江蘇大學

JIANGSU UNIVERSITY

本 科 毕 业 论 文

带有特征值的超临界型 Trudinger-Moser 不等式

Supercritical Trudinger-Moser inequality with eigenvalues

学 院 名 称 ：数学科学学院

专 业 班 级 ：应数 1901

学 生 姓 名 ：唐彪

指导教师姓名 ：朱茂春

指导教师职称 ：副教授

2023 年 6 月

目 录

带有特征值的超临界型 Trudinger-Moser 不等式

专业班级：应数 1901　学生姓名：唐彪

指导教师：朱茂春　职称：副教授

摘 要 Trudinger-Moser 不等式是非线性椭圆偏微分方程理论中的经典不等式，它对于描述函数空间中的正则性有着重要的作用。早期的形式由 Trudinger 在于 1967 年给出， 1971 年 Moser 得到了更精确的表达式。Trudinger-Moser 不等式在偏微分方程理论、几何分析、非线性波动方程等领域有着广泛的应用。本文主要研究二维空间中单位球 B 上带特征值的超临界型 Trudinger-Moser 不等式。文章的研究主要围绕以下两部分展开：

第一部分利用径向引理和经典的 Trudinger-Moser 不等式建立了一个超临界的 Trudinger-Moser 不等式；

第二部分首先对极大化序列进行讨论，当有界时利用勒贝格控制收敛定理证明不等式，而当无界时使用爆破分析和集中能量上界估计给出带特征值的超临界型 Trudinger-Moser 不等式的证明。

关键词： Trudinger-Moser 不等式　超临界　爆破分析　集中能量上界估计

Supercritical Trudinger Moser Inequality with Eigenvalues

Abstract Trudinger-Moser inequality is a classical inequality in the theory of nonlinear elliptic partial differential equations. It plays an important role in describing the regularity of function space. An early form was given by Trudinger in 1967, and a more accurate expression was obtained by Moser in 1971. Trudinger-Moser inequality is widely used in partial differential equation theory, geometric analysis, nonlinear wave equation and other fields. In this paper, we study the supercritical Trudinger-Moser inequality with eigenvalues on the unit sphere in two-dimensional space. The research of this paper mainly focuses on the following two parts:

In the first part, established a supercritical Trudinger-Moser inequality using radial lemma and classical Trudinger-Moser inequality;

In the second part, we first discuss the maximization sequence, prove the inequality by using Lebesgue control convergence theorem when bounded, and prove the supercritical Trudinger-Moser inequality with eigenvalues by using blasting analysis and upper bound estimation of concentrated energy when unbounded.

Keywords: Trudinger Moser inequality Supercritical blow up analysis Concentrate energy upper bound estimation

第一章 绪 论

本章将介绍 Trudinger-Moser 不等式的基本形式、历史背景和国内外研究现状. 我们将从 Sobolev 嵌入定理出发介绍其相关知识.

1.1 Sobolev 嵌入定理

设Ω为$\mathbb{R}^n (n \ge 2)$中的一个有界区域，$W_0^{1,p}(\Omega)$表示$C_0^\infty(\Omega)$按范数

$$\| u \|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = (\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) dx)^{\frac{1}{p}}$$

下的完备化空间. 经典 Sobolev 嵌入定理告诉我们：

(1) $p < n$时，$W_0^{1,p}(\Omega)$嵌入到$L^q(\Omega)$，$1 \le q < p^* = \dfrac{np}{n-p}$,

(2) $p > n$时，$W_0^{1,p}(\Omega)$嵌入到C^α，$\alpha = 1 - \dfrac{n}{p}$,

(3) $p = n$时，$W_0^{1,p}(\Omega)$嵌入到$L^q, 0 < q < \infty$，但$W_0^{1,p}(\Omega) \not\subset L^\infty(\Omega)$.

一个很自然的问题是：$W_0^{1,n}(\Omega)$到底可以精确嵌入到何种空间？

1.2 Trudinger-Moser 不等式

在 1967 年，Trudinger[1]利用幂级数展开证明了得到了在$p = n$时，$W_0^{1,n}(\Omega)$ 可以连续嵌入到某种 Orlicz 函数空间$L_\varphi(\Omega)$，其中$\varphi = \exp\left(|t|^{\frac{n}{n-1}} - 1\right)$，即存在$\alpha > 0$，使得

$$\sup_{u \in W_0^{1,n}(\Omega), \|\nabla u\|_n^n \le 1} \int_\Omega e^{\alpha u^{n/(n-1)}} dx \le C_n |\Omega| \tag{1.1}$$

成立，其中$\|\nabla u\|_n^n = \int_\Omega |\nabla u|^n dx$. 1971 年 Moser[2]利用对称重排方法得到了著名的 Trudinger-Moser 不等式：对任意的$\alpha \le \alpha_n = n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$，有

$$\sup_{u \in W_0^{1,n}(\Omega), \|\nabla u\|_n^n \le 1} \int_\Omega e^{\alpha u^{n/(n-1)}} dx < \infty \tag{1.2}$$

成立，其中ω_{n-1}为单位球面$S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$的球面测度，当$\alpha > \alpha_n$时，(1.2)中的上确界为无穷，也即得到了$\alpha_n$为最佳常数. 我们称$\alpha = \alpha_n$时为著名的 Trudinger-Moser 不等式.

Trudinger-Moser 不等式可以视作 Sobolev 不等式的极限形式，该不等式在数学和物理学中具有广泛的应用,特别是在微分几何、偏微分方程、材料科学等领域中发挥着重要作用. 对 Trudinger-Moser 不等式的研究已经取得了一些重要的进展. 此外，该不等式还可以推动了许多新的数学工具和技术的发展，如调和分析、变分方法、极值问题等.

在 1988 年，Adams[3]得到高阶 Trudinger 型不等式：

$$\sup_{u\in W_0^{m,p}(\Omega),\left\|\nabla^m u\right\|_p\le 1}\int_\Omega \exp(\beta|u|^{p'})dx\le c_0, \tag{1.3}$$

并给出了最佳常数：

$$\beta\le\beta_0(m,n)=\begin{cases}\dfrac{n}{\omega_{n-1}}\left[\dfrac{\pi^{n/2}2^m\Gamma\left(\dfrac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n-m+1}{2}\right)}\right]^{p'}, & m\text{为奇数}\\ \dfrac{n}{\omega_{n-1}}\left[\dfrac{\pi^{n/2}2^m\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n-m}{2}\right)}\right]^{p'}, & m\text{为偶数},\end{cases}$$

其中 m 为正整数满足 $n>m$， $u\in C^m(\Omega)$ 且 $p=n/m$， $p'=p/(p-1)$. 但当 $\beta>\beta_0$ 时，则存在满足上述条件的函数 u 使得 $\int_\Omega \exp(\beta|u|^{p'})dx>c_0$.

对于无界区域的讨论，Adachi[26]给出了最佳常数，我们也称下述不等式为 Adachi-Tanaka 型 Trudinger-Moser 不等式，即

$$A(n,\alpha)=\sup_{u\in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\},\|\nabla u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}\le 1}\frac{1}{\|u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_n(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}})dx\begin{cases}<\infty,\alpha<\alpha_n\\=\infty,\alpha\ge\alpha_n,\end{cases}$$

其中 $\Phi_n(t)=e^t-\sum_{i=0}^{n-2}\frac{t^i}{i!}$，需要指出的是，在临界指数 $\alpha=\alpha_n$ 下，上确界为无穷.

在 2005 年，B.Ruf[4]发现当用标准的 Sobolev 范数 $\|u\|_{W_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)}=(\int_{\mathbb{R}^n}(|\nabla u|^n+|u|^n)dx)^{1/n}$ 来代替 Dirichlet 范数 $\|u\|_{\mathbb{R}^n}=(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^n)^{1/n}$ 的时候，在二维情况下，可以得到全空间 $\mathbb{R}^n$ 上的临界型 Trudinger-Moser 不等式.

在 2008 年，Y. Li 和 B. Ruf 利用爆破分析技术得到了 $n\ge 3$ 临界型 Trudinger-Moser 不等式[5]：即存在常数 $d>0$，使得对于任意的区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$，有

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\|u\|_{W_0^{1,n}(\Omega)}\le 1}\int_\Omega \Phi(\alpha_n |u|^{\frac{n}{n-1}})dx \le d; \tag{1.4}$$

但对于任意的$\alpha>\alpha_n$，上面不等式不成立. 进一步还证明了极值函数的存在.

K.Sandeep[25]建立了有界区域上 Dirichlet 范数约束下的奇异型 Trudinger-Moser 不等式：即当且仅当$\frac{\alpha}{\alpha_n}+\frac{\beta}{n}\le 1$，$\alpha>0$，$\beta\in(0,\mathrm{n})$时，有

$$\sup_{\|\nabla u\|_n\le 1}\int_\Omega \frac{\exp\left(\alpha |u|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{|x^\beta|}dx<\infty, \tag{1.5}$$

而后 Adimurthi 和 Sandeep 建立了有界区域上 L^p 范数约束下的奇异型 Trudinger-Moser 不等式：即当$s\in(0.4\pi(1-t))$，$t\in[0,1)$时，有

$$\sup_{u\in W_0^{1,2}(\Omega),\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\le 1}\int_\Omega \frac{e^{su^2}-1}{|x|^{2t}}dt<\infty.$$

关于奇异型 Trudinger-Moser 不等式还有很多其他相关的结果. 如，Lam、Lu 和 Zhang 在[6]中已经证明了几个尖锐的奇异 Trudinger-Moser 不等式；Dong 和 Lu[7]、Dong、Lam 和 Lu[8]、Wang 和 Chen[9]在$\mathbb{R}^n$中建立了两个加权的 Trudinger-Moser 不等式；Zhang[13]对分数阶 Trudinger-Moser 不等式做了一些研究；在双曲空间上也存在一些 Trudinger-Moser 不等式（见 Lu 和 Tang[15]，Lu 和 Yang[14]，Li，Lu,Yang[16]和[17]等），双曲空间上的这些不等式是 Hardy-Sobolev-Maz'ya 不等式的边界情况（参见 Lu 和 Yang[18]）.

