1. 引言以及主要结果

有界域$\Omega \subset \mathbb{R}^n$（见[24,31]）上的经典的 Trudinger-Moser 不等式表明存在一个常数$C = C(n) > 0$，使得

$$\sup_{u \in W_0^{1,n}(\Omega), |\nabla u|_{L^n(\Omega)} \le 1} \int_\Omega e^{\alpha u^{\frac{n}{n-1}}} dx \le C \Leftrightarrow \alpha \le \alpha_n = n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}, \tag{1.1}$$

其中ω_{n-1}表示 $n-1$维单位球面测度。对于无界区域，特别是整个欧几里得空间$\mathbb{R}^n$，已经建立了几种 Trudinger-Moser 型不等式，详见[1,7,22,29]。之后，在[2]中，Adimurthi 和 Sandeep 将 Trudinger-Moser 不等式(1.1)扩展为奇异加权型。更准确地说，他们证明了以下结果。

定理 1.1（[2，定理 2.1]）设$\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \ge 2)$是一个光滑有界区域。对于任意$\alpha > 0$和$\sigma \in [0, n)$，我们有

$$\int_\Omega \frac{e^{\alpha |u|^{\frac{n}{n-1}}}}{|x|^\sigma} dx < +\infty$$

进而，

$$\sup\left\{\int_\Omega \frac{e^{\alpha |u|^{\frac{n}{n-1}}}}{|x|^\sigma} dx, u \in W_0^{1,n}(\Omega), |\nabla u|_{L^n(\Omega)} \le 1\right\} < +\infty \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha_n} + \frac{\sigma}{n} \le 1. \tag{1.2}$$

在[3]中，最新的结果是由 Adimurthi 和 Yang 推广到了整个空间$\mathbb{R}^n, n \ge 2$，如下所示。

定理 1.2（[3，定理 1.1]）对于所有$\alpha > 0$，$\sigma \in [0, n)$，以及$u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{\alpha |u|^{n'}} - S_{n-2}(\alpha, u)}{|x|^\sigma} dx < +\infty,$$

其中$n' = \frac{n}{n-1}$，$S_{n-2}(\alpha, u) = \sum_{m=0}^{n-2} \frac{\alpha^m}{m!} |u|^{mn'}$，进一步，对于所有$\alpha \le \left(1 - \frac{\sigma}{n}\right)\alpha_n$，$\tau > 0$，我们有

$$\sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{\alpha |u|^{n'}} - S_{n-2}(\alpha, u)}{|x|^\sigma} dx, \| u \|_{1,\tau} \le 1\right\} < +\infty$$

其中

$$\| u \|_{1,\tau}^n = \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^n + \tau |u|^n) \, dx$$

奇异型不等式的极值函数存在性问题已在[21]中讨论过。我们还不得不提到 Li 的[20]，这可以看作是对定理 1.2 的改进。在[27]中，我们也需要提到 Nguyen 和 Takahashi 关于奇异型 Trudinger-Moser 不等式的最近的工作。现在，关于加权 Sobolev 空间上所定义的 Trudinger-Moser 不等式，详见 [4-6,8-11,14,15,17,18,26]。这些工作大多数考虑了对径向函数的限制，在[18]中，虽然权不一定是径向的，但它的增长可以通过径向重排变成径向的情况。这种简化径向函数不等式的兴趣主要是由于它能够提高可积性。最近，Calanchi 和 Ruf 在[11]中研究了，在$\mathbb{R}^n$的单位开球$\mathcal{B}$上，定义的权重为对数型加权 Sobolev 范数的情况。

事实上，他们考虑的子空间$W_{0,rad}^{1,n}(\mathcal{B},w_1)$，可以定义为径向函数在空间$C_0^\infty(\mathcal{B})$和范数

$$\| u \|_{w_1}^n = \int_{\mathcal{B}} w_1(x) |\nabla u|^n dx$$

下的完备化空间，其中$w_1(x) = \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{\beta(n-1)}$或者$w_1(x) = \left(\log \frac{e}{|x|}\right)^{\beta(n-1)}, \beta \geq 0, x \in \mathcal{B}$。

