摘 要

Trudinger不等式作为Sobolev不等式的极限情形，是由Trudinger于1967年首先得到的。后来又由 Moser 得到了一阶 Trudinger 不等式的最佳常数，即Trudinger-Moser 不等式。这类不等式自诞生至今，在偏微分方程、几何分析以及弦理论等研究中得到了广泛应用。本文主要研究单位球B上对数加权的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在性问题。这里的权是 $\omega_\beta(x)=\left|\ln\left(\frac{e}{|x|}\right)\right|^{\beta(n-1)}$，$\beta\in[0,1)$。证明主要分次临界情形与临界情形两部分证明：

第一部分，次临界情形，利用积分在单位球上的一致有界性，通过取极大化序列，结合维塔利收敛定理，证明对数加权的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在。

第二部分，临界情形，构造泛函集中水平，排除极大化序列的集中现象，运用相应的积分集中紧性原理，提升可积性，进而证明对数加权的奇异型的Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在。

关键词: Trudinger-Moser 不等式 奇异型 维塔利收敛定理 集中水平 极值函数

ABSTRACT

Trudinger inequality as the limiting case of Sobolev inequality was first obtained by Trudinger in 1967. Later on, the best constant for the first-order Trudinger inequality was obtained by Moser-the Trudinger-Moser inequality. Since then, these inequalities have been widely used in the study of partial differential equations, geometric analysis, and string theory. In this paper, we focus on the existence of extreme value functions of Trudinger-Moser inequalitie of singular type on the unit ball B with logarithmic weights. The weights here are $\omega_\beta(x) = \left|\ln\left(\frac{e}{|x|}\right)\right|^{\beta(n-1)}$, $\beta \in [0,1)$. The proof is mainly divided into two parts for the subcritical case and the critical case:

In the first part, the subcritical case, the consistent boundedness of the integral over the unit ball is used to prove the existence of the extreme value function of the Trudinger-Moser inequality of logarithmically weighted singular type by taking the sequence of maximization and combining it with the Vitaly convergence theorem.

In the second part, the critical case, the level of concentration of the generalized function is constructed to exclude the concentration phenomenon of the maximization sequence, and the corresponding integration concentration tightness principle is applied to enhance the productability and thus prove the existence of the extreme value function of the Trudinger-Moser inequality of logarithmically weighted singular type.

Keywords: Trudinger-Moser inequality, singular type, Vitaly convergence theorem, concentration level, extremal function

目　录

第1章 绪论

1.1 研究背景

设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑有界区域，$W_0^{1,p}(\Omega)$ 表示 $C^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化空间。经典的 Sobolev 嵌入定理表示

（1） $p<n$ 时，$W_0^{1,p}\left(\Omega\right)$ 嵌入到 $L^q(\Omega)$；$1\le q<p^*=\dfrac{np}{n-p}$

（2） $p>n$ 时，$W_0^{1,p}\left(\Omega\right)$ 嵌入到 C^α

（3） $p=n$ 时，$W_0^{1,p}\left(\Omega\right)\not\subset L^\infty(\Omega)$，$\alpha=1-\dfrac{n}{p}$

在 1967 年，Trudinger 利用幂级数展开证明了得到了在 $p=n$ 时，$W_0^{1,n}\left(\Omega\right)$ 可以连续嵌入到某种 Orlicz 函数空间 $L_\varphi(\Omega)$，其中 $\varphi=\exp\left(|t|^{\frac{n}{n-1}}-1\right)$，即存在 $\alpha>0$，使得

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\|\nabla u\|_n^n\le 1}\int_\Omega e^{\alpha u^{n/(n-1)}}dx\le C_n|\Omega| \tag{1.1}$$

成立，其中 $\|\nabla u\|_n^n=\int_\Omega|\nabla u|dx$。

在 1971 年，Moser 利用对称重排方法得到了

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\|\nabla u\|_n^n\le 1}\int_\Omega e^{\alpha u^{n/(n-1)}}dx<\infty,\forall\alpha\le\alpha_n=n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \tag{1.2}$$

