模拟赛题解

A. 删树

先用二项式反演去掉“每次至少选择一个点”的限制。对于所有 $k \in [1, n]$，我们要计算给每个点选择一个 $[1, k]$ 中的编号，使得对于任意 $t \in [1, k]$，所有编号大于等于 t 的点形成一个连通块的方案数。

钦定 1 作为根，设 $f_{u,i,j}$ 表示给 u 子树内的每个点选择一个 $[1, i]$ 中的编号，使得点 u 编号是 j，且满足上述条件的方案数。

考虑转移，第一种情况是子树内所有点编号都 $\leq j$。此时转移是

$$\prod_{v \in \mathrm{son}_u} \sum_{k \leq j} f_{v,k,k}.$$

第二种情况是，存在某个子树内有一个连通块编号大于 j。枚举这个子树的根 v，那么点 v 的编号一定不小于 j，转移是

$$\left(\sum_{k \geq j} f_{v,i,k} - f_{v,j,j}\right) \prod_{w \in \mathrm{son}_u \wedge w \neq v} \sum_{k \leq j} f_{w,k,k}.$$

时间复杂度 $O(n^3)$。

B. 移动点集

将问题转化为：你需要为每个位置选择是否覆盖。对于选择被覆盖的每个位置 i，如果 $i - 1$ 未被覆盖，则需要 a 的代价，否则需要 $\min(a, b)$ 的代价。有若干条限制，每条形如“要么 x_i 被覆盖，要么 $x_i + 2d$ 被覆盖”。求满足所有限制的覆盖方式的最小代价。

记 $X = \max x_i + 2d$。

对于 d 比较小的情况，在数轴上从左到右做 DP，状压记录最后的 $2d$ 个位置的选择情况即可。时间复杂度 $O(X \cdot 2^{2d})$。

对于 d 较大的情况，按照以下顺序确定覆盖方式：

- $0, 2d, 4d, \cdots$
- $1, 2d+1, 4d+1, \cdots$
- $\vdots$
- $2d-1, 4d-1, 6d-1, \cdots$

同样考虑 DP，现在我们状压所有在轮廓线上的位置的覆盖情况。并且，由于最后一行实际上与第一行相邻，所以需要预先枚举第一行的覆盖情况。时间复杂度 $O(X \cdot 4^{\frac{X}{2d}})$。

平衡一下时间复杂度，可以得到 $O(X \cdot 2^{\sqrt{2X}})$。

C. 最小生成树

先考虑特殊性质 A，即给定的额外边形成一条链。此时可以直接用线段树动态维护最小生成树的边权之和。具体地，对于每个线段树节点 $p = [l, r]$，设 $f_{p,0/1,0/1}$ 表示区间 $[l, r]$ 中的点形成左右两个连通块，这两个连通块是否与点 0 连通，在此情况下的最小边权和。合并子节点时，分类讨论中间两个连通块是否需要加一条边连起来即可。

对于一般情况，考虑将其转化为链。将所有边按边权从小到大排序，并依次尝试加入并查集。假如当前加入的边 (u, v, w) 的两个端点所在的连通块的根是 u', v'，那么在 u' 和 v' 之间连一条边权为 w 的边。这样会形成一棵树，我们直接按照这棵树的 DFS 序列转化为链的情况。

这样为什么是对的？考虑 Kruskal 求最小生成树的过程，可以发现，对于每条边 (u, v, w)，在原图和新图上加入这条边之前的连通性是一样的。于是它们的最小生成树也一样。

时间复杂度 $O((n+q)\log n)$。