题解

Alan_Zhao

A. 装备

将问题看作一个左右部各有 n 个点的二分图，每件物品 (x,y,a,b) 是连接左部点 x 和右部点 y 的一条边。要给所有边定向，使得每个点至多被一条边指向，在此基础上最小化指向左部点的边的 a 之和乘以指向右部点的边的 b 之和。

显然，每个连通块要么是树要么是基环树。对于树，定向方案是任选一个点当根，然后定向成一棵外向树；对于基环树，可以选择在环上逆时针或者顺时针定向，形成一棵外向基环树。

把所有方案的 (X,Y) 放在二维平面上。因为需要 XY 最小，所以最优解的 (X,Y) 一定在下凸壳上。所以，对于每个连通块，算出它的所有定向方案的 (X,Y) 形成的下凸壳，然后用闵可夫斯基和合并所有下凸壳即可。

时间复杂度 $O(M\log M)$。

B. 数位

先考虑，给定一个 01? 串 s，怎么算 $f(s)\le r$ 的方案数。DP，设 $f_{i,a,b}$ 表示考虑了前 i 位，x 和 r 的 LCP 长度是 a，在 LCP 后面 x 有 b 个位是 1 的方案数。由于给定的两种操作都不涉及进退位，转移时分类讨论修改的二进制位对 a,b 的影响即可。

现在我们要钦定 $s_i=0$ 并计算方案数。刚才的 DP 转移是一个 DAG，所以我们可以把整个 DAG 上的转移反过来做，即可算出每个后缀的 DP 值，设为 $g_{i,a,b}$。计算 $s_i=0$ 的方案数时，只需要在 $f_{i-1,a,b}$ 的基础上转移一个 0，再和 $g_{i+1,a,b}$ 点乘起来即可。

时间复杂度 $O(nk^2)$。

C. 数论

当 $i>\max(a,b)$ 时，$f(a,b,i)$ 就是方程 $ax+iy=b$ 中满足 $x\ge 0$ 且最小的 x。因为 $a,b>0$，所以 $y=\frac{b-ax}{i}\le\frac{b}{i}<1$，也即 $y\le 0$。

于是设 $z=-y$，原方程转化成 $ax-iz=b$，即 $x=\frac{b+iz}{a}$。此时使得 x 取到最小非负解的 z 就是 $f(i,-b,a)$。因为 $f(X,Y,Z)=f(X \bmod Z,Y,Z)$，所以此时我们只关心 $i \bmod a$ 的值。枚举这个值 r，用扩展欧几里得算出 $f(r,-b,a)$ 的值，剩下的就是一个等差数列求和。

时间复杂度 $O((a+b)\log(a+b))$。