其中 ω_{n-1} 为单位球面 $S^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ 的球面测度，当 $\alpha>\alpha_n$ 时，该积分等于无穷，也即得到了 α_n 为最佳常数。我们称 $\alpha=\alpha_n$ 时为著名的 Trudinger-Moser 不等式。J.Moser 所使用的对称重排方法非常依赖于 Polya-Szego 不等式。但是由于经典的对称重排函数不具有足够的高阶弱可微性，因此不适用于研究高阶 Sobolev 空间的精确嵌入。在 1988 年，Adams 得到高阶 Trudinger 型不等式，并给出了最佳常数：

$$\int_\Omega exp\left(\beta|u|^{p'}\right)dx\le c_0 \tag{1.3}$$

$$\beta \le \beta_0(m,n) = \begin{cases} \dfrac{n}{\omega_{n-1}}\left[\dfrac{\pi^{n/2}2^m\Gamma\left(\dfrac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n-m+1}{2}\right)}\right]^{p'}, & m\text{为奇数} \\ \dfrac{n}{\omega_{n-1}}\left[\dfrac{\pi^{n/2}2^m\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n-m}{2}\right)}\right]^{p'}, & m\text{为偶数} \end{cases} \tag{1.4}$$

其中$u \in C^m(\mathbb{R}^n)$，且在Ω中具有紧支集，$\|\nabla^m u\|_p \le 1$，$p = n/m$，$p' = p/(p-1)$，但当$\beta > \beta_0$时，则存在满足上述条件的函数u使得$\int_\Omega exp\left(\beta|u|^{p'}\right)dx = \infty$。

对于无界区域的讨论，Adachi给出了最佳常数，我们也称下述不等式为Adachi-Tanaka型Trudinger-Moser不等式，即

$$A(n,\alpha) = \sup_{\substack{u\in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\} \\ \|\nabla u\|_{L^n(R^n)}\le 1}} \frac{1}{\|u\|^n_{L^n(R^n)}}\int_{R^n}\Phi_n\left(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)dx \begin{cases} <\infty, \alpha<\alpha_n \\ =\infty, \alpha \ge \alpha_n \end{cases} \tag{1.5}$$

其中$\Phi_n(t) = e^t - \sum_{i=0}^{n-2}\frac{t^i}{i!}$，需要指出的是，在临界指数$\alpha = \alpha_n$下，积分上确界不是有限的。

在2005年，B.Ruf发现用标准的Sobolev范数$\|u\|_{W_0^{1,n}(\Omega)} = (\int_\Omega(|\nabla u|^n + |u|^n)dx)^{\frac{1}{n}}$来代替Dirichlet范数$\|u\|_D = (\int_\Omega|\nabla u|^n)^{\frac{1}{n}}$的时候，在二维情况下，可以将Moser的结论推广到无界区域上去。

在2006年，Y. Li和B. Ruf利用爆破分析技术得到了Trudinger-Moser不等式：即存在常数$d>0$，使得对于任意的区域$\Omega \subset \mathbb{R}^n$，有

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega), \|u\|_{W_0^{1,n}(\Omega)}\le 1}\int_\Omega \Phi(\alpha_n|u|^{\frac{n}{n-1}})dx \le d \tag{1.6}$$

但对于任意的$\alpha > \alpha_n$，上面不等式不成立。

而对于(1)的极值函数存在性问题,已经有了很多的结果，在[1]中Carleson和Chang证明了Ω是单位球时，极值函数是存在的。之后在[2]中，Struwe证明了当Ω的测度接近于单位球时，极值函数存在；在[3]中，Flucher将其推广到二维平面中的任意区域Ω；在[4]中，Lin证明了高维情形下的存在性。对于(1)式的推广，一般从有界区域推广到无界区域，从低维情形推广到高维情形。后来，研究了奇异型于对数加权的情形。在[5]中，$\beta \in [0,1), \omega_\beta(x) = (-\ln|x|)^{\beta(n-1)}$下，加权的Sobolev空间表示$C_0^1(B)$在范数$\|u\|_{\omega_\beta} = \left(\int_\Omega|\nabla u|^n\omega_\beta(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}$完备化下得到的空间，记为$W_0^{1,n}(B,\omega_\beta)$。若空间中的函数是径向函数时，记为$W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega_\beta)$。VanHongNguyen得到了存在$\beta_0 \in (0,1)$，当$0 \le \beta < \beta_0$时

$$\sup_{u\in W_{0,\mathrm{ad}}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right),\|u\|_{\omega_\beta}\le 1}\int_B \exp\left(\alpha|u|^{n/((n-1)(1-\beta))}\right)dx \tag{1.7}$$

