一类对数加权奇异型 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在性问题

郭永强

指导教师: 朱茂春

江苏大学数学科学学院

2023 年 06 月 04 日

目录

Sobolev 嵌入定理:

(1) $p < n$ 时,$W_0^{1,p}(\Omega)$ 嵌入到 $L^q(\Omega)$, 其中 $1 \leq q < p^* = \frac{np}{n-p}$.

(2) $p > n$ 时,$W_0^{1,p}(\Omega)$ 嵌入到 C^α,$\alpha = 1 - \frac{n}{p}$.

(3) $p = n$ 时,$W_0^{1,p}(\Omega)$ 嵌入到 $L^q, 0 < q < \infty, W_0^{1,p}(\Omega) \not\subset L^\infty(\Omega)$

Examples

对于 $p = n$ 时的反例, 如

$u(x) = \log\log(1 + \frac{1}{|x|}), u(x) \in W_0^{1,n}(\Omega), u(x) \notin L^\infty(\Omega)$.

Trudinger-Moser 不等式:

(1) 在 1967 年,Trudinger 利用幂级数展开证明了存在 $\alpha > 0$, 使得

选题背景 II

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\|\nabla u\|_n^n\le 1}\int_\Omega e^{\alpha u^{n/(n-1)}}dx \le C_n\,|\Omega|.$$

(2) 在 1971 年,Moser 利用对称重排方法得到了

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\|\nabla u\|_n^n\le 1}\int_\Omega e^{\alpha u^{n/(n-1)}}dx < \infty, \forall\alpha \le \alpha_n = n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$$

(3) 在 1988 年,Adams 得到高阶 Trudinger 型不等式, 并给出了最佳常数:

$$\sup_{u\in W_0^{m,p}(\Omega),\|\nabla^m u\|_p\le 1}\int_\Omega \exp(\beta|u|^{p'})dx \le c_0,$$

$$\beta \le \beta_0\,(m,n) = \frac{n}{\omega_{n-1}}\left[\frac{\pi^{n/2}2^m\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m+1}{2}\right)}\right]^{p'}, m \text{ 为奇数}.$$

$$\beta \le \beta_0\,(m,n) = \frac{n}{\omega_{n-1}}\left[\frac{\pi^{n/2}2^m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)}\right]^{p'}, m \text{ 为偶数}.$$

其中 $u \in C_0^m(\Omega)$, 且 $p = n/m, p' = p/(p-1)$. 但当 $\beta > \beta_0$ 时, 则存在满足上述条件的函数 u 使得 $\int_\Omega \exp\left(\beta|u|^{p'}\right) dx > c_0$.

(4) 在 2007 年, K.Sandeep 研究了带有奇异项的 Trudinger-Moser 不等式, 当 $\alpha \leq \alpha_n \left(1 - \frac{\beta}{n}\right), \alpha_n = n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}, \beta \in [0, n)$ 时, 存在常数 $C > 0$ 满足

$$\sup_{u \in W_0^{1,n}(\Omega), \int_\Omega |\nabla u|^n dx \leq 1} \int_\Omega \frac{\exp(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}})}{|x|^\beta} dx \leq C$$

当 $\beta = 0$ 时，就是经典的 Trudinger-Moser 不等式.

(5) 后来, Calanchi 和 Ruf 研究了对数加权范数约束下的 Trudinger-Moser 不等式, 当 $\alpha \leq \alpha_{\beta,n} = n\left((1-\beta)\omega_{n-1}^{1/(n-1)}\right)^{1/(1-\beta)}, \beta \in [0, 1)$ 时, 对于所有 $u \in W_{0,rad}^{1,n}(B, \omega_\beta)$, 满足

选题背景 IV

$$\sup_{u\in W^{1,n}_{0,rad}(B,\omega_\beta),\|u\|_{\omega_\beta}\le 1} \int_B \exp\left(\alpha|u|^{\frac{n}{(n-1)(1-\beta)}}\right)dx < \infty$$

这里 $W^{1,n}_{0,rad}(B,\omega_\beta)$ 表示径向加权 Sobolev 空间, 定义为:

$$W^{1,n}_{0,rad}(B,\omega_\beta) = cl\left\{u\in C^\infty_{0,rad}(B)\,\middle|\,\int_B\left|\nabla u\right|^n\omega_\beta(x)dx<\infty\right\},$$

