一类对数加权下奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数问题

郭永强，朱茂春，陈文霞

摘 要

本文研究了单位球 B 上对数加权的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在性问题。这里的权是 $\omega_\beta(x) = \left|\ln\left(\frac{e}{|x|}\right)\right|^{\beta(n-1)}$，$\beta \in [0,1)$。证明基于单位球上的函数变换，集中水平上界法以及经典的 Trudinger-Moser 不等式。最后得到了 $\exists\beta_0 \in (0,1)$，对于 $\forall\beta \in [0,\beta_0)$，对数加权的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在。

关键词：Trudinger-Moser 不等式；奇异型；极值函数；集中水平

1 引言

设 Ω 为 R^n 中的光滑有界区域，$W_0^{1,p}(\Omega)$ 表示 $C^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化空间。经典的 Sobolev 嵌入定理表示 $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega), \forall 1 \le p < n, 1 \le q \le np/(n-p)$，但是当 $p=n$ 时，$W_0^{1,n}(\Omega)$ 不能嵌入到 $L^\infty(\Omega)$ 中，比如函数 $u(x) = \ln\ln\left(1+\frac{1}{|x|}\right)$，定义域是 $\Omega = B^0(0,1)$。可以证明，$u(x) \in W_0^{1,n}(\Omega)$，$u(x) \notin L^\infty(\Omega)$。后来，Trudinger-Moser 通过研究 $p=n$ 的情形，得到了如下的经典的 Trudinger-Moser 不等式：

$$\sup_{u \in W_0^{1,n}(\Omega), \|\nabla u\|_n \le 1} \int\limits_\Omega \exp\left(\alpha |u|^{n/(n-1)}\right) dx < +\infty \tag{1}$$

其中 $\alpha \le \alpha_n = n\omega_{n-1}^{1/(n-1)}$，$\omega_{n-1}$ 表示 n 维单位球面测度。对于 (1) 的极值函数存在性问题，已经有了很多的结果，在 [1] 中 Carleson 和 Chang 证明了 Ω 是单位球时，极值函数是存在的。之后在 [2] 中，Struwe 证明了当 Ω 的测度接近于单位球时，极值函数存在；在 [3] 中，Flucher 将

其推广到二维平面中的任意区域 Ω；在 [4] 中，Lin 证明了高维情形下的存在性。对于 (1) 式的推广，一般从有界区域推广到无界区域，从低维情形推广到高维情形。后来，研究了奇异型于对数加权的情形。在 [5] 中，$\beta \in [0,1)$，$\omega_\beta(x) = (-\ln|x|)^{\beta(n-1)}$ 下，加权的 Sobolev 空间表示 $C_0^1(B)$ 在范数 $\|u\|_{\omega_\beta} = \left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^n \omega_\beta(x) dx\right)^{\frac{1}{n}}$ 完备化下得到的空间，记为 $W_0^{1,n}(B, \omega_\beta)$。若空间中的函数是径向函数时，记为 $W_{0,rad}^{1,n}(B, \omega_\beta)$。Van Hong Nguyen 得到了存在 $\beta_0 \in (0,1)$，当 $0 \le \beta < \beta_0$ 时

$$\sup_{u \in W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega_\beta), \|u\|_{\omega_\beta} \le 1} \int\limits_B \exp\left(\alpha |u|^{n/((n-1)(1-\beta))}\right) dx$$

的极值函数存在，这里 $\alpha \le \alpha_{\beta,n} = n\Big((1-\beta)\,\omega_{n-1}^{1/(n-1)}\Big)^{1/(1-\beta)}$。

Sami Aouaoui 和 Rahma Jlel 在 [6] 中得到了 $\beta \in [0,1)$，$\omega_\beta(x) = \left|\ln\left(\frac{e}{|x|}\right)\right|^{\beta(n-1)}$，且 $u \in W_{0,rad}^{1,n}(B, \omega_\beta)$，$n \ge 2$ 时，对于 $\forall \alpha > 0$，$\sigma \in [0,n)$，有 $\int\limits_B \frac{\exp\left(\alpha|u|^{n/((n-1)(1-\beta))}\right)}{|x|^\sigma} dx < +\infty$，进一步

$$\sup\left\{\int\limits_B \frac{\exp\left(\alpha|u|^{n/((n-1)(1-\beta))}\right)}{|x|^\sigma} dx, u \in W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega_\beta), \|u\|_{\omega_\beta} \le 1\right\} < +\infty \tag{2}$$