超临界 Trudinger-Moser 不等式是偏微分方程领域中的重要问题之一，下面介绍关于超临界 Trudinger-Moser 不等式的一些成果.

设$\lambda_1(\Omega)$是拉普拉斯算子的第一特征值，满足

$$\lambda_1(\Omega)=\inf_{u\in W_0^{1,2}(\Omega),u\neq 0}\frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2},$$

其中$\|\cdot\|_2$代表$L^2(\Omega)$范数. Adimurthi 和 O.Druet[19]中证明了二维空间带特征值的 Trudinger-Moser 不等式：对任意的$\alpha<\lambda_1(\Omega)$

$$\sup_{u\in W_0^{1,2}(\Omega),\|\nabla u\|_2^2\le 1}\int_\Omega e^{4\pi u^2\left(1+\alpha\|\nabla u\|_2^2\right)}dx<+\infty, \tag{1.6}$$

并且对任意的$\alpha \ge \lambda_1(\Omega)$，上确界为无穷. 这一结果被 Y.Yang[27]扩展到高维紧致黎曼曲面的情况，Lu-Yang[12]将其扩展到L^p范数的情形，J.M.do O[11]将其扩展到整个欧几里得空间.

最近 Ngô和 Nguyen[21]在建立了两个径向超临界型 Trudinger-Moser 不等式：

$$\sup_{u\in W_{0,r}^{1,2}(B),\int_B|\nabla u|^n dx\le 1}\int_B \exp\left(\left(\alpha_n+|x|^\alpha\right)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)dx<+\infty, \tag{1.7}$$

$$\sup_{u\in W_{0,r}^{1,2}(B),\int_B|\nabla u|^n dx\le 1}\int_B \exp\left(\alpha_n|u|^{\frac{n}{n-1}+|x|^\alpha}\right)dx<+\infty; \tag{1.8}$$

其中$\alpha>0, n\ge 2$和$\alpha_n=n\omega_{n-1}^{1/(n-1)}$, $W_{0,r}^{1,2}(B)$是R^2中B上的径向对称函数的 Soblev 空间. 若在一般的$W_0^{1,2}(B)$上不等式将不再成立. 在此基础上 Wang[10]研究了其奇异超临界型 Trudinger-Moser 不等式.

此外，还有许多研究探讨了超临界 Trudinger-Moser 不等式在更加复杂和抽象的情况下的应用，例如在 Riemannian 流形上、在分数阶 Sobolev 空间上、以及在偏微分方程组的解的全局存在性问题中. 这些研究对于深入理解超临界 Trudinger-Moser 不等式的性质以及推广其应用具有重要意义. 需要指出的是，虽然超临界 Trudinger-Moser 不等式已经得到了广泛的研究和应用，但仍有很多问题值得进一步探究.

第二章 预备知识和主要内容

这一章首先介绍一些基本的概念定理，然后将利用一些已知结果，探讨带特征值的超临界型 Trudinger-Moser 不等式. 我们将通过介绍提升指数和改变范数约束，进而得到本文研究的结果，并给出其数学表达式.

2.1 预备知识

2.1.1 函数空间

（1）基本空间 $D(\Omega)$.

支集 supp$u$：设 $\Omega\subset R^n$ 是一个开集，$u\in C\left(\overline{\Omega}\right)$,称集合 $F=\left\{x\in\Omega \middle| \quad u(x)\neq 0\right\}$ 的闭包为 u 的关于 Ω 的支集. 换句话说，连续函数 u 的支集是在此集外 u 恒为 0 的相对于 Ω 的最小闭包. $C_0^k(\Omega)$ 表示支集在 Ω 内紧的全体 $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ 函数所组成的集合，其中 $k\geq 0$(可为∞)，于是 $C_0^\infty(\Omega)\subset\cdots\subset C_0^{k+1}(\Omega)\subset C_0^k(\Omega)\subset\cdots\subset C_0^0(\Omega)$.

基本空间 $D(\Omega)$：带有下述收敛性的线性空间 $C_0^\infty(\Omega)$，$D(\Omega)$ 是序列完备的. 在集合 $C_0^\infty(\Omega)$ 上定义收敛性如下：序列 $\left\{\varphi_j\right\}$ 收敛于 φ_0，如果

①存在一个相对于 Ω 的紧集 $K\subset\Omega$,使得 $\operatorname{supp}\left(\varphi_j\right)\subset K\,(j=0,1,2,\cdots)$;

②对于任意指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 都有 $\max\limits_{x\in K}\left|\partial^\alpha\varphi_j(x)-\partial^\alpha\varphi_0(x)\right|\to 0\,(j\to\infty)$.

（2）Sobolev 空间

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开集，m 是非负整数，$1\leq p<\infty$，称集合

$$W^{m,p}(\Omega)=\left\{u\in L^p(\Omega)\middle|\tilde{\partial}^\alpha u\in L^p(\Omega),|\alpha|\leq m\right\}$$

按模

$$\|u\|_{m,p}=\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\left\|\tilde{\partial}^\alpha u\right\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega\left|\tilde{\partial}^\alpha u\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

所构成的空间为 Sobolev 空间,记作 $W^{m,p}(\Omega)$ 或 $W_p^m(\Omega)$. 且有 Sobolev 空间是完备的，$D\left(\mathbb{R}^n\right)$ 在 $W^{m,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 中稠密，$W^{m,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 可表示为 $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ 按模 $\|\cdot\|_{m,p}$ 完备化产生的空间且

$$W_0^{m,p}\left(\mathbb{R}^n\right)=W^{m,p}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

但对一般开集Ω未必成立.

2.1.2 弱收敛

在分析领域中，弱收敛是一个基本的概念. 在研究函数序列时，我们经常需要研究它们的极限性质. 弱收敛是一种比较弱的收敛方式，它不要求函数序列在点值上的收敛，而是在某种意义下的平均意义上的收敛.

定义：设X是赋范线性空间，X'是X的共轭空间，泛函列$f_n\in X'\left(n=1,2,\cdots\right)$，如果对任意的$F\in\left(X'\right)'$,都有$F\left(f_n\right)\xrightarrow{n\to\infty}F\left(f\right)$，则称$\{f_n\}$弱收敛于$f$.

2.1.3 重要不等式

（1）Holder 不等式

设$p>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,f\in L^p\left[a,b\right],g\in L^q\left[a,b\right]$，那么$f\left(t\right)g\left(t\right)$在$\left[a,b\right]$上$L$可积，并且

$$\int_a^b\left|f\left(t\right)g\left(t\right)\right|dt\le\left(\int_a^b\left|f\left(t\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b\left|g\left(t\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.\qquad（2.1）$$

（2）Young 不等式

假设a,b是非负实数，当$p>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,$ 那么有

$$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},\qquad（2.2）$$

等号成立当且仅当$a^p=b^q$.

2.1.4 重要引理

（1）法图引理

设$E\subset R^n$为可测集，$\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$为$E$上的一列非负可测函数，则$\int_E\underline{\lim}_{n\to\infty}f_n\left(x\right)dx\le\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n\left(x\right)dx$.

（2）勒贝格控制收敛定理

设$E\subset R^n$为可测集，$\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$为$E$上的一列可测函数，$F$是$E$上的非负$L$可积函数，如果

对于任意的正整数n，$\left|f_n(x)\right|\le F(x)\,a.e.$于$E$且$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\,a.e.$于$E$，则

①$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E\left|f_n(x)-f(x)\right|dx=0;$

②$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx.$

（3）径向引理[20]（径向引理详细证明在[[20],推论 2.2]可以找到）

对于每个$u\in W_{0,r}^{1,n}(B)$且$\|\nabla u\|_{L^n(B)}\le 1$.因为$u$关于原点径向对称的，所以我们常用$u(|x|)$而不是$u(x)$. 根据稠密性我们可假设$u\in C_{0,r}^{\infty}(B)$，则有

$$\left|u(r)\right|\le\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)^{\frac{n-1}{n}}(-\log r)^{\frac{n-1}{n}}\|\nabla u\|_{L^n(B)}\le\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)^{\frac{n-1}{n}}(-\log r)^{\frac{n-1}{n}}\quad. \tag{2.3}$$

2.1.5 刘维尔定理

如果整函数$f(z)$在整个平面上有界，即对所有z满足不等式$\left|f(z)\right|\le M$，则$f(z)$必为常数. 可简单描述为：一个有界的整函数必是常函数.

2.2 主要内容

设B是$\mathbb{R}^2$上的单位圆盘，$W_0^{1,2}(B)$是通常的 Sobolev 的空间，Trudinger-Moser 不等式[4]指出，对任意的$\beta\le 4\pi$

$$\sup_{u\in W_0^{1,2}(B),\|\nabla u\|_2\le 1}\int_B e^{\beta u^2}dx<\infty,$$

在这里$\|.\|_2$代表$L^2(B)$—范数. 对于任意$\beta\le 4\pi$这个不等式是奇异的，积分仍然是有限的，但上确界为无穷.

