر δ_j جایگزین شده است. صورت دقیق δ_j از اشتقاق رابطه‌ی تغییر وزن‌ها در قسمت ۴.۵.۳ ناشی شده است. برای درک بهتر، ابتدا به فرمول محاسبه‌ی δ_k برای خروجی k ام شبکه دقت کنید (رابطه‌ی [T4.4]). با این وجود، از آنجایی که نمونه های آموزشی مقدار t_k را برای خروجی‌های شبکه دارند، پس مقدار تابع هدف برای واحد های پنهان معلوم نیست و نمی‌توان خطا را به صورت مستقیم محاسبه کرد. پس به جای آن برای محاسبه‌ی خطای واحد پنهان h، از جمع

خطا های δ_k برای هر خروجی که h بر آن تأثیر دارد می‌شود. برای محاسبه‌ی درست‌تر لازم است که هر میزان خطا در میـزان تـأثیر h بـر k w_{kh} ضرب شود. این کار باعث می‌شود که هر واحد پنهان به اندازه ای که در هر خطا "مسئول[1]" است در خطا سهم داشته باشد.

الگوریتم جدول ۴.۲ وزن‌ها را به صورت افزایشی و با برخورد به نمونه های مختلف تغییر می‌دهد. این تقریب تصادفی از شیب نزول است. بـرای رسیدن به خود گرادیان E باید مقادیر $\delta_j x_{ji}$ را قبل از تغییر وزن‌ها برای تمامی نمونه های آموزشی جمع زد.

حلقه‌ی تغییر وزن‌ها در Backpropagation در کاربردهای واقعی ممکن است صدها بار تکرار شود. با داشتن تنوع شروط خروج[2] مـی‌تـوان تکرار این فرایند را به متوقف کند. مثلاً ممکن است می‌توان تعیین کرد که شرط پس از تعداد خاصی تکرار متوقف شود، یا زمانی که مقدار خطـا به کمتر از مقدار آستانه‌ی خاصی رسید، یا میزان خطا برای دسته نمونه های جداگانه به کمتر از مقدار خاصـی برسـد. انتخـاب شـرط پایـانی از اهمیت خاص برخوردار است زیرا که تعداد کم تکرار ممکن است به مینیمم نشدن خطا بینجامد و تکرار زیاد نیز باعث می‌شود کـه شـبکه فقـط نمونه های آموزشی را تشخیص دهد (مشکل overfit). درباره‌ی این مسئله بعداً در قسمت ۴.۶.۵ مفصلاً بحث خواهد شد.

٤.٥.٢.١ اضافه کردن تکانه

چون Backpropagation الگوریتم پرکاربردی است، نسخه های بسیاری از این الگوریتم پدید آمده است. شاید معروف‌ترین این نسخه‌هـا، نسخه ای است که به جای رابطه‌ی تغییر وزن‌ها (رابطه‌ی (T4.5)) از رابطه‌ی بازگشتی استفاده می‌کند:

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta \delta_j x_{ji} + \alpha w_{ji}(n-1)$$

در اینجا $\Delta w_{ji}(n)$ تغییر وزنی است که در حلقه‌ی n ام حلقه‌ی اصلی انجام می‌شود. و به α که $0 \le \alpha < 1$ تکانه[3] می‌گویند. توجه داریـد کـه جمله‌ی اول این رابطه همان تغییر وزن در رابطه‌ی (T4.5) است. جمله اضافی، جمله‌ی دوم، جمله‌ی تکانه نامیده می‌شـود. بـرای درک بهتـر، فرض کنید که در الگوریتم شیب نزول مسیر طی شده توسط یک گوی طی می‌شد، در آنجا این گوی هیچ تکانه ای نداشت. اثر α اضافه کردن تکانه به گوی مورد بحث است، و باعث می‌شود در هر حلقه ما تمایل داشته باشیم به سمتی حرکت کنـیم کـه در حلقـه‌ی قبلـی بـه آن سـمت حرکت کرده‌ایم. این اثر باعث به دام نیفتادن در مینیمم‌های نسبی‌ای که خطا خیلی در آن کم نمی‌شود و حرکت به سمت مینیمم مطلق خواهـد شد. همچنین در جایی که سطح افقی می‌شود گوی بدون تکانه از حرکت باز می‌ایستد در حالی که گویی که تکانـه دارد چنـین مشـکلی نـدارد. همچنین در جایی که شیب تغییر نمی‌کند، اندازه‌ی قدم‌ها را بیشتر می‌کند تا در حلقه های کمتری به مینیمم برسیم.

٤.٥.٢.٢ یادگیری در شبکه های بدون دور با ساختار دلخواه

تعریفی که در جدول ۴.۲ از Backpropagation آورده شد فقط برای شبکه های دو لایه بود، با این وجود به راحتی می‌توان این تعریـف را برای تمامی شبکه های تک سویه تعمیم داد. در این تعمیم، تغییری در رابطه‌ی تغییر وزن‌ها (رابطه‌ی (T4.5)) به وجود نمی‌آید و فقط رابطه‌ی محاسبه‌ی δ عوض می‌شود. در کل برای محاسبه‌ی δ_r برای واحد r از لایه‌ی m از مقدار δ_s هـای لایـه‌ی بعـدی از فرمـول زیـر محاسـبه می‌شود:

---

[1] responsible
[2] termination condition
[3] momentum

$$\delta_r = o_r(1 - o_r) \sum_{s \in layer\ m+1} w_{sr}\delta_s \qquad (4.19)$$

توجه دارید که این رابطه معادل پله‌ی سوم در الگوریتم جدول ۴.۲ است، و این پله در الگوریتم باید برای هر لایه‌ی پنهان در شبکه تکرار شود.

در واقع چنین استراتژی‌ای را می‌توان برای تمام شبکه‌هایی که ساختاری مشابه گراف‌های بدون دور دارند به کار گرفت، و نیازی به لایه ای بودن ساختار گراف نیست. برای شبکه‌هایی که لایه ای نیستند رابطه‌ی محاسبه‌ی δ برای تمامی واحد های میانی به فرم زیر خواهد بود:

$$\delta_r = o_r(1 - o_r) \sum_{s \in Downstream(r)} w_{sr}\delta_s \qquad (4.20)$$

در رابطه‌ی فوق Downstream(r) مجموعه‌ی تمامی واحدهایی است که به طور مستقیم از واحد r ورودی دریافت می‌کنند یا به عبارت دیگر تمامی واحدهایی که مستقیماً پایین r هستند. در قسمت بعدی برای محاسبات از این فرم استفاده می‌کنیم.

٤.٥.٣ اشتقاق قانون Backpropagation

در این بخش به مشتق رابطه‌ی تغییر وزن در قانون Backpropagation می‌پردازیم. می‌توانید در اولین خواندن این کتاب این قسمت را نخوانید!

در اینجا ما به اشتقاق رابطه‌ی شیب نزول تصادفی استفاده شده در جدول ۴.۲ می‌پردازیم. با توجه به رابطه‌ی ۴.۱۱ داریم که شیب نزول تصادفی به هر نمونه به طور جداگانه نگاه می‌کند و برای هر نمونه d خطای E_d را به طور مجزا کم می‌کند. به عبارت دیگر، برای هر نمونه آموزشی d هر وزن w_{ji} با اضافه کردن Δw_{ji} تغییر می کند:

$$\Delta w_{ji} = -\eta \frac{\partial E_d}{\partial \mathrm{w_{ji}}} \qquad (4.21)$$

که در آن E_d طبق تعریف خطای نمونه d است که برای تمام خروجی‌های شبکه محاسبه و جمع زده شده است:

$$E_d(\vec{w}) \equiv \frac{1}{2} \sum_{k \in outputs} (t_k - o_k)^2$$

در این رابطه outputs مجموعه‌ی واحد های خروجی در شبکه، t_k مقدار تابع هدف برای خروجی k ام و نمونه آموزشی d و o_k مقدار خروجی واحد k ام در شبکه برای نمونه d است.

اشتقاق قانون شیب نزول تصادفی از نظر مفهومی آسان است اما نیاز به توجه به اندیس‌ها و متغیرها دارد. در اینجا از همان نمایش شکل ۴.۶ استفاده می‌کنیم با این تفاوت که اندیس j را برای نمایش j امین واحد شبکه اضافه می‌کنیم:

- x_{ji} = i امین ورودی به واحد j

- w_{ji} = وزن مربوطه‌ی i امین ورودی به واحد j
- $net_j = \sum_i w_{ji} x_{ji}$ (مجموع وزن دار ورودی های واحد j)
- o_j = خروجی محاسبه شده برای واحد j
- σ = تابع سیگموید
- outputs = مجموعه‌ی واحد های خروجی در لایه‌ی آخر شبکه
- Downstream(j) = مجموعه‌ی تمامی واحدهایی که از خروجی واحد j (در ورودی) استفاده می‌کنند

حال مقدار عبارت $\frac{\partial E_d}{\partial w_{ji}}$ را برای قانون شیب نزول تصادفی که در رابطه‌ی ۴.۲۱ آمده محاسبه می‌کنیم. برای شروع، توجه داشته باشید کـه وزن w_{ji} فقط از طریق net_j بر شبکه اثر بگذارد. پس با توجه به قاعده‌ی زنجیره ای مشتق داریم:

$$\frac{\partial E_d}{\partial w_{ji}} = \frac{\partial E_d}{\partial net_j}\frac{\partial net_j}{\partial w_{ji}}$$

$$= \frac{\partial E_d}{\partial net_j}\, x_{ji} \qquad (4.22)$$

با توجه به رابطه‌ی ۴.۲۲، فقط کافی است که $\frac{\partial E_d}{\partial net_j}$ را به طرز قابل قبولی بیان کنیم. دو حالت را در نظر می‌گیریم: حالتی که واحـد j واحـدی خروجی است و حالتی که واحد j واحدی داخلی است.

حالت اول: قانون آموزش برای واحد های خروجی. همان طور که گفته شد w_{ji} فقط از طریق net_j می‌تواند بر بقیه‌ی شـبکه تـأثیر بگذارد و net_j نیز فقط از طریق o_j می‌تواند بر شبکه تأثیر بگذارد. بنابراین با توجه به قاعده‌ی زنجیره ای در مشتق:

$$\frac{\partial E_d}{\partial net_j} = \frac{\partial E_d}{\partial o_j}\frac{\partial o_j}{\partial net_j} \qquad (4.23)$$

برای شروع، فقط جمله‌ی اول رابطه‌ی ۴.۲۳ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\partial E_d}{\partial o_j} = \frac{\partial}{\partial o_j}\frac{1}{2}\sum_{k\in outputs}(t_k - o_k)^2$$

مقدار مشتق $\frac{\partial}{\partial o_j}(t_k - o_k)^2$ برای تمامی خروجی‌های k به جز j صفر است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{\partial E_d}{\partial o_j} = \frac{\partial}{\partial o_j}\frac{1}{2}(t_j - o_j)^2$$

$$= \frac{1}{2}\, 2\,(t_j - o_j)\frac{\partial (t_j - o_j)}{\partial o_j}$$

$$= -(t_j - o_j) \qquad (4.24)$$

حالا جمله‌ی دوم رابطه‌ی ۴.۲۳ را محاسبه می‌کنیم. از آنجایی که $o_j = \sigma(net_j)$، مشتق $\frac{\partial o_j}{\partial net_j}$ فقط مشتق تابع سیگموید به ازای net_j خواهد بود ($\sigma(net_j)(1-\sigma(net_j))$). بنابراین:

$$\frac{\partial o_j}{\partial net_j} = \frac{\partial \sigma(net_j)}{\partial net_j}$$

$$= o_j(1-o_j) \tag{4.25}$$

با توجه به روابط ۴.۲۴ ، ۴.۲۵ و ۴.۲۳ داریم:

$$\frac{\partial E_d}{\partial net_j} = -(t_j - o_j)o_j(1-o_j) \tag{4.26}$$

با ترکیب این رابطه با روابط ۴.۲۱ و ۴.۲۲ قانون شیب نزول تصادفی برای واحد های خروجی بدست می‌آید.

$$\Delta w_{ji} = -\eta \frac{\partial E_d}{\partial \mathrm{w_{ji}}} = \eta(t_j - o_j)o_j(1-o_j)x_{ji} \tag{4.27}$$

توجه داشته باشید که این قانون تغییر وزن‌ها معادل رابطه های (T4.3) و (T4.5) در جدول ۴.۲ است. علاوه بر این حال معلوم شد که مقـدار δ_k در رابطه‌ی (T4.3) مساوی کمیت $-\frac{\partial E_d}{\partial net_k}$ است. در ادامه‌ی این قسمت از δ_i به جای $-\frac{\partial E_d}{\partial net_i}$ استفاده می کنیم.

حالت دوم: قانون آموزش برای واحد های پنهان. در این حالت واحد j واحدی پنهان یا داخلی است، در مشتق گیری از قانون آمـوزش برای w_{ji} باید توجه داشت که به طور غیر مستقیم w_{ji} بر خروجی شبکه و متعاقباً خطای E_d تاثیر خواهد داشت. به همین دلیل، بد نیست که به تمامی واحدهایی که مستقیماً از j ورودی دریافت می‌کنند اسمی اطلاق کنیم. این دسته از واحدها را بـا Downstream(j) نمـاد گـذاری می‌کنیم. توجه داشته باشید که net_j فقط از طریق Downstream(j) می‌تواند بر روی خروجی‌ها و متعاقباً E_d تاثیر بگذارد. بنابراین داریم:

$$\frac{\partial E_d}{\partial net_j} = \sum_{k \in Downstream(j)} \frac{\partial E_d}{\partial net_k}\frac{\partial net_k}{\partial net_j}$$

$$= \sum_{k \in Downstream(j)} -\delta_k \frac{\partial net_k}{\partial net_j}$$

$$= \sum_{k \in Downstream(j)} -\delta_k \frac{\partial net_k}{\partial o_j}\frac{\partial o_j}{\partial net_j}$$

$$= \sum_{k \in Downstream(j)} -\delta_k w_{kj} \frac{\partial o_j}{\partial net_j}$$

$$= \sum_{k \in Downstream(j)} -\delta_k w_{kj} o_j (1 - o_j) \qquad (4.28)$$

با بازنویسی‌ای رابطه و استفاده از δ_j به جای $-\frac{\partial E_d}{\partial net_j}$ داریم:

$$\delta_j = o_j(1 - o_j) \sum_{k \in Downstream(j)} \delta_k w_{kj}$$

و

$$\Delta w_{ji} = \eta \delta_j x_{ji}$$

که دقیقاً همان قانون کلی‌ای است که در رابطه‌ی (4.20) آمده. از این رابطه می‌توان برای آموزش تمامی واحدهای پنهان در شبکه های بدون دور دلخواه استفاده کرد. توجه داشته باشید که رابطه‌ی (T4.4) در جدول 4.2 حالت خاصی از همین قانون است که Downsteam(j)=outputs.

