

# **ESTUDIO Y DESARROLLO DE CÓDIGOS PARA EL DISEÑO DE SISTEMAS TERMOFLUÍDICOS**

**Universidad Politécnica de Cataluña**

Centro Tecnológico de Transferencia de Calor

## **Proyecto Final de Carrera**

Tutor: Carlos David Pérez Segarra

Autor: Daniel Martínez Valdivieso

Para la obtención del grado de  
Ingeniero Industrial Superior Termoenergético por la UPC

Terrassa - Junio de 2012



## Agradecimientos

Quisiera agradecer el apoyo que he recibido de los diferentes organismos/personas que me han ayudado de una forma u otra a que el presente proyecto se haya podido materializar:

- Al Estado español y a la *Generalitat de Catalunya* que me han concedido diversas becas a lo largo de mis estudios universitarios.
- A la *Universitat Politècnica de Catalunya* que me ha dado la posibilidad de recibir una educación pública de calidad.
- Al conjunto del grupo de trabajo del *Centre Tecnològic de Tranferència de Calor i Massa* que me ha apoyado en el aspecto técnico, con el asesoramiento continuo que ha sido necesario para el desarrollo de este Proyecto Final de Carrera.
- En especial, me gustaría agradecer la oportunidad que el profesor y doctor Assensi Oliva Llena me ha concedido, a la ayuda del profesor y doctor Carlos David Pérez Segarra así como al profesor y doctor Francesc Xavier Trias Miquel, que han estado siempre dispuestos a tenderme una mano y cuya generosidad ha de ser siempre valorada.
- A mi padre, madre, hermano y novia que día tras día, durante largo tiempo, me han dado un soporte indispensable.

## Resumen

El presente proyecto tiene como objetivo la creación de un software en C++ que permita resolver y estudiar la fenomenología del movimiento de fluidos gobernada por las ecuaciones de Navier-Stokes.

La idea principal es poder simular el comportamiento fluido-dinámico y/o térmico de casos con geometrías sencillas. Para ello el código ha sido verificado a través de casos benchmark tal como *Driven Cavity* o *Differentially Heated Cavity*.

El máximo logro de este estudio es la simulación de un caso de aerodinámica en el cual se estudia el comportamiento de régimen laminar a través de un cilindro cuadrado.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>15</b>
1.1. Objeto . . . . .	15
1.2. Especificaciones Básicas . . . . .	15
1.3. Alcance . . . . .	16
1.4. Justificación . . . . .	16
1.5. Antecedentes . . . . .	19
<b>2. Núcleo técnico</b>	<b>21</b>
2.1. Ecuaciones gobernantes generales . . . . .	21
2.2. Hipótesis y ecuaciones simplificadas . . . . .	22
2.3. Adimensionalización . . . . .	25
2.4. Discretización . . . . .	27
2.4.1. Discretización espacial . . . . .	27
2.4.2. Discretización temporal . . . . .	35
2.5. Condiciones de contorno . . . . .	38
2.6. Solvers . . . . .	39
2.7. Algoritmo de resolución . . . . .	42
2.7.1. Fractional Step Method . . . . .	45
2.8. Taxonomía de errores . . . . .	47
<b>3. Verificación del código</b>	<b>51</b>
3.1. Driven Cavity . . . . .	53
3.1.1. Presentación del caso . . . . .	53
3.1.2. Comparación de resultados . . . . .	56
3.1.3. Visión de detalle . . . . .	65
3.1.4. Estudio de malla . . . . .	69
3.2. Differentially Heated Cavity . . . . .	71
3.2.1. Presentación del caso . . . . .	71
3.2.2. Comparación de resultados . . . . .	74
3.2.3. Visión de detalle . . . . .	77

3.2.4. Evolución transitoria . . . . .	81
<b>4. Caso de aplicación</b>	<b>85</b>
4.1. Presentación del caso . . . . .	85
4.2. Particularidades técnicas . . . . .	88
4.2.1. Escalado geométrico . . . . .	88
4.2.2. Fuerzas aerodinámicas . . . . .	89
4.2.3. Convective Boundary Condition . . . . .	89
4.2.4. Vortex Shedding . . . . .	90
4.2.5. Economía de malla . . . . .	90
4.3. Presentación de resultados . . . . .	92
4.3.1. Pre-Vortex Shedding . . . . .	92
4.3.2. Post-Vortex Shedding . . . . .	98
<b>5. Actuaciones futuras y conclusiones</b>	<b>107</b>
5.1. Línea de investigación futura . . . . .	107
5.2. Conclusiones generales . . . . .	108
<b>Bibliografía</b>	<b>109</b>
<b>A. Pliego de condiciones técnicas</b>	<b>113</b>

# Índice de figuras

1.1. Ejemplos de aplicación de CFD . . . . .	17
1.2. Simulación de una cortina de aire en una cámara de refrigeración. . .	18
2.1. Velocidad representante del volumen de control . . . . .	27
2.2. Mallas: estructurada y no estructurada . . . . .	29
2.3. Malla estructurada generada por el código . . . . .	30
2.4. Formulación colocada . . . . .	31
2.5. Efecto del Checkerboard . . . . .	32
2.6. Formulación staggered . . . . .	33
2.7. Esquema numérico . . . . .	33
2.8. Malla de $4 \times 3$ nodos . . . . .	40
2.9. Algoritmo global de resolución. . . . .	43
2.10. Taxonomía de errores . . . . .	48
3.1. Esquema de las características del caso Driven Cavity. . . . .	54
3.2. Driven Cavity. Reynolds 100. Perfil de velocidades simple. . . . .	63
3.3. Driven Cavity. Reynolds 1000. Perfil de velocidades simple. . . . .	64
3.4. Driven Cavity. Reynolds 5000. Perfil de velocidades simple. . . . .	64
3.5. DC. Re=100, u. . . . .	67
3.6. DC. Re=100, p. . . . .	67
3.7. DC. Re=100, v. . . . .	67
3.8. DC. Re=100, $\psi$ . . . . .	67
3.9. DC. Re=5000, u. . . . .	68
3.10. DC. Re=5000, p. . . . .	68
3.11. DC. Re=5000, v. . . . .	68
3.12. DC. Re=5000, $\psi$ . . . . .	68
3.13. Estudio de malla para el caso Driven Cavity $Re = 1000$ . . . . .	70
3.14. Esquema de las características del caso Differentially Heated Cavity. .	72
3.15. DHC, $Ra = 10^3$ , u. . . . .	79
3.16. DHC, $Ra = 10^3$ , p. . . . .	79

3.17. DHC, $Ra = 10^3$ , v. . . . .	79
3.18. DHC, $Ra = 10^3$ , $\psi$ . . . . .	79
3.19. DHC, $Ra = 10^3$ , T. . . . .	79
3.20. DHC, $Ra = 10^6$ , u. . . . .	80
3.21. DHC, $Ra = 10^6$ , p. . . . .	80
3.22. DHC, $Ra = 10^6$ , v. . . . .	80
3.23. DHC, $Ra = 10^6$ , $\psi$ . . . . .	80
3.24. DHC, $Ra = 10^6$ , T. . . . .	80
3.25. DHC, $Ra = 10^6$ , $T_1$ . . . . .	83
3.26. DHC, $Ra = 10^6$ , $T_3$ . . . . .	83
3.27. DHC, $Ra = 10^6$ , $T_5$ . . . . .	83
3.28. DHC, $Ra = 10^6$ , $T_2$ . . . . .	83
3.29. DHC, $Ra = 10^6$ , $T_4$ . . . . .	83
3.30. DHC, $Ra = 10^6$ , $T_6$ . . . . .	83
4.1. Esquema de las características del caso Flow around a Square Cylinder. . . . .	86
4.2. Malla de densificación especial para el caso Square Cylinder. . . . .	91
4.3. Square Cylinder, $Re = 40$ , u. . . . .	94
4.4. Square Cylinder, $Re = 40$ , v. . . . .	94
4.5. Square Cylinder, $Re = 40$ , p. . . . .	94
4.6. Square Cylinder, $Re = 40$ , $\psi$ . . . . .	94
4.7. Square Cylinder, $Re = 1$ , u. . . . .	96
4.8. Square Cylinder, $Re = 20$ , u. . . . .	96
4.9. Square Cylinder, $Re = 40$ , u. . . . .	96
4.10. Square Cylinder, $Re = 1$ , $\psi$ . . . . .	96
4.11. Square Cylinder, $Re = 20$ , $\psi$ . . . . .	96
4.12. Square Cylinder, $Re = 40$ , $\psi$ . . . . .	96
4.13. Square Cylinder, $Re = 200$ , instantes antes de la aparición del Vortex Shedding. . . . .	97
4.14. Square Cylinder, $Re = 100$ , zoom de la figura 4.13. . . . .	98
4.15. Sq.Cyl., $Re = 100$ , $t = 1$ . . . . .	100
4.16. Sq.Cyl., $Re = 100$ , $t = 6$ . . . . .	100
4.17. Sq.Cyl., $Re = 100$ , $t = 11$ . . . . .	100
4.18. Sq.Cyl., $Re = 100$ , $t = 61$ . . . . .	100
4.19. Sq.Cyl., $Re = 100$ , $t = 132$ . . . . .	100
4.20. Sq.Cyl., $Re = 100$ , $t = 159$ . . . . .	100
4.21. Sq.Cyl., $Re = 100$ , $t = 191$ . . . . .	101
4.22. Sq.Cyl., $Re = 100$ , $t = 215$ . . . . .	101



4.23. Sq.Cyl., $Re = 100$ , $t = 266$ . . . . .	101
4.24. Sq.Cyl., $Re = 100$ , $t = 279$ . . . . .	101
4.25. Square Cylinder, malla empleada para el caso de detalle. . . . .	103
4.26. Square Cylinder $Re = 200$ , evolución transitoria del Drag y el Lift. .	104



# Índice de cuadros

2.1. Particularidades en la formulación de la ecuación general de convección-difusión . . . . .	24
2.2. Métodos explícito e implícito . . . . .	36
3.1. Driven Cavity, componente horizontal de la velocidad benchmark. . .	57
3.2. Driven Cavity, componente vertical de la velocidad benchmark. . . .	58
3.3. Driven Cavity, comparación de velocidades, benchmark-numérica. Caso $Re = 100$ . . . . .	61
3.4. Driven Cavity, comparación de velocidades benchmark-numérica. Caso $Re = 5000$ . . . . .	62
3.5. Comparación térmica del caso DHC. . . . .	76
3.6. Comparación fluido-dinámica del caso DHC. . . . .	77
4.1. Square Cylinder, comparación al detalle Benchmark Vs. presente. . .	103
4.2. Square Cylinder, comparación de Benchmark Vs. presente, empleando mallas bastas. . . . .	105



# Nomenclatura

$\alpha$	Difusividad térmica
$\lambda$	Conductividad térmica
$\mu$	Viscosidad dinámica
$\nu$	Viscosidad cinemática
$\omega$	Volumen
$\phi$	Variable genérica
$\psi$	Función línea de corriente
$\rho$	Densidad
$\tau$	Tensor de tensiones
$e_c$	Energía cinética
$e_i$	Energía interna
$p$	Presión absoluta
$Pr$	Prandtl
$Ra$	Rayleigh
$Re$	Reynolds
$T$	Temperatura
$t$	Tiempo
$u$	Componente de la velocidad en dirección x
$v$	Componente de la velocidad en dirección y
$x$	Coordenada eje de abcisas
$y$	Coordenada eje de ordenadas



# Capítulo 1

## Introducción

El estudio se divide principalmente en los capítulos de Introducción, Núcleo técnico, Verificación de código, Caso de aplicación, Conclusiones y Fuentes de información.

En el capítulo Introducción se van a tratar principalmente los aspectos formales del proyecto referentes al Objeto, las Especificaciones Básicas, el Alcance, la Justificación y los Antecedentes.

El capítulo Núcleo técnico explica el marco teórico, el desarrollo del código y las directrices generales; el capítulo de Verificación de código explica de qué manera se ha comprobado que el código aporta soluciones correctas; el capítulo Caso de aplicación pretende utilizar el código desarrollado y verificado para analizar al detalle un caso concreto, en el capítulo Conclusiones se remarcarán los puntos más importantes del estudio y en el capítulo Fuentes de información se presentará la documentación y otros recursos que se han utilizado como soporte para el estudio.

### 1.1. Objeto

El objeto del proyecto es la comprensión de la fenomenología de la mecánica de fluidos y la transferencia de calor que describen las ecuaciones de Navier-Stokes a través de la creación de un software que permite su resolución numérica.

### 1.2. Especificaciones Básicas

Las principales especificaciones básicas del proyecto son las siguientes:

- El lenguaje de programación que se utilizará para desarrollar el código es C++.
- El código tiene que ser lo más íntegro posible, es decir, debe estar capacitado para simular un caso u otro, modificando un número reducido de parámetros

para garantizar su aplicación a un caso genérico. Esto significa poder escoger entre diferentes condiciones de contorno, esquemas numéricos, precisiones de cálculo, tipología de problema, etc.

- El método matemático utilizado para la resolución de las ecuaciones diferenciales será el Método de los Volúmenes Finitos.
- Se creará un código nuevo no comercial.
- El proyecto se orienta a la simulación de fluidos para casos de interés industrial, sin embargo, se considera preferente que el proyecto se utilice para la comprensión profunda de la fenomenología física.

### 1.3. Alcance

El alcance del estudio considera los siguientes puntos:

- La escala de los casos estudiados es suficientemente grande como para poder asumir la hipótesis de continuidad de la materia.
- El programa debe ser capaz de reproducir casos transitorios.
- Se resolverán las ecuaciones de Navier-Stokes bajo ciertas hipótesis simplificadoras.
- El fluido posee propiedades físicas constantes en el rango de aplicación de las ecuaciones.
- El fluido de trabajo ha de ser puro y newtoniano.
- El flujo será en todo caso incompresible.
- El flujo se estudiará para casos de régimen laminar.

Ha de quedar claro que no:

- Se consideran aplicaciones en las que el flujo sea turbulento.
- Se podrán simular situaciones de cambio de fase.

### 1.4. Justificación

Es interesante distinguir los dos tipos de justificación que se llevarán a cabo. En primer lugar, se justificará el uso de herramientas de CFD, y en segundo lugar, se



presentará la justificación del alcance y filosofía de este proyecto.

La experimentación y la construcción de prototipos, especialmente en los tiempos que corren, son muy caras y cada vez lo serán más dado el aumento de la complejidad de los productos industriales en cuanto a tecnologías, geometrías, tipología de flujo, etc. Es de primordial interés el análisis teórico y la predicción certera (o si más no, lo más acertada posible) de todos los procesos industriales, creación de maquinaria, vehículos y otros aspectos de interés industrial, que no se limitan sólo al ámbito en el que se mueve este proyecto. En concreto, en el campo de CFD&HT (*Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer*) la predicción de casos y su dimensionamiento óptimo es tan complicado que no puede ser resuelto analíticamente, este campo ha resurgido con la llamada era informática de tal manera que la utilidad y la fiabilidad<sup>1</sup> de los métodos numéricos en este ámbito de la ingeniería está más que justificado. Véase la figura 1.1 para apreciar 6 casos de interés actual.

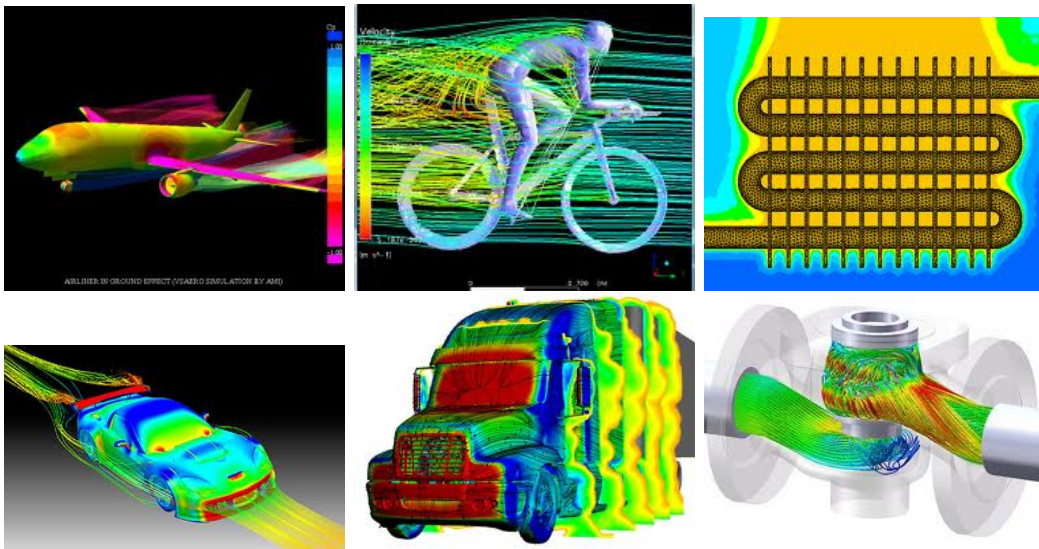


Figura 1.1: Algunos ejemplos de aplicación de CFD. Figuras obtenidas en <http://www.cfd-online.com/>

Tal y como ya se ha mencionado, se dará prioridad al estudio exhaustivo de la física y la fenomenología de la mecánica de fluidos que describe Navier-Stokes. La idea es tomar el presente proyecto como *fin*, pero también como *medio* ya que se pretende dar los pasos correctos para adquirir las herramientas adecuadas para un futuro en el mundo de la investigación. De este modo, en este proyecto se *rechaza* el uso de programas comerciales de CFD, como Ansys, Abaqus o Fluent, a sabiendas de que la espectacularidad del proyecto que resultaría de dedicarse a aprender el funciona-

<sup>1</sup>en territorio conocido, porque aún quedan muchas aplicaciones donde no se puede predecir con fiabilidad

miento de dichos programas, sería muy superior a la que se llevará a cabo con esta filosofía. Sin embargo, la profundidad del conocimiento que se obtiene analizando y programando con herramientas propias cada detalle, no es en ningún momento comparable a la que se obtendría mediante el uso de programas comerciales.

Como argumento a favor de esta filosofía, cabe destacar que las simulaciones llevadas a cabo por programadores y grupos de investigadores con algo más de experiencia que la que posee el autor (pero que han seguido los pasos que aquí se plantean) van mucho más allá de la precisión y el ámbito de aplicación de estos programas comerciales. Como ejemplo de ello, véase la figura 1.2, donde se presenta un caso LES (*Large Eddy Simulation*) del comportamiento fluido-térmico de una cortina de aire en una cámara de refrigeración industrial.

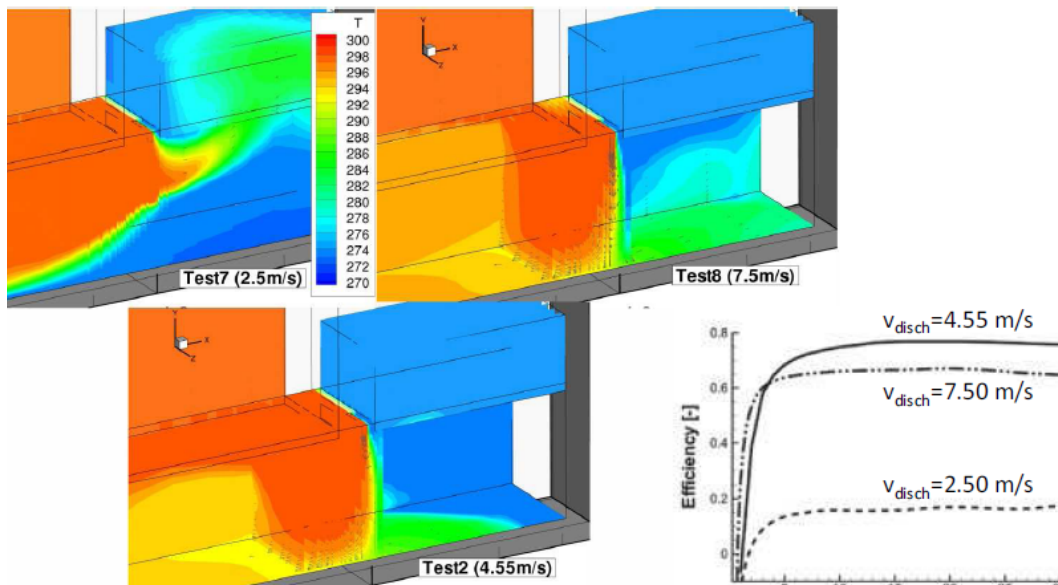


Figura 1.2: Simulación de una cortina de aire en una cámara de refrigeración industrial. Cortesía de Carlos David Pérez Segarra, investigador y profesor de la UPC en ETSEIAT.

Este tipo de programas comerciales son muy útiles y adecuados para casos estándar y en los que no se requiera un estudio de detalle. Sin embargo, cuando 1) se requiere un estudio de casos que no hayan sido contemplados por el equipo de programadores del software, 2) el análisis haya de ser exhaustivo, o cuando 3) el estudio requiera de la combinación de modelos sencillos con modelos complejos para la simulación de un caso con sólidos, líquidos y fenómenos de conducción, convección y radiación (y/o transferencia de masa); los programas comerciales acostumbran a ser ineficientes o incluso ineficaces, y las empresas se ven forzadas a contratar estudios concretos del

caso a instituciones con más conocimiento y experiencia en este tipo de problemas (atípicos, al detalle y/o combinados). Es por este motivo por el cual el autor ha decidido decantarse por esta manera de trabajar: sin el uso de programas comerciales y con la programación orientada a entender los conceptos físicos fundamentales, con vistas a obtener una formación sólida en el campo.

En las especificaciones básicas del proyecto se estableció que el método numérico que se utilizaría sería el *Método de los Volúmenes Finitos*. Además de éste, existen diversos métodos tales como el Método de las Diferencias Finitas, el Método de los Elementos Finitos, los Métodos Espectrales, y otros, pero, por el tipo de física que ha de ser representada en los casos de CFD&HT, el método numérico que parece ser más adecuado es el Método de los Volúmenes Finitos por la facilidad que presenta su estructura numérica para poner de manifiesto los principios de conservación de masa, momentum y energía.

## 1.5. Antecedentes

La formulación de las ecuaciones de Navier-Stokes se le atribuye a Claude-Louis Navier y George Gabriel Stokes, a mediados del siglo XIX. Estas ecuaciones son un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales que explican el movimiento de un fluido. Navier-Stokes (N-S) gobiernan cualquier proceso en el que haya el movimiento de un fluido, tales como el flujo en un conducto, el batido de las alas de un pájaro, el movimiento del café cuando se remueve con una cucharilla, un tornado, una ola o el movimiento del aire a través de un Boeing-747.

Las ecuaciones de N-S pueden ser escritas tanto en forma diferencial como en forma integral, y se obtienen de la aplicación sobre un volumen de control de los principios de conservación de masa y cantidad de movimiento así como el primer y segundo principios de la Termodinámica. Excepto en situaciones muy excepcionales con casos muy sencillos, y que dicho sea de paso tienen poco interés industrial, estas ecuaciones son irresolubles analíticamente. Para casos ligeramente más complejos se requiere el uso de los métodos numéricos y de computadores. Es precisamente esta rama de resolución de casos la que se la conoce como CFD.

Hace cerca de dos siglos que se conocen, y sin embargo, son las menos entendidas de todas en lo concerniente a la fenomenología de la turbulencia y en especial la transición de flujo laminar a turbulento. Como curiosidad es remarcable que el Instituto

de Matemáticas de Clay, en Massachusetts, premia con un millón de dólares americanos al bienaventurado que demuestre como discernir si un flujo que inicialmente sea laminar, lo seguirá siendo o se volverá turbulento pasado un período de tiempo.

Se cuenta que, años atrás, cuando ya se confiaba en que las ecuaciones de Navier-Stokes explicaran correctamente el movimiento de un fluido, pero aún no existían ordenadores que permitieran el cálculo masivo, existían *centros de investigación* donde se estudiaba el comportamiento del fluido discretizando espacial y temporalmente las ecuaciones. Lo curioso es la manera en la que se abordaban los cálculos. Cada persona se sentaba en el lugar de una sala en la que había sido asignada. Dicha asignación se realizaba de acuerdo con la geometría del sistema físico discretizado, y cada persona ejecutaba el papel de nodo, de tal manera que cada uno hacía sus cálculos y se “conectaba” con su vecino para intercambiar la información. Afortunadamente, ahora se dispone de superordenadores que hacen millones de operaciones por segundo y que facilitan tremendamente esta labor.

Actualmente, existe otro problema significativo: el elevado consumo eléctrico de los *clusters* destinados a las simulaciones numéricas, que funcionan día y noche para efectuar las enormes cantidades de operaciones que los casos de interés industrial demandan. Para combatir esto, cada vez más se está intentando buscar algoritmos de resolución más rápidos, técnicas de paralelización de código, y se lleva más al límite la interacción física-informática del problema.

## Capítulo 2

# Núcleo técnico

### 2.1. Ecuaciones gobernantes generales

En esta sección se presentan los principios físicos que representan las bases para la deducción de las ecuaciones de Navier-Stokes.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau} + \rho \vec{g} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial (\rho (e_i + e_c))}{\partial t} + \nabla [\rho \vec{v} (e_i + e_c)] = -\nabla \cdot (\vec{v} p) + \nabla (\vec{v} \cdot \vec{\tau}) - \nabla \cdot \vec{q} + \rho \vec{g} \cdot \vec{v} \quad (2.3)$$

La primera ecuación (2.1) es la que representa el principio de conservación de masa. La segunda ecuación (2.2) es, en realidad, una compactación de tres principios. Se ha utilizado la notación vectorial para las tres componentes de conservación de cantidad de movimiento, por ser una formulación más compacta. Y, por último, la tercera ecuación (ecuación (2.3)) pone de manifiesto el principio de conservación de la energía. Nótese que se omite la demostración de estas ecuaciones por razones prácticas y de economía de espacio. La deducción de las mismas ha sido y puede consultada en [1], donde se explican los fundamentos de la mecánica de fluidos.

La modelización de la dinámica de fluidos asumida por las ecuaciones (2.1) - (2.3) ya ha sido ligeramente simplificada. Las hipótesis asumidas en las ecuaciones previamente presentadas son hipótesis perfectamente asumibles para el alcance de este proyecto<sup>1</sup>. He aquí dichas hipótesis:

- Continuidad del medio.

---

<sup>1</sup>así como para la gran mayoría de las aplicaciones industriales e investigaciones de la comunidad científica.

- Efectos relativistas menospreciable.
- No aplicables a espacios físicos de más de tres dimensiones.
- Asumido sistema de referencia inercial.
- Fuerzas de coriolis ignorable.
- Interacción del fluido con campos magnéticos despreciable.
- Independencia de efectos cuánticos.

Desde luego, si se quisiera generalizar las ecuaciones para modelar el comportamiento del fluido sin las simplificaciones ya asumidas, habría que formular dichas ecuaciones de nuevo, pero ni que decir tiene, que no serían resolubles a ningún nivel con la tecnología y conocimiento actuales. Sin embargo, incluso cuando simplificaciones adicionales son llevadas a cabo, los resultados de las soluciones numéricas obtenidas explican con excelencia la fenomenología que se observa en la realidad experimental. De este modo, dichas hipótesis son de condición natural incluso en estudios de máximo nivel.

## 2.2. Hipótesis y ecuaciones simplificadas

Como ya se ha comentado antes, con respecto a las ecuaciones (2.1)-(2.3), hipótesis adicionales son necesarias para habilitar un espacio para la resolución numérica de las ecuaciones.

Préstese atención a las simplificaciones que se plantean a continuación porque éstas si que restringen el rango de aplicación considerablemente, y por lo tanto, diversos casos no podrán ser reproducidos por el código que se crea a partir de dichas simplificaciones:

- Las propiedades físicas del fluido serán constantes.
- El fluido de trabajo ha de ser newtoniano.
- Se desprecia el calor de disipación viscosa
- Se consideraran únicamente casos 2D

Dichas simplificaciones merecen un grado de explicación extra.

En primer lugar, al asumir propiedades físicas constantes, la consecuencia directa es que no se podrán estudiar casos en que el flujo sea compresible (donde la densidad del fluido es variable) y por lo tanto, gases a elevadas velocidades ( $Mach > 0.4$ ) dejarán de ser reproducibles con el código que se presenta en este proyecto. Además de esta limitación, también ha de hacerse notar que propiedades como la calor específica, la viscosidad o la conductividad térmica, también se toman como constantes, con lo cual se pierde un punto de análisis interesante (por ejemplo, como cuando estas propiedades físicas se consideran función de la temperatura). La consecuencia directa de esto, es que se limita el rango de simulación a una franja de temperaturas en la cual, las propiedades físicas no cambien significativamente (se admiten variaciones menores al 3 % en dichas propiedades).

En segundo lugar, al asumir fluido newtoniano se considera que los esfuerzos constantes son proporcionales al gradiente de velocidad. Ciertos fluidos no cumplen esta ley constitutiva (ley de Newton), y por lo tanto, han de ser excluidos de un hipotético estudio futuro. Esta limitación dejaría fuera de juego a metales fundidos, pinturas, plastilinas, sangre, miel y otros fluidos de características “pegajosas” o que no fluyen de un modo similar al que lo haría el agua.

En tercer lugar, y como una simplificación poco trascendente, la negligencia del calor de disipación del fluido con el propio fluido no representa un criba (a ningún nivel) en cuanto fluidos simulables o un aumento de limitación en las condiciones de estudio, es más bien una eliminación de un término engorroso que aporta poca información. Esta asunción es básicamente equivalente a afirmar que, NO se podría calentar significativamente un vaso de leche por efecto de ser removida con una cucharilla, lo cual es completamente asumible, sin embargo, es rigurosamente falso puesto que, al remover la leche se le estaría subministrando una cantidad de energía por vía cinética que finalmente, (por fricción del fluido con él mismo) acaba convirtiéndose en energía interna o lo que es equivalente, en un aumento de temperatura. Lo que en realidad se está suponiendo con esta hipótesis es que ese aumento de temperaturas es ridículo y no merece la pena considerarlo en los cálculos efectuados.

