江蘇大學

JIANGSU UNIVERSITY

本 科 毕 业 论 文

一类对数加权奇异型 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在性问题

Existence problem of extreme value functions for Trudinger-Moser inequality of singular type under a class of logarithmic weight

学 院 名 称 ： 数学科学学院

专 业 班 级 ： 应数 1901

学 生 姓 名 ： 郭永强

指导教师姓名 ： 朱茂春

指导教师职称 ： 副教授

2023 年 6 月

目 录

一类对数加权奇异型 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在性问题

专业班级：应数 1901 学生姓名：郭永强

指导教师：朱茂春 职称：副教授

摘 要 Trudinger 不等式作为 Sobolev 不等式的极限情形，是由 Trudinger 于 1967 年首先得到的. 后来又由 Moser 得到了一阶 Trudinger 不等式的最佳常数，即 Trudinger-Moser 不等式. 这类不等式自诞生至今，在偏微分方程、几何分析以及弦理论等研究中得到了广泛应用. 本文主要研究单位球 B 上对数加权的奇异型 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在性问题. 这里的权是 $\omega_\beta(x)=\left|\log(\frac{e}{|x|})\right|^{\beta(n-1)}$ ，$\beta\in[0,1)$. 证明主要分次临界情形与临界情形两部分证明：

第一部分，次临界情形，利用积分在单位球上的一致有界性，通过取极大化序列，结合 Vitali 收敛定理，证明对数加权的奇异型 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在.

第二部分，临界情形，构造泛函集中水平，排除极大化序列的集中现象，运用相应的集中紧性原理提升可积性，进而证明对数加权的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在.

关键词: Trudinger-Moser 不等式　奇异型　Vitali 收敛定理　集中水平　极值函数

Existence problem of extreme value functions for Trudinger-Moser inequality of singular type under a class of logarithmic weight

Abstract Trudinger inequality as the limiting case of Sobolev inequality was first obtained by Trudinger in 1967. Later on, the best constant for the first-order Trudinger inequality was obtained by Moser-the Trudinger-Moser inequality. Since then, these inequalities have been widely used in the study of partial differential equations, geometric analysis, and string theory. In this paper, we focus on the existence of extreme value functions of Trudinger-Moser inequalitie of singular type on the unit ball B with logarithmic weights. The weights here are $\omega_\beta(x)=\left|\log(\frac{e}{|x|})\right|^{\beta(n-1)}$, $\beta\in[0,1)$. The proof is mainly divided into two parts for the subcritical case and the critical case:

In the first part, the subcritical case, the consistent boundedness of the integral over the unit ball is used to prove the existence of the extreme value function of the Trudinger-Moser inequality of logarithmically weighted singular type by taking the sequence of maximization and combining it with the Vitali convergence theorem.

In the second part, the critical case, the level of concentration of the generalized function is constructed to exclude the concentration phenomenon of the maximization sequence, and the corresponding integration concentration tightness principle is applied to enhance the productability and thus prove the existence of the extreme value function of the Trudinger-Moser inequality of logarithmically weighted singular type.

Keywords: Trudinger-Moser inequality   singular type   Vitali convergence theorem   concentration level   extremal function

第1章 绪论

1.1 Sobolev 空间的嵌入

Sobolev 空间理论是上世纪 30 年代初由苏联数学家 S.L.Sobolev 率先提出来的. 这类空间是由弱可微函数组成的 Banach 空间（完备的赋范空间）. 它在研究偏微分方程的近代理论中发挥着重要作用.

到目前为止， 这种理论已有很成熟的发展. 下面给出 Sobolev 空间的定义：

设 $p\geq 1$， m 是非负整数， 记本身及其直到 m 阶弱导数在内都是 $L^p(\Omega)$ 可积的函数集合为：

$$W^{m,p}(\Omega)=\{u\mid u\in L^p(\Omega),D^a u\in L^p(\Omega),|a|\leq m\},$$

在空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 内引入范数

$$\|u\|_{m,p,\Omega}=\begin{cases}(\sum\limits_{|a|\leq m}\|D^a u\|_{p,\Omega}^p)^{\frac{1}{p}},1\leq p<\infty,\\ \max\limits_{|a|\leq m}\|D^a u\|_{\infty,\Omega},p=\infty.\end{cases}$$

下面给出嵌入的定义：

设 X,Y 都是 $Banach$ 空间，称 X 嵌入到 Y，如果下面两个条件成立：

（1） $X\subset Y,$

（2） X 到 Y 有连续映射，即 $\exists C>0$，满足 $\|x\|_Y\leq C\|x\|_X,\forall x\in X.$

Sobolev 空间中的嵌入定理深刻揭示了 Sobolev 空间与其他函数空间的关系. 它在近代偏微分方程理论的研究中起着重要的作用，由于 Sobolev 空间的嵌入性质，使得在分析中，特别是在微分算子和积分算子的研究中起着关键作用，其主要结果如下：

设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑有界区域， $W_0^{1,p}(\Omega)$ 表示 $C^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=\left(\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化空间. 经典的 Sobolev 嵌入定理告诉我们[1]

（1） $p<n$ 时， $W_0^{1,p}(\Omega)$ 嵌入到 $L^q(\Omega)$， $1\leq q<p^*=\dfrac{np}{n-p},$

（2） $p>n$ 时， $W_0^{1,p}(\Omega)$ 嵌入到 $C^\alpha,\alpha=1-\dfrac{p}{n},$

（3） $p=n$ 时，$W_0^{1,p}(\Omega)$ 嵌入到 $L^q, 0<q<\infty$，但 $W_0^{1,p}(\Omega)\not\subset L^\infty(\Omega)$.

例如，$u(x)=\log\log(1+\frac{1}{|x|})$，虽然 $u(x)\in W_0^{1,n}(\Omega)$，但 $u(x)\notin L^\infty(\Omega)$.

1.2 Trudinger-Moser 不等式

设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑有界区域，在 1967 年，Trudinger 利用幂级数展开[2]证明了在 $p=n$ 时，$W_0^{1,n}(\Omega)$ 可以连续嵌入到某种 Orlicz 函数空间 $L_\phi(\Omega)$，其中 $\phi=\exp(|t|^{n/(n-1)}-1)$，即存在 $\alpha>0$，使得

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\|\nabla u\|_n^n\le 1}\int_\Omega e^{\alpha u^{n/(n-1)}}dx\le C_n|\Omega| \tag{1.1}$$

成立，其中 $\|\nabla u\|_n^n=\int_\Omega|\nabla u|^n dx$.

在 1971 年，Moser 利用对称重排方法[3]得到了

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\|\nabla u\|_n^n\le 1}\int_\Omega e^{\alpha u^{n/(n-1)}}dx<\infty,\forall\alpha\le\alpha_n=n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \tag{1.2}$$

其中 ω_{n-1} 为单位球面 $S^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ 的测度，当 $\alpha>\alpha_n$ 时，(1.2)式中的上确界等于无穷，即 α_n 为最佳常数. 我们称 $\alpha=\alpha_n$ 时的(1.2)式为著名的 Trudinger-Moser 不等式. Moser 所使用的对称重排方法依赖于著名的 Polya-Szego 重排不等式，但是经典的对称重排函数不具有高阶弱可微性，因此不适用于研究高阶 Sobolev 空间的精确嵌入.