这里 $\alpha \le \frac{n-\sigma}{n}\alpha_{\beta,n}$，这里 $\alpha_{\beta,n} = n((1-\beta)\omega_{n-1}^{1/(n-1)})^{1/(1-\beta)}$，记 $\alpha_{\beta,n,\sigma} = \frac{n-\sigma}{n}\alpha_{\beta,n}$。

在本文中，我们关注 (2) 式的极值函数存在性问题。首先，给出记号

$$MT(n,\alpha,\beta,\sigma) = \sup_{u \in W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega_\beta), \|u\|_{\omega_\beta} \le 1} \int\limits_B \frac{\exp\left(\alpha|u|^{n/((n-1)(1-\beta))}\right)}{|x|^\sigma} dx \tag{3}$$

$\sigma = 0$ 时，(2) 的极值函数的存在性 [5] 中已证明。

本文得到的主要定理如下：

存在 $\beta_0 \in (0,1)$，当 $0 \le \beta < \beta_0$ 时，$MT(n, \alpha_{\beta,n,\sigma}, \beta, \sigma)$ 的极值函数存在。

接下来，第二部分介绍一些有用的引理，第三部分证明本文的定理。

2 预备知识

引理 1 *([5])*

每一个函数 $u \in W^{1,n}_{0,rad}(B,\omega_\beta)$，$\forall 0 < r \le 1$，有

$$|u(r)| \le \left(\frac{n}{\alpha_{\beta,n}}\right)^{((n-1)(1-\beta))/n} \left(\int\limits_{B\setminus B_r} |\nabla u(x)|^n \omega_\beta dx\right)^{1/n} (-\ln r)^{((n-1)(1-\beta))/n}$$

证明：由 $u(1)=0$，运用 $H\ddot{o}lder$ 不等式得：

$$\begin{aligned}
|u(r)| &= \int_r^1 |\nabla u(x)| \omega_\beta^{\frac{1}{n}} x^{\frac{n-1}{n}} \omega_\beta^{-\frac{1}{n}} x^{\frac{1-n}{n}} dx \\
&\le \left(\int_r^1 |\nabla u(x)|^n \omega_\beta x^{n-1} dx\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_r^1 \omega_\beta^{-\frac{1}{n-1}} x^{-1} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&= \omega_{n-1}^{-\frac{1}{n}} \left(\omega_{n-1} \int_r^1 |\nabla u(x)|^n \omega_\beta x^{n-1} dx\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_r^1 \frac{dx}{x(-\ln x)^\beta} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&= (1-\beta)^{-\frac{n-1}{n}} \left(\omega_{n-1}^{-\frac{1}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_{B\setminus B_r} |\nabla u(x)|^n \omega_\beta dx\right)^{\frac{1}{n}} (-\ln r)^{\frac{(n-1)(1-\beta)}{n}} \\
&= \left(\frac{n}{\alpha_{\beta,n}}\right)^{\frac{(n-1)(1-\beta)}{n}} \left(\int_{B\setminus B_r} |\nabla u(x)|^n \omega_\beta dx\right)^{\frac{1}{n}} (-\ln r)^{\frac{(n-1)(1-\beta)}{n}}
\end{aligned}$$

引理 2 设 $\{u_j\}$ 是空间 $W^{1,n}_{0,rad}(B,\omega_\beta)$ 中的序列，且该序列满足条件 $\|u_j\|_{\omega_\beta} = 1$，$u_j$ 弱收敛于 u_0，$\lim\limits_{j\to\infty} \sup \int_B \frac{\exp\left(p\alpha_{\beta,n,\sigma}|u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^\sigma} dx < +\infty$，这里 $p < p(u_0) = (1-\|u_0\|^n_{\omega_0})^{-1/((n-1)(1-\beta))}$。