٤.٦ نکاتی در مورد الگوریتم Backpropagation

٤.٦.١ همگرایی و مینمم نسبی

همان طور که در بالا نیز گفته شد، الگوریتم Backpropagation از شیب نزول برای جستجوی فضای وزن‌های ممکن استفاده می‌کند و در هر بار اجرای حلقه مقدار خطای E (اختلاف بین تابع هدف و خروجی) را کمتر می‌کند. چون سطح خطا برای شبکه های چند لایه ممکن است چندین مینیمم نسبی داشته باشد، این امکان وجود دارد که شیب نزول در یکی از این مینمم های نسبی به دام بیفتد و هیچ تضمینی نیست که این مینیمم نسبی همان مینیمم مطلق برای E باشد.

بر خلاف این ضعف الگوریتم Backpropagation، این الگوریتم در عمل متد تقریبی بسیار مفیدی است. در بسیار از کاربردهای واقعی مشکل مینمم های نصبی به اندازه ای که گفته شد شدید نیست. برای درک مستقیم، شبکه‌هایی با تعداد زیادی از وزن‌ها در فضای خطایی با بعد زیاد را در نظر بگیرید (به ازای هر وزن یک بعد اضافه می‌شود). زمانی که شیب نزول داخل یکی از این مینمم های نسبی می‌افتد، مینیمم یکی از وزن‌هاست، برای دیگر وزن‌ها داخل مینیمم نسبی نخواهد بود. در واقع، زمانی که تعداد وزن‌ها در شبکه افزایش می‌یابد متناسباً تعداد وزن‌ها و بعدها نیز افزایش یافته و امکان وجود راه فرار از مینیمم نسبی نیز افزایش می‌یابد.

مینیمم‌های نسبی جنبه‌ی دیگری نیز دارند و این تأثیر هنگامی که تعداد تکرار های حلقه‌ی الگوریتم افزایش می‌یابد ظاهر می‌شود. توجه دارید که اگر برای مقدار دهی اولیه وزن‌ها مقدار صفر را انتخاب کنیم، شیب نزول در قدم‌های اول اجرایش به تابعی بسیار هموار همگرا می‌شود که تقریباً خطی است. دلیل این امر این است که تابع سیگموید نیز در زمانی که وزن‌ها نزدیک به صفرند تقریبی خطی است (شکل تابع سیگموید در شکل ۴.۶ آمده است). فقط هنگامی که وزن‌ها زمان کافی برای به اندازه ای کافی بزرگ شدن را داشته باشند می‌توانند به نقطه ای برسند که توابع شبکه غیر خطی را نیز تقلید کنند. می‌توانیم تصور کنیم که زمانی که تعداد مینیمم‌های نسبی زیادی در فضای وزن‌ها زیاد است شبکه

توابع پیچیده تری را می‌تواند تقلید کند. و می‌توان امید داشت که زمانی که وزن‌ها به چنین نقاطی می‌رسند، به اندازه‌ی کافی به مینـیمم مطلـق نزدیک شده‌ایم.

بر خلاف آنچه در بالا گفته شد، شیب نزول برای سطوح خطای پیچیده تر قابل درک نیست و هیچ متدی وجود ندارد که با اطمینان مواردی که مینیمم مطلق مشکل ساز می‌شود را مشخص کند. ایده‌هایی که برای حل مشکل مینیمم نسبی ارائه شده به شرح زیر است:

- اضافه کردن جمله‌ی تکانه به رابطه‌ی تغییر وزن‌ها (استفاده از معادله‌ی 4.18). در بعضی موارد استفاده از این روش می‌توانـد شـیب نزول را از یک مینیمم موضعی به مینیمم مطلق ببرد (و در بعضی موارد نیز برعکس می‌تواند ما را از مینیمم مطلق به مینیمم موضعی بکشاند)
- استفاده از شیب نزول تصادفی به جای خود شیب نزول. همان طور که در بخش ۴.۴.۳.۳ نیز گفته شده شیب نزول تصادفی تخمینـی مفید از شیب نزول دارد که خطای دیگری را برای هر نمونه کم می‌کند، و با توجه به میانگین این خطاها و کل نمونه‌هـا گرادیـان را تخمین می‌زند. این سطوح مختلف خطا معمولاً مینیمم‌های نسبی مختلفی دارند و معمولاً الگوریتم در آن‌ها به دام نمی‌افتد.
- آموزش چندین شبکه با نمونه های آموزشی یکسان، مقادیر مختلف تصادفی وزن‌ها در ابتدای هـر آمـوزش. اگـر ایـن چنـد آمـوزش مختلف به چند مینیمم موضعی مختلف در خطاها برسد، آنگاه می‌توان شبکه ای را انتخـاب کـرد کـه مینـمم موضـعی کمتـری دارد. متناوباً، می‌توان تمامی شبکه‌ها را دوباره آموزش داد و به عنوان "کمیته[1]" یا مجموعه ای از شبکه‌هـا کـه خروجـی آن‌هـا متوسـط خروجی شبکه های نظیر است استفاده کرد.

٤.٦.٢ معرفی قدرت شبکه های تک سویه

چه توابعی را می‌توان به شبکه های تک سویه آموزش داد؟ البته جواب این سؤال به عمق[2] و پهنای[3] شبکه وابسته است. با وجـود اینکـه هنـوز هیچ اطلاعاتی کامل در مورد اینکه چه دسته توابعی را می‌توان به چه شبکه‌هایی آموزش داد در دسترس نیست، اما سه دسته تابع بخصـوص را می‌توان به این نوع شبکه‌ها آموزش داد:

- توابع منطقی. هر تابع منطقی را می‌توان با شبکه های دو لایه یاد گرفت، اما با در بدترین حالت[4] این وجود تعداد گره های پنهـان بـا افزایش ورودی‌های به صورت نمایی بالا می‌رود. برای معلوم شدن این توانایی، تابع منطقی دلخواهی را در نظر بگیرید، بـه ازای هـر بردار بخصوص از ورودی‌ها واحد پنهانی را در نظر بگیرید که وزن‌هایش به شکلی هستند کـه تنهـا بـا آن ورودی بخصـوص تهیـیج می‌شود. با چنین ساختار و آموزشی، شبکه ای به وجود می‌آید که در لایه‌ی پنهان آن همیشه یک واحد فعال است. حال با استفاده از واحد های OR برای خروجی شبکه ای به سازید که به ازای مقادیر مختلف لایه‌ی پنهان خروجی متناسب را بدهد.
- توابع پیوسته. هر تابع کران دار پیوسته را می‌توان با مقداری خطای دلخواه (کمتر از حد دلخواه خاصی) با شبکه‌ی دو لایه یاد گرفـت (Cybenko 1989;Hornic et al 1989). چنین شبکه‌هایی در لایه‌ی پنهان واحد سیگموید و در لایه‌ی خروجی واحد خطی (بدون مقدار آستانه) دارند. تعداد واحد های پنهان لازم به تابع بستگی دارد.

---

[1] comettee
[2] depth
[3] width
[4] worse case

- توابع دلخواه. هر تابع دلخواهی را می‌توان با دقت دلخواه توسط شبکه ای با ۳ لایه یاد گرفت (Cybenko 1988). باز هم واحدهای خروجی واحد خطی و واحد های لایه های پنهان واحد سیگموید هستند. باز هم در حالت کلی معلوم نیست که هر لایه چند واحد نیاز دارد. اثبات این قضیه با استفاده از این است که نشان می‌دهند هر تابعی را می‌توان با ترکیب توابع خطی‌ای که فقط در محدوده ای غیر صفرند نشان داد. در ادامه‌ی اثبات ثابت می‌کنند که دو لایه واحد سیگموید کافی است تا تقریب خطی را برای هر محدوده‌ی کوچکی نشان دهند.

این نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که شبکه های تک سویه با عمق محدود فضای فرضیه ای شاملی برای الگوریتم Backpropagation ایجاد می‌کنند. با این وجود بد نیست همیشه در نظر داشته باشیم که بردار وزن‌هایی که از طریق الگوریتم شیب نزول از مقدار دهی اولیه بدست می‌آیند همیشه تمامی بردار وزن‌های ممکن را در بر ندارند. در کتاب (Hertz et al. 1991) درباره‌ی موارد بالا بیشتر بحث شده است.

٤.٦.٣ جستجو در فضای فرضیه‌ها و بایاس استقرایی

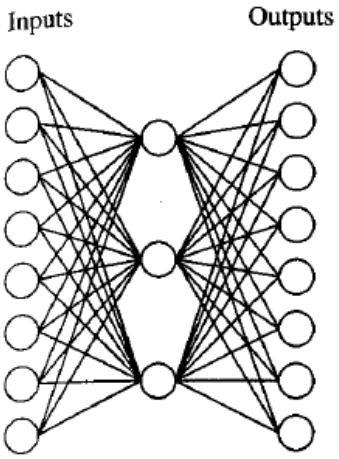
بد نیست که فضای فرضیه ای حاصل از جستجوی الگوریتم Backpropagation را با جستجوی دیگر الگوریتم‌ها مقایسه کنیم. در Backpropagation هر بردار وزن‌ها یک فرضیه را تشکیل می‌دهد که ممکن است توسط یادگیر یاد گرفته شود. به عبارت دیگر، فضای فرضیه ای فضایی n بعدی اقلیدسی است که بر پایه‌ی n بردار پایه ایجاد می‌شود. توجه دارید که این فضای فرضیه ای پیوسته است اما در مقابل فضای فرضیه ای درخت یادگیری و بقیه‌ی متدها گسسته هستند. با توجه به پیوستگی فضای فرضیه ای و اینکه E مشتق پذیر است (زیرا که متغیرهایش پیوسته‌اند)، پس خطای تعریف شده گرادیان دارد که همین گرادیان کمک بسیار بزرگی در سازماندهی جستجو می‌کند. این ساختار سازماندهی با ترتیب کلی‌تری (که در یادگیری مفهوم نمادین بود) و ترتیب ساده به پیچیده (که در درخت تصمیم گیری الگوریتم‌های ID3 و C4.5 بود) بسیار متفاوت است.

بایاس استقرایی‌ای که Backpropagation برای استقرا روی نمونه های آموزشی فرض می‌کند چیست؟ دقیقاً مشخص کردن بایاس استقرایی Backpropagation مشکل است زیرا که به اثر متقابل بین جستجوی شیب نزول و نحوه ای که فضای وزن‌ها فضای توابع قابل نمایش را پوشش می‌دهد بستگی دارد. با این وجود می‌توان این بایاس استقرایی را درون یابی بین نقاط داده‌ها دانست. مثلاً با داشتن دو نمونه مثبتی که هیچ نمونه منفی‌ای بین آن‌ها نیست، Backpropagation تمایل دارد که نقاط میانی این دو نقطه را نیز مثبت دسته بندی کند. چنین رفتاری را می‌توان در سطح تصمیم گیری‌ای که در شکل ۴.۵ آمده دید، در این شکل نمونه های آموزشی منطقه های تصمیم گیری را معلوم می‌کنند.

٤.٦.٤ معرفی لایه‌ی پنهان

یکی از ویژگی‌های خاص Backpropagation این است که در لایه‌ی پنهان در داخل شبکه مقادیر مفیدی را نمایش می‌دهد. زیرا که نمونه های آموزشی فقط مقادیر ورودی و خروجی را در خود دارند و فرایند تغییر وزن‌ها آزاد است که مقادیر لایه‌ی پنهان را به دلخواه تغییر دهد تا خطا را مینیمم کند. همین آزادی باعث می‌شود در لایه های پنهان مقادیری را پیدا کند که صریحاً در نمونه‌ها بیان نشده اما ویژگی‌هایی را بیان می‌کنند که بیشترین تأثیر را در یادگیری تابع هدف دارند.

برای مثال شبکه‌ی شکل ۴.۷ را در نظر بگیرید، در این شبکه ۸ ورودی به ۳ واحد لایه‌ی پنهان وصل شده‌اند و این ۳ واحد نیز به ۸ واحد خروجی متصل هستند. بخاطر این ساختار، سه واحد لایه‌ی پنهان لازم است به صورتی مقادیر ۸ ورودی را با ویژگی‌های مرتبطی بیان کنند تا در انتها بتوانند همان مقادیر را به عنوان خروجی بدهند.



Input		Hidden Values				Output
10000000	→	.89	.04	.08	→	10000000
01000000	→	.15	.99	.99	→	01000000
00100000	→	.01	.97	.27	→	00100000
00010000	→	.99	.97	.71	→	00010000
00001000	→	.03	.05	.02	→	00001000
00000100	→	.01	.11	.88	→	00000100
00000010	→	.80	.01	.98	→	00000010
00000001	→	.60	.94	.01	→	00000001

شکل ۴.۷ مقادیر لایه‌ی پنهان برای نمونه های آموزشی.
این شبکه‌ی 8x3x8 با ۸ نمونه که در شکل است برای یادگیری تابع همانی آموزش داده شده است. بعد از ۵۰۰۰ بار اجرای حلقه مقادیر ۳ واحد پنهان مقادیر ورودی را به درستی کد می‌کنند. توجه داشته باشید که مقادیر کد شده را به صفر و یک گرد کنیم نتیجه کد باینری برای هشت ورودی خواهد بود.

شبکه‌ی شکل ۴.۷ برای یادگیری تابع هدف بسیار ساده‌ی $f(\vec{x}) = \vec{x}$ که در آن $\vec{x}$ برداری با هشت صفر و یک یک است در نظر بگیرید. شبکه باید یاد بگیرد تا ۸ ورودی را دوباره ایجاد کند. با اینکه این تابع هدف بسیار ساده است اما ۳ واحد پنهان برای یادگیری این تابع بسیار کم است. در این مثال شبکه مجبور است مهم‌ترین اطلاعات لازم را از طریق این سه واحد به سمت خروجی‌های انتقال دهد.