Por último, al admitir limitarse a casos en dos dimensiones, es obvio que se pierde un potencial de simulación tremendo. En realidad, son escasas las situaciones en que los casos a estudiar pueden aproximarse como bidimensionales y aún así aportar una solución de rigor. No obstante, y haciendo valer aquello explicado en la Justificación del proyecto (Sección 1.4), hay que quitar importancia a este asunto dado que la extensión a un caso tridimensional a partir de un caso bidimensional que ya haya

sido programado es absolutamente inmediato. Aún así, hay una gran variedad de casos 2D que contienen toda la fenomenología, y en este punto es donde los estudios que se plantean en este proyecto tienen mucho que aportar. Como argumento a favor también se desea destacar que, la explicación y mostrado de resultados 3D complica la situación, pero sin embargo la esencia fenomenológica es la misma. En otras palabras, la riqueza de descripción del movimiento de fluidos que el caso 3D aporta de más que el caso 2D no compensa el esfuerzo realizado.

Aunando todo lo anterior, se concluye que, las ecuaciones que se tomarán por gobernantes<sup>2</sup> son la que se presentan a continuación:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (2.5)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \quad (2.6)$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.7)$$

Obsérvese que las cuatro ecuaciones anteriores podrían ser compactadas en lo que se llama la *Ecuación General de Convección-Difusión*:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\text{Transitorio}} + \underbrace{\rho \left( \frac{\partial(u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\phi)}{\partial y} \right)}_{\text{Convectivo}} = \underbrace{\Gamma \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)}_{\text{Difusivo}} + \underbrace{S}_{\text{Fuente}} \quad (2.8)$$

En donde  $\phi$ ,  $\Gamma$  y  $S$  responden a:

Ecuación	$\phi$	$\Gamma$	$S$
Continuidad	1	0	0
Conservación de cantidad de movimiento en x	u	$\mu$	$-\frac{\partial p}{\partial x}$
Conservación de cantidad de movimiento en y	v	$\mu$	$-\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g$
Energía	T	$\frac{\lambda}{c_p}$	$\frac{\Phi}{c_p}$

Cuadro 2.1: Particularidades de cada una de las ecuaciones de Navier-Stokes con respecto la ecuación general de convección-difusión

Vale la pena comentar los diferentes términos que componen la Ecuación General de Convección-Difusión (ecuación (2.8)):

<sup>2</sup>teniendo en cuenta sus limitaciones



- Término transitorio, aporta información sobre la variación temporal de la variable.
- Término convectivo, cuya información es referente al transporte espacial (por movimiento del fluido) de la propiedad que se estudia.
- Término difusivo, representa el grado en que la variable se transporta por gradiente de concentraciones.
- Término fuente, que es considerado como un foco de generación o de sumidero.

## 2.3. Adimensionalización

Los fenómenos físicos que nos rodean (campos electromagnéticos, formación de nubes, corrientes marinas, etc.) *suceden*, es decir, existen (tienen presencia en nuestro entorno) y no requieren de una medición de sus atributos. En otras palabras, un tornado no necesita “saber” si la velocidad de desplazamiento de su zona de depresiones es 10 m/s o 36 km/h (u otras combinaciones de mediciones de velocidad), simplemente *sucede* así, sin una unidad de medición. La necesidad de medición es un parámetro manufacturado por la ciencia para cuantificar el fenómeno físico concreto, pero no es un requerimiento para que la naturaleza se manifieste como tal.

De acuerdo con esto, parece tener sentido estudiar cualquier fenómeno, y en particular los referentes a CFD&HT desde un punto de vista adimensional. Para la adimensionalización de las ecuaciones, solamente es de menester efectuar la división de cada una de las variables que intervienen en la ecuación que se pretende adimensionalizar, por un parámetro de referencia que tenga las mismas unidades. Por ejemplo, la variable  $x$  representa la distancia al plano y-z del sistema de referencia cartesiano, esta variable podría ser substituida por la variable  $X$  dividida por una longitud de referencia del caso. De modo que:

$$x = \frac{X}{L_{ref}}$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes establecen una relación matemática entre las variables siguientes: velocidad en dirección x ( $u$ ), velocidad en dirección y ( $v$ ), Temperatura ( $T$ ), Presión ( $p$ ), distancia paralela al eje x ( $x$ ), distancia paralela al eje y ( $y$ ), tiempo ( $t$ ). Si se repite el proceso de adimensinalización antes descrito para cada una de ellas y dichas variables se reemplazaran por su variable equivalente adimensional ( $x$  seria reemplazada por  $X \cdot L_{ref}$ ) se obtendrían las ecuaciones de Navier-Stokes adimensinalizadas.

La adimensionalización de las ecuaciones es un concepto que, rigurosamente hablando no es imprescindible para su resolución, sin embargo, aporta un valor añadido, eso sí, a efectos de experimentación resulta fundamental que se lleve a cabo. Considérese el caso en que se pretende estudiar la pérdida de carga (caída de presión) en una longitud ( $L$ ) determinada, de un fluido cualquiera que circula por el interior de una tubería circular (sin codos) de sección constante (diámetro  $D$  cualquiera) que transporta dicho fluido. Podría llegar a pensarse que es necesario experimentar con toda una serie de fluidos, a diferentes velocidades ( $v$ ) y toda una batería de cañerías de diferentes tamaños para llevar a cabo un estudio tan amplio. Sin embargo, en este caso se podría definir un parámetro adimensional llamado *Reynolds* ( $Re$ ) que facilitaría enormemente este estudio:

$$Re = \frac{\rho \cdot v_{media} \cdot D}{\mu}$$

La pérdida de carga de un fluido A, circulando a una velocidad media  $v_a$  por una tubería de diámetro  $D_a$ , en general, es diferente de la que presentaría un fluido B, circulando a una velocidad  $v_b$ , por una tubería de diámetro  $D_b$ . No obstante, si el cómputo de  $Re_a$  resulta ser igual que  $Re_b$ , la consecuencia (deducida experimentalmente) es que la caída de presión por unidad de longitud para los casos a y b resulta ser idéntica.

Este hecho permite reducir drásticamente la experimentación necesaria para el estudio. Una ventaja adicional, es que este hecho permite la obtención de un mapa detallado de esta fenomenología, realizando el experimento con *el fluido y las dimensiones de tubería que más convengan* para el efecto, ya que el **único** parámetro que identifica la fenomenología del caso es el número adimensional llamado Reynolds.

Tal como se ha dicho antes, no es vital para el alcance de este proyecto efectuar la adimensionalización de las ecuaciones, sin embargo, el hacerlo conlleva las siguientes ventajas:

- Tal como sucede en materia experimental, se ahorrará la reproducción necesaria de casos que tienen un *Reynolds gemelo*.
- Permitirá la comparación directa con casos experimentales en que la adimensionalización ha sido llevada a cabo
- Se trabajará con un menor número de parámetros y propiedades físicas.

Como último comentario se quiere añadir, que la adimensionalización de las ecuaciones depende del caso que se esté considerando, es decir, de la información disponible.

Por lo tanto, la teoría al respecto no puede llevarse más allá y se desarrollará cuando sea necesario en cada caso particular.

## 2.4. Discretización

Las ecuaciones (2.4)-(2.7) son un grupo de cuatro ecuaciones diferenciales en derivadas parciales acopladas entre sí (la ecuación (2.5) y la (2.6) contienen derivadas parciales de tres de sus variables) de tal manera que su resolución analítica es impracticable, esto implica el uso de métodos numéricos y, por consiguiente, su discretización espacial y temporal.

### 2.4.1. Discretización espacial

En la filosofía de los volúmenes finitos se divide el dominio que se pretende analizar en tantos volúmenes de control como sea necesario para simular la física inherente con la precisión deseada. La partición del dominio en volúmenes de control más pequeños asume que cada volumen de control representa un espacio físico fijo (siempre constante) en el cual se asumirá que todo el fluido contenido en él tendrá el mismo valor de temperatura, presión y velocidad que el centro del volumen de control. En otras palabras, la discretización espacial asume que el valor de las variables ( $T$ ,  $p$ ,  $u$ ,  $v$ ) de la partícula de fluido, que se encuentra en el centro del volumen de control, es el valor representante del resto de partículas contenidas en ese mismo volumen de control. Véase la figura 2.1 para aclarar visualmente el concepto anterior.

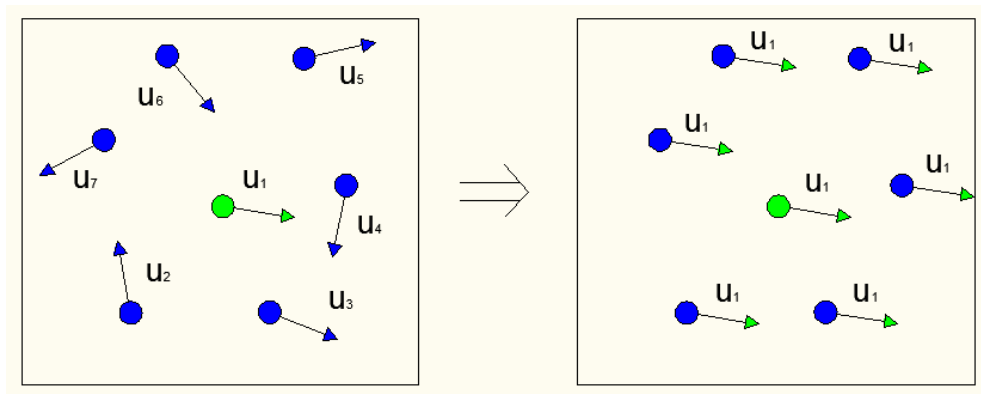


Figura 2.1: Aproximación de la velocidad central del volumen de control como representante de él.

Evidentemente, esto no es lo que sucede en la realidad, es una aproximación que se hace como parte la transformación de las ecuaciones diferenciales en las ecuaciones algebraicas.

El conjunto de volúmenes de control (o nodos) que conforman el dominio global forma una estructura de celdas vecinas cuyo conjunto se denomina malla (también conocido como rejilla).

## Mallas

Una malla se caracteriza por la forma de los nodos que la componen, así como por su situación y su tamaño relativo entre ellos. Se destacan los siguientes tipos:

- Estructuradas. Este tipo de mallas tiene un orden claro y *estructurado* para la situación de los nodos. Un ejemplo de malla estructurada (cartesiana) puede ser contemplado en la figura 2.2 donde aparece una malla global compuesta de dos submallas, la estructurada es la correspondiente a la parte inferior. Hay dos subtipos:
  - Uniformes, las cuales se caracterizan por dotar a todos los volúmenes de control con la misma separación relativa. Obsérvese que los nodos de la submalla inferior de la figura 2.2 tienen el mismo tamaño y distancia relativa en su dimensión vertical.
  - No uniformes, las cuales adaptan la distancia relativa entre volúmenes de control según convenga. Obsérvese que los nodos de la submalla inferior de la figura 2.2 tienen tamaño creciente conforme se avanza de izquierda a derecha con el objetivo de densificar y, por lo tanto, radiografiar con mayor precisión en la zona izquierda del dominio por razones no merece la pena comentar.
- No estructuradas. Este tipo de mallas parece tener una estructura desordenada y contiene, generalmente, volúmenes de control con formas triangulares. Puede apreciarse un ejemplo de malla no estructurada en la submalla superior de la figura 2.2.

La ventaja de las mallas estructuradas es que su geometría es sencilla y la consiguiente programación es intuitiva, sin embargo, tienen la limitación de que son muy robustas (en el sentido negativo de la palabra) puesto que no permiten una densificación 100 % personalizable, así como tampoco se adaptan a casos con geometrías que

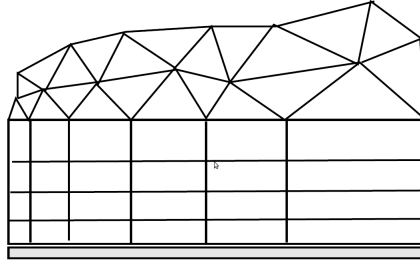


Figura 2.2: Combinación de mallas para el estudio de capa límite. Malla superior: no estructurada. Malla inferior: estructurada; uniforme verticalmente y no-uniforme (concentrada en la izq.) horizontalmente.

no sean paredes rectas o escalonables. El punto fuerte de las mallas no estructuradas es su moldeabilidad; son perfectamente adaptables a cualquier perfil geométrico pero, como contrapartida, son más complicadas de programar.

Tal como se dijo en las Especificaciones Básicas, se tratará solo con casos de geometrías sencillas y por consiguiente, se programaran mallas estructuradas pero no se utilizaran las no estructuradas. El motivo principal es la diferencia de calidad aportada (en el marco del Alcance definido) por la programación de una malla no estructurada no compensa el esfuerzo requerido. No obstante, la malla podrá ser no uniforme.

La programación de la malla estructurada se sustentará en una función que permita la densificación de nodos en las paredes del dominio. Mediante el uso de la función tangente hiperbólica, se ha creado una función matemático-informática que permite el mallado automático del dominio en función de tres parámetros, esta función es la siguiente:

$$x_i = \frac{L}{2} \left( 1 + \frac{\tanh(\gamma \cdot [2(i-1)/(N-1)])}{\tanh(\gamma)} \right) \quad (2.9)$$

donde  $x_i$  es la posición del nodo  $i$  en la dirección  $x$ ,  $L$  es la longitud del dominio a mallar en la dirección  $x$ ,  $N$  el número de nodos y  $\gamma$  el factor de densificación.

A continuación, en la figura 2.3, se presenta el resultado de mallar según la ecuación 2.9, un dominio de un metro de altura y también de base, con diez nodos en cada

dirección y factores de densificación cero (malla uniforme) verticalmente y dos<sup>3</sup> horizontalmente.

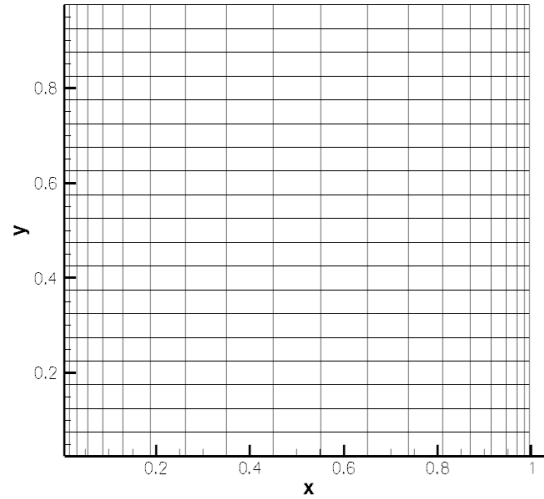


Figura 2.3: Malla estructurada. Densificada horizontalmente y uniforme verticalmente

En los casos que se presentaran en adelante, el número de nodos y el factor de densificación serán regulados manualmente para cada situación concreta. Ha de buscarse un compromiso entre la precisión deseada (en este sentido cuantos más nodos mejor) y el tiempo computacional (que se incrementa considerablemente conforme la malla se hace más densa). También hay otro balance referente al factor de densificación, ya que por un lado, interesa que sea grande para obtener más información sobre los fenómenos de capa límite alrededor de sólidos y paredes, pero por otro lado, conforme éste crece el salto temporal para reproducir un proceso transitorio es menor, de modo que el número de saltos temporales, y por lo tanto el tiempo de cálculo, aumenta considerablemente.

Ahora por ahora, gran parte de las características geométricas del procedimiento de resolución ha sido expuesta, sin embargo, aún quedan dos detalles que se necesita comentar para completar esta explicación: la formulación matemática y el esquema numérico.

---

<sup>3</sup>el valor 0 reproduce la malla uniforme, pero conforme este valor crece la malla se densifica en las paredes.

## Formulación de mallas

Pese a que se ha hablado de las principales características de la malla (elemento fundamental en el análisis numérico), aún queda por especificar otro aspecto esencial en cuanto a la metodología utilizada: la formulación de malla.

Existen cuatro variables de las cuales se desea conocer el mapa de sus valores en el dominio que se pretende simular: la velocidad (con sus dos componentes), la presión y la temperatura. En primera instancia, resulta natural tratar con una única malla (estructurada o no) con un número de nodos  $N$ , de forma que se asume que cada nodo tiene un valor representante para cada una de las cuatro incógnitas. Esta manera de formular es conocida como **co-located formulation** (o formulación colocada) por tener los valores representantes de las variables co-localizados en el centroide del volumen de control. Véase la figura 2.4 (donde la componente vertical de la velocidad se representa con una flecha vertical de color rojo, la componente horizontal con una flecha verde, y la temperatura y presión con un punto negro; todos ellos en el centro de los volúmenes de control [excepto en los contornos]).

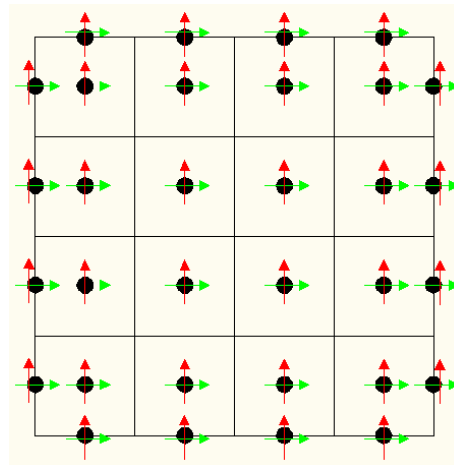


Figura 2.4: Detalles de la colocación de variables en la formulación colocada.

Esta manera de formular la malla es muy intuitiva y muy cómoda. Permite crear ciertas funciones informáticas, (como las de cálculo de los términos convectivos y difusivos) de tal manera que puedan ser aplicables a las cuatro variables indistintamente. Sin embargo, programando a un nivel básico (sin experiencia en el campo), esta formulación es muy problemática. Consigo trae problemas como el conocido *checkerboard* (o tablero de ajedrez), cuyo nombre se debe a las características de las falsas soluciones a las que conduce, en las que los valores de las variables a lo largo del dominio adoptan valores alternos y sin ningún sentido físico (véase figura 2.5).

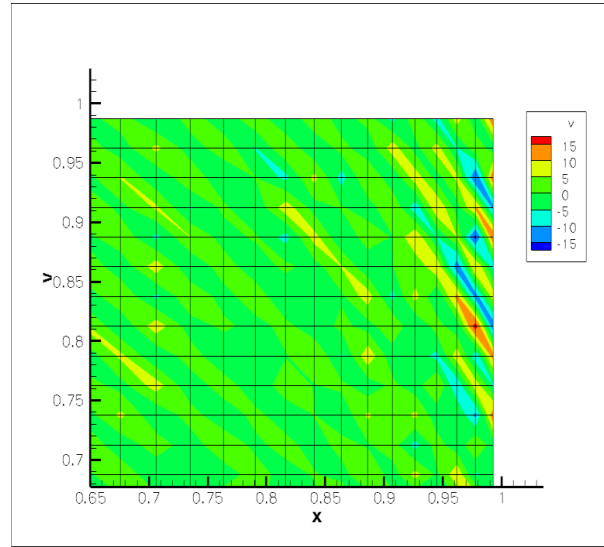


Figura 2.5: Manifestación del checkerboard en el campo de velocidades.

Esto sucede como consecuencia de que en la corrección de velocidades (esto se explicará con detalle en la sección 2.7) se hace intervenir el gradiente de presiones, el cual se emplea en la corrección de la velocidad de cada nodo mediante las presiones de los nodos vecinos **sin** considerar la presión propia. De esta manera, hay un desacoplamiento entre presiones y velocidades nodo a nodo, de tal manera que se generan unas inestabilidades numéricas que conducen a la convergencia de las soluciones checkerboard.

Con vistas a evitar la problemática del checkerboard, se ha desarrollado una formulación de malla que es menos intuitiva pero que resuelve este problema automáticamente. Esta formulación se denomina **staggered formulation** (o formulación desplazada) y se caracteriza por trabajar con tres mallas distintas: una para cada componente de la velocidad y una tercera (que equivaldría a la formulación colocada) para el campo de presiones y temperaturas. La problemática asociada a esta manera de formular es obvia: hay que programar tres mallas. Véase la figura 2.6 para visualizar la disposición relativa de mallas.

Se empezó programando una formulación de malla staggered, y cuando ya se dominó, se implementó también la formulación colocada incluyendo unas modificaciones en el gradiente de presiones en la corrección de velocidades, de tal manera que el problema del checkerboard desaparece. Obviamente, la solución obtenida no depende de la formulación escogida para efectuar la resolución. Por lo tanto, el hecho de programar ambas formulaciones no permite avanzar “longitudinalmente” en el proyecto, sin embargo, la ventaja (y el sentido) de haber programado las dos formulaciones



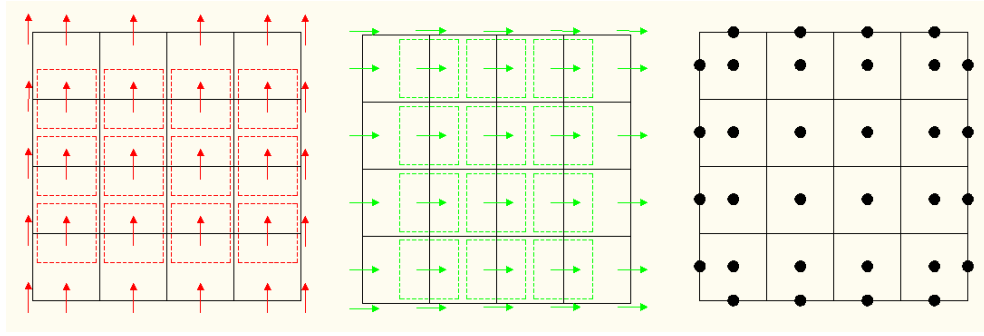


Figura 2.6: Detalles de la colocación de variables en la formulación staggered.

es que se gana solidez en los conocimientos y permite familiarizarse con la formulación colocada, ampliamente utilizada en mallas no estructuradas, las cuales serán indispensables en un futuro inmediato en el que se pretenda simular geometrías más complejas.

### Esquema numérico

Durante el proceso de integración numérica de las ecuaciones (2.5) y (2.6) adimensionalizadas que se requiere dentro del algoritmo de resolución (que se detallará en la sección 2.7) y con independencia de la malla utilizada y de su formulación, existe la necesidad de efectuar una evaluación de la propiedad ( $u$  o  $v$ , según la ecuación que se resuelva (2.5) o (2.6)) así como su gradiente, en las caras del volumen de control estudiado.

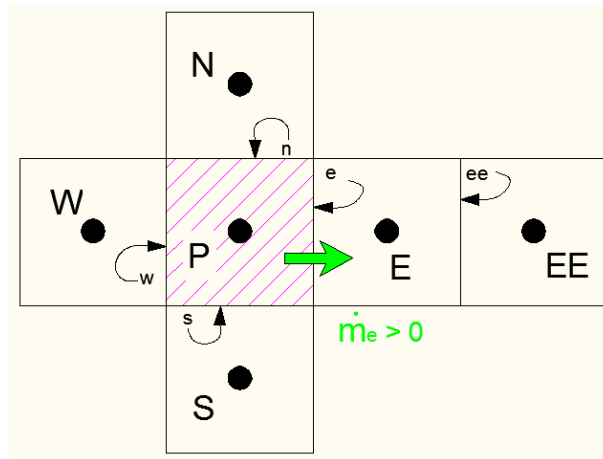


Figura 2.7: Nomenclatura de variables en el esquema numérico y disposición de nodos vecinos.

La evaluación de las propiedades y sus correspondientes gradientes en las caras del volumen puede ser efectuada usando diferentes métodos (Utilícese como apoyo visual la figura 2.7):

- Upwind Difference Scheme (UDS). Este método de evaluación de la propiedad en las caras asume que el valor de la propiedad es aquél que toma la variable del volumen de control aguas arriba del flujo, es decir, que:

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_E & \text{si } \dot{m}_e < 0 \\ \phi_P & \text{si } \dot{m}_e > 0 \end{cases}$$

- Central Difference Scheme (CDS). Este método efectúa la semisuma entre las variables de los dos volúmenes de control que comparten la cara donde se quiere calcular el valor de la propiedad.

$$\phi_e = (\phi_P + \phi_E) / 2$$

- Hybrid Difference Scheme (HDS). Este método utiliza CDS para velocidades bajas y UDS para velocidades altas.
- QUICK. Este método realiza una interpolación cuadrática de tres puntos:

$$\phi_e = \begin{cases} (\phi_P + \phi_E) / 2 - (\phi_{EE} - 2\phi_E + \phi_P) / 8 & \text{si } \dot{m}_e < 0 \\ (\phi_P + \phi_E) / 2 - (\phi_E - 2\phi_P + \phi_W) / 8 & \text{si } \dot{m}_e > 0 \end{cases}$$

El esquema numérico utilizado en la programación del código ha sido el CDS por su sencillez y efectividad en relación al resto de esquemas numéricos presentados. El esquema UDS es también muy sencillo, pero no es efectivo en la representación física del problema dado que es un esquema numérico disipador, es decir, que potencia el efecto de la difusión numérica y por consiguiente, añade disipación de energía cinética. El error que adiciona este esquema numérico es considerado totalmente inadmisibles. El esquema QUICK es probablemente mejor que el esquema utilizado (CDS) pero su programación es algo más complicada y dado que los resultados obtenidos con CDS son excelentes no se ha visto la necesidad de programarlo.

El punto concreto del algoritmo de resolución donde la aplicación del esquema numérico ha de realizarse, es en el cálculo de los términos convectivo y difusivo (véase la ecuación 2.8 en la página 24, donde se presentaron por primera vez). Partiendo de la forma diferencial de los términos convectivo y difusivo (sin las propiedades físicas), se puede obtener su forma integral:

$$Conectivo = u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \left( \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \nabla) \phi \, d\Omega \right) / \Omega \quad (2.10)$$

$$Difusivo = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \left( \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla \phi) \, d\Omega \right) / \Omega \quad (2.11)$$

Integrando los términos sobre un volumen de control cartesiano y utilizando el teorema de Gauss para convertir la integral de volumen en una integral de superficie, las ecuaciones (2.10) y (2.11) se convierten en:

$$Conectivo = \{[(u\phi)_e - (u\phi)_w] \Delta y + [(v\phi)_n - (v\phi)_s] \Delta x\} / \Omega \quad (2.12)$$

$$Difusivo = \left\{ \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y + \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x \right\} / \Omega \quad (2.13)$$

En las ecuaciones 2.12 y 2.13 es donde se aplican los esquemas numéricos descritos en la página 34. Usando la expresión matemática del esquema numérico elegido, se logra transformar el valor de la cara en una expresión matemática que es función de los valores en el nodo.

#### 2.4.2. Discretización temporal

Hasta ahora no se ha comentado nada en relación a la fenomenología temporal de las ecuaciones de Navier-Stokes. Aunque cuando las presenté en la sección 2.1 se mostró implícitamente (con la aparición del término transitorio) que son capaces de abordar procesos permanentes y también, transitorios. A grandes rasgos, se trata con un proceso transitorio, se siguen los siguientes pasos:

1. Tomar como dato el mapa inicial de las variables.
2. Establecer un salto temporal para el cálculo de los mapas en el siguiente instante.
3. Resolver las ecuaciones para el nuevo instante de tiempo.
4. Determinar si se requiere un nuevo instante de tiempo, o se da por finalizada la simulación.

Entonces, es necesario añadir una discretización temporal para la simulación de procesos transitorios. Hay muchos esquemas numéricos temporales que permiten tratar adecuadamente la situación, pero a grandes rasgos, se pueden clasificar en dos bloques:

- Métodos explícitos, los cuales asumen que el valor de las variables en el nuevo instante de tiempo es función **únicamente** del mapa anterior, de manera que permiten una resolución de tipo explícito.
- Métodos implícitos, los que asumen que el mapa en el siguiente instante temporal es función del mapa anterior y **también** de aquél correspondiente al nuevo instante. Estos métodos requieren de resolución implícita.

Las diferencias principales entre métodos explícitos e implícitos se resumen visualmente en la tabla 2.2:

Característica	explícito	implícito
$\phi^{n+1}$	$f(\phi^n)$	$f(\phi^n, \phi^{n+1})$
$\Delta t$	forzosamente pequeño	cualquiera
Ideal para	proceso transitorio	búsqueda del permanente
Coste comput. por it.	bajo	muy elevado
Estabilidad	baja	muy alta

Cuadro 2.2: Comparación de las principales características de los métodos explícito e implícito.

Ningún método es mejor que el otro para todos los casos, la idoneidad del método depende del caso concreto. Resumiendo lo que sucede es que en un método explícito se *predice* (aproxima) lo que pasará en el futuro a partir de lo que se conoce en la actualidad, mientras que en un método implícito se *calcula* con precisión. El valor de un *cálculo* (preciso) es siempre válido y no entraña ningún riesgo (numéricamente hablando) pero valor de una *predicción* se hace tanto más incierto cuanto más lejos del instante inicial se intenta predecir, y esa incertidumbre se traduce en inestabilidades numéricas que desencadenan en divergencia. Como argumento a favor de la *predicción*, se apunta que es mucho más *barata* que un *cálculo*; por lo que *predecir*, permite efectuar las operaciones necesarias por iteración mucho más deprisa que *calcular*.

Para evitar las inestabilidades numéricas de un código que funciona con un método explícito es necesario efectuar un cálculo del incremento de tiempo máximo que se puede tomar para que el riesgo de divergencia desaparezca. Este cálculo tiene dos restricciones: la restricción convectiva (ecuación (2.14)), que tiene sentido físico, y la restricción difusiva (ecuación (2.15)), cuya deducción se atribuye a demostraciones matemáticas que pueden consultarse en [2].

$$\Delta t \left( \frac{|u_i|}{\Delta x_i} \right)_{max} \leq C_{conv} = 0,35 \quad (2.14)$$

$$\Delta t \left( \frac{\nu}{(\Delta x_i)^2} \right)_{max} \leq C_{conv} = 0,2 \quad (2.15)$$

El significado físico de (2.14) recae sobre el hecho de que para efectuar el cálculo de una variable cualquiera (u, v o T) de un modo correcto, hay que usar un  $\Delta t$  menor que el tiempo que tardaría una partícula en cruzar el volumen de control. Esto sería equivalente a la situación en la cual se quiera monitorizar la curva aparente que el sol describe en el cielo en el transcurso de un día. En este caso, no tendría sentido tomar lecturas de la posición del sol con una frecuencia semanal pero sí que lo tendría tomar medidas a cada hora o cada minuto (dependiendo de la precisión que se desee, se tomaría uno u otro). Entonces, volviendo al caso bajo consideración, si el  $\Delta t$  fuese menor que el tiempo de cruce del nodo, el programa podrá “leer” las propiedades del fluido antes de que abandone el volumen del control, de lo contrario no tendrá sentido el cálculo.