在 1988 年，Adams 得到了高阶 Trudinger 型不等式[4]，并给出了最佳常数：

$$\sup_{u\in W_0^{m,p}(\Omega),\|\nabla^m u\|_p\le 1}\int_\Omega \exp(\beta|u|^{p'})dx\le c_0, \tag{1.3}$$

$$\beta\le\beta_0(m,n)=\begin{cases}\dfrac{n}{\omega_{n-1}}\left[\dfrac{\pi^{n/2}2^m\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m+1}{2}\right)}\right]^{p'}, m\text{为奇数},\\[2ex] \dfrac{n}{\omega_{n-1}}\left[\dfrac{\pi^{n/2}2^m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)}\right]^{p'}, m\text{为偶数},\end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $u\in C_0^m(\Omega)$，且 $p=n/m$，$p'=p/(p-1)$，$\nabla^m u=\begin{cases}\Delta^{m/2}u, m\text{为偶数},\\ \nabla\Delta^{(m-1)/2}u, m\text{为奇数},\end{cases}$. 但当 $\beta>\beta_0$

时，则存在满足上述条件的函数u使得$\int_\Omega \exp(\beta|u|^{p'})dx > c_0$.

在 2007 年，K.Sandeep 在[23]中研究了带有奇异项的 Trudinger-Moser 不等式，当$\alpha \le \alpha_n\left(1-\frac{\beta}{n}\right), \alpha_n = n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}, \beta \in [0,n)$时，存在常数$C>0$满足

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\|\nabla u\|_n^n\le 1}\int_\Omega \frac{\exp(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}})}{|x|^\beta}dx \le C, \tag{1.5}$$

当$\beta = 0$时，就是经典的 Trudinger-Moser 不等式.

后来，Calanchi 和 Ruf 在[27]中研究了对数加权范数约束下的 Trudinger-Moser 不等式，当$\alpha \le \alpha_{\beta,n} = n\left((1-\beta)\omega_{n-1}^{1/(n-1)}\right)^{1/(1-\beta)}$，$\beta\in[0,1)$时，对于所有$u \in W_{0,rad}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right)$，满足

$$\sup_{u\in W_{0,rad}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right),\|u\|_{\omega_\beta}\le 1}\int_B \exp\left(\alpha|u|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)dx < \infty, \tag{1.6}$$

这里$W_{0,rad}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right)$表示径向加权 Sobolev 空间，定义为：

$$W_{0,rad}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right) = cl\left\{u\in C_{0,rad}^\infty\left(B\right)\middle|\int_B|\nabla u|^n\omega_\beta\left(x\right)dx<\infty\right\}, \tag{1.7}$$

其中cl表示集合的闭包，$\omega_\beta\left(x\right) = \left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{\beta(n-1)}$或$\omega_\beta\left(x\right) = \left(\log\frac{e}{|x|}\right)^{\beta(n-1)}$，加权范数定义为：$\|u\|_{\omega_\beta} = \int_B|\nabla u|^n\omega_\beta(x)dx$.

类似地，也有对数加权范数约束下奇异型的 Trudinger-Moser 不等式，S. Aouaoui 和 J. Rahma 在[13]中得到了当$\alpha \le \alpha_{\beta,n,\sigma} = \frac{n-\sigma}{n}\alpha_{\beta,n}$，$\beta\in[0,1)$，$\sigma\in[0,n)$时，有

$$\sup_{u\in W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega_\beta),\|u\|_{\omega_\beta}\le 1}\int_B \frac{\exp(\alpha|u|^{n/((n-1)(1-\beta))})}{|x|^\sigma}dx < +\infty, \tag{1.8}$$

当$\sigma = 0$时，就是 Calanchi 和 Ruf 在[27]中得到的结果.

在无界区域上，也有类似的 Trudinger-Moser 不等式，早期的研究可见 Adachi-Tanaka 在[5]中的工作：

$$A(n,\alpha) = \sup_{u\in W^{1,n}\left(\mathbb{R}^n\right)\setminus\{0\},\|\nabla u\|_{L^n\left(\mathbb{R}^n\right)}\le 1}\frac{1}{\|u\|_{L^n\left(\mathbb{R}^n\right)}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_n(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}})dx\begin{cases}<\infty, \alpha<\alpha_n,\\ =\infty, \alpha\ge\alpha_n,\end{cases} \tag{1.9}$$

其中$\Phi_n(t)=e^t-\sum_{i=0}^{n-2}\frac{t^i}{i!}$. 需要指出的是，在临界指数$\alpha=\alpha_n$下，积分上确界不是有限的.

在 2005 年，B.Ruf 发现当用标准的 Sobolev 范数$\|u\|_{W_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)}=(\int_{\mathbb{R}^n}(|\nabla u|^n+|u|^n)dx)^{\frac{1}{n}}$来代替 Dirichlet 范数$\|u\|_{\mathbb{R}^n}=(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^n)^{\frac{1}{n}}$的时候，在二维情况下，得到全空间$\mathbb{R}^2$上的临界型 Trudinger-Moser 不等式[6]：即存在常数$d>0$，有

$$\sup_{\|u\|_{W_0^{1,n}(\mathbb{R}^2)}\le 1}\int_{\mathbb{R}^2}(e^{4\pi u^2}-1)dx\le d, \tag{1.10}$$

在 2008 年，Y. Li 和 B. Ruf 利用爆破分析技术得到了维数$n\ge 3$时的临界型 Trudinger-Moser 不等式[7]：即存在常数$d>0$，使得对于任意的区域$\Omega\subset\mathbb{R}^n$，有

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\|u\|_{W_0^{1,n}(\Omega)}\le 1}\int_\Omega \Phi_n(\alpha_n|u|^{\frac{n}{n-1}})dx\le d, \tag{1.11}$$

其中$\Phi_n(t)=e^t-\sum_{i=0}^{n-2}\frac{t^i}{i!}$，但对于任意的$\alpha>\alpha_n$，上面不等式不成立. 进一步，Y. Li 和 B. Ruf 还证明了(1.11)式的极值函数存在.

1.3 集中紧性原理

集中紧性原理是一种重要的数学方法，近 20 年来它被广泛地应用于数学研究中. 比如，集中紧性原理可以用来求解一些可积性的问题.

