فصل ششم: یادگیری بیزی

استدلال بیز روشی احتمالی برای استنتاج ارائه می‌کند. این روش بر اساس این فرض است که کمیت‌های مورد نظر از توزیع‌های احتمال پیروی می‌کنند و تصمیم گیری بهینه را می‌توان با استدلال بر این توزیع‌های احتمال و داده های مشاهده شده انجام داد. اهمیت این روش در یادگیری ماشین این است که روشی کمّی برای ارزیابی مدارک فرضیه‌ها ارائه می‌کند. استدلال بیزی اساس الگوریتم‌های یادگیری‌ای که با استفاده از احتمالات کار می‌کنند است. همچنین استدلال بیز چارچوبی[1] برای بررسی عملیات دیگر الگوریتم‌هایی که از احتمالات استفاده نمی‌کنند ایجاد می‌کند.

٦.١ معرفی

متد های یادگیری بیزی به دو دلیل به مطالعه‌ی ما در مورد یادگیری ماشین مربوط می‌شود. اول اینکه الگوریتم‌های یادگیری بیزی احتمال صریح هر فرضیه، مثل دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز[2]، را محاسبه می‌کنند، این نوع روش‌ها از پر کاربردترین روش‌ها در حل بعضی از مسائل یادگیری هستند. برای مثال، (Michie 1994) تحقیقی در مورد تفاوت‌های دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز و دیگر الگوریتم‌های یادگیری، از جمله یادگیری درختی و شبکه های عصبی، ارائه می‌کند. این تحقیقات نشان می‌دهد که کارایی دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز در بعضی ویژگی‌ها ضعیف‌تر از دیگر الگوریتم‌ها و در بعضی ویژگی‌ها بهتر است. در این فصل دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز را به همراه چند مثال بررسی می‌کنیم. در کل، کاربرد این الگوریتم را روی مسئله‌ی دسته بندی متونی مثل مقالات خبری الکترونیک بررسی می‌کنیم. برای چنین کارهای یادگیری‌ای دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز یکی از بهترین الگوریتم شناخته شده است.

دلیل دوم اهمیت متد های بیز در مطالعه‌ی ما در یادگیری ماشین زمینه‌ی مساعدی است که این متدها برای درک الگوریتم‌های یادگیری‌ای که مستقیماً با احتمالات کار نمی‌کنند ایجاد می‌کند. برای مثال، در این فصل، ما الگوریتم‌هایی چون Find-S و Candidate-Elimination،

[1] framework
[2] naive Bayes classifier

را که در فصل ۲ آمده بود، برای مشخص کردن شروطی که خروجی، محتمل‌ترین فرضیه‌ی سازگار با نمونه های آموزشی باشد را بررسی خواهیم کرد. همچنین با بررسی‌ای بیزی توجیهی برای یکی از انتخاب‌های کلیدی الگوریتم‌های یادگیری شبکه های عصبی (انتخاب تابع خطای مجموع مربعات خطا برای جستجوی فضای شبکه های عصبی ممکن) ارائه خواهیم کرد. همچنین در این بخش اشتقاق تابع خطای جایگزینی را محاسبه می‌کنیم، cross-entropy، این معیار زمانی که تابع هدف احتمالات را پیش بینی می‌کند از معیار مجموع خطاهای مربعی کارامد تر است. از نظری بیزی بایاس استقرایی الگوریتم‌های درختی که به درخت‌های کوچک‌تر علاقه دارند و قانون کوتاه‌ترین طول توضیح را بررسی خواهیم کرد. آشنایی پایه ای با روش‌های بیزی برای درک بسیاری از الگوریتم‌های یادگیری ماشین اهمیت بسزایی دارد. ویژگی‌های متد های یادگیری بیزی شامل موارد زیر است:

- هر نمونه‌ی آموزشی می‌تواند احتمال تخمینی اینکه فرضیه درست است را کم یا زیاد کند. این حقیقت باعث می‌شود که روش‌های بیزی نسبت به الگوریتم‌هایی که کاملاً فرضیه را با نمونه های غیر سازگار رد می‌کنند انعطاف‌تر پذیر تر باشند.
- می‌توان از دانش قبلی به همراه داده های مشاهده شده برای تعیین احتمال نهایی درستی فرضیه‌ها استفاده کرد. در یادگیری بیزی، دانش قبلی با (۱) احتمال اولیه‌ی هر فرضیه و (۲) توزیع احتمال روی داده های تعیین شده برای هر فرضیه‌ی ممکن تعیین می‌شود.
- متد های بیزی می‌توانند برای فرضیه‌ها احتمالاتی را پیش بینی کنند (برای مثال، فرضیه‌ی "این بیمار ذات‌الریه با احتمال ۹۳٪ کاملاً بهبود خواهد یافت).
- نمونه های جدید را می‌توان با ترکیب پیش بینی‌های چندین فرضیه، (هر کدام با وزن احتمالشان) دسته بندی کرد.
- حتی هنگامی که اثبات می‌شود که متد های بیزی محاسباتی غیر قابل پیش بینی انجام می‌دهند، با این حال معیار استانداردی برای دیگر متد های عملی یادگیری مطرح می‌کنند.

یکی از مشکلات عملی کاربرد متد های بیزی نیاز آن‌ها به داشتن دانش اولیه از بسیاری از احتمالات است. هنگامی که این اطلاعات به طور دقیق در دسترس نیست، گاهی آن‌ها را با استفاده از دانش قبلی، داده های موجود قبلی، و فرض‌هایی درباره‌ی فرم توزیع تخمین می‌زنیم. دومین مشکل عملی کاربرد این متدها هزینه‌ی محاسباتی قابل توجه آن‌ها برای تعیین فرضیه‌ی بهینه‌ی بیز در حالت کلی است (که رابطه خطی با تعداد فرضیه های ممکن دارد). در حالت‌های خاص خاصی این هزینه‌ی محاسباتی به طور قابل توجهی کاهش می‌یابد.

ادامه‌ی این فصل به شکل زیر ساختار بندی شده است. بخش ۶.۲ قضیه‌ی بیز را معرفی کرده و محتمل‌ترین[1] و فرضیه ای با حداکثر احتمال ثانویه[2] را تعریف خواهد کرد. چهار زیر بخش این بخش این چارچوب[3] را برای بررسی چندین مشکل و الگوریتم یادگیری که در فصل‌های گذشته مطرح شد به کار می‌برند. برای مثال، نشان می‌دهیم که چندین الگوریتم مطرح شده با چه فرض‌هایی محتمل‌ترین فرضیه را خروجی می‌دهند. بخش‌های بعدی تعدادی از الگوریتم‌های یادگیری که منحصر با احتمالات کار می‌کنند را معرفی خواهند کرد. این الگوریتم‌ها شامل دسته بندی کننده‌ی بهینه‌ی بیز، الگوریتم گیبز و دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز می‌شود. بالاخره درباره‌ی شبکه‌ی باور بیز[4] بحث خواهیم کرد و روشی جدید برای یادگیری بر اساس استدلال احتمالی و الگوریتم EM که الگوریتمی پرکاربرد در یادگیری در حضور متغیر های غیر قابل مشاهده است را بررسی خواهیم کرد.

---

[1] maximum likelihood
[2] maximum a posteriori probability hypotheses
[3] framework
[4] Bayesian belief network

۶.۲ قضیه‌ی بیز

در یادگیری ماشین، گاهی سعی داریم که از میان فضای فرضیه های H بهترین فرضیه‌ی سازگار با نمونه های آموزشی D را پیدا کنیم. چندین راه برای تعریف "بهترین" در این جمله وجود دارد، یکی از این تعاریف "محتمل‌ترین" است، با در دست داشتن داده های D بدون نیاز به هیچ اطلاعات اولیه‌ی دیگر نمی‌توان محتمل‌ترین فرضیه را انتخاب کرد. قضیه‌ی بیز متدی مستقیم برای محاسبه‌ی احتمالات فرضیه های موجود در H ارائه می‌کند. به عبارت دیگر، قضیه‌ی بیز روشی برای محاسبه‌ی احتمال یک فرضیه بر اساس احتمال قبلی‌اش، احتمال مشاهده‌ی داده های سازگار با فرض درستی این فرضیه و احتمال خود داده های مشاهده شده ارائه می‌کند.

برای تعریف دقیق قضیه‌ی بیز، ابتدا بیایید نشانه گذاری‌ها را معرفی کنیم. برای نشان دادن احتمال اولیه‌ی فرضیه‌ی h، احتمال قبل از مشاهده‌ی داده های آموزشی، از P(h) استفاده می‌کنیم. به P(h) احتمال اولیه‌ی[1] h نیز می‌گویند، این احتمال از اطلاعات قبلی‌ای که در مورد احتمال درستی فرضیه‌ی h داریم تأثیر می‌پذیرد. به طور مشابه از P(D) برای نمایش احتمال اولیه‌ی مشاهده‌ی نمونه های آموزشی D استفاده می‌کنیم (مثلاً احتمال مشاهده‌ی D بدون داشتن هیچ اطلاعات قبلی در مورد اینکه با چه فرضیه‌هایی سازگار است). برای نشان دادن احتمال مشاهده‌ی D در جایی که فرضیه‌ی h درست است از P(D|h) استفاده می‌کنیم. در حالت کلی، از p(x|y) برای نشان دادن احتمال x با فرض وقوع y استفاده می‌کنیم. در مسائل یادگیری ماشین، علاقه‌ی ما به احتمال P(h|D) است که در آن h یک فرضیه و D نمونه های آموزشی مشاهده شده هستند. به P(h|D) احتمال ثانویه‌ی[2] h نیز می‌گویند، زیرا که اطمینان ما به فرضیه‌ی h بعد از مشاهده‌ی نمونه های آموزشی D را نشان می‌دهد. توجه داشته باشید که احتمال ثانویه P(h|D) بر خلاف احتمال اولیه P(h) که از نمونه های آموزشی مستقل است، از نمونه های آموزشی D تأثیر می‌پذیرد.

قضیه بیز، اساس متد های یادگیری بیز است زیرا که راهی برای محاسبه‌ی احتمال ثانویه P(h|D) از P(h)، P(D) و P(D|h).

قضیه‌ی بیز:

$$p(h|D) = \frac{p(D|h)P(h)}{p(D)} \qquad (6.1)$$

همان طور که انتظار می‌رود، بر اساس قضیه‌ی بیز P(h|D) با افزایش P(h) و P(D|h) افزایش می‌یابد. همچنین منطقی است که P(h|D)، با افزایش P(D) کاهش بیابد، زیرا که هر چه که احتمال مشاهده‌ی D به طور مستقل از h بالا تر رود دیگر D مدرکی برای درستی h نخواهد بود.

در بسیاری از مسائل یادگیری، یادگیر مجموعه‌ی فرضیه‌هایی مثل H را در نظر می‌گیرد و در بین آن‌ها به دنبال محتمل‌ترین فرضیه‌ی $h \in H$ با توجه به نمونه های آموزشی D می‌گردد (یا حداقل یکی از محتمل‌ترین فرضیه‌ها). هر کدام از این محتمل‌ترین، فرضیه با حداکثر

[1] prior probability
[2] posterior probability

احتمال ثانویه[1] یا (MAP) نامیده می‌شود. فرضیه های MAP را می‌توان با استفاده از قضیه‌ی بیز برای محاسبه‌ی احتمال ثانویه‌ی هر فرضیه مشخص کرد. به صورت دقیق‌تر، زمانی می‌گوییم که فرضیه‌ی h_{MAP} یک فرضیه‌ی MAP است که

$$\begin{aligned} h_{MAP} &= \arg\max_{h\in H} P(h|D) \\ &= \arg\max_{h\in H} \frac{P(D|h)P(h)}{P(D)} \\ &= \arg\max_{h\in H} P(h|D)\, P(h) \qquad (6.2) \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که مرحله آخر عبارات بالا P(D) چون ثابتی است و h بر آن تأثیری ندارد حذف می‌شود.

در بعضی موارد، فرض می‌کنیم که هر فرضیه در H احتمال اولیه‌ی مساوی‌ای دارد (برای هر h_j و h_i در H داریم که $P(h_i) = P(h_j)$). در این شرایط می‌توان رابطه‌ی ۶.۲ را بیشتر ساده کرد و کافی است که فقط عبارت P(D|h) را برای پیدا کردن محتمل‌ترین فرضیه در نظر بگیریم. P(D|h) گاهی محتمل بودن داده های D برای h نیز نامیده می‌شود و هر فرضیه ای که P(D|h) را ماکزیمم کند (ML)[2] ، h_{ML} نامیده می‌شود.

$$h_{ML} \equiv \arg\max_{\mathrm{h}\in\mathrm{H}} P(D|h) \qquad (6.3)$$

برای مشخص شدن رابطه با مسائل یادگیری ماشین، ابتدا قضیه‌ی بیز را با توجه به نمونه های D و فضای فرضیه ای H معرفی کردیم. در واقع قضیه‌ی بیز کلی‌تر از آنچه در بالا گفته شد است. از قضیه‌ی بیز می‌توان برای هر زیر مجموعه‌ی H که ناسازگارند (اشتراک ندارند) استفاده کرد (مثل "آسمان آبی است" و "آسمان آبی نیست"). در این فصل، در اکثر موارد فرض خواهیم کرد که H فضای فرضیه ای که تابع هدف را شامل می‌شود است و D نمونه های آموزشی هستند. در مواقع دیگر فرض می‌کنیم که H مجموعه‌ی دیگر ناسازگاری با یکدیگر از فرضیه‌هاست و D نیز مجموعه‌ی دیگری از داده‌هاست.

۶.۲.۱ یک مثال

برای تصور قانون بیز، فرض کنید که مسئله ای برای تشخیص بیماری داریم، دو فرضیه‌ی ممکن برای بیماری وجود دارد: (۱) بیمار نوع خاصی از سرطان دارد و (۲) بیمار آن نوع سرطان را ندارد. داده های موجود یک تست آزمایشگاهی است که دو خروجی ممکن دارد: $\oplus$ (مثبت) و $\ominus$ (منفی). دانش قبلی داریم در کل جمعیت حاضر در آزمایش فقط 008. این بیماری را دارند. علاوه بر آن نتیجه‌ی آزمایش همیشه قطعی نیست و احتمال خطا وجود دارد. تست آزمایشگاهی در ۹۸٪ مواردی که بیمار بیماری را دارد نتیجه‌ی مثبت درست می‌دهد و در ۹۷٪ مواردی که بیمار بیماری را ندارد نتیجه‌ی منفی درست می‌دهد. در بقیه‌ی موارد آزمایش نتیجه‌ی اشتباه می‌دهد. آنچه در بالا گفته شد را خلاصه‌وار می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$P(cancer) = .008, \qquad P(\neg cancer) = .992$$

[1] Maximum A Posteriori
[2] maximum likelihood

$$P(\oplus|cancer) = .98, \quad P(\ominus|\neg cancer) = .02$$

$$P(\oplus|\neg cancer) = .03, \quad P(\ominus|\neg cancer) = .97$$

فرض کنید که بیمار جدیدی پذیرش می‌شود و نتیجه‌ی آزمایشش مثبت است. حال با چه احتمالی می‌توان گفت که بیمار سرطان دارد؟ فرضیه با حداکثر احتمال را می‌توان از رابطه‌ی ۶.۲ پیدا کرد:

$$P(\oplus|cancer)P(cancer) = (.98).008 = .0078$$

$$P(\oplus|\neg cancer)P(\neg cancer) = (.03).992 = .0298$$

پس، داریم $h_{MAP} = \neg cancer$. احتمال ثانویه‌ی فرضیه‌ها را می‌توان با رساندن مجموع دو احتمال به ۱ پیدا کرد ($P(\oplus|cancer)P(cancer) = .\frac{0078}{.0078+.0298} = .21$). این مرحله برای این درست است که قضیه‌ی بیز احتمال‌های ثانویه مجموعه‌ی تمامی داده را بدون اشتراک می‌پوشانند (افراز می‌کنند) بیان می‌کند. با وجود اینکه $P(\oplus)$ مستقیماً توسط مسئله داده نشده است، اما می‌توان آن‌را محاسبه کرد زیرا که می‌دانیم مجموع دو احتمال $P(cancer|\oplus)$ و $P(\neg cancer|\oplus)$ یک است (هر بیمار یا سرطان دارد یا سرطان ندارد). توجه داشته باشید که احتمال ثانویه‌ی سرطان نسبت به احتمال اولیه‌ی آن به طور قابل توجهی زیادتر است، اما با این حال محتمل‌ترین فرضیه این است که بیمار سرطان ندارد.

همان طور که در مثال بالا نشان داده شد، نتیجه‌ی تأثیر بیز به شدت به احتمال اولیه وابسته است، برای اینکه بتوان قضیه را به طور مستقیم به کار برد باید احتمالات اولیه معلوم باشند. توجه داشته باشید که در این مثال فرضیه‌ها کاملاً پذیرفته شده یا رد شده نیستند بلکه هر کدام با افزایش داده های مشاهده شده احتمالی پیدا می‌کنند. فرمول اصلی محاسبه‌ی احتمالات در جدول ۶.۱ خلاصه شده است.

۶.۳ قضیه‌ی بیز و یادگیری مفهوم

ارتباط بین قضیه‌ی بیز و مسائل یادگیری مفهوم چیست؟ از آنجایی که قضیه‌ی بیز راهی اصولی برای محاسبه‌ی احتمالات ثانویه‌ی هر یک از فرضیه‌ها بعد از مشاهده‌ی داده های آموزشی ارائه می‌کند، می‌توانیم از آن برای پایه‌ی یک الگوریتم یادگیری ساده استفاده کنیم، الگوریتمی که احتمال هر یک از فرضیه‌ها را محاسبه کرده و محتمل‌ترین فرضیه‌ها را خروجی می‌دهد. در این بخش چنین الگوریتم‌های بدون شعور[1] یادگیری مفهوم بیز را بررسی و با الگوریتم‌های یادگیری مفهوم مقایسه می‌کنیم. همان طور که بعداً نیز خواهیم دید، یکی از نتایج جالب این مقایسه این است که تحت شرایط خاصی چندین الگوریتمی که در فصل‌های گذشته بررسی شدند همان فرضیه ای که یادگیری بدون شعور بیز خروجی می‌دهد را خروجی می‌دهند، با این تفاوت که آن‌ها احتمالات فرضیه‌ها را مشخص نمی‌کنند و فقط محتمل‌ترین را مشخص می‌کنند.

- قانون ضرب[2]: احتمال P(A∧B) که احتمال عطف دو اتفاق A و B است را محاسبه کن

P(A∧B)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)

- قانون جمع[1]: احتمال فصل دو اتفاق A و B را محاسبه کن

---

[1] brute-force
[2] Product rule

P(A⋁B)=P(A)+P(B)-P(A⋀B)

- قضیه بیز[2]: احتمال ثانویه‌ی P(h|D) را محاسبه کن

$$P(h|D) = \frac{P(D|h)P(h)}{P(D)}$$

- قضیه‌ی مجموع احتمالات[3]: اگر اتفاق‌هـای $A_1, \dots, A_n$ دو بـه دو ناسـازگار باشـند و $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$ خـواهیم داشت

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

جدول ۶.۱ خلاصه‌ی فرمول‌های پایه ای احتمال.

۶.۳.۱ یادگیری مفهوم بدون شعور بیز

مسئله‌ی یادگیری مفهومی را که در ابتدای فصل ۲ معرفی شد را در نظر بگیرید. در کل، فرض کنید که یادگیر فضای فرضـیه ای محـدود H را که شامل فرضیه‌هایی که بر فضای نمونه ای X تعریف شده‌اند است در نظر می‌گیرد و تابع هدف نیز مفهومی به فرم c:X→{0,1} است. مثـل معمول، فرض می‌کنیم که به یادگیر دسته ای از نمونه هـای آموزشـی مثـل $\{< x_1, d_1 > \cdots < x_m, d_m >\}$ داده مـی‌شـود، در ایـن نمونه های آموزشی x_i عضوی از X و d_i نیز مقدار هدف برای آن x_i است ($d_i = c(x_i)$). برای ساده سازی بحث در این بخـش، فـرض می‌کنیم که ترتیب نمونه های نمونه‌ها $< x_1 \dots x_m >$ ثابت است پـس مـی‌تـوان نمونـه هـای آموزشـی D را بـه فـرم سـاده بـه صـورت $D =< d_1 \dots d_m >$ نوشت. می‌توان نشان داد که این ساده نویسی تأثیری بر نتایج بدست آمده از این قسمت ندارد (تمرین ۶.۴).

می‌توان با استفاده از قضیه‌ی بیز الگوریتم یادگیری مفهوم مستقیمی طراحی کرد که فرضیه با حداکثر احتمال ثانویه را خروجی دهد:

الگوریتم یادگیری بدون شعور MAP [4]

۱. برای هر فرضیه h در H احتمال ثانویه را محاسبه کن،

$$\mathrm{p(h|D)} = \frac{\mathrm{p(D|h)P(h)}}{\mathrm{p(D)}}$$

۲. فرضیه h_{MAP} را که بیشترین احتمال ثانویه را دارد خروجی بده

$$h_{MAP} = \arg\max_{h \in H} P(h|D)$$

---

[1] Sum rule
[2] Bayes theorem
[3] Theorem of total probabily
[4] Brute-Force MAP Learning

این الگوریتم ممکن است محاسبات قابل توجهی نیاز داشته باشد، زیرا که قانون بیز را برای تمامی فرضیه های H برای محاسبه‌ی P(h|D) به کار می‌برد. چنین حجم محاسباتی‌ای برای فضای فرضیه‌هایی با اندازه‌ی بالا غیر عملی است، با این وجود الگوریتم هنوز مورد توجه است زیرا که معیاری ارائه می‌کند در حالی که دیگر الگوریتم‌های یادگیری مفهوم هیچ معیاری ارائه نمی‌کنند.

