国外研究现状：

设 Ω 为 R^n 中的光滑有界区域, $W_0^{1,p}(\Omega)$ 表示 $C^\infty(\Omega)$ 在范数 $\| u \|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化空间。经典的 Sobolev 嵌入定理表示 $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega), \forall 1 \le p < n, 1 \le q \le np/(n-p)$, 但是当 $p = n$ 时, $W_0^{1,n}(\Omega)$ 不能嵌 入到 $L^\infty(\Omega)$ 中, 比如函数 $u(x) = \ln\ln\left(1 + \frac{1}{|x|}\right)$, 定义域是 $\Omega = B^0(0,1)$ 。 可以证明, $u(x) \in W_0^{1,n}(\Omega), u(x) \notin L^\infty(\Omega)$ 。后来, Trudinger-Moser 通过研究 $p = n$ 的情形, 得到了如下的经典的 Trudinger-Moser 不等式:

$$\sup_{u \in W_0^{1,n}(\Omega), \|\nabla u\|_n \le 1} \int_\Omega \exp\left(\alpha |u|^{n/(n-1)}\right) dx < +\infty$$

其中 $\alpha \le \alpha_n = n\omega_{n-1}^{1/(n-1)}, \omega_{n-1}$ 表示 n 维单位球面测度。对于上式的极值函数存在性问题, 已经有了很多的结果, 在 [1] 中 Carleson 和 Chang 证明了 Ω 是单位球时, 极值函数是存在的。之后在 [2] 中, Struwe 证明 了当 Ω 的测度接近于单位球时, 极值函数存在; 在 [3] 中, Flucher 将其推广到二维平面中的任意区域 Ω; 在 [4] 中, Lin 证明了高维情形下 的存在性。对于 (1) 式的推广, 一般从有界区域推广到无界区域, 从低维情形推广到高维情形。

Calanchi 和 Ruf 在[5]中研究了，在$\mathbb{R}^n$的单位开球$\mathcal{B}$上，定义的权重为对数型加权 Sobolev 范数的情况。事实上，他们考虑的子空间$W_{0,rad}^{1,n}(\mathcal{B}, w_1)$，可以定义为径向函数在空间$C_0^\infty(\mathcal{B})$和范数

$$\| u \|_{w_1}^n = \int_{\mathcal{B}} w_1(x) |\nabla u|^n dx$$

下的完备化空间，其中$w_1(x) = \left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{\beta(n-1)}$或者$w_1(x) = \left(\log\frac{e}{|x|}\right)^{\beta(n-1)}, \beta \ge 0, x \in \mathcal{B}$。Calanchi 和 Ruf 证明了以下结果。设$0 < \beta < 1$，那么，对于函数$u \in W_{0,rad}^{1,n}(\mathcal{B}, w_1)$，我们有

$$\int_{\mathcal{B}} e^{|u|^\gamma} dx < +\infty \Leftrightarrow \gamma \le \gamma_{n,\beta} = \frac{n}{(n-1)(1-\beta)} = \frac{n'}{1-\beta}.$$

进一步，

$$\sup\left\{\int_{\mathcal{B}} e^{\alpha |u|^{\gamma_{n,\beta}}} dx, \| u \|_{w_1} \le 1\right\} < +\infty \Leftrightarrow \alpha \le \alpha_{n,\beta} = n\left[\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}(1-\beta)\right]^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

显然，如果$\beta = 0$，我们就得到了经典的 Trudinger-Moser 不等式。其次，Calanchi 和 Ruf 考虑了$\beta = 1$和$w_1(x) = \left(\log\frac{e}{|x|}\right)^{n-1}, x \in \mathcal{B}$的极限情况。在这种情况下， 不同的权会对嵌入产生影响。事实上，在经典的 Trudinger-Moser 不等式中，最大增长函数$e^{|s|^{n/n-1}}$可以提升，因此现在允许双指数增长。

进而，研究了奇异型于对数加权的情形。在 [6] 中, $\beta \in [0,1), \omega_\beta(x) = (-\ln|x|)^{\beta(n-1)}$ 下, 加权的 Sobolev 空间表示 $C_0^1(B)$ 在范数 $\| u \|_{\omega_\beta} = \big(\int_\Omega$