证明：该引理与 [5] 中的引理 2.2 类似，用相同的方法处理，结合对数加权下奇异型的 Trudinger-Moser 不等式，即可。至此，引理 2成立。

引理 3 $\forall u \in W^{1,n}_{0,rad}(B,\omega_\beta)$，$\forall 0 \le \widetilde{\beta} < \beta$，有

$$v(x) = \left(\frac{\alpha_{\beta,n}}{\alpha_{\widetilde{\beta},n}}\right)^{((n-1)(1-\widetilde{\beta}))/n} u(x)|u(x)|^{\frac{\beta-\widetilde{\beta}}{1-\beta}} \tag{4}$$

当 $\|u\|_{\omega_\beta} \le 1$ 时，有 $\|v\|_{\omega_{\tilde{\beta}}} \le 1$。

证明：

根据定义

$$\nabla v(x)=\left(\frac{\alpha_{\beta,n}}{\alpha_{\tilde{\beta},n}}\right)^{\frac{(n-1)(1-\tilde{\beta})}{n}}\left(\nabla u(x)|u(x)|^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}}+\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}u^2(x)|u(x)|^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}-2}\nabla u(x)\right)$$
$$=\left(\frac{\alpha_{\beta,n}}{\alpha_{\tilde{\beta},n}}\right)^{\frac{(n-1)(1-\tilde{\beta})}{n}}\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}\nabla u(x)|u(x)|^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}}$$

由引理 1得

$$|\nabla v(x)|^n=\left(\frac{\alpha_{\beta,n}}{\alpha_{\tilde{\beta},n}}\right)^{(n-1)(1-\tilde{\beta})}\left(\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}\right)^n|\nabla u(x)|^n|u(x)|^{\frac{n(\beta-\tilde{\beta})}{1-\beta}}$$
$$\leq|\nabla u(x)|^n\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}\frac{\omega_\beta(x)}{\omega_{\tilde{\beta}}(x)}\left(\int\limits_{B\setminus B_{|x|}}|\nabla u(y)|^n\omega_{\tilde{\beta}}(y)dy\right)^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}}$$

所以

$$\begin{aligned}
\|v(x)\|^n_{\omega_{\tilde{\beta}}}&=\int_B|\nabla v(x)|^n\omega_{\tilde{\beta}}(x)dx\\
&\leq\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}\omega_{n-1}^{\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\int_0^1\left|u'(s)\right|^n\omega_\beta(s)s^{n-1}\cdot\left(\int_0^1\left|u'(t)\right|^n\omega_\beta(t)t^{n-1}dt\right)^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}}ds\\
&=-\omega_{n-1}^{\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\int_0^1\frac{d}{ds}\left[\left(\int_s^1\left|u'(t)\right|^n\omega_\beta(t)t^{n-1}dt\right)^{\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\right]ds\\
&=\left(\int_B|\nabla u(x)|^n\omega_\beta(x)dx\right)^{\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\\
&\leq 1
\end{aligned}$$

3 证明部分

分两种情形研究：

3.1 次临界情形

在次临界情形 $\alpha<\alpha_{\beta,n,\sigma}$ 时，由 (2) 知 (3) 在 B 上的积分有一致的界，因此取极大化序列 $\{u_j\}\,(j=1,2,\cdots)$ ，且 $u_j\to u(j\to+\infty)$，(3) 依然成

立。所以通过维塔利收敛定理，该极大化序列的极限 u 就是 (3) 的极值函数，即

$$
\begin{aligned}
MT(n,\alpha,\beta,\sigma) &= \lim_{j\to\infty}\int_B \frac{\exp(\alpha|u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx \\
&= \int_B \lim_{j\to\infty}\frac{\exp(\alpha|u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx \\
&= \int_B \frac{\exp(\alpha|u|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx
\end{aligned}
$$

3.2 临界情形

在临界情形 $\alpha=\alpha_{\beta,n,\sigma}$ 时，利用 [1][7] 中的讨论方法，定义泛函

$$
J_{\beta,n,\sigma}(u)=\int\limits_B \frac{\exp\left(\alpha_{\beta,n}|u|^{n/((n-1)(1-\beta))}\right)}{|x|^\sigma}dx
$$

泛函的集中水平定义为

$$
J^\delta_{\beta,n,\sigma}(0)=\sup\left\{\lim_{j\to\infty}\sup J_{\beta,n,\sigma}(u_j)\,\middle|\,\|u_j\|_{\omega_\beta}=1, u_j\rightharpoonup 0\right\} \tag{5}
$$