برای آماده سازی یک مسئله برای حل با الگوریتم یادگیری بدون شعور MAP لازم است که مقادیر P(h) و P(D|h) را مشخص کنیم (همان طور که بعداً هم خواهیم دید با مشخص کردن مقادیر ذکر شده مقدار P(D) نیز مشخص می‌شود). اطلاعات اولیه‌ی ما در مورد مسئله با تعیین دو توزیع P(h) و P(D|h) به طور دلخواه مشخص می‌شود. بیایید ابتدا با فرض‌های زیر شروع کنیم :

۱. نمونه های آموزشی D خطا ندارند ($d_i = c(x_i)$)
۲. مفهوم هدف c در فضای فرضیه ای H موجود است.
۳. هیچ مدرکی بر برتری یک فرضیه بر فرضیه‌ی دیگر وجود ندارد.

با فرض‌های بالا، چه مقداری باید برای P(h) تعیین شود؟ بدون هیچ اطلاعات قبلی، برتری فرضیه‌ها بر یکدیگر بی دلیل خواهد بود، می‌توانیم احتمال تمامی آن‌ها را مساوی قرار دهیم. علاوه بر ان، چون فرض کرده‌ایم تابع هدف c در H موجود است باید طوری احتمال را پخش کنیم که مجموع احتمال کل H یک باشد. پس خواهیم داشت:

$$P(h) = \frac{1}{|H|} \ \ for\ all\ h\ in\ H$$

اما P(D|h) چه احتمالی باید داشته باشد؟ P(D|h) احتمال مشاهده‌ی مقادیر هدف $D =< d_1 \dots d_n >$ است که برای دسته‌ی ثابت نمونه‌ها زمانی که h درست است می‌باشد.(مثلاً زمانی که h همان مفهوم هدف c است). از آنجایی که فرض کردیم داده های آموزشی خطا ندارند، احتمال دیدن d_i اگر $d_i = h(x_i)$ باشد ۱ و اگر $d_i \neq h(x_i)$ باشد۰ است. بنابراین،

$$P(D|h) = \begin{cases} 1\ \ if\ d_i = h(x_i)\ \ for\ all\ d_i\ in\ D \\ 0\ \ otherwise \end{cases} \tag{6.4}$$

به عبارت دیگر احتمال مشاهده‌ی D با داشتن h، ۱ است اگر D با h سازگار باشد و در غیر این صورت ۰ است.

با این نوع انتخاب P(h) و P(D|h) حال مسئله را کاملاً برای الگوریتم یادگیری بدون شعور MAP آماده کرده‌ایم. مرحله‌ی اول این الگوریتم که در آن با استفاده از قضیه‌ی بیز احتمال ثانویه‌ی P(h|D) برای تمامی h ها با توجه به نمونه های آموزشی D محاسبه می‌شود را در نظر بگیرید. با توجه به قضیه‌ی بیز داریم،

$$\mathrm{p(h|D)} = \frac{\mathrm{p(D|h)P(h)}}{\mathrm{p(D)}}$$

ابتدا فرض کنید که h با نمونه های آموزشی ناسازگار است. از رابطه‌ی ۶.۴ داریم که P(D|h) صفر است زیرا که h با D ناسازگار است پس داریم که:

$$P(h|D) = \frac{0 \cdot P(h)}{P(D)} = 0\ if\ h\ is\ inconsistent\ with\ D$$

پس احتمال ثانویه‌ی فرضیه‌ی ناسازگار با D صفر خواهد بود.

حال فرض کنید که فرضیه‌ی h با D سازگار است. از رابطه‌ی ۶.۴ داریم که P(D|h) یک فرض شده است زیرا که h با D سازگار است. داریم،

$$P(h|D) = \frac{1 \cdot \frac{1}{|H|}}{P(D)}$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{1}{|H|}}{\frac{|VS_{H,D}|}{|H|}}$$

$$= \frac{1}{|VS_{H,D}|} \ if\ h\ is\ consistent\ with\ D$$

در این رابطه $VS_{H,D}$ زیر مجموعه ای از H است که با D سازگار است (مثلاً $VS_{H,D}$ می‌تواند همان فضای ویژه ای فصل ۲ باشد که با توجه به D بدست آمده). تشخیص اینکه $P(D) = \frac{VS_{H,D}}{|H|}$ کار ساده ای است زیرا که مجموع P(h|D) برای تمامی فرضیه‌ها باید ۱ باشد و از طرفی تعداد کل فرضیه های سازگار با D در H طبق تعریف $|VS_{H,D}|$ است. می‌توان مقدار P(D) را از قضیه‌ی مجموع احتمال (در جدول ۶.۱) و این حقیقت که فرضیه‌ها دو به دو ناسازگارند ($(\forall i \neq j)(P(h_i \wedge h_j) = 0)$) بدست آورد.

$$P(D) = \sum_{h_i \in H} P(D|h_i)P(h_i)$$

$$= \sum_{h_i \in VS_{H,D}} 1 \cdot \frac{1}{|H|} + \sum_{h_i \notin VS_{H,D}} 0 \cdot \frac{1}{|H|}$$

$$= \sum_{h_i \in VS_{H,D}} 1 \cdot \frac{1}{|H|}$$

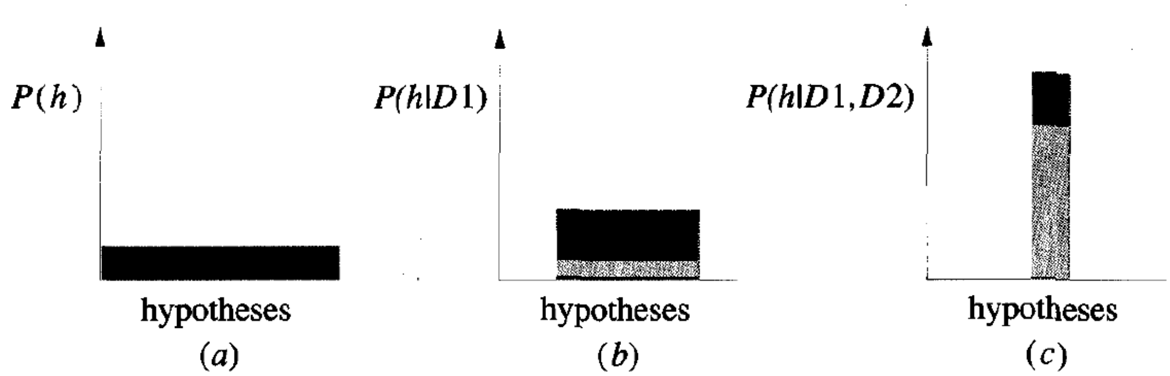
$$= \frac{|VS_{H,D}|}{|H|}$$

به طور خلاصه اینکه با فرض‌هایی که در مورد P(h) و P(D|h) کردیم قضیه‌ی بیز ایجاب می‌کند که P(h|D) به صورت زیر باشد:

$$P(h|D) = \begin{cases} \frac{1}{|VS_{H,D}|} & if\ h\ is\ consistent\ with\ D \\ 0\ otherwise \end{cases} \tag{6.5}$$

در این رابطه $|VS_{H,D}|$ تعداد فرضیه های H که با D سازگارند است. شکل ۶.۱ سیر تکامل احتمالات را با نمودار نشان می‌دهد. ابتـدا (شـکل 6.1 (a)) تمامی فرضیه‌ها احتمال یکسانی دارند. با افزایش داده های آموزشی (شکل‌های 6.1 (b) و 6.1 (c)) احتمال ثانویه‌ی فرضیه هـای ناسازگار صفر می‌شود اما مجموع کل احتمالات ۱ باقی می‌ماند، یعنی احتمال فرضیه‌هایی که صفر می‌شود به طور مساوی در بین فرضـیه هـای دیگر تقسیم می‌شود.

بررسی بالا نشان داد با انتخاب P(h) و P(D|h) تمامی فرضیه های سـازگار احتمـال ثانویـه‌ی مسـاوی ($1/|VS_{H,D}|$) خواهنـد داشـت و احتمال فرضیه های ناسازگار صفر خواهد شد. پس با توجه به این بررسی هر فرضیه‌ی سازگار یک MAP (فرضیه با حداکثر احتمال) است.



شکل ۶.۱ تکامل احتمال ثانویه‌ی P(h|D) با افزایش داده های آموزشی.
(a) اولویت یکسان به تمامی فرضیه‌ها داده می‌شود. با افزایش داده‌ها به D1 (b) و سپس به D1⋀D2 (c)، احتمال ثانویه‌ی فرضیه های ناسازگار به صفر می‌رسد در حالی که احتمال ثانویه برای فرضیه های فضای ویژه افزایش می‌یابد.

۶.۳.۲ فرضیه های MAP و یادگیرهای سازگار

بررسی‌های بالا نشان می‌دهد که با مفروضات مذکور تمامی فرضیه های سازگار با D فرضیه ای MAP هستند. این عبارت را می‌توان مستقیماً به عبارتی جالب در مورد دسته ای از یادگیرها که یادگیر های سازگار[1] می‌نامیم تفسیر کرد. زمانی می‌گوییم که یک الگـوریتم یـادگیری یـادگیر سازگار است که فرضیه‌ی خروجی هیچ خطایی بر روی داده های آموزشی نداشته باشد. بر اساس بررسی بالا، می‌توان گفت تمامی یادگیر هـای سازگار فرضیه‌ی خروجیشان یک فرضـیه‌ی MAP اسـت، بـه شـرطی کـه فـرض کنـیم کـه توزیـع اولیـه احتمـال روی H یکنواخـت باشـد ($(\forall i,j)P(h_i) = P(h_j)$) و همچنین فرض کنیم که داده های آموزشی قطعی و بدون خطا هستند (P(D|H)=1 اگر D بـا h سـازگار باشد و در غیر این صورت صفر است).

برای مثال، الگوریتم یادگیری مفهوم Find-S را که در فصل ۲ بررسی شد را در نظر بگیرید. Find-S فضای فرضیه ای H را از فرضیه هـای جزئی‌تر به کلی‌تر جستجو می‌کند تا جزئی‌ترین فرضیه‌ی سازگار را پیدا کند (جزئی‌ترین عضو فضای ویژه). چون Find-S فرضیه ای سازگار را خروجی می‌دهد پس طبق احتمالات مفروض بـالا بـرای P(h) و P(D|h) فرضـیه ای MAP را خروجـی خواهـد داد. البتـه Find-S هـیچ

[1] consistent learner

احتمالی را محاسبه و ارائه نمی‌کند و فقط خاص‌ترین فرضیه‌ی فضای ویژه را پیدا می‌کند. با این وجود، با مشخص کـردن توزیـع‌هـای P(h) و P(D|h) به صورتی که فرضیه‌ی خروجی MAP باشد، روشی مفید برای مشخص کردن رفتار Find-S داریم.

آیا توزیع احتمال‌های دیگری برای P(h) و P(D|h) وجود دارد که خروجی FIND-S فرضیه‌ی MAP باشد؟ بله، چون FIND-S خاص‌ترین فرضیه‌ی فضای ویژه را پیدا می‌کند فرضیه‌ی خروجی‌اش با اختصاص توزیع احتمال‌هایی که به سمت فرضیه های خاص‌تر تمایل دارنـد MAP خواهد بود. به عبارت دقیق‌تر، فرض کنید که $\mathcal{H}$ تمامی توزیع احتمال P(h) روی H است که در آن‌ها داریـم $P(h_1) \geq P(h_2)$ اگـر h_1 خاص‌تر از h_2 باشد. می‌توان نشان داد با چنین توزیع احتمال‌هایی و توزیع احتمال مذکور بـرای P(D|h) فرضـیه‌ی خروجـی FINS-S یـک فرضیه‌ی MAP خواهد بود.

خلاصه بحث بالا بدین شکل است، چارچوب بیزی به ما اجازه می‌دهد تا ویژگی‌های رفتاری الگوریتم‌های یادگیری (حتـی الگـوریتم‌هـایی کـه مقدار احتمال فرضیه را مشخص نمی‌کنند، مثل FIND-S) را مشخص کنیم. با مشخص کردن توزیع احتمال‌های P(h) و P(D|h) به صورتی که فرضیه‌ی خروجی الگوریتم بهینه، MAP، شود، پیش فرض‌هایی که الگوریتم برای نتیجه گیری انجام می‌دهد را می‌توان پیدا کرد.

استفاده از دیدگاه بیزی برای بررسی ویژگی‌های الگوریتم‌های یادگیری بدین صورت عملاً مشابه بررسی بایاس استقرایی یادگیرهاست. در فصل ۲ ما بایاس استقرایی یک الگوریتم را دسته پیش فرض‌هایی مثل B تعریف کردیم که نحوه‌ی استقرای یادگیر را توجیه می‌کند. برای مثال، گفته شد که بایاس استقرایی الگوریتم Candidate-Elimination وجود مفهوم هدف c در مجموعه‌ی فرضیه ای H است. علاوه بر آن نشـان دادیم که خروجی این الگوریتم یادگیری را می‌توان از ورودی‌هایش و این پیش فرض استقرایی ضمنی نتیجه گرفت. تفسیری بیزی بالا می‌تواند جایگزینی برای بررسی ویژگی‌های این پیش فرض‌های الگوریتم‌های یادگیری باشد. با این تفاوت که در اینجا به جای مدل کردن الگـوریتم بـا یک سیستم معادل استقرایی، الگوریتم را با سیستم معادل استدلال احتمالی[1] که بر اساس قضیه‌ی بیز کار می‌کند، مـدل سـازی مـی‌کنـیم. و در اینجا پیش فرض‌هایی که یادگیر فرض می‌کند به فرم "احتمال اولیه های فرضیه‌ها P(h) و قدرت داده‌ها در قبول یا رد فرضـیه‌هـا P(D|h)" است. تعریف P(h) و P(D|h) که در این قسمت معرفی شد مربوط به دو الگوریتم Candidate-Elimination و FIND-S بود. سیستم استدلال احتمالی‌ای که بر اساس قضیه‌ی بیز کار می‌کند، با این توزیع‌ها در ورودی و خروجی رفتاری مشابه این الگوریتم‌ها از خود نشان خواهد داد.

بحثی که در این بخش انجام شد حالت خاصی از استدلال بیزی بود زیرا که فرض کردیم داده های آموزشـی بـدون خطاینـد و فرضـیه‌هـا نیـز قطعی‌اند، یعنی P(D|h) حتماً یکی از دو مقدار ۱ یا ۰ را دارد. همان طور که در قسمت بعدی نیز خواهیم دید، می‌توان یادگیری از نمونه هـای آموزشی خطا دار را شبیه سازی کرد، فقط کافی است که مقدار P(D|h) مقادیری غیر ۰ و ۱ را نیز داشته باشد، بـا ایـن تغییـر توزیـع احتمـال P(D|h) خطا را کنترل خواهد کرد.

[1] probabilistic reasoning system

۶.۴ محتمل‌ترین فرضیه‌ها[1] و فرضیه‌هایی که کمترین خطای مربعی[2] را دارند

همان طور که در بالا نیز نشان داده شد تحت شرایطی یک الگوریتم یادگیری فرضیه های MAP را خروجی می‌دهد حتی اگر این الگوریتم از روش بیز یا حتی از محاسبه‌ی احتمال‌ها استفاده نکند.

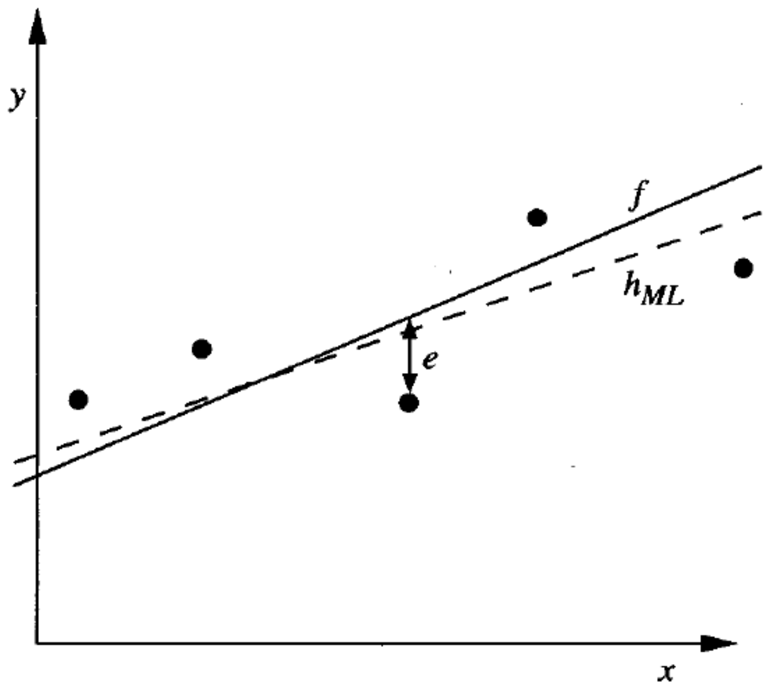
در این بخش، به مسئله ای یادگیری توابع هدف پیوسته مقدار می‌پردازیم، مسئله ای که راه‌های زیادی برای آن مثل شبکه های عصبی، تقریب خطی، و تقریب چند جمله ای ارائه شده است. یک بررسی مستقیم بیزی نشان می‌دهد که در شرایط خاصی هر الگوریتم یادگیری که خطای مربعی بین تخمین و خروجی داده های آموزشی را مینیمم کند یک محتمل‌ترین فرضیه[3] را خروجی می‌دهد. اهمیت این نتیجه در استفاده از این استدلال بیزی (تحت شرایط خاص) برای توجیه بسیاری از شبکه های عصبی و دیگر متدهایی که مجموع خطای مربعی را مینیمم می‌کنند است.

شرایط مسئله‌ی یادگیری تابع هدف پیوسته را در نظر بگیرید، یادگیر L که از فضای نمونه ای X و فضای فرضیه ای H که مجموعه ای از توابع حقیقی مقدار روی نمونه های X استفاده می‌کند (هر h در H تابعی است به فرم $h: X \to \mathfrak{R}$، که در آن $\mathfrak{R}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی است). مسئله ای که یادگیر L با آن مواجه است یادگیری تابع هدف مجهول $f: X \to \mathfrak{R}$ از مجموعه‌ی فرضیه های H است. مجموعه ای از m نمونه‌ی آموزشی در دسترس است، در این مجموعه مقدار تابع هدف هر یک از نمونه‌ها با یک مقدار تصادفی خطا که توزیع نرمال دارد معلوم است. به عبارت دقیق‌تر، هر نمونه‌ی آموزشی زوج مرتبی به فرم $< x_i, d_i >$ است که در آن $d_i = f(x_i) + e_i$. در اینجا $f(x_i)$ خود تابع هدف و مقدار e_i متغیر تصادفی خطاست. فرض می‌شود که مقدار e_i مستقل و دارای توزیع نرمال با میانگین صفر است. هدف یادگیر نیز پیدا کردن محتمل‌ترین فرضیه، یا به صورت معادل، یک فرضیه‌ی MAP است با این فرض که تمامی فرضیه‌ها احتمال اولیه‌ی یکسانی دارند.

با وجود اینکه بررسی‌هایمان را برای یادگیری توابع دلخواه حقیقی مقدار انجام می‌دهیم، مسئله‌ی یادگیری تابع خطی نمونه ای از چنین مسائلی است. شکل ۶.۲ شکل تابع هدف خطی f را به همراه چندین نمونه‌ی آموزشی نشان داده است. خط چین فرضیه‌ی h_{ML} است که کمترین خطای مربعی را دارد، پس محتمل‌ترین فرضیه است. توجه داشته باشید که محتمل‌ترین فرضیه حتماً فرضیه‌ی درست نیست، زیرا که مجموعه های آموزشی محدود و خطا دار هستند.

---

[1] maximum likelihood
[2] least squared error
[3] maximum likelihood



شکل ۶.۲ یادگیری تابع حقیقی مقدار.
تابع هدف f با خط نشان داده شده است. نمونه های آموزشی $< x_i, d_i >$ با فرض اینکه خطایی با توزیع نرمال با میانگین صفر دارند در نظر گرفته شده‌اند. خط چین تابعی خطی را نشان می‌دهد که میزان خطای مربعی را مینیمم می‌کند. بنابراین این فرضیه محتمل‌ترین فرضیه، h_{ML}، بر اساس ۵ نمونه‌ی آموزشی موجود است.

