一类对数加权下奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数问题

郭永强

摘　要

本文研究了单位球 B 上对数加权的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在性问题。这里的权是 $\omega_\beta(x)=\left|\ln\left(\frac{e}{|x|}\right)\right|^{\beta(n-1)}$，$\beta\in[0,1)$。证明基于单位球上的函数变换，集中水平上界法以及经典的 Trudinger-Moser 不等式。最后得到了 $\exists\beta_0\in(0,1)$，对于 $\forall\beta\in[0,\beta_0)$，对数加权的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在。

关键词：Trudinger-Moser 不等式；奇异型；极值函数；集中水平

1　引言

设 Ω 为 R^n 中的光滑有界区域，$W_0^{1,p}(\Omega)$ 表示 $C^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=\left(\int\limits_\Omega|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化空间。经典的 Sobolev 嵌入定理表示 $W_0^{1,p}(\Omega)\subseteq L^q(\Omega),\forall 1\le p<n,1\le q\le np/(n-p)$，但是当 $p=n$ 时，$W_0^{1,n}(\Omega)$ 不能嵌入到 $L^\infty(\Omega)$ 中，比如函数 $u(x)=\ln\ln\left(1+\frac{1}{|x|}\right)$，定义域是 $\Omega=B^0(0,1)$。可以证明，$u(x)\in W_0^{1,n}(\Omega)$，$u(x)\notin L^\infty(\Omega)$。后来，Trudinger-Moser 通过研究 $p=n$ 的情形，得到了如下的经典的 Trudinger-Moser 不等式：

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\|\nabla u\|_n\le 1}\int\limits_\Omega\exp\left(\alpha|u|^{n/(n-1)}\right)dx<+\infty \tag{1}$$

其中 $\alpha\le\alpha_n=n\omega_{n-1}^{1/(n-1)}$，$\omega_{n-1}$ 表示 n 维单位球面测度。对于 (1) 的极值函数存在性问题，已经有了很多的结果，在 [1] 中 Carleson 和 Chang 证明了 Ω 是单位球时，极值函数是存在的。之后在 [2] 中，Struwe 证明了当 Ω 的测度接近于单位球时，极值函数存在；在 [3] 中，Flucher 将

其推广到二维平面中的任意区域 Ω；在 [4] 中，Lin 证明了高维情形下的存在性。对于 (1) 式的推广，一般从有界区域推广到无界区域，从低维情形推广到高维情形。后来，研究了奇异型于对数加权的情形。在 [5] 中，$\beta \in [0,1)$，$\omega_\beta(x) = (-\ln|x|)^{\beta(n-1)}$ 下，加权的 Sobolev 空间表示 $C_0^1(B)$ 在范数 $\|u\|_{\omega_\beta} = \left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^n \omega_\beta(x) dx\right)^{\frac{1}{n}}$ 完备化下得到的空间，记为 $W_0^{1,n}(B,\omega_\beta)$。若空间中的函数是径向函数时，记为 $W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega_\beta)$。Van Hong Nguyen 得到了存在 $\beta_0 \in (0,1)$，当 $0 \le \beta < \beta_0$ 时

$$\sup_{u \in W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega_\beta), \|u\|_{\omega_\beta} \le 1} \int\limits_B \exp\left(\alpha |u|^{n/((n-1)(1-\beta))}\right) dx$$

的极值函数存在，这里 $\alpha \le \alpha_{\beta,n} = n\Big((1-\beta)\,\omega_{n-1}^{1/(n-1)}\Big)^{1/(1-\beta)}$。

Sami Aouaoui 和 Rahma Jlel 在 [6] 中得到了 $\beta \in [0,1)$，$\omega_\beta(x) = \left|\ln\left(\frac{e}{|x|}\right)\right|^{\beta(n-1)}$，且 $u \in W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega_\beta)$，$n \ge 2$ 时，对于 $\forall \alpha > 0$，$\sigma \in [0,n)$，有 $\int\limits_B \frac{\exp\left(\alpha|u|^{n/((n-1)(1-\beta))}\right)}{|x|^\sigma} dx < +\infty$，进一步

$$\sup\left\{\int\limits_B \frac{\exp\left(\alpha|u|^{n/((n-1)(1-\beta))}\right)}{|x|^\sigma} dx, u \in W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega_\beta), \|u\|_{\omega_\beta} \le 1\right\} < +\infty \tag{2}$$