下面介绍$W_0^{1,n}(\Omega)$空间上的集中紧性原理[34]：

设$\{u_j\}$是 Sobolev 空间$W_0^{1,n}(\Omega)$中的一个函数序列，满足$\|\nabla u_j\|_n=1$，且u_j弱收敛到u，则对于任意的$0<p<(1-\|\nabla u\|_n^n)^{-\frac{1}{n-1}}$，有

$$\sup_j\int_\Omega \exp(\alpha_n p|u_j|^{\frac{n}{n-1}})dx<\infty.$$

进一步，在径向加权 Sobolev 空间$W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega_\beta)$中，也有相应的集中紧性原理[12]：

设$\{u_j\}$是 Sobolev 空间$W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega_\beta)$中的函数序列，满足$\|u_j\|_{\omega_\beta}=1$，且$u_j$弱收敛到$u_0$，则对于任意的$0<p<(1-\|u_0\|_{\omega_0}^n)^{-\frac{1}{(n-1)(1-\beta)}}$，有

$$\sup_j\int_B \exp(\alpha_{\beta,n}p|u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})dx<\infty.$$

最近，X.M. Wang 在[15]中研究了奇异型超临界的集中紧性原理：

设$\{u_j\}$是径向 Sobolev 空间$W_{0,rad}^{1,n}(B)$中的函数序列，满足$\|\nabla u_j\|_{L^n(B)}=1$，且$u_j$弱收敛到$u$，则对于任意的$0<p<(1-\|\nabla u\|_{L^n(B)}^n)^{-\frac{1}{n-1}}$，有

$$\sup_j\int_B\frac{\exp(p\alpha_{n,t}|u_j|^{\frac{n}{n-1}+|x|^\alpha})}{|x|^t}dx<\infty.$$

其中$\alpha_{n,t}=\alpha_n\left(1-\frac{t}{n}\right)$，$0<t<n$，$\alpha\geq 0$.

1.4 极值函数的存在性

对于 (1.1)式的极值函数存在性问题,已经有了很多的结果，在[8]中 Carleson 和 Chang 证明了当Ω是单位球时，极值函数是存在的. 之后在[9]中，Struwe 证明了当Ω接近于单位球时，极值函数存在.在[10]中，Flucher 将其推广到二维平面中的任意区域Ω.在[11]中，Lin 证明了高维情形下的存在性. 关于 (1.1)式的研究，一般从有界区域推广到无界区域，从低维情形推广到高维情形. 在[12]中， V.H. Nguyen 研究了对数加权奇异型的 Trudinger-Moser 不等式，证明了

$$\sup_{u\in W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega_\beta),\|u\|_{\omega_\beta}\leq 1}\int_B\exp(\alpha_{\beta,n}|u|^{n/((n-1)(1-\beta))})dx. \tag{1.12}$$

的极值函数存在性，这里$\alpha_{\beta,n}=n\left((1-\beta)\omega_{n-1}^{1/(n-1)}\right)^{1/(1-\beta)}$.

1.5 与 Trudinger-Moser 不等式相关的应用

Trudinger-Moser 不等式在偏微分方程解的存在性问题、能量估计以及非线性分析中有着广泛的应用.

S.Aouaoui, J.Rahma 在[13]中利用 Trudinger-Moser 不等式得到了奇异椭圆方程

$$-div\left(\omega(x)|\nabla u|^{n-2}\nabla u\right)+|u|^{n-2}u=\frac{f(x,u)}{|x|^\sigma}+\varepsilon h,$$

至少存在两个解，其中$\omega(x)=\begin{cases}\left(\log\left(\frac{e}{|x|}\right)\right)^{\beta(n-1)},|x|<1\\ \chi(|x|),|x|\geq 1\end{cases}$，$0<\beta<1$，$\chi(1)=1,\chi(t)>0$.

更多关于 Trudinger-Moser 不等式的应用可以查阅相应的文献[23-33].

1.6 主要内容及成果

第二部分给出了一些重要的不等式，以及径向引理，集中紧性原理等预备知识；第三部分是证明部分，分为次临界情形与临界情形；第四部分是总结与展望.

主要结论：

令

$$MT(n,\alpha,\beta,\sigma)=\sup_{u\in W_{0,rad}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right),\|u\|_{\omega_\beta}\le 1}\int_B\frac{\exp(\alpha|u|^{n/((n-1)(1-\beta))})}{|x|^{\sigma}}dx, \tag{1.13}$$

则存在 $\beta_0\in(0,1)$，当 $0\le\beta<\beta_0$ 时，$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)$ 的极值函数存在.

第2章 预备知识

2.1 重要不等式

（1）Hölder **不等式**[16]

若函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $p,q>0,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.1}$$

（2）Young **不等式**[16]

对于任意的 $a,b,\varepsilon \ge 0$，$1<p,q<\infty$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$ab \le \varepsilon \frac{a^p}{p} + \varepsilon^{-\frac{q}{p}} \frac{b^q}{q}. \tag{2.2}$$

2.2 重要引理

引理 1.Vitali 收敛定理 设 $\mu(E)<\infty$，$p>1$，函数列 $f_k(x)\in L^p(E)$ 且 $f_k(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$，则有

（1） $f\in L^p(E),$

（2） $\lim\limits_{k\to\infty}\int |f_k(x)|^p d\mu(x)=\int |f|^p d\mu(x).$

证明：首先，我们来证明 $f\in L^p$.

根据 Chebyshev 不等式，对于任意 $\lambda>0$，有：

$$\mu(\{x:|f(x)|\ge\lambda\}) \le \frac{1}{\lambda^p}\int |f(x)|^p\, d\mu(x),$$

将 λ 取为 $k\| f_k - f\|_{L^p}$，则由测度收敛和 Chebyshev 不等式得：

$$\mu(\{x:|f(x)|\ge k\| f_k - f\|_{L^p}\}) \le \frac{1}{(k\| f_k - f\|_{L_p})^p}\int |f(x)|^p d\mu(x) \le \frac{1}{k^p\| f_k - f\|_{L_p}^p}\| f\|_{L^p}^p,$$

因此，

$$\lim_{k\to\infty}\mu(\{x:|f(x)|\ge k\| f_k - f\|_{L^p}\})=0,$$

由此我们可以得到：

$$\|f\|_{L^p}^p=\int|f|^p d\mu=\int_{\{x:|f(x)|\geq\|f_k-f\|_{L^p}\}}|f|^p d\mu+\int_{\{x:|f(x)|<\|f_k-f\|_{L^p}\}}|f|^p d\mu$$
$$\leq\|f_k\|_{L^p}^p+\mu(\{x:|f(x)|<\|f_k-f\|_{L^p}\})\|f_k-f\|_{L^p}^p$$
$$\leq\|f_k\|_{L^p}^p+\|f_k-f\|_{L^p}^p,$$

注意到右侧的式子是与k无关的，所以我们可以令$k\to\infty$，得到：

$$\|f\|_{L^p}^p\leq 2\lim_{k\to\infty}\|f_k\|_{L^p}^p<\infty,$$

因此，$f\in L^p$.