的极值函数存在，这里$\alpha\le\alpha_{\beta,n}=n\left((1-\beta)\omega_{n-1}^{1/(n-1)}\right)^{1/(1-\beta)}$。

SamiAouaoui 和 RahmaJlel 在[6]中得到了$\beta\in[0,1),\omega_\beta(x)=\left|\ln\left(\frac{e}{|x|}\right)\right|^{\beta(n-1)}$，且

$u\in W_{0,rad}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right),n\ge 2$时，对于$\forall\alpha>0,\sigma\in[0,n)$，有

$\int_B \frac{\exp\left(\alpha|u|^{n/((n-1)(1-\beta))}\right)}{|x|^\sigma}dx<+\infty$，进一步

$$\sup\left\{\int_B \frac{\exp\left(\alpha|u|^{n/((n-1)(1-\beta))}\right)}{|x|^\sigma}dx, u\in W_{0,\mathrm{rad}}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right),\|u\|_{\omega_\beta}\le 1\right\}<+\infty \tag{1.8}$$

这里$\alpha\le\frac{n-\sigma}{n}\alpha_{\beta,n}$，这里$\alpha_{\beta,n}=n\left((1-\beta)\omega_{n-1}^{1/(n-1)}\right)^{1/(1-\beta)}$，记$\alpha_{\beta,n,\sigma}=\frac{n-\sigma}{n}\alpha_{\beta,n}$。
在本文中，我们关注(2)式的极值函数存在性问题。首先,给出记号

$$MT(n,\alpha,\beta,\sigma)=\sup_{u\in W_{0,rad}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right),\|u\|_{\omega_\beta}\le 1}\int_B \frac{\exp\left(\alpha|u|^{n/((n-1)(1-\beta))}\right)}{|x|^\sigma}dx \tag{1.9}$$

$\sigma=0$时，(2)的极值函数的存在性[5]中已证明。

第2章 预备知识和主要内容

2.1 预备知识

2.1.1 重要不等式

（1）Hölder 不等式

若函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $p,q>0,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.1}$$

（2）Young 不等式

$\forall a,b,\varepsilon\ge 0,$ 对于 $1<p,q<\infty$，且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则

$$ab\le \varepsilon\frac{a^p}{p}+\varepsilon^{-\frac{q}{p}}\frac{b^q}{q} \tag{2.2}$$

2.1.2 重要引理

引理 1 Vitali 积分定理

设 $m(E)<\infty$，函数列 $\{f_k(x)\}\subset L(E)$ 且 $f_k(x)\xrightarrow{m} f(x)$ 于 E。若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上的积分具有等度绝对连续性, 则有

（1） $f\in L(E)$

（2） $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E f(x)dx$

引理 2 Lebesgue 控制收敛定理

（1） $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的可测函数列;

（2） $\{f_n(x)\}\le F(x)$ a. e. 于 E， $n=1,2,\cdots$，且 $F(x)$ 在 E 上可积分（称 $\{f_n\}$ 为 $F(x)$ 所控制，而 $F(x)$ 叫控制函数）

（3） $f_n(x)\Rightarrow f(x)$

则 $f(x)$ 在 E 上可积分且 $\lim\limits_{n}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx$

引理 3[5]

每一个函数 $u\in W_{0,rad}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right),\forall 0<r\le 1$，有

$$|u(r)|\le\left(\frac{n}{\alpha_{\beta,n}}\right)^{((n-1)(1-\beta))/n}\left(\int_{B\backslash B_r}|\nabla u(x)|^n\omega_\beta dx\right)^{1/n}(-\ln r)^{((n-1)(1-\beta))/n} \tag{2.3}$$