Como conclusión a la información aportada en esta subsección de discretización temporal, parece razonable pensar en lo que ya se apuntaba al principio de esta discusión: la idoneidad de un método u otro depende del caso. Debe tomarse como referencia aquello que se resumió en la tabla 2.2 pero sin olvidar que, por ejemplo, podría darse el caso en que incluso en un proceso transitorio (en el que a priori sería mejor apostar por un método explícito), en donde el  $\Delta t$  resultase tan pequeño que el avance temporal de un método explícito sea más lento que un método implícito con un  $\Delta t$  que sea suficiente para el seguimiento transitorio de las variables. En el caso opuesto, también podría suceder que un explícito fuese más rápido que un implícito para la resolución de un caso en el que sólo se busca el estado permanente, en el que la evolución transitoria no es solicitada.

Finalmente, cabe decir que la mejor opción es la programación de ambos métodos y experimentar para cada caso que se desee estudiar con los dos métodos, para poder determinar “empíricamente” cuál de los dos ejecuta los cálculos más rápidamente. En el presente proyecto no se ha considerado que merezca la pena la programación de un método implícito puesto que con la programación del método explícito, los tiempos de cómputo de los casos que se desea resolver son razonables.

## 2.5. Condiciones de contorno

En la página 22, correspondiente a la sección 2.2 se presentaron las ecuaciones diferenciales (2.4)-(2.7) como la formulación físico-matemática esencial. No obstante, cuando la física de una ecuación diferencial gobierna un dominio concreto, la información para resolverla es incompleta y es necesario especificar (como parte de la formulación) qué tipo de comportamiento gobierna las fronteras, conocidas también como, condiciones de contorno.

Los tipos de condiciones de contorno más habituales son las siguientes:

- *Neumann*, este tipo de condición de contorno aporta información de de tipo indirecto. Se asume que el parámetro conocido es el ratio de cambio del valor de la variable ( $k$ ), es decir, que se conoce el valor de la derivada (en la dirección  $n$ ) de la variable ( $\phi$ ) en la frontera:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = k$$

- *Dirichlett*, la información que aporta este tipo de condición, es directa. El valor de la variable ( $\phi$ ) en la frontera, se considera conocido y toma el valor de ( $k$ ):

$$\phi = k$$

De este modo, si se quisiera modelizar el comportamiento de una pared adiabática se utilizaría la condición de contorno de Neumann, de tal forma que la variable  $\phi$  sería la temperatura, y  $k$  tomaría el valor de cero, mientras que si se pretende evaluar el flujo en una tubería, la velocidad del fluido en contacto con la tubería sería cero y por lo tanto se modelizaría con una condición de contorno de tipo Dirichlett tanto para la componente radial como para la componente longitudinal de la velocidad, donde  $k$  tomaría el valor de cero.

Cabe añadir que para los casos fluido-dinámicos que se abordaran en este proyecto, una condición de contorno especial debe ser utilizada, es la llamada *Convective Boundary Condition* (o condición de contorno convectiva) cuya aplicación tiene lugar en la simulación de casos en los que hay entradas y/o salidas de fluido con respecto al dominio estudiado. Por ahora, es suficiente con esta información, en la sección 4 se entrará al detalle de las propiedades de esta condición de contorno.

## 2.6. Solvers

Como ya se dijo previamente, el proceso de resolución de Navier-Stokes (a grandes rasgos) consiste en formular las ecuaciones generales, realizar unas hipótesis simplificadoras y aplicar unas técnicas de discretización que conducen a un conjunto de ecuaciones algebraicas que sean resolubles. Dichas ecuaciones algebraicas no han sido presentadas todavía, pero se trataran con más detalle en la sección 2.7. Por ahora, el problema que se pretende abordar es la resolución del grupo de ecuaciones algebraicas. La resolución se da por concluida cuando se conoce el valor de las variables del vector  $x$  de la ecuación 2.16<sup>4</sup>:

$$A \cdot x = b \quad (2.16)$$

En un primer momento y sobre el papel, se podría llegar a pensar en la inversión de la matriz  $A$ , para ejecutar el cálculo de las incógnitas tal como  $x = A^{-1} \cdot b$ . Sin embargo, en la práctica esto resulta totalmente inviable puesto que la inversión de la matriz  $A$  requiere de cálculos terriblemente pesados de efectuar. Estos cálculos son básicamente la matriz adjunta y el determinante de  $A$ .

Entonces, puesto que la postura clásica para resolver sistemas de ecuaciones lineales no funciona, hay que buscar herramientas de resolución alternativas. Dichas herramientas son algoritmos matemáticos llamados *solvers*. Es importante notar que la matriz  $A$  es, para el tipo de casos que se trataran en este proyecto, una matriz de dimensión  $N \times M$  (siendo  $N$  en número de nodos en la dirección “x”  $M$  el número de nodos en la dirección “y”) pero que como consecuencia de la estructura de conexión de nodos [cada nodo únicamente está conectado con 4 más, que son sus vecinos del oeste (w), este (e), sur (s) y norte (n)] la variable de cada nodo sólo interactúa con la variable de cada uno de sus vecinos y por lo tanto, implica que gran parte de sus coeficientes  $a_{ij}$  son nulos, (puesto que no hay cruce de información entre la mayoría de los nodos de la malla). Para concretar más, la matriz  $A$  tiene ciertas diagonales nulas y ciertas otras que no lo son. El número de bandas que tiene la matriz, solo depende del esquema numérico utilizado.

Para facilitar la comprensión de lo que se ha explicado en el párrafo anterior, se ha optado por presentar el caso de un dominio rectangular, con  $4 \times 3$  nodos (véase figura 2.8) con un esquema numérico CDS (el que efectúa la semisuma de variables de los nodos que comparten la cara en la cual se quiere evaluar la propiedad).

Así pues, en este caso, habrá cinco bandas (cuatro que corresponden a los vecinos, y la propia del nodo) y la matriz será de  $12 \times 12$ .

---

<sup>4</sup>la matriz  $A$  y el vector  $b$  son dato.

9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

Figura 2.8: Malla de  $4 \times 3$  nodos, como soporte y ejemplo para la construcción de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{P1} & a_{E1} & 0 & 0 & a_{N1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{W2} & a_{P2} & a_{E2} & 0 & 0 & a_{N2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{W3} & a_{P3} & a_{E3} & 0 & 0 & a_{N3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{W4} & a_{P4} & 0 & 0 & 0 & a_{N4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{S5} & 0 & 0 & 0 & a_{P5} & a_{E5} & 0 & 0 & a_{N5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{S6} & 0 & 0 & a_{W6} & a_{P6} & a_{E6} & 0 & 0 & a_{N6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{S7} & 0 & 0 & a_{W7} & a_{P7} & a_{E7} & 0 & 0 & a_{N7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{S8} & 0 & 0 & a_{W8} & a_{P8} & 0 & 0 & 0 & a_{N8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{S9} & 0 & 0 & 0 & a_{P9} & a_{E9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{S10} & 0 & 0 & a_{W10} & a_{P10} & a_{E10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{S11} & 0 & 0 & a_{W11} & a_{P11} & a_{E11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{S12} & 0 & 0 & a_{W12} & a_{P12} \end{pmatrix}$$

Ahora que ya se conoce la naturaleza de la matriz A, se puede entrar en la discusión de qué tipo de solver es más adecuado.

Existen dos grandes grupos de solvers: los directos y los iterativos.

- Directos. Tal como su nombre indica, un solver directo resuelve *directamente* las ecuaciones con las que trata. Esto significa que realiza una serie de operaciones, dirigidas por un algoritmo que devuelve la solución *exacta*<sup>5</sup> del sistema de ecuaciones que recibió. En general, este tipo de solvers son complejos en cuanto a sus algoritmo, por lo que son lentos de programar, pero también, rápidos en la ejecución. A continuación se nombran algunos solvers directos:

- LU. Este método se basa en la descomposición de la la matriz A en dos matrices llamadas L, de *Lower*, por ser una matriz triangular con todos

<sup>5</sup>Cuando se dice exacta, significa que se resuelve a precisión de máquina.



los elementos de la diagonal, y por debajo ella, no nulos (mientras que el resto son cero) y la matriz  $U$ , de *Upper*, donde los términos no nulos, ahora, son los que hay por encima de la diagonal. Esta descomposición tiene la ventaja fundamental de poder obtener el vector de incógnitas efectuando operaciones relativamente sencillas y por la vía directa.

- Band-LU. Este método se basa en el anterior, pero es potencialmente mejor que el LU cuando la matriz  $A$  tiene muchas diagonales con todos sus valores nulos. Esto es, precisamente, lo que sucede en todos los casos que se plantean en el proyecto.
  - TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm). Es un algoritmo muy específico tremendamente rápido para casos en que la matriz  $A$  contenga solamente tres diagonales no nulas y adyacentes, sin embargo, tal como se apuntó anteriormente los casos planteados siempre tendrán más de tres diagonales no nulas.
- Iterativos. El principio fundamental de este tipo de solvers es el de ensayo-error. Se prueba una solución y se mejora continuamente por repetición incesante de cálculos.
- Jacobi. Es el más sencillo de todos los solvers iterativos. El principio es tan sencillo como suponer una solución inicial y efectuar una iteración, se compara la diferencia entre el resultado recién calculado y el supuesto o último calculado. Si esta diferencia es mayor que la precisión de cálculo que se pidió, entonces se vuelve a repetir el proceso hasta que dicha diferencia sea menor.
  - Gauss-Seidel (GS). Es exactamente igual que el Jacobi, pero en lugar de recorrer todo el dominio para actualizar los valores de la nueva variable, los valores se actualizan nodo a nodo.
  - GS-TDMA (Gauss-Seidel apoyado en TDMA). Cuando la matriz  $A$  no es tri-diagonal, existe la opción de forzar a que lo sea, incluyendo los valores de tantas variables como sea necesario dentro del término independiente. De esta manera se obtiene una matriz  $A$ , ficticiamente tri diagonal, sobre la cual se puede aplicar un TDMA y obtener la solución directa. No obstante, hay que repetir una serie de veces dicho proceso puesto que la matriz  $A$  no es la matriz original del sistema.
  - Pre-Conjugate Gradient. Este algoritmo es aplicable únicamente a matrices simétricas y se basa en una serie de multiplicaciones matriz vector que se aproximan rápidamente al resultado de la solución.

- Multigrid. Dicho solver tiene la capacidad de utilizar mallas bastas para resolver el problema en una primera aproximación y progresivamente ir refinando la malla para encontrar soluciones mejores a partir de las soluciones obtenidas con las mallas bastas previamente simuladas.

En general, (pero se debe saber elegir bien)<sup>6</sup> un solver directo es mucho más veloz que un solver iterativo además de que la calidad de la solución es mucho mayor (la precisión de un directo es  $10^{-18}$ , la del iterativo es regulable, pero nunca mejor que la de un solver directo). Si se pretendiese que un solver iterativo resolviera a precisión de máquina, no habría ninguna duda que cualquier solver directo seria mejor que el iterativo, sin embargo, ocurre que con precisiones de  $10^{-5}$ , la fiabilidad y validez de la solución resultante acostumbra a ser buena, tanto que a efectos macroscópicos una solución con precisión de  $10^{-4}$  no presenta diferencia alguna con respecto a la máxima precisión alcanzable.

En este estudio, se han programado los solvers Jacobi, GS, GS-TDMA y Band-LU. La diferencia de velocidad de convergencia entre los dos primeros es prácticamente menospreciable, pero el tercero es perceptiblemente mejor, sobretodo si se utilizan mallas finas (mayores de  $40 \times 40$  nodos). Conforme se fue avanzando en el estudio y los casos que se simulaban, cada vez presentaban Reynolds o Rayleigh más elevados, se iba necesitando una malla mucho más fina ( $100 \times 100$  volúmenes de control). Mallas de este tamaño implican un desbordamiento de este tipo de solvers iterativos y entonces se vio la necesidad de programar un Band-LU. Una vez implementado, el ratio de tiempo empleado en el cómputo se percibió de 1:10, 1:100 e incluso mayores, en función de lo crítico que sea el caso simulado.

## 2.7. Algoritmo de resolución

Hasta ahora se ha hablado, en general, de todos los aspectos fundamentales a tener en cuenta en el proceso de resolución, sin embargo, no se han establecido las conexiones entre los diferentes conceptos. En esta sección se tratará sobre el orden de los procesos, el orden las operaciones computacionales y se especificaran diversos otros detalles técnicos sobre el algoritmo de resolución.

Obsérvese la figura 2.9, la cual pretende presentar desde una perspectiva visual el algoritmo global de resolución. En líneas generales, el algoritmo tiene cuatro partes

---

<sup>6</sup>si se pretende usar un Band-LU cuando la matriz A es completa, incluso un GS podría ser más rápido.

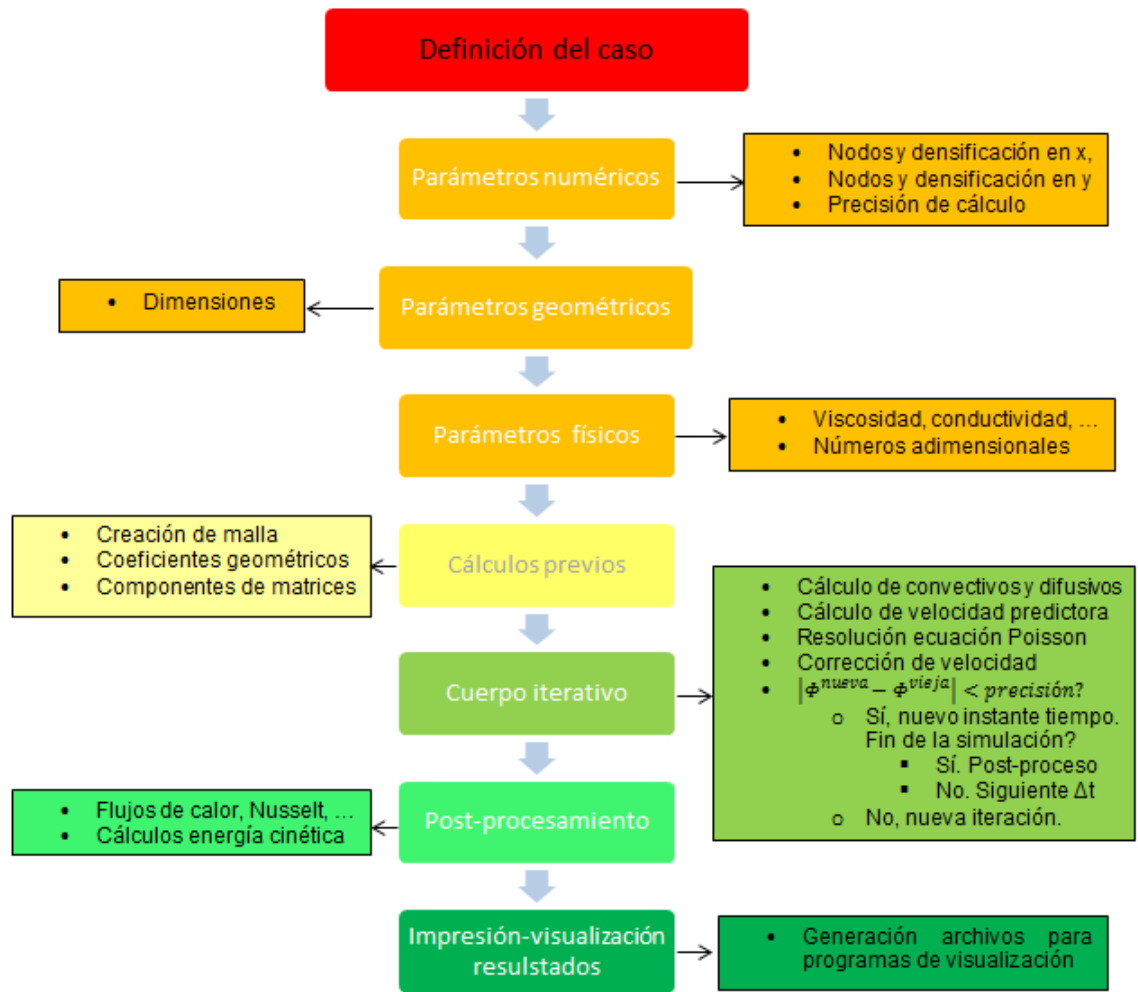


Figura 2.9: Algoritmo global de resolución.

primordiales:

1. Definición del caso. Es la parte esencial de todo el proceso. Consiste en la transformación del problema físico que se pretende resolver en un conjunto de ecuaciones gobernantes y sus respectivas condiciones de contorno. Este proceso de transformación resulta, en ocasiones, complicado porque en él:

- se efectúan las simplificaciones adecuadas identificar las condiciones de contorno,
- se elige la malla adecuada,
- se opta por una discretización espacial y temporal concreta,
- y se establece cuál debe ser el criterio del proceso temporal iterativo.

2. Introducción de datos y cálculos iniciales. De acuerdo con todo aquello que

se ha estipulado en la definición del caso, se introducen todos los parámetros necesarios en el código:

- las propiedades físicas de los fluidos y de los materiales que intervienen en el caso.
- las dimensiones físicas de todos los elementos que intervienen en el dominio de cómputo
- los aspectos numéricos como el número de nodos y la densificación de la malla, como también la precisión de cálculo deseada, el tipo de solver a utilizar, y otros parámetros de naturaleza numérica.

Referente a los cálculos iniciales, cabe destacar:

- la generación de la malla que representará la discretización del dominio, y
- la generación de la matriz A y sus transformaciones previas para capacitar el solver en el proceso iterativo temporal.

3. Cuerpo iterativo. Es la parte central y más importante del cálculo que desarrolla el programa. Suele repetirse millones de veces hasta que las condiciones de parada de la simulación se cumplen, es decir, hay convergencia a una solución de acuerdo con los criterios de detención de cálculos escogidos. Desde luego, esta parte requiere un grado de explicación mayor, dichas explicaciones se aportan en breve.

4. Cálculos finales y visualización de resultados. Una vez el mapa de valores de las variables se da por resuelto, es decir, el proceso iterativo ha sido detenido por el cumplimiento del criterio de parada, se entra en una etapa en la que:

- se realizan una serie de cálculos para verificar que la solución es correcta
- se computan variables de post-proceso tales como los flujos de calor, las fuerzas de arrastre u otros elementos de interés.
- se prepara un archivo para facilitar la visualización de resultados<sup>7</sup>.

La estructura del cuerpo iterativo depende principalmente del método que se utiliza para la resolución de la parte fluido-dinámica de las ecuaciones de Navier-Stokes (las ecuaciones 2.4 - 2.6). Existen dos métodos muy conocidos denominados *SIMPLEC Method* y *Fractional Step Method* (FSM). El primero fue el pionero y tuvo un gran

---

<sup>7</sup>Nótese que C++ es un programa muy potente para el cálculo rápido y eficiente, sin embargo, para la visualización de resultados se utiliza Tecplot.

impulso medio siglo atrás, pero está siendo reemplazado recientemente por el segundo, dado que el FSM es más estable y mucho más rápido que el SIMPLEC. Así pues el FSM ha sido implementado en el software que se ha creado.

### 2.7.1. Fractional Step Method

El FSM parte de las ecuaciones de Navier-Stokes adimensionalizadas y en su forma vectorial y diferencial (ecuaciones (2.17) y (2.18)).

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \vec{u} \quad (2.18)$$

Sobre las ecuaciones 2.17 y 2.18, se aplica el teorema de la descomposición de Helmholtz-Hodge cuyo objetivo es efectuar una proyección de la ecuación 2.18 sobre el espacio de divergencia nula, de manera que el término de gradiente de presiones desaparece. Después de una serie de transformaciones gobernadas por identidades vectoriales que pueden ser consultadas en [3] se obtiene la ecuación de Poisson (ecuación 2.19).

$$\Delta p = \nabla \cdot \left( -(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{1}{Re} \Delta \vec{u} \right) \quad (2.19)$$

La ecuación de Poisson es la clave del Fractional Step Method. La resolución de dicha ecuación resulta ser la parte complicada del método, puesto que entre el 80 y el 90 % del tiempo computacional se invierte en este punto.

A partir de las ecuaciones 2.17 y 2.18, se aplican los esquemas numéricos y temporales. Mediante un Cendra Difference Scheme para la discretización temporal, y un esquema explícito de segundo orden (conocido como Adams-Bashforth) para los términos convectivo y difusivo (compactados en el vector  $\overrightarrow{R(\vec{u})}$ ) se obtienen las ecuaciones finales, sobre las cuales el FSM es aplicable (ecuaciones 2.20 y 2.21):

$$\nabla \cdot \overrightarrow{u^{n+1}} = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\overrightarrow{u^{n+1}} - \overrightarrow{u^n}}{\Delta t} = \frac{3}{2} \overrightarrow{R(\vec{u})^n} - \frac{1}{2} \overrightarrow{R(\vec{u})^{n-1}} - \nabla p^{n+1} \quad (2.21)$$

Entonces, el algoritmo de integración de las ecuaciones 2.20 y 2.21 consta de cuatro pasos que se ejecutan en instante temporal:

1. Evaluación de  $\overrightarrow{R(\vec{u})}$ . A partir de el campo de velocidades, supuesto (el del instante anterior, cuando se hace la primera iteración) o el último calculado (en todas las siguientes iteraciones) se calculan los términos convectivo y el difusivo, en el instante anterior (instante  $n$ ):

$$\overrightarrow{R(\vec{u}^n)} = -(\vec{u}^n \cdot \nabla) \vec{u}^n + \frac{1}{Re} \Delta \vec{u}^n \quad (2.22)$$

Dicha evaluación de los términos convectivo y difusivo se realiza según la discretización que aparece en las ecuaciones 2.12 y 2.13, en la página 35. Además, en este paso hay que evaluar el  $\Delta t$ , según lo que rigen las ecuaciones 2.14 y 2.15, y tomar el mínimo de estos valores.

2. Evaluación de  $\vec{u}^p$ . A partir de a) el campo de velocidades del instante anterior; b) la evaluación del punto 1, también en el instante  $n$ ; y c) la evaluación del punto 1 dos instantes atrás (instante  $n-1$ ), se calcula la denominada velocidad predictora:

$$\vec{u}^p = \vec{u}^n + \Delta t \left( \frac{3}{2} \overline{R(\vec{u})}^n - \frac{1}{2} \overline{R(\vec{u})}^{n-1} \right) \quad (2.23)$$

El cálculo el campo de esta velocidad predictora es la que genera, como se verá en el paso 3, el término independiente de la ecuación 2.24.

3. Resolución de la ecuación de Poisson. La ecuación de Poisson inicial (2.19), se presentó de una forma un tanto más complicada de lo que se presenta a continuación. El motivo de esta “simplificación” no es más que la “complicación” queda enmascarada dentro del cálculo de la velocidad predictora, realizado en el paso anterior (paso 2).

$$\Delta p = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \vec{u}^p \quad (2.24)$$

La ecuación anterior (ecuación 2.24) ha de ser discretizada y convertida en un conjunto de ecuaciones algebraicas que permitan el cálculo del campo de presiones en todo el dominio. Repitiendo el proceso que se siguió para la obtención de las ecuaciones 2.12 y 2.13, la ecuación 2.24 se convierte en la ecuación 2.25:

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_e - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y + \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_n - \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x \\ &= \frac{1}{\Delta t} [u_e^p - u_w^p] \Delta y + \frac{1}{\Delta t} [v_n^p - v_s^p] \Delta x \end{aligned} \quad (2.25)$$

Un par de pasos adicionales son requeridos sobre la ecuación anterior, para que sea transformada en la ecuación que realmente se ha programado en el software. Hay que aproximar los gradientes de presión en las caras con un desarrollo de Taylor de segundo orden y reagrupar coeficientes:

$$\left[ \frac{p_E - p_P}{\delta x_{EP}} - \frac{p_P - p_W}{\delta x_{WP}} \right] \Delta y + \left[ \frac{p_N - p_P}{\delta y_{NP}} - \frac{p_P - p_S}{\delta y_{SP}} \right] \Delta x = b_p \quad (2.26)$$

$$a_P p_P = a_W p_W + a_E p_E + a_S p_S + a_N p_N + b_p \quad (2.27)$$

Finalmente, se ha obtenido la ecuación de Poisson discretizada y lista para ser tratada computacionalmente. Nótese que:

- a) que la ecuación 2.27 es la forma general en la que se encuentra la discretización para **un** nodo genérico, es decir, que habrá tantas ecuaciones con la forma de ésta como nodos tenga el dominio.

- b) la conexión matemática de la ecuación 2.27 con el dominio físico, se manifiesta en la figura 2.7 situada en la página 2.7
  - c)  $\delta x_{NP}$ , es la distancia en el eje de la variable espacial  $x$  que hay entre el nodo  $P$  y el nodo  $N$  para cada una de las ecuaciones discretizadas. El mismo razonamiento aplica para el resto de  $\delta$ 's de la ecuación (2.26).
  - d) el coeficiente  $a_W$  es un parámetro puramente geométrico:  $a_W = \frac{\Delta y}{\delta x_{WP}}$ . El mismo razonamiento aplica para el resto de coeficientes, excepto para el  $a_P$  que resulta ser  $a_P = a_W + a_E + a_S + a_N$ . Por lo tanto, y pese a estar dentro de los cálculos iterativos, los coeficientes  $a$ , no han de ser recalculados en cada iteración y de ahí que se comentase anteriormente, que haya una parte de cálculo de coeficientes geométricos y adaptación de la matriz  $A$  en el apartado de cálculos iniciales del algoritmo de resolución.
  - e) esta estructura de ecuación genera una matriz banda-diagonal tal como la que se presentó en la página 40.
4. Corrección de campo de velocidades. Una vez se ha resuelto la ecuación de Poisson, lo que se obtiene es el campo de presiones. Con él, se corrige el campo de velocidades predicho,  $\vec{u}^p$ , para obtener finalmente el campo de velocidades de el nuevo instante de tiempo  $\vec{u}^{n+1}$ , el cual ya es incompresible y cumple con la ecuación 2.20:

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^p + \Delta t \nabla p^{n+1} \quad (2.28)$$

## 2.8. Taxonomía de errores

Ahora sí, toda la base teórica fundamental que se requiere para resolver Navier-Stokes ha sido explicada. Si se siguen las directrices comentadas y se combinan con el uso del código creado, la física inherente al movimiento de fluidos a través es reproducible a través de la solución numérica obtenida. Ahora bien, también es cierto que dicha solución numérica no reproduce *exactamente* lo que sucede en la realidad física, es decir, hay una componente de error en la solución.

Con el objetivo de discernir si se puede confiar en la solución obtenida, resulta esencial, que se analicen todas las fuentes de error y sus magnitudes. En la figura 2.10, se presenta un sumario de todos los errores que intervienen en el proceso descrito.

Obsérvese que la figura 2.10 contiene dos grandes ramas de errores. Resulta chocante reconocer que hay unos errores *no conocidos* pero cuando se trata con temas de programación informática, hay que tener muy claro el siguiente principio:

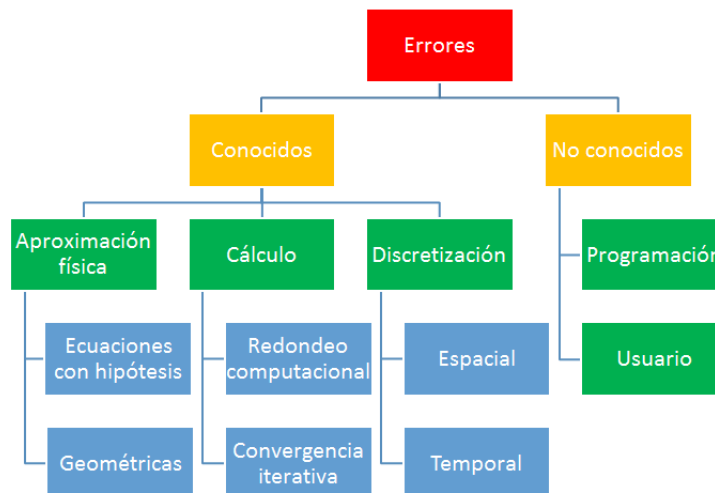


Figura 2.10: Taxonomía de errores

*Cuando se encuentra un error, de lo único que se está seguro es de que queda uno menos...*

Esta idea da lugar a la tipología de errores “de programación” y se traduce en que nunca se puede dar por supuesto de que el código creado está libre de errores, pero también hay que decir, que no se trata de ser catastrofistas porque existen alternativas para verificar que aquello que se ha creado es decente y confiable, dichas alternativas se desarrollan en el capítulo 3. Aún existe otro tipo de error no conocido y son los que pueda cometer el usuario del código.

La tipología de errores más interesante para comentar es la de los errores *conocidos*, que a su vez se han clasificado en tres subtipos:

1. Errores de aproximación física. Éstos son debidos, por un lado, a el uso de ecuaciones que modelizan el comportamiento del fluido y por otro lado, a la monitorización del dominio físico real.
2. Errores de cálculo. Los errores de cálculo se deben principalmente a dos motivos: uno, el número de cifras significativas con las que el ordenador trabaja es de unas 16, por lo tanto existe un error de redondeo en la última cifra significativa; y dos, hay una componente de error debida a la convergencia iterativa (en caso de utilizar solvers iterativos) cuya magnitud será el orden de precisión que el usuario haya demandado.
3. Errores de discretización. La discretización de las ecuaciones gobernantes introduce errores en la solución, puesto que se transforma la naturaleza continua



del fenómeno en una naturaleza discreta, así pues, tanto la discretización espacial como la temporal contribuyen a engordar el error de la solución.

Comentados todos los errores que podrían afectar a la solución obtenida, lo único que resta por añadir es la particularización de los mismos a los casos que se pretenden simular:

- Los errores de programación siempre pueden existir, incluso en procesadores de texto, u otros programas que se hacen servir a diario, los hay.
- El usuario es el propio programador, por lo que los posibles errores cometidos por el usuario no serán debidos a desconocimiento del funcionamiento. De todos modos, siempre cabe la posibilidad de que en alguna simulación se haya tecleado mal algún dígito o que hayan sucedido descuidos similares.
- Los errores debidos a hipótesis simplificadoras son despreciables, siempre que los casos que se quieran simular tengan las características que se han ido especificado a lo largo del capítulo 2, especialmente el la sección 2.2.
- Los errores de modelización geométrica no aplican en este estudio puesto que los dominios de simulación tienen geometrías sencillas.
- Al no usar solvers iterativos los errores de cálculos iterativos son estrictamente nulos.
- El uso de 16 cifras significativas es mucho más que suficiente para la monitorización de los casos. De hecho usar 6 o 7 cifras ya sería razonable.
- La discretización es sin duda alguna es la fuente de errores más importante, es difícilmente predecible qué nivel de discretización (cuantos nodos y qué salto temporal se requiere) es adecuado si no se tiene experiencia en el campo, incluso si se tiene, en ocasiones, la única manera es hacer un estudio de malla para analizar a partir de qué momento, aumentar el número de nodos no afecta a la solución obtenida (lo cual significa que ese sería el nivel de discretización más fino que tiene sentido aplicar).