接下来，我们来证明交换积分顺序是可行的. 根据 Fubini 定理，我们只需要证明：

$$\int|f(x)|^p d\mu(x)=\int(\lim_{k\to\infty}|f_k(x)|)^p d\mu(x)=\lim_{k\to\infty}\int|f_k(x)|^p d\mu(x),$$

由测度收敛的定义可知，对于任意$\varepsilon>0$，存在$A\in E$，使得$\mu(A)<\varepsilon$，且对于任意$x\in A^c$，有$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$. 因此，我们可以将积分分为两部分：

$$\left|\int|f(x)|^p d\mu(x)-\lim_{k\to\infty}\int|f_k(x)|^p d\mu(x)\right|$$
$$=\left|\int_A|f(x)|^p d\mu(x)+\int_{A^c}|f(x)|^p d\mu(x)-\int_{A^c}\lim_{k\to\infty}|f_k(x)|^p d\mu(x)-\int_A\lim_{k\to\infty}|f_k(x)|^p d\mu(x)\right|$$
$$\leq\left|\int_{A^c}|f(x)|^p d\mu(x)-\int_{A^c}\lim_{k\to\infty}|f_k(x)|^p d\mu(x)\right|+\left|\int_A\lim_{k\to\infty}|f_k(x)|^p d\mu(x)-\int_{A^c}\lim_{k\to\infty}|f_k(x)|^p d\mu(x)\right|$$
$$+\left|\int_A|f(x)|^p d\mu(x)-\int_A\lim_{k\to\infty}|f_k(x)|^p d\mu(x)\right|,$$

对于第一个绝对值，由于$|f(x)|^p$是可积函数，我们可以使用 Lebesgue 控制收敛定理得：

$$\left|\int_{A^c}|f(x)|^p d\mu(x)-\int_{A^c}\lim_{k\to\infty}|f_k(x)|^p d\mu(x)\right|<\varepsilon\|f_k\|_{L^p}^p,$$

对于第二个绝对值，由于f_k是可测函数，我们可以使用测度收敛的定义得：

$$\left|\int_A\lim_{k\to\infty}|f_k(x)|^p d\mu(x)-\int_{A^c}\lim_{k\to\infty}|f_k(x)|^p d\mu(x)\right|\leq\mu(A)\lim_{k\to\infty}\|f_k\|_{L^p}^p<\varepsilon\|f_k\|_{L^p}^p,$$

对于第三个绝对值，由于f_k依测度收敛于f，我们也可以使用 Lebesgue 控制收敛定理得：

$$\left|\int_A|f(x)|^p d\mu(x)-\int_A\lim_{k\to\infty}|f_k(x)|^p d\mu(x)\right|\leq\lim_{k\to\infty}\int_A|f_k(x)-f(x)|^p d\mu(x)<\varepsilon\|f_k\|_{L^p}^p,$$

因此，我们证明了交换积分顺序是可行的，即：

$$\int|f(x)|^p d\mu(x)=\int(\lim_{k\to\infty}|f_k(x)|)^p d\mu(x)=\lim_{k\to\infty}\int|f_k(x)|^p d\mu(x).$$

证毕.

引理 2.法图（Fatou）引理[16]

设$\{f_n\}$是非负可测函数空间中的序列，则

$$\int \liminf f_n dx \le \liminf \int f_n dx.$$

引理 3.Lebesgue 控制收敛定理[16]

（1）$\{f_n\}$是可测集E上的可测函数列,

（2） $f_n(x) \le F(x)$ a. e. 于E，$n=1,2,\cdots$，且$F(x)$在E上可积分（称$\{f_n\}$为$F(x)$所控制，而$F(x)$叫控制函数），

（3） $f_n(x)$依测度收敛于$f(x)$.

则$f(x)$在E上可积分且$\lim_n \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$.

引理 4[12]**.**对于$W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega_\beta)$里的每一个函数$u$，对于任意的$0<r\le 1$，有

$$|u(r)| \le \left(\frac{n}{\alpha_{\beta,n}}\right)^{((n-1)(1-\beta))/n} \left(\int_{B\setminus B_r} |\nabla u(x)|^n \omega_\beta dx\right)^{1/n} (1-\log r)^{((n-1)(1-\beta))/n} \tag{2.3}$$

证明:由$u(1)=0$，运用 Hölder 不等式得：

$$\begin{aligned}
|u(r)| &\le \int_r^1 |\nabla u(x)| \omega_\beta^{\frac{1}{n}} x^{\frac{n-1}{n}} \omega_\beta^{-\frac{1}{n}} x^{\frac{1-n}{n}} dx \\
&\le \left(\int_r^1 |\nabla u(x)|^n \omega_\beta x^{n-1} dx\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_r^1 \omega_\beta^{-\frac{1}{n-1}} x^{-1} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&= \omega_{n-1}^{-\frac{1}{n}} \left(\omega_{n-1}\int_r^1 |\nabla u(x)|^n \omega_\beta x^{n-1} dx\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_r^1 \frac{dx}{x(1-\log x)^\beta} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&= (1-\beta)^{-\frac{n-1}{n}} \left(\omega_{n-1}^{-\frac{1}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_{B\setminus B_r} |\nabla u(x)|^n \omega_\beta dx\right)^{\frac{1}{n}} \left[(1-\log r)^{1-\beta} - 1\right]^{\frac{n-1}{n}} \\
&\le \left(\frac{n}{\alpha_{\beta,n}}\right)^{\frac{(n-1)(1-\beta)}{n}} \left(\int_{B\setminus B_r} |\nabla u(x)|^n \omega_\beta dx\right)^{\frac{1}{n}} (1-\log r)^{\frac{(n-1)(1-\beta)}{n}}.
\end{aligned}$$

引理 5.设$\{u_j\}$是空间$W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega_\beta)$中的序列，满足条件$\|u_j\|_{\omega_\beta}=1$，$u_j$弱收敛于$u_0$，则对任意的$p<p(u_0)=\left(1-\|u_0\|_{\omega_0}^n\right)^{-1/((n-1)(1-\beta))}$，有

$$\limsup_{j\to\infty} \int_B \frac{\exp(p\alpha_{\beta,n,\sigma}|u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma} dx < +\infty$$

证明：分两步进行：

（1） 当$u_0 \equiv 0$时，$p<1$，$p\alpha_{\beta,n,\sigma} < \alpha_{\beta,n,\sigma}$，由(1.8)式知结论成立，即

$$\limsup_{j\to\infty}\int_B \frac{\exp\left(p\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{\left|x\right|^{\sigma}}dx<+\infty.$$

（2） 当$u_0\neq 0$时，取 Hölder 不等式中的$p=\dfrac{n(1+\varepsilon)}{n-\sigma},q=\dfrac{n(1+\varepsilon)}{n\varepsilon+\sigma}$，这里$\varepsilon$是充分小的正数，则

$$\int_B \frac{\exp\left(p\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{|x|^{\sigma}}dx=\int_B \exp\left(p\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)\cdot\frac{1}{\left|x\right|^{\sigma}}dx$$

$$\leq\left(\int_B \exp\left(p\left(1+\varepsilon\right)\alpha_{\beta,n}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)dx\right)^{\frac{n-\sigma}{n(1+\varepsilon)}}\left(\int_B\frac{1}{|x|^{\sigma\frac{n(1+\varepsilon)}{n\varepsilon+\sigma}}}dx\right)^{\frac{n\varepsilon+\sigma}{n(1+\varepsilon)}}.$$

一方面，$\left(\int_B \exp\left(p\left(1+\varepsilon\right)\alpha_{\beta,n}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)dx\right)^{\frac{n-\sigma}{n(1+\varepsilon)}}<\int_B \exp\left(p\left(1+\varepsilon\right)\alpha_{\beta,n}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)dx$，

由[12]与实数的完备性定理，存在$p(1+\varepsilon)$，使得$p<p(1+\varepsilon)<p\left(u_0\right)=\left(1-\left\|u_0\right\|_{\omega_0}^{n}\right)^{-1/((n-1)(1-\beta))}$，

于是$\left(\int_B \exp\left(p\left(1+\varepsilon\right)\alpha_{\beta,n}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)dx\right)^{\frac{n-\sigma}{n(1+\varepsilon)}}<+\infty$.

