最优化方法：基础知识习题解答

162350107 冉茂印

March 9, 2025

Problem 1 (线性方程组求解)**.** 给定线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -2 \end{cases}$$

请求解该方程组的解。

Ans:

Step1: 增广矩阵

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Step2: 行化简

$$\text{r2} \leftarrow \text{r2} - \text{r1} \implies \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right]$$

$$\text{r2} \leftarrow \frac{\text{r2}}{-3} \implies \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right]$$

Step3: 回代消元

$$\text{r1} \leftarrow \text{r1} - \text{r2} \implies \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right]$$

最终解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

Problem 2 (内积性质验证)**.** 函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 定义为：

$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 + 3x_1y_2 + 5x_2y_2$$

试证明 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 满足内积的 *3* 个性质。

解答过程

对称性验证　对任意 $x, y \in \mathbb{R}^2$：

$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 + 3x_1y_2 + 5x_2y_2 = \langle y, x \rangle$$

线性性验证 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 和 $x, y, z \in \mathbb{R}^2$：

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = 2(\alpha x_1 + \beta y_1) z_1 + 3(\alpha x_2 + \beta y_2) z_1 + \cdots = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

正定性验证 对任意非零向量 $x \neq 0$：

$$\langle x, x \rangle = 2x_1^2 + 6x_1 x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + 3x_2)^2 + x_2^2 > 0$$

Problem 3 (对称矩阵正定性判定)**.** 证明：对称矩阵 Q 是正定（半正定）的，当且仅当 Q 的所有特征值是正的(非负的)。

解答过程

必要性证明 设 Q 正定，则对任意非零向量 x 有：

$$x^T Q x > 0$$

取 x 为特征向量 v_i，则：

$$v_i^T Q v_i = \lambda_i v_i^T v_i > 0 \implies \lambda_i > 0$$

充分性证明 若 Q 特征值全正，由谱分解定理：

$$Q = U \Lambda U^T$$

对任意非零向量 x：

$$x^T Q x = x^T U \Lambda U^T x = y^T \Lambda y = \sum \lambda_i y_i^2 > 0$$

其中 $y = U^T x \neq 0$。半正定情形同理可证。

Problem 4 (基变换矩阵求解)**.** 给定以下条件，试寻找从 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 到 $\{e_1', e_2', e_3'\}$ 的变换矩阵 T：*a.* $e_1' = e_1 + 3e_2 - 4e_3, e_2' = 2e_1 - e_2 + 5e_3, e_3' = 4e_1 + 5e_2 + 3e_3$ *b.* $e_1 = e_1' + e_2' + 3e_3', e_2 = 2e_1' - e_2' + 4e_3', e_3 = 3e_1' + 5e_3'$

Ans:

Part (a) 新基向量在原基下的坐标为：

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + 3e_2 - 4e_3 \\ e_2' = 2e_1 - e_2 + 5e_3 \\ e_3' = 4e_1 + 5e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

变换矩阵 T 的列由新基向量的坐标组成：

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Part (b) 原基向量在新基下的坐标为：

$$\begin{cases} e_1 = e_1' + e_2' + 3e_3' \\ e_2 = 2e_1' - e_2' + 4e_3' \\ e_3 = 3e_1' + 5e_3' \end{cases}$$

构造过渡矩阵 S：

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

通过高斯消元法求逆矩阵 $T = S^{-1}$：

$$T = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Problem 5 (基变换矩阵)**.** 给定基变换关系：

$$\begin{cases} e_1 = 2e_1' + e_2' - e_3' \\ e_2 = 2e_1' - e_2' + 2e_3' \\ e_3 = 3e_1' + e_3' \end{cases}$$

若线性变换在基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 下的矩阵为：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求其在基 $\{e_1', e_2', e_3'\}$ 下的矩阵表示。

解答过程

Step1: 构造过渡矩阵 基变换矩阵 T 满足 $E = E'T$，其中：

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Step2: 计算逆矩阵 通过高斯消元法求得：

$$T^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & -5 & -3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Step3: 基变换公式 新基下矩阵为：

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{9}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problem 6 (矩阵零空间计算)**.** 试确定矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

的零空间。

解答过程

Step1: 行阶梯形化简 通过行操作得到：

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Step2: 自由变量与通解 自由变量 $x_3 = t$，解得：

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2, \quad x_2 = \frac{1}{2}t$$