证明:由 $u(1)=0$，运用 Hölder 不等式得:

$$\begin{aligned}
|u(r)|&\le\int_r^1|\nabla u(x)|^n\omega_\beta^{\frac{1}{n}}x^{\frac{n-1}{n}}\omega_\beta^{-\frac{1}{n}}x^{\frac{1-n}{n}}dx\\
&\le\left(\int_r^1|\nabla u(x)|^n\omega_\beta x^{n-1}dx\right)^{\frac{1}{n}}\left(\int_r^1\omega_\beta^{-\frac{1}{n-1}}x^{-1}dx\right)^{\frac{n-1}{n}}\\
&=\omega_{n-1}^{-\frac{1}{n}}\left(\omega_{n-1}\int_r^1|\nabla u(x)|^n\omega_\beta x^{n-1}dx\right)^{\frac{1}{n}}\left(\int_r^1\frac{dx}{x(-\ln x)^\beta}dx\right)^{\frac{n-1}{n}}\\
&=(1-\beta)^{-\frac{n-1}{n}}\left(\omega_{n-1}^{-\frac{1}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left(\int_{B\backslash B_r}|\nabla u(x)|^n\omega_\beta dx\right)^{\frac{1}{n}}(-\ln r)^{\frac{(n-1)(1-\beta)}{n}}\\
&=\left(\frac{n}{\alpha_{\beta,n}}\right)^{\frac{(n-1)(1-\beta)}{n}}\left(\int_{B\backslash B_r}|\nabla u(x)|^n\omega_\beta dx\right)^{\frac{1}{n}}(-\ln r)^{\frac{(n-1)(1-\beta)}{n}}
\end{aligned}$$

引理 4

设 $\{u_j\}$ 是空间 $W_{0,rad}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right)$ 中的序列，且该序列满足条件 $\|u_j\|_{\omega_\beta}=1$，u_j 弱收敛于 $u_0,\limsup\limits_{j\to\infty}\int_B\frac{\exp\left(p\alpha_{\beta,n,\sigma}|u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^\sigma}dx<+\infty$，且 $p<p(u_0)=\left(1-\|u_0\|_{\omega_0}^n\right)^{-1/((n-1)(1-\beta))}$

证明：**还需完善！**

引理 5

$\forall u\in W_{0,rad}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right),\forall 0\le\tilde{\beta}<\beta$，有

$$v(x)=\left(\frac{\alpha_{\beta,n}}{\alpha_{\tilde{\beta},n}}\right)^{((n-1)(1-\tilde{\beta}))/n}u(x)|u(x)|^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}} \tag{2.4}$$

当 $\|u\|_{\omega_\beta}\le 1$时，有 $\|v\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}\le 1$。

证明：

根据定义

$$\nabla v(x)=\left(\frac{\alpha_{\beta,n}}{\alpha_{\tilde{\beta},n}}\right)^{\frac{(n-1)(1-\tilde{\beta})}{n}}\left(\nabla u(x)|u(x)|^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}}+\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}u^2(x)|u(x)|^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}-2}\nabla u(x)\right)$$

$$=\left(\frac{\alpha_{\beta,n}}{\alpha_{\tilde{\beta},n}}\right)^{\frac{(n-1)(1-\tilde{\beta})}{n}}\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}\nabla u(x)|u(x)|^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}}$$

由引理 1 得

$$|\nabla v(x)|^n=\left(\frac{\alpha_{\beta,n}}{\alpha_{\tilde{\beta},n}}\right)^{(n-1)(1-\tilde{\beta})}\left(\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}\right)^n|\nabla u(x)|^n|u(x)|^{\frac{n(\beta-\tilde{\beta})}{1-\beta}}$$

$$\le|\nabla u(x)|^n\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}\frac{\omega_\beta(x)}{\omega_{\tilde{\beta}}(x)}\left(\int_{B\setminus B_{|x|}}|\nabla u(y)|^n\omega_{\tilde{\beta}}(y)dy\right)^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}}$$

所以

$$\|v(x)\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}^n$$

$$\le\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}\omega_{n-1}^{\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\int_0^1|u'(s)|^n\omega_\beta(s)s^{n-1}\cdot\left(\int_0^1|u'(t)|^n\omega_\beta(t)t^{n-1}dt\right)^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}}ds$$

$$=-\omega_{n-1}^{\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\int_0^1\frac{d}{ds}\left[\left(\int_s^1|u'(t)|^n\omega_\beta(t)t^{n-1}dt\right)^{\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\right]ds$$

$$=\left(\int_B|\nabla u(x)|^n\omega_\beta(x)dx\right)^{\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}}$$

$$\le 1$$

2.2 主要内容

证明主要分次临界情形与临界情形两部分证明：

第一部分，次临界情形，利用积分在单位球上的一致有界性，通过取极大化序列，结合维塔利收敛定理，证明对数加权的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在。