قبل از اینکه به اثبات محتمل‌ترین بودن فرضیه‌هایی که خطای مربعی را مینیمم می‌کنند در شرایط مذکور بپردازیم؛ ابتدا بیایید دو مفهوم را از تئوری احتمال مرور کنیم: چگالی احتمال و توزیع نرمال. ابتدا برای بحث روی متغیر های تصادفی پیوسته مثل e، ابتدا باید چگالی احتمال را معرفی کنیم. دلیل اولیه این پیش زمینه‌ها این است که می‌خواهیم مجموع احتمالات روی تمامی مقادیر ممکن متغیر تصادفی یک باشد. در این حالت که متغیر های تصادفی پیوسته هستند، تعیین احتمال را نمی‌توان با نسبت دادن یک احتمال به هر یک از مقادیر ممکن متغیر تصادفی انجام داد. به جای ان، از چگالی احتمال[1] برای مقادیر تصادفی حقیقی مثل e استفاده می‌کنیم و انتگرال روی کل چگالی احتمال را مساوی یک قرار می‌دهیم. در کل از حرف کوچک p برای نشان دادن تابع چگالی احتمال استفاده می‌کنیم و احتمال را با حرف بزرگ P نشان می‌دهیم (گاهی اوقات این مقدار جرم احتمال[2] نیز نامیده می‌شود). چگالی احتمال $p(x_0)$ ، $\frac{1}{\varepsilon}$ برابر مقدار احتمال اینکه متغیر تصادفی در بازه ای $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ زمانی که $\varepsilon \to 0$ قرار بگیرد است.

چگالی احتمال:

$$p(x_0) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} P(x_0 \le x < x_0 + \varepsilon)$$

---

1 probability density
2 probability mass

دوم اینکه e را در مسئله طوری تعریف کردیم که از توزیع احتمال نرمال پیروی می‌کند. توزیع احتمال نرمال، توزیع احتمالی هموار و زنگی شکل است که می‌توان آن‌را با میانگین μ و انحراف معیار σ کاملاً مشخص کرد. برای تعریف دقیق‌تر به جدول ۵.۴ مراجعه کنید.

حال با داشتن این پیش زمینه‌ها می‌توانیم به موضوع اصلی بر گردیم: در شرایط مذکور، نشان می‌دهیم که فرضیه‌هایی که خطای مربعی را مینیمم می‌کنند در واقع همان محتمل‌ترین فرضیه‌ها هستند. ابتدا محتمل‌ترین تابع را با استفاده از رابطه‌ی 6.3 مشخص می‌کنیم، با این تفاوت که توزیع احتمال در این رابطه را با p نشان می‌دهیم.

$$h_{ML} = \arg\max_{h \in H} p(D|h)$$

مثل قبل، فرض می‌کنیم که مجموعه ای از نمونه های آموزشی مثل $< x_1 \dots x_n >$ با مقدار تابع هدفشان D، $D = < d_1 \dots d_2 >$ داریم. در اینجا $d_i = f(x_i) + e_i$. با فرض اینکه نمونه های آموزشی کاملاً مستقل از فرضیه‌ی h هستند P(D|h) را می‌توان بر حسب $p(d_i|h)$ ها نوشت

$$h_{ML} = \arg\max_{h \in H} \prod_{i=1}^{m} p(d_i|h)$$

با دانستن اینکه e_i ها از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس مجهول σ^2 پیروی می‌کنند، هر d_i نیز باید از توزیع نرمالی با واریانس σ^2 و میانگین $f(x_i)$، به جای صفر، پیروی کند. بنابراین $p(d_i|h)$ را می‌توان به صورت توزیع نرمالی با واریانس σ^2 و میانگین $\mu = f(x_i)$ نوشت. بیایید فرمول این توزیع نرمال را که $p(d_i|h)$ را توصیف می‌کند بنویسیم، ابتدا فرمولی که در جدول ۵.۴ آمده را می‌نویسیم و مقادیر μ و σ^2 را جایگزین می‌کنیم. چون رابطه ای برای d_i با فرض اینکه فرضیه‌ی h توصیف درست از تابع هدف f است می‌نویسیم، خواهیم داشت که $\mu = f(x_i) = h(x_i)$

$$h_{ML} = \arg\max_{h \in H} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(d_i-\mu)^2}$$

$$= \arg\max_{h \in H} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(d_i-h(x_i))^2}$$

حال از تبدیلی استفاده می‌کنیم که در اکثر محاسبات محتمل‌ترین‌ها متداول است: به جای ماکزیمم کردن مقدار کل عبارت، لگاریتم آن‌را که بسیار ساده تر است ماکزیمم می‌کنیم. زیرا که تابع ln p تابعی یکنواخت و صعودی از p است. بنابراین ماکزیمم کردن ln p باعث ماکزیمم شدن خود p می‌شود.

$$h_{ML} = \arg\max_{h \in H} \sum_{i=1}^{m} ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} - \frac{1}{2\sigma^2}\left(d_i - h(x_i)\right)^2$$

جمله‌ی اول مستقل از h است و بنابراین می‌توان آن‌را حذف کرد،

$$h_{ML} = \arg\max_{h\in H} \sum_{i=1}^{m} -\frac{1}{2\sigma^2}\left(d_i - h(x_i)\right)^2$$

ماکزیمم کردن این کمیت منفی مشابه مینیمم کردن مقدار مثبت آن است،

$$h_{ML} = \arg\min_{h\in H} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2\sigma^2}\left(d_i - h(x_i)\right)^2$$

و دوباره می‌توان ثابتی که مستقل از h است را حذف کرد و داریم:

$$h_{ML} = \arg\min_{h\in H} \sum_{i=1}^{m} \left(d_i - h(x_i)\right)^2 \qquad (6.6)$$

رابطه‌ی ۶۶ نشان می‌دهد که محتمل‌ترین فرضیه h_{ML} فرضیه ای است که مجموع خطا های مربعی بین مقادیر هدف نمونه های آموزشی d_i و پیش بینی فرضیه $h(x_i)$ را مینیمم کند. این نتیجه گیری‌ها با این فرض بود که نمونه های آموزشی، d_i ها، مقادیر تابع هدف بـه اضـافه‌ی مقدار خطای تصادفی با توزیع نرمال و میانگین صفر هستند. همان طور که استخراج عبارت بالا نیز نشان می‌دهد، مقدار جمله‌ی مربعی خطـای $\left(d_i - h(x_i)\right)^2$ مستقیماً از توزیع نرمال ناشی شده است. با استفاده از دیگر توزیع‌های خطا می‌توان تعریف‌های دیگری برای خطـا بدسـت آورد.

توجه داشته باشید که ساختار اشتقاق بالا شامل انتخاب فرضیه ای که لگاریتم محتمـل بـودن (ln p(D|h)) را حـداکثر مـی‌کنـد بـه عنـوان محتمل‌ترین فرضیه نیز می‌شود. همان طور که پیش‌تر نیز گفته شد، این مشابه این است که محتمل بودن (ln p(D|h)) را حداکثر کنیم. این روش کار با لگاریتم محتمل بودن[1] در بسیار از بررسی‌های بیزی مورد استفاده قرار می‌گیرد، زیرا که کار با لگاریتم محتمل بودن بسیار ساده تر از کار با خود محتمل بودن است. البته، همان طور که قبلاً هم گفته شد، محتمل‌ترین فرضیه همیشه فرضیه‌ی *MAP* نیست مگر اینکـه احتمـال اولیه‌ی تمامی فرضیه‌ها مساوی فرض شود.

چرا استفاده از توزیع نرمال برای مدل سازی نویز یا همان خطای نمونه‌ها استفاده می‌کنیم؟ یکی از دلایلی که لازم است حتماً ذکـر شـود، ایـن است که بررسی را از نظر ریاضی بسیار ساده تر می‌کند. دلیل دوم این است که این توزیع توزیعی هموار است و توزیع‌های زنگی شکل تخمـین خوبی برای بسیاری از انواع خطاها در سیستم‌های فیزیکی هستند. در واقع، طبق قضیه‌ی حد مرکزی که در فصل ۵ توضـیح داده شـد، مجمـوع تعداد زیادی از متغیر های مستقل و هم توزیع بدون توجه به نوع توزیع از توزیع نرمال پیروی می‌کند. این ثابت مـی‌کنـد کـه خطـا کـه خـود از مجموع تعداد زیادی متغیر مستقل و با ضریب توزیع یکسان تولید می‌شود از توزیع نرمال پیروی خواهد می‌کنـد. البتـه در واقعیـت، مؤلفـه هـای مختلفی که در نویز تأثیر گذارند همگی از یک توزیع پیروی نمی‌کنند، که در این شرایط این قضیه توجیهی برای استفاده از این توزیع نیست.

[1] likelihood

مینیمم کردن مجموع خطای مربعی روشی متداول در بسیاری از شبکه های عصبی، منحنی‌های تخمین و ... در تخمین توابع حقیقی مقدار است. فصل ۴ روش شیب نزول را که مینیمم کردن خطای مربعی در شبکه های عصبی را با آن انجام می‌دهیم مفصلاً توضیح داده است.

بد نیست که قبل از اتمام بحث رابطه‌ی بین محتمل‌ترین فرضیه و فرضیه ای که خطای مربعی را مینیمم می‌کند، بعضی محدودیت‌ها این شرایط مسئله را ذکر کنیم. بررسی بالا فقط خطا در تابع هدف نمونه های آموزشی در نظر گرفته شده است و از خطای خود ویژگی‌هایی که نمونه را توصیف می‌کنند صرف نظر شده بود. برای مثال، اگر مسئله یادگیری پیش بینی وزن افراد بر اساس سن و قدشان باشد، در شرایط ذکر شده فقط می‌توان خطا را برای وزن در نظر گرفت و مقادیر سن و قد دقیق فرض می‌شوند. بررسی زمانی پیچیده تر می‌شود که فرض‌های ساده کننده حذف شوند.

۶.۵ محتمل‌ترین فرضیه برای مسائل پیش بینی

در تعریف مسئله‌ی قسمت قبلی محتمل‌ترین فرضیه را فرضیه ای مشخص کردیم که مجموع خطای مربعی را بر روی نمونه های آموزشی مینیمم می‌کند. در این بخش معیاری مشابه برای تعریف مسئله‌ی دیگری که در شبکه های عصبی متداول است بیان می‌کنیم: یادگیری پیش بینی احتمالات.

حالتی را در نظر بگیرید که در آن می‌خواهیم تابعی غیر قطعی (احتمالی) $f: X \rightarrow \{0,1\}$ را یاد بگیریم که دو خروجی گسسته دارد. برای مثال، فضای نمونه ای X ممکن است توصیف بیماران با علائم بیماریشان باشد، و تابع هدف f(x) زمانی که بیمار زنده بماند ۱ و در غیر این صورت ۰ باشد. یا به طور مشابه X می‌تواند توصیف مراجعین دریافت وام با وضعیت حسابشان در گذشته باشد و f(x) زمانی که وام بعدی کامل پرداخت می‌شود ۱ و در غیر این صورت ۰ باشد. برای مثال، در مجموعه ای از بیماران که علائم مشترکی دارند ۹۲٪ درصد زنده می‌مانند و ۸٪ جان سالم به در نمی‌برند. این عدم قطعیت ممکن است ناشی از ناتوانی ما را در مشاهده‌ی تمامی علائم مهم بیمار باشد یا ممکن است ناشی از یک فرایند تصادفی در پیشرفت بیماری باشد. جدا از اینکه منشأ مشکل چیست، ما تابع هدف f(x) را داریم که به صورت احتمالی روی این ورودی عمل می‌کند.

با این تعریف مسئله ممکن است از یک شبکه‌ی عصبی (یا تخمین زننده‌ی توابع حقیقی مقدار دیگر) که خروجی‌اش احتمال f(x)=1 باشد استفاده کنیم. به عبارت دیگر، ما دنبال یادگیری تابع هدف $f': X \rightarrow [0,1]$ هستیم که در آن $f'(x)=P(f(x)=1)$. در مثال بالا، اگر آن علائم غیر قابل تمیز را داشته باشیم به احتمال ۹۲٪ بیمار زنده می‌ماند، پس $f'(x)=0.92$ که یعنی احتمال اینکه f(x) برابر با ۱ باشد ۹۲٪ است، و احتمال اینکه f(x) برابر با ۰ باشد، ۸٪ است.

چگونه می‌توان 'f را با روشی مثل شبکه های عصبی یاد گرفت؟ یکی از راه‌های غیر هوشمندانه جمع کردن تعداد تکرار ۱ ها و ۰ های تابع برای هر نمونه‌ی ممکن x و آموزش شبکه‌ی عصبی با نسبت این تعداد تکرارهاست. همان طور که در ادامه نیز خواهیم دید، به جای این کار می‌توان از خود نمونه های آموزشی f برای آموزش شبکه‌ی عصبی استفاده کرد و محتمل‌ترین فرضیه برای 'f را بدست آورد.

چه معیاری را بهینه می‌کنیم تا محتمل‌ترین فرضیه در این تعریف مسئله را بیابیم؟ برای جواب این سؤال ابتدا باید رابطه ای برای $P(D|h)$ پیدا کنیم. بیایید فرض کنیم که نمونه های آموزش D به فرم $D = \{< x_1, d_1 > \cdots < x_m, d_m >\}$ هستند که در آن d_i ها مقدار مشاهده شده ی $f(x_i)$ است.

با توجه به آنچه درباره‌ی محتمل‌ترین فرضیه گفته شد، مینیمم خطای مربعی قسمت قبل، فرض کردیم که نمونه های $< x_1 \dots x_m >$ ثابتند. تا بتوان داده‌ها را فقط با مقدار هدفشان، d_i بررسی کرد. با وجود اینکه می‌توانستیم فرض دیگری در این تعریف مسئله‌ی جدید داشته باشیم، بیایید با همین فرض قبلی ادامه دهیم تا نشان دهیم این چنین فرض‌هایی در نتیجه‌ی حاصل اثری ندارند. بنابراین فرض می‌کنیم که x_i و d_i متغیر های تصادفی هستند و هر نمونه‌ی آموزشی مستقل ایجاد شده است پس می‌توانیم P(D|h) را به صورت زیر بنویسیم:

$$P(D|h) = \prod_{i=1}^{m} P(x_i, d_i|h) \tag{6.7}$$

باز هم فرض می‌کنیم که احتمال مواجهه با هر نمونه مثل x_i مستقل از h است. برای مثال، احتمال اینکه در مجموعه‌ی آموزشی بیمار x_i را داشته باشیم مستقل از فرضیه‌ی ما درباره‌ی احتمال زنده ماندن است (با این وجود البته احتمال زنده ماندن d_i خیلی به h مربوط نیست، ارتباط بین مجموعه‌ی آموزشی و فرضیه انکار ناشدنی است). زمانی که x از h مستقل باشد می‌توانیم رابطه‌ی بالا به رابطه‌ی زیر ساده کنیم، (با استفاده از قانون جدول ۶.۱)،

$$P(D|h) = \prod_{i=1}^{m} P(x_i, d_i|h) = \prod_{i=1}^{m} P(d_i|h, x_i) P(x_i) \tag{6.8}$$

حال احتمال $P(d_i|h, x_i)$ یا احتمال مشاهده‌ی $d_i = 1$ برای تک نمونه‌ی x_i با فرض اینکه فرضیه‌ی h درست است چیست؟ با توجه به اینکه h فرضیه‌ی ما از تابع هدفی است که احتمالات را محاسبه می‌کند، $P(d_i = 1|h, x_i) = h(x_i)$ و در کل،

$$P(d_i|h, x_i) = \begin{cases} h(x_i) & if\ d_i = 1 \\ \left(1 - h(x_i)\right) & if\ d_i = 0 \end{cases} \tag{6.9}$$

برای جایگزینی این رابطه در رابطه‌ی ۶.۸ برای P(D|h) بیایید ابتدا این رابطه را به فرم ریاضی‌وار تری بنویسیم،

$$P(d_i|h, x_i) = h(x_i)^{d_i} \left(1 - h(x_i)\right)^{1-d_i} \tag{6.10}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که دو رابطه‌ی ۶.۹ و ۶.۱۰ هم ارزند. توجه داشته باشید که زمانی که $d_i = 1$ عبارت دوم رابطه‌ی ۶.۱۰، $\left(1 - h(x_i)\right)^{1-d_i}$ مساوی یک می‌شود بنابراین خواهیم داشت که $P(d_i = 1|h, x_i) = h(x_i)^{d_i}$ که هم ارز حالت اول رابطه‌ی ۶.۹ است، به طور مشابه می‌توان نشان داد که برای $d_i = 0$ نیز دو رابطه با هم، هم ارزند.

می‌توان از رابطه‌ی ۶.۱۰ برای جایگزینی $P(d_i|h, x_i)$ در رابطه‌ی ۶.۸ استفاده کرد،

$$P(D|h) = \prod_{i=1}^{m} h(x_i)^{d_i} \left(1 - h(x_i)\right)^{1-d_i} P(x_i) \tag{6.11}$$

حال می‌توانیم رابطه‌ی محتمل‌ترین فرضیه را بنویسیم،

$$h_{ML} = \arg\max_{h \in H} \prod_{i=1}^{m} h(x_i)^{d_i} \left(1 - h(x_i)\right)^{1-d_i} P(x_i)$$

جمله‌ی آخری مستقل از h است و می‌توان آن‌را حذف کرد،

$$h_{ML} = \arg\max_{h \in H} \prod_{i=1}^{m} h(x_i)^{d_i} \left(1 - h(x_i)\right)^{1-d_i} \quad (6.12)$$

عبارت سمت راست رابطه‌ی ۶.۱۲ را می‌توان در تعمیم توزیع دو جمله ای در جدول ۵.۳ دید. عبارت رابطه‌ی 6.12 احتمال ظهور برآمد $< d_1 \dots d_m >$ را با فرض اینکه هر سکه‌ی x_i احتمال شیر آمدن $h(x_i)$ را داشته باشد را نشان می‌دهد. توجه داشته باشید که توزیع دو جمله ای که در جدول ۵.۳ آمد مشابه این رابطه است، اما فرض دیگری نیز دارد، احتمال شیر آمدن برای تمامی سکه‌ها را مساوی فرض می‌کند $(h(x_i) = h(x_j), \forall i, j)$. اما در هر دو حالت فرض می‌کنیم که برآمد پرتاب سکه‌ها ناسازگارند، فرضی که در تعریف مسئله فعلی ما نیز صدق می‌کند.

مشابه گذشته، کار با لگاریتم محتمل بودن راحت‌تر از خود محتمل بودن است پس داریم:

$$h_{ML} = \arg\max_{h \in H} \sum_{i=1}^{m} d_i ln h(x_i) + (1 - d_i) \ln\left(1 - h(x_i)\right) \quad (6.13)$$

رابطه‌ی ۶.۱۳ کمیتی را نشان می‌دهد که برای پیدا کردن محتمل‌ترین فرضیه در تعریف مسئله‌ی فعلی ماکزیمم می‌کنیم. این نتیجه مشابه نتیجه‌ی قبلی ما در مینیمم کردن مجموع خطای مربعی محتمل‌ترین فرضیه در تعریف مسئله‌ی قبلی است. به شباهت بین رابطه‌ی 6.13 و فرم کلی تابع آنتروپی $-\sum_i p_i log p_i$ که در فصل ۳ آمد توجه کنید. بخاطر این شباهت، قرینه‌ی عبارت بالا گاهی آنتروپی دورگه[1] نامیده می‌شود.

۶.۵.۱ شیب نزول برای پیدا کردن محتمل‌ترین فرضیه در یک شبکه‌ی عصبی

در بالا نشان دادیم که با ماکزیمم کردن کمیت رابطه‌ی ۶.۱۳ محتمل‌ترین فرضیه بدست خواهد آمد. بیایید این کمیت را با اختصار G(h,D) نشان دهیم. در این بخش قانونی برای آموزش وزن‌ها[2] برای شبکه های عصبی بدست خواهیم آورد که G(h,D) را توسط روش شیب نزول ماکزیمم می‌کند.

همان طور که در فصل ۴ نیز بحث شد، گرادیان G(h,D) توسط بردار مشتق‌های جزئی G(h,D) نسبت به وزن‌های مختلف شبکه که فرضیه‌ی h را مشخص می‌کند ایجاد می‌شود (برای توضیح کامل درباره‌ی جزئیات جستجوی شیب نزول و واژگان بکار رفته به فصل ۴ مراجعه کنید). در این قسمت، مشتق جزئی G(h,D) نسبت به وزن w_{jk} که از واحد k ام به واحد j ام است به فرم زیر است:

---

[1] cross entropy
[2] weight training

$$\frac{\partial G(h,D)}{\partial \mathrm{w_{jk}}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial G(h,D)}{\partial h(x_i)} \frac{\partial h(x_i)}{\partial w_{jk}}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(d_i ln h(x_i) + (1-d_i)\ln\big(1-h(x_i)\big))}{\partial h(x_i)} \frac{\partial h(x_i)}{\partial w_{jk}}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{d_i - h(x_i)}{\partial h(x_i)(1-h(x_i))} \frac{\partial h(x_i)}{\partial w_{jk}} \tag{6.14}$$

برای ساده نگه داشتن محاسبات، فرض کنید که شبکه‌ی عصبی ما از یک لایه واحد سیگموید تشکیل شده و در این حالت داریم که

$$\frac{\partial h(x_i)}{\partial w_{jk}} = \sigma'(x')x_{ijk} = h(x_i)\big(1-h(x_i)\big)x_{ijk}$$

در این رابطه x_{ijk}، k امین ورودی به واحد j برای i امین نمونه‌ی آموزشی است، و σ'(x) مشتق تابع سیگموید است (به فصل ۴ رجوع کنید). بالاخره، این رابطه را در رابطه‌ی ۶.۱۴ جایگذاری می‌کنیم و رابطه ای برای مؤلفه های گرادیان بدست می‌آوریم،

$$\frac{\partial G(h,D)}{\partial \mathrm{w_{jk}}} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{m}} \big(\mathrm{d_i} - \mathrm{h(x_i)}\big)\mathrm{x_{ijk}}$$

چون بیشتر به دنبال ماکزیمم P(D|h) هستیم تا مینیمم به جای شیب نزول از جستجوی شیب صعود[1] استفاده می‌کنیم. در هر حلقـه جسـتجو بردار توسط قانون زیر به سمت گرادیان تصحیح می‌شود.

$$w_{jk} \leftarrow w_{jk} + \Delta w_{jk}$$

که داریم،

$$\Delta w_{jk} = \eta \sum_{i=1}^{m} \big(d_i - h(x_i)\big)x_{ijk} \tag{6.15}$$

و در این رابطه نیز η مقدار کوچک و مثبت است که اندازه‌ی قدم‌ها در جستجوی شیب صعود را مشخص می‌کند.

