各向异性范数约束下的加权 Trudinger-Moser 不等式

申浩东

指导教师: 朱茂春

江苏大学数学科学学院

2023 年 06 月 04 日

目录

选题背景 I

设 Ω 是 R^N 上的光滑有界区域，$W_0^{1,N}(\Omega)$ 表示空间 $C_0^\infty(\Omega)$ 按范数

$$\|u\|_{W_0^{1,N}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^N dx\right)^{1/N}$$

完备化得到的空间.

Sobolev 嵌入定理指出：对于任意的 $1 < p < \infty, W_0^{1,N}(\Omega)$ 空间可以连续嵌入到 $L^p(\Omega)$, 但不能嵌入到 $L^\infty(\Omega)$ 中去.

Trudinger-Moser 不等式:

(1) Trudinger、Peetre 等的研究指出：最大增长函数空间是指数类型函数, 更准确地说，存在 $\alpha > 0$, 使如下不等式成立：

$$\sup_{u\in W_0^{1,N}(\Omega), \|u\|_{W_0^{1,N}(\Omega)}\le 1} \int_\Omega e^{\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}} dx < \infty.$$

选题背景 II

(2) 1971 年,Moser 利用径向对称重排方法得到了最佳常数 $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$, 即:

$$\sup_{u\in W_0^{1,N}(\Omega),\|u\|_{W_0^{1,N}(\Omega)}\le 1} \int_\Omega e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}}dx < \infty, \qquad \forall\alpha \le \alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}.$$

有关不等式中极值函数的存在性问题，Carleson-Chang 使用了 ODE 方法，证明了极值函数是存在的.

(3) 1988 年,Adams 得到高阶 Trudinger 型不等式, 并给出了最佳常数:

$$\sup_{u\in W_0^{m,p}(\Omega),\|\nabla^m u\|_p\le 1} \int_\Omega \exp(\beta|u|^{p'})dx \le c_0,$$

选题背景 III

$$\beta \leq \beta_0(m,n) = \frac{n}{\omega_{n-1}}\left[\frac{\pi^{n/2}2^m\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m+1}{2}\right)}\right]^{p'}, m \text{ 为奇数.}$$

$$\beta \leq \beta_0(m,n) = \frac{n}{\omega_{n-1}}\left[\frac{\pi^{n/2}2^m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)}\right]^{p'}, m \text{ 为偶数.}$$

其中 $u \in C_0^m(\Omega)$, 且 $p = n/m, p' = p/(p-1)$. 但当 $\beta > \beta_0$ 时, 则存在满足上述条件的函数 u 使得 $\int_\Omega \exp\left(\beta|u|^{p'}\right) dx > c_0$.

(4) 通过 B.Ruf 等的研究，用标准的 Sobolev 范数 $\|u\|_{W_0^{1,N}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^N + |u|^N\right) dx\right)^{\frac{1}{N}}$ 来代替 Dirichlet 范数 $\|u\|_{\mathbb{R}^N} = \left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^N\right)^{\frac{1}{N}}$, 得到全空间上的 Trudinger-Moser 不等式:

选题背景 IV

$$\sup_{u\in W^{1,N}(R^N),\int_{R^N}(|\nabla u|^N+|u|^N)dx\le 1}\int_{R^N}\left(e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}}-\sum_{k=0}^{N-2}\frac{\alpha^k|u|^{\frac{Nk}{N-1}}}{k!}\right)dx<\infty \Leftrightarrow \alpha\le\alpha_N.$$

(5) 2007 年, Adimurthi 和 Sandeep 研究了带有奇异项的 Trudinger-Moser 不等式, 对任意的 $\alpha>0$ 以及 $\beta\in[0,N)$,

$$\sup_{u\in W_0^{1,N}(\Omega),\int_\Omega|\nabla u|^N dx\le 1}\int_\Omega \frac{e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}}}{|x|^\beta}dx<\infty \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\alpha}{\alpha_N}+\frac{\beta}{N}\le 1.$$

显然， 当 $\beta=0$ 时即为经典的 Trudinger-Moser 不等式.

选题背景 V

(6) 2010 年，Adimurthi 和 Yang 将全空间上的 Trudinger-Moser 不等式推广到了奇异型，即对于任意 $\alpha > 0, \beta \in [0, N)$ 以及 $\tau > 0$,

$$\sup_{u\in W^{1,N}(R^N),\int_{R^N}(|\nabla u|^N+\tau|u|^N)dx\le 1} \int_{R^N} \frac{1}{|x|^{\beta}}\left(e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}} - \sum_{k=0}^{N-2}\frac{\alpha^k|u|^{\frac{Nk}{N-1}}}{k!}\right)dx < \infty \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha_N} + \frac{\beta}{N} \le 1$$

(7) 后来, Wang-Xia 研究了各向异性范数约束下的 Trudinger-Moser 不等式, 设 $F(x)$ 是正的一次凸齐次函数，并且 $F(x) \in C^2(R^N \backslash \{0\})$.

