江苏大学

JIANGSU UNIVERSITY

本 科 毕 业 论 文

一类对数加权下奇异型的Trudinger-Moser不等式的极值函数存在性问题

学 院 名 称 ：	数学科学学院
专 业 班 级 ：	应数 1901
学 生 姓 名 ：	郭永强
指导教师姓名 ：	朱茂春
指导教师职称 ：	副教授

2023 年 6 月

一类对数加权下奇异型的Trudinger-Moser不等式的极值函数存在性问题

专业班级：应数 1901 学生姓名：郭永强

指导教师：朱茂春 职称：副教授

摘 要 Trudinger不等式作为Sobolev不等式的极限情形，是由Trudinger于1967年首先得到的。后来又由Moser得到了一阶Trudinger不等式的最佳常数，即Trudinger-Moser不等式。这类不等式自诞生至今，在偏微分方程、几何分析以及弦理论等研究中得到了广泛应用。本文主要研究单位球B上对数加权的奇异型的Trudinger-Moser不等式的极值函数存在性问题。这里的权是$\omega_\beta(x)=\left|\log(\frac{e}{|x|})\right|^{\beta(n-1)}$，$\beta\in[0,1)$。证明主要分次临界情形与临界情形两部分证明：

第一部分，次临界情形，利用积分在单位球上的一致有界性，通过取极大化序列，结合维塔利收敛定理，证明对数加权的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在。

第二部分，临界情形，构造泛函集中水平，排除极大化序列的集中现象，运用相应的积分集中紧性原理，提升可积性，进而证明对数加权的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在。

关键词: Trudinger-Moser不等式 奇异型 维塔利收敛定理 集中水平 极值函数

Existence problem of extreme value functions for Trudinger-Moser inequalitie of singular type under a class of logarithmic weight

ABSTRACT Trudinger inequality as the limiting case of Sobolev inequality was first obtained by Trudinger in 1967. Later on, the best constant for the first-order Trudinger inequality was obtained by Moser-the Trudinger-Moser inequality. Since then, these inequalities have been widely used in the study of partial differential equations, geometric analysis, and string theory. In this paper, we focus on the existence of extreme value functions of Trudinger-Moser inequalitie of singular type on the unit ball B with logarithmic weights. The weights here are $\omega_\beta(x)=\left|\log(\frac{e}{|x|})\right|^{\beta(n-1)}$, $\beta\in[0,1)$. The proof is mainly divided into two parts for the subcritical case and the critical case:

In the first part, the subcritical case, the consistent boundedness of the integral over the unit ball is used to prove the existence of the extreme value function of the Trudinger-Moser inequality of logarithmically weighted singular type by taking the sequence of maximization and combining it with the Vitaly convergence theorem.

In the second part, the critical case, the level of concentration of the generalized function is constructed to exclude the concentration phenomenon of the maximization sequence, and the corresponding integration concentration tightness principle is applied to enhance the productability and thus prove the existence of the extreme value function of the Trudinger-Moser inequality of logarithmically weighted singular type.

Keywords:Trudinger-Moser inequality, singular type, Vitaly convergence theorem, concentration level, extremal function

目 录

第1章 绪论

1.1 Sobolev 空间的嵌入

Sobolev 空间理论是上世纪 30 年代初由苏联数学家 S.L.Sobolev 发展起来的。这类空间是由弱可微函数组成的 Banach 空间（完备的赋范空间）。它们是为研究偏微分方程的近代理论以及研究与数学分析有关的领域中许多问题的需要而产生的 。

从 1938 年以来， 这种理论已有很广泛的发展。下面给出 Sobolev 空间的定义：

设对 $p \geq 1$， m 是非负整数， 对本身及其直到 m 阶弱导数在内都是 $L^p(\Omega)$ 可和的函数集合：

$$\begin{aligned} W^{m,p}(\Omega) &= L^p(\Omega) \bigcap \{u \mid D^a u \in L^p(\Omega), |a| \leq m\} \\ &= \{u \mid u \in L^p(\Omega), D^a u \in L^p(\Omega), |a| \leq m\} \end{aligned}$$

在空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 内引入范数

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \begin{cases} (\int_\Omega \sum_{|a| \leq m} |D^a u|^p \, dx)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{|a| \leq m} \|D^a u\|_{p,\Omega}^p)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty \\ \max_{|a| \leq m} \|D^a u\|_{\infty,\Omega}, \qquad p = \infty \end{cases}$$

下面给出嵌入的定义：

设 X, Y 都是 $Banach$ 空间，称 X 嵌入到 Y ，如果下面两个条件成立：

（1） $X \subset Y$

（2） X 到 Y 有连续内射，即 $\exists C > 0$ ，满足 $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \forall x \in X$ 。

Sobolev 空间的嵌入定理在函数空间理论、偏微分方程、偏微分方程数值解等学科中有重要应用。一般区域上 Sobolev 空间的嵌入定理的证明已经给出，但证明一般过于复杂，限制了它在通常学科中的使用。

Sobolev空间中的嵌入定理深刻揭示了Sobolev空间与其他函数空间之间的关系。它在近代偏微分方程理论研究中起着重要的作用，由于 Sobolev 空间的嵌入性质，使得在分析中，特别是在微分算子和积分算子的研究中如此有用，其主要结果如下：

设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑有界区域， $W_0^{1,p}(\Omega)$ 表示 $C^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化空间。经典的 Sobolev 嵌入定理表示[1]

（1） $p<n$ 时， $W_0^{1,p}(\Omega)$ 嵌入到 $L^q(\Omega)$； $1\le q<p^*=\dfrac{np}{n-p}$

（2） $p>n$ 时， $W_0^{1,p}(\Omega)$ 嵌入到 C^α

（3） $p=n$ 时， $W_0^{1,p}(\Omega)\not\subset L^\infty(\Omega)$， $\alpha=1-\dfrac{n}{p}$

对于 $p=n$ 时的反例，如 $u(x)=\log\log(1+\dfrac{1}{|x|})$， $u(x)\in W_0^{1,n}(\Omega)$， $u(x)\notin L^\infty(\Omega)$。

1.2Trudinger-Moser 不等式

设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑有界区域：

在 1967 年，Trudinger 利用幂级数展开[2]证明了在 $p=n$ 时， $W_0^{1,n}(\Omega)$ 可以连续嵌入到某种 Orlicz 函数空间 $L_\phi(\Omega)$，其中 $\phi=\exp(|t|^{\frac{n}{n-1}}-1)$，即存在 $\alpha>0$，使得

