

ESTUDI I RESOLUCIÓ DE LES EQUACIONS DE MASSA, QUANTITAT DE MOVIMENT I ENERGIA SOTMESES A UN CAMP MAGNÈTIC. IDENTIFICACIÓ DE POSSIBLES APLICACIONS

Centre Tecnològic de Transferència de Calor (CTTC)

Departament de màquines i motors tèrmics

Universitat Politècnica de Catalunya



**Escola Tècnica Superior d'Enginyeries
Industrial i Aeronàutica de Terrassa**

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

MEMÒRIA

Autor: Arnau Pont Vilchez

Tutor: Assensi Oliva Llena

Cotutor: Oriol Lehmkuhl Barba

Per l'obtenció del títol d'Enginyer Industrial

Agraïments

Aquest projecte ha estat realitzat al Departament de Màquines i Motors Tèrmics de la Universitat Politècnica de Catalunya, Terrassa, Catalunya.

En primer lloc, m'agradaria donar les gràcies a tots els membres del CTTC(*Centre Tecnològic de Transferència de Calor*) per la seva càlida acollida i per tots els bons moments que hem viscut junts, al llarg del temps que ha durat el treball. Sobretot vull agrair especialment a l'Assensi Oliva per donar-me la oportunitat de treballar en el centre, per tots els coneixements que he assolit en aquest, per proposar-me un tema de projecte que fos del meu interès i, en definitiva, per tota la confiança depositada en mi.

A més a més, vull expressar els meus sincers agraïments a l'Oriol Lehmkuhl, Lluís Jofre, Carles David Pérez Segarra i al Jordi Chiva per tots els seus consells, la seva paciència(que no ha estat poca) i tota la ajuda que m'han donat en els diferents apartats del projecte, sense la qual aquest no hauria estat possible.

També vull donar les gràcies al Jesús Ruano, el qual també ha fet el projecte al mateix temps que jo i en el mateix departament, per totes les converses que m'han ajudat a veure multitut de conceptes des d'altres punts de vista, des d'altres perspectives, amb altres ulls...

Alhora, per que no, per tots els cafès i moments divertits que s'han passat al laboratori i que no han tingut a veure amb cap fase del treball, moments potser inútils des d'un punt de vista científic, però a la vegada imprescindibles.

Finalment, i no per això menys important, vull agrair el suport incondicional de la meva família més propera i dels meus amics, per creure amb mi en tot moment, no només durant la realització d'aquest projecte sinó al llarg de la meva vida.

Índex

Nomenclatura	23
1 Introducció	25
1.1 Objecte	26
1.2 Justificació	26
1.3 Abast	27
1.4 Especificacions bàsiques	28
1.5 Resum de la memòria	29
2 Conceptes previs	31
2.1 Introducció	31
2.2 Convecció magnètica: el medi i l'electromagnetisme	31
2.3 Magnetohidrodinàmica (MHD)	33
2.4 Magnetohidrodinàmica computacional (CMHD)	34
2.5 Antecedents	35
2.5.1 Antecedents sobre la convecció magnètica	35
2.5.2 Antecedents sobre la MHD	36

2.6 Bibliografia	37
3 Formulació Matemàtica	39
3.1 Introducció	39
3.2 Equacions de conservació	39
3.2.1 Conservació de la matèria	40
3.2.2 Equació de conservació de la quantitat de moviment lineal .	40
3.2.3 Equació de conservació de l'energia	41
3.3 Electromagnetisme	43
3.3.1 Electroestàtica	44
3.3.2 Electrodinàmica	46
3.3.3 Equacions de Maxwell	48
3.3.4 Llei d'Ohm	52
3.3.5 Força de Lorentz	53
3.4 Hipòtesis fenomenològiques	53
3.4.1 Propietats físiques constants	54
3.4.2 Densitat màssica constant	54
3.4.3 Fluid Newtonià	54
3.4.4 Radiació electromagnètica menyspreable	54
3.4.5 Calor específic	55
3.4.6 Dissipació viscosa menyspreable	55
3.4.7 Medi quasi-neutral	55
3.4.8 Medi participant paramagnètic	55

3.4.9	Camp Magnètic constant	56
3.4.10	Simplificació de l'equació d'Ampère-Maxwell	57
3.5	Modelització en les equacions de transport	57
3.5.1	Modelització del tensor de tensions	57
3.5.2	Modelització del flux de calor	58
3.5.3	Equació de transport del camp magnètic	59
3.5.4	Modelització del terme font (f): Força de Lorentz	60
3.5.5	Modelització del terme font (f): Convecció natural	62
3.5.6	Modelització del terme font (f): Convecció magnètica per fluids paramagnètics	63
3.6	Equacions de treball	64
3.7	Adimensionalització de les equacions de treball	66
3.7.1	Variables adimensionlitzades	66
3.7.2	Equacions de treball adimensionalitzades	67
3.8	Bibliografia	71
4	Anàlisi Numèric	73
4.1	Introducció	73
4.2	Equació de convecció – difusió	74
4.3	Discretització numèrica per volums finits	75
4.3.1	Tipus de malla	76
4.3.2	Equació de convecció – difusió: discretització	78
4.3.3	Anàlisi del terme convectiu	82

4.3.4 Anàlisi del terme difusiu	84
4.4 Solució de les equacions de treball	86
4.4.1 Solució de l'equació de la conservació de quantitat de moviment	87
4.4.2 Solució de les equacions magnetohidrodinàmiques(MHD)	92
4.4.3 Solució de l'equació de la conservació de l'energia tèrmica	96
4.4.4 Condicions de contorn	96
4.5 Solvers de resolució de sistemes d'equacions lineals	100
4.5.1 Gauss-Seidel	100
4.5.2 TDMA (TriDiagonal Matrix Algorithm) + Gauss-eidel	101
4.5.3 Solver LU (Lower-Upper)	102
4.6 Criteris de finalització	103
4.6.1 Sistemes que tendeixen a un estat permanent	103
4.6.2 Sistemes que tendeixen a un estat periòdic	104
4.7 Codis desenvolupats	104
4.8 Algoritme global de càlcul	106
4.9 Bibliografia	109
5 Problemes analitzats	111
5.1 Introducció	111
5.2 Cas Shercliff	111
5.2.1 Definició del problema	111
5.2.2 Interès industrial	113

5.2.3	Equacions de treball	114
5.2.4	Solució analítica	115
5.2.5	Paràmetres computacionals	116
5.2.6	Casos analitzats	116
5.2.7	Anàlisis qualitatiu	119
5.2.8	Verificació dels resultats numèrics	125
5.2.9	Influència del càlcul del gradient del potencial elèctric	130
5.2.10	Conclusions	133
5.3	Cas amb convecció magnètica per fluids paramagnètics amb $\text{Pr} > 1$ i en condicions de microgravetat	134
5.3.1	Introducció	134
5.3.2	Interès industrial	136
5.3.3	Equacions de treball	136
5.3.4	Paràmetres computacionals	138
5.3.5	Casos analitzats	139
5.3.6	Anàlisis qualitatiu	140
5.3.7	Estudi de consistència: refinament de malla	143
5.3.8	Estudi de convergència: comparació de resultats	149
5.3.9	Estudi paramètric	152
5.3.10	Conclusions	155
5.4	Bibliografia	155

6.1 Fase de concepció, disseny i avantprojecte	157
6.2 Fase de redacció del projecte	158
6.3 Fase de construcció	158
6.4 Fase d'explotació	158
6.5 Fase de desmantellament	159
7 Resum del pressupost	161
7.1 Introducció	161
7.2 Pressupost final	161
8 Planificació del projecte	163
8.1 Introducció	163
8.2 Planificació mensual	163
8.3 Diagrama de Gantt	178
9 Conclusions	181
9.1 Conclusions generals	181
9.2 Conclusions específiques	182
9.3 Accions Futures	183
9.4 Bibliografia	183
A Verificació del codi propi	185
A.1 Introducció	185
A.2 Convecció forçada en un recinte quadrat	185
A.2.1 Definició del cas	185

A.2.2 Equacions de treball	187
A.2.3 Casos analitzats	187
A.2.4 Anàlisis qualitatiu	188
A.2.5 Verificació de resultats	190
A.2.6 Conclusions	191
A.3 Convecció natural en un recinte quadrat	191
A.3.1 Definició del cas	191
A.3.2 Equacions de treball	193
A.3.3 Casos analitzats	193
A.3.4 Anàlisis qualitatiu	194
A.3.5 Verificació de resultats	196
A.3.6 Conclusions	197
A.4 Convecció forçada sobre un sòlid quadrat	197
A.4.1 Definició del cas	197
A.4.2 Equacions de treball	199
A.4.3 Casos analitzats	201
A.4.4 Anàlisis qualitatiu	202
A.4.5 Verificació de resultats	206
A.4.6 Conclusions	208
A.5 Bibliografia	208

Bibliografia

Índex de figures

2.1 Ferro-fluid en presència d'un camp magnètic	33
4.1 Malla estructurada ortogonal	76
4.2 Malla estructurada no ortogonal[1]	77
4.3 Malla no estructurada	77
4.4 Detall dels paràmetres geomètrics per la evaluació del terme convectiu	84
4.5 Detall dels paràmetres geomètrics per la evaluació del terme difusiu	85
4.6 Detall dels paràmetres geomètrics per la solució de les equacions de treball	87
4.7 Esquema de l'algoritme global de càlcul	108
5.1 Esquema del cas Shercliff	112
5.2 Malla estructurada hiperbòlica 64x64 (SH64)	118
5.3 Malla no estructurada no uniforme 128x128 (NSNU128)	118
5.4 Resultats de la taula 5.4	119
5.5 Cas Schercliff: perfil de velocitats per un Ha 0	120
5.6 Cas Schercliff: perfil de velocitats per un Ha 10	120
5.7 Cas Schercliff: densitat de corrent elèctric per un Ha 10	121

5.8 Cas Schercliff: densitat de corrent elèctric en direcció Y per un Ha 10	122
5.9 Cas Schercliff: densitat de corrent elèctric en direcció Z per un Ha 10	122
5.10 Error relatiu ponderat: gràfica dels resultats de la taula 5.5	126
5.11 Error relatiu ponderat: gràfica dels resultats de la taula 5.6	127
5.12 Error relatiu ponderat: gràfica dels resultats de la taula 5.7	128
5.13 Error relatiu ponderat: gràfica dels resultats de la taula 5.8	129
5.14 Error relatiu ponderat: gràfica dels resultats de la taula 5.9	131
5.15 Error relatiu ponderat: gràfica dels resultats de la taula 5.10	132
5.16 Esquema del cas de convecció magnètica	134
5.17 Modul del camp de velocitats de la simulació 2	140
5.18 Camp de velocitats en direcció <i>x</i> de la simulació 2	141
5.19 Camp de velocitats en direcció <i>y</i> de la simulació 2	141
5.20 Distribució de temperatures de la simulació 2	142
5.21 Distribució de pressions de la simulació 2	143
5.22 Estudi de consistència del codi propi pel perfil de velocitats de la S3	144
5.23 Estudi de consistència del codi propi pel perfil de temperatura de la S3	144
5.24 Estudi de consistència del codi propi pel Nusselt local (<i>Nu</i>) en la paret calenta de la S3	145
5.25 Nusselt mitjà(<i>Nu_m</i>) de la taula 5.13	146
5.26 Estudi de consistència del codi propi pel perfil de velocitats de la S8	146
5.27 Estudi de consistència del codi propi pel perfil de temperatura de la S8	147
5.28 Estudi de consistència del codi propi pel Nusselt local (<i>Nu</i>) en la paret calenta de la S8	147

5.29 Nusselt mitjà(Nu_m) de la taula 5.14	148
5.30 Perfil de velocitats transitori(U_y): comparació dels resultats numèrics(S) amb els resultats de referència(R)	149
5.31 Perfil de temperatura transitori(T): comparació dels resultats numèrics(S) amb els resultats de referència(R)	150
5.32 Perfil de velocitats estacionari(U_y): comparació dels resultats numèrics(S) amb els resultats de referència(R) per un γRa de $1e + 07$ i un m de 2	151
5.33 Perfil de temperatura estacionari(T): comparació dels resultats numèrics(S) amb els resultats de referència(R) per un γRa de $1e + 07$ i un m de 2	151
5.34 Gràfica dels resultats de la taula 5.15	152
5.35 Gràfica dels resultats de la taula 5.16	153
5.36 Gràfica dels resultats de la taula 5.17	154
8.1 Planificació mensual: Juliol 2013	164
8.2 Planificació mensual: Agost 2013	165
8.3 Planificació mensual: Setembre 2013	166
8.4 Planificació mensual: Octubre 2013	167
8.5 Planificació mensual: Novembre 2013	168
8.6 Planificació mensual: Desembre 2013	169
8.7 Planificació mensual: Gener 2014	170
8.8 Planificació mensual: Febrer 2014	171
8.9 Planificació mensual: Març 2014	172
8.10 Planificació mensual: Abril 2014	173

8.11 Planificació mensual: Maig 2014	174
8.12 Planificació mensual: Juny 2014	175
8.13 Planificació mensual: Juliol 2014	176
8.14 Planificació mensual: Agost 2014	177
8.15 Diagrama de Gantt	179
A.1 Esquema sobre el cas de convecció forçada en un recinte quadrat .	186
A.2 Convecció forçada en un recinte quadrat: camp de velocitats per un <i>Re</i> de 5000	188
A.3 Convecció forçada en un recinte quadrat: línies de corrent per un <i>Re</i> de 5000	189
A.4 Convecció forçada en un recinte quadrat: camp de pressions per un <i>Re</i> de 5000	189
A.5 Tall vertical: <i>Re</i> de 1000	190
A.6 Tall horitzontal: <i>Re</i> de 1000	190
A.7 Tall vertical: <i>Re</i> de 5000	191
A.8 Tall horitzontal: <i>Re</i> de 5000	191
A.9 Esquema sobre el cas de convecció natural en un recinte quadrat .	192
A.10 Convecció natural en un recinte quadrat: camp de velocitats de la simulació 3	194
A.11 Convecció natural en un recinte quadrat: línies de corrent de la si- mulació 3	195
A.12 Convecció natural en un recinte quadrat: distribució de temperatures de la simulació 3	196
A.13 Esquema sobre el cas de convecció forçada sobre un sòlid quadrat	198

A.14 Convecció forçada sobre un sòlid quadrat: camp de velocitats per un <i>Re</i> de 50	202
A.15 Convecció forçada sobre un sòlid quadrat: línies de corrent per un <i>Re</i> de 50	203
A.16 Convecció forçada sobre un sòlid quadrat: camp de pressions per un <i>Re</i> de 50	203
A.17 Convecció forçada sobre un sòlid quadrat: camp de velocitats per un <i>Re</i> de 150	204
A.18 Convecció forçada sobre un sòlid quadrat: línies de corrent per un <i>Re</i> de 150	205
A.19 Convecció forçada sobre un sòlid quadrat: camp de pressions per un <i>Re</i> de 150	205
A.20 Coeficient de fregament en funció del temps per un <i>Re</i> de 150	206
A.21 Coeficient d'ascens en funció del temps per un <i>Re</i> de 150	206
A.22 Coeficient de fregament mitjà per diferents nombres de <i>Re</i> i una ma- lla H400	207
A.23 Coeficient de fregament mitjà per diferents nombres de <i>Re</i> i una ma- lla H800	207
A.24 Strouhal per diferents malles i nombres de <i>Re</i>	207

Index de figures

Índex de taules

1	Simbologia bàsica	23
2	Nomenclatura per la dinàmica de fluids	23
3	Nomenclatura per l'electromagnetisme	23
4	Nombres adimensionals	24
5	Nomenclatura per l'anàlisi numèric	24
6	Nomenclatura d'expressions matemàtiques	24
3.1	Adimensionalització de les variables	66
4.1	Particularització dels termes de l'equació de convecció difusió per a les equacions de treball	74
5.1	Valors del Re i el Ha per les 4 simulacions	116
5.2	Tipus de malles estructurades per cada simulació Schercliff	117
5.3	Tipus de malles no estructurades per cada simulació Schercliff	118
5.4	Comparació del gradient de pressions per a diferents Ha	119
5.5	Error relatiu ponderat i ordre de precisió per un Hartmann de 10	126
5.6	Error relatiu ponderat i ordre de precisió per un Hartmann de 50	127
5.7	Error relatiu ponderat i ordre de precisió per un Hartmann de 100	128

5.8	Error relatiu ponderat i ordre de precisió per un Hartmann de 500	129
5.9	Error relatiu ponderat (%) fent ús de diferents modelitzacions del càlcul del gradient per un Hartmann de 50	131
5.10	Error relatiu ponderat fent ús de diferents modelitzacions del càlcul del gradient per un Hartmann de 50	132
5.11	Simulacions analitzades en el cas de la convecció magnètica per fluids paramagnètics	139
5.12	Tipus de malles estructurades per cada simulació de convecció magnètica per fluids paramagnètics	139
5.13	Nusselt mitjà(Nu_m) a la paret calenta de la S3	145
5.14	Nusselt mitjà(Nu_m) a la paret calenta de la S8	148
5.15	Nusselt mitjà(Nu_m) a la paret calenta per un Pr de 10 i un m de 2 amb una malla H80	152
5.16	Nusselt mitjà(Nu_m) a la paret calenta per un γRa de $1e + 07$ i un m de 2 amb una malla H80	153
5.17	Nusselt mitjà(Nu_m) a la paret calenta per un γRa de $1e + 07$ i un Pr de 10 amb una malla H80	154
7.1	Cost del consum energètic	161
8.1	Esquema del diagrama de Gant	178
A.1	Tipus de malles estructurades utilitzades pel cas de convecció forçada en un recinte quadrat	187
A.2	Simulacions analitzades pel cas de convecció natural en un recinte quadrat	193
A.3	Tipus de malles estructurades utilitzades pel cas de convecció natural en un recinte quadrat	194

A.4 Resultats per un Ra de $1e + 03$	197
A.5 Resultats per un Ra de $1e + 04$	197
A.6 Resultats per un Ra de $1e + 05$	197
A.7 Resultats per un Ra de $1e + 06$	197
A.8 Simulacions analitzades pel cas de convecció forçada sobre un sòlid quadrat	201
A.9 Tipus de malles estructurades utilitzades pel cas de convecció forçada sobre un sòlid quadrat	201

Nomenclatura

Símbol	Definició
\mathbf{v}	Vector
\hat{v}	Variable adimensional
\bar{v}	Matriu
\dot{v}	Derivada respecte el temps

Taula 1: Simbologia bàsica

Símbol	Definició	Unitats	Símbol	Definició	Unitats
ρ	Densitat màssica	kg/m^3	u	Energia interna	J/kg
μ	Viscositat dinàmica	Pas	e_c	Energia cinètica	J/kg
ν	Viscositat cinemàtica	m^2/s	T	Temperatura	K
λ	Conductivitat tèrmica	W/mK	p	Pressió	Pa
α	Difusivitat tèrmica al buit	m^2/s	\mathbf{u}	Velocitat	m/s
β	Coeficient d'expansió tèrmic	K^{-1}	\mathbf{q}	Flux de calor	W/m^2
c_v	Calor específica a volum constant	J/kgK	\mathbf{f}	Terme font arbitrari	m/s^2
c_p	Calor específica a pressió constant	J/kgK	Φ	Font de calor interna	W/m^3
$\bar{\tau}$	Esforços tangencials	N/m^2			

Taula 2: Nomenclatura per la dinàmica de fluids

Símbol	Definició	Unitats	Símbol	Definició	Unitats
q	Càrrega elèctrica	[C]	ρ_e	Densitat elèctrica negativa	[C/m^3]
I	Intensitat de corrent elèctric	[A]	ρ_p	Densitat elèctrica positiva	[C/m^3]
χ_u	Susceptibilitat magnètica específica	[m^3/kg]	ϕ	Potencial elèctric	[N/mC]
χ_m	Susceptibilitat magnètica	—	\mathbf{j}	densitat de corrent elèctric	[A/m^2]
μ_o	Permeabilitat magnètica en el buit	[N/A^2]	\mathbf{E}	Camp elèctric	[N/C]
μ_m	Permeabilitat magnètica	[N/A^2]	\mathbf{B}	Camp magnètic	[Wb/m^2]
σ	Conductivitat elèctrica	[S/m]	\mathbf{M}	Magnetització	[A/m]
ϵ_o	Permitivitat elèctrica en el buit	[F/m]	\mathbf{H}	Excitació magnètica	[A/m]

Taula 3: Nomenclatura per l'electromagnetisme

Símbol	Definició	Símbol	Definició
Re	Reynolds	γRa	Rayliegh magnètic
Ha	Hartmann	m	Paràmetre de momentum
N	Nombre magnètic	Nu	Nusselt
Pr	Prandtl	St	Strouhal
Ra	Rayleigh	C_D	Coeficient de fregament
Gr	Grashof	C_L	Coeficient d'ascens

Taula 4: Nombres adimensionals

Símbol	Definició	Símbol	Definició
ϕ	Variable genèrica	A_f	Mòdul de la superfície
ϕ^n	Superíndex de temps, valor de ϕ instant present	\forall	Volum de control
ϕ^{n+1}	Superíndex de temps, valor de ϕ instant posterior a n	Γ	Propietat difusiva genèrica
ϕ^{n-1}	Superíndex de temps, valor de ϕ instant anterior a n	S	Terme font
ϕ_i	Subíndex espacial, valor de ϕ en volum de control i	\dot{m}_f	Cabal màssic en la cara f
ϕ_f	Valor de ϕ a la cara f	Δt	Increment de temps
\mathbf{v}_f	Valor de \mathbf{v} a la cara f	Δx	Increment espacial
\mathbf{v}_p	Velocitat predictora	V_p	Velocitat predictora normal a la cara
\mathbf{v}_{pf}	Velocitat predictora a la cara f	δt	Coeficient numèric imposat

Taula 5: Nomenclatura per l'anàlisi numèric

Símbol	Definició
$\frac{\partial}{\partial m}$	Derivada parcial respecte m .
∇	Gradient
$\nabla \cdot$	Divergència
∇^2	Laplaciana
$\nabla \times$	Rotacional
$\hat{\mathbf{n}}$	Vector unitari normal a la superfície
$\oint_A dA$	Integral superficial tancada del volum de control
$\oint_V dV$	Integral volumètrica del volum de control
$\sum_{f \in F(c)}$	Sumatori per totes les cares del volum de control

Taula 6: Nomenclatura d'expressions matemàtiques

Capítol 1

Introducció

El projecte consisteix en l'estudi de la interacció entre la dinàmica de fluids i l'eletromagnetisme, enfocada des d'un punt de vista numèric en comptes d'experimental. Per una banda, la dinàmica de fluids és una branca de la física que consisteix en determinar el comportament d'un fluid a partir de les condicions de contorn que s'apliquen sobre aquest. Es considera un dels problemes més complicats de la física clàssica i les equacions de Navier Stokes són les que descriuen aquest comportament.

Per l'altra banda, les equacions de Maxwell defineixen per complet els fenòmens electromagnètics. Més concretament, defineixen com els camps magnètics i elèctrics són creats i alterats entre ells mateixos, així com també, per corrents elèctriques. De la mateixa forma que en la dinàmica de fluids, les equacions són altre cop diferencials en derivades parcials.

Tot i tenir un profund coneixement d'ambdues ciències, les equacions diferencials en derivades parcials que determinen el seu comportament han estat impossibles de resoldre en forma d'equació analítica. Així que, des del seu descobriment, els estudis matemàtics realitzats per la comunitat científica han estat minoritaris respecte els experimentals. A arrel d'aquest fenomen, s'han elaborat tècniques matemàtiques com l'adimensionalització o l'anàlisi asymptòtic, les quals són de gran ajut per entendre el comportament de les equacions que descriuen el fenomen.

Ara bé, la utilització de mètodes numèrics per tal d'obtenir resultats precisos ha adquirit importància en les ultimes dècades, degut a la gran quantitat d'avantatges que presenta respecte l'estudi experimental. Aquesta tècnica permet obtenir

resultats d'elevada qualitat per a problemes complexos on les simplificacions matemàtiques són insuficients i on els experiments de laboratori són massa costosos. A més a més, és molt versàtil degut a la facilitat de canviar les condicions de contorn que envolten el problema. Malauradament, no tot són avantatges. L'inconvenient principal és el temps de computació necessari per tal d'obtenir les solucions numèriques, el qual pot ser de mesos en alguns casos. Tot i això, el temps d'espera es veu reduït per l'augment continu de la potència computacional, així com també, per les noves tècniques de discretització que sorgeixen de la constant investigació en el sector.

Des d'un punt de vista numèric, existeix un gran paral·lelisme entre els problemes sobre dinàmica de fluids purs, i els que estan mesclats amb els camps electromagnètics. Per aquest motiu, bona part dels mètodes numèrics utilitzats en aquest projecte són extrets de la dinàmica de fluids computacional, o bé "*Computational Fluid Dynamic (CFD)*".

Tenint present la gran multitud de conceptes que engloba aquesta interacció, i a la impossibilitat de desenvolupar un codi que els simuli tots, s'ha focalitzat el tema en dos grans blocs clarament representatius. Aquests són la convecció magnètica i la magnetohidrodinàmica(MHD). Ambdós blocs són explicats en el projecte.

1.1 Objecte

L'objecte del projecte és l'estudi i la resolució numèrica de les equacions de massa, quantitat de moviment i energia sotmeses a un camp magnètic, mitjançant la tècnica dels volums finits. Concretament, dins d'aquesta àrea, el projecte se centra en dos fenomenologies: la convecció magnètica i la magnetohidrodinàmica(MHD).

1.2 Justificació

L'interès en l'estudi de la interacció entre la dinàmica de fluids i els camps electromagnètics recau en que permet la possibilitat de modificar el comportament d'un fluid, sense la necessitat d'establir un contacte directe amb aquest. La explotació d'aquest fenomen físic a nivell industrial seria capaç de resoldre problemes inabordables amb la tecnologia actual o bé millorar sistemes ja existents. Alguns

exemples d'aquestes novetats/millors són:

- Evitar el problema de la cavitació en la propulsió marítima, mitjançant la propulsió magnetohidrodinàmica, basada en camps electromagnètics en comptes del moviment giratori de les hèlices.
- Extracció d'energia elèctrica d'un fluid amb elevada energia cinètica i tèrmica sense necessitat d'utilitzar turbines que entrin en contacte amb el fluid.
- Disminució del coeficient de fregament aerodinàmic sense necessitat de modificar la forma del sòlid que està en contacte amb el fluid.
- Alterar els efectes de la convecció natural per tal de poder influir sobre la transferència de calor associada a aquesta.
- Provocar moviments convectius en absència de gravetat.
- Controlar el fenomen de creixement de cristalls quan un fluid passa d'estat líquid a sòlid, controlant la convecció natural mitjançant camps magnètics.
- Dominar la física del plasma.
- Millorar la comprensió de fenòmens astrofísics.

Totes aquestes aplicacions revolucionarien sense cap mena de dubte el món industrial, tant en l'àrea de producció com en el desenvolupament de nous productes basats en aquesta fenomenologia.

Estudiar la interacció entre els camp electromagnètics i la dinàmica de fluids de forma computacional implica el desenvolupament de codis polivalents aptes per resoldre multitud de casos, alliberant així a l'industria d'una gran quantitat d'estudis experimentals.

1.3 Abast

Les tasques que s'inclouen en aquest projecte són:

1. Estudi i deducció de les equacions governants:
 - S'estudia el fenomen de la convecció magnètica per fluids paramagnètics en presència d'un camp magnètic.

- S'estudien els fenòmens magnetohidrodinàmics que es produeixen en fluids conductors elèctrics quan estan en presència d'un camp magnètic.
2. Estudi i aplicació dels diferents mètodes numèrics capaços de transformar sistemes d'equacions diferencials amb derivades parcials, en un conjunt de sistemes d'equacions algebraics.
 3. Programació d'un codi propi per a la resolució numèrica de les equacions que determinen els fenòmens de convecció forçada, natural i magnètica, mitjançant la tècnica dels volums finits, tractament "*Staggered*" i mallas estructurades ortogonals. El codi ha de ser capaç de simular fluids que es comportin de forma laminar i que finalitzin en un estat permanent o bé periòdic.
 4. Introducció al codi Termofluids: aprenentatge del seu ús, juntament amb la programació d'un mòdul per aquest codi capaç de resoldre, numèricament, fenòmens magnetohidrodinàmics en fluids que es comporten de forma laminar. Aquest mòdul utilitza la tècnica dels volums finits, tractament "*Collocated*", malla no estructurada.
 5. Discussió, comparació i validació dels resultats numèrics¹ amb diferents tipus de documents de referència. Alguns d'aquests resultats de referència són solucions analítiques directes de les equacions diferencials, mentre que d'altres són resultats numèrics extrets per codis aliens a aquest projecte.

Les tasques que no s'inclouen en aquest projecte són:

1. No es durà a terme cap tipus d'estudi experimental.

1.4 Especificacions bàsiques

Les especificacions bàsiques d'aquest projecte són:

1. Programació d'un codi compacte en C++.
2. Resolució de les equacions diferencials que determinen el comportament dels diferents fenòmens físics, mitjançant la tècnica del volums finits.

¹Extrets amb els diferents codis desenvolupats en aquest projecte

3. S'utilitza el “*Fractional Step Method*” (FSM) per tal de resoldre les equacions de Navier-Stokes.
4. Solucionar problemes de convecció natural i magnetohidrodinàmics.
5. La modelització de les equacions MHD es fa tenint present que el Reynolds Magnètics és baix ($Re_M << 1$).
6. Medi continu i flux bidimensional (2D).
7. Els fluids es consideren incompressibles i tenen un comportament Newtonià pel que fa als esforços tangencials.

1.5 Resum de la memòria

Aquest escrit pretén ser una guia on es mostren els diferents capítols del projecte, junt amb una breu explicació de cadascun d'ells per tal d'ajudar al lector a orientar-se dins la temàtica.

En el capítol 2 es focalitzen els fenòmens físics que es tracten al llarg del projecte per tal d'ajudar al lector a la comprensió dels capítols posteriors. A més a més, es fa una breu introducció de cadascun dels fenòmens amb els seus respectius antecedents dins la comunitat científica.

En el capítol 3 es presenta la formulació matemàtica, on s'exposen per separat les equacions que governen la dinàmica de fluids i l'electromagnetisme. Un cop assolits els conceptes bàsics del projecte, es procedeix a la unió d'ambdós branques per obtenir les equacions amb les quals es basa el projecte, les equacions de treball. Aquestes equacions també s'adimensionalitzen per tal de conèixer els nombres adimensionals que governen el comportament de les equacions.

En el capítol 4 s'explica amb deteniment tot l'anàlisi numèric que s'ha dut a terme a les equacions diferencials de treball, per tal de convertir-les en un conjunt de sistemes d'equacions algebraics capaços de ser resolts computacionalment.

En el capítol 5 es mostren els dos problemes escollits per tal de verificar el funcionament dels codis desenvolupats en aquest projecte. A més a més, a aquests dos casos també se'ls hi troben aplicacions industrials per tal d'introduir una motivació extra a la resol·lució del problema.

En el capítol 6 es fa un anàlisi ambiental per conèixer l'impacte ambiental de la creació, desenvolupament i desmantellament d'aquest projecte.

Finalment, en el capítol 7 es mostren les conclusions obtingudes en el desenvolupament del projecte, junt amb un conjunt d'idees que marquen la futura direcció que seguirà el projecte a curt i llarg termini.

Capítol 2

Conceptes previs

2.1 Introducció

Degut a la gran multitud de conceptes que engloba la interacció entre la dinàmica de fluids i els camps electromagnètics, i a la impossibilitat de desenvolupar un codi que els simuli tots, s'ha focalitzat el tema en dos grans blocs clarament representatius. Aquests són la convecció magnètica i la magnetohidrodinàmica(MHD).

2.2 Convecció magnètica: el medi i l'electromagnetisme

Tota substància és influenciada per un camp electromagnètic, amb més o menys mesura, depenen de la seva estructura molecular i/o atòmica¹. Aquest efecte és deu al fet que la matèria està formada per àtoms, els quals estan compostos per partícules positives(protons) i negatives(electrons) que es mouen contínuament. Cada una de les càrregues en moviment crea el seu propi camp magnètic, tot i que en molts casos aquest efecte és complicat o impossible d'apreciar, ja que altres fenòmens físics, com la pròpia vibració dels mateixos àtoms, l'emmascaren.

Deixant de banda aquesta idea tant general, a efectes pràctics una substància es classifica en funció de la seva clara interacció amb un camp magnètic, de la següent forma:

¹Quan es té present aquest efecte es parla d'un medi participant

1. **Ferromagnètics:** els àtoms que formen la substància tendeixen alinear-se en presència d'un camp magnètic, de forma que el camp existent és potenciat pel camp magnètic format pels electrons al girar contínuament al voltant seu i del nucli. El ferromagnetisme no depèn únicament de la composició química de la substància sinó també depèn fortament de la seva estructura cristal·lina. Així doncs, que existeixen materials formats per elements ferromagnètics que no presenten aquest tipus de fenomen degut al seu tipus d'estructura cristal·lina (l'acer inoxidable n'és un exemple).

El ferromagnetisme d'una substància també està estrictament relacionat amb la energia tèrmica d'aquesta, ja que quan la substància supera una determinada temperatura (temperatura de Curie), passa a comportar-se com una substància paramagnètica. Aquest fenomen físic es deu a que la pròpia vibració de les partícules és tant gran que impedeix la alineació dels àtoms.

Cal tenir present que els materials ferromagnètics presenten histèresis de forma que un cop es deixa d'aplicar el camp magnètic extern, aquests no tornen al seu estat original sinó que queden imantats. Els elements químics purs que presenten aquest comportament són el cobalt (Co), el ferro (Fe), el gadolini (Gd) i el disprosi (Dy).

2. **Paramagnètics:** en aquest cas el fenomen físic és similar al ferromagnetisme, tot i que l'efecte és produït a una escala molt menor de forma que es continua potenciant el camp magnètic, però la pròpia vibració de les partícules s'oposa a la seva alineació. A més a més no presenten histèresis. Algunes de les substàncies paramagnètiques són l'alumini (Al), el magnesi (Mg) o l'oxigen (O).
3. **Diamagnètics:** a diferència de les dos anteriors, aquest efecte es caracteritza per disminuir el camp magnètic en comptes d'augmentar-lo, degut que els àtoms produueixen un camp contrari a l'aplicat. La gran majoria d'elements presenten aquest tipus de comportament. Alguns de les substàncies que presenten aquest comportament són l'hidrogen (H), el bismut (Bi), els gasos nobles , el coure (Cu) o el clorur de sodi (NaCl). Tampoc presenten histèresis.

La gran majoria de fluids tenen un comportament paramagnètic o bé diamagnètic. Ara bé, existeixen tècniques per aconseguir potenciar els efectes magnètics d'un fluid. Una d'aquestes consisteix en mesclar una substància en estat líquid amb un conjunt de nanopartícules en estat sòlid de comportament ferromagnètic. A aquesta mescla se li atribueix el nom de ferro-fluid (2.1).



Figura 2.1: Ferro-fluid en presència d'un camp magnètic

Degut a les dimensions minúscules de les partícules ferromagnètiques es pot parlar d'un medi totalment homogeni. Les nanopartícules no precipiten degut el moviment brownià al qual estan sotmeses. Aquest és un moviment estocàstic que es deu al fet que la superfície de les partícules es bombardejada contínuament per les molècules del fluid, les quals estan sotmeses a una agitació tèrmica. Aquest xoc a escala atòmica no és sempre constant de forma que es crea un moviment aleatori.

2.3 Magnetohidrodinàmica (MHD)

La magentofluidodinàmica (MFD) és la ciència que estudia el comportament del fluids que disposen d'una bona conductivitat elèctrica quan es troben en presència d'un camp magnètic. El concepte fonamental de la MFD és que els camps magnètics són capaços d'induir corrents elèctriques en un fluid conductor, les quals produeixen forces sobre el fluid i al mateix temps modifiquen el camp magnètic inicial.

Més concretament, si el fluid es troba en estat líquid es parla de magnetohidrodinàmica (MHD), mentre que si l'estat és gasos s'anomena magnetogasdinàmica (MGD). En tot el treball es parla contínuament de MHD degut que està enfocat per a fluids en estat líquid.

Els primers indicis de la MHD van aparèixer fa prop de dos segles. Faraday i Ritchie van descobrir aquesta curiosa interacció entre la fluidodinàmica i l'electromagnetisme l'any 1832 de forma independent. Per una banda, Faraday va demostrar la possibilitat de convertir l'energia cinètica d'un fluid conductor elèctric en energia elèctrica, mitjançant un camp magnètic transversal al moviment d'aquest fluid. Per

I l'altra banda, Ritchie va observar la possibilitat de propulsar un fluid mitjançant la correcta combinació de camps elèctrics i magnètics.

Més endavant, en ple segle XX, amb el descobriment del plasma com a nou estat de la matèria i la energia nuclear, es va potenciar l'interès d'aquesta nova ciència. La relació entre elles es deu al fet que l'energia obtinguda per fusió nuclear és la causant de l'espectacular alliberació d'energia del sol, la qual provoca que la matèria que el forma es trobi en estat plasma. Aquest últim es caracteritza per comportar-se com un fluid altament ionitzat, de manera que no només reacciona fortemet en presència d'un camp electromagnètic, sinó que també és capaç de crear el seu propi camp.

El naixement de la MHD com a ciència no va ser fins l'any 1970, quan Hannes Alfven va guanyar el premi Nobel pels seus treballs sobre fluids altament ionitzats. Aquest treball és una referència per la comprensió de la física que envolta els plasmes. També s'hi defineix l'existència d'un nou tipus d'ones anomenades ones magnetohidrodinàmiques, les quals avui dia reben el nom d'ones d'Alfven. Aquestes ones estan directament relacionades amb la teoria que explica la creació i moviment de les taques negres del sol.

Sense cap mena de dubte, en els seus principis aquest fenomen era d'especial interès per l'astrofísica, tot i que no es va tardar en trobar aplicacions dins la indústria. Van aparèixer velocímetres magnetofluidodinàmics, generadors de potència elèctrica, propulsors navals magnetohidrodinàmics ...

En l'actualitat, qualsevol tema dels esmentats es continua estudiant, tot i que la gran majoria dels esforços estan centrats en activitat relacionades directa o indirectament amb la fusió nuclear. Això és degut al fet que una de les principals tècniques per obtenir energia elèctrica de forma controlada mitjançant la fusió nuclear, utilitza potents camps electromagnètics per mantenir el plasma en levitació.

2.4 Magnetohidrodinàmica computacional (CMHD)

La magnetohidrodinàmica computacional o *Computational MagnetoHydroDynamics (CMHD)* és una disciplina que utilitza mètodes numèrics per tal de resoldre les equacions que governen la MHD. Degut al seu paral·lelisme, bona part dels mètodes utilitzats en la CMHD són prestats de la dinàmica de fluids computacional

(CFD), la qual s'encarrega de resoldre numèricament les equacions que defineixen la mecànica de fluids tradicional.

2.5 Antecedents

Degut als dos blocs amb els que es separa el projecte s'han desenvolupat de forma diversa, s'han separat els antecedents de cada una de les branques per tal de simplificar la comprensió del projecte al lector.

2.5.1 Antecedents sobre la convecció magnètica

Braithwaite[1] a l'any 1991 va ser un dels autors pioners en estudiar el comportament dels fluids paramagnètics en presència d'un camp magnètic. Més concretament la idea inicial ja estava focalitzada en controlar la convecció natural de fluids paramagnètics mitjançant camps magnètics. Les aplicacions d'aquesta tècnica van des del control de la transferència de calor en diferents aparells com en el control del creixement de cristalls en la solidificació d'un líquid.

Ens els seus inicis els estudis estaven dirigits cap a ferro-fluids² degut que els efectes eren visibles sense necessitat de recorrer a camps magnètics realment potents, tot i que no es va tardar en demostrar que per camps magnètics suficientment potents aquest efecte es donava en qualsevol tipus de fluid paramagnètic, sense la necessitat de tenir nanopartícules en suspensió.

Ara bé, tots aquests estudis eren experimentals. Els primers estudis computacionals per la simulació d'aquest fenomen no van tardar en dur-se a terme. Un dels estudis numèrics més rellevants en 2D del control magnètic de la convecció en fluids paramagnètics el va fer Bednarz[2] al 2009. Científics com Suvash[3] donen continuïtat als estudis numèrics de Bednarz tal i com demostra el seu document publicat al 2014.

Des del descobriment d'aquest fenomen físic han sorgit multitud d'articles encarats en aquesta temàtica, degut a la seva gran aplicació industrial.

²Fluid amb nanopartícules sòlides.

2.5.2 Antecedents sobre la MHD

Els primers estudis que es coneixen sobre MHD es situen a principis de la segona meitat del segle XX, quan encara no es considerava una ciència. Aquests estudis tractaven sobre la resolució analítica en estat permanent de les equacions diferencials que determinen la MHD per diferents tipus de formes. Tot i que aquest casos no pertanyin a la magnetohidrodinàmica computacional són de gran interès en el món del CMHD, ja que al disposar de solució analítica els converteix en casos perfectes per validar els codis. Alguns d'aquests articles de referència són els Shercliff[4], Hunt[5] i Walker[6].

Des dels seus inicis fins a l'actualitat, la CMHD ha utilitzat diferents modelitzacions de les equacions diferencials per tal de determinar els efectes MHD. Aquestes són:

- **B-formulation:** consisteix en determinar els efectes MHD utilitzant com a variable de càlcul el camp magnètic creat pel moviment dels electrons dins el fluid. Aquest és el pitjor mètode degut que és lent i a més a més s'ha d'estudiar l'exterior del domini on resideix el fluid, degut que el camp magnètic també existeix fora d'aquest. Com avantatge, el camp magnètic compleix per definició divergència nul·la. Smolentsev et al.[7] és un autor que ha treballat amb aquesta tècnica.
- **ϕ -formulation:** aquesta tècnica utilitza el potencial elèctric induït pel moviment dels electrons del fluid conductor elèctric en presència d'un camp magnètic. Aquesta tècnica és més ràpida que l'anterior tot i que presenta problemes d'estabilitat alhora de mantenir nul·la la divergència de la densitat de corrent elèctric. Ni et al.[8] és un autor que ha utilitzat aquesta tècnica en els seus últims articles sobre CMHD.
- **j-formulation:** aquesta tècnica és la més nova i és molt semblant a la **B-formulation**, ja que continua complint divergència nul·la per naturalesa. Com avantatge no s'ha d'estudiar el recinte en el qual no hi ha fluid, ja que la densitat de corrent elèctric només existeix en el medi conductor elèctric. Com a desavantatge continua sent més lenta que la **ϕ -formulation**. Smolentsev et al.[9] és un autor que ha treballat amb aquesta tècnica en els seus últims treballs sobre CMHD.

Deixant de banda les modelitzacions de les equacions que defineixen la MHD, la gran majoria de publicacions en el sector es basen en la tècnica dels elements finits

per tal de discretitzar les equacions diferencials. Ben pocs autors s'han basat en la tècnica dels volums finits, com per exemple Leboucher[10] . Aquest va utilitzar una ϕ -formulation i la tècnica dels volums finits amb un tractament “fully-staggered”, tot i que es va ajudar de informació analítica per definir les zones més complicades del problema.

En l'actualitat la utilització dels diferents models, junt amb el tipus de tècnica de discretització continuen sent temes d'investigació.

2.6 Bibliografia

- [1] D. Braithwaite, E. Beaugnon, and R. Tournier. Magnetically controlled convection in paramagnetic fluid. *Nature*, 667-673, 1991.
- [2] T.P. Bednarz, W. Lin, L., J.C. Patterson, C. Lei, and S.W. Armfield. Scaling for unsteady thermo-magnetic convection boundary layer of paramagnetic fluids of $\text{Pr} > 1$ in micro-gravity conditions. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 30:1157–1170, 2009.
- [3] C. S. Suvash. Effect of mhd and heat generation on natural convection flow in an open square cavity under microgravity condition. *Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, 30(5-20), 2013.
- [4] J.A. Shercliff. Steady motion of conducting in pipes under transverse magnetic fields. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*, 49:126–144, 1952.
- [5] J.C.R. Hunt. Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts. *Journal of Fluid Mechanics*, 21:577–590, 1965.
- [6] J.S. Walker. Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts with thin conducting walls. *Journal of Mcanique*, 20(79), 1981.
- [7] S. Smolentsev, N. Morley, and M. Abdou. Code development for analysis of mhd pressure drop reduction in a liquid metal blanket using insulation technique based on a fully developed flow model. *Fusion Engineering and Design*, 73(83-93), 2005.
- [8] M. Ni, M. Ramakanth, N. Morley, P. Huang, and M. Abdou. A current density conservative scheme for incompresible mhd flows at a low magnetic reynolds

- number. part i: On a rectangular collocated grid system. *Journal of computational physics*, 227(174-204), 2007.
- [9] S. Smolentsev, S. Cuevas, and A. Beltran. Induced electric current-based formulation in computations of low magnetic reynolds number magnetohydrodynamic flows. *Journal of computational physics*, 229(1558-1572), 2010.
- [10] L. Leboucher. Monotone scheme and boundary conditions for finite volume simulation of magnetohydrodynamic internal flows at high hartmann number. *Journal of computational physics*, 150(181-198), 1999.

Capítol 3

Formulació Matemàtica

3.1 Introducció

Tant les equacions que determinen el moviment dels fluids, com el comportament dels camps electromagnètics, han estat un gran repte per la comunitat científica al llarg dels últims dos segles. Per una banda, científics cèlebres del segle XIX i XX van descriure la fluidodinàmica com un dels problemes, sense resoldre, més complicats de la física clàssica. Per l'altra banda, ningú dubta sobre el gran treball de James Clerk Maxwell sobre l'electromagnetisme, on el mateix Einstein el va catalogar com un dels treballs més rigorosos de la física des dels temps de Newton.

Així doncs, en aquest apartat es mostren i s'expliquen les equacions que defineixen la fluidodinàmica i l'electromagnetisme.

Per una informació més detallada de tot el que s'exposa aquest apartat, es recomana consultar el llibre “*Magnetofluid dynamics for engineers and applied physicists*” escrit per Cramer, L.R. et al. [1].