通解为：

$$x = t \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

零空间基向量为 $\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}^T$。

Problem 7 (二次型分类)**.** 判定二次型：

$$x^T \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

的类型（正定、半正定等）。

解答过程

Step1: 对称化处理 实际矩阵应为对称矩阵，修正为：

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Step2: 计算主子式 一阶主子式：$1 > 0$ 二阶主子式：

$$\det(Q) = 1 \times 1 - \left(-\frac{7}{2}\right)^2 = 1 - \frac{49}{4} = -\frac{45}{4} < 0$$

结论 矩阵不定。

Problem 8 (二次型分类)**.** 给定如下二次型，判断其类型：*a.* $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2$ *b.* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_3$ *c.* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

解答过程

Part (a) 对应矩阵：

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

特征值为 $0, 1, 0$，故二次型为**半正定**。

Part (b) 对称化矩阵：

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

计算主子式：一阶 $1 > 0$，二阶 $2 > 0$，三阶 $\det(Q) = -0.5 < 0$，故为**不定**。

Part (c) 对称矩阵：

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

特征值为 $2, 0, -1$，故为**不定**。

Problem 9 (二次型对角化)**.** 试确定线性变换，使得二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3 + 12x_1x_3$$

变换为对角阵。

解答过程

Step1: 构造二次型矩阵 对应矩阵：

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

Step2: 特征值分解 计算得特征值 $\lambda_1 = 14, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$，正交矩阵 U 由特征向量组成。

Step3: 对角化变换 令 $y = U^T x$，二次型化为：

$$f = 14y_1^2$$

（注：由于矩阵秩为 1，实际需通过配方法消除交叉项。）

Problem 10 (二次型正定性判定)**.** 考虑二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\xi x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

试确定参数 ξ 的取值范围，使得该二次型正定。

解答过程

Step1: 构造二次型矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \xi & -1 \\ \xi & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Step2: 计算主子式 一阶主子式：$1 > 0$ 二阶主子式：$1 - \xi^2 > 0 \implies |\xi| < 1$ 三阶主子式：

$$\det(Q) = 5(1 - \xi^2) - 2(2\xi + 2) - (-1)(2 - \xi) = -5\xi^2 - 4\xi + 1 > 0$$

解得：$\xi \in (-1, 0.2)$

结论 参数范围：$\xi \in (-1, 0.2)$ 时二次型正定。

Problem 11 (内积性质验证)**.** 考虑函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，定义为 $\langle x, y \rangle_Q = x^T Q y$，其中 Q 是对称正定矩阵。试证明其满足内积的 *3* 个条件。

解答过程

对称性 由于 Q 对称：

$$\langle x, y \rangle_Q = x^T Q y = y^T Q x = \langle y, x \rangle_Q$$

线性性 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 和向量 x, y, z：

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle_Q = (\alpha x + \beta y)^T Q z = \alpha x^T Q z + \beta y^T Q z = \alpha \langle x, z \rangle_Q + \beta \langle y, z \rangle_Q$$

正定性 因 Q 正定，对任意非零 $x \neq 0$：

$$\langle x, x \rangle_Q = x^T Q x > 0$$

且 $\langle x, x \rangle_Q = 0 \iff x = 0$。

Problem 12 (矩阵范数证明)**.** 证明：由 $\|\cdot\|_\infty$ 导出的矩阵范数为

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|$$

解答过程

定义验证 根据从属范数定义：

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty$$

设 x 满足 $\max_i |x_i| = 1$，则：

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right| \leq \max_i \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \cdot |x_k| \leq \max_i \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|$$

当取 x 为第 j 个基向量时达到最大值，故：

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|$$

Problem 13 (梯度计算)**.** 设 $f(x) = \|Ax - y\|^2$，其中 A 为列满秩矩阵。*a.* 逐分量计算 $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ *b.* 整体计算 $\frac{\partial f}{\partial x}$

解答过程

Part (a) 展开目标函数：

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - y_i \right)^2$$

对 x_k 求导：

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 2 \sum_{i=1}^{m} a_{ik} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - y_i \right)$$

Part (b) 矩阵形式导数：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2A^T (Ax - y)$$

Problem 14 (迹函数梯度)**.** 设 $f(x) = tr(\sigma^2 I + xx^T)$，计算梯度：*a.* 逐分量计算 $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ *b.* 整体计算 $\frac{\partial f}{\partial x}$

