

送检文献信息

【题名】对数加权奇异型的Trudinger-Moser不等式极值问题

作者：郭永强

检测时间：2023-04-16 09:54:39

- 检测范围：
 ☒ 中国学术期刊数据库
 ☒ 优先出版论文数据库
 ☒ 国内外重要学术会议论文数据库
- ☒ 中国博士学位论文全文数据库
☒ 中国优秀硕士学位论文全文数据库
☒ 中国优秀报纸全文数据库
- ☒ 互联网学术资源数据库
☒ 学术网络文献数据库
☒ 中国专利文献全文数据库
- ☒ 特色英文文摘数据库
☒ 中国标准全文数据库

3.36%
 总相似比

详细检测结果

<div>字</div> 原文总字符数 4103	<div>检</div> 检测字符数 3782	<div>参</div> 参考文献相似比 0.00%	<div>参</div> 辅助排除参考文献相似比 3.36%	<div>自</div> 可能自引相似比 0.00%	<div>自</div> 辅助排除可能自引相似比 3.36%
-----------------------------	----------------------------	-------------------------------	-----------------------------------	-------------------------------	-----------------------------------

相似文献列表（仅列举前10条）

序号	相似比(相似字符)	相似文献	类型	是否引用
1	2.70% 102字符	两类加权约束变分问题的极值函数的存在性和不存在性 陈文欢（导师：朱茂春）；江苏大学，硕士（专业：数学）；2022	学位	否
2	0.37% 14字符	TSZY132181021001455176 2018-12-31	学术网文	否
3	0.29% 11字符	Association between Maternal Education and School-Age Children Weight Status: A Study from the China Health Nutrition Survey, 2011. Yuejing,Feng, Lulu,Ding, Xue,Tang, Yi,Wang等；《International journal of environmental research and public health》；2019-07-16	英文	否

原文标注

JIANGSU UNIVERSITY本科毕业论文一类对数加权下奇异型的Trudinger-Moser不等式的极值函数存在性问题学院名称：数学科学学院

专业班级：应数1901

学生姓名：郭永强

指导教师姓名：朱茂春

指导教师职称：副教授

2023年 6 月

一类对数加权下奇异型的Trudinger-Moser不等式的极值函数存在性问题

专业班级：应数1901 学生姓名：郭永强

指导教师：朱茂春职称：副教授

摘要 Trudinger不等式作为Sobolev不等式的极限情形，是由Trudinger于1967年首先得到的。后来又由Moser得到了一阶Trudinger不等式的最佳常数，即Trudinger-Moser不等式。这类不等式自诞生至今，在偏微分方程、几何分析以及弦理论等研究中得到了广泛应用。本文主要研究单位球上对数加权的奇异型的Trudinger-Moser不等式的极值函数存在性问题。这里的权是，。证明主要分次临界情形与临界情形两部分证明：

第一部分，次临界情形，利用积分在单位球上的一致有界性，通过取极大化序列，结合维塔利收敛定理，证明对数加权的奇异型的Trudinger-Moser不等式的极值函数存在。

第二部分，临界情形，构造泛函集中水平，排除极大化序列的集中现象，运用相应的积分集中紧性原理，提升可积性，进而证明对数加权的奇异型的Trudinger-Moser不等式的极值函数存在。

关键词：Trudinger-Moser不等式奇异型维塔利收敛定理集中水平极值函数

Existence problem of extreme value functions for Trudinger-Moser inequalitie of singular type under a class of logarithmic weight

ABSTRACT Trudinger inequality as the limiting case of Sobolev inequality was first obtained by Trudinger in 1967. Later on, the best constant for the first-order Trudinger inequality was obtained by Moser-the Trudinger-Moser inequality. Since then, these inequalities have been widely used in the study of partial

differential equations, geometric analysis, and string theory. In this paper, we focus on the existence of extreme value functions of Trudinger-Moser inequalities of singular type on the unit ball with logarithmic weights. The weights here are , . The proof is mainly divided into two parts for the subcritical case and the critical case:

In the first part, the subcritical case, the consistent boundedness of the integral over the unit ball is used to prove the existence of the extreme value function of the Trudinger-Moser inequality of logarithmically weighted singular type by taking the sequence of maximization and combining it with the Vitaly convergence theorem.

In the second part, the critical case, the level of concentration of the generalized function is constructed to exclude the concentration phenomenon of the maximization sequence, and the corresponding integration concentration tightness principle is applied to enhance the productability and thus prove the existence of the extreme value function of the Trudinger-Moser inequality of logarithmically weighted singular type.

