



**Escola Tècnica Superior d'Enginyeries
Industrial i Aeronàutica de Terrassa**

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Titulación

INGENIERÍA AERONÁUTICA

Alumna

CRISTINA VALERA MUÑOZ

Título del PFC

**DISEÑO DE LA TOBERA DE UN COHETE CON EL MÉTODO DE
LAS CARACTERÍSTICAS Y COMPARACIÓN CON CÓDIGO CFD**

Director del PFC

ORIOL LIZANDRA I DALMASES

Convocatoria de entrega del PFC

Junio 2012

Contenido de este volumen:

– MEMORIA –



Escola Tècnica Superior d'Enginyeries
Industrial i Aeronàutica de Terrassa

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUNYA

Ingeniería Aeronáutica

DISEÑO DE LA TOBERA DE UN COHETE CON EL MÉTODO DE LAS CARÁCTERISTICAS Y COMPARACIÓN CON CÓDIGO CFD

MEMORIA



Autora: Cristina Valera Muñoz
Tutor: Oriol Lizandra i Dalmases
Convocatoria: Junio 2012

Agradecimientos

Me gustaría expresar mi más sincera gratitud a mi tutor, el prof. Oriol Lizandra i Dalma-ses por su guía y apoyo mostrados durante la realización del proyecto.

A Àngel, por su inestimable ayuda y por estar a mi lado durante todo el proceso de realización de este PFC.

Por último me gustaría agradecer profundamente a mi familia todo el apoyo que me han mostrado en todo momento.

Resumen

La tobera es el elemento del cohete encargado de transformar la energía térmica creada en la combustión de properoles en energía cinética, esto es, en el empuje que desarrolla el cohete. En este proyecto se diseña, analiza y optimiza la parte divergente de una tobera considerando que posee una geometría con simetría axial, es decir, que el diseño se reduce a una curva revolucionada sobre un eje axial.

El diseño paramétrico del contorno sigue el procedimiento estándar para el diseño de toberas supersónicas, el método de las características (MOC) considerando simetría axial. Aplicando esta técnica se obtiene un contorno aproximadamente acampanado el cual descarga el flujo con la dirección y velocidad deseadas pero con el inconveniente de tener una longitud excesiva comparada con los modelos reales. Este último resultado lleva a realizar una optimización.

El análisis del diseño original se realiza aplicando la dinámica de fluidos computacional (CFD). El código resuelve las ecuaciones de Euler para geometría axisimétrica mediante el técnica de los volúmenes finitos. El sistema de ecuaciones resultante se computa utilizando la separación del sistema en uno que contiene el término fuente y otro puramente convectivo que, a su vez, es resuelto utilizando un esquema MUSCL junto con el método de resolución del flujo entre celdas HLLC. Los resultados obtenidos verifican el diseño realizado con el MOC aunque con errores debidos a la discretización del propio método.

Para poder obtener un diseño factible se intenta reducir la longitud obtenida. Este problema de optimización se resuelve con el algoritmo genético NSGA-II que se plantea con el objetivo de optimizar 3 funciones, a saber, longitud de la tobera y el Mach y ángulo de la velocidad en la sección de salida de la tobera. Los resultados se muestran en un espacio tridimensional formado por las 3 funciones

objetivo y son comparados frente al diseño original. Finalmente, de entre todos los resultados obtenidos, se escoje un diseño que sustituye al original.

Palabras clave: *tobera, flujo supersónico, método de las características, dinámica de fluidos computacional, algoritmo genético.*

Tabla de Contenidos

	Pág.
Agradecimientos	II
Resumen	III
Tabla de Contenidos	V
Lista de Figuras	VIII
Lista de Tablas	X
Lista de Símbolos	XI
I. Introducción	1
1. Objeto	2
2. Justificación	3
3. Alcance	5
4. Requisitos básicos	6

5. Contenido de este documento	7
6. Estado del arte	8
6.1. Configuración de la tobera	8
6.2. Diseños actuales	11
II Diseño de la tobera	14
7. Condiciones de diseño	15
8. Método de las Características	18
8.1. Ecuaciones características y de compatibilidad	19
8.2. Condiciones de contorno	23
9. Resultados del diseño	30
9.1. Número de características	31
9.2. Diseño del contorno	31
9.3. Validación del diseño	35
III Análisis del diseño	37
10. Dinámica de Fluidos Computacional	38
10.1. Dominio físico	39
10.2. Ecuaciones gobernantes	41
10.3. Resolución del sistema de ecuaciones	43
10.4. Subproblema Término Fuente	44
10.5. Subproblema EDP homogénea	44
10.6. Discretización temporal	50
10.7. Condiciones de contorno	51

10.8.Criterio de convergencia y condiciones iniciales	52
11.Resultados del análisis con CFD	54
11.1.Tamaño de la malla	54
11.2.Resultados de la simulación	55
IV Optimización de la tobera	60
12.Optimización del diseño	61
12.1.Parámetros de diseño	62
12.2.Funciones a optimizar	63
12.3.Descripción del Algoritmo NSGA-II	64
12.4.Desarrollo del algoritmo	65
13.Resultados de la optimización	69
13.1.Determinación de parámetros de diseño	69
13.2.Tobera optimizada	71
V Conclusiones y bibliografía	75
14.Conclusiones y recomendaciones	76
Bibliografía	78

Lista de Figuras

	Pág.
2.1. Robert H. Goddard junto al primer cohete a propulsante líquido	4
6.1. Tipos de toberas y tamaño típico	9
6.2. Configuración y nomenclatura de la tobera	9
6.3. J-2X, Vulcain 2 y SSME	13
8.1. Malla característica	19
8.2. Coordenadas intrínsecas	19
8.3. Líneas características	21
8.4. Intersección entre dos características cualesquiera	22
8.5. Zona de expansión	23
8.6. Zona inicial de expansión	25
8.7. Esquema de la intersección de característica m^- con la pared	27
8.8. Mallado zona divergente	29
9.1. Resultados obtenidos en función del número de características.	32
9.2. Malla característica obtenida	33
9.3. Representación de los puntos intersección entre características	33

9.4. Contorno de la tobera	34
9.5. Perfil encontrado con el método de las características	34
10.1. Volumen finito genérico y notación utilizada	40
10.2. Vector de estado en cada frontera de un volumen finito genérico . .	47
10.3. Condición de contorno en la pared	52
11.1. A modo ilustrativo, malla formada por 50x30 elementos	55
11.2. Influencia del mallado en la sección de salida	56
11.3. Número de Mach en cada volumen de la malla	56
11.4. Presión estática en cada volumen de la malla	57
11.5. Temperatura estática en cada volumen de la malla	57
11.6. Velocidad total en cada volumen de la malla	58
11.7. Mach total en la sección de salida	58
11.8. Ángulo del flujo en la sección de salida	59
12.1. Esquema del algoritmo NSGA-II	65
13.1. RMSE y coeficiente de correlación en función del número de splines utilizadas para aproximar la geometría del diseño	70
13.2. Aproximación seleccionada para parametrizar los resultados obtenidos con el MOC	70
13.3. Rresultados obtenidos con el NSGA-II	72
13.4. Geometrías y distribución de Mach en cada diseño	73
13.5. Contorno de la tobera optimizada	74

Lista de Tablas

	Pág.
6.1. Tabla características de motores cohete	12
7.1. Resumen parámetros de diseño tobera	17
9.1. Datos de entrada para el programa de diseño	30
9.2. Resultados del estudio de la influencia del número de características	31
9.3. Parámetros numéricos de la solución obtenida	35
9.4. Análisis de la solución obtenida	35
12.1.Caso de ejemplo para la ordenación no dominante	66
12.2.Solución del ejemplo de ordenación no dominante	66
13.1.Splines resultantes de aproximar el diseño obtenido con el MOC . .	70
13.2.Resultados obtenidos para el diseño original y los candidatos seleccionados	72

Lista de Símbolos

Símbolo	Descripción
α	Velocidad del sonido
A	Coeficiente constante dentro de la ecuación que define la spline cúbica
CFL	Número de Courant
C_p	Coeficiente de calor a presión constante
CFD	Dinámica de fluidos computacional
e	Energía total
F	Vector de flujo convectivo en la dirección x
G	Vector de flujo convectivo en la dirección r
H	Vector de flujo convectivo total
I	<i>“Crowding distance”</i>
L	Longitud del lado de la celda
m	Pendiente respecto al eje x
M	Número de Mach
MOC	Método de las Características
n	Vector unitario normal
num	Variable que define el número de características
NSGA-II	<i>“Non-Dominated Sort Genetic Algorithm II”</i>
P	Presión estática
Q	Vector de estado de las ecuaciones de Euler
r	Eje vertical en dirección radial
r	Coordenada en la dirección r
R	Radio de la sección transversal
R_g	Constante del gas (= Constante universal de los gases / masa molar del gas)
S	Término fuente axisimétrico de las ecuaciones de Euler
S	Área o superficie transversal
t	Tiempo
T	Temperatura estática
u	Velocidad en la dirección x

Continúa en la página siguiente

Símbolo	Descripción
U	Energía interna por unidad de masa
v	Velocidad en la dirección r
V	Volumen de la celda (= Superficie con profundidad unitaria)
\mathbb{V}	Velocidad total
x	Eje horizontal en dirección axial
x	Coordenada en la dirección x
α	Pendiente de la característica m^+
β	Pendiente de la característica m^-
γ	Relación de calores específicos
Γ	Matriz de cambio de base
Δ	Variación temporal o espacial de la variable a la que acompaña
θ	Ángulo del vector velocidad con la dirección horizontal de referencia (eje x)
μ	Ángulo del cono de Mach
ξ	Relación geométrica de expansión (relación entre la sección de salida y la sección de la garganta)
ρ	Densidad
Φ_L	Función que depende de la longitud de la tobera
Φ_M	Función que cuantifica el error del número de Mach
Φ_θ	Función que cuantifica el error de θ
Ψ	Función limitadora del flujo
ω	Función de Prandtl-Meyer

Parte I

Introducción

Capítulo **1**

Objeto

El objeto de este proyecto es el diseño paramétrico preliminar de una tobera de cohete axisimétrica utilizando el método de las características. A continuación se pretende realizar un análisis del diseño obtenido utilizando dinámica de fluidos computacional. En función de los resultados obtenidos se considerará la posibilidad de optimizar el diseño inicial.

Capítulo 2

Justificación

La tobera es el elemento del cohete que transforma la energía térmica resultado de la combustión de properoles en energía cinética del chorro de gases expulsados. Su geometría influye notablemente en la velocidad con que salen los gases y, de acuerdo con la teoría de la conservación de la cantidad de movimiento, en el empuje que desarrolla el cohete. Por lo tanto, la tobera es un componente importante de un motor cohete ya que tiene una influencia significativa en el rendimiento general del cohete además de representar una fracción grande de la estructura del motor.

La justificación de que este dispositivo se use en todos los cohetes se basa en comparar el empuje que proporciona un cohete con y sin este elemento. Esta medición se puede realizar a través del coeficiente de empuje que es en cierto modo una relación entre el empuje real respecto al empuje que provocaría si no estuviese provisto de tobera, es decir, $F/(P_{cc} \cdot S_t)$. Los valores típicos de este coeficiente se encuentran normalmente entre 1,5 y 1,8 lo cual demuestra un aumento considerable (más del 50 %) de las prestaciones del cohete si se instala este elemento.

Por tanto, resulta claro que si se descarga el flujo de gases directamente al exterior implica que se está desperdiciando la energía resultante de la combustión de los properoles. En cambio, aprovechando la naturaleza compresible de los gases, si se expulsa el chorro de gases, que están a alta temperatura y presión, al exterior expansionándolos previamente hasta una presión más baja a través de una tobera, se logra incrementar la velocidad de salida de los propios gases y, en consecuencia, se logra convertir más energía cinética para lograr un aumento del empuje.

La primera persona que fue consciente de este hecho fue el ingeniero sueco Gustav de Laval (1845 - 1912) que, a través de la invención de su turbina de gas, resolvió el problema de conseguir la aceleración máxima de un gas a alta temperatura a través de un conducto. Su diseño resultó ser un conducto de sección variable con dos secciones diferenciadas, una convergente y otra divergente, unidas por la garganta que es la parte de la tobera con menor sección transversal. No obstante, la solución propuesta por Laval no pudo ser totalmente probada hasta que en 1903 el científico Stodola demostró experimentalmente que existe flujo supersónico en este tipo de toberas.

Posteriormente, Robert H. Goddard utilizó la configuración de Laval para diseñar la tobera del primer cohete a propelente líquido de la historia (1926) (Figura 2.1). Desde entonces las toberas que siguen la teoría de Laval son llamadas toberas tipo de Laval o tobera convergente-divergente y es el tipo de perfil utilizado hasta la actualidad para el diseño de los cohetes comerciales [3].



Figura 2.1: Robert H. Goddard junto al primer cohete a propelente líquido

Capítulo 3

Alcance

Con el objetivo de realizar el diseño de la tobera se prevé realizar las siguientes tareas:

- Búsqueda de motores cohete actuales para estudiar sus prestaciones.
- Selección de las condiciones de diseño en base al punto anterior.
- Se considerará en todo momento que el fluido circulante es ideal y caloríficamente perfecto.
- Estudio del método de las características para flujo con simetría axial, irrotacional, isentrópico y no viscoso.
- Elaboración de un código de cálculo numérico que implemente el método de las características para diseñar la parte divergente de la tobera según las condiciones de diseño establecidas.
- Elaboración de un mallado adecuado a la geometría obtenida para poder analizarla de forma discreta.
- Plantear las ecuaciones de Euler para el caso de geometría axisimétrica. Búsqueda de un método numérico adecuado que resuelva estas ecuaciones.
- Análisis del diseño obtenido con dinámica de fluidos computacional (CFD) a través de la elaboración en un código de cálculo numérico utilizando el trabajo realizado en los dos puntos anteriores.
- Si procede, aplicar correcciones o algún método de optimización en el diseño obtenido para mejorar el diseño en algun punto crítico.

Capítulo **4**

Requisitos básicos

Como es sabido, la función de una tobera es la de expandir los gases resultantes de la combustión para poder aumentar su velocidad de salida y, así, obtener la fuerza de empuje necesaria. Siguiendo este principio operativo, los requisitos que deberá satisfacer la tobera asimétrica son los siguientes:

- Obtener el flujo de gases expulsados paralelos al eje de simetría axial de la tobera.
- Optimizar el diseño de la misma para que el flujo de gases eyectados salga a la máxima velocidad posible, esto es, que la tobera expulse los gases con la presión ambiente, es decir, que la tobera esté *adaptada*.
- El contorno seguirá la configuración de Laval.
- Conseguir que no haya separación del fluido en la pared para evitar las pérdidas asociadas a este fenómeno.
- Lograr que el diseño tenga la mínima masa posible, esto implica que sus dimensiones se deberán reducir al máximo.
- Aplicar criterios de facilidad de producción y coste durante la realización paramétrica del diseño.

Capítulo **5**

Contenido de este documento

El proyecto se estructura en cinco capítulos cuyo contenido se describe a continuación:

- Capítulo II. Diseño de la tobera con el método de las características. Determinación de las condiciones de diseño. Descripción y análisis del método de las características. Resultados obtenidos con este método y análisis de la viabilidad del diseño.
- Capítulo III. Análisis del diseño con CFD. Descripción de las ecuaciones de Euler, volúmenes finitos, mallado y método numérico utilizado. Resultados y comparación con los del capítulo anterior.
- Capítulo IV. Optimización del diseño. Descripción del problema de optimización multiobjetivo y del algoritmo genético implementado. Presentación de los resultados obtenidos con el algoritmo para optimizar el diseño.
- Capítulo V. Presentación ordenada de las conclusiones a las que se ha llegado así como indicaciones de cómo proceder para un estadio más avanzado del diseño de la tobera.

Capítulo 6

Estado del arte

En este apartado se hace un análisis de la forma general de las toberas de motores cohete actuales con especial atención para la zona correspondiente a la parte divergente de la tobera. Además también se ha hecho un estudio sobre las características operativas y dimensiones de una muestra representativa de motores cohete actuales con el fin de establecer posteriormente las condiciones de diseño de la tobera.

6.1. Configuración de la tobera

La configuración de la tobera con mejores prestaciones depende de una gran variedad de factores, incluyendo el régimen de altitud en el que opera, las veces que se utiliza y los esfuerzos dedicados a su construcción. Otros factores como los propulsantes, la presión y temperatura que tienen los gases al salir de la cámara de combustión también afectan a las propiedades del flujo que circule a través de ella.

La forma básica de toda configuración de tobera es la llamada tobera De Laval o tobera convergente divergente. La parte convergente es poco crítica en cuanto a prestaciones y no presenta diferencias notables si se comparan diferentes diseños. Ahora bien, la parte divergente es la más crítica y hasta ahora se han utilizado diferentes geometrías de forma que, finalmente, las toberas se han acabado clasificando por la geometría correspondiente a esta parte de la tobera.

Los tipos de toberas más comunes son las cónicas, las acampanadas, las anulares con núcleo de aguja y las de expansión-deflexión (Figura 6.1 [10]). A pesar

de la variedad, actualmente la mayoría de las toberas instaladas en los motores cohete tienen configuración acampanada.

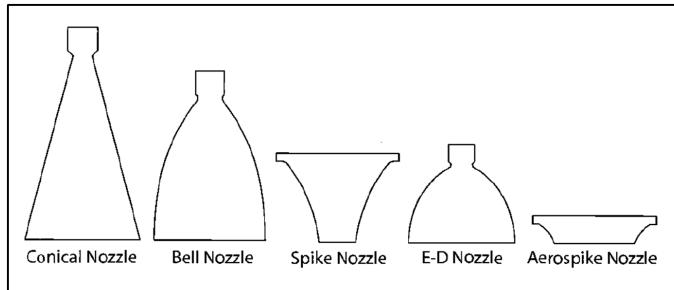


Figura 6.1: Tipos de toberas y tamaño típico

Las configuraciones de toberas acampanadas se caracterizan en que la parte divergente tiene una forma acampanada con mucha pendiente cerca de la garganta (20° - 50°) y muy poca al final de su contorno ($<10^\circ$) [16]. La Figura 6.2 muestra un esquema de la tobera junto con la nomenclatura típica relacionada con las toberas acampanadas.

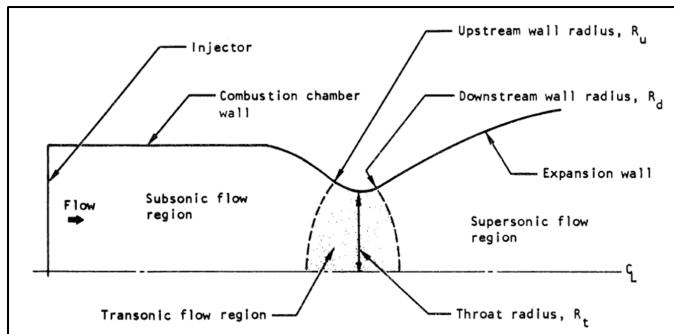


Figura 6.2: Configuración y nomenclatura de la tobera

6.1.1. Convergente

Tal y como ya se ha comentado, la parte convergente de la tobera no es una zona en la cual se destinan grandes esfuerzos de cálculo ya que no resulta crítica para el flujo circulante. La mayoría de los diseños de esta parte de la tobera tienen como objetivo unir la cámara de combustión con el resto de la tobera y admitir los gases resultado de la combustión de los properoles. Debido a que gran parte de las cámaras de combustión tienen forma cilíndrica, normalmente se diseña esta parte como una prolongación de la misma cámara de combustión.

6.1.2. Garganta

La región de transición donde el flujo pasa de subsónico a supersónico es la garganta. El perfil de la pared de la tobera en esta región determina que propiedades tendrá el flujo de gases expulsados.

La forma de la tobera cerca de la garganta normalmente viene determinada por la geometría aguas arriba y abajo de la misma. Normalmente es un arco de circunferencia que es tangente a otro arco circular justo en el punto donde se encuentra el punto con menor radio de toda la tobera. El radio de estos dos arcos, que pueden o no tener distintos valores, se escoge en base a las características del flujo en cada región, es decir, aguas arriba y aguas debajo de esta garganta.

La región aguas arriba, es decir, entre la cámara de combustión y la garganta es una región que afecta a la distribución de propiedades del gas en la garganta. Idealmente, debe acelerar el flujo subsónico que sale de la cámara de combustión hasta la garganta para que adquiera condiciones críticas y, debido a que la región es convergente, no hay riesgo de desprendimiento de flujo. Por esta razón hay cierta libertad para diseñar esta parte de la tobera con cualquier tipo de perfil siempre y cuando sea lo suficientemente lisa y sin cambios bruscos de sección.