其中 cl 表示集合的闭包, $\omega_\beta(x)=\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{\beta(n-1)}$ 或 $\omega_\beta(x)=\left(\log\frac{e}{|x|}\right)^{\beta(n-1)}$ ，加权范数定义为:

$$\|u\|_{\omega_\beta}=\int_B|\nabla u|^n\omega_\beta(x)dx$$

(6) 类似地, 也有对数加权范数约束下奇异型的 Trudinger-Moser 不等式, S. Aouaoui 和 J. Rahma 得到了当 $\alpha \leq \alpha_{\beta,n,\sigma} = \frac{n-\sigma}{n}\alpha_{\beta,n}, \beta \in [0,1), \sigma \in [0,n)$ 时, 有

$$\sup_{u\in W^{1,n}_{0,rad}\left(B,\omega_\beta\right),\|u\|_{\omega_\beta}\leq 1} \int_B \frac{\exp\left(\alpha|u|^{n/((n-1)(1-\beta))}\right)}{|x|^\sigma} dx < +\infty,$$

当 $\sigma = 0$ 时, 就是 Calanchi 和 Ruf 得到的结果。

(7) 在无界区域上，也有类似的 Trudinger-Moser 不等式，早期的研究可见 Adachi-Tanaka 的工作：

$$A(n,\alpha) = \sup_{u\in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\},\|\nabla u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}\leq 1} \frac{1}{\|u\|^n_{L^n(\mathbb{R}^n)}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_n(\alpha|u|^{\frac{n}{n-1}})dx < \infty$$

其中,$\Phi_n(t) = e^t - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{t^i}{i!}$.

选题背景 VI

(8) 在 2005 年, B.Ruf 发现当用标准的 Sobolev 范数 $\|u\|_{W_0^{1n}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^n + |u|^n)\, dx\right)^{\frac{1}{n}}$ 来代替 Dirichlet 范数 $\|u\|_{\mathbb{R}^n} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^n\right)^{\frac{1}{n}}$ 的时候, 在二维情况下, 得到全空间 $\mathbb{R}^2$ 上的临界型 Trudinger-Moser 不等式: 即存在常数 $d > 0$, 有

$$\sup_{\|u\|_{W_0^{1,n}(\mathbb{R}^2)} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{4\pi u^2} - 1)dx \leq d,$$

(9) 在 2008 年,Y. Li 和 B. Ruf 利用爆破分析技术得到了 Trudinger-Moser 不等式, 即存在常数 $d > 0$, 使得对于任意的区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 有

选题背景 VII

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\|u\|_{W_0^{1,n}(\Omega)}\leq 1}\int_\Omega \Phi_n\left(\alpha_n|u|^{\frac{n}{n-1}}\right)dx\leq d$$

上面列举了关于 Trudinger-Moser 不等式的一些重要结果, 经过许多人的研究, 已经在此基础上延伸出了许多的分支, 极值函数就是一种.

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega),\|\nabla u\|_n\leq 1}\int_\Omega \exp\left(\alpha|u|^{n/(n-1)}\right)dx<+\infty$$

对于上式的极值函数的存在性，主要结果有:

(1) Carleson 和 Chang 证明了 Ω 是单位球时，极值函数是存在的.

(2) Struwe 证明了当 Ω 接近于单位球时，极值函数存在.

选题背景 VIII

(3) Flucher 将其推广到二维平面中的任意区域 Ω.

(4) Lin 证明了高维情形下的存在性.

(5) V.H. Nguyen 证明了对数加权奇异型 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在.

(6) 关于带有奇异项，以及无界区域上的 Trudinger-Moser 不等式的极值函数存在性问题，目前尚不清楚.

研究内容

对数加权:

$$\omega_\beta(x) = \left|\log\left(\frac{e}{|x|}\right)\right|^{\beta(n-1)}.$$

本文在此基础上，证明下式的极值函数存在:

$$MT(n,\alpha,\beta,\sigma) = \sup_{u\in W^{1,n}_{0,rad}(B,\omega_\beta),\|u\|_{\omega_\beta}\le 1} \int_B \frac{e^{\alpha|u|^{n/((n-1)(1-\beta))}}}{|x|^\sigma} dx.$$

研究思路

证明分两部分:

第一部分，次临界情形:

利用积分在单位球上的一致有界性，通过取极大化序列，结合 Vitali 收敛定理，证明极值函数的存在性.

第二部分，临界情形:

构造泛函集中水平，排除极大化序列的集中现象，运用相应的积分集中紧性原理，证明极值函数的存在性.