解答过程

Part (a) 展开迹函数：

$$f(x) = \sigma^2 n + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

对 x_k 求导：

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 2x_k$$

Part (b) 整体梯度：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

Problem 15 (矩阵逼近梯度)**.** 设 $f(x) = \frac{1}{4}\|A - xx^T\|^2$，计算梯度：*a.* 逐分量计算 $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ *b.* 整体计算 $\frac{\partial f}{\partial x}$

解答过程

Part (a) 展开目标函数：

$$f(x) = \frac{1}{4}\mathrm{tr}((A - xx^T)^T(A - xx^T))$$

对 x_k 求导：

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = -\sum_{i=1}^{n}(A_{ik} - x_i x_k)x_i$$

Part (b) 整体梯度：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -(A - xx^T)x$$

Problem 16 (二次型梯度)**.** 设 $f(x) = x^T Q x$，计算梯度：*a.* 逐分量计算 $\frac{\partial f}{\partial q_{ij}}$ *b.* 整体计算 $\frac{\partial f}{\partial Q}$

解答过程

Part (a) 由 $f(x) = \sum_{i,j} q_{ij} x_i x_j$，对 q_{ij} 求导：

$$\frac{\partial f}{\partial q_{ij}} = x_i x_j$$

Part (b) 整体梯度：

$$\frac{\partial f}{\partial Q} = xx^T$$

Problem 17 (矩阵迹梯度)**.** 设 $f(X) = tr(AXB)$，计算 $\frac{\partial f}{\partial X}$

解答过程

梯度推导 利用迹的循环性质：

$$\mathrm{tr}(AXB) = \mathrm{tr}(BAX)$$

故梯度为：

$$\frac{\partial f}{\partial X} = A^T B^T$$

Problem 18 (复合函数梯度)**.** 设 $f(x) = \sin\log(1 + x^T x)$，计算梯度 $\frac{\partial f}{\partial x}$

解答过程

链式法则 设 $u = x^T x$，则：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(\log(1 + u)) \cdot \frac{1}{1 + u} \cdot 2x$$

整理得：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x\cos(\log(1 + x^T x))}{1 + x^T x}$$

Problem 19 (二次型极值)**.** 考虑二次型 $f(x) = x^T Q x$，证明：*a.* $\lambda_1 = \max_{\|x\|=1} x^T Q x = \max_{x\neq 0} \frac{x^T Q x}{x^T x}$ *b.* $\lambda_n \|x\|^2 \leq x^T Q x \leq \lambda_1 \|x\|^2$

解答过程

Part (a) 由谱定理，存在正交矩阵 U 使得 $Q = U\Lambda U^T$。令 $y = U^T x$，则:

$$x^T Q x = y^T \Lambda y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \leq \lambda_1 \|y\|^2 = \lambda_1 \|x\|^2$$

当 $y = e_1$ 时取等，故 $\lambda_1 = \max_{\|x\|=1} x^T Q x$。

Part (b) 由 $y^T \Lambda y \geq \lambda_n \|y\|^2$ 且 $\|y\| = \|x\|$，得:

$$\lambda_n \|x\|^2 \leq x^T Q x \leq \lambda_1 \|x\|^2$$

Problem 20 (数据投影)**.** 给定数据集 $\{x_i\}$ 和直线 $L = \{\bar{x} + tw\}$，求数据点 x_i 在 L 上的投影 $\bar{x}_i$

解答过程

投影公式 投影点 $\bar{x}_i$ 满足:

$$\bar{x}_i = \bar{x} + \frac{(x_i - \bar{x})^T w}{\|w\|^2} w$$

解得参数:

$$t_i = \frac{(x_i - \bar{x})^T w}{w^T w}$$

故:

$$\bar{x}_i = \bar{x} + \left(\frac{(x_i - \bar{x})^T w}{w^T w} \right) w$$

Problem 21 (矩阵求导公式推导)**.** 完成以下矩阵求导公式的推导: *a.* $\dfrac{\partial \det(X)}{\partial X} = \det(X) X^{-T}$ *b.* $\dfrac{\partial Y^{-1}}{\partial x} = -Y^{-1} \dfrac{\partial Y}{\partial x} Y^{-1}$