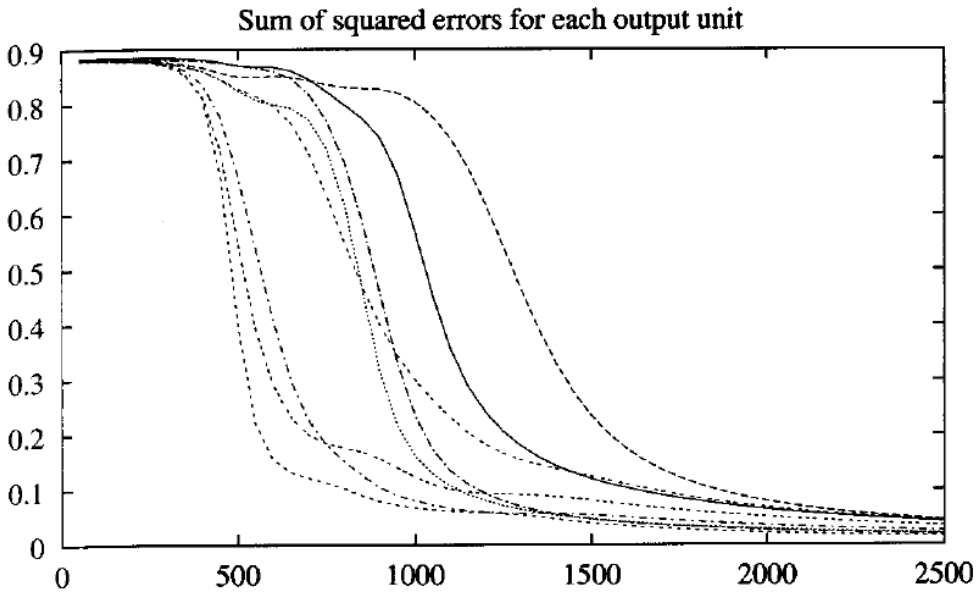
با استفاده از الگوریتم Backpropagation و نمونه های آموزشی مشخص شده در شکل این تابع هدف به شبکه یاد داده شده است. چه نمایشی از ورودی‌ها توسط شیب نزول در لایه‌ی پنهان نمایش داده می‌شود؟ با بررسی بیشتر مشخص می‌شود که این مقادیر که در لایه‌ی پنهان ظاهر می‌شود همان کد آشنای باینری برای هشت عدد است که با ۳ بیت نمایش داده می‌شود (۰۰۰، ۰۰۱، ۰۱۰، ...، ۱۱۱). مقدار دقیق این مقادیر در شکل ۴.۷ آورده شده است.

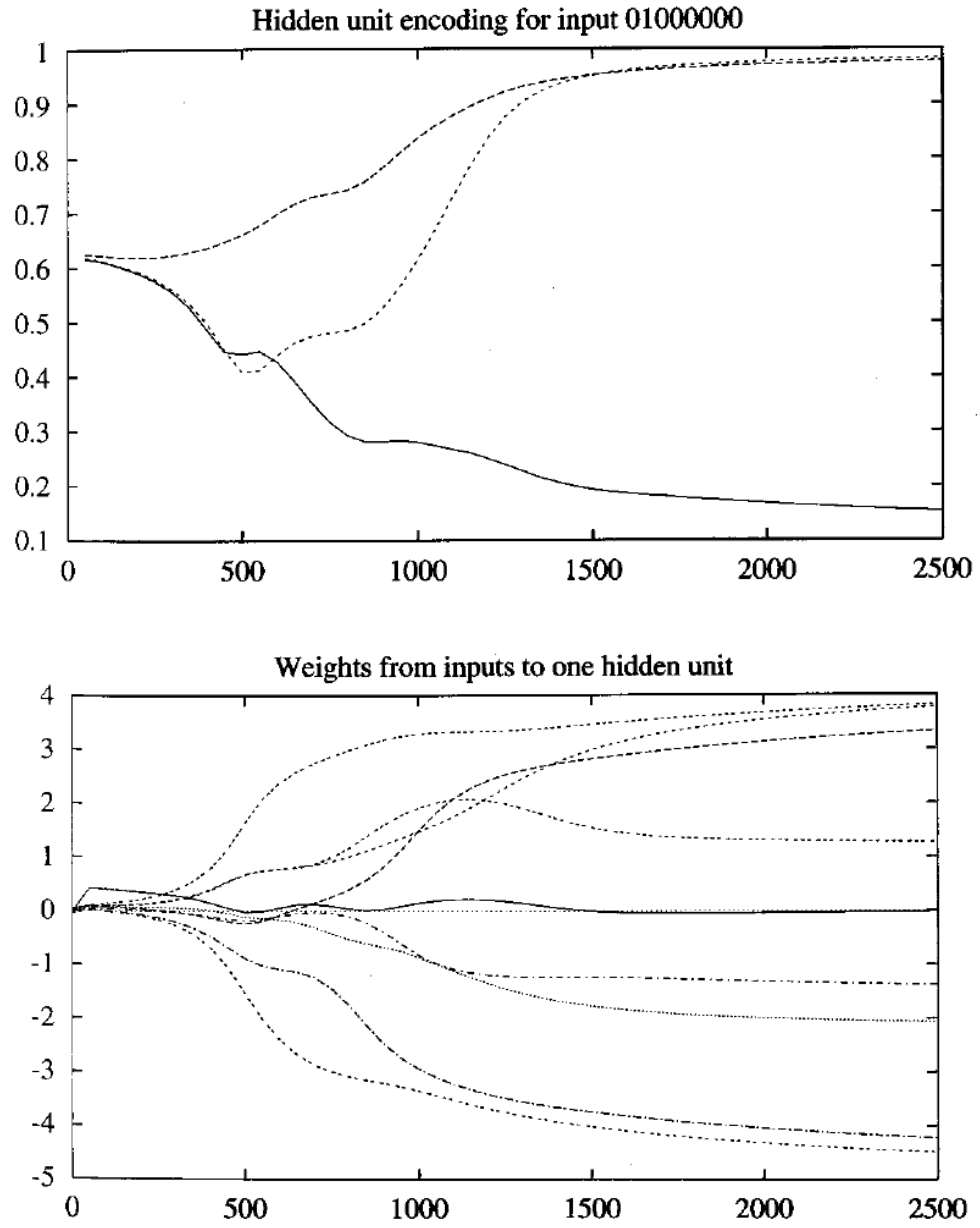
این قابلیت شبکه های عصبی در پیدا کردن نمایش‌های خاص در لایه های پنهان منحصر به فرد است. بر خلاف دیگر متد های یادگیری که فقط مواردی را که طراح انسانی در نظر گرفته را در نظر می‌گیرند، این خاصیت به شبکه های عصبی این قابلیت را می‌دهد کاملاً انعطاف پذیر باشند و ویژگی‌هایی را استخراج کنند که طراح انسانی در نظر نگرفته است. البته بدیهی است که تمامی این ویژگی‌های استخراج شده باید از ورودی‌ها توسط واحد های سیگموید قابل استخراج باشند. توجه دارید که زمانی که لایه های بیشتری در شبکه وجود دارند خواص پیچیده تری قابل استخراجند. مثال دیگری از خواص لایه‌ی پنهان در قسمت ۴.۷، کاربرد در تشخیص چهره[1]، آورده شده است.

[1] face recognition

برای درک بهتر از عملیات Backpropagation بیایید در این مثال عملیات فرایند شیب نزول را دقیق‌تر بررسی کنیم (کد استفاده شده در این مثال در آدرس http://www.cs.cmu.edu/~tom/mlbook.html آمده است). شبکه‌ی شکل ۴.۷ با الگوریتم جدول ۴.۲ آموزش داده شده است، در مقدار دهی اولیه‌ی وزن‌ها از اعداد بازه‌ی (-0.1,0.1) استفاده شده است و ضریب آموزشی نیز $\eta=0.3$ بوده و تکانه هم استفاده نشده است ($\alpha=0$). یادگیری با استفاده از ضرایب آموزشی دیگر و تکانه نیز به همین نتایج رسیده است. مقادیر لایه‌ی پنهان (که در شکل ۴.۷) آمده بعد از ۵۰۰۰ بار اجرای حلقه اصلی الگوریتم (یعنی ۵۰۰۰ بار تکرار هر نمونه آموزشی) بدست آمده است. البته اکثر وزن‌ها در ۲۵۰۰ اجرای اول مشخص شده بودند.

با کشیدن نمودار خطا بر حسب تعداد گامی که شیب نزول برداشته، می‌توان تلاش شیب نزول را برای کاهش خطا دید. این نمودار در شکل ۴.۸ کشیده شده است. هر خط در این نمودار نشان دهنده‌ی مجموع خطاها برای تمامی نمونه های آموزشی در یکی از خروجی‌هاست. محور افقی تعداد تکرار های حلقه‌ی اصلی الگوریتم را نشان می‌دهد. همان طور که نمودار نیز گویای مطلب است با ادامه‌ی کار شیب نزول مجموع خطای خروجی برای خروجی‌ها کاهش پیدا می‌کند، ممکن است این کاهش در بعضی خروجی‌ها شدید تر و در بعضی دیگر ملایم‌تر باشد.





شکل ۴.۸ یادگیری شبکه‌ی 8x3x8

نمودار اول مجموع خطاها را برای هر یک از ۸ خروجی را بر حسب تعداد تکرار حلقه‌ی اصلی الگوریتم نشان می‌دهد. نمودار دوم مقادیر لایه‌ی پنهان را برای ورودی ی "01000000" نشان می‌دهد. و نمودار آخر وزن‌ها را برای یکی از سه واحد پنهان نشان می‌دهد.

سیر تکامل لایه‌ی پنهان در نمودار دوم شکل ۴.۸ دیده می‌شود. این نمودار مقدار سه واحد لایه‌ی پنهان را که در هر مرحله محاسبه می‌شود برای یکی از ورودی‌ها ("01000000") نشان می‌دهد. مثل نمودار اول محور افقی تعداد تکرار های حلقه‌ی اصلی الگوریتم را نشان می‌دهد. همان طور که شکل نیز گویاست قبل از اینکه شبکه به نحوه‌ی کد سازی آخری برسد تعدادی از کد سازی‌های ممکن را برای ورودی امتحان کرده است.

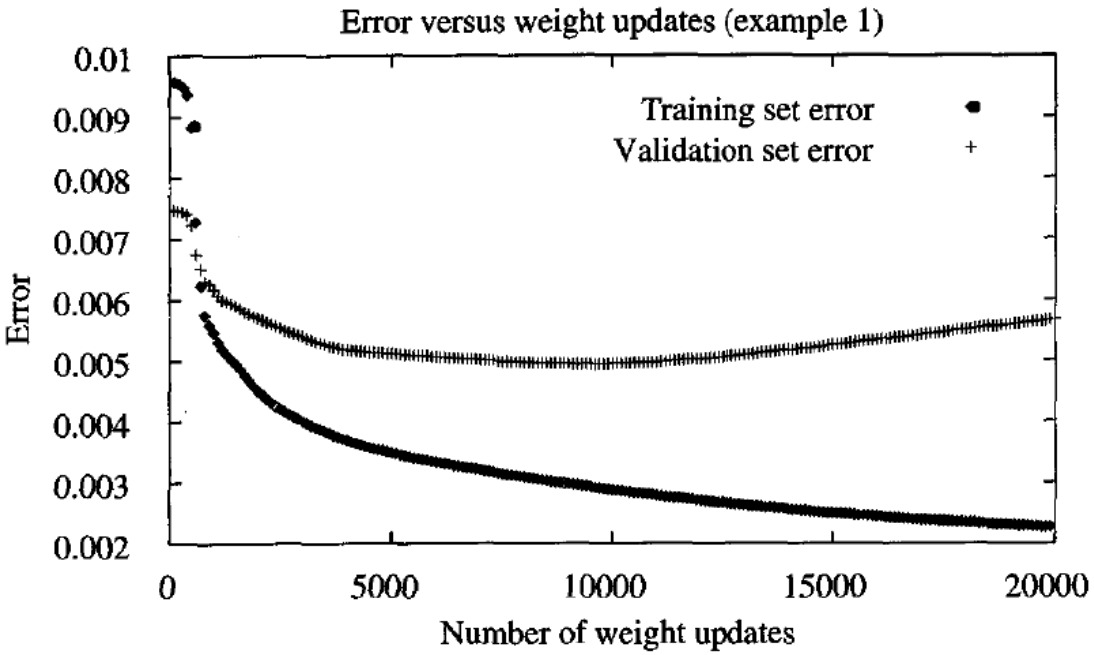
و بالاخره نمودار آخر شکل ۴.۸ سیر تکامل وزن‌های شبکه را نشان می‌دهد. این نمودار تکامل وزن‌های ارتباط دهنده‌ی بین هشت واحد ورودی (و مقدار ثابت ۱ برای مقدار آستانه) و یکی از واحد های لایه‌ی پنهان نشان می‌دهد. توجه داشته باشید که تغییرات قابل توجه در مقدار وزن‌ها

همزمان با تغییرات قابل توجه در میزان خطا و مقدار لایه‌ی پنهان است. وزنی که به مقداری نزدیک صفر میل می‌کند همان وزنی است که برای مقدار آستانه در نظر گرفته شده (w_0).