De acuerdo al alcance de este proyecto y teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, no se diseña la parte correspondiente a la región aguas arriba de la garganta. En su lugar, se considera que los gases llegan a la garganta con velocidad sónica y sin ningún tipo de perturbación.

6.1.2.1. Región de expansión

El perfil de la tobera entre la garganta y el divergente es llamado la zona de expansión del flujo. La geometría de esta sección con la cual se obtendría menor longitud de la tobera sería la que reduciría esta parte a su mínima expresión, es decir, idealmente a un punto. No obstante, resulta no ser factible desde el punto de vista práctico ya que podría haber separación de flujo por el cambio brusco de sección y, además, este punto se convertiría en un concentrador de flujo calorífico que podría llegar a reducir considerablemente las prestaciones y vida útil de la tobera. Para que esto no suceda, interesa que la región de expansión posea un perfil suave sin cambios bruscos de su sección.

Como en la sección anterior, será más beneficioso tener el menor radio posible para conseguir la menor longitud de la tobera pero sin llegar a provocar separación

de flujo o incluso ondas de choque que provocarían unas pérdidas de energía considerables. Según [15] y [16] la relación de radios (R_d/R_t) suele estar alrededor de la unidad.

6.1.3. Divergente

La función de esta parte consiste en acelerar el flujo supersónico en una distancia relativamente corta para lograr que la tobera esté adaptada, es decir, que expulse los gases a la presión ambiente de diseño. Tanto la longitud como el impulso específico y el empuje están fuertemente influenciados por la capacidad de carga de pago del cohete. Por tanto, esta parte suele ser crítica y en su diseño es donde se destinan más recursos. Tal y como ya se ha dicho, para los sistemas actuales se emplean toberas acampanadas.

Con el fin de obtener el contorno del divergente que proporcione la mejor actuación, esto es, que expulse los gases paralelos y con una presión igual a la ambiente, existen diferentes métodos. En este proyecto, tal y como se pone de manifiesto en el alcance, se utilizará el llamado Método de las Características (MOC) para diseñar esta sección de la tobera.

6.2. Diseños actuales

A continuación se presenta un resumen de las especificaciones de los modelos existentes de toberas de cohete para estudiar sus prestaciones de diseño y poder decidir sobre las condiciones de diseño de la tobera. Debido al hecho de que los fabricantes manufacturan el motor como una sola pieza para entregarlo al comprador, se hará un estudio de los motores cohete haciendo especial énfasis a los parámetros relativos a la tobera.

La Tabla 6.1 muestra las principales características de una muestra representativa de motores cohete a propelente líquido. Todas estos motores equipan toberas con forma acampanada y utilizan diferentes sistemas refrigeración. La Figura 6.3 presenta algunos de los modelos estudiados y en ella se puede apreciar tanto la forma de la tobera como una parte del sistema de refrigeración.

Todos los datos mostrados en la Tabla 6.1 así como en la Figura 6.3 han sido extraídos de las páginas web de sus respectivos fabricantes: [11, 12, 13, 26].

	Vulcain 2	SSME	RS-68	RD-191	LE-7A	RD-130	J-2X
Aplicación	Ariane V	Space Shuttle	Delta	Angara	HIIA	Atlas III y Atlas V	Ares I y V
Diseñador	P&W Rocketdyne	P&W Rocketdyne	P&W Rocketdyne	NPO Energomash	Mitsubishi H.I.	NPO Energomash	P&W Rocketdyne
Propulsantes	LH2 + LOX	LH2 + LOX	LH2 + LOX	RP-1 + LOX	LH2 + LOX	RP-1 + LOX	LH2 + LOX
Relación oxidante-reductor	7.2	6	5.97	2.6	5.9	2.72	5.5
Empuje vacío [kN]	1359	2278	3372	2090	1098	4152	1310
Impulso específico [s]	429	453	409	337	440	337.8	448
Presión cámara comb. [Mpa]	11.73	18.94	10.26	25.83	12.7	26.67	9.6
Relación de mezcla [-]	6.1	6.7	5.97	2.6	5.9	2.72	5.5
Flujo másico [kg/s]	320	320	-	-	160	-	-
Peso motor [kg]	-	3177	6748	2200	1800	5330	2472
Tiempo quemado [s]	431	480	249	150	390	150	431
Rel. contracción [-]	4.6	3.4	-	-	-	-	-
Rel. expansión divergente [-]	58.3	77.5	22	37	54	36.87	92
Longitud total [m]	3.44	4.24	5.2	4	3.67	3.58	4.7
Longitud tobera [m]	2.17	3.1	-	-	-	2.26	-
Diám. salida tobera [m]	2.094	2.3	2.43	1.45	1.815	3.15	3.05
Diám. garganta tobera [m]	0.27	0.26	0.52	0.24	0.24	0.2335	0.32

Tabla 6.1: Tabla características de motores cohete

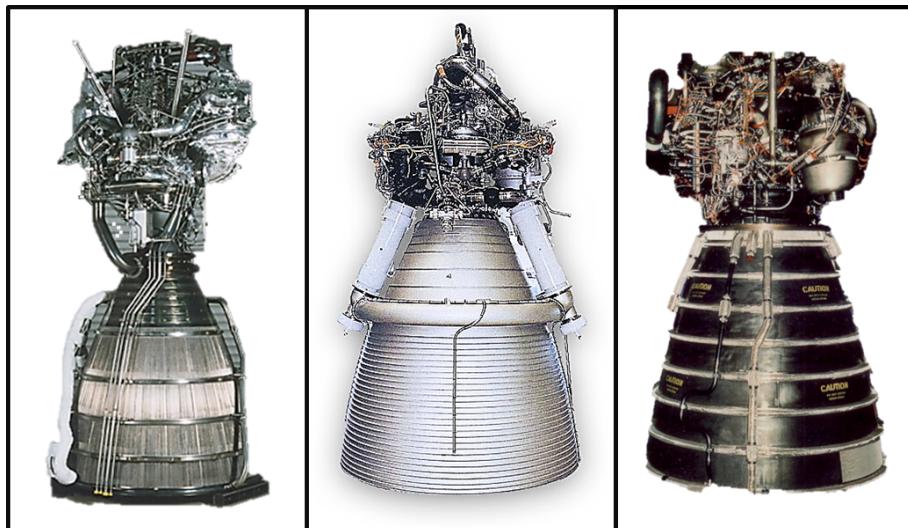


Figura 6.3: J-2X, Vulcain 2 y SSME

Parte II

Diseño de la tobera

Capítulo **7**

Condiciones de diseño

La tarea anterior al diseño geométrico es establecer las condiciones de diseño de la misma según los datos obtenidos en el estado del arte. Estas condiciones corresponderán a las variables termodinámicas en la etapa anterior a la entrada a la tobera junto con otros parámetros necesarios.

Ante todo, es necesario determinar con qué gases de escape operará esta tobera debido a que no es lo mismo que opere con los gases resultantes de la combustión de properoles sólidos o con los gases resultantes de properoles líquidos. Considerando el hecho de que la mayoría de los combustibles que utilizan las primeras etapas de los cohetes lanzadores son hidrógeno (LH₂) y oxígeno (LOX) líquidos, se diseñará esta tobera considerando que opera con los gases resultantes de la combustión de estos dos properoles. La proporción entre uno y otro, es decir, la relación entre oxidante y reductor queda fijada al valor estequiométrico 5.5.

Presión en la cámara de combustión

Otro dato de entrada importante corresponde a la presión existente en la cámara de combustión, valor encontrado en el estado del arte en todos los casos estudiados. Como valor de diseño se determina que la presión en la cámara de combustión es de:

$$P_{cc} = 10 \text{ MPa} = 100 \text{ bar} \approx 100 \text{ atm}$$

Temperatura al final de la combustión

Tal y como se observa, no se ha obtenido ningún dato concerniente a la temperatura en la cámara de combustión. Sería posible hacer un estudio más detallado y llegar a un valor aproximado de la misma pero esta tarea está fuera del alcance del proyecto. No obstante, se pueden estimar los valores típicos [3, 16] que están entre 2000 y 3500 dependiendo de los propogoles y de la relación de la mezcla.

Por tanto, la temperatura de los gases después de la combustión de los propogoles se fija a:

$$T_{cc} = 3000\text{K}$$

Relación de calores específicos

Este parámetro también queda determinado por la combustión que tiene lugar en la cámara y la composición de los gases de escape. Los valores típicos de la relación de calores específicos “ γ ” se hallan en el intervalo [1,1 – 1,35].

En el presente diseño se utilizará el siguiente valor típico:

$$\gamma = 1,15$$

Velocidad en la garganta

Como es sabido, en un conducto convergente-divergente como el que equipan los motores cohete, los gases que salen de la combustión tienen velocidad subsónica y, al pasar por el área del conducto con sección mínima (la garganta o “throat”), adquieren velocidad sónica, es decir:

$$M_t = 1$$

Por lo tanto, para el diseño se deberá tener en cuenta que el flujo al pasar por la garganta irá a la velocidad del sonido local, también llamada velocidad crítica:

$$V_t = M_t \cdot a^* = a^* = \sqrt{\gamma R T_t}$$

Sección de la garganta

Tomando como referencia el estado del arte, el tamaño del diámetro transversal de la garganta de las toberas tiene unos valores comprendidos entre 25 cm hasta

50 cm. Así pues, se escoge como diámetro de diseño de la garganta el siguiente valor:

$$\phi_t = 0,3m \rightarrow r_t = 0,15m$$

Presión de los gases de escape

Por último es necesario fijar la presión exterior a la tobera. Está demostrado que para que la tobera ofrezca el mayor rendimiento, la presión con la que debe expulsar los gases de escape debe ser igual a la presión ambiente fuera del motor, o lo que es lo mismo, que la tobera este *adaptada*. Ahora bien, el rango de operación típico de estos motores implica pasar del nivel del suelo hasta varios miles de metros de altura respecto el suelo donde la presión ambiente es casi nula. Como consecuencia, la tobera no solo estará optimizada para funcionar correctamente bajo unas condiciones determinadas sino que además solo ofrecerá el mayor rendimiento cuando esté operando en una presión ambiente determinada.

Debido a que la presión ambiente en la que opera la tobera varía desde la presión ambiente 1 atm hasta una presión casi nula ≈ 0 atm, se debe escoger una presión ambiente que esté entre ambos valores. Como es lógico, se escogerá una presión intermedia típica con el objetivo de que el rendimiento no se vea mermado funcionando a altas o a bajas presiones, la presión escogida es:

$$P_{atm} = 0,0405 \text{ MPa} \approx 0,4 \text{ atm}$$

Resumen parámetros de diseño

Recopilando todos los datos fijados, la tobera se diseñará en base a los parámetros de operación que se resumen en la Tabla 7.1.

Párametro	Símbolo	Valor	Unidades
Presión cámara combustión	P_{cc}	10	MPa
Temperatura	T_t	3000	K
Relación calores específicos	γ_t	1,15	-
Mach	M_t	1	-
Radio garganta	r_t	0,15	m
Presión ambiente	P_{amb}	0,0405	Mpa

Tabla 7.1: Resumen parámetros de diseño tobera

Capítulo **8**

Método de las Características

El método de las características es un método de cálculo numérico para estudiar flujo supersónico. Fue desarrollado por Prandtl y Busemann a partir de la teoría matemática de las características [3]. Dicha teoría permite resolver sistemas generales de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de 1er orden de tipo hiperbólicas. Utilizando esta teoría, se desarrolló el método de las características para calcular el comportamiento del flujo supersónico. Este método es aplicable tanto para flujo bidimensional como tridimensional e incluso con flujo rotacional.

Las ecuaciones características para flujo axisimétrico, estacionario e irrotacional se desarrollan completa y detalladamente en las referencias [7, 9, 15, 17]. Estas ecuaciones derivan de las ecuaciones de continuidad, de la conservación de la cantidad de movimiento y de la condición de flujo irrotacional, todas ellas expresadas en el sistema de referencia de una línea de corriente o, lo que es lo mismo, en las coordenadas intrínsecas.

El método de las características consiste en utilizar las ecuaciones características junto con un procedimiento de resolución paso a paso en el cual se parte de la región del dominio donde son conocidas todas las propiedades del flujo para formar una malla característica (ver Figura 8.1). Esta malla característica está formada por segmentos resultado de la intersección entre características m^+ y m^- o entre características y el contorno del dominio. Una característica m^+ es aquella que gira hacia la derecha respecto la dirección aguas abajo del flujo mientras que una característica m^- gira hacia la izquierda.

Este método se hace más preciso cuanto más fina sea la malla, es decir, cuantos más puntos se encuentren dentro del dominio y esto se consigue aumentando

el número de características m^+ y m^- presentes. A su vez, esto hace que se consiga un contorno más suave por el mayor número de puntos encontrados. La precisión de cada solución se puede evaluar mediante la comparación de los resultados del MOC con los teóricos (Anexo A).

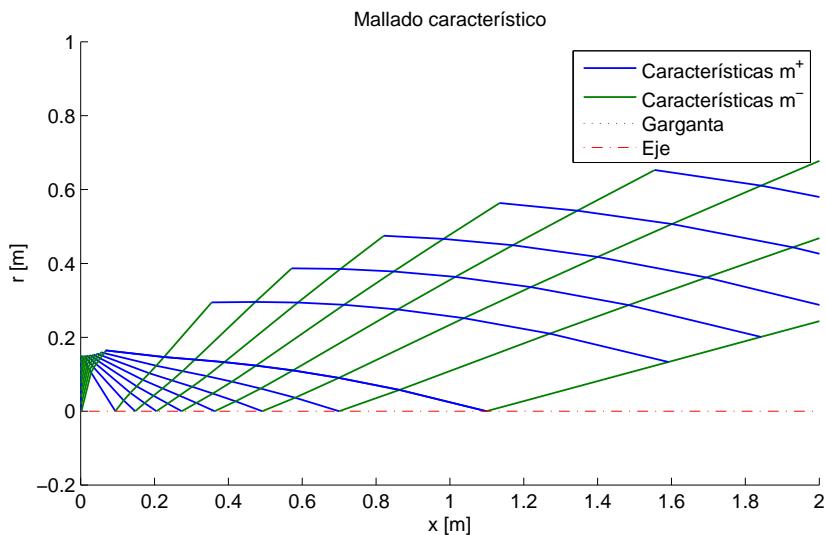


Figura 8.1: Malla característica

8.1. Ecuaciones características y de compatibilidad

La Figura 8.2 muestra esquemáticamente el sistema de referencia utilizado, la definición de cada variable utilizada también se muestra a continuación:

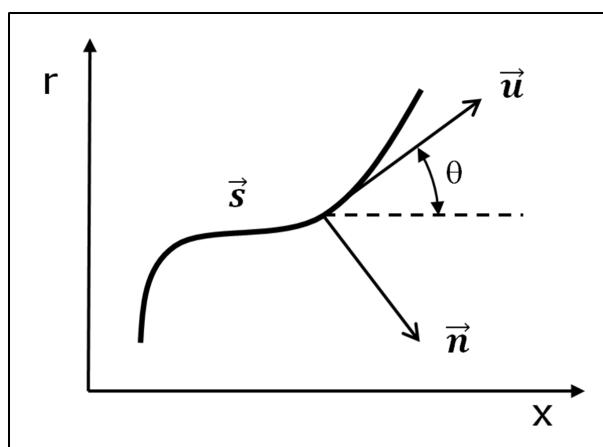


Figura 8.2: Coordenadas intrínsecas

- $\vec{s} \equiv$ línea de corriente

- \vec{t} ≡ dirección tangente a \vec{s} en un punto
- \vec{n} ≡ dirección normal a \vec{s} en un punto
- x ≡ distancia horizontal hasta el origen de coordenadas
- r ≡ distancia del punto de interés hasta el eje de simetría axial
- θ ≡ ángulo entre el vector \vec{t} y la dirección horizontal de referencia (eje x)

Si se expresan las ecuaciones de la mecánica de fluidos en este sistema de coordenadas y se aplica la teoría de las características se obtienen dos familias de líneas características determinadas por las *ecuaciones características* siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial m^+}(\theta + \omega) = +\frac{\sin\mu \cdot \sin\theta}{r} \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial m^-}(\theta - \omega) = -\frac{\sin\mu \cdot \sin\theta}{r} \quad (8.2)$$

donde m^+ y m^- representan distancias a lo largo de cada línea característica. Notar que las propiedades del flujo varían a lo largo de una línea característica y, además, estas líneas características están curvadas.

La inclinación de las características m^- y m^+ en un punto determinado respecto al eje de referencia x quedan determinadas por las siguientes igualdades:

$$\left(\frac{dr}{dx} \right)_{m^+} = \tan(\theta - \mu) = \tan\alpha \quad (8.3)$$

$$\left(\frac{dr}{dx} \right)_{m^-} = \tan(\theta + \mu) = \tan\beta \quad (8.4)$$

En la Figura 8.3 se muestran las pendientes de las rectas características respecto al sistema de coordenadas intrínsecas y a una dirección horizontal de referencia.

En las ecuaciones anteriores aparecen la variable μ que es el ángulo del cono de Mach (Ecuación 8.5) y la variable ω que es la función de Prandtl-Meyer (Ecuación 8.6).

$$\mu = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \right) \quad (8.5)$$

$$\omega = K \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{K} \right) - \tan^{-1} \left(\sqrt{M^2 - 1} \right) \quad (8.6)$$

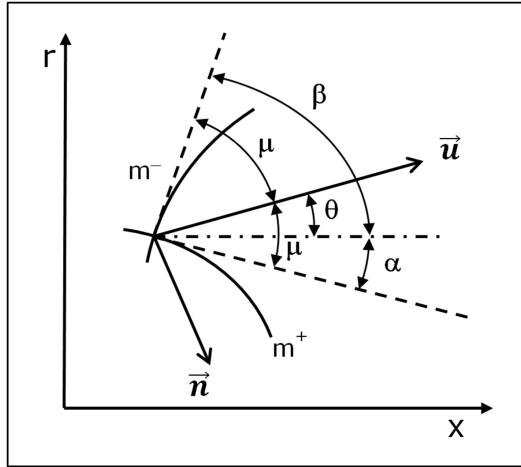


Figura 8.3: Líneas características

donde $K = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$.

Notese que tanto las ecuaciones de compatibilidad como las características están acopladas, es decir, que el cálculo de θ y ω se debe realizar al mismo tiempo que el de x y r . Esto implica que necesariamente se debe aplicar un esquema de cálculo iterativo para poder determinar el punto donde se cruzan 2 características y poder así formar la malla característica.

No obstante, para poder calcular numéricamente los resultados es necesario reescribir las ecuaciones para que sean matemáticamente resolubles. Si se reescriben las Ecuaciones 8.1– 8.4 en forma de diferencias finitas siguiendo el esquema de la Figura 8.4, se obtiene:

$$\frac{(\theta_C + \omega_C) - (\theta_B + \omega_B)}{\Delta m^+} = + \frac{\sin \mu_P \cdot \sin \theta_P}{r_P} \quad (8.7)$$

$$\frac{(\theta_C - \omega_C) - (\theta_A - \omega_A)}{\Delta m^-} = - \frac{\sin \mu_Q \cdot \sin \theta_Q}{r_Q} \quad (8.8)$$

$$x_C = \frac{r_B - r_A + x_a \cdot \tan \alpha_P - x_B \cdot \tan \beta_Q}{\tan \alpha_P - \tan \beta_Q} \quad (8.9)$$

$$r_C = (x_C - x_B) \cdot \tan \beta_Q + r_B \quad (8.10)$$

Las distancias Δm^+ y Δm^- son, respectivamente, la longitud del segmento que une los puntos B a C y A a C. Los puntos P y Q que aparecen en este esquema de cálculo son los puntos medios de los segmentos de las características m^+ entre B y C y de m^- entre A y C. El valor de las propiedades en estos nuevos puntos se toma como el promedio entre las propiedades de los puntos que definen el

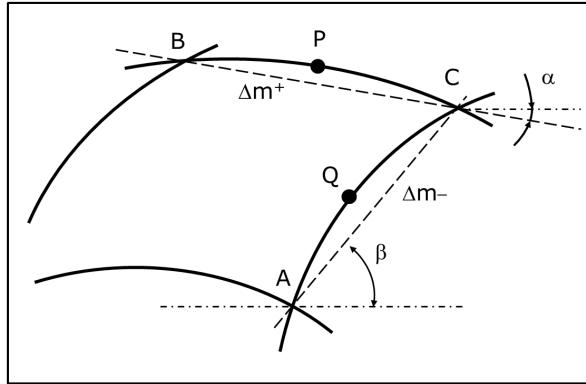


Figura 8.4: Intersección entre dos características cualesquiera

segmento en cuestión, es decir:

$$\Delta m^+ = \frac{x_C - x_B}{\cos \alpha_P} \quad \Delta m^- = \frac{x_C - x_A}{\cos \beta_Q} \quad (8.11)$$

$$r_P = \frac{r_B + r_C}{2} \quad r_Q = \frac{r_A + r_C}{2} \quad (8.12)$$

$$\theta_P = \frac{\theta_B + \theta_C}{2} \quad \theta_Q = \frac{\theta_A + \theta_C}{2} \quad (8.13)$$

$$\mu_P = \frac{\mu_B + \mu_C}{2} \quad \mu_Q = \frac{\mu_A + \mu_C}{2} \quad (8.14)$$

$$\alpha_P = \theta_P - \mu_P \quad \beta_Q = \theta_Q + \mu_Q \quad (8.15)$$

Estos puntos intermedios entre las características intentan simular la naturaleza curvada de las mismas, su aparición se debe a que se aplican diferencias finitas, que consideran tramos rectos entre los puntos, mientras que las características son curvas en el caso más general. Este tipo de aproximación es llamada aproximación de segundo orden. Se deberá tener en cuenta pues, que cuanto más pequeña sea la distancia entre estos puntos, más precisos serán los resultados.

