

# 构造选讲

王蔚澄

2025 年 2 月 8 日

# 构造题

通常来说, 构造题只要求给出一个满足要求的解, 但其考察的范围广泛, 包括图论, 数学, 甚至仅需要观察力. 今天将对构造题做一些讨论.

## CF1630A

## 问题

对  $n = 2^m$  ( $n \geq 4$ ), 给定  $0 \leq k \leq n - 1$ , 将  $0, \dots, n - 1$  分成  $n/2$  组  $(a_1, b_1), \dots, (a_{n/2}, b_{n/2})$ , 满足  $\sum_{i=1}^{n/2} a_i \& b_i = k$ . 其中  $\&$  表示按位与.

# GYM 102900B

## 问题

给定两张  $n \times m$  的扫雷地图  $A, B$ , 每个位置可以是雷或者空地, 每个空地会标上周围八相邻格子中雷的个数. 你可以反转  $A$  中的  $\lfloor nm/2 \rfloor$  个格子, 你的目标是让  $A$  和  $B$  的所有格子中数的和相同.

# 增量构造

类似于数学归纳法的思想, 每次从前一个结果加一个元素. 或者反过来, 每次删一个元素递归.

这两种几乎是本质相同的.

## ICPC WF24 A

## 问题

给  $n$  个定义域均在  $[0, M]$  的非负分段线性函数, 你要给每个函数分配一个区间, 使得每个函数的区间的下方面积  $\geq$  总的下方面积的  $n$  分之一.

$n \leq 5000$ , 每个函数都存在一个点  $> 0$ .

## ICPC WF14 A

## 问题

给定  $n$ , 一开始在 1 到  $2n$  号位置有字母 B A B A  $\dots$  B A,  $-2n + 1$  到 0 号位置空着, 每次操作你可以选择相邻的两个字母移动到两个相邻的空位上, 你的目标是最后得到连续的 A  $\dots$  A B  $\dots$  B, 可以不从 1 号位置开始. 你需要找到最短的操作序列.

$$3 \leq n \leq 100$$

# 欧拉回路

如果一个联通有向图每个点都入度等于出度, 则这个图有欧拉回路. 如果只存在一个点入度比出度大一, 另一个点入度比出度小一, 其他点都入度等于出度, 则这个图有欧拉路径.



# 欧拉回路

如果一个联通有向图每个点都入度等于出度, 则这个图有欧拉回路. 如果只存在一个点入度比出度大一, 另一个点入度比出度小一, 其他点都入度等于出度, 则这个图有欧拉路径.

如果一个联通无向图每个点度数都是偶数, 则这个图有欧拉回路. 如果只存在两个点度数是奇数, 其他点度数都是偶数, 则这个图有欧拉路径.

# 欧拉回路

如果一个联通有向图每个点都入度等于出度, 则这个图有欧拉回路. 如果只存在一个点入度比出度大一, 另一个点入度比出度小一, 其他点都入度等于出度, 则这个图有欧拉路径.

如果一个联通无向图每个点度数都是偶数, 则这个图有欧拉回路. 如果只存在两个点度数是奇数, 其他点度数都是偶数, 则这个图有欧拉路径.

在求非欧拉图的欧拉路径时, 可以先补一条边变成欧拉回路, 然后最后再去掉.

## UOJ 670

## 问题

给定  $n$  个长度  $\leq 2$  的字符串, 每个字符串可以翻转, 你需要排列字符串的顺序, 使得最后拼接得到一个回文串.

$$n \leq 5 \times 10^5.$$

# QOJ 5434

## 问题

给定  $n$ , 构造一个长为  $n$  的 01 串, 包含最多的本质不同子串.  
 $n \leq 2 \times 10^5$ .

# QOJ 5434

## 问题

给定  $n$ , 构造一个长为  $n$  的 01 串, 包含最多的本质不同子串.  
 $n \leq 2 \times 10^5$ .

## Hint

一个显然的上界是  $\sum_{i=1}^n \min(2^i, n - i + 1)$ .

## GYM103855A

## 问题

有  $n$  个宝石, 每个宝石的颜色是红, 黑之一. 一开始每个宝石都分别在一个袋子里, 接下来有  $m$  次操作:

- 合并宝石  $i$  和  $j$  所在的袋子.
- 丢弃宝石  $i$ .
- 发现宝石  $i$  所在的袋子里有至少  $r$  个红色宝石和至少  $b$  个黑色宝石.