第二部分，临界情形，构造泛函集中水平，排除极大化序列的集中现象，运用相应的积分集中紧性原理，提升可积性，进而证明对数加权的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在。

第3章 次临界情形

在次临界情形$\alpha<\alpha_{\beta,n,\sigma}$时，由(2)知(3)在$B$上的积分有一致的界，因此取极大化序列$\left\{u_j\right\}\left(j=1,2,\cdots\right)$，且$u_j\to u, j\to\infty$，(3)依然成立。所以通过维塔利收敛定理，该极大化序列的极限u就是(3)的极值函数，即

$$\begin{aligned}MT(n,\alpha,\beta,\sigma)&=\lim_{j\to\infty}\int_B\frac{\exp\left(\alpha\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^\sigma}dx\\&=\int_B\lim_{j\to\infty}\frac{\exp\left(\alpha\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^\sigma}dx\\&=\int_B\frac{\exp\left(\alpha|u|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^\sigma}dx\end{aligned}\tag{3.1}$$

第4章 临界情形

在临界情形$\alpha=\alpha_{\beta,n,\sigma}$时，利用[1][7]中的讨论方法，定义泛函

$$J_{\beta,n,\sigma}(u)=\int_B\frac{\exp\left(\alpha_{\beta,n}|u|^{n/((n-1)(1-\beta))}\right)}{|x|^\sigma}dx\tag{4.1}$$

泛函的集中水平定义为

$$J^\delta_{\beta,n,\sigma}(0)=\sup\left\{\lim_{j\to\infty}\sup_{\beta,n,\sigma}\left(u_j\right)|\left\|u_j\right\|_{\omega_\beta}=1,u_j\to0\right\}\tag{4.2}$$

由[8]知，$J^\delta_{0,n,\sigma}(0)\le\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\left(1+e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}}\right)$，这一结论对极值函数的讨论有很重要的作用。

定理 1 $J^\delta_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^\delta_{\tilde\beta,n,\sigma}(0),\forall\tilde\beta\le\beta$。

证明：由(5)及已知事实得：

$$\int_B\frac{1}{|x|^\sigma}dx=\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\le\lim_{j\to\infty}\sup\int_B\frac{\exp\left(\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^\sigma}dx\le J^\delta_{\beta,n,\sigma}(0)\tag{4.3}$$

对于$\tilde\beta$，上式依然成立。

下证：$J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^{\delta}_{\tilde\beta,n,\sigma}(0),\forall\tilde\beta\le\beta$。取$\left\{u_j\right\}$是$W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_\beta\right)$里的归一化集中序列，取子列使得$\lim\limits_{j\to\infty}J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}\left(u_j\right)$存在。$\left\{v_j\right\}$由引理 3 所定义，因此，

$v_j\in W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_{\tilde\beta}\right)$，且$\left\|v_j\right\|_{\omega_{\tilde\beta}}\le 1$，$\left\{v_j\right\}$有界。假设$v_j\to v$，由于$v_j\to 0$，在$B\setminus B_a$，这里$a\in\left(0,1\right)$。由弱极限的唯一性得：$v\equiv 0$。

情形一$\limsup\limits_{n\to\infty}\left\|v_j\right\|_{\omega_{\tilde\beta}}<1,\exists t\in(0,1)$，以及$N$，当$j>N$时，$\left\|v_j\right\|_{\omega_{\tilde\beta}}\le t<1$。因此，

由引理 2 与 Hölder 不等式知$\dfrac{\exp\left(\alpha_{\tilde\beta,n,\sigma}\left|v_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{\left|x\right|^{\sigma}}$在$L^p\left(p>1\right)$中有界，所以

$$\lim_{j\to\infty}\int_B\frac{\exp\left(\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^{\sigma}}dx=\lim_{j\to\infty}\int_B\frac{\exp\left(\alpha_{\tilde\beta,n,\sigma}\left|v_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^{\sigma}}dx \tag{4.4}$$
$$=\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\le J^{\delta}_{\tilde\beta,n,\sigma}(0)$$

这就得到了$J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^{\delta}_{\tilde\beta,n,\sigma}(0),\forall\tilde\beta\le\beta$。

情形二$\limsup\limits_{j\to\infty}\left\|v_j\right\|_{\omega_{\tilde\beta}}=1$，可以通过取子列，使得$\lim\limits_{j\to\infty}\left\|v_j\right\|_{\omega_{\tilde\beta}}=1$。定义