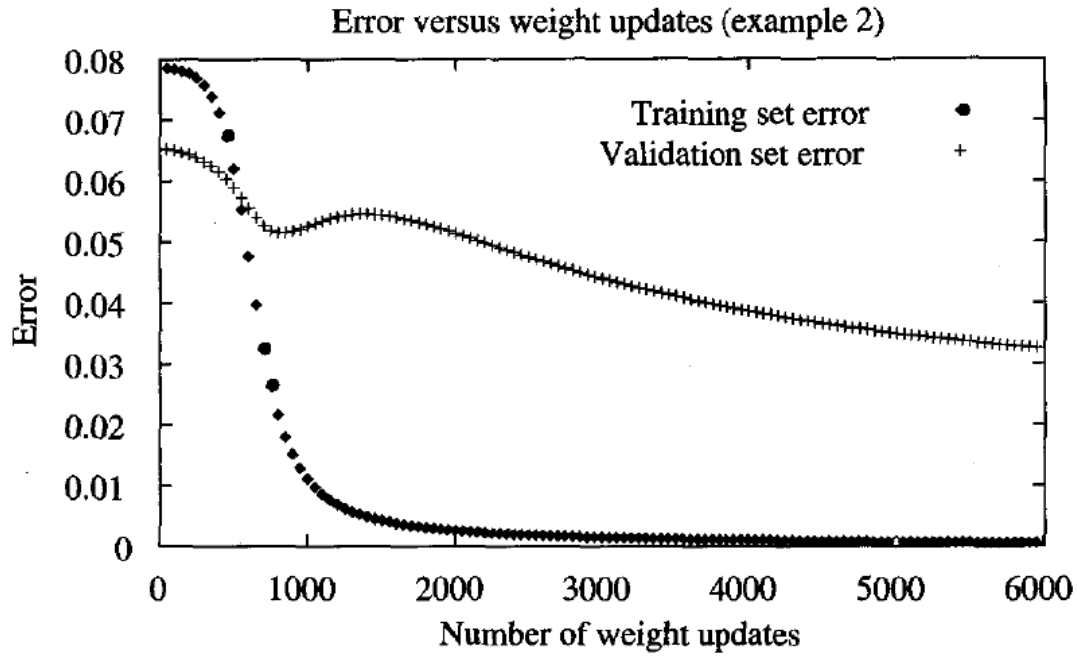
٤.٦.٥ معیارهای تعمیم، overfit و توقف

در جدول ۴.۲ از شرط پایانی[1] صحبت شد اما معلوم نشد که این شرط دقیقاً چیست. شرط مناسب برای پایان حلقه‌ی تغییر وزن‌ها چیست؟ یک شرط بسیار ساده ادامه دادن مراحل تا زمانی که خطا (E) برای نمونه های آموزشی کمتر از مقدار خاصی بشود است. در واقع این استراتژی برای پایان بسیار ضعیف است زیرا که Backpropagation مستعد است تا برای کم کردن خطا قدرت تعمیم شبکه را برای نمونه های جدید کم کند.

برای روشن شدن خطر کم کردن افراطی خطا برای نمونه های آموزشی، توجه کنید که با افزایش تعداد تکرار های حلقه‌ی اصلی الگوریتم خطای E چگونه کاهش می‌یابد. شکل ۴.۹ این تفاوت را برای استفاده از Backpropagation را برای دو مثال کاربردی نشان می‌دهد. نمودار اول را در نظر بگیرید. منحنی پایین‌تر در نمودار خطای E را برای نمونه های آموزشی نشان می‌دهد که با افزایش تعداد تکرار های الگوریتم کاهش می‌یابد. منحنی بالایی خطای E را برای مجموعه‌ی تایید نشان می‌دهد که از نمونه های آموزشی مجزاست. این منحنی قدرت تعمیم شبکه[2] را برای نمونه های جدید نشان می‌دهد.



[1] termination condition
[2] generalization accuracy



شکل ۴.۹ نمودار خطای E به عنوان تابعی از تعداد تکرار تغییر وزن‌ها برای دو درک متفاوت یک ربات.
در هر دو حالت خطای E در طی تکرار های بیشتر کمتر می‌شود. خطای مربوط به مجموعه‌ی تایید[1] معمولاً در ابتدا کاهش پیدا می‌کند و سپس بعد از افزایش تعداد های تکرار بر اثر overfit احتمال دارد افزایش یابد. شبکه ای که کمترین خطا برای مجموعه‌ی تایید را داشته باشد مناسب‌ترین شبکه برای تعمیم روی نمونه های جدید است. توجه داشته باشید که در نمودار دوم به محض افزایش جزئی مقدار خطای مجموعه‌ی تایید نباید اجرای حلقه متوقف شود.

توجه داشته باشید که قدرت تعمیم شبکه که از مجموعه‌ی تایید محاسبه می‌شود ابتدا کاهش می‌یابد و سپس افزایش می‌یابد، حتی اگر خطای نمونه های آموزشی همچنان کاهش بیابد. دلیل این اتفاق چیست؟ دلیل این اتفاق این است که وزن‌ها بعد از آن طوری تغییر می‌کنند که منحصراً با نمونه های آموزشی مطابق باشند و خاصیت تعمیمی خود را از دست می‌دهند. تعداد زیاد پارامترهای شبکه عصبی درجه آزادی‌های زیادی برای الگوریتم باقی می‌گذارد تا بتواند شبکه را منحصراً با نمونه های آموزشی مطابقت دهد (overfit).

چرا همیشه overfit در تکرار های آخر الگوریتم اتفاق می‌افتد و در تکرار های ابتدایی هیچ اثری از overfit نیست؟ فرض کنید که وزن‌ها را با مقادیر کوچک تصادفی مقدار دهی اولیه کرده‌ایم. چون وزن‌ها تقریباً یکی هستند، سطح تصمیم گیری بسیار هموار خواهد بود. در ادامه برای کم کردن میزان خطای نمونه های آموزشی بعضی از وزن‌ها افزایش می‌یابد و پیچیدگی بیشتری به سطح تصمیم گیری می‌دهند. در ادامه با افزایش تعداد تکرارها بر پیچیدگی فرضیه‌هایی که به آن می‌رسیم بالا می‌رود، (پیچیدگی در این مراحل مفید است). با ادامه‌ی این تکرارها به اندازه‌ی کافی می‌توان به سطوح تصمیم گیری پیچیده تری رسید که هم نویز نمونه های آموزشی را بر طرف می‌کند و هم ویژگی‌های غیر مربوطه به تابع هدف نمونه های آموزشی را بیان می‌کند. مشکل overfit در شبکه های عصبی درست مشابه همین مشکل در درخت تصمیم گیری است (فصل ۳).

تکنیک‌های بسیاری برای حل مشکل overfit در Backpropagation وجود دارد. یکی از این تکنیک‌ها weight decay نام دارد. در این متد در هر حلقه مقداری از هر وزن کم می‌شود. این درست مشابه این است که در تعریف E جمله ای را اضافه کنیم تا برخلاف آن عمل

[1] validation set

کند و مانع overfit شود. به این جمله، جمله‌ی جریمه[1] می‌گویند. هدف از این متد این است که مقدار وزن‌ها را کوچک نگه داریم تا بایاسی ایجاد کرده باشیم تا سطح تصمیم گیری بسیار پیچیده نشود.

یکی از موفق‌ترین متدها برای حل مشکل overfit، استفاده از دسته‌ی تایید به همراه نمونه های آموزشی برای کنترل جستجوی شیب نزول است. الگوریتم می‌توان از خطای این مجموعه‌ی تایید برای کنترل شیب نزول استفاده کند. از این نظر، این روش به الگوریتم اجازه می‌دهد که دو منحنی نشان داده شده در شکل ۴.۹ را در دسترس داشته باشد. اما حلقه‌ی تغییر وزن‌های الگوریتم چند بار باید اجرا شود؟ واضح است که حلقه باید به تعدادی اجرا شود که خطا روی دسته‌ی تایید مینیمم شود. در کاربرد های معمول این روش دو نسخه از وزن‌های شبکه ذخیره می‌شود: یک کپی برای آموزش و کپی‌ای از بهترین وزن‌ها بدست آمده تا این مرحله بر اساس خطا بر روی مجموعه‌ی تایید. زمانی که وزن‌های به دست آمده به مقدار خطای قابل توجهی بیشتر بر روی مجموعه‌ی تایید می‌رسد، آموزش پایان می‌یابد و وزن‌های ذخیره شده به عنوان فرضیه‌ی نهایی خروجی داده می‌شود. زمانی که از این فرایند برای حالت شکل ۴.۹ استفاده شد بعد از ۹۴۰۰ بار تکرار الگوریتم به وزن‌های خروجی رسید. شکل دوم در شکل ۴.۹ نشان می‌دهد که همیشه رسیدن به کمترین مقدار خطای دسته‌ی تایید را نمی‌توان به راحتی تعیین کرد. در این شکل ابتدا خطا بر روی دسته‌ی تایید کاهش، سپس افزایش و دوباره کاهش می‌یابد. باید دقت کافی را در نتیجه گیری رسیدن خطای تایید به مینیمم خود مبذول داشت، این شبکه در تکرار ۸۵۰ به مینیمم خطای تایید می‌رسد.

در کل، مشکل overfit و چگونگی حل آن نیاز به دقت زیادی دارد. روش cross-validation بالا زمانی کارایی دارد که مقدار زیادی داده در دسترس باشد تا بتوان دسته‌ی تایید تشکیل داد. با این وجود، مشکل overfit در مجموعه های آموزشی کوچک‌تر شدید تر است. در چنین شرایطی، گاهی از روش k-fold cross-validation استفاده می‌شود، در این روش cross-validation، k بار متفاوت و هر بار با قسمت متفاوتی از داده‌ها به عنوان مجموعه‌ی آموزشی و دسته‌ی تایید انجام می‌شود و نتیجه میانگین نتایج خواهد بود. در یکی از نسخه های این روش، m نمونه‌ی موجود به k زیر مجموعه‌ی مجزا با اندازه های m/k تقسیم می‌شوند. فرایند cross-validation، k بار و با استفاده از یکی از این k زیرمجموعه به عنوان دسته‌ی تایید و بقیه‌ی نمونه‌ها به عنوان مجموعه‌ی آموزشی اجرا می‌شود. بنابراین، هر نمونه در یک آزمایش در دسته‌ی تایید و در k-1 آزمایش در دسته‌ی آموزشی خواهد بود. در هر یک از آزمایش‌های روش cross-validation بالا برای تعیین تعداد تکرارها، i، مورد استفاده قرار می‌گیرد، i شماره‌ی تکراری است که در آن دسته‌ی تایید بهترین خطا را داشته است. میانگین i برای این مقادیر محاسبه می‌شود، در انتها نیز از backpropagation برای آموزش شبکه بر روی تمامی n نمونه بدون دسته‌ی تایید با تعداد تکرار میانگین i ها استفاده می‌شود. این فرایند بسیار مشابه فرایند مقایسه‌ی دو متد یادگیری با داده های محدود در فصل ۵ است.

٤.٧ یک مثال: تشخیص چهره[2]

برای درک انتخاب‌های طراحی در نظر گرفته شده در اعمال الگوریتم Backpropagation، در این بخش استفاده از آن را در عمل یادگیری تشخیص چهره بررسی می‌کنیم. تمامی داده‌ها و اطلاعات مربوطه‌ی این قسمت در http://www.cs.cmu.edu/~tom/mlbook.html، به همراه نکات مربوطه‌ی استفاده از این کدها موجود می‌باشد.

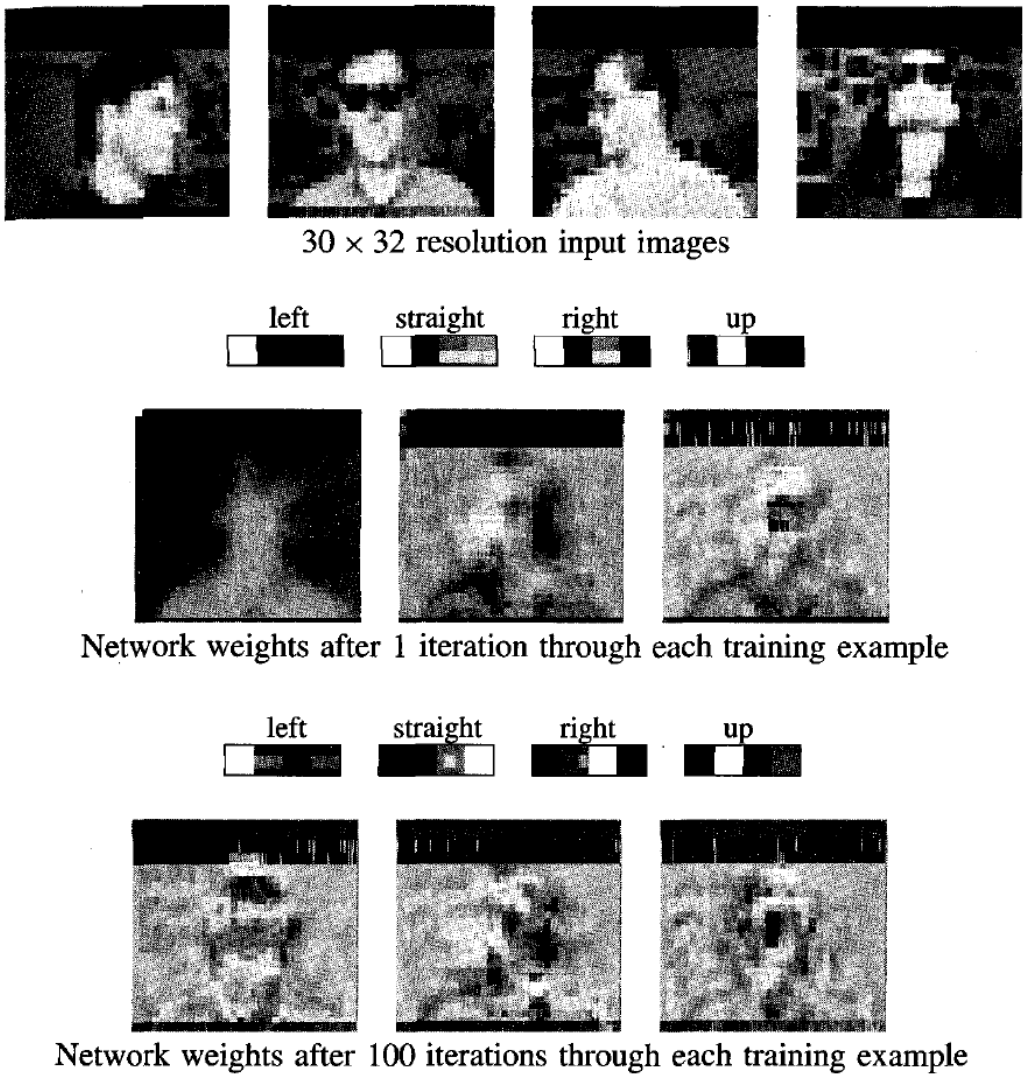
---

[1] penalty term
[2] face recognition

٤.٧.١ تعریف مسئله

مسئله‌ی یادگیری در اینجا شامل دسته بندی تصاویر دوربین از چهره‌ی افراد مختلف در زاویه های مختلف است. تصاویر ۲۰ نفر، به طور تقریبی ۳۲ تصویر از هر نفر با حالات مختلف چهره (شاد، غمگین، خشمگین، معمولی) و با زاویه های مختلف (چپ، راست، تمام رخ، بالا)، جمع آوری شده است. در شکل ۴.۱۰ نمونه ای از این تصاویر را می‌بینید، همچنین در این تصاویر مکان چهره‌ی شخص، پس زمینه، لباس افراد ثابت نیستند. در مجموع ۶۲۴ تصویر سیاه و سفید با دقت ۱۲۰×۱۲۸ با دقت رنگ ۰ (سیاه) تا ۲۵۵ (سفید) جمع آوری شد.