$F^0(x)$ 是 $F(x)$ 的对偶函数，即

$$F^0(x) = \sup_{\xi\neq 0}\frac{\langle x,\xi\rangle}{F(\xi)} \ ; \ F(x) = \sup_{\xi\neq 0}\frac{\langle x,\xi\rangle}{F^0(\xi)}.$$

选题背景 VI

Wang-Xia 证明了对于任意 $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ 以及各向异性范数 $(\int_\Omega F^N(\nabla u)dx) \leq 1$, 不等式

$$\int_\Omega e^{\lambda|u|^{\frac{N}{N-1}}}dx \leq C(N)\,|\Omega|$$

成立. 其中 $\lambda \leq \lambda_N = N^{\frac{N}{N-1}}\kappa_N^{\frac{1}{N-1}}$,$\kappa_N$ 表示单位 Wulff 球的体积.

L.Zhou 和 C.Q.Zhou 通过使用标准的爆破分析方法证明了上述不等式中极值函数的存在性：对于任意的 $0 < \alpha \leq \lambda_N$，不等式

$$\sup_{u\in W_0^{1,N}(\Omega),(\int_\Omega F^N(\nabla u)dx)\leq 1} \int_\Omega e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}}dx \leq +\infty$$

的极值函数是存在的.

选题背景 VII

(8) 对于奇异型的 Trudinger-Moser 不等式，X.Zhu 利用重拍理论将其推广到了各向异性的情形，即证明了：

$$\sup_{u\in W_0^{1,N}(\Omega),\int_\Omega F^N(\nabla u)dx\le 1}\int_\Omega \frac{e^{\lambda|u|^{\frac{N}{N-1}}}}{F^0(x)^\beta}dx<+\infty \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\lambda_N}+\frac{\beta}{N}\le 1,$$

$$\sup_{u\in W^{1,N}(R^N),\int_{R^N}(F^N(\nabla u)+\tau|u|^N)dx\le 1}\int_{R^N}\frac{e^{\lambda|u|^{\frac{N}{N-1}}}-\sum\limits_{k=0}^{N-2}\frac{\lambda^k|u|^{\frac{Nk}{N-1}}}{k!}}{F^0(x)^\beta}dx<\infty \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\lambda_N}+\frac{\beta}{N}\le 1,$$

其中 $\lambda>0, 0\le\beta<N, \tau>0, \lambda_N=N^{\frac{N}{N-1}}\kappa_N^{\frac{1}{N-1}}$.

(9) Y.Yang 和 X.Zhu 证明了一类奇异型加权 Trudinger-Moser 不等式，设 B 是 $R^N(N\ge 2)$ 空间中的单位球,$p>1$, 定义：

$$\lambda_p(B)=\inf\left\{\int_B|\nabla u|^N dx : u\in W_0^{1,N}(B), \int_B|u|^p dx=1\right\},$$

选题背景 VIII

对于任意 $\beta \geq 0$ 以及任意 $\alpha < (1+\frac{p}{N}\beta)^{N-1+\frac{N}{p}}\lambda_p(B)$, 当 $\gamma \leq \alpha_N(1+\frac{p}{N}\beta)$. 时，不等式

$$\sup_{u\in W_0^{1,N}(B)\cap\varphi, \int_B |\nabla u|^N dx - \alpha(\int_B |u|^p |x|^{p\beta} dx)^{N/p} \leq 1} \int_B e^{\gamma |u|^{\frac{N}{N-1}}} |x|^{p\beta} dx \leq \infty$$

成立，且极值函数是存在的.

(10) 他们也考虑了 $p=N$ 时的形式较为简单的不等式: 对于任意 $\beta \geq 0$, 不等式

$$\sup_{u\in W_0^{1,N}(B)\cap\varphi, \int_B |\nabla u|^N dx \leq 1} \int_B e^{\gamma |u|^{\frac{N}{N-1}}} |x|^{N\beta} dx < \infty, \qquad \forall \gamma \leq \alpha_N(1+\beta)$$

成立且极值函数是存在的.