这里 $\alpha \le \frac{n-\sigma}{n}\alpha_{\beta,n}$，这里 $\alpha_{\beta,n} = n((1-\beta)\omega_{n-1}^{1/(n-1)})^{1/(1-\beta)}$，记 $\alpha_{\beta,n,\sigma} = \frac{n-\sigma}{n}\alpha_{\beta,n}$。

在本文中，我们关注 (2) 式的极值函数存在性问题。首先，给出记号

$$MT(n,\alpha,\beta,\sigma) = \sup_{u \in W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega_\beta), \|u\|_{\omega_\beta} \le 1} \int\limits_B \frac{\exp\left(\alpha|u|^{n/((n-1)(1-\beta))}\right)}{|x|^\sigma} dx \tag{3}$$

$\sigma = 0$ 时，(2) 的极值函数的存在性 [5] 中已证明。

本文得到的主要定理如下：

存在 $\beta_0 \in (0,1)$，当 $0 \le \beta < \beta_0$ 时，$MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)$ 的极值函数存在。

接下来，第二部分介绍一些有用的引理，第三部分证明本文的定理。

2 预备知识

引理 1 [5]

每一个函数 $u\in W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega_\beta)$，$\forall 0<r\leq 1$，有

$$|u(r)|\leq\left(\frac{n}{\alpha_{\beta,n}}\right)^{((n-1)(1-\beta))/n}\left(\int\limits_{B\backslash B_r}|\nabla u(x)|^n\omega_\beta dx\right)^{1/n}(-\ln r)^{((n-1)(1-\beta))/n}$$

证明：由 $u(1)=0$，运用 $H\ddot{o}lder$ 不等式得：

$$\begin{aligned}|u(r)|&=\int_r^1|\nabla u(x)|\omega_\beta^{\frac{1}{n}}x^{\frac{n-1}{n}}\omega_\beta^{-\frac{1}{n}}x^{\frac{1-n}{n}}dx\\&\leq\left(\int_r^1|\nabla u(x)|^n\omega_\beta x^{n-1}dx\right)^{\frac{1}{n}}\left(\int_r^1\omega_\beta^{-\frac{1}{n-1}}x^{-1}dx\right)^{\frac{n-1}{n}}\\&=\omega_{n-1}^{-\frac{1}{n}}\left(\omega_{n-1}\int_r^1|\nabla u(x)|^n\omega_\beta x^{n-1}dx\right)^{\frac{1}{n}}\left(\int_r^1\frac{dx}{x(-\ln x)^\beta}dx\right)^{\frac{n-1}{n}}\\&=(1-\beta)^{-\frac{n-1}{n}}\left(\omega_{n-1}^{-\frac{1}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left(\int_{B\backslash B_r}|\nabla u(x)|^n\omega_\beta dx\right)^{\frac{1}{n}}(-\ln r)^{\frac{(n-1)(1-\beta)}{n}}\\&=\left(\frac{n}{\alpha_{\beta,n}}\right)^{\frac{(n-1)(1-\beta)}{n}}\left(\int_{B\backslash B_r}|\nabla u(x)|^n\omega_\beta dx\right)^{\frac{1}{n}}(-\ln r)^{\frac{(n-1)(1-\beta)}{n}}\end{aligned}$$

引理 2 设 $\{u_j\}$ 是空间 $W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega_\beta)$ 中的序列，且该序列满足条件 $\|u_n\|_{\omega_\beta}=1$，u_n 弱收敛于 u_0，$\lim\limits_{j\to\infty}\sup\int_B\frac{\exp\left(p\alpha_{\beta,n,\sigma}|u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^\sigma}dx<+\infty$，这里 $p<p(u_0)=(1-\|u_0\|_{\omega_0}^n)^{-1/((n-1)(1-\beta))}$。

证明：由于 $0\leq\beta<1$，$\alpha_{\beta,n}=n((1-\beta)\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}})^{\frac{1}{1-\beta}}$，得出 $\alpha_{\beta,n}\leq\alpha_n$，因此 $\alpha_{\beta,n,\sigma}=\frac{n-\sigma}{n}\alpha_{\beta,n}\leq\frac{n-\sigma}{n}\alpha_n=\alpha_{n,\sigma}$，由 [6] 中的引理 4.2 知

$$\lim_{j\to\infty}\sup\int_B\frac{\exp\left(p\alpha_{n,\sigma}|u_j|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{|x|^\sigma}dx<+\infty$$

所以

$$\lim_{j\to\infty}\sup\int_B\frac{\exp\left(p\alpha_{\beta,n,\sigma}|u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^\sigma}dx<+\infty\qquad(4)$$