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\|\nabla u\|_n^n\le 1}\int_\Omega e^{\alpha u^{n/(n-1)}}dx\le C_n|\Omega| \tag{1.1}$$

成立，其中 $\|\nabla u\|_n^n=\int_\Omega|\nabla u|dx$。

在 1971 年，Moser 利用对称重排方法[3]得到了

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\|\nabla u\|_n^n\le 1}\int_\Omega e^{\alpha u^{n/(n-1)}}dx<\infty,\forall\alpha\le\alpha_n=n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \tag{1.2}$$

其中 ω_{n-1} 为单位球面 $S^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ 的球面测度，当 $\alpha>\alpha_n$ 时，该积分等于无穷，也即得到了 α_n 为最佳常数。我们称 $\alpha=\alpha_n$ 时为著名的 Trudinger-Moser 不等式，Moser 所使用的对称重排方法非常依赖于 Polya-Szego 不等式。但是由于经典的对称重排函数不具有足够的高阶弱可微性，因此不适用于研究高阶 Sobolev 空间的精确嵌入。

在 1988 年，Adams 得到高阶 Trudinger 型不等式[4]，并给出了最佳常数：

$$\int_\Omega\exp(\beta|u|^{p'})dx\le c_0 \tag{1.3}$$

$$\beta \le \beta_0(m,n) = \begin{cases} \dfrac{n}{\omega_{n-1}}\left[\dfrac{\pi^{n/2}2^m\Gamma\left(\dfrac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n-m+1}{2}\right)}\right]^{p'}, & m\text{为奇数} \\ \dfrac{n}{\omega_{n-1}}\left[\dfrac{\pi^{n/2}2^m\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n-m}{2}\right)}\right]^{p'}, & m\text{为偶数} \end{cases} \tag{1.4}$$

其中$u \in C^m(\mathbb{R}^n)$，且在Ω中具有紧支集，且$\left\|\nabla^m u\right\|_p \le 1$，$p = n/m$，$p' = p/(p-1)$，但当$\beta > \beta_0$时，则存在满足上述条件的函数$u$使得$\int_\Omega \exp(\beta|u|^{p'})dx \le c_0$。

对于无界区域的讨论，Adachi 给出了最佳常数，我们也称下述不等式为 Adachi-Tanaka 型 Trudinger-Moser 不等式[5]，即

$$A(n,\alpha) = \sup_{u\in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\},\|\nabla u\|_{L^n(R^n)}\le 1} \frac{1}{\|u\|_{L^n(R^n)}^n}\int_{R^n}\Phi_n(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}})dx \begin{cases} <\infty, \alpha<\alpha_n \\ =\infty, \alpha\ge\alpha_n \end{cases} \tag{1.5}$$

其中$\Phi_n(t) = e^t - \sum_{i=0}^{n-2}\frac{t^i}{i!}$，需要指出的是，在临界指数$\alpha = \alpha_n$下，积分上确界不是有限的。

在 2005 年，B.Ruf 发现用标准的 Sobolev 范数$\|u\|_{W_0^{1,n}(\Omega)} = (\int_\Omega(|\nabla u|^n + |u|^n)dx)^{\frac{1}{n}}$来代替 Dirichlet 范数$\|u\|_D = (\int_\Omega|\nabla u|^n)^{\frac{1}{n}}$的时候，在二维情况下，可以将 Moser 的结论推广到无界区域[6]上去。

在 2008 年，Y. Li 和 B. Ruf 利用爆破分析技术得到了 Trudinger-Moser 不等式[7]：即存在常数$d > 0$，使得对于任意的区域$\Omega \subset \mathbb{R}^n$，有

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\|u\|_{W_0^{1,n}(\Omega)}\le 1}\int_\Omega \Phi(\alpha_n|u|^{\frac{n}{n-1}})dx \le d \tag{1.6}$$

但对于任意的$\alpha > \alpha_n$，上面不等式不成立。

对于被积函数中带有奇异项的讨论，虽然被积函数在原点处的值趋于无穷，但仍有下述结论，这个结果由 K.Sandeep 在[23]中给出，当且仅当$\frac{\alpha}{\alpha_n} + \frac{\beta}{n} \le 1, \alpha > 0, \beta \in [0,n)$，存在常数$C > 0$满足

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\int_\Omega|\nabla u|^n dx\le 1}\int_\Omega \frac{\exp(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}})}{|x|^\beta}dx\le C \tag{1.7}$$

这里的常数α_n是最佳的，当$\beta=0$时，就是经典的 Trudinger-Moser 不等式。

对于加权对积分上限的影响的讨论，Calanchi-Terraneo 和 Adimurthi-Sandeep 在[23],[36]中给出了结论，这里加权是指增加一些权重来改变函数空间，设$\omega\in C(\Omega)$是一个非负函数，可定义加权 Sobolev 空间：

$$W_0^{1,n}(\Omega,\omega)=cl\left\{u\in C_0^\infty(\Omega)\left|\int_\Omega|\nabla u|^n\omega(x)dx<\infty\right.\right\} \tag{1.8}$$

设$B\subset\mathbb{R}^n$是$\mathbb{R}^n$中的单位球，考虑径向函数的加权 Sobolev 空间，

$$W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega)=cl\left\{u\in C_{0,rad}^\infty(\Omega)\left|\int_\Omega|\nabla u|^n\omega(x)dx<\infty\right.\right\} \tag{1.9}$$

关于一般的加权 Sobolev 空间的嵌入定理，见文献[35]。

对于加权 Sobolev 空间的 Trudinger-Moser 嵌入[17-22]，关注于权值是对数的情形，我们设

$$\omega_\beta(x)=\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{\beta(n-1)}\text{或者}\ \omega_\beta(x)=\left(\log\frac{e}{|x|}\right)^{\beta(n-1)} \tag{1.10}$$

Calanchi 和 Ruf 在[27]中得到了如下结果：

设$\beta\in[0,1)$，$\omega(x)$由 (1.10)所定义，那么对于所有$u\in W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega)$，满足

$$\sup_{u\in W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega_\beta),\|u\|_{\omega_\beta}\le 1}\int_B\exp\left(\alpha|u|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)dx<\infty \tag{1.11}$$