Keywords:Trudinger-Moser inequality, singular type, Vitaly convergence theorem, concentration level, extremal function

目录

摘要 I

ABSTRACT III

第1章绪论 1

1.1 研究背景 1

第2章预备知识和主要内容 4

2.1 预备知识 4

2.1.1 重要不等式 4

2.1.2 重要引理 4

2.2 主要内容 7

第3章次临界情形 8

第4章临界情形 8

第5章总结与展望 14

参考文献 15

致谢 17

绪论

研究背景设为中的光滑有界区域，表示在范数下的完备化空间。经典的Sobolev嵌入定理表示[1]

- (1) 时，嵌入到；
- (2) 时，嵌入到
- (3) 时，，

在1967年，Trudinger利用幂级数展开[2]证明了得到了在时，可以连续嵌入到某种Orlicz函数空间，其中，即存在，使得（1.1）成立，其中。

1971年，Moser利用对称重排方法[3]得到了（1.2）其中为单位球面的球面测度，当时，该积分等于无穷，也即得到了为最佳常数。我们称时为著名的Trudinger-Moser不等式，J.Moser所使用的对称重排方法非常依赖于Polya-Szego不等式。但是由于经典的对称重排函数不具有足够的高阶弱可微性，因此不适用于研究高阶Sobolev空间的精确嵌入。在1988年，Adams得到高阶Trudinger型不等式[4]，并给出了最佳常数：

（1.3）（1.4）其中，且在中具有紧支集，且，，，但当时，则存在满足上述条件的函数使得。

对于无界区域的讨论，Adachi给出了最佳常数，我们也称下述不等式为Adachi-Tanaka型Trudinger-Moser不等式[5]，即（1.5）其中，需要指出的是，在临界指数下，积分上确界不是有限的。

2005年，B.Ruf发现用标准的Sobolev范数来代替Dirichlet范数的时候，在二维情况下，可以将Moser的结论推广到无界区域[6]上去。

2008年，Y. Li和B. Ruf利用爆破分析技术得到了Trudinger-Moser不等式[7]：即存在常数，使得对于任意的区域，有（1.6）但对于任意的，上面不等式不成立。

而对于（1.1）的极值函数存在性问题，已经有了很多的结果，在[8]中Carleson和Chang证明了是单位球时，极值函数是存在的。之后在[9]中，Struwe证明了当的测度接近于单位球时，极值函数存在；在[10]中，Flucher将其推广到二维平面中的任意区域；在[11]中，Lin证明了高维情形下的存在性。对于（1.1）式的推广，一般从有界区域推广到无界区域，从低维情形推广到高维情形。后来，研究了奇异型于对数加权的情形。在[12]中，下，加权的Sobolev空间表示在范数完备化下得到的空间，记为。若空间中的函数是径向函数时，记为。VanHongNguyen得到了存在，当时（1.7）的极值函数存在，这里。

SamiAouaoui和RahmaJlel在[13]中得到了，且时，对于，有，进一步（1.8）这里，这里，记。

在本文中，我们关注（1.8）式的极值函数存在性问题。首先，给出记号（1.9）时，（1.8）的极值函数的存在性[12]中已证明。

预备知识和主要内容预备知识重要不等式[16]

（1）Hölder不等式

若函数在区间上连续，且，则（2.1）

（2）Young不等式

对于，且，则（2.2）重要引理引理1 Vitali 收敛定理[16]设，函数列且于。若在上的积分具有等度绝对连续性，则有（1）（2）引理2 Lebesgue 控制收敛定理[16]

- (1) 是可测集上的可测函数列
- (2) $a.e.$ 于 Ω , 且在上可积分 (称为所控制, 而叫控制函数)
- (3) 则在上可积分且。

引理3[12]每一个函数, 有 (2.3) 证明: 由, 运用Hölder不等式得:

引理4设是空间中的序列, 且该序列满足条件, 弱收敛于, 且证明: 考虑是否为0。

当时, $\epsilon > 0$, 由 (1.8) 知结论成立, 即当时, 取Hölder不等式中的, 这里是充分小的正数, 则一方面, $\epsilon > 0$, 由[12]与实数的完备性定理, 存在, 使得, 则。

另一方面, 由, 则, 故, 推出, 那么收敛, 即。

综上所述, $\epsilon > 0$, 从而

引理5[12], 有 (2.4) 当时, 有。

证明:

根据定义由引理3得所以主要内容证明主要分次临界情形与临界情形两部分证明:

第一部分, 次临界情形, 利用积分在单位球上的一致有界性, 通过取极大化序列, 结合维塔利收敛定理, 证明对数加权的奇异型的Trudinger-Moser不等式的极值函数存在。

第二部分, 临界情形, 构造泛函集中水平, 排除极大化序列的集中现象, 运用相应的积分集中紧性原理, 提升可积性, 进而证明对数加权的奇异型的Trudinger-Moser不等式的极值函数存在。

次临界情形在次临界情形时, 由 (1.8) 知 (1.9) 在上的积分有一致的界, 因此取极大化序列, 且, (1.9) 依然成立。所以通过维塔利收敛定理 (引理1), 该极大化序列的极限就是 (1.9) 的极值函数, 即 (3.1) 临界情形在临界情形时, 利用[8,14]中的讨论方法, 定义泛函 (4.1) 泛函的集中水平定义为 (4.2) 由[15]知, $\epsilon > 0$, 这一结论对极值函数的讨论有很重要的作用。

定理1。

证明: 由 (4.2) 及已知事实得:

(4.3) 对于, (4.3) 依然成立。

下证: $\epsilon > 0$ 。取是里的归一化集中序列, 取子列使得存在。由引理5所定义, 因此, $\epsilon > 0$, 且, 有界。假设, 由于, 在, 这里。由弱极限的唯一性得: $\epsilon > 0$ 。

情形一, 以及, 当时, $\epsilon > 0$ 。因此, 由引理4与Hölder不等式知在中有界, 所以 (4.4) 这就得到了。

情形二, 可以通过取子列, 使得。定义的性质有: 在里有。如果是归一化集中序列, 那么 (4.5) 由 (4.5) 知, 对于有成立。

如果非归一化集中序列, $\epsilon > 0$, 以及, 当时, $\epsilon > 0$ 。定义:

(4.6) 的性质有: $\epsilon > 0$, 且当时有, $\epsilon > 0$ 。选择足够小的, 使得, 结合Young不等式以及的定义有 (4.7), 选取适当的以及权, 使得在中有界。在里, 由, 推出在中有界。

我们会得到 (4.8) 在上, 由引理4, 引理2有 (4.9) 综上所述, 由 (4.8) 与 (4.9) 得 (4.10) 所以。

至此, 对于, 有成立。

定理2。

证明:

假设, 满足, 由引理5所定义, 对于, 有, 通过的定义, 有 (4.11) 所以, 成立, 这里。故关于单调递减, 则有 (4.12) 下面证明:

$\epsilon > 0$, 由于极值函数可达, 因此存在, 且满足。故:

(4.13) 对于时, 时, 我们有 (4.14) 当时, 由法图引理[16]得:

(4.15) 当时, 再一次由法图引理得:

(4.16) 综上所述:

(4.17) 定理3存在, 当时, 的极值函数存在。

证明:

由 (4.17) 与已知的结论 (4.18) 结合 (4.18), 由定理1与定理2得 (4.19) 下面取的极大化序列, 由于范数有界, 因此在里, $\epsilon > 0$ 。且对某些, 取, 在里, $\epsilon > 0$ 。若是归一化集中序列, 那么, 这与 (4.19) 矛盾。因此非归一化集中序列。若, 存在, 当时, 有。此时 (4.20) 这与 (4.19) 矛盾。所以, 由引理4与Hölder不等式知在中, 有界, 故有 (4.21) 这种情况下, 我们发现。当时, (4.22) 这是一个矛盾。

综上所述, $\epsilon > 0$, 且就是的极值函数。

总结与展望

本文研究了一类对数加权下的奇异型的Trudinger-Moser不等式的极值函数存在性问题。证明主要分次临界情形与临界情形两部分证明: 次临界情形, 利用积分在单位球上的一致有界性, 通过取极大化序列, 结合维塔利收敛定理, 证明极值函数存在; 临界情形, 构造泛函集中水平, 排除极大化序列的集中现象, 运用相应的积分集中紧性原理, 提升可积性, 进而证明极值函数存在。

在前面研究的基础上做展望: 首先, 考虑能否证明高阶情形下对数加权的奇异型的Trudinger-Moser不等式的极值函数存在性问题。其次, 能否适当的添加条件, 使得参数的存在区间扩大。最后, 放眼未来, Trudinger-Moser不等式的分支可以研究的更加广泛和深入, 更加优美的结论还有待发现。

参考文献:

S. I. Pohozaev. The Sobolev embedding in the case [J]. Proceedings of the Technical Scientific Conference on Advances of Scientific Research 1964-1965. Mathematics Section, 1965: 158-170.