Una vez clasificados todos los tipos de errores que afectan a la solución obtenida, habría que cuantificar sus valores y discernir si son razonables o no. Como es natural, a este nivel matemático no hay manera alguna de evaluar teóricamente los errores que contiene la solución numérica, de este modo, hay que seguir un proceso de verificación alternativo. Dicho proceso se detalla en el siguiente capítulo.



## Capítulo 3

# Verificación del código

Llegados a este punto, ya ha quedado claro cuál es el proceso que hay que seguir para resolver Navier-Stokes. Ahora, es el momento de entrar de lleno en la verificación, visualización y valoración de resultados.

Para verificar el código hay diversas herramientas, que corresponden a niveles de análisis diferentes. Se destacan las siguientes:

- Revisión de código. No es, en realidad, otra cuestión que asegurarse de que el código creado está libre de errores de sintaxis (de acuerdo con el lenguaje de programación utilizado). Mediante una revisión exhaustiva visual y con apoyo de debugadores informáticos, la revisión del código se ejecuta de forma relativamente sencilla.
- Verificación intuitiva. Consiste en criticar la lógica, en términos físicos, del resultado obtenido. Este nivel de análisis sólo permite “descartar” las soluciones que no tienen sentido, además de aceptar como potencialmente correctas aquellas que concuerdan con lo que se intuye desde el punto de vista físico. Ni que decir tiene, que no es un método 100 % fiable para la verificación del programa. Hay dos motivos principales por los que no se puede considerar fiable: 1) la intuición no siempre conduce al buen camino, y 2) lo que aparentemente y desde el punto de vista “macroscópico” parece estar de acuerdo con la intuición, puede que al ser analizado al detalle contenga errores importantes.
- Verificación por comparación con casos benchmark. Esto es equivalente a realizar una serie de adaptaciones sobre el código creado, de tal manera que permitan simular una situación que previamente haya sido simulada por algún organismo de autoridad y que se encuentre disponible en la literatura científica a través de *papers* (artículos) u otros documentos científicos. Mediante la com-

paración con los resultados que dicha autoridad presentó, se puede certificar que el programa funciona correctamente.

- *Method of Manufactured Solution*. Este método consiste en la comparación numérico-analítica de algunos resultados parciales del algoritmo de resolución. En líneas generales lo que se hace es:

1. Se selecciona el fragmento del algoritmo de solución que se someterá a la prueba. Dicho fragmento será considerado como una caja negra que tiene unos *inputs* y unos *outputs*.
2. Se asumen unos inputs que permitan una resolución analítica del subproblema que plantea el fragmento escogido.
3. Se calculan los outputs de dos maneras: 1) analíticamente, y 2) usando el código creado.
4. Se repite el proceso con diversas mallas. Suele comenzarse con una malla basta (de unos 8 nodos) y se repiten los pasos anteriores con mallas de doblan, sucesivamente, el tamaño de la anterior: 16, 32, 64, 128 y 256 nodos.
5. Se comparan los outputs de los dos métodos de cálculo para las diferentes mallas empleadas.

Los resultados obtenidos, tanto analíticos como numéricos, no solo han de ser “iguales” para cada una de las mallas ensayadas si no que, conforme la malla se refina, el error entre ellos ha de decrecer al ritmo que se espera de él<sup>1</sup>.

- Consistencia del código. Al simular un caso concreto, hay que decidir qué malla se utilizará para la discretización espacial. Si se escoge una malla basta (pocos nodos en relación a lo que realmente requiere el caso) la solución será poco precisa. Conforme la malla se va haciendo fina (se utilizan mallas con más nodos) la solución obtenida por la malla anterior ha de ser mejorada. Que el código sea consistente, implica que, la solución obtenida con malla fina ha de ser cualitativamente similar (por no decir igual) que la que se obtuvo con la malla anterior, mientras que cuantitativamente, la validez de los resultados es mayor. Llega un momento en este proceso, en el cual, si se sigue aumentando el número de nodos, la solución no cambia ni cualitativa ni cuantitativamente<sup>2</sup>,

---

<sup>1</sup>dicho ritmo de decrecimiento depende, principalmente del esquema numérico empleado. Para el caso de CDS se trata de un segundo orden: al doblar malla, se reduce por 4 el error cometido

<sup>2</sup>atendiendo a los parámetros significativos el caso y con un número de cifras significativas razonable.

este es el punto a partir del cual, no tiene sentido refinar más<sup>3</sup>.

- Análisis de la contribución a variación de energía cinética. Como ya se ha comentado antes, las ecuaciones de momentum se componen de los términos transitorio, convectivo, difusivo y fuente. Mediante un análisis de las contribuciones de los tres últimos términos se puede hacer una comprobación adicional: el término convectivo no contribuye a la variación de energía, el término difusivo elimina energía (en el régimen permanente) y la suma de las contribuciones de los tres términos ha de ser cero.

Así pues, es la combinación de todas las herramientas presentadas lo que permite llevar a cabo la verificación del código. En las fases tempranas de creación de código, la técnica que predomina es la *revisión del código*. Conforme el código va tomando forma, algunas subrutinas de cálculo son susceptibles de ser chequeadas por *MMS*. Al obtenerse soluciones numéricas parciales o totales, se opta por la *verificación intuitiva* y la *consistencia de código* para realizar una búsqueda de posibles errores que distorsionen la física del problema. Finalmente, cuando el código ha sido ampliamente verificado por herramientas de verificación simples, o de bajo nivel de análisis, se emplea la *comparación con casos benchmark* que permite efectuar las verificaciones de máximo nivel.

Los dos casos benchmark que se utilizarán para verificar el código creado son muy famosos en el campo de CFD&HT, estos casos son: el *Driven Cavity* (Flujo en cavidad cerrada) y el *Differentially Heated Cavity* (Cavidad calentada diferencialmente).

### 3.1. Driven Cavity

Driven Cavity, es el primer caso benchmark que se utilizará para verificar el código. Esta sección se divide en tres partes: la presentación del caso, donde se explica en qué consiste y se plantean diversas consideraciones de tipo técnico; la comparación de resultados, donde se presentan los resultados obtenidos con el código generado y se comparan con los resultados benchmark; y el estudio de malla, donde se presenta como elegir correctamente el tamaño de malla.

#### 3.1.1. Presentación del caso

Este caso consiste básicamente, en una cavidad cuadrada de profundidad infinita (lo cual permite considerarlo como un caso enteramente bidimensional), en cuyo

---

<sup>3</sup>sin embargo, esta malla, no tiene porqué ser la malla óptima del caso, porque no tiene la mejor relación “calidad-precio”: se tarda más que con una malla ligeramente más basta, y además, para aportar un grado extra de detalle, que es notable pero poco trascendente.

seno hay un fluido presurizado y con una de sus paredes moviéndose a velocidad constante. En otras palabras, y proponiendo un ejemplo sencillo para dar soporte en la compresión del caso, sería equivalente a una caja de zapatos infinitamente larga donde su tapadera se desplaza lateralmente (en la dirección perpendicular a la dimensión infinita), de manera que el volumen de la caja se mantiene constante. Véase la figura 3.1 para aclarar las características del caso en cuestión.

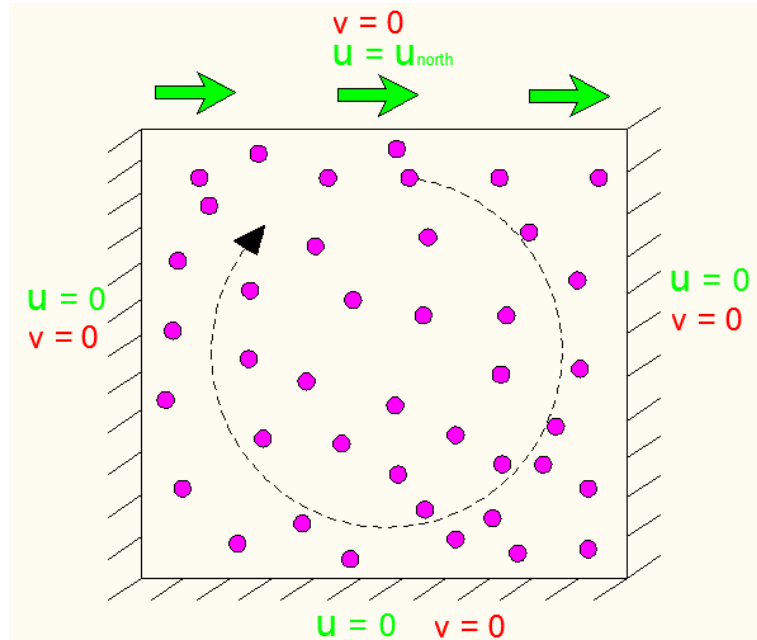


Figura 3.1: Esquema de las características del caso Driven Cavity.

Las características del caso son las siguientes:

- Las hipótesis asumidas en la sección 2.2, no son vulneradas por las características del caso.
- Los parámetros que describen la geometría del caso son la altura ( $H$ ) y la base ( $L$ ) de la cavidad cerrada.
- El fluido es newtoniano y sus propiedades físicas son constantes. Éste llena totalmente la cavidad, y se encuentra en reposo en el instante inicial de simulación.
- Se ignora el comportamiento térmico del problema, es decir, la temperatura no juega ningún papel, y por lo tanto las incógnitas del caso son las dos componentes de la velocidad ( $u$ ,  $v$ ) y la presión ( $p$ ).
- La masa del sistema es constante: no hay entradas ni salidas de materia.

- Las ecuaciones, ya adimensionalizadas<sup>4</sup>, que gobiernan el caso son las siguientes:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (3.1)$$

$$\left( \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial X} \quad (3.2)$$

$$\left( \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial Y} \quad (3.3)$$

- El número adimensional que caracteriza al caso es el Reynolds, el cual aparece en las ecuaciones 4.2 y 4.3 dividiendo al término difusivo. Dicho número adimensional se obtiene como consecuencia del proceso de adimensionalización, y responde a la siguiente expresión matemática:

$$Re = \frac{\rho \cdot u_{dc} \cdot L_{cav}}{\mu}$$

Donde  $u_{dc}$  es la velocidad de desplazamiento de la pared superior de la cavidad ( $u = u_{north}$ ),  $L$  es la longitud característica del caso, es decir, la anchura de la cavidad, y finalmente,  $\rho$  y  $\mu$  son la densidad y la viscosidad del fluido de trabajo.

- Tal como se puede apreciar en la figura 3.1, las paredes sur, este y oeste no se mueven, pero la pared norte se desplaza de oeste a este con velocidad constante  $u = u_{north}$ . Esto implica que las condiciones de contorno son de tipo Dirichlett: las dos componentes de la velocidad para todas las paredes son cero, excepto para la pared norte, donde la condición de contorno gobernante es  $u = u_{north}$ , y  $v = 0$ .
- La condición de contorno para presiones es de tipo Neumann, es decir, derivada nula en las paredes de la cavidad.

Realmente, el planteamiento del caso es muy sencillo: la geometría es simple y las condiciones de contorno son muy naturales. Sencilla es también la predicción cualitativa de la solución que se obtendrá en régimen permanente: el fluido situado en las zonas altas de la cavidad será arrastrado por la pared norte hacia la pared este. Cuando éste alcance dicha pared se verá obligado a cambiar su dirección y bajar por la pared este. Al llegar a la parte baja de la cavidad, el fluido se verá forzado de nuevo a girar en dirección a la pared oeste y al toparse con ésta, tenderá a subir. De esta manera se genera, a grandes rasgos, un flujo rotacional que hace recircular al fluido

---

<sup>4</sup>obtenidas a partir de las ecuaciones 2.4 - 2.6, mediante la aplicación de las técnicas de adimensionalización descritas en la sección 2.3.

por toda la cavidad; este movimiento se esboza con trazo discontinuo en la figura 3.1.

Para más información sobre el caso Driven Cavity, consúltese [4], que es la fuente que se ha utilizado para comprender la física del caso y para efectuar la comparación de resultados. Téngase en cuenta que los resultados que se presentan en la fuente de información citada son de tipo numérico, es decir, que se han obtenido vía cálculos computacionales. No obstante, dichos resultados fueron validados con un experimento que reproducía el caso en cuestión, por lo que si los resultados que se obtengan con el código creado, coinciden con aquellos presentados por Ghia en [4], se asumirá que son correctos.

### 3.1.2. Comparación de resultados

Los resultados que se presentan en [4] son referentes al campo de velocidades. El autor del artículo presenta dos tipos de datos: 1) el perfil de la componente horizontal de la velocidad en la línea<sup>5</sup> vertical situada en la mitad del ancho de la cavidad; y 2) el perfil de la componente vertical de la velocidad en la línea horizontal situada a media altura de la cavidad. Dicha información se subministra para los casos  $Re = 100$ ,  $Re = 400$ ,  $Re = 1000$ ,  $Re = 3200$ ,  $Re = 5000$ ,  $Re = 7500$  y  $Re = 10000$ , en las tablas 3.1 y 3.2.

En realidad, en las tablas 3.1 y 3.2 no aparecen los casos  $Re = 7500$  y  $Re = 10000$ . El motivo por el cual se omiten<sup>6</sup>, es porque no tiene sentido incluirlos en la comparación de resultados. Nótese que los valores de las velocidades aportados en dichas tablas son un único dato, que corresponde al valor que toma dicha variable cuando el caso se estabiliza, es decir, cuando el sistema entra en régimen permanente, de manera que las velocidades adquieren valores estables. Resulta que, a partir del caso  $Re = 5000$ , no es cierto que el régimen estacionario sea alcanzado; lo que sucede es que, en torno, a ese valor de Reynolds, el flujo se vuelve turbulento y por lo tanto, no hay estabilización temporal de las variables por lo que no tiene sentido aportar un único valor de velocidad<sup>7</sup>. Entonces, la pregunta es: ¿Por qué Ghia incluye en su *paper* la información relativa a los altos Reynolds como casos laminares, si en realidad son turbulentos?

Para dar respuesta a la pregunta anterior es necesario refrescar dos conceptos:

---

<sup>5</sup>en realidad no es una línea, sino un plano. Recuerdese que se está tratando un caso 2D con la tercera dimensión infinita.

<sup>6</sup>aunque en el artículo si que aparecen.

<sup>7</sup>a menos que sea la velocidad promediada, que seria el valor medio de la velocidad, estadísticamente hablando. Sin embargo, este tipo de tratamientos están fuera del alcance de este proyecto.



y	$u_{Re100}$	$u_{Re400}$	$u_{Re1000}$	$u_{Re3200}$	$u_{Re5000}$
1.0000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.9766	0.84123	0.75837	0.65928	0.53236	0.48223
0.9688	0.78871	0.68439	0.57492	0.48296	0.46120
0.9609	0.73722	0.61756	0.51117	0.46547	0.45992
0.9531	0.68717	0.55892	0.46604	0.46101	0.46036
0.8516	0.23151	0.29093	0.33304	0.34682	0.33556
0.7344	0.00332	0.16256	0.18719	0.19791	0.20087
0.6172	-0.13641	0.02135	0.05702	0.07156	0.08183
0.5000	-0.20581	-0.11477	-0.06080	-0.04272	-0.03039
0.4531	<b>-0.21090</b>	-0.17119	-0.10648	-0.08663	-0.07404
0.2813	-0.15662	<b>-0.32726</b>	-0.27805	-0.24427	-0.22855
0.1719	-0.10150	-0.24299	<b>-0.38289</b>	-0.34323	-0.33050
0.1016	-0.06434	-0.14612	-0.29730	<b>-0.41932</b>	-0.40435
0.0703	-0.04775	-0.10338	-0.22220	-0.37827	<b>-0.43463</b>
0.0625	-0.04192	-0.09266	-0.20196	-0.35344	-0.42901
0.0547	<i>-0.03717</i>	<i>-0.08186</i>	<i>-0.18109</i>	<i>-0.32407</i>	<i>-0.41165</i>
0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Cuadro 3.1: Componente horizontal de la velocidad benchmark como función del Reynolds.

x	$v_{Re100}$	$v_{Re400}$	$v_{Re1000}$	$v_{Re3200}$	$v_{Re5000}$
1.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.9688	-0.05906	-0.12146	-0.21388	-0.39017	-0.49774
0.9609	-0.07391	-0.15663	-0.27669	-0.47425	-0.55069
0.9531	-0.08864	-0.19254	-0.33714	-0.52357	<b>-0.55408</b>
0.9453	-0.10313	-0.22847	-0.39188	<b>-0.54053</b>	-0.52876
0.9063	-0.16914	-0.23827	<b>-0.51550</b>	-0.44307	-0.41442
0.8594	-0.22445	<b>-0.44993</b>	-0.42665	-0.37401	-0.36214
0.8047	<b>-0.24533</b>	-0.38598	-0.31966	-0.31184	-0.30018
0.5000	0.05454	0.05186	0.02526	0.00999	0.00945
0.2344	<b>0.17527</b>	0.30174	0.32235	0.28188	0.27280
0.2266	0.17507	<b>0.30203</b>	0.33075	0.29030	0.28066
0.1563	0.16077	0.28124	<b>0.38095</b>	0.37119	0.35368
0.0938	0.12317	0.22965	0.32627	<b>0.42768</b>	0.42951
0.0781	0.10890	0.20920	0.30353	0.41906	<b>0.43648</b>
0.0703	0.10091	0.19713	0.29012	0.40917	0.43329
0.0625	<i>0.09233</i>	<i>0.18360</i>	<i>0.27485</i>	<i>0.39560</i>	<i>0.42447</i>
0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Cuadro 3.2: Componente vertical de la velocidad benchmark como función del Reynolds.

- Recuérdese que en la subsección 2.4.1, se comentaron los diferentes tipos de esquemas numéricos que se suelen emplear para la aproximación del valor de las variables en las caras del volumen de control.
- Cuando se presentó el esquema UDS, se comentó que es un esquema que disipa energía y que por esa razón no se confía en él, dado que la disipación de energía conduce a soluciones distorsionadas.

Resulta ser que el *paper* presentado por Ghia [4], data del 1966. En esta época, no se gozaba de una potencia computacional elevada, de modo que el número de nodos empleados en los cálculos aportados por este autor no fue muy elevado con lo que se favorece el fenómeno de la difusión numérica, además de que el esquema que se utilizó era tipo Upwind, que *per se*, ya disipa energía. La combinación de estos dos factores hace que parte de la energía cinética del flujo fuese eliminada por efectos numéricos y como consecuencia de ello, la transición a turbulento no se presentaba entorno a Reynolds 6000 (como sucede en la realidad) sino en valores superiores a 10000. Este hecho da respuesta a la pregunta anterior y además justifica algunas de las ligeras discrepancias que se presentan en la comparación de resultados.

Es importante remarcar dos conceptos importantes con respecto a los resultados que se presentan en las tablas 3.1 y 3.2:

- El gradiente de velocidades en las paredes crece conforme el Reynolds aumenta, obsérvese la penúltima fila de valores (resaltada con fuente *cursiva*) de la velocidad en las tablas anteriores. Este efecto hace que la densificación de malla en las paredes sea crucial para representar correctamente el movimiento del fluido en la cavidad.
- Los valores máximos de velocidad (que no son de toda la cavidad, sino del plano medio de la misma) aumentan con el Reynolds y también se desplazan, acercándose a las paredes, obsérvese el conjunto de valores resaltados en fuente **negrita** de las tablas anteriores. Esto implica que la mayoría del flujo de recirculación tiene lugar cerca de las paredes, lo cual justifica, una vez más, la utilidad de la malla densificable.

La comparativa de resultados con [4] se hará únicamente para  $Re = 100$  y  $Re = 5000$ , que representan el caso más “sencillo” y el más “complejo”, respectivamente, de los casos que se pueden comparar. Se ha optado por no comparar el resto de casos por motivos de economía de espacio y claridad de explicación. La comparación se hará mediante dos recursos: comparación por tablas (comparación directa de los

valores) y por comparación gráfica de los perfiles de velocidad.

### Comparativa por tablas

La comparación directa por valores se resume en las tablas 3.3 y 3.4, donde se comparan los perfiles de velocidades benchmark y los calculados con el código creado, en los casos  $Re = 100$  y  $Re = 5000$ , respectivamente.

Tal como se ve en las tablas 3.3 y 3.4, los valores de velocidad entre el caso benchmark y el aportado por el software son muy similares, no obstante, si se fija la atención en el error relativo, se identifican tres conceptos fundamentales para poder comparar y evaluar correctamente la precisión de la simulación. Dichos conceptos se comentan a continuación y se relacionan con los valores destacados de la tabla 3.3:

- El error cometido en el punto donde hay un cambio de sentido en la velocidad del fluido es tremendamente alto: 279 % de error. Esto es debido a la naturaleza de cálculo del error relativo. Al tratarse con números del orden de  $10^{-3}$ , las diferencias entre los números a comparar son muy grandes en términos relativos. En términos absolutos, el error en este punto es del mismo orden que el resto del dominio, por lo que el elevado valor del error relativo no es para nada representativo de la calidad de la simulación. Si queda alguna duda en relación a la importancia de este valor, la comparación por gráficas la disipará.
- El error cometido cerca de las paredes inmóviles es de naturaleza similar al error anterior. Los valores de la velocidad en estas zonas son relativamente pequeños en comparación al resto del dominio y el error relativo es ligeramente superior al error relativo promediado en el resto del dominio: esto atañe al valor de 4.32 % de error en la velocidad vertical de la última fila de la tabla 3.3.
- El error correspondiente a la velocidad máxima local de la componente horizontal, apreciable en la novena fila de la tabla 3.3, es considerado el parámetro representativo de la calidad de la simulación. Este parámetro toma el valor de 1.02 % de error y se dice que representa virtualmente la calidad de la simulación, porque el valor de velocidad local máxima es el más difícil de predecir. En ocasiones, sucede que la solución obtenida, cualitativamente hablando, es buena pero, cuantitativamente, se aprecian errores del orden del 20-30 %, lo cual es inadmisibile. El motivo principal por el cual esto sucede es porque la malla escogida no es suficientemente fina como para simular el caso correctamente, se disipa energía por efecto de difusión numérica y los picos de velocidad se

x	$v_{bench}$	$v_{code}$	$\epsilon_v$	y	$u_{bench}$	$u_{code}$	$\epsilon_u$
0.9766	-0.05906	-0.06696	13.3 %	0.9688	0.84123	0.82918	1.43 %
0.9688	-0.07391	-0.08312	12.4 %	0.9609	0.78871	0.77627	1.57 %
0.9609	-0.08864	-0.09883	11.4 %	0.9531	0.73722	0.72384	1.81 %
0.9531	-0.10313	-0.11424	10.7 %	0.9453	0.68717	0.67378	1.94 %
0.8516	-0.16914	-0.18301	8.20 %	0.9063	0.23151	0.22235	3.95 %
0.7344	-0.22445	-0.23754	5.83 %	0.8594	0.00332	-0.00596	<b>279 %</b>
0.6172	-0.24533	-0.25249	2.91 %	0.8047	-0.13641	-0.14597	7.01 %
0.5000	0.05454	0.06525	19.6 %	0.5000	-0.20581	-0.21053	2.29 %
0.4531	0.17527	0.17908	2.17 %	0.2344	-0.21090	-0.21306	<b>1.02 %</b>
0.2813	0.17507	0.17874	2.09 %	0.2266	-0.15662	-0.15410	1.61 %
0.1719	0.16077	0.16249	1.07 %	0.1563	-0.10150	-0.09910	2.36 %
0.1016	0.12317	0.12293	0.18 %	0.0938	-0.06434	-0.06239	3.02 %
0.0703	0.10890	0.10809	0.73 %	0.0781	-0.04775	-0.04482	6.12 %
0.0625	0.10091	0.09988	1.01 %	0.0703	-0.04192	-0.04024	3.98 %
0.0547	0.09233	0.09111	1.32 %	0.0625	-0.03717	-0.03556	<b>4.32 %</b>

Cuadro 3.3: Driven Cavity, comparación de velocidades, benchmark-numérica. Caso  $Re = 100$ .

x	$v_{bench}$	$v_{code}$	$\epsilon_v$	y	$u_{bench}$	$u_{code}$	$\epsilon_u$
0.9688	-0.49774	-0.52001	4.28 %	0.9766	0.48223	0.49576	2.73 %
0.9609	-0.55069	-0.57052	3.48 %	0.9688	0.46120	0.47653	3.22 %
0.9531	-0.55408	-0.56883	2.59 %	0.9609	0.45992	0.47588	3.35 %
0.9453	-0.52876	-0.53894	1.89 %	0.9531	0.46036	0.47632	3.35 %
0.9063	-0.41442	-0.42863	3.32 %	0.8516	0.33556	0.34688	3.26 %
0.8594	-0.36214	-0.37485	3.39 %	0.7344	0.20087	-0.20033	1.23 %
0.8047	-0.30018	-0.30863	2.74 %	0.6172	0.08183	-0.08082	4.58 %
0.5000	0.00945	0.01182	20.1 %	0.5000	-0.03039	-0.03185	2.12 %
0.2344	0.27280	0.27955	2.41 %	0.4531	-0.07404	-0.07564	2.61 %
0.2266	0.28066	0.28722	2.28 %	0.2813	-0.22855	-0.23467	1.51 %
0.1563	0.35368	0.36482	3.05 %	0.1719	-0.33050	-0.33555	3.03 %
0.0938	0.42951	0.43963	2.30 %	0.1016	-0.40435	-0.41700	2.62 %
0.0781	0.43648	0.44561	2.05 %	0.0703	-0.43463	-0.44621	0.99 %
0.0703	0.43329	0.44138	1.81 %	0.0625	-0.42901	-0.43328	0.38 %
0.0625	0.42447	0.43188	1.71 %	0.0547	-0.41165	-0.41325	0.48 %

Cuadro 3.4: Driven Cavity, comparación de velocidades benchmark-numérica. Caso  $Re = 5000$ .

reducen considerablemente (como se puede apreciar en la figura 3.13 de la página 70).

Así pues se da por concluida la *comparación por valores* de los resultados concernientes al caso. Sin embargo, para acabar de despejar dudas, se plantea la siguiente subsección donde se apreciará la validez de la discusión sobre la importancia de los errores de simulación.

### Comparativa por gráficas

En ocasiones, una comparación gráfica resulta más efectiva que una numérica directa, por lo que se ha optado por representar gráficamente la solución aportada en [4] y la solución propia en los gráficos 3.2 - 3.4.

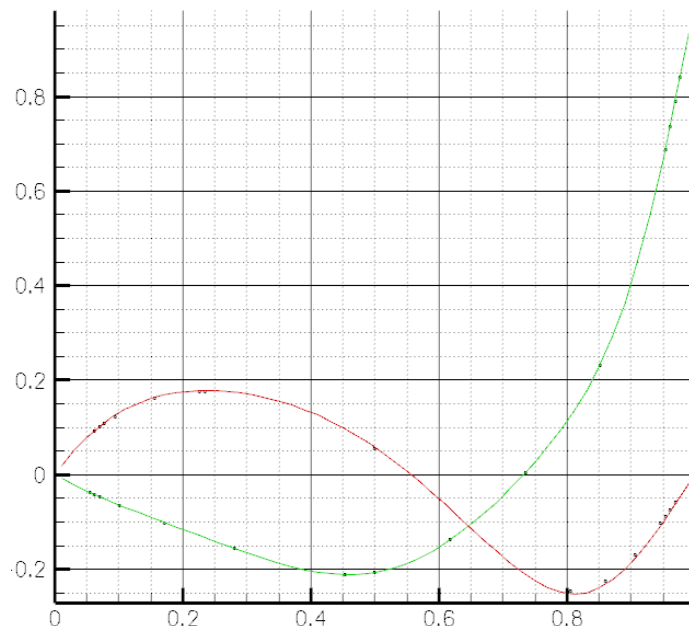


Figura 3.2: Comparación del perfil de velocidades obtenido con el obtenido por Ghia en el caso Reynolds 100.

Nótese que los puntos negros (que no se conectan por ninguna línea) corresponden a la solución de Ghia, y las curvas roja y verde, representan, las componentes de la velocidad vertical y horizontal, respectivamente. Tal como se puede observar, la coincidencia de los perfiles no es total pero es muy buena, merece la pena comentar algunos detalles:

- Caso  $Reynolds = 100$ , figura 3.2. Este es el caso que en el que se tiene mayor precisión, en relación a la comparación con [4]. Recuérdese que el error relativo

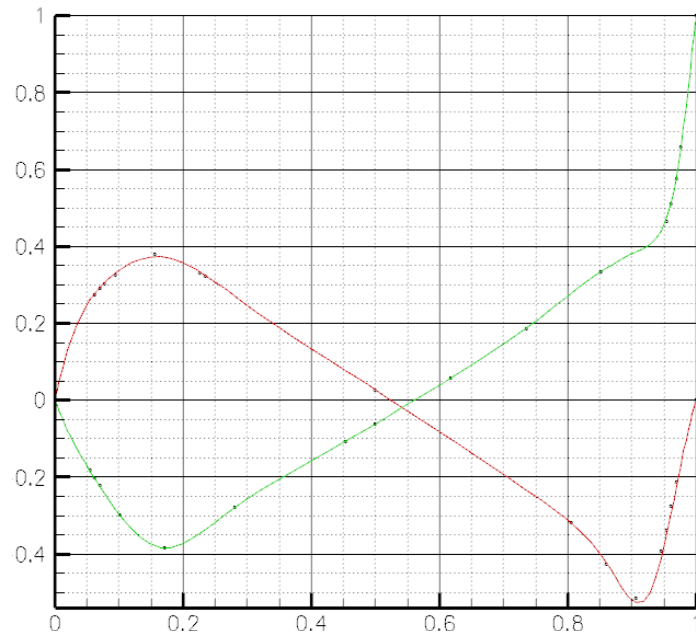


Figura 3.3: Comparación del perfil de velocidades obtenido con el obtenido por Ghia en el caso Reynolds 1000.