至此，引理 2成立。

引理 3 [5] $\forall u\in W^{1,n}_{0,rad}(B,\omega_\beta)$，$\forall 0\le\widetilde{\beta}<\beta$，有

$$v(x)=\left(\frac{\alpha_{\beta,n}}{\alpha_{\widetilde{\beta},n}}\right)^{((n-1)(1-\widetilde{\beta}))/n}u(x)|u(x)|^{\frac{\beta-\widetilde{\beta}}{1-\beta}}\tag{5}$$

当 $\|u\|_{\omega_\beta}\le 1$ 时，有 $\|v\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}\le 1$。

证明：

根据定义

$$\begin{aligned}\nabla v(x)&=\left(\frac{\alpha_{\beta,n}}{\alpha_{\tilde{\beta},n}}\right)^{\frac{(n-1)(1-\tilde{\beta})}{n}}\left(\nabla u(x)|u(x)|^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}}+\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}u^2(x)|u(x)|^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}-2}\nabla u(x)\right)\\&=\left(\frac{\alpha_{\beta,n}}{\alpha_{\tilde{\beta},n}}\right)^{\frac{(n-1)(1-\tilde{\beta})}{n}}\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}\nabla u(x)|u(x)|^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\end{aligned}$$

由引理 1得

$$\begin{aligned}|\nabla v(x)|^n&=\left(\frac{\alpha_{\beta,n}}{\alpha_{\tilde{\beta},n}}\right)^{(n-1)(1-\tilde{\beta})}\left(\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}\right)^n|\nabla u(x)|^n|u(x)|^{\frac{n(\beta-\tilde{\beta})}{1-\beta}}\\&\le|\nabla u(x)|^n\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}\frac{\omega_\beta(x)}{\omega_{\tilde{\beta}}(x)}\left(\int\limits_{B\setminus B_{|x|}}|\nabla u(y)|^n\omega_{\tilde{\beta}}(y)dy\right)^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\|v(x)\|^n_{\omega_{\tilde{\beta}}}&=\int_B|\nabla v(x)|^n\omega_{\tilde{\beta}}(x)dx\\&\le\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}\omega_{n-1}^{\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\int_0^1\left|u'(s)\right|^n\omega_\beta(s)s^{n-1}\cdot\left(\int_0^1\left|u'(t)\right|^n\omega_\beta(t)t^{n-1}dt\right)^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}}ds\\&=-\omega_{n-1}^{\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\int_0^1\frac{d}{ds}\left[\left(\int_s^1\left|u'(t)\right|^n\omega_\beta(t)t^{n-1}dt\right)^{\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\right]ds\\&=\left(\int_B|\nabla u(x)|^n\omega_\beta(x)dx\right)^{\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\\&\le 1\end{aligned}$$

3 证明部分

分两种情形研究：

3.1 次临界情形

在次临界情形 $\alpha < \alpha_{\beta,n,\sigma}$ 时，由 (2) 知 (3) 在 B 上的积分有一致的界，因此取极大化序列 $\{u_j\}\,(j=1,2,\cdots)$，且 $u_j \to u(j \to +\infty)$，(3) 依然成立。所以通过维塔利收敛定理，该极大化序列的极限 u 就是 (3) 的极值函数，即

$$\begin{aligned} MT(n,\alpha,\beta,\sigma) &= \lim_{j\to\infty}\int_B \frac{\exp(\alpha|u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx \\ &= \int_B \lim_{j\to\infty}\frac{\exp(\alpha|u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx \\ &= \int_B \frac{\exp(\alpha|u|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx \end{aligned}$$

3.2 临界情形

在临界情形 $\alpha = \alpha_{\beta,n,\sigma}$ 时，利用 [1][7] 中的讨论方法，定义泛函

$$J_{\beta,n,\sigma}(u) = \int\limits_B \frac{\exp\left(\alpha_{\beta,n}|u|^{n/((n-1)(1-\beta))}\right)}{|x|^\sigma}dx$$

泛函的集中水平定义为

$$J^\delta_{\beta,n,\sigma}(0) = \sup\left\{\lim_{j\to\infty}\sup J_{\beta,n,\sigma}(u_j)\,\middle|\,\|u_j\|_{\omega_\beta}=1, u_j \rightharpoonup 0\right\} \tag{6}$$

由 [8] 知，$J^\delta_{0,n,\sigma}(0) \le \frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\left(1+e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}}\right)$，这一结论对极值函数的讨论有很重要的作用。

