网络流选讲

梦熊人才联盟

2025.1

1 复习

2 一些题目

引入

- 网络流无他唯手熟尔。

引入

- 网络流无他唯手熟尔。
- 总结一些常见模型。

最大权闭合子图

- 带点权有向图，边的意义是 $u->v$，求最大权值和的合法子集。

最大权闭合子图

- 带点权有向图，边的意义是 $u->v$，求最大权值和的合法子集。
- 由于有正有负，联想到最小割模型，获得所有正收益。

最大权闭合子图

- 带点权有向图，边的意义是 $u->v$，求最大权值和的合法子集。
- 由于有正有负，联想到最小割模型，获得所有正收益。
- 接着所有边赋值正无穷，所有正权点和左侧连边，负权点和右侧连边，边权即代价，和左侧联通即视为选中。直接跑最大流即可。

loj 2146

- 你可以多次选择一些区间，每个区间的会获得他所有子区间收益 $d_{i,j}$ 的和。
  每个点有个颜色 x，假设最终取到了 c 个颜色为 x 的点，会产生 mx^2+cx 的代价。
  如果没有取到某种颜色则这种颜色不产生任何代价。
  每个子区间 $d_{i,j}$ 的收益只会被计算一次。
  n, m 给定，求最大收益。d 数组可以是负数，$m = 0/1$。

loj 2146

- 你可以多次选择一些区间，每个区间的会获得他所有子区间收益 $d_{i,j}$ 的和。
  每个点有个颜色 x，假设最终取到了 c 个颜色为 x 的点，会产生 mx^2+cx 的代价。
  如果没有取到某种颜色则这种颜色不产生任何代价。
  每个子区间 $d_{i,j}$ 的收益只会被计算一次。
  n, m 给定，求最大收益。d 数组可以是负数，$m=0/1$。
- 收益的计算是一个具有强制性的关系，并且构成一个 DAG，一共 n^2 个点，n^4 条边。注意到强制关系并不需要全部建出来，边数可以直接优化到 n^2。

loj 2146

- 你可以多次选择一些区间，每个区间的会获得他所有子区间收益 $d_{i,j}$ 的和。
  每个点有个颜色 x，假设最终取到了 c 个颜色为 x 的点，会产生 $mx^2 + cx$ 的代价。
  如果没有取到某种颜色则这种颜色不产生任何代价。
  每个子区间 $d_{i,j}$ 的收益只会被计算一次。
  n, m 给定，求最大收益。d 数组可以是负数，$m = 0/1$。
- 收益的计算是一个具有强制性的关系，并且构成一个 DAG，一共 n^2 个点，n^4 条边。注意到强制关系并不需要全部建出来，边数可以直接优化到 n^2。
- 下面考虑代价，$m = 0$ 的时候，每个极小区间只要被选中就产生 x 的代价。

loj 2146

- 你可以多次选择一些区间，每个区间的会获得他所有子区间收益 $d_{i,j}$ 的和。
  每个点有个颜色 x，假设最终取到了 c 个颜色为 x 的点，会产生 $mx^2 + cx$ 的代价。
  如果没有取到某种颜色则这种颜色不产生任何代价。
  每个子区间 $d_{i,j}$ 的收益只会被计算一次。
  n, m 给定，求最大收益。d 数组可以是负数，$m = 0/1$。
- 收益的计算是一个具有强制性的关系，并且构成一个 DAG，一共 n^2 个点，n^4 条边。注意到强制关系并不需要全部建出来，边数可以直接优化到 n^2。
- 下面考虑代价，$m = 0$ 的时候，每个极小区间只要被选中就产生 x 的代价。
- $m = 1$ 的时候，需要额外加入颜色的代价，即每个极小区间被选中的时候，同时要强制让一个代表对应颜色的点也被强制选中，并产生 mx^2 的代价。

1. 复习
2. 一些题目

CF925F

- 有一个 n 个点，m 条边的流网络，每条边有 a, b, c, d 四个参数。
  对于第 i 条边，它的流量下界为 $a_i t + b_i$，它的流量上界为 $c_i t + d_i$。
  若 t 等概率为 $[0, 1]$ 中的实数，求出原网络存在循环流（无源汇上下界可行流）的概率。
  $n, m \le 2000$，保证任意时刻流量非负。