研究内容

对于上述内容中最后提到的不等式形式：

$$\sup_{u\in W_0^{1,N}(B)\cap\varphi,\int_B|\nabla u|^N dx\le 1}\int_B e^{\gamma|u|^{\frac{N}{N-1}}}|x|^{N\beta}dx<\infty.$$

本文将上述不等式推广至各向异性的情形，即用各向异性范数代替原不等式中的狄利克雷范数，以及用函数 $F^0(x)$ 代替 $|x|$，并用更一般的区域代替单位球 B，得到不等式的形式：

$$\sup_{u\in W_0^{1,N}(\Omega)\cap\varphi,\int_\Omega F(\nabla u)^N dx\le 1}\int_\Omega e^{\lambda|u|^{\frac{N}{N-1}}}F^0(x)^{N\beta}dx<\infty.$$

其中 Ω 是 R^N 空间中的包含原点的有界区域.

本文的主要内容就是参数满足在一定的条件下，证明此不等式成立，并证明其极值函数的存在性.

重要记号

(1) 中心在原点，半径为 r 的 Wulff 球：

$\omega_r := \{x \in R^N | F^0(x) \leq r\}$.

(2) Schwarz 对称重排： $u^{\#}(x) = u^*(\sigma_N |x|^N), \qquad x \in \Omega^{\#}$.

(3) 一维递减重排： $u^* = \sup\{s \geq 0 : |\{x \in \Omega : |u(x)| > s\}| > t\}$.

(4) 凸对称重排:$u^\star(x) = u^*(\kappa_N F^0(x)^N), \qquad x \in \Omega^\star$.

(5) 记 φ 是径向对称函数的集合（径向对称函数是指对于任意的 x，等式 $u(x) = u(|x|)$ 成立）.

研究过程 I

引理 1 [2]

对于任意的 $u \in W_0^{1,N}(\omega_R)$，都有 $u^\star \in W_0^{1,N}(\omega_R)$，并且满足：

$$\int_{\omega_R} |u^\star|^N dx = \int_{\omega_R} |u|^N dx;$$
$$\int_{\omega_R} F(\nabla u^\star)^N dx \le \int_{\omega_R} F(\nabla u)^N dx;$$
$$\int_{\omega_R} G(u^\star) dx = \int_{\omega_R} G(u) dx;$$

此处 $G: R \to R$ 是一个连续递增函数.

引理 2 [2]

$(1) F(\nabla F^0(x)) = 1;$

$(2) \int_{\omega_R} \frac{1}{|\nabla F^0(x)|} dx = N\kappa_N r^{N-1}.$

研究过程 II

重要引理 [2]

设 $a=(\frac{\kappa_N}{\sigma_N})^{\frac{1}{N}}$, 对于任意的 $u\in W_0^{1,N}(\omega_R)$，有 $u^\star\in W_0^{1,N}(\omega_R)$ 和 $u^\#\in W_0^{1,N}(B_{aR})$, 且等式:

$$\int_{\omega_R}F(\nabla u^\star)^N dx=a^N\int_{B_{aR}}\left|\nabla u^\#\right|^N dx$$

$$\int_{\omega_R}e^{\lambda|u^\star|^{\frac{N}{N-1}}}F^0(x)^{N\beta}dx=\frac{1}{a^{N\beta}}\int_{B_{aR}}e^{\lambda\left|u^\#\right|^{\frac{N}{N-1}}}|x|^{N\beta}dx$$

成立.

重要引理的证明

对于任意的 $u \in W_0^{1,N}(\omega_R)$, 通过引理一有 $u^\star \in W_0^{1,N}(\omega_R)$, 注意到 $|\omega_R| = |B_{aR}|$, 根据 Schwarz 对称化的定义有 $u^\# \in W_0^{1,N}(B_{aR})$.

计算第一个等式:

$$\int_{\omega_R} F(\nabla u^\star)^N dx =$$

$$\int_0^R \int_{\partial\omega_r} \frac{F(u^{*\prime}(\kappa_N F^0(x)^N)\kappa_N N F^0(x)^{N-1} \nabla F^0(x))^N}{|\nabla F^0(x)|} d\mathcal{H}^{N-1} dr$$

$$= N\kappa_N \int_0^R \left| u^{*\prime}(\kappa_N r^N)\kappa_N N r^{N-1} \right|^N r^{N-1} dr \quad (setting \quad r = a^{-1} t)$$

$$= N\kappa_N \int_0^{aR} \left| u^{*\prime}(\tfrac{\kappa_N}{a^N} t^N) N \tfrac{\kappa_N}{a^N} t^{N-1} \right|^N t^{N-1} dr \quad (since \quad a = (\tfrac{\kappa_N}{\sigma_N})^{\frac{1}{N}})$$