在[22]和[23]中得到了$W_{0,r}^{m,2}(B)$可以连续嵌入$L_{2_m^*+|x|^\alpha}(B)$，其中$1\le m\le\frac{n}{2},2_m^*=\frac{2n}{n-2m}$和$\alpha\ge 0$. 在上述嵌入中，$B$表示$\mathbb{R}^n$中的单位球，$u\in W_{0,r}^{m,p}(B)$是 Soblolev 空间的一个仅由径向对称函数组成的子空间. 如果我们进一步用$C_{0,r}^{\infty}(B)$表示B中紧支撑的光滑径向对称函数类，$u\in W_{0,r}^{m,p}(B)$也可以定义为$C_{0,r}^{\infty}(B)$在范数$\|u\|_{W_{0,r}^{1,2}(B)}=\left(\int_B\left|\nabla^m u\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$下的完备化，其中对于一个整数$m\ge 1$. 2019 年，Ngo 和 Nguyen[21]的工作建立两个超临界的 Trudinger-Moser 不等式，这两个不等式在$u\in W_{0,r}^{1,n}(B)$提高了经典的 Trudinger-Moser 不等式，同时也证明了其极值函数

的存在性和给出了一类球的边值问题的应用. 在这篇文章中，我们首先根据 Ngo 和 Nguyen 的工作建立一个 $\mathbb{R}^2$ 上超临界的 Trudinger-Moser 不等式：

定理 2.1. 设 B 是 $\mathbb{R}^2$ 上单位球，对 $u \in W_{0,r}^{1,2}(B)$，不等式成立：

$$\sup_{u \in W_{0,r}^{1,2}(B), \|\nabla u\|_2 \le 1} \int_B e^{4\pi\left(1+|x|^2\right)u^2} dx < \infty. \tag{2.4}$$

为了进一步的研究，首先给出 Hardy-Sobolev 不等式，对任意的 $u \in W_0^{1,2}(B)$，存在常数 C，使得

$$\int_B |\nabla u|^2 dx - \int_B u^2 \Big/ \left(1-|x|^2\right)^2 dx \ge \int_B u^2 dx, \tag{2.5}$$

在此基础上在 $C_0^\infty(B)$ 上定义一个范数

$$\|u\|_H = \left(\int_B |\nabla u|^2 dx - \int_B u^2 \Big/ \left(1-|x|^2\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

H 是 $C_0^\infty(B)$ 在范数 $\|\cdot\|_H$ 下的完备化空间. H 是一个希尔伯特空间且有对任意的 $p>1, u \in H$ 存在常数 $C_p > 0$ 满足 $\|u\|_p \le C_p \|u\|_H$，由嵌入定理有 $W_0^{1,2}(B) \subset H \subset \bigcap_{p\ge 1} L^p(B)$. 基于上述理论 Wang-Ye[24]使用爆破分析得到了一个 Hardy-Trudinger-Moser 不等式：

$$\sup_{u \in H, \|u\|_H \le 1} \int_B e^{4\pi u^2} dx < +\infty, \tag{2.6}$$

Yang—Zhu[28]在此基础上,研究了当 B 是 $\mathbb{R}^2$ 上单位球，定义 $\lambda_1(B) = \inf_{u \in H, u \neq 0} \frac{\|u\|_H^2}{\|u\|_2^2}$，运用变分法得存在 $u \in W_{0,r}^{1,2}(B)$ 且 $\|u\|_2^2 = 1$ 使得 $\lambda_1(B)$ 可达，其中 $\lambda_1(B)$ 是算子 $L = -\Delta - \left(1-|x|^2\right)^{-2}$ 的第一特征值. 当 $u \in H$ 和任意的 α，$0 < \alpha < \lambda_1(B)$ 时有 $\|u\|_H^2 - \alpha\|u\|_2^2$ 与 $\|u\|_H$ 范数等价. 建立了一个提高的 Hardy-Trudinger-Moser 不等式，对于任意的 $\beta < 4\pi$ 和任意的 $0 < \alpha < \lambda_1(B)$ 有

$$\sup_{u \in H, \|u\|_H^2 - \alpha\|u\|_2^2 \le 1} \int_B e^{\beta u^2} dx < \infty, \tag{2.7}$$

受 Yang—Zhu 研究启发，我们定义

$$\lambda_1(B) = \inf_{u \in W_{0,r}^{1,2}(B), u \neq 0} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2}, \tag{2.8}$$

这里 $\lambda_1(B)$ 是拉普拉斯算子 $L = -\Delta$ 的第一特征值. 对任意的 α，$0 < \alpha < \lambda_1(B)$ 和任意的

$u\in W_{0,r}^{1,2}\left(B\right)$，我们定义

$$\|u\|_{1,\alpha}=\left(\|\nabla u\|_2^2-\alpha\|u\|_2^2\right)^{1/2},\qquad（2.9）$$

显然$\|.\|_{1,\alpha}$是$\|\nabla u\|_2$的等价范数，我们主要的结果是：

定理 2.2. 设B是$\mathbb{R}^2$上单位球，$\lambda_1\left(B\right)$满足（2.8）对于任意的$0<\alpha<\lambda_1\left(B\right)$，在$u\in W_{0,r}^{1,2}\left(B\right)$时

$$\sup_{u\in W_{0,r}^{1,2}(B),\|u\|_{1,\alpha}\le 1}\int_B e^{4\pi\left(1+|x|^2\right)u^2}dx<\infty.\qquad（2.10）$$

第三章 超临界的 Trudinger-Moser 不等式

这一节主要是讨论定理 2.1 的证明. 事实上下面我们将证明一个更加一般的结果，定理 2.1 将作为以下定理 3.1 的一个特例.

定理 3.1. 设 $f:[0,1)\to[0,\infty)$ 是一个连续函数，满足

(a) $f(0)=0$ 且对 $r>0$ 有 $f(r)>0$;

(b)存在常数 $c>0$,在 r 接近 0 时有 $f(r)\le\frac{c}{-\log r}$;

(c)存在 $\gamma\in(0,1)$，在 r 接近 1 时满足 $f(r)\le\gamma\frac{\alpha_n}{n}\frac{\log(1-r)}{\log r}$.

若 f 满足上述条件,且 $u\in W_{0,r}^{1,n}(B)$，则下列不等式成立

$$\sup_{u\in W_{0,r}^{1,n}(B),\int_B|\nabla u|^n dx\le 1}\int_B\exp\left(\left(\alpha_n+f(|x|)\right)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)dx<+\infty. \tag{3.1}$$

证明：令 $u\in W_{0,r}^{1,n}(B)$ 且 $\|\nabla u\|_{L^n(B)}\le 1$，运用径向引理，对任意 $r\in(0,1)$ 有

$$\alpha_n|u(r)|^{\frac{n}{n-1}}\le -n\log r,\text{其中}\alpha_n=n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}},$$

对 $r>0$ 有

$$f(r)|u(r)|^{\frac{n}{n-1}}\le\frac{n}{\alpha_n}(-\log r)f(r):=g(r),$$

由条件（c）,在 $\rho\in(0,1)$ 和 $r\in(\rho,1)$ 时有 $f(r)|u(r)|^{\frac{n}{n-1}}\le-\gamma\log(1-r)$,则

$$\begin{aligned}\int_B\exp\left((\alpha_n+f(|x|))|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)dx&=\int_{B_\rho}\exp\left((\alpha_n+f(|x|))|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)dx+\int_{B\setminus B_\rho}\exp\left((\alpha_n+f(|x|))|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)dx\\&:=\mathrm{I}+\mathrm{II},\end{aligned}$$

由上述估计可得：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II} &= \omega_{n-1}\int_{\rho}^{1}\exp\left(\left(\alpha_n+f(r)\right)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)r^{n-1}dr \\
&= \omega_{n-1}\int_{\rho}^{1}\exp\left(\alpha_n|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)\exp\left(f(r)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)r^{n-1}dr \\
&\le \omega_{n-1}\int_{\rho}^{1}(1-r)^{-\gamma}r^{-1}dr \\
&\le \frac{\omega_{n-1}}{\rho}\frac{(1-\rho)^{1-\gamma}}{1-\gamma},
\end{aligned}
$$

因为$r\in(0,1)$，所以II是有限的.

下面估计I，我们容易知道函数g在$(0,1)$上连续并在r接近 0 是有界，由此可设

$$
C_\rho=\max_{r\in(0,\rho)}g(r)
$$

根据经典奇异型 Trudinger-Moser 不等式有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \omega_{n-1}\int_{0}^{\rho}\exp\left(\left(\alpha_n+f(r)\right)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)r^{n-1}dr \\
&= \omega_{n-1}\int_{0}^{\rho}\exp\left(\alpha_n|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)\exp\left(f(r)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)r^{n-1}dr \\
&\le e^{C_\rho}\omega_{n-1}\int_{0}^{\rho}\exp\left(\alpha_n|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)r^{n-1}dr \\
&\le e^{C_\rho}\int_{B}\exp\left(\alpha_n|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)dx \\
&\le \infty,
\end{aligned}
$$

综上把两个估计放一起，我们可以得到

$$
\int_B\exp\left(\left(\alpha_n+f(|x|)\right)|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)dx<+\infty.
$$

定理 2.1 是定理 3.1 的特殊情况，此时$n=2,\alpha_2=4\pi,f(r)=4\pi|x|^2$即

$$
\sup_{u\in W_{0,r}^{1,2}(B),\int_B|\nabla u|^2dx\le 1}\int_B\exp\left(4\pi\left(1+|x|^2\right)u^2\right)dx<+\infty.
$$

第四章 带特征值的超临界型 Trudinger-Moser 不等式

本章将介绍定理 2.2 不等式的证明过程. 我们将利用爆破分析和集中能量估计的证明方法，证明带特征值的超临界型 Trudinger-Moser 不等式. 详细讲解证明中的关键步骤，如构建爆破序列、引入截断函数、求解爆破能量等,通过这些步骤，我们将得出该不等式的证明.