由 [8] 知，$J^\delta_{0,n,\sigma}(0)\le\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\left(1+e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}}\right)$，这一结论对极值函数的讨论有很重要的作用。

定理 1 $J^\delta_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^\delta_{\tilde\beta,n,\sigma}(0)$，$\forall\tilde\beta\le\beta$。

证明：由 (5) 及已知事实得：

$$
\int_B\frac{1}{|x|^\sigma}dx=\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\le\lim_{j\to\infty}\sup\int_B\frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}|u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx\le J^\delta_{\beta,n,\sigma}(0)
$$

对于 $\tilde\beta$，上式依然成立。

下证：$J^\delta_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^\delta_{\tilde\beta,n,\sigma}(0)$，$\forall\tilde\beta\le\beta$。取 $\{u_j\}$ 是 $W^{1,n}_{0,rad}(B,\omega_\beta)$ 里的归一化集中序列，取子列使得 $\lim\limits_{j\to\infty}J^\delta_{\beta,n,\sigma}(u_j)$ 存在。$\{v_j\}$ 由引理 3所定义，因此，$v_j\in W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_{\tilde\beta}\right)$，且 $\|v_j\|_{\omega_{\tilde\beta}}\le 1$，$\{v_j\}$ 有界。假设 $v_j\rightharpoonup v$，由于 $v_j\rightharpoonup 0$，在 $B\backslash B_a$，这里 $a\in(0,1)$。由弱极限的唯一性得：$v\equiv 0$。

情形一 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\|v_j\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}<1$，$\exists t\in(0,1)$，以及 N，当 $j>N$ 时，$\|v_j\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}\le t<1$。因此，由引理 2与 $H\ddot{o}lder$ 不等式知 $\frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}|v_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}$ 在 $L^p(p>1)$ 中有界，所以

$$
\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty}\int_B \frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}|u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx &= \lim_{j\to\infty}\int_B \frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}|v_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx \\
&= \frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0)
\end{aligned}
$$

这就得到了 $\forall\tilde{\beta}\le\beta$，$J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0)$。

情形二 $\lim\limits_{j\to\infty}\sup\|v_j\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}=1$，可以通过取子列，使得 $\lim\limits_{j\to\infty}\|v_j\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}=1$。定义 $I_j=\frac{v_j}{\|v_j\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}}$，$\{I_j\}$ 的性质有：在 $W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_{\tilde{\beta}}\right)$ 里有 $I_j\rightharpoonup 0$，$|v_j|\le I_j$。如果 $\{I_j\}$ 是归一化集中序列，那么

$$
\lim_{j\to\infty}J_{\beta,n,\sigma}(u_j)=\lim_{j\to\infty}J_{\tilde{\beta},n,\sigma}(v_j)\le\lim_{j\to\infty}\sup J_{\tilde{\beta},n,\sigma}(I_j)\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0) \tag{6}
$$

由 (6) 知，对于 $\forall\tilde{\beta}\le\beta$，有 $J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0)$ 成立。

如果 $\{I_j\}$ 非归一化集中序列，$\exists t,a\in(0,1)$，以及 N，当 $j>N$ 时，有 $\int_{B_a}|I_j|^n\omega_{\tilde{\beta}}(x)dx\le t$。定义：

$$
\tilde{I}_j(x)=\begin{cases} I_j(x)-I_j(a), & |x|\le a \\ 0, & a<|x|<1 \end{cases} \tag{7}
$$

$\tilde{I}_j(x)$ 的性质有：$\tilde{I}_j(x)\in W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_{\tilde{\beta}}\right)$，且当 $j>N$ 时有，$\left\|\tilde{I}_j\right\|^n_{\omega_{\tilde{\beta}}}\le t<1$。选择足够小的 ε，使得 $(1+\varepsilon)t^{\frac{1}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}<1$，结合 $Young$ 不等式以及 (7) 的定义有

$$
|I_j(x)|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}\le C(n,\tilde{\beta},\varepsilon)|I_j(a)|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}+(1+\varepsilon)\left|\tilde{I}_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}
$$

