Отчет по лабораторной работе №4

Модель гармонических колебаний

Егорова Диана Витальевна

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

- Построить фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора

- Выполнить работу на Julia и OpenModelica

2 Задание

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев: 1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы на интервале $t \in [0; 60]$; (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0; y_0 = 0$

3 Теоретическое введение

Осцилля́тор (лат. oscillo — качаюсь) — система, совершающая колебания, то есть показатели которой периодически повторяются во времени. [1] Математи́ческий ма́ятник — осциллятор, представляющий собой механическую систему, состоящую из материальной точки на конце невесомой нерастяжимой нити или лёгкого стержня и находящуюся в однородном поле сил тяготения. [2]

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0(1)$$

где x – переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0 – собственная частота колебаний, t – время.

Уравнение (1) есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы. При отсутствии потерь в системе (γ = 0) вместо уравнения (1.1) получаем уравнение консервативного осциллятора энергия колебания которого сохраняется во времени.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0(2)$$

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка (2) необходимо задать два начальных условия вида

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (3)$$

Уравнение второго порядка (2) можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y}(t_0) = -\omega_0^2 x \end{cases} \quad (4)$$

Начальные условия (3) для системы (4) примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (3)$$

Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его фазовой плоскостью. Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы. Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется фазовой траекторией. Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют фазовым портретом.

4 Выполнение лабораторной работы

1. Построим фазовый портрет и решения уравнения гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы на Julia (рис. 4.1).

```
os_1.jl
using Plots
using DifferentialEquations

w = 10.0
g = 0.0
x0 = 0.0
y0 = 0.0

function one(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = u[2]
    du[2] = -w*u[1] - g*u[2]
end

v0 = [x0, y0]
prom = (0.0, 60.0)

prob = ODEProblem(one, v0, prom)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)

A1 = [u[1] for u in sol.u]
A2 = [u[2] for u in sol.u]
T1 = [t for t in sol.t]

plt = plot(dpi = 300, title = "Решение уравнения", legend=false)
plot!(plt, T1, A1, color=:green)
savefig(plt, "lab4_1_solve.png")

plt2 = plot(dpi = 300, title = "Фазовый портрет", legend=false)
plot!(plt2, A1, A2, color=:green)
savefig(plt2, "lab4_1_fas.png")
```

Рис. 4.1: Код на Julia. Случай первый

Результат выполнения моделирования колебания гармонического осциллятора в первом случае (рис. 4.2) (рис. 4.3).