4.1 爆破分析

在本小节中将实现爆破程序. 设 $0\le\alpha<\lambda_1(B)$ 时，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $u_\varepsilon\in W_{0,r}^{1,2}(B)\cap C_r^\infty(B)\cap C_r^0(\overline{B})$,且 $\|u_\varepsilon\|_{1,\alpha}=1$. 根据 u_ε 的定义得到在 B 中满足欧拉—拉格朗日方程（简记为 E—L 方程）.

$$\begin{cases}-\Delta u_\varepsilon-\alpha u_\varepsilon=\dfrac{1}{\lambda_\varepsilon}\left(1+|x|^2\right)u_\varepsilon e^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_\varepsilon^2},\\ \lambda_\varepsilon=\int_B\left(1+|x|^2\right)u_\varepsilon^2 e^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_\varepsilon^2}dx.\end{cases}\tag{4.1}$$

其中我们可以得到 λ_ε 是一个常数，满足 $\liminf\limits_{\varepsilon\to0}\lambda_\varepsilon>0$，类似证明参见[28].

首先研究 u_ε，因为 $\|u_\varepsilon\|_{1,\alpha}=1$，$u_\varepsilon$ 在 $W_{0,r}^{1,2}(B)$ 有界，则存在 $u_0\in L^2(B)$，使得直到一个子列满足在 $\varepsilon\to0$ 时，$L^2(B)$ 中有 $u_\varepsilon\to u_0$ 和在 B 中 u_ε 几乎处处收敛到 u_0. 注意到

$$\left\langle u_\varepsilon,u_0\right\rangle_{W_{0,r}^{1,2}(B)}=\left\langle u_0,u_0\right\rangle_{W_{0,r}^{1,2}(B)}$$

我们有 $\|u_0\|_{1,\alpha}^2=\|\nabla u_0\|_2^2-\alpha\|u_0\|_2^2\le\liminf\limits_{\varepsilon\to0}\|u_\varepsilon\|_{1,\alpha}=1$.

现设 $c_\varepsilon=u_\varepsilon(0)=\max\limits_B u_\varepsilon$. 如果 c_ε 有界，利用勒贝格收敛定理

$$\int_B e^{4\pi(1+|x|^2)u_0^2}dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_B e^{(4\pi-\varepsilon)(1+|x|^2)u_\varepsilon^2}dx=\sup_{u\in W_{0,r}^{1,2}(B),\|u\|_{1,\alpha}^2=1}\int_B e^{(4\pi-\varepsilon)(1+|x|^2)u^2}dx.$$

因此，u_0 是极值函数并且定理 2.2 成立. 下面我们假设当 $\varepsilon\to0$ 时，$c_\varepsilon\to+\infty$，现在我们要论证 $u_0\equiv0$，为此利用反证法说明. 假设 $u_0\ne0$，然后 $\|u_0\|_{1,\alpha}>1$. 一方面由基本不等式

$$\forall v>0,2ab\le va^2+b^2/v$$

知，$u_\varepsilon^2\le(1+v)(u_\varepsilon-u_0)^2+(1+1/v)u_0^2$，利用 Holder 不等式，对任意的 $v>0$,

$$\left\|e^{(4\pi-\varepsilon)(1+|x|^2)u_\varepsilon^2}\right\|_{1+v} \le \left\|e^{(4\pi-\varepsilon)(1+|x|^2)(u_\varepsilon-u_0)^2}\right\|_{(1+v)(1+2v)}^{1+v} \left\|e^{(4\pi-\varepsilon)(1+|x|^2)u_0^2}\right\|_{(1+v)^2(1+2v)/v^2}^{1+1/v}. \qquad (4.2)$$

另一方面

$$\begin{aligned}\|\nabla(u_\varepsilon-u_0)\|_2^2 &= \|\nabla u_\varepsilon\|_2^2-\|\nabla u_0\|_2^2+o_\epsilon(1)\\ &=\|u_\varepsilon\|_{1,\alpha}^2-\|u_0\|_{1,\alpha}^2+o_\epsilon(1)\\ &=1-\|u_0\|_{1,\alpha}^2+o_\epsilon(1)\\ &<1-\|u_0\|_{1,\alpha}^2/2,\end{aligned} \qquad (4.3)$$

在ε足够小时，在（4.2）中取$v=\|u_0\|_{1,\alpha}^2/16$，结合（4.3）和定理 2.1 得$e^{(4\pi-\varepsilon)(1+|x|^2)u_\varepsilon^2}$在$L^{1+v}(B)$中有界，对 E—L 方程运用标准椭圆估计，可以得到u_ε在$C_{loc,r}^0(B)$中有界，这与假设相矛盾，因此$u_0\equiv 0$.

从现在开始，假设$\varepsilon\to 0$时$c_\varepsilon\to+\infty$. 首先定义爆破半径

$$r_\varepsilon^2=\lambda_\varepsilon c_\varepsilon^{-2}e^{-(4\pi-\varepsilon)u_\varepsilon^2},$$

对任意$0<\delta<4\pi$，存在常数 C 只依赖δ，使用 Holder 不等式有

$$\lambda_\varepsilon=\int_B(1+|x|^2)u_\varepsilon^2 e^{(4\pi-\varepsilon)(1+|x|^2)u_\varepsilon^2}dx\le e^{\delta(1+|x|^2)c_\varepsilon^2}\int_B(1+|x|^2)u_\varepsilon^2 e^{(4\pi-\varepsilon-\delta)(1+|x|^2)u_\varepsilon^2}dx\le Ce^{2\delta c_\varepsilon^2},$$

则当$\varepsilon\to 0$,

$$r_\varepsilon^2\le Cc_\varepsilon^{-2}e^{(4\pi-\varepsilon-2\delta)c_\varepsilon^2}\to 0. \qquad (4.4)$$

在$B_{r_\varepsilon^{-1}}=\left\{x\in\mathbb{R}^2:|x|<r_\varepsilon^{-1}\right\}$上定义两个爆破函数序列

$$\psi_\varepsilon(x)=c_\varepsilon^{-1}u_\varepsilon(r_\varepsilon x),\varphi_\varepsilon(x)=c_\varepsilon(u_\varepsilon(r_\varepsilon x)-c_\varepsilon),$$

直接计算显示

$$-\Delta\psi_\varepsilon=\alpha r_\varepsilon^2\psi_\varepsilon+c_\varepsilon^{-2}(1+|r_\varepsilon x|^2)\psi_\varepsilon e^{(4\pi-\varepsilon)\left[(1+\psi_\varepsilon)\varphi_\varepsilon+c_\varepsilon^2\psi_\varepsilon^2|r_\varepsilon x|^2\right]} \qquad (4.5)$$

$$-\Delta\varphi_\varepsilon=\alpha r_\varepsilon^2 c_\varepsilon^2\psi_\varepsilon+(1+|r_\varepsilon x|^2)\psi_\varepsilon e^{(4\pi-\varepsilon)\left[(1+\psi_\varepsilon)\varphi_\varepsilon+c_\varepsilon^2\psi_\varepsilon^2|r_\varepsilon x|^2\right]} \qquad (4.6)$$

现在我们考虑$\psi_\varepsilon,\varphi_\varepsilon$的渐进性质. 由（4.4）可知对任意$q\ge 1$，$r_\varepsilon^2c_\varepsilon^q\xrightarrow{\varepsilon\to 0}0$；在$\varepsilon\to 0$时$B_{r_\varepsilon^{-1}}\to\mathbb{R}^2$，可以得到$|\psi_\varepsilon|\le 1$和对任意固定的$R>0$，$\varepsilon\to 0$时在$B_R$中$\Delta\psi_\varepsilon(x)\xrightarrow{一致}0$.对（4.5）

运用椭圆估计，存在$\psi \in \mathbb{R}^2$是一个有界调和函数，在$C^1_{loc,r}\left(\mathbb{R}^2\right)$上满足$\psi_\varepsilon \to \psi$. 注意到$\psi(0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\psi_\varepsilon(0)=1$，根据刘维尔定理知$\mathbb{R}^2$上$\psi\equiv 1$，因此$\psi_\varepsilon \to 1$.