جالب است که این قانون تغییر وزن‌ها را با قانون تغییر وزن الگوریتم Backpropagation که مجموع خطای مربعی بین پیش بینی و مقدار اصلی را مینیمم می‌کرد مقایسه کنیم. قانون تغییر وزن برای واحد های خروجی در Backpropagation با نشانه گذاری این فصل به شکل زیر است،

$$w_{jk} \leftarrow w_{jk} + \Delta w_{jk}$$

---

[1] gradient ascent

که در آن

$$\Delta w_{jk} = \eta \sum_{i=1}^{m} h(x_i)(1-h(x_i))(d_i - h(x_i))x_{ijk}$$

توجه دارید که این رابطه جز در جمله‌ی $h(x_i)(1-h(x_i))$ که از تابع سیگموید ناشی شده کاملاً شبیه رابطه‌ی ۶.۱۵ است.

خلاصه اینکه، این دو قانون تغییر وزن هر دو در تعریف مسئله‌ی خودشان به سمت محتمل‌ترین فرضیه همگرا می‌شوند. قانونی که مجموع خطا های مربعی را مینیمم می‌کند با فرض اینکه خطا های داده های آموزشی را می‌توان با توزیع نرمال مدل سازی کرد به دنبال محتمل‌ترین فرضیه می‌گردد. قانونی که آنتروپی دورگه را مینیمم می‌کند با فرض اینکه مقادیر منطقی مشاهده شده احتمالی (و نه قطعی) هستند به دنبال محتمل‌ترین فرضیه برای تابع پیش بینی احتمال بر حسب نمونه‌ها می‌گردد.

۶.۶ قانون کمترین طول توضیح[1]

با توجه به آنچه در فصل ۳ درباره‌ی تیغ Ocam گفته شد، یک بایاس استقرایی متداول، به فرم "توضیحی که کوتاه تر است را در مورد داده های مشاهده شده قبول کن" است. در آن فصل درباره‌ی ضرر های توضیحات بلند با توجه به تیغ Ocam استدلال کردیم. در اینجا با دیدی بیزی به این موضوع می‌پردازیم و قانونی مشابه به نام قانون کمترین طول توضیح (MDL) را بررسی خواهیم کرد.

انگیزه‌ی ایجاد قانون کمترین طول توضیح تفسیر تعریف h_{MAP} با مفاهیم اولیه‌ی تئوری اطلاعات است. دوباره تعریف نه چندان ناآشنای h_{MAP} را به خاطر بیاورید.

$$h_{MAP} = \arg\max_{h \in H} P(D|h)P(h)$$

این رابطه را می‌توان به صورت معادل با log_2 آن نیز نشان داد،

$$h_{MAP} = \arg\min_{h \in H} -\log_2 P(D|h) - \log_2 P(h) \qquad (6.16)$$

جالب است که رابطه‌ی ۶.۱۶ را می‌توان طوری تفسیر کرد که فرضیه های کوتاه‌تر ارجح‌ترند، با فرض اینکه یک طرح نمایش خاص برای کد کردن فرضیه‌ها و داده‌ها استفاده کنیم. برای توضیح این، بیایید ابتدا یک نتیجه‌ی اساسی تئوری اطلاعات را معرفی کنیم: مسئله‌ی طراحی کدی برای ارسال پیام‌های تصادفی، را که در آن احتمال ارسال پیام i مقدار p_i است را در نظر بگیرید. در اینجا علاقه‌ی ما به فشرده‌ترین کد ممکن است؛ به عبارت دیگر علاقه‌ی ما به کدی است که امید تعداد بیت‌هایی که باید ارسال شوند تا یک پیام تصادفی فرستاده شود مینیمم کند. واضح است که برای مینیمم کردن امید طول کد ارسالی باید کد های کوتاه تر را به پیام‌هایی اختصاص دهیم که احتمال بیشتری دارند. (Shannon and Weaver 1949) نشان دادند که کد بهینه (کدی که امید تعداد بیت‌های ارسالی را مینیمم می‌کند) به پیام i، $\log_2 p_i$ بیت برای کد کردن اختصاص می‌دهد. به این تعداد بیت که برای کد کردن پیام i توسط کد C لازم است طول توضیح پیام i بر اساس C نیز می‌گویند و با $L_C(i)$ آن‌را نشان می‌دهند.

---

[1] Minimum description length

بیایید حالا رابطه‌ی ۶.۱۶ را با توجه به نتیجه‌ی بالا از تئوری کد سازی بررسی کنیم.

- $-\log_2 P(h)$ اندازه‌ی توضیح h بر اساس کد بهینه‌ی تمامی فضای فرضیه ای H است. به عبارت دیگر، این مقدار اندازه‌ی توضیحات فرضیه‌ی h با استفاده از نمایش بهینه است. در نماد گذاری فعلی $L_{C_H}(h) = -\log_2 P(h)$، که در آن C_H کد بهینه برای کد کردن فضای فرضیه ای H است.
- $-\log_2 P(D|h)$ اندازه‌ی توضیح داده های آموزشی D با معلوم بودن h توسط کد بهینه است. در نماد گذاری فعلی $L_{C_{D|h}}(D|h) = -\log_2 P(D|h)$، که در آن $C_{D|h}$ کد بهینه برای توضیح داده های D با فرض اینکه فرستنده و گیرنده هر دو مطلع از h هستند است.
- بنابراین می‌توانیم رابطه‌ی ۶.۱۶ را برای تعریف h_{MAP} بازنویسی کنیم و بگوییم h_{MAP} فرضیه ای مثل h است که مجموع طول توضیحات فرضیه‌ها به علاوه‌ی طول توضیحات داده‌ها با معلوم بودن فرضیه را مینیمم می‌کند.

$$h_{MAP} = \arg\min_{h} L_{C_H}(h) + L_{C_{D|h}}(D|h)$$

در این رابطه C_H و $C_{D|h}$ به ترتیب کد های بهینه برای H و D با معلوم بودن h هستند.

قانون کمترین طول توضیح (MDL) توصیه می‌کند که فرضیه‌هایی را انتخاب کنیم که مجموع این دو طول توضیح را حداقل کنند. البته برای بکار بردن این قانون در عمل باید کد سازی یا نمایش خاصی را که با عمل یادگیری متناسب است انتخاب کنیم. با فرض اینکه ما از کد های C_1 و C_2 برای نمایش فرضیه‌ها و داده‌ها با معلوم بودن فرضیه استفاده می‌کنیم، می‌توان MDL را به صورت زیر بیان کرد،

قانون کمترین طول توضیح: فرضیه‌ی h_{MDL} را انتخاب کن،

$$h_{MDL} = \arg\min_{h\in H} L_{C_1}(h) + L_{C_2}(D|h) \qquad (6.17)$$

بررسی بالا نشان می‌دهد که اگر ما C_1 را برای کد سازی بهینه‌ی فرضیه‌ها، C_H، و C_2 را برای کد سازی بهینه‌ی داده‌ها، $C_{D|h}$، انتخاب کنیم داریم $h_{MDL} = H_{MAP}$.

به صورت مفهومی، می‌توان به قانون MDL به فرم ترجیح متد های کوتاه‌تر برای کد سازی دوباره‌ی داده های آموزشی نگاه کرد که در آن هر دو معیار اندازه‌ی فرضیه و هزینه‌ی اضافی کد سازی داده‌ها به شرط معلوم بودن فرضیه در نظر گرفته می‌شود.

بیایید مثالی را در نظر بگیریم. فرض کنید قصد داریم از قانون MDL برای مسئله‌ی یادگیری درخت‌های تصمیم از داده های آموزشی‌ای استفاده کنیم. برای نمایش فرضیه C_1 و داده های C_2 چه نمایشی را باید در نظر بگیریم؟ برای C_1 می‌توان به طور طبیعی یکی از کد سازی‌های واضح درخت تصمیم، که در آن طول توضیح با افزایش تعداد گره های درخت و تعداد یال‌ها افزایش می‌یابد را انتخاب کرد. اما چگونه باید با معلوم بودن یک درخت فرضیه‌ی خاص مجموعه‌ی داده های C_1 را کد کرد. برای ساده نگه داشتن موضوع، فرض کنید که سری نمونه های $< x_1 \dots x_n >$ برای فرستنده و گیرنده معلوم باشد، پس تنها چیز باقیمانده برای ارسال دسته بندی‌های $< f(x_1) \dots f(x_n) >$ است. (توجه دارید که هزینه‌ی ارسال خود نمونه‌ها از درستی فرضیه مستقل است، پس به هر حال تأثیری بر انتخاب h_{MDL} ندارد). حال اگر دسته بندی‌های $< f(x_1) \dots f(x_n) >$ همان پیش بینی‌های فرضیه باشد، دیگر نیازی به ارسال اطلاعات در مورد نمونه‌ها نیست (گیرنده می‌تواند این مقادیر را با فرضیه ای که دریافت کرده محاسبه کند). پس بنابراین طول توضیحات لازم

با داشتن فرضیه در این حالت صفر است. در چنین شرایطی اگر نمونه‌هایی توسط h اشتباه دسته بندی شده باشند، لازم است پیغامی مبنی بر دسته بندی اشتباه این نمونه‌ها (طول این پیغام حداکثر $\log_2 n$ بیت خواهد بود) را به همراه دسته بندی درست آن‌ها ارسال کنیم (این کار را می‌توان با پیغامی با حداکثر طول $\log_2 k$ انجام داد که در آن k تعداد دسته بندی‌های ممکن هر نمونه است). در چنین شرایطی فرضیه‌ی h_{MDL} تحت کد سازی C_1 و C_2 فرضیه ای است که کمترین مجموع طول توضیح را لازم داشته باشد.

بنابراین قانون MDL راهی برای ارزیابی پیچیدگی فرضیه‌ها با تعداد اشتباه های فرضیه ارائه می‌کند. ممکن است این معیار فرضیه ای کوتاه‌تر را که اشتباهات کمی دارد را نسبت به یک فرضیه بلند تر که اشتباهی ندارد ترجیح دهد. MDL از این نظر، متدی مناسب برای برخورد با مسئله‌ی overfit است.

(Quinlar and Rivest 1989) آزمایشاتی را با استفاده از قانون MDL برای تشخیص بهترین اندازه‌ی درخت تصمیم انجام داده‌اند. آن‌ها گزارش داده‌اند که متد مبتنی بر MDL درخت‌هایی را ایجاد می‌کند که دقتی قابل مقایسه با درخت‌های خروجی الگوریتم‌های فصل ۳ دارند. (Mehta et al. 1995) نیز روش دیگری مبتنی بر MDL برای هرس درخت تصمیم ارائه می‌کند و آزمایش‌هایی را تشریح کرده که در آن روش مبتنی بر MDL نتایج قابل مقایسه ای با روش‌های معمول را می‌دهد.

چه نتیجه گیری‌ای را باید از بررسی قانون کمترین طول توضیح بگیریم؟ آیا این اثباتی بر این که تمامی فرضیه های کوتاه‌تر ارجحند است؟ خیر. بلکه ما اثبات کردیم که اگر نمایش فرضیه طوری انتخاب شود که کد سازی فرضیه‌ی h، $-\log_2 P(h)$ باشد و اگر کد سازی استثنا به گونه ای باشد که طول کد D با شرط معلوم بود h، $-\log_2 P(h|D)$، آنگاه قانون MDL فرضیه ای MAP خروجی خواهد داد. با این وجود، برای نشان دادن برقراری چنین شرطی باید تمامی احتمالات اولیه‌ی P(h) و P(D|h) را داشته باشیم. هیچ دلیلی برای این وجود ندارد که باور داشته باشیم که MDL برای هر کد سازی دلخواه C_1 و C_2 بر قرار است. ممکن گاهی برای طراح انسانی مشخص کردن نمایشی خاص برای دانش در مورد احتمالات نسبی فرضیه‌ها راحت‌تر از نمایش کامل احتمال دقیق هر یک از فرضیه‌ها باشد. توصیفات به کار رفته در ادبیات کاربرد MDL در مسائل یادگیری کاربردی گاهی شامل معیارهایی می‌شود که فرم خاصی از کد سازی C_1 و C_2 را توجیه می‌کند.

۶.۷ دسته بندی کننده‌ی بهینه‌ی بیز [1]

تا اینجا به سؤال "محتمل‌ترین فرضیه با داشتن داده های آموزشی کدام است؟" پرداختیم، در واقع، این سؤال بیشتر شبیه این سؤال است که "محتمل‌ترین دسته بندی کننده نمونه های جدید با داشتن داده های آموزشی کدام است؟". با وجود اینکه ممکن است به نظر برسد که این سؤال دوم را می‌توان با اعمال فرضیه‌ی MAP به نمونه های جدید جواب داد، کاری بهتر ممکن است.

برای ایجاد شهود فضای فرضیه ای را در نظر بگیرید که سه فرضیه‌ی h_1، h_2 و h_3 را شامل می‌شود. فرض کنید که احتمال ثانویه‌ی این فرضیه با داده های آموزشی به ترتیب 4. و 3. و 3. است. بنابراین، h_1 فرضیه‌ی MAP است. حال فرض کنید که نمونه‌ی جدید x به ما داده می‌شود که توسط h_1 مثبت و توسط دو فرضیه‌ی h_2 و h_3 منفی دسته بندی می‌شود. با در نظر گرفتن تمامی فرضیه‌ها نمونه‌ی x به احتمال 4. مثبت است (احتمال مربوط به فرضیه‌ی h_1)، و به احتمال 6. منفی است. محتمل‌ترین دسته بندی (منفی) در این مثال با دسته بندی MAP متفاوت است.

---

[1] bayes optimal classifier

در کل محتمل‌ترین دسته بندی نمونه‌ی جدید از ترکیب پیش بینی‌های همه‌ی فرضیه‌ها بدست می‌آید، فقط هر فرضیه به اندازه‌ی احتمال ثانویه‌اش در این دسته بندی تأثیر گذار است. اگر دسته بندی ممکن نمونه‌ی جدید v_j عضو مجموعه‌ی V باشد، $P(v_j|D)$، احتمال اینکه دسته بندی v_j برای نمونه‌ی جدید درست باشد به صورت زیر است،

$$P\left(v_j\middle|D\right)=\sum_{h_j\in H}P\left(v_j\middle|h_i\right)P(h_i|D)$$

دسته بندی ی بهینه‌ی نمونه‌ی جدید مقدار v_j است که با آن $P\left(v_j\middle|D\right)$ ماکزیمم می شود،

دسته بندی ی بهینه‌ی بیز:

$$\arg\max_{\mathrm{v_j\in V}}\sum_{h_i\in H}P\left(v_j\middle|h_i\right)P(h_i|D) \qquad (6.18)$$

برای شهود در مثال بالا، مجموعه‌ی دسته بندی‌های نمونه‌ی جدید $V=\{\oplus,\ominus\}$ است و

$$P(h_1|D)=.4\,,P(\ominus\,|h_1)=0,P(\oplus\,|h_1)=1$$

$$P(h_2|D)=.3\,,P(\ominus\,|h_2)=1,P(\oplus\,|h_2)=0$$

$$P(h_3|D)=.3\,,P(\ominus\,|h_3)=1,P(\oplus\,|h_3)=0$$

بنابراین،

$$\sum_{h_i\in H}P(\oplus\,|h_i)P(h_i|D)=.4$$

$$\sum_{h_i\in H}P(\ominus\,|h_i)P(h_i|D)=.6$$

و

$$\arg\max_{\mathrm{v_j\in\{\oplus,\ominus\}}}\sum_{h_i\in H}P\left(v_j\middle|h_i\right)P(h_i|D)=\ominus$$

هر سیستمی که نمونه های جدید را با رابطه‌ی ۶.۱۸ دسته بندی کند دسته بندی کننده‌ی بهینه‌ی بیز[۱] یا یادگیر بهینه‌ی بیز[۲] نامیده می‌شود. هیچ متد دسته بندی دیگری با همان فضای فرضیه ای و همان دانش اولیه نمی‌تواند به طور متوسط بازده بهتری داشته باشد. این متد احتمال اینکه نمونه‌ی جدید درست دسته بندی شود را با معلوم بودن داده های موجود و فضای فرضیه ای احتمالات اولیه‌ی فرضیه‌ها حداکثر می‌کند.

[1] Bayes optimal classifier
[2] Bayes optimal learner

برای مثال در یادگیری مفاهیم حقیقی مقدار با استفاده از فضای ویژه، همان طور که در قسمت قبلی هم گفته شد، دسته بندی بهینه‌ی بیز نمونه های جدید با دادن وزن (احتمال ثانویه‌ی فرضیه) و رای گیری بین اعضای فضای ویژه انجام می‌گرفت.

یکی از ویژگی‌های عجیب دسته بندی کننده‌ی بهینه‌ی بیز این است که پیش بینی‌هایی که انجام می‌دهد ممکن است فرضیه ای را تشکیل دهد که حتی در H موجود نیست. تصور کنید که از رابطه‌ی ۶.۱۸ برای دسته بندی تمامی نمونه های X استفاده کرده‌ایم. این دسته بندی نمونه‌ها که بدین صورت تعریف می‌شود الزاماً با فرضیه ای مثل h در H سازگار نیست. یکی از روش‌های نگاه به این وضعیت تصور دسته بندی کننده بهینه‌ی بیز به عنوان عاملی است که فضای فرضیه ای H′ را به طرز موثری، که با فضای فرضیه ای H (که قضیه بیز روی آن اعمال شده) فرق دارد، در نظر می‌گیرد. در کل، H′ به صورت موثر فرضیه‌هایی که مقایسه ای خطی بین ترکیبات پیش بینی‌های فرضیه های مختلف H می‌کنند را شامل می‌شود.

۶.۸ الگوریتم گیبس

با وجود اینکه دسته بندی کننده‌ی بهینه‌ی بیز بهترین عملکرد ممکن را با داشتن داده های آموزشی دارد، اما اعمال آن هزینه بر است. این هزینه در محاسبه‌ی احتمال ثانویه‌ی تمامی فرضیه های H و ترکیب پیش بینی‌هایشان برای هر نمونه‌ی جدید است.

یک روش جایگزین، ولی کمتر بهینه الگوریتم گیبس (رجوع کنید به Opper and Haussler 1991) است، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

۱. فرضیه ای مثل h از H به طور تصادفی و با توزیع احتمالات ثانویه انتخاب کن.
۲. از h برای دسته بندی نمونه‌ی جدید بعدی استفاده کن.

زمانی که نمونه‌ی جدیدی برای دسته بندی ارائه می‌شود، الگوریتم گیبس به سادگی فرضیه ای به طور تصادفی و با توزیع احتمالات ثانویه انتخاب می‌کند و دسته بندی آن‌را به عنوان خروجی می‌دهد. جالب‌تر اینکه، می‌توان نشان داد که در شرایطی امید تعداد دسته بندی‌های غلط این الگوریتم حداکثر دو برابر امید خطای دسته بندی کننده‌ی بهینه‌ی بیز است (Haussler 1994). به عبارت دقیق‌تر، مقدار امید برای تمامی مفاهیم هدف تصادفی و توزیع احتمال اولیه‌ی یادگیر محاسبه شده. در چنین شرایطی، مقدار امید خطای الگوریتم گیبس دو برابر بد تر از مقدار امید خطای دسته بندی کننده‌ی بهینه‌ی بیز است.

این نتیجه معنای جالبی در مسائل یادگیری مفهوم که قبلاً در موردشان بحث کردیم دارد. در کل، این نتیجه نشان می‌دهد که اگر یادگیر احتمالات اولیه H را یکسان فرض کند، و مفاهیم هدف نیز در واقع با چنین احتمالی انتخاب شوند، آنگاه دسته بندی نمونه‌ی بعدی با فرضیه ای که به طور تصادفی از فضای ویژه انتخاب می‌شود (با توزیعی یکنواخت)، حداکثر دو برابر امید خطای دسته بندی کننده‌ی بهینه‌ی بیز، امید خطا خواهد داشت. دوباره، با نمونه ای از بررسی بیزی یک الگوریتم غیر بیزی طرف هستیم که این بررسی میزان کارایی آن الگوریتم را مشخص می‌کند.

۶.۹ دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز

یکی از متد های پر کاربرد یادگیری بیزی، یادگیر ساده‌ی بیز[1] است که معمولاً دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز[2] نیز نامیده می‌شود. در بعضی کاربردها کارایی این متد قابل مقایسه با شبکه های عصبی و یادگیری درختی است. در این بخش دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم و در بخش بعدی آن‌را در مسئله یادگیری‌ای واقعی دسته بندی متون زبان‌های طبیعی به کار می‌بریم.

دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز در کار های یادگیری‌ای به کار می‌رود که در آن x با عطفی از مقادیر ویژگی‌ها مشخص می‌شود و تابع هدف f(x) می‌تواند هر مقدار از مجموعه‌ی V باشد. مجموعه ای از نمونه های آموزشی تابع هدف و نمونه ای جدید که با ویژگی‌هایش توصیف شده به یادگیر داده می‌شود، $< a_1, a_2 \dots a_n >$ و از آن خواسته می‌شود که مقدار تابع هدف یا دسته بندی تابع هدف را برای این نمونه‌ی جدید پیش بینی کند.