定理 1 $J^\delta_{\beta,n,\sigma}(0) \le J^\delta_{\tilde\beta,n,\sigma}(0)$，$\forall \tilde\beta \le \beta$。

证明：由 (6) 及已知事实得：

$$\int_B \frac{1}{|x|^\sigma}dx = \frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma} \le \lim_{j\to\infty}\sup\int_B \frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}|u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx \le J^\delta_{\beta,n,\sigma}(0)$$

对于 $\tilde\beta$，上式依然成立。

下证：$J^\delta_{\beta,n,\sigma}(0) \le J^\delta_{\tilde\beta,n,\sigma}(0)$，$\forall\tilde\beta \le \beta$。取 $\{u_j\}$ 是 $W^{1,n}_{0,rad}(B,\omega_\beta)$ 里的归一化集中序列，取子列使得 $\lim\limits_{j\to\infty} J^\delta_{\beta,n,\sigma}(u_j)$ 存在。$\{v_j\}$ 由引理 3所定义，因此，$v_j \in W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_{\tilde\beta}\right)$，且 $\|v_j\|_{\omega_{\tilde\beta}} \le 1$，$\{v_j\}$ 有界。假设 $v_j \rightharpoonup v$，由于 $v_j \rightharpoonup 0$，在 $B\backslash B_a$，这里 $a\in(0,1)$。由弱极限的唯一性得：$v\equiv 0$。

情形一 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\|v_j\|_{\omega_{\tilde\beta}}<1$，$\exists t\in(0,1)$，以及 N，当 $j>N$ 时，$\|v_j\|_{\omega_{\tilde\beta}}\le t<1$。因此，由引理 2与 $H\ddot{o}lder$ 不等式知 $\frac{\exp(\alpha_{\tilde\beta,n,\sigma}|v_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde\beta)}})}{|x|^\sigma}$ 在 $L^p(p>1)$ 中有界，所以

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\int_B\frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}|u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx&=\lim_{j\to\infty}\int_B\frac{\exp(\alpha_{\tilde\beta,n,\sigma}|v_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde\beta)}})}{|x|^\sigma}dx\\&=\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\le J^\delta_{\tilde\beta,n,\sigma}(0)\end{aligned}$$

这就得到了 $\forall\tilde\beta\le\beta$，$J^\delta_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^\delta_{\tilde\beta,n,\sigma}(0)$。

情形二 $\lim\limits_{j\to\infty}\sup\|v_j\|_{\omega_{\tilde\beta}}=1$，可以通过取子列，使得 $\lim\limits_{j\to\infty}\|v_j\|_{\omega_{\tilde\beta}}=1$。定义 $I_j=\frac{v_j}{\|v_j\|_{\omega_{\tilde\beta}}}$，$\{I_j\}$ 的性质有：在 $W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_{\tilde\beta}\right)$ 里有 $I_j\rightharpoonup0$，$|v_j|\le I_j$。如果 $\{I_j\}$ 是归一化集中序列，那么

$$\lim_{j\to\infty}J_{\beta,n,\sigma}(u_j)=\lim_{j\to\infty}J_{\tilde\beta,n,\sigma}(v_j)\le\lim_{j\to\infty}\sup J_{\tilde\beta,n,\sigma}(I_j)\le J^\delta_{\tilde\beta,n,\sigma}(0)\tag{7}$$

由 (7) 知，对于 $\forall\tilde\beta\le\beta$，有 $J^\delta_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^\delta_{\tilde\beta,n,\sigma}(0)$ 成立。

如果 $\{I_j\}$ 非归一化集中序列，$\exists t,a\in(0,1)$，以及 N，当 $j>N$ 时，有 $\int_{B_a}|I_j|^n\omega_{\tilde\beta}(x)dx\le t$。定义：

$$\tilde I_j(x)=\begin{cases}I_j(x)-I_j(a), & |x|\le a\\0, & a<|x|<1\end{cases}\tag{8}$$

$\tilde I_j(x)$ 的性质有：$\tilde I_j(x)\in W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_{\tilde\beta}\right)$，且当 $j>N$ 时有，$\left\|\tilde I_j\right\|^n_{\omega_{\tilde\beta}}\le t<1$。选择足够小的 ε，使得 $(1+\varepsilon)t^{\frac{1}{(n-1)(1-\tilde\beta)}}<1$，结合 $Young$ 不等式以及 (8) 的定义有

$$|I_j(x)|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde\beta)}}\le C(n,\tilde\beta,\varepsilon)|I_j(a)|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde\beta)}}+(1+\varepsilon)\left|\tilde I_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde\beta)}}$$