3.2 Equacions de conservació

Els fonaments de la fluidodinàmica es basen en les equacions de conservació, tant de la massa, la quantitat de moviment com de l'energia. Totes són expressades de forma diferencial i seguint un model Eulerià. Les hipòtesis assumides per aquestes equacions són:

- **Medi continu:** la mostra de fluid té un número suficientment gran de molècules i, per tant, les propietats del fluid varien de forma contínua en l'espai i el temps.
- **Flux bidimensional:** el volum de control és suficientment profund perquè les variables només varin en el pla (2D).

En aquest apartat les equacions de conservació són expressades tenint present que les propietats físiques no són constants.

3.2.1 Conservació de la matèria

Clarament, la conservació de la matèria és un principi bàsic que s'ha de mantenir alhora d'afrontar qualsevol tipus de problema sobre fluidodinàmica. Aquest principi es pot expressar com:

“La variació de la massa en un volum de control ha de ser igual al flux màssic que travessa la seva superfície de control”.

L'equació que representa la frase anterior per un model Eulerià és:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.1)$$

3.2.2 Equació de conservació de la quantitat de moviment lineal

A part de la conservació de la massa, la quantitat de moviment també s'ha de conservar. Aquesta equació fa referència a la segona llei de Newton, seguint un model Eulerià. Es pot expressar com:

“L'increment de moment lineal dins del volum de control, més el seu flux net sortint a través de les superfícies de control, ha de ser igual al sumatori de forces que actuen sobre aquest”.

Al traduir l'expressió anterior en llenguatge matemàtic, s'obté:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\tau} + \rho \mathbf{f} \quad (3.2)$$

A l'esquerra de la igualtat de l'equació 3.2 es troba la variació de la quantitat de moviment dins d'un volum de control, junt amb el flux de quantitat de moviment a través de la superfície de control. A la dreta de la igualtat es troben:

- **Gradient de pressions ($-\nabla p$):** aquest és una força axial que actua en la superfície del volum de control. És negatiu degut que la força que realitza sempre és contraria al seu gradient, és a dir, sempre actua d'un punt d'alta pressió cap a un de baixa.
- **Esforços tangencials ($\nabla \cdot \bar{\tau}$):** aquest terme actua altre cop en la superfície del volum de control, de forma axial i tangencial. A més a més, depèn del tipus de fluid amb el que es treballa, ja que no tots produeixen el mateix tipus d'esforç tangencial sota les mateixes circumstàncies. És per aquest motiu que els fluids es poden classificar en funció del tipus d'esforç tangencial que generen, com per exemple fluids Newtonians, Pseudoplàstic, Dilatants, Fluids de Bingham ...
- **Força volumètrica (ρf):** a diferència de les dos anteriors, aquest tipus de força no actua a la superfície del volum de control, sinó que actua en el propi volum. L'únic tipus de forces que poden actuar d'aquesta forma són les quatre forces fonamentals ja que no necessiten cap tipus de contacte per manifestar-se. Per tant, forces electromagnètiques i gravitatoris (g) estan dins d'aquest grup.

Es important tenir present que, a diferència de la conservació de la massa, la quantitat de moviment està escrita de forma vectorial ja que s'ha de conservar en cadascun dels eixos de coordenades.

3.2.3 Equació de conservació de l'energia

Aquesta equació resulta d'aplicar el primer principi de la termodinàmica en sistemes oberts, és a dir, on existeix un intercanvi lliure de massa i energia. Altre cop, per un model Eulerià es pot expressar com:

"L'increment d'energia interna i cinètica dins d'un volum de control, més el flux net d'aquests sortint de la superfície de control, ha de ser igual al treball realitzat sobre el volum de control, més el flux net de calor entrant, més l'energia aportada al volum de control".

Si es tradueix l'expressió anterior de la conservació de l'energia en llenguatge matemàtic, s'obté:

$$\rho \left(\frac{\partial(u + e_c)}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(u + e_c) \right) = -\nabla(p\mathbf{v}) + \nabla(\bar{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \nabla\mathbf{q} + \rho(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) + \Phi \quad (3.3)$$

A l'esquerra de la igualtat de l'equació 3.3 es troba la variació de l'energia interna i cinètica dins d'un volum de control, junt amb el flux d'aquesta a través de la superfície de control.

A la dreta de la igualtat es troben:

- El treball produït per les forces superficials és representat per $-\nabla(p\mathbf{v}) + \nabla(\bar{\tau} \cdot \mathbf{v})$.
- El flux net de calor entrant és $-\nabla\mathbf{q}$.
- El treball realitzat per les forces volumètriques és $\rho(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v})$.
- Les fonts internes de calor que poden són expressades per Φ .

Equació de conservació de l'energia cinètica

L'equació de conservació de l'energia cinètica s'obté directament de la conservació de la quantitat de moment lineal. Per obtenir-la s'ha de realitzar el producte escalar de l'equació 3.2.2 amb la velocitat. Així doncs:

$$\mathbf{v} \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla p + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \bar{\tau}) + \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} \quad (3.4)$$

El resultat final de l'equació anterior un cop s'han fet una sèrie de modificacions és:

$$\rho \left(\frac{\partial e_c}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) e_c \right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla p + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \bar{\tau}) + \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} \quad (3.5)$$

On $e_c = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) / 2$.

Equació de conservació de l'energia tèrmica

Per obtenir l'equació de conservació de l'energia tèrmica s'ha de realitzar la resta de l'equació 3.3 amb la 3.8. Tot i això, primerament és interessant tenir present les

següents igualtats:

$$\nabla \cdot (p\mathbf{v}) = p\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla p \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \bar{\tau}) = \bar{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \bar{\tau}) \quad (3.7)$$

Aquests últims s'apliquen a l'equació de conservació de l'energia cinètica (3.5) i s'obté:

$$\rho \left(\frac{\partial e_c}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) e_c \right) = -\nabla \cdot (p\mathbf{v}) + p\nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \bar{\tau}) - \bar{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} \quad (3.8)$$

Es recorda l'equació de conservació de l'energia 3.3, però separant el terme de l'energia interna de l'energia cinètica:

$$\rho \left(\frac{\partial e_c}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) e_c + \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) u \right) = -\nabla (p\mathbf{v}) + \nabla (\bar{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \mathbf{q} + \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) + \Phi \quad (3.9)$$

Finalment, de la resta de l'equació 3.8 amb l'equació 3.9 s'obté l'equació que determina la conservació de l'energia tèrmica. Aquesta és:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) u \right) = -p\nabla \cdot \mathbf{v} + \bar{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{q} + \Phi \quad (3.10)$$

3.3 Electromagnetisme

L'electromagnetisme és una branca de la física que està avesada a l'estudi d'una de les quatre forces fonamentals de la natura. El comportament d'aquesta força està definida per camps electromagnètics.

En els seus inicis aquesta branca estava separada en dues grans parts, per una banda l'electricitat, la qual descriu els efectes provocats pels camps elèctrics, i per altra banda el magnetisme, la qual descriu els efectes provocats pels camps magnètics. No va ser fins a mitjans del segle XIX que *James Clerk Maxwell* (1831 - 1879), gràcies al treball previ d'altres científics com *Coulomb* (1736 - 1806), *Oersted* (1777 - 1851), *Ampère* (1775 - 1836) i *Faraday* (1791 - 1867) va demostrar en el seu treball ("A dynamical theory of the electromagnetic field") la forta relació entre els dos camps. En aquest treball, Maxwell[2] presenta l'electromagnetisme com a ciència que es basa en el fet que els camps magnètics i elèctrics són creats i alterats entre ells mateixos, així com també per corrents elèctriques.

Avui dia, el treball de Maxwell queda sintetitzat en un conjunt de quatre equacions que, afegint-hi la força de Lorentz i la llei d'Ohm, descriuen bona part dels fenòmens electromagnètics.

A continuació es mostren les equacions anteriors, així com també s'exposa una introducció prèvia de l'electricitat(electrostàtica) i el magnetisme(electrodinàmica).

3.3.1 Electroestàtica

Com a definició general, l'electroestàtica és una branca de la física que estudia el comportament de partícules amb càrrega elèctrica en repòs, sota presència d'un camp elèctric.

Camp elèctric

Primerament, per comprendre aquesta ciència es fa necessària la definició de camp elèctric. Aquest és un camp vectorial (o camp de força) a l'igual que el gravitatori, amb dues grans diferències. La primera és que el camp elèctric només actua sobre partícules que tinguin càrrega, mentre que el camp gravitatori actua sobre tot objecte que tingui massa. La segona fa referència al sentit del camp, ja que el gravitatori només pot ser d'atracció, mentre que l'elèctric pot ser d'atracció o de repulsió, en funció de la càrrega elèctrica que el crea. El camp elèctric produït per una càrrega puntual és definit per la llei de Coulomb:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{q_F}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (3.11)$$

On q_F representa la càrrega font que produeix el camp elèctric en qüestió, la ϵ_0 és la permitivitat elèctrica al buit i la r representa la distància des de la font fins al punt al qual es vol conèixer el camp elèctric. Per tant:

$$\mathbf{r} = (x - x_F, y - y_F, z - z_F) \quad (3.12)$$

La força produïda per un camp elèctric obedeix la següent expressió matemàtica:

$$\mathbf{F} = q_A \mathbf{E} \quad (3.13)$$

On q_A és la càrrega que rep la força produïda pel camp elèctric creat per q_F .

Potencial elèctric

Per conèixer el treball necessari per moure la càrrega q_A des de l'infinit fins a un punt A qualsevol, és dur a terme el següent desenvolupament:

$$W = \int_{\infty}^A \mathbf{F} d\mathbf{x} \quad (3.14)$$

Segons l'equació 3.13, obtenim:

$$W = \int_{\infty}^A q_A \mathbf{E} d\mathbf{x} \quad (3.15)$$

Així que:

$$W = q_A \int_{\infty}^A \frac{q_F}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} d\mathbf{x} \quad (3.16)$$

A continuació apliquem el producte escalar sobre el vector unitari \hat{r} i la direcció en la que avança la càrrega q_A . A més a més, s'observa com el resultat és la projecció del $d\mathbf{x}$ sobre la direcció que marca el vector \hat{r} .

$$\hat{r} \cdot d\mathbf{x} = |d\mathbf{x}| \cos\theta = dr \quad (3.17)$$

Així que, tornant a l'equació 3.16,

$$W = q_A \int_{\infty}^A \frac{q_F}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr \quad (3.18)$$

Es resol l'integral,

$$W = \frac{q_A q_F}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^A = \frac{q_A q_F}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{\infty} \right) \quad (3.19)$$

Finalment,

$$W = -\frac{q_A q_F}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (3.20)$$

Es pot observar com aquest resultat és un escalar, així com també que una partícula amb càrrega elèctrica en presència d'un camp elèctric té una energia potencial associada igual a la que marca l'equació 3.20. Quan es parla del potencial elèctric es fa servir el símbol ϕ .

$$\phi = -\frac{W}{q_A} = \frac{q_F}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (3.21)$$

Existeix una relació directa entre el camp elèctric i el potencial elèctric, aquesta sorgeix intuïtivament del desenvolupament anterior.

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (3.22)$$

On en cas d'utilitzar coordenades cilíndriques:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q_F}{4\pi\epsilon_o}\frac{1}{r}\right)\hat{r} \quad (3.23)$$

Obtenim el camp elèctric,

$$\mathbf{E} = -\frac{q_F}{4\pi\epsilon_o}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\hat{r} = \frac{q_F}{4\pi\epsilon_o}\frac{\hat{r}}{r^2} \quad (3.24)$$

3.3.2 Electrodinàmica

A diferència de l'electrostàtica, l'electrodinàmica estudia el comportament de les partícules carregades elèctricament quan es troben en moviment.

Conservació de la càrrega elèctrica

La magnitud física fonamental d'aquesta branca de la ciència és la densitat de corrent elèctric \mathbf{j} la qual es veu definida de la següent forma:

$$\mathbf{j} = \rho_e \mathbf{v}_e \quad (3.25)$$

On ρ_e representa la densitat de càrrega elèctrica i \mathbf{v}_e és la velocitat de les pròpies partícules. Aquesta té una relació directa amb la coneguda intensitat elèctrica, la qual es mesura en Ampères [A]. Aquesta és:

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{n} dS \quad (3.26)$$

La densitat de corrent elèctric representa la quantitat d'electrons que circulen per unitat de temps i superfície. Per tant, la quantitat de partícules que entren i surten en un volum de control ha de ser igual a la que s'acumula dins d'aquest. Utilitzant altres paraules, ha de complir la conservació de les partícules. En forma integral aquesta és:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_e dV + \oint_S \mathbf{j} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad (3.27)$$

Per transformar l'equació 3.27 en forma diferencial, s'aplica el teorema de gauss de la divergència per canviar integrals cícliques de superfície per integrals volumètriques.

$$\int_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV = 0 \quad (3.28)$$

Degut que la transformació en equació diferencial, és considera que les funcions són constants en tot el diferencial de volum de control. Així doncs:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (3.29)$$

També es pot expressar com:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_e \mathbf{v}_e = 0 \quad (3.30)$$

Camp Magnètic

A principis del segle XIX el científic *Hans Oersted* va presenciar un curiós fenomen. La brúixola de la seva taula canviava de direcció cada cop que circulava corrent elèctric per un fil de coure que tenia a la bora. Aquest efecte li va fer pensar amb la possibilitat de que el corrent elèctric pogués alterar d'alguna manera el camp magnètic de l'ambient, provocant així un canvi de direcció de la brúixola. Més endavant *Biot(1774 - 1862) i Savart(1791 - 1841)* van publicar una llei, la qual avui dia rep el seu nom, que determinava la creació d'un camp magnètic per una corrent elèctrica.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j} \times \hat{r}}{r^2} dV \quad (3.31)$$

On μ_0 representa la permeabilitat magnètica al buit i j és la densitat de corrent elèctric.

La força produïda per un camp magnètic a una càrrega elèctrica en moviment és:

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.32)$$

La eqüació anterior es pot expressar en funció de la densitat de corrent elèctric. En aquest cas,

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV \quad (3.33)$$

Com a curiositat, la força magnètica que s'exerceixen dues partícules elèctriques en moviment, no compleix la tercera llei de Newton. En canvi, la força produïda pel camp elèctric si que ho fa.

3.3.3 Equacions de Maxwell

Les equacions de Maxwell es fonamenten amb els treballs de l'electroestàtica i l'electrodinàmica. En un principi, eren un total de 20 equacions que amb els anys s'ha sintetitzat en 4. Aquestes defineixen per complet els fenòmens electromagnètics de la física clàssica.

Llei de Gauss

La llei de Gauss relaciona el flux del camp elèctric a través d'una superfície tancada en funció de la càrrega elèctrica que es troba al seu interior. Podem definir la càrrega que es troba a l'interior d'una superfície tancada en funció de la densitat de càrrega elèctrica (ρ_e).

$$Q_{int} = \int_V \rho_e \, dV \quad (3.34)$$

El flux elèctric que travessa una superfície tancada és:

$$\Phi_s = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} \, dS \quad (3.35)$$

Segons la llei de Gauss, hi ha una estreta relació entre el flux elèctric a través d'una superfície tancada i la càrrega emmagatzemada en el seu interior. Justament aquesta és:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_e \, dV \quad (3.36)$$

L'equació 3.36 està escrita de forma integral, tot i que és comú expressar-la de forma diferencial. S'utilitza el teorema de Gauss per passar una integral superficial tancada a una integral volumètrica. El resultat és:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_e \, dV \quad (3.37)$$

Una de les principals característiques d'una equació diferencial és que opera en un diferencial de volum de control. Com que aquest és molt petit, la funció a integrar

es considera constant en tot el volum de control. Finalment:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (3.38)$$

Per entendre millor l'equació 3.38 és interessant fer la següent reflexió. Degut que les càrregues elèctriques poden ser tant positives com negatives, és possible arribar al cas en el que la càrrega acumulada dins la integral de superfície tancada sigui igual a 0 i alhora el nombre de càrregues al seu interior no ho sigui. Si s'aplica la llei de Gauss s'observa que aquest fenomen implica que el flux elèctric al voltant de la superfície tancada que envolta les càrregues és igual a 0. En canvi, no és correcte pensar que el camp elèctric al seu exterior i interior és igual a 0, ja que aquest pot ser molt elevat de totes formes.

Si un fluid és quasi neutral, significa que la densitat de càrrega és nul·la en qualsevol volum de control. Concretament aquesta és una de les especificacions bàsiques del projecte.

Llei de Gauss pel camp magnètic

Aquesta llei demostra la inexistència de monopolis magnètics, degut que la divergència d'un camp magnètic sempre ha de ser 0.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.39)$$

En llenguatge matemàtic, qualsevol camp vectorial que gaudeixi d'aquesta propietat s'anomena camp solenoïdal. Si s'aplica el teorema de Gauss a l'equació 3.39 s'obté clarament que el camp magnètic que entra dins d'un volum de control es veu obligat a sortir. En cas de tenir un camp magnètic format per diferents camp magnètics:

$$\mathbf{B}_T = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \quad (3.40)$$

S'aplica el teorema de Gauss pels camps magnètics:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_T = 0 \quad (3.41)$$

I també,

$$\nabla \cdot \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i = 0 \quad (3.42)$$

L'operador divergent pot entrar dins el sumatori perquè no depèn d'aquest. Així que,

$$\sum_{i=1}^n \nabla \cdot \mathbf{B}_i = 0 \quad (3.43)$$

Aquest tipus de camps responen al teorema de la superposició, per tant,

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_i = 0 \quad (3.44)$$

Aquesta és una eina molt útil, la qual et permet treballar camps magnètic complexes com a un conjunt de camps senzills.

Llei de Faraday

Faraday va descobrir que la variació d'un camp magnètic provocava una corrent elèctrica en un material conductor elèctric. Més endavant va perfeccionar la llei, arribant a la conclusió que la variació d'un camp magnètic sempre produeix un camp elèctric de rotacional no nul, independentment de si el material és o no és conductor elèctric. A més a més, Lenz va refinjar l'equació aportant una explicació convincent al fenomen físic. El camp elèctric produït origina una corrent elèctrica, la qual produeix un camp magnètic que s'oposa a la variació del camp magnètic que ha originat prèviament el camp elèctric. Per aquest motiu la variació temporal del camp magnètic va accompanieda d'un signe negatiu. Aquesta és:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.45)$$

A diferència de les equacions de Gauss pels camps elèctrics i magnètics, la llei de Faraday 3.45 no els caracteritza per separat, sinó que els relaciona. Per tant, és un indicador de que existeix una estreta relació entre els dos tipus de camps.

Llei d'Ampère - Maxwell

Aquesta llei es basa en els treballs previs de *Hans Oersted* i *Biot-Savart*, els quals van definir els principis de l'electrodinàmica en els seus treballs. *André-Marie Ampère*, va expressar l'equació 3.31 de forma diferencial. Aquesta llei actualment rep el seu nom:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{j} \quad (3.46)$$

Tot i així, l'equació d'Ampère no compleix continuïtat, de forma que no permet que s'acumuli càrrega elèctrica. No va ser fins als treballs de *James Clerk Maxwell* que es va generalitzar l'equació. Si es fa el divergent de l'equació 3.46, s'aprecia clarament que la llei d'Ampère no compleix continuïtat, tal i com mostra l'equació 3.48.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mu_o \mathbf{j}) \quad (3.47)$$

Matemàticament, el divergent d'un rotacional sempre és igual a 0. Així que,

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (3.48)$$

Així doncs, va reforma la llei afegint el terme de l'intensitat de desplaçament. Aquesta és una intensitat fictícia produïda per l'acumulació de càrrega. L'equació generalitzada és:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{j} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.49)$$

Aquesta equació s'anomena equació d'Ampère - Maxwell. És de gran importància, ja que indica que demostra com no només la variació temporal d'un camp magnètic produeix un camp elèctric, tal i com marca l'equació de Faraday (3.45), sinó que la variació temporal d'un camp elèctric també produeix un camp magnètic.

A diferència de l'equació d'Ampère (3.46), l'equació 3.49 si que compleix continuïtat. La demostració d'aquest fet s'obté aplicant altre cop el divergent.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot \left(\mu_o \mathbf{j} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (3.50)$$

Tal i com ja s'ha explicat, el divergent del rotacional d'un camp vectorial és igual a 0 per definició. Per tant:

$$\mu_o \nabla \cdot \mathbf{j} + \mu_o \frac{\partial (\epsilon_o \nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = 0 \quad (3.51)$$

Aplicant la llei de Gauss 3.38, s'obté:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0 \quad (3.52)$$

La qual concorda perfectament amb l'equació 3.29 de l'electrodinàmica.

3.3.4 Llei d'Ohm

El moviment d'un electró a l'interior d'un material en el que hi ha aplicat una diferència de potencial depèn d'un gran nombre de variables, ja que no para d'interactuar amb les partícules que formen part de la microestructura del material. Per aquest motiu, per determinar la corrent elèctrica dins d'un material, no es calcula el moviment de cada electró, ja que la potència de càlcul seria desbordant inclús pels exemples més senzills. En comptes d'això, la llei d'Ohm proposa estudiar l'efecte des d'un punt de vista macroscòpic amb un conjunt de paràmetres senzills. Aquesta és:

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.53)$$

Una altra forma d'expressar la mateixa equació és utilitzant el potencial escalar 3.22.

$$\mathbf{j} = \sigma (-\nabla \phi + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.54)$$

On σ és la conductivitat elèctrica del material, \mathbf{E} és el camp elèctric, ϕ és el potencial escalar i \mathbf{v} és la velocitat del medi conductor i \mathbf{B} és el camp magnètic al qual està sotmès el medi conductor. En aquesta llei s'observa com s'originen unes corrents elèctriques (\mathbf{j}) en l'interior d'un fluid conductor elèctric en moviment i en presència d'un camp magnètic.

En aquest apartat és interessant fer la següent reflexió: la densitat de corrent elèctric dels electrons d'un fluid en moviment, sota presència d'un camp electromagnètic, és igual a la densitat de corrent en direcció al fluid(medi transportador) en moviment, més la induïda pel camp magnètic la qual és perpendicular al camp magnètic i a la velocitat del fluid.

$$\mathbf{j}_e = \mathbf{j}_m + \mathbf{j}_i \quad (3.55)$$

On \mathbf{j}_m és la densitat de corrent dels electrons per arrossegament del medi, mentre que \mathbf{j}_i és la induïda pel camp electromagnètic. Així que:

$$\mathbf{j}_e = \rho_e \mathbf{v} + \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.56)$$

Aquest resultat s'utilitza per obtenir la força que un camp electromagnètic produeix sobre el fluid conductor.

3.3.5 Força de Lorentz

La força de Lorentz representa la força que un camp electromagnètic transmet a una càrrega elèctrica. Aquesta és:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) \quad (3.57)$$

On q és la càrrega elèctrica en qüestió, \mathbf{E} és el camp elèctric, \mathbf{v}_e representa la velocitat de la càrrega elèctrica respecte el camp magnètic i \mathbf{B} és el camp magnètic. També es pot escriure en forma de força volumètric i introduint la densitat de corrent elèctric. Primer s'aplica la forma diferencial de l'equació. Així doncs,

$$d\mathbf{F} = dq(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) \quad (3.58)$$

Tenint present la densitat de càrrega elèctrica:

$$dq = \rho_e dV \quad (3.59)$$

S'obté:

$$d\mathbf{F} = (\rho_e \mathbf{E} + \rho_e (\mathbf{v}_e \times \mathbf{B})) dV \quad (3.60)$$

On:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dV} = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j}_e \times \mathbf{B} \quad (3.61)$$

És interessant tenir expressada la força de Lorentz en funció del volum, ja que l'equació de conservació del moment lineal (3.2.2) també ho està.

3.4 Hipòtesis fenomenològiques

A continuació s'assumeixen una sèrie d'hipòtesis fenomenològiques que afecten directament a les equacions de transport (3.2), així com també a les equacions de l'electromagnetisme. Cadascuna de les següents hipòtesis va acompanyada, degudament, d'un raonament basat en el fenomen que descriu. Aquestes afecten tant a les propietats físiques com al valor de les variables a calcular.

3.4.1 Propietats físiques constants

Totes les propietats físiques de les equacions de transport són constant, així com també ho són les equacions de l'electromagnetisme. La gran major part de les propietats físiques varien en funció de la pressió i la temperatura. Així que, si l'interval de temperatures i pressures dins del macro volum de control és suficientment elevat, aquesta hipòtesis no es compleix.

3.4.2 Densitat màssica constant

En aquest projecte es considera que tot fluid es comporta com si fos incompressible, és a dir, que la seva densitat és constant, a l'igual que les demés propietats físiques.

Per considerar un fluid com a incompressible no és necessari que estigui en estat líquid, ja que els fluids en estat gas també es poden considerar sempre que el nombre adimensional de Mach sigui suficientment petit ($M \leq 0.3$).

3.4.3 Fluid Newtonià

En funció del tipus de fluid amb els que es treballa, la part difusiva formada pels esforços tangencials pot adoptar diferents tipus de modelitzacions. En aquesta projecte, tots els fluids amb els que es treballa es comporten de forma Newtoniana. Aquesta hipòtesis fenomenològica es basa en el fet que l'esforç tangencial produït pel fluid és directament proporcional a la deformació del camp de velocitats d'aquest en la direcció ortogonal al pla on es produeix l'esforç tangencial.

3.4.4 Radiació electromagnètica menyspreable

No es té en compte la transferència de calor per radiació electromagnètica, de forma que l'únic flux de calor possible per definir $-\nabla q$ és la conducció tèrmica.

3.4.5 Calor específic

En un fluid incompressible ($\rho = ct$) es considera que el calor específic a volum constant (c_v) és igual al calor específic a pressió constant (c_p). Per aquest motiu es pot realitzar el següent canvi:

$$u - u_o = \int_T c_v \, dT = \int_T c_p \, dT \quad (3.62)$$

Aquest fet, permet simplificar l'equació de conservació de l'energia tèrmica.

3.4.6 Dissipació viscosa menyspreable

Si s'observen l'equació de conservació de l'energia cinètica 3.8 i l'equació de conservació d'energia tèrmica 3.10, es pot apreciar com comparteixen el mateix terme $\bar{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v}$, però canviat de signe. Aquest terme fa referència a la pèrdua d'energia cinètica degut als esforços tallants que es converteix en energia calorífica. A efectes tèrmics, aquest terme es considera menyspreable respecte els termes advecțiу (convecció) i el flux de calor entrant, els quals governen la transferència de calor. Aquesta hipòtesis és vàlida, excepte per fluids a elevades velocitats o fluids molt viscosos.

$$\bar{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v} \approx 0 \quad (3.63)$$

3.4.7 Medi quasi-neutral

Es pot considerar que en qualsevol volum de control existeixen el mateix nombre de càrregues positives que negatives, de forma que la densitat de càrrega és nul·la.

$$\rho_e \approx 0 \quad (3.64)$$

Aquesta hipòtesis és certa fins i tot en materials en estat plasma el qual està format per un conjunt de partícules fortement ionitzades. Només en casos molt estranys aquesta hipòtesis no es compleix.

3.4.8 Medi participant paramagnètic

Aquesta hipòtesis no es considera en tots els estudis, únicament es considera en el cas de convecció magnètica.

S'entén com a medi participant el fet que la pròpia naturalesa de la substància debilita o potencia el camp magnètic segons al següent equació constitutiva:

$$\mathbf{B} = \mu_o (\mathbf{M} + \mathbf{H}) \quad (3.65)$$

On $B(Wb/m^2)$ és el camp magnètic, $\mu_o(H/m)$ és la permeabilitat magnètica al buit, M és la magnetització produïda pel medi la qual es considera nul·la quan aquest no és participants i $H(A/m)$ representa la excitació magnètica. Per a fluids paramagnètics, hi ha una relació lineal i directament proporcional entre la M i la H , que potencia B . Més concretament:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (3.66)$$

El terme χ_m representa la susceptibilitat magnètica pròpia de cada material. Substituint l'expressió anterior en l'equació 3.65:

$$\mathbf{B} = \mu_o (1 + \chi_m) \mathbf{H} \quad (3.67)$$

On:

$$\mu_m = \mu_o (1 + \chi_m) \quad (3.68)$$

El terme μ_m rep el nom de permeabilitat magnètica.

Com a coneixements extra, la M produïda per un fluid diamagnètic és lineal i indirectament proporcional a H , de forma que debilita H . Matemàticament s'expressa com una susceptibilitat magnètica (χ_m) negativa.

“Aquesta hipòtesis només s’aplica quan s’especifica concretament en el problema, o en el desenvolupament que es dugui a terme, ja que si no es menciona es considera un medi no participant”

3.4.9 Camp Magnètic constant

En cap moment, la naturalesa del fluid o bé les corrents que s’indueixen en els seu interior en problemes sobre MHD poden afectar directament a modificar el camp magnètic, ja que aquests efectes es consideren menyspreables.

Aquesta hipòtesis és certa sempre en una gran quantitat de problemes d’enginyeria, però no té sentit quan es parla d’astrofísica, ja que en les estrelles el camp magnètic varia constantment degut al flux de càrregues elèctriques.

3.4.10 Simplificació de l'equació d'Ampère-Maxwell

El terme que representa la corrent de desplaçament dins l'equació d'Ampère-Maxwell(3.49) es considera menyspreable. Aquest és:

$$\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \approx 0 \quad (3.69)$$

Aquesta hipòtesis és certa sempre que el fluid es pugui considerar quasi-neutral ($\rho_e \approx 0$). La relació entre la densitat de desplaçament i la densitat de càrrega elèctrica (ρ_e) és explicada a l'apartat 3.3.3.

3.5 Modelització en les equacions de transport

Les equacions de conservació i de l'electromagnetisme s'han expressat sense especificar cap dels diferents termes que apareixen per tal de ser el màxim genèriques possibles. Tot i això, s'han de dur a terme un conjunt de modelitzacions per tal de poder tractar les equacions en qüestió. Aquestes són:

- Modelització del tensor de tensions ($\bar{\tau}$).
- Modelització del flux de calor ($-\nabla q$).
- Modelització del terme font(f): convecció natural.
- Modelització del terme font(f): força de Lorentz.
- Modelització de l'equació de transport del camp magnètic.

3.5.1 Modelització del tensor de tensions

Tal i com s'ha explicat en l'apartat d'hipòtesis fenomenològiques l'esforç tangencial dels diferents fluids de treball es considera Newtonià, de forma que és directament proporcional al gradient de velocitats. La llei de viscositat d'Stokes representa matemàticament la relació entre el tensor de tensions i els gradients de velocitats. De forma tensorial s'expressa com:

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{x}_j} + \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial \mathbf{x}_i} \right) + \delta_{ij} \zeta \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial \mathbf{x}_j} \right) \quad (3.70)$$

Els subíndexs j i i representen els vectors unitaris dels dos eixos de referència perpendiculars. El primer terme es refereix a les tensions tangencials on apareix la viscositat dinàmica μ . En el segon terme es refereix a les tensions normals, on apareix:

$$\zeta = \kappa - \frac{2}{3}\mu \quad (3.71)$$

On κ fa referència a la viscositat d'expansió.

Un cop es coneix com és modelitzat l'esforç tangencial, ja es pot definir el seu gradient. En dos dimensions és:

$$\nabla\bar{\tau} = \left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}, \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} \right) \quad (3.72)$$

Utilitzant l'equació 3.70 i tenint present que la velocitat és un camp vectorial soleïnal (3.4.2), el gradient de l'esforç tangencial és:

$$\nabla\bar{\tau} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (3.73)$$

També es pot expressar com:

$$\nabla\bar{\tau} = \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.74)$$

3.5.2 Modelització del flux de calor

D'acord amb les hipòtesis fenomenològiques (3.4.4) l'únic flux de calor que es té en compte en el model és el de conducció. Aquest bé definit per la llei de Fourier, la qual és:

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \quad (3.75)$$

On la λ fa representar la conductivitat tèrmica del material i T és la temperatura. Tenint present la llei de Fourier, el gradient del flux de calor es pot expressar com:

$$-\nabla \mathbf{q} = \nabla (\lambda \nabla T) \quad (3.76)$$

Tenint present que les propietats físiques es consideren constants, la conductivitat tèrmica pot sortir fora la l'operador divergent. Així doncs:

$$-\nabla \mathbf{q} = \lambda \nabla^2 T \quad (3.77)$$

3.5.3 Equació de transport del camp magnètic

L'equació de transport del camp magnètic resulta de la combinació de les equacions de Maxwell, junt amb la llei d'Ohm. L'objectiu és obtenir una equació que relacioni com es transporta el camp magnètic a través d'un fluid. En primer lloc, s'utilitza la llei de Faraday (3.45), la qual és:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

S'aïlla el camp elèctric de la llei d'Ohm (3.53) i s'aplica el rotacional a la mateixa equació:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma} \right) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.78)$$

Aquesta última es substitueix a la llei de Faraday (3.45), obtenint:

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma} \right) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.79)$$

Així doncs, en l'equació anterior s'assumeix que el fluid respon correctament a la llei d'Ohm. A més a més, si s'aïlla la densitat de corrent de l'equació d'Ampère-Maxwell (3.49), s'obté:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.80)$$

Es substitueix la densitat de corrent elèctric a l'equació 3.79:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times \left(\frac{1}{\sigma \mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{\epsilon_0}{\sigma} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (3.81)$$

S'aplica el següent canvi a l'equació anterior:

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (3.82)$$

Aplicant el canvi anterior a l'equació de transport del camp magnètic, s'obté:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla \times \left(\frac{1}{\sigma \mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{\epsilon_0}{\sigma} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (3.83)$$

Tenint present la hipòtesis fenomenològica (3.4) les propietats físiques es consideren constant i a més a més l'equació d'Ampère-Maxwell es simplifica. Aplicant aquests canvis, l'equació de transport del camp magnètic s'expressa com:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (3.84)$$

Degut que el camp magnètic és un camp vectorial solenoïdal ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$), és pot utilitzar el següent canvi:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla^2 \mathbf{B} \quad (3.85)$$

Aplicant el canvi anterior, l'equació 3.84 s'expressa com:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (3.86)$$

On $\eta = \frac{1}{\sigma \mu_0}$, el qual representa el coeficient de difusivitat magnètica.

3.5.4 Modelització del terme font (f): Força de Lorentz

En un diferencial de volum de control arbitrari, ocupat per un fluid de densitat de càrrega elèctrica constant, hi cohabitent tant càrregues positives (àtoms ionitzats) com negatives (electrons). Així doncs, en presència d'un camp electromagnètic, la força de Lorentz (3.61) actua en ambdós substàncies:

$$\mathbf{F}_{\text{em}} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_e \quad (3.87)$$

Tenint present l'equació 3.61, la força de Lorentz per unitat de volum es pot expressar com:

$$\mathbf{F}_p = \rho_p \mathbf{E} + \mathbf{j}_p \times \mathbf{B} \quad (3.88)$$

$$\mathbf{F}_e = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j}_e \times \mathbf{B} \quad (3.89)$$

Tenint present que els fluids es comporten com a quasi-neutrals (3.4.7):

$$\rho_p + \rho_e = 0 \quad (3.90)$$

La densitat de corrent dels electrons(\mathbf{j}_e) és igual a la del medi portador(\mathbf{j}_m), més la induïda(\mathbf{j}_i) pel fet que el fluid és conductor elèctric. Per tant:

$$\mathbf{j}_e = \mathbf{j}_m + \mathbf{j}_i \quad (3.91)$$

Tenint present la llei d'Ohm(3.53), al densitat de corrent induïda es pot expressar com:

$$\mathbf{j}_i = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v}_m \times \mathbf{B}) \quad (3.92)$$

On \mathbf{u}_m representa la velocitat del fluid, que alhora és el medi portador i el que representa les càrregues positives. Tenint present aquest apunt, la densitat de corrent elèctric dels electrons és:

$$\mathbf{j}_e = \mathbf{j}_m + \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}) \quad (3.93)$$

Que és el mateix que:

$$\rho_e \mathbf{v}_e = \rho_e \mathbf{v}_m + \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}) \quad (3.94)$$

Si la força produïda pel camp electromagnètic dins el volum de control depèn de les càrregues elèctriques positives i negatives, utilitzant les equacions 3.87, 3.88 i 3.89, s'obté:

$$\mathbf{F}_{em} = (\rho_p + \rho_e) \mathbf{E} + \mathbf{j}_p \times \mathbf{B} + \mathbf{j}_e \times \mathbf{B} \quad (3.95)$$

Tenint present que el fluid es comporta quasi-neutral:

$$\mathbf{F}_{em} = \rho_e \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} + \rho_p \mathbf{v}_p \times \mathbf{B} \quad (3.96)$$

On \mathbf{u}_p és igual que \mathbf{u}_m , ja que el medi actua com a portador. Per tant:

$$\mathbf{F}_{em} = \rho_e (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_m) \times \mathbf{B} \quad (3.97)$$

Realitzant el següent canvi:

$$\rho_e (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_m) = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v}_m \times \mathbf{B}) \quad (3.98)$$

S'obté:

$$\mathbf{F}_{em} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v}_m \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (3.99)$$

Així doncs, el terme font que expressa la força produïda per les forces electromagnètiques en un fluid conductor elèctric és:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\rho} \mathbf{F}_{em} = \frac{1}{\rho} \mathbf{j}_i \times \mathbf{B} \quad (3.100)$$

On ρ representa la densitat màssica.

3.5.5 Modelització del terme font (f): Convecció natural

Tot i considerar sempre els fluids com a incompressibles (3.4.2), és interessant tenir present que, per casos de convecció natural, aquesta hipòtesis no és certa. No ho és perquè les corrents d'aire originades per una diferència de temperatures es deuen al fet que densitat del fluid varia. Aquesta variació provoca unes forces de flotació en el medi que acaben donant pas a un flux de fluid.

Així doncs, per continuar tractant el fluid com a incompressible i alhora poder simular la convecció natural, s'utilitza la hipòtesis de Boussinesq, la qual es basa en imposar un comportament lineal entre la densitat màssica i la temperatura. L'expressió que determinar la relació entre la densitat i la temperatura de forma genèrica és:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \quad (3.101)$$

On β representa el coeficient d'expansió tèrmic. Primerament, per aplicar la hipòtesis de Bousinesq s'ha de conèixer la densitat màssica (ρ_o) a una temperatura de referència (T_o), i imposar que la variació de la densitat respecte la temperatura és constant ($\beta = ct$) i coneugada. Llavors s'integra l'expressió anterior:

$$\int_{T_o}^T \beta \partial T = - \int_{\rho_o}^{\rho} \frac{1}{\rho} \partial \rho \quad (3.102)$$

Obtenint com a resultat:

$$\rho(T) = \rho_o e^{-\beta(T-T_o)} \quad (3.103)$$

El qual compleix que:

$$\rho(T = T_o) = \rho_o \quad (3.104)$$

A continuació, mitjançant la sèrie de Taylor, és linealitza l'expressió anterior agafant com a referència el punt inicial (T_o, ρ_o).

$$\rho(T) = \rho(T_o) + \left| \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T_o} (T - T_o) \quad (3.105)$$

On:

$$\left| \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T_o} = -\beta \rho_o \quad (3.106)$$

Per tant, tenint present l'última igualtat, l'equació 3.105 s'expressa com:

$$\rho(T) = \rho_o (1 - \beta(T - T_o)) \quad (3.107)$$

Finalment, el terme font queda expressat com:

$$\rho \mathbf{f} = \rho_o \mathbf{g} (1 - \beta (T - T_o)) \quad (3.108)$$

On \mathbf{g} representa la força gravitòria ($9.81 m/s^2$).

3.5.6 Modelització del terme font (\mathbf{f}): Convecció magnètica per fluids paramagnètics

En aquest apartat es defineix, matemàticament, el terme font que quantifica l'estres al que està sotmès un ferrofluid paramagnètic quan està en presència d'un camp magnètic(\mathbf{B}). En aquest tipus de problemes, els electrons no poden viatjar lliurement a través del medi(tal i com ho fan en problemes MHD), sinó que contínuament donen voltes al voltant de l'àtom al qual pertanyen. Tot i ser un petit efecte, en algunes substàncies (les paramagnètiques són una d'elles) aquest moviment continu i rotatori dels electrons al voltant del seu nucli es suficient com per interactuar amb un camp magnètic extern. De fet aquest moviment de l'electró es pot interpretar com una densitat de corrent elèctrica(\mathbf{j}).

Utilitzant com a referència la força de Lorentz, definida anteriorment en l'anàlisi del terme font que porta el seu nom:

$$\mathbf{F}_{\text{em}} = \mathbf{j}_i \times \mathbf{B}$$

Segons la llei d'Ampere (deixant de banda la possibilitat d'acumular càrrega elèctrica), la densitat de corrent elèctrica es pot definir com el rotacional del camp magnètic creat per ella mateixa. També, tenint present que els problemes que es resoldran en aquest exercici són en 2D, la densitat de corrent elèctrica(\mathbf{j}) només pot anar en direcció z , és a dir, cap a dins o fora del pla 2D. A més a més, si es té present que el medi és participant(altera el camp magnètic), s'obté la següent expressió extreta del document de referència escrit per Bednarz, T.P[3]:

$$\mathbf{F}_{\text{em}} = \frac{\mu_o \chi_v \rho}{2} \nabla \mathbf{H}^2 \quad (3.109)$$

On χ_v és la susceptibilitat magnètica específica i ρ és la densitat màssica de la substància. La relació entre aquestes dos propietats físiques dona lloc a la susceptibilitat magnètica:

$$\chi_m = \chi_v \rho \quad (3.110)$$

La separació d'aquestes dos variables es dur a terme perquè físicament està demonstrat que la densitat màssica varia en funció de la temperatura, a l'igual que també ho fa la susceptibilitat magnètica específica. Aquesta última varia mitjançant la llei de Curie en el cas que els materials siguin paramagnètics:

$$\chi_v = \frac{C}{T} \quad (3.111)$$

On C és una constant que s'obté a partir de conèixer la χ_v a una determinada temperatura T . La densitat màssica varia de la mateixa forma que s'ha explicat en el desenvolupament del terme font per la hipòtesis de Bousinesq.

Seguint el document de referència[3] s'arriba a la conclusió que el terme font que s'inclou en l'equació de conservació de la quantitat de moviment per resoldre problemes on el fluid es paramagnètic i està sotmés a un camp magnètic constant, és:

$$\mathbf{f} = -\frac{\chi_{v_o} (\beta + 1/T_o)}{2\mu_o} (T - T_o) \nabla \mathbf{B}^2 \quad (3.112)$$

On χ_{v_o} és la susceptibilitat magnètica específica a una temperatura de referència T_o .

A diferència de la convecció natural, la convecció magnètica no requereix un camp gravitatori. A canvi, es necessita un camp magnètic i un fluid sensible a aquest. Ja s'ha comentat en els primers apartats d'aquest projecte que existeixen substàncies anomenades ferrofluids que es troben en estat líquid i són susceptibles a aquest tipus de camps.

3.6 Equacions de treball

A continuació, s'apliquen les hipòtesis fenomenològiques (3.4), junt amb les modelitzacions (3.5) adoptades a les equacions de conservació i l'electromagnetisme, per tal d'obtenir les equacions de treball amb les quals es basa el projecte. Aquestes són:

- **Equació de conservació de la massa:**

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.113)$$

Aquesta expressió s'obté en aplicar la hipòtesi de densitat màssica constant (3.4.2) en l'equació de conservació de la massa (3.1).

- **Equació de conservació de la densitat de corrent elèctric:**

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (3.114)$$

Aquesta expressió s'obté en aplicar la hipòtesi de densitat elèctrica constant (3.4.7) en l'equació de conservació de la densitat de corrent elèctric (3.30).

- **Equació de conservació de la quantitat de moviment:** tenint present l'equació de conservació de la quantitat de moviment (3.2) i la modelització dels esforços tallants (3.5.1) s'obté la següent expressió.

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \quad (3.115)$$

On $\rho \mathbf{f}$, en funció de les necessitats del problema, és modelitzat de la següent forma:

- **Força de Lorentz:**

$$\rho \mathbf{f} = \mathbf{j}_i \times \mathbf{B}$$

La modelització es troba en l'apartat 3.5.4.

- **Convecció natural:**

$$\rho \mathbf{f} = \rho_o g (1 - \beta (T - T_o))$$

La modelització es troba en l'apartat 3.5.5.

- **Convecció magnètica per fluids paramagnètics:**

$$\rho \mathbf{f} = -\frac{\rho_o \chi_{v_o} (\beta + 1/T_o)}{2\mu_o} (T - T_o) \nabla \mathbf{B}^2$$

La modelització es troba en l'apartat 3.5.6.

- **Equació de conservació de l'energia tèrmica:**

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T \right) = \lambda \nabla^2 T + \Phi \quad (3.116)$$

Aquesta expressió s'obté en aplicar la hipòtesi de dissipació viscosa menys-preable (3.4.6) i alhora la modelització del flux de calor (3.5.2).

- **Llei d'Ohm:**

$$\mathbf{j} = \sigma (-\nabla \phi + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- **Equació de transport del camp magnètic:**

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}$$

On $\eta = \frac{1}{\sigma \mu_o}$.

3.7 Adimensionalització de les equacions de treball

Una pràctica molt utilitzada per comprendre el comportament d'equacions diferencials en derivades parcials és la tècnica de l'adimensionalització. Aquesta consisteix en treure les unitats a les variables que formen l'equació que es vol analitzar. S'aconsegueix dividint aquestes variables respecte constants que tinguin les mateixes unitats i alhora el mateix ordre de magnitud. Un cop es tenen les variables adimensionalitzades es procedeix a introduir-les dins de l'equació que es vol adimensionalitzar. En aquest procés s'obtenen números adimensionals, els quals són de gran utilitat, tan per entendre el comportament de les equacions, com per sintetitzar la informació.