Tal y como ya se ha comentado, las ecuaciones están acopladas, por tanto para calcular el siguiente punto de la malla característica, se deberá aplicar un esquema iterativo aplicando las Ecuaciones de 8.7 hasta 8.15 hasta que la solución converja. Obviamente, para poder iniciar los cálculos se asumirá solo para la primera iteración que los puntos P y Q son los mismos que A y B y, posteriormente, se ajustarán sus valores con los resultados de las subsiguientes iteraciones.

Con el fin de poder desarrollar un código numérico que resuelva el método de las características, es necesario determinar cuáles son las condiciones de contorno del problema y sus ecuaciones asociadas. A continuación se describen estas condiciones de contorno y las modificaciones a aplicar al proceso de cálculo numérico.

8.2. Condiciones de contorno

8.2.1. Zona de expansión

La primera condición de contorno cuando se aplica el método de las características aparece en la región de expansión del flujo, es decir, justo después de la garganta. La Figura 8.5 muestra un esquema de esta región. Tal y como ya se ha establecido en el capítulo 7 el contorno de la pared es un arco circular de radio R_d con centro en las coordenadas $(0, R_t + R_d)$. El punto final de esta región, y con ello el ángulo girado, lo marcará la última característica m^+ encontrada que corresponde a aquella en la cual se alcanza el Mach de diseño del punto más alejado de la garganta y que corresponde a las condiciones de salida deseadas.

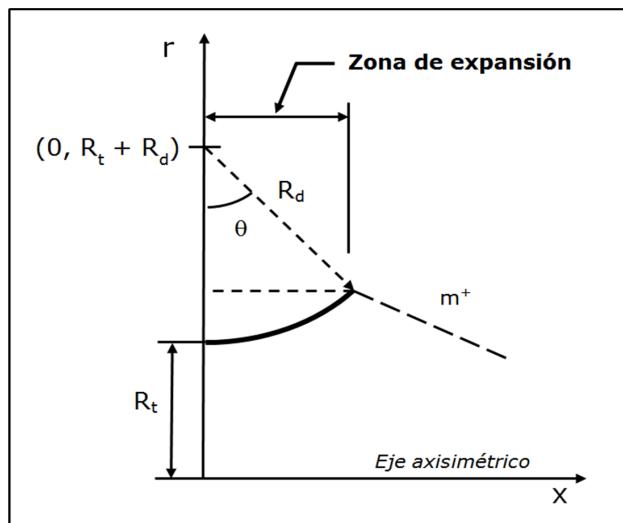


Figura 8.5: Zona de expansión

8.2.1.1. Característica m^+ inicial

La zona de expansión empieza con la creación de la primera característica. En el apartado 7 se determinó que la velocidad del flujo en la sección de la garganta sería la velocidad sónica local. Ahora bien, si se aplica esta condición en la Ecuación 8.5 y también en la Ecuación 8.6 se observa que $\mu \rightarrow 90^\circ$ y $\omega \rightarrow \infty$, lo cual significa que no se crearía ningún mallado de características ya que la característica rebotaría al centro de simetría y después contra el propio punto de partida. Así pues, el método de las características no es válido en la región donde el flujo es estrictamente sónico. No obstante, se puede solucionar este problema mediante diferentes aproximaciones.

La primera aproximación consiste en aplicar soluciones analíticas aproximadas para el flujo transónico tales como las de Sauer (1947), Oswatitsch y Rothstein (1949), Hall (1962), Moore (1967) o Kriegel y Levine (1969). Todas ellas parten de la ecuación del potencial de velocidades y realizan una linealización entorno a $M = 1$ (teoría de pequeñas perturbaciones) en cuyo caso la solución se simplifica a una serie de potencias.

La segunda aproximación, mucho más sencilla, consiste en considerar que la primera característica no es la que corresponde al Mach sónico sino uno muy próximo a él para que la primera característica esté próxima a la verticalidad y se logre obtener el mallado de características. Como orientación se está hablando de considerar que el Mach de la primera característica correspondería a $M_t = 1,0001$. Además, debido a que la primera característica vendría de una zona subsónica y, por tanto, una zona uniforme sin características, esta primera característica m^+ sería bidimensional.

En el presente trabajo se ha considerado que la segunda aproximación como la más adecuada debido a que no tiene en cuenta la parte convergente de la tobera, que está fuera del alcance del presente proyecto, además de por su ya antes mencionada sencillez.

Teniendo en cuenta la aproximación seleccionada, la primera característica tendrá las siguientes propiedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} M(1, 1) = 1,0001 \\ \theta(1, 1) = 0 \\ \omega(1, 1) = \omega(M_t = 1,0001) \\ \mu(1, 1) = \mu(M_t = 1,0001) \\ \alpha(1, 1) = \omega(1, 1) - \mu(1, 1) \\ x(1, 1) = x_t \\ r(1, 1) = r_t \end{array} \right.$$

Tal y como ya se ha dicho, como aguas arriba de la garganta el flujo es uniforme, este primera característica sería bidimensional, es decir, si se analiza la ecuación característica 8.1:

$$\text{Primera característica} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial m^+}(\theta + \omega) = 0 \Rightarrow (\theta + \omega) = \text{cte.} \quad (8.16)$$

Por tanto, en la característica m^+ inicial se conserva el invariante $\theta + \omega$ y, por extensión, todas las propiedades del flujo son constantes a lo largo de la característica. En cuanto al otro extremo de la característica (que se designa como

$(\text{num} + 1, 1)$), como es una línea recta, éste se puede determinar por simple trigonometría 8.18:

$$x(\text{num} + 1, 1) = \frac{-r_t}{\tan(\alpha)} \quad (8.17)$$

$$r(\text{num} + 1, 1) = 0 \text{ (Eje de simetría)}$$

8.2.1.2. Mallado zona de expansión

El mallado empieza haciendo que de la primera característica partan tantas como se desee, en este caso el número de características corresponde a la variable `num`, de forma que estén equiespaciadas a lo largo de la característica inicial. Esto último hará que se obtenga el resto del mallado por la intersección de estas con ellas mismas y con la pared circular próxima a la garganta. La Figura 8.6 ilustra un ejemplo de mallado inicial en la zona de expansión donde se puede observar que hay 5 características que parten de la característica inicial.

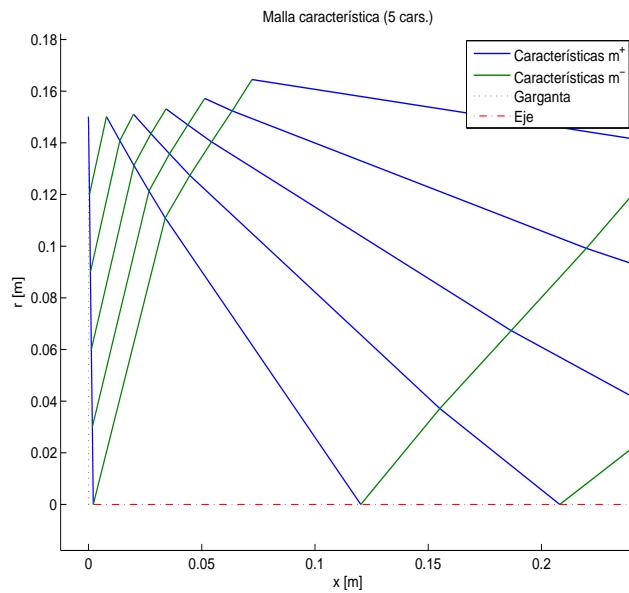


Figura 8.6: Zona inicial de expansión

Los puntos iniciales de estas características tendrán las mismas propiedades que la característica inicial y sus coordenadas vendrán dadas por las siguientes relaciones:

$$x(i, 1) = x(1, 1) + (i - 1) \cdot \Delta m^+ \cdot \cos(\alpha) \quad (8.18)$$

$$r(i, 1) = r(1, 1) + (i - 1) \cdot \Delta m^+ \cdot \sin(\alpha) \quad (8.19)$$

donde Δm^+ es la longitud de la característica inicial (8.20).

$$\Delta m^+ = \sqrt{[x(\text{num} + 1, 1) - x(1, 1)]^2 + [r(\text{num} + 1, 1) - r(1, 1)]^2} \quad (8.20)$$

Una vez establecidas las características iniciales se procederá a calcular el mallado característico mediante intersecciones entre ellas de forma que se crea una malla como la de la Figura 8.6.

8.2.2. Eje axisimétrico

Esta segunda condición de contorno se aplicará para todas los puntos de la malla característica que lleguen o partan del eje de simetría axial de la tobera. En el eje axisimétrico tanto la dirección del flujo como la coordenada r son conocidos, es decir, $\theta = 0$ y $r = 0$ respectivamente. Llegados a este punto es necesario diferenciar entre dos condiciones de contorno diferentes.

La primera situación se da cuando una característica toca en el eje, en este caso, el proceso se simplifica ya que se debe encontrar la intersección entre la característica actual y la recta $r = 0$ que representa el eje axisimétrico. Por tanto para este caso las ecuaciones se simplifican:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_C = x_B - \frac{r_B}{\tan \alpha_p} \\ r_C = 0 \\ \theta_C = 0 \\ \omega_C = \theta_B + \omega_B + \frac{\sin \mu_p \cdot \sin \theta_p}{r_p} \end{array} \right.$$

En cambio, aparece un caso especial cuando se trata de calcular la intersección entre una característica que parte del eje de simetría y otra cualquiera. Esta indeterminación surge en la parte derecha de la Ecuación 8.8 debido a que $r = 0$ y $\theta = 0$.

No obstante, como se utiliza un esquema de segundo orden se están calculando las propiedades de las características en los puntos medios de las mismas con lo cual esta indeterminación solo se presenta cuando se realiza la primera iteración. Por lo tanto, para el caso de las características que parten del eje de simetría axial e intercepten otras características cualquiera, y en el caso solamente del cálculo de la primera iteración se fijará el valor de la coordenada r como el valor de la coordenada r de la características con la cual interseca [$r_Q = r$ (punto anterior)]. Durante las sucesivas iteraciones el valor de la coordenada del punto intermedio se irá ajustando de forma natural a su valor real.

8.2.3. Pared de la tobera

La última condición de contorno del problema se presenta en el momento de calcular el contorno de la pared de la tobera después del último punto del arco de circunferencia de la zona de expansión. Los puntos que definen el perfil de la tobera se encuentran como la intersección de una recta que parte del punto anterior conocido del contorno y la característica m^- actual, asumiendo la aproximación por la cual los tramos que unen dos puntos del contorno son segmentos rectos.

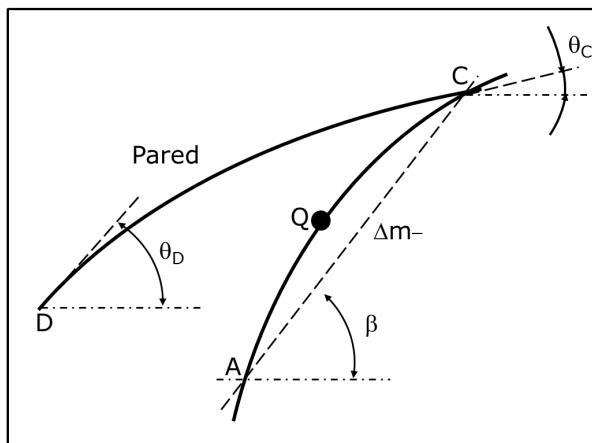


Figura 8.7: Esquema de la intersección de característica m^- con la pared

Teniendo en cuenta que son conocidas todas las propiedades del flujo del último punto del arco de circunferencia, la zona de expansión, y que todos los puntos de la malla característica de la zona de expansión ya han sido calculados, se pueden calcular los sucesivos puntos del contorno realizando ciertos cambios en el sistema de ecuaciones encontrado inicialmente.

Si se sigue el esquema de la Figura 8.7, se sustituye la ecuación que hace referencia a la característica m^+ por la ecuación que establece que la inclinación del flujo de pared es el resultado del promedio entre las inclinaciones de la pared en el punto anterior y en el actual. Por tanto, el sistema de ecuaciones queda como sigue:

$$\theta_{mC} = \frac{\theta_C + \theta_D}{2} \quad (8.21)$$

$$\frac{(\theta_C - \omega_C) - (\theta_A - \omega_A)}{\Delta m^-} = -\frac{\sin \mu_Q \cdot \sin \theta_Q}{r_Q} \quad (8.22)$$

$$x_C = \frac{r_B - r_A + x_A \cdot \tan \theta_{mC} - x_B \cdot \tan \beta_Q}{\tan \theta_{mC} - \tan \beta_Q} \quad (8.23)$$

$$r_C = (x_C - x_B) \cdot \tan \beta_Q + r_B \quad (8.24)$$

En esta situación e igual como pasa con la intersección de dos características, el cálculo del punto de la pared y de las características del flujo en ese punto están acoplados de forma que también se deberá realizar un esquema de cálculo iterativo igual que el explicado en la Sección 8.1.

Además, aparte de la resolución del sistema de ecuaciones, este caso presenta una incógnita añadida. Esta corresponde al ángulo que tiene la pared en el punto donde llega la característica m^- , designado como θ_C . Este es precisamente uno de los parámetros que hay que determinar para obtener el diseño, habrá pues que volver a iterar.

El proceso de iteración se inicia imponiendo un ángulo en la pared (θ_C) cualquiera y calculando el mallado resultante de las intersecciones de la característica m^+ que saldrá de la pared en el punto D con las características m^- obtenidas en la región de expansión. En la Figura 8.8 se muestra un mallado donde la línea roja representa la característica m^+ antes mencionada. En la última intersección se obtendrán las propiedades del flujo correspondientes a los valores de la salida y será donde habrá que comprobar si el ángulo de la corriente en este punto es paralelo al eje, si no lo es se cambiará el ángulo de la pared hasta obtener en la salida un flujo con $\theta \approx 0$. Una vez hecha la primera característica m^+ , se procede a calcular las siguientes (de abajo para arriba) hasta un número igual al número de características escogido y se obtendrán tantos puntos en la pared como características. La forma final de la pared de la tobera corresponderá a una curva que pase por todos estos los puntos.

Una vez llegados a este punto ya se está en posesión de todas las herramientas necesarias para lograr la geometría de una tobera con simetría axial según el método de las características. El siguiente capítulo contiene los resultados obtenidos.

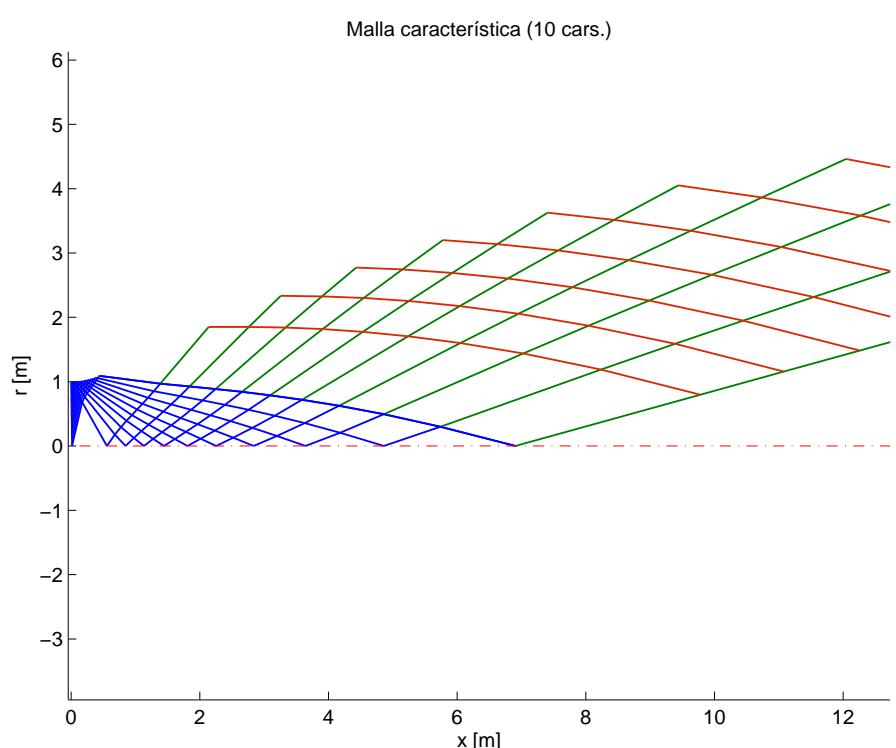


Figura 8.8: Mallado zona divergente

Capítulo 9

Resultados del diseño

El método de las características discutido anteriormente se ha implementado en un programa que determina el contorno de la tobera óptimo dadas las condiciones de diseño que se han establecido previamente.

El programa creado calcula el contorno óptimo para el que la presión de salida de los gases es igual a la ambiente, provocando con ello que el chorro de gases salga a la máxima velocidad. En el Anexo C se muestra una breve descripción de cada rutina y subrutina creadas, así como también diagramas de flujo que describen los algoritmos de cálculo seguidos.

El rutina principal se debe ejecutar introduciendo los datos de diseño necesarios. La lista de variables introducidas se muestra en la Tabla 9.1:

Párametro	Valor
P_{cc}	10 Mpa
P_{amb}	0,0405 MPa
M_t	1,0001
γ	1,15
r_t	0,15 m
num	a determinar

Tabla 9.1: Datos de entrada para el programa de diseño

Notar que hay un valor que difiere ligeramente de los encontrados en el Capítulo 7. El hecho de escoger un Mach muy próximo a 1 se debe a cuestiones ya comentadas en la Sección 8.2.

Además, el número de características (variable num) que parten de la zona de expansión es variable debido a que se debe estudiar cual es el valor de caracte-

rísticas para el cual los resultados son lo suficientemente precisos con el menor esfuerzo computacional (tanto en tiempo como en recursos).

9.1. Número de características

El número de características establece los puntos que hay en la malla característica así como también el número de puntos del contorno óptimo de la tobera. En este apartado se hace un breve estudio para determinar cual será el valor de este parámetro que se debe introducir en el programa para poder ejecutarlo y obtener los resultados buscados.

El procedimiento se basa en estudiar la tendencia de tres resultados del diseño del contorno, estos son el radio obtenido en la salida, R_e , la longitud de la tobera, L_{tob} , y la relación geométrica de expansión, ξ , en función de diferentes valores en la variable num . Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 9.2.

num	R_e [m]	L_{tob} [m]	ξ [-]	Error e_{R_e} [%]
7	0.7754	3.8276	26.7188	1.28
10	0.7756	3.8350	26.7337	1.26
20	0.7770	3.8356	26.8342	1.07
30	0.7797	3.8433	27.0216	0.73
40	0.7798	3.8374	27.0286	0.71
50	0.7797	3.8338	27.0173	0.73
60	0.7805	3.8308	27.0736	0.63

Tabla 9.2: Resultados del estudio de la influencia del número de características

Los resultados obtenidos se muestra en la Figura 9.1, en todos los casos se observa una tendencia constante de manera que los resultados se acercan más a los valores teóricos cuanto mayor sea el número de características. En cambio, el valor del Mach en la salida se mantiene constante ya que es el parámetro fijado por el propio método de las características para encontrar el perfil de la tobera. En este caso, se fija como 30 el número de características para el diseño debido a que el error en el radio de salida es el primero que resulta inferior al 1 %.

9.2. Diseño del contorno

Un vez escogido el número de características, todas las variables de entrada están fijadas y ya se está en condiciones de ejecutar el programa de diseño para encontrar el contorno de la tobera.

