

## T1

将数字串写成模 9 意义下前缀和  $s_i$  的形式，那么区间限制相当于  $s_{l-1} = s_r$ 。

将所有区间限制的涉及到的下标位置记录下来并排序，记为  $p_1 < p_2 < \dots < p_{2q}$ ，这里先假设下标位置两两不同。

如果我们只能填数字  $0 \sim 8$ ，那么两个相邻下标  $p_i$  和  $p_{i+1}$  处不管前缀和分别是什么数，它们之间填的数都可以通过最后一个数唯一调整，也就是这一段的方案数为：

$$9^{p_{i+1}-p_i-1}$$

而对于填  $0 \sim 9$ ，当  $p_i$  和  $p_{i+1}$  处相同时，最后一个数的调整方式不唯一，那么这一段的方案数为：

$$\frac{10^{p_{i+1}-p_i}-1}{9} + [s_{p_i} = s_{p_{i+1}}]$$

这样的话，我们就可以通过枚举每种前缀和的数值占有哪些下标来 DP，具体可以用状压 DP 和枚举子集来实现，当然这个部分也可以用子集卷积快速幂来优化。

如果有涉及到相同下标，我们可以用并查集预处理每个数值必须相等的下标集合，然后对把这些集合当作单个元素进行状压 DP。

具体实现的时候，我们可以先假设每一段的方案数都是不加 1 的（也就是当成相邻两下标前缀和不等）。之后预处理一个数组  $f_S$ ，表示  $S$  中的所有下标都相等时，有哪些相邻下标对需要加 1，乘上系数：

$$\frac{\frac{10^{p_{i+1}-p_i}-1}{9} + 1}{\frac{10^{p_{i+1}-p_i}-1}{9}}$$

然后对  $f_S$  做子集卷积快速幂。

时间复杂度  $O(n3^n)$  或  $O(n^2 2^n)$ 。

## T2

luogo P9083 题解区

## T3

看到  $n$  很小，很容易想到枚举  $B$  中没进行过操作的点。这些点一定是一个区间，证明显然。所以考虑枚举  $l$  到  $r$  表示没动的区间。那么现在问题变成以一定顺序将中间的一些数操作到左或右变成最终序列的方案数。显然，每个数（并非每种数）只会动一次。

那么，就会出现

$$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow \dots \leftarrow l, r \rightarrow r+1 \rightarrow r+2 \rightarrow \dots \rightarrow n$$