解答过程

Part (a) 设 X 可逆，利用行列式微分公式:

$$d \det(X) = \det(X) \cdot \mathrm{tr}(X^{-1} dX)$$

故:

$$\frac{\partial \det(X)}{\partial X_{ij}} = \det(X) \cdot (X^{-T})_{ij}$$

即:

$$\frac{\partial \det(X)}{\partial X} = \det(X) X^{-T}$$

Part (b) 对恒等式 $YY^{-1} = I$ 两边求导:

$$dY \cdot Y^{-1} + Y \cdot d(Y^{-1}) = 0$$

解得:

$$d(Y^{-1}) = -Y^{-1} dY \cdot Y^{-1}$$

即:

$$\frac{\partial Y^{-1}}{\partial x} = -Y^{-1} \frac{\partial Y}{\partial x} Y^{-1}$$

Problem 22 (矩阵空间证明)**.** 证明: 所有 $m \times n$ 矩阵组成的集合 $\mathbb{R}^{m \times n}$ 在矩阵加法和数乘下构成线性空间。

解答过程

封闭性验证 对任意 $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$：1. $A+B$ 仍为 $m\times n$ 矩阵 2. αA 仍为 $m\times n$ 矩阵

线性空间公理 满足八条公理：- 加法交换律 $A+B=B+A$ - 零矩阵存在性 $A+0=A$ - 负元存在性 $A+(-A)=0$ - 分配律 $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ - 其余公理类似可证。

Problem 23 (连续函数空间证明)**.** 证明：所有定义在 $[a,b]$ 上的连续函数构成线性空间。

解答过程

加法封闭性 连续函数 $f,g \in \mathcal{C}$ 的和 $f+g$ 仍连续。

标量乘法封闭性 连续函数 $f \in \mathcal{C}$ 的标量积 αf 仍连续。

线性空间公理验证 零函数 $0(x)=0$ 属于 $\mathcal{C}$，且满足：

- $f+g=g+f$
- $(\alpha\beta)f=\alpha(\beta f)$
- 其他公理由实数运算性质保证。

Problem 24 (子空间证明)**.** 证明：任意过原点的直线构成子空间。

解答过程

零向量存在性 直线 $L=\{tw \mid t\in\mathbb{R}\}$ 包含原点（$t=0$）。

加法封闭性 对任意 $tw, sw \in L$，有 $tw+sw=(t+s)w\in L$。

标量乘法封闭性 对任意 $\alpha\in\mathbb{R}$，有 $\alpha(tw)=(\alpha t)w\in L$。

Problem 25 (范数性质证明)**.** 证明：$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ 满足范数性质。

解答过程

非负性 $\|x\|\geq 0$，且 $\|x\|=0 \iff x=0$。

齐次性 $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$。

三角不等式 由柯西-施瓦茨不等式：

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$$

Problem 26 (线性映射验证)**.** 证明：$f(x)=a^Tx$ 是线性映射。

Ans:

加法保持性 对任意 $x,y\in\mathbb{R}^n$：

$$f(x+y)=a^T(x+y)=a^Tx+a^Ty=f(x)+f(y)$$

标量乘法保持性 对任意 $\alpha\in\mathbb{R}$：

$$f(\alpha x)=a^T(\alpha x)=\alpha a^Tx=\alpha f(x)$$

Problem 27 (矩阵迹的线性性)**.** 证明：令 $tr:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ 为矩阵迹，$tr(\cdot)$ 是线性映射。

解答过程

线性性验证 对任意矩阵 $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和标量 $\alpha \in \mathbb{R}$，有：

$$\mathrm{tr}(X+Y) = \sum_{i=1}^{n}(X_{ii}+Y_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} X_{ii} + \sum_{i=1}^{n} Y_{ii} = \mathrm{tr}(X) + \mathrm{tr}(Y)$$

以及：

$$\mathrm{tr}(\alpha X) = \sum_{i=1}^{n} \alpha X_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^{n} X_{ii} = \alpha \mathrm{tr}(X)$$

故迹运算满足线性映射定义。

Problem 28 (迹与内积等价性)**.** 证明：对 $x, y \in \mathbb{R}^n$，有 $x^T y = tr(x^T y) = tr(xy^T)$