这里 $C(n,\tilde{\beta},\varepsilon)=(1-(1+\varepsilon)^{-\frac{(n-1)(1-\tilde{\beta})}{n\tilde{\beta}+1-\tilde{\beta}}})^{-\frac{n\tilde{\beta}+1-\tilde{\beta}}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}$。选取适当的 t,ε，以及权，使得 $\frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}(1+\varepsilon)|\tilde{I}_j(x)|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{|x|^{\sigma}}$ 在 $L^p(p>1)$ 中有界。在 B_a 里，由 $I_j(a)\to 0$，$j\to\infty$，推出 $\frac{\exp\left(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}|I_j(x)|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}\right)}{|x|^{\sigma}}$ 在 $L^p(B_a)$ 中有界。

我们会得到

$$\lim_{j\to\infty}\int_{B_a}\frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}|I_j(x)|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{|x|^\sigma}dx=\int_{B_a}\frac{1}{|x|^\sigma}dx=\frac{t-\sigma}{n-\sigma}\omega_{n-1} \tag{8}$$

在 $B\backslash B_a$ 上，由引理 2与勒贝格 -控制收敛定理有

$$\lim_{j\to\infty}\int_{B\backslash B_a}\frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}|I_j(x)|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{|x|^\sigma}dx=\frac{1}{n-\sigma}\omega_{n-1}-\frac{t-\sigma}{n-\sigma}\omega_{n-1} \tag{9}$$

综上所述，由 (8)，(9) 得

$$\lim_{j\to\infty}\int_{B}\frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}|I_j(x)|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{|x|^\sigma}dx=\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}$$

所以 $\lim\limits_{j\to\infty}J_{\beta,n,\sigma}(u_j)=\lim\limits_{j\to\infty}J_{\tilde{\beta},n,\sigma}(v_j)\le\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\le J^\delta_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0)$。

至此，对于 $\forall\tilde{\beta}\le\beta$，有 $J^\delta_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^\delta_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0)$ 成立。

定理 2 $\lim\limits_{\beta\to 0}MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)=MT(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma)$。

证明：

假设 $u\in W^{1,n}_{0,rad}(B,\omega_\beta)$，满足 $\|u\|_{\omega_\beta}\le 1$，$v$ 由 (4) 所定义，对于 $\forall\tilde{\beta}\le\beta$，有 $\|v\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}\le 1$，通过 $MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)$ 的定义，有

$$\begin{aligned}\int_B\frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}|u|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx&=\int_B\frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}|v|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{|x|^\sigma}dx\\&\le MT(n,\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma},\tilde{\beta},\sigma)\end{aligned}$$

所以，$MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)\le MT(n,\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma},\tilde{\beta},\sigma)$ 成立，这里 $\forall 0\le\tilde{\beta}\le\beta<1$。故 $MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)$ 关于 β 单调递减，则有

$\limsup\limits_{\beta\to 0}MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)\le MT(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma)$

下面证明：

$\liminf\limits_{\beta\to 0}MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)\ge MT(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma)$。由于 $MT(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma)$ 极值函数可达，因此存在 $u_0\in C^1(B)\cap W^{1,n}_{0,rad}(B)$，且 u_0 满足 $\|\nabla u_0\|_n=1$。故：

$\lim\limits_{\beta\to 0}\int_B|\nabla u_0|^n\omega_\beta(x)dx=\int_B|\nabla u_0|^ndx=1$。对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\beta_\varepsilon$，当 $\forall\beta\le\beta_\varepsilon$ 时，有 $\|u_0\|_{\omega_\beta}\le 1+\varepsilon$。

我们有

$$MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)\geq\int_B\frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}(\frac{|u_0|}{1+\varepsilon})^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx$$

当 $\beta\to 0$ 时，由法图引理得：

$$\lim_{\beta\to 0}\inf MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)\geq\int_B\frac{\exp(\alpha_{0,n,\sigma}(\frac{|u_0|}{1+\varepsilon})^{\frac{n}{n-1}})}{|x|^\sigma}dx$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，再一次由法图引理得：

$$\lim_{\beta\to 0}\inf MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)\geq\int_B\frac{\exp(\alpha_{0,n,\sigma}|u_0|^{\frac{n}{n-1}})}{|x|^\sigma}dx=MT(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma)$$