روش بیزی برای دسته بندی نمونه‌ی جدید، دسته بندی آن بر اساس محتمل‌ترین مقدار تابع هدف، v_{MAP} است با داشتن نمونه های $< a_1, a_2 \dots a_n >$ است.

$$v_{MAP} = \arg\max_{v_j \in V} P(v_j | a_1, a_2 \dots a_n)$$

با استفاده از قضیه‌ی بیز این رابطه را بازنویسی می‌کنیم،

$$v_{MAP} = \arg\max_{v_j \in V} \frac{P(a_1, a_2 \dots a_n | v_j) P(v_j)}{P(a_1, a_2 \dots a_n)}$$

$$= \arg\max_{v_j \in V} P(a_1, a_2 \dots a_n | v_j)\, P(v_j) \qquad (6.19)$$

حال می‌توانیم دو عبارت رابطه‌ی ۶.۱۹ را بر اساس داده های آموزشی تخمین بزنیم. تخمین مقادیر $P(v_j)$ با شمارش تعداد تکرار مقدار های ویژگی هدف در بین داده های آموزشی بسیار ساده است. با این وجود، تخمین عبارتی با فرم $P(a_1, a_2 \dots a_n | v_j)$ بدین صورت ممکن نیست، مگر اینکه مجموعه‌ی داده های آموزشی مان بسیار بزرگ باشد. مشکل اینجاست که تعداد این چنین عبارت‌هایی مساوی تعداد نمونه های ممکن ضربدر تعداد مقادیر ممکن تابع هدف است. بنابراین لازم است که هر نمونه ممکن در فضای نمونه ای چندین بار مشاهده شود تا تخمین احتمال قابل اطمینان باشد.

دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز بر اساس یک فرض ساده سازی است، مقدار ویژگی‌ها با معلوم بودن مقدار هدف مستقلند. به عبارت دیگر، فرض‌هایی که با داشتن مقدار هدف نمونه می‌توان زد، احتمال مشاهده‌ی عطف $a_1, a_2 \dots a_n$ فقط وابسته به احتمال تک تک این نمونه‌هاست: $P(a_1, a_2 \dots a_b | v_j) = \prod_i P(a_i | v_i)$. با جایگذاری این رابطه در رابطه‌ی ۶.۱۹ به دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز می‌رسیم.

دسته بندی کننده‌ی ساده بیز:

[1] Naïve bayes learner
[2] Naïve bayes classifier

$$v_{NB} = \arg\max_{v_j \in V} P(v_j) \prod_i P(a_i|v_i) \tag{6.20}$$

در این رابطه v_{NB} نماد مقدار هدفی خروجی دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز است. توجه دارید که در یک دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز تعداد جملات متمایز $P(a_i|v_i)$ موجود، که باید بر اساس داده های آموزشی تخمین زده شود، ضرب تعداد مقادیر ویژگی‌ها و تعداد مقادیر هدف است، این عدد در نگاه اول، نسبت به تعداد جملات ممکن $P(a_1, a_2 \dots a_b|v_j)$ بسیار کوچکتر است.

به طور خلاصه، متد یادگیری ساده‌ی بیز مرحله ای دارد که در آن جملات مختلف $P(a_i|v_i)$ و $P(v_j)$ بر اساس تعداد تکرارشان در میان نمونه های آموزشی تخمین زده می‌شوند. مجموعه‌ی این تخمین‌ها تعیین کننده‌ی فرضیه‌ی تخمینی خواهد بود. این فرضیه، برای دسته بندی نمونه های جدید رابطه‌ی ۶.۲۰ را بکار خواهد بست. هرگاه که فرض استقلال شرطی ارضا می‌شود، و دسته بندی ساده‌ی بیز v_{NB} همان دسته بندی MAP خواهد بود.

یکی از تفاوت‌های جالب دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز و دیگر متد های یادگیری بحث شده، این است که این روش جستجویی صریح در میان فرضیه های ممکن انجام نمی‌دهد (در چنین شرایطی، فضای فرضیه‌ها همان فضای مقادیر ممکن قابل نسبت به متغیر $P(v_j)$ و $P(a_i|v_j)$ است). در مقابل، فرضیه‌ها بدون جستجو و فقط با شمارش تعداد تکرار ترکیب‌های مختلف داده در میان نمونه های آموزشی ایجاد می‌شوند.

۶.۹.۱ مثالی توضیحی

بیایید دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز را به مسئله یادگیری مفهومی که در فصل یادگیری درختی مطرح شد بکار بریم: دسته بندی روزها بر اساس اینکه کسی تنیس بازی خواهد کرد یا خیر. جدول ۳.۲ مجموعه ای از ۱۴ نمونه‌ی آموزشی را برای مفهوم PlayTennis نشان می‌دهد، در اینجا روزها با ویژگی‌های Outlook، Tempereture، Humidity، و Wind توصیف می‌شوند. در اینجا از دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز و داده های آموزشی این جدول برای دسته بندی نمونه‌ی جدید زیر استفاده می‌کنیم:

<Outlook=sunny,Temperature=cool,Humidity=high,Wind=strong>

هدف در اینجا پیش بینی مقدار هدف (Yes یا No) مفهوم هدف PlayTennis برای نمونه‌ی جدید است. با مقدار گذاری رابطه‌ی ۶.۲۰ برای این کار مقدار v_{NB} به صورت زیر محاسبه می شود.

$$v_{NB} = \arg\max_{v_j \in \{yes,no\}} P(v_j) \prod_i P(a_i|v_j)$$

$$= \arg\max_{v_j \in \{yes,no\}} \begin{matrix} P(v_j)\, P(\text{Outlook} = \text{sunny}|v_j) P(\text{Temperature} = \text{cool}|v_j) \\ P(\text{Humidity} = \text{High}|v_j) P(\text{Wind} = \text{strong}|v_j) \end{matrix} \tag{6.21}$$

توجه دارید که در عبارت آخری a_i با استفاده از مقادیر ویژگی‌های نمونه‌ی جدید نوشته شده است. برای محاسبه‌ی v_{NB} به ۱۰ احتمال نیاز داریم که از روی داده های آموزشی تخمین زده می‌شوند. ابتدا، احتمال مقادیر مختلف هدف، که می‌توان آن‌را به سادگی با شمارش تکرار مقادیر از نمونه های آموزشی استخراج کرد.

$$P(PlayTennis = yes) = \frac{9}{14} = .64$$

$$P(PlayTennis = no) = \frac{5}{14} = .36$$

به طور مشابه می‌توان احتمالات شرطی را تخمین زد. برای مثال، برای Wind = strong داریم،

$$P(Wind = strong|PlayTennis = yes) = \frac{3}{9} = .33$$

$$P(Wind = strong|PlayTennis = no) = \frac{3}{5} = .60$$

با استفاده از تخمین‌های احتمالات مذکور و تخمین مشابه دیگر ویژگی‌ها، v_{NB} را بر اساس رابطه‌ی ۶.۲۱ به صورت زیر محاسبه می‌کنیم،

$$P(yes)\ P(sunny|yes)\ P(cool|yes)\ P(high|yes)\ P(strong|yes) = \ .0053$$

$$P(no)\ P(sunny|no)\ P(cool|no)\ P(high|no)\ P(strong|no) = \ .0053$$

دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز احتمالات تخمینی بر اساس داده های آموزشی موجود مقدار PlayTennis = no را به این نمونه‌ی جدید اختصاص می‌دهد. علاوه بر این، با نرمالیزه کردن کمیت‌های بالا (طوری که جمعشان یک شود) می‌توان احتمال شرطی اینکه مقدار تابع هدف no باشد را حساب کرد. برای مثال فعلی، این احتمال مقدار $.795 = \frac{0206}{.0206+.0053}$. است.

۶.۹.۱.۱ تخمین احتمالات

تا به حال، احتمالات را با نسبت تعداد مشاهده‌ی اتفاق به کل حالات را تخمین زدیم. برای مثال، در مثال بالا مقدار P(Wind=strong|PlayTennis=no) را با نسبت $\frac{n_c}{n}$ تخمین زدیم، در این نسبت n=5 تعداد نمونه های آموزشی PlayTennis=no و $n_c = 3$ تعداد نمونه‌هایی بود که در آن Wind=strong بود.

با وجود اینکه در بسیاری از موارد این نسبت تخمین خوبی از احتمال به ما می‌دهد، اما زمانی که n_c بسیار کوچک است تخمین ضعیف خواهد بود. برای درک این مشکل، فرض کنید که در حقیقت مقدار احتمال P(Wind=strong|PlayTennis=no) برابر با 08. باشد و در مجموعه‌ی نمونه های ما فقط ۵ نمونه مقدار PlayTennis=no را داشته باشند. با این فرض‌ها، n_c به احتمال زیادی صفر خواهد بود. این حقیقت دو مشکل ایجاد می‌کند. ابتدا اینکه $\frac{n_c}{n}$ تخمینی بایاس دار و دست کم گیرنده از مقدار احتمال خواهد بود. دوم اینکه زمانی که تخمین این احتمال صفر است باعث می‌شود که تمامی نمونه‌هایی که در آن‌ها Wind=strong است جزو دسته‌ی دیگر اطلاق شوند.

برای پرهیز از این مشکل می‌توان از روش بیزی برای تخمین احتمالات استفاده کرد، برای این کار تخمین m [1] را به فرم زیر تعریف می‌کنیم.

تخمین m احتمالات:

---

[1] m-estimate

$$\frac{n_c + mp}{n + m} \tag{6.22}$$

در این رابطه n_c و n همان مقادیر رابطه‌ی قبلی‌اند و p احتمال اولیه‌ی مقدار تخمینی است. m ثابتی که اندازه‌ی نمونه‌ی معادل[1] نامیده می‌شود. این ثابت مشخص می‌کند که مقدار احتمال به چه میزان به نمونه های آموزشی وابسته باشد. یکی از روش‌های متداول انتخاب p، بدون داشتن هیچ اطلاعات قبلی‌ای، یکنواخت گرفتن تمامی احتمالات اولیه است؛ بدین معنا که اگر ویژگی‌ای k مقدار ممکن دارد خواهیم داشت که $p = \frac{1}{k}$. برای مثال، در تخمین P(Wind=strong|PlayTennis=no) می‌دانیم که ویژگی Wind دو مقدار ممکن دارد، پس با احتمال اولیه‌ی یکنواخت خواهیم داشت که p=.5. توجه دارید که اگر m را صفر انتخاب کنیم، تخمین m معادل همان کسر ساده‌ی $\frac{n_c}{n}$ می‌شود. اگر مقادیر m و n هر دو غیر صفر باشند، حاصل تخمین m میانگین دو مقدار با وزن m خواهد بود. m ثابت اندازه‌ی نمونه‌ی معادل نامیده می‌شود از این رو که رابطه‌ی ۶.۲۲ را می‌توان به صورت ترکیب n مشاهده‌ی واقعی و m مشاهده‌ی مجازی (با احتمال p) در نظر گرفت.

۶.۱۰ یک مثال: یادگیری دسته بندی متون

برای تصور اهمیت کاربردی متد های یادگیری بیز، مسئله‌ی یادگیری‌ای را در نظر بگیرید که در آن نمونه‌ها متنند. برای مثال، شاید بخواهیم مفهوم هدف "مقالات خبری الکترونیکی جالب برای من" یا "صفحاتی از Web که یادگیری ماشین در آن‌ها بحث شده" را یاد بگیریم. در هر دو حالت، اگر یک کامپیوتر بتواند چنین کاری را انجام دهد می‌تواند به جای تعداد بسیاری زیادی از متون وب فقط مربوط‌ترین نتیجه جستجو روی وب را به کاربر ارائه کند.

در اینجا الگوریتمی کلی بر اساس دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز برای یادگیری دسته بندی متون ارائه می‌کنیم. جالب است که روش‌های احتمالی مثل آنچه پیش‌تر توضیح دادیم یکی از مؤثرترین الگوریتم‌های شناخته شده برای دسته بندی متون هستند. مثال‌هایی از چنین سیستم‌هایی در (Lewis 1991)، (Lang 1995) و (Joachims 1996) توصیف شده‌اند.

الگوریتم دسته بندی کننده‌ی ساده بیز که توضیح خواهیم داد با تعریف مسئله ای کلی تطابق دارد. فضای نمونه ای X را که شامل تمامی مستندات متنی (تمامی رشته کلمات و علامات با طول دلخواه) است در نظر بگیرید. به ما نمونه های آموزشی تابع هدف مجهول f(x) داده شده است، این تابع مجهول ممکن است هر یک از اعضای V باشد. هدف ما یادگیری از این نمونه های آموزشی برای پیش بینی مقدار هدف متنی جدید است. برای تصور، تابع هدف دسته بندی متون به دو دسته‌ی جذاب و غیر جذاب برای فرد بخصوص است، برای این تابع هدف مقادیر like (جذاب) و dislike (غیر جذاب) برای دسته بندی این دو مجموعه تعریف می‌شود.

دو مشکل اصلی برای کاربرد دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز در مسائل دسته بندی متن وجود دارد. اول اینکه با چه روشی یک متن دلخواه را با مقدار ویژگی‌هایی نمایش داد و دوم اینکه احتمالات لازم برای دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز را با چه روشی تخمین زد.

روش ما در نمایش متن دلخواه به طرز مشکل سازی ساده است: با داشتن یک متن، مثل همین پاراگراف، باید یک ویژگی برای هر مکان کلمه در متن تعریف کنیم و مقدار ویژگی‌ها را هم کلمات آن مکان‌ها در نظر بگیریم. بنابراین این پاراگراف ۹۷ مقدار ویژگی خواهد داشت که متناسب

[1] equivalent sample size

با ۹۷ کلمه‌ی این پاراگراف است. مقدار ویژگی اول کلمه‌ی "روش" و مقدار ویژگی دوم کلمه‌ی "ما" خواهد بود و … توجه دارید که با این روش متون بلند تعداد بیشتری ویژگی خواهند داشت. همان طور که بعداً نیز خواهیم دید، این تفاوت هیچ مشکلی ایجاد نمی‌کند.

با این نمایش برای متون، حال می‌توانیم دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز را به مسئله اعمال کنیم. بیایید به خاطر حفظ سادگی، فرض کنیم که ۷۰۰ متن آموزشی که فردی dislike دسته بندی کرده به همراه ۳۰۰ متن دیگر که like دسته بندی شده در اختیار است. حال متن جدیدی در اختیار یادگیر قرار گرفته و از وی دسته بندی این متن سؤال می‌شود. دوباره به خاطر سادگی، بیایید فرض کنیم که متن جدید پاراگراف قبلی باشد. در چنین شرایطی، اگر رابطه‌ی ۶.۲۰ را برای دسته بندی مقدار دهی کنیم خواهیم داشت که،

$$v_{NB} = \arg\max_{v_j \in \{like, dislike\}} P(v_j) \prod_{i=1}^{97} P(a_i | v_j)$$

$$\arg\max_{v_j \in \{like, dislike\}} P(v_j) P\left(a_1 = \text{"روش"} \middle| v_j\right) P\left(a_2 = \text{"ما"} \middle| v_j\right)$$

$$\dots P\left(a_{97} = \text{"نمیکند"} \middle| v_j\right)$$

به طور خلاصه، دسته بندی ساده‌ی بیز v_{NB} دسته بندی‌ای است که احتمال مشاهده‌ی کلماتی را که واقعاً در متن بوده‌اند را با توجه به فرض مستقل بودن ساده‌ی بیز ماکزیمم می‌کند. فرض مستقل بودن $P(a_1, \dots a_{97} | v_j) = \prod_1^{97} P(a_i | v_j)$ در این تعریف مسئله فرض می‌کند که احتمال هر کلمه با داشتن دسته بندی متن v_j، برای هر مکان در متن مستقل از دیگر کلمات دیگر مکان‌هاست. توجه می‌کنید که این فرض به وضوح غلت است. برای مثال، در متون ممکن است احتمال آمدن کلمه‌ی "ماشین" بعد از کلمه‌ی "یادگیری" بسیار بیشتر از دیگر کلمات باشد. با وجود این نقص مشهود فرض مستقل بودن، انتخاب دیگری جز این نداریم، زیرا که بدون این شرط تعداد جملات احتمالی‌ای که باید محاسبه شوند به شدت زیاد می‌شوند. خوشبختانه در یادگیر ساده‌ی بیز در بسیاری از موارد در مسائل دسته بندی متون بر خلاف غلت بودن فرض استقلال نتایج خوبی بدست می‌آید. (Domingos and Pazzani 1996) بررسی جالبی از این پدیده‌ی تصادفی ارائه می‌کند.

برای محاسبه‌ی v_{NB} با استفاده از رابطه‌ی بالا، نیاز داریم که احتمال جمله های $P(v_j)$ و $P(a_i = w_k | v_j)$ را محاسبه کنیم (در این مسئله w_k، kامین واژه‌ی واژگان زبان فارسی است). احتمالات جمله‌ی اول را می‌توان به سادگی و با یک نسبت ساده از نمونه های آموزشی محاسبه کرد، (در مثال فعلی P(like)=.3 و P(dislike)=.7). مثل همیشه تخمین دسته بندی احتمالات شرطی (مثل $P(a_1 = \text{"روش"} | dislike)$) مشکل ساز تر خواهد بود زیرا که باید چنین جمله‌ی احتمالی را برای هر ترکیب از متن ممکن کلمات فارسی و تابع هدف محاسبه کنیم. متأسفانه با 50,000 کلمه در واژگان زبان و ۲ حالت مقادیر هدف و ۹۷ کلمه‌ی نمونه‌ی فعلی به تقریباً محاسبه‌ی 2·97·50,000≈10,000,000 حالت نیاز خواهیم داشت.

خوشبختانه، می‌توانیم فرض استدلالی دیگری نیز که تعداد احتمالات را کم بکند به فرض‌ها پیشین اضافه کنیم. در کل، می‌توانیم احتمال بر خورد با کلمه‌ی خاص w_k (مثل "شکلات") را مستقل از مکان حضورش (مثل a_{23} یا a_{95}) در نظر بگیریم. به عبارت رسمی‌تر، ویژگی‌ها از هم مستقلند و توزیع یکسان نیز دارند، با معلوم بودن دسته بندی هدف؛ برای تمامی m،k،j،i داریم $P(a_i = w_k | v_j) = P(a_m = w_k | v_j)$. بنابراین تخمین می‌زنیم که کل مجموعه احتمالات $P(a_1 = w_k | v_j)$ ، $P(a_2 = w_k | v_j)$ … برابر با یک مقدار مستقل مثبت $P(w_k | v_j)$ باشد، یعنی این مقدار احتمال به مکان کلمه بستگی ندارد. تأثیر این فرض این است که حال فقط نیاز به محاسبه‌ی

2·50,000 جمله‌ی مستقل به فرم $P\left(w_k \middle| v_j\right)$ داریم. این مقدار هنوز زیاد است اما دیگر در حد کنترل است. توجه دارید که در شرایطی که داده های آموزشی محدود باشند، مزیت اولیه‌ی این فرض افزایش تعداد نمونه های موجود برای تخمین هر یک از احتمالات و متعاقباً دقت دسته بندی است.

برای کامل کردن طراحی الگوریتم یادگیریمان، هنوز باید متدی برای تخمین جملات احتمالات پیدا کنیم. از تخمین m، که در رابطه‌ی ۶.۲۲ آمد، و احتمالات اولیه‌ی یکنواخت و اندازه‌ی واژگان موجود برای $P(w_k, v_j)$ داریم،

$$\frac{n_k + 1}{n + |Vocabulary|}$$

در این رابطه n کل تعداد کلمات ممکن در نمونه های آموزشی است با مقدار تابع هدف v_j است، n_k تعداد تکرار کلمه‌ی w_k در میان n کلمه‌ی ممکن است و $|Vocabulary|$ نیز تعداد خالص کل کلمات (و دیگر نشانه‌های) موجود در نمونه های آموزشی است.

به طور خلاصه اینکه الگوریتم نهایی از دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز به همراه فرض استقلال کلمات از مکانشان استفاده می‌کند. الگوریتم نهایی در جدول ۶.۲ آورده شده است. توجه می‌کنید که این الگوریتم به نسبت ساده است. در طول یادگیری، زیر روال Learn-Naive-bayes-text تمامی متون آموزشی را برای استخراج تمام کلمات و نشانه های موجود در متون بررسی می‌کند و تعداد تکرارشان را در دسته بندی‌های مختلف تابع می‌شمرد تا تخمین‌های لازم را بدست آورد. سپس، برای یک متن جدید (که لازم است دسته بندی شود) فرآیند Classify-naive-bayes-text با توجه به رابطه‌ی ۶.۲۰ از این تخمین احتمالات برای محاسبه‌ی v_{NB} استفاده می‌کند. توجه دارید که کلمه که در متن جدید ظاهر شده که در متون قبلی نبوده‌اند توسط Classify-naive-bayes-text نادیده گرفته می‌شود. کد و مجموعه‌ی داده های آموزشی در آدرس http://www.cs.cmu.edu/~tom/book.html موجود است.