首先，Calanchi 和 Ruf 证明了以下结果。

定理 1.3（[11，定理 1]）设$0 < \beta < 1$，那么，对于函数$u \in W_{0,rad}^{1,n}(\mathcal{B},w_1)$，我们有

$$\int_{\mathcal{B}} e^{|u|^\gamma} dx < +\infty \Leftrightarrow \gamma \leq \gamma_{n,\beta} = \frac{n}{(n-1)(1-\beta)} = \frac{n'}{1-\beta}. \tag{1.3}$$

进一步，

$$\sup\left\{\int_{\mathcal{B}} e^{\alpha |u|^{\gamma_{n,\beta}}} dx, \| u \|_{w_1} \leq 1\right\} < +\infty \Leftrightarrow \alpha \leq \alpha_{n,\beta} = n\left[\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}(1-\beta)\right]^{\frac{1}{1-\beta}}. \tag{1.4}$$

显然，如果$\beta = 0$，我们就得到了经典的 Trudinger-Moser 不等式。其次，Calanchi 和 Ruf 考虑了$\beta = 1$和$w_1(x) = \left(\log \frac{e}{|x|}\right)^{n-1}, x \in \mathcal{B}$的极限情况。在这种情况下， 不同的权会对嵌入产生影响。事实上，在经典的 Trudinger-Moser 不等式中，最大增长函数$e^{|s|^{n/n-1}}$可以提升，因此现在允许双指数增长。更确切地说，他们证明了下面的定理。

定理 1.4（[11，定理 4]）我们有

$$\int_{\mathcal{B}} e^{e^{|u|^{n'}}} dx < +\infty，所有\ u \in W_{0,rad}^{1,n}(\mathcal{B},w_1) \tag{1.5}$$

和

$$\sup\left\{\int_{\mathcal{B}} e^{a e^{w_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} |u|^{n'}}} dx, u \in W_{0,rad}^{1,n}(\mathcal{B},w_1), \| u \|_{w_1} \leq 1\right\} < +\infty \Leftrightarrow a \leq n. \tag{1.6}$$

利用这个新的 Trudinger-Moser 不等式，Calanchi, Ruf 和 Sani 在[12]中证明了，一个定义在$\mathbb{R}^2$的单位球上的，椭圆问题的非平凡径向解的存在性问题，其非线性在无穷远处具有双指数增长。

在本文中，第一步，当出现奇异项(如定理 1.1)时，我们扩展了定理 1.3 和定理 1.4 中证明的不等式。第二步，我们将结果推广到整个空间$\mathbb{R}^n$。这种概括(一点也不简单)，即使在没有奇异的情况下，本身也是全新和有趣的。最后，通过解决定义在$\mathbb{R}^n$上且非线性在无穷远处呈双指数增长的椭圆方程，给出了一个应用。

在整个工作中，我们考虑标准加权 Sobolev 空间，定义为$C_0^\infty(\mathcal{B})$相对于范数的完备化空间

$$\| u \|_w^n = \int_{\mathcal{B}} w(x) |\nabla u|^n dx$$

用$W_{0,rad}^{1,n}(\mathcal{B}, w)$表示相应的径向函数的子空间，其中

$$w(x) = \left| \log\left(\frac{e}{|x|}\right) \right|^{\beta(n-1)} \tag{1.7}$$

本文的第一个结果是定理 1.3 的以下扩展。

定理 1.5.设$\beta \in [0,1)$，w通过（1.7）所定义，设$u \in W_{0,rad}^{1,n}(\mathcal{B}, w), n \geq 2$，那么对于每一个$\alpha > 0$和$\sigma \in [0, n)$，我们有