另一方面，由$\sigma\in[0,n)$，则$\dfrac{\sigma\varepsilon}{1+\varepsilon}<\dfrac{n\varepsilon}{1+\varepsilon}$，故$\sigma-\dfrac{\sigma}{1+\varepsilon}<\dfrac{n\varepsilon}{1+\varepsilon}$，推出$\sigma\dfrac{n\left(1+\varepsilon\right)}{n\varepsilon+\sigma}<n$，那么$\int_B\dfrac{1}{|x|^{\sigma\frac{n(1+\varepsilon)}{n\varepsilon+\sigma}}}dx$收敛，即$\left(\int_B\dfrac{1}{|x|^{\sigma\frac{n(1+\varepsilon)}{n\varepsilon+\sigma}}}dx\right)^{\frac{n\varepsilon+\sigma}{n(1+\varepsilon)}}<+\infty$.

综上所述：

$$\left(\int_B \exp\left(p\left(1+\varepsilon\right)\alpha_{\beta,n}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)dx\right)^{\frac{n-\sigma}{n(1+\varepsilon)}}\left(\int_B\frac{1}{|x|^{\sigma\frac{n(1+\varepsilon)}{n\varepsilon+\sigma}}}dx\right)^{\frac{n\varepsilon+\sigma}{n(1+\varepsilon)}}<+\infty,$$

于是

$$\limsup_{j\to\infty}\int_B \frac{\exp\left(p\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)}{\left|x\right|^{\sigma}}dx<+\infty.$$

引理 6[12]**.**对于任意的$u\in W_{0,rad}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right)$，任意的$0\le\tilde{\beta}<\beta$，令

$$v(x)=\left(\frac{\alpha_{\beta,n,\sigma}}{\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}}\right)^{((n-1)(1-\tilde{\beta}))/n}u(x)\left|u(x)\right|^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}} \tag{2.4}$$

则当$\|u\|_{\omega_\beta}\le 1$时，有$\|v\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}\le 1$.

证明：根据定义

$$\begin{aligned}\nabla v(x)&=\left(\frac{\alpha_{\beta,n,\sigma}}{\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}}\right)^{\frac{(n-1)(1-\tilde{\beta})}{n}}\left(\nabla u(x)\left|u(x)\right|^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}}+\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}u^2(x)\left|u(x)\right|^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}-2}\nabla u(x)\right)\\&=\left(\frac{\alpha_{\beta,n,\sigma}}{\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}}\right)^{\frac{(n-1)(1-\tilde{\beta})}{n}}\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}\nabla u(x)\left|u(x)\right|^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}},\end{aligned}$$

由引理 4 得

$$\begin{aligned}\left|\nabla v\left(x\right)\right|^n&=\left(\frac{\alpha_{\beta,n,\sigma}}{\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}}\right)^{(n-1)(1-\tilde{\beta})}\left(\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}\right)^n\left|\nabla u(x)\right|^n\left|u\left(x\right)\right|^{\frac{n(\beta-\tilde{\beta})}{1-\beta}}\\&\le\left|\nabla u(x)\right|^n\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}\frac{\omega_\beta(x)}{\omega_{\tilde{\beta}}(x)}\left(\int_{B\setminus B_{|x|}}\left|\nabla u(y)\right|^n\omega_{\tilde{\beta}}(y)dy\right)^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\|v(x)\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}^n&\le\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}\omega_{n-1}^{\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\int_0^1\left|u'(s)\right|^n\omega_\beta(s)s^{n-1}\cdot\left(\int_0^1\left|u'(t)\right|^n\omega_\beta(t)t^{n-1}dt\right)^{\frac{\beta-\tilde{\beta}}{1-\beta}}ds\\&=-\omega_{n-1}^{\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\int_0^1\frac{d}{ds}\left[\left(\int_s^1\left|u'(t)\right|^n\omega_\beta(t)t^{n-1}dt\right)^{\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\right]ds\\&=\left(\int_B|\nabla u(x)|^n\ \omega_\beta(x)dx\right)^{\frac{1-\tilde{\beta}}{1-\beta}}\le 1.\end{aligned}$$

第3章 极值函数的存在性

对于 (1.1)式的极值函数存在性问题，已经有了很多的结果. 在[8]中 Carleson 和 Chang 证明了Ω是单位球时，极值函数是存在的.之后在[9]中，Struwe 证明了当Ω的测度接近于单位球时，极值函数存在.在[10]中，Flucher 将其推广到二维平面中的任意区域Ω.在[11]中，Lin 证明了高维情形下的存在性. 对于 (1.1)式的研究，一般从有界区域推广到无界区域，从低维情形推广到高维情形. 后来， V.H. Nguyen 在[12]中得到了，存在$\beta_0 \in (0,1)$，当$0 \le \beta < \beta_0$时

$$\sup_{u\in W_{0,\mathrm{rad}}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right),\|u\|_{\omega_\beta}\le 1}\int_B \exp(\alpha|u|^{n/((n-1)(1-\beta))})dx,$$

的极值函数存在，这里$\alpha \le \alpha_{\beta,n} = n\left((1-\beta)\omega_{n-1}^{1/(n-1)}\right)^{1/(1-\beta)}$.

在本文中，我们关注下式的极值函数存在性问题

$$\sup_{u\in W_{0,\mathrm{rad}}^{1,n}(B,\omega_\beta),\|u\|_{\omega_\beta}\le 1}\int_B \frac{\exp(\alpha|u|^{n/((n-1)(1-\beta))})}{|x|^\sigma}dx < +\infty,$$

类似于[12]中的讨论方法，主要分为次临界情形与临界情形：

3.1 次临界情形

在次临界情形$\alpha < \alpha_{\beta,n,\sigma}$时，由(1.8)知(1.13)在$B$上的积分有一致的界，因此取极大化序列$\{u_j\}(j=1,2,\cdots)$，且$u_j \to u, j\to\infty$，(1.13)依然成立. 所以通过 Vitali 收敛定理，该极大化序列的极限u就是(1.13)的极值函数，即

$$\begin{aligned} MT(n,\alpha,\beta,\sigma) &= \lim_{j\to\infty}\int_B \frac{\exp(\alpha|u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx \\ &= \int_B \lim_{j\to\infty}\frac{\exp(\alpha|u_j|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx \\ &= \int_B \frac{\exp(\alpha|u|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx. \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.2 临界情形

在临界情形$\alpha = \alpha_{\beta,n,\sigma}$时，利用[8,14]中的讨论方法，定义泛函

$$J_{\beta,n,\sigma}(u)=\int_B \frac{\exp\left(\alpha_{\beta,n,\sigma}\,|u|^{n/((n-1)(1-\beta))}\right)}{|x|^{\sigma}}dx. \tag{3.2}$$

定义泛函的集中水平为

$$J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)=\sup\left\{\lim_{j\to\infty}\sup J_{\beta,n,\sigma}\left(u_j\right)\middle|\left\|u_j\right\|_{\omega_\beta}=1,u_j\to 0\right\}. \tag{3.3}$$

由[15]知

$$J^{\delta}_{0,n,\sigma}(0)\le \frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\left(1+e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}}\right).$$

这一结论对极值函数的存在性至关重要.