۶.۱۰.۱ نتیجه های تجربی

الگوریتم جدول ۶.۲ به چه میزان کارایی دارد؟ در یک آزمایش (Joachims 1996)، الگوریتم بسیار مشابهی برای دسته بندی مقالات خبری یوزنت[1] بکار رفت. دسته بندی مقاله در این مثال اسم گروه خبری مقاله در یوزنت بود. الگوریتمی که هر مقاله را پس از دسته بندی در جای اصلی خود قرار می‌دهد. در این آزمایش ۲۰ گروه خبری الکترونیکی در نظر گرفته شد (که در جدول ۶.۳ نیز آمده‌اند)، سپس 1,000 مقاله از هر گروه خبری جمع شد تا تعداد نمونه‌ها به 20,000 برسد. الگوریتم ساده‌ی بیز دو سوم از این 20,000 متن به عنوان نمونه های آموزشی آموزش داده شد و سپس کارایی الگوریتم برای یک سوم باقیمانده ارزیابی شد. از ۲۰ گروه خبری ممکن، حداکثر مقدار دسته بندی درست اتفاقی ۵٪ خواهد بود، اما دقت دسته بندی الگوریتم ۸۹٪ اندازه گیری شد. الگوریتم به کار رفته در این آزمایش فقط یک تفاوت کوچک با الگوریتم جدول ۶.۲ داشت، یک زیر مجموعه از کلمات متون به عنوان واژگان[2] در نظر گرفته شده بود. به عبارت دقیق‌تر، ۱۰۰ کلمه‌ی پرکاربرد تر واژگان در آن در نظر گرفته نشده بود (کلماتی مثل "این")، و همچنین تمامی کلماتی که کمتر از ۳ بار ظاهر شده بودند نادیده گرفته شدند. واژگان بدست آمده بدین ترتیب تقریباً 38,500 کلمه داشت.

---

[1] use net
[2] Vocabulary

نتایج چشم گیر دیگری نیز توسط دیگر روش‌های یادگیری آماری متون بدست آمده است. برای مثال، (Lang 1995) نسخه ای دیگر از الگوریتم ساده‌ی بیز را توصیف کرده و آن‌را در یادگیری مفهوم هدف "مقالات یوزنتی که من به آن‌ها علاقه دارم" به کار می‌برد. وی سیستم NewsWeeder را معرفی می‌کند، برنامه ای که به کاربران اجازه می‌دهد تا متون را بعد از خواند ارزیابی[1] کنند. سیستم NewsWeeder از این ارزیابی‌ها به عنوان نمونه های آموزشی برای پیش بینی اینکه مقاله ای برای کاربر جالب است یا خیر استفاده می‌کند، پس برنامه می‌تواند مقالاتی که پیش بینی می‌کند کاربر به خواندن آن‌ها علاقه دارد را به وی پیشنهاد کند. (Lang 1995) آزمایشی را گزارش می‌کند که در آن NewsWeeder از اطلاعات یاد گرفته خود بر اساس علاقه‌ی کاربر، مقاله ای که بالاترین مقدار پیش بینی ارزیابی را دارد به کاربر ارائه می‌دهد. با ذخیره‌ی ۱۰٪ اول این مقالات اتوماتیک ارزیابی شده، برنامه مجموعه ای از مقالات خواهد داشت که نسبت به مجموعه‌ی کل مقالات سه تا چهار برابر برای کاربر جالب‌ترند. برای مثال، برای یک کاربر نسبت مقالاتی که "جالب[2]" دسته بندی می‌کند در کل ۱۶٪ است اما در میان این مقالات ۵۹٪ توصیه‌ی NewsWeeder بوده.

تعداد زیاد روش‌های غیر بیزی آماری برای یادگیری متون متداولند، بسیاری از این روش‌ها بر اساس معیارهای مشابه استخراج اطلاعات هستند. (Rocchio 1971; Salton). الگوریتم‌های یادگیری متون دیگر در (Hearst and Hirsh 1996) آورده شده است.

۶.۱۱ شبکه های باور بیزی

همان طور که در دو قسمت قبلی نیز گفته شد، دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز از فرض اینکه احتمالات شرطی $a_2 \ldots a_1$ با داشتن مقدار تابع هدف v مستقلند استفاده‌ی شدیدی می‌کند. این فرض به طور قابل توجهی میزان پیچیدگی یادگیری تابع هدف را کاهش می‌دهد. با این فرض، دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز دسته بندی بهینه‌ی بیز را خروجی می‌دهد. با این وجود، در بسیاری از موارد این شرط مستقل بودن به شدت محدود کننده است.

شبکه های باور بیزی[3] توزیع احتمالات حاکم بر مجموعه‌ی متغیرهایی که با دسته ای از فرض استقلال احتمالات شرطی مشخص می‌شوند را توصیف می‌کنند. بر خلاف دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز که فرض می‌کرد تمامی متغیرهای به طور شرطی با معلوم بودن فرضیه‌ی h مستقلند، شبکه های باور بیزی فرض‌های استقلال احتمالات را در زیر مجموعه های متغیرها درست می‌دانند. بنابراین، شبکه های باور بیزی، روشی میانی که شرطی آزادتر از فرض مستقل بودن تمامی متغیر های دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز و محدود کننده تر از پرهیز از هر گونه شرط استقلال است، ارائه می‌کنند. شبکه های باور بیز یکی از موضوعات مورد توجه تحقیقات فعلی هستند، و دامنه‌ی وسیعی از الگوریتم‌ها برای یادگیری و استنتاج از آن‌ها ارائه شده است. در این بخش مفاهیم کلیدی و نحوه‌ی نمایش شبکه های باور بیزی را معرفی خواهیم کرد. اطلاعات دقیق‌تر در این زمینه (Pearl 1988) و (Russell and Norving 1995) و (Heckerman 1995) و (Jensen 1996) آمده است.

در کل، یک شبکه‌ی باور بیز توزیع‌های احتمال دسته ای از متغیرها را توصیف می‌کند. مجموعه‌ی دلخواهی از متغیر های تصادفی $Y_1 \ldots Y_n$ را در نظر بگیرید که هر Y_i می‌تواند هر یک از مقادیر مجموعه‌ی $V(Y_i)$ را داشته باشد. فضای توأم[4] را مجموعه‌ی متغیر های Y که از ضرب

---

[1] rate
[2] interesting
[3] bayesian belief networks
[4] joint space

خارجی $V(Y_1) \times V(Y_2) \ldots V(Y_n)$ بدست می‌آید تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر، هر عضو فضای توأم متناسب با یکی از مقادیر ممکن متغیر های $< Y_1 \ldots Y_n >$ است. توزیع احتمال این فضای توأم، توزیع احتمال توأم[1] نامیده می‌شود. توزیع احتمال توأم، احتمال مشاهده‌ی هر یک از نمونه های $< Y_1 \ldots Y_n >$ را مشخص می‌کند. یک شبکه‌ی باور بیز توزیع احتمال توأم یک مجموعه از متغیرها را توصیف می‌کند.

۶.۱۱.۱ شرط استقلال

بیایید بحثمان درباره‌ی شبکه های باور بیزی را با تعریف دقیق مفهوم استقلال آغاز کنیم. فرض کنید X، Y و Z سه متغیر تصادفی گسسته مقدار باشند، زمانی می‌گوییم که X از Y به شرط Z مستقل است که توزیع احتمال حاکم بر X با فرض داشتن مقدار Z مستقل از مقدار Y باشد؛ به عبارت دیگر،

$$(\forall x_i, y_j, z_k)\, P\big(X = x_i \big| Y = y_j, Z = z_k\big) = P(X = x_i | Z = z_k)$$

در این رابطه $x_i \in V(X)$، $y_i \in V(Y)$ و $z_i \in V(Z)$ است. معمولاً عبارت بالا را به طور خلاصه به فرم P(X|Y,Z)=P(X|Z) می‌نویسیم. تعریف استقلال شرطی را می‌توان برای مجموعه ای از متغیرها تعمیم داد. می‌گوییم که مجموعه متغیر های $X_1 \ldots X_l$ مستقل از مجموعه متغیر های $Y_1 \ldots Y_m$ به شرط متغیرهای $Z_1 \ldots Z_l$ هستند اگر

$$P(X_1 \ldots X_l | Y_1 \ldots Y_m, Z_1 \ldots Z_l) = P(X_1 \ldots X_l | Z_1 \ldots Z_l)$$

به رابطه‌ی این تعریف و تعریفمان از استقلال شرطی در دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز توجه کنید. دسته بندی کننده‌ی ساده بیز به طور شرطی مستقل بودن ویژگی A_1 از ویژگی A_2 را تعریف می‌کند. این تعریف به دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز اجازه می‌دهد که مقدار $P(A_1, A_2|V)$ را که در رابطه‌ی ۶.۲۰ آمده با استفاده از رابطه‌ی زیر محاسبه کند،

$$P(A_1, A_2|V) = P(A_1|A_2, V)P(A_2|V) \tag{6.23}$$

$$= P(A_1|V)P(A_2|V) \tag{6.24}$$

رابطه‌ی ۶.۲۳ فقط فرم کلی حاصل از قانون احتمال جدول ۶.۱ است. رابطه‌ی ۲.۲۴ نیز از آن نتیجه شده است، زیرا که اگر A_1 با معلوم بودن V از A_2 مستقل باشد، پس طبق تعریف مستقل شرطی خواهیم داشت که، $P(A_1|A_2, V) = P(A_1|V)$.

۶.۱۱.۲ نمایش

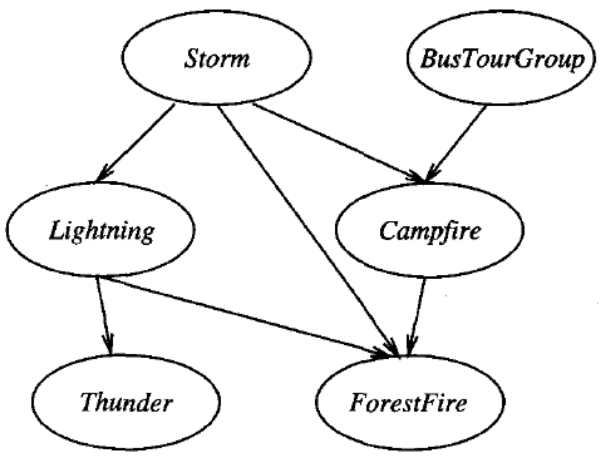
یک شبکه‌ی باور بیزی (که معمولاً به اختصار شبکه بیزی نامیده می‌شود) با توزیع احتمالات توأم مجموعه ای از متغیرها نمایش داده می‌شود. برای مثال، شبکه بیزی شکل ۶.۳ توزیع احتمال توأم متغیر های منطقی Storm، Lightning، Thunder، ForestFire، Campfire و BusTourGroup را نشان می‌دهد. در کل، یک شبکه‌ی بیزی توزیع احتمال توأم را با استفاده از مشخص کردن مجموعه ای از فرض‌های استقلال شرطی (که با یک گراف بدون دور نمایش داده می‌شود) و مجموعه های از احتمالات شرطی هر کدام مشخص می‌کند. هر متغیر فضای توأم با یک گره در شبکه بیزی نشان داده می‌شود. برای هر متغیر دو نوع اطلاعات ذکر می‌شود، اول اینکه با فرض داشتن والدین

[1] Joint probability distribution

(در گراف) متغیر از متغیر های غیر زیرینش مستقل شرطی است. زمانی می‌گوییم که X زیرینی[1] برای Y است که مسیری مستقیم از Y به X باشد. دوم اینکه جدولی از احتمالات شرطی برای هر متغیر داده می‌شود که توزیع احتمال را برای مقدار متغیر های بالایی[2] مشخص می‌کند. احتمال توأم هر یک از مقادیر $< y_1, \ldots, y_n >$ که مقداری از $< Y_1 \ldots Y_n >$ است را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی زیر محاسبه کرد،

$$P(y_1, \ldots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} P(y_i | Parnets(Y_i))$$

در این رابطه $Parents(Y_i)$ نماد مجموعه ای از بالایی‌های مستقیم Y_i در شبکه است. توجه داشته باشید که $P(y_i | Parents(Y_i))$ دقیقاً مقدار های ذخیره شده در جدول احتمالات شرطی مربوط به گره Y_i است.



	S,B	S,¬B	¬S,B	¬S,¬B
C	0.4	0.1	0.8	0.2
¬C	0.6	0.9	0.2	0.8

شکل ۶.۳ یک شبکه‌ی باور بیزی.
شبکه‌ی سمت چپ مجموعه ای از فرض‌های استقلال شروط را نشان می‌دهد. در کل، هر گره مستقل شرطی است از شروط غیر زیرینش[3] با معلوم بودن شروط والدش مستقل است. برای هر گره جدول مقادیر شرطی‌ای وجود دارد که توزیع احتمال شرطی متغیرها را با معلوم بودن شروط والدینش در گراف مشخص می‌کند. جدول احتمال شرطی مربوط به گره Campfire که به طور خلاصه با C نمایش داده شده در سمت راست شکل آورده شده است، گره های Storm و BusTourGroup نیز به ترتیب به طور خلاصه با S و B نمایش داده شده‌اند.

برای تصور، شبکه‌ی بیزی شکل ۶.۳ توزیع احتمال توأم را برای متغیر های منطقی Storm، Lightning، Thunder، ForestFire، Campfire و BusTourGroup نشان می‌دهد. گره‌ها و یال‌های[4] شبکه نشان می‌دهد که Campfire با معلوم بودن والدینش، Storm و BusTourGroup، از Lightning و Thunder مستقل شرطی است. این بدین معناست که زمانی که مقدار Storm و BusTourGroup مشخص است متغیر های Lightning و Thunder هیچ اطلاعات اضافه ای در مورد متغیر Campfire به ما نخواهند داد. برای مثال، سه داده‌ی اول سمت چپ جدول نشان می‌دهند که،

$$P(Campfire = True | Storm = True, BusTourGroup = True) = 0.4$$

---

[1] descendant
[2] predecessors
[3] nondescendants
[4] arc

توجه دارید که این جدول فقط مقادیر احتمال شرطی Campfire را بـا معلـوم بـودن مقـادیر متغیـر هـای Storm و BusTourGroup می‌دهد. مجموعه‌ی موضعی جدول احتمالات شرطی برای تمامی متغیرها و مجموعه ای از فرض‌های استقلال شرطی که شبکه مـی‌گـذارد، بـا هم توزیع احتمال شبکه روی کل فضای توأم را مشخص می‌کنند.

یکی از ویژگی‌های جذاب شبکه های باور بیزی این است که اجازه‌ی نمـایش سـاده‌ی اطلاعـات علـی[۱]، مثـل ایـن حقیقـت کـه رعـد و بـرق (lightning) باعث طوفان (Thunder) می‌شود، را به ما می‌دهد. در واژگان استقلال شرطی، این حقیقت را در شـبکه بـا اینکـه احتمـال Thunder با معلوم بودن مقدار Lightning از بقیه‌ی متغیرها مستقل است نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که این فرض استقلال شرطی با یال‌های شبکه‌ی بیزی شکل ۶.۳ نشان داده شده است.

٦.١١.٣ استنتاج[۲]

ممکن است بخواهیم از شبکه های بیزی برای استنتاج مقدار چند متغیر (مثل ForestFire) با داشتن چند متغیر دیگر استفاده کنیم. البتـه، بـا دانستن اینکه کار ما با متغیر های تصادفی است، در کل نیز نسبت دادن یک مقدار به متغیر هدف صحیح نخواهد بـود. در اینجـا مـا بیشـتر بـه استنتاج توزیع احتمال متغیر هدف علاقه داریم، توزیع احتمالی که مشخص می‌کند مقدار هدف با معلوم بودن مقادیر مفـروض بـا چـه احتمـالی کدام مقدارش را می‌تواند داشته باشد. اگر مقادیر تمامی متغیر های دیگر شبکه معلوم باشند مرحله‌ی استنتاج خیلی ساده خواهـد شـد. در حالـت کلی‌تر ممکن است بخواهیم توزیع احتمال یک متغیر را با داشتن فقط زیر مجموعه ای از تمامی متغیرها (مثـل ForestFire) اسـتنتاج کنـیم (ممکن است دو مقدار Thunder و BusTourGroup تنها مقادیر مشاهده شده‌ی ما باشند). در کل، یک شبکه‌ی بیزی را می‌تـوان بـرای محاسبه‌ی توزیع احتمال هر زیرمجموعه ای از متغیر های شبکه با استفاده از معلوم بودن مقادیر هر زیر مجموعه‌ی دیگری از متغیر های شـبکه استفاده کرد.

استنتاج دقیق احتمالات در حالت کلی برای هر شبکه‌ی بیز دلخواه NP-hard اسـت (Cooper 1990). متـد هـای عـددی‌ای نیـز بـرای استنتاج احتمالات در شبکه های بیزی، شامل متدهای استنتاج دقیق[۳] و متد های تخمین استنتاج که دقت را فدای بازده می‌کنند ارائـه شـده‌انـد. برای مثال، متد های Monte Carlo راه حل‌های تخمینی را با استفاده از نمونه برداری تصادفی از توزیع احتمال متغیـر هـای مـورد نظـر را پیشنهاد می‌کنند (Pradham and Dagum 1996). در تئوری، حتی تخمین استنتاجی احتمالات شبکه‌ی بیزی را می‌تـوان NP-hard دانست (Dagum and Luby 1993). خوشبختانه در عمل، متد های تخمینی در بسیاری از موارد مفید از آب در آمده‌اند. بحث متـد هـای استنتاج شبکه های بیزی در (Russell and Norvig 1995) و (Jensen 1996) آمده است.

٦.١١.٤ یادگیری شبکه های باور بیزی

آیا می‌توانیم الگوریتمی موثر برای یادگیری شبکه های باور بیزی از داده های آموزشی پیدا کنیم؟ این سؤال، زمینه‌ی مورد توجه اکثر تحقیقـات فعلی است. تعریف مسئله های مختلفی را می‌توان برای این سؤال در نظر گرفت. ابتدا اینکه ساختار شبکه ممکن است دقیق مشخص باشـد، یـا ممکن است ساختار شبکه با توجه به داده های آموزشی انتخاب شود. دوم اینکه تمامی متغیر های شبکه ممکن است در هـر نمونـه‌ی آموزشـی مشهود و معلوم باشد یا بلعکس بعضی ممکن است بعضی متغیرها غیر قابل مشاهده باشند.

---

[1] causal knowledge
[2] inference
[3] exact inference

در حالتی که ساختار شبکه دقیق مشخص است، و فقط بعضی از مقادیر متغیر های آن قابل مشاهده‌اند، مسئله‌ی یادگیری بسیار سخت‌تر خواهد بود. این مسئله به نحوی مشابه یادگیری وزن‌های واحد های پنهان شبکه های عصبی است، جایی که ورودی و خروجی شبکه مشخص است اما اطلاعاتی در مورد لایه‌ی پنهان شبکه در نمونه های آموزشی نیست. در واقع، (Russell 1995) فرایندی مشابه با شیب صعود ارائه داده است که احتمالات شرطی جدول را یاد می‌گیرد. این فرایند شیب صعود در فضایی از فرضیه‌ها که متناسب با مجموعه ای از تمامی حالت‌های ممکن احتمالات شرطی است برای یافتن مقادیر جدول احتمالات شرطی جستجو می‌کند. تابع ای که در طول شیب صعود ماکزیمم می‌شود احتمال P(D|h) داده های آموزشی D است با معلوم بودن فرضیه‌ی h است. طبق تعریف، این جستجو معادل جستجو برای محتمل‌ترین فرضیه برای مقادیر جدول است.

۶.۱۱.۵ آموزش شیب صعود برای شبکه های بیزی

قانون شیب صعودی که (Russell 1995) معرفی کرد، با حرکت به سمت افزایش ln P(D|h) مقدار P(D|h) را با توجه به مقادیر جدول احتمالات شرطی شبکه‌ی بیز ماکزیمم می‌کند. فرض کنید w_{ijk} نماد تک داده‌ی ای از جدول‌های احتمالات شرطی شبکه باشد. در کل فرض کنید که w_{ijk} نماد احتمال شرطی اینکه متغیر شبکه‌ی Y_i مقدار y_{ij} را داشته باشد با معلوم بودن اینکه متغیر U_i مقدار u_{ij} را داشته باشد. برای مثال، اگر w_{ijk} داده‌ی گوشه‌ی بالا و سمت راست جدول احتمالات شرطی ۶.۳ باشد و Y_i نیز متغیر Campfire باشد و U_i نیز والدین آن یعنی <Storm,BusTourGroup> و $y_{ij} = True$ و $u_{ik} =< False, False >$ است. گرادیان ln P(D|h) که با $\frac{\partial \ln P(D|h)}{\partial w_{ijk}}$ برای هر w_{ijk} نشان داده می‌شود را همان طور که بعداً نیز نشان خواهیم داد می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد،

$$\frac{\partial lnP(D|h)}{\partial \mathrm{w_{ij}}} = \sum_{d \in D} \frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{Y_i = y_{ij}, U_i = u_{ik}} | \mathrm{d}\right)}{\mathrm{w_{ijk}}} \qquad (6.25)$$

برای مثال، برای محاسبه‌ی هر یک از مقادیر مشتق ln P(D|h) نسبت به داده‌ی گوشه‌ی بالا و راست جدول ۶.۳ باید مقدار P(Campfire=True,Storm=False,BusTourGroup=False|d) را برای هر یک از نمونه های آموزشی d در D محاسبه کنیم. زمانی که این متغیر های برای نمونه ای مثل d مجهول است، لازم است که این احتمال را با استنتاج از متغیرهای دیگر آموزشی موجود d محاسبه کنیم. در واقع، این کمیت‌ها به راحتی از محاسبات استنتاجی انجام شده در اکثر شبکه های بیزی استخراجی می‌شود، بنابراین یادگیری را می‌توان با هزینه ای کمی بیشتر، که از شبکه‌ی بیزی برای استنتاج و مدارک جدید متعاقباً بدست می‌آید.