由于对所有$x\in B_{r_\varepsilon^{-1}}$，$\varphi_\varepsilon \le \varphi_\varepsilon(0)=0$，不难发现对任意固定的$R>0$，$\Delta\varphi_\varepsilon$在$\mathbb{R}^2$上一致有界. 对（4.6）再次使用椭圆估计，在$C^1_{loc,r}\left(\mathbb{R}^2\right)$上$\varphi_\varepsilon \to \varphi$，这里$\varphi$满足

$$\begin{cases} \Delta\varphi = -e^{8\pi\varphi} \\ \varphi(0)=0=\sup_{R^2}\varphi \\ \int_{\mathbb{R}^2} e^{8\pi\varphi}dx \le 1, \end{cases} \tag{4.7}$$

其中有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} e^{8\pi\varphi}dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{B_R(0)}\left(1+|r_\varepsilon x|^2\right)\psi_\varepsilon \mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)\left[(1+\psi_\varepsilon)\varphi_\varepsilon + c_\varepsilon^2\psi_\varepsilon^2|r_\varepsilon x|^2\right]}dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{B_R(0)}\left(1+|r_\varepsilon x|^2\right)\frac{u_\varepsilon(r_\varepsilon x)}{c_\varepsilon}\mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)\left[u_\varepsilon^2(r_\varepsilon x)-c_\varepsilon^2+u_\varepsilon^2(r_\varepsilon x)|r_\varepsilon x|^2\right]}dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{B_{Rr_\varepsilon}(x)}\left(1+|y|^2\right)\frac{u_\varepsilon(y)}{c_\varepsilon}\mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)\left[u_\varepsilon^2(y)-c_\epsilon^2+u_\varepsilon^2(y)|y|^2\right]}\lambda_\varepsilon^{-1}c_\varepsilon^2 e^{(4\pi-\varepsilon)c_\varepsilon^2}dy \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_\varepsilon^{-1}\int\limits_{B_{Rr_\varepsilon}(x)}\left(1+|y|^2\right)c_\varepsilon u_\varepsilon(y)\mathrm{e}^{(4\pi-\epsilon)u_\varepsilon^2(y)\left[1+|y|^2\right]}dy \\
&\le 1.
\end{aligned}$$

根据 Chen-Li[32]，则有

$$\varphi(x) = -\frac{1}{4\pi}\log\left(1+\pi|x|^2\right), \int_{\mathbb{R}^2} e^{8\pi\varphi}dx = 1. \tag{4.8}$$

现在我们考虑u_ε在远离 0 处的收敛行为. 对任意$0<\beta<1$, 设$u_{\varepsilon,\beta}=\min\left\{u_\varepsilon, \beta c_\varepsilon\right\}$，将有下述引理.

引理 4.1. 对于任意的$0<\beta<1$，有$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left\|u_{\varepsilon,\beta}\right\|_{1,\alpha}^2=\beta.$

证明：注意到$\left(u_\varepsilon-\beta c_\varepsilon\right)^+ \in W_{0,r}^{1,2}(B)$，因此$u_{\varepsilon,\beta}=u_\varepsilon-\left(u_\varepsilon-\beta c_\varepsilon\right)^+\in W_{0,r}^{1,2}(B)$. 使用$u_{\varepsilon,\beta}$测试（4.1）中 E—L 方程，可以得到

$$\int_B\left(\nabla u_{\varepsilon,\beta}\nabla u_\varepsilon - \alpha u_{\varepsilon,\beta}u_\varepsilon\right)dx = \int_B\frac{1}{\lambda_\varepsilon}\left(1+|x|^2\right)u_{\varepsilon,\beta}u_\varepsilon \mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_\varepsilon^2}dx.$$

利用范数定义可以得到

$$\begin{aligned}\|u_{\varepsilon,\beta}\|_{1,\alpha}^2 &= \int_B \left(\nabla u_{\varepsilon,\beta}\nabla u_\varepsilon - \alpha u_{\varepsilon,\beta}u_\varepsilon\right)dx + \alpha\int_B u_{\varepsilon,\beta}\left(u_\varepsilon - u_{\varepsilon,\beta}\right)dx \\ &\geq \int_B \frac{1}{\lambda_\epsilon}\left(1+|x|^2\right)u_{\varepsilon,\beta}u_\varepsilon \mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_\varepsilon^2}dx \\ &\geq \beta\int_{B_R(0)}\left(1+o_\epsilon(1)\right)\mathrm{e}^{8\pi\varphi}dy,\end{aligned}$$

对于任意 $R>0$，令 $\varepsilon\to 0$，$R\to\infty$ 可以得到

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\|u_{\varepsilon,\beta}\|_{1,\alpha}^2 \geq \beta.$$

类似的，使用 $(u_\varepsilon-\beta c_\varepsilon)^+$ 测试 E—L 方程，可以得到

$$\begin{aligned}\left\|(u_\varepsilon-\beta c_\varepsilon)^+\right\|_{1,\alpha}^2 &= \int_B\left(\nabla(u_\varepsilon-\beta c_\varepsilon)^+\nabla u_\varepsilon - \alpha(u_\varepsilon-\beta c_\varepsilon)^+u_\varepsilon\right)dx + \alpha\int_B (u_\varepsilon-\beta c_\varepsilon)^+u_{\varepsilon,\beta}dx \\ &\geq \int_B \frac{1}{\lambda_\varepsilon}\left(1+|x|^2\right)(u_\varepsilon-\beta c_\varepsilon)^+u_\varepsilon \mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_\varepsilon^2}dx \\ &\geq (1-\beta)\int_{B_R(0)}\left(1+o_\epsilon(1)\right)\mathrm{e}^{8\pi\varphi}dy,\end{aligned}$$

这表明

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\left\|(u_\varepsilon-\beta c_\varepsilon)^+\right\|_{1,\alpha}^2 \geq 1-\beta.$$

因为在 $L^p(B)$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时，$u_\varepsilon\to 0$ 对固定的 $p>1$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\|u_{\varepsilon,\beta}\|_{1,\alpha}^2 + \left\|(u_\varepsilon-\beta c_\varepsilon)^+\right\|_{1,\alpha}^2 - \|u_\varepsilon\|_{1,\alpha}^2\right) = 0,$$

因此

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|u_{\varepsilon,\beta}\|_{1,\alpha}^2 = \beta, \lim_{\varepsilon\to 0}\left\|(u_\varepsilon-\beta c_\varepsilon)^+\right\|_{1,\alpha}^2 = 1-\beta.$$

即可证明该引理.

引理 4.2. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_B e^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_\varepsilon^2}dx = \pi + \limsup\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\lambda_\varepsilon}{c_\varepsilon^2}.$

证明：一方面对任意的 $0<\beta<1$

$$\begin{aligned}\int_B \mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)(1+|x|^2)u_\varepsilon^2}dx &= \int_{u_\varepsilon<\beta c_\varepsilon}\mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)(1+|x|^2)u_\varepsilon^2}dx + \int_{u_\varepsilon\geq\beta c_\varepsilon}\mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)(1+|x|^2)u_\varepsilon^2}dx \\ &\leq \int_B \mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)(1+|x|^2)u_{\varepsilon,\beta}^2}dx + \frac{1}{\beta^2c_\varepsilon^2}\int_{u_\varepsilon\geq\beta c_\varepsilon}(1+|x|^2)u_\varepsilon^2\mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)(1+|x|^2)u_\varepsilon^2}dx \\ &\leq \int_B \mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)(1+|x|^2)u_{\varepsilon,\beta}^2}dx + \frac{\lambda_\varepsilon}{\beta^2c_\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

由引理 4.1 可知$\varepsilon \to 0$有$\int_B e^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_{\varepsilon,\beta}^2}dx \to |B| = \pi$，因此

$$\int_B e^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_\varepsilon^2}dx \le \pi + \frac{\lambda_\varepsilon}{\beta^2 c_\varepsilon^2} + o_\varepsilon(1).$$

在不等式中先令$\varepsilon \to 0$，在取$\beta \to 1$，可以得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_B e^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_\varepsilon^2}dx \le \pi + \limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\lambda_\varepsilon}{\beta^2 c_\varepsilon^2}.$$

另一方面根据（4.7）可以计算得到

$$\begin{aligned}\int_{B_{Rr_\varepsilon}} \mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_\varepsilon^2}dx &= \int_{B_R} \mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|r_\varepsilon y|^2\right)u_\varepsilon^2(r_\varepsilon y)} r_\varepsilon^2 dy \\ &= \frac{\lambda_\varepsilon}{c_\varepsilon^2}\int_{B_R} \mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)\left[\left(1+|r_\varepsilon y|^2\right)u_\varepsilon^2(r_\varepsilon y)-c_\varepsilon^2\right]}dy \\ &= \frac{\lambda_\varepsilon}{c_\varepsilon^2}\left(\int_{B_R} \mathrm{e}^{8\pi\varphi}dx + o_\varepsilon(1)\right),\end{aligned}$$

则有

$$\int_{B_{Rr_\varepsilon}} \mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_\varepsilon^2}dx \le \int_B \mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_\varepsilon^2}dx - \pi\left(1-R^2 r_\varepsilon^2\right).$$

由上面的估计，令$\varepsilon \to 0, R \to +\infty$，则有

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\lambda_\varepsilon}{c_\varepsilon^2} \le \lim_{\varepsilon\to 0}\int_B e^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_\varepsilon^2}dx - \pi.$$

证毕.