对于对数加权且有奇异项的 Trudinger-Moser 不等式的讨论，SamiAouaoui 和 RahmaJlel 在[13]中得到了$\beta\in[0,1),\omega_\beta(x)=\left|\ln(\frac{e}{|x|})\right|^{\beta(n-1)}$，且$u\in W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega_\beta),n\ge 2$时，对于$\forall\alpha>0,\sigma\in[0,n)$，有$\int_B\frac{\exp(\alpha|u|^{n/((n-1)(1-\beta))})}{|x|^\sigma}dx<+\infty$，进一步

$$\sup\left\{\int_B\frac{\exp(\alpha|u|^{n/((n-1)(1-\beta))})}{|x|^\sigma}dx,u\in W_{0,\mathrm{rad}}^{1,n}(B,\omega_\beta),\|u\|_{\omega_\beta}\le 1\right\}<+\infty \tag{1.12}$$

这里$\alpha\le\frac{n-\sigma}{n}\alpha_{\beta,n}$，其中$\alpha_{\beta,n}=n\left((1-\beta)\omega_{n-1}^{1/(n-1)}\right)^{1/(1-\beta)}$，记$\alpha_{\beta,n,\sigma}=\frac{n-\sigma}{n}\alpha_{\beta,n}$。

1.3 集中紧性原理

集中紧性是数学分析中一种重要的方法，近 20 年来它被广泛地应用于数学研究中。集中紧性是一种在函数空间中用于建立序列收敛的方法，而该序列并不是事先位于一个紧集合中的。

[34]设$\left\{u_j\right\}$是Sobolev空间$W_0^{1,n}\left(\Omega\right)$中的函数序列，满足$\left\|\nabla u_j\right\|_n=1$，且$u_j$弱收敛到$u$，则对于$\forall 0<p<(1-\left\|\nabla u\right\|_n^n)^{-\frac{1}{n-1}}$，有

$$\sup_j\int_\Omega \exp(\alpha_n p\left|u_j\right|^{\frac{n}{n-1}})dx<\infty$$

[34]设$\left\{u_j\right\}$是 Sobolev 空间$W_{0,rad}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right)$中的函数序列，满足$\left\|u_j\right\|_{\omega_\beta}=1$，且$u_j$弱收敛到$u_0$，则对于$\forall 0<p<(1-\left\|u_0\right\|_{\omega_0}^n)^{-\frac{1}{(n-1)(1-\beta)}}$，有

$$\sup_j\int_B \exp(\alpha_{\beta,n} p\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})dx<\infty$$

[34]设$\left\{u_j\right\}$是 Sobolev 空间$W_{0,rad}^{1,n}\left(B\right)$中的函数序列，满足$\left\|\nabla u_j\right\|_{L^n(B)}=1$，且$u_j$弱收敛到$u$，则对于$\forall 0<p<(1-\left\|\nabla u\right\|_{L^n(B)}^n)^{-\frac{1}{n-1}}$，有

$$\sup_j\int_B \frac{\exp(p(\alpha_{n,t}+\left|x\right|^\alpha)\left|u_j\right|^{\frac{n}{n-1}})}{\left|x\right|^t}dx<\infty$$

其中$\alpha_{n,t}=\alpha_n\left(1-\dfrac{t}{n}\right)$，$0<t<n$，$\alpha\geq 0$。

1.4 极值函数的存在性

对于 (1.1)的极值函数存在性问题,已经有了很多的结果，在[8]中 Carleson 和 Chang 证明了Ω是单位球时，极值函数是存在的。之后在[9]中，Struwe 证明了当Ω的测度接近于单位球时，极值函数存在；在[10]中，Flucher 将其推广到二维平面中的任意区域Ω；在[11]中，Lin 证明了高维情形下的存在性。对于 (1.1)式的推广，一般从有界区域推广到无界区域，从低维情形推广到高维情形。后来，研究了奇异型的对数加权的情形。在[12]中， VanHongNguyen 得到了存在$\beta_0\in(0,1)$，当$0\leq\beta<\beta_0$时

$$\sup_{u\in W_{0,\mathrm{rad}}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right),\left\|u\right\|_{\omega_\beta}\leq 1}\int_B \exp(\alpha\left|u\right|^{n/((n-1)(1-\beta))})dx \tag{1.13}$$

的极值函数存在，这里$\alpha \le \alpha_{\beta,n} = n\left((1-\beta)\omega_{n-1}^{1/(n-1)}\right)^{1/(1-\beta)}$。

1.5 应用

Trudinger-Moser不等式在偏微分方程解的存在性问题、能量估计以及非线性分析中有着广泛的应用。

如下述奇异椭圆方程至少存在两个解：

$$-div\left(\omega(x)\left|\nabla u\right|^{n-2}\nabla u\right)+\left|u\right|^{n-2}u=\frac{f(x,u)}{\left|x\right|^{\sigma}}+\varepsilon h$$

其中$\omega(x)=\begin{cases}\left(\log\left(\frac{e}{|x|}\right)\right)^{\beta(n-1)}, |x|<1\\ \chi\left(|x|\right), |x|\ge 1\end{cases}$，$0<\beta<1$，$\chi(1)=1, \chi\left(t\right)>0$。

对于方程，$\beta=1$，$f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，且$f$是满足某些特殊条件的函数，具体见[13]。

更多关于Trudinger-Moser不等式的应用可以查阅相应的文献[23-33]。

在本文中，我们关注(1.12)式的极值函数存在性问题。首先,给出记号

$$MT(n,\alpha,\beta,\sigma)=\sup_{u\in W_{0,rad}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right),\|u\|_{\omega_\beta}\le 1}\int_B\frac{\exp(\alpha\left|u\right|^{n/((n-1)(1-\beta))})}{\left|x\right|^{\sigma}}dx \tag{1.14}$$

$\sigma=0$时，(1.12)的极值函数的存在性[12]中已证明。

第2章 预备知识和主要内容

2.1 预备知识

2.1.1 重要不等式[16]

（1）Hölder **不等式**

若函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $p,q>0,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.1}$$

（2）Young **不等式**

$\forall a,b,\varepsilon \ge 0,$ 对于 $1<p,q<\infty$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$ab \le \varepsilon\frac{a^p}{p}+\varepsilon^{-\frac{q}{p}}\frac{b^q}{q} \tag{2.2}$$

2.1.2 重要引理

引理 1 Vitali 收敛定理[16]