در زیر از رابطه‌ی ۶.۲۵ که (Russell 1995) معرفی کرده بدست می‌آوریم. ادامه‌ی این قسمت را می‌توانید بدون از دست دادن پیوستگی قسمت‌ها در اولین خواند کتاب نخوانید. برای ساده سازی نماد، در این مشتق گیری از نماد $\mathrm{P_h(d)}$ برای نمایش P(D|h) استفاده خواهیم کرد. می‌خواهیم گرادیان این تابع را بیابیم پس باید رابطه‌ی $\frac{\partial lnP_h(D)}{\partial \mathrm{w_{ijk}}}$ را به ازای تمامی مقادیر i و j و k محاسبه کنیم. با فرض اینکه نمونه های آموزشی d در مجموعه‌ی داده های D مستقل باشند، می‌توان نوشت،

$$\frac{\partial lnP(D|h)}{\partial \mathrm{w}_{\mathrm{ij}k}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{w}_{\mathrm{ij}k}} \ln \prod_{\mathrm{d \in D}} \mathrm{P_h(d)}$$

$$= \sum_{\mathrm{d \in D}} \frac{\partial \ln \mathrm{P_h(d)}}{\partial \mathrm{w}_{\mathrm{ij}k}}$$

$$= \sum_{d\in D} \frac{1}{P_h(d)} \frac{\partial P_h(d)}{\partial w_{ijk}}$$

مرحله‌ی آخر از رابطه‌ی $\frac{\partial \ln f(x)}{\partial x} = \frac{1}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x}$ نتیجه گیری شده است. حال می‌توان مقادیر متغیر هـای Y_i و $U_i = Parents(Y_i)$ را با استفاده از جمع روی مقادیر $y_{ij'}$ و $u_{ik'}$ معرفی کرد.

$$\frac{\partial lnP(D|h)}{\partial w_{ijk}} = \sum_{d\in D} \frac{1}{P_h(d)} \frac{\partial}{\partial w_{ijk}} \sum_{j',k'} P_h\left(d\middle|y_{ij'}, u_{ik'}\right) P_h(y_{ij'}, u_{ik'})$$

$$= \sum_{d\in D} \frac{1}{P_h(d)} \frac{\partial}{\partial w_{ijk}} \sum_{j',k'} P_h\left(d\middle|y_{ij'}, u_{ik'}\right) P_h\left(y_{ij'}\middle|u_{ik'}\right) P_h(u_{ik'})$$

مرحله‌ی آخر از قانون احتمال جدول ۶.۱ نتیجه گیری شده است. حال جمع سمت راستی رابطه‌ی بالا را در نظـر بگیریـد، بـا توجـه بـه تعریـف $w_{ijk} \equiv P_h(y_{ij}|u_{ik})$ خواهیم داشت که تمامی جملات جز جمله‌ی j'=j و i'=i صفر خواهند بود پس داریم،

$$\frac{\partial lnP(D|h)}{\partial w_{ijk}} = \sum_{d\in D} \frac{1}{P_h(d)} \frac{\partial}{\partial w_{ijk}} \sum_{j',k'} P_h\left(d\middle|y_{ij}, u_{ik}\right) P_h\left(y_{ij}\middle|u_{ik}\right) P_h(u_{ik})$$

$$= \sum_{d\in D} \frac{1}{P_h(d)} \frac{\partial}{\partial w_{ijk}} \sum_{j',k'} P_h\left(d\middle|y_{ij}, u_{ik}\right) w_{ijk} P_h(u_{ik})$$

$$= \sum_{d\in D} \frac{1}{P_h(d)} P_h\left(d\middle|y_{ij}, u_{ik}\right) P_h(u_{ik})$$

با استفاده از قضیه‌ی بیز برای مقدار $P_h\left(d\middle|y_{ij}, u_{ik}\right)$ داریم،

$$\frac{\partial lnP(D|h)}{\partial w_{ijk}} = \sum_{d\in D} \frac{1}{P_h(d)} \frac{P_h\left(y_{ij}, u_{ik}\middle|d\right) P_h(d) P_h(u_{ik})}{P_h\left(y_{ij}, u_{ik}\right)}$$

$$= \sum_{d\in D} \frac{P_h\left(y_{ij}, u_{ik}\middle|d\right) P_h(u_{ik})}{P_h\left(y_{ij}, u_{ik}\right)}$$

$$= \sum_{d\in D} \frac{P_h\left(y_{ij}, u_{ik}\middle|d\right)}{P_h\left(y_{ij}\middle|u_{ik}\right)}$$

$$= \sum_{d\in D} \frac{P_h\left(y_{ij}, u_{ik}\middle|d\right)}{w_{ijk}} \qquad (6.26)$$

بدین صورت مشتق رابطه‌ی ۶.۲۵ محاسبه می‌شود. قبل از رفتن به سراغ قانون فرایند شیب صعود باید در نظر گرفت که باید پس از تغییر مقادیر w_{ijk} آن‌ها همچنان در بازه‌ی [0,1] باقی بمانند تا احتمالات معتبری باشند. از طرف دیگر باید مقدار $\sum_j w_{ijk}$ برای تمامی مقادیر i و k، ۱ باقی بماند. این شروط را می‌توان با تغییر دو مرحله ای وزن‌ها اعمال کرد، ابتدا هر w_{ijk} را با توجه به شیب صعود تغییر می دهیم،

$$w_{ijk} \leftarrow w_{ijk} + \eta \sum_{d \in D} \frac{P_h(y_{ij}, u_{ik}|d)}{w_{ijk}}$$

در این رابطه η ثابت کوچکی به نام ضریب یادگیری است. در مرحله‌ی دوم وزن‌ها را نرمالیزه می‌کنیم تا در شروط بالا صدق کنند. همان طور که Russell نیز توضیح داده است این فرایند به محتمل‌ترین فرضیه‌ی نسبی برای احتمالات شرطی در شبکه بیز میل خواهد کرد.

مثل دیگر روش‌های بر پایه‌ی شیب صعود، این الگوریتم نیز فقط تضمین می‌کند که راه حل بهینه‌ی موضعی پیدا کند. جایگزین دیگر موجود برای شیب صعود الگوریتم EM است که در قسمت ۶.۱۲ توضیح داده می‌شود، این الگوریتم نیز راه حلی بهینه موضعی پیدا خواهد کرد.

٦.١١.٦ یادگیری ساختار شبکه‌ی بیزی

یادگیری شبکه های بیزی هنگامی که ساختار شبکه به دقت معلوم نیست نیز پیچیده است. (Cooper and Herskovits 1992) روشی Bayesian scoring metric برای انتخاب میان شبکه های مختلف ارائه می‌کنند. آن‌ها همچنین جستجویی ابتکاری به نام الگوریتم K2 برای یادگیری ساختار شبکه در شرایطی که داده‌ها به طور کامل قابل مشاهده‌اند ارائه می‌کنند. مشابه اکثر الگوریتم‌های یادگیری ساختار شبکه‌ی بیز، K2 نیز از جستجویی حریصانه که پیچیدگی فرضیه را فدای دقت روی داده های آموزشی می‌کند استفاده می‌کند. در آزمایشی به K2 مجموعه ای از 3,000 نمونه‌ی آموزشی تصادفی از شبکه بیزی‌ای معلومی با ۳۷ گره و ۴۶ یال داده شد. این شبکه‌ی خاص مشکلات بیهوشی را در یک اتاق جراحی بیمارستان توصیف می‌کرد. علاوه بر این داده‌ها، به برنامه ترتیبی اولیه ای از ۳۷ متغیری که سازگار با قسمتی از ترتیب وابستگی متغیرها در شبکه‌ی واقعی بود نیز داده شد. این برنامه در تشخیص شبکه‌ی بیزی درست تقریباً موفق شد، این شبکه یالی اضافه و یالی دیگر کمتر از شبکه‌ی اصلی داشت.

روش‌های مبتنی بر قیود[1] نیز در یادگیری ساختار شبکه های بیزی نیز پیشنهاد شده است (Sprites et al. 1993). این روش‌ها روابط استقلال و وابستگی را از داده‌ها استنتاج کرده و از آن‌ها برای ساخت شبکه های بیزی استفاده می‌کنند. بررسی مربوطه‌ی روش‌های فعلی یادگیری ساختار شبکه های بیزی در (Heckerman 1995) و (Buntine 1994) آورده شده است.

٦.١٢ الگوریتم EM

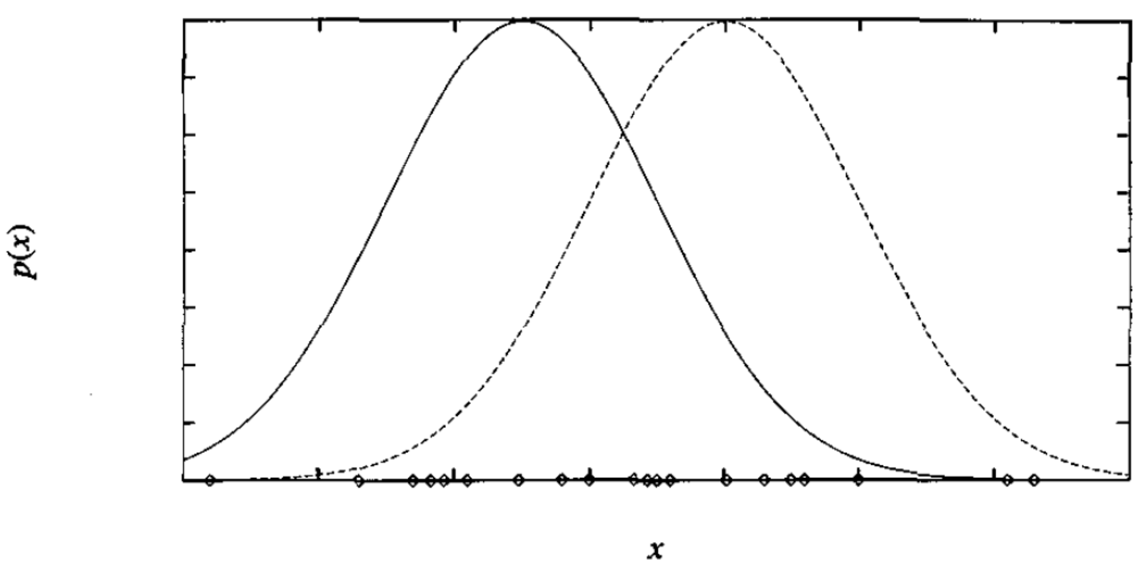
در بسیاری از تعریف مسئله های کاربردی، فقط یک زیر مجموعه از ویژگی‌های نمونه‌ها قابل مشاهده است. برای مثال، در یادگیری یا استفاده‌ی شبکه‌ی باور بیزی‌ای که در جدول ۶.۳ آورده شد، ممکن است فقط داده های نظیر یک زیر مجموعه از متغیر های شبکه مثل زیر مجموعه‌ی Storm, Lightning, Thunder, ForestFire, Campfire, BusTourGroup را داشته باشیم. روش‌های بسیاری برای کنترل این مشکل پیشنهاد شده است، همان طور که در فصل ۳ نیز دیدید، اگر بعضی متغیرها در بعضی موارد غیر قابل مشاهده و در

[1] constraint-based

بعضی موارد قابل مشاهده باشند، می‌توان از نمونه های آموزشی‌ای که این مقدار را دارند برای پیش بینی این ویژگی در دیگر نمونه‌ها استفاده کرد. در این بخش به الگوریتم EM که در یادگیری با وجود ویژگی‌های مجهول کاربرد زیاد دارد می‌پردازیم. از الگوریتم EM می‌توان حتی برای متغیرهایی که هیچ وقت به طور مستقیم قابل مشاهده نیستند نیز استفاده کرد، اما لازم است که فرم کلی توزیع احتمال حاکم بر این متغیرها معلوم باشد. الگوریتم EM برای آموزش شبکه های باور بیزی (برای اطلاعات بیشتر به Heckerman 1995 رجوع کنید) و شبکه های توابع شعاعی[1] که در قسمت ۸.۴ توضیح داده شد به کار می‌روند. الگوریتم EM پایه‌ی بسیاری از الگوریتم‌های خوشه یابی[2] (Cheeseman 1988) و همچنین پایه‌ی الگوریتم‌های پرکاربرد Baum-Welch forward-backward برای یادگیری مدل‌های نیمه مشهود مارکوو[3] است (Rabiner 1989).

۶.۱۲.۱ تخمین میانگین k توزیع نرمال

راحت‌ترین راه معرفی الگوریتم EM از طریق یک مثال است. مسئله ای را در نظر بگیرید که در آن داده های آموزشی D مجموعه ای از نمونه‌هایی است که از طریق توزیعی که ترکیب k توزیع نرمال[4] است بدست آمده‌اند. این تعریف مسئله برای k=2 در شکل ۶.۴ آمده است، در این شکل نمونه‌ها نقاط روی محور x هستند. هر نمونه از فرایندی دو مرحله ای بدست می‌آید. ابتدا به تصادف یکی از k توزیع نرمال انتخاب می‌شود. سپس بر اساس آن توزیع نرمال نمونه‌ی x_i ایجاد می‌گردد. این فرایند برای ایجاد مجموعه ای از نمونه های آموزشی همان طور که در شکل نشان داده شده است تکرار خواهد شد. برای ساده سازی بحث، حالتی را بررسی می‌کنیم که احتمال تمامی توزیع‌های نرمال در مرحله‌ی اول یکسان است و تمامی توزیع‌های نرمال واریانس مشترک σ^2 دارند. هدف یادگیری پیدا کردن فرضیه ای به شکل $h = < \mu_1, \ldots, \mu_k >$ است که میانگین‌های k توزیع احتمال را توصیف کند. در کار یادگیری سعی می‌کنیم تا محتمل‌ترین فرضیه را پیدا کنیم؛ فرضیه ای که p(D|h) را ماکزیمم کند.



---

[1] Radial basis function network
[2] clustering
[3] Partially Observable Markov Models
[4] Mixed Gaussian distribution

شکل ۶.۴ نمونه های حاصل از ترکیب دو توزیع نرمال با واریانس σ یکسان.
نمونه‌ها با نقاطی روی محور x نشان داده شده‌اند. اگر میانگین توزیع‌های نرمال نامعلوم باشد، الگوریتم EM را می‌توان برای جستجوی محتمل‌ترین مقدار تخمین آن‌ها به کاربرد.

توجه دارید که محاسبه‌ی محتمل‌ترین فرضیه برای میانگین یک توزیع نرمال با داشتن نمونه های $x_1, x_2, \ldots, x_m$ فقط حالت خاصی از مسئله ای است که در قسمت ۶.۴ بحث شد، در رابطه‌ی ۶.۶ نشان دادیم که محتمل‌ترین فرضیه، فرضیه ای است که مجموع خطاهای مربعی را برای تمامی m نمونه مینیمم می‌کند. اگر رابطه‌ی ۶.۶ را با توجه به نماد گذاری جدید بازنویسی کنیم، خواهیم داشت،

$$\mu_{ML} = \arg\max_{\mu} \sum_{i=1}^{m} (x_i - \mu)^2 \tag{6.27}$$

در چنین شرایطی مجموع خطا های مربعی با تساوی زیر مینیمم خواهد شد،

$$\mu_{ML} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i \tag{6.28}$$

با وجود این وجود مسئله‌ی ما درباره‌ی ترکیبی از توابع نرمال است و تشخیص اینکه نمونه‌ها از کدام توزیع بدست آمده‌اند نیز ممکن نیست. بنابراین، با صورت مثالی کلی از مسئله‌هایی که متغیر های پنهان دارند مواجهیم. در مثال شکل ۶.۴، می‌توان توضیح کامل مربوطه‌ی هر نمونه را به شکل سه تایی مرتب $< x_i, z_{i1}, z_{i2} >$ در نظر گرفت، در این سه تایی مرتب x_i مقدار مشاهده شده‌ی iامین نمونه است و دو مقدار z_{i1}, z_{i2} مشخص می‌کند که کدام یک از دو توزیع نرمال برای تولید این نمونه به کار رفته‌اند. در کل، z_{ij} زمانی یک است که نمونه از توزیع نرمال j ام بدست آمده است و در غیر این صورت صفر خواهد بود. در اینجا متغیر x_i قابل مشاهده و متغیر های z_{i1}, z_{i1} متغیر های پنهان هستند. اگر مقادیر متغیر های z_{i1}, z_{i1} قابل مشاهده بودند می‌شد از رابطه‌ی ۶.۲۷ برای پیدا کرد μ_1 و μ_2 استفاده کرد، حال چون این متغیرها قابل مشاهده نیستند از الگوریتم EM استفاده خواهیم کرد.

در این مثال، پیدا کردن k میانگین، الگوریتم EM به تخمین مقادیر z_{ij} با معلوم بودن فرضیه‌ی فعلی $< \mu_1 \ldots \mu_k >$ می‌پردازد و سپس مقادیر محتمل‌ترین فرضیه‌ها را با توجه به این مقادیر تصادفی برای متغیر های پنهان دوباره محاسبه می‌کند. ابتدا این مثال را در الگوریتم EM توصیف حل می‌کنیم، الگوریتم EM را در حالت کلی بیان خواهیم کرد.

برای شکل ۶.۴، الگوریتم EM ابتدا مقدار اولیه‌ی فرضیه را به $h =< \mu_1, \mu_2 >$ که در آن μ_1 و μ_2 دو مقدار دلخواه هستند مقدار دهی اولیه می‌کند. سپس فرضیه‌ی h را با تکرار حلقه‌ی دو مرحله ای زیر ارزیابی می‌کند، این حلقه تا زمانی که فرایند به مقدار ثابتی از h همگرا شود حلقه تکرار خواهد شد.

مرحله‌ی ۱: مقدار امید $E[z_{ij}]$ را برای هر متغیر پنهان z_{ij} با فرض درستی فرضیه‌ی $h =< \mu_1, \mu_2 >$ محاسبه کن.

مرحله‌ی ۲: محتمل‌ترین فرضیه‌ی جدید $h' =< \mu_1', \mu_2' >$ را با فرض اینکه تمامی مقادیر z_{ij} مقدار امید $E[z_{ij}]$ که در مرحله‌ی ۱ محاسبه شد است را محاسبه کن. سپس فرضیه‌ی $h =< \mu_1, \mu_2 >$ را با فرضیه‌ی $h' =< \mu_1', \mu_2' >$ جایگزین کن.

بیایید نحوه‌ی پیاده سازی هر یک از مراحل را در عمل بررسی کنیم. مرحله‌ی اول باید مقدار امید هر یک از z_{ij} را محاسبه کند. این مقدار $E[z_{ij}]$ فقط احتمال نمونه‌ی x_i است که از طریق j امین توزیع نرمال ایجاد شده است.

$$E[z_{ij}] = \frac{p(x = x_i | \mu = \mu_j)}{\sum_{n=1}^{2} p(x = x_i | \mu = \mu_n)}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu_j)^2}}{\sum_{n=1}^{2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu_n)^2}}$$

مرحله‌ی اول با بکار گیری مقادیر فعلی $< \mu_1, \mu_2 >$ و مقدار فعلی x_i نتیجه گیری شده است.

در مرحله‌ی دوم مقداری که برای $E[z_{ij}]$ در مرحله‌ی اول محاسبه شد استفاده می‌شود تا محتمل‌ترین فرضیه $h' =< \mu_1', \mu_2' >$ محاسبه شود. همان طور که بعداً نیز بحث خواهیم کرد، محتمل‌ترین فرضیه در این حالت با رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود،

$$\mu_j \leftarrow \frac{\sum_{i=1}^{m} E[z_{ij}] x_i}{\sum_{i=1}^{m} E[z_{ij}]}$$

توجه دارید که این رابطه تشابه بسیاری به رابطه‌ی ۶.۲۸ برای تخمین مقدار μ برای یک توزیع نرمال دارد. در رابطه‌ی جدید فقط میانگین وزن دار μ_j هاست، وزن هر μ_j مقدار $E[z_{ij}]$ که از j امین توزیع نرمال بدست آمده است.

الگوریتم بالا برای تخمین میانگین‌های ترکیب k توزیع نرمال با روش الگوریتم EM است: فرضیه‌ی فعلی برای تخمین متغیر های نا مشهود استفاده می‌شود، سپس مقدار امید این متغیرها برای محاسبه‌ی فرضیه‌ی بهتری به کار می‌رود. می‌توان اثبات کرد که با هر دور اجرای حلقه الگوریتم EM میزان محتمل بودن P(D|h) را بیشتر می‌کند، مگر اینکه آن یک ماکزیمم نسبی باشد. پس الگوریتم EM در انتها به یک ماکزیمم موضعی برای محتمل بودن $< \mu_1, \mu_2 >$ میل خواهد کرد.