重要引理 I

引理 1 [5]

每一个函数 $u \in W^{1,n}_{0,rad}(B,\omega_\beta)$，$\forall 0 < r \leq 1$，有 $|u(r)| \leq$

$$\left(\frac{n}{\alpha_{\beta,n}}\right)^{((n-1)(1-\beta))/n}\left(\int_{B\setminus B_r}|\nabla u(x)|^n\omega_\beta dx\right)^{1/n}(1-\log r)^{((n-1)(1-\beta))/n}.$$

引理 2 (集中紧性原理)

设 $\{u_j\}$ 是空间 $W^{1,n}_{0,rad}(B,\omega_\beta)$ 中的序列，且该序列满足条件 $\|u_n\|_{\omega_\beta} = 1$，$u_n$ 弱收敛于 u_0，$\lim\limits_{j\to\infty}\sup\int_B \frac{e^{p\alpha_{\beta,n,\sigma}|u_j|^{n/((n-1)(1-\beta))}}}{|x|^\sigma}dx < +\infty$，这里 $p < p(u_0) = (1-\|u_0\|^n_{\omega_0})^{-1/((n-1)(1-\beta))}$.

重要引理 II

引理 3 [5]

$\forall u \in W^{1,n}_{0,rad}(B,\omega_\beta)$，$\forall 0 \leq \widetilde{\beta} < \beta$，有

$v(x) = \left(\frac{\alpha_{\beta,n,\sigma}}{\alpha_{\widetilde{\beta},n,\sigma}}\right)^{((n-1)(1-\widetilde{\beta}))/n} u(x)|u(x)|^{\frac{\beta-\widetilde{\beta}}{1-\beta}}$。当 $\|u\|_{\omega_\beta} \leq 1$ 时，有 $\|v\|_{\omega_{\tilde{\beta}}} \leq 1.$

重要记号

(1) $\alpha_{\beta,n,\sigma} = \frac{n-\sigma}{n}\alpha_{\beta,n}, \alpha_{\beta,n} = n((1-\beta)\omega_{n-1}^{1/(n-1)})^{1/(1-\beta)}$.

(2) $J_{\beta,n,\sigma}(u) = \int\limits_{B} \frac{e^{\alpha_{\beta,n,\sigma}|u|^{n/((n-1)(1-\beta))}}}{|x|^{\sigma}} dx$.

(3) $J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0) = \sup\left\{\lim\limits_{j\to\infty}\sup J_{\beta,n,\sigma}(u_j) \,\middle|\, \|u_j\|_{\omega_\beta} = 1, u_j \rightharpoonup 0\right\}$.

研究成果

定理 1

$J^{\delta}_{\beta,n,\sigma}(0) \le J^{\delta}_{\tilde{\beta},n,\sigma}(0)$， $\forall \tilde{\beta} \le \beta$.

定理 2

$\lim\limits_{\beta \to 0} MT(n, \alpha_{\beta,n,\sigma}, \beta, \sigma) = MT(n, \alpha_{0,n,\sigma}, 0, \sigma)$.

定理 3 (主要结论)

存在 $\beta_0 \in (0,1)$，当 $0 \le \beta < \beta_0$ 时，$MT(n, \alpha_{\beta,n,\sigma}, \beta, \sigma)$ 的极值函数存在.

参考文献 I

[1] L.Carleson,S-Y.Chang. ON THE EXISTENCE OF AN EXTREMAL FUNCTION FOR AN INEQUALITY OF MOSER, [J]. Bulletin des Sciences Mathématiques 110.2 (1986): 113-127.

[2] M.Struwe.Critical points of embeddings of H01 [J], n into Orlicz spaces[C]Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire. Elsevier Masson, 1988, 5(5): 425-464.

[3] M.Flucher.Extremal functions for the Trudinger-Moser inequality in 2 dimensions [J],Comment.Math.Helv.67(1992),no.3,471-497.

[4] K-C.Lin.Extremal functions for Moser's inequality Trans. Amer [J]. Math. Soc. 348 (1996),no.7,2663-2671.

参考文献 II

[5] N.Van."Remarks on the Moser-Trudinger type inequality with logarithmic weights in dimension N".Proceedings of the American Mathematical Society 147.12(2019):5183-5193.

[6] S.Aouaoui,J.Rahma.A new Singular Trudinger-Moser Type Inequality with Logarithmic Weights and Applications [J].Advanced Nonliner Studies 20.1(2020):113-139

[7] P.Roy.Extremal function for Moser-Trudinger type inequality with logarithmic weight [J],Nonliner Anal.135(2016),194-204.

[8] X M.Wang.Singular Supercritical Trudinger-Moser Inequalities and the Existence of Extremals[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series 36.8 (2020): 873-888.

Thank you!