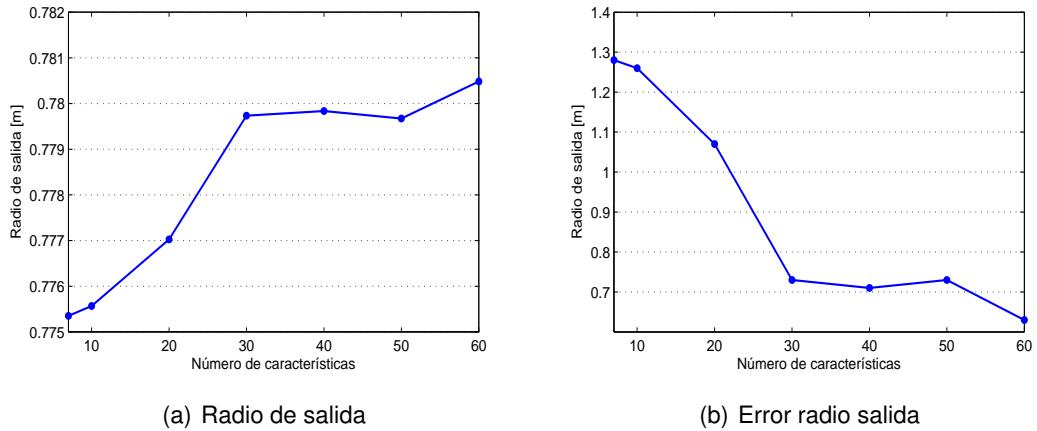


Figura 9.1: Resultados obtenidos en función del número de características.

Primero el programa un algoritmo iterativo para encontrar aquel mallado característico en el cual el Mach del último punto del mallado de la zona de expansión sea igual o muy próximo al de diseño. El Mach de diseño se conoce a través de la relación isentrópica (ver Anexo A):

$$M_e = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P_c}{P_{amb}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} \quad (9.1)$$

que da como resultado 3,7443, así pues, el Mach del último punto de la malla deberá tener un valor muy próximo al de diseño. Después de realizar varias iteraciones cambiando el radio de curvatura de la zona de expansión, se obtiene la malla característica de la Figura 9.2.

El Mach obtenido en el punto más alejado de la garganta es de 3,7451 mientras que el Mach de diseño es 3,7443, el error es inferior a la milésima y, por tanto, la solución obtenida se considera suficientemente precisa.

Una vez terminado esta primera iteración, se calculan las características m^+ que partirán del contorno iterando para diferentes ángulos de la pared (ver Figura 9.3). Para obtener el contorno de la tobera se unen los puntos finales de las características m^+ encontradas anteriormente. La Figura 9.4 muestra la solución de este último paso.

Finalmente, si se aísla el perfil obtenido y se realiza una simetría respecto al eje x, se obtiene la solución del perfil geométrico de la tobera (Figura 9.5). Los valores numéricos de la solución se resumen en la Tabla 9.3.

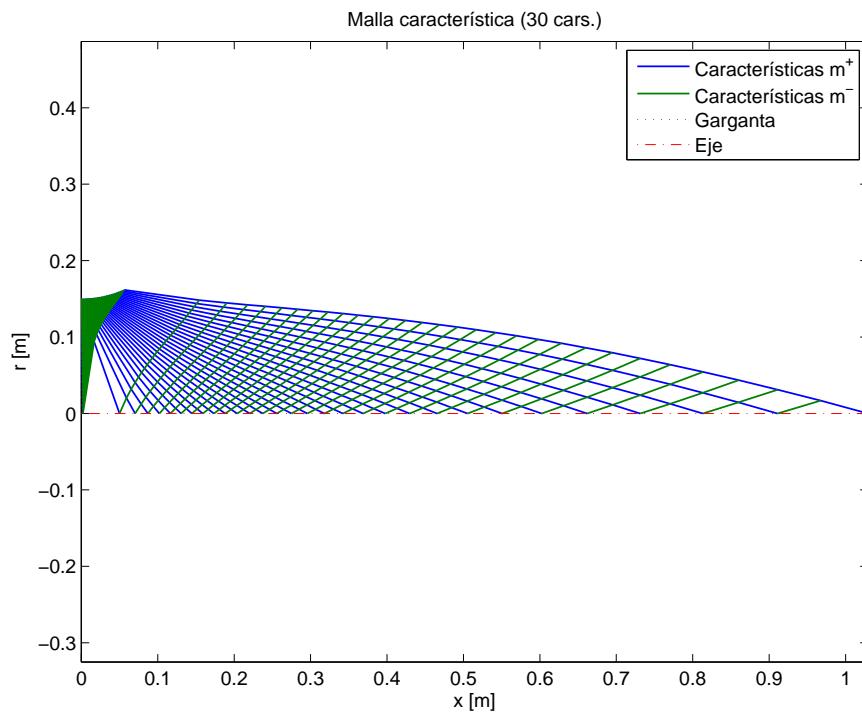


Figura 9.2: Malla característica obtenida

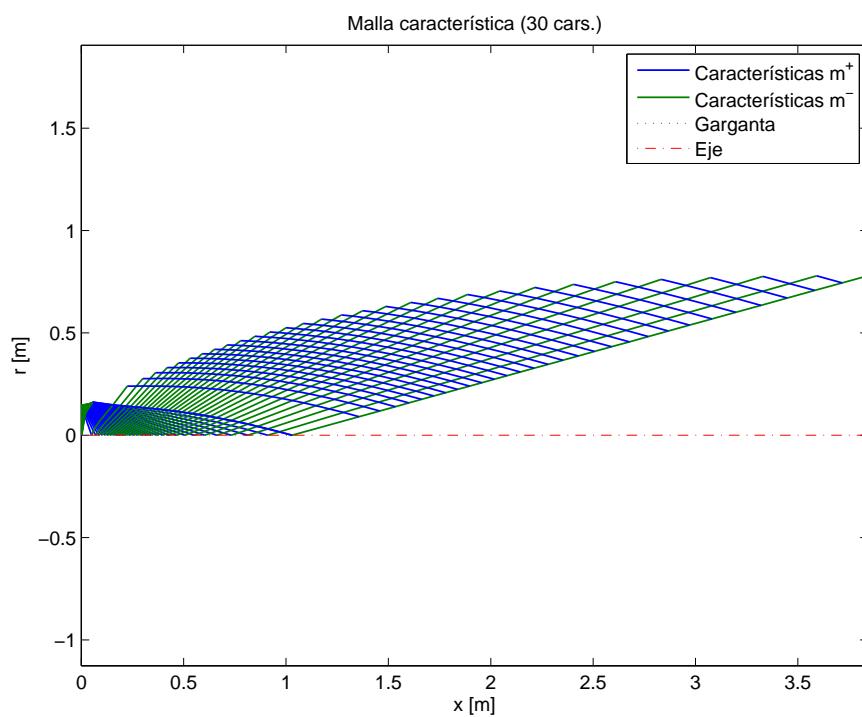


Figura 9.3: Representación de los puntos intersección entre características

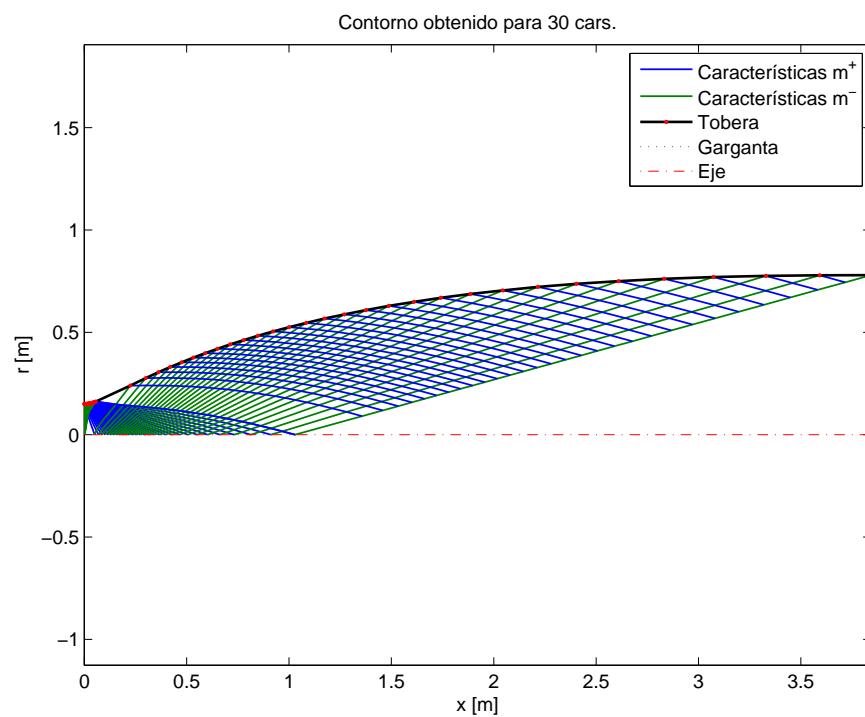


Figura 9.4: Contorno de la tobera

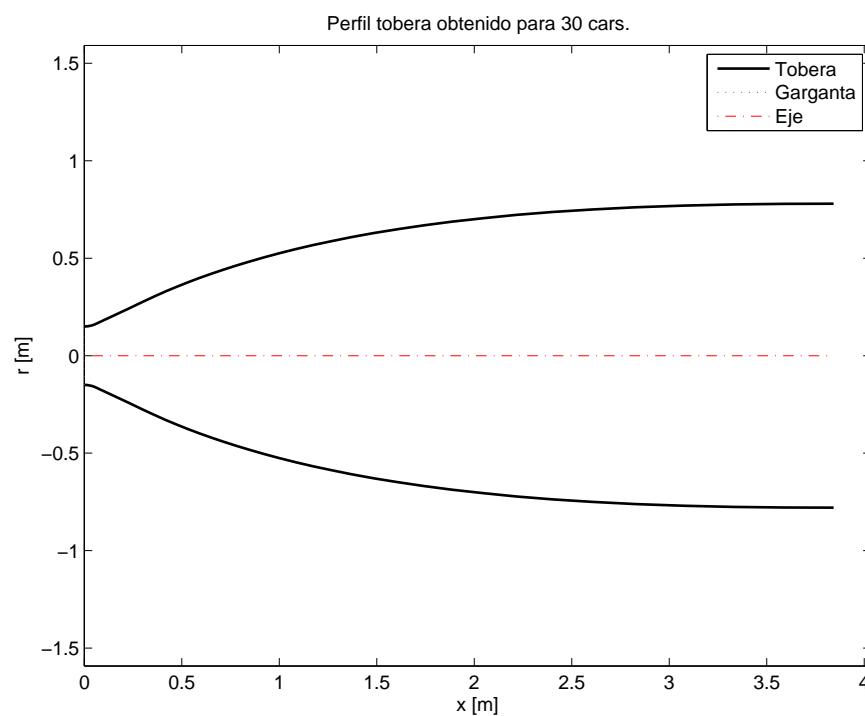


Figura 9.5: Perfil encontrado con el método de las características

	Valor
Características [-]	30
Radio salida [m]	0,7797
Longitud [m]	3,8433
Relación expansión [-]	27,0216
Mach salida [-]	3,7451

Tabla 9.3: Parámetros numéricos de la solución obtenida

9.3. Validación del diseño

La solución obtenida se puede evaluar mediante la comparación de los resultados obtenidos con los resultados teóricos que se obtendrían para flujo casi-unidimensional e isentrópico para las condiciones de diseño fijadas (ver Anexo A).

Tal y como ya se ha comentado anteriormente, el Mach de diseño queda determinado por la ecuación 9.1, mientras que las expresiones que permiten calcular el radio de salida teórico son las siguientes:

$$\frac{S_e}{S_t} = \frac{1}{M_e} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (9.2)$$

$$R_e = R_{th} \sqrt{\frac{S_e}{S_t}} \quad (9.3)$$

Los resultados teóricos obtenidos a partir de las Ecuaciones 9.1 a 9.3 y los obtenidos a través del método de las características se resumen en la Tabla 9.4.

	Mach salida	Radio salida
Teórico	3,7451	0,7797
MOC	3,7443	0,7854
Error [%]	0,02	0,73

Tabla 9.4: Análisis de la solución obtenida

Tal y como se puede observar en la tabla anterior, el error cometido en el número de Mach de salida es sensiblemente pequeño resultando en un error del 0,02 %. Por otro lado si se observa el radio de salida, el error resultante es del 0,73 %. Ambos errores son asumibles y lo suficientemente pequeños como para que se pueda considerar el diseño como válido.

Si ahora se comparan los resultados obtenidos mediante el método de las características con los parámetros de diseño de los motores estudiados en la Tabla 6.1 en el Estado del arte (Sección 6.2) se puede llegar a las siguientes conclusiones:

- El radio de salida es muy parecido al de los modelos encontrados aunque con valor inferior.
- La longitud de la tobera es mucho mayor a las toberas hasta ahora construidas y diseñadas para uso comercial, es decir, la diferencia respecto a los modelos comerciales es superior al 25 % en todos los casos.
- La relación geométrica de expansión también es del mismo orden de magnitud que el de los modelos considerados aunque con un valor inferior al de la media.

Es decir, el diseño encontrado con el método de las características presenta el inconveniente de tener una longitud excesiva para considerar su aplicación en casos prácticos. Como consecuencia, resulta necesario optimizar el diseño encontrado para intentar reducir la longitud del mismo.

No obstante, y antes de poder optimizar el diseño, resulta necesario estudiar y analizar la geometría del contorno con las ecuaciones de Euler axisimétricas con el objetivo de analizar con más detalle las propiedades del campo fluido en el interior de toda la tobera.

Parte III

Análisis del diseño

Capítulo 10

Dinámica de Fluidos Computacional

Un vez realizado el diseño de la tobera con el método de las características, el siguiente paso corresponde a verificar y analizar estos resultados mediante alguna técnica que permita obtener las propiedades del campo fluido dentro de la tobera. La solución reside en la dinámica de fluidos computacional.

La dinámica de fluidos computacional o CFD es una rama de la dinámica de fluidos que utiliza métodos numéricos y algoritmos para resolver y analizar problemas de fluidos. Las principales características en las que se basa se listan a continuación:

- La discretización del flujo continuo, es decir, las variables que describen el campo fluido (presión, velocidad, temperatura,...) se aproximan en un número finito de valores en puntos específicos del dominio.
- La discretización de las ecuaciones que describen el comportamiento del fluido, es decir:

Ecuaciones integrales/derivadas parciales \Rightarrow Ecuaciones algebraicas

- El sistema de ecuaciones algebraicas obtenido se resuelve y se obtienen los valores de las variables en cada punto del dominio.

Seguidamente se presenta la formulación teórica necesaria para resolver el flujo de la tobera. Primero se plantean las ecuaciones y se describe el método numérico que las resuelve y, seguidamente, se fijan las condiciones de contorno, las condiciones iniciales y el criterio de convergencia necesarios para llegar a una solución.

10.1. Dominio físico

Con el fin de resolver las ecuaciones que definen el comportamiento del fluido, se debe aplicar un esquema numérico que discretice las ecuaciones en función de cómo se divide el dominio. Existen tres tipos de técnicas: diferencias finitas, volúmenes finitos y elementos finitos.

El método de los volúmenes finitos resulta ser el más adecuado para analizar la tobera debido a que las ecuaciones se resuelven directamente sobre el dominio físico, lo que implica que no hay que aplicar ningún tipo de transformación de coordenadas, y, además, las ecuaciones de conservación se conservan automáticamente a pesar de analizar el dominio discretamente como consecuencia de resolver las ecuaciones en su forma integral. Por lo tanto, si se divide el dominio físico mediante una malla formada por volúmenes finitos, hay que plantear y resolver la forma integral de las ecuaciones de Euler.

10.1.1. Mallado del dominio físico

Debido a la simetría axial del problema, resulta más conveniente dividir los volúmenes finitos en anillos de revolución. Además se decide que estos anillos tengan sección cuadrangular debido a que resulta más sencilla de tratar esta geometría. Por otro lado, debido a la gran direccionalidad del flujo en un tobera en la dirección x , resulta muy conveniente realizar un mallado curvilíneo.

El mallado curvilíneo resulta adecuado debido a su sencillez. El punto de partida del mismo es el diseño del perfil de la tobera obtenido en la Sección 9.3, en primer lugar se fija un espaciado uniforme en la dirección del eje x con tantos puntos de control como se deseen. Una vez calculadas todas las coordenadas x de la malla, se obtiene el valor de la altura de la pared de la tobera para cada uno de estos valores. Seguidamente, se calcula para cada tramo vertical fijado por x sus correspondientes coordenadas r en función del número de volúmenes deseados en esta coordenada. El resultado de este mallado resulta en la división de la tobera en pequeños cuadriláteros que siguen, con cierta exactitud, el contorno de la misma.

10.1.2. Geometría de un volumen finito

En la Figura 10.1 se muestra un volumen genérico junto con la notación utilizada, a continuación se definen todos las variables geométricas que son necesarias para poder describir el método numérico utilizado. Para un volumen finito genérico i,j con forma de cuadrilátero se ha definido cada uno de sus lados como B (*bottom*), R (*right*), T (*top*) y L (*left*) y que cada vector que define estos lados se escoje siguiendo la dirección contraria a las agujas del reloj.

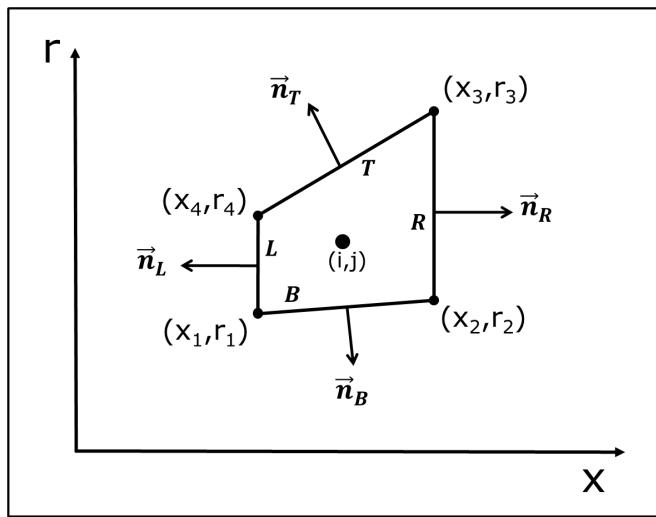


Figura 10.1: Volumen finito genérico y notación utilizada

Las componentes de los vectores de cada cara que forman el contorno del volumen finito, esto es, cada lado que forma el cuadrilátero, son:

$$\begin{aligned} \Delta x_B &= x_2 - x_1 & \Delta x_R &= x_3 - x_2 & \Delta x_T &= x_4 - x_3 & \Delta x_L &= x_1 - x_4 \\ \Delta r_B &= r_2 - r_1 & \Delta r_R &= r_3 - r_2 & \Delta r_T &= r_4 - r_3 & \Delta r_L &= r_1 - r_4 \end{aligned} \quad (10.1)$$

Las longitudes de cada frontera corresponderían a los siguientes valores:

$$\begin{aligned} L_B &= \sqrt{(\Delta x_B)^2 + (\Delta r_B)^2} & L_R &= \sqrt{(\Delta x_R)^2 + (\Delta r_R)^2} \\ L_T &= \sqrt{(\Delta x_T)^2 + (\Delta r_T)^2} & L_L &= \sqrt{(\Delta x_L)^2 + (\Delta r_L)^2} \end{aligned} \quad (10.2)$$

Los vectores unitarios normales de cada cara son:

$$\begin{aligned} n_B &= \left(\frac{\Delta r_B}{L_B}, \frac{-\Delta x_B}{L_B} \right) = (\cos\theta_B, \sin\theta_B) & n_R &= \left(\frac{\Delta r_R}{L_R}, \frac{-\Delta x_R}{L_R} \right) = (\cos\theta_R, \sin\theta_R) \\ n_T &= \left(\frac{\Delta r_T}{L_T}, \frac{-\Delta x_T}{L_T} \right) = (\cos\theta_T, \sin\theta_T) & n_L &= \left(\frac{\Delta r_L}{L_L}, \frac{-\Delta x_L}{L_L} \right) = (\cos\theta_L, \sin\theta_L) \end{aligned} \quad (10.3)$$

donde θ es el ángulo formado por el eje x y el vector normal unitario \mathbf{n} .