CF925F

- 有一个 n 个点，m 条边的流网络，每条边有 a, b, c, d 四个参数。
  对于第 i 条边，它的流量下界为 $a_i t + b_i$，它的流量上界为 $c_i t + d_i$。
  若 t 等概率为 $[0, 1]$ 中的实数，求出原网络存在循环流（无源汇上下界可行流）的概率。
  $n, m \leq 2000$，保证任意时刻流量非负。
- 首先回顾一下上下界可行流是怎么求的。
  对于每个点有一个流量控制，按照需要补流量和需要出流量分两类，从超源以及超汇处去平衡即可。
  最后考察这个图的最大流和两侧的流量缺口即可。
  流量缺口显然是一条直线，而最大流是一个凸函数，由若干直线复合而成。从最小割角度出发是显然的。

CF925F

- 有一个 n 个点，m 条边的流网络，每条边有 a, b, c, d 四个参数。
  对于第 i 条边，它的流量下界为 $a_i t + b_i$，它的流量上界为 $c_i t + d_i$。
  若 t 等概率为 $[0, 1]$ 中的实数，求出原网络存在循环流（无源汇上下界可行流）的概率。
  $n, m \le 2000$，保证任意时刻流量非负。
- 首先回顾一下上下界可行流是怎么求的。
  对于每个点有一个流量控制，按照需要补流量和需要出流量分两类，从超源以及超汇处去平衡即可。
  最后考察这个图的最大流和两侧的流量缺口即可。
  流量缺口显然是一条直线，而最大流是一个凸函数，由若干直线复合而成。从最小割角度出发是显然的。
- 因此直接凸壳上面三分 + 二分即可。

CF1630F

- 图上有 n 个点，点有点权，点权互不相同，如果两个点点权成倍数关系，那么他们有边。
  现在希望删去一些点，来使图变成二分图，求出最少删去多少点。
  $n \leq 5 \times 10^4$,4s

CF1630F

- 图上有 n 个点，点有点权，点权互不相同，如果两个点点权成倍数关系，那么他们有边。
  现在希望删去一些点，来使图变成二分图，求出最少删去多少点。
  $n \leq 5 \times 10^4$,4s
- 二分图的判定是众所周知的。

CF1630F

- 图上有 n 个点，点有点权，点权互不相同，如果两个点点权成倍数关系，那么他们有边。
  现在希望删去一些点，来使图变成二分图，求出最少删去多少点。
  $n \le 5 \times 10^4$,4s
- 二分图的判定是众所周知的。
- 倍数具有偏序关系，因此如果存在一条长度为 3 的链，则说明存在一个三元环。

CF1630F

- 图上有 n 个点，点有点权，点权互不相同，如果两个点点权成倍数关系，那么他们有边。
  现在希望删去一些点，来使图变成二分图，求出最少删去多少点。
  $n \leq 5 \times 10^4$,4s
- 二分图的判定是众所周知的。
- 倍数具有偏序关系，因此如果存在一条长度为 3 的链，则说明存在一个三元环。
- 因此每个点只可能存在入度或者出度中的一种，拆点，转化成保留尽可能多的点。

CF1630F

- 图上有 n 个点，点有点权，点权互不相同，如果两个点点权成倍数关系，那么他们有边。
  现在希望删去一些点，来使图变成二分图，求出最少删去多少点。
  $n \le 5 \times 10^4$,4s
- 二分图的判定是众所周知的。
- 倍数具有偏序关系，因此如果存在一条长度为 3 的链，则说明存在一个三元环。
- 因此每个点只可能存在入度或者出度中的一种，拆点，转化成保留尽可能多的点。
- 最大独立集是困难的，但 *DAG* 上的最大独立集就是最长反链。整个图如果按照点权构建会可以形成一个 *DAG*。
  众所周知 *DAG* 的最长反链就是最小链覆盖，最小链覆盖直接拆点跑最大匹配（最大流）即可。同时这个图已经完成了传递闭包。

ARC161F

- 给定一张含 N 个点，DN 条边的图 $G=(V,E)$，判断是否满足 $\forall X\subset V$，X 导出子图的边数 $\div |X| < D$。
  $D\times N\le 50000$

ARC161F

- 给定一张含 N 个点，DN 条边的图 $G=(V,E)$，判断是否满足 $\forall X \subset V$，X 导出子图的边数 $\div |X| < D$。
  $D \times N \leq 50000$
- 考虑如何判定是否存在大于关系，按边点关系建图跑最大权闭合子图即可。