同时根据引理，我们可以得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{c_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon} = 0. \tag{4.9}$$

引理 4.3. 任意的$\phi \in C_r^\infty\left(\overline{B}\right)$，$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_B \phi \frac{1}{\lambda_\epsilon} c\, u\, \mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_\epsilon^2}dx = \phi(0).$

证明：对固定的$0<\beta<1$,我们将B分成三部分

$$B = \left(\{u_\varepsilon > \beta c_\varepsilon\} \setminus B_{Rr_\varepsilon}\right) \bigcup \left(\{u_\varepsilon \le \beta c_\varepsilon\} \setminus B_{Rr_\varepsilon}\right) \bigcup B_{Rr_\varepsilon}.$$

定义这个积分在这三个区域为I_1, I_2和I_3，可以分别计算得

$$
\begin{aligned}
\left|I_1\right| &\le \sup_B |\phi| \int_{\{u_\varepsilon>\beta c_\varepsilon\}\setminus B_{Rr_\varepsilon}} \frac{1}{\lambda_\varepsilon} c_\varepsilon u_\varepsilon \mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_\varepsilon^2} dx \\
&\le \frac{1}{\beta}\sup_B|\phi|\left(1-\int_{B_{Rr_\varepsilon}} \frac{1}{\lambda_\varepsilon} u_\varepsilon^2 \mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_\varepsilon^2} dx\right) \\
&= \frac{1}{\beta}\sup_B|\phi|\left(1-\int_{B_R} \mathrm{e}^{8\pi\varphi} dx + o_\varepsilon(R)\right),
\end{aligned}
$$

这里对任意固定的$R>0$，$\varepsilon\to 0$时$o_\varepsilon\left(R\right)\to 0$. 让$\varepsilon\to 0, R\to+\infty$得到$I_1\to 0$.

$$
\begin{aligned}
\left|I_2\right| &\le \sup_B |\phi| \int_{\{u_\varepsilon\le\beta c_\varepsilon\}\setminus B_{Rr_\varepsilon}} \frac{1}{\lambda_\varepsilon} c_\varepsilon u_\varepsilon \mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_\varepsilon^2} dx \\
&\le \frac{c_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon}\sup_B|\phi|\int_{B_R} u_\varepsilon \mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_{\varepsilon,\beta}^2} dx,
\end{aligned}
$$

由引理 4.1 和（4.9）知在$\varepsilon\to 0, R\to+\infty$时$I_2\to 0$.

同时我们可以得到

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_{B_{Rr_\varepsilon}} \phi \frac{1}{\lambda_\varepsilon} c_\varepsilon u_\varepsilon \mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_\varepsilon^2} dx \\
&= \phi\left(\xi\right)\left(\int_{B_R} \mathrm{e}^{8\pi\varphi} dx + o_\varepsilon(R)\right).
\end{aligned}
$$

其中$\xi\in B_{Rr_\varepsilon}$，让$\varepsilon\to 0, R\to+\infty$可以得到$I_3=\phi\left(0\right)$. 结合上面所有估计，该引理证毕.

为了简便，定义

$$
L_\alpha = -\Delta-\alpha
$$

我们将有：

引理 4.4. 函数序列$c_\varepsilon u_\varepsilon$收敛到$G$，满足对任意的$p\in\left(1,2\right)$，在$W_{loc,r}^{1,p}\left(B\right)$中弱收敛；对任意$q\ge 1$，在$L^q\left(B\right)$中强收敛；并且对任意$r\in\left(0,1\right)$，在$C_r^0\left(\overline{B_r^c}\right)$也收敛，这里$G$是一个格林函数满足$L_\alpha G=\delta_0$，其中$\delta_0$是一个狄拉克函数.

证明：由定义可知

$$
L_\alpha\left(c_\varepsilon u_\varepsilon\right) = f_\varepsilon = \frac{1}{\lambda_\varepsilon}\left(1+|x|^2\right) c_\varepsilon u_\varepsilon \mathrm{e}^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_\varepsilon^2}.
$$

设v_ε是下列方程的解

$$
\begin{cases}
L_\alpha v_\varepsilon = f_\varepsilon, B_{1/2} \\
v_\varepsilon = 0, \partial B_{1/2}
\end{cases}
$$

由引理 4.3 知，f_ε 在 $L^1(B)$ 中有界. 结合 Struwe[[31],Theorem 2.2]的结果，对于任意的 $q\in(1,2)$，

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_q \le C\|f_\varepsilon\|_1,$$

存在一个 $v_0\in W_{0,r}^{1,q}\left(B_{1/2}\right)$ 满足 v_ε 弱收敛于 v_0.

设剪切函数 $\phi\in C_{0,r}^{\infty}(B)$ 满足 $0\le\phi\le 1$，在 $B_{1/8}$ 内 $\phi\equiv 1$ 和在 $B_{1/4}$ 外 $\phi\equiv 0$.设 $w_\varepsilon=c_\varepsilon u_\varepsilon-\phi v_\varepsilon$，将有

$$L_\alpha w_\varepsilon=(1-\phi)f_\varepsilon+\Delta\phi v_\varepsilon+2\nabla\phi\nabla v_\varepsilon.$$

通过式（4.9）可知 f_ε 在 $B\setminus B_{1/16}$ 一致有界,同时根据 Sobolev 嵌入定理 v_ε 在 $L^2\left(B_{1/2}\right)$ 有界. 应用椭圆估计，可得到 v_ε 在 $W_r^{2,2}\left(B_{1/4}\setminus B_{1/8}\right)$ 中有界，因此 $\nabla\phi\nabla v_\varepsilon$ 在 $L^2(B)$ 有界. 因此 $L_\alpha w_\varepsilon$ 在 $L^2(B)$ 有界，则有

$$\|w_\varepsilon\|_{1,\alpha}^2=\langle w_\varepsilon, L_\alpha w_\varepsilon\rangle_{L^2}\le C\|w_\varepsilon\|_{1,\alpha}\|L_\alpha w_\varepsilon\|_2,$$

这表明 w_ε 在 $W_{0,,r}^{1,2}(B)$ 有界，存在 $w_0\in W_{0,,r}^{1,2}(B)$ 使得 w_ε 弱收敛到 w_0.

令 $G=\phi v_0+w_0$，扩展 $v_0=0$ 在 $B\setminus B_{1/2}$ 内. 即可得函数序列 $c_\varepsilon u_\varepsilon\to G$，对任意 $q\ge 1$，在 $L^q(B)$ 中强收敛；并且对任意 $r\in(0,1)$，在 $C_r^0\left(\overline{B_r^c}\right)$ 也收敛，并且对任意的 $\phi\in C_{0,r}^{\infty}(B)$，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_B c_\varepsilon u_\varepsilon L_\alpha\varphi dx=\int_B GL_\alpha\varphi dx.$$

结合引理 4.3 完成了此引理证明, 并且可以得到

$$G=-\frac{1}{2\pi}\log r+A_0+\widetilde{\psi}, \tag{4.10}$$

其中 A_0 是一个常数和 $\widetilde{\psi}\in C_{loc}^1(B)$.

4.2 集中能量上界估计

在这一部分，将使用 Zhu[29]容量估计，这一主题的首次使用 Y. Li[30]中，去推导引理 4.2 中积分的集中能量上界.

引理 4.5. 对任意的 $0<r<1$，有 $\int_{B_r}|\nabla u_\varepsilon|^2dx=1+\frac{1}{c_\varepsilon^2}\left(\frac{1}{2\pi}\log r-A_0+o_\varepsilon(1)+o_r(1)\right).$

这里 $\varepsilon\to 0$ 时 $o_\varepsilon(1)\to 0$，当 $r\to 0$ 时 $o_r(1)\to 0$.

证明：根据（4.1）E—L 方程，我们使用散度定理可知

$$\begin{aligned}\int_{B_r}|\nabla u_\varepsilon|^2dx&=-\int_{B_r}u_\varepsilon\Delta u_\varepsilon dx+\int_{\partial B_r}u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial v}ds\\&=\int_{B_r}u_\varepsilon L_\alpha u_\varepsilon dx+\int_{\partial B_r}u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial v}ds+\alpha\int_{B_r}u_\varepsilon^2dx\\&=\int_{B_r}\frac{u_\varepsilon^2}{\lambda_\varepsilon}\left(1+|x|^2\right)e^{(4\pi-\varepsilon)\left(1+|x|^2\right)u_\varepsilon^2}dx+\int_{\partial B_r}u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial v}ds+\alpha\int_{B_r}u_\varepsilon^2dx.\end{aligned}$$

现在我们估计上面这三个积分，结合引理 4.4 和（4.9）可计算

$$\begin{aligned}\int_{B_r}\frac{u_\varepsilon^2}{\lambda_\varepsilon}(1+|x|^2)e^{(4\pi-\varepsilon)(1+|x|^2)u_\varepsilon^2}dx&=1-\frac{1}{c_\epsilon^2}\int_{B\setminus B_r}\frac{(c_\varepsilon u_\varepsilon)^2}{\lambda_\varepsilon}(1+|x|^2)e^{(4\pi-\varepsilon)(1+|x|^2)u_\varepsilon^2}dx\\&=1-\frac{1}{c_\varepsilon^2}o_\varepsilon(1),\end{aligned}$$

利用引理 4.4 和格林函数 G 的形式（4.10）可得

$$\int_{\partial B_r}u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial v}ds=\frac{1}{c_\varepsilon^2}\left(\int_{\partial B_r}G\frac{\partial G}{\partial r}ds+o_\varepsilon(1)\right)=\frac{1}{c_\varepsilon^2}\left(\frac{1}{2\pi}\log r-A_0+o_r(1)\right),$$

$$\int_{B_r}u_\varepsilon^2dx=\frac{1}{c_\varepsilon^2}\left(\int_{B_r}G^2dx+o_\varepsilon(1)\right)=\frac{o_r(1)+o_\varepsilon(1)}{c_\varepsilon^2},$$

综合上面估计，引理证毕.

引理 4.6. 对正整数δ和R，满足$\delta>Rr_\varepsilon$，下式成立

$$\int_{B_\delta\setminus B_{Rr_\varepsilon}}|\nabla u_\varepsilon|^2dx=1+\frac{1}{c_\varepsilon^2}\left(-\frac{\log R}{2\pi}+\frac{\log\delta}{2\pi}-\frac{\log\pi}{4\pi}+\frac{1}{4\pi}-A_0+o_\delta(1)+O\left(\frac{1}{R^2}\right)+o_\varepsilon(1)\right).$$

证明：由式子（4.7）和（4.8）可得

$$\begin{aligned}\int_{B_{Rr_\varepsilon}}|\nabla u_\varepsilon|^2dx&=\left(\int_B c_\varepsilon^{-2}|\nabla\varphi_\varepsilon(y)|^2dy\right)\\&=\frac{1}{c_\varepsilon^2}\left(\int_{B_R}|\nabla\varphi(y)|^2dy+o_\varepsilon(1)\right)\\&=\frac{1}{c_\varepsilon^2}\left(\frac{\log R}{2\pi}+\frac{\log\pi}{4\pi}-\frac{1}{4\pi}+O\left(\frac{1}{R^2}\right)+o_\varepsilon(1)\right).\end{aligned}$$

结合引理 4.5 证毕.