El volumen de este elemento es igual a la superficie de un elemento revolucionado sobre el eje axial:

$$V = S \cdot (2\pi r_m) = \frac{1}{2} [(x_3 - x_1)(r_4 - r_1) - (r_3 - r_1)(x_4 - x_2)] (2\pi r_m) \quad (10.4)$$

Finalmente, la localización del centro de cada volumen finito se puede determinar fácilmente con:

$$\begin{aligned} x_{(i,j)} &= \frac{1}{4} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ r_{(i,j)} &= \frac{1}{4} (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \end{aligned} \quad (10.5)$$

10.2. Ecuaciones gobernantes

De acuerdo con el alcance de este documento, se utilizarán las ecuaciones de Euler para analizar la dinámica del flujo que circula a través la tobera. Las ecuaciones de Euler son las que describen el movimiento de un fluido compresible no viscoso y despreciando los fenómenos de conducción de calor. Su expresión corresponde a las ecuaciones de Navier-Stokes cuando las componentes disipativas son despreciables frente a las convectivas, es decir, cuando el número de Reynolds (Re) es muy grande:

$$Re = \frac{\rho VL}{\nu} \gg 1$$

Teniendo en cuenta esta condición, si se hace un análisis de magnitudes en las ecuaciones de Navier-Stokes se llega a las expresiones diferenciales de las ecuaciones de Euler:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (10.6)$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (10.7)$$

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{V}) + \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (10.8)$$

$$\frac{\partial (e)}{\partial t} + \nabla \cdot ((e + P) \mathbf{V}) = 0 \quad (10.9)$$

donde ρ es la densidad del fluido, \mathbf{V} la velocidad total del fluido, u y v las componentes de la velocidad en los ejes x y r respectivamente, P es la presión estática y $e = U + (1/2) \cdot (u^2 + v^2)$ es la energía total por unidad de volumen (U es la energía interna por unidad de masa del fluido).

Debido a la condición de simetría axial del problema, se deben plantear las ecuaciones de Euler en coordenadas cilíndricas pero despreciando los términos que dependan de la coordenada acimutal (φ). La divergencia del vector velocidad en coordenadas cilíndricas es:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \quad (10.10)$$

Desarrollando las ecuaciones de Euler 10.9 utilizando el operador 10.10 y expresándolas vectorialmente se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial r} = S \quad (10.11)$$

donde:

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ u(e + P) \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ v(e + P) \end{pmatrix} \quad S = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ v(e + P) \end{pmatrix} \quad (10.12)$$

En esta forma Q es el vector de estado, F y G son vectores de flujo y S corresponde al término axisimétrico. Notar que debido a la simetría axial del problema el sistema de ecuaciones pasa a ser bidimensional con un término fuente que representa el término axisimétrico.

El sistema de ecuaciones 10.11 es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales e hiperbólicas no-homogéneo. Tradicionalmente se puede describir este sistema como un problema puramente convectivo, correspondiente al sistema homogéneo, más el problema del término fuente, formado por el vector S .

Por otro lado, las ecuaciones 10.11 representan la conservación de la masa, los dos componentes de la conservación del momento y la energía. Hay, por tanto, cuatro ecuaciones y cinco incógnitas (ρ, u, v, e, P). Para cerrar el sistema se necesita una ecuación de estado; la ecuación de estado utilizada es la ley de los gases perfectos y caloríficamente perfectos:

$$P = \rho R_g T = \rho (\gamma - 1) e \quad (10.13)$$

donde R_g corresponde a la constante del gas, es decir, la constante universal de los gases entre la masa molar del gas.

10.3. Resolución del sistema de ecuaciones

Las ecuaciones de Euler axisimétricas 10.11 resultan ser un sistema de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) hiperbólicas no-lineales y no homogéneo.

Para resolver este sistema no homogéneo con métodos numéricos existen 2 aproximaciones diferentes, la primera intenta mantener el acoplamiento existente entre el sistema homogéneo y la solución particular. La otra forma consiste en *separar* el problema convectivo y el del término fuente. Este último método resulta adecuado ya que permite resolver cada subproblema por separado utilizando los métodos numéricos existentes para cada uno de ellos.

La separación del problema en dos subproblemas se puede expresar según [19] de la siguiente forma:

$$\left. \begin{array}{l} \text{EDPs : } Q_t + F(Q)_x + G(Q)_r = 0 \\ \text{CI : } Q(x, y, t^n) = Q^n \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{Q}^{n+1} \quad (10.14)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{EDOs : } Q_t = S(Q) \\ \text{CI : } \bar{Q}^{n+1} \end{array} \right\} \Rightarrow Q^{n+1} \quad (10.15)$$

Este método también se podría resumir como:

$$Q^{n+1} = S(\Delta t)C(\Delta t)Q^n \quad (10.16)$$

donde **S** y **C** representan, respectivamente, los operadores resultantes de resolver por separado el problema del término fuente y el problema convectivo.

Este método resulta muy sencillo de aplicar aunque presenta el inconveniente de poseer una precisión temporal de 1º orden cuando los métodos numéricos utilizados para resolver cada subproblema son al menos de 1º orden. No obstante, se puede llegar a obtener un esquema de 2º orden modificando el primero ligeramente:

$$Q^{n+1} = S(\frac{1}{2}\Delta t)C(\Delta t)S(\frac{1}{2}\Delta t)Q^n \quad (10.17)$$

Y análogamente al caso anterior, para conseguir resolución temporal de 2º orden los métodos para resolver cada subproblema tendrán que ser al menos de segundo orden.

10.4. Subproblema Término Fuente

El problema del término fuente (ecuación 10.15) resulta ser un sistema de EDOs. Existen multitud de formas para solucionar este sistema, desde utilizar expansiones en serie de Taylor hasta evaluar la integral resultante mediante diferentes técnicas. En este caso particular se ha escogido el método de Runge-Kutta de segundo orden o *RK2* [8]:

$$\begin{aligned} \text{RK}_1 &= \Delta t \cdot S(\bar{Q}^{n+1}) \\ \text{RK}_2 &= \Delta t \cdot S(\bar{Q}^{n+1} + \text{RK}_1) \\ Q^{n+1} &= \bar{Q}^{n+1} + \frac{1}{2} [\text{RK}_1 + \text{RK}_2] \end{aligned} \quad (10.18)$$

10.5. Subproblema EDP homogénea

El sistema de EDPs homogénea a resolver corresponde al problema definido por el sistema 10.14 que se vuelve a reproducir a continuación:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial r} = 0$$

Para analizar el dominio con volúmenes finitos hay que plantear la forma integral de las ecuaciones de Euler, por tanto, integrando la expresión anterior en un volumen de control V determinado:

$$\int_V \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial r} \right) d\Omega = 0 \quad (10.19)$$

Separando las componentes temporales de las espaciales, agrupando los términos espaciales y aplicando el Teorema de la Divergencia se obtiene:

$$\int_V \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial r} \right) \right] d\Omega = \int_V \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{H} \right] d\Omega = \int_V \frac{\partial Q}{\partial t} d\Omega + \int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (10.20)$$

donde \mathbf{n} es un vector unitario normal al volumen, S representa el contorno transversal del volumen de control y \mathbf{H} es un vector formado por la combinación de los vectores de flujo en cada dirección del espacio, es decir:

$$\mathbf{H} = F_i + G_j \quad (10.21)$$

Por otro lado, si ahora se multiplica la ecuación por $1/V$ y se extrae la derivada temporal de la integral volumétrica:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \int_V Q d\Omega + \frac{1}{V} \int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\partial}{\partial t} Q + \frac{1}{V} \int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (10.22)$$

donde ahora Q representa el valor del vector de estado en el centro de la celda.

Si ahora se evalúa la integral del flujo sobre el contorno 10.22 discretizándola sobre un volumen de control formado por un número finito de caras, se obtiene que para una celda i, j cualquiera del dominio:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{(i,j)} + \frac{1}{V_{(i,j)}} \sum_k \left(\int_{l_i}^{l_f} \mathbf{H}_{(i,j)}^k \cdot \mathbf{n}_{(i,j)}^k dL_{(i,j)}^k \right) = 0 \quad (10.23)$$

donde el superíndice k corresponde a cada uno de los lados en los cuales está formado cada volumen finito de la malla y dL es el diferencial de longitud del lado k .

La ecuación anterior también se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{(i,j)} = \mathbf{Res}_{(i,j)} \quad (10.24)$$

donde $\mathbf{Res}_{(i,j)}$ es el llamado término residual de la celda i, j y corresponde a la suma de todos los flujos convectivos que atraviesan todas las caras de la celda.

10.5.1. Vector de estado en cada frontera de la celda

Para determinar el flujo entre celdas H_k se necesitan determinar los estados "izquierdo" (QL) y "derecho" (QR) a cada lado de la frontera de la celda. Como ya se ha dicho anteriormente, al utilizar volúmenes finitos la variable Q que se obtiene corresponde a las variables en el centro de la celda pero, en cambio, para determinar H_k se necesita Q en cada extremo de la celda, para ello se necesita aplicar algún tipo de aproximación.

La aproximación más evidente es considerar que el valor del vector de estado en cada frontera de la celda corresponde al valor del vector de estado en el centro celda, pero este método sólo consigue una resolución espacial de 1r orden.

Para conseguir mayor exactitud se utiliza un método de interpolación para conseguir los valores del vector de estado en la frontera que permite obtener una resolución espacial de 2o orden. El método de interpolación utilizado es el esquema MUSCL, que significa *Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws*, para geometrías en 2D. Este esquema, presentado por Braam van Leer en 1979 [24], utiliza una interpolación basada en un polinomio definido a tro-

zos para determinar Q en cada frontera:

$$Q_R = Q + \frac{1}{2} \Psi(R) \Delta H^- \quad Q_T = Q + \frac{1}{2} \Psi(S) \Delta V^- \quad (10.25)$$

$$Q_L = Q - \frac{1}{2} \Psi(R) \Delta H^+ \quad Q_B = Q - \frac{1}{2} \Psi(S) \Delta V^+ \quad (10.26)$$

donde:

$$\Delta H^- = Q_{i,j} - Q_{i-1,j} \quad \Delta V^- = Q_{i,j} - Q_{i,j-1} \quad (10.27)$$

$$\Delta H^+ = Q_{i+1,j} - Q_{i,j} \quad \Delta V^+ = Q_{i,j+1} - Q_{i,j} \quad (10.28)$$

$$R = \frac{\Delta H^+}{\Delta H^-} \quad S = \frac{\Delta V^+}{\Delta V^-} \quad (10.29)$$

Por otro lado, la función $\Psi(R)$ que aparece en el esquema MUSCL es la llamada *función limitadora* que soluciona los problemas oscilatorios del método MUSCL original. Si se selecciona la siguiente función:

$$\Psi(R) = \frac{R^2 + R}{R^2 + 1} \quad (10.30)$$

Se obtiene el limitador Van Albada [23]. No obstante, existe otra versión de este limitador [23] que incorpora un parámetro adicional ε que mejora su rendimiento. La variable ε es un parámetro muy pequeño ($\approx O(\Delta x^3)$) que impide que se den indeterminaciones en los cálculos. Estas indeterminaciones se darían en las Ecuaciones 10.29, es decir, en las regiones donde los gradientes son nulos.

Así pues el esquema MUSCL con el limitador van Albada modificado establece que los valores del vector de estado en cada frontera del volumen finito se puede determinar con las siguientes relaciones [22, 25]:

$$Q_R = Q + \frac{1}{2} \frac{\Delta H^- ((\Delta H^+)^2 + \varepsilon) + \Delta H^+ ((\Delta H^-)^2 + \varepsilon)}{(\Delta H^+)^2 + (\Delta H^-)^2 + 2\varepsilon} \quad (10.31a)$$

$$Q_L = Q - \frac{1}{2} \frac{\Delta H^- ((\Delta H^+)^2 + \varepsilon) + \Delta H^+ ((\Delta H^-)^2 + \varepsilon)}{(\Delta H^+)^2 + (\Delta H^-)^2 + 2\varepsilon} \quad (10.31b)$$

$$Q_T = Q + \frac{1}{2} \frac{\Delta V^- ((\Delta V^+)^2 + \varepsilon) + \Delta V^+ ((\Delta V^-)^2 + \varepsilon)}{(\Delta V^+)^2 + (\Delta V^-)^2 + 2\varepsilon} \quad (10.31c)$$

$$Q_B = Q - \frac{1}{2} \frac{\Delta V^- ((\Delta V^+)^2 + \varepsilon) + \Delta V^+ ((\Delta V^-)^2 + \varepsilon)}{(\Delta V^+)^2 + (\Delta V^-)^2 + 2\varepsilon} \quad (10.31d)$$

Por lo tanto, siguiendo el esquema de la Figura 10.2, los vectores de estado en cada frontera de un volumen finito i, j cualquiera se escogen como:

$$\text{Cara inferior : } QL_B = Q_{B(i,j)} \quad QR_B = Q_{T(i,j-1)} \quad (10.32)$$

$$\text{Cara derecha : } QL_R = Q_{R(i,j)} \quad QR_R = Q_{L(i+1,j)} \quad (10.33)$$

$$\text{Cara superior : } QL_T = Q_{T(i,j)} \quad QR_T = Q_{B(i,j+1)} \quad (10.34)$$

$$\text{Cara izquierda : } QL_L = Q_{L(i,j)} \quad QR_L = Q_{R(i-1,j)} \quad (10.35)$$

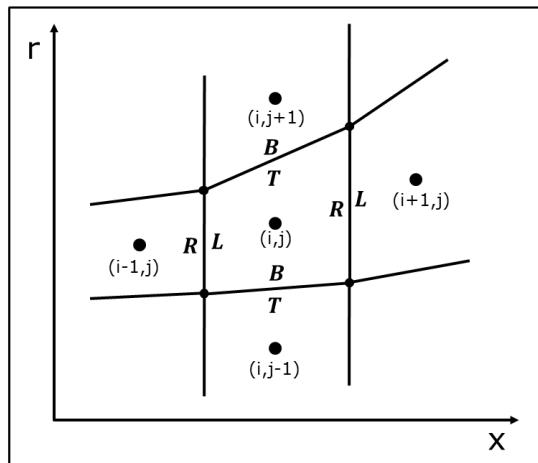


Figura 10.2: Vector de estado en cada frontera de un volumen finito genérico

10.5.2. Invariancia rotacional

El término residual descrito con anterioridad en 10.24 es:

$$Res_{(i,j)} = -\frac{1}{V_{(i,j)}} \sum_k \left(\int_{l_i}^{l_f} \mathbf{H}_{(i,j)}^k \cdot \mathbf{n}_{(i,j)}^k \, dL_{(i,j)}^k \right)$$

En lo que sigue los subíndices i, j se omitirán para que las fórmulas sean más comprensibles.

En este punto resulta útil presentar la propiedad de *invariancia rotacional* de las ecuaciones de Euler [19]. Esta propiedad establece lo siguiente:

$$\mathbf{H}_k \cdot \mathbf{n}_k = [\cos \theta_k \cdot F_k(Q) + \sin \theta_k \cdot G_k(Q)] = \Gamma_k^{-1} \cdot F_k(\Gamma_k \cdot Q) = \Gamma_k^{-1} \cdot F_k(\hat{Q}) = \Gamma_k^{-1} \cdot \hat{F}_k \quad (10.36)$$

es decir, el producto del vector de flujo por el vector normal unitario en la cara k , $\mathbf{H}_k \cdot \mathbf{n}_k$, es igual al producto de la matriz inversa del cambio de base por el vector de flujo rotado en la nueva base. En este caso, T_k es la matriz de rotación de las

ecuaciones de Euler y Γ_k^{-1} su inversa:

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_k & -\sin \theta_k & 0 \\ 0 & \sin \theta_k & \cos \theta_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.37)$$

Nótese que $\hat{Q} = \Gamma_k Q$ corresponde al vector de variables rotado de forma que ahora está alineado en la nueva base donde n_{xK} corresponde a la dirección normal a la frontera y n_{yK} la dirección tangencial.

Reescribiendo el término del residuo (10.36) pero ahora utilizando la propiedad de invariancia rotacional (10.36), el sistema de ecuaciones se transforma en:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q + \frac{1}{V} \sum_k (\Gamma_k^{-1} \cdot \hat{F}_k \cdot L_k) = 0 \quad (10.38)$$

La ventaja de utilizar esta propiedad yace en el hecho de que a la hora de resolver el flujo entre caras el vector normal de la frontera solo tiene una componente y el problema resulta más sencillo de resolver.

10.5.3. Flujo convectivo entre celdas, método HLLC

El flujo convectivo a través de una cara k se puede calcular resolviendo el problema de Riemann (exacto o aproximado) en cada frontera del volumen finito utilizando el método del flujo numérico entre celdas de Gudonov [19]. Es decir, siguiendo la notación utilizada hasta ahora:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{x}} &= 0 \\ \hat{Q}(\hat{x}, 0) &= \begin{cases} \hat{Q}_L & \text{si } \hat{x} < 0 \\ \hat{Q}_R & \text{si } \hat{x} > 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (10.39)$$

Tal y como se ha comentado anteriormente, para determinar este flujo se utilizan los vectores de estado “izquierdo” (\hat{Q}_L) y “derecho” (\hat{Q}_R) de cada lado de la frontera dados por el método MUSCL y expresados en la nueva base de rotación a través de la aplicación de la invariancia rotacional.

Existen varios métodos para resolver el problema de Riemann: Roe (1981), Osher (1981), HLL (1983) con sus variantes, entre otros. De entre los métodos propuestos, el método HLL modificado por Toro o *HLLC* resulta especialmente

atractivo debido a su robustez, eficacia y sencillez [20, 21]. El método HLLC divide el flujo en cuatro estados constantes separados por tres ondas. Estas ondas corresponden a una débil con velocidad S_L , otra fuerte S_R y otra intermedia S_* . Esta última onda representa la mejora respecto al método HLL original ya que tiene en cuenta superficies de discontinuidad débiles.

En lo que sigue se detalla la formulación del método HLLC sin entrar en detalles en cuanto a su teoría o justificación teórica. Si se quiere ahondar este método, se remite el lector a la referencia [19].

En primer lugar, resulta necesario estimar el valor de la presión en la región intermedia a través de un algoritmo de cálculo. En este caso se utiliza el PVRS [18]:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2} (\rho_R + \rho_L) \quad (10.40)$$

$$\bar{a} = \frac{1}{2} (a_R + a_L) \quad (10.41)$$

$$p_{PVRS} = \frac{1}{2} (p_R + p_L) - \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{a} (u_R + u_L) \quad (10.42)$$

$$p_* = \max(0, p_{PVRS}) \quad (10.43)$$

Una vez estimada esta presión, las velocidades de las ondas que separan cada estado se pueden calcular con la siguiente aproximación de Toro:

$$S_L = u_L - a_L q_L, \quad S_R = u_R - a_R q_R \quad (10.44)$$

donde, simplificando la notación con el subíndice K que se debe sustituir para calcular cada estado, el derecho K = R y el izquierdo, K = L:

$$q_K = \begin{cases} 1 & \text{si } p_* \leq p_K \\ \left[1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} (p_*/p_K - 1) \right]^{1/2} & \text{si } p_* > p_K \end{cases} \quad (10.45)$$

Luego la velocidad de la onda intermedia se obtiene como la relación:

$$S_* = \frac{p_R - p_L + \rho_L u_L (S_L - u_L) - \rho_R u_R (S_R - u_R)}{\rho_L (S_L - u_L) - \rho_R (S_R - u_R)} \quad (10.46)$$

Entonces, se pueden determinar los vectores de estado en cada estado intermedio:

$$Q_{*K} = \rho_K \left(\frac{S_K - u_K}{S_K - S_*} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ S_* \\ v_K \\ \frac{E_K}{\rho_K} + (S_* - u_K) \left[S_* + \frac{p_K}{\rho_K (S_K - u_K)} \right] \end{bmatrix} \quad (10.47)$$

Con lo cual los flujos en los estados intermedios son:

$$F_{*K} = F_K + S_K (Q_{*K} - Q_K) \quad (10.48)$$

Finalmente, el flujo convectivo en la frontera se obtiene de acuerdo a la siguiente relación:

$$F^{HLLC} = \begin{cases} F_L & \text{si } 0 \leq S_L \\ F_{*L} & \text{si } S_L \leq 0 \leq S_* \\ F_{*R} & \text{si } S_* \leq 0 \leq S_R \\ F_R & \text{si } 0 \geq S_R \end{cases} \quad (10.49)$$

10.6. Discretización temporal

El avance temporal de la Ecuación 10.38 también se puede realizar, al igual que en la Sección 10.4, con un esquema temporal. Igual que en el subproblema del término fuente, se puede utilizar el esquema Runge-Kutta de 2º orden (Ecuación 10.18).

La variable Δt que aparece en el esquema de resolución corresponde al incremento de tiempo que se debe aplicar en cada iteración para llegar a la solución estacionaria. El valor que se escoja para esta variable resulta crítico ya que es muy pequeño, el tiempo necesario para llegar a la convergencia aumenta. En cambio, si el valor de Δt es demasiado grande, generalmente esto lleva a que los resultados no converjan.