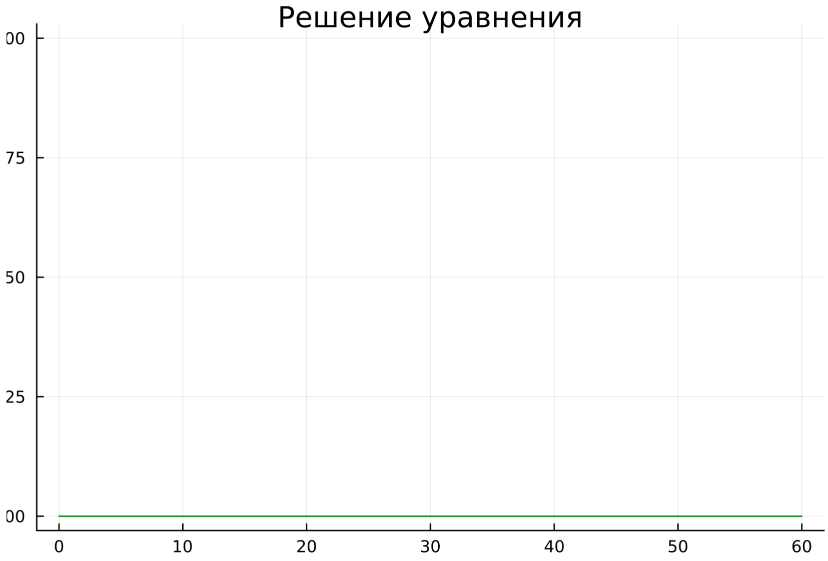

Рис. 4.2: Решение уравнения гармонического осциллятора

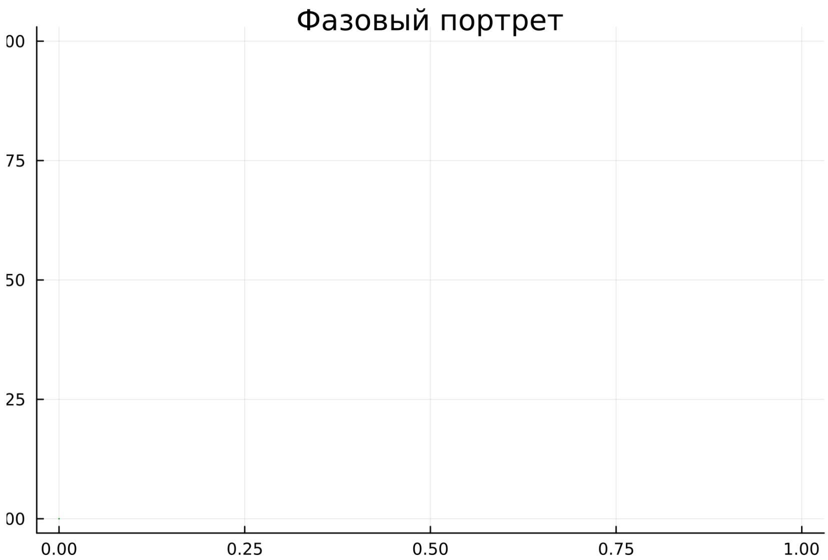

Рис. 4.3: Фазовый портрет гармонического осциллятора

2. Построим фазовый портрет и решения уравнения гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы на Julia (рис. 4.4).

os_2.jl

```julia
using Plots
using DifferentialEquations

w = 4.0
g = 0.5
x0 = 0.0
y0 = 0.0

function one(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = u[2]
    du[2] = -w*u[1] - g*u[2]
end

v0 = [x0, y0]
prom = (0.0, 60.0)

prob = ODEProblem(one, v0, prom)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)

A1 = [u[1] for u in sol.u]
A2 = [u[2] for u in sol.u]
T1 = [t for t in sol.t]

plt = plot(dpi = 300, title = "Решение уравнения", legend=false)
plot!(plt, T1, A1, color=:green)
savefig(plt, "lab4_2_solve.png")

plt2 = plot(dpi = 300, title = "Фазовый портрет", legend=false)
plot!(plt2, A1, A2, color=:green)
savefig(plt2, "lab4_2_fas.png")
```

Рис. 4.4: Код на Julia. Случай второй

Результат выполнения моделирования колебания гармонического осциллятора дл второго случая (рис. 4.8) (рис. 4.9).