令$0<s<r<1$和$a,b\in R$，定义函数$h:B_r\setminus B_s\to R,$

$$h(x)=\frac{b\log\frac{|x|}{s}+a\log\frac{r}{|x|}}{\log\frac{r}{s}},$$

函数h在平面域$B_r\setminus B_s$上调和. 并且在边界上有$h|_{\partial B_s}=a,h|_{\partial Br}=b.$ 同时有

$$\int_{B_r\setminus B_s}\left|\nabla h\right|^2dx=\frac{2\pi\left(b-a\right)^2}{\log\frac{r}{s}}. \tag{4.11}$$

定义一个函数空间

$$W=W\left(h,r,s\right)=\left\{u\in W_r^{1,2}\left(B_r\setminus B_s\right)|\,u-h\in W_{0,r}^{1,2}\left(B_r\setminus B_s\right)\right\}.$$

利用直接变分法，对于上述调和函数h，下式可达

$$\inf_{u\in W}\int_{B_r\setminus B_s}\left|\nabla u\right|^2dx$$

事实上，可以证明下述引理：

引理 4.7. 令$0<s<r<1$， $a,b\in R$和上面给的h,W，有

$$\inf_{u\in W}\int_{B_r\setminus B_s}\left|\nabla u\right|^2dx=\frac{2\pi\left(b-a\right)^2}{\log\frac{r}{s}}.$$

其中引理 4.7 可由下一引理推导：

引理 4.8. 假设$0<\delta<1$，$R>0$和ε足够小时，下式成立：

$$\int_{B_\delta\setminus B_{Rr_\varepsilon}}|\nabla u_\varepsilon|^2\,dx\geq\frac{2\pi(b_\varepsilon-a_\varepsilon)^2}{\log\frac{\delta}{Rr_\varepsilon}}.$$

这里a ,b 的定义满足

$$a_\varepsilon=u_\varepsilon\big|_{\partial B_{Rr_\varepsilon}}=c_\varepsilon+\frac{1}{c_\varepsilon}\left(-\frac{1}{2\pi}\log R-\frac{1}{4\pi}\log\pi+O\left(\frac{1}{R^2}\right)+o_\varepsilon(1)\right),$$

$$b_\varepsilon=u_\varepsilon\big|_{\partial B_\delta}=\frac{1}{c_\varepsilon}\left(-\frac{1}{2\pi}\log\delta+A_0+o_\delta(1)+o_\varepsilon(1)\right).$$

证明：用$a_\varepsilon,b_\varepsilon,Rr_\varepsilon,\delta$替换$a,b,s,r$，令

$$h_\varepsilon(x)=\frac{b_\varepsilon\log\frac{|x|}{Rr_\varepsilon}+a_\varepsilon\log\frac{\delta}{|x|}}{\log\frac{\delta}{Rr_\varepsilon}},$$

且有 $h_\varepsilon|_{\partial B_{Rr_\varepsilon}}=u_\varepsilon|_{\partial B_{Rr_\varepsilon}}, h_\varepsilon|_{\partial B_\delta}=u_\varepsilon|_{\partial B_\delta}$，因此有 $u_\varepsilon-h_\varepsilon\in W_{0,r}^{1,2}\left(B_\delta\setminus B_{Rr_\varepsilon}\right)$ 及

$$\int_{B_\delta\setminus B_{Rr_\varepsilon}}|\nabla u_\varepsilon|^2\,dx\geq\inf_{v\in W\left(h_\varepsilon,\delta,Rr_\varepsilon\right)}\int_{B_\delta\setminus B_{Rr_\varepsilon}}|\nabla v|^2\,dx=\int_{B_\delta\setminus B_{Rr_\varepsilon}}|\nabla h_\varepsilon|^2\,dx.$$

结合（4.11）即证.

接下来做能量估计. 直接计算可得

$$\begin{aligned}2\pi\left(b_\varepsilon-a_\varepsilon\right)^2&=2\pi\left\{c_\varepsilon+\frac{1}{c_\varepsilon}\left(-\frac{1}{2\pi}\log R+\frac{1}{2\pi}\log\delta-\frac{1}{4\pi}\log\pi-A_0+o(1)\right)\right\}^2\\&=2\pi c_\varepsilon^2\left\{1+\frac{1}{c_\varepsilon^2}\left(-\frac{1}{\pi}\log R+\frac{1}{\pi}\log\delta-\frac{1}{2\pi}\log\pi-2A_0+o(1)\right)\right\},\end{aligned}\tag{4.12}$$

这里 $o(1)\to 0$，在 $\varepsilon\to 0$，$R\to+\infty$ 和 $\delta\to 0$. 也可以得到

$$\log\frac{\delta}{Rr_\varepsilon}=\log\delta-\log R-\log\frac{\sqrt{\lambda_\varepsilon}}{c_\varepsilon}+(2\pi-\varepsilon/2)c_\varepsilon^2,\tag{4.13}$$

结合引理 4.6，引理 4.8，式（4.12）和（4.13），可以得到

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{c_\varepsilon^2}\left(-\frac{\log R}{2\pi}+\frac{\log\delta}{2\pi}-\frac{\log\pi}{4\pi}+\frac{1}{4\pi}-A_0+o(1)\right)\\&\geq\frac{1+\frac{1}{c_\varepsilon^2}\left(-\frac{\log R}{\pi}+\frac{\log\delta}{\pi}-\frac{\log\pi}{2\pi}-2A_0+o(1)\right)}{1-\frac{\varepsilon}{4\pi}+\frac{1}{c_\varepsilon^2}\left(-\frac{\log R}{2\pi}+\frac{\log\delta}{2\pi}-\frac{1}{2\pi}\log\frac{\sqrt{\lambda_\varepsilon}}{c_\varepsilon}\right)}.\end{aligned}$$

可推导出

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{c_\varepsilon^2}\left(-\frac{\log R}{\pi}+\frac{\log\delta}{\pi}-\frac{\log\pi}{4\pi}+\frac{1}{4\pi}-A_0-\frac{1}{2\pi}\log\frac{\sqrt{\lambda_\varepsilon}}{c_\varepsilon}+o(1)\right)\\&\geq 1+\frac{1}{c_\varepsilon^2}\left(-\frac{\log R}{\pi}+\frac{\log\delta}{\pi}-\frac{\log\pi}{2\pi}-2A_0+o(1)\right).\end{aligned}$$

根据上述计算有

$$\frac{1}{2\pi}\log\frac{\sqrt{\lambda_\varepsilon}}{c_\varepsilon}\leq\frac{\log\pi}{4\pi}+\frac{1}{4\pi}+A_0+o(1),$$

$$\frac{\lambda_\varepsilon}{c_\varepsilon^2}\leq\pi e^{1+4\pi A_0+o(1)}.$$

结合引理 4.2 即可得到：

命题 4.9. 假设 $\varepsilon\to 0$ 时 $c_\varepsilon=\max_B u_\varepsilon\to+\infty$, 则有

$$\sup_{u\in W_{0,r}^{1,2}(B),\|u\|_{1,\alpha}\le 1}\int_B e^{4\pi(1+|x|^2)u^2}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_B e^{(4\pi-\varepsilon)(1+|x|^2)u_\varepsilon^2}dx\le \pi+\pi e^{1+4\pi A_0}.$$

结 论

本文主要研究了带特征值的超临界型 Trudinger-Moser 不等式在在二维欧式空间中的存在性，应用了爆破分析方法和集中能量上界估计，两者均是研究奇异型 Trudinger-Moser 不等式重要的手段和技巧。通过该不等式的证明和分析，将对 Trudinger-Moser 不等式及其超临界情形有进一步的理解和认识。但是该不等式研究可以进一步构造函数测试序列验证指数的临界性问题。同时在理论研究中，可以探讨带特征值的超临界 Trudinger-Moser 不等式在高维空间的情形等。

我们发现超临界 Trudinger-Moser 不等式的特殊形式具有很强的物理背景和应用价值。实际应用中，超临界的 Trudinger-Moser 不等式也被广泛应用于偏微分方程的研究。例如，在研究椭圆型偏微分方程的非线性椭圆性和存在唯一性问题时，超临界的 Trudinger-Moser 不等式可以用于证明解的存在性和唯一性。此外，在材料科学、化学和生物学等领域的分子结构和动力学方程中，超临界的 Trudinger-Moser 不等式也被广泛应用于描述分子的性质和行为。

在未来的研究中，我们可以考虑以下两个方面进行深入探究：

一方面，可以推广超临界 Trudinger-Moser 不等式的形式和假设条件，探讨更广泛的函数空间中的存在性和唯一性问题。另一方面，将该不等式应用于更加复杂的偏微分方程模型中，例如非线性偏微分方程和双曲型偏微分方程等，探讨其在实际问题中的应用。

总的来说，超临界的 Trudinger-Moser 不等式是一类重要的数学工具，在数学和应用领域都有广泛的应用价值。对其研究和应用的深入探讨，有助于推动数学和其他相关领域的发展和进步。