Para determinar esta variables, se sigue la condición de convergencia para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de Courant-Friedrichs-Lowy (CFL) [4], que postula que el intervalo de tiempo es:

$$\Delta t_{(i,j)} = CFL \frac{\Delta x_{(i,j)}}{u_{(i,j)} + a_{(i,j)}} \quad (10.50)$$

donde CFL es el número de Courant, u la velocidad horizontal y Δx corresponde a la amplitud horizontal de la celda i, j .

El número de Courant tiene que estar entre 0 y 1. Cuanto mayor se su valor, la convergencia se acelera pero por otro lado el riesgo de divergencia aumenta. En cambio, cuanto más se aproxime a 0, el código es más estable pero el tiempo necesario para la convergencia aumenta. Por tanto, habrá que buscar el valor límite

para el cual el tiempo de cálculo se reduce al mínimo consiguiendo la convergencia de los resultados.

Como implica la ecuación 10.50, cada volumen finito de la malla tiene su propio Δt . En este punto se puede elegir dos estrategias para avanzar temporalmente las ecuaciones. La primera consiste en utilizar un tiempo "local" en cada celda, es decir, cada celda avanzará según su propio Δt provocando que las soluciones transitorias que se obtengan carezcan de sentido físico alguno. En la segunda estrategia, en cambio, se utiliza un tiempo "global" que es igual al menor de todos tiempos obtenidos en cada iteración y permite obtener, si fuese necesario, soluciones transitorias.

En este estudio, se aplica el concepto de tiempo local debido a que solo interesan las soluciones estacionarias y esta estrategia permite conseguir la solución estacionaria con un número menor de iteraciones y, por consiguiente, con más rapidez.

10.7. Condiciones de contorno

10.7.1. Pared de la tobera

Una característica muy importante de las ecuaciones de Euler es que proceden de una reducción de las Ecuaciones de Navier-Stokes despreciando los términos provenientes de los términos disipativos. Por consiguiente, estas ecuaciones no podrán cumplir con todas las condiciones de contorno naturales. En particular no cumplen con la condición de no deslizamiento en las superficies de contacto con sólidos, es decir, ahora no tiene sentido imponer que la velocidad del flujo sea nula en el punto de contacto con la pared. Además, como la pared no es porosa, no puede haber flujo saliente o entrante a través de la misma.

Debido a estas condiciones, la velocidad del flujo en la pared es finita y el vector de velocidad inmediatamente adyacente a la pared debe ser tangente a ella. Matemáticamente esta condición se puede expresar como:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (10.51)$$

Es decir, la ecuación 10.51 equivale a afirmar que la componente perpendicular de la velocidad respecto al punto de contacto con la pared debe ser nula. La Figura 10.3 muestra gráficamente esta condición. O lo que es lo mismo, los flujos a través

de las caras de la pared desaparecen excepto la contribución de la presión estática en el flujo de cantidad de movimiento.

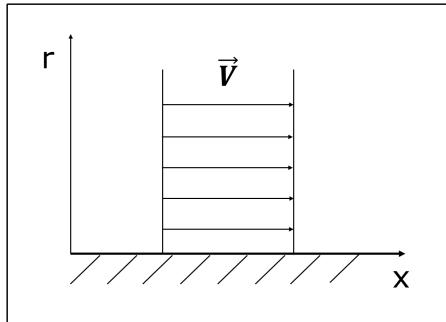


Figura 10.3: Condición de contorno en la pared

Esta es la única condición de contorno que hay que aplicar en la zona de contacto con la pared, las magnitudes del flujo restantes en este punto vendrán dadas por la solución del sistema de ecuaciones.

10.7.2. Eje de simetría axial

Debido a la geometría del problema existe un eje de simetría axial que corresponde con el eje x . La condición de simetría establece que los flujos convectivos deben ser nulos a través de este eje. A causa de que el eje de simetría coincide con el eje x físico, la condición de simetría se puede establecer fácilmente como:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0 \Rightarrow v = 0 \quad (10.52)$$

Y, una vez más, el valor del resto de variables físicas en el eje de simetría vendrán dadas por la solución del propio sistema de ecuaciones.

10.8. Criterio de convergencia y condiciones iniciales

Los cálculos se inician imponiendo las condiciones iniciales del flujo (ver Capítulo 7) en todo el dominio, es decir, en todos los volúmenes finitos que forman la malla. Seguidamente se ejecuta el método numérico antes planteado calculando para cada iteración el incremento de tiempo Δt con el objetivo de llegar hasta la solución estacionaria.

Como criterio de convergencia se utiliza el parámetro L_2 que no es mas que la norma de la diferencia entre Q en el estado actual ($n + 1$) y el anterior (n), es

decir:

$$L_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M (\delta Q_{i,j,m})^2}{I \cdot J \cdot M}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M (Q_{i,j,m}^{n+1} - Q_{i,j,m}^n)^2}{I \cdot J \cdot M}} \quad (10.53)$$

donde i, j corresponden al número de celdas de la malla y m la dimensión que tiene el vector de estado Q .

En este caso se asumirá que se ha llegado a la solución estacionaria cuando se cumpla que $L_2 \leq 0,1$.

Capítulo 11

Resultados del análisis con CFD

La formulación teórica presentada en el Capítulo 10.8 correspondiente al método numérico escogido para resolver las ecuaciones que determinan la dinámica del fluido se ha implementado en un código numérico que permite obtener todas las propiedades del campo fluido dentro de la tobera. El Anexo D contiene una descripción de las rutinas y subrutinas creadas y también diagramas de flujo para aclarar el funcionamiento de las mismas.

Los datos de entrada del programa corresponden a las condiciones de diseño previamente establecidas junto con la geometría del contorno de la pared obtenida mediante el método de las características. Además, también es necesario determinar el valor del *CFL* con el cual se debe avanzar en el tiempo para llegar hasta la solución estacionaria. Después de correr el programa variando este parámetro, se escoje el valor seguro que permite la convergencia de resultados, $cfl = 0,2$.

11.1. Tamaño de la malla

La malla se crea con un generador de malla curvilínea utilizando como datos de entrada los valores de las coordenadas de la pared de la tobera. En la figura 11.1 se muestra una malla de ejemplo.

Como ya se ha comentado anteriormente, estos cuadriláteros representan la sección de un anillo de revolución. No obstante, la simetría de revolución permite afrontar el problema como si se tratase como uno bidimensional con un término fuente geométrico que corresponde a la simetría axial. Así pues, se crea una malla estructurada formada por elementos en forma de cuadriláteros.

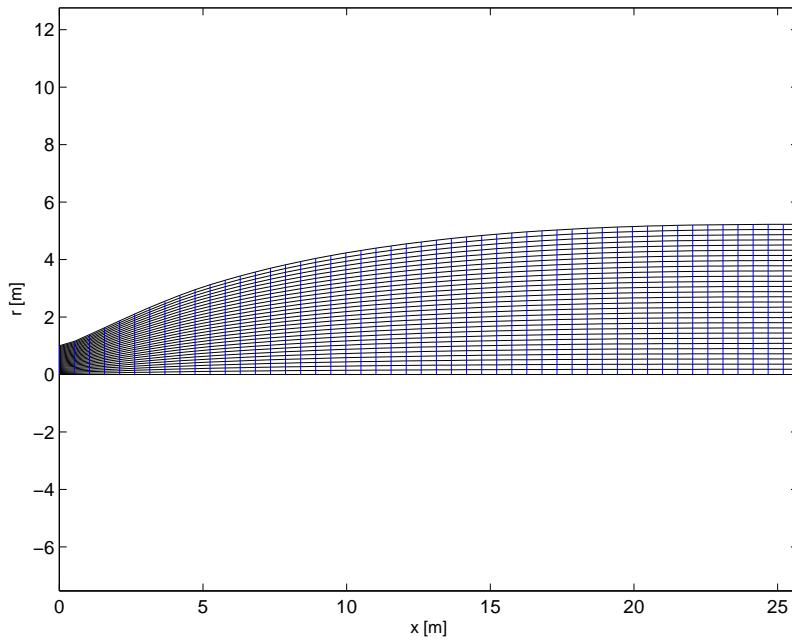


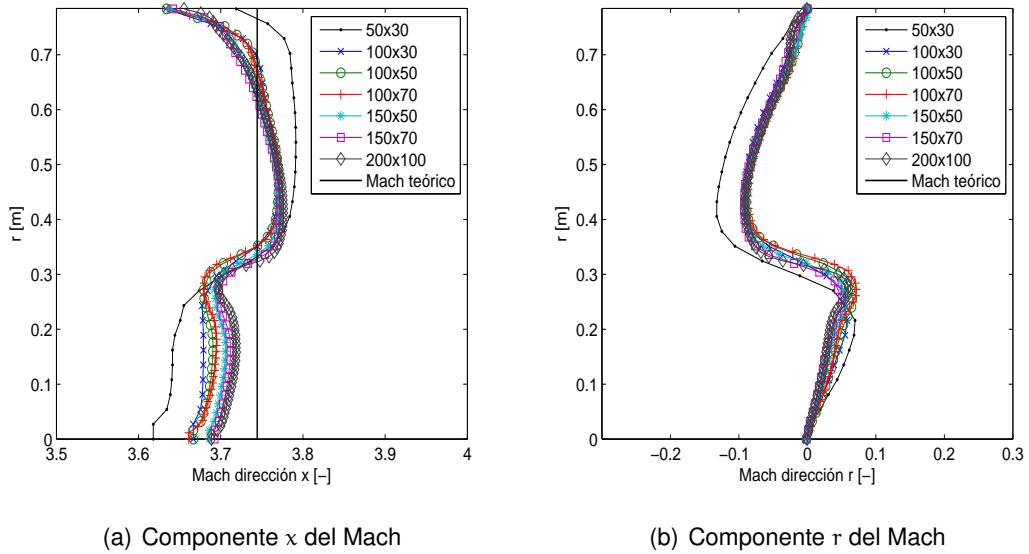
Figura 11.1: A modo ilustrativo, malla formada por 50x30 elementos

Antes de proceder a obtener resultados con el código CFD es necesario determinar el tamaño de la malla, es decir, el número de elementos que la componen. A la hora de decidir sobre este tema hay que buscar un compromiso entre la precisión de los resultados, cuantos más elementos mejor, y el coste computacional en tiempo y recursos necesario para lograr que los resultados converjan.

Por todo lo anterior se ha realizado un pequeño análisis de resultados en función del número de nodos presentes en la malla. Las Figuras 11.2(a) y 11.2(b) muestran la influencia del tamaño de la malla en el Mach en cada dirección en la sección de salida. Observando los resultados se aprecia claramente que cuanto más elementos tenga la malla mejores resultados se obtienen. No obstante, se considera que una malla de 150x50 resulta la más indicada ya que los resultados son suficientemente precisos y el tiempo de cálculo no resulta tan excesivo como en los casos donde la malla tiene más elementos.

11.2. Resultados de la simulación

Habiendo fijado una malla de 150x50 elementos como la más idónea, a continuación se presentan los resultados obtenidos en la simulación CFD del contorno de la tobera diseñado con el método de las características.


 (a) Componente x del Mach

 (b) Componente r del Mach

Figura 11.2: Influencia del mallado en la sección de salida

En la Figura 11.3 se puede observar la evolución del número de Mach a lo largo de la tobera. Como era de esperar, el fluido va aumentando su número de Mach desde la unidad en la garganta hasta un Mach de salida muy próximo al de diseño. También se puede apreciar que existe una región, situada aproximadamente en la mitad de la longitud de la tobera, en la cual existe un Mach superior al de diseño alrededor de $M = 4$ para luego disminuir paulatinamente hasta llegar al Mach de diseño en la salida, este fenómeno probablemente sea debido a la axisimetría del problema.

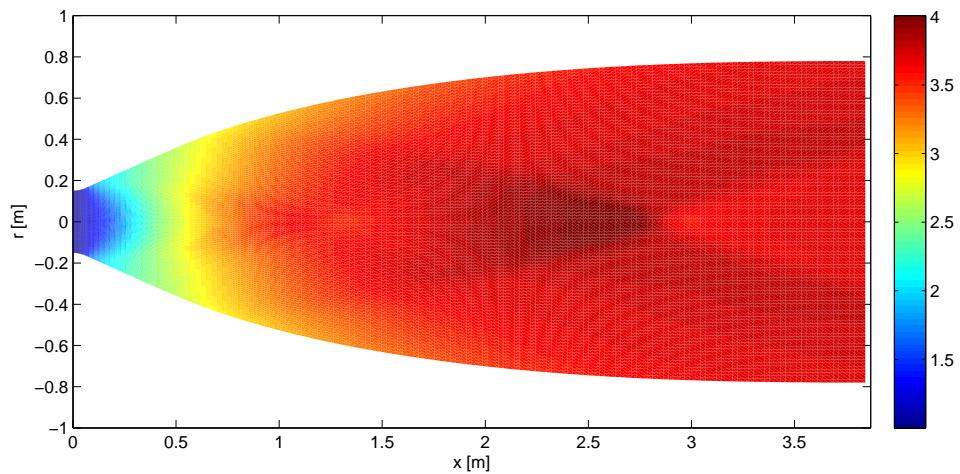


Figura 11.3: Número de Mach en cada volumen de la malla

Las Figuras 11.4, 11.5 y 11.6 muestran, respectivamente, la distribución de pre-

sión, temperatura y velocidad en la tobera. En estas figuras se ve claramente que tanto la temperatura y la presión disminuyen notablemente, indicando que el gas se expande, mientras que la velocidad aumenta, es decir, el fluido se acelera. Todos estos resultados obtenidos concuerdan con la teoría del flujo supersónico que circula por un conducto de sección divergente (ver Anexo A).

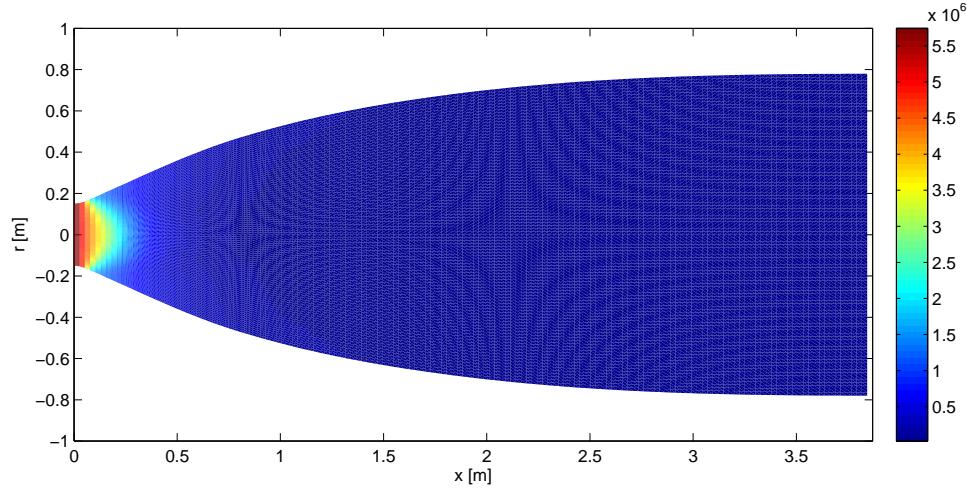


Figura 11.4: Presión estática en cada volumen de la malla

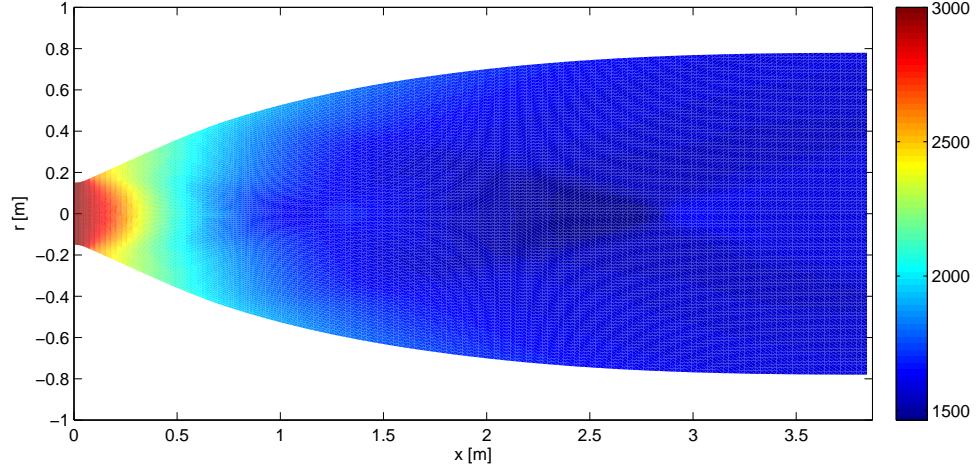


Figura 11.5: Temperatura estática en cada volumen de la malla

Si ahora se estudia con más detalle la sección de salida, se obtienen las Figuras 11.7 y 11.8. En la primera, se muestra el número de Mach que se mantiene, aunque con variaciones, alrededor de el de diseño. En cambio, en la segunda figura (11.8), aparece el ángulo del flujo saliente donde se observa que no es del todo paralelo a la dirección del eje x. Esto sería lo ideal para obtener el mayor rendimiento de la tobera (ver Anexo B), no obstante, existen algunos puntos donde el flujo presenta una pequeña desviación de como máximo $\pm 1^\circ$, lo cual no son valores críticos y se

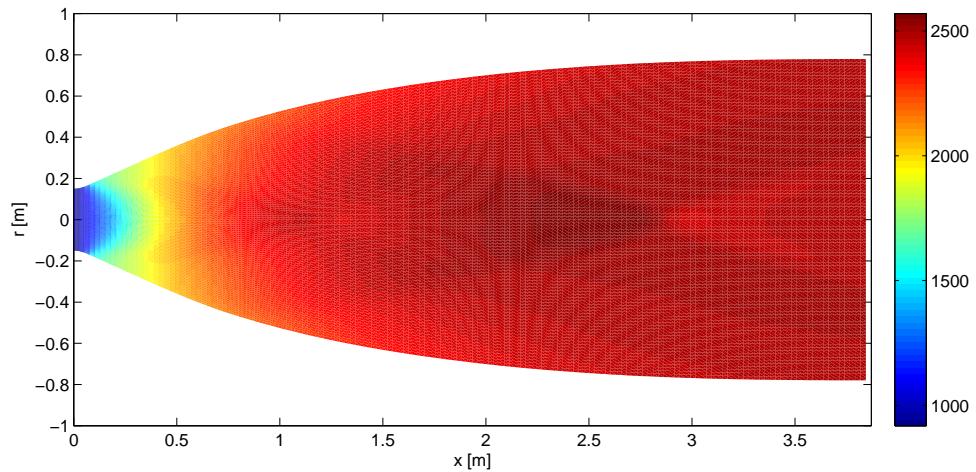


Figura 11.6: Velocidad total en cada volumen de la malla

pueden atribuir a la simetría axial del problema.

En general se puede afirmar que se han obtenido los resultados esperados. No obstante, las condiciones en la salida varían notablemente en la dirección r , este hecho puede deberse a la simetría axial del problema ya que, de acuerdo con el término S de la Ecuación 10.12 correspondiente al término axisimétrico, éste es inversamente proporcional a la coordenada r de ahí que los resultados varíen notablemente en esta dirección. Además el CFD también introduce errores debido a la discretización y método numérico utilizado para resolver el problema.

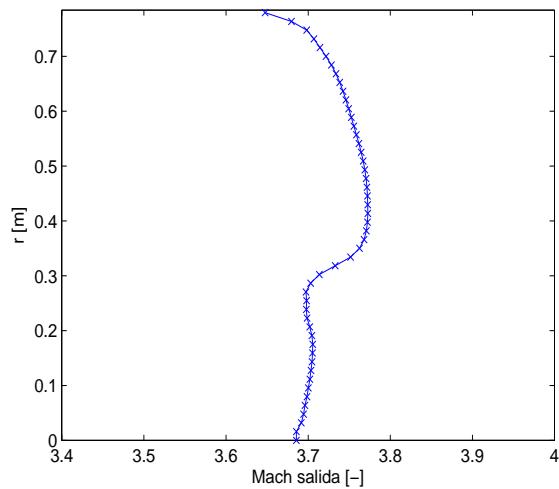


Figura 11.7: Mach total en la sección de salida

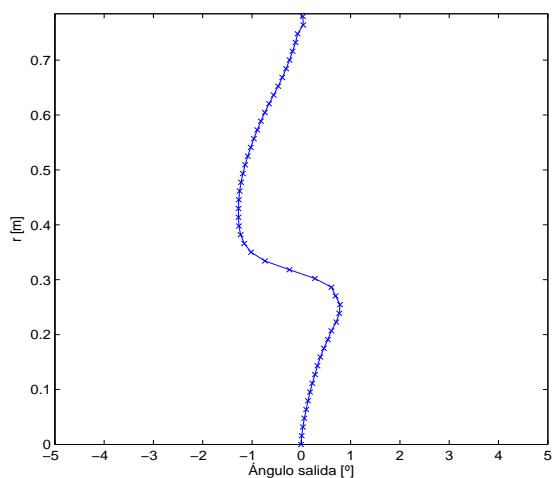


Figura 11.8: Ángulo del flujo en la sección de salida

Parte IV

Optimización de la tobera

Capítulo 12

Optimización del diseño

En el Capítulo 9.3 se ha comprobado que el método de las características produce diseños de toberas con longitudes excesivas comparadas con las que se diseñan actualmente y, posteriormente, en el Capítulo 11.2 se ha comprobado la validez del mismo. En el presente capítulo se pretende ir un paso más allá, esto es, desarrollar un método que permita optimizar el diseño mientras se intentan mantener sus prestaciones.