设 $m(E)<\infty$, 函数列 $\{f_k(x)\}\subset L(E)$ 且 $f_k(x)\xrightarrow{m} f(x)$ 于 E。若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上的积分具有等度绝对连续性, 则有

（1） $f\in L(E)$

（2） $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E f(x)dx$

引理 2 法图（Fatou）引理[16]

设 $\{f_n\}$ 是非负可测函数空间中的序列，则

$$\int \liminf\ f_n dx \le \liminf \int f_n dx$$

引理 3 Lebesgue 控制收敛定理[16]

（1） $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的可测函数列

（2） $\{f_n(x)\}\le F(x)$ a. e. 于 E， $n=1,2,\cdots$，且 $F(x)$ 在 E 上可积分（称 $\{f_n\}$ 为 $F(x)$ 所控制，而 $F(x)$ 叫控制函数）

（3） $f_n(x)\Rightarrow f(x)$

则 $f(x)$ 在 E 上可积分且 $\lim_n \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$。

引理 4[12]

每一个函数 $u \in W_{0,rad}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right), \forall 0 < r \le 1$，有

$$|u(r)| \le \left(\frac{n}{\alpha_{\beta,n}}\right)^{((n-1)(1-\beta))/n} \left(\int_{B\setminus B_r} |\nabla u(x)|^n \omega_\beta dx\right)^{1/n} (1-\log r)^{((n-1)(1-\beta))/n} \tag{2.3}$$

证明:由 $u(1)=0$，运用 Hölder 不等式得:

$$\begin{aligned}
|u(r)| &\le \int_r^1 |\nabla u(x)| \omega_\beta^{\frac{1}{n}} x^{\frac{n-1}{n}} \omega_\beta^{-\frac{1}{n}} x^{\frac{1-n}{n}} dx \\
&\le \left(\int_r^1 |\nabla u(x)|^n \omega_\beta x^{n-1} dx\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_r^1 \omega_\beta^{-\frac{1}{n-1}} x^{-1} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&= \omega_{n-1}^{-\frac{1}{n}} \left(\omega_{n-1} \int_r^1 |\nabla u(x)|^n \omega_\beta x^{n-1} dx\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_r^1 \frac{dx}{x(1-\log x)^\beta} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&= (1-\beta)^{-\frac{n-1}{n}} \left(\omega_{n-1}^{-\frac{1}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_{B\setminus B_r} |\nabla u(x)|^n \omega_\beta dx\right)^{\frac{1}{n}} \left[(1-\log r)^{1-\beta} - 1\right]^{\frac{n-1}{n}} \\
&\le \left(\frac{n}{\alpha_{\beta,n}}\right)^{\frac{(n-1)(1-\beta)}{n}} \left(\int_{B\setminus B_r} |\nabla u(x)|^n \omega_\beta dx\right)^{\frac{1}{n}} (1-\log r)^{\frac{(n-1)(1-\beta)}{n}}
\end{aligned}$$

引理 5

设 $\left\{u_j\right\}$ 是空间 $W_{0,rad}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right)$ 中的序列，且该序列满足条件 $\left\|u_j\right\|_{\omega_\beta} = 1$，$u_j$ 弱收敛于 $u_0, \limsup_{j\to\infty} \int_B \frac{\exp(p\alpha_{\beta,n,\sigma} |u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma} dx < +\infty$，且 $p < p\left(u_0\right) = \left(1 - \left\|u_0\right\|_{\omega_0}^n\right)^{-1/((n-1)(1-\beta))}$

证明：考虑 u_0 是否为 0。

（1） 当 $u_0 \equiv 0$ 时，$p < 1$，$p\alpha_{\beta,n,\sigma} < \alpha_{\beta,n,\sigma}$，由 (1.12)知结论成立，即

$$\limsup_{j\to\infty} \int_B \frac{\exp\left(p\alpha_{\beta,n,\sigma} |u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^\sigma} dx < +\infty$$

（2） 当 $u_0 \ne 0$ 时，取 Hölder 不等式中的 $p = \frac{n(1+\varepsilon)}{n-\sigma}, q = \frac{n(1+\varepsilon)}{n\varepsilon+\sigma}$，这里 ε 是充分小的正数，则

$$\int_B \frac{\exp\left(p\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^{\sigma}}dx=\int_B \exp\left(p\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)\cdot\frac{1}{|x|^{\sigma}}dx$$

$$\leq\left(\int_B \exp\left(p(1+\varepsilon)\alpha_{\beta,n}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)dx\right)^{\frac{n-\sigma}{n(1+\varepsilon)}}\left(\int_B \frac{1}{|x|^{\sigma\frac{n(1+\varepsilon)}{n\varepsilon+\sigma}}}dx\right)^{\frac{n\varepsilon+\sigma}{n(1+\varepsilon)}}$$

一方面，$\left(\int_B \exp\left(p(1+\varepsilon)\alpha_{\beta,n}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)dx\right)^{\frac{n-\sigma}{n(1+\varepsilon)}}<\int_B \exp\left(p(1+\varepsilon)\alpha_{\beta,n}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)dx$，由[12]与实数的完备性定理，存在$p(1+\varepsilon)$，使得$p<p(1+\varepsilon)<p(u_0)=\left(1-\|u_0\|_{\omega_0}^{n}\right)^{-1/((n-1)(1-\beta))}$，则$\left(\int_B \exp\left(p(1+\varepsilon)\alpha_{\beta,n}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)dx\right)^{\frac{n-\sigma}{n(1+\varepsilon)}}<+\infty$。

另一方面，由$\sigma\in[0,n)$，则$\frac{\sigma\varepsilon}{1+\varepsilon}<\frac{n\varepsilon}{1+\varepsilon}$，故$\sigma-\frac{\sigma}{1+\varepsilon}<\frac{n\varepsilon}{1+\varepsilon}$，推出$\sigma\frac{n(1+\varepsilon)}{n\varepsilon+\sigma}<n$，那么$\int_B \frac{1}{|x|^{\sigma\frac{n(1+\varepsilon)}{n\varepsilon+\sigma}}}dx$收敛，即$\left(\int_B \frac{1}{|x|^{\sigma\frac{n(1+\varepsilon)}{n\varepsilon+\sigma}}}dx\right)^{\frac{n\varepsilon+\sigma}{n(1+\varepsilon)}}<+\infty$。