ARC161F

- 给定一张含 N 个点，DN 条边的图 $G=(V,E)$，判断是否满足 $\forall X \subset V$，X 导出子图的边数 $\div |X| < D$。
  $D \times N \le 50000$
- 考虑如何判定是否存在大于关系，按边点关系建图跑最大权闭合子图即可。
- 下面考虑等于关系，由于原图已经满足等号，需要枚举一个点删掉然后判定，时间复杂度较大。

ARC161F

- 给定一张含 N 个点，DN 条边的图 $G=(V,E)$，判断是否满足 $\forall X\subset V$，X 导出子图的边数 $\div |X| < D$。
  $D\times N\le 50000$
- 考虑如何判定是否存在大于关系，按边点关系建图跑最大权闭合子图即可。
- 下面考虑等于关系，由于原图已经满足等号，需要枚举一个点删掉然后判定，时间复杂度较大。
- 重新考虑最大权闭合子图的直观意义

ARC161F

- 给定一张含 N 个点，DN 条边的图 $G=(V,E)$，判断是否满足 $\forall X \subset V$，X 导出子图的边数 $\div |X| < D$。
  $D \times N \leq 50000$
- 考虑如何判定是否存在大于关系，按边点关系建图跑最大权闭合子图即可。
- 下面考虑等于关系，由于原图已经满足等号，需要枚举一个点删掉然后判定，时间复杂度较大。
- 重新考虑最大权闭合子图的直观意义
- 所以当最大权闭合子图为 D 的时候只需要判定基于残量网络定向后的图是否强连通即可。

CF1250K

- 有 n 堂讲课，m 次研讨会，x 个高清投影仪和 y 个普通投影仪。每堂讲课必须使用一个高清投影仪，而研讨会可以使用普通或高清投影仪。
  第 i 堂讲课时间在 $[a_i, b_i)$，第 i 次研讨会在时间在 $[p_i, q_i)$，一个投影仪每个时刻只能用在一个地方，且在使用完毕后才会归还。
  构造为每节讲课/研讨会分配一个投影仪的方案。
  $n, m, x, y \le 300, a_i, b_i, p_i, q_i \le 10^6$

CF1250K

- 有 n 堂讲课，m 次研讨会，x 个高清投影仪和 y 个普通投影仪。每堂讲课必须使用一个高清投影仪，而研讨会可以使用普通或高清投影仪。
  第 i 堂讲课时间在 $[a_i, b_i)$，第 i 次研讨会在时间在 $[p_i, q_i)$，一个投影仪每个时刻只能用在一个地方，且在使用完毕后才会归还。
  构造为每节讲课/研讨会分配一个投影仪的方案。
  $n, m, x, y \leq 300, a_i, b_i, p_i, q_i \leq 10^6$
- 可以把时间节点抽象出来，注意到课程的使用是确定的，可以直接把每个时间节点可以使用的高清投影仪的数量算出来。

CF1250K

- 有 n 堂讲课，m 次研讨会，x 个高清投影仪和 y 个普通投影仪。每堂讲课必须使用一个高清投影仪，而研讨会可以使用普通或高清投影仪。
  第 i 堂讲课时间在 $[a_i, b_i)$，第 i 次研讨会在时间在 $[p_i, q_i)$，一个投影仪每个时刻只能用在一个地方，且在使用完毕后才会归还。
  构造为每节讲课/研讨会分配一个投影仪的方案。
  $n, m, x, y \leq 300, a_i, b_i, p_i, q_i \leq 10^6$
- 可以把时间节点抽象出来，注意到课程的使用是确定的，可以直接把每个时间节点可以使用的高清投影仪的数量算出来。
- 普通投影仪则可以串起若干不相交的研讨会，最终要求就是每个时刻普通投影仪差的数量不超过空出来的高清投影仪的数量，建图跑最大流即可。

CF1416F

- 构造一个二维传送带，每个点传送到上下左右中的某一个位置。不能传送到边界外。
  每个点的权值 $S_{i,j}$ 是能够走到这个点的所有点的权值 $A_{i,j}$ 的和。
  给定 S，构造 A 和传送带。
  $n \times m \le 10^5, S_{i,j} \ge 2$
  要求 $A_{i,j} \ge 1$