你需要构造一组合法的宝石颜色, 或报告无解.

$n \leq 2000, m \leq 4000$ .

# NOI2020 制作菜品

## 问题

有  $n$  种原材料, 第  $i$  种原材料有  $d_i$  克, 你需要做  $m$  道菜, 每道菜都要恰好  $k$  克, 且最多使用两种原材料. 保证  $\sum d_i = m \times k$ , 你需要构造一种做菜方案, 或报告无解.

$n \leq 500, n - 2 \leq m \leq 5000, k \leq 5000$ , 10 组多测. 子任务:  
 $m \geq n - 1$ .

# NOI2020 制作菜品

## 问题

有  $n$  种原材料, 第  $i$  种原材料有  $d_i$  克, 你需要做  $m$  道菜, 每道菜都要恰好  $k$  克, 且最多使用两种原材料. 保证  $\sum d_i = m \times k$ , 你需要构造一种做菜方案, 或报告无解.

$n \leq 500, n - 2 \leq m \leq 5000, k \leq 5000$ , 10 组多测. 子任务:  
 $m \geq n - 1$ .

## Hint

当  $m = n - 1$  时, 总是有解. 当  $m \geq n$  时, 总有  $\max d_i \geq k$ , 如此重复即可化归为  $m = n - 1$  的情形.



# QOJ 9641

## 问题

给定  $v_1, \dots, v_n$ , 你需要构造一个长为  $2n$  的序列  $a_1, \dots, a_{2n}$ , 且  $1 \sim n$  的每个数都出现两次, 设  $i$  出现的位置为  $x_i, y_i$ , 满足  $1 \leq x_i \leq n < y_i \leq 2n$ .  
且对所有  $i$ , 满足  $a_{x_i}, \dots, a_{y_i}$  中最小的出现偶数次的数是  $v_i$ .  
 $n \leq 2 \times 10^5$ , 10 组多测.

# QOJ 9641

## 问题

给定  $v_1, \dots, v_n$ , 你需要构造一个长为  $2n$  的序列  $a_1, \dots, a_{2n}$ , 且  $1 \sim n$  的每个数都出现两次, 设  $i$  出现的位置为  $x_i, y_i$ , 满足  $1 \leq x_i \leq n < y_i \leq 2n$ .  
且对所有  $i$ , 满足  $a_{x_i}, \dots, a_{y_i}$  中最小的出现偶数次的数是  $v_i$ .  
 $n \leq 2 \times 10^5$ , 10 组多测.

## Hint

很显然  $v_i \leq i$ . 事实上, 这是充要条件.

# QOJ 9641

## 问题

给定  $v_1, \dots, v_n$ , 你需要构造一个长为  $2n$  的序列  $a_1, \dots, a_{2n}$ , 且  $1 \sim n$  的每个数都出现两次, 设  $i$  出现的位置为  $x_i, y_i$ , 满足  $1 \leq x_i \leq n < y_i \leq 2n$ .  
且对所有  $i$ , 满足  $a_{x_i}, \dots, a_{y_i}$  中最小的出现偶数次的数是  $v_i$ .  
 $n \leq 2 \times 10^5$ , 10 组多测.

## Hint

很显然  $v_i \leq i$ . 事实上, 这是充要条件.  
考虑从小往大加数, 大的数不会对小的数的答案造成影响.

## QOJ 7939

## 问题

有  $n$  个塔排成一排, 第  $i$  个塔的高度是  $h_i$ , 如果两个塔  $i, j$  满足  $\max(h_i, h_j) > \max_{i < k < j} h_k$ , 他们之间可以通信.

给定  $a_1, \dots, a_n$ ,  $a_i$  表示可以和第  $i$  个塔通信的塔的个数. 你需要构造一组满足条件的  $h_i$ .

保证数据有解,  $n \leq 5 \times 10^5$ .

## QOJ 7939

## 问题

有  $n$  个塔排成一排, 第  $i$  个塔的高度是  $h_i$ , 如果两个塔  $i, j$  满足  $\max(h_i, h_j) > \max_{i < k < j} h_k$ , 他们之间可以通信.

给定  $a_1, \dots, a_n$ ,  $a_i$  表示可以和第  $i$  个塔通信的塔的个数. 你需要构造一组满足条件的  $h_i$ .

保证数据有解,  $n \leq 5 \times 10^5$ .

## Hint

考虑第一个塔, 它会和一个前缀和所有前缀最大值通信, 然后依次类推.