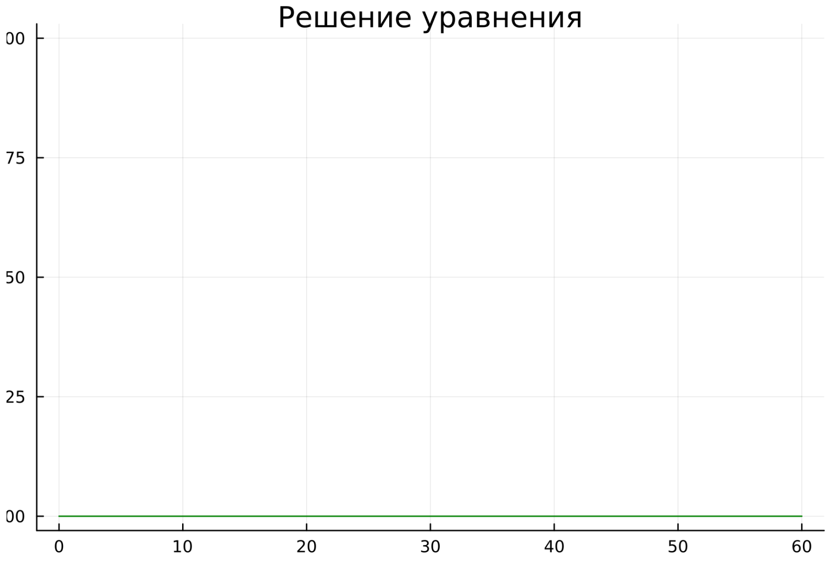

Рис. 4.5: Решение уравнения гармонического осциллятора

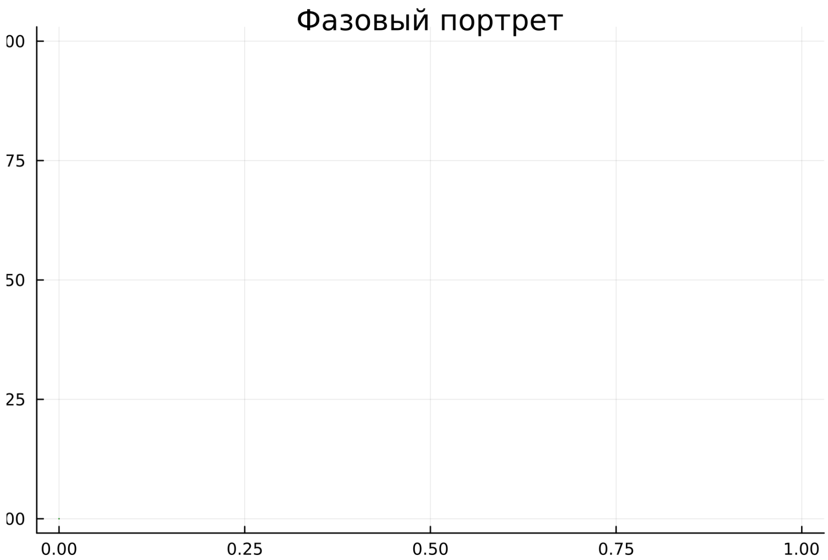

Рис. 4.6: Фазовый портрет гармонического осциллятора

3. Построим фазовый портрет и решения уравнения гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы на Julia (рис. 4.7).

os_3.jl

```julia
using Plots
using DifferentialEquations

w = 12
g = 2
x0 = 0.0
y0 = 0.0

function one(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = u[2]
    du[2] = -w*u[1] - g*u[2] + cos(12*t)
end

v0 = [x0, y0]
prom = (0.0, 60.0)

prob = ODEProblem(one, v0, prom)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)

A1 = [u[1] for u in sol.u]
A2 = [u[2] for u in sol.u]
T1 = [t for t in sol.t]

plt = plot(dpi = 300, title = "Решение уравнения", legend=false)
plot!(plt, T1, A1, color=:green)
savefig(plt, "lab4_3_solve.png")

plt2 = plot(dpi = 300, title = "Фазовый портрет", legend=false)
plot!(plt2, A1, A2, color=:green)
savefig(plt2, "lab4_3_fas.png")
```

Рис. 4.7: Код на Julia. Случай второй

Результат выполнения моделирования колебания гармонического осциллятора дл третьего случая (рис. **??**) (рис. **??**).