توابع هدف مختلفی را می‌توان از این مجموعه از داده های تصویری یاد گرفت. برای مثال، قرار دادن مجموعه تصاویر در ورودی شبکه می‌توان هدف را تشخیص هویت شخص، جهت صورت وی، جنسیت شخص، عینک دودی زدن وی و ... قرار داد. تمامی این توابع هدف را می‌توان با دقت بالا از این مجموعه داده یاد گرفت و شدیداً توصیه می‌شود که یادگیری این توابع هدف را خود خواننده امتحان کند. در ادامه‌ی این بخش ما به یک هدف یادگیری بخصوص می‌پردازیم: سمت صورت شخص (شامل چپ، راست، تمام رخ و بالا).



شکل ۴.۱۰ یادگیری یک شبکه‌ی عصبی مصنوعی برای تشخیص سمت صورت.

در اینجا شبکه ای با ابعاد ۹۶۰×۳×۴ بر روی لایه‌ی خاکستری تصویر چهره‌ی افراد آموزش داده می‌شود تا سمت چهره‌ی شخص را تشخیص دهد (چپ، راست، تمام رخ، بالا). بعد از یادگیری روی ۲۶۰ تصویر چهره، شبکه به دقت ۹۰٪ بر روی دسته‌ی تست مجزایی رسید. وزن‌های شبکه بعد از یک و صد بار تکرار حلقه‌ی یادگیری در بالا نشان داده شده‌اند. هر واحد خروجی (چپ، راست، تمام رخ، بالا) چهار وزن دارد که وزن‌هایشان با مربع‌های تیره (منفی) و روشن (مثبت) نشان داده شده است. چپ‌ترین مربع مربوط به وزن w_0 است که مقدار آستانه‌ی واحد را نشان داده و سه مربع دیگر وزن‌های ورودی واحد را از واحدهای پنهان نشان می‌دهد. وزن‌های مربوطه‌ی ورودی هر یک از سه واحد پنهان از نقاط نیز به طور نقطه ای در مکان خودشان نشان داده شده‌اند.

٤.٧.٢ انتخاب‌های طراحی

در اعمال الگوریتم Backpropagation به هر مسئله تعدادی انتخاب طراحی انجام می‌شود. این انتخاب‌های طراحی را برای مسئله‌ی مطرح یادگیری سمت چهره به صورت زیر خلاصه می‌کنیم. با وجود اینکه تلاشی برای طراحی بهینه در این مسئله انجام نمی‌شود، طراحی مطرح شده با دقت قابل توجهی تابع هدف را یاد می‌گیرد. بعد از یادگیری بر روی دسته ای ۲۶۰ عضوی از تصاویر، دقت دسته بندی بر روی دسته‌ی تست مجزا ۹۰٪ است. در حالی که، معمولاً دقت بدست آمده در حدس یکی از این چهار حالت ۲۵٪ است.

کد گذاری ورودی. با معلوم بودن اینکه ورودی شبکه باید نمایشی از تصویر باشد یکی از انتخاب‌های کلیدی تصمیم گیری نوع کد گذاری ورودی شبکه است. برای مثال می‌توانستیم تصویر را برای تشخیص لبه های رنگ‌ها پیش پردازش کرده یا دیگر خواص ناحیه ای تصویر را استخراج کرده و سپس به عنوان ورودی به شبکه بدهیم. یکی از مشکلات چنین ورودی‌هایی ایجاد تعداد متغیری از ویژگی‌ها (لبه‌ها) است در حالی که شبکه عصبی تعداد معلومی واحد ورودی دارد. انتخاب طراحی این قسمت استفاده از مجموعه نقاط ثابت ۳۰×۳۲ عکس و قرار دادن یک واحد ورودی برای هر نقطه است. بازه‌ی ۰ تا ۲۵۵ شدت رنگ نیز به طور خطی به بازه‌ی ۰ تا ۱ نگاشت شد تا مشابه لایه‌ی پنهان بازه‌ی خروجی واحد بین صفر تا یک باشد. تصویر ۳۰×۳۲ نقطه ای، در حقیقت، یک خلاصه ای از تصویر اصلی ۱۲۰×۱۲۸ نقطه ای موجود است که هر یک از نقاط با میانگین گیری چهار نقطه‌ی متناظر در تصویر با کیفیت بالا تر است. با استفاده از این کاهش کیفیت تعداد ورودی‌های شبکه به تعداد قابل کنترل‌تری تبدیل می‌شود، و بنابراین پیچیدگی محاسباتی نیز در عین حفظ دقت لازم برای دسته بندی درست تصاویر کاهش می‌یابد. با توجه به شکل ۴.۱ سیستم ALVINN نیز از کاهش دقت مشابهی برای ورودی شبکه استفاده می‌کند. یکی از نکات جالب این است که ALVINN بجای استفاده از میانگین نقاط محدوده‌ی مربوطه در تصویر با کیفیت بالا تر فقط نقطه ای تصادفی را در آن محدوده انتخاب کرده و شدت رنگ آن‌را به عنوان شدت رنگ مربوطه در نظر می‌گیرد. انگیزه‌ی این کار در ALVINN این است که محاسبات لازم برای ایجاد تصاویر کم دقت تر به طور قابل توجهی با این روش کاهش می‌یابد. این ویژگی هنگامی که شبکه لازم است تعداد زیادی از تصاویر را در ثانیه پردازش کرده و خودرو را کنترل کند بیشتر قابل توجه می‌شود.

کد گذاری خروجی. شبکه‌ی عصبی می‌بایست یکی از چهار ویژگی مربوطه‌ی جهت صورت شخص (چپ، راست، تمام رخ، بالا) را خروجی دهد. توجه داشته باشید که ما می‌توانستیم این چهار جهت را با یک خروجی و نسبت دادن ۰.۲، ۰.۴، ۰.۶، ۰.۸ برای چهار مقدار مربوطه این مقادیر خروجی را کد سازی کنیم. در مقابل، ما چهار واحد خروجی مجزا برای نمایش هر یک از جهات صورت در نظر گرفته‌ایم و واحدی که بیشترین مقدار را داشته باشد خروجی شبکه در نظر گرفته خواهد شد. این نوع کد گذاری گاهی کد گذاری ۱ از n [1] نیز نامیده می‌شود. دو انگیزه برای انتخاب کد گذاری ۱ از n بجای در نظر گرفتن یک خروجی وجود دارد. ابتدا اینکه درجه‌ی آزادی بیشتری برای شبکه برای نمایش شبکه‌ی هدف باقی خواهد گذاشت (در لایه‌ی خروجی n برابر وزن موجود است). دوم اینکه در کد گذاری ۱ از n تفاوت بزرگ‌ترین مقدار خروجی و دومین (بزرگ‌ترین) مقدار خروجی را می‌توان به عنوان درجه‌ی اطمینان پیش بینی شبکه دانست (دسته بندی‌های مبهم ممکن است

[1] 1-of-n output encoding

به خروجی‌های نزدیک و حتی مساوی بیانجامد). یکی دیگر از انتخاب‌های طراحی این است که مقدار خروجی این چهار واحد چه باید باشند؟ یکی از انتخاب‌های واضح استفاده از چهار مقدار <1,0,0,0> برای کد سازی جهت چپ، <0,1,0,0> برای جهت راست و ... است. در مقابل می‌توان بجای مقادیر ۰ و ۱ از مقادیر ۰.۱ و ۰.۹ استفاده کرد، <0.9,0.1,0.1,0.1> بردار مربوطه‌ی جهت چپ خواهد بود. یکی از دلایل پرهیز از ۰ و ۱ این است که واحد های سیگموید نمی‌توانند این خروجی‌ها را با مقادیر محدود وزن‌ها ایجاد کنند. اگر سعی کنیم شبکه را برای مقادیر ۰ و ۱ آموزش دهیم شیب نزول مجبور به رشد بدون مرز وزن‌ها خواهد بود، در مقابل می‌توان با وزن‌های محدود به مقادیر ۰.۹ و ۰.۱ رسید.

ساختار گراف شبکه. همان طور که قبلاً هم توصیف شد، Backpropagation را می‌توان به هر گراف بدون دور واحد های سیگموید اعمال کرد. بنابراین، گزینه‌ی طراحی دیگری نیز که با آن مواجهیم انتخاب تعداد واحد های شبکه و چگونگی ارتباط بین آن‌هاست. متداول‌ترین ساختار شبکه ساختار لایه ای است که تمامی واحدهای یک لایه به تمامی واحدهای لایه‌ی بعد متصلند. در طراحی فعلی از این ساختار متداول با دو لایه واحد سیگموید (یک لایه‌ی پنهان و یک لایه‌ی خروجی) استفاده کرده‌ایم. استفاده از یک یا دو لایه سیگموید متداول است و در مواقع خاص از سه لایه نیز استفاده می‌کنند. استفاده از تعداد لایه‌ی بیشتر متداول نیست زیرا که آموزش شبکه را بسیار کند می‌کند، همچنین شبکه ای با سه لایه سیگموید می‌تواند انواع بسیار زیادی از توابع را نمایش دهد (به قسمت ۴.۶.۲ مراجعه کنید). اگر بخواهیم از بین شبکه های تک سویه با یک لایه‌ی پنهان استفاده کنیم، مسئله اصلی تعین تعداد واحد های پنهان شبکه خواهد بود. در مثال آورده شده در شکل ۴.۱۰ تنها از سه واحد پنهان استفاده شده است، و مجموعه خروجی دقت ۹۰٪ دارد. در آزمایش‌های دیگر، که از ۳۰ واحد پنهان استفاده شد دقت یک تا دو درصد بالاتر رفت. با وجود اینکه دقت کلی سازی برای این دو آزمایش تنها میزان کمی اختلاف دارد، اما آزمایش دوم به مقدار زمان آموزش قابل توجه بیشتری نیاز داشت. با مجموعه ۲۶۰ عکس آموزشی، بر روی یک سیستم خاص (sun sparc5) شبکه‌ی ۳۰ واحده زمان تقریبی یک ساعت را برای آموزش نیاز داشت در حالی که شبکه ۳ واحده تنها در حدود پنج دقیقه آموزش یافت. در بسیاری از کاربردها، تعداد واحد های پنهان لازم برای یادگیری تابع هدف با دقت خاص ثابت است و واحد های پنهان بیشتر بر روی دقت کلی سازی تأثیری ندارند، از روش‌های (cross-validation) برای تعیین تعداد تکرار لازم برای الگوریتم شیب نزول استفاده می‌شود. اگر از چنین روش‌های استفاده نگردد، در بعضی موارد استفاده از تعداد واحد پنهان بیشتر تمایل شبکه به (overfit) را افزایش داده و دقت کلی سازی را کم می‌کند.

دیگر پارامتر های الگوریتم یادگیری. در این آزمایش‌های یادگیری ضریب یادگیری η مقدار 0.3 و تکانه مقدار 0.3 را داشته است. مقادیر اولیه‌ی کم برای هر دو پارامتر دقت تعمیم نسبتاً مساوی‌ای را نتیجه خواهند داد اما زمان آموزش را افزایش خواهند داد. در مقابل اگر این پارامترها را بزرگ در نظر بگیریم، شبکه به شبکه ای با مقدار خطای قابل قبول روی دسته‌ی آموزشی میل نخواهد کرد. در تمامی این آزمایشات از شیب نزول تنها[1] استفاده شده است (در مقابل تخمین احتمالی شیب نزولی که در جدول ۴.۲ معرفی شد). مقادیر وزن‌های خروجی به مقادیر کوچک نزدیک به صفر مقدار دهی اولیه شده‌اند، اما مقادیر وزن‌های ورودی به صفر مقدار دهی اولیه شده‌اند زیرا که با این روش تصور هوشمندانه تری از وزن‌های آموزشی می‌توان داشت (به شکل ۴.۱۰ رجوع کنید)، این انتخاب در تعمیم تأثیر نخواهد گذاشت. تعداد تکرار آموزش با تقسیم داده های موجود به دسته‌ی آموزشی و دسته‌ی تایید مجزا تعیین شده است. از شیب نزول برای مینیمم کردن خطای مجموعه‌ی آموزشی استفاده شده و بعد از هر ۵۰ تکرار یک بار کارایی شبکه بر روی دسته‌ی تایید بررسی شده است. شبکه‌ی انتخاب شده‌ی نهایی یکی از شبکه‌هایی است که بیشترین دقت را روی دسته‌ی تایید داشته است. برای توجیه و توضیح این روش به قسمت ۴.۶.۵ رجوع کنید. دقت نهایی گزارش شده (۹۰٪ برای شبکه‌ی شکل ۴.۱۰) بر روی دسته‌ی سومی از نمونه های تست انجام شده است که هیچ دخالتی در آموزش نداشته‌اند.

---

[1] full gradient decend

٤.٧.٣ نمایش پنهان یاد گرفته شده

بررسی مقادیر وزن‌های ۲۸۹۹ ارتباط شبکه از نظر تحلیلی جالب است. شکل ۴.۱۰ مقادیر وزن‌های نظیر این ارتباط‌ها را بعد از یک و صد بار تکرار حلقه‌ی آموزش برای کل تصاویر آموزشی را نشان می‌دهد.