3.7.1 Variables adimensionalitzades

En primer lloc, s'han de tenir present els diferents tipus de variables del problema, així com el coeficient a utilitzar per adimensionalitzar cadascuna d'elles. Aquestes són:

Variable	Simbol	Unitats	Coeficient	Variable Adimensional
Velocitat	\mathbf{v}	$[m/s]$	U_o	$\hat{\mathbf{v}}$
Pressió	p	$[Pa]$	$\rho_o U_o^2$	\hat{p}
Temperatura	T	$[K]$	$T_i - T_o$	$\hat{\theta}$
Font de calor	Φ	$[W/m^3]$	$\frac{\rho c p \Delta T U_o}{L}$	$\hat{\theta}$
Camp Magnètic	\mathbf{B}	$[Kg/As^2]$	B_o	$\hat{\mathbf{B}}$
Densitat de corrent	\mathbf{j}	$[A/m^2]$	$\sigma B_o U_o$	$\hat{\mathbf{j}}$
Potencial elèctric	ϕ	$[V]$	$B_o U_o L$	$\hat{\phi}$
Espai	x, y	$[m]$	L	\hat{x}, \hat{y}
Temps	t	$[s]$	L/U_o	\hat{t}

Taula 3.1: Adimensionalització de les variables

3.7.2 Equacions de treball adimensionalitzades

Totes les equacions que apareixen en aquest apartat s'han extret de l'apartat d'equacions de treball (3.6), i les diferents variables s'han adimensionalitzat seguit la taula 3.1.

- **Equació de conservació de la massa adimensionalitzada:**

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.117)$$

No s'estreu cap nombre adimensional.

- **Equació de conservació de la densitat de corrent elèctric adimensionalitzada:**

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0 \quad (3.118)$$

No s'estreu cap nombre adimensional.

- **Equació de conservació de la quantitat de moviment adimensionalizada amb terme font magnètic:**

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{v}} = -\nabla \hat{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \hat{\mathbf{v}} + N \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{B}} \quad (3.119)$$

La velocitat s'ha adimensionalitzat utilitzant la U_o . Els nombres adimensionals que governen el comportament de l'equació anterior són:

- **Nombre de Reynolds(Re):** representa la relació entre els esforços inercials respecte els viscosos.

$$Re = \frac{\rho U_o L}{\mu} = \frac{U_o L}{\nu} \quad (3.120)$$

On ρ és la densitat màssica, μ és la viscositat dinàmica i ν és la viscositat cinemàtica. Els altres termes són coeficients d'adimensionalització.

- **Nombre de Magnètic(N):** representa la relació entre els esforços magnètics respecte els inercials.

$$N = B_o^2 \left(\frac{\sigma L}{\rho U_o} \right) \quad (3.121)$$

On σ representa la conductivitat elèctrica. Els altres termes són coeficients d'adimensionalització.

- **Nom de Hartmann(Ha):** representa la relació entre els esforços magnètics respecte els esforços viscosos.

$$Ha = B_o L \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.122)$$

La relació entre els tres nombres adimensionals és:

$$Ha^2 = N Re \quad (3.123)$$

- **Equació de conservació de la quantitat de moviment adimensionalitzada amb terme font pel càlcul de la convecció natural:**

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{v}} = -\nabla \hat{p} + Pr \nabla^2 \hat{\mathbf{v}} + Ra Pr \hat{\theta} \hat{j} \quad (3.124)$$

El símbol \hat{j} significa que només es té en compte en direcció vertical.

A diferència de la convecció forçada, en convecció natural no existeix cap velocitat U_o de referència, de forma que es calcula un valor en funció de les propietats físiques del fluid i del problema. Aquest valor té unitats de velocitat i té un ordre de magnitud similar a la velocitat mitjana adoptada pel problema. Aquest es calcula com:

$$U_o = \frac{\alpha}{L} \quad (3.125)$$

On α representa la difusivitat tèrmica que s'expressa com $\frac{\lambda}{c_p \rho}$.

Els nombres adimensionals que governen l'equació anterior són:

- **Nom de Prandtl(Pr):** representa la relació entre la difusivitat de momentum respecte la difusivitat tèrmica.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (3.126)$$

On ν és la viscositat cinemàtica i α és la difusivitat tèrmica.

- **Nom de Rayleigh(Ra):** representa la relació entre la quantitat de calor transmessa per convecció respecte la quantitat de calor transmessa per conducció.

$$Ra = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\alpha \nu} \quad (3.127)$$

On ν és la viscositat cinemàtica, α és la difusivitat tèrmica, g és l'acceleració de la gravetat, β és el coeficient d'expansió tèrmic. Els altres termes són coeficients d'adimensionalització.

- **Nom de Grashof(Gr):** representa la relació entre les forces de flotació respecte els esforços viscosos.

$$Gr = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\alpha^2} \quad (3.128)$$

- **Equació de conservació de la quantitat de moviment adimensionalitzada amb terme font pel càlcul de la convecció magnètica per fluids paramagnètics:**

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{v}} = -\nabla \hat{p} + \frac{Pr}{(\gamma Ra)^2} \nabla^2 \hat{\mathbf{v}} - \frac{m Pr}{2} \hat{\theta} \hat{j} \quad (3.129)$$

El símbol \hat{j} significa que només es té en compte en direcció vertical.

A l'igual que la convecció natural, en convecció magnètica no existeix cap velocitat U_o de referència, de forma que es calcula un valor en funció de les propietats físiques del fluid i del problema. Aquest valor té unitats de velocitat i té un ordre de magnitud similar a la velocitat mitjana adoptada pel problema. Aquest es calcula com:

$$U_o = \frac{\alpha (\gamma Ra)^{0.5}}{L} \quad (3.130)$$

Els nombres adimensionals que apareixen en les equacions anteriors són:

- **Nom de Prandtl(Pr):** a l'igual que en convecció natural, representa la relació entre la difusivitat de momentum respecte la difusivitat tèrmica.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

On ν és la viscositat cinemàtica i α és la difusivitat tèrmica.

- **Nom de Rayleigh magnètic(γRa):** representa la relació entre la quantitat de calor transmesa per convecció magnètica respecte la quantitat de calor transmesa per conducció.

$$\gamma Ra = \frac{\chi_{v_o} B_o^2 \beta \Delta T L^2}{\mu_o \alpha \nu} \quad (3.131)$$

On ν és la viscositat cinemàtica, α és la difusivitat tèrmica, β és el coeficient d'expansió tèrmic, B_o és el camp magnètic al qual està sotmès el fluid, χ_{v_o} és la susceptibilitat magnètica específica a una T_o de referència. Els altres termes són coeficients d'adimensionalització.

- **Paràmetre adimensional de momentum(m):** representa la relació si la força de flotació es produïda per una variació de la susceptibilitat magnètica específica o bé per una variació de la densitat màssica.

$$m = 1 + \frac{1}{\beta T_o} \quad (3.132)$$

Quan el nombre m és petit, la variació de la densitat màssica predomina respecte la variació de la susceptibilitat específica.

- **Equació de conservació de l'energia tèrmica adimensionalitzada:**

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \hat{\theta} = \frac{1}{Pe} \nabla^2 \hat{\theta} + \hat{\Phi} \quad (3.133)$$

El Pe és un nombre adimensional anomenat Peclet, el qual representa la relació entre la velocitat de transport convectiva respecte la difusiva. Aquest és:

$$Pe = LU_o/\alpha \quad (3.134)$$

- **Llei d'Ohm adimensionalitzada:**

$$\hat{\mathbf{j}} = -\nabla \hat{\phi} + \hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{B}} \quad (3.135)$$

De la qual no se n'extreu cap nombre adimensional.

- **Equació de transport del camp magnètic adimensionalitzada:**

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial t} + (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{B}} = (\hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{Re_M} \nabla^2 \hat{\mathbf{B}} \quad (3.136)$$

El Re_M és un nombre adimensional anomenat Reynolds magnètic, per la seva semblança al Reynolds de l'equació de conservació de la quantitat de moviment. Així doncs, el Reynolds magnètic representa la relació entre la variació del camp magnètic degut a la velocitat del medi, respecte la variació produïda per efectes difusius. Aquest és:

$$Re_M = LU_o/\eta \quad (3.137)$$

On η representa la difusivitat magnètica. Els altres termes són coeficients d'adimensionalització. És interessant tenir present que en la major part de les aplicacions enginyerils que tracten sobre magnetohidrodinàmica, el Reynolds magnètic és molt baix. Això és degut al fet que la conductivitat elèctrica i la susceptibilitat magnètica són molt petites, a l'igual que ho són l'ordre de magnitud de les longituds i les velocitats del problema.

Així doncs, degut aquest Reynolds magnètic baix, l'equació es pot expressar com:

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{B}} \approx 0 \quad (3.138)$$

Aquesta laplaciana expressa com el camp magnètic del problema depèn únicament de les condicions de contorn, de forma que no és alterat per la velocitat del conductor elèctric.

Val a dir, que el Reynolds magnètic pot ser molt gran en alguns casos particulars com l'astrofísica degut que l'ordre de magnitud de les longituds és enorme en els planetes. A més a més, en fluids que es trobin en estat plasma, es pot considerar que la conductivitat elèctrica és infinitament gran. En aquests casos l'equació que governa el camp magnètic és:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial t} + (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{B}} - (\hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{v}} \approx 0 \quad (3.139)$$

En aquest cas el camp magnètic depèn totalment del moviment del fluid. Quan l'equació anterior és vàlida, es parla d'un flux congelat.

3.8 Bibliografia

- [1] L.R. Cramer and Shih i Pai. *Magnetofluid dynamics for engineers and applied physicists*. Scripta, 1973.
- [2] J.C. Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 155:459–512, 1864.
- [3] T.P. Bednarz, W. Lin, L., J.C. Patterson, C. Lei, and S.W. Armfield. Scaling for unsteady thermo-magnetic convection boundary layer of paramagnetic fluids of $\text{Pr} > 1$ in micro-gravity conditions. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 30:1157–1170, 2009.

Bibliografia

Capítol 4

Anàlisi Numèric

4.1 Introducció

La formulació matemàtica descrita a l'apartat 3 solament té solució analítica en casos concrets, on les condicions de contorn són molt restrictives. Per tal de poder utilitzar aquest tipus d'equacions en un àmbit molt més ampli s'utilitza l'anàlisi numèric.

L'anàlisi numèric és una branca de les matemàtiques que estudia com dissenyar algoritmes capaços de transformar operacions matemàtiques complexes en simples operacions algebraiques. Les tècniques capaces de dur a terme aquest tipus de transformacions són els mètodes numèrics.

Durant les últimes dècades, l'anàlisi numèric ha experimentat un creixent ús en el món industrial, degut a la elevada fiabilitat dels seus resultats, així com també la seva versatilitat i rapidesa. Aquest fenomen, també està relacionat amb el vertiginós ritme de creixement de la potència computacional al llarg de les últimes dècades.

En aquest apartat del projecte s'explica el tractament numèric que s'ha realitzat a les equacions de treball per tal de poder-les resoldre mitjançant la tècnica dels volums finits. El programa creat en aquest projecte es basa en aquesta tècnica.

4.2 Equació de convecció – difusió

Prèviament, avanç de discretitzar les equacions de treball, és important tenir present que totes elles comparteixen una estructura molt similar. Aquesta estructura s'anomena equació de convecció - difusió. Tenint present que les propietats físiques es consideren constants, l'equació de convecció - difusió s'expressa com:

$$\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi \right) = \Gamma \nabla^2 \phi + S \quad (4.1)$$

On l'acumulació de ϕ ($\frac{\partial(\phi)}{\partial t}$), més el flux net sortint de les corrents convectives $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi$, més el flux net sortint de les corrents difusives $\Gamma \nabla^2 \phi$, ha de ser igual a la generació de ϕ pels efectes del terme font S .

Per simplificació de les expressions de la taula, ϕ també pot ser un vector. Aquest detall és important alhora de definir el transport de propietats vectorials com la velocitat i el camp magnètic.

Tot i compartir la mateixa estructura matemàtica, cada equació de conservació consta de les seves pròpies particularitats. En la següent taula s'observen les equacions de treball, adaptades a l'estructura de l'equació de convecció-difusió.

Equació	ϕ	Γ	S
Continuitat	1	0	0
Quantitat de moviment	\mathbf{v}	μ	$-\nabla p + \rho \mathbf{f}$
Energia tèrmica	T	$\frac{\gamma}{c_p}$	$\frac{\Phi}{c_p}$
Transport del camp magnètic	\mathbf{B}	$\frac{\rho}{\sigma \mu_0}$	$\rho (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}$

Taula 4.1: Particularització dels termes de l'equació de convecció difusió per a les equacions de treball

En l'anterior taula es pot observar com en cap de les equacions apareix la pressió p com a ϕ . Aquest fet representa un problema en flux compressible, ja que la pressió és la variable que té la funció de que les equacions de quantitat de moviment també compleixin continuïtat. Els models matemàtics utilitzats per resoldre les equacions de Navier-Stokes en flux incompressible es basen en aquest fet.

4.3 Discretització numèrica per volums finits

El mètode dels volums finits és una tècnica de discretització molt coneguda en l'àmbit de l'anàlisi numèric aplicat als fenòmens de transferència de calor i mecànica de fluids, degut a les seves qualitats. Aquestes són:

1. Imposa conservació de forma natural
2. Flexibilitat geomètrica
3. Resol les equacions de forma integral
4. Tècnica de discretització molt intuïtiva, que permet una interpretació física sobre cadascun dels termes de les equacions discretes.

Aquest mètodes consisteix en discretitzar un domini en diferents volums de control(volums finits), com si fos una malla, i aplicar l'equació en qüestió de forma integral en cadascun dels volums de control creats. Es parlar de diferents tipus de tractaments en funció d'on s'avalua l'equació de convecció-difusió dins el propi volum finit. Aquests són:

- **Collocated:** aquest tractament es basa en avaluar el valor de totes les variables del problema al centre dels volums finits. El problema d'aquest mètode es troba en la resolució del camp de velocitats en l'equació de Navier Stokes. Si s'utilitza aquesta tècnica sense cap procés previ, el camp de pressions i el de velocitats queda desacoblat, de forma que porta a resultats erronis. Això es deu a que la velocitat d'un punt no depèn de la pressió del mateix punt. Aquest fenomen s'anomena *checkerboard* i és un clàssic en el món de la dinàmica de fluids computacional.
- **Staggered:** a diferència de la malla “Collocated”, aquest altre tractament avalua les variables en diferents punts del volum de control, per tal d'evitar problemes de desacobllament com el *checkerboard*. És comú avaluar les velocitats a les cares dels volums de control, mentre que les altres propietats es continuen avaluant al mateix centre. El tractament staggered es complicat d'avaluar en malles no ortogonals i no estructurades, tot i que també es fa.

El codi realitzat en aquest projecte està dissenyat per un tractament staggered ja que no es produeix el fenomen del *checkerboard*. Tot i això, degut a la seva

importància es fa una menció continuada dels dos tipus de tractaments al llarg de tot l'apartat d'anàlisi numèric.

4.3.1 Tipus de malla

Amb el mètode de volums finits, la discretització espacial del domini a estudiar (macro volum de control) es pot dur a terme de diferents formes en funció de la seva geometria i de la física que envolta el problema. Els tipus de malles en què es pot dividir un domini són:

- **Malla estructurada:** la seva característica principal és que cada node té un nombre constant de nodes que el rodegen. Des d'un punt de vista de programació, aquesta particularitat simplifica molt el codi així com també facilita la classificació dels nodes. A més a més, el sistema d'equacions que s'obté en aplicar aquesta tècnica, permet utilitzar algoritmes més eficients que necessiten menys potència computacional. Dins de les malles estructurades, n'existeixen diferents tipus:
 - **Ortogonals:** en aquest cas tot el domini comparteix la mateixa estructura. També es caracteritza per que els fluxos són normals a les cares dels volums de control, la qual cosa també facilita la programació. En cas de que la malla sigui també uniforme significa que no només comparteixen la mateixa forma, sinó que també tenen les mateixes dimensions.

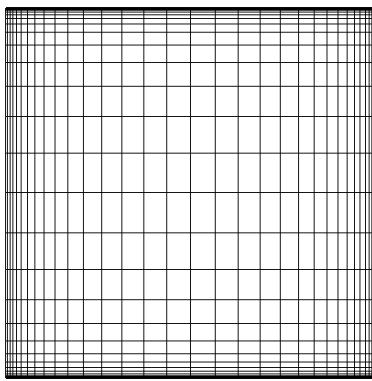


Figura 4.1: Malla estructurada ortogonal

- **No Ortogonals:** les malles s'adapten al contorn del domini en funció de la forma d'aquest. Permet realitzar geometries més complicades, a

diferència de les malles ortogonals, però la dificultat del codi augmenta. A més a més, en aquest cas els flux ja no és normal a les cares dels volums de control.

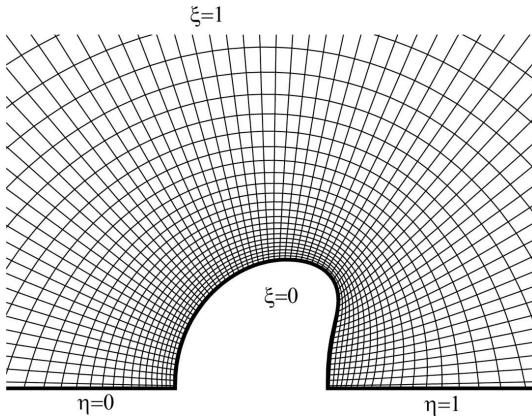


Figura 4.2: Malla estructurada no ortogonal[1]

- **Malla no estructurada:** a diferència de la malla estructurada, en aquest tipus de malles els nodes no tenen un nombre constant de nodes veïns. Aquesta característica dificulta de manera molt apreciable la programació. Els mètodes de resolució dels sistemes d'equacions també són més complexos i requereixen més potència computacional. Com avantatge, aquest tipus de malla et permet una gran flexibilitat en la geometria, així com també et permet densificar zones del domini en concret.

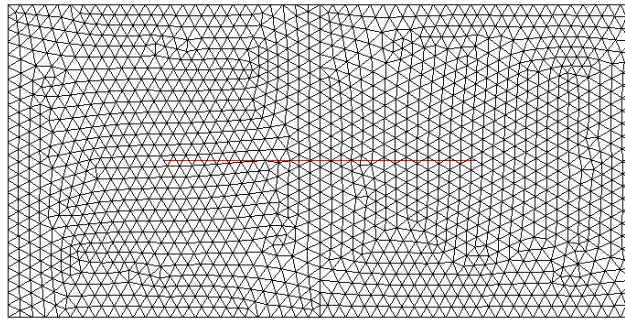


Figura 4.3: Malla no estructurada

En aquest projecte s'utilitzen malles estructurades ortogonals no uniformes, així com també malles no estructurades. Els mètodes numèrics explicats fan referència a les malles no estructurades degut que són més generals i per tant, són útils també per a les malles estructurades segün ortogonals o no.

4.3.2 Equació de convecció – difusió: discretització

Com s'ha demostrat, les equacions de treball responen a la mateixa estructura de convecció-difusió. Així doncs, la discretització mitjançant la tècnica de volums finits s'aplica a la pròpia equació de convecció - difusió en comptes de dur-se a terme en cadascuna de les equacions de treball, obtenint així un resultat més genèric. La discretització per volums finits és un mètode que requereix la integració espacial i temporal de les equacions a utilitzar.

Discretització espacial

La discretització espacial consisteix en integrar en volumètricament l'equació de convecció - difusió. Aquesta és:

$$\rho \left(\int_{\mathbb{V}} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{\mathbb{V}} \nabla \cdot (\mathbf{v} \phi) dV \right) = \Gamma \int_{\mathbb{V}} \nabla^2 \phi dV + \int_{\mathbb{V}} S dV \quad (4.2)$$

Aplicant el teorema de la divergència de Gauss, es transformen les integrals volumètriques anteriors de la part convectiva i difusiva, en integrals superficials cícliques. Aplicant aquest canvi s'obté:

$$\rho \left(\int_{\mathbb{V}} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \oint_A \phi_f (\mathbf{v}_f \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA \right) = \Gamma \oint_A \nabla \phi_f \cdot \hat{\mathbf{n}} dA + \int_{\mathbb{V}} S dV \quad (4.3)$$

A continuació es té en compte que la variació temporal de ϕ és constant en tot el seu volum de control, així com també ho és el terme font. Per aquest motiu poden sortir fora l'integral volumètrica. A més a més, també es considera que la velocitat del fluid a les superfícies del volum de control és constant en tota ella, així com també ho són la propietat ϕ i el gradient de ϕ . D'aquesta forma, l'equació anterior es pot transformar en el següent sumatori:

$$\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbb{V} + \sum_{f \in F(c)} \phi_f (\mathbf{v}_f \cdot \hat{\mathbf{n}}) A_f \right) = \Gamma \sum_{f \in F(c)} \nabla \phi_f \cdot \hat{\mathbf{n}} A_f + S \mathbb{V} \quad (4.4)$$

Es pot observar com en l'equació anterior no es fa referència en cap tipus de geometria en concret ja que es vàlida per qualsevol tipus de malla.

Discretització temporal

La discretització temporal consisteix en integrar temporalment l'equació de conveció - difusió. S'utilitza com a base l'equació discretitzada en l'espai.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = R(\mathbf{v}, \phi, S) \quad (4.5)$$

On,

$$R(\mathbf{v}, \phi, S) = \frac{1}{\rho \nabla} \left(-\rho \sum_{f \in F(c)} \phi_f (\mathbf{v}_f \cdot \hat{\mathbf{n}}) A_f + \Gamma \sum_{f \in F(c)} \nabla \phi_f \cdot \hat{\mathbf{n}} A_f + S \nabla \right) \quad (4.6)$$

S'integra temporalment l'equació 4.5,

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial t} \partial t = \int R(\mathbf{v}, \phi, S) \partial t \quad (4.7)$$

Per una banda, la part esquerra de l'integral representa el terme acumulat. Des d'un punt de vista numèric el gradient temporal de la propietat que es transporta (ϕ), es constant en un increment de temps determinat. Llavors el gradient temporal es descompon mitjançant una aproximació de segon ordre de la sèrie de Taylor. Aquest queda:

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial t} \partial t \approx \frac{\partial \phi^{n+1/2}}{\partial t} \Delta t \quad (4.8)$$

On,

$$\frac{\partial \phi^{n+1/2}}{\partial t} \approx \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (4.9)$$

Per tant,

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial t} \partial t \approx \phi^{n+1} - \phi^n \quad (4.10)$$

La variable n , representa l'instant de temps en el qual es coneix el valor de totes les variables, mentre que les que es troben en un instant de temps posterior $n + 1$ són una incògnita.

Per altra banda, la part esquerra de l'integral es pot desenvolupar seguint diferents esquemes temporals en funció dels requisits del problema. Cal tenir present en que en tots els casos, la funció $R(\mathbf{v}, \phi, S)$ és constant en tot el Δt (per aquest motiu surt fora l'integral), tot i que es pot avaluar en instants de temps diferent ($n, n + 1, n - 1$). Els esquemes temporals es poden dividir en dos grans parts:

- **Mètodes explícits:** es basen en utilitzar informació coneguda de l'instant de temps $n, n - 1, n - i \dots$ per tal d'obtenir el valor de la propietat que es transporta en l'instant $n + 1$. Aquest tipus de mètodes son molt ràpids perquè no s'ha de resoldre cap tipus de sistema d'equacions. A més a més, els esquemes explícits es comporten millor per problemes que no tenen un estat estacionari, com els casos turbulentos.

Tot i això, tot mètode explícit té problemes amb el Δt , ja que si se n'utilitza un massa gran, el sistema divergeix. Per tal de controlar el valor òptim del Δt en cada iteració, s'utilitza una tècnica anomenada *CFL*. Aquesta consisteix en determinar el Δt assegurant que es compleixin les següents inequacions:

$$\Delta t \left(\frac{|\mathbf{v}_i|}{\Delta x_i} \right)_{max} \leq C_{conv} \quad (4.11)$$

$$\Delta t \left(\frac{\nu}{\Delta x_i^2} \right)_{max} \leq C_{visc} \quad (4.12)$$

On C_{conv} i C_{visc} han de ser més petits que la unitat. La literatura aconsella utilitzar els següents valors, $C_{conv} = 0.35$ i $C_{visc} = 0.2$.

- **Mètodes implícits:** aquest tipus de mètodes es caracteritzen per utilitzar la informació de l'instant $n + 1$ per tal d'obtenir el valor de la propietat que es transporta en el mateix instant ($n + 1$). Degut que la informació de l'instant $n + 1$ no es coneix, s'ha de resoldre un sistema d'equacions. Com avantatge es pot utilitzar Δt més grans, per tal d'arribar més ràpidament al resultat final. Tot i això, aquest mètodes és més lent degut que s'ha de resoldre un sistema d'equacions, i no és aconsellable per problemes que no tinguin un estat permanent.

Tenint present la diferència entre mètodes explícits i implícits, a continuació s'expliquen 4 dels esquemes temporals més utilitzats:

1. **Euler explícit:** és una tècnica de primer ordre que consisteix en avaluar la funció $R(\mathbf{v}, \phi, S)$, en l'instant de temps n . Utilitzant aquest mètode, la part dreta de l'equació s'expressa com:

$$\int R(\mathbf{v}, \phi, S) dt \approx R(\mathbf{v}^n, \phi^n, S^n) \Delta t \quad (4.13)$$

2. **Euler implícit:** és una tècnica de primer ordre que consisteix en avaluar la funció $R(\mathbf{v}, \phi, S)$ en l'instant $n + 1$. Utilitzant aquest mètode, la part dreta de

l'equació s'expressa com:

$$\int R(\mathbf{v}, \phi, S) dt \approx R(\mathbf{v}^{n+1}, \phi^{n+1}, S^{n+1}) \Delta t \quad (4.14)$$

3. **Crank - Nicolson:** en aquest cas ens trobem en un mètode de segon ordre on la funció $R(\mathbf{v}, \phi, S)$ es avaluada en dos instants de temps, $l'n$ i $l'n + 1$ (mètode implícit). Aquest mètode presenta problemes oscil·latoris en cas que el Δt no sigui suficientment petit, o la malla sigui massa basta. Utilitzant aquest mètode, la part dreta de l'equació s'expressa com:

$$\int R(\mathbf{v}, \phi, S) dt \approx \frac{1}{2} (R(\mathbf{v}^{n+1}, \phi^{n+1}, S^{n+1}) + R(\mathbf{v}^n, \phi^n, S^n)) \Delta t \quad (4.15)$$

4. **Adams - Bashforth:** és una tècnica de segon ordre explícita que consisteix en avaluar la funció $R(\mathbf{v}, \phi, S)$, en dos instants de temps, $l'n$ i $l'n - 1$. Respecte l'Euler explícit, té l'avantatge que és de segon ordre. Utilitzant aquest mètode, la part de la dreta de l'equació s'expressa com:

$$\int R(\mathbf{v}, \phi, S) dt \approx R\left(\mathbf{v}^{n+1/2}, \phi^{n+1/2}, S^{n+1/2}\right) \Delta t \quad (4.16)$$

On,

$$\begin{aligned} R\left(\mathbf{v}^{n+1/2}, \phi^{n+1/2}, S^{n+1/2}\right) &\approx \frac{3}{2}R(\mathbf{v}^n, \phi^n, S^n) - \\ &- \frac{1}{2}R(\mathbf{v}^{n-1}, \phi^{n-1}, S^{n-1}) + O(\Delta t^2, \Delta x^m) \end{aligned} \quad (4.17)$$

En aquest projecte s'utilitza sempre l'esquema explícit *Adams - Bashforth*, degut que és de segon ordre i no és necessari resoldre cap sistema d'equacions. A més a més, com ja s'ha comentat, els esquemes explícits es comporten millor per problemes que no tenen un estat estacionari, com els casos turbulentos. Així doncs, aquesta aposta també serveix per deixar oberta la possibilitat d'acabar resolent fenòmens d'aquest tipus.

Per tant, l'equació de convecció - difusió discretitzada tant espacial com temporalment, queda expressada de la següent forma:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t \left(\frac{3}{2}R(\mathbf{v}^n, \phi^n, S^n) - \frac{1}{2}R(\mathbf{v}^{n-1}, \phi^{n-1}, S^{n-1}) \right) \quad (4.18)$$

On la definició de $R(\mathbf{v}, \phi, S)$ es troba en l'equació 4.6.

4.3.3 Anàlisi del terme convectiu

El terme convectiu s'expressa de la següent forma dins l'equació de convecció-difusió discretitzada:

$$C = \sum_{f \in F(c)} \rho \phi_f (\mathbf{u}_f \cdot \hat{\mathbf{n}}) s_f = \sum_{f \in F(c)} \dot{m}_f \phi_f \quad (4.19)$$

El principal dilema en aquesta equació es troba en l'avaluació de la propietat transportada a les cares (ϕ_f), degut que les propietats només s'avaluen als centres dels volums finits. Existeixen diferents tipus d'esquemes numèrics per tal de determinar el valor de la variable transportada a la cara. En funció del tipus de problema a resoldre s'escolleix l'esquema numèric més convenient. A continuació, s'expliquen els esquemes numèrics més importants que s'han utilitzat en el desenvolupament d'aquest projecte. La definició de cadascun dels esquemes es dur a terme per a malla no estructurada, ja que també serveix per a malla estructurada. Tota la nomenclatura de punts i cares fa referència a la figura 4.4.

- **Central Difference Scheme (CDS):** esquema numèric de segon ordre, que consisteix en interpolar entre els dos nodes, \mathbf{P} i \mathbf{F} , situats a banda i banda de la cara f . Utilitzant aquest esquema numèric, l'expressió matemàtica per determinar ϕ_f és:

$$\phi_f = \phi_P + \left(\frac{\mathbf{P}f \cdot \hat{\mathbf{PF}}}{|\mathbf{PF}|} \right) (\phi_F - \phi_P) \quad (4.20)$$

El problema principal d'aquest esquema es troba en que provoca oscil·lacions i tendeix a divergir en cas que, en el problema a solucionar, existeixin Peclets locals més grans de 2.

- **Symmetry-Preserving Scheme:** esquema numèric de segon ordre, que consisteix en fer la mitjana entre els dos nodes, \mathbf{P} i \mathbf{F} , situats a banda i banda de la cara f . Matemàticament, aquest esquema s'expressa d'una forma molt senzilla:

$$\phi_f = \frac{\phi_P + \phi_F}{2} \quad (4.21)$$

S'utilitza únicament per resoldre l'equació de quantitat de moviment, ja que en les altres equacions no té sentit. Això es deu, al fet que amb aquest tipus d'esquema queda acotat l'error produït per la discretització espacial en l'equació de conservació de l'energia (sempre i quan la malla estigui ben

feta). Aquesta característica és de gran importància quan es volen resoldre problemes on el fluid es troba en estat turbulent. Per més informació consultar l'article de Lehmkuhl O. et al. [2].

- **Upwind Difference Scheme (UDS):** esquema numèric de primer ordre, que es caracteritza per proporcionar molta estabilitat al sistema. Consisteix en imposar el valor de la propietat a la cara en funció de la direcció del flux. S'expressa com:

$$\phi_f = \phi_U \quad (4.22)$$

On:

$$\begin{aligned} \phi_U &= \phi_P & \dot{m}_f &\geq 0 \\ \phi_U &= \phi_F & \dot{m}_f &< 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Com a desavantatge, aquest tipus d'esquema numèric provoca falsa difusivitat, anomenada també, difusivitat numèrica.

- **Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics (QUICK):** esquema quadràtic de tercer ordre que consisteix en utilitzar dos nodes aigües amunt i un node aigües avall. Matemàticament s'expressa com:

$$\bar{\phi}_f = \bar{x}_f + \frac{\bar{x}_f (\bar{x}_f - 1)}{\bar{x}_{C'} (\bar{x}_{C'} - 1)} (\bar{\phi}_{C'} - \bar{x}_{C'}) \quad (4.24)$$

Les magnituds amb una barra, estan normalitzades seguint la següent relació:

$$\bar{\phi} = \frac{\phi - \phi_{D'}}{\phi_{U'} - \phi_{D'}} \quad \bar{x} = \frac{x - x_{D'}}{x_{U'} - x_{D'}} \quad (4.25)$$

On:

$$\begin{aligned} \phi_{U'} &= \phi_U + \nabla \phi_U \cdot U \vec{U}' \\ \phi_{C'} &= \phi_C + \nabla \phi_C \cdot C \vec{C}' \\ \phi_{D'} &= \phi_D + \nabla \phi_D \cdot D \vec{D}' \end{aligned} \quad (4.26)$$

On U, representa el punt "upstream" o aigües amunt, D representa el punt "downstream" o aigües avall i C és el punt situat entre U i D. En el cas que $\dot{m}_f < 0$, U seria A', D seria F' i C seria P'.

Pel que fa a les distàncies x' , estan projectades en la direcció \hat{v}_f .

Un dels principals problemes que presenta el QUICK es que pot calcular resultats físicament no possibles, ja que és un esquema quadràtic que no està limitat.

- **Sharp and Monotonic Algorithm for Realistic Transport (SMART):** aquest esquema numèric esta forma per un conjunt d'esquemes, els quals inclou el UPWIND i el QUICK, entre d'altres. Consisteix en aplicar el millor mètode de possibles en funció de les característiques locals del fluid, de forma que s'evitin problemes d'oscil·lacions en el CDS o bé no s'utilitzin els resultats físicament impossibles en el QUICK.

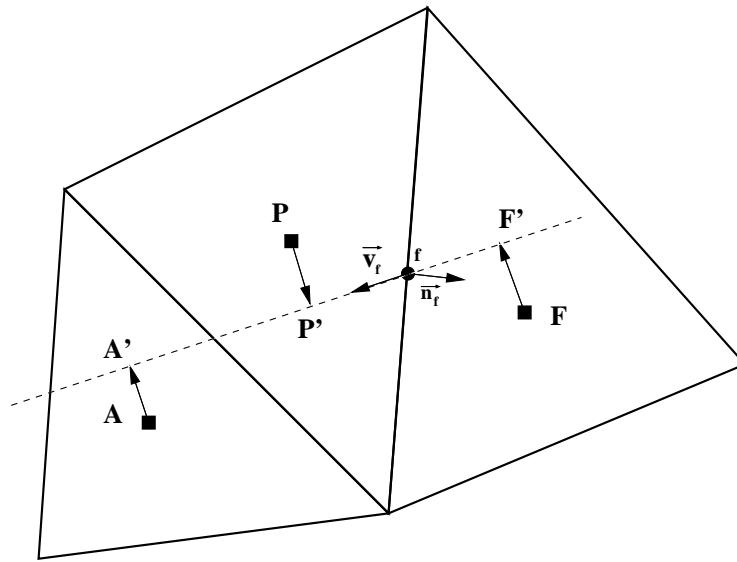


Figura 4.4: Detall dels paràmetres geomètrics per la avaluació del terme convectiu

4.3.4 Anàlisi del terme difusiu

La discretització del terme difusiu utilitzant la tècnica dels volums finits, tal i com s'ha explicat a l'apartat 4.3.2, és:

$$D = \Gamma \sum_{f \in F(c)} \nabla \phi_f \cdot \hat{n} A_f \quad (4.27)$$

Existeixen diferents aproximacions per calcular el terme difusiu. En el desenvolupament d'aquest projecte s'ha utilitzat el *Direct Gradient Evaluation*, ja que evalua el gradient directament. Aquest és:

$$D = \Gamma \sum_{f \in F(c)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_f A_f \approx \Gamma \sum_{f \in F(c)} \frac{\phi_{F'} - \phi_{P'}}{\mathbf{P} \mathbf{F} \cdot \hat{n}} A_f \quad (4.28)$$

On:

$$\begin{aligned}\phi_{P'} &\approx \phi_P + \nabla\phi_P \cdot \mathbf{PP}' \\ \phi_{F'} &\approx \phi_F + \nabla\phi_F \cdot \mathbf{FF}'\end{aligned}\quad (4.29)$$

Cal dir que per mallas estructurades les distàncies \mathbf{PP}' i \mathbf{FF}' són 0, ja que el vector \hat{s} i \hat{n} són coincidents. En canvi, per mallas no estructurades les distàncies anteriors són diferents de 0. Tot i això, per malla no estructurada, es poden negligir els termes de la dreta de l'equació 4.29, sempre i quan la malla sigui bastant uniforme. Així doncs el terme difusiu s'avalua com:

$$D \approx \Gamma \sum_{f \in F(c)} (\phi_F - \phi_P) \frac{A_f}{\delta d_f} \quad (4.30)$$

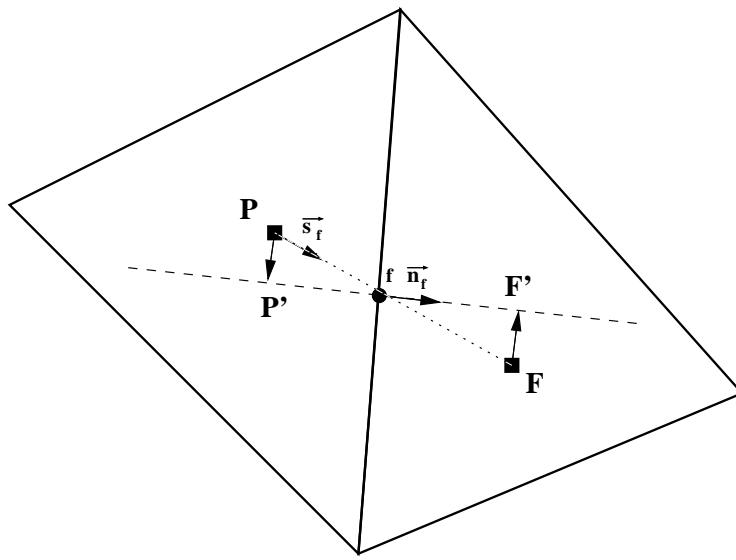


Figura 4.5: Detall dels paràmetres geomètrics per la avaluació del terme difusiu

4.4 Solució de les equacions de treball

Fins al moment, s'han exposat i explicat les diferents equacions diferencials en derivades parcials que defineixen la física del problema, així com també els mètodes numèrics necessaris per tal de transformar-les en un sistema d'equacions algebraiques. Els dos principals problemes que es plantegen per tal resoldre aquest sistema d'equacions són:

- **Acoblament:** aquest tipus de sistema d'equacions algebraic es caracteritza per tenir les diferents variables, que el caracteritzen, fortament acoblades entre elles. Aquests són:
 - **Velocitat - Pressió:** aquestes dues variables estan fortament acoblades, degut que, en fluids incompressibles, la pressió s'encarrega de que el camp de velocitats compleixi massa en tot moment. Si el mètode de solució no acoba aquestes variables correctament, s'obtenen resultat que tot i tenir sentit matemàtic, no tenen sentit físic. Aquest problema ja s'ha comentant anteriorment i rep el nom de *checkerboard*. En aquest mateix capítol s'en fa una explicació més detallada.
 - **Velocitat - Temperatura:** aquest tipus d'acoblament és important en problemes de convecció natural, on la pròpia temperatura afecta directament en el camp de velocitats. En convecció forçada aquesta acoblament és inexistent.
 - **Velocitat - Densitat de corrent elèctric:** aquest tipus d'acoblament és important en problemes magnetohidrodinàmics, on el propi camp de velocitats induceix una densitat de corrent elèctrica, la qual afecta al mateix camp de velocitats.
- **No linealitat de les equacions:** l'equació de conservació de la quantitat de moviment es caracteritza per ser no lineal degut al terme convectiu. Aquesta particularitat dificulta la resolució, sobretot a Reynolds elevats on la part no lineal cobra importància.

En aquest apartat, totes les expressions matemàtiques fan referència a la figura 4.6, la qual mostra un volum finit d'una malla no estructurada amb les seves cares i volums veïns corresponents.

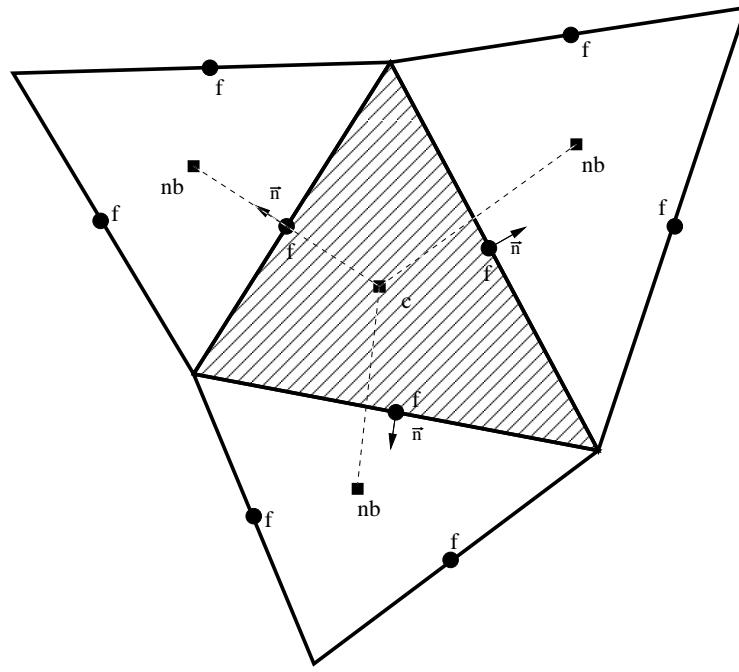


Figura 4.6: Detall dels paràmetres geomètrics per la solució de les equacions de treball

4.4.1 Solució de l'equació de la conservació de quantitat de moviment

S'utilitza l'equació de convecció - difusió discretitzada tan espacial com temporalment (esquema temporal Adams-Bashforth). Aquest cop, en comptes d'expressar la variable a transportar amb el símbol genèric ϕ , s'utilitza el vector velocitat \mathbf{v} , ja que és la variable transportada en l'equació de conservació de la quantitat de moviment. L'expressió resultant és:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \Delta t \left(\frac{3}{2} R(\mathbf{v}^n, \mathbf{S}^n) - \frac{1}{2} R(\mathbf{v}^{n-1}, \mathbf{S}^{n-1}) \right) - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (4.31)$$

On:

$$R(\mathbf{v}, \mathbf{S}) = \frac{1}{\rho \forall} \left(-\rho \sum_{f \in F(c)} \mathbf{v}_f (\mathbf{v}_f \cdot \hat{\mathbf{n}}) A_f + \Gamma \sum_{f \in F(c)} \nabla \mathbf{v}_f \cdot \hat{\mathbf{n}} A_f + \mathbf{S} \forall \right) \quad (4.32)$$

S'observen dos trets distintius en l'equació anterior, respecte l'equació discretitzada original de convecció difusió. En primer lloc, el gradient de pressions no s'inclou

dins el terme font, degut que és una variables que no es coneix. En segon lloc, el terme font, s'expressa com vector a l'igual que es substitueix ϕ per un vector. Aquest canvi es deu pel fet de expressar l'equació de conservació de la quantitat de moviment en una única equació indiferentment de les coordenades espacials.

Per tal de resoldre l'equació de conservació de quantitat de moviment s'utilitza el mètode FSM (*Fractional Step Method*). Aquest mètode es basa en el teorema de descomposició de Helmholtz-Hodge [3]. El teorema verifica la possibilitat de modificar l'equació anterior de la següent forma. Per començar, apareix el terme de velocitat predictora (\mathbf{v}_p^n), que ve a ser un símil numèric de la velocitat real sense la necessitat de que compleixi massa. Matemàticament s'expressa com:

$$\mathbf{v}_p^n = \mathbf{v}^n + \Delta t \left(\frac{3}{2} R(\mathbf{v}^n, \mathbf{S}^n) - \frac{1}{2} R(\mathbf{v}^{n-1}, \mathbf{S}^{n-1}) \right) \quad (4.33)$$

Llavors es pot expressar l'equació 4.31, com:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}_p^n - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (4.34)$$

Tenint present que el camp de velocitats $n + 1$ ha de complir massa, si s'aplica el divergent a l'equació anterior, el terme esquerra ha de ser necessàriament tal i com marca l'equació de la continuïtat. Així que:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{v}_p^n - \nabla \cdot \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (4.35)$$

$$\frac{\Delta t}{\rho} \nabla^2 p^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{v}_p^n \quad (4.36)$$

L'equació 4.36 és coneguda com una equació de Poisson, la qual es caracteritza per ser una equació diferencial en derivades parcials no homogènia. També es pot definir com una laplaciana (∇^2) igualada a un terme no nul.

Per resoldre l'equació de Poisson numèricament, utilitzant la tècnica dels volums finits, és necessari integrar en el volum de control corresponent. Així doncs:

$$\frac{\Delta t}{\rho} \int_{\mathbb{V}} \nabla^2 p^{n+1} dV = \int_{\mathbb{V}} \nabla \cdot \mathbf{v}_p^n dV \quad (4.37)$$

On s'aplica el teorema de la divergència de Gauss:

$$\frac{\Delta t}{\rho} \oint_A \nabla p_f^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \oint_A \mathbf{v}_{pf}^n \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (4.38)$$

Es fa la aproximació de que el gradient de pressions es constant en la cara del volum en qüestió, però pot variar per les diferents cares del propi volum de control. S'aplica la mateixa aproximació a la velocitat predictora. De forma que es pot transformar l'equació cíclica superficial anterior en dos sumatoris a les cares. Per tant:

$$\frac{\Delta t}{\rho} \sum_{f \in F(c)} (p_{nb}^{n+1} - p_c^{n+1}) \frac{A_f}{\delta d_f} = \sum_{f \in F(c)} V_{pf}^n A_f \quad (4.39)$$

On p_{nb} és la pressió del node veí que comparteix la mateixa cara, p_c és la pressió del volum de control que s'examina, A_f representa la superfície de la cara en qüestió, δd_f és la distància entre el node c i el node nb projectada en la direcció normal a la cara (\hat{n}) i V_{pf}^n és la velocitat normal a la cara ($\mathbf{v}_{pf}^n \cdot \hat{n}$).

Finalment, per tal d'obtenir el nou camp del velocitat en l'instant $n + 1$, es retorna a l'equació de partida 4.31 i s'integra en el volum de control corresponent. On mitjançant el teorema de gauss pel gradient s'obté el següent resultat:

$$\mathbf{v}_c^{n+1} = \mathbf{v}_{pc}^n - \frac{\Delta t}{\rho \nabla_c} \sum_{f \in F(c)} p_f^{n+1} \hat{n} A_f \quad (4.40)$$

De l'expressió 4.39 sorgeix un sistema d'equacions algebraiques que s'ha de resoldre mitjançant un *solver*. En la literatura existeixen una gran varietat de *solvers*, alguns dels quals s'expliquen a l'apartat 4.5.