综述所述，$\left(\int_B \exp\left(p(1+\varepsilon)\alpha_{\beta,n}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)dx\right)^{\frac{n-\sigma}{n(1+\varepsilon)}}\left(\int_B \frac{1}{|x|^{\sigma\frac{n(1+\varepsilon)}{n\varepsilon+\sigma}}}dx\right)^{\frac{n\varepsilon+\sigma}{n(1+\varepsilon)}}<+\infty$，从而

$$\limsup_{j\to\infty}\int_B \frac{\exp\left(p\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^{\sigma}}dx<+\infty$$

引理 6[12]

$\forall u\in W_{0,rad}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right),\forall 0\leq\tilde{\beta}<\beta$，有

$$v(x)=\left(\frac{\alpha_{\beta,n,\sigma}}{\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}}\right)^{((n-1)(1-\tilde{\beta}))/n}u(x)\left|u(x)\right|^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}} \tag{2.4}$$

当$\|u\|_{\omega_\beta}\leq 1$时，有$\|v\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}\leq 1$。

证明：

根据定义

$$\nabla v(x)=\left(\frac{\alpha_{\beta,n,\sigma}}{\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}}\right)^{\frac{(n-1)(1-\tilde{\beta})}{n}}\left(\nabla u(x)\left|u(x)\right|^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}}+\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}u^{2}(x)\left|u(x)\right|^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}-2}\nabla u(x)\right)$$

$$=\left(\frac{\alpha_{\beta,n,\sigma}}{\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}}\right)^{\frac{(n-1)(1-\tilde{\beta})}{n}}\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}\nabla u(x)\left|u(x)\right|^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}}$$

由引理 4 得

$$\left|\nabla v(x)\right|^{n}=\left(\frac{\alpha_{\beta,n,\sigma}}{\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}}\right)^{(n-1)(1-\tilde{\beta})}\left(\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}\right)^{n}\left|\nabla u(x)\right|^{n}\left|u(x)\right|^{\frac{n(\beta-\tilde{\beta})}{1-\beta}}$$

$$\leq\left|\nabla u(x)\right|^{n}\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}\frac{\omega_{\beta}(x)}{\omega_{\tilde{\beta}}(x)}\left(\int_{B\setminus B_{|x|}}\left|\nabla u(y)\right|^{n}\omega_{\tilde{\beta}}(y)dy\right)^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\left\|v(x)\right\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}^{n}\\
&\leq\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}\omega_{n-1}^{\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\int_{0}^{1}\left|u'(s)\right|^{n}\omega_{\beta}(s)s^{n-1}\cdot\left(\int_{0}^{1}\left|u'(t)\right|^{n}\omega_{\beta}(t)t^{n-1}dt\right)^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}}ds\\
&=-\omega_{n-1}^{\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\int_{0}^{1}\frac{d}{ds}\left[\left(\int_{s}^{1}\left|u'(t)\right|^{n}\omega_{\beta}(t)t^{n-1}dt\right)^{\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\right]ds\\
&=\left(\int_{B}|\nabla u(x)|^{n}\,\omega_{\beta}(x)dx\right)^{\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\\
&\leq 1
\end{aligned}$$

2.2 主要内容

证明主要分次临界情形与临界情形两部分证明：

第一部分，次临界情形，利用积分在单位球上的一致有界性，通过取极大化序列，结合维塔利收敛定理，证明对数加权的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在。

第二部分，临界情形，构造泛函集中水平，排除极大化序列的集中现象，运用相应的积分集中紧性原理，提升可积性，进而证明对数加权的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在。

第3章 极值函数的存在性

对于 (1.1)的极值函数存在性问题，已经有了很多的结果，在[8]中 Carleson 和 Chang 证明了Ω是单位球时，极值函数是存在的。之后在[9]中，Struwe 证明了当Ω的测度接近于单位球时，极值函数存在；在[10]中，Flucher 将其推广到二维平面中的任意区域Ω；在[11]中，Lin 证明了高维情形下的存在性。对于 (1.1)式的推广，一般从有界区域推广到无界区域，从低维情形推广到高维情形。后来，研究了奇异型的对数加权的情形。在[12]中， VanHongNguyen 得到了对数加权型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在。对于本文所讨论的问题，可以从类似的角度切入，即分为次临界情形与临界情形：

3.1 次临界情形

在次临界情形$\alpha<\alpha_{\beta,n,\sigma}$时，由 (1.12)知 (1.14)在$B$上的积分有一致的界，因此取极大化序列$\{u_j\}(j=1,2,\cdots)$，且$u_j\to u, j\to\infty$， (1.14)依然成立。所以通过维塔利收玫定理，该极大化序列的极限u就是 (1.14)的极值函数，即

$$\begin{aligned} MT(n,\alpha,\beta,\sigma)&=\lim_{j\to\infty}\int_B\frac{\exp(\alpha\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx\\ &=\int_B\lim_{j\to\infty}\frac{\exp(\alpha\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx\\ &=\int_B\frac{\exp(\alpha|u|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.2 临界情形

在临界情形$\alpha=\alpha_{\beta,n,\sigma}$时，利用[8,14]中的讨论方法，定义泛函

$$J_{\beta,n,\sigma}(u)=\int_B\frac{\exp\left(\alpha_{\beta,n,\sigma}|u|^{n/((n-1)(1-\beta))}\right)}{|x|^{\sigma}}dx \tag{3.2}$$

泛函的集中水平定义为

$$J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)=\sup\left\{\limsup_{j\to\infty}J_{\beta,n,\sigma}\left(u_j\right)\middle|\left\|u_j\right\|_{\omega_\beta}=1,u_j\to0\right\} \tag{3.3}$$

由[15]知， $J^{\delta}_{0,n,\sigma}(0)\le\dfrac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\left(1+e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}}\right)$，这一结论对极值函数的讨论有很重要的作用。

定理 1 $J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0),\forall\tilde{\beta}\le\beta$ 。

证明：由(3.3)及已知事实得：

$$\int_B \frac{1}{|x|^{\sigma}}dx=\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\le\limsup_{j\to\infty}\int_B\frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx\le J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0) \tag{3.4}$$