۶.۱۲.۲ حالت کلی الگوریتم EM

در بالا الگوریتم EM را برای مسئله‌ی تخمین میانگین‌های ترکیب توزیع احتمال‌های نرمال بیان کردیم. در حالت کلی‌تر، الگوریتم EM را می‌توان در بسیاری از تعریف مسئله‌ها که در آن‌ها بحث از تخمین مجموعه ای از پارامتر های θ که توضیح احتمال حاکم را توصیف می‌کنند با استفاده از قسمتی از داده‌ها که قابل شهود است به کاربرد. در مثال دو میانگین بالا پارامتر های مورد علاقه $\theta =< \mu_1, \mu_2 >$ است، داده های کامل سه تایی مرتب‌های $< x_i, z_{i1}, z_{i2} >$ هستند که فقط x_i قابل مشاهده است. در کل اگر $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ داده های مشاهده شده در مجموعه ای از m نمونه‌ی مستقل و $Z = \{z_1, \dots, z_m\}$ نیز داده های غیر قابل مشاهده باشد در این نمونه های آموزشی Y=XUZ کل داده‌ها خواهد بود. توجه دارید که با Z می‌توان به دید متغیر تصادفی‌ای که توزیع احتمالش به پارامترهای نامعلوم θ و داده های مشاهده شده‌ی X وابسته است نگاه کرد. به طور مشابه، Y نیز متغیری تصادفی است، زیرا که توسط متغیر تصادفی Z تعریف می‌شود. در ادامه‌ی این بخش فرم کلی الگوریتم EM را توضیح خواهیم داد. از h برای نمایش مقادیر مفروض فعلی از پارامتر های θ و از 'h برای فرضیه‌ی بازبینی شده‌ی هر حلقه الگوریتم EM استفاده خواهیم کرد.

الگوریتم EM فضای فرضیه‌ی محتمل‌ترین فرضیه‌ها 'h را برای پیدا کردن 'h ی که مقدار $E[\ln P(Y|h')|h]$ را ماکزیمم کند جستجو می‌کند. این مقدار امید برای تمامی توزیع احتمالات Y که توسط پارامتر های نامعلوم مشخص می‌گردد محاسبه می‌شود. بیایید مفهوم دقیق این مقدار امید را با هم بررسی کنیم. ابتدا اینکه $P(Y|h')$ محتمل بودن داده های کامل Y را با شرط معلوم بودن 'h نشان می‌دهد. پس پیدا کردن فرضیه‌ی 'h به قسمی که تابعی از این معیار را ماکزیمم کند منطقی خواهد بود. دوم اینکه، ماکزیمم کردن لگاریتم این کمیت، $ln\ P(Y|h')$ نیز $P(Y|h')$ را ماکزیمم می‌کند (همان طور که پیش‌تر نیز گفته بودیم). سوم اینکه ما مقدار امید $E[ln\ P(Y|h')]$ را برای اینکه داده های کامل Y خود متغیری تصادفی است معرفی می‌کنیم. با دانستن اینکه داده های کامل Y ترکیبی از داده های مشاهده شده‌ی X و داده های مشاهده نشده ی Z است، باید میانگین را برای مقادیر ممکن Z های مشاهده نشده با وزن متناسب با احتمالشان محاسبه کنیم. به عبارت دیگر، مقدار امید $E[ln\ P(Y|h')]$ بر روی توزیع احتمالات تصادفی Y محاسبه می‌شود. توزیع Y توسط مقادیر کاملاً معلوم X و توزیع احتمال حاکم بر Z تعیین می‌شود.

توزیع احتمال حاکم بر Y چیست؟ در کل این توزیع را نمی‌دانیم، زیرا که این توزیع با پارامتر های θ که می‌خواهیم تخمین بزنیم تعیین می‌شود. بنابراین، الگوریتم EM از فرضیه‌ی فعلی h به جای پارامتر های واقعی θ برای تخمین توزیع احتمال حاکم بر Y استفاده می‌کند. بیایید تابعی به فرم $Q(h'|h)$ تعریف کنیم که مقدار $E[\ln P(Y|h')|h]$ را به عنوان تابعی از h' با فرض θ=h و داشتن قسمت قابل مشاهده‌ی X از کل داده های Y بیان کند.

$$Q(h'|h) = E[\ln P(Y|h')|h, X]$$

این تابع Q را به فرم $Q(h'|h)$ **می** نویسیم تا نشان دهد که این تابع با این فرض تعریف شده که فرضیه‌ی فعلی h با θ مساوی است. در فرم کلی، الگوریتم EM تا رسیدن به همگرایی دو مرحله‌ی زیر را تکرار می‌کند:

مرحله‌ی ۱: مرحله‌ی تخمین (E): مقدار $Q(h'|h)$ را با استفاده از فرضیه‌ی فعلی h و داده های مشاهده شده‌ی X برای تخمین توزیع احتمال روی Y محاسبه کن.

$$Q(h'|h) = E[\ln p(Y|h')\,|h, X]$$

مرحله‌ی ۲: مرحله‌ی ماکزیمم سازی (M): فرضیه‌ی h را با فرضیه‌ی ’h که مقدار Q را ماکزیمم می‌کند جایگزین کن.

$$h \leftarrow \arg\max_{h'} Q(h'|h)$$

اگر تابع Q پیوسته باشد، الگوریتم EM به نقطه تعادل محتمل‌ترین فرضیه‌ی $P(Y|h')$ میل خواهد کرد. اگر این تابع محتمل بودن فقط یک ماکزیمم داشته باشد، EM نیز به همان تخمین همان ماکزیمم مطلق برای ’h میل خواهد کرد. در غیر این صورت، این الگوریتم تضمین می‌کند تا به ماکزیممی موضعی میل کند. در چنین شرایطی، EM محدودیت‌های الگوریتم‌های دیگری که از جستجوی شیب نزول استفاده می‌کنند را خواهد داشت، در فصل ۴ توضیح کاملی در مورد این مشکلات و راه حل‌های آن‌ها آورده شده است.

٦.١٢.٣ اشتقاق الگوریتم k میانگین

برای تصور بهتر کلی الگوریتم EM، بیایید مشتق الگوریتم آورده شده در قسمت ۶.۱۲.۱ برای تخمین میانگین‌های k توزیع نرمال را بررسی کنیم. همان طور که در بالا نیز توضیح داده شد، مسئله‌ی تخمین k میانگین، مسئله‌ی تخمین پارامتر های $\theta = <\mu_1 \dots \mu_k>$ است که

میانگین k توزیع نرمال تعریف می‌شوند. داده های مشاهده شده‌ی $X = \{< x_i >\}$ به ما داده شده‌اند. در این مسئله متغیر های پنهان $Z = \{z_{i1}, \dots, z_{ik}\}$ هستند که مشخص می‌کنند که نمونه با استفاده از کدام توزیع ایجاد شده است.

برای به کار بردن EM ابتدا باید مشتق Q(h|h’) را برای این تخمین k میانگین پیدا کرد. بیایید ابتدا مشتق رابطه‌ی p(Y|h’) را محاسبه کنیم. توجه دارید که احتمال $p(y_i|h')$ برای یک تک نمونه‌ی $y_i =< x_i, z_{i1}, \dots, z_{ik} >$ از داده های کامل را می‌توان به صورت زیر دقیق محاسبه کرد.

$$p(y_i|h') = p(x_i, z_{i1}, \dots, z_{ik}|h') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{k} z_{ij}\left(x_i - \mu_j'\right)^2}$$

توجه داشته باشید که از تمامی z_{ij} ها فقط یکی ۱ است و بقیه ۰ هستند. بنابراین این رابطه توزیع احتمال x_i را بر اساس توزیع نرمال انتخابی نشان می‌دهد. با داشتن احتمال تک نمونه، $p(y_i|h')$، لگاریتم احتمال P(Y|h’) برای تمامی m نمونه در داده‌ها به صورت زیر خواهد بود،

$$\ln P(Y|h') = ln \prod_{i=1}^{m} p(y_i|h')$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \ln p(y_i|h')$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{k} z_{ij}\left(x_i - \mu_j'\right)^2 \right)$$

حال می‌توان بالاخره مقدار امید ln P(Y|h’) را بر اساس توزیع احتمال حاکم بر Y یا به طور مشابه توزیع احتمال حاکم بر متغیر های غیر قابل مشاهده‌ی Y (z_{ij} ها) محاسبه کرد. توجه دارید که عبارت بالا برای ln P(Y|h’) تابعی خطی از z_{ij} هاست. در کل برای هر تابع f(z) که تابعی خطی از z است رابطه‌ی زیر درست است،

$$E[f(z)] = f(E[z])$$

با استفاده از حقیقت بالا درباره‌ی توابع خطی می‌توان نوشت،

$$E[\ln P(Y|h')] = E\left[\sum_{i=1}^{m} \left(ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{k} z_{ij}\left(x_i - \mu_j'\right)^2 \right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{k} E[z_{ij}]\left(x_i - \mu_j'\right)^2 \right)$$

برای خلاصه سازی تابع Q(h’|h) در مسئله‌ی k میانگین به صورت زیر است،

$$Q(h'|h) = \sum_{i=1}^{m} \left(ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{k} E[z_{ij}] \left(x_i - \mu'_j\right)^2 \right)$$

در این رابطه $h' =< \mu'_1, \dots, \mu'_k >$ و $E[z_{ij}]$ نیز بر اساس فرضیه‌ی فعلی h و داده های مشاهده شده‌ی X محاسبه می‌شود. همان طور که قبلاً نیز نشان دادیم،

$$E[z_{ij}] = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu_j)^2}}{\sum_{n=1}^{2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu_n)^2}} \qquad (6.29)$$

بنابراین مرحله اول (تخمین) الگوریتم EM تابع Q را بر اساس تخمین $E[z_{ij}]$ تعریف می‌کند. مرحله‌ی دوم (ماکزیمم سازی) نیز مقادیر $\mu'_1, \dots, \mu'_k$ را پیدا خواهد کرد که این تابع Q را ماکزیمم کند. در مثال فعلی داریم که،

$$\arg\max_{h'} Q(h'|h) = \arg\max_{h'} \sum_{i=1}^{m} \left(ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{k} E[z_{ij}] \left(x_i - \mu'_j\right)^2 \right)$$

$$= \arg\min_{h'} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} E[z_{ij}] \left(x_i - \mu'_j\right)^2 \qquad (6.30)$$

محتمل‌ترین فرضیه اینجا مجموعی وزن دار از خطا های مربعی را مینیمم می‌کند، در این خطا مربع اختلاف x_i ها با μ'_j با وزن $E[z_{ij}]$ مینیمم می‌شود. کمیت رابطه‌ی ۶.۳۰ با قرار دادن مقادیر μ'_j به صورت زیر مینیمم می‌شود،

$$\mu_j \leftarrow \frac{\sum_{i=1}^{m} E[z_{ij}] x_i}{\sum_{i=1}^{m} E[z_{ij}]} \qquad (6.31)$$

توجه دارید که روابط ۶.۲۹ و ۶.۳۱ دو مرحله‌ی الگوریتم k میانگین قسمت ۶.۱۲.۱ را توصیف می‌کنند.

۶.۱۳ خلاصه و منابع برای مطالعه‌ی بیشتر

این فصل شامل موارد زیر می‌شود:

- متدهای بیزی پایه ای برای متدهای یادگیری احتمالی‌ای با دانش قبلی یا فرض آن درباره‌ی احتمالات ثانویه فرضیه‌ها و احتمال مشاهده‌ی نمونه‌ها است. متد های بیزی نسبت دادن احتمال ثانویه به هر فرضیه‌ی ممکن را بر اساس احتمالات اولیه‌ی مفروض را ممکن می‌سازند.
- از متد های بیزی می‌توان برای تعیین محتمل‌ترین فرضیه با فرض داشتن داده‌ها استفاده کرد، فرضیه‌ی MAP. این فرضیه‌ی از این جهت بهینه است که از تمامی فرضیه های دیگر محتمل‌تر است.

- دسته بندی کننده‌ی بهینه‌ی بیز پیش بینی تمامی فرضیه های ممکن را با احتمالات ثانویه‌شان ترکیب کرده محتمل‌ترین دسته بندی هر نمونه را به ما می‌دهد.
- دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز متد یادگیری بیزی است که در بسیاری از موارد کاربردی مفید شناخته شده است. به این الگوریتم به این دلیل "ساده" می‌گویند که شامل این فرض ساده کننده می‌باشد که ویژگی‌های نمونه‌ها با فرض داشتن دسته بندی نمونه مستقلند. با این فرض، دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز یک فرضیه MAP را خروجی خواهد داد. حتی زمانی که این فرض هم درست نیست هم، مثل حالتی که از این دسته بندی کننده برای دسته بندی متون استفاده کردیم، گاهی دسته بندی کننده‌ی ساده بیزی موثر است. شبکه های بیزی نمایش بهتری نسبت به مجموعه فرض‌ها استقلال در بین زیر مجموعه ای از ویژگی‌ها دارند.
- چهار چوب استدلال بیزی می‌تواند پایه مناسبی برای بررسی متدهای یادگیری بخصوص که مستقیماً از قضیه‌ی بیز استفاده نمی‌کنند باشد. برای مثال در شرایط خاص می‌توان نشان داد که زمانی که تابع هدف حقیقی مقداری را با مینیمم کردن مجموع خطاهای مربعی یاد می‌گیریم، محتمل‌ترین فرضیه را یاد می‌گیریم.
- قانون حداقل طول توضیح توصیه می‌کند که فرضیه‌هایی را انتخاب کنیم که کمترین طول توضیح برای فرضیه به اضافه‌ی طول توضیحات همراه فرضیه را داشته باشد. قضیه‌ی بیز و نتایج پایه ای تئوری اطلاعات را می‌توان برای ایجاد دلیلی برای این قانون به کار برد.
- در بسیاری از کارهای یادگیری عملی، بعضی از ویژگی‌های نمونه های ممکن است قابل مشاهده نباشد. الگوریتم EM روش کلی‌ای برای یادگیری در حضور متغیر های غیر مشهود ارائه می‌کند. این الگوریتم کار خود را با مجموعه ای از فرضیه های دلخواه آغاز می‌کند. سپس مقدار امید متغیر نامشهود را محاسبه کرده (با این فرض که فرضیه فعلی درست است). و سپس مقدار محتمل‌ترین فرضیه را محاسبه می‌کند (با فرض اینکه متغیر های پنهان همان مقادیر امید محاسبه شده‌ی این مرحله هستند). تکرار این فرایند به یک ماکزیمم نسبی در احتمال درستی فرضیه میل می‌کند و مقادیر متغیر های پنهان را نیز تقریب می‌زند.

کتب آموزشی ساده‌ی بسیاری درباره‌ی احتمالات و آمار مثل Casella and Berger (1990) نوشته شده است. کتب مرجع سریع بسیاری نیز مثل Maisel (1971) و Speigel (1991) نوشته شده، این کتب نماد گذاری آمار و احتمال متناسب با یادگیری ماشین را نیز ارائه می‌کنند.

بسیاری از نمادگذاری‌های ابتدایی دسته بندی کننده های بیزی و دسته بندی کننده های مینیم خطای مربعی در Duda and Hart (1973) بررسی شده است. Domingos and Pazzani (1996) شرایط اینکه دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز، دسته بندی بهینه را خروجی می‌دهد تحلیل می‌کند، این بررسی در حالتی انجام شده که شرط استقلال دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز ممکن است درست نباشد (نکته در این است که شروطی وجود دارد که دسته بندی درست باشد اما احتمالات ثانویه درست نباشند.)

Cestnik (1990) بحث درباره‌ی استفاده از تخمین m برای دسته بندی احتمالات را مطرح می‌کند.

نتایج تجربی که از مقایسه‌ی روش‌های مختلف بیزی و درخت تصمیم و دیگر الگوریتم‌های یادگیری انجام شده در Michie et al. (1994) آورده شده است. Chauvin and Rumelhart (1995) بررسی بیزی شبکه های عصبی را که بر اساس الگوریتم backpropagation است را مطرح می‌کنند.

بحث بر روی قانون کمترین طول توضیح را می‌توانید در Rissanen (1983,1989) بیابید. Quinlan and Rivest (1989) نیز استفاده از این قانون را در اجتناب از overfit در درخت‌های تصمیم را بررسی می‌کنند.

تمرينات

۶.۱ دوباره مثال عملی قانون بیز در قسمت ۶.۲.۱ را در نظر بگیرید. فرض کنید که دکتر تصمیم می‌گیرد که دستور دهد که آزمایش دومی انجام شود، و فرض کنید که نتیجه‌ی آزمایش دوم نیز مثبت است. احتمال ثانویه‌ی cancer¬ و cancer را محاسبه کنید. فرض کنید که دو تست مستقلند.

۶.۲ در مثال قسمت ۶.۲.۱ احتمال ثانویه‌ی cancer را با نرمالیزه کردن P(+|cancer).P(cancer) و P(+|¬cancer).P(¬cancer) به صورتی که مجموعشان یک شود محاسبه کردیم. از قضیه‌ی بیز قضیه مجموع احتمالات (با توجه به جدول ۶.۱) برای اثبات این متد استفاده کنید. (ثابت کنید که نرمالیزه کرده به این صورت مقدار درستی برای P(cancer|+) ارائه می‌کند).

۶.۳ الگوریتم یادگیری مفهوم FindG را در نظر بگیرید، که کلی‌ترین فرضیه‌ی ممکن ساخته شده از فرضیه‌ها را ارائه می‌کند (کلی‌ترین اعضای فضای فرضیه ای متناسب با نمونه های آموزشی).

(a) توزیعی برای P(h) و P(D|h) ارائه کنید (فرض کنید FindG تضمین می‌کند که همیشه فرضیه ای MAP خروجی دهد)

(b) توزیعی برای P(h) و P(D|h) ارائه کنید (فرض کنید FindG تضمین نمی‌کند که همیشه فرضیه ای MAP خروجی دهد)

(c) توزیعی برای P(h) و P(D|h) ارائه کنید (فرض کنید FindG تضمین نمی‌کند که همیشه فرضیه ای ML خروجی دهد)

۶.۴ در بررسی یادگیری مفهوم در بخش ۶.۳ فرض کردیم که ترتیب نمونه های $< x_1, \dots , x_m >$ همیشه ثابت است. بنابراین برای استخراج عبارتی P(D|h) فقط کافی است که احتمال مشاهده‌ی سری‌ای از مقادیر هدف $< d_1, \dots , d_m >$ را برای این سری ثابت نمونه‌ها بررسی کنیم. حالت کلی‌تری را که در ان نمونه‌ها ثابت نیستند را در نظر بگیرید، اما فرض کنید که تمامی نمونه‌ها با توزیع مشخصی روی X انتخاب می‌شوند. داده های D را باید اکنون به فرم زوج‌های مرتب $\{< x_i, d_i >\}$ نشان داده و در P(D|h) باید احتمال حضور x_i ها را علاوه بر d_i دخیل کرد. نشان دهید که رابطه‌ی ۶.۵ در این حالت کلی‌تر نیز درست است. (راهنمایی: بررسی رابطه‌ی ۶.۵ را نیز در نظر بگیرید)

۶.۵ قانون کمترین طول توضیح را در نظر بگیرید که به فضای فرضیه ای H ی که شامل عطف n متغیر منطقی است اعمال می‌شود. واضح است که هر فرضیه به سادگی با ویژگی‌های موجود در فرضیه توصیف می‌شود، اگر تعداد بیت‌های لازم برای هر یک از متغیرها $\log_2 n$ است. فرض کنید که کد سازی هر نمونه با داشتن فرضیه نیاز به صفر بیت دارد اگر نمونه سازگار با فرضیه باشد و نیاز به $\log_2 m$ بیت دارد اگر نمونه با فرضیه سازگار نباشد، m تعداد نمونه‌هایی است که اشتباه دسته بندی می‌شوند. (برای تعیین اینکه کدام یک از m نمونه‌ی اشتباه دسته بندی شده، دسته بندی درست را می‌توان به نقیض آنچه فرضیه دسته بندی می کند دانست)

(a) رابطه‌ی لازم برای کمیتی که باید بنا بر قانون کمترین طول مینیمم شود را بیابید.

(b) آیا ممکن است که دسته ای از داده های آموزشی موجود باشد که فرضیه ای سازگار با آن‌ها وجود داشته باشد اما MDL فرضیه ای با سازگاری کمتر را بر گزیند؟ اگر چنین است ان مجموعه را بیابید. اگر خیر، توضیح دهید چرا.

(c) توزیع احتمال P(h) و P(D|h) را برای اینکه الگوریتم MDL فوق فرضیه ای MAP را خروجی دهد بیابید.

۶.۶ شبکه‌ی باور بیزی‌ای را که فرض استقلال دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز را برای مفهوم PlayTennis در مسئله‌ی قسمت ۶.۹.۱ بکشید. جدول احتمال شرطی مربوطه‌ی گره باد را نیز رسم کنید.

فرهنگ لغات تخصصی فصل (فارسی به انگلیسی)

احتمال اولیه	prior probability
احتمال ثانویه	posterior probability
آنتروپی دورگه	cross entropy
اندازه‌ی نمونه‌ی معادل	equivalent sample size
بدون شعور	brute-force
برآمد	Outcome
تخمین m	m estimate
تعریف مسئله	problem setting
جرم احتمال	probability mass
چگالی احتمال	probability density
دسته بندی کننده‌ی بهینه‌ی بیز	bayes optimal classifier
دسته بندی کننده‌ی ساده‌ی بیز	naive Bayes classifier
زیرین	Descendant
شبکه های باور بیزی	bayesian belief networks
فرضیه با حداکثر احتمال	Maximum A Posteriori
فضای توأم	joint space
قانون کمترین طول توضیح	Minimum description length
الگوریتم گیبس	Gibbs algorithm
محتمل‌ترین	maximum likelihood
معیار	Criterion
یادگیر سازگار	consistent learner
یال	Arc