致 谢

可是我觉得那是路过的脚步，那是走向别人的脚步，直到有一天这个脚步停留在这里，然后门铃响了。他反复的按着门铃，我开了门，他走了进来，喝了我的茶，听了我的故事，然后转身离开，我也锁上了门，从此便是江湖。

总觉得来日方长，毕业遥遥可及。从云南跨越 2000 公里来到这里不知觉间四年就快结束了，大学随着论文的落笔也到了终点，无论怎样我想都应该好好说一声：再见，青春再也不见。没有太多的悲伤，也没有过多的兴奋，在这座充满文化历史的城市没有留下什么耀眼的成绩，也找不到一项能让人眼前一亮的特长，只好在将离之时拿出一份皱皱巴巴的没有太多笔墨缺少五彩缤纷的答卷，一个有关青春的句点。“去年今日此门中，人面桃花相映红。人面不知何处去，桃花依旧笑春风”。

世事去如烟，恩情存如血。最要感谢的是，我的父母和兄弟，父母从小以来就鼓励支持我好好读书。儿行千里母担忧，好像我读书离家越来越远，从天天见到去镇上后只能每周每月见，再到三五月趁着假期从市区乘大半天大巴才能见到，到如今的基本每年年关跟随返乡潮回家过年才能团聚。父母没有太高的文化水平，却一直支持我再往前走去外面增长见识，也总是支持我的选择。父母望子成龙，希望我能走出农村，在外面有一番作为，我也会以最大的努力回报父母。父母没有去见的山我去了，父母没能读的书我读了，感谢父母把春天给了我，把世界也给了我。父母将我举过头顶，所以我到哪都不会低人一等。哥哥也总是关心我的学习和生活，鼓励着我一直前行。我爱他们，我想携着父母的手，和他们一起去看未见过的繁华。

一朝沐杏雨，一生念师恩。感谢朱茂春老师在整个毕业论文写作过程中对我的指导和帮助，感谢老师的严格要求和关心。在我所写的方向给我一些文献去阅读，不定期汇报写作情况，在遇到困难时老师会用启发性的思考解决我的困惑，同时也十分感谢老师关心我的学习状态和生活。

感谢我们三人小组，从大三就开始合作，一起学习、一起讨论、一起解决难题，互相帮助使我们的革命友谊更加深厚，愿我们都能实现理想，保持热爱，都能在后面的时光里熠熠生辉。

感谢那个陪伴了我三年多的女孩，在我没有思绪沮丧时，在我因为一些琐事心烦意乱时总是鼓励我陪伴我。我想三年十年半百一起去寻飞流瀑布，看看这大好河山，享受三餐四季，一起去揭开这世界的面纱。

最后感谢不那么努力却保持热爱生活的自己。大学四年，疫情占了三年，在此期间我也发生了许多变化。从认真上进到在家大半年的懈怠放纵，后又有所愧疚亡羊补牢，算是摇摇晃晃走到现在，无所谓好与坏。只是有些许遗憾，像是一朝梦醒了无痕，没有去太多的经历，在十几平方的上床下桌的宿舍里往复，埋葬自己，有所触动时挖出来然后继续出卖灵魂，消了精神，磨了思想，一遍遍的沉沦。谈不上消极自卑，算是给自己一个交代。希望幡然醒悟的那天不太远，挺直腰杆站着做个人。向所有关心我的家人、亲人、师长和朋友们表示歉意和深深的谢意。

日落归山海，山海藏深意。无论遗憾可否，我们亦将离开，祝你祝我都能成为自己想要成为的人，江湖再见。凡是过往，皆为序章。

参考文献：

[1] N. Trudinger.: On Imbeddings into Orlicz Spaces and Some Applications[J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1967, 17(5), 473-483.

[2] J. Moser.: A Sharp Form of an Inequality by N.Trudinger [J]. Indiana University Mathematics Journal, 1971, 20(11),1077-1092.

[3] D. R. Adams.: A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives [J]. Annals of Mathematics, 1988,128(2),385-398.

[4] B. Ruf.: A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in $\mathbb{R}^2$ [J]. J ournal of Functional Analysis, 2005, 219(2),340-367.

[5] Y. Li, B. Ruf.: A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in $\mathbb{R}^n$ [J]. Indiana University Mathematics Journal, 2008, 57(1), 441-480.

[6] N. Lam, G. Lu, L. Zhang.: Sharp singular Trudinger-Moser inequalities under different norms[J]. Adv. Nonlinear Stud., 2019,19, 239-261.

[7] M. Dong, G. Lu.: Best constants and existence of maximizers for weighted Trudinger-Moser inequalities[P]. Calc. Var. Partial Differential Equations, 2016,55(4), Art. 88,.

[8] M. Dong, N. Lam, G. Lu.: Sharp weighted Trudinger-Moser and Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities and their extremal functions[J]. Nonlinear Anal, 2018,173, 75-98.

[9] X. Wang, L. Chen.: Sharp Weighted Trudinger-Moser Inequalities with the Ln Norm in the Entire Space Rn$\mathbb {R}^{n}$ and Existence of Their Extremal Functions[J]. Potential Analysis: An international journal devoted to the interactions between pot-ent ial theory, probability theory, geometry and functional analysis, 2021, 54(1),153–181.

[10] X. M.Wang.: Singular Supercritical Trudinger-Moser Inequalities and the Existence of Extremals[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series,2020,36(8),873-888.

[11] J.M. do Ó, M. de Souza.:On a class of singular Trudinger-Moser type inequalities an d its applications[J]. Mathematische Nachrichten,2011,284(14-15),1754-1776.

[12] J. Zhu.: Improved Moser-Trudinger Inequality Involving Lp Norm in n Dimensions[J]. Advanced Nonlinear Studies,2014,14(2),273-293.

[13] C. Zhang.: Trudinger-Moser inequalities in fractional Sobolev-Slobodeckij spaces and

[14] multiplicity of weak solutions to the fractional-Laplacian equation[J]. Adv. Nonlinear -Stud., 2019,19, 197-217.

[15] G. Lu, Q. Yang.: Sharp Hardy-Adams inequalities for bi-Laplacian on hyperbolic space of dimension four[J]. Advances in Mathematics, 2017,319, 567-598.

[16] G. Lu, H. Tang.: Best constants for Moser-Trudinger inequalities on high dimensional hyperbolic spaces[J]. Adv. Nonlinear Stud.,2013, 13, 1035-1052.

[17] J. Li, G. Lu, Q. Yang.: Fourier analysis and optimal Hardy-Adams inequalities on hyperbolic spaces of any even dimension[J]. Adv. Math,2018, 33, 350-385.

[18] J. Li, G. Lu, Q. Yang.: Sharp Adams and Hardy-Adams inequalities of any fractional order on hyperbolic spaces of all dimensions[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2020, 373(5),3483－3513.

[19] G. Lu, Q. Yang.: Paneitz operators on hyperbolic spaces and high order Hardy-Sobolev-Maz'ya inequali-ties on half spaces[J]. Amer. J. Math.2019, 141, 1777-1816.

[20] Adimurthi, O. Druet.: Blow-up Analysis in Dimension 2 and a Sharp Form of Trudinger–Moser Inequality[J]. Communications in Partial Differential Equations,2005,29(1-2),295-322.

[21] Adimurthi, J.M.do,Ó, K. Tintarev.: Cocompactness and minimizers for inequalities of Hardy-Sobolev type involving N-Laplacian[J]. Nonlinear differential equations and applications: NoDEA,2010,17(4),467-477.

[22] Q.A,Ngô, V.H,Nguyen.: Supercritical Moser–Trudinger inequalities and related elliptic problems[J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations,2020,59(4),69-99.

[23] J.M.do,Ó, B. Ruf, P. Ubilla.: On supercritical Sobolev type inequalities and related elliptic equations[J]. Calculus of variations and partial differential equations,2016,55(4),65-83.

[24] Q.A,Ngô, V.H,Nguyen.: A supercritical Sobolev type inequality in higher order Sobolev spaces and related higher order elliptic problems[J]. Journal of Differential Equations,2020,268(10),5996-6032.

[25] G. Wang, D. Ye.: A Hardy-Moser-Trudinger inequality[J]. Advances in Mathematics,2012,230(1),294-320.

[26] Adimurthi, K. Sandeep.: A singular Moser-Trudinger embedding and its applications

[J]. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 13 (2007), no. 5-6, 585-603

[27] S. Adachi, K. Tanaka.: Trudinger type inequalities in $\mathbb{R}^N$ and their best exponents [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2000, 128,2051-2057.

[28] Y.Y. Yang.: A sharp form of the Moser-Trudinger inequality on a compact Riemannian surface[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2007, 359(12),100-126.

[29] Y.Y. Yang, X.B. Zhu.: An improved Hardy–Trudinger–Moser inequality[J]. Annals of G lobal Analysis and Geometry, 2016,49(1), 23–41.

[30] Y.Y. Yang, X.B. Zhu.: Blow-up analysis concerning singular Trudinger–Moser inequalities in dimension two[J]. Journal of Functional Analysis,2017,272(8),3347-3374.

[31] Y. Li.: Moser-Trudinger Inequality On Compact Riemannian Manifolds of Dimension Two[J]. Journal of partial differential equations, 2001, 14(2),163-192.

[32] M. Struwe.: Positive solutions of critical semilinear elliptic equations on non-contractible planar domains[J]. Journal of the European Mathematical Society,2000,2(4),329–388.

[33] W.X. Chen, C.G. Li.: Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations [J]. Duke Mathematical Journal,1991,63(3),615-622.