$$= a^N \int_{B_{aR}} \left| \nabla u^\# \right|^N dx$$

重要引理的证明

计算第二个等式：

$$\int_{\omega_R} e^{\lambda|u^\star|^{\frac{N}{N-1}}} F^0(x)^{N\beta} dx =$$

$$\int_0^R \int_{\partial\omega_r} \frac{e^{\lambda\left|u^*(\kappa_N F^0(x)^N)\right|^{\frac{N}{N-1}}} F^0(x)^{N\beta}}{\left|\nabla F^0(x)\right|} d\mathcal{H}^{N-1} dr$$

$$= N\kappa_N \int_0^R e^{\lambda\left|u^*(\kappa_N r^N)\right|^{\frac{N}{N-1}}} r^{N\beta} r^{N-1} dr \quad (setting \quad r = a^{-1}t)$$

$$= \frac{N\kappa_N}{a^{N(\beta+1)}} \int_0^{aR} e^{\lambda\left|u^*(\frac{\kappa_N}{a^N} t^N)\right|^{\frac{N}{N-1}}} t^{N\beta} t^{N-1} dt \quad (since \quad a = (\frac{\kappa_N}{\sigma_N})^{\frac{1}{N}})$$

$$= \frac{1}{a^{N\beta}} \int_{B_{aR}} e^{\lambda\left|u^\#\right|^{\frac{N}{N-1}}} |x|^{N\beta} dx$$

研究成果

主要结论

对于任意的 $\beta \geq 0$ 以及 $\lambda \leq \lambda_N(1+\beta)$，不等式

$$\sup_{u \in W_0^{1,N}(\Omega) \cap \varphi, \int_\Omega F(\nabla u)^N dx \leq 1} \int_\Omega e^{\lambda |u|^{\frac{N}{N-1}}} F^0(x)^{N\beta} dx < \infty$$

成立，并且极值函数是存在的.

不等式的证明思路 I

首先因为 Ω 是一个包含原点的有界区域，所以一定存在足够小的 ε 和足够大的 R 满足 $\omega_\varepsilon \subset \Omega \subset \omega_R$ 的情况，因此只需证明对于任意的 $\lambda \leq \lambda_N(1+\beta)$, 不等式：

$$\sup_{u \in W_0^{1,N}(\omega_R) \cap \varphi, \int_{\omega_R} F(\nabla u)^N dx \leq 1} \int_{\omega_R} e^{\lambda |u|^{\frac{N}{N-1}}} F^0(x)^{N\beta} dx < \infty$$ 成立.

第一步：根据引理一的结论可得：

$$\sup_{u \in W_0^{1,N}(\omega_R) \cap \varphi, \int_{\omega_R} F(\nabla u)^N dx \leq 1} \int_{\omega_R} e^{\lambda |u|^{\frac{N}{N-1}}} F^0(x)^{N\beta} dx =$$

$$\sup_{u^\star \in W_0^{1,N}(\omega_R) \cap \varphi, \int_{\omega_R} F(\nabla u^\star)^N dx \leq 1} \int_{\omega_R} e^{\lambda |u^\star|^{\frac{N}{N-1}}} F^0(x)^{N\beta} dx$$

不等式的证明思路 II

第二步：设 $a=(\frac{\kappa_N}{\sigma_N})^{\frac{1}{N}}$, 根据重要引理可得：

$$\sup_{u^\star\in W_0^{1,N}(\omega_R)\cap\varphi,\int_{\omega_R}F(\nabla u^\star)^N dx\le 1}\int_{\omega_R}e^{\lambda|u^\star|^{\frac{N}{N-1}}}F^0(x)^{N\beta}dx=$$

$$\sup_{u^\#\in W_0^{1,N}(B_{aR})\cap\varphi,a^N\int_{B_{aR}}|\nabla u^\#|^N dx\le 1}\frac{1}{a^{N\beta}}\int_{B_{aR}}e^{\lambda|u^\#|^{\frac{N}{N-1}}}|x|^{N\beta}dx$$

第三步：因为当 $F(x)=|x|$ 时，$u^\star=u^\#$，所以有：

$$\sup_{u^\#\in W_0^{1,N}(B_{aR})\cap\varphi,a^N\int_{B_{aR}}|\nabla u^\#|^N dx\le 1}\frac{1}{a^{N\beta}}\int_{B_{aR}}e^{\lambda|u^\#|^{\frac{N}{N-1}}}|x|^{N\beta}dx=$$

$$\sup_{u^\star\in W_0^{1,N}(B_{aR})\cap\varphi,a^N\int_{B_{aR}}|\nabla u^\star|^N dx\le 1}\frac{1}{a^{N\beta}}\int_{B_{aR}}e^{\lambda|u^\star|^{\frac{N}{N-1}}}|x|^{N\beta}dx$$ 设