$I_j=\dfrac{v_j}{\left\|v_j\right\|_{\omega_{\tilde\beta}}},\left\{I_j\right\}$的性质有：在$W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_{\tilde\beta}\right)$里有$I_j\to 0,\left|v_j\right|\le I_j$。如果$\left\{I_j\right\}$是归一化集中序列，那么

$$\lim_{j\to\infty}J_{\beta,n,\sigma}\left(u_j\right)=\lim_{j\to\infty}J_{\tilde\beta,n,\sigma}\left(v_j\right)\le\limsup_{\substack{j\to\infty\\ \tilde\beta,n,\sigma}}\left(I_j\right)\le J^{\delta}_{\tilde\beta,n,\sigma}(0) \tag{4.5}$$

由(6)知，对于$\forall\tilde\beta\le\beta$有$J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^{\delta}_{\tilde\beta,n,\sigma}(0)$成立。

如果$\left\{I_j\right\}$非归一化集中序列，$\exists a,t\in\left(0,1\right)$，以及$N$，当$j>N$时，$\int_{B_a}\left|I_j\right|^n\omega_{\tilde\beta}(x)dx\le t$。定义：

$$\tilde I_j(x)=\begin{cases}I_j(x)-I_j(a), & |x|\le a\\ 0, & a<|x|<1\end{cases} \tag{4.6}$$

$\tilde I_j\left(x\right)$的性质有：$\tilde I_j\left(x\right)\in W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_{\tilde\beta}\right)$，且当$j>N$时有,$\left\|\tilde I_j\right\|^n_{\omega_{\tilde\beta}}\le t<1$。选择足够小的$\varepsilon$，使得$(1+\varepsilon)t^{\frac{1}{(n-1)(1-\tilde\beta)}}<1$，结合 Young 不等式以及(7)的定义有

$$\left|I_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde\beta)}}\le C(n,\tilde\beta,\varepsilon)\left|I_j(a)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde\beta)}}+(1+\varepsilon)\left|\tilde I_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde\beta)}} \tag{4.7}$$

$C(n,\tilde{\beta},\varepsilon)=\left(1-(1+\varepsilon)^{-\frac{(n-1)(1-\tilde{\beta})}{n\tilde{\beta}+1-\tilde{\beta}}}\right)^{-\frac{n\tilde{\beta}+1-\tilde{\beta}}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}$，选取适当的$t,\varepsilon$以及权，使得

$\dfrac{\exp\left(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}(1+\varepsilon)\left|\tilde{I}_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}\right)}{|x|^{\sigma}}$在$L^p\left(p>1\right)$中有界。在$B_a$里，由

$I_j\left(a\right)\to 0, j\to\infty$，推出$\dfrac{\exp\left(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left|\tilde{I}_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}\right)}{|x|^{\sigma}}$在$L^p\left(B_a\right)$中有界。

我们会得到

$$\lim_{j\to\infty}\int_{B_a}\frac{\exp\left(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left|I_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}\right)}{|x|^{\sigma}}dx=\int_{B_a}\frac{1}{|x|^{\sigma}}dx=\frac{t-\sigma}{n-\sigma}\omega_{n-1} \tag{4.8}$$

在$B\setminus B_a$上，由引理 2 与勒贝格-控制收敛定理有

$$\lim_{j\to\infty}\int_{B\setminus B_a}\frac{\exp\left(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left|I_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}\right)}{|x|^{\sigma}}dx=\frac{1}{n-\sigma}\omega_{n-1}-\frac{t-\sigma}{n-\sigma}\omega_{n-1} \tag{4.9}$$

综上所述，由(8)，(9)得

$$\lim_{j\to\infty}\int_{B}\frac{\exp\left(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left|I_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}\right)}{|x|^{\sigma}}dx=\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma} \tag{4.10}$$

所以$\lim\limits_{j\to\infty}J_{\beta,n,\sigma}\left(u_j\right)=\lim\limits_{j\to\infty}J_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left(v_j\right)\le\dfrac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0)$。

至此，对于$\forall\tilde{\beta}\le\beta$,有$J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0)$成立。

定理 2 $\lim\limits_{\beta\to 0}MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)=MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right)$。