El principal problema d'aquest sistema d'equacions està en on s'avaluen les diferents variables p i v dins el volum del control. En funció de si s'avaluen al centre del volum de control o a les cares d'aquest es parla d'un tractament “Collocated” o “Staggered”. Aquest dos tipus de tractaments ja s'han definit prèviament al principi del tema 4.3.

El problema resolt amb el codi creat en aquest projecte, utilitza un tractament *staggered* per a malla estructurada, mentre que el problema resolt amb el codi *Termofluids*, s'avalua amb un tractament “Collocated” per tot tipus de malla.

A continuació, s'explica amb més detall l'aplicació d'aquests dos tipus de tractaments, amb els seus respectius avantatges i inconvenients, a l'hora de resoldre l'equació 4.39.

Tractament *Staggered*

En aquest tipus de tractament, la velocitat és avaluada a les cares del volum de control, mentre que la pressió continua sent avaluada al centre del volum de control. Amb aquesta estratègia s'aconsegueix mantenir un fort acoblament entre el camp vectorial de velocitats i el camp escalar de pressures, així com també assegura que tot camp de velocitats compleixi massa en tot moment. Aquest últim tret, es deu al fet que no existeix cap error quan es calcula la velocitat predictora normal a la cara (V_{pf}^n), ja que directament s'avalua en aquell punt.

Per més informació sobre el procediment correcte per implementar un tractament “*Staggered*” per malla no estructurada, consultar el document escrit per Jofre.L. et al. [4].

Tractament *Collocated*

A diferència del tractament “*Staggered*”, en el tractament “*Collocated*” s’avaluen totes les propietats al centre del volum de control. Per tant, quan es calcula la velocitat predictora normal a la cara s’ha d’interpolari (s’indueix un error) entre el node del propi volum de control (c) i el node veí que comparteix la mateixa cara (nb). Per un tractament “*Collocated*” els termes de l’equació 4.39 i 4.40 són:

$$V_{pf}^n = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{pn}^n + \mathbf{v}_{pc}^n) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad p_f^{n+1} = \frac{1}{2} (p_c^{n+1} + p_{nb}^{n+1}) \quad (4.41)$$

Mitjançant l’equació 4.40, s’obté el nou camp de velocitats en l’instant $n + 1$. Amb aquest tractament, a diferència de la malla “*Staggered*”, per assegurar que les velocitats normals a les cares compleixin massa en tot el volum de control, s’ha de realitzar el següent tractament, similar a la conservació de massa proposada per [5]. En primer lloc, s’integra volumètricament l’equació 4.35 i s’utilitza el teorema de la divergència de Gauss per obtenir la següent expressió:

$$\oint_A \mathbf{v}_f^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = \oint_A \mathbf{v}_{pf}^n \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA - \frac{\Delta t}{\rho} \oint_A \nabla p_f^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA \quad (4.42)$$

És cert que $\oint_A \mathbf{v}_f^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA$ és igual a 0 per definició, tot i això el terme pot continuar estant present. A continuació es fa l’aproximació d’imposar que el valor de dins l’integra és constant en tota la cara, de forma que l’equació anterior es pot

expressar com el següent sumatori.

$$\sum_{f \in F(c)} V_f^{n+1} A_f = \sum_{f \in F(c)} V_{pf}^n A_f - \frac{\Delta t}{\rho} \sum_{f \in F(c)} (p_{nb}^{n+1} - p_c^{n+1}) \frac{A_f}{\delta d_f} \quad (4.43)$$

L'expressió anterior es pot sintetitzar en un únic sumatori:

$$\sum_{f \in F(c)} \left(V_f^{n+1} A_f - V_{pf}^n A_f + \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{p_{nb}^{n+1} - p_c^{n+1}}{\delta d_f} \right) A_f \right) = 0 \quad (4.44)$$

Existeixen infinitat de combinacions que compleixen l'equació anterior. Per aquest motiu s'imposa una condició fàcil, però restrictiva, que consisteix en que per cada cara (f) el sumatori és igual a 0. De forma que, s'obté la següent expressió:

$$V_f^{n+1} = V_{pf}^n - \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{p_{nb}^{n+1} - p_c^{n+1}}{\delta d_f} \right) \quad (4.45)$$

L'equació anterior es pot simplificar en funció de variables conegudes, utilitzant les equacions 4.41 i 4.40. El resultat que s'obté és:

$$\begin{aligned} V_f^{n+1} &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{pn}^n + \mathbf{v}_{pc}^n) \cdot \hat{\mathbf{n}} - \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{p_{nb}^{n+1} - p_c^{n+1}}{\delta d_f} \right) \\ &+ \frac{\Delta t}{2\rho} \left(\frac{1}{\forall_c} \sum_{f \in F(c)} p_f^{n+1} \hat{\mathbf{n}} A_f + \frac{1}{\forall_{nb}} \sum_{f \in F(nb)} p_f^{n+1} \hat{\mathbf{n}} A_f \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Aquesta és la expressió per calcular les velocitats normals a les cares que han d'assegurar la divergència 0 de qualsevol camp de velocitats. Si no s'utilitza una expressió que assegura conservació de massa en un tractament “collocated”, l'esquema numèric tendeix a caure en un “checkerboard”.

Discretització del terme font de l'equació de conservació de quantitat de moviment

El terme font de l'equació de conservació de la quantitat de moviment pot estar format per diferents termes i pot adoptar diferents estructures en funció de la física del problema. Tal i com s'ha comentat en la formulació matemàtica, els termes fonts utilitzats en aquest projecte són:

- **Força de Lorentz:** el terme font es produeix per la força que les corrents elèctriques induïdes fan sobre el fluid que les conte en presència d'un camp magnètic. L'expressió resultant és:

$$\mathbf{S}^n = \mathbf{j}^n \times \mathbf{B}^n \quad (4.47)$$

Per més informació, consultar l'apartat 3.5.4 sobre la modelització del terme font que determina la física de les forces electromagnètiques (força de Lorentz).

- **Convecció natural:** la hipòtesis de Boussinesq s'utilitza per resoldre problemes de convecció natural, on la força de flotació depèn directament de la temperatura del fluid. Així doncs, el terme font en l'instant de temps n s'expressa com:

$$\mathbf{S}^n = \rho_o g (1 - \beta (T^n - T_o)) \quad (4.48)$$

Per més informació, consultar l'apartat 3.5.5 sobre el terme font que determina la física de la convecció natural.

- **Convecció magnètica per fluids paramagnètics:** en aquest cas, el terme font depèn altre cop de la temperatura. En comptes de la gravetat existeix un terme de flotació que depèn del camp magnètic i les propietats magnètiques del fluid. Aquestes propietats depenen directament de la temperatura. L'expressió resultant és:

$$\mathbf{S}^n = \frac{\chi_o}{2\mu_m} \left(\beta + \frac{1}{T_o} \right) (T^n - T_o) \nabla^2 \mathbf{B} \quad (4.49)$$

Per més informació, consultar l'apartat 3.5.6.

4.4.2 Solució de les equacions magnetohidrodinàmiques(MHD)

En problemes magnetohidrodinàmics es fa necessari el càlcul del camp magnètic, així com també el càlcul de la densitat de corrent elèctric, ja que aquestes són les dos variables que intervenen en el càlcul del terme font que s'inclou en l'equació de conservació de la quantitat de moviment.

Existeixen diferents esquemes numèrics per tal de calcular el camp magnètic i la densitat de corrent elèctric. Aquests són:

- **B-formulation:** consisteix en determinar els efectes MHD utilitzant com a variable de càlcul el camp magnètic creat pel moviment dels electrons dins el fluid. Aquest és el pitjor mètode degut que és lent i a més a més has d'estudiar l'exterior del domini on resideix el fluid, degut que el camp magnètic també existeix fora d'aquest. Com avantatge, el camp magnètic compleix per definició divergència nul·la. Smolentsev et al.[6] és un autor que ha treballat amb aquesta tècnica.
- **ϕ -formulation:** aquesta tècnica utilitza el potencial elèctric induït pel moviment dels electrons del fluid conductor elèctric en presència d'un camp magnètic. Aquesta tècnica és més ràpida que l'anterior tot i que presenta problemes d'estabilitat alhora de mantenir nul·la la divergència de la densitat de corrent elèctric. Ni et al.[7] és un autor que ha utilitzat aquesta tècnica en els seus últims articles sobre CMHD.
- **j-formulation:** aquesta tècnica és la més nova i és molt semblant a la **B-formulation**, ja que continua complint divergència nul·la per naturalesa. Com avantatge no s'ha d'estudiar el recinte en el qual no hi ha fluid, ja que la densitat de corrent elèctric només existeix en el medi conductor elèctric. Com a desavantatge continua sent més lenta que la ϕ -formulation. Smolentsev et al.[8] és un autor que ha treballat amb aquesta tècnica en els seus últims treballs sobre CMHD.

En aquest projecte s'ha optat per utilitzar l'esquema numèric anomenat potencial escalar(ϕ -formulation). El nom associat a aquest esquema es deu al fet que la densitat de corrent elèctric es calcula utilitzant la llei d'Ohm, mitjançant el potencial escalar induït pel moviment del fluid en presència d'un amp magnètic.

Tal i com s'especifica en l'apartat de discretització temporal (4.3.2) s'utilitza l'esquema explícit de segon ordre d'Adams-Bashforth, la qual cosa produeix que el terme font de l'equació de convecció-difusió sigui evaluat en l'instant n i $n - 1$. En aquest apartat es simbolitza només tenint present n , ja que per passar a $n - 1$ és directe.

Solució de l'equació de transport del camp magnètic

En aquest projecte, tal i com es veu a l'apartat de Resultats, s'ha resolt un problema de MHD on el fluid és un metall líquid. Es considera que la densitat de corrent

elèctrica que circula per l'interior del fluid no és suficientment elevada com per poder modificar el camp magnètic imposat per les condicions de contorn. Així doncs, el camp magnètic depèn únicament de les condicions de contorn imposades pel problema, la qual cosa implica que no sigui necessari resoldre l'equació de transport del camp magnètic (3.136).

És important mencionar que hi han esquemes numèrics que es basen amb l'equació de transport del camp magnètic, junt amb l'equació d'Ampère(3.46), per determinar la densitat de corrent elèctrica associada al camp magnètic calculat. Tot i així, aquest esquema numèric no forma part de les especificacions bàsiques d'aquest projecte.

Solució de la llei d'Ohm

Tal i com s'ha mencionat, existeixen diferents tipus d'esquemes numèrics per tal de resoldre les equacions MHD, cadascun amb els seus avantatges i inconvenients. S'ha optat per l'esquema numèric anomenat potencial elèctric, ja que permet obtenir la densitat de corrent elèctric amb la solució d'una única equació de Poisson.

En primer lloc, aquest esquema numèric calcula la densitat de corrent elèctric amb la llei d'Ohm, tenint present que aquesta última no s'acumula (per tant compleix divergència nul·la). Així doncs si s'aplica el divergent a la llei d'Ohm 3.53:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}^n = \sigma (\nabla \cdot \mathbf{E}^n + \nabla \cdot (\mathbf{v}^n \times \mathbf{B}^n)) \quad (4.50)$$

Tenint present la divergència nul·la del vector que fa referència a la densitat de corrent elèctric, el terme esquerra de l'equació anterior és igual a 0. Mentre que el terme de la dreta es converteix en la següent equació de Poisson:

$$\nabla^2 \phi^n = \nabla \cdot (\mathbf{v}^n \times \mathbf{B}^n) \quad (4.51)$$

On el camp elèctric s'ha expressat en funció del potencial elèctric induït:

$$\mathbf{E}^n = -\nabla \phi^n \quad (4.52)$$

A continuació s'integra en el volum de control l'expressió 4.51, on tot seguit s'aplica el teorema de Gauss per transformar les integrals volumètriques en integrals superficials:

$$\oint_A \nabla \phi_f^n \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = \oint_A (\mathbf{v}^n \times \mathbf{B}^n)_f \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA \quad (4.53)$$

Considerant els termes de l'interior de l'integral constant en tota la cara, l'expressió anterior es pot expressar com el següent sumatori:

$$\sum_{f \in F(c)} \nabla \phi_f^n \cdot \hat{\mathbf{n}} A_f = \sum_{f \in F(c)} (\mathbf{v}^n \times \mathbf{B}^n)_f \cdot \hat{\mathbf{n}} A_f \quad (4.54)$$

Per aproximar el gradient de ϕ a la cara, s'utilitza el mateix mètode que a l'anàlisi del terme difusiu de l'equació de convecció difusió (4.3.4). Així que:

$$\sum_{f \in F(c)} (\phi_{nb} - \phi_c) \frac{A_f}{\delta d_f} = \sum_{f \in F(c)} (\mathbf{v}^n \times \mathbf{B}^n)_f \cdot \hat{\mathbf{n}} A_f \quad (4.55)$$

De l'expressió 4.55 sorgeix un sistema d'equacions algebraiques que s'ha de resoldre mitjançant un *solver*. En la literatura existeixen una gran varietat de *solvers*, alguns dels quals s'expliquen a l'apartat 4.5.

Un cop es coneix el potencial elèctric, es pot calcular la densitat de corrent elèctric al centre o a les cares del volum de control, en funció de si es dur a terme un tractament “Staggered” o “Collocated”.

La forma més senzilla d'analitzar la densitat de corrent elèctric en el centre del volum de control és integrant directament la llei d'Ohm en el volum de control:

$$\int_{\forall} \mathbf{j}^n dV = \sigma \left(\int_{\forall} \nabla \phi^n dV + \int_{\forall} (\mathbf{v}^n \times \mathbf{B}^n) dV \right) \quad (4.56)$$

En l'equació anterior s'imposa que la \mathbf{j} i el terme $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ del centre del volum de control, igual en tot aquest. De forma que:

$$\mathbf{j}^n = \sigma \left(\frac{1}{\forall} \int_{\forall} \nabla \phi^n dV + \mathbf{v}^n \times \mathbf{B}^n \right) \quad (4.57)$$

La integral volumètric del gradient del potencial escalar es pot solucionar utilitzant diferents mètodes. Els que s'han utilitzat en el desenvolupament d'aquest projectes són:

- **Mètode de Gauss del gradient:** consisteix en realitzar la següent operació matemàtica, semblant al teorema de la divergència de Gauss, ja que es transforma l'equació volumètrica en superficial tancada.

$$\int_{\forall} \nabla \phi^n dV \approx \oint_A \phi_f^n \hat{\mathbf{n}} dA \approx \sum_{f \in F(c)} \phi_f^n \hat{\mathbf{n}} A_f \quad (4.58)$$

- **Mètode dels mínims quadrats:** es tracta d'obtenir el valor del gradient que impliqui un error quadrat mínim respecte tots els punts analitzats, per calcular determinat gradient. L'ordre d'aquest mètode pot ser qualsevol, tot i que en aquest objecte s'ha utilitzat un de primer ordre. No només s'utilitza la informació dels nodes veïns d'una cel·la, sinó que també es pot utilitzar la informació dels nodes que comparteixen vèrtex.

4.4.3 Solució de l'equació de la conservació de l'energia tèrmica

En aquest cas es calcula directament com l'equació de convecció-difusió utilitzant l'esquema numèric temporal explícit de segon ordre, Adams-Bashforth. Cal mencionar que en els problemes resolts en aquest projecte no existeixen termes fonts en l'equació de conservació de l'energia tèrmica. L'equació degudament discretitzada, seguint les pautes comentades, és:

$$T^{n+1} = T^n + \Delta t \left(\frac{3}{2} R(\mathbf{v}^n, T^n) - \frac{1}{2} R(\mathbf{v}^{n-1}, T^{n-1}) \right) \quad (4.59)$$

On:

$$R(\mathbf{v}, T) = \frac{1}{\rho \nabla} \left(-\rho \sum_{f \in F(c)} T_f (\mathbf{v}_f \cdot \hat{\mathbf{n}}) A_f + \Gamma \sum_{f \in F(c)} \nabla T_f \cdot \hat{\mathbf{n}} A_f \right) \quad (4.60)$$

4.4.4 Condicions de contorn

En aquest apartat es presenten les diferents condicions de contorn, les quals aporten la informació necessària al problema per a que els diferents sistemes d'equacions algebraics formin un sistema determinat. Cada tipus de variables presenta les seves pròpies condicions de contorn, i aquestes depenen totalment del problema a resoldre. Tot i això, les condicions utilitzades en aquest projecte, indiferentment de la variable, es poden identificar de forma més abstracta en dos únics tipus. Aquests són:

- **Condició Dirichlet:** aquesta condició consisteix en imposar el valor de la variable en qüestió.
- **Condició Neumann:** en aquest cas no s'imposa el valor de la variable en qüestió, sinó que el que s'imposa és el valor de la derivada d'aquesta variable.

A continuació, es mostren totes les condicions de contorn utilitzades en el projecte per les diferents variables, unint la explicació abstracta anterior amb el sentit físic. Aquestes són:

Velocitat (v)

Per la velocitat s'han utilitzat tres tipus de condicions de contorn diferents en funció del problema. Aquestes són:

- **Condició Dirichlet:** quan un fluid es troba en contacte amb una superfície, aquest obté la velocitat de la superfície en el punt de contacte. Per exemple, si la superfície amb la que esta en contacte el fluid no es mou, la velocitat del fluid en aquell punt és 0. En aquest cas particular, on la velocitat és 0, s'anomena condició de no lliscament. Sovint, també s'utilitza aquesta condició de contorn per imposar el perfil de velocitats a l'entrada.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A \quad (4.61)$$

On v_A representa la velocitat de la superfície en el punt de contacte amb el fluid.

- **Condició Neumann:** aquest cas en particular és d'interès per simular les condicions de contorn de sortida d'un fluid. El fet d'imposar la derivada en comptes del valor de la velocitat a la sortida, fa que la hipòtesis sigui molt menys restrictiva. Tot i així, aquest tipus de condició de contorn tendeix a dissipar els vòrtex que passen a través de la condició de contorn, així com també els vòrtexs que es creen aigües amunt. Per tant, molts cops es cataloga com una condició de contorn que continua sent massa restrictiva.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} = 0 \quad (4.62)$$

On n és la direcció perpendicular a la cara on s'aplica aquesta condició de contorn.

- **Condició convectiva:** degut a la insuficiència de la condició de Neumann per simular la física del camp de velocitats en sortides, és interessant utilitzar la condició convectiva, la qual es basa en una simplificació de l'equació de la conservació de la quantitat de moviment, tenint present únicament el terme

transitori i el terme convectiu. D'aquesta manera, s'aconsegueix simular més correctament les condicions d'un fluid a la sortida.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0 \quad (4.63)$$

Pressió (p)

Pel camp de la pressió en tot moment s'utilitzen les condicions de contorn de Neumann. Utilitzant aquest mètode arreu, el sistema de equacions no queda determinat de manera que s'ha d'imposar el valor de la pressió en un punt arbitrari. Aquest fet no implica cap problema en al solució final, ja que el que interessa del camp de pressions és el gradient d'aquest, i no el valor en si.

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (4.64)$$

On n és la direcció perpendicular a la cara on s'aplica aquesta condició de contorn.

Temperatura (T):

Les condicions de contorn per la temperatura en aquest projecte són:

- **Condició Dirichlet:** es tracta d'imposar el valor de la temperatura d'una superfície. Aquesta pot variar en el temps en funció de les exigències del problema.

$$T = T_A \quad (4.65)$$

On T_A representa la temperatura de la paret amb la que està en contacte el fluid

- **Condició Neumann:** aquest tipus de condició s'aplica per parets adiabàtiques on la conducció de calor es nul·la. Per definició, si s'exigeix una transferència de calor nul·la en una direcció en concret, el gradient de temperatura en aquella direcció també ha de ser nul. Per tant:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (4.66)$$

On n és la direcció perpendicular a la cara on s'aplica aquesta condició de contorn.

Densitat de corrent elèctric (j):

Existeixen diferents tipus de condicions de contorn per tractar la densitat de corrent elèctric, en funció de les característiques del problema. En aquest projecte s'ha analitzat un problema sobre MHD on les parets estan aïllades elèctricament. Així doncs, la condició de contorn utilitzada és de tipus Dirichlet i igual a 0.

$$\mathbf{j}_n = 0 \quad (4.67)$$

On n es refereix a la direcció normal a la cara.

Potencial elèctric (ϕ)

Les condicions de contorn del potencial elèctric estan totalment delimitades per la condició de contorn de la velocitat i de la densitat de corrent elèctric. Aquest fet es deu a la llei d'Ohm. El problema sobre MHD analitzat en aquest projecte es caracteritza per tenir les parets aïllades elèctricament i a més a més, pel fet de ser parets, s'aplica la condició de no lliscament per les velocitats. Així doncs, si s'utilitza la llei d'Ohm:

$$\nabla_n \phi = \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{1}{\sigma} \mathbf{j}_n \quad (4.68)$$

On aplicant les condicions comentades:

$$\nabla_n \phi = 0 \quad (4.69)$$

On n representa la direcció normal a la cara.

4.5 Solvers de resolució de sistemes d'equacions lineals

Tenint present que la discretització temporal és explícita, els únics sistemes d'equacions algebraics a resoldre són els resultants de les equacions de Poisson, ja sigui per obtenir la pressió o bé el potencial elèctric. Les equacions de Poisson a resoldre (4.40, 4.55) es poden expressar en la següent forma:

$$a_{i,j} \phi_{i,j} = b_{i,j} \phi_{i-1,j} + c_{i,j} \phi_{i+1,j} + d_{i,j} \phi_{i,j-1} + e_{i,j} \phi_{i,j+1} + f_{i,j} \quad (4.70)$$

On, $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}, d_{i,j}, e_{i,j}$ són valor de la matriu. En el cas de les equacions de Poisson a resoldre, són termes que fan referència a magnituds espacials, mentre que $f_{i,j}$ és el terme no homogeni de l'equació de Poisson.

Com s'ha observat, aquests sistemes d'equacions a resoldre són lineals, de forma que els solvers utilitzats es beneficien d'aquesta propietat.

No tots els algoritmes dels solvers que apareixen en aquest apartat han estat programats ens aquest projecte, sinó que alguns d'ells, degut a la seva complexitat, s'han obtingut d'usuaris externs. Els solvers rellevant en aquest projecte són:

4.5.1 Gauss-Seidel

Aquest es caracteritza per ser un mètode iteratiu que passa per tots els nodes del domini suposant els valor dels nodes veïns igual a la iteració anterior. Aquest mètode resol qualsevol sistema d'equacions lineal on els termes de la diagonal siguin no nuls, i assegura la convergència sempre i quan la matriu sigui diagonalment dominant, o ve si es simètrica i al mateix temps, definida positiva. El *Gauss-Seidel* ha estat programat en aquest projecte, comprovant-se el seu funcionament, tot i que no s'ha utilitzat per cap càcul degut a la seva lentitud respecte altres solvers. L'estructura que han de presentar les equacions lineals per tal de ser resoltes utilitzant aquest mètode és:

$$a_{i,j} \phi_{i,j}^{n+1} = b_{i,j} \phi_{i-1,j}^n + c_{i,j} \phi_{i+1,j}^n + d_{i,j} \phi_{i,j-1}^n + e_{i,j} \phi_{i,j+1}^n + f_{i,j} \quad (4.71)$$

On n i $n + 1$ fan referència a instants de iteració diferents però continus. Utilitzant la iteració, arriba un punt on:

$$|\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n| < \delta \quad (4.72)$$

On δ representa la diferència mínima d'una mateixa variable en iteracions diferents, per la qual el resultat s'accepta com a vàlid. En aquest punt és diu que el sistema està convergit.

4.5.2 TDMA (TriDiagonal Matrix Algorithm) + Gauss-eidel

El solver TDMA té l'avantatge de ser directe per sistemes d'equacions d'una sola dimensió. Es parla de matrius tridiagonals degut a la forma característica amb la que queda la matriu, on tots els termes no nuls estan en línia en tres diagonals. En cas de que el sistema d'equacions sigui bidimensional o tridimensional s'ha de resoldre de forma iterativa amb combinació d'un Gauss-Seidel.

L'equació de referència (4.70) és bidimensional i en primer lloc es simplifica a una equació unidimensional per tal de que es pugui aplicar el solver TDMA. Així doncs es pot unidimensionalitzar per files:

$$\begin{aligned} a_{i,j} \phi_{i,j}^{n+1} &= b_{i,j} \phi_{i-1,j}^{n+1} + c_{i,j} \phi_{i+1,j}^{n+1} + g_{i,j}^n \\ g_{i,j}^n &= d_{i,j} \phi_{i,j-1}^n + e_{i,j} \phi_{i,j+1}^n + f_{i,j} \end{aligned} \quad (4.73)$$

O bé també es pot fer aquesta altra transformació per columnes:

$$\begin{aligned} a_{i,j} \phi_{i,j}^{n+1} &= d_{i,j} \phi_{i,j-1}^{n+1} + e_{i,j} \phi_{i,j+1}^{n+1} + g_{i,j}^n \\ g_{i,j}^n &= b_{i,j} \phi_{i-1,j}^n + c_{i,j} \phi_{i+1,j}^n + f_{i,j} \end{aligned} \quad (4.74)$$

A la pràctica es demostra que si s'alternen els dos mètodes anteriors (4.73 i 4.74) entre iteració i iteració (es com si es teixís, numèricament parlant, el sistema d'equacions) s'arriba més ràpidament a la solució final. A continuació, un cop es té el sistema d'equacions linealitzat, s'aplica el mètode TDMA. S'explica a partir de l'equació 4.73, però cal remarcar que per l'equació 4.74 el procediment és analog. Així doncs, l'equació 4.73 es pot expressar com:

$$a_{i,j} \phi_{i,j}^{n+1} = P_{i,j} \phi_{i+1,j}^{n+1} + Q_{i,j} \quad (4.75)$$

On $P_{i,j}$ i $Q_{i,j}$ estan expressats per:

$$P_{i,j} = \frac{b_{i,j}}{a_{i,j} - c_{i,j} P_{i-1,j}} \quad Q_{i,j} = \frac{g_{i,j}^n + c_{i,j} Q_{i-1,j}}{a_{i,j} - c_{i,j} P_{i-1,j}} \quad (4.76)$$

En un cas unidimensionalitzat com aquest, on $1 \leq i \leq n$, es compleix que $c_1 = 0$ i $b_n = 0$. Aquest tret característic s'entén amb facilitat observant l'equació 4.73. Per tant, per a $i = 1$ les expressions 4.76 queden simplificades com:

$$P_{1,j} = \frac{b_{1,j}}{a_{1,j}} \quad Q_{1,j} = \frac{g_{1,j}^n}{a_{1,j}} \quad (4.77)$$

I per a $i = n$, l'equació 4.75 es simplifica a:

$$\phi_n = Q_n \quad (4.78)$$

Així doncs, amb aquestes condicions el sistema fitat i es resolt de la següent forma.

1. Es calculen els termes P_i i Q_i de forma seqüencial des de $i = 1$ fins a $i = n$.
2. S'obté el nou valor de ϕ_n i de forma seqüencial, s'obtenen tots els valor de ϕ des de $i = n$ fins a $i = 1$.

En aquest procediment els valors de ϕ obtinguts no són els finals, ja que s'està resolent un problema bidimensional i el mètode TDMA no és directe per aquests casos. Així doncs, en la següent iteració es durà a terme el mateix procediment, però per les columnes (4.74). Com a dades d'entrada per tal de definir $g_{i,j}^n$ s'utilitzen tal i com està simbolitzat, els valor de ϕ de la iteració anterior.

4.5.3 Solver LU (Lower-Upper)

Aquest mètode consisteix en descompondre un matriu, com el el producte d'una matriu triangular inferior i una superior.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}}_U$$

On A és la matriu que es descompon en una triangular inferior (L) i una triangular superior (U). Degut a la inestabilitat d'aquest mètode quan algun terme de la diagonal és nul, és necessari multiplicar prèviament per una o varies matrius de permutació. Les avantatges d'aquest mètode és que és directe per a casos

bidimensionals i tridimensionals. L'estrategia a seguir per desenvolupar el *solver* correctament és:

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (4.79)$$

On A es descompon en una triangular superior (U) i una triangular inferior (L). Així doncs:

$$LU \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (4.80)$$

Degut a les avantatges d'aquest tipus d'estructura triangular, resoldre el sistema d'equacions és directe en dos passos. Aquests són:

$$\begin{aligned} L \mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ U \mathbf{x} &= \mathbf{y} \end{aligned} \quad (4.81)$$

D'aquest últim pas s'obté directament el vector d'incògnites x .

4.6 Criteris de finalització

Els problemes analitzats en aquest projecte estan governats per les equacions de treball ja explicades en l'apartat 3.6. Aquests problemes es caracteritzen per arribar sempre en un estat permanent, a partir dels paràmetres d'entrada utilitzats. Tot i això, en els annexes apareixen altres problemes analitzats amb el mateix tipus de codi, que es caracteritzen per no arribar a un estat permanent, ja que es comporten d'una forma periòdica¹. Per aquest mateix motiu, a continuació s'expliquen els diferents criteris de finalització tant per problemes que arriben a un estat permanent, com els que adopten un estat periòdic.

4.6.1 Sistemes que tendeixen a un estat permanent

En aquest cas la forma d'analitzar si el problema ja està solucionat i no cal continuar avançant en el temps, és ben senzilla. Com que el problema arriba a un estat permanent és evident que el terme acumulat de totes les variables $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ acaba tendint a 0. Per tant la idea inicial és que quan el valor absolut del terme acumulat

¹S'entén com a periòdic, quan un problema tot i no arribar a un estat permanent, les seves variables varien en el temps repetint sempre un mateix patró.

ponderat sigui més petit que un cert paràmetre numèric imposat per l'usuari, la resolució es donarà per finalitzada. Numèricament:

$$\frac{1}{\forall_T} \left(\sum_{i=1}^N \left| \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\phi_i^n \Delta t} \right| \forall_i \right) \leq \delta \quad (4.82)$$

On \forall_T representa el volum total del problema, N és el nombre total de nodes, \forall_i és el volum de control de cada node, i δ representa el paràmetre numèric imposat per l'usuari que defineix quan la resolució de problema es pot donar per acabada. És interessant tenir present com la variable ϕ és adimensionalitzada, de forma que la fórmula anterior és valida per qualsevol ordre de magnitud.

En cas que el problema a analitzar consti de diferents variables, el més comú en la literatura és fer aquest anàlisis per cada una de les variables. En conseqüència, fins que totes les variables no tenen el criteri de finalització inferior a δ la resolució del problema no es dona per acabada.

4.6.2 Sistemes que tendeixen a un estat periòdic

Quan un problema arriba a un estat periòdic, el mètode anterior és insuficient, degut que el terme acumulat no tendeix a 0, sinó que oscil·la contínuament. Per aquest motiu la tècnica adoptada consisteix en analitzar la freqüència d'oscil·lació de les diferents variables, així com també la seva amplitud. Quan aquestes passen a ser constants, es considera que el problema ha arribat a un estat suficientment desenvolupat.

4.7 Codis desenvolupats

Fins al moment s'han exposat els motius pels quals s'ha realitzat aquest projecte, així com també les fórmules matemàtiques que representen la física del problema, les hipòtesis utilitzades, les respectives modelitzacions i finalment l'anàlisi numèric aplicat a les equacions de treball per tal de que puguin ser resoltes computacionalment.

Tots aquests coneixements s'han introduït en dos codis que s'han creat amb objectius clarament diferenciats. Tot seguit, es mostren aquests codis amb les seves principals característiques.

- **Codi propi:** aquest codi ha estat dissenyat per tal de familiaritzar-se amb les diferents tècniques d'anàlisis numèric que s'expliquen en aquest projecte. Les característiques principals d'aquest codi són:

- És un codi escrit en C++.
- Els mètodes numèrics introduïts al codi estan basats en la tècnica de volums finits, per un tractament “*Staggered*”.
- Dissenyat per resoldre problemes en 2D, utilitzant malla estructurada (uniforme i no uniforme).
- És capaç de resoldre problemes de convecció forçada o natural, mitjançant esquemes temporals explícits. També resol problemes de transferència de calor, tant per conducció com per convecció, i problemes que tendeixen a un estat permanent o periòdic. Està preparat per introduir termes fonts en les diferents equacions.

- **TermoFluids:** aquest codi té uns 7 anys de vida i en els seus inicis va estar pensat per resoldre problemes de turbulència mitjançant la metodologia LES. Les característiques principals d'aquest codi són:

- És un codi modular (escrit en C++).
- Preparat per treballar en paral·lel, capaç de escalar fins a milers de CPUs.
- El codi esta pensat per resoldre els problemes mitjançant la tècnica dels volums finits per un tractament “*Collocated*” o “*Staggered*”.
- Dissenyat per resoldre problemes en 3D, utilitzant malla no estructurada².
- Avui dia és un codi capaç de tractar amb diferents fenomenologies físiques com fluids compressibles i incompressibles, no-newtonians, estat permanent o transitori, transferència de calor per conducció, convecció i radiació, fluids multi-fase, combustió, malles adaptables ...

En aquest tipus de codi s'ha programat un mòdul en C++ per tal de poder resoldre problemes de caire Magnetohidrodinàmic. Aquest mòdul es beneficia de tota la potència del codi Termofluids.

²La malla estructurada és un cas particular de la no estructurada.

4.8 Algoritme global de càlcul

Els problemes a resoldre són de tipus iteratiu, així que s'ha elaborat un algoritme de càlcul esquematitzat per posar ordre a tots els conceptes explicats. Aquests algoritme global de càlcul es valid pels dos tipus de codi, tant el propi com el mòdul desenvolupat per Termofluids. L'algoritme global de càlcul és:

1. Introducció de dades físiques que defineixen el problema, així com també les variables a calcular, amb les seves respectives condicions inicials.
2. Introducció de paràmetres numèrics.
3. Creació de la malla.
4. Càlculs previs com determinació de distàncies entre nodes, superfícies, volums...
5. Càlcul dels termes fonts que influeixen en l'equació de Navier-Stokes en cas que en tingui. Aquests són:
 - El terme de Boussinesq i la convecció magnètica necessiten un càlcul previ de l'equació de conservació de l'energia tèrmica 4.4.3.
 - La força de Lorentz requereix un càlcul previ del potencial elèctric, així com també de la densitat de corrent elèctric 4.4.2. La variable que influeix en el terme font depèn del tipus de problema.
6. Càlcul de les velocitats predictores amb l'equació 4.33, a partir dels termes fonts prèviament calculats.
7. Resolució del sistema d'equacions algebraic obtingut en el desenvolupament numèric de l'equació de Poisson, mitjançant un solver lineal, per de la pressió en un instant $n + 1$. Aquest sistema fa referència a l'equació 4.39.
8. Càlcul de la velocitat al centre dels volums de control en l'instant de temps $n + 1$, mitjançant el gradient de pressions i la velocitat predictora, obtinguts en els apartats 6 i 7. L'equació utilitzada és la 4.40.
9. Càlcul dels fluxos màssics utilitzant l'equació 4.46. Aquest tret és totalment distintiu d'un tractament “Collocated”, ja que per un tractament “Staggered” aquest pas no es dur a terme.
10. S'aplica un criteri de finalització (apartat 4.6) en funció del tipus de problema que s'estigui estudiant. En aquest punt podent passar dos fets:

- **Criteri positiu:** en cas que el cas satisfaci el criteri de finalització es continua a l'apartat 11.
- **Criteri negatiu:** com que el cas encara no ha arribat a la solució final, s'increment el temps en un *step* ($t^{n+1} = t^n + \Delta t$). El valor del Δt es calcula mitjançant la tècnica *CFL*, característica dels esquemes temporals explícits (per més informació consultar l'apartat 4.3.2). A continuació es torna a l'apartat 5 per obtenir el valor de les variables en el nou temps $n + 1$.

11. Un cop es tenen els resultats finals es dur a terme un post processat de dades en funció dels requisits del problema analitzat.
12. Fi del programa

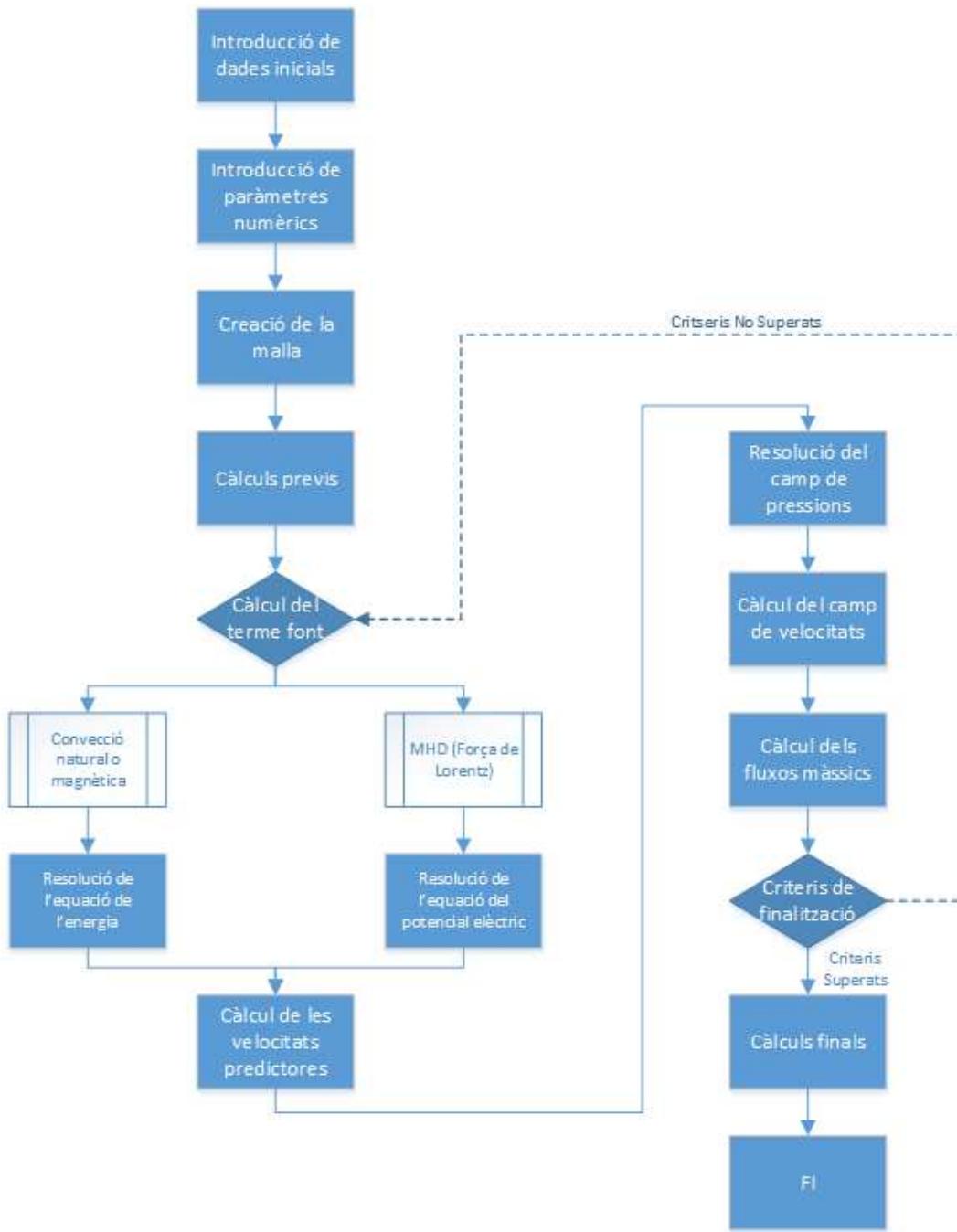


Figura 4.7: Esquema de l'algoritme global de càlcul

4.9 Bibliografia

- [1] W.Z Li, Y.Y. Yan, and J.B. Hull. The propagation of temperature and concentration fields around a deformed gas bubble rising in a quiescent hot or bi-solution liquid. *International journal of numerical methods for Heat and Fluid*, 2003.
- [2] O. Lehmkuhl, R. Borrell, I. Rodríguez, C.D. Pérez-Segarra, and A. Oliva. Assessment of the symmetry-preserving regularization model on complex flows using unstructured grids. *Computers and Fluids*, 60:108–116, 2012.
- [3] N.N. Yanenko. *The Method of Fractional Steps*. Springer-Verlag, 1971.
- [4] L. Jofre, O. Lehmkuhl, J. Ventosa, F.X. Trias, and A. Oliva. Conservation properties of unstructured finite-volume mesh schemes for the navier-stokes equations. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An international journal of computation and methodology*, 65(1):53–79, 2013.
- [5] F.N. Felten and T.S. Lund. Kinetic energy conservation issues associated with the collocated mesh scheme for incompressible flow. *Journal of computational physics*, 2006.
- [6] S. Smolentsev, N. Morley, and M. Abdou. Code development for analysis of mhd pressure drop reduction in a liquid metal blanket using insulation technique based on a fully developed flow model. *Fusion Engineering and Design*, 73(83-93), 2005.
- [7] M. Ni, M. Ramakanth, N. Morley, P. Huang, and M. Abdou. A current density conservative scheme for incompressible mhd flows at a low magnetic reynolds number. part i: On a rectangular collocated grid system. *Journal of computational physics*, 227(174-204), 2007.
- [8] S. Smolentsev, S. Cuevas, and A. Beltran. Induced electric current-based formulation in computations of low magnetic reynolds number magnetohydrodynamic flows. *Journal of computational physics*, 229(1558-1572), 2010.

Bibliografia

Capítol 5

Problemes analitzats

5.1 Introducció

En aquest apartat s'analitzen dos problemes de gran importància en el seu camp, per tal d'entendre el comportament de les equacions de conservació de massa, quantitat de moviment i energia, quan estan sotmeses a un camp magnètic. Aquest ànalisis serveix també com a validació dels diferents codis, ja que tots els resultats numèrics són discutits i contrastats amb documents de referència. Els documents de referència depenen del tipus de cas que s'estudia, però poden ser resultats numèrics obtinguts per altres codis aliens al projecte, o bé directament solucions analítiques de les equacions diferencials.

En cadascun dels exercicis resolts, es fa menció del codi utilitzat.

5.2 Cas Shercliff

5.2.1 Definició del problema

El cas Shercliff[1] és un cas de referència àmpliament conegut en el món de la MHD que disposa de solució analítica quan el fluid es troba en règim permanent. El cas consisteix en avaluar el perfil de velocitats que adopta un fluid conductor elèctric, al circular a través d'un conducte quadrat, de parets aïllants, en el que s'hi aplica un camp magnètic constant i perpendicular a la direcció del flux. En la figura

5.1 es mostra un esquema que representa el problema.

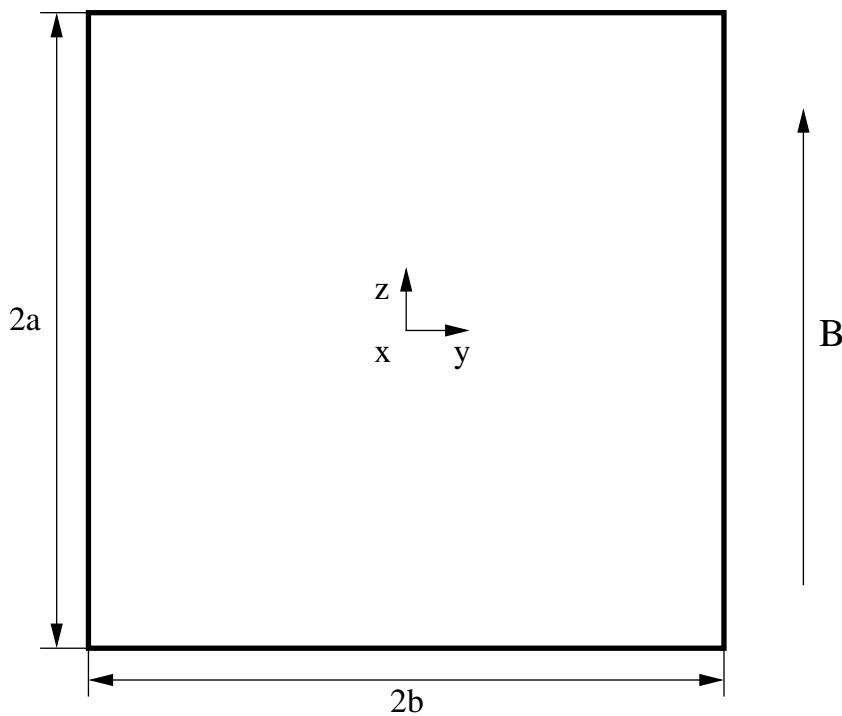


Figura 5.1: Esquema del cas Shercliff

La geometria del problema és coneguda, on $a = 1$ i $b = 1$. Les condicions de contorn del problema són:

- Velocitat(v): el fluid té velocitat nul·la al entrar en contacte amb les parets del canal.
- Pressió(p):
 - Parets: s'aplica un gradient de pressions nul normal a totes les parets que envolten el sòlid.
 - Direcció x : per a que el fluid avanci en direcció x s'imposa un gradient de pressions(k) constant en aquesta direcció.
- Densitat de corrent elèctric(j): les parets del canal no són conductors elèctriques de forma que s'imposa una densitat de corrent nul·la en totes les parets.
- Potencial elèctric(ϕ): per mantenir una densitat de corrent nul·la en les parets, el gradient del potencial elèctric normal a les parts ha de ser necessàriament nul.

- Temperatura(T): en tot moment la temperatura del sistema és manté constant.
- Camp magnètica(\mathbf{B}): constant i en direcció z .
- Condicions de periodicitat: s'apliquen condicions periòdiques en direcció x per tal de simular un canal de longitud infinita. Simplement es té en compte que les propietats del fluid al sortir del canal, són iguals que les del fluid al entrar.

On k s'escolleix en funció del cabal volumètric de circulació que es desitgi. Com més gran sigui aquest gradient, més gran serà el cabal. Per tal d'homogeneitzar els resultats, en tot l'apartat es fixa un cabal volumètric de $4m^3/s$, mentre que el gradient de pressions es calcula per tal de garantir sempre aquest flux. Les expressions utilitzades per obtenir aquest gradient es troben en l'apartat 5.2.4.