$\gamma=\lambda a^{-\frac{N}{N-1}}$，根据第一步得到的等式以及一些计算可以得出：

不等式的证明思路 III

$$\sup_{u^\star\in W_0^{1,N}(B_{aR})\cap\varphi,\, a^N\int_{B_{aR}}|\nabla u^\star|^N dx\le 1} \frac{1}{a^{N\beta}}\int_{B_{aR}} e^{\lambda|u^\star|^{\frac{N}{N-1}}}|x|^{N\beta}dx =$$

$$\sup_{u\in W_0^{1,N}(B_{aR})\cap\varphi,\quad \int_{B_{aR}}|\nabla u|^N dx\le 1} \frac{1}{a^{N\beta}}\int_{B_{aR}} e^{\gamma|u|^{\frac{N}{N-1}}}|x|^{N\beta}dx$$

第四步：已有的结果是：对于任意的 $\gamma\le\alpha_N(1+\beta)$，$\sup_{u\in W_0^{1,N}(B_{aR})\cap\varphi,\int_{B_{aR}}|\nabla u|^N dx\le 1}\int_{B_{aR}} e^{\gamma|u|^{\frac{N}{N-1}}}|x|^{N\beta}dx<\infty$ 成立. 并且注意到：$a^{\frac{N}{N-1}}\alpha_N=\lambda_N$ 综合第一步到第四步就完成了不等式的证明.

极值函数的存在性证明 I

根据已有结果可知：

$$\sup_{u\in W_0^{1,N}(B_{aR})\cap\varphi,\quad \int_{B_{aR}}|\nabla u|^N dx\le 1} \frac{1}{a^{N\beta}}\int_{B_{aR}} e^{\lambda a^{-\frac{N}{N-1}}|u|^{\frac{N}{N-1}}}|x|^{N\beta}dx$$ 的极值

函数是存在的. 所以存在函数 $v_0=v_0^{\#}$ 满足 $\int_{B_{aR}}\left|\nabla v_0^{\#}\right|^N dx=1.$

设 $v_0=au_0$, 可以得到 $u_0=u_0^{\#}$ 和 $a^N\int_{B_{aR}}\left|\nabla u_0^{\#}\right|^N dx=1$

由重要引理得到的结论 1 可得：$\int_{\omega_R}F(\nabla u^{\star})^N dx=1.$

然后通过重要引理得到的结论 2 可知 $u^{\star}$ 就是不等式

$$\sup_{u\in W_0^{1,N}(\omega_R)\cap\varphi,\int_{\omega_R}F(\nabla u)^N dx\le 1}\int_{\omega_R}e^{\lambda|u|^{\frac{N}{N-1}}}F^0(x)^{N\beta}dx<\infty$$

的极值函数，证毕.

参考文献 I

[1] Y.Y.Yang, X.Zhu. A Trudinger–Moser inequality for a conical metric in the unit ball [J]. Archiv der Mathematik,2019,112(5) 531-545.

[2] X.Zhu. Remarks on singular trudinger-moser type inequalities [J]. Communications on Pure & Applied Analysis,2019,19(1) 103-112.

[3] J.Moser, A sharp form of an inequality by N. Trudinger[J], Indiana Univ. Math. J., 20 (1971) 1077- 1092.

[4] L.Carleson, S. Y. Chang. On the existence of an extremal function for an inequality of J. Moser [J], Bull. Sci. Math., 100 (1986) 113- 127.

参考文献 II

[5] D.R.Adams. A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives [J]. Annals of Mathematics, 1988,128(2) 385-398.

[6] Adimurthi, K.Sandeep. A singular Moser -Trudinger embedding and its applications [J], N-oDEA Nonlinear Differential Equations Appl, 13 (2007) 585-603.

[7] Adimurthi , Y.Y.Yang. An Interpolation of Hardy Inequality and Trudinger–Moser Inequality in N and Its Applications [J]. International Mathematics Research Notices,2010 (13) 2394-2426.

参考文献 III

[8] G. Wang, C. Xia. Blow-up analysis of a Finsler–Liouville equation in two dimensions [J]. Journal of Differential Equations,2011,252(2) 1668-1700.

[9] C.L.Zhou, C.Q.Zhou. Moser-Trudinger inequality involving the anisotropic Dirichlet norm on [J], J. Funct. Anal., 276 (2019) 2901-2935.

Thanks!