证明：

假设$u\in W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_\beta\right)$,满足$\|u\|_{\omega_\beta}\le 1$，$v$由(4)所定义,对于$\forall\tilde{\beta}\le\beta$，有$\|v\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}\le 1$，

通过$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)$的定义，有

$$\int_B\frac{\exp\left(\alpha_{\beta,n,\sigma}|u|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^{\sigma}}dx=\int_B\frac{\exp\left(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}|v|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}\right)}{|x|^{\sigma}}dx\le MT\left(n,\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma},\tilde{\beta},\sigma\right) \tag{4.11}$$

所以,$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\le MT\left(n,\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma},\tilde{\beta},\sigma\right)$成立，这里$\forall 0\le\tilde{\beta}\le\beta<1$。故 $MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)$关于$\beta$单调递减，则有

$$\limsup_{\beta\to 0} MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\le MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right) \tag{4.12}$$

下面证明：

$\liminf\limits_{\beta\to 0} MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\ge MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right)$，由于$MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right)$极值函数可达，因此存在$u_0\in C^1(B)\cap W^{1,n}_{0,rad}(B)$,且$u_0$满足$\left\|\nabla u_0\right\|_n=1$。故：

$$\lim_{\beta\to 0}\int_B\left|\nabla u_0\right|^n\omega_\beta(x)dx=\int_B\left|\nabla u_0\right|^n dx=1 \tag{4.13}$$

对于$\forall\varepsilon>0,\exists\beta_\varepsilon$时，$\forall\beta\le\beta_\varepsilon$时,有$\left\|u_0\right\|_{\omega_\beta}\le 1+\varepsilon$。

我们有

$$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\ge\int_B\frac{\exp\left(\alpha_{\beta,n,\sigma}\left(\frac{\left|u_0\right|}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^\sigma}dx \tag{4.14}$$

当$\beta\to 0$时，由法图引理得：

$$\liminf_{\beta\to 0} MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\ge\int_B\frac{\exp\left(\alpha_{0,n,\sigma}\left(\frac{\left|u_0\right|}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right)}{|x|^\sigma}dx \tag{4.15}$$

当$\varepsilon\to 0$时，再一次由法图引理得：

$$\liminf_{\beta\to 0} MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\ge\int_B\frac{\exp\left(\alpha_{0,n,\sigma}\left|u_0\right|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{|x|^\sigma}dx=MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right) \tag{4.16}$$

综上所述：

$$\lim_{\beta\to 0} MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)=MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right) \tag{4.17}$$

定理 3 存在$\beta_0\in(0,1)$，当$0\le\beta<\beta_0$时，$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)$的极值函数存在。

证明：

由(10)与已知的结论

$$\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\left(1+e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}}\right)\le J^\delta_{0,n,\sigma}(0)<MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right) \tag{4.18}$$

结合(11)，定理 1 与 2 得

$$J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^{\delta}_{0,n,\sigma}(0)<MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\forall\beta\in\left[0,\beta_0\right) \tag{4.19}$$

下面取$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)$的极大化序列，由于范数有界，因此在$W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_\beta\right)$里，$u_j\to u_0$。且对某些$u_0\in W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_\beta\right)$，取$a\in(0,1)$，在$B\setminus B_a$里，$u_j\to u_0$。若$u_0\equiv 0$，且$\{u_j\}$是归一化集中序列，那么$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)=\lim\limits_{j\to\infty}J_{\beta,n,\sigma}\left(u_j\right)\le J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)$，这与(12)矛盾。因此$\{u_j\}$非归一化集中序列。若$\exists a,t\in(0,1)$，存在$N$，当$n\ge N$时,有$\int_{B_a}\left|\nabla u_j\right|^n\omega_\beta(x)dx\le t$。此时

$$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)=\lim_{j\to\infty}J_{\beta,n,\sigma}\left(u_j\right)=\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\le J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0) \tag{4.20}$$

这与（12）矛盾。所以$u_0\ne 0$，由引理 2 与 Hölder 不等式知

$\dfrac{\exp\left(\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^\sigma}$在$L^p\left(p>1\right)$中有界，故有

$$\begin{aligned}MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)&=\lim_{j\to\infty}\int_B\frac{\exp\left(\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^\sigma}dx\\&=\int_B\frac{\exp\left(\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_0\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^\sigma}dx\end{aligned} \tag{4.21}$$