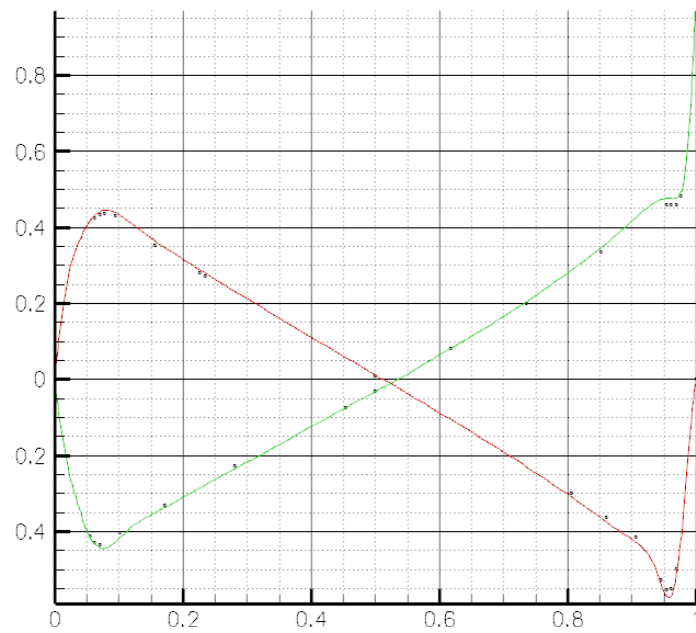


Figura 3.4: Comparación del perfil de velocidades obtenido con el obtenido por Ghia en el caso Reynolds 5000.



de 279 % se refiere a esta gráfico, sin embargo, en vistas a la comparación gráfica, ni que decir tiene que dicho error está absolutamente inflado. Quizás no se aprecie del todo en este gráfico, pero hay una ligera discrepancia en los máximos locales del campo de velocidades. Esto es debido a que el esquema numérico que Ghia utilizó en su estudio, disipaba una fracción de energía.

- Caso  $Reynolds = 1000$ , figura 3.3. En esta figura se aprecia que las líneas roja y verde, se ajustan considerablemente bien a los puntos. Hay una pequeña discrepancia en el perfil de velocidades horizontales (perfil de velocidades rojo, en el pico de la esquina inferior derecha de la figura), el cual es debido a la disipación de energía.
- Caso  $Reynolds = 5000$ , figura 3.4. En esta figura, las curvas siguen ajustándose bastante bien a los puntos “experimentales”, y ahora con más énfasis, las discrepancias son muy visibles en cada una de los cuatro máximos relativos de velocidad que se aprecian en las inmediaciones de las paredes.

Se ha insistido mucho, a lo largo de la comparación de resultados, en que la falsa difusión numérica es la causa de las leves discrepancias observadas. Parecería razonable tomar los resultados aportados en [4] como absolutamente correctos, y por lo tanto, pensar que hay algún error no conocido en el código creado, o algún otro motivo que cause la discrepancia. Sin embargo, a día de hoy, el caso Driven Cavity está totalmente estudiado y se tiene por rigurosamente cierto, que casos con  $Reynolds = 10000$  son turbulentos, por lo que los resultados obtenidos por Ghia son válidos, pero con la limitación evidente de que las simulaciones que se realizaron en 1966 tenían una componente disipadora de energía que, sin duda alguna, es la responsable de las diferencias observadas. Esto es equivalente a decir, que los resultados que se han obtenido en este proyecto, son mejores que los que se obtuvieron 50 años atrás.

### 3.1.3. Visión de detalle

Una vez que ya se tiene claro que los resultados volcados por el programa son válidos para los casos antes comentados, es interesante ahondar un poco en la física del problema. Para ello se ha decidido presentar los mapas de dos dimensiones (y una tercera dimensión aportada por el color) de las variables esenciales de estudio: presión, velocidad componente horizontal, velocidad componente vertical y función de corriente. Dichos mapas se aportan para los casos  $Reynolds = 100$  y  $Reynolds = 5000$  en las figuras 3.5 - 3.12, con el objetivo de poder comparar el comportamiento del fluido en su evolución con el Reynolds.

Se quiere destacar los siguientes hechos:

- Compárense las figuras 3.5 y 3.9. Se puede apreciar un cambio significativo en el gradiente de velocidades en las inmediaciones de la pared norte. Esto es debido al hecho de que a altos Reynolds, la zona de arrastre de fluido es menor cuando el Reynolds sube, es decir, cuando la velocidad de desplazamiento de la tapa es elevada o cuando el fluido es poco viscoso.
- Obsérvese la figura 3.7. La esquina superior izquierda sufre depresiones importantes, mientras que la superior derecha se encuentra con altas presiones. Esto es normal, puesto que por el movimiento de izquierda a derecha de la pared norte, se “vacía” de fluido la parte izquierda y, dicho fluido se “envía” a la parte derecha.
- La finura de la malla para los casos  $Reynolds = 100$  y  $Reynolds = 5000$ , es totalmente diferente, la última requiere una malla mucho más densa, (en especial en las paredes) mientras que el caso de Reynolds bajo no es tan delicado. La malla utilizada se ha superpuesto sobre los gráficos de presión (figuras 3.6 y 3.10). La malla utilizada para  $Reynolds = 100$  ha sido una malla uniforme de  $80 \times 80$  nodos (aunque con  $50 \times 50$  se hubieran obtenido resultados igualmente buenos), mientras que la malla más basta que se ofrece resultados invariantes para el caso  $Reynolds = 5000$  es de unos  $150 \times 150$  con factor de densificación 1.5 (empleado en el mallado automático efectuado por la fórmula 2.9 de la página 29).
- Como muestra de la “distancia” del caso al régimen turbulento se apuntan los dos hechos siguientes:
  1. El gradiente de velocidad vertical en las paredes fijas (este y oeste) es mucho más acentuado en Reynolds altos (compárense las figuras 3.7 y 3.11). Conforme los fenómenos de capa límite se hacen más importantes, la transición a turbulento se hace más probable.
  2. El fenómeno de recirculación (aparición de vórtices) es más acentuado en el caso  $Reynolds = 5000$ , con respecto al caso de Reynolds bajo. El Reynolds alto tiene una zona de recirculación más, en la esquina superior izquierda, y las que ya aparecían en el caso  $Reynolds = 100$  cobran mayor importancia (compárense las figuras 3.8 y 3.12). Cuanto más zonas de recirculación y mayores sean estas, más probabilidades hay de entrar en régimen turbulento.

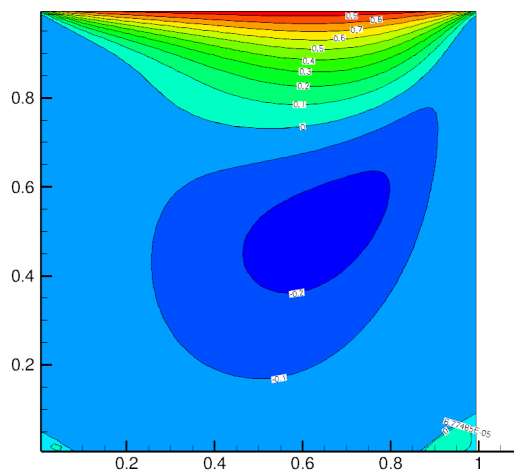


Figura 3.5: DC.  $Re=100$ ,  $u$ .

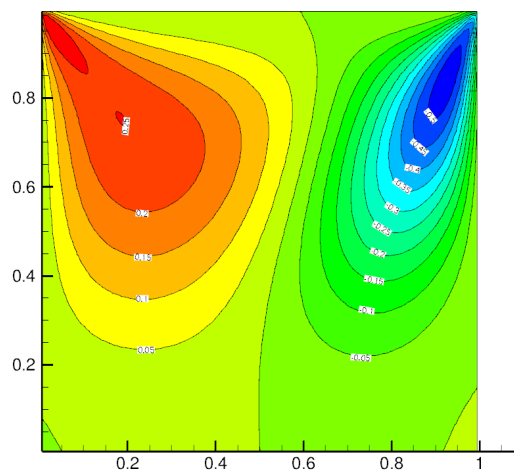


Figura 3.7: DC.  $Re=100$ ,  $v$ .

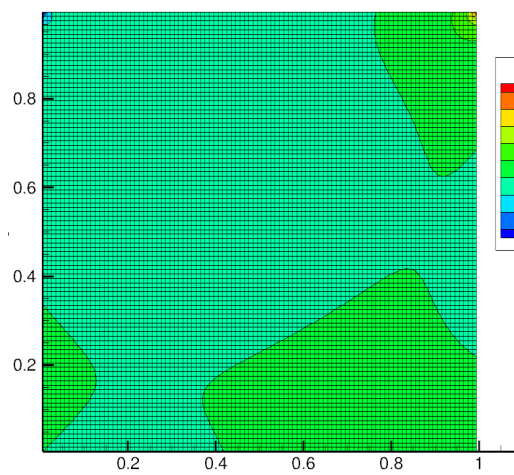


Figura 3.6: DC.  $Re=100$ ,  $p$ .

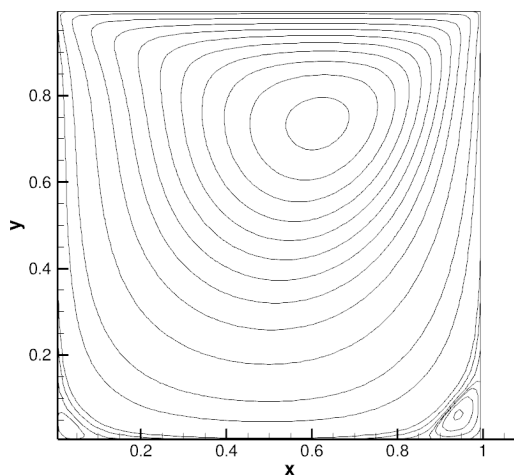


Figura 3.8: DC.  $Re=100$ ,  $\psi$ .

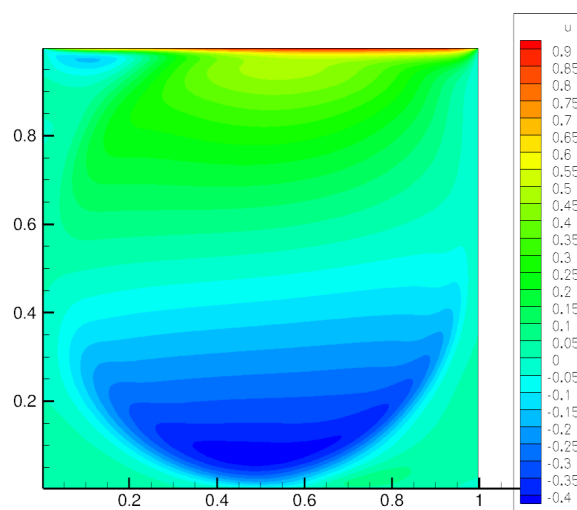


Figura 3.9: DC.  $Re=5000$ ,  $u$ .

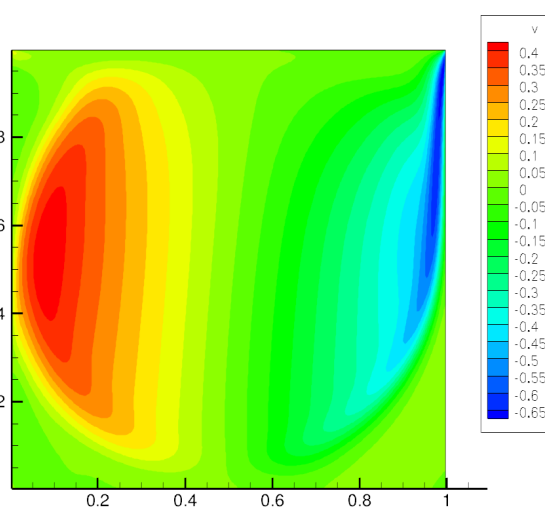


Figura 3.11: DC.  $Re=5000$ ,  $v$ .

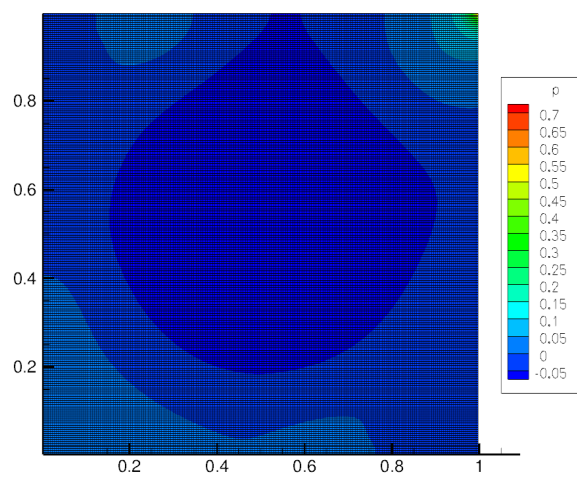


Figura 3.10: DC.  $Re=5000$ ,  $p$ .

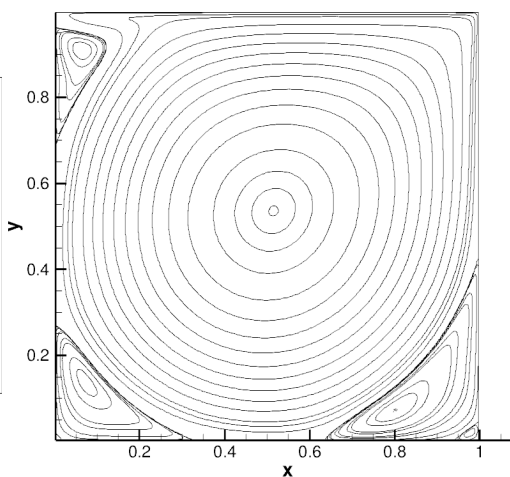


Figura 3.12: DC.  $Re=5000$ ,  $\psi$ .

Además de la “radiografía” que se ha presentado mediante los gráficos bidimensionales, con respecto a la fenomenología inherente al caso Driven Cavity, es interesante comentar la influencia de la malla en los resultados. El estudio de este efecto, se incluye en la subsección *Estudio de malla*.

#### 3.1.4. Estudio de malla

Los resultados obtenidos por el autor han sido comparados satisfactoriamente con los presentados en [4], y además se ha presentado un mapa completo de la física del caso en la subsección anterior. Sin embargo, no se ha comentado en profundidad la influencia de la malla en los resultados. Recuértese que para el caso  $Re = 100$  fue suficiente una malla  $50 \times 50 - 0,0$  (50 nodos en x, 50 nodos en y,  $\gamma = 0,0$ ), mientras que el caso  $Re = 5000$  necesita como mínimo una malla  $150 \times 150 - 1,5$ . El caso que se estudiará en esta subsección es el de  $Re = 1000$ .

El caso se ha resuelto numerosas veces con diferentes mallas uniformes:  $10 \times 10 - 0$ ,  $20 \times 20 - 0$ ,  $30 \times 30 - 0$ ,  $\dots$ ,  $70 \times 70 - 0$ ,  $\dots$ ,  $100 \times 100 - 0$ . Con la malla  $100 \times 100 - 0$  ya se obtienen unos resultados muy buenos, pero que no representan al 100% el comportamiento de los máximos locales de la variable velocidad. Cabe decir que la diferencia de calidad entre las mallas de setenta y cien nodos, es poca en relación a la diferencia de finura. En la figura 3.13, se ha presentado una colección de los resultados más relevantes de acuerdo con las mallas que se han hecho intervenir en las simulaciones.

Nótese que en la figura 3.13, además de los resultados de las mallas uniformes, también se ha incluido el de una malla  $60 \times 60 - 2,0$ , y que curiosamente, aporta los mejores resultados. Como ya se apuntó anteriormente en la sección 2.6, cuanto más basta se haga la malla más rápido se podrá resolver el caso (porque hay un menor número de ecuaciones que resolver, al haber menos nodos) pero desde luego, se pierde precisión en la solución que se aporta.

Este estudio pone de manifiesto (en el caso concreto de  $Re = 1000$ ) la importancia de haber habilitado el programa para la creación de mallas no uniformes, puesto que:

1. se reduce significativamente el tiempo de computación, por necesitar menos nodos para la obtención de resultados correctos.
2. se gana en precisión de simulación, porque se utilizan mejor el número de

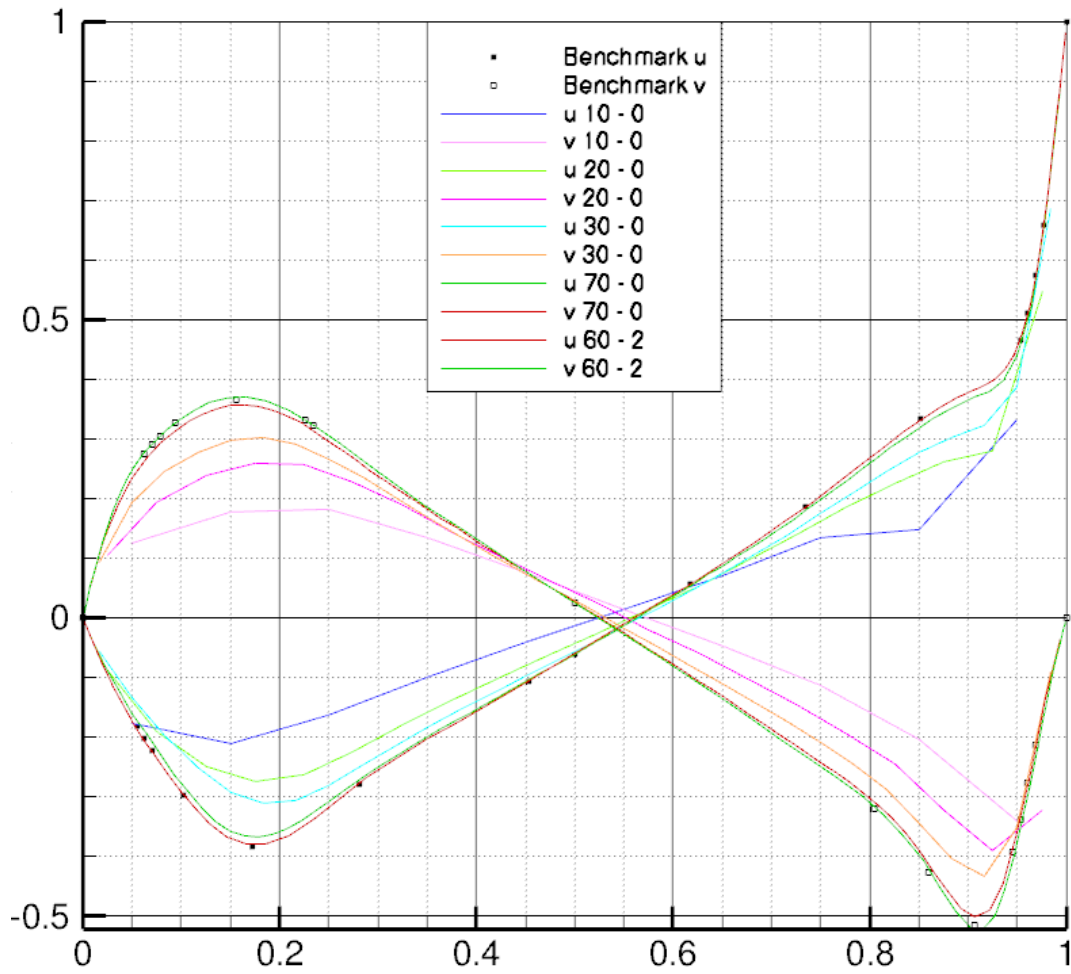


Figura 3.13: Estudio de malla para el caso Driven Cavity  $Re = 1000$ .

nodos disponibles. Se colocan más nodos cerca de las paredes, que es donde se requiere más información para representar correctamente los fuertes gradientes observados, y se colocan menos en el centro de la cavidad, donde los perfiles de velocidad no son tan abruptos.

Ni que decir tiene que, cuanto más elevado es el Reynolds, la importancia de la densificación de malla crece. Como prueba de ello, obsérvese el crecimiento de los picos de velocidad (con los consiguientes gradientes que esto conlleva) en las figuras 3.2, 3.3 y 3.4.

## 3.2. Differentially Heated Cavity

Este caso, es el segundo y último caso benchmark que se utilizará para verificar el código. Esta sección se divide en tres partes: la presentación del caso, donde se explica en qué consiste y se plantean las consideraciones de tipo técnico; la comparación de resultados, donde se presentan los resultados obtenidos con el código generado y se comparan con los resultados benchmark; y el estudio transitorio del caso, en el cual se comenta la evolución temporal de las variables.

### 3.2.1. Presentación del caso

Este caso consiste, básicamente, en una cavidad cuadrada de profundidad infinita, lo cual permite considerarlo como un caso enteramente bidimensional, cuyo seno es ocupado por un fluido presurizado donde hay dos paredes adiabáticas (la norte y la sur) y dos paredes con temperaturas fijadas y diferentes entre sí. Para ofrecer soporte en la comprensión del caso, considérese como situación aproximada la que ocurre en una ventana de doble acristalamiento con cámara de aire, durante época de invierno: el cristal que está en contacto con el exterior, se encontraría a una temperatura fría mientras que el cristal interior, tendría una temperatura más cálida. Asumiendo que el caso es 2D dicha ventana tendría profundidad infinita, pero anchura y altura concretas. Obsérvese la figura 3.14 para aclarar las características del caso en cuestión.

Las características del caso son las siguientes:

- Las hipótesis asumidas en la sección 2.2, no son vulneradas por las características del caso.
- Las características geométricas del caso son la altura ( $H$ ) y la base ( $L$ ) de la cavidad cerrada.

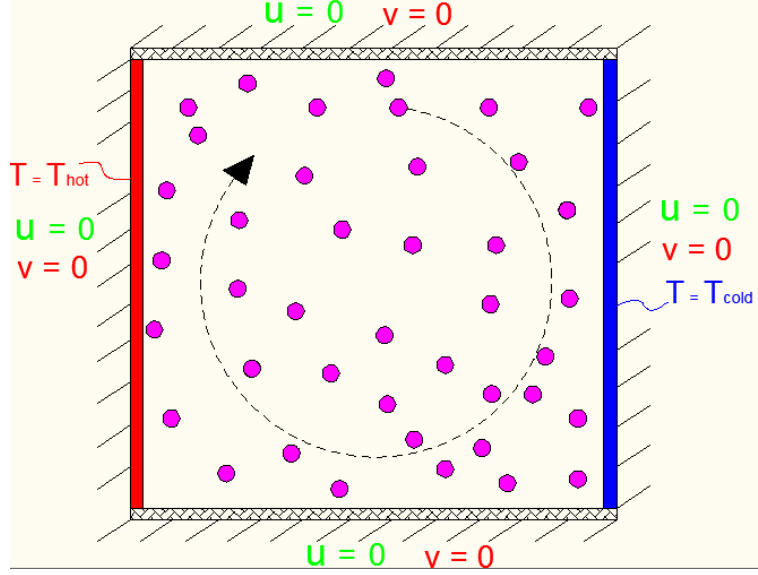


Figura 3.14: Esquema de las características del caso Differentially Heated Cavity.

- El fluido es newtoniano y sus propiedades físicas son constantes. Éste llena totalmente la cavidad, y se encuentra en reposo y a la temperatura de la pared fría, en el instante inicial de simulación.
- Se aborda el comportamiento térmico del problema, de hecho, la temperatura es la variable que juega el papel más importante, pero además de esta variable, también se desconocen la presión y las dos componentes de la velocidad.
- La masa del sistema es constante: no hay entradas ni salidas de materia.
- Las ecuaciones, ya adimensionalizadas<sup>8</sup>, que gobiernan el caso son las siguientes:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + Pr \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial U^2}{\partial Y^2} \right) \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + Pr \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial V^2}{\partial Y^2} \right) + Pr Ra (\Phi - \Phi_o) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Phi}{\partial X} + V \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial \Phi^2}{\partial Y^2} \quad (3.7)$$

- Los números adimensionales que caracterizan el caso son el Rayleigh y el Prandtl, los cuales aparecen en las ecuaciones 3.5 y 3.6, el Pr multiplicando al

<sup>8</sup>obtenidas a partir de las ecuaciones 2.4 - 2.7, mediante la aplicación de las técnicas de adimensionalización descritas en la sección 2.3.



término difusivo, y el Ra en el término fuente. Dichos números adimensionales se obtienen a partir de las siguientes expresiones matemáticas:

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$$

Donde  $c_p$  es la capacidad calorífica específica,  $\lambda$  es la conductividad térmica del fluido y  $\mu$  su viscosidad dinámica.

$$Ra = g\beta_c(T_{hot} - T_{cold})H^3/\alpha^2$$

Donde  $g$  es la gravedad,  $\beta_c$  es el coeficiente de expansión volumétrica del fluido linealizado sobre la temperatura fría,  $T_{hot} - T_{cold}$  es la diferencia de temperaturas entre la pared caliente y la pared fría,  $H$  es la altura de la cavidad y  $\alpha$  es la difusividad térmica del fluido.

Es interesante comentar, que en la comparación de resultados que se propone en [5], se limita el estudio al caso en que dentro de la cavidad se encuentra aire. Esto implica que el valor del Prandtl es fijo para todos los casos de comparación que se proponen, y toma el valor de 0,71.

- Se trata de un caso de convección natural en el cual se aplica, como parte de la formulación matemática, la hipótesis de Boussinesq. Dicha hipótesis linealiza la variación de la densidad del fluido con respecto a la temperatura, que es el elemento importante del problema.

$$\beta_0 = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p=cte} \implies \rho = \rho_0 (1 - \beta_0 (T - T_0))$$

Donde el estado “0” de la expresión anterior, se hace corresponder con el estado “frío” del problema. Así pues, se toma como referencia la temperatura fría para efectuar la linealización de  $\beta$  (pero también podía haber sido tomado como referencia el estado caliente).

- Tal como se puede apreciar en la figura 3.14, todas las paredes son inmóviles, esto implica que las condiciones de contorno para las velocidades son de tipo Dirichlett:  $u = 0$  y  $v = 0$ , allí donde haya una pared.
- La condición de contorno para presiones es de tipo Neumann, es decir, derivada nula en las paredes de la cavidad.
- Las condiciones de contorno para la temperatura son las realmente trascendentes. Las paredes norte y sur, son adiabáticas por lo que su condición de contorno es de tipo Neumann, es decir, derivada de temperatura. Las paredes este y oeste tienen temperaturas  $T_{hot}$  y  $T_{cold}$ , respectivamente, por lo que sus

condiciones de contorno son de tipo Dirichlett. En concreto, los valores de la temperatura son 0, para la pared oeste y 1 para la pared este, en vista al criterio de adimensionalización que se ha tomado para la temperatura:

$$\Phi = \frac{T - T_{cold}}{T_{hot} - T_{cold}}$$

El planteamiento del caso es similar al del Driven Cavity, de hecho las únicas diferencias son estas dos: 1) la inclusión de una variable más (la temperatura) y que por lo tanto, introduce la ecuación de conservación de la energía en el sistema de ecuaciones a resolver. Esto implica añadir un paso más en la parte iterativa del algoritmo de resolución, en dicho caso se calcula la temperatura nodo a nodo, en todo el dominio; y 2) las condiciones de contorno cambian ligeramente. A pesar de estas dos diferencias la estructura de flujo es relativamente similar al del Driven Cavity: el fluido en contacto con la pared caliente cambia su densidad (se hace más ligero) y tal como lo haría un globo aerostático, tiende a subir. Cuando éste alcance la pared norte se ve obligado a cambiar su dirección y desplazarse de oeste a este. El mismo mecanismo de transporte observado en la pared caliente, tiene lugar en la pared fría, pero en este caso el fluido tiende a bajar por ser más pesado. De esta manera se genera, a grandes rasgos, un flujo rotacional que hace recircular al fluido por toda la cavidad. Dicho movimiento del fluido se esquematiza con trazo discontinuo en la figura 3.14.

Para más información sobre el caso Differentially Heated Cavity, consúltese [5], que es la fuente que se ha utilizado para comprender la física del caso y también, para efectuar la comparación de resultados. Téngase en cuenta que los resultados que se presentan en la fuente de información citada son de tipo numérico, es decir, que se han obtenido, también, vía cálculos computacionales. No obstante, dichos resultados fueron validados con un experimento que reproducía el caso en cuestión, por lo que si los resultados obtenidos con el código creado, coinciden con aquellos presentados por Davis [5], se asumirá que son correctos.

### 3.2.2. Comparación de resultados

El artículo presentado en [5], en el cual aparecen los resultados numéricos de la simulación del Differentially Heated Cavity fue publicado en 1983. La malla más fina que se utilizó para simular el caso  $Ra = 10^6$  fue de  $80 \times 80 - 0$  debido a las limitaciones computacionales de la época. En este proyecto se presentan casos simulados con mallas de hasta  $200 \times 200 - 2,0$ , por lo que nuevamente, las soluciones que aquí se

presenten son potencialmente mejores que las exhibidas en el artículo. De todos modos, la diferencia que se espera obtener es poco significativa, pues no ha de olvidarse que los resultados presentados por Davis en [5], fueron validados experimentalmente.

Los datos que se compararán serán de tipo térmico y de tipo fluido-dinámico. Para la comparación térmica, se comparan los flujos de calor a través del número adimensional llamado Nusselt, y en la comparación fluido-dinámica se emplean las velocidades. Dichas comparaciones se harán para dos casos: el caso  $Rayleigh = 10^3$  y el caso  $Rayleigh = 10^6$ , los cuales se diferencian por la dificultad que entraña la resolución del caso, tal como ocurría en el Driven Cavity con el Reynolds. La definición del Rayleigh se presentó en la página 73. Este número adimensional es directamente proporcional a la diferencia de temperaturas caliente y fría, por lo que, tal como cabe esperar, cuanto mayor sea dicha diferencia, más complicado será resolver el caso.