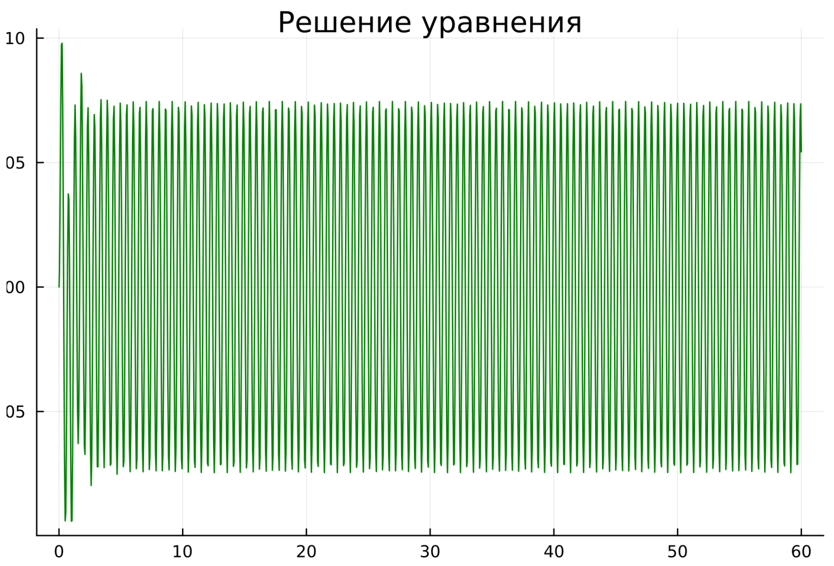

Рис. 4.8: Решение уравнения гармонического осциллятора

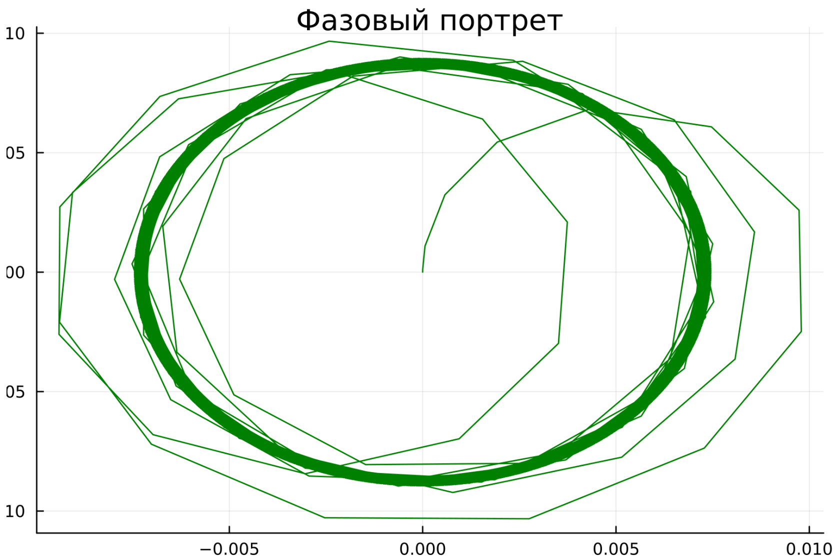

Рис. 4.9: Фазовый портрет гармонического осциллятора

4. Построим фазовый портрет и решения уравнения гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы на OpenModelica(рис. 4.10).

os_1.mo

```
model os_1
Real x;
Real y;
Real w=10;
Real g=0;
Real t=time;
initial equation
x=0;
y=0;
equation
der(x)=y;
der(y)=-w*x-g*y;
end os_1;

```

Рис. 4.10: Код на OpenModelica. Случай первый

Результат выполнения моделирования колебания гармонического осциллятора в первом случае (рис. 4.11) (рис. 4.12).

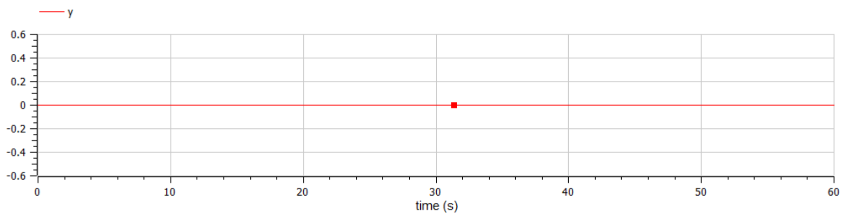

Рис. 4.11: Решение уравнения гармонического осциллятора

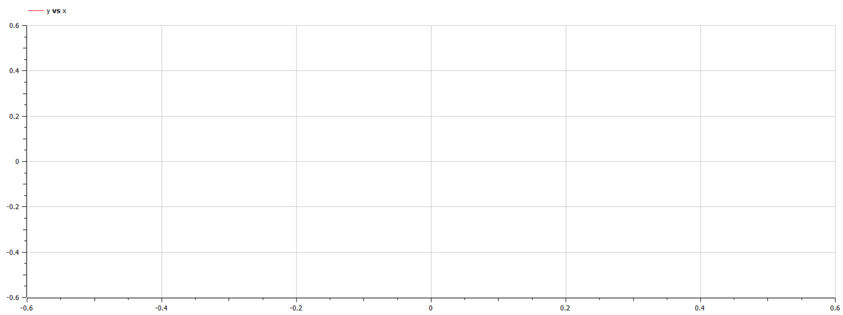

Рис. 4.12: Фазовый портрет гармонического осциллятора

5. Построим фазовый портрет и решения уравнения гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы на OpenModelica (рис. 4.13).

os_2.mo

```
model os_2
Real x;
Real y;
Real w=4;
Real g=0.5;
Real t=time;
initial equation
x=0;
y=0;
equation
der(x)=y;
der(y)=-w*x-g*y;
end os_2;

```

Рис. 4.13: Код на на OpenModelica. Случай второй

Результат выполнения моделирования колебания гармонического осциллятора дл второго случая (рис. 4.14) (рис. 4.15).