N. Trudinger. On Imbeddings into Orlicz Spaces and Some Applications[J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1967, 17(5): 473-483.

Moser. A Sharp Form of an Inequality by N.Trudinger[J]. Indiana University Mathematics Journal, 1971, 20(11): 1077-1092.

D. R. Adams. A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives[J]. Annals of Mathematics, 1988,128(2): 385-398.

S. Adachi, K. Tanaka. Trudinger type inequalities in and their best exponents[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2000, 128: 2051-2057.

B. Ruf. A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in [J]. Journal of Functional Analysis, 2005, 219(2): 340-367.

Y. Li, B. Ruf. A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in [J]. Indiana University Mathematics Journal, 2008, 57(1): 441-480.

Arleson, Lennart, and Sun-Yung A. Chang. "ON THE EXISTENCE OF AN EXTREMAL FUNCTION FOR AN INEQUALITY OF MOSER, J." Bulletin des Sciences Mathématiques 110.2 (1986): 113-127.

Truwe M. Critical points of embeddings of $H^{0,1}_n$ into Orlicz spaces[C]Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire. Elsevier Masson, 1988, 5(5): 425-464.

Martin Flucher,Extremal functions for the Trudinger-Moser inequality in 2 dimension,Comment.Math.Helv.67(1992),no.3,471-497.

Kai-Ching Lin,Extremal functions for Moser's inequality Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996),no.7,2663-2671.

Nguyen,Van."Remarks on the Moser-Trudinger type inequality with logarithmic weights in dimension N".Proceedings of the American Mathematical Society 147.12(2019):5183-5193.

Aouaoui,Sami,and Rahma Jlel."A new Singular Trudinger-Moser Type Inequality with Logarithmic Weights and Applications."Advanced Nonlinear Studies 20.1(2020):113-139.

Prosenjit Roy,Extremal function for Moser-Trudinger type inequality with logarithmic weight,Nonlinear Anal.135(2016),194-204.

Wang, Xu Min. "Singular Supercritical Trudinger-Moser Inequalities and the Existence of Extremals." Acta Mathematica Sinica, English Series 36.8 (2020): 873-888.

程其襄,张奠宙等.实变函数与泛函分析基础[M].4版.北京:高等教育出版社.2019.06.

致谢

四年的学习生涯即将结束，四年前，怀着对数学的兴趣踏入大学校园，这四年，始终以热烈的激情学习数学，不仅获得了专业知识，也通过参加竞赛等活动巩固所学的知识。这四年，拼搏过，奋斗过，懊悔过，但最终坚持下来了。数学需要清晰的直觉和严格的演绎，学习数学，不是记了多少理论，做了多少题，而是提升境界，改变对一些问题的看法。这对进一步的学习大有益处。在即将毕业之际，我要向在生活上支持我的父母，在学习上支持我的老师，致以最诚挚的感谢。

首先，感谢我的论文指导老师朱茂春副教授，在论文选题方面，逻辑推导方面，直至定稿方面，都曾悉心的教导，这些都看在眼里，记在心里。所以无论是他的学识，还是为人，都让我甚感钦佩，终将使我受益匪浅。

其次，感谢我的老师和同学，他们在我遇到学习中的问题时，耐心的教导我，让我提升了对学习数学的信心，丰富了我的大学生活，也锤炼了我的品格。

最后，感谢我的父母，他们在生活中，提供了物质上的需求，在学习中，当获得一点点成功时，鼓励我下次做的更好，当遇到失败时，他们鼓励我不要放弃，从他们身上，我学到了很多。

即将毕业之际，再一次感谢曾经帮助过我的老师，同学，父母，我们的未来都会更加美好！

报告指标说明

- 原文总字符数：即送检文献的总字符数，包含文字字符、标点符号、阿拉伯数字（不计入空格）
- 检测字符数：送检文献经过系统程序处理，排除已识别的参考文献等不作为相似性比对内容的部分后，剩余全部参与相似性检测匹配的文本字符数
- 总相似比：送检文献与其他文献的相似文本内容在原文中所占比例
- 参考文献相似比：送检文献与其标明引用的参考文献的相似文本内容在原文中所占比例
- 可能自引相似比：送检文献与其作者本人的其他已公开或发表文献的相似文本内容在原文中所占比例
- 单篇最大相似比：送检文献的相似文献中贡献相似比最高一篇的相似比值
- 是否引用：该相似文献是否被送检文献标注为其参考文献引用，作者本人的可能自引文献也应标注为参考文献后方能认定为“引用”