### Comparación térmica

En el artículo [5] se presentan los flujos de calor, como variable característica del sistema. Dicha magnitud física se calcula tal como indica la ecuación 3.8:

$$Q(X, Y) = U\Phi - \frac{\partial\Phi}{\partial X} \quad (3.8)$$

Nótese que el flujo de calor es una magnitud vectorial, pero en la ecuación 3.8 se presenta como una magnitud escalar. En realidad, se ha tomado únicamente la componente horizontal de la magnitud puesto que la componente vertical no tiene ningún interés en este caso<sup>9</sup>. Así pues, ha de verificarse que el flujo de calor total que cruza cualquier plano perpendicular al eje horizontal ha de ser constante, puesto que todo el calor que se absorbe por la pared caliente ha de evacuarse por la pared fría. El cálculo de esta magnitud en un plano genérico se realiza mediante la expresión:

$$Nu_X = \int_0^1 Q(X, Y) dY \quad (3.9)$$

En concreto, hay cinco valores referentes al Nusselt que se utilizan para comparar:

1. Nusselt medio, es la media de los Nusselts de toda la cavidad. Se obtiene a partir de la expresión siguiente:

$$\overline{Nu} = \int_0^1 Nu_x dX. \quad (3.10)$$

---

<sup>9</sup>recuérdese que la condición de contorno para las paredes horizontales es que son adiabáticas. Esto implica que la energía fluye horizontalmente

2. Nusselt pared caliente, es en realidad la ecuación 3.9 evaluada en  $X = 0$ , es decir  $Nu_0$ .
3. Nusselt en mitad de la cavidad, es nuevamente la evaluación de la ecuación 3.9 pero ahora en  $X = 0,5$ , es decir  $Nu_{1/2}$ .
4. Nusselt máximo en la pared caliente, se trata del máximo valor del flujo de calor local obtenido en la pared caliente. Se aporta el valor de la cantidad  $Nu_{0,max}$  y la altura en la que se toma dicho valor  $y_{Nu_{0,max}}$ .
5. Nusselt mínimo en la pared caliente, se trata del mínimo valor del flujo de calor local obtenido en la pared caliente. Se aporta el valor de la cantidad  $Nu_{0,min}$  y la altura en la que se alcanza dicho valor  $y_{Nu_{0,min}}$ .

En la tabla 3.5, se adjuntan los valores de las cantidades recientemente comentadas, que se muestran en [5], además de las computadas por el software. Tal como se puede observar en el caso de  $Ra = 10^3$ , la coincidencia entre los valores benchmark y los del código sería total de no ser por los Nusselts máximo y mínimo en la pared fría que discrepan por valores inferiores al 0.5 %. En cuanto al caso de  $Ra = 10^6$ , se puede apreciar una ligera discordancia entre valores, pero como ya se apuntó en la introducción, es normal que haya pequeñas diferencias por la disparidad de potencia computacional entre simulaciones. Además cabe añadir, que los valores Benchmark para este caso, ponen de manifiesto que el caso no ha convergido totalmente puesto que los Nusselts medio, en mitad de la cavidad y en pared fría tendrían que ser iguales para admitir que el caso ha alcanzado el régimen permanente, cosa que no sucede porque sus valores son de 8,81, 8,79 y 8,80, respectivamente.

Rayleigh	$Nu_{0,max}$	$y_{Nu_{0,max}}$	$Nu_{0,min}$	$y_{Nu_{0,min}}$	$Nu_0$	$Nu_{\frac{1}{2}}$	$\overline{Nu}$
$10^3$ , bench.	1.505	0.092	0.692	1	1.118	1.118	1.118
$10^3$ , código	1.509	0.089	0.691	1	1.118	1.118	1.118
$10^6$ , bench.	17.925	0.0378	0.989	1	8.817	8.799	8.800
$10^6$ , código	17.568	0.0394	0.981	1	8.828	8.828	8.828

Cuadro 3.5: Comparación térmica del caso DHC.

Puede concluirse que por la parte térmica, la comparación de valores es satisfactoria. Así pues, cabe esperar la misma valoración referente a la comparación fluido-dinámica, dado que ambas partes están acopladas y sería extraño obtener buenos resultados en una de ellas, e insatisfactorios en la otra.

### Comparación fluido-dinámica

El parámetro más relevante en la comparación fluido-dinámica es sin duda alguna la velocidad. Así fue entendido por Davis en 1983 y en su artículo utilizó únicamente dos valores de velocidad para caracterizar el caso:

1. Máximo valor de la componente horizontal de la velocidad apreciable en mitad de la cavidad. Es decir que, de todas las velocidades ( $u$ ) que se obtienen en el plano  $X = 0,5$ , se escoge el valor máximo, y además, se le acompaña con la altura ( $y$ ) a la que tiene lugar dicho valor máximo.
2. Máximo valor de la componente vertical de la velocidad apreciable en mitad de la cavidad. Es decir que, de todas las velocidades ( $v$ ) que se obtienen en el plano  $Y = 0,5$ , se escoge el valor máximo, y además, se le acompaña con la distancia a la pared caliente ( $x$ ) a la que tiene lugar.

Estos cuatro valores se adjuntan en la tabla 3.6, y se presentan también los valores obtenidos empleando el código. Nuevamente, para el caso  $Ra = 10^3$  la coincidencia es prácticamente total, y para el caso  $Ra = 10^6$  aparecen discrepancias de hasta un 0,6 % en el caso de  $v_{max}$ .

Rayleigh	$u_{max}$	$y_{u_{max}}$	$v_{max}$	$x_{v_{max}}$
$10^3$ , bench.	3.649	0.813	3.697	0.178
$10^3$ , código	3.649	0.810	3.697	0.170
$10^6$ , bench.	64.63	0.85	219.36	0.037
$10^6$ , código	64.81	0.85	220.65	0.038

Cuadro 3.6: Comparación fluido-dinámica del caso DHC.

La comparación fluido-dinámica ha resultado ser tal como se esperaba: tan satisfactoria como la térmica. Esta comparación positiva, garantiza que el software vuelca resultados convincentes y por lo tanto, se puede confiar en él como herramienta de análisis para el caso de aplicación del siguiente capítulo. Ahora es momento de aprovecharlo para obtener información adicional sobre el caso de estudio. En primer lugar, se hará un visión de detalle de lo que sucede en el estado permanente, y luego se estudiará el comportamiento transitorio.

#### 3.2.3. Visión de detalle

En esta subsección se hará una radiografía térmica y fluido-dinámica del caso cuando este se estabiliza, es decir, cuando todas las variables características del problema se

congelan en un valor que mantendrían eternamente, si ninguna perturbación sobre las condiciones del sistema tiene lugar. Así pues, dicha radiografía consiste en la presentación de los mapas bidimensionales de cinco variables  $(u, v, p, T, \psi)$  para los casos  $Ra = 10^3$  y  $Ra = 10^6$ .

De la comparación de las figuras 3.15 - 3.24 se destacan los siguientes hechos:

- Compárense las figuras 3.17 y 3.22. La velocidad máxima del dominio pasa de ser 3,6 a 220, por lo que los gradientes de velocidad que se observan en ambos casos, son tremendamente desiguales. Mediante esta comparación se observa que la diferencia de dificultad entre las simulaciones de  $Ra = 10^3$  y  $Ra = 10^6$  es notable, y es debida precisamente, a la condición de los gradientes de velocidades.
- Compárense las figuras 3.15 y 3.20. Nótese que la agitación del fluido en el caso  $Ra = 10^6$ , es muy superior a la del caso  $Ra = 10^3$ , donde se aprecia una “estructuración calmada”. Esto significa que el caso de  $Ra = 10^6$  se encuentra mucho más próximo a transicionar a turbulento de lo que se encuentra el caso  $Ra = 10^3$ .
- Compárense las figuras 3.16 y 3.21. Obsérvese que hay dos zonas de alta presión, la zona alta y la zona baja de la cavidad. Esto es debido a la “acumulación” de fluido en estas regiones. Por otro lado, se puede apreciar directamente la diferencia de calidad de malla empleada para los dos casos: para el caso sencillo hubo suficiente con una malla de  $50 \times 50$  uniforme, mientras que para el caso complicado la malla tuvo que refinarse considerablemente:  $200 \times 200 - 2,0$ .
- Compárense las figuras 3.18 y 3.23. Aquí se aprecia de nuevo la diferencia de agitación que sufre el fluido. En el caso de  $Ra = 10^6$ , hay incluso pequeñas zonas de recirculación de fluido situadas a altura media en la cavidad.
- Compárense las figuras 3.19 y 3.24. Desde el punto de vista térmico, la comparación de estas dos figuras es un ejercicio formidable. Nótese que para el  $Ra = 10^3$  la disposición de las isothermas es aproximadamente vertical y uniformemente separadas, sin embargo, en el caso de  $Ra = 10^6$  la estructura de las mismas es vertical cerca de las paredes verticales y horizontal en las zonas medias de la cavidad. La diferencia de comportamiento térmico del sistema, es muy marcada: en el primer caso la transferencia de calor se debe principalmente al mecanismo de conducción, es decir, difusión molecular, mientras que en el segundo caso se debe mayoritariamente a convección, o en otras palabras, al movimiento neto del fluido con diferente contenido energético. Este hecho ya era apreciable a través del valor del Nusselt medio presentado en

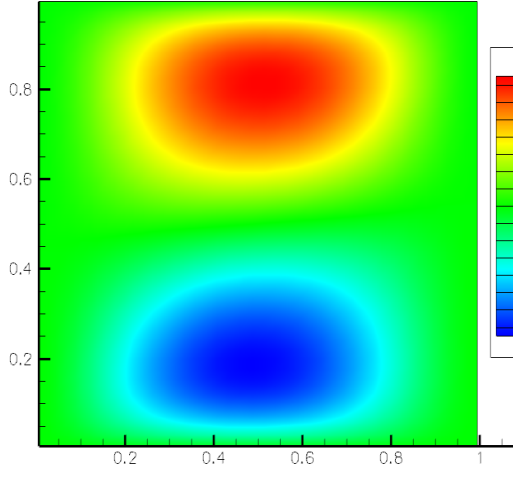


Figura 3.15: DHC,  $Ra = 10^3$ ,  $u$ .

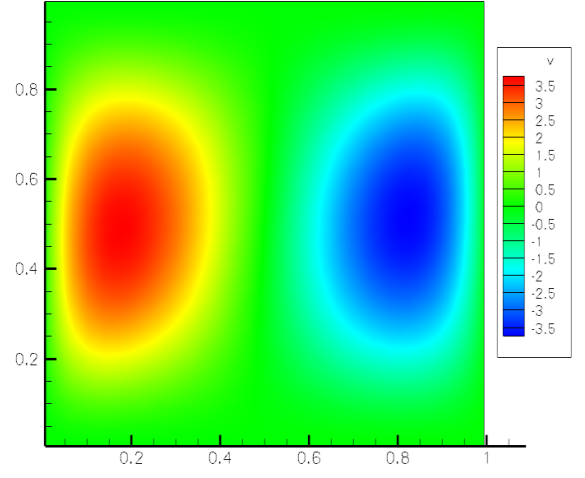


Figura 3.17: DHC,  $Ra = 10^3$ ,  $v$ .

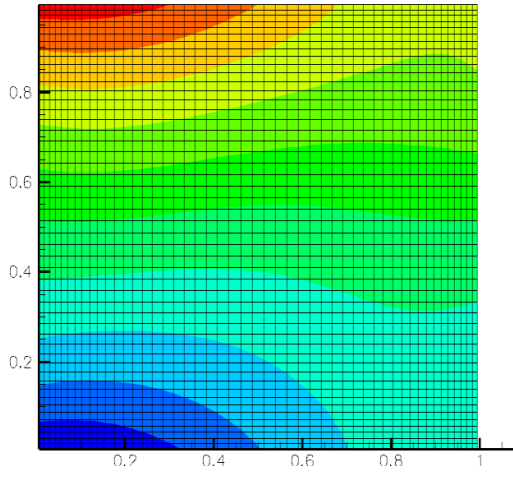


Figura 3.16: DHC,  $Ra = 10^3$ ,  $p$ .

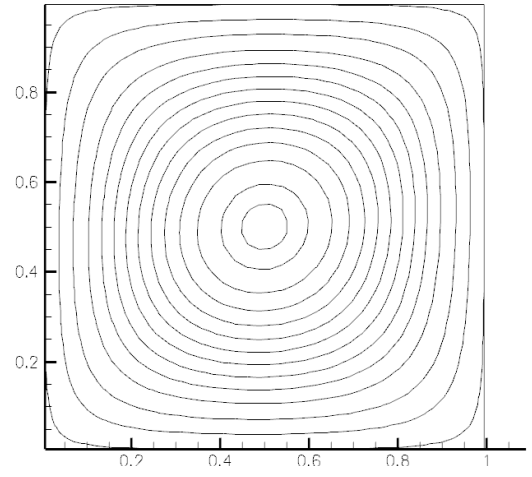


Figura 3.18: DHC,  $Ra = 10^3$ ,  $\psi$ .

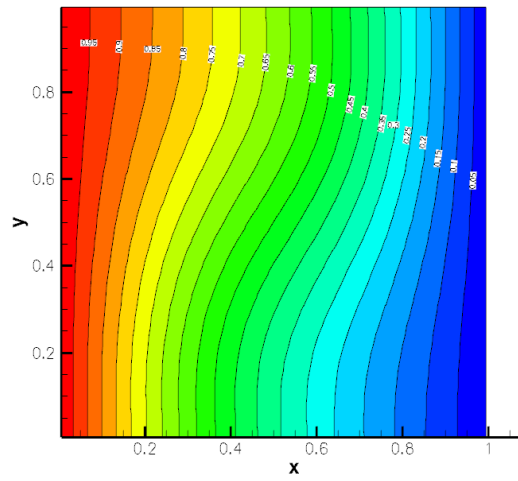


Figura 3.19: DHC,  $Ra = 10^3$ ,  $T$ .

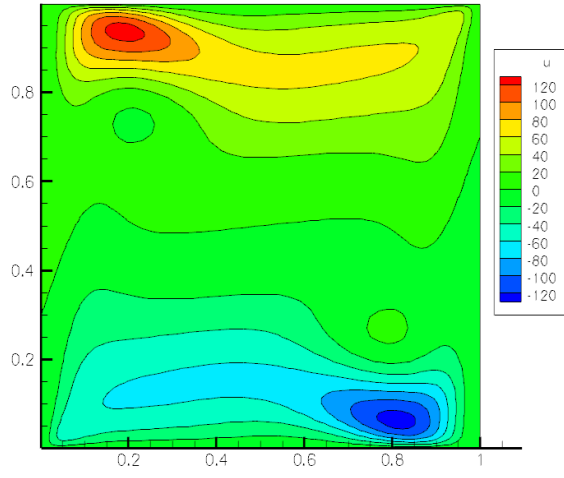


Figura 3.20: DHC,  $Ra = 10^6$ ,  $u$ .

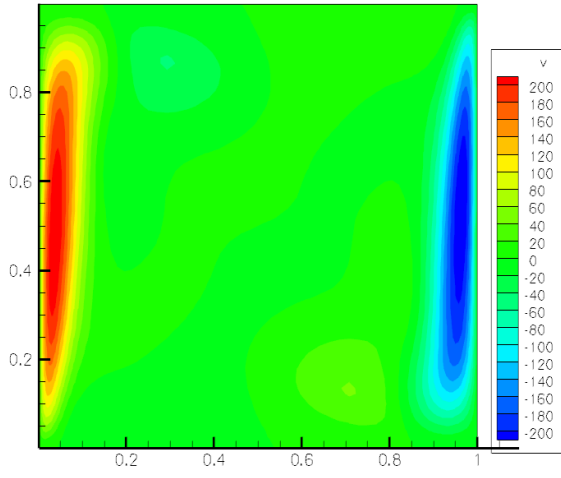


Figura 3.22: DHC,  $Ra = 10^6$ ,  $v$ .

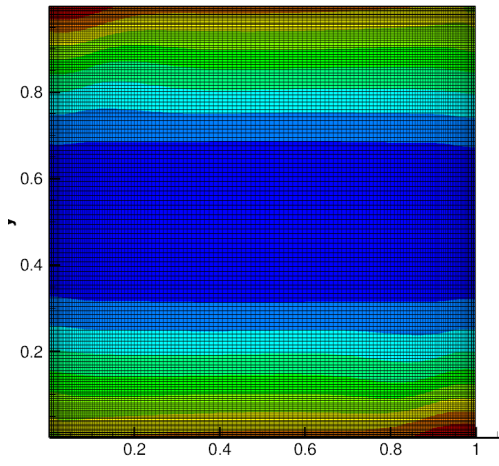


Figura 3.21: DHC,  $Ra = 10^6$ ,  $p$ .

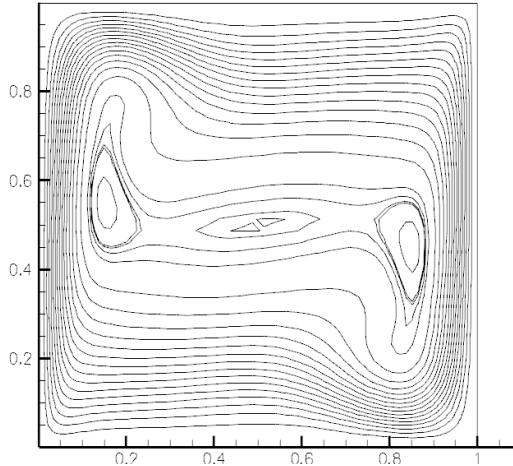


Figura 3.23: DHC,  $Ra = 10^6$ ,  $\psi$ .

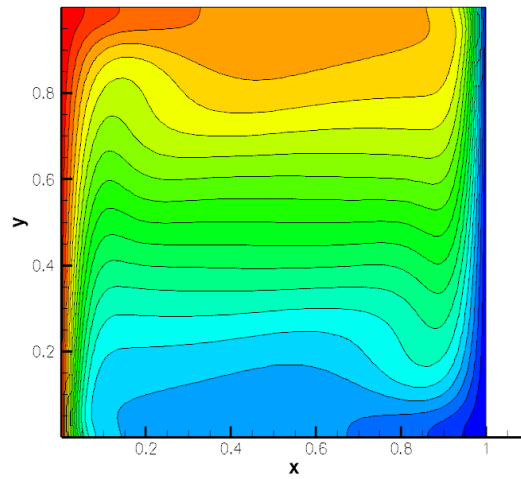


Figura 3.24: DHC,  $Ra = 10^6$ ,  $T$ .



la tabla 3.5 donde en el caso de  $Ra = 10^3$ ,  $\overline{Nu} = 1,1$  mientras que el caso  $Ra = 10^6$ ,  $\overline{Nu} = 8,8$ . Esto significa que con respecto al caso de conducción (en el cual el Nusselt medio seria 1), hay un incremento de un 10 % en la transferencia de calor para el caso  $Ra = 10^3$ , mientras que en el caso  $Ra = 10^6$  la transferencia de calor se multiplica por, aproximadamente, nueve.

### 3.2.4. Evolución transitoria

Después de haber presentado con detalle el comportamiento del caso en el estado permanente, se plantea ahora la opción de contemplar la evolución transitoria del caso. En las figuras 3.25 - 3.30 se sintetiza el progreso de la variable más representativa del comportamiento: la temperatura.

- En la primera imagen, se aprecia como arranca el proceso de calentamiento del fluido, que inicialmente se encuentra a temperatura fría y en reposo. El mecanismo de transferencia de calor que predomina en este momento, es el de conducción, aunque ya se puede apreciar un ligero incremento de la capa límite térmica de la zona superior de la cavidad, en comparación con la zona inferior.
- En la segunda imagen, se observa como se separa de la pared una bolsa caliente de aire situada en la zona superior. Dicha bolsa caliente avanza de oeste a este por la inercia que tomó el aire al cambiar de densidad y subir por la pared oeste.
- En la tercera imagen, la bolsa de aire caliente sigue su curso hacia la pared derecha de la cavidad, a su vez, crece en tamaño, alimentada por el aire que sigue siendo “empujado térmicamente” por las variaciones de densidad que sufre cerca de la pared oeste.
- En la cuarta imagen se captura el momento en el cual el aire procedente de la zona oeste, choca contra la pared este y empieza su movimiento de bajada por dicha pared.
- En la quinta imagen se observa como el fluido que chocó contra la pared situada en la parte derecha de la cavidad, rebota y ocupa de nuevo zonas de la cavidad situadas al oeste y a altura media.
- En la última imagen de esta secuencia se puede observar como la diferencia térmica entre zonas superiores e inferiores, se va aliviando progresivamente

hasta que el sistema toma su mapa invariante presentado en la figura 3.24 de la página 80.

Este es un grupo de imágenes que sintetiza la evolución transitoria del caso. En la versión digital de este proyecto, se incluye un vídeo de medio minuto en el que intervienen sesenta imágenes obtenidas a lo largo de todo el proceso.

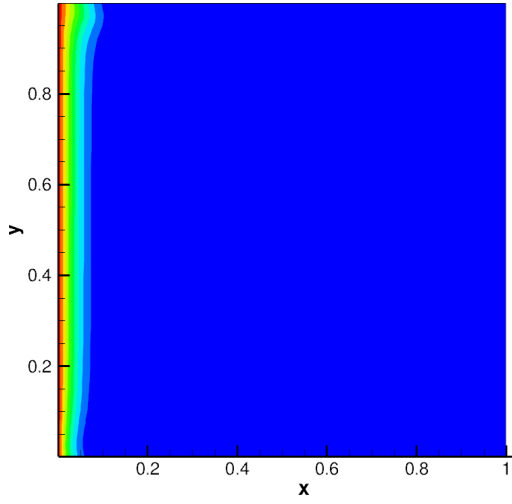


Figura 3.25: DHC,  $Ra = 10^6$ ,  $T_1$ .

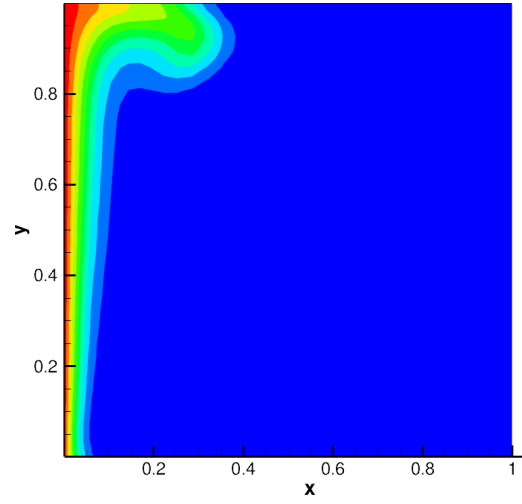


Figura 3.28: DHC,  $Ra = 10^6$ ,  $T_2$ .

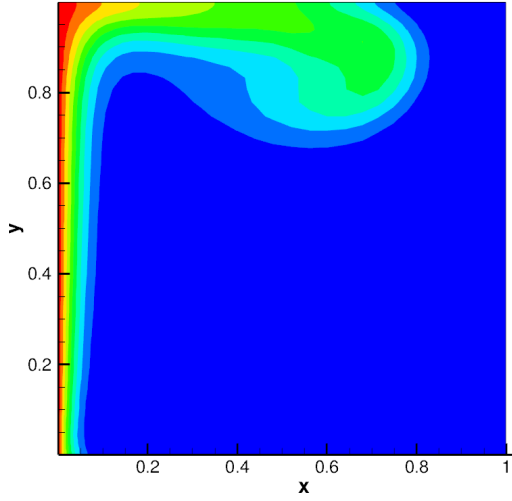


Figura 3.26: DHC,  $Ra = 10^6$ ,  $T_3$ .

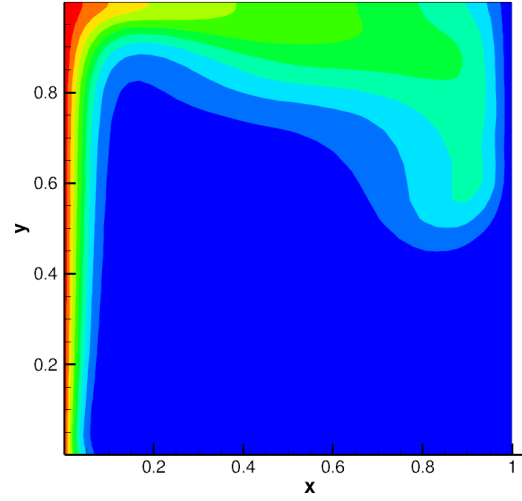


Figura 3.29: DHC,  $Ra = 10^6$ ,  $T_4$ .

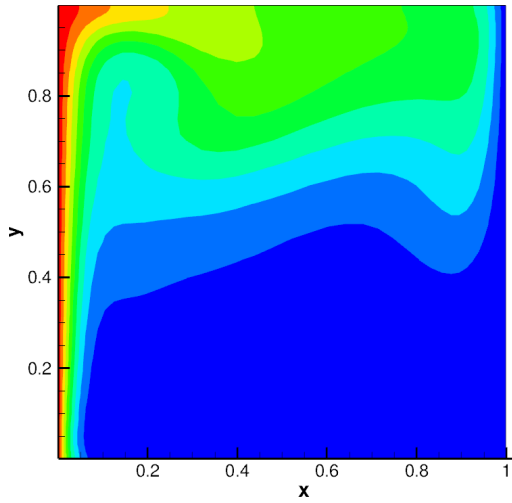


Figura 3.27: DHC,  $Ra = 10^6$ ,  $T_5$ .

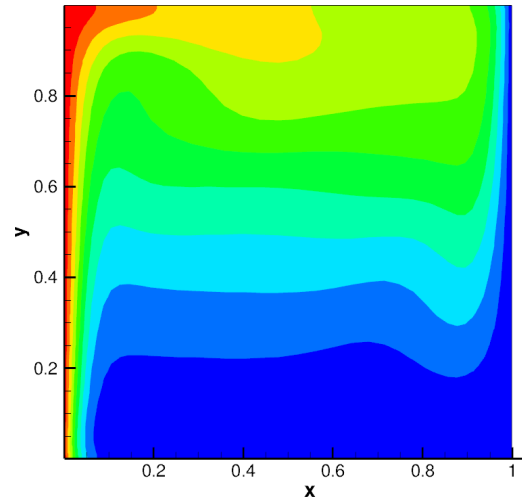


Figura 3.30: DHC,  $Ra = 10^6$ ,  $T_6$ .



## Capítulo 4

# Caso de aplicación

Una vez se ha verificado el programa mediante los dos casos benchmark presentados en el capítulo anterior, se puede confiar en el código como herramienta de estudio para casos de características relativamente similares (en términos de dificultad física, geometría y otros).

El caso que se pretende estudiar en este capítulo se le conoce como *Flow around a Square Cylinder* (Flujo alrededor de un cilindro cuadrado). Este caso ha sido ampliamente estudiado en el mundo de la investigación, así como los casos con flujos alrededor de un cilindro redondo, esfera, y a un nivel algo más avanzado, flujos en perfiles de ala. Dicho estudio es, claramente, una incursión en el campo de la aerodinámica, con lo cual se trabajan conceptos aerodinámicos tales como el *Drag* (fuerza de arrastre) o el *Lift* (Fuerza de levantamiento)

### 4.1. Presentación del caso

Este caso consiste básicamente, en un cuerpo de sección cuadrada y tercera dimensión infinita, que se encuentra rodeado por un fluido cuya velocidad relativa al sólido es diferente de cero. Se considera que no hay influencia alguna de cualquier otro elemento tal como sólidos cercanos, paredes o, a efectos prácticos, cualquier otra razón que altere el flujo que se desenvuelve en los alrededores del sólido de estudio. En otras palabras, el caso equivaldría a simular la aerodinámica de un avión con forma de cuadrado en lugar de su silueta convencional, pero con la peculiaridad de estudiar el caso bidimensional. Para aclarar la configuración del caso en cuestión se aporta la figura 4.1.

Entrando en detalle, las características del caso son las siguientes:

- Las hipótesis asumidas en la sección 2.2, no son vulneradas por las característi-

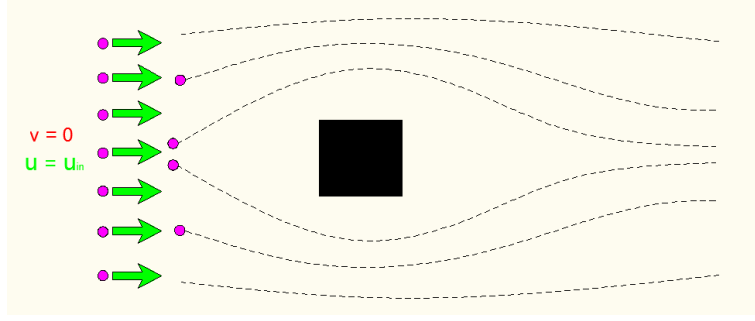


Figura 4.1: Esquema de las características del caso Flow around a Square Cylinder.

cas del caso.

- El parámetro que describe la geometría del caso es la longitud del lado del cuadrado ( $d$ ).
- El fluido es newtoniano y sus propiedades físicas son constantes. Éste rodea totalmente el cuerpo y se considera que el dominio físico en el que se encuentra es ilimitado, es decir, ocupa un espacio infinitamente grande.
- El perfil de velocidades del fluido aguas arriba del sólido es completamente plano, es decir, la velocidad es constante para cualquier partícula fluida que no haya alcanzado las inmediaciones del sólido.
- Se ignora el comportamiento térmico del problema, es decir que la temperatura no juega ningún papel, y por lo tanto las incógnitas del caso son las dos componentes de la velocidad ( $u$ ,  $v$ ) y la presión ( $p$ ).
- El ángulo de ataque para todos los casos que se consideran en este proyecto es nulo, es decir que el cilindro tiene dos caras completamente paralelas a la dirección del flujo, y dos caras completamente perpendiculares.
- El sistema de estudio es abierto, es decir, que ha de considerarse con entradas y salidas de materia.
- Las ecuaciones, ya adimensionalizadas<sup>1</sup>, que gobiernan el comportamiento del fluido son las siguientes:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (4.1)$$

$$\left( \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial X} \quad (4.2)$$

<sup>1</sup>obtenidas a partir de las ecuaciones 2.4 - 2.6, mediante la aplicación de las técnicas de adimensionalización descritas en la sección 2.3.

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y}\right) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right) - \frac{\partial P}{\partial Y} \quad (4.3)$$

- El número adimensional que caracteriza al caso es el Reynolds, el cual aparece en las ecuaciones 4.2 y 4.3 dividiendo al término difusivo. Dicho número adimensional se obtiene como consecuencia del proceso de adimensionalización, y responde a la siguiente expresión matemática:

$$Re = \frac{\rho \cdot u_{\infty} \cdot d}{\mu}$$

Donde  $u_{\infty}$  es la velocidad de desplazamiento del fluido aguas arriba del sólido,  $d$  es la longitud del lado del cilindro cuadrado, y finalmente,  $\rho$  y  $\mu$  son la densidad y la viscosidad del fluido de trabajo, respectivamente.