对于 $\tilde{\beta}$，(3.4)依然成立。

下证： $J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0),\forall\tilde{\beta}\le\beta$ 。取 $\{u_j\}$ 是 $W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_{\beta}\right)$ 里的归一化集中序列，取子列使得 $\lim\limits_{j\to\infty}J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}\left(u_j\right)$ 存在。$\{v_j\}$ 由引理 6 所定义，因此， $v_j\in W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_{\tilde{\beta}}\right)$，且 $\left\|v_j\right\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}\le1$，$\{v_j\}$ 有界。假设 $v_j\to v$，由于 $v_j\to0$，在 $B\setminus B_a$，这里 $a\in(0,1)$。由弱极限的唯一性得：$v\equiv0$。

情形一 $\limsup\limits_{n\to\infty}\left\|v_j\right\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}<1,\exists t\in(0,1)$，以及 N，当 $j>N$ 时，$\left\|v_j\right\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}\le t<1$。因此，由引理 5 与 Hölder 不等式知 $\dfrac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left|v_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}$ 在 $L^p\left(p>1\right)$ 中有界，所以

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\int_B\frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx&=\lim_{j\to\infty}\int_B\frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left|v_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx\\&=\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0)\end{aligned} \tag{3.5}$$

这就得到了 $J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0),\forall\tilde{\beta}\le\beta$ 。

情形二 $\limsup\limits_{j\to\infty}\left\|v_j\right\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}=1$，可以通过取子列，使得 $\lim\limits_{j\to\infty}\left\|v_j\right\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}=1$。定义 $I_j=\dfrac{v_j}{\left\|v_j\right\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}},\{I_j\}$ 的性质有：在 $W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_{\tilde{\beta}}\right)$ 里有 $I_j\to0,\left|v_j\right|\le I_j$。如果 $\{I_j\}$ 是归一化集中序列，那么

$$\lim_{j\to\infty}J_{\beta,n,\sigma}\left(u_j\right)=\lim_{j\to\infty}J_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left(v_j\right)\le\limsup_{\substack{j\to\infty\\ \tilde{\beta},n,\sigma}}\left(I_j\right)\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0) \tag{3.6}$$

由 (3.6)知，对于 $\forall\tilde{\beta}\le\beta$ 有 $J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0)$ 成立。

如果$\left\{I_j\right\}$非归一化集中序列，$\exists a,t\in\left(0,1\right)$，以及$N$，当$j>N$时，$\int_{B_a}\left|I_j\right|^n\omega_{\tilde{\beta}}(x)dx\le t$。定义：

$$\tilde{I}_j(x)=\begin{cases}I_j(x)-I_j(a), & |x|\le a\\ 0, & a<|x|<1\end{cases}\tag{3.7}$$

$\tilde{I}_j\left(x\right)$的性质有：$\tilde{I}_j\left(x\right)\in W_{0,rad}^{1,n}\left(B,\omega_{\tilde{\beta}}\right)$，且当$j>N$时有,$\left\|\tilde{I}_j\right\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}^n\le t<1$。选择足够小的$\varepsilon$，使得$(1+\varepsilon)t^{\frac{1}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}<1$，结合 Young 不等式以及$\tilde{I}_j\left(x\right)$的定义有

$$\left|I_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}\le C(n,\tilde{\beta},\varepsilon)\left|I_j(a)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}+(1+\varepsilon)\left|\tilde{I}_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}\tag{3.8}$$

$C(n,\tilde{\beta},\varepsilon)=\left(1-\left(1+\varepsilon\right)^{-\frac{(n-1)(1-\tilde{\beta})}{n\tilde{\beta}+1-\tilde{\beta}}}\right)^{-\frac{n\tilde{\beta}+1-\tilde{\beta}}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}$，选取适当的$t,\varepsilon$以及权，使得

$\dfrac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}(1+\varepsilon)\left|\tilde{I}_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{\left|x\right|^{\sigma}}$在$L^p\left(p>1\right)$中有界。在$B_a$里，由$I_j\left(a\right)\to0,j\to\infty$，推出

$\dfrac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left|\tilde{I}_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{\left|x\right|^{\sigma}}$在$L^p\left(B_a\right)$中有界。

我们会得到

$$\lim_{j\to\infty}\int_{B_a}\frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left|I_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{|x|^{\sigma}}dx=\int_{B_a}\frac{1}{|x|^{\sigma}}dx=\frac{t-\sigma}{n-\sigma}\omega_{n-1}\tag{3.9}$$

在$B\setminus B_a$上，由引理 5，引理 3 有

$$\lim_{j\to\infty}\int_{B\setminus B_a}\frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left|I_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{|x|^{\sigma}}dx=\frac{1}{n-\sigma}\omega_{n-1}-\frac{t-\sigma}{n-\sigma}\omega_{n-1}\tag{3.10}$$

综上所述，由(3.9)与 (3.10)得

$$\lim_{j\to\infty}\int_{B}\frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left|I_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{|x|^{\sigma}}dx=\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\tag{3.11}$$

所以$\lim_{j\to\infty} J_{\beta,n,\sigma}\left(u_j\right)=\lim_{j\to\infty} J_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left(v_j\right)\le \frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0)$。

至此，对于$\forall\tilde{\beta}\le\beta$,有$J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0)$成立。

定理 2 $\lim_{\beta\to 0} MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)=MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right)$。

证明：

假设$u\in W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_{\beta}\right)$,满足$\|u\|_{\omega_{\beta}}\le 1$，$v$由引理 6 所定义,对于$\forall\tilde{\beta}\le\beta$，有$\|v\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}\le 1$，通过$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)$的定义，有

$$\int_B \frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}|u|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx=\int_B \frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}|v|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{|x|^{\sigma}}dx\le MT\left(n,\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma},\tilde{\beta},\sigma\right) \tag{3.12}$$

所以,$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\le MT\left(n,\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma},\tilde{\beta},\sigma\right)$成立，这里$\forall 0\le\tilde{\beta}\le\beta<1$。故$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)$关于$\beta$单调递减，则有

$$\lim_{\beta\to 0}\sup MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\le MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right) \tag{3.13}$$

下面证明：

$\lim_{\beta\to 0}\inf MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\ge MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right)$，由于$MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right)$极值函数可达，因此存在$u_0\in C^1(B)\cap W^{1,n}_{0,rad}(B)$,且$u_0$满足$\|\nabla u_0\|_n=1$。故：

$$\lim_{\beta\to 0}\int_B |\nabla u_0|^n \omega_{\beta}(x)dx=\int_B |\nabla u_0|^n dx=1 \tag{3.14}$$