برای درک این نمودارها، ابتدا به مستطیل اول زیر تصویر توجه کنید. هر یک از مستطیل‌ها وزن‌های یکی از چهار واحد خروجی شبکه را نشان می‌دهد (چپ، راست، تمام رخ، بالا). چهار مربع هر یک از این مستطیل‌ها چهار وزن هر واحد خروجی را نشان می‌دهد، وزن w_0 که مقدار آستانه‌ی واحد را مشخص می‌کند در سمت چپ قرار دارد و سه وزن دیگر به ترتیب وزن‌های مربوطه‌ی واحد های پنهان را نشان می‌دهند. شدت رنگ مربع‌ها نشان دهنده‌ی مقدار وزن نظیر است، سفید روشن وزن مثبت بزرگ و سیاه تیره نشان دهنده‌ی وزن منفی بزرگ است، خاکستری نیز مقادیر میانی وزن را نشان می‌دهد. برای مثال، خروجی واحد بالا مقدار وزن آستانه‌ی w_0 نزدیک به صفر، وزن مثبتی برای واحد پنهان اول و وزن بزرگ منفی‌ای برای واحد پنهان دوم دارد.

مقادیر وزن‌های شبکه بعد از ۱۰۰ بار تکرار شیب نزول برای تمامی نمونه های آموزشی در بالای شکل نمایش داده شده‌اند. توجه دارید که چپ‌ترین واحد پنهان وزن‌های بسیار متفاوتی نسبت به وزن‌های پس از یک تکرار دارد، البته دو واحد دیگر نیز تغییر وزن داشته‌اند. درک نسبی این کد گذاری در این مجموعه‌ی محدود از وزن‌ها خیلی هم سخت نیست. برای مثال، فرض کنید واحد خروجی‌ای که جهت صورت راست را مشخص می‌کند را در نظر بگیرید. این واحد وزن مثبت بزرگی از واحد پنهان دوم و وزن منفی بزرگی از واحد پنهان سوم دارد. با بررسی وزن‌های این دو واحد، می‌توان به آسانی فهمید که با چرخش صورت فرد به سمت راست (چپ ما)، صورت روشن فرد به طور تقریبی با وزن‌های مثبت قوی این واحد پنهان هم مکان خواهد شد و موی تیره‌ی فرد به طور تقریبی با وزن‌های منفی هم مکان خواهد شد که باعث بزرگ بودن خروجی این واحد خواهد شد. تصویر مشابهی می‌تواند باعث خروجی دادن واحد پنهان سوم نزدیک به صفر شود، زیرا که صورت روشن شخص با وزن‌های منفی بزرگ هم مکان خواهد شد.

٤.٨ مباحث پیشرفته‌ی شبکه های عصبی مصنوعی

٤.٨.١ گزینه های مختلف برای تابع خطا

همان طور که قبلاً نیز گفته شد، شیب نزول را می‌توان برای مینیمم کردن هر تابع مشتق پذیر E به کار برد. الگوریتم اصلی Backpropagation خطا را به فرم مجموع مربعات اختلافات با تابع هدف تعریف می‌کند، با این وجود تعریف‌های دیگری برای اعمال شروط دیگر برای این خطا پیشنهاد می‌شود. برای هر تعریف E که به کار می‌بریم برای بدست آوردن گرادیان مشتق بگیریم. در زیر توابع خطای مرسوم آورده شده است:

- اضافه کردن جمله‌ی خطا برای اندازه‌ی وزن‌ها. همان طور که قبلاً نیز توضیح داده شد می‌توان با اضافه کردن جمله‌ی جدیدی به E اضافه کرد که با افزایش بردار وزن‌ها افزایش یابد . این عمل باعث می‌شود تا جستجوی شیب نزول در بین بردارها، بردارهایی که اندازه‌ی کوچک‌تری دارند را ارجح بداند و متناسباً (با در ناحیه‌ی خطی بودن واحد های سیگموید و کم بودن پیچیدگی) خطر overfit کم خواهد شد. پس یکی از روش‌های تعریف E به صورت زیر خواهد بود:

$$E(\vec{w}) \equiv \frac{1}{2}\sum_{d\in D}\sum_{k\in outputs}(t_{kd}-o_{kd})^2 + \gamma\sum_{i,j} w_{ji}^2$$

پس در رابطه تغییر وزن‌ها در Backpropagation نیز باید همین تغییر را اضافه کرد، تمامی رابطه دست نخورده باقی خواهد ماند و فقط در هر تکرار در عدد ثابت (1-2γη) ضرب می‌شود. پس استفاده از این تعریف E معادل استفاده از استراتژی weight decay است (تمرین ۴.۱۰).

- اضافه کردن جمله ای برای خطاها در شیب یا مشتق تابع هدف. گاهی علاوه بر مقادیر تابع هدف، مقادیر مشتق تابع هدف نیز در نمونه های آموزشی وجود دارد. برای مثال، (simard et al. 1992) کاربردی را برای تشخیص کاراکتر معرفی می‌کند که در آن از مشتقات نمونه های آموزشی نیز استفاده شده است، در این کاربرد شبکه را مجبور می‌کند که نسبت به جابجایی حروف در صفحه بی تفاوت باشد. (Mitchell and Thrun 1993) نیز متدهایی را برای محاسبه‌ی مشتقات آموزشی بر اساس دانش قبلی ارائه می‌کنند. در هر دوی این سیستم‌ها (که در فصل ۱۲ آمده‌اند)، تابع خطا با اضافه شدن جمله ای که اختلاف مشتقات آموزشی و مشتقات واقعی شبکه است تغییر می‌یابد. مثالی از چنین تابع خطایی در زیر آمده،

$$E(\vec{w}) \equiv \frac{1}{2}\sum_{d\in D}\sum_{k\in outputs}\left[(t_{kd}-o_{kd})^2 + \mu\sum_{j\in inputs}\left(\frac{\partial t_{kd}}{\partial x_d^j}-\frac{\partial o_{kd}}{\partial x_d^j}\right)^2\right]$$

در اینجا x_d^j نشان دهنده‌ی واحد ورودی j ام برای نمونه‌ی آموزشی d است. بنابراین، $\frac{\partial t_{kd}}{\partial x_d^j}$ مشتق آموزشی که چگونگی تغییر خروجی هدف t_{kd} را با تغییر x_d^j نشان می‌دهد. به صورت مشابه $\frac{\partial o_{kd}}{\partial x_d^j}$ نیز نشان دهنده‌ی مشتق واقعی شبکه یاد گرفته شده است. ثابت μ نیز وزن نسبی مقادیر نمونه های آموزشی و مشتقات آموزشی را مشخص می‌کند.

- مینیمم کردن cross entropy شبکه برای مقادیر تابع هدف. یادگیری یک تابع احتمالی، مثل پیش بینی اینکه درخواست کننده وامی، وام را کامل برگرداند را بر اساس ویژگی‌هایی چون سن درخواست کننده و موجودی حسابش را در نظر بگیرید. با وجود اینکه نمونه های آموزشی فقط مقادیر منطقی تابع هدف را در بر دارد. (۱ یا صفر، بسته به اینکه درخواست کننده وام را برگردانده یا خیر). بهترین نمایش تابع هدف، مدل کردن خروجی برای احتمال بازگرداندن وام است، به جای اینکه یاد بگیریم که خود مقادیر ۰ یا ۱ را برای هر نمونه واقعی یاد بگیریم. در چنین شرایطی که در آن هدف یادگیری تخمین احتمالات است، می‌توان نشان داد که بهترین تخمین زننده‌ی احتمال شبکه‌هایی هستند که مقدارcross entropy را با تعریف زیر مینیمم کنند،

$$-\sum_{d\in D} t_d log o_d + (1-t_d)\log(1-o_d)$$

در اینجا o_d تخمین احتمال خروجی شبکه برای نمونه‌ی آموزشی d است و t_d نیز مقدار هدف برای نمونه‌ی آموزشی d است. فصل ۶ شرایط و دلیل اینکه محتمل‌ترین فرضیه‌ی شبکه فرضیه ای است که cross entropy را مینیمم می‌کند را بررسی کرده و قانون شیب نزول را برای این معیار و واحد های سیگموید پیدا خواهد کرد. همچنین در آنجا شرایط اینکه محتمل‌ترین فرضیه همان فرضیه‌ی است که مجموع خطاهای مربعی را مینیمم می‌کند را بررسی خواهیم کرد.

- با تغییر موثر تابع خطا می‌توان اشتراک وزن‌ها[1] یا بستن به هم[2] را برای واحدهای مختلف ورودی یا خروجی ایجاد کرد. ایده‌ی اصلی اجبار وزن‌های مختلف شبکه به داشتن مقادیر یکی است، معمولاً این کار توسط کاربرد بخاطر دانش قبلی در مورد مسئله صورت می‌گیرد. برای مثال (Waibel et al. 1989) و (Lang et al. 1990) کاربردی از شبکه های عصبی برای تشخیص صحبت را مطرح می‌کنند که در آن ورودی‌های شبکه عناصر فرکانسی صحبت در زمان‌های مختلف در پنجره‌ی زمانی ۱۴۴ میلی ثانیه است. یکی از فرض‌هایی که می‌توان انجام داد این است که عناصر فرکانسی که صدای مشخصی هستند (برای مثال صدای "eee") را باید مستقل از زمان دقیق آن در طول ۱۴۴ میلی ثانیه تشخیص داد. برای اعمال این قید، واحدهای مختلفی که ورودی از قسمت‌های مختلف پنجره‌ی زمانی دریافت می‌کنند باید وزن‌های مشترکی داشته باشند. اثر کلی این قید در فضای فرضیه های ممکن، کم کردن ریسک overfit و بهبود احتمال تعمیم به وضعیت‌های مشاهده نشده است. چنین اشتراک وزن‌هایی معمولاً با آموزش جداگانه‌ی وزن‌های مشترک و جایگزینی میانگینشان به جای آن‌ها صورت می‌گیرد. حاصل فرایند این است که اشتراک وزن‌ها به سمت مینیمم کردن تابع خطای دیگری میل می‌کنند که با تابع خطای اصلی یکسان نیست.

٤.٨.٢ دیگر متد های مینیمم کردن خطا

شیب نزول یکی از اصلی‌ترین متد های پیدا کردن فرضیه ای با مینیمم کردن تابع خطاست، اما این متد همیشه مؤثرترین متد نیست. بعضی مواقع در آموزش شبکه های پیچیده، backpropagation برای همگرا شدن به ده‌ها هزار تکرار حلقه‌ی تغییر وزن‌ها دارد. به همین دلیل، تعدادی الگوریتم بهینه سازی وزن‌ها ارائه شده و مورد مطالعه قرار گرفته است. برای مشاهده‌ی دیگر روش‌ها، بهتر است متد تغییر وزنی را با دو انتخاب در نظر بگیریم: انتخاب یک جهت برای تغییر بردار وزن‌ها و انتخاب طولی برای حرکت به آن سمت. در backpropagation این جهت با عکس گرادیان انتخاب می‌شود و طولی که حرکت می‌کنیم با ثابت ضریب یادگیری η معلوم می‌گردد.

یکی از متد های بهینه سازی، که جستجوی خطی[3] نامیده می‌شود روشی متفاوت برای انتخاب طول تغییر وزن ارائه می‌کند. در کل، زمانی که خطی برای جهت تغییر وزن‌ها انتخاب می‌شود، طول تغییر با پیدا کردن مینیمم تابع خطا بر روی این خط انتخاب می‌شود. توجه دارید که این کار ممکن است باعث تغییر بسیار بزرگ یا بسیار کوچکی، متناسب با فاصله‌ی مینیمم تابع خطا بر روی این خط، در وزن‌ها شود. روش دیگری که با ایده‌ی جستجوی خطی ایجاد شده، روش مکمل گرادیان[4] نام دارد. در این جا، سری‌ای از جستجو های خطی برای جستجوی مینیممی در سطح خطا انجام می‌شود. در مرحله‌ی اول این سری جستجو جهت عکس گرادیان انتخاب می‌شود. در هر مرحله جهتی جدید انتخاب شده که تغییر در آن جهت باعث تغییر در جهت‌های قبلی نگردد و عنصر خطای گرادیان که صفر شده صفر باقی خواهد ماند.

با وجود اینکه استفاده از متد های دیگر گاهی در سرعت آموزش شبکه تأثیر دارند، اما متدهایی چون مکمل گرادیان تأثیر خاصی بر روی خطای تعمیم شبکه‌ی خروجی ندارند. تنها تأثیر بر روی خطای نهایی تفاوت بین فرایند های مینیمم سازی در افتادن در مینیمم‌های نسبی متفاوت است. (Bishop 1996) بحث کاملی درباره‌ی متدهای بهینه سازی برای آموزش شبکه های عصبی انجام می‌دهد.