CF1416F

- 显然的，这个图是一个基环内向树（实际上有一些更强的性质，但这个题用不到）

CF1416F

- 显然的，这个图是一个基环内向树（实际上有一些更强的性质，但这个题用不到）
- 环上的所有点会具有相同的权值。

CF1416F

- 显然的，这个图是一个基环内向树（实际上有一些更强的性质，但这个题用不到）
- 环上的所有点会具有相同的权值。
- 环的大小可以都不超过 2。

CF1416F

- 显然的，这个图是一个基环内向树（实际上有一些更强的性质，但这个题用不到）
- 环上的所有点会具有相同的权值。
- 环的大小可以都不超过 2。
- 对于 $S_{i,j}$，我们关心的是它周围的点是否有点和他具有相同的权值，以及是否有点具有更大的权值。
  如果不存在更大的权值，则说明这个点必须找一个点和他同时出现在环里，否则无所谓。
  相邻的相同权值的点可以任意匹配。

CF2046D

- 有一张 n 个点 m 条边的有向图，第 i 个点上有 a_i 个人。选择一些结点发放一份计划，接下来每个人可以沿着边自由移动，如果一个人从一个收到过计划的点移动到一个没有收到计划的点，那么可以令其收到计划。你需要让所有的点都收到计划，求最少需要在多少个结点发放计划，或者报告无解。$T \leq 100, n \leq 200, m \leq 800$

CF2046D

- 先考虑解的判定，强连通分量缩点以后，则问题变成每个节点可以内部限制流量 a_i，然后向所有出边连边。
  每个节点内至少要跑过一个人，因此这个流是带上下界的。
  最后判定是否存在可行流即可。

CF2046D

- 先考虑解的判定，强连通分量缩点以后，则问题变成每个节点可以内部限制流量 a_i，然后向所有出边连边。
  每个节点内至少要跑过一个人，因此这个流是带上下界的。
  最后判定是否存在可行流即可。
- 下面考虑如何最小化激活的点数，则此时显然无法通过网络流去表示，考虑加上费用维度。
  对于每个强连通分量缩出来的节点，给他赋一个费用为 1 的入边去表示激活的费用，然后发现因为有上下界被卡住了。

CF2046D

- 先考虑解的判定，强连通分量缩点以后，则问题变成每个节点可以内部限制流量 a_i，然后向所有出边连边。
每个节点内至少要跑过一个人，因此这个流是带上下界的。
最后判定是否存在可行流即可。
- 下面考虑如何最小化激活的点数，则此时显然无法通过网络流去表示，考虑加上费用维度。
对于每个强连通分量缩出来的节点，给他赋一个费用为 1 的入边去表示激活的费用，然后发现因为有上下界被卡住了。
- 尝试直接把上下界的维度也扔到费用里面去，则变成给每个点内部拆出来的点赋一个负无穷大的权值。

CF2038H

- n 个数，m 轮，一开始都是 0。每轮选一个数让它 $+1$，每轮结束后严格最大数的下标必须是给定的 p_i（数值大小第一关键字，下标倒序第二关键字）
特别的，不可以选目前的严格最大数。
第 i 轮选第 j 个数字可以获得收益 $w_{i,j}(w_{i,j} \geq 1)$，最大化总收益或判定不合法。
$n, m \leq 50$

CF2038H

- n 个数，m 轮，一开始都是 0。每轮选一个数让它 $+1$，每轮结束后严格最大数的下标必须是给定的 p_i（数值大小第一关键字，下标倒序第二关键字）
特别的，不可以选目前的严格最大数。
第 i 轮选第 j 个数字可以获得收益 $w_{i,j}(w_{i,j} \geq 1)$，最大化总收益或判定不合法。
$n, m \leq 50$
- 自然的，先尝试判定合法性。

CF2038H

- n 个数，m 轮，一开始都是 0。每轮选一个数让它 $+1$，每轮结束后严格最大数的下标必须是给定的 p_i（数值大小第一关键字，下标倒序第二关键字）
  特别的，不可以选目前的严格最大数。
  第 i 轮选第 j 个数字可以获得收益 $w_{i,j}(w_{i,j} \geq 1)$，最大化总收益或判定不合法。
  $n, m \leq 50$
- 自然的，先尝试判定合法性。
- 第一轮选了谁是确定的，紧接着发现有不能选目前最大数的特殊性质，由此似乎可以推知每一轮的最大数有多大！