对于$\forall\varepsilon>0,\exists\beta_{\varepsilon}$时，$\forall\beta\le\beta_{\varepsilon}$时,有

$$\|u_0\|_{\omega_{\beta}}\le 1+\varepsilon$$

我们有

$$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\ge\int_B \frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}(\frac{|u_0|}{1+\varepsilon})^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx \tag{3.15}$$

当$\beta\to 0$时，由法图引理(引理 2)得：

$$\liminf_{\beta\to 0} MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\ge \int_B \frac{\exp(\alpha_{0,n,\sigma}(\frac{|u_0|}{1+\varepsilon})^{\frac{n}{n-1}})}{|x|^\sigma}dx \tag{3.16}$$

当$\varepsilon\to 0$时，再一次由法图引理(引理 2)得：

$$\liminf_{\beta\to 0} MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\ge \int_B \frac{\exp(\alpha_{0,n,\sigma}|u_0|^{\frac{n}{n-1}})}{|x|^\sigma}dx = MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right) \tag{3.17}$$

综上所述：

$$\lim_{\beta\to 0} MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)=MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right) \tag{3.18}$$

定理 3 存在$\beta_0\in(0,1)$，当$0\le\beta<\beta_0$时，$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)$的极值函数存在。

证明：

由 (3.18)与已知的结论

$$\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\left(1+e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}}\right)\le J^{\delta}_{0,n,\sigma}(0)<MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right) \tag{3.19}$$

结合(3.19)，由定理 1 与定理 2 得

$$J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^{\delta}_{0,n,\sigma}(0)<MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\forall\beta\in[0,\beta_0) \tag{3.20}$$

下面取$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)$的极大化序列，由于范数有界，因此在$W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_\beta\right)$里，$u_j\to u_0$。且对某些$u_0\in W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_\beta\right)$，取$a\in(0,1)$，在$B\setminus B_a$里，$u_j\to u_0$。若$u_0\equiv 0$，且$\{u_j\}$是归一化集中序列，那么$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)=\lim_{j\to\infty}J_{\beta,n,\sigma}\left(u_j\right)\le J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)$，这与 (3.20)矛盾。因此$\{u_j\}$非归一化集中序列。若$\exists a,t\in(0,1)$，存在$N$，当$n\ge N$时,有$\int_{B_a}\left|\nabla u_j\right|^n\omega_\beta(x)dx\le t$。此时

$$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)=\lim_{j\to\infty}J_{\beta,n,\sigma}\left(u_j\right)=\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\le J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0) \tag{3.21}$$

这与 (3.20)矛盾。所以 $u_0 \neq 0$，由引理 5 与 Hölder 不等式知 $\frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{\left|x\right|^{\sigma}}$ 在 $L^p\left(p>1\right)$ 中有界，故有

$$
\begin{aligned}
MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right) &= \lim_{j\to\infty}\int_B \frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx \\
&= \int_B \frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_0\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

这种情况下，我们发现$\left\|u_0\right\|_{\omega_\beta} \leq 1$。当$\left\|u_0\right\|_{\omega_\beta} < 1$时，

$$
\begin{aligned}
MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right) &\geq \int_B \frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}(\frac{\left|u_0\right|}{\left\|u_0\right\|_{\omega_\beta}})^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx \\
&> \int_B \frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_0\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx \\
&= MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

这是一个矛盾。

综上所述，$\left\|u_0\right\|_{\omega_\beta} = 1$，且$u_0$就是$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)$的极值函数。

第4章 总结与展望

本文研究了一类对数加权下的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在性问题。证明主要分次临界情形与临界情形两部分证明：次临界情形，利用积分在单位球上的一致有界性，通过取极大化序列，结合维塔利收敛定理，证明极值函数存在；临界情形，构造泛函集中水平，排除极大化序列的集中现象，运用相应的积分集中紧性原理，提升可积性，进而证明极值函数存在。

在前面研究的基础上做展望：首先，考虑能否证明高阶情形下对数加权的奇异型的 Trudinger-Moser不等式的极值函数存在性问题。其次，能否适当的添加条件，使得参数的存在区间扩大。最后，放眼未来，Trudinger-Moser不等式的分支可以研究的更加广泛和深入，更加优美的结论还有待发现。

参考文献：

[1] S. I. Pohozhaev. The Sobolev embedding in the case $pl = n$ [J]. Proceedings of the Technical Scientific Conference on Advances of Scientific Research 1964-1965. Mathematics Section, 1965: 158-170.

[2] N. Trudinger. On Imbeddings into Orlicz Spaces and Some Applications[J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1967, 17(5): 473-483.

[3] Moser. A Sharp Form of an Inequality by N.Trudinger[J]. Indiana University Mathematics Journal, 1971, 20(11): 1077-1092.

[4] D. R. Adams. A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives[J]. Annals of Mathematics, 1988,128(2): 385-398.

[5] S. Adachi, K. Tanaka. Trudinger type inequalities in $\mathbb{R}^N$ and their best exponents[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2000, 128: 2051-2057.

[6] B. Ruf. A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in $\mathbb{R}^2$ [J]. Journal of Functional Analysis, 2005, 219(2): 340-367.

[7] Y. Li, B. Ruf. A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in $\mathbb{R}^n$ [J]. Indiana University Mathematics Journal, 2008, 57(1): 441-480.

[8] Arleson, Lennart, and Sun-Yung A. Chang. "ON THE EXISTENCE OF AN EXTREMAL FUNCTION FOR AN INEQUALITY OF MOSER, J." Bulletin des Sciences Mathématiques 110.2 (1986): 113-127.

[9] Truwe M. Critical points of embeddings of H01, n into Orlicz spaces[C]Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire. Elsevier Masson, 1988, 5(5): 425-464.

[10] Martin Flucher,Extremal functions for the Trudinger-Moser inequality in 2 dimension,Comment.Math.Helv.67(1992),no.3,471-497.

[11] Kai-Ching Lin,Extremal functions for Moser's inequality Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996),no.7,2663-2671.

[12] Nguyen,Van."Remarks on the Moser-Trudinger type inequality with logarithmic weights in dimension N".Proceedings of the American Mathematical Society 147.12(2019):5183-5193.

[13] Aouaoui,Sami,and Rahma Jlel."A new Singular Trudinger-Moser Type Inequality with Logarithmic Weights and Applications."Advanced Nonliner Studies 20.1(2020):113-139.