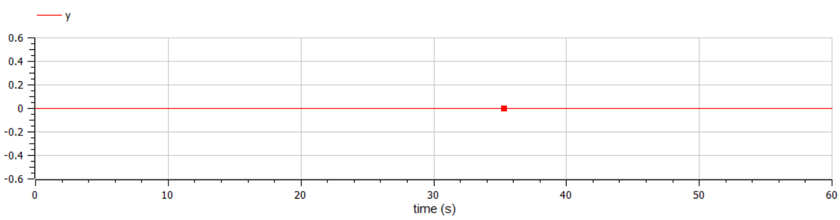

Рис. 4.14: Решение уравнения гармонического осциллятора

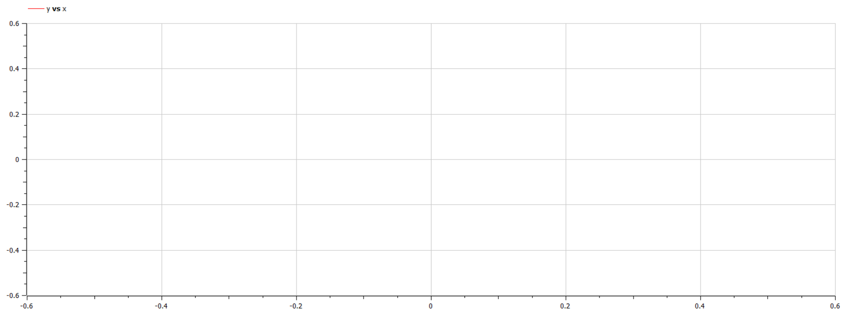

Рис. 4.15: Фазовый портрет гармонического осциллятора

6. Построим фазовый портрет и решения уравнения гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы на OpenModelica (рис. 4.16).

```
os_3.mo
model os_3
Real x;
Real y;
Real w=12;
Real g=2;
Real t=time;
initial equation
x=0;
y=0;
equation
der(x)=y;
der(y)=-w*x-g*y+cos(12*t);
end os_3;
```

Рис. 4.16: Код на OpenModelica. Случай второй

Результат выполнения моделирования колебания гармонического осциллятора дл третьего случая (рис. 4.17) (рис. 4.18).

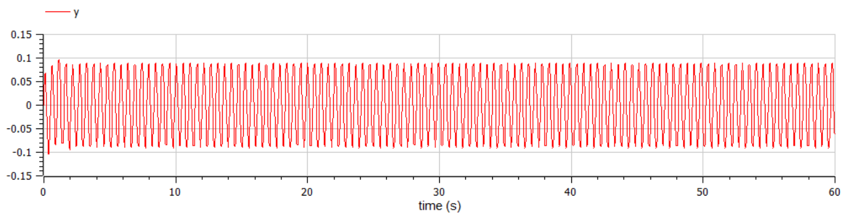

Рис. 4.17: Решение уравнения гармонического осциллятора

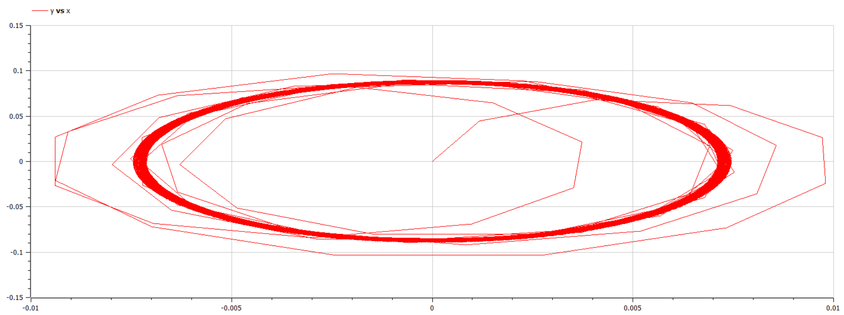

Рис. 4.18: Фазовый портрет гармонического осциллятора

5 Выводы

Получены навыки моделирования фазового портрета гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:
1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

Список литературы

[1] - https://clck.ru/33gUui

[2] - https://clck.ru/GE8ba ::: {#refs} :::