Per als càlculs dels nombres adimensionals Re i Ha , s'ha utilitzat com a longitud característica el coeficient a .

5.2.2 Interès industrial

L'interès industrial d'aquest tipus de problema recau en el desenvolupament de les mantes que envolten els reactors de fusió nuclear (tipus Tokamak), les quals estan sotmeses a un fort camp magnètic. El fluid refrigerant que circula a través d'aquesta manta es caracteritza per ser un metall conductor elèctric en estat líquid compost per liti i altres substàncies. Comunament s'utilitza l'aliat eutèctic¹ $Pb - 17Li$, com a refrigerant i també com a combustible.

El fet que el fluid de treball sigui conductor elèctric i que estigui sotmès a un fort camp magnètic, obliga a tenir en compte els efectes MHD per tal de calcular amb eficàcia i precisió característiques importants com són la transferència de calor i la caiguda de pressió.

El moviment relatiu entre el camp magnètic i el medi conductor elèctric (fluid de treball) induceix unes densitats de corrent elèctric a l'interior del propi fluid. Aquestes densitats de corrent interaccionen amb el mateix camp magnètic que les ha creat per produir una força en direcció perpendicular al camp magnètic aplicat i a la

¹Una substància eutèctica es un compost de diferents materials amb una composició tal que fa que es solidifiqui a la temperatura més baixa possible entre totes les composicions existents

densitat de corrent elèctric. Aquesta força tendeix a anar en contra el moviment del fluid, de forma que produeix una caiguda de pressió que fa disminuir directament el cabal que circula a través de les mantes.

A més a més, les forces originades a l'interior del fluid també modifiquen el perfil de velocitats de fluid de treball. Aquesta última característica, junt amb la disminució del cabal volumètric, modifiquen al transferència de calor. La transferència de calor també es veu afectada per les fonts calorífiques internes que apareixen en el fluid degut a l'efecte Joule. Aquest últim és causat per les densitats de corrent elèctric existents en l'interior del fluid.

En aquests tipus d'aplicacions, degut a les condicions extremes amb les que es troba el fluid, l'anàlisi numèric és de gran importància. A més a més, les simulacions són una eina de gran ajuda per tal d'analitzar un aparell o un procés abans de que es construeixi o es dugui a terme, estalviant així gran quantitat de costos.

5.2.3 Equacions de treball

En aquest tipus de problema s'han utilitzat les següents equacions de treball (per més informació consultar l'apartat 3.6):

- Conservació de massa:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- Conservació de la quantitat de moviment amb el terme font de la força de Lorentz:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{j}_i \times \mathbf{B} \quad (5.1)$$

- Conservació de la densitat de corrent elèctric:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_i = 0$$

- Llei d'Ohm:

$$\mathbf{j}_i = \sigma (-\nabla \phi + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Es parla de \mathbf{j}_i perquè la que es té present és la densitat de corrent elèctric induïda, ja que la real també té en compte el flux dels electrons en direcció x per arrossegament del propi fluid.

Els nombres adimensionals que governen les equacions anteriors són:

$$N = B_o^2 \left(\frac{\sigma L}{\rho U_o} \right) \quad Ha = B_o L \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad Ha^2 = N Re$$

On N és el nombre magnètic, el qual defineix la relació entre els esforços magnètics respecte els convectius, el Ha defineix la relació entre els esforços magnètics respecte els difusius i el Re representa la relació entre els esforços convectius respecte els difusius.

5.2.4 Solució analítica

En aquest apartat s'explica el procediment a seguir per calcular, de forma analítica, el gradient de pressions que garanteix un cabal volumètric de $4m^3/s$, utilitzant les expressions analítiques dels estudis de Shercliff[1].

Per començar, degut que es coneixen les dades geomètriques i s'imposa el cabal volumètric, es calcula la velocitat mitjana.

$$v_o = \frac{Q}{A_T} \quad (5.2)$$

On v_o representa la velocitat mitjana, Q és el cabal volumètric i A_T és la superfície total per la que circula el fluid (en aquest cas són $4m^2$). Tot seguit, per calcular el gradient de pressions necessari (ΔP^*) per mantenir un cabal de $4m^3/s$, indiferentment del valor del Ha , s'utilitza la següent expressió:

$$v_o = \frac{32\Delta P^* b^2}{\pi^4 \mu} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{(2i+1)^4} \left(1 - \frac{2Nb^2 (\cosh C - \cosh Ha)}{(2i+1)^2 \pi^2 a^2 \sinh C} \right) \right) \quad (5.3)$$

On:

$$C^2 = Ha^2 + (2i+1)^2 \pi^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \quad (5.4)$$

Totes les dades de les dos expressions anteriors són coneudes a excepció del gradient de pressions (ΔP^*). Aquest s'aïlla fàcilment, mentre que el sumatori en n es dur a terme fins que el valor que l'increment relatiu del gradient de pressions és inferior al valor absolut de $1e - 10$.

Un cop es coneix el gradient de pressions que garanteix un cabal volumètric igual a $4m^3/s$, es procedeix a calcular de forma analítica la distribució de velocitats, utilitzant la sèrie de Fourier que apareix en els estudis de Shercliff[1].

5.2.5 Paràmetres computacionals

Els aspectes computacionals més importants són:

- El codi utilitzat per dur a terme aquestes simulacions és Termofluids, junt amb el modul creat en aquest projecte per resoldre problemes sobre MHD.
- En tots els experiments numèrics s'han utilitzat 2 processadors per tal d'augmentar la rapidesa del càlcul computacional.
- S'utilitza la tècnica de volums finits amb un tractament “*collocated*”.
- El esquema numèric utilitzat per obtenir la velocitat a les cares del volum de control és el *Symmetry-Preserving*(4.3.3).
- S'ha utilitzat l'esquema numèric temporal explícit de segon ordre d'Adams-Bashforth.
- Els resultats obtinguts pel codi es consideren que han arribat a l'estat permanent quan el valor absolut del gradient temporal del cabal màssic, junt amb el valor absolut del terme acumulat màxim de l'equació de conservació de la quantitat de moviment és inferior a $1e - 3$.
- El solver utilitzat s'anomena FFT Períòdic[2] i és especial, com el seu nom indica, per casos periòdics com el cas Schercliff. En comptes de simular tota una canonada en tres dimensions, es simula en dos dimensions imposant que les propietats del fluid a la sortida són igual que a l'entrada. D'aquesta forma s'aconsegueix simular una canonada de longitud infinita.

5.2.6 Casos analitzats

En la següent taula apareixen tots els casos analitzats, en funció dels diferents nombres de Reynolds i Hartmann.

Simulació	<i>Re</i>	<i>Ha</i>
1	10	10
2	10	50
3	10	100
4	10	500

Taula 5.1: Valors del *Re* i el *Ha* per les 4 simulacions

Les malles estructurades utilitzades per cadascun dels casos són:

Tipus de malla	Codi	Dimensió	Nombre de nodes
Uniforme	SU32	32×32	1024
	SU64	64×64	4096
	SU128	128×128	16384
	SU256	256×256	65536
Hiperbòlica	SH32	32×32	1024
	SH64	64×64	4096
	SH128	128×128	16384
	SH256	256×256	65536

Taula 5.2: Tipus de malles estructurades per cada simulació Schercliff

Les malles no estructurades, a diferència de les estructurades, són molt més complicades de tractar pel que fa a la uniformitat de la malla, ja que no pots controlar perfectament els nodes en cada zona (tal i com pots fer amb les estructurades). Per aquest motiu no té sentit parlar de dimensió i es parla directament dels nodes existents en cada malla.

A més a més, apareixen dos termes extra de gran importància. Aquests són la “Qualitat mitjana” i la “Qualitat mínima”² que mostren el grau d’ortogonalitat que presenten els triangles de la malla no estructurada. El valor oscil·la entre 0 i 1, entenent com a 1 una malla totalment ortogonal i 0 una malla gens ortogonal. És lògic que les malles estructurades presentin una Qualitat mitjana de 1 ja que es caracteritzen per ser 100% ortogonals. Aquests valors són útils per extreure conclusions a posteriori.

Cal tenir present que totes les malles no estructurades que es mostren a continuació són simètriques en l’eix z , per assegurar una millor qualitat en els resultats.

²Aquests valors s’han obtingut amb un control de qualitat de malla calculats pel mallador amb el qual s’han realitzat totes les malles d’aquest exercici (“icemcf”).

Les mallas no estructurades utilitzades per cadascun dels casos són:

Tipus de malla	Codi	Nombre de nodes	Qualitat mitjana	Qualitat mínima
Uniforme	NSU32	936	0.95	0.58
	NSU64	3676	0.97	0.49
	NSU128	16524	0.97	0.42
	NSU256	64192	0.97	0.58
No Uniforme	NSNU32	1054	0.82	0.58
	NSNU64	4064	0.92	0.58
	NSNU128	16674	0.92	0.56
	NSNU256	63912	0.94	0.56

Taula 5.3: Tipus de mallas no estructurades per cada simulació Schercliff

En les següents imatges es mostren algunes de les mallas que es comenten en les taules

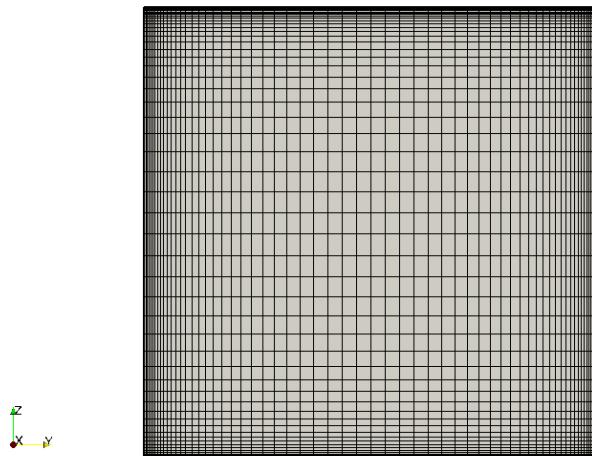


Figura 5.2: Malla estructurada hiperbòlica 64x64 (SH64)

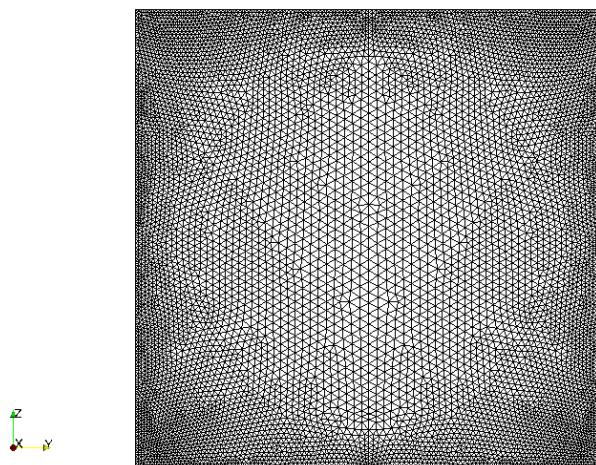


Figura 5.3: Malla no estructurada no uniforme 128x128 (NSNU128)

5.2.7 Anàlisis qualitatiu

En aquest apartat es demostra, mitjançant les expressions analítiques, com els efectes magnetohidrodinàmics(MHD) influeixen en el gradient de pressions i en el perfil de velocitats. Per totes les proves s'utilitza un cabal volumètric de referència de $4m^3/s$.

Pèrdua de pressió

En la taula 5.4 es demostra la caiguda de pressió que provoquen els efectes MHD.

Ha	Re	$\nabla p (Pa/m)$	$Q (m^3/s)$
0	10	$7.11e - 01$	4
10	10	$1.53e + 00$	4
50	10	$5.81e + 00$	4
100	10	$1.10e + 01$	4
500	10	$5.21e + 01$	4

Taula 5.4: Comparació del gradient de pressions per a diferents Ha

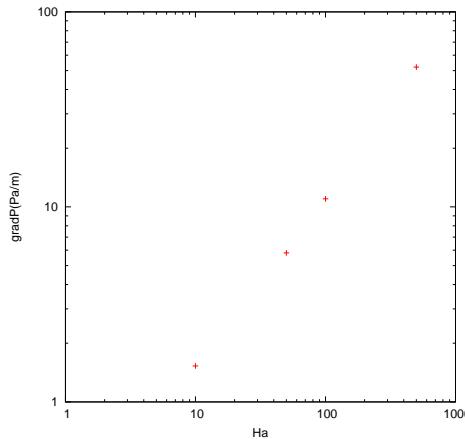


Figura 5.4: Resultats de la taula 5.4

Com que la gràfica 5.4 és logarítmica, no s'ha inclòs el resultat de $Ha = 0$. Tot i així, es continua apreciant que és el més petit de tots en la taula 5.4. La gràfica mostra perfectament, com per mantenir el cabal volumètric constant s'ha d'incrementar el gradient de pressions a mesura augmenta el Hartmann. Per tant, d'aquesta gràfica s'extreu la conclusió que els efectes MHD produueixen una pèrdua de pressió. Si s'hagués fixat el gradient de pressions, s'observaria com més alt és el Hartmann, més petit és el cabal volumètric que circula a través de la canonada.

Perfil de velocitats

Tal i com s'ha comentat, el perfil de velocitats també es veu modificat. En les

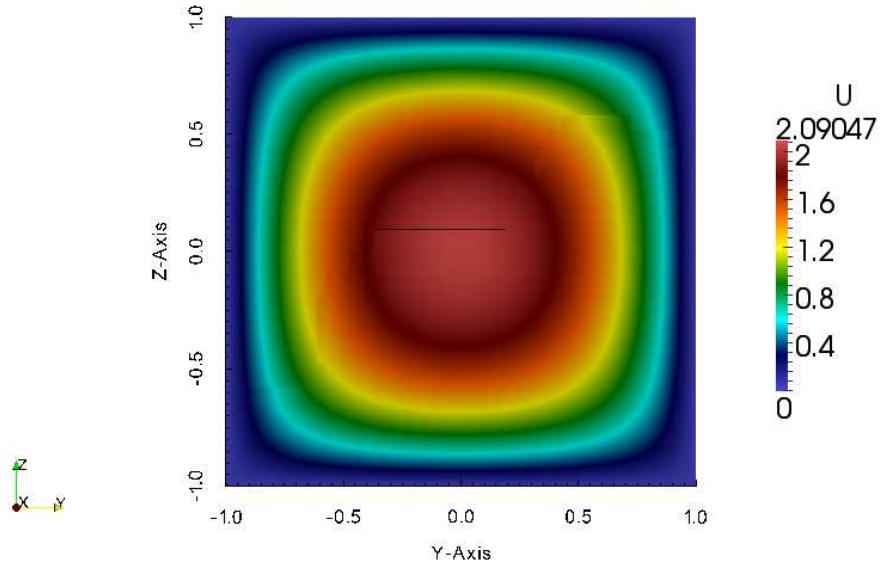


Figura 5.5: Cas Schercliff: perfil de velocitats per un $Ha = 0$

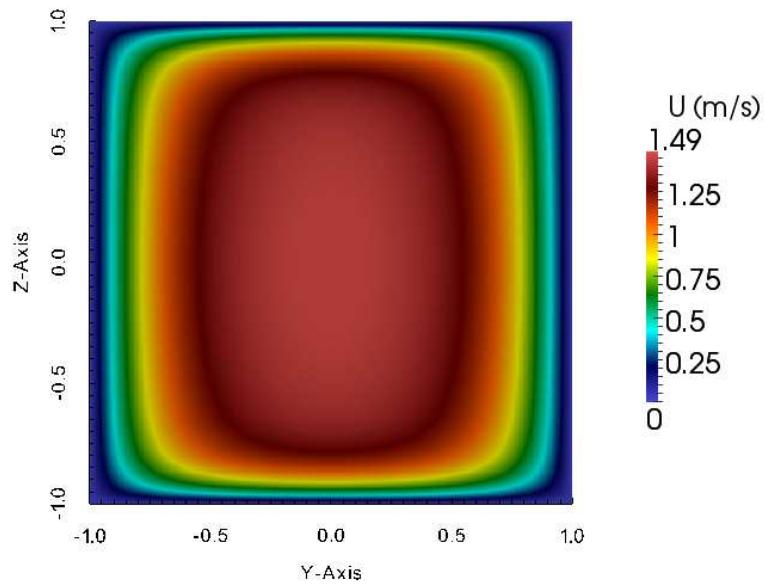


Figura 5.6: Cas Schercliff: perfil de velocitats per un $Ha = 10$

S'observa una deformació pronunciada del camp de velocitats per un Ha de 10.

Densitat de corrent elèctric induït

Un altre aspecte interessant és conèixer perquè el camp de velocitats adopta aquesta forma peculiar. El responsable d'aquest efecte és la força de Lorentz, produïda per la interacció entre el camp magnètic de les condicions de contorn i les densitats de corrent elèctric creades pel moviment relatiu entre el medi conductor (fluid) i el propi camp magnètic. Així doncs, és interessant conèixer la densitat de corrent elèctric dins el domini.

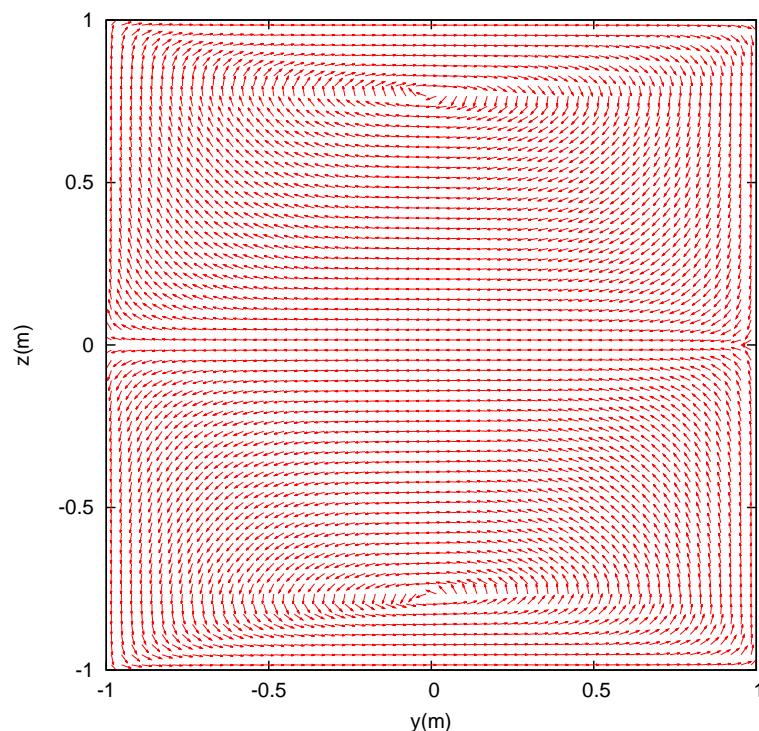


Figura 5.7: Cas Schercliff: densitat de corrent elèctric per un Ha 10

En la figura 5.7, la densitat de corrent elèctric (j) esta expressada en forma de vector unitari perquè es pugui apreciar la re-circulació de la variable per tal de complir divergència nul·la.

Per tal de poder observar la magnitud de j en la direcció y i z , s'inclouen les se-

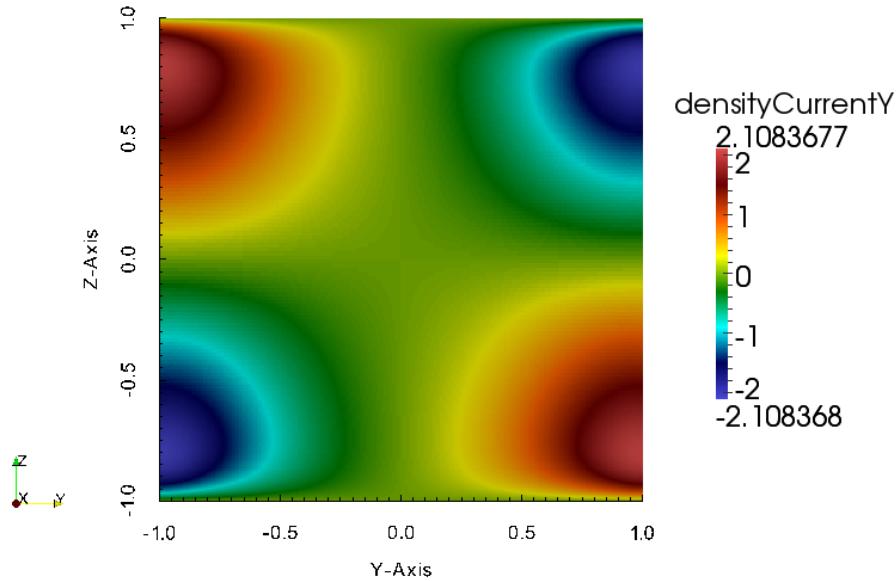


Figura 5.8: Cas Schercliff: densitat de corrent elèctric en direcció Y per un Ha 10

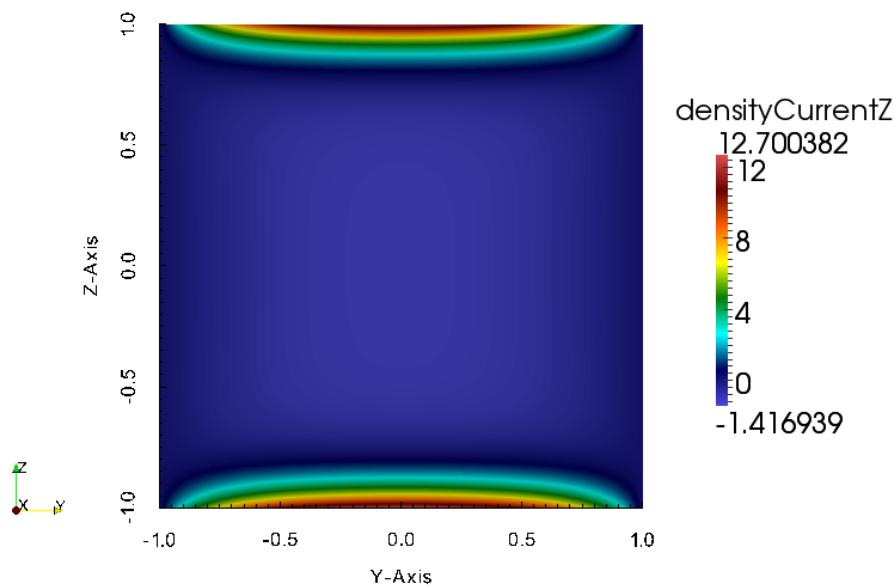


Figura 5.9: Cas Schercliff: densitat de corrent elèctric en direcció Z per un Ha 10

Explicació de la modificació del camp de velocitats

Gràcies a les figures 5.7, 5.8 i 5.9 és pot fer una explicació raonable sobre el perquè es deforma el perfil de velocitats dins el canal a mesura s'augmenta el Hartmann.

En primer lloc, cal tenir present que la única diferència entre la figura 5.5 i 5.6 és el terme font definit com la força de Lorentz. Així doncs, el causant d'aquesta deformació és aquesta força que es caracteritza per calcular-se com el producte vectorial entre la densitat de corrent elèctric(\mathbf{j}) i el camp magnètic(\mathbf{B}).

$$\mathbf{F} = \mathbf{j}_i \times \mathbf{B}$$

Com que el camp magnètic és constant en sentit(+), direcció(z), mòdul, la força de Lorentz depèn únicament de la densitat de corrent elèctric induït.

Per tal de millorar l'explicació de la deformació del perfil de velocitats, es separa el domini del problema en tres regions, la zona central, les parets paral·leles al camp magnètic i les perpendiculars a ell.

- **Zona central:** en aquesta zona, bona part del fluid es caracteritza per anar en direcció l'eix y en sentit negatiu. Així doncs, la força de Lorentz va en sentit contrari al fluid i per tant contribueix a augmentar la pèrdua de pressió.
- **Plaques perpendiculars al camp magnètic:** en aquesta regió el mòdul de la densitat de fluid és màxima. La direcció continua sent en direcció y , però a diferència de la zona central, el sentit en aquest cas és positiu. Aquest fet produeix que la força de Lorentz contribueixi en augmentar la velocitat del fluid, ja que van a la mateixa direcció. Així doncs, aquest efecte, junt amb el fet que la velocitat del fluid que es troba en contacte amb la paret ha de ser nul·la, entren en discord. Aquest fenomen produeix una capa límit del perfil de velocitats molt fina en aquesta regió. Degut a la importància, tant física com numèrica, d'aquest fenomen, la capa rep el nom del seu descobridor, “capa de Hartmann”. Es coneix que l'espessor de la capa de Hartmann és de l'ordre de Ha^{-1} .
- **Plaques paral·leles al camp magnètic:** a diferència de les zones anteriors, la densitat de corrent elèctric té una direcció majoritària en y , amb un sentit tant positiu com negatiu(tal i com es pot apreciar en la figura 5.7). Com que va a la mateixa direcció que el camp magnètic, la força de Lorentz resultant és 0. Per aquest motiu la capa límit que apareix en aquesta zona no és tant

fina com la capa de Hartmann, ja que la força de Lorentz no intervé en la zona local. A aquesta capa se li atribueix el nom de “*capa lateral*”, i es coneix que té una espessor aproximada de l’ordre de $Ha^{-1/2}$.

La figura 5.6 es un clar exemple per distingir tant la capa límit de Hartmann, com la capa límit lateral. S’observa amb facilitat com la capa de Hartmann és més fina que la capa límit lateral. També es veu amb facilitat com ambdós capes tendeixen a ser cada cop més fines a mesura s’allunyen del Hartmann 0.

Conclusions de l’anàlisi qualitatiu

Queda comprovat com els efectes MHD modifiquen el perfil de velocitats i també provoquen una pèrdua de pressió. Aquests efectes són produïts per les forces de Lorentz originades per la densitat de corrent elèctric induït i el mateix camp magnètic.

A més a més, des d’un punt de vista numèric, l’escassa espessor de la capa límit de Hartmann és una característica d’elevada importància, ja que obliga a introduir un mínim de nodes en una distància molt petita, per tal de calcular la capa límit correctament. Aquesta distància tant petita provoca que al utilitzar un esquema temporal explícit, el Δt resultant també sigui molt petit (de l’ordre de $1e - 7$ per Ha de $1e3$) per a que el sistema sigui estable .

Arribat a aquest punt, cal dir que és complicat trobar la solució numèrica del cas Schercliff per Hartmann molt elevats ($Ha > 1000$), ja que la capa de Hartmann és molt fina i provoca que la distància mínima de tot el domini sigui també molt petita. Per aquest motiu, els casos resolts s’han quedat en un Hartmann màxim de 500.

5.2.8 Verificació dels resultats numèrics

En aquest apartat es mostren els resultats obtinguts amb el codi Termofluids, utilitzant per cada Hartmann, diferents tipus de malles per tal de validar l'estabilitat, la consistència i la convergència de l'esquema numèric utilitzat. En les següents taules es mostra l'error relatiu ponderat (ϵ_{rP}), junt amb l'ordre de precisió (OP), en funció del tipus de malla utilitzat. L'error relatiu ponderat³ és calcula com:

$$\epsilon_{rP} = \frac{1}{\forall T} \sum_{i=1}^n (|\epsilon_{r_i}| \forall_i) \quad (5.5)$$

Mentre que l'ordre de precisió s'obté comparant dos malles del mateix tipus, però de dimensions diferents. Queda definida com:

$$OP = \frac{\ln \left(\frac{\epsilon_{rP_B}}{\epsilon_{rP_A}} \right)}{\ln \left(\frac{n_B}{n_A} \right)} \quad (5.6)$$

Per tal de calcular el gradient del potencial elèctric s'ha utilitzat el teorema de Gauss pel càlcul del gradient. Es recorda que aquest càlcul és necessari per obtenir la densitat de corrent elèctric, la qual forma part del terme font que s'inclou en l'equació de conservació de la quantitat de moviment. Més endavant, es durà a terme una comparativa entre utilitzar el teorema de Gauss pel gradient i el teorema dels mínims quadrats(apartat 5.2.9).

Tal i com s'ha comentat en la definició del problema, el cas Shercliff[1] disposa de solució analítica en regim permanent. Així doncs, tots els resultats numèrics exposats en aquest apartat són referenciat respecte els resultats analítics.

³No s'inclouen els punts de les cel·les que estan en contacte amb les condicions de contorn, degut que tenen un ordre de precisió menor que les altres cel·les.

Hartmann 10

Malla	Estructurada				No estructurada	
	Ha 10	Uniforme(SU)		Hiperbòlica(SH)	Uniforme(NSU)	No uniforme(NSNU)
Dimensió	ϵ_{rP} (%)	OP	ϵ_{rP} (%)	OP	ϵ_{rP} (%)	ϵ_{rP} (%)
32	$1.51 \times 10^{+0}$		$3.20 \times 10^{+0}$		$1.86 \times 10^{+1}$	$1.96 \times 10^{+1}$
64	4.22×10^{-1}	1.84	8.13×10^{-1}	1.98	$1.73 \times 10^{+0}$	$5.94 \times 10^{+0}$
128	9.50×10^{-2}	2.15	8.55×10^{-2}	3.25	$1.35 \times 10^{+0}$	$2.86 \times 10^{+0}$
256	3.29×10^{-2}	1.53	1.61×10^{-3}	5.73	$1.34 \times 10^{+0}$	$2.68 \times 10^{+0}$

Taula 5.5: Error relatiu ponderat i ordre de precisió per un Hartmann de 10

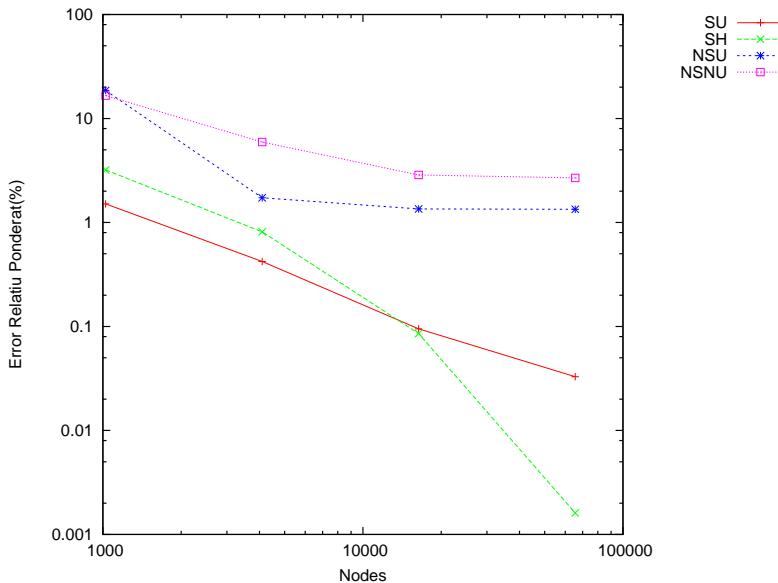


Figura 5.10: Error relatiu ponderat: gràfica dels resultats de la taula 5.5

S'observa clarament com per un Ha de 10, les malles estructurades tenen una clara tendència a disminuir l'error relatiu ponderat a mesura la malla es fa més fina. Dins les malles estructurades és important remarcar com la malla hiperbòlica és pitjor que la uniforme per malles bastes, mentre que passa el contrari per malles fines. Aquest és un tret característic de les malles estructurades no uniformes.

En canvi, per malles no estructurades, els resultats aconseguits no són tant bons, com els obtinguts en malles estructurades. Apareixen certes anomalies dins el càlcul de la densitat de corrent elèctric, la qual cosa produeix un càlcul erroni de la força de Lorentz que impedeix que l'error relatiu ponderat continui a la baixa a mesura s'augmenta el nombre de nodes. Tot i així l'error relatiu ponderat no arriba al 2%.

Hartmann 50

Malla	Estructurada				No estructurada	
	Ha 50	Uniforme(SU)		Hiperbòlica(SH)	Uniforme(NSU)	No uniforme(NSNU)
Dimensió	ϵ_{rP} (%)	OP	ϵ_{rP} (%)	OP	ϵ_{rP} (%)	ϵ_{rP} (%)
32	—		$1.46 \times 10^{+1}$			
64	$1.68 \times 10^{+1}$	—	$4.83 \times 10^{+0}$	1.60	$1.14 \times 10^{+1}$	$1.99 \times 10^{+2}$
128	$5.00 \times 10^{+0}$	1.75	7.34×10^{-1}	2.72	$8.21 \times 10^{+0}$	$3.43 \times 10^{+1}$
256	$1.31 \times 10^{+0}$	1.93	2.03×10^{-1}	1.85	$1.76 \times 10^{+1}$	$2.15 \times 10^{+1}$

Taula 5.6: Error relatiu ponderat i ordre de precisió per un Hartmann de 50

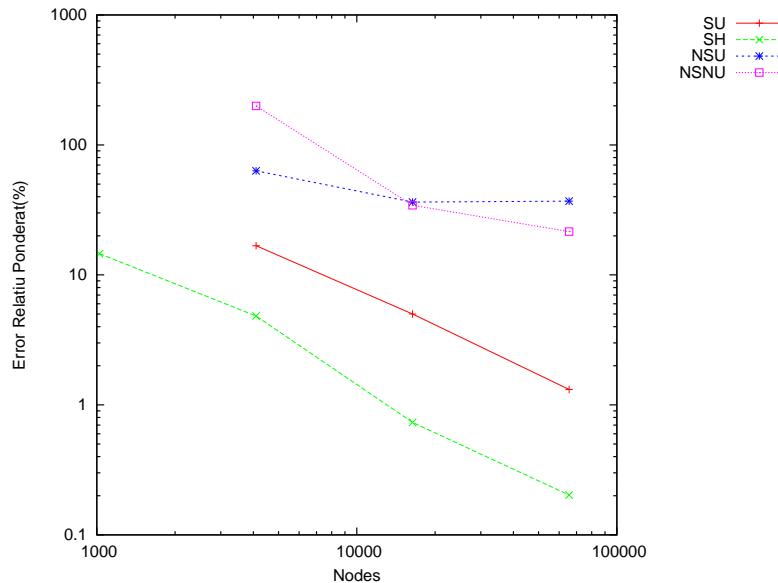


Figura 5.11: Error relatiu ponderat: gràfica dels resultats de la taula 5.6

Per començar, a diferència del cas Schercliff per Ha 10, la malla *SU*32 no presenta cap error relatiu ponderat, degut que el sistema és inestable amb aquest tipus de malla. Aquest fenomen es deu al fet que la malla *SU*32 és massa basta per determinar correctament la capa de Hartmann, la qual es molt més fina per un Ha de 50, que per un de 10. En canvi, per una malla *SU*64 si que s'obté un resultat, ja que disposa d'un mínim de nodes per tal definir la capa de Hartmann.

Per les malles estructurades, la malla hiperbòlica funciona millor que la uniforme per malles fines, mentre que succeeix el contrari per malles bastes. Aquest fenomen ja s'observa en la taula de Hartmann 10(taula 5.10).

Pel que fa a la malla no estructurada, s'observa com no existeix una tendència clara a disminuir l'error relatiu ponderat quan la malla es fa més fina. Aquest fenomen

es deu a la falta de precisió en el càlcul de la densitat de corrent elèctric, la qual propaga l'error en el càlcul de la força de Lorentz, i aquesta última induceix un error en el perfil de velocitats final.

Hartmann 100

Malla	Estructurada				No estructurada	
	Ha 100	Uniforme(SU)	Hiperbòlica(SH)	OP	Uniforme(NSU)	No uniforme(NSNU)
Dimensió	ϵ_{rP} (%)	OP	ϵ_{rP} (%)	OP	ϵ_{rP} (%)	ϵ_{rP} (%)
32	—		$2.09 \times 10^{+1}$		—	—
64	—	—	$8.19 \times 10^{+0}$	1.35	$3.88 \times 10^{+1}$	—
128	$1.97 \times 10^{+1}$	—	$1.34 \times 10^{+0}$	2.61	$3.02 \times 10^{+1}$	$6.89 \times 10^{+2}$
256	$5.69 \times 10^{+0}$	1.79	5.33×10^{-1}	1.33	$6.50 \times 10^{+1}$	$9.21 \times 10^{+1}$

Taula 5.7: Error relatiu ponderat i ordre de precisió per un Hartmann de 100

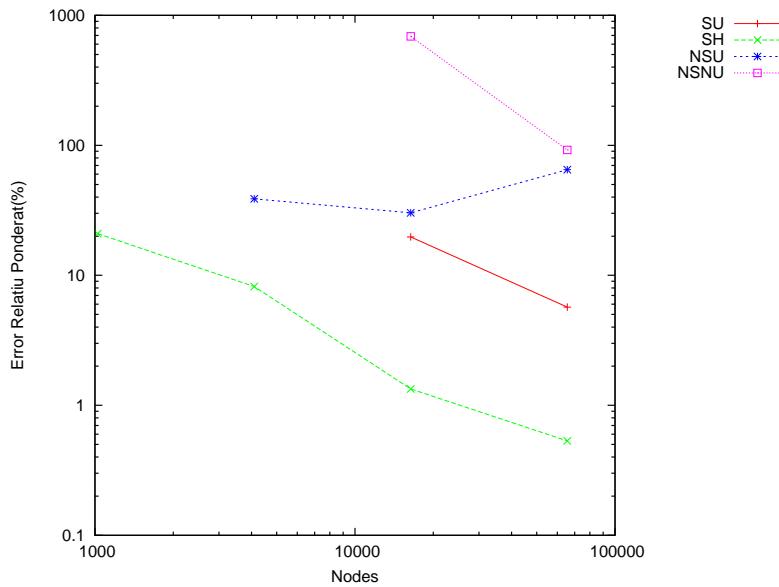


Figura 5.12: Error relatiu ponderat: gràfica dels resultats de la taula 5.7

En la taula 5.7 per un Ha de 100 s'observa el mateix problema que en el Ha 50, tot i que empitjorat. La malla estructurada uniforme és menys eficient degut que no té suficients nodes en la capa de Hartmann per tal de que aquesta sigui definida correctament. Tot i així s'aprecia consistència i convergència del resultats entre les malles $SU128$ i $SU256$.

Les malles de tipus SH mostren una bona consistència i convergència. En canvi, es continua observant resultats incoherents per les malles no estructurades.

Hartmann 500

Malla	Estructurada				No estructurada	
	Ha 500	Uniforme(SU)		Hiperbòlica(SH)	Uniforme(NSU)	No uniforme(NSNU)
Dimensió	ϵ_{rP} (%)	OP	ϵ_{rP} (%)	OP	ϵ_{rP} (%)	ϵ_{rP} (%)
32	—		$2.99 \times 10^{+1}$		—	
64	—	—	$1.73 \times 10^{+1}$	0.79	—	—
128	—	—	$5.60 \times 10^{+0}$	1.63	—	—
256	—	—	$4.82 \times 10^{+0}$	0.216	—	—

Taula 5.8: Error relatiu ponderat i ordre de precisió per un Hartmann de 500

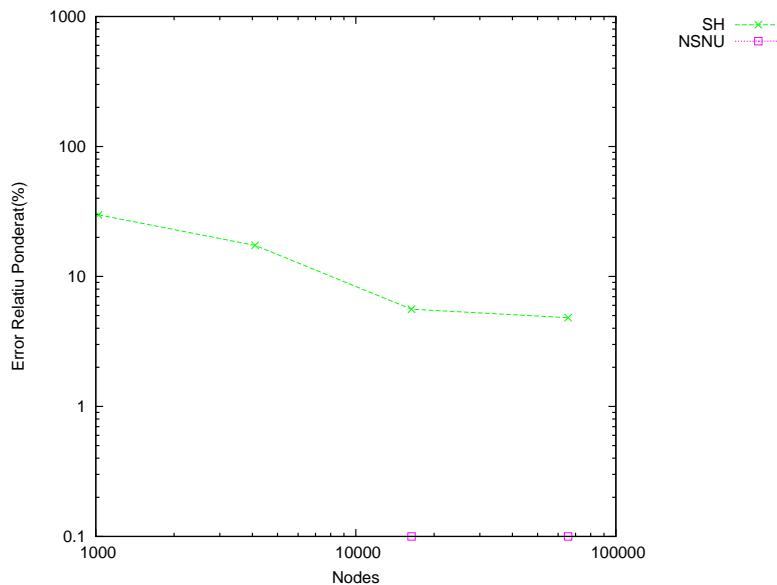


Figura 5.13: Error relatiu ponderat: gràfica dels resultats de la taula 5.8

En la taula 5.8 s'observa com les malles estructurades uniformes no tenen resultat, ja que el problema convergeix. El mateix problema succeeix amb les malles no estructurades uniformes. Aquest fenomen es deu a que no hi han el nombre mínim de nodes en la capa de Hartmann per tal de que aquesta sigui resolta correctament. Per aquest motiu el codi convergeix. En canvi per malles hiperbòliques s'observa com el codi es continua comportant de forma consistent, i el camp de velocitats convergeix cap a un error nul.

Tot i això, per el tipus de malla *SH* s'aprecia com els ϵ_{rP} són bastant pitjors que els obtinguts pels *Ha* més petits. Aquest efecte es deu altre cop a la falta de nodes dins la capa de Hartmann, la qual es molt més fina per un *Ha* de 500 que no pas per un de 100 o inferior. Per tal de solucionar aquest error s'ha de continuar utilitzant

malles hiperbòliques, però cada cop més fines en les parets on es produeix la capa de Hartmann.

5.2.9 Influència del càlcul del gradient del potencial elèctric

Tal i com s'espera, en problemes de MHD, la determinació de la densitat de corrent elèctric és de gran importància per tal d'obtenir resultats consistents, ja que d'ella en depèn el terme font que s'inclou en l'equació de conservació de la quantitat de moviment. Cal tenir present que, segons la modelització escollida en el projecte per resoldre problemes sobre MHD, la densitat de corrent elèctric s'obté mitjançant la llei d'Ohm. Es recorda l'expressió d'aquesta llei(3.54):

$$\mathbf{j} = \sigma (-\nabla \phi + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Per tal de calcular el gradient del potencial elèctric existeixen diferents tècniques, tot i que en aquest projecte només se n'han utilitzat dos: el teorema de Gauss pel gradient i el teorema dels mínims quadrats(MQ). Ambdós tècniques s'han explicat en l'apartat 4.4.2).

Tot seguit, es mostra una comparació d'aquest dos mètodes, tant per malla estructurada com per no estructurada. Les comparacions dels resultats obtinguts són per un Hartmann de 10 i també de 50.

Hartmann 10

Malla	Estructurada				No estructurada			
	Ha 10		Uniforme(SU)	Hiperbòlica(SH)	Uniforme(NSU)		No uniforme(NSNU)	
Dimensió	Gauss	MQ	Gauss	MQ	Gauss	MQ	Gauss	MQ
32	$1.51 \times 10^{+0}$	$1.51 \times 10^{+0}$	$3.20 \times 10^{+0}$	$1.46 \times 10^{+1}$	$1.86 \times 10^{+1}$	$1.66 \times 10^{+1}$	$1.96 \times 10^{+1}$	$7.26 \times 10^{+1}$
64	4.22×10^{-1}	4.22×10^{-1}	8.13×10^{-1}	3.39×10^{-1}	$1.73 \times 10^{+0}$	$2.03 \times 10^{+0}$	$5.94 \times 10^{+0}$	$3.83 \times 10^{+0}$
128	9.50×10^{-2}	9.50×10^{-2}	8.55×10^{-2}	6.95×10^{-2}	$1.35 \times 10^{+0}$	$1.56 \times 10^{+0}$	$2.86 \times 10^{+0}$	$2.20 \times 10^{+0}$
256	3.29×10^{-2}	3.29×10^{-2}	1.61×10^{-3}	1.25×10^{-2}	$1.34 \times 10^{+0}$	$1.36 \times 10^{+0}$	$2.68 \times 10^{+0}$	$2.10 \times 10^{+0}$

Taula 5.9: Error relatiu ponderat (%) fent ús de diferents modelitzacions del càcul del gradient per un Hartmann de 50

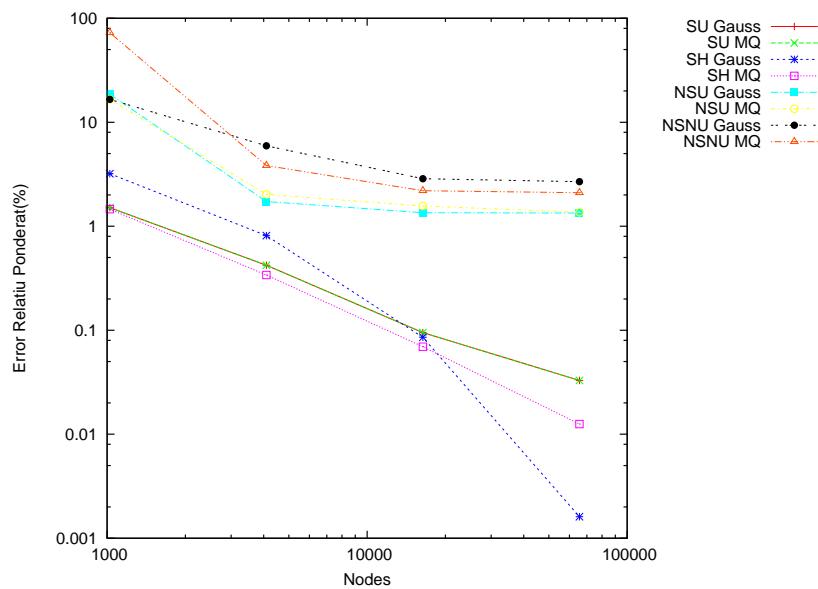


Figura 5.14: Error relatiu ponderat: gràfica dels resultats de la taula 5.9

Hartmann 50

Malla	Estructurada				No estructurada			
	Ha 50		Uniforme(SU)	Hiperbòlica(SH)	Uniforme(NSU)		No uniforme(NSNU)	
Dimensió	Gauss	MQ	Gauss	MQ	Gauss	MQ	Gauss	MQ
32	—	—	$1.46 \times 10^{+1}$	$8.74 \times 10^{+0}$	—	—	—	$3.17 \times 10^{+2}$
64	$1.68 \times 10^{+1}$	$1.68 \times 10^{+1}$	$4.83 \times 10^{+0}$	$2.30 \times 10^{+0}$	$1.14 \times 10^{+1}$	$8.80 \times 10^{+0}$	$1.99 \times 10^{+2}$	$5.06 \times 10^{+1}$
128	$5.00 \times 10^{+0}$	$5.00 \times 10^{+0}$	7.34×10^{-1}	5.63×10^{-1}	$8.21 \times 10^{+0}$	$8.02 \times 10^{+0}$	$3.43 \times 10^{+1}$	$2.45 \times 10^{+1}$
256	$1.31 \times 10^{+0}$	$1.31 \times 10^{+0}$	2.03×10^{-1}	2.20×10^{-1}	$1.76 \times 10^{+1}$	$1.57 \times 10^{+1}$	$2.15 \times 10^{+1}$	$1.57 \times 10^{+1}$

Taula 5.10: Error relatiu ponderat fent ús de diferents modelitzacions del càlcul del gradient per un Hartmann de 50

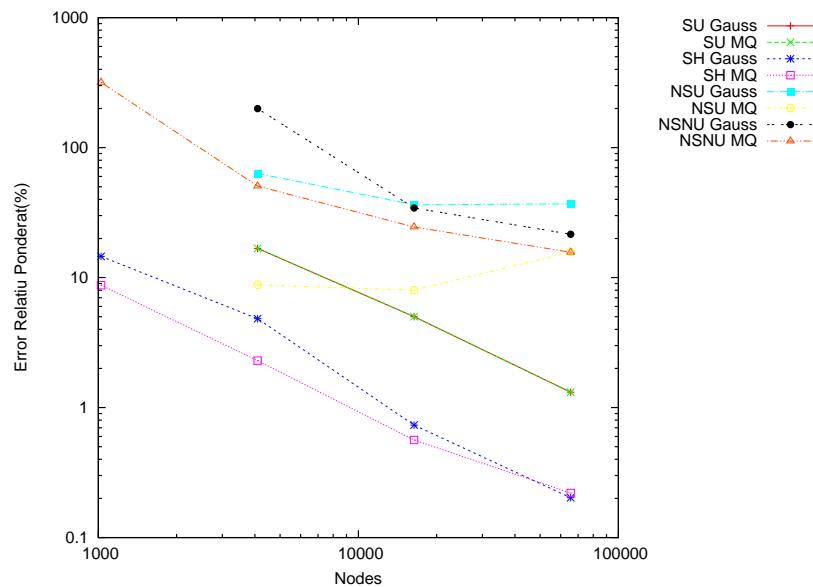


Figura 5.15: Error relatiu ponderat: gràfica dels resultats de la taula 5.10

En les taules 5.9 i 5.10 s'observa com per malles estructurades uniformes, el fet de canviar el mètode amb el que es calcula el gradient del potencial elèctric no altera el resultat final. En canvi, per malles estructurades hiperbòliques bastes, el mètode dels mínims quadrats presenta millors resultats que el mètode de Gauss. Per malles fines la diferència entre utilitza entre els dos mètodes és inapreciable.