这里 $C(n,\tilde\beta,\varepsilon)=(1-(1+\varepsilon)^{-\frac{(n-1)(1-\tilde\beta)}{n\tilde\beta+1-\tilde\beta}})^{-\frac{n\tilde\beta+1-\tilde\beta}{(n-1)(1-\tilde\beta)}}$。选取适当的 t,ε，以及权，使得 $\frac{\exp(\alpha_{\tilde\beta,n,\sigma}(1+\varepsilon)|\tilde I_j(x)|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde\beta)}})}{|x|^\sigma}$ 在 $L^p(p>1)$ 中有界。在 B_a 里，由 $I_j(a)\to0$，$j\to\infty$，推出 $\frac{\exp\left(\alpha_{\tilde\beta,n,\sigma}|I_j(x)|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde\beta)}}\right)}{|x|^\sigma}$ 在 $L^p(B_a)$ 中有界。

我们会得到

$$\lim_{j\to\infty}\int_{B_a}\frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}|I_j(x)|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{|x|^{\sigma}}dx=\int_{B_a}\frac{1}{|x|^{\sigma}}dx=\frac{t-\sigma}{n-\sigma}\omega_{n-1} \tag{9}$$

在 $B\backslash B_a$ 上，由引理 2与勒贝格 -控制收敛定理有

$$\lim_{j\to\infty}\int_{B\backslash B_a}\frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}|I_j(x)|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{|x|^{\sigma}}dx=\frac{1}{n-\sigma}\omega_{n-1}-\frac{t-\sigma}{n-\sigma}\omega_{n-1} \tag{10}$$

综上所述，由 (9)，(10) 得

$$\lim_{j\to\infty}\int_{B}\frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}|I_j(x)|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{|x|^{\sigma}}dx=\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}$$

所以 $\lim\limits_{j\to\infty}J_{\beta,n,\sigma}(u_j)=\lim\limits_{j\to\infty}J_{\tilde{\beta},n,\sigma}(v_j)\leq\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\leq J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0)$。

至此，对于 $\forall\tilde{\beta}\leq\beta$，有 $J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)\leq J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0)$ 成立。

定理 2 $\lim\limits_{\beta\to0}MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)=MT(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma)$。

证明：

假设 $u\in W^{1,n}_{0,rad}(B,\omega_\beta)$，满足 $\|u\|_{\omega_\beta}\leq1$，$v$ 由 (5) 所定义，对于 $\forall\tilde{\beta}\leq\beta$，有 $\|v\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}\leq1$，通过 $MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)$ 的定义，有

$$\begin{aligned}\int_{B}\frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}|u|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx&=\int_{B}\frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}|v|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{|x|^{\sigma}}dx\\&\leq MT(n,\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma},\tilde{\beta},\sigma)\end{aligned}$$

所以，$MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)\leq MT(n,\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma},\tilde{\beta},\sigma)$ 成立，这里 $\forall0\leq\tilde{\beta}\leq\beta<1$。故 $MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)$ 关于 β 单调递减，则有

$\lim\limits_{\beta\to0}\sup MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)\leq MT(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma)$

下面证明：

$\lim\limits_{\beta\to0}\inf MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)\geq MT(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma)$。由于 $MT(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma)$ 极值函数可达，因此存在 $u_0\in C^1(B)\cap W^{1,n}_{0,rad}(B)$，且 u_0 满足 $\|\nabla u_0\|_n=1$。故：

$\lim\limits_{\beta\to0}\int_B|\nabla u_0|^n\omega_\beta(x)dx=\int_B|\nabla u_0|^ndx=1$。对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\beta_\varepsilon$，当 $\forall\beta\leq\beta_\varepsilon$ 时，有 $\|u_0\|_{\omega_\beta}\leq1+\varepsilon$。

我们有

$$MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma) \geq \int_B \frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}(\frac{|u_0|}{1+\varepsilon})^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx$$

当 $\beta \to 0$ 时，由法图引理得：

$$\lim_{\beta\to 0}\inf MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma) \geq \int_B \frac{\exp(\alpha_{0,n,\sigma}(\frac{|u_0|}{1+\varepsilon})^{\frac{n}{n-1}})}{|x|^\sigma}dx$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，再一次由法图引理得：

$$\lim_{\beta\to 0}\inf MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma) \geq \int_B \frac{\exp(\alpha_{0,n,\sigma}|u_0|^{\frac{n}{n-1}})}{|x|^\sigma}dx = MT(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma)$$