---

[1] weight sharing
[2] tying together
[3] line search
[4] conjugate gradient

۴.۸.۳ شبکه های دور دار

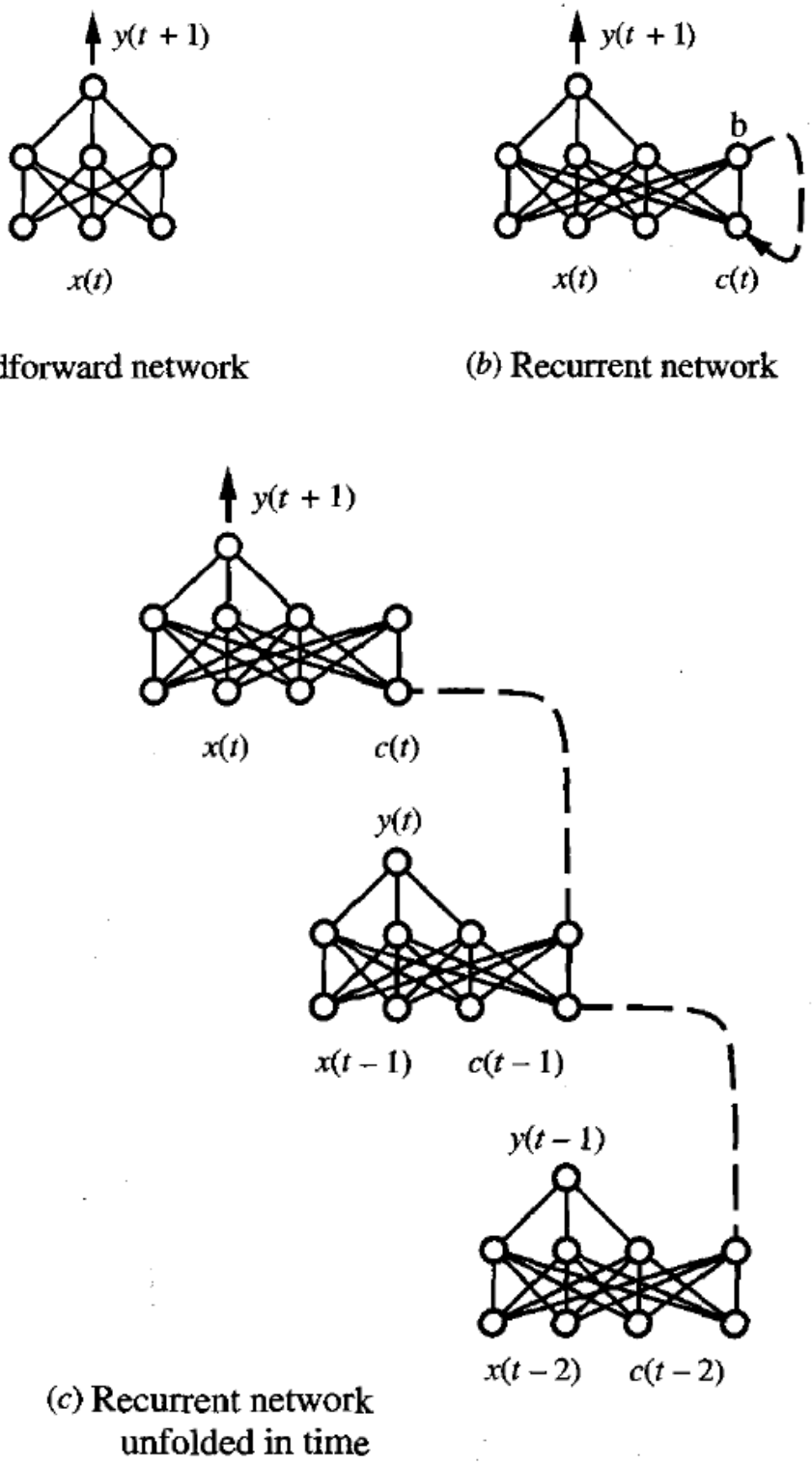
تا به الآن فقط به شبکه‌هایی پرداختیم که متناسب با گراف‌های بدون دور بودند. شبکه های دور دار[1] شبکه های عصبی‌ای هستند که برای داده های سری‌های زمانی استفاده می‌شوند و خروجی شبکه در زمان t ورودی زمان t+1 خواهد بود. در چنین شرایطی، حلقه ای در شبکه موجود است. برای درک بهتر، فرض کنید که می‌خواهیم با استفاده از شاخص‌های سهام در هر روز x(t) متوسط قیمت سهام را برای روز بعدی y(t+1) پیش بینی کنیم. با داشتن سری‌ای از این اطلاعات، یکی از راه حل‌های بسیار ساده استفاده از شبکه‌ی تک سویه و استفاده از x(t) ها برای پیش بینی y(t+1) هاست. شبکه ای مثل آنچه در شکل ۴.۱۱ قسمت a آمده است.

یکی از مشکلات این راه این است که مقدار y(t+1) فقط با توجه به x(t) پیش بینی می‌شود و هیچ تأثیری از مقادیر قبلی x نخواهد پذیرفت. در حالی که این تأثیر بسیار حیاتی است، برای مثال، فرض کنید که متوسط قیمت سهام روز بعد به میزان تغییر شاخصی بین امروز و دیروز وابسته است. با وجود اینکه این مشکل با اضافه کردن مقادیر x(t-1) حل می‌شود اما نمی‌توان از این راه حل برای اضافه کردن تمامی مقادیر گذشته‌ی x به سیستم استفاده کرد. شبکه‌ی دور داری که در شکل 4.11 (b) نشان داده شده راه حلی برای اساسی این مشکل است. در این شبکه ما واحد پنهان اضافی b و واحد ورودی جدید c(t) را به شبکه اضافه کرده‌ایم. مقدار c(t) تعریف شده تا همیشه مقدار واحد b را در زمان t-1 داشته باشد. پس مقدار ورودی c(t) در هر پله‌ی زمان دقیقاً همان مقدار واحد پنهان b در پله‌ی قبلی زمان است. چنین ساختاری باعث می‌شود تا شبکه رفتاری با توجه به گذشته انجام دهد، واحد b اطلاعات لازم را برای آینده ذخیره می‌کند و واحد c نیز از گذشته خبر می‌دهد. چون هر بار که b محاسبه می‌شود به عنوان ترکیبی از x(t) و c محاسبه می‌شود پس اطلاعات مربوط به داده های قدیمی‌تر را نیز در خود ذخیره کرده است. از ساختار شبکه های دور دار دیگری نیز می‌شد برای این مثال استفاده کرد. برای مثال، می‌توان چندین لایه بین ورودی و واحد b قرار داد و یا اینکه می‌توان از چندین حلقه به جای یک حلقه استفاده کرد.

چگونه می‌توان شبکه های دور دار را آموزش داد؟ انواع مختلفی از شبکه های دور دار وجود دارد و متد های بسیاری برای آموزش آن‌ها پیشنهاد شده است. (برای اطلاعات بیشتر به Jordan 1986; Elman 1990; Mozer 1995; Williams and Zipser 1995 رجوع کنید). بسیار جالب است که بدانیم می‌توان با یک تغییر کوچک در Backpropagation شبکه‌هایی نظیر شکل 4.11 (b) را آموزش داد. برای درک این تغییر، شکل 4.11 (c) را در نظر بگیرید که ساختار تا نشده ی[2] شبکه را نشان می‌دهد. در اینجا به جای حلقه‌هایی در طول زمان از کپی‌های بسیاری از همان شبکه استفاده کرده‌ایم. توجه دارید که این ساختار شبکه‌ی جدید هیچ دوری ندارد. بنابراین می‌توان شبکه‌ی تا نشده را با استفاده از Backpropagation آموزش داد. در واقع در عمل فقط یک کپی از شبکه آموزش داده می‌شود و یک دسته وزن خواهیم داشت. بنابراین بعد از آموزش شبکه‌ی تا نشده می‌توان مقدار هر وزن را میانگین وزن‌های نظیر در تمامی کپی‌ها دانست. (Mozer 1995) این فرایند را با جزئیات توضیح داده است. در کل، شبکه های دور دار سخت‌تر از شبکه های ساده آموزش داده می‌شوند و تعمیم‌های قابل اطمینانی نیز نمی‌دهند. با این وجود چون قابلیت تعمیم را افزایش می‌دهند همچنان جزو شبکه های مهم محسوب می‌شوند.

---

[1] recurrent networks
[2] unfolded



شکل ۴.۱۱ شبکه های دور دار.

٤.٨.٤ ساختار شبکه‌ی پویا

تا این لحظه به آموزش شبکه های عصبی به عنوان پیدا کردن وزن‌ها برای شبکه ای با ساختار گرافی ثابت پرداخته‌ایم. متد های بسیاری درباره‌ی پویا[1] بودن ساختار شبکه ارائه شده که در صورت نیاز، شبکه‌ها می‌توانند افزایش یا کاهش واحد و یا ارتباط (گره) داشته باشد تا قدرت تعمیم و موثر بودن آموزش را افزایش دهد.

یکی از این ایده‌ها شروع از شبکه بدون هیچ واحد پنهان، و افزایش واحد های پنهان مطابق با نیاز، تا میزان خطا را تا حد قابل قبولی کاهش دهد. الگوریتم Cascade-Correlation (Fahlman, Lebiere 1990) چنین الگوریتمی است. این الگوریتم در ابتدا شبکه ای می‌سازد که هیچ واحد پنهانی ندارد. برای مثال، در مثال تشخیص چهره فقط ۴ واحد خروجی که هر کدام مستقیماً با تمامی گره های ورودی صفحه‌ی 30x32 در ارتباطند ایجاد می‌کند. بعد از آموزش این شبکه، معلوم می‌شود که مقدار خطای قابل توجهی از باقی می‌ماند، زیرا که تابع هدف را نمی‌توان با شبکه ای تک لایه یاد گرفت. پس بنابراین الگوریتم یک واحد پنهان به شبکه اضافه می‌کند و وزن‌های مربوطه را چنان تعیین می‌کند که رابطه‌ی بین مقدار واحد پنهان و خطای باقی‌مانده‌ی شبکه حداکثر شوند. سپس این واحد جدید نصب می‌شود، تمامی وزن‌هایش ثابت نگه داشته می‌شود و ارتباطی بین آن و تمامی خروجی‌ها ایجاد می‌گردد. دوباره فرایند به حرکت می‌افتد، وزن‌های قدیمی دوباره آموزش داده می‌شوند (وزن‌های واحد پنهان همچنان ثابت می‌ماند). مقدار خطای باقیمانده دوباره چک می‌شود و اگر به اندازه‌ی قابل توجهی بزرگ بود واحدی دیگر به لایه‌ی پنهان اضافه خواهد شد. هر گاه که واحدی جدید به لایه‌ی پنهان اضافه می‌شود، از تمامی ورودی‌های اصلی و تمامی واحد های پنهان قبلی ورودی دریافت می‌کند. به همین منوال شبکه گسترش پیدا خواهد کرد تا خطا از حد آستانه ای کمتر شود و به مقدار قابل قبولی برسد. (Fahlman and Lebiere 1990) با توجه به اینکه همیشه فقط واحد جدید آموزش داده می‌شود نشان دادند که در Cascade-Correlation می‌توان به طور قابل توجهی تعداد آموزش‌ها را کم کرد. یکی از مشکلات کاربردی‌ای که هنگام به کار بردن این الگوریتم پیش می‌آید این است که چون تعداد واحد های اضافه شده نامحدود است پس خیلی ساده مشکل overfit رخ می‌دهد، پس همیشه باید اقدامات لازم را برای جلوگیری از overfit در استفاده از این الگوریتم انجام داد.

راه دیگر برای استفاده از ساختار شبکه‌ی پویا، دقیقاً عکس این Cascade-Correlation است. بجای شروع از ساده‌ترین شبکه‌ها و پیچیده تر کردن آن طی مراحل، با شبکه ای پیچیده شروع می‌کنیم و با معلوم شدن اینکه بعضی ارتباط‌ها مهم نیستند آن‌ها را هرس می‌کنیم. یکی از راه‌های تشخیص اینکه یک ارتباط مهم نیست این است که وزن ارتباط‌های غیر مهم معمولاً نزدیک به صفرند. راه دوم، که در کاربرد موفق‌تر به نظر می‌رسد، این است که ببینیم تغییر کوچکی در مقدار وزن چه تأثیری بر خطای E می‌گذارد. اثر تغییر w بر E ($\frac{\partial E}{\partial w}$) را می‌توان معیاری برای اهمیت ارتباط نظیر دانست. (LeCun et al. 1990) فرایندی را معرفی می‌کند که طی آن شبکه آموزش داده می‌شود و کم اهمیت‌ترین ارتباط‌ها نیز حذف می‌شوند، این فرایند آنقدر تکرار می‌شود که به شرط پایانی خاصی برسیم. به این فرایند، روش بهینه سازی ی صدمات مغز[2] نیز می‌گویند، زیرا که در هر مرحله، الگوریتم سعی می‌کند تا کم اهمیت‌ترین ارتباط‌ها را حذف کند. گفته می‌شود در شبکه های بسیار بزرگ برای تشخیص کاراکتر چنین روشی می‌تواند تعداد ارتباط‌ها را تا ۱/۴ کاهش دهد، و قدرت تعمیم شبکه را کمی بهبود می‌بخشد و بازده آموزش را به طور قابل توجهی بالا می‌برد.

---

[1] dynamic
[2] optimal brain damage

در کل، تکنیک‌های ساختار شبکه های پویا موفق آمیز بوده است. فقط باید دید تا آن‌ها به اندازه‌ی Backpropagation در افزایش قـدرت تعمیم قوی هستند یا نه. با این وجود در مواردی نشان داده شده که به میزان قابل توجهی در زمان آموزش تأثیر می‌گذارند.

٤.٩ خلاصه و منابع برای مطالعه‌ی بیشتر

نکات اصلی این فصل شامل موارد زیر می‌شود:

- شبکه های عصبی مصنوعی متدی کاربردی برای یادگیری توابع حقیقی مقدار و برداری را بر روی ویژگی‌های گسسته و پیوسته ارائه می‌کنند، این متد در مقابل خطای داده های آموزشی مقاوم است. الگوریتم Backpropagation متداول‌ترین متد یادگیری شبکه است و در بسیاری از کارهای یادگیری نظیر تشخیص دستخط و کنترل ربات با موفقیت به کار رفته است.
- فضای فرضیه ای در نظر گرفته شده برای الگوریتم Backpropagation فضای تمامی توابع ممکنی که با تغییر وزن‌های شبکه ثابتی از واحدها و ارتباطها بیان می‌شوند است. شبکه های تک سویه با تعداد کافی واحد در هر لایه که شامل سه لایه واحد می‌شوند قابلیت تخمین هر تابعی را با دقت دلخواه را دارند. حتی شبکه‌هایی با اندازه‌ی واقعی می‌توانند فضای غنی‌ای از توابـع غیـر خطـی را نمایش دهند، به همین دلیل شبکه های تک سویه گزینه‌ی خوبی برای یادگیری توابع گسسته و پیوسته که در حالت کلی فـرم کلـی مجهولی دارند است.
- Backpropagation فضای تمامی فرضیه های ممکن را با اسـتفاده از شـیب نـزول و کـاهش متنـاوب خطـای بـین شـبکه و نمونه های آموزشی جستجو می‌کند. شیب نزول به سمت مینیمم نسبی خطای بین شبکه و نمونه های آموزشی برای وزن‌های شبکه میل خواهد کرد. در حالت کلی‌تر، شیب نزول متدی بالقوه مفید برای جستجوی فضاهای فرضیه ای پیوسته‌ی چند متغیـره کـه در آن خطای آموزشی تابعی مشتق پذیر از پارامتر های فرضیه است.
- یکی از فریبنده‌ترین ویژگی‌های Backpropagation قابلیت آن در ایجاد ویژگی‌های جدیدی است که به طور صریح در ورودی شبکه در نظر گرفته نشده است. در کل، لایه های داخلی (پنهان) در یک شبکه‌ی چند لایه یاد می‌گیرند تا ویژگـی‌هـای میـانی‌ای را نمایش دهند که برای یادگیری تابع هدف مفید بوده و به طور ضمنی در ورودی‌های شبکه بیان شده‌اند. این قابلیت، بـرای مثـال، در شبکه ای ۸×۳×۸ در قسمت ۴.۶.۴ در کد گذاری منطقی انجام شده برای اعداد ۱ تا ۸ و در مثال تشخیص چهـره در قسـمت ۴.۷ بـا ویژگی‌های عکس در لایه‌ی پنهان بیان شده‌اند.
- overfit بر روی داده های آموزشی مشکلی مهم در یادگیری شبکه های عصبی است. overfit به شبکه ای ختم مـی‌شـود کـه تعمیم ضعیفی روی داده های جدیـد دارد امـا کـارایی عـالی‌ای روی داده هـای آموزشـی دارد. متـدهای Cross-Validation را می‌توان برای تخمین نقطه‌ی ایست مناسب برای جستجو و مینیمم کردن ریسک overfit به کاربرد.
- با وجود اینکه Backpropagation متداول‌ترین الگوریتم برای یادگیری شبکه های عصبی است، اما الگوریتم‌های بسیار دیگری ارائه شده‌اند، این الگوریتم‌ها شامل الگوریتم‌هایی برای اهداف خاص می‌شوند. برای مثال، متـدهای شـبکه هـای عصـبی حلقـه دار، شبکه‌هایی را آموزش می‌دهند که حلقه های مستقیم دارند و الگـوریتم‌هـایی چـون Cascade Correlation سـاختار شـبکه را علاوه بر وزن‌های شبکه تغییر می‌دهند.