La característica básica que se pretende optimizar es la disminución de la longitud de la tobera. No obstante, hay que tener en cuenta que si se disminuye la longitud de la tobera el flujo a la salida ya no será uniforme y tampoco tendrá el Mach de salida deseado. Por esta razón es necesario considerar en el momento de optimizar estos tres parámetros (longitud, velocidad y dirección del flujo en la sección de salida) al mismo tiempo. En resumen, se tendrá que resolver un problema de optimización multiobjetivo.

Los algoritmos evolutivos y los métodos basados en gradientes son las estrategias más utilizadas para resolver problemas de optimización. Los segundos son muy efectivos cuando solo hay un objetivo a optimizar, en cambio, si hay varias funciones a optimizar se usan los algoritmos evolutivos. Forman parte de estos últimos las estrategias evolutivas y los Algoritmos Genéticos (GAs), se caracterizan por ser robustos, flexibles y fáciles de implementar ya que solo requieren la evaluación de las funciones objetivo para un conjunto dado de variables de diseño.

Los Algoritmos Genéticos permiten encontrar los llamados frentes de Pareto que son el conjunto de soluciones que maximizan o minimizan las funciones objetivo. Entre la variedad de algoritmos genéticos existentes, se escoge el NSGA-II

("Non-dominated Sort Genetic Algorithm II").

El NSGA-II es un algoritmo genético multiobjetivo elitista y computacionalmente rápido que se basa en la ordenación no dominante de la población [6]. Los datos de entrada del mismo corresponden a diferentes geometrías del contorno, el programa de resolución es el código CFD creado anteriormente que permite obtener para cada diseño el valor de las funciones a optimizar y los datos de salida corresponden a los miembros de la población que consiguen obtener los mejores resultados.

12.1. Parámetros de diseño

Las variables de diseño de entrada son los parámetros que determinan la forma de la tobera. En este caso se parte de los resultados del diseño obtenido en el método de las características para parametrizar la geometría de la pared.

La forma de la pared de la tobera de la zona divergente se aproxima con 'splines' de tercer grado, por tanto, habrá 4 variables de diseño por cada tramo. La Ecuación 12.1 define una spline de tercer grado que tiene su punto inicial en x_{ni} :

$$r_i(x) = A_{i,1} + A_{i,2}(x - x_{ni}) + A_{i,3}(x - x_{ni})^2 + A_{i,4}(x - x_{ni})^3 \quad (12.1)$$

donde $A_{i,1} \dots A_{i,4}$ son las variables de diseño del tramo i -ésimo.

Los puntos iniciales y finales de cada tramo son los nudos, los nudos son coordenadas x en las que se divide la geometría en cuestión y que tienen un valor fijo. Por ejemplo, para una parametrización con dos tramos, se tendrán los nudos: $x_n = [x_{n1} \ x_{n2} \ x_{n3}]$.

Los coeficientes A_{nm} se pueden calcular a través de las siguientes relaciones [2]:

$$\begin{cases} A_{i,1} = r_a \\ A_{i,2} = m_a \\ A_{i,3} = \frac{[3(r_b - r_a)/(x_b - x_a)] - 2m_a - m_b}{(x_b - x_a)} \\ A_{i,4} = \frac{m_a + m_b - [2(r_b - r_a)/(x_b - x_a)]}{(x_b - x_a)^2} \end{cases}$$

donde x y r son las coordenadas y m la pendiente en un punto determinado y los subíndices a y b indican, respectivamente, el tramo inicial y final de la spline, es decir, el nudo inicial y final.

Otro factor obvio a considerar es que, independientemente del número de splines que formen el contorno, se deberán cumplir las condiciones de continuidad y

derivabilidad en cada nudo de unión entre dos curvas para que no existan saltos y el contorno resultante sea continuo y suave.

A modo de ejemplo, si el nudo x_{ab} representa el punto final de la curva r_a y el inicio de la curva r_b las condiciones que deberán cumplir cada una son:

$$\text{Continuidad: } r_a(x=x_{ab}) = r_b(x=x_{ab}) \quad (12.2)$$

$$\text{Derivabilidad: } \frac{dr_a}{dx} \Big|_{(x=x_{ab})} = \frac{dr_b}{dx} \Big|_{(x=x_{ab})} \quad (12.3)$$

Para satisfacer estas condiciones se obtiene que tanto $A_{b,1}$ como $A_{b,2}$ quedan fijadas por la ecuación de la spline r_a . Por tanto y exceptuando a la spline que parte del primer nudo, el resto de las curvas tendrá 2 de sus 4 coeficientes fijados para asegurar la continuidad y derivabilidad del contorno, lo que provoca que el número de parámetros de diseño se vea reducido.

12.2. Funciones a optimizar

Tal y como se ha mencionado al principio de este capítulo, se pretende minimizar la longitud de la tobera pero sin penalizar en exceso la velocidad y dirección del flujo en la sección de salida de la tobera. La idea es cuantificar estos objetivos de alguna forma, por eso se utiliza el error cuadrático medio aunque teniendo en cuenta que los resultados se presentan de forma discreta. Considerando esta última característica, las Ecuaciones 12.4 a 12.6 son las que el algoritmo deberá minimizar.

$$\Phi_L = \frac{R_t}{R_o} L_{tob} \quad (12.4)$$

$$\Phi_M = \sqrt{\frac{1}{q} \sum_{i=1}^q (M_i - M_d)^2} \quad (12.5)$$

$$\Phi_\theta = \sqrt{\frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \theta_i^2} \quad (12.6)$$

donde R_t es el radio de la garganta obtenido en el diseño, R_o corresponde al radio obtenido después de optimizar, L_{tob} es la longitud de la tobera, M_i es el número de Mach total en la celda i , M_d es el Mach de diseño y θ_i la dirección del flujo en la celda i considerando que la sección de salida de la tobera está discretizada con q celdas.

12.3. Descripción del Algoritmo NSGA-II

El algoritmo parte de una población inicial de individuos, para obtener esta población se generan aleatoriamente las variables de diseño de cada individuo partiendo de los resultados encontrados en el diseño con el método de las características. Una vez obtenida la población inicial se evalúa cada individuo para encontrar el valor de cada una de las tres funciones objetivo establecidas (Φ_L , Φ_M , Φ_θ).

Seguidamente, se ordena la población siguiendo el concepto de no dominancia en rangos diferentes. Así, el primer rango dominará al resto de la población, el segundo será dominado por los individuos del primer frente y, al mismo tiempo, dominará al resto de individuos y así hasta clasificar toda la población en rangos diferentes.

Además del rango, se calcula un parámetro extra para cada individuo de la población, esta es la distancia de apiñamiento o “crowding distance”. Esta variable es una medida de lo cerca que está un individuo con respecto a los demás, es decir, cuanto mayor sea su media se conseguirá un población con mayor diversidad.

El siguiente paso corresponde a la selección de los padres que generarán los descendientes. Esta selección se realiza siguiendo un selección binaria basada en el rango y la distancia de apiñamiento, es decir, se comparan dos individuos de la población escogidos al azar y se asigna como padre al que tenga un rango menor (mejores resultados) y, en el caso de que sean iguales, se escoge aquel con mayor distancia de apiñamiento para asegurar diversidad de resultados. Una vez seleccionados los padres se crea su descendencia utilizando mutaciones polinomiales y cruces genéticos.

Acto seguido se une la población actual y su descendencia y se ordenan, de nuevo, siguiendo los dos criterios descritos anteriormente, no dominancia y distancia de apiñamiento. Luego se seleccionan los mejores individuos, de la misma forma que se hace para seleccionar los padres, hasta que se llega al tamaño de población fijado. El resto de la población se desecha consiguiendo, así, que el algoritmo sea elitista.

En este punto, se obtiene la segunda generación de individuos y con ella se repite el proceso sucesivamente hasta llegar el número de generaciones fijado. El esquema de la Figura 12.1 muestra un resumen del proceso que sigue este algoritmo durante una generación.

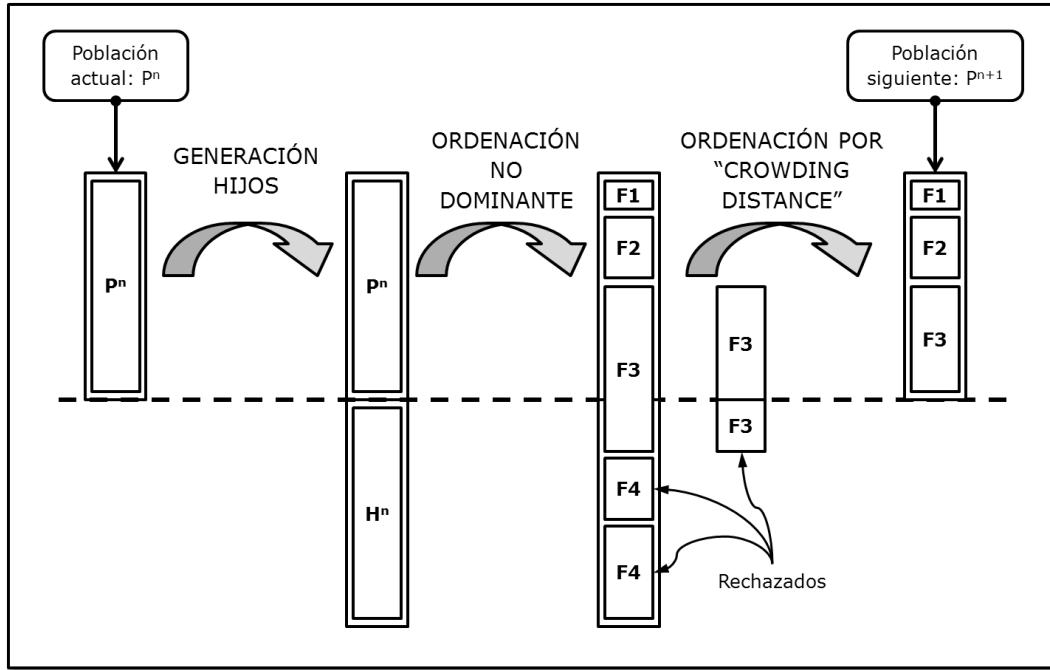


Figura 12.1: Esquema del algoritmo NSGA-II

12.4. Desarrollo del algoritmo

En la sección anterior se ha realizado una explicación del procedimiento que sigue el algoritmo NSGA-II pero sin entrar en detalle sobre cómo obtener las diferentes variables del problema. Seguidamente se describen con detalle cada uno de los conceptos que utiliza este algoritmo.

12.4.1. Ordenación no dominante

La dominancia es un concepto matemático descrito por Steuer (1986) que postula lo siguiente [5]:

Una solución x_1 se considera que domina otra solución x_2 cuando las siguientes condiciones se cumplen:

- La solución x_1 no es peor que x_2 en todos los objetivos.
- La solución x_1 es estrictamente mejor que x_2 en, como mínimo, uno de los objetivos.

En el caso que una de las dos condiciones sea violada, se dice que la solución x_1 no domina a x_2 . En el caso que x_1 domine a x_2 también se puede decir que x_2 está dominada por x_1 .

Siguiendo este concepto, se puede organizar la población de una generación en diferentes niveles de no dominancia o frentes. Primero se comparan los resultados de las funciones objetivo de un candidato con el resto de la población. Todos los miembros que resulten no estar dominados por el resto de la población se colocan en el primer frente.

El siguiente paso consiste en descartar los que son del primer frente y volver a repetir el proceso para llenar el segundo frente. De nuevo, se descartan los que ya tienen asignado un frente y se repite la operación hasta que todos los candidatos hayan estado clasificados en diferentes frentes.

Para esclarecer este concepto a continuación se presenta un caso a modo de ejemplo. Se tienen 4 candidatos que se pretenden ordenar según el concepto de no dominancia buscando minimizar los resultados. Los valores de las funciones objetivo de cada candidato se muestran en la Tabla 12.1.

Candidato	m_1	m_2	m_3
A	3	6	5
B	2	8	6
C	1	4	3
D	4	10	8

Tabla 12.1: Caso de ejemplo para la ordenación no dominante

Si ahora se compara cada candidato con los demás, se observa claramente como el candidato C correspondería al primer frente ya que posee los valores mínimos de cada función y el resto de candidatos estarían dominados por C. De esta manera el primer frente ya tendría asignado su único candidato. Una vez hecho esto, se descartaría el candidato C y se comparan los que quedan, el segundo frente estaría formado por los candidatos A y B ya que ninguno de ellos se ve dominado por el resto y D estaría dominado claramente tanto por A como B. Finalmente descartando a los del segundo frente, solo restaría el tercer candidato que quedaría asignado al tercer frente. Finalmente, el resultado de ordenar este caso en diferentes frentes se muestra en la Tabla 12.2.

Candidato	m_1	m_2	m_3	Frente
C	1	4	3	1
A	3	6	5	2
B	2	8	6	
D	4	10	8	3

Tabla 12.2: Solución del ejemplo de ordenación no dominante

12.4.2. Distancia de apiñamiento o '*Crowding distance*'

Este parámetro permite hacer una selección entre los individuos que pertenecen al mismo frente. La distancia de apiñamiento encuentra la distancia euclídea entre cada individuo de un mismo frente basándose en los m objetivos en un espacio dimensional m .

El proceso que permite calcular este parámetro empieza ordenando cada conjunto de candidatos que pertenecen a un mismo frente. Como se busca diversidad, los individuos que estén en las fronteras del frentes, es decir, los que presenten el valor máximo y mínimo, se les asigna siempre una distancia infinita. Una vez hecho esto se calcula la distancia de apiñamiento para el resto de candidatos del frente siguiendo la Ecuación 12.7:

$$I[i]_{dist} = I[i]_{dist} + \frac{I[i+1].m - I[i-1].m}{f_m^{\max} - f_m^{\min}} \quad (12.7)$$

donde i representa un elemento determinado dentro de un conjunto de individuos del mismo frente, $I[i].m$ es el valor de la función objetivo m -ésima del individuo i y las variables f_m^{\max} y f_m^{\min} representan, respectivamente, los valores máximos y mínimos de la función m -ésima correspondiente al frente en cuestión.

Por tanto, para cada frente existente de la población, se pueden ordenar sus individuos de mayor a menor distancia de apiñamiento para así obtener mayor diversidad de resultados a la hora de seleccionar los mejores individuos para la siguiente generación.

12.4.3. Generación de los descendientes

Para generar la descendencia a partir de los padres se utilizan cruces y mutaciones genéticos. El método para generar los descendientes se escoje aleatoriamente entre dos métodos. Uno de estos métodos corresponde a los cruces genéticos que ejecutan el llamado cruce binario simulado (SBX). En cambio, la mutación de tipo polinomial también se utiliza para generar hijos a partir de mutar a los progenitores. En las siguientes subsecciones se definen cada uno de estos conceptos.

12.4.3.1. Cruce binario simulado (SBX)

El cruce binario simulado queda determinado por la siguiente ley ([1] y [14]):

$$\begin{aligned} h_{1k} &= \frac{1}{2} [(1 - \beta_k) \cdot p_{1,k} + (1 + \beta_k) \cdot p_{2,k}] \\ h_{2k} &= \frac{1}{2} [(1 + \beta_k) \cdot p_{1,k} + (1 - \beta_k) \cdot p_{2,k}] \end{aligned} \quad (12.8)$$

donde $h_{i,k}$ es el hijo i -ésimo de la componente k , $p_{i,k}$ es el padre seleccionado y β_k (≥ 0) es un número generado aleatoriamente.

β_k depende de un número aleatorio u dado por una distribución uniforme entre $(0, 1)$ y η que es el índice de distribución para cruces genéticos. El parámetro β_k se obtiene utilizando la distribución siguiente:

$$\begin{cases} \beta(u) = (2u)^{\frac{1}{(\eta+1)}} & \text{si } u \leq 0,5 \\ \beta(u) = \frac{1}{[2(1-u)]^{\frac{1}{(\eta+1)}}} & \text{si } u > 0,5 \end{cases}$$

12.4.3.2. Mutación polinomial

Las mutaciones se consiguen aplicando la ley siguiente [14]:

$$h_k = p_k + (p_k^u - p_k^i) \cdot \delta_k \quad (12.9)$$

Siendo h_k el hijo de la componente k , p_k el padre seleccionado, p_k^u y p_k^i los márgenes superior e inferior de la componente k y δ_k una pequeña variación. El valor de este número viene dado por:

$$\begin{cases} \delta_k = 2(r_k)^{\frac{1}{(\eta_m+1)}} - 1 & \text{si } r_k < 0,5 \\ \delta_k = 1 - [2(1-r_k)]^{\frac{1}{(\eta_m+1)}} & \text{si } r_k \geq 0,5 \end{cases} \quad (12.10)$$

Capítulo 13

Resultados de la optimización

13.1. Determinación de parámetros de diseño

Partiendo como base para generar los parámetros de diseño se utiliza los resultados del diseño obtenidos en el MOC.

La primera cuestión surge en determinar el número de splines necesarias para aproximar la geometría del diseño. Cada una de las splines introducirá en principio 4 parámetros de diseño diferentes, por lo tanto, interesa escoger el menor número posible para reducir las variables de entrada del algoritmo.

En la Figura 13.1 se ilustra el error cuadrático medio (RMSE) y el coeficiente de correlación entre la aproximación con splines y los valores de diseño obtenidos con el método de las características en función del número de splines que tenga cada aproximación.

Como se puede apreciar en las figuras 13.1(a) y 13.1(b) utilizar más de 4 splines no mejora sustancialmente la aproximación y, al mismo tiempo, se limitan el número de parámetros de diseño. Recordar que, debido a la imposición de las condiciones de continuidad y derivabilidad, de los 16 coeficientes que se tendrían en un principio como parámetros de diseño estos quedarían reducidos a un total de 10. En la figura 13.2 se puede apreciar la aproximación con las 4 splines y los valores encontrados de diseño obtenidos con el MOC. La Tabla 13.1 muestra los valores de los parámetros de diseño para esta aproximación.