5.2.10 Conclusions

Les conclusions extretes del cas Schercliff són:

- El mètode del potencial elèctric, utilitzat per determinar els fenòmens magnetohidrodinàmics, ha demostrat ser una eina eficaç per a malles estructurades, ja que els mètodes numèrics utilitzats creen i resolen un sistema d'equacions discret que es comporta de forma estable, consistent i convergent. En canvi, presenta problemes de consistència i convergència per malles no estructurades.
- Dins les malles estructurades, les malles hiperbòliques obtenen una major precisió en cas d'utilitzar el mètode dels mínims quadrats pel càlcul del gradient del potencial elèctric. Tot i això, per malles molt fines la diferència és inapreciable.
- El mètode amb que es calcula el gradient del potencial elèctric no afecta a les malles estructurades uniformes.
- Per a malles no estructurades, sorgeixen problemes en el càlcul de la densitat de corrent elèctric, ja que els resultats obtinguts depenen molt de la malla.
- Per tal d'obtenir bons resultats en malles no estructurades bastes és necessari que aquestes compleixin simetria en l'eix paral·lel a la direcció del camp magnètic. Si la malla creada no compleix aquesta propietat, els resultats obtinguts no convergeixen a una solució del sistema d'equacions en derivades parcials(EDP), ja que l'error espacial influeix massa.
- A mesura que Ha és més elevat, l'error relatiu ponderat és pitjor. Per continuar, mantenint l'error relatiu ponderat petit, és necessari utilitzar malles més fines.
- És fa realment costos el càlcul del cas Schercliff per problemes amb valors de Hartmann més elevats de 500. Aquest fenomen es deu al fet que ha d'existeix una gran densitat de volums de control dins la capa de Hartmann (espessor aproximada de Ha^{-1}), per tal que la malla no influeixi en la física del problema. Una alta densitat de volums de control, equival a una distància de separació entre nodes petita. Com que s'utilitzen esquemes temporals explícits, l'increment de temps (Δt) utilitzat depèn de forma directament proporcional a aquesta distància mínima entre nodes. Aquests Δt tant petits fan molt costos arribar resultats numèrics per Hartmann alts.

5.3 Cas amb convecció magnètica per fluids paramagnètics amb $Pr > 1$ i en condicions de microgravetat

5.3.1 Introducció

Aquest és un problema 2D de convecció magnètica analitzat per Bednarz et al.[3] que consisteix en sotmetre en absència de gravetat, en presència d'un camp magnètic i a una diferència de temperatures, un fluid paramagnètic amb valors de $Pr > 1$. A continuació, es mostra un esquema on es pot apreciar bona part de les característiques del cas.

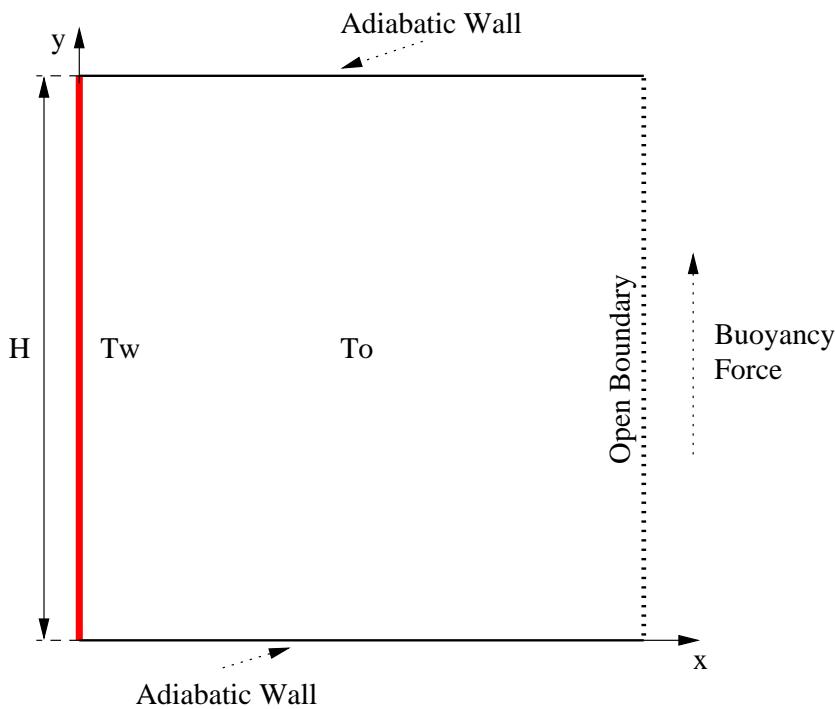


Figura 5.16: Esquema del cas de convecció magnètica

La geometria del problema és quadrada amb costats de dimensió H , T_w representa la temperatura de la paret calenta, T_o és la temperatura del fluid en l'instant inicial, la paret oberta deixa pas a la lliure circulació de fluid(tant d'entrada com de sortida) i les parets adiabàtiques imposen una transferència de calor nul·la en aquestes parets. S'indica la direcció en la que es produeix la força de flotació.

Les condicions de contorn del problema són:

- Velocitat(v):
 - Fluid-Sòlid: el fluid té velocitat nul·la quan esta en contacte amb el sòlid. Les zones de contacte són totes les parets a excepció de la part dreta que es troba oberta.
 - Part dreta: en aquest cas s'aplica la condició de sortida convectiva que s'explica en l'apartat 4.4.4.
- Pressió(p): s'aplica un gradient de pressions nul normal a totes les parets que envolten el sòlid, així com també a la part oberta de la dreta.
- Temperatura(T):
 - Paret esquerra: es troba a una temperatura T_w invariable en el temps.
 - Zona oberta: el fluid que entra cap a dins el domini ho fa a una temperatura igual a T_o , mentre que al fluid que surt del domini per la mateixa zona se li aplica la condició:

$$\nabla T_n = 0 \quad (5.7)$$

En aquesta paret tot i aplicar un gradient de temperatures nul, no es pot dir que sigui adiabàtica, ja que al sortir fluid calent contínuament ja s'estreu calor.

- Paret superior i inferior: són adiabàtiques de forma que el gradient de temperatures normal a les parets es nul.

Al començament, el fluid està quiet i sotmès a un estres produït per l'equilibri entre les forces magnètiques de flotació i el gradient de pressions. En l'instant de temps 0, s'imposa una temperatura T_o per la placa de la dreta, de forma que el fluid es comença a escalfar per pura conducció. A mesura que el fluid s'escalfa, la susceptibilitat magnètica específica es modifica segons indica la llei de Curie, a l'igual que també ho fa la densitat màssica. Aquesta variació provoca un desequilibri entre les forces de flotació i el gradient de pressions, que origina un flux de fluid. A partir d'aquest moment la transferència de calor no és solament per conducció, sinó que també intervé la convecció.

En qualsevol dels casos analitzats, el fluid es comporta de forma laminar, de forma que arriba sempre a un estat estacionari.

5.3.2 Interès industrial

A diferència dels camp gravitatoris, existeix la tecnologia suficient per crear i modificar camps magnètics amb multitud de formes, direccions i intensitats. Aquesta característica permet poder induir forces al fluid cap a qualsevol direcció sense contacte directe, la qual cosa representa un gran avantatge per multitud d'aplicacions a nivell industrial.

Una de les aplicacions interessants és la de poder arribar a neutralitzar, mitigar o potenciar els efectes de la convecció natural, de forma que pots modificar el cabal volumètric i la pròpia transferència de calor.

En absència de gravetat, per aplicacions espacials, aquests efectes es veuen potenciats en gran mesura. Es pot arribar a crear el fenomen anomenat convecció magnètica, el qual s'estudia en aquest apartat.

Tot i aquesta serie d'avantatge i aplicacions industrials, el problema principal d'aquest tipus de fenomen es que només es produeix en fluids rars que han estat manufacturats prèviament. Per tant, aquest es pot dur a terme en fluids com l'aigua de riu, l'aigua de mar, les diferents substàncies que formen l'aire ...

5.3.3 Equacions de treball

En aquest tipus de problema s'han utilitzat les següents equacions de treball (per més informació consultar l'apartat 3.6):

- Conservació de massa:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- Conservació de la quantitat de moviment amb el terme font de la força de flotació de la convecció magnètica:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\rho_0 \chi_{v_o} (\beta + 1/T_o)}{2\mu_0} (T - T_o) \nabla \mathbf{B}^2 \hat{j} \quad (5.8)$$

Es parla de \hat{j} perquè la força de flotació és, solament, en direcció y .

- Conservació de l'energia tèrmica sense cap terme font:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T \right) = \lambda \nabla^2 T \quad (5.9)$$

Els nombres adimensionals que governen les equacions anteriors són:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad \gamma Ra = \frac{\chi v_o B_o^2 \beta \Delta T L^2}{\mu_o \alpha \nu} \quad m = 1 + \frac{1}{\beta T_o} \quad Pe = \frac{LU_o}{\alpha}$$

Transferència de calor: nombre de Nusselt

En aquest cas també s'utilitza un nombre adimensional que no controla el comportament de les equacions diferencials, però que és de gran ajuda per tal d'exposar els resultats. Aquest és el nombre de Nusselt(Nu) i es calcula com:

$$Nu_i = \frac{Q_{conv}}{Q_{cond}} = \frac{-\lambda \left(\frac{T_i - T_w}{\Delta x_i} \right)}{-\lambda \left(\frac{T_o - T_w}{L} \right)} = \frac{L}{\Delta x_i} \left(\frac{T_w - T_i}{T_w - T_o} \right) \quad (5.10)$$

es un número adimensional que mide el aumento de la transmisión de calor desde una superficie por la que un fluido discurre (transferencia de calor por convección) comparada con la transferencia de calor si ésta ocurriera solamente por conducción.

El Nu mesura l'augment de la transferència de calor des d'una superfície per la qual hi circula un fluid (Q_{conv}), respecte la que es transmetria per conducció si no hi circulés. El subíndex i es refereix a que es tracta d'un Nu local que pertany a un únic volum de control, T_i és la temperatura del volum de control, L és el gruix de la paret, Δx_i és la distancia entre el node i i la paret que es troba a una temperatura T_w , λ és el coeficient de transferència de calor per conducció i T_o és la temperatura del fluid a l'entrada.

Per obtenir el Nusselt mitjà (Nu_m) s'ha d'aplicar la següent expressió:

$$Nu_m = \sum_{i=1}^n Nu_i \Delta y_i \quad (5.11)$$

On n , representa el nombre de volums de control que estan en contacte amb la paret i Δy_i és la superfície de cada volum de control que està en contacte amb la paret.

Per més informació sobre els nombres adimensionals, consultar l'apartat 3.7.

5.3.4 Paràmetres computacionals

Els aspectes computacionals més importants són:

- S'ha utilitzat el codi propi per dur a terme aquestes simulacions.
- S'utilitza la tècnica de volums finits amb un tractament “*staggered*”.
- El esquema numèric utilitzat per obtenir la velocitat a les cares del volum de control és el SMART.
- S'ha utilitzat l'esquema numèric temporal explícit de segon ordre d'Adams-Bashforth.
- Els resultats obtinguts pel codi es consideren que han arribat a l'estat permanent quan el valor absolut del terme acumulat màxim de l'equació de la conservació de l'energia tèrmica junt amb el valor absolut del terme acumulat màxim de l'equació de conservació de la quantitat de moviment és inferior a $1e - 6$.
- El solver utilitzat s'anomena LU. Per més detalls consultar l'apartat 4.5.3.

5.3.5 Casos analitzats

En la següent taula apareixen tots els casos analitzats, en funció dels diferents nombres de γRa , Pr i m . A més a més, també es mostren les alçades i temps adimensionals on s'obtenen els perfils de velocitats i temperatures, útils per comparar els resultats numèrics amb els de referència.

Simulació	γRa	Pr	m	Y	τ
1	$1e + 06$	10	2	0.5	0.2
2	$1e + 07$	10	2	0.3	0.5
3	$1e + 08$	10	2	0.5	0.4
4	$1e + 09$	10	2	0.3	0.3
5	$1e + 07$	5	2	0.5	0.8
6	$1e + 07$	20	2	0.5	0.6
7	$1e + 07$	50	2	0.7	0.4
8	$1e + 07$	100	2	0.5	0.3
9	$1e + 07$	10	1	0.4	0.6
10	$1e + 07$	10	5	0.6	0.5

Taula 5.11: Simulacions analitzades en el cas de la convecció magnètica per fluids paramagnètics

Totes les malles utilitzades per resoldre les simulacions anteriors són estructurades hiperbòliques. S'han analitzat diferents dimensions de malla per verificar la convergència i consistència dels resultats. Les malles utilitzades són:

Tipus de malla	Codi	Dimensió	Nombre de nodes
Hiperbòlica	H15	$15x15$	225
	H30	$30x30$	900
	H60	$60x60$	3600
	H80	$80x80$	6400

Taula 5.12: Tipus de malles estructurades per cada simulació de convecció magnètica per fluids paramagnètics

5.3.6 Anàlisis qualitatiu

En aquest apartat es mostra un conjunt d'imatges en 2D que representen el camp de velocitats, la distribució de temperatures i pressions, per la simulació 2. Tots els resultats de l'anàlisi qualitatiu s'han extret amb el codi propi, de forma que són resultats numèrics no analítics.

Camp de velocitats

En la figura 5.17 s'observa com la velocitat màxima del fluid es troba quan està en contacte amb la paret calenta. Aquella zona és on les forces de flotació són màximes i també és on el fluid s'accelera des de velocitat nula fins a la velocitat de l'estat permanent.

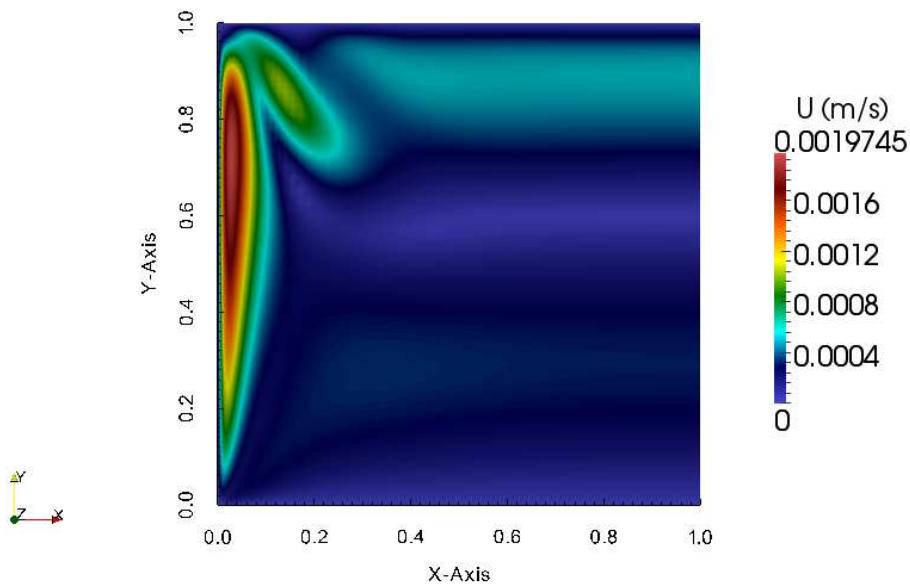


Figura 5.17: Modul del camp de velocitats de la simulació 2

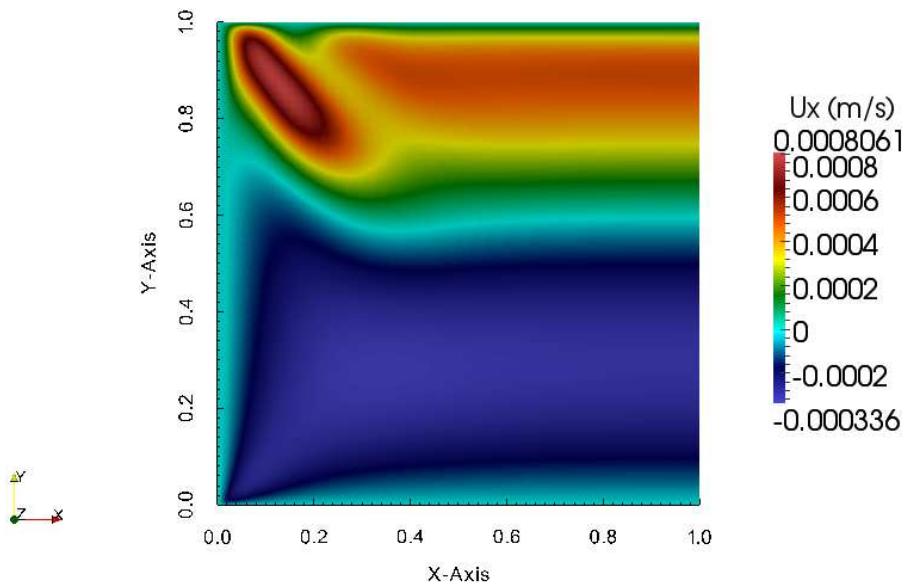


Figura 5.18: Camp de velocitats en direcció x de la simulació 2

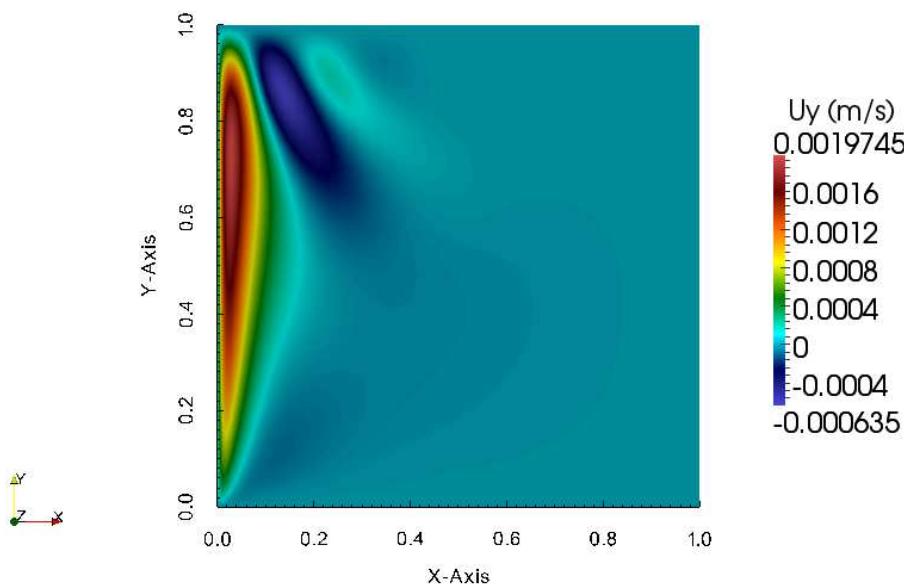


Figura 5.19: Camp de velocitats en direcció y de la simulació 2

En les figures 5.18 i 5.19 s'aprecia com el camp de velocitat resultant compleix continuïtat i, per tant, divergència nul·la. També s'observa com la paret de la dreta deixa entrar i sortir el fluid lliurement tal i com indica la seva condició de contorn.

Distribució de temperatures

En la figura 5.20 s'observa com la zona de fluid calent es troba en contacte en la paret calenta i també en la zona superior, de forma que el fluid al sortir està calent. Aquesta distribució es veu totalment afectada per la transferència de calor per convecció, ja que representa que el fluid calent es transporta més ràpid que el que es capaç de transferir per conducció. Per aquest motiu la calor no es avança aigües amunt.

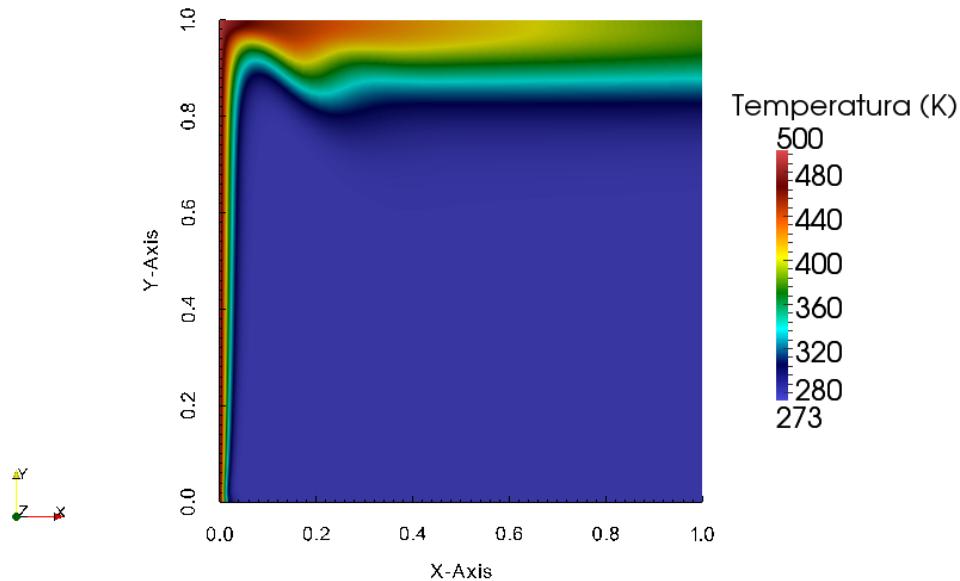


Figura 5.20: Distribució de temperatures de la simulació 2

Distribució de pressions

Degut que el camp magnètic produeix una força en direcció y positiva, les pressions més elevades es troben a la part superior, mentre que les més petites a la part inferior. Les unitats deixen de tenir importància degut que l'important és el gradient d'aquesta. En al figura 5.21 les unitats de la pressió no tenen importància, ja que el que realment interessa és el gradient de pressions.

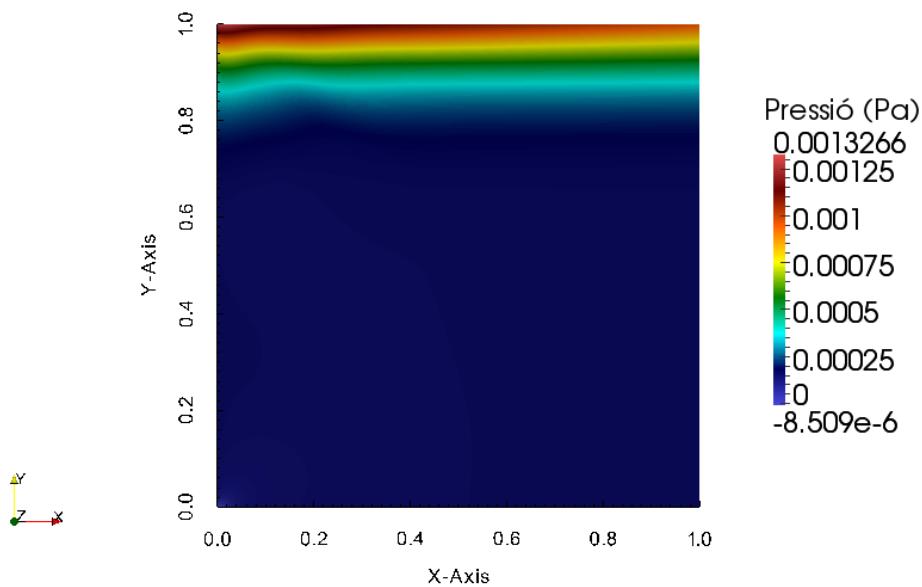


Figura 5.21: Distribució de pressions de la simulació 2

5.3.7 Estudi de consistència: refinament de malla

En aquest apartat es pretén analitzar la consistència del codi propi, aplicant un refinament de malla. Els resultats esperats són que a mesura s'incrementa la malla, l'error produït per aquesta ha de tendir a 0 per tal d'aconseguir uns resultats independents de la malla utilitzada. A continuació es mostren dos anàlisis de malla per diferents simulacions, la 3 i la 8.

Estudi de refinament de malla per la simulació 3 (S3)

Per tal de realitzar aquest estudi s'han comparat els perfils de velocitats i de temperatures (presos a la mateixa alçada i en estat permanent), així com també un estudi del Nusselt local i mitjà en la paret calenta. En la taula 5.11 apareixen les alçades dels diferents talls.

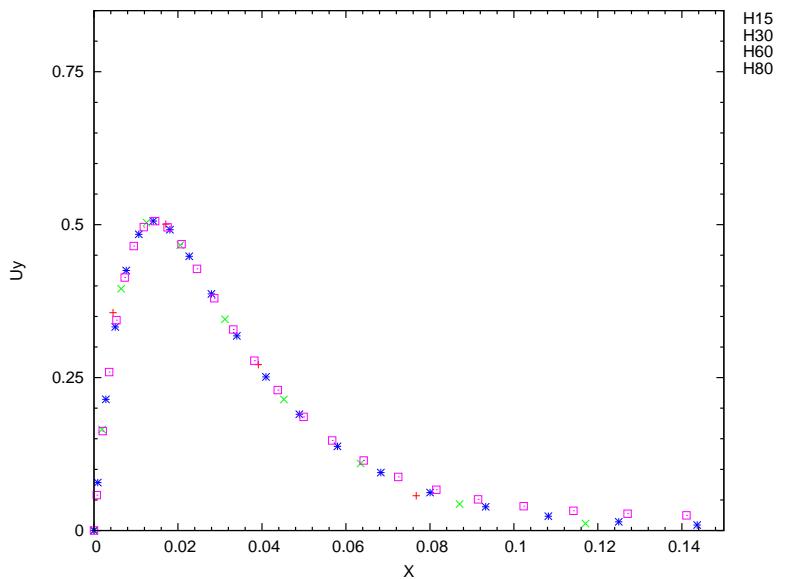


Figura 5.22: Estudi de consistència del codi propi pel perfil de velocitats de la S3

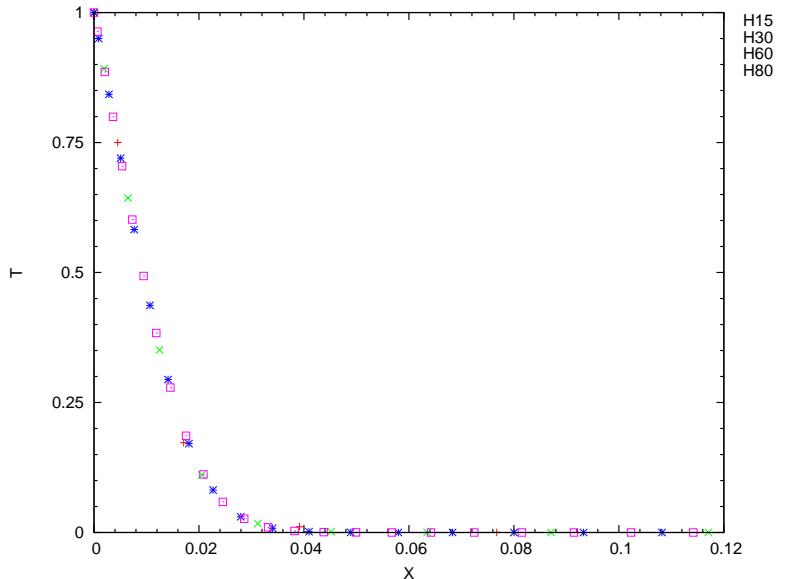


Figura 5.23: Estudi de consistència del codi propi pel perfil de temperatura de la S3

En els perfils de velocitat i temperatura de la simulació 3 (figures 5.22 i 5.23) s'observa com pràcticament els resultats obtinguts no depenen de la malla utilitzada. Aquest fenomen es deu al fet que des de malles ben bastes (pocs volums de control) l'error produït per la malla es menyspreable. Tot i això, existeixen petites variacions en la zona dreta del perfil de velocitats que fan pensar en utilitzar la malla més fina(H80) per tal d'obtenir uns resultats de major qualitat. A més a més, l'esforç computacional que representa utilitzar una malla H80 no és molt elevat.

A continuació, es mostren les gràfiques dels Nusselts locals i mitjans en la paret calenta (T_w). Aquestes són:

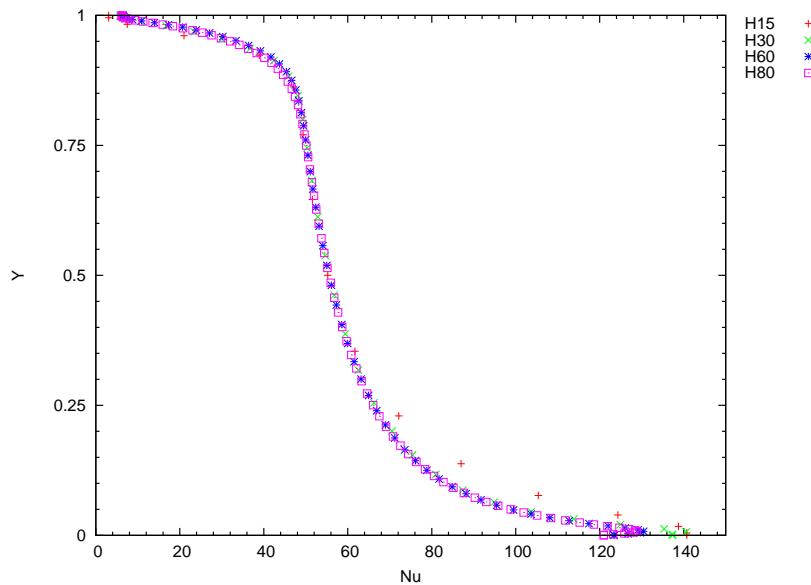


Figura 5.24: Estudi de consistència del codi propi pel Nusselt local (Nu) en la paret calenta de la S3

La gràfica del Nusselt local (5.24) confirma la necessitat d'utilitzar un mínim de malla H60, ja que malles més petites encara mostren discrepàncies en els resultats, produïdes per l'error de malla.

En la taula 5.13 es mostren els Nusselts mitjans de la simulació 3, per les diferents malles.

Codi Malla	Nodes	Nu_m
H15	225	62.05
H30	900	60.08
H60	3600	59.72
H80	6400	59.41

Taula 5.13: Nusselt mitjà(Nu_m) a la paret calenta de la S3

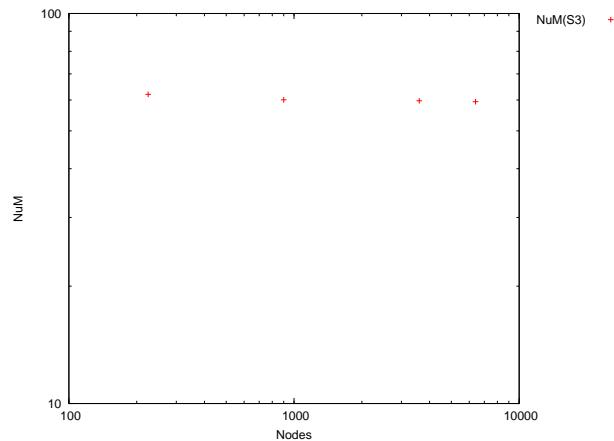


Figura 5.25: Nusselt mitjà(Nu_m) de la taula 5.13

Tant la taula del Nu_m (5.13) com els de la gràfica 5.13 mostren, perfectament, com els resultats obtinguts no depenen, pràcticament, de la malla utilitzada.

Estudi de refinament de malla per la simulació 8 (S8)

En aquest apartat es du a terme el mateix anàlisis que s'ha fet a la simulació 3, però ara per la simulació 8. Per començar, es mostren els perfils de velocitats i de temperatura en estat permanent i en l'alçada indicada en la taula 5.11.

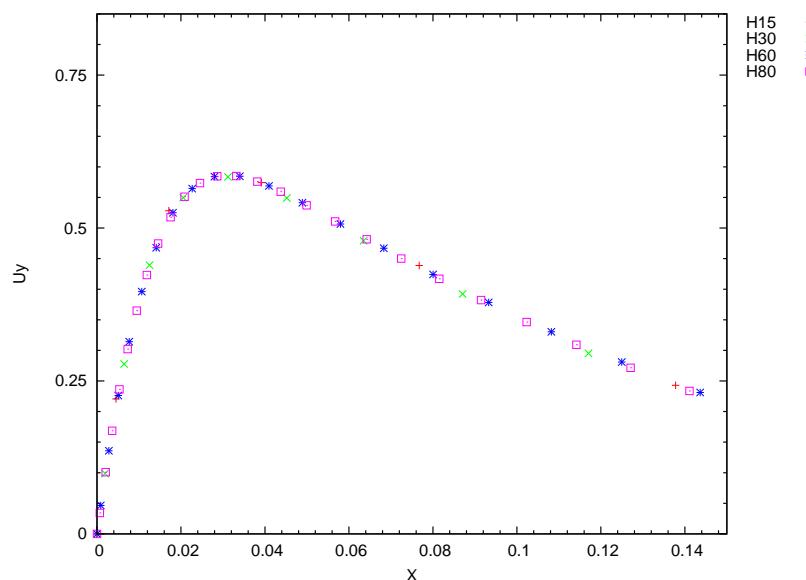


Figura 5.26: Estudi de consistència del codi propi pel perfil de velocitats de la S8

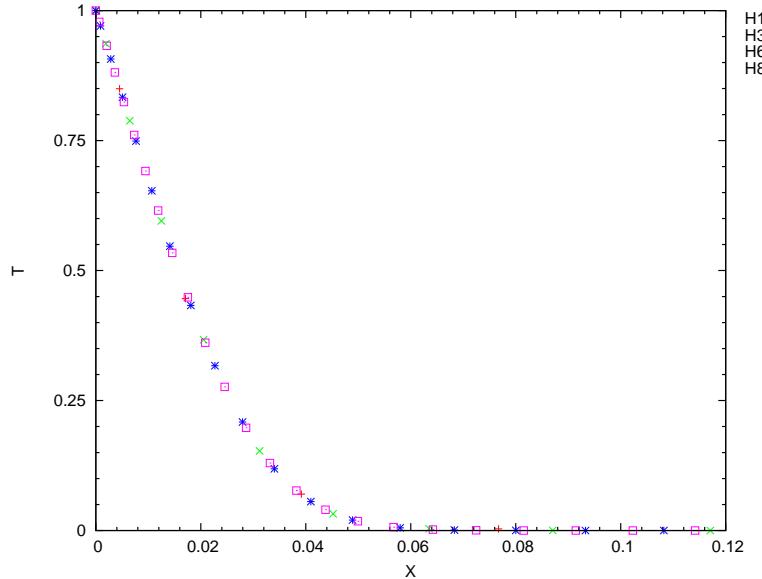


Figura 5.27: Estudi de consistència del codi propi pel perfil de temperatura de la S8

En els dos gràfics anteriors de velocitat (5.26) i temperatura (5.27) s'observa com la diferència és mínima, a l'igual que la simulació 3.

A continuació, es mostren les gràfiques dels Nusselts locals i mitjans en la paret calenta (T_w). Aquestes són:

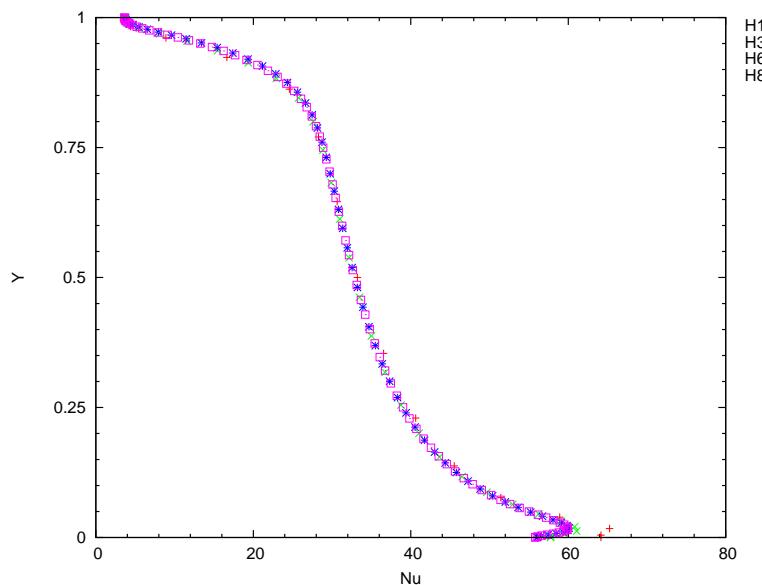


Figura 5.28: Estudi de consistència del codi propi pel Nusselt local (Nu) en la paret calenta de la S8

La gràfica del Nusselt local (5.28), a l'igual que la simulació 3, confirma la necessitat d'utilitzar un mínim de malla H60, ja que malles més petites encara mostren discrepàncies en els resultats, produïdes per l'error de malla. En la taula 5.14 es mostren els Nusselts mitjans de la simulació 8, per les diferents malles.

Codi Malla	Nodes	Nu_m
H15	225	34.05
H30	900	33.64
H60	3600	33.78
H80	6400	33.71

Taula 5.14: Nusselt mitjà(Nu_m) a la paret calenta de la S8

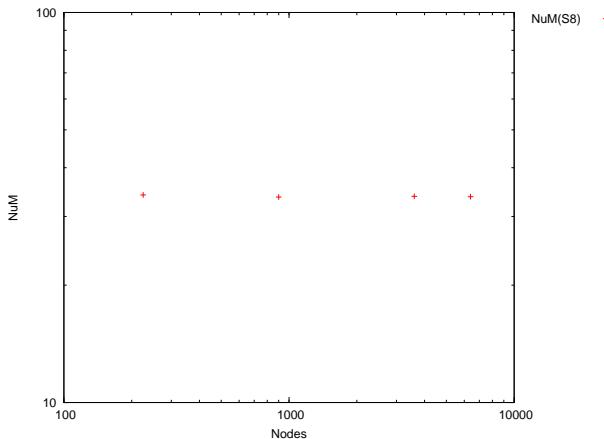


Figura 5.29: Nusselt mitjà(Nu_m) de la taula 5.14

Tant la taula del Nu_m (5.14) com els de la gràfica 5.29 mostren, perfectament, com els resultats obtinguts no depenen, pràcticament, de la malla utilitzada.

Conclusions del refinament de malla

Tal i com es pot observar en l'anterior ànalisi de les simulacions 3 i 8, es interessant utilitzar com a mínim la malla H60, ja que s'aprecia un salt important en l'estudi dels Nusselts locals. També existeix una variació dels resultats en la part dreta del perfil de velocitats de la simulació 3. Així doncs, degut a aquesta petita variació, al observar una bona consistència del codi i al no suposar una gran esforç computacional, es decideix realitzar els estudis de convergència i els ànalisis paramètrics amb una malla H80.

5.3.8 Estudi de convergència: comparació de resultats

Els resultats obtinguts utilitzant el codi propi amb una malla H80 són comparats amb el cas de referència Bednarz et al[3], per tal de realitzar un estudi de convergència. En el document es presenten els resultats en forma de perfils de velocitats i de temperatures, en direcció y .

Els perfils de cada simulació es duen a terme a diferents alçades adimensionals(Y), en règim permanent i també transitori. Els temps en el que s'analitzen els perfils en règim transitori també depenen de cada simulació. En la taula 5.11 es mostren, tant les alçades(Y), com els temps(τ) dels perfils de cada simulació.

Resultats en estat transitori

És interessant realitzar un estudi de convergència en l'estat transitori per assegurar el fet que l'esquema temporal no indueixi cap error al resultat final. En les figures 5.30 i 5.31 apareixen els diferents perfils de velocitats i temperatures, respectivament, en direcció y , adoptats per cadascuna de les simulacions de la taula 5.11.

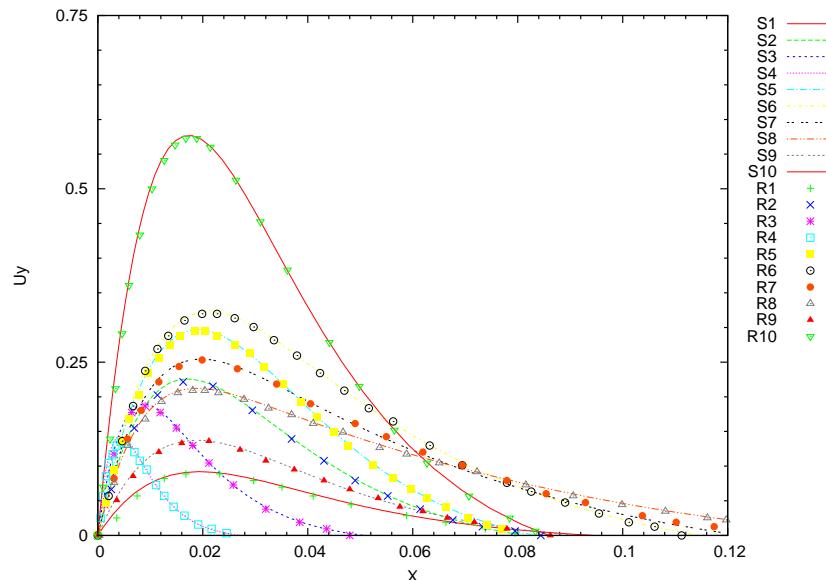


Figura 5.30: Perfil de velocitats transitori(U_y): comparació dels resultats numèrics(S) amb els resultats de referència(R)

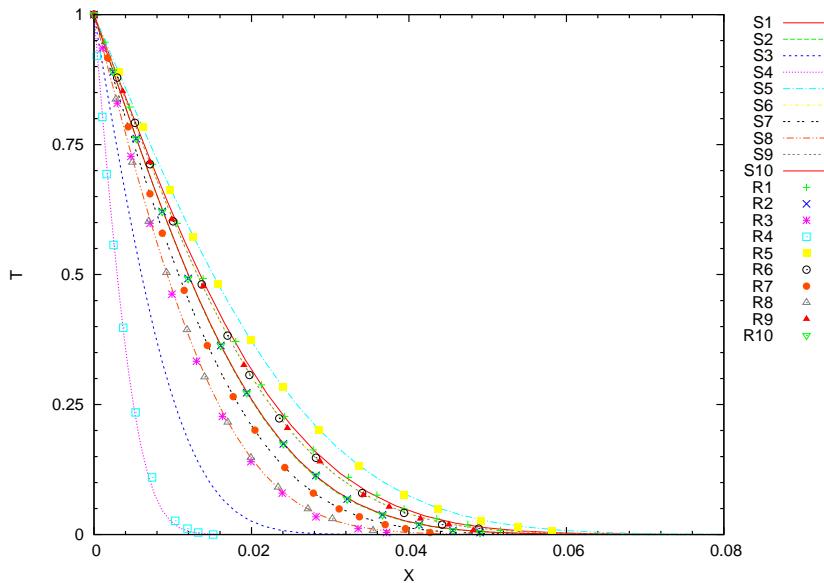


Figura 5.31: Perfil de temperatura transitori(T): comparació dels resultats numèrics(S) amb els resultats de referència(R)

En la figura 5.30 s'observa com tots els perfils de velocitat de referència concorden amb els resultats numèrics extrets utilitzant el codi propi. En canvi, en la figura 5.31 s'aprecia com la corba que pertany a la simulació 3 no concorda amb el cas de Bednarz de referència. Aquesta anomalia es deu a una equivocació de l'autor alhora de classificar els resultats, ja que no es possible que el perfil de velocitats concordi amb el resultat de referència, mentre que el perfil de temperatures no ho faci.

Resultats en estat permanent

En la figures 5.32 i 5.33 apareixen els diferents perfils de velocitats i temperatures, respectivament, en direcció y , adoptats per les simulacions 2, 6, 7 i 8. Aquestes simulacions comparteixen el mateix γRa i m , però diferents Pr .