اطلاعات بیشتر در مورد شبکه های عصبی را می‌توانید در فصول دیگر این کتاب بیابید. توجیهی بیزی بـرای انتخـاب معیـار خطـای مربعـی در فصل ۶ ارائه می‌شود، در این فصل همچنین توجیهی برای مینیمم کردن cross-entropy به جای خطـای مربعـی در شـرایط خـاص آورده

شده است. نتایج تئوری تعداد نمونه های آموزشی لازم برای رسیدن به شبکه ای قابل اطمینان برای توابع حقیقی و بعد Vapnik-Chervonenkis برای شبکه های خاص در فصل ۷ بحث شده‌اند. در فصل ۵ نیز بحثی در مورد overfit و چگونگی دوری از آن آورده شده. همچنین در فصل ۱۲ متدهایی برای استفاده از دانش قبلی برای بهبود تعمیم دقت شبکه های عصبی مورد بحث قرار گرفته است.

کار بر روی شبکه های عصبی به زمان‌های اولیه‌ی علوم کامپیوتر بر می‌گردد. (McCulloch and Pitts 1943) مدلی برای یک نورون مشابه پرسپترون ارائه کردند، در طی دهه‌ی ۱۹۶۰ کارهای بسیاری بر روی قابل قبول بودن این مدل انجام گرفت. در اوایل دهه‌ی ۶۰ (Windrow and Hoff 1960) شبکه های پرسپترون (که آن‌را adeline می‌نامیدند) و قانون دلتا را مورد بررسی قرار دادند، (Rosenblatt 1962) همگرایی قانون آموزش پرسپترون را ثابت کرد. با این وجود، در اواخر دهه‌ی ۶۰ مشخص شد که پرسپترون تک لایه محدودیت نمایش دارد و الگوریتم موثری نیز برای آموزش شبکه های چند لایه معرفی نشده بود. (Minsky and Papert 1969) نشان دادند که حتی تابع ساده ای چون XOR را نمی‌توان با شبکه های پرسپترون تک لایه نمایش داد و کار بر روی شبکه های عصبی در دهه‌ی ۷۰ متوقف شد.

در اواسط دهه‌ی ۸۰ با اختراع Backpropagation و الگوریتم‌های مربوطه‌ی آموزش شبکه های چند لایه (Rumelhart and McClelland 1986; Parker 1985)، کار بر روی شبکه های عصبی دوباره از سر گرفته شد. اساس این ایده‌ها را می‌توان در کارهای قبلی جست (Werbos 1975). از دهه‌ی ۸۰ Backpropagation به یکی از متداول‌ترین متدهای یادگیری تبدیل شد و بسیاری از روش‌های دیگر مربوطه‌ی شبکه های عصبی مورد مطالعه قرار گرفت. با ظهور رایانه های کم قیمت در همان دوره تحقیقات بر روی الگوریتم‌های محاسباتی‌تر که در دهه‌ی ۶۰ ممکن نبود شروع شد.

کتاب‌های زیادی به مبحث شبکه های عصبی اختصاص یافته است. یکی از کتاب‌های قدیمی اما مفید درباره‌ی متدهای یادگیری پارامتری برای تشخیص الگو توسط (Duda and Hart 1973) نوشته شده است. کتاب (Widrow and Stearns 1985) به پرسپترون‌ها و شبکه های تک لایه‌ی مربوطه و کاربردشان می‌پردازد. (Rumelhart and McClelland 1986) مجموعه‌ی منتخبی از مقالات که علاقه‌ی کار بر روی این متدها را افزایش داد را از اواسط دهه‌ی ۸۰ به بعد جمع آوری کرده‌اند. کتاب‌های اخیر در مبحث شبکه های عصبی شامل (Bishop 1996)، (Chauvin and Rumelhart 1995)، (Freeman and Skapina 1991)، (Fu 1994)، (Hecht-Nielsen 1990) و (Hertz et al. 1991) می‌شود.

تمرینات

۴.۱ مقادیر وزن‌های w_0، w_1 و w_2 را برای پرسپترونی که سطح تصمیمش در شکل ۴.۳ آورده شده تعیین کنید. فرض کنید که این سطح محور x_1 را در −۱ و محور x_2 را در ۲ قطع می‌کند.

۴.۲ پرسپترونی با دو ورودی طراحی کنید که تابع منطقی $A \wedge \neg B$ را نشان دهد. از شبکه ای دو لایه از پرسپترون‌ها برای نشان دادن A XOR B استفاده کنید.

۴.۳ دو پرسپترون با رابطه‌ی مقدار حدی $w_0 + w_1x_1 + w_2x_2 > 0$ را در نظر بگیرید. پرسپترون A وزن‌های زیر را دارد

$$w_0 = 1, \qquad w_1 = 2, \qquad w_2 = 1$$

و پرسپترون B وزن‌های زیر را داراست

$$w_0 = 0, \qquad w_1 = 2, \qquad w_2 = 1$$

تعیین کنید که آیا پرسپترون A از پرسپترون B کلی‌تر است؟ (تعریف کلی‌تر بودن در فصل ۲ آمده است).

۴.۴ از قانون آموزش دلتا برای یک واحد خطی با دو ورودی استفاده کنید و آن‌را برای تناسب با مفهوم هدف $-2 + x_1 + 2x_2 > 0$ آموزش دهید. خطای E را بر حسب تعداد تکرار های آموزش رسم کنید. سطح تصمیم را بعد از ۵، ۱۰، ۵۰، ۱۰۰، ... بار اجرا رسم کنید.

(a) از مقادیر مختلف ثابت برای η استفاده کرده و همچنین از مقدار متغیر η_0/i برای آموزش استفاده کنید. عملکرد کدام حالت بهتر است؟

(b) از افزایش و آموزش دسته ای[1] استفاده کنید. کدام یک زودتر همگرا می‌شود؟ هر دو معیار تعداد تغییر وزن‌ها و کل زمان اجرا را در نظر بگیرید.

۴.۵ قانون شیب نزول را برای تک خروجی‌ای به فرم o به شکل زیر استخراج کنید

$$o = w_0 + w_1 x_1 + w_1 x_1^2 + w_2 x_2 + w_2 x_2^2 + \cdots + w_n x_n + w_n x_n^2$$

۴.۶ به طور غیر رسمی توضیح دهید که چرا قانون آموزش دلتا در رابطه‌ی ۴.۱۰ فقط تخمینی از قانون شیب نزول رابطه‌ی ۴.۷ است.

۴.۷ شبکه‌ی عصبی تک سویه ای را در نظر بگیرید که دو ورودی a و b و یک واحد پنهان c و یک واحد خروجی d دارد. این شبکه پنج وزن $(w_{ca}, w_{cb}, w_{c0}, w_{dc}, w_{d0})$ دارد، در این نمایش w_{x0} نشان دهنده‌ی مقدار آستانه‌ی برای واحد x است. این وزن‌ها را با مقادیر اولیه‌ی (.1,.1,.1,.1,.1) مقدار دهی اولیه کنید سپس الگوریتم Backpropagation را به آن‌ها اعمال کنید. فرض کنید که ضریب یادگیری η=.3، تکانه α=.9، وزن‌ها را برای هر نمونه جداگانه تغییر دهید، و نمونه های آموزشی به صورت زیرند:

a	B	D
۱	۰	۱
۰	۱	۰

۴.۸ الگوریتم Backpropagation در جدول ۴.۲ را طوری تغییر دهید که بر روی واحدهایی که از تابع tanh به جای تابع سیگموید استفاده می‌کنند عمل کند. بدین معنا که $o = \tanh(\vec{w}.\vec{x})$ قانون تغییر وزن را برای لایه خروجی و لایه پنهان ارائه کنید.

(راهنمایی $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$).

۴.۹ شبکه‌ی ۸×۳×۸ نشان داده شده در شکل ۴.۷ را در نظر بگیرید. فرض کنید که برای چنین کار مشابهی می‌خواهیم از شبکه ای ۸×۱×۸ کمک بگیریم؛ شبکه ای که فقط یک واحد پنهان دارد. توجه دارید که هشت نمونه‌ی آموزشی شکل ۴.۷ را می‌توان با هشت مقدار برای گره پنهان نظیر کرد (برای مثال ۰.۱، ۰.۲، ... ۰.۸). آیا بنابراین شبکه ای با فقط یک واحد پنهان می‌تواند تابع همانی را بر روی این نمونه های آموزشی یاد بگیرد. راهنمایی: این سؤال را در نظر بگیرید که "آیا مقادیری برای وزن‌های لایه‌ی پنهان وجود دارد که بتواند کد گذاری بالا را در

[1] batch learning

لایه‌ی پنهان ایجاد کند؟" "آیا مقادیری برای وزن‌های خروجی وجود دارد که بتوان ورودی را از این کد گذاری به سادگی استخراج کرد؟" و "آیا شیب نزول می‌تواند چنین وزن‌هایی را پیدا کند؟"

۴.۱۰ تابع خطای جایگزین زیر را به جای رابطه‌ی قسمت ۴.۸.۱ در نظر بگیرید.

$$E(\vec{w}) \equiv \frac{1}{2}\sum_{d\in D}\sum_{k\in outputs}(t_k - o_{kd})^2 + \gamma\sum_{i,j} w_{ji}^2$$

قانون تغییر شیب نزول را برای این تعریف E محاسبه کنید. نشان دهید که این طرح را می‌توان با ضرب هر وزن در یک ثابت قبل از اعمال قانون شیب نزول جدول ۴.۲ پیاده سازی کرد.

۴.۱۱ از Backpropagation برای کار تشخیص چهره استفاده کنید. برای جزئیات کار از جمله داده های تصویری صورت، کد Backpropagation و کارهای خاص به http://www.cs.cmu.edu/~tom/book.html مراجعه کنید.

۴.۱۲ الگوریتم شیب نزول را در نظر بگیرید که برای یادگیری مفاهیم هدف متناسب با مستطیل‌های موجود در صفحه‌ی x,y به کار می‌رود. هر فرضیه را با گوشه سمت چپ پایین و راست بالا متناسب با llx,lly,urx,ury توصیف می‌شود. نقطه‌ی <x,y> تنها زمانی توسط فرضیه‌ی <llx,lly,urx,ury> مثبت دسته بندی می‌شود که نقطه‌ی <x,y> درون مستطیل قرار داشته باشد. از تعریف خطای E آمده در فصل استفاده کنید. آیا می‌توانید نسخه ای بازبینی شده از شیب نزول را ارائه دهید که چنین فرضیه های مستطیلی‌ای را یاد بگیرد. توجه دارید که E بر حسب llx,lly,urx,ury پیوسته نیست، مثل حالت پرسپترون. (راهنمایی: دو راه استفاده شده برای پرسپترون را در نظر بگیرید: (۱) تغییر قانون دسته بندی به صورتی که تابع پیش بینی تابعی پیوسته بر حسب ورودی‌ها باشد و (۲) تعریف تابع خطای دیگری، مثل فاصله تا مرکز مستطیل، برای استفاده در قانون دلتا برای آموزش پرسپترون). آیا الگوریتمتان به فرضیه ای با خطای مینیمم که در آن نمونه های مثبت و منفی با مستطیلی قابل تقسیم باشند میل می‌کند؟ چه زمانی نمی‌توان با مستطیل چنین کاری کرد؟ آیا مشکلات مینیمم‌های نسبی رخ می‌دهند؟ الگوریتم شما چه رابطه ای با متد های نمادین ای که برای عطف ویژگی‌ها استفاده می‌شوند دارد؟

فرهنگ لغات تخصصی فصل (فارسی به انگلیسی)

ابر صفحه ای	Hyperplane
اندیس	Index
بدترین حالت	worse case
برانگیخته	Excited
برنامه نویسی خطی	linear programming
بیزی	Bayesian
پهنای شبکه	Network width
تابع فشرده ساز	squashing function
تابع منطق	logistic function
تا نشده ی	Unfolded
ترتیب ساده به پیچیده	simple-to-complex
تک سویه	feed-forward

جمله‌ی خطا	penalty term
درون یابی	Interpolation
درست	True
دسته بندی پذیر خطی	linearly separable
شبکه های عصبی مصنوعی	Artificial neural networks
شرط پایانی	termination condition
شیب نزول	Gradient Descent
شیب نزول افزایشی	Incremental gradient descend
ضریب یادگیری	learning rate
غلت	False
غیر برانگیخته	Inhibited
قانون پرسپترون	perceptron rule
قانون دلتا	delta rule
قدرت تعمیم شبکه	generalization accuracy
گرادیان	Gradient
گره	Node
ماشین‌های ترتیبی	Sequential
مجموعه‌ی تایید	validation set
مقدار آستانه	Threshold
واحد خطی	linear unit
یال	Edge