综上所述：

$$\lim_{\beta\to 0}MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)=MT(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma)\tag{10}$$

定理 3 存在 $\beta_0\in(0,1)$，当 $0\leq\beta<\beta_0$ 时，$MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)$ 的极值函数存在。

证明：

由 (10) 与已知的结论

$$\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}(1+e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}})\leq J^{\delta}_{0,n,\sigma}(0)<MT(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma)\tag{11}$$

结合 (11)，定理 1与 2得

$$J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)\leq J^{\delta}_{0,n,\sigma}(0)<MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)\;\forall\beta\in[0,\beta_0)\tag{12}$$

下面取 $MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)$ 的极大化序列，由于范数有界，因此在 $W^{1,n}_{0,rad}(B,\omega_\beta)$ 里，$u_j\rightharpoonup u_0$。且对某些 $u_0\in W^{1,n}_{0,rad}(B,\omega_\beta)$，取 $a\in(0,1)$，在 $B\backslash B_a$ 里，$u_j\to u_0$。

若 $u_0\equiv 0$，且 $\{u_j\}$ 是归一化集中序列，那么 $MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)=\lim_{j\to\infty}J_{\beta,n,\sigma}(u_j)\leq J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)$，这与 (12) 矛盾。因此 $\{u_j\}$ 非归一化集中序列。若 $\exists a,t\in(0,1)$，以及 N，当 $n\geq N$ 时，有 $\int_{B_a}|\nabla u_j|^n\omega_\beta(x)dx\leq t$。此时

$MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma) = \lim\limits_{j\to\infty} J_{\beta,n,\sigma}(u_j) = \frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma} \le J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)$，这与 (12) 矛盾。所以 $u_0 \ne 0$，由引理 2与 $H\ddot{o}lder$ 不等式知 $\frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}|u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}$ 在 $L^p(p>1)$ 中有界，故有

$$
\begin{aligned}
MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma) &= \lim_{j\to\infty}\int_B \frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}|u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx \\
&= \int_B \frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}|u_0|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx
\end{aligned}
$$

这种情况下，我们发现 $\|u_0\|_{\omega_\beta} \le 1$。当 $\|u_0\|_{\omega_\beta} < 1$ 时，

$$
\begin{aligned}
MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma) &\ge \int_B \frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}(\frac{|u_0|}{\|u_0\|_{\omega_\beta}})^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx \\
&> \int_B \frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}|u_0|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx = MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)
\end{aligned}
$$

这是一个矛盾。

综上所述，$\|u_0\|_{\omega_\beta} = 1$，且 u_0 就是 $MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)$ 的极值函数。

参考文献

[1] Carleson, Lennart, and Sun-Yung A. Chang. ”ON THE EXISTENCE OF AN EXTREMAL FUNCTION FOR AN INEQUALITY OF MOSER, J.” Bulletin des Sciences Mathématiques 110.2 (1986): 113-127.

[2] Struwe M. Critical points of embeddings of H01, n into Orlicz spaces[C]Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire. Elsevier Masson, 1988, 5(5): 425-464.

[3] Martin Flucher,Extremal functions for the Trudinger-Moser inequality in 2 dimensions,Comment.Math.Helv.67(1992),no.3,471-497.

[4] Kai-Ching Lin,Extremal functions for Moser’s inequality Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996),no.7,2663-2671.

[5] Nguyen,Van.”Remarks on the Moser-Trudinger type inequality with logarithmic weights in dimension N”.Proceedings of the American Mathematical Society 147.12(2019):5183-5193.

[6] Aouaoui,Sami,and Rahma Jlel.”A new Singular Trudinger-Moser Type Inequality with Logarithmic Weights and Applications.”Advanced Nonliner Studies 20.1(2020):113-139.

[7] Prosenjit Roy,Extremal function for Moser-Trudinger type inequality with logarithmic weight,Nonliner Anal.135(2016),194-204.

[8] Wang, Xu Min. ”Singular Supercritical Trudinger-Moser Inequalities and the Existence of Extremals.” Acta Mathematica Sinica, English Series 36.8 (2020): 873-888.