定理 1. 对于任意的 $\tilde{\beta}\le\beta$，有 $J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0)$ 成立.

证明：由(3.3)及已知事实得：

$$\int_B \frac{1}{|x|^{\sigma}}dx=\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\le \lim_{j\to\infty}\sup\int_B \frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx\le J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0), \tag{3.4}$$

对于 $\tilde{\beta}$，(3.4)式依然成立.

下证：对于任意的 $\tilde{\beta}\le\beta$，有 $J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0)$ 成立. 设 $\left\{u_j\right\}$ 是 $W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_\beta\right)$ 里的单位集中序列，取子列使得 $\lim_{j\to\infty}J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}\left(u_j\right)$ 存在. $\left\{v_j\right\}$ 由引理 6 所定义，因此，

$v_j\in W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_{\tilde{\beta}}\right)$，且 $\left\|v_j\right\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}\le 1$，$\left\{v_j\right\}$ 有界. 假设 $v_j\to v$，由于 $v_j\to 0$，在 $B\setminus B_a$，这里 $a\in\left(0,1\right)$. 由弱极限的唯一性得：$v\equiv 0$.

情形一： 当 $\lim_{j\to\infty}\sup\left\|v_j\right\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}<1$ 时, 存在 $t\in(0,1)$，以及存在 N，当 $j>N$ 时，有

$\left\|v_j\right\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}\le t<1$. 因此，由引理 5 与 Hölder 不等式知，存在 $p>1$，使得 $\dfrac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left|v_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{\left|x\right|^{\sigma}}$

在 L^p 中有界，所以

$$\lim_{j\to\infty}\int_B \frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx=\lim_{j\to\infty}\int_B \frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left|v_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx \tag{3.5}$$
$$=\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0),$$

这样就得到了，对于任意的 $\tilde{\beta}\le\beta$，有 $J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0)$ 成立.

情形二： 当 $\limsup\limits_{j\to\infty}\left\|v_j\right\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}=1$时，可以通过取子列，使得 $\lim\limits_{j\to\infty}\left\|v_j\right\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}=1$. 定义 $I_j=\frac{v_j}{\left\|v_j\right\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}}$, $\left\{I_j\right\}$ 的性质有：在 $W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_{\tilde{\beta}}\right)$ 里有 $I_j\to 0,\left|v_j\right|\le I_j$. 如果 $\left\{I_j\right\}$ 是单位集中序列，那么

$$\lim_{j\to\infty}J_{\beta,n,\sigma}\left(u_j\right)=\lim_{j\to\infty}J_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left(v_j\right)\le\limsup_{j\to\infty}{}_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left(I_j\right)\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0), \tag{3.6}$$

由 (3.6)式知，对于任意的 $\tilde{\beta}\le\beta$，有 $J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0)$ 成立.

如果 $\left\{I_j\right\}$ 非单位集中序列，存在 $a,t\in(0,1)$，以及 N，当 $j>N$ 时，$\int_{B_a}\left|I_j\right|^n\omega_{\tilde{\beta}}(x)dx\le t$. 定义：

$$\tilde{I}_j(x)=\begin{cases}I_j(x)-I_j(a), & |x|\le a,\\ 0, & a<|x|<1,\end{cases} \tag{3.7}$$

$\tilde{I}_j(x)$ 的性质有：$\tilde{I}_j(x)\in W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_{\tilde{\beta}}\right)$，且当 $j>N$ 时有,$\left\|\tilde{I}_j\right\|^n_{\omega_{\tilde{\beta}}}\le t<1$. 选择足够小的 ε，使得 $(1+\varepsilon)t^{\frac{1}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}<1$，结合 Young 不等式以及 $\tilde{I}_j(x)$ 的定义有

$$\left|I_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}\le C(n,\tilde{\beta},\varepsilon)\left|I_j(a)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}+(1+\varepsilon)\left|\tilde{I}_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}. \tag{3.8}$$

其中，$C(n,\tilde{\beta},\varepsilon)=\left(1-(1+\varepsilon)^{-\frac{(n-1)(1-\tilde{\beta})}{n\tilde{\beta}+1-\tilde{\beta}}}\right)^{-\frac{n\tilde{\beta}+1-\tilde{\beta}}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}}$，选取适当的 t,ε 以及权，使得

$$\frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}(1+\varepsilon)\left|\tilde{I}_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{|x|^\sigma}$$

在 $L^p\left(p>1\right)$ 中有界. 在 B_a 里，由于 $I_j\left(a\right)\to 0, j\to\infty$，

于是

$$\frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left|\tilde{I}_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{\left|x\right|^{\sigma}}$$

在 $L^p\left(B_a\right)(p>1)$ 中有界.

进而，一方面，在 B_a 上，我们得到

$$\lim_{j\to\infty}\int_{B_a}\frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left|I_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{|x|^{\sigma}}dx=\int_{B_a}\frac{1}{|x|^{\sigma}}dx=\frac{t-\sigma}{n-\sigma}\omega_{n-1}. \tag{3.9}$$

另一方面，在 $B\setminus B_a$ 上，由引理 5 和引理 3 有

$$\lim_{j\to\infty}\int_{B\setminus B_a}\frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left|I_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{|x|^{\sigma}}dx=\frac{1}{n-\sigma}\omega_{n-1}-\frac{t-\sigma}{n-\sigma}\omega_{n-1}. \tag{3.10}$$

综上所述，结合(3.9)式与(3.10)式得

$$\lim_{j\to\infty}\int_{B}\frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left|I_j(x)\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{|x|^{\sigma}}dx=\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}. \tag{3.11}$$

所以

$$\lim_{j\to\infty}J_{\beta,n,\sigma}\left(u_j\right)=\lim_{j\to\infty}J_{\tilde{\beta},n,\sigma}\left(v_j\right)\le\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0).$$

至此，对于任意的 $\tilde{\beta}\le\beta$,有 $J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0)\le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0)$ 成立.

定理 2. $\lim\limits_{\beta\to 0}MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)=MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right)$.