综上所述：

$$\lim_{\beta\to 0} MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma) = MT(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma) \tag{11}$$

定理 3 存在 $\beta_0 \in (0,1)$，当 $0 \leq \beta < \beta_0$ 时，$MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)$ 的极值函数存在。

证明：

由 (11) 与已知的结论

$$\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}(1+e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}}) \leq J^\delta_{0,n,\sigma}(0) < MT(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma) \tag{12}$$

结合 (12)，定理 1与 2得

$$J^\delta_{\beta,n,\sigma}(0) \leq J^\delta_{0,n,\sigma}(0) < MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)\ \forall\beta\in[0,\beta_0) \tag{13}$$

下面取 $MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)$ 的极大化序列，由于范数有界，因此在 $W^{1,n}_{0,rad}(B,\omega_\beta)$ 里，$u_j \rightharpoonup u_0$。且对某些 $u_0 \in W^{1,n}_{0,rad}(B,\omega_\beta)$，取 $a \in (0,1)$，在 $B\backslash B_a$ 里，$u_j \to u_0$。

若 $u_0 \equiv 0$，且 $\{u_j\}$ 是归一化集中序列，那么 $MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma) = \lim_{j\to\infty} J_{\beta,n,\sigma}(u_j) \leq J^\delta_{\beta,n,\sigma}(0)$ ，这与 (13) 矛盾。因此 $\{u_j\}$ 非归一化集中序列。若 $\exists a,t \in (0,1)$，以及 N，当 $n \geq N$ 时，有 $\int_{B_a}|\nabla u_j|^n\omega_\beta(x)dx \leq t$。此时

$MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma) = \lim_{j\to\infty} J_{\beta,n,\sigma}(u_j) = \frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma} \leq J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)$，这与 (13) 矛盾。所以 $u_0 \neq 0$，由引理 2与 $H\ddot{o}lder$ 不等式知 $\frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}|u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}$ 在 $L^p(p>1)$ 中有界，故有

$$
\begin{aligned}
MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma) &= \lim_{j\to\infty}\int_B \frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}|u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx \\
&= \int_B \frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}|u_0|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx
\end{aligned}
$$

这种情况下，我们发现 $\|u_0\|_{\omega_\beta} \leq 1$。当 $\|u_0\|_{\omega_\beta} < 1$ 时，

$$
\begin{aligned}
MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma) &\geq \int_B \frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}(\frac{|u_0|}{\|u_0\|_{\omega_\beta}})^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx \\
&> \int_B \frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}|u_0|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx = MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)
\end{aligned}
$$

这是一个矛盾。

综上所述，$\|u_0\|_{\omega_\beta} = 1$，且 u_0 就是 $MT(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma)$ 的极值函数。

参考文献

[1] Carleson, Lennart, and Sun-Yung A. Chang. "ON THE EXISTENCE OF AN EXTREMAL FUNCTION FOR AN INEQUALITY OF MOSER, J." Bulletin des Sciences Mathématiques 110.2 (1986): 113-127.

[2] Struwe M. Critical points of embeddings of H01, n into Orlicz spaces[C]Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire. Elsevier Masson, 1988, 5(5): 425-464.

[3] Martin Flucher,Extremal functions for the Trudinger-Moser inequality in 2 dimensions,Comment.Math.Helv.67(1992),no.3,471-497.

[4] Kai-Ching Lin,Extremal functions for Moser's inequality Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996),no.7,2663-2671.

[5] Nguyen,Van."Remarks on the Moser-Trudinger type inequality with logarithmic weights in dimension N".Proceedings of the American Mathematical Society 147.12(2019):5183-5193.

[6] Aouaoui,Sami,and Rahma Jlel."A new Singular Trudinger-Moser Type Inequality with Logarithmic Weights and Applications."Advanced Nonliner Studies 20.1(2020):113-139.

[7] Prosenjit Roy,Extremal function for Moser-Trudinger type inequality with logarithmic weight,Nonliner Anal.135(2016),194-204.

[8] Wang, Xu Min. "Singular Supercritical Trudinger-Moser Inequalities and the Existence of Extremals." Acta Mathematica Sinica, English Series 36.8 (2020): 873-888.