- Las condiciones de contorno en el contacto sólido-fluido se imponen según lo siguiente:
  - La condición de contorno para presiones es de tipo Neumann, es decir, derivada nula.
  - La condición de contorno para velocidades es de tipo Dirichlett, ambas componentes son cero, por no haber velocidad relativa en la zona de contacto.
- Se ha comentado anteriormente que el espacio donde se desarrolla el caso es infinito, sin embargo, el dominio computacional no puede ser infinito por razones triviales. Así pues hay que delimitar unas “fronteras computacionales” lo suficientemente lejanas al sólido como para que no influyan en la solución obtenida. Dichas fronteras también requieren condición de contorno y son del siguiente estilo:
  - La condición de contorno para presiones es de tipo Neumann, es decir, derivada nula.
  - La condición de contorno para velocidades puede ser de derivada nula o de tipo Convectiva. Este tipo de condición de contorno llamada Convectiva (*Convective Boundary Condition, CBC*) ha sido especialmente diseñada para ser aplicada en para dominios con entradas y salidas. Es una condición de contorno frecuentemente utilizada porque es más eficiente que la de tipo Neumann.

## 4.2. Particularidades técnicas

Para el presente caso, existen ciertos detalles técnicos que hay que tener en cuenta y que se presentan a continuación: el escalado geométrico, el cálculo de las fuerzas aerodinámicas, el uso de la condición de contorno convectiva, la aparición del fenómeno del *Vortex Shedding* (Alternación de Vórtices) y la economía de malla.

### 4.2.1. Escalado geométrico

Como ya se ha comentado anteriormente, el dominio físico donde tiene lugar el flujo se considera infinito para evitar interferencias de otros cuerpos con el comportamiento del flujo alrededor del cilindro. Sin embargo, hay que delimitar una frontera física suficientemente alejada del sólido como para no influir en el flujo, pero teniendo siempre en cuenta que cuanto mayor sea el dominio computacional, más esfuerzo de cálculo se requiere por parte del ordenador.

El dimensionamiento de las fronteras físicas ha sido clásicamente realizado en función de la longitud de referencia del problema, o sea, el tamaño del lado de la sección cuadrada del cilindro. En relación a esta distancia ( $d$ ), se tiende a dimensionar dicho espacio computacional en base a los siguientes rangos:

- Aguas abajo del cilindro: de 10 a 30 veces  $d$ .
- Aguas arriba del cilindro: de 5 a 10 veces  $d$ .
- Sección de paso del flujo: de 10 a 40 veces  $d$ .

Las distancias anteriores para el caso propuesto en la figura 4.2 exhibida en la página 91 son de 10, 5 y 20 veces  $d$ , respectivamente.

Desde luego, la razón por la cual se toman dimensiones tan grandes no se deriva de ningún análisis matemático, sino que es la consecuencia directa de efectuar un estudio de la influencia de la lejanía de las fronteras computacionales en la solución. De hecho, es aún materia de estudio en la comunidad científica la determinación exacta de las dimensiones más adecuadas. Los valores arriba apuntados, se han consultado en la fuente de información [6], y se han tomado como referencia.



#### 4.2.2. Fuerzas aerodinámicas

Es una cuestión de interés ingenieril el determinar la fuerza que ejerce un fluido sobre un cuerpo que se mueve a través de él. En concreto, las dos fuerzas que tienen mayor interés son la Drag force (o fuerza de arrastre, en el eje  $x$ ) y la Lift force (fuerza de levantamiento, en el eje  $y$ ). Estas fuerzas se calculan según lo dispuesto a continuación:

$$\text{Drag force} = \int_w P \, dy - \int_e P \, dy + \mu \int_n \frac{\partial u}{\partial y} \, dx - \mu \int_s \frac{\partial u}{\partial y} \, dx + \mu \int_e \frac{\partial u}{\partial x} \, dy - \mu \int_w \frac{\partial u}{\partial x} \, dy \quad (4.4)$$

$$\text{Lift force} = \int_s P \, dy - \int_n P \, dy + \mu \int_w \frac{\partial v}{\partial x} \, dy - \mu \int_e \frac{\partial v}{\partial x} \, dy + \mu \int_n \frac{\partial v}{\partial y} \, dx - \mu \int_s \frac{\partial v}{\partial y} \, dx \quad (4.5)$$

Donde los dominios de integración  $w$ ,  $e$ ,  $s$  y  $n$ , se refieren a las paredes del cilindro oeste, este, sur y norte, respectivamente.

Siguiendo la dinámica de adimensionalización de variables, dichas fuerzas Drag y Lift, se dividen por una fuerza de referencia que acostumbra a ser calculada así:

$$F_{\text{referencia}} = \frac{1}{2} \rho u_{\infty}^2 S \quad (4.6)$$

Finalmente, dividiendo las ecuaciones 4.4 y 4.5 por la ecuación 4.6, se obtendrían los coeficientes Drag ( $C_D$ ) y Lift ( $C_L$ ), que son los que se acostumbra a presentar en los estudios aerodinámicos. El motivo por el cual se computan los coeficientes  $C_D$  y  $C_L$  es porque facilitan las comparaciones de las propiedades aerodinámicas de diferentes sólidos con diferentes configuraciones de flujo.

#### 4.2.3. Convective Boundary Condition

En la simulación de casos con entradas y salidas de masa con respecto al dominio físico a estudiar, es frecuente utilizar una condición de contorno distinta a las comentadas en la sección 2.5. La efectividad del uso de la condición convectiva (CBC) sobre la de Neumann (NBC) es incontestable: requiere menos dominio computacional (menor número de nodos) para simular correctamente el caso y además, tarda menos en la convergencia de cada iteración realizada. La CBC se explicita en la ecuación 4.7 para la componente horizontal de la velocidad, y en la 4.8 para la componente vertical.

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U_{\infty} \frac{\partial U}{\partial X} = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U_{\infty} \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (4.8)$$

Cabe mencionar, que adicionalmente a la aplicación de dicha condición de contorno, es necesario efectuar una corrección en el balance másico para acabar de ajustar el proceso de modelización. Consúltense los detalles en el artículo de Sohankar [6] sobre la condición de contorno convectiva y la corrección de masa que requiere.

#### 4.2.4. Vortex Shedding

El caso bajo estudio disfruta de un encanto físico especial (que tiene lugar para un cierto rango de valores del Reynolds) que se debe a la fenomenología del Vortex Shedding. El Vortex Shedding es el nombre por el cual se conoce al proceso periódico de generación de vórtices alternos (se alternan verticalmente), que sucede aguas abajo del cilindro y durante la transición de flujo laminar a turbulento. Es decir, que para valores de Reynolds que cumplan  $50 \lesssim Re \lesssim 250$ , lo que ocurre es que no se converge a un estado permanente del flujo pero tampoco se convierte en un caótico caso turbulento; en lugar de ello, se obtiene un estado “intermedio”.

Durante el Vortex Shedding, el campo de velocidades toma una “serie finita” de perfiles que se repiten bajo una periodicidad cuya frecuencia puede cuantificarse. Precisamente con la idea de caracterizar la frecuencia de repetición, se define un número adimensional adicional llamado *Strouhal* que se computa según lo dispuesto por la expresión matemática siguiente:

$$St = \frac{f_s \cdot d}{u_\infty} \quad (4.9)$$

Donde  $St$  es el número adimensional de Strouhal,  $f_s$  es la frecuencia del proceso,  $d$  es la longitud del lado del cilindro y  $u_\infty$  es la velocidad del fluido aguas arriba del sólido.

#### 4.2.5. Economía de malla

La captura de las capas límite que se forman alrededor del sólido, especialmente en las inmediaciones de las paredes del cilindro cuya dirección es paralela a la dirección del flujo, es un hecho esencial para garantizar que la solución obtenida es correcta. Esto implica que la malla ha de densificarse mucho en esta zona. Tanto ha de densificarse que se llega fácilmente al máximo número de nodos que es razonable emplear con los recursos de hardware descritos en el Anexo A. Entonces, se expresan al máximo los recursos disponibles, mediante el desarrollo de un algoritmo específico para el mallado económico en el caso del cilindro cuadrado.

El algoritmo de mallado automático y económico parte de lo dispuesto por la fórmula 2.9 presentada en la página 29. El algoritmo emplea tres parámetros (Número de nodos en la dirección X, Número de nodos en la dirección Y, y el parámetro  $\delta^2$ ) en el proceso de generación de la malla. En particular, se expone el ejemplo de una malla de  $100 \times 100$  nodos y  $\delta = 0,05$  en la figura 4.2.

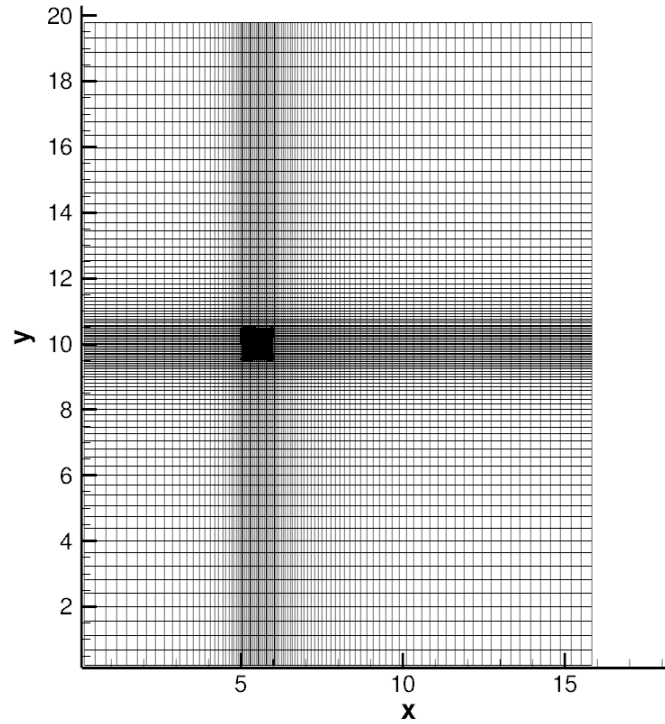


Figura 4.2: Malla de densificación especial para el caso Square Cylinder.

Nótese por un lado, que el sólido se encuentra representado por el cuadrado negro situado en medio del dominio, y por otro lado, que la densificación de la malla se hace efectiva en toda la franja horizontal cuya altura coincide con la situación del sólido ( $y \approx 10$ ), así como en la franja vertical cuya distancia al eje de abscisas es similar a la del cilindro ( $x \approx 5$ ). En este caso, se ha obtenido la malla más apropiada posible dentro de las opciones disponibles en mallas estructuradas.

Es evidente, que una malla no estructurada sería mucho más eficiente en relación a la finura del mallado y, además, más económica que la malla presentada en la figura 4.2. En esta figura se observa una “cruz” de densificación de malla que realmente no es necesaria, puesto que solamente se desea densificar en las inmediaciones del sólido. Sin embargo, mediante el uso de mallas estructuradas no se puede crear una malla

<sup>2</sup>distancia deseada entre la pared del cilindro y el primer nodo fluido.

cualitativamente mejor que la presentada en la figura 4.2, ya que la densificación en las zonas alejadas del sólido es inevitable si se quiere densificar en las zonas cercanas al mismo.

### 4.3. Presentación de resultados

Como ya se ha venido diciendo, el caso de estudio se caracteriza por tener una fenomenología rica gracias a la aparición del Vortex Shedding. Considérense los valores de Reynolds críticos  $Re_{cr1} \approx 50$  y  $Re_{cr2} \approx 250$ , así como el valor del Reynolds  $Re_{caso}$  correspondiente a un hipotético caso de estudio. En general, se cumple que:

- Si  $Re < Re_{cr1}$ , el flujo es laminar y se alcanza un estado permanente en la solución. Los casos que satisfacen esta expresión se los conoce como Pre-Vortex Shedding, puesto que el fenómeno aún no se manifiesta.
- Si  $Re_{cr1} < Re < Re_{cr2}$ , el flujo es laminar y se alcanza una configuración periódica en el tiempo. Los casos que cumplen esta condición se les denomina Post-Vortex Shedding, dado que el fenómeno gobierna el comportamiento del fluido.
- Si  $Re_{cr2} < Re$ , el flujo se vuelve turbulento. Este caso está fuera del alcance del proyecto.

En esta sección se tratarán cualitativamente los casos Pre-Vortex Shedding, la idea es situar el comportamiento del fluido a Reynolds bajos, con el mero objetivo de entender la transición a los casos donde el Vortex Shedding se manifiesta. Adicionalmente, y con algo más detalle, se tratarán los casos Post-Vortex Shedding, entrando en análisis numéricos para caracterizar la fenomenología.

#### 4.3.1. Pre-Vortex Shedding

De acuerdo con lo dispuesto en el artículo [6], el valor del Reynolds al cual tiene lugar el “encendido” del Vortex Shedding, se comprende en el rango  $40 < Re_{cr1} < 55$ , dependiendo del ángulo de ataque del perfil cuadrado. Recuérdese que el ángulo de ataque del perfil se ha considerado nulo para todos los casos que se simulen en este proyecto, y de acuerdo con Sohankar (el autor de [6]), el valor del Reynolds crítico para dicho ángulo es de 51,2. Así pues, en esta subsección se correrán casos con Reynolds inferiores a este valor crítico.

Como parte del análisis cualitativo se incluyen dos “estudios”: primero se presentará la evaluación completa de los mapas de velocidad y presión (además de la inclusión de las líneas de corriente), para el caso concreto en que  $Re = 40$ ; y segundo, los dos mapas más representativos del comportamiento del flujo (la velocidad en el eje  $x$ , y las líneas de corriente) se adjuntan para los casos  $Re = 1$  y  $Re = 20$ , con el objetivo de analizar (conjuntamente con el caso  $Re = 40$ ) la influencia del Reynolds sobre el comportamiento del flujo.

### Estudio del caso $Re = 40$

Se ha querido plasmar cuál es el comportamiento del flujo para, al menos, un caso en el que la evolución transitoria conduzca a un caso no periódico. Entonces, se ha decidido escoger un valor del Reynolds suficientemente grande como para que el flujo no sea muy viscoso pero que esté dentro del rango de los casos Pre-Vortex Shedding, así pues se ha escogido el valor de  $Re = 40$ . En relación a este caso, se presentan las figuras 4.3 - 4.6, correspondientes a las dos componentes de la velocidad, la presión y las líneas de corriente.

De acuerdo con lo observado en las figuras 4.3 - 4.6, se desea remarcar los siguientes aspectos:

- Obsérvese que en la figura 4.5, la presión aumenta delante y decrece por detrás del sólido. Esta diferencia de presiones es la causa principal de que el flujo ejerza una fuerza neta sobre el cuerpo inmerso en él.
- Obsérvese con detenimiento la figura 4.3. Esta figura es quizás, la más característica de la fenomenología del caso. Nótese lo siguiente:
  - Antes de que el flujo llegue al sólido, la velocidad de las partículas que de no modificar su trayectoria impactarían contra el sólido, cambian su dirección de movimiento de tal manera que adaptan la configuración global del flujo para que el choque contra el sólido sea suavizado.
  - Justo por encima y por debajo del sólido, el flujo se acelera puesto que hay menos sección de paso para menos partículas, y por lo tanto, la velocidad de las partículas se incrementa.
  - Justo en la parte trasera del sólido, la velocidad de las partículas es prácticamente nula puesto que todavía no ha dado tiempo al flujo de ocupar el “vacío” que genera el sólido a su paso. Conforme el fluido se aleja del sólido, éste recupera la configuración de flujo inicial.

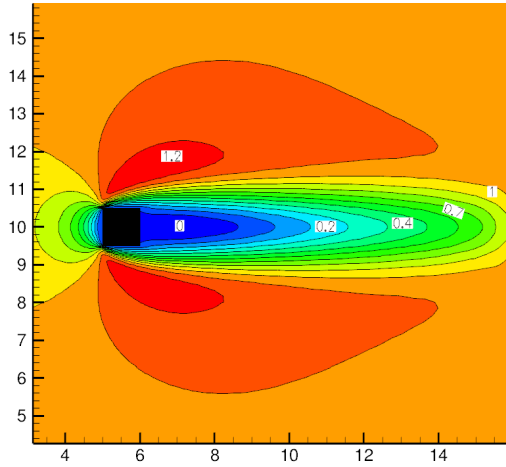


Figura 4.3: Square Cylinder,  $Re = 40$ ,  $u$ .

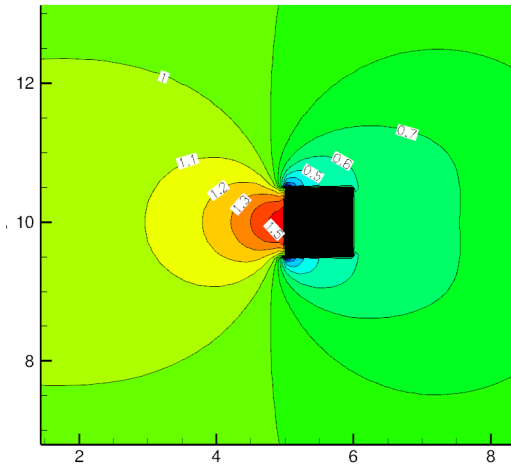


Figura 4.5: Square Cylinder,  $Re = 40$ ,  $p$ .

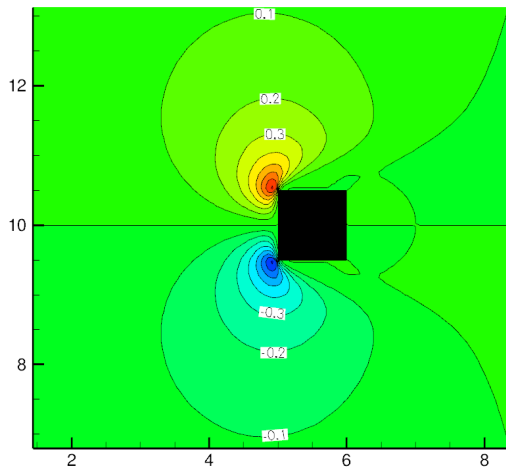


Figura 4.4: Square Cylinder,  $Re = 40$ ,  $v$ .

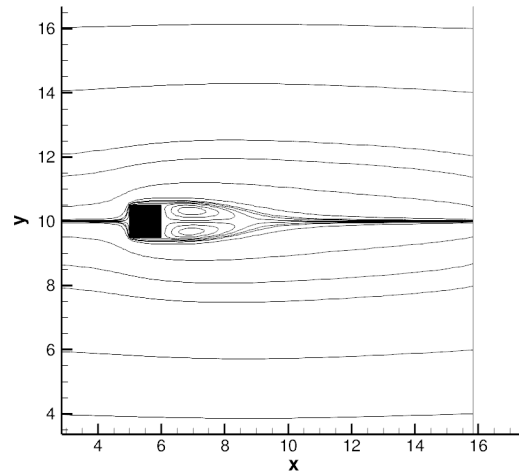


Figura 4.6: Square Cylinder,  $Re = 40$ ,  $\psi$ .

- Nótese que sobre una línea vertical que cruce el sólido por en medio él ( $x \approx 5$ ), y alturas alejadas de la posición del sólido (aproximadamente unas cuatro veces la dimensión característica del cilindro por encima y también por debajo ( $x \approx 5$ ) y ( $y \approx 15$ )) el flujo no se perturba.
- Préstese atención a la figura 4.4. La componente vertical de la velocidad aumenta (en valor absoluto) en la parte delantera superior e inferior del sólido como consecuencia de la reestructuración del flujo comentada en el punto anterior.
- Finalmente, en la figura 4.6, se puede observar la trayectoria que seguirían las partículas (correspondientes a los caminos marcados por cada una de las líneas representadas) en las inmediaciones del sólido. Es interesante remarcar los dos vórtices simétricos que se aprecian en la zona posterior al cilindro, la existencia de los mismos implica que existe una zona de recirculación del fluido. Obsérvese también, que aproximadamente a una distancia de cinco veces  $d$ , en la dirección horizontal y aguas abajo del sólido (en  $x \approx 14$ ), la perturbación de dichas líneas es prácticamente nula.

### Comparativa de los casos $Re = 1$ , $Re = 20$ y $Re = 40$

Después de haber hecho un análisis cualitativo completo del caso  $Re = 40$ , resulta interesante entrar en la identificación de la interacción Reynolds - configuración de flujo. Dicha evolución es observada a través de la comparación del perfil de velocidades horizontal y de las líneas de corriente para los casos en que Reynolds toma el valor de 1, 20 y 40. A continuación, se incluyen las figuras de los casos  $Re = 1$  y  $Re = 20$ , y se vuelven a repetir las figuras del  $Re = 40$  para agilizar la comparación.

En base a la comparación de las figuras 4.7 - 4.12 se quiere hacer notar lo siguiente:

- Mediante la comparación de todas las figuras, y de manera absolutamente directa, se puede apreciar la gran similitud de los casos  $Re = 20$  y  $Re = 40$ , y a su vez, las grandes diferencias que estos dos casos presentan frente al caso de  $Re = 1$ . En general, Reynolds inferiores a cinco y en concreto, el caso Reynolds unidad, son casos tremendamente viscosos, lo cual implica que el peso de la componente difusiva de Navier-Stokes es mucho mayor que la parte convectiva. En realidad, la simulación de este caso tiene como objetivo llevar al límite el código que se ha creado, y apreciar en detalle la evolución del flujo a Reynolds bajos, pero desde luego, nada más lejos de la intención puramente académica.

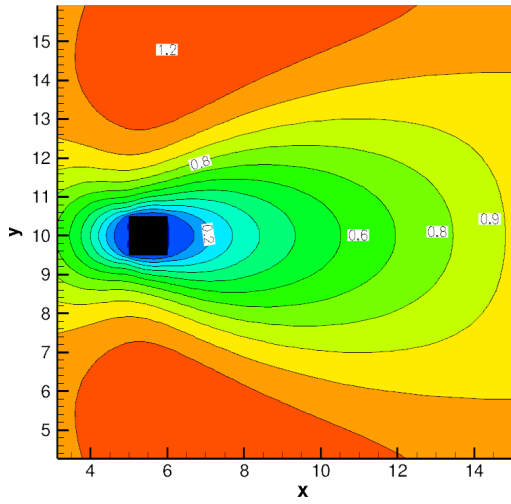


Figura 4.7: Square Cylinder,  $Re = 1$ ,  $u$ .

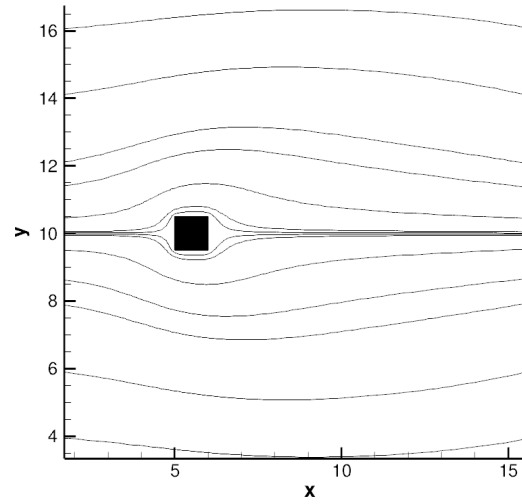


Figura 4.10: Square Cylinder,  $Re = 1$ ,  $\psi$ .

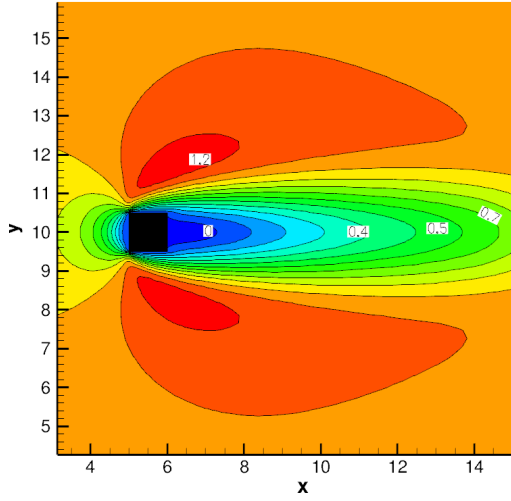


Figura 4.8: Square Cylinder,  $Re = 20$ ,  $u$ .

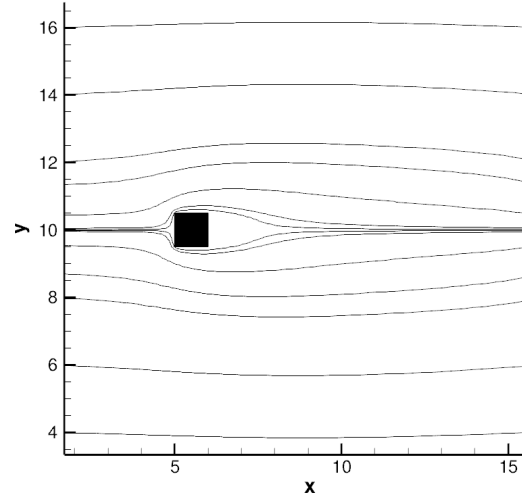


Figura 4.11: Square Cylinder,  $Re = 20$ ,  $\psi$ .

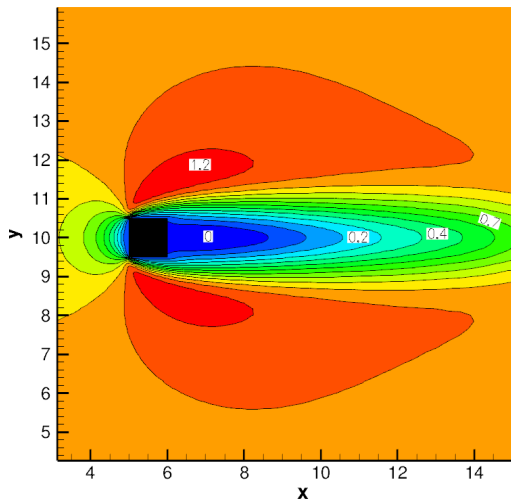


Figura 4.9: Square Cylinder,  $Re = 40$ ,  $u$ .

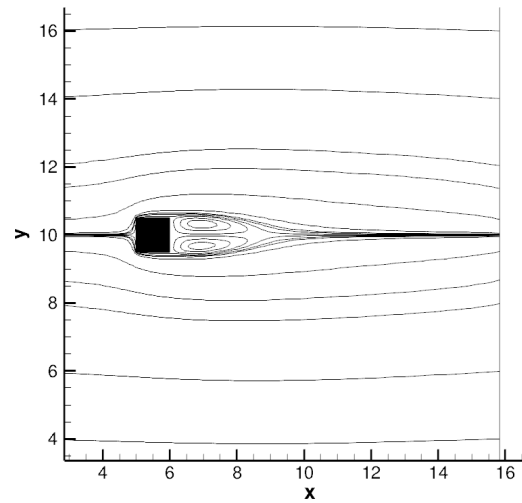


Figura 4.12: Square Cylinder,  $Re = 40$ ,  $\psi$ .



- Obsérvese que la tendencia natural del campo de velocidades en su evolución con el Reynolds, es de:
  1. Reducir la zona de afectación del flujo, sobre todo en la dimensión vertical (componente  $y$ ).
  2. Modificar la geometría de la estela de fluido. De hecho, la tendencia es de reducir el grosor y de aumentar su longitud. Para apoyar este razonamiento se incluye (en la figura 4.13) la estela que presenta el caso  $Re = 200$  (Post-Vortex Shedding) en los instantes anteriores al inicio de la periodicidad.

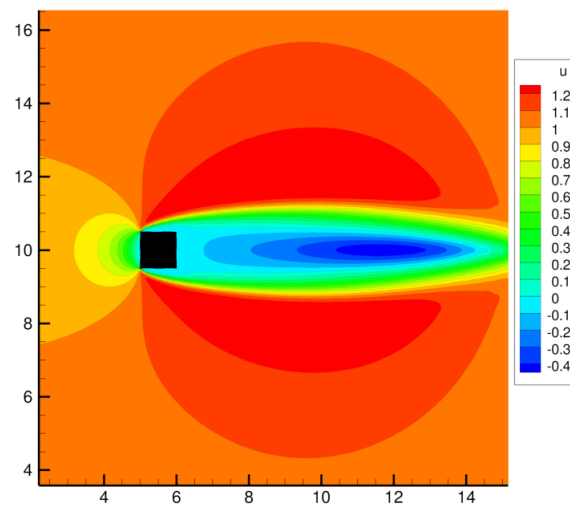


Figura 4.13: Square Cylinder,  $Re = 200$ , instantes antes de la aparición del Vortex Shedding.

3. Aumentar la longitud de recirculación de fluido presente en la estela que deja el sólido.
4. Contraer la distancia que separa la zona de desprendimiento (o zona de altas velocidades) y la estela del sólido (o zona de bajas velocidades), de tal manera que el gradiente de velocidades aumenta considerablemente. De hecho, es este el motivo principal por el cual el flujo pierde estabilidad y se convierte en turbulento. Esto sería equivalente a la situación que se da en el ciclismo cuando se agrupa una serie de corredores en lo que se denomina “pelotón”. Si el pelotón circula a bajas velocidades (unos 30 km/h) la habilidad de los ciclistas es suficiente como para que incluso a una distancia de 15 cm los unos de los otros eviten colisionar, pero si dicho pelotón pretende mantener estas mismas distancias cuesta abajo (cuando se alcanzan velocidades de hasta 80 km/h) lo más probable es

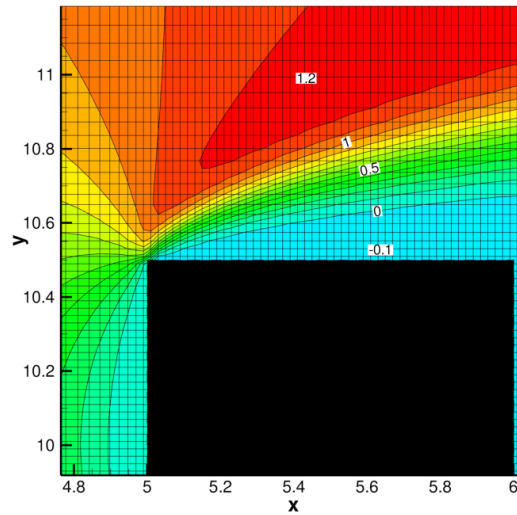


Figura 4.14: Square Cylinder,  $Re = 100$ , zoom de la figura 4.13.

que, en un momento u otro, pierdan el control y se genere una “situación caótica”.

5. Aumentar la importancia de la correcta captura de las capas límite que se generan en las paredes superior e inferior del sólido. Nótese que los gradientes de velocidades de esta zona crecen considerablemente. Haciendo un zoom en la zona de superior del sólido de la figura 4.13, se obtiene la figura 4.14, donde se puede apreciar que en una distancia de 0,2 veces  $d$  se concentran zonas de velocidades máximas y zonas de recirculación junto a la superficie.