CF2038H

- n 个数，m 轮，一开始都是 0。每轮选一个数让它 $+1$，每轮结束后严格最大数的下标必须是给定的 p_i（数值大小第一关键字，下标倒序第二关键字）
  特别的，不可以选目前的严格最大数。
  第 i 轮选第 j 个数字可以获得收益 $w_{i,j}(w_{i,j} \geq 1)$，最大化总收益或判定不合法。
  $n, m \leq 50$
- 自然的，先尝试判定合法性。
- 第一轮选了谁是确定的，紧接着发现有不能选目前最大数的特殊性质，由此似乎可以推知每一轮的最大数有多大！
- 不难想到判定合法性跑最大流做流量控制即可，带权值自然想到引入费用维度。

CF1666K

- 一个图，分成三个部分，称为 A, B, C。
  A, B 部分内部的边代价系数为 2，A, B 之间的边和 C 里面的边代价系数为 0，A, C 以及 B, C 之间的边代价系数为 1。
  最小化代价和。
  钦定了一个点必须在 A，另一个点必须在 B。

CF1666K

- 一个图，分成三个部分，称为 A, B, C。
  A, B 部分内部的边代价系数为 2，A, B 之间的边和 C 里面的边代价系数为 0，A, C 以及 B, C 之间的边代价系数为 1。
  最小化代价和。
  钦定了一个点必须在 A，另一个点必须在 B。
- 很像常见的二分类模型，加入了一个额外的可能性同时不和 S, T 联通。

CF1666K

- 一个图，分成三个部分，称为 A, B, C。
  A, B 部分内部的边代价系数为 2，A, B 之间的边和 C 里面的边代价系数为 0，A, C 以及 B, C 之间的边代价系数为 1。
  最小化代价和。
  钦定了一个点必须在 A，另一个点必须在 B。
- 很像常见的二分类模型，加入了一个额外的可能性同时不和 S, T 联通。
- 每个点拆成染 A 或染 B，构造连边以及集合划分的方案。

CF1666K

- 一个图，分成三个部分，称为 A, B, C。
  A, B 部分内部的边代价系数为 2，A, B 之间的边和 C 里面的边代价系数为 0，A, C 以及 B, C 之间的边代价系数为 1。
  最小化代价和。
  钦定了一个点必须在 A，另一个点必须在 B。
- 很像常见的二分类模型，加入了一个额外的可能性同时不和 S, T 联通。
- 每个点拆成染 A 或染 B，构造连边以及集合划分的方案。
- 注意到集合是 4×4 的，对应到原方案里，几乎处处可以和 A, B, C 找到对应。但发现 C 内如果选两个点可能产生代价。

CF1666K

- 一个图，分成三个部分，称为 A, B, C。
  A, B 部分内部的边代价系数为 2，A, B 之间的边和 C 里面的边代价系数为 0，A, C 以及 B, C 之间的边代价系数为 1。
  最小化代价和。
  钦定了一个点必须在 A，另一个点必须在 B。
- 很像常见的二分类模型，加入了一个额外的可能性同时不和 S, T 联通。
- 每个点拆成染 A 或染 B，构造连边以及集合划分的方案。
- 注意到集合是 4×4 的，对应到原方案里，几乎处处可以和 A, B, C 找到对应。但发现 C 内如果选两个点可能产生代价。
- 进一步可以观察到，由于 A, B 的对称性，一定存在更优的方案不产生这样的代价，直接拆点最小割即可。

CF1666K

- 一个图，分成三个部分，称为 A, B, C。
  A, B 部分内部的边代价系数为 2，A, B 之间的边和 C 里面的边代价系数为 0，A, C 以及 B, C 之间的边代价系数为 1。
  最小化代价和。
  钦定了一个点必须在 A，另一个点必须在 B。
- 很像常见的二分类模型，加入了一个额外的可能性同时不和 S, T 联通。
- 每个点拆成染 A 或染 B，构造连边以及集合划分的方案。
- 注意到集合是 4×4 的，对应到原方案里，几乎处处可以和 A, B, C 找到对应。但发现 C 内如果选两个点可能产生代价。
- 进一步可以观察到，由于 A, B 的对称性，一定存在更优的方案不产生这样的代价，直接拆点最小割即可。
- 这题需要极强的观察能力或直觉。