La población inicial a partir de la cual el algoritmo NSGA-II trabaja se genera aleatoriamente utilizando como referencia los resultados de la Tabla 13.1. Las va-

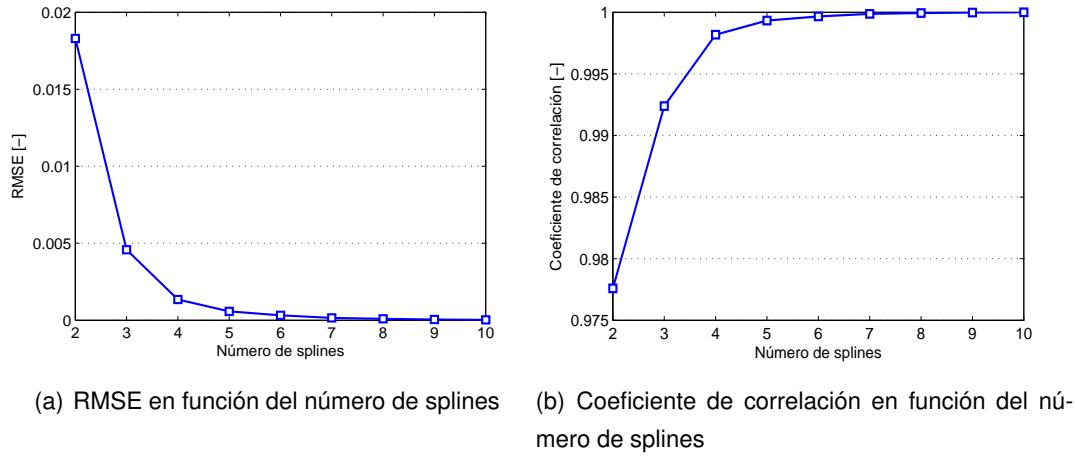


Figura 13.1: RMSE y coeficiente de correlación en función del número de splines utilizadas para aproximar la geometría del diseño

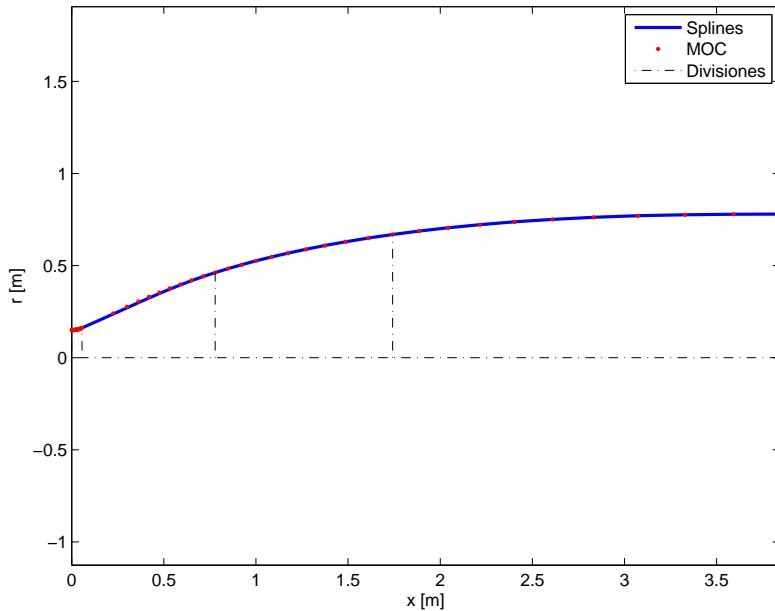


Figura 13.2: Aproximación seleccionada para parametrizar los resultados obtenidos con el MOC

Spline	Coeficientes				Coordenadas nudos	
	$A_{\#,1}$	$A_{\#,2}$	$A_{\#,3}$	$A_{\#,4}$	x_{n1}	0
#1	0,1500	0	3,3866	6,0580	x_{n2}	0,0560
#2	0,1617	0,4364	0,0873	-0,1597	x_{n3}	0,7785
#3	0,4623	0,3124	-0,1255	0,0243	x_{n4}	1,7419
#4	0,6686	0,1384	-0,0562	0,0074	x_{n5}	3,8433

Tabla 13.1: Splines resultantes de aproximar el diseño obtenido con el MOC

riables de diseño corresponden a los valores de los diferentes coeficientes A_n manteniendo fijos las coordenadas de los nudos. Para generar los datos iniciales se hace variar estos valores de partida aleatoriamente en un margen de un $\pm 50\%$.

13.2. Tobera optimizada

En este punto ya se han seleccionado el número de parámetros de diseño necesarios para el algoritmo de optimización, en este caso son 4 polinomios diferentes definidos a trozos por unos nudos determinados.

Siguiendo la base teórica en la que se basa el algoritmo NSGA-II se ha generado un código capaz de ejecutar este algoritmo. El Anexo E muestra los diagramas de bloque del algoritmo y una descripción de todas las rutinas creadas.

Los datos de entrada necesarios son, tal y como ya se ha comentado anteriormente, los resultados obtenidos en la Tabla 13.1. Otros parámetros de entrada que es necesario fijar son el número de individuos de la población así como también el número de generaciones. Estas dos variables influyen sobremanera en los resultados finales ya que, si son muy pequeños probablemente no se logra optimizar debido a que no se analizan todas las configuraciones posibles y si, por el contrario, son demasiado grandes el tiempo de cálculo necesario puede ser excesivo. En consecuencia, se escogen 30 individuos para que formen la población y 50 como la cantidad de generaciones durante las cuales se ejecutará el algoritmo.

Luego se genera la población inicial haciendo variar aleatoriamente los parámetros de diseño entre un margen establecido previamente, que también es dato de entrada. Esta población inicial se analiza mediante el código CFD elaborado en la Parte 10.8 para obtener como resultado el valor de las funciones que se quieren optimizar. Posteriormente se ordenan los resultados de la población inicial, se seleccionan los padres, se generan los descendientes y se combina la población para escoger los mejores que forman la siguiente generación.

En la Figura 13.3 se muestran todos los cálculos generados en un espacio tridimensional formado por las tres funciones objetivo. De entre todos ellos, los candidatos cuyos resultados se muestran en la Tabla 13.2 resultan ser los que consiguen las mejores prestaciones. La Figura 13.4 muestra una comparación entre los contornos y el Mach en todo el dominio para los candidatos seleccionados.

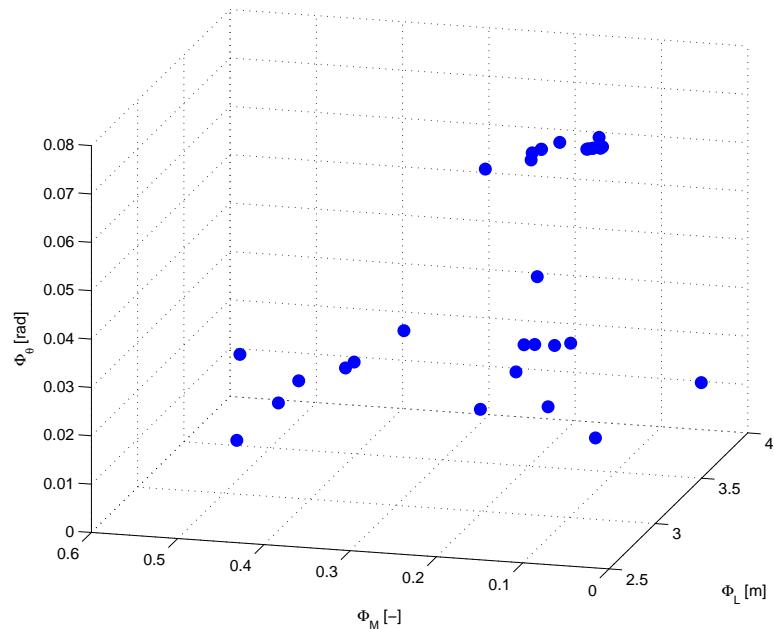
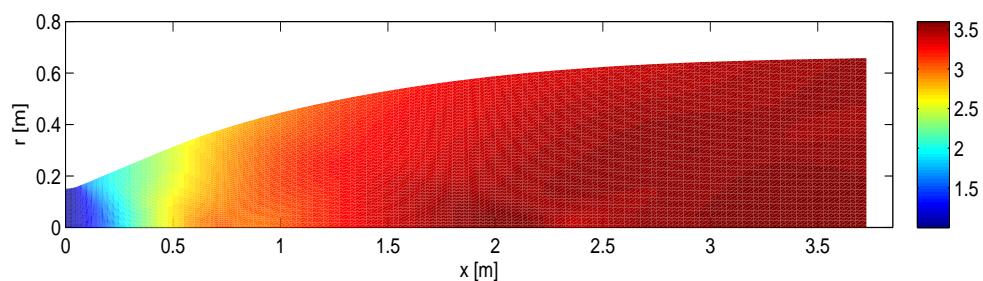


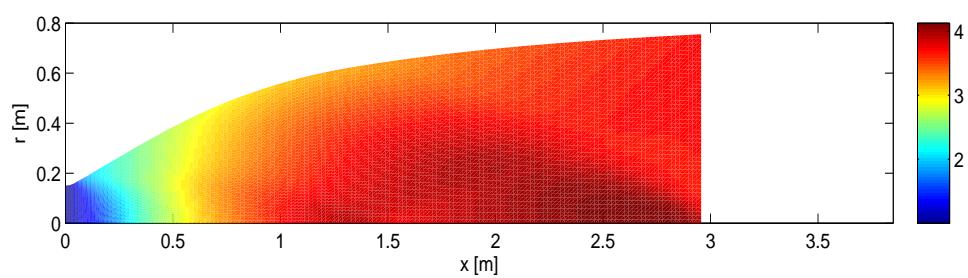
Figura 13.3: Resultados obtenidos con el NSGA-II

Diseño	Φ_L [m]	Φ_M [-]	Φ_θ [rad]
MOC	3,8433	$3,71 \cdot 10^{-2}$	$1,29 \cdot 10^{-2}$
C1	3,7264	$20,21 \cdot 10^{-2}$	$0,80 \cdot 10^{-2}$
C2	2,9564	$5,64 \cdot 10^{-2}$	$7,80 \cdot 10^{-2}$
C3	3,2873	$10,00 \cdot 10^{-2}$	$1,11 \cdot 10^{-2}$
C4	2,9574	$6,74 \cdot 10^{-2}$	$7,76 \cdot 10^{-2}$

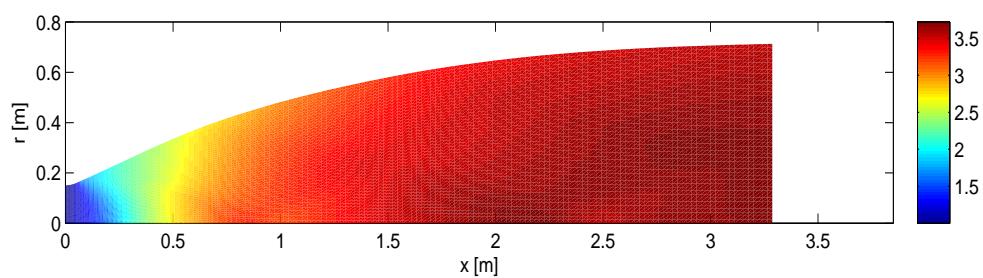
Tabla 13.2: Resultados obtenidos para el diseño original y los candidatos seleccionados



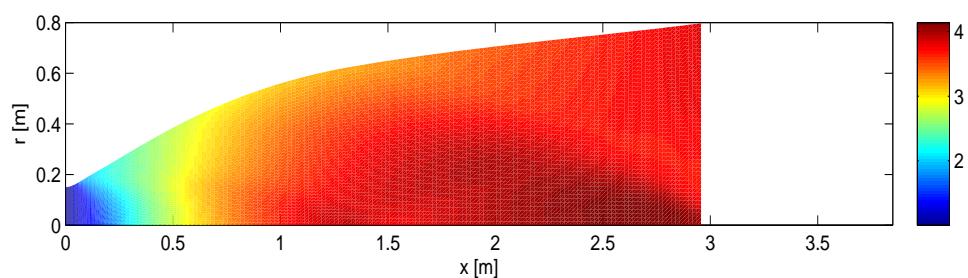
(a) Diseño C1



(b) Diseño C2



(c) Diseño C3



(d) Diseño C4

Figura 13.4: Geometrías y distribución de Mach en cada diseño

Analizando más detalladamente cada candidato, el diseño de C1 resulta ser uno de los que consigue expulsar los gases con menor ángulo respecto al eje axial a costa de introducir una desviación en el Mach de salida del 20 %. El diseño C2 posee la menor longitud de todos los candidatos con errores apreciables tanto en el Mach como en el ángulo de la velocidad. Por otro lado, el candidato C3 tiene unas características muy parecidas al C1 aunque con menor longitud y menor desviación del Mach. El último candidato escogido, C4, tiene unos resultados muy próximos a C2 aunque con valores ligeramente superiores.

Una vez analizados los resultados de todos los candidatos, se considera que el diseño C2 es el que cumple con los objetivos inicialmente fijados. Los motivos resultan claros, es el diseño que reduce al máximo la longitud de la tobera del diseño inicial, un 23 %, manteniendo unas desviaciones en el Mach en la salida y en el ángulo del flujo del 5,64 % y 7,8 % respectivamente. La Figura 13.5 muestra la geometría del diseño finalmente escogido.

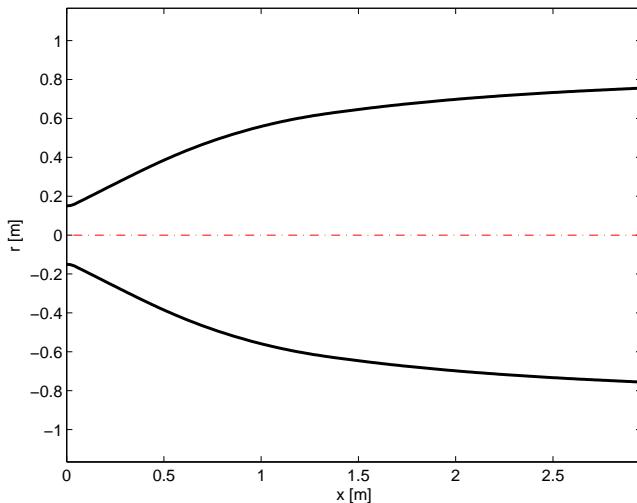


Figura 13.5: Contorno de la tobera optimizada

Si ahora se compara el diseño optimizado C2 con el original obtenido con el MOC (datos de la Tabla 9.3), el diseño optimizado C2 reduce la longitud de la tobera en un 23 % mientras que el radio de salida también es menor que en el original aunque solo en un 3 % (el radio de salida del diseño optimizado es de 0,7555m). Ambas características combinadas hacen que tanto las dimensiones generales como la masa de la tobera sean reducidos, logrando con esta optimización uno de los objetivos más críticos en cuanto al diseño aeroespacial, disminuir tanto de la masa como del volumen de la tobera.

Parte V

Conclusiones y bibliografía

Capítulo 14

Conclusiones y recomendaciones

En el presente documento se ha diseñado, analizado y optimizado la parte divergente de una tobera de cohete con simetría axial. Si bien en un primer momento los únicos objetivos planteados eran el diseño y su análisis posterior, se tuvo que realizar un paso adicional, la optimización del diseño inicial, para conseguir resultados viables desde el punto de vista práctico.

El contorno de la tobera obtenido mediante el método de las características produce una curva con pendiente nula en la garganta, con un posterior aumento de la pendiente justo después de la garganta seguido de un descenso paulatino de la pendiente hasta que en la salida la pendiente vuelve a ser aproximadamente nula, resultando en una forma parecida a la acampanada. El diseño se ha comparado con los resultados teóricos ideales llegando a obtener errores inferiores al 1 % con lo cual se valida el diseño. Un cotejo posterior del diseño con modelos reales pone de manifiesto el inconveniente de este método, este es, la longitud excesiva que posee el contorno. En vista de este resultado se decide optimizar el diseño para reducir este parámetro.

El análisis del contorno se ejecuta determinando las propiedades del campo fluido en el interior de la tobera mediante CFD con volúmenes finitos. Después de resolver el sistema de ecuaciones de Euler axisimétricas en todo el dominio previamente discretizado, se obtienen los valores esperados. Tanto la presión como la temperatura estáticas descienden indicando que el flujo se expansiona mientras que la velocidad aumenta lo que provoca una aceleración del flujo. Estudiando más detalladamente la sección de salida, el Mach y el ángulo del flujo expulsado se asemejan a los valores teóricos aunque presentan cierta desviación debida a la propia simetría axial de la geometría y la discretización llevada a cabo.

Partiendo inicialmente de la voluntad de optimizar el diseño en términos de su longitud total, se ha implementado un algoritmo genético que realiza esta tarea. Debido a que el comportamiento del flujo depende directamente de la geometría del contorno, se ha planteado un problema multiobjetivo. Las funciones a optimizar escogidas son la longitud de la tobera y el Mach y el ángulo del flujo respecto al eje axial x en la sección de salida. Cada posible candidato se ha creado aleatoriamente y evaluado con el código de análisis CFD. Posteriormente se ha ejecutado el algoritmo genético NSGA-II. El resultado es un número finito de posibles candidatos de los cuales se han escogido 4 posibles variantes. Comparando estos candidatos con el diseño original, se ha escogido finalmente el miembro más adecuado que sustituye al diseño original por poseer el mejor compromiso de las tres funciones objetivo.

Si bien los objetivos de este proyecto se han cumplido llegando a obtener resultados satisfactorios, el diseño de la tobera para un estadio más avanzado de su diseño requeriría introducir en los cálculos las consideraciones siguientes:

- Introducir un modelo de comportamiento de las gases más realista.
- Considerar geometría tridimensional en todos los estadios del diseño.
- Añadir la parte convergente en los cálculos.
- Considerar la viscosidad del fluido, con ello aparecería la capa límite en las cercanías de la pared.
- Tener en cuenta los fenómenos de transferencia de calor, factor muy importante en las toberas de cohete debido a las altas temperaturas de los gases expulsados.
- Escoger los materiales y acabados superficiales de la tobera, así como diseñar el sistema de refrigeración.

Bibliografía

- [1] AGRAWAL, R. B. y DEB, K.: «Simulated Binary Crossover for Continuous Search Space». *Informe técnico*, 1994.
- [2] AKIMA, H.: «A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local Procedures». *Association for Computing Machinery*, 1970, **17**, pp. 589–602.
- [3] ANDERSON, J. D.: *Modern Compressible Flow: with historical perspective*. McGraw Hill Publishing Co., Singapore, 2^a edición, 1990.
- [4] ———: *Computational Fluid Dynamics. The basics with applications*. McGraw-Hill, New York, 2^a edición, 1995.
- [5] DEB, K.: «Multi-Objective Genetic Algorithms: Problem Difficulties and Construction of Test Problems». *Evolutionary Computation*, 1999, **7**, pp. 205–230.
- [6] DEB, K.; PRATAP, A.; ARGAWAL, S. y MEYARIVAN, T.: «A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II». *Informe técnico*, IEEE Transactions on Evolutionay Computation, 2002.
- [7] LIZANDRA I DALMASES, O.: *Apuntes de la asignatura de Propulsión*. Curso Propulsión, 2010.
- [8] MARON, M. J. y LOPEZ, R. J.: *Numerical Analysis: A practical approach*. Wadsworth Publ. Co., 1^a edición, 1991.
- [9] MARTINEZ-SANCHEZ, M.: *16.512, Rocket Propulsion*. MIT OpenCourseWare, 1^a edición, 2005.
- [10] MATTINGLY, J. D.: *Elements of Propulsion: Gas turbines and Rockets*. AIAA Education Series, Reston, Virginia, 1^a edición, 2006.

- [11] MITSUBISHI HEAVY INDUSTRIES:, 2011. <http://www.mhi.co.jp/en/index.html>.
- [12] NPO ENERGOMASH;, 2011. <Http://www.npoenergomash.ru/eng/engines/>.
- [13] PRATT&WHITNEY ROCKETDYNE;, 2011. <http://www.pw.utc.com/Products/Pratt%26Whitney+Rocketdyne/Propulsion+Solutions/Space+Launch>.
- [14] RAGHUVANSHI, M. M. y KAKDE, O. G.: «Survey on multiobjective evolutionary and real coded genetic algorithms». *Visvesvaraya National Institute of Technology*, 1994.
- [15] SHAPIRO, A. H.: *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*. volumen I y II. The Ronald Press Company, New York, 1^a edición, 1953.
- [16] SUTTON, G. P.: *Rocket Propulsion Elements*. John Wiley and Sons, New York, 7^a edición, 2001.
- [17] THOMPSON, P. A.: *Compressive Fluid Dynamics*. McGraw Hill Publishing Co., New York, 1^a edición, 1972.
- [18] TORO, E. F.: «A Linearized Riemann Solver for the Time-Dependent Euler Equations of Gas Dynamics». *Proc. R. Soc. London*, 1991, **434**, pp. 683–693.
- [19] ———: *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer, 3^a edición, 2004.
- [20] TORO, E. F. y CHAKRABORTY, A.: «Development of an approximate Riemann solver for the steady supersonic Euler equations». *The Aeronautical Journal*, 1994, **98**, pp. 325–339.
- [21] TORO, E. F.; SPRUCE, M. y SPEARES, V.: «Restoration of the contact surface in the HLL Riemann solver». *Shock Waves*, 1994, **4**, pp. 25–34.
- [22] UYGUN, M. y KIRKKÖPRÜ, K.: «Numerical Solution of the Euler equations by Finite Volume Methods: Central versus Upwind Schemes». *Journal of Aeronautics and Space Technologies*, 1993, **2**, pp. 47–55.
- [23] VAN ALBADA, G. D.; VAN LEER, .B y ROBERTS, W. W.: «A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics». *Astron Astrophysics*, 1982, **108(1)**, pp. 76–84.
- [24] VAN LEER, B.: «Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method». *Journal of Computational Physics*, 1979, **32**, pp. 101 – 136.

BIBLIOGRAFÍA

- [25] VENKATAKRISHNAN, V.: «On the accuracy of limiters and convergence to steady state solutions». *31st Aerospace Sciences Meeting Exhibit*, 1993.
- [26] VOLVO AERO GLOBAL:, 2011. <http://www.volvoaero.com>.