[14] Prosenjit Roy,Extremal function for Moser-Trudinger type inequality with logarithmic

weight,Nonliner Anal.135(2016),194-204.

[15] Wang, Xu Min. "Singular Supercritical Trudinger-Moser Inequalities and the Existence of Extremals." Acta Mathematica Sinica, English Series 36.8 (2020): 873-888.

[16] 程其襄,张奠宙等.实变函数与泛函分析基础[M].4 版.北京:高等教育出版社.2019.06.

[17] F. S. B. Albuquerque, Sharp constant and extremal function for weighted Trudinger-Moser type inequalities in $\mathbb{R}^2$, J. Math. Anal. Appl. 421 (2015), no. 1, 963-970.

[18] F. S. B. Albuquerque, C. O. Alves and E. S. Medeiros, Nonlinear Schrödinger equation with unbounded or decaying radial potentials involving exponential critical growth in $\mathbb{R}^2$, J. Math. Anal. Appl. 409 (2014), no. 2, 1021-1031.

[19] F. S. B. Albuquerque and S. Aouaoui, A weighted Trudinger-Moser type inequality and its applications to quasilinear elliptic problems with critical growth in the whole Euclidean space, Topol. Methods Nonlinear Anal. 54 (2019), no. 1, 109-130.

[20] M. Calanchi, Some weighted inequalities of Trudinger-Moser type, in: Analysis and Topology in Nonlinear Differential Equations, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 85, Birkhäuser/Springer, Cham (2014), 163-174.

[21] M. Calanchi, E. Massa and B. Ruf, Weighted Trudinger-Moser inequalities and associated Liouville type equations, Proc. Amer. Math. Soc. 146 (2018), no. 12, 5243-5256.

[22] M. F. Furtado, E. S. Medeiros and U. B. Severo, A Trudinger-Moser inequality in a weighted Sobolev space and applications, Math. Nachr. 287 (2014), no. 11-12, 1255-1273.

[23] Adimurthi and K. Sandeep, A singular Moser-Trudinger embedding and its applica-tions, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 13 (2007), no. 5-6, 585-603, DOI 10.1007/s00030-006-4025-9. MR2329019

[24] Adimurthi and Cyril Tintarev, On compactness in the Trudinger-Moser inequality, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 13 (2014), no. 2, 399-416. MR3235520

[25] Guofang Wang and Dong Ye, A Hardy-Moser-Trudinger inequality, Adv. Math. 230 (2012), no. 1,294-320, DOI 10.1016 / j.aim.2011.12.001. MR2900545

[26] Marta Calanchi and Bernhard Ruf, On Trudinger-Moser type inequalities with log-arithmic weights, J. Differential Equations 258 (2015), no. 6, 1967-1989, DOI 10.1016/j.jde.2014.11.019. MR3302527

[27] Marta Calanchi and Bernhard Ruf, Trudinger-Moser type inequalities with logarithmic weights in dimension N, Nonlinear Anal. 121 (2015), 403-411, DOI 10.1016/j.na.2015.02.001. MR3348931

[28] Djairo G. de Figueiredo, João Marcos do Ó, and Bernhard Ruf, On an inequality by N. Trudinger and J. Moser and related elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math. 55 (2002), no. 2, 135-152, DOI 10.1002/cpa.10015. MR1865413

[29] Nguyen Lam and Guozhen Lu, A new approach to sharp Moser-Trudinger and Adams type inequalities: a rearrangement-free argument, J. Differential Equations 255 (2013), no. 3, 298-325, DOI 10.1016/j.jde.2013.04.005. MR3053467

[30] Guozhen Lu and Hanli Tang, Best constants for Moser-Trudinger inequalities on high dimen-sional hyperbolic spaces, Adv. Nonlinear Stud. 13 (2013), no. 4, 1035-1052, DOI 10.1515/ans-2013-0415. MR3115151

[31] Andrea Malchiodi and Luca Martinazzi, Critical points of the Moser-Trudinger functional on a disk, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 16 (2014), no. 5, 893-908, DOI 10.4171/JEMS/450. MR3210956

[32] G. Mancini and K. Sandeep, Moser-Trudinger inequality on conformal discs, Commun. Con-temp. Math. 12 (2010), no. 6, 1055-1068, DOI 10.1142/S0219199710004111. MR2748285

[33] Gianni Mancini, Kunnath Sandeep, and Cyril Tintarev, Trudinger-Moser inequality in the hyperbolic space H^N, Adv. Nonlinear Anal. 2 (2013), no. 3, 309-324, DOI 10.1515/anona-2013-0001. MR3089744

[34] P. L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 1[C]. Annales de l'IHP Analyse non linéaire. 1984, 1(2): 109-145.

[35] A.Kufner, L. E. Persson. Weighted inequalities of Hardy type[M]. RiverEdge, New Jersey: World Scientific, 2003.

[36] M. Calanchi, E. Terraneo. Non-radial Maximizers For Functionals With Exponential Non-linearity in $\mathbb{R}^2$ [J]. Advanced Nonlinear Studies, 2005, 5(3): 337-350.

致 谢

四年的学习生涯即将结束，四年前，怀着对数学的兴趣踏入大学校园，这四年，始终以热烈的激情学习数学，不仅获得了专业知识，也通过参加竞赛等活动巩固所学的知识。这四年，拼搏过，奋斗过，懊悔过，但最终坚持下来了。数学需要清晰的直觉和严格的演绎，学习数学，不是记了多少理论，做了多少题，而是提升境界，改变对一些问题的看法。这对进一步的学习大有益处。在即将毕业之际，我要向在生活上支持我的父母，在学习上支持我的老师，致以最诚挚的感谢。

首先，感谢我的论文指导老师朱茂春副教授，在论文选题方面，逻辑推导方面，直至定稿方面，都曾悉心的教导，这些都看在眼里，记在心里。所以无论是他的学识，还是为人，都让我甚感钦佩，终将使我受益匪浅。

其次，感谢我的老师和同学，他们在我遇到学习中的问题时，耐心的教导我，让我提升了对学习数学的信心，丰富了我的大学生活，也锤炼了我的品格。

最后，感谢我的父母，他们在生活中，提供了物质上的需求，在学习中，当获得一点点成功时，鼓励我下次做的更好，当遇到失败时，他们鼓励我不要放弃，从他们身上，我学到了很多。

即将毕业之际，再一次感谢曾经帮助过我的老师，同学，父母，我们的未来都会更加美好！