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{e^{\alpha |u|^{\frac{n'}{1-\beta}}}}{|x|^\sigma} dx < +\infty \tag{1.8}$$

进一步，

$$\sup \left\{ \int_{\mathcal{B}} \frac{e^{\alpha |u|^{\frac{n'}{1-\beta}}}}{|x|^\sigma} dx, u \in W_{0,rad}^{1,n}(\mathcal{B}, w), \| u \|_w \leq 1 \right\} < +\infty \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha_{n,\beta}} + \frac{\sigma}{n} \leq 1, \tag{1.9}$$

这里$\alpha_{n,\beta} = n\left[\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}(1-\beta)\right]^{\frac{1}{1-\beta}}$。

我们可以很容易地看出，$\beta = 1$是一种二阶极限情况。在现实中，对于这个“极值”，我们发现可积性的最大增长是双指数型的。

定理 1.6.设$n \geq 2$，w通过（1.7）所定义，且$\beta = 1$，$u \in W_{0,rad}^{1,n}(\mathcal{B}, w)$，那么，对于每个$\sigma \in [0, n)$，

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{e^{e^{|u|^{n'}}}}{|x|^\sigma} dx < +\infty \tag{1.10}$$

进一步，我们有

$$\sup_{u\in W_{0,rad}^{1,n}(\mathcal{B},w),\|u\|_w\le 1}\int_{\mathcal{B}}\frac{e^{ae^{w_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}|u|^{n'}}}}{|x|^{\sigma}}dx<+\infty \Leftrightarrow a+\sigma\le n \tag{1.11}$$

注记 1.7. 显然，如果$\beta=0$，则(1.9)是(1.2)中所述的经典奇异型 Trudinger-Moser 不等式。同样，如果$\sigma=0$，则不等式(1.9)和(1.11)分别是(1.4)和(1.6)。

在这项工作的第二部分，我们对$\mathbb{R}^n$的无界域的情况感兴趣。更准确地说，我们考虑一个径向加权

$$w(x)=\begin{cases}\left(\log\left(\frac{e}{|x|}\right)\right)^{\beta(n-1)} & |x|<1\\ \chi(|x|) & |x|\ge 1\end{cases} \tag{1.12}$$

其中，$0<\beta<1$和$\chi:[1,+\infty[\to]0,+\infty[$是一个连续函数，使得$\chi(1)=1$，$\inf_{t\in[1,+\infty[}\chi(t)>0$。用$E$表示加权的 Sobolev 空间

$$E=\left\{u\in W_{\mathrm{rad}}^{1,n}(\mathbb{R}^n):\int_{\mathbb{R}^n}w(x)|\nabla u|^n dx<+\infty\right\}$$

E的标准 Sobolev 范数为

$$\| u \|^n=\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^n w(x)dx+\int_{\mathbb{R}^n}|u|^n dx$$

在这部分工作中，我们使用这种符号

$$S_{n-2}(\alpha,u)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\alpha^k}{k!}|u|^k$$

下面是定理 1.5 的第一个扩展。

定理 1.8.设$n\ge 2$，w由（1.12）所定义。对于所有$\alpha>0$，$u\in E$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{\alpha|u|^{\frac{n'}{1-\beta}}}-S_{n-2}\left(\alpha,|u|^{\frac{n'}{1-\beta}}\right)}{|x|^{\sigma}}dx<+\infty \tag{1.13}$$

进一步，如果$\frac{\alpha}{\alpha_{n,\beta}}+\frac{\sigma}{n}<1$，那么

$$\sup_{u\in E,\|u\|\le 1}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{\alpha|u|^{\frac{n'}{1-\beta}}}-S_{n-2}\left(\alpha,|u|^{\frac{n'}{1-\beta}}\right)}{|x|^{\sigma}}dx<+\infty \tag{1.14}$$