解答过程

标量迹等价性 由于 $x^T y$ 是标量，其迹为自身：

$$\mathrm{tr}(x^T y) = x^T y$$

外积迹计算 对 $xy^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$，其迹为对角线元素和：

$$\mathrm{tr}(xy^T) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^T y$$

综上，$x^T y = \mathrm{tr}(x^T y) = \mathrm{tr}(xy^T)$。

Problem 29 (多重迹等式)**.** 证明：对 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 和矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，有

$$x^T Ay = tr(x^T Ay) = tr(yx^T A) = tr(Ayx^T)$$

解答过程

标量迹等价性 $x^T Ay$ 为标量，故：

$$\mathrm{tr}(x^T Ay) = x^T Ay$$

迹的循环性质 利用 $\mathrm{tr}(BCD) = \mathrm{tr}(CDB)$，令 $B = x^T, C = A, D = y$，则：

$$\mathrm{tr}(x^T Ay) = \mathrm{tr}(Ayx^T)$$

同理，$\mathrm{tr}(yx^T A) = \mathrm{tr}(x^T Ay)$。综上等式成立。

Problem 30 (谱范数性质)**.** 证明：谱范数 $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_2$ 满足范数三公理。

解答过程

非负性 由定义 $\|A\| \geq 0$，且 $\|A\| = 0 \iff A = 0$。

齐次性 对任意标量 α：

$$\|\alpha A\| = \max_{\|x\|=1} \|\alpha Ax\|_2 = |\alpha| \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_2 = |\alpha|\|A\|$$

三角不等式 对任意矩阵 A, B：

$$\|A+B\| = \max_{\|x\|=1} \|(A+B)x\|_2 \leq \max_{\|x\|=1}(\|Ax\|_2 + \|Bx\|_2) \leq \|A\| + \|B\|$$

Problem 31 (对称矩阵极值定理)**.** 设 A 对称，证明：

$$\lambda_{\min}(A) = \min_{\|x\|=1} x^T Ax = \min_{x\neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T x}$$

解答过程

瑞利商极值 由谱定理，$A = U\Lambda U^T$，令 $y = U^T x$，则：

$$\frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{y^T \Lambda y}{y^T y} = \frac{\sum \lambda_i y_i^2}{\sum y_i^2}$$

当 y 为最小特征值对应方向时取到最小值 $\lambda_{\min}$。单位球上结论同理。

Problem 32 (正定矩阵逆矩阵)**.** 证明：正定矩阵 Q 可逆，且 $Q^{-1} = U\Lambda^{-1}U^T$，其逆矩阵亦正定。

解答过程

可逆性 正定矩阵特征值 $\lambda_i > 0$，故 $\det(Q) = \prod \lambda_i \neq 0$，矩阵可逆。

逆矩阵表达式 由谱分解 $Q = U\Lambda U^T$，得：

$$Q^{-1} = U\Lambda^{-1}U^T$$

因 Λ^{-1} 对角元为正，Q^{-1} 正定。

Problem 33 (二次型分析)**.** 二次型 $f(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$。*a.* 写为矩阵形式并求标准型；*b.* 证明 $\min_x \frac{f(x)}{x^T x} = 2$；*c.* 证明 $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 1\}$ 是椭圆，求轴长比；*d.* 计算 $\nabla^2 f(x)$ 的条件数。

解答过程

Part (a) 矩阵形式：

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

通过正交变换得标准型：

$$f = 2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2$$

Part (b) 最小特征值为 2，故：

$$\min_x \frac{f(x)}{x^T x} = \lambda_{\min} = 2$$

Part (c) 标准化后方程为 $2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2 = 1$，投影到三维空间为椭球，二维截面为椭圆，轴长比 $\sqrt{4/2} : 1 = \sqrt{2} : 1$。

Part (d) Hessian 矩阵 $\nabla^2 f = 2Q$，其特征值比为 $4:2$，条件数 $\kappa = 2$。

Problem 34 (矩阵微分等式)**.** 证明：*a.* $d\,tr(X) = tr(dX) \implies \frac{\partial tr(X)}{\partial X} = I$ *b.* 乘法法则：$d(XY) = (dX)Y + X(dY)$ *c.* $d(X^T) = (dX)^T$

解答过程

Part (a) 由迹的线性性：

$$d\,\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(dX) = \sum_{i,j} \delta_{ij} dX_{ij} \implies \frac{\partial \mathrm{tr}(X)}{\partial X_{ij}} = \delta_{ij}$$

故梯度矩阵为 I。

Part (b) 按乘积微分法则：

$$d(XY)_{ij} = \sum_k (dX_{ik}Y_{kj} + X_{ik}dY_{kj}) \implies d(XY) = (dX)Y + X(dY)$$

Part (c) 由转置定义：

$$d(X^T)_{ij} = dX_{ji} = (dX)^T_{ij}$$