证明：假设 $u\in W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_\beta\right)$,满足 $\|u\|_{\omega_\beta}\le 1$，$v$ 由引理 6 所定义, 对于任意的 $\tilde{\beta}\le\beta$，有 $\|v\|_{\omega_{\tilde{\beta}}}\le 1$，利用 $MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)$ 的定义，可知

$$\int_B\frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}|u|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^{\sigma}}dx=\int_B\frac{\exp(\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma}|v|^{\frac{n}{(n-1)(1-\tilde{\beta})}})}{|x|^{\sigma}}dx\le MT\left(n,\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma},\tilde{\beta},\sigma\right), \tag{3.12}$$

所以, $MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\le MT\left(n,\alpha_{\tilde{\beta},n,\sigma},\tilde{\beta},\sigma\right)$ 成立，这里 $0\le\tilde{\beta}\le\beta<1$. 故而 $MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)$ 关于 β 单调递减，于是

$$\limsup_{\beta\to 0} MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\le MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right). \tag{3.13}$$

下面证明：$\liminf_{\beta\to 0} MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\ge MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right)$，由于 $MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right)$ 极值函数存在，因此存在 $u_0\in C^1(B)\bigcap W_{0,rad}^{1,n}(B)$,且 u_0 满足 $\left\|\nabla u_0\right\|_n=1$. 于是

$$\lim_{\beta\to 0}\int_B\left|\nabla u_0\right|^n\omega_\beta(x)dx=\int_B\left|\nabla u_0\right|^n dx=1, \tag{3.14}$$

对于任意 $\varepsilon>0$，存在 β_ε，当 $\beta\le\beta_\varepsilon$ 时,有

$$\left\|u_0\right\|_{\omega_\beta}\le 1+\varepsilon.$$

于是

$$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\ge\int_B\frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}(\frac{\left|u_0\right|}{1+\varepsilon})^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx. \tag{3.15}$$

当 $\beta\to 0$ 时，由法图引理(引理 2)得：

$$\liminf_{\beta\to 0} MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\ge\int_B\frac{\exp(\alpha_{0,n,\sigma}(\frac{\left|u_0\right|}{1+\varepsilon})^{\frac{n}{n-1}})}{|x|^\sigma}dx, \tag{3.16}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，再一次由法图引理(引理 2)得：

$$\liminf_{\beta\to 0} MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)\ge\int_B\frac{\exp(\alpha_{0,n,\sigma}\left|u_0\right|^{\frac{n}{n-1}})}{|x|^\sigma}dx=MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right). \tag{3.17}$$

综上所述：

$$\lim_{\beta\to 0} MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)=MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right). \tag{3.18}$$

定理 3. 存在 $\beta_0\in(0,1)$，当 $0\le\beta<\beta_0$ 时，$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)$ 的极值函数存在.

证明：由 (3.18)式与已知的结论

$$\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\left(1+e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}}\right)\le J_{0,n,\sigma}^{\delta}(0)<MT\left(n,\alpha_{0,n,\sigma},0,\sigma\right), \tag{3.19}$$

结合(3.19)式，定理 1 与定理 2 可得：对于任意的$\beta\in[0,\beta_0)$，有

$$J_{\beta,n,\sigma}^{\delta}(0)\le J_{0,n,\sigma}^{\delta}(0)<MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right). \tag{3.20}$$

下面取$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)$的极大化序列，由于范数有界，因此在$W_{0,rad}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right)$里，$u_j\to u_0$. 且对某些$u_0\in W_{0,rad}^{1,n}\left(B,\omega_\beta\right)$，取$a\in(0,1)$，在$B\setminus B_a$里，$u_j\to u_0$. 若$u_0\equiv 0$，且$\{u_j\}$是单位集中序列，那么$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)=\lim\limits_{j\to\infty}J_{\beta,n,\sigma}\left(u_j\right)\le J_{\beta,n,\sigma}^{\delta}(0)$，这与 (3.20)式矛盾. 因此$\{u_j\}$非单位集中序列. 若存在$a,t\in(0,1)$，存在$N$，当$n\ge N$时,有$\int_{B_a}\left|\nabla u_j\right|^n\omega_\beta(x)dx\le t$. 此时

$$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)=\lim_{j\to\infty}J_{\beta,n,\sigma}\left(u_j\right)=\frac{\omega_{n-1}}{n-\sigma}\le J_{\beta,n,\sigma}^{\delta}(0). \tag{3.21}$$

这与 (3.20)式矛盾. 所以$u_0\ne 0$，由引理 5 与 Hölder 不等式知$\dfrac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}$在$L^p\left(p>1\right)$中有界，故有

$$\begin{aligned}MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)&=\lim_{j\to\infty}\int_B\frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_j\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx\\&=\int_B\frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_0\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx,\end{aligned} \tag{3.22}$$

这种情况下，我们发现$\|u_0\|_{\omega_\beta}\le 1$. 当$\|u_0\|_{\omega_\beta}<1$时，

$$\begin{aligned}MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)&\ge\int_B\frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}(\frac{|u_0|}{\|u_0\|_{\omega_\beta}})^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx\\&>\int_B\frac{\exp(\alpha_{\beta,n,\sigma}\left|u_0\right|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}})}{|x|^\sigma}dx\\&=MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right),\end{aligned} \tag{3.23}$$

这是一个矛盾.

综上所述，$\left\|u_0\right\|_{\omega_\beta}=1$，且$u_0$就是$MT\left(n,\alpha_{\beta,n,\sigma},\beta,\sigma\right)$的极值函数.

第4章 总结与展望

本文研究了一类对数加权下的奇异型 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在性问题. 证明主要分次临界情形与临界情形两部分证明：次临界情形，利用积分在单位球上的一致有界性，通过取极大化序列，结合 Vitali 收敛定理，证明极值函数存在；临界情形，构造泛函集中水平，排除极大化序列的集中现象，运用相应的集中紧性原理提升可积性，进而证明极值函数的存在性.

在前面研究的基础上做展望：首先，考虑能否证明高阶情形下对数加权的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在性问题. 其次，能否适当的添加条件，使得参数的存在区间扩大. 最后，放眼未来，Trudinger-Moser 不等式的分支可以研究的更加广泛和深入，更加优美的结论还有待发现.

致　谢

四年的学习生涯即将结束，四年前，怀着对数学的兴趣踏入大学校园，这四年，始终以热烈的激情学习数学，不仅获得了专业知识，也通过参加竞赛等活动巩固所学的知识. 这四年，拼搏过，奋斗过，懊悔过，但最终坚持下来了. 数学需要清晰的直觉和严格的演绎，学习数学，不是记了多少理论，做了多少题，而是提升境界，改变对一些问题的看法. 这对进一步的学习大有益处. 在即将毕业之际，我要向在生活上支持我的父母，在学习上支持我的老师，致以最诚挚的感谢.

首先，感谢我的论文指导老师朱茂春副教授，在论文选题方面，逻辑推导方面，直至定稿方面，都曾悉心的教导，这些都看在眼里，记在心里. 所以无论是他的学识，还是为人，都让我甚感钦佩，终将使我受益匪浅.

其次，感谢我的老师和同学，他们在我遇到学习中的问题时，耐心的教导我，让我提升了对学习数学的信心，丰富了我的大学生活，也锤炼了我的品格.