的这种操作拓补序。

但是要求不止这些。下面考虑每种情况会要求的条件。令 L 表示操作到左边的数，M 表示不动的数，R 表示操作到右边的数，首先，先列出所有情况：

1. LLL
2. LLM
3. LLR

4. LMM
5. LMR
6. LRR
7. MMM
8. MMR
9. MRR
10. RRR

不难发现，情况 1, 10 一定无解。情况 2, 4, 7, 8, 9 不会对拓补序出现额外的要求。剩下三种我们需要单独讨论一下。

#### 1. LLR

注意到这种情况会有两种，第一种可以先操作中间的到右边，然后操作两次到左边。或者第一种可以先操作一个到左边，然后操作一个到右边，然后操作一个到左边。

可以发现，这两种操作都要求最左边的一定是在操作到右边的数之后被操作。那么，我们可以连一条  $R_i \rightarrow L_i$  的边表示拓补序。

#### 2. LRR

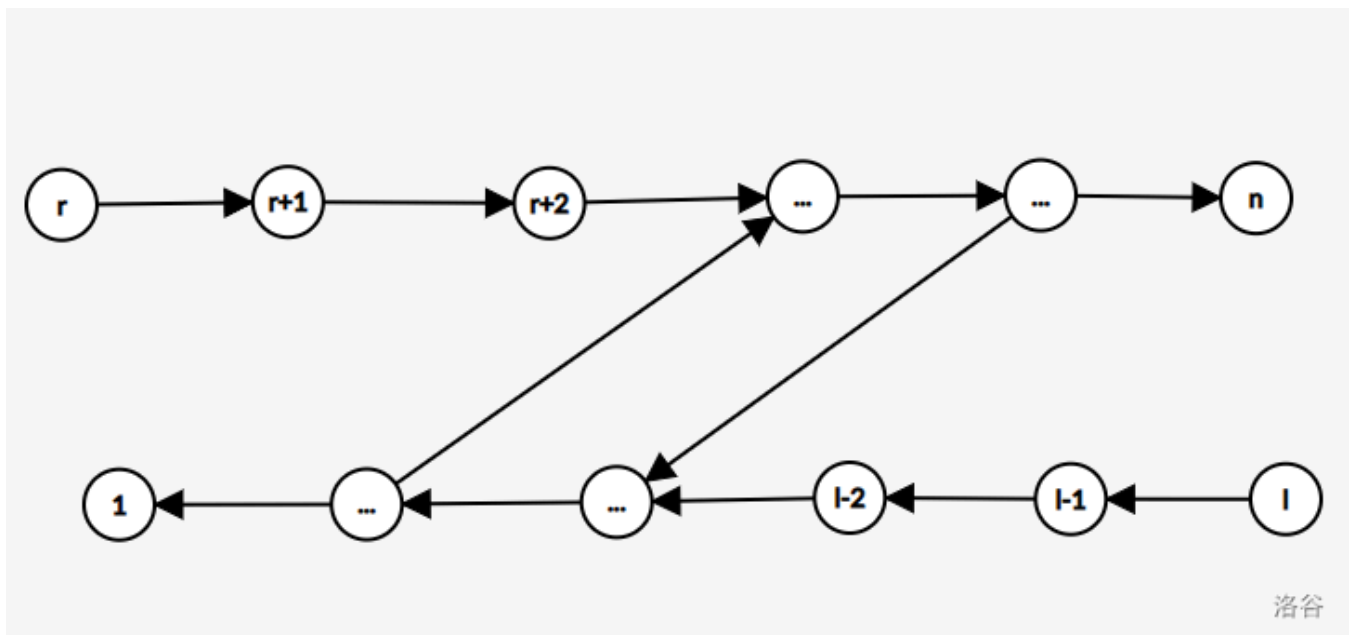
这种情况和上一种是对称的。读者可以自己推算一下，可以发现是从  $L_i \rightarrow R_i$  连一条边。

#### 3. LMR

这种情况就是大问题了。不难发现，要么是从先右后左，要么是先左后右。

一个朴素的想法是  $2^n$  枚举先右后左还是先左后右，然后判断是否不会出现环。

注意到，我们只需要关注图中的环是否存在。而这是一张很特殊的图：



可以发现，要满足环必须要满足存在两条边，一个是从区间  $[1, l]$  连到区间  $[r, n]$ ，一个正好相反，且  $e_{1,l} < e_{2,l}, e_{1,r} < e_{2,r}$ 。不难发现，一个环不会有第三条这样的边参与。

所以现在就变成了一条边可以选择从左到右或从右到左，且有某些条件，为某两条边不能同时出现。那么就是经典的 2-sat 问题。

现在我们来考虑如何连边。

### 1. 一条 LLR 的边与一条 LRR 的边不能一起出现

显然无解。

### 2. 一条 LLR(LRR) 的边和一条 LMR 的边的情况

这个时候某个情况就不可以选。那么就可以连接一条从不可以选的情况连接到另一种情况的边，表示选择了这个情况另一个情况也要选，即选择了这个点就无解。

### 3. 两条 LMR 的边的情况

直接连即可。

现在，拓补序解决完了，我们还需要考虑枚举出的不动的区间是否合法。

注意到，只有 LMR 的情况会出现最后留下来的要么是  $L_i$ ，要么是  $R_i$ ，其他的是固定的，读者可以自己讨论一下，这里不进行赘述。

我们要求的是不动的区间映射到  $A$  中不会出现偏序，即从  $B$  向  $A$  中的数连边不交（几何意义）。

首先，先将固定的要求连出来，设一个位置上一个有固定要求的是  $pl_i$ ， $pr_i$  同理，那么每个位置选择的必须是在  $[p_l, p_r]$  之间。所以，如果某个方案不在这个区间内，则该方案不能选，同一条 LLR(LRR) 的边和一条 LMR 的边的情况来连边。而如果在同一个区间内的两个选择后会产生交集，就不能同时选，同两条 LMR 的边的情况连边。这样，就结束了。时间复杂度  $O(n^4)$ 。