$|\nabla u|^n \omega_\beta(x)dx)^{\frac{1}{n}}$ 完备化下得到的空间, 记为 $W_0^{1,n}(B,\omega_\beta)$ 。若空间中的函数是径向函数时, 记为 $W_{0,rad}^{1,n}(B,\omega_\beta)$ 。Van Hong Nguyen 得到了存在 $\beta_0 \in (0,1)$, 当 $0 \le \beta < \beta_0$ 时

$$\sup_{u\in W_{0,\text{ ad}}^{1,n}(B,\omega_\beta),\|u\|_{\omega_\beta}\le 1} \int_B \exp\left(\alpha|u|^{n/((n-1)(1-\beta))}\right)dx$$

的极值函数存在, 这里 $\alpha \le \alpha_{\beta,n} = n\left((1-\beta)\omega_{n-1}^{1/(n-1)}\right)^{1/(1-\beta)}$ 。

在本文中，我们将关注上式的极值函数存在性问题。

国内研究现状：

在[7]中，朱茂春,刘杰，研究了一维直线上的奇异型 Trudinger-Moser 不等式，利用分数次 Sobolev 空间上函数的 Green 表示公式,得到了一类奇异型 Trudinger-Moser 不等式。在此基础上，在[8]中，朱茂春,陈文欢继续研究了二维空间上一类各向异性对数加权径向 Sobolev 空间上的 Trudinger-Moser 不等式，他们通过建立一个重要的径向引理,并利用著名的 Leckband 泛函不等式得到了对数加权约束下的最佳 Trudinger-Moser 增长指标。后来，在[9]中，朱茂春,李栋梁，研究了全空间上与 Trudinger-Moser-Lorentz 不等式相关的集中紧性原理，利用函数的水平截断方法,将有界区域上与 Trudinger-Moser-Lorentz 不等式相关的集中紧性原理推广到了无界区域上。最近，在[10]中，刘宇航研究了加权 Sobolev 空间下的 Trudinger-Moser 不等式和 Lorentz-Sobolev 空间下的 Adams 不等式。

参考文献：

[1] Carleson, Lennart, and Sun-Yung A. Chang. "ON THE EXISTENCE OF AN EXTREMAL FUNCTION FOR AN INEQUALITY OF MOSER, J." Bulletin des Sciences Mathématiques 110.2 (1986): 113-127.

[2] Struwe M. Critical points of embeddings of H01, n into Orlicz s-paces[C]Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire. Elsevier Masson, 1988, 5(5): 425-464.

[3] Martin Flucher,Extremal functions for the Trudinger-Moser inequality in 2 dimensions,Comment.Math.Helv.67(1992),no.3,471-497.

[4] Kai-Ching Lin,Extremal functions for Moser's inequality Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996),no.7,2663-2671.

[5] M. Calanchi and B. Ruf, Trudinger-Moser type inequalities with logarithmic weights in dimension N, Nonlinear Anal. 121 (2015), 403–411.

[6] Nguyen,Van."Remarks on the Moser-Trudinger type inequality with log-arithmic weights in dimension N".Proceedings of the American Mathe-matical Society 147.12(2019):5183-5193.

[7]朱茂春,刘杰.一维直线上的奇异型 Trudinger-Moser 不等式[J].数学杂志,2021,41(03):219-226.DOI:10.13548/j.sxzz.2021.03.004.

[8]朱茂春,陈文欢.二维空间上对数加权各向异性范数约束下的 Trudinger-Moser 不等式（英文）[J].应用数学,2022,35(04):766-775.DOI:10.13642/j.cnki.42-1184/o1.2022.04.007.

[9]朱茂春,李栋梁.全空间上与 Trudinger-Moser-Lorentz 不等式相关的集中紧性原理[J].应用数学学报,2021,44(02):294-306.

[10]刘宇航. 几类 Trudinger-Moser 及 Adams 不等式的研究[D].江苏大学,2021.DOI:10.27170/d.cnki.gjsuu.2021.002402.

主要内容：

本文研究了单位球 B 上对数加权的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在性问题。这里的权是 $\omega_\beta(x)=\left|\ln\left(\frac{e}{|x|}\right)\right|^{\beta(n-1)}$，$\beta\in[0,1)$ 。证明将运用函数变换，集中紧性原理，径向引理，集中水平，Holder 不等式，Young 不等式以及 Lebesgue 控制收敛定理等方法，最终证明极值函数的存在性。最后得到了 $\exists\beta_0\in(0,1)$，对于 $\forall\beta\in[0,\beta_0)$，对数加权的奇异型的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在。