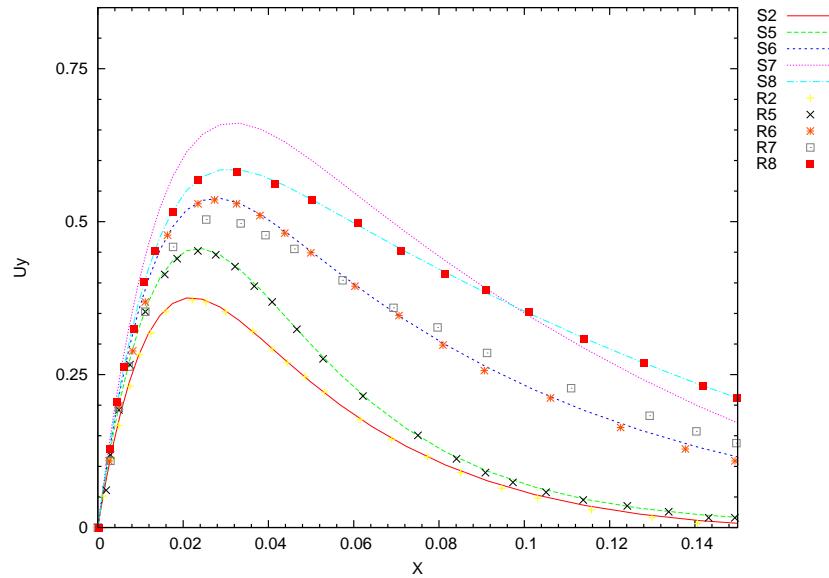


Figura 5.32: Perfil de velocitats estacionari(U_y): comparació dels resultats numèrics(S) amb els resultats de referència(R) per un γRa de $1e + 07$ i un m de 2

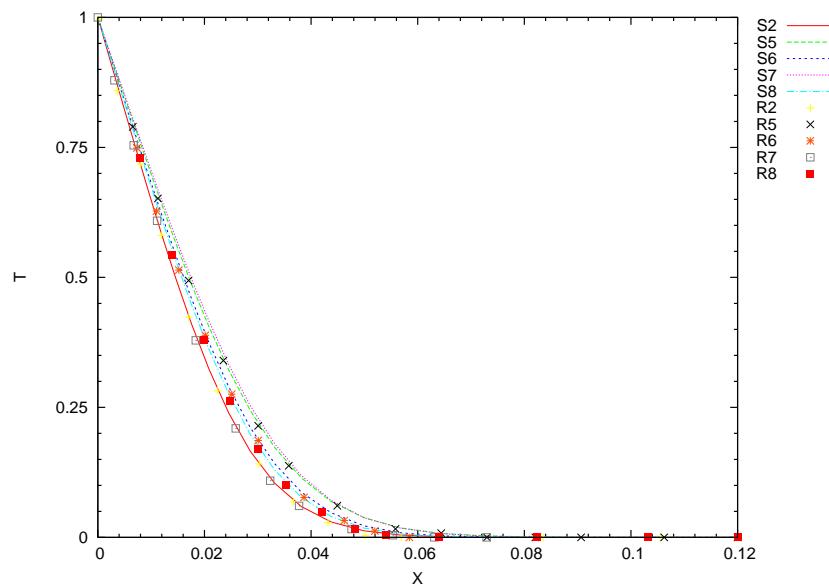


Figura 5.33: Perfil de temperatura estacionari(T): comparació dels resultats numèrics(S) amb els resultats de referència(R) per un γRa de $1e + 07$ i un m de 2

La discrepància dels resultats en la simulació 7, tant pel perfil de velocitats (5.32) com de temperatures (5.33), fa pensar en una equivocació per part de l'autor a l'hora de classificar els resultats. Aquesta hipòtesis es veu reforçada degut al fet que per nombres de Pr inferiors (5,10 i 20) i superiors (100) els resultats concorden sense problemes.

Conclusions de l'estudi de convergència

Tenint present tots els resultats i motius d'aquest apartat, es considera que la convergència del codi és adequada per una malla H80. Així doncs l'estudi paramètric s'ha realitzat amb aquesta malla.

5.3.9 Estudi paramètric

Una vegada s'ha realitzat l'estudi de consistència i de convergència del cas, és procedeix a fer l'estudi paramètric per conèixer amb detall com afecten els diferents nombres adimensionals al fenomen que realment interessa controlar, la transferència de calor. Tal i com s'ha comentat en l'apartat 5.3.3, el nombre adimensional que defineix la relació entre la transferència de calor total, respecte la que es transmetria solament per conducció, és el nombre Nusselt (Nu). En les següents taules i gràfiques s'observa com el γRa , Pr i m afecten al Nusselt mitjà (Nu_m).

Estudi paramètric: γRa

Simulació	γRa	Nu_m
1	$1e + 06$	15.76
2	$1e + 07$	32.11
3	$1e + 08$	59.41
4	$1e + 09$	107.52

Taula 5.15: Nusselt mitjà(Nu_m) a la paret calenta per un Pr de 10 i un m de 2 amb una malla H80

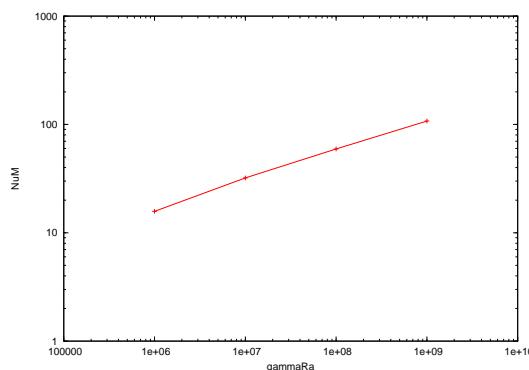


Figura 5.34: Gràfica dels resultats de la taula 5.15

En la figura 5.34 s'observa amb claredat com un augment del Rayleigh magnètic provoca un augment del Nusselt mitjà. Aquest comportament és evident, degut al paral·lelisme de significat que comparteixen dels dos nombres adimensionals.

Estudi paramètric: Pr

Simulació	Pr	Nu_m
5	5	31.75
2	10	32.11
6	20	33.03
7	50	33.68
8	100	33.71

Taula 5.16: Nusselt mitjà(Nu_m) a la paret calenta per un γRa de $1e + 07$ i un m de 2 amb una malla H80

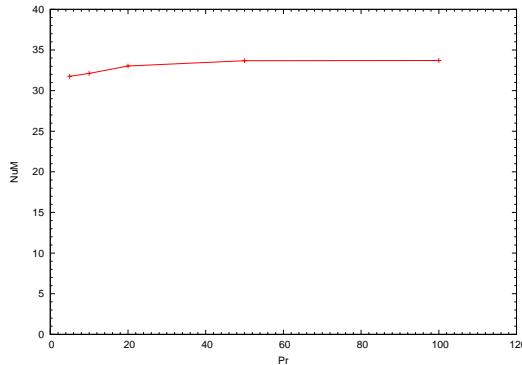


Figura 5.35: Gràfica dels resultats de la taula 5.16

En la figura 5.35 s'observa com un augment del Prandtl($Pr > 1$) no provoca canvis significatius en el Nusselt mitjà. Com més gran és el Pr , més viscos és el fluid i menys conductivitat tèrmica té. Par tant, amb Pr grans, el coeficient de conductivitat tèrmica és petit, mentre que el gradient de temperatures és elevat. Aquesta diferència entre les dos variables produeix que el flux de calor transmès (producte d'ambdues variables) es mantingui aproximadament constant en el rang de Pr estudiat (de 5 a 100).

Estudi paramètric: m

Simulació	m	Nu_m
9	1	27.22
2	2	32.11
10	5	41.50

Taula 5.17: Nusselt mitjà(Nu_m) a la paret calenta per un γRa de $1e+07$ i un Pr de 10 amb una malla H80

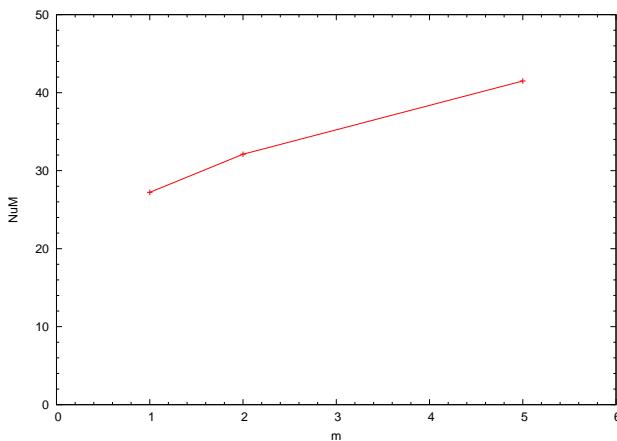


Figura 5.36: Gràfica dels resultats de la taula 5.17

En la figura 5.36 es demostra com un augment de m contribueix a un clar increment de la transferència de calor del sistema (augment del Nu_m). L'augment de m afecta directament a les forces de flotació magnètiques, induïdes per la diferència de temperatures a les que està sotmès el domini d'estudi. Al produir una desequilibri entre la força potencial (produïda pel camp magnètic) i el gradient de pressions, és produïx un augment del flux de circulació a través del domini. Degut a un augment del cabal, el fluid que entra en contacte amb la paret calenta està a una temperatura menor. Aquest fluid menys calent contribueix a l'augment del gradient de temperatures i per tant, a un augment directe de la transferència de calor.

Conclusions de l'estudi paramètric

Tant el γRa com el m contribueixen a augmentar la transferència de calor, mentre que el Pr no afecta de forma significativa (almenys en el domini estudiat).

5.3.10 Conclusions

Les conclusions extretes del cas de convecció magnètica per fluids amb $Pr > 1$ i en condicions de microgravetat són:

- En els estudis de consistència s'ha arribat a la conclusió que una malla H60 (consultar taula 5.12) és suficientment densa per a que els resultats siguin independents de la seva dimensió. Tot i així, s'ha utilitzat una malla H80 per realitzar els estudis de convergència i paramètrics. D'aquesta forma s'assegura que la malla no interfereix en el resultat final.
- En l'estudi de convergència s'ha observat com els resultats transitoris, obtinguts en diferents instants de temps per diferents simulacions, concorden perfectament amb els resultats de referència de Bednarz et al. [1]. Així doncs, el Δt utilitzat és suficientment petit per a que l'esquema temporal utilitzat no distorsioni els resultats numèrics.
- Existeixen problemes de convergència en els resultats pel que fa a la simulació 7 en règim permanent. Tot i això, s'ha arribat a la conclusió que l'error pot ésser del propi document al classificar els documents de forma incorrecta. L'argument que dona veritat a aquesta hipòtesi és que els resultats concordes perfectament per Pr superiors i inferiors a 50.
- En l'estudi paramètric s'observa com el nombre adimensional γRa contribueix a un augment de la transferència de calor del sistema, a l'igual que també ho fa el nombre adimensional m .
- El nombre de Prandtl(Pr), en la escala a la que ha estat evaluat ($Pr[5 : 100]$), no afecta significativament a una variació del nombre de Nusselt mitjà(Nu_m).
- La convecció magnètica és una tècnica interessant de modificar el flux de calor en zones amb absència de gravetat(espai) o bé en presència d'aquesta. S'han realitzat casos experimentals on, mitjançant aquesta tècnica i aquest tipus de fluids, s'ha aconseguit augmentar els efectes de la convecció natural a la terra o bé disminuir-los fins a quasi ser nuls.

5.4 Bibliografia

- [1] J.A. Shercliff. Steady motion of conducting in pipes under transverse magnetic fields. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*, 49:126–144, 1952.

- [2] A. Gorobets, F.X. Trias, R. Borrell, O. Lehmkuhl, and A. Oliva. Hybrid MPI+OpenMP parallelization of an FFT-based 3D Poisson solver with one periodic direction. *Computers and Fluids*, 49(1):101 – 109, 2011.
- [3] T.P. Bednarz, W. Lin, L., J.C. Patterson, C. Lei, and S.W. Armfield. Scaling for unsteady thermo-magnetic convection boundary layer of paramagnetic fluids of $\text{Pr} > 1$ in micro-gravity conditions. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 30:1157–1170, 2009.

Capítol 6

Anàlisi de l'impacte ambiental

És necessari dur a terme un anàlisi de l'impacte ambiental per tal d'identificar i, a ser possible, minimitzar els efectes negatius que el projecte pugui causar en el medi ambient. Aquest anàlisi té en compte totes les fases del projecte, des de la fase de concepció fins a la desmantellament, per tal de ser el màxim respectuós possible amb el medi ambient.

6.1 Fase de concepció, disseny i avantprojecte

Com que aquest apartat tracta sobre la documentació i plantejament previs al codi, l'impacte mediambiental associat a la fase de concepció ha estat mínim, a excepció de tot el material d'oficina que s'hagi pogut utilitzar, així com també l'energia dels diferents aparells electrònics que s'han utilitzat.

S'ha maximitzat la obtenció d'informació via llibre, de forma que no fos necessari la utilització de cap pantalla digital que consumis energia.

És important tenir present que des de bon principi s'ha pensat en crear un codi compacte que sigui eficient a l'hora d'executar-se. Entenent per eficiència com la capacitat de processar el màxim de ràpid possible, utilitzant el mínim de memòria, sintetitzant els resultats sense deixar de perdre informació, consumint el mínim d'energia possible i ,en el cas de que s'hagi d'imprimir, que ocupa el mínim espai possible sense pèrdua de claredat.

6.2 Fase de redacció del projecte

En la fase de redacció del projecte s'han tingut en compte els diferents factors que poden afectar al medi ambient.

En primer lloc, s'ha utilitzat paper reciclat a l'hora de plantejar l'estructura del projecte, les demostracions matemàtiques i totes les consultes necessàries, per tal de minimitzar l'impacte ambiental.

Durant tota aquesta fase s'ha fet ús d'aparells d'aire condicionat i de calefacció de forma responsable. Pel que fa a la llum utilitzada s'ha reduït amb l'ús de llum natural, degut que l'edifici on s'ha desenvolupat el projecte gaudeix de grans finestrals.

Pel que fa a l'ordenador, ha estat en estat d'hivernació tot aquell temps en que no s'ha utilitzat. Quan ha estat possible fins i tot s'ha tancat.

6.3 Fase de construcció

En la fase de construcció del projecte únicament s'ha programat. Així doncs, aquesta labor s'ha dut a terme al mateix temps que la fase de redacció. Així doncs, els impactes que puguin suposar aquesta etapa són exactament iguals que els de l'apartat anterior.

Com tret distintiu cal dir que no s'ha realitzat cap tipus de prova experimental que pugui acabar afectant al medi ambient. A més a més, la realització d'aquest projecte no implica, ni a curt ni a llarg termini, cap tipus de construcció material.

6.4 Fase d'explotació

En la fase d'explotació s'ha executat el codi en l'ordenador de treball. Degut a la gran quantitat de simulacions que s'han dut a terme, l'ordenador a passat una gran quantitat de temps processant sense la possibilitat de ser apagat. Així doncs, aquesta és l'etapa en la que s'ha utilitzat més energia elèctrica amb diferència.

Com a avantatge cal dir que les simulacions numèriques són de gran utilitat al medi ambient i ajuden a fer un món més sostenible. Aquest fenomen es deu a que gràci-

es a aquests tipus de programes, les industries han de dur a terme menys anàlisis experimentals al laboratori, la qual cosa produeix una disminució dels efectes que porta associat l'anàlisi experimental. Així doncs, el desenvolupament d'aquest projecte contribueix a una millora del medi ambient.

És evident que sempre que es vulgui utilitzar el codi programat en aquest projecte, hi haurà un cost d'energia associat al consum de la màquina. Tot i això, com que el programa pot ser executat en qualsevol tipus d'ordenador, sempre es pot vigilar i utilitzar només màquines amb fonts d'alimentació de baix consum.

6.5 Fase de desmantellament

La fase de desmantellament del projecte no presenta cap tipus de problema degut que tot son arxius informàtics. Per tant, en cas de voler eliminar tot el projecte (simulacions inclòs) únicament s'ha de prémer el botó suprimir sobre tots els fitxers.

Capítol 7

Resum del pressupost

7.1 Introducció

En aquest apartat es mostra el pressupost final del projecte, tenint present els costos inicials de la configuració informàtica, els costos de la investigació i els costos associats al consum energètic dels diferents aparells elèctrics. Per una informació més amplia de cada apartat s'ha de consultar el document que s'adjunta amb el projecte, anomenat Pressupost.

7.2 Pressupost final

En la taula 7.1 s'adjunta el quadre final de costos i el pressupost final del projecte.

Partida	Import[€]
Configuració informàtica	700.0
Treball d'investigació	55296.0
Consum energètic	535.0
Total sense IVA	56531.0
IVA(21%)	11871.5
Total amb IVA	68402.5

Taula 7.1: Cost del consum energètic

SÓN SEIXANTA-VUIT MIL QUATRE-CENTS DOS EUROS AMB CINQUANTA CÈNTIMS

Capítol 8

Planificació del projecte

8.1 Introducció

En aquest capítol es situen en el temps totes les tasques que s'han realitzat en aquest projecte. D'aquesta manera s'aporta al lector una idea de quina planificació ha seguit el projecte, així com també la relació establerta entre les diferents tasques mitjançant el diagrama de Gantt.

8.2 Planificació mensual

La planificació mensual s'ha dut a terme per tal d'informar el lector en quin moment en el temps s'ha realitzat cada tasca. A continuació es mostra la planificació mensual des de juliol del 2013 fins al agost del 2014.

Juliol 2013

lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
01	02	03	04	05	06	07
Començamen			Aprenentatge teòric sobre CFD; 7 días			
Tutorials d'Ubuntu; 2 días						
08	09	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Figura 8.1: Planificació mensual: Juliol 2013

Agost 2013

lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
			01	02	03	04
			Programació i validació del cas B: convecció natural en un recinte quadrat; 10 días			
05	06	07	08	09	10	11
12	13	14	15	16	17	18
Programació i validació del cas B: convecció natural en un recinte quadrat; 10 días		Programació de malles no uniformes				
19	20	21	22	23	24	25
		Programació i validació del cas C: convecció forçada sobre un sòlid quadrat; 10 días				
26	27	28	29	30	31	
		Programació i validació del cas C: convecció forçada sobre un sòlid quadrat; 10 días				

Figura 8.2: Planificació mensual: Agost 2013

Setembre 2013

lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
						01
02	03	04	05	06	07	08
Millor d'algoritmes de resoluc	Automatització de les entrade		Millorar el postprocessat de dades pel cas C; 3			
09	10	11	12	13	14	15
Millorar el postprocessat de d.	Fase d'obtenció de resultats en massa (Època de baix rendiment degut als estud					
16	17	18	19	20	21	22
Fase d'obtenció de resultats en massa (Època de baix rendiment degut als estudis universitaris); 100 días						
23	24	25	26	27	28	29
Fase d'obtenció de resultats en massa (Època de baix rendiment degut als estudis universitaris); 100 días						
30						
Fase d'obtenció de resultats en massa (Època de baix rendiment degut als estudis universitaris); 100 días						

Figura 8.3: Planificació mensual: Setembre 2013

Octubre 2013

lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
01	02	03	04	05	06	
Fase d'obtenció de resultats en massa (Època de baix rendiment degut als estudis universitaris); 100 días						
07	08	09	10	11	12	13
Fase d'obtenció de resultats en massa (Època de baix rendiment degut als estudis universitaris); 100 días						
14	15	16	17	18	19	20
Fase d'obtenció de resultats en massa (Època de baix rendiment degut als estudis universitaris); 100 días						
21	22	23	24	25	26	27
Fase d'obtenció de resultats en massa (Època de baix rendiment degut als estudis universitaris); 100 días						
28	29	30	31			
Fase d'obtenció de resultats en massa (Època de baix rendiment degut als estudis universitaris); 100 días						

Figura 8.4: Planificació mensual: Octubre 2013

Novembre 2013

lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
				01	02	03
Fase d'obtenció de resultats en massa (Època de baix rendiment degut als estudis universitaris); 100 días						
04	05	06	07	08	09	10
Fase d'obtenció de resultats en massa (Època de baix rendiment degut als estudios universitarios); 100 días						
11	12	13	14	15	16	17
Fase d'obtenció de resultats en massa (Època de baix rendiment degut als estudios universitarios); 100 días						
18	19	20	21	22	23	24
Fase d'obtenció de resultats en massa (Època de baix rendiment degut als estudios universitarios); 100 días						
25	26	27	28	29	30	
Fase d'obtenció de resultats en massa (Època de baix rendiment degut als estudios universitarios); 100 días						

Figura 8.5: Planificació mensual: Novembre 2013

Desembre 2013

lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
						01
02	03	04	05	06	07	08
09	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Figura 8.6: Planificació mensual: Desembre 2013

Gener 2014

lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
			01	02	03	04
Fase d'obtenció de resultats en massa (Època de baix rendiment degut als estudis universitaris); 100 días						
						05
06	07	08	09	10	11	12
Fase d'obtenció de resultats en massa (Època de baix rendiment degut als estudios universitarios); 100 días						
13	14	15	16	17	18	19
Fase d'obtenció de resultats en massa (Època de baix rendiment degut als estudios universitarios); 100 días						
20	21	22	23	24	25	26
Fase d'obtenció de resultats en massa (Època de baix rendiment degut als estudios universitarios); 100 días						
27	28	29	30	31		
Fase d'obtenció de resultats en massa (Època de baix rendiment degut als estudios universitarios); 100 días		Busqueda d'informació sobre el tema del projecte; 30 días				

Figura 8.7: Planificació mensual: Gener 2014

Febrer 2014

lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
					01	02
				Busqueda d'informació sobre el tema del projecte; 30 días		
03	04	05	06	07	08	09
				Busqueda d'informació sobre el tema del projecte; 30 días		
10	11	12	13	14	15	16
				Busqueda d'informació sobre el tema del projecte; 30 días		
17	18	19	20	21	22	23
				Busqueda d'informació sobre el tema del projecte; 30 días		
24	25	26	27	28		
				Busqueda d'informació sobre el tema del projecte; 30 días		

Figura 8.8: Planificació mensual: Febrer 2014

Març 2014

lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
					01	02
		Busqueda d'informació sobre el tema del projecte; 30 días				
03	04	05	06	07	08	09
		Busqueda d'informació sobre el tema del projecte; 30 días				
10	11	12	13	14	15	16
Busqueda d'informació sobre		Desenvolupament del codi per tal de simular la convecció magnètica en fluids p				
		Desenvolupament d'un programa extra per tal de simular camps magnètics com				
		Anàlisi dels diferents models per simular fenomens MHD amb problemes on el f				
17	18	19	20	21	22	23
		Desenvolupament del codi per tal de simular la convecció magnètica en fluids paramagnètics amb $Pr>1$; 10 días				
Desenvolupar						
		Anàlisi dels diferents models per simular fenomens MHD amb problemes on el Re magnètic és molt baix; 12 días				
24	25	26	27	28	29	30
Desenvolupament del codi pe		Validació del cas de la convecció magnètica; 10 días				
			Començament de la formació en el codi Termo			
		Anàlisi dels diferents models per simular fenomens MHD amb μ				
31						
		Validació del cas de la convecció magnètica; 10 días				
Començament de la formació						

Figura 8.9: Planificació mensual: Març 2014

Abril 2014

lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
		01	02	03	04	05
Validació del cas de la convecció magnètica; 10 días						
Començament de la formació		Desenvolupament de diferents problemes amb el codi Termofluids; 5 días				
07	08	09	10	11	12	13
Validació del cas de la convec	Programació de l'esquema numèric QUICK dins un mòdul pel codi Termofluidis;					
Desenvolupament de diferent:						
14	15	16	17	18	19	20
Programació de l'esquema nu	Desenvolupament d'un mòdul, dins Termofluids, capaç de solucionar fenòmens					
21	22	23	24	25	26	27
Desenvolupament d'un mòdul, dins Termofluids, capaç de solucionar fenòmens MHD per Re baixos, utilitzant la f						
28	29	30				
Desenvolupament d'un mòdul, dins Termofluids, capaç de solucionar fenòmens MHD per Re baixos, utilitzant la f						

Figura 8.10: Planificació mensual: Abril 2014

Maig 2014

lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
			01	02	03	04
Desenvolupament d'un mòdul, dins Termofluids, capaç de solucionar fenòmens MHD per Re baixos, utilitzant la t						
			05	06	07	08
Desenvolupament d'un mòdul, dins Termofluids, capaç de solucionar fenòmens MHD per Re baixos, utilitzant la t						
12	13	14	15	16	17	18
Desenvolupament d'un mòdul, dins Termofluids, capaç de solucionar fenòmens MHD per Re baixos, utilitzant la t						
19	20	21	22	23	24	25
Desenvolupament d'un mòdul		Estudi qualitatius del cas Shercliff (MHD); 10 días				
		Busqueda de la solució analítica del cas Shercliff; 12 días				
26	27	28	29	30	31	
Estudi qualitatius del cas Shercliff (MHD); 10 días						
Busqueda de la solució analítica del cas Shercliff; 12 días						

Figura 8.11: Planificació mensual: Maig 2014

Juny 2014

lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
						01
02	03	04	05	06	07	08
Estudi qualitatiu del cas Shercliff (MHD); 10 días						
Busqueda de la solució analítica del cas Shercliff; 12 días						
09	10	11	12	13	14	15
Creació de les different malles		Estudi quantitatius del cas Shercliff (MHD); 25 días				
16	17	18	19	20	21	22
		Estudi quantitatius del cas Shercliff (MHD); 25 días				
23	24	25	26	27	28	29
		Estudi quantitatius del cas Shercliff (MHD); 25 días				
30		Estudi quantitatius del cas Shercliff (MHD); 25 días				

Figura 8.12: Planificació mensual: Juny 2014

Juliol 2014

lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
		01	02	03	04	05
Estudi quantitatius del cas Shercliff (MHD); 25 días						
07	08	09	10	11	12	13
Estudi quantitatius del cas Shercliff (MHD); 25 días						
14	15	16	17	18	19	20
Estudi quantitatius del cas Sher	Desenvolupament de l'anàlisis	Desenvolupament del pressupost; 2 días				
21	22	23	24	25	26	27
Desenvolupar	Redacció de la memòria; 30 días					
28	29	30	31			
Redacció de la memòria; 30 días						

Figura 8.13: Planificació mensual: Juliol 2014

Agost 2014

lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
				01	02	03
Redacció de la memòria; 30 días						
04	05	06	07	08	09	10
Redacció de la memòria; 30 días						
11	12	13	14	15	16	17
Redacció de la memòria; 30 días						
18	19	20	21	22	23	24
Redacció de la memòria; 30 días						
25	26	27	28	29	30	31
Redacció de la memòria; 30 días						

Figura 8.14: Planificació mensual: Agost 2014

8.3 Diagrama de Gantt

Per tal de fer més comprensible el diagrama de Gant i la seva enumeració, a continuació es presenta una llista amb totes les tasques realitzades en el projecte.

	Nombre de tarea	Duración	Comienzo	Fin	Predecesoras
1	Començament del projecte	0 días	lun 01/07/13	lun 01/07/13	
2	Tutorials d'Ubuntu	2 días	lun 01/07/13	mar 02/07/13	1
3	Aprendentatge teòric sobre CFD	7 días	mié 03/07/13	jue 11/07/13	2
4	Programació i validació del cas A: convecció forçada en un recinte quadrat	10 días	vie 12/07/13	jue 25/07/13	3
5	Optimització del codi: separació amb diferents arxius i utilització de classes	4 días	vie 26/07/13	mié 31/07/13	4
6	Programació i validació del cas B: convecció natural en un recinte quadrat	10 días	jue 01/08/13	mié 14/08/13	5
7	Programació de malles no uniformes i estructurades	2 días	jue 15/08/13	vie 16/08/13	6
8	Programació i validació del cas C: convecció forçada sobre un sòlid quadrat	10 días	lun 19/08/13	vie 30/08/13	7
9	Millor d'algorítmes de resolució (TDMA+Gauss-Seidel, LU)	2 días	lun 02/09/13	mar 03/09/13	8
10	Automatització de les entrades i sortides de dades en el codi	2 días	mié 04/09/13	jue 05/09/13	9
11	Millorar el postprocessat de dades pel cas C	3 días	vie 06/09/13	mar 10/09/13	10
12	Fase d'obtenció de resultats en massa (Època de baix rendiment degut als estudis universitaris)	100 días	mié 11/09/13	mar 28/01/14	11
13	Busqueda d'informació sobre el tema del projecte	30 días	mié 29/01/14	mar 11/03/14	12
14	Desenvolupament del codi per tal de simular la convecció magnètica en fluids paramagnètics amb $Pr>1$	10 días	mié 12/03/14	mar 25/03/14	13
15	Desenvolupament d'un programa extra per tal de simular camps magnètics complexos	4 días	mié 12/03/14	lun 17/03/14	13
16	Validació del cas de la convecció magnètica	10 días	mié 26/03/14	mar 08/04/14	14
17	Anàlisi dels diferents models per simular fenomens MHD amb problemes on el Re magnètic és molt baix	12 días	mié 12/03/14	jue 27/03/14	13
18	Començament de la formació en el codi Termofluids	3 días	vie 28/03/14	mar 01/04/14	17
19	Desenvolupament de diferents problemes amb el codi Termofluids	5 días	mié 02/04/14	mar 08/04/14	18
20	Programació de l'esquema numèric QUICK dins un mòdul pel codi Termofluids	5 días	mié 09/04/14	mar 15/04/14	19
21	Desenvolupament d'un mòdul, dins Termofluids, capaç de solucionar fenòmens MHD per Re baixos, utilitzant la formulació matemàtica basada en el potencial elèctric	25 días	mié 16/04/14	mar 20/05/14	20
22	Estudi qualitatiu del cas Shercliff (MHD)	10 días	mié 21/05/14	mar 03/06/14	21
23	Busqueda de la solució analítica del cas Shercliff	12 días	mié 21/05/14	jue 05/06/14	21
24	Creatió de les diferent malles utilitzades en el cas Shercliff (estructurades i no estructurades), per dur a terme l'estudi quantitatius	3 días	vie 06/06/14	mar 10/06/14	22;23
25	Estudi quantitatius del cas Shercliff (MHD)	25 días	mié 11/06/14	mar 15/07/14	24
26	Desenvolupament de l'anàlisis ambiental	2 días	mié 16/07/14	jue 17/07/14	25
27	Desenvolupament del pressupost	2 días	vie 18/07/14	lun 21/07/14	26
28	Redacció de la memòria	30 días	mar 22/07/14	lun 01/09/14	27

Taula 8.1: Esquema del diagrama de Gantt

Un cop realitzada la llista, es mostra el diagrama de Gantt:

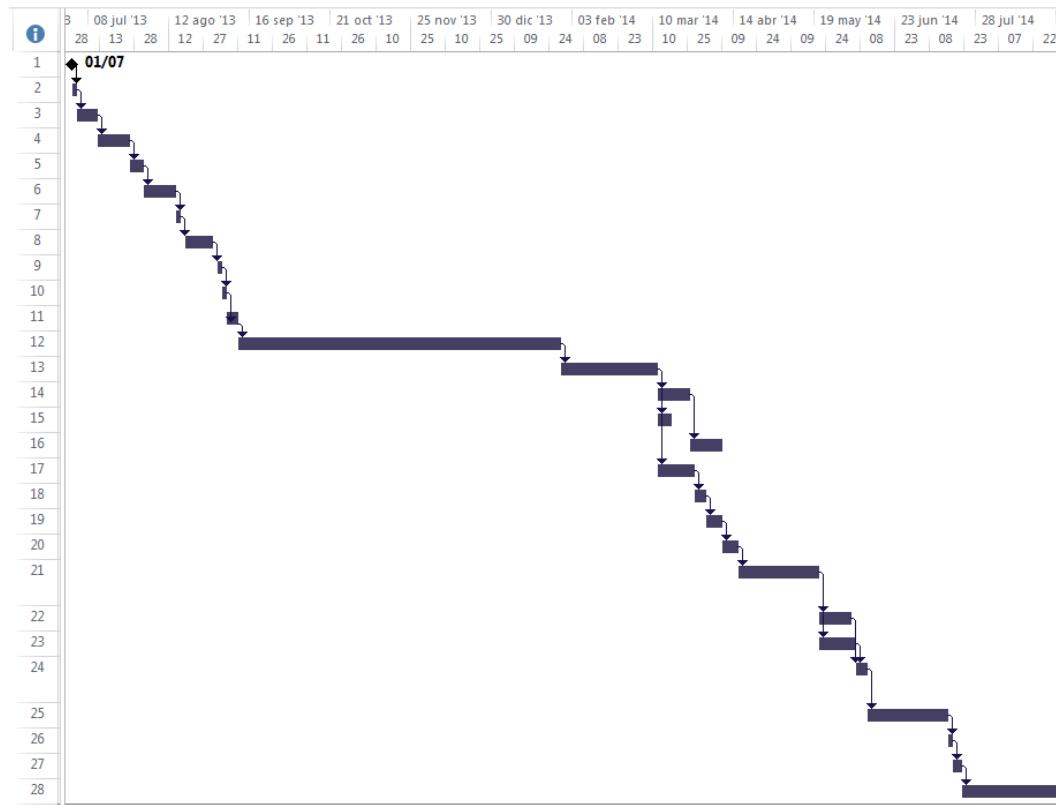


Figura 8.15: Diagrama de Gantt

Capítol 9

Conclusions

9.1 Conclusions generals

L'objecte del projecte es considera assolit, ja que s'ha realitzat un estudi ampli de com els camps magnètics afecten a les equacions de conservació de massa, quantitat de moviment i energia. Per un estudi ampli s'entén:

- Buscar en la literatura les diferents formes de com un camp magnètic pot interaccionar amb un fluid.
- Documentar-se sobre diferents aplicacions industrials on aquest tipus d'efectes puguin ser d'utilitat.
- Obtenir i entendre les equacions diferencials que governen aquest tipus de comportament.
- Transformar les equacions diferencials en un conjunt d'equacions algebraiques mitjançant la utilització de mètodes numèrics.
- Resoldre i validar amb altres documents, casos en que el comportament del fluid estigui modificat per la presència d'un camp magnètic.

El projecte, des dels seus inicis, ha pretès ser pel seu autor una introducció al món de la recerca. Aquest objectiu doncs, ha estat aconseguit, ja que li ha permès a l'autor obtenir una base sòlida sobre la formulació matemàtica i resolució numèrica de les equacions que defineixen la transferència de calor i la dinàmica de fluids en

presència d'un camp magnètic. A més a més, ha servit també per a que profunditzen en coneixements de programació amb codi C++, en l'ús del sistema operatiu Linux i en l'anàlisi i tractament de dades en *Computations Fluid Dynamics(CFD)*.

Com a conclusions generals també cal dir, tot i ser evident, que el mòdul desenvolupat en aquest projecte permet al codi Termofluids donar solució a problemes on intervinguin efectes magnetohidrodinàmics(MHD) utilitzant la tècnica dels volums finits.

9.2 Conclusions específiques

En el projecte s'ha arribat a un conjunt de conclusions més específiques en la resolució dels casos estudiats. En aquest apartat es recullen les més importants:

- Pel que fa al cas Shercliff (problema sobre MHD) la formulació utilitzada per determinar els efectes MHD sobre el fluid (ϕ -formulation) resulta ser consistent i convergent per malles estructurades, mentre que per malles no estructurades mostra problemes. Els càlcul dels termes no ortogonals poden ser els causants d'aquest problema en les malles no estructurades, ja que per les malles estructurades aquests termes no existeixen.
- Altre cop en el cas Shercliff, com a conclusió és realment costos, amb el model ϕ -formulation i un esquema temporal explicit, obtenir resultats numèrics correctes per valors de Ha superiors a 500, ja que les malles necessàries per definir correctament la capa de Hartmann son realment fines. Com que s'utilitza un esquema temporal explícit, aquestes malles tant fines necessiten un Δt molt petit (ordre de $\times 10^{-7}$ per un Ha de 1000) per que el sistema d'equacions sigui estable.
- El codi propi ha demostrat en el projecte ser perfectament vàlid per resoldre problemes bidimensionals on el fluid es comporta de forma laminar i transitòria. En l'estudi paramètric del cas de convecció magnètica per fluids paramagnètics amb un $Pr > 1$ i en condicions de microgravetat s'ha observat com els nombres adimensionals γRa i el m contribueixen favorablement a augmentar la transferència de calor (Nu_m). En canvi el Pr no participa en augmentar o disminuir el Nu_m de forma significativa en la escala estudiada ($Pr[5 : 100]$).

9.3 Accions Futures

En les següents investigacions es continuarà treballant dins la branca de la MHD degut a la seva utilitat a nivell enginyeril, tal i com es comenta en la introducció del projecte. Dins les accions futures, les investigacions més properes que es duran a terme són:

- Introduir els termes no ortogonals en el càlcul del potencial elèctric, per tal de millorar la precisió en les malles no estructurades.
- Utilitzar altres metodologies per tal d'acabar determinant els efectes MHD que succeeixen en el cas Shercliff. El mètode amb el que s'està pensant és el *j-formulation*, el qual té una sèrie d'avantatges respecte la modelització utilitzada (ϕ -*formulation*), tot i ser més lent.
- Resoldre el cas Shercliff amb la possibilitat de que les parets siguin conductors elèctriques. Aquest és un problema d'elevada importància, ja que té multitud d'aplicacions industrial com la propulsió MHD o la central de potència elèctrica MHD. A aquest tipus de problema, se l'anomena Hunt en honor a un dels seus principals investigadors. Per més informació sobre aquest cas es recomana consultar el document Hunt[1].

Les accions futures a un llarg termini són:

- Resoldre casos on el fluid es comporta de forma turbulent (alts valors de Re) i on també actuen, de forma significativa, els fenòmens MHD.
- Investigar sobre la física del plasma i els seus efectes MHD.

9.4 Bibliografia

[1] J.C.R. Hunt. Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts. *Journal of Fluid Mechanics*, 21:577–590, 1965.

Apèndix A

Verificació del codi propi

A.1 Introducció

En aquest apartat es resol, utilitzant el codi propi, un conjunt de casos famosos en la literatura sobre CFD (casos “*benchmark*”). Es recorda que el codi propi s’ha creat i utilitzat per resoldre el problema de convecció magnètica per valors de $Pr > 1$ en un escenari de microgravetat. Així doncs, aquesta part de l’annex s’utilitza com a validació del codi prop.

A.2 Convecció forçada en un recinte quadrat

A.2.1 Definició del cas

Aquest és un problema 2D de convecció forçada que consisteix en sotmetre un fluid, que es troba en una cavitat quadrada, a un esforç tangencial a la part superior que obliga a mantenir una velocitat horitzontal igual a 1 en aquella zona. A continuació, es mostra un esquema on es pot apreciar bona part de les característiques del cas.

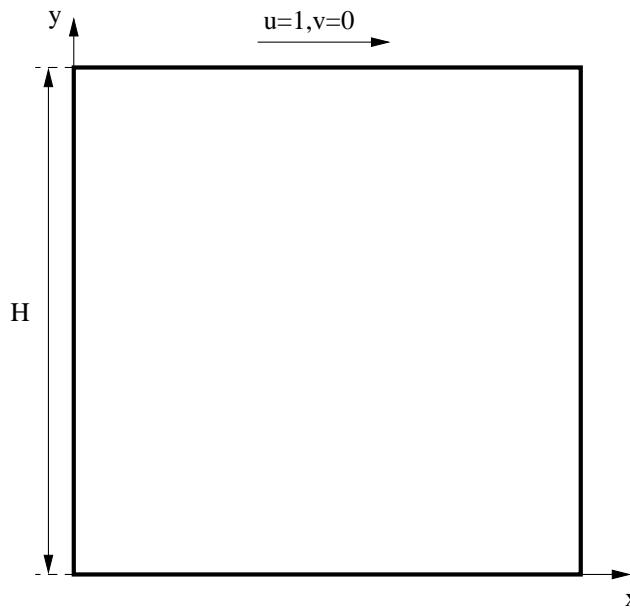


Figura A.1: Esquema sobre el cas de convecció forçada en un recinte quadrat

La geometria del problema és quadrada amb costats de dimensió $H = 1$. Les condicions de contorn del problema són:

- Velocitat(v):
 - Fluid-Sòlid: el fluid té velocitat nula quan esta en contacte amb el sòlid. Les zones de contacte són totes les parets a excepció de la part superior.
 - Part superior: en aquesta part s'imposa la velocitat del fluid a $v = 1\hat{i}$, degut a un esforç tangencial constant que s'aplica en la direcció x positiva.
- Pressió(p): s'aplica un gradient de pressions nul normal a totes les parets que envolten el sòlid.
- Temperatura(T): en tot moment la temperatura del sistema és manté constant.

La temperatura es manté constant en tot el domini.

En qualsevol dels casos analitzats, el fluid es comporta de forma laminar, de forma que arriba sempre a un estat estacionari.

A.2.2 Equacions de treball

En aquest tipus de problema s'han utilitzat les següents equacions de treball (per més informació consultar l'apartat 3.6):

- Conservació de massa:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- Conservació de la quantitat de moviment:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (\text{A.1})$$

S'observa com, en aquesta cas, l'equació de conservació de la quantitat de moviment no té cap tipus de terme font.

El nombre adimensional que governa les equacions anteriors és el Re :

$$Re = \frac{\rho U_o L}{\mu} = \frac{U_o L}{\nu}$$

Com a velocitat de referència, U_o s'escolleix com la velocitat del fluid a la part superior del domini.

Es recorda que aquest nombre relaciona els esforços convectius, respecte els difusius.

A.2.3 Casos analitzats

Per aquest cas s'han escollit dos nombres de Reynolds (Re) significatius, el $1e3$ i el $1e5$. Les malles utilitzades han estat:

Tipus de malla	Codi	Dimensió	Nombre de nodes
Hiperbòlica	H32	32×32	1024
	H64	64×64	4096

Taula A.1: Tipus de malles estructurades utilitzades pel cas de convecció forçada en un recinte quadrat

A.2.4 Anàlisis qualitatiu

En aquest apartat es mostra, de forma qualitativa, el moviment que el fluid adopta en el sistema, juntament amb la diferència de pressions provocada per les condicions de contorn. Les figures que es veuen dins d'aquest anàlisi fan referència a un Re de 5000 i a una malla SH64.

En la figura A.2 es mostra com les zones d'alta velocitat es troben a la placa superior i també al principi de la paret esquerra, on el fluid es veu obligat a canviar de rumb. El fluid es veu obligat a re-circular dins el seu domini per tal de complir la conservació de la massa. Per un Re de 5000 el problema encara té solució permanent.

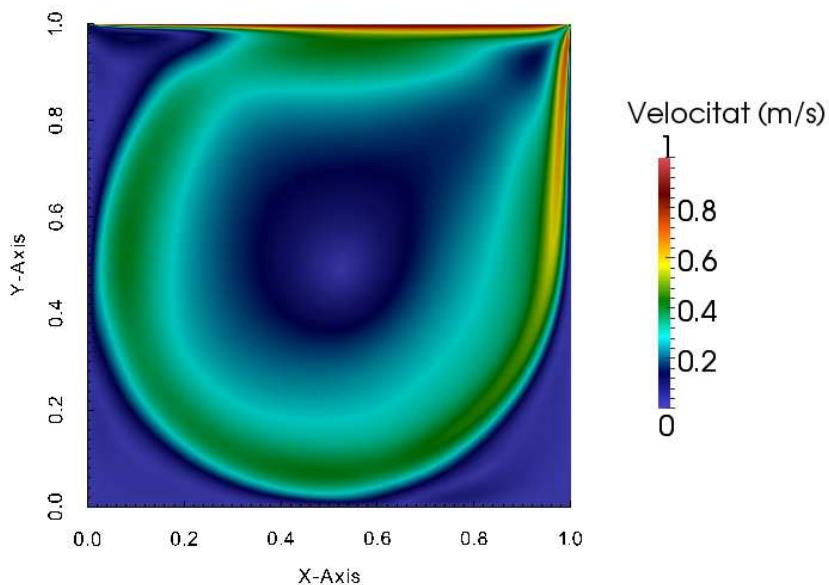


Figura A.2: Convecció forçada en un recinte quadrat: camp de velocitats per un Re de 5000

En la figura A.3 s'observa com es creen un conjunt de vòrtex a les cantonades de la cavitat quadrada. A mesura s'augmenta el Re aquests vòrtexs s'acabaran desprendre i creant-se contínuament, sense que el cas pugui arribar a un estat permanent.

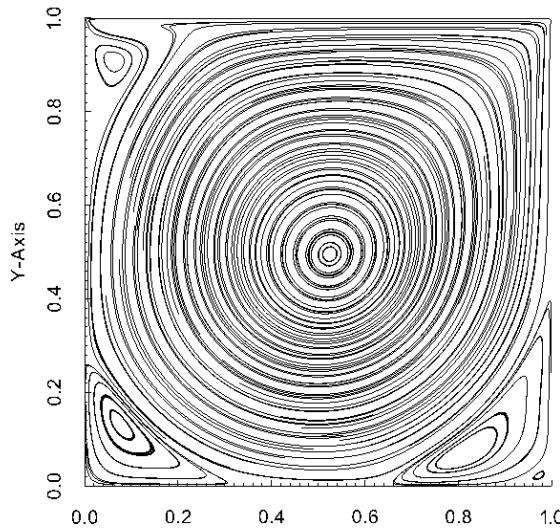


Figura A.3: Convecció forçada en un recinte quadrat: línies de corrent per un Re de 5000

En la figura A.4 s'aprecia amb claredat la zona d'alta pressió que es produeix quan el fluid xoca contra la part superior de la paret de la dreta. En canvi, la pressió disminueix significativament a la part superior de la paret esquerra, on el fluid és absorbit cap a la dreta degut a les condicions de contorn.