如果 $\frac{\alpha}{\alpha_{n,\beta}}+\frac{\sigma}{n}>1$，那么

$$\sup_{u\in E,\|u\|\le 1}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{\alpha|u|^{\frac{n'}{1-\beta}}}-S_{n-2}\left(\alpha,|u|^{\frac{n'}{1-\beta}}\right)}{|x|^{\sigma}}dx=+\infty.$$

$\frac{\alpha}{\alpha_{n,\beta}}+\frac{\sigma}{n}=1$的值并不一定属于$\alpha$，在(1.14)中其极值是有限的正值范围。然而，当我们考虑不同的空间时，Trudinger-Moser 不等式的奇异情况可以修复。更准确地说，对于$0<\beta<1$，定义E_β为径向函数空间$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$相对于范数

$$\| u \|_\beta=|\nabla u|_{L^n(\mathbb{R}^n,w)}+|u|_{L^{d_\beta}(\mathbb{R}^n)}$$

$$=\left(\int_{\mathbb{R}^n}w\,(x)|\nabla u|^n dx\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{d_\beta}\,dx\right)^{\frac{1}{d_\beta}},\quad \text{其中 } d_\beta=\frac{n'(1-\beta)}{n'-1+\beta}.$$

的完备化空间。

对于这个空间，我们得到了奇异型 Trudinger-Moser 不等式，它是定理 1.5 的第二个扩展。

定理 1.9.设$0<\beta<1,0<\sigma<n$，w由（1.12）所定义，对于所有$u\in E_\beta$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{\alpha|u|^{\frac{n'}{1-\beta}}}-S_{n-2}\left(\alpha,|u|^{\frac{n'}{1-\beta}}\right)}{|x|^{\sigma}}dx<+\infty\quad \text{所有 } \alpha>0.$$

如果$\beta\le\frac{1}{n'+1}$，那么

$$\sup_{u\in E_\beta,\|u\|_\beta\le 1}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{\alpha|u|^{\frac{n'}{1-\beta}}}-S_{n-2}\left(\alpha,|u|^{\frac{n'}{1-\beta}}\right)}{|x|^{\sigma}}dx<+\infty\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\alpha_{n,\beta}}+\frac{\sigma}{n}\le 1.$$

最后，我们列出了定理 1.6 的以下扩展。

定理 1.10.对于所有$\alpha>0,\sigma\in[0,n)$和$u\in E$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{\alpha\left(e^{|u|^{n'}}-1\right)}-S_{n-2}\left(\alpha,e^{|u|^{n'}}-1\right)}{|x|^{\sigma}}dx<+\infty. \tag{1.15}$$

如果 $a\le(n-\sigma)e^{\left(\inf_{s\ge 1}\chi(s)\right)^{\frac{1}{n(n-1)}}}$，那么

$$\sup_{u\in E,\|u\|\le 1}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{a(e^{\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}|u|^{n'}}-1)}-S_{n-2}\left(a,e^{\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}|u|^{n'}}-1\right)}{|x|^{\sigma}}dx<+\infty. \tag{1.16}$$

如果$a>(n-\sigma)\exp\left(\frac{1}{n-1}\int_0^{+\infty}\log^n(1+t)e^{-nt}dt\right)$，那么

$$\sup_{u\in E,\|u\|\leq 1}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(e^{\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}|u|^{n'}}-1)-S_{n-2}\left(a,e^{\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}|u|^{n'}}-1\right)}{|x|^{\sigma}}dx=+\infty.$$

在本工作的最后一部分，我们证明了，奇异椭圆方程至少存在两个解

$$-\mathrm{div}(w(x)|\nabla u|^{n-2}\nabla u)+|u|^{n-2}u=\frac{f(x,u)}{|x|^{\sigma}}+\epsilon h \quad \mathbb{R}^n, h\in E^*\setminus\{0\},$$

其中w由（1.12）所定义， $\beta=1$且$f\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是由 Trudinger-Moser 不等式(1.16)定义的双指数增长的 Carathéodory 函数。详见第 7 节。