这种情况下，我们发现$\left\|u_0\right\|_{\omega_\beta}\le 1$。当$\left\|u_0\right\|_{\omega_\beta}<1$时，

$$\begin{aligned}MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)&\ge\int_B\frac{\exp\left(\alpha_{\beta,n,\sigma}\left(\frac{|u_0|}{\left\|u_0\right\|_{\omega_\beta}}\right)^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^\sigma}dx\\&>\int_B\frac{\exp\left(\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_0\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^\sigma}dx\\&=MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\end{aligned} \tag{4.22}$$

这是一个矛盾。

综上所述，$\left\|u_0\right\|_{\omega_\beta}=1$，且$u_0$就是$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)$的极值函数。

第5章 总结与展望

本文研究了一类对数加权下的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在性问题。证明主要分次临界情形与临界情形两部分证明：次临界情形，利用积分在单位球上的一致有界性，通过取极大化序列，结合维塔利收敛定理，证明极值函数存在；临界情形，构造泛函集中水平，排除极大化序列的集中现象，运用相应的积分集中紧性原理，提升可积性，进而证明极值函数存在。

在前面研究的基础上做展望：首先，考虑能否证明高阶情形下对数加权的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在性问题。其次，能否适当的添加条件，使得参数的存在区间扩大。最后，放眼未来，Trudinger-Moser 不等式的分支可以研究的更加广泛和深入，更加优美的结论还有待发现。

参考文献

[1]Carleson, Lennart, and Sun-Yung A. Chang. "ON THE EXISTENCE OF AN EXTREMAL FUNCTION FOR AN INEQUALITY OF MOSER, J." Bulletin des Sciences Mathématiques 110.2 (1986): 113-127.

[2]Struwe M. Critical points of embeddings of H01, n into Orlicz spaces[C]Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire. Elsevier Masson, 1988, 5(5): 425-464.

[3]Martin Flucher,Extremal functions for the Trudinger-Moser inequality in 2 dimensions,Comment.Math.Helv.67(1992),no.3,471-497.

[4]Kai-Ching Lin,Extremal functions for Moser's inequality Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996),no.7,2663-2671.

[5]Nguyen,Van."Remarks on the Moser-Trudinger type inequality with logarithmic weights in dimension N".Proceedings of the American Mathematical Society 147.12(2019):5183-5193.

[6]Aouaoui,Sami,and Rahma Jlel."A new Singular Trudinger-Moser Type Inequality with Logarithmic Weights and Applications."Advanced Nonliner Studies 20.1(2020):113-139.

[7]Prosenjit Roy,Extremal function for Moser-Trudinger type inequality with logarithmic weight,Nonliner Anal.135(2016),194-204.

[8]Wang, Xu Min. "Singular Supercritical Trudinger-Moser Inequalities and the Existence of Extremals." Acta Mathematica Sinica, English Series 36.8 (2020): 873-888.

致 谢

四年的学习生涯即将结束，四年前，怀着对数学的兴趣踏入大学校园，这四年，始终以热烈的激情学习数学，不仅获得了专业知识，也通过参加竞赛等活动巩固所学的知识。这四年，拼搏过，奋斗过，懊悔过，但最终坚持下来了。数学需要清晰的直觉和严格的演绎，学习数学，不是记了多少理论，做了多少题，而是提升境界，改变对一些问题的看法。这对进一步的学习大有益处。在即将毕业之际，我要向在生活上支持我的父母，在学习上支持我的老师，致以最诚挚的感谢。

首先，感谢我的论文指导老师朱茂春副教授，在论文选题方面，逻辑推导方面，直至定稿方面，都曾悉心的教导，这些都看在眼里，记在心里。所以无论是他的学识，还是为人，都让我甚感钦佩，终将使我受益匪浅。

其次，感谢我的老师和同学，他们在我遇到学习中的问题时，耐心的教导我，让我提升了对学习数学的信心，丰富了我的大学生活，也锤炼了我的品格。

最后，感谢我的父母，他们在生活中，提供了物质上的需求，在学习中，当获得一点点成功时，鼓励我下次做的更好，当遇到失败时，他们鼓励我不要放弃，从他们身上，我学到了很多。

即将毕业之际，再一次感谢曾经帮助过我的老师，同学，父母，我们的未来都会更加美好！