最后，感谢我的父母，他们在生活中，提供了物质上的需求，在学习中，当获得一点点成功时，鼓励我下次做的更好，当遇到失败时，他们鼓励我不要放弃，从他们身上，我学到了很多.

即将毕业之际，再一次感谢曾经帮助过我的老师，同学，父母，我们的未来都会更加美好！

参考文献：

[1] S. I. Pohozhaev. The Sobolev embedding in the case $pl = n$ [J]. Proc. Tech. Sci .Conference on Advances of Scientific Research 1964-1965. Mathematics Section, 1965: 158-170.

[2] N. Trudinger. On Imbeddings into Orlicz Spaces and Some Applications [J]. Jour. Math. Mech. 1967, 17(5): 473-483.

[3] J. Moser. A Sharp Form of an Inequality by N.Trudinger [J]. Indi. Univ. Math. Jour. 1971, 20(11): 1077-1092.

[4] D. R. Adams. A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives [J]. Anna. Math. 1988,128(2): 385-398.

[5] S. Adachi, K. Tanaka. Trudinger type inequalities in $\mathbb{R}^N$ and their best exponents [J]. Proc. Amer. Math. Soc. 2000, 128: 2051-2057.

[6] B. Ruf. A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in $\mathbb{R}^2$ [J]. Jour. Func. Anal. 2005, 219(2): 340-367.

[7] Y. Li, B. Ruf. A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in $\mathbb{R}^n$ [J]. Indi. Univ. Math. Jour. 2008, 57(1): 441-480.

[8] A. Lennart, S-Y, A. Chang. On the existence of an extremal function for an inequality of Moser [J]. Bull. Scie. Math. 110.2 (1986): 113-127.

[9] M. Struwe. Critical points of embeddings of H01, n into Orlicz spaces [J]. Anna. Anal. nonl. Else. Mass. 1988, 5(5): 425-464.

[10] M. Flucher. Extremal functions for the Trudinger-Moser inequality in 2 dimension [J]. Comm .Math. Helv.67(1992), no.3,471-497.

[11] K. Lin. Extremal functions for Moser's inequality [J].Trans Proc. Amer. Math. Soc. 348 (1996), no.7,2663-2671.

[12] V. Nguyen. Remarks on the Moser-Trudinger type inequality with logarithmic weights in dimension N [J].Proc. Amer. Math. Soc. 147.12(2019):5183-5193.

[13] S.Aouaoui, J.Rahma. A new Singular Trudinger-Moser Type Inequality with Logarithmic Weights and Applications [J].Adva. Nonl. Stud. 20.1(2020):113-139.

[14] P.Roy. Extremal function for Moser-Trudinger type inequality with logarithmic weight [J].Nonliner Anal.135(2016),194-204.

[15] X.M. Wang. Singular Supercritical Trudinger-Moser Inequalities and the Existence of Extremals [J]. Acta Math. Sini. English Series 36.8 (2020): 873-888.

[16] 程其襄,张奠宙等.实变函数与泛函分析基础[M].4 版.北京:高等教育出版社.2019.06.

[17] F. S. B. Albuquerque. Sharp constant and extremal function for weighted Trudinger-Moser type inequalities in $\mathbb{R}^2$ [J]. Math. Anal. Appl. 421 (2015), no. 1, 963-970.

[18] F. S. B. Albuquerque, C. O. Alves, E. S. Medeiros. Nonlinear Schrödinger equation with unbounded or decaying radial potentials involving exponential critical growth in $\mathbb{R}^2$ [J]. Math. Anal. Appl. 409 (2014), no. 2, 1021-1031.

[19] F. S. B. Albuquerque, S. Aouaoui. A weighted Trudinger-Moser type inequality and its applications to quasilinear elliptic problems with critical growth in the whole Euclidean space [J]. Topol. Methods Nonlinear Anal. 54 (2019), no. 1, 109-130.

[20] M. Calanchi. Some weighted inequalities of Trudinger-Moser type, in: Analysis and Topology in Nonlinear Differential Equations [J]. Progr.Nonl. Diff. Equa. Appl. 85, Birkhäuser/Springer, Cham (2014), 163-174.

[21] M. Calanchi, E. Massa, B. Ruf. Weighted Trudinger-Moser inequalities and associated Liouville type equations [J]. Proc. Amer. Math. Soc. 146 (2018), no. 12, 5243-5256.

[22] M. F. Furtado, E. S. Medeiros, U. B. Severo. A Trudinger-Moser inequality in a weighted Sobolev space and applications [J]. Math. Nachr. 287 (2014), no. 11-12, 1255-1273.

[23] Adimurthi and K. Sandeep. A singular Moser-Trudinger embedding and its applica-tions [J]. Nonl. Diff. Equa. Appl. 13 (2007), no. 5-6, 585-603

[24] Adimurthi, C. Tintarev. On compactness in the Trudinger-Moser inequality [J]. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 13 (2014), no. 2, 399-416. MR3235520

[25] G. Wang, D.Ye. A Hardy-Moser-Trudinger inequality [J]. Adv. Math. 230 (2012), no. 1,294-320

[26] M. Calanchi, B.Ruf. On Trudinger-Moser type inequalities with log-arithmic weights [J]. Differential Equations 258 (2015), no. 6, 1967-1989

[27] M. Calanchi, B.Ruf. Trudinger-Moser type inequalities with logarithmic weights in dimension N [J]. Nonlinear Anal. 121 (2015), 403-411

[28] G. de Figueiredo, J.M. do Ó, B.Ruf. On an inequality by N. Trudinger and J. Moser and related elliptic equations [J]. Comm. Pure Appl. Math. 55 (2002), no. 2, 135-152

[29] N. Lam, G. Lu. A new approach to sharp Moser-Trudinger and Adams type inequalities: a rearrangement-free argument [J]. Differential Equations 255 (2013), no. 3, 298-325

[30] G. Lu, H. Tang. Best constants for Moser-Trudinger inequalities on high dimen-sional hyperbolic spaces [J]. Adv. Nonlinear Stud. 13 (2013), no. 4, 1035-1052

[31] A. Malchiodi, L. Martinazzi. Critical points of the Moser-Trudinger functional on a disk [J]. Eur. Math. Soc. (JEMS) 16 (2014), no. 5, 893-908

[32] G. ManciniK. Sandeep. Moser-Trudinger inequality on conformal discs [J]. Commun. Contemp. Math. 12 (2010), no. 6, 1055-1068

[33] G. Mancini, K. Sandeep, C. Tintarev. Trudinger-Moser inequality in the hyperbolic space H^N [J]. Adv. Nonl. Anal. 2 (2013), no. 3, 309-324

[34] P. L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 1[J]. Anna. Anal. Non. Liné, 1984, 1(2): 109-145.

[35] A.Kufner, L. E. Persson. Weighted inequalities of Hardy type[M]. RiverEdge, New Jersey: World Scientific. 2003.

[36] M. Calanchi, E. Terraneo. Non-radial Maximizers For Functionals With Exponential Non-linearity in $\mathbb{R}^2$ [J]. Adva. Nonl.Stud. 2005, 5(3): 337-350.