#### 4.3.2. Post-Vortex Shedding

Al sobrepasar el valor crítico del Reynolds (alrededor de 50), se entra en la fenomenología de generación alterna de vórtices. En esta sección se estudiará el fenómeno de dos formas:

1. Desde el punto de vista cualitativo se atiende a la evolución transitoria de un caso con Reynolds concreto.
2. Desde el punto de vista cuantitativo o de detalle, se analiza el comportamiento del sistema en estos regímenes y la sensibilidad de la solución frente a la finura de la malla.

### Análisis cualitativo de la evolución transitoria

En la siguiente secuencia de imágenes se puede apreciar la evolución transitoria de la componente horizontal de la velocidad en el caso  $Re = 200$ :

La secuencia de imágenes, configurada por el grupo de figuras 4.15 - 4.24, puede dividirse en tres partes bien diferenciadas:

1. *Estabilización aparente*. El conjunto de figuras 4.15 - 4.18, reproduce fielmente lo que sucede en el proceso de estabilización de los casos Pre-Vortex Shedding. La diferencia principal es que cuando aquellos casos alcanzan el estado final (equivalente al de la figura 4.18), se estabilizan y permanecen en ese estado mientras nada los perturbe, sin embargo, en los casos Post-Vortex Shedding, dicha estabilización es **aparente** porque instantes después (véase la figura 4.19) se empieza a observar cómo el caso se vuelve ligeramente asimétrico y se entra en lo que se denomina etapa de transición.
2. *Transición*. La pareja de figuras 4.19 - 4.20, pone de manifiesto el ligero efecto asimétrico que se comentaba en la etapa anterior. En el instante de la figura 4.18 (tiempo adimensional 61), parecía que el sistema había convergido, pero sin embargo, aproximadamente 60 instantes después se perciben claramente las primeras anomalías (obsérvese que la longitud del color rojo en la parte superior de la figura 4.19 es menor a la longitud de la zona inferior). Instantes después, en la figura 4.20 los efectos de distorsión ya se manifiestan claramente aunque todavía no se ha entrado en el régimen periódico.
3. *Comportamiento periódico*. Las figuras 4.21 - 4.24, representan el comportamiento oscilatorio en el que se sume el flujo. Así pues, cobra sentido el cálculo de un nuevo parámetro: la frecuencia del período de oscilación, la cual varía con el Reynolds.

Cabe decir que el conjunto de las figuras 4.15 - 4.24 ha sido escogido como representante de la evolución transitoria, sin embargo, se ha incluido en la versión digital de este proyecto un vídeo donde se pueden apreciar claramente las tres fases expuestas. Dicho vídeo se denomina *Sq-Cyl-Re100.avi*, dura 2 minutos y contiene un total de 300 imágenes.

### Análisis cuantitativo

El caso del Square Cylinder, incluso en el rango de Reynolds que se pretende estudiar, no se considera cerrado (completamente resuelto) en la comunidad científica y prueba de ello es el gran número de artículos que se siguen publicando al respecto.

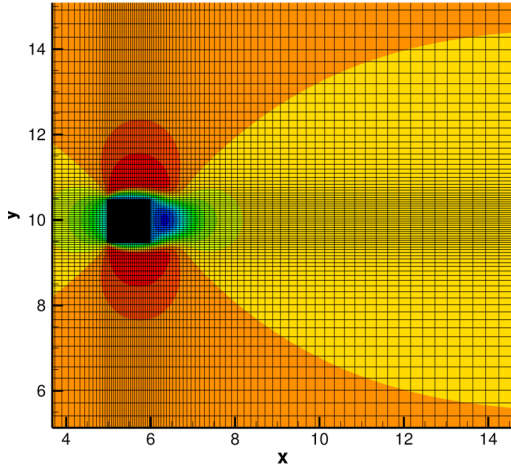


Figura 4.15: Sq.Cyl.,  $Re = 100$ ,  $t = 1$ .

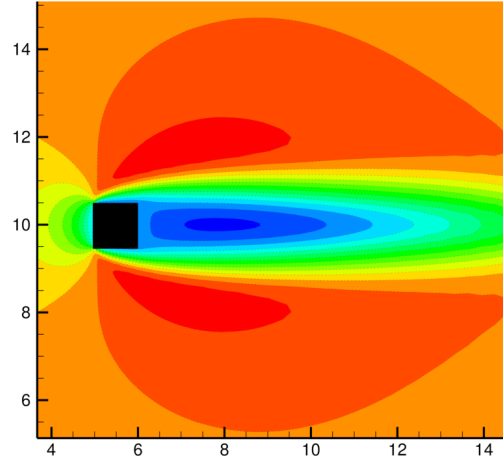


Figura 4.18: Sq.Cyl.,  $Re = 100$ ,  $t = 61$ .

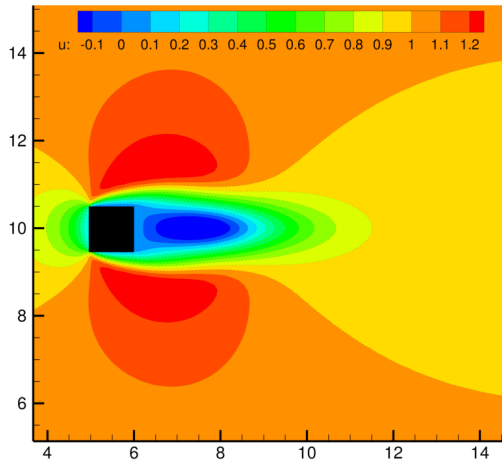


Figura 4.16: Sq.Cyl.,  $Re = 100$ ,  $t = 6$ .

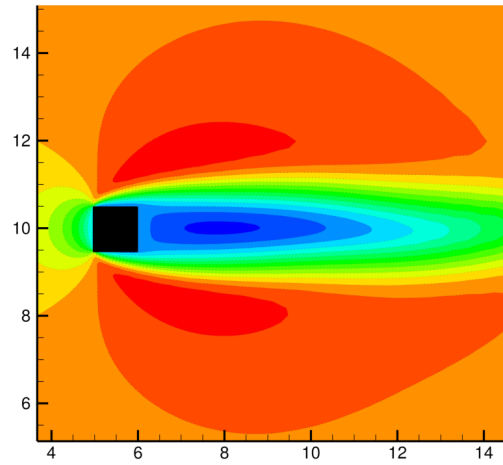


Figura 4.19: Sq.Cyl.,  $Re = 100$ ,  $t = 132$ .

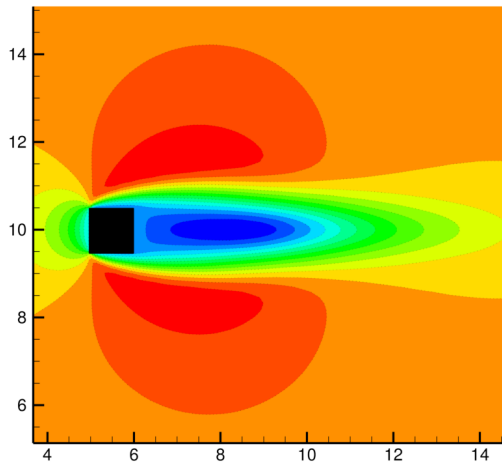


Figura 4.17: Sq.Cyl.,  $Re = 100$ ,  $t = 11$ .

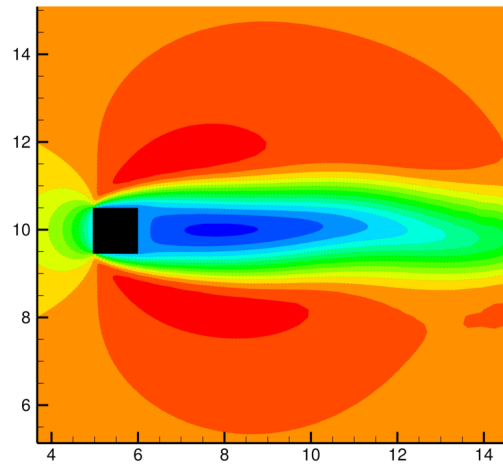


Figura 4.20: Sq.Cyl.,  $Re = 100$ ,  $t = 159$ .

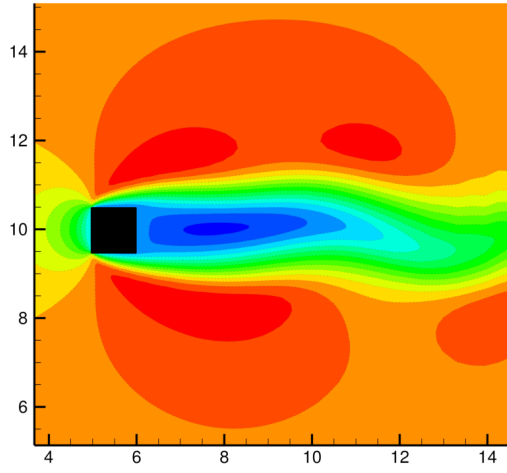


Figura 4.21: Sq.Cyl.,  $Re = 100$ ,  $t = 191$ .

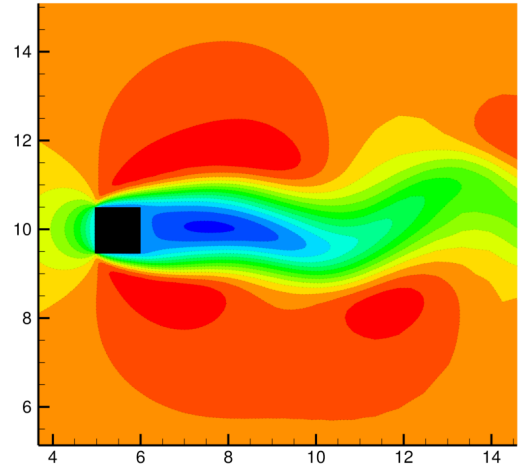


Figura 4.23: Sq.Cyl.,  $Re = 100$ ,  $t = 266$ .

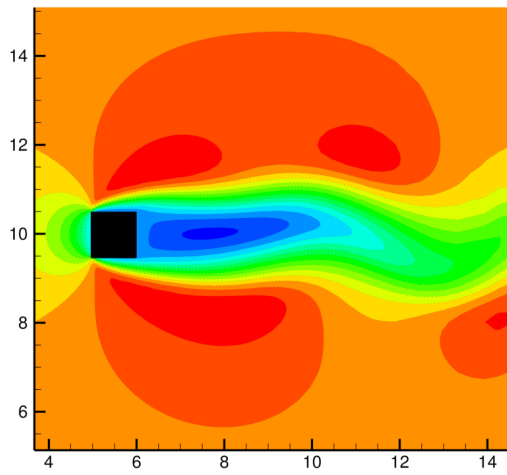


Figura 4.22: Sq.Cyl.,  $Re = 100$ ,  $t = 215$ .

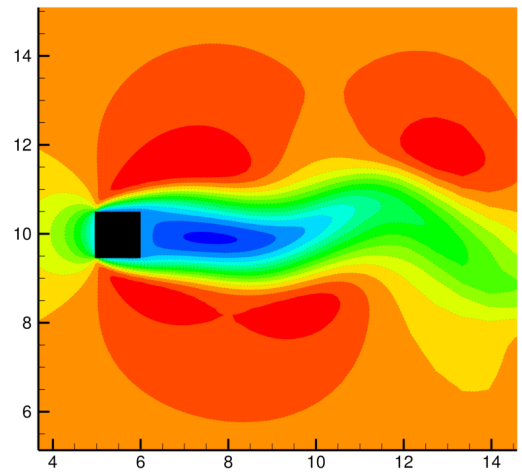


Figura 4.24: Sq.Cyl.,  $Re = 100$ ,  $t = 279$ .

Como cabe esperar, las simulaciones que se pueden ejecutar con los equipos que se han utilizado en este proyecto, no son lo suficientemente precisas como para considerarse de un alto nivel puesto que la potencia computacional es reducida.

En concordancia con lo presentado en el párrafo anterior, en este apartado se plantea un análisis a dos niveles diferentes. Primero, se llevará a cabo un análisis, a un nivel de detalle, llevando al límite los recursos computacionales disponibles<sup>3</sup>. Y segundo, un nivel un tanto más modesto, que permita efectuar diversas simulaciones que puedan situar, al menos, el orden de magnitud de las variables representativas en casos con Reynolds distintos.

#### Caso de detalle

El caso que se pretende analizar con detalle es el de  $Re = 200$ . La malla que se ha empleado para discretizar el dominio es de  $200 \times 200$  volúmenes de control con una separación entre la pared y el primer volumen de control de  $\delta = 0,02$ , es decir, que se dispone de 50 volúmenes de control en la primera hilera de nodos para cada una de las caras del sólido. La malla utilizada es la que aparece en la figura 4.14 y que globalmente se observa tal como se puede apreciar en la figura 4.25.

Los resultados obtenidos se pueden observar en la figura 4.26, donde aparece un gráfico con la evolución transitoria de los parámetros Drag y Lift. En esta figura se puede corroborar aquello que se expuso en el análisis cualitativo: hay una zona de estabilización aparente, luego un período de transición y, finalmente, el sistema entra en régimen estacionario-periódico.

Para evaluar la calidad de la simulación se pretende comparar el valor del  $C_D$ ,  $C_L$  y  $St$  según lo presentado en [6]. Debido a la naturaleza del sistema hay que evaluar los coeficientes Drag y Lift, con su valor promediado temporalmente. Sin embargo, sucede que el valor medio del  $C_L$  es nulo (puesto que el caso es simétrico), por lo que cobra sentido evaluar lo que se denomina  $RMS_{lift}$ , que consiste en elevar al cuadrado la función temporal del lift, integrarla en un ciclo, dividir dicho valor por el período de oscilación y efectuar la raíz cuadrada. La comparación de los valores obtenidos en el presente proyecto y los aportados en [6] se exhiben en la tabla 4.1.

En vistas a los resultados aportados en la tabla 4.1, se deduce lo siguiente:

- La finura de la malla empleada entre los dos casos es muy distinta. Sin embargo, como ya se ha dicho anteriormente, con la malla usada en este proyecto se está en el límite de las capacidades del equipo.

---

<sup>3</sup>Esto significa emplear toda la potencia computacional durante semanas.

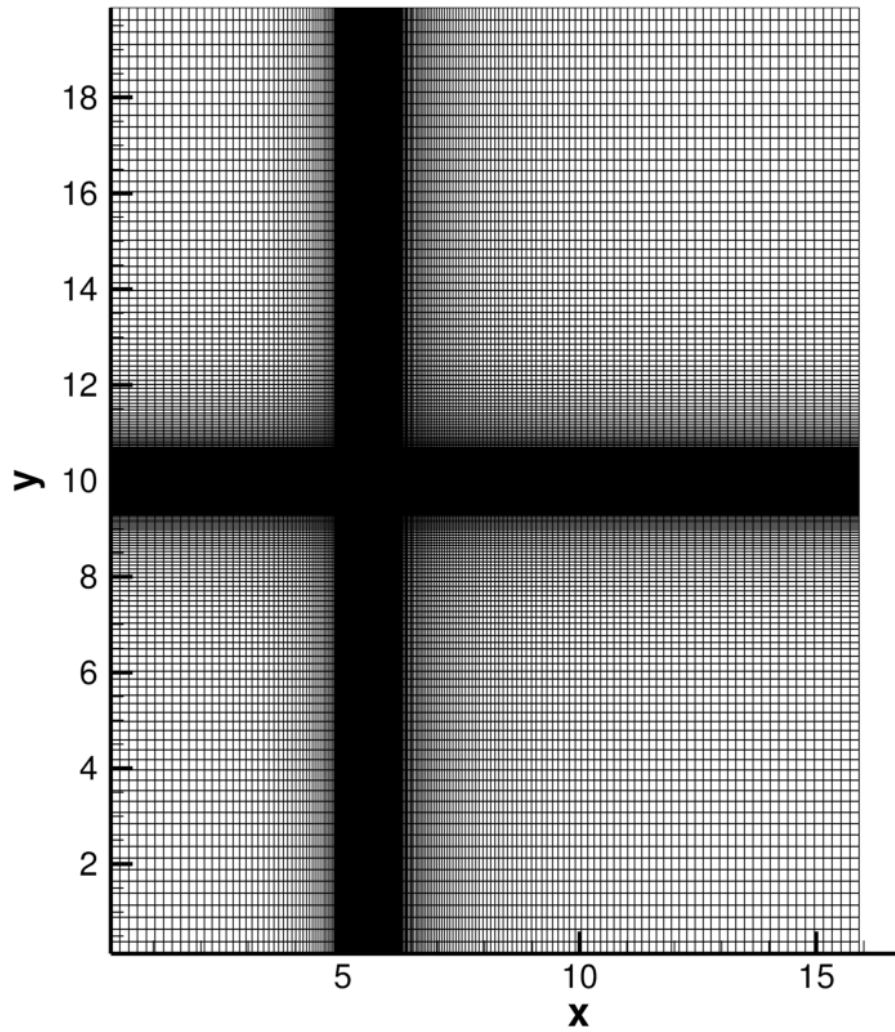


Figura 4.25: Square Cylinder, malla empleada para el caso de detalle.

Caso	$C_D$	$C_{L,neto}$	$RMS_{lift}$	$St$	Malla
Presente	1.57	0.00	0.39	0.1668	$340 \times 224$ , $\delta = 0.0038$
Sohankar	1.44	0.00	0.23	0.1650	$200 \times 200$ , $\delta = 0.0200$

Cuadro 4.1: Square Cylinder, comparación al detalle Benchmark Vs. presente.

- La simulación es lo suficientemente buena como para confiar en efectos macroscópicos, o de nivel de detalle “medio”, tal como lo sería el coeficiente del Drag cuyo error es del 9 % o el Lift, que en este caso es nulo y coincide exactamente.
- Sorprendentemente, en relación al parámetro  $St$  que es algo más sensible a efectos microscópicos, se ha obtenido un muy buen resultado en comparación

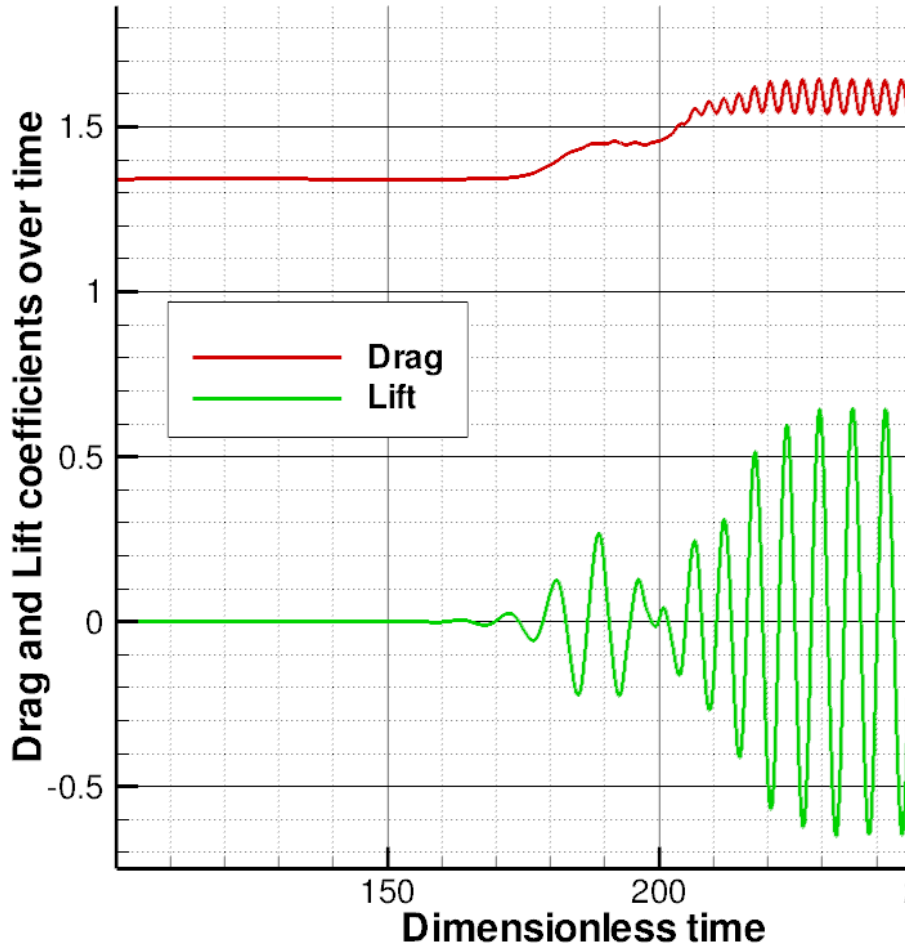


Figura 4.26: Square Cylinder  $Re = 200$ , evolución transitoria del Drag y el Lift.

con [6], cuyo error relativo es menor al 0,5 %.

- Lamentablemente, y como cabía esperar, debido a la extrema sensibilidad de este valor, el  $RMS_{lift}$  computado con el presente código no es muy confiable. Este parámetro presenta más de un 50 % de error frente al aportado por Sohankar.

Como resumen se quiere hacer notar, que se acusa al factor de diferencia de malla, como el responsable directo de que los fenómenos “sensibles” no se representen con suficiente precisión mientras que los macroscópicos sean correctos. Evidentemente no se tiene la certeza absoluta de que el razonamiento anterior sea válido, no obstante, es natural pensar en esta causa porque los casos benchmark presentados en el capítulo anterior garantizan que el código está libre de errores. Para salir de dudas, se tendría que efectuar un estudio de malla, lo cual, como ya se ha dicho antes, no



es posible por limitaciones en la potencia computacional.

#### Casos de situación

En este segundo análisis cuantitativo de los casos Post-Vortex Shedding se pretende abordar los casos de estudio mediante una estrategia más asumible en términos de coste computacional. Como se ha visto en el caso anterior, una malla del calibre de  $200 \times 200$ ,  $\delta = 0,0200$  es demasiado potente y si se quieren correr varios casos, hay que rebajar el nivel de exigencia hasta una malla de una calidad similar a  $100 \times 100$ ,  $\delta = 0,0500$ . Desde luego, la confianza en los resultados obtenidos en relación al  $RMS_{lift}$  es nula, pero en cuanto al resto de parámetros, merece la pena valorar la validez los resultados y compararlos con cierto grado de optimismo.

Caso	Re	$C_D$	$St$	Malla
Sohankar	200	1.44	0.1650	$340 \times 224$ , $\delta = 0.0038$
Presente	200	1.57	0.1668	$200 \times 200$ , $\delta = 0.0200$
Presente	100	1.65	0.2513	$100 \times 100$ , $\delta = 0.0500$
Presente	150	1.56	0.1621	$100 \times 100$ , $\delta = 0.0500$
Sohankar	150	1.41	0.1610	$340 \times 224$ , $\delta = 0.0038$
Presente	100	1.58	0.1483	$100 \times 100$ , $\delta = 0.0500$
Sohankar	100	1.48	0.1471	$340 \times 224$ , $\delta = 0.0038$
Presente	60	1.64	0.1307	$100 \times 100$ , $\delta = 0.0500$
Sohankar	60	1.59	0.1235	$340 \times 224$ , $\delta = 0.0038$

Cuadro 4.2: Square Cylinder, comparación de Benchmark Vs. presente, empleando mallas bastas.

Cómo comentarios sobre la tabla 4.2 hay que remarcar dos hechos: la frecuencia de oscilación del proceso se puede considerar radiografiada correctamente porque las diferencias entre los valores del Strouhal calculados y los de Sohankar son mínimas. En relación al coeficiente Drag, se puede apreciar una tendencia ligeramente alcista en cuanto a su valor, pero definitivamente, emplear este tipo de mallas “bastas” (con 10000 volúmenes de control, que no es precisamente un número irrisorio) genera unos resultados muy satisfactorios.



## Capítulo 5

# Actuaciones futuras y conclusiones

Este capítulo se estructura en dos bloques: la *línea de investigación futura*, donde se comentan los siguientes pasos que se seguirán en el estudio de la fenomenología de CFD&HT, y las *conclusiones generales*, donde se remarcaran los puntos importantes de este proyecto.

### 5.1. Línea de investigación futura

Tal como ya explicó en la justificación del presente proyecto, los resultados de este proyecto son un fin en sí mismos, pero sin olvidar que también son un medio, un medio para adquirir una formación para el mundo de la investigación. En este contexto, tiene sentido hablar de los pasos que se pretenden seguir, en concreto, se comentan dos tipos de actuaciones: las que ya están en marcha y las que se pretenden ejecutar a medio plazo<sup>1</sup>.

Actuaciones ya en marcha:

- Se ha empezado un curso de programación orientada a objetos en C++. Con el objetivo de aumentar el nivel de programación para poder afrontar con más recursos los futuros casos a simular.
- Se ha empezado un seminario de turbulencia en el cual se explican conceptos como: *Symmetry Preserving Discretización*, resolución con métodos espectrales del caso *Burger's Equation* o tratamiento de fenomenologías tales como *Vortex Stretching*.

---

<sup>1</sup>en los próximos seis meses.

- Se ha emprendido un curso de arquitecturas paralelas y técnicas de paralelización de código para poder escalar en la resolución de casos que requieran más potencia computacional (tal como sería el caso Square Cylinder, donde no se pudo continuar con el estudio por limitaciones de hardware, que dicho sea de paso, se pueden superar con éstas técnicas).

Actuaciones futuras:

- Se pretende aprender el uso de el código desarrollado en el CTTC llamado ThermoFluids, el cual es una plataforma suficientemente potente como para emprender el estudio de casos de interés industrial que engloben fenomenologías tales como: flujos turbulentos, problemas con cambio de fase, aplicaciones con flujo multifásico, procesos de combustión, etc.
- Se pretende entrar en la programación de casos con mallas no estructuradas.
- Se camina en dirección a una tesis en la temática del acoplamiento de múltiples modelos para la simulación de casos complejos, en los que se requieran niveles de análisis diferentes.

## 5.2. Conclusiones generales

Se destacan las siguientes ideas básicas:

- El objetivo principal era crear un código informático que resolviera las ecuaciones de Navier-Stokes, de tal manera que dicho programa se convirtiera en una herramienta de estudio fenomenológico.
- Para la resolución de las ecuaciones fue necesario hacer una serie de simplificaciones que restringen el rango de casos que se pueden resolver.
- En el capítulo 2 se detalló la información técnica necesaria para abordar con éxito el proceso de resolución de las ecuaciones.
- En el capítulo 3 se hizo un estudio exhaustivo de dos casos benchmark, con tres objetivos principales:
  1. Introducirse en la fenomenología fluido-dinámica a través del Driven Cavity, y la fenomenología de transferencia de calor y fluido-dinámica mediante el Differentially Heated Cavity.
  2. Presentar la importancia de conceptos tan importantes como el estudio de malla o la evolución transitoria del caso.
  3. Verificar que el código creado está libre de errores.

- En el capítulo 4 se presenta y se resuelve un caso de aerodinámica de objetos, estudiando a fondo la configuración del flujo a través de un cilindro cuadrado.

Finalmente, se hace constar que el conjunto de condiciones técnicas que hay que tener en consideración para que el presente proyecto sea aplicado se anexan en el apéndice A. El código que se ha desarrollado, por su extensión (unas 3.000 líneas), no se presenta en formato papel, pero se puede consultar en la versión digital del proyecto, así como el vídeo de una de las simulaciones.



# Bibliografia

- [1] WHITAKER, S., 1992. *Introduction to Fluid Mechanics*. Reissu with minor corr ed. Malabar: Krieger ISBN 0894647857.
- [2] JAYATHI Y. M., 2002. *Numerical Methods in Heat, Mass, and Momentum Transfer*.
- [3] N. N. Yanenko. *The Method of Fractional Steps*. Springer-Verlag, 1971.
- [4] GHIA, U., GHIA, K.N. and SHIN, C.T., 1966. *High-Re Solutions for Incompressible Flow using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method*. Journal of Computational Physics. Dec. 1982 ed., vol. 48, no. 3, pp. 387-411 ISSN 0021-9991.
- [5] DE VAHL DAVIS, G., 1966. *NATURAL CONVECTION OF AIR IN A SQUARE CAVITY A BENCH MARK NUMERICAL SOLUTION*. Journal of Computational Physics. 1983rd ed., vol. 3, pp. 249-264 ISSN 0021-9991.
- [6] SOHANKAR, A., 1998. *Low-Reynolds-Number Flow Around a Square Cylinder at Incidence: Study of Blockage, Onset of Vortex Shedding and Outlet Boundary Condition*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 26, no. 1, pp. 39-56 ISSN 0271-2091.
- [7] PRESS, W.H., 2007. Numerical Recipes :The Art of Scientific Computing. 3rd ed. Cambridge etc.: Cambridge University Press ISBN 9780521884075; 9780521880688; 0521880688.
- [8] DEITEL, H.M. and DEITEL, P.J., 2005. *C++ how to Program*. 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education ISBN 0131857576.
- [9] TRIAS MIQUEL, F.X. *Direct numerical simulation and regularization modelling of turbulent flows on loosely coupled parallel computers using symmetry-preserving discretizations*. A. OLIVA, M. SORIA ed., Universitat Politècnica de Catalunya. Escola Tècnica Superior d'Enginyers Industrials de Terrassa, 2006-12 B-36886-2007 European Union

A parte de los documentos explícitamente referenciados, como fuentes de información fundamentales para la realización de el proyecto se consideran también los cursos, es decir, las propias asignaturas de la carrera de Ingeniería Industrial Superior que el autor ha cursado con su correspondiente documentación y las páginas web que se han visitado:

- <http://es.wikibooks.org/wiki/ManualdeLaTeX>, visitada 13 de Abril de 2012.
- <http://www.cfd-online.com/>, visitada el 2 de Mayo de 2012.



## Apéndice A

# Pliego de condiciones técnicas

Las condiciones técnicas que se han de tener en cuenta para el correcto desarrollo del proyecto son las siguientes:

- La investigación y desarrollo de software no está sujeta a ninguna normativa específica en cuanto a su creación.
- El perfil del personal adecuado para el desarrollo de este tipo de programas requiere de conocimiento de:
  - Mecánica de fluidos.
  - Uso de métodos numéricos.
  - Lenguaje de programación de nivel medio (tal como  $C++$ ).
- Los recursos de hardware requeridos para ejecutar los cálculos se consideran: PC INTEL CORE 2DUO 2,5 GHz, 4GB RAM, 2HD's 500GB SATA.
- Los sistemas operativos con los que dicho hardware puede funcionar son Linux y Windows (XP, 7 o Vista).
- La visualización de resultados ha de efectuarse con un software tal como Tecplot 380, Paraview o en su defecto, MS Excel.