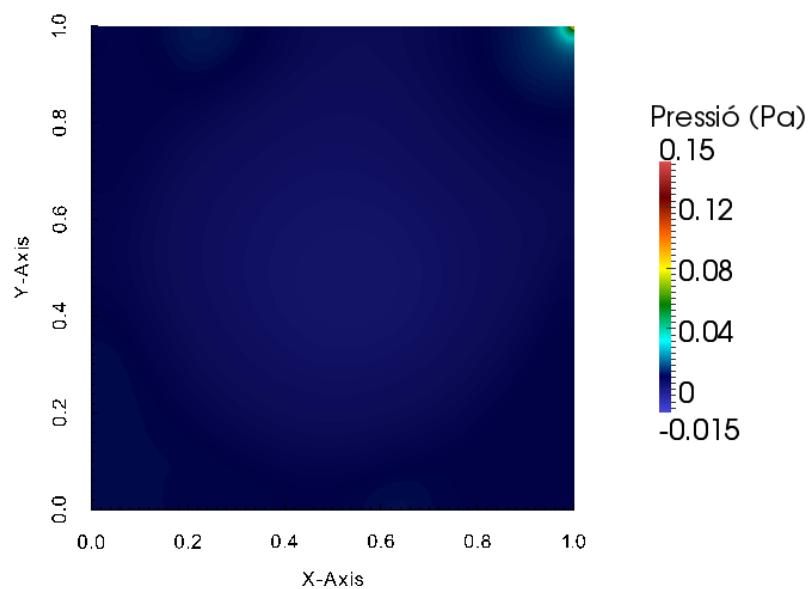


Figura A.4: Convecció forçada en un recinte quadrat: camp de pressions per un Re de 5000

A.2.5 Verificació de resultats

En aquest apartat es valida la capacitat del codi propi per simular fenòmens de convecció forçada quan el fluid es comporta de forma laminar.

Per resoldre el cas s'ha utilitzat el mètode explícit de segon ordre, Adams-Bashforth per definir l'esquema temporal, mentre que per obtenir la velocitat del fluid a les cares dels diferents volums de control s'ha utilitzat un esquema SMART. El solver utilitzat per resoldre l'equació de Poisson ha estat l'LU.

Els resultats numèrics es verifiquen comparant-los amb els del cas de referència obtinguts per Minkowycz[1](cas benchmark). Es comprova la conjuntura entre els perfils de velocitats calculats amb el codi propi, juntament amb el de referència. Cal dir que els resultats de referència no s'han obtingut a partir d'una expressió analítica, sinó que són la mitjana del resultats obtinguts per diferents investigacions numèriques, fets amb diferents codis.

Els talls del camp de velocitats que s'utilitzen per verificar els resultats per diferents nombres de Re són:

- **Tall vertical:** a una distància $H/2$, respecte el centre de coordenades, on s'expressa la velocitat en direcció x .
- **Tall horitzontal:** a una alçada $H/2$, respecte el centre de coordenades, on s'expressa la velocitat en direcció y .

Els camps de velocitats utilitzats per dur a terme la verificació de resultats es troben en l'estat permanent.

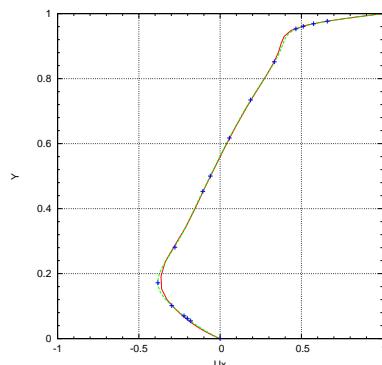


Figura A.5: Tall vertical: Re de 1000

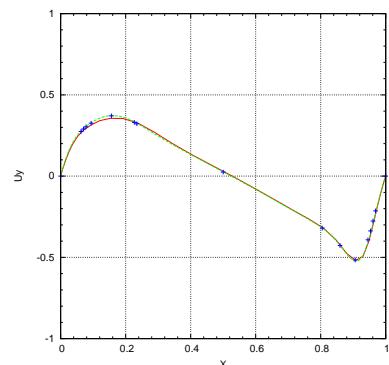


Figura A.6: Tall horitzontal: Re de 1000

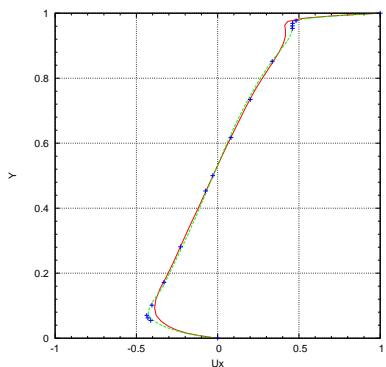


Figura A.7: Tall vertical: Re de 5000

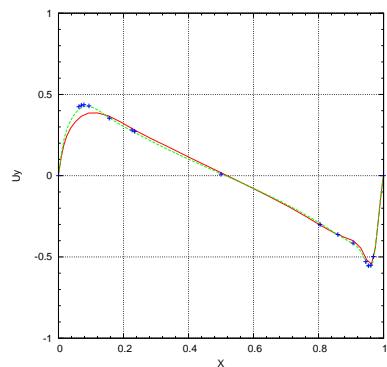


Figura A.8: Tall horitzontal: Re de 5000

En les figures A.5, A.6, A.7 i A.8 s'observa com amb la malla SH64 s'obtenen un resultats molt semblants a la referència, mentre que per la malla SH32 s'aprecien algunes desigualtats. Tot i això, els resultats obtinguts amb la malla SH32 també són interessant, ja que representen el comportament del fluid de forma fidedigna sense la necessitat d'utilitzar malles fines.

A.2.6 Conclusions

Els resultats numèrics obtinguts amb el codi propi són coherents amb els del cas de referència. A més a més, a mesura s'utilitzen malles més fines s'observa com el codi es consistent, és a dir, que els resultat numèrics deixen de dependre dels paràmetres numèrics¹. Així doncs, es considera que el codi propi simula correctament els fenòmens convectius per casos laminars.

A.3 Convecció natural en un recinte quadrat

A.3.1 Definició del cas

Aquest és un problema 2D de convecció natural que consisteix en sotmetre un fluid, que es troba en una cavitat quadrada, a una diferència de temperatures. Aquesta diferència provoca variacions locals de la densitat del fluid en el sistema de forma que les forces gravitatories deixen d'estar en equilibri amb els gradients de

¹Per paràmetres numèrics s'entén com la dimensió dels volums de control o l'increment de temps utilitzat (Δt)

pressions. Així doncs s'origina un moviment del fluid, anomenat convecció natural, per tal de retornar el sistema altre cop a un estat d'equilibri. A continuació, es mostra un esquema on es pot apreciar bona part de les característiques del cas.

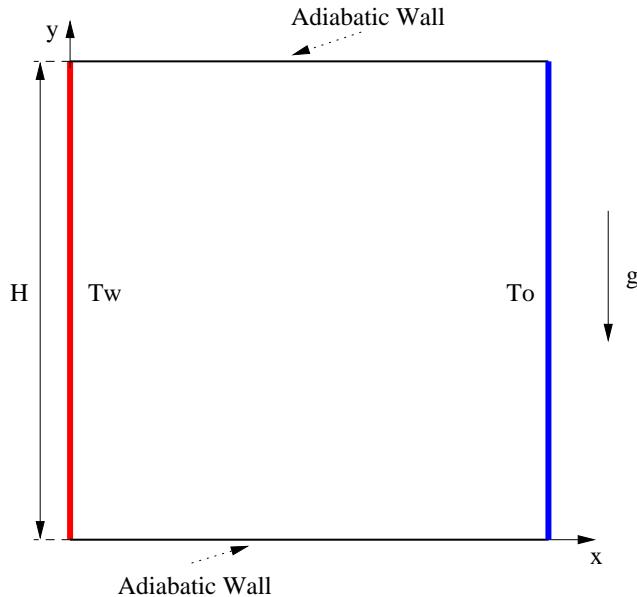


Figura A.9: Esquema sobre el cas de convecció natural en un recinte quadrat

La geometria del problema és quadrada amb costats de dimensió $H = 1$. Les condicions de contorn del problema són:

- Velocitat(v): la velocitat del fluid en totes les parets és nul·la, ja que està en contacte amb un sòlid que no es troba en moviment.
- Pressió(p): s'aplica un gradient de pressions nul normal a totes les parets que envolten el sòlid.
- Temperatura(T):
 - Paret esquerra: es troba a una temperatura T_w invariable en el temps.
 - Paret dreta: es troba a una temperatura T_o invariable en el temps.
 - Paret superior i inferior: són adiabàtiques de forma que el gradient de temperatura normal a les parets es nul.

En qualsevol dels casos analitzats, el fluid es comporta de forma laminar, de forma que arriba sempre a un estat estacionari.

A.3.2 Equacions de treball

En aquest tipus de problema s'han utilitzat les següents equacions de treball (per més informació consultar l'apartat 3.6):

- Conservació de massa:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- Conservació de la quantitat de moviment:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho_o g (1 - \beta (T - T_o)) \quad (\text{A.2})$$

- Conservació de l'energia tèrmica:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T \right) = \lambda \nabla^2 T$$

S'observa com, en aquesta cas, l'equació de conservació de la quantitat de moviment té un terme font per simular les forces de flotació que sorgeixen a partir d'una diferència de temperatures. Aquestes force de flotació, tal i com s'ha vist anteriorment, són les causants de la convecció natural.

L'equació de conservació de l'energia tèrmica tampoc disposa de cap terme font pel tipus de problema que es resol.

Els nombres adimensionals que governen les equacions anteriors són:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\alpha\nu} \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad Pe = LU_o/\alpha$$

A.3.3 Casos analitzats

Per aquest cas s'ha utilitzat un Pr de 0.71 i diferents valors de Ra per dur a terme un estudi paramètric sobre com afecta aquesta variable a la transferència de calor. En la següent taules es mostren els casos simulats:

Simulació	Pr	Ra
1	0.71	$1e + 03$
2	0.71	$1e + 04$
3	0.71	$1e + 05$
4	0.71	$1e + 06$

Taula A.2: Simulacions analitzades pel cas de convecció natural en un recinte quadrat

Les malles utilitzades han estat:

Tipus de malla	Codi	Dimensió	Nombre de nodes
Hiperbòlica	H32	32×32	1024
	H64	64×64	4096

Taula A.3: Tipus de malles estructurades utilitzades pel cas de convecció natural en un recinte quadrat

A.3.4 Anàlisis qualitatiu

En aquest apartat es mostra, de forma qualitativa, el moviment que el fluid adopta en el sistema, juntament amb la distribució de temperatures governada pels fenòmens de transferència de calor per conducció i convecció. Les figures que es veuen dins d'aquest anàlisi fan referència a la simulació 3 de la taula A.2, amb una malla SH64. Les referències no tenen unitats, ja que són magnituds adimensionalitzades.

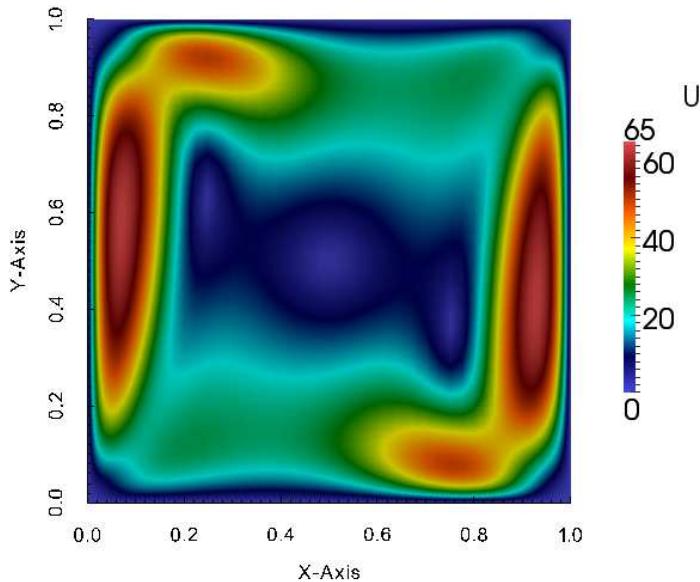


Figura A.10: Convecció natural en un recinte quadrat: camp de velocitats de la simulació 3

En la figura A.10 s'observa el fenomen de convecció natural degut a la diferència de temperatures a la que està sotmès el fluid. Aquest moviment del fluid provoca

que la transferència de calor augmenti d'una forma substancial. El fluid de la part esquerra s'escalfa, disminuint la seva densitat, mentre que la de la part de la dreta augmenta al refredar-se. Així doncs, aquesta variació de densitats provoca una variació en el camp de pressions i dona pas a un moviment convectiu.

A mesura s'augmenta el nombre de Ra aquest moviment és més pronunciat fins al punt que el comportament del fluid es torna turbulent. Tot i això, tots els casos de la taula A.2 es comporten de forma laminar, així que arriben a un estat permanent.

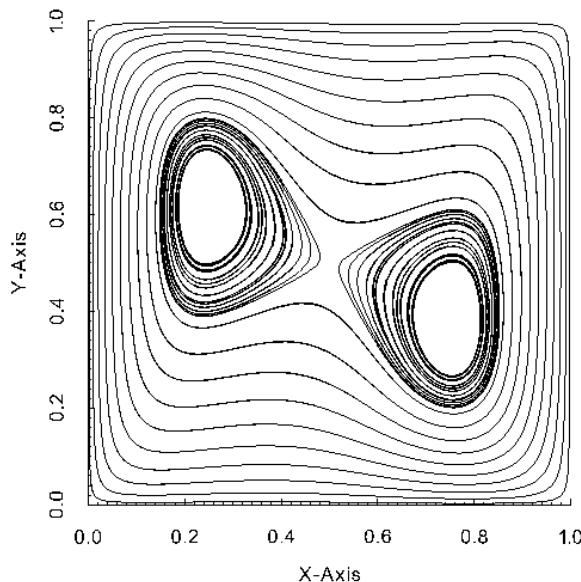


Figura A.11: Convecció natural en un recinte quadrat: línies de corrent de la simulació 3

En la figura A.11 s'aprecia com el nombre de Ra de $1e - 05$ és suficient com per a que el moviment convectiu origini uns bucles en l'interior del del domini.

En la figura A.12 es veu clarament que en la zona inferior esquerra i en la zona superior dreta apareixen els gradient de temperatura més elevats, de forma que la transferència de calor és més elevada. En la mateixa figura també s'observa com el sentit de rotació del fluid és en direcció les agulles del rellotge.

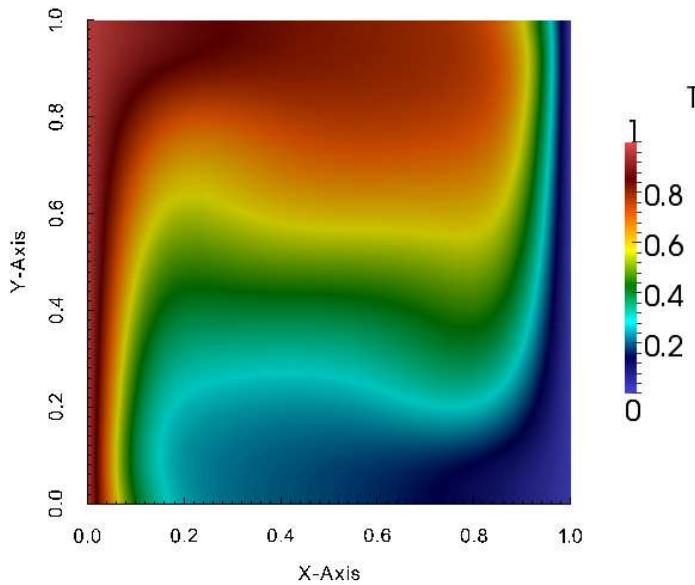


Figura A.12: Convecció natural en un recinte quadrat: distribució de temperatures de la simulació 3

A.3.5 Verificació de resultats

En aquest apartat es valida la capacitat del codi propi per simular fenòmens de convecció natural quan el fluid es comporta de forma laminar.

Per resoldre el cas s'ha utilitzat el mètode explícit de segon ordre, Adams-Bashforth per definir l'esquema temporal, mentre que per obtenir la velocitat del fluid a les cares dels diferents volums de control s'ha utilitzat un esquema SMART. El solver utilitzat per resoldre l'equació de Poisson ha estat l'LU.

Els resultats numèrics es verifiquen amb els del cas de referència obtinguts per De Vahl Davis[2] (cas bench mark). Es comprova per als casos de la taula A.2 que diferents paràmetres, calculats numèricament fent ús del codi propi, concorden amb els casos de referència. Aquests paràmetres són: el nombre de Nusselt mitjà (Nu_m), el màxim i el mínim de la paret calenta.

Els resultats que s'expressen en les taules han estat extrets un cop el sistema ja ha arribat a l'estat permanent.

Simulació 1	Vahl Davis	<i>SH32</i>	<i>SH64</i>
Nu_{max}	1.505	1.506	1.506
Nu_{min}	0.692	0.692	0.691
Nu_m	1.118	1.118	1.118

Taula A.4: Resultats per un Ra de $1e + 03$

Simulació 2	Vahl Davis	<i>SH32</i>	<i>SH64</i>
Nu_{max}	3.528	3.526	3.530
Nu_{min}	0.586	0.587	0.585
Nu_m	2.243	2.242	2.244

Taula A.5: Resultats per un Ra de $1e + 04$

Simulació 3	Vahl Davis	<i>SH32</i>	<i>SH64</i>
Nu_{max}	7.717	7.712	7.720
Nu_{min}	0.729	0.730	0.729
Nu_m	4.519	4.514	4.519

Taula A.6: Resultats per un Ra de $1e + 05$

Simulació 4	Vahl Davis	<i>SH32</i>	<i>SH64</i>
Nu_{max}	17.925	17.695	17.575
Nu_{min}	0.989	0.975	0.979
Nu_m	8.800	8.812	8.823

Taula A.7: Resultats per un Ra de $1e + 06$

En les taules A.4, A.5, A.6 i A.7 es mostra com la malla SH64 obté millors resultats que la SH32, tot i que aquest efecte només es apreciable a mesura s'augmenta el Ra . En les taules també es demostra com la malla SH32 és vàlida per Ra de l'ordre de $1e + 03$ o $1e + 04$. El Nusselt mitjà(Nu_m) en funció del Ra presenta un comportament lòtic, ja que com més gran és el Ra , més fort es l'efecte de les forces de flotació respecte els esforços difusius.

A.3.6 Conclusions

En aquest cas, el codi propi demostra ser vàlid pel càlcul de fenòmens de convecció natural quan el fluid es comporta de forma laminar i finalitza en un estat permanent. Com que es resol l'equació de l'energia i l'estat sòlid és un cas particular de l'estat fluid, el programa també es pot utilitzar per calcular la difusió de calor en els sòlids.

A.4 Convecció forçada sobre un sòlid quadrat

A.4.1 Definició del cas

Aquest és un problema 2D de convecció forçada que consisteix on el fluid entra i surt per una cavitat rectangular. Dins d'aquesta cavitat s'hi troba un objecte quadrat amb el que el fluid hi impacta. A continuació, es mostra un esquema on es pot apreciar bona part de les característiques del cas.

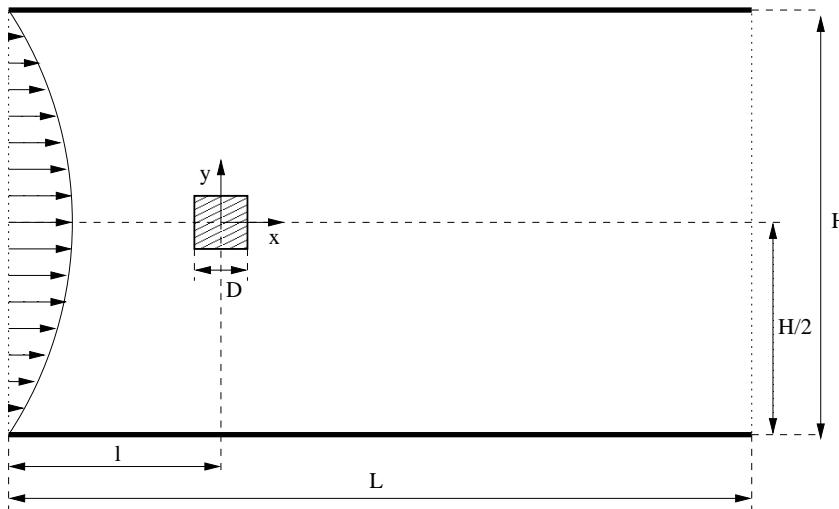


Figura A.13: Esquema sobre el cas de convecció forçada sobre un sòlid quadrat

Com a dades geomètriques s'ha utilitzat un $D = 1$, $H/D = 8$, $L/D = 50$, $l/L = 1/4$.

A continuació es mostren les diferents condicions de contorn:

- Velocitat(v):

- Fluid-Sòlid: el fluid té velocitat nul·la quan esta en contacte amb el sòlid. Entenent per sòlid, la part superior i inferior del canal, junt amb les parets del quadrat que es troba situat al centre de coordenades.
- Entrada: en aquest cas el fluid adopta el perfil clàssic d'un fluid unidimensional que circula a través de dos plaques paral·leles quan aquest està sotmès a un gradient de pressions constant. Més concretament la formula utilitzada és:

$$u_x(y) = \frac{y^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + Ay + B \quad u_x(y = \pm L/2) = 0 \quad (\text{A.3})$$

La relació entre el gradient de pressions ($\frac{\partial p}{\partial x}$) i el cabal que circula és:

$$Q = -\frac{L^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{A.4})$$

- Sortida: en aquest cas s'aplica la condició de sortida convectiva que s'explica en l'apartat 4.4.4.
- Pressió(p): s'aplica un gradient de pressions nul normal a la superfície en la part superior i inferior del canal, la entrada de fluid, la sortida i les parets del quadrat que es troba situat en l'origen de coordenades.

- Temperatura(T): en tot moment la temperatura del sistema és manté constant.

El fluid no es comporta de la mateixa forma en tots els casos analitzats, ja que per Re baixos es comporta de forma laminar, mentre que per Re alts (superiors a 100) el fluid arriba a un estat periòdic. En aquestes condicions el fluid no arriba a un estat permanent, sinó que fluctua constantment sota unes condicions de periodicitat (segueix uns certs patrons que es van repetint al llarg del temps).

A.4.2 Equacions de treball

En aquest tipus de problema s'han utilitzat les següents equacions de treball (per més informació consultar l'apartat 3.6):

- Conservació de massa:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- Conservació de la quantitat de moviment:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

S'observa com, en aquesta cas, l'equació de conservació de la quantitat de moviment no té cap tipus de terme font.

El nombre adimensional que governa les equacions anteriors és el Re :

$$Re = \frac{\rho U_o L}{\mu} = \frac{U_o L}{\nu}$$

Com a velocitat de referència, U_o s'escolleix com la velocitat màxima del perfil de velocitats a l'entrada.

Es recorda que aquest nombre relaciona els esforços convectius, respecte els difusius.

Força de fregament i d'ascens

Tal i com s'ha comentat en la definició del problema, en comptes d'arribar a un estat permanent, el fluid pot arribar a un estat d'oscil·lació periòdica. En aquest

cas, tant el camp de velocitats com el de pressions, no paren de fluctuar en el temps, de manera que les force induïdes pel fluid al impactar sobre el quadrat no són constants. Existeixen dos tipus de forces que depenen de la direcció en la que actuen sobre el quadrat, aquestes són:

- **Força de fregament:** es caracteritza per actuar en la direcció paral·lela al flux (direcció x), en el mateix sentit que es mou el fluid. S'anomena de fregament perquè en cas que el quadrat fos l'objecte que es mogués en comptes del fluid, aquesta seria la força que s'oposaria al moviment del quadrat. El nombre adimensional que representa aquest tipus de força és:

$$C_D = \frac{2F_D}{S_{proj}\rho U_o^2} \quad (\text{A.5})$$

On C_D és el coeficient de la força de fregament, F_D és la força de fregament causada per la diferència de pressions en direcció x i els esforços tallants que actuen en aquesta direcció. S_{proj} representa la superfície projectada del quadrat en cas de que s'observi en direcció x , ρ és la densitat del fluid i U_o és al velocitat de referència.

És interessant tenir present que la força de fregament mitjana mai és nul·la, per molt que estigui fluctuant en el temps, ja que el fregament existeix sempre, més gran o més petit, però sempre.

- **Força d'ascens:** es caracteritza per actuar en direcció perpendicular al flux (direcció y). Es calcula com:

$$C_L = \frac{2F_L}{S_{proj}\rho U_o^2} \quad (\text{A.6})$$

On C_L és el coeficient de la força de d'ascens, F_L és la força de fregament causada per la diferència de pressions en direcció y i els esforços tallants que actuen en aquesta direcció. S_{proj} representa la superfície projectada del quadrat en cas de que s'observi en direcció y , ρ és la densitat del fluid i U_o és al velocitat de referència del problema.

A diferència del coeficient de fregament (C_D), el coeficient d'ascens (C_L) si que fluctua al voltant del 0, de forma que el C_L mitjà és nul. Per tenir una dada representativa sobre aquesta oscil·lació de la força d'ascens s'utilitza un nombre adimensional que determina la freqüència amb la que fluctua C_L .

Aquest és:

$$St = \frac{fL}{U_o} \quad (\text{A.7})$$

On St és el nombre adimensional de Strouhal, f és la freqüència d'oscil·lació de C_L i U_o és la velocitat de referència del problema.

A.4.3 Casos analitzats

Per aquest cas s'han utilitzat diferents nombres de Reynolds (Re) per dur a terme un estudi paramètric sobre com afecta aquesta variable a les forces que actuen sobre el quadrat. En la següent taules es mostren els casos simulats:

Simulació	Re	Simulació	Re
1	10	8	100
2	20	9	125
3	30	10	140
4	40	11	150
5	50	12	175
6	60	13	200
7	80	14	250

Taula A.8: Simulacions analitzades pel cas de convecció forçada sobre un sòlid quadrat

Les malles utilitzades han estat:

Tipus de malla	Codi	Dimensió	Nombre de nodes
Hiperbòlica	H140	140×140	19600
	H280	280×240	67200
	H400	400×240	96000
	H540	540×340	183600
	H640	640×400	256000
	H800	800×400	320000
	H1000	1000×500	500000

Taula A.9: Tipus de malles estructurades utilitzades pel cas de convecció forçada sobre un sòlid quadrat

A.4.4 Anàlisis qualitatiu

A continuació es mostren per separat els dos comportaments que presenta el problema dins la franja de Re analitzats. Com ja s'ha comentat en la definició del cas, el problema pot assolir un estat permanent o un estat periòdic.

Estat permanent

L'interval dels nombres de Re en els que el problema finalitza en un estat permanent és aproximadament $[0 : 70]$. La zona entre 70 i 80 no està del tot ben definida, mentre que a partir de 80 el problema finalitza en un estat periòdic. Les següents imatges, dins l'apartat d'estat permanent, s'han obtingut per un Re de 50 i una malla SH400.

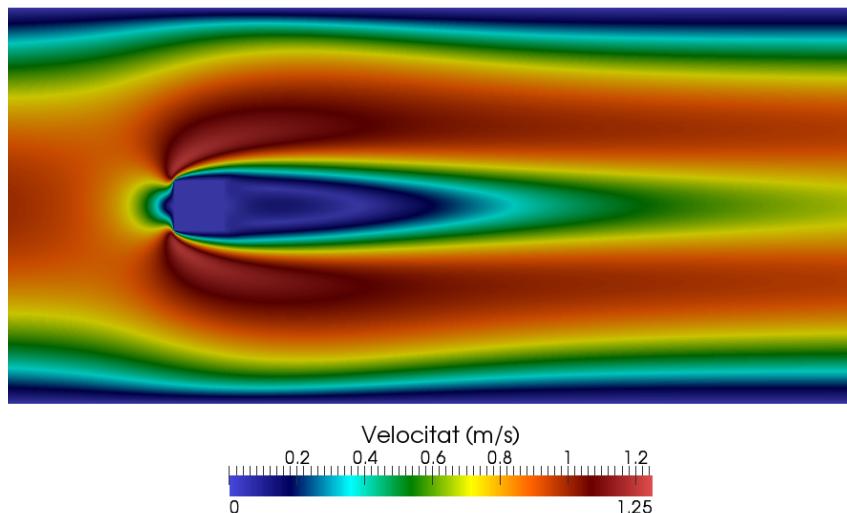


Figura A.14: Convecció forçada sobre un sòlid quadrat: camp de velocitats per un Re de 50

En la figura A.14 es mostra com el camp de velocitats per un Re de 50 arriba a l'estat permanent. Es veu amb claredat com la velocitat del fluid augmenta al passar per la part superior i inferior del quadrat, ja que la secció de pas es veu disminuïda. Aquest augment de la velocitat, té conseqüències directes amb la caiguda de pressió que es produeix en aquesta zona. A més a més, al darrere del quadrat existeix una zona de baixes velocitats, ja que és la zona on es produeixen els vòrtexs.

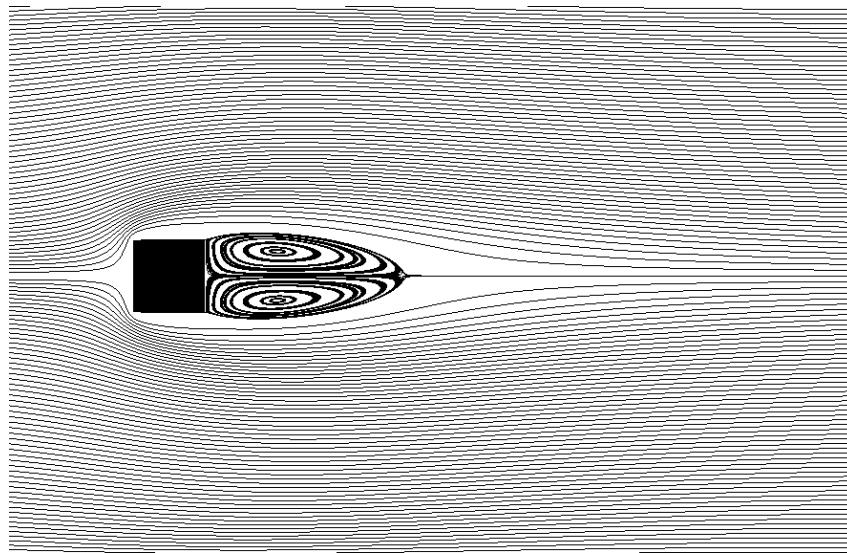


Figura A.15: Convecció forçada sobre un sòlid quadrat: línies de corrent per un Re de 50

En les línies de corrent de la figura A.15 s'observa clarament la zona on es produeixen els vòrtexs. Per un Re de 50, els vòrtexs encara es mantenen fixes al darrere del fluid, de forma que contribueixen a que el cas tingui una solució permanent.

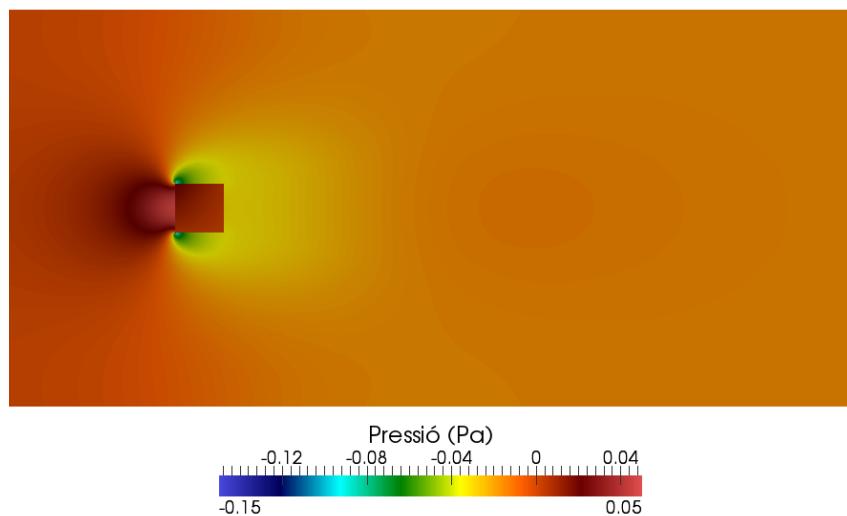


Figura A.16: Convecció forçada sobre un sòlid quadrat: camp de pressions per un Re de 50

Pel que fa al camp de pressions de la figura A.16 s'aprecia com existeix una zona d'alta pressió en la part davantera del quadrat, mentre que hi ha una zona de baixa pressió a la part del darrere. Aquesta diferència de pressions es manté constant en l'estat permanent, de forma que el coeficient de fregament (C_D) també és cons-

tant. També s'originen unes zones de baixa pressió a la part superior i inferior del quadrat, causades per l'augment de la velocitat en aquella zona per tal de complir la conservació de la massa. Tot i això, la pressió a la part superior i inferior són iguals, de manera que el gradient de pressions en direcció y és nul. Així doncs, el coeficient de les forces d'ascens (C_L) també ho és.

Estat periòdic

L'interval dels nombres de Re en els que el problema finalitza en un estat permanent és aproximadament $[80 : -]$, on - simbolitza que no s'ha estudiat la franja on el fluid passa de comportar-se de forma periòdica a turbulent. Tot i això, el Re més gran simulat en aquest projecte és de 250 i en aquest cas el fluid continua finalitzant en un estat periòdic. Les següents imatges, dins l'apartat d'estat periòdic, s'han obtingut per un Re de 150 i una malla SH1000. A diferència de l'estat permanent, en aquest cas les imatges fan referència a un instant de temps qualsevol, un cop el problema ha assolit l'estat periòdic.

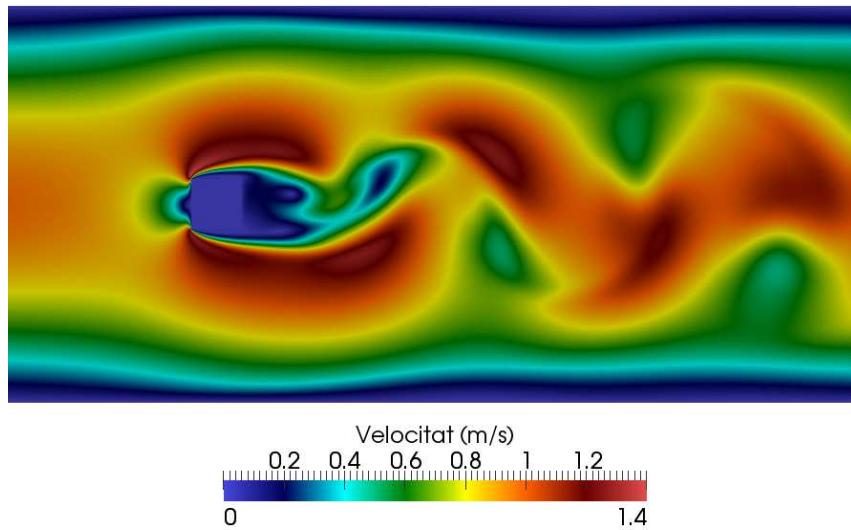


Figura A.17: Convecció forçada sobre un sòlid quadrat: camp de velocitats per un Re de 150

En el camp de velocitats (figura A.17) s'observa com les velocitats més elevades es troben a la part superior i inferior del quadrat, ja que la secció es redueix i per les lleis de conservació de massa, la velocitat del conjunt es veu obligada a augmentar en aquella zona. Un cop passat el sòlid s'observa com el camp de velocitat adopta una cua que va formant un conjunt de vòrtexs que viatge aigües avall.

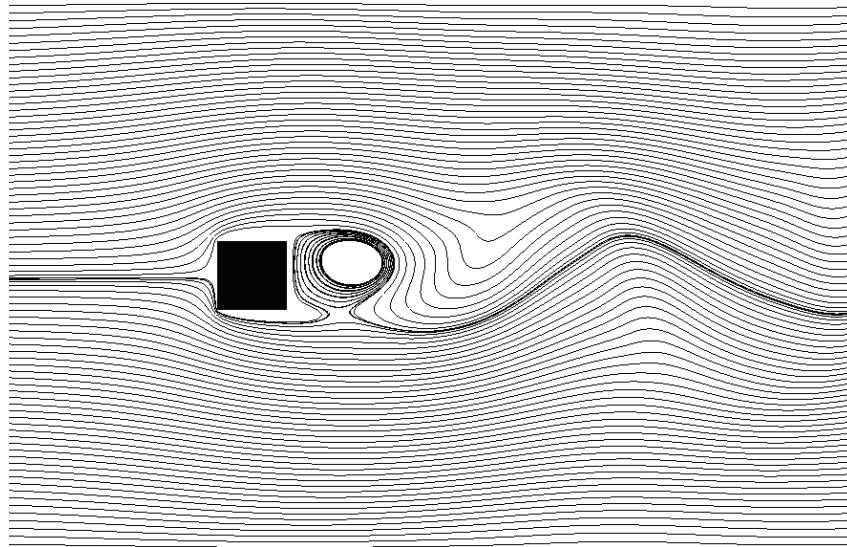


Figura A.18: Convecció forçada sobre un sòlid quadrat: línies de corrent per un Re de 150

Les línies de corrent (figura A.18) revelen la zona de creació de vòrtexs just després del quadrat. Com que el Re és suficientment elevat aquest vòrtexs és veu obligat a desprendre's del quadrat i viatjar aigües avall. Com a conseqüència es crea un altre vòrtex en la mateixa zona que el primer, de forma successiva arribant a un estat periòdic.

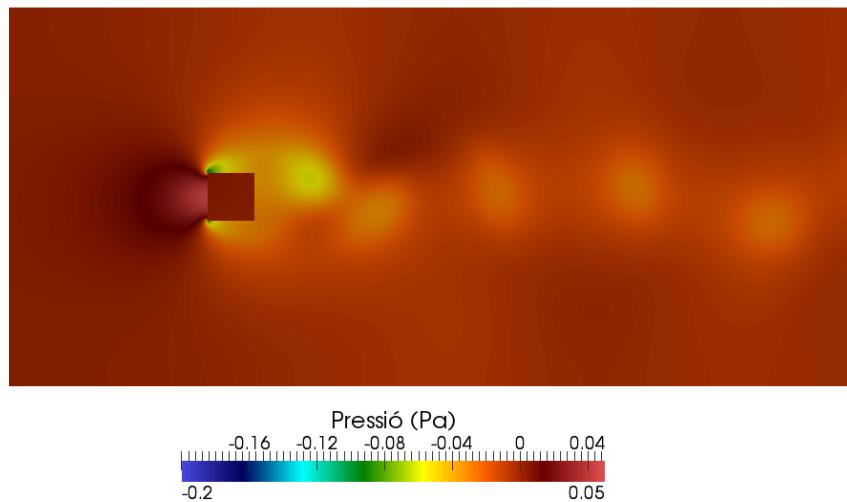


Figura A.19: Convecció forçada sobre un sòlid quadrat: camp de pressions per un Re de 150

En el camp de pressions (figura A.19) s'observen dos grans trets. Per una banda, es crea una zona d'alta pressió al impactar el fluid sobre la part davantera del

quadrat, mentre que a la part del darrere es crea una zona de baixes pressions. Aquesta oscil·la contínuament, però la pressió del davant sempre és més gran que a del darrere, de forma que el coeficient mitjà de les forces de fregament (C_{D_M}) no és mai nul. Per altra banda, existeixen unes zones de baixa pressió a la part superior i inferior del quadrat que es van alternant contínuament, originant així, una força d'ascens mitja (C_{L_M}) nul·la, tot i que localment no és.

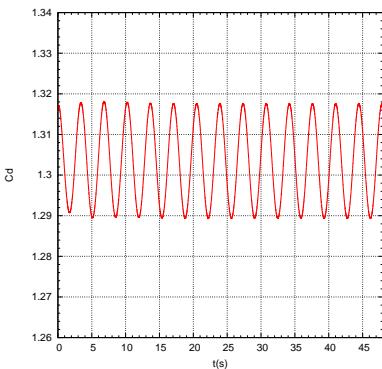


Figura A.20: Coeficient de fregament en funció del temps per un Re de 150

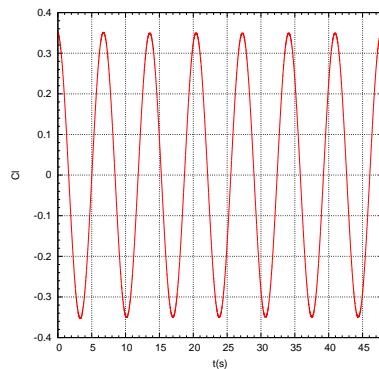


Figura A.21: Coeficient d'ascens en funció del temps per un Re de 150

En les figures A.20 i A.21 s'observa la oscil·lació constant del C_D i C_L per als casos que finalitzen en un estat periòdic.

A.4.5 Verificació de resultats

En aquest apartat es valida la capacitat del codi propi per simular fenòmens de convecció forçada quan el fluid esta en contacte amb un sòlid intern. En aquest cas, a diferència dels anterior, el sistema pot finalitzar en un estat periòdic (no permanent) en funció del nombre de Re que determini el comportament del fluid.

Per resoldre el cas s'ha utilitzat el mètode explícit de segon ordre, Adams-Bashforth per definir l'esquema temporal, mentre que per obtenir la velocitat del fluid a les cares dels diferents volums de control s'ha utilitzat un esquema SMART. El solver utilitzat per resoldre l'equació de Poisson ha estat l'LU.

Els resultats numèrics es verifiquen utilitzant com a referència els valors obtinguts per Breuer[3]. En les figures A.22, A.23 i A.24 s'ha sintetitzat tota la informació dels diferents casos simulats que apareixen en la taula A.8.

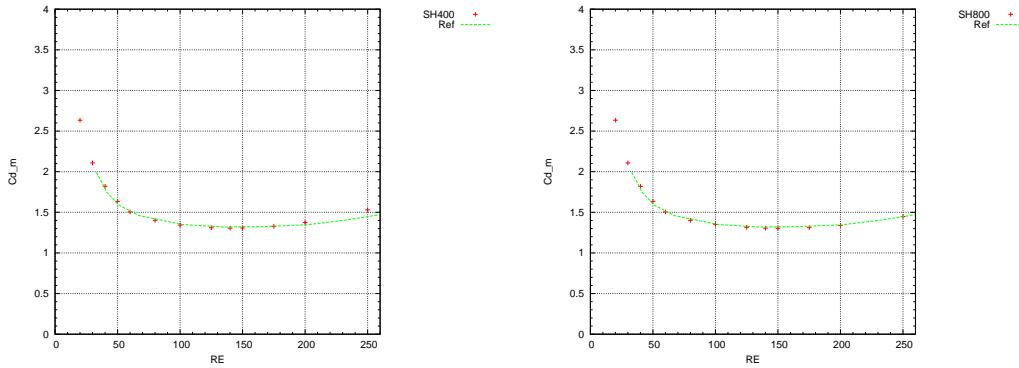


Figura A.22: Coeficient de fregament mitjà per diferents nombres de Re i una malla H400 **Figura A.23:** Coeficient de fregament mitjà per diferents nombres de Re i una malla H800

En les figures A.22 i A.23 es mostra, per diferents malles, el coeficient de fregament mitjà (C_{D_M}) tant per si el fluid recau a un estat permanent o a un estat periòdic. Pel que fa als casos que finalitzen en un estat permanent, el C_{D_M} és exactament igual que el coeficient de fregament local, ja que és constant en el temps. En canvi, pels casos que finalitzen en un estat periòdic s'ha de fer una mitja, ja que el coeficient de fregament local oscil·la constantment. En la figura A.23 s'observa com per una malla més fina, els resultat concorden millor que per la malla més basta que s'exposa en la figura A.22.

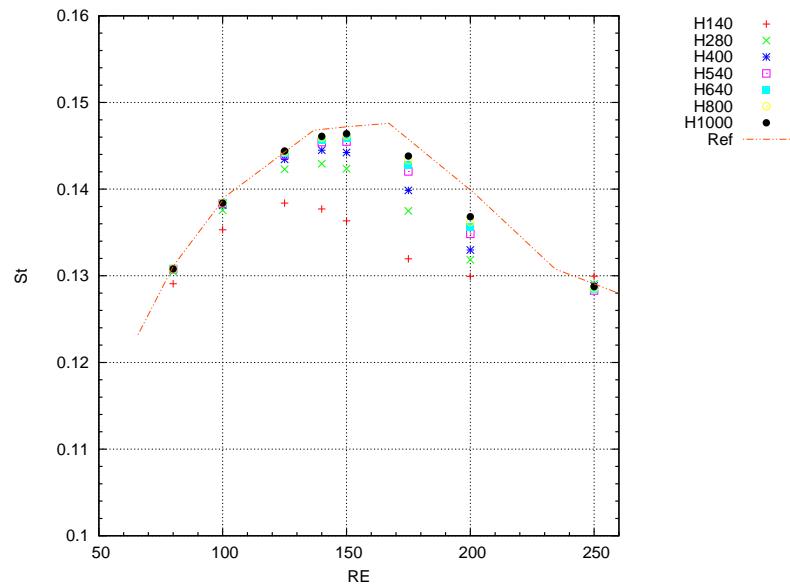


Figura A.24: Strouhal per diferents malles i nombres de Re

La figura A.24 serveix com a estudi de consistència i de convergència, ja que com s'observa el resultat final s'estabilitza fins a un punt que ja no depèn de la malla

utilitzada. La semblança entre els resultats de referència i els resultats numèrics és significativament bona per malles fines (H640 o superior). A més més, si es té en compte l'ordre de magnitud dels resultats s'aprecia fàcilment que l'error relatiu dels resultat obtinguts amb malles fines no supera el 3%.

A.4.6 Conclusions

En aquest cas, el codi propi demostra ser vàlid pel càlcul de fenòmens de convecció forçada quan el fluid entra en contacte amb un sòlid intern, comportant-se de forma laminar i finalitzant en un estat permanent o periòdic en funció del Re .

A.5 Bibliografia

- [1] Minkowycz W.J. et al. *Handbook of Numerical Heat Transfer*. Willey, 1988.
- [2] G. De. Vahl Davis. Natural convection of air in a square cavity a bench mark numerical solution. *International journal for numerical methods in fluids*, 1983.
- [3] M. Breuer, J. Bernsdorf, T. Zeiser, and Durst F. Accurate computations of the laminar flow past a square cylinder based on two different methods: lattice-boltzmann and finite-volume. *International journal of heat and fluid flow*, 2000.